

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Τομέας Μηχανολογικών Κατασκευών & Αυτομάτου Ελέγχου

Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών

Μοντελοποίηση και Προσομοίωση της Διαλείπουσας Επαφής κατά τη  
Συνεργασία Οδοντωτών Τροχών με χρήση Wavelets και Τροποποιημένων Μη-  
Γραμμικών Ταλαντωτών

Διπλωματική Εργασία  
του

Λεωνίδα - Κωνσταντίνου Γκιμίση

Επιβλέπων: Βασίλειος Σπιτάς, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2019







## Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο τέλος των προπτυχιακών μου σπουδών στην Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών μέσω της εργασίας αυτής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άτομα που με βοήθησαν στην εκπόνησή της, αλλά και γενικότερα στις σπουδές μου στο Πολυτεχνείο.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Βασίλειο Σπιτά για την τεχνική και όχι μόνο καθοδήγηση που μου έδωσε καθ' όλη μου την πορεία ως προπτυχιακός φοιτητής. Η φιλοσοφία δόμησης σφαιρικών γνώσεων στις επιστήμες του Μηχανικού, η προσήλωση προς την σε βάθος κατανόηση και ερμηνεία των φαινομένων, όπως και η δυναμική αντιμετώπιση στην επίλυση των τεχνικών προβλημάτων αποτέλεσαν προσωπικά διδάγματα. Δεσμευόμενος να ακολουθήσω τους κατευθυντήριους αυτούς άξονες, τον ευχαριστώ θερμά.

Επιπλέον, οφείλω να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών για την φιλική τους αντιμετώπιση και την ειλικρινή διάθεση τους να συνδράμουν τους φοιτητές μεταδίδοντας τις γνώσεις τους. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υπογύφιο διδάκτορα Γ. Βασιλείου για την συνεχή του υποστήριξη και τις τεχνικές γνώσεις που μου μετέδωσε καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου και τον Μ. Σακαρίδη για την εισαγωγή μου στο αντικείμενο της δυναμικής οδοντώσεων και την βοήθεια που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ ιδιαίτερα την οικογένειά μου και συγκεκριμένα τους γονείς μου Κώστα και Κατερίνα, την αδελφή μου Ελένη και την γιαγιά μου Ελένη για τα εφόδια που μου έχουν προσφέρει, την αδιάκοπη τους στήριξη και αγάπη.

## Περίληψη

Η παρούσα μελέτη αφορά την ανάπτυξη μίας αναλυτικής μεθόδου δυναμικής προσομοίωσης του σφάλματος μετάδοσης σε ζεύγος οδοντωτών τροχών, ευθείας οδόντωσης. Σε πρώτο στάδιο παρουσιάζεται η γεωμετρική ανάλυση της τροχιάς επαφών δύο οδόντων εξειλιγμένης καμπύλης. Ως αποτέλεσμα, προκύπτουν αναλυτικές εκφράσεις των απαραίτητων γεωμετρικών χαρακτηριστικών των οδόντων του ζεύγους σε όλες τις θέσεις της γραμμής επαφών όπως και στα τμήματα γωνιακής επαφής. Ακολούθως, οι γεωμετρικές και μηχανικές ιδιότητες των οδοντωτών τροχών συνδυάζονται για τον καθορισμό της δυσκαμψίας ενός ζεύγους οδόντων σε όλο το εύρος γωνιακών θέσεων εντός της τροχιάς επαφών. Εκτελώντας στατικές προσομοιώσεις συμπίεσης των ζευγών των οδόντων μέσω της μεταβολής της γωνιακής θέσης μόνο του ενός τροχού, υπολογίζονται οι αναπτυσσόμενες σε αυτά δυνάμεις επαφής και αποθηκεύονται σε πινακοποιημένη μορφή. Συνεπώς εκφράζοντας τις εξισώσεις κίνησης των τροχών, δομείται μοντέλο δυναμικής απόκρισης δύο βαθμών ελευθερίας με παραμέτρους την ροπή εισόδου και εξόδου στο ζεύγος. Με βάση το προαναφερθέν γεωμετρικό μοντέλο, η παρούσα μελέτη επεκτάθηκε στην ανάπτυξη ενός ημι-αναλυτικού, δυναμικού μοντέλου σφάλματος μετάδοσης. Το μοντέλο αυτό στοχεύει στον συνδυασμό ιδιαίτερα χαμηλού υπολογιστικού κόστους και υψηλής ακρίβειας, συγκριτικά με ήδη υπάρχοντα μοντέλα, συνεισφέροντας έτσι στην αυτοματοποίηση της ανάλυσης σφάλματος μετάδοσης ζεύγους οδοντωτών τροχών και την εφαρμογή της σε περισσότερο πολύπλοκα συστήματα οδοντώσεων. Για αυτό τον σκοπό, η γεωμετρική ανάλυση περιορίστηκε στην γραμμή επαφών, ενώ έγινε χρήση αιτιολογημένων προσεγγίσεων των όρων δυσκαμψίας. Τέλος, η επίδραση της γωνιακής επαφής των τροχών συνυπολογίστηκε έμμεσα μέσω της χρήσης συναρτήσεων κυματιδίων. Καθ' αυτό τον τρόπο, έγινε δυνατή η έκφραση των εξισώσεων κίνησης σε κλειστή μορφή και συνεπώς η διαμόρφωση ενός υπολογιστικά γρήγορου, απλοποιημένου δυναμικού μοντέλου. Τελικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα δυναμικών προσομοιώσεων για αμφότερα μοντέλα, ενώ γίνεται και σύγκριση με αντίστοιχα πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα εργασιών της βιβλιογραφίας.

## **Abstract**

The present study considers the development of an analytical method for simulating the dynamical transmission error in a spur gear pair. Initially, a geometrical analysis of the trajectory of contact points for two involute spur gears is presented. As a result, the geometrical characteristics of both gears were expressed, for both the line of action as well as corner contacts. Subsequently, the geometrical and mechanical properties of the gear teeth were combined for determining the gear pair stiffness for the range of angular positions within the contact trajectory. Performing static simulations of teeth pair compression by changing the angular position of just one of the two gears, contact forces are calculated, comprising a matrix. Therefore expressing the equations of motion for both gears, a two DOF dynamical model is formulated, with the input and output torque as parameters. Based on the aforementioned geometrical model, the present study was extended to the development of a semi-analytical model. This model aims towards the combination of significantly low computational cost and high accuracy compared to existing models, thus contributing to the automation of dynamic transmission error analysis and its application to more complex gear systems. For this purpose, the geometrical analysis was limited to the line of action, while justified approximations were made to the stiffness terms. Finally, the effect of gears corner contact was implicitly incorporated with the use of wavelet functions. In this manner, expressing the governing equations of motion in a closed form was feasible and therefore constructing a lightweight, semi-analytical dynamical model. Finally, results for a number of dynamical simulations for both models are presented and compared to corresponding experimental and numerical results of published studies on the field.





# Περιεχόμενα

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Εισαγωγή .....   | 1  |
| 1.1 | Οδοντωτές Μεταδόσεις Κίνησης.....                              | 1  |
| 1.2 | Δυναμική Συμπεριφορά Οδοντωτών Τροχών .....                    | 2  |
| 2   | Ανάλυση Τροχιάς Επαφών .....                                   | 5  |
| 2.1 | Συντεταγμένες Σημείου Εξειλιγμένης Καμπύλης .....              | 5  |
| 2.2 | Τροχιά Επαφών Ζεύγους .....                                    | 7  |
| 2.3 | Παράγωγα Γεωμετρικά Μεγέθη.....                                | 10 |
| 2.4 | Γεωμετρία Ποδός Οδόντος.....                                   | 14 |
| 2.5 | Επαφή Πολλαπλών Ζευγών.....                                    | 15 |
| 2.6 | Αναστροφή Επαφής .....   | 17 |
| 2.7 | Υπολογισμός Χάρης Κατατομών .....                              | 19 |
| 2.8 | Ημι-αναλυτική Προσέγγιση Γραμμής Επαφών.....                   | 19 |
| 3   | Υπολογισμός Δυνάμεων Επαφής.....                               | 23 |
| 3.1 | Αναλυτικός Υπολογισμός Ελαστικότητας Ζεύγους .....             | 23 |
| 3.2 | Αναλυτικός Υπολογισμός Δυνάμεων Επαφής.....                    | 26 |
| 3.3 | Ημι-Αναλυτικός Υπολογισμός Δυσκαμψίας Ζεύγους .....            | 30 |
| 3.4 | Ημι-Αναλυτικός Υπολογισμός Δυνάμεων Επαφής μέσω Wavelets ..... | 36 |
| 4   | Δυναμικά Μοντέλα Διαλείπουσας Επαφής.....                      | 41 |
| 4.1 | Εξισώσεις Κίνησης Βαθμίδας.....                                | 41 |
| 4.2 | Δυναμική Προσομοίωση Αναστροφής Επαφών .....                   | 43 |
| 4.3 | Προγραμματιστική Υλοποίηση.....                                | 44 |
| 5   | Αποτελέσματα-Συμπεράσματα .....                                | 47 |
| 5.1 | Αποτελέσματα Γεωμετρικού Μοντέλου.....                         | 47 |
| 5.2 | Αποτελέσματα Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου .....                     | 52 |
| 5.3 | Συμπεράσματα.....  | 56 |
| 6   | Παράρτημα .....  | 57 |
| 7   | Βιβλιογραφία .....   | 77 |



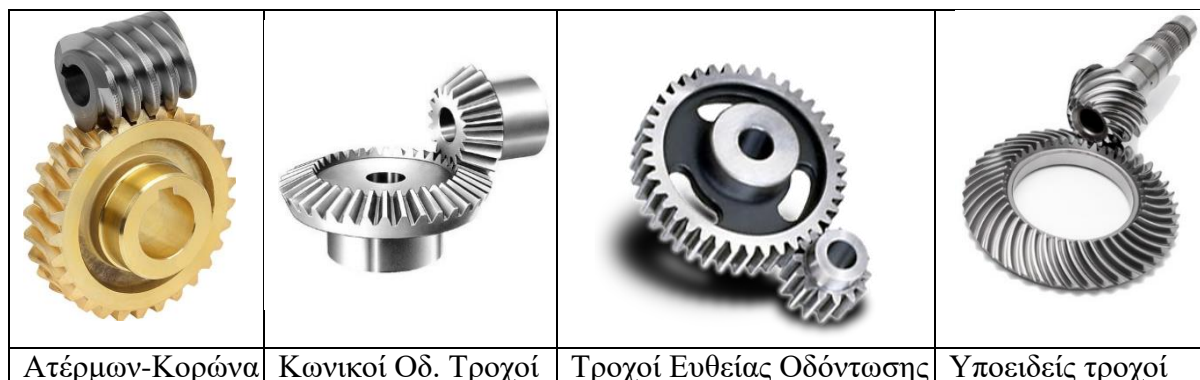
# 1 Εισαγωγή

## 1.1 Οδοντωτές Μεταδόσεις Κίνησης

Τα μηχανικά συστήματα μετάδοσης κίνησης συνιστούν ένα αναπόσπαστο τμήμα των τεχνολογικών επιτευγμάτων του ανθρώπου, αποτελώντας την κινητήρια δύναμη υπερνίκησης των περιορισμών που θέτει η φύση. Κυρίαρχη θέση στα συστήματα αυτά λαμβάνουν οι οδοντωτοί τροχοί, μεταδίδοντας περιστροφική κίνηση για ένα μεγάλο εύρος τεχνολογικών εφαρμογών παραγωγής και μεταφοράς ισχύος, με ιδιαίτερα υψηλή αποδοτικότητα και αξιοπιστία.

Η απλότητα λειτουργίας και στιβαρότητα των οδοντώσεων, χωρίς πλήθος κινουμένων μερών (π.χ. αλυσοκινήσεις) ή ιδιαίτερα εύκαμπτων στοιχείων όπως ιμάντες, τις καθιστούν ιδιαίτερα αξιόπιστες ως προς την συντήρηση και επισκευή. Κατασκευάζοντας τροχούς συμβατούς με την θεωρία των οδοντώσεων, οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις μέσω επαφής των οδόντων είναι κατά κύρια συνιστώσα κάθετες στις επαπτόμενες επιφάνειες, μειώνοντας σημαντικά τις ενεργειακές απώλειες σε σύγκριση με εναλλακτικές μεθόδους μετάδοσης ισχύος όπως τις ιμαντοκινήσεις. Ως αποτέλεσμα, οι οδοντώσεις βρίσκουν σχεδόν καθολική εφαρμογή σε όλους τους τομείς μετάδοσης ισχύος.

Μία μεγάλη ποικιλία ειδών ζευγών οδοντωτών τροχών έχουν αναπτυχθεί αναφορικά με την σχετική θέση των αξόνων περιστροφής των τροχών, αλλά και την τρισδιάστατη γεωμετρία των οδόντων. Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα με την σχετική θέση των αξόνων των συνεργαζόμενων τροχών, στα γνωστότερα είδη οδοντώσεων συγκαταλέγονται οι μετωπικοί τροχοί, οι κωνικοί αλλά και τα ζεύγη ασυμβάτων αξόνων. Η γεωμετρία των οδόντων χαρακτηρίζεται στις συνήθεις εφαρμογές από κατατομή εξειλιγμένης καμπύλης, ενώ υπάρχει μεγάλη ποικιλία στην μορφολογία τους κατά το πλάτος του τροχού δίδοντας ευθείς, ελικοειδείς, διπλούς ελικοειδείς (herringbone), ή υποειδείς τροχούς ανάμεσα στα πλέον διαδεδομένα είδη. Συνδυάζοντας τις ανωτέρω κατηγορίες, οι τροχοί μπορεί να είναι μετωπικοί με ευθείς ή ελικοειδείς οδόντες, κωνικοί ελικοειδείς ή υποειδείς τροχοί ασυμβάτων αξόνων αλλά και ζεύγη όπως το σύστημα ατέρμονος κοιλία- κορώνας. Τα είδη αυτά παρουσιάζονται συνοπτικά στο Σχήμα 1. Συνθετότερα συστήματα οδοντώσεων, όπως πλανητικά συστήματα, harmonic drives, διατάξεις εσωτερικής οδόντωσης ή άξονος- πινιόν έχουν επίσης αναπτυχθεί σε βάθος, καλύπτοντας ένα ευρύ φάσμα απαιτήσεων σε ροπή, στροφές, λόγο μετάδοσης κίνησης, θόρυβο, περιβαλλοντικές συνθήκες κ.α. βάσει των εκάστοτε τεχνολογικών εφαρμογών.

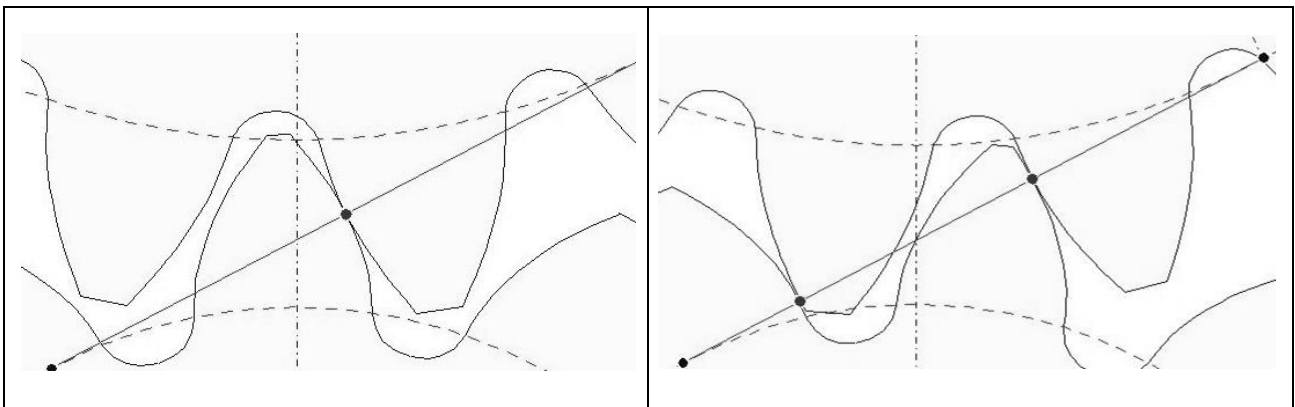


Σχήμα 1: Ενδεικτικές διατάξεις οδοντωτών μεταδόσεων κίνησης

## 1.2 Δυναμική Συμπεριφορά Οδοντωτών Τροχών

Η αναπόσπαστη σύνδεση των συστημάτων οδοντώσεων με ολόκληρο το εύρος της σύγχρονης τεχνολογίας, δημιουργεί άμεση ανάγκη για την λεπτομερή ανάλυση και μελέτη τους. Η ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς των οδοντωτών τροχών αποτελεί θέμα εντατικής ερευνητικής μελέτης κατά τις τελευταίες δεκαετίες, λόγω και των αυξημένων απαιτήσεων τεχνολογικών εφαρμογών σε ακρίβεια γωνιακής μετατόπισης, προδιαγραφές θορύβου και φθοράς, καθιστώντας την ιδεατή μοντελοποίηση του ζεύγους οδοντωτών τροχών ως έναν απλό μειωτήρα (ή αυξητήρα) στροφών, ανεπαρκή.

Πιο συγκεκριμένα, ένας αριθμός χαρακτηριστικών της μετάδοσης ισχύος μέσω οδοντώσεων καθιστά το πρόβλημα μοντελοποίησης και επίλυσης των αντίστοιχων εξισώσεων κίνησης αρκετά σύνθετο. Αρχικά, η ύπαρξη χάρης κατατομών (backlash) στους συνεργαζόμενους οδοντωτούς τροχούς εισάγεται είτε σχεδιαστικά ώστε να αποφευχθεί ανεπιθύμητη εμπλοκή των οδόντων, είτε λόγω φθοράς ή κατασκευαστικών σφαλμάτων. Η χάρη κατατομών εισάγει αυτομάτως διάκενο ανάμεσα στους οδόντες των δύο τροχών, επιτρέποντας υπό κατάλληλες συνθήκες την απώλεια επαφής. Ως αποτέλεσμα εμφανίζονται φαινόμενα διαλείπουσας επαφής, προκαλώντας ιδιαίτερα θορυβώδη λειτουργία και αυξημένα δυναμικά φορτία. Επιπλέον, η συνεργασία δύο συνήθων τροχών περιλαμβάνει χρονικά διαστήματα επαφής ενός ζεύγους δοντιών, εναλλασσόμενα με χρονικά διαστήματα επαφής δύο ζευγών (Σχήμα 2). Το φαινόμενο αυτό, οδηγεί στην σημαντική διακύμανση των δυνάμεων λόγω επαφής, οδηγώντας πιθανά σε αντίστοιχη διακύμανση της ταχύτητας περιστροφής των τροχών γύρω από την τιμή που ορίζεται από τον λόγο μετάδοσης. Τα δύο αυτά φαινόμενα, όπως και δευτερεύοντα φαινόμενα που θα αναλυθούν εκτενώς, μπορούν να δημιουργήσουν μία ισχυρά μη-γραμμική συμπεριφορά για την κίνηση του ζεύγους, υπό δεδομένες συνθήκες φορτίου και ταχύτητας περιστροφής.



Σχήμα 2: Μετάβαση από επαφή ενός σε επαφή δύο ζευγών οδόντων

Η ερευνητική δραστηριότητα γύρω από την δυναμική των γραναζιών ξεκίνησε κατά τα μέσα του 20<sup>ου</sup> αιώνα, όπου παρουσιάστηκαν πειραματικά αποτελέσματα, καταδεικνύοντας την επίδραση της απώλειας επαφής σε ισχυρές ταλαντώσεις των οδοντωτών τροχών ιδίως σε χαμηλά φορτία [1]. Εν συνεχεία, αναπτύχθηκε σημαντικός αριθμός αναλυτικών μοντέλων εστιάζοντας στην μοντελοποίηση και δυναμική ανάλυση ενός ζεύγους μετωπικών οδοντωτών τροχών [2]. Η πλειονότητα των αναπτυχθέντων μεθόδων της περιόδου αυτής, ενσωματώνουν το φαινόμενο της εναλλαγής ενός και δύο συνεργαζόμενων ζευγών δοντιών ως ένα ελατήριο με ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη ελαστικότητα, ενώ η χάρη κατατομών θεωρείται ως μία τρίκλαδη συνάρτηση, για τις περιπτώσεις επαφής στις δύο διαφορετικές πλευρές του οδόντος και της απώλειας επαφής

[3]. Παρ' όλα αυτά, αρκετές παράμετροι του συστήματος όπως η μέση τιμή και το εύρος της ελαστικότητας εμπλέκουν επιπρόσθετους υπολογισμούς ή πειραματικά δεδομένα. Αντίστοιχα, έχουν αναπτυχθεί μοντέλα περισσότερων βαθμών ελευθερίας, περιλαμβάνοντας τις δυναμικές εξισώσεις κίνησης επιπλέον στοιχείων μηχανών όπως έδρανα κύλισης και ατράκτους [4,5]. Ακόμη, ένας αριθμός αναλυτικών και αριθμητικών εργασιών συμπεριέλαβαν κατασκευαστικά σφάλματα της κατατομής των οδόντων ως μία περιοδική διέγερση η οποία προκαλεί υψίσυχνες ταλαντώσεις στο σύστημα [6,7].

Πιο πρόσφατα, η έρευνα της δυναμικής συμπεριφοράς των οδοντώσεων έχει επεκταθεί στην ανάπτυξη λεπτομερών υπολογιστικών μεθόδων, βάσει και των αντίστοιχων αυξημένων δυνατοτήτων προσομοιώσεων μέσω Η/Υ. Ως αποτέλεσμα, αρκετές μελέτες στηρίζονται στην χρήση μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων για τον υπολογισμό της ενδοτικότητας των οδόντων [8,9]. Ακόμη, πλήθος σύνθετων αλγορίθμων έχουν δομηθεί με σκοπό την λεπτομερέστερη προσομοίωση της δυναμικής ζεύγους οδοντωτών τροχών. Καθ' αυτό τον τρόπο, δευτερεύοντα φαινόμενα όπως η γωνιακή επαφή των οδόντων [10], οι ιδιοταλαντώσεις των οδόντων [11] είτε η επίδραση της δυναμικής λοιπών στοιχείων μηχανών ενσωματώνονται στην ανάλυση [12]. Παράλληλα, εκτενής έρευνα διενεργείται στην ενσωμάτωση πλήθους χαρακτηριστικών στην δυναμική απόκριση ζεύγους μετωπικών οδοντωτών τροχών, όπως η εμφάνιση ρωγμών [13], η επίδραση της λίπανσης [14] και η ενσωμάτωση των δυνάμεων τριβής μεταξύ των συνεργαζόμενων δοντιών [15]. Τέλος, αντίστοιχες μελέτες πραγματοποιούνται στον τομέα της βελτιστοποίησης της γεωμετρίας των οδόντων, με βάση κριτήρια θορύβου, δυναμικής καταπόνησης και βάρους [16,17,18].

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στη δόμηση ενός δυναμικού μοντέλου βαθμίδας μετωπικών οδοντωτών τροχών, ώστε να συνδυάζει την απλότητα και το χαμηλό υπολογιστικό κόστος των παλαιότερων αναλυτικών μεθόδων με την ικανότητα αποτύπωσης σύνθετων δυναμικών φαινομένων των νεότερων υπολογιστικών μοντέλων. Τελικός στόχος της μελέτης είναι η δυνατότητα γρήγορης και ακριβούς δυναμικής προσομοίωσης, μέσω της γνώσης βασικών γεωμετρικών και ελαστικών ιδιοτήτων των οδοντωτών τροχών. Όπως είναι προφανές, ο αιτιοκρατικός χαρακτήρας του μοντέλου αυτού υπαγορεύει την αναλυτική αντί της αριθμητικής μελέτης αναφορικά με την γεωμετρία της τροχιάς επαφών, περιλαμβάνοντας τόσο την γραμμική δράση όσο και τις δύο περιοχές γωνιακής επαφής.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, στο Κεφάλαιο 2 γίνεται εκτενής γεωμετρική ανάλυση της τροχιάς επαφών και έκφραση των απαραίτητων γεωμετρικών μεγεθών των οδόντων που απαιτούνται για τον υπολογισμό της ελαστικότητάς τους. Επίσης, αναλύεται η επαφή περισσότερων του ενός ζευγών δοντιών, όπως και η αναστροφή επαφών. Παράλληλα, βάσει της πλήρους γεωμετρικής ανάλυσης υλοποιούνται αιτιολογημένες απλοποιήσεις, με στόχο την δόμηση ενός ημι-αναλυτικού δυναμικού μοντέλου.

Στο Κεφάλαιο 3 υπολογίζεται η δυσκαμψία του ζεύγους οδόντων κατά μήκος της τροχιάς επαφών και στην συνέχεια δομείται διδιάστατος πίνακας για τις ελαστικές δυνάμεις συναρτήσεως της στατικής παραμόρφωσης των συνεργαζόμενων δοντιών αλλά και της γωνιακής θέσης του κινούντος τροχού (πινιόν). Αντίστοιχα με το Κεφάλαιο 2, βάσει τεκμηριωμένων υποθέσεων δομείται κλειστός, προσεγγιστικός τύπος για την ελαστικότητα του ζεύγους οδοντωτών τροχών. Η επίδραση της γωνιακής επαφής ενσωματώνεται με ημι-αναλυτικό τρόπο, μέσω της χρήσης συναρτήσεων κυματιδίων (wavelets) για την μετάβαση από επαφή ενός σε δύο ζεύγη οδόντων.

Ακολούθως, η δόμηση των εξισώσεων κίνησης των τροχών παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4. Δύο διαφορετικά μοντέλα παρουσιάζονται, βασισμένα στην γεωμετρική ανάλυση και την ημι-αναλυτική προσέγγιση αντιστοίχως, ενώ γίνεται εκτενής αναφορά στην προγραμματιστική τους υλοποίηση. Στο Κεφάλαιο 5, παρατίθεται ένας αριθμός αποτελεσμάτων δυναμικών προσομοιώσεων και για τα δύο μοντέλα ενώ επίσης γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με αντίστοιχα βιβλιογραφικά αποτελέσματα.

Τα τελικά συμπεράσματα της παρούσας εργασίας καταγράφονται συγκεντρωτικά στο Κεφάλαιο 5, όπως και ενδεχόμενες βελτιώσεις των αναπτυχθέντων μοντέλων. Τέλος, παρατίθεται παράρτημα με τους βασικούς αλγορίθμους των μοντέλων όπως και ενότητα βιβλιογραφικών πηγών.

## 2 Ανάλυση Τροχιάς Επαφών

### 2.1 Συντεταγμένες Σημείου Εξειλιγμένης Καμπύλης

Το πρώτο στάδιο στην δόμηση ενός πλήρους γεωμετρικού μοντέλου της περιοχής επαφών ενός ζεύγους μετωπικών οδοντωτών τροχών συνιστά ο καθορισμός της γεωμετρίας των οδόντων των δύο τροχών ως προς ένα κοινό σύστημα συντεταγμένων. Κατά την ανάπτυξη της παρούσας εργασίας, χρησιμοποιείται καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο κέντρο του κινούντος τροχού (πινιόν) όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Ο δείκτης 1 αναφέρεται στο πινιόν ενώ ο δείκτης 2 στον συνεργαζόμενο τροχό της βαθμίδας.

Ως γνωστόν [19], η εξίσωση της εξειλιγμένης καμπύλης με την φορά που παρουσιάζεται (εργαζόμενη πλευρά του πινιόν) είναι:

$$\varphi_1 = \tan(\alpha_1) - \alpha_1 \quad (2.1)$$

όπου η αντίστοιχη ακτίνα καθορίζεται από την εξίσωση (2.2).

$$R(\varphi_1) = \frac{R_{g1}}{\cos(\alpha_1)} \quad (2.2)$$

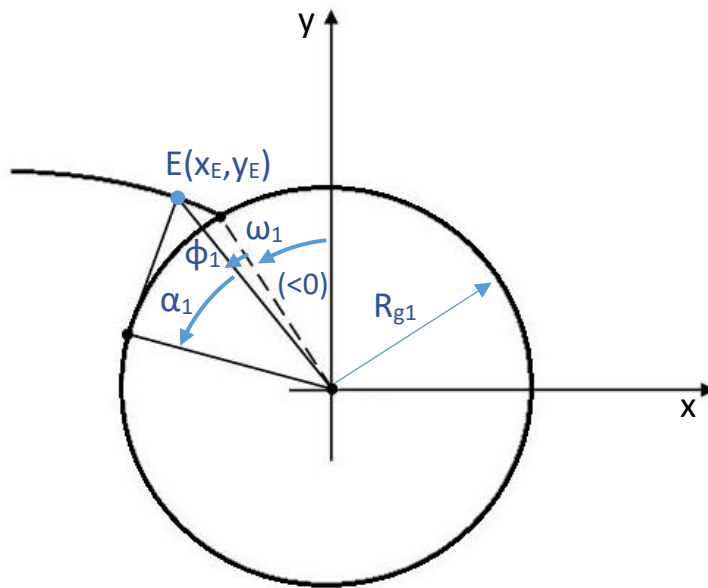
Συνεπώς, εκφράζοντας τις συντεταγμένες του σημείου E θα είναι:

$$x_E = \frac{\sin(\omega_1 - \varphi) R_{g1}}{\cos(\alpha_1)} \quad (2.3)$$

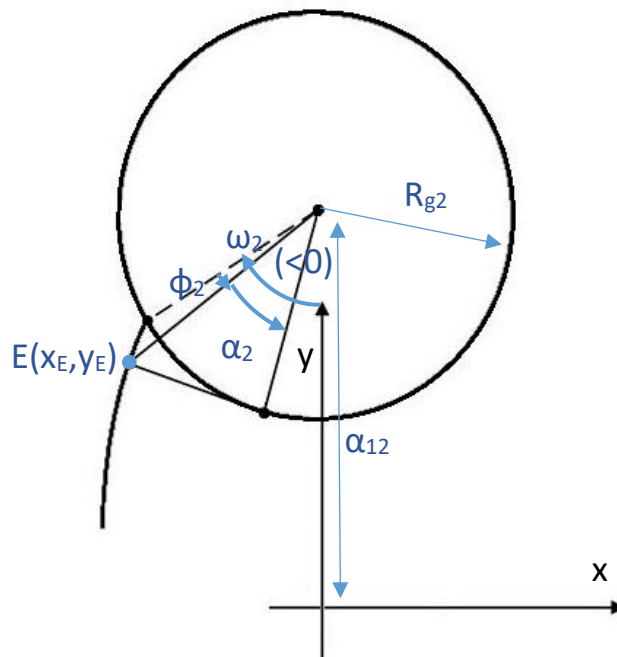
$$y_E = \frac{\cos(\omega_1 - \varphi) R_{g1}}{\cos(\alpha_1)} \quad (2.4)$$

Τα όρια των σημείων εξειλιγμένης δίδονται από την ελάχιστη και μέγιστη ακτίνα της οδόντωσης  $R_{min}$  και  $R_{max}$  που καθορίζονται από τυποποιημένες σχέσεις.

Βάσει και της εξίσωσης (2.1), οι συντεταγμένες του σημείου της εξειλιγμένης εξαρτώνται από την γωνιακή θέση του τροχού και την γωνία της εξειλιγμένης.



Σχήμα 3: Συντεταγμένες σημείου εξειλιγμένης του πινιόν



Σχήμα 4: Συντεταγμένες σημείου εξειλιγμένης του συνεργαζόμενου τροχού

Βάσει του σχήματος 4, για το αντίστοιχο σημείο στον συνεργαζόμενο τροχό θα είναι:

$$R_{E2} = \sqrt{(x_E^2 + (a_{12} - y_E)^2)} \quad (2.5)$$



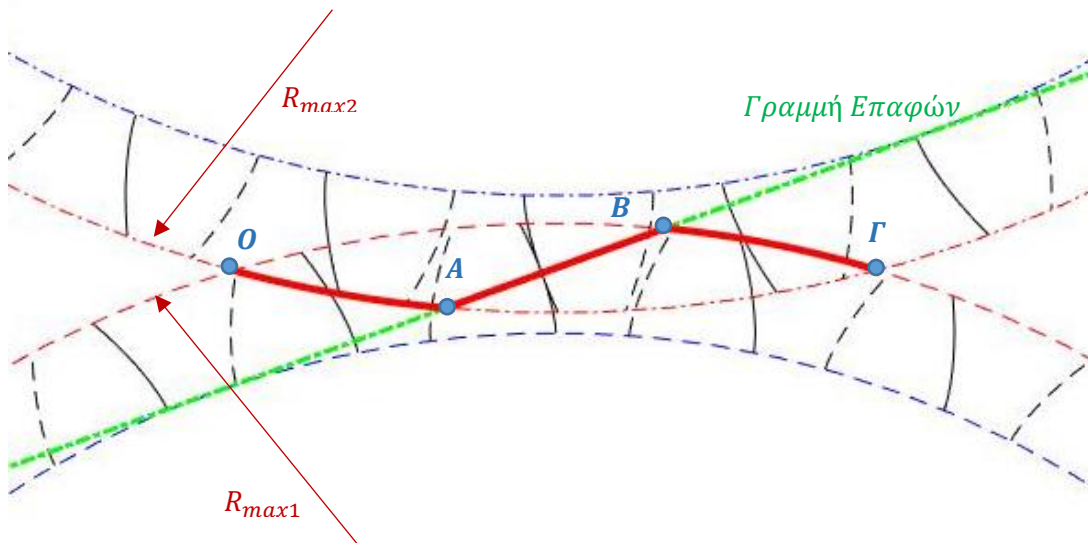
$$a_2 = a \cos\left(\frac{R_{g2}}{R_{E2}}\right) \quad (2.6)$$

Τότε, η γωνία στροφής  $\omega_2$  του συνεργαζόμενου που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής θα είναι:

$$\omega_2 = a \sin\left(\frac{x_E}{R_{E2}}\right) - (\tan(a_2) - a_2) \quad (2.7)$$

## 2.2 Τροχιά Επαφών Ζεύγους

Η τροχιά που ακολουθούν τα σημεία επαφής των οδόντων των δύο τροχών χωρίζεται σε τρία τμήματα: Γωνιακή επαφή οδόντος του πινιόν με την κατατομή του αντίστοιχου οδόντος του συνεργαζόμενου, επαφή των δύο εργαζόμενων κατατομών (γραμμή επαφών), γωνιακή επαφή του οδόντος του συνεργαζόμενου με την κατατομή του αντίστοιχου οδόντος του πινιόν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Τροχιά Επαφών

Η απόσταση των κέντρων των δύο τροχών είναι  $a_{12}$  (συμπεριλαμβάνοντας μετατοπισμένες οδοντώσεις) και η ακτίνα κυλίσεως του τροχού 1 δίδεται από την εξίσωση (2.8) δεδομένου ότι το σημείο κυλίσεως αποτελεί την τομή της διακέντρου με την γραμμή επαφών, η οποία εξ ορισμού εφάπτεται στους βασικούς κύκλους  $R_{g1}$  και  $R_{g2}$ .

$$R_{b1} = a_{12} \frac{R_{g1}}{R_{g1} + R_{g2}} \quad (2.8)$$

Επίσης, η κλίση της γραμμής επαφών  $a_0$  (Εξίσωση 2.9) ταυτίζεται με την γωνία του κανόνα κατασκευής των οδόντων,  $a_{0x}$  μόνο στην περίπτωση μη μετατοπισμένων οδοντώσεων. Στην παρούσα εργασία, πραγματοποιείται γενικότερη ανάλυση που περιλαμβάνει και μετατοπισμένες οδοντώσεις.

$$a_0 = \text{acos}\left(\frac{R_{g1}}{R_{b1}}\right) \quad (2.9)$$

Η εξίσωση της τροχιάς επαφών είναι:

$$\text{Περιοχή } OA: \quad y = \sqrt{R_{max2}^2 - x^2} + a_{12} \quad (2.10)$$

$$\text{Περιοχή } AB: \quad y = R_{b1} + x \cdot \tan(a_0) \quad (2.11)$$

$$\text{Περιοχή } B\Gamma: \quad y = \sqrt{R_{max1}^2 - x^2} \quad (2.12)$$

Εξισώνοντας τις (2.10), (2.11) προκύπτει η γωνία της ευθείας OA ( $\theta_A$ ). Αντίστοιχα με τις (2.11), (2.12) προκύπτει η γωνία της ευθείας OB ( $\theta_B$ ). Τέλος, εξισώνοντας τις (2.10), (2.12) προκύπτουν τα συμμετρικά ως προς x όρια της τροχιάς επαφών, ( $\theta_O = -\theta_\Gamma$ ) σημεία όπου γεωμετρικά εφάπτονται οι κορυφές των δοντιών των δύο τροχών.

Ακόμη, η γωνία  $\varphi_1$  που αντιστοιχεί σε ολόκληρη την εργαζόμενη κατατομή του οδόντος υπολογίζεται βάσει της εξίσωσης εξειλιγμένης λαμβάνοντας υπόψιν τα σχήματα 3 και 4.

$$\varphi_{t1} = \tan\left(\text{acos}\left(\frac{R_{g1}}{R_{k1}}\right)\right) - \text{acos}\left(\frac{R_{g1}}{R_{k1}}\right) \quad (2.13)$$

Βάσει των ανωτέρω μπορούν να βρεθούν οι οριακές τιμές της  $\omega_1$  για καθεμιά από τις τρεις παραπάνω περιοχές.

$$\omega_{1O} = \theta_O + \varphi_{t1} \quad (2.14)$$

$$\omega_{1A} = \tan(\theta_A + a_0) - a_0 \quad (2.15)$$

$$\omega_{1B} = \theta_B + \varphi_{t1} \quad (2.16)$$

$$\omega_{1\Gamma} = \theta_\Gamma + \varphi_{t1} \quad (2.17)$$

Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντική η παρακάτω διευκρίνιση. Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 5), όταν συμβαίνει επαφή ενός ζεύγους οδόντων στην γραμμή επαφών χωρίς την άσκηση εξωτερικού φορτίου, δεν συμβαίνει γωνιακή επαφή για κάποιο άλλο ζεύγος οδόντων. Αυτό αποδεικνύεται γεωμετρικά, καθώς όταν ένα δόντι του πινιόν βρίσκεται στην περιοχή BΓ, επεκτείνοντας την καμπύλη εξειλιγμένης πέρα από τον  $R_{k1}$ , αυτή θα εφάπτεται σημειακά στην κατατομή του αντίστοιχου δοντιού του συνεργαζόμενου τροχού επί της επέκτασης της γραμμής AB, βάσει των ιδιοτήτων της εξειλιγμένης καμπύλης. Αντιστοίχως ισχύει για ένα δόντι του συνεργαζόμενου τροχού στην περιοχή OA. Συνεπώς, η ανωτέρω αναφερθείσα τροχιά αποτελεί το σύνολο των σημείων στα οποία δυνητικά μπορεί να συμβεί επαφή. Η γωνιακή επαφή μπορεί

να συμβεί μόνο με την άσκηση επαρκούς φορτίου ώστε το πινίον να στραφεί περαιτέρω, προκαλώντας παράλληλα αντίστοιχη παραμόρφωση στο ζεύγος οδόντων που βρίσκονται στην γραμμή επαφών.

Κατά την παρούσα μελέτη, θεωρείται πως η τροχιά των επαφών παραμένει αμετάβλητη, ανεξαρτήτως της παραμόρφωσης των οδόντων. Η παραδοχή αυτή είναι εύλογη καθώς οι παραμορφώσεις των οδόντων είναι αρκούντως μικρές ώστε να θεωρούνται ως μία αμελητέα διακύμανση της θέσεως επαφής γύρω από την καθορισμένη επί της τροχιάς επαφών. Είναι επίσης απαραίτητη για λόγους ανάλυσης και αποτελεί την βάση όλων των δυναμικών μοντέλων οδοντώσεων.

Έχοντας εκφράσει τις συντεταγμένες τυχόντος σημείου της εργαζόμενης πλευράς του πινιόν αλλά και της γραμμής επαφών, οι εξισώσεις (2.3) και (2.4) αντικαθίστανται στις (2.10), (2.11), (2.12). Ως αποτέλεσμα, η γεωμετρική ανάλυση της περιοχής επαφών ανάγεται στην απλή εύρεση σημείων επί της τροχιάς επαφών για δεδομένη γωνία του κινούντος τροχού. Όπως είναι προφανές, η έως τώρα ανάλυση αφορά μόνο ένα δόντι του πινιόν.

$$A = a_{12} - R_{k2}^2 + \left( \frac{R_{g1}}{\cos(a_1)} \sin(\omega_1 - (\tan(a_1) - a_1)) \right)^2 \quad (2.18\alpha)$$

Περιοχή  $OA$ :

$$a_1 = a \cos \left( \frac{R_{g1}}{A} \cos(\omega_1 - (\tan(a_1) - a_1)) \right) \quad (2.18\beta)$$

Περιοχή  $AB$ :

$$a_1 = a \tan(a_0 + \omega_1) \quad (2.19)$$

Περιοχή  $BF$ :

$$a_1 = a \cos \left( \frac{R_{g1}}{R_{k1}} \right) \quad (2.20)$$

Συνεπώς, αρκεί μία τιμή της γωνιακής θέσης του πινιόν  $\omega_1$ , ώστε βάσει των ορίων των τριών περιοχών (Εξισώσεις 2.14 -2.17) και των (2.18-2.20) να βρεθεί το συγκεκριμένο σημείο επί της εξειλιγμένης που θα βρίσκεται σε επαφή. Βάσει των εξισώσεων (2.5-2.7) βρίσκεται επίσης η γωνιακή θέση του συνεργαζόμενου τροχού.

Όπως αναπτύχθηκε, για μία τιμή της γωνίας  $\omega_1$  μπορεί να βρεθεί το ακριβές σημείο επαφής επί της τροχιάς  $OABF$  και για τους δύο οδοντωτούς τροχούς, ενώ καθορίζεται μονοσήμαντα η αντίστοιχη γωνία στροφής του συνεργαζόμενου ώστε να επιτευχθεί η επαφή αυτή.

Η αναλυτική αυτή προσέγγιση επιτρέπει στην εύκολη και ταχεία δόμηση της γεωμετρίας της τροχιάς επαφών για οποιοδήποτε ζεύγος οδοντωτών τροχών, δεδομένου ότι αυτό υπακούει στις θεμελιώδεις αρχές για συνεργασία ζεύγους (κοινό module) και φέρει οδόντες εξειλιγμένης. Ως αποτέλεσμα, ο αντίστοιχος αλγόριθμος εκ κατασκευής δεν επηρεάζεται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των τροχών, σε αντίθεση με αντίστοιχες αριθμητικές προσεγγίσεις.

## 2.3 Παράγωγα Γεωμετρικά Μεγέθη

Εν συνεχεία υπολογίζονται παράγωγα γεωμετρικά μεγέθη που απαιτούνται για τον υπολογισμό της δυσκαμψίας και των παραμορφώσεων των οδόντων.

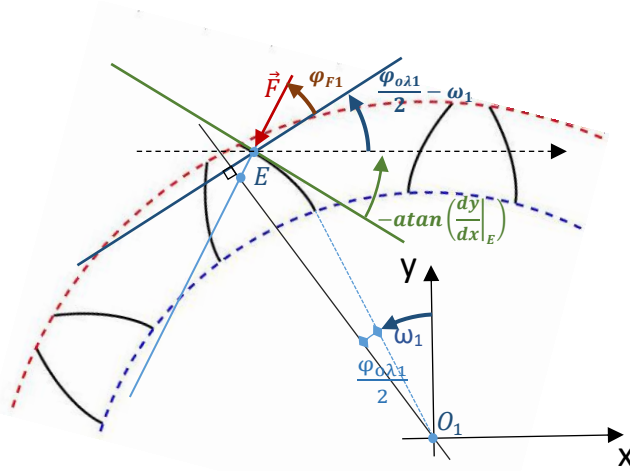
Αρχικά θεωρείται ως κλίση στο εκάστοτε σημείο επαφής, η κλίση της εξειλιγμένης εκείνου εκ των δύο συνεργαζόμενων οδόντων που εφάπτεται μέσω της κατατομής του. Δηλαδή, η κλίση  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_E$  υπολογίζεται στην περιοχή  $OA$  από την κατατομή του συνεργαζόμενου τροχού και στην περιοχή  $BΓ$  από την κατατομή του πινιόν. Προφανώς, για την γραμμή επαφών η κλίση θα συμπίπτει με την κάθετη στην γραμμή επαφών, κοινή και για τα δύο δόντια.

$$\text{Περιοχή } OA: \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_E = \frac{1}{\tan(\pi - \omega_2 - \tan(a_2))} \quad (2.21)$$

$$\text{Περιοχές } AB, B\Gamma: \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_E = \frac{1}{\tan(\omega_1 - \tan(a_1))} \quad (2.22)$$

Η θεώρηση αυτή είναι εύλογη, αφού στην περίπτωση γωνιακών επαφών η κάθετη στην κατατομή λειτουργεί ως «στιγμιαία» γραμμή επαφών. Αμελώντας τα αναπτυσσόμενα φορτία λόγω ολίσθησης μεταξύ των οδόντων, μέσω της θεώρησης αυτής γίνεται δυνατός ο υπολογισμός της διεύθυνσης άσκησης του φορτίου στα δόντια ως κάθετη στην κλίση στο σημείο  $E$ , για κάθε τιμή του  $\omega_1$ .

Έχοντας ήδη αναδείξει πως η άσκηση του φορτίου επί των οδόντων γίνεται επί της καθέτου στην κατατομή εξειλιγμένης (κάθετη της  $(\varepsilon_1)$ ), θα πρέπει να εκφραστεί η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της δύναμης με τον κεντρικό άξονα του δοντιού. Η γωνία αυτή υπεισέρχεται στους υπολογισμούς δυσκαμψίας του οδόντος και βρίσκεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 6 για το πινιόν. Με αντίστοιχο τρόπο γίνεται ο υπολογισμός και για τον συνεργαζόμενο τροχό. Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως καθώς η γωνία αυτή αφορά τον άξονα του κάθε δοντιού και όχι το κοινό σύστημα συντεταγμένων, θα είναι προφανώς διαφορετική για τους τροχούς 1 και 2.

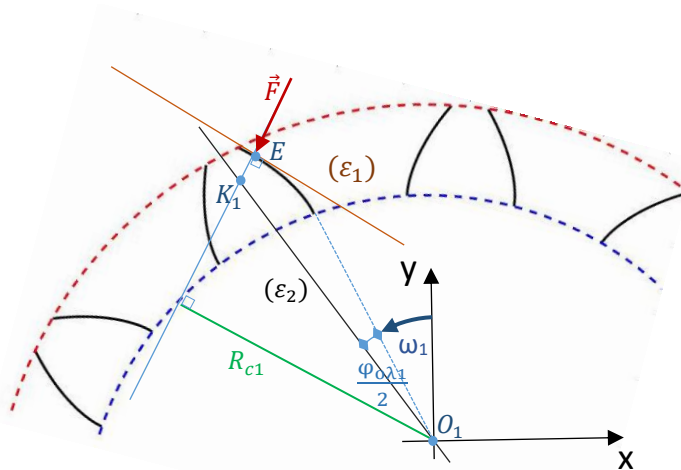


Σχήμα 6: Γωνία Άσκησης Φορτίου επί του Οδόντος

$$\varphi_{1F} = \operatorname{atan}\left(\frac{dy}{dx}\Big|_E\right) + \frac{\pi}{2} + \omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2} \quad (2.23\alpha)$$

$$\varphi_{2F} = \operatorname{atan}\left(\frac{dy}{dx}\Big|_E\right) + \frac{\pi}{2} - \omega_2 - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2} \quad (2.23\beta)$$

Για την διαμόρφωση των συναρτήσεων δυσκαμψίας των δοντιών, απαιτούνται επίσης τα μεγέθη  $K_j E, K_j O_j, R_{c j}$  για  $j = 1, 2$  τα οποία παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα, ενδεικτικά για το πινιόν ( $j = 1$ ).



Σχήμα 7: Εύρεση Παράγωγων Γεωμετρικών Μεγεθών για το σημείο Επαφής

Η γωνία  $\varphi_{o\lambda 1}$  αντιστοιχεί στο τόξο που καταλαμβάνει το δόντι επί του αρχικού κύκλου  $R_{g1}$  και μπορεί να υπολογιστεί προσθέτοντας την γωνία επί του ονομαστικού κύκλου κυλίσεως  $R_{o1}$  και δύο φορές την γωνία εξειλιγμένης για την μετάβαση από τον αρχικό κύκλο  $R_{g1}$  στον  $R_{o1}$ .

$$\varphi_{o\lambda 1} = \frac{2\pi C_{f1}}{z_1} + 2\varphi_{R_o} = \frac{2\pi C_{f1}}{z_1} + 2(\tan(a_{0x}) - a_{0x}) \quad (2.24)$$

Επομένως μπορούν πλέον να εκφραστούν η εξίσωση της ευθείας της εφαπτόμενης  $\varepsilon_1$  στο σημείο επαφής  $E$  όπως και η εξίσωση του άξονα συμμετρίας του οδόντος  $\varepsilon_2$  για οποιαδήποτε γωνιακή του θέση:

$$(\varepsilon_1) \quad y - y_E = \left. \frac{dy}{dx} \right|_E (x - x_E) \quad (2.25)$$

$$(\varepsilon_2) \quad y = \frac{x}{\tan\left(\omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2}\right)} \quad (2.26)$$

Από την τομή της κάθετης στην  $\varepsilon_1$  με την  $\varepsilon_2$  προκύπτουν οι συντεταγμένες του σημείου  $K1$  ως έκφραση των συντεταγμένων του σημείου επαφών.

$$x_{K1} = \frac{\left. \frac{dy}{dx} \right|_E y_E + x_E}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_E \left( \tan\left(\omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2}\right) \right)^{-1} + 1} \quad (2.27)$$

$$y_{K1} = \frac{\left. \frac{dy}{dx} \right|_E y_E + x_E}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_E + \left( \tan\left(\omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2}\right) \right)} \quad (2.28)$$

Εκτελώντας τις πράξεις, προκύπτουν οι εκφράσεις για τα ανωτέρω μεγέθη.

$$K_1E = \sqrt{(x_E - x_{K1})^2 + (y_E - y_{K1})^2} = \left| \frac{x_E - y_E \tan\left(\omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2}\right)}{1 + \left(\left. \frac{dy}{dx} \right|_E\right)^{-1} \tan\left(\omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2}\right)} \right| \cdot \sqrt{1 + \left(\left. \frac{dy}{dx} \right|_E\right)^{-2}} \quad (2.29)$$

$$K_1O_1 = \sqrt{x_{K1}^2 + y_{K1}^2} = \left| \frac{\left. \frac{dy}{dx} \right|_E y_E + x_E}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_E \cos\left(\omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2}\right) + \sin\left(\omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2}\right)} \right| \quad (2.30)$$

Ακόμα το  $R_{c1}$  υπολογίζεται ως η απόσταση της  $\varepsilon_1$  από το κέντρο περιστροφής του πινιόν.

$$R_{c1} = \frac{\left| x_E \left( \frac{dy}{dx} \Big|_E \right)^{-1} + y_E \right|}{\sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \Big|_E \right)^{-2}}} \quad (2.31)$$

Στη συνέχεια, στους υπολογισμούς ενδοτικότητας των οδόντων απαιτείται η ακτίνα καμπυλότητας επί του σημείου επαφής. Αυτή δίδεται από την εξίσωση (2.32):

$$CR_1 = R_{g1} \tan(a_1) \quad (2.32)$$

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται όλα τα προαναφερθέντα μεγέθη και για τον συνεργαζόμενο τροχό, λαμβάνοντας υπόψη ότι η θέση του κέντρου περιστροφής του είναι η  $O_2(0, \alpha_{12})$  και πως η  $\omega_2$  έχει αντίστροφη φορά από την  $\omega_1$ .

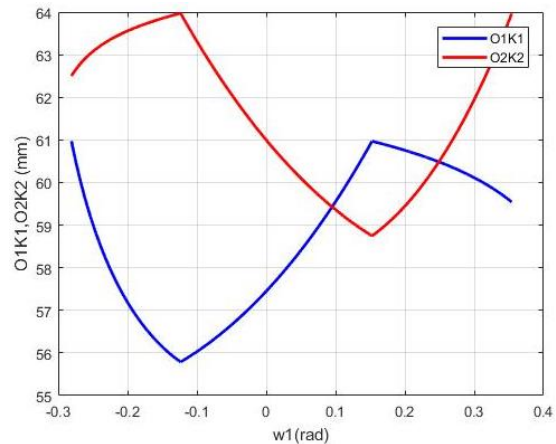
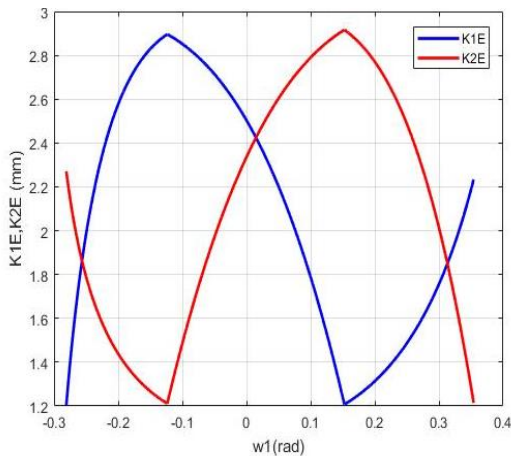
$$K_2E = \left| \frac{x_E + (\alpha_{12} - y_E) \tan\left(\pi - \omega_2 - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \Big|_E\right)^{-1} \tan\left(\pi - \omega_2 - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2}\right)} \right| \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \Big|_E\right)^{-2}} \quad (2.33)$$

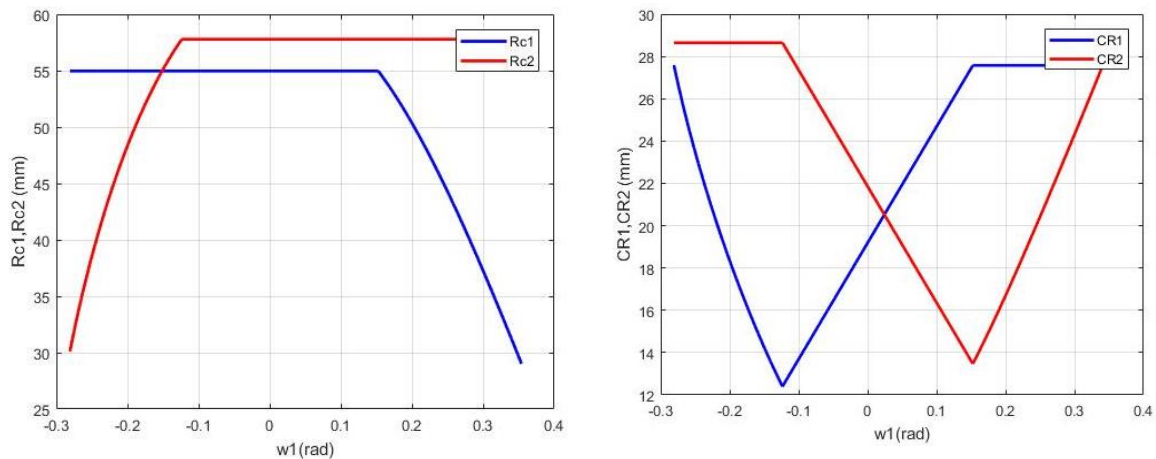
$$K_2O_2 = \left| \frac{-\frac{dy}{dx} \Big|_E (\alpha_{12} - y_E) + x_E}{\frac{dy}{dx} \Big|_E \cos\left(\pi - \omega_2 - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2}\right) + \sin\left(\pi - \omega_2 - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2}\right)} \right| \quad (2.34)$$

$$R_{c2} = \alpha_{12} \sin\left(-a \tan\left(\frac{dy}{dx} \Big|_E\right)\right) - R_{c1} \quad (2.35)$$

Οι ανωτέρω συναρτήσεις του  $\omega_1$  είναι μη παραγωγίσιμες στα σημεία  $A, B$  καθώς η τροχιά επαφών σε αυτά τα σημεία είναι ομοίως μη παραγωγίσιμη. Η ενσωμάτωση καμπυλότητας στην ακμή των οδόντων θα παρέκαμπε το πρόβλημα αυτό, αυξάνοντας όμως σημαντικά την πολυπλοκότητα ανάλυσης της γεωμετρίας. Καθώς λοιπόν πρόκειται για ένα εντοπισμένο φαινόμενο το οποίο όπως θα φανεί παρακάτω δεν προκαλεί κάποιο σφάλμα στην ανάλυση, επιλέγεται η μη χρήση καμπυλότητας.

Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα υπολογισμών για  $z_1 = 61, z_2 = 58, m = 3$ .





Σχήμα 8: Παράγωγα Γεωμετρικά Μεγέθη κατά την Τροχιά Επαφών

Σε όλα τα διαγράμματα του σχήματος 8, υπάρχουν τρεις διακριτές περιοχές που αντιστοιχούν στα τμήματα  $OA$ ,  $AB$ ,  $BΓ$  της τροχιάς επαφών, ενώ στα σημεία μετάβασης παρατηρείται η προαναφερθείσα ασυνέχεια παραγώγων. Επιπλέον ως αναμενόταν, η μορφή των διαγραμμάτων είναι σχεδόν συμμετρική για τους δύο τροχούς, με διαφορές που οφείλονται αποκλειστικά στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτών. Κατά την αύξηση του  $\omega_1$ , η απόσταση  $K_1E$  αρχικώς αυξάνεται καθώς το σημείο επαφής  $E$  κινείται προς την βάση του οδόντος του πινιόν, με μέγιστη τιμή στο σημείο  $A$ . Στο σημείο αυτό, το σημείο επαφής μετακινείται προς το άκρο του οδόντος, καθώς ακολουθεί την γραμμή επαφών. Καθώς το  $\omega_1$  γίνεται μεγαλύτερο του  $\omega_B$  και εμφανίζεται γωνιακή επαφή του πινιόν με τον συνεργαζόμενο τροχό, το  $K_1E$  αυξάνεται εκ νέου καθώς το σημείο  $K_1$  έρχεται πιο κοντά στην βάση του οδόντος μέσω της αλλαγής της επαπτόμενης στην επαφή, ενώ το  $E$  παραμένει στην μέγιστη ακτίνα του πινιόν. Ως αναμένεται, η ακτίνα  $O_1K_1$  παρουσιάζει την αντίστροφη συμπεριφορά.

Επίσης, όπως προβλέπεται από την εξίσωση (2.31), η ακτίνα καμπυλότητας των τροχών είναι σταθερή για τις περιοχές γωνιακής επαφής. Τέλος, η απόσταση του κέντρου περιστροφής από την κάθετη στο σημείο επαφής,  $R_{c1}$ , είναι σταθερή και ίση με τον  $R_{g1}$  για το τμήμα της τροχιάς επαφών για το οποίο το δόντι του πινιόν εφάπτεται στο δόντι του συνεργαζόμενου τροχού μέσω της κατατομής εξειλιγμένης. Στην περιοχή  $BΓ$ , ελλατώνεται λόγω της αλλαγής στην κλίση της επαπτόμενης στο σημείο επαφής. Ο συνεργαζόμενος τροχός παρουσιάζει αντίστοιχη εικόνα, με ελάττωση του  $R_{c2}$  στην περιοχή γωνιακής επαφής  $OA$ . Καθώς η απόσταση  $R_c$  έχει την φυσική σημασία του μοχλοβραχίονα των δυνάμεων επαφής μεταξύ των οδόντων, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα πως οι ροπές λόγω γωνιακής επαφής αναμένεται να έχουν μικρότερη επίδραση στην δυναμική απόκριση των τροχών, συγκριτικά με τις ροπές που αναπτύσσονται στα ζεύγη επί της γραμμής επαφών.

## 2.4 Γεωμετρία Ποδός Οδόντος

Τελικό βήμα στον υπολογισμό της γεωμετρίας στην περιοχή των επαφών είναι ο καθορισμός της γεωμετρίας ποδός του δοντιού, καθώς επηρεάζει την ενδοτικότητα που παρουσιάζει ως προς την κάμψη.



Η ανάλυση μέσω γεωμετρίας τροχοειδούς απλοποιείται στην χρήση πολωνύμου δευτέρου βαθμού για την προσέγγιση της γεωμετρίας ποδός, χάριν υπολογιστικής απλότητας. Κατά συνέπεια, το πάχος του οδόντος δίνεται από την εξής δίκλαδη συνάρτηση:

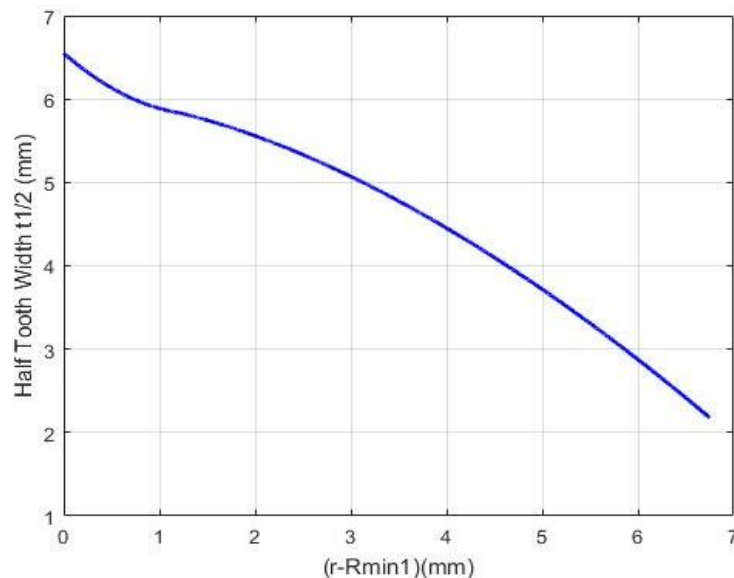
$$t_1(r) = \begin{cases} A_1(r - R_{min1})^2 + B_1(r - R_{min1}) + \Gamma_1, & R_{max} \leq r < R_{inv} \\ r \left( \varphi_{o\lambda 1} - 2 \left( \tan \left( \arccos \left( \frac{R_{g2}}{r} \right) \right) - \arccos \left( \frac{R_{g2}}{r} \right) \right) \right), & r \geq R_{inv} \end{cases} \quad (2.36)$$

Όπου η  $R_{inv}$  καθορίζεται από την θεωρία τροχοειδούς για την μετάβαση σε κατατομή εξειλιγμένης, ενώ η ελάχιστη και η μέγιστη ακτίνα δίνονται ως:

$$R_{min1} = R_{o1} - 1.25m \quad (2.37)$$

$$R_{max1} = R_{o1} + 1.00m \quad (2.38)$$

Ακόμη, τα  $A_1, B_1, \Gamma_1$  επιλέγονται μέσω συνέχειας, πάχους και μεταβολής αυτού στον πόδα. Τυπική μορφή του πάχους  $t_1(r)$  παρουσιάζεται παρακάτω.



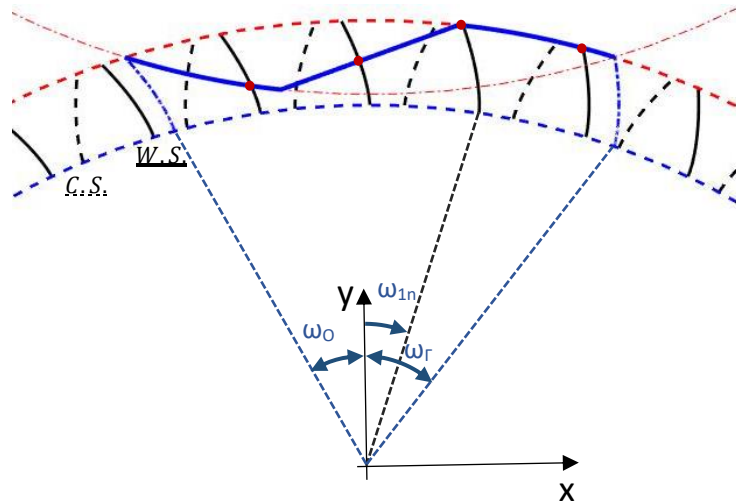
Σχήμα 9: Διάγραμμα Κατανομής Πάχους Οδόντος

Όλη η προηγούμενη ανάλυση, αφορούσε την εύρεση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της οδόντωσης για μία τιμή της γωνίας  $\omega_1$ , δηλαδή για ένα μόνο δόντι του πινιόν (και του αντίστοιχου δοντιού του συνεργαζόμενου τροχού).

## 2.5 Επαφή Πολλαπλών Ζευγών

Σε αυτό το σημείο, αναπτύσσεται η εξίσωση εύρεσης όλων των τιμών της  $\omega_1$  για τις οποίες υπάρχει οδός εντός των ορίων της τροχιάς επαφών. Ως αποτέλεσμα, για δεδομένη γωνία

στροφής του πινιόν έστω  $\omega_{1n}$ , η ανωτέρω διαδικασία μπορεί να εκτελεσθεί για όλες αυτές τις τιμές της  $\omega_1$  και να ευρεθούν τα γεωμετρικά στοιχεία των οδόντων σε όλα τα σημεία που ενδέχεται να υπάρξει επαφή.



Σχήμα 10: Σύνολο σημείων επαφής επί της Τροχιάς Επαφών

Για να βρίσκονται εντός της γραμμής επαφών, η γωνία  $\omega_1$  των οδόντων θα πρέπει να βρίσκεται εντός των ορίων που βρέθηκαν από τις εξισώσεις (2.14-2.17). Επομένως, από το σχήμα 10 συμπεραίνονται τα κατωτέρω:

$$\omega_o \leq \omega_{1n} + i \Delta\varphi = \omega_{1n} + i \frac{2\pi}{z_1} \quad (2.39)$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του μετρητή  $i$  θα πρέπει να είναι ο κοντινότερος προς τα πάνω ακέραιος.

$$i_{min} = \text{ceil} \left( \frac{\omega_o - \omega_{1n}}{2\pi} \right) z_1 \quad (2.40)$$

Επίσης, στο άλλο άκρο της τροχιάς επαφών:

$$\omega_{1n} + i \Delta\varphi \leq \omega_r \quad (2.41)$$

Οπότε το  $i_{max}$  θα είναι ο κοντινότερος προς τα κάτω ακέραιος.

$$i_{max} = \text{floor} \left( \frac{\omega_r - \omega_{1n}}{2\pi} \right) z_1 \quad (2.42)$$

Άρα γενικά,

$$\omega_{1i} = \omega_{1n} + i \frac{2\pi}{z_1}, i = i_{min} : i_{max} \quad (2.43)$$

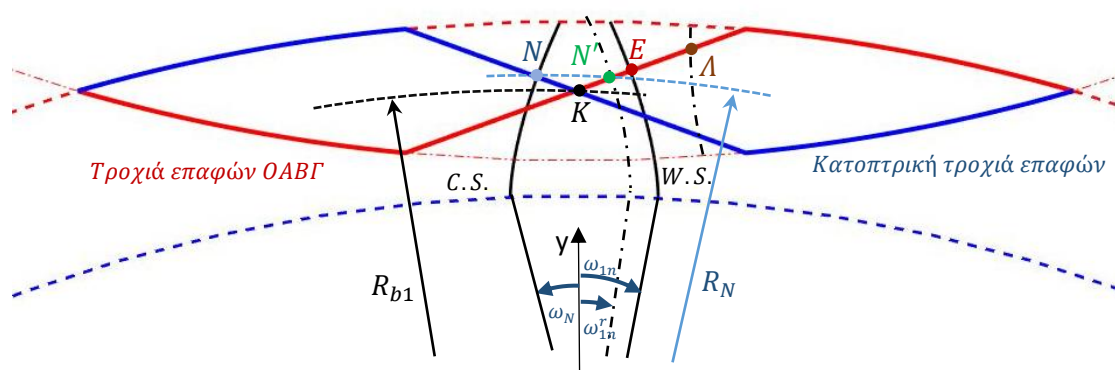
Καθ' αυτό τον τρόπο βρίσκεται το σύνολο των οδόντων που δυνητικά μπορούν να έρθουν σε επαφή και των χαρακτηριστικών τους. Είναι επίσης εμφανές πως η έκφραση (2.43) δεν εξαρτάται από την επιλογή της ονομαστικής γωνίας του πινιόν, καθώς τα όρια  $i_{min}$  και  $i_{max}$  μεταβάλλονται αντίστοιχα. Τα ανωτέρω ισχύουν δεδομένου ότι δεν συμβαίνει αναστροφή επαφών. Δηλαδή, το πινιόν εφάπτεται με την εργαζόμενη πλευρά του (*Working Side – W.S.*), στην αντίστοιχη πλευρά του συνεργαζόμενου τροχού.

## 2.6 Αναστροφή Επαφής

Κατά την λειτουργία του ζεύγους, υπάρχουν ορισμένες συνθήκες λειτουργίας για τις οποίες το πινιόν παύει να εφάπτεται με την εργαζόμενη κατατομή, αλλά με την συμμετρική σε αυτήν, στο προηγούμενο δόντι του συνεργαζόμενου τροχού από αυτό με το οποίο γινόταν κανονικά η συνεργασία.

Λόγω της συμμετρίας των δύο πλευρών των οδόντων του πινιόν και του συνεργαζόμενου τροχού, στην περίπτωση που το πινιόν εφάπτεται με την πίσω πλευρά του (*Coast Side – C.S.*), πλέον η τροχιά επαφών είναι η κατοπτρική της  $OAB\Gamma$  ως προς την διάκεντρο των δύο τροχών. Πλέον τα σημεία που μπορεί να γίνει επαφή μεταξύ της *C.S.* του πινιόν και της αντίστοιχης πλευράς του συνεργαζόμενου τροχού. Βάσει της συμμετρίας αυτής, επιχειρείται η έκφραση των γωνιακών θέσεων για τις οποίες μπορεί να υπάρξει ανάστροφη επαφή, ως προς τις θέσεις που αντιστοιχούν σε επαφή της εργαζόμενης πλευράς (*W.S.*) του πινιόν (τροχιά επαφών  $OAB\Gamma$ ).

Έστω ένα δόντι του πινιόν του οποίου αμφότερες οι πλευρές τέμνονται με την τροχιά επαφών (για επαφή στην *W.S.*) εντός της γραμμής επαφών, χάριν απλότητας της απόδειξης. (Εν γένει η απόδειξη γενικεύεται για κάθε θέση εντός της τροχιάς επαφών). Χωρίς απώλεια γενικότητας, έστω ότι η ονομαστική τιμή της γωνιακής θέσης του πινιόν αντιστοιχεί στο δόντι αυτό.



Σχήμα 11: Ανάστροφη επαφή Οδόντων

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 11, όταν αναστραφεί η επαφή, η *C.S.* τέμνεται με την κατοπτρική τροχιά επαφών στο σημείο  $N$ . Αναζητείται το σημείο τομής της *W.S.* με την αρχική τροχιά επαφών, το οποίο θα έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με το  $N$ . Αυτό το σημείο θα είναι το  $N'$  που βρίσκεται στην τομή της  $R_N$  με την αρχική τροχιά επαφών ( $OAB\Gamma$ ).

Βάσει της προαναφερθείσας συμμετρίας των τροχιών επαφών θα είναι:

$$\omega_{1n}^r = -\omega_N \quad (2.44)$$

Λόγω των ιδιοτήτων της εξειλιγμένης, το ευθύγραμμο τμήμα  $NK$  της τροχιάς επαφών μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

$$NK = R_{g1}(\omega_{1n}^r - \varphi_{Rb1}) \quad (2.45)$$

Αντίστοιχα, για το  $KE$  που ανήκει στην ανάστροφη γραμμή επαφών:

$$KE = R_{g1}(\omega_{1n} - \varphi_{Rb1}) \quad (2.46)$$

Όμως, η μεταβολή της γωνιακής θέσης του οδόντος επί του αρχικού κύκλου ισούται με την μεταβολή της γωνιακής θέσης επί του  $R_{b1}$ . Αθροίζοντας τις γωνίες των δύο τόξων επί του  $R_{b1}$  προκύπτει το πάχος του δοντιού στην ακτίνα αυτή. Συνεπώς:

$$NK + KE = \frac{t_{b1}}{R_{b1}} R_{g1} = R_{g1} \left( \frac{2\pi C_{f1}}{z_1} - 2(\varphi_{Rb1} - \varphi_{Ro1}) \right) \quad (2.47)$$

Ως αποτέλεσμα, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.45) και (2.46) στην (2.47), μπορούν να βρεθούν οι θέσεις των σημείων όπου μπορεί να υπάρξει ανάστροφη επαφή  $\omega_{1r_i}$  ως προς τις θέσεις των δοντιών  $\omega_{1i}$ .

$$\omega_{1n}^r = -\omega_{1n} + 2 \left( \frac{C_{f1}\pi}{z_1} + \varphi_{Ro1} \right) = -\omega_{1n} + \varphi_{o\lambda 1} \quad (2.48)$$

Συνεπώς, το πρόβλημα αναστροφής επαφών μπορεί να αναχθεί σε μία «εικονική μετατόπιση» της θέσης πινιόν από τη θέση  $\omega_{1n}$  στην  $\omega_{1n}^r$ . Οι θέσεις όλων των ζευγών οδόντων που δυνητικά θα έρθουν σε ανάστροφη επαφή μπορούν να υπολογισθούν με την ανωτέρω μέθοδο (εξίσωση 2.43), βρίσκοντας όμως εκ νέου τα όρια  $i_{min}$  και  $i_{max}$  για την νέα ονομαστική θέση  $\omega_{1n}^r$ .

Μέσω της ίδιας διαδικασίας, για τον συνεργαζόμενο τροχό προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\omega_{2n}^r = -\omega_{2n} + \left( \frac{2\pi}{z_2} - \varphi_{o\lambda 2} \right) \quad (2.49)$$

Μέσω του ανωτέρω μετασχηματισμού, επιτυγχάνεται μεγάλη οικονομία μνήμης και υπολογιστικής πολυπλοκότητας, αφού δεν απαιτείται χωριστή ανάλυση για τις δύο κατατομές του οδόντος. Αντιθέτως, πλέον η μοντελοποίηση ολόκληρης της γεωμετρίας του ζεύγους ανάγεται στην εύρεση των σημείων τομής της εργαζόμενης κατατομής, για ένα μόνο δόντι του πινιόν, με την τροχιά επαφών.

## 2.7 Υπολογισμός Χάρης Κατατομών

Ως γνωστόν [19], το πάχος του κάθε οδόντος επί του ονομαστικού κύκλου κυλίσεως  $R_o$  δίδεται από την σχέση:

$$t_{Ro} = C_f t_o = C_f \pi m = \frac{C_f R_o 2\pi}{z} \quad (2.50)$$

όπου το  $C_f$  λαμβάνει συνήθως τιμές από 0.48 έως 0.50.

Στην περίπτωση που οι τροχοί βρίσκονται στην ονομαστική τους απόσταση και για τα δόντια και των δύο είναι  $C_{f1} = C_{f2} = 0.5$  εμφανίζεται επαφή και στις δύο κατατομές του οδόντος του πινιόν. Σε αυτή την περίπτωση δηλαδή δεν υπάρχει διάκενο μεταξύ των οδόντων.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, εμφανίζεται διάκενο μεταξύ των γειτονικών μη εφαπτόμενων κατατομών των δύο τροχών.

Με βάση και πάλι το Σχήμα 11, αν τα δύο δόντια εφάπτονται στο σημείο  $N$ , ισχύουν οι εξισώσεις (2.45) και (2.46). Αντίστοιχα, αν το επόμενο σημείο τομής κατατομής οδόντος του συνεργαζόμενου τροχού με την τροχιά επαφών είναι το  $L$  θα είναι:

$$NK + KL = \frac{2\pi}{z_2} R_{g2} - \frac{R_{g2}}{R_{b2}} t_{b2} = R_{g2} \left( \frac{2\pi(1 - C_{f2})}{z_2} + 2(\varphi_{Rb2} - \varphi_{Ro2}) \right) \quad (2.51)$$

Επομένως, επί της γραμμής επαφών το διάκενο  $b_{12}$  θα είναι:

$$b_{12} = EL = \cos(a_{0x}) t_o (1 - C_{f1} - C_{f2}) + 2(\varphi_{Rb} - \varphi_{Ro})(R_{g1} + R_{g2}) \quad (2.52)$$

Μία ποιοτική επαλήθευση της εξίσωσης (2.52) μπορεί να δοθεί θεωρώντας μία αύξηση της απόστασης των κέντρων των τροχών. Σε αυτή την περίπτωση το διάκενο  $b_{12}$  επίσης αυξάνεται αφού  $\varphi_{Rb} > \varphi_{Ro}$ , όπως και ποιοτικά αναμένεται. Ακόμη, για την ονομαστική απόσταση αξόνων ( $R_b \equiv R_o$ ) και  $C_{f1} = C_{f2} = 0.5$ , το διάκενο προκύπτει μηδενικό.

## 2.8 Ημι-αναλυτική Προσέγγιση Γραμμής Επαφών

Όπως αναλύθηκε και στην εισαγωγή της εργασίας, παράλληλα με την πλήρη γεωμετρική ανάλυση του προβλήματος, επιχειρείται δόμηση ενός απλοποιημένου δυναμικού μοντέλου σε κλειστή μορφή. Τα πλεονεκτήματα ενός τέτοιου μοντέλου είναι πολλαπλά, κυρίως λόγω του πολύ χαμηλότερου υπολογιστικού κόστους και μνήμης που απαιτεί. Επιθυμώντας παράλληλα την μεγιστοποίηση της ακρίβειας ενός τέτοιου μοντέλου, είναι κρίσιμης σημασίας η αιτιολογημένη υλοποίηση απλοποιητικών παρεμβάσεων κατά την ανάπτυξή του.

Το πρώτο βήμα για την ανάπτυξη ενός μοντέλου σε κλειστή μορφή είναι η απλοποίηση των εξισώσεων (2.29-2.35) που δίνουν τα γεωμετρικά μεγέθη του ζεύγους που υπεισέρχονται στον μετέπειτα υπολογισμό της ενδοτικότητας του ζεύγους σε παραμορφώσεις.

Παρατηρείται πως λόγω των ιδιοτήτων συνεργασίας μεταξύ κατατομών εξειλιγμένης, η έκφραση των εξισώσεων (2.11) και (2.19) κατά την γραμμή επαφής  $AB$  είναι αρκετά απλούστερη από την αντίστοιχη έκφραση για τις περιοχές γωνιακής επαφής  $OA$  και  $BΓ$ . Ακόμη, όπως αναλύθηκε στην ενότητα 2.2, κατά την απλή επαφή των ζευγών οδόντων είναι αδύνατον να εμφανισθεί γωνιακή επαφή. Αντιθέτως, χρειάζεται επαρκής συμπίεση των ζευγών επί της  $AB$ , ώστε αντίστοιχα ζεύγη στις περιοχές  $OA$  και  $BΓ$  να έρθουν σε επαφή. Ακόμη όμως και σε αυτή την περίπτωση, όπως αναλύθηκε οι αντίστοιχες ροπές αναμένεται να είναι σημαντικά μικρότερες από τις αντίστοιχες που αναπτύσσονται επί της γραμμής επαφών. Ως αποτέλεσμα, αμελώντας τις περιοχές γωνιακής επαφής οι εξισώσεις (2.29-2.35) αποκτούν μία περισσότερο διαχειρίσιμη μορφή.

$$K_1 E_{AB} = R_{g1} \left( (\omega_1 + a_0) - \tan \left( \omega_1 + a_0 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2} \right) \right) \quad (2.53)$$

$$K_2 E_{AB} = R_{g2} \left( (a_0 - \omega_2) - \tan \left( a_0 - \omega_2 - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2} \right) \right) \quad (2.54)$$

$$K_1 O_{1AB} = \frac{R_{g1}}{\left| \cos \left( \omega_1 + a_0 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2} \right) \right|} \quad (2.55)$$

$$K_2 O_{2AB} = \frac{R_{g2}}{\left| \cos \left( a_0 - \omega_2 - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2} \right) \right|} \quad (2.56)$$

Ενώ, ως γνωστόν από την θεωρία της εξειλιγμένης θα ισχύει:

$$R_{c1} = R_{g1} \quad (2.57\alpha)$$

$$R_{c2} = R_{g2} \quad (2.57\beta)$$

Στην συνέχεια, πραγματοποιείται μία ακόμη απλοποιητική παραδοχή αναφορικά με την κατανομή πάχους του οδόντος. Αυτή η υπόθεση γίνεται καθώς οι συναρτήσεις  $t_1(r)$ ,  $t_2(r)$  υπεισέρχονται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων κατά τον προσδιορισμό της δυσκαμψίας του οδόντος. Ως αποτέλεσμα ο αναλυτικός προσδιορισμός των ολοκληρωμάτων αυτών, προϋποθέτει την θεώρηση μίας προσεγγιστικής συνάρτησης κατανομής πάχους, στην λογική αντίστοιχων δημοσιευμένων εργασιών [15,20].

Η βασική απαίτηση σχετικά με την συνάρτηση  $t(r)$  είναι να είναι γνησίως φθίνουσα, με γνωστή παράγουσα. Όπως θα παρουσιασθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο, η ολοκλήρωση στην οποία χρησιμεύει η παρούσα απλοποίηση γίνεται κατά την ακτίνα, από την βάση έως την ακτίνα  $O_i K_i$ . Συνεπώς είναι δευτερευόντως επιθυμητό η συνάρτηση αυτή να προσεγγίζει κατά το δυνατόν την μορφή του οδόντος κοντά στην βάση. Ταυτοχρόνως, δεδομένης της ανάγκης αναλυτικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων που περιλαμβάνουν όρους  $t^{-3}(r)$ , είναι θεμιτό η συνάρτηση να αποτελείται από έναν όρο και όχι άθροισμα περισσότερων, γεγονός που θα δημιουργούσε ταυτότητες τρίτου βαθμού στον παρονομαστή της ολοκληρωτέας ποσότητας.

Βάσει της τελευταίας απαίτησης, απορρίπτονται πολυωνυμικές συναρτήσεις, ή μετατοπισμένες εκθετικές και λογαριθμικές. Δεδομένης της ανάγκης για εύκολο υπολογισμό της παράγουσας της συνάρτησης, η αναζήτηση περιορίζεται σε εκθετικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Τελικώς, εκλέγεται η εκθετική κατανομή:

$$t_i(r) = K_{1i}e^{-K_{2i}(r-R_{min_i})} \quad (2.58)$$

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, η κατανομή αυτή είναι κοίλη, όμοια με την μορφή του οδόντος πολύ κοντά στον πόδα (Σχήμα 12). Στην συνέχεια όμως, δεν ακολουθεί την κυρτή μορφή της κατατομής εξειλιγμένης. Κατά συνέπεια, αναμένεται μεγαλύτερο σφάλμα στις γωνίες  $\omega_1$  για τις οποίες το όριο ολοκλήρωσης  $O_iK_i$  αυξάνεται.

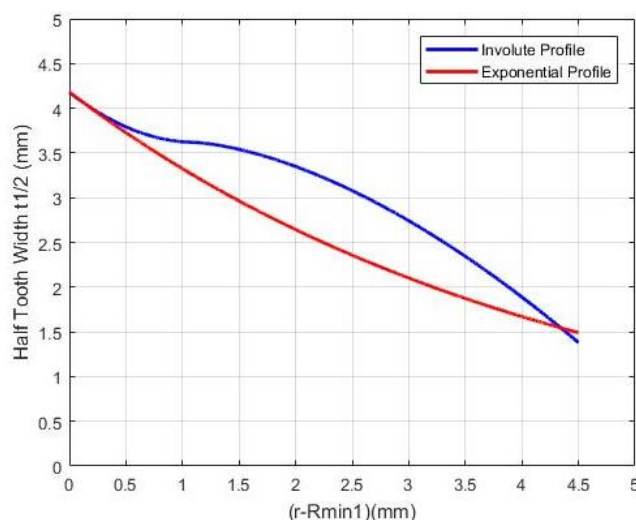
Για τον πρώτο συντελεστή της συνάρτησης θα πρέπει το πάχος του οδόντος στον πόδα να είναι κοινό για τις δύο συναρτήσεις, ώστε να προσεγγίζεται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο η βάση του οδόντος. Επομένως υπολογίζοντας το πάχος από την εξίσωση (2.36) για  $r = R_{min_i}$ :

$$K_{1i} = t_{inv}(R_{min_i}) \quad (2.59)$$

Ο συντελεστής  $K_{2i}$  προκύπτει μέσω του πάχους δι'εξειλιγμένης  $t_{inv}(R_{max_i})$ . Βάσει των ανωτέρω, καθώς η ακτίνα αυτή βρίσκεται μακριά από την βάση του οδόντος, ο επιλογή του  $K_{2i}$  δεν είναι μονοσήμαντη. Ελέγχοντας το αντίστοιχο σφάλμα των ολοκληρωμάτων, επιλέγεται το πάχος  $t(R_{max_i})$  να είναι κατά 8% μεγαλύτερο από το  $t_{inv}(R_{max_i})$ , τιμή για την οποία ελαχιστοποιείται το σφάλμα των ολοκληρωματικών ποσοτήτων.

$$K_{2i} = \log\left(\frac{t_{inv}(R_{min_i})}{1.08 t_{inv}(R_{max_i})}\right) \frac{1}{(R_{max_i} - R_{min_i})} \quad (2.60)$$

Προφανώς αυτή η επιλογή εξαρτάται άμεσα από την γεωμετρία του ποδός των οδόντων του κάθε οδοντωτού τροχού που εξετάζεται. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η πραγματική κατανομή του οδόντος συγκριτικά με την αντίστοιχη εκθετική. Είναι εμφανές, πως η εκθετική καμπύλη προσεγγίζει σωστά την γεωμετρία του οδόντος μόνο για το 10% του μήκους του. Στην συνέχεια, η προκύπτουσα απόκλιση είναι πολύ σημαντική. Παρ' όλα αυτά, όπως προαναφέρθηκε η προσέγγιση αυτή αφορά μικρό ποσοστό του μήκους του οδόντος, ενώ χρησιμοποιείται μόνο ως ενδιάμεσο βήμα στον υπολογισμό ενός όρου ενδοτικότητας. Περαιτέρω ανάλυση της προσέγγισης αυτής θα γίνει στο Κεφάλαιο 3.



Σχήμα 12: Συγκριτικό διάγραμμα κατανομής πάχους οδόντων





### 3 Υπολογισμός Δυνάμεων Επαφής

#### 3.1 Αναλυτικός Υπολογισμός Ελαστικότητας Ζεύγους

Έχοντας υπολογίσει το σύνολο των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του ζεύγους, είναι πλέον δυνατός ο καθορισμός της δυσκαμψίας των οδόντων κατά μήκος της τροχιάς επαφών, βάσει της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας οδοντώσεων [19]. Τα βασικά σημεία της θεωρίας αυτής παρουσιάζονται για λόγους πληρότητας παρακάτω.

Η ανάλυση ελαστικότητας του ζεύγους γίνεται μέσω του αδιάστατου συντελεστή ενδοτικότητας  $C$ .

$$C = \frac{Eb\delta}{F} \quad (3.1)$$

Όπου  $\delta$  η μετατόπιση του οδόντος και  $F$  το ασκούμενο φορτίο. Ως γνωστόν τα  $E, b$  αποτελούν το μέτρο ελαστικότητας του Young και το πλάτος του δοντιού αντίστοιχα. Συνεπώς, ανακατατάσσοντας τους όρους της εξίσωσης (3.1), η αντίστοιχη ελαστικότητα θα είναι:

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{Eb}{C} \quad (3.2)$$

Η ολική παραμόρφωση των οδόντων προκύπτει από τρεις χωριστούς μηχανισμούς. Ο πρώτος έγκειται στην κάμψη του άξονα του οδόντος λόγω ανάλυσης του φορτίου σε αξονική, τέμνουσα συνιστώσα και καμπτική ροπή, με αντίστοιχο όρο την καμπτική ενδοτικότητα  $C_b$ . Ταυτοχρόνως, η βάση του οδόντος υπόκειται σε μετατόπιση και περιστροφή, εισάγοντας τον όρο ενδοτικότητας ποδός  $C_f$ . Ο τρίτος μηχανισμός είναι η παραμόρφωση στο σημείο επαφής λόγω πίεσης επιφανείας κατά Hertz δημιουργώντας τον αντίστοιχο όρο ενδοτικότητας  $C_H$ .

Θεωρώντας πως αυτοί οι τρεις όροι ελαστικότητας δρουν ως ελατήρια εν σειρά (άθροιση μετατοπίσεων), η ολική ενδοτικότητα του ζεύγους υπολογίζεται ως:

$$C_{tot} = (C_{b1} + C_{f1}) \frac{2E_2}{E_1 + E_2} + (C_{b2} + C_{f2}) \frac{2E_1}{E_1 + E_2} + C_H \quad (3.3)$$

Η καμπτική ενδοτικότητα υπολογίζεται θεωρητικά μέσω του θεωρήματος των δυνατών έργων, οπότε προκύπτει η παρακάτω εξίσωση.

$$C_{b1} = 12(\cos(\varphi_{1F}))^2 \left( I_{21} + \left( 0.2(1 + \nu_1) + \frac{(\tan(\varphi_{1F}))^2}{12} \right) I_{11} \right) \quad (3.4)$$

όπου  $\nu$  ο λόγος Poisson για το υλικό των οδόντων του πινιόν.

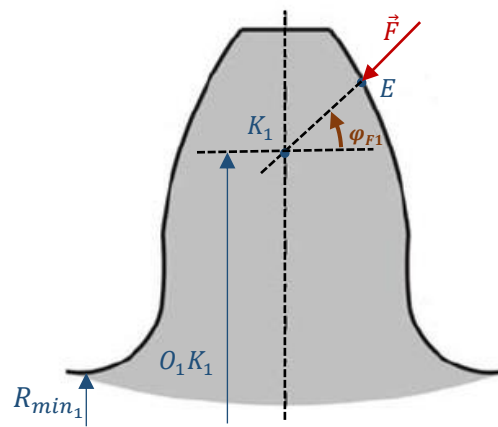
Οι ολοκληρωματικοί όροι  $I_{1j}, I_{2j}$  με  $j = 1$  για το πινιόν και  $j = 2$  για τον συνεργαζόμενο τροχό, για τους οποίους έγινε ήδη λόγος στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτουν επίσης θεωρητικά από την ανάλυση δυνατών έργων και υπολογίζονται ως εξής:

Αν ορισθεί  $\psi_j = r_j - R_{min_j}$  και  $\Psi_j = O_j K_j - R_{min_j}$  (Σχήμα 13), τότε μπορούν να γραφούν οι κάτωθι εξισώσεις:

$$I_{1j} = \int_0^{\Psi_j} \frac{1}{t(\psi_j)} d\psi_j \quad (3.5)$$

$$I_{2j} = \int_0^{\Psi_j} \frac{(\psi_j - \Psi_j)^2}{t(\psi_j)^3} d\psi_j \quad (3.6)$$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται αριθμητικά, μέσω των εξισώσεων πάχους του οδόντος (Εξίσωση 2.36).



Σχήμα 13: Όρια υπολογισμού καμπτικής ενδοτικότητας

Εν συνεχεία υπολογίζεται η ενδοτικότητα ποδός του οδόντος. Κατά την παρούσα εργασία, η ανάλυση πραγματοποιείται με χρήση της ημιεμπειρικής σχέσης του O' Donnell.

$$C_{f1} = (1 - \nu_1^2)(\cos(\varphi_{F1}))^2 \left( \frac{50}{2\pi} \left( \frac{\Psi_1}{t(R_{min1})} \right)^2 + \frac{2(1 - 2\nu_1)}{1 - \nu_1} \frac{\Psi_1}{t(R_{min1})} + \frac{4.82}{\pi} \left( 1 + \frac{\tan^2(\varphi_{F1})}{2.4(1 + \nu_1)} \right) \right) \quad (3.7)$$

Τέλος, υπολογίζεται η ενδοτικότητα κατά Hertz η οποία εξαρτάται από δύο μεταβλητές. Όπως οι δύο προαναφερθέντες όροι, το  $C_H$  εξαρτάται από την γωνιακή θέση του πινιόν. Επιπλέον όμως, εξαρτάται από το ασκούμενο φορτίο επί του οδόντος οπότε και αποτελεί ένα μη γραμμικό ελατήριο. Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί πως σε αντίθεση με τους δύο προηγούμενους όρους, η ενδοτικότητα κατά Hertz χαρακτηρίζει το ζεύγος και όχι κάθε τροχό χωριστά.

$$C_H = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi} \left( \ln \left( \frac{4 K_1 E K_2 E}{8 F (1 - \nu^2) \frac{C R_1 C R_2}{\pi b E (C R_1 + C R_2)}} \right) - \frac{\nu}{1 - \nu} \right) \quad (3.8)$$

Όπως γίνεται φανερό από την εξίσωση (3.8), στον υπολογισμό της ενδοτικότητας κατά Hertz υπεισέρχονται τα γεωμετρικά μεγέθη των ακτινών καμπυλότητας αμφότερων των τροχών αλλά

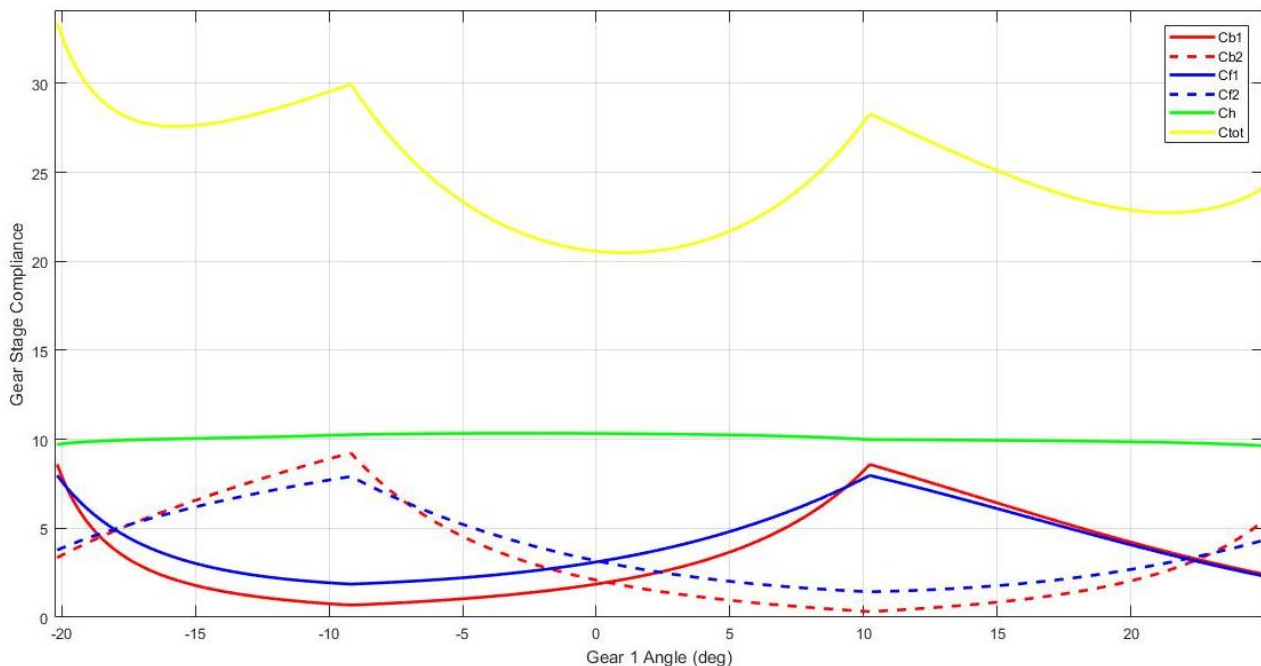
και οι αποστάσεις  $K_1E$  και  $K_2E$ , τα οποία υπολογίσθηκαν και παρουσιάσθηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Τέλος, ο ισοδύναμος συντελεστής Poisson δίνεται από την εξίσωση (3.9).

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{E}{2} \left( \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \right)} \quad (3.9)$$

Βάσει των ανωτέρω, από την εξίσωση (3.3) προκύπτει η ολική ενδοτικότητα του ζεύγους  $C_{tot}$  για ένα ζεύγος δοντιών της βαθμίδας και για όλο το μήκος της τροχιάς επαφών. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τυχαίους οδοντωτούς τροχούς.

|   |        |
|---|--------|
| Αριθμός δοντιών πινιόν $z_1$                  | 32     |
| Αριθμός δοντιών συνεργαζόμενοι τροχού $z_2$   | 60     |
| Μοντούλ $m$ (mm)                              | 3      |
| Πλάτος δοντιών $b$ (mm)                       | 30     |
| Γωνία εξειλιγμένης $\alpha_{0x}$ ( $^\circ$ ) | 20     |
| Γωνία πίεσης $\alpha_0$ ( $^\circ$ )          | 20     |
| Συντελεστής πάχους $C_f$                      | 0.49   |
| Ύψος κεφαλής $h_k$ (mm)                       | 1.00 m |
| Ύψος ποδός $h_f$ (mm)                         | 1.25 m |
| Μέτρο ελαστικότητας $E$ (GPa)                 | 200    |
| Λόγος Poisson $\nu$                           | 0.3    |

Πίνακας 1: Μεγέθη Βαθμίδας



Σχήμα 14: Διάγραμμα Ενδοτικότητας κατά την Τροχιά Επαφών

Στο Σχήμα 14 παρατηρούνται τρεις διακριτές περιοχές για την ενδοτικότητα του ζεύγους οδόντων της βαθμίδας. Η πρώτη περιοχή για  $\omega_{1n} < -9^\circ$  αντιστοιχεί στην περιοχή  $OA$  της τροχιάς επαφών, όπου συμβαίνει γωνιακή επαφή του συνεργαζόμενου τροχού με την κατατομή εξειλιγμένης του πινιόν. Η περιοχή για γωνιακή θέση του οδόντος του πινιόν με εύρος  $-9^\circ < \omega_{1n} < 10^\circ$  αντιστοιχεί στην γραμμή επαφών  $AB$  και παρουσιάζει την συνήθη μορφή διαγραμμάτων ενδοτικότητας βαθμίδας. Τέλος, η περιοχή για  $\omega_{1n} > 10^\circ$  αντιστοιχεί στην γωνιακή επαφή του πινιόν (τόξο  $B\Gamma$ ) και παρουσιάζει αντίστοιχη μορφή με την πρώτη περιοχή του διαγράμματος. Καθώς οι δύο οδοντωτοί τροχοί δεν είναι όμοιοι, η ολική ενδοτικότητα του ζεύγους είναι επίσης μη συμμετρική ως προς την γωνιακή θέση  $\omega_{1n}$ , κάτι που γίνεται ιδιαίτερα εμφανές στις περιοχές γωνιακής επαφής του ζεύγους δοντιών.

### 3.2 Αναλυτικός Υπολογισμός Δυνάμεων Επαφής

Έχοντας υπολογίσει την ενδοτικότητα ενός ζεύγους οδόντων για κάθε τιμή της γωνίας του πινιόν, είναι πλέον δυνατή η έκφραση των ελαστικών δυνάμεων επί όλων των συνεργαζόμενων ζευγών οδόντων και συνεπώς των αντίστοιχων ροπών ως προς το κέντρο περιστροφής κάθε τροχού.

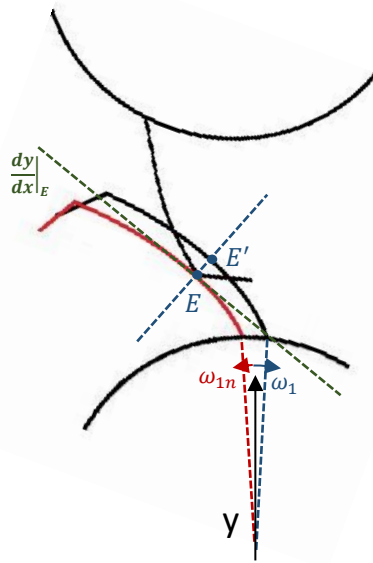
Έστω καθορισμένη γωνιακή θέση του συνεργαζόμενου τροχού  $\omega_{2n}$  εντός της γραμμής επαφών  $AB$ , η οποία αντιστοιχεί σε γωνιακή θέση  $\omega_{1n}$  του τροχού 1 για την οποία οι δύο τροχοί εφάπτονται. Αυξάνοντας την γωνιακή θέση του πινιόν, τα δόντια του ζεύγους αυτού των δύο τροχών υπερκαλύπτονται. Προφανώς η υπερκάλυψη αυτή δεν συμβαίνει στην πράξη, αλλά οδηγεί στην παραμόρφωση του ζεύγους. Συνεπώς, η συμπίεση του ζεύγους  $x_{AB}$  (στατικό σφάλμα μετάδοσης) μπορεί να υπολογισθεί στην γραμμή επαφών, βάσει της θεωρίας εξειλιγμένης ως εξής:

$$x_{AB} = R_{g1}(\omega_1 - \omega_{1n}(\omega_2)) \quad (3.10)$$

Καθώς η συμπίεση  $x_{AB}$  αφορά αποκλειστικά ζεύγη εντός της γραμμής επαφών, παραμένει να ορισθεί το αντίστοιχο σφάλμα μετάδοσης για τις περιοχές  $OA$ ,  $B\Gamma$  όπου συμβαίνει γωνιακή επαφή. Όπως προαναφέρθηκε, η διεύθυνση άσκησης των φορτίων για τις περιοχές γωνιακής επαφής είναι η κάθετη στην  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_E$ . Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί και σε αυτή την περίπτωση πως πρόκειται για «στιγμιαία» τροχιά επαφών δι' εξειλιγμένης. Όπως λοιπόν φαίνεται στο Σχήμα 15, η κάθετη στην εξειλιγμένη παραμόρφωση του ζεύγους εκφράζεται ως:

$$x_{OA,B\Gamma} = EE' = R_{g1}(\omega_1 - \omega_{1n}(\omega_2)) \quad (3.11)$$

Όπως προαναφέρθηκε, όταν τα ζεύγη οδόντων επί της γραμμής επαφών εφάπτονται δεν υπάρχει γωνιακή επαφή. Παρ' όλα αυτά, μία επαρκώς μεγάλη αύξηση της  $\omega_1$  από την ονομαστική της τιμή μπορεί να προκαλέσει υπερκάλυψη των ζευγών στις περιοχές γωνιακής επαφής και συνεπώς παραμόρφωση στα ζεύγη αυτά. Ως αποτέλεσμα, απαιτείται έλεγχος των παραμορφώσεων  $x_{OA,B\Gamma}$  ώστε να διατηρούνται μόνο οι περιπτώσεις όπου  $x_{OA,B\Gamma} > 0$ .



Σχήμα 15: Υπολογισμός συμπίεσης ζεύγους οδόντων

Κατά συνέπεια, ακολουθώντας την μέθοδο εύρεσης της γωνιακής θέσης όλων των ζευγών από μία ονομαστική γωνιακή θέση ενός ζεύγους (εξίσωση 2.43) μπορεί εν γένει να γραφεί:

$$x_i = R_{g1}(\omega_{1i} - \omega_{1n_i}) \quad (3.12)$$

Επιπλέον, η ελαστικότητα του ζεύγους στην συγκεκριμένη θέση είναι  $K(\omega_1, x)$  και μπορεί να υπολογισθεί μέσω της εξίσωσης 3.2. Κατά συνέπεια, το μητρώο-στήλη των δυνάμεων λόγω ελαστικής παραμόρφωσης των ζευγών οδόντων που συνεργάζονται μπορεί να γραφεί ως:

$$F_i = K(\omega_{1i}, x_i) \cdot x_i \quad (3.13)$$

Όπου ο δείκτης  $i$  μετρά για όλα τα ζεύγη που καθορίζονται από τις εξισώσεις 2.41 και 2.42. Προφανώς λόγω δράσης-αντίδρασης το μέτρο των δυνάμεων αυτών είναι κοινό για τα δύο δόντια του ζεύγους σε συνεργασία. Αντιστοίχως, η εύρεση των ροπών λόγω ελαστικών δυνάμεων γίνεται εύκολα καθώς έχουν ήδη υπολογισθεί οι μοχλοβραχίονες  $R_c(\omega_1)$  για κάθε σημείο της τροχιάς επαφών. Γνωρίζοντας την κλίση της τροχιάς επαφών σε κάθε σημείο, ο μοχλοβραχίονας για τον τροχό 2 μπορεί να προσδιορισθεί απευθείας από τον  $R_c(\omega_1)$ . Εν γένει, για τους τροχούς 1 και 2 θα είναι:

$$T_{el_{i,1}} = F_i R_{C1_i}(\omega_{1i}) \quad (3.14\alpha)$$

$$T_{el_{i,2}} = F_i R_{C2_i}(\omega_{1i}) \quad (3.14\beta)$$

Αθροίζοντας τις ροπές για όλα τα ζεύγη δοντιών  $i$  προκύπτει η ολική ροπή ως προς το κέντρο περιστροφής του κάθε τροχού  $j = 1,2$ .

$$T_{tot_j} = \sum_i T_{el_{i,j}} \quad (3.15)$$

Βάσει των ανωτέρω, κανείς διακρίνει πως οι ροπές λόγω ελαστικής παραμόρφωσης των ζευγών σε συνεργασία εξαρτώνται από την γωνιακή θέση του πινιόν  $\omega_1$  και από την σχετική γωνιακή θέση μεταξύ των δύο οδοντωτών τροχών,  $x$ . Επιπλέον, είναι εμφανής η μη γραμμικότητα υπολογισμού των ροπών αυτών. Η ενδοτικότητα  $C_H$  εξαρτάται ισχυρά από την αναπτυσσόμενη ελαστική δύναμη  $F_i$  (εξίσωση 3.8). Από την άλλη μεριά, η εύρεση των ελαστικών δυνάμεων (εξίσωση 3.13) προϋποθέτει τον προσδιορισμό της ελαστικότητας του ζεύγους, συνεπώς και τον όρο  $C_H$  (εξίσωση 3.3).

Η επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων πραγματοποιείται μέσω επαναληπτικών αλγορίθμων, ή εναλλακτικά, μέσω της δόμησης αναδρομικού τύπου επίλυσης, όπου η ελαστικότητα θα υπολογίζεται για μία ελαφρώς μικρότερη παραμόρφωση από την υπάρχουσα. Συνεπώς, υπολογίζοντας τον όρο  $C_H$  του ζεύγους για επαρκώς μικρές δυνάμεις (εξίσωση 3.16) και συνεχίζοντας αναδρομικά, υπολογίζεται μία διορθωμένη τιμή των ελαστικών δυνάμεων (εξίσωση 3.17). Κατά συνέπεια, για επαρκώς μικρή μεταβολή της παραμόρφωσης  $\delta x_i$  και δεδομένου ότι η ελαστικότητα του ζεύγους  $K$  δεν εξαρτάται μόνο από τον όρο του Hertz, ο υπολογισμός των ελαστικών δυνάμεων είναι επαρκώς ακριβής.

$$C_H^k = C_H(F^{k-1}) \quad (3.16)$$

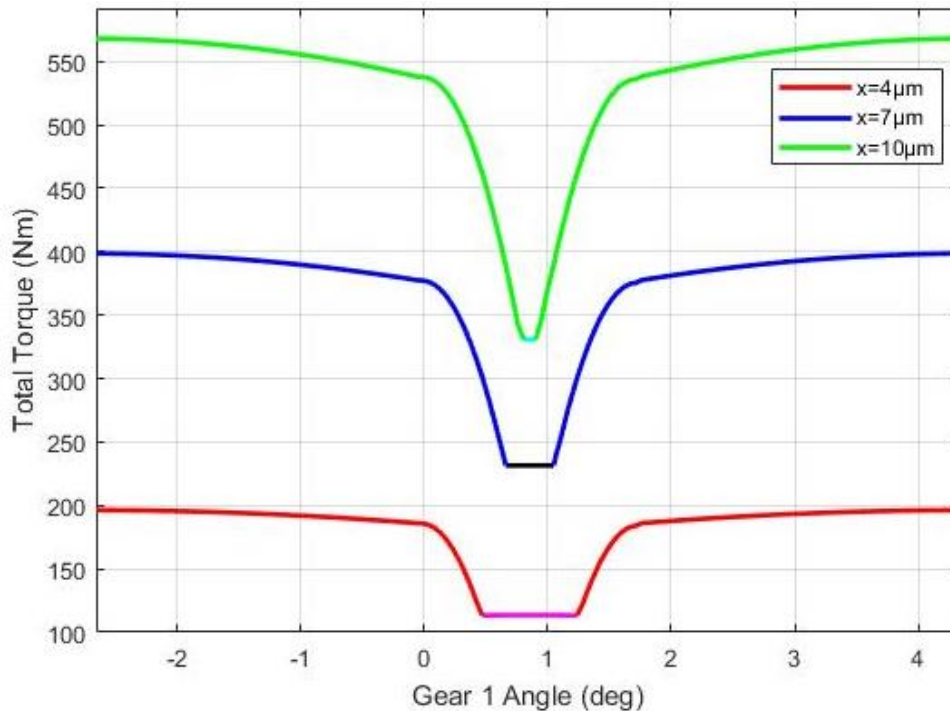
$$F^k = K(\omega_1, C_H^k) \cdot (x^{k-1} + \delta x_i) \quad (3.17)$$

Όπως προαναφέρθηκε, απαιτείται μία ομαλή μεταβολή της παραμόρφωσης του ζεύγους  $x$  ώστε ο ανωτέρω υπολογισμός να είναι ορθός. Παρ' όλα αυτά, κατά την δυναμική προσομοίωση του ζεύγους το  $x$  μπορεί να μεταβάλλεται ιδιαίτερα γρήγορα, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις απώλειας της επαφής ή ανάστροφης επαφής των δοντιών. Κατά συνέπεια, ο υπολογισμός των ελαστικών δυνάμεων θα απαιτούσε πολύ μικρό χρονικό βήμα, με αμφίβολη αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Αντ' αυτού, επιλέγεται η εκ προοιμίου χαρτογράφηση των ροπών λόγω ελαστικής παραμόρφωσης, μέσω διακριτοποίησης των  $\omega_1, x$ . Η διακριτοποίηση της γωνιακής θέσης προφανώς γίνεται λόγω περιοδικότητας για ένα βήμα του πινιόν (εύρος  $\frac{2\pi}{z_1}$ ). Εξασφαλίζοντας πως το  $\omega_1$  στην περιοχή διακριτοποίησης βρίσκεται εντός της γραμμής επαφών ( $AB$ ), το  $x$  καθορίζεται άμεσα από την εξίσωση (3.10). Καθ' αυτόν τον τρόπο, μπορεί στη συνέχεια να γίνει ανάκτηση της σωστής τιμής της ολικής ροπής  $T_{tot}$  μέσω της γνώσης των δύο αυτών παραμέτρων για το ζεύγος εντός της  $AB$ .

Παρακάτω, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αντίστοιχου αλγορίθμου για βαθμίδα οδοντωτών τροχών με τα χαρακτηριστικά που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα. Προφανώς, απαιτείται η επανεκτέλεση του αλγορίθμου γεωμετρικής ανάλυσης ο οποίος αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2.

|                           |
|---------------------------|
| $z_1 = z_2 = 50$          |
| $m = 3 \text{ mm}$        |
| $b = 10 \text{ mm}$       |
| $a_{0x} = a_0 = 20^\circ$ |
| $E = 207 \text{ GPa}$     |
| $\nu = 0.3$               |

Πίνακας 2: Μεγέθη Βαθμίδας



Σχήμα 16: Διάγραμμα Ροπών λόγω ελαστικής παραμόρφωσης οδόντων

Στο Σχήμα 16 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις ροπές λόγω ελαστικής παραμόρφωσης, σε τρεις ενδεικτικές περιπτώσεις σχετικής θέσης των τροχών  $x$ , και για ένα βήμα του πινιόν, γύρω από το μηδέν.

Βάσει του σχήματος αυτού μπορούν να γίνουν συγκεκριμένες παρατηρήσεις αναφορικά με τα αναπτυσσόμενα φορτία. Αρχικά, παρατηρείται αύξηση των ροπών με την αύξηση της συμπίεσης των ζευγών, όχι απαραίτητα γραμμική, όπως άλλωστε περιγράφεται από την εξίσωση (3.14). Η ροπή αυτή παραμένει σταθερή για γωνίες μεγάλου μέτρου, παρουσιάζοντας μία ελάττωση σχεδόν στην μισή της τιμή για μικρές τιμές της  $\omega_1$ . Οι περιοχές αυτές δίδονται στο διάγραμμα με ελαφρώς διαφορετικό χρώμα, για τις τρεις περιπτώσεις συμπίεσης και αντιστοιχούν σε ζώνη επαφής μόνο ενός ζεύγους δοντιών της βαθμίδας. Αν η ελαστικότητα  $K$  θεωρούταν σταθερή και οι επαφές αποκλειστικά εντός της γραμμής επαφών, τότε λόγω των ιδιοτήτων της εξειλιγμένης, κάθε ζεύγος θα είχε κοινή συμπίεση  $x$ . Συνεπώς, από την εξίσωση (3.15), η ολική ροπή στην περίπτωση ενός ζεύγους σε επαφή θα ήταν ακριβώς η μισή από αυτήν δύο ζευγών σε επαφή.

Επιπλέον, παρατηρείται πως η ζώνη της επαφής ενός ζεύγους συρρικνώνεται καθώς το  $x$  αυξάνεται. Το φαινόμενο αυτό, όπως και η ομαλή μετάβαση της τιμής της ροπής από την χαμηλότερη στην υψηλότερη τιμή, δεν είναι δυνατό να ερμηνευθούν βάσει της γραμμής επαφών. Αντιθέτως, η γωνιακή επαφή των τροχών προκαλεί τα φαινόμενα αυτά. Όπως προαναφέρθηκε, για δύο αφόρτιστους οδοντωτούς τροχούς, είναι αδύνατο να υπάρξει γωνιακή επαφή. Καθώς όμως το φορτίο αυξάνεται, τα ζεύγη δοντιών στις περιοχές  $OA$  και  $BΓ$  έρχονται περισσότερο κοντά. Ειδικότερα, στις περιοχές κοντά στα όρια της γραμμής επαφών όπου οι αποστάσεις μεταξύ των οδόντων είναι μικρότερες από αυτές κοντά στο  $O$  και το  $\Gamma$  (λόγω της θεωρίας εξειλιγμένης), τα δόντια αρχίζουν να συμπιέζονται. Συνεπώς, ένα ζεύγος που εξέρχεται της γραμμής επαφών  $AB$  ή πριν να εισέλθει σε αυτήν, συμπιέζεται προκαλώντας ελαστικές δυνάμεις. Όσο αυξάνεται λοιπόν η παραμόρφωση, τόσο αυξάνεται και η περιοχή εντός των  $OA$  και  $BΓ$  για την οποία τα δόντια συνεχίζουν να συνεργάζονται, συρρικνώνοντας την περιοχή για την οποία μόνο ένα ζεύγος βρίσκεται σε επαφή.

### 3.3 Ημι-Αναλυτικός Υπολογισμός Δυσκαμψίας Ζεύγους

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μία προσεγγιστική μέθοδος υπολογισμού της ολικής δυσκαμψίας του ζεύγους, ώστε να καταστεί δυνατή η έκφρασή της με έναν κλειστό τύπο με το ελάχιστο δυνατό σφάλμα. Όπως προαναφέρθηκε, μία τέτοια προσέγγιση μπορεί να οδηγήσει σε ένα αποδοτικό απλοποιημένο δυναμικό μοντέλο με ιδιαίτερα χαμηλό υπολογιστικό κόστος και μεγάλο εύρος εφαρμογής. Για αυτό τον σκοπό χρησιμοποιούνται οι προσεγγιστικές υποθέσεις που αφορούν την τροχιά επαφών και παρουσιάστηκαν εκτενώς στο Κεφάλαιο (2.8).

Απλοποιώντας την τροχιά επαφών στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  η τιμή της κλίσης της γραμμής επαφών αντικαθίσταται στις εξισώσεις (2.23α, 2.23β) ώστε προκύπτει μία απλοποιημένη έκφραση των γωνιών άσκησης των φορτίων επί των οδόντων.

$$\varphi_{1F} = a_0 + \omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2} \quad (3.18\alpha)$$

$$\varphi_{2F} = a_0 - \omega_2 - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2} \quad (3.18\beta)$$

Παρατηρείται πως βάσει της απλοποίησης αυτής, οι γωνίες  $\varphi_{1F}$ ,  $\varphi_{2F}$  εμφανίζονται επίσης στα ορίσματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων κατά την απλοποιημένη έκφραση των δευτερευόντων γεωμετρικών μεγεθών (εξισώσεις 2.53-2.56).

Η απλοποίηση του όρου ενδοτικότητας λόγω κάμψης  $C_b$  (εξίσωση 3.4) σε κλειστό τύπο προαπαιτεί τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων  $I_{1j}$ ,  $I_{2j}$  (εξισώσεις 3.5,3.6), για τα οποία έγινε ήδη λόγος κατά την επιλογή της προσεγγιστικής εκθετικής μορφής  $t(r)$ . Σημειώνεται πως κατά τον υπολογισμό των ενδοτικότητων μέσω του πλήρους γεωμετρικού μοντέλου, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων αυτών έγινε αριθμητικά για την πραγματική κατατομή του οδόντος.

Θεωρώντας την εκθετική μορφή οδόντος (εξίσωση 2.58) και εκτελώντας τις απαραίτητες ολοκληρώσεις, προκύπτουν οι εξής εκφράσεις:

$$I_{1j_s}(\Psi_j) = \frac{e^{\Psi_j K_{2j}} - 1}{K_{1j} K_{2j}} \quad (3.19)$$

$$I_{2j_s} = -\frac{\Psi_j^2}{3K_{1j}^3 K_{2j}} + \frac{2\Psi_j}{9K_{1j}^3 K_{2j}^2} + \frac{2(e^{\Psi_j K_{2j}} - 1)}{27K_{1j}^3 K_{2j}^3} \quad (3.20)$$

$$\text{όπου } \Psi_j = O_j K_j - R_{\min j} = \frac{R_{gj}}{\cos(\varphi_{Fj})} - R_{\min j}$$

Όπως αναλύθηκε κατά την επιλογή της εκθετικής κατανομής πάχους οδόντος, κοντά στην βάση του οδόντος η εκθετική κατανομή πάχους είναι αρκετά κοντινή στην πραγματική γεωμετρία ποδός. Συνεπώς, η προσέγγιση αυτή θα είναι αρκετά ακριβής για γωνίες  $\omega_1$  με μικρή τιμή του  $\Psi_j = O_j K_j - R_{\min j}$ , οπότε και αναμένεται μικρότερο σφάλμα μεταξύ των  $I_{1j_s}$  και  $I_{1j}$ , όπως και μεταξύ των  $I_{2j_s}$  και  $I_{2j}$ , σε .



Βάσει της ανωτέρω παρατήρησης και δεδομένου ότι είναι θεμιτή η έκφραση των προσεγγιστικών ολοκληρωμάτων με έναν όρο του  $\Psi_j$  διευκολύνοντας την έκφραση του αντίστοιχου όρου δυσκαμψίας σε κλειστό τύπο, ελέγχεται η περαιτέρω απλοποίηση των  $I_{1j_s}$ ,  $I_{2j_s}$ . Αναπτύσσοντας την εκθετική συνάρτηση σε ανάπτυγμα Taylor, ισχύει ότι:

$$e^x \geq \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \quad (3.21)$$

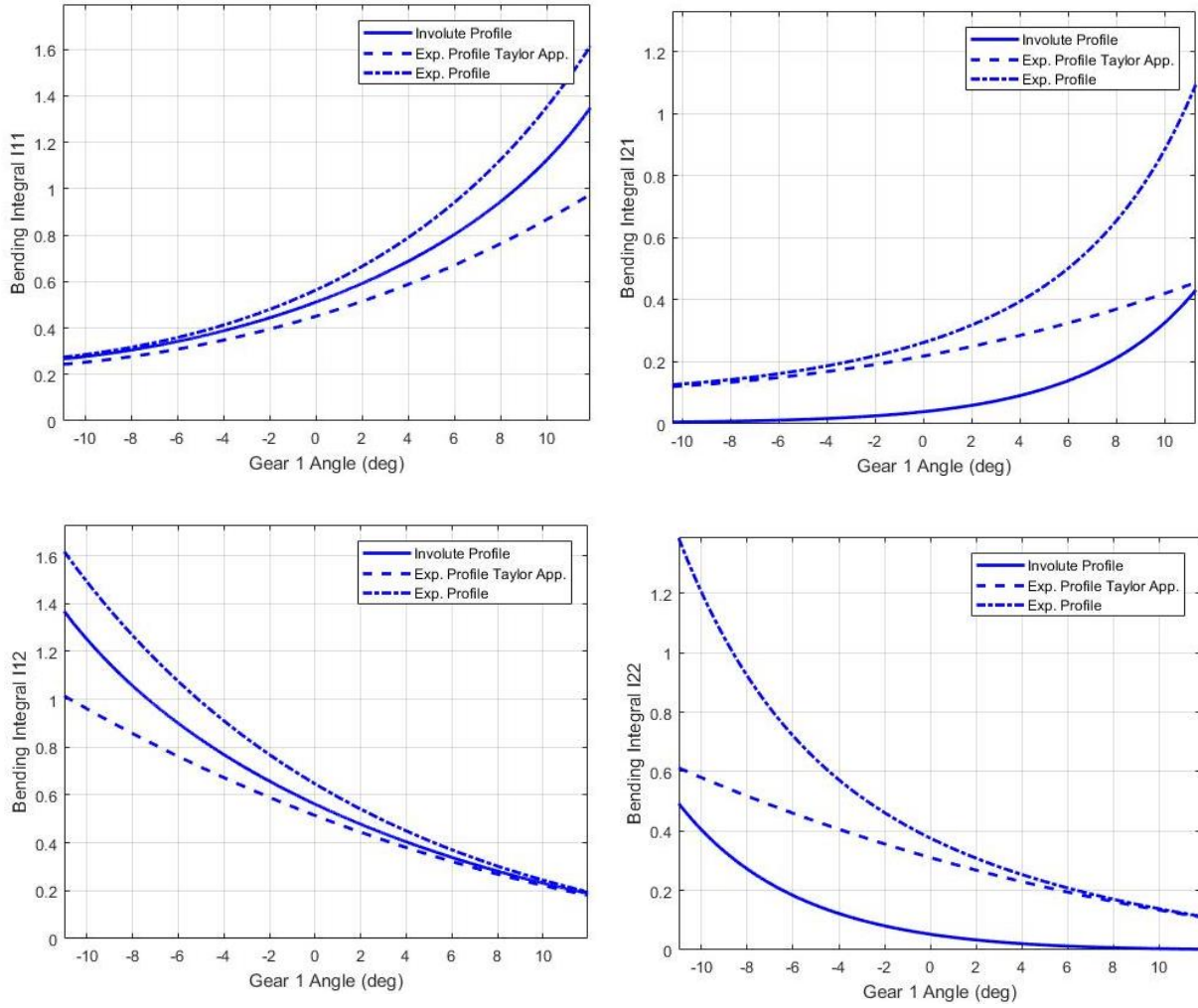
Όπου η ισότητα στην εξίσωση (3.21) ισχύει μόνο για  $x = 0$ . Καθώς το  $x$  αυξάνεται, η διαφορά  $(e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!})$  αυξάνεται επίσης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, αυτό σημαίνει πως για μικρές τιμές του  $\Psi_j$  η προσέγγιση κατά Taylor των  $I_{1j_s}$ ,  $I_{2j_s}$  θα παρουσιάζει περίπου το ίδιο σφάλμα με την χρήση της εκθετικής συνάρτησης. Αντίθετα, καθώς το  $\Psi_j$  αυξάνεται ένα ανάπτυγμα κατά Taylor της εκθετικής συνάρτησης θα λαμβάνει χαμηλότερες τιμές από την ίδια την εκθετική συνάρτηση. Ως αποτέλεσμα, αναμένεται το σφάλμα των  $I_{1j_s}$ ,  $I_{2j_s}$  από τα  $I_{1j}$ ,  $I_{2j}$  αντίστοιχα να μειωθεί για μεγαλύτερο εύρος τιμών του  $\Psi_j$ .

Διατηρώντας τους πρώτους δύο όρους του αναπτύγματος για το  $I_{1j_s}$  και τους πρώτους τρεις όρους για το  $I_{2j_s}$ , προκύπτουν τα παρακάτω μονώνυμα:

$$I_{1j_s} \cong \frac{\Psi_j}{K_{1j}} \quad (3.22)$$

$$I_{2j_s} \cong \frac{4\Psi_j}{9K_{1j}^3 K_{2j}^2} \quad (3.23)$$

Προφανώς, η έκφραση μέσω μονωνύμων των ολοκληρωμάτων μετά από την ανάπτυξη της εκθετικής συνάρτησης σε ανάπτυγμα Taylor σχετίζεται άμεσα και με την μορφή των ολοκληρωμάτων (3.5) και (3.6), τα οποία έχουν τα χαρακτηριστικά συνέλιξης. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα των τεσσάρων ολοκληρωμάτων, υπολογιζόμενα αριθμητικά για την πραγματική κατανομή πάχους του οδόντος, μαζί με την αρχική προσέγγιση εκθετικής κατανομής και την προσέγγιση μονωνύμου μέσω αναπτύγματος Taylor.



Σχήμα 17: Συγκριτικό Διάγραμμα Καμπτικών Ολοκληρωμάτων μέσω πλήρους και ημι-αναλυτικού υπολογισμού

Παρατηρούμε πως πράγματι, η προσέγγιση μονωνύμων μέσω αναπτύγματος Taylor βρίσκεται κάτω από την αντίστοιχη προσέγγιση μέσω εκθετικής συνάρτησης. Το σφάλμα για τα ολοκληρώματα  $I_{2j_s}$  είναι σημαντικά χαμηλότερο για την προσέγγιση μονωνύμων, ενώ το σφάλμα για τα  $I_{1j_s}$  είναι περίπου το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις. Τελικώς επιλέγεται η προσέγγιση μονωνύμων, βάσει και της πολύ απλούστερης έκφρασής της, με στόχο την τελική απλοποιημένη έκφραση της ολικής ελαστικότητας του ζεύγους.

Πλέον, από την εξίσωση (3.4) μπορεί να προκύψει ο απλοποιημένος όρος ενδοτικότητας λόγω κάμψης του οδόντος  $C_{b1_s}$  ως εξής:

$$C_{b1_s} = 12 \left( \frac{4\Psi_j}{9K_{1j}^3 K_{2j}^2} (\cos(\varphi_{jF}))^2 + \left( 0.2(1 + \nu_j) + \frac{1 - (\cos(\varphi_{jF}))^2}{12} \right) \frac{\Psi_j}{K_{1j}} \right) \quad (3.24)$$

Εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις και εισάγοντας έναν διορθωτικό συντελεστή  $f_1 = 0.98$  λόγω των ανωτέρω προσεγγίσεων, ο αντίστοιχος όρος ενδοτικότητας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$C_{bj_s} = A_{mj_s} (\cos(\varphi_{jF}))^2 + f_1 B_{mj_s} \cos(\varphi_{jF}) + \frac{C_{mj_s}}{\cos(\varphi_{jF})} - D_{mj_s} \quad (3.25)$$

Για μικρές γωνίες  $\varphi_{jF}$ , θεωρείται  $\frac{C_{mj_s}}{\cos(\varphi_{jF})} \cong C_{mj_s}$ . Συνεπώς η ενδοτικότητα λόγω κάμψης του οδόντος προσεγγίζεται μέσω της εξίσωσης (3.25), ως δευτέρου βαθμού πολυώνυμο του  $\cos(\varphi_{jF})$ .

$$C_{bj_s} = A_{mj_s} (\cos(\varphi_{jF}))^2 + f_1 B_{mj_s} \cos(\varphi_{jF}) + (C_{mj_s} - D_{mj_s}) \quad (3.26)$$

Οι συντελεστές της ανωτέρω εξίσωσης δίνονται παρακάτω:

$$A_{mj_s} = -12 \left( \frac{0.2(1 + \nu_j) - \frac{1}{12}}{K_{1j}} + \frac{4}{9K_{1j}^3 K_{2j}^2} \right) R_{minj} \quad (3.27\alpha)$$

$$B_{mj_s} = 12 \left( \frac{0.2(1 + \nu_j) - \frac{1}{12}}{K_{1j}} + \frac{4}{9K_{1j}^3 K_{2j}^2} \right) R_{gj} \quad (3.27\beta)$$

$$C_{mj_s} = \frac{R_{gj}}{K_{1j}} \quad (3.27\gamma)$$

$$D_{mj_s} = \frac{R_{minj}}{K_{1j}} \quad (3.27\delta)$$

Ο όρος ενδοτικότητας ποδός βάσει της ημι-εμπειρικής σχέσης του O' Donnel (εξίσωση (3.7)) μπορεί να γραφεί άμεσα ως τριώνυμο του  $\cos(\varphi_{jF})$  για την γραμμή επαφών  $AB$ , χωρίς καμία παραδοχή ή υπόθεση.

$$C_{fj_s} = A_{tj_s} (\cos(\varphi_{jF}))^2 + B_{tj_s} \cos(\varphi_{jF}) + C_{tj_s} \quad (3.28)$$

Οι αντίστοιχοι συντελεστές παρουσιάζονται παρακάτω:

$$A_{tj_s} = \left( 4.82 + \frac{25}{t^2 (R_{minj})} R_{minj}^2 \right) \frac{(1 - \nu_j^2)}{\pi} - \frac{1}{2.4(1 + \nu_j)} - \frac{2(1 - 2\nu_j)(1 + \nu_j)R_{minj}}{t(R_{minj})} \quad (3.29\alpha)$$

$$B_{tj_s} = \frac{2(1 - 2\nu_j)(1 + \nu_j)}{t(R_{minj})} R_{gj} - 2 R_{gj} R_{minj} \frac{25(1 - \nu_j^2)}{\pi t^2 (R_{minj})} \quad (3.29\beta)$$

$$C_{tj_s} = R_{gj}^2 \frac{25(1 - \nu_j^2)}{\pi t^2 (R_{min_j})} + \frac{1}{2.4(1 + \nu_j)} \quad (3.29\gamma)$$

Όσον αφορά τον όρο δυσκαμψίας κατά Hertz  $C_H$ , όπως φαίνεται από τα διαγράμματα ενδοτικότητας (Σχήμα 14) ο όρος αυτός δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα συναρτήσει της γωνίας του πινιόν  $\omega_1$ . Ως αποτέλεσμα, θεωρείται πως η ενδοτικότητα κατά Hertz εξαρτάται μόνο από το φορτίο  $F$  κατά την συμπίεση των οδόντων. Έχοντας μία μέση τιμή της ενδοτικότητας των οδόντων  $K_{mean}$  (είτε μέσω της πλήρους ανάλυσης είτε μέσω απλής ανάλυσης ιδιοσυχνοτήτων μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων), θεωρείται πως το φορτίο  $F$  μπορεί να γραφεί ως:

$$F = K_{mean} x \cong \varepsilon K_{tooth} x \quad (3.30)$$

Επομένως η ενδοτικότητα κατά Hertz προσεγγίζεται ως εξής:

$$C_{H_s} = K_{1H} (K_{2H} - \ln(|x|)) \quad (3.31)$$

Όπου οι συντελεστές της εξίσωσης (3.31) δίνονται παρακάτω:

$$K_{1H} = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi} \quad (3.32\alpha)$$

$$K_{2H} = \ln \left( \frac{K_\alpha \pi b E}{2K_{mean}(1 - \nu^2)} \right) - \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (3.32\beta)$$

$$K_\alpha = (R_{g1} + R_{g2}) \tan(a_0) \left( 1 - \frac{\tan(a_0 - \omega_2(\omega_1 = 0) - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2}) a_0 + \tan(a_0 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2}) (\tan(a_0 - \omega_2(\omega_1 = 0) - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2}) - (a_0 - \omega_2(\omega_1 = 0)))}{a_0(a_0 - \omega_2(\omega_1 = 0))} \right)$$

Συνδυάζοντας τους ανωτέρω όρους (εξισώσεις (3.26), (3.28), (3.31)), μπορεί να βρεθεί η ολική προσεγγιστική ελαστικότητα του ζεύγους  $K_{tot_s}(\omega_1, x)$  σε κλειστή μορφή, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.2) και (3.3).

$$K_{tot_s}(\omega_1, x) = b \left( A_{tot1} \cos \left( a_0 + \omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2} \right)^2 + B_{tot1} \cos \left( a_0 + \omega_1 - \frac{\varphi_{o\lambda 1}}{2} \right) \right. \\ \left. + A_{tot2} \cos \left( a_0 - \left( \frac{1}{i_{12}} \omega_1 + \omega_2(\omega_1 = 0) \right) - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2} \right)^2 \right. \\ \left. + B_{tot2} \cos \left( a_0 - \left( \frac{1}{i_{12}} \omega_1 + \omega_2(\omega_1 = 0) \right) - \frac{\varphi_{o\lambda 2}}{2} \right) + C_{ov} + D_{ov} \ln(|x|) \right)^{-1} \quad (3.33)$$

$$A_{tot1} = \frac{A_{m1_s} + A_{t1_s}}{E_1} \quad (3.34\alpha)$$

$$A_{tot2} = \frac{A_{m2s} + A_{t2s}}{E_2} \quad (3.34\beta)$$

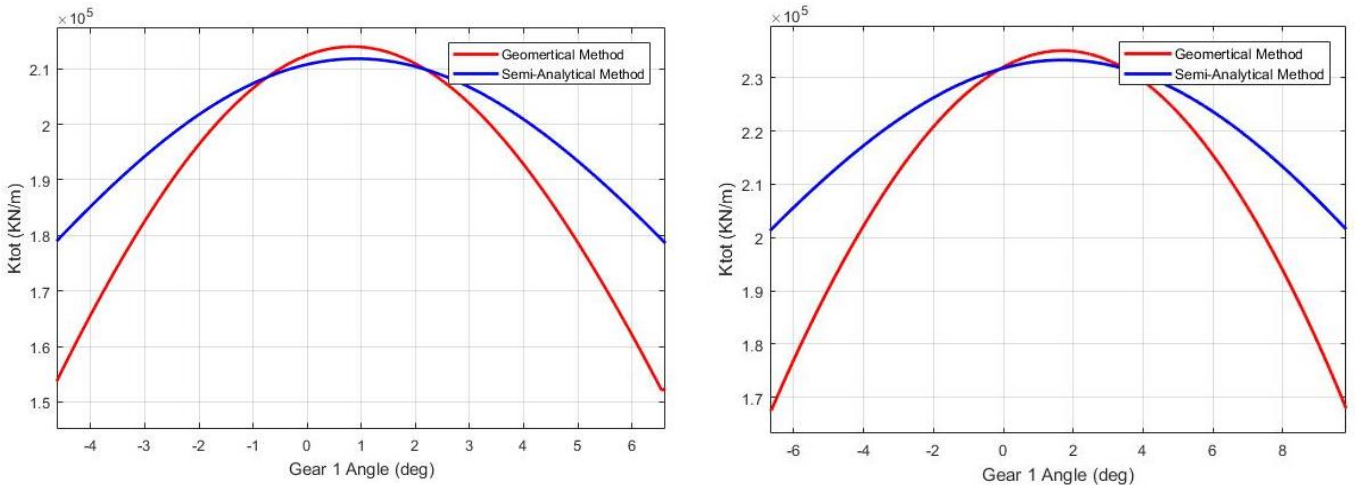
$$B_{tot1} = \frac{f_1 B_{m1s} + B_{t1s}}{E_1} \quad (3.34\gamma)$$

$$B_{tot2} = \frac{f_1 B_{m2s} + B_{t2s}}{E_2} \quad (3.34\delta)$$

$$C_{ov} = \left( \frac{K_{1H}K_{2H}}{E} + \frac{C_{m1s} - D_{m1s} + C_{t1s}}{E_1} + \frac{C_{m2s} - D_{m2s} + C_{t2s}}{E_2} \right) \quad (3.34\epsilon)$$

$$D_{ov} = -\frac{K_{1H}}{E} \quad (3.34\sigma\tau)$$

Ακολούθως παρουσιάζονται συγκριτικά διαγράμματα ανάμεσα στην ολική ελαστικότητα μέσω του πλήρους μοντέλου  $K_{tot}(\omega_1, x)$  και την προσεγγιστική ελαστικότητα  $K_{tot_s}(\omega_1, x)$  για δύο διαφορετικά ζεύγη οδοντωτών τροχών. Σημειώνεται πως το  $K_{tot}(\omega_1, x)$  προκύπτει μετά από αρκετούς αριθμητικούς υπολογισμούς όπως παρουσιάστηκε εκτενώς, ενώ το  $K_{tot_s}(\omega_1, x)$  προκύπτει άμεσα από την εξίσωση (3.33). Προφανώς η σύγκριση πραγματοποιείται αποκλειστικά για την περιοχή γραμμής επαφής  $AB$  για την οποία αναπτύχθηκε ο παραπάνω ημι-αναλυτικός τύπος.



$$z_1 = 56, z_2 = 40, m = 2 \text{ mm}, a_0 = 20^\circ$$

$$z_1 = 33, z_2 = 48, m = 3 \text{ mm}, a_0 = 25^\circ$$

Σχήμα 18: Συγκριτικό Διάγραμμα Ελαστικότητας Γεωμετρικού και Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου

Παρατηρείται πως ο ημι-αναλυτικός τύπος  $K_{tot_s}(\omega_1, x)$  έχει παρόμοια μορφή με το  $K_{tot}(\omega_1, x)$ . Το μέγιστο σφάλμα που παρουσιάζεται είναι της τάξης του 15% στα άκρα της τροχιάς επαφών, ενώ πιο κοντά στο  $\omega_1 = 0$  η προσέγγιση είναι αρκετά ακριβής. Από την σύγκριση για δύο ζεύγη με αρκετά διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά, φαίνεται επίσης πως ο ημι-αναλυτικός υπολογισμός  $K_{tot_s}(\omega_1, x)$  παρουσιάζει περίπου σταθερό σφάλμα και στις δύο περιπτώσεις. Έχοντας συνεπώς υπόψιν το σφάλμα που εισάγει η παραπάνω απλοποίηση, αυτή μπορεί να

εφαρμοσθεί με περίπου το ίδιο ποσοστό ακρίβειας σε ένα εύρος διαφορετικών οδοντωτών τροχών.

### 3.4 Ημι-Αναλυτικός Υπολογισμός Δυνάμεων Επαφής μέσω Wavelets

Ο πλήρης υπολογισμός που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3.2 έχει ως αποτέλεσμα την διακριτοποίηση των ροπών  $T_{totj}$  σε πίνακα τιμών, συναρτήσεων των μεταβλητών  $\omega_1$  και  $x$ . Σε αυτό το σημείο, με βάση την απλοποίηση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, δομείται σε κλειστό τύπο η ολική ροπή για κάθε ζεύγος, λόγω ελαστικών δυνάμεων. Πρόκειται δηλαδή για την συνέχιση της δόμησης ενός προσεγγιστικού δυναμικού μοντέλου κλειστού τύπου, παράλληλα με τον πλήρη γεωμετρικό υπολογισμό.

Δεδομένου ότι κατά τις συνήθεις περιπτώσεις ο αριθμός ζευγών οδόντων που βρίσκονται ταυτόχρονα σε επαφή είναι 1 ή 2 (ο λόγος επικάλυψης  $\varepsilon = 1.3$  έως 1.9), μπορεί να ευρεθεί αναλυτικά το εύρος της γωνίας  $\omega_1$  για την οποία μόνο ένα ζεύγος βρίσκεται σε επαφή.

Πιο συγκεκριμένα, όταν  $\omega_1 = \omega_A$  (αρχή της γραμμής επαφών  $AB$ ), το επόμενο δόντι σε επαφή θα βρίσκεται σε θέση  $(\omega_A + \frac{2\pi}{z_1})$ . Αντίστοιχα όταν  $\omega_1 = \omega_B$ , το προηγούμενο δόντι σε επαφή θα βρίσκεται σε θέση  $(\omega_B - \frac{2\pi}{z_1})$ . Αυτό σημαίνει, πως η περιοχή για την οποία μόνο ένα ζεύγος δοντιών βρίσκονται σε επαφή θα είναι (βλ. Σχήμα 5):

$$\omega_B - \frac{2\pi}{z_1} < \omega_1 < \omega_A + \frac{2\pi}{z_1} \quad (3.35)$$

Δεδομένου πως για την βαθμίδα ισχύει  $\varepsilon > 1$ , προκύπτει και θεωρητικά πως  $\omega_B - \frac{2\pi}{z_1} < \omega_A + \frac{2\pi}{z_1}$  άρα πράγματι η εξίσωση (3.35) έχει ισχύ.

Ως αποτέλεσμα, στην περίπτωση όπου  $\omega_B > \omega_1 > \omega_A + \frac{2\pi}{z_1}$ , τα ζεύγη σε γωνιακή θέση  $\omega_1$  και  $(\omega_1 - \frac{2\pi}{z_1})$  αποτελούν τα δύο ζεύγη οδόντων σε επαφή. Αντίστοιχα, εάν  $\omega_A < \omega_1 < \omega_B - \frac{2\pi}{z_1}$ , το ζεύγος σε γωνιακή θέση  $\omega_1$  και αυτό σε θέση  $(\omega_1 + \frac{2\pi}{z_1})$  βρίσκονται εντός της  $AB$ .

Ακόμα, λόγω της θεωρίας εξειλιγμένης, η συμπίεση όλων των ζευγών σε επαφή είναι θεωρητικά η ίδια,  $x$ . Έχοντας προσδιορίσει τις περιοχές επαφής ενός και δύο ζευγών εντός της γραμμής επαφών  $AB$ , αρκεί η υπέρθεση της ελαστικότητας  $K_{tot_s}$  στις περιοχές όπου δύο ζεύγη έρχονται σε επαφή, ώστε να προκύψει η ολική ελαστική δύναμη:

$$F_{tot_s} = \left( K_{tot_s}(\omega_1, x) + g(\omega_1, x)K_{tot_s}(f(\omega_1), x) \right) x \quad (3.36)$$

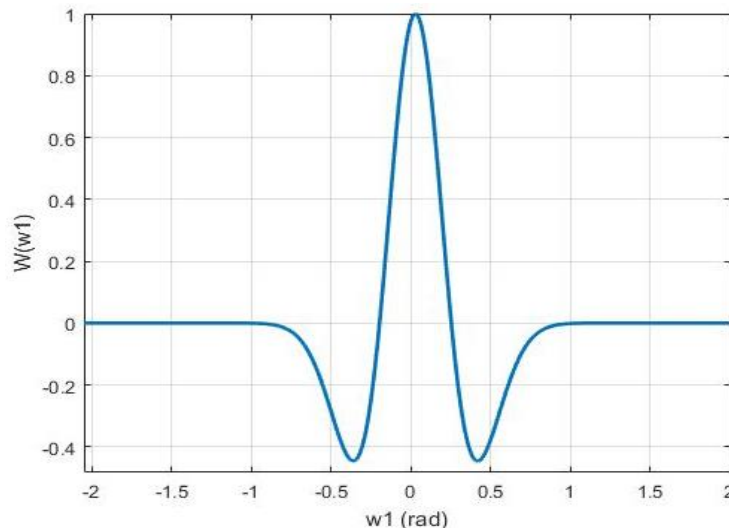
Η συνάρτηση  $g(\omega_1, x)$  θα πρέπει να λαμβάνει τιμές από 0 έως 1 καθορίζοντας την ύπαρξη ή μη δεύτερου ζεύγους σε επαφή. Αντίστοιχα η συνάρτηση  $f(\omega_1)$  θα πρέπει να καθορίζει αν το δεύτερο ζεύγος που έρχεται σε επαφή είναι πριν ή μετά το ζεύγος στην θέση  $\omega_1$ . Προφανώς, όπως και στην πλήρη ανάλυση των ελαστικών δυνάμεων, λόγω περιοδικότητας αρκεί ο υπολογισμός για ένα βήμα του πινιόν,  $2\pi/z_1$ .

Η επιλογή κατάλληλης συνάρτησης  $g(\omega_1, x)$ , θα πρέπει να βασίζεται σε δύο επιπλέον προδιαγραφές πέραν του πεδίου τιμών της, που σχετίζονται με φαινόμενα γωνιακής επαφής. Όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.8, η ανάπτυξη των ημι-αναλυτικών εξισώσεων έγινε αμελώντας τις περιοχές γωνιακής επαφής  $OA, BG$ . Παρ' όλα αυτά, κατά την ανάπτυξη των απλοποιημένων εκφράσεων  $T_{tot_sj}$ , οι περιοχές αυτές θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν, καθώς επηρεάζουν άμεσα την δυναμική συμπεριφορά των οδοντώσεων. Όπως αναδείχθηκε στο Σχήμα 16, η μεταβολή από επαφή δύο ζευγών σε επαφή ενός ζεύγους γίνεται με ομαλό τρόπο. Επομένως, η  $g(\omega_1, x)$  θα πρέπει να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση, αποκλείοντας συναρτήσεις τύπου Heaviside. Επιπλέον, βάσει του ίδιου σχήματος έγινε εμφανές πως το διάστημα μονής επαφής επηρεάζεται από την συμπίεση των οδόντων  $x$  (λόγω και πάλι των γωνιακών επαφών). Συνεπώς, θα πρέπει η προς επιλογή συνάρτηση να επιτρέπει την μεταβολή του τμήματος όπου λαμβάνει τιμές κοντά στο 0 (περιοχή μονής επαφής). Άρα, θα πρέπει επίσης να αποκλειστούν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, καθώς δεν δύνανται να μοντελοποιήσουν το φαινόμενο αυτό.

Τελικώς, επιλέγεται τροποποιημένη συνάρτηση κυματιδίων (Ricker Wavelet), η οποία δίδεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$W(\omega_1) = \left(1 - 2\pi^2 f_m^2 \left(\omega_1 - \frac{\omega_A + \omega_B}{2}\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_c^2 \left(\omega_1 - \frac{\omega_A + \omega_B}{2}\right)^2} \quad (3.37)$$

Η εισαγωγή της επιπρόσθετης παραμέτρου  $f_c$  συγκριτικά με την κλασσική συνάρτηση κυματιδίου Ricker γίνεται ώστε να ελεγχθεί η υπερακόντιση που παρουσιάζει η συνάρτηση αυτή κατά την μετάβαση από το 0 στο 1, όπως φαίνεται στο διάγραμμα (Σχήμα 19) για  $f_c = 1$  και τυχαία τιμή της  $f_m$ .



Σχήμα 19: Γράφημα Τυπικής Συνάρτησης Κυματιδίου Ricker

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.37), προκύπτει πως το εύρος μεταξύ των ελαχίστων τιμών ισούται με την παράμετρο  $f_m$ , ενώ η τιμή των ελαχίστων μπορεί να ελεγχθεί μέσω της παραμέτρου  $f_c$ . Στην συγκεκριμένη εφαρμογή, το εύρος μεταξύ των ελαχίστων τιμών θα πρέπει να ισούται με το εύρος για το οποίο μόνο ένα δόντι βρίσκεται σε επαφή.

Όπως παρουσιάστηκε στο Σχήμα 16, το εύρος αυτό μειώνεται συναρτήσει της συμπίεσης  $x$ . Το εύρος όπου συμβαίνει συνεργασία δύο ζευγών αυξάνεται, έως το σημείο εκείνο του τόξου  $BΓ$

(Σχήμα 5) για το οποίο, με την υπάρχουσα συμπίεση, τα ευρισκόμενα εκεί δόντια εφάπτονται οριακά. Δεδομένου πως η συμπίεση  $x$  μετράται επί της γραμμής επαφών, είναι δυνατόν να βρεθεί η γωνία αυτή του πινιόν  $\omega_1^{BF} = \omega_1(x)$ . Αντίστοιχα συμβαίνει στην περιοχή  $OA$ . Επομένως, το εύρος της περιοχής μονής επαφής θα περιορισθεί περαιτέρω κατά την επέκταση αυτή των ορίων επαφής δύο ζευγών. Η εξίσωση του σφάλματος μετάδοσης (3.12), μπορεί επί της γραμμής επαφών να γραφεί με έναν ισοδύναμο, ελαφρά διαφορετικό τρόπο:

$$x_{AB} = R_{g1}\omega_1 - R_{g2}(\omega_2 - \omega_{2_0}) \quad (3.38)$$

Όπου  $\omega_{2_0}$  είναι η γωνιακή θέση του δοντιού του συνεργαζόμενου τροχού για επαφή με το αντίστοιχο δόντι του πινιόν, όταν αυτό είναι σε γωνιακή θέση  $\omega_1 = 0$ , οπότε προφανώς από την ανωτέρω εξίσωση θα είναι  $x = 0$ .

Το  $\omega_{2_0}$  προκύπτει, παρατηρώντας πως λόγω της κοινής κλίσης επί της γραμμής επαφών, θα ισχύει:

$$\sin(a_0 - a_1) R_1 = \sin(a_0 - a_2) R_2 \quad (3.39)$$

Και εκτελώντας τις πράξεις είναι:

$$\omega_{2_0} = \left( \frac{R_{g1}}{R_{g2}} + 1 \right) (a_0 - \tan(a_0)) = -\varphi_{R_{b1}} \left( \frac{R_{g1}}{R_{g2}} + 1 \right) \quad (3.40)$$

Συνεπώς, με την υπάρχουσα συμπίεση  $x_{AB}$  επί της γραμμής επαφών, αναζητείται η γωνία  $\omega_1^{BF}$  για την οποία το ευρισκόμενο εκεί δόντι του πινιόν θα εφάπτεται στο αντίστοιχο δόντι του συνεργαζόμενου τροχού.

Γνωρίζοντας πως στην περιοχή  $B\Gamma$  ισχύει  $R_E = R_{max_1}$ , βρίσκονται τα  $x_E$  και  $y_E$  από τις εξισώσεις (2.3) και (2.4). Στην συνέχεια, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.5) και (2.6) στην (2.7), η γωνία  $\omega_2$  εκφράζεται συναρτήσει του  $\omega_1$ :

$$\omega_2(\omega_1^{BF}) = a \sin \left( \frac{R_{max_1} \sin(\omega_1^{BF} - \varphi_1^{BF})}{R_{E2}(\omega_1^{BF})} \right) - \left( \tan \left( \arccos \left( \frac{R_{g2}}{R_{E2}(\omega_1^{BF})} \right) \right) - \arccos \left( \frac{R_{g2}}{R_{E2}(\omega_1^{BF})} \right) \right) \quad (3.41)$$

Συνεπώς προκύπτει από την (3.36) μία πεπλεγμένη εξίσωση της τιμής της επέκτασης περιοχής διπλής επαφής  $\omega_1^{BF}$  συναρτήσει του  $x$ . Αντίστοιχα μπορεί να γίνει για την γωνιακή επαφή  $OA$ . Λόγω της μεγάλης προστιθέμενης πολυπλοκότητας στην μέθοδο αυτή και παρατηρώντας μία προσεγγιστικά σταθερή μεταβολή για έναν αριθμό διαφορετικών ζευγών, η επέκταση του εύρους διπλής επαφής περιορίζεται κατά την παρούσα εργασία, στην ενσωμάτωση όρου ( $c_x x$ ). Ο συντελεστής λαμβάνει τυπική τιμή βάσει διαγραμμάτων όπως του Σχήματος 16, σε  $c_x \cong 2 \text{ deg/mm}$ . Επίσης, οι ελάχιστες τιμές θα πρέπει να μεταφερθούν κατά το δυνατόν κοντύτερα στο μηδέν, ώστε να μην παρουσιάζονται φαινόμενα υπερακόντισης. Τελικώς, εκλέγοντας τις παρακάτω τιμές, επιτυγχάνεται μετατόπιση των ελαχίστων τιμών στο  $W_{min} = -0.02$ .

$$f_m = \frac{\sqrt{3}}{\pi \left( \frac{4\pi}{z_1} - (\omega_B - \omega_A) - c_x x \right)} \quad (3.42)$$

$$f_c = 2 f_m \quad (3.43)$$



Οπότε, τελικά θα είναι:

$$g(\omega_1, x) = 1 - W(\omega_1, x) \quad (3.44)$$

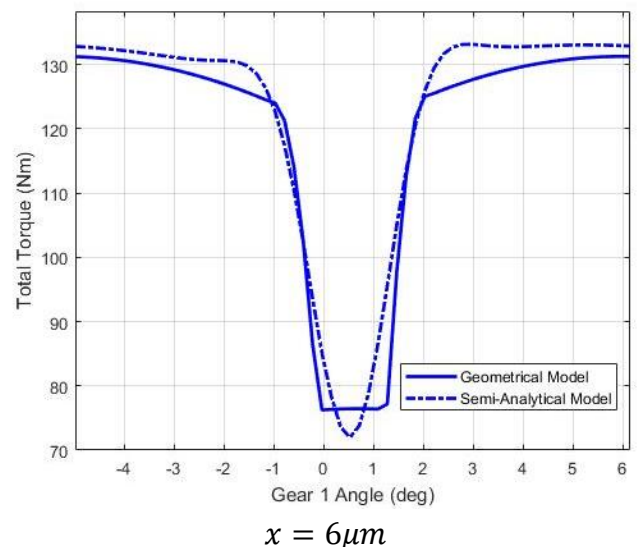
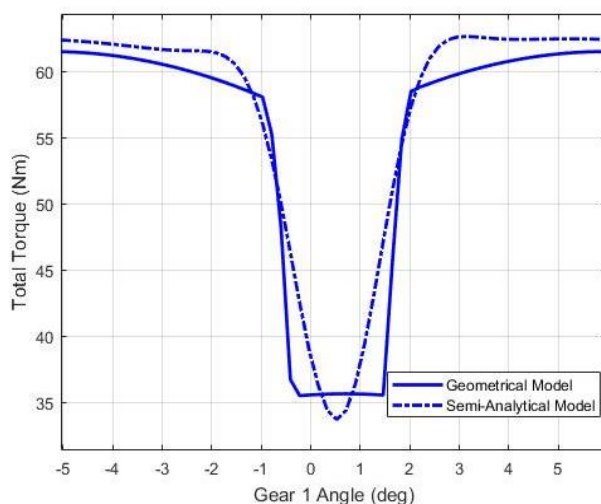
Καθ' αυτό τον τρόπο, μέσω του συντελεστή  $f_m$ , το δεύτερο ζεύγος σε επαφή λαμβάνεται υπόψιν στα αντίστοιχα διαστήματα (εξίσωση 3.35). Συνεπώς, η συνάρτηση  $f(\omega_1)$  αρκεί να καθορίζει αν πρόκειται για το επόμενο ή το προηγούμενο ζεύγος από αυτό που βρίσκεται στην θέση  $\omega_1$ . Άρα η συνάρτηση αυτή θα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση.

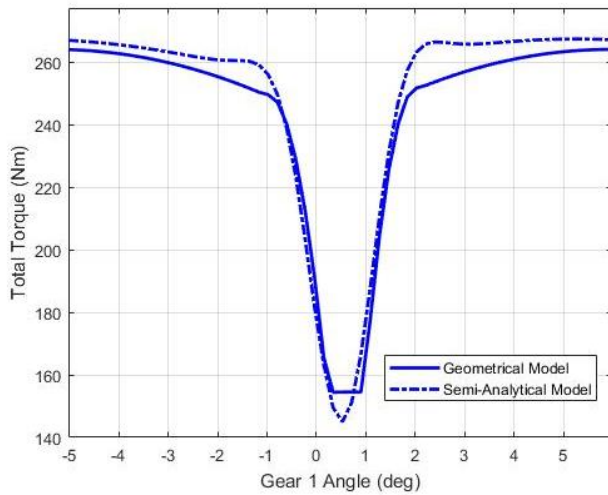
$$f(\omega_1) = \omega_1 - \text{sgn}(\omega_1) \frac{2\pi}{z_1} \quad (3.45)$$

Βάσει των ανωτέρω, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.44, 3.45) στην εξίσωση (3.36), οι ελαστικές δυνάμεις λόγω συμπίεσης των οδόντων μπορούν να γραφούν σε κλειστή μορφή. Οι αντίστοιχες ροπές, δεδομένου πως ο μοχλοβραχίονας για την περιοχή  $AB$  είναι σταθερός και ίσος με τον  $R_{gj}$  προκύπτουν άμεσα:

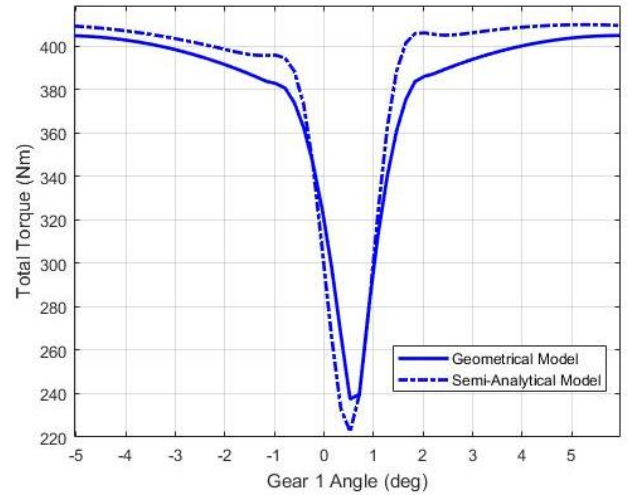
$$T_{tot_{s_j}} = F_{tot_s} R_{gj} \quad (3.46)$$

Ακολούθως, παρουσιάζεται συγκριτικό διάγραμμα ανάμεσα στην ολική ροπή λόγω ελαστικών δυνάμεων  $T_{tot_1}$  που υπολογίστηκε αριθμητικά μέσω του πλήρους γεωμετρικού μοντέλου και την προσεγγιστική ολική ροπή  $T_{tot_{s_1}}$  του ημι-αναλυτικού μοντέλου. Η σύγκριση αφορά το ζεύγος με γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτά του Πίνακα 1.





$$x = 12\mu m$$



$$x = 18\mu m$$

Σχήμα 20: Συγκριτικά διαγράμματα Ροπών Γεωμετρικού και Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου

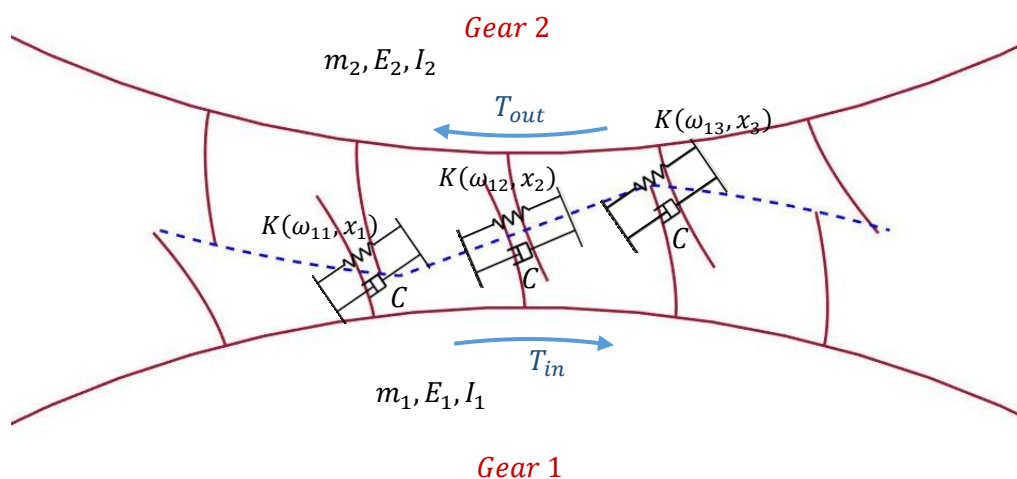
Παρατηρείται πως σε όλες τις περιπτώσεις στατικού σφάλματος μετάδοσης  $x$  η ημι-αναλυτική μέθοδος δίνει αποτελέσματα αρκετά κοντινά σε αυτά της πλήρους, γεωμετρικής μεθόδου. Επίσης, ανιχνεύεται τόσο η μεταβολή του εύρους μονής επαφής, όπως και ο ασυμμετρία στις περιοχές διπλής επαφής, μέσω της συνάρτησης  $f(\omega_1)$ . Αν και το μέγιστο σφάλμα στον υπολογισμό της ενδοτικότητας ήταν της τάξεως του 15% για περιοχές κοντά στα άκρα της γραμμής επαφών, στις περιοχές αυτές υπάρχουν δύο ζεύγη οδόντων σε επαφή. Κατά συνέπεια, το πολύ χαμηλότερο σφάλμα στις περιοχές κοντά στο μέσο της τροχιάς επαφών, όπου βρίσκεται το δεύτερο ζεύγος, ελαττώνει το ολικό σφάλμα που προκύπτει από την εξίσωση (3.46). Αντιστοίχως, η συνάρτηση  $W(\omega_1, x)$  (εξίσωση 3.37) παρουσιάζει εκ κατασκευής υπερακόντιση σε δύο συμμετρικές θέσεις, συνεπώς αν και αυτή έχει ελαττωθεί σημαντικά, συνεχίζει να προκαλεί σφάλμα συγκριτικά με την πλήρη θεώρηση. Θα πρέπει τέλος, να σημειωθεί πως η συνάρτηση που θεωρήθηκε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Ως αποτέλεσμα, σε πολύ χαμηλά φορτία (της τάξεως των  $T < 10 Nm$ ) όπου η μετάβαση από ένα σε δύο ζεύγη σε επαφή είναι πρακτικά ακαριαία, τα αποτελέσματα δυναμικής προσομοίωσης του ημι-αναλυτικού μοντέλου αναμένεται παρέχουν μόνο μία γενική εικόνα της πραγματικής απόκρισης. Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα αναμένονται αρκετά ακριβή για ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών, έως ιδιαίτερα αυξημένα φορτία (στην συγκεκριμένη περίπτωση ακόμη και για  $T > 400 Nm$ ).

## 4 Δυναμικά Μοντέλα Διαλείπουσας Επαφής

### 4.1 Εξισώσεις Κίνησης Βαθμίδας

Μετά τον υπολογισμό του πίνακα των ελαστικών ροπών συναρτήσει της γωνίας  $\omega_1$  και του σφάλματος μετάδοσης  $x$ , πραγματοποιείται η δόμηση ενός δυναμικού μοντέλου δύο βαθμών ελευθερίας για το ζεύγος των οδοντωτών τροχών.

Θεωρείται πηγή ροπής  $T_{in}$  γύρω από τον άξονα περιστροφής του πινιόν και φορτίο  $T_{out}$  επί του συνεργαζόμενου τροχού. Ακόμα ενσωματώνεται όρος απόσβεσης  $C$ , ο οποίος μοντελοποιεί την μικρή αλλά υπαρκτή απόσβεση του υλικού αλλά και την απορρόφηση ενέργειας μέσω του λιπαντικού που υπάρχει στα διάκενα μεταξύ των οδόντων βαθμίδας. Μία απεικόνιση του δυναμικού μοντέλου παρουσιάζεται στο Σχήμα 21.



Σχήμα 21: Δυναμική Μοντελοποίηση Σφάλματος Μετάδοσης

Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των δύο τροχών γύρω από τα ακλόνητα κέντρα περιστροφής τους, δίνονται παρακάτω.

$$I_1 \frac{d^2 \omega_1}{dt^2} = T_{in} - s \left( s C \sum_i R_{c1,i} \frac{dx}{dt} + T_{tot_1}(\omega_1, x) \right) \quad (4.1)$$

$$I_2 \frac{d^2 \omega_2}{dt^2} = -T_{out} + s \left( s C \sum_i R_{c2,i} \frac{dx}{dt} + T_{tot_2}(\omega_1, x) \right) \quad (4.2)$$

όπου τα  $I_{1,2}$  αποτελούν τις πολικές ροπές των τροχών, ο δείκτης  $s$  με τιμές  $0, \pm 1$  υποδεικνύει την εμφάνιση απώλειας επαφής ή αναστροφής των επαφών, ενώ ο όρος  $\frac{dx}{dt}$  αποτελεί την χρονική

παράγωγο του σφάλματος μετάδοσης, κοινή για όλα τα ζεύγη, λόγω περιστροφής των τροχών ως στερεών σωμάτων. Λόγω του αλγεβρικού ορισμού του  $\frac{dx}{dt}$ , ο όρος απόσβεσης πολλαπλασιάζεται με  $s^2$  σε αντίθεση με τον όρο ροπών λόγω ελαστικής παραμόρφωσης, οι οποίες όπως αναλύθηκε προκύπτουν πάντοτε θετικές.

Η ροπή αδράνειας για τους τροχούς 1,2 δίνεται προσεγγιστικά από την παρακάτω εξίσωση (μετά από κατάλληλη μετατροπή μονάδων) θεωρώντας κυλίνδρους ακτίνας  $R_b$ , με  $\rho$  την πυκνότητα του υλικού των τροχών.

$$I_i = \frac{1}{2} \pi R_{bi}^4 b_i \rho_i \quad (4.3)$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι μη γραμμικές, λόγω της μη-γραμμικής ελαστικότητας η οποία υπεισέρχεται στον υπολογισμό των ροπών  $T_{tot}$ . Ως αποτέλεσμα, ο όρος ελαστικότητας θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μία υπέρθεση μίας σταθερής τιμής και μίας «τεχνητής διέγερσης» [6]. Ακόμη λοιπόν και στην περίπτωση σταθερών φορτίων  $T_{in}$  και  $T_{out}$ , οι εξισώσεις κίνησης δεν εξασφαλίζεται πως θα βρεθούν σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης, όπως συμβαίνει στις γραμμικές εξισώσεις κίνησης. Η μη-γραμμικότητα επίσης δημιουργεί εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Δύο ίδιες προσομοιώσεις με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, δεν εξασφαλίζεται πως θα βρεθούν στην ίδια μόνιμη κατάσταση [21].

Υποθέτοντας πως η ελαστικότητα  $K_{tot}$  είναι σταθερή και πως ο δείκτης  $s = 1$ , οι εξισώσεις (4.1) και (4.2) μπορούν να συνδυασθούν μέσω του ορισμού του σφάλματος μετάδοσης  $x$ , εντός της γραμμής επαφών. Η εξίσωση η οποία προκύπτει είναι της μορφής:

$$\frac{I_1 I_2}{I_2 R_{b1}^2 + I_1 R_{b2}^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + K_{tot} x = f(M_{in}, M_{out}) \quad (4.4)$$

Ως αποτέλεσμα, ο συντελεστής απόσβεσης  $C$  μπορεί να υπολογισθεί από το ομογενές τμήμα της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (4.4).

$$C \cong 2\zeta \sqrt{K_{tot} \frac{I_1 I_2}{I_2 R_{b1}^2 + I_1 R_{b2}^2}} \quad (4.5)$$

Ο συντελεστής  $\zeta$  δίδεται κυρίως μέσω ημι-εμπειρικών σχέσεων για την πλειονότητα των εργασιών της βιβλιογραφίας [4,6], με τιμή 0.01 – 0.02.

Αντίστοιχα, από την εξίσωση (4.4) μπορεί να προκύψει μία προσεγγιστική τιμή της ιδιοσυχνότητας του σφάλματος μετάδοσης:

$$f_{eigen} \cong \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{tot} (I_2 R_{b1}^2 + I_1 R_{b2}^2)}{I_1 I_2}} \quad (4.6)$$

Στην περίπτωση πηγής γωνιακής ταχύτητας και όχι ροπής, η εξίσωση κίνησης του πινιόν είναι προκαθορισμένη ως:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\pi}{30} n_{in} (rpm) \quad (4.7)$$

Οπότε, πλέον το μοντέλο έχει έναν βαθμό ελευθερίας, που καθορίζεται επιλύοντας την εξίσωση (4.2). Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως κατά την μόνιμη κατάσταση, η απόκριση έχει ως βασική συχνότητα αυτήν κατά την οποία ένα δόντι του πινιόν διανύει ένα βήμα  $2\pi/z_1$ . Συνεπώς, η συχνότητα αυτή θα δίδεται από την εξίσωση (4.8).

$$f_{mesh} = z_1 \frac{d\omega_1}{dt} \frac{1}{2\pi} \quad (4.8)$$

## 4.2 Δυναμική Προσομοίωση Αναστροφής Επαφών

Ένα ιδιαίτερα σημαντικό τμήμα της δυναμικής προσομοίωσης του σφάλματος μετάδοσης είναι η ορθή απόδοση των περιοχών παραμέτρων για τις οποίες λαμβάνει χώρα απώλεια επαφής ή ακόμη και αναστροφή των επαφών. Η εμφάνιση τέτοιων φαινομένων προκαλεί ιδιαίτερα θορυβώδη λειτουργία της βαθμίδας αλλά και αυξημένα δυναμικά φορτία, οδηγώντας σε ταχεία φθορά των οδοντωτών τροχών.

Είναι προφανές πως μόνο όταν  $x > 0$  υπάρχει συμπίεση των ζευγών οδόντων. Αντιθέτως, όταν το σφάλμα μετάδοσης βρίσκεται στην περιοχή  $-b_{12} < x < 0$ , βάσει και όσων αναπτύχθηκαν για το διάκενο μεταξύ των ζευγών, οι δύο οδοντωτοί τροχοί δεν εφάπτονται. Στην περίπτωση όπου το  $x$  γίνει ακόμα μικρότερο από το  $-b_{12}$ , αυτό σημαίνει πως το διάκενο μεταξύ των οδόντων για την εργαζόμενη πλευρά τους ( $W.S.$ ) είναι μεγαλύτερο από το διάκενο  $b_{12}$ . Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση τα δόντια των δύο τροχών συμπιέζονται κατά  $x'$  σε αναστροφή επαφή, οπότε και θα ισχύει:

$$x' = -x - b_{12} \quad (4.9)$$

Παρ' όλα αυτά, βάσει του μετασχηματισμού που παρουσιάστηκε για την περίπτωση αναστροφής επαφής στο υποκεφάλαιο (2.6), θα πρέπει ακόμη να ισχύει:

$$x' = R_{g1}\omega_1^r - R_{g2}(\omega_2^r - \omega_{2_0}) \quad (4.10)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.38) και (4.9) στην εξίσωση (4.10), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$2R_{g2}\omega_{2_0} - b_{12} = R_{g1}(\omega_1 + \omega_1^r) - R_{g2}(\omega_2^r + \omega_2) \quad (4.11)$$

Για να είναι συμβατοί οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί αναστροφής επαφών (2.48),(2.49), και (4.9), η εξίσωση (4.11) θα πρέπει να επαληθεύεται ως ταυτότητα. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.48), (2.49), (2.52) και (3.40) και εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις, συμπεραίνεται πως πράγματι η συνθήκη (4.11) επαληθεύεται πάντα, οπότε οι μετασχηματισμοί που εκτελέστηκαν είναι όλοι συμβατοί μεταξύ τους και με την γεωμετρία των οδοντώσεων.

Ως αποτέλεσμα, η περίπτωση αναστροφής επαφών, μπορεί να μοντελοποιηθεί δυναμικά ως μία περίπτωση ορθής επαφής, όπου μέσω των μετασχηματισμών (2.48, 2.49) βρίσκονται ορθά οι τιμές των ροπών λόγω δυνάμεων επαφής και μέσω του δείκτη  $s = -1$  το πρόσημό τους αναστρέφεται λόγω της γεωμετρικής συμμετρίας της τροχιάς ορθών και ανάστροφων επαφών. Ιδιαίτερη προσοχή δίδεται κατά τον προγραμματισμό των ανωτέρω μετασχηματισμών, ώστε να διασφαλισθεί πως οι πραγματικές γωνιακές θέσεις των δύο τροχών δεν συγχέονται με τις μετασχηματισμένες γωνιακές θέσεις.

### 4.3 Προγραμματιστική Υλοποίηση

Όπως αναλύθηκε κατά τα προηγούμενα κεφάλαια, βάσει των εξισώσεων κίνησης της βαθμίδας υλοποιούνται δύο δυναμικά μοντέλα και προγραμματίζονται σε περιβάλλον MATLAB. Η υλοποίηση του γεωμετρικού μοντέλου, στηριζόμενη στην γεωμετρική ανάλυση της τροχιάς επαφών, απαιτεί τον υπολογισμό των ροπών λόγω ελαστικής παραμόρφωσης των ζευγών οδόντων  $T_{tot_1}(\omega_1, x)$ ,  $T_{tot_2}(\omega_1, x)$  όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3. Επομένως, κατά την προγραμματιστική υλοποίηση του δυναμικού μοντέλου, είναι απαραίτητη η χρήση παρεμβολής δύο μεταβλητών για τον καθορισμό της τιμής των ροπών, οι οποίες βρίσκονται υπό την μορφή διακριτοποιημένου πίνακα. Το γεγονός αυτό αυξάνει αρκετά τον απαιτούμενο χρόνο αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων κίνησης, παρέχοντας παρ' όλα αυτά μεγάλη ακρίβεια. Θα πρέπει παρ' όλα αυτά να σημειωθεί πως ο χρόνος επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων και σε αυτή την περίπτωση είναι σημαντικά μικρότερος συγκριτικά με αντίστοιχα αριθμητικά μοντέλα ή μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων.

Αντίστοιχα, η δυναμική μοντελοποίηση βάσει του ημι-αναλυτικού μοντέλου προϋποθέτει τον υπολογισμό των  $T_{tot_{1s}}(\omega_1, x)$ ,  $T_{tot_{2s}}(\omega_1, x)$  (εξίσωση 3.46). Σε αντίθεση με το γεωμετρικό μοντέλο οι ροπές αυτές υπολογίζονται άμεσα μέσω κλειστού τύπου, χωρίς την ανάγκη παρεμβολής τους σε κάθε χρονικό βήμα. Η απλοποίηση αυτή είναι αρκετά σημαντική, καθώς επιταχύνει σε μεγάλο βαθμό την δυναμική ανάλυση. Ως αποτέλεσμα, μέσω της ημι-αναλυτικής μεθόδου οι εξισώσεις κίνησης επιλύονται σε αρκετά συντομότερο χρονικό διάστημα με ικανοποιητική ακρίβεια, για συνθήκες εφαρμογές με λόγο επικάλυψης  $\varepsilon < 2$ .

Σε κάθε περίπτωση, κατά τον υπολογισμό των ροπών λόγω ελαστικής παραμόρφωσης, η γωνιακή θέση  $\omega_1$  θα πρέπει να διατηρείται εντός του εύρους για ένα βήμα του πινιόν, για το οποίο έγινε ο προσδιορισμός των  $T_{tot}$ . Για αυτό τον σκοπό χρησιμοποιείται παρόμοιος μετασχηματισμός με αυτόν της εξίσωσης (2.43), μεταφέροντας την γωνιακή θέση του πινιόν ένα βήμα εμπρός ή πίσω, διασφαλίζοντας πως σε κάθε χρονικό βήμα θα βρίσκεται εντός του επιθυμητού εύρους. Προφανώς πρόκειται για μετασχηματισμό που αφορά μόνο αυτό το τμήμα του δυναμικού μοντέλου και όχι γενικότερα την γωνιακή θέση του τροχού. Για αυτό τον σκοπό, η γωνιακή θέση του πινιόν που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ροπών συμβολίζεται με  $\omega_1^M$ . Ως  $H(\cdot)$  συμβολίζεται η συνάρτηση Heaviside.

$$\omega_1^M = \omega_1 - H(\omega_1 - \omega_B) \frac{2\pi}{z_1} + (1 - H(\omega_1 - \omega_A)) \frac{2\pi}{z_1} \quad (4.12)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης και στις δύο περιπτώσεις επιλύονται μέσω της μεθόδου Runge Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης και σταθερού χρονικού βήματος. Η μέθοδος παρουσιάζεται στην γενική της μορφή παρακάτω, ενώ η αναλυτική εφαρμογή της για την επίλυση των εξισώσεων παρατίθεται

στο Παράρτημα. Οι δύο διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης μετατρέπονται σε τέσσερις εξισώσεις πρώτης τάξης, έστω  $f_1 = \frac{d^2\omega_1}{dt^2}, f_2 = \frac{d^2\omega_2}{dt^2}, f_3 = \frac{d\omega_1}{dt}, f_4 = \frac{d\omega_2}{dt}$ . Επίσης ορίζεται δείκτης  $n = 1,2,3,4$ .

Οι παράγουσες των  $f_n$  συμβολίζονται ως  $(\omega_1, \omega_2, \frac{d\omega_1}{dt}, \frac{d\omega_2}{dt}) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ . Τότε με γνωστό το  $i$  βήμα της λύσης, προσδιορίζονται οι τιμές των  $y_m$  στο αμέσως επόμενο χρονικό βήμα:

$$k_{n,1} = \Delta t f_n(t_i, y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}, y_{4i}) \quad (4.13\alpha)$$

$$y_n^1 = y_{n,i} + \frac{1}{2}k_{n,1} \quad (4.13\beta)$$

$$k_{n,2} = \Delta t f_n(t_i + \Delta t, y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_4^1) \quad (4.13\gamma)$$

$$y_n^2 = y_{n,i} + \frac{1}{2}k_{n,2} \quad (4.13\delta)$$

$$k_{n,3} = \Delta t f_n\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2\right) \quad (4.13\epsilon)$$

$$y_n^3 = y_{n,i} + k_{n,3} \quad (4.13\sigma\tau)$$

$$k_{n,4} = \Delta t f_n(t_i + \Delta t, y_1^3, y_2^3, y_3^3, y_4^3) \quad (4.13\zeta)$$

Τελικά στο επόμενο βήμα  $i + 1$  θα είναι:

$$y_{n,i+1} = y_{n,i} + \frac{1}{6}(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}) \quad (4.14)$$

Για συνήθη μεγέθη οδοντωτών τροχών, η τάξη μεγέθους της ιδιοσυχνότητας του σφάλματος μετάδοσης  $f_{eigen}$  (εξίσωση 4.6) είναι  $O(f_{eigen}) = 10^3$  Hz. Κατά συνέπεια, το χρονικό βήμα επίλυσης θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από  $1/(2f_{eigen})$  βάσει του κριτηρίου Nyquist. Το χρονικό βήμα  $\Delta t$  επιλέγεται αρκετά μεγαλύτερο, ως  $1/60000$  s ώστε να είναι αποτυπώνεται με μεγάλη λεπτομέρεια η δυναμική απόκριση του συστήματος.

Ακόμη, ο ολικός χρόνος  $t_{tot}$  βάσει της ομογενούς της γραμμικής εξίσωσης (4.4) υπολογίζεται για συνήθη μεγέθη οδοντωτών τροχών  $O(t_{tot}) = 0.1$  s. Καθώς οι πραγματικές εξισώσεις κίνησης είναι μη-γραμμικές, επιλέγεται χρόνος προσομοίωσης  $t_{tot} = 1$  s.

Η οικονομία υπολογιστικού κόστους που επιτυγχάνεται μέσω του ημι-αναλυτικού μοντέλου είναι εμφανής από την εκτέλεση της ίδιας δυναμικής προσομοίωσης για τα δύο μοντέλα. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ο συνολικός χρόνος που απαιτήθηκε για την εκτέλεση των δύο αλγορίθμων δυναμικής ανάλυσης μίας βαθμίδας, δεδομένου ίδιου χρονικού βήματος επίλυσης, μεθόδου επίλυσης, ολικού χρόνου και αρχικών συνθηκών. Προφανώς, ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης των δύο μοντέλων έχει μόνο συγκριτική αξία, καθώς εξαρτάται από την υπολογιστική ισχύ του εκάστοτε Η/Υ. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί πως αμφοτέρωι οι αλγόριθμοι

εκτελούνται μέσω περιβάλλοντος MATLAB, μέσω interpreter και όχι compiler, κάτι που θα ελάττωνε σημαντικά τον απαιτούμενο χρόνο υπολογισμού κυρίως για το γεωμετρικό μοντέλο.

|                               | Αλγόριθμος Δυναμικής Γεωμετρικού Μοντέλου | Αλγόριθμος Δυναμικής Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου |
|-------------------------------|---|--|
| Συνολικός Απαιτούμενος Χρόνος | 710.6 s                                   | 23.6 s                                       |

*Πίνακας 3: Ενδεικτικά Συγκριτικά Στοιχεία Εκτέλεσης Αλγορίθμων Γεωμετρικού και Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου*

Όπως αναμενόταν, το ημι-αναλυτικό μοντέλο παρουσιάζει πολύ σημαντικό πλεονέκτημα έναντι του γεωμετρικού, επιλύοντας τις δυναμικές εξισώσεις σε interpreter, περίπου 30 φορές γρηγορότερα για μία τυπική περίπτωση προσομοίωσης. Ένα μεγάλο ποσοστό του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου του γεωμετρικού μοντέλου καταναλώνεται στην παρεμβολή δύο μεταβλητών ( $\omega_1, x$ ) των ροπών επί των δύο οδοντωτών τροχών. Βέβαια προς το παρόν εξετάζεται μόνο ο χρόνος επίλυσης και όχι η ορθότητα των αποτελεσμάτων, κάτι που θα πραγματοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.



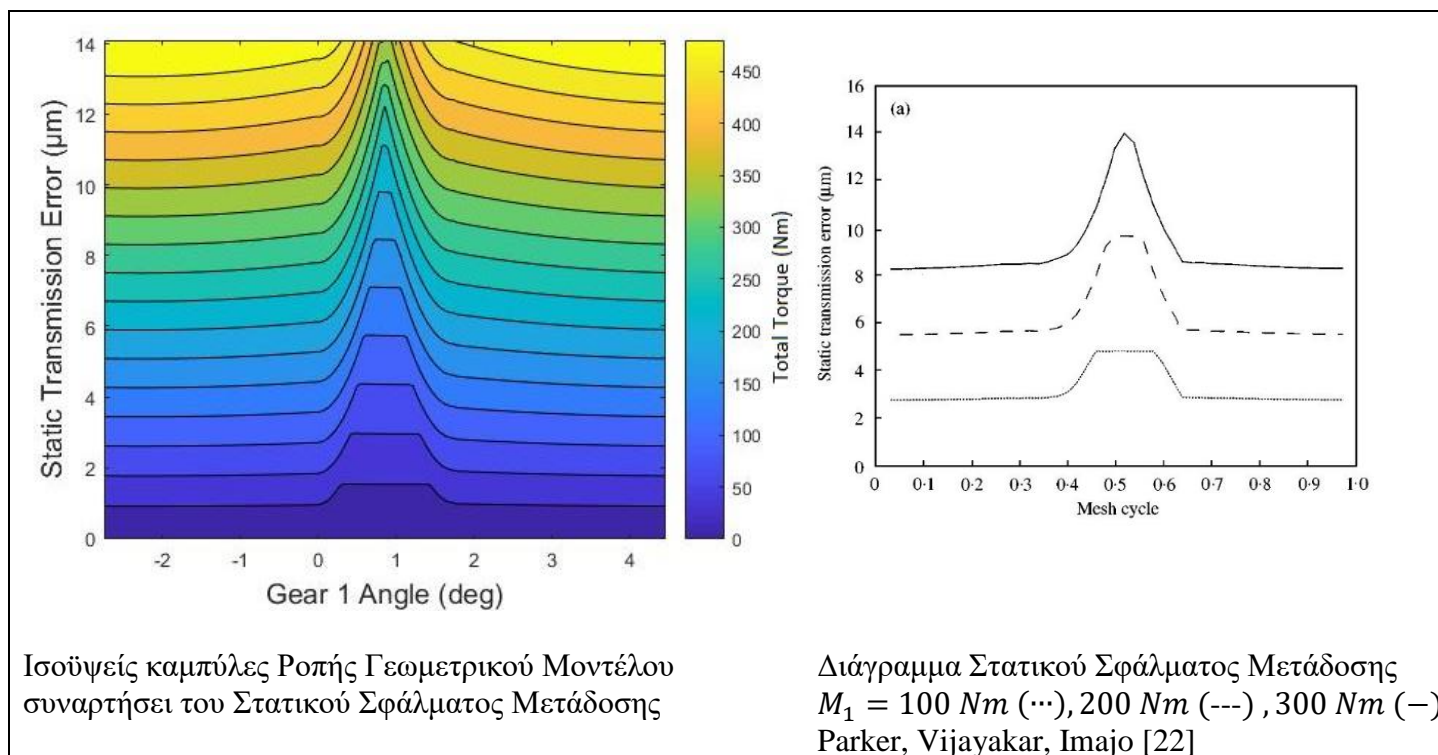
## 5 Αποτελέσματα-Συμπεράσματα

Στην συνέχεια παρατίθεται ένας αριθμός αποτελεσμάτων από δυναμικές προσομοιώσεις για το γεωμετρικό και το ημι-αναλυτικό μοντέλο τα οποία αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Ακόμη, γίνεται επαλήθευση αποτελεσμάτων δυναμικής προσομοίωσης με αντίστοιχα πειραματικά και αριθμητικά δεδομένα της βιβλιογραφίας ώστε να εκτιμηθεί η ακρίβεια των μοντέλων. Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης όπως και πιθανές επεκτάσεις ή βελτιώσεις αυτής.

### 5.1 Αποτελέσματα Γεωμετρικού Μοντέλου

Όπως έγινε εμφανές κατά την ανάλυση, η μη-γραμμικότητα των κινηματικών δυναμικών εξισώσεων της βαθμίδας σχετίζεται με την δυσκαμψία του ζεύγους. Κρίνεται συνεπώς αναγκαία η σύγκριση των αποτελεσμάτων των φορτίων επαφής του πλήρους γεωμετρικού μοντέλου με αντίστοιχα δημοσιευμένα αποτελέσματα, ώστε να αξιολογηθεί η ορθότητα του μοντέλου.

Η βαθμίδα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του Πίνακα 2, έχει εξετασθεί αναλυτικά από τους Parker, Vijayakar, Imajo [22] μέσω μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων. Στο δεξί μέρος του παρακάτω σχήματος, παρατίθεται γράφημα του στατικού σφάλματος μετάδοσης ( $x$ ) συναρτήσει της αδιάστατης γωνιακής θέσης του πινιόν αποτέλεσμα της προαναφερθείσας εργασίας. Το γράφημα αυτό δίδεται για τρεις τιμές συνολικής ροπής επί του οδοντωτού τροχού. Αντίστοιχα στο αριστερό μέρος του σχήματος, παρουσιάζονται οι ισοϋψείς καμπύλες της συνολικής ροπής συναρτήσει του σφάλματος μετάδοσης και της γωνίας  $\omega_1$  του πινιόν, με την παρούσα μέθοδο.



Σχήμα 22: Συγκριτικό Διάγραμμα Ροπών Λόγω Συμπίεσης Οδόντων

Η οπτική σύγκριση των δύο διαγραμμάτων αναδεικνύει σημαντική συμφωνία στις τιμές του στατικού σφάλματος μετάδοσης και για τις τρεις τιμές της εφαρμοζόμενης ροπής, όπως φαίνεται από τον χρωματικό δείκτη των αποτελεσμάτων του γεωμετρικού μοντέλου. Επιπλέον, η ελάττωση του εύρους μονής επαφής λόγω της εμφάνισης γωνιακών επαφών είναι επίσης

εμφανής και σύμφωνη με την αντίστοιχη πρόβλεψη μέσω πεπερασμένων στοιχείων. Συνεπώς, προκύπτει μία ιδιαίτερα θετική ένδειξη ως προς την αξιοπιστία της μεθόδου και την ορθότητα των θεωρήσεων για τις περιοχές γωνιακής επαφής οι οποίες παρουσιάστηκαν στην ενότητα (2.2).

Εν συνεχεία παρουσιάζεται ένας αριθμός δυναμικών προσομοιώσεων για την βαθμίδα που παρουσιάστηκε στον Πίνακα 1. Οι παρακάτω αναλύσεις πραγματοποιούνται για διαφορετικές τιμές ροπής εισόδου  $T_{in}$  και αρχικές στροφές των δύο τροχών. Το φορτίο στην έξοδο της βαθμίδας επιλέγεται ώστε να μην υπάρχει επιτάχυνση ή επιβράδυνση του ζεύγους, δηλαδή:

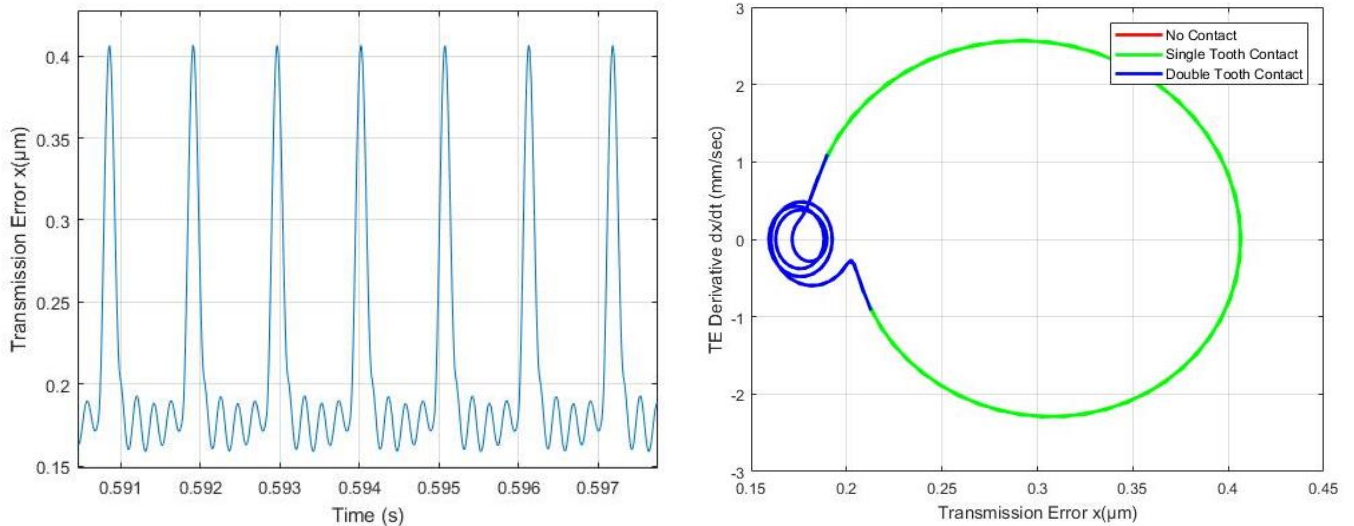
$$T_{out} = \frac{R_{g2}}{R_{g1}} T_{in} \quad (5.1)$$

Τόσο η ροπή εισόδου όπως και η ροπή εξόδου εφαρμόζονται σταδιακά για ένα αρχικό τμήμα της προσομοίωσης. Ομοίως, για ταχεία και ομαλή μετάβαση στην μόνιμη κατάσταση, οι αρχικές στροφές της εξόδου επιλέγονται επίσης μέσω του λόγου μετάδοσης:

$$\frac{d\omega_2}{dt}(t=0) = \frac{R_{g2}}{R_{g1}} \frac{d\omega_1}{dt}(t=0) \quad (5.2)$$

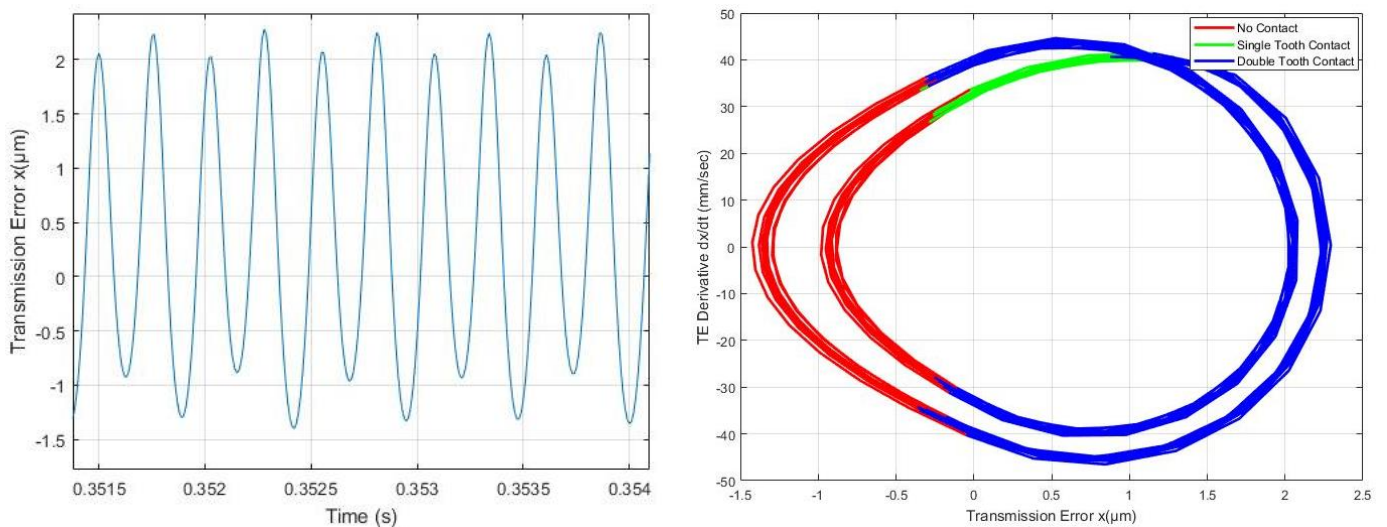
Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως λόγω της μη-γραμμικότητας του προβλήματος, η τελική κατάσταση εξαρτάται ισχυρά από τις αρχικές συνθήκες. Συνεπώς, οι κατωτέρω αναλύσεις αφορούν τις αρχικές συνθήκες που αναφέρθηκαν.

Παράδειγμα δυναμικής ανάλυσης για ροπή εισόδου  $T_{in} = 5 \text{ Nm}$  και  $\omega_1(t=0) = 600 \text{ rpm}$  παρουσιάζεται παρακάτω. Προφανώς πρόκειται για πολύ μικρό φορτίο επί των οδόντων, κάτι που φαίνεται από το πλάτος της συμπίεσης  $x$ . Όπως προαναφέρθηκε, λόγω της πολύ μικρής συμπίεσης, η μετάβαση από την επαφή ενός ζεύγους οδόντων στην επαφή δύο ζευγών είναι σχεδόν ακαριαία (βλ. Σχήμα 16). Αυτή η απότομη μετάβαση, προκαλεί ταλαντώσεις στις περιοχές διπλής επαφής ( $x < 0.2$ ), όπως φαίνεται στο διάγραμμα φάσης και την χρονοσειρά του  $x$ . Επίσης λόγω του σχετικά υψηλού βαθμού επικάλυψης ( $\varepsilon = 1.72$ ), η μονή επαφή διαρκεί πολύ λιγότερο από την διπλή επαφή, με παραμορφώσεις σχεδόν διπλάσιες από αυτές στην διπλή επαφή, όπως άλλωστε προβλέπεται από την εξίσωση (3.15).



Σχήμα 23: Αποτελέσματα Δυναμικής Προσομοίωσης για  $T_{in} = 5 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt(t = 0) = 600 \text{ rpm}$

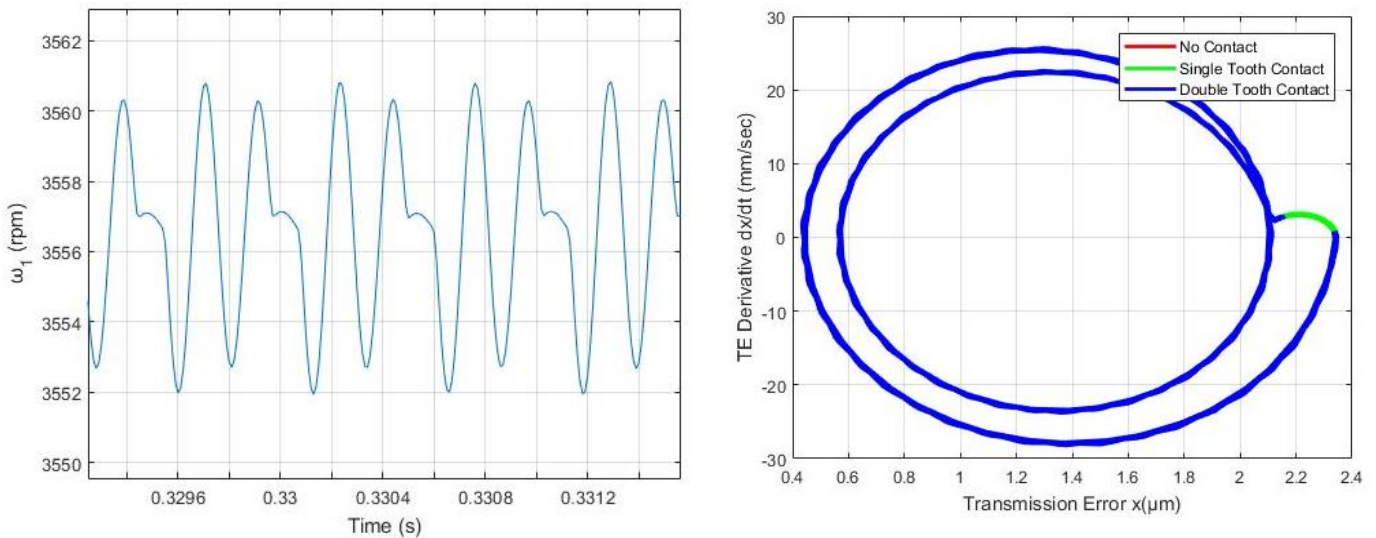
Στην συνέχεια, αυξάνοντας την ροπή εισόδου σε  $T_{in} = 20 \text{ Nm}$  και τον αρχικό ρυθμό περιστροφής του πινιόν σε  $\omega_1(t = 0) = 1200 \text{ rpm}$ , το σύστημα μεταβαίνει σε μόνιμη κατάσταση η οποία φαίνεται στο Σχήμα 24. Η εμφάνιση διαλείπουσας επαφής συνεπάγεται ταλαντώσεις αυξημένου πλάτους και διπλής περιόδου, αποτελώντας το κύριο χαρακτηριστικό της απόκρισης. Λόγω της υψηλής ενέργειας των ταλαντώσεων αυτών, η διάκριση μεταξύ της περιοχής μονής και διπλής επαφής δεν δίνει κάποια εμφανή ταλαντωτική συμπεριφορά.



Σχήμα 24: Αποτελέσματα Δυναμικής Προσομοίωσης για  $T_{in} = 20 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt(t = 0) = 1200 \text{ rpm}$

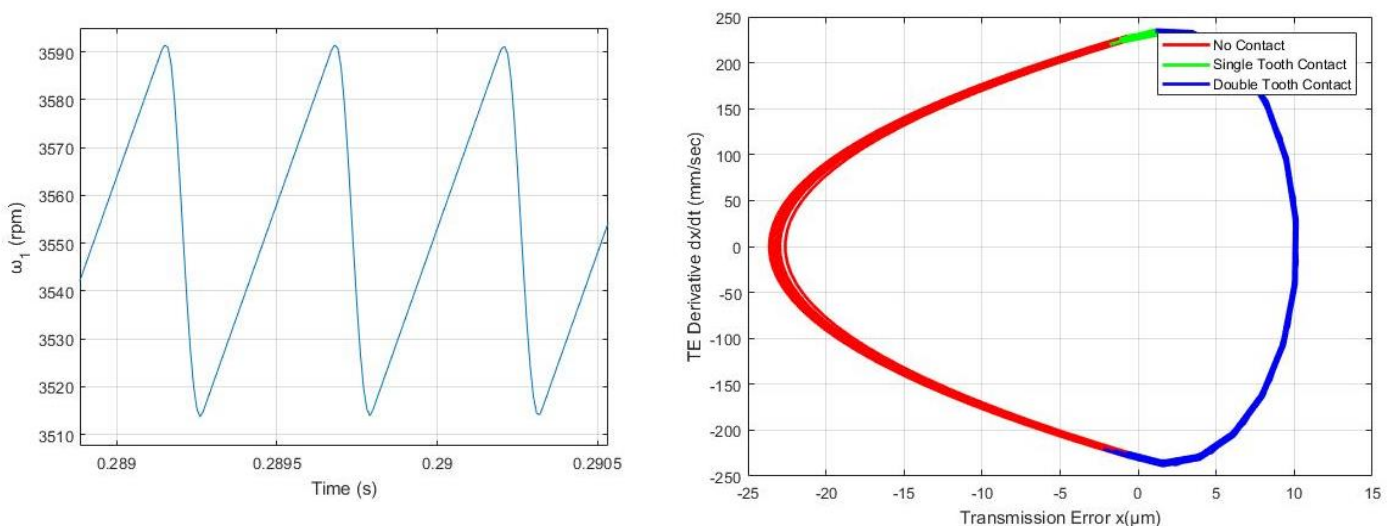
Αυξάνοντας την ροπή από τα 20 στα 40 Nm και διατηρώντας ίδιες τις αρχικές συνθήκες για την αρχική ταχύτητα του πινιόν, η εικόνα είναι αρκετά διαφορετική. Η αύξηση αυτή της ροπής, οδηγεί σε περαιτέρω συμπύεση μεταξύ των οδόντων και αποφυγή εμφάνισης διαλείπουσας επαφής. Όπως επίσης φαίνεται από το Σχήμα 25, το σφάλμα μετάδοσης λαμβάνει την μέγιστη τιμή του στο διάστημα μονής επαφής, το οποίο είναι επίσης εμφανές στην χρονοσειρά της

ταχύτητας περιστροφής του πινιόν. Οι τιμές της  $\omega_1$  είναι πολύ μεγαλύτερες της αρχικής τιμής, λόγω της μεταβατικής κατάστασης επιτάχυνσης της βαθμίδας.



Σχήμα 25: Αποτελέσματα Δυναμικής Προσομοίωσης για  $T_{in} = 40 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt(t = 0) = 1200 \text{ rpm}$

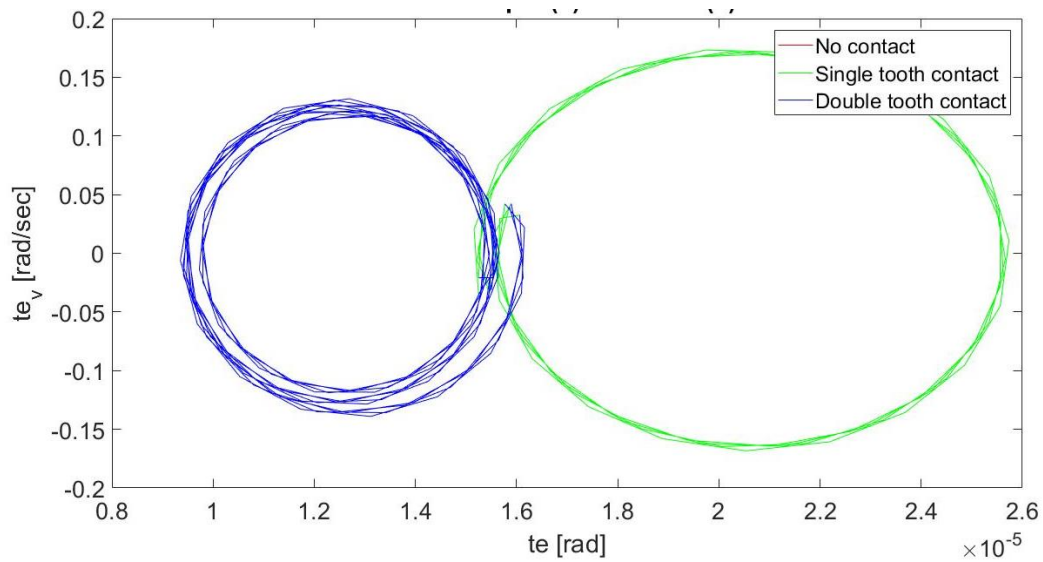
Αυξάνοντας την απόσταση των κέντρων των δύο τροχών κατά  $1 \text{ mm}$  και εκτελώντας την ίδια δυναμική προσομοίωση, η εικόνα είναι αρκετά διαφορετική. Πλέον, παρατηρείται έντονη διαλείπουσα επαφή, η οποία προκαλεί μοναδική ταλάντωση κατά μία περίοδο του φαινομένου. Επιπλέον, η διακύμανση στην ταχύτητα του πινιόν είναι πολύ μεγαλύτερη συγκριτικά με την περίπτωση μη μετατοπισμένων αξόνων. Από το διάγραμμα φάσης συμπεραίνεται πως η απόκριση καθορίζεται από μία κύρια συχνότητα, ενώ από την χρονική απόκριση της  $\omega_1$  φαίνεται πως η συχνότητα αυτή ισούται με την  $f_{mesh}$  (εξίσωση (4.8)) για μία μέση τιμή της ταχύτητας  $\omega_1$ .



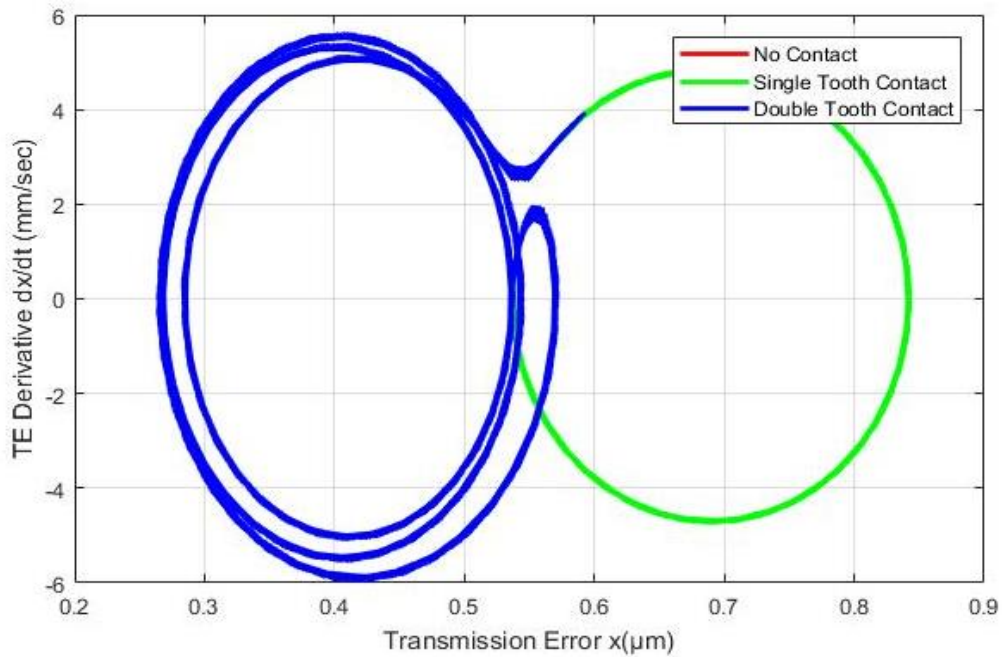
Σχήμα 26: Αποτελέσματα Δυναμικής Προσομοίωσης για Μετατοπισμένες Οδοντώσεις,  $T_{in} = 40 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt(t = 0) = 1200 \text{ rpm}$

Τέλος, συγκρίνονται ενδεικτικά διαγράμματα φάσης δυναμικών προσομοιώσεων με αυτά της εργασίας του Γ. Βασιλείου [23], βάσει στροφικού αριθμητικού μοντέλου δυναμικής ανάλυσης.

Οι προσομοιώσεις αφορούν όμοιους οδοντωτούς τροχούς με ( $z = 32, m = 2 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm}, C_f = 0.5$ ) και πηγή γωνιακής ταχύτητας.

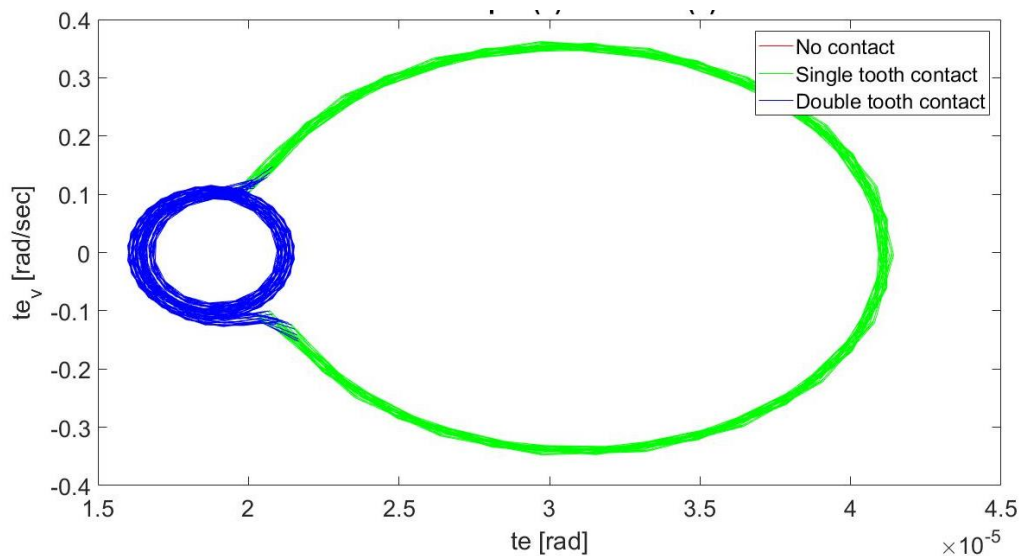


Σχήμα 27α: Αποτελέσματα Αριθμητικού Μοντέλου για  $T_{in} = 5.31 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt = 2727 \text{ rpm}$  [23]

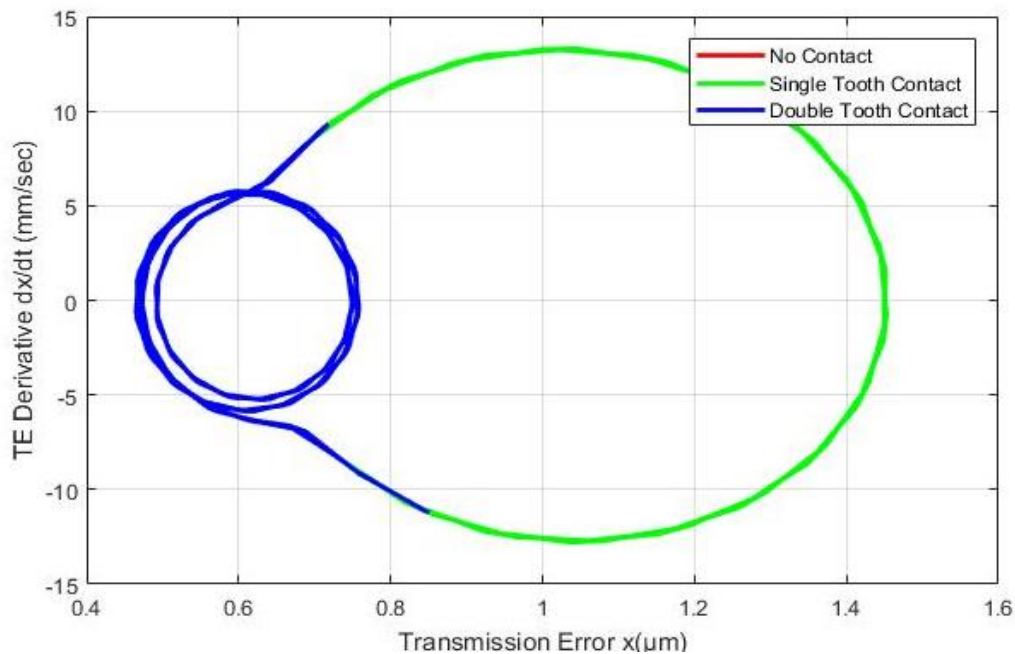


Σχήμα 27β: Αποτελέσματα Γεωμετρικού Μοντέλου για  $T_{in} = 5.31 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt = 2727 \text{ rpm}$





Σχήμα 28α: Αποτελέσματα Αριθμητικού Μοντέλου για  $T_{in} = 8.11 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt = 3272 \text{ rpm}$  [23]



Σχήμα 28β: Αποτελέσματα Γεωμετρικού Μοντέλου για  $T_{in} = 8.11 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt = 3272 \text{ rpm}$

Παρατηρείται πως και στις δύο προσομοιώσεις, το γεωμετρικό μοντέλο αποδίδει πλήρως τα χαρακτηριστικά της ταλάντωσης κατά την μόνιμη κατάσταση. Η μορφή του διαγράμματος φάσης στα Σχήματα 27 και 28 παρουσιάζει δύο διακριτές περιοχές, που αντιστοιχούν σε επαφή ενός και δύο ζευγών αντίστοιχα. Μία τέτοια μορφή είναι συνήθης για περιπτώσεις χαμηλών φορτίων, ως αναλύθηκε στο Σχήμα 23.

## 5.2 Αποτελέσματα Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου

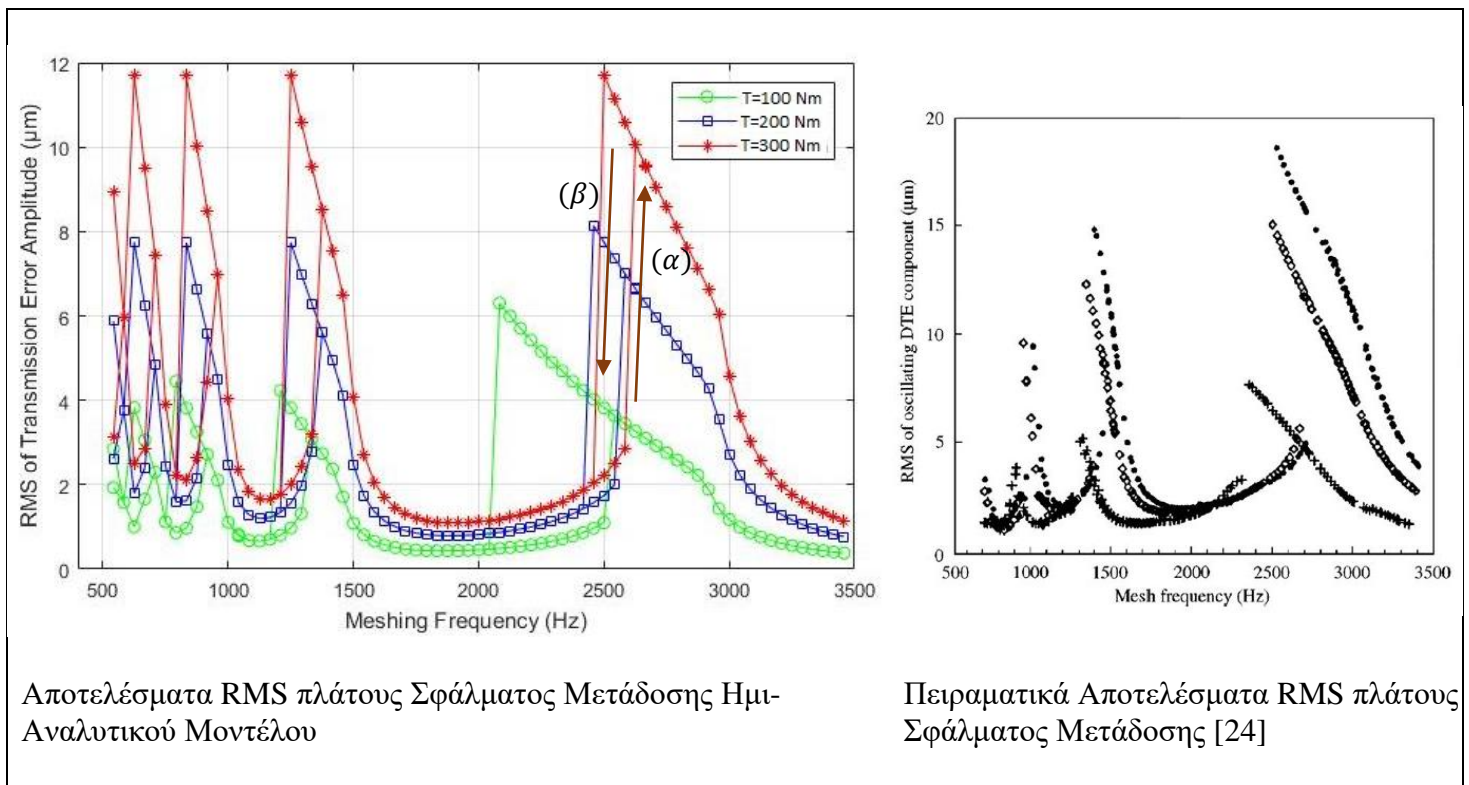
Στην συνέχεια, πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων του ημι-αναλυτικού μοντέλου με δημοσιευμένα πειραματικά αποτελέσματα [23] για την βαθμίδα του Πίνακα 2. Καθώς τα

πειραματικά δεδομένα αυτά αφορούν πηγή ταχύτητας και όχι ροπής, γίνεται χρήση της εξίσωσης (4.7). Επίσης, ελλείψει αντίστοιχων δεδομένων επιλέγεται συντελεστής απόσβεσης  $\zeta = 0.02$ .

Πιο συγκεκριμένα, για μία τιμή του φορτίου εξόδου  $T_{out}$  πραγματοποιούνται δύο σειρές δυναμικών προσομοιώσεων, με διαφορετικό τρόπο καθορισμού των αρχικών συνθηκών. Για την πρώτη σειρά προσομοιώσεων, η ταχύτητα του πινιόν  $\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)$  αυξάνεται σταδιακά. Μετά από την περίοδο αύξησης της ταχύτητας, αυτή σταθεροποιείται ώστε το σύστημα να μεταβεί σε μόνιμη κατάσταση. Ακολούθως, η rms τιμή του πλάτους του σφάλματος μετάδοσης (εξίσωση (5.3)) καταγράφεται για την μόνιμη κατάσταση κάθε δυναμικής προσομοίωσης. Στην συνέχεια, η ταχύτητα του πινιόν αυξάνεται και πάλι, κ.ο.κ.

$$A_{RMS} = RMS(x(t) - x_{mean}) \quad (5.3)$$

Η δεύτερη σειρά προσομοιώσεων γίνεται με την ίδια λογική, με την διαφορά ότι η ταχύτητα του πινιόν σταδιακά ελαττώνεται. Η εκτέλεση των ίδιων αναλύσεων με διαφορετικές αρχικές τιμές αναδεικνύει αρκετά χαρακτηριστικά που οφείλονται στην μη-γραμμικότητα του συστήματος.



Σχήμα 29: Συγκριτικό Διάγραμμα RMS πλάτους Σφάλματος Μετάδοσης

Παρατηρείται πως το πλάτος του σφάλματος μετάδοσης μεταβάλλεται ιδιαίτερα απότομα στην περιοχή με συχνότητα εμπλοκής  $f_{mesh} \cong 2500 \text{ Hz}$  και τα υποπολλαπλασιά της. Υπολογίζοντας την μέση ιδιοσυχνότητα του σφάλματος μετάδοσης, προκύπτει  $f_{eigen} = 2370 \text{ Hz}$ . Επομένως, όταν η συχνότητα της «τεχνητής διέγερσης» μέσω της μη-γραμμικής ελαστικότητας του συστήματος είναι κοντά στην περιοχή της ιδιοσυχνότητας ή υπο-πολλαπλασίων αυτής, το πλάτος των δημιουργούμενων ταλαντώσεων αυξάνεται απότομα.

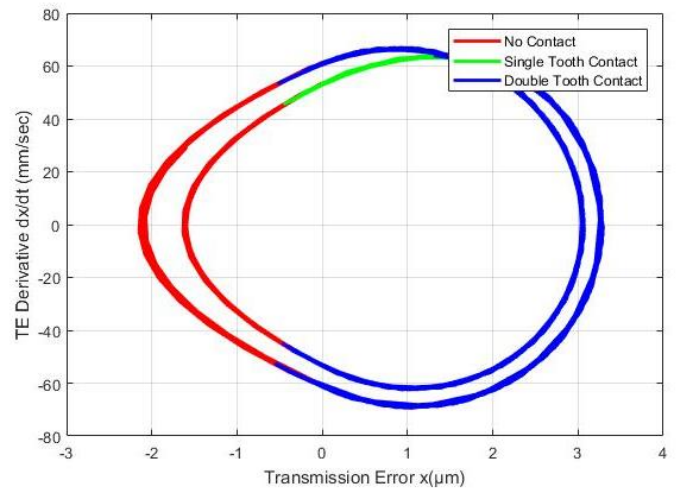
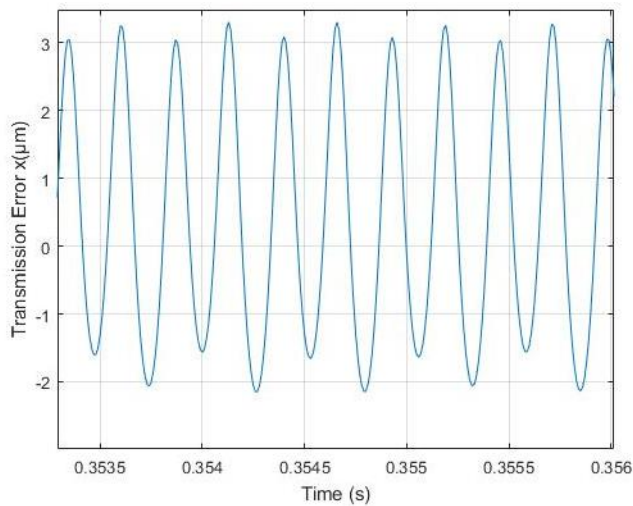
Παρ' όλα αυτά, το φαινόμενο αυτό δεν μπορεί να ερμηνευθεί πλήρως μέσω μίας απόκρισης που αναμένεται από κάποιο γραμμικό σύστημα. Οι προσομοιώσεις με αρχικά επιταχυνόμενο πινιόν (διαδρομή ( $\alpha$ )), εμφανίζουν την ίδια μόνιμη κατάσταση (κοινό πλάτος ταλαντώσεων) με τις προσομοιώσεις για επιβραδυνόμενο πινιόν (διαδρομή ( $\beta$ )), στις περιοχές μακριά από την μέση ιδιοσυχνότητα ή τα υποπολλαπλάσιά της. Στις περιοχές κοντά στην μέση ιδιοσυχνότητα ή τα υποπολλαπλάσιά της όπου το πλάτος των ταλαντώσεων είναι ιδιαίτερα έντονο, η μη-γραμμικότητα των εξισώσεων γίνεται πολύ περισσότερο έκδηλη, κυρίως λόγω εμφάνισης διαλείπουσας επαφής. Κατά συνέπεια, η επίδραση των αρχικών συνθηκών είναι μείζονος σημασίας, οδηγώντας το ίδιο σύστημα, σε διαφορετική μόνιμη κατάσταση.

Μία ποιοτική ερμηνεία της διαφορετικής απόκρισης για επιτάχυνση και επιβράδυνση του πινιόν θα μπορούσε να δοθεί ως εξής. Καθώς το πινιόν επιταχύνεται, τα δόντια του ωθούνται να συμπιεστούν περαιτέρω με τα δόντια του συνεργαζόμενου τροχού, του οποίου το φορτίο  $T_{out}$  είναι σταθερό. Επομένως, δεν ευνοείται ο αποχωρισμός των ζευγών και η εμφάνιση διαλείπουσας επαφής. Αντιθέτως, όταν το πινιόν επιβραδύνεται, τα δόντια του τείνουν να απομακρυνθούν από αυτά του συνεργαζόμενου. Συνεπώς, ευνοείται περισσότερο η εμφάνιση διαλείπουσας επαφής οπότε και η μεγάλη αύξηση των ταλαντώσεων. Γίνεται δηλαδή εμφανές, πως οι μηχανισμοί της επιτάχυνσης και της επιβράδυνσης δεν είναι ίδιοι όπως θα συνέβαινε σε ένα γραμμικό σύστημα. Για αυτό τον λόγο, στις περιοχές κοντά στην μέση ιδιοσυχνότητα του συστήματος, όπου οι ταλαντώσεις τείνουν εκ φύσεως να ενταθούν, η επίδραση αυτή των αρχικών συνθηκών γίνεται ιδιαίτερα έκδηλη.

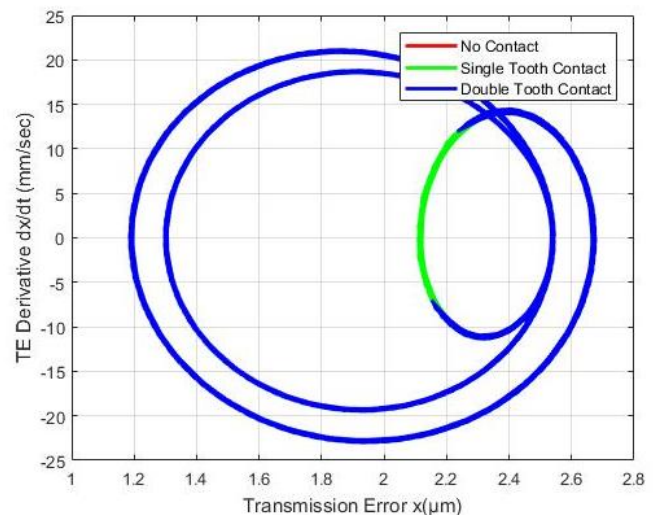
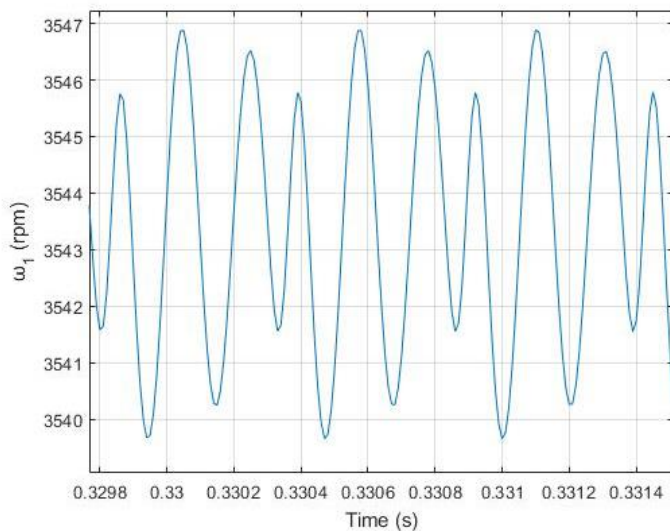
Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του ημι-αναλυτικού με τα πειραματικά αυτά δεδομένα, συμπεραίνεται η κατ' αρχήν ορθή απεικόνιση των βασικών χαρακτηριστικών, όπως οι συχνότητες στις οποίες συμβαίνουν οι μεταβάσεις, αλλά και οι διαφορές μεταξύ των προσομοιώσεων για επιτάχυνση και επιβράδυνση του πινιόν. Ιδιαίτερα για το φορτίο των  $100 Nm$ , το αναπτυχθέν μοντέλο κρίνεται ιδιαίτερα επιτυχημένο. Αυξάνοντας το φορτίο, παρατηρείται απόκλιση στα πλάτη των ταλαντώσεων, ιδιαίτερα για προσομοιώσεις σε υψηλές στροφές του πινιόν. Η διαφορά αυτή, είναι δυνατόν να οφείλεται στην αυθαίρετη τιμή της απόσβεσης, ώστε ο αντίστοιχος όρος να περιορίζει το πλάτος των ταλαντώσεων. Η επίδραση αυτή είναι περισσότερο εμφανής σε υψηλά φορτία και στροφές, όπου εν γένει αναμένονται υψηλές τιμές του  $dx/dt$ . Σε κάθε περίπτωση, ελέγχοντας την απόκλιση του ημι-αναλυτικού μοντέλου από τις πειραματικές μετρήσεις, το σφάλμα των αποτελεσμάτων προκύπτει πως είναι κατά μέγιστο 33%, ενώ για την πλειονότητα των προσομοιώσεων, το σφάλμα είναι μικρότερο του 20%.

Τέλος, πραγματοποιούνται οι ίδιες δυναμικές προσομοιώσεις που παρουσιάστηκαν για το γεωμετρικό μοντέλο στα Σχήματα 24 και 25.





Σχήμα 30: Αποτελέσματα Δυναμικής Προσομοίωσης Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου για  $T_{in} = 20 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt(t = 0) = 1200 \text{ rpm}$



Σχήμα 31: Αποτελέσματα Δυναμικής Προσομοίωσης Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου,  $T_{in} = 40 \text{ Nm}$  και  $d\omega_1/dt(t = 0) = 1200 \text{ rpm}$

Παρατηρείται και στις δύο περιπτώσεις, πως το ημι-αναλυτικό μοντέλο αποδίδει τα βασικά χαρακτηριστικά της δυναμικής απόκρισης του ζεύγους, όπως την εμφάνιση διαλλείπουσας επαφής στο Σχήμα 30. Η μετάβαση από ένα ζεύγος σε δύο, αποτυπώνεται πιο ομαλή στο Σχήμα 31 συγκριτικά με το Σχήμα 25, λόγω της χρήσης της συνάρτησης κυματιδίου. Τα ποσοτικά στοιχεία των ταλαντώσεων εμφανίζουν σφάλμα το οποίο οφείλεται κυρίως στις προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3, είναι όμως και πάλι αρκετά κοντά στα αποτελέσματα του γεωμετρικού μοντέλου.

### 5.3 Συμπεράσματα

Η δυναμική μοντελοποίηση του σφάλματος μετάδοσης ζευγών οδοντώσεων έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτενούς έρευνας για περισσότερες από δύο δεκαετίες. Παρ' όλα αυτά, η γεωμετρική πολυπλοκότητα και ο ισχυρός μη-γραμμικός χαρακτήρας του προβλήματος, αποτελούν ισχυρά εμπόδια στην ανάπτυξη μοντέλων που να συνδυάζουν ακρίβεια στην προσομοίωση των φαινομένων και χαμηλό υπολογιστικό κόστος.

Βασικό στόχο αυτής της εργασίας αποτέλεσε η ανάπτυξη ενός δυναμικού μοντέλου το οποίο να διαθέτει αμφότερα αυτά τα χαρακτηριστικά. Όπως παρουσιάστηκε, δόθηκε ιδιαίτερο βάρος στην γεωμετρική ανάλυση, στοχεύοντας στην κατά το δυνατόν αποφυγή πολλών υπολογισμών κατά την εκτέλεση των δυναμικών αλγορίθμων. Ταυτοχρόνως, μέσω της πλήρους γεωμετρικής μοντελοποίησης έγινε δυνατή η κατανόηση και η ερμηνεία φαινομένων όπως η γωνιακή επαφή, ώστε στην συνέχεια να πραγματοποιηθούν αιτιολογημένες απλοποιήσεις, στην ανάπτυξη ενός ημι-αναλυτικού μοντέλου. Τελικώς, τα αποτελέσματα και των δύο μοντέλων που αναπτύχθηκαν συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με δημοσιευμένα αποτελέσματα αριθμητικών μοντέλων, μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων και πειραματικών ερευνών, επαληθεύοντας την ορθότητα των θεωρήσεων μοντελοποίησης.

Δεδομένου του χαμηλού υπολογιστικού κόστους τόσο του γεωμετρικού, αλλά ιδιαίτερα του ημι-αναλυτικού μοντέλου, είναι δυνατή η χρήση τους για δυναμική ανάλυση σε πιο πολύπλοκες εφαρμογές. Μέσω δυναμικής προσομοίωσης, γίνεται εφικτός ο προσδιορισμός περιοχών ασφαλούς λειτουργίας ενός ζεύγους έναντι διαλείπουσας επαφής, αλλά και ο θεωρητικός καθορισμός του παραγόμενου θορύβου κατά την λειτουργία μίας βαθμίδας. Συνεπώς, το γεωμετρικό μοντέλο είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για την βελτιστοποίηση της γεωμετρίας των οδόντων μέσω της επιλογής κατάλληλης γεωμετρίας ποδός, την εξέταση διαφορετικών γωνιών εξειλιγμένης αλλά και της απόστασης αξόνων, για ελαχιστοποίηση καταπονήσεων, θορύβου και φθοράς, ανάλογα με την εκάστοτε εφαρμογή. Αντιστοίχως, το ημι-αναλυτικό μοντέλο που παρουσιάστηκε θα μπορούσε λόγω της ταχύτητας προσομοίωσης, να εφαρμοσθεί στην δυναμική μοντελοποίηση συνθετότερων συστημάτων όπως κιβωτίων ταχυτήτων και μειωτήρων πολλαπλών βαθμίδων για την εκτίμηση των δυναμικών φορτίσεων και του ολικού παραγόμενου θορύβου κατά την φάση του σχεδιασμού.

Τέλος, ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία, κρίνεται σκόπιμη η παράθεση ορισμένων προτάσεων βελτίωσης και επέκτασης των αναπτυχθέντων μοντέλων. Αρχικά, είναι δυνατή η επέκταση του γεωμετρικού μοντέλου στην ενσωμάτωση καμπυλότητας στην ακμή των οδόντων. Καθ' αυτό τον τρόπο θα εξετασθεί λεπτομερώς η επίδραση της γεωμετρίας αυτής στην δυναμική απόκριση του ζεύγους. Επιπλέον, όπως διαπιστώθηκε κατά την ανάλυση, η προσέγγιση της ελαστικότητας των οδόντων μέσω ενός κλειστού τύπου εισάγει σφάλματα συγκριτικά με το πλήρες μοντέλο. Συνεπώς, προτείνεται ο συνδυασμός των δύο μοντέλων, ώστε η ελαστικότητα του ζεύγους να προκύπτει μέσω προσαρμογής των αναλυτικών αποτελεσμάτων σε απλοποιημένη συνάρτηση. Τέλος, είναι σημαντική η αναλυτική ενσωμάτωση του μηχανισμού απόσβεσης μέσω της λίπανσης της βαθμίδας και δευτερευόντως των αναπτυσσόμενων δυνάμεων τριβής κατά την συνεργασία.

## 6 Παράρτημα

### Αλγόριθμος Γεωμετρικής Ανάλυσης Ζεύγους

```
%Gears Characteristics
clear
a0x=pi/9;
z1=32;
z2=60;
m=3;
Ro1=m*z1/2;
Ro2=m*z2/2;
Rg1=Ro1*cos(a0x);
Rg2=Ro2*cos(a0x);
a12=Ro1+Ro2; % (mm) Nominal=Ro1+Ro2
Rb1=a12*Rg1/(Rg1+Rg2);
Rb2=a12-Rb1;
a0=acos(Rg1/Rb1);
to=pi*m;
%Material Properties (for Elastic Forces)
b1=30; %mm
b2=30; %mm
Cf1=0.49;
Cf2=0.49;
E1=200*10^3; %MPa
v1=0.3;
E2=200*10^3; %MPa
v2=0.3;
b=min(b1,b2);
E=2*E1*E2/(E1+E2);
v=sqrt(1-E/2*((1-v1^2)/E1+(1-v2^2)/E2));
%---Detailed Geometry of Gear 1---%
hk1=1.00*m;
hf1=1.25*m;
So1=Cf1*to;
phit1=So1/Ro1+2*(tan(a0x)-a0x); %At Rg1
%Maximum Radius of Gear 1
da1=1;
af1=pi/10;
while abs(da1)>pi/10000
    th=tan(a0x)-a0x+So1/2/Ro1;
    afn1=tan(af1)-th;
    da1=afn1-af1;
    af1=afn1;
end
rkmax1=Rg1/cos(af1);
Rk1=min(Ro1+hk1,rkmax1);
%Minimum Radius of Gear 1
Rmin1=Ro1-hf1; %Gear might continue below Rg
tb1=1.1*Rmin1*phit1 %Approximate Tooth Width at Rmin
%Transition Radius Trochoid->Involute
c1=max(0.18*(Rk1-Rmin1),1.2*(Rg1-Rmin1)); %Trochoid Geometry Length
Rtr1=Rmin1+c1;
phitr1=tan(a0x)-a0x-(tan(acos(Rg1/Rtr1))-acos(Rg1/Rtr1));
Str1=(So1/Ro1+2*phitr1)*Rtr1;
%---Detailed Geometry of Gear 2---%
hk2=1.00*m;
hf2=1.25*m;
So2=Cf2*to;
```

```

phit2=So2/Ro2+2*(tan(a0x)-a0x); %At Rg2
%Maximum Radius of Gear 2
da1=1;
th=tan(a0x)-a0x+So2/2/Ro2;
af1=pi/4;
while abs(da1)>pi/10000
    afn1=tan(af1)-th;
    da1=afn1-af1;
    af1=afn1;
end
rkmax2=Rg2/cos(af1);
Rk2=min(Ro2+hk2,rkmax2);
%Minimum Radius of Gear 1
Rmin2=Ro2-hf2;
c2=max(0.15*(Rk2-Rmin2),1.2*(Rg2-Rmin2)); %Trochoid Geometry Length
tb2=0.98*Rmin2*phit2; %Approximate Tooth Width at Rmin
%Transition Radius Trochoid->Involute
Rtr2=Rmin2+c2;
phitr2=tan(a0x)-a0x-(tan(acos(Rg2/Rtr2))-acos(Rg2/Rtr2));
Str2=(So2/Ro2+2*phitr2)*Rtr2;
%Check Gear Distance%
if a12>Rk1+Rk2
    disp(['a12>Rk1+Rk2', ' Rk1+Rk2=', num2str(Rk1+Rk2), ' a12=', num2str(a12)])
    return
end
if a12<max(Rmin1+Rk2,Rmin2+Rk1)
    disp(['a12 too small', ' Rmin1+Rk2=', num2str(Rmin1+Rk2), '
Rmin2+Rk1=', num2str(Rmin2+Rk1), ' a12=', num2str(a12)])
    return
end
%Limits of "Line of Action"
%Upper Limit
%Section: Line of Action, Rk1
D1=(2*Rb1*tan(a0))^2+4*(1+tan(a0)^2)*(Rk1^2-Rb1^2);
xB=(-2*Rb1*tan(a0)+sqrt(D1))/(2*(1+tan(a0)^2));
yB=Rb1+xB*tan(a0);
thB=atan(xB/yB)
thB2=atan(xB/(a12-yB));
%Lower Limit
%Section: Line of Action, Rk2
D2=(2*Rb2*tan(a0))^2-4*(1+tan(a0)^2)*(Rb2^2-Rk2^2);
xA=(2*Rb2*tan(a0)-sqrt(D2))/(2*(1+tan(a0)^2));
yA=Rb1+tan(a0)*xA;
thA=atan(xA/yA)
thA2=atan(xA/(a12-yA));
%Corner Contact Limits
%Section: Rk1, Rk2
yD=(Rk1^2-Rk2^2+(a12)^2)/(2*a12);
xD=sqrt(Rk1^2-yD^2);
thD=atan(xD/yD)
thD2=atan(xD/(a12-yD));
yO=yD;
xO=-xD;
thO=-thD
%Total Involute Angle for G1
atot1=acos(Rg1/Rk1);
%Total Involute Angle for G2
atot2=acos(Rg2/Rk2);
tht1=tan(atot1)-atot1;
tht2=tan(atot2)-atot2;
w1=(thO+tht1):pi/10000:(thD+tht1);

```

```

imax=size(w1,2);
JJ=1:imax;
xC=zeros(1,imax);
yC=zeros(1,imax);
aC1=zeros(1,imax);
aC2=zeros(1,imax);
w2=zeros(1,imax);
dydx=zeros(1,imax);
K1E=zeros(1,imax);
K2E=zeros(1,imax);
RK1=zeros(1,imax);
RK2=zeros(1,imax);
Th1=zeros(1,imax);
Th2=zeros(1,imax);
I1G1=zeros(1,imax);
I2G1=zeros(1,imax);
I1G2=zeros(1,imax);
I2G2=zeros(1,imax);
C1=zeros(1,imax);
C2=zeros(1,imax);
INDEX=zeros(1,imax);
phiRb=tan(a0)-a0;
phiRo=tan(a0x)-a0x;
blsh=(1-Cf1-Cf2)*to*cos(a0x)+(Rg1+Rg2)*(phiRb-phiRo) %Backlash (mm)
w1LoA1=tan(thA+a0)-a0;
w1LoA2=thB+tht1;
w2LoA2=thB2-tht2;
%-----%
%Check Overlap ratio%
epsilon=(abs(w1LoA2-w1LoA1)*Rg1/to/cos(a0))
if epsilon<1.3
    disp(['Overlap Ratio is insufficient, â=',num2str(epsilon)])
    return
end
for i=1:imax
    %---Contact Points---%
    %Line Of Action
    if (w1(i)>=w1LoA1)&&(w1(i)<=w1LoA2)
        a=atan(a0+w1(i));
        th=tan(a)-a;
        pos=w1(i)-th;
        Th1(i)=th;
        xC(i)=sin(pos)*Rg1/cos(a);
        yC(i)=cos(pos)*Rg1/cos(a);
        aC1(i)=a;
        aC2(i)=acos(Rg2/sqrt(xC(i)^2+(a12-yC(i))^2));
        Th2(i)=tan(aC2(i))-aC2(i);
        w2(i)=(tan(aC2(i))-a0)+pi;
        dydx(i)=1/tan(w1(i)-tan(aC1(i)));
        RK1(i)=(yC(i)-(-1/dydx(i))*xC(i))/(cos(w1(i)-phit1/2)-(-
1/dydx(i))*sin(w1(i)-phit1/2));
        RK2(i)=abs((a12-yC(i)+(-1/dydx(i))*xC(i))/((-1/dydx(i))*sin(w2(i)-
phit2/2-pi)-cos(w2(i)-phit2/2-pi)));
        K1E(i)=abs((xC(i)-yC(i)*tan(w1(i)-phit1/2))/(1-(-
1/dydx(i))*tan(w1(i)-phit1/2)))*sqrt(1+(-1/dydx(i))^2);
        K2E(i)=abs((xC(i)+(a12-yC(i))*tan(w2(i)-phit2/2))/((-
1/dydx(i))*tan(w2(i)-phit2/2)-1))*sqrt(1+(-1/dydx(i))^2);
        INDEX(i)=1;
        %(<0) Angular Contact
    elseif (th0+tht1<=w1(i))&&(w1(i)<w1LoA1)
        %Recursive Method

```

```

a=pi/6;
da=1;
while abs(da)>pi/10000
    th=tan(a)-a;
    pos=w1(i)-th;
    A=a12-sqrt(Rk2^2-(Rg1/cos(a)*sin(pos))^2);
    a1=acos(Rg1/A*cos(pos));
    da=a-a1;
    a=a1;
end
th=tan(a)-a;
pos=w1(i)-th;
Th1(i)=th;
xC(i)=Rg1/cos(a)*sin(pos);
yC(i)=a12-sqrt(Rk2^2-xC(i)^2);
aC1(i)=a;
aC2(i)=acos(Rg2/sqrt(xC(i)^2+(a12-yC(i))^2));
Th2(i)=tan(aC2(i))-aC2(i);
w2(i)=pi+Th2(i)-asin(xC(i)/sqrt(xC(i)^2+(a12-yC(i))^2));
dydx(i)=1/tan(w1(i)-tan(aC1(i)));
RK1(i)=(yC(i)-(-1/dydx(i))*xC(i))/(cos(w1(i)-phit1/2)-(-
1/dydx(i))*sin(w1(i)-phit1/2));
RK2(i)=abs((a12-yC(i)+(-1/dydx(i))*xC(i))/((-1/dydx(i))*sin(w2(i)-
phit2/2-pi)-cos(w2(i)-phit2/2-pi)));
K1E(i)=abs((xC(i)-yC(i)*tan(w1(i)-phit1/2))/(1-(-
1/dydx(i))*tan(w1(i)-phit1/2)))*sqrt(1+(-1/dydx(i))^2);
K2E(i)=abs((xC(i)+(a12-yC(i))*tan(w2(i)-phit2/2))/((-
1/dydx(i))*tan(w2(i)-phit2/2)-1))*sqrt(1+(-1/dydx(i))^2);
INDEX(i)=0;
%(>0) Angular Contact
elseif (thB+tht1<w1(i))&&(w1(i)<=thD+tht1)
    Th1(i)=tht1;
    xC(i)=Rk1*sin(w1(i)-tht1);
    yC(i)=Rk1*cos(w1(i)-tht1);
    aC1(i)=acos(Rg1/Rk1);
    aC2(i)=acos(Rg2/sqrt(xC(i)^2+(a12-yC(i))^2));
    Th2(i)=tan(aC2(i))-aC2(i);
    w2(i)=pi+Th2(i)-asin(xC(i)/sqrt(xC(i)^2+(a12-yC(i))^2));
    dydx(i)=1/tan(w2(i)-tan(aC2(i)));
    RK1(i)=(yC(i)-(-1/dydx(i))*xC(i))/(cos(w1(i)-phit1/2)-(-
1/dydx(i))*sin(w1(i)-phit1/2));
    RK2(i)=abs((a12-yC(i)+(-1/dydx(i))*xC(i))/((-1/dydx(i))*sin(w2(i)-
phit2/2-pi)-cos(w2(i)-phit2/2-pi)));
    K1E(i)=abs((xC(i)-yC(i)*tan(w1(i)-phit1/2))/(1-(-
1/dydx(i))*tan(w1(i)-phit1/2)))*sqrt(1+(-1/dydx(i))^2);
    K2E(i)=abs((xC(i)+(a12-yC(i))*tan(w2(i)-phit2/2))/((-
1/dydx(i))*tan(w2(i)-phit2/2)-1))*sqrt(1+(-1/dydx(i))^2);
    INDEX(i)=2;
end
%---Gear 1 Look Up Table---%
yinv1=c1;
C1(i)=RK1(i)-Rmin1;
if C1(i)<0
    C1(i)=0;
end
g1=tb1;
a1=(Str1-tb1+yinv1)/yinv1^2;
bI1=-1;
%Width for trochoid t(y)=ay^2+by+g
%Width for involute t=(ötooth-2(tana-a))*r
dr=10^(-3);

```

```

I11=0;
I21=0;
for y=0:dr:C1(i)
    if y<yinv1
        ttr=a1*y^2+bI1*y+g1;
        I11=I11+dr/ttr;
        I21=I21+(y-C1(i))^2/ttr^3*dr;
    else
        r=y+Rmin1;
        alpha=acos(Rg1/r);
        th=tan(alpha)-alpha;
        tinv=(phit1-2*th)*r;
        I11=I11+dr/tinv;
        I21=I21+(y-C1(i))^2/tinv^3*dr;
    end
    %Calculation up to C
end
I1G1(i)=I11;
I2G1(i)=I21;
%---Gear 2 Look Up Table---%
yinv2=c2;
C2(i)=RK2(i)-Rmin2;
if C2(i)<0
    C2(i)=0;
end
g2=tb2;
a2=(Str2-tb2+yinv2)/yinv2^2;
bI2=-1;
dr=10^(-3);
I12=0;
I22=0;
for y=0:dr:C2(i)
    if y<yinv2
        ttr=real(a2*y^2+bI2*y+g2);
        I12=I12+dr/ttr;
        I22=I22+(y-C2(i))^2/ttr^3*dr;
    else
        r=y+Rmin2;
        alpha=acos(Rg2/r);
        th=tan(alpha)-alpha;
        tinv=(phit2-2*th)*r;
        I12=I12+dr/tinv;
        I22=I22+(y-C2(i))^2/tinv^3*dr;
    end
    %Calculation up to C
end
I1G2(i)=I12;
I2G2(i)=I22;
end
%Tooth Width Distribution
j=1;
for y=0:dr:Rk1-Rmin1
    if y<yinv1
        t1(j)=real(a1*y^2+bI1*y+g1);
    else
        r=y+Rmin1;
        alpha=acos(Rg1/r);
        th=tan(alpha)-alpha;
        t1(j)=(phit1-2*th)*r;
    end
    yy1(j)=y;
end

```

```

j=j+1;
end
j=1;
for y=0:dr:Rk2-Rmin2
    if y<yinv2
        t2(j)=real(a2*y^2+bI2*y+g2);
    else
        r=y+Rmin2;
        alpha=acos(Rg2/r);
        th=tan(alpha)-alpha;
        t2(j)=(phit2-2*th)*r;
    end
    yy2(j)=y;
    j=j+1;
end
w20=(Rg1/Rg2+1)*(a0-tan(a0))
CR1=Rg1*tan(aC1);
CR2=Rg2*tan(aC2);
phi1=atan(dydx)+pi/2+w1-phit1/2 ;%Force Angle
phi2=atan(dydx)-pi/2+(w2-phit2/2);
w2=pi-w2;
w2C=interp1(xC,w2,0);
A=-1./dydx;
RC1=abs((A.*xC-yC))./sqrt(A.^2+1);
RC2=a12*sin(-atan(dydx))-RC1;

```



## Αλγόριθμος Υπολογισμού Δυνάμεων Επαφής

```

%---- Elastic Forces G1,G2
ind1=1;
ind2=1;
Fn=0.1; %Minimum Force (N)
ddp1=(2*pi/z1)/100;
Ddmax=10^(-1);
deltap=10^(-6);
deltap1=deltap;
ndp=[-10^(-5),-10^(-7),0,deltap1];
% Exponential Growth in Displacement
kk=1.05;
Nd=floor(log10(Ddmax/deltap)/log10(kk));
Ne=round((2*pi/z1)/ddp1)+1;
MELG1=zeros(Ne,Nd+4);
STE=zeros(Nd+4,1);
MELG2=zeros(Ne,Nd+4);
POS1=zeros(Ne,1);
TCN=zeros(Ne,Nd+4);
Nth=floor(2*thD/(2*pi/z1));
F=Fn*ones(1,Nth);
for p1=(w1LoA2+w1LoA1)/2-pi/z1:ddp1:(w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1
    while deltap<=Ddmax
        if ind2<=4
            deltap=ndp(ind2);
        else
            deltap=deltap*kk;
        end
        p2=interp1(w1,w2,p1);
        p01=p1+deltap;
        %Contact Calculations
        iMin=ceil((-p01+thO+tht1)*z1/(2*pi));
        iMax=floor((-p01+thD+tht1)*z1/(2*pi));
        %Find Meshing Pairs of Teeth
        iCont=iMin:iMax;
        w2T=p2+iCont*2*pi/z2;
        %Falling out of Meshing Region
        w2T=w2T((w2(1)<w2T)&(w2T<w2(end)));
        iCont=round((w2T-p2)/(2*pi)*z2);
        w1T=p01+iCont*2*pi/z1;
        %Nominal G1 position
        w1NOM=interp1(w2,w1,w2T);
        %Interpolation of Geometrical Properties
        RCg1=interp1(w1,RC1,w1T);
        RCg2=interp1(w2,RC2,w2T);
        dYdX=interp1(w1,dydx,w1T);
        Phi1=interp1(w1,phi1,w1T);
        Phi2=interp1(w2,phi2,w2T);
        CUR1=interp1(w1,CR1,w1T);
        CUR2=interp1(w2,CR2,w2T);
        In1g1=interp1(w1,I1G1,w1T);
        In1g2=interp1(w2,I1G2,w2T);
        In2g1=interp1(w1,I2G1,w1T);
        In2g2=interp1(w2,I2G2,w2T);
        kE1=interp1(w1,K1E,w1T);
        kE2=interp1(w2,K2E,w2T);
        CH1=interp1(w1,C1,w1T);
        CH2=interp1(w2,C2,w2T);
        %Static Transmission Error Calculation
        x=p01*Rg1-(p2-w20)*Rg2;
    end
end

```

```

%Displacements
Disp=Rg1*(w1T-w1NOM);
Disp(Disp<0)=0;
ContTN=numel(Disp(Disp>0));
%Forces on Teeth
% Change in Number of Teeth Pairs
%If N=floor(LoA/(2*pi/z))
%Teeth pairs Mathematically can be N or N-1
ind1=ind1+1
end
    if numel(Disp)>numel(F)
        %Teeth pair in
        F=[Fn F];
    elseif numel(Disp)<numel(F)
        %Teeth pair out
        F(numel(F))=[];
    end
    %Teeth Pair Stiffness
    %Bending
Cb1=12.*(cos(Phi1).^2.*(In2g1+(0.2*(1+v1)+(tan(Phi1)).^2./12).*In1g1));
Cb2=12.*(cos(Phi2).^2.*(In2g2+(0.2*(1+v2)+(tan(Phi2)).^2./12).*In1g2));
    %Root
Cf1=(1-v1^2).*cos(Phi1).^2.*(50/2/pi.*(CH1./tb1).^2+2*(1-2*v1)/(1-
v1).*CH1./tb1+4.82/pi*(1+(tan(Phi1)).^2./2.4./(1+v)));
Cf2=(1-v2^2).*cos(Phi2).^2.*(50/2/pi.*(CH2./tb2).^2+2*(1-2*v2)/(1-
v2).*CH2./tb2+4.82/pi*(1+(tan(Phi2)).^2./2.4./(1+v)));
    %Hertz
CG12=(Cb1+Cf1).*E/E1+(Cb2+Cf2).*E/E2;
Csqd=8.*F.*(CUR1.*CUR2.*(1-v^2)./(pi*b*E.*(CUR1+CUR2)));
Chr2=2*(1-v^2)/pi.*(log(4*kE1.*kE2./Csqd)-v/(1-v));
    %Overall K
Ctot=CG12+Chr2;
Ktotal=E*b./Ctot; %N/mm
F=Ktotal.*Disp;
F(F(:)<Fn)=Fn; %Force Threshold
Mel1=Ktotal.*Disp.*RCg1/10^3; % always >0
Mel2=Ktotal.*Disp.*RCg2/10^3;
MELG1(ind1,ind2)=sum(Mel1);
MELG2(ind1,ind2)=sum(Mel2);
    if ind1==1
        ind2
        STE(ind2)=x;
    end
    TCN(ind1,ind2)=ContTN;
    ind2=ind2+1;
end
deltap=deltap1;
ind2=1;
POS1(ind1)=p1;

```

## Αλγόριθμος Δυναμικής Προσομοίωσης

```

%Dynamic Analysis
%-----%
%Given Geometry & Pre-Processing
%-----%
%Gear Dynamical Properties
den1=7.86*10^(3); %kg/m^3
den2=den1;
m1=pi*Rb1^2*b1*den1/10^9; %kg
m2=pi*Rb2^2*b2*den2/10^9; %kg
I1=1/2*m1*Rb1^2/10^6; %kg*m^2
I2=1/2*m2*Rb2^2/10^6; %kg*m^2
%T.E. Eigenfrequency
mx=I1*I2/(I2*(Rg1/10^3)^2+I1*(Rg2/10^3)^2); %kg
Kmean=mean(Ktotal)*10^3 %N/m (Ktotal in N/mm)
eigenf=sqrt(Kmean/mx)/2/pi
%Damping
Cdamp1=2*0.02*epsilon*Rg1/10^3*sqrt(Kmean*mx)/10^3; % (dxdt mm/s)
Cdamp2=2*0.02*epsilon*Rg2/10^3*sqrt(Kmean*mx)/10^3;
%Input & Output Torque frequency
wI=0;
wL=0;
%Constant Input Torque
M1c=5; %Nm
%Constant Load Torque
M2c=M1c*Rb2/Rb1;
dt=1/100000;
%Nyquist Theorem
if 1/dt<2*eigenf
    disp('Insufficient Sampling Frequency')
    return
end
%Simulation Time
Ttot=1; % sec
NN=round(Ttot/dt+1);
TE=zeros(NN,1);
dTE=zeros(NN,1);
P1=zeros(NN,1);
P2=zeros(NN,1);
WW1=zeros(NN,1);
WW2=zeros(NN,1);
STATE=zeros(NN,1);
PAIRN=zeros(NN,1);
time=zeros(NN,1);
%Initial Conditions
pos1=0; %Gear 1 Angle
pos2=w20; %Gear 2 Angle
%Initial Rot. Speeds
dw1dt=1200*pi/30;
dw2dt=dw1dt*Rb2/Rb1;
p1=pos1;
p2=pos2;
x=0;
dxdt=0;
tres=Ttot/10;
%Solution with the use of Runge Kutta 4th Order Method
for t=0:dt:Ttot
    %External Loads

```

```

if t<tres
    M1=M1c*t/tres+0*cos(wL*t);
    M2=M2c*t/tres+0*cos(wL*t);
end
%Construct the 4 terms of RK
%-----%
%G1 Within Boundaries
iPos1=floor((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-p1)/(2*pi/z1));
p1=p1+iPos1*2*pi/z1;
%Corresponding G2
p2=p2+iPos1*2*pi/z2;
%Transmission Error Calculation
if x>0
    ss=1;
    pR1=p1;
    xR=x;
elseif x<=-blsh
    ss=-1;
    pR1=phit1-p1; %Contact Inversion G1
    iPos1=floor((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-pR1)/(2*pi/z1));
    pR1=pR1+iPos1*2*pi/z1;
    xR=-(x+blsh);
else
    ss=0; %No Contact
end
%Elastic Forces
if abs(ss)==1
    Mel1=max(interp2(STE, POS1, MELG1, xR, pR1)); %Nm
    Mel2=max(interp2(STE, POS1, MELG2, xR, pR1)); %Nm
else
    Mel1=0;
    Mel2=0;
end
%Initial Step
dw1old=dw1dt;
dw2old=dw2dt;
p1old=p1;
p2old=p2;
%Dynamic Equations
d2w1dt=(M1-abs(ss)*Cdamp1*dxdt-ss*Mel1)/I1;
d2w2dt=(-M2+abs(ss)*Cdamp2*dxdt+ss*Mel2)/I2;
%-----%
%1st RK term
K1dw1=dt*d2w1dt;
K1dw2=dt*d2w2dt;
K1w1=dt*dw1dt;
K1w2=dt*dw2dt;
dw1dt=dw1old+K1dw1/2;
dw2dt=dw2old+K1dw2/2;
p1=p1old+K1w1/2;
p2=p2old+K1w2/2;
%G1 Within Boundaries
iPos1=floor((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-p1)/(2*pi/z1));
p1=p1+iPos1*2*pi/z1;
%Corresponding G2
p2=p2+iPos1*2*pi/z2;
%Dependent Variables
x=p1*Rg1-(p2-w20)*Rg2;
dxdt=dw1dt*Rg1-dw2dt*Rg2;
%-----%
%2nd RK Term

```

```

%Transmission Error Calculation
if x>0
    ss=1;
    pR1=p1;
    xR=x;
elseif x<=-blsh
    ss=-1;
    pR1=phit1-p1; %Contact Inversion G1
    iPos1=floor((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-pR1)/(2*pi/z1));
    pR1=pR1+iPos1*2*pi/z1;
    xR=-(x+blsh);
else
    ss=0; %No Contact
end
%Elastic Forces
if abs(ss)==1
    Mel1=max(interp2(STE,POS1,MELG1,xR,pR1)); %Nm
    Mel2=max(interp2(STE,POS1,MELG2,xR,pR1)); %Nm
else
    Mel1=0;
    Mel2=0;
end
%Dynamic Equations
d2w1dt=(M1-abs(ss)*Cdamp1*dxdt-ss*Mel1)/I1;
d2w2dt=(-M2+abs(ss)*Cdamp2*dxdt+ss*Mel2)/I2;
%-----%
K2dw1=dt*d2w1dt;
K2dw2=dt*d2w2dt;
K2w1=dt*dw1dt;
K2w2=dt*dw2dt;
p1=p1old+K2w1/2;
p2=p2old+K2w2/2;
%G1 Within Boundaries
iPos1=floor((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-p1)/(2*pi/z1));
p1=p1+iPos1*2*pi/z1;
%Corresponding G2
p2=p2+iPos1*2*pi/z2;
dw1dt=dw1old+K2dw1/2;
dw2dt=dw2old+K2dw2/2;
%Dependent Variables
x=p1*Rg1-(p2-w20)*Rg2;
dxdt=dw1dt*Rg1-dw2dt*Rg2;
%-----%
%3rd RK Term
%Transmission Error Calculation
if x>0
    ss=1;
    pR1=p1;
    xR=x;
elseif x<=-blsh
    ss=-1;
    pR1=phit1-p1; %Contact Inversion G1
    iPos1=floor((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-pR1)/(2*pi/z1));
    pR1=pR1+iPos1*2*pi/z1;
    xR=-(x+blsh);
else
    ss=0; %No Contact
end
%Elastic Forces
if abs(ss)==1
    Mel1=max(interp2(STE,POS1,MELG1,xR,pR1)); %Nm

```

```

        Mel2=max(interp2(STE,POS1,MELG2,xR,pR1)); %Nm
    else
        Mel1=0;
        Mel2=0;
    end
    %Dynamic Equations
    d2w1dt=(M1-abs(ss)*Cdamp1*dxdt-ss*Mel1)/I1;
    d2w2dt=(-M2+abs(ss)*Cdamp2*dxdt+ss*Mel2)/I2;
    %-----%
    K3dw1=dt*d2w1dt;
    K3dw2=dt*d2w2dt;
    K3w1=dt*dw1dt;
    K3w2=dt*dw2dt;
    dw1dt=dw1old+K3dw1;
    dw2dt=dw2old+K3dw2;
    p1=p1old+K3w1;
    p2=p2old+K3w2;
    %G1 Within Boundaries
    iPos1=floor((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-p1)/(2*pi/z1);
    p1=p1+iPos1*2*pi/z1;
    %Corresponding G2
    p2=p2+iPos1*2*pi/z2;
    %Dependent Variables
    x=p1*Rg1-(p2-w20)*Rg2;
    dxdt=dw1dt*Rg1-dw2dt*Rg2;
    %-----%
    %4th RK Term
    %Transmission Error Calculation
    if x>0
        ss=1;
        pR1=p1;
        xR=x;
    elseif x<=-blsh
        ss=-1;
        pR1=phit1-p1; %Contact Inversion G1
        iPos1=floor((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-pR1)/(2*pi/z1);
        pR1=pR1+iPos1*2*pi/z1;
        xR=-(x+blsh);
    else
        ss=0; %No Contact
    end
    %Elastic Forces
    if abs(ss)==1
        Mel1=max(interp2(STE,POS1,MELG1,xR,pR1)); %Nm
        Mel2=max(interp2(STE,POS1,MELG2,xR,pR1)); %Nm
        pairs=max(ceil(interp2(STE,POS1,TCN,xR,pR1)));
    else
        Mel1=0;
        Mel2=0;
        pairs=0;
    end
    %Dynamic Equations
    d2w1dt=(M1-abs(ss)*Cdamp1*dxdt-ss*Mel1)/I1;
    d2w2dt=(-M2+abs(ss)*Cdamp2*dxdt+ss*Mel2)/I2;
    %-----%
    K4dw1=dt*d2w1dt;
    K4dw2=dt*d2w2dt;
    K4w1=dt*dw1dt;
    K4w2=dt*dw2dt;
    dw1dt=dw1old+1/6*(K1dw1+2*K2dw1+2*K3dw1+K4dw1);
    dw2dt=dw2old+1/6*(K1dw2+2*K2dw2+2*K3dw2+K4dw2);

```

```

p1=p1old+1/6*(K1w1+2*K2w1+2*K3w1+K4w1);
p2=p2old+1/6*(K1w2+2*K2w2+2*K3w2+K4w2);
%G1 Within Boundaries
iPos1=floor(((w1LoA2+w1LoA1)/2+pi/z1-p1)/(2*pi/z1));
p1=p1+iPos1*2*pi/z1;
%Corresponding G2
p2=p2+iPos1*2*pi/z2;
%Dependent Variables
x=p1*Rg1-(p2-w20)*Rg2;
dxdt=dw1dt*Rg1-dw2dt*Rg2;
%No need for big accuracy here
pos1=dw1old*dt+pos1;
pos2=dw2old*dt+pos2;
if pos1>0
    pos1=mod(pos1,2*pi);
else
    pos1=mod(pos1,-2*pi);
end
if pos2>0
    pos2=mod(pos2,2*pi);
else
    pos2=mod(pos2,-2*pi);
end
TE(round(t/dt)+1)=x;
dTE(round(t/dt)+1)=dxdt;
P1(round(t/dt)+1)=pos1;
P2(round(t/dt)+1)=pos2;
PAIRN(round(t/dt)+1)=pairs;
WW1(round(t/dt)+1)=dw1dt;
WW2(round(t/dt)+1)=dw2dt;
time(round(t/dt)+1)=t;
STATE(round(t/dt)+1)=ss;
end

```

## Αλγόριθμος Ημι-Αναλυτικού Μοντέλου

```
%Gears Characteristics
clear
a0x=pi/9;
z1=32;
z2=60;
m=3;
Ro1=m*z1/2;
Ro2=m*z2/2;
Rg1=Ro1*cos(a0x);
Rg2=Ro2*cos(a0x);
a12=Ro1+Ro2; %(mm) Nominal=Ro1+Ro2
Rb1=a12*Rg1/(Rg1+Rg2);
Rb2=a12-Rb1;
a0=acos(Rg1/Rb1);
%No friction circles
to=pi*m;
%Material Properties (for Elastic Forces)
b1=30; %mm
b2=30; %mm
Cf1=0.49;
Cf2=0.49;
E1=200*10^3; %MPa
v1=0.3;
E2=200*10^3; %MPa
v2=0.3;
b=min(b1,b2);
E=2*E1*E2/(E1+E2);
v=sqrt(1-E/2*((1-v1^2)/E1+(1-v2^2)/E2));
%---Detailed Geometry of Gear 1---%
hk1=1.00*m;
hf1=1.25*m;
So1=Cf1*to;
phit1=So1/Ro1+2*(tan(a0x)-a0x); %At Rg1
%Maximum Radius of Gear 1
da1=1;
af1=pi/10;
while abs(da1)>pi/10000
    th=tan(a0x)-a0x+So1/2/Ro1;
    afn1=tan(af1)-th;
    da1=afn1-af1;
    af1=afn1;
end
rkmax1=Rg1/cos(af1);
Rk1=min(Ro1+hk1,rkmax1);
%Minimum Radius of Gear 1
Rmin1=Ro1-hf1; %Gear might continue below Rg
tb1=1.04*Rmin1*phit1; %Approximate Tooth Width at Rmin
%-----%
%---Detailed Geometry of Gear 2---%
hk2=1.00*m;
hf2=1.25*m;
So2=Cf2*to;
phit2=So2/Ro2+2*(tan(a0x)-a0x); %At Rg2
%Maximum Radius of Gear 2
da1=1;
th=tan(a0x)-a0x+So2/2/Ro2;
af1=pi/4;
while abs(da1)>pi/10000
    afn1=tan(af1)-th;
```



```

    da1=afn1-af1;
    af1=afn1;
end
rkmax2=Rg2/cos(af1);
Rk2=min(Ro2+hk2,rkmax2);
%Minimum Radius of Gear 1
Rmin2=Ro2-hf2;
c2=max(0.15*(Rk2-Rmin2),1.2*(Rg2-Rmin2)); %Trochoid Geometry Length
tb2=1.04*Rmin2*phit2; %Approximate Tooth Width at Rmin
%Check Gear Distance%
if a12>Rk1+Rk2
    disp(['a12>Rk1+Rk2',' Rk1+Rk2=',num2str(Rk1+Rk2),' a12=',num2str(a12)])
    return
end
if a12<max(Rmin1+Rk2,Rmin2+Rk1)
    disp(['a12 too small',' Rmin1+Rk2=',num2str(Rmin1+Rk2),'
Rmin2+Rk1=',num2str(Rmin2+Rk1),' a12=',num2str(a12)])
    return
end
%Total Involute Angle for G1
atot1=acos(Rg1/Rk1);
%Total Involute Angle for G2
atot2=acos(Rg2/Rk2);
%If Rmin>Rg -> Sph>0
tht1=tan(atot1)-atot1;
tht2=tan(atot2)-atot2;
%-----%
%Simplified Model
phi0=tan(a0x)-a0x;
th1=So1*Rk1/Ro1+2*(phi0-tht1)*Rk1;
th1n=1.08*th1;
th2=So2*Rk2/Ro2+2*(phi0-tht2)*Rk2;
th2n=th2+0.05*(tb2-th2);
CC11=tb1;
CC12=log(tb1/th1n)/(Rk1-Rmin1);
CC21=tb2;
CC22=log(tb2/th2n)/(Rk2-Rmin2);
phiRb=tan(a0)-a0;
phiRo=tan(a0x)-a0x;
blsh=(1-Cf1-Cf2)*to*cos(a0x)+(Rg1+Rg2)*(phiRb-phiRo); %Backlash (mm)
w1LoA1=tan(thA+a0)-a0;
w1LoA2=thB+tht1;
w2LoA2=thB2-tht2;
w20=(Rg1/Rg2+1)*(a0-tan(a0));
%-----%
%Check Overlap ratio%
epsilon=(abs(w1LoA2-w1LoA1)*Rg1/to/cos(a0))
if epsilon<1.3
    disp('Overlap Ratio is insufficient, â=',num2str(epsilon))
return
end
%Foot of G1 Coefficients
A11f=4.82/pi;
B11f=2*(1-2*v1)/(1-v1)/tb1;
C11f=25/pi/tb1^2;
D11f=1/2.4/(1+v1);
Alf1=A11f*(1-v1^2)-D11f-B11f*(1-v1^2)*Rmin1+C11f*(1-v1^2)*Rmin1^2;
B1f1=B11f*(1-v1^2)*Rg1-2*Rg1*Rmin1*C11f*(1-v1^2);
C1f1=Rg1^2*C11f*(1-v1^2)+D11f;
%Foot of G2 Coefficients
A12f=4.82/pi;

```

```

B12f=2*(1-2*v2)/(1-v2)/tb2;
C12f=25/pi/tb2^2;
D12f=1/2.4/(1+v2);
A1f2=A12f*(1-v2^2)-D12f-B12f*(1-v2^2)*Rmin2+C12f*(1-v2^2)*Rmin2^2;
B1f2=B12f*(1-v2^2)*Rg2-2*Rg2*Rmin2*C12f*(1-v2^2);
C1f2=Rg2^2*C12f*(1-v2^2)+D12f;
%Bending of G1 Coefficients
FF1=0.2*(1+v1);
A1b1=-12*((FF1-1/12)/CC11+4/9/CC11^3/CC12^2)*Rmin1;
B1b1=12*((FF1-1/12)/CC11+4/9/CC11^3/CC12^2)*Rg1;
C1b1=Rg1/CC11;
D1b1=Rmin1/CC11;
f=0.99;
%Bending of G2 Coefficients
FF2=0.2*(1+v2);
A1b2=-12*((FF2-1/12)/CC21+4/9/CC21^3/CC22^2)*Rmin2;
B1b2=12*((FF2-1/12)/CC21+4/9/CC21^3/CC22^2)*Rg2;
C1b2=Rg2/CC21;
D1b2=Rmin2/CC21;
%Hertz Coefficients
K1H=2*(1-v^2)/pi;
fi1=a0-phit1/2;
fi2=a0-w20-phit2/2;
KwH=(Rg1+Rg2)*tan(a0)*(1-tan(fi2)/(a0-w20)-
tan(fi1)/a0+tan(fi1)*tan(fi2)/(a0*(a0-w20)));
K2H=log(KwH*pi*b*E/2/Kmean_app/(1-v^2))-v/(1-v);

%Overall Coefficients
A_ov1=(A1b1+A1f1)/E1;
A_ov2=(A1b2+A1f2)/E2;
B_ov1=(f*B1b1+B1f1)/E1;
B_ov2=(f*B1b2+B1f2)/E2;
C_ov=(K1H*K2H/E+(C1b1-D1b1+C1f1)/E1+(C1b2-D1b2+C1f2)/E2);
D_ov=-K1H/E;
%Simplified Dynamic Analysis
%-----%
%Gear Dynamical Properties
den1=7.86*10^(3); %kg/m^3
den2=den1;
m1=pi*Rb1^2*b1*den1/10^9; %kg
m2=pi*Rb2^2*b2*den2/10^9; %kg
I1=1/2*m1*Rb1^2/10^6; %kg*m^2
I2=1/2*m2*Rb2^2/10^6; %kg*m^2
mx=I1*I2/(I2*(Rg1/10^3)^2+I1*(Rg2/10^3)^2); %kg
%Damping
Kmean=mean(Ktotal)*10^3 %N/m (Ktotal is in N/mm)
Cdamp=2*0.02*epsilon*Rg1/10^3*sqrt(Kmean*mx)/10^3;
%Input & Output Torque frequency
wI=0;
wL=0;
%Constant Input Torque (Nm)
M1c=2;
%Constant Load Torque
M2c=M1c*Rb2/Rb1;
%Simulation Time
Ttot=1;%Total time in s
dt=1/100000;
eigenf=sqrt(Kmean/mx)/2/pi;
NN=round(Ttot/dt+1);
TE=zeros(NN,1);
dTE=zeros(NN,1);

```

```

P1=zeros(NN,1);
WW1=zeros(NN,1);
STATE=zeros(NN,1);
time=zeros(NN,1);
PAIRN=zeros(NN,1);
%Initial Conditions
wG1=0; %Gear 1 Angle
pos1=0;
x=0;
dxdt=0; %T.E.
xc=x;
%Initial Rot. Speed
dw1dt=600*pi/30;
dw2dt=dw1dt*Rb2/Rb1;
if w1LoA1+2*pi/z1>w1LoA2
    disp('Constantly only 1 pair in contact')
end
trig=Ttot/10;
for t=0:dt:Ttot
    %External Loads
    if t<trig
        M1=M1c*t/trig+0*cos(wL*t);
        M2=M2c*t/trig+0*cos(wL*t);
    end
    %1st RK TERM
    %-----%
    %Check T.E.
    if x>0
        ss=1;
        xc=x;
    elseif x<=-blsh
        ss=-1;
        wG1=2/cos(a0)*((1-Cf1)*pi/z1-phiRb*(1-cos(a0))+phiRo)-wG1; %Contact
Inversion G1
        xc=-(x+blsh); %Proof Checked (>0)
    else
        ss=0; %No Contact
    end
    %Ensure w1 is within boundaries
    w1n=wG1-heaviside(wG1-w1LoA2)*2*pi/z1+(1-heaviside(wG1-
w1LoA1))*2*pi/z1;
    wG1old=w1n;
    dw1old=dw1dt;
    dw2old=dw2dt;
    xold=x;
    %Corresponding gear angle for second pair in contact
    w1n2=w1n-sign(w1n)*2*pi/z1;
    %w1n2=w1n+heaviside(w1LoA2-(w1n+2*pi/z1))*2*pi/z1-heaviside((w1n-
2*pi/z1)-w1LoA1)*2*pi/z1
    %Gap dependence from x
    fm=sqrt(3)/pi/(4*pi/z1-(w1LoA2-w1LoA1)-0.1*xc);
    fc=2*fm;
    SpWVL=(1-2*pi^2*fm^2*(w1n-(w1LoA2+w1LoA1)/2)^2)*exp(-pi^2*fc^2*(w1n-
(w1LoA2+w1LoA1)/2)^2);
    Kt_s1=b/(A_ov1*cos(a0+w1n-phi1/2)^2+B_ov1*cos(a0+w1n-
phi1/2)+A_ov2*cos(a0-(Rg1/Rg2*w1n+w20)-phi2/2)^2+B_ov2*cos(a0-
(Rg1/Rg2*w1n+w20)-phi2/2)+C_ov+D_ov*log(xc));
    Kt_s2=b/(A_ov1*cos(a0+w1n2-phi1/2)^2+B_ov1*cos(a0+w1n2-
phi1/2)+A_ov2*cos(a0-(Rg1/Rg2*w1n2+w20)-phi2/2)^2+B_ov2*cos(a0-
(Rg1/Rg2*w1n2+w20)-phi2/2)+C_ov+D_ov*log(xc));
    Kt_s=(1-SpWVL)*Kt_s2+Kt_s1;

```

```

%T.E. Dynamic Equation
%/10^3*(Rg1/10^3)
d2w1dt=(M1-abs(ss)*Cdamp*dxdt-ss*(xc*Kt_s)*(Rg1/10^3))/I1;
d2w2dt=(-M2+abs(ss)*Cdamp*dxdt+ss*(xc*Kt_s)*(Rg2/10^3))/I2;
%For now,1-2 teeth pairs are considered
K1dw1=dt*d2w1dt;
K1dw2=dt*d2w2dt;
K1w1=dt*dw1dt;
K1x=dt*dxdt;
dw1dt=dw1old+K1dw1/2;
dw2dt=dw2old+K1dw2/2;
wG1=wG1old+K1w1/2;
%Dependent Variables
%x=p1*Rg1-(p2-w20)*Rg2;
x=xold+K1x/2;
dxdt=dw1dt*Rg1-dw2dt*Rg2;
%2nd RK Term
%-----%
%Check T.E.
if x>0
    ss=1;
    xc=x;
elseif x<=-blsh
    ss=-1;
    wG1=2/cos(a0)*((1-Cf1)*pi/z1-phiRb*(1-cos(a0))+phiRo)-wG1; %Contact
Inversion G1
    xc=-(x+blsh); %Proof Checked (>0)
else
    ss=0; %No Contact
end
%Ensure w1 is within boundaries
wln=wG1-heaviside(wG1-w1LoA2)*2*pi/z1+(1-heaviside(wG1-
w1LoA1))*2*pi/z1;
%Corresponding gear angle for second pair in contact
wln2=wln-sign(wln)*2*pi/z1;
%Gap dependence from x
fm=sqrt(3)/pi/(4*pi/z1-(w1LoA2-w1LoA1)-0.1*xc);
fc=2*fm;
SpWVL=(1-2*pi^2*fm^2*(wln-(w1LoA2+w1LoA1)/2)^2)*exp(-pi^2*fc^2*(wln-
(w1LoA2+w1LoA1)/2)^2);
Kt_s1=b/(A_ov1*cos(a0+wln-phi1/2)^2+B_ov1*cos(a0+wln-
phi1/2)+A_ov2*cos(a0-(Rg1/Rg2*wln+w20)-phi2/2)^2+B_ov2*cos(a0-
(Rg1/Rg2*wln+w20)-phi2/2)+C_ov+D_ov*log(xc));
Kt_s2=b/(A_ov1*cos(a0+wln2-phi1/2)^2+B_ov1*cos(a0+wln2-
phi1/2)+A_ov2*cos(a0-(Rg1/Rg2*wln2+w20)-phi2/2)^2+B_ov2*cos(a0-
(Rg1/Rg2*wln2+w20)-phi2/2)+C_ov+D_ov*log(xc));
Kt_s=(1-SpWVL)*Kt_s2+Kt_s1;
%T.E. Dynamic Equation
%/10^3*(Rg1/10^3)
d2w1dt=(M1-abs(ss)*Cdamp*dxdt-ss*(xc*Kt_s)*(Rg1/10^3))/I1;
d2w2dt=(-M2+abs(ss)*Cdamp*dxdt+ss*(xc*Kt_s)*(Rg2/10^3))/I2;
%For now,1-2 teeth pairs are considered
K2dw1=dt*d2w1dt;
K2dw2=dt*d2w2dt;
K2w1=dt*dw1dt;
K2x=dt*dxdt;
dw1dt=dw1old+K2dw1/2;
dw2dt=dw2old+K2dw2/2;
wG1=wG1old+K2w1/2;
%Dependent Variables
x=xold+K2x/2;

```

```

dxdt=dw1dt*Rg1-dw2dt*Rg2;
%3rd RK Term
%-----%
%Check T.E.
if x>0
    ss=1;
    xc=x;
elseif x<=-blsh
    ss=-1;
    wG1=2/cos(a0)*((1-Cf1)*pi/z1-phiRb*(1-cos(a0))+phiRo)-wG1; %Contact
Inversion G1
    xc=-(x+blsh); %Proof Checked (>0)
else
    ss=0; %No Contact
end
%Ensure w1 is within boundaries
wln=wG1-heaviside(wG1-w1LoA2)*2*pi/z1+(1-heaviside(wG1-
w1LoA1))*2*pi/z1;
%Corresponding gear angle for second pair in contact
wln2=wln-sign(wln)*2*pi/z1;
%Gap dependence from x
fm=sqrt(3)/pi/(4*pi/z1-(w1LoA2-w1LoA1)-0.1*xc);
fc=2*fm;
SpWVL=(1-2*pi^2*fm^2*(wln-(w1LoA2+w1LoA1)/2)^2)*exp(-pi^2*fc^2*(wln-
(w1LoA2+w1LoA1)/2)^2);
Kt_s1=b/(A_ov1*cos(a0+wln-phi1/2)^2+B_ov1*cos(a0+wln-
phi1/2)+A_ov2*cos(a0-(Rg1/Rg2*wln+w20)-phi2/2)^2+B_ov2*cos(a0-
(Rg1/Rg2*wln+w20)-phi2/2)+C_ov+D_ov*log(xc));
Kt_s2=b/(A_ov1*cos(a0+wln2-phi1/2)^2+B_ov1*cos(a0+wln2-
phi1/2)+A_ov2*cos(a0-(Rg1/Rg2*wln2+w20)-phi2/2)^2+B_ov2*cos(a0-
(Rg1/Rg2*wln2+w20)-phi2/2)+C_ov+D_ov*log(xc));
Kt_s=(1-SpWVL)*Kt_s2+Kt_s1;
%T.E. Dynamic Equation
%/10^3*(Rg1/10^3)
d2w1dt=(M1-abs(ss)*Cdamp*dxdt-ss*(xc*Kt_s)*(Rg1/10^3))/I1;
d2w2dt=(-M2-abs(ss)*Cdamp*dxdt+ss*(xc*Kt_s)*(Rg2/10^3))/I2;
%For now,1-2 teeth pairs are considered
K3dw1=dt*d2w1dt;
K3dw2=dt*d2w2dt;
K3w1=dt*dw1dt;
K3x=dt*dxdt;
dw1dt=dw1old+K3dw1;
dw2dt=dw2old+K3dw2;
wG1=wG1old+K3w1;
%Dependent Variables
x=xold+K3x;
dxdt=dw1dt*Rg1-dw2dt*Rg2;
%4th RK Term
%-----%
%Check T.E.
if x>0
    ss=1;
    xc=x;
elseif x<=-blsh
    ss=-1;
    wG1=2/cos(a0)*((1-Cf1)*pi/z1-phiRb*(1-cos(a0))+phiRo)-wG1; %Contact
Inversion G1
    xc=-(x+blsh); %Proof Checked (>0)
else
    ss=0; %No Contact
end

```

```

%Ensure w1 is within boundaries
wln=wG1-heaviside(wG1-w1LoA2)*2*pi/z1+(1-heaviside(wG1-
w1LoA1))*2*pi/z1;
%Corresponding gear angle for second pair in contact
wln2=wln-sign(wln)*2*pi/z1;
%Gap dependence from x
fm=sqrt(3)/pi/(4*pi/z1-(w1LoA2-w1LoA1)-0.1*xc);
fc=2*fm;
SpWVL=(1-2*pi^2*fm^2*(wln-(w1LoA2+w1LoA1)/2)^2)*exp(-pi^2*fc^2*(wln-
(w1LoA2+w1LoA1)/2)^2);
Kt_s1=b/(A_ov1*cos(a0+wln-phis1/2)^2+B_ov1*cos(a0+wln-
phis1/2)+A_ov2*cos(a0-(Rg1/Rg2*wln+w20)-phis2/2)^2+B_ov2*cos(a0-
(Rg1/Rg2*wln+w20)-phis2/2)+C_ov+D_ov*log(xc));
Kt_s2=b/(A_ov1*cos(a0+wln2-phis1/2)^2+B_ov1*cos(a0+wln2-
phis1/2)+A_ov2*cos(a0-(Rg1/Rg2*wln2+w20)-phis2/2)^2+B_ov2*cos(a0-
(Rg1/Rg2*wln2+w20)-phis2/2)+C_ov+D_ov*log(xc));
Kt_s=(1-SpWVL)*Kt_s2+Kt_s1;
if ss==0
    pairs=0;
elseif (1-SpWVL)<0.3
    pairs=1;
else
    pairs=2;
end
%T.E. Dynamic Equation
%/10^3*(Rg1/10^3)
d2w1dt=(M1-abs(ss)*Cdamp*dxdt-ss*(xc*Kt_s)*(Rg1/10^3))/I1;
d2w2dt=(-M2+abs(ss)*Cdamp*dxdt+ss*(xc*Kt_s)*(Rg2/10^3))/I2;
%For now, 1-2 teeth pairs are considered
K4dw1=dt*d2w1dt;
K4dw2=dt*d2w2dt;
K4w1=dt*dw1dt;
K4x=dt*dxdt;
%Step Calculations
dw1dt=dw1old+1/6*(K1dw1+2*K2dw1+2*K3dw1+K4dw1);
dw2dt=dw2old+1/6*(K1dw2+2*K2dw2+2*K3dw2+K4dw2);
wG1=wG1old+1/6*(K1w1+2*K2w1+2*K3w1+K4w1);
%Dependent Variables
x=xold+1/6*(K1x+2*K2x+2*K3x+K4x);
dxdt=dw1dt*Rg1-dw2dt*Rg2;
%-----%
%No need for big accuracy
pos1=dw1dt*dt+pos1;
if pos1>0
    pos1=mod(pos1,2*pi);
else
    pos1=mod(pos1,-2*pi);
end
PAIRN(round(t/dt)+1)=pairs;
TE(round(t/dt)+1)=x;
dTE(round(t/dt)+1)=dxdt;
P1(round(t/dt)+1)=pos1;
WW1(round(t/dt)+1)=dw1dt;
time(round(t/dt)+1)=t;
STATE(round(t/dt)+1)=ss;
end

```

## 7 Βιβλιογραφία

- [1] R. W. Gregory, S. L. Harris, and R. G. Munro, “Dynamic behaviour of spur gears,” *Arch. Proc. Inst. Mech. Eng. 1847-1982 (vols 1-196)*, 1963.
- [2] H. Nevzat Özgüven and D. R. Houser, “Mathematical models used in gear dynamics—A review,” *Topics in Catalysis*. 1988.
- [3] S. Theodossiades and S. Natsiavas, “Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash,” *J. Sound Vib.*, 2000.
- [4] A. Kahraman and R. Singh, “Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system,” *J. Sound Vib.*, 1991.
- [5] F. Kucukay, “DYNAMIC BEHAVIOUR OF HIGH SPEED GEARS.,” in *I Mech E Conference Publications (Institution of Mechanical Engineers)*, 1984.
- [6] Y. Cai and T. Hayashi, “The Linear Approximated Equation of the Rotational Vibration of a Pair of Spur Gear (1st Report): —The Development of the Linear Approximated Equation of Vibration—,” *J. Japan Soc. Precis. Eng.*, 1991.
- [7] H. N. Özgüven, “A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics,” *J. Sound Vib.*, 1991.
- [8] T. Kiekbusch, D. Sappok, B. Sauer, and I. Howard, “Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parametrical FE models,” *Stroj. Vestnik/Journal Mech. Eng.*, 2011.
- [9] X. Liang, H. Zhang, M. J. Zuo, and Y. Qin, “Three new models for evaluation of standard involute spur gear mesh stiffness,” *Mech. Syst. Signal Process.*, 2018.
- [10] A. Fernandez Del Rincon, F. Viadero, M. Iglesias, P. García, A. De-Juan, and R. Sancibrian, “A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions,” *Mech. Mach. Theory*, 2013.
- [11] C. Spitas and V. Spitas, “Coupled multi-DOF dynamic contact analysis model for the simulation of intermittent gear tooth contacts, impacts and rattling considering backlash and variable torque,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, 2015.
- [12] E. Sakaridis, V. Spitas, and C. Spitas, “Non-linear modeling of gear drive dynamics incorporating intermittent tooth contact analysis and tooth eigenvibrations,” *Mech. Mach. Theory*, 2019.
- [13] W. D. Mark, A. C. Isaacson, and M. E. Wagner, “Transmission-error frequency-domain-behavior of failing gears,” *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019.
- [14] R. Russo, R. Brancati, and E. Rocca, “Experimental investigations about the influence of oil lubricant between teeth on the gear rattle phenomenon,” *J. Sound Vib.*, 2009.

- [15] J. Wang, G. He, J. Zhang, Y. Zhao, and Y. Yao, "Nonlinear dynamics analysis of the spur gear system for railway locomotive," *Mech. Syst. Signal Process.*, 2017.
- [16] A. L. Kapelevich, "Gear Geometry Optimization," in *Asymmetric Gearing*, 2018.
- [17] M. Faggioni, F. S. Samani, G. Bertacchi, and F. Pellicano, "Dynamic optimization of spur gears," *Mech. Mach. Theory*, 2011.
- [18] P. Garambois, J. Perret-Liaudet, and E. Rigaud, "NVH robust optimization of gear macro and microgeometries using an efficient tooth contact model," *Mech. Mach. Theory*, 2017.
- [19] Θ. Κωστόπουλος, "Οδοντώσεις και Μειωτήρες Στροφών," Αθήνα: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΕΩΝ, 2010.
- [20] K. Umezawa, T. Sato, and J. Ishikawa, "SIMULATION ON ROTATIONAL VIBRATION OF SPUR GEARS" *Bull. JSME*, 1984.
- [21] A. Kahraman and R. Singh, "Non-linear dynamics of a spur gear pair," *J. Sound Vib.*, 1990.
- [22] R. G. Parker, S. M. Vijayakar, and T. Imajo, "Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons," *J. Sound Vib.*, 2000.
- [23] G. Vasileiou, "Can a Modified Mathieu-Duffing Oscillator Simulate The Dynamic Transmission Error Of a Gear Pair?" 7th International Congress of Serbian Society of Mechanics, 2019
- [24] G. W. Blankenship and A. Kahraman, "Gear dynamics experiments, part-I: Characterization of forced response," *Am. Soc. Mech. Eng. Des. Eng. Div.*, 1996.