



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών  
Τομέας Δομοστατικής  
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών

Διπλωματική Εργασία

## **ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**

Αγαπούλα Παπακωνσταντίνου

Επιβλέπων: Βησσαρίων Παπαδόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2019





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών  
Τομέας Δομοστατικής  
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών

Διπλωματική Εργασία

## **ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**

Αγαπούλα Παπακωνσταντίνου

Επιβλέπων: Βησσαρίων Παπαδόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2019





National Technical University of Athens  
School of Civil Engineering  
Department of Structural Engineering  
Laboratory of Structural Analysis and Antiseismic Research

Diploma Thesis

# **MULTISCALE ANALYSIS USING FINITE ELEMENT METHOD**

Agapoula Papakonstantinou

Supervisor: Vissarion Papadopoulos, Associate Professor at NTUA

Athens, October 2019



## Δήλωση αναγνώρισης πνευματικών δικαιωμάτων

Δηλώνω ότι η διπλωματική αυτή εργασία αποτελεί στο σύνολο της δική μου εργασία, και κανένα τμήμα της δεν έχει χρησιμοποιηθεί για την κτήση άλλου τίτλου σπουδών. Όπου έχει χρησιμοποιηθεί υλικό από άλλες πηγές, αυτές έχουν αναφερθεί με ακρίβεια και πληρότητα.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Αγαπούλα Παπακωνσταντίνου





## Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία, όπως και κάθε άλλο είδος επιστημονικής εργασίας, είναι προϊόν καθοδήγησης, βοήθειας αλλά και υποστήριξης μιας ομάδας ατόμων. Θα ήταν μεγάλη παράληψή μου λοιπόν να μην ευχαριστήσω έναν προς έναν τους ανθρώπους που συντέλεσαν στην ολοκλήρωσή της.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Βησσαρίωνα Παπαδόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ για την εμπιστοσύνη και τη σημαντική καθοδήγηση που μου προσέφερε όχι μόνο στο επίπεδο της παρούσας εργασίας αλλά και σε άλλα ακαδημαϊκά μου βήματα. Η ευγένειά του καθώς και η όρεξή του για προσφορά γνώσεων και ιδεών έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη λήψη σημαντικών αποφάσεων και στην ολοκλήρωση των προπτυχιακών μου σπουδών.

Στη συνέχεια, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στην ομάδα στο Εργαστήριο Στατικής κι Αντισεισμικών Ερευνών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ, καθώς η καλή διάθεση και το πνεύμα συνεργασίας που επικρατεί λύνει πιο εύκολα τα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν κατά τη διάρκεια μίας εργασίας. Επίσης, ένα μεγαλύτερο ευχαριστώ οφείλω στους υποψήφιους διδάκτορες της σχολής, Δημήτρη Τσιαπέτη, για το γεγονός ότι με μύησε στην γενικότερη φιλοσοφία προγραμματισμού πεπερασμένων στοιχείων τη στιγμή που οι γνώσεις μου ήταν ελάχιστες, και Γεράσιμο Σωτηρόπουλο, για όλες εκείνες τις ώρες που ψάχναμε τα λάθη κατά τη μοντελοποίηση αλλά και για όλες τις ώρες που καταστρώναμε τα επόμενα βήματα. Η βοήθειά τους ήταν καταλυτικής φύσεως.

Τέλος, ένα ακόμη μεγάλο ευχαριστώ οφείλω φυσικά και σε ολόκληρη την οικογένειά μου και στους καλούς μου φίλους οι οποίοι για μία ακόμη φορά κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στάθηκαν άρρηκτοι βράχοι στο πλάι μου.

Αγαπούλα Παπακωνσταντίνου



# Σύνοψη

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Αγαπούλα Παπακωνσταντίνου

Επιβλέπων: Βησσαρίων Παπαδόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Η παρούσα εργασία βασίζεται στη λογική της Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων. Σύμφωνα με αυτή, ο φορέας της κατασκευής (μακροσκοπικός φορέας) διακριτοποιείται στα κατάλληλα, για κάθε μέλος του, πεπερασμένα στοιχεία. Ταυτόχρονα, δημιουργείται ένα μοντέλο για το υλικό του (μοντέλο μικροκλίμακας) το οποίο χαρακτηρίζεται από μη γραμμική συμπεριφορά και δίνει για κάθε στάδιο φόρτισης της μακροκλίμακας τη σύνθετη συμπεριφορά του υλικού (υπό μορφή αναπτυσσόμενων τάσεων και ελαστικότητας). Αυτή η συμπεριφορά εισάγεται στο μακροσκοπικό μοντέλο το οποίο πλέον παράγει τα πραγματικά εντατικά μεγέθη του φορέα. Η φόρτιση αυτού επιλέγεται να είναι στατική προσαυξητική ώστε με εφαρμογή Ανελαστικής Στατικής Ανάλυσης (pushover), να γίνει εμφανής η μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού των εφεδράνων.

*Λέξεις κλειδιά:* Πεπερασμένα Στοιχεία, Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων, Στατική Ανελαστική Ανάλυση, Διακριτοποίηση, Σύνθετο Υλικό



# Abstract

## MULTISCALE ANALYSIS USING FINITE ELEMENT METHOD

Agapoula Papakonstantinou

Supervisor: Vissarion Papadopoulos, Associate Professor at NTUA

This diploma thesis is based on Multiscale Analysis. According to this method, the construction (macroscale) is being discretized at finite elements, suitable for each part. At the same time, a model for its material (microscale) is created so that it can formulate its nonlinear behavior (in the form of stresses and elasticity) for each load-step of the macroscale. The analysis used at this step is called Pushover Analysis and its results shows the real nonlinear tension of the macroscopic model.

*Keywords:* Finite Elements, Multiscale Analysis, Pushover Analysis, Discretization, Composite Material



## Περίληψη

Σκοπό της συγκεκριμένης Διπλωματικής Εργασίας αποτελεί η ορθή προσομοίωση ενός πραγματικού δομοστατικού προβλήματος Πολιτικού Μηχανικού. Η προσομοίωση αυτή, λαμβάνει χώρα σχεδόν εκ του μηδενός, μιας και τα αρχικά δεδομένα που ορίζονται στο πρόβλημα είναι καθαρά γεωμετρικά και φυσικά (όπως π.χ. είναι οι διαστάσεις των μελών και το μέτρο ελαστικότητας των υλικών αντιστοίχως), και περιλαμβάνει πολλά διαφορετικά στάδια που εξαρτώνται από την πολυπλοκότητα του φορέα. Αυτή, εξαρτάται με τη σειρά της από την ποικιλία των φυσικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά τη φόρτιση της κατασκευής, πράγμα που οδηγεί στην ανάγκη σύνθεσης διαφόρων θεωρητικών γνώσεων για την επιτυχή ανάλυση.

Αφού αναπτυχθεί το θεωρητικό υπόβαθρο με αναλυτική αναφορά στις μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης και πεπερασμένων στοιχείων πραγματοποιείται μία εφαρμογή. Η εφαρμογή αυτή είναι ένα διδιάστατο πλαίσιο τυχούσης γεωμετρίας αποτελούμενο από ομοιογενές υλικό, το οποίο στη βάση από τα υποστυλώματά του συνδέεται με εφέδρανα αποτελούμενα από μη γραμμικό σύνθετο υλικό. Διακρίνονται επομένως δύο φύσεις της κατασκευής: η μακροσκοπική και η μικροσκοπική. Η μακροσκοπική φύση περιλαμβάνει τα διαφορετικού τύπου μέλη της ανωδομής (δοκοί, υποστυλώματα) καθώς επίσης και τα εφέδρανα, τα οποία μακροσκοπικά μοιάζουν να έχουν κι αυτά ομοιογενές υλικό παρότι η αλήθεια διαφέρει. Η μικροσκοπική φύση περιλαμβάνει τον τρόπο με τον οποίο είναι διατεταγμένες στη μήτρα του σύνθετου υλικού ίνες ενίσχυσης (όπως είναι οι νανοσωλήνες άνθρακα (CNTs)) οι οποίες χαρακτηρίζονται από μη γραμμικότητα λόγω του φαινομένου της συνάφειάς τους με τη μήτρα.

Παρά τις διαφορές των δύο κλιμάκων, τα στάδια μοντελοποίησής τους είναι κοινά. Αρχικά, γίνεται αναγνώριση της γεωμετρίας του προβλήματος με παρατήρηση του τρόπου με τον οποίο καταπονούνται. Τότε ορίζονται τα πεπερασμένα στοιχεία που

διακριτοποιούν τα μέλη κάθε κλίμακας μιας και αυτά ποικίλουν ανάλογα με τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος (πεπερασμένα στοιχεία ραβδωτά, επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης, στοιχεία δικτυώματος). Οπότε γίνεται δυνατή η σύνδεση μεταξύ των στοιχείων αυτών σύμφωνα με τους βαθμούς ελευθερίας τους, όντας ή μη όμοια μεταξύ τους, και δημιουργούνται τα δύο ζητούμενα μοντέλα.

Η σύνδεση των δύο αυτών κλιμάκων γίνεται στο σημείο αυτό με συγκεκριμένη διαδικασία. Από φορτίο που επιβάλλεται στην ανωδομή της μακροκλίμακας, υπολογίζονται οι ανηγμένες παραμορφώσεις στα σημεία εκείνα της κατασκευής όπου ορίζεται το σύνθετο υλικό. Τότε, αυτές οι παραμορφώσεις εισάγονται σαν συνοριακές συνθήκες στο μοντέλο της μικροκλίμακας, δίδοντας τη συνολική τάση και το ομογενοποιημένο μητρώο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού. Τα δύο αυτά μεγέθη εισάγονται πίσω στο μοντέλο της μακροκλίμακας με αποτέλεσμα τελικά να επιτυγχάνεται η ανάλυση του πραγματικού φορέα.

Για λόγους πληρότητας στο σημείο αυτό, το φορτίο που επιβάλλεται αρχικώς στην κατασκευή επιλέγεται να είναι στατικό προσαυξητικό. Επομένως, η διαδικασία της Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων που μόλις περιγράφηκε υπάγεται στην Ανελαστική Στατική Ανάλυση (Pushover) του προβλήματος η οποία διεξάγεται για κάθε αύξηση του εξωτερικού φορτίου του φορέα. Με τη λήξη και του συγκεκριμένου βήματος, περιγράφεται πλήρως η μη γραμμική συμπεριφορά του φορέα με σεισμική μόνωση αποτελούμενη από σύνθετο μη γραμμικό υλικό.

Η πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής στο σύνολό της είναι το γεγονός ότι μπορούν να εξεταστούν πολλές περιπτώσεις γεωμετρίας φορέων σε μικρό χρονικό διάστημα. Με άλλα λόγια είναι δυνατή η άμεση σύγκριση αποτελεσμάτων η οποία οδηγεί στην βελτιστοποίηση του σχεδιασμού του συγκεκριμένου είδους κατασκευής.



# Πίνακας Περιεχομένων

<b>ΜΕΡΟΣ Α΄: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ .....</b>	<b>1</b>
<b>1 Εισαγωγή .....</b>	<b>3</b>
1.1 Ιστορική Αναδρομή .....	3
1.2 Σκοπός Διπλωματικής Εργασίας .....	4
1.3 Στάδια Διπλωματικής Εργασίας .....	5
1.4 Δομή Διπλωματικής Εργασίας .....	6
<b>2 Προσομοίωση Γεωμετρίας – Διακριτοποίηση Φορέα .....</b>	<b>9</b>
2.1 Εισαγωγή .....	9
2.2 Αρχή των Δυνατών Έργων .....	10
2.3 Τετραπλευρικά Στοιχεία Επίπεδης Έντασης-Παραμόρφωσης (Quad Elements) .....	16
2.4 Στοιχεία Δοκού Επίπεδου Πλαισίου (Beam Elements).....	20
2.4.1 Ανάλυση γεωμετρίας με την Αρχή των Δυνατών Έργων.....	20
2.4.2 Ανάλυση γεωμετρίας με Μέθοδο των Δυνάμεων .....	26
2.5 Σύνθετα Στοιχεία Δικτυώματος (Truss Elements).....	26
2.5.1 Ανάλυση Μέλους 2 – Στοιχείο Δικτυώματος.....	27

2.5.2	Ανάλυση Μελών 1 & 3 – Μη γραμμικά Ελατήρια (Μοντέλο Τριβής (Bond-Slip)) .....	28
2.5.3	Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας και Καθολικό Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων Σύνθετου Στοιχείου Δικτυώματος .....	31
2.6	Ένωση Διαφορετικών Τύπων Στοιχείων .....	32
<b>3</b>	<b>Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων .....</b>	<b>35</b>
3.1	Εισαγωγή .....	35
3.2	Ισορροπία στη Μικροκλίμακα .....	37
3.3	Βασικές Μεταβλητές Μακροκλίμακας και «Θεώρημα Μέσου Όρου» .....	39
3.3.1	Παραμόρφωση .....	39
3.3.2	Τάση .....	39
3.3.3	Ομογενοποιημένο Μητρώο Ελαστικότητας C.....	39
3.4	Ορισμός Συνοριακών Συνθηκών Μικροκλίμακας.....	40
3.5	Εφαρμογή της Ανάλυσης σε Δύο Διαστάσεις με Θεώρηση Γραμμικών Μετατοπίσεων .....	41
3.6	Σύνδεση των Δύο Κλιμάκων.....	46
<b>4</b>	<b>Επίλυση Αριθμητικών Προβλημάτων Μηχανικού .....</b>	<b>49</b>
4.1	Εισαγωγή .....	49
4.2	Η Μέθοδος Newton – Raphson (N-R) .....	50
4.2.1	Χρήση της Μεθόδου N-R στο Πρόβλημα Επίλυσης Στατικών Φορέων	52

4.3	Η μέθοδος Ολοκλήρωσης κατά Gauss .....	54
4.3.1	Χρήση της Μεθόδου Ολοκλήρωσης Gauss στο Πρόβλημα Επίλυσης Στατικών Φορέων .....	57
<b>ΜΕΡΟΣ Β΄: ΕΦΑΡΜΟΓΗ .....</b>		<b>59</b>
<b>5</b>	<b>Γεωμετρία Προβλήματος.....</b>	<b>61</b>
<b>6</b>	<b>Κωδικοποίηση Προβλήματος .....</b>	<b>67</b>
6.1	Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας και Καθολικό Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων .....	67
6.1.1	Ένωση Διαφορετικών τύπων στοιχείων στη Μακροκλίμακα.....	67
6.1.2	Ένωση Διαφορετικών τύπων στοιχείων στη Μικροκλίμακα – Μοντέλο RVE (Representative Volume Element) .....	70
6.1.3	Σύνθεση Καθολικών Μεγεθών .....	73
6.2	Σύνδεση Μακροκλίμακας με Μικροκλίμακα – Ολοκλήρωση κατά Gauss...	75
6.3	Ισορροπία Φορέα – Μέθοδος Newton-Raphson .....	76
6.3.1	Εφαρμογή Newton-Raphson στο Επίπεδο της Μικροκλίμακας.....	76
6.3.1	Εφαρμογή Newton-Raphson στο Επίπεδο της Μακροκλίμακας .....	77
6.4	Ανελαστική Στατική Ανάλυση (Pushover Analysis).....	78
<b>7</b>	<b>Αποτελέσματα .....</b>	<b>81</b>

**Βιβλιογραφία .....83**

**Ευρετήριο Εικόνων .....85**

**ΜΕΡΟΣ Α΄:**  
**ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ**



# 1 Εισαγωγή

## 1.1 Ιστορική Αναδρομή

Το 1589, ο *Γαλιλαίος Γαλιλέι* ανεβαίνει στον Πύργο της Πίζας προκειμένου να διαψεύσει ή όχι το συμπέρασμα, εκ παρατηρήσεων, του *Αριστοτέλη* περί ελεύθερης πτώσης των Σωμάτων. Αποτέλεσμα αυτής της απόφασης του Ιταλού φυσικού ήταν η πρώτη ιστορικά ολοκληρωμένη εφαρμογή της Επιστημονικής Μεθόδου.

**Επιστημονική Μέθοδος** είναι η πρακτική που εφαρμόζουν οι επιστήμονες για την επιτυχή έρευνά τους και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα: *παρατήρηση, υπόθεση, πείραμα, ερμηνεία κι επαλήθευση αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα των φυσικών νόμων*. Η πρακτική αυτή στη σύγχρονη εποχή δεν έχει χαθεί. Αντιθέτως εφαρμόζεται αυτούσια, με τη διαφορά ότι η ταχύτατη ανάπτυξη της τεχνολογίας καθώς και η πορεία της οικονομίας έχει αλλάξει τον ορισμό του «πειράματος». Σήμερα, είναι δυνατή η προσομοίωση των περισσότερων φυσικών φαινομένων στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, πράγμα που σημαίνει πως η πειραματική διαδικασία πραγματοποιείται εικονικά σε δευτερόλεπτα, εξοικονομώντας με αυτόν τον τρόπο χρόνο και χρήματα.

Αυτού του είδους η προσομοίωση άρχισε να γίνεται δημοφιλής την εποχή που η ανάπτυξη της *Αριθμητικής Ανάλυσης*, η ανάπτυξη δηλαδή των αλγορίθμων που χρησιμοποιούν μαθηματικές προσεγγίσεις (διακριτοποίηση) με σκοπό την επίλυση προβλημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης (συνεχή προβλήματα), έκανε γιγαντιαία βήματα. Αν και η *πρώτη* εφαρμογή της Αριθμητικής Ανάλυσης, η οποία δίνει την εξηταδική προσέγγιση της  $\sqrt{2}$ , έλαβε χώρα περί το 1800-1600 π.Χ. στη Βαβυλώνα, η εποχή αυτή εδραιώθηκε με την έλευση των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών τον 20<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ.. Τότε, η χρονοβόρα εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων που πραγματοποιούνταν σε μεγάλους έντυπους πίνακες από τον άνθρωπο, αντικαταστάθηκε από την ταχύτατη εφαρμογή των ίδιων λειτουργιών από τον υπολογιστή, δίνοντας σε πολλούς επιστήμονες τροφή για σκέψη. Σκέψη που οδήγησε στην χρήση τέτοιου είδους ανάλυσης σε κάθε επιστημονικό κλάδο, από την

Αστρονομία επιλύοντας τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης των ουράνιων σωμάτων έως την Ιατρική προσομοιώνοντας την συμπεριφορά ζωντανών κυττάρων.

Στον τομέα της Δομοστατικής, η ανάγκη για μελέτη των κατασκευών ήταν αυτή που δημιούργησε τις πρώτες ημι-αναλυτικές τεχνικές αριθμητικής ανάλυσης (1940). Αυτές περιλάμβαναν την υποδιαίρεση της κατασκευής σε πλήθος μικρών στοιχείων (τα επονομαζόμενα αργότερα πεπερασμένα στοιχεία) τα οποία ήταν ανάλογα με τα πραγματικά διακριτά στοιχεία. Η εφαρμογή αυτής της λογικής άρχισε να χρησιμοποιείται και σε άλλους κλάδους της μηχανικής, όπως είναι η αεροναυπηγική, αλλά για μικρό χρονικό διάστημα αφού οι υψηλές απαιτήσεις ανάλυσης καθιστούσαν την μεθοδολογία μη αξιόπιστη. Στην αναζήτηση για αξιόπιστες μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία συνέβαλε σημαντικά ο Έλληνας μηχανικός Ιωάννης Χ. Αργύρης εισάγοντας μία διαδικασία ελαχιστοποίησης της ολικής ενέργειας, η οποία αποτέλεσε το μαθηματικό υπόβαθρο της **μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων** (1955). Η μέθοδος αυτή από τη στιγμή που έγινε γνωστή στο ευρύ κοινό άρχισε να εφαρμόζεται σχεδόν σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους μιας και έδωσε λύση στα περισσότερα φυσικά, άλυτα προβλήματα των επιστημών.

Από τότε μέχρι και σήμερα, η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων δεν έχει χάσει τη φήμη της και με την πρόοδο της τεχνολογίας είναι ικανή να λύσει ακόμα περισσότερα προβλήματα σε μικρό χρονικό διάστημα.

## 1.2 Σκοπός Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία ακολουθεί την σύγχρονη επιστημονική μέθοδο, αφού χρησιμοποιεί τη λογική των πεπερασμένων στοιχείων, με σκοπό να μελετήσει τη συμπεριφορά μίας κατασκευής υπό συγκεκριμένη φόρτιση. Η κατασκευή αυτή είναι ένα διδιάστατο πλαίσιο με σεισμική μόνωση, η οποία υποβάλλεται σε στατική επαυξητική φόρτιση και υλοποιείται με χρήση εφεδράνων. Τα εφέδρανα αυτά



αποτελούνται από σύνθετο υλικό που χαρακτηρίζεται από μη γραμμικότητα λόγω των φαινομένων της συνάφειας μεταξύ του κυρίως υλικού του και της ενίσχυσής του.

### 1.3 Στάδια Διπλωματικής Εργασίας

Για την επιτυχή μελέτη της συμπεριφοράς της κατασκευής στη συγκεκριμένη φόρτιση απαραίτητη προϋπόθεση είναι η δημιουργία ενός καλού θεωρητικού υποβάθρου. Για τον λόγο αυτόν, **πρώτο στάδιο** της εργασίας αποτέλεσε η επισήμανση της θεωρίας που «κρύβεται» πίσω από το σύνολο του υπό εξέταση προβλήματος. Η θεωρία αυτή περιλαμβάνει τη *Μεθοδολογία των Πεπερασμένων Στοιχείων*, την *Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων* και την *Αριθμητική Ανάλυση που εφαρμόζεται στα Προβλήματα Μηχανικού*.

**Επόμενο στάδιο** της εργασίας είναι η προσομοίωση της κατασκευής σε περιβάλλον Matlab. Επί της ουσίας το στάδιο αυτό είναι η «μετάφραση» της θεωρίας σε κώδικα ο οποίος ως αποτέλεσμα δίνει την εντατική κατάσταση του συνόλου του φορέα. Αρχικά προσομοιώνεται η *γεωμετρία της κατασκευής* σε δύο επίπεδα, με τη χρήση των κατάλληλων πεπερασμένων στοιχείων για κάθε μέλος της κατασκευής. Τα δύο αυτά επίπεδα ενώνονται μεταξύ τους σύμφωνα με την *Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων* με αποτέλεσμα να προκύπτει ο κώδικας που υπολογίζει την εντατική κατάσταση ολόκληρης της κατασκευής. Αυτό πραγματοποιείται με εισαγωγή της δεδομένης παραμόρφωσης της μακροκλίμακας στη μικροκλίμακα κι από εκεί η εισαγωγή των ομογενοποιημένων τάσεων και ελαστικοτήτων της μικροκλίμακας, που προκύπτουν, στη μακροκλίμακα. Στο στάδιο αυτό, εμπεριέχεται και η *εφαρμογή της Αριθμητικής Ανάλυσης* μιας και η επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων όπως και η ολοκλήρωση διαφόρων μεγεθών επιτυγχάνεται μέσω επαναληπτικής διαδικασίας.

**Τελευταίο στάδιο** αποτελεί η *εφαρμογή της Ανελαστικής Στατικής Ανάλυσης (Pushover Analysis)* προκειμένου να γίνει εμφανής η μη γραμμική συμπεριφορά των εφεδράνων. Η εφαρμογή αυτή προσομοιώθηκε κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν που προσομοιώθηκε το πρώτο στάδιο της εργασίας (περιβάλλον Matlab) και σκοπό δεν

έχει την ανάπτυξη πλαστικών αρθρώσεων στην ανωδομή, αλλά τον έλεγχο της μη γραμμικής συμπεριφοράς του υλικού.

## **1.4 Δομή Διπλωματικής Εργασίας**

Στο παρόν τεύχος αναλύεται το περιεχόμενο της εργασίας στα κάτωθι κεφάλαια:

### **ΜΕΡΟΣ Α': Θεωρητικό Υπόβαθρο**

**Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή**, όπου παρατίθεται μια συνοπτική ιστορική αναδρομή της φιλοσοφίας των πεπερασμένων στοιχείων καθώς και ο στόχος, τα στάδια και η δρομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

**Κεφάλαιο 2: Προσομοίωση Γεωμετρίας – Διακριτοποίηση Φορέα**, όπου παρατίθεται η θεωρία σύμφωνα με την οποία γίνεται η κατάτμηση του φορέα στα κατάλληλα κάθε φορά πεπερασμένα στοιχεία, ενώ αναφέρεται και ο τρόπος με τον οποίο ανόμοια πεπερασμένα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους.

**Κεφάλαιο 3: Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων**, όπου παρατίθεται η θεωρία σύμφωνα με την οποία εντάσσονται στο γενικό μακροσκοπικό πρόβλημα οι ιδιότητες της μικροδομή–μικροκλίμακας.

**Κεφάλαιο 4: Επίλυση Αριθμητικών Προβλημάτων Μηχανικού**, όπου παρατίθεται η απαραίτητη θεωρία της Αριθμητικής Ανάλυσης για προβλήματα απαιτούν σύνθετη Μαθηματική Ανάλυση.

### **ΜΕΡΟΣ Β': Εφαρμογή**

**Κεφάλαιο 5: Γεωμετρία Προβλήματος**, όπου παρατίθενται αναλυτικά οι γεωμετρικές παραδοχές του παραδείγματος στο οποίο εφαρμόστηκαν οι άνωθι θεωρήσεις.

**Κεφάλαιο 6: Κωδικοποίηση προβλήματος**, όπου παρατίθεται περιγραφικά ο τρόπος με τον οποίο εισήχθη η άνωθι γεωμετρία στον ηλεκτρονικό υπολογιστή σε περιβάλλον Matlab.

**Κεφάλαιο 7: Αποτελέσματα**, όπου παρατίθενται τα αποτελέσματα της συνολικής ανάλυσης καθώς και ορισμένα συμπεράσματα εξ αυτής.



## 2 Προσομοίωση Γεωμετρίας – Διακριτοποίηση Φορέα

### 2.1 Εισαγωγή

Πρώτο βήμα για την προσομοίωση - διακριτοποίηση ενός στατικού προβλήματος αποτελεί η αναγνώριση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του. Με τον όρο *Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά* εννοούμε τα είδη των μελών από τα οποία αποτελείται ο φέρων οργανισμός της κατασκευής που μελετάμε. Ένα υποσύλωμα για παράδειγμα μπορεί να θεωρηθεί ως **ραβδωτό στοιχείο**, αφού το μήκος του είναι πολλές φορές μεγαλύτερο από το πλάτος και το ύψος της διατομής του, σε αντίθεση με ένα τοίχωμα το οποίο χαρακτηρίζεται ως **επιφανειακό στοιχείο** μιας και η μία διάστασή του (σε επίπεδο διατομής) είναι συγκρίσιμη με το μήκος του.

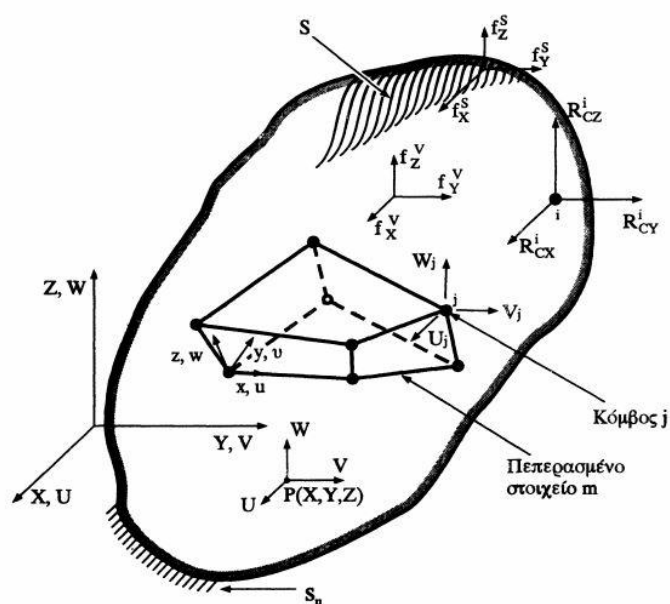
Ο «χοντρικός» αυτός διαχωρισμός γίνεται σε πρώτη φάση για να αποφασίσουμε ποια μέλη της κατασκευής θα μελετηθούν με χρήση **ραβδωτών πεπερασμένων στοιχείων** και ποια με **πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης**. Όμως αυτό δεν είναι αρκετό. Για να έχουμε την πλήρη εικόνα της κατασκευής θα πρέπει να αναγνωρίσουμε τους **βαθμούς ελευθερίας** των μελών, πράγμα το οποίο προκύπτει από το είδος της καταπόνησης που δέχεται κάθε μέλος ξεχωριστά. Έτσι διακριτοποιούμε τα ραβδωτά πεπερασμένα στοιχεία σε **στοιχεία δικτυώματος** και **στοιχεία δοκού επίπεδου πλαισίου** (τα πεπερασμένα στοιχεία επίπεδη έντασης έχουν σε κάθε περίπτωση τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας).

Πριν όμως τη μόρφωση του **μητρώου στιβαρότητας** της κατασκευής καθώς και του **διανύσματος των επικόμβιων δράσεων** αυτής, κρίνεται απαραίτητη η μελέτη της **συνδεσμολογίας** μεταξύ των μελών. Μόνο τότε το σύνολο των στοιχείων αυτών (**δίκτυο Πεπερασμένων Στοιχείων**) συμβαδίζει με την πραγματικότητα και η ανάλυση της κατασκευής επιφέρει ορθά αποτελέσματα.

## 2.2 Αρχή των Δυνατών Έργων

Το Μητρώο Στιβαρότητας και το Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων ενός πεπερασμένου στοιχείου διατυπώνεται μέσω της **Αρχής των Δυνατών Έργων**, κατά την οποία ισχύει πως:

Όταν ένας φορέας φορτίζεται με εξωτερικά φορτία και ισορροπεί, τότε για οποιαδήποτε «μικρή» δυνατή παραμόρφωσή του, συμβιβαστή με τις συνθήκες στηρίξεώς του, το **δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων** ισούται με το **δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων**.

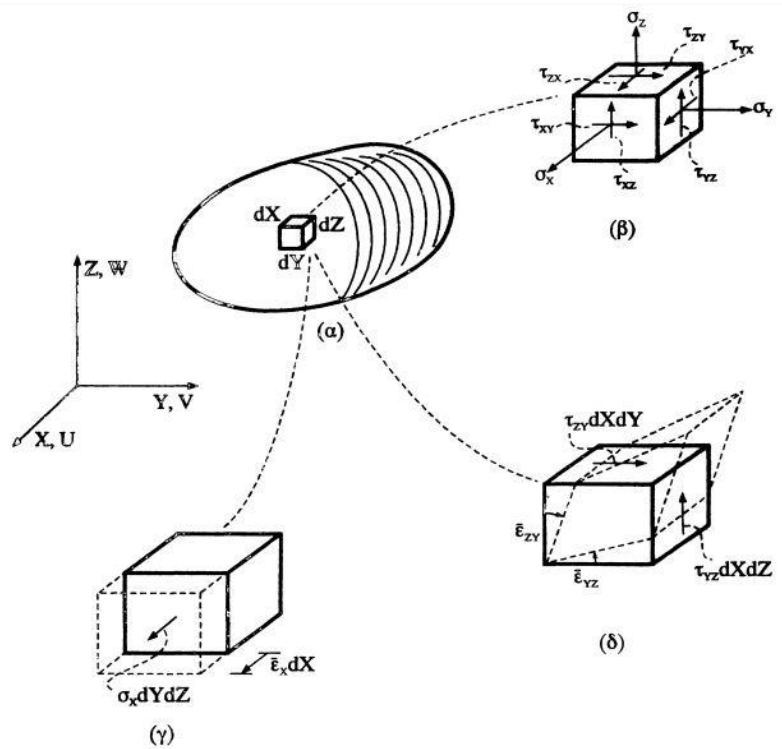


Εικόνα 1 Ολόσωμος τριδιάστατος φορέας στον οποίο ασκούνται όλα τα είδη δυνάμεων και ο οποίος αποτελείται από εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία οκτώ κόμβων

Η αρχή αυτή στηρίζεται στις παραδοχές ότι:

- το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο φορέας είναι **γραμμικώς ελαστικό** και ότι
- επικρατούν συνθήκες μικρών μετατοπίσεων οπότε οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να διατυπωθούν στην **γεωμετρία του απαραμόρφωτου φορέα** (χωρίς φαινόμενα δευτέρας τάξεως).

Έτσι, σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα (και συγκεκριμένα με την περίπτωση (β)), έχουμε:



Εικόνα 2 (α) Ολόσωμος τριδιάστατος φορέας, (β) στερεό τάσεων, (γ) ορθή δυνατή παραμόρφωση, (δ) διατμητική δυνατή παραμόρφωση

$$\bar{\epsilon}_x dX \sigma_x dY dZ = \bar{\epsilon}_x \sigma_x dV$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{YZ} dY \tau_{YZ} dX dZ + \bar{\epsilon}_{ZY} dZ \tau_{ZY} dX dY &= 2 \bar{\epsilon}_{YZ} \tau_{YZ} dV \\ &= \bar{\gamma}_{YZ} \tau_{YZ} dV \end{aligned} \quad (2.1)$$

Άρα, το συνολικό δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο είναι:

$$\begin{aligned} dW_{int} &= (\bar{\epsilon}_x \sigma_x + \bar{\epsilon}_y \sigma_y + \bar{\epsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{XY} \tau_{XY} \\ &\quad + \bar{\gamma}_{YZ} \tau_{YZ} + \bar{\gamma}_{ZX} \tau_{ZX} \end{aligned}$$

$$W_{int} = \int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.2)$$

Αντιστοίχως το συνολικό δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων (επιφανειακές δυνάμεις  $S$ , μαζικές δυνάμεις  $V$  και επικόμβιες δυνάμεις  $R$ ) είναι:

$$W_{ext} = \int_V \{\bar{U}^V\}^T \{f^V\} dV + \int_S \{\bar{U}^S\}^T \{f^S\} dS + \{\bar{D}\} \{R_C\} \quad (2.3)$$

Η Αρχή των Δυνατών Έργων λοιπόν, αποτυπώνεται στην εξίσωση:

$$W_{int} = W_{ext}$$

$$\text{ή:} \quad \int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\bar{U}^V\}^T \{f^V\} dV + \int_S \{\bar{U}^S\}^T \{f^S\} dS + \{\bar{D}\} \{R_C\} \quad (2.4)$$

όπου  $\{\sigma\}$  είναι οι **τάσεις** που εξισορροπούν τα εξωτερικά φορτία και  $\{U\}$  οι **δυνατές μετατοπίσεις** που αντιπροσωπεύουν ένα συνεχές πεδίο δυνατών μετατοπίσεων συμβιβαστό με τις συνθήκες στηρίξεως του φορέα, από το οποίο προσδιορίζονται οι **δυνατές ανηγμένες παραμορφώσεις**  $\{\varepsilon\}$ .

Η σχέση που συνδέει τις **δυνατές ανηγμένες παραμορφώσεις** με τις **τάσεις** προκύπτουν από το **Νόμο του Hooke**<sup>1</sup> (για ελαστική ανάλυση):

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup> Σύμφωνα με το Νόμο του Hooke, οι τάσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων και ισχύουν με την παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων και για συγκεκριμένα υλικά.

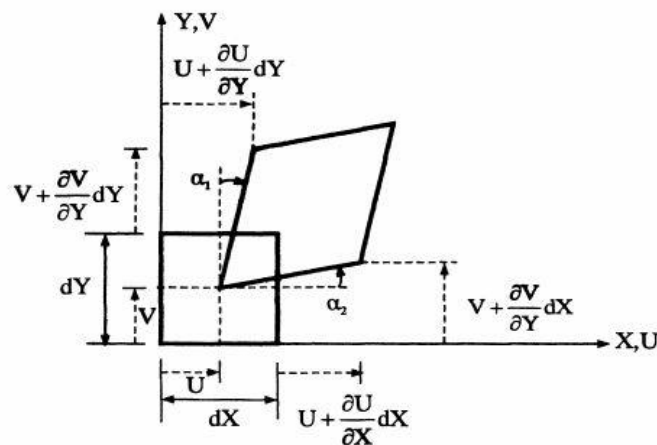


με  $[E]$  να εκφράζει τη στιβαρότητα του υλικού στις επιβαλλόμενες παραμορφώσεις και να είναι για κάθε είδος υλικού:

- *ανισότροπα υλικά*: μητρώο με 21 ανεξάρτητους όρους (21x21 διαστάσεις)
- *ισότροπα υλικά*: μητρώο με 6 ανεξάρτητους όρους (6x6 διαστάσεις) οι οποίο εκφράζονται με το συνδυασμό του **μέτρου ελαστικότητας κατά Young E** και του **λόγου Poisson  $\nu$**  του υλικού αυτού:

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Η σχέση που συνδέει τις δυνατές ανηγμένες παραμορφώσεις με τις δυνατές μετατοπίσεις προκύπτουν από το κάτωθι σχήμα:



Εικόνα 3 Παραμόρφωση στοιχειώδους ορθογωνίου

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta/\theta X & 0 & 0 \\ 0 & \theta/\theta Y & 0 \\ 0 & 0 & \theta/\theta Z \\ \theta/\theta Y & \theta/\theta X & 0 \\ 0 & \theta/\theta Z & \theta/\theta Y \\ \theta/\theta Z & 0 & \theta/\theta X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

δηλαδή:  $\{\varepsilon\} = [\theta_\varepsilon]\{U\}$  ( 2.7 )

Με παραδοχή ενός προσεγγιστικού πεδίου μετατοπίσεων στο εσωτερικό του κάθε πεπερασμένου στοιχείου, ορίζεται το **Μητρώο των Συναρτήσεων Σχήματος** το οποίο συνδέει το διάνυσμα των συνιστωσών των μετατοπίσεων ενός σημείου P(X,Y,Z) στο εσωτερικό του στοιχείου, {U(X,Y,Z)}, με το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου, {d}:

$$\begin{bmatrix} U(X, Y, Z) \\ V(X, Y, Z) \\ W(X, Y, Z) \end{bmatrix} = [N(X, Y, Z)] \begin{bmatrix} U1 \\ V1 \\ W1 \\ \vdots \\ U_{ne} \\ V_{ne} \\ W_{ne} \end{bmatrix}$$

δηλαδή:  $\{U(X, Y, Z)\}_{3 \times 1} = [N(X, Y, Z)]_{3 \times 3ne} \{d\}_{3ne \times 1}$  ( 2.8 )

όπου ne, το σύνολο των κόμβων ανά πεπερασμένο στοιχείο.

Το **προσεγγιστικό πεδίο μετατοπίσεων** επηρεάζει άμεσα και σημαντικά την αξιοπιστία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων μιας και είναι εκείνο που καθορίζει την ακρίβεια της λύσης σε σύγκριση με την πραγματικότητα. Συνήθως το πεδίο αυτό χαρακτηρίζεται από πολυώνυμα, όπως φαίνεται και στη συνέχεια.

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην σχέση (2.6), μορφώνεται το **Μητρώο Παραμορφώσεως B**, το οποίο αφορά κάθε στοιχείο και συνδέει το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων και τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου.

Έχοντας λοιπόν αναλύσει τις συνιστώσες της εξίσωσης των δυνατών έργων και αγνοώντας τις μαζικές κι επιφανειακές δυνάμεις, το άθροισμα του δυνατού έργου των εσωτερικών δυνάμεων όλων των στοιχείων  $m$  με τα οποία έχει διακριτοποιηθεί ο φορέας γίνεται:

$$\sum_m \int_{Ve} \{\bar{\varepsilon}^{(m)}\}^T \{\sigma^{(m)}\} dVe = \{\bar{D}\}^T \{Rc\}$$

οπότε:  $[K]\{D\} = \{Rc\}$  (2.9)

όπου  $Ve$  ο όγκος του στοιχείου  $m$ .

Η σχέση αυτή δίνει τη **συνθήκη ισορροπίας** του φορέα στην οποία το μητρώο  $[K]$  εκφράζει το **ολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα** το οποίο προκύπτει από τη σύνθεση των **επιμέρους μητρώων στιβαρότητας των στοιχείων** του, και έχουν τη μορφή:

$$[k^{(m)}] = \int_{Ve} [B^{(m)}]^T [E] [B^{(m)}] dVe \quad (2.10)$$

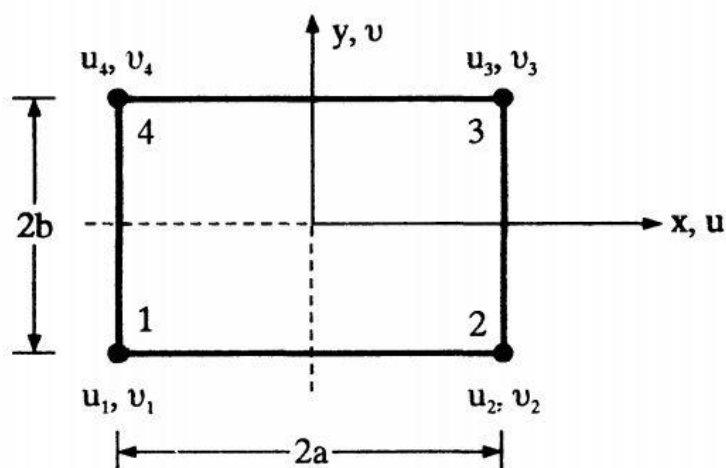
Επιπρόσθετα, ο πρώτος όρος της εξίσωσης (2.8) δίνει το **διάνυσμα επικόμβιων δράσεων** (εσωτερικές δράσεις), το οποίο σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις παίρνει μορφή:

$$\{rs^{(m)}\} = \int_{Ve} [B^{(m)}]^T [\sigma^{(m)}] \{d^{(m)}\} dVe \quad (2.11)$$

με  $\{d\}$  το διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων ανά στοιχείο.

## 2.3 Τετραπλευρικά Στοιχεία Επίπεδης Έντασης- Παραμόρφωσης (Quad Elements)

Τα Τετραπλευρικά Στοιχεία Επίπεδης Έντασης-Παραμόρφωσης χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση ολόσωμων συνεχών φορέων (π.χ. κατά την μελέτη ενός εφεδράνου).



Εικόνα 4 Γεωμετρική εικόνα Τετραπλευρικών Στοιχείων Επίπεδης Έντασης (quads)

Αυτά, επιλέγουμε να έχουν την άνωθι μορφή, με έναν **κόμβο** σε κάθε ακμή (τέσσερεις στο σύνολο) και δύο **βαθμούς ελευθερίας** σε κάθε κόμβο (οκτώ στο σύνολο).

Θεωρώντας ότι οι μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο  $i$  κατά  $x$  και  $y$  ορίζονται μαθηματικώς ως γραμμικά πολυώνυμα των δύο αυτών μεταβλητών (πεδίο μετατοπίσεων), έχουμε πως :

$$u = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot xy$$

$$v = a_5 + a_6 \cdot x + a_7 \cdot y + a_8 \cdot xy \quad (2.12)$$

Με την αντικατάσταση για κάθε κόμβο των συντεταγμένων του στο κατάλληλο πολυώνυμο τη φορά, μορφώνεται ο πίνακας  $A$  που συνδέει τις επικόμβιες μετατοπίσεις με τους συντελεστές των πολυωνύμων  $a_1:a_8$ . Έτσι με την αντιστροφή

του A και τον κατάλληλο πολλαπλασιασμό του με τον πίνακα των μεταβλητών των πολυωνύμων, προκύπτουν οι **Συναρτήσεις Σχήματος, N**:

$$N = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

με:

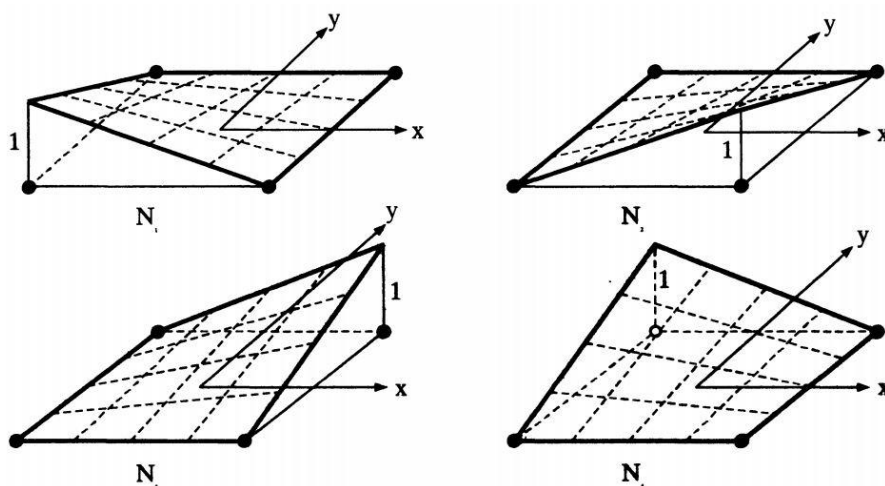
$$N1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N3 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$N4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad (2.14)$$

η φυσική σημασία των οποίων απεικονίζεται στα ακόλουθα σχήματα:



Εικόνα 5 Φυσική ερμηνεία Συναρτήσεων Σχήματος (quads)

Ιδιαίτερη **ΠΡΟΣΟΧΗ** στο σημείο αυτό θα πρέπει να δοθεί στη **φορά** με την οποία γίνεται η αρίθμηση των κόμβων σε τοπικό επίπεδο: ξεκινάμε από τον κάτω αριστερά κόμβο και συνεχίζουμε αριστερόστροφα έως να φτάσουμε στον πάνω αριστερά. Αυτό συμβαίνει καθώς η αρίθμηση των κόμβων εξαρτάται από τη **σειρά** με την οποία θεωρούμε τις Συναρτήσεις Σχήματος (όπως άλλωστε φαίνεται και στο σχήμα).

Το *Μητρώο Δυσκαμψίας* και το *Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων* όμως για να μορφωθούν, απαιτούν τα Μητρώα Παραμορφώσεως και Ελαστικότητας.

Το **Μητρώο Παραμορφώσεως, B**, πηγάζει από τις παραδοχές της *Επίπεδης Εντάσεως*<sup>2</sup> όπου οι ανηγμένες παραμορφώσεις στο επίπεδο xy για έναν ολόσωμο φορέα έχουν ως εξής:

$$\epsilon_x = \frac{\theta u}{\theta x}, \epsilon_y = \frac{\theta v}{\theta y}, \gamma_{xy} = \frac{\theta u}{\theta y} + \frac{\theta v}{\theta x} \quad (2.15)$$

Έτσι λοιπόν, το άνωθι μητρώο μορφώνεται:

$$B = \begin{bmatrix} N1,x & 0 & N2,x & 0 & N3,x & 0 & N4,x & 0 \\ 0 & N1,y & 0 & N2,y & 0 & N3,y & 0 & N4,y \\ N1,y & N1,x & N2,y & N2,x & N3,y & N3,x & N4,y & N4,x \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

όπου οι δείκτες x,y, δηλώνουν την μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται η παραγωγή κάθε φορά.

<sup>2</sup> *Επίπεδη Ένταση* είναι το φαινόμενο κατά το οποίο ένας ολόσωμος φορέας έχει διάσταση κατά τον z άξονα πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις που έχει κατά τους δύο άλλους άξονες, x και y. Αντιθέτως, *Επίπεδη Παραμόρφωση* είναι το φαινόμενο κατά το οποίο ο ολόσωμος φορέας έχει διάσταση κατά τον z άξονα πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις που έχει κατά τους λοιπούς άξονες. Τα δύο αυτά φαινόμενα μελετώνται μαζί καθότι υπακούουν στην ίδια μεθοδολογία με διαφορά τον ορισμό του Μητρώου Ελαστικότητας, E.

Ο ρόλος του μητρώου B είναι να μετατρέπει τις επικόμβιες μετατοπίσεις σε ανηγμένες παραμορφώσεις:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [B]\{d\}, \text{ με } \{d\} = [u_1; v_1; u_2; v_2; u_3; v_3; u_4; v_4]$$

Το **Μητρώο Ελαστικότητας, E**, επειδή το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε αποτελεί πρόβλημα *Επίπεδης Έντασης* όπου:  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ , έχει την ακόλουθη μορφή (σύμφωνα με το Μητρώο Τριδιάστατης Ελαστικότητας, E, της προηγούμενης παραγράφου):

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας κατά Young και  $\nu$  ο λόγος Poisson του υλικού του ολόσωμου φορέα.

Στο σημείο αυτό, ο υπολογισμός των δύο επιθυμητών ποσοτήτων γίνεται σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

**Μητρώο Στιβαρότητας** (σε τοπικό επίπεδο):

$$[kq]_{8 \times 8} = t \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a}^{x=a} [B]^T_{8 \times 3} [E]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 8} dx dy \quad (2.18)$$

με  $t$  το πάχος του στοιχείου που θεωρείται σταθερό σε όλη την επιφάνειά του.

**Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων** (σε τοπικό επίπεδο):

$$[rsq]_{8 \times 1} = t \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a}^{x=a} [B]^T_{8 \times 3} [E]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 8} \{d\}_{8 \times 1} dx dy \quad (2.19)$$

με  $t$  το πάχος του στοιχείου που θεωρείται σταθερό σε όλη την επιφάνειά του και  $\{d\}$  το διάνυσμα επικόμβων μετατοπίσεων όπως ορίστηκε προηγουμένως.

Για να διαμορφώσουμε το Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας, δημιουργούμε για αρχή έναν «κενό» τετραγωνικό πίνακα,  $K_{total}$ , με διαστάσεις  $n \times n$ , όπου  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας του ολικού φορέα (είναι συνάρτηση και του αριθμού των ΠΣ με τα οποία τον έχουμε χωρίσει). Τότε σύμφωνα με τους βαθμούς ελευθερίας που χαρακτηρίζουν κάθε ξεχωριστό στοιχείο (element) προσθέτουμε στον προηγούμενο κάθε φορά  $K_{total}$  το μητρώο  $k$  που μόλις υπολογίσαμε. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τη διαμόρφωση του καθολικού Διανύσματος Επικόμβων Δράσεων,  $F_{total}$ .

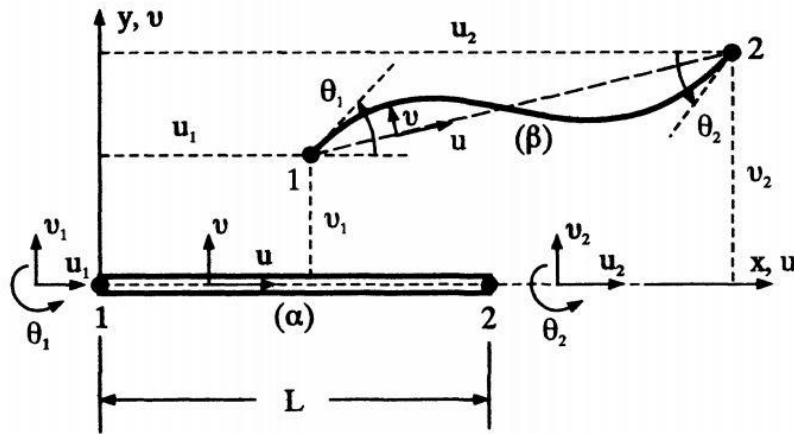
**ΠΡΟΣΟΧΗ** πρέπει να δοθεί στην μετατροπή του *τοπικού συστήματος* στο *καθολικό*, πράγμα το οποίο επιτυγχάνεται με το **Μητρώο Περιστροφής  $L$** .

## 2.4 Στοιχεία Δοκού Επίπεδου Πλαισίου (Beam Elements)

### 2.4.1 Ανάλυση γεωμετρίας με την Αρχή των Δυνατών Έργων

Τα Στοιχεία Δοκού Επίπεδου Πλαισίου χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση ραβδωτών φορέων (π.χ. κατά την μελέτη ενός υποστυλώματος ή μιας δοκού).





Εικόνα 6 Γεωμετρική Εικόνα Στοιχείων Δοκού Επίπεδου Πλαισίου (beams)

Αυτά επιλέγουμε να έχουν την παραπάνω μορφή, με έναν **κόμβο** σε κάθε άκρη (δύο στο σύνολο) και τρεις **βαθμούς ελευθερίας** σε κάθε κόμβο (έξι στο σύνολο).

Θεωρώντας ότι οι μετακινήσεις σε κάθε κόμβο (j ή k) κατά x και y ορίζονται μαθηματικώς ως γραμμικά πολυώνυμα για τις αξονικές μετατοπίσεις και ως κυβικά πολυώνυμα για τις εγκάρσιες, της μεταβλητής x, (πεδίο μετατοπίσεων) έχουμε πως :

$$u = a1 + a2 \cdot x$$

$$v = a3 + a4 \cdot x + a5 \cdot x^2 + a6 \cdot x^3 \quad (2.20)$$

Με την αντικατάσταση για κάθε κόμβο των συντεταγμένων του στο κατάλληλο πολυώνυμο τη φορά, μορφώνονται οι πίνακες Aa και Ab<sup>3</sup> που συνδέουν τις επικόμβιες μετατοπίσεις με τους συντελεστές των πολυωνύμων α1:α2 και α3:α6 αντιστοίχως. Έτσι με την αντιστροφή των Aa και Ab και τον κατάλληλο

<sup>3</sup> Ο πίνακας Aa αφορά τους αξονικούς βαθμούς ελευθερίας (μετατόπιση κατά x) και έχει διαστάσεις: 2x2, ενώ ο πίνακας Ab αφορά τους καμπτικούς βαθμούς ελευθερίας (μετατόπιση κατά y και στροφή περί τον άξονα z κάθετη στο επίπεδο xy) κι έχει διαστάσεις: 4x4. Οι θέσεις στους πίνακες αυτούς που αφορούν τις μετατοπίσεις κατά x και y συμπληρώνονται με την ίδια διαδικασία που συμπληρώθηκαν και πριν, ενώ οι θέσεις που αφορούν την στροφή συμπληρώνεται λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση:

$$\frac{dv}{dx} = \theta$$

πολλαπλασιασμό τους με τους αντίστοιχους πίνακες των μεταβλητών των πολυωνύμων, προκύπτουν οι **Συναρτήσεις Σχήματος, N**:

$$N = \begin{bmatrix} N1 & 0 & 0 & N2 & 0 & 0 \\ 0 & N3 & N4 & 0 & N5 & N6 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

με:

$$N1 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N2 = \frac{x}{L}$$

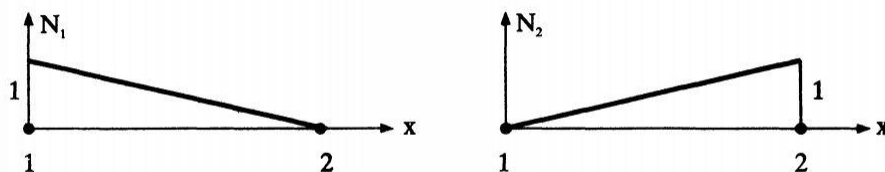
$$N3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

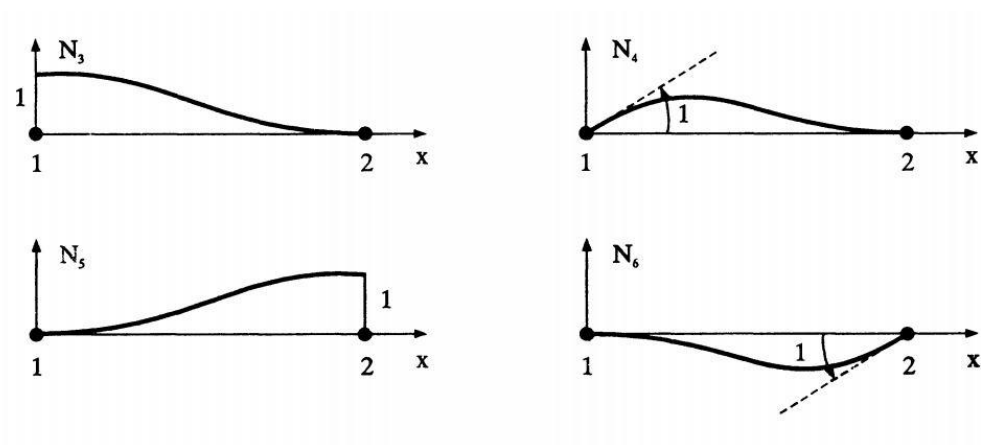
$$N4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.22)$$

η φυσική σημασία των οποίων απεικονίζεται στα ακόλουθα σχήματα:





Εικόνα 7 Φυσική ερμηνεία Συναρτήσεων Σχήματος (beams)

Ιδιαίτερη **ΠΡΟΣΟΧΗ** στο σημείο αυτό θα πρέπει να δοθεί στη **φορά** με την οποία γίνεται η αρίθμηση των κόμβων σε τοπικό επίπεδο: ξεκινάμε από τον αριστερά κόμβο και συνεχίζουμε στον δεξιό, τοποθετώντας πάντα στο μυαλό μας το στοιχείο δοκού σε οριζόντια θέση. Αυτό συμβαίνει καθώς η αρίθμηση των κόμβων εξαρτάται από τη **σειρά** με την οποία θεωρούμε τις Συναρτήσεις Σχήματος (όπως άλλωστε φαίνεται και στο σχήμα).

Το *Μητρώο Δυσκαμψίας* και το *Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων* όμως για να μορφωθούν, απαιτούν τα *Μητρώα Παραμορφώσεως* και *Ελαστικότητας*.

Το **Μητρώο Παραμορφώσεως, B**, πηγάζει με τη σειρά του από την *Καμπτική Θεωρία Δοκού*<sup>4</sup>, όπου οι ανηγμένες παραμορφώσεις κατά τον άξονα x για ένα μέλος δοκού έχουν ως εξής:

<sup>4</sup> Η Καμπτική θεωρία Δοκού βασίζεται στην κλασική θεωρία του Bernoulli κατά την οποία οι διατομές του στοιχείου της δοκού ήταν επίπεδες και κάθετες ως προς τον άξονά του πριν την καμπτική παραμόρφωση, ενώ παραμένουν έτσι και κατά την παραμορφωμένη κατάσταση:

$$2exy = -\theta(x) + \frac{du}{dx} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.23)$$

Έτσι λοιπόν, το άνωθι μητρώο μορφώνεται:

$$B = [N1, x \quad -yN3, xx \quad -yN4, xx \quad N2, x \quad -yN5, xx \quad -yN6, xx] \quad (2.24)$$

όπου ο δείκτης  $x$ , δηλώνει την μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται η παραγωγή και κάθε φορά (ο δείκτης  $xx$  δηλώνει την διπλή παράγωγο ως προς  $x$  της συνάρτησης).

Ο ρόλος του μητρώου  $B$  είναι να μετατρέπει τις επικόμβιες μετατοπίσεις σε ανηγμένες παραμορφώσεις:

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x] = [B]\{d\}, \text{ με } \{d\} = [u1; v1; \theta1; u2; v2; \theta2]$$

Το **Μητρώο Ελαστικότητας,  $E$** , επειδή το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε αποτελεί πρόβλημα *Επίπεδης Έντασης* όπου:  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ , έχει την ακόλουθη μορφή (σύμφωνα με το Μητρώο Τριδιάστατης Ελαστικότητας  $E$ ):

$$[E] = E \quad (2.25)$$

όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας κατά *Young*.

Στο σημείο αυτό, ο υπολογισμός των δύο επιθυμητών ποσοτήτων γίνεται σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

**Μητρώο Στιβαρότητας** (σε τοπικό επίπεδο):

$$[kb]_{6 \times 6} = t \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a}^{x=a} [B]^T_{6 \times 1} [E]_{1 \times 1} [B]_{1 \times 6} dx dy \quad (2.26)$$

με  $t$  το πάχος του στοιχείου που θεωρείται σταθερό σε όλη την επιφάνειά του.

**Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων** (σε τοπικό επίπεδο):

$$[rsb]_{6 \times 1} = b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} [B]^T_{6 \times 1} [E]_{1 \times 1} [B]_{1 \times 6} \{d\}_{6 \times 1} dy dx \quad (2.27)$$

με  $b$  το πλάτος του στοιχείου που θεωρείται σταθερό σε όλο το μήκος του,  $h$  το ύψος του και  $\{d\}$  το διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων όπως ορίστηκε προηγουμένως.

Για να διαμορφώσουμε το Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας, δημιουργούμε για αρχή έναν «κενό» τετραγωνικό πίνακα,  $K_{total}$ , με διαστάσεις  $n \times n$ , όπου  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας του ολικού φορέα (είναι συνάρτηση και του αριθμού των μελών δοκού). Τότε σύμφωνα με τους βαθμούς ελευθερίας που χαρακτηρίζουν κάθε ξεχωριστό στοιχείο (element) προσθέτουμε στον προηγούμενο κάθε φορά  $K_{total}$  το μητρώο  $k$  που μόλις υπολογίσαμε (σύμφωνα με οποιαδήποτε μεθοδολογία). Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τη διαμόρφωση του καθολικού Διανύσματος Επικόμβιων Δράσεων,  $F_{total}$ . Δεν ξεχνάμε να κάνουμε την μετατροπή από το **τοπικό** στο **καθολικό σύστημα συντεταγμένων**.

## 2.4.2 Ανάλυση γεωμετρίας με Μέθοδο των Δυνάμεων

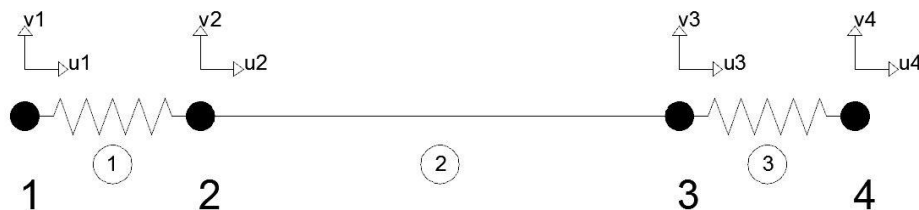
Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στη Μητρική Στατική και υπολογίζει άμεσα το **τοπικό μητρώο στιβαρότητας** ενός στοιχείου πλαισίου σύμφωνα με τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά ως εξής:

$$[kb] = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

όπου  $A$  η διατομή κάθε στοιχείου,  $E$  το μέτρο ελαστικότητάς του κατά Young και  $L$  το μήκος του.

## 2.5 Σύνθετα Στοιχεία Δικτυώματος (Truss Elements)

Τα Σύνθετα Στοιχεία Δικτυώματος χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη εργασία, για την προσομοίωση των ινών που βρίσκονται μέσα σε ένα σύνθετο υλικό (π.χ. μέσα στο υλικό από το οποίο αποτελούνται εφέδρανα). Ο χαρακτηρισμός «σύνθετα» υπάρχει ώστε να διαχωρίσει τα στοιχεία δικτυώματος αυτά από τα συνήθη, μιας και στα άκρα τους θεωρούμε ότι συνδέονται δύο μη γραμμικά ελατήρια με ελαστικότητες  $k_1$  και  $k_3$  αντιστοίχως:



Εικόνα 8 Γεωμετρική Εικόνα Σύνθετων Στοιχείων Δικτυώματος (trusses)

Αυτά επιλέγουμε να έχουν την παραπάνω μορφή, με έναν **κόμβο** σε κάθε άκρη (τέσσερεις στο σύνολο) και δύο **βαθμούς ελευθερίας** σε κάθε κόμβο (οκτώ στο σύνολο).

Ιδιαίτερη **ΠΡΟΣΟΧΗ** στο σημείο αυτό θα πρέπει να δοθεί στη **φορά** με την οποία γίνεται η αρίθμηση των κόμβων σε τοπικό επίπεδο: ξεκινάμε από τον αριστερά κόμβο και συνεχίζουμε στον δεξιό, τοποθετώντας πάντα στο μυαλό μας το σύνθετο στοιχείο δικτύματος σε οριζόντια θέση. Οι κόμβοι 2 και 3 είναι κοινί στα μέλη 1-2 και 2-3 αντίστοιχα.

### 2.5.1 Ανάλυση Μέλους 2 – Στοιχείο Δικτύματος

Σύμφωνα με την *Μητρική Στατική*, το **Μητρώο Στιβαρότητας** ενός στοιχείου δικτύματος έχει ως εξής:

$$[k_2] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

με  $A$  η επιφάνεια της διατομής του στοιχείου αυτού και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας κατά *Young*.

Όσον αφορά το **Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων** ενός στοιχείου δικτύματος, αυτές υπολογίζονται έμμεσα μετά τη διαμόρφωση του μητρώου στιβαρότητας. Θα πρέπει με λίγα λόγια να υπολογίσουμε για αρχή τις *επικόμβιες μετατοπίσεις* του και στη συνέχεια να τις πολλαπλασιάσουμε με το μητρώο αυτό:

$$[rs2]_{4x1} = [kt]_{4x4} \{d2\}_{4x1}, \text{ με } \{d2\} = [u2; v2; u3; v3] \quad (2.30)$$

## 2.5.2 Ανάλυση Μελών 1 & 3 – Μη γραμμικά Ελατήρια (Μοντέλο Τριβής (Bond-Slip))

Κατ' αντιστοιχία με την προηγούμενη περίπτωση, το **Μητρώο Στιβαρότητας** ενός ελατηριακού στοιχείου έχει την ακόλουθη μορφή:

$$[k1,3] = \begin{bmatrix} k1,3 & 0 & -k1,3 & 0 \\ 0 & pk & 0 & -pk \\ k1,3 & 0 & -k1,3 & 0 \\ 0 & -pk & 0 & pk \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

όπου  $k1,3$  είναι η ελαστικότητα του ελατηρίου παράλληλα ως προς τον άξονά του και  $pk$  είναι η ελαστικότητα του ίδιου ελατηρίου κάθετα ως προς τον άξονά του (οι δείκτες 1,3 προσδιορίζουν ποιο από τα δύο ελατήρια, αρχής ή τέλους, μελετάμε κάθε φορά).

Επιπλέον, το **Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων** του ίδιου ελατηριακού στοιχείου είναι:

$$[rs1,3] = [f1,3 \quad pk * v1,3 - pk * v2,4 \quad -f1,3 \quad -pk * v1,3 + pk * v2,4]^T \quad (2.32)$$

όπου  $f1,3$  είναι η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο κατά τον άξονά του και  $pk*v$  είναι η αντίστοιχη δύναμη που ασκείται κάθετα ως προς τον άξονα αυτόν.

Στο σημείο αυτό κρίνεται **ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟΣ** ο σχολιασμός των συντεταγμένων των κόμβων 1 και 4. . Οι συγκεκριμένοι κόμβοι ορίζουμε να έχουν τις ίδιες ακριβώς συντεταγμένες με τους αντίστοιχους κόμβους, 2 και 3. Σκοπός του ορισμού αυτού αποτελεί το γεγονός ότι το μήκος της ίνας (μέλος 2) πρέπει να μείνει ως έχει στην



πραγματικότητα, ενώ τα ελατήρια (μέλη 1 και 3) πρέπει να οριστούν ως ελαστικές στηρίξεις. Ένα ακόμη χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων κόμβων αποτελεί το γεγονός ότι αποτελούν τον *συνδετικό κρίκο της συνεργασίας-σύνδεσης των truss elements με το αντίστοιχο κάθε φορά quad element της μήτρας του υλικού*, στο οποίο ανήκει κάθε κόμβος του. Μόνο τότε μεταφέρονται σωστά οι δυνάμεις-παραμορφώσεις στα στοιχεία αυτά.

Η τιμή **pk** (όροι μέτρου ελαστικότητας) ορίζεται «αυθαίρετα» από τον μελετητή και σκοπό έχει να εξασφαλίσει την αξονική και μόνο λειτουργία των ελατηρίων (για αυτό και παίρνει τιμές μία με δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από τις τιμές που παίρνει η τιμή  $k_{1,3}$ ).

Αντιθέτως, οι τιμές **k1,3** και **f1,3** δεν ορίζονται αυθαίρετα. Τα δύο ελατήρια στα άκρα του truss εισάγονται στο προσομοίωμα με σκοπό να λάβουν υπόψη στην ανάλυση το φαινόμενο της *συνάφειας* μεταξύ των ινών και του βασικού υλικού (της μήτρας) του συνθετικού υλικού.

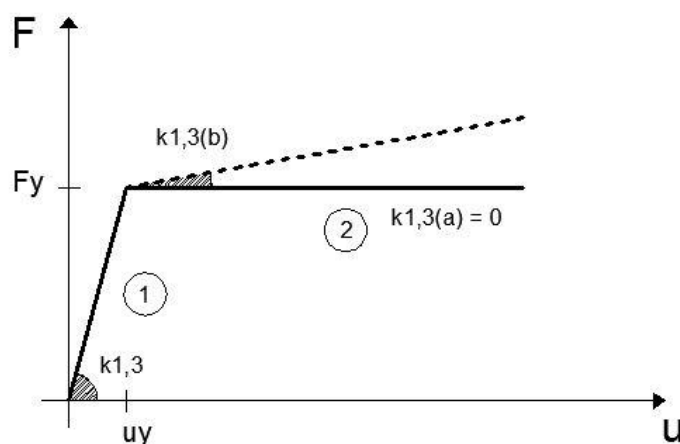
Εάν το συνθετικό υλικό μας ήταν το *οπλισμένο σκυρόδεμα*, τότε το ρόλο των ινών θα είχαν οι *οπλισμοί* του, ενώ το ρόλο της μήτρας το σκυρόδεμα. Στην περίπτωση αυτή, **συνάφεια** ορίζεται το σύνολο των αιτιών που παρεμποδίζουν τη σχετική ολίσθηση μεταξύ των ράβδων οπλισμού και της μάζας του σκυροδέματος που τις περιβάλλει και εξαρτάται από πλήθος παραμέτρων (π.χ. η ποιότητα υλικών, τα είδη των επιφανειών τους όπου γίνεται η επαφή, η διεύθυνσή τους κ.α.).

Το φαινόμενο της συνάφειας χαρακτηρίζεται από έντονη ψαθυρότητα<sup>5</sup> – **πλαστικότητα** (μη γραμμικότητα). Όταν στην άκρη μίας ίνας ασκείται ένα φορτίο (είτε εφελκυστικό είτε θλιπτικό), η ίνα τείνει να κινηθεί ως προς τη μήτρα. Σε πρώτο στάδιο, η κίνηση γίνεται σε μικροσκοπικό επίπεδο, όπου έχουμε εμπλοκή των δύο επιφανειών που αλληλεπιδρούν, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται *διατμητικές*

---

<sup>5</sup> **Ψαθυρότητα** είναι η ιδιότητα των υλικών να παρουσιάζουν μικρές παραμορφώσεις πριν τη θραύση τους.

τάσεις. Με την αύξηση της φόρτισης, οι διατμητικές τάσεις αυξάνονται έως να φτάσουν στη μέγιστη δυνατή τιμή τους (ελαστικός κλάδος 1). Από αυτό το όριο και πάνω, η σχετική κίνηση των δύο υλικών παύει να γίνεται σε μικροσκοπικό επίπεδο και ακαριαία αυξάνεται προς το άπειρο (μετελαστικός κλάδος 2-a), μιας και η αντίσταση έχει μηδενιστεί και η σχετική ολίσθηση των δύο αυτών επιφανειών είναι εμφανής.



Εικόνα 9 Διάγραμμα Συμπεριφοράς μη γραμμικών ελατηρίων

Το διάγραμμα που προηγήθηκε ποσοτικοποιεί τις ιδιότητες της συνάφειας, ορίζοντας την συμπεριφορά των ελατηρίων 1 και 3. Για «χαμηλές» τιμές επιβαλλόμενης μετακίνησης ισχύει ότι:  $k_{1,3} = k_{1,3 \text{ elastic}}$  και  $f_{1,3} < F_y$ , ενώ για επιβαλλόμενη μετακίνηση μεγαλύτερη από την «μετακίνηση διαρροής  $u_y$ » έχουμε:  $k_{1,3} = k_{1,3(b)}$  κι όχι  $k_{1,3(a)}$ , ενώ  $f_{1,3} > F_y$ .

Η τελευταία πρόταση βρίσκεται σε αντιδιαστολή με τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως μιας και η τιμή  $k_{1,3(b)}$  εισάγει, εκ πρώτης όψευς, στο προσομοίωμα το φαινόμενο της *κράτνυσης*<sup>6</sup>. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό όμως είναι καθαρά υπολογιστικός.

<sup>6</sup> **Κράτνυση** είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μετά τη διαρροή, απαιτείται αύξηση των τάσεων για να παρατηρηθεί περαιτέρω αύξηση των παραμορφώσεων.

### 2.5.3 Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας και Καθολικό Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων Σύνθετου Στοιχείου Δικτυώματος

Για τη μόρφωση των καθολικών ποσοτήτων που θέλουμε να υπολογίσουμε τελικά, κρίνεται απαραίτητη η κατανόηση της συνδεσμολογίας των επιμέρους μελών, ότι δηλαδή οι κόμβοι 2 και 3 όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι κοινοί στα μέλη 1-2 και 2-3 αντίστοιχα.

Το Μητρώο Δυσκαμψίας και το Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων του σύνθετου αυτού στοιχείου για να μορφωθούν λοιπόν, απαιτούν τη σύνθεση των αντίστοιχων τοπικών ποσοτήτων, η οποία λαμβάνει χώρα προσθέτοντας τους κατάλληλους όρους σύμφωνα με τους βαθμούς ελευθερίας κάθε μέλους του truss, όπως φαίνεται παρακάτω ([ktruss]):

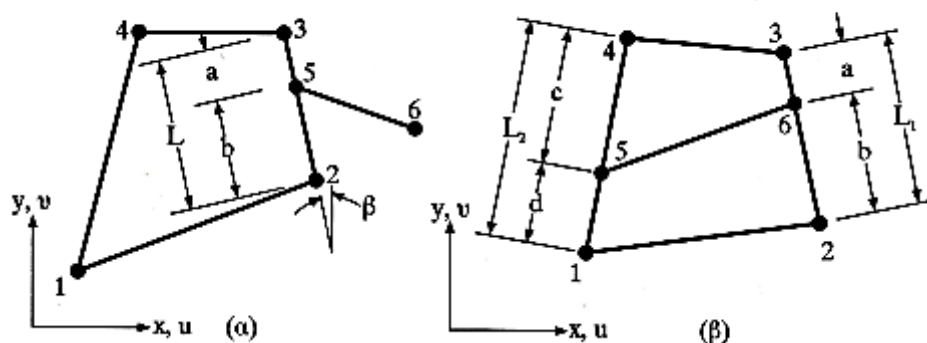
	$u1$	$v1$	$u2$	$v2$	$u3$	$v3$	$u4$	$v4$	
					0	0	0	0	$u1$
					0	0	0	0	$v1$
							0	0	$u2$
							0	0	$v2$
$k1$									
0	0								$u3$
0	0	$k2$							$v3$
0	0	0	0						$u4$
0	0	0	0	$k3$					$v4$

Εικόνα 10 Μόρφωση Τοπικού Μητρώου Δυσκαμψίας (trusses)

με τα σκουρόχρωμα κελιά να είναι οι περιοχές του πίνακα όπου τα δεδομένα των υποπινάκων προστίθενται (το διάνυσμα επικόμβιων δράσεων [rst] μορφώνεται κατά αντιστοιχία).

## 2.6 Ένωση Διαφορετικών Τύπων Στοιχείων

Σε πολλές περιπτώσεις προσομοίωσης κατασκευών, κρίνεται απαραίτητη η *σύνδεση* μεταξύ δύο ανομοιογενών στοιχείων. Δύο τέτοιες περιπτώσεις φαίνονται στη συνέχεια:



Εικόνα 11 Ένωση διαφορετικών τύπων στοιχείων: (α) τετραπλευρικό στοιχείο επίπεδης έντασης με στοιχείο δοκού, (β) τετραπλευρικό στοιχείο επίπεδης έντασης με στοιχείο δικτύωματος

**ΠΡΟΣΟΧΗ**, οι κόμβοι 5 και 6 στις δύο παραπάνω περιπτώσεις δεν αντιστοιχούν σε κάποιο ενδιάμεσο κόμβο των τετραπλευρικών στοιχείων.

Για να υπάρχει συνεργασία μεταξύ των δύο αυτών δομών (γραμμικά και τετραπλευρικά στοιχεία), θα πρέπει να ικανοποιείται η **συνθήκη συμβιβαστού των μετατοπίσεων**. Τότε, οι κόμβοι των γραμμικών στοιχείων θα πρέπει να έχουν κοινή συμπεριφορά με τους κόμβους των αντίστοιχων τετραπλευρικών. Συγκεκριμένα για τα δύο παραπάνω παραδείγματα θα πρέπει:

- α) οι μεταφορικοί βαθμοί ελευθερίας του κόμβου 5 να προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή των μετατοπίσεων των κόμβων 2 και 3, ενώ ο στροφικός βαθμός ελευθερίας του κόμβου 5 θα πρέπει να συμπίπτει με τη στροφή της πλευράς 2-3., και

β) οι μετατοπίσεις των κόμβων 5 και 6 να προκύπτουν ως γραμμική παρεμβολή των μετατοπίσεων των κόμβων 1 και 4, και 2 και 3 αντιστοίχως.

Οι συγκεκριμένες συνθήκες οδηγούν στην ανάγκη μόρφωσης ενός **Μητρώου Μετασχηματισμού T**, το οποίο περικλείει τις γραμμικές παρεμβολές και τις στροφές, συνδέοντας έτσι τα δύο ανόμοια στοιχεία μεταξύ τους.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **Στατική Συμπύκνωση** και περιλαμβάνει την απαλοιφή των επιθυμητών κόμβων από τη μελέτη του προβλήματος με τον διαμοιρασμό της επιρροής των βαθμών ελευθερίας τους στους γειτονικούς κόμβους.

Με άλλα λόγια, το μητρώο αυτό έχει την ιδιότητα στην θέση των προς συμπύκνωση βαθμών ελευθερίας να εισάγει τους γειτονικούς στους οποίους αυτοί ανάγονται. Έτσι, αν οι προς συμπύκνωση β.ε. είναι τρεις σε αριθμό και οι γειτονικοί είναι τέσσερις (βλ. περίπτωση (α)), το μητρώο **T** θα έχει διαστάσεις:  $3 \times 4$ . (τα μητρώα **T** υπολογίζονται σύμφωνα με την κάθε περίπτωση στις ακόλουθες υποπαραγράφους)

Αυτή η αλλαγή των β.ε. θα πρέπει να είναι εμφανής και στα *Μητρώο Στιβαρότητας* και *Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων* του σύνθετου στοιχείου. Για τον σκοπό αυτόν, μορφώνουμε για αρχή τις δύο αυτές ποσότητες του **στοιχείου που έχει τον προς συμπύκνωση κόμβο** ( $k$  και  $rs$ ), κατά την διαδικασία που ακολουθείται στο Κεφάλαιο 2, κι έπειτα πραγματοποιούμε τις ακόλουθες πράξεις:

$$[k']_{n' \times n'} = [T]^T_{n' \times n} [k]_{n \times n} [T]_{n \times n'} \quad (2.33)$$

$$[rs']_{n' \times 1} = [T]^T_{n' \times n} [rs]_{n \times 1} \quad (2.34)$$

Στην περίπτωση που οι προς συμπύκνωση βαθμοί ελευθερίας δεν βρίσκονται στους ίδιους άξονες με τους αντίστοιχους γειτονικούς τους, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη στις πράξεις και το **Μητρώο Περιστροφής Λ** πριν τον πολλαπλασιασμό με το μητρώο μετασχηματισμού. (το μητρώο **Λ** είναι κι αυτό *ορθογωνικό μητρώο*<sup>7</sup> όπως ακριβώς είναι και το **T**)

---

<sup>7</sup>Ένα μητρώο **A** χαρακτηρίζεται ως **Ορθογωνικό** όταν ισχύει η σχέση:  $[A]^{-1} = [A]^T$

## 3 Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων

### 3.1 Εισαγωγή

Επόμενο βήμα για την προσομοίωση ενός στατικού προβλήματος αποτελεί ο προσδιορισμός των υλικών από τα οποία ο υπό-μελέτη φορέας αποτελείται. Τέτοια υλικά μπορεί να είναι το οπλισμένο σκυρόδεμα ή/και ο χάλυβας για το «σώμα» της κατασκευής, τα ινοπλισμένα πολυμερή για την περίπτωση των εφεδράνων, τα παραδοσιακά κεραμικά για τα μη φέροντα στοιχεία (βλ. τοιχοποιία) κ.ο.κ.. Με μία γρήγορη ματιά παρατηρούμε πως τα υλικά σε μακροσκοπικό επίπεδο χαρακτηρίζονται ως **ομοιογενή**. Όμως σε μικροσκοπικό επίπεδο<sup>8</sup> παρατηρούμε ότι χαρακτηρίζονται κυρίως από **ανομοιογένεια** ως προς την δομή τους, χαρακτηριστικό που δηλώνει τη *μη ομοιόμορφη μηχανική τους συμπεριφορά*.

Για την σωστή προσομοίωσή τους απαιτείται η θεώρηση της *περιοδικότητας της μικροδομής* τους είτε κατά μονάδες είτε κατά ομάδες (πιο ρεαλιστική παραδοχή), έως την δημιουργία του μακροσκοπικού προβλήματος. Όμως μία τέτοια προσομοίωση απαιτεί σύγχρονες μεθόδους ανάλυσης. Πριν την ανάπτυξη της *Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων*, τα χαρακτηριστικά αυτών των υλικών υπολογίζονταν σύμφωνα με στατιστικά μοντέλα, δεδομένα των οποίων αποτελούσε πληθώρα εργαστηριακών αποτελεσμάτων. Η συγκεκριμένη πρακτική όμως περιέχει πολλές ανακρίβειες όσων αφορά τις μηχανικές ιδιότητές τους με αποτέλεσμα να εισάγονται στην μελέτη διάφοροι *διορθωτικοί συντελεστές (συντελεστές ασφαλείας)* οι οποίοι υποβάθμιζαν αυτές τις ιδιότητες (για παράδειγμα, η χαρακτηριστική αντοχή του σκυροδέματος υποβαθμίζεται κατά 30% ( $\gamma_{Rd} = 1,5$ ) προκειμένου να υπολογιστεί η αντοχή σχεδιασμού σε θλίψη). Η στρατηγική αυτή υπάρχει ακόμα για τα «κλασσικά» υλικά (βλ. σκυρόδεμα) αλλά για τα *σύγχρονα σύνθετα υλικά*, η μελέτη της

---

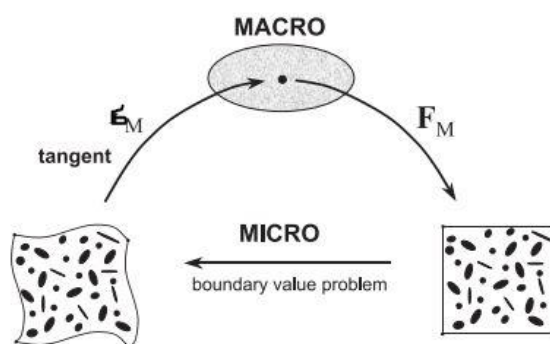
<sup>8</sup> Μικροσκοπικό επίπεδο εννοούμε το επίπεδο εκείνο όπου οι διαστάσεις των σωμάτων είναι αρκετά μεγαλύτερες από την ατομική-μοριακή κλίμακα και αρκετά μικρότερες από τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν την μακροκλίμακα, βλ. την διάσταση του  $m$ .

μακροκλίμακας των κατασκευών και της μικροκλίμακας των υλικών πραγματοποιείται στον ίδιο χρόνο, χάριν της *Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων*.

**Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων** είναι η ανάλυση κατά την οποία συνδυάζονται οι μακροσκοπικές ιδιότητες των κατασκευών με τα μικροσκοπικά χαρακτηριστικά των υλικών τους με σκοπό να υπολογιστούν οι **ομογενοποιημένες τάσεις ( $\sigma$ )** της μικροκλίμακας και το **ομογενοποιημένο μητρώο ελαστικότητας ( $C$ )** του υλικού για κάθε σημείο του φορέα. Η μικροκλίμακα προσομοιώνεται με τη βοήθεια σύνθετων πεπερασμένων στοιχείων που ονομάζονται RVEs (Representative Volume Elements) που έχουν μέγεθος ανάλογο της μικροκλίμακας.

Έτσι, η διαδικασία της ανάλυσης αυτής περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια:

- υπολογισμός της παραμόρφωσης της μακροκλίμακας για δεδομένη φόρτιση  $F_M$ , για κάθε σημείο του φορέα όπου εισάγουμε το υλικό,
- εύρεση παραμόρφωσης σε επίπεδο μικροκλίμακας,
- υπολογισμός  $\sigma$  και  $C$  για το κάθε είδος μοντέλου μικροκλίμακας λαμβάνοντας υπόψη τις παραμορφώσεις του προηγούμενου βήματος σαν *συνοριακές συνθήκες* του κάθε RVE,
- επιστροφή στη μακροκλίμακα για υπολογισμό της εντατικής κατάστασης της κατασκευής με χρήση του μέσου όρου των δύο παραπάνω μεγεθών, και
- επανάληψη των άνωθεν βημάτων με σκοπό την εύρεση του *σημείου ισορροπίας* του προβλήματος.

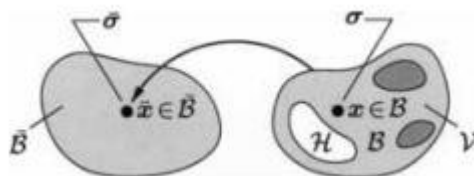


Εικόνα 12 Σχηματοποιημένη διαδικασία Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων



## 3.2 Ισορροπία στη Μικροκλίμακα

Θεωρείται **μικροδομή**  $B \subset \mathbb{R}^3$  τέτοια ώστε να είναι συμβατή με τη **μακροσκοπικά ομοιογενή δομή** του υλικού  $\bar{B} \subset \mathbb{R}^3$ .



Εικόνα 13 Μοντέλο μικροδομής και μακροδομής

Η μικροδομή αυτή αντιστοιχεί σε ένα RVE του υλικού, το οποίο χαρακτηρίζεται από *μη γραμμικότητα* και *ανομοιογένεια*. Η ανομοιογένεια μπορεί να οφείλεται σε μη γραμμικό πρόσθετο υλικό (στην περίπτωση που επιθυμούμε ενίσχυση), σε συσσωμάτωμα των κρυστάλλων τους οποίους η μήτρα του υλικού έχει ως δομικό στοιχείο, σε ανομοιόμορφα κατανομημένο πορώδες, κ.ο.κ..

Αρχικό βήμα για τον προσδιορισμό της εξίσωσης ισορροπίας της μικροκλίμακας αποτελεί ο ορισμός των ακόλουθων μεταβλητών που χαρακτηρίζουν την **μικροδομή B**:

- $x \in B$ , ένα σημείο  $x$
- $t \in \mathbb{R}$ , ο χρόνος στον οποίο γίνεται κάθε φορά ο υπολογισμός των εξισώσεων
- $\varepsilon := \text{sym}[\nabla \mathbf{u}]$ , οι ανηγμένες παραμορφώσεις

Τότε, προκύπτουν οι ακόλουθες μεταβλητές:

- $\{\mathbf{u} : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ , το πεδίο των μετατοπίσεων στο σημείο  $x$
- $\dot{\mathbf{u}} = \partial_t \mathbf{u}(x, t)$ , το πεδίο ταχυτήτων στο σημείο  $x$
- $\ddot{\mathbf{u}} = \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(x, t)$ , το πεδίο επιταχύνσεων στο σημείο  $x$

Η γενική εξίσωση ισορροπίας λοιπόν έχει μορφή:

$$\operatorname{div}(\sigma) - \rho_0 \ddot{u} = 0 \quad (3.1)$$

με  $\sigma$  η τάση της μικροκλίμακας που σχετίζεται με τις ανηγμένες παραμορφώσεις  $\varepsilon$  μέσω κάποιου μοντέλου ελαστικού στερεού υλικού:

$$\sigma = \partial_\varepsilon \hat{\Psi}(\varepsilon, x) \quad (3.2)$$

όπου  $\Psi$  μία μία συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης.

Από τις δύο εξισώσεις αυτές και με χρήση του θεωρήματος του *Gauss*, προκύπτει η τελική εξίσωση ισορροπίας της μικροδομής:

$$\int_{\partial B} t dA - \int_B \rho_0 \ddot{u} dV = 0 \text{ και } \int_{\partial B} x \times t dA - \int_B x \times \rho_0 \ddot{u} dV = 0 \quad (3.3)$$

με  $t = \sigma n$ , το πεδίο έλξης στην επιφάνεια  $x \in \partial B$  και  $n$  το κάθετο ως προς αυτήν χαρακτηριστικό διάνυσμα.

Η κατάσταση ισορροπίας της μικροδομής  $B$  θεωρείται ότι υπακούει τις **συνοριακές συνθήκες μετακίνησής** της ( $u$ ), οι οποίες συνδέουν την παραμόρφωση της μικροδομής με τις προκαθορισμένες μακροσκοπικές ανηγμένες παραμορφώσεις  $\varepsilon(t)$  στα σημεία του υλικού.

(οι συνθήκες αυτές διαμορφώνονται σύμφωνα με το κάτωθι θεώρημα)

### 3.3 Βασικές Μεταβλητές Μακροκλίμακας και «Θεώρημα Μέσου Όρου»

Θεωρείται  $V \subset \mathbb{R}^3$ , ο όγκος της μικροδομής  $B$ , συμπεριλαμβανομένων και των τυχόντων κενών  $H$  που αυτή μπορεί να περιέχει.

#### 3.3.1 Παραμόρφωση

Η παραμόρφωση  $\bar{\varepsilon}$  της **μακροκλίμακας** πρέπει να ισούται με την παραμόρφωση του μέσου όγκου της μικροσκοπικής κλίμακας  $\varepsilon$ , σύμφωνα με την πρώτη σχέση του θεωρήματος:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{|V|} \int_V \varepsilon dV \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \text{sym}[u \otimes n] dA \quad (3.4)$$

#### 3.3.2 Τάση

Η τάση  $\bar{\sigma}$  της **μακροκλίμακας** συνθέτοντας όλες τις εξισώσεις μεταξύ τους και εφαρμόζοντας το *θεώρημα της απόκλισης (divergence)*, είναι:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|V|} \text{sym} \left( \int_V \sigma dV \right) \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \text{sym}[t \otimes x] dA \quad (3.5)$$

#### 3.3.3 Ομογενοποιημένο Μητρώο Ελαστικότητας $C$

Από τη συνθήκη *Hill-Mandel* (ή συνθήκη «μακροσκοπικής ομογενοποίησης»), ισχύει ότι:

$$\bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma : \dot{\epsilon} dV \quad (3.6)$$

Δηλαδή, το εξωτερικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο RVE ισούται με το έργο των δυνάμεων στα σημεία που αυτό ανάγεται στην μακροκλίμακα.

Αναπτύσσοντας τη σχέση αυτή σύμφωνα με το *θεώρημα της απόκλισης* είναι:

$$\bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} t \dot{u} dA \quad (3.7)$$

Από την εξίσωση λοιπόν συμπεραίνεται πως μακροσκοπικά, η τάση  $\bar{\sigma}$  είναι συνάρτηση της παραμόρφωσης  $\bar{\epsilon}$  και ορίζεται από το **ομογενοποιημένο μητρώο ελαστικότητας C** του RVE της κάθε διαφορετικής μικροκλίμακας.

Για συνθήκες ελαστικότητας, η σχέση μεταξύ της τάσεως και της παραμορφώσεως είναι:  $\dot{\bar{\sigma}} = \bar{C} \dot{\bar{\epsilon}}$  με  $\bar{C} := \partial_{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma}$

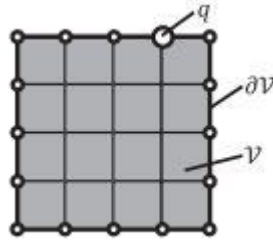
### 3.4 Ορισμός Συνοριακών Συνθηκών Μικροκλίμακας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι συνοριακές συνθήκες επιλέγονται με τρόπο τέτοιο ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες όλων των άνωθι σχέσεων. Με άλλα λόγια, αυτές θα πρέπει να σχετίζονται με τις δεδομένες συνολικές μακροσκοπικές μεταβλητές. Μία κατηγορία τέτοιων μεταβλητών αποτελούν οι **γραμμικές μετατοπίσεις**.

Τότε, ο ορισμός των *συνοριακών δεσμεύσεων* των παραμορφώσεων σε όρους μακροσκοπικών ανηγμένων παραμορφώσεων  $\bar{\epsilon}$ , έχει ως εξής:

$$u(x, t) = \bar{\varepsilon}(t)x \text{ για } x \in \partial V \quad (3.8)$$

όπου  $\partial V$  η επιφάνεια του RVE.



Εικόνα 14 Απεικόνιση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών ενός μοντέλου RVE

Η σχέση αυτή **επιβεβαιώνει** το «Θεώρημα Μέσου Όρου» αν η τελευταία σχέση αντικατασταθεί στη σχέση του θεωρήματος.

### 3.5 Εφαρμογή της Ανάλυσης σε Δύο Διαστάσεις με Θεώρηση Γραμμικών Μετατοπίσεων

Με τη θεώρηση των προκαθορισμένων γραμμικών μετατοπίσεων στο όριο  $\partial V$  του RVE, η προηγούμενη σχέση για κάθε κόμβο  $q$  του ορίου αυτού γίνεται:

$$u_q = \bar{\varepsilon}(t)x_q, \text{ με } q = 1 \dots M \quad (3.9)$$

Αν ο τανυστής των ανηγμένων παραμορφώσεων της μακροκλίμακας  $\bar{\varepsilon}$  μετατραπεί σε διάνυσμα κι αν ληφθεί υπόψη η διακριτοποίηση, εκφράζονται οι ποσότητες  $u_q, \bar{\varepsilon}$  σε:

$$\bar{\varepsilon} := [\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad 2\bar{\varepsilon}_{12}]^T \text{ και } u_q := [u_1 \quad u_2]_q^T \quad (3.10)$$

Επίσης, για διδιάστατο πρόβλημα ( $n_{dim} = 2$ ) η σχέση (3.7) μορφώνεται στη σχέση:

$$u_q = D_q^T \bar{\varepsilon}, \text{ με } q = 1 \dots M \quad (3.11)$$

όπου ο πίνακας  $D_q \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2$ , είναι ένας πίνακας που εξαρτάται από τις συντεταγμένες του κόμβου  $q$  σε επίπεδο τοπικό (element):

$$D_q := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x1 & 0 \\ 0 & 2x2 \\ x2 & x1 \end{bmatrix}_q \quad (3.12)$$

Για καθολικό επίπεδο μορφώνεται ο πίνακας  $D \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{2M}$  που συμπεριλαμβάνει όλους τους κόμβους  $q$  του ορίου του RVE:

$$D := [D_1 \quad D_2 \quad \dots \quad D_M] \quad (3.13)$$

Στο σημείο αυτό γίνεται ο διαχωρισμός των επικόμβιων μετατοπίσεων του RVE στις κατηγορίες:

- μετακινήσεις εξωτερικών κόμβων (b),  $u_b$
- μετακινήσεις εσωτερικών κόμβων (a),  $u_a$

Ο διαχωρισμός αυτός είναι ανάλογος του διαχωρισμού που γίνεται μεταξύ δεσμευμένων και μη βαθμών ελευθερίας κατά τη Μητρική Στατική.

Με την κατηγοριοποίηση αυτή, γίνεται δυνατή η κατηγοριοποίηση και των Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας και Καθολικού Διανύσματος Επικόμβιων Δράσεων, τα οποία έχουν διαστάσεις  $n \times n$  και  $n \times 1$  αντίστοιχα και συντίθενται με την επαλληλία των κατάλληλων βαθμών ελευθερίας. Δηλαδή δημιουργούνται τα μητρώα:

$$f = \begin{bmatrix} fa \\ fb \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} Kaa & Kab \\ Kba & Kbb \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Άρα, η σχέση (3.6) για καθολικό επίπεδο είναι:

$$d(u_b, \bar{\varepsilon}) = u_b - D^T \bar{\varepsilon} = 0 \quad (3.15)$$

Εφαρμόζοντας τη **Μέθοδο των Πολλαπλασιαστών Lagrange** για την ενσωμάτωση αυτού του περιορισμού στην ανάλυση, δημιουργείται το ακόλουθο σύνολο **μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων**:

$$f_a(x) = 0$$

$$f_b(x) - \delta = 0$$

$$u_b - D^T \bar{\varepsilon} = 0 \quad (3.16)$$

με τον πολλαπλασιαστή Lagrange  $\delta \in \mathbf{R}^{M-ndim}$  να αναπαριστά τις **εξωτερικές δυνάμεις** στους κόμβους  $q$  οι οποίο επιβάλλουν τον περιορισμό (3.12)

Το σύστημα αυτό καθορίζει τις μετατοπίσεις στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα που εξετάζεται το πρόβλημα.

Το μη γραμμικό αυτό σύστημα εξισώσεων με **αγνώστους  $\{u_b, \delta\}$** , επιλύεται με τη βοήθεια της **Μεθόδου Newton-Raphson**, η οποία σκοπό έχει τη μετατροπή του σε γραμμικό (η μέθοδος αυτή θα αναλυθεί στο **Κεφάλαιο 4**):

$$f_a(x) + K_{aa}\Delta u_a + K_{ab}\Delta u_b = 0$$

$$f_b(x) - \delta + K_{ba}\Delta u_a + K_{bb}\Delta u_b - \Delta\delta = 0$$

$$u_b - D^T \bar{\varepsilon} + \Delta u_b - D^T \Delta \bar{\varepsilon} = 0 \quad (3.17)$$

Μία τυπική επανάληψη της μεθόδου στηρίζεται στο γεγονός πως:  $\Delta u_b = \mathbf{0}$  μιας και οι μετατοπίσεις στο όριο του RVE είναι άμεσα εξαρτώμενες από τη μακροσκοπική ανηγμένη παραμόρφωση  $\bar{\varepsilon}$ , για την οποία ισχύει ότι:  $\Delta \bar{\varepsilon} = \mathbf{0}$ . Οπότε με αντικατάσταση της σχέσης αυτής στη σχέση (3.13) προκύπτει:

$$u_a \Leftarrow u_a + \Delta u_a$$

$$\text{με:} \quad \Delta u_a = K_{aa}^{-1} f_a \quad (3.18)$$

Με γνωστές τις μετατοπίσεις της μικροδομής, ο πολλαπλασιαστής Lagrange ισούται με:

$$\delta = f_b(u) \quad (3.19)$$

Οι δυνάμεις αυτές  $\delta_q$  στα σημεία  $x_q$  είναι πεπερασμένες σε αριθμό, πράγμα που οδηγεί στη διακριτοποίηση της σχέσης (3.5) ως εξής:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|V|} \sum_{q=1}^M \text{sym}[\delta_q \times x_q] \quad (3.20)$$

η οποία για  $\mathbf{ndim}=2$  μεταφράζεται στους πίνακες:

$$\bar{\sigma} := [\bar{\sigma}_{11} \quad \bar{\sigma}_{22} \quad \bar{\sigma}_{12}]^T \quad \text{και} \quad (3.21)$$



$$\delta_q := [\delta_1 \quad \delta_2]_q^T$$

Διαφορετικά, η σχέση (3.20) μετατρέπεται σε:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|v|} \sum_{q=1}^M D_q \delta_q \quad (3.22)$$

που αφορά τον κάθε κόμβο στο όριο του RVE, και σε:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|v|} D \delta \quad (3.23)$$

που αφορά το καθολικό επίπεδο του RVE.

Συνδυάζοντας λοιπόν **όλες** τις παραπάνω σχέσεις, μορφώνεται σταδιακά το **ομογενοποιημένο μητρώο ελαστικότητας C**:

$$\Delta \bar{\sigma} = \frac{1}{|v|} D \Delta \delta \quad (3.24)$$

$$\Delta u_a = -K_{aa}^{-1} K_{ab} \Delta u_b, \quad \Delta u_b = D^T \Delta \bar{\varepsilon} \quad (3.25)$$

$$\Delta \delta = \tilde{K}_{bb} D^T \Delta \bar{\varepsilon} \quad \text{όπου } \tilde{K}_{bb} := K_{ba} - K_{ba} K_{aa}^{-1} K_{ab} \quad (3.26)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{|v|} D \tilde{K}_{bb} D^T \quad (3.27)$$

Εν τέλει, η **μακροσκοπική τάση** και η **μακροσκοπική ελαστικότητα του υλικού** σε **μητρική μορφή** είναι:

$$[C]_{3 \times 3} = \frac{1}{|V|} [D]_{3 \times (2xm)} [\hat{K}bb]_{(2xm) \times (2xm)} [D]^T_{(2xm) \times 3} \quad (3.28)$$

και:

$$[\sigma]_{3 \times 1} = \frac{1}{|V|} [D]_{3 \times (2xm)} [fb]_{(2xm) \times 1} \quad (3.29)$$

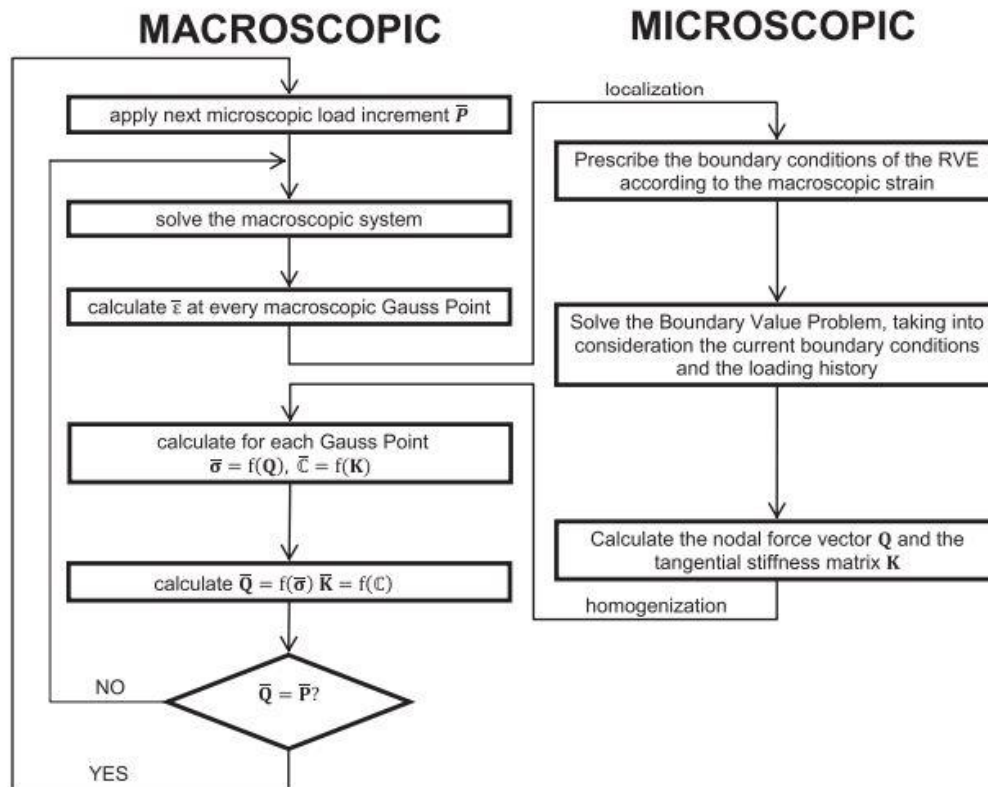
Τα μητρώα αυτά έχουν τις συγκεκριμένες διαστάσεις λόγω των συνθηκών που επικρατούν στην επίπεδη ένταση-παραμόρφωση: ορθές τάσεις κατά x, ορθές τάσεις κατά y και διατμητικές τάσεις στο επίπεδο xy

### 3.6 Σύνδεση των Δύο Κλιμάκων

Μετά τον ορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των διαφορετικών κλιμάκων, τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας 3 «συστατικά» όπως έχουν ήδη αναφερθεί:

- τη **μοντελοποίηση της μικροκλίμακας**
- τον **κανόνα παρεμβολής** που ορίζει τις λύσεις εσωτερικά των μελών του μοντέλου της μικροκλίμακας για οποιαδήποτε δοσμένη ανηγμένη παραμόρφωση της μακροκλίμακας
- τον **κανόνα ομογενοποίησης** που δίνει τα ομογενοποιημένα μητρώα τάσεων και ελαστικότητας, προσφέροντας έτσι τη σύνδεση μεταξύ μακροσκοπικών και μικροσκοπικών τάσεων. (ο κανόνας αυτός ονομάζεται «**deformation driven**» και επιτυγχάνεται με χρήση της αριθμητικής μεθόδου Ολοκλήρωση κατά Gauss)

Με χρήση λοιπόν της αριθμητικής μεθόδου Newton-Raphson για μη γραμμικά συστήματα, τα βήματα ανάλυσης, δηλαδή η **σύνδεση των δύο κλιμάκων**, φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:



Εικόνα 15 Απεικόνιση φιλοσοφίας Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων



## 4 Επίλυση Αριθμητικών Προβλημάτων Μηχανικού

### 4.1 Εισαγωγή

Πληθώρα φυσικών φαινομένων, αν όχι όλα, εξελίσσονται στον χρόνο με μη γραμμικό τρόπο. Για παράδειγμα, ένα κομμάτι πάγου λιώνει με την πάροδο του χρόνου όλο και πιο γρήγορα μιας και το μέγεθός του μικραίνει. Οι τάσεις που αναπτύσσονται σε ένα χαλύβδινο δοκίμιο κατά το πείραμα του εφελκυσμού είναι δυσανάλογες των επιβαλλόμενων παραμορφώσεων (από ένα σημείο κι έπειτα). Η τέμνουσα βάσης ενός κτιρίου κατά τη διάρκεια κάποιου σεισμού δεν συνάδει με την μετατόπιση στην κορυφή του λόγω της δημιουργίας πλαστικών αρθρώσεων. Τέτοιας φύσεως προβλήματα καλείται να μελετήσει ένας μηχανικός. Και για να τα μελετήσει με επιτυχία, χρειάζεται να τα μεταφράσει σε μαθηματικές σχέσεις και στη συνέχεια να τις λύσει. Το πιο σημαντικό εργαλείο για αυτόν τον σκοπό αποτελεί η *Αριθμητική Ανάλυση*, μιας και η εφαρμογή της στον ηλεκτρονικό υπολογιστή είναι άμεση.

Ο κλάδος των Μαθηματικών αυτός, είναι ικανός να επιλύσει αυτά τα μη γραμμικά προβλήματα μιας και περιγράφονται από **μη γραμμικές εξισώσεις** στις οποίες τουλάχιστον μία από τις σχέσεις μεταξύ δύο (ή και περισσότερων) μεταβλητών δεν είναι αναλογική (γραμμική). Η λύση τέτοιου είδους εξισώσεων επιτυγχάνεται με τη **Μέθοδο Newton-Raphson**, φιλοσοφία της οποίας αποτελούν οι διαδοχικές προσεγγίσεις για την προσεγγιστική εύρεση των ριζών τέτοιων προβλημάτων.

Ένα ακόμη εμπόδιο για τη χρήση αναλυτικών επιλύσεων που συναντάται στις περιπτώσεις αυτές, αποτελεί η ανάγκη ολοκλήρωσης μεγεθών που χαρακτηρίζονται από ανομοιόμορφες κατανομές. Αυτές οι κατανομές μπορεί να είναι ένα πεδίο τάσεων, που αλλάζει από σημείο σε σημείο, ή ακόμα και οι συνθήκες ελαστικότητας κάποιου σύνθετου υλικού. Εκεί, τη λύση δίνει η **Μέθοδος Ολοκλήρωσης κατά Gauss**, φιλοσοφία της οποίας αποτελεί ο διαχωρισμός του άλυτου ανομοιογενούς προβλήματος σε επιμέρους επιλύσιμα ομογενή με σκοπό την άθροιση των αποτελεσμάτων τους.

## 4.2 Η Μέθοδος Newton – Raphson (N-R)

Έστω  $n$  μη γραμμικές εξισώσεις με  $n$  αγνώστους της μορφής:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

⋮

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (4.1)$$

Θεωρώντας τα διανύσματα:  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  και  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν τη μορφή (μορφή πινάκων):

$$f(x) = 0 \quad (4.2)$$

Προκειμένου να ξεκινήσει η επαναληπτική διαδικασία που ορίζει η αριθμητική μέθοδος αυτή, θεωρείται μία λύση του άνωθι συστήματος εξισώσεων:  $x = x_0$ .

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου N-R αποτελεί το γεγονός πως για να έχουμε γρήγορη σύγκλιση, η **αρχική θεώρηση της λύσης του προβλήματος** πρέπει να βρίσκεται κοντά στην πραγματικότητα (να έχει δηλαδή φυσική σημασία). Διαφορετικά η σύγκλιση της λύσης μπορεί να καθυστερήσει ή ακόμα και να μην επέλθει ποτέ.

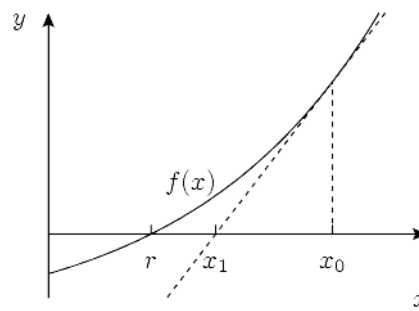
Τότε, υπολογίζεται η παράγωγος της ποσότητας  $f$  με τη βοήθεια του **ιακωβιανού Πίνακα J** και τίθεται όπου  $x = x_0$ :

$$J = Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Η ίδια ποσότητα τίθεται και στον πίνακα  $f$ , οπότε έχουμε (με γνωστά στοιχεία):  $f(x_0)$ .

Πλέον, γίνεται δυνατή η διεξαγωγή της πρώτης επανάληψης:

- Ορίζεται:  $\Delta x = x_1 - x_0$
- Επειδή αναζητάται το  $x$  που θα μηδενίσει την εξίσωση  $f(x)$ , το  $x_1$  πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:  $f(x_0) + Df(x_0)\Delta x = 0 \Rightarrow Df(x_0)\Delta x = -f(x_0)$



Εικόνα 16 Οπτικοποίηση Μεθόδου N-R

- Μιας και οι ποσότητες  $f(x_0)$  και  $Df(x_0)$  είναι γνωστές, προκύπτει το  $\Delta x$  (αφού η σχέση του προηγούμενου βήματος αποτελεί σύστημα γραμμικών εξισώσεων)
- Τελικώς υπολογίζεται:  $x_1 = x_0 + \Delta x$

Η συγκεκριμένη διαδικασία επαναλαμβάνεται έως να πραγματοποιηθεί *σύγκλιση*.

**Σύγκλιση** επέρχεται όταν τη  $n$ -οστή φορά, ο πίνακας  $f(x_n)$  φτάσει αρκούντως κοντά στον αντίστοιχο μηδενικό πίνακα, δηλαδή όταν:  $f(x_n) < a$ , με  $a$  πίνακας που εξαρτάται από το είδος του προβλήματος που βρίσκεται προς μελέτη.

#### 4.2.1 Χρήση της Μεθόδου N-R στο Πρόβλημα Επίλυσης Στατικών Φορέων

Η μέθοδος *Newton-Raphson* έχει άμεση εφαρμογή στον υπολογισμό των *Επικόμβιων Μετακινήσεων* ενός φορέα, μιας και το **σημείο ισορροπίας**<sup>9</sup> του δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί με άμεσο τρόπο. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία δηλαδή λύνει τις εξισώσεις που συμπυκνώνονται στην κάτωθι έκφραση καθώς αυτές ισοδυναμούν με τις απαιτήσεις ισορροπίας των πεπερασμένων στοιχείων:

$$f(U^*) = 0$$

όπου: 
$$f(U^*) = R(U^*) - F(U^*) \quad (4.4)$$

με **R** οι **εξωτερικές δυνάμεις** που ασκούνται στον φορέα και **F** οι **επικόμβιες δράσεις** που προκύπτουν από τις τάσεις που αναπτύσσει η κατασκευή.

Θωρείται  $U = U^{(i+1)}$  η μετατόπιση που υπολογίστηκε στην προηγούμενη επανάληψη. Τότε, κατά *Taylor*, η τελευταία σχέση αναπτύσσεται ως εξής:

$$f(U^*) = f(U^{(i-1)}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial U} \right] \Big|_{U^{(i-1)}} (U^* - U^{(i-1)}) + \text{όροι ανωτέρας τάξεως} \quad (4.5)$$

με την επιπλέον θεώρηση ότι τα **εξωτερικώς επιβαλλόμενα φορτία είναι ανεξάρτητα της παραμόρφωσης**.

Αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης, υπολογίζεται η **αύξηση των μετατοπίσεων**:

---

<sup>9</sup> Σημείο Ισορροπίας ενός φορέα είναι η κατάσταση του φορέα αυτού κατά την οποία οι επικόμβιες μετακινήσεις του αντιστοιχούν σε επικόμβιες δράσεις που ταυτίζονται με την εξωτερική φόρτιση (3<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα).



$$K^{(i-1)}\Delta U^{(i)} = R - F^{(i-1)} \quad (4.6)$$

με  $K^{(i-1)}$  το **μητρώο στιβαρότητας** που είναι γνωστό από την προηγούμενη επανάληψη.

Επομένως, οι νέες μετατοπίσεις είναι:

$$U^{(i)} = U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (4.7)$$

Οι δύο σχέσεις (8.88) και (8.90) αποτελούν τις **λύσεις της διαδικασίας Newton-Raphson**.

Εφόσον η επαναληπτική αυτή μεθοδολογία πραγματοποιείται για τα διάφορα βήματα φόρτισης, οι αρχικές της συνθήκες είναι τα αρχικά μεγέθη **u, K, F** πριν από κάποια επανάληψη. Δηλαδή, ορίζεται αρχικά ένα μηδενικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων ( $u_0$ ) με διαστάσεις που ταυτίζονται σε αριθμό με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής. Έπειτα, με δεδομένες τις μετακινήσεις αυτές, υπολογίζονται τα *Μητρώο Στιβαρότητας* και *Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων* όπως αναγράφονταν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τότε, με τη λογική της παραπάνω διαδικασίας, υπολογίζεται το *νέο διάνυσμα των επικόμβιων μετακινήσεων* και η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως να επέλθει η επιθυμητή σύγκλιση. Η σύγκλιση αυτή θα να επιτευχθεί για:  $a = \frac{\text{norm}(Fn)}{\text{norm}(Kn*un)}$ , με την έκφραση **norm** να ορίζει την έννοια του μεγέθους των διανυσμάτων που περιέχει.

Συνοπτικά, η μέθοδος Newton-Raphson «μεταφράζεται» σε όρους μηχανικού όταν η εξίσωση (4.2) αναπαριστά τις υπολειπόμενες δράσεις: **Fext-Fint**. Τότε, το ιακωβιανό μητρώο **J** του προβλήματος είναι το μητρώο στιβαρότητας **K** και **x** το διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων **u**.

(Μην ξεχνάμε ότι η *στιβαρότητα* μιας κατασκευής αποτελεί τον πίνακα όλων των παραγώγων 1<sup>ης</sup> τάξης του διανύσματος των *επικόμβιων δράσεων* σε σχέση με το διάνυσμα των *επικόμβιων μετακινήσεων*)

Χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής είναι ότι σε κάθε επανάληψη, υπολογίζεται ένα νέο μητρώο *στιβαρότητας*. Αν αυτό το μητρώο δεν αλλάζει σημαντικά ανά επανάληψη, επιτυγχάνεται γρήγορη σύγκλιση (βλ. συνθήκη *Lipschitz*). Σε αντίθετη περίπτωση, η επανάληψη μπορεί να αποκλίνει.

### 4.3 Η μέθοδος Ολοκλήρωσης κατά Gauss

Η μέθοδος *Ολοκλήρωσης κατά Gauss* στηρίζεται στην φιλοσοφία της αναζήτησης μίας *προνομιούχου κατανομής των κόμβων*  $x_i$  με  $i = 0, 1, \dots, n$  του διαστήματος  $[a, b]$  τέτοια ώστε ο αντίστοιχος τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) + E_n(f) \quad (4.8)$$

όπου:

$$c_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad (4.9)$$

και  $E_n(f)$  είναι το *σφάλμα ολοκλήρωσης*, να είναι κατά το δυνατόν βέλτιστος (το σφάλμα να είναι κατά το δυνατόν μικρότερο).

Μία κατανομή των κόμβων αυτού του διαστήματος,  $[a, b]$ , η οποία έχει προνομιακές ιδιότητες είναι οι  $n+1$  ρίζες του *ορθογωνίου πολυωνύμου*  $P_{n+1}$ , βαθμού  $n+1$  στο συγκεκριμένο διάστημα.

Στο σημείο αυτό, θεωρείται ο γενικός τύπος ολοκλήρωσης:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^n w_i(x)f(x_i) \quad (4.10)$$

με:  $w_i(x)$  οι συναρτήσεις βάρους.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος ολοκλήρωσης κατά Gauss αποτελεί η **Μέθοδος Gauss-Legendre**, κατά την οποία γίνεται μετατροπή ενός ορισμένου ολοκληρώματος στο διάστημα  $[a,b]$  σε ένα ισοδύναμό του στο διάστημα  $[-1,1]$ . Τότε, υπολογίζεται με τις κατάλληλες μετατροπές ο γενικός τύπος:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong \sum_{i=0}^n w_i(x)f(x_i) \quad (4.11)$$

Με αντικατάσταση της  $f(x)$  με τα  $2n+2$  βασικά πολυώνυμα στον άνωθι τύπο:

$$1, x, x^2, \dots, x^{2n}, x^{2n+1} \quad (4.12)$$

προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{i=0}^n w_i x_i^k, \quad \mu\epsilon k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Οι σχέσεις (4.13) συνεπάγονται ένα σύστημα  $2n+2$  εξισώσεων με  $2n+1$  αγνώστους. Αν οι εξισώσεις του συστήματος θεωρηθούν ανεξάρτητες, η λύση του συστήματος θα προσδιορίσει τις τιμές των  $2n+2$  αγνώστων, που θα είναι δεκτές, αν οι τιμές των  $x_i$  πληρούν τον περιορισμό:

$$-1 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \quad (4.14)$$

Η επίλυση των (4.13) επιτυγχάνεται εύκολα με τη βοήθεια των **πολυωνύμων Legendre**, που είναι της μορφής:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad (4.15)$$

με  $P_0(x)=1$  και τα οποία είναι ορθογώνια στο διάστημα  $[-1,1]$ .

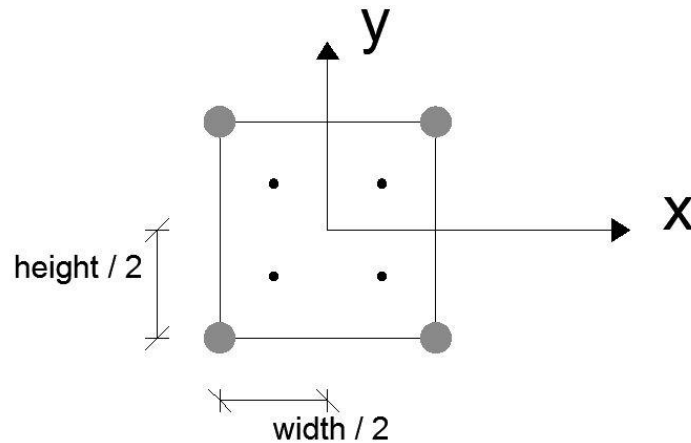
Τότε, γίνεται αντιστοίχιση των ριζών των πολυωνύμων αυτών (για τα διάφορα  $k$ ) με τις τιμές των αντίστοιχων συντελεστών  $w_i$  από τη σχέση (4.11). Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας στον οποίο φαίνεται η αντιστοιχία μεταξύ των  $x_i$  και  $w_i$  για  $i=0, 1, 2, 3$ :

<b>i</b>	<b><math>x_i</math></b>	<b><math>w_i</math></b>
<b>0</b>	0	2
<b>1</b>	$-1/\sqrt{3}$	1
	$-1/\sqrt{3}$	1
<b>2</b>	$-\sqrt{3/5}$	5/9
	0	8/9
	$\sqrt{3/5}$	5/9
<b>3</b>	-0.8611	0.3479
	-0.3400	0.6521
	0.3400	0.6521
	0.8611	0.3479

### 4.3.1 Χρήση της Μεθόδου Ολοκλήρωσης Gauss στο Πρόβλημα Επίλυσης Στατικών Φορέων

Στην ολοκλήρωση των πεπερασμένων στοιχείων, χρησιμοποιείται μία διαδικασία με σκοπό αυτή να υπολογίσει την άγνωστη συνάρτηση  $f$  σε δοσμένα σημεία δειγματοληψίας, τα οποία μπορεί να είναι οπουδήποτε στο κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Αυτή, λαμβάνει χώρα και στην περίπτωση που τα δοσμένα σημεία δεν είναι σε ίσες αποστάσεις. Τότε, κρίνεται αναγκαία η προσπάθεια βελτίωσης της ακρίβειας που μπορεί να προκύψει για μία μεταβλητή της συνάρτησης. Η προσπάθεια αυτή γίνεται με την βελτιστοποίηση της θέσης των σημείων δειγματοληψίας, σύμφωνα με τη μέθοδο Ολοκλήρωσης κατά Gauss.

Για τον σκοπό αυτόν, σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο επίπεδης εντάσεως-παραμόρφωσης, εισάγονται **τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης** τοποθετημένα σε θέσεις που ορίζονται ανάγοντας τα στοιχεία του άνωθι πίνακα στις πραγματικές διαστάσεις σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



Εικόνα 17 Πεπερασμένο Στοιχείο Εφεδράνου με τέσσερα Gauss Points



**ΜΕΡΟΣ Β΄:**  
**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**





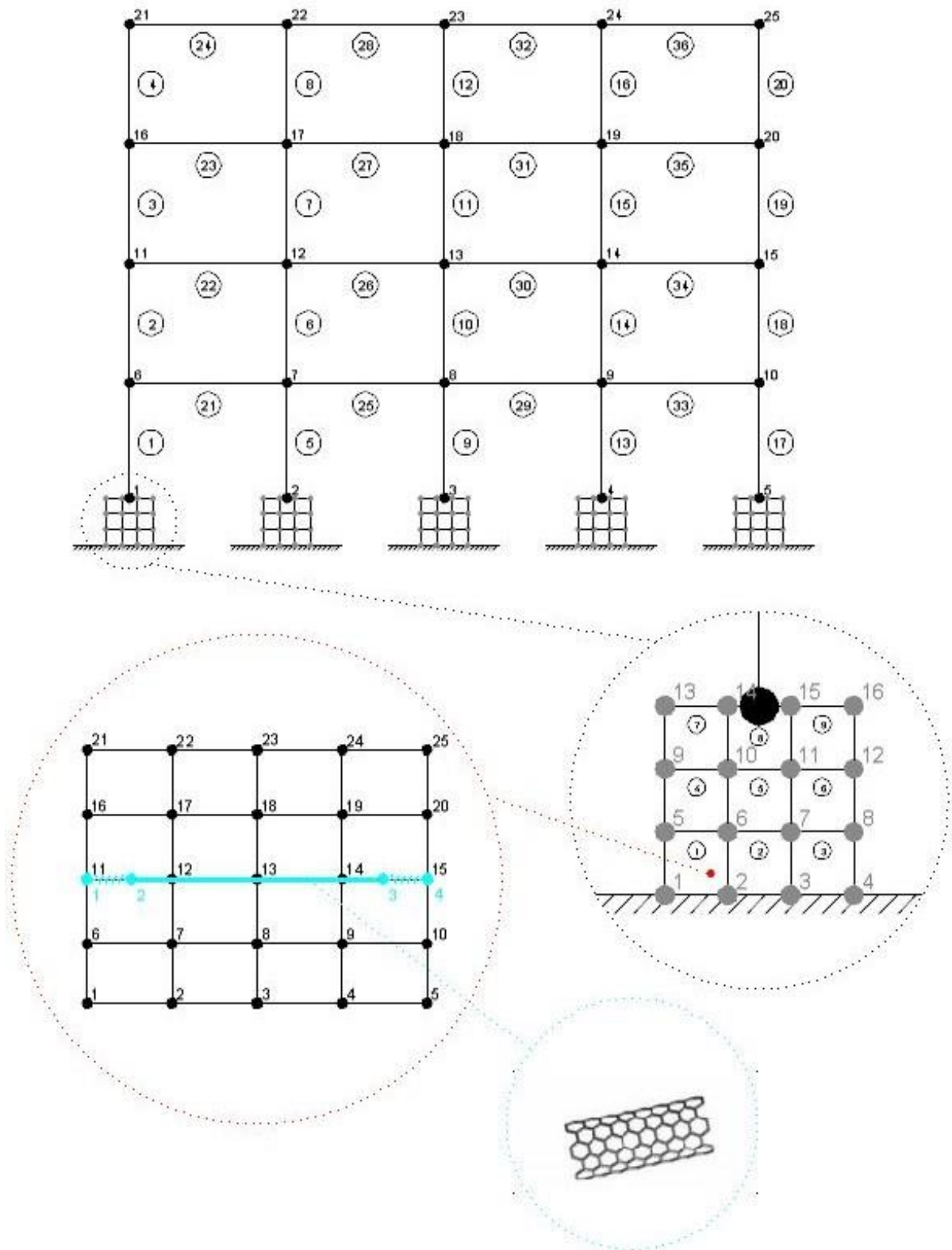
## 5 Γεωμετρία Προβλήματος

Η θεωρία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο μέρος (Μέρος Α') της παρούσας διπλωματικής εργασίας, επιλέχθηκε να εφαρμοστεί σε **διδιάστατο πλαίσιο με εφέδρανα σύνθετου υλικού στη βάση κάθε υποστυλώματός του**. Συγκεκριμένα, το πλαίσιο αποτελείται από *γραμμικά στοιχεία*, δοκούς και υποστυλώματα, τα οποία είναι κατασκευασμένα από *ισότροπο ομογενές υλικό*. Τα εφέδρανα θεωρούνται ως *επιφανειακά στοιχεία* επίπεδης εντάσεως και αποτελούνται από *ισότροπο μη ομοιογενές (σύνθετο) υλικό*. Το υλικό αυτό περιέχει ως ίνες ενίσχυσης *νανοσωλήνες άνθρακα* (carbon nanotubes, CNTs) ενώ η μήτρα του αποτελείται από *ομογενές ισότροπο υλικό*.

Στο σχήμα που φαίνεται στην επόμενη σελίδα, παρουσιάζεται η εικόνα του *συνολικού φορέα* της συγκεκριμένης εφαρμογής. Εκεί, είναι εμφανής η **διακριτοποίηση** όλων των μελών του σε μακροσκοπικό επίπεδο, η διακριτοποίηση του μοντέλου της μικροδομής του υλικού (RVE) καθώς και η **αρίθμηση των κόμβων και των στοιχείων** από τα οποία αποτελούνται οι δύο κλίμακες:

- **Πλαίσιο:** σε καθολικό επίπεδο ξεκινάμε για κάθε «γραμμή» κόμβων από τον αριστερά και συνεχίζουμε στον δεξιά, ενώ από «γραμμή» σε «γραμμή» μεταβαίνουμε από κάτω προς τα πάνω.
- **Εφέδρανα:** σε τοπικό επίπεδο ξεκινάμε για κάθε «γραμμή» κόμβων από τον αριστερά και συνεχίζουμε στον δεξιά, ενώ από «γραμμή» σε «γραμμή» μεταβαίνουμε από κάτω προς τα πάνω. Σε καθολικό επίπεδο η αρίθμηση των κόμβων του 1<sup>ου</sup> εφεδράνου (κάτω αριστερά) ακολουθεί την αρίθμηση των κόμβων του πλαισίου και τα υπόλοιπα εφέδρανα ακολουθούν την αρίθμηση του τελευταίου κόμβου του εφεδράνου αυτού με φορά από αριστερά προς δεξιά.
- **RVE:** όσον αφορά τη μήτρα, σε καθολικό επίπεδο ξεκινάμε για κάθε «γραμμή» κόμβων από τον αριστερά και συνεχίζουμε στον δεξιά, ενώ από «γραμμή» σε «γραμμή» μεταβαίνουμε από κάτω προς τα πάνω. Όσον αφορά την ίνα-στοιχείο δικτυώματος (truss), ξεκινάμε από αριστερά προς τα δεξιά. Προσοχή

πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι η αρίθμηση των κόμβων του truss έπεται των κόμβων της μήτρας.



Εικόνα 18 Απεικόνιση συνολικού φορέα εφαρμογής

Τα μέλη αυτά, αν και ανόμοια, συνδέονται μεταξύ τους σε διάφορους κόμβους ώστε να εξασφαλίσουν τη συνέχεια του φορέα, όπως θα αναλυθεί στον επόμενο κεφάλαιο.

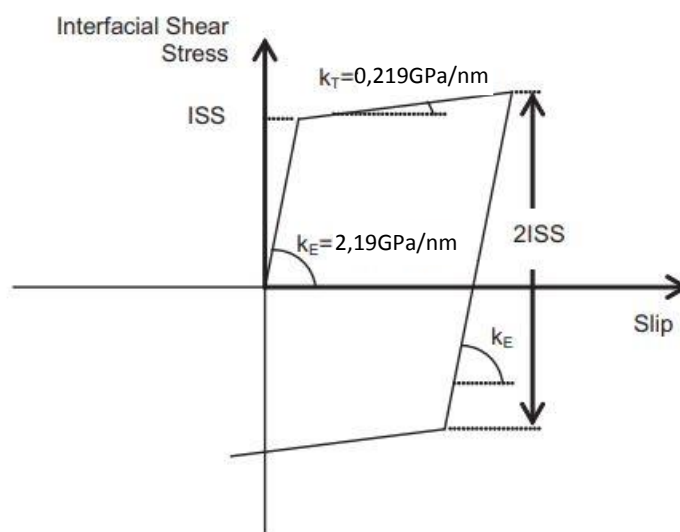
Τα **αριθμητικά χαρακτηριστικά** που συνθέτουν τον φορέα έχουν ως εξής:

- **Πλαίσιο:**
  - Συνολικό μήκος κατά την οριζόντια διεύθυνση:  $L1 = 10\text{ m}$
  - Συνολικό μήκος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση:  $L2 = 6\text{ m}$
  - Αριθμός υποστυλωμάτων:  $columns = 5$
  - Αριθμός δοκών:  $beams = 4$
  - Ύψος διατομής υποστυλωμάτων:  $h = 0.3\text{ m}$
  - Ύψος διατομής δοκών:  $b = 0.5\text{ m}$
- **Εφέδρανα:**
  - Συνολικό μήκος κατά την οριζόντια διεύθυνση:  $l1 = 1.0\text{ m}$
  - Συνολικό μήκος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση:  $l2 = 0.5\text{ m}$
  - Αριθμός πεπερασμένων στοιχείων κατά την οριζόντια διεύθυνση:  $n1 = 3$
  - Αριθμός πεπερασμένων στοιχείων κατά την κατακόρυφη διεύθυνση:  $n2 = 3$
  - Πάχος εφεδράνου:  $thickness = 0.25\text{ m}$
- **Μήτρα RVE:**
  - Συνολικό μήκος κατά την οριζόντια διεύθυνση:  $L1 = 260\text{ nm}$
  - Συνολικό μήκος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση:  $L2 = 260\text{ nm}$
  - Αριθμός πεπερασμένων στοιχείων κατά την οριζόντια διεύθυνση:  $n1 = 4$
  - Αριθμός πεπερασμένων στοιχείων κατά την κατακόρυφη διεύθυνση:  $n2 = 4$
  - Πάχος RVE:  $thickness = 24\text{ nm}$
- **Truss RVE:**
  - Μήκος truss:  $Lt = 234,6\text{ nm}$
  - Διάμετρος truss:  $d = 23\text{ nm}$

Πριν ξεκινήσει η ανάλυση του φορέα, θα πρέπει να οριστούν οι **μηχανικές ιδιότητες των υλικών** από τα οποία αυτός είναι κατασκευασμένος. Έτσι για τα διάφορα μέλη, τα υλικά έχουν ως εξής:

- **Πλαίσιο:**  
Μέτρο ελαστικότητας κατά Young:  $E = 30 \text{ GPa}$
- **Μήτρα RVE:**  
Μέτρο ελαστικότητας κατά Young:  $E = 2,79 \text{ GPa}$   
Λόγος Poisson:  $\nu = 0.4$
- **Truss RVE:**  
Μέτρο ελαστικότητας κατά Young:  $E = 1.051 \text{ TPa}$

Επίσης, είναι απαραίτητος και ο ορισμός της **συνάφειας** μεταξύ truss και μήτρας. Αυτή ορίζεται από την διατμητική τάση που αναπτύσσεται στη διεπιφάνεια των δύο υλικών, ISS,



Εικόνα 19 Μη γραμμική συμπεριφορά του φαινομένου της συνάφειας

η οποία ανάγεται σε μία συγκεντρωμένη δύναμη συνάφειας σε κάθε άκρη του truss element. Η διαδικασία της αναγωγής αυτής πραγματοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$F_y = ISS * \pi d * \frac{L}{2} \quad (5.1)$$

με: ISS τέτοιο ώστε να προκύπτει:  $F_y = 3.45 * 10^{-10} \text{ kN}$ .

Τέλος, ορίζεται η **εξωτερική φόρτιση** που επιβάλλεται στον φορέα εισάγοντας τα δεδομένα:

- Μέτρο εξωτερικής δύναμης:  $F = 400kN$
- Διεύθυνση της εξωτερικής δύναμης:  $F_{direction} = 1$ , με 1=διεύθυνση κατά τον άξονα x, 2=διεύθυνση κατά τον άξονα y και 3=ροπή
- Κόμβος επιβολής φόρτισης:  $F_{node} = \text{όλοι οι κόμβοι του πλαισίου}$

Στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητος ο προσδιορισμός των **στηρίξεων του φορέα**, τις οποίες αποτελούν οι πακτώσεις της πρώτης «γραμμής» των κόμβων των εφεδράνων.



## 6 Κωδικοποίηση Προβλήματος

Το πρόβλημα μοντελοποιείται σε ηλεκτρονικό υπολογιστή με χρήση κώδικα Matlab.

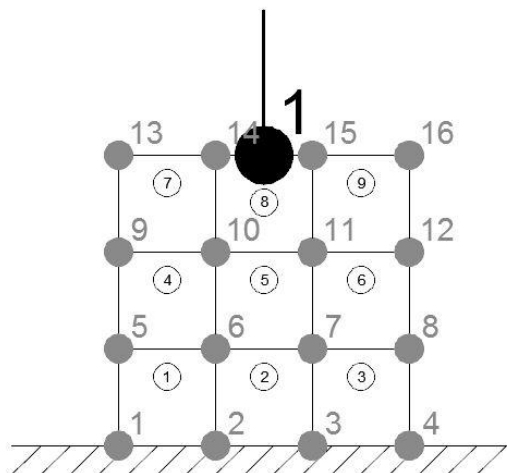
### 6.1 Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας και Καθολικό Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων

Έπειτα από τη διακριτοποίηση του φορέα, σειρά έχει η μόρφωση των *Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας* και *Καθολικό Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων*. Η διαδικασία αυτή σε τοπικό επίπεδο λαμβάνει χώρα σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 2.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί κατά την ένωση διαφορετικών τύπων στοιχείων μιας και χάριν αυτής είναι δυνατή η προσομοίωση τέτοιου είδους προβλημάτων.

#### 6.1.1 Ένωση Διαφορετικών τύπων στοιχείων στη Μακροκλίμακα

Στην περίπτωση αυτή, η ένωση διαφορετικών τύπων στοιχείων λαμβάνει χώρα μεταξύ *Τετραπλευρικών Στοιχείων Επίπεδης Έντασης-Παραμόρφωσης* και *Στοιχείων Δοκού Επίπεδου Πλαισίου*.



Εικόνα 20 Διαφορετικοί τύποι στοιχείων Μακροκλίμακας

Η διαδικασία περιλαμβάνει αρχικά την διατύπωση των *εξαρτημένων σχέσεων των μετακινησιακών βαθμών ελευθερίας* του κόμβου 1 του πλαισίου (οι βαθμοί ελευθερίας είναι μεταφορικοί και στροφικοί  $-u_1, v_1, \theta_1$ ), ο οποίος πρόκειται να εξαρτηθεί από τους 10 κι 11 του εφεδράνου (οι βαθμοί ελευθερίας είναι μεταφορικοί  $-u_{10}, v_{10}, u_{11}, v_{11}$ ):

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{b(1-11)}{L(10-11)} u_{10} + \frac{a(10-1)}{L(10-11)} u_{11} \\
 v_1 &= \frac{b(1-11)}{L(10-11)} v_{10} + \frac{a(10-1)}{L(10-11)} v_{11} \\
 \theta_1 &= \frac{1}{L(10-11)} (u_{11} \cos \beta - u_{10} \cos \beta) \\
 &\quad + \frac{1}{L(10-11)} (v_{11} \sin \beta - v_{10} \sin \beta) \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Τότε, προκύπτει το ακόλουθο **Μητρώο Μετασχηματισμού**:

$$[t] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ \cos \beta & \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \beta \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

για το οποίο ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = [t] \begin{bmatrix} u_{11} \\ v_{11} \\ u_{10} \\ v_{10} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Οι ποσότητες αυτές διαμορφώνονται σε *επίπεδο κόμβου*. Για να μετατραπούν σε *επίπεδο στοιχείου*, χρησιμοποιείται το διευρυμένο μητρώο **T**:



$$\begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ \theta1 \\ u2 \\ v2 \\ \theta2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & & & & & \\ & & [0]_{3x3} & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ [0]_{3x4} & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u11 \\ v11 \\ u10 \\ v10 \\ u2 \\ v2 \\ \theta2 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

αφού ο κόμβος 2 του πλαισίου δεν συμπυκνώνεται στατικά.

Οι ποσότητες  $k$  και  $rs$  τότε για να υπολογιστούν χρειάζεται να περιστραφούν με τη βοήθεια του **Μητρώου Περιστροφής  $\Lambda$** , μιας και οι τοπικοί άξονες του στοιχείου πλαισίου και του τετραπλευρικού στοιχείου επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης δεν ταυτίζονται:

$$[\Lambda Pq] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & & & \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & & [0]_{3x3} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ [0]_{3x3} & & & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

( $\varphi$  είναι η γωνία που σχηματίζεται αν στρέψουμε αριστερόστροφα το τοπικό σύστημα του μέλους πλαισίου έως να συμπέσει με το τοπικό σύστημα του τετραπλευρικού στοιχείου του εφεδράνου)

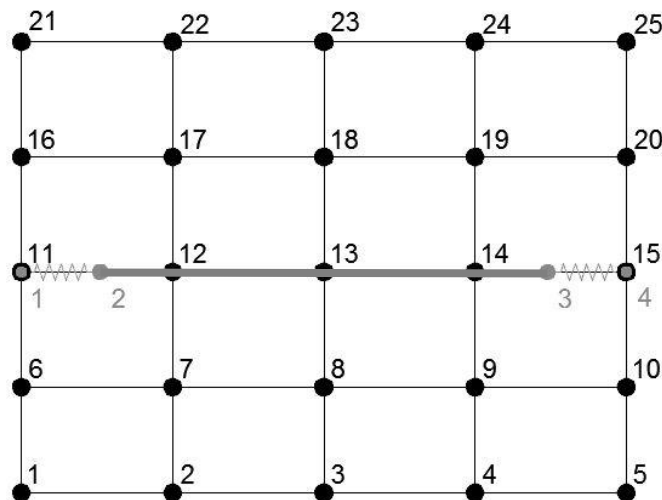
Επομένως προκύπτουν:

$$[kPq]_{7x7} = [T]^T_{7x6} [\Lambda Pq]^T_{6x6} [kb]_{8x8} [\Lambda Pq]_{6x6} [T]_{6x7} \quad (6.6)$$

$$[rsPq]_{7x1} = [T]^T_{7x6} [\Lambda Pq]^T_{6x6} [rsb]_{6x1} \quad (6.7)$$

### 6.1.2 Ένωση Διαφορετικών τύπων στοιχείων στη Μικροκλίμακα – Μοντέλο RVE (Representative Volume Element)

Στην περίπτωση αυτή, η ένωση διαφορετικών τύπων στοιχείων λαμβάνει χώρα μεταξύ Τετραπλευρικών Στοιχείων Επίπεδης Έντασης-Παραμόρφωσης και Σύνθετων Στοιχείων Δικτυώματος.



Εικόνα 21 Διαφορετικοί τύποι στοιχείων Μικροκλίμακας

Για τη μόρφωση των καθολικών ποσοτήτων που θέλουμε να υπολογίσουμε τελικά, κρίνεται απαραίτητος ο προσδιορισμός των *χαρακτηριστικών* των κόμβων 1 και 4 του σύνθετου στοιχείου δικτυώματος. Οι συγκεκριμένοι κόμβοι ορίζουμε να έχουν τις ίδιες ακριβώς συντεταγμένες με τους αντίστοιχους κόμβους, 2 και 3. Σκοπός του ορισμού αυτού αποτελεί το γεγονός ότι το μήκος της ίνας (μέλος 2) πρέπει να μείνει ως έχει στην πραγματικότητα, ενώ τα ελατήρια (μέλη 1 και 3) πρέπει να οριστούν ως ελαστικές στηρίξεις. Ένα ακόμη χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων κόμβων αποτελεί το γεγονός ότι αποτελούν τον συνδετικό κρίκο της συνεργασίας-σύνδεσης των truss elements με το αντίστοιχο κάθε φορά quad element της μήτρας του υλικού, στο οποίο ανήκει κάθε κόμβος του. Μόνο τότε μεταφέρονται σωστά οι δυνάμεις-παραμορφώσεις στα στοιχεία αυτά (**Στατική Συμπύκνωση**)

Η διαδικασία περιλαμβάνει αρχικά την διατύπωση των *εξαρτημένων σχέσεων των μετακινησιακών βαθμών ελευθερίας* των κόμβων 1 και 4 (στην προκειμένη περίπτωση οι βαθμοί ελευθερίας είναι μόνο μεταφορικοί κι όχι στροφικοί). Τις

σχέσεις αυτές δίνουν οι *Συναρτήσεις Σχήματος* των quads όταν αντικαθιστούμε τις μεταβλητές  $x$  και  $y$  με τις τοπικές συντεταγμένες των δύο αυτών κόμβων του truss. Προκύπτει λοιπόν το ακόλουθο **Τροποποιημένο Υπο-μητρώο Μετασχηματισμού** για κάθε κόμβο του σύνθετου στοιχείου δικτυώματος:

$$T_{1,3} = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

με:

$$N1 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{xt(1,3)}{a} \right) \left( 1 - \frac{yt(1,3)}{b} \right)$$

$$N2 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{xt(1,3)}{a} \right) \left( 1 - \frac{yt(1,3)}{b} \right)$$

$$N3 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{xt(1,3)}{a} \right) \left( 1 + \frac{yt(1,3)}{b} \right)$$

$$N4 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{xt(1,3)}{a} \right) \left( 1 + \frac{yt(1,3)}{b} \right) \quad (6.9)$$

Με την σκέψη ότι οι κόμβοι 2 και 3 δεν συμπυκνώνονται στατικά και λαμβάνοντας υπόψιν ότι κάθε κόμβος ενός truss element έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, το **Τροποποιημένο Μητρώο Μετασχηματισμού** του συνολικού σύνθετου στοιχείου δικτυώματος είναι:

$$T = \begin{bmatrix} T1_{2x8} & [0]_{2x4} & [0]_{2x8} \\ [0]_{4x8} & [I]_{4x4} & [0]_{4x8} \\ [0]_{2x8} & [0]_{2x4} & T2_{2x8} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας και  $O$  ο μηδενικός.

Το μητρώο αυτό λοιπόν συμπυκνώνει τους βαθμούς ελευθερίας ως εξής:

$$\begin{bmatrix} doffs\_t1 \\ doffs\_t2 \\ doffs\_t3 \end{bmatrix}_{8 \times 1} = T_{8 \times 20} \begin{bmatrix} doffs\_q(start) \\ doffs\_t2 \\ doffs\_q(end) \end{bmatrix}_{20 \times 1} \quad (6.11)$$

με:

$$\{doffs\_t1\} = \{u1 \quad v1\}^T$$

$$\{doffs\_t2\} = \{u2 \quad v2 \quad u3 \quad v3\}^T$$

$$\{doffs\_t3\} = \{u4 \quad v4\}^T \quad (6.12)$$

όπου  $u1$  έως  $v4$  είναι οι βαθμοί ελευθερίας του κάθε truss element, και:

$$\{doffs\_q(start)\} = \{u1 \quad v1 \quad u2 \quad v2 \quad u3 \quad v3 \quad u4 \quad v4\}^T$$

$$\{doffs\_q(end)\} = \{u1 \quad v1 \quad u2 \quad v2 \quad u3 \quad v3 \quad u4 \quad v4\}^T \quad (6.13)$$

όπου  $u1$  έως  $v4$  είναι οι βαθμοί ελευθερίας των quad elements που δεσμεύουν τους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής (start) και του κόμβου τέλους (end) των truss elements.

Αξίζει να σημειωθεί πως όντως μετά την στατική συμπύκνωση, οι βαθμοί ελευθερίας των κόμβων 2 και 3 του truss element παραμένουν ως έχουν.

Το Μητρώο Δυσκαμψίας και το Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων του σύνθετου αυτού στοιχείου για να μορφωθούν, απαιτούν τη σύνθεση των αντίστοιχων τοπικών ποσοτήτων που πραγματοποιείται σύμφωνα με το Κεφάλαιο 2.

Τελευταίο βήμα πριν την στατική συμπύκνωση είναι η μόρφωση του **Μητρώου Μετασχηματισμού**, το οποίο σύμφωνα με την *Μητρική Στατική* έχει τη μορφή:

$$\Lambda_{truss} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

( $\varphi$  είναι η γωνία που σχηματίζει ο καθολικός άξονας των  $x$  του quad στρεφόμενος αριστερόστροφα μέχρι να συμπέσει με τον τοπικό άξονα  $x$  του truss στον κόμβο του 1)

Το μητρώο Μετασχηματισμού  $\Lambda_{truss}$  μορφώνεται για κάθε *κόμβο* του truss, οπότε για να γίνει ο μετασχηματισμός όλων των βαθμών ελευθερίας των κόμβων του ταυτόχρονα αρκεί να γεμίσουμε διαγωνίως ένα κενό μητρώο  $8 \times 8$  με το μητρώο  $\Lambda_{truss}$ .

Εν τέλει, το **Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας** και το **Καθολικό Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων** υπολογίζονται σύμφωνα με την ακόλουθη στατική συμπύκνωση:

$$[kt]_{20 \times 20} = [T]_{20 \times 8}^T [\Lambda_{truss}]_{8 \times 8}^T [ktruss]_{8 \times 8} [\Lambda_{truss}]_{8 \times 8} [T]_{8 \times 20} \quad (6.15)$$

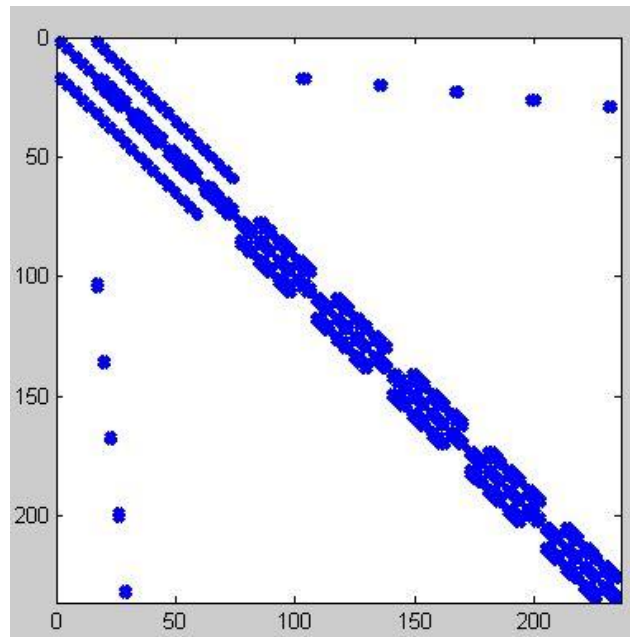
$$[rst]_{20 \times 1} = [T]_{20 \times 8}^T [\Lambda_{truss}]_{8 \times 8}^T [ftruss]_{8 \times 1} \quad (6.16)$$

### 6.1.3 Σύνθεση Καθολικών Μεγεθών

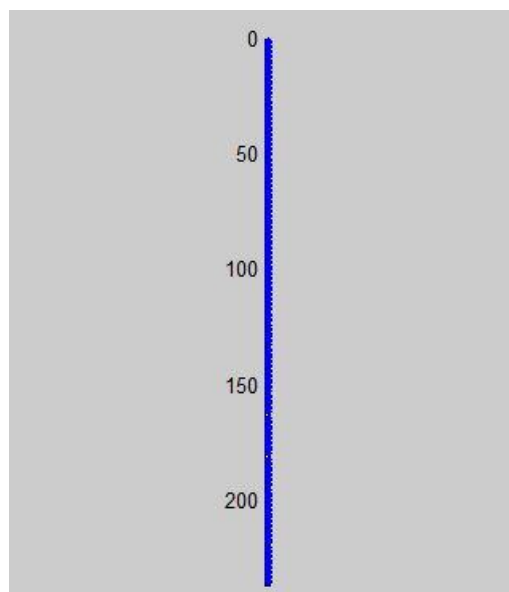
Με τον υπολογισμό όλων των τοπικών μητρώων στιβαρότητας και τοπικών διανυσμάτων επικόμβιων δράσεων, διαμορφώνονται τα καθολικά αντίστοιχα μεγέθη. Η διαδικασία αυτή λαμβάνει χώρα σύμφωνα με τους βαθμούς ελευθερίας

που υπάρχουν σε κάθε κόμβο, οι οποίοι αποτελούν βαθμούς ελευθερίας περισσότερων του ενός μέλους. Έτσι, τα τοπικά μητρώα-διανύσματα προστίθενται στα αντίστοιχα καθολικά με την κατάλληλη επαλληλία των στοιχείων τους, σύμφωνα με τους κοινούς βαθμούς ελευθερίας των μελών του φορέα.

Η διαδικασία αυτή φαίνεται στα ακόλουθα γραφήματα των καθολικών αυτών ποσοτήτων:



Εικόνα 22 Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας,  $K_{total}$



Εικόνα 23 Καθολικό Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων,  $F_{total}$

## 6.2 Σύνδεση Μακροκλίμακας με Μικροκλίμακα –

### Ολοκλήρωση κατά Gauss

Το σύνθετο υλικό του εφεδράνου, προσδίδει στο κάθε πεπερασμένο στοιχείο του **ανομοιόμορφη κατανομή τάσεων και παραμορφώσεων**, πράγμα που σημαίνει ότι είναι απαραίτητη η εφαρμογή της *Αριθμητικής Μεθόδου της Ολοκλήρωσης κατά Gauss*. Για τον σκοπό αυτόν, σε κάθε τέτοιο στοιχείο κάθε εφεδράνου, ορίζονται **τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης**, καθένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από ένα μοντέλο μικροκλίμακας RVE. Επιλέγεται κάθε Gauss Point κάθε στοιχείου του κάθε εφεδράνου να αντιστοιχεί στο RVE που δημιουργήθηκε παραπάνω.

Τα σημεία ολοκλήρωσης αυτά, εφόσον έχουμε πρόβλημα δευτέρου βαθμού ( $i=1$ ), έχουν ανηγμένες στη μονάδα συντεταγμένες:  $x = y = \pm 0.57735$ , και βάρη ολοκλήρωσης:  $w_i = \left(\frac{height}{2}\right) * \left(\frac{width}{2}\right)$ , σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα της παραγράφου 4.3.

Τότε, οι ποσότητες:

- τοπικό μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου εφεδράνου και
- τοπικό διάνυσμα επικόμβιων δράσεων στοιχείου εφεδράνου,

υπολογίζονται με τη βοήθεια της συγκεκριμένης αριθμητικής μεθόδου πριν την σύνθεση των αντίστοιχων καθολικών ποσοτήτων.

Για τον σκοπό αυτόν όμως, θα πρέπει πριν από την έναρξη της αριθμητικής επίλυσης, να έχουν υπολογιστεί οι συνεισφορές του σύνθετου υλικού, *ομογενοποιημένο μητρώο ελαστικότητας και ομογενοποιημένο μητρώο τάσεων*. Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 3, τα συγκεκριμένα μητρώα προκύπτουν έπειτα από την επιβολή της παραμορφώσεως της μακροκλίμακας ως συνοριακή συνθήκη στο μοντέλο της μικροκλίμακας. Οι παραμορφώσεις αυτές, υπολογίζονται για τα Gauss Points κάθε στοιχείου εφεδράνου.

## 6.3 Ισορροπία Φορέα – Μέθοδος Newton-Raphson

Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 4, η *Αριθμητική Μέθοδος Newton-Raphson* εφαρμόζεται για την εύρεση του *σημείου ισορροπίας* του φορέα όταν σε αυτόν επιβάλλεται κάποια φόρτιση. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, επιβολή φορτίου σε φορέα εμφανίζεται δύο φορές: μία φορά κατά την επιβολή των παραμορφώσεων μακροκλίμακας στο μοντέλο της μικροκλίμακας και άλλη μία φορά κατά την επιβολή του εξωτερικού φορτίου στον συνολικό φορέα. Επομένως για κάθε περίπτωση, γίνεται χρήση της μεθόδου Newton-Raphson.

### 6.3.1 Εφαρμογή Newton-Raphson στο Επίπεδο της Μικροκλίμακας

Ο υπολογισμός των *τάσεων* και της *ελαστικότητας* προϋποθέτει την χρήση των πραγματικών μετακινήσεων του μοντέλου, δηλαδή προϋποθέτει την **ισορροπία** του φορέα. Οπότε η επίλυση κατά **Newton-Raphson** λαμβάνει χώρα στον ακόλουθο κώδικα:

```
while any([norm(Fa)/norm(Kab*ub)>0.001;i==0])
    i = i+1;
    if i==1
        Dub = D'*De;
        ub = ub+Dub;
    else Dub = 0; %mhdenikh timh giati oi synoriakes
sunthhkes einai statheres
        ub = ub+Dub;
    end
    if i==1
        Dua = -Kaa\Kab*Dub;
        ua = ua+Dua;
    else Dua = -Kaa\Fa;
        ua = ua+Dua;
    end

utotal(boundary_doffs,1) = ub;
utotal(inner_doffs,1) = ua;

%Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια,
υπολογίζεται ξανά το Μητρώο Στιβαρότητας και το Διάνυσμα
```



```
Επικόμβιων Δράσεων, ορίζοντας στη συνέχεια εκ νέου τις  
συνοριακές συνθήκες.  
end
```

Με το τέλος της σύγκλισης της μεθόδου, αποθηκεύονται τα μεγέθη:

- μητρώα των τάσεων και της ελαστικότητας,
- διάνυσμα *u<sub>a</sub>* των μετακινήσεων των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας του RVE

μιας και οι τιμές αυτές δηλώνουν την κατάσταση στην οποία θα βρίσκεται το σύνθετο μη γραμμικό υλικό στο επόμενο στάδιο φόρτισης του συνολικού φορέα της Μακροκλίμακας.

### 6.3.1 Εφαρμογή Newton-Raphson στο Επίπεδο της Μακροκλίμακας

Ο υπολογισμός της τελικής έντασης του συνολικού φορέα προϋποθέτει, κατά αντιστοιχία με την μικροκλίμακα, την χρήση των πραγματικών μετακινήσεων ης κατασκευής, δηλαδή προϋποθέτει την **ισορροπία** του φορέα. Οπότε η επίλυση κατά **Newton-Raphson** φαίνεται στον ακόλουθο κώδικα:

```
Create_Geometry  
[ C0, stresses0 ] = microFunction(...)  
C0 = C0{1,1};  
  
Create_initial_Stiffness  
  
%dhmiourgia dianusmatos Ftotal_free me mhden times  
Fext_free = Fext(free,1);  
Ftotal_free=zeros(size(Fext_free,1),1);  
ufree = zeros(size(Fext_free,1),1);  
  
while norm((F_ext_step-...  
Ftotal_free))/norm(F_ext_step)>0.001  
    Du_free = Kfree\F_ext_step-Ftotal_free);  
    ufree = Du_free+ufree;  
  
%update gia to ufree olwn twv v.e tou utotal (free,  
boundary, kai EMBEDDED!)  
Update Solution
```

```
%upologidmos paramorfwsen
Calculate_strains

%klhsh ths micro function gia ola ta RVE
Create_microscale

Create_Stiffness

Create_Forces

end
Duprev = Duprev_tr_GP;
```

Με το τέλος της σύγκλισης της μεθόδου, αποθηκεύεται το μέγεθος:

- διάνυσμα *slide* της σχετικής ολίσθησης της ίνας του σύνθετου υλικού ως προς τη μήτρα του

μιας και η συγκεκριμένη τιμή είναι αυτή που περιγράφει συνολικά τη μη γραμμική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

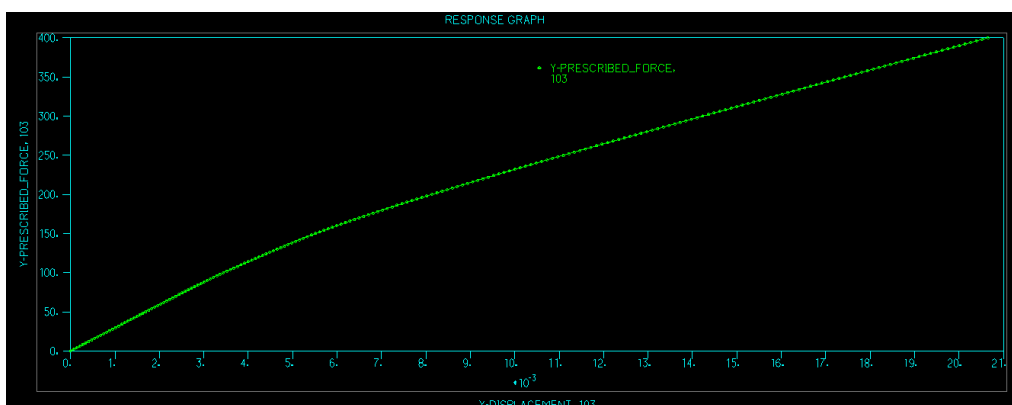
## 6.4 Ανελαστική Στατική Ανάλυση (Pushover Analysis)

Προκειμένου να φανεί η μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού, επιλέγεται στον φορέα να επιβληθεί φορτίο **Στατικό Προσαυξητικό σταθερής αναλογίας**, φορτίο δηλαδή που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της εξωτερικής φόρτισης που επιλέχθηκε στην αρχή επί έναν συντελεστή αναλογίας για κάθε διαφορετικό στάδιο φόρτισης. Το φορτίο αυτό είναι εκείνο που «οπτικοποιεί» τη μη γραμμική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού που μελετάται αφού η κατασκευή παραμορφώνεται σταδιακά με αποτέλεσμα η συνάφεια μεταξύ ινών και μήτρας του υλικού να φτάσει στην οριακή αντοχή της. Από το σημείο αυτό κι έπειτα, οι ίνες παύουν να προσφέρουν τα μηχανικά χαρακτηριστικά τους (που αφορούν την ελαστική περιοχή) στην κατασκευή, με αποτέλεσμα η δυσκαμψία της να μειωθεί (η

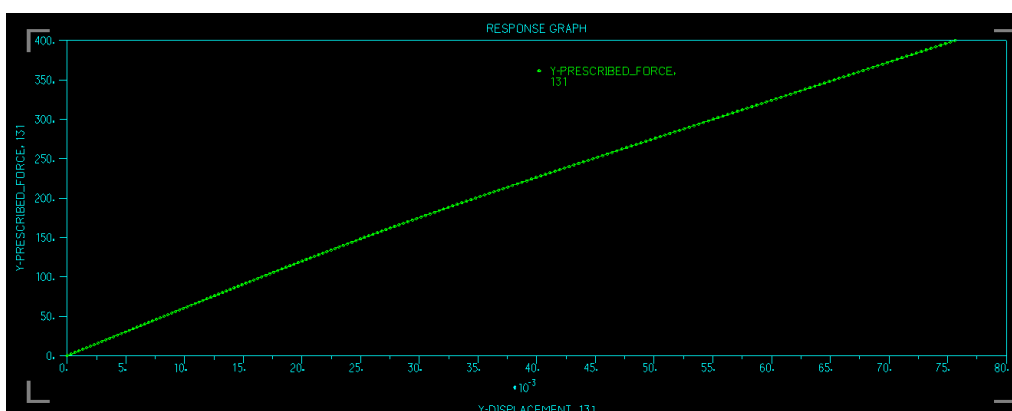
τελική δυσκαμψία που προκύπτει αποτελείται από την ελαστική συμπεριφορά των υπόλοιπων υλικών καθώς και την κρατυνόμενη συμπεριφορά των σύνθετων στοιχείων δικτύματος).

Η λογική αυτή είναι όμοια με την επιβολή του ίδιου είδους φορτίου σε κατασκευή έως την ανάπτυξη του ελάχιστου δυνατού αριθμού πλαστικών αρθρώσεων, ικανών να προκαλέσουν την κατάρρευσή της. Η ανάλυση που επιτυγχάνει τον συγκεκριμένο σκοπό ονομάζεται **Ανελαστική Στατική Ανάλυση (Pushover Analysis)** και βρίσκει εφαρμογή και στο πρόβλημα που μελετάει η παρούσα εργασία.

Με εφαρμογή λοιπόν τέτοιου είδους φόρτισης, τα αναμενόμενα διαγράμματα εξωτερικής φόρτισης – μετατοπίσεων κόμβου έχουν ως εξής:



Εικόνα 24 Καμπύλη Pushover για κόμβο Εφεδράνου



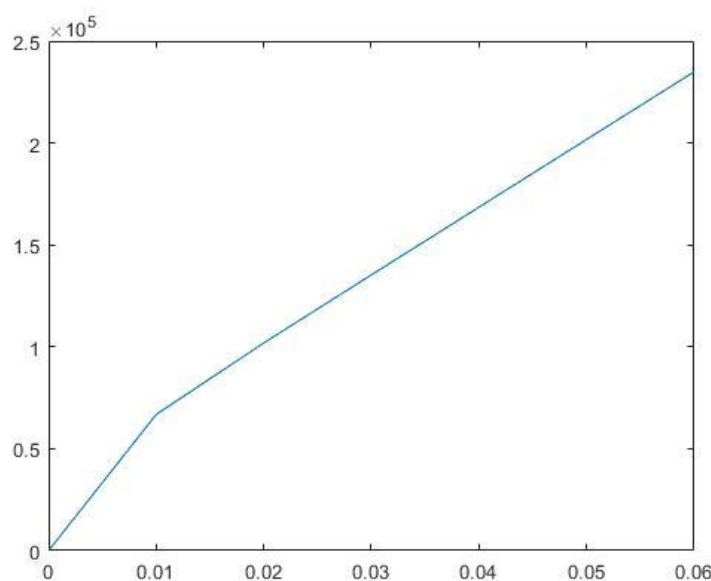
Εικόνα 25 Καμπύλη Pushover για κόμβο Πλαισίου



## 7 Αποτελέσματα

Με την εφαρμογή όλων των παραπάνω, προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα για τις δύο κλίμακες του προβλήματος.

Αναφορικά με την **Μικροκλίμακα**, προκύπτει το ακόλουθο *διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων*



Εικόνα 26 Απεικόνιση μη-γραμμικής συμπεριφοράς RVE

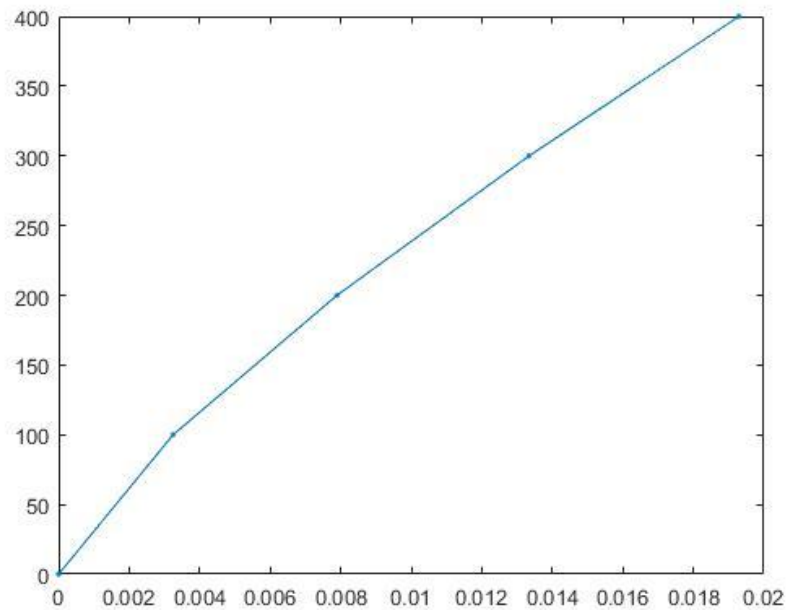
στο οποίο φαίνεται η μη γραμμική συμπεριφορά του μοντέλου RVE σε ένα Gauss Point ενός στοιχείου εφεδράνου.

Αυτή η συμπεριφορά δηλώνει πως με την αύξηση του εξωτερικού φορτίου του φορέα, τα σύνθετα στοιχεία δικτυώματος του μοντέλου της Μικροκλίμακας συνεισφέρουν στη δυσκαμψία του έως να υπερνικηθεί το όριο διατμητικής αντοχής που χαρακτηρίζει τη συνάφεια. Από το σημείο αυτό κι έπειτα, στη δυσκαμψία συνεισφέρει μόνο το ελαστικό υλικό της μήτρας και η κράτυνση που έχει θεωρηθεί για τα γραμμικά ελατήρια που προσομοιώνουν τη συνάφεια.

Σε **Μακροσκοπικό** επίπεδο, η άνωθι συμπεριφορά απεικονίζεται με την σταδιακή μείωση της δυσκαμψίας του φορέα. Μείωση η οποία σταματάει τη στιγμή που πάψει

να υφίσταται το φαινόμενο της συνάφειας, μιας και όλα τα επιμέρους υλικά έχουν θεωρηθεί ελαστικά. Έτσι, με την αύξηση του εξωτερικού φορτίου, τα σύνθετα στοιχεία δικτυώματος σταδιακά μεταβαίνουν στην μετελαστική περιοχή, μειώνοντας τη συνολική δυσκαμψία του φορέα.

Τότε, το διάγραμμα που προκύπτει στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι:



Εικόνα 27 Απεικόνιση καμπύλης Pushover για κόμβο στη βάση του πλαισίου

κατά το οποίο φαίνεται όντως η σταδιακή αυτή μείωση της συνολικής δυσκαμψίας.

## Βιβλιογραφία

- Bathe, Klaus-Jurgen. 1996.** *Finite Element Procedures*. New Jersey : s.n., 1996.
- Miehe, C. και Koch, A. 2001.** *Computational micro-to-macro transitions of discretized micro structures undergoing small strains*. Stuttgart : s.n., 2001.
- Paradopoulos, Vissarion και Tavlaki, Maria. 2015.** *The impact of interfacial properties on the macroscopic performance of carbon nanotubes composites. A FE2-based multiscale study*. Athens : s.n., 2015.
- Tavlaki, Maria. 2013.** *Multiscale Finite Element Analysis - Postgraduate Dissertation*. Athens : s.n., 2013.
- Ανδριανόπουλος, Ν., Κυριαζή, Ε. και Λιακόπουλος, Κ. 1991.** *Πειραματική Αντοχή των Υλικών*. Αθήνα : Ενδόσεις Συμμεών, 1991.
- Παπαδρακάκης, Μ. 2001.** *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*. Αθήνα : Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001.
- Παπαδρακάκης, Μ. και Σαπουντζάκης, Ε. 2016.** *Ανάλυση Ραβδωτών Φορέων με Μητρικές Μεθόδους - Μέθοδος Άμεσης Στιβαρότητας*. Αθήνα : Εκδόσεις Τσότρας, 2016.
- Παπαδρακάκης, Μανόλης. 2013.** *Μαθήματα Στατικής V Πλαστική ανάλυση ραβδωτών φορέων - Σύγχρονες μέθοδοι*. Αθήνα : Εκδόσεις Τσότρας, 2013.
- Προβατίδης, Χριστόφορος. 2017.** *Πεπερασμένα Στοιχεία στην Ανάλυση Κατασκευών*. Αθήνα : Ενδόσεις Τζιόλα, 2017.
- Σοφιανός, Γεώργιος και Τυχόπουλος, Ευάγγελος. 2005.** *Αριθμητική Ανάλυση*. Αθήνα : Εκδόσεις Σταμούλη, 2005.





## Ευρετήριο Εικόνων

Εικόνα 1 Ολόσωμος τριδιάστατος φορέας στον οποίο ασκούνται όλα τα είδη δυνάμεων και ο οποίος αποτελείται από εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία οκτώ κόμβων.....	10
Εικόνα 2 (α) Ολόσωμος τριδιάστατος φορέας,(β) στερεό τάσεων, (γ) ορθή δυνατή παραμόρφωση, (δ) διατμητική δυνατή παραμόρφωση.....	11
Εικόνα 3 Παραμόρφωση στοιχειώδους ορθογωνίου .....	13
Εικόνα 4 Γεωμετρική εικόνα Τετραπλευρικών Στοιχείων Επίπεδης Έντασης (quads)	16
Εικόνα 5 Φυσική ερμηνεία Συναρτήσεων Σχήματος (quads) .....	17
Εικόνα 6 Γεωμετρική Εικόνα Στοιχείων Δοκού Επίπεδου Πλαισίου (beams).....	21
Εικόνα 7 Φυσική ερμηνεία Συναρτήσεων Σχήματος (beams) .....	23
Εικόνα 8 Γεωμετρική Εικόνα Σύνθετων Στοιχείων Δικτυώματος (trusses).....	26
Εικόνα 9 Διάγραμμα Συμπεριφοράς μη γραμμικών ελατηρίων .....	30
Εικόνα 10 Μόρφωση Τοπικού Μητρώου Δυσκαμψίας (trusses) .....	31
Εικόνα 11 Ένωση διαφορετικών τύπων στοιχείων: (α) τετραπλευρικό στοιχείο επίπεδης έντασης με στοιχείο δοκού, (β) τετραπλευρικό στοιχείο επίπεδης έντασης με στοιχείο δικτυώματος.....	32
Εικόνα 12 Σχηματοποιημένη διαδικασία Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων .....	36
Εικόνα 13 Μοντέλο μικροδομής και μακροδομής .....	37
Εικόνα 14 Απεικόνιση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών ενός μοντέλου RVE.....	41
Εικόνα 15 Απεικόνιση φιλοσοφίας Ανάλυσης Πολλαπλών Κλιμάκων.....	47
Εικόνα 16 Οπτικοποίηση Μεθόδου N-R.....	51

Εικόνα 17 Πεπερασμένο Στοιχείο Εφεδράνου με τέσσερα Gauss Points.....	57
Εικόνα 18 Απεικόνιση συνολικού φορέα εφαρμογής.....	62
Εικόνα 19 Μη γραμμική συμπεριφορά του φαινομένου της συνάφειας .....	64
Εικόνα 20 Διαφορετικοί τύποι στοιχείων Μακροκλίμακας .....	67
Εικόνα 21 Διαφορετικοί τύποι στοιχείων Μικροκλίμακας .....	70
Εικόνα 22 Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας, $K_{total}$ .....	74
Εικόνα 23 Καθολικό Διάνυσμα Επικόμβιων Δράσεων, $F_{total}$ .....	74
Εικόνα 24 Καμπύλη Pushover για κόμβο Εφεδράνου.....	79
Εικόνα 25 Καμπύλη Pushover για κόμβο Πλαισίου .....	79
Εικόνα 26 Απεικόνιση μη-γραμμικής συμπεριφοράς RVE.....	81
Εικόνα 27 Απεικόνιση καμπύλης Pushover για κόμβο στη βάση του πλαισίου.....	82