



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Παίγνια σχηματισμού συνασπισμών

Διπλωματική Εργασία

του

Ιωσήφ Κ. Μουλίνου

Επιβλέπων: Δημήτρης Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών
Αθήνα, Νοέμβριος 2016



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Παίγνια σχηματισμού συνασπισμών

Διπλωματική Εργασία

του

Ιωσήφ Κ. Μουλίνου

Επιβλέπων: **Δημήτρης Φωτάκης**
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 11^η Νοεμβρίου 2016.

.....
Άρης Παγουρτζής **Νίκος Παπασπύρου** **Δημήτρης Φωτάκης**
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών
Αθήνα, Νοέμβριος 2016

.....

Ιωσήφ Μουλίνος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωσήφ Μουλίνος, 2016.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η διαμόρφωση συνασπισμών είναι θεμελιώδες πρόβλημα σε πολλούς τομείς της ζωής, της επιστήμης και της τεχνολογίας. Παίγνια όπου οι συμμετέχοντες ενδιαφέρονται μόνο για την ταυτότητα εκείνων με τους οποίους είναι συνασπισμένοι, τα ηδονικά παίγνια, είναι επίσης δημοφιλή λόγω της απλότητας και της ευρείας εφαρμογής τους. Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι μια επισκόπηση στα ηδονικά παίγνια. Περιγράφονται μια σειρά από ιδιότητες των προτιμήσεων των παικτών και συνήθεις έννοιες σταθερότητας καθώς και οι μεταξύ τους σχέσεις. Δίνονται επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη σταθερών διαμερίσεων και αλγόριθμοι για τον υπολογισμό τους, όπου αυτό είναι δυνατό. Εξετάζεται η πολυπλοκότητα απόφασης ύπαρξης σταθερών διαμερίσεων και υπολογισμού τους. Η ηδονική συσταδοποίηση είναι μια εφαρμογή του πλαισίου των ηδονικών παιγνίων όπου οι παίκτες συνδέονται μέσω μη κατευθυνόμενου γράφου. Παρουσιάζονται η συσχετιστική και η προκαθορισμένου πλήθους συσταδοποιήσεις σε διάφορους μετρικούς χώρους και μια περίπτωση βασισμένη σε δίκτυο, υποθέτοντας δυναμική τοπικότητα.

Λέξεις κλειδιά: Σχηματισμός συνασπισμών, Ηδονικά παίγνια, Σταθερές διαμερίσεις, Πολυπλοκότητα υπολογισμού, Συσταδοποίηση, Αλγοριθμική θεωρία παιγνίων

Abstract

Coalition formation is a fundamental problem in numerous aspects of life, science and technique. Games where players are interested only in the identity of their partners, namely hedonic games, are also popular because of their simplicity and widespread applicability. The present thesis consists a review of hedonic games. The basic properties on players 's preferences are described along with the stability concepts and their relation. Moreover sufficient conditions for the existence of stable outcomes are introduced and algorithms for finding them, where possible. The complexity of deciding the existence of stable outcomes and of finding them, are embedded in the research. Hedonic clustering consists an application of hedonic games' framework, where players are interrelated through an undirected graph. Correlation and fixed clustering are presented in various metrics and also a network based model, assuming dynamic locality.

Keywords: Hedonic games, Coalition formation, Stable partitions, Complexity of computation, Clustering, Algorithmic game theory

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές κ. Στάθη Ζάχο, κ. Άρη Παγουρτζή, κ. Νίκο Παπασπύρου και κ. Δημήτρη Φωτάκη που με εισήγαγαν, με κατεύθυναν και με ενθάρρυναν στη θεωρητική πληροφορική.

Επιπλέον ευχαριστώ τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, κ. Δημήτρη Φωτάκη, για την εμπιστοσύνη, την ευγένεια και το υπόδειγμα επιστημονικής αρτιότητας που μου έδωσε.

Ευχαριστίες οφείλω στα μέλη του εργαστηρίου Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών για το προτρεπτικό και όμορφο κλίμα.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον πατέρα μου Κώστα και την μητέρα μου Άρτεμη που με έφεραν ως εδώ και συνεχίζουν να με εμπνέουν.

Ιωσήφ Μουλίνος

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Τα βασικά των ηδονικών παιγνίων	5
2.1	Ηδονικά παίγνια	5
2.2	Ιδιότητες των προτιμήσεων των παικτών	6
2.3	Έννοιες σταθερότητας	12
2.4	Σχέσεις των εννοιών σταθερότητας	17
2.5	Αρνητικά αποτελέσματα	19
2.5.1	Γενικές προτιμήσεις	19
2.5.2	Πρόβλημα των συγκατοίκων	19
2.5.3	Παίγνια W	19
2.5.4	Αθροιστική διαχωριστικότητα	20
2.5.5	Κλασματικά ηδονικά παίγνια	20
3	Σταθερές διαμερίσεις	23
3.1	Παρέτο βέλτιστες διαμερίσεις	23
3.2	Πρόβλημα των συγκατοίκων	27
3.3	Προτιμήσεις βάσει του βέλτιστου και του χείριστου	29
3.4	Κορυφαία αποκρισμότητα-Αλγόριθμος κορυφαίας κάλυψης	31
3.5	Αποκρισμότητα πυθμένα	35
3.6	Κορυφαίοι συνασπισμοί	35
3.7	Διατεταγμένη ισορροπία - Συνέχεια	36
3.8	Παίγνια που ικανοποιούν ανωνυμία και διαχωριστικότητα	36
3.9	Αθροιστικά διαχωρίσιμα και συμμετρικά παίγνια	37
3.10	Κλασματικά ηδονικά παίγνια	37
4	Απόφαση & υπολογισμός σταθερών διαμερίσεων	41
4.1	Γενικά ηδονικά παίγνια	41
4.2	Ανώνυμες προτιμήσεις	46
4.3	Αθροιστικές και συμμετρικές προτιμήσεις	50
5	Ηδονική συσταδοποίηση	55
5.1	Συσχετιστική συσταδοποίηση	55

5.2	Συσταδοποίηση προκαθορισμένου πλήθους συστάδων	67
5.2.1	Αυθαίρετες διατάξεις	68
5.2.2	Δενδρικές διατάξεις	71
5.2.3	Γραμμικές διατάξεις	73
5.3	Συνεργατική συσταδοποίηση σε δίκτυα	75
6	Μελλοντικές κατευθύνσεις	83
	Βιβλιογραφία	85

Κατάλογος Αλγορίθμων

1	Αλγόριθμος εκλέπτυνσης προτιμήσεων.	24
2	Αλγόριθμος σταθερών συγκατοίκων του Ίρβινγκ.	29
3	Αλγόριθμος BSTABLE.	30
4	Αλγόριθμος κορυφαίας κάλυψης.	32
5	Έλεγχος διαμέρισης ως προς το ανήκειν στο πυρήνα στιγμιοτύπου του HCORE.	42
6	Έλεγχος διαμέρισης ηδονικού παιγνίου ως προς Ναs σταθερότητα.	43
7	Έλεγχος ως προς ατομική σταθερότητα, διαμέρισης ηδονικού παιγνίου με ανώ- νυμες προτιμήσεις.	49
8	Look at και Bias για την ιδιοκατασκευή αντικατάστασης αρνητικών ακμών.	53

Κατάλογος σχημάτων

2.1	Διάγραμμα Hasse των εγκλεισμών των εννοιών σταθερότητας.	19
2.2	Κλασματικό ηδονικό παίγνιο με άδειο πυρήνα.	21
3.1	Εκτέλεση του αλγορίθμου ΑΕΠ σε W ηδονικό παίγνιο.	26
4.1	Ψηφίδα υπερψήφισης εισόδου για αρνητικές ακμές.	51
4.2	Ψηφίδα αντικατάστασης αρνητικών ακμών.	52
5.1	Γράφος με τμήμα σταθερότητας > 1 για συσχετιστική συσταδοποίηση.	60
5.2	Δεν υπάρχει N ας ισορροπία υποθέτοντας 2 συστάδες υπό το μοντέλο k -μέσου.	68
5.3	Δεν υπάρχει N ας ισορροπία υποθέτοντας 2 συστάδες υπό το μοντέλο k -κέντρου.	68
5.4	Υπεργράφος κίνησης αντικειμένου	77
5.5	Η ιδιοκατασκευή που χρησιμοποιείται για την απόδειξη του εκθετικού πλήθους βημάτων που απαιτούνται για αποκατάσταση σταθερότητας, με γράφους διαμόρφωσης που δεν είναι πλήρεις ούτε αστέρια.	79
5.6	Η δυναμική της ιδιοκατασκευής	80
5.7	Αντιστοίχιση κόμβων μεταξύ διαδοχικών ιδιοκατασκευών στην ακολουθία.	81

Κατάλογος πινάκων

2.1	Αθροιστικά διαχωρίσιμες και συμμετρικές προτιμήσεις.	7
2.2	Προτιμήσεις σε παίκτες που επεκτείνονται σε συνασπισμούς.	9
2.3	Στιγμιότυπο προβλήματος συγκατοίκων που δεν επιδέχεται σταθερό ταίριασμα.	20
2.4	Στιγμιότυπο μη Ναξ σταθερού, αθροιστικά διαχωρίσιμου παιγνίου.	20
3.1	Ιδιότητες ΑΕΠ ως προς τις συναρτήσεις Choose και Refine.	25
5.1	Αθροιστικά διαχωρίσιμο παίγνιο.	56
5.2	Στατικοί κανόνες επίλυσης ισοπαλιών.	67
5.3	Πιθανοί συνασπισμοί του δικτύου στο σχήμα 5.5.	79
5.4	Ακμές που προστίθενται στο δίκτυο σύμφωνα με την τοπολογία του γράφου διαμόρφωσης.	82

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα παίγνια σχηματισμού συνασπισμών εντάσσονται στο πεδίο της θεωρίας παιγνίων, της μελέτης της αλληλεπίδρασης μεταξύ παικτών με διάφορα ακόμα και συγκρουόμενα συμφέροντα. Η περιοχή παρουσιάστηκε από τους Von Neumann & Morgenstern (1947) με το θεώρημα της ωφέλειας, που υποστηρίζει ότι οι παίκτες κάτω από προτιμήσεις που ικανοποιούν ορισμένα αξιώματα, προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης που απεικονίζει την αξιολόγησή τους πάνω σε πιθανά εξαγόμενα του παιγνίου. Η ανάπτυξη της πληροφορικής γέννησε την αλγοριθμική θεωρία παιγνίων, τον κλάδο της θεωρίας παιγνίων που επιχειρεί να υπολογίσει εξαγόμενα παιγνίων με πολλούς παίκτες, χρησιμοποιώντας εύλογο χρόνο και αποδοτικούς αλγορίθμους.

Ο σχηματισμός συνασπισμών είναι μια συνήθης διαδικασία που λαμβάνει χώρα σύμφωνα με ένα φάσμα κριτηρίων.

Ηδονικά ονομάζονται τα παίγνια κατά τα οποία οι παίκτες ενδιαφέρονται μόνο για τη σύνθεση της ομάδας στην οποία θα ανήκουν και είναι αδιάφοροι για τις σχέσεις μεταξύ παικτών εκτός του συνασπισμού τους. Οι συμμετέχοντες δηλώνουν τις προτιμήσεις τους για τους συνασπισμούς που δύνανται να συμμετάσχουν και επιθυμούν να συσταθεί ο υψηλότερος δυνατός στις προτιμήσεις τους, συνασπισμός. Ηδονικές προτιμήσεις συναντώνται κατά τη σύσταση εταιριών, κοινωνικών γκρουπ, αθλητικών ομάδων, διδακτικών προσωπικών, κοινωνικών εκδηλώσεων, κοινωνιών κτλ

Ο τίτλος προέρχεται από την ελληνική λέξη ηδύς, γλυκός και αντικατοπτρίζει το γεγονός της σχετικά μυωπικής αντιμετώπισης που αποτελεί η αδιαφορία ενός για την κατάσταση εκτός του συνασπισμού του.

Τα ηδονικά παίγνια είναι μη μηδενικού αθροίσματος, ωστόσο συχνά είναι ανταγωνιστικά και σε ορισμένες περιπτώσεις εμπίπτουν στην υποκατηγορία των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος.

Το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου αποσκοπεί στην περιγραφή της δομής της παρούσας διπλωματικής εργασίας και της σχετικής βιβλιογραφίας περί των ηδονικών παιγνίων. Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνονται τα βασικά των ηδονικών παιγνίων καθώς και ποικίλες υποπεριπτώσεις των γενικών προτιμήσεων. Πρακτικά παραδείγματα συνοδεύουν τους ορισμούς και τα εκτιθέμενα προβλήματα. Κατόπιν παρουσιάζονται κριτήρια σταθερότητας και η ιεραρχία που τα διαπνέει. Το τελευταίο θέμα που εκτίθεται στο κεφάλαιο 2 αφορά αρνητικά

αποτελέσματα για τα προαναφερθέντα κριτήρια, σχετικά με κλάσεις προτιμήσεων. Στο κεφάλαιο 3 αποδεικνύονται ικανές συνθήκες για την ύπαρξη Παρέτο βέλτιστων και Νας σταθερών λύσεων για τη μη κενότητα του πυρήνα και του αυστηρού πυρήνα. Στο κεφάλαιο 4 εξετάζεται η πολυπλοκότητα της απόφασης ύπαρξης και του υπολογισμού, διαμερίσεων σταθερών κατά πυρήνα, Νας και ατομικά. Στο 5ο κεφάλαιο παρουσιάζονται παίγνια όπου οι παίκτες αναπαρίστανται ως κορυφές γράφου και οι σχέσεις μεταξύ τους ως ακμές. Η συσχετιστική συσταδοποίηση, που ανήκει στην οικογένεια των αθροιστικά διαχωρίσιμων παιγνίων, δίνεται στην ενότητα 5.1, η συσταδοποίηση προκαθορισμένου πλήθους παρουσιάζεται στην ενότητα 5.2 και τέλος ένα συνεργατικό πλαίσιο συσταδοποίησης αναλύεται στην ενότητα 5.3. Κλείνοντας, στο κεφάλαιο 6, εκτίθενται προτάσεις για μελλοντική εργασία.

Η έρευνα στο πεδίο των παιγνίων σχηματισμού συνασπισμών όπου οι παίκτες ενδιαφέρονται αποκλειστικά για τη σύνθεση της ομάδας τους, άρχισε με την πρωτότυπη εργασία των Drèze και Greenberg το 1980, όπου οι συγγραφείς έθεσαν την ηδονική έννοια. Στο πλαίσιο που παρουσίασαν, ενέπιπταν προβλήματα ταιριάσματος όπως το πρόβλημα του σταθερού γάμου και το πρόβλημα των συγκατοίκων. Οι Gale & Shapley (1962) ορίζουν και επιλύουν το πρόβλημα του σταθερού γάμου, ο Irving (1985) το πρόβλημα των συγκατοίκων και οι Roth & Sotomayor (1990), δίνουν μια καλή περίληψη για το διμερές ταίριασμα.

Το βασικό ενδιαφέρον για τα παίγνια σχηματισμού συνασπισμών επικεντρώνεται στην εύρεση εξαγόμενων που ικανοποιούν κριτήρια σταθερότητας, όπως η σταθερότητα πυρήνα ή η Νας. Αυτές οι έννοιες όπως επίσης και η επικρατούσα σημειογραφία για τα ηδονικά παίγνια παρουσιάζονται από τους Banerjee, Konishi & Sönmez (2001) και τους Bogomolnaia & Jackson (2002).

Όπως εξηγήθηκε στις παραπάνω εργασίες, η αναζήτηση διαμέρισης που ικανοποιεί τα κριτήρια σταθερότητας μπορεί να είναι μάταια καθώς μπορεί να μην υπάρχει τέτοια. Ωστόσο δεν υπάρχει ασυμβατότητα με τα αποτελέσματα του Νας (1951), εφόσον εξετάζονται μόνο αμιγείς στρατηγικές. Παρακάμπτοντας το εμπόδιο, αναζητούνται ικανές συνθήκες ύπαρξης σταθερών διαμερίσεων. Οι Bogomolnaia & Jackson (2002) αποδεικνύουν την ύπαρξη σταθερών διαμερίσεων, όταν οι προτιμήσεις παρουσιάζουν μοναδική κορυφή επί των χαρακτηριστικών των παικτών ή είναι συμμετρικές και αθροιστικά διαχωρίσιμες. Επιπλέον δείχνουν ότι αθροιστικά διαχωρίσιμα παίγνια επιδέχονται Νας σταθερές λύσεις. Οι Banerjee, Konishi & Sönmez (2001) εισάγουν δύο ιδιότητες "κορυφαίων συνασπισμών", υπό τις οποίες ο πυρήνας αποδεικνύεται μη κενός.

Οι Cechlarova & Romero-Medina (2001) υπέθεσαν μια κλάση προτιμήσεων επί των σχηματισμών που προέρχονται από τις προτιμήσεις επί των παικτών. Εισάγουν έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο εύρεσης σταθερών διαμερίσεων όταν οι παίκτες κατατάσσουν τις διαμερίσεις βάσει του πλέον επιθυμητού τους εταίρου και χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο του Ίρβινγκ για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες οι παίκτες ταξινομούν τους υποψήφιους συνασπισμούς βάσει του λιγότερο επιθυμητού τους εταίρου.

Οι Alcalde & Revilla (2004) εισάγουν την αποκρισμότητα κορυφής και αποδεικνύουν υπό την ισχύ της, την ύπαρξη διαμερίσεων στον πυρήνα. Παρουσιάζουν τον αλγόριθμο κάλυψης κορυφής για την εύρεση σταθερών κατά πυρήνα διαμερίσεων. Επιπλέον αποδεικνύουν την μοναδικότητα του φιλαλήθους μηχανισμού για προτιμήσεις που έχουν την ιδιότητα της αποκρισμότητας κορυφής. Οι Aziz & Brandl (2012) απλοποιούν τον αλγόριθμο κάλυψης κο-

ρυφής και προτείνουν την αποκρισιμότητα πυθμένα, την αντίστοιχη απαισιόδοξη έκφραση της αποκρισιμότητας κορυφής, όπου οι παίκτες δηλώνουν τις υποομάδες παικτών που θέλουν να αποφύγουν. Οι Dimitrov & Sung (2005) ενισχύουν τα αποτελέσματα των Αλκάλντε και Ρεβίλλα δείχνοντας ισχυρή σταθερότητα πυρήνα υπό την αποκρισιμότητα κορυφής. Επιπλέον εξετάζουν την εκτίμηση σε φίλους και την αποστροφή σε εχθρούς, κλάσεις προφίλ προτιμήσεων, όπου κάθε παίκτης θεωρεί κάθε έναν από τους άλλους ως φίλο ή εχθρό του. Δείχνουν ότι η πρώτη συνθήκη βεβαιώνει τη μη κενότητα του πυρήνα ενώ η δεύτερη του ασθενούς πυρήνα. Ακόμα βρίσκουν πολυωνυμικά, διαμέριση στον πυρήνα και αποδεικνύουν NP δύσκολη την εύρεση στοιχείου στον ασθενή πυρήνα υπό την αποστροφή στους εχθρούς.

Οι Aziz et al. (2015) μελετούν ηδονικά παίγνια με δυαδικές προτιμήσεις, όπου οι παίκτες εκφράζουν μόνο την ικανοποίηση ή την απαρέσκειά τους για τους υποψήφιους τους συνασπισμούς.

Η πολυπλοκότητα της απόφασης ύπαρξης σταθερών διαμερίσεων σε ηδονικό παίγνιο μελετάται από τον Ballester (2004) για παίγνια με μη περιορισμένες και για παίγνια με ανώνυμες προτιμήσεις. Οι Dimitrov et al. (2004) διατρέβονται με τα ίδια ερωτήματα για αθροιστικά διαχωρίσιμα παίγνια. Οι Gairing και Savani ερευνούν την πολυπλοκότητα εύρεσης σταθερών συνασπισμών σε παίγνια όπου πιστοποιημένα υπάρχουν. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σύμφωνα με αυτά των Deng & Papadimitriou (1994).

Οι Elkind & Wooldridge (2009) επιχειρούν μία εναλλακτική των ατομικά ορθολογικών λιστών προτιμήσεων, τα ηδονικά δίκτυα συνασπισμών. Οι προτιμήσεις εκφράζονται μέσω κανόνων, σχηματίζοντας μία κατά το δυνατόν συνοπτική αναπαράσταση. Κατόπιν χαρακτηρίζουν την πολυπλοκότητα απόφασης ιδιοτήτων που σχετίζονται με τον πυρήνα.

Ηδονική συσταδοποίηση είναι η διαδικασία διαμέρισης παικτών σε έναν μετρικό χώρο. Οι Bansal, Blum & Chawla (2004) παρουσιάζουν ένα μοντέλο συσχετιστικής συσταδοποίησης για ακμές που είναι είτε θετικές είτε αρνητικές και προτείνουν προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Οι Feldman, Eytan & Naor (2015) παρέχουν τιμήματα αναρχίας και σταθερότητας για μία παρόμοια περίπτωση. Επιπλέον, αναζητούν Νας ισορροπίας στην περίπτωση της συσταδοποίησης προκαθορισμένου πλήθους. Η συσταδοποίηση προκαθορισμένου πλήθους συστάδων μελετάται και από τους Abbasi & Younis (2007) και τους Bandyopadhyay & Coyle (2004) όπως επίσης και από τους Koltsidas & Pavlidou (2011). Οι Hoefler, Vaz & Wagner (2015) δείχνουν ότι μόνο πλήρεις γράφοι και αστέρια σταθεροποιούνται γρήγορα σε μοντέλα με ορατότητα βασισμένη σε δίκτυο για δυναμική τοπικότητα, βασισμένοι σε ιδέες του Myerson (1976) και των Esteban & Sergei (2009).

Κεφάλαιο 2

Τα βασικά των ηδονικών παιγνίων

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται επεξεργασία των βασικών εννοιών των παιγνίων σχηματισμού συνασπισμών. Ξεκινώντας από τον ορισμό των ηδονικών παιγνίων παρουσιάζονται μια πληθώρα κατηγοριών προφίλ προτιμήσεων και εννοιών σταθερότητας. Επιπλέον εκτίθενται οι σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών μέτρων σταθερότητας και οι αντίστοιχοι εγκλεισμοί.

2.1 Ηδονικά παίγνια

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, στα ηδονικά παίγνια κατατάσσονται παίγνια σχηματισμού συνασπισμών όπου κάθε παίκτης ενδιαφέρεται μόνο για την σύνθεση της δικής του ομάδας και είναι αδιάφορος για τη σύνθεση των υπόλοιπων συνασπισμών. Κάθε παίκτης διατηρεί ένα προφίλ προτιμήσεων για τους δυνατούς συνασπισμούς που τον περιέχουν ως μέλος και επιθυμεί να συνασπιστεί στην υψηλότερης δυνατής προτίμησης ομάδα, ή πιο τυπικά

Ορισμός 2.1. (Ηδονικό παίγνιο), [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001]. Ένα ηδονικό παίγνιο σχηματισμού συνασπισμών G είναι ένα ζεύγος $(N, (\succsim_i)_{i \in N})$, όπου N είναι ένα πεπερασμένο σύνολο παικτών, το i είναι ένα αντιπροσωπευτικό του στοιχείο και $(\succsim_i)_{i \in N}$ το προφίλ προτιμήσεών τους. Η \succsim_i είναι μια ανακλαστική, σντισυμμετρική, πλήρης και μεταβατική διμελής σχέση στο σύνολο $S_i(N) = \{S \in 2^N : i \in S\}$, που καλούνται προτιμήσεις του παίκτη i . Η σχέση ισοτιμίας και η σχέση αυστηρής προτίμησης συμβολίζονται ως \sim_i και \succ_i αντίστοιχα και $S \sim_i T \Leftrightarrow [S \succsim_i T \wedge T \succsim_i S]$ και $S \succ_i T \Leftrightarrow [S \succsim_i T \wedge S \not\sim_i T]$.

Η διατύπωση των ηδονικών παιγνίων γίνεται μέσω αναπαραστάσεων ατομικά ορθολογικών λιστών συνασπισμών (ΑΟΛΣ), δηλαδή όλοι οι συνασπισμοί που είναι ελκυστικότεροι για έναν παίκτη από το να είναι μόνος, δίνονται σε μία λίστα με ολική διάταξη. Για ηδονικό παίγνιο (N, \succsim) , συμβολίζουμε με N_i το σύνολο των συνασπισμών που είναι εφικτοί για τον παίκτη i .

Παράδειγμα 2.1. Τρία παιδιά έχουν στη διάθεσή τους μία μπάλα, ένα τραπέζι αντισφαίρισης και έναν υπολογιστή με ένα τιμόνι. Με την μπάλα θα παίζουν παιχνίδι με τρεις ή περισσότερους παίκτες. Η Γεωργία προτιμάει να παίξει με την Ευγενία και τον Πέτρο το παιχνίδι με τη μπάλα και αν αυτό δεν γίνεται θέλει έναν επαναληπτικό αγώνα πινγκ πονγκ με τον Πέτρο και αν και αυτό δε γίνει θα

ήθελε να παίξει με την Ευγενία ενώ τελευταία της επιλογή είναι ο υπολογιστής. Ο Πέτρος προτιμάει το παιχνίδι με τη μπάλα, μετά την αντισφαίριση με την Γεωργία αλλά όχι με την Ευγενία λόγω ενός πρόσφατου αστείου τους και αντί αυτού θα έπαιζε με τον υπολογιστή. Τέλος η Ευγενία προτιμάει την αντισφαίριση ασχέτως αντιπάλου, κατόπιν το παιχνίδι με τη μπάλα και τέλος το παιχνίδι αγώνων.

Οι παραπάνω προτιμήσεις συμβολίζονται ως

$$\begin{aligned} & \{\text{Πέτρος, Ευγενία, Γεωργία}\} \succ_{\Pi} \{\text{Πέτρος, Γεωργία}\} \succ_{\Pi} \{\text{Πέτρος}\} \\ & \{\text{Ευγενία, Γεωργία}\} \sim_E \{\text{Πέτρος, Ευγενία}\} \succ_E \{\text{Πέτρος, Ευγενία, Γεωργία}\} \succ_E \{\text{Ευγενία}\} \\ & \{\text{Πέτρος, Ευγενία, Γεωργία}\} \succ_{\Gamma} \{\text{Πέτρος, Γεωργία}\} \succ_{\Gamma} \{\text{Ευγενία, Γεωργία}\} \succ_{\Gamma} \{\text{Γεωργία}\} \end{aligned}$$

Η διαμέριση των παικτών σε συνασπισμούς καλείται δομή συνασπισμών.

Ορισμός 2.2. (Εξαγόμενο ηδονικού παιχνίσιου), [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001]. Μια δομή συνασπισμών $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ ($K \leq |N|$ θετικός ακέραιος) είναι μια διαμέριση του N . Δηλαδή, $S_k \neq \emptyset$ για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, $\cup_{k=1}^K S_k = N$, και $S_k \cap S_l = \emptyset$ για κάθε $k, l \in \{1, 2, \dots, K\}$ με $k \neq l$. Για κάθε δομή συνασπισμών π και κάθε παίκτη i έστω $\pi(i) = \{S \in \pi : i \in S\}$ το σύνολο των παικτών του συνασπισμού του.

Η συλλογή όλων των δομών συνασπισμών του N παρίσταται ως $\Pi(N)$. Παρόμοια ορίζουμε $\Pi(V)$ για κάθε $V \subset N$, με $V \neq \emptyset$.

Παράδειγμα 2.2. Δυνατά εξαγόμενα του παραπάνω παιχνίσιου του παραδείγματος (2.1) είναι τα

- α) $\{\text{Πέτρος, Ευγενία, Γεωργία}\}$
- β) $\{\{\text{Πέτρος, Ευγενία}\}, \{\text{Γεωργία}\}\}$
- γ) $\{\{\text{Πέτρος}\}, \{\text{Ευγενία, Γεωργία}\}\}$
- δ) $\{\{\text{Πέτρος, Γεωργία}\}, \{\text{Ευγενία}\}\}$
- ε) $\{\{\text{Πέτρος}\}, \{\text{Ευγενία}\}, \{\text{Γεωργία}\}\}$.

2.2 Ιδιότητες των προτιμήσεων των παικτών

Υπάρχουν πολλά περιορισμένα ηδονικά παίγνια προερχόμενα από αντίστοιχους περιορισμούς στις προτιμήσεις των συμμετεχόντων. Ακολουθεί μια συγκεντρωτική λίστα ποικίλων περιπτώσεων.

Ορισμός 2.3. (Ανωνυμία), [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001]. Παίγνιο G ικανοποιεί την ανωνυμία εάν για κάθε $i \in N$, για κάθε $S, T \in S_i(N)$ με $|S| = |T|$ είναι $S \sim_i T$.

Δηλαδή, εάν οι παίκτες ενδιαφέρονται μόνο για την πληθικότητα του συνασπισμού τους. Παίγνια σε αυτή την κατηγορία αναπαρίστανται από ατομικά ορθολογικές λίστες μεγεθών συνασπισμών (ΑΟΛΜ).

Παράδειγμα 2.3. Ένας μαθητής επιλέγει το μελλοντικό πεδίο έρευνάς του με μοναδικό κριτήριο το πλήθος των φοιτητών σε αυτό το πεδίο, σκεπτόμενος ότι αυτό το πεδίο θα έχει προοπτική. Οι προτιμήσεις του αναπαρίστανται ως $1 \prec 2 \prec \dots \prec n \prec n + 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.4. (Διαχωρισιμότητα), [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001]. Παίγνιο G καλείται διαχωρισιμο εάν για κάθε $i \in N$, για κάθε $S \in S_i(N)$ και για κάθε $j \notin S$, είναι $[S \cup \{j\}] \succeq_i S \Leftrightarrow \{i, j\} \succeq_i \{i\}$

Συνεπώς η εισαγωγή του j στο συνασπισμό παίκτη i είναι θετική για τον i , μόνο εάν για τον i , ο συνασπισμός με τον j είναι προτιμότερος της απομόνωσης.

Ορισμός 2.5. (Αμοιβαιότητα), [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001; Bogomolnaia & Jackson, 2002]. Παίγνιο G είναι αμοιβαίο εάν για κάθε $i, j \in N$, είναι $\{\{i, j\} \succeq_i \{i\}\} \Leftrightarrow \{\{i, j\} \succeq_j \{j\}\}$ και $\{\{i, j\} \succeq_i \{i\}\} \Leftrightarrow \{\{i, j\} \succeq_j \{j\}\}$.

Εννοώντας ότι όταν ο παίκτης i επιθυμεί συνεταιρισμό με τον παίκτη j , ο παίκτης j έχει την ίδια πρόθεση για τον i και όταν ο παίκτης i προτιμά την απομόνωση από τον συνεταιρισμό με τον j , ο παίκτης j προτιμά την απομόνωση από τον συνεταιρισμό με τον i .

Παράδειγμα 2.4. Οι προτιμήσεις του παραδείγματος 2.1 δεν ικανοποιούν την αμοιβαιότητα εφόσον η Ευγενία επιθυμεί συνεταιρισμό με τον Πέτρο ενώ ο Πέτρος δεν έχει πρόθεση συνασπισμού.

Ορισμός 2.6. (Αθροιστική διαχωρισσιμότητα), [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001]. Παίγνιο G είναι αθροιστικά διαχωρίσιμο εάν για κάθε παίκτη $i \in N$, υπάρχει συνάρτηση $v_i : N \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $S, T \in S_i(N)$, $S \succeq_i T \Leftrightarrow \sum_{j \in S} v_i(j) \geq \sum_{k \in T} v_i(k)$, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας, κανονικοποιούμε θέτοντας $v_i(i) = 0$.

Πρόταση 2.1. Ο συνδυασμός ανωνυμίας και διαχωρισσιμότητας συνεπάγεται αθροιστική διαχωρισσιμότητα.

Απόδειξη. Λόγω της διαχωρισσιμότητας, για κάθε παίκτη i , κάποιον παίκτη j και συνασπισμούς $\{S, T \in N_i \mid j \notin S, T \wedge S^+j \succeq_i T^+j\} \Leftrightarrow \{\{i, j\} \succeq_i \{i\}\}$, όπου S^+j συντομογράφει την ένωση $S \cup \{j\}$. Ωστόσο, συμπερίληψη της ανωνυμίας δίνει $m + 1 \succeq_i n + 1 \Leftrightarrow 2 \succeq_i 1$, όπου $2 \succeq_i 1$ συμβολίζει ότι ο παίκτης i προτιμά συνασπισμούς δύο μελών από τους μονομελείς. Υποθέτοντας ότι παίκτης i αποτιμά την αξία συνταίρου του j στο μέγεθος v_{ij} και λαμβάνοντας υπόψιν την ισχύ της τελευταίας ισοδυναμίας $\forall m, n \in \mathbb{N}$, η ιδιότητα της αθροιστικής διαχωρισσιμότητας ικανοποιείται. \square

Ορισμός 2.7. (Συμμετρία), [Bogomolnaia & Jackson, 2002]. Παίγνιο G είναι συμμετρικό εάν $v_i(j) = v_j(i), \forall i, j$.

Συνεπώς η συμμετρία εγκλείει την αμοιβαιότητα.

Παράδειγμα 2.5. Το ηδονικό παίγνιο (N, \succeq) που ορίζεται από τις αποτιμήσεις κάθε παίκτη για τους λοιπούς, του παραδείγματος 2.1, είναι αθροιστικά διαχωρίσιμο και συμμετρικό.

Πίνακας 2.1: Αθροιστικά διαχωρίσιμες και συμμετρικές προτιμήσεις.

	1	2	3	4
v_1	0	3	2	-10
v_2	3	0	2.5	-6
v_3	2	2.5	0	3
v_4	-10	-6	3	0

Η συμμετρία είναι προφανής. Η αθροιστική διαχωρισσιμότητα του παίκτη 1 επάγει τις προτιμήσεις συνασπισμών $\{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 2\} \succ_1 \{1, 3\} \succ_1 \{1\}$. Διαπιστώνεται ότι η εισαγωγή παικτών

για τους οποίους ο παίκτης 1 διατηρεί θετικές αποτιμήσεις, σε έναν υπάρχοντα συνασπισμό οδηγεί σε συνασπισμό πιο επιθυμητό για τον παίκτη 1, αντιθέτως εισάγοντας παίκτες με αρνητική αποτίμηση προκύπτουν λιγότερο επιθυμητοί συνασπισμοί για τον παίκτη 1.

Ορισμός 2.8. (Φίλοι και εχθροί), [Dimitrov et al., 2004]. Φίλοι παίκτη i ονομάζεται το σύνολο G_i που αποτελείται από τους παίκτες $j \in N$ για τους οποίους $\{i, j\} \succsim_i i$. Εχθροί παίκτη i θεωρούνται μέλη του συνόλου $B_i = N \setminus G_i$.

(Εκτίμηση των φίλων). Οι προτιμήσεις βασίζονται στην εκτίμηση των φίλων εάν για όλα τα $X, Y \in N$, $X \succsim_i Y$ αν και μόνο αν α) $|G_i \cap X| > |G_i \cap Y|$ ή β) $|G_i \cap X| = |G_i \cap Y|$ και $|B_i \cap X| \leq |B_i \cap Y|$. Οι παίκτες δηλαδή κατατάσσουν την επιθυμία τους να συμμετάσχουν σε κάποιο συνασπισμό, σύμφωνα με τον αριθμό των φίλων που περιέχει.

(Αποστροφή στους εχθρούς). Οι προτιμήσεις βασίζονται στην αποστροφή στους εχθρούς εάν για κάθε $X, Y \in N$, $X \succsim_i Y$ εάν και μόνο εάν α) $|B_i \cap X| < |B_i \cap Y|$ ή β) $|B_i \cap X| = |B_i \cap Y|$ και $|G_i \cap X| \geq |G_i \cap Y|$. Συνεπώς μέσω της αποστροφής στους εχθρούς, περιγράφονται παίγνια όπου οι παίκτες προτιμούν ένα συνασπισμό S_1 σε σχέση με έναν άλλο S_2 , μόνο εάν περιέχει λιγότερους εχθρούς από τον S_2 .

(Πρόβλημα των συγκατοίκων), [Irving, 1985]. Περιορισμός του μεγέθους των συνασπισμών σε δύο και του πλήθους των παικτών σε άρτιο αριθμό οδηγεί στο πρόβλημα των σταθερών συγκατοίκων. Σε αυτό το πλαίσιο κάθε παίκτης διατάσσει ολικά τους υπολοίπους. Κατόπιν αναζητάται ένα σταθερό ταίριασμα, δηλαδή διαχωρισμός των παικτών σε ζεύγη ώστε να μην υπάρχουν δύο εξ' αυτών που να προτιμούν έκαστος τον έταιρο περισσότερο από τον συγκατοικό τους. Ένα παράδειγμα προβλήματος συγκατοίκων δίνεται στην παράγραφο 2.5.2.

Επεκτείνοντας τις προτιμήσεις ατόμων σε προτιμήσεις συνασπισμών, γεννώνται οι κλάσεις των B και W ηδονικών παιγνίων αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.6. Οι προτιμήσεις τεσσάρων συμμαθητών που μπορούν να κάνουν ομαδικά σχολική εργασία και η τελευταία τους επιλογή είναι να την κάνουν ατομικά, δίνονται από τις ακόλουθες λίστες

$$\begin{aligned} \{A, E\} \succ_A \{A, B, E\} \sim_A \{A, E, P\} \succ_A \{A, B, E, P\} \succ_A \{A, B\} \sim_A \{A, P\} \sim_A \{A, B, P\} \\ \{B, E\} \succ_B \{A, B, E\} \sim_B \{B, E, P\} \succ_B \{A, B, E, P\} \succ_B \{A, B\} \sim_B \{B, P\} \sim_B \{A, B, P\} \\ \{E, P\} \succ_E \{A, E, P\} \sim_E \{B, E, P\} \succ_E \{A, B, E, P\} \succ_E \{A, E\} \sim_E \{B, E\} \sim_E \{A, B, E\} \\ \{B, P\} \succ_P \{A, B, P\} \sim_P \{B, E, P\} \succ_P \{A, B, E, P\} \succ_P \{A, P\} \sim_P \{E, P\} \sim_P \{A, E, P\} \end{aligned}$$

Η όψη των προτιμήσεων αρμόζει με το B μοντέλο. Η Αλίκη προτιμάει να εργαστεί με την Εύα από ότι με τον Βασίλη ή τον Ραφαήλ. Ο Βασίλης επίσης προτιμάει την Εύα από την Αλίκη ή τον Ραφαήλ, η Εύα προτιμάει τη συνεργασία με τον Ραφαήλ έπειτα με την Αλίκη ή τον Βασίλη και ο Ραφαήλ επιλέγει την εργασία με τον Βασίλη και κατόπιν ισοσταθμίζει τις συνεργασίες με την Αλίκη και την Εύα. Αυτές οι προτιμήσεις καθορίζουν την ολική διάταξη σε πιθανούς συνασπισμούς και παρουσιάζονται με συνοπτικό τρόπο στον πίνακα 2.2.

Πίνακας 2.2: Προτιμήσεις σε παίκτες που επεκτείνονται σε συνασπισμούς.

Παίκτης	Προτιμήσεις
Αλίκη	Εύα \succ Βασίλης \sim Ραφαήλ
Βασίλης	Εύα \succ Αλίκη \sim Ραφαήλ
Εύα	Ραφαήλ \succ Αλίκη \sim Βασίλης
Ραφαήλ	Βασίλης \succ Αλίκη \sim Εύα

Ορισμός 2.9. (B & W παίγνια), [Cechlarova & Romero-Medina, 2001]. Για παίκτη i και συνασπισμό $\{S \mid i \in S\}$ καλούμε $B_i(S)$ τον πλέον προτιμώμενο παίκτη για τον i στο S , ή $B_i(S) = \{j \mid j \succeq k, \forall k \in S\}$. Παίκτης i , B -προτιμά συνασπισμό S έναντι συνασπισμού T όταν είτε $B_i(S) \succ_i B_i(T)$ ή $B_i(S) \sim_i B_i(T)$ και $|S| < |T|$.

Για παίκτη i και συνασπισμό $\{S \mid i \in S\}$ καλούμε $W_i(S)$ τον λιγότερο προτιμώμενο παίκτη για τον παίκτη i στο S , ή $W_i(S) = \{j \mid j \preceq_i k, \forall k \in S\}$. Παίκτης i , W -προτιμά έναν συνασπισμό S έναντι συνασπισμού T εάν $W_i(S) \succ_i W_i(T)$.

Ηδονικό παίγνιο είναι B παίγνιο εάν οι προτιμήσεις κάθε παίκτη είναι B και ένα παίγνιο είναι W εάν οι προτιμήσεις των παικτών είναι W .

Σε αυτή την κατηγορία εμπίπτουν καταστάσεις όπου οι παίκτες προτιμούν ένα συνασπισμό έναντι ενός άλλου εάν περιέχει τον πλέον προτιμώμενο παίκτη από την ένωση των δύο συνασπισμών. Το πλαίσιο αντιστοιχεί σε αθλητές που επιδιώκουν να ενταχθούν στην ομάδα με τον πλέον πεπειραμένο προπονητή, ερευνητές που στοχεύουν την ενσωμάτωση στην ομάδα του πιο αναγνωρισμένου καθηγητή κ.λπ.

Στον αντίποδα, όταν η μετρική ενδιαφέροντος είναι η απόδοση του λιγότερο προτιμώμενου παίκτη της ομάδας, καταστρώνεται ένα W -παίγνιο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ομάδα ανθρώπων που επιθυμούν να κάνουν ορειβασία και αναζητούν συντρόφους με παρόμοιο ρυθμό βαδίσματος. Στην περίπτωση αυτή οι παίκτες ενδιαφέρονται για την ελαχιστοποίηση της μέγιστης απόκλισης από τον ρυθμό τους. Συνεπώς παίζουν ένα minmax παίγνιο και προτιμούν ένα συνασπισμό S έναντι άλλου T μόνο εάν προτιμούν τον χειρότερο για αυτούς παίκτη του S έναντι του αντίστοιχου του T .

Γενίκευση των B παιγνίων αποτελούν τα παίγνια κορυφαίας αποκρισιμότητας. Προτιμήσεις που ικανοποιούν την κορυφαία αποκρισιμότητα αντικατοπτρίζουν καταστάσεις όπου κάθε παίκτης επιλέγει μεταξύ δύο συνασπισμών, διαχωρίζοντας και συγκρίνοντας την προτιμότερη υποομάδα του σε κάθε συνασπισμό. Συνεπώς, αυτά τα παίγνια είναι μια ευρύτερη οικογένεια B παιγνίων, αφού στα B παίγνια, οι προτιμήσεις ατόμων εκτείνονται σε προτιμήσεις συνασπισμών ενώ στα παίγνια κορυφαίας αποκρισιμότητας, προτιμήσεις σε υποσύνολα παικτών επεκτείνονται σε προτιμήσεις συνασπισμών.

Ορισμός 2.10. (Σύνολα επιλογής & κορυφαία αποκρισιμότητα), [Alcalde & Revilla, 2004; Aziz & Brandl, 2012]. Δοσμένου παιγνίου (N, \succeq) , σύνολα επιλογής $Ch(i, S)$ παίκτη i σε σύνολο παικτών $S \in N_i$, είναι τα μέγιστα υποσύνολα του S ως προς την σχέση \succeq_i .

Προτιμήσεις παιγνίου ικανοποιούν την κορυφαία αποκρισιμότητα εάν για κάθε παίκτη i και κάθε δύο σύνολα παικτών $S, T \in N_i$:

- $|Ch(i, S)| = 1$. Συμβολίζουμε το μοναδικό αυτό σύνολο επιλογής ως: $ch(i, S)$.

- εάν $ch(i, S) \succ_i ch(i, T)$ τότε $S \succ_i T$
- εάν $ch(i, S) \sim_i ch(i, T)$ και $S \subsetneq T$ τότε $S \succ_i T$

Παράδειγμα 2.7. Οι προτιμήσεις του παραδείγματος 2.6 ικανοποιούν την κορυφαία αποκρισμότητα ενώ τροποποιώντας τις προτιμήσεις του παίκτη A σε

$$\{A, E\} \succ_A \{A, B, P\} \sim_A \{A, E, P\} \sim_A \{A, B, E\} \succ_A \{A, B, E, P\} \succ_A \{A, B\} \sim_A \{A, P\}$$

προκύπτει παραβίαση της ιδιότητας καθώς $Ch(A, \{A, E, P\}) = \{A, E\} \succ_A \{A, B, P\} = Ch(A, \{A, B, P\})$ συνεπώς η δεύτερη συνθήκη που υπαγορεύει ότι $\{A, E, P\} \succ_A \{A, B, P\}$, δεν εκπληρώνεται.

Ορισμός 2.11. (Σύνολα αποφυγής), [Aziz & Brandl, 2012]. Σύνολο αποφυγής παίκτη i μεταξύ συνόλου $S \subseteq N$, ονομάζεται το σύνολο των ελάχιστων επιθυμητών υποσυνόλων του S για τον παίκτη i , που συμβολίζονται $Av(i, S) = \{S' \subseteq S : (i \in S') \wedge (S' \preceq_i S'', \forall S'' \subseteq S)\}$.

Ορισμός 2.12. (Αποκρισιμότητα πυθμένα), [Aziz & Brandl, 2012]. Παίγνιο (N, \preceq) εκπληροί τις προϋποθέσεις της αποκρισμότητας πυθμένα εάν οι προτιμήσεις έκαστου παίκτη i ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες

- μεταξύ δύο συνασπισμών $S, T \in N_i$, προτιμότερος για τον i είναι ο S , ή $S \succ T$, εάν $i_S \succ_i i_T$, $\forall i_S \in Av(i, S), i_T \in Av(i, T)$ δηλαδή εκείνος με το πιο επιθυμητό σύνολο αποφυγής, $S \succeq_i T \Leftrightarrow Av(i, S) \succeq_i Av(i, T)$, και
- για κάθε παίκτη $i \in N$ και $S, T \in N_i$ τέτοια ώστε $Av(i, S) \cap Av(i, T) \neq \emptyset$ με $|S| \geq |T|$ συνεπάγεται $S \succeq_i T$.

Εάν επιπλέον κάθε παίκτης i και κάθε σύνολο παικτών $S \subseteq N_i$ έχει ένα μοναδικό σύνολο αποφυγής ή $|Av(i, S)| = 1$, που συμβολίζεται ως $av(i, S)$, το παίγνιο καλείται ισχυρά αποκρίσιμο πυθμένα.

Ορισμός 2.13. (Κλασματικότητα), [Aziz, Brandl & Harrenstein, 2014]. Παίγνιο $G = (N, \preceq)$ όπου κάθε παίκτης $i \in N$ έχει συνάρτηση κόστους $v_i : N \rightarrow \mathbb{R}$ σύμφωνα με την οποία, κατατάσσει κάθε συνασπισμό $S \in N_i$ βάσει του μέσου όρου των παικτών στον συνασπισμό ή $v_i(S) = \frac{\sum_{j \in S} v_i(j)}{|S|}$, καλείται κλασματικό ηδονικό παίγνιο.

Το πλαίσιο των κλασματικών ηδονικών παιγνίων εφαρμόζει με επιτυχία σε καταστάσεις όπου είναι επιθυμητή η ομοιογένεια. Περιπτώσεις όπου κάθε παίκτης επιζητεί στον συνασπισμό του, ένα υψηλό ποσοστό μελών με κοινή γνώμη ή ανάγκες, εμπίπτει σε αυτή τη θεώρηση. Τα υπόψιν παίγνια μπορούν να αναπαρασταθούν από κατευθυνόμενο γράφο G με τις ακμές να απεικονίζουν την αξία που δίνεται στη σύνδεση από το κάθε άκρο της αντίστοιχα. Παίγνια όπου κάθε ακμή είναι μοναδιαίου βάρους καλούνται απλά.

Ορισμός 2.14. (Μονή κορυφή), [Bogomolnaia & Jackson, 2002]. Οι προτιμήσεις παίκτη i σε κάποιο σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ έχουν μοναδική κορυφή εάν υπάρχει αριθμός p_i , που ονομάζεται κορυφή του παίκτη i , τ.ω. $\forall s_1, s_2 \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $[s_1 < s_2 \leq p_i \text{ ή } s_1 > s_2 \geq p_i] \Rightarrow s_2 \succ_i s_1$.

Ορισμός 2.15. (Ισορροπία και διατεταγμένη ισορροπία), [Bogomolnaia & Jackson, 2002]. Συλλογή συνασπισμών B , είναι ισορροπημένη εάν υπάρχει διάνυσμα θετικών βαρών d_s επί των συνασπισμών, τέτοιο ώστε για κάθε παίκτη i , $\sum_{S \in B: i \in S} d_s = 1$.

Παίγνιο ονομάζεται διατεταγμένα ισορροπημένο εάν για κάθε ισορροπημένη συλλογή συνασπισμών B , υπάρχει διαμέριση π τέτοια ώστε για κάθε παίκτη i , υπάρχει $S \in B$ με $i \in S$ τέτοιο ώστε $S_\pi \succsim_i S$.

Αρα ένα παίγνιο είναι διατεταγμένα ισορροπημένο εάν για κάθε ισορροπημένη συλλογή συνασπισμών, υπάρχει για κάθε παίκτη, μία διαμέριση που του είναι προτιμότερη από τον λιγότερο προτιμητέο συνασπισμό στην ισορροπημένη δέσμη.

Ορισμός 2.16. (Συνέχεια), [Bogomolnaia & Jackson, 2002; Greenberg & Weber, 1986; Greenberg, 1994]. Μία διάταξη παικτών είναι ομομορφισμός $f : N \rightarrow N$.

Συνασπισμός $S \subset N$ είναι συνεχής ως προς διάταξη f , εάν $f(i) < f(j) < f(k)$, $i \in S$ και $k \in S$ συνεπάγεται $j \in S$.

Παίγνιο $(N, \{\succsim_i\}_{i \in N})$ είναι ασθενώς συνεχές ως προς διάταξη f εάν οποτεδήποτε διαμέριση π είναι κατώτερη από συνασπισμό T , υπάρχει συνασπισμός T' συνεχής ως προς την f που είναι ανώτερος από την π .

Παίγνιο $(N, \{\succsim_i\}_{i \in N})$ καλείται συνεχές ως προς διάταξη f , εάν οποτεδήποτε $S \succsim_i \{i\}$, η S είναι συνεχής ως προς f .

Διαμέριση π είναι συνεχής ως προς διάταξη f , εάν κάθε $S \in \pi$ είναι συνεχής ως προς f .

Ορισμός 2.17. (Ιδιότητα κορυφαίου συνασπισμού), [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001]. Δεδομένου μη κενού συνόλου παικτών $V \subseteq N$, μη κενό υποσύνολό του $S \subseteq V$ αποτελεί κορυφαίο συνασπισμό του V εάν για κάθε παίκτη $i \in S$ και κάθε $T \subseteq V$ τέτοιο ώστε $i \in T$, είναι $S \succsim_i T$.

Παίγνιο σχηματισμού συνασπισμών (N, \succsim) ικανοποιεί την ιδιότητα του κορυφαίου συνασπισμού εάν για κάθε σύνολο παικτών $V \subseteq N$, υπάρχει κορυφαίος συνασπισμός.

Συμπερασματικά, η ιδιότητα του κορυφαίου συνασπισμού εξασφαλίζεται εάν για κάθε υποσύνολο παικτών υπάρχει κλίκα που προτιμά τη διατήρηση της απομόνωσης έναντι οποιασδήποτε άλλης πρότασης.

Ορισμός 2.18. (Ιδιότητα ασθενώς κορυφαίου συνασπισμού), [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001]. Δεδομένου μη κενού συνόλου παικτών $V \subseteq N$, μη κενό υποσύνολο $S \subseteq V$ αποτελεί ασθενώς κορυφαίο συνασπισμό του V , εάν υφίσταται διατεταγμένη διαμέρισή του $\{S^1, S^2, \dots, S^k\}$ τέτοια ώστε:

- Για κάθε παίκτη $i \in S^1$ και κάθε υποσύνολο $T \subseteq V$ τέτοιο ώστε $i \in T$ έχουμε $S \succsim_i T$ και
- Για κάθε παίκτη $i \in S^k$ και κάθε υποσύνολο $T \subseteq V$ τέτοιο ώστε $i \in T$ έχουμε $T \succ_i S$ μόνο εάν $T \cap (\cup_{j < k} S^j) \neq \emptyset$.

Ιδιότητα ασθενώς κορυφαίου συνασπισμού ικανοποιείται από παίγνιο σχηματισμού συνασπισμών (N, \succsim) εάν για κάθε σύνολο παικτών $V \subseteq N$ υπάρχει ασθενώς κορυφαίος συνασπισμός. Ως εκ τούτου, οι προτιμήσεις παιγνίου επαληθεύουν την ιδιότητα του κορυφαίου συνασπισμού εάν σε κάθε υποσύνολο παικτών υπάρχει ακολουθία υποσυνόλων αποτελούμενη

από α) υποσύνολο προτιμώντων το S έναντι οποιουδήποτε άλλου υποσυνόλου β) υποομάδες που αφήνουν ανοιχτό το ενδεχόμενο να προτιμήσουν διαφορετικό υποσύνολο από αυτό που ανήκουν, υπό τον όρο ότι θα συμμετέχουν σε αυτό παίκτες που ανήκουν σε υποσύνολα που προηγούνται στην ακολουθία.

Παράδειγμα 2.8. Θεωρούμε παίγνιο (N, \succ) , όπου οι προτιμήσεις είναι
 $\{A, B, C, D\} \succ_A \{A, B, C\} \succ_A \{A, C, D, E\} \succ_A \{A\}$
 $\{A, B, C, D\} \succ_B \{B, C, D\} \succ_B \{A, B, D\} \succ_B \{A, B, C\} \succ_B \{A, C\} \succ_B \{B\}$
 $\{A, B, C, E\} \succ_C \{B, C, D\} \succ_C \{A, C\} \succ_C \{C, D\} \sim_C \{B, C\} \succ_C \{C\}$
 $\{A, C, D\} \succ_D \{B, D\} \succ_D \{C, D\} \succ_D \{A, D, E\} \sim_D \{B, D\} \succ_D \{D\}$
 $\{A, B, C, E\} \succ_E \{B, C, D, E\} \succ_E \{A, C, E\} \succ_E \{C, D, E\} \sim_E \{B, C, E\} \succ_E \{E\}.$

Το προφίλ προτιμήσεων αρμόζει στην ιδιότητα ασθενώς κορυφαίου συνασπισμού. Το ζεύγος $\{A, B\}$ προτιμά τον συνασπισμό $\{A, B, C, D\}$, μεταξύ των δυνατών με συμμετοχή παικτών από το σύνολο $\{A, B, C, D\}$, έναντι οποιουδήποτε άλλου δυνατού συνασπισμού. Συνεπώς αποτελεί ασθενώς κορυφαίο συνασπισμό για τους A, B . Οι C, D προτιμούν συνασπισμούς διάφορους του $\{A, B, C, D\}$ μόνο στην περίπτωση όπου συμμετέχουν ο A ή/και ο B . Η διατεταγμένη διαμέριση είναι $\{S^1, S^2\} = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}$.

Πρόταση 2.2. [Bogomolnaia & Jackson, 2002]. Η ιδιότητα του κορυφαίου συνασπισμού συνεπάγει ασθενή συνέχεια εάν οι προτιμήσεις είναι αυστηρές. Η ασθενής ιδιότητα κορυφαίου συνασπισμού, η ασθενής συνέχεια και η διατεταγμένη ισορροπία είναι ξένες (ακόμα και με αυστηρές προτιμήσεις: για δεδομένη ιδιότητα υπάρχει παίγνιο που την ικανοποιεί ενώ δεν ικανοποιεί τις υπόλοιπες δύο.)

2.3 Έννοιες σταθερότητας

Ορισμός 2.19. [Bogomolnaia & Jackson, 2002; Aziz & Brandl, 2012; Sung & Dimitrov, 2007; Karakaya, 2011; Gairing & Savani, 2011]

- Διαμέριση π είναι ατομικά ορθολογική (IR) εάν για κάθε παίκτη i , $\pi(i) \succeq_i \{i\}$. Εν άλλους, δεν υπάρχει παίκτης που θα προτιμούσε να αποκολληθεί από τον σχηματισμό του ώστε να αυτονομηθεί.

Παράδειγμα 2.9. Στο παράδειγμα 2.1 ο συνασπισμός $\{\text{Πέτρος}, \text{Ευγενία}\}$ είναι ατομικά μη ορθολογικός για τον Πέτρο καθώς θα προτιμούσε να μείνει μόνος από το να συνασπιστεί με την Ευγενία, κατ' επέκταση και η διαμέριση $\{\{\text{Πέτρος}, \text{Ευγενία}\}, \{\text{Γεωργία}\}\}$ είναι ατομικά μη ορθολογική.

- Διαμέριση π είναι τέλεια εάν για κάθε παίκτη i , $\pi(i) \succeq_i S$, για κάθε συνασπισμό $S : S \in S_i$. Δηλαδή κάθε παίκτης i βρίσκεται σε έναν από τους πλέον προτιμητέους συνασπισμούς του.

Παράδειγμα 2.10. Οι προτιμήσεις του παραδείγματος 2.6 δεν επιδέχονται τέλεια διαμέριση, αφού η ένταξη της Αλίκης στον πρώτο συνασπισμό προτίμησής της αφήνει στον Βασίλη δύο υποψήφιους συνασπισμούς, τους $\{B, P\}$ και $\{B\}$, κανείς εκ' των οποίων δεν του είναι

τέλειος. Μια τροποποίηση στις προτιμήσεις των παικτών που παρέχει δυνατότητα τέλειας διαμέρισης είναι η δήλωση από όλους τους παίκτες του μεγάλου συνασπισμού (που περιέχει όλους τους παίκτες) ως του πλέον επιθυμητού. Τότε ο συνασπισμός $\{A, B, E, P\}$ είναι τέλειος.

- Διαμέριση π είναι Νας σταθερή (NS) εάν δεν υπάρχει παίκτης i και συνασπισμός $\pi(j) \neq \pi(i)$ τέτοιοι ώστε $\pi(j) \cup i \succ_i \pi(i)$ ούτε $\{i\} \succ_i \pi(i)$. Συνεπώς μια διαμέριση είναι Νας σταθερή, όταν δεν υπάρχει παίκτης που θέλει να μετακινηθεί σε άλλο έστω και άδειο συνασπισμό.

Παράδειγμα 2.11. Η διαμέριση $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ δεν είναι Νας σταθερή για το παράδειγμα 2.6, καθώς ούτε ο Βασίλης ούτε η Εύα θα απέκλιναν στον συμπληρωματικό τους συνασπισμό.

- Διαμέριση π είναι ατομικά σταθερή (IS) εάν δεν υπάρχει παίκτης i τέτοιος ώστε $\{i\} \succ_i \pi(i)$ και για κανένα παίκτη δεν υπάρχει συνασπισμός $\pi(j): \pi(j) \neq \pi(i)$ τέτοιος ώστε

$$\pi(j) \cup i \succ_i \pi(i) \wedge \pi(j) \cup i \succ_j \pi(j), \forall j \in \pi(j).$$

Έστω μια διαμέριση είναι ατομικά σταθερή εάν κανείς παίκτης δεν μπορεί να είναι περισσότερο ικανοποιημένος προσκολλώμενος σε άλλο πιθανώς κενό συνασπισμό, χωρίς να κάνει μέλη του νέου του συνασπισμού λιγότερο ικανοποιημένα.

Παράδειγμα 2.12. Ο συνασπισμός $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ στο παράδειγμα 2.6 είναι ατομικά σταθερός. Ο Βασίλης επιθυμεί να συνδεθεί με τους $\{A, E\}$, ωστόσο κόνοντάς το, η Αλίκη συμμετέχει σε συνασπισμό λιγότερο επιθυμητό για εκείνη από ότι πριν την έλευση του Βασίλη. Ομοίως, η Εύα επιθυμεί να συσσωματωθεί στον συνασπισμό $\{B, P\}$, ωστόσο ο Ραφαήλ ασκεί βέτο καθώς ο συνασπισμός $\{B, P\}$ του είναι τέλειος.

- Διαμέριση π είναι συμβεβλημένα Νας σταθερή (CNS) εάν δεν υπάρχει παίκτης i και συνασπισμός $\pi(j): \pi(j) \neq \pi(i)$ τέτοια ώστε $\pi(j) \cup i \succ_i \pi(i) \wedge \pi(i) \setminus i \succ_j \pi(i), \forall j \in \pi(i) \setminus i, j \neq i$. Συνεπώς η διαμέριση είναι συμβεβλημένη Νας σταθερή, όταν κανείς παίκτης δεν μπορεί να είναι περισσότερο ικανοποιημένος μετακινούμενος σε διαφορετικό συνασπισμό, πιθανώς κενό, της διαμέρισης χωρίς να δυσχεράνει τη θέση κάποιου από τους συνεταίρους του στον τωρινό του συνασπισμό.

Παράδειγμα 2.13. Η διαμέριση $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ στο παράδειγμα 2.6 είναι συμβεβλημένη Νας σταθερή καθώς η Εύα θα ήθελε να αποκλίνει και να προσχωρήσει στον συνασπισμό $\{B, P\}$ ωστόσο η Αλίκη δεν θα συνηγορούσε καθώς ο συνασπισμός $\{A, E\}$ είναι ο βέλτιστος συνδυασμός της. Παρομοίως ο Βασίλης θα ήθελε να αποκλίνει και να προσχωρήσει στον συνασπισμό $\{A, E\}$, εν τούτοις ο Ραφαήλ δεν θα συγκατατεθόταν και θα αρνούταν το κύρος της προσχώρησης. Δεν υπάρχουν άλλοι επίδοξοι αυτόμοιοι.

- Διαμέριση π καλείται συμβεβλημένη, ατομικά σταθερή (CIS) εάν δεν υπάρχει παίκτης i και συνασπισμός $\pi(j): \pi(j) \neq \pi(i)$ τέτοια ώστε

$$\pi(j) \cup i \succ_i \pi(i) \wedge \pi(j) \cup i \succ_j \pi(j) \forall j \in \pi(j) \wedge \pi(i) \setminus i \succ_k \pi(i) \forall k \in \pi(i) \setminus i,$$

$k \neq i$. Συνεπώς μία διαμέριση καλείται συμβεβλημένη, ατομικά σταθερή όταν κανείς παίκτης δεν μπορεί να καταστεί περισσότερο ικανοποιημένος μέσω μετακίνησης σε διαφορετικό, πιθανώς κενό συνασπισμό, χωρίς να κάνει τους παίκτες του αρχικού ή του καταληκτικού συνασπισμού του λιγότερο ικανοποιημένους.

- Συνασπισμός $S \subset N$ κωλύει διαμέριση π εάν $S \succ_i \pi$, $\forall i \in S$. Ένας συνασπισμός δηλαδή είναι κωλύων εάν τα μέλη του βελτιώνονται γνησίως εν συγκρίσει με τις απολαβές τους στην τρέχουσα διαμέριση.

Παράδειγμα 2.14. Στο παράδειγμα 2.6 ο συνασπισμός $\{A, B, E\}$ είναι κωλύων για τη διαμέριση $\{A, B, E, P\}$ αφού όχι μόνο η Αλίκη αλλά και ο Βασίλης και η Εύα αυξάνουν την ικανοποίησή τους εντός αυτής της ομάδας. Αντιθέτως, ο συνασπισμός $\{A, E\}$ δεν είναι κωλύων για αυτή τη διαμέριση, αφού η Εύα προτιμά τον $\{A, B, E, P\}$, ή $\{A, E\} \succ_E \{A, B, E, P\}$.

Διαμέριση βρίσκεται στον πυρήνα εάν δεν υπάρχει συνασπισμός που να την κωλύει.

- Συνασπισμός $S \subset N$ ασθενώς κωλύει διαμέριση π εάν $S \succsim_i \pi(i)$, $\forall i \in S$ και $\exists j$ τέτοιο ώστε $S \succ_j \pi(j)$. Δηλαδή, συνασπισμός είναι ασθενώς κωλύων, εάν ο σχηματισμός του δεν είναι επιζήμιος για κανένα μέλος του και είναι επωφελής για τουλάχιστον ένα, συγκρίνοντας με τις απολαβές των παικτών στη διαμέριση προ του σχηματισμού του.

Παράδειγμα 2.15. Θεωρούμε νοσοκομείο όπου τρεις χειρουργοί s_1, s_2, s_3 και τρεις νοσηλεύτριες n_1, n_2, n_3 , που εργάζονται στο ίδιο τμήμα χρειάζεται να συνεργαστούν για τη διενέργεια παράλληλων εγχειρήσεων. Οι προτιμήσεις των ιατρών και του νοσηλευτικού προσωπικού είναι

$$\begin{aligned} n_1 &\sim_{s_1} n_2 \sim_{s_1} n_3 \\ n_1 &\succ_{s_2} n_2 \sim_{s_2} n_3 \\ n_2 &\sim_{s_3} n_1 \succ_{s_3} n_3 \\ s_1 &\succ_{n_1} s_2 \succ_{n_1} s_3 \\ s_2 &\succ_{n_2} s_1 \succ_{n_2} s_3 \\ s_2 &\succ_{n_3} s_3 \succ_{n_3} s_1 \end{aligned}$$

η διαμέριση $\{\{s_2, n_1\}, \{s_1, n_2\}, \{s_3, n_3\}\}$ επιδέχεται ως ασθενώς κωλύοντα συνασπισμό το ταίριασμα $\{s_1, n_1\}$. Σε αυτόν τον ασθενώς κωλύοντα συνασπισμό ο s_1 απολαμβάνει το ίδιο όφελος, ωστόσο η n_2 βελτιώνει τη θέση της εν σχέση με τις προτιμήσεις της.

Διαμέριση ανήκει στον αυστηρό πυρήνα (SC) εάν δεν υπάρχει συνασπισμός που να την κωλύει ασθενώς.

- Συνασπισμός π είναι Παρέτο βέλτιστος (PO) όταν \nexists διαμέριση π' , τέτοια ώστε για κάθε παίκτη i : $\pi'(i) \succsim_i \pi(i)$ και $\pi'(j) \succ_j \pi(j)$, για ένα παίκτη j . Εξηγώντας περαιτέρω, οι συμμετέχοντες σε ένα ηθονικό παίγνιο ικανοποιούν βελτιστότητα κατά Παρέτο όταν δεν υπάρχει διαμέριση που να είναι ασθενώς καλύτερη από την τρέχουσα τους.

Παράδειγμα 2.16. Στο παράδειγμα 2.6 η διαμέριση $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ είναι Παρέτο βέλτιστη, εφόσον δεν υπάρχει άλλη διαμέριση που να ικανοποιεί εξίσου ή περισσότερο την Αλίκη, από την τωρινή.

- Διαμέριση π' καλείται προσιτή από την π μέσω μετακινήσεων παικτών $H \subseteq N$, που συμβολίζονται ως $\pi \xrightarrow{H} \pi'$, εάν $\forall i, j \in N \setminus H : \pi(i) = \pi(j) \Leftrightarrow \pi'(i) = \pi'(j)$.

Παράδειγμα 2.17. Θεωρούμε επτά ερευνητές A, B, C, D, E, F, G που εργάζονται σε ομάδες ως $S_1 = \{A, C, F\}, S_2 = \{B, E\}, S_3 = \{D, G\}$. Οι ομάδες εργασίας

$$\{A, B, C\}, \{D, E, F\}, \{G\}$$

προσεγγίζονται από την αρχική διαμόρφωση μέσω των μετακινήσεων $\{B \rightarrow S_1, F \rightarrow S_2, D \rightarrow S_2\}$ του συνόλου παικτών $H_1 = \{B, F, D\}$. Προφανώς υπάρχουν και εναλλακτικά σύνολα αποκλιόντων με αντίστοιχες μετακινήσεις για να επιτευχθεί η ίδια δομή συνασπισμών όπως το σύνολο παικτών $H_2 = \{A, C, E, D\}$ να πραγματοποιήσει $\{A \rightarrow S_2, C \rightarrow S_2, E \rightarrow S_1, D \rightarrow S_1\}$.

Υποσύνολο παικτών $H \subseteq N$ ισχυρά Νας κωλύει διαμέριση π εάν υπάρχει μια διαμέριση π' τέτοια ώστε $\pi \xrightarrow{H} \pi'$ και $\forall i \in H : \pi(i)' \succ_i \pi(i)$. Διαμέριση π είναι ισχυρά Νας σταθερή (SNS) εάν \nexists υποσύνολο H που ισχυρά Νας να την κωλύει. Παρατηρούμε ότι μία διαμέριση είναι ισχυρά Νας σταθερή εάν δεν υπάρχει υποσύνολο παικτών που όλοι να έχουν κέρδος από συνδυασμένη αναδιάταξή τους στους συνασπισμούς της διαμέρισης.

Παράδειγμα 2.18. Η διαμέριση $\{A, E\}, \{B\}, \{P\}$ για το προφίλ προτιμήσεων του παραδείγματος 2.6 δεν είναι ισχυρά Νας σταθερή, καθώς οι παίκτες $H = \{B, P\}$ μπορούν να κάνουν κατάλληλες μετακινήσεις προς τη διαμόρφωση της διαμέρισης $\{A, B, E, P\}$ που βρίσκεται ψηλότερα στις προτιμήσεις τους.

- Υποσύνολο παικτών $H \subseteq N$ ασθενώς Νας κωλύει διαμέριση π εάν υπάρχει διαμέριση π' τέτοια ώστε $\pi \xrightarrow{H} \pi'$ για την οποία $\forall i \in H : \pi(i)' \succeq_i \pi(i)$ και \exists παίκτης j τέτοιος ώστε $\pi'(j) \succ_j \pi(j)$. Διαμέριση π είναι αυστηρά ισχυρά Νας σταθερή (SSNS) εάν \nexists υποσύνολο H που ασθενώς Νας να την κωλύει.

Παράδειγμα 2.19. Η διαμέριση $\{A, B, E, P\}$ για τις προτιμήσεις του παραδείγματος 2.6 είναι αυστηρά ισχυρά Νας σταθερές, καθώς δεν υπάρχει σύνολο αποκλιόντων παικτών που μπορεί να ωφεληθεί από άλλα σχήματα συνασπισμών.

- Υποσύνολο παικτών H κωλύει ισχυρά ατομικά διαμέριση π , εάν $\pi \xrightarrow{H} \pi', \pi'(i) \succ_i \pi(i), \forall i \in H$ και $\pi'(j) \succeq_j \pi(j), \forall j \in \pi'(i)$, για κάθε $i \in H$. Διαμέριση π καλείται ισχυρά ατομικά σταθερή (SIS) όταν δεν υπάρχει υποσύνολο παικτών που ισχυρά ατομικά να την κωλύει. Επεξηγώντας, δεν υπάρχει σύνολο αποκλιόντων όπου όλοι να επωφελούνται από τη σύνθεση των νέων τους συνασπισμών χωρίς να ζημιώνονται οι

πρώην συνεταίροι τους. Συνεπώς μία διαμέριση χρειάζεται λιγότερο πνεύμα συνεργασίας από τους παίκτες για να είναι *SIS* από ότι για να είναι *SNS*, λόγω των περισσότερων απαιτήσεων που προτάσσει η πρώτη έννοια σταθερότητας για να δώσει το πράσινο φως για απόκλιση.

Παράδειγμα 2.20. Η διαμέριση $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ δεν είναι *Nas* σταθερή για το παίγνιο στο παράδειγμα 2.6 καθώς ο *A* και ο *B* μπορούν να αποκλίνουν, απεναντίας είναι ισχυρά, ατομικά σταθερή καθώς οι πιθανές αποκλίσεις, επιφέρουν απώλειες στους *A* και *B* αντίστοιχα.

Για μία υποκατηγορία των ηδονικών παιγνίων ορίζονται επιπρόσθετα μέτρα σταθερότητας.

Ορισμός 2.20. Για αθροιστικά διαχωρίσιμα ηδονικά παίγνια:

- Διαμέριση π έχει σταθερότητα πλειοψηφίας εισόδου εάν είναι ατομικά ορθολογική και δεν υπάρχει παίκτης i τέτοιος ώστε

$$\exists \pi(j) \mid \pi(j) \neq \pi(i) \wedge \pi(j) \succ_i \pi(i) \wedge \sum_{j \in \pi(j)} [v_j(\pi(j) \cup i) - v_j(\pi(j))] \geq 0.$$

Δηλαδή, δεν υπάρχει παίκτης που θέλει να αποκλίνει και δεν θα μείωνε την κοινωνική ωφέλεια του συνασπισμού όπου θα εντασσόταν.

- Διαμέριση π έχει σταθερότητα πλειοψηφίας εξόδου εάν είναι ατομικά ορθολογικός και δεν υπάρχει παίκτης i τέτοιος ώστε

$$\exists \pi(j) \mid \pi(j) \neq \pi(i) \wedge \pi(j) \succ_i \pi(i) \wedge \sum_{k \in \pi(i), k \neq i} [v(\pi(i) \setminus \{i\}) - v(\pi(i))] \geq 0.$$

Συνεπώς, δεν υπάρχει παίκτης που προτιμά διαφορετικό συνασπισμό και δεν θα μείωνε το κοινωνικό όφελος του τρέχοντος συνασπισμού του αν απέκλινε.

Πρόταση 2.3. Η ανωνυμία δεν συνεπάγεται ατομική σταθερότητα.

Απόδειξη. Οι ακόλουθες λίστες προτιμήσεων επί των μεγεθών, περιγράφουν ανώνυμο παίγνιο.

$$\begin{aligned} 57 \succ_1 2 \succ_1 7 \succ_1 6 \succ_1 1 \\ 7 \succ_2 2 \succ_2 57 \succ_2 56 \succ_2 1 \\ 2 \succ_3 7 \succ_3 6 \succ_3 1 \\ 7 \succ_{4-8} 6 \succ_{4-8} 5 \succ_{4-8} 4 \succ_{4-8} 3 \succ_{4-8} 2 \succ_{4-8} 1 \end{aligned}$$

Οι παίκτες 9 έως 63 έχουν προτιμήσεις με μοναδική κορυφή το 63.

Τα μεγέθη που δεν επιδέχονται επιπλέον παίκτες είναι τα 1 έως 7 και το 57. Μέγεθος 57 σημαίνει ότι οι παίκτες 3 έως 8 δεν συμπεριλαμβάνονται, διότι αυτό το μέγεθος δεν είναι ατομικά ορθολογικό για αυτούς. Για το λόγο αυτό, στους 57 περιλαμβάνονται οι παίκτες 9 έως 63.

Επιπλέον, ατομικά σταθερός συνασπισμός πληθικότητας 1 έως 7 συνεπάγεται ότι συμμετέχει τουλάχιστον ένας από τους παίκτες μεταξύ 1 και 8, συνολικά 56 παίκτες, αφήνοντας μία ομάδα 7 παικτών που θα συνασπιστούν και θα απορροφήσουν παίκτες στο εύρος 9 – 63. Συνεπώς, για να είναι για να είναι το παίγνιο ατομικά σταθερό οι παίκτες 9 έως 63 απαιτείται να είναι στην ίδια διαμέριση S_1 .

Από τους λοιπούς παίκτες παρατηρείται ότι οι 4 έως 8 θα συνασπιστούν στον συνασπισμό S_2 . Η συνένωση με τον S_1 δεν αποτελεί επιλογή για τους παίκτες αυτούς αφού η απομόνωση τους είναι ελκυστικότερη. Οι υπόψιν παίκτες έχουν αύξουσες ως προς το πλήθος προτιμήσεις συνεπώς τείνουν να συνεταιριστούν. Ο μόνος λόγος να μην συνεταιριστούν είναι να υπάρξουν άλλες διαμορφώσεις. Οι μόνες περιπτώσεις είναι συνασπισμός μεγέθους 7 που εξαιρεί έναν εκ των παικτών 4 έως 8 αλλά τότε κάποιος εκ των παικτών 1 και 3 θα προσκολλόταν στον μονήρη παίκτη.

Η επόμενη σημείωση είναι ότι οι παίκτες 1 – 3 δεν μπορούν να συνεταιριστούν οδηγώντας σε μέγεθος 58, 8 ή 3 αφού κανείς τους δεν κατατάσσει ως επιθυμητά αυτά τα μεγέθη. Επιπλέον δεν μπορούν όλοι να είναι χωριστά δημιουργώντας μεγέθη 56, 6 και 1 διότι τον μονομελή συνασπισμό θα αποτελούσε ο παίκτης 3 και οι παίκτες 1 και 2 θα προσκολλόταν στους συνασπισμούς S_2 και S_1 αντίστοιχα. Επιπλέον λαμβάνοντας υπόψιν ότι $57 \succ_1 6$, ο παίκτης 1 θα απέκλινε στον συνασπισμό S_2 .

Συνεπώς εάν οι παίκτες 1 και 2 είναι συνασπισμένοι και ο παίκτης $3 \in S_2$ τότε ο παίκτης 2 αποκλίνει στον S_2 και εξετάζοντας κατά όμοιο τρόπο τους λοιπούς συνδυασμούς διαπιστώνεται ότι δεν μπορεί να υπάρξει ατομικά σταθερή ομαδοποίηση για το προκείμενο παίγνιο. \square

2.4 Σχέσεις των εννοιών σταθερότητας

Οι τέλειοι συνασπισμοί προφανώς ικανοποιούν όλα τα κριτήρια σταθερότητας.

Πρόταση 2.4. *Οι αυστηρά ισχυρά Νας σταθερές διαμερίσεις ικανοποιούν την αυστηρή σταθερότητα πυρήνα (και προφανώς την ισχυρή Νας σταθερότητα).*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι αυστηρά ισχυρά σταθερή Νας διαμέριση π δεν εμφανίζει αυστηρή σταθερότητα πυρήνα. Τότε υπάρχει συνασπισμός S τέτοιος ώστε $S \succ_i \pi(i)$, $\forall i \in S$ και υπάρχει $j : S \succ_j \pi(j)$. Άρα $\pi \xrightarrow{H} \pi'$, $H = S$ και $\forall i \in H : \pi'(i) \succ_i \pi(i)$ και $\exists j : \pi'(j) \succ_j \pi(j)$. Συνεπώς η διαμέριση π δεν είναι αυστηρά ισχυρά Νας σταθερή. Αντίφαση. \square

Πρόταση 2.5. *Η ισχυρή Νας σταθερότητα δεν συνεπάγεται ισχυρή σταθερότητα πυρήνα και τούμπαλιν.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα ακόλουθα παίγνια:

- $\{1, 2\} \succ_1 \{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 3\} \succ_1 \{1\}$
 $\{1, 2\} \sim_2 \{1, 2, 3\} \succ_2 \{2, 3\} \succ_2 \{2\}$
 $\{1, 2, 3\} \succ_3 \{1, 3\} \succ_3 \{2, 3\} \succ_3 \{3\}$

Η διαμέριση $\{\{1, 2, 3\}\}$ είναι ισχυρά Νας σταθερή αλλά όχι ισχυρά σταθερή κατά πυρήνα.

- $\{1\}$
 $\{1, 2\} \succ_2 \{2\}$
 Η διαμέριση $\{\{1\}, \{2\}\}$ είναι αυστηρά πυρηνικά σταθερή αλλά δεν εμπίπτει στις ισχυρά Ναυ σταθερές διαμερίσεις.

□

Πρόταση 2.6. α) Η αυστηρή σταθερότητα πυρήνα συνεπάγεται Παρέτο βελτιστότητα β) Η ισχυρή Ναυ σταθερότητα δεν είναι επαρκής για Παρέτο βελτιστότητα.

Απόδειξη. (α) Προκύπτει ευθέως από τους αντίστοιχους ορισμούς.

(β) Θεωρώντας το προηγούμενο παίγνιο:

$$\begin{array}{c} \{1\} \\ \{1, 2\} \succ_2 \{2\} \end{array}$$

Η διαμέριση $\{\{1\}, \{2\}\}$ είναι Παρέτο βέλτιστη αλλά δεν ικανοποιεί την ισχυρή Ναυ σταθερότητα. □

Πρόταση 2.7. Η αυστηρή σταθερότητα πυρήνα συνάγει ισχυρή ατομική σταθερότητα.

Απόδειξη. Έστω π αυστηρή κατά πυρήνα διαμέριση αλλά όχι ισχυρά ατομικά σταθερή. Τότε $\exists H, \pi'$ τέτοιο ώστε $\pi \xrightarrow{H} \pi', H = S$ και $\forall i \in H : \pi'(i) \succ_i \pi(i)$ και $\pi'(j) \succeq_j \pi(j), \forall j \in \pi'(i)$, για κάθε $i \in H$. Συμπερασματικά, για συνασπισμό $\pi'(i)$ για κάποιο παίκτη $i \in H$ κάθε παίκτης δεν ζημιώνεται και ο i έχει βελτιωμένη θέση στην π . Καταλήγοντας ότι η διαμέριση π δεν είναι αυστηρά πυρηνικά σταθερή. □

Πρόταση 2.8. Η ισχυρή ατομική σταθερότητα συνεπάγεται σταθερότητα πυρήνα.

Απόδειξη. Έστω π ισχυρά ατομικά σταθερή διαμέριση και όχι πυρηνικά σταθερή. Υπάρχει υποσύνολο παικτών που μπορούν να βελτιώσουν τη θέση τους συστήνοντας νέο συνασπισμό, χωρίς να προκαλέσουν δυσαρέσκεια σε τρίτους παίκτες. Αντίφαση. □

Πρόταση 2.9. Αυστηρή πυρηνική σταθερότητα, σε συνδυασμό με Ναυ σταθερότητα, είναι ανεπαρκής για ισχυρή Ναυ σταθερότητα.

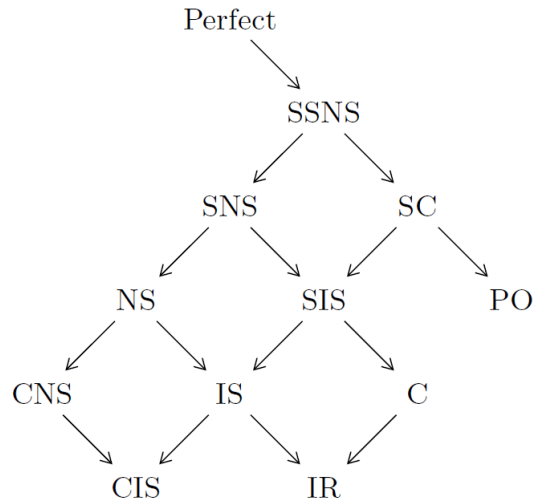
Απόδειξη. Θεωρούμε το ακόλουθο παίγνιο:

$$\begin{array}{c} \{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 3\} \succ_1 \{1, 2\} \succ_1 \{1\} \\ \{2\} \\ \{1, 2, 3\} \succ_3 \{1, 3\} \succ_3 \{2, 3\} \succ_3 \{3\} \end{array}$$

Η διαμέριση $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ είναι αυστηρά πυρηνικά σταθερή και Ναυ σταθερή, επιδέχεται ωστόσο ισχυρά Ναυ κωλύον υποσύνολο, το $H = \{1, 2\}$. □

Αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned}
 (SNS) &\Rightarrow (NS) \Rightarrow (CNS) \Rightarrow (CIS) \\
 &(NS) \Rightarrow (IS) \Rightarrow (IR) \\
 (SNS) &\Rightarrow (SIS) \Rightarrow (IS) \Rightarrow (CIS) \\
 &(C) \Rightarrow (IR).
 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα Hasse των εγκλεισμών των εννοιών σταθερότητας.

2.5 Αρνητικά αποτελέσματα

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται αρνητικά αποτελέσματα για την ύπαρξη σταθερών διαμερίσεων.

2.5.1 Γενικές προτιμήσεις

Όπως φαίνεται στην ακόλουθη υποενότητα, υπάρχουν ηδονικά παίγνια με άδειο πυρήνα.

2.5.2 Πρόβλημα των συγκατοίκων

Υπάρχουν στιγμιότυπα που δεν επιδέχονται σταθερά ταιριάσματα π.χ. το επόμενο παίγνιο 4 συμμετεχόντων [Gale & Shapley, 1962].

Το ταίριασμα $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ κωλύεται από την ομάδα $\{\{2, 3\}\}$, ενώ το $\{1, 3\}, \{2, 4\}$ κωλύεται από το συνασπισμό $\{1, 2\}$ και η διαμέριση $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, κωλύεται από τη δυάδα $\{1, 3\}$.

2.5.3 Παίγνια W

Από τα αρνητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα των συγκατοίκων, απορρέει η δυνατότητα κενότητας του αυστηρού πυρήνα των W ηδονικών παιγνίων, στην περίπτωση που το

Πίνακας 2.3: Στιγμιότυπο προβλήματος συγκατοίκων που δεν επιδέχεται σταθερό ταίριασμα.

Παίκτης	Προτιμήσεις		
1	2	3	4
2	3	1	4
3	1	2	4
4	οτιδήποτε		

αντίστοιχο στιγμιότυπο του προβλήματος των συγκατοίκων δεν επιδέχεται σταθερή διαμέριση. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η σχέση των W παιγνίων με το πρόβλημα των συγκατοίκων.

2.5.4 Αθροιστική διαχωρισιμότητα

Η Νας σταθερότητα δεν είναι εγγενής στα αθροιστικά διαχωρίσιμα παίγνια. Το παίγνιο (N, \succ) όπου $N = \{A, B, C\}$ και οι τιμές των προτιμήσεων είναι κυκλικές, όπως δίνονται στον πίνακα 2.4.

Πίνακας 2.4: Στιγμιότυπο μη Νας σταθερού, αθροιστικά διαχωρίσιμου παίγνιου.

Παίκτης	Αξία		
A	0	5	-6
B	3	0	4
C	7	-6	0

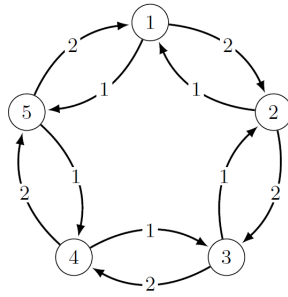
Στην περίπτωση που συνασπιστούν οι (A, B) , ο παίκτης B θα αποκλίνει για να συνεταιριστεί με τον C . Εάν συνασπιστούν οι (B, C) , ο παίκτης C θα αποκλίνει για να προσχωρήσει στην ομάδα του A και τότε ο παίκτης A θα αποκλίνει προς τον συνασπισμό B .

2.5.5 Κλασματικά ηδονικά παίγνια

Θεωρούμε κυκλική λίστα πέντε παικτών, όπου ο καθένας αποτιμά δύο τον επόμενο του, ένα τον προηγούμενό του και μείον δέκα όλους τους άλλους παίκτες (σχήμα 2.2).

Κάθε συνασπισμός που περιλαμβάνει τρεις παίκτες είναι ασταθής λόγω, της αξίας -10 που επισκιάζει οποιοδήποτε άλλο όφελος. Συνεπακόλουθα, μία υποψήφια για τον πυρήνα διαμέριση περιλαμβάνει συνασπισμούς με μέγιστο μέγεθος δύο. Ωστόσο, κάθε δύο ζεύγη δεν αποτελούν σταθερή διαμέριση καθώς κάποιος παίκτης επιθυμεί να αποκλίνει με τον μεμονωμένο παίκτη που επίσης προτιμά ένα ταίρι από την απομόνωση. Εν κατακλείδι, ο πυρήνας μπορεί να είναι κενός για κλασματικά ηδονικά παίγνια.

Ο αυστηρός πυρήνας μπορεί να είναι κενός ακόμα και για απλά ηδονικά παίγνια. Οικείο στιγμιότυπο αποτελεί κυκλική δομή πέντε παικτών.



Σχήμα 2.2: Κλασματικό ηδονικό παίγνιο με άδειο πυρήνα.

Κεφάλαιο 3

Σταθερές διαμερίσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχουν σταθερές διαμερίσεις για διάφορα κριτήρια σταθερότητας και οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό τους.

3.1 Παρέτο βέλτιστες διαμερίσεις

[Aziz, Brandt & Harrenstein, 2013]. Παρατηρώντας ότι μία μη βέλτιστη κατά Παρέτο διαμέριση μπορεί να οδηγήσει τους συμμετέχοντες ενός ηδονικού παιχνιδιού να αποκλίνουν, η βελτιστότητα κατά Παρέτο εκλαμβάνεται ως έννοια σταθερότητας. Υπάρχουν Παρέτο βέλτιστες διαμερίσεις για κάθε ηδονικό παίγνιο σε αντίθεση με άλλες επιθυμητές ιδιότητες.

Η βελτιστότητα κατά Παρέτο συνδέεται στενά με τις τέλειες διαμερίσεις καθώς χαλαρώνοντας τα προφίλ προτιμήσεων των παικτών στην κατάλληλη έκταση, μια Παρέτο βέλτιστη διαμέριση αναβαθμίζεται σε τέλεια. Τυπικότερα,

Ορισμός 3.1. Οι προτιμήσεις \succsim_i αποτελούν άδρυνση των προτιμήσεων \succsim'_i όταν σύμφωνα με τις \succsim'_i , ο παίκτης i μπορεί να έχει γνήσιες προτιμήσεις επί κάποιων μέγιστα επιθυμητών συνασπισμών του σύμφωνα με τις \succsim_i . Συμβολίζουμε αυτή τη σχέση ως $R'_i \geq_i R_i$ όπου R'_i σημαίνει τη σχέση \succsim'_i και R_i την \succsim_i . Τότε \succsim'_i είναι μία εκλέπτυνση της \succsim_i . Ανάλογα ο συμβολισμός $R'_i >_i R_i$ σημαίνει $R'_i \geq_i R_i$ και όχι $R_i \geq_i R'_i$.

Ένα προφίλ $\succsim = R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ καλείται άδρυνση του προφίλ $\succsim' = R' = (R'_1, R'_2, \dots, R'_n)$ εάν $R_i \leq_i R'_i$, για κάθε παίκτη i .

Ενδιάμεσα προφίλ των $R, R' : R \leq R'$ καλούνται εκείνα τα R'' για τα οποία $R'' \geq R \wedge R'' \geq R'$. Συμβολίζουμε τέτοια προφίλ ως $R'' \in [R, R']$. Σε αναλογία με την αναπαράσταση διαστημάτων στην ανάλυση, $R'' \in (R, R')$ ισοδυναμεί με $R < R'' \leq R'$.

Θεώρημα 3.1. Για σύνολο παικτών N υποθέτουμε $R^\perp \leq R^\top$ για δύο προφίλ προτιμήσεων R^\perp, R^\top και ότι η διαμέριση π είναι τέλεια για το R^\perp , τότε η π είναι Παρέτο βέλτιστη για το προφίλ R^\top εάν και μόνο εάν υπάρχει προφίλ προτιμήσεων $R \in [R^\perp, R^\top]$ για το οποίο η π είναι τέλεια και δεν υπάρχει άλλο προφίλ προτιμήσεων $R' \in (R, R^\top]$ που να επιδέχεται τέλεια διαμέριση.

Για την απόδειξη παρατηρούμε ότι το R είναι το λεπτότερο προφίλ προτιμήσεων για το οποίο η π είναι τέλεια. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει προφίλ προτιμήσεων $R_1 \in (R, R^\top]$ για

το οποίο η π_1 είναι τέλεια, υπάρχει παίκτης i , που έχει μέγιστη προτίμηση υπό το R_1 κάποιου συνασπισμού που είναι γνήσιο υποσύνολο των μέγιστα επιθυμητών συνασπισμών του υπό το R . Συνεπώς, υπό το προφίλ προτιμήσεων R^\top , η π δεν μπορεί να είναι Παρέτο βέλτιστη διαμέριση. Η ασυμβατότητα απορρέει από το συλλογισμό ότι σύμφωνα με τις R^\top , ο παίκτης i έχει τουλάχιστον τόσο εκλεπτυσμένες προτιμήσεις όσο με το R_1 και η π_1 τον ικανοποιεί σε τέλειο βαθμό. Απεναντίας, η π δεν είναι τέλεια για το R_1 αφού ικανοποιεί τον i υποβέλτιστα. Συνεπώς υπό το R^\top , κάθε παίκτης βρίσκεται τουλάχιστον εξίσου ικανοποιημένος στο π_1 όπως και στο π , ωστόσο, ο i είναι λιγότερο. Συμπερασματικά, η π δεν μπορεί να είναι Παρέτο βέλτιστη για το R^\top .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η π είναι τέλεια για ένα προφίλ προτιμήσεων $R \in [R^\perp, R^\top]$ και ότι $\nexists R_1 \in [R, R^\top]$ που να επιδέχεται τέλεια διαμέριση, τότε η π είναι Παρέτο βέλτιστη για το R^\top . Υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν είναι, τότε υπάρχει διαμέριση π_1 , η οποία είναι εξίσου καλή για τους παίκτες υπό το R^\top και υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης i , για τον οποίο $\pi_1(i) \succ \pi(i)$. Ωστόσο αδρύνοντας βήμα - βήμα το R^\top με σκοπό να δημιουργήσουμε το R , σταματάμε να αδρύνουμε τις προτιμήσεις του παίκτη i όταν ο συνασπισμός $\pi_1(i)$ συμπεριληφθεί στις βέλτιστες προτιμήσεις του i . Για τους λοιπούς παίκτες $j \in N \setminus \{i\}$ σταματάμε την άδρυνση στον $\pi(j)$. Τότε η π_1 είναι τέλεια διαμέριση για το προκύπτον προφίλ προτιμήσεων, ενώ η π δεν είναι, αντιβαίνοντας στην υπόθεση της μη ύπαρξης τέλειας διαμέρισης για πιο εκλεπτυσμένο προφίλ προτιμήσεων από το R .

Αλγόριθμος 1: Αλγόριθμος εκλέπτυνσης προτιμήσεων.

```

input : A general hedonic game
output An individually stable, Pareto optimal partition for (N,R)
:
1  $Q_i^\top \leftarrow R_i$ , for each  $i \in N$ 
2  $Q_i^\perp \leftarrow R_i \cup ((X, Y) : X \subseteq R_i \setminus \{i\}, Y \subseteq R_i \setminus \{i\})$ , for each  $i \in N$ 
3 while  $Q_i^\perp \neq Q_i^\top$  for at least an  $i \in N$  do
4    $i \leftarrow \text{Choose}(\text{player } i \in N : Q_i^\perp \neq Q_i^\top)$ 
5    $Q'_i \leftarrow \text{Refine}(i : Q_i^\perp, Q_i^\top)$ 
6   if Perfect partition  $(N, (Q_1^\top, Q_2^\top, \dots, Q_{i-1}^\top, Q'_i, Q_{i+1}^\top, \dots, Q_n^\top)) \neq \emptyset$  then
7      $Q_i^\perp = Q'_i$ 
8   else
9      $Q_i^\top = Q''_i$  for  $\text{cover}(Q''_i) = Q'_i$ 
10  end
11 end
12 return PerfectPartition(N,  $Q^\perp$ )

```

Στο προηγούμενο θεώρημα βασίζεται αλγόριθμος για υπολογισμό Παρέτο βέλτιστων διαμερίσεων, ο αλγόριθμος εκλέπτυνσης προτιμήσεων (ΑΕΠ). Όπως δηλώνει το όνομά του, ο ΑΕΠ υπολογίζει μία βέλτιστη κατά Παρέτο διαμέριση εκλεπτύνοντας βήμα - βήμα τις προτιμήσεις των παικτών που αρχικά τίθενται στις λεπτότερες για τις οποίες υπάρχει τέλεια διαμέριση. Ο ΑΕΠ αρχίζει αναθέτοντας στο Q_i^\top τις προτιμήσεις του παίκτη i , για κάθε παίκτη i και στο Q_i^\perp

επίπεδες προτιμήσεις για τον παίκτη i μεταξύ όλων των ατομικά ορθολογικών του προτιμήσεων. Προφανώς κάθε ατομικά ορθολογική διαμέριση είναι τέλεια σύμφωνα με τις Q_i^\perp . Τότε, επιλέγεται ένας παίκτης και γίνεται εκλέπτυνση Q_i' των προτιμήσεων του, στο διάστημα που ορίζεται από τις Q_i^\top και Q_i^\perp . Κατόπιν, ελέγχεται εάν υπάρχει τέλεια διαμέριση για αυτές τις προτιμήσεις. Στην περίπτωση που υπάρχει, το Q_i^\perp ενημερώνεται σε Q_i' αλλιώς ανατίθενται στο Q_i^\top οι προτιμήσεις Q_i'' για τις οποίες $cover(Q_i'') = Q_i'$, δηλαδή οι Q_i'' είναι ένα βήμα αδρότερες από τις Q_i' .

Από την παραπάνω περιγραφή γίνεται φανερό ότι σε κάθε επανάληψη του βρόχου ενόσω, η απόσταση μεταξύ των Q_i^\top και Q_i^\perp μειώνεται για κάποιον παίκτη i . Αφού οι συνασπισμοί μεταξύ των οποίων επιλέγει κάθε παίκτης και το σύνολο των παικτών είναι πεπερασμένα, ο αλγόριθμος τερματίζει εγγυημένα μετά από κάποιο αριθμό κύκλων. Επιπρόσθετα, δεν υπάρχει εκλέπτυνση του επιστρεφόμενου προφίλ προτιμήσεων για την οποία να υπάρχει τέλεια διαμέριση. Η βάση για την τελευταία παρατήρηση προέρχεται από το γεγονός ότι την τελευταία φορά που ο αλγόριθμος επέλεξε το μονοπάτι "αλλιώς εάν" ήταν επειδή δεν υπήρχε τέλεια διαμέριση και το αποτέλεσμα για αυτό το βήμα ήταν οι Q_i^\top να γίνουν οι καλύτερες προτιμήσεις για τις οποίες μπορεί να υπάρχει τέτοια διαμέριση. Από εκείνο το σημείο οι προτιμήσεις του παίκτη i δεν αδρύνθηκαν.

Οι δύο συναρτήσεις που καλούνται στον αλγόριθμο, η Choose και η Refine ορίζουν κάποια χαρακτηριστικά της παραγόμενης δομής συνασπισμών.

Πίνακας 3.1: Ιδιότητες ΑΕΠ ως προς τις συναρτήσεις Choose και Refine.

Ιδιότητα	Choose	Refine
Διαδική αναζήτηση	τυχαία	$\left\lceil \frac{refs(Q_i^\perp) + refs(Q_i^\top)}{2} \right\rceil$
Ακολουθιακή δικτατορία	καθορισμένη, επίμονη σειρά παικτών	λεπτότερη δυνατή
Συντηρητική	τυχαία	ελάχιστη δυνατή εκλέπτυνση
Ισοτιμία	LRU	ελάχιστη δυνατή εκλέπτυνση

Η συνάρτηση $refs: Preference Profiles for given players \rightarrow \mathbb{N}$ δέχεται ένα ατομικά ορθολογικό προφίλ προτιμήσεων και επιστρέφει τον αριθμό των απαιτούμενων εκλεπτύνσεων ώστε να καταστούν οι προτιμήσεις επίπεδες, δηλαδή προφίλ προτιμήσεων όπου κάθε παίκτης είναι αδιάφορος μεταξύ όλων των ατομικά ορθολογικών για εκείνον, συνασπισμών.

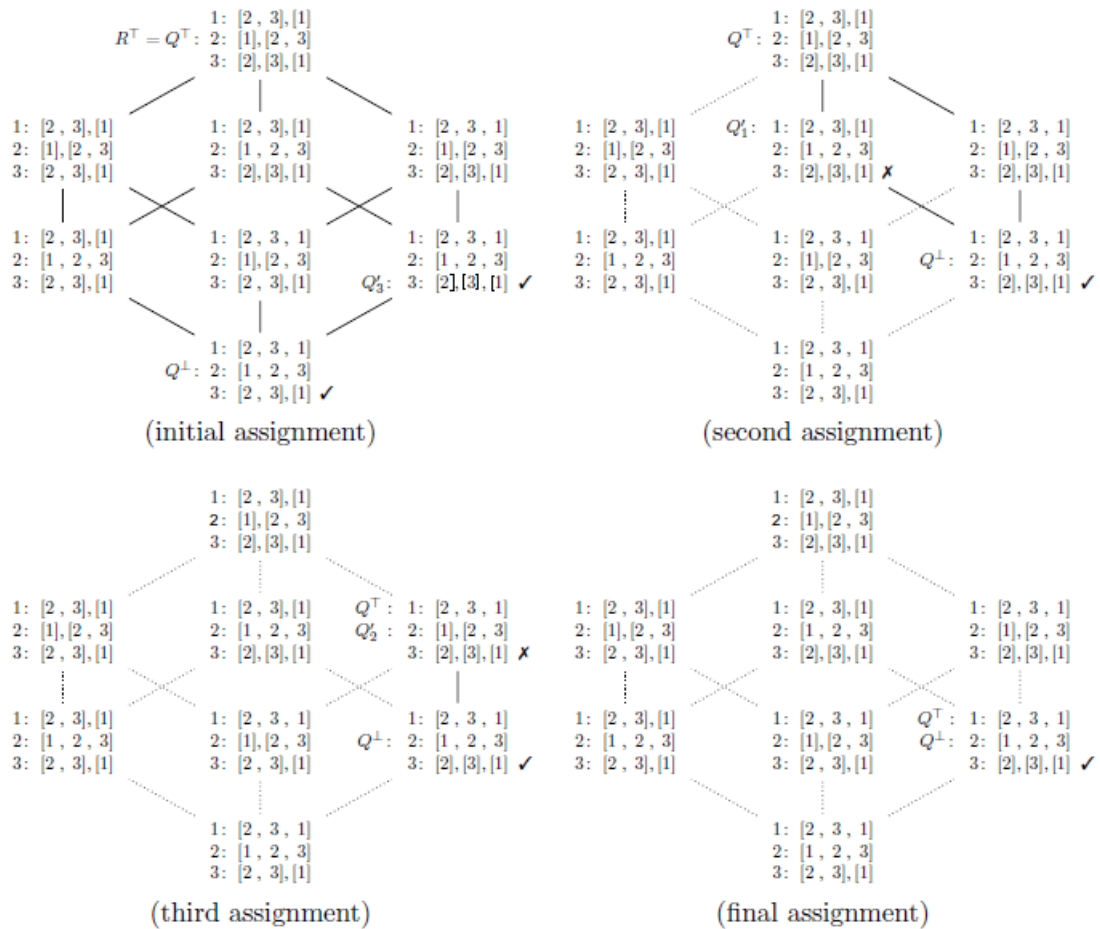
LRU \rightarrow Λιγότερο συχνά χρησιμοποιούμενος. Ο παίκτης που επιλέγεται είναι εκείνος που έχει παίξει λιγότερο.

Ως παράδειγμα της διαδικασίας που ακολουθεί ο αλγόριθμος ΑΕΠ θεωρούμε το ακόλουθο W ηδονικό παίγνιο

$$(N, R_i) = (\{1, 2, 3\}, \{([2, 3], [1]), ([1], [2, 3]), ([2], [3], [1])\})$$

όπου οι σχέσεις R_i δηλώνουν τις προτιμήσεις των παικτών επί των παικτών. Η εκτέλεση του αλγορίθμου επεξηγείται στο σχήμα 3.1. Αρχικά, ανατίθενται στο Q^\perp επίπεδες προτιμήσεις

σύμφωνα με τις οποίες κάθε παίκτης εκτιμά ομοίως τους άλλους και στο Q^\top οι πραγματικές προτιμήσεις. Η αρχικά επιλεγμένη εκλέπτυνση Q'_3 γίνεται στις προτιμήσεις του παίκτη τρία και καθώς εξακολουθεί να υπάρχει τέλεια διαμέριση, το Q^\perp ενημερώνεται λαμβάνοντας υπόψη την εκλέπτυνση. Έπειτα επιχειρείται μια διαβάθμιση Q'_1 στην λίστα του πρώτου παίκτη αλλά εμφανίζεται διένεξη με τη δυνατότητα εύρεσης τέλει διαμέρισης συνεπώς το Q^\top υποβαθμίζεται στο $Q''_1 \mid Q'_1 = \text{cover}(Q''_1)$. Η τελευταία ανάθεση που επιχειρείται περιλαμβάνει εκλέπτυνση στις προτιμήσεις του δεύτερου παίκτη ωστόσο, ούτε αυτές οι προτιμήσεις επιδέχονται τέλεια διαμέριση και κατά συνέπεια το Q^\top προσαρμόζεται στο $Q''_2 \mid Q'_2 = \text{cover}(Q''_2)$ το οποίο συμπίπτει με το Q^\perp και η διαδικασία τερματίζεται.



Σχήμα 3.1: Εκτέλεση του αλγορίθμου ΑΕΠ σε W ηδονικό παίγνιο.

Ο αλγόριθμος εκλέπτυνσης προτιμήσεων (ΑΕΠ) χρησιμοποιεί ένα μαντείο επίλυσης του προβλήματος τέλει διαμέρισης. Η πολυπλοκότητα του ΑΕΠ μπορεί να είναι πολυωνυμική ως προς το μήκος της εισόδου του παιγνίου. Το αποδοτικό αποτέλεσμα διατίθεται όταν τέλει διαμερίσεις μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο, όπως συμβαίνει σε πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις. Αν και το πλέγμα (lattice) που σχηματίζεται από το Q^\top , και κάθε

δυνατή ακολουθία αδρύνσεων μέχρι το Q^\perp μπορεί να έχει εκθετικό ύψος, μέσω δυαδικής αναζήτησης εκτελούνται μόνο πολυωνυμικού αριθμού στο μήκος της εισόδου κλήσεις στην Choose. Ωστόσο όπως εξηγείται στο κεφάλαιο 4, το HPER είναι NP-πλήρες, συνεπώς ο ΑΕΠ δεν ολοκληρώνεται σε πολυωνυμικό χρόνο στη γενική περίπτωση. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1, η έξοδος του αλγορίθμου 1 αποτελεί βέλτιστη κατά Παρέτο διαμέριση για ηδονικό παίγνιο εισόδου.

Ο αλγόριθμος εκλέπτυνσης προτιμήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου η σειριακή δικτατορία παρουσιάζεται αδύναμη. Η σειριακή δικτατορία (SD), υπολογίζει μία Παρέτο βέλτιστη διαμέριση με την Choose να χρησιμοποιεί μια προκαθορισμένη λίστα προτιμήσεων επί των παικτών. Στην περίπτωση που υπάρχουν ισότητες στις προτιμήσεις, ο δικτάτορας, δηλαδή ο παίκτης στον οποίο δίνεται προτεραιότητα από την Choose μέχρι να καθοριστεί ο συνασπισμός του, δεν είναι εμφανές σε ποιο συνασπισμό θα πρέπει να ενταχθεί ώστε να προκύψει Παρέτο σταθερή διαμέριση. Επιπρόσθετα, υπάρχουν ηδονικά στιγμιότυπα όπου ο ΑΕΠ επιστρέφει δίκαιες Παρέτο βέλτιστες διαμερίσεις που η σειριακή δικτατορία δεν μπορεί να υπολογίσει. Π.χ. το παίγνιο που ορίζεται από τις κάτωθι προτιμήσεις επιδέχεται σχετικά δίκαιη Παρέτο βέλτιστη διαμέριση αλλά και αριστοκρατική. Ωστόσο η σειριακή δικτατορία μπορεί να υπολογίσει μόνο τη δεύτερη, καταλήγοντας σε κατάσταση όπου κάποιος παίκτης βρίσκεται στον λιγότερο προτιμώμενο συνασπισμό του. $\{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 3, 4\} \succ_1 \{1, 2, 4\} \succ_1 \{1, 2\} \succ_1 \{1, 3\} \succ_1 \{1, 4\} \succ_1 \{1, 2, 3, 4\} \succ_1 \{1\}$, $\{2, 3, 4\} \succ_2 \{1, 2, 4\} \succ_2 \{1, 2, 3\} \succ_2 \{1, 2\} \succ_2 \{2, 4\} \succ_2 \{2, 3\} \succ_2 \{1, 2, 3, 4\} \succ_2 \{2\}$, $\{1, 3, 4\} \succ_3 \{1, 2, 3\} \succ_3 \{2, 3, 4\} \succ_3 \{3, 4\} \succ_3 \{1, 3\} \succ_3 \{2, 3\} \succ_3 \{1, 2, 3, 4\} \succ_3 \{3\}$, $\{1, 2, 4\} \succ_4 \{2, 3, 4\} \succ_4 \{1, 3, 4\} \succ_4 \{3, 4\} \succ_4 \{2, 4\} \succ_4 \{1, 4\} \succ_4 \{1, 2, 3, 4\} \succ_4 \{4\}$. Ακόμα, ο ισότιμος ΑΕΠ, εντάσσει κάθε παίκτη στον τέταρτο κατά προτίμηση συνασπισμό του προτείνοντας τη διαμέριση $\{1, 2\}, \{3, 4\}$.

3.2 Πρόβλημα των συγκατοίκων

[Irving, 1985]. Ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος των συγκατοίκων ξεκινά με προτάσεις που γίνονται από τους παίκτες σε συμπαίκτης τους. Ένας παίκτης απορρίπτει μια πρόταση εάν έχει κάποια καλύτερη, δηλαδή πρόταση από παίκτη τον οποίο κατατάσσει υψηλότερα στη λίστα προτιμήσεών του. Σε αντίθετη περίπτωση κρατά την πρόταση για να τη σκεφτεί και απορρίπτει οποιαδήποτε χειρότερη πρόταση μέχρι εκείνη τη στιγμή. Ένας παίκτης προτείνει ανάλογα με τη σειρά προτιμήσεών του, ξεκινώντας από τον πλέον προτιμητέο και σταματώντας όταν πρότασή του τεθεί υπό σκέψη. Εάν αργότερα η πρόταση απορριφθεί, ο παίκτης συνεχίζει να προτείνει σε λιγότερο προτιμητέους παίκτες. Αυτή η πρώτη φάση ολοκληρώνεται με κάθε παίκτη να έχει κάποια πρόταση ή ένα παίκτη να έχει απορριφθεί από όλους. Μετά από αυτό το στάδιο, για κάθε παίκτη x που έχει απορριφθεί από παίκτη y το ταίριασμα $\{x, y\}$ δεν είναι σταθερό.

Ως πόρισμα, εάν ο πρώτος γύρος του αλγορίθμου τερματιστεί με κάθε παίκτη να έχει κάποια πρόταση, τότε οι λίστες προτιμήσεων δυνητικών συγκατοίκων για κάθε y που διατηρεί πρόταση από κάποιον x , μπορούν να συρρικνωθούν διαγράφοντας από αυτόν

- παίκτες που είναι λιγότερο προτιμητέοι για τον y από ότι ο x

- παίκτες που διατηρούν πρόταση από παίκτη τον οποίο προτιμούν έναντι του y

Το επόμενο στάδιο του αλγορίθμου αποτελείται από περαιτέρω διαγραφές στις λίστες προτιμήσεων. Για την επίτευξή τους, αναζητούμε κύκλους της μορφής a_1, \dots, a_r όπου η δεύτερη προτίμηση για τον a_i είναι πρώτη για τον a_{i+1} , με τους δείκτες i να είναι modulo r . Καλούμε b_{i+1} τον δεύτερο παίκτη στη λίστα προτιμήσεων του παίκτη a_i .

Τέτοιος κύκλος βρίσκεται, ξεκινώντας από παίκτη p_1 του οποίου η λίστα προτιμήσεων περιλαμβάνει 2 ή περισσότερους παίκτες και παράγοντας τις ακολουθίες

- q_i με τη δεύτερη προτίμηση της λίστας του p_i
- p_{i+1} με τον τελευταίο παίκτη στη λίστα του q_i .

Κομβικό σημείο του αλγορίθμου είναι ότι σε κάθε σταθερό ταίριασμα, στις μειωμένες λίστες, είτε οι a_i και b_i είναι συγκάτοικοι για κάθε i ή για κανένα i . Προς απόδειξη υποθέτουμε ότι το ζεύγος $\{a_k, b_k\}$ αποτελεί σταθερό ταίριασμα. Συνεπώς αφού ο παίκτης a_k είναι τελευταίος στις προτιμήσεις του b_k , θα πρέπει ο a_{k-1} να είναι σε ταίριασμα με κάποιον που προτιμούσε έναντι του b_k και καθώς ο b_k είναι δεύτερος στη λίστα του a_{k-1} , ο μόνος υποψήφιος είναι ο b_{k-1} . Κατά συνέπεια επαγωγικά καταλήγουμε ότι εάν ο παίκτης a_k ταιριάζει με τον παίκτη b_k για κάποιο k , αυτό συμβαίνει για κάθε k . Ένα ακόμα καίριο σημείο είναι ότι αν υπάρχει σταθερό ταίριασμα όπου ο a_i και ο b_i είναι ομάδα, τότε υπάρχει και κάποιο ακόμα που είναι σε χωριστές ομάδες. Για να το δούμε, θεωρούμε σταθερό ταίριασμα M όπου κάθε a_i ζεύγνεται με το b_i , $1 \leq i \leq r$. Έστω M' το ταίριασμα όπου κάθε a_i ζεύγνεται με το b_{i+1} δηλαδή τη δεύτερη επιλογή του στις μειωμένες λίστες και κάθε παίκτης στο σύνολο $N \setminus A \cup B$ (όπου N είναι το σύνολο όλων των παικτών, $A = \{a_1, \dots, a_r\}$, $B = \{b_1, \dots, b_r\}$) ζεύγνεται όπως στο M . Τότε, κάθε παίκτης στο σύνολο B ζεύγνεται με κάποιον πιο επιθυμητό παίκτη από ότι στο M αφού σύμφωνα με το M ζεύγνεται όλοι με την τελευταία τους επιλογή από τις μειωμένες λίστες. Συνεπώς η μόνη δυνατότητα για να είναι το M' ασταθές ενώ το M σταθερό, είναι συγκατοικήσεις όπου συμμετέχουν μέλη του A .

Υποθέτοντας ότι ο x είναι προτιμότερος για τον a_i από ότι ο b_{i+1} , διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- ο a_i ζεύγνεται με τον x στο M που σημαίνει ότι $x = b_i$, που για τον b_i είναι το χειρίστο δυνατό ταίριασμα σύμφωνα με τις μειωμένες λίστες.
- ο a_i προτιμά τον παίκτη x έναντι του b_i , συνεπώς ο x έχει απαλειφθεί από τις αρχικές λίστες και δεν παρουσιάζεται στο μειωμένο κατάλογο του a_i , που σημαίνει ότι ο x έχει απορρίψει τον a_i και δεν αποτελεί πιθανή επιλογή του.
- ο a_i προτιμά τον b_i έναντι του x ο οποίος με τη σειρά του προτιμά τον b_{i+1} . Δεδομένου ότι ο x σε αυτή την περίπτωση δεν παρουσιάζεται στη μειωμένη λίστα προτιμήσεων του a_i υποδηλώνει ότι ο x έχει απορρίψει τον a_i .

Συμπερασματικά, δεν υπάρχει αποκλίνον ταίριασμα για το M' .

Οπότε βάσει των δύο σημείων, εάν υπάρχει σταθερό ταίριασμα για το αρχικό παίγνιο, υπάρχει για κάθε μειωμένο υποσύνολο των καταλόγων προτιμήσεων. Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες δομές δεδομένων, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\mathcal{O}(n^2)$.

Αλγόριθμος 2: Αλγόριθμος σταθερών συγκατοίκων του Ίρβινγκ.

```

input : A roommates problem instance  $(N, \succ)$ 
output A stable matching for the input roommates problem
:
1 has_a_proposal =  $\emptyset$ 
2 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
3   proposer =  $k$ 
4   do
5     propose to next_choice
6     if not rejected then
7       if next_choice  $\in$  has_a_proposal then
8         proposer = next_choice's reject
9       end
10    end
11  while next_choice  $\in$  has_a_proposal;
12  has_a_proposal = has_a_proposal  $\cup$  next_choice
13 end
14 for every player  $y$  holding a proposal from  $x$  do
15   reduce  $y$ 's list and the symmetric ones by all those  $y$  considers worse than  $x$ 
16   reduce  $y$ 's list and the symmetric ones by all those who hold a proposal from a
    player which they prefer to  $y$ 
17 end
18 while some reduced preference list has length  $> 1 \wedge$  no reduced list has length  $< 1$  do
19   detect all cycles
20   eliminate the cycles
21 end
22 return Stable matching

```

3.3 Προτιμήσεις βάσει του βέλτιστου και του χειρίστου

[Cechlarova & Romero-Medina, 2001]. Ένας τρόπος υπολογισμού αυστηρά πυρηνικών διαμερίσεων σε παίγνια με αυστηρές B προτιμήσεις δίνεται από τη διαδικασία BSTABLE που περιγράφεται στον αλγόριθμο 3. Η BSTABLE είναι παρόμοια με τον αλγόριθμο κύκλων κορυφαίων ανταλλαγών [Shapley & Scarf, 1974] του Ντέιβιντ Γκέιλ, ο οποίος με τον Λούντ Σάπλεϋ κέρδισε το βραβείο Νόμπελ οικονομίας το 2012. Απεικονίζοντας τη σχέση B μεταξύ των παικτών προκύπτει κατευθυνόμενος γράφος. Ο γράφος αυτός έχει προφανώς τουλάχιστον ένα κύκλο. Επιπλέον, αφού κάθε παίκτης έχει μοναδικό παίκτη μέγιστης προτίμησης στο V , κάθε παίκτης έχει προκαθορισμένα μοναδική εφικτή ανάθεση. Η προκύπτουσα διαμέριση είναι αυστηρά πυρηνικά σταθερή αφού υποθέτοντας ότι παίκτης i επιθυμεί να αποκλίνει, σημαίνει ότι ο πλέον προτιμώμενος παίκτης του ανήκει στους αποκλίνοντες ειδάλλως ο i θα ζημιωνόταν από την απόκλιση. Συνεπώς ο κωλύων συνασπισμός S είναι υπερσύνολο του κύκλου κάθε παίκτη $i \in S$. Οπότε ο κύκλος είναι προτιμότερος από τον κωλύοντα συνασπισμό κα-

Αλγόριθμος 3: Αλγόριθμος BSTABLE.

```

input : A hedonic game  $(N, \succ)$  with B strict preferences
output A strict core stable partition
:
1  $V \leftarrow N$ ;
2  $\forall i \in V : flag(i) \leftarrow 0$ ;
3  $\mathcal{C} \leftarrow \emptyset; \pi \leftarrow \emptyset$ 
4 while  $V \neq \emptyset$  do
5    $i \leftarrow \text{select a player } \in V$ 
6    $flag(i) \leftarrow 1$ 
7   while  $flag(B_i(V)) == 0$  do
8      $j \leftarrow B_i(V)$ 
9      $flag(j) \leftarrow 1$ 
10     $i \leftarrow j$ 
11  end
12   $\mathcal{C} \leftarrow B_i(V)$ 
13   $k \leftarrow B(B_i(V))$ 
14  while  $k \neq B_i(V)$  do
15     $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup k$ 
16     $k \leftarrow B_k(V)$ 
17  end
18   $V \leftarrow V \setminus \mathcal{C}$ 
19   $\pi \leftarrow \pi \cup \mathcal{C}$ 
20 end
21 return  $\pi$ 

```

θώς ο πλέον επιθυμητός παίκτης περιλαμβάνεται σε αμφοτέρους και ο κύκλος έχει λιγότερα μέλη από τον κωλύοντα συνασπισμό. Συνεπαγόμενα ο κωλύον συνασπισμός ταυτίζεται με τον κύκλο, συνεπώς δεν υπάρχει απόκλιση.

Ο B σταθερός αλγόριθμος είναι επίσης φιλαλήθης σύμφωνα με την εργασία του Roth [Roth, 1982]. Η επαλήθευση είναι εύκολη αφού ο πρώτος παίκτης τον οποίο ο αλγόριθμος συνεταίριζει με τον παίκτη i είναι εκείνος που ο i ανακοινώνει ως τον πλέον προτιμώμενό του. Στην περίπτωση που κάποιος παίκτης δεν δηλώσει τον πλέον προτιμώμενο του παίκτη αυξάνει τις πιθανότητές του να μην βρεθεί συνασπισμένος μαζί του, ενώ σε περίπτωση που εκείνος συμπεριληφθεί, η αλυσίδα θα συνεχιστεί ως εάν να μην είχε παραποιήσει τις προτιμήσεις του.

Στα W παίγνια, αυστηρά πυρηνικά σταθερές διαμερίσεις προκύπτουν ταιριάζοντας παίκτες σε ζεύγη. Για διαμερίσεις με υψηλότερες μέγιστες πληθικότητες συνασπισμών, παίκτης i που ανήκει σε αυτούς τους συνασπισμούς θα είχε κίνητρο να αποκλίνει σε ζεύγος με τον πλέον επιθυμητό του παίκτη $B_i(S \mid |S| > 2)$ μεταξύ των μελών του συνασπισμού S ενώ ο πλέον προτιμώμενος του παίκτης $B_i(S)$ θα ήταν τουλάχιστον αδιάφορος μεταξύ των δύο

συνασπισμών.

Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στην αναγωγή του προβλήματος των W σταθερών διαμερίσεων στο πρόβλημα των συγκατοίκων. Πράγματι στην περίπτωση που δίνονται αστηρές προτιμήσεις P επί των παικτών, κάθε λύση του προβλήματος των συγκατοίκων υπό το P είναι W αστηρά πυρηνικά σταθερή. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι και υπάρχει ασθενώς κωλύων σύνολο Z . Στην περίπτωση που το Z είναι μονοσύνολο i , τότε $i \succ_i \{i, j\}$ όπου j είναι ο συγκατοίκός του. Ωστόσο ο συνεταιρισμός του με τον j είναι ατομικά μη ορθολογικός για τον i . Συνεπώς, δεν υπάρχει μονομελής κωλύων συνασπισμός.

Στην περίπτωση που $|Z| \geq 2$, ένας παίκτης $i \in Z$ για τον οποίο $Z \succ_i M(i)$ (όπου $M(i)$ είναι ο συνétairos του i υπό τη λύση στο πρόβλημα των συγκατοίκων) θα επιθυμούσε να αποκλίσει με τον $j = B_i(Z)$, συνεπώς $Z' = \{i, j\}$ είναι επίσης ένας ασθενώς κωλύων συνασπισμός. Υποθέτουμε ότι k, l είναι οι συνétairoι των i, j αντίστοιχα στο σταθερό ταίριασμα των συγκατοίκων. Αφού Z' είναι ασθενώς κωλύων συνασπισμός, $j \succ_i k$ και $i \succ_j l$. Συνεπώς είτε $i \sim_j l$ που οδηγεί σε $\{i, j\} \in$ σταθερές λύσεις συγκατοίκων ή $i \succ_j l$ που σημαίνει ότι $\{i, j\}$ είναι κωλύων ταίριασμα για το σταθερό ταίριασμα των συγκατοίκων, αντίφαση. Η παραπάνω συζήτηση καταλήγει στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2. *Για αστηρές προτιμήσεις σε παίκτες τα W ηδονικά παίγνια επιδέχονται αστηρά πυρηνικά σταθερές διαμερίσεις μέγιστης πληθικότητας συνασπισμού 2. Επιπλέον όλες οι σταθερές λύσεις του προβλήματος των συγκατοίκων είναι αστηρά πυρηνικές διαμερίσεις για το αντίστοιχο W παίγνιο με τις ίδιες προτιμήσεις.*

3.4 Κορυφαία αποκρισιμότητα-Αλγόριθμος κορυφαίας κάλυψης

Για κάθε πρόβλημα όπου οι προτιμήσεις των παικτών ικανοποιούν την κορυφαία αποκρισιμότητα:

Ορισμός 3.2. [Alcalde & Revilla, 2004]. Η συνάρτηση κάλυψης επιλογής $C : N \times 2^N \rightarrow 2^N$ ορίζεται ως $C(S, N) = S \bigcup_{i \in S} ch(i, N)$. Εμφωλευμένη εφαρμογή της συνάρτησης κάλυψης

επιλογής C^t ορίζεται ως:

$$C^1(S, N) = C(S, N)$$

$$C^{t+1}(S, N) = \bigcup_{i \in C^t(S, N)} ch(i, N).$$

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τη συνάρτηση $C(i, V)$ έως ότου να γίνει ταυτοδύναμη και να μην εισάγει καινούργια στοιχεία, παράγεται η συνδεδεμένη συνιστώσα του παίκτη i ως προς το σύνολο παικτών V . Συμβολίζουμε με $k(i)$ τον αριθμό επανάληψης κατά την οποία ο παίκτης i ονομάζεται μέλος συνασπισμού της διαμέρισης $\pi_{(N, \succ)}^{tc}$.

Λήμμα 3.1. [Dimitron & Sung, 2005]. *Για ηδονικά παίγνιο (N, \succ) που ικανοποιεί την κορυφαία αποκρισιμότητα, ο αλγόριθμος κορυφαίας κάλυψης καταλήγει εντός πεπερασμένου αριθμού βημάτων και επιστρέφει διαμέριση του N .*

Αλγόριθμος 4: Αλγόριθμος κορυφαίας κάλυψης.

```

input : A hedonic game satisfying top responsiveness
output A strict core stable partition
:
1  $R^1 \leftarrow N; \pi \leftarrow \emptyset$ 
2 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
3   Επίλεξε  $i \in R^k$  που να ικανοποιεί  $|CC(i, R^k)| \leq |CC(j, R^k)|, \forall j \in R^k$ 
4    $S^k \leftarrow CC(i, R^k)$ 
5    $\pi \leftarrow \pi \cup \{S^k\}$ 
6    $R^{k+1} \leftarrow R^k \setminus S^k$ 
7   if  $R^{k+1} = \emptyset$  then
8     return  $\pi$ 
9   end
10 end
11 return  $\pi$ 

```

Απόδειξη. Προφανώς ο αλγόριθμος κορυφαίας κάλυψης τερματίζει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων επαναλαμβανόμενος από το 1 ως το $|N|$. Επιπρόσθετα, υποθέτοντας ότι ο αλγόριθμος σταματά μετά την k -οστή επανάληψη, η έξοδος του είναι $(S^1, S^2, \dots, S^k), R^{k+1} = \emptyset$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $S^i \cap S^j = \emptyset$, για $i \neq j$, η έξοδος $\pi_{(N, \succ)}^{tc}$ είναι μία διαμέριση του συνόλου των παικτών N . \square

Λήμμα 3.2. [Dimitron & Sung, 2005]. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο κορυφαίας κάλυψης σε παίγνιο (N, \succ) λαμβάνεται διαμέριση $\pi_{(N, \succ)}^{tc}$ τέτοια ώστε για κάθε παίκτη i , $\pi_{(N, \succ)}^{tc}(i) = CC(i, R^{k(i)})$.

Απόδειξη. Για τον m οστό κύκλο, όπου $k = m$, ο συνασπισμός $\pi_{(i)}^{tc}$ σχηματίζεται για τον παίκτη $i \in R^{k(i)}: |CC(i, R^{k(i)})| \leq |CC(j, R^{k(i)})| \forall j \neq i$. Για τον παίκτη i προφανώς $\pi_{(N, \succ)}^{tc}(i) = CC(i, R^{k(i)})$. Για του λοιπούς παίκτες $j \in \pi_{(N, \succ)}^{tc}(i) \setminus \{i\}$, $CC(j, R^{k(i)}) \subseteq CC(i, R^{k(i)})$ εξ' ορισμού, και χρειάζεται να δείξουμε $CC(i, R^{k(i)}) \subseteq CC(j, R^{k(i)})$. Πράγματι εάν υπάρχει παίκτης $n \in \pi_{(N, \succ)}^{tc}(i)$ τέτοιος ώστε $n \notin CC(j, R^{k(i)})$ τότε $|CC(j, R^{k(i)})| < |CC(i, R^{k(i)})|$, αντίφαση. \square

Θεώρημα 3.3. [Dimitron & Sung, 2005]. Έστω (N, \succ) ηδονικό παίγνιο που ικανοποιεί την κορυφαία αποκρισσιμότητα. Η διαμέριση που επιστρέφεται από τον αλγόριθμο κορυφαίας αποκρισσιμότητας π^{tc} είναι αυστηρά πυρηνικά σταθερή.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό υποσύνολο $X \subseteq N$ τέτοιο ώστε $X \succ_i \pi_i^{tc} \forall i \in X$. Έστω $j \in X$ ο πρώτος παίκτης από το X που γίνεται μέλος του συνασπισμού από τον ΑΚΚ, δηλαδή $k(j) \leq k(i) \forall i \in X$. Συνεπώς $X \subseteq R^{k(j)}$. Το σύνολο επιλογής του j στο π_j^{tc} είναι $ch(j, \pi_j^{tc}) = ch(j, R^{k(j)})$ (λήμμα 3.2) και έχοντας ότι $X \succ_j \pi_j^{tc}$ συνεπάγεται $ch(j, X) = ch(j, R^{k(j)})$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\pi_j^{tc} \subseteq X$. Είναι $C^1(j, R^{k(j)}) = ch(j, R^{k(j)}) \subseteq X$. Υποθέτουμε ότι $C^t(j, R^{k(j)}) \subseteq X$. Για κάθε $i \in C^t(j, R^{k(j)})$, $ch(i, \pi_j^{tc}) = ch(i, R^{k(j)})$. Επιπλέον, $X \succsim_i \pi_i^{tc}$ συνεπάγεται ότι $ch(i, X) \succsim_i ch(i, \pi_i^{tc}) = ch(i, R^{k(j)})$, που σημαίνει ότι $ch(i, X) = ch(i, \pi_i^{tc})$. Συνεπώς $ch(i, R^{k(j)}) \subseteq X$. Οπότε $C^{t+1}(j, R^{k(j)}) = \bigcup_{i \in C^t(j, R^{k(j)})} ch(i, R^{k(j)}) \subseteq X$, και παίρνουμε $CC(j, R^{k(j)}) \subseteq X$ καταλήγοντας σε $X = \pi_j^{tc}$ και κανείς συνασπισμός δεν είναι ασθενώς κωλύων. \square

Θεώρημα 3.4. [Alcalde & Revilla, 2004]. Έστω N σύνολο παικτών και TR , η οικογένεια ηδονικών παιγνίων (N, \succ) τέτοια ώστε, κάθε $i \in N$, \succsim_i ικανοποιεί την κορυφαία αποκρισιμότητα. Έστω ακόμα Ψ^{tc} ο κανόνας που συνδέει κάθε τέτοιο πρόβλημα με τη διαμέριση που εξάγεται από τον αλγόριθμο κορυφαίας κάλυψης. Τότε ο Ψ^{tc} είναι φιλαλήθης στο TR .

Χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία $[\succsim'_i, \succsim_{-i}]$ για να παραστήσουμε το προφίλ προτιμήσεων \succ όπου οι προτιμήσεις του i έχουν αντικατασταθεί από τις \succsim'_i .

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ένας παίκτης i χειρίζεται τον μηχανισμό κορυφαίας κάλυψης επιτυγχάνοντας υψηλότερο όφελος, δηλώνοντας τις προτιμήσεις \succsim'_i . Για κάθε παίκτη j τέτοιο ώστε $k(j) < k(i)$,

$$\Psi_j^{tc}[N, \succ] = \Psi_j^{tc}[N, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]].$$

Συνεπώς οι $\Psi_i^{tc}[N, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$ αποτελούνται από παίκτες στο $R^{k(i)}$. Από τη διαδικασία του αλγορίθμου κορυφαίας κάλυψης,

$$\Psi_i^{tc}[N, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]] \supset \bigcup_{j \in ch(i, (R^{k(i)}, \succ))} CC(j, R^{k(i)}, \succ').$$

Κατόπιν εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις:

- $\Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succ] \subseteq \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Τότε $ch(i, R^{k(i)}) = ch(i, \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succ]) = ch(i, \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]])$. Και από την τρίτη συνθήκη της κορυφαίας αποκρισιμότητας,

$$\Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succ] \succsim_i \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$$

αντιβαίνοντας στην χειραγώγηση του Ψ^{tc} μέσω των \succsim' .

- $\Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succ] \not\subseteq \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Τότε υπάρχει παίκτης m για τον οποίο $m \in \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succ]$ και $m \notin \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Συμπερασματικά υπάρχει παίκτης $n \in ch(i, R^{k(i)})$ τέτοιος ώστε: $n \notin \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Συνάγεται, από τη δεύτερη συνθήκη κορυφαίας αποκρισιμότητας ότι: $\Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succ] \succ_i \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Εν κατακλείδι ο i δεν χειραγωγεί τον Ψ^{tc} μέσω των \succsim'_i . \square

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του [Sönmez, 1999], που υποστηρίζει ότι περίπτωση εύρεσης φιλαλήθους μηχανισμού υπάρχει μόνον εάν ο πυρήνας είναι μονοσύνολο, η διαμέριση που επιστρέφεται από τον αλγόριθμο κορυφαίας αποκρισιμότητας είναι η μοναδική φιλαλήθης υπό την κορυφαία αποκρισιμότητα, ωστόσο στο [Alcalde & Revilla, 2004] περιλαμβάνεται μία συγκεκριμένη απόδειξη για την περίπτωση μας.

Πρόταση 3.1. Η κορυφαία αποκρισμότητα δεν είναι ικανή συνθήκη για Νας σταθερότητα.

Απόδειξη. Μέσω αντιπαραδείγματος. Υποθέτουμε παίγνιο (N, \succ) με προτιμήσεις:

$$\begin{aligned} \{1,2\} \succ_1 \{1,2,3\} \succ_1 \{1,3\} \succ_1 \{1\}, \\ \{2\} \succ_2 \{1,2\} \sim_2 \{2,3\} \succ_2 \{1,2,3\}, \\ \{1,2,3\} \succ_3 \{1,3\} \succ_3 \{2,3\} \succ_3 \{3\}. \end{aligned}$$

Όπως εύκολα ελέγχεται, το προφίλ προτιμήσεων ικανοποιεί την κορυφαία αποκρισμότητα. Ωστόσο δεν υπάρχει Νας σταθερή διαμέριση αφού κάθε υποψήφια διαμέριση περιέχει παίκτη που επιθυμεί να μεταναστεύσει.

- εάν $\pi = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ή $\{\{1, 2, 3\}\}$ ο παίκτης 2 επιθυμεί να φύγει.
- εάν $\pi = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ ο παίκτης 1 επιθυμεί να φύγει.
- εάν $\pi = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ οι παίκτες 1 και 3 επιθυμούν να φύγουν.
- εάν $\pi = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ οι παίκτες 2 και 3 επιθυμούν να φύγουν.

□

Παίγνιο ικανοποιεί την αμοιβαιότητα υπό την κορυφαία αποκρισμότητα εάν για κάθε σύνολο X και παίκτες i, j τέτοιους ώστε $X \in N_i \cap N_j : i \in ch(j, X) \Rightarrow j \in ch(i, X)$. Σημειωτέον ότι η κλάση των παιγνίων που ικανοποιούν την αμοιβαιότητα υπό την κορυφαία αποκρισμότητα είναι εκτεταμένα περιορισμένη.

Για την κλάση αυτή αποδεικνύεται η ύπαρξη SSNS διαμέρισης και το ακόλουθο λήμμα είναι απαραίτητο.

Λήμμα 3.3. Υπό κορυφαία αποκρισμότητα και αμοιβαιότητα παίρνουμε $\pi_{(N, \succ)}^{tc}(i) = ch(i, N)$.

Απόδειξη. Υποστηρίζοντας ότι υπάρχει παίκτης i τέτοιος ώστε να υπάρχει παίκτης $j \in ch(i, N) \wedge j \notin \pi_{(N, \succ)}^{tc}(i)$ δίνει $i \notin \pi_{(N, \succ)}^{tc}(j)$ ωστόσο από την αμοιβαιότητα έχουμε $i \in ch(j, N)$. Είτε $k(i) < k(j)$ ή $k(j) < k(i)$. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, υπάρχει αντίφαση θεωρώντας το λήμμα 3.2 το οποίο απαιτεί ότι ο παίκτης για τον οποίο $k = \min(k(i), k(j))$ είναι συνασπισμένος με το σύνολο επιλογής του σύμφωνα με τον αλγόριθμο κορυφαίας αποκρισμότητας. □

Θεώρημα 3.5. [Aziz & Brandl, 2012]. Για παίγνιο (N, \succ) το οποίο ικανοποιεί την κορυφαία αποκρισμότητα και την αμοιβαιότητα, ο αλγόριθμος κορυφαίας κάλυψης παράγει αυστηρά ισχυρή Νας σταθερή διαμέριση.

Απόδειξη. Δεχόμενοι ότι η διαμέριση $\pi_{(N, \succ)}^{tc}$ δεν είναι αυστηρά ισχυρά Νας σταθερή, οδηγούμαστε στην ύπαρξη συνόλου παικτών H που ασθενώς Νας την κωλύει, δηλαδή $\pi \xrightarrow{H} \pi'$ για το οποίο σύνολο $\forall i \in H : \pi(i)' \succ_i \pi(i)$ και \exists παίκτης $j \in H$ τέτοιος ώστε $\pi'(j) \succ_j \pi(j)$. Έστω $\pi(j) \cap \pi'(j) \in H$. Η κορυφαία αποκρισμότητα εγγυάται ότι $\forall i \in \pi(j) \cap \pi'(j) : ch(i, \pi'(j)) \succeq_i ch(i, \pi(j))$. Ωστόσο $ch(i, \pi(j)) = ch(i, N)$ σύμφωνα με το

λήμμα 3.3, συνεκδοχικά $ch(i, \pi'(j)) = ch(i, \pi(j)) = ch(i, N)$. Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι $ch(i, N) \subseteq \pi(j) \cap \pi'(j)$ που σημαίνει ότι $\pi(j) \cap \pi'(j) \succ_i \pi(j)$ και $\pi(j) \cap \pi'(j)$ ισχυρά κωλύει την $\pi(j)$, αντιφάσκοντας στο θεώρημα 3.3.

Συνεπώς $\pi(j) \cap \pi'(j) \notin H$ και υπάρχουν παίκτες που αποσχίστηκαν από τον συνασπισμό $\pi(j)$. Μεταξύ αυτών υπάρχει τουλάχιστον ένας k για τον οποίο $l \in ch(k, N) : l \in \pi'(j)$ και $ch(k, \pi(j)) \succ ch(k, \pi'(k)) \wedge \pi(j) \succ_k \pi'(k)$ το οποίο αντιβαίνει στο ότι ο k είναι αποκλίνων. \square

3.5 Αποκρισιμότητα πυθμένα

Υπό την αποκρισιμότητα πυθμένα, χρησιμοποιείται διάταξη διαμερίσεων για την παραγωγή αποτελεσμάτων σταθερότητας.

Ορισμός 3.3. Θεωρούμε το σύνολο παικτών N και δύο από τις διαμερίσεις του π, π' που αποτελούνται από συνασπισμούς $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ και $\{T_1, T_2, \dots, T_l\}$ αντίστοιχα, με $|S_i| \geq |S_{i+1}|$ και $|T_j| \geq |T_{j+1}|$ για $i \in [1, k-1]$ και $j \in [1, l-1]$. Ορίζουμε $\alpha) \pi > \pi'$ εάν $\exists j : |S_j| > |T_j|$ και $|S_i| = |T_i|, \forall i < j$ και $\beta) \pi = \pi'$ εάν $k = l$ και $|S_i| = |T_i|, \forall i \leq k$.

Θεώρημα 3.6. Παιγνίο (N, \succ) που ικανοποιεί την αποκρισιμότητα πυθμένα έχει ισχυρά ατομικά σταθερή διαμέριση.

Απόδειξη. Μεταξύ όλων των ατομικά ορθολογικών διαμερίσεων του N εστιάζουμε σε μία μέγιστη ως προς τη σχέση \geq , την π . Συνεπώς $\pi \geq \pi' \forall \pi'$ διαμέριση του N . Υποθέτουμε ότι η π δεν είναι SIS, τότε υπάρχει υποσύνολο παικτών $H \subseteq N$ τέτοιο ώστε $\pi \xrightarrow{H} \pi', \pi'(i) \succ_i \pi(i), \forall i \in H$ και $\pi'(j) \succ_j \pi(j), \forall j \in \pi'(i)$, για κάθε $i \in H$.

Λόγω του ατομικού ορθολογισμού της π , για κάθε αποκλίνοντα παίκτη $i \in H, i \in Av(i, \pi(i))$ και ισχύει ότι για να υπάρχει ωφέλεια από την απόκλιση από τον προηγούμενο συνασπισμό $\{i\} \in Av(i, \pi'(i))$ αλλιώς $\pi(i) \succ_i \pi'(i)$. Επιπρόσθετα για κάθε ένα από τους μη αποκλίνοντες παίκτες που συνασπίστηκαν με αποκλίνοντες, $j \in \pi', \pi'(j) \succ_j \pi(j)$ διαφορετικά δεν θα είχαν αποδεχθεί τους αποκλίνοντες. Τέλος κάθε ένας από τους υπόλοιπους παίκτες k θα έχει $k \in Av(k, \pi'(k))$ καθώς δεν προστέθηκαν παίκτες στην ομάδα του. Συνεπώς η π' είναι επίσης ατομικά ορθολογική.

Καθορίζουμε ένα συνασπισμό S μέγιστου μεγέθους εντός του π μεταξύ εκείνων που περιέχουν αποκλίνοντα, δηλαδή $S \in \pi : |S| \geq |S'| \forall S' \in \pi$. Ένας αποκλίνων $i \in S$ προσχωρεί σε έναν άλλο συνασπισμό S' . Εν τέλει $S' \cup i \succ_i S$ και $S' \cup i \succ_j S' \forall j \in S'$. Εάν $|S' \cup i| \leq |S|$ ο παίκτης i δεν θα αποκόμιζε όφελος από την απόκλιση σύμφωνα με την αποκρισιμότητα πυθμένα, άρα $|S' \cup i| > |S|$ αντικρούοντας την μεγιστότητα της π μεταξύ των ατομικά ορθολογικών ομαδοποιήσεων. \square

3.6 Κορυφαίοι συνασπισμοί

Θεώρημα 3.7. Εάν παιγνίο (N, \succ) ικανοποιεί την ασθενή ιδιότητα κορυφαίου συνασπισμού, έχει μη κενό αυστηρό πυρήνα.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $V_0 = N$ και S^1 είναι ασθενώς κορυφαίος συνασπισμός του V_0 με διατεταγμένη διαμέριση $\{S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{l(1)}\}$, $V_1 = V_0 \setminus S^1$ και S^2 ασθενώς κορυφαίος συνασπισμός του V^1 με διατεταγμένη διαμέριση $\{S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{l(2)}\}$ και ούτω καθ' εξής έως ότου $V_k = V_{k-1} \setminus S^k$ και $S^k = \{S_k^1, S_k^2, \dots, S_k^{l(k)}\}$. Μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι υπάρχει τέτοιο k ώστε $V_{k+1} = \emptyset$ ενώ $V_k \neq \emptyset$ αφού για κάθε μη κενό V_i μπορούμε να βρούμε μη κενό S_{i+1} .

Τότε η διαμέριση $(S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{l(1)}, S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{l(2)}, \dots, S_k^1, S_k^2, \dots, S_k^{l(k)})$ είναι αυστηρά πυρηνικά σταθερή. Πράγματι κανείς παίκτης εντός του S_1^1 δεν μπορεί να αποκομίσει μεγαλύτερο όφελος όντας μέλος αποκλίνοντος σχήματος. Επιπρόσθετα, χωρίς τη συμμετοχή του S_1^1 κανείς παίκτης στο S_1^2 δεν βελτιώνει την αποκομιδή του μέσω απόκλισης. \square

Θεώρημα 3.8. *Για κάθε παίγνιο (N, \succ) που ικανοποιεί την ιδιότητα κορυφαίου συνασπισμού ο αυστηρός πυρήνας και ο πυρήνας είναι μονοσύνολα.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $M(V) = \{S \subset 2^{|V|} : S \text{ είναι κορυφαίος συνασπισμός του } V\}$, για κάθε σύνολο παικτών $V \subseteq N$. Εάν οι προτιμήσεις είναι αυστηρές, το σύνολο $M(V)$ αποτελείται από ξένα σύνολα για κάθε $V \subseteq N$. Υποθέτοντας $V_0 = N$ κατασκευάζουμε ακολουθία ορίζοντα $V_1 = V_0 \setminus M(V_0)$, $V_2 = V_1 \setminus M(V_1)$ και ούτω καθ' εξής, όπου $M(V_i) = (S_i^1, S_i^2, \dots, S_i^{m(i)})$. Υπάρχει ακέραιος K τέτοιος ώστε $V(K+1) = \emptyset \wedge V(K) \neq \emptyset$. Ως συνέπεια της κατασκευής, η διαμέριση $\pi = (S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{m(1)}, S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{m(2)}, \dots, S_K^1, S_K^2, \dots, S_K^{m(K)})$ είναι η μοναδική διαμέριση στον πυρήνα του (N, \succ) . Κάθε παίκτης εντός του S_1^k , $k \in \{1, \dots, m(1)\}$ προτιμά αυτό τον συνασπισμό έναντι οιοδήποτε άλλου, συνεπώς δεν μπορεί να είναι μέλος ασθενώς κωλύοντος συνασπισμού. Επιπλέον, παίκτες εντός του S_2^k , $k \in \{1, \dots, m(2)\}$ προτιμούν αυτό το συνασπισμό έναντι κάθε άλλης επιλογής που τους απομένει και επαγωγικά για κάθε $i \in N$ δεν υπάρχει προσοδοφόρα απόκλιση από την διαμέριση π . \square

3.7 Διατεταγμένη ισορροπία - Συνέχεια

Θεώρημα 3.9. *[Greenberg & Weber, 1986; Bogomolnaia & Jackson, 2002]. Εάν παίγνιο είναι διατεταγμένα ισορροπημένο, υπάρχει πυρηνικά σταθερή διαμέριση των παικτών του. Εάν παίγνιο είναι ασθενώς συνεχές ως προς διάταξη f , υπάρχει πυρηνικά σταθερή διαμέριση σε συνασπισμούς που είναι συνεχείς ως προς την f .*

3.8 Παίγνια που ικανοποιούν ανωνυμία και διαχωρισμότητα

Οι εν λόγω ιδιότητες πιστοποιούν την μη κενότητα του πυρήνα [Banerjee, Konishi & Sönmez, 2001]. Λόγω της ανωνυμίας, κάθε παίκτης είτε προαιρείται να είναι αυτόνομος ή επιθυμεί συνεταιρισμό. Συνεπώς το σύνολο N των παικτών διαχωρίζεται σε δύο υποσύνολα $N^+ = i : \{i, j\} \succ_i \{i\}$ και $N^- = i : \{i, j\} \precsim_i \{i\}$. Για κάθε υποσύνολο V παικτών, τα μέλη του $N^- \in V$ έχουν ως κορυφαίο συνασπισμό τον μονομελή. Στην περίπτωση που $N^- \cap V = \emptyset$, $V \subset N^+$ και ο V είναι κορυφαίος συνασπισμός τους. Εν κατακλείδι, για κάθε υποσύνολο V του N , η ιδιότητα του κορυφαίου συνασπισμού ικανοποιείται και συνεκδοχικά υπάρχει πυρηνικά σταθερή διαμέριση.

3.9 Αθροιστικά διαχωρίσιμα και συμμετρικά παίγνια

Η αθροιστική διαχωρισιμότητα σε συνδυασμό με τη συμμετρία εξασφαλίζουν την ύπαρξη Νας σταθερής διαμέρισης [Bogomolnaia & Jackson, 2002]. Θεωρούμε το παίγνιο (N, \succ) που ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις. Έστω παίκτης $i \in S_1$ με ελατήρια να αποκλίνει στον συνασπισμό S_2 και έστω οι αποτιμήσεις του v_{ij} επί κάθε παίκτη $j \neq i$. Εάν ο παίκτης i αυξάνει τις απολαβές του, ή

$$\sum_{j \in S_2} v_{ij} > \sum_{j \in S_1} v_{ij},$$

αποκλίνοντας, το ίδιο ισχύει και για τις απολαβές

$$\sum_{j \in N} v_{ij} = \sum_{j \in S_1} v_{ij} + \sum_{j \in S_2} v_{ij} + \sum_{j \in N \setminus (S_1 \cup S_2)} v_{ij}.$$

Συνεπώς, κάθε απόκλιση αυξάνει την κοινωνική ωφέλεια. Επιπρόσθετα ο αριθμός διαμερίσεων είναι πεπερασμένος και συνεπώς υπάρχει μέγιστο που αντιστοιχεί σε Νας σταθερή κατανομή των παικτών σε ομάδες.

Το ίδιο αποτέλεσμα διαφαίνεται από την αναπαράσταση των αθροιστικά διαχωρίσιμων και συμμετρικών παιγνίων μέσω μη κατευθυνόμενων γράφων [Gairing & Savani, 2010]. Ένας αποκλίνων παίκτης μειώνει την υπάρχουσα τομή, η οικογένεια των οποίων είναι πεπερασμένη και συνεπώς παρουσιάζει ελάχιστο.

Για το λόγο αυτό η δυναμική βέλτιστης αντίδρασης οδηγεί σε αυτή τη κλάση παιγνίων σε Νας σταθερή λύση.

3.10 Κλασματικά ηδονικά παίγνια

Δάση

Σε απλά συμμετρικά κλασματικά ηδονικά παίγνια που αναπαρίστανται από δάση, δενδροειδείς δηλαδή συνεκτικές συνιστώσες, ο αυστηρός πυρήνας είναι μη κενός. Ένας τρόπος επιλογής αυστηρά πυρηνικής διαμέρισης είναι η εκτέλεση σε κάθε συνεκτική συνιστώσα, αναζήτησης κατά πλάτος, με σκοπό την κατάταξη των κόμβων σε στρώματα, ξεκινώντας από τυχόντα κόμβο u . Έπειτα για κάθε κόμβο του προτελευταίου στρώματος σχηματίζεται συνασπισμός όπου συμμετέχει με τους θυγατρικούς του κόμβους. Κατόπιν οι κόμβοι αυτού του συνασπισμού απομακρύνονται από το δέντρο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου να μην υπάρχει κόμβος εκτός συνασπισμού.

Η αυστηρά πυρηνική σταθερότητα του σχηματισμού προκύπτει φυσικά από την έλλειψη κινήτρων απόκλισης. Για κόμβους που προηγούμενα ανήκαν στην τελευταία στρώση, ένας καλύτερος συνασπισμός σημαίνει συμπερίληψη και του πατέρα τους. Σε αυτή την περίπτωση όμως, το κέρδος των παιδιών μειώνεται. Για να έχουν τα παιδιά υψηλότερες απολαβές θα πρέπει να είναι σε ομάδα με λιγότερα αδέρφια. Ωστόσο στην περίπτωση αυτή το κέρδος του πατέρα κουρεύεται. Συνεπώς, δεν υπάρχει ασθενώς κωλύων συνασπισμός για αυτή τη διαμέριση και διασφαλίζεται η αυστηρή πυρηνική σταθερότητα. Η παραπάνω αιτιολόγηση ισχύει για κάθε βήμα του αλγορίθμου και συνεπώς για ολόκληρη τη διαμέριση.

Αρτοποιοί και μυλωνάδες

Μία ακόμα ενδιαφέρουσα περίπτωση που μπορεί να μοντελοποιηθεί με απλά συμμετρικά κλασματικά ηδονικά παίγνια είναι αυτή των φουρνάρηδων και των μυλωνάδων. Το πλαίσιο χρησιμοποιείται για αναπαράσταση καταστάσεων όπου υπάρχουν συμμετέχοντες διαφόρων ιδιοτήτων και κάθε παίκτης επιθυμεί να ομαδοποιηθεί με όσο το δυνατόν περισσότερους παίκτες διαφορετικών από τη δική του ιδιοτήτων και όσο το δυνατόν λιγότερους παίκτες της ιδιοτήτάς του. Ο τίτλος αναφέρεται σε αρτοποιούς που επιθυμούν να μην έχουν συναδέλφους τους κοντά, ώστε να υπάρχει λόγος να παράξουν ψωμί και να υπάρχει επάρκεια σε προσφερόμενο αλεύρι. Στον αντίποδα, οι αλεστές έχουν παρόμοια ελατήρια να έχουν μεγάλο ποσοστό αρτοποιών στη γειτονιά τους, να υπάρχει δηλαδή χρησιμότητα των προϊόντων τους. Το πλήθος των κλάσεων δεν περιορίζεται σε δύο. Η αναπαράσταση του παιγνίου μπορεί να γίνει μέσω μη κατευθυνόμενου γράφου όπου ζεύγη παικτών εταιρώνυμων ιδιοτήτων συνδέονται μέσω ακμών μοναδιαίου βάρους.

Για διαμέριση π στον αυστηρό πυρήνα υποθέτουμε κατηγορία θ με μεγαλύτερη αναλογία σε συνασπισμό S από ότι σε συνασπισμό T , με $S, T \in \pi$ ή $\frac{|S \cap \theta|}{|S|} \geq \frac{|T \cap \theta|}{|T|}$. Υποθέτουμε παίκτη $i \in S \cap \theta$. Προφανώς στον T υπάρχει κατηγορία θ' για την οποία $\frac{|S \cap \theta'|}{|S|} \leq \frac{|T \cap \theta'|}{|T|}$ διότι

$$\frac{|S \cap \theta_1|}{|S|} + \dots + \frac{|S \cap \theta_t|}{|S|} = \frac{|T \cap \theta_1|}{|S|} + \dots + \frac{|T \cap \theta_t|}{|S|}.$$

Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία $|S \cap \theta'| = |T \cap \theta'| = 0$ και θεωρούμε χ.β.τ.γ. ότι $|S| \leq |T|$, τότε ο παίκτης i έχει λόγο να μετακινηθεί στον συνασπισμό T εφόσον ο συνασπισμός T^{+i} θα έχει περισσότερα μέλη από τον S και ο i θα είναι ο μόνος μεταξύ αυτών που θα ανήκει στην κατηγορία θ ή

$$\frac{|T^{+i} \cap \theta|}{|T^{+i}|} = \frac{1}{|T^{+i}|} < \frac{|S \cap \theta|}{|S|},$$

η τελευταία ανισότητα απορρέει από το γεγονός ότι $|T^{+i}| > |S|$ και $|S \cap \theta| \geq 1$. Συνεπώς ο παίκτης i έχει στον T^{+i} υψηλότερες απολαβές. Οι υπόλοιποι παίκτες του T που ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες από τον i , βελτιώνουν τη θέση τους λόγω του ότι οι αναλογίες της κατηγορίας τους στο σύνολο μειώνονται, ή θεωρώντας κατηγορίες θ'' ,

$$\frac{|T^{+i} \cap \theta''|}{|T^{+i}|} = \frac{|T \cap \theta''|}{|T^{+i}|} \leq \frac{|T \cap \theta''|}{|T|}$$

όπου η ισότητα ισχύει για κατηγορίες που δεν εκπροσωπούνται στον T .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, στην περίπτωση που αμφότεροι οι S, T έχουν αντιπροσώπους του τύπου θ , δηλαδή $T \cap \theta \neq \emptyset$, το σενάριο της αντικατάστασης ενός παίκτη του ίδιου τύπου θ από παίκτη i προσδιορίζει ασθενώς κωλύοντα συνασπισμό. Υποθέτουμε παίκτη $j \in \theta \cap T$, που αντικαθίσταται από παίκτη i . Ο προκύπτων συνασπισμός είναι $T' = T^{-j} \cup i$ και προφανώς ο T' διατηρεί την πληθικότητα του T και συνεπώς την αναλογία κάθε κατηγορίας ή $|T' \cap \theta''| = |T \cap \theta''|$, $\forall \theta'' | \theta'' \cap T \neq \emptyset$ και $\frac{|T' \cap \theta''|}{|T'|} = \frac{|T \cap \theta''|}{|T|}$, $\forall \theta'' | \theta'' \cap T \neq \emptyset$. Αν και αντιπρόσωποι κατηγοριών διαφορετικών από τη θ είναι αδιάφοροι ανάμεσα στις T, T' , ο

παίκτης i έχει αυξημένες απολαβές από την απόκλιση καθώς

$$\frac{|S \cap \theta|}{|S|} > \frac{|T \cap \theta|}{|T|} = \frac{|T' \cap \theta|}{|T'|}.$$

Συνεπώς για να είναι το παίγνιο απαλλαγμένο από ασθενώς κωλύοντες συνασπισμούς απαιτείται $\frac{|S \cap \theta|}{|S|} = \frac{|T \cap \theta|}{|T|}$.

Επιπροσθέτως, η προηγούμενη συνθήκη είναι ικανή για μη κενότητα του αυστηρού πυρήνα. Θεωρώντας την ισχύ της για όλες τις κατηγορίες και όλους τους συνασπισμούς της διαμέρισης π , ασθενώς κωλύων συνασπισμός T δεν μπορεί να υπάρξει καθώς θα πρέπει να ικανοποιεί την ανίσωση $\frac{|T \cap \theta(i)|}{|T|} < \frac{|\pi(i) \cap \theta(i)|}{|\pi(i)|}$ για την κατηγορία $\theta(i)$ και την $\frac{|T \cap \theta(i)|}{|T|} \leq \frac{|\pi(i) \cap \theta(i)|}{|\pi(i)|}$ για τις υπόλοιπες κατηγορίες. Η απαίτηση προκύπτει ώστε ένας παίκτης της κατηγορίας $\theta(i)$ να εξασφαλίσει υψηλότερο κέρδος από το τρέχον που ίσα παρέχεται από κάθε συνασπισμό και κάθε παίκτης από τις λοιπές κατηγορίες που εκπροσωπούνται στον T να μη ζημιωθεί από την απόκλιση. Ωστόσο, αθροίζοντας τις ανισότητες προκύπτει

$$\frac{|T \cap \theta_1|}{|T|} + \dots + \frac{|T \cap \theta_t|}{|T|} < \frac{|\pi(i) \cap \theta_1|}{|\pi(i)|} + \dots + \frac{|\pi(i) \cap \theta_t|}{|\pi(i)|},$$

αφού όλοι οι συνασπισμοί μοιράζονται το ίδιο ποσοστό αντιπροσώπων κάθε κατηγορίας ή $\frac{\pi(i) \cap \theta(i)}{|\pi(i)|} = \frac{\pi(j) \cap \theta(i)}{|\pi(j)|}$. Τότε όμως $1 < 1$, αντίφαση. Οι προηγούμενες διαπιστώσεις οδηγούν στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.10. Για παίγνιο με προτιμήσεις της μορφής αρτοποιιών και αλεστών, διαμέριση S_1, \dots, S_k είναι αυστηρά πυρηνικά σταθερή εάν και μόνο εάν για κάθε κατηγορία $\theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_t\}$ και κάθε ζεύγος συνασπισμών $S_1, S_2 \in S_1, \dots, S_k$, $\frac{|S_1 \cap \theta|}{|S_1|} = \frac{|S_2 \cap \theta|}{|S_2|}$.

Η συνθήκη του θεωρήματος μπορεί να επαναδιατυπωθεί με χρήση του μέγιστου κοινού διαιρέτη των πληθικιοτήτων των κατηγοριών $d = \gcd(|\theta_1|, |\theta_2|, \dots, |\theta_t|)$ ως $|S \cap \theta| = k_s |\theta| / d$. Συμπερασματικά, η πιο λεπτομερής διαμέριση π που μπορεί να επιτευχθεί, λαμβάνεται για $k_s = 1$, $\forall S \in \pi$ και είναι μοναδική.

Κεφάλαιο 4

Απόφαση & υπολογισμός σταθερών διαμερίσεων

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η πολυπλοκότητα της απόφασης ύπαρξης και του υπολογισμού σταθερών διαμερίσεων των ηδονικών παιγνίων.

4.1 Γενικά ηδονικά παίγνια

[Ballester, 2004; Aziz, Brandt & Harrenstein, 2013]

Ορισμός 4.1. Τα προβλήματα απόφασης ύπαρξης πυρηνικά, Νας και ατομικά σταθερών, τέλειων και Παρέτο βέλτιστων διαμερίσεων, δεδομένων αναπαραστάσεων ατομικά ορθολογικών καταλόγων συνασπισμών ηδονικών παιγνίων, καλούνται HCORE, HNASH, HIS και HPER αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι τα προβλήματα του ορισμού 4.1 περιέχονται στην κλάση πολυπλοκότητας NP(που επιλύονται μη αιτιοκρατικά σε πολυωνυμικό χρόνο) καθώς υπάρχει πιστοποιητικό για θετικά στιγμιότυπα για καθένα από αυτά τα προβλήματα που μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Αρκεί πολυωνυμικός χρόνος για να διαπιστωθεί ότι στιγμιότυπο του προβλήματος HCORE επιδέχεται πυρηνικά σταθερή διαμέριση. Επιπλέον, δεν υπάρχει πιστοποιητικό για στιγμιότυπο που δεν επιδέχεται πυρηνικά σταθερή διαμέριση. Η πολυωνυμικού χρόνου διαδικασία επαλήθευσης παρουσιάζεται στον αλγόριθμο 5. Η διαδικασία είναι προφανώς πολυωνυμική ως προς το μέγεθος του στιγμιότυπου του HCORE.

Τα προβλήματα που δίνονται στον ορισμό 4.1 εμφανίζουν εγγενή ομοιότητα με τη φύση του προβλήματος EXACTCOVER που έχει καταφατική απάντηση εάν ένα σύνολο υποσυνόλων C δεδομένου συνόλου X , περιέχει διαμέριση του X . Το σύνολο X αντιστοιχεί στο σύνολο των παικτών N ηδονικού παιγνίου και οι παίκτες είναι αδιάφοροι μεταξύ των συνασπισμών του C στους οποίους συμμετέχουν. Για την πλήρη αντιστοίχιση των προβλημάτων γίνεται η εξαίρεση από τις πυρηνικά σταθερές διαμερίσεις για το N , περιπτώσεων όπου παίκτης j είναι μέλος μονομελούς συνασπισμού, ενώ ο συνασπισμός $\{j\}$ δεν είναι μέλος του C . Θεωρούμε επί παραδείγματι $X = \{u, v, w\}$, $C = \{\{u, v\}, \{v, w\}\}$, $N = \{u, v, w\}$, τότε η $\{\{u, v\}, \{w\}\}$

Αλγόριθμος 5: Έλεγχος διαμέρισης ως προς το ανήκειν στο πυρήνα στιγμασιότυπου του HCORE.

input : An instance of HCORE and a partition π of its players
output Characterization of the partition concerning core stability
 :

```

1 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
2   for coalition  $S \mid S \succ_k \pi(k)$  do
3     for player  $j \in S \mid j \neq k$  do
4        $skip \leftarrow 0$ 
5       if  $S \succ_j \pi(j)$  then
6         Continue;
7       else
8          $skip \leftarrow 1$ ; break;
9     end
10  end
11  if  $skip == 0$  then
12    return " $\pi \notin \text{core}$ "
13  end
14 end
15 end
16 return " $\pi \in \text{core}$ "
```

είναι πυρηνικά σταθερή διαμέριση όμως $w \notin C$. Για να αποφύγουμε την αναντιστοιχία μεταξύ των δύο προβλημάτων, προσθέτουμε για κάθε παίκτη j που δεν εμφανίζεται στο C , δύο παίκτες παιδιά, τους j_a και j_b και τις σχετικές προτιμήσεις

$$\{j, j_a\} \succ_{j_a} \{j_a, j_b\} \succ_{j_a} \{j_a\}$$

$$\{j_a, j_b\} \succ_{j_b} \{j, j_b\} \succ_{j_b} \{j_b\}.$$

επιπλέον οι προτιμήσεις

$$\{j, j_b\}, \succ_j \{j, j_a\}. \succ_j \{j\}$$

προσαρτώνται ως επιθέματα στη λίστα προτιμήσεων του παίκτη j . Εάν τώρα το παίγνιο (N, \succ) είναι πυρηνικά σταθερό, παρατηρούμε ότι κόμβοι παιδιά με κοινό πατέρα, απαιτείται να συνασπιστούν χωρίς επιπλέον παίκτες. Η ιδιότητα απορρέει από την κυκλική φύση των προτιμήσεων που αφορούν πατρικό κόμβο και τα παιδιά του. Συνεπώς οι λοιποί παίκτες, δηλαδή τα μέλη του X θα συνασπιστούν αποκλειστικά με κάποια μέλη του C .

Εάν το παίγνιο (N, \succ) δεν επιδέχεται πυρηνικά σταθερή διαμέριση συνεπάγεται ότι τα στοιχεία του C δεν καλύπτουν χωρίς μη κενές τομές το σύνολο των παικτών. Οι θυγατρικοί παίκτες μπορούν να σχηματίσουν αδελφικές δυάδες αφού κανένα από τα μέλη του X δεν προτιμά να είναι με παιδιά παρά με μέλη του X .

Συνεπώς, η προαναφερθείσα διαδικασία αποτελεί αναγωγή από το πρόβλημα EXACTCOVER στο πρόβλημα HCORE και αφού η πολυπλοκότητα της κατασκευής του

(N, \succ) από το EXACTCOVER είναι γραμμική ως προς το $|X|$, η αναγωγή είναι πολυωνυμική. Μία κατάλληλη συνάρτηση μήκους για το πρόβλημα EXACTCOVER είναι η $length_{EC} = |C||X|$ ενώ για το HCORE είναι η $length_C = |K_c||N|$, όπου το K_c παριστά τον αριθμό των συνασπισμών στην RIRLC. Ένα άνω φράγμα προκύπτει παρατηρώντας ότι για κάθε μέλος του $|X|$, προστίθενται το πολύ εϋο επιπλέον παίκτες στο $|N|$ συνεπώς $|N| \leq 3|X|$. Το πλήθος των συνασπισμών που εμφανίζονται στην RIRLC του HCORE είναι $K_c = |C| + \sum_{\{j\} \notin C} 6 \leq |C| + 6|X|$. Οπότε το μήκος $length_C$ δεν ξεπερνά την τιμή $3|C||X| + 6|X| \cdot 3|X| \leq 3length_{EC} + 18|X|^2 \leq 3length_{EC} + 18length_{EC}^2$, που είναι πολυωνυμικά φραγμένη ως προς το μήκος $length_{EC}$. Ωστόσο το πρόβλημα EXACTCOVER είναι αποδεδειγμένα NP πλήρες καθώς είναι ανάμεσα στα 21 NP-πλήρη προβλήματα του Καρπ [Καρπ, 1972].

Εξάλλου το πρόβλημα των συγκατοίκων είναι ο περιορισμός του HCORE σε προτιμήσεις ομάδων το πολύ 2 παικτών και είναι NP-πλήρες [Ronn, 1986].

Ομοίως το πρόβλημα HIS ανήκει στην κλάση NP. Για να το διαπιστώσουμε, παρατηρούμε ότι για να επαληθεύσουμε εάν μία διαμέριση είναι ατομικά σταθερή απαιτείται για κάθε παίκτη $i \in N$ να αποφασίσουμε εάν υπάρχει συνασπισμός

$$S \in \pi \mid i \cup S \succ_i \pi(i), S^{+i} \succ_j S \forall j \in S.$$

Η αναγωγή που αποδεικνύει την NP-πληρότητα του HCORE εφαρμόζεται και εδώ. Τα αποτελέσματα της συζήτησης συνοψίζονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. *Τα προβλήματα HCORE και HIS είναι ισχυρά NP-πλήρη.*

Με τον όρο ισχυρά δηλώνεται ότι δεν επιδέχονται ούτε ψευδοπολυωνυμικό αλγόριθμο.

Όσον αφορά στην πολυπλοκότητα απόφασης ύπαρξης Νας σταθερής διαμέρισης για δεδομένο στιγμότυπο του παιχνιδιού, παρατηρούμε ότι για κάθε θετικό στιγμότυπο, υπάρχει πιστοποιητικό π τέτοιο ώστε να επαληθεύεται σε πολυωνυμικό χρόνο, ότι το π είναι Νας σταθερή διαμέριση. Η επαλήθευση δίνεται από τον αλγόριθμο 6. Ως συνάρτηση μήκους του προβλήματος λαμβάνεται η $length_C$. Ο αλγόριθμος απαιτεί $O(|N|K_c)$ βήματα, άρα είναι πολυω-

Αλγόριθμος 6: Έλεγχος διαμέρισης ηδονικού παιχνιδιού ως προς Νας σταθερότητα.

input : A hedonic instance (N, \succ) and a partition π of its players

output Characterization of the partition concerning Nash stability

:

```

1 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
2   for coalition  $S \in \pi \mid S \neq \pi(k)$  do
3     if  $S^{+k} \succ_k \pi(k)$  then
4       return " $\pi$  is not Nash stable."
5     end
6   end
7 end
8 return " $\pi$  is Nash stable."

```

νυμικός ως προς το μέγεθος του $length_C$. Οι αναλογίες ανάμεσα στο πρόβλημα EXACTCOVER και στο πρόβλημα HNASH είναι εμφανείς. Έστω $N = X$ το σύνολο των παικτών ενός στιγμιότυπου του HNASH και συνασπισμοί που αντιστοιχούν σε μέλη του C . Οι παίκτες αποτιμούν ομοιόμορφα τους συνασπισμούς στους οποίους συμμετέχουν. Για κάθε $i \in X \mid i \notin C$ προστίθεται παίκτης i^* με κατάλογο προτιμήσεων $\{i^*\}$ και επιπλέον στον κατάλογο του παίκτη i , προσαρτάται το τμήμα προτιμήσεων $\succ_i \{i, i^*\} \succ_i \{i\}$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχει παίκτης που μπορεί να ωφεληθεί από μονομερή του προσκόλληση σε άλλο συνασπισμό, οι παίκτες με το αστέρι σχηματίζουν μονομελείς συνασπισμούς, ειδάλλως θα προτιμούσαν να αποκλίνουν στην απομόνωση. Επιπρόσθετα, οι χωρίς αστέρι παίκτες διαμερίζονται σε συνασπισμούς που αντιστοιχούν στο C , ειδάλλως θα απέκλιναν στο $\{i, i^*\}$. Κατά συνέπεια ένα θετικό στιγμιότυπο για το πρόβλημα HNASH αντιστοιχεί σε θετικό στιγμιότυπο για το EXACTCOVER ενώ η απουσία Νας σταθερής διαμέρισης για ηδονικό στιγμιότυπο επάγει απουσία διαμέρισης του X στο C . Η αναγωγή που εφαρμόστηκε απαιτεί πολυωνυμικό πλήθος βημάτων ως προς το μέγεθος του HNASH. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής συμπέρασμα.

Θεώρημα 4.2. *Το πρόβλημα HNASH είναι ισχυρά NP-πλήρες.*

Στη συνέχεια, στρέφουμε την προσοχή μας στο πρόβλημα απόφασης της ύπαρξης τέλειας διαμέρισης για δεδομένο ηδονικό παίγνιο HPER. Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα ακριβούς κάλυψης με τριάδες (exact cover by 3 sets (X3C) ανάγεται στο HPER. Το πρόβλημα X3C ορίζεται μέσω μιας δυάδας (X, C) , όπου το σύνολο $X = 1, \dots, 3m$, $m \in \mathbb{N}^*$ και το σύνολο C αποτελείται από υποσύνολα του X με πληθικότητα 3 και το ερώτημα είναι εάν υπάρχει ακριβές κάλυμμα του $X \in C$. Έστω το ηδονικό παίγνιο (N, R) όπου $N = X$ και για κάθε παίκτη i , οι μόνοι ατομικά ορθολογικοί συνασπισμοί είναι τα στοιχεία του C , στα οποία συμμετέχουν. Συνεπώς, λύνοντας το πρόβλημα HPER συνάγεται μία λύση στο πρόβλημα X3C. Ωστόσο το exact cover by 3 sets αποδεικνύεται NP-πλήρες [Garey & Johnson, 1979], οπότε και το HPER.

Θεώρημα 4.3. *Το πρόβλημα HPER είναι ισχυρά NP-πλήρες.*

Η διαφορά στην πολυπλοκότητα του προβλήματος των συγκατοίκων με και άνευ ισότητων στις προτιμήσεις, που στην πρώτη περίπτωση είναι NP-πλήρης ενώ στη δεύτερη ανήκει στο P, προκαλεί τη σκέψη της διαφοράς των πολυπλοκότητων στο γενικό ηδονικό παίγνιο, όταν οι προτιμήσεις είναι τυχαίες και όταν είναι αυστηρές. Προφανώς το πρόβλημα παραμένει στο NP αφού η διαδικασία επαλήθευσης είναι η ίδια και παρουσία των ισότητων.

Η αναγωγή του HCORE στο HCORE χωρίς ισότητες διαφαίνεται φυσική. Τα βήματα αποτελούνται από την επιλογή των παικτών του νέου παιχνιδιού και τους καταλόγους προτιμήσεών τους. Το νέο σύνολο παικτών θα περιλαμβάνει τους παίκτες του HCORE με τυχαίες προτιμήσεις που έχουν ισότητες στους καταλόγους IRLC τους. Οι προτιμήσεις τους παραμένουν ίδιες. Για παίκτη u με ισότητες, έστω k ο μέγιστος αριθμός των όμοια προτιμητέων συνασπισμών, τότε, στο νέο σύνολο παικτών προστίθενται οι παίκτες u_1, u_2, \dots, u_k . Κάθε εμφάνιση του παίκτη u στις IRLCs αντικαθίσταται από το σύνολο παικτών u_1, u_2, \dots, u_k . Όπου είναι εφικτό, ο παίκτης u_i προτιμά τον i -οστό μεταξύ αρχικά ισότιμων συνασπισμών (δεν εφαρμόζεται ο κανόνας στην περίπτωση ισότητας λιγότερων από k συνασπισμών). Κατά τα άλλα, οι προτιμήσεις των παικτών u_1, u_2, \dots, u_k είναι τυχαίες για τους πρώην ισότιμους συνασπισμούς και διατηρούν τις γνήσιες προτιμήσεις. Τέλος η προτίμηση στον μονοσύνολο συνασπισμό προσκολλάται στη λίστα κάθε παίκτη που τη στερείται.

Παρατηρούμε ότι αν ένα στιγμιότυπο του ανηγμένου παιγνίου είναι πυρηνικά σταθερό τότε και η εικόνα του στο τελικό παίγνιο είναι πυρηνικά σταθερή. Μία εξήγηση είναι ότι η αναγωγή δεν επιφέρει αλλαγές στη σειρά των προτιμήσεων οπότε οι παίκτες που προέρχονται από αντικατάσταση μπορούν μόνο να ωφεληθούν από συνασπισμό όπου συμμετέχουν όλοι οι παίκτες που προέρχονται από αντικατάσταση ενός πατρικού. Ωστόσο για ίσες προτιμήσεις $S_i \sim_u S_j$, ο παίκτης u_i θα προτιμούσε τον συνασπισμό S_i μετά την αντικατάσταση ενώ ο παίκτης u_j θα προτιμούσε τον συνασπισμό S_j .

Στον αντίποδα, εάν στιγμιότυπο του αρχικού παιγνίου έχει μη κενό πυρήνα, το ίδιο ισχύει και για το τελικό παίγνιο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Είτε οι αποκλίνοντες είναι παίκτες που δεν έχουν προκύψει από την αντικατάσταση και συνεπώς η απόκλιση θα γίνει και στο νέο παίγνιο ή στους αποκλίνοντες περιλαμβάνονται παίκτες από αντικατάσταση που θα αποκλίνουν από κοινού στο νέο παίγνιο καθώς ένας προτιμητέος συνασπισμός για τον πατρικό τους παίκτη είναι προτιμητέος και για εκείνους. Άρα το ηδονικό παίγνιο με αυστηρές προτιμήσεις εμφανίζει μη κενό πυρήνα αν και μόνο αν το αρχικό παίγνιο με τις γενικές προτιμήσεις έχει μη κενό πυρήνα.

Παρατηρώντας ότι το νέο πλήθος κόμβων είναι το πολύ $|N'| = |N|k$ και ότι $K'_c \leq K_c + |N'|$ κατόπιν της προσθήκης των μονοσυνόλων συνασπισμών, η αναγωγή είναι πολυωνυμική ως προς το μήκος $length_C$. Κατά συνέπεια το μήκος του προκύπτοντος στιγμιότυπου θα είναι $length'_C = |N'|K'_c \leq |N|k(K_c + |N|k) = k \cdot length_C + |N|^2k^2$. Οπότε συνάγουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4. *Το πρόβλημα HCORE με αυστηρές προτιμήσεις επί των συνασπισμών είναι ισχυρά NP-πλήρες.*

Για το πρόβλημα HNASH με αυστηρές προτιμήσεις διατίθεται μία αναγωγή παρόμοια με αυτή που δόθηκε για το πρόβλημα HNASH. Το σύνολο των παικτών N αποτελείται από στοιχεία του X . Κάθε μέλος του C μετασχηματίζεται σε συνασπισμό στους καταλόγους RIRLCs των παικτών που συμμετέχουν σε αυτό. Οι προτιμήσεις των παικτών ανάμεσα σε αυτούς τους συνασπισμούς είναι τυχαίες και αυστηρές. Σε κάθε συνασπισμό που ανακύπτει από το C , για κάθε παίκτη u προσθέτουμε τον παίκτη u_1 στον ίδιο συνασπισμό. Συνεπώς η εικόνα του $C = \{(u, w), (u, v, z)\}$ στο HNASH με αυστηρές προτιμήσεις για τον παίκτη u θα είναι: $(u, u_1, w, w_1) \succ_u (u, u_1, v, v_1, z, z_1)$ ή $(u, u_1, v, v_1, z, z_1) \succ_u (u, u_1, w, w_1)$. Επιπρόσθετα, για κάθε σύνολο $(u, u_1) \mid \{u\} \notin C$ προστίθεται το ζεύγος (u^*, u_1^*) και οι κατάλογοι προτιμήσεων επιμηκύνονται προσαρτώντας τις προτιμήσεις $\succ_u \{u, u^*\} \succ_u \{u, u_1\}$ και $\succ_{u_1} \{u_1, u_1^*\} \succ_{u_1} \{u, u_1\}$. Οι παίκτες με αστέρι δεν έχουν άλλες προτιμήσεις παρά να παραμείνουν μονήρεις. Για να εξασφαλίσουμε την αναπαράσταση του παιγνίου μας με λίστες RIRLCs, όπου απαιτείται προσαρτάται ο μονομελής συνασπισμός.

Η ύπαρξη διαμέρισης του X στο C συνεπάγεται ότι οι αντίστοιχοι συνασπισμοί στο ηδονικό παίγνιο συνιστούν Nash σταθερή διαμέριση για κάθε παίκτη u λόγω του ότι επιθυμεί να βρίσκεται με τον συνεργάτη του u_1 . Συνεπώς αποκλείονται μονομερείς αποκλίσεις. Επιπρόσθετα, η απουσία διαμερίσεων του X στο C σημαίνει ότι κάποιος παίκτης u είτε παραμένει μονήρης ή συνεταιρίζεται με τον συνεργάτη του, οπότε ο (u, u^*) είναι κωλύων συνασπισμός, ή συνασπίζεται με τον u^* και ο $\{u^*\}$ αποτελεί κωλύοντα συνασπισμό. Συμπερασματικά, συνάγουμε την ισοδυναμία ότι υπάρχει μία διαμέριση του X στο C , αν και μόνο αν το αντίστοιχο ηδονικό παίγνιο επιδέχεται Nash σταθερή διαμέριση.

Με σκοπό να εκτιμηθεί η πολυπλοκότητα της αναγωγής, γίνονται οι ακόλουθες παρατηρήσεις. Η πληθικότητα του N για το στιγμιότυπο του HNASH με αυστηρές προτιμήσεις που δημιουργείται είναι $|N| \leq 4|X|$. Ενώ ο αριθμός συνασπισμών είναι $K_c \leq |C| + 4|X|$. Ως αποτέλεσμα, η συνάρτηση μήκους του τελικού προβλήματος είναι

$$length_N = |N|K_c \leq 4|X||C| + 16|X|^2 \leq 4length_{EC} + 16length_{EC}^2.$$

Άρα η αναγωγή είναι πολυωνυμική ως προς το μήκος του αρχικού προβλήματος.

Θεώρημα 4.5. *Το πρόβλημα HNASH με αυστηρές προτιμήσεις επί των συνασπισμών είναι ισχυρά NP-πλήρες.*

Η απόφαση ύπαρξης ατομικά σταθερής διαμέρισης αποδεικνύεται ότι είναι NP-δύσκολη, μέσω αναγωγής που περιλαμβάνει αρκετά στοιχεία από τις προηγούμενες και εκμεταλλεύεται τη συνάφεια με το πρόβλημα EXACTCOVER. Υποθέτουμε ξανά στοιχεία του X ως παίκτες και προσθέτουμε συνεταίρο $u_1 \forall u \in X$. Τα υποσύνολα του $X \in C$ μετασχηματίζονται πάλι σε συνασπισμούς με κάθε παίκτη που συμμετέχει να έχει τυχαίες αυστηρές προτιμήσεις μεταξύ αυτών. Κάθε εμφάνιση παίκτη u σε ομάδα επιφέρει την ενσωμάτωση παίκτη u_1 στην ομάδα. Τα τμήματα προτιμήσεων που εισήχθησαν στην προηγούμενη αναγωγή, εισάγονται και εδώ με τη διαφορά ότι αντί για παίκτες με αστέρι, χρησιμοποιούνται κυκλικές ομάδες $\{u, u_a, u_b\}$ και $\{u_1, u_{1a}, u_{1b}\}$ για κάθε u ή u_1 τέτοιο ώστε $\{u\} \notin C$. Επιπρόσθετα, προστίθενται οι αντίστοιχες προτιμήσεις επί των κυκλικών ομάδων, όπως στην αναγωγή για το πρόβλημα HCORE. Εάν υπάρχει διαμέριση του C , οι παίκτες θα συνασπιστούν με άλλους παίκτες από το X και τους αντίστοιχους συνεργάτες (παίκτες με υποδείκτη 1). Οι υπόλοιποι παίκτες θα συστήσουν σύνολα της μορφής (u_a, u_b) και (u_{1a}, u_{1b}) . Τέτοια ομαδοποίηση των παικτών είναι σταθερή κατά Ναυ καθώς δεν υπάρχει παίκτης που να βελτιώνει την ευημερία του αφού κανείς δεν θα μετακινηθεί χωρίς τον συνεργάτη του και τα παιδιά των κυκλικών ομάδων (παίκτες a, b) δεν υπάρχει προτιμότερος συνασπισμός από τον (u_a, u_b) , προσβάσιμος από μονομερή απόκλιση.

Η πληθικότητα του συνόλου των παικτών του τελικού ηδονικού παιχνιδιού φράσσεται καθώς $|N| \leq 4|X|$ και οι συνασπισμοί του παιχνιδιού περιορίζονται από την ανισότητα $K_c = |C| + \sum_{\{j\} \notin C} 12 \leq |C| + 12|X|$. Συνεπώς το μήκος του τελικού ηδονικού παιχνιδιού είναι

$$length_{IS} = |N|K_c \leq 4|X||C| + 48|X|^2 \leq 4length_{EC} + 48length_{EC}^2,$$

πολυωνυμικό ως προς το μήκος του EXACTCOVER.

Θεώρημα 4.6. *Το πρόβλημα HIS με αυστηρές προτιμήσεις είναι ισχυρά NP-πλήρες.*

4.2 Ανώνυμες προτιμήσεις

Τα προηγούμενα αποτελέσματα ισχύουν και όταν οι προτιμήσεις είναι ανώνυμες (ορισμός 2.3). Θεωρούμε τέτοια παίγνια διατυπωμένα μέσω RIRLSs, δηλαδή αναπαραστάσεων από ατομικά ορθολογικούς καταλόγους μεγεθών. Οι παίκτες αντί να εκφράζουν τις προτιμήσεις τους σε συγκεκριμένους συνασπισμούς, διατηρούν μία αποτίμηση για μεγέθη συνασπισμών.

Ξεκινώντας από το πρόβλημα HSCORE παρατηρούμε ότι παραμένει εντός του NP χωρίς να είναι περισσότερο πολύπλοκο λόγω της ανωνυμίας, να ελέγξουμε εάν δεδομένη διαμέριση ανήκει στον πυρήνα.

Ξεκινώντας από γενικό ηδονικό παίγνιο (N, \succ) , οι ατομικά ορθολογικοί συνασπισμοί ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά μεγεθών (S_1, \dots, S_C) . Για να κατασκευάσουμε ανώνυμο παίγνιο, σε κάθε συνασπισμό ανατίθεται μια αξία σύμφωνα με τη σχέση

$$v(S_l) = \begin{cases} 1 & |S_l| = 1 \\ \max\{v(S_{l-1}) + 1, |S_l|\} & \text{else} \end{cases}$$

και προσθέτουμε για κάθε συνασπισμό S_l , $n_l = v(S_l) - |S_l|$ επιπλέον παίκτες l_1, \dots, l_{n_l} έτσι ώστε οι τιμές να ταιριάζουν με το πλήθος των μελών. Τα προφίλ προτιμήσεων των παικτών επί των συνασπισμών μετασχηματίζονται σε προφίλ προτιμήσεων επί των μεγεθών και η RIRLC σε RIRLS. Το προφίλ προτιμήσεων επιπλέον παικτών $l_i \mid l \in \{1, \dots, L\}, i \in \{1, \dots, n_l\}$ είναι $v(S_l) \succ_{l_i} 1$. Συνεπώς σχηματίζεται ένα ψευδοανώνυμο παίγνιο, δηλαδή ένα παίγνιο όπου δεν εμφανίζονται συνασπισμοί ίδιας πληθικότητας.

Έχοντας διαμέριση του αρχικού παιγνίου, απεικονίζουμε κάθε συνασπισμό σύμφωνα με τη συνάρτηση αξίας, δηλαδή $S_l \rightarrow S_l \cup \{l_1, \dots, l_{n_l}\}$. Παρατηρούμε ότι εάν διαμέριση π δεν είναι στον πυρήνα, δηλαδή υπάρχει $S \mid S \succ_j \pi(j) \forall j \in S$, το ίδιο ισχύει και για την εικόνα της στο τελικό παίγνιο.

Αντίστροφα, στην περίπτωση που υπάρχει κωλύων συνασπισμός για διαμέριση του τελικού παιγνίου, ομοίως υπάρχει συνασπισμός περισσότερο προσοδοφόρος για όλους τους συμμετέχοντες σε αυτόν και στο αρχικό παίγνιο.

Το παίγνιο με τις ανώνυμες προτιμήσεις έχει $|N'| \leq (|N| + C)C$ και $C + |N'|$ συνασπισμούς οπότε η διαδικασία απεικόνισης του αρχικού στο τελικό παίγνιο είναι αποδοτική.

Θεώρημα 4.7. *Το πρόβλημα HSCOREAN (HSCORE με ανώνυμες προτιμήσεις) με ή άνευ ισοτήτων, είναι αυστηρά NP-πλήρες.*

Ας εξετάσουμε τώρα τα Nας σταθερά ηδονικά παίγνια με αθροιστικές προτιμήσεις. Αφού η διαδικασία επαλήθευσης της Nας σταθερότητας μιας διαμέρισης είναι ανάλογη αυτής ενός γενικού HNASH προβλήματος, με τη μικρή διαφορά του ελέγχου σε RIRLS, το πρόβλημα HNASH με ανώνυμες προτιμήσεις ή HNASHAN ανήκει στο NP.

Καταστρώνοντας αναγωγή από το πρόβλημα EXACTCOVER στο HNASHAN, έστω m η ποσότητα στοιχείων $\{j \notin C\}$ του X . Υποθέτουμε $m \geq 2$ παρατηρώντας ότι για μικρότερες τιμές το πρόβλημα EXACTCOVER $\in P$. Αφού ταξινομήσουμε τα μέλη του C σε αύξουσα σειρά S_1, \dots, S_L , αναθέτουμε μία τιμή σε κάθε διακριτό S_i ως

$$v(S_l) = \begin{cases} 1 & |S_l| = 1 \\ \max\{m + 2, v(S_{l-1}) + 2, |S_l|\} & \text{else} \end{cases}$$

Για κάθε παίκτη u το προφίλ προτιμήσεων ορίζεται τυχαία επί των τιμών $v(S_l) \mid u \in S_l$ δεδομένου ότι η αναπαράσταση παραμένει ορθολογική, δηλαδή οι μονομελείς συνασπισμοί παραμένουν στη δεξιότερη θέση των IRLS. Επιλέγοντας την ελάχιστη απόσταση δύο διαδοχικών μη μονομελών συνασπισμών να είναι τουλάχιστον δύο, οι μονομερείς αποκλίσεις παικτών

που αντιστοιχούν σε μέλη του X , αποκλείονται. Με σκοπό να εξουδετερωθούν Νας σταθερές διαμερίσεις όπου συμμετέχουν παίκτες $j \mid \{j\} \notin C$ χρησιμοποιείται κατάλληλο εξάρτημα

$$m \succ_j m-1 \succ_j m-2 \succ_j \dots \succ_j 2 \succ_j 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$2(m+1) - j \succ 1, \quad j = m+1, \dots, 2m-1.$$

Η πρώτη γραμμή του εξαρτήματος προσαρτάται στο προφίλ προτίμησης κάθε $j \mid \{j\} \notin C$. Επιπρόσθετα, σύνολο $m-1$ παικτών $\{p_1, \dots, p_{m-1}\}$ ενσωματώνεται στο παίγνιο με προτιμήσεις όπως η δεύτερη γραμμή του εξαρτήματος. Με σκοπό να αντιστοιχούν οι τιμές σε πλήθη παικτών προστίθενται επιπλέον παίκτες όπως στην προηγούμενη αναγωγή, δηλαδή για κάθε S_l , είναι $n_l = v(S_l) - |S_l|$ και προστίθενται οι παίκτες l_1, \dots, l_{n_l} . Οι προτιμήσεις των επιπλέον παικτών δίνονται από το προφίλ $v(S_l) \succ_{l_i} 1$.

Υποθέτοντας ότι υπάρχει διαμέριση π του X τ.ω. $\pi \in C$, θεωρούμε την απεικόνισή της στο ηδονικό παίγνιο. Οι παίκτες $u \mid \{u\} \notin C$ θα ομαδοποιηθούν σε συνασπισμό μεγέθους $> m+2$ μαζί με τους αντίστοιχους επιπλέον παίκτες. Οι αρχικοί, όσοι δηλαδή κατάγονται από στοιχεία του X , δεν θα αποκλίνουν καθώς επικερδέστεροι για εκείνους, συνασπισμοί έχουν μέγεθος μεγαλύτερο από μια μονάδα. Οι επιπλέον παίκτες δεν θα έχουν κίνητρο απόκλισης καθώς βρίσκονται στους βέλτιστους τους συνασπισμούς. Τέλος μεταξύ των $m-1$ παικτών $\{p_1, \dots, p_{m-1}\}$ υπάρχουν προτιμήσεις για μεγέθη από $2(m+1) - (2m-1) = 3$ έως $2(m+1) - (m+1) = m+1$, συνεπώς δεν έχουν κίνητρο απόκλισης αφού οι υπάρχοντες συνασπισμοί έχουν μοναδιαία ή $\geq m+2$ μέγεθος.

Εξάλλου, εάν υπάρχει Νας σταθερή διαμέριση στο ηδονικό παίγνιο, οι αρχικοί παίκτες για τους οποίους $j \mid \{j\} \notin C$ θα πρέπει να διαμεριστούν σε συνασπισμό με περισσότερους από $m+2$ συμμετέχοντες αλλιώς κάποιος από τους παίκτες $\{p_1, \dots, p_{m-1}\}$ θα έχει ελατήρια απόκλισης. Όμοια και οι παίκτες $j \mid \{j\} \in C$, προτιμούν μόνο συνασπισμούς μεγεθών $> m+2$. Τέλος, οι επιπλέον παίκτες θα ήθελαν να ενσωματωθούν σε συνασπισμούς για τους οποίους δημιουργήθηκαν ή να είναι μονήρεις. Άρα από τη διαμέριση του N και αγνοώντας τους p -παίκτες και τους επιπλέον παίκτες λαμβάνουμε ακριβές κάλυμμα του C από αρχικούς παίκτες.

Για την πολυπλοκότητα της αναγωγής έχουμε, $|N| \leq |C|(|X| + 2|C|) + |X| + |X| - 1$, $K_c \leq |C| + 2|X|$ που οδηγεί στην ανισότητα $length_N = |N|K_c \leq |C|^2|X| + 4|C|^2|X| + 2|C|^3 + 2|C||X|^2 + 2|C||X|^2 + 4|X|^2 - 2|X| - |C| = poly(length_{EC})$ όπου το $length_N$ παριστά τη συνάρτηση μήκους του προβλήματος HNASH με ανώνυμες προτιμήσεις.

Θεώρημα 4.8. *Το πρόβλημα HNASHAN με ή άνευ ισοτήτων, είναι ισχυρά NP-πλήρες.*

Προσαρμόζοντας την ανάλυση στην ύπαρξη ατομικά σταθερών διαμερίσεων, η διαδικασία πιστοποίησης για το εάν δεδομένο σύνολο συνασπισμών αποτελεί θετικό στιγμιότυπο για το HIS με ανώνυμες προτιμήσεις ή HISAN, δίνεται στον αλγόριθμο 7.

Ο έλεγχος απαιτεί πολυωνυμικό πλήθος βημάτων ως προς το μήκος περιγραφής του HIS, συνεπώς HISAN $\in NP$.

Για την απόδειξη της πληρότητας παρεμβάλλουμε και εδώ το πρόβλημα EXACTCOVER. Έστω m ο αριθμός των στοιχείων $j \in X \mid \{j\} \notin C$. Αφού διαγραφούν δεύτερες εμφανίσεις από το C ταξινομούνται τα στοιχεία του σε αύξουσα σειρά S_1, \dots, S_L και ανατίθεται στο

Αλγόριθμος 7: Έλεγχος ως προς ατομική σταθερότητα, διαμέρισης ηδονικού παιχνιδιού με ανώνυμες προτιμήσεις.

input : A hedonic instance (N, \succ) and a partition π of its players
output Characterization of the partition concerning individual stability
 :

```

1 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
2   for coalition  $S \in \pi \mid S \neq \pi(k)$  do
3     if  $S^{+k} \succ_k \pi(k)$  &&  $S^{+k} \succ_j$  for each  $j \in S, j \neq k$  then
4       return " $\pi$  is not individually stable."
5     end
6   end
7 end
8 return " $\pi$  is individually stable."
```

καθένα μία μοναδική τιμή σύμφωνα με την σχέση

$$v(S_l) = \begin{cases} 1 & |S_l| = 1 \\ \max\{m + 64, v(S_{l-1}) + 2, |S_l|\} & \text{else} \end{cases}$$

Οι αρχικοί παίκτες είναι τα στοιχεία του X που διατηρούν τυχαίες προτιμήσεις επί των μεγεθών $v(S_l)$ για όλα τα S_l στα οποία συμμετέχουν. Ακόμα προστίθενται επιπλέον παίκτες l_1, \dots, l_{n_l} ώστε να αντιστοιχηθούν τα S_l με τα μεγέθη $v(S_l)$ και οι προτιμήσεις τους είναι $v(S_l) \succ_{l_i} 1$. Επιπλέον, προστίθεται ακόμα ένα σύνολο 62 παικτών $\{1, 2, \dots, 62\}$ με προτιμήσεις

$$\begin{aligned}
& 56 + m \succ_1 2 \succ_1 7 \succ_1 6 \succ_1 1 \\
& 7 \succ_2 2 \succ_2 56 + m \succ_2 55 + m \succ_2 1 \\
& 2 \succ_3 7 \succ_3 6 \succ_3 1 \\
& 7 \succ_i 6 \succ_i 5 \succ_i 4 \succ_i 3 \succ_i 2 \succ_i 1, \quad i = 4, 5, 6, 7, 8 \\
& 62 + m \succ_i 61 + m \succ_i 60 + m \succ_i \dots \succ_i 2 \succ_i 1, \quad i = 9, 10, \dots, 62 + m
\end{aligned}$$

Εξαιρώντας την περίπτωση $m = 0$ προσαρτούμε σε κάθε $j \in X \mid \{j\} \notin C$, το απόσπασμα προτιμήσεων $\succ_j 62 + m \succ_j 61 + m \succ_j \dots \succ_j 1$. Ακολουθώντας τα επιχειρήματα που παρατέθηκαν στην απόδειξη της πρότασης 2.3 καταλήγουμε στην μη ύπαρξη ατομικά σταθερής διαμέρισης του τελικού παιχνιδιού εάν δεν υπάρχει ατομικά σταθερή διαμέριση του $X \in C$. Επίσης, θετικό στιγμιότυπο του EXACTCOVER συνεπάγεται ατομικά σταθερή διαμέριση για το ηδονικό παιχνίδι με ανώνυμες προτιμήσεις όπου οι παίκτες $\{p_1, \dots, p_{62}\}$ συσπειρώνονται σε μία ιδιαίτερη ομάδα. Η πολυπλοκότητα της μετατροπής από το αναγώμενο στο τελικό πρόβλημα απαιτεί πολυωνυμικό χρόνο. Η πληθικότητα του νέου συνόλου παικτών είναι $|N| \leq |X| + (64 + 2|C|)|C|$ ενώ το σύνολο των συνασπισμών έχει επίσης πολυωνυμικό μέγεθος ως προς το μήκος $length_{EC}$ καταλήγοντας σε πολυωνυμικό φράγμα του μήκους $length_{IS}$ ως προς το μήκος $length_{EC}$.

Θεώρημα 4.9. Το πρόβλημα HISAN με ή χωρίς ισότητα, είναι ισχυρά NP-πλήρες.

4.3 Αθροιστικές και συμμετρικές προτιμήσεις

[Gairing & Savani, 2010], [Gairing & Savani, 2011]. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, μία κατηγορία ηδονικών παιγνίων που εγγυάται την ύπαρξη σταθερών εξαγόμενων είναι τα συμμετρικά, αθροιστικά διαχωρίσιμα. Το είδος αυτό επιλέγεται με σκοπό να εξεταστεί η πολυπλοκότητα εύρεσης δομής συνασπισμών απυρόβλητης έναντι αποκλίσεων κάτω από διάφορους περιορισμούς εισόδου ή εξόδου.

Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση όπου δεν υπάρχουν περιορισμού.

Ορισμός 4.2. Ονομάζουμε `NASHSTABLE` το πρόβλημα εύρεσης Νας σταθερής διαμέρισης σε συμμετρικό αθροιστικό ηδονικό παίγνιο.

Μία αναγωγή από το πρόβλημα `PARTYAFFILIATION` φαίνεται φυσική. Ξεκινώντας με εμβάρη γράφο $G(V, E, w)$ που αναπαριστά το στιγμιότυπο του `PARTYAFFILIATION`, προσθέτουμε δύο επιπλέον κόμβους δίκην πόλων. Για να επιτευχθεί η επιθυμητή ιδιότητα, κάθε $i \in V$ συνδέεται με τους δύο πόλους μέσω ακμών που ζυγίζουν $W > \sum_{j | (i,j) \in E} w(i, j)$, που του δίνουν το ασυναγώνιστο κίνητρο να συνδεθεί με τουλάχιστον ένα εξ' αυτών. Για να διατηρηθούν οι πόλοι σε διαφορετικές συστάδες, συνδέονται με ακμή βάρους $-M$ με το M να είναι μεγαλύτερο από κάθε δυνατό κέρδος τους στο παίγνιο, δηλαδή $M > |V|W$. Συνεπώς, η εύρεση Νας σταθερής διαμέρισης για το κατασκευασμένο παίγνιο παρέχει σταθερή λύση για το αρχικό παίγνιο και αντιστρόφως. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι το `PARTYAFFILIATION` είναι PLS-πλήρες παίρνουμε

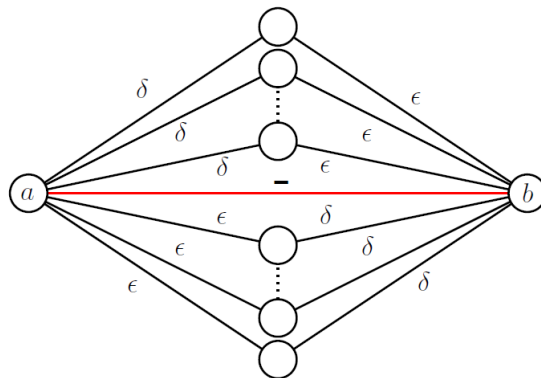
Θεώρημα 4.10. *Το πρόβλημα `NASHSTABLE` είναι PLS-πλήρες.*

Στην συνέχεια εξετάζουμε παίγνια που επιτρέπουν υπό όρους την απόκλιση ενός παίκτη που προτιμά άλλο συνασπισμό από αυτόν που ανήκει.

Για την περίπτωση `vote-in` παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από το πρόβλημα `ONEENEMYPARTYAFFILIATION`, αναπαριστώμενο από γράφο G , μπορούμε να παρεμβάλουμε μεταξύ κάθε δύο αρνητικά συνδεδεμένων κόμβων a, b , $2x$ επιπλέον κόμβους, και να συνδέσουμε x εξ' αυτών μέσω ακμής βάρους δ με το a και μέσω ακμής βάρους ϵ με το b . Οι συνδέσεις των υπολοίπων x γίνεται αντίστροφα, δηλαδή συνδέονται με το a μέσω ακμής βάρους ϵ και με το b μέσω ακμής βάρους δ . Τα χρησιμοποιούμενα βάρη επιλέγονται ούτως ώστε σε σταθερό συνασπισμό, οι μισοί επιπλέον κόμβοι να συνδέονται με το a και οι υπόλοιποι με το b και επιπλέον έτσι ώστε η παρουσία τους να μην τροποποιεί τα προφίλ προτιμήσεων των κόμβων a, b όσον αφορά στους αρχικούς κόμβους. Για να επιτευχθεί το ζητούμενο, επιλέγονται $0 < \delta < \epsilon$. Η κατασκευή παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1.

Χρησιμοποιώντας την ιδιοκατασκευή, επιτρέπεται η ένταξη σε οποιοδήποτε συνασπισμό όταν το απαιτούμενο ποσοστό συναίνεσης για την προσάρτηση ενός παίκτη σε ένα γκρουπ είναι το πολύ ο λόγος του μέγιστου βαθμού κόμβου $\Delta(G)$ μείον ένα προς τον μέγιστο βαθμό κόμβου, ή $T_{in} \leq \frac{\Delta(G)-1}{\Delta(G)}$.

Επιπλέον προστίθενται δύο υπερκόμβοι όπως περιγράφηκε στη συζήτηση του θεωρήματος 4.10. Κατά συνέπεια κάθε σταθερή δομή συνασπισμών για το `VOTEIN` είναι σταθερή και για το `ONEENEMYPARTYAFFILIATION` και αντιστρόφως. Η αναγωγή είναι πολυωνυμική εκτός εάν $T_{in} = 1$ όπου το πρόβλημα ταυτίζεται με την εύρεση ατομικά σταθερής διαμέρισης. Καταλήγουμε συνεπώς στο ακόλουθο θεώρημα



Σχήμα 4.1: Ψηφίδα υπερψήφισης εισόδου για αρνητικές ακμές.

Θεώρημα 4.11. Για κατώφλι υπερψήφισης εντός του διαστήματος $[0, 1)$ το πρόβλημα VOTEIN είναι PLS-πλήρες.

Για το συμπληρωματικό του προβλήματος VOTEIN, δηλαδή το VOTEOUT, υπάρχει γνωστή αναγωγή από PLS-πλήρες πρόβλημα μόνο με τον περιορισμό του αριθμού των συνασπισμών.

Το αναγόμενο πρόβλημα είναι το ONEENEMYNASHSTABLE. Για κάθε παίκτη υπάρχει το πολύ ένας παίκτης με τον οποίο δεν θα έκανε ταίριασμα. Δηλαδή για κάθε παίκτη v , $|\{u | v_v(u) < 0\}| \leq 1$. Με σκοπό να υιοθετήσουμε αυτό το μοντέλο για το πρόβλημα k -VOTEOUT, απαιτείται λόγος υποστηρικτών τουλάχιστον T_{out} ώστε να είναι δυνατή οποιαδήποτε αποχώρηση. Οπότε χρειαζόμαστε σε κάθε συνασπισμό x νέους κόμβους συνδεδεμένους με ακμή βάρους $-\epsilon < 0$ με κάθε πρωταρχικό κόμβο, όπου

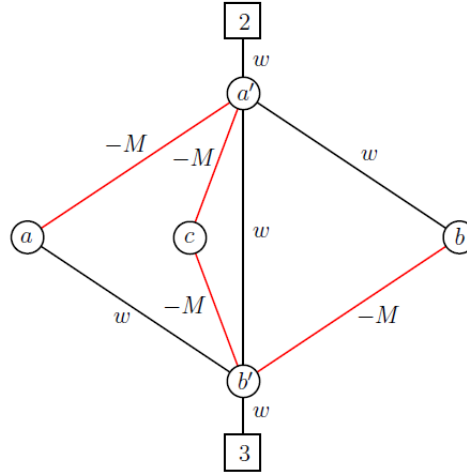
$$\frac{x}{x + \Delta(G)} \geq T_{out} \Rightarrow x \geq \Delta(G) \frac{T_{out}}{1 - T_{out}}$$

και $\Delta(G)$ είναι ο μέγιστος βαθμός κόμβου στο γράφο G . Θέλοντας να διασφαλιστεί η ισοκατανομή των νέων κόμβων στους k συνασπισμούς, σχηματίζουμε x πλήρεις γράφους, καθένας εκ των οποίων περιλαμβάνει k εξ' αυτών. Οι ακμές των πλήρων γράφων ζυγίζουν $-M$, όπου $M > \epsilon|V|$. Μέσω αυτής της κατασκευής δεν υπάρχει παίκτης που να εμποδίζεται από την απόκλιση, συνεπώς σταθερή λύση στο τελικό πρόβλημα συνεπάγεται σταθερή διαμέριση για το αρχικό πρόβλημα και αντίστροφα. Έχοντας προσθέσει δέσμη κόμβων πλήθους ανάλογου του πλήθους των παικτών, η αναγωγή είναι πολυωνυμική στο μήκος εισόδου του αρχικού προβλήματος.

Εξάλλου, το πρόβλημα ONEENEMYPARTYAFFILIATION ανάγεται στο πρόβλημα ONEENEMYNASHSTABLE μέσω ενσωμάτωσης στο γράφο του πρώτου, δύο υπερκόμβους που πολώνουν του υπόλοιπους. Κάθε σταθερό στιγμιότυπο του ONEENEMYNASHSTABLE θα έχει μόνο δύο συνασπισμούς και θα είναι επίσης έγκυρο στιγμιότυπο για το πρόβλημα επιλογής πάρτι με έναν αποστρεφόμενο. Οπότε συνάγεται ότι

Θεώρημα 4.12. Για κατώφλι υπερψήφισης εντός του διαστήματος $[0, 1)$ το πρόβλημα k -VOTEOUT, $k \geq 2$ είναι PLS-πλήρες.

Το πρόβλημα vote-in με κατώφλι εισόδου $T_{in} = 1$ που ταυτίζεται με το πρόβλημα εύρεσης ατομικά σταθερής διαμέρισης, αποδεικνύεται δύσκολο, με αναγωγή σε αυτό του προβλήματος ONEENEMYPARTYAFFILIATION*. Το παίγνιο αυτό είναι όμοιο με το πρόβλημα ONEENEMYPARTYAFFILIATION με τη διαφορά ότι κανείς παίκτης δεν είναι όμοια ικανοποιημένος στους δύο συνασπισμούς που συνιστούν τη διαμέριση. Η ιδιοκατασκευή που εμφανίζεται στο σχήμα 4.2 χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση αρνητικών ακμών που αμφίπλευρα δεν επιτρέπουν μετακινήσεις, στο πλαίσιο της ατομικής σταθερότητας.



Σχήμα 4.2: Ψηφίδα αντικατάστασης αρνητικών ακμών.

Ο αριθμός συνασπισμών περιορίζεται σε τέσσερις $\{0, 1, 2, 3\}$ χρησιμοποιώντας ίσο πλήθος υπερκόμβων που συνδέονται σε πλήρη γράφο με βαριές αρνητικές ακμές και συνδέονται με τους αρχικούς κόμβους με βαριές θετικές ακμές καθιστώντας άτοπη την αποχή από συνεργασία με έστω έναν από αυτούς. Οι αρχικοί κόμβοι ανήκουν είτε στον συνασπισμό 0 είτε στον 1. Ο κόμβος c έχει την επιλογή να ενταχθεί στους συνασπισμούς 2 ή 3 ενώ οι a' και b' έχουν τη δυνατότητα των 0, 1, 2 και 0, 1, 3 αντίστοιχα.

Υποθέτοντας ότι σταθερή διαμέριση για το πρόβλημα INDIVIDUALLYSTABLE είναι ασταθής για το αρχικό πρόβλημα, κόμβος a θα έχει τη δυνατότητα να αυξήσει το κέρδος του στο ONEENEMYPARTYAFFILIATION* όντας ταυτόχρονα ατομικά σταθερός στο παίγνιο στόχο. Οι ενδιαφέροντες κόμβοι για έλεγχο αυτής της δυνατότητας είναι όσοι έχουν αρνητική ακμή προς τον συνασπισμό που θέλουν να μεταβούν, καθώς οι λοιποί κόμβοι έχουν προφανώς ίδιες προθέσεις στα δύο παίγνια.

Έστω ότι ο παίκτης a μπορεί να βελτιωθεί, τότε ο παίκτης c πολώνεται στο 3 και ο a' στο 2. Εάν ο b μπορεί επίσης να βελτιώσει τις απολαβές του, ο παίκτης b' πολώνεται στο 3 αλλά τότε ο b' συνασπίζεται με τον c και θα αποκλίνει. Συνεπώς ο b δεν μπορεί να αυξήσει τα οφέλη του, οπότε ο παίκτης b' πολώνεται στο $\{0, 1\}$ που ακολουθείται από $b = -b'$. Τώρα εάν $a \neq b, a = b'$ και η απόκλιση του a στο αρχικό πρόβλημα επιφέρει υποβιβασμό w στο κέρδος του ως προς τον b . Συνεπώς στο τελικό πρόβλημα ο παίκτης a θα προτιμούσε να απολέσει το κέρδος που του απέφερε η σύνδεσή του με τον b' μεγέθους w , με σκοπό να ωφεληθεί από

Αλγόριθμος 8: Look at και Bias για την ιδιοκατασκευή αντικατάστασης αρνητικών ακμών.

```

1  if  $\alpha$  can improve then
2      bias  $c$  to 3
3      bias  $\alpha' = 2$ 
4  else
5      bias  $\alpha'$  to 0,1
6      bias  $c$  to 2
7  end
8  if  $b$  can improve then
9      bias  $b' = 3$ 
10 else
11     bias  $b'$  to 0,1
12 end

```

το μεγαλύτερο πλεόνασμα από τις υπόλοιπες συνδέσεις του κατόπιν της προσχώρησής του στον συνασπισμό του b . Οπότε ο παίκτης α δεν είναι σταθερός ούτε στο ηδονικό παίγνιο.

Στη συμπληρωματική περίπτωση όπου $\alpha = b$ στο αρχικό παιχνίδι, η απόκλιση του α του δίνει αύξηση σε σχέση με τον b μεγέθους w αφού αποφεύγει έναν εταίρο που του επιφέρει μείωση w . Ομοίως και στο παιχνίδι στόχος είναι επωφελής μία απόκλιση του α η οποία οδηγεί στην ίδια αύξηση κέρδους του ως προς τον παίκτη b . Συνάγεται και πάλι αστάθεια του ηδονικού παιγνίου αντιβαίνοντας στην υπόθεση.

Οπότε η αναγωγή ολοκληρώνεται και είναι πολυωνυμική ως προς το μήκος $length_{OEP A^*}$ καθώς το πολύ $\frac{|V|}{2}3 + 4$ νέοι κόμβοι εισάγονται. Συνεπώς αφού το πρόβλημα ONEENEMYPARTYAFFILIATION* αποδεικνύεται PLS-πλήρες στο [Gairing & Savani, 2010] καταλήγουμε στο

Θεώρημα 4.13. Το πρόβλημα INDIVIDUALLYSTABLE είναι PLS-πλήρες.

Για τα παίγνια sum-in-out, ξεκινώντας από στιγμιότυπο του προβλήματος PARTYAFFILIATION που περιγράφεται από το γράφο $G = (V, E, w)$ με ακέραια αρνητικά βάρη, προσθέτουμε δύο υπερκόμβους που συνδέονται με κάθε αρχικό κόμβο με ακμές βάρους $\frac{-\sigma_i}{2} + \frac{1}{4}$, όπου σ_i το άθροισμα των βαρών ακμών που προσπίπτουν στον παίκτη i στο στιγμιότυπο του προβλήματος PARTYAFFILIATION. Οι υπερκόμβοι έχουν το ρόλο πόλων και για να μείνουν διαχωρισμένοι συνδέονται με εξαιρετικά βαρείες ακμές που ζυγίζουν $-M, M > \sum_{i \in V} (\frac{-\sigma_i}{2} + \frac{1}{4})$. Έχοντας δημιουργήσει το στιγμιότυπο SUMCIS, παρατηρούμε ότι εάν είναι σταθερό, η υπόθεση ύπαρξης παίκτη u στο στιγμιότυπο του PARTYAFFILIATION που επιθυμεί να αποκλίνει σημαίνει ότι για την αποκομιδή του ισχύει $v_u(\pi(u)) < v_u((\pi(u)^c)^+)$, όπου ο υπερδείκτης c συμβολίζει συμπλήρωμα ως προς το πλήρες σύνολο των αρχικών κόμβων V . Εφόσον τα βάρη είναι ακέραια, το ελάχιστο δυνατό κίνητρο για απόκλιση είναι 1. Σε αυτή την περίπτωση, ο ίδιος παίκτης u στο στιγμιότυπο του SUMCIS θα έχει συνολικές απολαβές το πολύ $\frac{\sigma_i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{-\sigma_i}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$ ενώ αποκλίνοντας τουλάχιστον

$\frac{\sigma_i}{2} + \frac{1}{2} + \frac{-\sigma_i}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$. Συνεπώς στιγμιότυπο του αρχικού προβλήματος είναι ασταθές μόνο εάν το ίδιο συμβαίνει και για το τελικό παίγνιο. Αφού η διαδικασία είναι πολυωνυμική ως προς το μήκος του στιγμιότυπου του προβλήματος PARTYAFFILIATION, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.14. *Το πρόβλημα SUMCIS είναι PLS-πλήρες.*

Δεδομένου τώρα ότι κάθε στιγμιότυπο ηδονικού παιγνίου επιδέχεται Παρέτο βέλτιστη διαμέριση ορίζουμε το αντίστοιχο πρόβλημα.

Ορισμός 4.3. Αποκαλούμε HPAR το πρόβλημα της εύρεσης Παρέτο βέλτιστης διαμέρισης για δεδομένο ηδονικό στιγμιότυπο.

Συνδυάζοντας το θεώρημα 4.3 με το θεώρημα 3.1 προκύπτει η πολυπλοκότητα του προβλήματος της εύρεσης Παρέτο βέλτιστης διαμέρισης για δεδομένο ηδονικό στιγμιότυπο.

Θεώρημα 4.15. *Το πρόβλημα HPAR είναι TFNP-δύσκολο.*

Κεφάλαιο 5

Ηδονική συσταδοποίηση

Συσταδοποίηση ονομάζεται η διαδικασία διαμέρισης κόμβων σε δίκτυο σύμφωνα με την ομοιότητά τους μετρημένη μέσω κάποιου δείκτη. Εξετάζονται δύο μη συνεργατικά και ένα συνεργατικό πλαίσιο συσταδοποίησης.

5.1 Συσχετιστική συσταδοποίηση

[Feldman, Eytan & Naor, 2015]. Σε αυτή τη διαμόρφωση ο αριθμός των συστάδων δεν είναι προκαθορισμένος. Κάθε παίκτης v έχει βάρος w ως μέτρο της επιρροής του. Η ομοιότητα μεταξύ δύο παικτών u, v απεικονίζεται στην μετρική της απόστασής τους $d(u, v) \in [0, 1]$, με τιμές κοντά στο μηδέν να σημαίνουν ομοιότητα και κοντά στο ένα διαφορά. Στην περίπτωση όπου κάθε κόμβος v μπορεί να επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος του

$$\sum_{u \in C_v} w_u d(u, v) + \sum_{u \notin C_v} w_u (1 - d(u, v)),$$

το κοινωνικό κόστος είναι το κόστος που επιβαρύνει συνολικά τους παίκτες. Όταν οι παίκτες επιδιώκουν να μεγιστοποιήσουν τις απολαβές τους

$$\sum_{u \in C_v} w_u (1 - d(u, v)) + \sum_{u \notin C_v} w_u d(u, v),$$

η κοινωνική ωφέλεια είναι οι απολαβές του συνόλου των κόμβων. Οι παραπάνω εκδοχές παρουσιάζουν δυκότητα. Ένα παράδειγμα συσχετιστικής συσταδοποίησης αποτελούν παιδιά που θέλουν να παίξουν σε μία σχολική αυλή. Ανεξαρτήτως του αριθμού τους, όσο κοντινότερη είναι η ηλικία τους, τόσο ευκολότερα παίζουν ένα παιχνίδι μαζί. Άλλο παράδειγμα αποτελούν μέλη ΔΕΠ πανεπιστημίου που σχεδιάζουν τα κατ' επιλογήν μαθήματα που θα προσφερθούν από το ίδρυμα. Καθηγητές με κοινό υπόβαθρο και ενδιαφέροντα σχηματίζουν συστάδες που γεννούν δέσμες μαθημάτων υψηλής συνάφειας που ομαδοποιούνται σε κλάδους.

Λήμμα 5.1. Μία συσταδοποίηση είναι Ναας ισορροπία για τη διαμόρφωση ελαχιστοποίησης εάν και μόνο εάν είναι για τη διαμόρφωση μεγιστοποίησης.

Απόδειξη. Έστω συσταδοποίηση παιγνίου. Αθροίζοντας το κόστος παίκτη v υποθέτοντας κίνητρα ελαχιστοποίησης και το κέρδος υποθέτοντας μεγιστοποίηση, παίρνουμε $\sum_{u \in V} w_u$.

όπου V το σύνολο των κόμβων του παιχνιδιού. Συνεπώς προσοδοφόρα αλλαγή στρατηγικής για την εκδοχή μεγιστοποίησης επιφέρει μείωση του κόστους για την εκδοχή ελαχιστοποίησης. \square

Κάθε παιχνίδι συσχετιστικής συσταδοποίησης είναι αθροιστικά διαχωρίσιμο ηδονικό παίγνιο χωρίς να ισχύει η αντίστροφη κατεύθυνση. Παίγνια συσχετιστικής συσταδοποίησης μπορούν να αναχθούν σε αθροιστικά διαχωρίσιμα ηδονικά παίγνια υιοθετώντας για κάθε παίκτη i την τιμή της συνάρτησης $v_i(j) = w_j(1 - 2d(i, j))$ ως αποτίμηση κάθε άλλου παίκτη j . Υποθέτοντας διαμέριση, η συνολική απολαβή του παίκτη i στο παίγνιο συσχετιστικής συσταδοποίησης είναι

$$\sum_{\substack{j \in C_i \\ i \neq j}} w_j(1 - d(i, j)) + \sum_{\substack{j \notin C_i \\ i \neq j}} w_j d(i, j) = \sum_{\substack{j \in C_i \\ i \neq j}} w_j(1 - 2d(i, j)) + \sum_{\substack{j \in V \\ i \neq j}} w_j d(i, j)$$

ενώ στο αθροιστικά διαχωρίσιμο ηδονικό παίγνιο είναι

$$\sum_{\substack{j \in C_i \\ i \neq j}} w_j(1 - 2d(i, j)).$$

Η διαφορά μεταξύ των κερδών είναι ένας σταθερός όρος που εξαρτάται μόνο από τον παίκτη i και όχι από την διαμέριση. Συνεπώς τα δύο παίγνια έχουν τα ίδια σύνολα Νας ισορροπιών. Η παρατήρηση εφαρμόζεται ομοίως στην παραλλαγή της ελαχιστοποίησης μέσω της αντιστοίχισης με την παραλλαγή της μεγιστοποίησης που απορρέει από το λήμμα 5.1. Ωστόσο αθροιστικά διαχωρίσιμο ηδονικό παίγνιο μπορεί να μην έχει Νας ισορροπία [Gairing & Savani, 2010].

Παράδειγμα 5.1. Έστω παίγνιο τριών παικτών με αποτιμήσεις όπως δίνονται στον πίνακα 5.1. Εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι αθροιστικά διαχωρίσιμο, ωστόσο δεν υπάρχει Νας σταθερή διαμέρισή του.

Πίνακας 5.1: Αθροιστικά διαχωρίσιμο παίγνιο.

	1	2	3
v_1	0	1	-2
v_2	-2	0	1
v_3	1	-2	0

Αντιθέτως, κάθε παίγνιο συσχετιστικής συσταδοποίησης έχει ισορροπία Νας και οι παίκτες κάνοντας τις βέλτιστες για αυτούς κινήσεις σε τυχαία σειρά είναι εγγυημένο ότι θα την επιτύχουν. Η απόδειξη γίνεται χρησιμοποιώντας συνάρτηση δυναμικού της οποίας η τιμή ελαττώνεται καθώς οι παίκτες κάνουν κινήσεις ελάττωσης το κόστος τους.

Θεώρημα 5.1. Υπάρχει Νας ισορροπία σε κάθε παίγνιο συσχετιστικής συσταδοποίησης και η δυναμική βέλτιστης απόκρισης πάντα σταθεροποιείται σε τέτοια διαμέριση.

Απόδειξη. Ξεκινώντας με την εκδοχή της ελαχιστοποίησης θεωρούμε την ακόλουθη συνάρτηση δυναμικού

$$\Phi_1 = \sum_{v \in V} w_v (\sum_{u \in C_v} w_u d(u, v) + \sum_{u \notin C_v} w_u (1 - d(u, v))).$$

και κίνηση βέλτιστης απόκρισης από παίκτη v . Η μερίδα της Φ_1 που επηρεάζεται από αυτή την κίνηση αποτελείται από τις προσκείμενες στον v ακμές και η συνολική τους συνεισφορά στη Φ_1 είναι

$$2w_v (\sum_{u \in C_v} w_u d(u, v) + \sum_{u \notin C_v} w_u (1 - d(u, v))).$$

Η ποσότητα εντός της παρένθεσης μειώνεται κατόπιν μίας βέλτιστης απόκρισης του v που μειώνει το κόστος του. Συνεπώς αφού το παίγνιο είναι πεπερασμένο, φτάνει σε ισορροπία Ναs έπειτα από μία σειρά κινήσεων βέλτιστης απόκρισης. Η ισχύς του θεωρήματος για την εκδοχή της μεγιστοποίησης απορρέει από την δυσκότητα των δύο παραλλαγών που δείχθηκε στο λήμμα 5.1. \square

Αν και υπάρχουν Ναs ισορροπίες για κάθε παίγνιο συσχετιστικής συσταδοποίησης, ο υπολογισμός τους δεν είναι "πολύ εύκολος". Ακριβέστερα είναι PLS-πλήρης. Για την απαιτούμενη αναγωγή απαιτείται υπολογισμός φράγματος στην απόσταση μεταξύ δύο συνασπισμένων κόμβων σε ισορροπία Ναs, ως συνάρτηση των βαρών τους και των βαρών των συνασπισμών τους. Το φράγμα προκύπτει από το ότι οι δύο κόμβοι δεν αποσχίζονται σε μονομελείς συνασπισμούς.

Λήμμα 5.2. *Εάν υπάρχει Ναs ισορροπημένη διαμέριση όπου δύο κόμβοι u, v να είναι συνεταιρισμένοι σε συνασπισμό C τότε $d(u, v) \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2W(C)}$.*

Απόδειξη. Για παίκτη u χωρίς κίνητρο να αποκλίνει σε μονομελή συστάδα είναι $\sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u}} w_w d(u, w) \leq \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u}} w_w (1 - d(u, w))$ ή $2 \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u}} w_w d(u, w) \leq W(C) - w(u)$. Ομοίως για παίκτη v , $2 \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq v}} w_w d(v, w) \leq W(C) - w(v)$, όπου $W(C)$ το συνολικό βάρος του συνασπισμού C . Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες και διαιρώντας με δύο παίρνουμε

$$\sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u}} w_w d(u, w) + \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq v}} w_w d(v, w) \leq W(C) - \frac{w_u + w_v}{2}.$$

Εισάγοντας την τριγωνική ανισότητα $d(u, w) + d(v, w) \geq d(u, v)$ προκύπτει

$$w_u d(u, v) + w_v d(u, v) + \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u, v}} w_w d(u, v) \leq W(C) - \frac{w_u + w_v}{2}$$

ή

$$W(C)d(u, v) \leq W(C) - \frac{w_u + w_v}{2}$$

ή

$$d(u, v) \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2W(C)}.$$

\square

Όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4, ο υπολογισμός Νας ισορροπιών για αθροιστικά ηδονικά παίγνια είναι PLS-πλήρης. Στη συνέχεια παρουσιάζεται και μία αναγωγή προβλήματος ικανοποιησιμότητας σε παίγνιο συσχετιστικής συσταδοποίησης.

Θεώρημα 5.2. *Το πρόβλημα υπολογισμού Νας ισορροπίας για παίγνιο συσχετιστικής συσταδοποίησης είναι PLS-πλήρες.*

Απόδειξη. Προφάνως το πρόβλημα ανήκει στην κλάση PLS. Η δυσκολία του μπορεί να αποδειχθεί μέσω αναγωγής του PLS-πλήρους προβλήματος POS-NAE-3SAT (positive not all equal 3 satisfiability) (ικανοποιησιμότητα φράσεων τριών λεκτημάτων, χωρίς αρνήσεις, όπου όλα τα λεκτήματα στη φράση δεν έχουν ίδια τιμή) [Schäffer & Yannakakis, 1991] στο παίγνιο συσχετιστικής συσταδοποίησης. Στο πρόβλημα POS-NAE-3SAT δίνεται μία πρόταση (φόρμουλα) αποτελούμενη από φράσεις. Κάθε φράση έχει δικό της βάρος και τρία λεκτήματα κανένα εκ των οποίων με άρνηση. Κατόπιν της απονομής τιμών στις μεταβλητές, οι φράσεις που ικανοποιούνται είναι εκείνες που δεν έχουν τρεις ίδιες τιμές στα λεκτήματά τους. Τοπικά βέλτιστη λύση στο πρόβλημα αποτελεί απονομή που αλλαγή αληθοτιμής μίας εκ των μεταβλητών δεν μπορεί να αυξήσει το συνολικό κέρδος, δηλαδή το άθροισμα των βαρών των ικανοποιούμενων φράσεων.

Παρατηρούμε ότι στιγμιότυπο του προβλήματος POS-NAE-3SAT μπορεί να εκληφθεί ως στιγμιότυπο παιγνίου συσχετιστικής συσταδοποίησης:

Θεωρούμε ένα κόμβο για κάθε μεταβλητή και προσθέτουμε δύο επιπλέον κόμβους, τους c_1, c_2 που αναπαριστούν τις αναθέσεις αληθές και ψευδές αντίστοιχα. Η απόσταση μεταξύ κόμβου u_x και των επιπλέον κόμβων είναι $d(u_x, c_1) = d(u_x, c_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)}$ δίνοντας $d(c_1, c_2) = 1 - \frac{1}{2(n+2)}$, όπου $d(\cdot, \cdot)$ η απόσταση. Αυτό το εύρος αποθαρρύνει τους c_1, c_2 να μοιραστούν κάποια συστάδα σε Νας ισορροπία σύμφωνα με το λήμμα 5.2. Συνεπώς σχηματίζονται τουλάχιστον δύο συστάδες. Η απόσταση μεταξύ δύο κόμβων που αντιστοιχούν στις μεταβλητές u_x, u_y ορίζεται ως $\frac{1}{2} + \frac{w(x,y)}{5n^2W}$, όπου $w(x, y)$ το συνολικό βάρος των φράσεων όπου συνυπάρχουν οι x, y, W το άθροισμα των βαρών όλων των φράσεων και n ο αριθμός των λογικών μεταβλητών (λεκτημάτων).

Θα σχηματιστούν ακριβώς δύο συστάδες, μία που θα περιλαμβάνει το c_1 και μία που θα περιλαμβάνει το c_2 . Προς άτοπο υποθέτουμε ότι κόμβος u_x ομαδοποιείται χωριστά από τους c_1, c_2 . Ένα άνω φράγμα των αποδοχών του προκύπτει ως

$$2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right] + \sum_{y \in V - \{x\}} \left[\frac{1}{2} + \frac{w(x,y)}{5n^2W} \right] \leq \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{5n^2} - \frac{1}{2(n+2)}$$

Αντιθέτως αποκλίνοντας σε συστάδα με "c κόμβο" το ελάχιστο λαμβανόμενο κέρδος του είναι

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right] + \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right) \right] + \sum_{y \in V - \{x\}} \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{w(x,y)}{5n^2W} \right) \right] \geq \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{5n^2}$$

Στις μεταβλητές των κόμβων που μοιράζονται συστάδα με τον κόμβο c_1 ανατίθεται η τιμή αληθές, ενώ στους κόμβους που βρίσκονται στην ίδια συστάδα με τον κόμβο c_2 απονέμεται η τιμή ψευδές.

Ισχυριζόμαστε ότι κάθε Ναζ ισορροπία του παιγνίου συσταδοποίησης αντιστοιχεί σε τοπικό βέλτιστο για το πρόβλημα POS-NAE-3SAT. Πράγματι δεχόμενοι το αντίθετο καταλήγουμε σε άτοπο. Για να το δούμε υποθέτουμε ότι έχοντας Ναζ ισορροπημένη συσταδοποίηση \mathcal{E} η αντίστοιχη απονομή αληθείας ψ δεν είναι τοπικά βέλτιστη. Τότε υπάρχει διαφορετική απονομή αληθείας ψ' που παρέχει υψηλότερο κέρδος από την ψ και λαμβάνεται αντιστρέφοντας την αληθοτιμή μίας εκ των μεταβλητών της ψ , έστω της x . Έστω \mathcal{E}' η διαμέριση που αντιστοιχεί στην ψ' , και λαμβάνεται από την απόκλιση κόμβου u_x στην αντίθετη συστάδα. Εφόσον η διαμόρφωση \mathcal{E} είναι Ναζ ισορροπία, η \mathcal{E}' θα πρέπει να δίνει ίδιο ή λιγότερο κέρδος από την \mathcal{E} . Ορίζουμε

- W_1 το συνολικό βάρος των φράσεων που ικανοποιούνται από την ψ και περιέχουν το x και στο οποίο ανατίθεται από την ψ διαφορετική τιμή από τα λοιπά δύο λεκτήματα,
- W_2 το συνολικό βάρος των φράσεων που δεν ικανοποιούνται από την ψ , και περιέχουν το x ,
- W_3 το συνολικό βάρος των φράσεων που ικανοποιούνται από την ψ και περιέχουν το x και στις λοιπές δύο μεταβλητές απονέμονται διαφορετικές τιμές από την ψ .

Η διαφορά στο κέρδος που επιτυγχάνεται από την ψ και σε εκείνο από την ψ' είναι $W_1 - W_2$ και είναι αρνητική. Το κέρδος του αποκλίνοντος κόμβου u_x στη διαμόρφωση \mathcal{E} από του κόμβους c_1, c_2 είναι

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right] + \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right) \right] = 1.$$

Μία γειτονική στον u_x ακμή που τον συνδέει με κόμβους της ίδιας συστάδας συνεισφέρει στο κέρδος του u_x

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{w(x, y)}{5n^2W} \right).$$

Η συνολική απολαβή του u_x από όλες τις ακμές, συμβολίζοντας την πληθικότητά τους ως ℓ είναι

$$\frac{\ell}{2} - \frac{2W_2 + W_3}{5n^2W}.$$

Και ανάλογα για τις ακμές που συνδέουν τον u_x με κόμβους άλλων συστάδων

$$\frac{n-1-\ell}{2} + \frac{2W_1 + W_3}{5n^2W}.$$

Αθροίζοντας το κέρδος του u_x στην \mathcal{E} παίρνουμε

$$\frac{n+1}{2} + 2 \frac{W_1 - W_2}{5n^2W}.$$

Με παρόμοιο τρόπο, η ωφέλιμη αξία του u_x στην \mathcal{E}' είναι

$$\frac{n+1}{2} + 2 \frac{W_2 - W_1}{5n^2W}.$$

Ως τόσο το τελευταίο είναι μεγαλύτερο από το κέρδος του u_x στην \mathcal{E} λόγω του ότι $W_1 - W_2 < 0$, αντιβαίνοντας στο ότι η κατάσταση \mathcal{E} είναι Νας ισορροπημένη. Συνεπώς η ανάθεση ψ είναι τοπικό μέγιστο για την πρόταση. \square

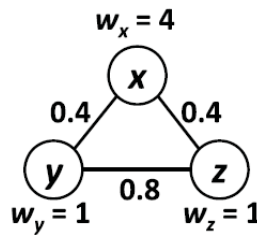
Έχοντας εξασφαλίσει ότι το παίγνιο συγκλίνει πάντα σε Νας ισορροπία, εξετάζουμε το τίμημα της σταθερότητας. Στην ειδική περίπτωση που τα βάρη είναι ομοιόμορφα, μπορούμε να έχουμε σταθερότητα άνευ κόστους. Αποδεικνύεται ρυθμίζοντας τα βάρη της συνάρτησης δυναμικού Φ_1 στο θεώρημα 5.1, παράγοντας

$$\Phi_1(\mathcal{F}) = w^2 \sum_{v \in V} \left(\sum_{u \in C_v} d(u, v) + \sum_{u \notin C_v} (1 - d(u, v)) \right).$$

Σημειώνουμε ότι $\Phi_1 = w \cdot$ (Κοινωνικό κόστος). Η ποσότητα της παρένθεσης μειώνεται σε κάθε κίνησης βέλτιστης αντίδρασης οπότε η βέλτιστη λύση είναι Νας ισορροπία που παρέχει μοναδιαίο τίμημα σταθερότητας. Το αποτέλεσμα ισχύει και για την εκδοχή ελαχιστοποίησης λόγω του λήμματος 5.1.

Λήμμα 5.3. Με ομοιόμορφα βάρη το τίμημα της σταθερότητας είναι 1.

Στην γενική περίπτωση αυθαιρέτων βαρών για κάθε κόμβο, το τίμημα της αναρχίας διαφέρει μεταξύ των εκδοχών ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης και μπορεί να είναι αυστηρά μεγαλύτερο από 1. Θεωρούμε το παράδειγμα πλήρους γραφήματος τριών κόμβων K_3 όπως παρουσιάζεται στο παράδειγμα 5.1. Μόνη δυνατή Νας ισορροπημένη συσταδοποίηση είναι ο μεγάλος συνασπισμός, ο συνεταιρισμός δηλαδή των τριών παικτών. Ωστόσο βέλτιστη λύση αποτελεί ο συνεταιρισμός του βαρύτερου κόμβου με έναν από τους ελαφρύτερους. Στην εκδοχή ελαχιστοποίησης του παιγνίου η Νας σταθεροποιημένη διαμέριση εμφανίζει κοινωνικό κόστος 5.6 ενώ η βέλτιστη 5.4, οδηγώντας σε κόστος σταθερότητας 1.037 ενώ στην εκδοχή μεγιστοποίησης οι τιμές είναι 6.4 και 6.6 αντίστοιχα, δίνοντας λόγο επιβάρυνσης για τη σταθερότητα 1.031.



Σχήμα 5.1: Γράφος με τίμημα σταθερότητας > 1 για συσχετιστική συσταδοποίηση.

Το επόμενο ενδιαφέρον ερώτημα είναι πόσο υποβέλτιστη μπορεί να είναι μία Νας σταθερή λύση. Στην απόδειξη του πρώτου μας αποτελέσματος χρειαζόμαστε ένα φράγμα παρόμοιο με εκείνο του λήμματος 5.4. Σε περίπτωση που υπάρχει Νας ισορροπία με 2 κόμβους σε χωριστές συστάδες, οι απόστασή τους είναι τουλάχιστον ίση με το λόγο του αθροίσματος των βαρών τους προς το λόγο του αθροίσματος των βαρών των συνασπισμών τους. Το όριο αυτό δεν παραβιάζεται ειδικά οι κόμβοι θα προτιμούν να προσχωρήσουν στους συνασπισμούς αλλήλων οδηγώντας σε φυγάδευση της ισορροπίας.

Λήμμα 5.4. *Εάν υπάρχει Νας ισορροπημένη διαμέριση όπου δύο κόμβοι u, v συσταδοποιούνται χωριστά, τότε $d(u, v) \geq \frac{w_u + w_v}{2(w(C_u) + w(C_v))}$.*

Απόδειξη. Παίκτης u δεν θα έχει κίνητρο να προσχωρήσει στον συνασπισμό του παίκτη v εάν

$$\sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z d(u, z) + \sum_{z \in C_v} w_z (1 - d(u, z)) \leq \sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z (1 - d(u, z)) + \sum_{z \in C_v} w_z d(u, z)$$

και συμπύσσοντας τους κοινούς όρους

$$2 \sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z d(u, z) + W(C_v) \leq 2 \sum_{z \in C_v} w_z d(u, z) + W(C_u) - w_u$$

παρόμοια ανίσωση ισχύει για τον v

$$2 \sum_{\substack{z \in C_v \\ z \neq v}} w_z d(v, z) + W(C_u) \leq 2 \sum_{z \in C_u} w_z d(v, z) + W(C_v) - w_v.$$

Αθροίζοντας τα τελευταία δύο αποτελέσματα και διαιρώντας με δύο παίρνουμε

$$\sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z d(u, z) + \sum_{\substack{z \in C_v \\ z \neq v}} w_z d(v, z) \leq \sum_{z \in C_v} w_z d(u, z) + \sum_{z \in C_u} w_z d(v, z) - \frac{w_u + w_v}{2}$$

Εισάγοντας τις τριγωνικές ανισότητες $d(u, z) - d(z, v) \leq d(u, v)$ και $d(v, z) - d(z, u) \leq d(u, v)$ προκύπτει

$$\frac{w_u + w_v}{2} \leq \sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z d(u, v) + \sum_{\substack{z \in C_v \\ z \neq v}} w_z d(u, v) + w_u d(u, v) + w_v d(u, v).$$

Αναγνωρίζοντας στο δεξί μέλος το γινόμενο $(W(C_u) + W(C_v))d(u, v)$ καταλήγουμε στην

$$d(u, v) \geq \frac{w_u + w_v}{2(W(C_u) + W(C_v))}$$

□

Θεώρημα 5.3. *Στην ειδική περίπτωση ομοιόμορφων βαρών w το τίμημα της αναρχίας φράσσεται άνω από την ποσότητα $n - 1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο διαμερίσεις, μία Νας ισορροπημένη \mathcal{E} και μία βέλτιστη λύση \mathcal{O} . Επιπλέον θεωρούμε ακμή e του πλήρους γραφήματος K_n όλων των κόμβων. Εάν η ακμή συνδέει συνεταρισμένους κόμβους στην \mathcal{E} και στην \mathcal{O} , τότε το κόστος που εισάγει είναι ίδιο στις δύο περιπτώσεις, με μηδενική συνεισφορά στην αύξηση του τιμήματος της αναρχίας. Την ίδια επίδραση στο τίμημα της αναρχίας έχουν και ακμές που συνδέουν κόμβους οι οποίοι είναι διαχωρισμένοι στην κατάσταση \mathcal{E} όπως και στην \mathcal{O} . Δυνητικές πηγές αύξησης του κοινωνικού κόστους αποτελούν

1. ακμές e που συνδέουν δύο κόμβους στην ίδια συστάδα στην \mathcal{E} ενώ είναι σε διαφορετικές συστάδες στην \mathcal{O} και αντίστροφα
2. ακμές e που συνδέουν συνασπισμένους κόμβους στην \mathcal{O} που βρίσκονται σε διαφορετικές συστάδες στην \mathcal{E} .

Στην περίπτωση 1 το κοινωνικό κόστος της e στην \mathcal{E} είναι $2wd(u, v)$ ενώ στην \mathcal{O} είναι $2w(1 - d(u, v))$. Από το λήμμα 5.2 ισχύει $d(u, v) \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2w(C)}$ που οδηγεί σε $d(u, v) \leq 1 - \frac{1}{n}$. Ως συνέπεια το κόστος της N_{as} ισορροπημένης διαμέρισης είναι το πολύ $2w(1 - \frac{1}{n})$. Στον αντίποδα, το κόστος της βέλτιστης λύσης είναι τουλάχιστον $2w\frac{1}{n}$. Ο λόγος των συνεισφορών της e στο κοινωνικό κόστος στις δύο αυτές περιπτώσεις είναι το πολύ $n - 1$.

Στην περίπτωση 2 το κόστος που συμβάλλει η e στην \mathcal{E} είναι $2w(1 - d(u, v))$ ενώ στην \mathcal{O} είναι $2wd(u, v)$. Σύμφωνα με το λήμμα 5.4, $d(u, v) \geq \frac{w_u + w_v}{2(w(C_u) + w(C_v))}$ ή $d(u, v) \geq \frac{1}{n}$. Συμπερασματικά, το μέγιστο κόστος της e στην \mathcal{E} είναι $2w(1 - \frac{1}{n})$ ενώ στην \mathcal{O} είναι τουλάχιστον $2w\frac{1}{n}$. Συνεπώς ο λόγος των επιβαρύνσεων της e στην \mathcal{E} και στην \mathcal{O} είναι το πολύ $n - 1$.

Συνεπώς το τίμημα της αναρχίας είναι το πολύ $n - 1$. \square

Επιτρέποντας αναρχία στα βάρη, θεωρώντας δηλαδή αυθαίρετες τις τιμές τους, παίρνουμε τετραγωνικό τίμημα της αναρχίας ως προς το πλήθος των παικτών n .

Θεώρημα 5.4. Το τίμημα της αναρχίας της εκδοχής ελαχιστοποίησης του παιγνίου συσχετιστικής συσταδοποίησης με αυθαίρετα βάρη είναι $O(n^2)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την επιχειρηματολογία της απόδειξης του θεωρήματος 5.3, διακρίνουμε δύο σύνολα ακμών.

- Το πρώτο περιέχει εκείνες που ενώνουν κόμβους που είναι συνδεδεμένοι με τον ίδιο τρόπο από την N_{as} ισορροπημένη κατάσταση \mathcal{E} και μία βέλτιστη λύση \mathcal{O} δηλαδή, εάν οι κόμβοι είναι συνεταιρισμένοι στην \mathcal{E} , το ίδιο ισχύει και στην \mathcal{O} και εάν είναι χωριστά στην \mathcal{E} είναι επίσης χωριστά και στην \mathcal{O} .
- Στο δεύτερο σύνολο ακμών ανήκουν εκείνες που συνδέονται διαφορετικά στις \mathcal{E} και \mathcal{O} . Δηλαδή, ακμές που είναι συνασπισμένες στην \mathcal{E} δεν είναι στην \mathcal{O} και αντίστροφα.

Έστω D η συνολική συνεισφορά του πρώτου συνόλου στο κοινωνικό κόστος της \mathcal{E} .

Για ακμή e της δεύτερης ομάδας το συνεισφερόμενο κόστος στην \mathcal{E} σύμφωνα με το λήμμα 5.2 θα είναι άνω φραγμένο από την ποσότητα $(w_u + w_v) \left(1 - \frac{w_u + w_v}{2w(C)}\right)$ στην περίπτωση που οι κόμβοι είναι στην ίδια συστάδα C στην \mathcal{E} και σύμφωνα με το λήμμα 5.4 το πολύ $(w_u + w_v) \left(1 - \frac{w_u + w_v}{2(w(C_u) + w(C_v))}\right)$ όταν οι κόμβοι δεν είναι συνασπισμένοι στην \mathcal{E} . Συνεπώς, σε αμφότερες τις τελευταίες περιπτώσεις η συνεισφορά της e στο κοινωνικό κόστος της \mathcal{E} είναι το πολύ $(w_u + w_v) - \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')}$, όπου V' είναι το σύνολο των κόμβων που ο συνεταιρισμός τους στην \mathcal{E} δεν ταυτίζεται με αυτόν στην \mathcal{O} .

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι το κόστος της e στην \mathcal{O} είναι ίσο με $(w_u + w_v)$ μείον το κόστος της e στην \mathcal{E} παίρνουμε ότι το τίμημα της αναρχίας του παιγνίου είναι άνω φραγμένο από

την ποσότητα

$$\frac{D + \sum_{uv \in E'} \left[(w_u + w_v) - \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')} \right]}{D + \sum_{uv \in E'} \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')}}.$$

Παρατηρούμε ότι $w_u + w_v - \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')} \geq \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} PoA &\leq \frac{\sum_{uv \in E'} \left[(w_u + w_v) - \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')} \right]}{\sum_{uv \in E'} \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')}} \\ &= 2w(V') \frac{\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v)}{\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v)^2} - 1 \\ &= 2w(V') |E'| \frac{\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v)}{\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v)^2 \sum_{uv \in E'} 1} - 1 \end{aligned}$$

όπου E' είναι το σύνολο των ακμών που ενώνουν κόμβους $i, j \in V', i \neq j$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy - Schwartz, κατά την οποία για δύο ακολουθίες a_i, b_i

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2,$$

προκύπτει

$$PoA \leq 2w(V') |E'| \frac{\sum_{uv \in V'} (w_u + w_v)}{(\sum_{uv \in V'} (w_u + w_v))^2} - 1 = \frac{2w(V') |E'|}{\sum_{uv \in V'} (w_u + w_v)} - 1.$$

Ισχύει ότι $\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v) \geq w(V')$. Συνεπώς $PoA \leq 2|E'| - 1 = O(n^2)$. \square

Για κάτω φράγμα θεωρώντας ελαχιστοποίηση, υποθέτουμε άρτιο αριθμό παικτών.

Θεώρημα 5.5. Για άρτιο αριθμό παικτών το κάτω φράγμα του τιμήματος της αναρχίας είναι $n - 1$. Το φράγμα ισχύει ακόμα και εάν τα βάρη είναι μοναδιαία και το δίκτυο γραμμικό.

Απόδειξη. Υποθέτουμε μοναδιαία βάρη για όλους τους κόμβους. Διαιρούμε τους κόμβους του παιχνιδιού σε δύο σύνολα A, B , το καθένα με $n/2$ κόμβους. Οι κόμβοι του A τοποθετούνται στο σημείο 0 ευθείας γραμμής ενώ οι κόμβοι του B τοποθετούνται στο σημείο $1/n$. Έστω διαμέριση σε 2 συστάδες, μία με τους κόμβους του A και έτερη με τους κόμβους του B . Το κόστος κόμβου u θα είναι $(n - 1)/2$. Υπάρχουν δύο δυνατότητες απόκλισης, είτε ο σχηματισμός νέας συστάδας, είτε η μετακίνηση σε υπάρχουσα. Στην πρώτη περίπτωση το κόστος θα είναι $(\frac{n}{2} - 1) 1 + \frac{n}{2} (1 - \frac{1}{n}) = n - 3/2$, που δεν είναι προτιμότερο από την τωρινή κατάσταση και στη δεύτερη περίπτωση το κόστος είναι $(\frac{n}{2} - 1) 1 + \frac{n}{2} \frac{1}{n} = (n - 1)/2$ που δεν δίνει κίνητρα για απόκλιση από την τωρινή συστάδα. Συνεπώς η διαμέριση είναι Νας ισορροπία. Στον αντίποδα, εάν όλοι οι κόμβοι προσχωρήσουν στην ίδια συστάδα, το κοινωνικό κόστος είναι $n \left[(\frac{n}{2} - 1) 0 + \frac{n}{2} \frac{1}{n} \right] = n/2$. Άρα το τιμήμα της αναρχίας είναι τουλάχιστον $\frac{n(n-1)/2}{n/2} = n - 1$. \square

Για ένα άνω φράγμα στο τίμημα της αναρχίας της εκδοχής μεγιστοποίησης, το πεδίο των Νας ισορροπημένων παιγνίων χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες. Η πρώτη υποθέτει συστάδες βάρους το πολύ $w(V)/\sqrt{n}$ και η συμπληρωματική της υποθέτει ύπαρξη τουλάχιστον ενός συνασπισμού που να ζυγίζει τουλάχιστον $w(V)/\sqrt{n}$. Το κοινωνικό κόστος αμφοτέρων των υποκατηγοριών αποδεικνύεται ότι είναι $\Omega(\sqrt{n}) \cdot w(V)$.

Λήμμα 5.5. Σε Νας ισορροπημένη διαμέριση όπου για κάθε συστάδα C , $w(C) \leq w(V)/\sqrt{n}$ η κοινωνική ωφέλεια είναι $\Omega(\sqrt{n})w(V)$.

Απόδειξη. Στην περίπτωση ακμών που συνδέουν κόμβους u, v διαφορετικών συστάδων, ισχύει

$$d(u, v) \geq \frac{w_u + w_v}{2(w(C_u) + w(C_v))} \geq \frac{w_u + w_v}{4w(V)/\sqrt{n}}.$$

Ομοίως, για ακμές που συνδέουν συνεταιρισμένους κόμβους συνάγουμε

$$d(u, v) \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2w(C)} \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2w(V)/\sqrt{n}}$$

Συνεπώς, για αμφοτέρους τους τύπους των ακμών το συμβαλλόμενο κέρδος είναι τουλάχιστον $\frac{(w_u + w_v)^2}{4w(V)/\sqrt{n}}$. Κατ' επέκταση το συνολικό κέρδος που λαμβάνεται από αυτές τις ακμές δεν είναι λιγότερο από $\sum_{uv \in V} \frac{(w_u + w_v)^2}{4w(V)/\sqrt{n}}$. Προς απόδειξη του λήμματος εισάγουμε την ακόλουθη ανισότητα

$$\begin{aligned} w^2(V) &= \left(\sum_{v \in V} w_v \right)^2 = \sum_{v \in V} w_v^2 + 2 \sum_{uv \in V} w_u w_v \\ &= \sum_{v \in V} w_v^2 + \frac{n-2}{n-1} \sum_{uv \in V} w_u w_v + \frac{n}{n-1} \sum_{uv \in V} w_u w_v \\ &\leq \sum_{v \in V} w_v^2 + \frac{n-2}{2(n-1)} \left(\sqrt{(n-1) \sum_{v \in V} w_v^2} \right)^2 + \frac{n}{n-1} \sum_{uv \in V} w_u w_v \\ &= \frac{n}{2} \sum_{v \in V} w_v^2 + \frac{n}{n-1} \sum_{uv \in V} w_u w_v = \frac{n}{2(n-1)} \left((n-1) \sum_{v \in V} w_v^2 + 2 \sum_{uv \in V} w_u w_v \right) \\ &= \frac{n}{2(n-1)} \sum_{uv \in V} (w_u + w_v)^2 \\ &\implies \sum_{uv \in V} (w_u + w_v)^2 \geq \frac{2(n-1)}{n} w(V)^2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία ανισότητα, το συνολικό ευρισκόμενο κέρδος είναι

$$\sum_{uv \in V} \frac{(w_u + w_v)^2}{4w(V)\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{n}}{4w(V)} \frac{2(n-1)}{n} w(V)^2 = \Omega(\sqrt{n})w(V).$$

□

Λήμμα 5.6. Υποθέτουμε κατάσταση Νας ισορροπίας \mathcal{E} και συστάδα C με βάρος τουλάχιστον $w(V)/\sqrt{n}$, τότε το κοινωνικό όφελος \mathcal{E} είναι $\Omega(\sqrt{n})w(V)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε κόμβο u που δεν ανήκει στην C . Λόγω του ότι η \mathcal{E} είναι Νας ισορροπία, ο παίκτης u στερείται ελατηρίων απόκλισης. Οπότε το κέρδος του θα είναι τουλάχιστον το μέγιστο διαθέσιμο από όλους του κόμβους που τον συνδέουν με κόμβους της C . Συνεπώς το μέγιστο μεταξύ του ανήκειν και του μη ανήκειν στην C ή

$$\max \left(\sum_{v \in C} w_v d(u, v), \sum_{v \in C} (1 - d(u, v)) \right)$$

Δεδομένου ότι $\max(a, b) \geq \frac{a+b}{2}$, για το κέρδος του παίκτη u , $p(u)$ παίρνουμε

$$p(u) \geq \frac{\sum_{v \in C} w_v d(u, v) + \sum_{v \in C} w_v (1 - d(u, v))}{2} \geq \frac{\sum_{v \in C} w_v}{2} = \frac{w(C)}{2} \geq \frac{w(V)}{\sqrt{n} \cdot 2}$$

Άρα το συνολικό κέρδος κόμβων εκτός της C είναι τουλάχιστον $\frac{w(V)}{\sqrt{n} \cdot 2} (|V| - |C|)$. Με τον ίδιο τρόπο, όταν ο παίκτης u δεν ανήκει στη C το κέρδος του απαιτείται να είναι μεγαλύτερο μένοντας στη C από το να αποκλίνει. Συνεπώς

$$p(u) \geq \max \left(\sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v (1 - d(u, v)), \sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v d(u, v) \right)$$

ή

$$p(u) \geq \left(\sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v d(u, v) + \sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v (1 - d(u, v)) \right) / 2 \geq \left(\sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v \right) / 2 \geq \frac{w(C) - w_u}{2}.$$

Καταλήγοντας σε συνολικό κέρδος για τους εν λόγω κόμβους τουλάχιστον

$$\frac{|C| \cdot w(C) - w(C)}{2} = \frac{(|C| - 1)w(C)}{2} \geq \frac{(|C| - 1) w(V)}{2 \sqrt{n}}.$$

Αθροίζοντας το ελάχιστο αναμενόμενο κέρδος κάθε κόμβου καταλήγουμε στην ελάχιστη κοινωνική ωφέλεια $(|V| - 1)w(V)/\sqrt{n} = \Omega(\sqrt{n})w(V)$. \square

Συνδυάζοντας τα λήμματα 5.5, 5.6 η ελάχιστη κοινωνική ωφέλεια για μεγιστοποιητικό παίγνιο συσχετιστικής συσταδοποίησης είναι $\Omega(\sqrt{n})w(V)$. Επιπλέον η βέλτιστη κοινωνική ωφέλεια είναι $(n - 1)w(V)$. Συνεπώς το τίμημα της αναρχίας είναι $O(\sqrt{n})$. Με σκοπό την εξαγωγή κάτω φράγματος για το τίμημα της αναρχίας στην εκδοχή μεγιστοποίησης του παιγνίου συσχετιστικής συσταδοποίησης παρουσιάζουμε μία περίπτωση όπου το ΤτΑ είναι $\Omega(\sqrt{n})$. Θεωρούμε n κόμβους με μοναδιαία βάρη διαιρεμένους σε $k = \sqrt{n}$ ομάδες A_1, A_2, \dots, A_k (εάν

το πλήθος τους n δεν είναι τέλειο τετράγωνο $k = \sqrt{n'}$, όπου n' είναι το μέγιστο τέλειο τετράγωνο μικρότερο από n και εισάγουμε $n - n'$ επιπρόσθετους κόμβους έτσι ώστε ο συνολικός αριθμός των κόμβων να παραμένει n . Οι επιπλέον κόμβοι έχουν απόσταση 1 για κάθε άλλο παίκτη και θεωρούνται μονομελείς συνασπισμοί σε όλες τις ακόλουθες συσταδοποιήσεις) με καθεμία να περιέχει \sqrt{n} κόμβους. Οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι

$$d(u, v) = \begin{cases} 0 & u, v \in \text{same group } A_i \\ \sqrt{1/n} & \text{else} \end{cases}.$$

Θεωρούμε διαμέριση που ακολουθεί την A ομαδοποίηση, δηλαδή κάθε A ομάδα αποτελεί μία συστάδα. Αυτή η συσταδοποίηση είναι Νας ισορροπία. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί συγκρίνοντας το κέρδος ενός κόμβου από την παραμονή στην παρούσα του θέση και κατόπιν απόκλισης. Το τρέχον κέρδος κόμβου u που ανήκει σε ομάδα A_j είναι

$$\sum_{\substack{v \in A_j \\ v \neq u}} 1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} \sum_{v \in A_i} \sqrt{1/n} = \sqrt{n} - 1 + (\sqrt{n} - 1)\sqrt{n}\sqrt{1/n} = 2\sqrt{n} - 2.$$

Αποκλίνοντας σε άλλη ομάδα A_m , το κέρδος του γίνεται

$$\sum_{\substack{v \in A_m \\ v \neq u}} (1 - \sqrt{1/n}) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j, m}} \sum_{v \in A_i} \sqrt{1/n} + \sum_{v \in A_j} 0 = \sqrt{n}(1 - \sqrt{1/n}) + (\sqrt{n} - 2)\sqrt{n}\sqrt{1/n} = 2\sqrt{n} - 3.$$

Η κοινωνική ωφέλεια του παιχνιδιού είναι $n \cdot (2\sqrt{n} - 2)$. Η μέγιστη κοινωνική ωφέλεια για αυτό το παιχνίδι προκύπτει όταν όλοι οι παίκτες μοιράζονται κοινή συστάδα λόγω της μορφής της συνάρτησης απόστασης. Η κοινωνική ωφέλεια τότε είναι $n \left[(\sqrt{n} - 1) \cdot 1 + (n - \sqrt{n}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] = n(n - \sqrt{n})$ Καταλήγοντας σε τμήμα της αναρχίας του παιχνιδιού $\frac{n(n - \sqrt{n})}{n(2\sqrt{n} - 2)} = \Omega(\sqrt{n})$.

Συμπεριλαμβανοντας το τελευταίο αποτέλεσμα στα προηγούμενα, το τμήμα της αναρχίας για την εκδοχή μεγιστοποίησης προκύπτει $\Theta(\sqrt{n})$. Το φράγμα είναι εφαρμοστό ακόμα και για απλές διαμορφώσεις αν και για την περίπτωση της ευθείας δεν είναι τόσο ευρύ αλλά περιορίζεται σε $\Theta(n^{1/3})$.

Το τμήμα της αναρχίας μπορεί να φραγεί κάνοντας κλιμακωτή αύξηση στο πλήθος των επιτρεπόμενων συστάδων.

Θεώρημα 5.6. *Εάν ο αριθμός των συστάδων περιοριστεί σε k , τότε το τμήμα της αναρχίας είναι το πολύ k .*

Συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί η ακόλουθη στρατηγική. Επιτρέπουμε στους παίκτες να φτάσουν σε Νας ισορροπία με περιορισμένο αριθμό συστάδων, έστω k . Το αντίστοιχο τμήμα της αναρχίας είναι το πολύ k και το κοινωνικό όφελος τουλάχιστον OPT/k , όπου OPT είναι η βέλτιστη επιτυχανόμενη κοινωνική ωφέλεια. Κατόπιν οι παίκτες αφήνονται ελεύθεροι να σχηματίσουν οποιοδήποτε αριθμό συστάδων μέσω δυναμικής βέλτιστης απόκρισης. Όπως προαναφέρθηκε, η κοινωνική ωφέλεια δεν ελαττώνεται στη δυναμική βέλτιστης απόκρισης. Ως αποτέλεσμα, σχηματίζεται Νας ισορροπία με κοινωνική ωφέλεια τουλάχιστον OPT/k .

5.2 Συσταδοποίηση προκαθορισμένου πλήθους συστάδων

[Feldman, Eytan & Naor, 2015]. Σε αυτή την κατηγορία παιγνίων, το πλήθος των συστάδων είναι προκαθορισμένο στον αριθμό k . Εξετάζονται δύο μέτρα συσταδοποίησης, το άθροισμα των αποστάσεων μεταξύ του κεντροειδούς της συστάδας και των μελών της και η μέγιστη απόσταση μεταξύ του κεντροειδούς της συστάδας και του πλέον απομακρυσμένου από αυτό κόμβου. Στην πρώτη περίπτωση το προκύπτον μοντέλο είναι το k -μέσου ενώ στη δεύτερη το k -κέντρο. Το κεντροειδές σε κάθε περίπτωση είναι ο κόμβος του γραφήματος που ελαχιστοποιεί το αντίστοιχο μέτρο, δηλαδή στο μοντέλο k -μέσου το σημείο που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία της συστάδας C ή το σημείο c που δίνεται από την εξίσωση

$$c = \arg \min_{v \in C} \sum_{u \in C} d(u, v)$$

και στο μοντέλο k -κέντρου το σημείο που ελαχιστοποιεί την μέγιστη απόσταση από όλους τους κόμβους της συστάδας C ή

$$c = \arg \min_{v \in C} \max_{u \in C} (d(u, v)).$$

Υπάρχει ωστόσο η περίπτωση να υπάρχουν περισσότεροι του ενός υποψήφιοι σε κάθε εκδοχή που ταυτόχρονα να πληρούν τις απαιτήσεις να αποτελέσουν κεντροειδή της συστάδας. Οι καταστάσεις αυτές καλούνται ισοπαλίες. Στην περίπτωση που οι ισοπαλίες λύνονται χρησιμοποιώντας στατικούς κανόνες, το παίγνιο μπορεί να μην συγκλίνει σε Νας ισορροπία ακόμα και σε απλές περιπτώσεις.

Πρόταση 5.1. *Με στατικούς κανόνες επίλυσης των ισοπαλιών μπορεί να μην υπάρχει Νας ισορροπία για τις εκδοχές k -μέσου και k -κέντρου, ακόμα και για ευθύγραμμες μετρικές με τρεις κόμβους.*

Εξετάζουμε παίγνιο τριών παικτών που επιθυμούν να χωριστούν σε δύο ομάδες. Υποθέτουμε τους στατικούς κανόνες επίλυσης ισοπαλιών που δίνονται από τη μετάθεση του πίνακα 5.2.

Πίνακας 5.2: Στατικοί κανόνες επίλυσης ισοπαλιών.

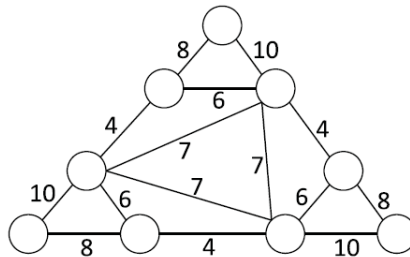
Κόμβοι στη συστάδα	Κεντροειδές
A, B	A
B, Γ	B
A, Γ	Γ

Δεν υπάρχει διαμέριση των παικτών που να μην υποκινεί τουλάχιστον ένα παίκτη σε απόκλιση, οδηγώντας έτσι σε έλλειψη δυναμικής ισορροπίας. Προτεινόμενη λύση είναι οι κανόνες επίλυσης ισοπαλιών που εξαρτώνται από την ιστορία. Η εισαγωγή τέτοιου είδους κανόνων αποτελεί επιπρόσθετο στοιχείο στην ηδονική διαμόρφωση, που υπαγορεύει ότι το μοναδικό κριτήριο ενός παίκτη είναι συμπαίκτης του και όχι το παρελθόν του παιγνίου. Επιπρόσθετα, τα κεντροειδή αλλάζουν μόνο εάν αναγκαστούν, δηλαδή μόνο εάν η αλλαγή μειώνει αυστηρά το κοινωνικό κόστος της συστάδας.

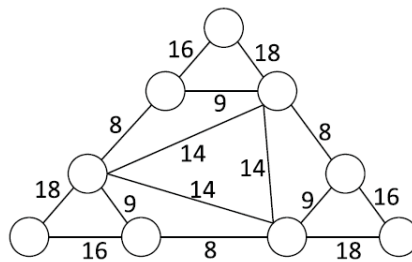
5.2.1 Αυθαίρετες διατάξεις

Θεώρημα 5.7. Στην περίπτωση γενικής διάταξης των κόμβων υπό το μοντέλο k -μέσου ή το μοντέλο k -κέντρου δεν υπάρχει πιστοποιητικό για επίτευξη Νας ισορροπίας.

Παραδείγματα αποτελούν τα γραφήματα των σχημάτων 5.2 και 5.3, για διαμέριση σε δύο συστάδες.



Σχήμα 5.2: Δεν υπάρχει Νας ισορροπία υποθέτοντας 2 συστάδες υπό το μοντέλο k -μέσου.



Σχήμα 5.3: Δεν υπάρχει Νας ισορροπία υποθέτοντας 2 συστάδες υπό το μοντέλο k -κέντρου.

Η απόδειξη της μη ύπαρξης Νας ισορροπίας για τις παραπάνω περιπτώσεις έρχεται εξετάζοντας όλες τις δυνατές θέσεις των κεντροειδών για όλες τις δυνατές διαμερίσεις. Η παραπάνω διερεύνηση μπορεί να βρεθεί στην αρχικά αναφερθείσα εργασία.

Μία παράκαμψη του προβλήματος που μπορεί να εξασφαλίσει την ύπαρξη μίας τουλάχιστον Νας σταθερής διαμέρισης σε κάθε στιγμιότυπο με ακέραιες αποστάσεις μεταξύ δύο κόμβων, είναι η αποδοχή της τοποθέτησης των κεντροειδών σε οποιοδήποτε σημείο ακμής.

Έστω α η απόσταση του κεντροειδούς από το άκρο της ακμής στην οποία είναι τοποθετημένο. Τότε χ.β.τ.γ. επιλέγουμε $\alpha \in [0, 1/2]$ και ακολούθως, το κόστος κόμβου u είναι είτε της μορφής $\delta_u + \alpha$ ή $\delta_u + (1 - \alpha)$. Μετατοπίζοντας ελαφρά το α στην περιοχή $[0, 1/2]$ και παίρνοντας την παράγωγο του αθροίσματος των τιμημάτων, θα είναι είτε σταθερό, που σημαίνει ότι τα ελάχιστα του συνολικού κόστους συστάδας ευρίσκονται σε $\alpha = 0$ ή $\alpha = 1/2$ ή μηδέν, που σημαίνει μη ύπαρξη διαφοράς ως προς το συνολικό κόστος του συνασπισμού από την τοποθέτηση του κεντροειδούς σε ημί ακέραια θέση.

Παρατηρούμε συνεπώς, ότι για κάθε κόμβο u της συστάδας υπάρχει κεντροειδής, που ισαπέχει με κάθε άλλο κεντροειδής από το u και είναι τοποθετημένο σε ημιακέραια θέση.

Θέλοντας να εφαρμόσουμε εξαντλητική αναζήτηση για Νας ισορροπία σε στιγμιότυπο του παιγνίου, παρατηρούμε ότι ασθενέστερη ισορροπία υπάρχει μόνο εάν υπάρχει και όταν όλα τα κεντροειδή είναι τοποθετημένα σε ημιακέραιες θέσεις. Η εν λόγω ισορροπία είναι η ασθενής Νας, υπό την οποία κανείς παίκτης δεν επιθυμεί να αλλάξει συστάδα εάν κατόπιν της αλλαγής, το κεντροειδές της νέας συστάδας μετατοπιστεί στο μακρινότερο από αυτόν δυνατό σημείο. Δηλαδή, ασθενής Νας ισορροπία είναι συσταδοποίηση όπου για κάθε παίκτη u συστάδας C_1 και κάθε συστάδα C_2 , $d(u, c(C_1)) \leq d(u, c(C_2^{+u}))$, όπου C_2^{+u} είναι η συστάδα C_2 κατόπιν της προσχώρησης σε αυτή του παίκτη u . Εξήγηση της προηγούμενης παρατήρησης γίνεται με σύγκριση ασθενούς Νας ισορροπίας \mathcal{E} με κεντροειδή κατά μήκος ακμών και της ίδιας συσταδοποίησης με κεντροειδή μετατεθειμένα στις πλησιέστερες ημιακέραιες θέσεις \mathcal{E}' . Συνεπώς για κάθε κόμβο u που ανήκει σε συστάδα C_1 , $|d(u, c(C_1), \mathcal{E}') - d(u, c(C_1), \mathcal{E})| \leq 1/4$ όπου $d(u, c(C_1), \mathcal{E})$ η απόσταση του κόμβου u από το κεντροειδές της συστάδας C_1 υπό την συσταδοποίηση \mathcal{E} . Εφόσον η \mathcal{E} είναι κατάσταση ισορροπίας $d(u, c(C_1), \mathcal{E}) \leq d(u, c(C_2), \mathcal{E}_{u \rightarrow C_2})$ όπου ο συμβολισμός $\mathcal{E}_{u \rightarrow C_2}$ σημαίνει τη συσταδοποίηση \mathcal{E} κατόπιν της μετακίνησης του u στη συστάδα C_2 της οποίας το κεντροειδές μετατέθηκε στην μακρινότερη από τον u δυνατή θέση. Επιπρόσθετα οι $\mathcal{E}_{u \rightarrow C_2}$ και $\mathcal{E}'_{u \rightarrow C_2}$ έχουν τους ίδιους κόμβους οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα επιχειρήματα το κεντροειδές του C_2 τίθεται σε ημιακέραια θέση δίνοντας $d(u, c(C_2), \mathcal{E}_{u \rightarrow C_2}) = d(u, c(C_2), \mathcal{E}'_{u \rightarrow C_2})$. Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε $d(u, c(C_1), \mathcal{E}) \leq d(u, c(C_2), \mathcal{E}_{u \rightarrow C_2})$ ή $d(u, c(C_1), \mathcal{E}') - 1/4 \leq d(u, c(C_2), \mathcal{E}_{u \rightarrow C_2})$ ή $d(u, c(C_1), \mathcal{E}') - 1/4 \leq d(u, c(C_2), \mathcal{E}'_{u \rightarrow C_2})$, αποδεικνύοντας ότι η \mathcal{E}' είναι επίσης ασθενής Νας ισορροπία.

Αφού απουσία ασθενούς Νας ισορροπίας σημαίνει απουσία της ισχυρότερης έννοιας σταθερότητας Νας ισορροπίας, μπορούμε να αποφανθούμε για τη δυνατότητα κατάληξης στιγμιότυπου σε Νας ισορροπία ελέγχοντας την ύπαρξη ασθενούς Νας ισορροπίας με κεντροειδή σε ημιακέραιες θέσεις.

Θεώρημα 5.8. Στη γενική περίπτωση υπό αμφοτέρα τα μοντέλα k -μέσου ή k -κέντρου, όπου τα κεντροειδή μπορούν να ευρίσκονται οπουδήποτε κατά μήκος ακμής, δεν υπάρχει πιστοποίηση για αποκατάσταση Νας ισορροπίας.

Στο πλαίσιο του μοντέλου k -μέσου το αποτέλεσμα αποδεικνύεται από τα προηγούμενα επιχειρήματα εφαρμοσμένα στο παίγνιο 2 συστάδων του σχήματος 5.2. Πρακτικά όλοι οι συνδυασμοί διαμερίσεων δύο συστάδων και αντίστοιχων δυνατών κεντροειδών διαπιστώνεται ότι δεν αποτελούν ασθενή Νας ισορροπία. Λογισμικό που εφαρμόζει τη διαδικασία αναφέρεται στην εργασία των Feldman et al.

Σύμφωνα με το μοντέλο k -κέντρου, τα κεντροειδή τοποθετούνται μόνο σε ημιακέραιες θέσεις. Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση αφού υποθέτοντας μη ημιακέραια κεντροειδή με μη ακέραιο μέρος $\alpha \in (0, 1/2)$ διαχωρίζουμε τις δύο περιπτώσεις. Έστω D το σύνολο των κόμβων με μέγιστη απόσταση από το κεντροειδές. Είτε όλοι οι κόμβοι $u \in D$ έχουν κόστος ίδιας μορφής μεταξύ των $\delta_u + \alpha$ και $\delta_u + (1 - \alpha)$ και συνεπώς είναι δυνατή μείωση κόστους για όλους τους κόμβους αυξάνοντας ή μειώνοντας αντίστοιχα το α ή υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος από κάθε είδους συνάρτηση κόστους. Σε αυτή την περίπτωση οι αποστάσεις τους από το κεντροειδές θα έπρεπε να είναι ίσες ή $\delta_{u_1} + \alpha = \delta_{u_2} + (1 - \alpha)$ που συνεπάγεται $\alpha = \frac{\delta_{u_1} + \delta_{u_2} + 1}{2}$ αποδεικνύοντας ότι το α είναι ημιακέραιο. Έτσι με τον ίδιο αλγόριθμο όπως

στο μοντέλο k -μέσου, του σχήματος 5.3, αποδεικνύεται ο ισχυρισμός του θεωρήματος.

Μη έχοντας ως τώρα θετικά αποτελέσματα ύπαρξης N ας ισορροπίας, επιβάλλουμε ποινή στους αποκλίνοντες κόμβους. Το επιπρόσθετο κόστος που απορροφούν οι αποκλίνοντες είναι η αποζημίωση για την επανατοποθέτηση του κεντροειδούς που καταβάλλουν στη συστάδα υποδοχής. Αυτή η επιβάρυνση ισούται με την απόσταση που διανύεται από το κέντρο λόγω της συμπερίληψης του νέου μέλους. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, κόμβος θα αποκλίνει μόνο εάν η απόστασή του από το προ της απόκλισης κεντροειδές του μελλοντικού του συνασπισμού, είναι μικρότερη από την απόσταση του από το κεντροειδές του τρέχοντος συνασπισμού του. Συνεπώς ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.9. *Τα παίγνια συσταδοποίησης προκαθορισμένου πλήθους συστάδων σε γενικές διατάξεις για μοντέλο k -μέσου είτε k -κέντρου, με ποινές συγκλίνουν σε N ας ισορροπίες που επιτυγχάνονται με δυναμική βέλτιστης απόκρισης.*

Απόδειξη. Για το μοντέλο k -μέσου, υποθέτουμε ότι παίκτης u επιθυμεί να αποκλίνει από τη συστάδα C_1 στη C_2 . Παρουσία των ποινών έχουμε $d(u, c(C_2^{+u})) + d(c(C_2^{+u}), c(C_2)) < d(u, c(C_1))$. Συνεπώς ο παίκτης u μειώνει το κόστος του αποκλίνοντας. Προφανώς κάθε άλλος κόμβος $v \in C_1$ είτε δεν μεταβάλλει το κόστος του είτε το μειώνει λόγω της κίνησης του κέντρου του C_1 . Τελικά οι κόμβοι στη C_2 κατόπιν της ένταξης του u , αποφασίζουν νέο κεντροειδές που ελαχιστοποιεί το κόστος της συστάδας τους, άρα και το κοινωνικό κόστος. Καθώς το κοινωνικό κόστος μειώνεται με κάθε κίνηση βέλτιστης απόκρισης, η δυναμική βέλτιστης απόκρισης συγκλίνει σε N ας ισορροπία. \square

Αφού οι κινήσεις βέλτιστης απόκρισης βελτιώνουν το κοινωνικό κόστος, άμεσα συνεπάγεται ότι

Θεώρημα 5.10. *Το τίμημα της σταθερότητας για k -μέσου ή k -κέντρου παίγνιο προκαθορισμένου πλήθους συστάδων, είναι 1.*

Η βέλτιστη λύση δηλαδή που επιτυγχάνεται από κόμβους που επιλέγουν τις πλέον προσοδοφόρες στρατηγικές είναι N ας ισορροπία λαμβάνοντας υπόψιν τη μείωση του κοινωνικού κόστους σε κάθε μία από τις κινήσεις των παικτών.

Όσον αφορά στο τίμημα της αναρχίας της συσταδοποίησης προκαθορισμένου αριθμού κόμβων, εξετάζοντας την ύπαρξη άνω φράγματος διαπιστώνουμε ότι η απάντηση είναι αρνητική.

Θεώρημα 5.11. *Το τίμημα της αναρχίας αμφοτέρων των k -μέσου και k -κέντρου παιγνίων προκαθορισμένου πλήθους συστάδων είναι μη φραγμένο.*

Παράδειγμα αποτελεί στιγμιότυπο με τρεις παίκτες στις συντεταγμένες 0, 1 και M επί ευθείας, με $M \gg 1$. Η διαμέριση $\{0\}, \{1, M\}$ όπου το 1 είναι το κεντροειδές του τελευταίου, είναι N ας ισορροπία καθώς κανείς παίκτης δεν ενδιαφέρεται να επιλέξει άλλον από τους υπάρχοντες συνασπισμούς. Το αντίστοιχο κοινωνικό κόστος είναι M . Η πιο επιθυμητή από πλευράς κοινωνικής ωφέλειας συσταδοποίηση είναι $\{0, 1\}, \{M\}$ με κοινωνικό κόστος 1. Συνεπώς το τίμημα της αναρχίας στην περίπτωση αυτή είναι $\frac{M}{1} = M$, απόντος supremum.

5.2.2 Δενδρικές διατάξεις

Ειδική ενδιαφέρουσα διάταξη είναι η δεντρική. Παίγνιο με αυτή τη διάταξη αποτελεί η εύρεση συγκεκριμένου πλήθους χαρακτηριστικών ατόμων στην ιεραρχία ζώντων οργανισμών. Οι κόμβοι του δέντρου είναι εξελιγμένα είδη που είναι απόγονοι κοινού προγόνου και κάθε ακμή συνδέει ένα είδος με τον άμεσο πρόγονό του. Υποτίθενται είδη που εξελίσσονται μέσω μετάλλαξης και όχι διασταυρώσεις ειδών. Η απόσταση μεταξύ ειδών αντανακλά την ομοιότητα του γενετικού τους κώδικα.

Μοντέλο μέσου

Βασική ιδιότητα στην απόδειξη Νας ισορροπίας σε αυτή την περίπτωση αποτελεί η ταύτιση του κεντροειδούς δέντρου με κάποιο από τα μέσα του. Το μέσο δέντρου ορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο που ορίζεται το μέσο δείγματος στη στατιστική. Είναι δηλαδή ένας κόμβος που αν αφαιρεθεί από δέντρο, παραμένουν συνδεδεμένες συνιστώσες των οποίων η πληθικότητα είναι το πολύ $\lceil \frac{N-1}{2} \rceil$. Θέλοντας να διατηρήσουμε το προνόμιο χρήσης αυτής της ιδιότητας, εφαρμόζουμε στρατηγική κατά την οποία κάθε συστάδα παραμένει συμπαγής δηλαδή δεν περιέχει δύο κόμβους που ανάμεσά τους να υπάρχει κόμβος που δεν ανήκει στη συστάδα. Η κατάσταση καλείται συσταδοποίηση με την ιδιότητα της κλειστότητας ή κλειστή διαμόρφωση.

Το κεντροειδές κείται σε μέσο της συστάδας υπό την ιδιότητα της κλειστότητας καθώς υποθέτοντας το αντίθετο οδηγούμαστε σε άτοπο. Έστω ότι δεν κείται σε μέσο. Τότε αφαιρώντας το κεντροειδές u , παραμένει συνεκτική συνιστώσα Q_{max} με τουλάχιστον $\lceil \frac{N-1}{2} \rceil + 1$ κόμβους. Ωστόσο αν και το κεντροειδές μετακινηθεί στην γειτονιά του u στο Q_{max} , το κόστος της πλειοψηφίας των κόμβων της συστάδας μειώνεται, οδηγώντας σε αντίφαση με το ότι το u είναι κεντροειδές.

Τώρα ακολουθεί η ακόλουθη διαδικασία. Σκοπεύοντας στον μετασχηματισμό διαμόρφωσης σε όμοια ή καλύτερη κλειστή, οι θέσεις των κεντροειδών καρφώνονται στην τρέχουσα θέση τους και οι παίκτες επιλέγουν την πλησιέστερή τους. Μέχρι αυτού του σημείου το κόστος κάθε κόμβου δεν αυξάνεται, ούτε και το κοινωνικό κόστος. Κατόπιν γίνεται η επανατοποθέτηση των κεντροειδών που προφανώς ελαττώνει το κοινωνικό κόστος.

Η ύπαρξη κόμβου u που επιθυμεί να αποκλίσει από τη συστάδα C_1 στη συστάδα C_2 μαρτυρά ότι όλοι οι κόμβοι μεταξύ του u και της C_2 προτιμούν ομοίως τη C_2 . Συνεπώς κόμβος u προσκείμενος στη C_2 αφήνεται να κάνει κίνηση βέλτιστης απόκρισης προσχωρώντας στη C_2 . Στην περίπτωση που η C_1 παραμείνει συνδεδεμένη, η διαδικασία συνεχίζεται με την κίνηση βέλτιστης απόκρισης άλλου κόμβου, ειδήλλως μετατίθενται στην C_2 όλοι οι εναπομείναντες κόμβοι της C_1 εκτός εκείνων που ανήκουν στη συνδεδεμένη συνιστώσα της C_1 που περιέχει το κεντροειδές της C_1^{-u} . Η καταληκτική διαμόρφωση είναι κλειστή.

Προϊούσης της διαδικασίας το κοινωνικό κόστος μειώνεται.

Αρχικά, κατόπιν της ενσωμάτωσης του u στην C_1 , τα κόστη του u και του C_1^{-u} προφανώς μειώνονται. Ως προς τα κόστη των κόμβων του C_2 διακρίνονται δύο περιπτώσεις. Αφ' ενός ο u προσχωρεί σε συνδεδεμένη συνιστώσα προσκείμενη στο $c(C_2)$, μεγέθους το πολύ $\lceil \frac{|C_2|}{2} \rceil - 1$. Συνεπώς κατόπιν της ενσωμάτωσης του u , το $c(C_2)$ παραμένει κεντροειδές και το κόστος των κόμβων του C_2 παραμένει αμετάβλητο. Αφ' εταίρου, στην περίπτωση που ο u προσχωρήσει σε

συνδεδεμένη συνιστώσα προσκείμενη στο $c(C_2)$, μεγέθους $\lceil \frac{|C_2|}{2} \rceil$ το κεντροειδές μετακινείται στον κόμβο που πρόσκειται στο $c(C_2)$, στην κατεύθυνση του u . Ο κόμβος αυτός εξακολουθεί να είναι μέσο του C_2 άρα και οι αποστάσεις του από κόμβους του C_2 είναι ταυτόσημες με αυτές που ο $c(C_2^{-u})$ έχει από κόμβους του C_2 .

Δεύτερον, το κόστος των λοιπών κόμβων του C_1 μειώνεται ως συνέπεια της συμπερίληψής τους, πλην εκείνων που περιλαμβάνουν τη συνδεδεμένη συνιστώσα που περιέχει το κεντροειδές του C_1^{-u} . Ο τελευταίος ισχυρισμός αποδεικνύεται καθώς εάν ο u έχει κίνητρο να αποκλίσει στην C_2 , $d(u, c(C_1)) > d(u, c(C_2))$. Επιπρόσθετα, για όλους τους κόμβους v στην $C_1 \setminus \{nodes \in connected\ component\ of\ c(C_1)\}$, ισχύει

$$d(v, c(C_2)) = d(v, u) + d(u, c(C_2)) \text{ και } d(v, c(C_1)) = d(v, u) + d(u, c(C_1^{-u}))$$

και προφανώς

$$d(u, c(C_1)) \leq d(u, c(C_1^{-u})) \text{ και } d(u, c(C_2)) \leq d(u, c(C_2^{+u})).$$

Συνθέτοντας τις ανισότητες παίρνουμε

$$d(v, c(C_2^{+u})) < d(v, c(C_1^{-u})).$$

Συνεπώς αυτό το βήμα δεν αυξάνει το κοινωνικό κόστος.

Η επανατοποθέτηση των κεντροειδών των νέων κλειστών συστάδων δεν αυξάνει το κοινωνικό κόστος καθώς είναι ενέργεια που γίνεται για τη μείωσή του.

Άρα υπάρχει συνάρτηση δυναμικού με ίσο κοινωνικό κόστος, που μειώνεται με κάθε κίνηση βέλτιστης απόκρισης και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι στρατηγικές των παικτών είναι πεπερασμένες, το παίγνιο συγκλίνει σε ελάχιστο.

Θεώρημα 5.12. Υπάρχει Νας σταθερή διαμέριση με το μοντέλο k -μέσου για δενδρική διάταξη.

Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση, η βέλτιστη λύση που επιτυγχάνεται όταν κανείς παίκτης δεν μπορεί να κάνει επιπλέον κίνηση βέλτιστης απόκρισης, είναι επίσης Νας ισορροπία και υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο καθώς κανένα τμήμα της παραπάνω διαδικασίας δεν εισάγει περισσότερη πολυπλοκότητα.

Θεώρημα 5.13. Το τμήμα της σταθερότητας του μοντέλου k -μέσου για δενδρική διάταξη είναι 1.

Μοντέλο κέντρου

Εικάζεται ότι υπάρχει Νας ισορροπία σε κάθε στιγμιότυπο του παιγνίου συσταδοποίησης υπό το μοντέλο k -κέντρου. Ωστόσο τα αποδεδειγμένα αποτελέσματα εκτείνονται μέχρι του σημείου όπου στα κεντροειδή επιτρέπεται να τοποθετηθούν σε κάθε σημείο του δέντρου, δηλαδή σε κάθε κόμβο τους ή κατά μήκος οιασδήποτε ακμής. Σημειωτέον ότι σε αυτή τη διαμόρφωση, τα κεντροειδή τοποθετούνται στο μέσο διαμέτρου δέντρου. Σε περίπτωση περισσότερων της μίας διαμέτρων εύκολα διαπιστώνεται ότι τα μέσα τους ταυτίζονται. Ως διάμετρος ορίζεται το μακρύτερο απλό μονοπάτι μεταξύ κόμβων του δέντρου.

Εξετάζουμε τώρα τη δυναμική βέλτιστης απόκρισης του παιγνίου. Δεδομένης διαμέρισης \mathcal{E} υποθέτουμε παίκτες σε μη φθίνουσα σειρά σύμφωνα με την απόστασή τους από το κεντροειδές τους στο $D = (d(u_1, c(C_{u_1})), d(u_2, c(C_{u_2})), \dots, d(u_n, c(C_{u_n})))$. Υποθέτουμε τώρα παίκτη u

που επιθυμεί να αποκλίνει από τη C_1 στην προτιμότερή του για τη δεδομένη στιγμή συστάδα C_2 . Κατόπιν της κίνησης οι παίκτες της C_1 θα έχουν μικρότερες ή ίσες αποστάσεις από το κεντροειδές. Το κεντροειδές της C_2 δεν θα μετακινηθεί στην περίπτωση που ο u δεν είναι τερματικός κόμβος διαμέτρου του C_2^{+u} και οι κόμβοι του C_2 θα διατηρήσουν τα κόστη τους. Αντιθέτως, εάν το κεντροειδές του C_2 μετακινηθεί ακολουθώντας την προσθήκη του παίκτη u , ο u αποδεικνύεται άκρο διαμέτρου του C_2^{+u} και συνεπώς το κόστος κάθε κόμβου του C_2 , στο C_2^{+u} θα είναι λιγότερο από το νέο κόστος του u . Στη διάταξη D όλοι οι κόμβοι αριστερά του u κατόπιν της απόκλισης θα έχουν κόστος αμετάβλητο ή μειωμένο, ο u θα έχει λιγότερο κόστος και οι υπόλοιποι κόμβοι με αλλαγμένο κόστος θα έχουν λιγότερο από $d(u, c(C_2^{+u}))$. Άρα λαμβάνοντας ως συνάρτηση δυναμικού τη διάταξη D , παρατηρούμε ότι κατόπιν κίνησης βέλτιστης αντίδρασης μειώνεται λεξικογραφικά, σημαίνοντας μείωση του κόστους της διαμόρφωσης που εκφράζεται με την αριστερότερη τιμή της διάταξης. Συνεπώς αφού ο αριθμός των στρατηγικών των παικτών είναι πεπερασμένος, η δυναμική βέλτιστης απόκρισης συγκλίνει σε Νας ισορροπία όπου δεν υπάρχει παίκτης που να μπορεί να μειώσει το κόστος του αλλάζοντας μονομερώς στρατηγική.

Επιπλέον σε βέλτιστη λύση με ελάχιστο κόστος κανείς παίκτης δεν μπορεί να κάνει κίνηση βέλτιστης απόκρισης, καταλήγοντας σε μοναδιαίο τίμημα σταθερότητας.

Θεώρημα 5.14. *Το μοντέλο k -κέντρου όπου τα κεντροειδή επιτρέπεται να ευρίσκονται σε ακμές έχει πάντα Νας ισορροπία. Επιπλέον το κόστος της σταθερότητας στην περίπτωση αυτή είναι 1.*

Ωστόσο η επιτευχθείσα Νας ισορροπία μπορεί να είναι απεριόριστα υποβέλτιστη. Θεωρούμε έξι κόμβους σε ευθεία στις θέσεις $0, M, M + \epsilon, 2M, L, L + \epsilon$ με $M \ll L$. Η συσταδοποίηση $\{\{0, M\}, \{M + \epsilon, 2M\}, \{L\}, \{L + \epsilon\}\}$ είναι Νας ισορροπία που κοστίζει στην κοινωνία $M/2$, ωστόσο η διαμέριση $\{\{0\}, \{M, M + \epsilon\}, \{2M\}, \{L, L + \epsilon\}\}$ εισάγει κόστη $\epsilon/2$. Άρα το τίμημα της αναρχίας εκτινάσσεται απεριόριστα στην τιμή $\frac{M}{\epsilon}$.

5.2.3 Γραμμικές διατάξεις

Μία ακόμα φυσική διάταξη είναι η γραμμική. Ένα παράδειγμα είναι ο προκαθορισμένος αριθμός εξόδων από δρόμο ταχείας κυκλοφορίας προς παρακείμενες κωμοπόλεις και χωριά. Οι παίκτες είναι οι προβολές των δήμων στο δρόμο και τα μεταξύ των κόμβων διαστήματα είναι τα τμήματα του δρόμου μεταξύ των χωριών.

Μοντέλο μέσου

Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι το κέντρο συστάδας συμπίπτει με κάποιο από τα μέσα της. Μέσα εννοούμε κόμβους για τους οποίους η διαφορά του πλήθους των κόμβων αριστερά και δεξιά τους είναι το πολύ μοναδιαία. Υποθέτουμε γραμμική διαμέριση και παίκτη u που επιθυμεί να αποκλίνει από τη διαμέριση C_1 στη συστάδα C_2 και εξετάζουμε την επίπτωση στα κόστη των παικτών.

- Προφανώς τα μέλη του C_1^{-u} θα έχουν μειωμένα ή αμετάβλητα κόστη κατόπιν της απόκλισης, αφού αλλαγή του κεντροειδούς τους μπορεί μόνο να μειώσει την απόστασή τους από αυτό και μη μετακίνησή του αφήνει τις αποστάσεις ως έχουν.

- Ο κόμβος u έχει μικρότερο κόστος κατόπιν της απόκλισης.
- Για τους κόμβους του C_2^{+u} εξετάζονται δύο περιπτώσεις.
 - 1) ο αριθμός τους είναι άρτιος και κατόπιν του συνεταιρισμού τους με τον u ο αριθμός τους γίνεται περιττός. Εάν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας το κεντροειδές παραμείνει αμετάβλητο, οι αποστάσεις παραμένουν σταθερές. Εάν το κεντροειδές μετακινηθεί στο άλλο μέσο του C_2 , οι αποστάσεις των κόμβων του C_2 από το νέο τους κεντροειδές, παραμένουν ίδιες αφού κόμβος συστάδας ισαπέχει από τα δύο μέσα. 2) ο αριθμός τους είναι περιττός και η προσθήκη του u κάνει το σύνολο άρτιο. Σε αυτή την περίπτωση η C_2 έχει μόνο δύο μέσα m . Οπότε έπειτα από την απόκλιση του u , κάθε m παραμένει μέσο και κεντροειδές.

Συνεπώς το παίγνιο περιγράφεται από συνάρτηση δυναμικού, δηλαδή η συνάρτηση συνολικού κόστους και η δυναμική βέλτιστης απόκρισης συγκλίνουν σε Νας ισορροπία.

Μοντέλο κέντρου

Έστω C_1 η συστάδα του αριστερότερου κόμβου της διάταξης. Κινούμενοι δεξιά καλούμε C_2 τη συστάδα του πρώτου κόμβου v που συναντάμε και δεν είναι μέλος της C_1 . Σε περίπτωση που το κεντροειδές της C_1 κείται αριστερά από το v τότε είτε οι κόμβοι της C_1 οι οποίοι είναι δεξιά του v θα προτιμούσαν να αποκλίνουν ή ο v θα προτιμούσε να αποκλίνει. Εξ' άλλου, εάν το κεντροειδές του C_1 κείται δεξιά του v τότε είτε οι κόμβοι του C_1 αριστερά του v θα αποκλίνουν είτε ο v θα αποκλίνει. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο πιθανά εξαγόμενα. Το πρώτο είναι η C_1 να βρίσκεται σε κανονική μορφή, να αποτελείται δηλαδή μόνο από διαδοχικούς κόμβους και το δεύτερο είναι ο v να ενσωματωθεί στη C_1 . Επαγωγικά, συνάγεται ότι κάθε στιγμιότυπο φθάνει κατόπιν πεπερασμένου αριθμού αποκλίσεων σε κανονική μορφή, δηλαδή κάθε συστάδα βρίσκεται σε κανονική μορφή.

Ως ένα ακόμα ενδιάμεσο βήμα στην προσέγγιση της ύπαρξης Νας ισορροπίας παρατηρούμε ότι κάθε στιγμιότυπο του παιγνίου έχει ημί-Νας ισορροπία. Στην ισορροπία αυτή δεν υπάρχει αριστερότερος παίκτης σε κανονική μορφή με κίνητρο απόκλισης. Τέτοια διαμέριση σε κάθε στιγμιότυπο παιχνιδιού αποτελούν οι $k - 1$ δεξιότεροι κόμβοι όταν ανήκουν σε μονομελείς συστάδες ενώ οι υπόλοιποι $|V| - k + 1$ ανήκουν στην αριστερότερη συστάδα. Οι $k - 1$ δεξιότερες συστάδες δεν περιέχουν αποκλίνοντες αφού τα κόστη είναι τα χαμηλότερα δυνατά, δηλαδή μηδέν. Ο αριστερότερος παίκτης της αριστερότερης συστάδας δε θα επιθυμούσε απόκλιση καθώς το καινούργιο του κεντροειδές δεν θα ήταν πλησιέστερα του τοποθετημένο.

Για την τρέχουσα διαμόρφωση ημί-Νας σταθερότητας, επιτρέπουμε στον δεξιότερο παίκτη $right(i)$ της συστάδας i να τελέσει απόκλιση. Σε περίπτωση που αποκλίνει η πλέον επιθυμητή συστάδα του θα είναι η $i + 1$, θεωρώντας εξ' αριστερών απαρίθμηση των συστάδων. Συνεπώς η συνάρτηση δυναμικού

$$\Phi = \sum_{i \in k} d(left(1), left(i))$$

ελαττώνεται καθώς ο αριστερός κόμβος της $i + 1$ συστάδας πλησιάζει τον $left(1)$ και οι υπόλοιποι παραμένουν σταθεροί. Καθώς οι δυνατές δεξιές αποκλίσεις είναι πεπερασμένες, η Φ

παίρνει ελάχιστη τιμή που αντιστοιχεί σε Νας ισορροπία αφού ούτε δεξιότεροι ούτε αριστερότατοι κόμβοι της κανονικής διαμόρφωσης έχουν κίνητρα απόκλισης.

5.3 Συνεργατική συσταδοποίηση σε δίκτυα

[Hoefler, Vaz & Wagner, 2015]. Περιπτώσεις όπου οι παίκτες χρειάζεται πριν συνεργαστούν να γνωριστούν ή που η προσβασιμότητα είναι μειωμένη λόγω έλλειψης ορατότητας ή επικοινωνίας, περιγράφονται από αυτό το πλαίσιο. Εφικτοί συνασπισμοί είναι εκείνοι που τα μέλη τους είναι συνδεδεμένα μέσω υπαρχόντων συνασπισμών και/ή μονίμων συνδέσεων του δικτύου. Οι συνασπισμοί προσφέρουν ίδια οφέλη σε όλα τα μέλη τους. Συναφείς καταστάσεις εμφανίζονται σε πολλών ειδών συνεργασίες. Κατά τη σύσταση μίας επιστημονικής ομάδας που θα πραγματοποιήσει δημοσιευμένη ερευνητική εργασία, η γνωριμία είναι απαραίτητη. Ομοίως σε επαγγελματικές συνέργειες απαιτείται αρχική, έστω μικρή, κοινή προσπάθεια πριν τον συνεταιρισμό με ομοιόμορφο διαμοιρασμό των κερδών.

Το υποβόσκον δίκτυο συμβολίζεται ως $N(V, L)$ όπου στο V απεικονίζονται οι n παίκτες του παιχνιδιού και στο L οι μόνιμες συνδέσεις μεταξύ κόμβων του παιχνιδιού. Συνεπώς στο παραπάνω επιστημονικό παράδειγμα, το V συμβολίζει τους ερευνητές ενώ το L μπορεί να συμβολίζει την προηγούμενη σχέση επιβλέποντα καθηγητή-υποψηφίου διδάκτορα. Θεωρώντας \mathcal{S} την τρέχουσα κατάσταση συνασπισμών, ορίζουμε ως \mathcal{G} το σύνολο των δομών απόκλισης. Γράφος $G \in \mathcal{G}$ καλείται γράφος διαμόρφωσης, δηλαδή μία πρότυπη διάταξη που όταν αναγνωριστεί στην ένωση του δικτύου με όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ νυν συνεργατών, αποτελεί υποψήφιο συνασπισμό. Εάν υπογράφος C του $N(V, L) \cup E(K_C)$ είναι ισομορφικός με μέλος του \mathcal{G} , τότε ο C καλείται προσβάσιμος, όπου K_C ο πλήρης γράφος παικτών της συστάδας C . Επιπρόσθετα, εάν για κάθε παίκτη $v, w(C) > w(C_v)$, που σημαίνει ότι το βάρος του C είναι μεγαλύτερο από το βάρος του τρέχοντος συνασπισμού κάθε παίκτη που ανήκει στον C , τότε ο C είναι τοπικά κωλύων συνασπισμός για την \mathcal{S} . Το βάρος μονομελών συνασπισμών $C_v, v \in V$, θεωρείται μηδενικό ή $w(C_v) = 0$. Το πλήθος των δυνατών συνασπισμών $|\mathcal{C}|$ συμβολίζεται με m όπου \mathcal{C} το σύνολο των δυνατών συνασπισμών. Επίλυση τοπικά κωλύοντος συνασπισμού C σημαίνει ότι συνασπισμοί που τέμνονται ως προς τους παίκτες τους με τον C καταργούνται και εισάγονται τοπικές συνδέσεις στην τρέχουσα κατάσταση \mathcal{S} έτσι ώστε τα μέλη του C να συνιστούν κλίκα. Οι τοπικές συνδέσεις κατηγορημένων συνασπισμών εξαλείφονται.

Στη συνέχεια διαχωρίζουμε περιπτώσεις για τα δυνητικά μέλη του \mathcal{G} .

1. Έστω ότι το σύνολο των δομών απόκλισης αποτελείται μόνο από πλήρη γραφήματα με πλήθος κόμβων i , τότε κατόπιν του βήματος τοπικής βελτίωσης, δηλαδή της συμπερίληψης ενός κωλύοντος συνασπισμού στη συσταδοποίηση με παράλληλη κατάργηση των επικαλυπτόμενων συνασπισμών, δεν εισάγονται νέες ακμές. Ωστόσο κάποιες προσωρινές ακμές πιθανώς εξαλείφονται.

Επιπρόσθετα, ένας επιλυμένος κωλύων συνασπισμός μεγίστων απολαβών δεν θα καταργηθεί, συνεπώς η δυναμική επίλυσης βέλτιστων κωλυόντων συνασπισμών συγκλίνει σε το πολύ n βήματα. Συμπερασματικά, εάν εντάσσεται σε κάθε γύρο της συσταδοποίησης ένας τοπικά κωλύων συνασπισμός, η δυναμική συγκλίνει στη μέση περίπτωση

σε το πολύ $O(mn)$ βήματα, που είναι πολυωνυμικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.15. Έστω $\mathcal{G} \subseteq \{G_i \mid i = 1, \dots, n\}$ όπου G_i πλήρης γράφος i παικτών. Κάθε τοπικό παίγνιο σχηματισμού συνασπισμών που χρησιμοποιεί το \mathcal{G} έχει μονοπάτι προς τη σταθερότητα με n το πολύ βήματα βελτίωσης, ξεκινώντας από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση \mathcal{S} . Επιπρόσθετα, δυναμική τυχαίων επιλύσεων συγκλίνει σε σταθερή κατάσταση σε αναμενόμενο χρόνο το πολύ $O(mn)$.

- Εάν τώρα το σύνολο των δομών απόκλισης περιέχει μόνο αστέρια $\mathcal{G} \subseteq \{H_i \mid i = 1, \dots, n\}$ από i κόμβους, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η προηγούμενη προσέγγιση, καθώς κάθε δομή απόκλισης που δεν είναι πλήρης, δυνητικά εισάγει συνδέσεις όταν εφαρμόζεται. Ωστόσο το παίγνιο αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως παίγνιο σχηματισμού συνασπισμών με περιορισμούς [Hoefler & Wagner, 2014]. Σε τέτοια παίγνια το σύνολο των δημιουργούμενων και καταργούμενων συνασπισμών ορίζεται από ένα σύνολο κανόνων παραγωγής και κυριάρχησης. Οι κανόνες παραγωγής προβλέπουν ποιοι συνασπισμοί μπορούν να δημιουργηθούν ενώ οι κανόνες κυριάρχησης αποκλείουν τους λιγότερο προσοδοφόρους από τους υποψήφιους συνασπισμούς.

Οι κανόνες παραγωγής στο παίγνιό μας αντικατοπτρίζουν την ιδιότητα όλοι οι προσβάσιμοι συνασπισμοί να βασίζονται σε το πολύ ένα συνασπισμό $C \in \mathcal{S}$, όπου \mathcal{S} η τρέχουσα κατάσταση. Δύο συστάδες μορφής αστεριού που μοιράζονται ακμή, μοιράζονται και τα κέντρα τους συνεπώς το κέντρο νεοφυούς συνασπισμού που χρησιμοποιεί κόμβους από περισσότερους του ενός συνασπισμούς που καταργεί, ανήκε σε περισσότερους του ενός συνασπισμούς. Αφού κόμβος ανήκε σε 2 συστάδες, η πρότερη κατάσταση δεν ήταν συσταδοποίηση, αντίφαση. Συνεπώς οι κανόνες παραγωγής είναι της μορφής

$$T = \{(\emptyset, C) \mid C \in \mathcal{C}, H_{|C|} \in N, H_{|C|} \in \mathcal{G}\} \cup \\ \{(\{C'\}, C) \mid C, C' \in \mathcal{C}, C \cap C' \neq \emptyset, H_{|C|} \in N \cup \{C'\}, H_{|C|} \in \mathcal{G}\}.$$

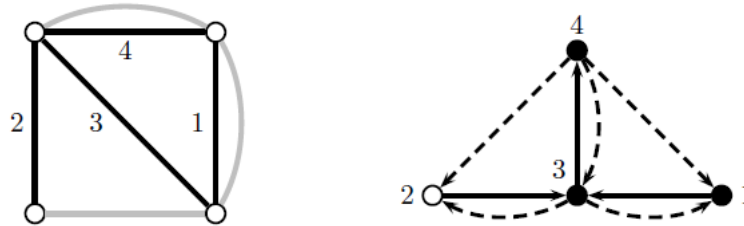
Υπενθυμίζεται ότι το πρώτο όρισμα στην παρένθεση αντιστοιχεί στους απαιτούμενους κόμβους στο \mathcal{S} , ενώ το δεύτερο αναφέρεται στην προκύπτουσα συστάδα. Οι κανόνες κυριάρχησης είναι της μορφής

$$D = \{(\{C'\}, C) \mid C, C' \in \mathcal{C}, C \cap C' \neq \emptyset, w(C') \geq w(C)\}.$$

Όπου πρώτο όρισμα στην παρένθεση είναι υπάρχων συνασπισμός στο \mathcal{S} που έχει υψηλότερη αξία από την υποψήφια συστάδα του δεύτερου ορίσματος. Έχοντας περιγράψει το παίγνιο με συνεπείς κανόνες παραγωγής και κυριάρχησης και αρχική συσταδοποίηση \mathcal{S}_0 , ορίζουμε τον υπεργράφο κίνησης αντικειμένου $G_{mov} = (V, V_g, T_{mov}, D_{mov})$. Με αυτό το γράφο, κάθε συνασπισμός από το \mathcal{C} απεικονίζεται σε κόμβο και συνασπισμοί που βασίζονται αποκλειστικά σε μόνιμους συνδέσμους και συνεπώς είναι αυτοφυείς είναι μέλη του V_g . Συνεπώς $V = \{v_c \mid C \in \mathcal{C}\}$ και $V_g = \{v_c \mid C \in \mathcal{C}_g\}$, με \mathcal{C}_g το σύνολο των βασισμένων καθαρά στην υποδομή, συνασπισμών. Μία συσταδοποίηση αντιστοιχεί στους γεμισμένους κόμβους του υπεργράφου κίνησης αντικειμένου, άρα

γεμισμένοι κόμβοι προσδιορίζουν τους τρέχοντες υπάρχοντες συνασπισμούς. Οι δυνητικές αποκλίσεις λόγω υπάρχοντων συνασπισμών συμβολίζονται από τις κατευθυνόμενες ακμές ανταλλαγής $T_{mov} = \{(v_{C_1}, v_{C_2}) \mid (\{C_1\}, C_2) \in \mathcal{C}, w(C_1) < w(C_2)\}$. Οι εν λόγω ακμές σχηματίζουν ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφο καθώς η ύπαρξή τους εισάγει μερική διάταξη στους συνασπισμούς. Τέλος με $D_{mov} = D$ συμβολίζονται κατευθυνόμενες ακμές κυριάρχησης που κατευθύνονται από συνασπισμό C_1 σε συνασπισμό C_2 για τους οποίους $w(C_1) \geq w(C_2)$.

Παράδειγμα υπεργράφου κίνησης αντικειμένου παρουσιάζεται στο σχήμα 5.4. Η δυνα-



Σχήμα 5.4: Αριστερά: Παίγνιο σχηματισμού συνασπισμών με περιορισμένη ορατότητα. Οι συνδέσεις του μόνιμου δικτύου εμφανίζονται γκρι ενώ οι πραγματοποιήσιμοι συνασπισμοί μαύροι. Ο γράφος σχηματισμού είναι δύο συνδεδεμένοι κόμβοι, δηλαδή ένα ταίριασμα. Οι αριθμοί αντιστοιχούν στα βάρη των συνασπισμών.

Δεξιά: Ο αντίστοιχος υπεργράφος κίνησης αντικειμένου. Κόμβοι με γέμισμα αντιστοιχούν σε νυν προσβάσιμους συνασπισμούς, ενώ κενοί κόμβοι στα υπόλοιπα μέλη του \mathcal{C} . Συνεχόμενες ακμές ανήκουν στο σύνολο T_{mov} ενώ διακεκομμένες στο σύνολο D_{mov} .

μική χωρίζεται σε δύο φάσεις.

- Φάση 1

Ξεκινώντας από κάποιους αρχικά γεμισμένους κόμβους, εξετάζουμε την ύπαρξη προτεινόμενων επιλύσεων από το T_{mov} που οδηγούν σε μη κυριαρχούμενους συνασπισμούς. Εάν βρεθούν τέτοιοι, επιλύονται, δηλαδή εάν εντοπιστεί προσβάσιμη θέση που κυριαρχεί τρέχοντα συνασπισμό, το γέμισμα που αντιστοιχεί στον v διασχίζει τις ακμές ανταλλαγής μέχρι τη θέση κυριαρχίας και ο γύρος ολοκληρώνεται.

- Φάση 2

Με τον ίδιο τρόπο εστιάζουμε σε όλες τις προσβάσιμες θέσεις από το $v \in V_g$. Επαναληπτικά διαχωρίζονται προσβάσιμοι κόμβοι v_C με μέγιστο βάρος $w(C)$, γεμίζονται οι αντίστοιχοί τους αρχικοί κόμβοι $v \in V_g$ και τα γέμισμα διασχίζουν το μονοπάτι των ακμών ανταλλαγής που οδηγεί από το v στο v_C . Η φάση επαναλαμβάνεται έως την εξάντληση των προσβάσιμων κόμβων.

Για τον προσδιορισμό της πολυπλοκότητας της δυναμικής παρατηρούμε ότι η κατασκευή του G_{mov} απαιτεί $O(m + n)$ βήματα. Επιπρόσθετα στη φάση 1 ένα γέμισμα

αντικαθίσταται από αποδοτικότερο. Τα υπόλοιπα γεμίσματα είτε παραμένουν αδρανή είτε καταργούνται. Ένα γέμισμα μπορεί να αναβαθμιστεί το πολύ m φορές και η πληθικότητα των γεμισμάτων φράσσεται από το n δίνοντας μέγιστο πλήθος γύρων για την πρώτη φάση mn . Επιπρόσθετα στη φάση δύο, το πλήθος των διασχίσεων ακμών που μπορεί να κάνει ένα γέμισμα που βασίζεται αρχικά μόνο στο δίκτυο, δεν ξεπερνά τις m . Το τελικό ολικό πλήθος βημάτων βελτίωσης είναι $O(m^2n)$.

Έχοντας ενσωματώσει το παίγνιο τοπικών σχηματισμών συνασπισμών στο πλαίσιο του σχηματισμού συνασπισμών με περιορισμούς, συνάγουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.16. Έστω $\mathcal{G} \subseteq \{H_i \mid i = 1, \dots, n\}$ όπου H_i αστέρι αποτελούμενο από κέντρο και $i - 1$ φύλλα, τότε κάθε παίγνιο τοπικών σχηματισμών συνασπισμών που χρησιμοποιεί το \mathcal{G} μπορεί να διατυπωθεί ως παίγνιο σχηματισμού συνασπισμών με περιορισμούς και συνεπείς κανόνες παραγωγής και κυριάρχησης. Συνεπώς σε κάθε τέτοιο παίγνιο υπάρχει μονοπάτι στη σταθερότητα για κάθε αρχική κατάσταση S με μήκος το πολύ $O(nm^2)$, χρησιμοποιώντας μόνο τοπικά βήματα βελτίωσης.

3. Στη περίπτωση που οι δομές απόκλισης δεν είναι πλήρεις γράφοι ή αστέρια, υπάρχει στιγμιότυπο που απαιτεί εκθετικό πλήθος βημάτων ως προς τους συμμετέχοντες παίκτες. Πριν το κατασκευάσουμε σημειώνουμε μία ιδιότητα των γράφων διαμόρφωσης αυτής της κατηγορίας.

Λήμμα 5.7. Έστω $G = (V, E)$ τυχαίος μη κατευθυνόμενος συνδεδεμένος γράφος. Εάν για κάθε μονοπάτι $v_1v_2v_3v_4$ με $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4) \in E$ υπάρχει επίσης η ακμή $(v_1, v_3) \in E$, τότε ο γράφος G είναι είτε πλήρης γράφος είτε αστέρι.

Απόδειξη. Απουσία μονοπατιού τεσσάρων βημάτων σημαίνει ότι ο γράφος είναι αστέρι. Όντας ο πρώτος και ο τρίτος κόμβος κάθε μονοπατιού τεσσάρων κόμβων συνδεδεμένοι, συνεπάγεται ότι απαριθμώντας τους σε αντίστροφη σειρά, υπάρχει επίσης σύνδεση μεταξύ του δεύτερου και του τέταρτου κόμβου. Επιπρόσθετα, διασχίζοντας το μονοπάτι με σειρά πρώτου, δεύτερου, τέταρτου και τρίτου, προκύπτει σύνδεση μεταξύ του δεύτερου και του τέταρτου κόμβου. Συνάγουμε ότι ο υπογράφος $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in G$ αποτελεί κλίκα. Έστω πέμπτος κόμβος v_5 συνδεδεμένος με τους τέσσερις προηγούμενους χ.β.τ.γ. με ακμή στον v_1 , τότε υπάρχουν μονοπάτια που ξεκινούν από τον v_5 και έχουν ως τρίτο κόμβο κάθε ένα από τους $\{v_2, v_3, v_4\}$ παγιώνοντας ακμές μεταξύ του v_5 και καθενός εξ' αυτών. Συνεπώς το σύνολο κόμβων $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ αποτελεί κλίκα και ούτω καθ' εξής έως ότου να αποδειχθεί ότι το V είναι πλήρης γράφος. \square

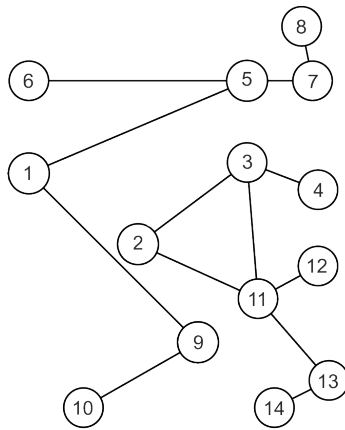
Υποθέτουμε τώρα γράφο διαμόρφωσης $G(V, E)$ αποτελούμενο από τέσσερις κόμβους που δεν ανήκει στην κατηγορία ένωσης πλήρων γράφων και αστεριών με

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in V, (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4) \in E, (v_1, v_3) \notin E.$$

Εισάγεται ιδιοκατασκευή με 14 κορυφές $\{v_1, \dots, v_{14}\}$ και ακμές

$$\begin{aligned} &(v_1, v_5), (v_1, v_9), (v_2, v_3), (v_2, v_{11}), (v_3, v_4), \\ &(v_3, v_{11}), (v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_7, v_8), (v_9, v_{10}), \\ &(v_{11}, v_{12}), (v_{11}, v_{13}), (v_{13}, v_{14}) \end{aligned}$$

όπως εικονίζεται στο σχήμα 5.5. Υπάρχουν 7 επιτρεπτοί συνασπισμοί με τα βάρη που δίνονται στον πίνακα 5.3.



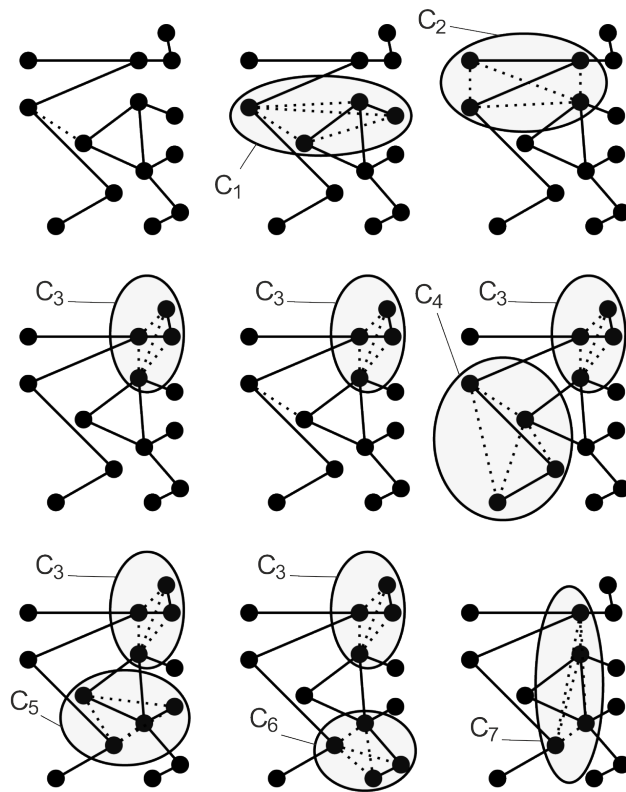
Σχήμα 5.5: Η ιδιοκατασκευή που χρησιμοποιείται για την απόδειξη του εκθετικού πλήθους βημάτων που απαιτούνται για αποκατάσταση σταθερότητας, με γράφους διαμόρφωσης που δεν είναι πλήρεις ούτε αστέρια.

Πίνακας 5.3: Συνασπισμοί και τα αντίστοιχα βάρη, δικτύου με εκθετικά πολλά βήματα για τη σταθερότητα, όταν ο γράφος διαμόρφωσης δεν είναι κλίκα ούτε αστέρι.

Συνασπισμός	Κορυφές	Βάρος
C_1	v_1, v_2, v_3, v_4	$4 + 1$
C_2	v_1, v_3, v_5, v_6	$4 + 2$
C_3	v_3, v_5, v_7, v_8	$4 + 3$
C_4	v_1, v_2, v_9, v_{10}	$4 + 1$
C_5	v_2, v_9, v_{11}, v_{12}	$4 + 2$
C_6	$v_9, v_{11}, v_{13}, v_{14}$	$4 + 3$
C_7	v_3, v_5, v_9, v_{11}	$4 + 4$

Επιπρόσθετα οι βοηθητικοί κόμβοι w_1, w_2 , οι ακμές $(w_1, v_1), (w_1, v_2), (w_2, v_2)$ και ο συνασπισμός C_0 με μοναδιαίο κέρδος, παίζουν το ρόλο εκκινήτη καθώς παράγουν την απαραίτητη για την έναρξη της δυναμικής, ακμή (v_1, v_2) . Ξεκινώντας από κενή από

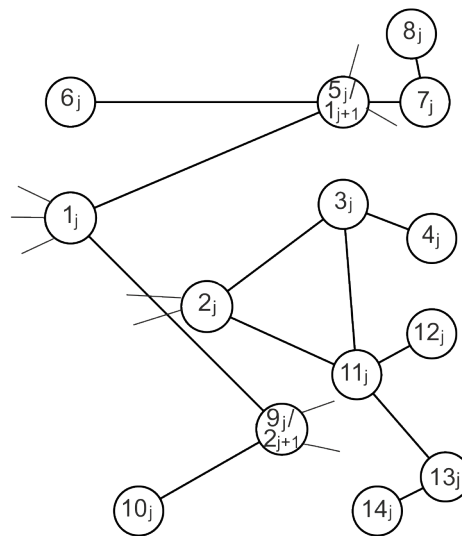
συνασπισμούς κατάσταση, η συστάδα C_0 είναι προσβάσιμη και σχηματίζεται. Συνεπώς εμφανίζεται η ακμή (v_1, v_2) . Οπότε οι συνασπισμοί C_1, C_2 καθίστανται κωλύοντες δεδομένων των υψηλότερων παροχών τους εν σχέση με την C_0 . Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι σχηματίζεται η C_1 και αποκαθίστανται συνδέσεις μεταξύ των v_1 και v_3 . Κατά συνέπεια ο νυν κωλύων συνασπισμός C_2 σχηματίζεται επιφέροντας την ένωση (v_3, v_5) που σκανδαλίζει το σχηματισμό του επικερδέστερου συνασπισμού C_3 . Σε αυτή την κατάσταση η μοναδική προσβάσιμη συστάδα είναι η C_0 και ο σχηματισμός της κάνει διαθέσιμη ξανά την ακμή (v_1, v_2) όμως τώρα η μοναδική κωλύουσα συστάδα είναι η C_4 καθώς ο κόμβος v_3 ανήκει στον επικερδέστερο συνασπισμό C_3 . Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την ένωση (v_2, v_9) , σχηματίζεται η συστάδα C_5 και επιφέρει ανταπόκριση μεταξύ των v_9 και v_{11} που με τη σειρά της συνεισφέρει στην σύναξη είτε του C_6 και κατόπιν του C_7 ή κατευθείαν του C_7 . Συνεπώς ο σχηματισμός του σταθερού C_7 απαιτεί δύο σχηματισμούς του C_0 . Σχηματική αναπαράσταση της δυναμικής δίνεται στο σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6: Η αλληλουχία των σχηματισμών συνασπισμών κατόπιν της σύστασης της ακμής (v_1, v_2) .

Στην πρώτη ιδιοκατασκευή παρατίθεται ακόμα μία. Εκκινητής τώρα είναι οι κόμβοι v_5 και v_9 της πρώτης ιδιοκατασκευής που ταυτίζονται με τις κορυφές v_1 και v_2 αντίστοιχα της νέας ιδιοκατασκευής. Επιτρεπόμενοι συνασπισμοί της νέας ιδιοκατασκευής είναι

οι αντίστοιχοι της πρώτης, ωστόσο τα κέρδη είναι $4 \cdot 2 + 1$ για τους $C_{1,2}$ και $C_{4,2}$, $4 \cdot 2 + 2$ για τους $C_{2,2}$ και $C_{5,2}$, $4 \cdot 2 + 3$ για τους $C_{3,2}$ και $C_{6,2}$ και τέλος $4 \cdot 2 + 4$ για τον $C_{7,2}$. Οπότε ο C_7 καταργείται προς σχηματισμό του $C_{1,2}$ και η δυναμική εξελίσσεται όπως προηγουμένως, ωστόσο για να σχηματιστεί η συστάδα $C_{1,2}$ δεύτερη φορά, ο συνασπισμός C_0 χρειάζεται να σχηματιστεί πάλι δύο φορές. Συνεπώς η εξέλιξη της δυναμικής απαιτεί 4 φορές σχηματισμού του C_0 . Κάθε παρόμοια παράθεση της ιδιοκατασκευής αυξάνει κατά παράγοντα δύο τον αριθμό των απαιτούμενων σχηματισμών του C_0 . Άρα η απόληξη σε ισορροπία για k ιδιοκατασκευές απαιτεί $\Theta(2^k)$ βήματα. Το σχήμα 5.7 είναι ένα σκαρίφημα της ένωσης διαδοχικών ιδιοκατασκευών.



Σχήμα 5.7: Η j -οστή ιδιοκατασκευή. Ο κόμβος $v_{1,j}$ μοιράζεται ακμές με τις κορυφές $v_{6,j-1}$, $v_{7,j-1}$, $v_{8,j-1}$, $v_{5,j}$, $v_{9,j}$ ενώ η κορυφή $v_{2,j}$ μοιράζεται ακμές με τις $v_{1,j-1}$, $v_{10,j-1}$, $v_{3,j}$, $v_{11,j}$.

Παρά το ότι θεωρήθηκε ως γράφος διαμόρφωσης μονοπάτι από τον κόμβο v_1 στον v_4 , μπορεί να παρίστανται ακμές που να συνδέουν τον v_1 με τον v_4 ή/και τον v_2 με τον v_4 . Τότε για να προσαρμοστεί η κατασκευή, εισάγονται οι αντίστοιχες ακμές όπως παρουσιάζονται στον πίνακα 5.4.

Η συμπερίληψη των παραπάνω επιπρόσθετων μονίμων συνδέσεων δεν αλλάζει τη δυναμική του παιχνιδιού, καθώς έκαστη εξ' αυτών εμφανίζεται σε το πολύ ένα συνασπισμό. Η διαδικασία γενικεύεται σε γράφους με περισσότερους των τεσσάρων κόμβων και κάθε συνδυασμό ακμών μεταξύ τους. Η διεύρυνση του γράφου διαμόρφωσης δεν επιφέρει αλλαγές στη δυναμική του παιχνιδιού, καθώς όλα τα επιπλέον στοιχεία, κορυφές και ακμές αναφέρονται έκαστο σε μοναδικό συνασπισμό. Πιο τυπικά το αποτέλεσμα περικλείεται στο ακόλουθο θεώρημα

Πίνακας 5.4: Ακμές που προστίθενται στο δίκτυο σύμφωνα με την τοπολογία του γράφου διαμόρφωσης.

Συνασπισμός	$v_1 - v_4$ ακμή	$v_2 - v_4$ ακμή
C_1	(v_1, v_4)	(v_2, v_4)
C_2	(v_3, v_6)	(v_1, v_6)
C_3	(v_8, v_3)	(v_7, v_3)
C_4	(v_2, v_{10})	(v_1, v_{10})
C_5	(v_9, v_{12})	(v_2, v_{12})
C_6	(v_{14}, v_9)	(v_{13}, v_9)
C_7	(v_9, v_5)	(v_{11}, v_5)

Θεώρημα 5.17. Έστω $G = (V, E)$ αυθαίρετα συνδεδεμένο γράφημα σταθερού μεγέθους, που δεν είναι πλήρες ούτε αστέρι. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει παίγνιο σχηματισμού τοπικών συνασπισμών με n κόμβους, $m = \Theta(n)$ συνασπισμούς, $\mathcal{G} = \{G\}$ και αρχική κατάσταση τέτοια ώστε κάθε ακολουθία που αποκαθιστά σταθερότητα απαιτεί $2^{\Theta(n)}$ βήματα βελτίωσης.

Κεφάλαιο 6

Μελλοντικές κατευθύνσεις

Τα ηδονικά παίγνια έχουν μελετηθεί θεωρώντας διαμερίσεις όπου κάθε παίκτης έχει μόνο μία θέση, δηλαδή οι συνασπισμοί έχουν ανά δύο κενή τομή. Γενικότερο πλαίσιο λαμβάνεται ενσωματώνοντας στο μοντέλο τη δυνατότητα, οι παίκτες να συμμετέχουν σε περισσότερους του ενός συνασπισμούς. Το πλήθος αυτών των συνασπισμών μπορεί είτε να είναι προκαθορισμένο για όλους τους παίκτες ή να εξαρτάται από τη δημοτικότητα του κάθε παίκτη δηλαδή το πλεόνασμα που επιφέρει στους υπόλοιπους παίκτες.

Επιπλέον, δυαδική αναπαράσταση των ηδονικών παιγνίων μπορεί να οδηγήσει σε εφαρμογή επιλυτών του προβλήματος αληθευσimότητας για τον υπολογισμό σταθερών διαμερίσεων [Aziz et al., 2015].

Όπως δείχθηκε στο κεφάλαιο 4, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις, όπου η εύρεση διαμέρισης που ικανοποιεί επιθυμητή έννοια σταθερότητας μπορεί να είναι δύσκολη. Προσεγγιστικά σταθερές διαμερίσεις μπορούν να αναζητηθούν σε αυτές τις περιπτώσεις, όπως στην εργασία των Bhalgat, Chakraborty & Khanna (2010), που παρουσιάζουν προσέγγιση καθαρής Νας ισορροπίας για δεδομένα παίγνια.

Επιπρόσθετα, στην μέχρι τώρα παρουσίαση και γενικότερα στη βιβλιογραφία, παρουσιάζονται διάφορες επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη σταθερών διαμερίσεων ως προς επιλεγμένες έννοιες σταθερότητας, ωστόσο το σύνολο των απαραίτητων συνθηκών παραμένει άγνωστο.

Ακόμα, δεν υπάρχει τρόπος υπολογισμού του συνόλου των σταθερών διαμερίσεων ή τρόπος υπολογισμού της πληθικότητάς τους. Έχοντας το σύνολο των σταθερών διαμερίσεων, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε σε προβλήματα βελτιστοποίησης με επιθυμητούς στόχους, όπως τη μεγιστοποίηση του λιγότερο ικανοποιημένου παίκτη, την έλλειψη ζήλιας, την έννοια στον περισσότερο συνεργάσιμο κτλ. Μία ακόμα ενδιαφέρουσα κατεύθυνση θα ήταν η συμπερίληψη μεικτών στρατηγικών σε παίγνια όπου υπάρχει συναγωνισμός και η εύρεση περιορισμών στα προφίλ προτιμήσεων που αποφεύγουν τις ανεπιθύμητες συνέπειες της PPD πληρότητας που παρουσιάζονται από τους Daskalakis, Goldberg & Papadimitriou (2006).

Μέσα από την παρούσα έρευνα εμφανίστηκαν ανοικτά προβλήματα. Δεν έχει αποφασιστεί η μη κενότητα του πυρήνα για απλά κλασματικά ηδονικά παίγνια. Επίσης η πολυπλοκότητα του προβλήματος VOTEINOUT με κατώφλια ψήφων που δεν ικανοποιούν τις $T_{in}, T_{out} \geq \frac{1}{2}$ και $T_{in} + T_{out} > 1$, δηλαδή το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερής διαμέ-

ρισης με κατώφλια όχι μόνο για την είσοδο αλλά και την έξοδο από έναν συνασπισμό, όπου οι δεδομένοι περιορισμοί δεν ισχύουν, παραμένει ανοικτό, όπως επίσης και το πρόβλημα εύρεσης σταθερών διαμερίσεων όταν απαιτείται ποσοστό ψήφων για την είσοδο και πλήθος ψήφων για την έξοδο.

Στα μοντέλα ηδονικής συσταδοποίησης που παρουσιάζονται από τους Feldman, Eytan & Naor (2015), είναι αναπάντητο για προβλήματα k -μέσων σε δένδρα, το εάν μέσω δυναμικής βέλτιστης απόκρισης προκύπτει Νας ισορροπία. Στο μοντέλο k -κέντρων θα μπορούσε να γίνει δουλειά για να αποφασιστεί η ύπαρξη Νας ισορροπίας σε κάθε στιγμιότυπο όταν το κεντροειδές δεν επιτρέπεται να τοποθετηθεί κατά μήκος ακμής εκτός από τα άκρα της. Επιπλέον δεν έχει διαλευκανθεί εάν η δυναμική βέλτιστης απόκρισης καταλήγει σε Νας ισορροπία για δενδρικές και ευθείες διατάξεις. Υπάρχει ακόμα έλλειψη γνωστών φραγμάτων για το τίμημα της αναρχίας ακόμα και για απλές γραμμικές διατάξεις. Τέλος στο μοντέλο συσχετιστικής συσταδοποίησης απουσιάζουν άνω φράγματα για το τίμημα της σταθερότητας και τα πιστοποιημένα κάτω φράγματα είναι μόνο μικρές σταθερές. Εκλέπτυνση επίσης των φραγμάτων του τιμήματος της αναρχίας θεωρείται εφικτή.

Βιβλιογραφία

- [1] Abbasi, A. & Younis, M. «A Survey on Clustering Algorithms for Wireless Sensor Networks». English. In: *Comput. Commun.* 30.14-15 (2007), pp. 2826–2841.
- [2] Alcalde, J. & Revilla, P. «Researching with whom? Stability and manipulation». English. In: *Journal of Mathematical Economics* 40 (2004), pp. 869–887.
- [3] Aziz, H. & Brandl, F. «Existence of stability in hedonic coalition formation games». English. In: *Proc. of 11th AAMAS Conference*. Ed. by Persiano, G. Springer, 2012, pp. 763–770.
- [4] Aziz, H., Brandl, F. & Harrenstein, P. «Fractional Hedonic Games». English. In: *Proc. of 13th AAMAS Conference*. 2014, pp. 5–12.
- [5] Aziz, H., Brandt, F. & Harrenstein, P. «Pareto optimality in coalition formation». English. In: *Games and Economic Behavior* 82 (2013), pp. 562–581.
- [6] Aziz, H., Harrenstein, P., Lang, J. & Wooldridge, M. «Boolean Hedonic Games». English. In: *CoRR abs/1509.07062* (2015).
- [7] Ballester, C. «NP-completeness in hedonic games». English. In: *Games and Economic Behavior* 49.1 (2004), pp. 1–30.
- [8] Bandyopadhyay, S. & Coyle, E. «Minimizing Communication Costs in Hierarchically-clustered Networks of Wireless Sensors». English. In: *Comput. Netw.* 44.1 (2004), pp. 1–16.
- [9] Banerjee, S., Konishi, H. & Sönmez, T. «Core in a simple coalition formation game». English. In: *Social Choice and Welfare* 18 (2001), pp. 135–153.
- [10] Bansal, N., Blum, A. & Chawla, S. «Correlation Clustering». English. In: *Mach. Learn.* 56.1-3 (2004), pp. 89–113.
- [11] Bhalgat, A., Chakraborty, T. & Khanna, S. «Approximating pure nash equilibrium in cut, party affiliation, and satisfiability games». English. In: *Proceedings 11th ACM Conference on Electronic Commerce (EC-2010), Cambridge, Massachusetts, USA*. 2010, pp. 73–82.
- [12] Bloch, F. & Diamantoudi, E. «Noncooperative formation of coalitions in hedonic games». English. In: *International Journal of Game Theory* 40 (May 2011).
- [13] Bogomolnaia, A. & Jackson, M. O. «The stability of hedonic coalition structures». English. In: *Games and Economic Behavior* 38 (2002), pp. 201–203.

- [14] Brandt, F., Conitzer, V., Endriss, U., Lang, J. & Procaccia, A., eds. *Handbook of Computational Social Choice*. English. Cambridge University Press, 2016.
- [15] Cechlarova, K. & Romero-Medina, A. «Stability in coalition formation games». English. In: *International Journal of Game Theory* 29.4 (2001), pp. 487–494.
- [16] Daskalakis, C., Goldberg, P. & Papadimitriou, C. «The Complexity of Computing a Nash Equilibrium». English. In: *Proceedings of the Thirty-eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '06. Seattle, WA, USA: ACM, 2006, pp. 71–78.
- [17] Deng, X. & Papadimitriou, C. «On the Complexity of Cooperative Solution Concepts». English. In: *Mathematics of Operations Research* 19 (1994).
- [18] Diamantoudi, E. & Xue, L. «Farsighted stability in hedonic games». English. In: *Social Choice and Welfare* 21 (Aug. 2003).
- [19] Dimitrov, D. & Sung, S.-C. «Top Responsiveness and Stable Partitions in Coalition Formation Games». English. In: *IMW Working paper* (2005).
- [20] Dimitrov, D., Borm, P., Hendrickx, R. & Sung, S.-C. *Simple Priorities and Core Stability in Hedonic Games*. English. Working Papers 2004.51. Fondazione Eni Enrico Mattei, 2004.
- [21] Dréze, J. & Greenberg, J. «Hedonic coalitions optimality and stability». English. In: *Econometrica* 48 (1980), pp. 987–1003.
- [22] Elkind, E. & Wooldridge, M. «Hedonic Coalition Nets». English. In: *Proceedings of The 8th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems - Volume 1*. AAMAS '09. Budapest, Hungary: International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2009, pp. 417–424.
- [23] Esteban, A. & Sergei, V. «Social Networks and Stable Matchings in the Job Market». English. In: *CoRR* abs/0910.0916 (2009).
- [24] Farrell, J. & Scotchmer, S. «Partnerships». English. In: *The Quarterly Journal of Economics* 103.2 (1988), pp. 279–297.
- [25] Feldman, M., Eytan, L & Naor, J. «Hedonic Clustering Games». English. In: *TOPC* 2.1 (2015), p. 4.
- [26] Gairing, M. & Savani, R. «Computing Stable Outcomes in Hedonic Games». English. In: *Lecture Notes in Computer Science* 10 (2010), pp. 174–185.
- [27] Gairing, M. & Savani, R. «Computing stable outcomes in hedonic games with voting-based deviations». English. In: *The 10th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems-Volume 2*. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems. 2011, pp. 559–566.
- [28] Gale, D. & Shapley, L. «College Admissions and the Stability of Marriage». English. In: *The American Mathematical Monthly* 69.1 (1962), pp. 9–15.
- [29] Garey, M. & Johnson, D. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. English. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1979.
- [30] Greenberg, J. «Coalition structures». English. In: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*. Vol. 2. North Holland, 1994. Chap. 37, pp. 1305–1337.

- [31] Greenberg, J. & Weber, S. «Strong tiebout equilibrium under restricted preferences domain». English. In: *Journal of Economic Theory* 38 (1 1986).
- [32] Hajduková, J. «Coalition formation games: A survey». English. In: *International Game Theory Review* 8.4 (2006), pp. 613–641.
- [33] Hoefler, M. «Local Matching Dynamics in Social Networks». English. In: *Automata, Languages and Programming - 38th International Colloquium, ICALP 2011, Zurich, Switzerland, July 4-8, 2011, Proceedings, Part II*. 2011, pp. 113–124.
- [34] Hoefler, M., Vaz, D. & Wagner, L. «Hedonic Coalition Formation in Networks». English. In: *AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2015.
- [35] Hoefler, M. & Wagner, L. «Matching dynamics with constraints». English. In: *Web and Internet Economics*. Springer, 2014, pp. 161–174.
- [36] Irving, R. «An Efficient Algorithm for the "Stable Roommates" Problem». English. In: *J. Algorithms* 6.4 (1985), pp. 577–595.
- [37] Johnson, D., Papadimitriou, C. & Yannakakis, M. «How Easy is Local Search?» English. In: *J. Comput. Syst. Sci.* 37.1 (1988), pp. 79–100.
- [38] Karakaya, M. «Hedonic coalition formation games: A new stability notion». English. In: *Mathematical social sciences* 61.3 (2011), pp. 157–165.
- [39] Karp, R. «Reducibility Among Combinatorial Problems». English. In: *Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20-22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York*. 1972, pp. 85–103.
- [40] Koltsidas, G. & Pavlidou, F.-N. «A game theoretical approach to clustering of ad-hoc and sensor networks». English. In: *Telecommunication Systems* 47.1 (2011), pp. 81–93.
- [41] Koutsoupias, E. & Papadimitriou, C. «Worst-case Equilibria». English. In: *STACS 99, 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Trier, Germany, March 4-6, 1999, Proceedings*. 1999, pp. 404–413.
- [42] Monien, B., Dumrauf, D. & Tscheuschner, T. «Local Search: Simple, Successful, But Sometimes Sluggish». English. In: *Automata, Languages and Programming, 37th International Colloquium, ICALP 2010, Bordeaux, France, July 6-10, 2010, Proceedings, Part I*. 2010, pp. 1–17.
- [43] Myerson, R. *Graphs and Cooperation in Games*. English. Tech. rep. 246. Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, 1976.
- [44] Nash, J. «Non-cooperative games». English. In: *The Annals of Mathematics* 54.2 (1951), pp. 286–295.
- [45] Papadimitriou, C. «Algorithms, Games, and the Internet». English. In: *Automata, Languages and Programming, 28th International Colloquium, ICALP 2001, Crete, Greece, July 8-12, 2001, Proceedings*. 2001, pp. 1–3.
- [46] Ronn, E. «On the complexity of stable matchings with and without ties». English. PhD thesis. Yale University, 1986.

- [47] Roth, A. «Incentive compatibility in a market with indivisible goods». English. In: *Economics Letters* 9.2 (1982), pp. 127–132.
- [48] Roth, A. & Sotomayor, M. *Two-sided matching : a study in game-theoretic modeling and analysis*. English. Econometric society monographs. Cambridge, Mass.: Cambridge university press, 1992, 1990.
- [49] Scarf, H. «The Core of an N Person Game». English. In: *Econometrica* 35 (1967).
- [50] Schäffer, A. & Yannakakis, M. «Simple Local Search Problems That are Hard to Solve». English. In: *SIAM J. Comput.* 20.1 (1991), pp. 56–87.
- [51] Shapley, L. & Scarf, H. «On cores and indivisibility». English. In: *Journal of Mathematical Economics* 1.1 (1974), pp. 23–37.
- [52] Sipser, M. *Introduction to the theory of computation*. English. Boston: Thomson Course Technology, 2006.
- [53] Sung, S.-C. & Dimitrov, D. «On Myopic Stability Concepts for Hedonic Games». English. In: *Springer* 62 (2007), pp. 31–45.
- [54] Sung, S.-C. & Dimitrov, D. «Computational complexity in additive hedonic games». English. In: *European Journal of Operational Research* 203 (3 2010).
- [55] Sönmez, T. «Strategy-Proofness and Essentially Single-Valued Cores». English. In: *Econometrica* 67.3 (1999), pp. 677–690.
- [56] Von Neumann, J. & Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. English. Princeton University Press, 1947.



National Technical University of Athens

School of Electrical and Computer Engineering

Computer Science Division

Hedonic Games

Diploma Thesis

of

Iosif K. Moulinos

Supervisor: **Dimitrios Fotakis**
Assistant Professor N.T.U.A.

Computation and Reasoning Laboratory

Athens, November 2016

.....
Iosif Moulinos
Graduate Electrical and Computer Engineer N.T.U.A.

Copyright ©Iosif Moulinos, 2016. All rights reserved.

Abstract

Coalition formation is a fundamental problem in numerous aspects of life, science and technique. Games where players are interested only in the identity of their partners, namely hedonic games, are also popular because of their simplicity and widespread applicability. The present thesis consists a review of hedonic games. The basic properties on players 's preferences are described along with the stability concepts and their relation. Moreover sufficient conditions for the existence of stable outcomes are introduced and algorithms for finding them, where possible. The complexity of deciding the existence of stable outcomes and of finding them, are embedded in the research. Hedonic clustering consists an application of hedonic games' framework, where players are interrelated through an undirected graph. Correlation and fixed clustering are presented in various metrics and also a network based model, assuming dynamic locality.

Keywords: Hedonic games, Coalition formation, Stable partitions, Complexity of computation, Clustering, Algorithmic game theory

Contents

1	Introduction	1
2	Hedonic games - basics	5
2.1	Hedonic games	5
2.2	Properties on agents' preferences	6
2.3	Stability Concepts	12
2.4	Relations of stability concepts	16
2.5	Negative results	18
2.5.1	General preferences	18
2.5.2	Roommates problem	18
2.5.3	W games	19
2.5.4	Additive separability	19
2.5.5	Fractional hedonic games	19
3	Stable coalition partitions	21
3.1	Pareto optimal partitions	21
3.2	Roommates problem	25
3.3	Preferences derived from the Best or Worst	26
3.4	Top responsiveness and the top covering algorithm	29
3.5	Bottom responsiveness	32
3.6	Top coalitions	33
3.7	Ordinal Balance - Consecutiveness	33
3.8	Games satisfying anonymity and separability	34
3.9	Additively separable and symmetric games	34
3.10	Fractional hedonic games	34
4	Deciding and computing stable partitions	37
4.1	General hedonic games	37
4.2	Anonymous preferences	42
4.3	Additive and symmetric preferences	45
5	Hedonic clustering	51
5.1	Correlation clustering	51

5.2	Fixed clustering	62
5.2.1	General metrics	63
5.2.2	Tree metrics	66
5.2.3	Line metrics	68
5.3	Cooperative clustering in networks	70
6	Future directions	79
	Bibliography	81

List of Algorithms

- 1 Preference refinement algorithm. 22
- 2 Irvings stable roommates algorithm. 27
- 3 BSTABLE algorithm. 28
- 4 Top Covering Algorithm. 29

- 5 Algorithm for testifying whether a partition is in the core of an HCORE
instance. 38
- 6 Algorithm for testifying whether a partition of a hedonic instance is Nash
stable. 39
- 7 Algorithm for testifying whether a partition of a hedonic game instance
with anonymous preferences is individually stable. 44
- 8 Look at and Bias for gadget replacing negative edges. 49

List of Figures

- 2.1 Hasse diagram of the implications of stability notions. 18
- 2.2 Fractional instance with empty core. 19

- 3.1 Execution of PRA algorithm in W hedonic game. 24

- 4.1 Vote-in block for negative edges. 46
- 4.2 Individual stability block for negative edges. 48

- 5.1 Graph with price of stability > 1 for correlation clustering. 56
- 5.2 There is no Nash equilibrium assuming 2 clusters under k-median model. 63
- 5.3 There is no Nash equilibrium assuming 2 clusters under k-center model . 64
- 5.4 Object movement hypergraph 72
- 5.5 Gadget used to prove exponential many steps to stability for formation
graphs which are neither cliques nor stars. 74
- 5.6 Gadget dynamics 75
- 5.7 Node correspondence among successive gadgets in the sequence. 76

List of Tables

- 2.1 Additively separable and symmetric preferences. 7
- 2.2 Preferences over players extended to coalitions. 8
- 2.3 Roommates problem instance admitting no stable matching. 18
- 2.4 Additive separable instance admitting no Nash stable matching. 19

- 3.1 PRA properties with respect to Choose and Refine functions. 23

- 5.1 Additively separable game. 52
- 5.2 Static tie breaking rules. 63
- 5.3 Possible coalitions of network in fig. 5.5. 74
- 5.4 Edges added to network according to the topology of the formation graph. 76

Chapter 1

Introduction

Coalition formation games lie in the field of game theory, the study of the interaction between players with various, even conflicting interests. This discipline was introduced by Von Neumann and Morgenstern (1947) with the utility theorem, supporting that players under preferences satisfying certain axioms, try to maximize the expected value of a function depicting their evaluation over the possible outcomes of the game. The evolution of informatics gave birth to algorithmic game theory, the branch of game theory attempting to compute outcomes of games with many players, using rational amount of time and efficient algorithms.

Coalition formation is a commonplace procedure evolving according to a variety of criteria.

Hedonic games arise when players are only interested to the synthesis of their own group and are indifferent in the relations among agents out of their coalition. Participants declare their preferences over their potential coalitions to be and desire to become members of as high a coalition in their ranking possible. Hedonic preferences are met when forming socials groups, enterprises, sports teams, faculties, parties, societies etc.

The origin of the title is the Greek word for "sweet", namely offering pleasure and is chosen in order to draw the relatively myopic attitude of not being interested in the situation out of one's coalition.

Hedonic games are non-zero-sum although often are competitive and in some cases fall into the zero-sum subfamily.

The rest of this chapter is dedicated to the structure of the thesis and the respective work done in the field of hedonic games. In the second chapter the needed preliminaries for hedonic games are given, along with various subdomains within the domain of general preferences. Practical examples accompany the definitions of the miscellaneous settings. Stability criteria and the hierarchy transpiring them, are presented next. The last topic exposed in chapter two is negative results for the aforementioned criteria, regarding the classes of preferences. In chapter 3 sufficient conditions for the existence of Pareto optimal partitions, Nash stable partitions and non emptiness of the core and the strict core are proved. In chapter 4 the complexity of deciding the existence and of computing core, Nash and individually stable partitions is put under examination. In chapter 5

games where players are represented as nodes and the relations between them as edges of a graph are presented. Correlation clustering, which belongs to the family of additive separable games, is given in section 5.1, fixed clustering where the number of allowed coalitions is predefined, is introduced in section 5.2 and finally a cooperative clustering framework in networks is analysed in section 5.3. Concluding, in chapter 6, are exposed elements of beyond the current frontier of the region of hedonic games, for future work.

The research on the field started with the seminal paper of Drèze and Greenberg in 1980, where the authors stated the hedonic concept. In the framework they presented, pertained matching problems as the stable marriage and the roommates ones. Gale and Shapley (1962) set and solve the stable marriage problem, Irving (1985) the stable roommates problem, and Roth and Sotomayor (1990), give a good review over two-sided matching.

The main interest in the field of hedonic games has been finding outcomes which satisfy stability criteria, as core stability or the Nash one. Those notions, as also the prevalent notation for hedonic games are presented by Banerjee, Konishi, and Sönmez (2001) and Bogomolnaia and Jackson (2002).

As explained in the aforementioned papers, searching for coalition structures fulfilling the stability requirements may be vain as there may not exist one. Although, no conflicts with the results of Nash (1951) occur, since only pure strategies are considered. Detouring this obstacle, sufficient conditions ensuring the existence of stable outcomes are sought after. Bogomolnaia and Jackson (2002) prove the existence of individually stable partitions when preferences demonstrate single peakedness over players' characteristics or when they are symmetric and additively separable. Moreover they show that additively separable games always admit Nash stable solutions. Banerjee, Konishi, and Sönmez (2001) introduce two top coalition properties, under which the core is shown non empty.

Cechlarova and Romero-Medina (2001) suggested a class of preferences over coalitions coming from the preferences over players. They introduced a polynomial algorithm for finding stable outcomes when players rank the partitions according to their most wanted teammate and used Irving's algorithm for cases where players classify candidate coalitions with respect to their less desired teammate.

Alcalde and Revilla (2004) introduce top responsiveness and prove hereunder the existence of core stable partitions. They provide the top covering algorithm for finding core stable partitions. Moreover they argue for the uniqueness of truthful mechanisms in this setting, which coincides with the top covering one. Aziz and Brandl (2012) simplify the top covering algorithm and suggest bottom responsiveness, the analogous pessimistic setting for top responsiveness, consisting of players assert the coalitions they want to avoid and the respecting stable results. Dimitrov and Sung (2005) strengthen the results of Alcalde and Revilla by showing strict core stability under top responsiveness. Moreover, (2004) they examine appreciation of friends and aversion to enemies, classes of preference profiles where each player considers the others as friends or enemies. They show that the first condition certifies the non emptiness of the core while the second of the weak core and find polynomially an element of the strong core and prove NP hard

the problem of finding an element of the weak core under aversion to enemies.

Aziz et al. (2015) study hedonic games with Boolean preferences, where players express only satisfaction or dissatisfaction over their candidate coalitions.

The complexity of deciding the existence of stable partitions in hedonic games is studied by Ballester (2004), for games with general and anonymous preferences. Dimitrov et al. (2004) engage with the same questions concerning additively separable games. Gairing and Savani (2010,2011), enlighten the complexity of finding stable outcomes in games having such. Those results are in accordance with those of Deng and Papadimitriou (1994).

Elkind and Wooldridge (2009) attempt an alternative to individually rational lists of coalitions representation, the hedonic coalition nets. Preferences are expressed through rules forming an, as succinct as possible, representation. Subsequently they characterize the complexity of deciding core related properties.

Hedonic clustering is the process of partitioning players on a metric space. Bansal, Blum, and Chawla (2004) present a correlation clustering model for edges being either positive or negative and propose approximation algorithms. Feldman, Eytan, and Naor (2015) provide prices of anarchy and stability for a similar setting. They also search for Nash equilibria in the fixed clustering model. Fixed clustering is also examined by Abbasi and Younis (2007) and by Bandyopadhyay and Coyle (2004) as also by Koltsidas and Pavlidou (2011). Hoefler, Vaz, and Wagner (2015) show that only complete graphs and star graphs stabilize quickly in network based visibility models for dynamic locality, based on ideas of Myerson (1976) and Esteban and Sergei (2009).

Chapter 2

Hedonic games - basics

In this chapter the fundamental notions concerning hedonic games are elaborated. Starting with the definition of hedonic games, a multitude of categories concerning preference profiles and stability concepts are presented. Moreover the relations among those different stability measures and the corresponding inclusions come to the forefront.

2.1 Hedonic games

As mentioned in the introduction, hedonic games include coalition formation games, where each player is interested only for the synthesis of his team and is completely indifferent for the synthesis of the rest of the coalitions. Every player has a preference profile over the possible coalitions having her as a member and desires to be coalized with as higher a preference as possible, or formally

Definition 2.1. (Hedonic game), [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001]. A hedonic coalition formation game G is a pair $(N, (\succsim_i)_{i \in N})$, where N is a finite player set with i being a representative element, and $(\succsim_i)_{i \in N}$ their preference profile. Moreover, \succsim_i is a reflexive, antisymmetric, complete and transitive binary relation on $S_i(N) = \{S \in 2^N : i \in S\}$, called preferences of player i . Indifference relation and the strict preference relation are denoted by \sim_i and \succ_i respectively and $S \sim_i T \Leftrightarrow [S \succsim_i T \text{ and } T \succsim_i S]$ and $S \succ_i T \Leftrightarrow [S \succsim_i T \text{ and } S \not\sim_i T]$.

The formulation of hedonic games is done via representation of individually rational lists of coalitions (IRLCs), that is, all coalitions that are more attractive for a player than being alone, are given in a total order list. For a hedonic game (N, \succsim) , we denote N_i the set of coalitions possible for i .

Example 2.1. Consider three children having at their disposal a ball, a ping-pong table and a pc with one wheel. With the ball they would only like to play a game needing three or more players. Peter prefers to play with Jenny and Georgia the ball game, but if this is not possible he wants a rematch in table tennis with Georgia if this is also impossible he would like playing table tennis with Jenny and his last alternative is playing alone the

computer game. On the other hand, Georgia prefers playing with the ball, then she likes table tennis with Peter, but she doesn't want to play table tennis with Jenny, because of a recent joke of them and instead of that would like the pc game. Finally Jenny would like to play table tennis no matter with who, then with the ball and finally the racing game.

Those preferences are notated as

$$\begin{aligned} & \{Georgia, Jenny, Peter\} \succ_G \{Georgia, Peter\} \succ_G \{Georgia\} \\ & \{Jenny, Peter\} \sim_J \{Georgia, Jenny\} \succ_J \{Georgia, Jenny, Peter\} \succ_J \{Jenny\} \\ & \{Georgia, Jenny, Peter\} \succ_P \{Georgia, Peter\} \succ_P \{Jenny, Peter\} \succ_P \{Peter\} \end{aligned}$$

The partition of players in coalitions is called coalition structure.

Definition 2.2. (Outcome of a hedonic game), [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001]. A coalition structure $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ ($K \leq |N|$ is a positive integer) is a partition of N . That is, $S_k \neq \emptyset$ for any $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, $\cup_{k=1}^K S_k = N$, and $S_k \cap S_l = \emptyset$ for any $k, l \in \{1, 2, \dots, K\}$ with $k \neq l$. For any coalition structure π and any player i let $\pi(i) = \{S \in \pi : i \in S\}$ be the set including her and her partners.

The collection of all coalition structures in N is denoted by $\Pi(N)$. We similarly define $\Pi(V)$ for any $V \subset N$ with $V \neq \emptyset$.

Example 2.2. Possible outcomes of the previous example (2.1) are

a) $\{Georgia, Jenny, Peter\}$ b) $\{\{Georgia, Jenny\}, \{Peter\}\}$ c) $\{\{Georgia\}, \{Jenny, Peter\}\}$ d) $\{\{Georgia, Peter\}, \{Jenny\}\}$ e) $\{\{Georgia\}, \{Jenny\}, \{Peter\}\}$.

2.2 Properties on agents' preferences

There are a plenty of restricted hedonic games coming from respective restrictions on the preferences of the participants. A collective list of various cases follows.

Definition 2.3. (Anonymity), [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001]. A game G satisfies anonymity if for any $i \in N$, for any $S, T \in S_i(N)$ with $|S| = |T|$ we have $S \sim_i T$.

That is, if players are only interested in the cardinality of their coalitions. Games in this category are represented by individually rational lists of sizes of coalitions or IRLS.

Example 2.3. A student choosing his future subject of study in a specific field, with only criterion the size of its students community, thinking that such a subject would be promising. Those preferences can be written $1 \prec 2 \prec \dots \prec n \prec n+1$ for every $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.4. (Separability), [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001]. A game G is separable if for any $i \in N$, for any $S \in S_i(N)$ and for any $j \notin S$, we have $[S \cup \{j\}] \succsim_i S \Leftrightarrow \{i, j\} \succsim_i \{i\}$

So j 's insertion to an i 's coalition is positive for i , only if i prefers being with j than being alone.

Definition 2.5. (Mutuality), [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001; Bogomolnaia and Jackson, 2002]. A game G satisfies mutuality if for any $i, j \in N$, we have $\{\{i, j\} \succsim_i \{i\} \Leftrightarrow \{i, j\} \succsim_j \{j\}\}$ and $\{\{i, j\} \precsim_i \{i\} \Leftrightarrow \{i, j\} \precsim_j \{j\}\}$.

Meaning that when player i likes player j , player j also likes player i and when i prefers staying alone than being with j , player j prefers staying alone than being with i .

Example 2.4. *The preferences of example 2.1 do not satisfy mutuality since Jenny likes Georgia while Georgia avoids Jenny.*

Definition 2.6. (Additive separability), [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001]. A game G is additively separable if for any $i \in N$, there exists a function $v_i : N \rightarrow \mathbb{R}$ such that for any $S, T \in S_i(N)$, $S \succsim T \Leftrightarrow \sum_{j \in S} v_i(j) \geq \sum_{k \in T} v_i(k)$, where without loss of generality, we normalize by setting $v_i(i) = 0$.

Proposition 2.1. *Anonymity along with separability imply additive separability.*

Proof. Because of separability, for every player i , a player j and two coalitions $\{S, T \in N_i \mid j \notin S, T \wedge S^{+j} \succsim_i T^{+j}\} \Leftrightarrow \{\{i, j\} \succsim_i \{i\}\}$, where S^{+j} shortens $S \cup \{j\}$. However, including anonymity yields $m + 1 \succsim_i n + 1 \Leftrightarrow 2 \succsim_i 1$, where $2 \succsim_i 1$ denotes that i prefers coalitions with two members to coalitions with one. Supposing that a player i has a valuation for a partner j , v_{ij} and taking into account that the last equivalence holds $\forall m, n \in \mathbb{N}$, the additively separability property is satisfied. \square

Definition 2.7. (Symmetry), [Bogomolnaia and Jackson, 2002]. A game G satisfies symmetry if $v_i(j) = v_j(i), \forall i, j$.

Therefore symmetry implies mutuality.

Example 2.5. *The hedonic game (N, \succ) which is determined by the valuations of each player for the others, given in table 2.1, is additively separable and symmetric.*

Table 2.1: Additively separable and symmetric preferences.

	1	2	3	4
v_1	0	3	2	-10
v_2	3	0	2.5	-6
v_3	2	2.5	0	3
v_4	-10	-6	3	0

Symmetry is easily shown. Additive separability of player 1's preferences is translated to preferences among coalitions as $\{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 2\} \succ_1 \{1, 3\} \succ_1 \{1\}$. It can be seen that by inserting players for which 1 holds positive values, to an existing coalition makes the coalition more desirable for 1, while inserting players for which 1 holds negative value makes the coalition less desirable for her.

Definition 2.8. (Friends and enemies), [Dimitrov et al., 2004]. We call friends of a player i the set of players G_i consisting of $j \in N$ for which $\{i, j\} \succsim_i i$. Enemies of player i are considered the members of the set $B_i = N \setminus G_i$.

(Appreciation of friends). Preferences are based on appreciation of friends if for all $X, Y \in N$, $X \succsim_i Y$ iff a) $|G_i \cap X| > |G_i \cap Y|$ or b) $|G_i \cap X| = |G_i \cap Y|$ and $|B_i \cap X| \leq |B_i \cap Y|$. Namely, players rank their willing to participate to a coalition by the number of her friends being in each of them.

(Aversion to enemies). Preferences are based on aversion to enemies if for all $X, Y \in N$, $X \succsim_i Y$ iff a) $|B_i \cap X| < |B_i \cap Y|$ or b) $|B_i \cap X| = |B_i \cap Y|$ and $|G_i \cap X| \geq |G_i \cap Y|$. So by aversion to enemies, are described games where players prefer a coalition S_1 to another S_2 , only if contains less enemies than the S_2 .

(Roommates problem), [Irving, 1985]. The restriction of the size of coalitions to the number 2 gives rise to the roommates problem. In this setting every player ranks the others of odd cardinality in strict order. A stable matching is then desired to be found, meaning, that by this pairing there will not exist two players preferring each other more, than their partner. An exemplary roommates problem is given in section 2.5.2.

By extending preferences over individuals to preferences over coalitions, the classes of B and W hedonic games respectively arise.

Example 2.6. Consider the following preferences for a game with four players Alice, Bob, Eve and Peter who have to collaborate for a homework and their last choice is doing it alone.

$$\begin{aligned} \{A, E\} \succ_A \{A, B, E\} \sim_A \{A, E, P\} \succ_A \{A, B, E, P\} \succ_A \{A, B\} \sim_A \{A, P\} \sim_A \{A, B, P\} \\ \{B, E\} \succ_B \{A, B, E\} \sim_B \{B, E, P\} \succ_B \{A, B, E, P\} \succ_B \{A, B\} \sim_B \{B, P\} \sim_B \{A, B, P\} \\ \{E, P\} \succ_E \{A, E, P\} \sim_E \{B, E, P\} \succ_E \{A, B, E, P\} \succ_E \{A, E\} \sim_E \{B, E\} \sim_E \{A, B, E\} \\ \{B, P\} \succ_P \{A, B, P\} \sim_P \{B, E, P\} \succ_P \{A, B, E, P\} \succ_P \{A, P\} \sim_P \{E, P\} \sim_P \{A, E, P\} \end{aligned}$$

This profile conforms to B model. Alice prefers being with Eve and secondly with Bob or Peter, Bob also prefers Eve and then Alice or Peter, Eve prefers being with Peter after him prefers being with Alice or Bob and Peter prefers being working with Bob and after that is indifferent between Alice and Eve. Those preferences determine their total ordering on potential coalitions and are presented in a succinct way in table 2.2.

Table 2.2: Preferences over players extended to coalitions.

Player	Preferences
Alice	Eve \succ Bob \sim Peter
Bob	Eve \succ Alice \sim Peter
Eve	Peter \succ Alice \sim Bob
Peter	Bob \succ Alice \sim Eve

Definition 2.9. (B & W games), [Cechlarova and Romero-Medina, 2001]. For a player i and a coalition $\{S \mid i \in S\}$ we call $B_i(S)$ the most preferred player for i in S , or $B_i(S) = \{j \mid j \succsim k, \forall k \in S\}$. A player i , B-prefers a coalition S over a coalition T when either $B_i(S) \succ_i B_i(T)$ or $B_i(S) \sim_i B_i(T)$ and $|S| < |T|$.

For a player i and a coalition $\{S \mid i \in S\}$ we call $W_i(S)$ the less preferred player for i in S , or $W_i(S) = \{j \mid j \precsim_i k, \forall k \in S\}$. A player i , W-prefers a coalition S over a coalition T when $W_i(S) \succ_i W_i(T)$.

A hedonic game is B game if the preferences of each player are B and a game is W if the preferences of the players are W.

Situations pertaining to this model are those, where players prefer a coalition to another, solely according to which between them contains their most preferred player in the union of the two coalitions. This setting conforms to athletes seeking to incorporate to the team of the most experienced coach, researchers striving to become members to the team of the most renowned professor etc.

On the other hand, when the crucial metric is the performance of the last player, then a W game is formulated. A characteristic example is people who want to go climbing and wish to collaborate with partners having similar pace with them. In this case, players are interested in minimizing the maximum deviation from their own rhythm, they play thus a minmax game and they prefer a coalition against another only if they prefer the worst for them player, in this coalition, more than their worst in the other.

A generalization of B games are top responsive games. Preferences satisfying top responsiveness reflect situations where each player decides which between two coalitions she prefers, by separating her most preferred subgroup in each coalition and comparing them. Thereby, those games are a broader family of B games, since in B games, preferences over individuals are extended to preferences over coalitions while in top responsive games preferences over subsets of players are extended to preferences over coalitions.

Definition 2.10. (Choice sets & top responsiveness), [Alcalde and Revilla, 2004; Aziz and Brandl, 2012]. Given a game (N, \succsim) , choice sets $Ch(i, S)$ of player i in a set of players $S \in N_i$, are the maximal subsets of S under \succsim_i .

A game's preferences satisfy top responsiveness if for every player i and any two sets of players $S, T \in N_i$:

- $|Ch(i, S)| = 1$. We denote this unique choice set: $ch(i, S)$.
- if $ch(i, S) \succ_i ch(i, T)$ then $S \succ_i T$
- if $ch(i, S) \sim_i ch(i, T)$ and $S \subsetneq T$ then $S \succ_i T$

Example 2.7. Preferences of example 2.6 satisfy top responsiveness while changing the preferences of player A to

$$\{A, E\} \succ_A \{A, B, P\} \sim_A \{A, E, P\} \sim_A \{A, B, E\} \succ_A \{A, B, E, P\} \succ_A \{A, B\} \sim_A \{A, P\}$$

leads to violation of this property, because $Ch(A, \{A, E, P\}) = \{A, E\} \succ_A \{A, B, P\} = Ch(A, \{A, B, P\})$ thus the second condition dictating that $\{A, E, P\} \succ_A \{A, B, P\}$, is not fulfilled.

Definition 2.11. (Avoid sets), [Aziz and Brandl, 2012]. We call avoid set of a player i among a set of players $S \subseteq N$, the set of least wanted subsets of S for i , denoted $Av(i, S) = \{S' \subseteq S : (i \in S') \wedge (S' \prec_i S'', \forall S'' \subseteq S)\}$.

Definition 2.12. (Bottom responsiveness), [Aziz and Brandl, 2012]. A game (N, \succ) fulfils the prerequisites of bottom responsiveness if the preferences of every player i satisfy the following conditions

- between two coalitions $S, T \in N_i$, more preferable for i is S , or $S \succ T$, if $i_S \succ_i i_T$, $\forall i_S \in Av(i, S), i_T \in Av(i, T)$ the one with the less unwanted avoid set namely, $S \prec_i T \Leftrightarrow Av(i, S) \prec_i Av(i, T)$, and
- for each player $i \in N$ and $S, T \in N_i$ such that $Av(i, S) \cap Av(i, T) \neq \emptyset$ with $|S| \geq |T|$ implies $S \succeq_i T$.

If additionally each player i and set of players $S \subseteq N_i$ has a unique avoid set or $|Av(i, S)| = 1$, denoted $av(i, S)$, the game is said to be strongly bottom responsive.

Definition 2.13. (Fractionality), [Aziz, Brandl, and Harrenstein, 2014]. A game $G = (N, \succ)$ is called fractional if each player $i \in N$ has a valuation function $v_i : N \rightarrow \mathbb{R}$ according to which, ranks each coalition $S \in N_i$ based on the mean value of players in the coalition or $v_i(S) = \frac{\sum_{j \in S} v_i(j)}{|S|}$.

The fractional hedonic games setting applies successfully to situations where there is the willing of homogeneity. Modelling situations where people want to form in their coalition, a high fraction of members with the same opinions or needs, pertains to this framework. These games can be represented by a directed graph G with the edges depicting the valuation from both ends of connection for the other respectively. For games where each edge has weight 1, the term simple is used.

Definition 2.14. (Single peakedness), [Bogomolnaia and Jackson, 2002]. A player i 's preferences on some set $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ are single peaked if there exists a number p_i , called i peak, such that $\forall s_1, s_2 \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, [s_1 < s_2 \leq p_i \text{ or } s_1 > s_2 \geq p_i] \Rightarrow s_2 \succ_i s_1$.

Definition 2.15. (Balance and ordinal balance), [Bogomolnaia and Jackson, 2002]. A collection of coalitions B , is balanced if there exists a vector of positive weights d_s over the coalitions, such that for every player i , $\sum_{S \in B: i \in S} d_s = 1$.

A game is ordinally balanced if for every balanced collection of coalitions B , there exists a partition π such that for every player i , there exists $S \in B$ with $i \in S$ such that $S_\pi \prec_i S$.

Thus, a game is ordinally balanced if for every balanced collection of coalitions, for every player, there exists a partition which is preferable for her, than her least preferable coalition in the balanced bundle.

Definition 2.16. (Consecutiveness), [Bogomolnaia and Jackson, 2002; Greenberg and Weber, 1986; Greenberg, 1994]. An ordering of players is a bijection $f : N \rightarrow N$.

A coalition $S \subset N$ is consecutive with respect to an ordering f , if $f(i) < f(j) < f(k)$, $i \in S$ and $k \in S$ imply $j \in S$.

A game $(N, \{\succsim_i\}_{i \in N})$ is weakly consecutive with respect to an ordering f if whenever partition π is inferior to a coalition T , there exists T' that is consecutive with respect to f that is superior to π .

A game $(N, \{\succsim_i\}_{i \in N})$ is consecutive with respect to an ordering f , if whenever $S \succsim_i \{i\}$, S is consecutive with respect to f .

A partition π is consecutive with respect to an ordering f , if each $S \in \pi$ is consecutive with respect to f .

Definition 2.17. (Top coalition property), [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001]. Given a non-empty set of players $V \subseteq N$, a non-empty subset $S \subseteq V$ is a top coalition of V if for every player $i \in S$ and any $T \subseteq V$ such that $i \in T$, it holds that $S \succsim_i T$.

A coalition formation game (N, \succsim) satisfies the top coalition property if for every set of agents $V \subseteq N$, there exists a top coalition.

Therefore, the top coalition property holds when in every subset of players, there exists a clique preferring being a ghetto than any other suggestion.

Definition 2.18. (Weak top coalition property), [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001]. Given a non-empty set of players $V \subseteq N$, a non-empty subset $S \subseteq V$ is a weak top coalition of V , if S has an ordered partition $\{S^1, S^2, \dots, S^k\}$ such that:

- For every player $i \in S^1$ and every subset $T \subseteq V$ such that $i \in T$ we have $S \succsim_i T$ and
- For every player $i \in S^k$ and every subset $T \subseteq V$ such that $i \in T$ we have $T \succ_i S$ only if $T \cap (\cup_{j < k} S^j) \neq \emptyset$.

A coalition formation game (N, \succsim) satisfies the weak top coalition property if for every set of agents $V \subseteq N$ there exists a weak top coalition. In other words, a game's preferences verify the weak top coalition property when in every subset of players there exists a sequence consisting of a) some preferring S than any other subset b) some other teams leaving open the possibility of preferring an other subset but under the condition that some players belonging to teams earlier in the sequence participate to the other subset.

Example 2.8. Consider the game (N, \succsim) , where the preferences are

$$\begin{aligned} \{A, B, C, D\} &\succ_A \{A, B, C\} \succ_A \{A, C, D, E\} \succ_A \{A\} \\ \{A, B, C, D\} &\succ_B \{B, C, D\} \succ_B \{A, B, D\} \succ_B \{A, B, C\} \succ_B \{A, C\} \succ_B \{B\} \\ \{A, B, C, E\} &\succ_C \{B, C, D\} \succ_C \{A, C\} \succ_C \{C, D\} \sim_C \{B, C\} \succ_C \{C\} \\ \{A, C, D\} &\succ_D \{B, D\} \succ_D \{C, D\} \succ_D \{A, D, E\} \sim_D \{B, D\} \succ_D \{D\} \\ \{A, B, C, E\} &\succ_E \{B, C, D, E\} \succ_E \{A, C, E\} \succ_E \{C, D, E\} \sim_E \{B, C, E\} \succ_E \{E\}. \end{aligned}$$

The preference profile conforms to weak top coalition property. The pair $\{A, B\}$ prefers $\{A, B, C, D\}$ in (A, B, C, D) more than every other possible coalition. Hence it is a top coalition for them. C, D prefer other coalitions to $\{A, B, C, D\}$ only in case A or B participate too. The ordered partition is $\{S^1, S^2\} = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}$.

Proposition 2.2. [Bogomolnaia and Jackson, 2002]. *Top coalition property implies weak consecutiveness if preferences are strict. Weak top coalition property, weak consecutive property, ordinal balance property are completely distinct (even with strict preferences): for any given property there exists a game that satisfies the given property but fails to satisfy the other two.*

2.3 Stability Concepts

Definition 2.19. [Bogomolnaia and Jackson, 2002; Aziz and Brandl, 2012; Sung and Dimitrov, 2007; Karakaya, 2011; Gairing and Savani, 2011]

- A partition π is individually rational (IR) if for every player i , $\pi(i) \succsim_i \{i\}$. That is no player has an incentive to stay alone.

Example 2.9. *In example 2.1 the coalition $\{\text{Georgia}, \text{Jenny}\}$ is individually irrational for Georgia since she would prefer staying alone than pairing with Jenny, therefore also the partition $\{\{\text{Georgia}, \text{Jenny}\}, \{\text{Peter}\}\}$.*

- A partition π is perfect when for each player i , $\pi(i) \succsim_i S$, for every coalition $S : S \in S_i$. That is every player i is in one of his most preferred coalitions.

Example 2.10. *The preferences of example 2.6 admit no perfect partition since satisfying perfectly Alice leaves Bob just two candidate coalitions $\{B, P\}$ and $\{B\}$, none of which is perfect for him. A modification to the preferences of the players allowing a perfect partition would be the declaration by all of them of the grand coalition, namely the one including all players, as their favourite. Then $\{A, B, E, P\}$ would be a perfect partition.*

- A partition π is Nash stable (NS) when there is no player i and coalition $\pi(j) \neq \pi(i)$ such that $\pi(j) \cup i \succ_i \pi(i)$ nor $\{i\} \succ_i \pi(i)$. Thus a partition is Nash stable, when no player wants to move to another, possibly empty, coalition.

Example 2.11. *The partition $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ is not Nash stable for example 2.6, as either Bob or Eve would deviate to the complementary coalition.*

- A partition π is individually stable (IS) when there is no player i such that $\{i\} \succ_i \pi(i)$ and for no player i there is a coalition $\pi(j) : \pi(j) \neq \pi(i)$ such that

$$\pi(j) \cup i \succ_i \pi(i) \wedge \pi(j) \cup i \succ_j \pi(j), \forall j \in \pi(j).$$

Thus a partition is individually stable, when no player can be more satisfied to an another, possibly empty coalition, without making its members less satisfied.

Example 2.12. *The partition $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ in example 2.6 is individually stable. Bob wants to be affiliated with $\{A, E\}$, though by doing so, Alice would be worse off. Similarly, Eve strives to be assimilated in $\{B, P\}$, though Peter exercises veto power for $\{B, P\}$ is a perfect coalition for him.*

- A partition π is contractually Nash stable (CNS) when there is no player i and coalition $\pi(j): \pi(j) \neq \pi(i)$ such that $\pi(j) \cup i \succ_i \pi(i) \wedge \pi(i) \setminus i \succ_j \pi(i), \forall j \in \pi(i) \setminus i, j \neq i$. Thus a partition is contractually Nash stable, when no player can be more satisfied to another, possibly empty coalition, without making the members of his current coalition less satisfied.

Example 2.13. *The partition $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ in example 2.6 is contractually Nash stable since Eve would like to deviate and join $\{B, P\}$, nevertheless Alice wouldn't leave her, since $\{A, E\}$ is her most preferred combination. Similarly Bob would like to deviate and be affiliated with $\{A, E\}$, although Peter would not consent and would exercise veto power. There are no more aspiring deviators.*

- A partition π is contractually individually stable (CIS) when there is no player i and coalition $\pi(j): \pi(j) \neq \pi(i)$ such that

$$\pi(j) \cup i \succ_i \pi(i) \wedge \pi(j) \cup i \succ_j \pi(j) \forall j \in \pi(j) \wedge \pi(i) \setminus i \succ_k \pi(i) \forall k \in \pi(i),$$

$k \neq i$. Thus a partition is contractually individually stable, when no player can be more satisfied to an another, possibly empty coalition, without making its members or the members of her current coalition less satisfied.

- A coalition $S \subset N$ blocks a partition π if $S \succ_i \pi, \forall i \in S$. In other words, a coalition is blocking if its members are all strictly better off, comparing to their earnings in the current partition.

Example 2.14. *In example 2.6 $\{A, B, E\}$ is a blocking coalition for the partition $\{A, B, E, P\}$ since not only Alice but also Bob and Eve increase their satisfaction through this coalition. On the contrary, $\{A, E\}$ consists no blocking coalition for this partition since for Eve isn't better than $\{A, B, E, P\}$, or $\{A, E\} \preceq_E \{A, B, E, P\}$.*

A partition is in the core if there is no coalition blocking it.

- A coalition $S \subset N$ weakly blocks a partition π if $S \succ_i \pi(i), \forall i \in S$ and $\exists j$ such that $S \succ_j \pi(j)$. So a coalition is weakly blocking if none of its members is worse off and at least one is strictly better off by participating in it, comparing to their earnings in the current partition.

Example 2.15. *Consider a hospital where three surgeons s_1, s_2, s_3 and three nurses n_1, n_2, n_3 , working in the same department, have to cooperate in order to perform surgeries in parallel. The preferences of doctors and medical staff are*

$$\begin{aligned} n_1 &\sim_{s_1} n_2 \sim_{s_1} n_3 \\ n_1 &\succ_{s_2} n_2 \sim_{s_2} n_3 \\ n_2 &\sim_{s_3} n_1 \succ_{s_3} n_3 \\ s_1 &\succ_{n_1} s_2 \succ_{n_1} s_3 \\ s_2 &\succ_{n_2} s_1 \succ_{n_2} s_3 \\ s_2 &\succ_{n_3} s_3 \succ_{n_3} s_1 \end{aligned}$$

then the partition $\{\{s_2, n_1\}, \{s_1, n_2\}, \{s_3, n_3\}\}$ admits as a weakly blocking coalition the pairing $\{s_1, n_1\}$. In this weakly blocking coalition s_1 enjoys the same profit, although n_2 ameliorates her position with respect to her preferences.

A partition is in the strict core (SC) if there exists no coalition weakly blocking it.

- A partition π is Pareto optimal (PO) when \nexists partition π' , such that for each player $i : \pi'(i) \succeq_i \pi(i)$ and $\pi'(j) \succ_j \pi(j)$, for a player j . By way of explanation the participants of a hedonic game satisfy Pareto optimality when there exists no partition which is weakly better than their current one.

Example 2.16. In example 2.6 the partition $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ is Pareto optimal since there is no other partition satisfying better or equally Alice, than the current.

- A partition π' is called reachable from π by transitions of players $H \subseteq N$, denoted by $\pi \xrightarrow{H} \pi'$, if $\forall i, j \in N \setminus H : \pi(i) = \pi(j) \Leftrightarrow \pi'(i) = \pi'(j)$.

Example 2.17. Consider seven researchers A, B, C, D, E, F, G working in teams as $S_1 = \{A, C, F\}, S_2 = \{B, E\}, S_3 = \{D, G\}$. The working teams

$$\{A, B, C\}, \{D, E, F\}, \{G\}$$

are reachable by the starting formation through the transitions $\{B \rightarrow S_1, F \rightarrow S_2, D \rightarrow S_2\}$ of the set $H_1 = \{B, F, D\}$. Obviously there are alternative deviator sets along with the respective transitions to reach the same coalition structure as $H_2 = \{A, C, E, D\}$ performing $\{A \rightarrow S_2, C \rightarrow S_2, E \rightarrow S_1, D \rightarrow S_1\}$.

A subset of players $H \subseteq N$ strongly Nash blocks a partition π if a partition π' exists such that $\pi \xrightarrow{H} \pi'$ and $\forall i \in H : \pi(i)' \succ_i \pi(i)$. A partition π is strong Nash stable (SNS) if \nexists subset H strongly Nash blocking it. Therefore a partition is strong Nash stable if there exists no subset of players who all have a benefit by rearranging themselves to the coalitions of the partition.

Example 2.18. The partition $\{A, E\}, \{B\}, \{P\}$ for the preference profile of example 2.6 is not strong Nash stable, as $H = \{B, P\}$ can make the adequate moves towards the partition $\{A, B, E, P\}$ which is more preferable to them.

- A subset of players $H \subseteq N$ weakly Nash blocks a partition π if a partition π' exists such that $\pi \xrightarrow{H} \pi'$ for which $\forall i \in H : \pi(i)' \succeq_i \pi(i)$ and \exists a player j such that $\pi'(j) \succ_j \pi(j)$. A partition π is strict strong Nash stable (SSNS) if \nexists subset H weakly Nash blocking it.

Example 2.19. The partition $\{A, B, E, P\}$ for the preferences given in example 2.6 is strict strong Nash stable, as there is no set of deviators that can benefit from other coalition schemes.

- A subset H of players is strongly individually blocking a partition π , if $\pi \xrightarrow{H} \pi'$, $\pi'(i) \succ_i \pi(i), \forall i \in H$ and $\pi'(j) \succeq_j \pi(j), \forall j \in \pi'(i)$, for any $i \in H$. A partition π is strongly individually stable (SIS) when no players' subset strongly individually blocks it. That is, there is no set of deviators which all are elevated by the synthesis of their new coalitions without their former colleagues to be dropped. Therefore a partition needs less "cooperation" from the players in order to be SIS than to be SNS because of the more prerequisites that poses the first stability notion for giving the green light for deviation.

Example 2.20. *The partition $\{\{A, E\}, \{B, P\}\}$ is not Nash stable for the game of example 2.6 as A or B can deviate, though it is strongly individually stable as the potential deviations incur hindrance to A and B respectively.*

For a specific class of hedonic games there are some additional stability concepts.

Definition 2.20. For additively separable hedonic games we have the following characterizations.

- A partition π is sum-in stable in case it is individually rational and there is no player i such that

$$\exists \pi(j) \mid \pi(j) \neq \pi(i) \wedge \pi(j) \succ_i \pi(i) \wedge \sum_{j \in \pi(j)} [v_j(\pi(j) \cup i) - v_j(\pi(j))] \geq 0.$$

That is, there is no one wanting to deviate, who would not decrease the social welfare of the coalition she wants to join.

- A partition π is sum-out stable in case it is individually rational and there is no player i such that

$$\exists \pi(j) \mid \pi(j) \neq \pi(i) \wedge \pi(j) \succ_i \pi(i) \wedge \sum_{k \in \pi(i), k \neq i} [v(\pi(i) \setminus \{i\}) - v(\pi(i))] \geq 0.$$

That is, there is no player preferring another coalition, who would not decrease the social welfare of the coalition she belongs by deviating.

Proposition 2.3. *Anonymity does not imply individual stability.*

Proof. Consider the anonymous game given by the following preference lists on sizes

$$\begin{array}{cccccccc} 57 & \succ_1 & 2 & \succ_1 & 7 & \succ_1 & 6 & \succ_1 & 1 \\ 7 & \succ_2 & 2 & \succ_2 & 57 & \succ_2 & 56 & \succ_2 & 1 \\ & & 2 & \succ_3 & 7 & \succ_3 & 6 & \succ_3 & 1 \\ 7 & \succ_{4-8} & 6 & \succ_{4-8} & 5 & \succ_{4-8} & 4 & \succ_{4-8} & 3 & \succ_{4-8} & 2 & \succ_{4-8} & 1 \end{array}$$

players 9 to 63 have single peaked preferences with 63 being the peak.

The only cardinalities of coalitions which do not accept more players are 1 to 7 and 57. Size 57 means that players 3 to 8 are not included for this size is not individually

rational for them. Hence 9 to 63 are included. Besides, being the size 1 to 7 means that at least one player among 1 to 8 is at an individually stable subset, however those suffice for 56 players leaving a group of 7 players which are going to coalize and absorb players in the range 9 – 63. Thus, for this game to be individually stable, players 9 to 63 have to be in the same partition S_1 .

Now from the rest of the players it is observable that 4 to 8 are going to be coalized together in S_2 . Joining S_1 is not in the options of none of them since isolation motivates them more. These players have increasing preferences so they tend to be together. The only reason not to is other formations. The only cases are a formation of 7 agents leaving out one of 4 to 8 but then someone between 1 and 3 would join the lone player.

Our next note is that agents 1 – 3 cannot coalize altogether leading to a size either 58, 8 or 3 since none of them likes such. Moreover they can not be all separated, creating sizes 56, 6 and 1 because the singleton coalition would have to be 3 and players 1 and 2 would join S_2 and S_1 respectively. Furthermore considering $57 \succ_1 6$, player 1 would deviate to S_1 .

So if 1 and 2 are together and $3 \in S_2$ then 2 deviates to S_2 and examining by the same way the rest combinations no individually stable partition can be found for this situation. \square

2.4 Relations of stability concepts

Perfect partitions obviously satisfy all stability criteria.

Proposition 2.4. *Strict strong Nash stable partitions satisfy strict core stability (and obviously strong Nash stability).*

Proof. Suppose a strict strong Nash stable partition π is not strict core stable. Then there is a coalition S such that $S \succ_i \pi(i)$, $\forall i \in S$ and there is $j : S \succ_j \pi(j)$. Therefore $\pi \xrightarrow{H} \pi'$, $H = S$ and $\forall i \in H : \pi'(i) \succ_i \pi(i)$ and $\exists j : \pi'(j) \succ_j \pi(j)$. Thus π is not strict strong Nash stable. Contradiction. \square

Proposition 2.5. *Strong Nash stability does not imply strict core stability and vice versa.*

Proof. Consider the following games:

- $\{1, 2\} \succ_1 \{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 3\} \succ_1 \{1\}$
 $\{1, 2\} \sim_2 \{1, 2, 3\} \succ_2 \{2, 3\} \succ_2 \{2\}$
 $\{1, 2, 3\} \succ_3 \{1, 3\} \succ_3 \{2, 3\} \succ_3 \{3\}$
 $\{\{1, 2, 3\}\}$ is strong Nash stable but not strict core stable.
- $\{1\}$
 $\{1, 2\} \succ_2 \{2\}$
 $\{\{1\}, \{2\}\}$ is strict core stable but fails to satisfy strong Nash stability.

\square

Proposition 2.6. *a) Strict core stability implies Pareto optimality b) strong Nash stability does not.*

Proof. (a) comes straightforward from the relative definitions.

For (b) consider the previous game:

$$\begin{array}{c} \{1\} \\ \{1,2\} \succ_2 \{2\} \end{array}$$

$\{\{1\}, \{2\}\}$ is Pareto optimal but fails to satisfy strong Nash stability. \square

Proposition 2.7. *Strict core stability implies strong individual stability.*

Proof. Let π be strict core stable and not strong individually stable. $\exists H, \pi'$ such that $\pi \xrightarrow{H} \pi', H = S$ and $\forall i \in H : \pi'(i) \succ_i \pi(i)$ and $\pi'(j) \succsim_j \pi(j), \forall j \in \pi'(i),$ for any $i \in H$. Thus for a coalition $\pi'(i)$ for some player $i \in H$ every player isn't worse off and i is better than in π . Concluding that π isn't strict core stable. \square

Proposition 2.8. *Strong individual stability implies core stability.*

Proof. Let π be strong individually stable and not core stable. Then there is a subset of players who can ameliorate their status by constituting a new coalition without dislike from third players. Contradiction. \square

Proposition 2.9. *Strict core stability coupled with Nash stability do not imply strong Nash stability.*

Proof. Consider the following game :

$$\begin{array}{c} \{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 3\} \succ_1 \{1, 2\} \succ_1 \{1\} \\ \{2\} \\ \{1, 2, 3\} \succ_3 \{1, 3\} \succ_3 \{2, 3\} \succ_3 \{3\} \end{array}$$

The partition $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ is strict core stable and Nash stable, admits however a strong Nash blocking subset $H = \{1, 2\}$. \square

It can now be seen that:

$$\begin{array}{l} (SNS) \Rightarrow (NS) \Rightarrow (CNS) \Rightarrow (CIS) \\ (NS) \Rightarrow (IS) \Rightarrow (IR) \\ (SNS) \Rightarrow (SIS) \Rightarrow (IS) \Rightarrow (CIS) \\ (C) \Rightarrow (IR). \end{array}$$

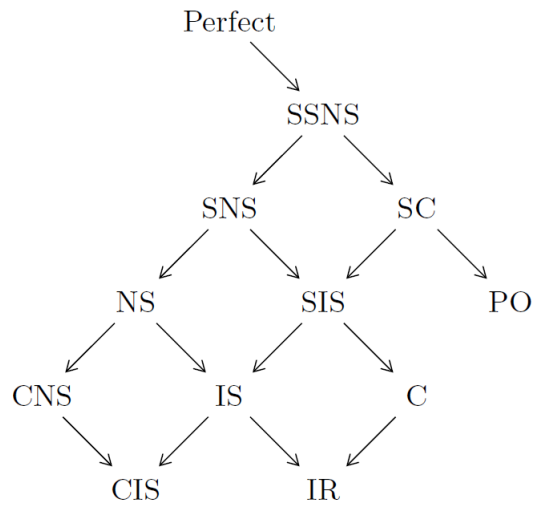


Figure 2.1: Hasse diagram of the implications of stability notions.

2.5 Negative results

In this section, negative results concerning the existence of stable outcomes are presented.

2.5.1 General preferences

As shown in the following subsection, there are hedonic games with empty core.

2.5.2 Roommates problem

There exist instances admitting no stable matching. Consider for example the following 4 player case [Gale and Shapley, 1962].

Table 2.3: Roommates problem instance admitting no stable matching.

Player	Preferences		
1	2	3	4
2	3	1	4
3	1	2	4
4	whatever		

Matching $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ is blocked by $\{\{2, 3\}, \{1, 3\}\}$, $\{2, 4\}$ is blocked by $\{1, 2\}$ and $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, is blocked by $\{1, 3\}$.

2.5.3 W games

As a result of the negative result for the roommates problem, the W hedonic games may have their strict core empty in case the respective roommate problem has no stable matching. In chapter 3 is explained the relation of W games to roommate games.

2.5.4 Additive separability

There exists additive separable instance which is not Nash stable. Consider the game (N, \succsim) where $N = \{A, B, C\}$ and the values for the preferences are circular, namely as demonstrated in table 2.4.

Table 2.4: Additive separable instance admitting no Nash stable matching.

Player	Valuation		
<i>A</i>	0	5	-6
<i>B</i>	3	0	4
<i>C</i>	7	-6	0

In case (A, B) coalize, B would deviate to join C . If (B, C) coalize, C will deviate to join A and then A will deviate to join B .

2.5.5 Fractional hedonic games

Consider a circular list of five players, each evaluating two the next, one the previous and minus ten for all other players (fig. 2.2).

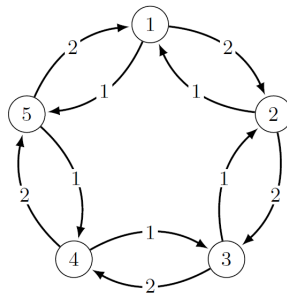


Figure 2.2: Fractional instance with empty core.

Each coalition including three players is unstable because of the -10 valuation which clouds every other benefit. Thus a candidate partition for the core includes coalitions with maximum size two. However, each two pairs are not a stable partitioning since some player wants to coalize with the singleton left who also prefers a pair than being single. Thus the core may be empty for fractional hedonic games.

The strict core can be empty even for simple fractional hedonic games. An instance in this category is a circular structure of five players.

Chapter 3

Stable coalition partitions

In this chapter, conditions under which stable coalitions exist for various stability notions and the respective algorithms for calculating them, are presented.

3.1 Pareto optimal partitions

[Aziz, Brandt, and Harrenstein, 2013]. Considering that a non Pareto optimal partition can lead the participants of a hedonic game to deviate in their totality, Pareto optimality is perceived as a stability notion. Pareto stable partitions exist for every hedonic game in contrast with other desired properties.

Pareto optimality is closely related to perfect partitions in the sense that by relaxing the preference profiles of the players in the appropriate extend, a Pareto optimal partition can be upgraded to a perfect one. More formally,

Definition 3.1. Preferences \succsim_i are a coarsening of preferences \succsim'_i when according to \succsim'_i , player i may have strict preferences over some of his equally most favourite coalitions in \succsim_i . We denote this relation as $R'_i \geq_i R_i$ where R'_i stands for the relation \succsim'_i and R_i for \succsim_i . Then \succsim'_i is a refinement of \succsim_i . In an analogous way $R'_i >_i R_i$ denotes that $R'_i \geq_i R_i$ and not $R_i \geq_i R'_i$.

A profile $\succsim = R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ is called a coarsening of preference profile $\succsim' = R' = (R'_1, R'_2, \dots, R'_n)$ if $R_i \leq_i R'_i$, for every player i .

Mediate profiles of $R, R' : R \leq R'$ are called the preference profiles R'' for which $R'' \geq R \wedge R' \geq R''$. We denote such relations as $R'' \in [R, R']$. In analogy with interval representation, $R'' \in (R, R']$ means that $R < R'' \leq R'$.

Theorem 3.1. For a set of players N assume $R^\perp \leq R^\top$ for two preference profiles R^\perp, R^\top and the coalition structure π is perfect for R^\perp , then π is Pareto optimal for R^\top if and only if there is a preference profile $R \in [R^\perp, R^\top]$ for which π is perfect and there is no other preference profile $R' \in (R, R^\top]$ admitting a perfect partitioning.

To see that, consider that R is the finest preference profile for which π is perfect. Assume that there exists a preference profile $R_1 \in (R, R^\top]$ for which π_1 is perfect, then

a player i exists, most preferring under R_1 some coalitions which are proper subset of his most preferred coalitions under R . Therefore, under the preference profile R^\top , π cannot be a Pareto optimal partition. This incompatibility results from the reasoning that according to R^\top , player i has at least as fine preferences as by R_1 and π_1 satisfies her in a perfect degree. On the other hand, π isn't perfect for R_1 satisfying i less than perfectly. Thus by R^\top , every player is at least equally satisfied in π_1 as in π , nevertheless, i is less. Consequently, π cannot be Pareto optimal for R^\top .

In the other direction, suppose that π is perfect for a preference profile $R \in [R^\perp, R^\top]$ and $\nexists R_1 \in [R, R^\top]$ accepting a perfect partitioning, then π is Pareto optimal for R^\top . By way of contradiction suppose it is not, then there exists a partitioning π_1 , which is better for players under R^\top and there is at least one player i , for whom $\pi_1(i) \succ \pi(i)$. However by coarsening step by step R^\top in order to create R , we stop coarsening i 's preferences when $\pi_1(i)$ is included at i 's most preferred coalitions. For the rest of the players $j \in N \setminus \{i\}$ we stop the coarsening at $\pi(j)$. Then π_1 is a perfect partition for the resulting preferences profile, while π is not, contradicting the assumption of the non existence of a perfect partition for a finer preference profile than R .

Algorithm 1: Preference refinement algorithm.

input : A general hedonic game
output: An individually stable, Pareto optimal partition for (N,R)

- 1 $Q_i^\top \leftarrow R_i$, for each $i \in N$
- 2 $Q_i^\perp \leftarrow R_i \cup ((X, Y) : X R_i \{i\}, Y R_i \{i\})$, for each $i \in N$
- 3 **while** $Q_i^\perp \neq Q_i^\top$ for at least an $i \in N$ **do**
- 4 $i \leftarrow \text{Choose}(\text{player } i \in N : Q_i^\perp \neq Q_i^\top)$
- 5 $Q'_i \leftarrow \text{Refine}(i : Q_i^\perp Q_i^\top)$
- 6 **if** *Perfect partition* $(N, (Q_1^\top, Q_2^\top, \dots, Q_{i-1}^\top, Q'_i, Q_{i+1}^\top, \dots, Q_n^\top)) \neq \emptyset$ **then**
- 7 $Q_i^\perp = Q'_i$
- 8 **else**
- 9 $Q_i^\top = Q''_i$ for $\text{cover}(Q''_i) = Q'_i$
- 10 **end**
- 11 **end**
- 12 **return** *PerfectPartition* (N, Q^\perp)

The previous theorem gives birth to an algorithm computing Pareto optimal partitions, the preference refinement algorithm (PRA). As its name suggests, PRA computes a Pareto optimal partition by refining step by step the preferences of the players which are initially been set to the finer ones for which a perfect partition exists. PRA starts by assigning to Q_i^\top the preferences of player i , for each player i and to Q_i^\perp flat preferences for i among all of his individually rational coalitions. Obviously every individually rational partition is perfect for Q_i^\perp . Then, a player is chosen and a refinement Q'_i of his preferences, in the interval defined by Q_i^\top and Q_i^\perp , is determined. Subsequently, it is checked whether there exists a perfect partition for those preferences. In case there

exists, Q_i^\perp is updated to Q'_i otherwise Q_i^\top is assigned with Q''_i for which $cover(Q''_i) = Q'_i$, that is Q''_i is one step coarser than Q'_i .

From the previous description, becomes clear, that in every iteration of the while loop, the gap between Q_i^\top and Q_i^\perp decreases for some player i . Since the coalitions among which each player chooses and the set of players are finite, the algorithm is guaranteed to terminate after several number of cycles. Moreover, there is no refinement of the returned preference profile for which a perfect partition exists. The mounting for this observation comes from the fact that the last time the algorithm took the else-if path was because it couldn't find a perfect partition and the result for that step was Q_i^\top to become the finest preferences for which there may exist such a partition. Since that point the preferences of player i are never coarsened.

The two functions, called in the algorithm, namely Choose and Refine define some of the characteristics of the generated coalition structure.

Table 3.1: PRA properties with respect to Choose and Refine functions.

Property	Choose	Refine
Binary search	random	$\left\lceil \frac{refs(Q_i^\perp) + refs(Q_i^\top)}{2} \right\rceil$
Serial dictatorship	specified, persistent player order	most delegate possible
Conservative	random	slightest possible refinement
Egalitarian	LRU	slightest possible refinement

Function $refs: \text{Preference Profiles for given players} \rightarrow \mathbb{N}$ takes an individually rational preference profile and returns the number of refinements needed to obtain a flat list of preferences, that is a preference profile where every player is indifferent among all her individually rational coalitions.

LRU \rightarrow Least recently used. The player chosen is the player who has played less.

As an example of the procedure followed by the PRA algorithm consider the W hedonic game

$$(N, R_i) = (\{1, 2, 3\}, \{([2, 3], [1]), ([1], [2, 3]), ([2], [3], [1])\})$$

where the relations R_i declare the preferences of players over players. The execution of the algorithm is illustrated in fig. 3.1. Initially, Q^\perp is assigned with flattened preferences by which each player likes all others equally and Q^\top with the true preferences. The starting chosen refinement Q'_3 concerns the third player and because there still exists perfect partition, Q^\perp is updated taking the refinement under consideration. After that a gradation Q'_1 is attempted in first players' list but conflicts with the possibility of a perfect partition so Q_1^\top is degraded to $Q''_1 \mid Q'_1 = cover(Q''_1)$. The last assignment tried, includes refinement on second players' preferences, though neither these preferences

admit a perfect partition and therefore Q^\top adjusts to $Q_2''|Q_2' = \text{cover}(Q_2'')$ which coincides with Q_2^\perp and the procedure is terminated.

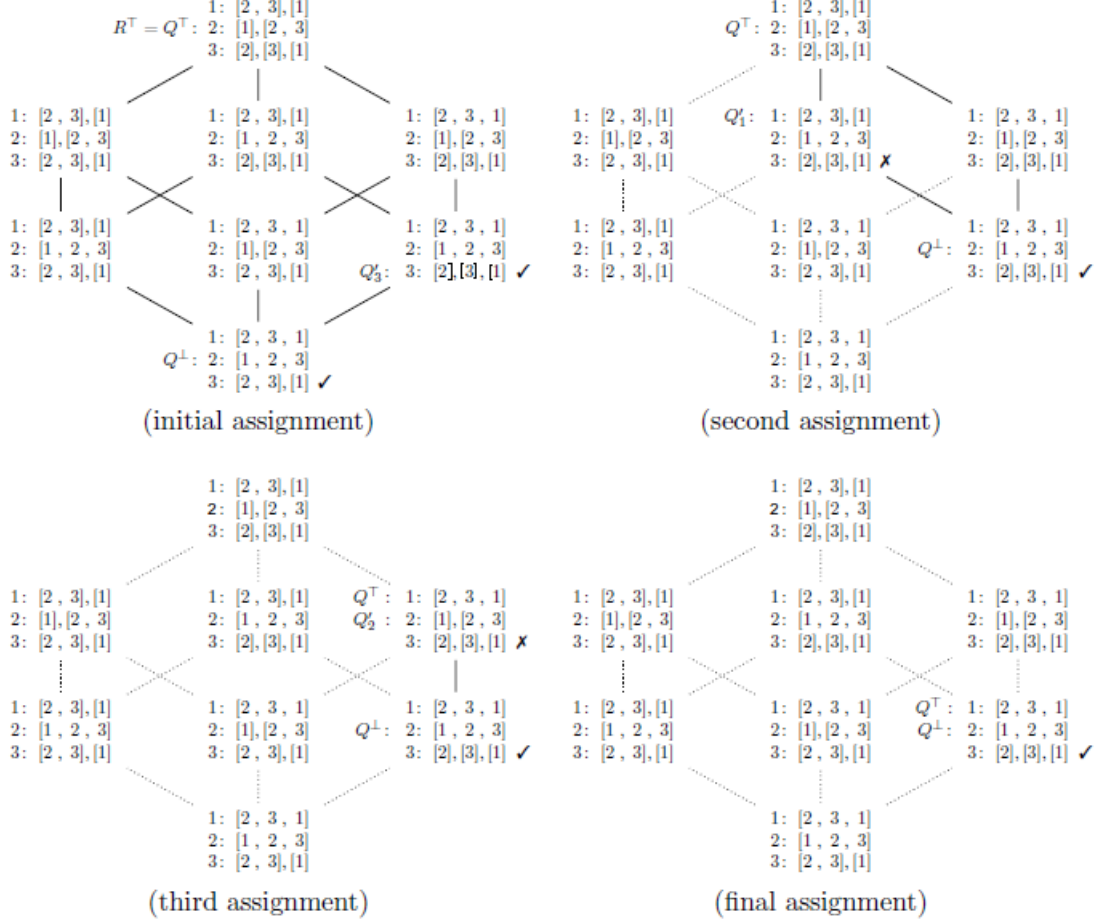


Figure 3.1: Execution of PRA algorithm in W hedonic game.

Preferences refinement algorithm (PRA) uses an oracle solving perfect partition problem. The complexity of PRA can be polynomial in the input size of the game. This efficient result occurs when perfect partition can be calculated in polynomial time. This is the case for most interesting situations. Although the lattice consisting of Q^\top , and all possible coarsening sequences until Q^\perp can have exponential height, through binary search only polynomial, on the size of the input, calls of Choose, are executed. However as explained in chapter 4, HPAR is NP-complete, therefore PRA runs in exponential time in the general case. By virtue of theorem 3.1, the output of algorithm 1 constitutes a Pareto optimal partition for the input hedonic game.

Preference refinement algorithm can be used in cases where serial dictatorship is presented incapable. Serial dictatorship (SD), computes a Pareto optimal partitioning by Choose using a predefined list over players. Especially where there are indifferences,

the dictator, namely the player which by priority is being chosen by function Choose, until its coalition is determined, is not clear to which coalition should be assigned in order to arise a Pareto stable outcome. Moreover there are hedonic instances where PRA returns fair Pareto optimal partitionings that serial dictatorship never produces. Example gratia the game defined by the following preferences admits both a quite fair Pareto optimal partitioning and an aristocratic one. Thought serial dictatorship can compute only the second resulting to a situation where a player joins her least preferred coalition. $\{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 3, 4\} \succ_1 \{1, 2, 4\} \succ_1 \{1, 2\} \succ_1 \{1, 3\} \succ_1 \{1, 4\} \succ_1 \{1, 2, 3, 4\} \succ_1 \{1\}, \{2, 3, 4\} \succ_2 \{1, 2, 4\} \succ_2 \{1, 2, 3\} \succ_2 \{1, 2\} \succ_2 \{2, 4\} \succ_2 \{2, 3\} \succ_2 \{1, 2, 3, 4\} \succ_2 \{2\}, \{1, 3, 4\} \succ_3 \{1, 2, 3\} \succ_3 \{2, 3, 4\} \succ_3 \{3, 4\} \succ_3 \{1, 3\} \succ_3 \{2, 3\} \succ_3 \{1, 2, 3, 4\} \succ_3 \{3\}, \{1, 2, 4\} \succ_4 \{2, 3, 4\} \succ_4 \{1, 3, 4\} \succ_4 \{3, 4\} \succ_4 \{2, 4\} \succ_4 \{1, 4\} \succ_4 \{1, 2, 3, 4\} \succ_4 \{4\}$ Despite of this fact, egalitarian PRA, integrates every player in his fourth most preferred coalition by proposing $\{1, 2\}, \{3, 4\}$.

3.2 Roommates problem

[Irving, 1985]. The algorithm solving the stable roommates problem starts with proposals made by players to one another. A player rejects a proposal if he already has a better one, that is a proposal for a player ranking higher in his preferences list. Otherwise he holds for consideration the proposal and rejects any worse proposals so far. A player proposes according to his preference list, starting from the most preferred and stops when a promise for consideration is given to her. If later the proposal is rejected the player continues proposing to less preferred players.

This first phase of the algorithm ends with every player having a proposal or with one person rejected by everyone. After this stage, for every player x rejected by a player y the matching $\{x, y\}$ is not stable.

As a corollary, if the first stage of the algorithm terminates with every person holding a proposal, then the preference list of possible partners for y holding a proposal from x , can be reduced by deleting from it

- players who are worse for y than x
- players who hold a proposal from a player who they prefer more than y

The next stage of the algorithm consists of further elimination on the preferences lists. To achieve that, we search for cycles of the form a_1, \dots, a_r where the second preference for a_i is first for a_{i+1} , indices i being modulo r . We call b_{i+1} the second player in the preference list of player a_i .

To find such a cycle, we start from a player p_1 whose preference list includes 2 or more players and generate the sequences

- q_i with the second preference of p_i 's list
- p_{i+1} with the last person in q_i 's current list.

A key point of the algorithm is that in any stable matching, in the reduced until this point lists, either a_i and b_i are partners for all i or for no i . To see that suppose that $\{a_k, b_k\}$ consist a stable matching. Then since a_k is last in b_k 's preferences, it has to be that a_{k-1} is matched with somebody who preferred to b_k and since b_k is second in a_{k-1} 's list the only candidate is b_{k-1} . Thus inductively we conclude that if a_k is matched with b_k for some k , this holds for each k . Another key point is that if there is a stable matching where a_i and b_i share a pair, then there is another stable matching where they are separated. For a closer look consider a stable matching M where every a_i is matched with b_i , $1 \leq i \leq r$. We call M' the matching where every a_i is matched with b_{i+1} namely his second choice in the reduced lists and every player in $N \setminus A \cup B$ (where N is the set of all players, $A = \{a_1, \dots, a_r\}$, $B = \{b_1, \dots, b_r\}$) is matched as in M . Then every player in B is matched with a more preferred player than in M since in M they were all matched with their last choice among the reduced lists. So the only possibility for M' being unstable while M is stable, is for matchings where members of A are involved.

Supposing x is better for a_i than b_{i+1} is, there are the following cases

- a_i is matched with x in M meaning that $x = b_i$, which makes for b_i the worst possible matching in accordance with the reduced lists.
- a_i prefers x to b_i , so x has been eliminated from the initial lists and it is not presented in the reduced list of a_i signifying that x has rejected a_i and does not consist a choice for her.
- a_i prefers b_i to x which in turn prefers more than b_{i+1} . Given that x in this case is not present in a_i 's reduced preference list asserts once again that x has rejected a_i .

Therefore, there is no deviating matching for M' .

As a consequence of the two points, if a stable matching exists for the original game, then such exists for any reduced set of preference lists. By using the adequate data structures the complexity of the algorithm is $\mathcal{O}(n^2)$.

3.3 Preferences derived from the Best or Worst

[Cechlarova and Romero-Medina, 2001]. A way for computing strict core stable outcomes in games with strict B preferences is given by the BSTABLE procedure described in algorithm 3. BSTABLE is similar to the top-trading-cycles algorithm [Shapley and Scarf, 1974] of David Gale which earned Lloyd Shapley the Nobel price in Economics in 2012. By depicting the relation B among the players, a directed graph emerges. This graph has obviously at least one cycle. Moreover, since every player has a unique best in V , every node is determined to have only one feasible allocation. The resulting partition is strict core stable since supposing that a player i wants to deviate, means that his favourite player $i+1$ is also in the deviating set, otherwise i would lose out by deviating. Therefore the blocking coalition S has to be a superset of the cycle of every player $i \in S$. Then, the cycle is more preferable than the deviating coalition because the best player

Algorithm 2: Irvings stable roommates algorithm.

input : A roommates problem instance (N, \succ)
output: A stable matching for the input roommates problem

```

1  $has\_a\_proposal = \emptyset$ 
2 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
3   proposer =  $k$ 
4   do
5     propose to next_choice
6     if not rejected then
7       if next_choice  $\in$  has_a_proposal then
8         proposer = next_choice's reject
9       end
10    end
11    while next_choice  $\in$  has_a_proposal;
12    has_a_proposal = has_a_proposal  $\cup$  next_choice
13  end
14  for every player  $y$  holding a proposal from  $x$  do
15    reduce  $y$ 's list and the symmetric ones by all those  $y$  considers worse than
       $x$ 
16    reduce  $y$ 's list and the symmetric ones by all those who hold a proposal
      from a player which they prefer to  $y$ 
17  end
18  while some reduced preference list has length  $> 1 \wedge$  no reduced list has length
       $< 1$  do
19    detect all cycles
20    eliminate the cycles
21  end
22  return Stable matching
  
```

is included in both sets and the cycle is has less members than the deviating coalition. Hence it has to be that the blocking coalition identifies with the cycle, which means no deviation.

B stable algorithm is also strategy proof hereunder Roth's work [Roth, 1982]. This is simply verified since the first player that B algorithm coalizes with a player i is his declared as favourite. In case a player does not assert his favourite player he only increases his chances of not being in the same coalition with him while in case his favourite player is included, the chain will continue as if he hadn't misreported his preferences.

As far as W games are concerned, strict core outcomes occur by matching players in couples. For partitionings with higher maximum coalition cardinality, a player i belonging to such coalition, would have incentives to deviate in a pair with his best player $B_i(S | |S| > 2)$ among the members of the coalition S while his best player $B_i(S)$ would

Algorithm 3: BSTABLE algorithm.

input : A hedonic game (N, \succsim) with B strict preferences

output: A strict core stable partition

```

1  $V \leftarrow N$ ;
2  $\forall i \in V : flag(i) \leftarrow 0$ ;
3  $\mathcal{C} \leftarrow \emptyset; \pi \leftarrow \emptyset$ 
4 while  $V \neq \emptyset$  do
5    $i \leftarrow$  select a player  $\in V$ 
6    $flag(i) \leftarrow 1$ 
7   while  $flag(B_i(V)) == 0$  do
8      $j \leftarrow B_i(V)$ 
9      $flag(j) \leftarrow 1$ 
10     $i \leftarrow j$ 
11  end
12   $\mathcal{C} \leftarrow B_i(V)$ 
13   $k \leftarrow B(B_i(V))$ 
14  while  $k \neq B_i(V)$  do
15     $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup k$ 
16     $k \leftarrow B_k(V)$ 
17  end
18   $V \leftarrow V \setminus \mathcal{C}$ 
19   $\pi \leftarrow \pi \cup \mathcal{C}$ 
20 end
21 return  $\pi$ 

```

at least be indifferent between the two coalitions.

This observation leads to the reduction of the problem of W stable partitions to stable roommates problem. Indeed in case strict preferences P over players are given, every solution of stable roommates problem under P is W strict core stable. Suppose it is not, and a weakly blocking set Z exists. In case Z is a singleton i , then $i \succ_i \{i, j\}$ where j is his roommate. However, then, coalizing with j is individually irrational for i . Hence, there is no singleton weakly blocking coalition.

The other possibility is $|Z| \geq 2$. A player $i \in Z$ for who $Z \succ_i M(i)$ (where $M(i)$ is the partner of i under stable roommates solution) would also like to deviate with $j = B_i(Z)$, therefore $Z' = \{i, j\}$ is also a weakly blocking coalition. Suppose k, l are the partners of i, j in the stable roommate matching respectively. Then since Z' is a weakly blocking coalition, $j \succ_i k$ and $i \succ_j l$. So either $i \sim_j l$ leading to $\{i, j\} \in$ stable roommate solutions or $i \succ_j l$ meaning that $\{i, j\}$ is a blocking matching for the stable roommate matching, contradiction. The former discussion concludes in the following theorem.

Theorem 3.2. *For strict preferences over individuals W hedonic games may accept strict core partitions of maximum coalition cardinality 2. Moreover all stable roommates*

problem solutions are strict core partitions for the W game with the same preferences.

3.4 Top responsiveness and the top covering algorithm

For each problem where agents' preferences satisfy top responsiveness:

Definition 3.2. [Alcalde and Revilla, 2004]. The choice covering function $C : N \times 2^N \rightarrow 2^N$ is defined as $C(S, N) = S \cup \bigcup_{i \in S} ch(i, N)$. Nested application of the choice covering

function C^t is defined as:

$$C^1(S, N) = C(S, N)$$

$$C^{t+1}(S, N) = \bigcup_{i \in C^t(S, N)} ch(i, N).$$

Applying iteratively the function $C(i, V)$ until it turns idempotent and adds no new different elements, yields the connected component of player i with respect to the set of players V . We denote by $k(i)$ the iteration in which i is nominated part of a coalition of

Algorithm 4: Top Covering Algorithm.

input : A hedonic game satisfying top responsiveness

output: A strict core stable partition

```

1  $R^1 \leftarrow N; \pi \leftarrow \emptyset$ 
2 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
3   Select  $i \in R^k$  satisfying  $|CC(i, R^k)| \leq |CC(j, R^k)|, \forall j \in R^k$ 
4    $S^k \leftarrow CC(i, R^k)$ 
5    $\pi \leftarrow \pi \cup \{S^k\}$ 
6    $R^{k+1} \leftarrow R^k \setminus S^k$ 
7   if  $R^{k+1} = \emptyset$  then
8     return  $\pi$ 
9   end
10 end
11 return  $\pi$ 

```

the partition $\pi_{(N, \succ)}^{tc}$.

Lemma 3.1. [Dimitrov and Sung, 2005]. For a hedonic game (N, \succ) satisfying top responsiveness, the top covering algorithm concludes in finite steps and returns a partition of N .

Proof. Obviously top covering algorithm ends in finite steps looping from 1 to $|N|$. Moreover supposing that the algorithm stops after k -th repetition, its output is (S^1, S^2, \dots, S^k) , $R^{k+1} = \emptyset$. Taking into account that $S^i \cap S^j = \emptyset$, for $i \neq j$, the output $\pi_{(N, \succ)}^{tc}$ is a partition of the set of players N . \square

Lemma 3.2. [Dimitrov and Sung, 2005]. Applying the top covering algorithm to a game (N, \succsim) outputs a partition $\pi_{(N, \succsim)}^{tc}$ such that for every player i , $\pi_{(N, \succsim)}^{tc}(i) = CC(i, R^{k(i)})$.

Proof. For m -th round, meaning $k = m$, coalition $\pi_{(i)}^{tc}$ is formed for a player $i \in R^{k(i)}$: $|CC(i, R^{k(i)})| \leq |CC(j, R^{k(i)})| \forall j \neq i$. For player i obviously $\pi_{(N, \succsim)}^{tc}(i) = CC(i, R^{k(i)})$. For all other agents $j \in \pi_{(N, \succsim)}^{tc}(i) \setminus \{i\}$, $CC(j, R^{k(i)}) \subseteq CC(i, R^{k(i)})$ by definition, and we need to show $CC(i, R^{k(i)}) \subseteq CC(j, R^{k(i)})$. Indeed if there is a player $n \in \pi_{(N, \succsim)}^{tc}(i)$ such that $n \notin CC(j, R^{k(i)})$ then $|CC(j, R^{k(i)})| < |CC(i, R^{k(i)})|$, contradiction. \square

Theorem 3.3. [Dimitrov and Sung, 2005]. Let (N, \succsim) be a hedonic game satisfying top responsiveness. The partition returned from the top covering algorithm π^{tc} is strictly core stable.

Proof. Suppose there exists nonempty $X \subseteq N$ such that $X \succsim_i \pi_i^{tc} \forall i \in X$. Let $j \in X$ be the first player from X becoming a member of a coalition by the TCA, that is $k(j) \leq k(i) \forall i \in X$. Thus $X \subseteq R^{k(j)}$. The choice set of j in π_j^{tc} is $ch(j, \pi_j^{tc}) = ch(j, R^{k(j)})$ (lemma 3.2) and having $X \succsim_j \pi_j^{tc}$ implies $ch(j, X) = ch(j, R^{k(j)})$.

We want to show that $\pi_j^{tc} \subseteq X$. It's $C^1(j, R^{k(j)}) = ch(j, R^{k(j)}) \subseteq X$. Suppose $C^t(j, R^{k(j)}) \subseteq X$. For every $i \in C^t(j, R^{k(j)})$, $ch(i, \pi_i^{tc}) = ch(i, R^{k(j)})$. On the other hand, $X \succsim_i \pi_i^{tc}$ implies that $ch(i, X) \succsim_i ch(i, \pi_i^{tc}) = ch(i, R^{k(j)})$, meaning $ch(i, X) = ch(i, \pi_i^{tc})$. Hence $ch(i, R^{k(j)}) \subseteq X$. Therefore $C^{t+1}(j, R^{k(j)}) = \bigcup_{i \in C^t(j, R^{k(j)})} ch(i, R^{k(j)}) \subseteq X$, follow-

ing $CC(j, R^{k(j)}) \subseteq X$ concluding to $X = \pi_j^{tc}$ and no coalition is weakly blocking. \square

Theorem 3.4. [Alcalde and Revilla, 2004]. Let N be a fixed set of agents and TR , the family of hedonic games (N, \succsim) such that, for each $i \in N$, \succsim_i satisfies top responsiveness. Let also Ψ^{tc} be the rule that associates each such problem with the partition extracted by the top covering algorithm. Then Ψ^{tc} is strategy-proof in TR .

We notate as $[\succsim'_i, \succsim_{-i}]$ the preference profile \succsim where i 's preferences have been substituted from \succsim'_i .

Proof. Let us assume that a player i manipulates top covering mechanism achieving better payoff by declaring preferences \succsim'_i . For every player j such that $k(j) < k(i)$,

$$\Psi_j^{tc}[N, \succsim] = \Psi_j^{tc}[N, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]].$$

So $\Psi_i^{tc}[N, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$ consists of players in $R^{k(i)}$. By the procedure of the top covering algorithm,

$$\Psi_i^{tc}[N, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]] \supset \bigcup_{j \in ch(i, (R^{k(i)}, \succsim))} CC(j, R^{k(i)}, \succsim').$$

Subsequently we examine the two cases:

- $\Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succsim] \subseteq \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Then $ch(i, R^{k(i)}) = ch(i, \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succsim]) = ch(i, \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]])$. And from the third top responsiveness condition,

$$\Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succsim] \succsim_i \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$$

contradicting manipulation of Ψ^{tc} via \succsim' .

- $\Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succsim] \not\subseteq \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Then there is a player m for whom $m \in \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succsim]$ and $m \notin \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. As a consequence there is a player $n \in ch(i, R^{k(i)})$ such that: $n \notin \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Leading, according to the second top responsiveness condition, to: $\Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, \succsim] \succ_i \Psi_i^{tc}[R^{k(i)}, [\succsim'_i, \succsim_{-i}]]$. Thus i does not manipulate Ψ^{tc} via \succsim'_i .

□

Following the result of [Sönmez, 1999], stating that the only possibility of finding a strategy proof stable mechanism is if the core is a singleton, the partitioning returned by the top covering algorithm is the only truthful under top responsiveness, though [Alcalde and Revilla, 2004] includes a specific proof for our case.

Proposition 3.1. *Top responsiveness does not imply Nash stability.*

Proof. By counterexample. Consider the game (N, \succsim) with preferences:

$$\begin{aligned} \{1,2\} \succ_1 \{1,2,3\} \succ_1 \{1,3\} \succ_1 \{1\}, \\ \{2\} \succ_2 \{1,2\} \sim_2 \{2,3\} \succ_2 \{1,2,3\}, \\ \{1,2,3\} \succ_3 \{1,3\} \succ_3 \{2,3\} \succ_3 \{3\}. \end{aligned}$$

As it can be easily checked the preference profile satisfies top responsiveness. However there is no Nash stable partition since each candidate partition has a player who wants to migrate.

- if $\pi = \{\{1,2\}, \{3\}\}$ or $\{\{1,2,3\}\}$ player 2 wants to leave.
- if $\pi = \{\{1,3\}, \{2\}\}$ player 1 wants to leave.
- if $\pi = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ players 1 and 3 want to leave.
- if $\pi = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ players 2 and 3 want to leave.

□

A game satisfies mutuality under top responsiveness if for every set X and players i, j such that $X \in N_i \cap N_j : i \in ch(j, X) \Rightarrow j \in ch(i, X)$. Note that the class of games satisfying mutuality under top responsiveness is extensively limited.

For this class SSNS can be proven, though the following lemma is essential.

Lemma 3.3. *Under top responsiveness and mutuality $\pi_{(N, \succsim)}^{tc}(i) = ch(i, N)$.*

Proof. Insisting that there is a player i such that there is player $j \in ch(i, N) \wedge j \notin \pi_{(N, \succsim)}^{tc}(i)$ gives $i \notin \pi_{(N, \succsim)}^{tc}(j)$ although by mutuality $i \in ch(j, N)$. Either $k(i) < k(j)$ or $k(j) < k(i)$. In both cases there is contradiction considering lemma 3.2 which demands that the player with $k = \min(k(i), k(j))$ has his choice set in his coalition according to the top covering algorithm. \square

Theorem 3.5. [Aziz and Brandl, 2012]. For a game (N, \succsim) which satisfies top responsiveness and mutuality the top covering algorithm produces strict strong Nash stable partition.

Proof. Admitting that $\pi_{(N, \succsim)}^{tc}$ is not strict strong Nash stable, leads to the existence of a set of players H weakly Nash blocking it, that is $\pi \xrightarrow{H} \pi'$ for which $\forall i \in H : \pi(i)' \succsim_i \pi(i)$ and \exists a player $j \in H$ such that $\pi'(j) \succ_i \pi(j)$. Suppose $\pi(j) \cap \pi'(j) \in H$. Top responsiveness implies that $\forall i \in \pi(j) \cap \pi'(j) : ch(i, \pi'(j)) \succsim_i ch(i, \pi(j))$. However $ch(i, \pi(j)) = ch(i, N)$ according to lemma 3.3, therefore $ch(i, \pi'(j)) = ch(i, \pi(j)) = ch(i, N)$. Thus we've reached that $ch(i, N) \subseteq \pi(j) \cap \pi'(j)$ meaning that $\pi(j) \cap \pi'(j) \succ_i \pi(j)$ and $\pi(j) \cap \pi'(j)$ strongly blocks $\pi(j)$, contradicting theorem 3.3.

So $\pi(j) \cap \pi'(j) \notin H$ and there have to be players who left $\pi(j)$. Among them there is at least one k for whom $l \in ch(k, N) : l \in \pi'(j)$ and $ch(k, \pi(j)) \succ ch(k, \pi'(k)) \wedge \pi(j) \succ_k \pi'(k)$ which contradicts k being a deviator. \square

3.5 Bottom responsiveness

An ordering of partitions is used to produce the stability results under bottom responsiveness.

Definition 3.3. Consider a set of players N and two of its partitions π, π' consisting of coalitions $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ and $\{T_1, T_2, \dots, T_l\}$ respectively, with $|S_i| \geq |S_{i+1}|$ and $|T_j| \geq |T_{j+1}|$ for $i \in [1, k-1]$ and $j \in [1, l-1]$. We define a) $\pi > \pi'$ if $\exists j : |S_j| > |T_j|$ and $|S_i| = |T_i|, \forall i < j$ and $\pi = \pi'$ if $k = l$ and b) $|S_i| = |T_i|, \forall i \leq k$.

Theorem 3.6. A game (N, \succsim) , satisfying bottom responsiveness has a strongly individually stable partition.

Proof. Among all individually rational partitions of N we focus on a maximal with respect to relation \geq and call it π . Thus $\pi \geq \pi' \forall \pi'$ partition of N . Assume π is not SIS, then there exists a subset of players $H \subseteq N$ such that $\pi \xrightarrow{H} \pi', \pi'(i) \succ_i \pi(i), \forall i \in H$ and $\pi'(j) \succsim_j \pi(j), \forall j \in \pi'(i)$, for any $i \in H$.

Because of the individual rationality of π , for each deviator $i \in H, i \in Av(i, \pi(i))$ and it holds that in order to profit from the deviation from his previous coalition $\{i\} \in Av(i, \pi'(i))$ otherwise $\pi(i) \succ_i \pi'(i)$. Moreover for each of the non deviator players who were grouped with deviators, $j \in \pi', \pi'(j) \succsim_j \pi(j)$ differently they wouldn't have accepted the deviators. Finally each of the rest of the players k will have $k \in Av(k, \pi'(k))$ because no new players were added to her coalition. Therefore π' is also individually rational.

We identify a coalition S of maximum size in π among these containing a deviator, that is $S \in \pi : |S| \geq |S'| \forall S' \in \pi$. A deviator $i \in S$ affiliates with another coalition S' . So $S' \cup i \succ_i S$ and $S' \cup i \succ_j S' \forall j \in S'$. If $|S' \cup i| \leq |S|$ player i wouldn't profit from the deviation according to bottom responsiveness, so $|S' \cup i| > |S|$ contradicting the maximality of π among individually rational coalition partitions. \square

3.6 Top coalitions

Theorem 3.7. *If a game (N, \succ) satisfies the weak top coalition property it has a non empty strict core.*

Proof. Assume $V_0 = N$ and S^1 is a weak top coalition of V_0 with ordered partition $\{S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{l(1)}\}$, $V_1 = V_0 \setminus S^1$ and S^2 a weak top coalition of V_1 with ordered partition $\{S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{l(2)}\}$ and so on until $V_k = V_{k-1} \setminus S^k$ and $S^k = \{S_k^1, S_k^2, \dots, S_k^{l(k)}\}$. We can certify that there exists such k that $V_{k+1} = \emptyset$ while $V_k \neq \emptyset$ since for every non empty V_i we can find a non empty S_{i+1} .

Then the partition $(S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{l(1)}, S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{l(2)}, \dots, S_k^1, S_k^2, \dots, S_k^{l(k)})$ is a strict core stable partition. Indeed no player in S_1^1 could gain more being a member of a deviation. Moreover without S_1^1 's participation no player in S_1^2 could ameliorate his payoff by a coalitional deviation. \square

Theorem 3.8. *For every game (N, \succ) satisfying the top coalition property the strict core and the core are singletons.*

Proof. Define $M(V) = \{S \subset 2^{|V|} : S \text{ is a top coalition of } V\}$, for every set of players $V \subseteq N$. If the preferences are strict, $M(V)$ consists of disjoint sets for every $V \subseteq N$. Supposing $V_0 = N$ we construct a sequence by defining $V_1 = V_0 \setminus M(V_0)$, $V_2 = V_1 \setminus M(V_1)$ and so on, where $M(V_i) = (S_i^1, S_i^2, \dots, S_i^{m(i)})$. There should be an integer K such that $V(K+1) = \emptyset \wedge V(K) \neq \emptyset$. As a consequence of the construction the partition $\pi = (S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{m(1)}, S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{m(2)}, \dots, S_K^1, S_K^2, \dots, S_K^{m(K)})$ is the only core partition of (N, \succ) . Every player in $S_1^k, k \in \{1, \dots, m(1)\}$ prefers this coalition to anyone else, so can't be a member of a weakly blocking coalition. Subsequently players in $S_2^k, k \in \{1, \dots, m(2)\}$ prefer this coalition to any choice left for them and inductively for all $i \in N$ there is no beneficial deviation to π . \square

3.7 Ordinal Balance - Consecutiveness

Theorem 3.9. *[Greenberg and Weber, 1986; Bogomolnaia and Jackson, 2002] If a game is ordinally balanced then there exists a core stable coalition partition.*

If a game is weakly consecutive with respect to an ordering f , then there exists a core stable coalition partition that is consecutive with respect to f .

3.8 Games satisfying anonymity and separability

Those two properties certify the nonemptiness of the core [Banerjee, Konishi, and Sönmez, 2001]. Because of anonymity, a player either wants to be alone or would like company. Consequently the set N of players is divided in two subsets $N^+ = i : \{i, j\} \succsim_i \{i\}$ and $N^- = i : \{i, j\} \precsim_i \{i\}$. For every subset V of players, members of $N^- \in V$ have as top coalition the singleton. In case where $N^- \cap V = \emptyset$, $V \subset N^+$ and V is a top coalition for them. Thus for every subset V of N , the top coalition property is satisfied, therefore there is core stable partition.

3.9 Additively separable and symmetric games

Additive separability combined with symmetry secure the existence of Nash stable partition [Bogomolnaia and Jackson, 2002]. Consider a game (N, \succ) satisfying the mentioned hypotheses. Let a player $i \in S_1$ have incentive to deviate to coalition S_2 and let her valuations be v_{ij} over every player $j \neq i$. Then if i increases her utility or

$$\sum_{j \in S_2} v_{ij} > \sum_{j \in S_1} v_{ij}$$

by deviating, the same holds for the utility

$$\sum_{j \in N} v_{ij} = \sum_{j \in S_1} v_{ij} + \sum_{j \in S_2} v_{ij} + \sum_{j \in N \setminus (S_1 \cup S_2)} v_{ij}.$$

Therefore, by every deviation the social welfare increases. Additionally the number of partitions is finite and a maximum has to exist which corresponds to a Nash stable solution.

The same result can be seen by depicting additively separable and symmetric games by undirected graphs [Gairing and Savani, 2010]. A deviating player decreases the existing cut the family of which are finite and therefore has a minimum.

Therefore best response dynamics in this class of games leads to a Nash stable solution.

3.10 Fractional hedonic games

Forests

In simple symmetric fractional hedonic games which are represented by forests, that is treelike connected components, the strict core is non empty. A way of choosing a strict core stable partition is by running in each connected component breadth first search in order to classify the nodes to layers, starting from an arbitrary node u . Hereafter for each player belonging to the previous of the last layer a coalition is formed, which she shares with her children. Then those nodes stop being on the tree. This procedure is repeated until no node remains uncoalized.

The strict core stability of this partitioning arises, as usual, from lack of deviation incentives. For nodes being previous to the last layer, a better coalition means that their father should be included, but in this case the children have their profit reduced. On the other hand for the children to achieve a better utility means that they should be in the same group with less siblings. However in this case the gain of the parent node is trimmed. Thus there is no weak blocking coalition for this partitioning concluding the strict core stability. The aforementioned reasoning holds for every step of the algorithm and therefore for the whole partition.

Bakers and Millers

Another interesting situation which can be modelled by simple symmetric fractional hedonic games is the Bakers and Millers setting. This framework is used to represent situations where several classes exist and every player desires to be clustered with as many people as possible, from classes different than hers. The title refers to Bakers which want to not have fellow-craftsmen close, so that there is a reason for them to produce bread and so that there exists sufficient wheat. On the other hand, Millers have their own similar incentives to have a high ratio of Bakers at their vicinity so as their products to be useful. The number of classes is not restricted to two. The representation of the game can be done with an undirected graph, where each player is connected via a 1 weighting edge with each player belonging to a different class.

For a partition π being in the strict core, assume a class θ which has a greater analogy in coalition S than in T , with $S, T \in \pi$ or $\frac{|S \cap \theta|}{|S|} \geq \frac{|T \cap \theta|}{|T|}$. Suppose a player $i \in S \cap \theta$. Obviously in coalition T will exist a category θ' for which $\frac{|S \cap \theta'|}{|S|} \leq \frac{|T \cap \theta'|}{|T|}$ for

$$\frac{|S \cap \theta_1|}{|S|} + \dots + \frac{|S \cap \theta_t|}{|S|} = \frac{|T \cap \theta_1|}{|S|} + \dots + \frac{|T \cap \theta_t|}{|S|}.$$

We distinguish the case where $|S \cap \theta'| = |T \cap \theta| = 0$ and consider w.l.o.g. $|S| \leq |T|$, then i has an incentive to move to T since T^{+i} will have more members than S and i will be the only among them belonging to θ or

$$\frac{|T^{+i} \cap \theta|}{|T^{+i}|} = \frac{1}{|T^{+i}|} < \frac{|S \cap \theta|}{|S|},$$

the last inequality follows since $|T^{+i}| > |S|$ and $|S \cap \theta| \geq 1$. Therefore i has by T^{+i} her utility strictly ameliorated. For the rest of the nodes of T which all belong to different than i categories, the augmentation of their coalition makes them strictly better or regarding types θ'' ,

$$\frac{|T^{+i} \cap \theta''|}{|T^{+i}|} = \frac{|T \cap \theta''|}{|T^{+i}|} \leq \frac{|T \cap \theta''|}{|T|}$$

where the equality stands for categories not represented in T .

Without loss of generality, in case both S, T have representatives of type θ , that is $T \cap \theta \neq \emptyset$ then the scenario of i substituting a player of the same type in θ gives rise to a

weak blocking coalition. To see that, assume $j \in \theta \cap T$, and i taking its place in T . The resulting coalition is $T' = T^{-j} \cup i$ and obviously T' maintains the cardinality of T and consequently the proportion of every category or $|T' \cap \theta''| = |T \cap \theta''|$, $\forall \theta'' | \theta'' \cap T \neq 0$ and $\frac{|T' \cap \theta''|}{|T'|} = \frac{|T \cap \theta''|}{|T|}$, $\forall \theta'' | \theta'' \cap T \neq 0$. Although, representatives of categories different than θ are indifferent between T, T' , player i has his profit elevated by the deviation because

$$\frac{|S \cap \theta|}{|S|} > \frac{|T \cap \theta|}{|T|} = \frac{|T' \cap \theta|}{|T'|}.$$

Therefore for the game not to have a weakly blocking coalition, $\frac{|S \cap \theta|}{|S|} = \frac{|T \cap \theta|}{|T|}$ is necessary.

Moreover, this condition is sufficient for having a non empty strict core. To see that, take into account that when it holds for all types and coalitions in the partition π , a weakly blocking coalition T cannot exist since it has to satisfy $\frac{|T \cap \theta(i)|}{|T|} < \frac{|\pi(i) \cap \theta(i)|}{|\pi(i)|}$ for category $\theta(i)$ and $\frac{|T \cap \theta(i)|}{|T|} \leq \frac{|\pi(i) \cap \theta(i)|}{|\pi(i)|}$ for the rest of the categories. This is demanded in order for a player of category $\theta(i)$ to secure a higher profit than the currently equally provided by every coalition and for players of the rest of the categories represented in T to not be harmed by the deviation. Nevertheless, adding those inequalities yields

$$\frac{|T \cap \theta_1|}{|T|} + \dots + \frac{|T \cap \theta_t|}{|T|} < \frac{|\pi(i) \cap \theta_1|}{|\pi(i)|} + \dots + \frac{|\pi(i) \cap \theta_t|}{|\pi(i)|},$$

since all coalitions share the same percentage of a category's representatives or $\frac{\pi(i) \cap \theta(i)}{\pi(i)} = \frac{\pi(j) \cap \theta(i)}{\pi(j)}$. But then $1 < 1$ contradiction. The previous ascertainments lead to the following result.

Theorem 3.10. *For a game with preferences of the form of Bakers and Millers, a partition S_1, \dots, S_k is strict core stable if and only if for all categories $\theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_t\}$ and each two coalitions $S_1, S_2 \in S_1, \dots, S_k$, $\frac{|S_1 \cap \theta|}{|S_1|} = \frac{|S_2 \cap \theta|}{|S_2|}$.*

The condition of the theorem can be rewritten using the greatest common divisor of the cardinalities of categories $d = \gcd(|\theta_1|, |\theta_2|, \dots, |\theta_t|)$ as $|S \cap \theta| = k_s |\theta| / d$. Therefore the most refined achievable partitioning π is received for $k_s = 1$, $\forall S \in \pi$ and is unique.

Chapter 4

Deciding and computing stable partitions

In this chapter we present the complexity of deciding and computing stable partitions of concerning hedonic games.

4.1 General hedonic games

[Ballester, 2004; Aziz, Brandt, and Harrenstein, 2013]

Definition 4.1. We call HCORE, HNASH, HIS and HPER the problems of determining whether there exists a core, a Nash, an individually stable and a perfect partition respectively, given an IRLC representation of a hedonic game.

We observe that the problems in definition 4.1 lie in NP for there is a certificate for a yes instance of each of them that can be checked in polynomial time. For an HCORE instance, having a core stable partition, takes polynomial time to verify it. Additionally there is no certificate for a no instance to prove it core stable. The polynomial verification procedure is presented in algorithm 5.

This procedure is obviously polynomial in the size of HCORE.

The problems given by definition 4.1 are very similar to the nature of the problem EXACT COVER, namely to decide whether a set of subsets C of a given set X , includes a partition of X . To see that X corresponds to the set of players N of a hedonic game and players are indifferent among all coalitions of C in which they participate. A modification which should be made for the full correspondence of the two problems is the exclusion of having a core stable partition for N where a player j is member of a singleton coalition while $\{j\}$ is not a member of C . Consider for example $X = \{u, v, w\}$, $C = \{\{u, v\}, \{v, w\}\}$, $N = \{u, v, w\}$, then $\{\{u, v\}, \{w\}\}$ is a core stable partition but $w \notin C$. To avoid this mismatch between the two problems, we add for each player j which does not appear in C , two children players j_a and j_b and the relative preferences

$$\{j, j_a\} \succ_{j_a} \{j_a, j_b\} \succ_{j_a} \{j_a\}$$

Algorithm 5: Algorithm for testifying whether a partition is in the core of an HCORE instance.

input : An instance of HCORE and a partition π of its players
output: Characterization of the partition concerning core stability

```

1 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
2   for coalition  $S \mid S \succ_k \pi(k)$  do
3     for player  $j \in S \mid j \neq k$  do
4        $skip \leftarrow 0$ 
5       if  $S \succ_j \pi(j)$  then
6         Continue;
7       else
8          $skip \leftarrow 1$  ; break;
9       end
10    end
11    if  $skip == 0$  then
12      return " $\pi \notin \text{core}$ "
13    end
14  end
15 end
16 return " $\pi \in \text{core}$ "

```

$$\{j_a, j_b\} \succ_{j_b} \{j, j_b\} \succ_{j_b} \{j_b\}.$$

Moreover the preferences

$$\{j, j_b\}, \succ_j \{j, j_a\}. \succ_j \{j\}$$

are appended to players' j RIRLC. Now if (N, \succ) is core stable, we observe that sibling children nodes, should be coalized together alone. This property derives from the cyclic nature of preferences concerning a father node along with its children. So the rest of the players, namely the members of X are going to be partitioned according to some members of C .

On the other hand, (N, \succ) has no core stable partition implies that members of C cannot cover without intersections the set of players. The children players could form sibling 's dyads since none of the members of X prefers being with children nodes than with other nodes in X .

Thus, the aforementioned process constitutes a reduction from EXACT COVER to HCORE and since the complexity of the construction of (N, \succ) from EXACT COVER is linear with respect to $|X|$, the reduction is polynomial. An appropriate length function for EXACTCOVER is $length_{EC} = |C||X|$ while for HCORE $length_C = |K_c||N|$, where K_c stands for the number of the different partitions in RIRLC. A specific upper bound arises by observing that at most for every member of $|X|$, two more players are added to $|N|$ thus $|N| \leq 3|X|$. The number of coalitions which appear at RIRLC of HCORE is $K_c = |C| + \sum_{\{j\} \notin C} 6 \leq |C| + 6|X|$. Therefore a value not exceeded by $length_C$ is

$3|C||X| + 6|X| \cdot 3|X| \leq 3length_{EC} + 18|X|^2 \leq 3length_{EC} + 18length_{EC}^2$, polynomial in $length_{EC}$. However, EXACTCOVER is shown NP-complete as it is among Karp's 21 NP-complete problems [Karp, 1972].

The NP-completeness is also implied by the fact that the roommate problem, which is the HCORE problem having preferences over coalitions of 2 players, is NP-complete [Ronn, 1986].

Similarly HIS is in NP. To show that, consider that the verification whether a partition is individually stable demands for every player $i \in N$ to decide the existence of a coalition

$$S \in \pi \mid i \cup S \succ_i \pi(i), S^{+i} \succ_j S \forall j \in S.$$

A reduction proving the NP-completeness is the one made for HCORE. The results of this discussion are summarized in the next theorem.

Theorem 4.1. *The HCORE and HIS problems are strongly NP-complete.*

Concerning the complexity of deciding whether a Nash stable partition exists for a given instance of the game, observe that for every yes instance of the game, a certificate π exists such that it is verifiable in polynomial time that π is a Nash stable partition. The verification is given in algorithm 6. The length function of this problem is also taken to be $length_C$. This algorithm requires $O(|N|K_c)$ steps, therefore it is polynomial in the size

Algorithm 6: Algorithm for testifying whether a partition of a hedonic instance is Nash stable.

input : A hedonic instance (N, \succ) and a partition π of its players
output: Characterization of the partition concerning Nash stability

```

1 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
2   for coalition  $S \in \pi \mid S \neq \pi(k)$  do
3     if  $S^{+k} \succ_k \pi(k)$  then
4       return " $\pi$  is not Nash stable."
5     end
6   end
7 end
8 return " $\pi$  is Nash stable."

```

of $length_C$. The analogies between EXACTCOVER and HNASH are apparent. Let $N = X$ be the set of players of an HNASH instance and coalitions correspond to members of C . Every player is indifferent among all coalitions he participates. For each $i \in X \mid i \notin C$ a player i^* is added, the IRLC for which is $\{i^*\}$ and the following preference snippet is appended to i 's IRLC " $\succ_i \{i, i^*\} \succ_i \{i\}$ ". We notice that in case there is no player who can benefit by unilaterally joining another coalition, "star" players are partitioned alone, otherwise they would prefer to deviate at their singleton coalitions. Furthermore, "not star" players are partitioned in coalitions corresponding to C , otherwise they would deviate in $\{i, i^*\}$. Therefore a yes instance for HNASH corresponds to a yes instance

for EXACTCOVER. On the other hand, the absence of a Nash stable partition for the hedonic instance induces an absence of a partition of X in C . The applied reduction needs polynomial steps in the size of HNASH. We reach hence the following conclusion.

Theorem 4.2. *The HNASH is strongly NP-complete.*

Next, we turn our attention to the problem of determining whether a hedonic game admits a perfect partition. We observe that the problem exact cover by 3 sets (X3C) is reduced to our problem of interest. X3C is defined by a tuple (X, C) , where $X = 1, \dots, 3m, m \in \mathbb{N}^*$ and C consists of subsets of X with cardinality 3 and the question whether there exists an exact cover of $X \in C$. Consider the hedonic game (N, R) where $N = X$ and for each player i the only individually rational coalitions are those in C , in which they participate. Thus, by solving the HPER a solution to X3C is incurred. However exact cover by 3 sets is proven NP-complete [Garey and Johnson, 1979], so HPER.

Theorem 4.3. *The HPER is strongly NP-complete.*

The difference in the complexity of the roommate problem with and without indifferences which in the first case is NP-complete while in the second belongs to P, makes us suspend a difference in the complexity of the general hedonic game when preferences are arbitrary and when they are strict. Definitely the problems remain in NP since the verification procedure is the same despite the absence of indifferences.

The reduction of HPCORE to HPCORE without indifferences seems natural. The steps to achieve it consist of the players of the new game and their IRLCs. The new set of players will include players of HPCORE with arbitrary preferences who have no indifferences in their IRLCs. Their preferences remain the same. For a player u with indifferences let k be the maximum number of same-preferred coalitions, then to the new set of players the players u_1, u_2, \dots, u_k will be added. Every of player u to the IRLCs is substituted by the set of players u_1, u_2, \dots, u_k . Player u_i prefers the i -th among initially equal coalitions, where possible (the rule is not implemented in case less than k coalitions). The rest of preferences of players u_1, u_2, \dots, u_k over formerly equally valued coalitions are random and strict preferences are retained. Finally the preference to the singleton coalition is appended for each player lacks one.

We now observe that if an instance of the reduced problem is core stable then the same holds for the target problem. The reason is that the reduction incurs no changes in the order of preferences so players becoming from substitutions could only benefit from a coalition where all substitute players of one of the reduced game, are in the same coalition. However for $S_i \sim_u S_j$, player u_i would prefer S_i after the substitution while player u_j would prefer S_j .

On the other hand if an instance of the initial problem has a non empty core then the same holds for the target problem. There are two cases. Either the deviators will be non substituted players, thus the deviation will also take place in the new problem or the deviators include players from substitutions who will deviate together as a preferred coalition for their parent node will also be beneficial for them. Having those said, the

hedonic game with strict preferences has a non empty core if and only if the initial hedonic game has a non empty core.

This reduction is polynomial in $length_C$ observing that the new number of nodes is at most $|N'| = |N|k$ and $K'_c \leq K_c + |N'|$ after the addition of the singleton coalitions. Therefore the length of the resulting instance will be $length'_C = |N'|K'_c \leq |N|k(K_c + |N|k) = k \cdot length_C + |N|^2k^2$. Thus we deduce the following result.

Theorem 4.4. *The HCORE with strict preferences over coalitions is strongly NP-complete.*

For the HNASH with strict preferences problem a reduction similar to the one given for HNASH is at our disposal. The set of players N consists of the elements of X . Every member of C is transformed to a coalition in the RIRLCs of players participating to it. The preferences of players among those coalitions are random and strict. In every coalition emanating from C , for every player u we add the player u_1 in the same coalition. Thus the image of $C = \{(u, w), (u, v, z)\}$ in HNASH with strict preferences for player u would be: $(u, u_1, w, w_1) \succ_u (u, u_1, v, v_1, z, z_1)$ or $(u, u_1, v, v_1, z, z_1) \succ_u (u, u_1, w, w_1)$. Moreover for every set $(u, u_1) \mid \{u\} \notin C$ the pair (u^*, u_1^*) is added and their IRLCs is elongated by entailing the preferences $\succ_u \{u, u^*\} \succ_u \{u, u_1\}$ and $\succ_{u_1} \{u_1, u_1^*\} \succ_{u_1} \{u, u_1\}$. Star players have no other preferences than being alone. To ensure the representation of our game with IRLCs the stand alone coalition is entailed where needed.

The existence of a partition of X in C means that the corresponding coalitions in the hedonic game constitute a Nash stable partition for every player u because she desires to be with her counterpart u_1 , so unilateral deviations are out of the question. Moreover the absence of partitions of X in C means that some player u is coalized either alone, or along with his partner, thus (u, u^*) is a blocking coalition, or is coalized with u^* and $\{u^*\}$ is a blocking coalition. Thus we deduct the equivalence that iff a partition for X exists in C then the corresponding hedonic game has a Nash stable partition.

In order to check the complexity of the reduction the following observations are made. The cardinality of N for the HNASH with strict preferences instance created is $|N| \leq 4|X|$. Concerning the number of coalitions, it is $K_c \leq |C| + 4|X|$. Hence for the length function of the target problem holds

$$length_N = |N|K_c \leq 4|X||C| + 16|X|^2 \leq 4length_{EC} + 16length_{EC}^2.$$

Therefore the reduction is polynomial in the length of the initial problem.

Theorem 4.5. *The HNASH with strict preferences over coalitions is strongly NP-complete.*

The determination of the existence of an individually stable partition is shown to be a problem as difficult as the hardest NP problem by a reduction using elements of previous ones which takes advantage of the relevance to the problem EXACTCOVER. Again we consider elements of X as players and we add a partner $u_1 \forall u \in X$. Subsets of $X \in C$ give again rise to coalitions with random strict preferences for each player participating in them. In those coalitions every appearance of a player u incurs the incorporation of

u_1 in the team. The preference snippets introduced in the previous reduction are again present but instead of engaging star players, cyclic families $\{u, u_a, u_b\}$ and $\{u_1, u_{1a}, u_{1b}\}$ for each u or u_1 such that $\{u\} \notin C$ are used. Moreover, the corresponding preferences over the cyclic families are added as in the reduction used for HCore. Now if there is a partition of C , the players are going to be coalized along with other players from X and the respecting partners (players with subscript 1). The rest of the players will compose groups of the form (u_a, u_b) and (u_{1a}, u_{1b}) . The former player partitioning is Nash stable as no unique player can ameliorate her welfare since no player is going to move without its partner and for children of cyclic families (a, b players) there is no more preferred coalition than (u_a, u_b) , reachable by a unilateral deviation.

The cardinality of the set of players of the target hedonic game is bounded, namely $|N| \leq 4|X|$ and the coalitions of the hedonic game are limited by the inequality $K_c = |C| + \sum_{\{j\} \notin C} 12 \leq |C| + 12|X|$. Hence the length of the target hedonic game is

$$\text{length}_{IS} = |N|K_c \leq 4|X||C| + 48|X|^2 \leq 4\text{length}_{EC} + 48\text{length}_{EC}^2$$

therefore polynomial in the length of EXACTCOVER.

Theorem 4.6. *The HIS with strict preferences over coalitions is strongly NP-complete.*

4.2 Anonymous preferences

The previous results hold also when preferences are anonymous (definition 2.3). We consider such games in the formation of RIRLSs, namely represented by individually rational lists of sizes. Players instead of expressing their preferences on specific coalitions, maintain a valuation over the coalition sizes.

Starting with the HCore we observe that this problem remains in NP having no more complexity, because of anonymity, in testifying whether a given partition is core stable or not.

Having a general hedonic game (N, \succ) , the individually rational coalitions are sorted in increasing order of size (S_1, \dots, S_C) . In order to construct an anonymous game, every coalition is assigned a value according to the formula

$$v(S_l) = \begin{cases} 1 & |S_l| = 1 \\ \max\{v(S_{l-1}) + 1, |S_l|\} & \text{else} \end{cases}$$

and we add for every coalition S_l , $n_l = v(S_l) - |S_l|$ extra players l_1, \dots, l_{n_l} in order for the values to match with the number of members. The coalition preference profile of players are transformed to length preference profiles and RIRLC to RIRLS. The preference profiles of extra players $l_i \mid l \in \{1, \dots, L\}, i \in \{1, \dots, n_l\}$ are $v(S_l) \succ_{l_i} 1$. Hence a pseudo anonymous preferences game, that is, a game where no same cardinality coalitions exist, arises.

Having now a partition of the initial game we map each coalition according to the value function, namely $S_l \rightarrow S_l \cup \{l_1, \dots, l_{n_l}\}$. We observe that if a partition π in the

original game is not core stable, that is, there is a coalition $S \mid S \succ_j \pi(j) \forall j \in S$ then the same holds for its image in the target game.

Conversely, in case there is a blocking coalition for a partition of the target game there equally exists a coalition more profitable for all players participating in it, in the initial game.

The anonymous preferences game has $|N'| \leq (|N| + C)C$ and $C + |N'|$ coalitions so the mapping procedure of the initial to the target game is efficient.

Theorem 4.7. *The problem HCOREAN (HCORE with anonymous preferences) with or without indifferences, is strongly NP-complete.*

Let us turn our attention to Nash stable hedonic games with additive preferences. Since the verification of a partition being Nash stable is analogous to that of the general HNASH problem, with the slight modification that the check is done in RIRLS, the HNASH with anonymous preferences or HNASHAN is in NP.

On the way of a reduction from EXACTCOVER to HNASHAN, we call m the quantity of elements $\{j \notin C\}$ of X . We assume $m \geq 2$ observing that for smaller values EXACTCOVER $\in P$. After sorting the members of C in the increasing order S_1, \dots, S_L , we assign a value in every distinct S_i as

$$v(S_i) = \begin{cases} 1 & |S_i| = 1 \\ \max\{m + 2, v(S_{i-1}) + 2, |S_i|\} & \text{else} \end{cases}$$

For each player u the preference profile is defined randomly over the values $v(S_i) \mid u \in S_i$ given that the representation remains rational, that is singleton coalitions are placed at the rightmost position of IRLS. Choosing the minimum distance of two successive non singleton coalition to be at least two, the singleton deviations of players which correspond to members of X , are excluded. Aiming to neutralize Nash stable partitions where a player $j \mid \{j\} \notin C$ participates, a Nash penalizing component is used

$$m \succ_j m - 1 \succ_j m - 2 \succ_j \dots \succ_j 2 \succ_j 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$2(m + 1) - j \succ 1, \quad j = m + 1, \dots, 2m - 1.$$

The first line of this component is appended to the preference profile of each $j \mid \{j\} \notin C$. Moreover, a set of $m - 1$ players $\{p_1, \dots, p_{m-1}\}$ is incorporated to the game, preferring coalitions as shown in the second line of the Nash penalizing component. Furthermore, in order for the values to correspond to numbers of players, extra players are added as in the previous reduction, namely for each S_i , it is $n_i = v(S_i) - |S_i|$ and players l_1, \dots, l_{n_i} join the game. The preferences of those extra players are given by the profile $v(S_i) \succ_{l_i} 1$.

Supposing there is a partition π of X such that $X \in C$, we consider the corresponding mapping to a partition instance of the hedonic game. Players $u \mid \{u\} \notin C$ are going to be partitioned to a coalition of size $> m + 2$ along with the corresponding extra players. The native players, namely those who stem from elements of X , will not deviate since other possible better coalitions for them have sizes larger more than a unit. The extra

players will not have an incentive to deviate since they are all in their favourite valued coalitions. Finally among the $m - 1$ players $\{p_1, \dots, p_{m-1}\}$ exist preferences for sizes from $2(m + 1) - (2m - 1) = 3$ to $2(m + 1) - (m + 1) = m + 1$, thus no motivation exist for them to deviate while the existent coalitions have unitary or $\geq m + 2$ sizes.

Besides, if there exists a Nash stable partition of the hedonic game, native players for which $j \mid \{j\} \notin C$ must be partitioned to a coalition of more than $m + 2$ participants otherwise some of the penalizing players $\{p_1, \dots, p_{m-1}\}$ will have incentives to deviate. The same holds for players $j \mid \{j\} \in C$, they only prefer coalitions of size $> m + 2$. Finally, extra players would like to be at the coalitions for which they were created or else alone. So considering the partition of N and ruling out p-players and extra players we acquire an exact cover of C by native players.

As far as the complexity of the reduction is concerned, $|N| \leq |C|(|X| + 2|C|) + |X| + |X| - 1$, $K_c \leq |C| + 2|X|$ leading to the inequality $length_N = |N|K_c \leq |C|^2|X| + 4|C|^2|X| + 2|C|^3 + 2|C||X|^2 + 2|C||X|^2 + 4|X|^2 - 2|X| - |C| = poly(length_{EC})$ where $length_N$ stands for the length function of HNASH with anonymous preferences.

Theorem 4.8. *The problem HNASHAN with or without indifferences, is strongly NP-complete.*

Adjusting the analysis to the existence of individually stable partitions, the procedure for certifying whether a given set of coalitions constitutes a yes instance for HIS with anonymous preferences or HISAN is given in algorithm 7.

Algorithm 7: Algorithm for testifying whether a partition of a hedonic game instance with anonymous preferences is individually stable.

input : A hedonic instance (N, \succ) and a partition π of its players
output: Characterization of the partition concerning individual stability

```

1 for  $k = 1$  to  $|N|$  do
2   for coalition  $S \in \pi \mid S \neq \pi(k)$  do
3     if  $S^{+k} \succ_k \pi(k)$  &&  $S^{+k} \succ_j$  for each  $j \in S, j \neq k$  then
4       return " $\pi$  is not individually stable."
5     end
6   end
7 end
8 return " $\pi$  is individually stable."
```

This check needs polynomial number of steps in the length of HIS, thus HISAN \in NP.

For the other stage of NP-completeness proof EXACTCOVER is once more employed. Calling m the number of elements $j \in X \mid \{j\} \notin C$, after removing duplicates from C its elements are sorted in increasing order S_1, \dots, S_L and each is assigned a unique value according to the formula

$$v(S_l) = \begin{cases} 1 & |S_l| = 1 \\ \max\{m + 64, v(S_{l-1}) + 2, |S_l|\} & \text{else} \end{cases}$$

Native players are the elements of X who maintain arbitrary preferences over sizes $v(S_l)$ for all S_l they participate in. Extra players l_1, \dots, l_{m_i} are added to match S_l to size $v(S_l)$ preferring $v(S_l) \succ_{l_i} 1$. Another set of 62 players $\{1, 2, \dots, 62\}$ is added having preferences

$$\begin{aligned} &56 + m \succ_1 2 \succ_1 7 \succ_1 6 \succ_1 1 \\ &7 \succ_2 2 \succ_2 56 + m \succ_2 55 + m \succ_2 1 \\ &2 \succ_3 7 \succ_3 6 \succ_3 1 \\ &7 \succ_i 6 \succ_i 5 \succ_i 4 \succ_i 3 \succ_i 2 \succ_i 1, \quad i = 4, 5, 6, 7, 8 \\ &62 + m \succ_i 61 + m \succ_i 60 + m \succ_i \dots \succ_i 2 \succ_i 1, \quad i = 9, 10, \dots, 62 + m \end{aligned}$$

Excluding the case $m = 0$ we append for each $j \in X \mid \{j\} \notin C$, the preference snippet $\succ_j 62 + m \succ_j 61 + m \succ_j \dots \succ_j 1$. Now following the same arguments as in the proof of proposition 2.3 we conclude that if there is no partition of $X \in C$, there is no individually stable partition in the target game. On the contrary, a yes instance for EXACTCOVER implies an individually stable partition for the hedonic game with anonymous preferences where players $\{p_1, \dots, p_{62}\}$ are coalized in a group of their own. The complexity of the conversion between the two problems requires polynomial time. The cardinality of the new set of players is $|N| \leq |X| + (64 + 2|C|)|C|$ and of the set of coalitions is also polynomial with respect to $length_{EC}$ resulting to a polynomial bound of $length_{IS}$ in $length_{EC}$.

Theorem 4.9. *The problem HISAN with or without indifferences, is strongly NP-complete.*

4.3 Additive and symmetric preferences

[Gairing and Savani, 2010], [Gairing and Savani, 2011]. As mentioned in chapter 3, a category of hedonic games assuring the existence of stable outcomes is that of symmetric and additively separable ones. This species is chosen in order to examine the complexity of finding an immune coalition structure, against deviations under various entering or leaving restrictions.

Firstly the case under no restrictions is taken under consideration.

Definition 4.2. We call NASHSTABLE the problem of finding a Nash stable partition in a symmetric additively separable hedonic game.

A reduction from PARTYAFFILIATION problem seems "natural". Starting with a weighted graph $G(V, E, w)$ representing the instance of PARTYAFFILIATION, we add two extra nodes to play the role of poles. To achieve that property, each $i \in V$ is connected to the two poles by edges weighting $W > \sum_{j \mid (i,j) \in E} w(i, j)$, which give her unrivalled incentives to coalesce with at least one of them. To keep the poles in separated coalitions, they are connected by an edge weighting $-M$ with M being bigger than any possible gain for them in the game, namely $M > |V|W$. Therefore, finding a Nash stable partition for the constructed game provides a stable solution for the original

game and the other way around. Taking under consideration that PARTYAFFILIATION is PLS-complete follows that

Theorem 4.10. *NASHSTABLE is PLS-complete.*

Next we turn our attention to games allowing under terms the deviation of a player who prefers another coalition than the one she belongs to.

For the vote-in case we observe that starting from the problem ONEENEMYPARTYAFFILIATION, represented by graph G , we can interpose between each two negatively connected nodes a, b , $2x$ extra nodes, and connect x of them via an δ weighting edge with a and via a ϵ weighting edge with b . The connections of the rest x is done vice versa, namely they are connected to a via an ϵ weighting edge and with b via a δ weighting edge. The used weights are chosen so that in a stable coalition structure half of the extra nodes are connected to a and the rest to b and moreover so that their existence does not change the preference profiles of nodes a, b concerning the original nodes. To achieve this objective it is taken $0 < \delta < \epsilon$. The gadget is demonstrated in fig. 4.1.

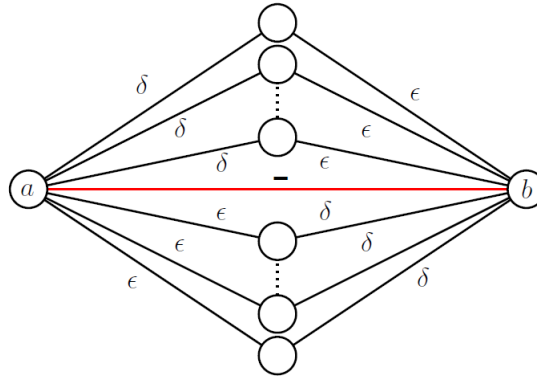


Figure 4.1: Vote-in block for negative edges.

Using this construction, the affiliation of every coalition is allowed when the required approval percentage for the annexation of a player in a group is at most the ratio of the maximum degree of G , $\Delta(G)$ minus one over the maximum degree, or $T_{in} \leq \frac{\Delta(G)-1}{\Delta(G)}$.

Additionally two supernodes, as in the discussion of theorem 4.10 was described, are added. Hence a stable coalition structure for VOTEIN is also stable for ONEENEMYPARTYAFFILIATION and vice versa. The reduction is polynomial unless $T_{in} = 1$ in which case the problem identifies with that of finding an individually stable partition. We thus conclude that

Theorem 4.11. *For voting threshold in $[0, 1)$ VOTEIN is PLS-complete.*

For the counterpart of VOTEIN, namely VOTEOUT, there is a known reduction from a PLS-complete problem only assuming that the number of coalitions is predefined.

The reduced problem is ONEENEMYNASHSTABLE. For each player there is at most one partner with whom he would not make a pair coalition. That is for each player v , $|\{u | v_v(u) < 0\}| \leq 1$. In order to adapt this model to k -VOTEOUT, a ratio of supporters of no matter which extraction, greater than T_{out} , is demanded. Therefore we need in each coalition x new nodes connected with every original node by a negative edge $-\epsilon$, where

$$\frac{x}{x + \Delta(G)} \geq T_{out} \Rightarrow x \geq \Delta(G) \frac{T_{out}}{1 - T_{out}},$$

$\Delta(G)$ is the maximum degree of a node in graph G . Aiming at assuring that those nodes are equally divided to the k coalitions, we form x complete graphs, each containing k of them. The edges of the complete graphs weight $-M$, where $M > \epsilon|V|$. By this construction there is no player restricted from deviating, hence a stable solution to the target problem means also a stable partition for the initial problem and vice versa. Having added a proportional to the number of players bundle of nodes, the reduction is polynomial to the length of the initial problem.

Besides ONEENEMYPARTYAFFILIATION reduces to ONEENEMYNASHSTABLE by incorporating in the graph of the first, two supernodes polarizing all the rest. Each stable instance of ONEENEMYNASHSTABLE will have only two coalitions and will also be a valid stable outcome for the party affiliation problem with one enemy. It follows then that

Theorem 4.12. *For voting threshold in $[0, 1)$ k -VOTEOUT, $k \geq 2$ is PLS-complete.*

The vote-in problem with insertion threshold $T_{in} = 1$, in other words the problem of finding an individually stable partition, can be proven hard by reducing ONEENEMYPARTYAFFILIATION* to it. This problem identifies with ONEENEMYPARTYAFFILIATION with the property that no player is equally satisfied to the two coalitions that consist a stable partition. In order to represent a negative edge which does not allow both sides transfers, in the framework of individual stability, we use the gadget appeared in fig. 4.2.

The number of coalitions is restricted to four $\{0, 1, 2, 3\}$ by using equal number of supernodes connected in a complete graph with large negative edges and connected with the original nodes by large positive edges constituting absurd the abstention from a cooperation with one of them. The original nodes belong to either 1 or 2. Node c has the choice to join either coalition 2 or 3 while a' and b' are qualified for 0, 1, 2 and 0, 1, 3 respectively.

Now assuming that a stable partition for INDIVIDUALLYSTABLE is unstable for the initial problem, a node α will be able to increase its profit in ONEENEMYPARTYAFFILIATION* being at the same time individually stable in the target game. The interesting nodes for checking this possibility are those having a negative link to the coalition they intend to deviate to, because the other have obviously same incentives in both problems.

Consider that α can improve, then c is biased to 3 and α' is biased to 2. If b can also improve, b' is biased to 3 but then b' is coalized with c and would deviate. Then b cannot

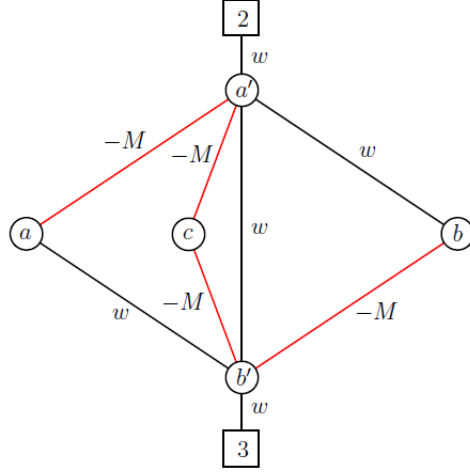


Figure 4.2: Individual stability block for negative edges.

improve, so b' is biased to $\{0, 1\}$ which is followed by $b = -b'$. Now if $\alpha \neq b$, $\alpha = b'$ and the deviation of α in the initial problem, incurs an amount of degradation w to his profit with respect to b . So in the target problem a would prefer to lose the profit earned by his connection with b' of amount w in order to benefit from the greater surplus of the rest of his connections after joining b . Therefore α is not stable neither for the target problem.

On the other hand in case where $\alpha = b$ then in the original problem, α 's deviation gives him an augmentation with respect to b of the magnitude of w since she avoids a w negative partner. Subsequently in the target game it is also beneficial a deviation of α which leads to the same augmentation with respect to b . Again instability of the target problem is implied contradicting our assumption.

Therefore, the reduction is completed and is polynomial to the $length_{OEP A^*}$ since less or equal to $\frac{|V|}{2}3 + 4$ new nodes are added. So as $ONEENEMYPARTYAFFILIATION^*$ is shown PLS-complete in [Gairing and Savani, 2010] we reach to

Theorem 4.13. *INDIVIDUALLYSTABLE is PLS-complete.*

Turning our attention to sum-in-out problems, starting from a $PARTYAFFILIATION$ instance described by $G = (V, E, w)$ with negative integer weights, two supernodes are introduced which are connected to each initial node with edges of importance $\frac{-\sigma_i}{2} + \frac{1}{4}$, where σ_i is the sum of weights of edges incident to player i in $PARTYAFFILIATION$ instance. The supernodes are playing the role of poles and in order to remain separated are connected with an enormously heavy edge of weight $-M, M > \sum_{i \in V} (\frac{-\sigma_i}{2} + \frac{1}{4})$. Having created the $SUMCIS$ instance, if this is stable, assuming there is a player u wanting to deviate in $PARTYAFFILIATION$ means that for her utility $v_u(\pi(u)) < v_u((\pi(u)^c)^+)$, where the superscript c denotes complement with respect to the complete set of initial nodes V . Since the weights are integer, the minimum possible incentive for deviation

Algorithm 8: Look at and Bias for gadget replacing negative edges.

```

1  if  $\alpha$  can improve then
2    bias  $c$  to 3
3    bias  $\alpha' = 2$ 
4  else
5    bias  $\alpha'$  to 0,1
6    bias  $c$  to 2
7  end
8  if  $b$  can improve then
9    bias  $b' = 3$ 
10 else
11   bias  $b'$  to 0,1
12 end

```

is 1. In this case the same player in SUMCIS instance would have at most total utility $\frac{\sigma_i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{-\sigma_i}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$ and by deviating at least $\frac{\sigma_i}{2} + \frac{1}{2} + \frac{-\sigma_i}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$. Thus an instance of the original problem is unstable only when the same holds for the target problem and on the grounds that the procedure followed for the parallelization of the two problems was polynomial in the length of PARTYAFFILIATION, we come up with the following result.

Theorem 4.14. *SUMCIS is PLS-complete.*

Given that a Pareto optimal partition exists for every hedonic instance we define the problem of finding such as HPAR.

Definition 4.3. We call HPAR the problem of finding a Pareto optimal partition for a given hedonic instance.

Combining theorem 4.3 with theorem 3.1, a measure of the complexity of the problem of finding a Pareto optimal partition for a given instance, given that such exists, arises.

Theorem 4.15. *The HPAR problem is TFNP-hard.*

Chapter 5

Hedonic clustering

Clustering is the process of partitioning nodes of a network according to their similarity measured via an index. Two noncooperative and a cooperative clustering frameworks are examined.

5.1 Correlation clustering

[Feldman, Eytan, and Naor, 2015]. In this setting the number of clusters is not fixed. Every player v has a weight w as a measure of his influence. The similarity between two players u, v is depicted in the distance metric $d(u, v) \in [0, 1]$, with near zero values meaning resemblance and near one, contrast. In case where each agent v may desire to minimize her cost

$$\sum_{u \in C_v} w_u d(u, v) + \sum_{u \notin C_v} w_u (1 - d(u, v)),$$

the social cost is the total cost paid by all players. When the players intend to maximize their utility

$$\sum_{u \in C_v} w_u (1 - d(u, v)) + \sum_{u \notin C_v} w_u d(u, v),$$

the social welfare is the total utility accumulated by the entirety of the nodes. The aforementioned variants exhibit duality. An example of correlation clustering is kids wanting to play in the school yard. No matter how many, the more similar their age, the more easy they play a game together. Another one is the faculty of a university which makes a plan for the optional courses offered by the institution. Professors who have common background and interests form clusters which give rise to a bunch of courses of high similarity which are grouped in branches.

Lemma 5.1. *A clustering is a Nash equilibrium for the minimization setting iff it is for the maximization one.*

Proof. Consider a clustering of a game then summing up the cost of a player v supposing minimization incentive and the profit assuming maximization, we get $\sum_{u \in V} w_u$, where V is the set of the nodes of the game. Therefore a profitable change of strategy for the maximization variant incurs a reduction of the cost of the minimization variant. \square

A correlation clustering game is an additively separable hedonic game but the reverse is not true. Consider a correlation clustering game. It can be reduced to an additively separable hedonic game by adopting for each player i the value function $v_i(j) = w_j(1 - 2d(i, j))$ for every other player j . Supposing a partition, the total profit of player i in the correlation clustering game is

$$\sum_{\substack{j \in C_i \\ i \neq j}} w_j(1 - d(i, j)) + \sum_{\substack{j \notin C_i \\ i \neq j}} w_j d(i, j) = \sum_{\substack{j \in C_i \\ i \neq j}} w_j(1 - 2d(i, j)) + \sum_{\substack{j \in V \\ i \neq j}} w_j d(i, j)$$

and in the additively separable hedonic game is

$$\sum_{\substack{j \in C_i \\ i \neq j}} w_j(1 - 2d(i, j)).$$

The difference between the two profits is a constant term depending only from player i and not the partition. Therefore the two games have the same set of Nash equilibria. The observation applies also to the minimization variant through the correspondence with the maximization variant resulting from lemma 5.1. However additively separable hedonic games are likely not to have Nash equilibria [Gairing and Savani, 2010].

Example 5.1. Consider a three player game with the valuations indicated in table 5.1. It can easily be seen that it is additively separable, though there is no Nash stable partition.

Table 5.1: Additively separable game.

	1	2	3
v_1	0	1	-2
v_2	-2	0	1
v_3	1	-2	0

On the contrary every correlation clustering game has a NE and players performing their most profitable moves in random sequence is guaranteed to reach it. This can be shown using a potential function which gives lower values as players make moves improving their cost.

Theorem 5.1. *There always exists a Nash equilibrium of a correlation clustering game and best response dynamics always stabilize to such a state.*

Proof. Starting with the minimization variant let us consider the potential function

$$\Phi_1 = \sum_{v \in V} w_v (\sum_{u \in C_v} w_u d(u, v) + \sum_{u \notin C_v} w_u (1 - d(u, v))).$$

and a best response move by player v . The portion of Φ_1 that is affected by that move is that consisting of the edges adjacent to v and their total contribution to Φ_1 is

$$2w_v (\sum_{u \in C_v} w_u d(u, v) + \sum_{u \notin C_v} w_u (1 - d(u, v))).$$

The quantity in parentheses always reduces following a best response move of v which diminishes its cost, hence the game reaches a Nash equilibrium, succeeding a row of best response moves, since the game is finite. The strength of the theorem for the maximization variant comes from the duality of the two variants which is shown in lemma 5.1. \square

Although there exists Nash equilibria for every correlation clustering game, their computation is not "very easy". Specifically it is PLS-complete. For the required reduction, a bound on the distance of two coclustered nodes in Nash equilibrium, as a function of their and their coalition weights, is needed. This bound is a consequence of the fact that the two nodes do not start their own coalitions.

Lemma 5.2. *If there exists a Nash equilibrated partitioning where two nodes u, v are clustered together in coalition C then $d(u, v) \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2W(C)}$.*

Proof. For u not having an incentive to deviate to a singleton cluster it is $\sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u}} w_w d(u, w) \leq \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u}} w_w (1 - d(u, w))$ or $2 \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u}} w_w d(u, w) \leq W(C) - w(u)$. Similarly for v , $2 \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq v}} w_w d(v, w) \leq W(C) - w(v)$, where $W(C)$ denotes the total weight of coalition C . Adding the two inequalities and dividing by two leads to

$$\sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u}} w_w d(u, w) + \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq v}} w_w d(v, w) \leq W(C) - \frac{w_u + w_v}{2}.$$

Introducing the triangle inequality $d(u, w) + d(v, w) \geq d(u, v)$ produces

$$w_u d(u, v) + w_v d(u, v) + \sum_{\substack{w \in C \\ w \neq u, v}} w_w d(u, v) \leq W(C) - \frac{w_u + w_v}{2}$$

or

$$W(C)d(u, v) \leq W(C) - \frac{w_u + w_v}{2}$$

or

$$d(u, v) \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2W(C)}.$$

\square

As presented in chapter 4, computing a Nash equilibrium for additive hedonic games is PLS-complete. Here another reduction is given, starting from a satisfiability problem.

Theorem 5.2. *The problem of computing a Nash equilibrium for a correlation clustering game is PLS-complete.*

Proof. Obviously it is a PLS problem. The hardness can be shown via reduction of the PLS-complete problem POS-NAE-3SAT (positive not all equal 3 satisfiability) [Schäffer and Yannakakis, 1991] to the correlation clustering game. In POS-NAE-3SAT we are

given a formula consisting of clauses. Each clause has its own weight and 3 logical variables, none of which is negated. After the truth assignment to the variables, the satisfied clauses are those who don't have 3 same values for its variables. A locally optimal solution to the problem is one in which no flip of the value of a variable can increase the total profit, namely the sum of weights of the satisfied clauses.

Note that an instance of POS-NAE-3SAT can be shown as an instance of a correlation clustering game:

Consider a node for every variable and add two extra nodes c_1, c_2 representing the truth and false assignment respectively. The distance between a node u_x and the extra nodes is $d(u_x, c_1) = d(u_x, c_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)}$ resulting to $d(c_1, c_2) = 1 - \frac{1}{2(n+2)}$, where $d(\cdot)$ denotes the metric distance. This magnitude prohibits c_1, c_2 to share a cluster in a Nash equilibrium according to lemma 5.2. Thus at least two clusters are formed. The distance between two nodes corresponding to variables u_x, u_y is defined as $\frac{1}{2} + \frac{w(x,y)}{5n^2W}$, where $w(x, y)$ denotes the total weight of clauses where x, y coexist, W the sum of the weights of all clauses and n the number of logical variables.

There are going to form exactly two clusters, one containing c_1 and the other containing c_2 . Aiming at a contradiction suppose a node u_x is clustered apart from both c_1, c_2 . An upper bound of its profit is

$$2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right] + \sum_{y \in V - \{x\}} \left[\frac{1}{2} + \frac{w(x,y)}{5n^2W} \right] \leq \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{5n^2} - \frac{1}{2(n+2)}$$

On the other hand by deviating to a cluster having a "c node" the minimum of the profit received is

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right] + \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right) \right] + \sum_{y \in V - \{x\}} \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{w(x,y)}{5n^2W} \right) \right] \geq \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{5n^2}$$

The nodes which share a cluster with c_1 have their variables assigned the value truth, while the nodes being in the same cluster with c_2 are assigned the value false.

We claim that each Nash equilibrium of the clustering game corresponds to a local optimum for the POS-NAE-3SAT problem. Indeed insisting the opposite leads to contradiction. Let's see it. Assume that having a Nash equilibrated clustering \mathcal{E} the corresponding truth assignment ψ is not locally optimal. Then there is another truth assignment ψ' which provides higher profit than ψ and is derived by flipping the value of one of ψ 's variables x . Let \mathcal{E}' be the corresponding partition of ψ' which is acquired by the deviation of a node u_x to the opposite cluster. Since \mathcal{E} is a Nash equilibrium, \mathcal{E}' should give less or equal profit than \mathcal{E} . By defining

- W_1 the total weight of clauses satisfied by ψ where x belongs and is assigned by ψ different value from the other two,
- W_2 the total weight of clauses not satisfied by ψ , where x belongs,
- W_3 the total weight of clauses satisfied by ψ where x belongs and the other two variables are assigned different values by ψ .

The difference to the gain achieved by $\bar{\psi}$ and ψ' is $W_1 - W_2$ and is negative. The profit of the deviating node u_x in \mathcal{E} by the nodes c_1, c_2 is

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right] + \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+2)} \right) \right] = 1.$$

An edge adjacent to u_x connecting it with nodes of the same cluster contributes to u_x 's profit

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{w(x, y)}{5n^2W} \right).$$

The total utility of all those edges, denoting their cardinality with ℓ , for u_x is

$$\frac{\ell}{2} - \frac{2W_2 + W_3}{5n^2W}.$$

And analogously for the edges connecting u_x with nodes of other clusters

$$\frac{n-1-\ell}{2} + \frac{2W_1 + W_3}{5n^2W}.$$

Summing up the profit of u_x in \mathcal{E} gives

$$\frac{n+1}{2} + 2 \frac{W_1 - W_2}{5n^2W}.$$

In a similar manner, the utility of u_x in \mathcal{E}' is

$$\frac{n+1}{2} + 2 \frac{W_2 - W_1}{5n^2W}.$$

However the later is greater than the profit of u_x in \mathcal{E} due to $W_1 - W_2 < 0$, contradicting that \mathcal{E} constitutes a Nash equilibrium. Therefore the assignment ψ is a local maximum for the formula. \square

Having ensured that the game always converges to a Nash Equilibrium we go on to examine the price of stability. In the special case of uniform weights w , we can have stability free of charge. This can be seen by tuning the weights in the potential function Φ_1 of theorem 5.1, yielding

$$\Phi_1(\mathcal{F}) = w^2 \sum_{v \in V} \left(\sum_{u \in C_v} d(u, v) + \sum_{u \notin C_v} (1 - d(u, v)) \right).$$

Notice that $\Phi_1 = w \cdot (\text{Social Cost})$. The quantity in parenthesis is reduced on every best response move. So the optimal solution is a Nash equilibrium which provides a unitary price of stability. This holds also for the minimization variant due to lemma 5.1.

Lemma 5.3. *In the case where all node weights are identical, the price of stability is 1.*

In the general case of arbitrary weights for every node the price of stability differs between the minimization and the maximization variants and can be strictly larger than 1. Consider the example of a complete graph of three nodes K_3 as shown in fig. 5.1. The only Nash equilibrated clustering is that of a common coalition of the three nodes, however the optimal solution is that of the higher weighted vertex joining a low weight one. For the minimization version of the game the Nash stabilized partitioning exhibits 5.6 social cost while the optimal one produces 5.4, leading to 1.037 price of stability. Moreover for the maximization variant the values are 6.4, 6.6 respectively, leading to an overhead ratio for stability 1.031.

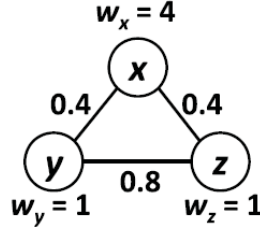


Figure 5.1: Graph with price of stability > 1 for correlation clustering.

The next interesting question is how suboptimal a Nash stable solution can be. To prove our first result we need a bound similar to that of lemma 5.4. In case where there is a Nash equilibrium having two nodes separated, their distance is at least half the ratio of the sum of their weights over the sum of the weights of their coalitions. This bound cannot be violated otherwise the nodes will prefer to join each other's cluster leading to an abolishment of the equilibrium.

Lemma 5.4. *If there exists a Nash equilibrated partitioning where two nodes u, v are separately clustered then $d(u, v) \geq \frac{w_u + w_v}{2(w(C_u) + w(C_v))}$.*

Proof. For player u to have no reason to join v 's coalition it has to be

$$\sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z d(u, z) + \sum_{z \in C_v} w_z (1 - d(u, z)) \leq \sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z (1 - d(u, z)) + \sum_{z \in C_v} w_z d(u, z)$$

and by merging common terms

$$2 \sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z d(u, z) + W(C_v) \leq 2 \sum_{z \in C_v} w_z d(u, z) + W(C_u) - w_u$$

a similar inequality holds for v

$$2 \sum_{\substack{z \in C_v \\ z \neq v}} w_z d(v, z) + W(C_u) \leq 2 \sum_{z \in C_u} w_z d(v, z) + W(C_v) - w_v.$$

Adding the last two results and dividing by two leads to

$$\sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z d(u, z) + \sum_{\substack{z \in C_v \\ z \neq v}} w_z d(v, z) \leq \sum_{z \in C_v} w_z d(u, z) + \sum_{z \in C_u} w_z d(v, z) - \frac{w_u + w_v}{2}$$

Introducing the triangle inequalities $d(u, z) - d(z, v) \leq d(u, v)$ and $d(v, z) - d(z, u) \leq d(u, v)$ produces

$$\frac{w_u + w_v}{2} \leq \sum_{\substack{z \in C_u \\ z \neq u}} w_z d(u, v) + \sum_{\substack{z \in C_v \\ z \neq v}} w_z d(u, v) + w_u d(u, v) + w_v d(u, v).$$

Identifying at the right hand side the product $(W(C_u) + W(C_v))d(u, v)$ we conclude

$$d(u, v) \geq \frac{w_u + w_v}{2(W(C_u) + W(C_v))}$$

□

Theorem 5.3. *For the special case of identical weights w the price of anarchy is upper bounded by $n - 1$.*

Proof. Consider two partitions, a Nash equilibrium \mathcal{E} and an optimal solution \mathcal{O} . Consider also an edge e of the complete graph K_n of all nodes. If the edge connects two coclustered nodes in \mathcal{E} and also in \mathcal{O} , then the cost it introduces to both is equal, with zero contribution to the augmentation of the price of anarchy. The same impact on PoA has an edge which connects nodes which are separately clustered in both \mathcal{E} and \mathcal{O} . The source of raising of the social cost can be

1. an edge e connecting two nodes in the same cluster in \mathcal{E} which are in different clusters in \mathcal{O} and conversely
2. an edge e connecting coalized together nodes in \mathcal{O} which are in different clusters in \mathcal{E} .

In case 1 the social cost of e in \mathcal{E} is $2wd(u, v)$ while in \mathcal{O} is $2w(1 - d(u, v))$. From lemma 5.2 holds $d(u, v) \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2w(C)}$ which leads to $d(u, v) \leq 1 - \frac{1}{n}$. As a result the cost of the Nash equilibrated partition is at most $2w(1 - \frac{1}{n})$. On the other hand the cost of the optimal solution is at least $2w\frac{1}{n}$. The ratio of the contribution of e to the social cost in these two cases is at most $n - 1$.

In case 2 the cost that e contributes in \mathcal{E} is $2w(1 - d(u, v))$ while in \mathcal{O} is $2wd(u, v)$. According to lemma 5.4, $d(u, v) \geq \frac{w_u + w_v}{2(w(C_u) + w(C_v))}$ or $d(u, v) \geq \frac{1}{n}$. Conclusively the maximum cost of e in \mathcal{E} is $2w(1 - \frac{1}{n})$ while in \mathcal{O} is at least $2w\frac{1}{n}$. So the ratio of the costs of e in \mathcal{E} and in \mathcal{O} is at most $n - 1$.

Thus the price of anarchy is at most $n - 1$. □

Permitting some "anarchy" in the weights, namely considering arbitrary node weights, results in the elevation of the upper bound of the price of anarchy which is quadratic with respect to n .

Theorem 5.4. *The price of anarchy of the minimization variant of the correlation clustering game with arbitrary weights is $O(n^2)$.*

Proof. Using the reasoning elaborated in the proof of theorem 5.3, we distinguish two groups of edges.

- The first contains those who connect nodes that are clustered in the same way by the Nash equilibrated state \mathcal{E} and an optimal solution \mathcal{O} that is, if the nodes are in the same cluster in \mathcal{E} , they are also in the same cluster in \mathcal{O} and if they are in separated clusters in \mathcal{E} they are also clustered separately in \mathcal{O} .
- In the second group of edges belong those who connect differently clustered nodes by \mathcal{E} and \mathcal{O} . That is, edges that are coclustered in \mathcal{E} are not in \mathcal{O} and vice versa.

Let the total contribution of the first group to the social cost of \mathcal{E} be D .

For an edge e of the second group, its contributed cost to \mathcal{E} according to lemma 5.2 will be upper bounded by $(w_u + w_v) \left(1 - \frac{w_u + w_v}{2w(C)}\right)$ in case the nodes are in the same cluster C by \mathcal{E} and according to lemma 5.4 at most $(w_u + w_v) \left(1 - \frac{w_u + w_v}{2(w(C_u) + w(C_v))}\right)$ when the nodes are not coalized in \mathcal{E} . Thus, in both the latter cases the contribution of e to the social cost in \mathcal{E} is at most $(w_u + w_v) - \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')}$, where V' is the set of nodes that have not exactly the same coalition in \mathcal{E} and in \mathcal{O} .

Taking under consideration that the cost of e in \mathcal{O} is equal to $(w_u + w_v)$ minus the cost of e in \mathcal{E} we get that the price of anarchy of the game is upper bounded by

$$\frac{D + \sum_{uv \in E'} \left[(w_u + w_v) - \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')} \right]}{D + \sum_{uv \in E'} \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')}}}$$

Notice that $w_u + w_v - \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')} \geq \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')}$. Therefore

$$\begin{aligned} POA &\leq \frac{\sum_{uv \in E'} \left[(w_u + w_v) - \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')} \right]}{\sum_{uv \in E'} \frac{(w_u + w_v)^2}{2w(V')}}} \\ &= 2w(V') \frac{\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v)}{\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v)^2} - 1 \\ &= 2w(V') |E'| \frac{\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v)}{\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v)^2 \sum_{uv \in E'} 1} - 1 \end{aligned}$$

where E' is the set of edges connecting nodes $i, j \in V', i \neq j$. Implementing Cauchy - Schwartz inequality, stating that for any two sequences a_i, b_i

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2,$$

yields

$$PoA \leq 2w(V')|E'| \frac{\sum_{uv \in V'} (w_u + w_v)}{(\sum_{uv \in V'} (w_u + w_v))^2} - 1 = \frac{2w(V')|E'|}{\sum_{uv \in V'} (w_u + w_v)} - 1.$$

It holds that $\sum_{uv \in E'} (w_u + w_v) \geq w(V')$. Hence $PoA \leq 2|E'| - 1 = O(n^2)$. \square

For a lower bound in the context of minimization, even number of players is assumed.

Theorem 5.5. *For even number of players the lower bound of the price of anarchy is $n - 1$. The bound holds even if weights are unitary and the metric is a line metric.*

Proof. Assume unitary weights for all nodes. We divide the nodes of the game in two disjoint sets A, B , each having $n/2$ nodes. The points of A are located on point 0 of a line while the points of B are located at point $1/n$. Consider partitioning them in 2 clusters, one containing the nodes of A and the other containing those of B . The cost of a node u will be $(n - 1)/2$. There are two deviation capabilities, either to form a new cluster or to move to the other existing cluster. In the first case its cost will be $(\frac{n}{2} - 1)1 + \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{n}) = n - 3/2$, no preferable than its current state and in the second case the cost is $(\frac{n}{2} - 1)1 + \frac{n}{2}\frac{1}{n} = (n - 1)/2$ which gives no incentive for leaving the current cluster. Thus the partitioning is a Nash equilibrium. On the other hand if all nodes join the same cluster, the social cost is $n[(\frac{n}{2} - 1)0 + \frac{n}{2}\frac{1}{n}] = n/2$. And the price of anarchy is at least $\frac{n(n-1)/2}{n/2} = n - 1$. \square

For an upper bound at the price of anarchy of the maximization variant, the domain of Nash equilibrated games is split in two subdomains. The first supposes clusters weighting at most $w(V)/\sqrt{n}$ and its complementary assumes existence of at least one coalition weighting not less than $w(V)/\sqrt{n}$. The social welfare of both subdomains is proved to be $\Omega(\sqrt{n}) \cdot w(V)$.

Lemma 5.5. *For a Nash equilibrated partition where for every cluster C , $w(C) \leq w(V)/\sqrt{n}$ the social welfare is $\Omega(\sqrt{n})w(V)$.*

Proof. For edges connecting separately clustered nodes u, v , holds

$$d(u, v) \geq \frac{w_u + w_v}{2(w(C_u) + w(C_v))} \geq \frac{w_u + w_v}{4w(V)/\sqrt{n}}.$$

Similarly, for edges connecting coclustered nodes we deduce

$$d(u, v) \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2w(C)} \leq 1 - \frac{w_u + w_v}{2w(V)/\sqrt{n}}$$

As a result for both types of edges the contributed profit is at least $\frac{(w_u+w_v)^2}{4w(V)/\sqrt{n}}$. Consequently the total profit gained by those edges is not less than $\sum_{uv \in V} \frac{(w_u+w_v)^2}{4w(V)/\sqrt{n}}$. In order to prove the lemma's claim the following inequality is introduced

$$\begin{aligned}
w^2(V) &= \left(\sum_{v \in V} w_v \right)^2 = \sum_{v \in V} w_v^2 + 2 \sum_{uv \in V} w_u w_v \\
&= \sum_{v \in V} w_v^2 + \frac{n-2}{n-1} \sum_{uv \in V} w_u w_v + \frac{n}{n-1} \sum_{uv \in V} w_u w_v \\
&\leq \sum_{v \in V} w_v^2 + \frac{n-2}{2(n-1)} \left(\sqrt{(n-1) \sum_{v \in V} w_v^2} \right)^2 + \frac{n}{n-1} \sum_{uv \in V} w_u w_v \\
&= \frac{n}{2} \sum_{v \in V} w_v^2 + \frac{n}{n-1} \sum_{uv \in V} w_u w_v = \frac{n}{2(n-1)} \left((n-1) \sum_{v \in V} w_v^2 + 2 \sum_{uv \in V} w_u w_v \right) \\
&= \frac{n}{2(n-1)} \sum_{uv \in V} (w_u + w_v)^2 \\
&\implies \sum_{uv \in V} (w_u + w_v)^2 \geq \frac{2(n-1)}{n} w(V)^2
\end{aligned}$$

Substituting the last inequality, the total profit is found to be

$$\sum_{uv \in V} \frac{(w_u + w_v)^2}{4w(V)\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{n}}{4w(V)} \frac{2(n-1)}{n} w(V)^2 = \Omega(\sqrt{n})w(V).$$

□

Lemma 5.6. *Suppose a Nash equilibrium \mathcal{E} and a cluster C with weight at least $w(V)/\sqrt{n}$, then \mathcal{E} 's social welfare is $\Omega(\sqrt{n})w(V)$.*

Proof. Consider a node u which does not belong to C . Because of \mathcal{E} being a Nash equilibrium, u has no incentive to deviate. Thus its profit has to be at least the maximum available by all edges connecting it with nodes of C . That is the maximum between belonging to C or not or

$$\max \left(\sum_{v \in C} w_v d(u, v), \sum_{v \in C} (1 - d(u, v)) \right)$$

Given that $\max(a, b) \geq \frac{a+b}{2}$, for u 's profit $p(u)$ holds

$$p(u) \geq \frac{\sum_{v \in C} w_v d(u, v) + \sum_{v \in C} w_v (1 - d(u, v))}{2} \geq \frac{\sum_{v \in C} w_v}{2} = \frac{w(C)}{2} \geq \frac{w(V)}{\sqrt{n} \cdot 2}$$

Therefore the total profit of nodes outside C is at least $\frac{w(V)}{\sqrt{n} \cdot 2}(|V| - |C|)$. By the same way, on the other hand where u does belong to C its profit has to be more by staying in C than by leaving. Thus

$$p(u) \geq \max \left(\sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v(1 - d(u, v)), \sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v d(u, v) \right)$$

or

$$p(u) \geq \left(\sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v d(u, v) + \sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v(1 - d(u, v)) \right) / 2 \geq \left(\sum_{\substack{v \in C \\ v \neq u}} w_v \right) / 2 \geq \frac{w(C) - w_u}{2}.$$

Resulting to a total profit for these nodes at least

$$\frac{|C| \cdot w(C) - w(C)}{2} = \frac{(|C| - 1)w(C)}{2} \geq \frac{(|C| - 1) w(V)}{2 \sqrt{n}}.$$

Summing up the minimum expected profit of every node we conclude to minimum social welfare $(|V| - 1)w(V)/\sqrt{n} = \Omega(\sqrt{n})w(V)$. \square

Combining lemmata 5.5, 5.6 the least social welfare for a maximization correlation clustering game is $\Omega(\sqrt{n})w(V)$. Moreover the optimum social welfare is $(n - 1)w(V)$. Therefore the price of anarchy is $O(\sqrt{n})$. To export a lower bound for the price of anarchy of the maximization version of the correlation clustering game we present a case where PoA is $\Omega(\sqrt{n})$. Consider a game where the n nodes are unit equalweighted and divided in $k = \sqrt{n}$ groups A_1, A_2, \dots, A_k (if n is not a perfect square $k = \sqrt{n'}$, where n' is the greatest perfect square less than n and $n - n'$ additional nodes are introduced so that the total number remains n . Those additional nodes have distance 1 for every other and are considered single clustered in all the following configurations) each containing \sqrt{n} nodes. The distances between the nodes are

$$d(u, v) = \begin{cases} 0 & u, v \in \text{same group } A_i \\ \sqrt{1/n} & \text{else} \end{cases}.$$

Consider the partitioning according to A groups, that is every A group constitutes a cluster. This clustering is a Nash equilibrium. This can be seen by comparing the gain earned by a node in staying to its current position and in changing team. Currently the profit of a node u belonging to a group A_j is

$$\sum_{\substack{v \in A_j \\ v \neq u}} 1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} \sum_{v \in A_i} \sqrt{1/n} = \sqrt{n} - 1 + (\sqrt{n} - 1)\sqrt{n}\sqrt{1/n} = 2\sqrt{n} - 2.$$

By deviating to another group A_m , the gain becomes

$$\sum_{\substack{v \in A_m \\ v \neq u}} (1 - \sqrt{1/n}) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j, m}} \sum_{v \in A_i} \sqrt{1/n} + \sum_{v \in A_j} 0 = \sqrt{n}(1 - \sqrt{1/n}) + (\sqrt{n} - 2)\sqrt{n}\sqrt{1/n} = 2\sqrt{n} - 3.$$

The social welfare of the game is $n \cdot (2\sqrt{n} - 2)$. The maximum social welfare for this game arises when all players share a common cluster due to the nature of the distance function. The social welfare then is $n \left[(\sqrt{n} - 1) \cdot 1 + (n - \sqrt{n})(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) \right] = n(n - \sqrt{n})$

Concluding that the price of anarchy of the game is $\frac{n(n - \sqrt{n})}{n(2\sqrt{n} - 2)} = \Omega(\sqrt{n})$.

Putting the last result in the same picture with the previous ones, the price of anarchy for the maximization variant is $\Theta(\sqrt{n})$. This bound is tight even for simple settings although for line metrics is not so extended as it is of order $\Theta(n^{1/3})$.

The price of anarchy can also be bounded by making a scaling augmentation in the number of clusters.

Theorem 5.6. *If the number of clusters is restricted to k , then the price of anarchy is at most k .*

Hence the following strategy can be implemented. Allow the players to reach a Nash equilibrium with a limited number of clusters say k . The respective price of anarchy will be at most k and the social welfare derived, at least OPT/k , where OPT is the optimal achievable social welfare. Then the players can be left free to form any number of clusters by best response dynamics. As was previously referred, the social welfare does not decrease in best response dynamics. As a result a Nash equilibrium with at least OPT/k social welfare can be formed.

5.2 Fixed clustering

[Feldman, Eytan, and Naor, 2015]. According to the fixed clustering setting the number of clusters is predefined to k . Two different cluster measures are of interest, the sum of distances between the centroid of the cluster and its members and the maximum distance between the centroid of the cluster and the node which is farthest from it. In the first case the arising model is the k-median and in the latter the k-center. The centroid in each case is the node of the graph minimizing the respective measure, namely in the k-median model the point which minimizes the sum of distances to the points of the cluster C or the node c given by

$$c = \arg \min_{v \in C} \sum_{u \in C} d(u, v)$$

and in the k-center model the point which minimizes the maximum distance from all nodes of the cluster C or

$$c = \arg \min_{v \in C} \max_{u \in C} (d(u, v)).$$

There is the possibility however, that there are more than one candidates in either variant, which simultaneously fulfil the requirements to be called centroids of the cluster. Those situations are called ties. In case where those ties are broken using static rules, the game may not reach a Nash equilibrium even in very simple settings.

Proposition 5.1. *With (static) tie breaking rules, there may not exist a Nash equilibrium for both the k -median and k -center variants, even for line metrics with three nodes.*

To see that, let's examine the game of 3 players wanting to split to 2 groups. Assume the static tie breaking rules given by the permutation given in table 5.2.

Table 5.2: Static tie breaking rules.

Nodes in the cluster	Centroid
A, B	A
B, C	B
A, C	C

There is no partition of the players which does not induce incentives to at least one agent, to deviate, thus leading to lack of a potential equilibrium. The proposed solution is that of history dependent tie breaking rules. Introducing this kind of rules constitutes an additional feature of fixed clustering to the hedonic setting, defining that the only criterion of a player is her teammates and not the past of the game. Moreover centroids change only when forced, that is, only if the change strictly reduces the social cost of the cluster.

5.2.1 General metrics

Theorem 5.7. *In the general metric case under either the k -median or the k -center model there is no certification for reach of a Nash equilibrium.*

Two examples are the graphs in fig. 5.2 and fig. 5.3, taking partitioning in two clusters for granted.

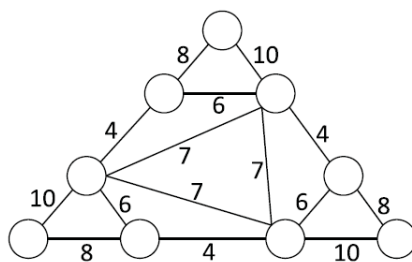


Figure 5.2: There is no Nash equilibrium assuming 2 clusters under k -median model.

The proof of the non existence of Nash equilibria for those cases comes by examining all the possible positions of the centroids for all possible partitionings. This examination can be found in the original aforementioned work.

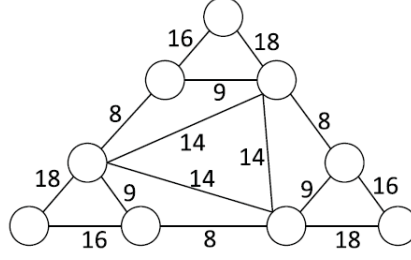


Figure 5.3: There is no Nash equilibrium assuming 2 clusters under k-center model

A detour being likely to assure the existence of at least one Nash stable partition in every instance with integral distances between nodes, is allowing the centroids to be placed at every point along an edge.

Let the distance of the centroid to an end of the edge on which it lies be α . Then w.l.o.g. we choose $\alpha \in [0, 1/2]$ and consequently, the cost of a node u is of the form either $\delta_u + \alpha$ or $\delta_u + (1 - \alpha)$. If now we impose a small displacement on α in the range $[0, 1/2]$ and take the derivative of the sum of the costs the result will be either constant, which means that the minima of total cluster cost are at $\alpha = 0$ or $\alpha = 1/2$ or zero, meaning indifference on whether the centroid is placed at half integral position or not, as far as the total cost of a coalition is concerned.

We observe thus, that for every cluster node u there exists a centroid, that is as far as any other possible centroid from u and is located in a half integral position.

In order to be able to search exhaustively for a Nash equilibrium in an instance of the game, we observe that a weaker equilibrium exists only if it exists also when all centroids are placed on half integral positions. This equilibrium is the weak Nash, under which no player wants to change cluster if after that, the centroid of her new cluster will move to the farthest possible position from her. In other words, a weak Nash equilibrium is a clustering where for each player u in cluster C_1 and any other cluster C_2 , $d(u, c(C_1)) \leq d(u, c(C_2^{+u}))$, where C_2^{+u} is the cluster C_2 after u has joined it. To explain the former observation we compare a weak Nash equilibrium \mathcal{E} with centroids along edges and the same clustering with centroids moved on the closest half integral positions \mathcal{E}' and thus for every node u belonging to cluster C_1 , $|d(u, c(C_1), \mathcal{E}') - d(u, c(C_1), \mathcal{E})| \leq 1/4$ where $d(u, c(C_1), \mathcal{E})$ stands for the distance of node u to the centroid of cluster C_1 under the clustering \mathcal{E} . Since \mathcal{E} is an equilibrium $d(u, c(C_1), \mathcal{E}) \leq d(u, c(C_2), \mathcal{E}_{u \rightarrow C_2})$ where the notation $\mathcal{E}_{u \rightarrow C_2}$ means clustering \mathcal{E} after node u has moved to cluster C_2 and the centroid of which was set to the farthest possible position to u . Moreover $\mathcal{E}_{u \rightarrow C_2}$ and $\mathcal{E}'_{u \rightarrow C_2}$ have the same nodes, so according to the previous points the centroid of C_2 is set at a half integral position resulting to $d(u, c(C_2), \mathcal{E}_{u \rightarrow C_2}) = d(u, c(C_2), \mathcal{E}'_{u \rightarrow C_2})$. By recapping we have $d(u, c(C_1), \mathcal{E}) \leq d(u, c(C_2), \mathcal{E}_{u \rightarrow C_2})$ or $d(u, c(C_1), \mathcal{E}') - 1/4 \leq d(u, c(C_2), \mathcal{E}_{u \rightarrow C_2})$ or $d(u, c(C_1), \mathcal{E}') - 1/4 \leq d(u, c(C_2), \mathcal{E}'_{u \rightarrow C_2})$, proving that \mathcal{E}' is also a weak Nash equilibrium.

Since lack of existence of a weak Nash equilibrium means absence of the stronger stability notion namely the Nash equilibrium we can assert whether an instance can

reach a Nash equilibrium by checking whether there exists a weak Nash equilibrium with half integral centroids.

Theorem 5.8. *In the general metric case under either the k -median or the k -center model, where the centroids are allowed to be anywhere along edges, there is no certification for reach of a Nash equilibrium.*

For the k -median setting the result comes from the previous arguments applied to the 2 cluster game of fig. 5.2. Practically all the combinations of 2 cluster partitions and possible corresponding centroids are shown not to constitute a weak Nash equilibrium. A computer program for this procedure is cited at the original work of Feldman et al.

By the k -center model, centroids are placed only on half integral positions. There is no other possibility since assuming a non half integral centroid with non integral part $\alpha \in (0, 1/2)$ we distinguish two cases. Let D be the set of all nodes with maximum distance to the centroid. Either all nodes $u \in D$ have a cost of the same form between $\delta_u + \alpha$ and $\delta_u + (1 - \alpha)$ and therefore a cost reduction is possible for all nodes by increasing or decreasing correspondingly α or there is at least one node of each kind of cost function. In this case their distances to the centroid should be equal or $\delta_{u_1} + \alpha = \delta_{u_2} + (1 - \alpha)$ which gives $\alpha = \frac{\delta_{u_1} + \delta_{u_2} + 1}{2}$ proving α half integral. So by the same algorithm as in the k -median model, on fig. 5.3, the claim of the theorem is being proved.

Having so far no positive Nash equilibrium existence results, we impose a penalty at the deviating nodes. This additional cost that deviators absorb is actually the compensate paid to the receiving cluster for reestablishing the centroid. This charge is equal to the distance travelled by the centroid because of the inclusion of the new member. Under those circumstances a node will deviate only if its distance from the prior to the deviation centroid of its future cluster is less than its distance from the centroid of its current cluster. Consequentially the following theorem holds.

Theorem 5.9. *Fixed clustering games in general metrics either k -median or k -center, with penalties imposed, converge to a Nash equilibrium which can be reached by best response dynamics.*

Proof. For the k -median model, suppose that a player u wants to deviate from cluster C_1 to C_2 . By the presence of penalties we have $d(u, c(C_2^{+u})) + d(c(C_2^{+u}), c(C_2)) < d(u, c(C_1))$. So u lessens its cost by deviating. Obviously every other node $v \in C_1$ has its cost unchanged or reduced due to a move of the center of C_1 . Finally the nodes in C_2 after u has been incorporated, decide a new centroid minimizing their cluster's cost thus the social cost. As social cost is reduced by every best response move, best response dynamics converge to a Nash equilibrium. \square

Since best response moves ameliorate the social cost, it is straightforward implied that

Theorem 5.10. *The price of stability of either k -median or k -center fixed clustering games is 1.*

In other words the optimal solution reached by nodes choosing their most beneficial strategies is a Nash equilibrium taking under consideration the deduction of the social cost at each one of the players' moves.

Turning our attention to the price of anarchy of clustering with predefined number of coalitions and examining the existence of an upper bound, the answer we get is negative.

Theorem 5.11. *The price of anarchy of either k -median or k -center fixed clustering games is unbounded.*

An exemplary instance is three players on coordinates $0, 1$ and M on a line, with $M \gg 1$. The partitioning $\{0\}, \{1, M\}$ where 1 is the centroid of the latter, is a Nash equilibrium as no player is interested in choosing another of the existing coalitions. The corresponding social cost is M . On the other hand the most preferable for the public welfare clustering is $\{0, 1\}, \{M\}$ with social cost 1 . Hence PoA in this situation is $\frac{M}{1} = M$, lacking supremum.

5.2.2 Tree metrics

A special interesting metric is that of a tree. An exemplary game for this metric is that of finding a certain number of characteristic individuals in living organisms' hierarchy. The nodes of the tree are evolved species which are descendants of a common ancestor and every edge connects a species with its immediate ancestor. Species which evolved through mutation and not crossbreeds are supposed. The distance between players reflects their DNA similarity.

Median model

A key property to the proof of the existence of a Nash equilibrium in this case is the identification of the centroid of a tree with one of its two medians. A median of a tree is defined the same way a median of a sample is defined in statistics, that is it's a node which if deducted from a tree, connected components remain, whose node cardinality is at most $\lceil \frac{N-1}{2} \rceil$. In order to sustain the privilege of using this correspondence, a strategy where every cluster remains compact, namely contains no two nodes having between exocenter nodes, is implemented. We call this situation clustering with the closure property or closed configuration.

Let us now see the reason of the centroid lying on a median of a cluster under the closure property. Suppose that this is not the case. Then the deduction of the centroid u leaves a connected component Q_{max} with at least $\lceil \frac{N-1}{2} \rceil + 1$ nodes. Though if the centroid is moved to the neighbour of u in Q_{max} the majority of the clusters' nodes has its cost reduced, leading to the contradiction to u being a centroid.

Now the following procedure is followed. Aiming at the transformation of a configuration to an equal or better closed one, the locations of the centroids are pinned to their current positions and players are let to choose their closer one. So far the cost of each node can only decrease and similarly the social cost. After that the relocation of the centroids takes place which obviously is in favour of the social cost.

The existence of a node u wanting to deviate from C_1 to cluster C_2 implies that all the nodes between u and C_2 prefer C_2 too. Therefore a node u adjacent to C_2 is left to make a best response move joining C_2 . In case C_1 remains connected, the procedure continues with another node's best response move, otherwise we move to C_2 all remaining nodes of C_1 except those who belong to the connected component of C_1 containing the centroid of C_1^{-u} . The resulting configuration is closed.

During this procedure the social cost is reduced.

Firstly following the incorporation of u in C_1 , u 's and C_1^{-u} 's costs are obviously reduced. Concerning C_2 nodes' costs two cases are distinguished. On the one hand u joins a connected component adjacent to $c(C_2)$ of size at most $\lceil \frac{|C_2|}{2} \rceil - 1$. Hence after the inclusion of u , $c(C_2)$ remains a centroid and the cost of nodes of C_2 remain unchanged. On the other hand, in case u joins a connected component adjacent to $c(C_2)$ of size $\lceil \frac{|C_2|}{2} \rceil$ the centroid is moved to the node adjacent to $c(C_2)$, towards u . This node is still a median of C_2 and thus its distances from nodes of C_2 are identical to those $c(C_2^{-u})$ has to nodes of C_2 .

Secondly, as a result of the inclusion of the rest of nodes of C_1 , except those including the connected component which contains the centroid of C_1^{-u} , their cost is reduced. That holds since if u has an incentive to deviate to C_2 , $d(u, c(C_1)) > d(u, c(C_2))$. Furthermore, for all nodes v in $C_1 \setminus \{\text{nodes} \in \text{connected component of } c(C_1)\}$, holds

$$d(v, c(C_2)) = d(v, u) + d(u, c(C_2)) \text{ and } d(v, c(C_1)) = d(v, u) + d(u, c(C_1^{-u}))$$

and obviously

$$d(u, c(C_1)) \leq d(u, c(C_1^{-u})) \text{ and } d(u, c(C_2)) \leq d(u, c(C_2^{+u})).$$

Putting these inequalities together we get

$$d(v, c(C_2^{+u})) < d(v, c(C_1^{-u})).$$

Thus this step can only decrease the social cost.

Finally the rearrangement of the centroids of the resulting new closed clusters can only decrease the social cost as it is an action performed on this purpose.

So there is a potential function equal to the social cost, which is decreased with every best response move and taking under consideration that the players' strategies are finite, a minimum is reached.

Theorem 5.12. *A Nash equilibrium for tree metrics always exist by k -median model.*

Following the previous discussion, the optimal solution which is reached when no player can make a further best response move, is also a Nash equilibrium and can be computed in polynomial time, since no part of the previous procedure introduces higher complexity.

Theorem 5.13. *The price of stability of k -median model for tree metrics is 1.*

Center model

A conjecture supporting the existence of Nash equilibria at every instance of the clustering game under the k -center model exists. However, the proven results extend to the point where centroids are allowed to be placed at every point of the tree, namely on every node or along any edge. Notice that in this setting, centroids are placed at the median of the tree cluster diameter. In case of more than one diameters it is easy to certify that their medians coincide. As diameter is defined the longer path between two nodes of the tree.

Let us now examine best response dynamics of this game. Given a partitioning \mathcal{E} assume players in nondecreasing order according to their distance to their centroid in $D = (d(u_1, c(C_{u_1})), d(u_2, c(C_{u_2})), \dots, d(u_n, c(C_{u_n})))$. Suppose now a player u wanting to deviate from C_1 to her preferable for the time cluster C_2 . After that move players in C_1 will have less or equal distances to the centroid. The centroid of C_2 will not move in case u is not a terminal node of a diameter of C_2^{+u} and C_2 's nodes will retain their costs. On the contrary, if the centroid of C_2 moves following u 's addition, u is proven an end of a diameter of C_2^{+u} and thus the cost of every node of C_2 in C_2^{+u} will be less than the new cost of u . In ordering D all nodes being on the left of u after the deviation will have their cost unchanged or reduced, u will have less cost and the rest of changed costs will be less than $d(u, c(C_2^{+u}))$. Therefore adopting as a potential function the ordering D , we observe that after a best response move it is lexicographically decreased signifying a reduction of the cost of the configuration which is expressed by the leftmost value of the ordering. Therefore since the number of players' strategies is finite, best response dynamics converge to a Nash equilibrium where no player can lower its cost by unilaterally changing strategy.

Moreover in an optimal solution with minimum cost no player can make a best response move, resulting to unitary price of stability.

Theorem 5.14. *The k -center model where centroids are allowed on edges has always a Nash equilibrium. Moreover for this setting the price of stability is 1.*

However the reached Nash equilibrium may be by far worse than the optimal one. Consider for example six nodes on a line in positions $0, M, M + \epsilon, 2M, L, L + \epsilon$ with $M \ll L$. The clustering $\{\{0, M\}, \{M + \epsilon, 2M\}, \{L\}, \{L + \epsilon\}\}$ is a Nash equilibrium costing to the society $M/2$, although the partitioning $\{\{0\}, \{M, M + \epsilon\}, \{2M\}, \{L, L + \epsilon\}\}$ introduces expenses $\epsilon/2$. Thus the price of anarchy explodes unlimited to the value $\frac{M}{\epsilon}$.

5.2.3 Line metrics

Another natural metric is that of a line. A real world case that could be modelled in this setting is a predefined number of exits from a highway towards the nearby towns and villages. Players are the projections of the centres of municipalities on the road and the internode segments are the intervillage highway parts.

Median model

A first observation is that the centroid of a cluster coincides with one of its medians. By the term median is characterized a node for which the difference of number of nodes left and right of it is at most 1. Suppose a line clustering and a player u wanting to deviate from partition C_1 to C_2 and let's examine the consequences on the costs of the players.

- Obviously the members of C_1^{-u} will have their cost reduced or unchanged after the deviation, since a change of a centroid can only put it closer to them and the idleness of it leaves the distances unaffected.
- Node u has a smaller cost after the deviation.
- For the nodes of C_2^{+u} two case are examined.

On the first hand, their number is even and after the affiliation of u their number becomes odd. If during this process the centroid doesn't change, the distances remain constant. If the centroid moves to the other median of C_2 , the distances of C_2 's nodes to this new centroid remain the same since a node of a cluster has equal distances to the two medians. On the other hand their number is odd and the addition of u makes the total number even. In this case C_2 had only one median m . Thus after the deviation of u , m remains a median and a centroid.

Accordingly, the game has a potential function, namely the total cost function and best response dynamics converge to a Nash equilibrium.

Center model

We call C_1 the cluster of the leftmost node of the metric. Moving rightwards we call C_2 the cluster of the first node v we meet which is not a member of C_1 . In case the centroid of C_1 lies to the left of v then either the nodes of C_1 which are right of v would prefer to deviate or v would do so. Besides if the centroid of C_1 lies to the right of v then either the nodes of C_1 to the left of v will deviate or v will. As a result there are two possible outcomes. The first is C_1 to be formatted in standard form, that is to consist only of consecutive nodes and the second is v to affiliate with C_1 . Inductively it is inferred that every instance reaches after a finite number of deviations a standard form, namely every cluster is in standard form.

As another middle step to the approach of the existence of a Nash equilibrium we observe that every instance of the game has a half Nash equilibrium. Such an equilibrium is a state where no leftmost node in a standard formation has an incentive to deviate. Such a partitioning in every game instance is that where the $k - 1$ rightmost players belong to a singleton cluster when the rest $|V| - k + 1$ belong to the leftmost cluster. The $k - 1$ rightmost clusters contain no deviators since the costs are the lowest possible, namely zero. The leftmost player of the leftmost cluster would not desire a deviation because its new centroid would not be placed closer for her.

For the current setting of half Nash equilibrium we allow the rightmost agent $right(i)$ of cluster i to perform a deviation. If this is the case, the most preferred cluster for her will be $i + 1$, considering rightwards enumeration of clusters. Therefore the potential function

$$\Phi = \sum_{i \in k} d(left(1), left(i))$$

reduces as the leftmost node of $i + 1$ cluster comes closer to $left(1)$ and the rest remain steady. As a consequence of the finiteness of the potential rightmost deviations, Φ reaches a minimum which corresponds to a Nash equilibrium because neither leftmost nor rightmost nodes of the standard configuration would have an incentive to deviate.

5.3 Cooperative clustering in networks

[Hoefer, Vaz, and Wagner, 2015]. This framework models situations where players have first to get to know each other in order to cooperate or where the accessibility is limited due to lack of visibility and communication. The feasible coalitions are those whose members share connectivity of currently existing clusters and/or permanent network links. Coalitions offer to their members equal benefits. Relative situations occur in many real world collaborations. For the formation of a scientific team which is going to make a relative publication, the acquaintance is necessary. Additionally by business synergies, the first even small joint effort is needed before going on with a partnership with equally shared profits.

The underlying network is denoted as $N(V, L)$ where V depicts the n players of the game and L the permanent relations between nodes of the game. Thus in the aforementioned scientific example V stands for the researchers whereas L could represent the former supervisor - phd candidate link. Calling \mathcal{S} the current clustering state, we define as \mathcal{G} the set of deviation structures. A graph $G \in \mathcal{G}$ is called a formation graph, that is a template pattern that when recognized in the union of the network with all the possible edges between currently coalized players, constitutes a candidate coalition. If a subgraph C of $N(V, L) \cup E(K_C)$ is isomorphic to a member of \mathcal{G} , then C is called accessible, where K_C denotes the complete graph of players of cluster C . Moreover, if for every player $v, w(C) > w(C_v)$, meaning that the weight of C is greater than the weight of the current coalition of every player belonging to C , then C is a local blocking coalition for \mathcal{S} . For singleton coalitions $C_v, v \in V$, the weight is considered zero or $w(C_v) = 0$. The number of possible coalitions $|\mathcal{C}|$ is denoted by m where \mathcal{C} stands for the set of realizable coalitions. Resolution of a local blocking coalition C means that coalitions that intersect with C are dropped and temporary links are added to the current state S so that members of C constitute a clique. The temporary links of dropped coalitions are eliminated.

We distinct some cases respectfully of the different potential members of \mathcal{G} .

1. Suppose that the set of deviation structures consists only of cliques of variable number i of nodes, then after the local improvement step, namely the inclusion

of a blocking coalition to the clustering with simultaneous drop of all overlapping coalitions, no new edges are added but some temporary links may be abolished.

Moreover, a most profitable resolved local blocking coalition is not going to be substituted, thus the dynamics when only optimal blocking coalitions are resolved converge to at most n steps. Consequently if a local blocking is included to the clustering in every round, the dynamics will converge in expectation in at most $O(mn)$ steps, which is a polynomial result.

Theorem 5.15. *Let $\mathcal{G} \subseteq \{G_i \mid i = 1, \dots, n\}$ where G_i denotes a complete graph of i players. Every local coalition formation game using \mathcal{G} has a path to stability of length at most n using only local improvement steps from any starting state \mathcal{S} . Furthermore, random dynamics converge to a stable state in expected time at most $O(mn)$.*

2. If now the set of deviation structures contains only star shaped graphs $\mathcal{G} \subseteq \{H_i \mid i = 1, \dots, n\}$ of i nodes, we cannot use the former approach since a non-clique formation graph potentially introduces links when applied. However this game can be formulated in terms of a coalition formation game with constraints [Hoefler and Wagner, 2014]. In such a game the set of created and dropped coalitions is defined by a set of generation and domination rules. Generation rules suggest which coalitions could be formatted while domination rules exclude the less feasible of the candidate coalitions.

Our generation rules depict the fact that no accessible coalition relies on temporary links of more than one $C \in \mathcal{S}$, where \mathcal{S} is the current state. This is obvious since two star clusters sharing an edge means they share the center leading to a non zero intersection between clusters and contradicting that the current state is a partitioning. Thus our such rules are of the form

$$T = \{(\emptyset, C) \mid C \in \mathcal{C}, H_{|C|} \in N, H_{|C|} \in \mathcal{G}\} \cup \{(\{C'\}, C) \mid C, C' \in \mathcal{C}, C \cap C' \neq \emptyset, H_{|C|} \in N \cup \{C'\}, H_{|C|} \in \mathcal{G}\}.$$

It is reminded that the first argument in the parentheses corresponds to the prerequisite clusters in \mathcal{S} , when the second refers to the resulting cluster. The domination rules of our game are formalized as follows

$$D = \{(\{C'\}, C) \mid C, C' \in \mathcal{C}, C \cap C' \neq \emptyset, w(C') \geq w(C)\}.$$

Where the first argument in parentheses stands for an existing coalition is \mathcal{S} which has a greater value than the candidate coalition of the second argument. Having described the game with consistent generation and domination rules and a starting clustering \mathcal{S}_o , the object movement hypergraph $G_{mov} = (V, V_g, T_{mov}, D_{mov})$ is defined. By this graph every coalition in \mathcal{C} is mapped to a vertice and the coalitions which are based only on permanent links and thus are self seed are the members of V_g . Therefore $V = \{v_c \mid C \in \mathcal{C}\}$ and $V_g = \{v_c \mid C \in \mathcal{C}_g\}$, where \mathcal{C}_g the set of

pure infrastructure-dependent coalitions. A clustering corresponds to a marking of the object movement hypergraph, so markings indicate the currently existing coalitions. The potential deviations due to existing coalitions is denoted by the directed exchange edges $T_{mov} = \{(v_{C_1}, v_{C_2}) \mid (\{C_1\}, C_2) \in \mathcal{C}, w(C_1) < w(C_2)\}$. These edges form a directed acyclic graph as their existence suggest a total order on coalitions. Finally $D_{mov} = D$ stands for the directed domination edges which direct from a coalition C_1 to a coalition C_2 for which $w(C_1) \geq w(C_2)$.

For an exemplary object movement hypergraph confer to fig. 5.4. The dynamics

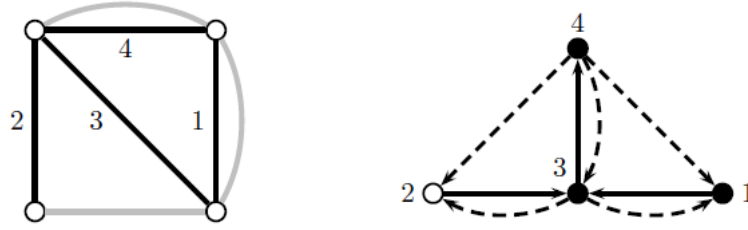


Figure 5.4: Left: A coalition formation game with limited vision. The permanent network links are shown grey and realizable coalitions, black. The formation graph is just two connected nodes, namely a matching. The numbers indicate the weights of the coalitions.

Right: The corresponding object movement hypergraph. Nodes with markings (filled nodes) correspond to currently reachable coalitions, while unmarked nodes to the rest members of \mathcal{C} . Solid edges belong to T_{mov} while dashed to D_{mov} .

are separated in two phases.

- Phase 1

In order to reach a steady state, starting with some initial markings we examine the existence of suggested resolutions by T_{mov} which lead to undominated coalitions. If such are found, they are resolved, that is in case a reachable position is detected dominating a current coalition, then the marking corresponding to v traverses the exchange edges to the dominating position and the round finishes.

- Phase 2

By the same way we focus on all the reachable positions from $v \in V_g$. Iteratively reachable vertexes v_C with maximum weight $w(C)$ are distinguished, their corresponding starting nodes $v \in V_g$ are marked and the markings traverse the path of exchange edges leading from v to v_C . This phase is repeated until the exhaustion of reachable vertexes.

To export the complexity of the dynamics we observe that the construction of G_{mov} takes $O(m + n)$ steps. Additionally in phase 1, a marking is replaced by a

more beneficial. The rest of the markings either remain idle or are being abolished. However a marking can be upgraded at most m times and the cardinality of markings is upper bounded by n resulting in a maximum of mn rounds for the first phase. Furthermore in phase two the number of edge traversals a marking relying for start, only on the network, can do, are no more than m . The resulting total number of improvement steps is $O(m^2n)$.

Having incorporated the local coalition formation game to the framework of coalition formation with constraints, the following theorem is implied.

Theorem 5.16. *Let $\mathcal{G} \subseteq \{H_i \mid i = 1, \dots, n\}$ where H_i denotes a star consisting of a center and $i - 1$ leaves then every local coalition formation game using \mathcal{G} can be formulated as a coalition formation game with constraints and consistent generation and domination rules. Therefore, in every such game there is a path to stability of length at most $O(nm^2)$ using only local improvement steps from any starting state S .*

3. In case where the deviation structures are neither complete graphs nor stars, there exists an instance requiring exponentially many steps with respect to players involved. Aiming to construct it, we observe a property of those formation graphs.

Lemma 5.7. *Let $G = (V, E)$ be some arbitrary undirected connected graph. If for every path $v_1v_2v_3v_4$ with $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4) \in E$ there also exists $(v_1, v_3) \in E$, then G is either a complete graph or a star.*

Proof. Absence of a path of 4 steps means that the graph is a star. Having the first and third nodes of a four step path connected implies that numbering them in reverse order, the link between the second and the fourth exist. Moreover by traversing the path in the order first, second, fourth and third, a connection between the first and the fourth is deducted. Conclusively the subgraph $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in G$ constitutes a clique. Let a fifth node v_5 be connected with the former four w.l.o.g. to v_1 , then there are paths starting from v_5 having as third node each of $\{v_2, v_3, v_4\}$ suggesting edges between v_5 and each of them. Thus $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ is a clique and so on until V is proven a complete graph. \square

Suppose now a formation graph $G(V, E)$ consisting of four vertexes falling out of the category of the union of complete graphs and stars with

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in V, (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4) \in E, (v_1, v_3) \notin E.$$

A gadget with 14 vertexes $\{v_1, \dots, v_{14}\}$ and edges

$$\begin{aligned} &(v_1, v_5), (v_1, v_9), (v_2, v_3), (v_2, v_{11}), (v_3, v_4), \\ &(v_3, v_{11}), (v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_7, v_8), (v_9, v_{10}), \\ &(v_{11}, v_{12}), (v_{11}, v_{13}), (v_{13}, v_{14}) \end{aligned}$$

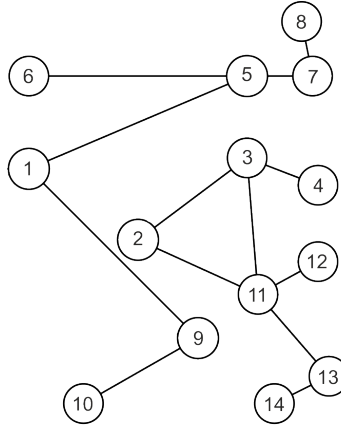


Figure 5.5: Gadget used to prove exponential many steps to stability for formation graphs which are neither cliques nor stars.

Table 5.3: Coalitions and their weights of network with exponentially many steps to stability, when the formation graph is neither a clique nor a star.

Coalition	Vertexes	Weight
C_1	v_1, v_2, v_3, v_4	$4 + 1$
C_2	v_1, v_3, v_5, v_6	$4 + 2$
C_3	v_3, v_5, v_7, v_8	$4 + 3$
C_4	v_1, v_2, v_9, v_{10}	$4 + 1$
C_5	v_2, v_9, v_{11}, v_{12}	$4 + 2$
C_6	$v_9, v_{11}, v_{13}, v_{14}$	$4 + 3$
C_7	v_3, v_5, v_9, v_{11}	$4 + 4$

is introduced as shown in fig. 5.5. There are 7 allowed coalitions as shown in table 5.3.

Additionally auxiliary vertexes w_1, w_2 , edges $(w_1, v_1), (w_1, v_2), (w_2, v_2)$ and coalition C_0 with unitary profit, play the role of the starter as they generate the necessary for the evolution of the dynamics edge (v_1, v_2) . Starting from a state empty of coalitions, C_0 is accessible and formed. Therefore edge (v_1, v_2) shows up. Thus coalitions C_1, C_2 are blocking now given their equally higher profit comparing to C_0 . Suppose w.l.o.g. that C_1 is formed and connection between v_1 and v_3 is settled. As a result the now blocking coalition C_2 is formed introducing link (v_3, v_5) triggering the formation of the more profitable cluster C_3 . In this state the only accessible coalition is again C_0 the formation of which makes available again the edge (v_1, v_2) but know the only blocking coalition is C_4 as v_3 is affiliated with the

more lucrative C_3 . In the same manner using (v_2, v_9) , C_5 is created and brings correspondence between v_9 and v_{11} which in turn contributes to the gathering of either C_6 and then C_7 or immediately of C_7 . Hence the formation of the stable C_7 requires two formations of C_0 . A schematic illustration of these dynamics is depicted in fig. 5.6.

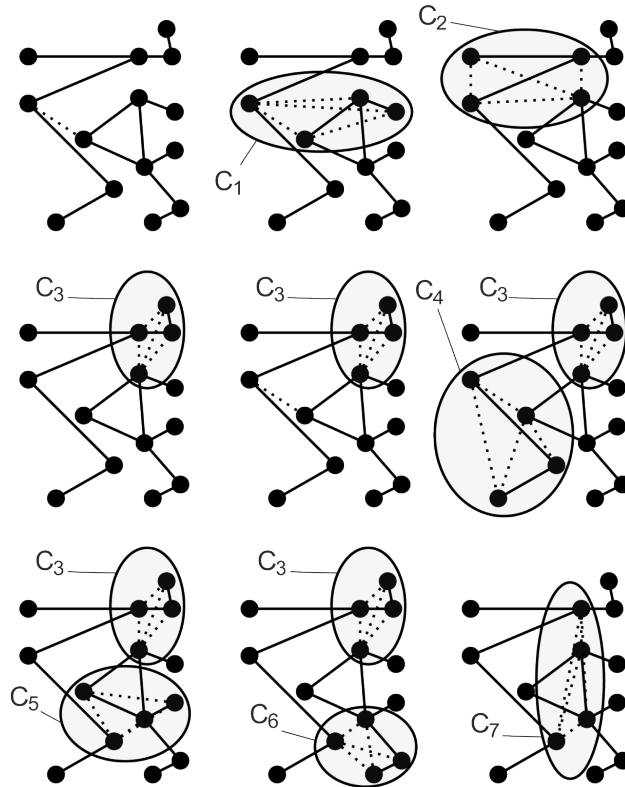


Figure 5.6: The sequence of the formation of coalitions after the creation of edge (v_1, v_2) .

An identical gadget is added aside of the first. The initiator now are vertexes v_5 and v_9 of the first gadget which identify with vertices v_1 and v_2 respectively of the new gadget. The allowed coalitions at the new gadget are the corresponding of those of the first, although the profits are $4 \cdot 2 + 1$ for $C_{1,2}$ and $C_{4,2}$, $4 \cdot 2 + 2$ for $C_{2,2}$ and $C_{5,2}$, $4 \cdot 2 + 3$ for $C_{3,2}$ and $C_{6,2}$ and $4 \cdot 2 + 4$ for $C_{7,2}$. As a result C_7 is dropped in favour of $C_{1,2}$ and the dynamics continue as previously, however in order for $C_{1,2}$ to be formed for the second time, C_0 has to be formed twice again. Thus the evolution of the dynamics requires 4 creations of C_0 . Every likewise addition of such gadgets increases by a factor 2 the number of required formations for C_0 . Therefore the reach of an equilibrium for k gadgets demands $\Theta(2^k)$ steps. Figure 5.7 sketches the connection among successive gadgets.

Despite of the fact that the given formation graph is supposed a path from v_1 to

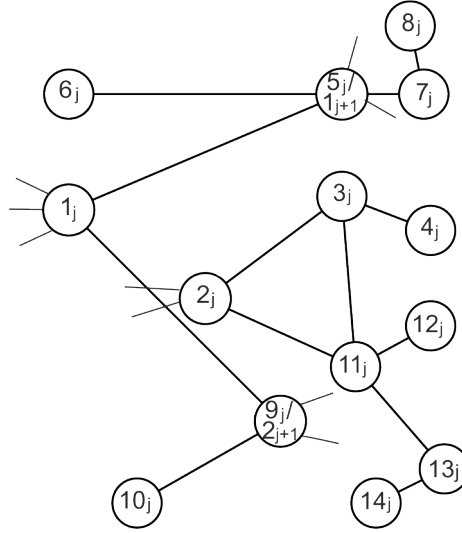


Figure 5.7: The j th gadget. Node $v_{1,j}$ shares edges with $v_{6,j-1}, v_{7,j-1}, v_{8,j-1}, v_{5,j}, v_{9,j}$ while $v_{2,j}$ shares edges with $v_{1,j-1}, v_{10,j-1}, v_{3,j}, v_{11,j}$.

v_4 , there may be present edges connecting v_1 to v_4 or/and v_2 to v_4 . Then, to adjust our construction, we add the corresponding edges, that are presented in table 5.4.

Table 5.4: Edges added to network according to the topology of the formation graph.

Coalition	$v_1 - v_4$ edge	$v_2 - v_4$ edge
C_1	(v_1, v_4)	(v_2, v_4)
C_2	(v_3, v_6)	(v_1, v_6)
C_3	(v_8, v_3)	(v_7, v_3)
C_4	(v_2, v_{10})	(v_1, v_{10})
C_5	(v_9, v_{12})	(v_2, v_{12})
C_6	(v_{14}, v_9)	(v_{13}, v_9)
C_7	(v_9, v_5)	(v_{11}, v_5)

The inclusion of those additional permanent links does not change the dynamics of the game, as each of them appears to a single coalition. This procedure can be generalized to graphs having more than four nodes and every combination of edges among them. This dilation of the formation graph makes no difference to the dynamics for the reason that all additional elements, nodes and edges, refer to only one coalition each. Formalizing our result the following theorem arises.

Theorem 5.17. *Let $G = (V, E)$ be an arbitrary connected graph of constant size, which is neither a clique nor a star. For every $n \in \mathbb{N}$ there is a local coalition formation game with n agents, $m = \Theta(n)$ coalitions, $\mathcal{G} = \{G\}$ and an initial state such that every sequence leading to a stable state requires $2^{\Theta(n)}$ improvement steps.*

Chapter 6

Future directions

So far hedonic games have been studied admitting partitions where each player has only one position. A more general framework would be created by assimilating in our model the potential of a player being able to participate to more than one coalitions. The number of those coalitions could either be fixed for all players or variant with respect to the popularity of this player, namely to the surplus he incurs on other players.

Furthermore, logical representation of hedonic games may lead to the implementation of SAT solvers in order to compute stable partitions [Aziz et al., 2015].

As shown in chapter 4, there are many cases where finding a partition satisfying a desired stability concept may be hard. For these cases, approximately stable coalitions could be searched for as done by Bhargat, Chakraborty, and Khanna (2010) who present approximation of pure Nash equilibria for certain games.

Moreover, in what was presented so far and generally in the hedonic literature, many sufficient conditions for the existence of stable partitions with respect to determined stability notions are presented, though the set of necessary conditions remains unknown.

In addition, there is no proposed way for computing the stable set or its cardinality. Having the stable set we could solve several optimization problems with respect to desired goals as maximizing the less satisfied, envy freeness, favouring the more cooperative etc. Another interesting direction would be the inclusion of mixed strategies for games where competition occurs and the tracing of restrictions of preference profiles avoiding the unpleasant results of PPAD completeness introduced by Daskalakis, Goldberg, and Papadimitriou (2006).

Through the course of this review several problems are found to be open. It is not determined the non emptiness of the core for simple fractional hedonic games. Moreover the complexity of VOTEINOUT with voting thresholds that do not satisfy $T_{in}, T_{out} \geq \frac{1}{2}$ and $T_{in} + T_{out} > 1$, namely the problem of computing a stable partition with thresholds not only for the entrance, but also for the extraction from a coalition, where the given restrictions do not hold, remains open, as also the problem of finding a vote-in and sum-out stable partition.

In the models of hedonic clustering presented by Feldman, Eytan, and Naor (2015), it is unanswered for the k-median problem in trees, whether a Nash equilibrium is reached

by best response dynamics. In k -center model work could be done to determine the existence of Nash equilibrium in every instance when also the centroid is not allowed to be placed along an edge except at its end points. Moreover it's left to be known whether the ending of best response dynamics is a Nash equilibrium, for both tree and line metrics. There is also lack of known bounds for the price of anarchy even for the simpler line case. Finally for the correlation clustering model, no upper bounds are known and the certified lower bounds are just small constants for the price of stability. A refinement of the bounds for the price of anarchy is also considered feasible.

Bibliography

- [1] Abbasi, A. and Younis, M. “A Survey on Clustering Algorithms for Wireless Sensor Networks”. English. In: *Comput. Commun.* 30.14-15 (2007), pp. 2826–2841.
- [2] Alcalde, J. and Revilla, P. “Researching with whom? Stability and manipulation”. English. In: *Journal of Mathematical Economics* 40 (2004), pp. 869–887.
- [3] Aziz, H. and Brandl, F. “Existence of stability in hedonic coalition formation games”. English. In: *Proc. of 11th AAMAS Conference*. Ed. by Persiano, G. Springer, 2012, pp. 763–770.
- [4] Aziz, H., Brandl, F., and Harrenstein, P. “Fractional Hedonic Games”. English. In: *Proc. of 13th AAMAS Conference*. 2014, pp. 5–12.
- [5] Aziz, H., Brandt, F., and Harrenstein, P. “Pareto optimality in coalition formation”. English. In: *Games and Economic Behavior* 82 (2013), pp. 562–581.
- [6] Aziz, H., Harrenstein, P., Lang, J., and Wooldridge, M. “Boolean Hedonic Games”. English. In: *CoRR* abs/1509.07062 (2015).
- [7] Ballester, C. “NP-completeness in hedonic games”. English. In: *Games and Economic Behavior* 49.1 (2004), pp. 1–30.
- [8] Bandyopadhyay, S. and Coyle, E. “Minimizing Communication Costs in Hierarchically-clustered Networks of Wireless Sensors”. English. In: *Comput. Netw.* 44.1 (2004), pp. 1–16.
- [9] Banerjee, S., Konishi, H., and Sönmez, T. “Core in a simple coalition formation game”. English. In: *Social Choice and Welfare* 18 (2001), pp. 135–153.
- [10] Bansal, N., Blum, A., and Chawla, S. “Correlation Clustering”. English. In: *Mach. Learn.* 56.1-3 (2004), pp. 89–113.
- [11] Bhalgat, A., Chakraborty, T., and Khanna, S. “Approximating pure nash equilibrium in cut, party affiliation, and satisfiability games”. English. In: *Proceedings 11th ACM Conference on Electronic Commerce (EC-2010), Cambridge, Massachusetts, USA*. 2010, pp. 73–82.
- [12] Bloch, F. and Diamantoudi, E. “Noncooperative formation of coalitions in hedonic games”. English. In: *International Journal of Game Theory* 40 (May 2011).
- [13] Bogomolnaia, A. and Jackson, M. O. “The stability of hedonic coalition structures”. English. In: *Games and Economic Behavior* 38 (2002), pp. 201–203.

- [14] Brandt, F., Conitzer, V., Endriss, U., Lang, J., and Procaccia, A., eds. *Handbook of Computational Social Choice*. English. Cambridge University Press, 2016.
- [15] Cechlarova, K. and Romero-Medina, A. “Stability in coalition formation games”. English. In: *International Journal of Game Theory* 29.4 (2001), pp. 487–494.
- [16] Daskalakis, C., Goldberg, P., and Papadimitriou, C. “The Complexity of Computing a Nash Equilibrium”. English. In: *Proceedings of the Thirty-eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '06. Seattle, WA, USA: ACM, 2006, pp. 71–78.
- [17] Deng, X. and Papadimitriou, C. “On the Complexity of Cooperative Solution Concepts”. English. In: *Mathematics of Operations Research* 19 (1994).
- [18] Diamantoudi, E. and Xue, L. “Farsighted stability in hedonic games”. English. In: *Social Choice and Welfare* 21 (Aug. 2003).
- [19] Dimitrov, D. and Sung, S.-C. “Top Responsiveness and Stable Partitions in Coalition Formation Games”. English. In: *IMW Working paper* (2005).
- [20] Dimitrov, D., Borm, P., Hendrickx, R., and Sung, S.-C. *Simple Priorities and Core Stability in Hedonic Games*. English. Working Papers 2004.51. Fondazione Eni Enrico Mattei, 2004.
- [21] Dréze, J. and Greenberg, J. “Hedonic coalitions optimality and stability”. English. In: *Econometrica* 48 (1980), pp. 987–1003.
- [22] Elkind, E. and Wooldridge, M. “Hedonic Coalition Nets”. English. In: *Proceedings of The 8th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems - Volume 1*. AAMAS '09. Budapest, Hungary: International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2009, pp. 417–424.
- [23] Esteban, A. and Sergei, V. “Social Networks and Stable Matchings in the Job Market”. English. In: *CoRR* abs/0910.0916 (2009).
- [24] Farrell, J. and Scotchmer, S. “Partnerships”. English. In: *The Quarterly Journal of Economics* 103.2 (1988), pp. 279–297.
- [25] Feldman, M., Eytan, L. and Naor, J. “Hedonic Clustering Games”. English. In: *TOPC* 2.1 (2015), p. 4.
- [26] Gairing, M. and Savani, R. “Computing Stable Outcomes in Hedonic Games”. English. In: *Lecture Notes in Computer Science* 10 (2010), pp. 174–185.
- [27] Gairing, M. and Savani, R. “Computing stable outcomes in hedonic games with voting-based deviations”. English. In: *The 10th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems-Volume 2*. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems. 2011, pp. 559–566.
- [28] Gale, D. and Shapley, L. “College Admissions and the Stability of Marriage”. English. In: *The American Mathematical Monthly* 69.1 (1962), pp. 9–15.
- [29] Garey, M. and Johnson, D. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. English. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1979.

- [30] Greenberg, J. “Coalition structures”. English. In: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*. Vol. 2. North Holland, 1994. Chap. 37, pp. 1305–1337.
- [31] Greenberg, J. and Weber, S. “Strong tiebout equilibrium under restricted preferences domain”. English. In: *Journal of Economic Theory* 38 (1 1986).
- [32] Hajduková, J. “Coalition formation games: A survey”. English. In: *International Game Theory Review* 8.4 (2006), pp. 613–641.
- [33] Hoefer, M. “Local Matching Dynamics in Social Networks”. English. In: *Automata, Languages and Programming - 38th International Colloquium, ICALP 2011, Zurich, Switzerland, July 4-8, 2011, Proceedings, Part II*. 2011, pp. 113–124.
- [34] Hoefer, M., Vaz, D., and Wagner, L. “Hedonic Coalition Formation in Networks”. English. In: *AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2015.
- [35] Hoefer, M. and Wagner, L. “Matching dynamics with constraints”. English. In: *Web and Internet Economics*. Springer, 2014, pp. 161–174.
- [36] Irving, R. “An Efficient Algorithm for the ”Stable Roommates” Problem”. English. In: *J. Algorithms* 6.4 (1985), pp. 577–595.
- [37] Johnson, D., Papadimitriou, C., and Yannakakis, M. “How Easy is Local Search?” English. In: *J. Comput. Syst. Sci.* 37.1 (1988), pp. 79–100.
- [38] Karakaya, M. “Hedonic coalition formation games: A new stability notion”. English. In: *Mathematical social sciences* 61.3 (2011), pp. 157–165.
- [39] Karp, R. “Reducibility Among Combinatorial Problems”. English. In: *Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20-22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York*. 1972, pp. 85–103.
- [40] Koltsidas, G. and Pavlidou, F.-N. “A game theoretical approach to clustering of ad-hoc and sensor networks”. English. In: *Telecommunication Systems* 47.1 (2011), pp. 81–93.
- [41] Koutsoupias, E. and Papadimitriou, C. “Worst-case Equilibria”. English. In: *STACS 99, 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Trier, Germany, March 4-6, 1999, Proceedings*. 1999, pp. 404–413.
- [42] Monien, B., Dumrauf, D., and Tscheuschner, T. “Local Search: Simple, Successful, But Sometimes Sluggish”. English. In: *Automata, Languages and Programming, 37th International Colloquium, ICALP 2010, Bordeaux, France, July 6-10, 2010, Proceedings, Part I*. 2010, pp. 1–17.
- [43] Myerson, R. *Graphs and Cooperation in Games*. English. Tech. rep. 246. Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, 1976.
- [44] Nash, J. “Non-cooperative games”. English. In: *The Annals of Mathematics* 54.2 (1951), pp. 286–295.

- [45] Papadimitriou, C. “Algorithms, Games, and the Internet”. English. In: *Automata, Languages and Programming, 28th International Colloquium, ICALP 2001, Crete, Greece, July 8-12, 2001, Proceedings*. 2001, pp. 1–3.
- [46] Ronn, E. “On the complexity of stable matchings with and without ties”. English. PhD thesis. Yale University, 1986.
- [47] Roth, A. “Incentive compatibility in a market with indivisible goods”. English. In: *Economics Letters* 9.2 (1982), pp. 127–132.
- [48] Roth, A. and Sotomayor, M. *Two-sided matching : a study in game-theoretic modeling and analysis*. English. Econometric society monographs. Cambridge, Mass.: Cambridge university press, 1992, 1990.
- [49] Scarf, H. “The Core of an N Person Game”. English. In: *Econometrica* 35 (1967).
- [50] Schäffer, A. and Yannakakis, M. “Simple Local Search Problems That are Hard to Solve”. English. In: *SIAM J. Comput.* 20.1 (1991), pp. 56–87.
- [51] Shapley, L. and Scarf, H. “On cores and indivisibility”. English. In: *Journal of Mathematical Economics* 1.1 (1974), pp. 23–37.
- [52] Sipser, M. *Introduction to the theory of computation*. English. Boston: Thomson Course Technology, 2006.
- [53] Sung, S.-C. and Dimitrov, D. “On Myopic Stability Concepts for Hedonic Games”. English. In: *Springer* 62 (2007), pp. 31–45.
- [54] Sung, S.-C. and Dimitrov, D. “Computational complexity in additive hedonic games”. English. In: *European Journal of Operational Research* 203 (3 2010).
- [55] Sönmez, T. “Strategy-Proofness and Essentially Single-Valued Cores”. English. In: *Econometrica* 67.3 (1999), pp. 677–690.
- [56] Von Neumann, J. and Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. English. Princeton University Press, 1947.