



# **ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής**

Ψηφιακή επεξεργασία, προτυποποίηση (modeling) και  
εικονική ανακατασκευή σημαντικών αρχαιολογικών  
ευρημάτων

## **ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

Δήμητρα Α. Ντάφη

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς

Απρίλιος 2011

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Κωνσταντίνο Παπαοδυσσέα για την επιστημονική πνευματική και ηθική υποστήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτορικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής Επίκουρο Καθηγητή ΕΜΠ Η. Κουκούτση και Καθηγητή ΕΜΠ Ε. Καγιάφα για την πολύτιμη βοήθειά τους κατά τη διάρκεια του διδακτορικού μου. Επίσης ευχαριστώ τους: Στέφανο Κόλλια Καθηγητή ΕΜΠ, Βασίλειο Λούμο Καθηγητή ΕΜΠ, Θεμιστοκλή Ρασσιά Καθηγητή ΕΜΠ, Χρήστο Αναγνωστόπουλο Επίκουρο Καθηγητή Πανεπιστημίου Αιγαίου, που δέχτηκαν να είναι μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Παναγιώτη Ρουσόπουλο Διδάκτορα Μηχανικό Υπολογιστών και τον υποψήφιο διδάκτορα Δ. Αραμπατζή για την επιστημονική συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια της έρευνάς μου.

Ευχαριστώ επίσης τους γονείς μου Αναστάσιο Ντάφη και Αικατερίνη Ντάφη για τη συνεχή υποστήριξη και συμπαράσταση σε όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Τέλος ευχαριστώ και αφιερώνω την παρούσα διδακτορική διατριβή στη Μαρία Νασιώτη, η οποία με παρότρυνε να ξεκινήσω την έρευνα αυτή και μου παρείχε ανιδιοτελή υποστήριξη και συμπαράσταση κατά τη διάρκεια όλων των δύσκολων στιγμών.

## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή – Οι στόχοι της παρούσης διατριβής.	
1.1 Στόχος του παρόντος διδακτορικού.....	4
1.1.1 Ένας πρώτος στόχος: Μια νέα μέθοδος κατάτμησης εικόνων αποχρώσεων του γκρι.....	4
1.1.2 Ένας δεύτερος στόχος: Μελέτη του τρόπου κατασκευής αγγείων στην Ύστερη Εποχή του Χαλκού, με χρήση πρωτότυπων μεθόδων αναγνώρισης προτύπων και επεξεργασίας εικόνας.....	4
1.1.3 Ένας τρίτος στόχος: Μια νέα προσέγγιση στην εικονική αναπαράσταση χώρων αρχαίων οικισμών.....	4
1.2 Σύντομη αναφορά στον οικισμό της Ύστερης εποχής του Χαλκού Ακρωτηρίου Θήρας.....	5
2. Μια πρωτότυπη μέθοδος κατάτμησης εικόνων αρχαιολογικών ευρημάτων.	
2.1 Γενικά περί κατάτμησης εικόνας . Οι υπάρχουσες σχετικές μέθοδοι (state of the art).....	8
2.1.1 Μέθοδοι κατάτμησης εικόνας με βάση διαχωριστικές Τεχνικές (Partitional Techniques).....	8
2.1.2 Μέθοδοι κατάτμησης εικόνας με βάση ιεραρχικές Τεχνικές (Hierarchical Techniques).....	10
2.2 Η προτεινόμενη πρωτότυπη μέθοδος κατάτμησης εικόνων μεγάλης αρχαιολογικής σημασίας.....	14
2.3 Εφαρμογή της μεθόδου στην αυτόματη κατάτμηση φωτογραφιών αρχαίων επιγραφών και ανασκαφέντων προϊστορικών αγγείων.....	34
3. Η μελέτη του τρόπου κατασκευής αγγείων στην Ύστερη Εποχή του Χαλκού, με χρήση πρωτότυπων μεθόδων αναγνώρισης προτύπων.	
3.1 Πιθανά γεωμετρικά πρότυπα συμβατά με την τεχνολογία της εποχής.....	46
3.2 Εξαγωγή περιγράμματος των αγγείων σε κατάλληλη μορφή.....	57
3.3 Βέλτιστη αυτόματη προσαρμογή περιγραμμάτων αγγείων.....	59
3.4 Η έννοια του ιδεατού αντιπροσώπου για κάθε αγγείο.....	69
3.5 Βέλτιστη προσαρμογή των ιδεατών αντιπροσώπων ανά ζεύγη για την μαθηματικά θεμελιωμένη ομαδοποίηση των αγγείων.....	81
3.6 Βέλτιστη προσαρμογή ιδεατού αντιπροσώπου οικογένειας αγγείων σε κάποιο από αυτά τα γεωμετρικά πρότυπα.....	85
4. Εικονική αναπαράσταση του Τομέα Α του οικισμού Ακρωτηρίου Θήρας.	
4.1 Σύντομη αρχιτεκτονική περιγραφή του Τομέα Α, επικρατούσες θεωρίες για τη χρήση του και η σπουδαιότητα ψηφιακής απεικόνισής του.....	92
4.2 Υποθέσεις για την αρχιτεκτονική και στατική του Τομέα Α, συνεπείς από αρχαιολογικής και ιστορικής απόψεως.....	102

4.3 Περιγραφή της μεθόδου της εικονικής αναπαράστασης του Τομέα Α.....	105
5. Συμπεράσματα.....	114
Παράρτημα	
Π.1. Γενικά περί καμπυλών.....	115
Π.2. Κτίριο Τομέα Α στο Ακρωτήριο Θήρας.....	133
Π.3. Απόδοση εικόνων (Render).....	136
Αναφορές - Βιβλιογραφία.....	138

## **1. Εισαγωγή – Οι στόχοι της παρούσης διατριβής**

### **1.1 Στόχος του παρόντος διδακτορικού**

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι στόχοι του παρόντος πονήματος.

#### **1.1.1 Ένας πρώτος στόχος: Μια νέα μέθοδος κατάτμησης εικόνων αποχρώσεων του γκρι.**

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται κατ' αρχήν μια μέθοδος αυτόματης κατάτμησης εικόνων αποχρώσεων του γκρι σε δυο θεματικές περιοχές. Η μέθοδος εφαρμόζεται στην κατάτμηση εικόνων αρχαιολογικά και ιστορικά σημαντικών αγγείων του οικισμού Ακρωτηρίου Θήρας της Ύστερης Εποχής του Χαλκού, αλλά και στην κατάτμηση εικόνων αρχαίων ελληνικών επιγραφών. Θεμελιώνεται, επίσης, ότι η μέθοδος προσφέρει εξαιρετικά αποτελέσματα, τόσο στην απομόνωση του σώματος του αγγείου από το υπόβαθρο της εικόνας αυτού, όσο και στον διαχωρισμό του σώματος κάθε γράμματος από το μάρμαρο της επιγραφής στην αντίστοιχη εικόνα.

#### **1.1.2 Ένας δεύτερος στόχος: Μελέτη του τρόπου κατασκευής αγγείων στην Ύστερη Εποχή του Χαλκού, με χρήση πρωτότυπων μεθόδων αναγνώρισης προτύπων και επεξεργασίας εικόνας.**

Μελετάται επίσης μια πρωτότυπη προσέγγιση ομαδοποίησης αγγείων ανάλογα με τον βαθμό ομοιότητας που αυτά παρουσιάζουν. Η προσέγγιση αυτή εφαρμόζεται στον διαχωρισμό ικανού πλήθους αγγείων του Ακρωτηρίου Θήρας σε ομάδες, όπου κάθε ομάδα περιλαμβάνει αγγεία ίδιου τύπου, δηλαδή αγγεία που εμφανίζουν εντυπωσιακή ομοιότητα. Εν συνεχεία, διατυπώνεται και θεμελιώνεται μια υπόθεση για τον τρόπο κατασκευής κάθε τέτοιου τύπου αγγείου.

#### **1.1.3 Ένας τρίτος στόχος: Μια νέα προσέγγιση στην εικονική αναπαράσταση χώρων αρχαίων οικισμών.**

Αναπτύσσεται και εφαρμόζεται μέθοδος εικονικής αναπαράστασης του κτιρίου «Τομέας Α» για πρώτη φορά, που ήταν τμήμα του Προϊστορικού Οικισμού του Ακρωτηρίου Θήρας γύρω στα 1620 π.Χ. Η ψηφιακή αυτή απεικόνιση γίνεται σε μορφή video και κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να υλοποιεί ένα σενάριο για το πώς ήταν πραγματικά ο Τομέας Α, το οποίο είναι όσο το δυνατόν ακριβέστερο και

συνεπέστερο από αρχιτεκτονικής, στατικής, αρχαιολογικής και ιστορικής σκοπιάς.

## 1.2 Σύντομη αναφορά στον οικισμό της Ύστερης Εποχής του Χαλκού Ακρωτηρίου Θήρας.

Πριν από τέσσερις περίπου δεκαετίες αποκαλύφθηκαν στη νήσο Θήρα τα πρώτα λείψανα μιας σημαντικής πόλης που χρονολογείται στην εποχή του Χαλκού. (Εικόνα 1.2.1). Η πόλη αυτή θαμμένη κάτω από παχιές ηφαιστειακές επιχώσεις βρέθηκε σχεδόν άθικτη και προσφέρει μια μοναδική πηγή πληροφοριών για τη ζωή και τον πολιτισμό της εποχής, καθώς έχουν διασωθεί διώροφα, αλλά και τριώροφα κτίρια αυτής. Η ανακάλυψη της πόλης του Ακρωτηρίου αποτέλεσε σταθμό στην προϊστορική αρχαιογνωσία.



**Εικόνα 1.2.1:** (Παλυβού, Κ.,1999. Ακρωτήρι Θήρας - Η Οικοδομική Τέχνη, Βιβλιοθήκη της Αρχαιολογικής Εταιρείας, αρ.183, Αθήνα (2)).

Τα ευρήματα δείχνουν ότι η οίκηση άρχισε την τέταρτη χιλιετία π.Χ. και προς το τέλος της μέσης εποχής του Χαλκού, ο αρχικός κυκλαδίτικος πυρήνας μετατρέπεται σε σημαντικό οικισμό. Ο οικισμός του Ακρωτηρίου παρουσιάζει μεγάλη παράλληλη άνθηση, με τη μινωική Κρήτη να βασίζεται κυρίως στο εμπόριο και τη ναυτιλία. Γύρω στα 1620 π.Χ. η πόλη του Ακρωτηρίου βρίσκεται τραγικό και αιφνίδιο τέλος από την έκρηξη του ηφαιστείου. Τα φυσικά φαινόμενα που ακολούθησαν είχαν ως αποτέλεσμα να αφανιστεί έκταση γης, να εισχωρήσει το νερό της θάλασσας και να σχηματιστεί η καλντέρα. Κάθε ίχνος ζωής θάφτηκε κάτω από τα ηφαιστειακά υλικά που εκτοξεύτηκαν τα οποία όμως διαφύλαξαν ανέπαφα τα ερείπια του Θηραϊκού πολιτισμού για τριάντα πέντε περίπου αιώνες. Η κατασκευή του καναλιού του Σουέζ το 1866 έγινε η αφορμή για την ανακάλυψη του οικισμού. Το 1967, έγινε συστηματική ανασκαφική έρευνα από τον καθηγητή Σπυριδωνα Μαρινάτο, η οποία συνεχίζεται μετά το θάνατό του από τον καθηγητή Χρίστο Ντούμα. Από την ανακάλυψη της πόλης του Ακρωτηρίου φάνηκε ότι πρόκειται για οικισμό με υψηλό πολιτισμικό επίπεδο και πολλές ομοιότητες με τους μινωικούς οικισμούς.

Η διάσωση των κτιρίων σε ύψος πολλών ορόφων και η αποτύπωση λεπτομερειών πάνω στην ηφαιστειακή σκόνη οφείλεται στον τρόπο καταστροφής του οικισμού και στο ότι ο οικισμός σφραγίστηκε από τις ηφαιστειακές επιχώσεις μέχρι την ημέρα της αποκάλυψής του.

Στα κτίρια του οικισμού έχουν χρησιμοποιηθεί υλικά εγχώρια με ταυτόχρονη αξιοποίηση των φυσικών διαθέσιμων πόρων. Το κυριότερο δομικό υλικό είναι η πέτρα και μάλιστα η λαξευτή. Αυτή είναι από τα κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα της αρχιτεκτονικής του Ακρωτηρίου, παρότι θεωρείται ότι η τεχνική της λάξευσης χρησιμοποιούνταν στην Κρήτη αρκετά νωρίτερα. Η εξοικείωση των Θηραίων με τη λάξευση της πέτρας φαίνεται από τις ιδιόζουσες εφαρμογές στις γωνίες των κτιρίων και στα πλαίσια των ανοιγμάτων. Οι Θηραίοι επινόησαν και καθιέρωσαν δικούς τους τρόπους και μεθόδους κατασκευής διαφορετικούς από τα μινωικά πρότυπα.

Το δεύτερο δομικό υλικό που έχει χρησιμοποιηθεί είναι το ξύλο, το οποίο τοποθετείτο/χρησιμοποιείτο στους τοίχους, στα πατώματα, στα υποστυλώματα, στα κλιμακοστάσια και στα ανοίγματα και συμμετέχει ως βασικό στοιχείο στο φέροντα οργανισμό των κτιρίων.

Η χρήση του ξύλου ως δομικό υλικό στην αρχιτεκτονική των Θηραίων πηγάζει από μακροχρόνια εμπειρία σχετική με το υλικό και εκτεταμένους πειραματισμούς σχετικά με τις ιδιότητες του, τα οποία προφανώς είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με έναν άλλο τομέα που είχαν αναπτύξει ιδιαίτερος οι Θηραίοι, τη ναυπηγική. Οι κατασκευές από ξύλο στον οικισμό του Ακρωτηρίου είναι εντυπωσιακές πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι τεχνίτες της εποχής είχαν γνώση του υλικού και εφαρμόζαν πρωτοποριακές κατασκευαστικές λύσεις λαμβάνοντας υπόψη τους ακόμα και τη σεισμική επικινδυνότητα. Το σύστημα δόμησης είναι μεικτό και βασίζεται στη συνεργασία πέτρας και ξύλου. Τα ξύλινα στοιχεία πακτώνονται στη λιθοδομή και έχουν συγκεκριμένες διατομές με εξαιρετικές συναρμογές. Ένα μέρος της ξυλείας ήταν εγχώριο και ένα άλλο μέρος αυτής ήταν εισαγόμενο κυρίως η ειδική ξυλεία, όπως ο κέδρος. Οι σημαντικότεροι τόποι προέλευσης αυτής της ειδικής ξυλείας ήταν η Κρήτη, τα Δωδεκάνησα και η Εύβοια, με τη μεταφορά αυτής να γίνεται από τους ίδιους τους Θηραίους.

Η αρχιτεκτονική του οικισμού βασίζεται σε δύο στοιχεία: τη λειτουργικότητά της και τη δυνατότητα υλοποίησής της. Η λειτουργικότητα αφορούσε τη χρήση του κτιρίου, δηλαδή το αν και κατά πόσον αυτό ικανοποιούσε τις ανάγκες για τις οποίες κατασκευάστηκε (επαρκείς χώροι από άποψη μεγέθους, επικοινωνία μεταξύ των χώρων, ικανοποιητικός φωτισμός και αερισμός), ενώ η κατασκευή αφορούσε τον τρόπο δόμησης του συγκεκριμένου έργου. Στην περίπτωση του Ακρωτηρίου, η διάσωση των ορόφων σε μερικά από τα κτίρια αναδεικνύει την αρχιτεκτονική της εποχής. ([2.5]-[2.8]).



## **2. Μια πρωτότυπη μέθοδος κατάτμησης εικόνων αρχαιολογικών ευρημάτων.**

### **2.1 Γενικά περί κατάτμησης εικόνας. Οι υπάρχουσες σχετικές μέθοδοι (state of the art).**

#### Εισαγωγή –Γενική περιγραφή

Η αναζήτηση, εξαγωγή και συσταδοποίηση δεδομένων (data mining) στα οποία υπάγεται και η κατάτμηση εικόνας με τα οποία ασχολείται ο κλάδος της επιστήμης των υπολογιστών, παρουσιάζει μεγάλη ανάπτυξη και πρόοδο τα τελευταία χρόνια. ([3.1-3.16]). Φυσικό επακόλουθο της ανάπτυξης είναι ο καταμερισμός του όλου προβλήματος σε επιμέρους ζητήματα με ένα από τα σημαντικότερα αυτό της ομαδοποίησης δεδομένων (data clustering), δηλαδή της κατάταξης των δεδομένων σε ομάδες, εντός των οποίων υπάρχει ομοιότητα των στοιχείων τους. Οι ομάδες αυτές θα είναι διαχωρισμένες μεταξύ τους. Το clustering των δεδομένων είναι θεμελιώδους σημασίας σε πολλά προβλήματα, όπως για παράδειγμα στην ανάλυση δεδομένων σε βάσεις αλλά και στην ορθή κατάταξη σε κατηγορίες στοιχείων για στατιστική ανάλυση και περαιτέρω επεξεργασία.

#### Γενικά περί μεθόδων συσταδοποίησης/ομαδοποίησης (clustering)

Η ομαδοποίηση δεδομένων λόγω της μεγάλης εφαρμογής και χρησιμότητας της οδήγησε σε πολλές διαφορετικές μεθόδους clustering, κάθε μια από τις οποίες παρουσιάζει πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα ανάλογα με την περίπτωση που κ α ί τ α ι ν α αν τμετωπίσει. Οι μέθοδοι αυτές μπορούν να χωριστούν σε δύο κυρίαρχες τεχνικές clustering:

- α). Τις Διαχωριστικές Τεχνικές ή Τεχνικές διαμέρισης (Partitional Techniques).
- β). Τις Ιεραρχικές Τεχνικές ( Hierarchical Techniques).

#### **2.1.1 Μέθοδοι κατάτμησης εικόνας με βάση Διαχωριστικές Τεχνικές (Partitional Techniques)**

Στις τεχνικές αυτές ακολουθήθηκε αρχικά η προσέγγιση με βάση το κέντρο βάρους της περιοχής (centroid) και στη συνέχεια εφαρμόστηκαν διαφορετικές προσεγγίσεις με βάση κάποια σημεία αντιπροσώπους.

### Μέθοδοι κέντρου βάρους (centroid based techniques).

Οι τεχνικές αυτές αποδίδουν σημεία σε μια υποπεριοχή, όταν ελαχιστοποιείται η ευκλείδεια ή τετραγωνική κ.λ.π. απόσταση τους, από το κέντρο βάρους της υποπεριοχής. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος είναι η K-means, η οποία διαλέγει αρχικά τυχαία N περιοχές και στη συνέχεια αποδίδει σε κάθε μια από αυτές τα σημεία της αρχικής περιοχής με βάση το παραπάνω κριτήριο.

Συγκεκριμένα, χωρίζεται η εικόνα σε N θεματικές περιοχές. Για τις ειδικές περιπτώσεις κατάτμησης εικόνων γραμμών και αγγείων που μελετάμε, λαμβάνεται  $N=2$ , ως και το ελάχιστο (minimum) του ιστογράμματος διαβαθμίσεων του γκρι και θεωρείται προσωρινά η αφετηρία του υποβάθρου. Αντίστοιχα, λαμβάνεται το μέγιστο (maximum) αυτού του ιστογράμματος και θεωρείται ως αφετηρία της δεύτερης περιοχής που για τις εφαρμογές που μας ενδιαφέρουν έχει τη σημαντική πληροφορία. Τυχαία, επιλέγονται εικονοστοιχεία από την εικόνα μέχρι αυτά να εξαντληθούν. Έστω P1 το χρωματικό περιεχόμενο του πρώτου pixel που επιλέγεται και έστω ότι αυτό είναι πλησιέστερο στο χρωματικό περιεχόμενο της αρχικής εκτίμησης του υποβάθρου. Αποδίδεται το P1 στο υπόβαθρο και ορίζεται ξανά το χρωματικό περιεχόμενο του υποβάθρου, ως ο μέσος όρος του χρωματικού περιεχομένου των δύο εικονοστοιχείων. Ακολουθεί το τρίτο εικονοστοιχείο πεδίο και έστω πάλι ότι το χρωματικό περιεχόμενο του P2 είναι πλησιέστερο στην ομάδα pixels του υποβάθρου. Αποδίδεται με τη σειρά του το P2 στο υπόβαθρο, ορίζεται ξανά το χρωματικό περιεχόμενο του υποβάθρου ως ο μέσος όρος του χρωματικού περιεχομένου των τριών εικονοστοιχείων του. Αντίστοιχα θα μπορούσε η απόδοση να γίνει στην άλλη περιοχή, εάν το χρωματικό περιεχόμενο του εκάστοτε επιλεγμένου pixel ήταν πλησιέστερο στο κέντρο βάρους του χρωματικού περιεχομένου του αγγείου ή του γράμματος κ.ο.κ.

Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι, ότι κατά την εφαρμογή της, παίζει ρόλο η σειρά επιλογής των εικονοστοιχείων και δε λαμβάνεται υπόψη η τοπολογία της εικόνας. Για αυτό το λόγο, μεμονωμένες νησίδες φθοράς που είναι παραπλήσια σκούρες με το γράμμα αποδίδονται στην περιοχή αυτού χωρίς να ανήκουν σε αυτό. Και αντιστρόφως, σημεία φθοράς εντός του χώρου κρίσιμου πληροφορίας αποδίδονται με τον K-means στο υπόβαθρο ενώ δε θα έπρεπε. Επομένως, συχνά πραγματοποιούμε αρχικά μια μορφολογική επεξεργασία της εικόνας.

Τυπικό παράδειγμα μορφολογικής επεξεργασίας: Έστω ότι γνωρίζουμε πως το μέγιστο πλήθος των ομάδων pixels φθοράς είναι είκοσι (20). Ολισθαίνουμε μια περιοχή  $N \times N$ , εμβαδού μεγαλύτερου του είκοσι (20) σε όλη την εικόνα. Όταν το περιγράμμα της περιοχής είναι πλησιέστερα στο λευκό (δηλαδή είναι υπόβαθρο) και το εσωτερικό είναι σκούρο τότε το εσωτερικό γίνεται επίσης λευκό. Έχουμε χρησιμοποιήσει και μορφολογικό όπου επιτρέπαμε ένα μικρό ποσοστό του περιγράμματος να είναι σκούρο.

#### Μέθοδοι διαμέσου (median).

Οι τεχνικές medial είναι σχεδόν όμοιες με την ανωτέρω K-means, με τη διαφορά ότι ο αντιπρόσωπος κάθε περιοχής κάθε φορά δεν είναι το κέντρο βάρους του χρωματικού περιεχομένου, αλλά η ενδιάμεση τιμή αυτού που λέγεται διάμεσος (median). Δηλαδή, κάθε φορά σε κάθε περιοχή κάνουμε ταξινόμηση των εικονοστοιχείων pixels της περιοχής ως προς το χρωματικό τους περιεχόμενο και λαμβάνουμε το μεσαίο ή τον ενδιάμεσο αυτής της ταξινομημένης σειράς. Αυτός ο ενδιάμεσος στη διεθνή βιβλιογραφία λέγεται median και σε αρκετές περιπτώσεις θεωρείται καλύτερος αντιπρόσωπος του χρωματικού υποβάθρου της κάθε περιοχής από ότι ο μέσος όρος.

### **2.1.2 Μέθοδοι κατάτμησης εικόνας με βάση Ιεραρχικές Τεχνικές (Hierarchical Techniques)**

Η μεθοδολογία που εφαρμόζεται στις ιεραρχικές τεχνικές μπορεί συνοπτικά και αφαιρετικά να αναλυθεί στα στάδια που περιγράφονται κατωτέρω:

1. Ορίζουμε οντότητες που μπορεί να είναι και εικονοστοιχεία (pixels) .
2. Αρχικοποιούμε όλες τις οντότητες στην εικόνα. Συνήθως, επιλέγουμε όλες οι αρχικές οντότητες να είναι μονομελή σύνολα εικονοστοιχείων, ώστε να συμπεριλάβουμε όλα τα pixels της εικόνας.
3. Ορίζουμε κριτήρια συγγένειας ή ομοιότητας, αλλά και διαφοροποιήσεις μεταξύ των οντοτήτων.
4. Αρχικά βρίσκουμε το βαθμό συγγένειας κάθε οντότητας με όλες τις άλλες. Κατά αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε έναν πίνακα συγγενείας  $\sigma_{(i,j)}$ . Οι γραμμές και οι στήλες αυτού είναι το πλήθος των οντοτήτων, το δε τυχόν στοιχείο του  $\sigma_{(i,j)}$

είναι μια ποσότητα που εκφράζει το βαθμό ομοιότητας μεταξύ της  $i$ -οστής και  $j$ -οστής οντότητας.

5. Πάνω στη μήτρα συγγενείας ορίζουμε ένα αποδεκτό κατώφλι συσχέτισης, όσον αφορά το στόχο (π.χ. εάν ο στόχος είναι να κατατμήσουμε μια εικόνα σε θεματικές είτε χρωματικές περιοχές, τότε ο βαθμός ομοιότητας πρέπει να εκφράζει την απόσταση του θεματικού ή χρωματικού περιεχομένου των δύο συγκρινόμενων περιοχών/οντοτήτων). Όσα στοιχεία της μήτρας έχουν τιμή μικρότερη από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι τα μηδενίζουμε, θεωρούμε δηλαδή, ότι αυτά δε μπορούν να ανήκουν στην ίδια οντότητα π.χ. δηλαδή στην ίδια θεματική ή χρωματική περιοχή.
6. Όλες τις αρχικές οντότητες τις θεωρούμε ως κόμβους ενός γράφου. Αν δύο κόμβοι έχουν τιμή στη μήτρα συγγενείας μεγαλύτερη του μηδενός τότε συνδέουμε τους δύο κόμβους με έναν κλάδο. Σταθμίζουμε τον κλάδο, αποδίδοντας σε αυτόν ένα μέτρο του βαθμού συγγενείας των οντοτήτων που συνδέει, όπως υποδεικνύει το αντίστοιχο στοιχείο στη μήτρα συγγενείας.
7. Αρχίζουμε και ομαδοποιούμε κόμβους που οι κλάδοι τους έχουν μεγάλο βαθμό συγγενείας. Ορίζουμε ένα κατώφλι και όταν όλοι οι κόμβοι έχουν ομαδοποιηθεί σε οντότητες που ικανοποιούν αυτό το στόχο σταματάμε. Κατά τη διαδικασία συνένωσης δυο κόμβων θεωρούμε ότι αυτοί αποτελούν ένα νέο κόμβο, ο οποίος αντικαθιστά τους προηγούμενους που τον δημιούργησαν. Οι κλάδοι του νέου κόμβου με τους υπολοίπους καθώς και η στάθμιση κάθε κλάδου επανορίζονται δυναμικά.

Αναλυτικότερα για την περίπτωση αυτόματης κατάτμησης εικόνας:

- Ορίζουμε ένα μέτρο ομοιότητας μεταξύ δύο οντοτήτων π.χ μεταξύ δύο εικονοστοιχείων. Ένα τέτοιο μέτρο ομοιότητας είναι η χρωματική απόσταση μεταξύ αυτών των pixels.
- Κατασκευάζουμε έναν πίνακα ομοιότητας  $n \times m$  όλων των οντοτήτων μεταξύ τους. Την πρώτη φορά που δημιουργείται αυτή η μήτρα, τα στοιχεία της είναι η χρωματική απόσταση όλων των εικονοστοιχείων ανά δύο. Αυτή η χρωματική απόσταση μπορεί να οριστεί και συνήθως ορίζεται ως μια νόρμα στο χώρο των R,G,B. Για παράδειγμα, εάν ένα pixel  $P_i$  έχει χρωματικό περιεχόμενο  $(R_i, G_i, B_i)$  και ένα άλλο  $P_j$  έχει χρωματικό περιεχόμενο  $(R_j, G_j, B_j)$ , τότε η χρωματική

απόσταση των δύο εικονοστοιχείων μπορεί να οριστεί με έναν από τους κάτωθι τύπους:

$$d_1 = |(R_i - R_j)| + |(G_i - G_j)| + |(B_i - B_j)|$$
$$d_2 = \sqrt{(R_i - R_j)^2 + (G_i - G_j)^2 + (B_i - B_j)^2} \quad (2.1.2) (1)$$

$$d_M = x^T M x, \quad x = [(R_i - R_j), (G_i - G_j), (B_i - B_j)]^T$$

Όπου M κατάλληλα επιλεγμένη τετραγωνική μήτρα π.χ Mahalanobis.

Από τον πίνακα ομοιότητας, σε κάθε βήμα παράγεται ένας νέος τέτοιος πίνακας, ο οποίος συνήθως είναι αραιός πίνακας. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή του μηδενός στα στοιχεία του πίνακα που αντιστοιχούν σε περιοχές που είναι πολύ ανόμοιες, δηλαδή έχουν απόσταση πάνω από ένα κατώφλι. Για το λόγο αυτό η διαδικασία αναπαρίσταται από αραιούς γράφους.

- ο Κόμβοι του γράφου είναι οι οντότητες (τα δεδομένα).
- ο Σταθμισμένες ακμές του γράφου είναι ο εκάστοτε βαθμός ομοιότητας μεταξύ δύο κόμβων.

Οι μέθοδοι που έχουν παρουσιαστεί και οι οποίες διεθνώς αποκαλούνται *agglomerative hierarchical clustering methods* είναι πολλές, ενώ το κυρίαρχο στοιχείο το οποίο τις διαφοροποιεί μεταξύ τους είναι ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται η ομοιότητα μεταξύ των υπάρχοντων ομάδων αλλά και των συγχωνευμένων, σε κάθε επανάληψη.

### Ειδικές ιεραρχικές τεχνικές

Ανάλογα με το κριτήριο που χρησιμοποιείται κάθε φορά έχουμε τις εξής παραλλαγές των ιεραρχικών τεχνικών:

- Ορίζεται σε κάθε cluster ένας αντιπρόσωπος (π.χ. κέντρο βάρους). Στην αρχή κάθε σημείο (εικονοστοιχείο - pixel) είναι και ο αντιπρόσωπος του εαυτού του. Μετράται στη συνέχεια η ομοιότητα μεταξύ των αντιπροσώπων κάθε cluster και με βάση αυτό το κριτήριο και κάποιο συγκεκριμένο κατώφλι αποφασίζεται αν θα συγχωνευτούν δύο clusters.
- single link method: Κάθε cluster αντιπροσωπεύεται από όλα του τα στοιχεία και η ομοιότητα μεταξύ δύο clusters καθορίζεται από την ομοιότητα του πιο κοντινού ζεύγους στοιχείων που ανήκουν σε διαφορετικά clusters.

- CURE method: Η μέθοδος αυτή είναι ουσιαστικά συνδυασμός των δύο προηγούμενων μεθόδων. Εδώ ορίζονται αντιπρόσωποι, αλλά περισσότεροι από ένα για κάθε cluster. Η ομοιότητα μετράται μεταξύ των ζευγών των αντιπροσώπων των cluster και το κριτήριο συνένωσης δύο περιοχών εξαρτάται από τον βαθμό ομοιότητας των ζευγών αυτών συνολικά που ανήκουν σε διαφορετικά clusters. Σε κάθε συγχώνευση clusters, δυναμικά ορίζονται νέοι αντιπρόσωποι του νέου cluster που προέκυψε. Ακριβώς επειδή ο αλγόριθμος αυτός αποδίδει πολλούς αντιπροσώπους σε κάθε περιοχή, αλλά και γιατί τους συρρικνώνει προς το κέντρο βάρους, αντιμετωπίζει καταστάσεις διαφορετικών μεγεθών και σχημάτων clusters με μεγαλύτερη επιτυχία. Ο αριθμός των αντιπροσώπων εξαρτάται από το μέγεθος, το σχήμα και την παρουσία θορύβου σε κάθε cluster.
- group-average method: Η μέθοδος αυτή υποθέτει διασύνδεση όλων των δεδομένων των clusters και υπολογίζει όλες τις αποστάσεις μεταξύ τους. Κανονικοποιεί τις τιμές σχηματίζοντας ένα  $n \times m$  πίνακα όπου  $n$  είναι ο αριθμός των δεδομένων στη μία περιοχή και  $m$  ο αντίστοιχος στη δεύτερη, ώστε να αντιμετωπίσει το πρόβλημα που προκύπτει όταν τα clusters έχουν διαφορετικό μέγεθος.
- ROCK method: Ο αλγόριθμος αυτός μοιάζει με αυτόν της group-average μεθόδου, κανονικοποιεί όμως με βάση κατώφλι ορισμένο από τον χρήστη, αντί να χρησιμοποιεί ένα πίνακα  $n \times m$ .

## 2.2 Η προτεινόμενη πρωτότυπη μέθοδος κατάτμησης εικόνων μεγάλης αρχαιολογικής σημασίας.

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται μια πρωτότυπη μέθοδος διαχωρισμού εικόνας σε δύο θεματικές περιοχές, όπου συνήθως η μια περιοχή περιλαμβάνει την πολύτιμη για μας πληροφορία, π.χ το γράμμα ή το αγγείο, ενώ η άλλη περιοχή είναι το υπόβαθρο. Στις εφαρμογές που περιγράφονται στην παρούσα εργασία, το υπόβαθρο κατά βάση είναι ή

α) λευκό με θόρυβο που προκύπτει από προσμείξεις μαρμάρου όπως στην περίπτωση των επιγραφών ή

β) μονοχρωματικό που δημιουργείται με τεχνητό τρόπο από κατάλληλα επιλεγμένο πέτασμα όπως στην περίπτωση φωτογραφιών των αγγείων.

Για το λόγο αυτό και επειδή η φωτογράφιση τόσο των αγγείων όσο και των επιγραφών γίνεται με έγχρωμη ψηφιακή φωτογραφική μηχανή υψηλής ευκρίνειας (από 60 έως 600 εικονοστοιχεία ανά εκατοστό), μετατρέπουμε τις ληφθείσες έγχρωμες φωτογραφίες σε αντίστοιχες διαβαθμίσεων του γκρι. Εν τούτοις, η μέθοδος που παρατίθεται εδώ, μπορεί πρακτικά αμέσως να επεκταθεί και σε έγχρωμες εικόνες.

Η μέθοδος αυτόματης κατάτμησης εικόνας που αναπτύχθηκε αποτελείται από τα βήματα που περιγράφονται κατωτέρω:

### 1. Εφαρμογή μορφολογικών φίλτρων για εξάλειψη θορύβου

Με κέντρο κάθε σημείο της εικόνας εφαρμόζουμε μια διαδικασία σμίκρυνσης: δηλαδή θεωρούμε μια περιοχή με κέντρο το τυχόν σημείο  $M$  της εικόνας, επιλέγουμε την ελάχιστη χρωματική απόχρωση των pixels που ανήκουν στην περιοχή αυτή και την αποδίδουμε στο  $M$ . Εν συνεχεία επαναλαμβάνουμε τη σάρωση της σμικρυσμένης εκδοχής της εικόνας με αυτή την περιοχή, αλλά αυτή τη φορά αποδίδουμε στο εκάστοτε κέντρο  $M$  της περιοχής τη μέγιστη τιμή της απόχρωσης μεταξύ των εικονοστοιχείων της περιοχής. Κατ' αυτό τον τρόπο λαμβάνουμε τη λεγόμενη 'ανοικτή' εκδοχή της εικόνας (opened image). Τονίζουμε ότι η απόχρωση γκρι κάθε σημείου της «ανοικτής εικόνας» είναι μικρότερη ή ίση της απόχρωσης της αρχικής εικόνας, δηλαδή η 'ανοικτή' εικόνα είναι ένα κάτω φράγμα της αρχικής σε όλα τα σημεία της.

Σε επόμενο στάδιο, στην ανοικτή εκδοχή της εικόνας, εφαρμόζουμε τους εξής μετασχηματισμούς: με κέντρο κάθε σημείο  $M$  της εικόνας σχηματίζουμε μια

περιοχή με ακτίνα ένα εικονοστοιχείο (pixel) αρχικά και σε αυτή την περιοχή εφαρμόζουμε τη διαδικασία dilation, δηλαδή αποδίδουμε στο M τη μέγιστη απόχρωση στην περιοχή αυτή. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία αυξάνοντας συνεχώς την ακτίνα της περιοχής έως ότου υπάρξει ένα τουλάχιστον σημείο και μια αντίστοιχη περιοχή η μέγιστη απόχρωση της οποίας είναι μεγαλύτερη από την απόχρωση γκρι του M στην αρχική εικόνα. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας λαμβάνουμε μια ομαλοποιημένη εκδοχή της αρχικής εικόνας, με ένταση απόχρωσης του γκρι μικρότερη ή ίση αυτής. Στα επόμενα βήματα η αρχική εικόνα αντικαθίσταται από αυτή την ομαλοποιημένη εκδοχή της. Δηλαδή, όταν αναφέρουμε τη λέξη εικόνα θα εννοούμε την ομαλοποιημένη εκδοχή της.

## 2. Ολίσθηση πλαισίου καταλλήλων διαστάσεων κατά μήκος όλης της εικόνας.

Ολισθαίνουμε ένα πλαίσιο καταλλήλων διαστάσεων έστω  $w$  κατά μήκος όλης της εικόνας με σκοπό ώστε εντός του κάθε πλαισίου να δημιουργήσουμε το ιστόγραμμα αποχρώσεων του γκρι όλων των pixels που ανήκουν στο πλαίσιο. Η πρώτη θέση του πλαισίου είναι το άνω αριστερά εικονοστοιχείο της εικόνας, στο οποίο κατά κανόνα αποδίδονται οι συντεταγμένες (1,1). Ως επόμενο σημείο εκκίνησης του πλαισίου ορίζουμε το  $(1, w)$ , όπου το  $w$  είναι ένας μικρός φυσικός αριθμός, τον οποίο συνήθως επιλέγουμε να είναι ένα κατάλληλο ποσοστό του συνολικού αριθμού pixels της μικρότερης από την οριζόντια ή κατακόρυφη διάσταση της προς κατάτμησης εικόνας. Σε όλες τις εφαρμογές που περιγράφονται κατωτέρω, μια πολύ καλή τιμή για το  $w$  ήταν το ακέραιο μέρος του  $\frac{1}{10}$  της μέγιστης διάστασης της εικόνας δηλαδή  $w = \lfloor \frac{1}{10} \times \max(w, h) \rfloor$ .

Η ολίσθηση συνεχίζεται, έως ότου εξαντληθεί η οριζόντια διάσταση της εικόνας. Στην τελευταία θέση του πλαισίου όπου ισχύει:

)

επεκτείνουμε το πλαίσιο ώστε να συμπεριλάβει όλα τα εναπομείναντα εικονοστοιχεία της εικόνας κατά την οριζόντια διάσταση αυτής.

Αφού το πλαίσιο διατρέξει όλη την πρώτη γραμμή της εικόνας, μετατοπίζουμε την αρχή αυτού στο σημείο  $(w, 1)$  και επαναλαμβάνουμε την προαναφερθείσα διαδικασία. κ.ο.κ. Στην τελευταία κατακόρυφη ολίσθηση για την οποία ισχύει

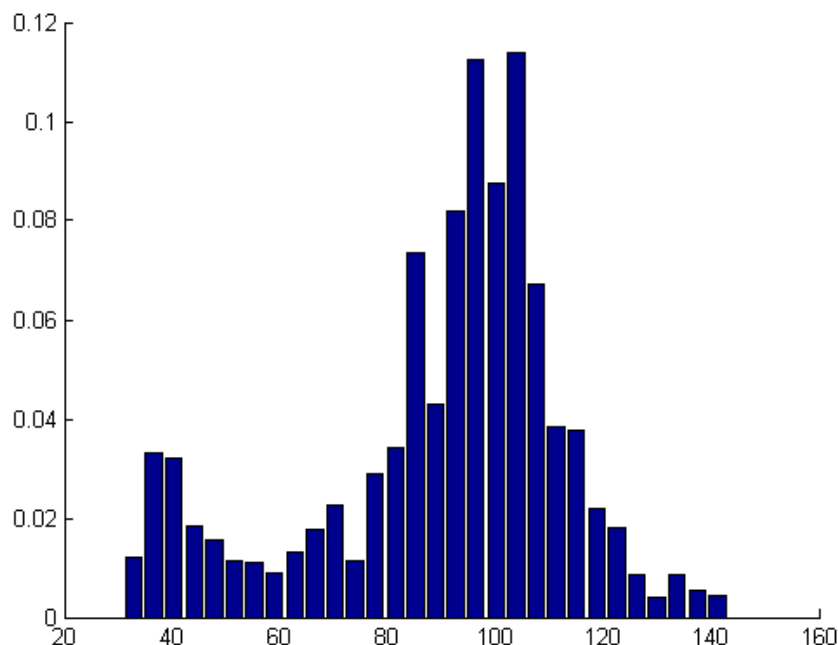


),

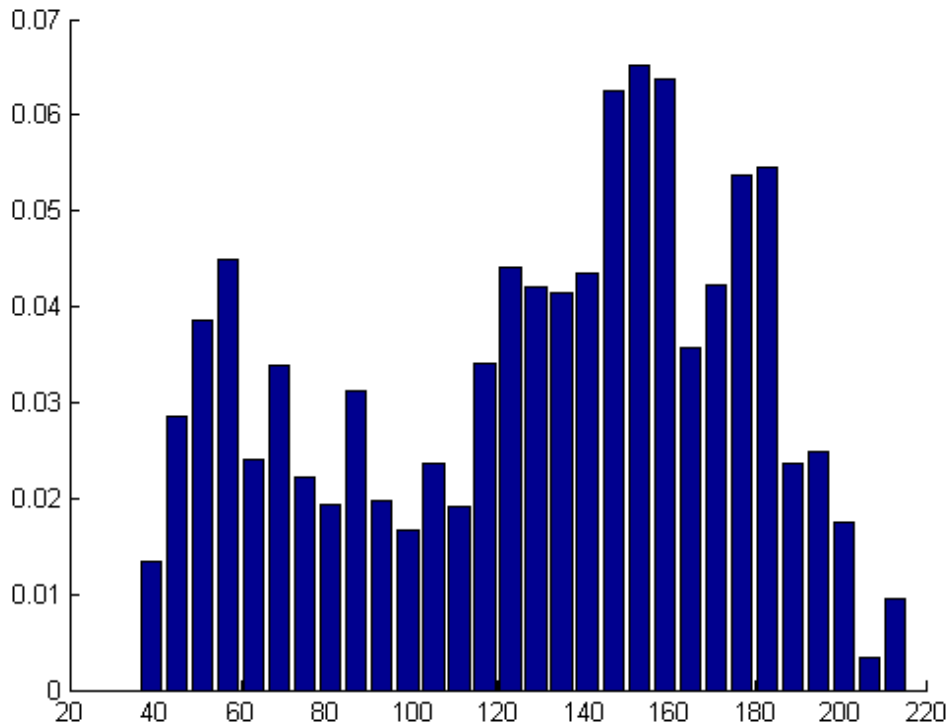
επεκτείνουμε 'προς τα κάτω' το πλαίσιο ώστε να συμπεριληφθούν όλα τα εναπομείναντα pixels της προς κατάτμηση εικόνας κατά την κατακόρυφη διάσταση αυτής.

3. Δημιουργία ιστογράμματος διαβάθμισης του γκρι για όλα τα pixels του πλαισίου και σε κάθε θέση αυτού.

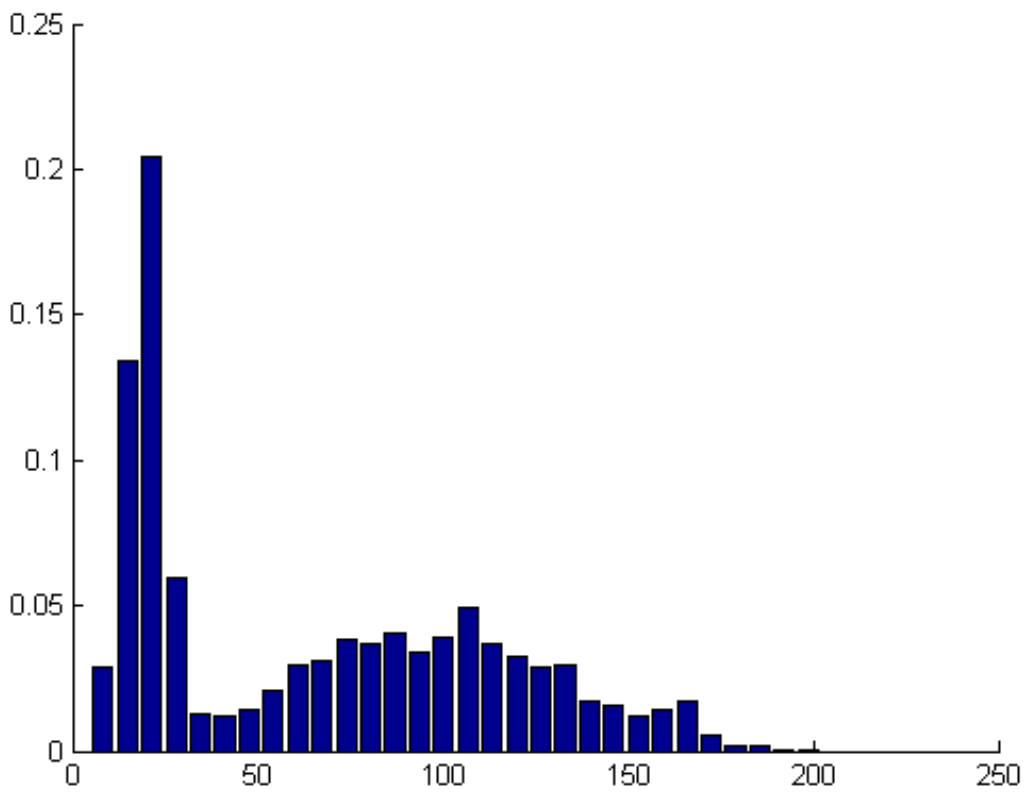
Σε κάθε θέση του πλαισίου, έστω την  $(x, y)$  δημιουργούμε το ιστόγραμμα διαβάθμισης του γκρι όλων των εικονοστοιχείων του πλαισίου. Συγκεκριμένα η μικρότερη τιμή απόχρωσης του γκρι εντός του πλαισίου στη θέση αυτή είναι έστω  $min$ , ενώ η αντίστοιχη μέγιστη τιμή έστω ότι είναι  $max$ . Τότε χωρίζουμε το διάστημα  $[min, max]$  σε  $N$  ίσα υποδιαστήματα. Σε κάθε υποδιάστημα, αποδίδουμε το πλήθος των pixels που έχουν τιμή μεγαλύτερη ή ίση της αρχής του διαστήματος και μικρότερη του τέλους. Στο τελευταίο υποδιάστημα, συμπεριλαμβάνουμε και τα εικονοστοιχεία που έχουν απόχρωση του γκρι μέχρι και  $max$ . Για όλες τις εφαρμογές που θα περιγραφούν κατωτέρω, μια καλή τιμή για το πλήθος των υποδιαστημάτων ή κυττίων του ιστογράμματος είναι η  $N=256$  (Εικόνες 2.2.1-2.2.5)



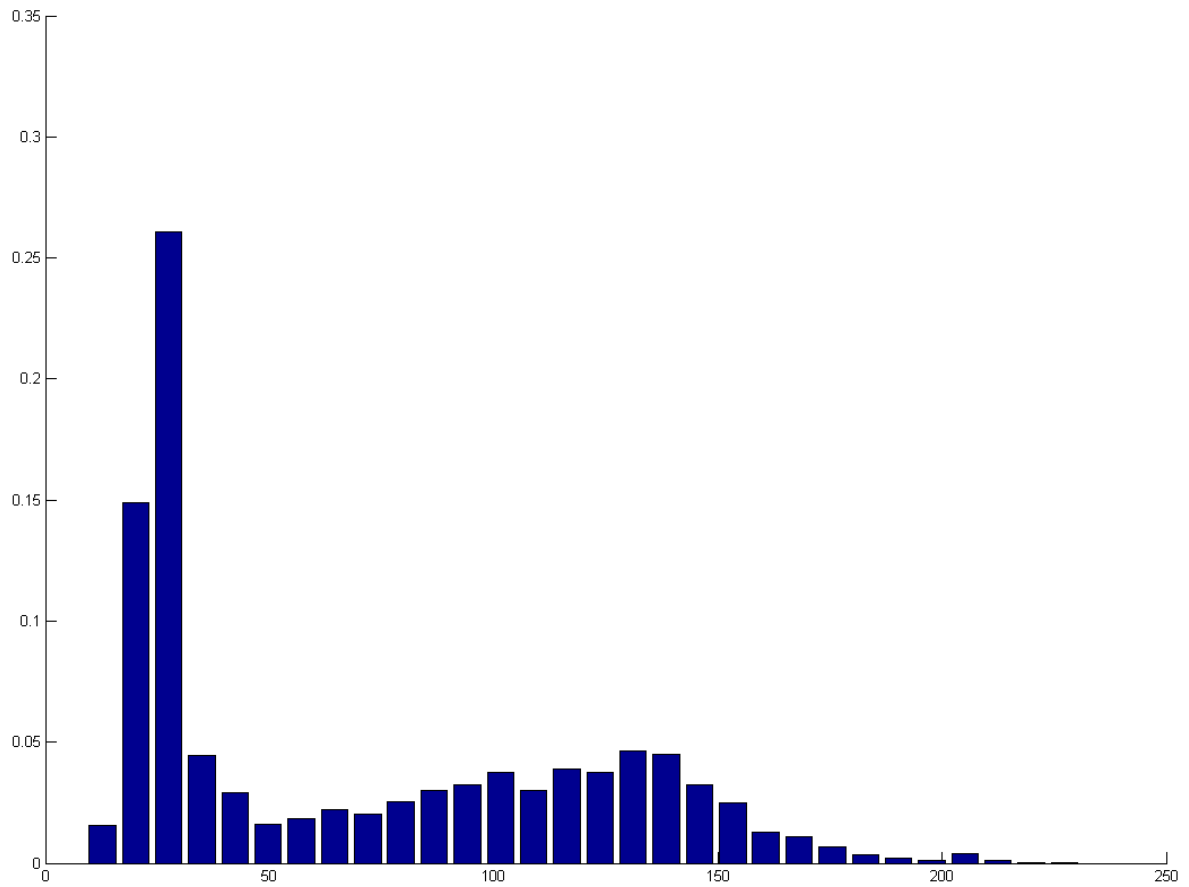
Εικόνα 2.2.1: Επιγραφή 5297 γράμμα Ε.



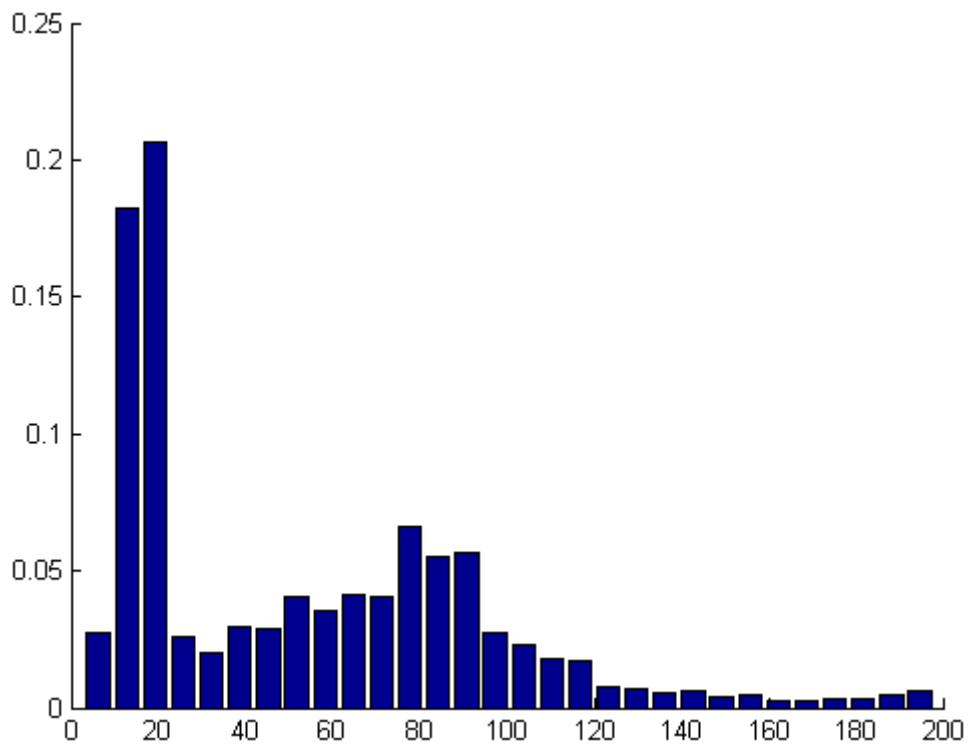
**Εικόνα 2.2.2:** Επιγραφή 7041 γράμμα P.



**Εικόνα 2.2.3:** Αγγείο 8144.



**Εικόνα 2.2.4:** Αγγείο 8493.

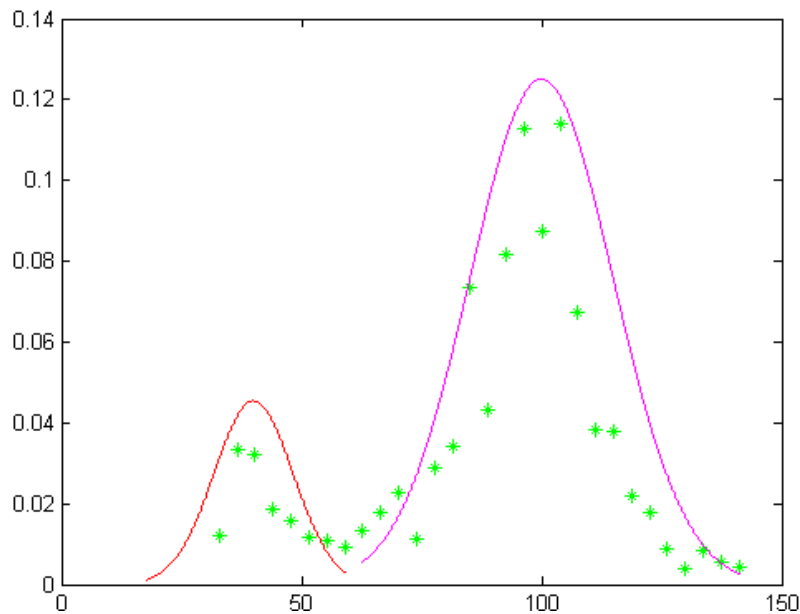


**Εικόνα 2.2.5:** Αγγείο 9749.

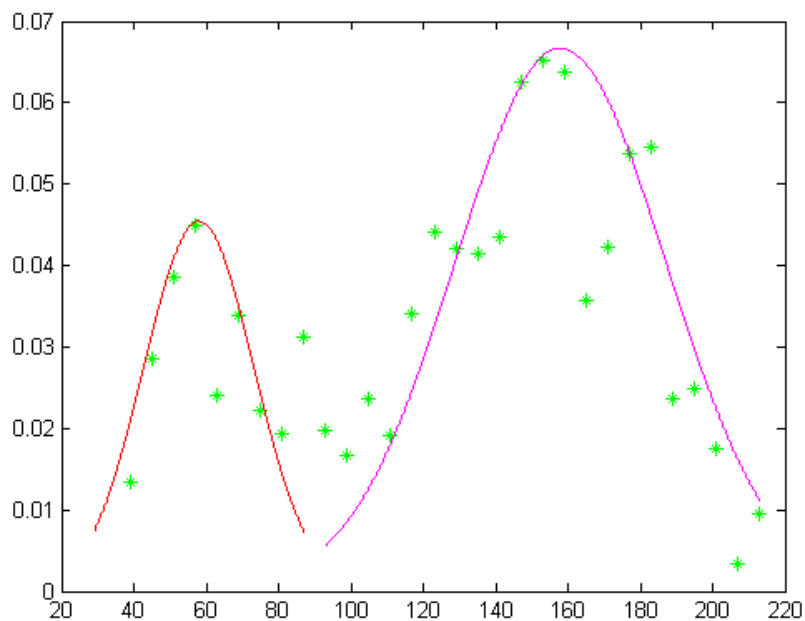
4. Βέλτιστη προσέγγιση του χρωματικού ιστογράμματος κάθε πλαισίου με δύο ανεξάρτητες κανονικές κατανομές.

Προσεγγίζουμε βέλτιστα το ιστογράμμα αποχρώσεων του γκρι κάθε πλαισίου με δύο ανεξάρτητες κανονικές κατανομές.

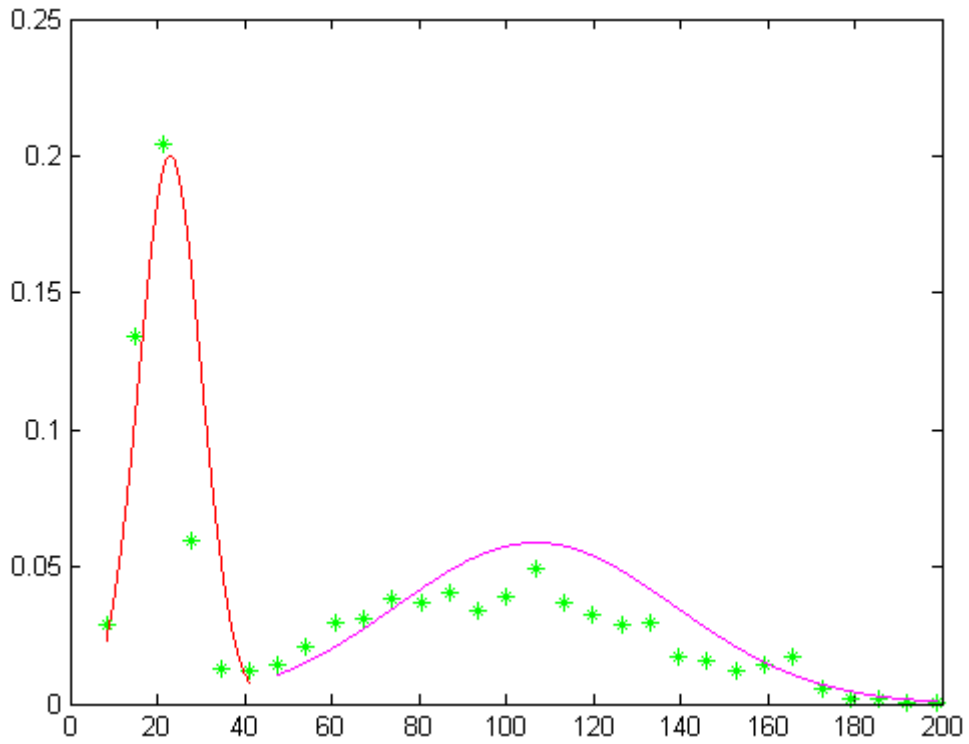
Με άλλα λόγια, προσεγγίζουμε το ιστογράμμα που υπολογίστηκε στο βήμα 3 με δύο κανονικές κατανομές με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες. (Εικόνα 2.2.6-2.2.10).



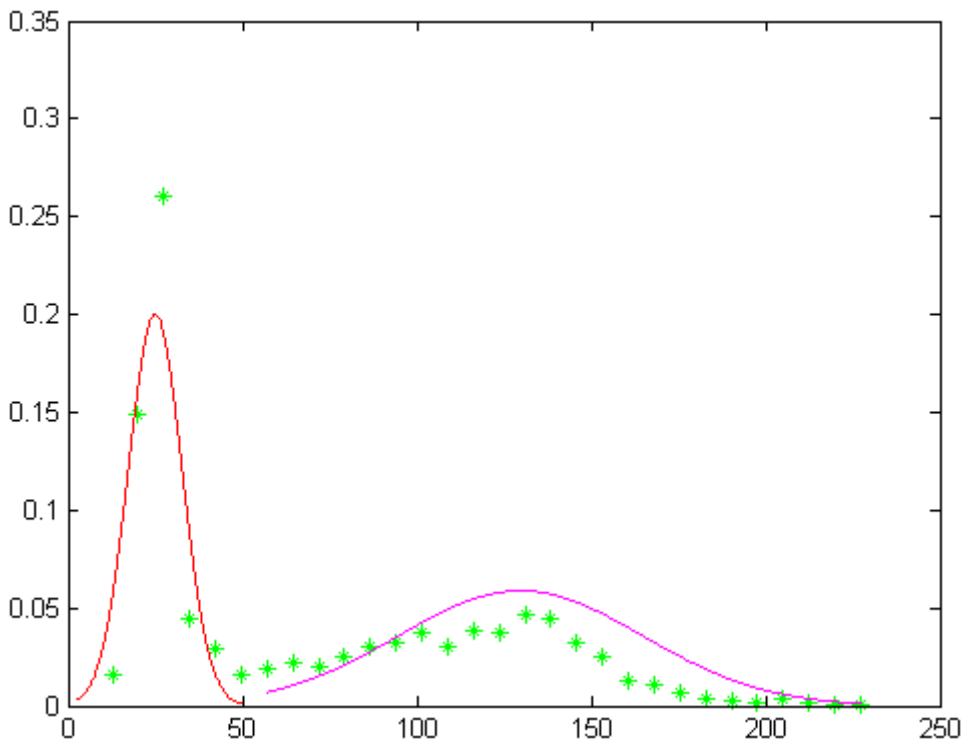
**Εικόνα 2.2.6:** Προσέγγιση με δύο κατανομές του ιστογράμματος της εικόνας 2.2.1. (Επιγραφή 5297, γράμμα Ε).



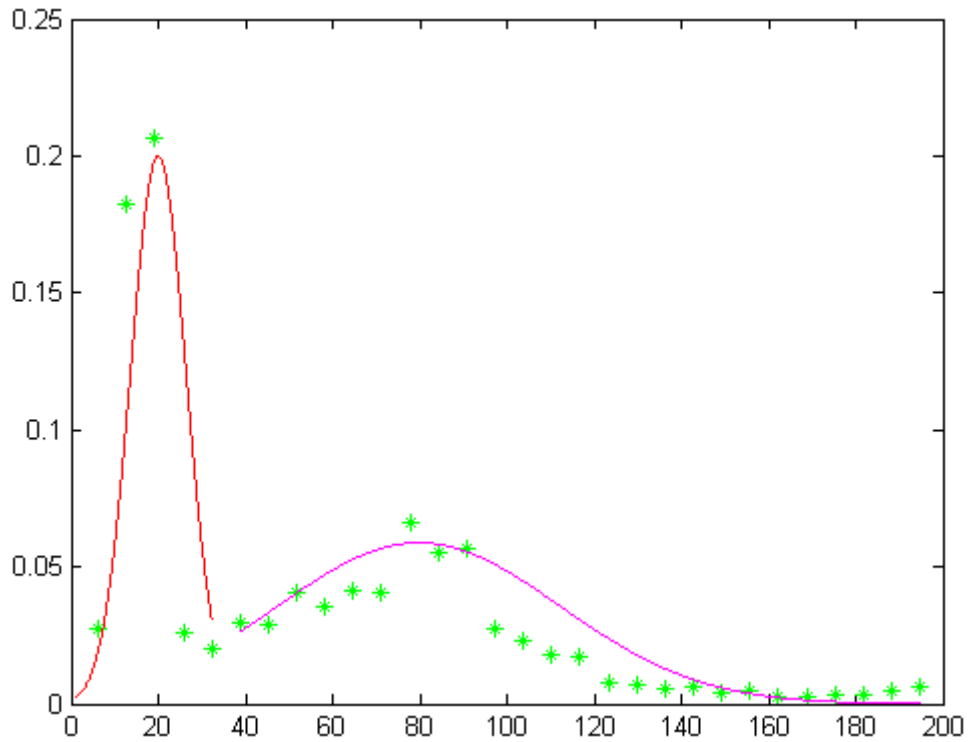
**Εικόνα 2.2.7:** Προσέγγιση με δύο κατανομές του ιστογράμματος της εικόνας 2.2.2. (Επιγραφή 7041, γράμμα Ρ),



**Εικόνα 2.2.8:** Προσέγγιση με δύο κατανομές του ιστογράμματος της εικόνας 2.2.3. (Αγγείο 8144).



**Εικόνα 2.2.9:** Προσέγγιση με δύο κατανομές του ιστογράμματος της εικόνας 2.2.4. (Αγγείο 8493).



**Εικόνα 2.2.10:** Προσέγγιση με δύο κατανομές του ιστογράμματος της εικόνας 2.2.5. (Αγγείο 9749).

##### 5. Εύρεση των σημείων καμπής των δύο κανονικών κατανομών

Εντοπίζουμε τα σημεία καμπής των δύο κανονικών κατανομών.

Πράγματι για τυχούσα κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  ισχύουν τα κάτωθι:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.2) (1)$$

Η πρώτη παράγωγος αυτής είναι

$$f'(x) = \left[ -\frac{(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (2.2) (2)$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \left[ 1 + \left( -\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right) \right] e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.2) (3)$$

Τα σημεία καμπής προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης  $f''(x) = 0$  και είναι

$$x_k^1 = \mu + \sigma \quad (2.2) (4)$$

$$x_k^2 = \mu - \sigma$$

6. Αρχική εκτίμηση των θεματικών περιοχών και των σημείων ακμής.

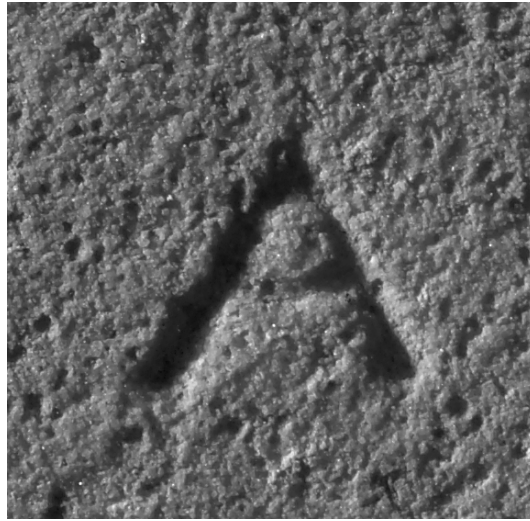
Είναι γνωστό ότι τα εικονοστοιχεία (pixels) που το ανθρώπινο μάτι θεωρεί ως ακμές (edges), είναι εκείνα στα οποία επισυμβαίνει μέγιστη μεταβολή της απόχρωσης του γκρι είτε του χρωματικού περιεχομένου σε έγχρωμη εικόνα. Εν προκειμένω, αναφορικά με οποιαδήποτε εικόνα αποχρώσεων του γκρι έστω ότι  $I(x, y)$  είναι η τιμή του γκρι στο pixel με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Τότε η μεταβολή της απόχρωσης του γκρι στο τυχόν pixel  $(x, y)$  δίνονται από την κλίση ή το ανάδελτα της  $I$  δηλαδή, από την συνάρτηση  $\nabla I(x, y)$ . Σύμφωνα με τα ανωτέρω, οι ακμές βρίσκονται εκεί όπου η τιμή του μέτρου του ανάδελτα  $|\nabla I(x, y)|$  γίνεται τοπικά μέγιστη. Αλλά, στα σημεία που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο μια συνάρτηση δύο μεταβλητών το ανάδελτα αυτής είναι μηδέν. Άρα, στα σημεία των ακμών ισχύει

$$\nabla(|\nabla I(x, y)|) = 0 \quad (2.2) (5)$$

Από την άλλη πλευρά, ας υποθεθεί ότι έχουμε τη φωτογραφία ενός αγγείου στο υπόβαθρό του ή μιας ή περισσοτέρων υλοποιήσεων ενός συμβόλου της αλφαβήτου επί του μαρμάρου (Εικόνα 2.2.11-2.2.12)..



**Εικόνα 2.2.11:** Φωτογραφία αγγείου στο υπόβαθρο



**Εικόνα 2.2.12:** Φωτογραφία γράμματος επί μαρμάρου

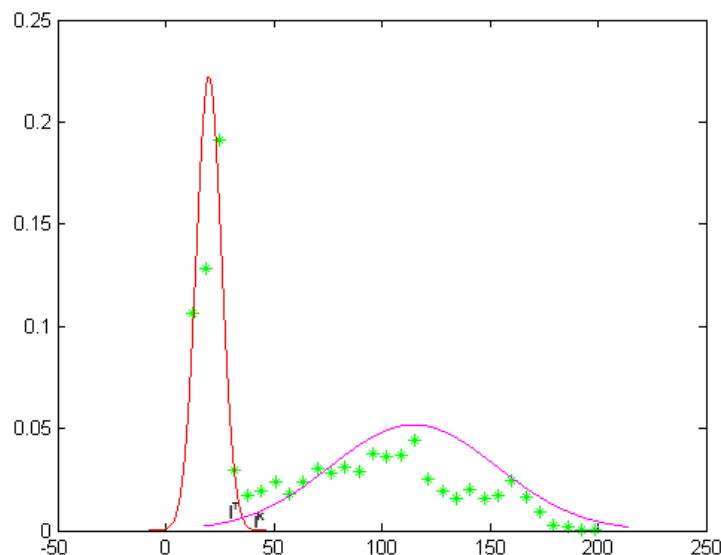
Τότε, είναι απολύτως εύλογο να υποθέσουμε ότι οι δύο κανονικές κατανομές με τις οποίες προσεγγίσαμε το ιστόγραμμα αποχρώσεων του γκρι της εικόνας, αντιστοιχούν στις δύο προαναφερθείσες περιοχές. Δηλαδή, στην περίπτωση των επιγραφών, η κανονική κατανομή με μέγιστο κοντινότερο στο μηδέν (το μαύρο) περιλαμβάνει pixels του σώματος του γράμματος αυτών καθ' εαυτού, ενώ η άλλη κορυφή που είναι κοντύτερα στο 255 (λευκό) περιλαμβάνει εικονοστοιχεία του υποβάθρου. Βεβαίως, λόγω της φθοράς αλλά και της ιδιαίτερης υφής του μαρμάρου και του πηλού, είναι λανθασμένο να υποθέσουμε ότι οι δύο περιοχές που προαναφέραμε είναι αμιγείς. Συγκεκριμένα, επειδή το μάρμαρο κυρίως λόγω φθοράς και προσμείξεων περιλαμβάνει πολλά σκούρα στίγματα όπως φαίνεται στην εικόνα 2.2.12 τότε, pixels του υποβάθρου θα ανήκουν στην κανονική κατανομή της απόχρωσης του εσωτερικού του γράμματος. Δυικώς αντίστοιχα, εντός του σώματος του γράμματος υπάρχουν λευκά στίγματα για τους ίδιους λόγους. Ανάλογα φαινόμενα μπορεί να παρατηρήσει κανείς και στις φωτογραφίες των αγγείων. Συνεπώς, μόνο πιθανολογικά μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι τα εικονοστοιχεία (pixels) ενός υποδιαστήματος ή κυτίου του ιστογράμματος ανήκουν στη μια ή την άλλη κατανομή. Εντούτοις, στην περίπτωση απεικονίσεων γραμμάτων επιγραφών είναι πάλι εύλογο να θεωρήσουμε ότι το συντριπτικά μεγαλύτερο μέρος των pixels του κυτίου που περιλαμβάνει την κορυφή της αριστεράς κανονικής κατανομής ανήκουν στο σώμα του γράμματος, ενώ το μεγαλύτερο τμήμα των



εικονοστοιχείων του υποδιαστήματος που εμπεριέχει την λευκότερη κορυφή ανήκει κατά συντριπτικό ποσοστό στο υπόβαθρο της εικόνας. Το δεικνύει αντίστροφο ισχύει για τα αγγεία.

Με βάση τις ανωτέρω παρατηρήσεις το παρόν βήμα για τον εντοπισμό των δύο θεματικών περιοχών που μας ενδιαφέρουν, περιλαμβάνει τις εξής ενέργειες:

- Θεωρούμε όλα τα εικονοστοιχεία που βρίσκονται στο ίδιο κελί του ιστογράμματος με την κορυφή της κανονικής κατανομής  $A$  που είναι κοντύτερα στο μαύρο και αποδίδουμε αυτά στο σώμα του γράμματος ή στο υπόβαθρο του αγγείου, θεματική περιοχή που θα συμβολίζουμε με  $X$ .
- Θεωρούμε όλα τα pixels που βρίσκονται στο ίδιο κελί του ιστογράμματος με την κορυφή της κανονικής κατανομής  $K$  που είναι κοντύτερα στο λευκό και αποδίδουμε στο υπόβαθρο της εικόνας του γράμματος ή στο σώμα του αγγείου, τη θεματική περιοχή που θα συμβολίζουμε με  $Y$ .
- Βρίσκουμε το σημείο τομής των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των δύο κανονικών κατανομών, έστω  $T$ , καθώς και το δεξί σημείο καμπής της αριστερής κανονικής κατανομής  $A$ . Επιλέγουμε εκ των  $T$  και  $A$  εκείνο, το οποίο είναι πλησιέστερο προς το μέγιστο της αριστερής κανονικής κατανομής έστω  $I^A$ . (Εικόνα 2.2.13).



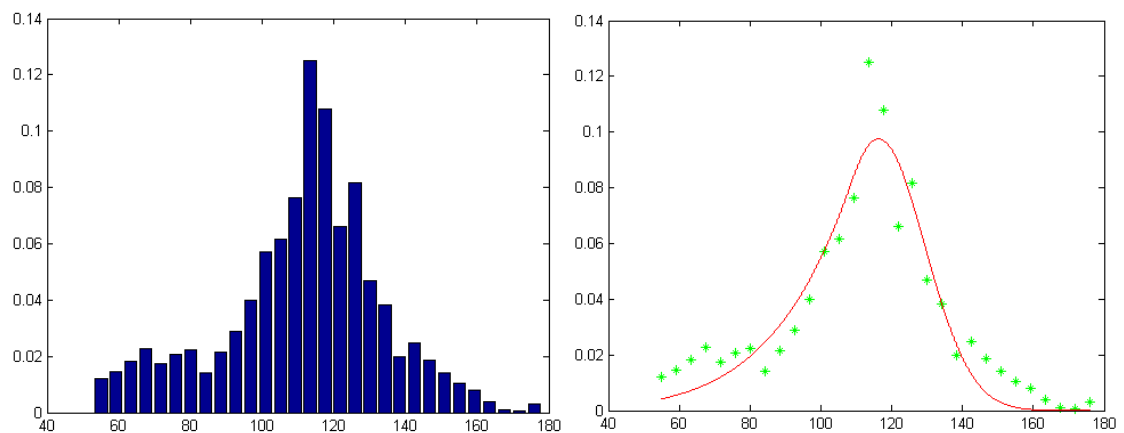
**Εικόνα 2.2.13:** Τομή δύο κανονικών κατανομών.

- Ας υποθέσουμε ότι η ένταση της κορυφής της αριστερής κατανομής που αντιστοιχεί στο σώμα του γράμματος είναι  $I^A$ , ενώ της κορυφής της δεξιάς κατανομής είναι  $I^K$ . Τότε ορίζουμε το διάστημα τιμών αποχρώσεων του γκρι

$$[I^A - 0.20 (I^{\Gamma} - I^A), I^A + 0.20 (I^{\Gamma} - I^A)]. \quad (2.2) (6)$$

Όλα τα pixels που έχουν απόχρωση του γκρι σε αυτό το διάστημα τα αποδίδουμε στην ίδια περιοχή με αυτά που έχουν ένταση  $I^A$  π.χ για εικόνες επιγραφών στο σώμα του γράμματος. Το αντίστοιχο κάνουμε για τη δεξιά κορυφή.

- e. Τονίζουμε ότι ενίστε η διαφοροποίηση των δύο κορυφών του ιστογράμματος δεν είναι καθόλου σαφής, τόσο ώστε ο αλγόριθμος προσαρμογής δύο κανονικών κατανομών να ταυτίζει τις δύο κανονικές κατανομές και να προσφέρει μόνο τη μία, την κυρίαρχη (Εικόνα 2.2.14). Στην περίπτωση των γραμμάτων, η κυρίαρχη κορυφή, η οποία αντιστοιχεί πάντα στο υπόβαθρο είναι η δεξιά. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε το αριστερό σημείο καμπής , (δηλαδή το προς τα αρνητικά) της μοναδικής κανονικής κατανομής και θεωρούμε αυτό ως ασφαλές σημείο διαφοροποίησης των pixels του ιστογράμματος που ανήκουν στο υπόβαθρο από τα pixels που ανήκουν στο κυρίως σώμα. Προφανώς, τα pixels του κτιίου του ιστογράμματος που έχει κέντρο το , ανήκουν κατά βάση στο περίγραμμα του γράμματος.



**Εικόνα 2.2.14:** Επιγραφή 6006, γράμμα Ω.

Στην περίπτωση των αγγείων, η κυρίαρχη κορυφή, η οποία αντιστοιχεί πάντα στο υπόβαθρο είναι η αριστερά. Άρα, στα αγγεία, το σημείο διαφοροποίησης υποβάθρου αγγείου είναι το δεξί σημείο καμπής της μοναδικής κανονικής κατανομής, έστω . Δυικώς αντίστοιχα στην περίπτωση μιας φωτογραφίας αγγείου, θεωρούμε ότι τα pixels του ιστογράμματος δεξιά του ανήκουν στο σώμα του αγγείου, τα αριστερά αυτού στο υπόβαθρο της φωτογραφίας, ενώ τα

pixels του κτιίου του ιστογράμματος που έχει κ & ρο το ανήκουν στο περίγραμμα του αγγείου.

## 7. Εξάλειψη του θορύβου και ομογενοποίηση των θεματικών περιοχών

Με το πέρας της ενέργειας  $d$  του βήματος  $\delta$ , έχουμε δημιουργήσει δύο περιοχές, μια με απόχρωση  $\gamma$  ύψω από την τιμή και μέχρι την τιμή εκατέρωθεν αυτής και μια δεύτερη περιοχή γύρω από την και μέχρι το ίδιο κατώφλι. Στο παρόν βήμα, θα προσπαθήσουμε να εξαλείψουμε το 'θόρυβο' δηλαδή να ομογενοποιήσουμε κατά το δυνατόν τις περιοχές, με χρήση των κάτωθι μορφολογικών διαδικασιών.

Καταρχήν, ορίζεται ως 'θόρυβος λόγω φθοράς' ή 'decay noise' η τυχαία φθορά χρώματος και υψής που με τον καιρό δημιουργήθηκε σε κάθε μια από τις επιγραφές ή τα αγγεία που μελετώνται. Προκειμένου να υπολογισθεί αυτή η κατανομή θορύβου (decay noise) λόγω φθοράς μετατρέπεται η αρχική έγχρωμη εικόνα της επιγραφής ή του αγγείου σε εικόνα αποχρώσεων του γκρι και υπολογίζεται η ένταση της κλίσης (ανάδελτα)

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (2.2) (7)$$

σε κάθε εικονοστοιχείο  $(i, j)$  της εικόνας μας.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την μέση τιμή και την διασπορά του μέτρου της κλίσης  $G_f(i, j)$  και ελέγχουμε τον αριθμό των pixels που κείνται στο διάστημα. Αν ο αριθμός είναι μικρότερος από ένα σημαντικό ποσοστό (για τη συγκεκριμένη εφαρμογή, όπου το τελικό κριτήριο είναι η αποτελεσματικότητα της μεθόδου κατάτμησης που επιλέξαμε), του συνολικού αριθμού των εικονοστοιχείων της εικόνας μας, τότε θεωρούμε ότι υπάρχει μια σημαντική παρουσία θορύβου λόγω φθοράς, οπότε πρέπει να εφαρμοσθεί η ακόλουθη διαδικασία προκειμένου να εξομαλυνθεί η απόχρωση του γκρι στην εκάστοτε επιγραφή ή αγγείο που επεξεργαζόμαστε. Μεταθέτουμε μια περιοχή διαστάσεων pixels, όπου κατάλληλα επιλεγμένος μικρός περιπτώς φυσικός, σε όλη την εικόνα του γράμματος ή του αγγείου, έτσι ώστε κάθε φορά ένα εικονοστοιχείο της επιγραφής μας να είναι το κέντρο αυτής της περιοχής και αποδίδουμε τη μέση τιμή της απόχρωσης του γκρι όλων των pixels της περιοχής μας στο κεντρικό εικονοστοιχείο. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε την χρωματική εξομάλυνση μιας εικόνας. Εάν ο είναι

μεγαλύτερος ή ίσος του  $\frac{1}{2}$ , τότε αγνοούμε την προαναφερθείσα διαδικασία εξομάλυνσης.

Με κέντρο ένα pixel  $(x_c, y_c)$  της εικόνας του γράμματος ή του αγγείου ολισθαίνουμε μια μάσκα διαστάσεων  $(2k+1) \times (2k+1)$ , όπου  $k$  και  $l$  περιττοί. Σε κάθε θέση της μάσκας μετράμε τον αριθμό των εικονοστοιχείων της περιμέτρου αυτής, τα οποία ανήκουν σε κάθε μια εκ των περιοχών που ορίσαμε προηγουμένως. Έστω  $n$  η περιοχή με τον μεγαλύτερο αριθμό pixels περιμέτρου και έστω  $N$  αυτός ο αριθμός. Αν ο  $n$  είναι μεγαλύτερος από ένα ποσοστό, έστω  $\frac{1}{2}$ , του αριθμού των περιμετρικών εικονοστοιχείων της μάσκας, τότε η τιμή της απόχρωσης του γκρι όλων αυτών των pixels αυτής αποδίδεται στην περιοχή  $n$ . Η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, έως ότου δεν χρειάζεται να τροποποιηθεί το περιεχόμενο απόχρωσης του γκρι κάποιας περιοχής  $n$ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μειώνοντας κάθε φορά κάθε μια από τις διαστάσεις της μάσκας κατά δύο και μέχρις ότου  $(k, l) = (0, 0)$ .

Η παραπάνω διαδικασία εξαφανίζει τον θόρυβο λόγω φθοράς στο εσωτερικό κάθε περιοχής με επιτυχία, αλλά κάποιος θόρυβος λόγω φθοράς παραμένει ακόμα στα σύνορα των περιοχών. Προκειμένου να μειώσουμε και αυτό το θόρυβο λόγω φθοράς εφαρμόζουμε την παρακάτω διαδικασία:

Με κέντρο ένα εικονοστοιχείο  $(x_c, y_c)$  της εικόνας του γράμματος ή του αγγείου ολισθαίνουμε μια μάσκα διαστάσεων  $(2k+1) \times (2l+1)$ , όπου  $k$  και  $l$  περιττοί. Σε κάθε θέση της μάσκας μετράμε τον αριθμό των pixels αυτής τα οποία ανήκουν σε κάθε καθορισμένη περιοχή ξεχωριστά, και έστω  $n_1$  και  $n_2$  οι περιοχές με το μεγαλύτερο και το μικρότερο αριθμό pixels αντίστοιχα, όπου η περιοχή περιλαμβάνει  $n_1$  pixels και η περιοχή  $n_2$ .

Κατόπιν ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

Το κέντρο της μάσκας να ανήκει στην περιοχή  $n_1$ .

Το  $\frac{n_1}{n_2}$  να είναι μικρότερο από ένα ποσοστό, έστω  $\frac{1}{2}$  του αριθμού των εικονοστοιχείων της μάσκας.

Το  $\frac{n_2}{n_1}$  να είναι μεγαλύτερο από ένα ποσοστό, έστω  $\frac{1}{2}$  του αριθμού των pixels της μάσκας.

Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες αυτές, τότε καταχωρούμε το κεντρικό εικονοστοιχείο της μάσκας στην περιοχή  $n_1$ . Η προαναφερθείσα διαδικασία

επαναλαμβάνεται συνεχώς μέχρις ότου δεν υπάρχει πλέον εικονοστοιχείο, η απόχρωση του γκρι του οποίου δε πρέπει να τροποποιηθεί.

Ακολούθως, κάθε μια εκ των διαστάσεων της μάσκας μειώνεται κατά δύο και η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου  $m = n = 3$ .

Σημειώνουμε πως υπάρχει μια πολύ στενή σχέση μεταξύ του βαθμού του θορύβου λόγω φθοράς, που έχει υποστεί καθεμιά από τις επιγραφές μας ή το αγγείο μας και των κατάλληλων τιμών των κατωφλίων  $\Pi_{m,n}$ ,  $\Pi_{\min(m,n)}$  και  $\Pi_{\max(m,n)}$ .

Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε την «τελικώς ομογενοποιημένη» εικόνα της επιγραφής μας ή του αγγείου. Αν θέλουμε να πάρουμε μια ακόμα πιο ομογενοποιημένη κατάτμηση μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία εξομάλυνσης η οποία προαναφέρθηκε παραπάνω, σε καθεμιά από τις ληφθείσες περιοχές ξεχωριστά, όπου όμως χρησιμοποιείται το αρχικό περιεχόμενο του χρώματος που είχαν τα pixels της περιοχής που εξετάζουμε. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας υποβάλλεται εκ νέου στην προαναφερθείσα διαδικασία ομογενοποίησης.

#### 8. Απόδοση των εικονοστοιχείων που απέμειναν στη δέουσα περιοχή.

Αφού δημιουργήσαμε τις κατά το δυνατόν ομογενοποιημένες περιοχές  $\Sigma^0$  που αντιστοιχεί σε ένα ομογενοποιημένο τμήμα του σώματος του γράμματος ή του αγγείου και την  $Y^0$  που αντιστοιχεί σε ομογενοποιημένο τμήμα του υποβάθρου, θα αποδώσουμε τα εναπομείναντα pixels στις περιοχές αυτές ως εξής:

Έστω  $I_{\mu}^{\Sigma^0}, I_{\mu}^{Y^0}$  ο μέσος όρος των αποχρώσεων του γκρι των εικονοστοιχείων των περιοχών  $\Sigma^0$  και  $Y^0$  αντιστοίχως και έστω  $I^x$ , η απόχρωση του γκρι τυχόντος pixel της εικόνας που δεν έχει καταταγεί στις  $\Sigma^0$  και  $Y^0$ . Για κάθε τέτοιο μη ενταγμένο pixel αποχρώσεως  $I^x$ , ορίζουμε ένα μέτρο απόστασης αποχρώσεως από τις  $\Sigma^0$  και  $Y^0$  μέσω της σχέσεως

Μέτρο απόστασης αποχρώσεως

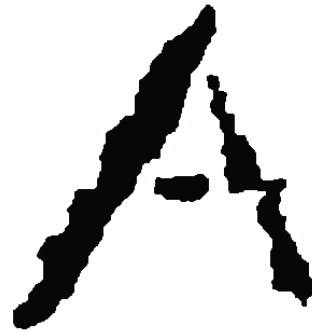
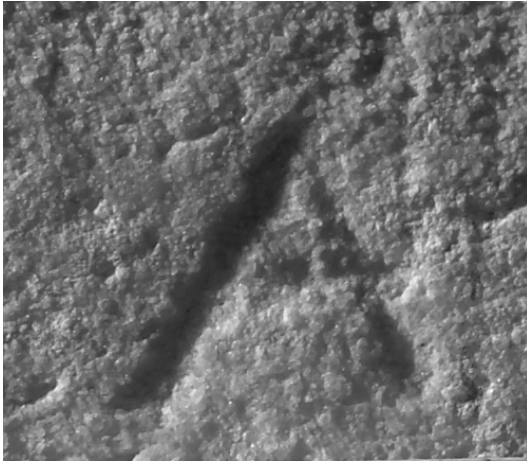
Αντίστοιχο μέτρο απόστασης ορίζουμε για την  $Y^0$ .

Εν συνεχεία διατάσσουμε τις ποσότητες  $d(I^X, \Sigma^O) - d(I^X, Y^O)$  και το ρίχνει με τη μικρότερη τιμή αυτής της διαφοράς το αποδίδουμε στο  $\Sigma^O$ , ενώ αυτό με τη μεγαλύτερη τιμή διαφοράς την αποδίδουμε στο  $Y^O$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο επανορίζουμε τις περιοχές  $\Sigma^O$  και  $Y^O$ , επανυπολογίζουμε τα  $I_{\mu}^{\Sigma^O}, I_{\mu}^{Y^O}$  και αποδίδουμε τα μη καταταγμένα εικονοστοιχεία επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία.

9. Τελικός καθορισμός των 2 θεματικών περιοχών του σώματος του αγγείου ή του γράμματος αφενός και του υποβάθρου αφετέρου.

Μετά τη δημιουργία των επεκτεταμένων ομογενοποιημένων περιοχών  $\Sigma^O$  και  $Y^O$ , που πραγματοποιήθηκε στο βήμα 8, λαμβάνουμε τις τελικές εκδόσεις των δύο περιοχών τόσο του σώματος του γράμματος ή του αγγείου όσο και του υποβάθρου με χρήση των μορφολογικών διαδικασιών που περιγράφησαν στο βήμα 7.

Στο τέλος όλων των ανωτέρω ενεργειών λαμβάνουμε, μετά από μετατροπή της εικόνας σε δυαδική μορφή, το σώμα του γράμματος ή του αγγείου μαύρο, εντεθειμένο σε υπόβαθρο άσπρο. (Εικόνα 2.2.15-2.2.21).



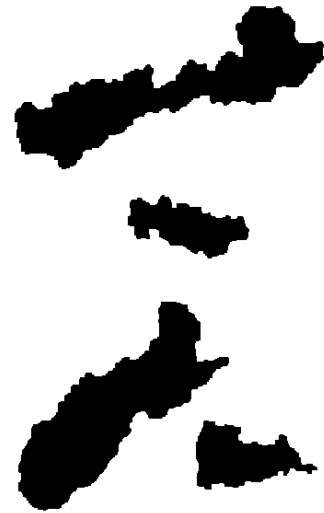
**Εικόνα 2.2.15:** Επιγραφή 4424, γράμμα Α και τελική δυαδική μορφή αυτού.



**Εικόνα 2.2.16:** Επιγραφή 4330, γράμμα Μ και τελική δυαδική μορφή αυτού.

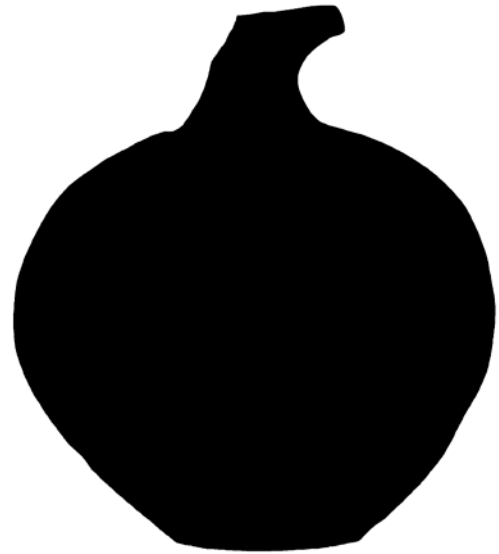
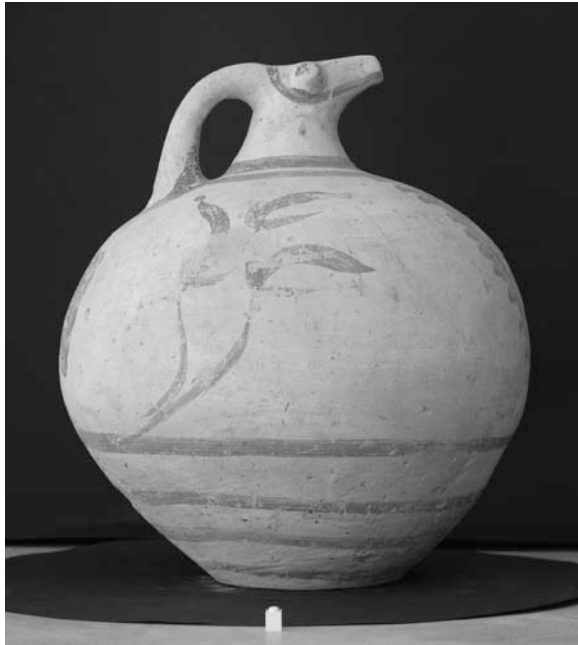


**Εικόνα 2.2.17:** Επιγραφή 7041, γράμμα Ο και τελική δυαδική μορφή αυτού.

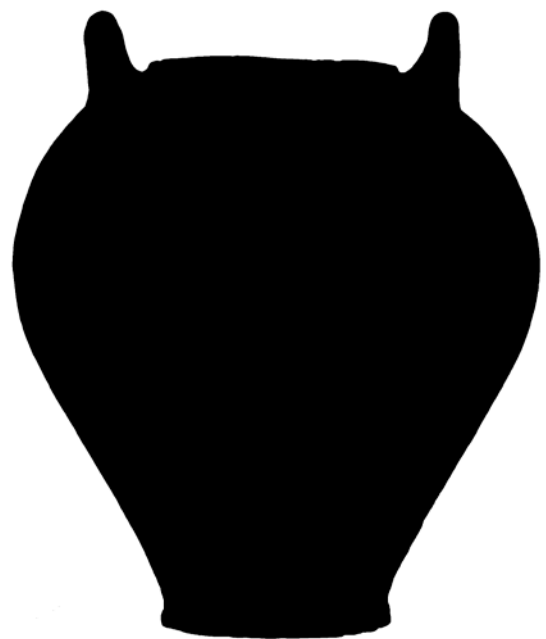


**Εικόνα 2.2.18:** Επιγραφή 7478, γράμμα Σ και τελική δυαδική μορφή αυτού.





**Εικόνα 2.2.19:** Αγγείο 9088 και τελική δυαδική μορφή αυτού.



**Εικόνα 2.2.20:** Αγγείο 9827 και τελική δυαδική μορφή αυτού.

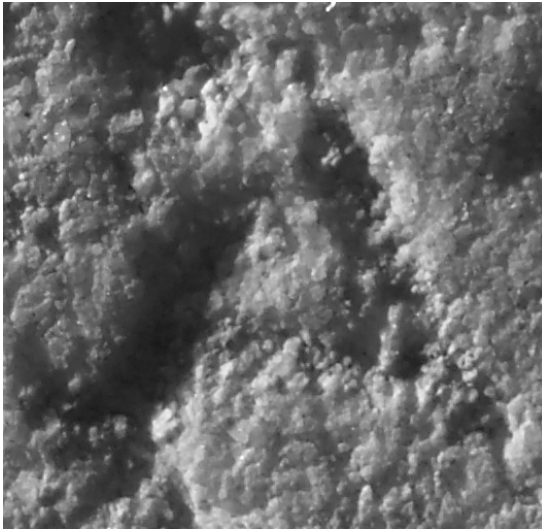


**Εικόνα 2.2.21:** Αγγείο 10958 και τελική δυαδική μορφή αυτού.

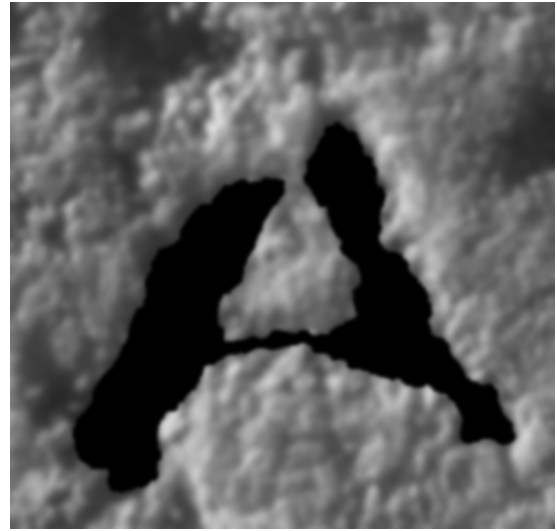
## **2.3 Εφαρμογή της μεθόδου στην αυτόματη κατάτμηση φωτογραφιών αρχαίων επιγραφών και ανασκαφέντων προϊστορικών αγγείων.**

Η προαναφερθείσα μέθοδος εφαρμόστηκε στην αυτόματη κατάτμηση ψηφιακών φωτογραφιών αγγείων της Ύστερης Εποχής του Χαλκού και υλοποιήσεων γραμμάτων επί αρχαίων επιγραφών. Συγκεκριμένα οι φωτογραφίες των αγγείων ελήφθησαν στα οικήματα συντήρησης της Ανασκαφής Ακρωτηρίου Θήρας και ο σκοπός της αυτόματης κατάτμησης είναι η μελέτη του τρόπου κατασκευής αυτών των αγγείων που φιλοτεχνήθησαν γύρω στο 1620 π.Χ. Η σχετική μελέτη παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3 της παρούσης εργασίας.

Οι υλοποιήσεις των γραμμάτων ανήκουν σε επιγραφές της Κλασικής και Ελληνιστικής περιόδου. Η φωτογράφιση των επιγραφών αυτών έγινε στις αποθήκες της Στοάς του Αττάλου, αλλά και στο Επιγραφικό Μουσείο. Ο σκοπός της αυτόματης κατάτμησης είναι η ταυτοποίηση του γραφέα των επιγραφών, η οποία προσφέρει τη μοναδική αντικειμενική μέθοδο χρονολόγησης αυτών [3.16]. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου που παρουσιάζεται εδώ παρατίθενται κατωτέρω. (Εικόνα 2.3.1-2.3.25).



**Εικόνα 2.3.1:** Επιγραφή 7478, γράμμα Α .  
σε αποχρώσεις του γκρι.



**Εικόνα 2.3.2:** Ομογενοποιημένη μορφή της  
εικόνας 2.3.1 του γράμματος Α.



**Εικόνα 2.3.3:** Τελική δυαδική μορφή του γράμματος Α της εικόνας 2.3.1..



**Εικόνα 2.3.4:** Επιγραφή 5297, γράμμα Ε .  
σε αποχρώσεις του γκρι.



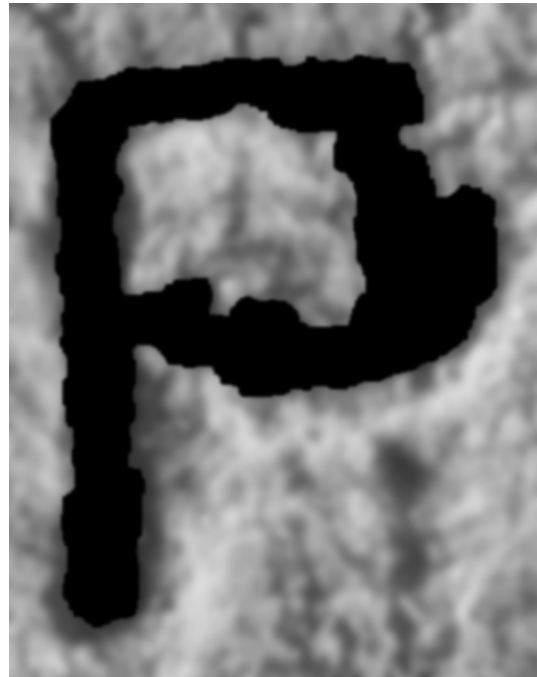
**Εικόνα 2.3.5:** Ομογενοποιημένη μορφή της  
εικόνας 2.3.4 του γράμματος Ε.



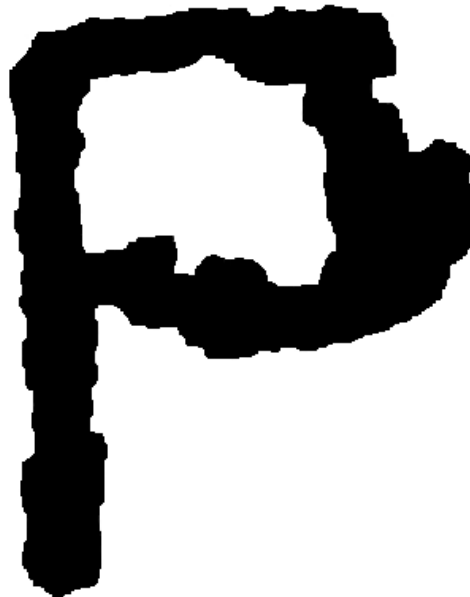
**Εικόνα 2.3.6:** Τελική δυαδική μορφή του γράμματος Ε της εικόνας 2.3.4.



**Εικόνα 2.3.7:** Επιγραφή 7041, γράμμα P .  
σε αποχρώσεις του γκρι.



**Εικόνα 2.3.8:** Ομογενοποιημένη μορφή της  
εικόνας 2.3.7 του γράμματος P.



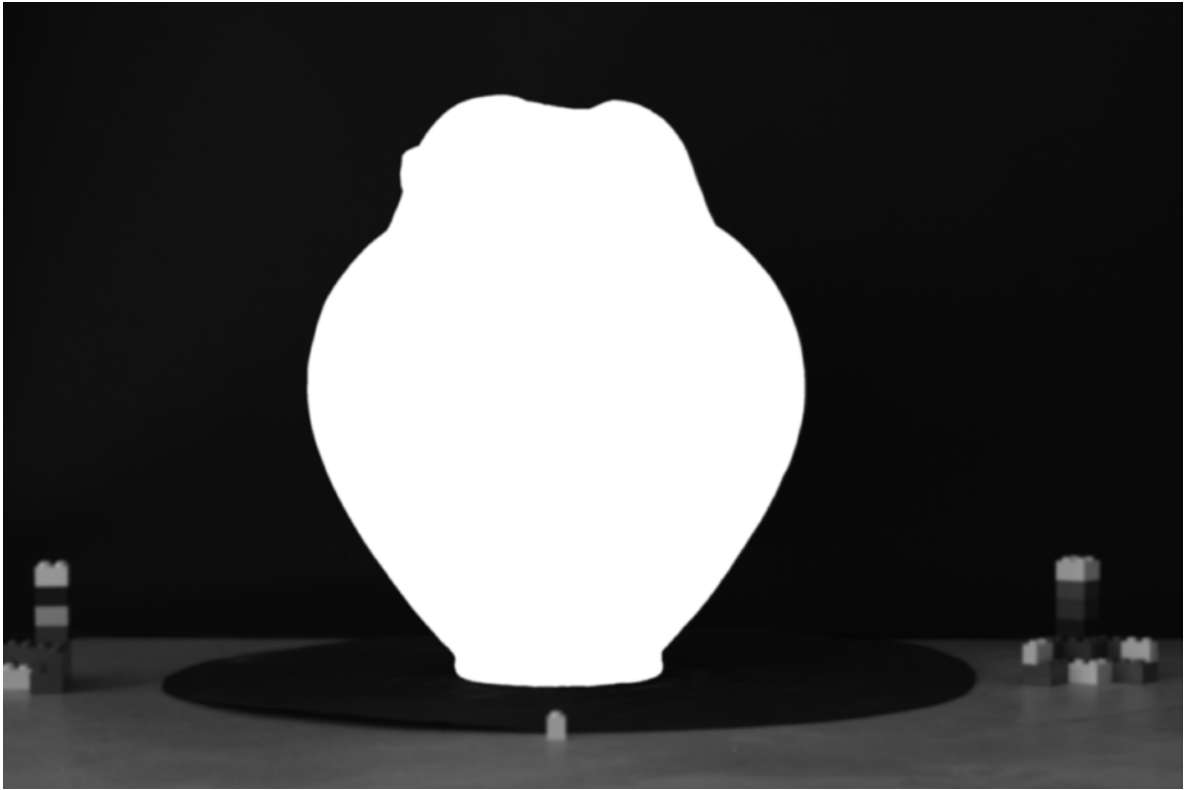
**Εικόνα 2.3.9:** Τελική δυαδική μορφή του γράμματος P της εικόνας 2.3.7.



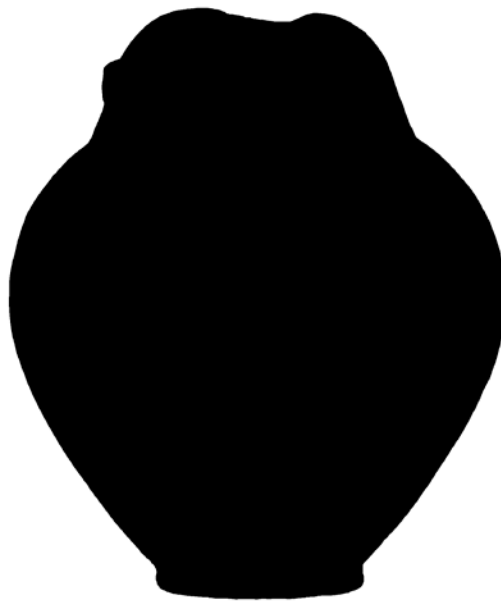
**Εικόνα 2.3.10:** Αγγείο 8473, έγχρωμη εικόνα.



**Εικόνα 2.3.11:** Αγγείο 8473,σε αποχρώσεις του γκρι.

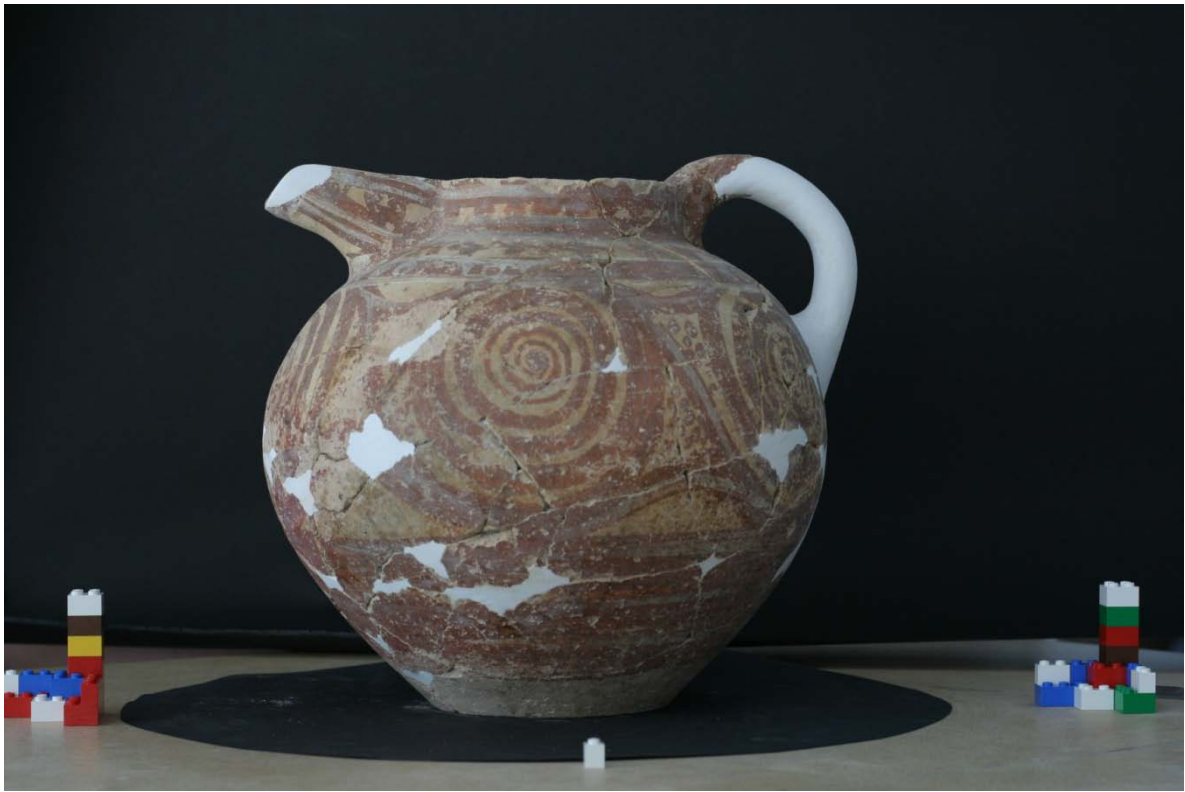


**Εικόνα 2.3.12:** Ομογενοποιημένη μορφή της εικόνας 2.3.11.

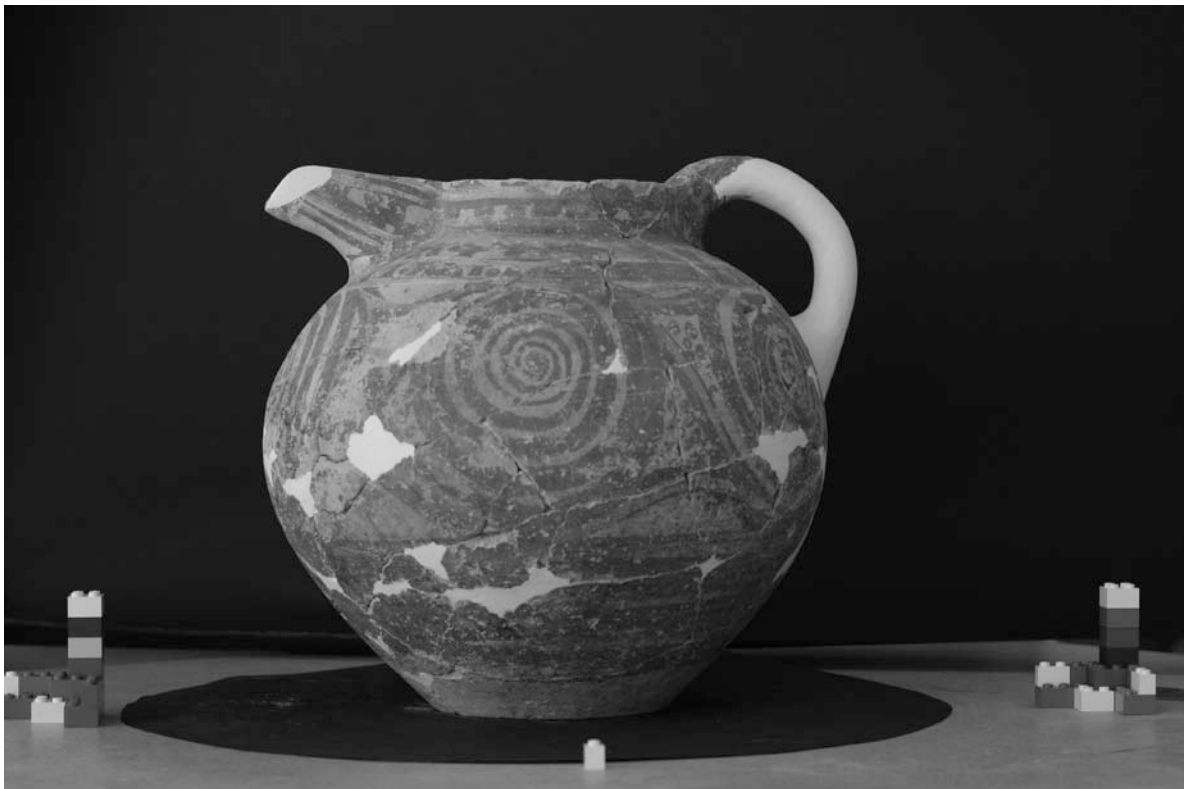


**Εικόνα 2.3.13:** Αντιστροφή της εικόνας 2.3.12. Τελική δυαδική μορφή.





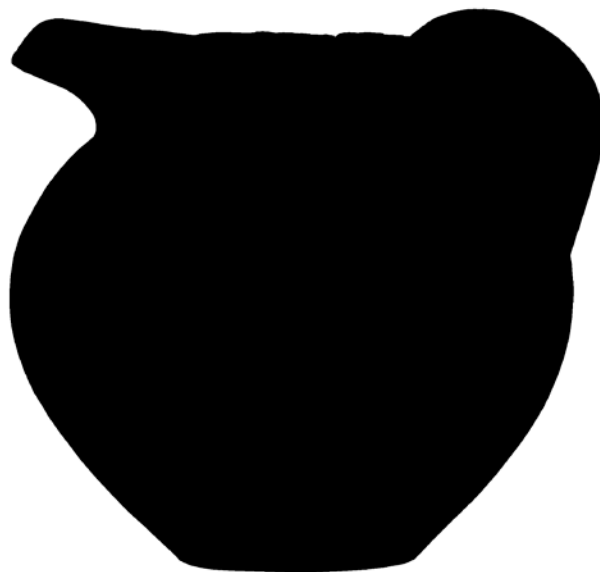
**Εικόνα 2.3.14:** Αγγείο 9749, έγχρωμη εικόνα.



**Εικόνα 2.3.15:** Αγγείο 9749, σε αποχρώσεις του γκρι.



**Εικόνα 2.3.16:** Ομογενοποιημένη μορφή της εικόνας 2.3.15.



**Εικόνα 2.3.17:** Αντιστροφή της εικόνας 2.3.16. Τελική δυαδική μορφή.



**Εικόνα 2.3.18:** Αγγείο 9920, έγχρωμη εικόνα.



**Εικόνα 2.3.19:** Αγγείο 9920,σε αποχρώσεις του γκρι.



**Εικόνα 2.3.20:** Ομογενοποιημένη μορφή της εικόνας 2.3.19.



**Εικόνα 2.3.21:** Αντιστροφή της εικόνας 2.3.20. Τελική δυαδική μορφή.



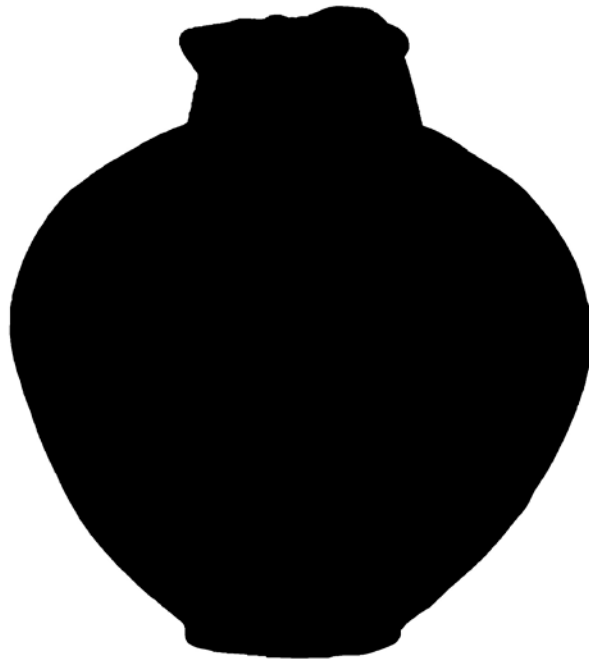
**Εικόνα 2.3.22:** Αγγείο 9922, έγχρωμη εικόνα.



**Εικόνα 2.3.23:** Αγγείο 9922, σε αποχρώσεις του γκρι.



**Εικόνα 2.3.24:** Ομογενοποιημένη μορφή της εικόνας 2.3.23.



**Εικόνα 2.3.25:** Αντιστροφή της εικόνας 2.3.23. Τελική δυαδική μορφή.

### 3. Η μελέτη του τρόπου κατασκευής αγγείων στην Ύστερη Εποχή του Χαλκού, με χρήση πρωτότυπων μεθόδων αναγνώρισης προτύπων.

#### 3.1 Πιθανά γεωμετρικά πρότυπα συμβατά με την τεχνογνωσία της εποχής.

Συνοπτική ιστορική αναδρομή της εξέλιξης των κλασικών μαθηματικών

Καταρχήν θα δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή σημαντικών στοιχείων από την ιστορία των μαθηματικών στους αρχαίους χρόνους. ([2.1]-[2.4,] ([2.9]-[2.14]).

Ένας από τους θεμελιωτές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, είναι ο Θαλής (640–546 π. Χ.), ο οποίος έθεσε τις βάσεις της Θεωρητικής Γεωμετρίας εισάγοντας την αποδεικτική διαδικασία. Θεωρήματα όπως 'η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο γωνία είναι ορθή', 'οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες', 'δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν ανά μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες', είναι του ιδίου. Σημαντική παρατήρηση του Θαλή είναι η ιδιότητα ότι ο κύκλος διχοτομείται από τη διάμετρό του, ιδιότητα την οποία παρατήρησε αλλά δεν απέδειξε.

Ο όρος μαθηματικά με τη σημασία της γενικής επιστήμης χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τον Πυθαγόρα και σε αυτόν οφείλει η ανάλυση, διατύπωση και απόδειξη του βασικού θεωρήματος, ότι το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου ισούται με  $180^\circ$ . Οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν ότι ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά τετραγώνου δεν εκφράζεται με λόγο ακεραίων αριθμών. Επίσης είχαν επιτύχει την κατασκευή κανονικού δωδεκάεδρου εγγεγραμμένου σε σφαίρα, ενώ από τα πλατωνικά στερεά το κανονικό τετράεδρο ο κύβος και το κανονικό δωδεκάεδρο είναι πυθαγόρεια επιτεύγματα. Η χρυσή τομή επίσης είναι επίτευγμα του Πυθαγορείου Πανεπιστημίου και η κατασκευή κανονικού τετραέδρου και κύβου οφείλονται στην Δαμώκωρη του Πυθαγόρα. Επίσης, ο Πυθαγόρας έθεσε ζητήματα που οφείλονται στη φύση των αριθμών και διαχώρισε τη θεωρητική αριθμητική (θεωρία αριθμών) από την εφαρμοσμένη λογιστική.

Ο Οινόπιδης ο Χίος (5<sup>ος</sup> αιώνας π. Χ.) κατασκεύασε την κάθετο σε ευθεία από ένα σημείο εκτός αυτής με κανόνα και διαβήτη και δίδαξε πρώτος την κατασκευή γωνίας δοσμένου μέτρου με δεδομένη μια πλευρά.

Ο Αντιφών ο Αθηναίος (5<sup>ος</sup> αιώνας π. Χ.) βεβαίωσε ότι είναι δυνατόν να επιτύχει τον τετραγωνισμό του κύκλου με εγγραφή σ' αυτόν τετραγώνου και στη συνέχεια με διχοτόμηση των τόξων οκταγώνου, δεκαεξαγώνου κ.ο.κ., μέχρις

όπου η πλευρά του πολυγώνου συμπέσει με το τόξο. Επειδή δε, όλα τα πολύγωνα είναι δυνατόν να μετασχηματισθούν σε ισοδύναμα τετράγωνα, ο κύκλος τετραγωνίζεται.

Η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας έγινε με τη βοήθεια μιας καμπύλης της τετραγωνίζουσας από τον Ιππία τον Ηλείο (5<sup>ο</sup> αιώνα π. Χ.). Η καμπύλη αυτή χρησιμοποιείται επίσης στη διαμέριση μιας γωνίας σε μέρη που έχουν δοσμένο λόγο. Η ίδια καμπύλη χρησιμοποιήθηκε για τον τετραγωνισμό του κύκλου. Αυτή η επίπεδη καμπύλη, μετά τον κύκλο, μελετήθηκε περισσότερο από τους αρχαίους μαθηματικούς.

Ο Δημόκριτος ο Αβδηρίτης (460-360 π. Χ.), είναι ο πρώτος που θέτει τις αρχές του απειροστικού λογισμού και θεωρεί ως συστατικά της ύλης τα άτομα, την ύπαρξη του κενού και την κίνηση. Στον Δημόκριτο επίσης αποδίδεται από τον Πλάτωνα (συγγράφη από την Χαιρώνεια της Βοιωτίας 46-126 μ.Χ.) η παρατήρηση ότι δύο πολύ γειτονικές διατομές ενός κώνου, παράλληλες προς τη βάση του, δε είναι δυνατόν να γίνουν ίσες, παρά μόνον εάν ο κώνος μεταβληθεί σε κύλινδρο, αλλά ούτε και άνισες γιατί τότε ο κώνος θα παρουσίαζε ασυνέχεια και ανωμαλία. Ο Δημόκριτος επίσης μπορούσε να υπολογίσει τον όγκο τριγωνικής πυραμίδας και τον όγκο κώνου.

Ο Αρχύτας ο Ταραντίνος (428 - 365 π.Χ.), έδωσε λύση στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και είναι ο πρώτος που εφάρμοσε την κίνηση στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων κατασκευάζοντας «ευφυέστατες» συσκευές για τη χάραξη καμπυλών. Ο Αρχύτας επίσης σχημάτισε τον κώνο και τον κύλινδρο, με κίνηση μιας ευθείας.

Ο Πλάτων (427 - 347 π.Χ.), ένας από τους μεγαλύτερους φιλοσόφους της Αρχαίας Ελλάδας χρησιμοποίησε την καμπύλη υπερβολή για τη λύση του προβλήματος εγγραφής σε δοσμένο κύκλο ενός ισοσκελούς τριγώνου που το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν δοσμένου σχήματος.

Στον Εύδοξο τον Κνίδιο (408 - 355 π.Χ.) αποδίδεται η απόδειξη του θεωρήματος ότι: 'δύο σφαίρες είναι μεταξύ τους ως οι κύβοι των διαμέτρων του' και η 'Ιπποπέδη' καμπύλη (ονομάζεται και σφαιρική Ιπποπέδη), είναι η καμπύλη που προκύπτει από την τομή σφαίρας και κυλίνδρου

Ο ιστορικός των μαθηματικών P. Tannery κατόρθωσε με την βοήθεια των διαφόρων πληροφοριών συγγραφέων της Αρχαίας Ελλάδας, να αναπαραστήσει τη λύση του δηλίου προβλήματος, που έδωσε ο Εύδοξος. Η λύση του Ευδόξου



δινόταν με την βοήθεια μιας καμπύλης δικής του επινόησης, που ονομάστηκε 'καμπύλα του Ευδόξου'. Η καμπύλα είναι η προβολή σε επίπεδο  $\chi O\psi$  της τομής της «σπείρας» (σαμπρέλας) και του κώνου του Αρχύτου.

Ο Μέναιχμος (4<sup>ος</sup> αιώνας π.Χ.) απέδειξε ότι οι καμπύλες έλλειψη, παραβολή και υπερβολή προκύπτουν από την τομή ενός επιπέδου και ορθού κυκλικού κώνου. Μελέτησε τις ιδιότητες τους, και προετοίμασε έτσι τη θεωρία των κωνικών τομών. Οι τρεις κωνικές τομές, έλλειψη, παραβολή και υπερβολή, ονομάστηκαν προς τιμή του 'Μεναίχιμος τριάς'.

Ο Ευκλείδης (4<sup>ος</sup> - 3<sup>ος</sup> αιώνας π.Χ.), με το γεωμετρικό του έργο «Στοιχεία» αποτελεί έναν από τους μεγάλους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Στο σύγγραμμα αυτό, το οποίο έχει σημειώσει ρεκόρ εκδόσεων σε όλο τον κόσμο δεν έχει διαπιστωθεί κανένα απολύτως λάθος μέχρι σήμερα.

Ο Πάππος (4<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ.) του οποίου σώζεται μόνο ένα έργο του η 'Μαθηματική Συναγωγή' γράφει για τον Κόνωνα το Σάμιο (3<sup>ος</sup> αιώνας π. Χ.) ότι διατύπωσε το θεώρημα της επίπεδης έλικας το οποίο απέδειξε αργότερα ο Αρχιμήδης. Ο Κόνων προσπάθησε να υπολογίσει το πλήθος των σημείων στα οποία τέμνονται ανά δύο οι κωνικές τομές και για αυτό επινόησε μια καμπύλη με το όνομα 'Ισταμένη'.

Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε στις Συρακούσες (287 - 212 π.Χ.) και θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών.

Ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιώντας την κλασσική πλέον σήμερα μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, καθόρισε την κατά προσέγγιση σχέση της διαμέτρου ενός κύκλου προς το μήκος της περιφέρειάς του (ήταν η πρώτη προσπάθεια στην ιστορία των μαθηματικών για επιστημονικό υπολογισμό του αριθμού  $\pi$ ). Ο

Αρχιμήδης βρήκε ότι ο αριθμός  $\pi$  βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς  $3\frac{10}{71}$  και

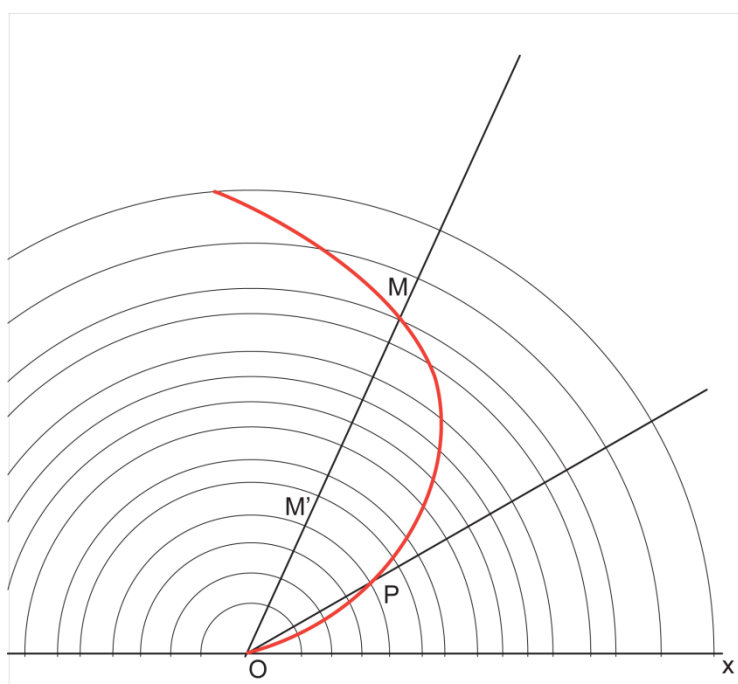
$3\frac{10}{70}$  και ισούται, κατά προσέγγιση, με τον αριθμό 3.14159265358979. Επίσης,

απέδειξε τον τετραγωνισμό της παραβολής, μελέτησε την γραμμική σπείρα που έκτοτε φέρει το όνομά του, καθώς και ιδιότητες αριθμών, σχημάτων και στερεών σωμάτων.

Έδωσε για πρώτη φορά τον αυστηρό ορισμό της γραμμικής σπείρας, την οποία αυτός ονόμαζε έλικα, ως εξής: 'Αν μια ημιευθεία, η αρχή της οποίας παραμένει σταθερή, αναγκαστεί να περιστραφεί με σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ένα

επίπεδο έως ότου επιστρέψει στην θέση από την οποία άρχισε η περιστροφή και αν συγχρόνως, καθώς η ημιευθεία περιστρέφεται, ένα σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της, αρχίζοντας από την αρχή της, το σημείο θα διαγράψει στο επίπεδο μια έλικα'. Στο βιβλίο του «Περί ελίκων» γίνεται μια μεθοδική μελέτη των ιδιοτήτων αυτής.

Ο Αρχιμήδης είχε αποδείξει ότι η απόσταση  $OM$  είναι ανάλογη της γωνίας. Αυτό διαπιστώνουμε εύκολα από την εξίσωση της γραμμικής σπείρας (επίπεδης έλικας) σε πολικές συντεταγμένες:  $r = k \cdot \theta$ , όπου  $r = OM$ ,  $k$  σταθερά και  $\theta = \widehat{xOM}$ . Πάνω σ' αυτήν την παρατήρηση βασίζεται και η μέθοδος που ακολούθησε για την τριχοτόμηση μιας γωνίας. (Εικόνα 3.1.1).



**Εικόνα 3.1.1:** Η απόσταση  $OM$  είναι ανάλογη της γωνίας  $\widehat{xOM}$ .

Με την 'κογχοειδή' ή 'κοχλοειδή' καμπύλη που επινόησε ο Νικομήδης (3ος - 2ος αιώνας π.Χ.) επιλύθηκε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου το πρόβλημα των μέσων αναλόγων και το πρόβλημα της τριχοτόμησης τυχούσης γωνίας. Επίσης ο Νικομήδης, επινόησε και μια δεύτερη καμπύλη ανάλογη προς την τετραγωνίζουσα του Ιππίου και κατασκεύασε ένα ειδικό όργανο το οποίο με συνεχή κίνηση χάραζε την κογχοειδή.

Οι όροι του Ευκλείδη «παραβάλλειν», «ελλείπειν» και «υπερβάλλειν» ενέπνευσαν τον Απολλώνιο τον Περγαίο (265 - 170 π.Χ.) ο οποίος έδωσε πρώτος την ονομασία των τριών κωνικών τομών που ισχύει ακόμα και σήμερα

‘παραβολή’, ‘έλλειψη’ και ‘υπερβολή’ και είναι ο πρώτος που παρατήρησε ότι δεν χρειάζονται τριών ειδών κώνοι για να πάρουμε τις τρεις κωνικές τομές αλλά μόνο ένας ανεξάρτητα εάν αυτός είναι ορθογώνιος, αμβλυγώνιος ή οξυγώνιος. Η κισσοειδής καμπύλη η οποία ονομάζεται έτσι επειδή μοιάζει με φύλλο κισσού αποδίδεται στον Διοκλή (2<sup>ος</sup> αιώνας π.Χ.) και αναφέρεται στο σύγγραμμα του με τίτλο Περί Πυρίων.

### Τεχνολογικό και γνωσιολογικό επίπεδο άλλων πολιτισμών περίπου σύγχρονων με αυτών του Ακρωτηρίου Θήρας.

Τα κυριότερα σχετικά στοιχεία προέρχονται από την αυτοκρατορία της Βαβυλωνίας (1900 - 1600 π.Χ.) με επιδράσεις όμως από τους παλαιούς κατοίκους της Μεσοποταμίας τους Σουμέριους.

Οι Βαβυλώνιοι κατά τη χρονική περίοδο (2000 – 1600 π.Χ.) ασχολήθηκαν με πλήθος προβλημάτων Άλγεβρας και Γεωμετρικής άλγεβρας όπως ο προσεγγιστικός υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας και η προσπάθεια επίλυσης τετραγωνικών και λογαριθμικών εξισώσεων. Αυτό είναι γνωστό από τους Neugebauer 1935–1937, Thureau-Dangin 1938, Neugebauer και Sachs 1945, Bruins και Rutten 1961. Τα τεκμήρια που έχουν σωθεί είναι εκατοντάδες χιλιάδες δείγματα σε μορφή πήλινων πινακίδων με σφηνοειδείς επιγραφές. Οι πήλινες πινακίδες είναι είτε σε μορφή μικρών θραυσμάτων, είτε πλάκες σε μέγεθος χαρτοφύλακα και το χαρακτηριστικό γνώρισμα είναι ότι μια πινακίδα μπορούσε να διορθωθεί όσο ο πηλός παρέμενε νωπός, μόλις ο πηλός σκλήραινε η πινακίδα ήταν άχρηστη και ή την πετούσαν ή την χρησιμοποιούσαν ως δομικό υλικό. Τέτοιες πινακίδες είναι οι Plimpton 322, YBC 7289, AO 17264. Το εύρημα Plimpton 322 θεωρήθηκε αρχικά ότι παρέχει ένα σύνολο πυθαγόρειων τριάδων (Neugebauer και Sachs 1945). Όμως στη δημοσίευση του Friberg (1981, σελ. 302) υποδεικνύεται ότι «ο σκοπός του συγγραφέα του Plimpton 322 ήταν η δημιουργία ενός εγχειριδίου της τότε εποχής για τη θέση και επίλυση προβλημάτων σχετικών με ορθογώνια τρίγωνα. Εναλλακτικά, σε δημοσίευση του ο Buck (1980, σελ. 344) προτείνει ότι «η πινακίδα Plimpton δεν έχει σχέση με πυθαγόρειες τριάδες ή τριγωνομετρία αλλά, αντίθετα, είναι ένα παιδαγωγικό εργαλείο που σκόπευε να βοηθήσει ένα δάσκαλο των Μαθηματικών της εποχής να παράξει ένα ικανό αριθμό παραδειγμάτων αντιστρόφων αριθμών, τετραγωνικών εξισώσεων με ή χωρίς λύση. Το αίνιγμα

του περιεχομένου των πινακιδίων σφηνοειδούς γραφής δεν έχει μέχρι σήμερα επιλυθεί (Robson 2001, σελ. 202). Στο εύρημα ΑΟ 17264, διαφαίνεται ότι απασχόλησε τους Βαβυλωνίους το πρόβλημα του διαμερισμού ενός τραπεζίου σε ισεμβαδικά μέρη με σκοπό τη δημιουργία ισότιμων μεριδίων κληρονομιών. Στην προσπάθειά τους να το επιτύχουν, επιχείρησαν την λύση συστήματος τριών εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Εν τούτοις, σύμφωνα με τους Brack-Bernsen και Schmidt (1990), αυτό το πρόβλημα ήταν πέρα των δυνατοτήτων των Βαβυλώνιων μαθηματικών.

Αναφορικά με το εύρημα YBC 7289, ο Friberg (1982) ισχυρίστηκε πρώτος, ότι σε αυτό επιχειρείται ένας αναδρομικός υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας του δύο σε εξηταδικό σύστημα, με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια. Οι Fowler και Robson (1998, σελ. 369), υποδεικνύουν ότι το YBC 7289 θα μπορούσε να είναι μια πρόχειρη δουλειά ενός μαθητή στην προσπάθειά του να επιλύσει ένα πρόβλημα. Οι Fowler και Robson μελέτησαν το βαβυλωνιακό εύρημα BM 15285 και ισχυρίζονται ότι το επ' αυτού κείμενο σε σφηνοειδή γραφή περιείχε προβλήματα εύρεσης εμβαδών ορισμένων γεωμετρικών σχημάτων εγγεγραμμένων σε τετράγωνα. Με βάση αυτή την ανάλυση οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι ο συγγραφέας του ευρήματος YBC 7289 πολύ πιθανόν έλαβε την τιμή της τετραγωνικής ρίζας του δύο από ένα πίνακα αναφοράς.

Οι ερευνητές (Zeuthen 1896, Neugebauer 1936) και ο Unguru (1975) ισχυρίστηκαν ότι τα Ελληνικά Μαθηματικά είναι μια απλή μετάφραση των αλγεβρικών εννοιών και διαδικασιών που αναπτύχθηκαν στη Βαβυλωνία. Μεταγενέστεροι όμως ερευνητές όπως οι Van der Waerden (1976a), Freudenthal (1977), και Weil (1978) υπερασπίστηκαν την πρωτοτυπία των μαθηματικών του Ελλαδικού χώρου. Επίσης ο Mueller (1981, σελ. 44) υποστήριξε ότι η γεωμετρική ερμηνεία των στοιχείων του Ευκλείδη, εκμηδενίζει την ανάγκη εισαγωγής και χρήσης αλγεβρικής γεωμετρίας στον αρχαιοελλαδικό χώρο. Ο Berggren (1984, σελ. 398), υπέδειξε τον μεγάλο όγκο πρωτότυπης γεωμετρικής και μαθηματικής πληροφορίας που γεννήθηκε στον αρχαιοελλαδικό χώρο και διατύπωσε ότι για να θεωρηθεί ιστορικό γεγονός η ανάπτυξη αλγεβρικής γεωμετρίας στους αρχαίους Βαβυλώνιους απαιτείται ακόμη πολύ μεγάλη έρευνα. Στην περίπτωση αυτή βέβαια θα πρέπει να βρεθεί επίσης ο χρόνος και ο τρόπος της μετάδοσης της πληροφορίας από τους Βαβυλωνίους στους αρχαίους Έλληνες. Υπενθυμίζεται επίσης ότι ο αρχαίος

Βαβυλωνιακός πολιτισμός κατεστράφη πολλούς αιώνες πριν την ανάπτυξη του Ελληνικού πολιτισμού στη Μεσόγειο.

Ο πολιτισμός των Αιγυπτίων που διήρκε σχεδόν τέσσερις χιλιετίες άφησε ελάχιστες ενδείξεις για τη μαθηματική τους επιστήμη. Είναι μεγάλη τύχη ότι σώθηκαν κάποιοι πάπυροι μέχρι σήμερα και κυρίως οι πάπυροι της Μόσχας και του Ριντ. Άλλες σχετικές πηγές είναι οι απεικονίσεις σε τάφους και ναούς που αναπαριστούν εμπορικές και διοικητικές πράξεις οι οποίες όμως απαιτούσαν μαθηματικές δεξιότητες.

Ο πάπυρος του Ριντ γράφηκε γύρω στο 1650 π.Χ. από έναν γραφέα με όνομα Αχμή, ο οποίος εξηγεί ότι αντιγράφει ένα πρωτότυπο δύο αιώνες παλαιότερο. Τα περισσότερα από τα 87 προβλήματα με τις λύσεις τους που περιέχει είναι υπολογισμοί ένας από τους οποίους αναφέρεται σε μέθοδο εύρεσης εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου, αλλά δεν αναφέρονται πουθενά γενικοί τύποι. Ο πάπυρος της Μόσχας περιλαμβάνει επίσης και υπολογισμούς του όγκου μιας κολούρης πυραμίδας

Μπορεί να θεωρηθεί λοιπόν ότι τα μαθηματικά των Αιγυπτίων δεν ήταν σε επίπεδο ανίστοιχο με το επίπεδο των Βαβυλωνίων. Επίσης, σύμφωνα με άλλους ερευνητές (Szabo 1968, Heath 1921/1981, Exarchakos 1997), η γεωμετρία στους Αιγυπτίους, ακόμη και στην εποχή του Θαλή, ήταν περιορισμένη στο επίπεδο υπολογισμού εμβαδών, κάτι με το οποίο συμφωνεί και ο αρχαίος ιστορικός Πρόκλος. Με άλλα λόγια, η γεωμετρία στους Αιγυπτίους, ήταν απλά ένα σύνολο εμπειρικών κανόνων για υπολογισμό εμβαδών που περιείχε όμως και πολλά λάθη. Πρόσφατα έχουν ανακαλυφθεί πολλοί τάφοι στην Αίγυπτο, οι τοίχοι των οποίων ήταν διακοσμημένοι με ιερογλυφικά, τα οποία πλέον έχουν αποκωδικοποιηθεί. Οι σχετικές επιγραφές έχουν ρίξει άπλετο φως στην Αιγυπτιακή ιστορία, επιβεβαιώνουν αξιόλογη εμπειρική γνώση σε κατασκευαστικούς τομείς, αλλά δεν επιβεβαιώνουν ιδιαίτερα αξιόσημη γνώση γεωμετρίας και μαθηματικών στους αρχαίους Αιγυπτίους.

Επιλογή γεωμετρικών προτύπων που ενδεχομένως γνώριζαν να κατασκευάζουν οι κάτοικοι του Ακρωτηρίου Θήρας.

Αναζητήσαμε υποψήφια γεωμετρικά πρότυπα μέσα από το σύνολο αυτών που αναφέρθηκαν προηγούμενα. Θεωρούμε δηλαδή, ότι επειδή η εξέλιξη της

ανθρώπινης γνώσης παρουσιάζει πολλά στοιχεία συνέχειας στο χρόνο, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η μαθηματική γνώση των κλασικών χρόνων στηριζόταν σε αίσθηση ιδέες και πειραματισμό παλαιότερων πληθυσμών. Υπάρχει βεβαίως ο σαφής περιορισμός, τα επιλεγέντα γεωμετρικά πρότυπα να είναι συμβατά με το επίπεδο τεχνογνωσίας της εποχής του οικισμού του Ακρωτηρίου. Για παράδειγμα, είναι χαρακτηριστικό ότι η έλλειψη, η υπερβολή και η γραμμική σπείρα, αν και απαιτούν εξαιρετική γεωμετρική αίσθηση εν τούτοις μπορούν να κατασκευαστούν με σχετικά απλά μέσα. Η κατασκευή τους με κανένα τρόπο δεν προϋποθέτει μαθηματική θεμελίωση και αναλυτική μελέτη αυτών.

Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για ‘απλές’ σπείρες, όπως η εκθετική που απαντάται στα όστρακα των κοχυλιών με μεγάλη ακρίβεια, η εκτύλιξη σπείρας, ως και η γραμμική σπείρα που μπορεί να κατασκευαστεί με διάφορους ευφυείς τρόπους.

Συνεπώς, με βάση τα ανωτέρω, τελικώς επιλέξαμε τρεις τύπους σπειρών και τις κωνικές τομές να αντιστοιχούν σε πιθανούς υποψήφιους οδηγούς (stencils).

#### 1. Σπείρα εκτύλιξης κύκλου

Το σχήμα αυτό προκύπτει εάν εκτυλίξουμε ένα λεπτό σκοινί ή νήμα γύρω από ένα σταθερό πάσσαλο-κύλινδρο διαμέτρου έστω  $r_0$ . (Εικόνα 3.1.2). Σε σύγχρονα μαθηματικά ο συναρτησιακός της τύπος δίνεται από τη σχέση

$$\vec{r}(g^U) = \left( x_0 + r_0 \sqrt{1 + g^{U^2}} \cos(g^U - \arctan g^U) \right) \vec{i} + \left( y_0 + r_0 \sqrt{1 + g^{U^2}} \sin(g^U - \arctan g^U) \right) \vec{j} \quad (3.1) (1)$$

όπου  $x_0, y_0$  το κέντρο της σπείρας και  $g^U \in \mathfrak{R}$  η ανεξάρτητη μεταβλητή της.

Σημειώνεται ότι η  $g^U$  αντιστοιχεί στην πολική γωνία του τελευταίου σημείου επαφής του νήματος με τον πάσσαλο. Είναι προφανές ότι προσεγγίσεις αυτής της καμπύλης μπορούν να προκύψουν μέσα από διάφορες καθημερινές εμπειρίες.

#### 2. Εκθετική σπείρα

Η εκθετική σπείρα είναι ένα σχήμα που πολύ ικανοποιητικές προσεγγίσεις του απαντώνται στη φύση. (Εικόνα 3.1.2). Είναι χαρακτηριστικό ότι η κάτοψη της

τρισιδιάστατης έλικας μερικών κοχυλιών αντιστοιχεί σε αυτό το σχήμα με πάρα πολύ ικανοποιητική ακρίβεια. Ο συναρτησιακός της τύπος σε διανυσματική μορφή δίδεται από τη σχέση

$$\vec{r}(\vartheta^X) = \left( x_0 + ae^{\beta\vartheta^X} \cos \vartheta^X \right) \vec{i} + \left( y_0 + ae^{\beta\vartheta^X} \sin \vartheta^X \right) \vec{j} \quad (3.1) (2)$$

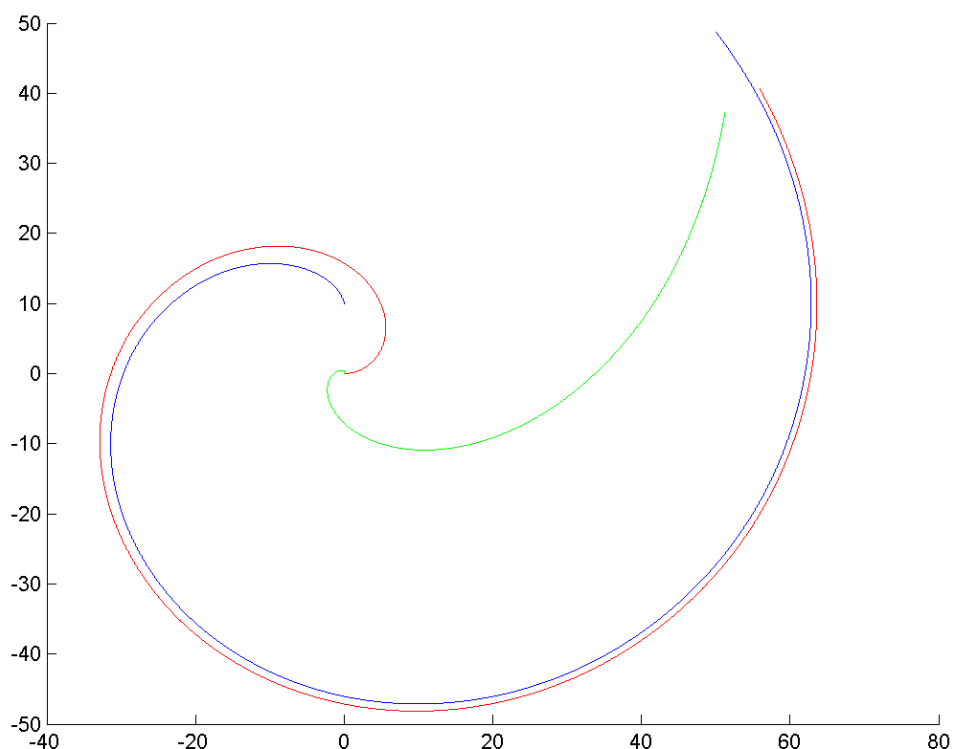
όπου  $x_0, y_0$  το κέντρο της σπείρας,  $a$  και  $\beta$  σταθερές και  $\vartheta^X \in \mathfrak{R}$  η ανεξάρτητη μεταβλητή της η οποία είναι και η πολική γωνία του αντίστοιχου σημείου της.

### 3. Γραμμική Σπείρα (του Αρχιμήδους)

Η γραμμική σπείρα είναι μια καμπύλη που, όπως προαναφέραμε, απαιτεί ιδιαίτερα υψηλή γεωμετρική αίσθηση για να κατασκευαστεί. (Εικόνα 3.1.2). Ο συναρτησιακός της τύπος σε διανυσματική μορφή δίδεται από τη σχέση

$$\vec{r}(\vartheta) = \left( x_0 + \mu^A \vartheta \cos \vartheta \right) \vec{i} + \left( y_0 + \mu^A \vartheta \sin \vartheta \right) \vec{j} \quad (3.1) (3)$$

όπου  $x_0, y_0$  το κέντρο της σπείρας,  $\mu^A$  σταθερά και  $\vartheta \in \mathfrak{R}$  η ανεξάρτητη μεταβλητή της η οποία είναι και η πολική γωνία του αντίστοιχου σημείου της.



**Εικόνα 3.1.2:** Η γραμμική σπείρα απεικονίζεται με κόκκινη γραμμή.

Η σπείρα εκτύλιξης απεικονίζεται με μπλε γραμμή.

Η εκθετική σπείρα απεικονίζεται με πράσινη γραμμή.

#### 4. Υπερβολή

Είναι ένα γεωμετρικό σχήμα που έχει δύο άξονες και δύο σκέλη. Εάν οι άξονες της υπερβολής είναι παράλληλοι προς τους  $x - y$  άξονες και κέντρο το  $O$ , όπως φαίνεται στο σχήμα (Εικόνα 3.1.3), τότε η εξίσωση της υπερβολής δίδεται από τον τύπο

$$\vec{r}(x) = x\vec{i} \pm \beta \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \vec{j} \quad (3.1) (4)$$

όπου  $a, \beta$  σταθερές.

Η υπερβολή προκύπτει εάν τμήσουμε έναν ορθό κώνο με ένα επίπεδο που είναι παράλληλο προς τον άξονα του κώνου, είναι δε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων η διαφορά των αποστάσεων των οποίων από δύο δεδομένα σημεία, τις εστίες, είναι σταθερή.

#### 5. Έλλειψη/κύκλος

Το γεωμετρικό αυτό σχήμα είναι κλειστό και έχει δύο άξονες. Εάν οι άξονες της έλλειψης είναι παράλληλοι προς τους  $x - y$  άξονες και το κέντρο είναι το  $(x_0, y_0)$ , (Εικόνα 3.1.3) τότε η εξίσωση της έλλειψης δίδεται από τον τύπο

$$\vec{r}(\vartheta^E) = (x_0 + a \cos \vartheta^E) \vec{i} + (y_0 + b \sin \vartheta^E) \vec{j} \quad (3.1) (5)$$

όπου  $a$  και  $b$  σταθερές και  $\vartheta^E \in [0, 2\pi)$  η ανεξάρτητη μεταβλητή αυτής.

Η έλλειψη προκύπτει όταν τμήσουμε έναν ορθό κώνο με ένα επίπεδο που δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα του κώνου, ούτε προς μία γενέτειρα αυτού. Εάν το επίπεδο αυτό είναι κάθετο στον άξονα του κώνου, τότε  $a = b$  και η έλλειψη εκφυλίζεται σε κύκλο. Η έλλειψη δε είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων το άθροισμα των αποστάσεων των οποίων από δύο δεδομένα σημεία, τις εστίες, είναι σταθερό.

Η έλλειψη προκύπτει από προβολή κύκλου σε επίπεδο που σχηματίζει γωνία  $\arccos\left(\frac{b}{a}\right)$  όπου  $b < a$  με το επίπεδό του. Η πολική γωνία  $\vartheta^E$  του κύκλου αυτού είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της ελλείψεως στην ανωτέρω μορφή.



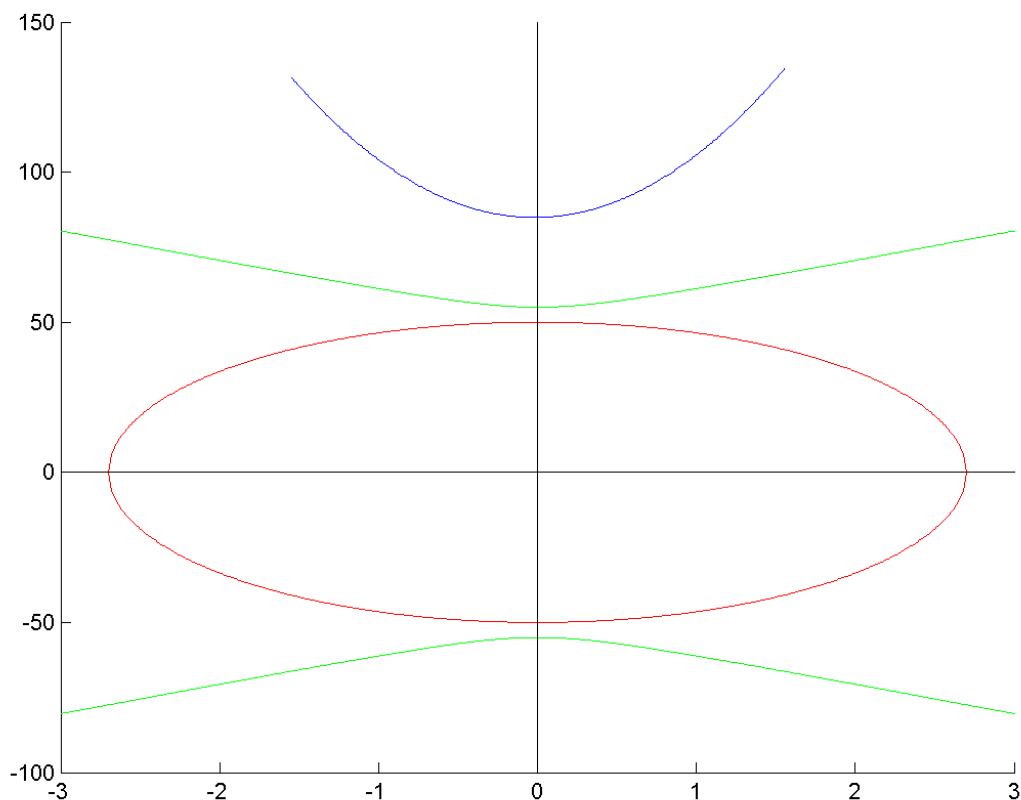
## 6. Παραβολή

Η παραβολή είναι ένα σχήμα με ένα σκέλος το οποίο προκύπτει εάν τμήσουμε έναν ορθό κώνο με ένα επίπεδο παράλληλο προς μία γενέτειρά του. Εάν ο άξονας συμμετρίας της είναι ο  $y$  άξονας όπως φαίνεται στο σχήμα (Εικόνα 3.1.3) και η κορυφή της στο  $O$ , τότε η εξίσωση της παραβολής δίδεται από τη σχέση

$$y = a\chi^{p^2} + b\chi^p + c, \quad \chi^p \in \mathfrak{R} \quad (3.1) (6)$$

όπου  $a, b, c$  σταθερές.

Η παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από ένα δεδομένο σημείο, την εστία της και από μια ευθεία κάθετη στον άξονα της, τη διευθετούσα.



**Εικόνα 3.1.3:** Η υπερβολή απεικονίζεται με πράσινο χρώμα.

Η έλλειψη απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα.

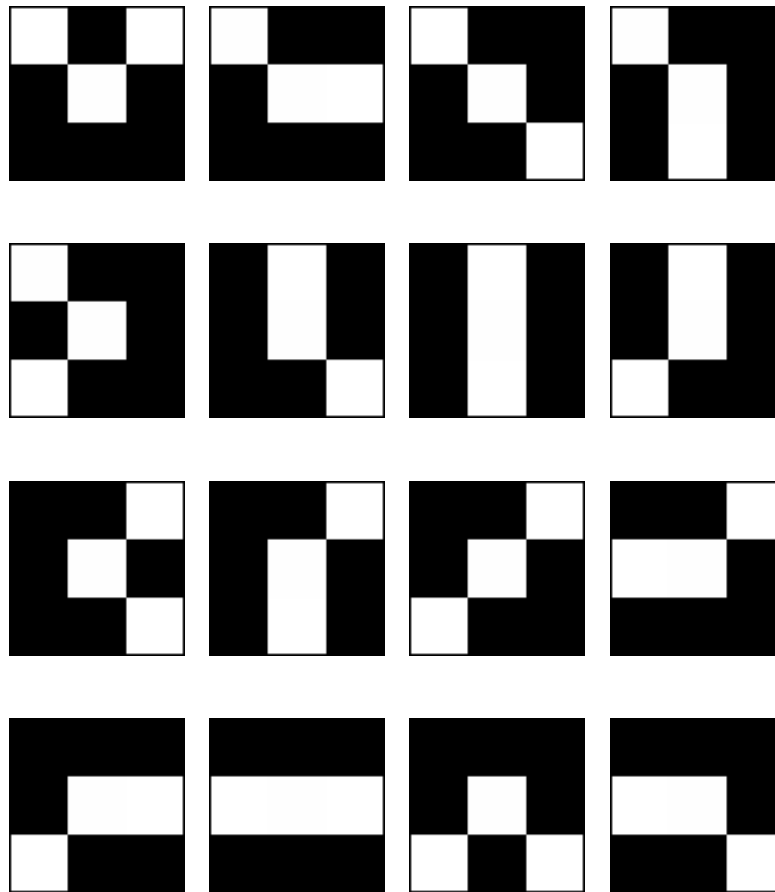
Η παραβολή απεικονίζεται με μπλε χρώμα.

### 3.2 Εξαγωγή περιγράμματος των αγγείων σε κατάλληλη μορφή.

Για να μπορούν να λειτουργήσουν οι αλγόριθμοι που θα παρουσιαστούν στα επόμενα, πρέπει το περίγραμμα κάθε θεματικής ενότητας να έχει πολύ συγκεκριμένη μορφή. (Εικόνα 3.2.1).. Ειδικότερα, κάθε εικονοστοιχείο του περιγράμματος πρέπει να έχει επακριβώς δύο γειτονικά pixels ενώ απαγορεύεται να υπάρχουν διαδοχικά pixels του περιγράμματος που να σχηματίζουν ορθή γωνία. Οι επιτρεπτοί συνδυασμοί εικονοστοιχείων σε συνεκτικότητα οκτώ παρουσιάζονται κατωτέρω. (Εικόνα 3.2.2). Επειδή καμία τεχνική κατάτμησης εικόνας δεν μπορεί να προσφέρει τέτοια περιγράμματα, αναπτύχθηκε ειδικός κώδικας και έγινε χρήση πρωτότυπων μορφολογικών μετασχηματισμών, ώστε από την κατατμημένη εικόνα να εξάγεται αυτόματα το περίγραμμα στην επιθυμητή αυτή μορφή.

1	2	3
8	0	4
7	6	5

**Εικόνα 3.2.1:** Αρίθμηση μιας περιοχής συνεκτικότητας



**Εικόνα 3.2.2:** Επιτρεπτοί συνδυασμοί εικονοστοιχείων. Το άσπρο χρώμα αντιστοιχεί στα εικονοστοιχεία του περιγράμματος.

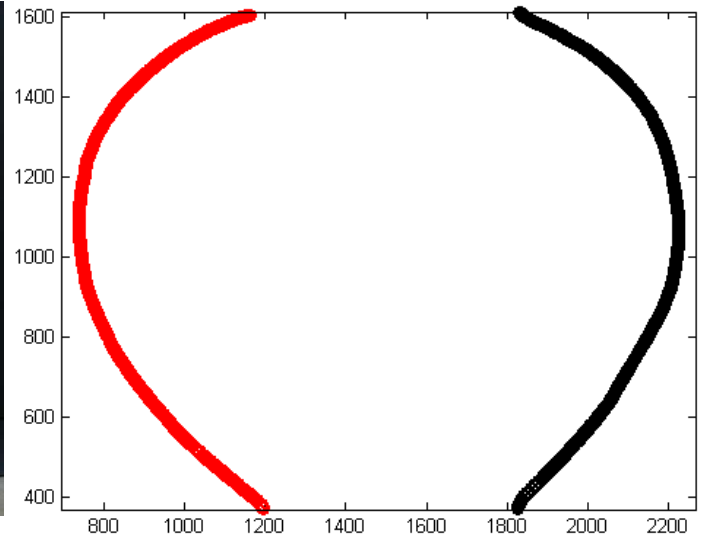
### 3.3 Βέλτιστη αυτόματη προσαρμογή περιγραμμάτων αγγείων.

Θεωρητική ανάλυση

Έχουμε φωτογραφίσει ένα τυχόν αγγείο σε τουλάχιστον οκτώ διαφορετικές θέσεις, όπου κάθε θέση του αγγείου διαφέρει από την προηγούμενη και την επόμενη κατά 45° μοίρες περίπου. Η φωτογραφία του αγγείου που ελήφθη σε κάθε θέση κατατμήθηκε αυτόματα με σκοπό την εξαγωγή της καθαρής απεικόνισης του αγγείου από το υπόβαθρο, με τη μέθοδο που περιγράφηκε στην ενότητα 2.2. Το τελικό αποτέλεσμα της κατάτμησης είναι μια ασπρόμαυρη φωτογραφία του αγγείου, όπου αυτό αποδίδεται με μαύρο, ενώ το υπόβαθρο με άσπρο. Εν συνεχεία εξάγαμε το περίγραμμα του αγγείου με τον τρόπο που περιγράφηκε στην ενότητα 3.2 και από το αγγείο λαμβάνουμε το αριστερό και δεξί τμήμα του περιγράμματος αυτού, αφού εξαιρέσουμε το στόμιο, τις λαβές και τον πυθμένα. (Εικόνες 3.3.1-3.3.15).



**Εικόνα 3.3.1:** Αγγείο 8144.



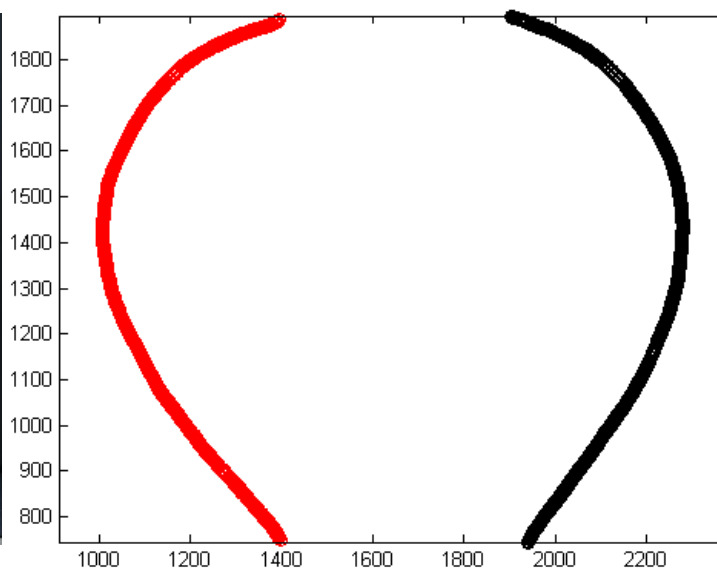
**Εικόνα 3.3.2:** Αριστερό και δεξί περίγραμμα του στιγμιοτύπου της εικόνας 3.3.1 του αγγείου 8144.



**Εικόνα 3.3.3:** Αριστερό περίγραμμα (χρώμα κίτρινο) και δεξί περίγραμμα (χρώμα γαλάζιο) του στιγμιοτύπου του αγγείου 8144.



**Εικόνα 3.3.4:** Αγγείο 8493.



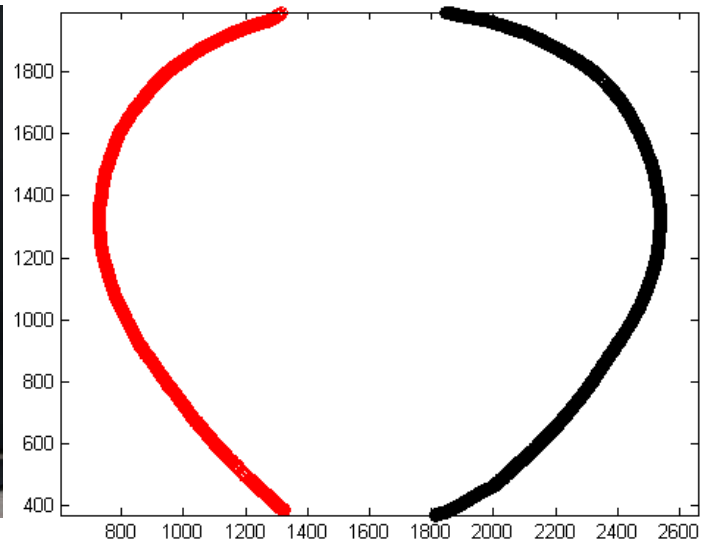
**Εικόνα 3.3.5:** Αριστερό και δεξί περίγραμμα του στιγμιοτύπου της εικόνας 3.3.4 του αγγείου 8493.



**Εικόνα 3.3.6:** Αριστερό περίγραμμα (χρώμα κίτρινο) και δεξί περίγραμμα (χρώμα γαλάζιο) του στιγμιοτύπου του αγγείου 8493.



**Εικόνα 3.3.7:** Αγγείο 9185.



**Εικόνα 3.3.8:** Αριστερό και δεξί περίγραμμα του στιγμιοτύπου της εικόνας 3.3.7 του αγγείου 9185.

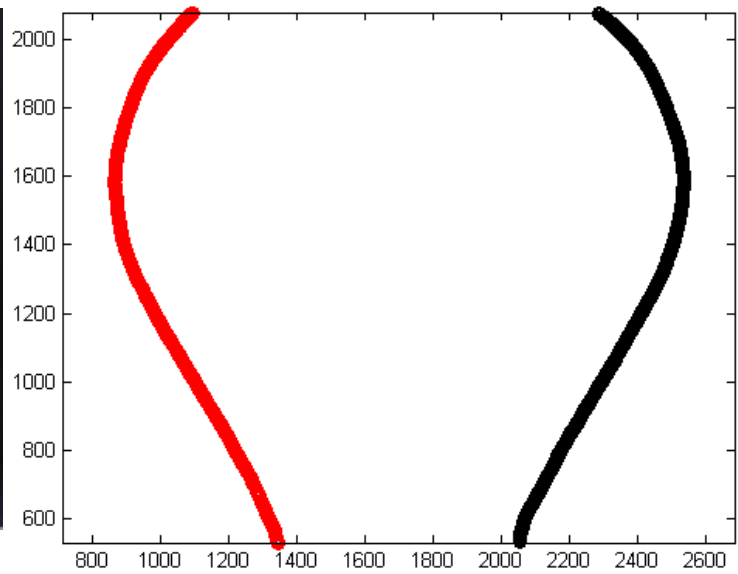


**Εικόνα 3.3.9:** Αριστερό περίγραμμα (χρώμα κίτρινο) και δεξί περίγραμμα (χρώμα γαλάζιο) του στιγμιοτύπου του αγγείου 9185.





**Εικόνα 3.3.10:** Αγγείο 9827.



**Εικόνα 3.3.11:** Αριστερό και δεξί περίγραμμα του στιγμιότυπου της εικόνας 3.3.10 του αγγείου 9827.

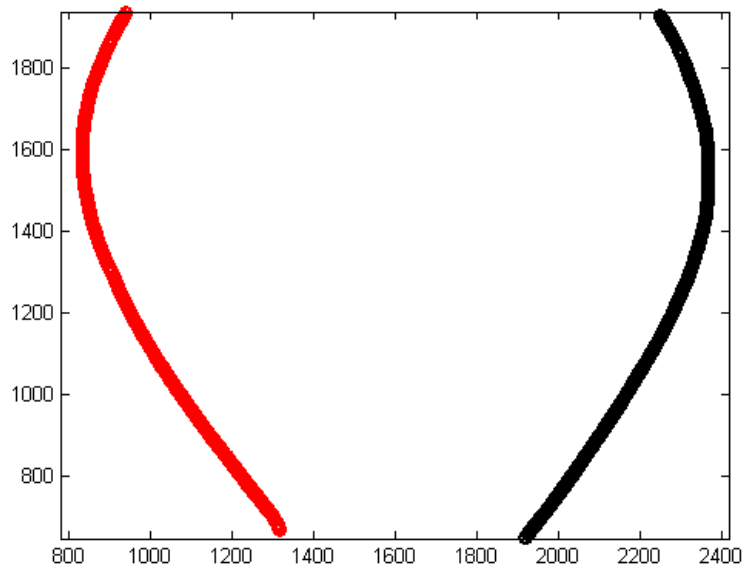


**Εικόνα 3.3.12:** Αριστερό περίγραμμα (χρώμα κίτρινο) και δεξί περίγραμμα (χρώμα γαλάζιο) του στιγμιότυπου του αγγείου 9827.





**Εικόνα 3.3.13:** Αγγείο 10958.



**Εικόνα 3.3.14:** Αριστερό και δεξί περίγραμμα του στιγμιοτύπου της εικόνας 3.3.10 του αγγείου 10958.



**Εικόνα 3.3.15:** Αριστερό περίγραμμα (χρώμα κίτρινο) και δεξί περίγραμμα (χρώμα γαλάζιο) του στιγμιοτύπου του αγγείου 10958.

Ο προσδιορισμός των τμημάτων αυτών και ειδικότερα του πυθμένα και του στομίου έγινε με τη μέθοδο που παρουσιάζεται στα άρθρα [4.9-4.10]. Η μέθοδος αυτή συνίσταται πρώτα στην εξάλειψη του πυθμένα του αγγείου, η οποία πραγματοποιείται με εκμετάλλευση του γεγονότος ότι όλα τα αγγεία που μελετήσαμε είχαν επίπεδη βάση. Εν συνεχεία προσδιορίστηκε κατά προσέγγιση ο άξονας συμμετρίας του αγγείου, ο οποίος χώριζε αυτό σε δύο αρκετά παρόμοια σύνολα εικονοστοιχείων που εύλογα ονομάζουμε 'αριστερό' και 'δεξί' τμήμα του περιγράμματος.

Σε επόμενο βήμα, κάθε τμήμα χωριστά προσεγγίστηκε βέλτιστα, κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, από ένα πολυώνυμο  $n$ -στού βαθμού ως προς  $y$ , με καλύτερες τιμές στην πράξη των  $n=3$  και  $n=5$ .

Επειδή τα αγγεία που μελετήσαμε είχαν σώμα πάντα αισθητά μεγαλύτερου ύψους από το στόμιο και τις λαβές, θεωρήσαμε ως σώμα του αγγέου εκείνο το υποσύνολο του αριστερού και του δεξιού τμήματος του περιγράμματος, το οποίο είχε σταθερή κυρτότητα, δηλαδή η δεύτερη παράγωγος του ως προς  $y$  διατηρούσε σταθερό πρόσημο. Για πιο περίπλοκες περιπτώσεις αγγείων, μπορούν να εφαρμοστούν μέθοδοι εντοπισμού των σημαντικών σημείων καμπής ενός θορυβώδους περιγράμματος, μέθοδοι οι οποίες περιγράφονται στα άρθρα [4.9-4.10].

Στο τέλος αυτής της διαδικασίας από κάθε αγγείο έχει εξαχθεί ένα σύνολο από τουλάχιστον δεκάξι αλυσίδες εικονοστοιχείων  $A_n, n = 1, 2, \dots, n$ , όπου κάθε τέτοια αλυσίδα αντιπροσωπεύει το περίγραμμα μιας όψης του κυρίως σώματος του αγγείου που έχει παραχθεί εκ περιστροφής. Στην ιδανική περίπτωση όπου η περιστροφή ήταν τέλεια, τα τμήματα αυτά του περιγράμματος θα ήταν πανομοιότυπα. Στην πράξη όμως, η διαδικασία της περιστροφής επηρεάζεται από πολλούς τυχαίους παράγοντες, όπως οι τυχαίες παραμορφώσεις του πηλού ή του οδηγού που διαμορφώνουν το σχήμα του πηλού κατά την περιστροφή, οι αλλοιώσεις που υφίσταται το αγγείο κατά το ψήσιμο κ.λ.π. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι προαναφερθείσες αλυσίδες pixels να εμφανίζουν διαφορές μεταξύ τους. Έχουμε παρατηρήσει αγγεία στα οποία εμφανώς αυτά τα τμήματα του περιγράμματος διέφεραν σημαντικά μεταξύ τους, γεγονός που αποδεικνύει είτε κατώτερη τεχνική αγγειοπλασσίας είτε ατυχήματα κατά τη διαδικασία κατασκευής τους. Από την άλλη πλευρά όμως υπάρχουν αγγεία τα οποία είναι εντυπωσιακά

λεία και ομοιόμορφα από όποια γωνία και αν τα παρατηρήσει κανείς. Αυτό μας υπέβαλλε την ιδέα ότι είναι πιθανό να χρησιμοποιήθηκε οδηγός ή καλούπι για την κατασκευή αυτών των αγγείων. Επειδή δε, έχει ήδη θεμελιωθεί ή άποψη ότι και οι φημισμένες τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου Θήρας έχουν σχεδιαστεί με τη χρήση γεωμετρικών οδηγών, αποφασίσαμε να ελέγξουμε αν το περίγραμμα κάποιων αγγείων που έχουν ανασκαφεί στο Ακρωτήρι αντιστοιχεί σε γεωμετρικά πρότυπα. Το πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση αυτή είναι η βέλτιστη προσαρμογή των αλυσίδων  $A_n$ , προσαρμογή η οποία αφ' ενός θα καταδείξει και θα ποσοτικοποιήσει την πιθανή ομοιότητα των αλυσίδων και αφ' ετέρου θα ανοίξει το δρόμο για τον εντοπισμό της μορφής του πιθανού οδηγού ή καλουπιού, όπως θα περιγραφεί στις ενότητες 3.4, 3.5 και 3.6.

Ας υποθεθεί ότι επιθυμούμε να ελέγξουμε την ομοιότητα των υλοποιήσεων των αλυσίδων  $A_n$ , που προέκυψαν από τις φωτογραφίες ενός αγγείου. Ένας ευθύγραμμος τρόπος για να κάνουμε αυτό τον έλεγχο θα ήταν μια διαδικασία η οποία θα περιελάμβανε βέλτιστη προσαρμογή των συγκρινομένων περιγραμμάτων και εκτίμηση του λάθους αυτής της προσαρμογής. [4.1-4.9]. Μία τέτοια διαδικασία στην περίπτωση των τμημάτων περιγραμμάτων  $A_n$ , εμπειρέχει ενδογενώς τη δυσκολία η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι οι αλυσίδες  $A_n$ , έχουν διαφορετικό προσανατολισμό και θέση σε κάθε φωτογραφία του αγγείου. Για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας, η χρησιμοποιητέα μέθοδος προσαρμογής πρέπει να εξαλείφει την τυχαιότητα στον προσανατολισμό και τη θέση των αλυσίδων  $A_n$ . Επομένως, η πρωτότυπη μέθοδος που επιλέχθηκε για τη βέλτιστη προσαρμογή των περιγραμμάτων δύο αλυσίδων  $A_n$ , περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

### Βήμα 1

Δύο αλυσίδες  $A_n$ , τοποθετούνται στον ίδιο ηλεκτρονικό καμβά κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα κέντρα βάρους τους να συμπίπτουν.

### Βήμα 2

Το ένα περίγραμμα  $A_m$ , ενός αγγείου διατηρείται σταθερό και θεωρείται σαν μία καμπύλη αναφοράς.

### Βήμα 3

Η άλλη αλυσίδα εικονοστοιχείων  $A_n, n \neq m$  περιστρέφεται και μετατοπίζεται παράλληλα προς τους δύο άξονες συντεταγμένων.

### Βήμα 4

Ορίζεται ένα μέτρο απόστασης μεταξύ των δύο αλυσίδων περιγραμμάτων  $A_n$ , και  $A_m$ ,

### Βήμα 5

Επιλέγεται εκείνος ο μετασχηματισμός που προσφέρει τη μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο αλυσίδων  $A_n$ , και  $A_m$ , ή ισοδυνάμως το μικρότερο λάθος προσαρμογής.

Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των βημάτων αυτών της μεθόδου.

A. Διαδικασία περιστροφής Σε πρώτο βήμα υπολογίζουμε τα κέντρα βάρους της αλυσίδας αναφοράς  $A_m$ , και της αλυσίδας που μετασχηματίζεται  $A_n$ , και τα ονομάζουμε  $KB_1$  και  $KB_2$  αντίστοιχα. Μεταφέρουμε την αλυσίδα  $A_n$ , κατά τρόπο ώστε το κέντρο βάρους της να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, αφαιρώντας από κάθε σημείο της το διάνυσμα  $\overrightarrow{OKB_2}$ .

Εν συνεχεία περιστρέφουμε την αλυσίδα  $A_n$ , με ένα ικανό πλήθος γωνιών  $\varphi$ , πολλαπλασιάζοντας κάθε σημείο της  $A_n$ , με τη μήτρα περιστροφής

$$TR = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.3) (1)$$

Κατά τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε μία πρώτη μετασχηματισμένη ψηφιακή καμπύλη την  $A_n^R(\varphi)$ .

Β. Παράλληλη μετατόπιση: Μετατοπίζουμε παραλλήλως το  $A_n^R(\varphi)$  στο  $KB_1$ . Και επιτρέπουμε στο μετατοπισμένο  $A_n^R(\varphi)$  να μετακινείται κατά  $\delta x \delta y$  γύρω απ το  $KB_1$  οπότε λαμβάνουμε μια αλυσίδα  $A_n^{RP}(\varphi, \delta x, \delta y)$ .

Γ. Κριτήριο προσαρμογής των  $A_m$ , και  $A_n$ .

Θεωρούμε ως τη βέλτιστη προσαρμογή των  $A_m$ , και  $A_n$ , εκείνο το σχηματισμό που αποτελείται από το  $A_m$ , στην αρχική του θέση και από το  $A_n^{RP}(\varphi^B, \delta x^B, \delta y^B)$  όπου τα  $\varphi^B, \delta x^B, \delta y^B$  είναι εκείνες οι παράμετροι του μετασχηματισμού που καθιστούν την απόσταση των δύο ψηφιακών καμπυλών  $A_m$ , και  $A_n^{RP}(\varphi^B, \delta x^B, \delta y^B)$  ελάχιστη σύμφωνα με το κάτωθι επιλεγμένο κριτήριο. Για τον ορθό προσδιορισμό του κριτηρίου αυτού πραγματοποιήθησαν πολλές δοκιμές. Καταλήξαμε στο κριτήριο που απεδείχθη ισχυρό, σύμφωνα με το οποίο

α). υπολογίζουμε την Ευκλείδια απόσταση κάθε σημείου  $N$  της  $A_n^{RP}(\varphi, \delta x, \delta y)$  από την  $A_m$ , την οποία συμβολίζουμε  $d(N, A_m)$ .

β). ομοίως χρησιμοποιούμε την Ευκλείδια απόσταση κάθε σημείου  $M$  της  $A_m$  από την  $A_n^{RP}(\varphi, \delta x, \delta y)$  την οποία συμβολίζουμε  $d(M, A_n^{RP}(\varphi, \delta x, \delta y))$ .

γ). Ορίζουμε ως μέτρο της απόστασης των δυο καμπυλών  $A_m$  και  $A_n^{RP}(\varphi, \delta x, \delta y)$ , το ημίθροισμα των δυο ανωτέρω αποστάσεων, δηλαδή

$$d(A_m, A_n^{RP}(\varphi, \delta x, \delta y)) = \frac{(d(N, A_m) + d(M, A_n^{RP}(\varphi, \delta x, \delta y)))}{2} \quad (3.3) (2)$$

δ). Οι βέλτιστοι παράμετροι προσαρμογής  $(\varphi^B, \delta x^B, \delta y^B)$  των καμπυλών  $A_m$  και  $A_n$ , είναι εκείνες που ελαχιστοποιούν την απόσταση που ορίστηκε στο (γ) ανωτέρω.

### 3.4 Η έννοια του ιδεατού αντιπροσώπου για κάθε αγγείο.

Η βασική προσέγγιση που ερευνήθηκε και δοκιμάστηκε βασίζεται στην υπόθεση ότι ο κάθε αγγειοπλάστης ενδεχομένως χρησιμοποιούσε έναν οδηγό ή ένα καλούπι ή εν πάση περιπτώσει μια τεχνική ακριβούς αναπαραγωγής ενός επιθυμητού σχήματος αγγείου. Προφανώς η χρήση του όποιου οδηγού - βοηθητικού εργαλείου σε σχέση με τον πηλό, είχε σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας επιφάνειας εκ περιστροφής η οποία ήταν μεν κοντά στη μορφή του οδηγού, αλλά ταυτόχρονα ήταν θορυβώδης παραλλαγή αυτού. Αυτός ο προστιθέμενος θόρυβος, είναι μάλλον εύλογο να υποθέσει κανείς ότι οφείλεται στην πολυπλοκότητα που εμφανίζει στην πράξη η διαδικασία της αγγειοπλαστικής ( π.χ. σε μικρές μεταβολές στη σχέση οδηγού πηλού, σε ενδεχόμενες ατέλειες του οδηγού, σε διακυμάνσεις της σύστασης των πρώτων υλών, σε ενδεχόμενες ανεπαίσθητες κινήσεις της χειρός του αγγειοπλάστη κ.λ.π). Αν η καμπύλη του οδηγού ή της γενέτειρας του αναπαραγωγικού εργαλείου ήταν μια διανυσματική συνάρτηση μίας μεταβλητής  $\vec{r}^M(t)$ , τότε το αποτέλεσμα της αγγειοπλαστικής θα ήταν μία επιφάνεια εκ περιστροφής, κάθε τομή της οποίας με ένα επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής θα ήταν της μορφής  $\vec{r}^M(t) + \vec{n}(t)$ . Το  $\vec{n}(t)$  στην αμέσως προηγούμενη σχέση είναι μια συνάρτηση στοχαστική που περιγράφει το θόρυβο, ή ισοδυνάμως τη διαταραχή που προκλήθηκε επί του ιδεατού προτύπου για τους λόγους που προαναφέρθηκαν ανωτέρω.

Επιπλέον αυτών των λόγων, θεωρούμε ότι η στοχαστική συνάρτηση θορύβου  $\vec{n}(t)$  περιλαμβάνει και τη φθορά που έχουν υποστεί οι υλοποιήσεις των αγγείων μέσα από τους αιώνες.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε για να ελέγξουμε την υπόθεση εάν κάποιες οικογένειες αγγείων έχουν παραχθεί με χρήση ενός οδηγού ή αναπαραγωγικού εργαλείου, βασίζεται στην προσπάθεια ικανοποιητικής εκτίμησης του ιδεατού προτύπου  $\vec{r}^M(t)$  ενός αγγείου από πολλές φωτογραφίες πλαγίων όψεων αυτού. Επομένως, η μέθοδος αυτή μπορεί να διατυπωθεί με μαθηματικό τρόπο ως εξής:

Δεδομένων ενός συνόλου  $N$  περιγραμμάτων πλαγίων όψεων του ιδίου αγγείου  $\vec{r}^M(t) + \vec{n}_i(t)$  με  $i=1,2,\dots,N$ , πραγματοποίησε την καλύτερη δυνατή εκτίμηση του  $\vec{r}^M(t)$ . Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να επιτύχουμε την καλύτερη και συνεπέστερη εξάλειψη του θορύβου από αυτά τα περιγράμματα. Στην προσπάθεια αυτή θα

χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο βέλτιστης προσαρμογής ψηφιακών καμπυλών που περιγράφηκε στην ενότητα 3.3

Πράγματι:

Μια πρώτη εκτίμηση του ιδεατού προτύπου του οδηγού ενός αγγείου

Πραγματοποιήσαμε μια πρώτη εκτίμηση του αποθρομβωποιημένου ιδεατού προτύπου ενός αγγείου με μια πρωτότυπη μέθοδο που περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

α). Ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε αγγείο, το οποίο έχουμε φωτογραφήσει σε  $N^o$  θέσεις, λαμβάνοντας ισοπληθές σύνολο πλαγίων όψεων του αγγείου.

Στη συνέχεια πραγματοποιούμε αυτόματη κατάτμηση της εικόνας κάθε όψεως, εξαγωγή του περιγράμματος του αγγείου σε κάθε όψη και προσδιορισμό των περιγραμμάτων εκ περιστροφής  $A_n$ , δηλαδή των τμημάτων του περιγράμματος του αγγείου που δεν περιλαμβάνει τη βάση το στόμιο και τις λαβές.

β). Στη συνέχεια επιλέγουμε, με τυχαίο τρόπο, μία οποιαδήποτε αλυσίδα  $A_m$ , του αγγείου και τοποθετούμε σε ένα κατάλληλο σύστημα αναφοράς δηλαδή σε αντίστοιχο πλαίσιο (ηλεκτρονικό καμβά), ούτως ώστε το κέντρο βάρους της αλυσίδας εικονοστοιχίων  $A_m$ , να βρίσκεται στο κέντρο του πλαισίου.

γ) Επιλέγουμε πάλι με τυχαίο τρόπο, μία δεύτερη αλυσίδα εικονοστοιχείων του περιγράμματος του αγγείου  $A_n$ . Το  $A_n$ , αυτό μετασχηματίζεται κατάλληλα ως στερεό σώμα, ώστε να ταιριάζει βέλτιστα στο πρώτο περίγραμμα  $A_m$ , όπως περιγράφεται παρακάτω:

i). Ο μετασχηματισμός που ασκείται στο  $A_n$ , ώστε αυτό να ταιριάζει βέλτιστα στο  $A_m$ , αποτελείται από τους εξής τρεις τελεστές:

- Μία στροφή κατά γωνία  $\varphi$
- Μία παράλληλη μετατόπιση κατά τον άξονα  $x$
- Μία παράλληλη μετατόπιση κατά τον άξονα  $y$

ii). Δημιουργούμε μια πυκνή εκδοχή της  $A_m$ , με πολυωνυμική παρεμβολή και προσαρμόζουμε βέλτιστα την  $A_n$ , στην διακριτοποιημένη  $A_m^C$ , όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.3.

δ) Αφού τα  $A_m$ , και  $A_n$ , ταιριάζουν βέλτιστα, με τη μέθοδο της 3.3 πραγματοποιείται κατάλληλη εξαγωγή του μέσου όρου των ταιριασμένων περιγραμμάτων  $A_m$ , και μετασχηματισμένου  $A_n$ , αφετέρου, όπως περιγράφεται κατωτέρω:

- Προβάλλουμε τόσο το  $A_m$ , όσο και το προσαρμοσμένο σε αυτό  $An^{RP}$ , στον άξονα των  $y$ . Αυτό προϋποθέτει ότι το αγγείο έχει φωτογραφηθεί σε κατακόρυφη θέση, γεγονός που σχολαστικά εξασφάλισαμε. Εννοείται, ότι σε διαφορετική θέση φωτογράφισης, η μέθοδος που αναπτύξαμε εφαρμόζεται πλήρως, με απλή αντικατάσταση του άξονα  $y$  με το νοητό άξονα περιστροφής του αγγείου. Θεωρούμε ότι οι προβολές των  $A_m$ , και του προσαρμοσμένου  $An^{RP}$ , στον άξονα  $y$  εκτείνονται συνολικά από  $y_0$  έως  $y_1$ .

- Υποδιαιρούμε το διάστημα  $[y_0, y_1]$  σε  $N^y$  ίσα διαστήματα μήκους 2 pixels το καθένα και σε κάθε σημείο αυτής της διαμέρισης φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον  $X$  άξονα προς την πλευρά του σχηματισμού των δύο προσαρμοσμένων περιγραμμάτων του αγγείου.

- Έστω η περιοχή  $V_k$  που ορίζεται μεταξύ δύο διαδοχικών ευθειών από τις ανωτέρω. Εντός αυτής της περιοχής αναμένεται να περιλαμβάνεται ένας αριθμός pixels τόσο του περιγράμματος  $A_m$ , όσο και του  $A_n$ , για τα οποία pixel υπολογίζεται ο μέσος όρος, χωριστά για το  $A_m$ , και χωριστά για το  $An^{RP}$ . Ο μέσος όρος αυτών των δύο μέσων όρων είναι ένας κοινός αντιπρόσωπος  $M_{1,k}$  των ταιριασμένων  $A_m$ , και  $An^{RP}$ , στη συγκεκριμένη περιοχή  $V_k$ . Είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε κάθε χώρο  $V_k$  να υπολογιστεί πρώτα ο μέσος όρος των εικονοστοιχείων του  $A_m$ , χωριστά, μετά του  $An^{RP}$ , και μετά ο μέσος όρος αυτών των μέσων όρων, ώστε η καμπύλη που προκύπτει να μη μεταφέρει ατέλειες της ψηφιακής απεικόνισης ή της κατασκευής του αγγείου.

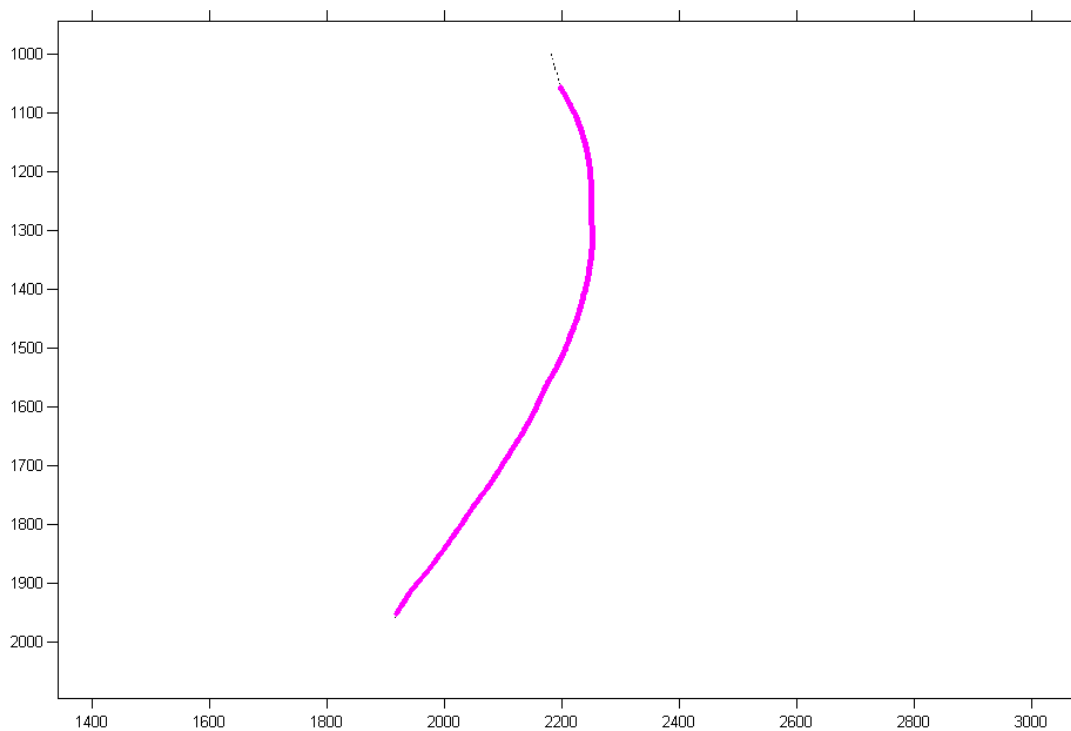
Όλα τα  $M_{1,k}$  σχηματίζουν μια διακριτή καμπύλη  $M_1$  που είναι ένα είδος μέσου όρου των προσαρμοσμένων  $A_m$ , και  $An^{RP}$ .

ε) Με τυχαίο τρόπο, ξανά, επιλέγεται ένα νέο περίγραμμα του συγκεκριμένου αγγείου  $A_\ell$ , και υφίσταται τους μετασχηματισμούς που περιγράφηκαν στην παράγραφο (γ) ώστε να ταιριάζει με βέλτιστο τρόπο στον μέσο όρο  $M_1$  σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3.3. Μετά την προσαρμογή επαναλαμβάνεται η διαδικασία εξαγωγής μέσου όρου που

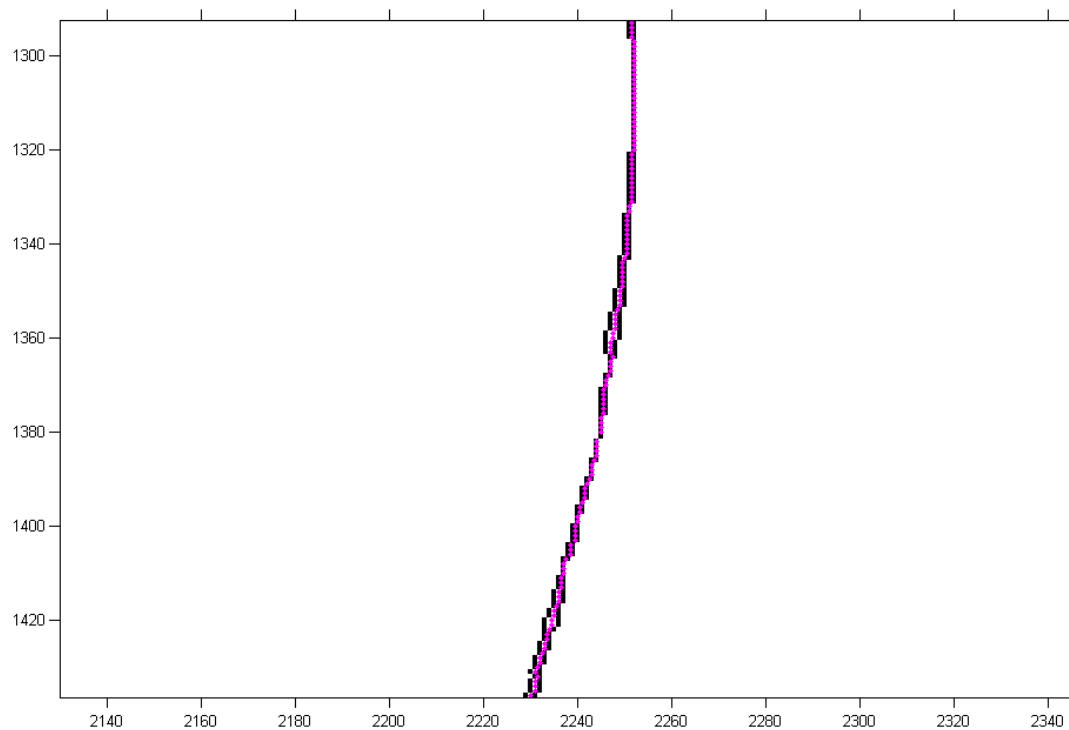


περιγράφηκε προηγουμένως, οπότε και προκύπτει μία νέα ψηφιακή καμπύλη  $M_2$ , η οποία στην ουσία είναι ο μέσος όρος των βέλτιστα ταιριασμένων  $A_m$ ,  $An^{RP}$ ,  $A_\ell^{RP}$ . Δηλαδή, αυτός ο μέσος όρος  $M_{2,k}$  έχει προκύψει από τους τρεις μέσους όρους των pixels των πλευρών των  $A_m$ ,  $An^{RP}$ ,  $A_\ell^{RP}$  που βρίσκονται εντός της περιοχής  $V_k$ , για κάθε  $k$ .

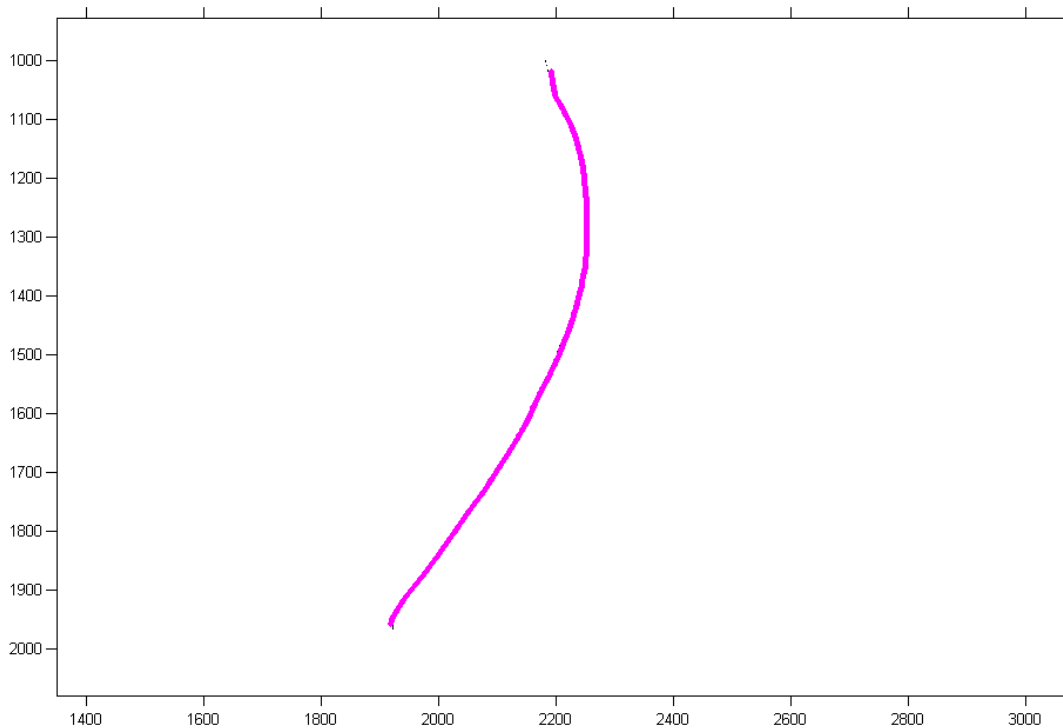
Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται διαλέγοντας κάθε φορά τυχαία τα περιγράμματα που υπολείπονται, ώστε να προσαρμοστούν βέλτιστα στον προηγούμενο μέσο όρο  $M_i$  και υπολογίζεται κάθε φορά η νέα καμπύλη  $M_{i+1}$ , ως η μέση τιμή των  $A_m$ ,  $An^{RP}$ ,  $A_\ell^{RP}$  που επελέγησαν, μέχρις ότου εξαντληθούν όλες οι  $2N^O$  αλυσίδες εικονοστοιχείων του περιγράμματος του συγκεκριμένου αγγείου. Κατά αυτόν τον τρόπο λαμβάνεται μια πρώτη εκτίμηση του ιδεατού προτύπου  $\Pi_1$  του συγκεκριμένου αγγείου. (Εικόνες 3.4.1-3.4.12).



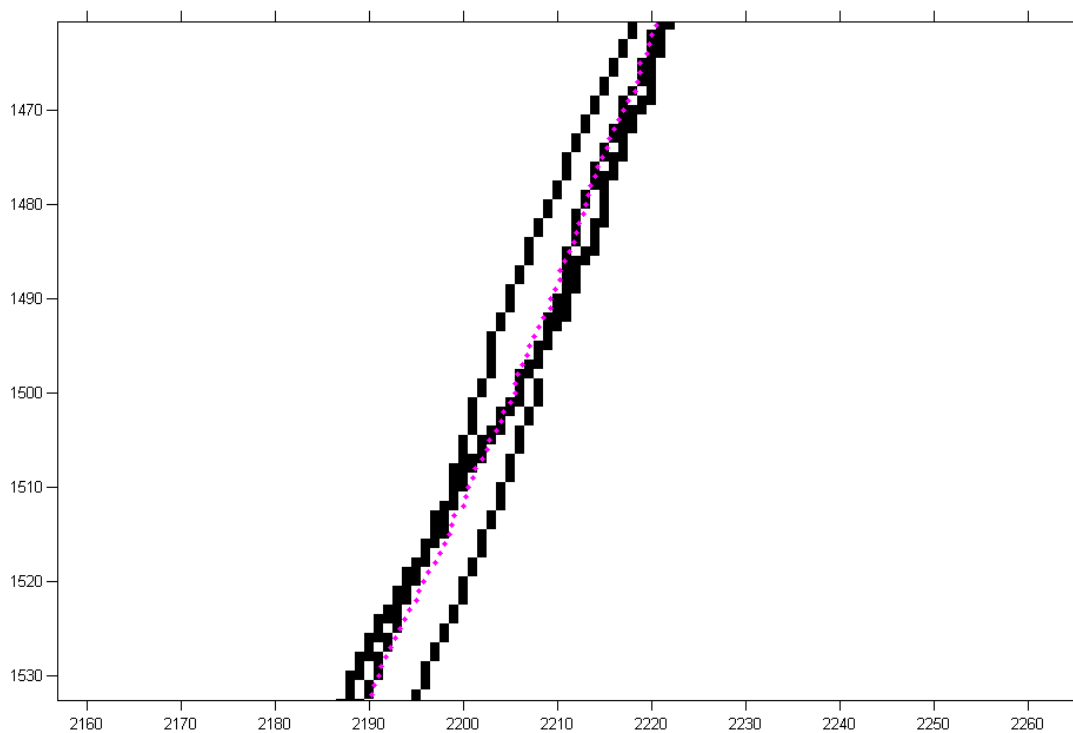
**Εικόνα 3.4.1:** Αγγείο 9920. Δύο περιγράμματα βέλτιστα προσαρμοσμένα και μια πρώτη προσέγγιση του ιδεατού προτύπου Π1 του συγκεκριμένου αγγείου.



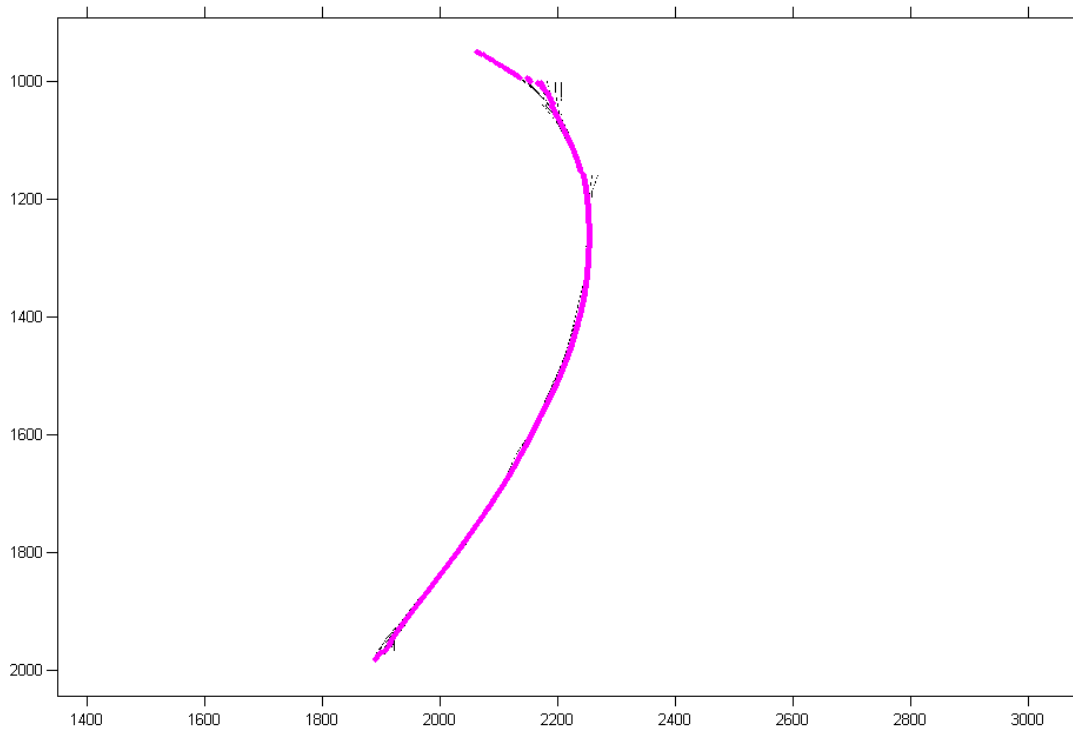
**Εικόνα 3.4.2:** Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4.1.



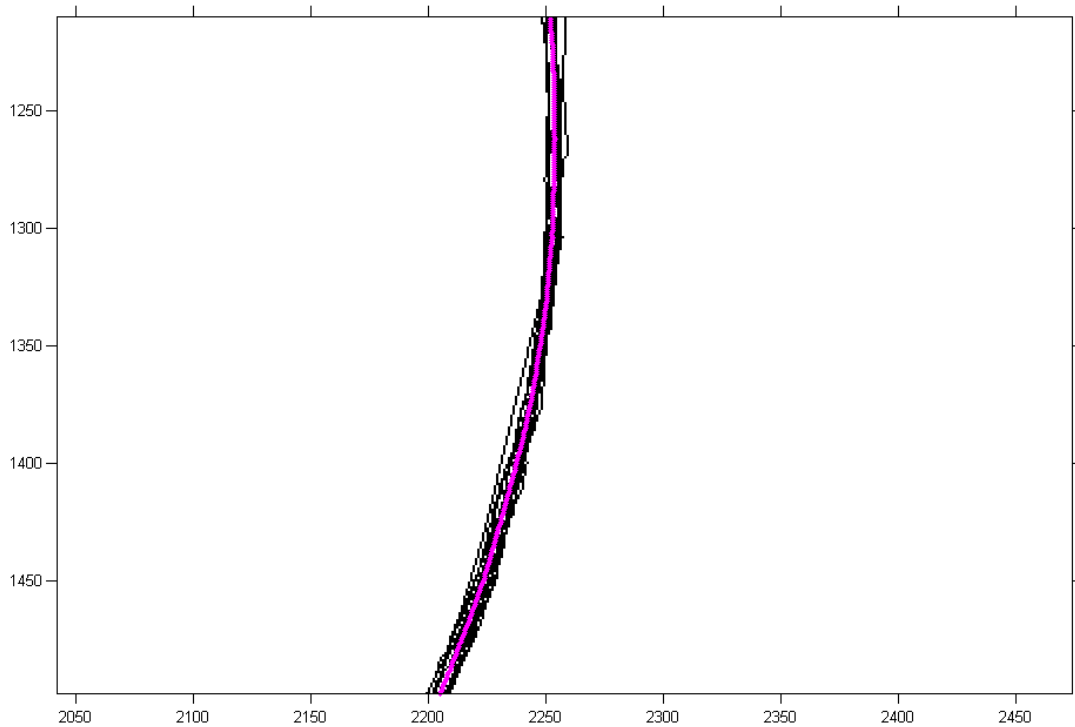
**Εικόνα 3.4.3:** Αγγείο 9920. Τρία περιγράμματα βέλτιστα προσαρμοσμένα και μια άλλη προσέγγιση του συγκεκριμένου αγγείου.



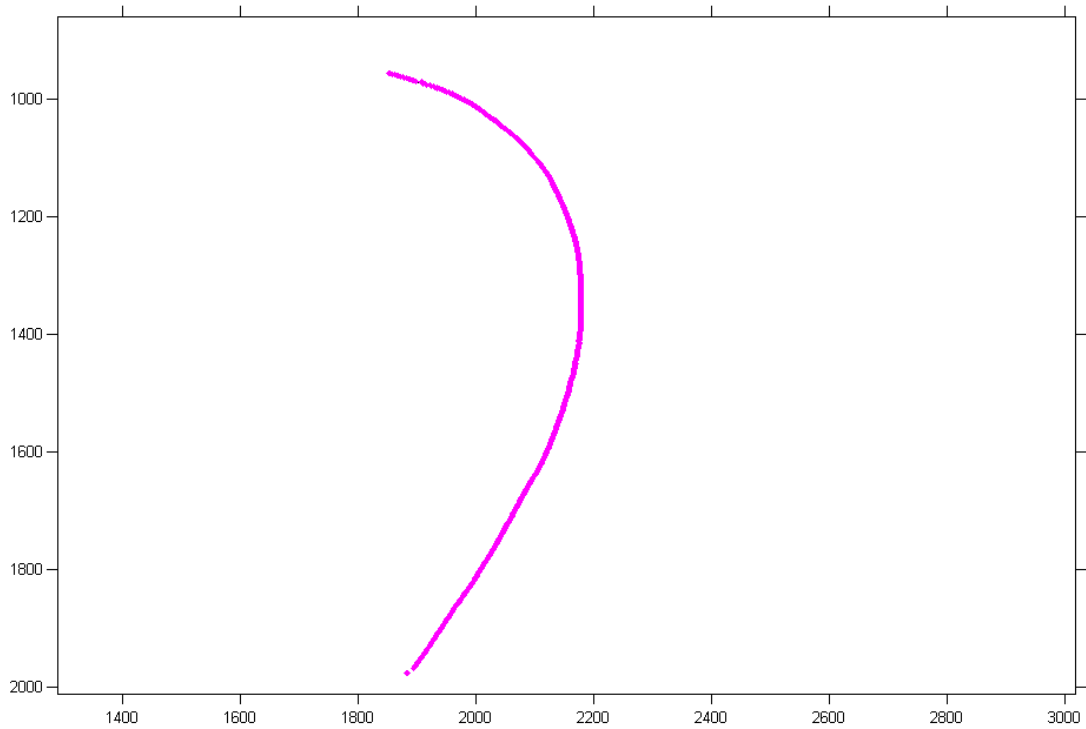
**Εικόνα 3.4.4:** Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4.3.



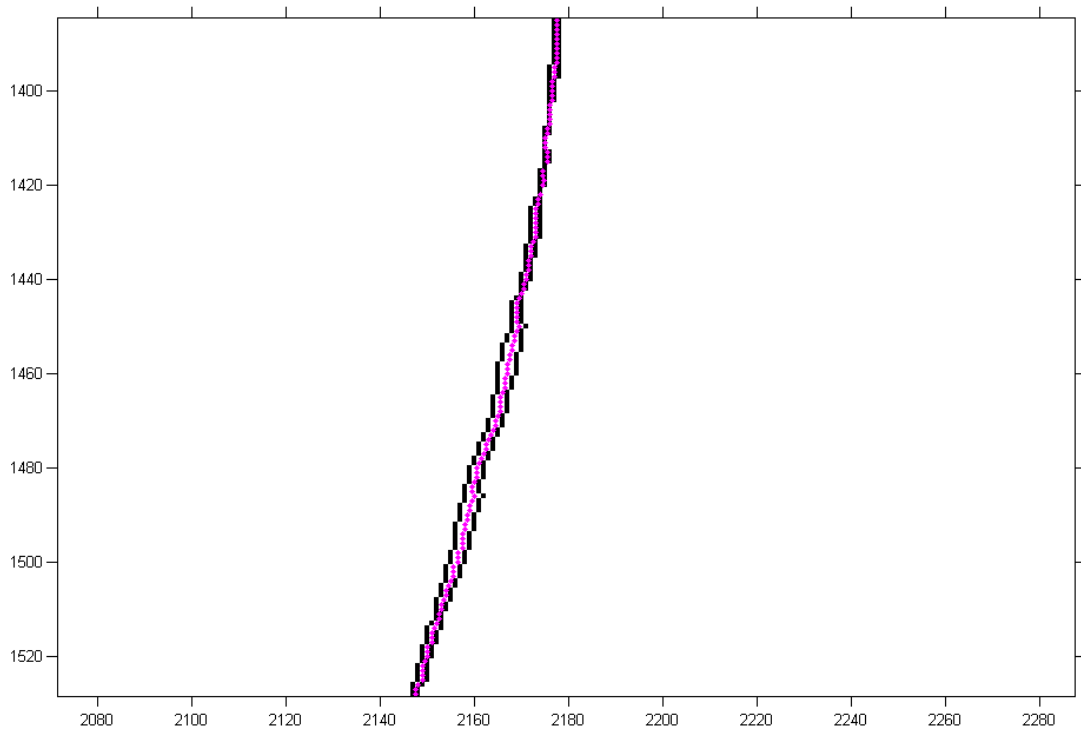
**Εικόνα 3.4.5:** Βέλτιστη προσαρμογή όλων των περιγραμμάτων του εν λόγω αγγείου και μια πρώτη συνολική εκτίμηση του ιδεατού προτύπου Π1 του συγκεκριμένου αγγείου.



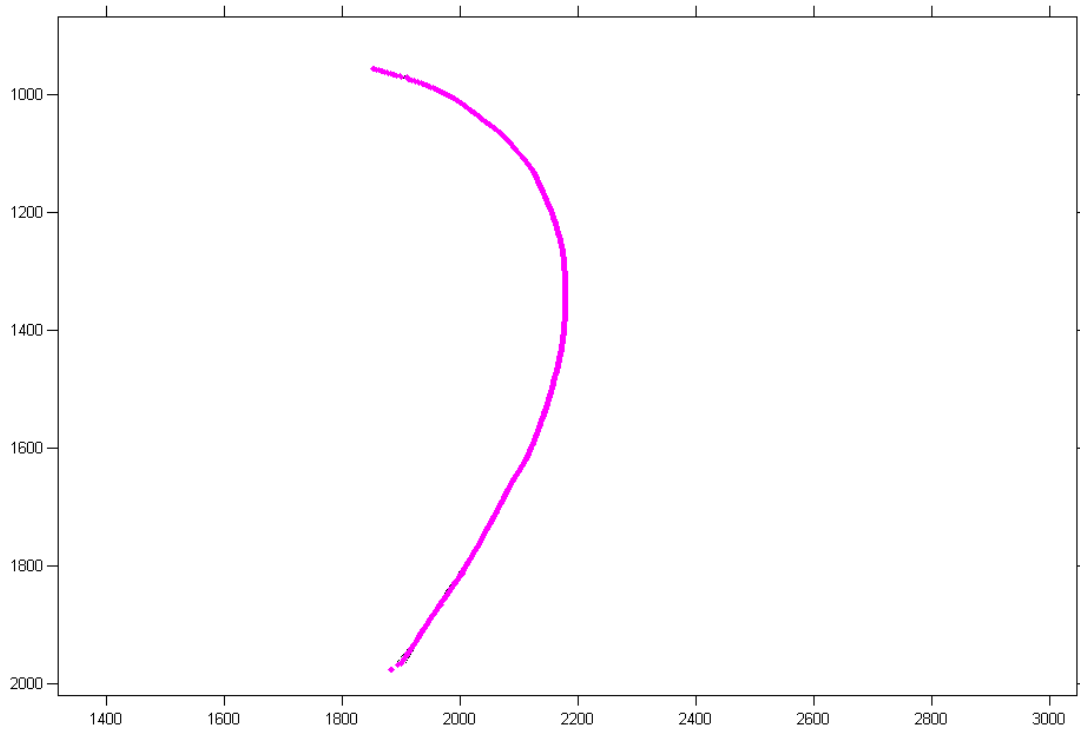
**Εικόνα 3.4.6:** Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4.5.



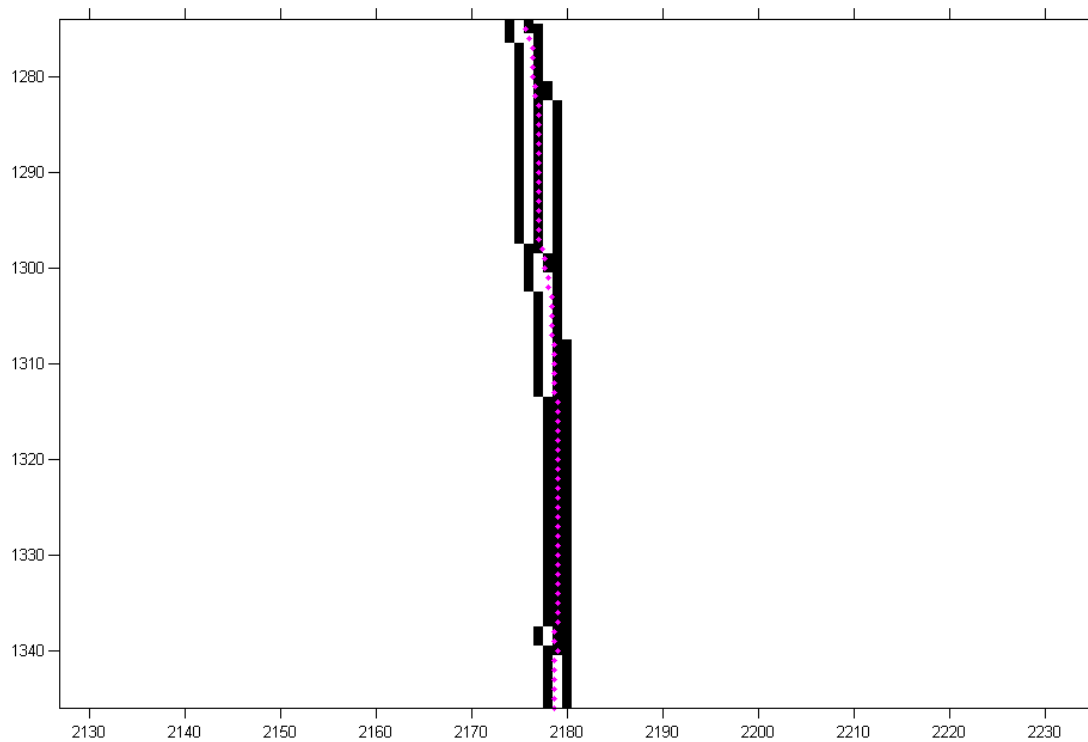
**Εικόνα 3.4.7:** Αγγείο 8808. Δύο περιγράμματα βέλτιστα προσαρμοσμένα και μια πρώτη προσέγγιση του ιδεατού προτύπου Π1 του συγκεκριμένου αγγείου.



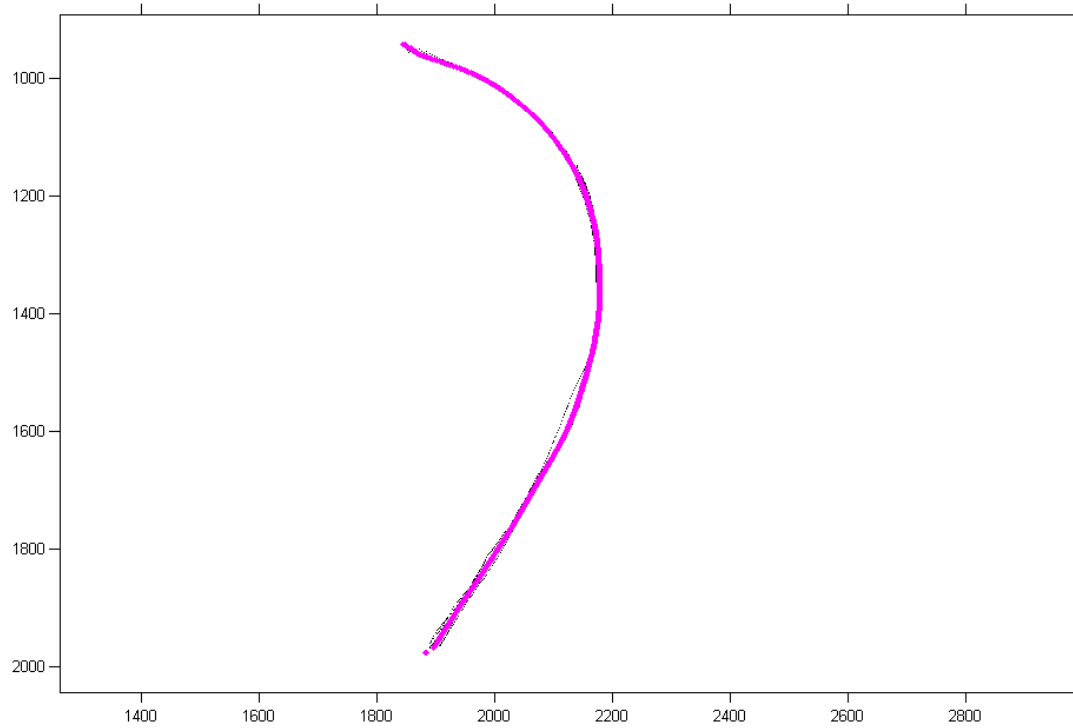
**Εικόνα 3.4.8:** Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4.7.



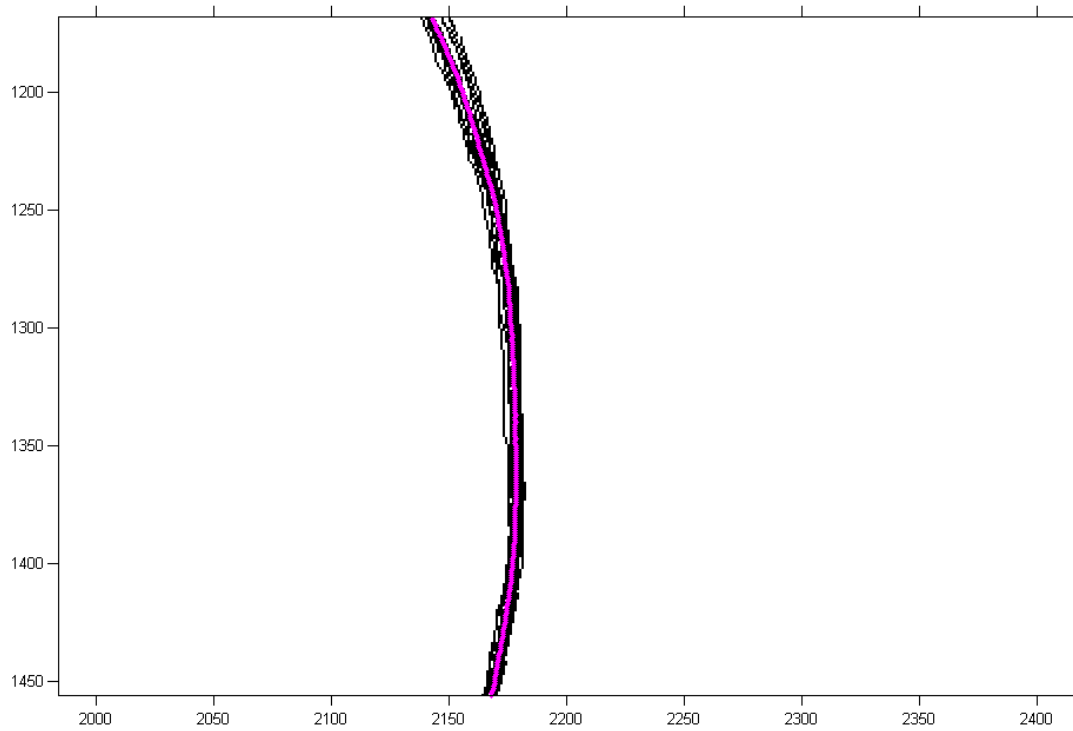
**Εικόνα 3.4.9:** Αγγείο 8808. Τρία περιγράμματα βέλτιστα προσαρμοσμένα και μια άλλη προσέγγιση του συγκεκριμένου αγγείου.



**Εικόνα 3.4.10:** Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4.9.



**Εικόνα 3.4.11:** Αγγείο 8808. Περίγραμμα όλων των αλυσίδων και μια πρώτη προσέγγιση του ιδεατού προτύπου  $\Pi_1$  του συγκεκριμένου αγγείου, βέλτιστα προσαρμοσμένα.



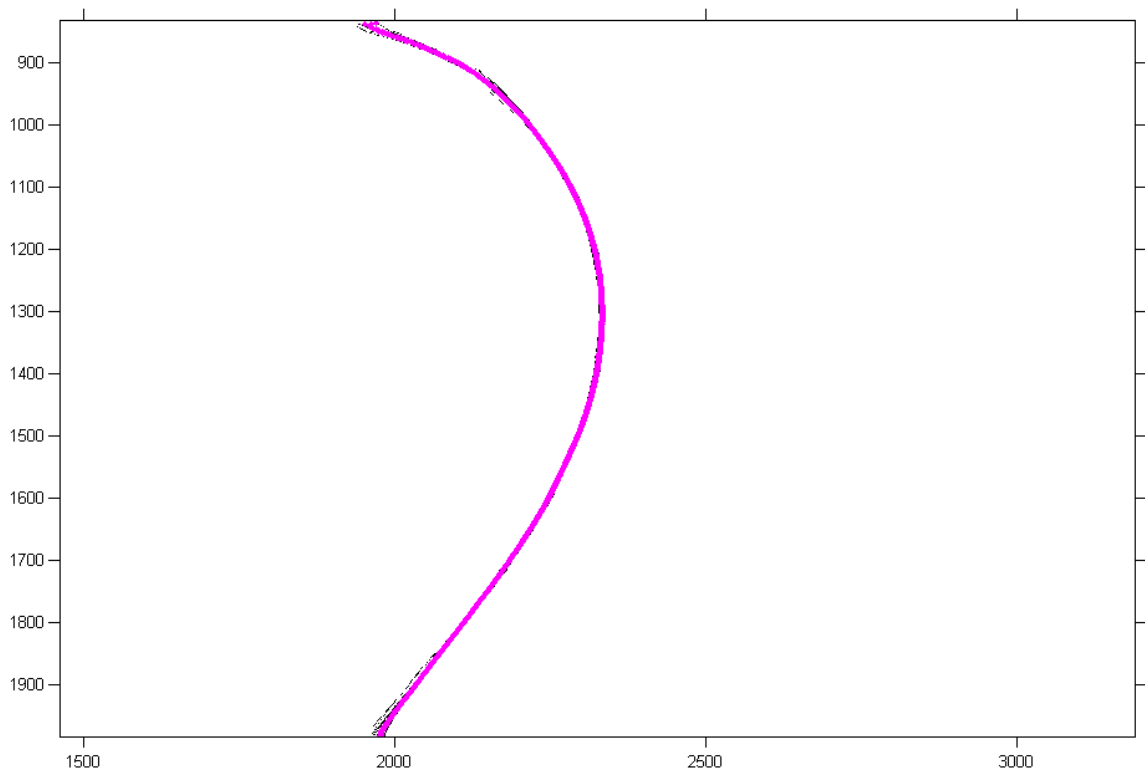
**Εικόνα 3.4.12:** Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4.11.

Μετά το τέλος της διαδικασίας της αρχικής εκτίμησης του ιδεατού προτύπου  $\Pi_1$  μπορούμε να υπολογίσουμε μια βελτιωμένη εκδοχή αυτού, ώστε να περιορίσουμε ακόμα περισσότερο τον θόρυβο. Ειδικότερα, εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας όμως για τον ρόλο του προτύπου περιγράμματος το  $\Pi_1$  που εξήχθη προηγουμένα. Η προσαρμογή των περιγραμμάτων  $A_n$ , στο  $\Pi_1$ , γίνεται αφού κάθε ένα από αυτά υποστεί τους μετασχηματισμούς που αναφέρθηκαν στο (γ), δηλαδή, στροφή και παράλληλη μετατόπιση και πάντα σύμφωνα με την πρωτότυπη μέθοδο 3.3.

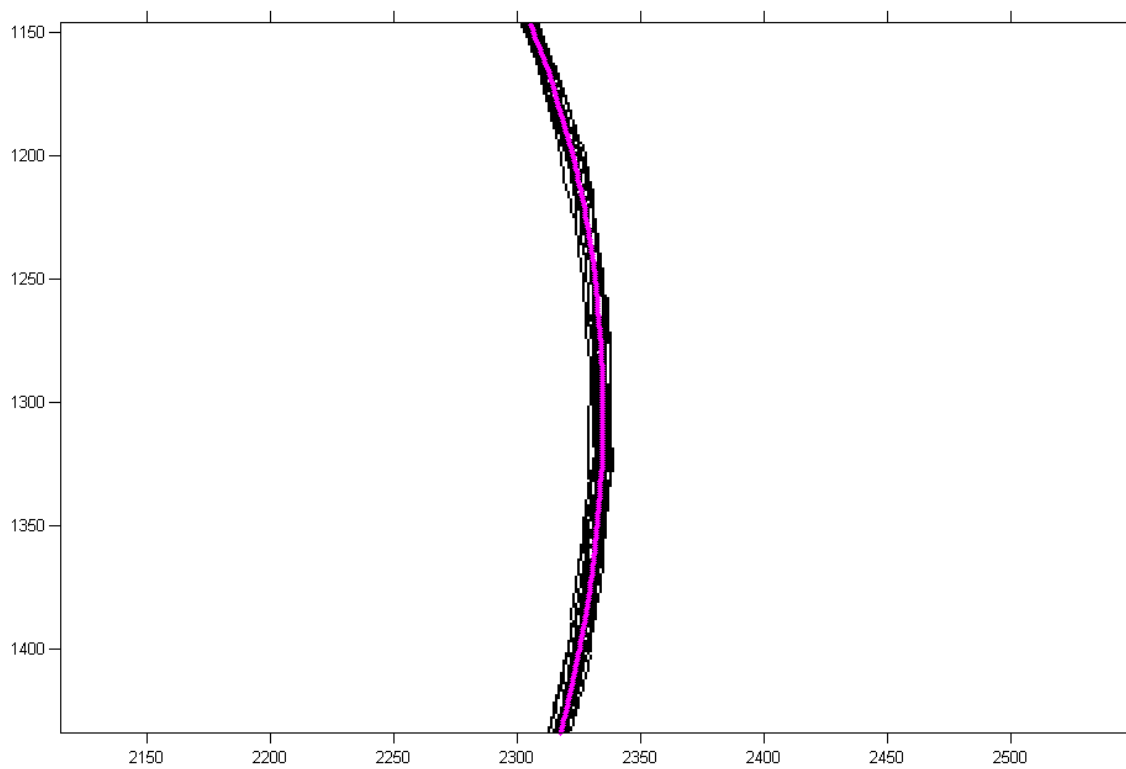
Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας προσαρμογής, επανυπολογίζεται ένας συνολικός αντιπρόσωπος όλων των βέλτιστα προσαρμοσμένων στο  $\Pi_1$   $A_n$ , όπως ακριβώς περιγράφηκε στο (δ) προηγουμένως,.

Η νέα ψηφιακή καμπύλη που θα προκύψει, συμβολίζεται  $\Pi_2$  και θεωρούμε ότι είναι μία καλύτερη υλοποίηση του ιδεατού προτύπου του οδηγού του εξεταζομένου αγγείου. Η υπόθεση ότι το  $\Pi_2$  είναι ακριβέστερη προσέγγιση του ιδεατού προτύπου του αγγείου από το  $\Pi_1$ , βασίζεται στο γεγονός ότι τα  $A_n$ , προσαρμόζονται τώρα σε μία καμπύλη στην οποία έχει γίνει ήδη αποθορυβοποίηση [4.11-4.12]. (Εικόνες 3.4.13-3.4.14).





**Εικόνα 3.4.13:** Αγγείο 8493. Περιγράμματα όλων των αλυσίδων βέλτιστα προσαρμοσμένα στο Π1 που απεικονίζεται με χρώμα magenta. Η καλύτερη ποιότητα προσαρμογής είναι αρκετά εμφανής.

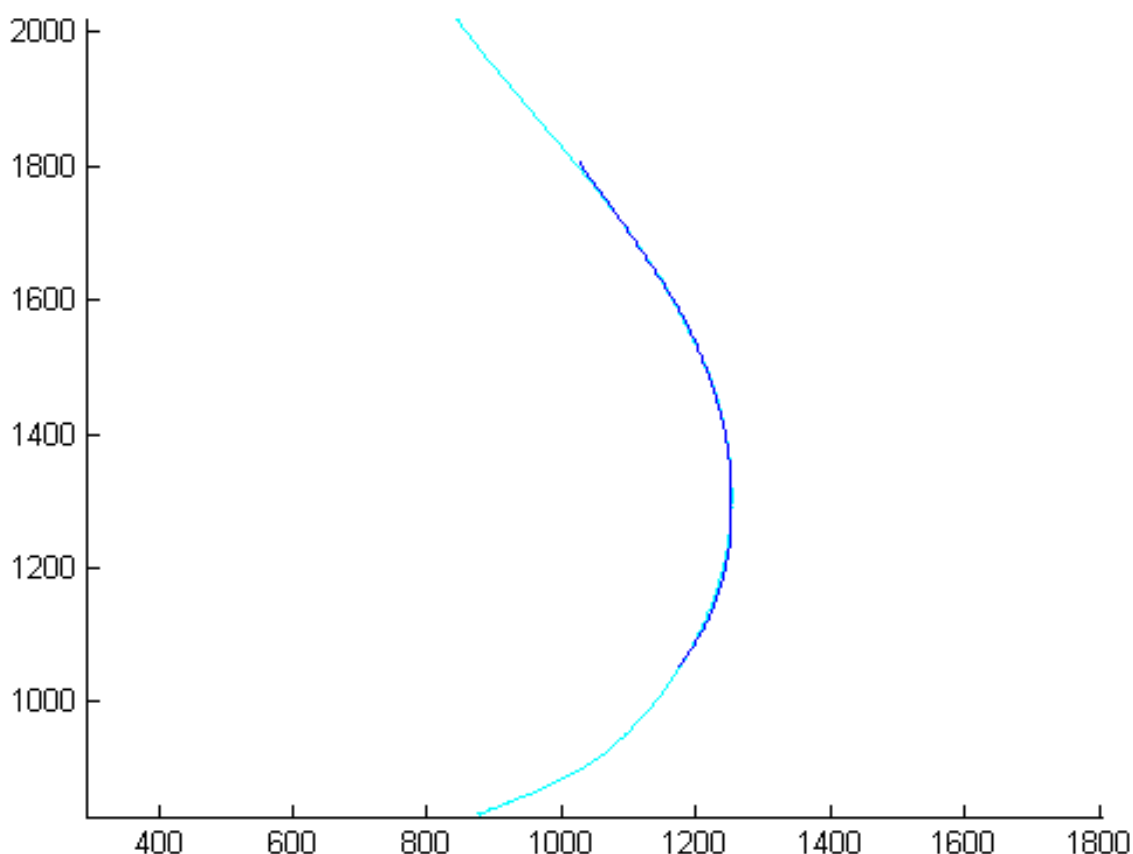


**Εικόνα 3.4.14:** Αγγείο 8493. Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4.13.

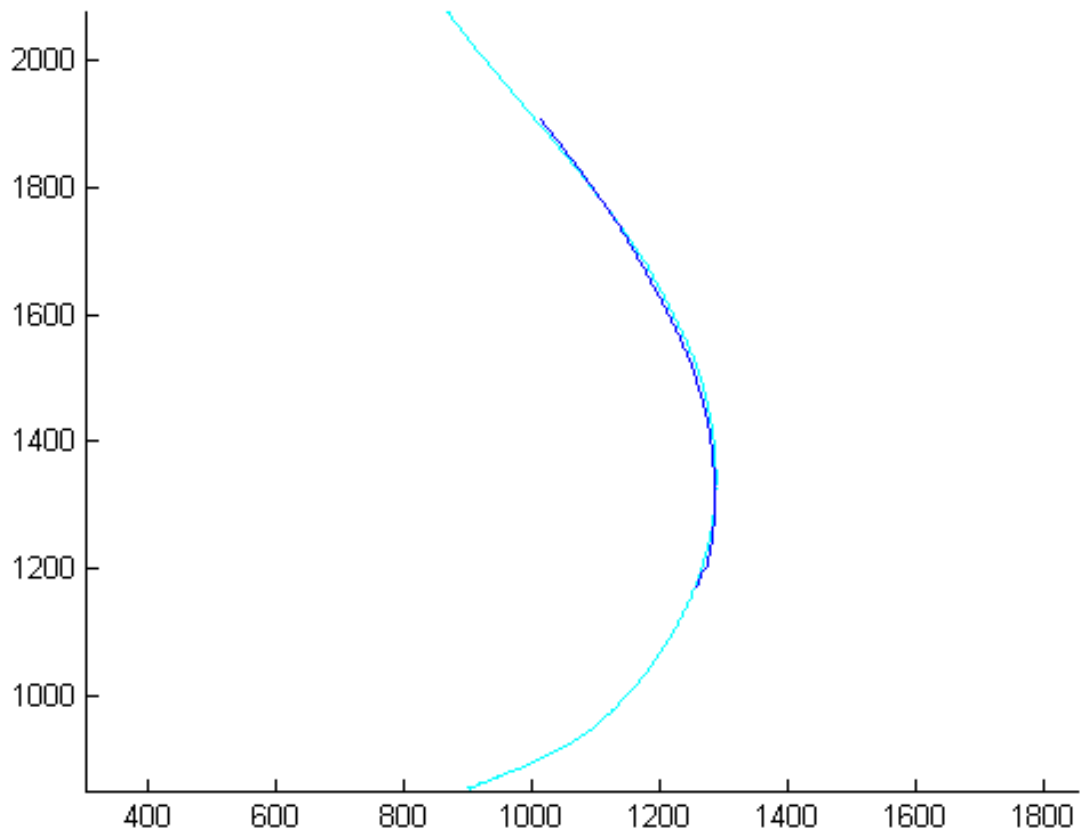
### 3.5 Βέλτιστη προσαρμογή των ιδεατών αντιπροσώπων ανά ζεύγη για τη μαθηματικά θεμελιωμένη ομαδοποίηση των αγγείων.

Εφαρμόσαμε τη μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας 3.4 στα 21 διαθέσιμα αγγεία και για κάθε ένα από αυτά υπολογίσαμε τον ιδεατό του αντιπρόσωπο. Εν συνεχεία, συγκρίναμε τους ιδεατούς αντιπροσώπους ανά ζεύγη, εφαρμόζοντας τη μέθοδο προσαρμογής καμπυλών της ενότητας, η οποία προσφέρει και το ελάχιστο λάθος προσαρμογής. Οι σχετικές συγκρίσεις θεμελίωσαν ότι τα αγγεία αυτά κατηγοριοποιούνται σε δύο ομάδες, όπου η ομοιότητα των ιδεατών αντιπροσώπων εντός της ίδιας ομάδας, αλλά και η διαφοροποίησή τους όταν οι αντιπρόσωποι ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες ήταν σαφέστατες.

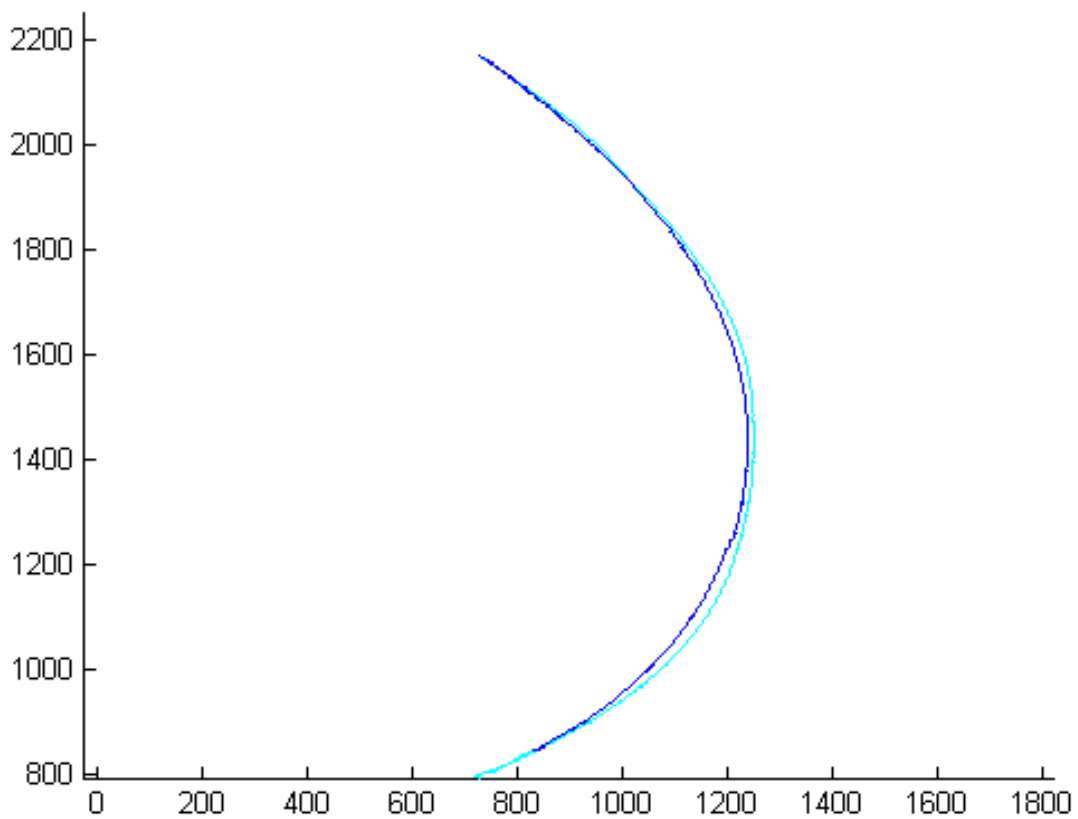
Η εξαιρετική προσαρμογή των δύο ιδεατών αντιπροσώπων καταδεικνύει ότι τα δύο αντίστοιχα αγγεία ανήκουν στην ίδια ομάδα όσον αφορά την ομοιότητα τους και ενδεχομένως τον τρόπο κατασκευής τους. (Εικόνες 3.5.1-3.5.5).



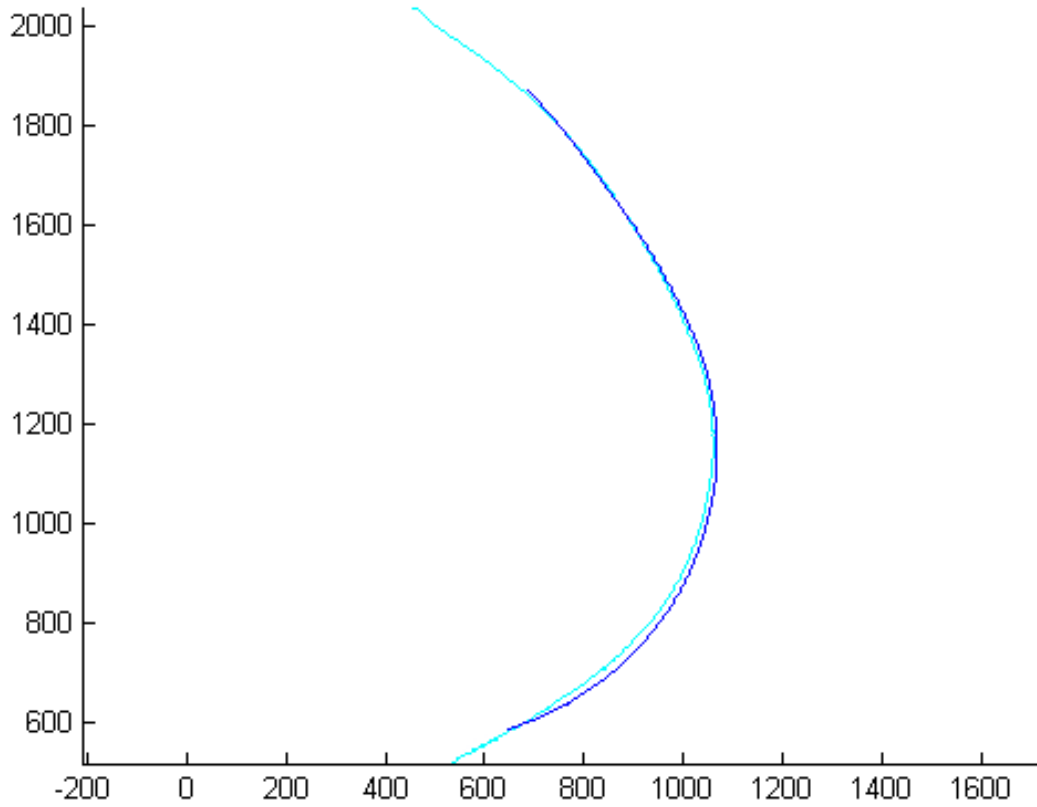
**Εικόνα 3.5.1:** Ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 8493 (χρώμα γαλάζιο) και ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 8808 (χρώμα μπλε), βέλτιστα προσαρμοσμένοι.



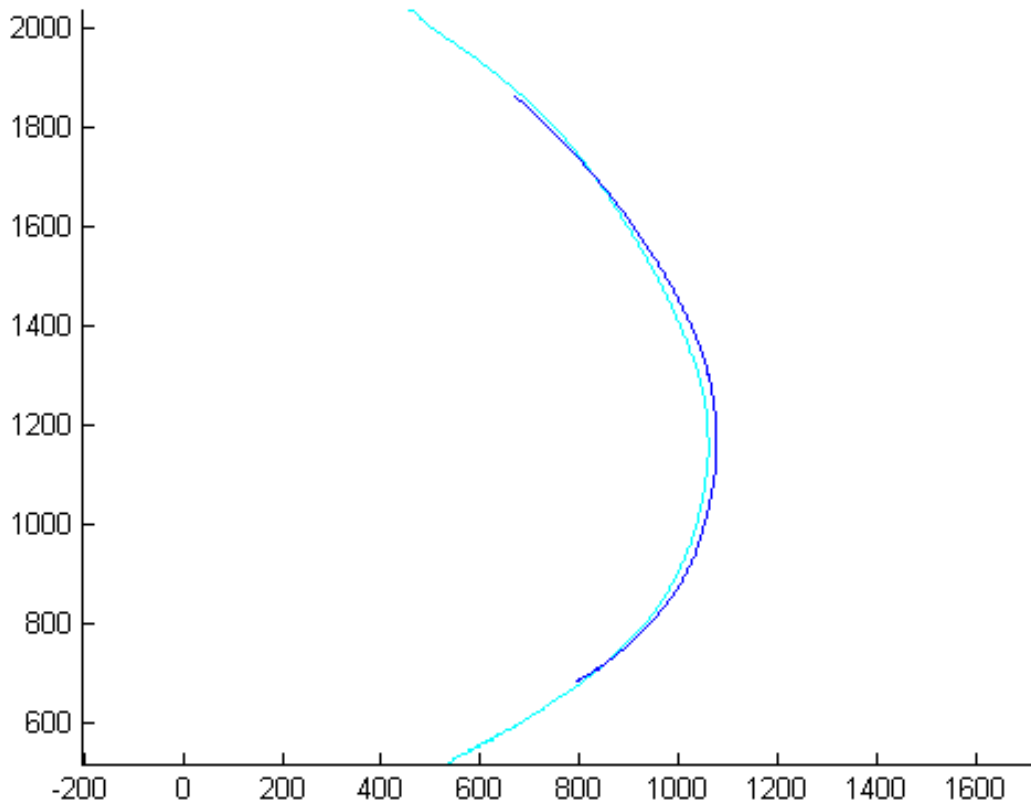
**Εικόνα 3.5.2:** Ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 8493 (χρώμα γαλάζιο) και ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 9920 (χρώμα μπλε), βέλτιστα προσαρμοσμένοι.



**Εικόνα 3.5.3:** Ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 9088 (χρώμα γαλάζιο) και ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 9749 (χρώμα μπλε), βέλτιστα προσαρμοσμένοι.

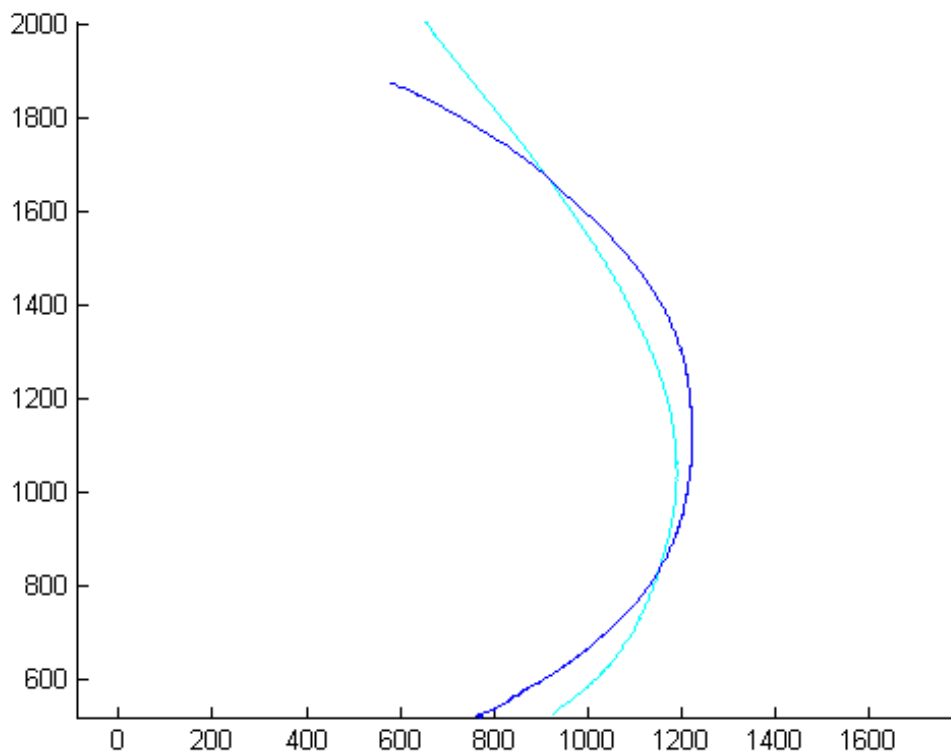


**Εικόνα 3.5.4:** Ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 9922 (χρώμα γαλάζιο) και ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 8473 (χρώμα μπλε), βέλτιστα προσαρμοσμένοι.

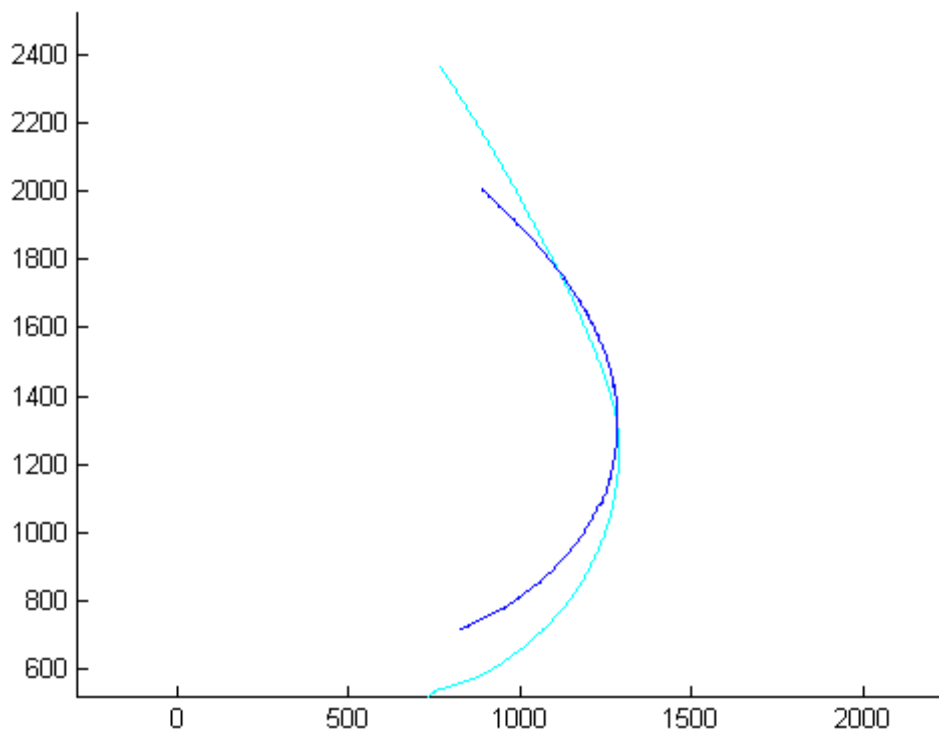


**Εικόνα 3.5.5:** Ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 9922 (χρώμα γαλάζιο) και ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 8144 (χρώμα μπλε), βέλτιστα προσαρμοσμένοι.

Η μη καλή προσαρμογή των δύο ιδεατών αντιπροσώπων καταδεικνύει ότι τα δύο αγγεία ανήκουν σε διαφορετική ομάδα. (Εικόνες 3.5.6-3.5.7).



**Εικόνα 3.5.6:** Ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 9088 (χρώμα γαλάζιο) και ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 10958 (χρώμα μπλε) βέλτιστα προσαρμοσμένοι.



**Εικόνα 3.5.7:** Ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 8519 (χρώμα γαλάζιο) και ιδεατός αντιπρόσωπος αγγείου 9749 (χρώμα μπλε) βέλτιστα προσαρμοσμένοι.

### 3.6 Βέλτιστη προσαρμογή ιδεατού αντιπροσώπου οικογένειας αγγείων σε κάποιο από αυτά τα γεωμετρικά πρότυπα.

Θα δώσουμε την κεντρική ιδέα αυτής της ενότητας μέσω ενός συγκεκριμένου παραδείγματος το οποίο καθόλου δε βλάπτει τη γενικότητα. Πράγματι, έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε εάν το ιδεατό πρότυπο ενός αγγείου  $I^A$ , ταιριάζει βέλτιστα σε κάποια έλλειψη ή υπερβολή.

Η γενική εξίσωση μιας κωνικής τομής σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \quad (3.6) (1)$$

με  $A, B, C, D, E, F \in \mathfrak{R}$  και

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

Ορίζουμε τη διακρίνουσα  $\Delta = 4 \cdot A \cdot B - C^2$  και

αν  $\Delta > 0$  η κωνική είναι έλλειψη ή κύκλος,

αν  $\Delta < 0$  η κωνική είναι υπερβολή και

αν  $\Delta = 0$  η κωνική είναι παραβολή. (παράρτημα Π1).

Με κατάλληλη περιστροφή των αξόνων κατά γωνία  $\theta$  και μετακίνηση σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων  $(X, Y)$ , μπορούμε να μηδενίσουμε το συντελεστή  $C$  του όρου  $xy$  και να λάβουμε τις κανονικές εξισώσεις των τριών τύπων των κωνικών, οι παράμετροι των οποίων είναι άμεσα συνδεδεμένες με τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά. Δηλαδή οι εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ για έλλειψη} \quad (3.6) (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ για υπερβολή} \quad (3.6) (3)$$

$$y = ax^2 + bx + c \text{ για παραβολή} \quad (3.6) (4)$$

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν στην περίπτωση που άξονες των κωνικών είναι παράλληλοι προς τους καρτεσιανούς άξονες. Οι παράμετροι  $a, b$  για την έλλειψη και την υπερβολή καθορίζουν πλήρως το αντίστοιχο σχήμα.

Θεωρούμε τη γενική εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες με ανεξάρτητη μεταβλητή την  $\theta$  δηλαδή:

$$(3.6) (5)$$

όπου  $a, \beta$  σταθερές. Εάν στρέψουμε αυτή την έλλειψη κατά γωνία  $\phi$  και τη μετατοπίσουμε κατά  $(x_0, y_0)$ , τότε λαμβάνουμε το σύνολο σημείων  $(X, Y)$  όπου

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (3.6) (6)$$

Στον χώρο  $(\alpha, \beta, \phi, x_0, y_0) \subset R^5$  ελαχιστοποιούμε την απόσταση αυτής της έλλειψης από την ψηφιακή καμπύλη  $I_j^A$   $j=1,2,\dots,N^I$ .

Επίσης, θεωρούμε τη γενική εξίσωση της υπερβολής σε καρτεσιανές συντεταγμένες με ανεξάρτητη μεταβλητή την  $y$  δηλαδή

$$\vec{r}(y) = a \sqrt{1 + \frac{y^2}{\beta^2}} \vec{i} \pm y \vec{j} \quad (3.6) (7)$$

όπου  $a, \beta$  σταθερές. Εάν στρέψουμε αυτή την υπερβολή κατά γωνία  $\phi$  και τη μετατοπίσουμε κατά  $(x_0, y_0)$ , τότε λαμβάνουμε το σύνολο σημείων  $(X, Y)$  όπου

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (3.6) (8)$$

Στον χώρο  $(\alpha, \beta, \phi, x_0, y_0) \subset R^5$  ελαχιστοποιούμε την απόσταση αυτής της υπερβολής από την ψηφιακή καμπύλη  $I_j^A$   $j=1,2,\dots,N^I$ .

Τόσο για την περίπτωση της έλλειψης όσο και την περίπτωση της υπερβολής η ελαχιστοποίηση γίνεται με χρήση του αλγορίθμου Nelder-Mead.[1.3-1.4]. Ο αλγόριθμος αυτός, όπως και κάθε αλγόριθμος ελαχιστοποίησης με σύγκλιση, κατά κανόνα συγκλίνει σε μια τιμή κοντά σε ένα τοπικό ελάχιστο, έστω την  $(a^I, \beta^I, \phi^I, x_0^I, y_0^I)$ . Για να εντοπίσουμε το σημείο πραγματικού ελαχίστου, γύρω από το σημείο σύγκλισης  $(a^I, \beta^I)$  των πρωταρχικών παραμέτρων, ορίζουμε έναν υπερκύβο μικρών διαστάσεων στον  $R^5$  και μια διαμέριση του τετραγώνου, ενώ επιπλέον για κάθε σημείο αυτής της διαμέρισης εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην ενότητα 3.3. Η εφαρμογή της μεθοδολογίας προσφέρει για κάθε σημείο της διαμέρισης ένα λάθος προσαρμογής. Το σημείο με το μικρότερο τέτοιο λάθος ορίζει:

1. τις ακριβείς τιμές των πρωταρχικών παραμέτρων της έλλειψης ή της υπερβολής, δηλαδή την ακριβή μορφή της προτύπου καμπύλης που βέλτιστα αντιστοιχεί στο ιδεατό πρότυπο του αγγείου και άρα ενδεχομένως μπορεί με κάποιο τρόπο να “γέννησε” αυτό.
2. δίνει τις βέλτιστες παραμέτρους στροφής και μετατόπισης, ώστε το ιδεατό πρότυπο  $I^A$ , να ταιριάζει σε συγκεκριμένη έλλειψη ή υπερβολή.
3. το ακριβές τμήμα της πρότυπης έλλειψης ή υπερβολής που βέλτιστα προσαρμόζεται στο συγκεκριμένο ιδεατό πρότυπο του αγγείου και επομένως, το ακριβές μέγεθος του οδηγού ή καλουπιού που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκε γύρω στο 1620 π.Χ.

Διαπιστώσαμε ότι με εφαρμογή της μεθόδου ο ιδεατός αντιπρόσωπος κάθε ομάδας αγγείων αντιστοιχούσε βέλτιστα και με εξαιρετικά μικρό λάθος προσαρμογής σε ένα συγκεκριμένο κάθε φορά γεωμετρικό σχήμα. Το μέσο λάθος προσαρμογής ήταν κάθε φορά της τάξεως 3.5 pixels/pixel, ενώ το μέγιστο λάθος προσαρμογής δεν ξεπερνούσε τα 14 pixels. Ειδικότερα, οι ιδεατοί αντιπρόσωποι των αγγείων της ομάδας A και της ομάδας B αντιστοιχούν σε ελλείψεις με τις κάτωθι πρωταρχικές παραμέτρους:

Για την ομάδα A έχουμε:

$$a = 537.0313 \text{ pixels ή } a = 8.95 \text{ cm}$$

$$b = 580.00 \text{ pixels ή } b = 9.67 \text{ cm.}$$

Ομοίως, για την ομάδα B έχουμε

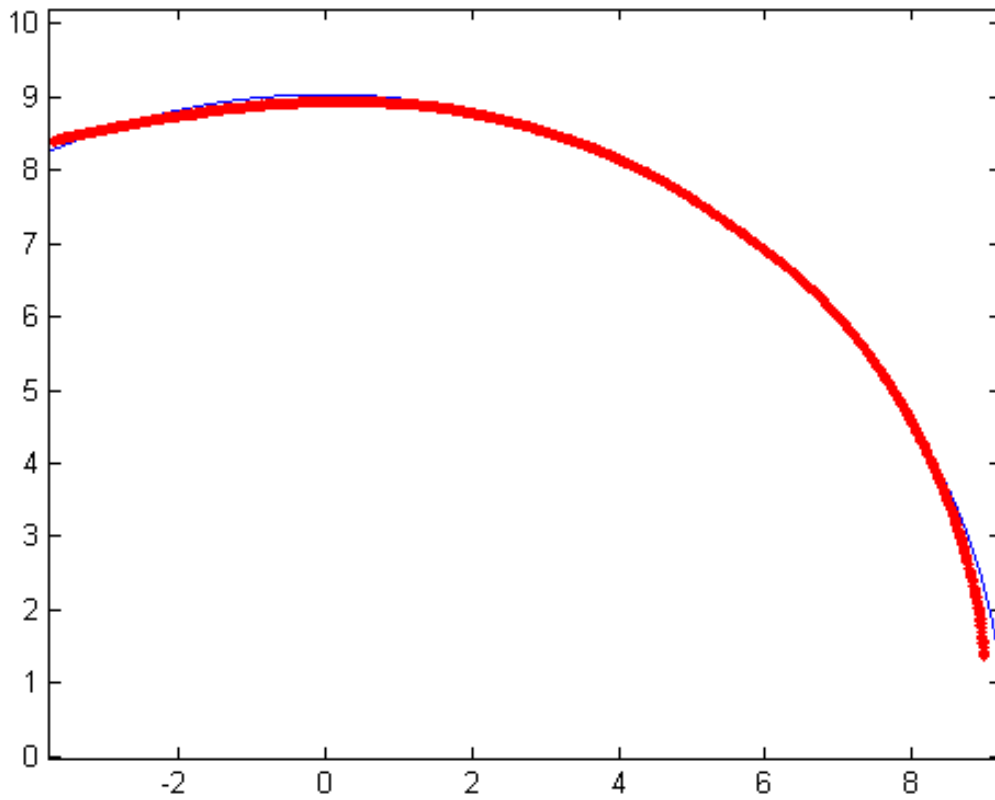
$$a = 673.75 \text{ pixels ή } a = 11.23 \text{ cm}$$

$$b = 539.375 \text{ pixels ή } b = 8.99 \text{ cm.}$$

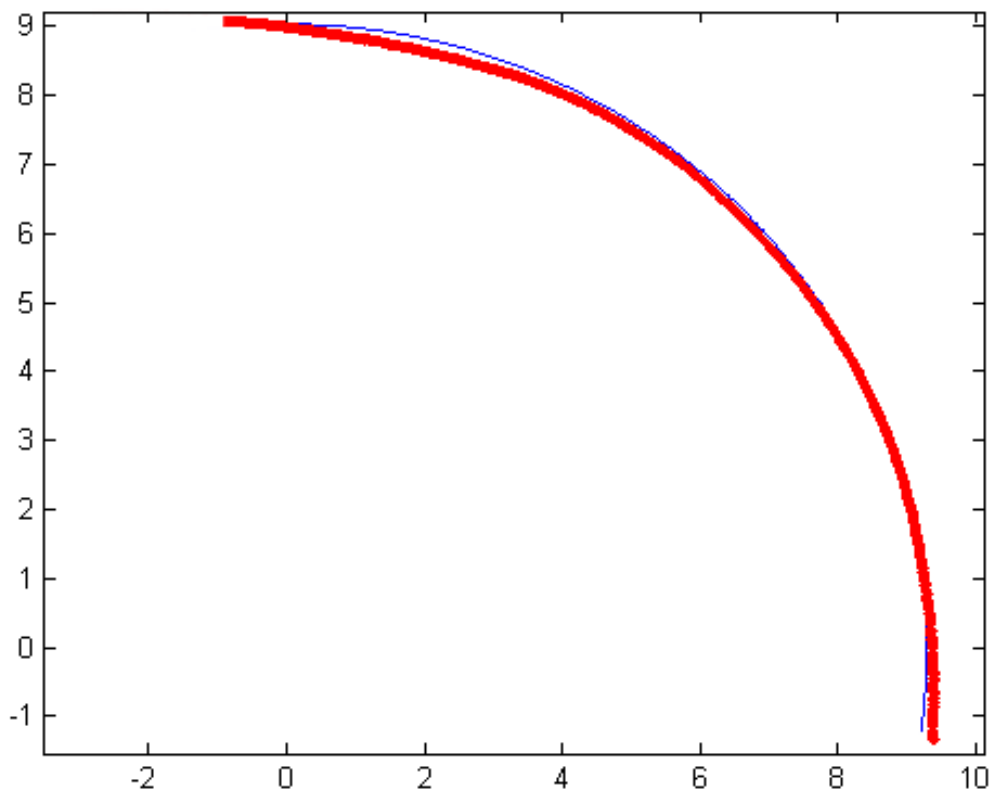
Αυτό υποβάλλει την ιδέα μήπως γεωμετρικοί οδηγοί ή καλούπια εκ περιστροφής με γενέτειρα έλλειψη είχαν χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή των αγγείων αυτών. Σημειώνεται ότι η υπόθεση αυτή είναι συμβατή και με τη σχετική υπόθεση περί του τρόπου σχεδίασης των τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου Θήρας ([3.15], [3.16], [4.5], [4.8]). Στα παρακάτω σχήματα (Εικόνες 3.6.1-3.6.8) διακρίνεται η καμπύλη του αγγείου και η αντίστοιχη έλλειψη για κάθε μια από τις δύο ομάδες.

Ομάδα A	Ομάδα B
8144	8493
8473	8808
9922	9920
9088	
9749	

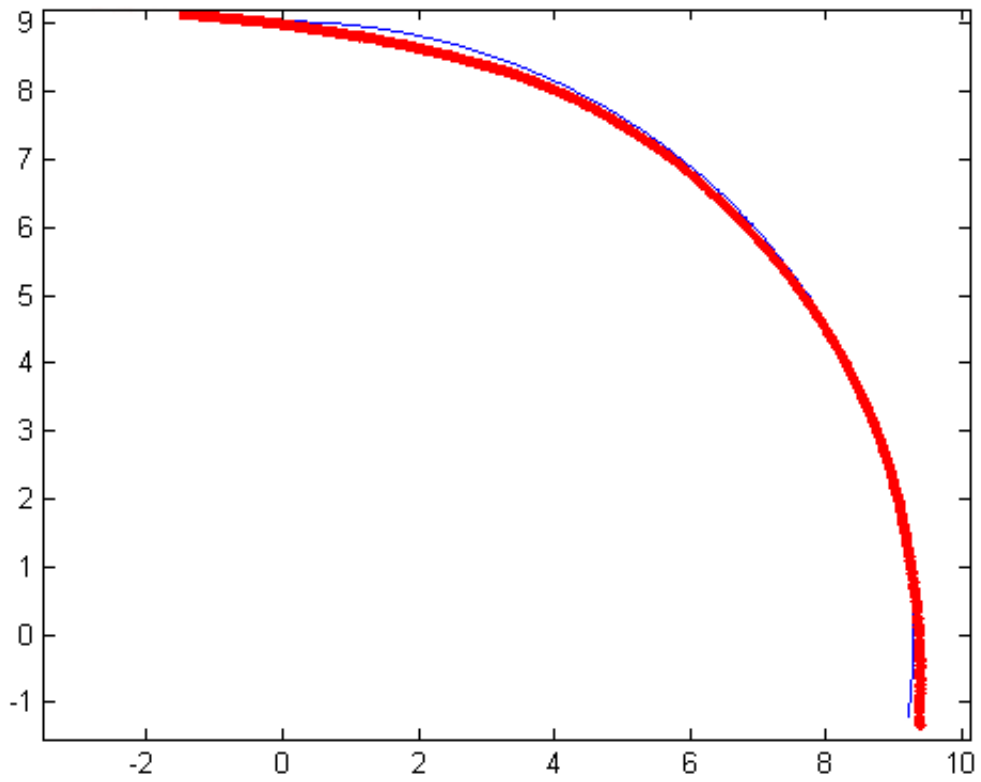




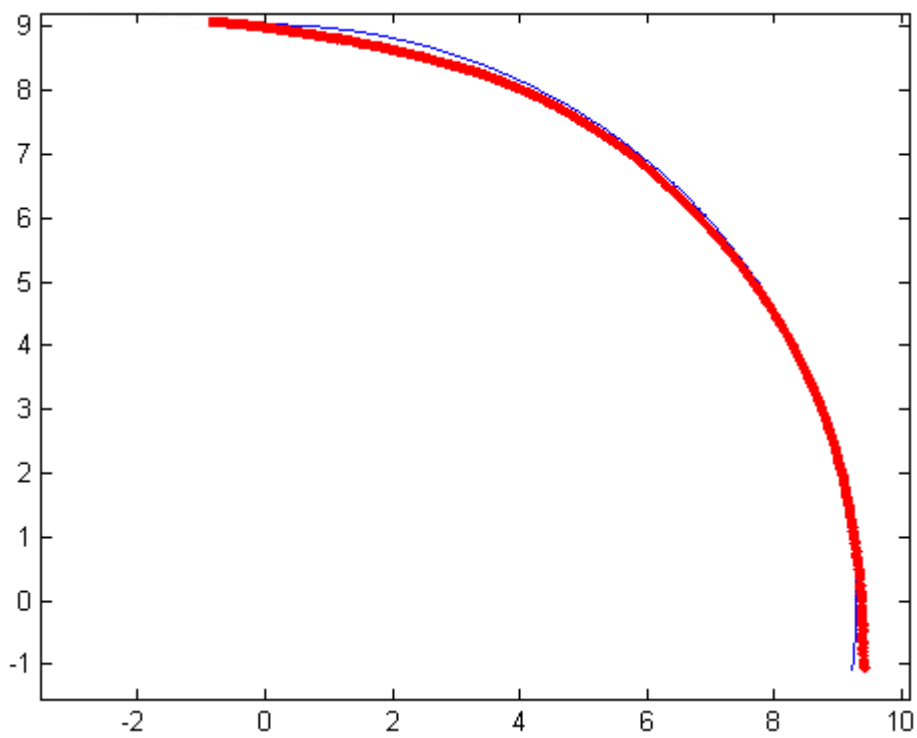
**Εικόνα 3.6.1:** Αγγείο 8144, ομάδα Α.



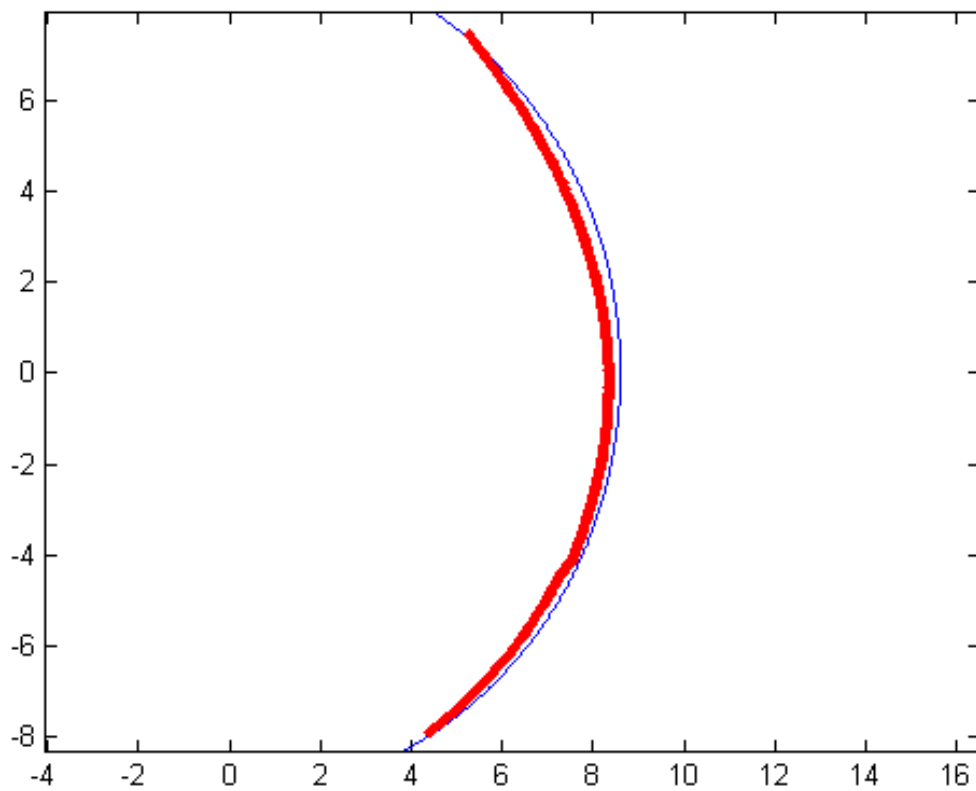
**Εικόνα 3.6.2:** Αγγείο 8473, ομάδα Α.



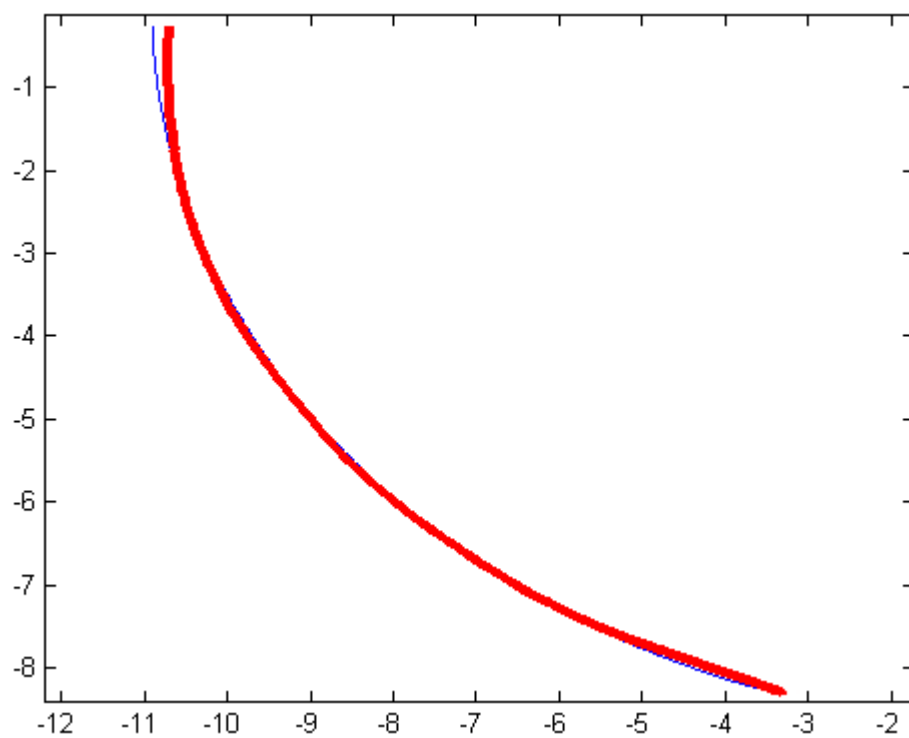
**Εικόνα 3.6.3:** Αγγείο 9922, ομάδα Α.



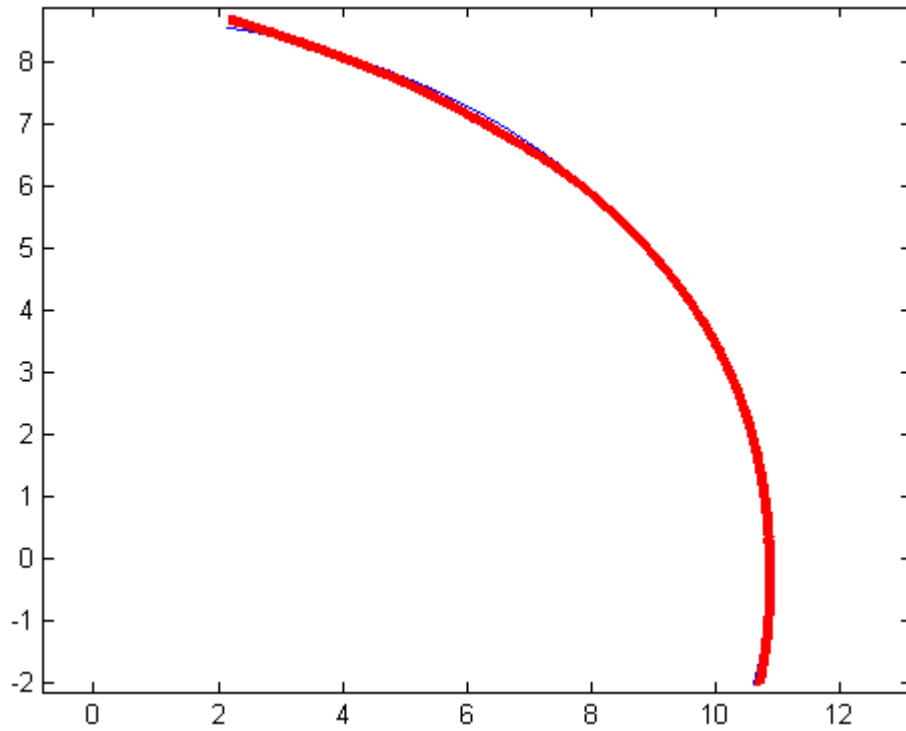
**Εικόνα 3.6.4:** Αγγείο 9088, ομάδα Α.



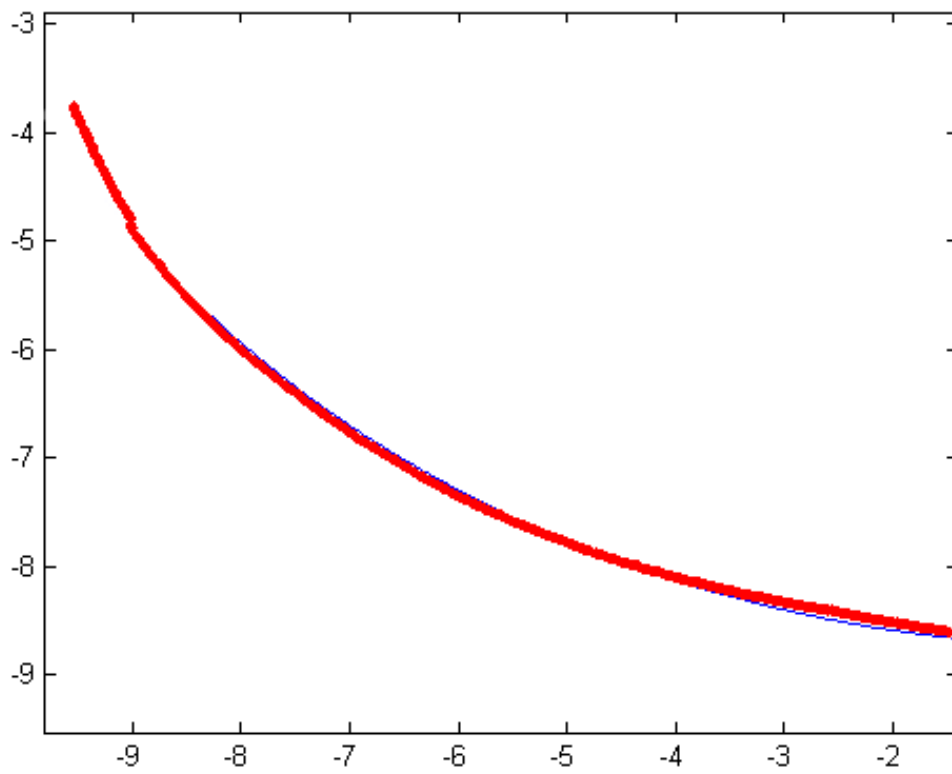
**Εικόνα 3.6.5:** Αγγείο 9749, ομάδα Α.



**Εικόνα 3.6.6:** Αγγείο 8808, ομάδα Β.



**Εικόνα 3.6.7:** Αγγείο 8493, ομάδα Β.



**Εικόνα 3.6.8:** Αγγείο 9920, ομάδα Β.

#### 4.1 Σύντομη αρχιτεκτονική περιγραφή του Τομέα Α, επικρατούσες θεωρίες για τη χρήση του και η σπουδαιότητα ψηφιακής απεικόνισής του.

Το κτίριο Τομέας Α βρίσκεται στο βόρειο άκρο του ανεσκαμμένου Υστεροκυκλαδικού Ι οικισμού Ακρωτηρίου Θήρας. Πρόκειται για ένα σύνολο τριών ισογείων δωματίων σε αξονική διάταξη, του οποίου η ανασκαφή έδωσε τον μεγαλύτερο αριθμό αποθηκευμένων πίθων και αγγείων από όλα τα υπόλοιπα κτίρια του οικισμού. (Εικόνα 4.1.1). Για το λόγο αυτό το κτίριο ονομάστηκε από τον ανασκαφέα Σ. Μαρινάτο «Αποθήκη των Πίθων».([2.7]).



**Εικόνα 4.1.1:** Τομέας Α από βορρά.(Φωτογραφικό Αρχείο Ανασκαφών Ακρωτηρίου Θήρας).

Πολλές θεωρίες έχουν διατυπωθεί σχετικά με την λειτουργία του συγκεκριμένου κτιρίου. Από την μελέτη των ευρημάτων προέκυψε ότι ο Τομέας Α αποτελούσε πρόκπιμα σε μεγαλύτερο κτίριο προς τα δυτικά και ότι στα τρία συνεχόμενα δωμάτια τελούνταν αποθηκευτικές και εμπορικές δραστηριότητες.

Ο Τομέας Α εμφανίζει σύνολο ιδιαίτερα σημαντικών χαρακτηριστικών στοιχείων που δεν συναντώνται στα άλλα κτίρια του οικισμού ,όπως:

1. Η σχετικά μεγάλης κλίμακας αποθήκευση πίθων και άλλων αντικειμένων που παρατηρείται στα δωμάτια του Τομέα αυτού. (Εικόνα 4.1.2).



**Εικόνα 4.1.2:** Δωμάτιο Α1. (Φωτογραφικό Αρχείο Ανασκαφών Ακρωτηρίου Θήρας).

2. Η ύπαρξη στα δωμάτια Α1 και Α2 μεγάλων παραθύρων που έβλθαν στον δρόμο, με αγγεία τοποθετημένα πάνω ή μπροστά σε αυτά. (Τα αγγεία σήμερα έχουν μεταφερθεί σε αποθηκευτικούς χώρους ή μουσεία). (Εικόνα 4.1.3).



**Εικόνα 4.1.3:** Άποψη του δωματίου Α1 από το μεγάλο παράθυρο του δρόμου. (Φωτογραφικό Αρχείο Ανασκαφών Ακρωτηρίου Θήρας).



3. Η παρουσία κτιστής εστίας στο δωμάτιο A1 με ανεστραμμένα σκεύη πάνω σε αυτή. (Εικόνα 4.1.4).



**Εικόνα 4.1.4:** Άποψη του δωματίου A1 από το μεγάλο παράθυρο του δρόμου, όπου στο βάθος διακρίνεται η εστία. (Φωτογραφικό Αρχείο Ανασκαφών Ακρωτηρίου Θήρας).

4. Η εύρεση σειράς μολύβδινων σταθμών στο δωμάτιο A2.  
Το σύνολο των χαρακτηριστικών αυτών εύλογα υποβάλλει την ιδέα ότι εμπορικές συναλλαγές πραγματοποιούνταν στον Τομέα Α καθώς και βιοτεχνικές δραστηριότητες  
Επίσης, στον Τομέα Α απαντάται ένα σύνολο πολύ ασυνήθιστων αρχιτεκτονικών στοιχείων όπως:
- α). η παρουσία σειράς κτιστών κατασκευών και ενσωματωμένης ασαμίνθου. (Εικόνα 4.1.5).
  - β). οι διαχωριστικοί πλινθότοιχοι στο δωμάτιο A2. (Εικόνα 4.1.6).
  - γ). το διπλό κτιστό ερμάριο στο δωμάτιο A2. (Εικόνα 4.1.6).
  - δ). το τμήμα του δαπέδου του ίδιου δωματίου που είναι κατασκευασμένο από όστρεα πορφύρας και μαύρα βότσαλα.
  - ε). η σειρά πλινθόκτιστων κογχών για την τοποθέτηση πύθων στο δωμάτιο A3 και
  - στ). δύο ανισούψη τμήματα του δωματίου A3. (Εικόνα 4.1.7).



**Εικόνα 4.1.5:** Προθάλαμος Τομέα Α. Πλακόστρωτο δάπεδο και ασάμινθος. (Φωτογραφικό Αρχείο Ανασκαφών Ακρωτηρίου Θήρας).



**Εικόνα 4.1.6:** Διαχωριστικός πλινθότοιχος και πηλοερμάρια δωματίου Α2. (Φωτογραφικό Αρχείο Ανασκαφών Ακρωτηρίου Θήρας).





**Εικόνα 4.1.7:** Τα δύο ανισουπή επίπεδα δαπέδου του δωματίου Α3. (Φωτογραφικό Αρχείο Ανασκαφών Ακρωτηρίου Θήρας).

Γίνονται επομένως σαφές ότι τα τρία δωμάτια του Τομέα Α έχουν ξεχωριστή σημασία και ιδιαίτερο ενδιαφέρον για μελέτη.

Με βάση τα ανωτέρω είναι πιθανό το κτίριο αυτό να ανήκε σε ιδιώτη ή έμπορο, ο οποίος πραγματοποιούσε εκεί τις διάφορες επαγγελματικές του δραστηριότητες και ενδεχομένως κατοικούσε στο αμέσως προς δυσμάς μεγαλύτερο κτίριο.

Λόγω της καλής διατήρησης του μεγαλύτερου μέρους των ισογείων δωματίων του κτιρίου, της μορφής της ποσότητας των ευρημάτων και της καλής διατήρησης των κτιστών κατασκευών μέσα στο κτίριο, το ενδεχόμενο ψηφιακής αποκατάστασης του συγκεκριμένου κτιρίου παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Με βάση τα δεδομένα της μελέτης της αρχαιολόγου, δρος. Δ. Κρίγκα, όσον αφορά στην αρχιτεκτονική μορφή και το περιεχόμενο του κτιρίου, προχωρήσαμε στην τρισδιάστατη ψηφιακή αναπαράσταση του Τομέα Α, χρησιμοποιώντας σχεδιαστικά προγράμματα (Autocad, Raster design, 3ds max, Photoshop,

Premiere), καθώς και εφαρμογή 3D modeling όπου αυτό ήταν δυνατόν για τα αγγεία που βρέθηκαν στο κτίριο.

Η διαδικασία της ψηφιακής αναπαράστασης δεν ήταν πάντοτε εύκολο έργο, εφόσον έπρεπε να λυθούν σειρές προβλημάτων που αφορούσαν το πώς θα «στηνόταν» το κτίριο εικονικά. Τα δάπεδα των δωματίων, οι χώροι, οι οροφές, τα παράθυρα, η πρόσβαση στον όροφο, το είδος της στέγασης, το είδος και η έκταση του ορόφου, το είδος των υλικών που θα χρησιμοποιούνταν, όλα αυτά αποτέλεσαν ενδιαφέροντα, αλλά δυσεπίλυτα προβλήματα, των οποίων η λύση δινόταν κατά περίπτωση, με πρωτότυπο τρόπο, αλλά με βάση τα υπάρχοντα αρχαιολογικά δεδομένα.

Κατά την διάρκεια των εργασιών του ψηφιακού σχηματισμού της αρχικής εικόνας του κτιρίου απαραίτητο εγχειρίδιο και βοήθημα στάθηκε η αρχιτεκτονική μελέτη του οικισμού της Κ. Παλυβού. ([2.8]).

Το τελικό αποτέλεσμα της εικονικής τρισδιάστατης αναπαράστασης δίνει προτάσεις για το πώς ήταν πιθανόν διαμορφωμένα η πρόσβαση στο κτίριο, ο προθάλαμος του, ο όροφος και η πρόσβαση σε αυτόν, η στέγαση ισογείου και ορόφου (Εικόνες 4.1.8-4.1.15), καθώς και η επικοινωνία μεταξύ των δωματίων του ισογείου και του ορόφου.

Τα τρία ισόγεια δωμάτια του Τομέα Α σώζονται σε ικανοποιητική κατάσταση μέχρι ύψους ενός μέτρου περίπου. Όπως όμως θα υποστηριχθεί και στα επόμενα, υπάρχουν αρκετές ενδείξεις ότι στη λειτουργική του μορφή γύρω στα 1620 π. Χ. το κτίριο είχε και έναν επιπλέον όροφο, ο οποίος όμως σήμερα δεν σώζεται λόγω της διέλευσης χειμάρρου από το σημείο αυτό.

Η προσθήκη κινούμενης κάμερας που θα περιηγείτο στο εσωτερικό του κτιρίου δημιούργησε σειρά ερωτημάτων που απαιτούσαν λύση, όπως με ποιόν τρόπο επικοινωνούσαν τα δωμάτια μεταξύ τους, πόσο ζωτικό χώρο διέθεταν, πως στεγάζονταν τόσο στο ισόγειο όσο και στον όροφο κ.λ.π.

Οι λύσεις που προτείνονται αποτελούν έναν όσο το δυνατό πιο πιστό συνδυασμό, σύγχρονης ψηφιακής τεχνολογίας και αρχαιολογικών δεδομένων.



**Εικόνα 4.1.8:** Τομέας Α. Βορειοανατολική άποψη στην οποία διακρίνονται τα παράθυρα των δωματίων Α3, Α2 και στο βάθος αυτό του δωματίου Α1.



**Εικόνα 4.1.9:** Είσοδος του Τομέα Α στην οποία διακρίνεται ο προθάλαμος και η ασάμινθος.





**Εικόνα 4.1.10:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του δωματίου A1, στην οποία φαίνεται ο ξύλινος κίονας με τη λίθινη βάση και το μεγάλο παράθυρο.



**Εικόνα 4.1.11:** Μια άλλη έποψη του δωματίου A1, στην οποία φαίνεται ο ξύλινος κίονας με τη λίθινη βάση, η πόρτα εισόδου, η σκάλα που οδηγεί στον όροφο και η κτιστή εστία.



**Εικόνα 4.1.12:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του δωματίου A2, στην οποία φαίνονται τα πηλοερμάρια τα οποία διαιρούν σε δύο μέρη το δωμάτιο.



**Εικόνα 4.1.13:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του δωματίου A3, στην οποία φαίνονται τα δύο ανισουπή επίπεδα δαπέδου του δωματίου αυτού.





**Εικόνα 4.1.14:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του ορόφου πάνω από το δωμάτιο Α1.



**Εικόνα 4.1.15:** Τρισδιάστατη απεικόνιση προθαλάμου με την ενσωματωμένη ασάμινθο.

## 4.2 Υποθέσεις για την αρχιτεκτονική και στατική του Τομέα Α, συνεπείς από αρχαιολογικής και ιστορικής απόψεως.

Καταρχήν υπάρχει ένα σύνολο ενδείξεων που γεννούν και ενισχύουν την ιδέα ότι υπήρχε υπερκείμενος όροφος, ο οποίος όπως προαναφέρθηκε δε σώζεται πιθανόν και λόγω της υπάρξεως χειμάρρου στο σημείο αυτό. Πράγματι, αναφέρονται τα εξής σχετικά στοιχεία :

1. Ενδείξεις για ύπαρξη κλιμακοστασίου, όπως το αποτύπωμα ορθοστάτη δηλαδή κατακόρυφου στοιχείου που πιθανόν στήριζε κουπαστή. Επειδή δε σώζεται αυτή η κουπαστή, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι αυτή ήταν ξύλινη.
2. Το αποτύπωμα στύλου στο κέντρο περιήτου του δωματίου Α1.  
Ένας στύλος φτιαγμένος πιθανόν από ξύλο στο σημείο αυτό, ενδεχομένως έχει ως λόγο ύπαρξης τη στήριξη δαπέδου υπερκειμένου ορόφου.
3. Λίθινη βάση κίονα η οποία βρέθηκε πεσμένη στο ισόγειο δωμάτιο Α1 και καθ'όλες τις ενδείξεις προέρχεται από την πτώση του άνω ορόφου. Ο κίονας ευρίσκετο στον πρώτο όροφο, ώστε να υποστηρίξει την οροφή αυτού.
4. Η ανακάλυψη στοιχείων αργαλειού (είδος βαριδίων), γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη υφαντικών μέσων στον Τομέα Α το 1620 π. Χ. Από τα υπόλοιπα όμως σωζόμενα κτίρια του οικισμού γνωρίζουμε ότι οι αργαλειοί τοποθετούνταν σε υπερκείμενους ορόφους. Εξ άλλου δεν υπάρχει προφανής χώρος στα ισόγεια δωμάτια ικανός να φιλοξενήσει υφαντικά μέσα. Η τελευταία παρατήρηση ενισχύεται από το γεγονός ότι σε κάθε ένα δωμάτιο του ισόγειου ευρέθησαν πίθοι, οι οποίοι σε μεγάλο βαθμό σηματοδοτούν και τη χρήση του δωματίου που είναι ασύμβατη με την ύπαρξη υφαντικών μέσων.

Αν αποδεχθούμε με βάση τα ανωτέρω την ύπαρξη επιπλέον ορόφου αυτόματα γεννάται μεγάλο πλήθος ερωτημάτων αρχιτεκτονικής και στατικής μορφής τα οποία πρέπει να απαντηθούν. Συγκεκριμένα:

- Τι έκταση είχε ο επιπλέον όροφος.
- Το υλικό του δαπέδου η μορφή του και ο τρόπος στήριξης των υπερκειμένων στοιχείων.
- Ποια ήταν τα επιμέρους αρχιτεκτονικά στοιχεία του.

Τα σενάρια που τελικά υλοποιήσαμε στην εικονική αναπαράσταση του Τομέα Α, έδωσαν απαντήσεις στα ανωτέρω, οι οποίες είναι δεκτές από στατικής απόψεως και συμβατές με τα αρχιτεκτονικά αρχαιολογικά και ιστορικά στοιχεία της εποχής. Ειδικότερα:

1. Αναφορικά με την έκταση του ανωτέρου ορόφου παρατηρήσαμε τα εξής:
  - 1α. Στύλος υποστήριξης δαπέδου φαίνεται ότι υπήρχε μόνο στο δωμάτιο Α1 όπως καταδεικνύεται από το σχετικό αποτύπωμα του στύλου επί του εδάφους. Τέτοιο αποτύπωμα ή ανάλογο αποτύπωμα δεν υπάρχει ούτε στο δωμάτιο Α2, ούτε στο δωμάτιο Α3, γεγονός που ισχυρά ενισχύει την άποψη ότι υπεράνω αυτών των δωματίων δεν υπήρχε όροφος.
  - 1β. Στα περισσότερα ανάλογης αρχιτεκτονικής σωζόμενα κτίρια του οικισμού, υπάρχει βατό δώμα που συνδέεται με το δωμάτιο του ορόφου με μια θύρα. Άρα, σύμφωνα με αυτή την αρχιτεκτονική προσέγγιση το πιθανότερο σενάριο είναι ότι άνωθεν του δωματίου Α1 υπήρχε ένα δωμάτιο που συνιστούσε τον υπερκείμενο όροφο, υπεράνω δε των δωματίων Α2 και Α3 υπήρχε βατό δώμα.
2. Οδηγός μας για την αρχιτεκτονική και στατική του επιπλέον ορόφου ήταν τα άλλα σωζόμενα κτίρια του οικισμού. Πράγματι σε αυτά έχουν παρατηρηθεί τα εξής:
  - 2α. στα σημεία που τα τοιχώματα του υπερκειμένου ορόφου ήταν σε επαφή με τον κάτω όροφο υπήρχαν μεγάλες ξύλινες δοκοί πιθανόν με εγχαράξεις/εγκολπώματα, επί των οποίων κάθετα επικάθοντο άλλες μεγάλες ξύλινες δοκοί σε πυκνή διάταξη οι οποίες συνιστούσαν το σκελετό του δαπέδου του υπερκειμένου ορόφου.
  - 2β. ανάμεσα σε αυτές τις δοκούς έντεχνα τοποθετούντο άλλα μικρότερα ξύλινα στοιχεία όπως κλαδιά συγκεκριμένης διατομής, αλλά και άχυρο, λάσπη κ.λ.π. ώστε να καλύπτονται τα κενά μεταξύ των δοκών αφ'ενός και να ενισχύεται η αντοχή του δαπέδου αφ'ετέρου.
  - 2γ. Επί του τελικού μίγματος του δαπέδου που αναφέρθηκε στο 2β, τοποθετούντο λαξευμένες πλάκες δημιουργώντας κατά αυτόν τον τρόπο την τελική μορφή του δαπέδου του υπερκειμένου ορόφου.
3. Μετά τη διατύπωση και αποδοχή των ανωτέρω σενarioν σχετικά με τον πρώτο όροφο προχωρήσαμε στον έλεγχο και διατύπωση μερικών πολύ ειδικών αρχιτεκτονικών στοιχείων. Συγκεκριμένα:
  - 3α. Μελετώντας την αρχιτεκτονική των υπολοίπων κτιρίων του οικισμού θεωρήσαμε ότι τα μεγάλα παράθυρα του ισόγειου περιεβάλλοντο από ένα



μεγάλο ξύλινο ορθογώνιο πλαίσιο το οποίο συνεισέφερε και στη στατική επάρκεια του όλου κτιρίου.

3β. Σεβόμενοι την αρχιτεκτονική αναλόγων κτιρίων του οικισμού θεωρήσαμε ότι δύο ανάλογα παράθυρα υπήρχαν και στον υπερκείμενο όροφο.

Η προσθήκη κινούμενης κάμερας που θα περιηγείτο στο εσωτερικό του κτιρίου δημιούργησε σειρά ερωτημάτων που απαιτούσαν λύση, όπως με ποιόν τρόπο επικοινωνούσαν τα δωμάτια μεταξύ τους, πόσο ζωτικό χώρο διέθεταν, πως στεγάζονταν τόσο στο ισόγειο, όσο και στον όροφο κλπ.

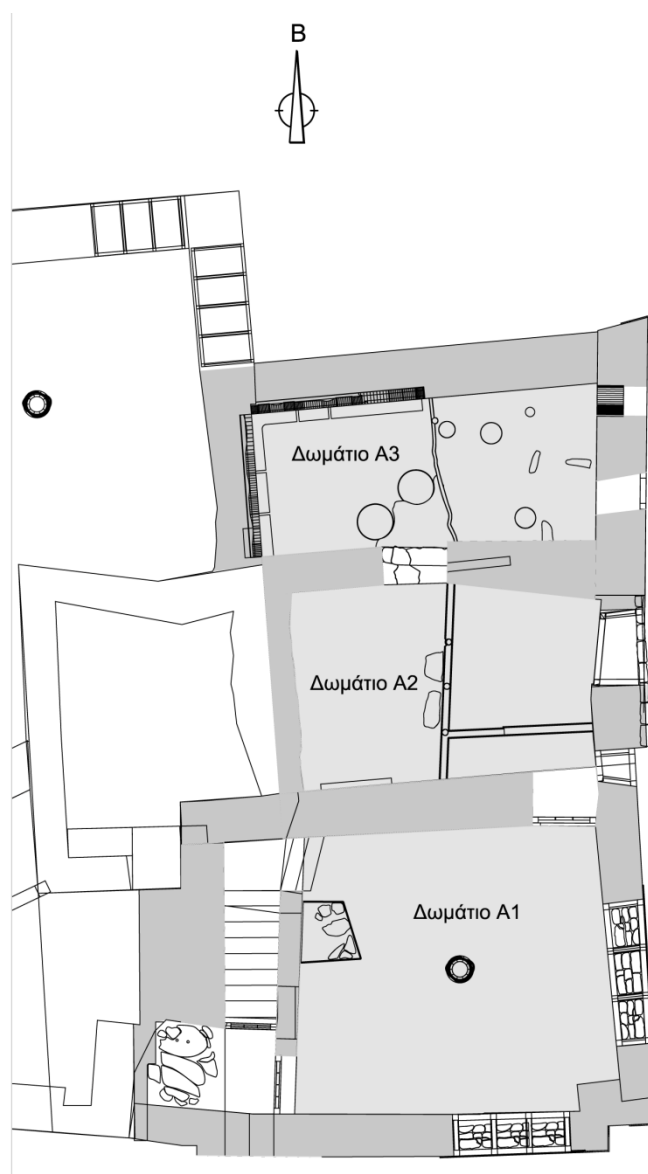
### 4.3 Περιγραφή της μεθόδου της εικονικής αναπαράστασης του Τομέα Α.

Για την υλοποίηση της ψηφιακής αναπαράστασης σε video του Τομέα Α στη λειτουργική του μορφή γύρω στα 1620 π.Χ., αναπτύξαμε και εφαρμόσαμε μια μέθοδο, η οποία περιλαμβάνει τα βήματα που περιγράφονται αναλυτικά κατωτέρω:

#### Βήμα 1

#### Εισαγωγή του αρχιτεκτονικού σχεδίου του Τομέα Α στον υπολογιστή

Πήραμε το σχέδιο από την Ανασκαφή Ακρωτηρίου Θήρας και το μετατρέψαμε από μορφή raster σε διανυσματική μορφή. (Εικόνα 4.3.1).



**Εικόνα 4.3.1:** Κάτοψη Τομέα Α, βασισμένη στη σχεδιαστική αποτύπωση της Ζ. Γκουλή.

## Βήμα 2

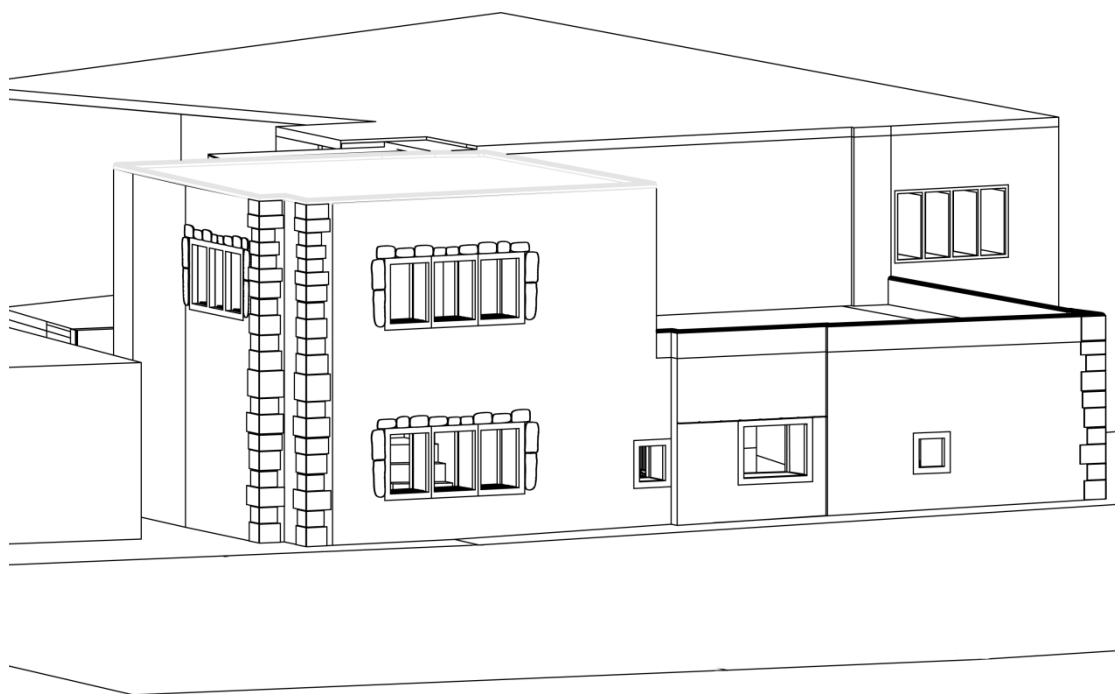
Λήψη πολλών φωτογραφιών από ικανό αριθμό διαφορετικών θέσεων της μηχανής.

Έγινε εκτεταμένη φωτογράφιση του χώρου από πολλές διαφορετικές γωνίες, προς όλες τις διευθύνσεις και καταγράφηκε για κάθε θέση της μηχανής λήψης η διεύθυνση του φακού και η μεγέθυνση.

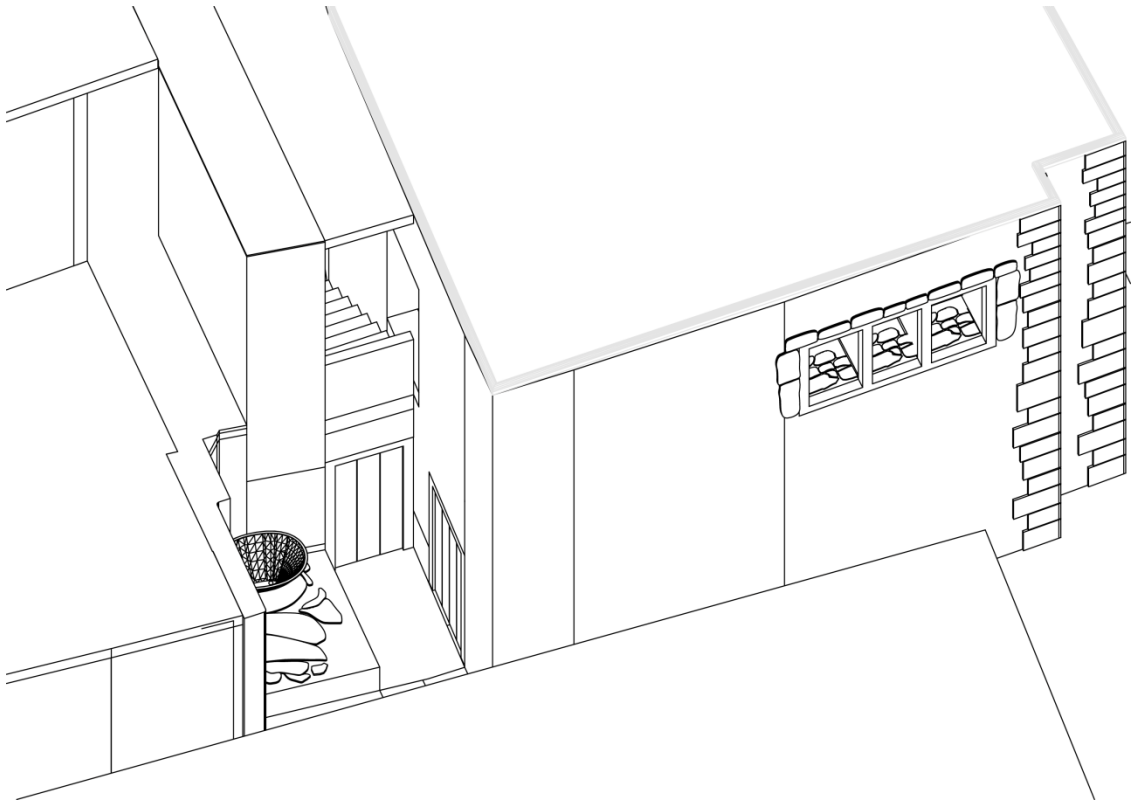
## Βήμα 3

Πρώτη απεικόνιση στον υπολογιστή των σωζομένων ερειπίων του Τομέα Α.

Με βάση την κάτοψη, τις φωτογραφίες και τις μετρήσεις ύψους δημιουργήσαμε μια πρώτη αδρή εκτίμηση του ογκομετρικού του Τομέα Α. Συγκεκριμένα, απεικονίσαμε αρχικά τους τοίχους του Τομέα Α που σώζονται μέχρι το ύψος του ενός μέτρου περίπου, το παράθυρο στο δωμάτιο Α1, το οποίο χρησιμοποιούσαν πιθανόν για εμπορικές συναλλαγές και την ασάμιθο στην είσοδο του Τομέα Α. (Εικόνα 4.3.2-4.3.3).



**Εικόνα 4.3.2:** Αξονομετρική άποψη του Τομέα Α (Ανατολική όψη).



**Εικόνα 4.3.3:** Αξονομετρική άποψη του Τομέα Α (Νότια όψη).

#### Βήμα 4

Επιλογή του συνεπέστερου από αρχαιολογικής, αρχιτεκτονικής, στατικής και ιστορικής σκοπιάς σεναρίου και πρώτη απεικόνιση αυτού μέσω στατικών εικόνων.

Έγιναν εκτεταμένες συζητήσεις με τους αρχαιολόγους και ιδιαίτερα με τη δόκτορα Δ. Κρίγκα και σχετικές προσεγγίσεις και τελικά διατυπώθηκε ένας αριθμός πιθανών σεναρίων για το πως ήταν ο Τομέας Α στη λειτουργική του μορφή γύρω στο 1620 π.Χ.. Όλα αυτά τα σενάρια απεικονίστηκαν σε πρώτη φάση αδρά σε τρεις διαστάσεις, έτσι ώστε να μπορεί να ελεγχθεί η ορθότητα και οι ενδεχόμενες αδυναμίες του κάθε σεναρίου. Ο τελικός στόχος αυτής της διαδικασίας ήταν να επιλεγεί το συνεπέστερο και επικρατέστερο σενάριο από όλες τις απόψεις.

Ειδικότερα, τονίζουμε ότι όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 4.2, υπάρχουν ισχυρές αρχαιολογικές ενδείξεις για την ύπαρξη υπερκειμένου ορόφου, όπως η ύπαρξη δύο κίωνων, συγκεκριμένα ενός πεσμένου και το αποτύπωμα ενός πιθανότατα ξύλινου του δωματίου Α1, η ύπαρξη οπών επί του δαπέδου του

ισογείου οι οποίες υποδεικνύουν την πιθανή ύπαρξη κλίμακας κ.λ.π. Επομένως, ένα σημαντικό τμήμα της μελέτης εστίασε ώστε να εντοπιστεί η ακριβής μορφή του άνω ορόφου από αρχιτεκτονικής άποψης και ο τρόπος στήριξης αυτού δεδομένου των μέσων της εποχής.

Μετά από ανάλυση στατικών προσεγγίσεων και συνεκτίμηση των ανασκαφέντων ευρημάτων καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα:

Θεωρήσαμε ότι το δάπεδο του άνω ορόφου έγινε με μεγάλες και μικρές δοκούς. Οι μεγάλες δοκοί στηρίχτηκαν στους εξωτερικούς τοίχους ως και στους τοίχους διαχωρισμού, ενώ μικρότερες δοκοί τοποθετήθηκαν σε προκατασκευασμένες εγκολπώσεις των μεγάλων δοκών κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι διευθύνσεις των μεγάλων δοκών αφενός και των μικρών αφετέρου να είναι ορθογώνιες σύμφωνα με όσα περιγράφησαν στο κεφάλαιο 4.2. (Εικόνες 4.3.4 - 4.3.5).

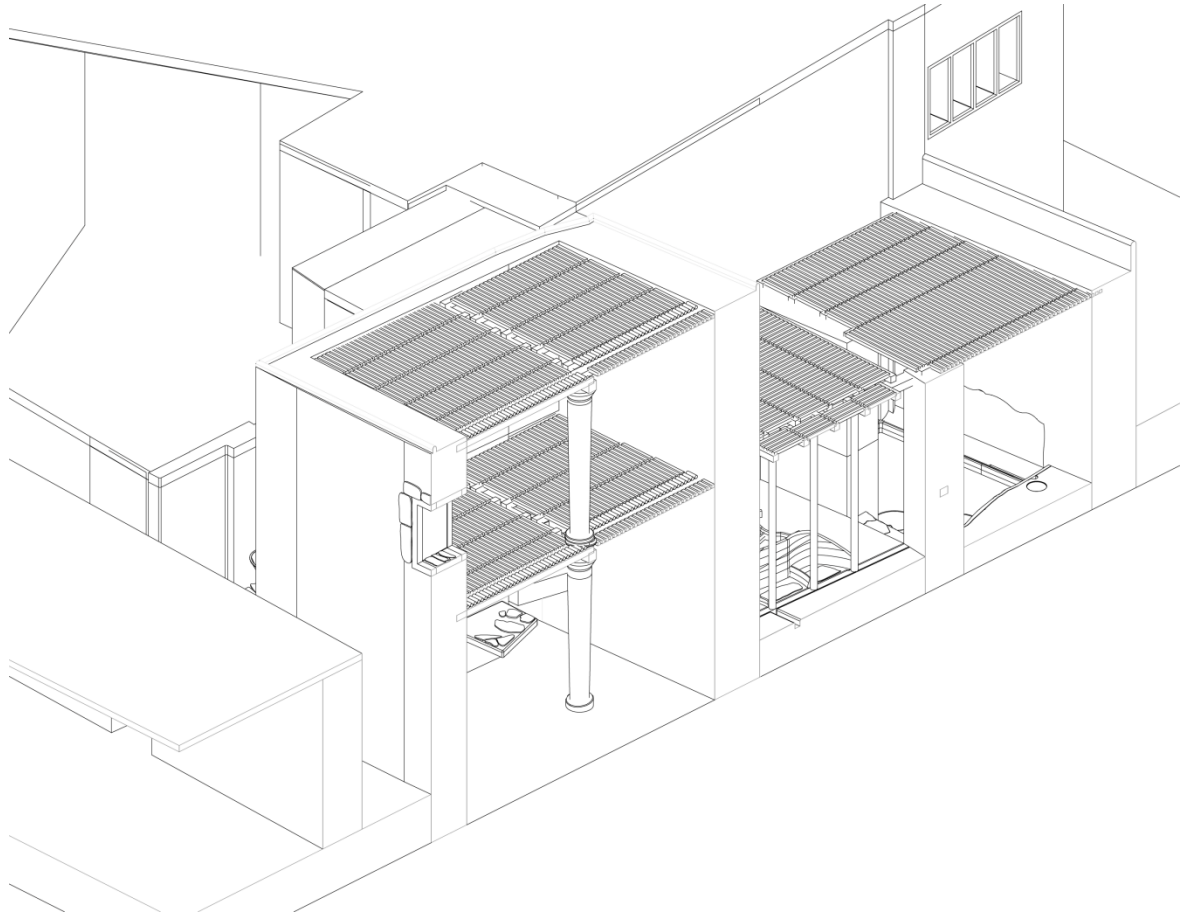
Τέλος στη διατύπωση των σεναρίων αυτών ελήφθη υπόψη η αρχιτεκτονική και η μέθοδος κατασκευής των άλλων έξι κτιρίων που έχουν ανασκαφεί έως σήμερα και ανήκαν στον οικισμό αυτό. Εκμεταλλευτήκαμε δηλαδή την εύλογη υπόθεση, ότι τα κτίρια του οικισμού του Ακρωτηρίου θα είχαν παρεμφερή αρχιτεκτονική και μέθοδο κατασκευής, ως και το γεγονός ότι διαφορετικά τμήματα έχουν σωθεί σε κάθε κτίριο. Αφού καταλάβαμε στο επικρατέστερο σενάριο έγινε μια πρώτη σχετικά λεπτομερής απεικόνιση των εξωτερικών και εσωτερικών τοίχων με τα ανοίγματα τους, των δαπέδων και οροφών, της εσωτερικής σκάλας, των εσωτερικών κιόνων και μερικών στοιχείων του περιβάλλοντος χώρου.

Με την επιλογή του σεναρίου έγινε λεπτομερής μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση πολλών στοιχείων του κτιρίου όπως:

Η ακριβής μορφή των πλινθοτοιχίων των ερμαρίων, των κογχών, των κιόνων, της ασαμίνθου ως και λεπτομερής απεικόνιση του περιβάλλοντα χώρου.



**Εικόνα 4.3.4:** Επίλυση του προβλήματος της πιθανής στέγασης του Τομέα Α.



**Εικόνα 4.3.5:** Αξονομετρική τομή στην οποία φαίνεται η επίλυση του προβλήματος της πιθανής στέγασης του Τομέα Α.

## Βήμα 5

### Κατάλληλη επιλογή ειδικών παραμέτρων της ψηφιακής αναπαράστασης όπως φωτισμός, υφή υλικών, περιβάλλον χώρος.

Η διαδικασία απόδοσης φωτισμού και υλικών (render) είναι εξαιρετικά χρονοβόρος διαδικασία. Απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ και δε συνάδει πάντα ικανοποιητικά με τον πραγματικό φυσικό φωτισμό του χώρου. Για να παρακάμψουμε αυτές τις δυσκολίες ακολουθήσαμε την εξής διαδικασία:

Πήραμε με σταθερό τρίποδα λήψεις του ίδιου στιγμιότυπου του χώρου μεσημεριανή ώρα ανά 2 sec και για συνολικό χρόνο 3 min. Επαναλάβαμε τη διαδικασία για διαφορετικές θέσεις του τρίποδα. Κατά αυτόν τον τρόπο είχαμε ένα σύνολο εκτιμήσεων του φυσικού φωτός για το συγκεκριμένο χώρο και τη συγκεκριμένη ώρα. Στη συνέχεια πήραμε το χρωματικό περιεχόμενο του φυσικού φωτός από όλες αυτές τις φωτογραφίες και υπολογίσαμε το μέσο όρο όλων αυτών των τιμών χρωματικού περιεχομένου. Στον προκύψαντα

χρωματικό μέσο όρο επιβάλλαμε μικρές τροποποιήσεις με μια τυχαία μεταβλητή  $T$ , ούτως ώστε να διορθώνεται ο φωτισμός στα κρέ (frames) τα οποία μας φάνηκαν πολύ σκοτεινά ή πολύ φωτεινά. Οι παράμετροι της τυχαίας μεταβλητής  $T$ , βελτιστοποιήθηκαν με βάση το τελικό οπτικό αποτέλεσμα. Αυτό αποτέλεσε τη βάση του φυσικού φωτός γύρω από την οποία κάναμε την τελική απόδοση (render). (παράρτημα Π3).

Στο τελικό τρισδιάστατο μοντέλο οι επιφάνειες των τοίχων και των κογχών ήταν επίπεδες και λείες. Έπρεπε επομένως να προστεθεί υφή, ώστε να προσδίδεται κατά το δυνατόν καλύτερα η αίσθηση του αναγλύφου. Δημιουργήσαμε αυτή την αίσθηση ως εξής:

Θεωρήσαμε καταρχήν ότι υπάρχουν εξογκώματα και κοιλότητες επί των επιπέδων των τοίχων, οι οποίες είναι μεν κάθετες επί των επιπέδων αλλά το ύψος τους και το βάθος τους είναι τυχαία μεταβλητή. Θεωρήσαμε λοιπόν δύο τυχαίες μεταβλητές έστωσαν  $X$  και  $Y$ , όπου η  $X$  προσθέτει ύψος που αντιστοιχεί στο εξόγκωμα η δε  $Y$  αφαιρεί υλικό δημιουργώντας κοιλότητες. Θεωρήσαμε επίσης ότι η αρχική αίσθηση του αναγλύφου επί του τοίχου θα είναι το αποτέλεσμα της δράσης ενός γραμμικού συνδυασμού των  $X$  και  $Y$ . Προσδιορίσαμε τις παραμέτρους του γραμμικού συνδυασμού των  $X$  και  $Y$  αλλά και των στατιστικών χαρακτηριστικών τους ούτως ώστε το μοντέλο να ταιριάζει βέλτιστα στις υπάρχουσες φωτογραφίες, ενώ στη συνέχεια επεκτάθηκε το παραπάνω μοντέλο για όλους τους τοίχους του σεναρίου. Συγκεκριμένα, υποθέσαμε ότι η  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες κανονικές κατανομές με μέση τιμή και τυπική απόκλιση  $(\mu_x, \sigma_x)$ ,  $(\mu_y, \sigma_y)$  και ότι η  $Z=aX+bY$  γεννά την υφή. Προσδιορίσαμε τις παραμέτρους  $a$ ,  $b$ ,  $\mu_x, \sigma_x$ ,  $\mu_y, \sigma_y$  ούτως ώστε το μοντέλο αυτό να προσεγγίζει βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων τις υπάρχουσες φωτογραφίες. Εν συνεχεία εφαρμόσαμε την  $Z$  με τις παραμέτρους παντού. Η προηγούμενη διαδικασία δε δίνει ομαλή μετάβαση της υφής μεταξύ γειτονικών σημείων, για αυτό το λόγο κάνουμε μια διαδικασία εξομάλυνσης με μικρού βαθμού πολυωνυμική παρεμβολή ώστε να λάβουμε ικανοποιητικό οπτικό αποτέλεσμα.

Όσον αφορά τη μορφή των δαπέδων, αρχικά ελήφθησαν πολλές φωτογραφίες των δαπέδων των δωματίων  $A1$ ,  $A2$  και  $A3$  καθώς και φωτογραφίες δαπέδων δωματίων άλλων κτιρίων του οικισμού.



Έγινε μεγάλο πλήθος δοκιμών όπου σε κάθε τέτοια δοκιμή πραγματοποιήθηκε ένας γραμμικός συνδυασμός του χρωματικού περιεχομένου των αντίστοιχων φωτογραφιών. Εξετάζοντας το αποτέλεσμα των παραπάνω συνδυασμών καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η καλύτερη βάση ήταν αυτή που προέκυπτε από το γραμμικό συνδυασμό των φωτογραφιών των δαπέδων των δωματίων A1 και A2 με ποσοστό ανάμιξης 60% και 40% αντίστοιχα. Εν συνεχεία, τροποποιήσαμε αυτή τη βάση δαπέδων με γραμμικούς συνδυασμούς του περιεχομένου των φωτογραφιών των υπολοίπων δαπέδων όπου οι υπόλοιπες φωτογραφίες συμμετείχαν στο γραμμικό συνδυασμό σαφώς με μικρότερο ποσοστό μέχρι 20%. Το τελικό αποτέλεσμα βασίστηκε στην κρίση των αρχαιολόγων οι οποίοι έκριναν ότι αυτό ικανοποιούσε την αίσθησή τους αναφορικά τόσο με το τεχνολογικό επίπεδο της εποχής όσο και με την αρχιτεκτονική και αισθητική των κατοίκων του οικισμού.

## Βήμα 6

### Υλοποίηση του σεναρίου σε video

Έγινε χάραξη ενός πλέγματος 50 διαδρομών, όπου η κάθε μια διαδρομή διέφερε από τις άλλες τουλάχιστον σε ένα τμήμα της, κατά τέτοιο τρόπο ώστε το πλέγμα αυτό να καλύπτει πλήρως τον άμεσα εξωτερικό χώρο, τον πρώτο αλλά και το δεύτερο όροφο. Επί κάθε διαδρομής επελέγησαν σημεία που απέχουν 30 εκατοστά ώστε να προσομοιάζουν ίχνη βημάτων. Σε κάθε σημείο το εύρος όρασης χωρίστηκε σε 36 περίπου ίσα τμήματα. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας επελέγησαν τρεις διαδρομές όπου η πλέον σημαντική περιγράφεται κατωτέρω: Ο εικονικός επισκέπτης με αφετηρία το πίσω τμήμα του κτιρίου, κινείται κατά μήκος του μονοπατιού το οποίο βρίσκεται σε επαφή με το κτίριο. Η διεύθυνση κίνησης του εικονικού επισκέπτη είναι βορράς νότος. Φθάνοντας στη γωνία του κτιρίου κάνει στροφή προς τα δεξιά και κατευθύνεται στην κεντρική είσοδο όπου σταματά και συγκεντρώνει το βλέμμα του στην ασάμινθο. Ο φωτισμός αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, η πόρτα εισόδου ανοίγει και ο εικονικός επισκέπτης εισέρχεται στο δωμάτιο A1 δηλαδή στο πρώτο δωμάτιο του ισογείου. Κοιτά σε ένα εύρος γωνίας  $90^{\circ}$  μετακινείται σε άλλη γωνία του χώρου και επαναλαμβάνει την επισκόπηση του χώρου με τον ίδιο τρόπο. Επανέρχεται στην είσοδο και μετακινείται προς το δωμάτιο A2 όπου και εισέρχεται. Στη συνέχεια επισκοπεί το χώρο από δύο διαφορετικές θέσεις. Ακολούθως, εισέρχεται στο δωμάτιο A3,

όπου επισκοπεί το χώρο πάλι από δύο διαφορετικές θέσεις. Η μετάβαση του εικονικού επισκέπτη στο δωμάτιο A1 και η κίνησή του προς τη σκάλα, η οποία συνδέει το δωμάτιο A1 με το μοναδικό δωμάτιο του πρώτου ορόφου ολοκληρώνει την περιήγηση του πρώτου ορόφου. Ο εικονικός επισκέπτης κάνει επισκόπηση του χώρου και κινείται προς την έξοδο του δωματίου προς το δώμα όπου ολοκληρώνεται και η εικονική περιήγηση.

## 5. Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία :

1. Αναπτύχθηκε ένας νέος αλγόριθμος κατάτμησης εικόνας που στοχεύει στο να λαμβάνει υπόψιν τη φθορά που έχουν υποστεί αρχαιολογικά ευρήματα. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε με μεγάλη επιτυχία στην αυτόματη κατάτμηση εικόνων αρχαίων επιγραφών της Κλασσικής και Ελληνιστικής περιόδου, αλλά και στην κατάτμηση εικόνων αγγείων της Ύστερης Εποχής του Χαλκού που ανεσκάφησαν στο Ακρωτήρι Θήρας.
2. Αναπτύχθηκε μια γενική μεθοδολογία που επιτρέπει τον έλεγχο της υπόθεσης ότι ένα σύνολο αγγείων παρήχθη από το ίδιο καλούπι ή από το ίδιο χέρι με χρήση του ίδιου οδηγού. Με χρήση αυτής της μεθοδολογίας αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε μέθοδος ομαδοποίησης των αγγείων ανάλογα με το βαθμό ομοιότητάς τους, επί τη βάσει πρωτοτύπων μαθηματικών κριτηρίων. Υποστηρίχθηκε η υπόθεση ότι κάποιες ομάδες αγγείων αντιστοιχούν βέλτιστα σε συγκεκριμένες κωνικές τομές.
3. Ένα από τα σημαντικότερα κτίρια του Προϊστορικού Οικισμού Ακρωτηρίου Θήρας, ο Τομέας Α, ανεπαραστάθη σε εικονική πραγματικότητα. Ο στόχος ήταν σε συνεργασία με τους αρχαιολόγους, να παρασταθεί ο Τομέας Α στη λειτουργική του μορφή, όπως δηλαδή υποθέσαμε ότι ήταν γύρω στα 1620 π.Χ, επί τη βάσει κριτηρίων αρχιτεκτονικής, στατικής, αρχαιολογικής και ιστορικής φύσεως.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Π.1. Γενικά περί καμπυλών.

#### Π.1.1 Σχετικοί ορισμοί.

##### Ορισμός καμπύλης στο χώρο $\mathbb{R}^n$

Ως καμπύλη στον χώρο  $\mathbb{R}^n$  θεωρείται το σύνολο των σημείων, δηλαδή των διατεταγμένων  $n$ -άδων, όλες οι συνιστώσες των οποίων εξαρτώνται συναρτησιακά μόνο από μία ελεύθερη μεταβλητή, η οποία παίρνει τιμές σε ένα διάστημα  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Άρα, ισοδυνάμως, η καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  που προκύπτουν από μία απεικόνιση  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$  διατεταγμένη  $n$ -άδα, όπου  $t \in I$ .

##### Ορισμός $C_n$ , $C_n^t$ και $C_{n-}$ καμπύλης.

Μία καμπύλη λέγεται  $C_n$  ομαλή ή απλώς  $C_n$  εάν η επιβατική της ακτίνα  $\vec{r}(t)$  έχει όλες τις παραγώγους μέχρι και τάξεως  $n$  και επιπλέον η  $n$ -οστή παράγωγος του  $\vec{r}(t)$  είναι συνεχής.

Επειδή, όπως είναι γνωστό, η ύπαρξη της παραγώγου τάξεως  $n$  εγγύεται τη συνέχεια της παραγώγου τάξεως  $n-1$ , συνεπάγεται ότι μία  $C_n$  καμπύλη είναι και η ίδια συνεχής, αλλά και έχει όλες τις παραγώγους του  $\vec{r}(t)$  τάξεως από 1 έως  $n$  συνεχείς.

Εάν μία καμπύλη είναι μία ένωση  $C_n$  καμπυλών θα λέγεται τμηματικώς  $C_n$  και συμβολίζεται με  $C_n^t$ . Είθισται η απλώς τμηματικώς συνεχής καμπύλη να λέγεται  $C_0^t$ .

Ορίζουμε σαν  $C_{n-}$  καμπύλη, αυτήν η οποία έχει όλες τις παραγώγους μέχρι τάξη  $n-1$  συνεχείς, αλλά από την  $n$ -οστή τάξεως παράγωγος του  $\vec{r}(t)$  τμηματικώς υπάρχει, δηλαδή υπάρχει παντού εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων.

##### Ορισμός επιβατικής ακτίνας σε τυχόν σημείο καμπύλης

Έστω τυχούσα καμπύλη  $C \subset \mathbb{R}^n$  και  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  τυχόν σημείο αυτής. Έστω  $O$  η αρχή των αξόνων,  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  μία ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^n$ ,  $t$  η παράμετρος

της καμπύλης και  $t_m$  η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  που αντιστοιχεί στο σημείο  $m$ . Η επιβατική ακτίνα στο  $m$  ορίζεται ως εξής:

$$\vec{r}(t_m) = \overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \quad (\text{Π.1.1}) (1)$$

### Ορισμός εφαπτομένου και μοναδιαίου εφαπτομένου διανύσματος καμπύλης

Έστω η καμπύλη  $C \subset \mathbb{R}^n$  με ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  και έστω  $M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  τυχόν σημείο της  $C$ , όπου οι συναρτήσεις  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα  $I$ . Τότε το διάνυσμα  $\vec{r}'(t) = x_1'(t)\vec{e}_1 + x_2'(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n'(t)\vec{e}_n$  εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο  $M$ .

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο τυχόν σημείο  $M$  της καμπύλης είναι το

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}. \quad (\text{Π.1.1}) (2)$$

Εάν οι συναρτήσεις  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $I$  τότε μπορεί να οριστεί η δεύτερη παράγωγος της επιβατικής ακτίνας, μέσω της σχέσεως  $\vec{r}''(t) = x_1''(t)\vec{e}_1 + x_2''(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n''(t)\vec{e}_n$ . Με προφανή επέκταση ορίζονται οι παράγωγοι ανωτέρας τάξεως του διανύσματος επιβατικής ακτίνας. (Π.1.1) (2).

### **Π.1.2 Ορισμός καμπυλότητας καμπύλης και σχετικά χρήσιμα θεωρήματα.**

**Η περίπτωση του κύκλου: μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\vec{T}$ , αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία κύκλου και  $\vec{r}''(s)$ .**

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου στο επίπεδο με παράμετρο την πολική γωνία, έστω  $\vartheta$ , έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= x_0 + a \cos(\vartheta) \\ y(\vartheta) &= y_0 + a \sin(\vartheta) \end{aligned} \quad (\text{Π.1.2}) (1)$$

όπου  $x_0, y_0$  οι συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του κύκλου,  $a$  η ακτίνα αυτού και  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ . Γεωμετρικά η ανεξάρτητη μεταβλητή  $\vartheta$  είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{i}$  του άξονος  $x$ , με την επιβατική ακτίνα  $\overrightarrow{KM}$  όπου  $M$  τυχόν σημείο του κύκλου.

Το στοιχειώδες μήκος του κύκλου είναι  $ds = \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2} d\vartheta = a d\vartheta$ . Συνεπώς το μήκος αυτού είναι  $s = a\vartheta$  όπως πρώτος παρατήρησε και απέδειξε ο Αρχιμήδης.

Με χρήση της παραμέτρου  $s$  οι εξισώσεις του κύκλου γίνονται

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \\ y(s) &= y_0 + a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned} \quad (\text{Π.1.2}) (2)$$

Συνεπώς το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στον κύκλο τότε γίνεται

$$\vec{r}'(s) = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}. \quad (\text{Π.1.2}) (3)$$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα συμβολίζεται και με  $\vec{T}$ . Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος  $s$  του κύκλου τότε  $\vec{T} = \vec{r}'(s)$ , ενώ στη γενική περίπτωση τυχούσης μεταβλητής  $t$  ισχύει

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}. \quad (\text{Π.1.2}) (4)$$

Παραγωγίζοντας την (Π.1.2) (3) προκύπτει

$$\begin{aligned} \vec{r}''(s) &= -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} - \frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} \Leftrightarrow \\ \vec{r}''(s) &= -\frac{1}{a^2}(\vec{r}(s) - x_0\vec{i} - y_0\vec{j}) = -\frac{1}{a^2}\overrightarrow{KM}. \end{aligned} \quad (\text{Π.1.2}) (5)$$

Επομένως  $\|\vec{r}''(s)\| = \frac{1}{a}$ , δηλαδή το μέτρο του διανύσματος του  $\vec{r}''(s)$  μας προσφέρει αμέσως την ακτίνα του κύκλου. Επιπλέον

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) \equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \cdot \vec{T}(s) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s) \cdot \vec{T}(s) = 0. \quad \text{Όλα τα}$$

ανωτέρω καταδεικνύουν ότι το διάνυσμα  $\vec{r}''(s)$  σε τυχόν σημείο  $M$  του κύκλου δείχνει προς το κέντρο του κύκλου  $K$  και

$$\overrightarrow{MK} = \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}. \quad (\text{Π.1.2}) (6)$$

Συνεπώς η γνώση ενός τυχόντος σημείου  $M$  του κύκλου και του διανύσματος  $\vec{r}''(s)$  σε αυτό το σημείο ορίζει μονοσήμαντα τον κύκλο.

**Η γενική περίπτωση καμπύλης. Ο εγγύτατος κύκλος και η καμπυλότητα με παράμετρο το μήκος καμπύλης  $s$ .**

Έστω τυχούσα καμπύλη σε χώρο οσονδήποτε διαστάσεων της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος της  $s$ . Στο  $\mathbb{R}^2$  ισχύει

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} \quad (\text{Π.1.2}) (7)$$

ενώ στο  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k} \quad (\text{Π.1.2}) (8)$$

Σημειώνεται ότι επειδή εξ υποθέσεως  $d\vec{r} = d\vec{s}$ ,  $\|\vec{r}'(s)\| \equiv \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| \equiv \frac{\|d\vec{s}\|}{ds} = 1$  που

σημαίνει ότι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\vec{T}(s)$  στο τυχόν σημείο A της καμπύλης ισούται με  $\vec{r}'(s)$ , δηλαδή  $\vec{T}(s) = \vec{r}'(s) \forall s$ .

Εξ άλλου  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{r}''(s)$ , οπότε ας θεωρήσουμε το μοναδικό κύκλο (K) ο οποίος

περνάει από το ίδιο σημείο A, έχει το ίδιο  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$  στο A με τη δεδομένη καμπύλη

και κείται στο ίδιο επίπεδο με το  $\vec{T}(s)$ . Θα αποδείξουμε ότι εάν B είναι το σημείο

$\vec{r}(s+ds)$  και  $\vec{T}(s+ds)$  το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο B

τότε το B ανήκει επίσης στον κύκλο (K), ενώ επίσης τα  $\vec{T}(s)$  και  $\vec{T}(s+ds)$

εφάπτονται στον (K) στα αντίστοιχα σημεία.

Απόδειξη: Ακολουθώντας τη συλλογιστική που αναπτύξαμε στην παραπάνω

ενότητα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$  είναι κάθετο στο  $\vec{T}(s)$ . Πράγματι,

$$\text{ισχύει ότι } \vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) \equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \cdot \vec{T}(s) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s) \cdot \vec{T}(s) = 0.$$

Επομένως το  $\vec{T}(s)$  εφάπτεται και στον κύκλο (K) και στη δεδομένη καμπύλη

αφού το  $\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{r}''(s)$  εξ υποθέσεως είναι κοινό και στη δεδομένη καμπύλη και

στον (K). Επίσης  $\vec{r}(s+ds) = \vec{r}(s) + \vec{r}'(s)ds = \vec{r}(s) + \vec{T}(s)ds$  γεγονός που

αποδεικνύει ότι και το σημείο  $\vec{r}(s+ds)$ , δηλαδή το σημείο B επίσης ανήκει

στον (K). Όντως αν O η αρχή των αξόνων και K το κέντρο του (K), τα δεδομένα

είναι ότι  $\vec{OB} = \vec{r}(s+ds)$ ,  $\vec{OA} = \vec{r}(s)$ , οπότε και  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{r}'(s)ds = \vec{T}(s)ds$ . Άλλα

προφανώς  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{KB} - \vec{KA}$ , οπότε  $\vec{KB} = \vec{KA} + \vec{T}(s)ds$ . Επειδή, δε, ο (Κ) και η καμπύλη έχουν το ίδιο μοναδιαίο εφαπτόμενο στο Α, το Β ανήκει στον (Κ).

Τέλος  $\vec{T}(s+ds) = \vec{T}(s) + \frac{d\vec{T}}{ds}ds$ . Αλλά  $\vec{T}(s)$  και  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  είναι κοινά και στον κύκλο (Κ)

και στην καμπύλη. Άρα  $\vec{T}(s+ds)$  εφαπτεται επίσης στον κύκλο (Κ) στο σημείο Β.

Ακρβώς επειδή ο κύκλος (Κ) έχει κανά σημεία με την καμπύλη τα  $\vec{r}(s)$  και  $\vec{r}(s+ds)$  ως και κοινές εφαπτόμενες στα σημεία αυτά, ονομάζεται εγγύτατος κύκλος διότι είναι η καλύτερη δευτέρας τάξεως προσέγγιση της καμπύλης.

**Ορισμός:** Ορίζουμε, εύλογα, την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο  $A(\vec{r}(s))$  την καμπυλότητα του κύκλου (Κ). Επειδή δε, ο κύκλος (Κ) εξ υποθέσεως έχει κοινό  $\vec{r}''(s)$  με την καμπύλη, προφανώς η καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο  $A(\vec{r}(s))$  είναι  $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$ . Το κέντρο δε του εγγυτάτου κύκλου είναι το σημείο

$\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$ , η δε ακτίνα του (Κ) είναι  $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$ , η οποία και λέγεται εγγυτάτη

ακτίνα ή ακτίνα καμπυλότητας.

### Η καμπυλότητα στη γενική περίπτωση καμπύλης με τυχούσα παράμετρο.

Έστω τυχούσα καμπύλη με τυχούσα ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ . Άρα στο  $\mathcal{R}^2$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (\text{Π.1.2}) (9)$$

Παραγωγίζοντας ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή έχουμε

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \|\vec{r}'(t)\| \Leftrightarrow \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \quad (\text{Π.1.2}) (10)$$

Αλλά

$$\frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \vec{T}(t) \quad (\text{Π.1.2}) (11)$$

Άρα

$$\vec{T}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \quad (\text{Π.1.2}) (12)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς  $t$  έχουμε



$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} |\vec{r}'(t)| \Leftrightarrow$$

(Π.1.2) (13)

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\frac{d\vec{T}(t)}{dt}}{|\vec{r}'(t)|} \Leftrightarrow \left\| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\| = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|} = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = k$$

Όπου  $k$  η καμπυλότητα εκπεφρασμένη, στην τελευταία σχέση, ως προς την ανεξάρτητη παράμετρο  $t$ .

## Θεμελιώδεις Ορισμοί και Θεωρήματα επί των κωνικών τομών

### Π.1.3 Περί Ελλείψεως

Έστωσαν δύο σταθερά σημεία  $E_1$  και  $E_2$ , τα οποία συνήθως ονομάζονται εστίες. Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  το άθροισμα των αποστάσεων των οποίων από τα  $E_1$  και  $E_2$  είναι σταθερό.

#### Λύση

Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας θεωρούμε κατ' αρχήν ότι οι δύο εστίες κείνται επί του  $x$  άξονα με το μέσο τους επί της αρχής των αξόνων  $O$  στα σημεία  $(-c,0)$  και  $(c,0)$ ,  $c < a$ . Εάν το σταθερό άθροισμα είναι δύο  $2a$  και  $M(x,y)$  τυχόν σημείο του γεωμετρικού τόπου, πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$2a = ME_1 + ME_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$4a^2 = (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$2a^2 = x^2 + c^2 + y^2 + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$2a^2 - x^2 - c^2 - y^2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (\text{Π.1.3}) (1)$$

Μετά από ύψωση στο τετράγωνο και απλοποιήσεις λαμβάνουμε

$$a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0 \quad (\text{Π.1.3}) (2)$$

Και θέτοντας  $b^2 = a^2 - c^2$  τελικά λαμβάνουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Π.1.3}) (3)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν αυτή την εξίσωση ονομάζεται έλλειψη, είναι δε ένα σχήμα με άξονες συμμετρίας

τους  $x$  και  $y$ . Προφανώς, η έλλειψη συναντά τον άξονα των  $x$  στο  $(\pm a, 0)$ , τον δε άξονα των  $y$  στο  $(0, \pm b)$ .

### Η γενική εξίσωση της ελλείψεως.

Η (Π.1.3) (3) είναι η εξίσωση της έλλειψης οι άξονες της οποίας είναι άξονες των συντεταγμένων. Μια πρώτη γενίκευση προκύπτει εάν στρέψουμε την έλλειψη περί την αρχή των αξόνων κατά γωνία  $\varphi$  ανθρωπολογικά. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, το τυχόν σημείο  $(x, y)$  της ελλείψεως μετασχηματίζεται στο σημείο  $(X, Y)$  που ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\text{Π.1.3}) (4)$$

Η τελευταία ισοδυναμία οφείλεται στο γεγονός ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η (Π.1.3) (4) δίνει τις σχέσεις

$$x = X \cos \varphi + Y \sin \varphi$$

$$y = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi$$

οπότε με αντικατάσταση στην (Π.1.3) (3) προκύπτει η εξίσωση

$$AX^2 + BY^2 + CXY + F = 0 \quad (\text{Π.1.3}) (5)$$

όπου

$$A = b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi$$

$$B = b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = (b^2 - a^2) 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$F = -a^2 b^2$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\Delta = 4AB - C^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4a^2 b^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) = 4a^2 b^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4a^2 b^2$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα  $\Delta$ , που ονομάζεται διακρίνουσα, είναι πάντοτε θετική, η δε τιμή της δεν εξαρτάται από την περιστροφή της ελλείψεως.

Για να γράψουμε τη γενική εξίσωση της έλλειψης πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας και την πιθανή παράλληλη μετατόπιση του κέντρου της. Πράγματι, εάν η έλλειψη έχει άξονες συμμετρίας παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων αλλά το κέντρο της βρίσκεται στην θέση  $(x_0, y_0)$  τότε ας θεωρήσουμε ένα τυχόν σημείο  $M(x, y)$  αυτής. Έστω τώρα ότι στρέφουμε την έλλειψη κατά γωνία  $\varphi$  ανθρωπολογικά, οπότε το σημείο  $M$  μετατοπίζεται στο  $N(X, Y)$ . Το ερώτημα που τίθεται είναι: ποιά είναι η σχέση που συνδέει τα  $(X, Y)$ ; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, πρώτα μετατοπίζουμε την έλλειψη ώστε το κέντρο της να γίνει η αρχή των αξόνων  $(0,0)$ . Τότε το σημείο  $M(x, y)$  μετατοπίζεται στο  $M'(x-x_0, y-y_0)$ . Προφανώς η εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες του  $M'$  είναι

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Π.1.3}) (6)$$

Εάν, τώρα, περιστρέψουμε την έλλειψη στη νέα της θέση γύρω από το  $(0,0)$  τότε το  $M'(x-x_0, y-y_0)$  μεταφέρεται στο σημείο  $N'(u, v)$ , με

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad (\text{Π.1.3}) (7)$$

$$\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Αλλά, για να μεταφερθεί τελικά το  $N'(u, v)$  στο  $N(X, Y)$  πρέπει να μετατοπιστεί κατά  $(x_0, y_0)$  όπως και όλη η υπόλοιπη έλλειψη. Δηλαδή ισχύει :

$$\begin{aligned} X &= u + x_0, Y = v + y_0 \Leftrightarrow \\ u &= X - x_0, v = Y - y_0 \end{aligned} \quad (\text{Π.1.3}) (8)$$

Με αντικατάσταση των ανωτέρω σχέσεων (Π.1.3) (8) στην (Π.1.3) (7) λαμβάνω τελικά

$$\begin{aligned} (x-x_0) &= (X-x_0)\cos\varphi + (Y-y_0)\sin\varphi \\ (y-y_0) &= -(X-x_0)\sin\varphi + (Y-y_0)\cos\varphi \end{aligned} \quad (\text{Π.1.3}) (9)$$

Με αντικατάσταση των ανωτέρω σχέσεων (Π.1.3) (9) στην (Π.1.3) (6), απαλοιφή των παρανομαστών και αναγωγή ομοίων όρων, λαμβάνουμε τη γενική εξίσωση της ελλείψεως

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0$$

όπου

$$A = b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi$$

$$B = b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = (b^2 - a^2)2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$D = -2x_0(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) + 2y_0 \sin \varphi \cos \varphi(a^2 + b^2)$$

$$E = -2y_0(b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi) + 2x_0 \sin \varphi \cos \varphi(a^2 + b^2)$$

$$F = b^2(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2 + a^2(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 - a^2 b^2 \quad (\text{Π.1.3}) (10)$$

Η διακρίνουσα  $\Delta = 4AB - C^2$ , διατηρεί τις ίδιες ιδιότητες η δε τιμή της δεν εξαρτάται από τη θέση της ελλείψεως.

Αν μας δοθεί η γενική εξίσωση της ελλείψεως μπορούμε να βρούμε τη γωνία που πρέπει να την περιστρέψουμε ώστε οι άξονες συμμετρίας της να είναι παράλληλοι προς τους άξονες συντεταγμένων. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$A - B = (b^2 - a^2)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = (b^2 - a^2) \cos 2\varphi \quad (\text{Π.1.3}) (11)$$

και επίσης ότι

$$C = (b^2 - a^2) \sin 2\varphi \quad (\text{Π.1.3}) (12)$$

οπότε τελικά

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B}. \quad (\text{Π.1.3}) (13)$$

Η γνώση της γωνίας  $\varphi$  προσφέρει αμέσως τα  $a$   $b$  από τα  $A$   $B$   $C$ .

### Πολική εξίσωση της ελλείψεως

Έστω η έλλειψη με άξονα συμμετρίας τους άξονες συντεταγμένων και έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα  $x$  και σχηματίζει δίεδρο γωνία  $\gamma$  προς το

$xy$  επίπεδο τέτοια ώστε  $\cos \gamma = \frac{b}{a}$ . Θεωρούμε τον κύκλο (Κ) κέντρου Ο και ακτίνας

$a$  που κείται επί του επιπέδου αυτού. Η προβολή του (Κ) επί του  $xy$  είναι η έλλειψη που περιγράφεται από την εξίσωση (Π.1.3) (3). Όντως, εάν  $x, y$  είναι οι συντεταγμένες επί του πλαγίου επιπέδου, τότε η εξίσωση του κύκλου (Κ) σε πολικές συντεταγμένες επί του επιπέδου αυτού είναι

$$x = a \cos \vartheta$$

$$y = a \sin \vartheta \quad (\text{Π.1.3}) \quad (14)$$

Η έλλειψη (Π.1.3) (3) και ο κύκλος (Κ) έχουν πάντα κοινή  $x$  συντεταγμένη στα αντίστοιχα σημεία τους. Η προβολή όμως του τυχόντος σημείου του κύκλου (Κ) επί του  $xy$  επιπέδου έχει  $y$  συντεταγμένη όπου

$$y = r \cos \gamma = \frac{b}{a} a \sin \vartheta = b \sin \vartheta \quad (\text{Π.1.3}) \quad (15)$$

Άρα η προβολή του τυχόντος σημείου του κύκλου (Κ) επί του  $xy$  επιπέδου ικανοποιεί την εξίσωση της ελλείψεως (Π.1.3) (3), η δε προβολή αυτού δίνεται από τις εξισώσεις

$$x = a \cos \vartheta$$

$$y = b \sin \vartheta \quad (\text{Π.1.3}) \quad (16)$$

όπου  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ .

Οι (Π.1.3) (16) είναι οι πολικές εξισώσεις της ελλείψεως όπου όμως τονίζεται ότι η γωνία  $\vartheta$  είναι η πολική γωνία του κύκλου (Κ) στο επίπεδό του και όχι αυτή της ελλείψεως.

## Περί Υπερβολής

### Η βασική ιδιότητα της Υπερβολής

Έστωσαν δύο σταθερά σημεία  $E_1$  και  $E_2$  τα οποία συνήθως ονομάζονται εστίες της υπερβολής. Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  η διαφορά των αποστάσεων των οποίων από τις εστίες είναι έχει απόλυτη τιμή σταθερή, έστω  $2a$ .

#### Λύση

Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας θεωρούμε κατ' αρχήν ότι οι δύο εστίες κείνται επί του  $x$  άξονα στα σημεία  $(-c, 0)$  και  $(c, 0)$  αντιστοίχως με  $c > a$ . Τότε για το τυχόν σημείο  $M(x, y)$  του γεωμετρικού τόπου, πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$2a = |ME_1 - ME_2| = \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| \Leftrightarrow$$

$$4a^2 = (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$2a^2 = x^2 + c^2 + y^2 - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$2a^2 - x^2 - c^2 - y^2 = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Μετά από ύψωση στο τετράγωνο και απλοποιήσεις λαμβάνουμε

$$a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0 \quad (\text{Π.1.3}) (17)$$

Αλλά στο προκείμενο  $c > a$ , οπότε υπάρχει το σημείο επί του άξονα των  $x$  με συντεταγμένες  $(a,0)$  για το οποίο ισχύει  $a + c - (c - a) = 2a$ , άρα το σημείο αυτό που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο εστίες ανήκει στο γεωμετρικό τόπο. Επομένως, σε αντίθεση με την έλλειψη, στο προκείμενο θέτουμε  $c^2 - a^2 = b^2 \quad b \in \mathbb{R}$ .

Συνεπώς η σχέση (Π.1.3) (17) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Π.1.3}) (18)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν αυτή την εξίσωση ονομάζεται υπερβολή. Παρατηρούμε ότι για  $y = 0$  προκύπτει  $x = \pm a$ , γεγονός που επιβεβαιώνει ότι ο γεωμετρικός τόπος συναντά τον άξονα στα σημεία  $(-a,0)$  και  $(a,0)$  ανάμεσα στις δύο εστίες. Εξ' άλλου παρατηρούμε ότι για  $x = 0$  η εξίσωση δεν έχει δεν λύση εν  $\mathbb{R}$  γεγονός που αποδεικνύει ότι ο άξονας των  $y$  δεν συναντά το γεωμετρικό τόπο. Επιπλέον παρατηρούμε ότι αν το σημείο  $(x, y)$  ανήκει στο γεωμετρικό τόπο, το αυτό ισχύει και για τα σημεία  $(-x, y)$ ,  $(-x, -y)$  και  $(x, -y)$ . Άρα η υπερβολή έχει δύο κλῆρους (διότι δεν την τέμνει ο άξονας των  $y$ ) έχει άξονες συμμετρίας τόσο τον άξονα των  $y$  όσο και των  $x$ , δηλαδή τον άξονα που ορίζουν οι εστίες ως και τη μεσοκάθετο αυτών, έχει δε σημείο συμμετρίας το μέσο των εστιών.

### Η γενική εξίσωση της υπερβολής

Η (Π.1.3) (18) είναι η εξίσωση της υπερβολής οι άξονες της οποίας είναι άξονες των συντεταγμένων. Μια πρώτη γενίκευση αυτής της εξισώσεως προκύπτει εάν στρέψουμε την υπερβολή περί την αρχή των αξόνων κατά γωνία  $\varphi$  ανθρωπολογικά. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, το τυχόν σημείο  $(x, y)$  της υπερβολής μετασχηματίζεται στο σημείο  $(X, Y)$  που ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\text{Π.1.3}) (19)$$

Η (Π.1.3) (19) δίνει εκ νέου τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= X \cos \varphi + Y \sin \varphi \\ y &= -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \end{aligned}$$

οπότε με αντικατάσταση στην (Π.1.3) (18) προκύπτει η εξίσωση

$$AX^2 + BY^2 + CXY + F = 0 \quad (\text{Π.1.3}) (20)$$

Όπου

$$A = b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi$$

$$B = b^2 \sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = (b^2 + a^2)2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$F = -a^2 b^2$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\Delta = 4AB - C^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = -4a^2 b^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) = 4a^2 b^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = -4a^2 b^2$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή η διακρίνουσα  $\Delta$ , είναι πάντοτε αρνητική, η δε τιμή της είναι πάλι ανεξάρτητη από την περιστροφή της υπερβολής.

Για να γράψουμε τη γενική εξίσωση της υπερβολής πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας και την πιθανή παράλληλη μετατόπιση του κέντρου της. Πράγματι, εάν η υπερβολή έχει άξονες συμμετρίας παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων αλλά το κέντρο της βρίσκεται στην θέση  $(x_0, y_0)$  τότε, προφανώς, η εξίσωσή της είναι

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Π.1.3}) (21)$$

Εάν, επιπλέον, η έλλειψη είναι και εστραμμένη περί το  $(x_0, y_0)$  τότε πρώτα τη μετατοπίζουμε παραλλήλως στην αρχή των αξόνων και την περιστρέφουμε όπως προηγουμένως, μέσω των σχέσεων

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (\text{Π.1.3}) (22)$$

όπου βεβαίως  $U = X - x_0$ ,  $V = Y - y_0$ . Άρα η (Π.1.3) (22) δίνει τις σχέσεις

$$x = U \cos \varphi + V \sin \varphi + x_0 = (X - x_0) \cos \varphi + (Y - y_0) \sin \varphi + x_0$$

$$y = -U \sin \varphi + V \cos \varphi + y_0 = -(X - x_0) \sin \varphi + (Y - y_0) \cos \varphi + y_0$$

και λαμβάνουμε την γενική εξίσωση της υπερβολής η οποία είναι ίδιας μορφής με της ελλείψεως δηλαδή η :

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0 \quad (\text{Π.1.3}) \quad (23)$$

όπου

$$A = b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi$$

$$B = b^2 \sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = (b^2 + a^2) 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$D = -2x_0(b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) - 2y_0 \sin \varphi \cos \varphi (b^2 + a^2)$$

$$E = -2y_0(b^2 \sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi) - 2x_0 \sin \varphi \cos \varphi (b^2 + a^2)$$

$$F = b^2(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2 - a^2(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 - a^2 b^2$$

Η διακρίνουσα  $\Delta = 4AB - C^2$ , διατηρεί ακριβώς την ίδια τιμή και τις ίδιες ιδιότητες, άρα χαρακτηρίζει την υπερβολή.

Αν μας δοθεί η γενική εξίσωση της υπερβολής (Π.1.3) (23) μπορούμε να βρούμε τη γωνία με την οποία πρέπει να την περιστρέψουμε ώστε οι άξονες συμμετρίας της να είναι παράλληλοι προς τους άξονες συντεταγμένων. Όντως, παρατηρούμε ότι

$$A - B = (b^2 + a^2) \cos 2\varphi \quad (\text{Π.1.3}) \quad (24)$$

και επίσης ότι

$$C = (b^2 + a^2) \sin 2\varphi$$

οπότε τελικά

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B}.$$

Γνώση της γωνίας  $\varphi$  προσφέρει αμέσως τα  $a$   $b$  από τα  $A$   $B$   $C$  ανωτέρω.

### «Πολική» εξίσωση της υπερβολής

Η (Π.1.3) (18) μπορεί να γραφεί σε μία εναλλακτική κομψή μορφή με εκμετάλλευση των λεγόμενων υπερβολικών τριγωνομετρικών αριθμών, οι οποίοι άλλωστε πήραν το όνομά τους από αυτήν. Όντως, είθισται να ορίζεται το υπερβολικό συνημίτονο για κάθε  $t \in R$  μέσω της σχέσεως

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (\text{Π.1.3}) \quad (25)$$

ενώ το υπερβολικό ημίτονο μέσω της

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (\text{Π.1.3}) \quad (26)$$



Με ευθύγραμμες πράξεις αποδεικνύονται οι κάτωθι σχέσεις.

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \quad (\text{Π.1.3}) \quad (27)$$

$$\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t)$$

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$$

Με χρήση των ανωτέρω η εξίσωση της υπερβολής (Π.1.3) (18), πρώτα για το θετικό κλάδο μετασχηματίζεται εάν χρησιμοποιήσουμε το  $t \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = e^t \quad (\text{Π.1.3}) \quad (28)$$

και

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = e^{-t}$$

ή ισοδυνάμως

$$\frac{x}{a} = \cosh(t) \text{ και } \frac{y}{b} = \sinh(t).$$

Άρα οι ισοδύναμες με την (Π.1.3) (18) εναλλακτικές εξισώσεις είναι οι

$$x = a \cosh(t)$$

$$y = b \sinh(t) \quad (\text{Π.1.3}) \quad (29)$$

Αναλόγως για τον αρνητικό κλάδο της υπερβολής οι εξισώσεις γίνονται

$$x = -a \cosh(t)$$

$$y = b \sinh(t) \quad (\text{Π.1.3}) \quad (30)$$

### Ασύμπτωτες της υπερβολής

Εάν στην εξίσωση της υπερβολής (Π.1.3) (21) διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με  $(x - x_0)^2$  και αφήσουμε το  $x$  να τείνει στο άπειρο, λαμβάνουμε

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} & \text{για } (y - y_0)(x - x_0) > 0 \\ -\frac{b}{a} & \text{για } (y - y_0)(x - x_0) < 0. \end{cases} \quad (\text{Π.1.3}) \quad (31)$$

Ισοδυνάμως, καθώς  $x, y \rightarrow \infty$  η υπερβολή και στους δύο κλάδους της τείνει να ταυτιστεί ασυμπτωτικά με δύο ευθείες που ονομάζονται ασύμπτωτες της υπερβολής.

## Ορισμός επιφανείας στον χώρο $\mathbb{R}^n$

Έστω ένα σύνολο σημείων  $S$  του  $\mathbb{R}^n$ , κάθε συντεταγμένη των οποίων εξαρτάται από δυο ακριβώς παραμέτρους, οι οποίες λαμβάνουν τιμές από ένα συνεκτικό χωρίο. Τότε, το σύνολο αυτό  $S$  ονομάζεται επιφάνεια. Ισοδυνάμως, το  $S$  είναι το σύνολο των σημείων  $(x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_n(u, v))$ , όπου τα  $u, v$  λαμβάνουν από ένα συνεκτικό χωρίο  $\Sigma$ .

### Παράδειγμα 1

Η σφαίρα ακτίνας  $\alpha$  στο  $R^3$  με πολικές συντεταγμένες  $\theta, \phi$  όπου  $\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$  περιγράφεται από τις σχέσεις

$$x(\theta, \phi) = \alpha \sin \theta \cos \phi \quad (\text{Π.1.3}) \quad (32)$$

$$y(\theta, \phi) = \alpha \sin \theta \sin \phi$$

$$z(\theta, \phi) = \alpha \cos \theta.$$

Δηλαδή στο προκείμενο  $u=\theta$   $v=\phi$  και το συν  $\kappa \kappa$  ό χωρίο απ' όπου οι ανεξάρτητες αυτές μεταβλητές παίρνουν τιμή είναι το  $\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$

### Παράδειγμα 2

#### Επιφάνειες που παράγονται εκ περιστροφής γύρω από ένα σταθερό άξονα.

Ας θεωρήσουμε για απλότητα ότι ο σταθερός άξονας είναι ο  $z$  και ότι υπάρχει μια καμπύλη  $C$  η οποία βρίσκεται στο  $xz$  επίπεδο εξ' ολοκλήρου στα θετικά  $x$ . Εάν περιστρέψουμε την καμπύλη  $C$  γύρω από τον άξονα  $z$  παρατηρούμε ότι το τυχόν σημείο  $M(x, y, z)$  της  $C$  κατά την περιστροφή διατηρεί σταθερή απόσταση από τον άξονα  $z$ . Ισοδυνάμως, εάν  $N$  είναι η προβολή του  $M$  πάνω στον άξονα  $z$  τότε το διάνυσμα  $\overline{NM}$  διατηρεί σταθερό μέτρο καθ' όλες τις φάσεις της περιστροφής της  $C$  (για όλες τις γωνίες περιστροφής αυτής). Στην αρχική όμως θέση, το  $M$  είχε  $y$  συντεταγμένη μηδέν και  $x = x_0$ . Άρα, το μέτρο του  $NM$  είναι  $NM = x_0$ . Επίσης για όλες τις γωνίες περιστροφής, το  $z$  παραμένει και αυτό σταθερό.

Επιπλέον, το  $M$  περιστρέφεται παράλληλα προς το  $xy$  επίπεδο, άρα οι συντεταγμένες  $x, y$  του για όλες τις γωνίες περιστροφής, υπακύν στον τύπο περιστροφής σημείου στο  $xy$  επίπεδο. Δηλαδή, αν  $\phi$  είναι γωνία περιστροφής,

$$\text{τότε η μήτρα περιστροφής είναι η } A = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

και οι συντεταγμένες του εστραμμένου σημείου  $M$  είναι οι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \cos \phi \\ y = x_0 \sin \phi \end{cases} .$$

Έστω τώρα ότι μπορούμε, τώρα να θεωρήσουμε σαν ανεξάρτητη μεταβλητή της καμπύλης  $C$  το  $z$ . Τότε, για κάθε σημείο της καμπύλης ισχύει  $x_0 = f(z)$  όπου  $f(z)$  είναι η συναρτησιακή μορφή της καμπύλης  $C$ .

Επομένως, το τυχόν σημείο  $M$  της επιφάνειας εκ περιστροφής της  $C$  δίνεται από την τριάδα  $(f(z) \cos \phi, f(z) \sin \phi, z)$ . Προφανώς το σύνολο των σημείων που δίνονται από τον ανωτέρω τύπο είναι επιφάνεια με  $u = z, v = \phi, \phi \in [0, 2\pi)$ , ενώ το  $z$  ανήκει στο διάστημα που προκύπτει όταν προβάλλουμε την  $C$  στον άξονα  $z$ .

### Διάνυσμα κάθετο σε επιφάνεια

Έστω η επιφάνεια  $S$  που περιγράφεται από τη διανυσματική εξίσωση  $\vec{r}(u, v)$ . Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας, για απλότητα, θα υποθέσουμε ότι η  $S$  ανήκει στο χώρο  $\mathbb{R}^3$ , οπότε

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}. \quad (\text{Π.1.3}) \quad (33)$$

Αν κρατήσω το  $u$  σταθερό, έστω  $u = u_0$  τότε το πέρας της επιβατικής ακτίνας  $\vec{r}(u_0, v)$  διαγράφει καμπύλη  $C_v$ , διότι η εξίσωση της επιβατικής ακτίνας εξαρτάται πλέον από μια μεταβλητή την  $v$ . Σύμφωνα, με όσα περιγράφηκαν στην αρχή του παραρτήματος ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο τυχόν σημείο της καμπύλης  $C_v$  είναι η μερική παράγωγος  $\frac{\partial r(u_0, v)}{\partial v}$ , ενώ το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης στο σημείο αυτό δίνεται από τη σχέση

$$\vec{ds} = \frac{\partial r(u_0, v)}{\partial v} dv$$

Αντιστοίχως, αν κρατήσουμε το  $v$  σταθερό, έστω  $v = v_0$ , προκύπτει μια καμπύλη  $C_u$ , η διανυσματική εξίσωση της οποίας εξαρτάται μόνο από το  $u$  με εφαπτόμενο διάνυσμα το  $\frac{\partial r(u, v_0)}{\partial u}$  και με στοιχειώδες μήκος

$$\vec{ds} = \frac{\partial r(u, v_0)}{\partial u} du. \quad (\text{Π.1.3}) \quad (34)$$

Τα διανύσματα αυτά  $\frac{\partial r(u_0, v)}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial r(u, v_0)}{\partial u}$ , στο σημείο  $(u_0, v_0)$ , εάν δεν είναι συγγραμμικά ορίζουν ένα επίπεδο εφαπτόμενο στην επιφάνεια  $S$  στο σημείο αυτό. Ως γνωστόν, κάθε επίπεδο βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτού. Επομένως, επειδή τοπικά στο  $(u_0, v_0)$  θεωρούμε ότι η επιφάνεια και το εφαπτόμενο επίπεδο της συμπίπτουν, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο της  $S$  στο  $(u_0, v_0)$ , εφ' όσον υπάρχει ευρίσκεται τοπικά σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με την επιφάνεια και ορίζεται ως το κάθετο διάνυσμα αυτής στο συγκεκριμένο σημείο. Με άλλα λόγια το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S$  στο σημείο  $(u_0, v_0)$  ορίζεται εφ' όσον τα διανύσματα  $\frac{\partial r(u_0, v)}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial r(u, v_0)}{\partial u}$  υπάρχουν στο σημείο αυτό και δεν είναι συγγραμμικά, οπότε αυτό ισούται με

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial r(u_0, v)}{\partial v} \times \frac{\partial r(u, v_0)}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial r(u_0, v)}{\partial v} \times \frac{\partial r(u, v_0)}{\partial u} \right\|}. \quad (\text{Π.1.3}) \quad (35)$$

Υπενθυμίζουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^3$  δύο διανυσμάτων

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad \text{και} \quad (\text{Π.1.3}) \quad (36)$$

$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$  δίνεται από τη σχέση

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) - \vec{j}(A_x B_z - A_z B_x) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x),$$

ενώ το μέτρο ή μήκος ή νόρμα του τυχόντος διανύσματος  $\vec{A}$  δίνεται από τη σχέση

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (\text{Π.1.3}) \quad (37)$$

Εάν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\vec{n}$  υπάρχει σε κάθε σημείο της επιφάνειας  $S$ , τότε η  $S$  λέγεται ομαλή. Επίσης, η  $S$  είναι προσανατολισμένη, όταν 'εάν ξεκινάμε να τη βάφουμε από ένα σημείο της υπάρχει μια πλευρά της που

παραμένει άβαφη'. Τυπικό παράδειγμα μη προσανατολισμένης επιφάνειας είναι ταινία Moebius. Η  $S$  λέγεται κλειστή εάν μπορεί να χωρίσει το χώρο σε δύο υποχώρους που έχουν κοινό σύνολο την  $S$  και ο ένας ονομάζεται εσωτερικός της  $S$  και ο άλλος εξωτερικός. Τονίζεται ένα ακέραιο αγγείο θεωρείται μια προσανατολισμένη επιφάνεια  $S$ , εάν δε του καλύψουμε το στόμιο είτε νοητά, είτε πρακτικά με πώμα, τότε μετατρέπεται και σε μια κλειστή επιφάνεια.

Είθιστε, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\vec{n}$  σε μια κλειστή επιφάνεια, να επιλέγεται ούτως ώστε η φορά του να είναι πάντα από το εσωτερικό προς το εξωτερικό της  $S$ .

## **Π.2. Κτίριο Τομέα Α στο Ακρωτήριο Θήρας.**

Το κτίριο Τομέας Α (ή Αποθήκη των Πίθων) είναι το πρώτο που αποκαλύφθηκε το 1967 και βρίσκεται στο βόρειο άκρο του ανεσκαμμένου οικισμού.

Το σύνολο των τριών συνεχόμενων δωματίων, όπως και ο προθάλαμος ο οποίος οδηγεί στο δωμάτιο Α1 παρουσιάζουν ιδιαίτερο αρχιτεκτονικό ενδιαφέρον. Ο προθάλαμος αυτός δεν είχε θύρα, ήταν υπαίθριος με πλακόστρωτο δάπεδο, στο

βάθος του οποίου βρέθηκε ενσωματωμένη σε κτιστή κατασκευή πήλινη ασάμινθος.

Με δύο σκατάτια προς τα κάτω και ανατολικά οδηγείται και σε μικρό δευτερο προθάλαμο (δωμάτιο Α'1) με άξονα βορρά - νότου. Η είσοδος οδηγεί στο μεγάλο τετράγωνο δωμάτιο με κεντρικό κίονα (δωμάτιο Α1). Τον δυτικό τοίχο του δωματίου Α1 αποτελεί το ανατολικό μέτωπο του τοίχου του δωματίου Α'1 και σε επαφή με τον τοίχο αυτόν έχει κατασκευασθεί κτιστή εστία, της οποίας η άνω επίπεδη επιφάνεια είναι στρωμένη περιμετρικά με λίθινες πλάκες. Πάνω στην κτιστή εστία βρέθηκαν πέντε πήλινα σκεύη ανεστραμμένα (δύο μεγάλα χονδροειδή μονωτά κύπελλα, δύο μαγειρικές, τριποδικές χύτρες και μία χυτροπρόχους). Στο δάπεδο του δωματίου και δίπλα στην εστία βρέθηκε βυθισμένη λίθινη λεκάνη σε σχήμα νεφρού.

Κατά μήκος του νότιου τοίχου του δωματίου βρέθηκαν κατά χώραν έξι ιστάμενοι πίθοι, ενώ κατά τη διάρκεια των ανασκαφών βρέθηκαν θραυσμένοι τέσσερεις ακόμη πίθοι στο ίδιο δωμάτιο.

Άλλο ιδιαίτερα σημαντικό αρχιτεκτονικό χαρακτηριστικό του δωματίου είναι το μεγάλο παράθυρο στον ανατολικό τοίχο, το οποίο έβλεπε στο επίπεδο του δρόμου. Στο δωμάτιο αυτό υπάρχει σκάλα που οδηγεί στον όροφο.

Το δάπεδο του δωματίου Α1 αποτελείται από πατημένη γη αναμειγμένη με μικρούς λίθους ερυθρού χρώματος. Σε μέρος του δωματίου η σύσταση του δαπέδου αποτελείται από θραύσματα σκούρου ερυθρού πετρώματος.

Είσοδος στο βορειοανατολικό άκρο του δωματίου Α1 οδηγεί στο προς βορράν μικρότερο δωμάτιο Α2. Μετά το θυραίο άνοιγμα χαμηλή βαθμίδα οδηγεί προς τα κάτω στο δωμάτιο Α2. Δύο πηλοερμάρια σε άξονα βορρά- νότου έχουν κατασκευασθεί στο μέσον του δωματίου και το διαιρούν σε δύο τμήματα. Τα πηλοερμάρια δημιουργούν δύο ημικυκλικές κόγχες οι οποίες ίσως προορίζονταν για την τοποθέτηση αγγείων και αντικειμένων. Το δάπεδο ανατολικά των κογχών των πηλοερμαρίων είναι στρωμένο με όστρεα πορφύρας εναλλάξ με μαύρα βότσαλα. Ο ανατολικός τοίχος του δωματίου διακόπτεται από δύο παράθυρα διαφορετικού μεγέθους. Στο κατώφλι του βορειότερου παραθύρου βρέθηκαν τοποθετημένα κατά χώραν πέντε αγγεία.

Το δυτικό τμήμα του δωματίου Α2 χωρίζεται σε τρία επιμήκη ορθογώνια τμήματα σε άξονα ανατολής - δύσης, τα οποία δημιουργούνται από δύο οριζόντιες δοκοθήκες κατά μήκος του δαπέδου του δωματίου. Οι δοκοθήκες αναπτύσσονται

σε άξονα Α - Δ και αποτελούνται από καλυμμένο με πηλό αποτύπωμα οριζόντιας ξυλοδοκού, η οποία βρισκόταν αρχικά εντός του δαπέδου, εξείχε ελάχιστα από αυτό και η πορεία της διακοπτόταν από δύο κατακόρυφες ξυλοδοκούς, τοποθετημένες σε μικρή σχετικά απόσταση η μία από την άλλη. Ίχνη των δύο κατακόρυφων ξυλοδοκών σώζονται σήμερα με τη μορφή κατακόρυφων οπών. Μεταξύ των χωρισμάτων αυτών βρέθηκε μεγάλος αριθμός αγγείων στο δάπεδο.

Το δάπεδο του δυτικού τμήματος του δωματίου Α2 αποτελείται από πατημένη γη και μικρά μαύρα χαλίκια. Τόσο στο δυτικό όσο και στο ανατολικό τμήμα του δωματίου βρέθηκαν συστάδες με μεγάλο αριθμό αγγείων διαφόρων μεγεθών. Είσοδος στο μέσον του βόρειου τοίχου του δωματίου Α2 οδηγεί στο δωμάτιο Α3, με τη βοήθεια δυο λίθινων βαθμίδων προς τα κάτω.

Το δωμάτιο Α3 είναι ακόμη μικρότερο και το δάπεδο του χωρίζεται σε δύο διαφορετικά επίπεδα. Σειρά έξι κτιστών, χαμηλών κογχών διαφορετικών μεγεθών από λίθους και λασποκονίαμα είχαν κατασκευαστεί κατά μήκος του δυτικού και βόρειου τοίχου του δυτικού τμήματος του δωματίου Α3 και περιείχαν πίθους, ενώ τρεις λεπτοί πηλότοιχοι στήριζαν τους αποθηκευμένους πίθους στο ανατολικό και ανώτερο τμήμα του δωματίου. Μικρό τετράγωνο παράθυρο στο μέσον του ανατολικού τοίχου του δωματίου άνοιγε στον δρόμο. Το δάπεδο του δυτικού και του ανατολικού τμήματος του δωματίου Α3 αποτελείται από πατημένη γη και μικρά μαύρα χαλίκια.

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό στοιχείο του δωματίου αυτού είναι ο μεγάλος αριθμός αγγείων που βρέθηκαν να το γεμίζουν ασφυκτικά σε όλη του την έκταση.

Οι τοίχοι του δωματίου Α1 διακόπτονταν στο βορειοδυτικό άκρο του δωματίου, εκεί δηλ. που βρισκόταν το άνοιγμα προς το κλιμακοστάσιο. Η παρουσία κυκλικής βάθυνσης (θυραίου στροφέα) στο βορειοανατολικό εξωτερικό μέτωπο του ανατολικού τοίχου του βοηθητικού δωματίου Α'1 πιστοποιεί την παρουσία κλιμακοστασίου στο σημείο εκείνο. Αρχιτεκτονικά στοιχεία για τα υλικά κατασκευής του κλιμακοστασίου δεν σώζονται, αλλά λόγω του μικρού χώρου που διατίθεται για την ανάπτυξη της κλίμακας, η πιο πιθανή πρόταση αποκατάστασης είναι τα ξύλινα στενά σκαλοπάτια, που θα οδηγούσαν στον όροφο.

Στην ψηφιακή αναπαράσταση δεν έχει γίνει απεικόνιση του ορόφου υπεράνω των δωματίων Α2 και Α3, γιατί τα σωζόμενα αρχιτεκτονικά στοιχεία και αρχαιολογικά ευρήματα δε θεμελιώνουν την ύπαρξη ορόφου πάνω από τα δύο

αυτά δωμάτια. Σειρά στοιχείων οδηγεί στο συμπέρασμα αυτό: α) η απουσία του δυτικού τοίχου του δωματίου A2, καθώς ο τοίχος που αποτελεί τον δυτικό τοίχο του δωματίου A2 είναι ο εξωτερικός τοίχος του δωματίου ΔΔ2 (Κτίριο στα Δυτικά του Τομέα Α), β) η παρουσία μικρού τμήματος δαπέδου πολύ κακής ποιότητας, που θα ταίριαζε καλύτερα σε δώμα, παρά σε δάπεδο στεγασμένου χώρου, που σώζεται στο δυτικό άκρο του δωματίου A3, στο ύψος του ορόφου, γ) η απουσία πεσμένου οικοδομικού υλικού. Ακόμη και με το δεδομένο του χειμάρρου που κατέστρεψε τα στοιχεία του ορόφου, δεν υπάρχει πεσμένο οικοδομικό υλικό μέσα στα δωμάτια A2 και A3 και τέλος δ) τα μικρά και λεπτά στηρίγματα της οροφής που σώζονται στο δωμάτιο A2 δεν επαρκούν για την στήριξη ορόφου.

Στην περίπτωση του μεγάλου δωματίου στον όροφο πάνω από το δωμάτιο A1 το δάπεδο αποκαταστάθηκε με λίθινες πλάκες, όπως πρέπει να ήταν αρχικά. Με λίθινες πλάκες αποκαταστάθηκε επίσης και το δάπεδο του προθαλάμου.

Αντίστοιχη μελέτη έχει γίνει για την αποκατάσταση των εξωτερικών όψεων του κτιρίου, καθώς και της υφής και του χρώματος των δομικών υλικών του.

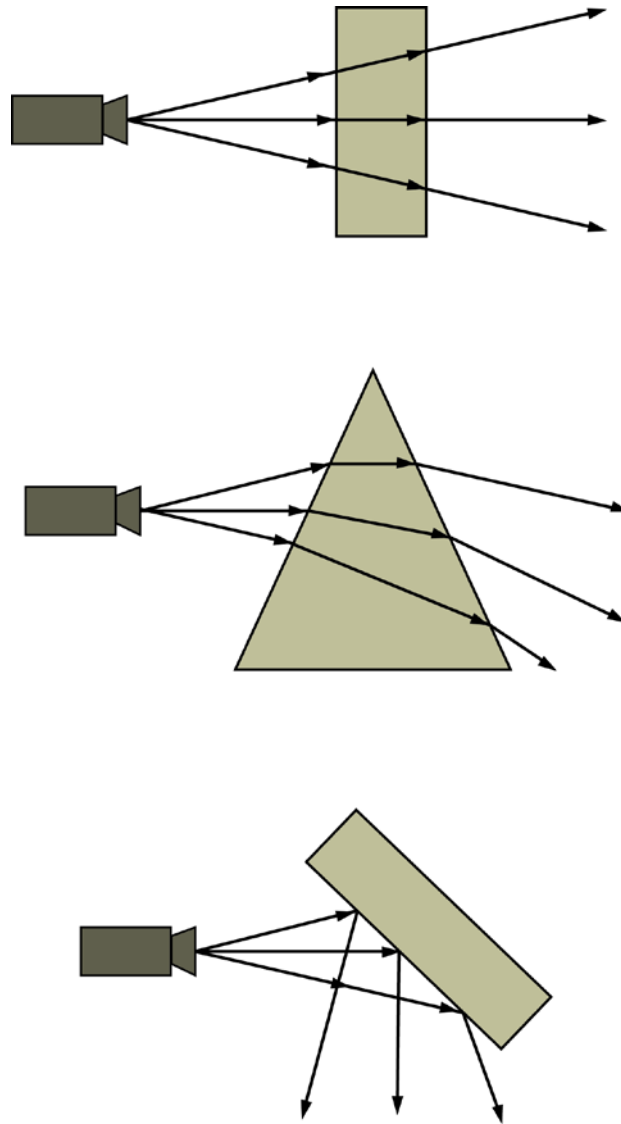
### **Π.3. Απόδοση εικόνων (Render).**

Ο όρος rendering είναι η ρεαλιστική απόδοση σε μορφή ψηφιακής εικόνας ενός τρισδιάστατου μοντέλου στο οποίο έχουν αποδοθεί υλικά, υφή φωτισμός και σκίαση από μια συγκεκριμένη οπτική γωνία. Η απόδοση της σκηνής εξαρτάται από το 'renderer' (render engine) που χρησιμοποιείται κάθε φορά. Το



πρόγραμμα 3ds Max περιλαμβάνει τρεις renderers, το Default Scanline Renderer, το Mental Ray και το Vue File Renderer. Ο Default Scanline Renderer προβάλλει όλα τα αντικείμενα πάνω σε ένα δισδιάστατο επίπεδο και τα ταξινομεί σύμφωνα με τις συντεταγμένες τους Y και X με αυτή τη σειρά. Στην περίπτωση αυτή το τοπικό μοντέλο λαμβάνει υπ' όψη του μόνο τις διάφορες συνιστώσες που σχετίζονται με την άμεση πρόσπτωση του φωτός που προέρχεται από μια φωτεινή πηγή πάνω σε ένα αντικείμενο. Ο Mental Ray χρησιμοποιεί τη μέθοδο παρακολούθησης ακτίνας (ray tracing) η οποία βασίζεται στη φυσική διαδικασία φωτισμού των αντικειμένων. Η ακτίνα ξεκινά από τη φωτεινή πηγή και μέσω πιθανών διαδοχικών ανακλάσεων και διαθλάσεων από τα αντικείμενα του χώρου καταλήγει στο μάτι του παρατηρητή ή την κάμερα. Το φως όμως που προσπίπτει σε ένα αντικείμενο με έστω και ελάχιστες ανωμαλίες στην υφή ανακλάται με διάχυτο τρόπο και μπορεί να προσεγγιστεί μόνο από ένα πλήθος δευτερευουσών ακτίνων γύρω από την κατεύθυνση κύριας ανάκλασης που να φωτίζουν και αυτές τα γύρω αντικείμενα. Αυτός ο διάχυτος φωτισμός έχει μεταβλητή ένταση και χρώμα ανάλογα με την υφή των αντικειμένων που το φως συναντά στην πορεία του. Ανάλογα φαινόμενα σχετίζονται με τη διάθλαση όταν το φως διέρχεται μέσα από ημιπερατά αντικείμενα ιδίως όταν αυτά δεν αποτελούνται από απόλυτα ομογενή υλικά. Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ότι σε ένα σημείο φθάνουν περισσότερες από μια ακτίνες που έχουν ακολουθήσει διαφορετικές πορείες. Τα αντικείμενα στην πραγματικότητα φωτίζονται ακόμα και όταν δε βρίσκονται σε οπτική επαφή με καμία φωτεινή πηγή και μάλιστα παίρνουν αποχρώσεις εξαρτώμενες από το περιβάλλον δημιουργώντας μια μίξη χρωμάτων. Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό του φωτός είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με τον υπολογισμό στο Default Scanline Renderer αλλά προσφέρει ρεαλιστικά αποτελέσματα. (Εικόνα Π.3.1).

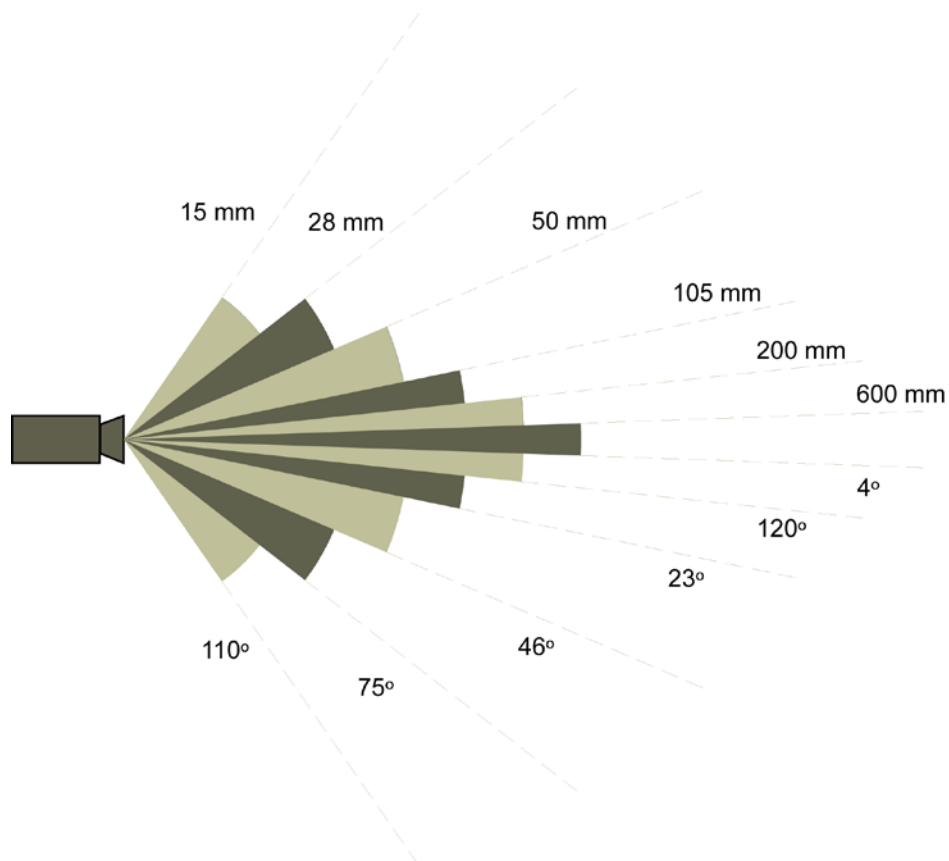
Ο Vue File Renderer δημιουργεί ένα αρχείο κειμένου σε μορφή ASCII το οποίο περιγράφει τις μετακινήσεις της κάμερας σε σχέση με τα αντικείμενα της σκηνής.



**Εικόνα Π.3.1:** Η συμπεριφορά του Mental Ray όταν το φως διέρχεται από διαφανές υλικό όταν διαθλάται από κατάλληλο μέσο και όταν ανακλάται αντίστοιχα.

Η ποσότητα φωτός που προσπίπτει σε ένα αντικείμενο εξαρτάται από την ώρα της ημέρας, τις καιρικές συνθήκες κ.λ.π. Η φωτεινότητα μιας σκηνής εξαρτάται από τη χρονική διάρκεια όπου μια ποσότητα φωτός περνάει μέσα από το φακό της φωτογραφικής μηχανής (cameras). Ειδικότερα η φωτογραφική μηχανή επηρεάζεται από την ταχύτητα του φιλμ, το άνοιγμα του διαφράγματος, το βάθος πεδίου. Η ταχύτητα του φιλμ ή ευαισθησία του στο φως εκφράζεται από τον αριθμό ISO (International Organization of Standardization). Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός τόσο πιο ευαίσθητο είναι το φιλμ. Το άνοιγμα του μηχανισμού διαφράγματος του φακού εκφράζεται με μια σειρά αριθμών με το πρόθεμα 'f' και ονομάζονται f-stops. Όσο μεγαλύτερο είναι το άνοιγμα τόσο περισσότερο είναι το

φως στο οποίο εκτίθεται το φιλμ σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα. Το βάθος πεδίου είναι η ζώνη της παραδεκτά ευκρινούς εστίασης σε μια σκηνή. Τα μεγάλα ανοίγματα μικροί αριθμοί f-stop παράγουν περιορισμένο βάθος πεδίου, ενώ τα μικρά ανοίγματα μεγάλοι αριθμοί f-stop αυξάνουν το εύρος πεδίου. Το βάθος πεδίου εξαρτάται από την εστιακή απόσταση. Ένα φακός των 50 mm θεωρείται κανονικός και παρέχει οπτική γωνία  $45^\circ$  δηλαδή περίπου όπως βλέπει το ανθρώπινο μάτι. Φακός με εστιακή απόσταση μικρότερη των 50mm μπορεί να χαρακτηριστεί ως ευρυγώνιος. Φακοί μικρότεροι των 20 mm χαρακτηρίζονται ως υπερ-ευρυγώνιοι. Φακοί με εστιακή απόσταση μεγαλύτερη των 60 mm χαρακτηρίζονται ως τηλεφακοί. (Εικόνα Π.3.2).



**Εικόνα Π.3.2:** Εστιακή απόσταση και βάθος πεδίου σε τυπικά μεγέθη φακών.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 1. Θεμελιωδών Μαθηματικών και Αλγορίθμων.

- [1.1] Tom M. Apostol, “Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός”, Εκδόσεις Ατλαντίς, πρώτη έκδοση 1962.
- [1.2] Κάρολος Σεραφειμίδης, “Διανυσματική Ανάλυση”, Εκδόσεις Σοφία, Θεσσαλονίκη 2004.
- [1.3] Nelder, J. A. and R. Mead, "A simplex method for function minimization," Computer Journal, Τόμ. 7, σελ. 308-313, 1965.
- [1.4] PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W., FLANNERY, B., 1992. Numerical recipes in C. Cambridge University Press, NY.

### 2. Γενικού Αρχαιολογικού περιεχομένου και ιστορίας των Επιστημών.

- [2.1] Richard Mankiewicz, “Η ιστορία των μαθηματικών”, Εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Νοέμβριος 2002.
- [2.2] E. Robson, “Mesopotamian Mathematics 2100-1600 BC Technical Constants in Bureaucracy and Education”, Clarendon Press, Oxford, 1999.
- [2.3] Berggren J. L., 1984. “History of Greek Mathematics: A Survey of Recent Research”, Historia Mathematica 11, 394–410.
- [2.4] Friberg J., 1981. “Methods and Traditions of Babylonian Mathematics: Plimpton 322, Pythagorean Triples and the Babylonian Triangle Parameter Equations”, Historia Mathematica 8, 277–318. Επίσης 1982: “A Survey of Publications on Summero-Akkadian Mathematics, Metrology and Related Matters 1854-1982”, Goeteborg, Sweden: Department of Mathematics, Ghalmers Univercity of Technology and Univercity of Goeteborg.
- [2.5] Doulmas, C. 1991. The Wall Paintings of Thera. 2<sup>nd</sup> Edition Athens 1999: The Thera Foundation.
- [2.6] Doulmas, C., 1990. The Elements at Akrotiri, in Hardy D.A.(ed.), Thera and the Aegean world III pp. 24-30.
- [2.7] S. Marinatos, Excavations at Thera I- III (1967- 1969 seasons), sec. ed., Athens 1999, 16- 34 (excavations at Thera I), 15- 30 (excavations at Thera II).
- [2.8] Παλυβού Κ., 1999. Ακρωτήρι Θήρας - Η Οικοδομική Τέχνη, Βιβλιοθήκη της Αρχαιολογικής Εταιρείας, αρ.183, Αθήνα.

- [2.9] Szabo, A., 1968. The beginnings of Greek Mathematics, Dordrecht: Reidel.
- [2.10] Exarchakos, T., 1997. History of mathematics: Mathematics in Babylonia and ancient Egypt. Vol. A. (Ιστορία των μαθηματικών: Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των αρχαίων Αιγυπτίων. Τομ. Α.)
- [2.11] Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient, The historical roots of elementary mathematics, Prentice-Hall, inc Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [2.12] Sir Thomas Heath, A history of Greek mathematics – Volume 1: From Thales to Euclid, Dover Publications Inc., New York, 1981.
- [2.13] Ev.Spandagos, R. Spandagou, D. Travlou, Ancient Greece mathematicians, Aethra, Athens, June 2000.
- [2.14] Sir Thomas Heath, A history of Greek mathematics – Volume 2, Dover Publications Inc., New York, 1981.
- [2.15] C. Papaodysseus, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos & C. Doumas “ Geometric templates used in the Akrotiri (Thera) wall-paintings”. ANTIQUITY 82 (Jan. 2008): 401–408.
- [2.16] D. Fragoulis, A. Skembris, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, Th. Panagopoulos, M. Panagopoulos, C. Triantafyllou, A. Vlachopoulos and C. Doumas. “Origins and Application of Geometry” in the Thera Prehistoric Civilization Ca. 1650 BC. CENTAURUS 2005: VOL. 47: PP. 316–340.

### **3. Αναφορές σχετικές με Κατάτμηση Εικόνας.**

- [3.1] Román-Roldán R., Gómez-Lopera J. F., Atae-Allah C., Martínez-Aroza J., Luque-Escamilla P. L., “A measure of quality for evaluating methods of segmentation and edge detection”, Pattern Recognition 34, 969-980, 2001.
- [3.2] A.K. Jain and R. C. Dubes. Algorithms for Clustering Data. Prentice Hall, 1988.
- [3.3] R. Ng and J. Han. Efficient and effective clustering method for spatial data mining. In Proc. of the 20th VLDB Conference, pages 144–155, Santiago, Chile, 1994.
- [3.4] Choi Hyeokho, Baraniuk G.Richard, Multiscale image segmentation using wavelet-domain hidden Markov models. IEEE Transactions on Image Processing, Volume: 10, Issue: 9, pages 1309 - 1321, August 2002.

- [3.5] Chad Carson, Serge Belongie, Havit Greenspan, Jitendra Malik, Blobworld: Image Segmentation Using Expectation-Maximization and Its Application to Image Querying, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Volume 24 , Issue 8, pages 1026 - 1038, August 2002.
- [3.6] Pedro F. Felzenszwalb and Daniel P. Huttenlocher, Efficient Graph-Based Image Segmentation, International Journal of Computer Vision, Volume 59, Number 2, pages 167-181, 2004.
- [3.7] Grau V., Mewes A.U.J., Alcaniz M., Kikinis R., Warfield S.K., Improved watershed transform for medical image segmentation using prior information, IEEE Transactions on Medical Imaging, Volume: 23, Issue: 4, pages 447 - 458, April 2004.
- [3.8] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, and X. Xu. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. In Proc. of the Second Int'l Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, Portland, OR, 1996.
- [3.9] Y. L. Chang and X. Li, "Adaptive image region-growing", IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 3, pp. 868-872, 1994.
- [3.10] T. Pavlidis and Y. Liow, "Integrating region growing and edge detection", IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 12, No. 3, p. 225 -233, 1990.
- [3.11] T. Gevers and A. W. M. Smeulders, "Combining region splitting and edge detection through guided Delaunay image subdivision", IEEE Computer Society Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 1021-1026, 1997.
- [3.12] Steven M. LaValle, Seth A. Hutchinson, "A Bayesian Segmentation Methodology for Parametric Image Models", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, (Vol. 17, No. 2), pp. 211-217, February 1995.
- [3.13] Narendra, "A Transform for Multiscale Image Segmentation by Integrated Edge and Region Detection", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, (Vol. 18, No. 12), pp. 1211-1235, December 1996.
- [3.14] Didier Zugaj and Vincent Lattuati, "A new approach of color images segmentation based on fusing region and edge segmentations outputs", Pattern Recognition 31, pp. 105-113, 2-1998.

- [3.15] C. Papaodysseus, M. Exarhos, M. Panagopoulos, P. Roussopoulos, C. Triantafillou, Th. Panagopoulos “IMAGE AND PATTERN ANALYSIS FOR 1650 B.C.WALL PAINTINGS STUDY AND RECONSTRUCTION” IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, *Part A: Systems and Humans*, Volume: 38, Issue: 4, July 2008.
- [3.16] Michail Panagopoulos, Constantin Papaodysseus, Panayiotis Rousopoulos, Dimitra Dafi, and Stephen Tracy ‘Automatic Writer Identification of Ancient Greek Inscriptions’ IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 31, NO. 8 AUGUST 2009.
- 4. Αναφορές σχετικές με Προσαρμογή Καμπυλών και Αναγνώριση Προτύπων (Curve Fitting and Pattern Recognition)**
- [4.1] M. Sarfraz, “Fitting curve to planar digital data”, στο 6<sup>th</sup> International Conference on Information Visualisation, pp. 633, 10-12 July, London, 2002.
- [4.2] S.J. Ahn, W. Rauh, H.S. Cho, H.J. Warnecke, “Orthogonal distance fitting of implicit curves and surfaces”, IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence, pp. 620-638, 2002.
- [4.3] M. Werman, Z. Geyzel, “Fitting a Second Degree Curve in the Presence of Error”, IEEE Trans. on PAMI, (Vol. 17, No. 2), pp. 207-211, February 1995.
- [4.4] Atieg G. A. Watson, “A class of methods for fitting a curve or surface to data by minimizing the sum of squares of orthogonal distances”, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 158, no 2, pp. 277-296, September 2003.
- [4.5] C. Papaodysseus, M. Exarhos, Th. Panagopoulos, C. Triantafillou, G. Roussopoulos, A. Pantazi, V. Loumos, D. Fragoulis, Chr. Doulas, “Identification of Geometrical Shapes in Paintings and its Application to Demonstrate the Foundations of Geometry in 1650 B.C.”, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 14, no 7, pp. 862-873, July 2005.
- [4.6] Rosin P.L. “On Serlio’s constructions of ovals”, Mathematical Intelligencer- Vol. 23, no 1, pp. 58–69, 2001, “A survey and comparison of traditional piecewise circular approximations to the ellipse”, Computer Aided Geometric Design- Vol. 16, no 4, pp.269–286, 1999.

- [4.7] Rosin P.L. "Ellipse fitting using orthogonal hyperbolae and Stirling's oval", Graphical Models and Image Processing- Vol. 60, no 3, pp. 209-213, 1998.
- [4.8] C. Papaodysseus, T. Panagopoulos, M. Exarhos, D. Fragoulis, G. Roussopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos, C. Triantafyllou, A. Vlachopoulos, C. Doumas "Distinct, Late Bronze age (c.1650 BC) Wall-Paintings from Akrotiri, Thera, Comprising Advanced Geometrical Patterns" Archaeometry 48 , 1 (2006) 97–114.
- [4.9] St.Tracy, C. Papaodysseus , P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, D. Fragoulis, D.Dafi, Th. Panagopoulos. "Identifying Hands on Ancient Athenian Inscriptions: First Steps towards a Digital Approach". Archaeometry Vol. 49 Issue 4 p.p. 749-764 November 2007.
- [4.10] Michail Panagopoulos, Constantin Papaodysseus, Panayiotis Rousopoulos, Dimitra Dafi, and Stephen Tracy 'Automatic Writer Identification of Ancient Greek Inscriptions' IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 31, NO. 8 AUGUST 2009.
- [4.11] C. Papaodysseus, Th. Panagopoulos, M. Exarhos, C. Triantafyllou, D. Fragoulis, "Contour-Shape Based Reconstruction of Fragmented, 1650 B.C. Wall Paintings", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, 1277–1288, June 2002.
- [4.12] Th. Panagopoulos, C. Papaodysseus, M. Exarhos, C. Triantafyllou, G. Roussopoulos, P. Roussopoulos, "Prehistoric Wall-Paintings Reconstruction Using Image Pattern Analysis And Curve Fitting", WSEAS Transactions on Electronics 1, no 1 108-113, 2004.