



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

*ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ – ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*

ΦΛΕΞΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ



Ηλεκτρικό σήμα που εντοπίστηκε σε πειραματική δοκιμή, λόγω του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΣΩΤΗΡΙΟΥ ΚΝΙΣΟΒΙΤΗΣ

Επιβλέπων: Γιαννακόπουλος Αντώνιος
Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

*ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ – ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*

ΦΛΕΞΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρήστος Σωτήριου Κνισοβίτης

Επιβλέπων : Γιαννακόπουλος Αντώνιος
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την Ιουλίου του 2019

.....
Γιαννακόπουλος Αντώνιος
Καθηγητής

.....
Κοντού Ευαγγελία
Καθηγήτρια

.....
Κουμούσης Βλάσης
Καθηγητής

Αθήνα, Ιούλιος 2019

.....
Χρήστος Σωτηρίου Κνισοβίτης

Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Copyright © Χρήστος Σωτηρίου Κνισοβίτης

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Με την εξέλιξη της τεχνολογίας, με ραγδαία χρήση της ηλεκτρικής ενέργειας στην ζωή μας, και με τις έξυπνες πλέον συσκευές, έχει γίνει στροφή της επιστημονικής μελέτης προς πόρους που επικεντρώνονται στην παραγωγή και αποθήκευση ενέργειας, από ανανεώσιμες πηγές, αλλά και σε συσκευές που έχουν την ικανότητα να κάνουν «sensing», «actuating», καθώς και «monitoring». Το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού είναι διαθέσιμο να βοηθήσει σε αυτήν την ιστορία, αφού είναι ικανό να μετατρέπει μηχανικό έργο σε ηλεκτρικό («direct flexoelectric effect»), ή ακόμα και το αντίθετό, δηλαδή από ηλεκτρικό σε μηχανικό («Converse flexoelectric effect»).

Το φαινόμενο αυτό είναι κρυμμένο μέσα στην κρυσταλλική δομή των διηλεκτρικών, που αλλιώς λέγονται και μονωτές, δηλαδή σε ένα τεράστιο σύνολο από υλικά και έχει να κάνει με τις θέσεις των πρωτονίων στην κρυσταλλική δομή. Όταν υπάρχει περιέργη τροπή σε ένα φλεξοηλεκτρικό υλικό, που έχει κάποια κλίση, τότε κάποιοι πυρήνες έρχονται πιο κοντά σε κάποιους απ' ότι κάποιοι άλλοι, και έτσι δημιουργείται μία πολικότητα, ή οποία είναι ικανή να δώσει ηλεκτρικό ρεύμα. Μία τέτοια καταπόνηση είναι η κάμψη, αφού η κάμψη προκαλεί κλίση του διαγράμματος των τροπών, και από εκεί πήρε και το όνομα του το φαινόμενο («Flexo»).

Τα οφέλη από τις εφαρμογές του φλεξοηλεκτρισμού είναι απίστευτα. Από ηλεκτρονικής απόψεως, το φαινόμενο αυτό μοιάζει σε μεγάλο βαθμό, με αυτό του πιεζοηλεκτρισμού, και επομένως μπορεί να έχει μία πληθώρα εφαρμογών, από αναπτήρες και ρολόγια μέχρι και ραντάρ «sonar». Θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε μηχανήματα, που σχετίζονται με την κίνηση, ή ακόμα και σε κατασκευές, σεισμικά ή όχι μονωμένες («smart buildings»)

Ο στόχος της εργασίας αυτής, είναι η απόδειξη ύπαρξης του φαινομένου, καταρχάς, και στην συνέχεια προσπάθεια βελτιστοποίησης του σήματος της πολικότητας, έτσι ώστε να ξεχωρίσει από άλλα σήματα. Να δείξει πόσο ο φλεξοηλεκτρισμός θα μπορούσε να ωφελήσει μία κατασκευή, κτηριακή ή και όχι, αν χρησιμοποιηθεί φλεξοηλεκτρική ενίσχυση, σαν ενίσχυση, ή σαν δομικό στοιχείο. Εξάλλου, το σπλισμένο σκυρόδεμα είναι φλεξοηλεκτρικό, αφού είναι μονωτής. Και τέλος να προετοιμάσει το έδαφος για μία πιο ενδεδειγμένη ανάλυση του φαινομένου, με πιο αποδοτικό εξοπλισμό.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να ευαισθητοποιήσει το κοινό, να εγείρει το ενδιαφέρον και να προκαλέσει τους ερευνητές για αυτό το πολλά υποσχόμενο φαινόμενο, ώστε να γίνουν πιο αποτελεσματικές μελέτες.

Λέξεις κλειδιά

Φλεξοηλεκτρισμός, φλεξοηλεκτρικά υλικά, δομικά φλεξοηλεκτρικά υλικά, ανάλυση φορέων με βάση το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, πειραματική αντιμετώπιση του φλεξοηλεκτρισμού, κατασκευαστικές εφαρμογές φλεξοηλεκτρισμού, φαινόμενο στρώματος φλεξοηλεκτρισμού, γραμμές επιρροής φλεξοηλεκτρισμού, σχηματική μεταβολή των φορέων για αύξηση του ρυθμού μεταβολής των τάσεων.

¹ Ο όρος «δομικά φλεξοηλεκτρικά υλικά», αρκετές φορές αντικαθιστά, τον πραγματικό τίτλο της παρούσας εργασίας: «Φλεξοηλεκτρικά δομικά στοιχεία».

Abstract

With the current development of the technology, massive use of electrical power, and new “smart machines”, there has been a change in the direction of the current research toward the harvesting of energy produced from renewable sources, and gadgets that can be used as sensors actuators and monitors. The Flexoelectric effect is available for help, because it can change the mechanical energy to electrical (direct effect) or the electrical to mechanical (converse effect).

This effect is hidden in the crystallinity of the dielectrics which are also known as insulators, an enormous number of materials, and has to do with the location of the protons in the crystal lattice. When the strain is non-uniformed, the some protons come closer to each other whereas some other don't, and this produced a polarization, which can produce electric current. A bending load is capable of producing a non-uniformed strain, and that is why the effect is named after the bending (flex).

The benefits of the effect are incredible. From an electricians view, the effect is similar to piezoelectricity, and so, a lot of application can take advantage of it, such as lighter, watches, and sonars. Also this effect could benefit machines relevant to the human movement, or even in construction, with earthquake insulator or not (smart building).

The aim of this thesis is to provide proof that the effect exists, and then to try and optimize it, so that the electrical signal can be shown. To show how much can this effect benefit a construction, like fixing material or building material. In that case, it should be known that the reinforce concreter is an insulator, and thus a flexoelectric material. Finally, to prepare the ground for a more detailed analysis of the effect, with better machinery.

The purpose is to raise interest, and create excitement, for this worthy effect, and thus more detailed studies to occur.

Keywords

Flexoelectricity, flexoelectric materials, flexoelectric building materials, structure analysis based of the flexoelectric effect, experimental flexoelectricity, structural applications of the flexoelectricity, flexoelectric layer effect, flexoelectric lines of influence, geometrician manipulation for increasing the strain gradient.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω

- Τον **Αντώνη Γιαννακόπουλο**, που με εμπιστεύτηκε με ένα τόσο περίεργο θέμα διπλωματικής εργασίας στο προπτυχιακό μου επίπεδο, για τις συμβουλές σε πολλά θέματα, για τα μαθήματα, πάνω σε αντικείμενα που δεν ήταν γνωστά και για την ένθερμη του υποστήριξη σε στιδήποτε.
- Τον **Γεώργιο Γεωργούση**, για την βοήθεια που μου παρείχε, στην πειραματική διαδικασία, η οποία ήταν ιδιαίτερα χρονοβόρα και κουραστική και για τις συμβουλές του περί της εργασίας. Για τα όργανα που μου παρείχε και για το υλικό που μου έδωσε.
- Την **Ευαγγελία Κοντού**, που μου διέθεσε το εργαστήριο, μου παρείχε πρόσβαση σε μετρητικό υλικό, και μου έδωσε χρήσιμες πληροφορίες για τα πολυμερή.
- Τον **Βλάση Κουμούση**, για την ταχύτατη απάντηση, σε ερωτήσεις που προέκυψαν σε όλη διάρκεια αυτής της μελέτης
- Τον **Παναγιώτη Τσόπελα**, για την συνεχή υποστήριξη που είχα για την εργασία μου, και για την αντιμετώπιση διάφορων προβλημάτων που συνάντησα.
- Το **Παναγιώτη Παπανικολάου**, για την υποστήριξη και τις συμβουλές που παρείχε για την πειραματική διαδικασία και για άλλα θέματα.
- Τον **Ξενοφώντα Λιγνό**, για τις πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με την αντιμετώπιση του θορύβου.
- Την μητέρα μου, **Μαργαρίτα Παπαδοπούλου**, και τον πατέρα μου, **Σωτήρη Κνισοβίτη**, που βοήθησαν στην συγγραφή της εργασίας, διορθώνοντας ατέλειες και εκτελώντας, φιλολογική υποστήριξη.
- Την **Παναγιώτα Σαχλά**, που βοήθησε και αυτή στην επίβλεψη της γραφής της εργασίας.
- Τους φίλους και συναδέλφους **Κοτζιά Ιωάννη**, **Καπαρέλο Ευάγγελο** και **Κυπριώτη Ιωάννη** που με κράταγαν συνεχώς σε εγρήγορση
- Τις αδελφές μου, **Ευαγγελία** και **Χριστίνα Κνισοβίτη**, που μου παρείχαν κάθε υποστήριξη, ψυχολογική και πνευματική.
- Την οικογένεια της αδελφής μου, **Νικόλα**, **Κωνσταντίνο** και **Αντιγόνη Γεωργατζή**, που μου διέθεσαν ελεύθερο χρόνο.

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη	σελ. 5
Abstract	σελ. 6
Ευχαριστίες	σελ. 7
Πίνακας Περιεχομένων	σελ. 9
1. Εισαγωγή	σελ. 10
1.1. Λίγα λόγια για τον ηλεκτρισμό	σελ. 10
1.2. Το φυσικό φαινόμενο	σελ. 20
1.3. Τα νέα υλικά – πολυμερή	σελ. 22
1.4. Το κίνητρο	σελ. 25
2. Ιστορική αναδρομή	σελ. 28
3. Ανάλυση Περιπτώσεων	σελ. 49
3.1. Περίπτωση 1.0.1. Πρόβολος Σταθερής Διατομής με φορτίο στην άκρη	σελ. 52
3.2. Περίπτωση 1.0.2. Πρόβολος Σταθερής Διατομής με καμπτική ροπή στην άκρη	σελ. 60
3.3. Περίπτωση 1.0.3. Πρόβολος Σταθερής Διατομής με αξονικό φορτίο στην άκρη	σελ. 67
3.4. Περίπτωση 1.1.1. Πρόβολος μεταβλητού πλάτους με τέμνον φορτίο στην άκρη	σελ. 69
3.5. Περίπτωση 1.1.2. Πρόβολος μεταβλητού πλάτους με καμπτική ροπή στην άκρη	σελ. 86
3.6. Συνάρτηση Dirac, « δ – functions»	σελ. 103
3.7. Περίπτωση 1.1.3. Πρόβολος μεταβλητού πλάτους με αξονικό φορτίο στην άκρη	σελ. 109
3.8. Περίπτωση 1.2.1. Πρόβολος μεταβλητού ύψους με τέμνον φορτίο στην άκρη	σελ. 129
3.9. Περίπτωση 1.2.2. Πρόβολος μεταβλητού ύψους με καμπτική ροπή στην άκρη	σελ. 150
3.10. Περίπτωση 1.2.3. Πρόβολος μεταβλητού ύψους με αξονικό φορτίο στην άκρη	σελ. 170
3.11. Περίπτωση 1.3.1. Πρόβολος μεταβλητού πλάτους και ύψους, με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη	σελ. 172
3.12. Περίπτωση 2.0.1. Αμφιέρεστος φορέας με τέμνον φορτίο, με σταθερή διατομή.	σελ. 199
4. Γραμμές Επιρροής	σελ. 218
5. Το φαινόμενο στην άλλη διεύθυνση	σελ. 228
6. Δομικά Στοιχεία	σελ. 245
6.1. Φορείς «MEMs», μικρο-ηλεκτρο-μηχανισμοί	σελ. 245
6.2. Εφαρμογές	σελ. 248
6.3. Προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία	σελ. 253
7. Πειραματική Διαδικασία	σελ. 256
8. Το όραμα	σελ. 278
9. Επίλογος	σελ. 279
10. Βιβλιογραφία	σελ. 280

1. Εισαγωγή

1.1. Λίγα λόγια για τον ηλεκτρισμό

Ο ηλεκτρισμός είναι μία ιδιότητα της φύσης σύμφωνα με την οποία ασκούνται δυνάμεις ανάμεσα σε κάποια σώματα. Επίσης ο ηλεκτρισμός είναι ένα από τα πιο σημαντικά φυσικά φαινόμενα στην εποχή μας διότι εξαιτίας αυτής της αλληλεπίδρασης που προκαλεί, τη δύναμη δηλαδή που ασκείται από σώμα σε σώμα, παράγεται το ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο “τρέχει” την κοινωνία μας. Οποιαδήποτε συσκευή, οτιδήποτε θέλουμε να κάνουμε, το φως, η ζέστη, η μετακίνηση, η τεχνολογική εξέλιξη, όλα έγιναν εξαιτίας του ηλεκτρισμού.

Ηλέκτριση είναι το φαινόμενο μεταφοράς ηλεκτρονίων από ένα σώμα - άτομο σε ένα άλλο σώμα - άτομο. Τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να εξαφανιστούν ή να δημιουργηθούν, έτσι το συνολικό φορτίο σε ένα σύστημα παραμένει κατά την “ηλέκτριση” σταθερό. Αυτή είναι και η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου. Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι ηλέκτρισης όπως είναι η τριβή η επαφή και η επαγωγή.

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι ένα μέγεθος που ποσοτικοποιεί το κατά πόσο ένα σώμα μπορεί να αλληλεπιδράσει ηλεκτρικά με ένα άλλο, δηλαδή να ασκήσει δύναμη σε ένα άλλο. Το ηλεκτρικό φορτίο μετριέται σε Coulomb (C) και μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Τα ομώνυμα απωθούνται ενώ τα ετερόνυμα έλκονται. Τέλος το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντικά συζευγμένο και πολλαπλάσιο του φορτίου του ηλεκτρονίου

$$q_{electron} = -1.6 * 10^{19} C$$

Οι αγωγοί και οι μονωτές είναι είδη σωμάτων που έχουν να κάνουν με την κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα σε αυτά δηλαδή το πόσο εύκολα ή δύσκολα μπορεί να διαρρεύσει το ηλεκτρικό ρεύμα στη μάζα τους. Σώματα τα οποία επιτρέπουν την ελεύθερη κίνηση των ηλεκτρονίων σε όλη την έκτασή τους ονομάζονται αγωγοί. Διαφορετικά είναι μονωτές, δηλαδή σώματα που περιορίζουν την ελεύθερη κίνηση των ηλεκτρονίων. Τέλος σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι ένα σώμα μπορεί άλλοτε να συμπεριφέρεται σαν αγωγός και άλλοτε σαν μονωτής.

Ο νόμος του Coulomb είναι υψίστης σημασίας για τον ηλεκτρισμό είναι ένας από τους σημαντικότερους αν και όχι ο πιο σημαντικός νόμος της ηλεκτροστατικής και του ηλεκτρισμού και μας υποδηλώνει το μέγεθός της δύναμης που αναπτύσσεται μεταξύ δύο σωμάτων σε σχέση με τα φορτία των δύο σωμάτων και την απόσταση στην οποία αυτά βρίσκονται. Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb η δύναμη αυτή είναι ανάλογη του γινομένου των δύο φορτίων του κάθε σώματος και αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης τους. Στη σχέση υπάρχει και μία σταθερά η οποία ορίζεται ως «K». Η σχέση η οποία περιγράφει τον νόμο αυτόν φαίνεται παρακάτω.

$$F = K * \frac{q_1 * q_2}{r^2}$$

όπου

«K» η ηλεκτροστατική σταθερά και για το κενό: $K = 9 * 10^9 \frac{N*m^2}{C^2}$, το οποίο δεν είναι άλλο από ένα γινόμενο της απόλυτης διηλεκτρικής σταθεράς που είναι σταθερή για κάθε υλικό ($K = \frac{1}{4*\pi*\epsilon_0}$), «q₁» & «q₂» τα ηλεκτρικά φορτία των σωμάτων 1 και 2, «r» είναι η απόσταση μεταξύ των σωμάτων και «F» είναι η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται μεταξύ τους λόγω του φαινομένου του ηλεκτρισμού.

Το ηλεκτρικό ρεύμα είναι προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων στη μάζα ενός σώματος. Κατ' επέκταση είναι προσανατολισμένη κίνηση φορτισμένων σωματιδίων. Ανάλογα με τι υλικό έχουμε,

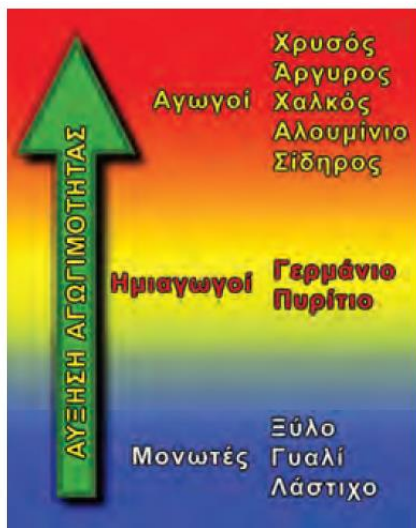


Figure 1. Εικόνα 2.4 από Βιβλίο: "Φυσική Γ' Γυμνασίου" των " N. Αντωνίου et. al."
Πως επηρεάζει το υλικό την κίνηση των ηλεκτρονίων.

αγωγό ή μονωτή, ή πόσο καλό αγωγό ή μονωτή έχουμε. Ανάλογα με το το είδος του υλικού η κίνηση γίνεται με περισσότερη ή λιγότερη ευκολία. Γενικά με καλούς αγωγούς, όπως είναι ο χρυσός, η κίνηση αυτή γίνεται πάρα πολύ εύκολα.

Η ηλεκτρική πηγή είναι αυτό που προκαλεί την προσανατολισμένη κίνηση. Έχει δύο αντίθετα ηλεκτρισμένες περιοχές που ονομάζονται πόλοι. Η κίνηση έχει ως εξής. Από τον αρνητικά φορτισμένο πόλο της πηγής κινούνται ηλεκτρόνια προς τον θετικά φορτισμένο πόλο της πηγής.

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι ένα μέγεθος που ποσοτικοποιεί το φορτίο δηλαδή τον αριθμό των ηλεκτρονίων που διαρρέουν σε μία διατομή στη μονάδα του χρόνου.

$$I = \frac{q}{t}$$

Όπου «I» η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, «q» το φορτίο [C] και «t» ο χρόνος [s]. Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος μετριέται σε «Aber» [A].

Ηλεκτρικό κύκλωμα είναι μία διάταξη που επιτρέπει την προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων και άρα τη διέλευση του ρεύματος.

Ηλεκτρική ενέργεια είναι το παράγωγο του ηλεκτρισμού. Η δύναμη παράγει έργο. Η ηλεκτρική δύναμη των φορτισμένων σωμάτων ή σωματιδίων παράγει ηλεκτρικό έργο άρα ηλεκτρική ενέργεια. Η ηλεκτρική ενέργεια είναι αυτό που τροφοδοτεί όλα τα μηχανήματα του πλανήτη όπως είναι τα αυτοκίνητα, τα φώτα, οι κουζίνες, και τα θερμαντικά σώματα. Κάποιες φορές την παίρνουμε απευθείας, κάποιες άλλες την παράγουμε από κάποια μετατροπή, όπως για παράδειγμα από τις μπαταρίες. Έτσι μετατρέπουμε τη χημική ενέργεια σε ηλεκτρική.

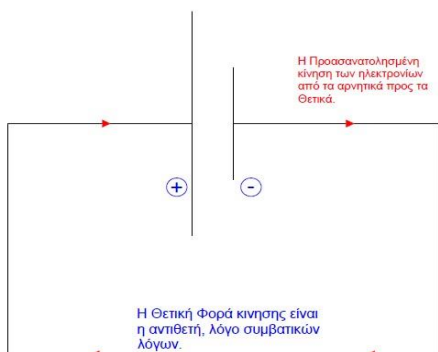


Figure 2. Η Προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων που προκαλεί μία ηλεκτρική πηγή. Προσοχή, η πραγματική κίνηση διαφέρει από την συμβατική (Από τα Θετικά Προς Τα Αρνητικά).

Η διαφορά δυναμικού είναι το μέγεθος που προσδιορίζει πόση ενέργεια διαρρέει ένα κύκλωμα ή ένα μέρος του κυκλώματος όπως για παράδειγμα έναν καταναλωτή σε σχέση με το ηλεκτρικό φορτίο Μετριέται σε «Volt» (V), και δίνεται από τον τύπο:

$$V = \frac{E_{electrical}}{q}$$

Δύο αντίθετα σημειακά φορτία ίσου μέτρου «+q [C]» και «-q [C]», σε μικρή απόσταση «d [m]» μεταξύ τους, σχηματίζουν ένα ηλεκτρικό δίπολο. Ροπή του δίπολου « \vec{p} [C * m]» είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που υπολογίζεται ως

$$\vec{p} = q * \vec{d}$$

όπου το « \vec{d} » έχει μέτρο ίσο με «d» και φορά από το «-q» προς το «+q».

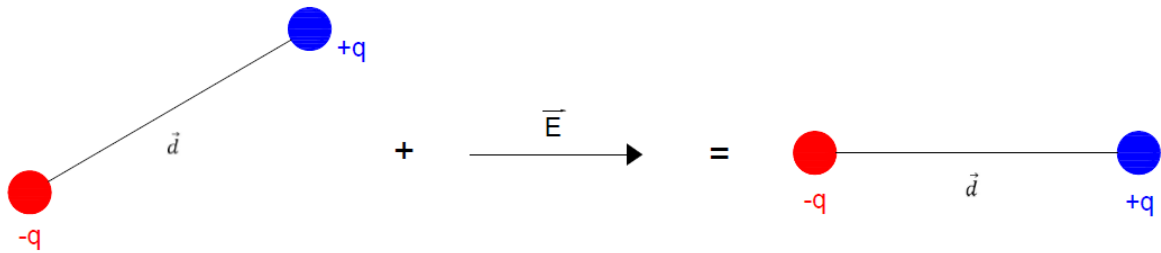


Figure 3. Το ηλεκτρικό δίπολο

Το τέλει δίπολο είναι για πολύ μεγάλα «q» και πολύ μικρά «d»

$$q \rightarrow \infty$$

$$d \rightarrow 0$$

Και το όριο είναι πεπερασμένο.

$$\vec{p} = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} q * \vec{d}$$

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό μέγεθος του διπόλου είναι η αντίσταση του διπόλου. Η αντίσταση του διπόλου είναι το μέγεθος που συσχετίζει την ένταση ενός κυκλώματος σε σχέση με την τάση του κυκλώματος ή του καταναλωτή. Μετρείται σε "Ohm" [Ω], και δίνεται από τον τύπο:

$$R = \frac{V}{I}$$

Όπου «R» η αντίσταση του δίπολου [Ω], «V» η τάση του κυκλώματος [V] και «I» η ένταση του [A].

Η αντίσταση είναι χαρακτηριστικό μέγεθος ενός δίπολου. Σύμφωνα με το νόμο του Ohm σε ένα μεταλλικό αγωγό η αντίσταση αυτή είναι σταθερή, και ως επέκταση κάθε δίπολο που επαληθεύει τον νόμο του ονομάζεται αντίσταση.

Ένα Ομοιόμορφο Διπολικό Στρώμα σχηματίζεται από ένα ζεύγος επιφανειακών κατανομών των ηλεκτρικών φορτίων «±σ» με «σ [C]» σταθερό, σε μικρή απόσταση «d», και οι επιφάνειες είναι

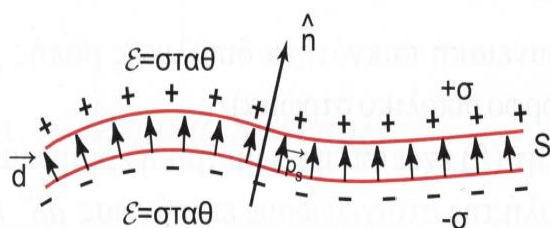


Figure 4. Εικόνα από το βιβλίο " Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία" των "Ι. Ρουμελιώτη & Ι. Τσαλαμέγκα" (Ηλεκτροστατικά Πεδία -> Ομοιόμορφο διπολικό στρώμα -> Σχήμα 1). Απεικόνιση του ομοιόμορφου διπολικού στρώματος. Μοιάζει απίστευτα πολύ με δοκό που κάμπτεται, με την κατανομή τάσεων. Μάλιστα και ο τύπος που διέπει το πρόβλημα είναι παρόμοιος μόνο που αντί για το μέτρο ελαστικότητας έχουμε την διηλεκτρική σταθερά.

λείες. Όταν το «d» είναι κοντά στο μηδέν η ένταση «E [A]» του ομοιόμορφου διπολικού στρώματος δίνεται από τον τύπο που φαίνεται παρακάτω.

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} * \vec{n}$$

Όπου « \vec{n} » το κάθετο στην επιφάνειά διάνυσμα και « ϵ » η διηλεκτρική σταθερά του υλικού. Ο τύπος αυτός προκύπτει από μια σειρά πράξεων που φαίνονται παρακάτω.

$$\Delta\Phi = \Phi^+ - \Phi^- = E * d = \sigma * \frac{d}{\epsilon} = \frac{P_s}{\epsilon}$$

Όπου « Φ [V]» το δυναμικό και « $P_s = \sigma * d$ » η επιφανειακή πυκνότητα διπολικής ροπής σε αναλογία με τη « $P = q * d$ » για τα σημειακά φορτία.

Σε αναλογία με το δίπολο, υπάρχουν και άλλα πολύπολα, όπως είναι τα τετράπολα, τα οχτάπολα και άλλα.

Πεδίο είναι μία περιοχή του χώρου στην οποία συγκεκριμένα σώματα δέχονται ορισμένες δυνάμεις. Έτσι έχουμε το ηλεκτροστατικό πεδίο, το βαρυτικό πεδίο και το μαγνητικό πεδίο. Ένα πεδίο στο οποίο κυριαρχούν ηλεκτρικές δυνάμεις λέγεται ηλεκτρικό πεδίο.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ένα μέγεθος το οποίο υποδηλώνει το μέτρο των δυνάμεων το οποίο ασκούνται σε αυτό το πεδίο. Έστω ότι το πεδίο αυτό το προκαλεί μία πηγή με φορτίο «Q» τότε ένα σώμα με φορτίο «q» θα δεχθεί μία δύναμη «F».

$$F = K_c * \frac{|Q * q|}{r^2}$$

Όπου «Q» είναι το φορτίο της πηγής του ηλεκτρικού πεδίου [C], «q» είναι το φορτίο του σώματος μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο [C], «r» η απόσταση μεταξύ τους [m], «K» η ηλεκτροστατική σταθερά [$\frac{N*m^2}{C^2}$] και για το κενό : $K = 9 * 10^9 \frac{N*m^2}{C^2}$, και «F» η Δύναμη η οποία ασκείται στο σώμα, και κατά συνέπεια και στην πηγή [N].

Όμως η ένταση είναι η δύναμη διαιρεμένη με το φορτίο.

$$E = \frac{F}{q}$$

και έτσι καταλήγουμε στον τύπο που φαίνεται παρακάτω,

$$E = K_c * \frac{|Q|}{r^2}$$

όπου όλα τα μεγέθη έχουν όπως πριν.

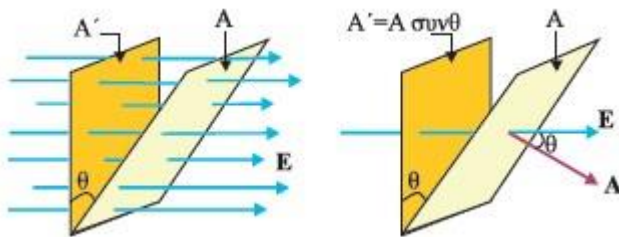


Figure 5. Σχήμα 5.4 από το βιβλίο "Φυσική, ομάδα προσανατολισμού θετικών σπουδών, Β' Γενικού λύκειο" των "Ι. Βλάχο et.al."
Εικόνα που περιγράφει την ηλεκτρική ροή.

Οι δυναμικές γραμμές ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι ένας συμβολικός τρόπος αναπαράστασης της έντασης και τη διεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης σε ένα πεδίο. Παρόμοιες είναι οι δυναμικές γραμμές στη ρευστομηχανική, και στην μηχανική των υπόγειων υδάτων.

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα ηλεκτρικό πεδίο στο οποίο η μορφή των

δυναμικών γραμμών είναι ομοιόμορφες παράλληλες και ισαπέχουσες. Τέτοιο είναι το φορτίο ενός πυκνωτή.

Η ηλεκτρική ροή είναι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που τέμνουν μια επιφάνεια. Συσχετίζει την επιφάνεια « $A[m]$ », την ένταση « E », τη γεωμετρική σχέση ανάμεσα στην επιφάνεια και στο πεδίο (δυναμικές γραμμές), δηλαδή τη γωνία « $\theta[rad]$ », όπως φαίνεται στην εικόνα της προηγούμενης σελίδα, η οποία αποκτήθηκε, από σχολικό βιβλίο φυσικής. Η ηλεκτρική ροή « Φ_E » $[\frac{N \cdot m^2}{C}]$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\Phi_E = E * A * \cos(\theta)$$

Σύμφωνα με τον νόμο του «Gauss» $\Phi_E = \frac{Q_{installed}}{\epsilon_0}$ μπορούμε να συσχετίσουμε την ηλεκτρική ροή με το εγκατεστημένο φορτίο. Ο νόμος τους «Gauss» είναι μία διαφορετική έκφραση του νόμου του “Coulomb”, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας διάφορους ορισμούς.

Με τον νόμο του «Gauss» είναι δυνατός ο υπολογισμός της έντασης ενός πεδίου που έχει συμμετρική κατανομή, επιλέγοντας την ανάλυση μίας επιφάνειας «Gauss».

Δυναμικό είναι το έργο της ηλεκτρικής δύναμης ανά μονάδα φορτίου, δηλαδή ένα μέτρο που εκφράζει το έργο μετακίνησης ενός σώματος μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, ανεξάρτητα του πόσο φορτισμένο είναι το σώμα (Παρόλα αυτά μας νοιάζει πόσο φορτισμένη είναι η πηγή). Όμοια ορίζουμε και την διαφορά δυναμικού, ανάμεσα σε δύο θέσεις στις οποίες βρισκόταν ένα φορτισμένο σώμα.

$$V_A = \frac{W_{A \rightarrow \infty}}{q}$$
$$V_A - V_B = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q}$$

Όπου « $V_A [V]$ » και « $V_B [V]$ » είναι το δυναμικό στα σημεία «A» και «B» αντίστοιχα, « $W_{A \rightarrow \infty [J]}$ » και « $W_{A \rightarrow B [J]}$ » είναι το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί το φορτίο έξω από το πεδίο ή στο σημείο «B» από το σημείο «A» αντίστοιχα, και « $q [C]$ » είναι το ηλεκτρικό φορτίο του σώματος.

Πάλι και στην διαφορά δυναμικού και στο δυναμικό, υπάρχει το φαινόμενο της κβάντωσης. Το έργο που απαιτεί ένα ηλεκτρόνιο, $W=1$ electronvolt [eV].

Για ένα πεδίο με φορτίο πηγής «Q», η τάση που ασκείται σε κάθε σημείο στο πεδίο είναι όση φαίνεται παρακάτω.

$$V = K_c * \frac{Q}{r}$$

Όπου το κάθε μέγεθος έχει ήδη αναλυθεί.

Η σχέση αυτή έχει προκύψει από πράξεις οι οποίες φαίνονται παρακάτω.

$$\checkmark F = K_c * \frac{|Q \cdot q|}{r^2}$$
$$\checkmark W = F * r$$

$$V = \frac{W}{q} = \frac{F \cdot r}{q} \Rightarrow V = K_c * \frac{Q}{r}$$

Σε ένα ηλεκτρικό πεδίο ισχύει και η σχέση:

$$E = \frac{V}{r}$$

Το όποιο είναι αποτέλεσμα μετά από πράξεις που φαίνονται παρακάτω.

$$\checkmark V = K_c * \frac{Q}{r}$$

$$\checkmark E = \frac{F}{q}$$

$$\checkmark F = K_c * \frac{|Q*q|}{r^2}$$

$$E * q = V * \frac{q}{r} \Rightarrow E = \frac{V}{r}$$

Όλες οι παράμετροι που έχουν χρησιμοποιηθεί, έχουν ορισθεί παραπάνω.

Τα ηλεκτροστατικά πεδία είναι χρονοσταθερά πεδία και πηγάζουν από ακίνητα (στατικά) ηλεκτρικά φορτία, τα οποία τοποθετήθηκαν στις θέσεις που κατέχουν πριν από άπειρο θεωρητικά χρόνο. Σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο, δόθηκε ενέργεια μόνο πριν από την δημιουργία του, έτσι ώστε να τοποθετηθούν τα φορτία που το δημιουργούν στις θέσεις στις οποίες οφείλουν την παρουσία τους. Τα ηλεκτροστατικά πεδία δεν έχουν να κάνουν τίποτα με τα μαγνητικά πεδία αφού, όντας στατικά, δεν έχουν κίνηση και άρα η ένταση μαγνητικού πεδίου που σχετίζεται είναι μηδενική.

Τα Ηλεκτροστατικά πεδία τα διέπουν οι νόμοι των «Maxwell & Faraday» και του «Gauss» οι οποίοι εκφράζονται από την μαθηματική σχέση που φαίνεται παρακάτω αντίστοιχα.

$$\oint \vec{E} * \vec{dl} = 0$$

$$\oint \vec{D} * \vec{dS} = \int p * dV = Q_{internal}$$

Το ηλεκτροστατικό πεδίο έχει δυναμικό. Το δυναμικό του πεδίου αυτού λέγεται ηλεκτροστατικό δυναμικό ή δυναμικό και μετριέται σε Volts [V]. Προκύπτει από διανυσματική ανάλυση

$$\vec{E} = \nabla * \Phi$$

Όπου «Φ» το δυναμικό, και με χρήση του νόμου «Maxwell & Faraday»

$$\int_{\Sigma}^A \vec{E} * \vec{dl} = - \int_{\Sigma}^A \nabla * \Phi * \vec{dl} = - \int_{\Sigma}^A d\Phi = \Phi_{\Sigma} - \Phi_A = V_{\Sigma A}$$

Η Τάση εξαρτάται μόνο από τα άκρα και είναι ανεξάρτητη της διαδρομής (που ακολουθεί επικαμπύλιο ολοκλήρωμα). Ένα τέτοιο πεδίο ονομάζεται συντηρητικό.

Σαν σημείο αναφοράς θεωρούμε σημείο εκτός πεδίου με «Φ=0». Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μονοσήμαντα την τιμή του δυναμικού ενός σημείου στον χώρο. Η τάση μεταξύ δύο σημείων «Σ» & «Α», είναι η διαφορά των δυναμικών ενεργειών των δύο σημείων, ανά μονάδα φορτίου.

Η ενέργεια ηλεκτροστατικού πεδίου δίνεται σαν συνάρτηση του αθροίσματος των διαφορών του δυναμικού.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\substack{\Sigma \text{ όλα} \\ \text{τα φορτία}}} \Phi * dq$$

Και μετά από πράξεις καταλήγουμε στην σχέση

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Phi_i * Q_i$$

Ο πυκνωτής είναι μία ειδική διάταξη που αποτελείται από δύο αγωγούς σε κάποια απόσταση «t» μεταξύ τους (οι αγωγοί είναι ο πυκνωτής). Μεταξύ των δύο αγωγών υπάρχει κάποιο μονωτικό όπως ο αέρας ή γενικά κάποιο διηλεκτρικό. Οι δύο αγωγοί πρέπει να είναι φορτισμένοι με αντίθετα φορτία «-Q» και «+Q», και δεν πρέπει να υπάρχουν άλλοι αγωγοί στον χώρο σε πεπερασμένη απόσταση από τους δύο αγωγούς του πυκνωτή (γι' αυτό και πρέπει να είναι κοντά μεταξύ τους). Η διάταξη του πυκνωτή μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια. Οι δύο αγωγοί ονομάζονται και σπλισμοί.



Figure 6. Εικόνα 5.40 από το βιβλίο "Φυσική, ομάδα προσανατολισμού θετικών σπουδών, Β' Γενικού λύκειο" των "Ι. Βλάχο et.al."
Εικόνα που περιγράφει έναν κλασικό τύπο πυκνωτή, δύο φύλλα αγωγού χωρισμένα από ένα διηλεκτρικό (ή μονωτή).

Τάση του πυκνωτή ονομάζεται η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο αγωγών – πόλων, και με αυτήν ο πυκνωτής θεωρείται ότι είναι φορτισμένος.

Χωρητικότητα πυκνωτή είναι ένα μέγεθος χαρακτηριστικό για κάθε υλικό που μπορεί να βρεθεί στην διάταξη του πυκνωτή, μεταξύ των δύο αγωγών. Είναι σταθερό μέγεθος για έναν συγκεκριμένο πυκνωτή και ίσο με

$$C = \frac{Q}{V} = \text{Σταθερό}$$

όπου «C» η χωρητικότητα του πυκνωτή, η οποία μετριέται σε [F], αλλά είναι πολύ μεγάλη μονάδα και γι' αυτό χρησιμοποιούμε υποδιαρέσεις «micro (10⁻⁶)», «nano (10⁻⁹)», «pico (10⁻¹²)». Ο ακριβής υπολογισμός της χωρητικότητας γίνεται μέσω επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων και θεωρίας του ομοιόμορφου διπολικού στρώματος.

Ο συμβολισμός του είναι ως εξής: Δύο παράλληλες γραμμές κάθετες με τις γραμμές κίνησης των ηλεκτρονίων σε ένα κύκλωμα.

Σε έναν επίπεδο πυκνωτή με αγωγούς δύο πλάκες η χωρητικότητα του ισούται με:

$$C = \epsilon_0 * \frac{A}{t}$$

όπου «ε₀ [$\frac{C^2}{N \cdot m^2}$]» η διηλεκτρική σταθερά στο κενό, «A [m²]» εμβαδόν της επιφάνειας της πλάκας και τέλος «t [m]» απόσταση μεταξύ των δύο πλακών

Η αποθηκευμένη ενέργεια [J] σε ένα πυκνωτή είναι ίση με

$$U = \frac{1}{2} * C * V^2$$

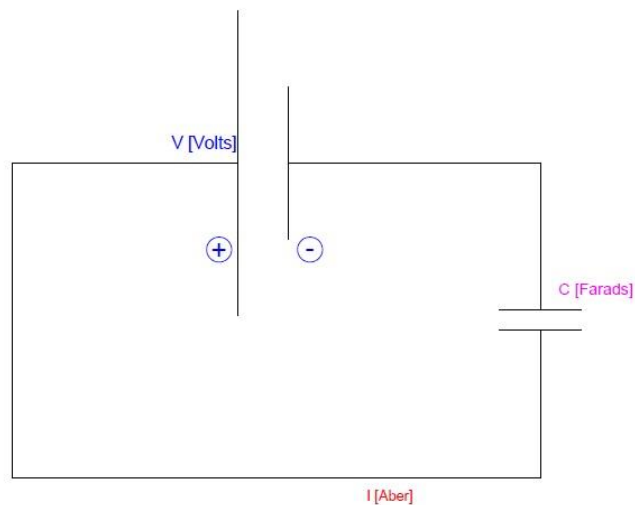


Figure 7. Ο Συμβολισμός ενός πυκνωτή σε ένα κύκλωμα.

Τα διηλεκτρικά είναι μία ονομασία των μονωτών και είναι υλικά τα οποία δυσκολεύουν την ελεύθερη κίνηση των ηλεκτρονίων δια μέσου τους, διότι δεν υπάρχουν ελευθέρως ηλεκτρόνια. Τα διηλεκτρικά είναι ηλεκτρικά ουδέτερα. Η ονομασία "μονωτής" επικρατεί αν θέλει κανείς να τονίσει την ανικανότητα του υλικού να

μεταφέρει ηλεκτρικό ρεύμα. Η ονομασία διηλεκτρικό χρησιμοποιείται για να εκφραστεί η συμπεριφορά του υλικού σε ένα ηλεκτρικό πεδίο.

Ένα πολύ σημαντικό μέγεθος των διηλεκτρικών είναι η διηλεκτρική σταθερά η οποία είναι ένα μέτρο που ορίζει την πόλωση των διηλεκτρικών σε ηλεκτρικό πεδίο. Πόλωση είναι η ανακατανομή των φορτίων ενός διηλεκτρικού όταν αυτό βρίσκεται σε έναν πυκνωτή του οποίου το φορτίο παραμένει αμετάβλητο. Η πόλωση λέγεται και αλλιώς χωρική πυκνότητα της διπολικής ροπής ή Πολικότητα και υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο, όπου «V [m³]» ο όγκος και έχει μονάδες [C/m²].

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

Ένας πυκνωτής μπορεί να έχει μεταξύ των δύο αγώγιμων πλακών έναν μονωτή όπως είναι ένα πολυμερές. Αυτό αυξάνει τη χωρητικότητα του πυκνωτή, αντικαθιστά το «ε₀», δηλαδή την διηλεκτρική σταθερά στο κενό με την διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού ε και έτσι ο τύπος γίνεται όπως φαίνεται παρακάτω

$$C = \epsilon * \frac{A}{t}$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις έχουμε την σχετική διηλεκτρική σταθερά “ε” σαν δεδομένο κάποιου προβλήματος. Η σχετική διηλεκτρική σταθερά είναι ο λόγος της διηλεκτρικής σταθεράς του διηλεκτρικού προς την διηλεκτρική σταθερά στο κενό, η οποία είναι και αδιάστατη (ε [-]).

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Και έτσι η χωρητικότητα ενός πυκνωτή μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$C = \epsilon_r * \epsilon_0 * \frac{A}{t}$$

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας με ορισμένες σχετικές διηλεκτρικές σταθερές.

	Ειδική αντίσταση (μολιπ. cm)	Διηλεκτρική σταθερά			Ειδική αντίσταση (μολιπ. cm)	Διηλεκτρική σταθερά			Ειδική αντίσταση (μολιπ. cm)	Διηλεκτρική σταθερά		
Μίαλλα Σιδερούχα	Χυσοσίδηρο	49 έως 56	—	Σύνθετα Μεταλλικά	Αλουμινοκαρβίδιο του πυριτίου	5 έως 12	—	Θερμοσκληρυνόμενα	Εποξειδικά	1 × 10 ²² έως 6 × 10 ²¹	3.4 έως 5.7	
	Χάλκινης υψηλής περιεκτικότητας σε άνθρακα	17 έως 20	—		Πολυμερικά	CFRP	1.7 × 10 ¹³ έως 1 × 10 ¹¹		—	Φανολικά	3 × 10 ¹⁸ έως 3 × 10 ¹⁹	4.0 έως 6.0
	Χάλκινης μέσης περιεκτικότητας σε άνθρακα	15 έως 22	—		CFRP	1 × 10 ¹⁸ έως 2 × 10 ¹²	4.2 έως 5.2		—	Πολυστρώτα	3 × 10 ¹⁸ έως 3 × 10 ¹⁹	2.8 έως 3.3
	Χάλκινης χαμηλής περιεκτικότητας σε άνθρακα	15 έως 20	—		Φυσικά	Μπαμπού	6 × 10 ¹³ έως 7 × 10 ¹⁴		5 έως 7	Άσφαιτα πολυμερών	Ευκαμπος πολυμερής σφόνδ (VLD)	1 × 10 ²⁰ έως 1 × 10 ²³
Χάλκινης χαμηλής περιεκτικότητας σε άνθρακα	15 έως 35	—	Μπαμπού	Φελός	1 × 10 ¹⁰ έως 1 × 10 ¹¹	6 έως 8	Ευκαμπος πολυμερής σφόνδ (LD)	1 × 10 ²⁰ έως 1 × 10 ²³	1.15 έως 1.2			
Ανεξάρτητα χάλκινης	64 έως 107	—	Μπαμπού	Δέρμα	1 × 10 ¹⁰ έως 1 × 10 ¹⁰	5 έως 10	Ευκαμπος πολυμερής σφόνδ (MD)	1 × 10 ²⁰ έως 1 × 10 ²³	1.2 έως 1.3			
Κράμα αλουμινίου	2.5 έως 5.0	—	Μπαμπού	Ξύλο, κοινό (αέρας)	6 × 10 ¹³ έως 2 × 10 ¹⁴	5 έως 6	Ευκαμπος πολυμερής σφόνδ (HD)	1 × 10 ²¹ έως 1 × 10 ²¹	1.04 έως 1.1			
Κράμα χαλκού	1.7 έως 24	—	Πολυμερή	Ξύλο, κοινό (ημέρας)	2 × 10 ¹⁸ έως 7 × 10 ¹⁴	5 έως 6	Διοκαμπος πολυμερής σφόνδ (LD)	3 × 10 ¹⁸ έως 3 × 10 ²⁰	1.1 έως 1.19			
Κράμα μαγνήσιου	4.2 έως 15	—	Ελαστομερή	Βουτυλικό ελαστικό	1 × 10 ¹⁵ έως 1 × 10 ¹⁸	2.8 έως 3.2	Διοκαμπος πολυμερής σφόνδ (MD)	1 × 10 ¹⁸ έως 1 × 10 ²⁰	1.2 έως 1.45			
Κράμα νικελίου	6 έως 114	—	Ελαστομερή	EVA	3.2 × 10 ²¹ έως 1 × 10 ²²	2.9 έως 3.0	Διοκαμπος πολυμερής σφόνδ (HD)	1 × 10 ¹⁸ έως 1 × 10 ²⁰	1.2 έως 1.45			
Κράμα πτανίου	100 έως 170	—	Ελαστομερή	Ισοπρένιο (IR)	1 × 10 ¹⁵ έως 1 × 10 ¹⁸	2.5 έως 3.0						
Κράμα βολφραμίου	10.2 έως 14	—	Ελαστομερή	Φυσικό ελαστομερές (NR)	1 × 10 ¹⁵ έως 1 × 10 ¹⁸	3.0 έως 4.5						
Κράμα ψευδαργύρου	5.4 έως 7.2	—	Ελαστομερή	Νεοπρένιο (CR)	1 × 10 ¹⁵ έως 1 × 10 ¹⁸	6.7 έως 8.0						
Κεραμικά				Ελαστομερή	Ελαστομερή πολυμερής σφόνδ	3 × 10 ¹⁸ έως 1 × 10 ²²	5.0 έως 9.0					
				Ελαστομερή	Ελαστομερή σιλκόνης	3 × 10 ¹⁸ έως 1 × 10 ²²	2.9 έως 4.0					
Υαλοί	Βορσιτωτική υάλος	3 × 10 ²¹ έως 3 × 10 ²²	4.6 έως 6.0	Θερμοπλαστικά	ABS	3 × 10 ²¹ έως 3 × 10 ²²	2.8 έως 3.2					
	Κίτρινη υάλος	2 × 10 ¹⁸ έως 1 × 10 ²¹	5.3 έως 6.2		Πολυμερή κυταρίνης (CA)	1 × 10 ²¹ έως 4 × 10 ²⁰	3.0 έως 5.0					
	Παράθυρη υάλος	1 × 10 ²³ έως 1 × 10 ²⁷	3.7 έως 3.9		Ιονομερές (I)	3 × 10 ²¹ έως 3 × 10 ²¹	2.2 έως 2.4					
	Υάλος νεοπροβιόλου	8 × 10 ¹⁴ έως 8 × 10 ¹⁸	7.0 έως 7.6		Νάιλον (PA)	1.5 × 10 ¹⁹ έως 1.1 × 10 ²⁰	3.7 έως 3.9					
Παράθυρη	Οπτική υάλος	1 × 10 ¹⁶ έως 3 × 10 ¹⁸	7.0 έως 10	Πολυσυνοβιακό (PC)	1 × 10 ²⁰ έως 1 × 10 ²¹	3.1 έως 3.3						
	Σκυρόδεμα, κοινό	1.8 × 10 ¹² έως 1.8 × 10 ¹²	8.0 έως 12	PEEK	3 × 10 ²¹ έως 3 × 10 ²²	3.1 έως 3.3						
	Λίθος	1 × 10 ¹⁶ έως 1 × 10 ¹⁴	6.0 έως 18	Πολυσυνοβιακό (PE)	3 × 10 ²¹ έως 3 × 10 ²²	2.2 έως 2.4						
Έξυκα	Αλουμίνιο	1 × 10 ²⁰ έως 1 × 10 ²²	6.5 έως 6.8	PET	3 × 10 ²⁰ έως 3 × 10 ²¹	3.5 έως 3.7						
	Νιρίδιο του αλουμινίου	1 × 10 ¹⁹ έως 1 × 10 ²¹	8.3 έως 9.3	Ακρυλικό (PMMA)	3 × 10 ²¹ έως 3 × 10 ²²	3.2 έως 3.4						
	Καρβίδιο του βερμίου	1 × 10 ²¹ έως 1 × 10 ²¹	4.8 έως 8.0	Ακτάλη (PCM)	3 × 10 ²¹ έως 3 × 10 ²¹	3.6 έως 4.0						
	Πυρίτιο	1 × 10 ²¹ έως 1 × 10 ²²	11 έως 12	Πολυπροπυλένιο (PP)	3 × 10 ²¹ έως 3 × 10 ²¹	2.1 έως 2.3						
	Καρβίδιο του πυριτίου	1 × 10 ²¹ έως 1 × 10 ²¹	6.3 έως 9.0	Πολυστυρένιο (PS)	1 × 10 ²⁰ έως 1 × 10 ²¹	3.0 έως 3.3						
	Νιρίδιο του πυριτίου	1 × 10 ²¹ έως 1 × 10 ²¹	7.9 έως 8.1	Θερμοπλαστικό πολυμερής σφόνδ	3 × 10 ¹⁸ έως 3 × 10 ¹⁸	6.6 έως 7.1						
	Καρβίδιο του βολφραμίου	20 έως 100	—	PVC	1 × 10 ²⁰ έως 1 × 10 ²¹	3.1 έως 4.4						
				Τεφλόν (PTFE)	3 × 10 ²³ έως 3 × 10 ²⁴	2.1 έως 2.2						

Figure 8. Table from the book: " Materials: engineering, science, processing and design" by "Michael Ashby et. al." from the supplement.

Πίνακας που παρουσιάζει την σχετική διηλεκτρική σταθερά καθώς και την ειδική αντίσταση από πλήθος υλικών.

Η Πολικότητα συνδέεται άμεσα με την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει ή όχι έναν πυκνωτή (επειδή το διηλεκτρικό δεν επιτρέπει την κίνηση των ηλεκτρονίων). Με τον απλό τύπο που φαίνεται παρακάτω, όπου όλα τα μεγέθη είναι γνωστά.

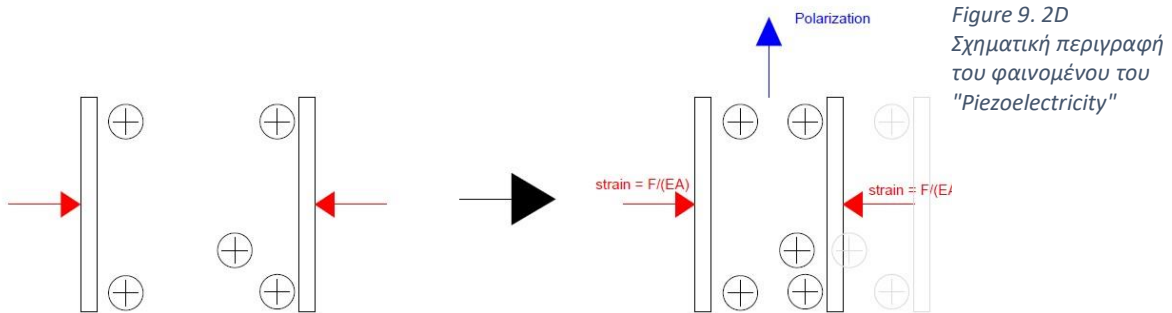
$$\vec{P} = \epsilon_0 * (\epsilon_r - 1) * \vec{E}$$

Κάθε διηλεκτρικό έχει ένα όριο. Αν ασκήσουμε σε αυτό μία ένταση πάρα πολύ μεγάλη αυτό θα καταστραφεί και θα πάψει να είναι διηλεκτρικό. Αυτή η τιμή, η τιμή της έντασής του ηλεκτρικού πεδίου πάνω από την οποία το διηλεκτρικό διασπάται ονομάζεται διηλεκτρική αντοχή, και εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό, από το πάχος του υλικού. Στην περίπτωση του φλεξοηλεκτρισμού όμως, ευτυχώς, οι εντάσεις είναι αρκετά μικρές για να προκληθεί κάποια διηλεκτρική κατάρρευση.

Το ρεύμα της πόλωσης προκύπτει από τον τύπο που φαίνεται παρακάτω.

$$J_{\vec{P}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Ο Πιεζοηλεκτρισμός είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η μηχανική παραμόρφωση ενός διηλεκτρικού προκαλεί σχετική μετατόπιση των ηλεκτρικών φορτίων και των ιόντων στο εσωτερικό του, δημιουργώντας δίπολα, πόλωση και επομένως ηλεκτρικό πεδίο σε αυτό.



Το φαινόμενο αυτό είναι αντιστρεπτό, δηλαδή αν δώσει κανείς ηλεκτρικό έργο, μπορεί να παραλάβει μηχανικό, αλλά αφορά υλικά τα οποία είναι δομημένα με κρυστάλλους χωρίς κέντρο συμμετρίας. Ο πιεζοηλεκτρισμός, έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε μία γκάμα εφαρμογών όπως είναι οι αναπτήρες, τα ρολόγια μέχρι και να ραντάρ «sonar» των υποβρυχίων.

Σημαντικό είναι να επισημάνουμε ότι είναι απόρροια της ομοιόμορφης σταθερής τροπής.

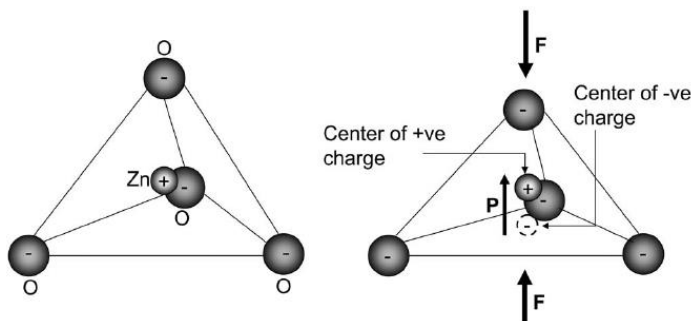


Figure 10. Εικόνα από δημοσίευση με τίτλο "Electromechanical coupling in nonpiezoelectric materials due to nanoscale nonlocal size effects: Green's function solutions and embedded inclusions" των "R. Maranganti et. al." (Fig. 1). Σχηματική απεικόνιση του φαινομένου του πιεζοηλεκτρισμού.

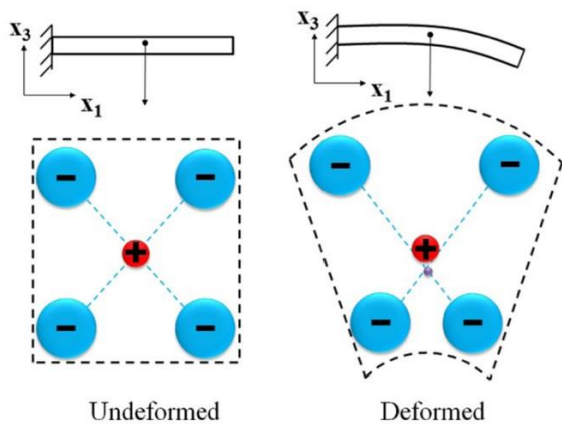


Figure 11. Εικόνα από την δημοσίευση με τίτλο "Measurement of flexoelectric response in polyvinylidene fluoride films for piezoelectric vibration energy harvesters" των "Gi-Woo Kim & S. B. Choi" (Fig. 2).
σχηματική αναπαράσταση του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

Σε αντιπαράθεση με τον Πιεζοηλεκτρισμό, βρίσκεται ο Φλεξοηλεκτρισμός, στον οποίο, η πολικότητα προκύπτει από την όχι κεντροσυμμετρική κρυσταλλική δομή, αλλά από την μεταβαλλόμενη τροπή «strain gradient». Είναι ένα φαινόμενο πιο οικουμενικό, δηλαδή αφορά μεγαλύτερη γκάμα υλικών. Το μέγεθος του φαινομένου είναι σχετικά μικρότερο από αυτό του πιεζοηλεκτρισμού, γι' αυτό δεν έχει γίνει ευρέως γνωστό, αλλά είναι όλα σχετικά. Διάφορα κεραμικά και πολυμερή έχουν δείξει πως έχουν μεγάλες φλεξοηλεκτρικές ικανότητες και η βελτιστοποίηση του φαινομένου έχει εγείρει ενδιαφέρον.

1.2. Το φυσικό φαινόμενο

Το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, όπως περιγράφηκε και προηγουμένως, στο κεφάλαιο με σημαντικά στοιχεία ηλεκτρισμού, είναι ένα φαινόμενο, που προέρχεται από την κρυσταλλική δομή ενός υλικού, και εξαιτίας αυτής, δημιουργεί μία πολικότητα.

Η Μελέτη του φαινομένου άρχισε από τα μέσα του 20^{ου} αιώνα, από ένα αντίστοιχο φαινόμενο στα ρευστά. Ο Φλεξοηλεκτρισμός στα στερεά, να μεν είχε παρατηρηθεί, αλλά ο ερευνητικός κόσμος θεωρούσε ότι είναι ένα είδος επιφανειακού πιεζοηλεκτρισμού. Μάλιστα, έγιναν και αρκετές εφαρμογές με αυτό το σκεπτικό, ένα μηχάνημα τύπου αμορτισέρ, μία καμπτώμενη δοκό που στην πάνω και κάτω ίνα ήταν ενισχυμένη με φλεξοηλεκτρικό υλικό, και άλλα. Η διαφοροποίηση έγινε σιγά Μέχρι και τον 21^ο αιώνα ερευνητές αποκαλούσαν αυτό το φαινόμενο επιφανειακό πιεζοηλεκτρισμό.

Αυτό το φαινόμενο προκαλείται από την κρυσταλλική δομή, των υλικών. Λόγω του αρκετά ασφυκτικού κρυσταλλικού πλέγματος, οι μετακινήσεις των ατόμων δεν είναι εύκολες. Όταν δεχθεί ένα φλεξοηλεκτρικό υλικό τροπή, τότε προφανώς και η κρυσταλλική δομή θα δεχθεί. Αν η τροπή αυτήν δεν είναι ομοιόμορφη, αν δηλαδή σε κάποια σημεία είναι μεγαλύτερη και σε κάποια άλλα όχι, τότε υπάρχουν σημεία στην κρυσταλλική δομή, που έχουν και αυτά υποστεί μεγαλύτερη τροπή, και άλλα λιγότερη. Καταλήγουμε σε μία εικόνα, όπου κάποιοι πυρήνες ατόμων βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους, από άλλους πυρήνες με κάποιους άλλους, όπως φαίνεται και σε παρακάτω εικόνα. Αυτό το φαινόμενο δημιουργεί μια πολικότητα, η πολικότητα αυτή αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο. Θα μπορούσε να πει κάποιους ότι πλέον το φλεξοηλεκτρικό υλικό είναι ένα ομοιόμορφο διπολικό στρώμα, αλλά σίγουρα είναι ένας πυκνωτής, και από αυτόν, φυσικά, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το ηλεκτρικό φορτίο.

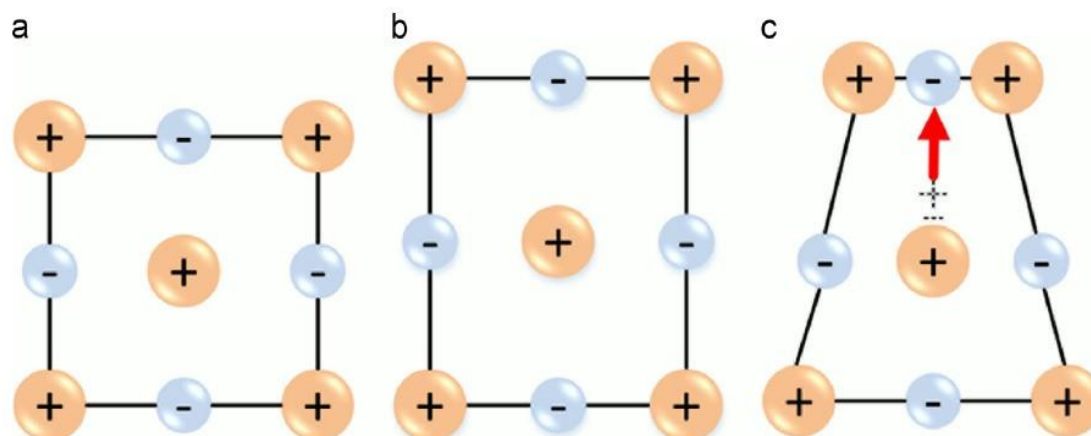


Figure 1. Εικόνα από την δημοσίευση των «Xiaoning jiang et. al.» με τίτλο «Flexoelectric nano-generator Materials structures and devices», που δημοσιεύτηκε το «2013». (Fig.1)

Σχηματική εξήγηση του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού. Όταν υπάρχει «uniform strain» και όταν υπάρχει «non-uniform strain», με «strain gradient».

Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, αυτό το φαινόμενο που προκαλείται από «strain gradient», δημιουργεί ενός είδους πόλωση στην κρυσταλλική δομή του, και έτσι μετατρέπεται σε πυκνωτή.

Όπως είναι αναμενόμενο, αυτό το φαινόμενο, έχει αποτέλεσμα πιο δυνατό, όταν το «strain gradient» είναι πιο έντονο. Αυτό επιτυγχάνεται από την εξωτερική φόρτιση, το είδος της εξωτερικής φόρτισης, και την γεωμετρία του φορέα. Κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι έχει σχέση και με το υλικό. Το μέτρο ελαστικότητας μπορεί να είναι μεταβαλλόμενο, αλλά σε αυτή την εργασία κρίθηκε πολύ λεπτομέρεια, για να εξετασθεί. Σε κάθε περίπτωση βέβαια, το σταθερό πλέον μέτρο ελαστικότητας έχει μεγάλη επίπτωση στη φόρτιση του υλικού. Ένα υλικό με μικρό μέτρο ελαστικότητας, οπωσδήποτε παραμορφώνεται πολύ περισσότερο με μία ίδια δύναμη, σε σχέση με ένα άλλο υλικό, με μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας. Ο δεύτερος παράγοντας που παίζει σημαντικό ρόλο είναι το υλικό, όχι οι μηχανικές ιδιότητες του που σχετίζονται με την παραμόρφωση, αλλά οι ιδιότητες του σαν διηλεκτρικό. Υπάρχει μία σταθερά, που ονομάζεται σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού, και αυτή, δείχνει πόσο έντονο είναι το «effect», για μία συγκεκριμένη κλίση τροπής.

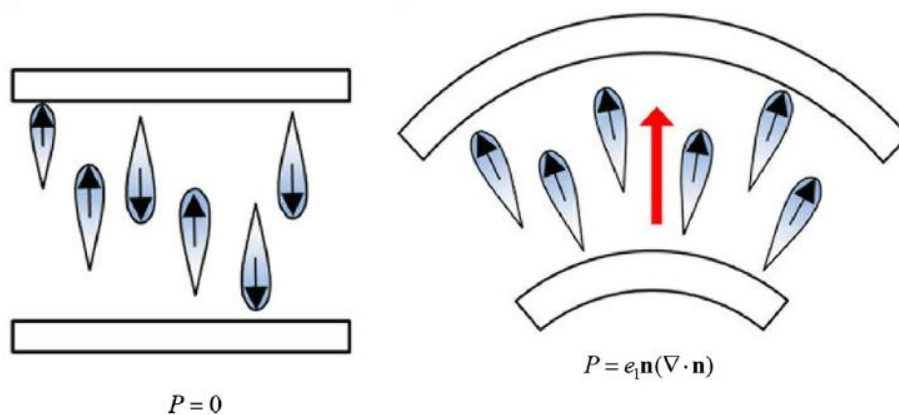


Figure 2. Εικόνα από την δημοσίευση των «Xiaoning jiang et. al.» με τίτλο «Flexoelectric nanogenerator Materials structures and devices», που δημοσιεύτηκε το «2013». (Fig.3)

Όσο πιο έντονη κάμψη έχουμε τόσο πιο έντονη είναι η διάταξη.

Αυτή η σταθερά που συμβολίζεται ως « μ_{ij} », δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας τανυστής τετάρτης τάξης, που μειώνει την τάξη του λόγω συμμετρίας, και όσο μεγαλύτεροι είναι οι όροι του, τόσο πιο σημαντικό είναι το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού. Έχει να κάνει με το υλικό, και θα αναλυθεί σε μεγαλύτερο βαθμό στην συνέχεια.

1.3. Τα νέα υλικά - πολυμερή

Το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, είναι ένα οικουμενικό φαινόμενο, γιατί αναφέρεται σε όλα τα διηλεκτρικά, δηλαδή σε όλους τους μονωτές. Ένα τεράστιο μέρος από δομικά υλικά είναι μονωτές, όπως είναι το σκυρόδεμα, κόλλες, σύνθετα υλικά και πολυμερή. Τα πολυμερή μάλιστα, είναι και πολύ καλά διηλεκτρικά. Ερευνητές έχουν δείξει, όπως φαίνεται και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ότι σε ένα υλικό, ανάλογα με τις διηλεκτρικές του ικανότητες, όπως είναι η διηλεκτρική σταθερά, αυξάνονται και οι φλεξοηλεκτρικές ικανότητες (Tagantsev, 1986), όπου το « γ_{kl} » είναι ένας σταθερός τανυστής που έχει να κάνει με τις παραμέτρους του υλικού, « χ_{ij} » είναι η ευαισθησία του διηλεκτρικού, « e » είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου και « a » είναι η ατομική διάσταση.

$$\mu_{ijkl} = \chi_{ij} * \gamma_{kl} * \frac{e}{a}$$

Επομένως έχουμε ένα φαινόμενο που μπορούμε να το εκμεταλλευτούμε χωρίς κάποιο έξοδο, με μία φόρτιση αέρα, σεισμού, ή ακόμα και βροχής (Vantasever et. al., 2010), χρησιμοποιώντας υλικά καθημερινής χρήσης.

Τα πολυμερή υλικά, είναι εξαιρετικά διηλεκτρικά, και έχουν εμφανίσει και σημαντικές φλεξοηλεκτρικές ικανότητας. Ένα υλικό μάλιστα, δοκιμασμένο, από μεγάλο πλήθος ερευνητών

είναι το φθοριούχο πολυβινυλιδένιο, το οποίο αναφέρεται στην βιβλιογραφία, και στην παρούσα εργασία σαν «PVDF».

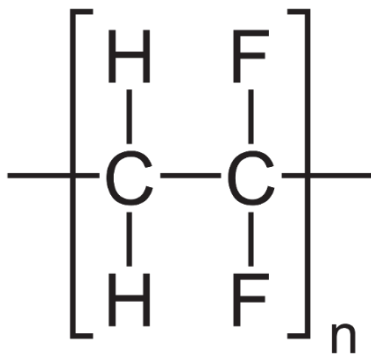


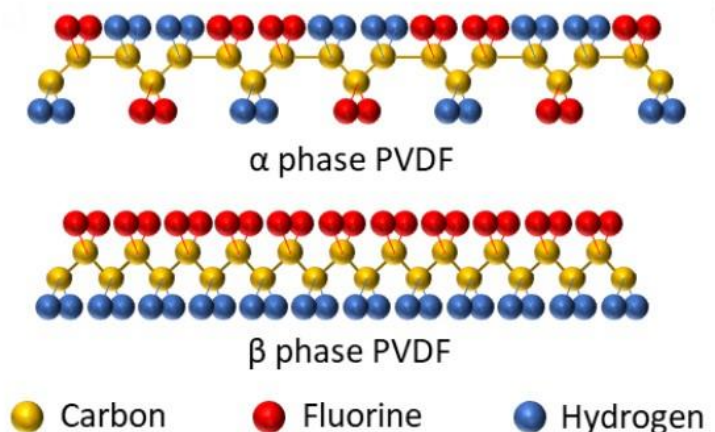
Figure 2. Εικόνα που αποκτήθηκε από τον ιστότοπο, «https://en.wikipedia.org/wiki/Polyvinylidene_fluoride». Ο χημικός δεσμός των ατόμων που σχηματίζουν το PVDF.

Το «PVDF» πρόκειται, για ένα πολυμερές, με χημικό τύπο, αντίστοιχο του πολυβινυλοχλωρίδιου «PVC», μόνο που αντί για το χλώριο, έχει φθόριο. Ο χημικός τύπος φαίνεται παραδίπλα.

Το υλικό «PVDF», όπως και άλλα πολυμερή διατάσσονται σε αλυσίδες, οι οποίες μπορούν να πάρουν διάφορες μορφές. Αυτό επηρεάζει την λεγόμενη φάση του πολυμερούς. Οι ηλεκτρομηχανικές ιδιότητες εξαρτώνται από τον τύπο διάταξης των

Figure 1. Εικόνα που αποκτήθηκε από την δημοσίευση με τίτλο «Nanostructured polymer-based piezoelectric and triboelectric materials and devices for energy harvesting applications» των «Qingshen Jing & Sohini Kar-Narayan» που δημοσιεύτηκε το «2018». (Fig. 1)

Η αλυσίδα πολυμερούς PVDF, για διαφορετικές φάσεις.



ατόμων στην αλυσίδα του πολυμερούς. Γενικά η φάση «β» («β-phase») είναι πέρα από η πιο συχνή φάση, και αρκετά αποδοτική σε αυτά τα θέματα. Η φάση «α» όμως είναι ακόμα καλύτερη, γιατί και όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, οι αλυσίδες αυτές, έχουν καλύτερη πολικότητα, λόγω της ασυμμετρίας στην δομή τους. Γι' αυτό ιδανικά θα προτιμούσαμε «α-Phase». Ο προσδιορισμός της φάσης ενός πολυμερούς είναι μία μεγάλη ιστορία, και δεν θα γίνει λόγος για αυτή σ' αυτή την εργασία. Γενικά με χημικούς τρόπους είναι δυνατή η επεξεργασία της φάσης.

Το υλικό αυτό, το αγοράσαμε και εμείς. Από τον προμηθευτή: «CS Hyde Company». Αυτοί, οι οποίοι είναι προμηθευτές αρκετών υλικών, τα οποία δοκιμάστηκαν και σε άλλες εργασίες (Baojin Chu & D.R. Salem, 2016), μας προμήθευσαν με λίστα των ιδιοτήτων του υλικού, που αγοράσαμε. Δυστυχώς δεν ήταν στο σύστημα «S.I.».

PROPERTY	UNITS	TEST METHOD	Kynar® 740 PVDF
MECHANICAL			
Tensile Strength, yield	psi	ASTM D 638	7,000
Ultimate Tensile Strength	psi	ASTM D 638	6,100
Tensile Elongation, break	%	ASTM D 638	50-250
Tensile Modulus	psi	ASTM D 638	250,000
Flexural Modulus	psi	ASTM D 790	260,000
Hardness, Shore D	---	ASTM D 2240	78
Abrasion Resistance	mg/1000 cycles	Taber CS 1 kg	5-10
Tear Strength, propagation	g/mil	ASTM D 1922	100
Refractive Index	---	ASTM D 542	1.42
IMPACT			
Izod Impact, notched	ft-lb/in	ASTM D 256	2.0 – 4.0
Charpy Impact	ft-lb/in	ISO 179	8.2
THERMAL			
VICAT Softening Point	°C	ASTM D 1525	170
Crystalline Melting Point	°C	ASTM D 3418	170
Continuous Use Temperature	°C	DSC	150
Thermal Conductivity	W/m ² K	ASTM C 177	0.19
Relative Thermal Index, Electrical Strength	°C	UL 746B	50
Relative Thermal Index, Mechanical Impact	°C	UL 746B	50
Relative Thermal Index, Mechanical Strength	°C	UL 746B	50
Coefficient of Thermal Expansion	°F ⁻¹	ASTM D 696	6.6x10 ⁻⁵
Low Temperature Brittleness Point	°C	ASTM D 746A	0-10
PHYSICAL			
Specific Gravity		ASTM D 792	1.78
Area Factor	in ² /lb/mil	---	15,326
Water Absorption, 24 hrs @73°F	%	ASTM D 570	0.03
ELECTRICAL			
Dielectric Strength, in air @ .003"	V/mil	ASTM D 149	1,900
Dielectric Constant, 1kHz	---	ASTM D 150	7.5 –9.0
Dissipation Factor, 1kHz	---	ASTM D 150	0.01-0.03
Surface Resistivity	ohms/square	ASTM D 257	2 x 10 ¹⁴
Volume Resistivity	ohm-cm	ASTM D 257	2 x 10 ¹⁴
IGNITION CHARACTERISTICS			
Flame Class Rating	---	UL 94	VTM-0
Oxygen Index (LOI)	%	ASTM D 2863	43
UL File Number	---	---	E54699
MISCELLANEOUS			
Color	Translucent White		
Resistance to UV Radiation	Excellent		
Permeability to gases	Low		
Chemical Resistance to strong acids	Excellent		
Crystallinity Rating	semi-crystalline		
Polymer Type	Homopolymer		
Thickness tolerances	+/- 10% of nominal thickness		

Figure 4. Τα χαρακτηριστικά του PVDF που προμηθευτήκαμε από την εταιρία «CS Hyde Company». Αυτός ο πίνακας βρίσκεται διαθέσιμος, για «Download» από την ιστοσελίδα της εταιρίας.
«<https://catalog.cshyde.com/Asset/Data%20Sheet%2032-F.doc>»

Από τον παραπάνω πίνακα μπορεί κανείς να παρατηρήσει πόσο μεγάλες είναι οι αντοχές του υλικού. Έχει αντοχή διαρροής « $f_y = 48.3 \text{ MPa}$ » και μέτρο ελαστικότητας « $E \approx 1.7 \text{ GPa}$ ». Μπορεί κάποιος να πάρει από τον πίνακα αυτόν και την σχετική διηλεκτρική σταθερά « $\epsilon_r \approx 8$ »

Αυτές οι ιδιότητες είναι πολύ καλές, και για δομικό υλικό, έχει βέβαια μικρό μέτρο ελαστικότητας, αλλά τεράστια αντοχή, το οποίο βέβαια βοηθάει εμάς που θέλουμε να μελετήσουμε το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, αλλά σαν δομικό στοιχείο, η ευκαμψία του δεν προτιμάται, βέβαια, η παρούσα κύρια χρήση του υλικού, είναι φιλμ ενίσχυσης, δηλαδή τοποθετείται σαν ενίσχυση σε υφιστάμενες κατασκευές, όμοια με την ενίσχυση με σύνθετο υλικό, π.χ. στην κάτω παριά από δοκάρια, και σε υποστυλώματα γύρω γύρω.

Το υλικό αυτό, θα μπορούσε σε κάθε περίπτωση να χρησιμοποιηθεί σε πληθώρα εφαρμογών, πέρα από κτηριακές εφαρμογές, αφού είναι εύκαμπτο, και εύκολα τροποποιήσιμο. Θα μπορούσαν να κατασκευαστούν μικρο-μηχανισμοί, όπως είναι οι «sensors» και οι «actuators». Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε μηχανήματα, τα οποία πρέπει να κάνουν μετατροπή μηχανικού έργου σε ηλεκτρικό ή το αντίθετο, όπως οι αναπτήρες και τα ρολόγια. Ουσιαστικά θα μπορούσε να αντικαταστήσει τελείως πιεζοηλεκτρικά υλικά, αφού είναι πιο φτηνό, πιο εύχρηστο, και πιο εύκολα προμηθεύσιμο.

1.4. Το κίνητρο, «motivation»

Το κίνητρο μελέτης του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, μπορούμε να το χωρίσουμε σε δύο κομμάτια. Το πρώτο είναι το «metrology», το μετρητικό κομμάτι, το οποίο περιλαμβάνει τις σταθερές του προβλήματος, που πρέπει να προσδιορισθούν για την πλήρη εκμετάλλευση του φαινομένου, και στην συνέχεια στο «actuation», κατά το οποίο παίρνουμε ηλεκτρικό σήμα, ή δίνουμε, σε κάθε περίπτωση έχει να κάνει με την μετατροπή έργου από μηχανικό στο ηλεκτρικό ή το αντίθετο.

Το κομμάτι του «metrology» μπορεί να χωριστεί σε δύο υποκομμάτια. Αυτό του απ' ευθείας φαινομένου, «direct flexoelectric effect», και αυτό του αντίστροφου φαινομένου, «converse flexoelectric effect».

Το κομμάτι του απευθείας φαινομένου, που στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως «direct flexoelectric effect», αφορά στην μετατροπή έργου από μηχανικό σε ηλεκτρικό και απαρτίζεται από την σταθερά « μ_{ijkl} ». Αυτή η σταθερά δεν είναι τίποτα άλλο παρά από έναν τανυστή τετάρτης τάξης, ο οποίος μετατρέπει τις μονάδες ρυθμού μεταβολής των τροπών στην επιφάνεια του φορέα, σε μονάδες πολικότητας.

Αν υπάρχουν κάποιες μορφές συμμετρίας, τότε μπορεί κανείς να αφαιρέσει όρους από αυτόν τον τανυστή. Συγκεκριμένα στην περίπτωση της κυβικής συμμετρίας, ο τανυστής « μ_{ijkl} », μπορεί να γραφτεί ως « μ_{ij} », τανυστής 2ας τάξεως, με μόνες μη μηδενικές τιμές τις:

- « μ_{11} »:
Η φλεξοηλεκτρική σταθερά όταν εμφανίζονται τροπές στον άξονα «1», και ο ρυθμός μεταβολής του είναι και αυτός σε αυτόν. Ο άξονας «1» είναι συνήθως ο διαμήκης άξονας.
- « μ_{13} »:
Το οποίο είναι ίσο με το « μ_{31} ». Πολλές φορές μπορεί να ονομασθεί και « μ_{12} », ανάλογα με το καρτεσιανό σύστημα που έχει επιλεγεί κάθε φορά. Στην παρούσα εργασία, επιλέγουμε τον άξονα τρία να είναι προς την κάτω παριά μιας διατομής, και γι' αυτό χρησιμοποιούμε τον όρο « μ_{13} ». Πρόκειται για την σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού, όταν υπάρχουν τάσεις στον άξονα «1», ενώ το «strain gradient» γίνεται στον άξονα «3». Να σημειώσουμε ότι όταν μιλάμε για τάσεις, εννοούμε και τροπές, αφού αυτά είναι ανάλογα, σύμφωνα με τον νομό του Hooke.
- « μ_{44} »:
Πρόκειται για την σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού κατά την διάρκεια του φαινομένου της διάτμησης, με διατμητικές τάσεις, και διατμητικά «strain gradient». Αυτό το φαινόμενο δεν έχει μελετηθεί, και αρκετοί υποστηρίζουν ότι είναι αμελητέο, αλλά ίσως οι «E. Häusler, L. Stein & G. Harbauer, το 1984», να έδειξαν το αντίθετο.

Ο τανυστής αυτός, δευτέρας τάξης μπορεί να γραφτεί με την παρακάτω μορφή σαν πίνακας.

$$\mu_{ij} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{13} & 0 \\ \mu_{31} & \mu_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{44} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός έχει συμπυκνωθεί, έτσι ώστε να μοιάζει με πίνακα τανυστή 2^{ας} τάξεως. Οι «S. D. Hu, H. Li & H.S. Tsou» το 2014, τον εξέφρασαν σε μορφή «6 * 6», με τον οποίο κιόλας πρότειναν τανυστικές πράξεις (στις δύο διαστάσεις).

Γενικά οι συντελεστές της σταθεράς « μ_{ij} » σημαίνουν τροπή στον άξονα «i» και «strain gradient» στον άξονα «j».

Ο «Tagantsev» το 1986 όπως σχολίασαν οι «Xiaoning Jiang et. al.» το 2013, που μελέτησε το φαινόμενο σε υγρούς κρυστάλλους, το οποίο είναι αρκετά παρόμοιο, εξέφρασε την γνώμη του για την συσχέτιση της σταθεράς του φλεξοηλεκτρισμού, με την διηλεκτρική σταθερά, με την παρακάτω σχέση.

$$\mu_{ijkl} = \chi_{ij} * \gamma_{kl} * \frac{e}{a}$$

Το « γ_{kl} » είναι ένας σταθερός τανυστής που έχει να κάνει με τις παραμέτρους του υλικού, « χ_{ij} » είναι η ευαισθησία του διηλεκτρικού, « e » είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου και « a » είναι η ατομική διάσταση.

Στην συνέχεια παρατίθεται έναν πίνακα με σταθερές που υπολογίστηκαν στον πέρασμα των χρόνων από τους ερευνητές, για το υλικό PVDF.

Σταθερά $\mu_{ij} = \dots$	Έτος	Ερευνητής	Αξιολογία
$\mu_{ij} = 10 - 100 \text{ pC/m}$	2006	Προηγούμενοι του L. E. Cross	
$\mu_{13} = 8000 \text{ nC/m}$	2006	L. E. Cross	
$\mu_{13} = 35000 \text{ nC/m}$	2011	S. Baskaran et. al.	
$\mu_{11} = 81500 \text{ nC/m}$	2011	S. Baskaran et. al.	
$\mu_{13} = 1 \text{ nC/m}$	2015	S. D. Hu, H. Li & H.S. Tsou	√
$\mu_{13} \cong 10 - 100 \text{ nC/m}$	2015	S. Poddar & S. Ducharme	√
$\mu_{13} = 10 \text{ nC/m}$	2016	Baojin chu & D.R. Salem	√
$\mu_{13} = 1 \text{ nC/m}$	2016	A. G. Moura & A. Erturk	√

Figure 1. Όπως φαίνεται και στον πίνακα, γενικά δεν υπάρχει μεγάλη ποικιλία, πειραματικών αποτελεσμάτων, και ως συνέπεια, το χάσμα μεταξύ των τιμών είναι υπερμέγεθες.

Το «converse flexoelectric effect» έχει μελετηθεί ακόμα λιγότερο. Η ουσία είναι η μετατροπή του ηλεκτρικού φορτίου σε μηχανικό, μεγάλη εργασία έγινε από τους ερευνητές «Z. Yan & L.Y.Jian» που μελέτησαν, πως μία τάση επιβαλλόμενη σε ένα φλεξοηλεκτρικό υλικό, είναι ικανή, να βελτιώσει την παραμορφωσιακή του κατάσταση. Ακόμα, ένα μεγάλο βήμα προς την μελέτη αυτού του φαινομένου έγινε από τους «A. G. Moura & A. Erturk». Το ποσοτικοποίησαν θεωρώντας την παρακάτω σχέση:

$$T_{11} = f_{1133} * \frac{\partial P_3}{\partial x_3}$$

Όπου « T » η αξονική τάση και « f » η σταθερά του αντιστρόφου φαινομένου. Μάλιστα έδωσαν για την σταθερά αυτή την σχέση: « $f_{1133} = \chi_{33}^{-1} * \mu_{1133}$ », όπου « χ » είναι η απόλυτη διηλεκτρική σταθερά.

Το κομμάτι του «actuation», αποτελείται από τους τρόπους που μπορεί να χρησιμοποιηθεί το φαινόμενο. Η μετατροπή από μηχανικό έργο σε ηλεκτρικό είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Μπορεί να εντοπίζει κίνηση, ή να φορτίζει κάτι με αυτήν, μπορεί να εντοπίσει ένα φαινόμενο, όπως δυνατός αέρας, ή σεισμός, και να στείλει ένα ηλεκτρικό σήμα. Το απ' ευθείας φαινόμενο έχει πολλές λειτουργίες όπως είναι το «Energy harvesting» και το «active vibration control», που αντιστοιχούν σε παραγωγή ενέργειας και σε έξυπνη σεισμική μόνωση. Ακόμα ένα τελευταίο σημαντικό σχόλιο για το ευθύς φαινόμενο είναι και η μέτρηση δυνάμεων, δηλαδή, με την ένδειξη ενός ηλεκτρικού σήματος, να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την ακριβή θέση και το μέγεθος ενός φορτίου. Αυτό θα εξηγηθεί αρκετά περισσότερο, στην ανάλυση περιπτώσεων και στις γραμμές επιρροής.

Το αντίθετο φαινόμενο, έχει και αυτό πάρα πολύ ωραία πραγμάτευση. Τι θα γινότανε αν καταφέραμε την στιγμή του σεισμού, να βελτιώσουμε, τις αντοχές των φερόντων στοιχείων, παρέχοντας μία τάση. Θα μπορούσε μία μόνωση, να ήταν τόσο έξυπνη; Όταν έρχεται ο σεισμός, να παράγεται ένα σήμα, και αυτό το σήμα να ενεργοποιεί μία μπαταρία υψηλής τάσης, και να παρέχει αυτήν την πολικότητα στα δομικά στοιχεία, έτσι ώστε να αναιρεθεί ο σεισμός.

2. Ιστορική αναδρομή

Το φαινόμενο του «flexo-electricity», όταν παρατηρήθηκε για πρώτη φορά, και στην συνέχεια για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, οι ερευνητές δεν το διαφοροποίησαν από το φαινόμενο του piezo-electricity το οποίο ήταν γνωστό, από πολύ πιο παλιά. Αναφέρονταν στο φαινόμενο του flexo-electricity ως το φαινόμενο επιφανειακού πιεζοηλεκτρισμού, άλλο που αυτά τα δύο φαινόμενα, αν και έχουν μία συγγένεια, δεν είναι παρά μακρινά ξαδελφάκια, διότι τα αίτια που προκαλούν το ένα είναι τελείως διαφορετικά από τα αίτια που προκαλούν το άλλο. Οι πρώτες αναφορές για το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού γίνονται από τους «Kogan» και τον «Tangastev» και αφορούν κυρίως το φαινόμενο σε "liquid crystal" το οποίο είναι μεν παραπλήσιο, αλλά διαφορετικό δε. Σημαντικά βήματα για την ανάδειξη του φαινομένου του flexo-electricity έγιναν από διάφορους ερευνητές από τα τέλη της δεκαετίας του 80. Οι «Marvan» και «Havránek» ήταν οι πρώτοι που δώσαν στο πρόβλημα αυτό σάρκα και οστά, και φυσική υπόσταση, αιτία και αποτέλεσμα, αλλά είχαν προηγηθεί αν και ίσως άγνωστα λόγω της εποχής, πειραματικές μετρήσεις, σχετικές με το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού από τους "E. Häusler", "L. Stein" και "G. Harbauer" (Δυτική Γερμανία), οι οποίοι ενώ μελετούσαν μία πειραματική, υπερβολικά πρωτοποριακή εφαρμογή, που θεώρησαν ότι ήταν εξαιτίας του πιεζοηλεκτρισμού, ίσως να μέτρησαν το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού.

Η δημοσίευση των «E. Häusler», «L. Stein», και «G. Harbauer», το 1984, περιγράφει μια πειραματική διάταξη, με σκοπό να μπορέσουν να εκμεταλλευτούν την ενέργεια, η οποία σπαταλάται για τις καθημερινές λειτουργίες των ανθρώπων, όπως είναι η αναπνοή, και να την διοχετεύσουν κάπου αλλού. Όταν ένα θηλαστικό αναπνέει, τα πλευρά του που βρίσκονται το ένα από το άλλο σε μία απόσταση, αυξάνουν αυτήν την απόσταση, κατά την διάρκεια της αναπνοής όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Με ένα λοξό μηχανισμό, σαν αμορτισέρ, το οποίο μπορεί να τοποθετηθεί κεκλιμένα μεταξύ των δύο οστών, υπάρχει η δυνατότητα κατά την διάρκεια της αναπνοής να εκμεταλλευτεί αυτός ο διαθέσιμος εφελκυσμός.

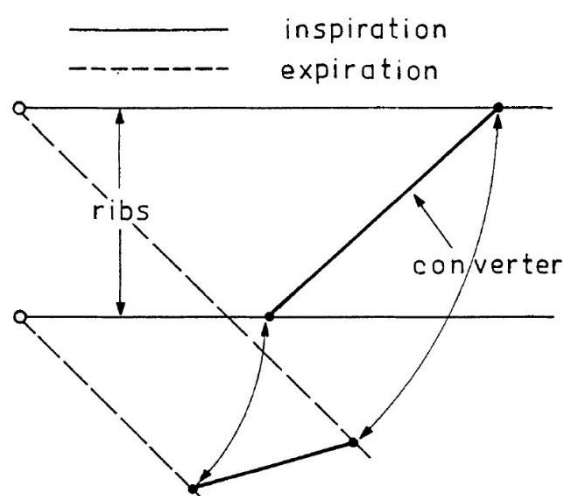


Figure 1. Εικόνα από δημοσίευση με τίτλο "Implantable physiological power supply with PVDF film" των "E. Häusler et. al." (Figure 1).

Η κίνηση των πλευρών κατά την διάρκεια της αναπνοής και η επιμήκυνση του μηχανισμού τύπου αμορτισέρ.

Αυτό το μηχάνημα που είναι τύπου αμορτισέρ, το κατασκεύασαν από ένα υλικό το οποίο είναι πολυμερές με συμμετρική κρυσταλλική δομή, και για αυτό οπωσδήποτε, ανίκανο να εμφανίσει πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες. Δεν είναι άλλο από το «PVDF», το οποίο έχει εξαιρετικές φλεξοηλεκτρικές ιδιότητες. Το μηχάνημα αυτό αποτελείται από δύο σωλήνες με τον έναν να μπαίνει μέσα στον άλλο, ή να βγαίνει. Αυτό μπορεί να αντιστοιχεί σε δύο φαινόμενα δημιουργίας μεταβολής των τάσεων. Σε μία εγκάρσια διεύθυνση, εκμεταλλευόμενη την διάτμηση μεταξύ των δύο σωλήνων, ή το εγκάρσιο φαινόμενο που τσακίζει ο ένας σωλήνας για να μπει μέσα του ο άλλος, το οποίο

είναι όμοιο με φαινόμενο κάμψης και μεταβολής των τροπών κατά μήκος μίας ίνας, σύμφωνα με την πολυστρωματική θεώρηση, το οποίο γίνεται σε πολύ μικρό «Δx» και άρα ο ρυθμός μεταβολής των τροπών, αρκετά μεγάλος. Αυτό το μηχανήμα το τοποθέτησαν στα πλευρά ενός σκύλου, και μέτρησαν την τάση και το ρεύμα που παρήγαγε. Αυτό υπέδειξε να μην μια τεράστια τάση, αλλά συνάμα και μικρό συνολικό φορτίο που παράχθηκε, γιατί το φαινόμενο γίνεται σε πάρα πολύ μικρή επιφάνεια.

Το 1988 δημοσιεύθηκε η εργασία των «M. Marvan» και «A. Havráněk», από την Τσεχοσλοβακία. Διαχώρισαν το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού με αυτό του πιεζοηλεκτρισμού, αναφέροντας ότι και τα δύο είναι του ίδιου τύπου, αλλά η διαφορά είναι στην κρυσταλλική δομή. Για να υπάρχει το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού, πρέπει η κρυσταλλική δομή να είναι ασύμμετρη. Η κάμψη μπορεί να κάνει τους κρυστάλλους να πάρουν μία μορφή παραπλήσια με αυτή που θα είχε ένα υλικό αν ήταν πιεζοηλεκτρικό, και γι' αυτό το φαινόμενο αυτό ονομάστηκε «flexo» λόγω της κάμψης. Επίσης ανέφεραν ενδοιασμούς ότι το φαινόμενο που αναφέρεται από πολλούς «bending piezoelectricity» ίσως να είναι το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού. Μελέτησαν το φαινόμενο αυτό, και εξέφρασαν και τη μέθοδο υπολογισμού του φαινομένου αυτού. Πολλαπλασιάζοντας τον ρυθμό μεταβολής των τροπών με μία σταθερά, την «flexoelectric coefficient» η οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας τανυστής τέταρτης τάξεως, πρότειναν την παρακάτω σχέση.

$$P_i = \gamma_{ijkl} * \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial x_j}$$

Στην οποία το «P_i» είναι η πολικότητα κατά τον άξονα «i», το «ε_{kl}» είναι η τροπή και το «x_j» είναι η συντεταγμένη.

Με διάφορες παραδοχές συμμετρίας του υλικού, όπως η κυβική συμμετρία, μπορεί κανείς να μειώσει την τάξη του τανυστή, σε δευτέρας και έτσι η σχέση να απλοποιηθεί, σε αυτήν που θα χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

Οι ερευνητές αυτοί έδωσαν και μία εξήγηση του φαινομένου στην εργασία τους. Θεωρήσαν ότι το φαινόμενο αυτό έχει να κάνει με τις αλυσίδες των πολυμερών και την θέση τους στον χώρο. Κατά την κάμψη δημιουργείται μία διαφορά της στάθμης των αλυσίδων στον χώρο και αυτό προκαλεί αυτό το φαινόμενο. Αυτή η εργασία, αν και αρκετά παλιά αποτελεί μια από τις πιο σωστές αντιμετωπίσεις του προβλήματος αυτού.

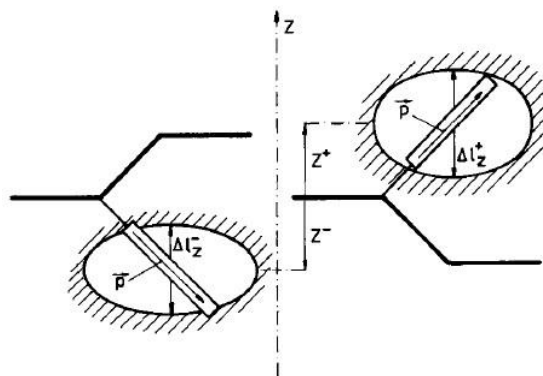


Figure 2.Εικόνα από την δημοσίευση με τίτλο "Flexoelectric effect in elastomers" των "M. Marvan & A. Havráněk"(fig.1). Πρόταση εξήγησης φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού. Η αλυσίδες πολυμερών.

Το 1996 σημαντική δουλειά επιτεύχθηκε από την ήπειρο της Ασίας με τους ερευνητές «Kenji Omote», «Hiroji Ohigashi» και «Keiko Koga». Αυτοί αναφέρθηκαν στον τανυστή της σταθεράς του φλεξοηλεκτρισμού. Προσπάθησαν να προσδιορίσουν τις τιμές του. Μέσω της εργασίας τους είναι πλέον δυνατή η προσομοίωση του μητρώου όπως φαίνεται παρακάτω, όπου τα «i» και «j» του μητρώου έχουν να κάνουν με το σε ποιόν άξονα έχω τάσεις και κατά ποιόν άξονα έχω την κλίση

των τάσεων. Για αρχή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής « μ_{13} » παράγει την πολικότητα, όταν έχουμε κατανομή των τάσεων « σ_{11} » και αυτές μεταβάλλονται με μία κλίση κατά την έννοια

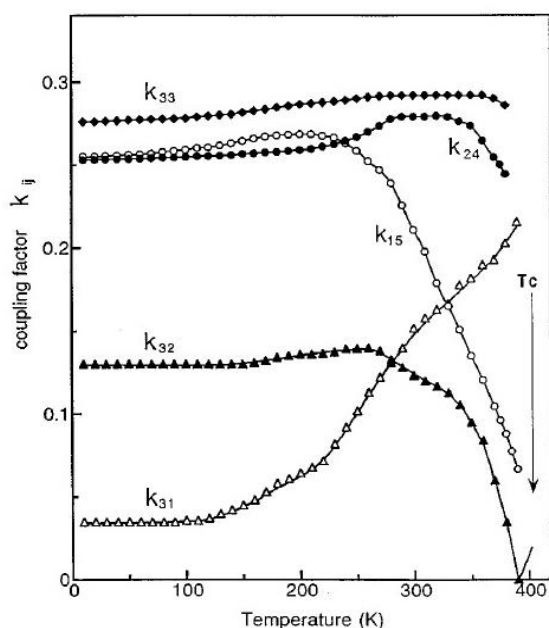


Figure 3. Εικόνα από δημοσίευση με τίτλο "Temperature dependence of elastic, dielectric, and piezoelectric properties of "single crystalline" films of vinylidene fluoride trifluoroethylene copolymer" των "Kenji Omote et. al." (FIG. 10)

Η εξάρτηση των ηλεκτρομηχανικών ιδιοτήτων υλικού PVDF, με την διακύμανση της θερμοκρασίας.

TABLE II. Piezoelectric properties of P(VDF/TrFE) and PVDF.

		This work P(VDF/TrFE)(75/25) 10 K		295 K	Nix and Ward ^a PVDF295 K	295 K	Tashiro et al. ^b PVDF
d constant (pC/N)	d_{31}	0.6	7	16.5	-0.25		
	d_{32}	6	12	1.5	-4.05		
	d_{33}	-17	-38	-33	-25.2		
	d_{24}	-23	-50	-38.3	-4.28		
	d_{15}	-21	-31	-15.7	-30.7		
e constant (mC/m ²)	e_{31}	45 ^c	140 ^c	...	-130		
	e_{32}	37	72	...	-145		
	e_{33}	-170	-185	...	-276		
	e_{24}	-104	-128	...	-9		
	e_{15}	-103	-73	...	-135		

Figure 4. Εικόνα από δημοσίευση με τίτλο "Temperature dependence of elastic, dielectric, and piezoelectric properties of "single crystalline" films of vinylidene fluoride trifluoroethylene copolymer" των "Kenji Omote et. al." (table II)

Οι ηλεκτρομηχανικές ιδιότητες του υλικού «PVDF» από την εργασία τους και από πιο παλιές εργασίες.

του άξονα 3. Τέτοια πολικότητα έχουμε στην φόρτιση της κάμψης.

Χρησιμοποίησαν το αγαπημένο υλικό «PVDF» και εξέτασαν και την ύπαρξη της θερμοκρασίας εξάρτησης. Τελικά έδειξαν ότι το «Kuri Point» είναι κρίσιμο, και μετά από αυτήν την θερμοκρασία δυσκολεύουν τα πράγματα για το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού. Επίσης ανέφεραν και τις φάσεις του «PVDF», οι οποίες θα αναλυθούν στην συνέχεια, αλλά εντέλει αποδείχθηκε ότι δύσκολα θα παίξουν κάποιο ρόλο στο φαινόμενο.

Για να προσδιορίσουν τον πίνακα της σταθεράς, έκανα διάφορα πειράματα, περιστρέφοντας το υλικό, και στην συνέχεια χρησιμοποίησαν κατάλληλους τύπους για τον υπολογισμό των σταθερών του υλικού. Έκαναν και διαφορά πειράματα πειράζοντας την θερμοκρασία. Και μάλιστα, έδειξαν το «Kuri-Point». Το παραπάνω διάγραμμα είναι ένα από τα πολλά διαγράμματα που έφτιαξαν για την συσχέτιση του φαινομένου με την θερμοκρασία, ενώ παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα που πήραν από τα πειράματα για τον υπολογισμό της σταθεράς.

Το 2006 εντυπωσιακή ήταν η δουλειά του «L.E.Cross», στις Ηνωμένες Πολιτείες τις Αμερικής. Αυτός ενδιαφέρθηκε από το γεγονός ότι με το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού μπορούμε να έχουμε τα ίδια αποτελέσματα με αυτά του πιεζοηλεκτρισμού, χωρίς να έχουμε πιεζοηλεκτρικό υλικό. Αναφέρει βέβαια ότι το ο φλεξοηλεκτρισμός έχει μια σταθερά της τάξης των 10-100 pC/m (10⁻¹² C/m). Κάνει πειράματα με σωστή πειραματική διάταξη όπως φαίνεται και

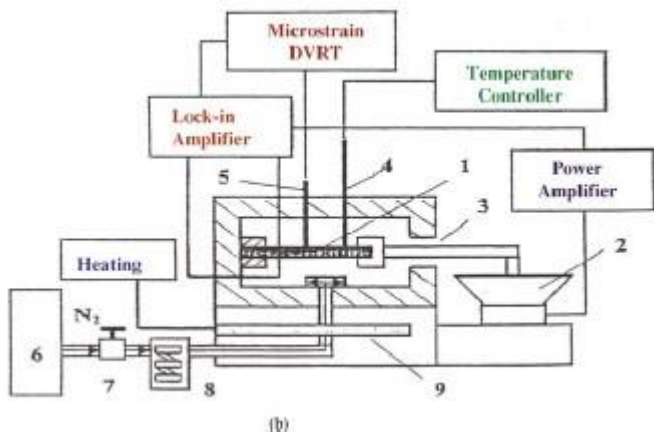


Figure 5. Εικόνα από την Δημοσίευση με τίτλο "Flexoelectric effects: Charge separation in insulating solids subjected to elastic strain gradients" του "L. Eric Cross" (Figure 1).

Σε αυτήν την εικόνα μπορεί κανείς να διακρίνει την σωστή πειραματική διάταξη, που απαιτεί οπωσδήποτε συσκευή για αποφυγή θορύβου. Σε αυτήν την Περίπτωση "Lock in Amplifier".

παραδίπλα. Σημαντικό είναι να τονίσουμε ότι αυτός όπως και οι επόμενοι που εκτέλεσαν πειράματα, χρησιμοποιούσαν διατάξεις για να μπορέσουν να διακριτοποιήσουν την τάση του φαινομένου με τη τάση της παροχής του ηλεκτρικού ρεύματος. Αυτός χρησιμοποίησε την συσκευή «Lock In Amplifier», η οποία απομονώνει την ένδειξη με την επιθυμητή συχνότητα, αφού ο θόρυβος της ηλεκτρικής παροχής έρχεται με συγκεκριμένη συχνότητα π.χ. για Ελλάδα 50Hz. Ο ερευνητής επίσης τόνισε και την πιθανότητα αντί για το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, να μετρήσει ένα

άλλο φαινόμενο όπως αυτό του πιεζοηλεκτρισμού, και συμπέρανε ότι είναι αδύνατο, διότι το πείραμα του είναι κάμψη χωρίς αξονικό φορτίο, και αν υπήρχε κάποια πολικότητα λόγω πιεζοηλεκτρισμού, αυτή θα εξουδετερωνόταν από τις αντίθετες κατανομές των τάσεων. Τα πειράματα του τα έκανε σε θερμοκρασία δωματίου, με δοκιμή καθαρής κάμψης («Four Point Bending»). Με τις δοκιμές του προσπάθησε να υπολογίσει το μητρώο της σταθεράς του φλεξοηλεκτρισμού, όσες δηλαδή μεταβλητές δεν ήταν μηδέν.

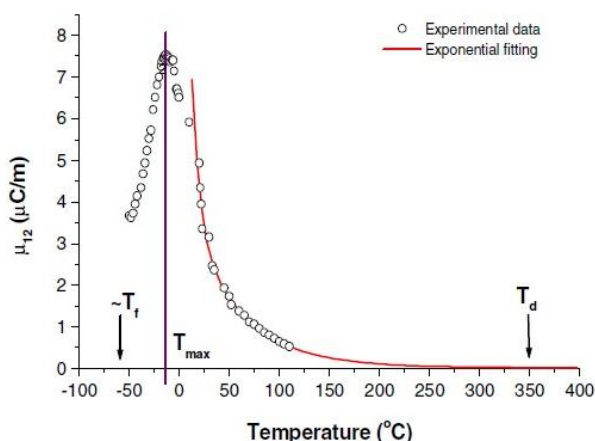


Figure 6. Εικόνα από την Δημοσίευση με τίτλο "Flexoelectric effects: Charge separation in insulating solids subjected to elastic strain gradients" του "L. Eric Cross" (Figure 5).

Η εξάρτηση της σταθεράς του φλεξοηλεκτρισμού από την θερμοκρασία, σε ένα υλικό.

Συμπεραίνει ότι η διηλεκτρικότητα και η φλεξοηλεκτρική σταθερά μεταβάλλονται με ταυτόσημους ρυθμούς. Κατασκεύασε διαγράμματα που δείχνουν την συσχέτιση της φλεξοηλεκτρικής σταθεράς με την θερμοκρασία, όπως το παραπλεύρως. Και τέλος δίνει σαν αποτέλεσμα σταθερά για κάμψη « μ_{12} » (ανάλογα πως έχουν ορισθεί οι άξονες) της τάξης των $\mu\text{C}/\text{m}$.

Το 2010 οι «D. Vatansever», «R. L. Hadimani», «T. Shah» και «E. Siores» δημοσίευσαν την εργασία του με θέμα την καλλιέργεια ενέργειας με χρήση πολυμερών όπως είναι και το «PVDF». Η κεντρική ιδέα είναι να

χρησιμοποιηθούν ιδιότητες όπως ο πιεζοηλεκτρισμός και ο φλεξοηλεκτρισμός με σκοπό την παραγωγή και αποθήκευση ενέργειας. Ένας ιδιαίτερα επαναστατικός τρόπος είναι να χρησιμοποιηθούν για την φόρτιση ανανεώσιμες πηγές ενέργειας όπως είναι οι σταγόνες βροχής και

ο αέρας, ρούχα τα οποία φορτίζονται από τις καθημερινές μας κινήσεις, σε σόλες παπουτσιών η και σε τσάντες πλάτης, τέντες και σκηνές.

Εκθειάζει σε μεγάλο βαθμό, τα πλεονεκτήματα των πολυμερών έναντι των κεραμικών, παρόλο που τα δεύτερα έχουν πολύ καλύτερες ηλεκτρικές ικανότητες όπως σταθερά πιεζοηλεκτρισμού ή φλεξοηλεκτρισμού αρκετά μεγαλύτερη, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα, όπως το μικρό βάρος και την ευκαμψία του «PVDF», ή γενικά για τα πολυμερή ότι δεν έχουν μόλυβδο, είναι φτηνά και εύκολα στην επεξεργασία.

Οι ερευνητές δίνουν μάλιστα μίας σχέση υπολογισμού της συνολικά παραγόμενης ισχύος χρησιμοποιώντας την τάση και την ένταση, που παράγονται από το σύστημα με μία καθαρή αντίσταση. Ο τύπος αυτός φαίνεται παρακάτω.

$$P = V * I$$

Όπου «P» είναι η ισχύς και μετριέται σε «Watts», «V» είναι η τάση που παράγεται από το υλικό και μετριέται σε «Volts», ενώ «I» είναι η ένταση που μπορεί να μετρήσει κανείς χρησιμοποιώντας μία αντίσταση, και μετριέται σε «Amperes»

Η μελέτη των ερευνητών έγινε με πειράματα, δυναμικής φόρτισης και κάμψης προβόλου, με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη, χρησιμοποιώντας σταγόνες νερού. Όταν αυξήσαν το ύψος, δηλαδή την ταχύτατη πτώσης της σταγόνας, άρα την ορμή της και άρα σύμφωνα με τον 2^ο νόμο του Newton, μεγάλωσε το «Peak Voltage» δηλαδή η μέγιστη μετρούμενη τάση, όπως αυτό είναι αναμενόμενο. Ένα μη αναμενόμενο ήταν ότι ο πιο κοντός πρόβολος έδωσε μεγαλύτερη μέγιστη τάση από τον μακρύ. Μπορεί να ακούγεται περίεργο αλλά μία λογική απάντηση είναι το ίδιο βάρος. Το φορτίο που δίνει το ηλεκτρικό σήμα είναι το φορτίο της σταγόνας που πέφτει στην δοκό δυναμικά και μετά φεύγει δυναμικά, όταν το η σταγόνα φύγει από την δοκό είναι σαν να φεύγουν δύο σταγόνες (συντελεστής δυναμικής προσαύξησης ίσο με δύο), πριν φύγει όμως το φορτίο της σταγόνας που έπεσε δυναμικά, έμεινε στατικό, άρα ήταν σαν να είχε πάνω της η δοκό μία σταγόνα. Επομένως η δοκός καταλαβαίνει μία σταγόνα να πέφτει πάνω της και να προκαλεί φορτίο «P» και στην συνέχεια να φεύγει προκαλώντας φορτίο «-P». Εμείς αυτό που βλέπουμε δεν είναι η ροπή τριγωνικής μορφής, αλλά μία παραβολή 2^{ου} βαθμού, επαλληλίζοντας το τριγωνικό διάγραμμα ροπών με ένα παραβολικό, όπως αυτό που προκύπτει από το ίδιο βάρος. Αν το ίδιο βάρος είναι αρκετά μεγάλο, μπορεί να η ροπή του ίδιου βάρους να είναι μεγαλύτερη από αυτήν του φορτίου

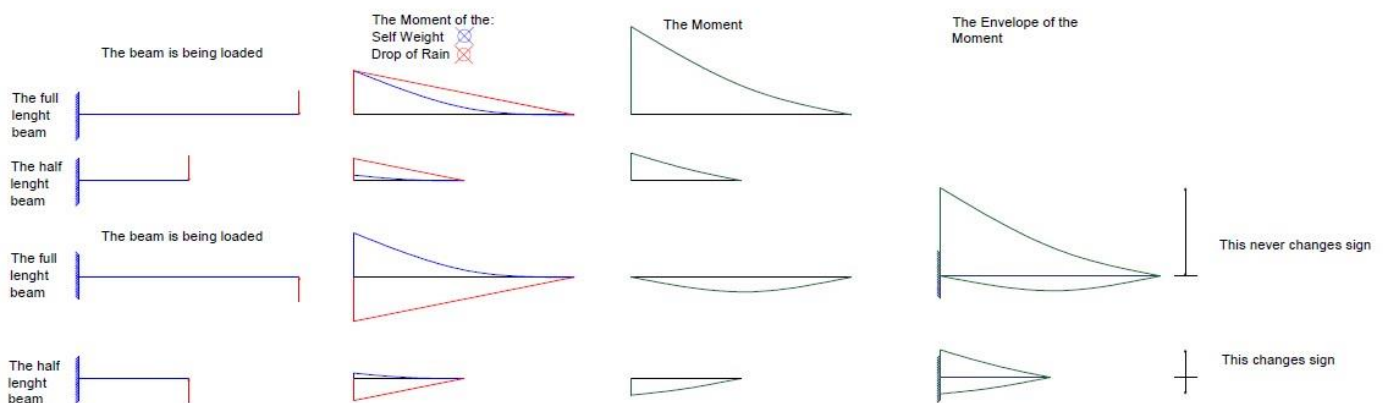


Figure 7. Ο λόγος που η επιρροή της Ροπής σε βαρύ δοκίμιο στο φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού είναι μικρή.

και έτσι η διαφορά της ροπής να είναι μικρότερη. Η διαδικασία αυτή φαίνεται με μεγάλη σχεδιαστική λεπτομέρεια στον προηγούμενο σχεδιάγραμμα.

Η εργασία αυτή ενέδειξε επίσης και ένα χαρακτηριστικό του φαινομένου, ιδιαίτερα ενδιαφέρον, το οποίο θα αναλυθεί στην συνέχεια, σε ικανοποιητικό βαθμό, στο παρόν τεύχος. Το πρόβλημα του φλεξοηλεκτρισμού δεν έχει μία διάσταση, αλλά δύο. Υπάρχει το φαινόμενο «Ίνας». Δηλαδή αν χωρίσουμε την διατομή μας σε ίνες (όπως και στην πλαστική ανάλυση κάνουμε πολυστρωματική θεώρηση.) τότε μία ίνα στην θέση « x_1 » έχει μία τάση « σ^{xx}_1 » και στην θέση « x_2 » μία άλλη τάση « σ^{xx}_2 », οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους γιατί η ροπή είναι διαφορετική. Μάλιστα μπορούμε να πούμε ότι η μεταβολή αυτή των τάσεων και άρα των τροπών, ή καλύτερα ο ρυθμός μεταβολής τους, σχετίζεται γραμμικά με τον ρυθμό μεταβολής την καμπτικής ροπής της δοκού. Αυτό το φαινόμενο βέβαια φαίνεται να είναι αρκετά μικρότερο από το φαινόμενο της «Διατομής», αλλά μία τέτοια παρατήρηση χρειάζεται μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Το φαινόμενο αυτό συζητήθηκε από τους ερευνητές με το όνομα «Forward strain»

Στην συνέχεια επανέλαβαν το πείραμα με αεροσήραγγα, αντί για σταγόνες νερού και επιβεβαίωσαν την σημασία του φορτίου.

Ο «Sivaralan Baskaran» και η ομάδα του ασχολήθηκαν αρκετά με το φαινόμενο αυτό, από το 2011, και έβγαλαν αρκετά αποτελέσματα. Επεξεργάστηκαν πολύ το θέμα με τις φάσεις των πολυμερών, αλλά δεν έβγαλαν άκρη, έτσι κατέληξαν ότι σημασία έχει το να είναι το πολυμερές «Homopolymer». Εκάναν πολλά πειράματα και προσπάθησαν να υπολογίσουν της σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού, με αποτέλεσμα περίεργα νούμερα. Συγκεκριμένα βγάλαν αρνητική σταθερά, καθώς και πολύ μεγάλες σταθερές της τάξης των « $\mu\text{C}/\text{m}$ », ενώ σε πιο παλιές εργασίες παρουσιάζονταν σταθερές της τάξης των « pC/m ».

Στην εργασία που δημοσίευσαν το 2011 επανέλαβαν την αναζήτηση τους για τις φάσεις. Αυτήν την φορά χρησιμοποίησαν « α' Phase Polymer», συγκρίναν τα αποτελέσμα τους με άλλους ερευνητές, είχαν κάποιες διαφορές, αλλά εντέλει έβγαλαν παραπλήσια αποτελέσματα, της τάξης των «35 $\mu\text{C}/\text{m}$ ».

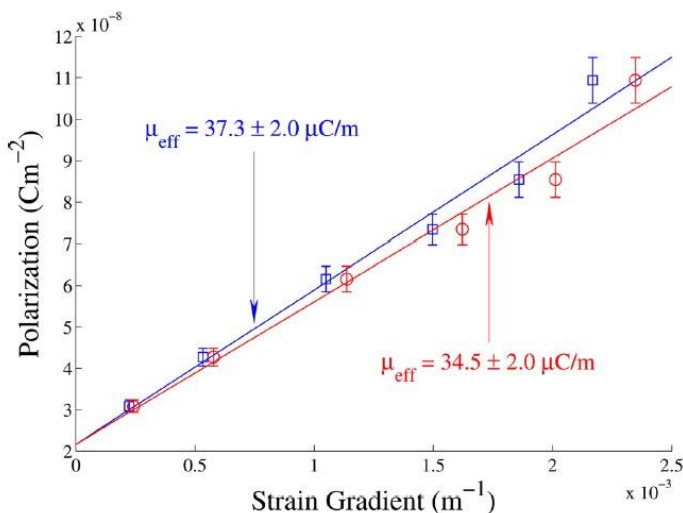


Figure 8. Διάγραμμα από δημοσίευση "strain gradient induced electric polarization in α' -phase polyvinylidene fluoride films under bending conditions" των "S. Baskaran et. al."

Διάγραμμα που δείχνει την πολικότητα σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής.

Αυτό το προσδιόρισαν με ένα υπέροχο διάγραμμα που κατασκεύασαν όπου στον έναν άξονα είχαν την παραγόμενη πολικότητα, και στον άλλον την τροπή, ο οποίος επισυνάπτεται παραδίπλα. Πρώτοι επίσης συνέδεσαν την πολικότητα με το ηλεκτρικό ρεύμα.

$$P_3 = \frac{I}{2 * \pi * f * A}$$

Όπου « P_3 » Η ηλεκτρική Πολικότητα, « I » το παραγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα, « f » η συχνότητα της φόρτισης και « A » η επιφάνεια του ηλεκτροδίου.

Το 2011 ο «S. Baskaran» και η ομάδα του, ξαναδημοσίευσαν σχετικά με το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού. Ανέλυσαν το υλικό «PVDF» και μάλιστα «α-phase». Αυτήν την φορά έκαναν πειράματα εφελκυσμού και θλίψης σε τραπέζιο δοκίμιο («Tapered Beam»). Έκαναν και μία επίλυση του προβλήματος μέσω πεπερασμένων στοιχείων στην οποία φαίνεται η ροή των τάσεων, και ουσιαστικά ο ρυθμός μεταβολής τους και σύμφωνα με τον νόμο του Hooke και αυτήν των τροπών («strain gradient»). Το σχήμα που επισυνάπτεται παρακάτω, είναι από την εργασία αυτών, το 2011, και δείχνει την ροή των τάσεων σε ένα «tapered beam» σε αντίθεση με ένα κανονικό. Εντέλει σε αυτήν την κατέληξαν σε αποτελέσματα. Αυτήν την φορά της τάξης των « $\mu\text{C}/\text{m}$ » γύρω στα $81.5 \mu\text{C}/\text{m}$. Πρόκειται για πολικότητα που εμφανίζεται στον διαμήκη άξονα όταν ασκούνται τάσεις παράλληλες με τον διάμηκη άξονα, γι' αυτό και σωστά ονομάζεται μ_{11} .

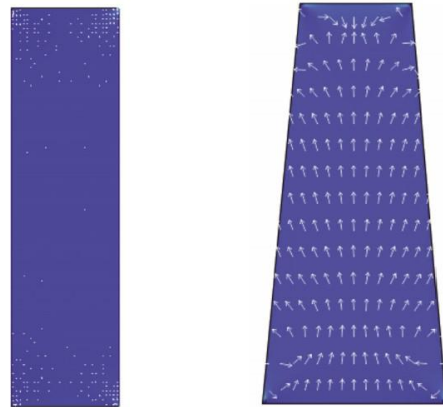


Figure 9. Εικόνα από την δημοσίευση "Experimental studies on the direct flexoelectric effect in α -phase polyvinylidene fluoride film" των "S. Baskaran et. al."

Διάγραμμα που δείχνει την ροή των ορθών τάσεων σε δοκό μεταβλητού πλάτους ("Tapered beam.")

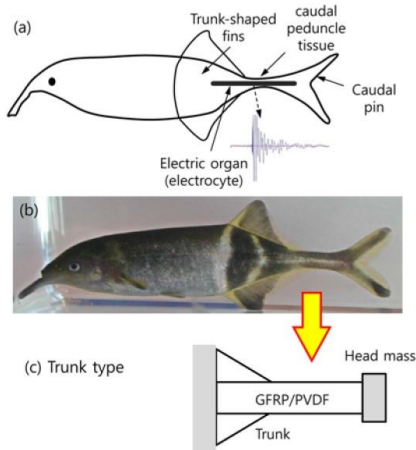


Figure 10. Εικόνα από την δημοσίευση "Flexible Piezoelectric vibration Energy Harvester using a Trunk-Shaped Beam Structure inspired by an Electric Fish Fin" των "Gi-Woo Kim, et. al."

Διάγραμμα που δείχνει το ψάρι με την φλεξοηλεκτρική ούρα και την προσομοίωση που έγινε για την πειραματική διαδικασία.

Figure 13. Εικόνα από την Δημοσίευση "Flexible Piezoelectric vibration Energy Harvester using a Trunk-Shaped Beam Structure inspired by an Electric Fish Fin" των "Gi-Woo Kim, et. al."

Η πειραματική μοντελοποίηση που εκτελέσθηκε.

Μια ιδιαίτερα ωραία εφαρμογή του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού έγινε από τους «Gi-Woo Kim et. al.» το 2014. Μελετώντας τρόπους αντικατάστασης των μπαταριών, κατέληξαν στον πιεζοηλεκτρισμό, αλλά ίσως έπρεπε να το είχαν πει φλεξοηλεκτρισμό. Παρατήρησαν ένα ψάρι που έχει μία ιδιαίτερα περιέργη τριγωνική ουρά από φλεξοηλεκτρικό υλικό, το οποίο χρησιμοποιεί ηλεκτρικό σήμα για να πλοηγείται. Θεώρησαν ότι αυτό το τριγωνικό σχήμα έγινε λόγω την εξέλιξης για να βελτιστοποιηθεί το

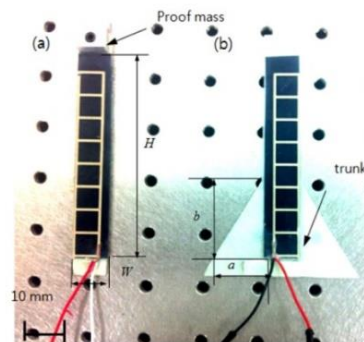


Fig. 2 Piezoelectric vibration energy harvesters based on (a) cantilever beam and (b) with trunk-shaped beam

Table 1 Summary of the piezoelectric energy harvesters

Items	cantilever beam	Trunk-shaped beam
Substrate	rectangular beam	rectangular + trunk-shaped beam
Piezoelectric	PVDF film	PVDF film
Width (W)	0.0153 m	0.0153 m
Height (H)	0.098 m	0.098 m
a	N/A	0.022 m
b	N/A	0.037 m
PVDF area	0.0015 m^2	0.0015 m^2

φαινόμενο. Έτσι προσπάθησαν να πετύχουν βελτιωμένα αποτελέσματα από παρόμοια πειράματα. Αυτό το περίεργο σχήμα της ουράς του ψαριού ονομάζεται «trunk» και παραπάνω παρουσιάζεται εικόνα από την εργασία τους που δίνει πληροφορίες για το ψάρι και για την προσομοίωση η οποία έγινε. Τα αποτελέσματα που βγάλανε ήταν θετικά. Κατάφεραν και υπολόγισαν τάση γύρο στα 13.4 volts και ισχύ 113 μ Watts σε αντίθεση με την περίπτωση του κανονικού προβόλου που έβγαλε 4.2 Volts και 78 μ Watts αντίστοιχα.

Το 2013 οι «Z. Yan » και «L. Y. Jiang» μελέτησαν το φαινόμενο, και η εργασία τους, την οποία και δημοσίευσαν, έχει πάρα πολύ σημαντικά σημεία, πολλά από τα οποία ήταν και οι πρώτοι που τα ανέφεραν. Τόνισαν την διαφορά του πιεζοηλεκτρισμού με τον φλεξοηλεκτρισμό, υποστήριξαν ότι ο πιεζοηλεκτρισμός, παράγει φορτίο, λόγω της όχι κεντροσυμμετρικής κρυσταλλικής δομής των υλικών, η οποία αν θλιπτεί, θα παράξει ένα ηλεκτροστατικό πεδίο στην δομή του υλικού. Παρόμοιο αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί και σε ένα κεντροσυμμετρικό κρυσταλλικό υλικό, αν σε αυτό δεν ασκήσουμε ομοιόμορφη τροπή, αλλά τροπή με ρυθμό μεταβολής δηλαδή «gradient». Αυτό είναι το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού. Τέλος υποστήριξαν και τα σημεία του ύψους της διατομής, λέγοντας ότι είναι πιο ευνοϊκό για το φαινόμενο να είναι μικρό (νάνο-κλίμακα)

Στην εργασία τους δοκίμασαν δοκίμια σε κάμψη με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες, δοκίμασαν έναν φορέα πρόβολο, έναν αμφίπακτο και έναν αμφιέρεστο. Μελέτησαν σε μεγάλο βαθμό το αντίστροφο φαινόμενο, δηλαδή τι γίνεται στην παραμορφωμένη εικόνα, αν ασκήσουμε ταυτόχρονα με το φορτίο και μία τάση. Θα βελτιώσει την κατάσταση ή θα την χειροτερεύει, ανάλογα με το πρόσημο. Αν βάλουμε την τάση προς την θετική κατεύθυνση (από πάνω προς τα κάτω) ή προς την αρνητική.

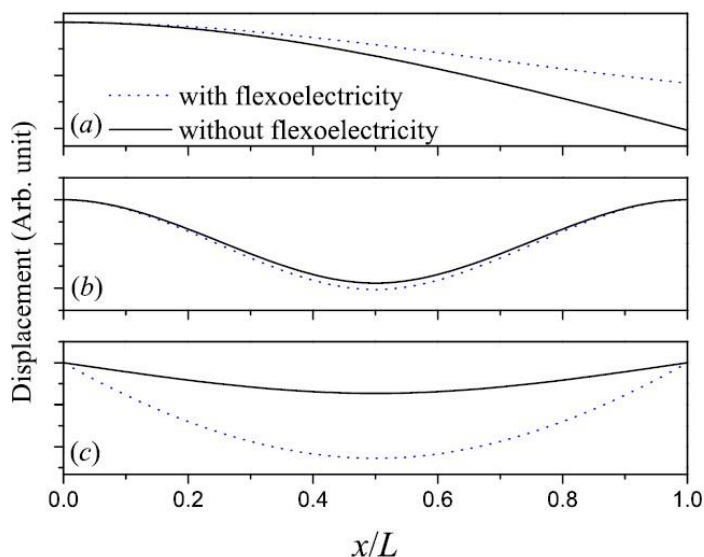


Figure 11. Εικόνα από την δημοσίευση "Flexoelectric effect on the electroelastic responses of the bending piezoelectric nanobeams" των "Z. Yan" & "L. Y. Jiang". Η φόρτιση μία φλεξοηλεκτρικής δοκού που κάμπτεται, με ηλεκτρική τάση. Ο ηλεκτρισμός, εξουδετερώνει την μηχανική φόρτιση, δια μέσω του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

Από τα πειράματα τους προέκυψαν αποτελέσματα ιδιαίτερα σημαντικά. Ότι υπάρχει κάποια μεταβολή στην παραμορφωμένη εικόνα, αλλά αυτό δουλεύει πολύ περίεργα, άλλοτε βελτιώνει την κατάσταση και άλλοτε την χειροτερεύει ανάλογα με το είδος του φορέα. Παραδίπλα φαίνεται σε γράφημα, η διαφοροποίηση της παραμόρφωσης λόγω του φλεξοηλεκτρισμού. Όπως ήταν και αναμενόμενο στην περίπτωση του προβόλου, θα χρειαζόταν διαφορετικό προσανατολισμό. Ακόμα ένα σημαντικό αποτέλεσμα των πειραμάτων τους ήταν και η θέση τους για το ύψος της διατομής, που πρέπει να είναι όσο μικρότερο γίνεται.

Αυτό το έχουμε αποδείξει και στην παρούσα εργασία πολλές φορές όπως έχει και θα αναλυθεί σε άλλο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, η εργασία τους δημιούργησε δύο διαγράμματα, τα οποία επισυνάπτονται παρακάτω και δείχνουν την εκθετική αύξηση της πολικότητας σε σχέση με το ύψος της διατομής που μεταβάλλεται αντιστρόφως. Λεπτομέρεια αποτελεί μία καμπύλη κοντά στο « $x=0.00$ » που όμως μπορούμε να κρατήσουμε επιφυλάξεις γιατί είναι κάτι πολύ συγκεκριμένο, λεπτό, και μικρό, και ίσως θα χρειαζόταν μία καλύτερη ανάλυση, ίσως με πεπερασμένα στοιχεία και «3D elasticity». Είναι τοπικό φαινόμενο κοντά στην “Πάκτωση” και ισχύει η αρχή του Saint Venant.

Ο πίνακας, του οποίου ο σχολιασμός έγινε παραπάνω προήλθε από την ίδια εργασία και φαίνεται παρακάτω

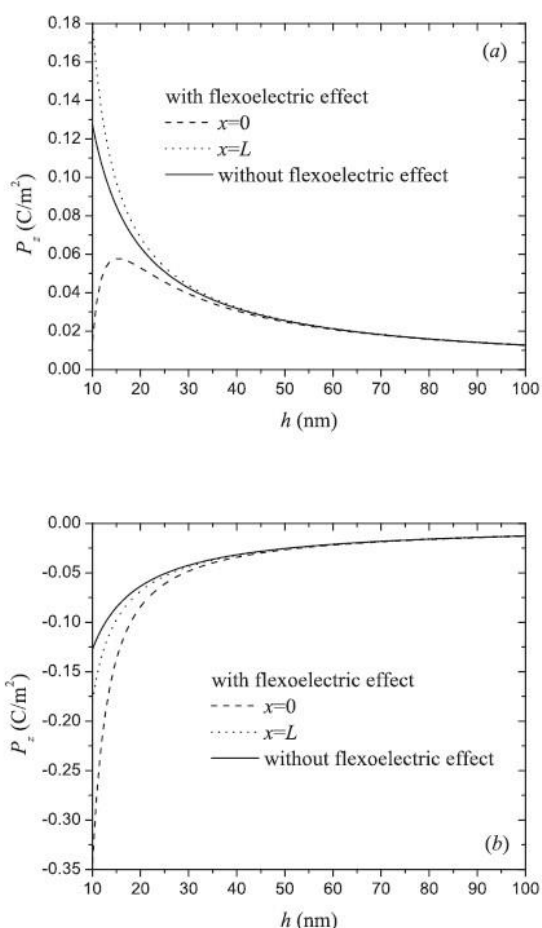


Figure 12. Εικόνα από την δημοσίευση "Flexoelectric effect on the electroelastic responses of the bending piezoelectric nanobeams" των "Z. Yan" & "L. Y. Jiang". Η εξάρτηση της παραγόμενης ηλεκτρικής πολικότητας με το ύψος της διατομής.

Μια ακόμα σημαντική λεπτομέρεια στην εργασία τους είναι ότι χρησιμοποίησαν τη θεωρία δοκού Euler Bernoulli, όπως και στην παρούσα εργασία, και δεν προεξόφλησαν τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών, αλλά προχώρησαν τις παραγωγίσεις με μαθηματικό τρόπο.

Το 2013 σημαντική ήταν η εργασία των «Xiaoning Jiang» και των συνεργατών τους, οι οποίοι δημοσίευσαν το άρθρο με τίτλο «Flexoelectric nano-generator: Materials structures and devices». Σε αυτό περιγράφεται το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, δίνεται μάλιστα ορισμός του και σχηματική απεικόνιση. «Το φλεξοηλεκτρικό φαινόμενο περιγράφει την παραγωγή ηλεκτρικής πολικότητας ως αντίδραση του ρυθμού μεταβολής της μηχανικής τροπής «direct flexoelectric effect» ή μηχανικής αντίδρασης υπό ρυθμό μεταβολής ηλεκτρική πεδίου. «Converse effect». Η σχηματική απεικόνιση φαίνεται παρακάτω.

Επιπλέον ορίζουν την πολικότητα, με τον ίδιο τρόπο που την όρισαν και οι προηγούμενοι «M. Marvan» και «A. Havnánek», ενώ ταυτόχρονα συνέδεσαν την

σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού με το φορτίο του ηλεκτρονίου και την ατομική διάσταση του κελύφους του διηλεκτρικού (Tagantsev, 1986).

$$\mu_{ijkl} = \chi_{ij} * \gamma_{kl} * \frac{e}{a}$$

όπου το « γ_{kl} » είναι ένας σταθερός τανυστής που έχει να κάνει με τις παραμέτρους του υλικού, « χ_{ij} » είναι η ευαισθησία του διηλεκτρικού, « e » είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου και « a » είναι η ατομική διάσταση.

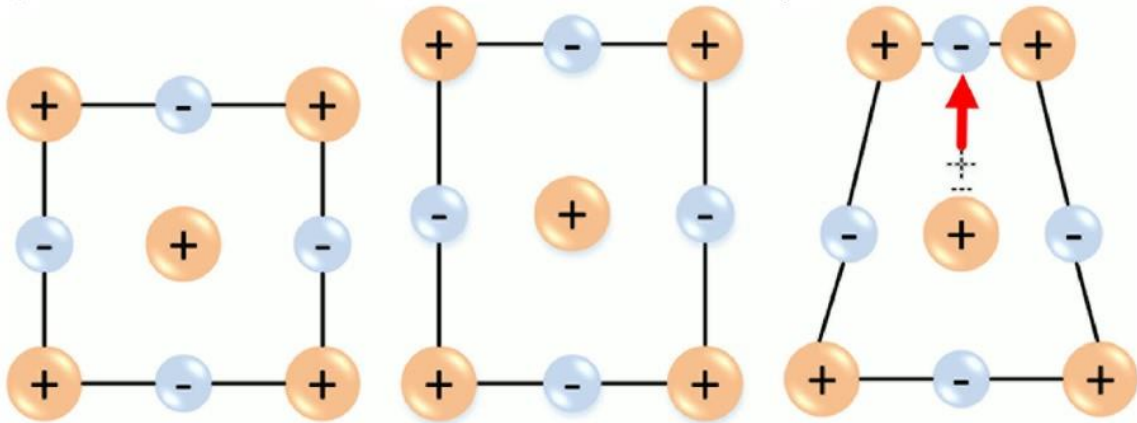


Figure 7. Εικόνα από δημοσίευση των "Xiaoning Jiang et. al." με τίτλο "Flexoelectric nano-generator: Materials Structure and devices "(Figure 1).

Σχηματική απεικόνιση του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

Ακόμα οι ερευνητές αναφέρουν ότι το φαινόμενο στην άλλη διεύθυνση (φαινόμενο στρώματος) είναι πολύ πιο περίπλοκο από αυτό της διατομής, πράγμα το οποίο αποδέχεται και η παρούσα εργασία. Ακόμα υποστηρίζει ότι ο πίνακας της σταθεράς του φλεξοηλεκτρικού φαινομένου έχει μόνο 3 ανεξάρτητες μεταβλητές στα υλικά που έχουν κυβική συμμετρία την « μ_{11} », « μ_{12} » και « μ_{44} ». Το «2» μπορεί να αντικατασταθεί με το «3» λόγω διαφορετικού συστήματος συντεταγμένων. Αν ο άξονας των «z» πάει προς τα κάτω τότε είναι «3». Το « μ_{44} » υποδηλώνει το φαινόμενο της διάτμησης.

Μελέτησαν την εφαρμογή δοκιμής κάμψης προβόλου με τέμνον φορτίο στην άκρη, και προσδιόρισαν ορισμένες τιμές, όπως αυτές παρουσιάζονται σε παρακάτω πίνακα. Εφάρμοσαν και την απ' ευθείας δοκιμή (Μηχανικό Έργο → Ηλεκτρικό Έργο) και την αντίστροφη (Ηλεκτρικό Έργο

Materials	Dielectric constant	μ_{12} ($\mu\text{C}/\text{m}$) Experimental	μ_{12} ($\mu\text{C}/\text{m}$) Ab initio
PMN [7]	11,720	3.4	
PZT [10]	2130	1.4	
BST [8]	13,200	76.5	
BTS [12]	15,000	53	
BT [11,15]	2300	9	5.5×10^{-3}
SiTiO ₃ single crystal [14,15]	300	6.1×10^{-3} at [001]	3.7×10^{-3}
SiTiO ₃ ceramics [16]		10^{-4}	
Simple dielectrics [2]	5	$\sim 10^{-4}$	

Figure 84. Εικόνα από δημοσίευση των "Xiaoning Jiang et. al." με τίτλο "Flexoelectric nano-generator: Materials Structure and devices "(Table 2).

Πίνακας με σταθερές φλεξοηλεκτρισμού, για διαφορά υλικά.

Ένα άλλο πολύ ενδιαφέρον πράγμα του έδειξαν είναι η μορφή των πειραματικών φορέων, έτσι ώστε να προσδιορισθούν οι σταθερές του φλεξοηλεκτρισμού. Αυτές φαίνονται παρακάτω. Ακόμα

αναφέρει πόσο σημαντικό είναι το «Scale Effect» (Γενικά μικρά ύψη, δίνουν μεγάλα αποτελέσματα). Οι ερευνητές δοκίμασαν και «Films» υλικών (πολύ μικρά ύψη διατομής) και η σταθερά υπολογίσθηκε πολύ μεγαλύτερη.

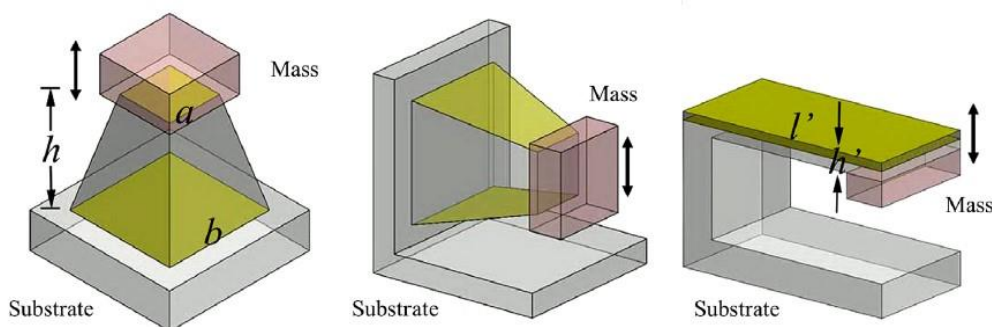


Figure 9. Εικόνα από δημοσίευση των "Xiaoning Jiang et. al." με τίτλο "Flexoelectric nano-generator: Materials Structure and devices "(Figure 6).

Δοκιμές που πρέπει να γίνουν για να προσδιορισθούν οι σταθερές « μ_{11} », « μ_{12} (μ_{13})» και « μ_{44} » αντίστοιχα.

Ο «Wenbin Huang» και οι συνεργάτες τους δημοσίευσαν την εργασία τους το 2014. Τόνισαν πόσο σημαντικό είναι το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, διότι μπορεί να αντικαταστήσει τον πιεζοηλεκτρισμό, με τα πολλά πλεονεκτήματά του, σε εργασίες όπως «sensors».

Οι ερευνητές ασχολήθηκαν σε μεγάλο βαθμό, με την δοκιμή που πρώτοι πρότειναν οι «Xiaoning Jiang et. al.», για τον προσδιορισμό της σταθερά « μ_{12} », χρησιμοποιώντας δοκό μορφής «Tapered» (μεταβλητό πλάτος αλλά σταθερό ύψος διατομής). Ακολούθησαν μια διαδικασία που έχει πολλά κοινά, με αυτήν που εφαρμόζεται στο παρόν τεύχος.

Ορίζουν το «strain gradient» σαν συνάρτηση του βέλους κάμψης. Μάλιστα αυτά είναι και ίσα. Προσδιόρισαν την πολικότητα, πολλαπλασιάζοντας το «strain gradient» με την σταθερά μ_{12} , και στην συνέχεια, προσδιόρισαν το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο ως το γινόμενο της στοιχειώδους πολικότητας με το στοιχειώδες εμβαδόν κάθετα σε αυτήν. Έτσι υπολόγισαν το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο της διατομής.

Οι ερευνητές τονίζουν τα πλεονεκτήματα του φλεξοηλεκτρισμού, σε σχέση με τον πιεζοηλεκτρισμό, παρουσιάζοντας διάγραμμα, που δείχνει την κανονικοποιημένη σταθερά του κάθε φαινομένου, στο πέρασμα του χρόνου. Το διάγραμμα αυτό φαίνεται δίπλα.

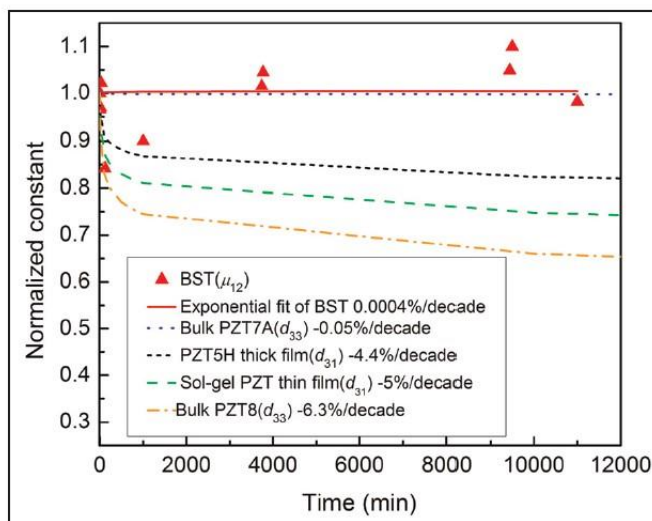


Figure 10. Διάγραμμα Από δημοσίευση με τίτλο "A trapezoidal flexoelectric accelerometer" από τους "Wenbin Huang et. al." (Fig.8)

Τα υλικά με ηλεκτρομηχανικές ιδιότητες γερνάνε, με την κόκκινη γραμμή είναι το φλεξοηλεκτρικό υλικό ενώ τα άλλα είναι πιεζοηλεκτρικά. Προφανώς, το φλεξοηλεκτρικό υλικό έχει πολύ καλύτερη συμπεριφορά στην διάρκεια του χρόνου.

Την επόμενη χρονιά οι «S. D. Hu», «H.Li» και «H.S. Tzou» με την δημοσίευση τους πραγματεύτηκαν αρκετά πράγματα. Αφού ανέδειξαν πολλά πλεονεκτήματα του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όπως το «scaling effect» χρησιμοποιώντας μικρό πάχος, την ικανότητα του φαινομένου στην κατασκευή «sensors», ανέφεραν και παρουσίασαν (ήταν μάλιστα οι πρώτοι) το μητρώο της σταθεράς του φλεξοηλεκτρισμού. Χρησιμοποιώντας την κυβική συμμετρία κατέληξαν σε αυτό που φαίνεται παρακάτω.

$$[\mu_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{12} & \mu_{11} & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{12} & \mu_{12} & \mu_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{44} \end{bmatrix}$$

Figure 11. Σχέση από την δημοσίευση "Distributed flexoelectric structural sensing: theory and experiment" των "S.D. Hu et. al." (σχέση 6) Το Μητρώο της σταθεράς του φλεξοηλεκτρισμού

Έκαναν πείραμα χρησιμοποιώντας ένα φλεξοηλεκτρικό πρόβολό, στο οποίο κόλλησαν στο πάνω και κάτω μέρος του ηλεκτρόδια. Θεωρήσαν ότι αυτό που μέτρησαν δεν ήταν η σταθερά μ_{12} αλλά μία άλλη η οποία λάμβανε υπόψη της και το φαινόμενο του στρώματός, στην άλλην διεύθυνση. Μάλιστα έδωσαν την σχέση, όπου «μ» είναι ο λόγος «Poisson»:

$$\mu_{12}^{eff} = -[(\mu - 1)\mu_{12} + \mu * \mu_{11}]$$

Την φόρτιση την εφάρμοσαν δυναμικά, έτσι ώστε να έχουν μία περίοδο, και με αυτήν να κλειδώσουν το σήμα. Το δοκίμιο του είχε διαστάσεις περίπου «110 mm * 10.01mm * 1.03mm» μήκος, πλάτος και πάχος αντίστοιχα. Το χώρισαν σε κομμάτια δια του μήκους ανά 2 εκατοστά. Και μέτρησαν την τάση σε κάθε κομμάτι. Χρησιμοποίησαν στον παλμογράφο τους 3 σήματα. Τα δύο για να δίνουν το σήμα σε 2 διαφορετικά κομμάτια, και το τρίτο να μετράει την παραμόρφωση της μύτης. Είναι σημαντικό ότι την επιλογή τους σε εξοπλισμό την δημοσίευσαν πράγμα που βοήθησε αρκετούς, να συνεχίσουν. Πέρα από τα πειράματα απλής δυναμικής φόρτισης, κάναν πειράματα και με μεταβολή της θερμοκρασίας.

Η μέτρηση περιλάμβανε ένα φίλτρο, με μεγάλη αντίσταση, μεγαλύτερη από το φλεξοηλεκτρικό τμήμα, έτσι το κύκλωμα τους θεωρούνται ανοιχτό, και μέτρησαν κατ' ευθείαν την τάση. Οι τροπές που προσδιόρισαν είχαν κλίση από 0.00 m^{-1} μέχρι 0.05 m^{-1} και η σταθερά φλεξοηλεκτρισμού προέκυψε ίση με $97 \mu\text{C}/\text{m}$. Το πειραματικό κομμάτι της εργασίας τους κατέληξε στο διπλανό διάγραμμα.

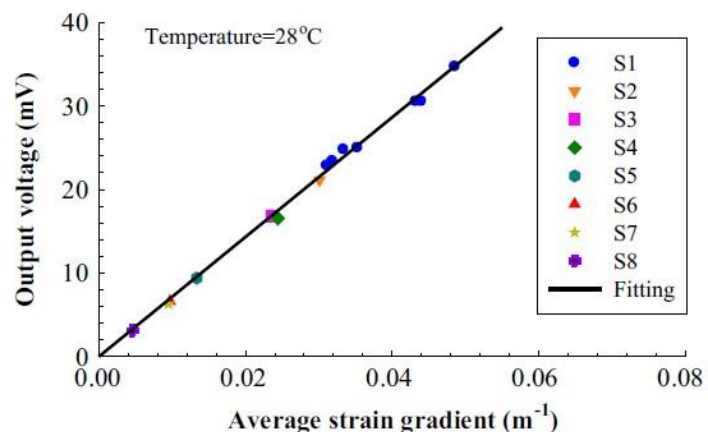


Figure 12. Διάγραμμα από την δημοσίευση "Distributed flexoelectric structural sensing: theory and experiment" των "S.D. Hu et. al." (Fig 7) Η παραγόμενη τάση με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής μεταβάλλονται γραμμικά, είναι η συνάρτηση είναι αύξουσα.

Ένα ακόμα ωραίο διάγραμμα που παρήγαγε η εργασία τους είναι

αυτό που δείχνει το μέγεθος του σήματος που έδωσε το κάθε κομμάτι. Αν θεωρήσουμε ότι κάθε κομμάτι έχει την δική του συντεταγμένη, τότε το παρακάτω διάγραμμα δεν είναι τίποτα άλλο παρά, το διάγραμμα που δείχνει την παραγόμενη τάση με την συντεταγμένη κατά μήκος του προβόλου. Προφανώς για μηδενική καμπτική ροπή το «effect» είναι μηδενικό. Αυτό τα δύο διαγράμματα, με

κάνουν να αναρωτηθώ. Με ποιον τρόπο σχετίζεται η πολικότητα με την τάση.

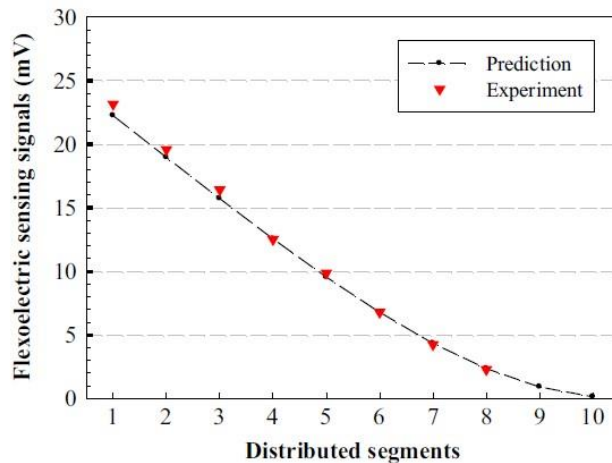


Figure 13. Διάγραμμα από την δημοσίευση "Distributed flexoelectric structural sensing: theory and experiment" των "S.D. Hu et. al." (Fig 11) Η παραγόμενη τάση με την συντεταγμένη «x».

Δύο μήνες αργότερα ο «H. Mutsuda» και η ομάδα του, δημοσίευσαν την δική τους εργασία. Σκοπός του, η παραγωγή ενέργειας. Συγκεκριμένα είδαν τον φλεξοηλεκτρισμό, όπως και τον πιεζοηλεκτρισμό, σαν μία ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν τα υλικά, που έχουν καλές τέτοιες ιδιότητες, για παραγωγή ενέργειας «Energy Harvesting». Χρησιμοποίησαν ένα εύκαμπτο δοκάρι, με πάνω και κάτω στρώση από το φλεξοηλεκτρικό PVDF, το οποίο το φόρτισαν με αέρα. Συγκεκριμένα το PVDF ήταν ένα λεπτό φιλμ και η διαμόρφωση της δοκού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

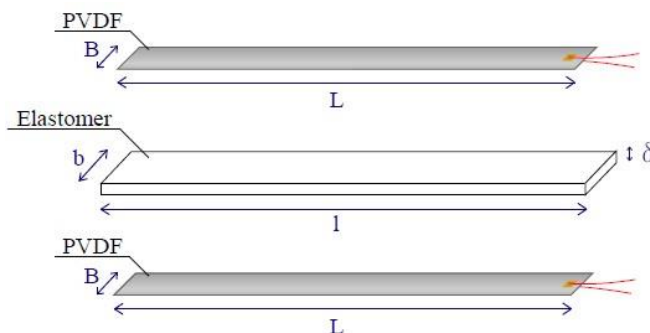


Figure 14. Εικόνα από την δημοσίευση με τίτλο "Flexible Piezoelectric Sheet for Wind Energy Harvesting" από τους "H. Mutsuda et. al." (fig 1) Το Δοκάρι που χρησιμοποιήσαν αποτελούταν από τρεις στρώσεις. PVDF-elastomer-PVDF

Παραδόξως ο τρόπος φόρτισης του ήταν κάπως προβληματικός, αφού αυτή η διάταξη δεν επιτρέπει «strain gradient» αλλά περισσότερο «uniform strain». Το υλικό «PVDF» δεν είναι πιεζοηλεκτρικό αλλά φλεξοηλεκτρικό, και έτσι το αποτέλεσμα ήταν, πολύ μικρό σήμα.

Χρησιμοποίησαν και αυτοί δυναμική φόρτιση για να εντοπίσουν το σχήμα. Δοκίμασαν αμφιαρθρωτή σύνδεση, αλλά ίσως και μερική αμφίπακτη. Και εννοείται ότι τα αποτελέσμα τους όταν το φόρτιζαν

με την μεγάλη επιφάνεια στο μέτωπο του αέρα είχε πολύ μικρότερο σήμα από την άλλην, όπως εξάλλου ήταν και αναμενόμενο, παρόλο που η δύναμη που προκύπτει από την επιφάνεια ήταν αρκετά μικρότερη. Ο λόγος είναι ότι όταν τοποθετηθεί το δοκίμιο, κάθετα στην ροή του αέρα, έχουμε κανονικό φλεξοηλεκτρισμό, ενώ αντίθετα, έχουμε αρκετά πειραγμένο.

Οι ερευνητές επίσης έβγαλαν ένα συμπέρασμα ότι, το να είναι ο φορέας μερικά αμφίπακτωμένος βοηθάει. Ίσως να βοηθάει λόγω του φαινομένου στην άλλην διεύθυνση, ίσως και εξαιτίας τοπικών φαινομένων. Ερώτημα, που χρειάζεται μία απάντηση, αλλά δεν έχει.

Την ίδια χρονιά δημοσιεύτηκε και η εργασία των «Shashi Poddar» & «Stephen Ducharme». Αφού δίνουν μία εξήγηση του φαινομένου, παρόμοια με αυτήν που δώσαν και προηγούμενοι, θίγουν την πρόταση των «Kogan» «Tagantsev» ότι η σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού « μ_{ij} » σχετίζεται με την διηλεκτρική σταθερά και μάλιστα είναι ανάλογη. Υποστηρίζουν ότι με την μεταβολή της θερμοκρασίας μπορεί κανείς να ενισχύσει ή να αποδυναμώσει το φαινόμενο. Σημαντικό σημείο θερμοκρασίας για το παραπάνω είναι το «Curie-Point». Πρόκειται για μία παρατήρηση που έκαναν και προηγούμενοι όμως.

Έκαναν πείραμα κάμψης προβόλου διαστάσεων « $50mm * 10mm * 0.2mm$ ». Έβαλαν ηλεκτρόδια στο κάτω και στο πάνω μέρος του προβόλου, εφάρμωσαν φορτίο με κάποια συχνότητα, για να την εντοπίσουν στον παλμογράφο, και στην συνέχεια υπολόγισαν το «strain gradient» στο « $1m^{-1}$ ».

Πολύ ωραία αποτελέσματα της εργασίας τους είναι κάποια διαγράμματα, που έφτιαξαν και με αυτά συσχέτισαν την διηλεκτρική σταθερά με την σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού. Αυτά φαίνονται παρακάτω.

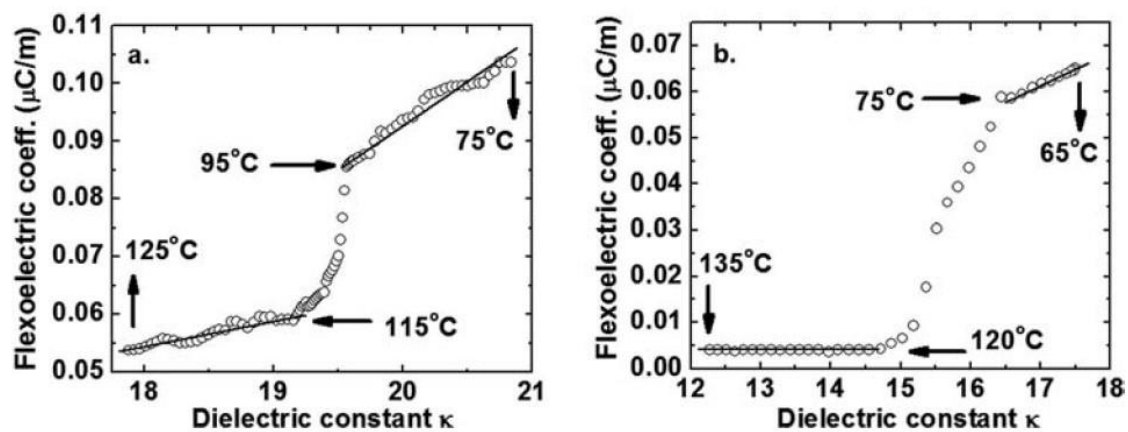


Figure 20. Εικόνα από δημοσίευση με τίτλο "Temperature dependence of the flexoelectric response in ferroelectric and relaxor polymer thin films" των "S. Poddar & S. Ducharme" (Fig. 5)

Εικόνα που δείχνει την αύξουσα σχέση της διηλεκτρικής σταθεράς με την φλεξοηλεκτρική σταθερά, για δύο διαφορετικά υλικά'.

Το 2015 η εργασία των «B. L. Deng», «H. Li» και «H. S. Tzou» εντυπωσίασε πολύ. Ασχολήθηκαν σε μεγάλο βαθμό με το αντίστροφο φαινόμενο δηλαδή την μετατροπή του ηλεκτρικού έργου σε μηχανικό, το οποίο λέγεται και «converse flexoelectric effect». Χρησιμοποίησαν συσκευές που έχουν την δυνατότητα να παρέχουν πολικότητα σε ένα σημείο. Αυτές οι συσκευές λέγονται «actuators». Μάλιστα χρησιμοποίησαν συνδυασμό «AFM probes» και «flexoelectric patches» που γενικά είναι πολύ ακριβός αλλά ακριβής εξοπλισμός. Εντόπισαν στην συνέχεια θέση που πρέπει να είναι αυτό το «actuator» έτσι ώστε η μετακίνηση της άκρης του προβόλου να είναι ελάχιστη.

Η κεντρική ιδέα της εργασίας ήταν ένα «active vibration control system» το οποίο μπορεί να πει κανείς ότι βοηθάει σε καταστάσεις όπως σεισμική συμπεριφορά. Έρχεται ο σεισμός και δίνοντας ρεύμα, αναιρούμε την φόρτηση που προκαλεί. Το αποτέλεσμα ενός σωστού «active vibration control system» θα ήταν οι λεγόμενες «smart structures».

Στα πειράματα τους χρησιμοποίησαν ένα σύνολο τριών «actuators» μετακινώντας τους στο μήκος της δοκού, υπολόγισαν την βέλτιστη θέση για την μικρότερη κατακόρυφη μετακίνηση. Η δοκός τους είχε διαστάσεις «100mm * 10mm * 1mm». Μετά από τα πειράματα προσδιορίστηκε και η βέλτιστη θέση των «Probes» για την ελάχιστη μετακίνηση της άκρης του προβόλου, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα.

Mode number	First actuator position (m)	Second actuator position (m)	Third actuator position (m)	Maximal induced tip displacement (μm)
1	0.005	0.015	0.025	365.14
2	0.005	0.048	0.058	52.862
3	0.031	0.066	0.076	18.178

Figure 21. Πίνακας από την δημοσίευση με τίτλο "Optimal positions for multiple flexoelectric actuations on beams" των "B. L. Deng et. al." (table 2)

Η βέλτιστη θέση των "actuators" στο μήκος της δοκού για ελάχιστη μετακίνηση άκρης του προβόλου. Το αριθμός "mode" έχει να κάνει με την συχνότητα της φόρτισης, μιας και αυτή είναι δυναμική.

Όταν το φορτίο της δόνησης είναι πολύ μικρό τότε τα «Probes» κινούνται συνεχώς ώστε να βρουν την βέλτιστη θέση, και έτσι το σύστημα γίνεται ασταθές. Όσο το φορτίο είναι μικρό, η αλλαγή της θέσης των «probes» δεν αλλάζει τίποτα. Όταν το φορτίο της δόνησης είναι πολύ μεγάλο, τότε η θέση τους είναι εκεί που προκαλείται η μεγαλύτερη εξουδετέρωση. Για μέτρια φορτία, η θέση των «probes» αλλάζει ανάλογα με την συχνότητα της φόρτισης.

Στις αρχές του 2016 οι ερευνητές «Jianfeng Lu et. al.» δημοσίευσαν την εργασία τους με τίτλο «Improved approach to measure the direct flexoelectric coefficient of bulk polyvinylidene fluoride». Εξέφρασαν την γνώμη τους για το πώς το «strain gradient» συνδέεται με το «stress gradient» λόγω του νόμου του Hooke. Συμφώνησαν με παλαιότερες δημοσιεύσεις ότι είναι θεωρητικά δυνατό να υπάρξει λόγω του φλεξοηλεκτρισμού, πιεζοηλεκτρισμός, χωρίς πιεζοηλεκτρικό υλικό. Αναγνώρισαν την σχέση πολικότητας με ηλεκτρικό ρεύμα ως τον τύπο που φαίνεται παρακάτω.

$$P = \frac{I}{2 * \pi * f * A}$$

Και υποστήριξαν ότι οι προηγούμενοι δεν είχαν ολόσωστα αποτελέσματα γιατί έχαναν υλικό από τις άκρες των δοκιμίων. Γι' αυτό και αυτοί δοκίμασαν πείραμα με κυλινδρικό και ένα με γωνίες. Το κυλινδρικό το χρησιμοποίησαν για να υπολογίσουν το μέτρο ελαστικότητας και τον απομένοντα πιεζοηλεκτρισμό, ενώ το άλλο για να μετρήσουν το ρυθμό μεταβολής της τροπής. Το υλικό που χρησιμοποίησαν ήταν το «PVDF». Επίσης επέλεξαν πολυμερές «α-phase»

Μέτρησαν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού «PVDF» ίσο με « $E = 2,1 * 10^9 N/m^2$ ». Με ακτινογραφίες προσδιόρισαν ότι ο βαθμός και η ένταση της κρυσταλλικότητας των φιλμ είμαι καλλίτερη από αυτή των ολόσωμων διατομών, παρόλο που υπάρχει μεγαλύτερο πλατώ στις ολόσωμες. Υπολόγισαν και την διηλεκτρικά σταθερά: « $\epsilon = 9.4$ » σε θερμοκρασία δωματίου.

Το πείραμα τους περιλάμβανε δοκιμή ορθής έντασης, και οι μετρήσεις έγιναν με χρήση παλμογράφου, και με ένα μηχάνημα που λέγεται «charge amplifier». Απέδειξαν την απόλυτη γραμμικότητα μεταξύ του φορτίου και του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

Αυτό όμως που είναι άξιο παρατήρησης είναι το γεγονός ότι και το σταθερής ακτίνας κυλινδρικό δοκίμιο έδωσε ηλεκτρικό σήμα, παρόλο που δεν είχε ρυθμό μεταβολής των τάσεων.

Την ίδια χρονιά δημοσιεύτηκε από τους «S. Krichen» «P. Sharma» μία από τις σημαντικότερες ανασκοπήσεις του φαινομένου. Ανάφεραν ότι όλα τα διηλεκτρικά υλικά είναι ικανά να αναπτύξουν φλεξοηλεκτρικές ικανότητες, αφού τόνισαν την διαφορά του φλεξοηλεκτρισμού από τον πιεζοηλεκτρισμό. Ακόμα όρισαν πότε οι φλεξοηλεκτρικές ικανότητες ενός υλικού είναι σημαντικές. Όταν οι σταθερές του υλικού είναι μεγάλες, όταν το υλικό δεν έχει πιεζοηλεκτρικές ικανότητες λόγω συμμετρικότητας και έτσι ο φλεξοηλεκτρισμός είναι μονόδρομος, όταν έχουμε μικρές διαστάσεις («Scaling effect») και σε μαλακά υλικά, με μικρό μέτρο ελαστικότητας. Τα δύο τελευταία και το πρώτο φαίνονται σε μεγάλο βαθμό και στην παρούσα εργασία.

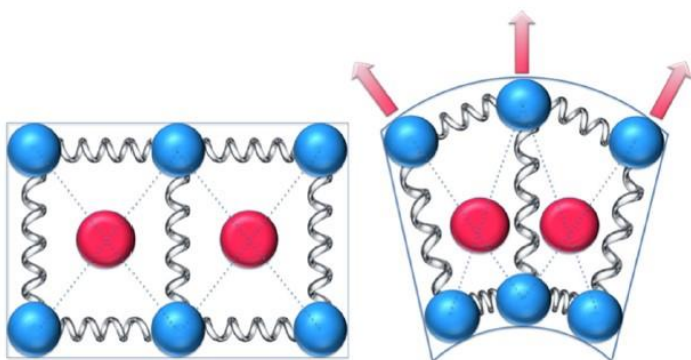


Figure 22. Εικόνα από την δημοσίευση με τίτλο "Flexoelectricity: A Perspective on an Unusual Electromechanical Coupling" των "S. Krichen & P. Sharma" (Fig. 1)

Σχηματική απεικόνιση του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

Υποστηρίζουν ότι με την εξέλιξη της νανοτεχνολογίας, το φαινόμενο μπορεί να αναπτυχθεί και αυτό, λόγω των μικρών διαστάσεων, και στην συνέχεια υποστήριξαν το επιχείρημα «N. D. Sharman et. al., 2007» ότι ένα από τα καλύτερα πλεονεκτήματα του φλεξοηλεκτρισμού είναι η κατασκευή πιεζοηλεκτρικών στοιχείων από μη πιεζοηλεκτρικά υλικά, πειράζοντας την γεωμετρία των υλικών όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.

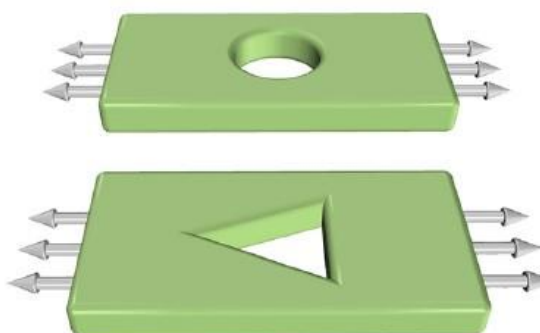


Figure 23. Εικόνα από την δημοσίευση με τίτλο "Flexoelectricity: A Perspective on an Unusual Electromechanical Coupling" των "S. Krichen & P. Sharma" (Fig. 3).

Το δοκίμιο με την τριγωνική οπή δίνει φλεξοηλεκτρικό σήμα, διότι υπάρχει ρυθμός μεταβολής των τάσεων, σε αντίθεση με το πάνω με την κυκλική οπή που το φαινόμενο εξουδετερώνεται.

Ακόμα υποστήριξαν ότι αυτό είναι δυνατόν να γίνει και σε μικρότερη κλίμακα, όπως σε ένα σύνθετο υλικό.

Στην συνέχεια περιέγραψαν εφαρμογές του φαινομένου όπως η παραγωγή ενέργειας μέσω φόρτισης ενός πυκνωτή. Υποστήριξαν επίσης ότι η ακοή των θηλαστικών είναι και αυτό μια εφαρμογή του φαινομένου.

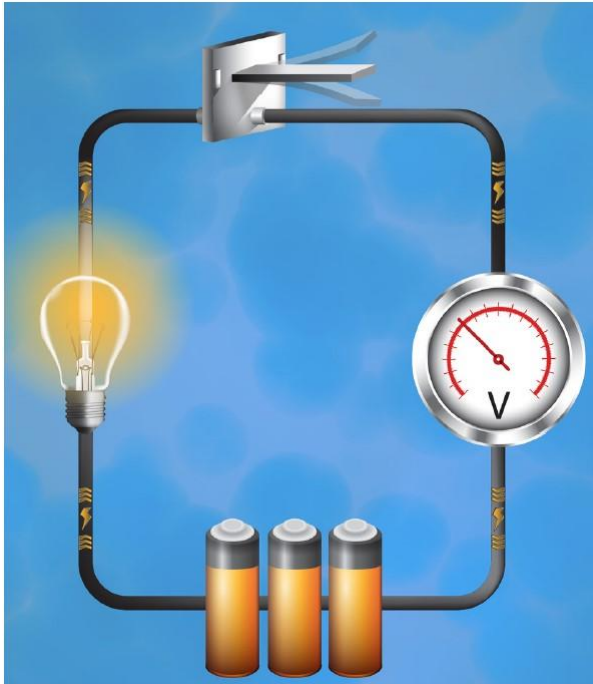


Figure 15. Εικόνα από την δημοσίευση με τίτλο "Flexoelectricity: A Perspective on an Unusual Electromechanical Coupling" των "S. Krichen & P. Sharma" (Fig. 5)
Ο φλεξοηλεκτρισμός μπορεί να αντικαταστήσει μία πηγή ρεύματος.

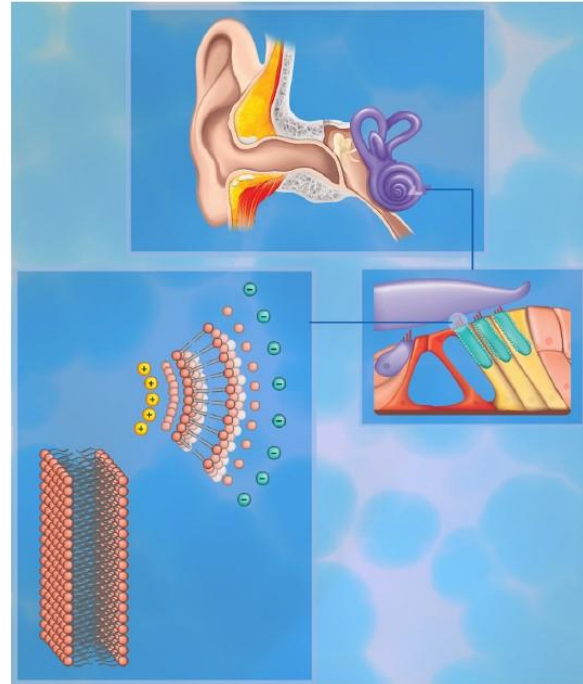


Figure 25. Εικόνα από την δημοσίευση με τίτλο "Flexoelectricity: A Perspective on an Unusual Electromechanical Coupling" των "S. Krichen & P. Sharma" (Fig. 6)
Η ακοή των θηλαστικών, είναι και αυτή μια εφαρμογή του φαινομένου.

Την ίδια χρονιά οι «Baojin Chu» και «D. R. Salem» έκαναν δοκιμές με ηλεκτρόδια, που κάλυπταν ένα μεγάλο μέρος της επιφάνειας του πλαστικού, το οποίο έχει πολλά πλεονεκτήματα, έναντι των κεραμικών, παρά την χαμηλότερη φλεξοηλεκτρική σταθερά, αντί για ηλεκτρόδια, με σημειακή επιφάνεια όπως κροκοδιλάκια ή κλιμάκια, που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Τα δοκίμια, από υλικό «PVDF» πάχους «0.3 mm» και «0.5 mm» από την εταιρία «CS Hyde» (η ίδια εταιρία, προμηθευτής, των δοκιμών της παρούσας εργασίας). Δοκίμασαν και άλλο υλικό «Oriented polyethylene terephthalate» πάχους «0.25 mm» καθώς και εποξινίτη που χρησιμοποίησαν για να παραγάγουν τα δοκίμια σχήματος τραπέζιου που έθεσαν σε φόρτιση. Για την πειραματική διαδικασία χρησιμοποίησαν «Lock in Amplifier».

Αυτοί οι ερευνητές οργάνωσαν την ακολουθία, των υπολογισμών, που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο σχετίζεται με την πολικότητα και το ηλεκτρικό ρεύμα.

$$Q = \int P * dA = \frac{I}{2 * \pi * f}$$

Χρησιμοποίησαν την σχέση Euler – Bernoulli για την συσχέτιση του μηχανικού εξωτερικού φορτίου με την κατακόρυφη παραμόρφωση, και στην συνέχεια προσδιόρισαν την πολικότητα με τον τύπο που προέγραψε οι «M. Marvan» και «A. Havránek»: « $P_i = \gamma_{ijkl} * \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial x_j}$ » με πιο προσιτή μορφή, όπως εκφράστηκε πολλές φορές από επόμενους

$$P_{ij} = \mu_{ij} * \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_j}$$

Τα πειράματα του έδωσαν φλεξοηλεκτρική σταθερά της τάξης των «pC».

Materials	Flexoelectric coefficient (C/m)	Dielectric constant ϵ_r (1 kHz)	Dielectric loss tg δ (1 kHz)	Heat of fusion from DSC (J/g)	Estimated crystallinity (%)
PVDF	$1.3 \times 10^{-8} \pm 1.0 \times 10^{-9}$	9.2	0.016	57.47	55
Oriented PET	$9.9 \times 10^{-9} \pm 0.4 \times 10^{-9}$	3.9	0.005	47.53	34
Polyethylene	$5.8 \times 10^{-9} \pm 1.1 \times 10^{-9}$	2.4	0.0003	129.80	44
Epoxy	$2.9 \times 10^{-9} \pm 0.3 \times 10^{-9}$	3.9	0.022	0	0

Figure 26. Εικόνα από την δημοσίευση με τίτλο "Flexoelectricity in several thermoplastic and thermosetting polymers" των "Baojin Chu" & "D.R. Salme" (table 1)

Πίνακας με τα αποτελέσματα των πειραμάτων των ερευνητών.

Λίγο αργότερα, οι «Seung-Bok Choi» και «Gi-Woo kim» με την δημοσίευση τους με τίτλο «Measurement of flexoelectric response in polyvinylidene fluoride films for piezoelectric vibration energy harvesters» σχολίασαν το γεγονός, ότι παρόλο που το υλικό με το όνομα «PVDF» χρησιμοποιείτο σε πάρα πολλές εφαρμογές πιεζοηλεκτρισμού, λόγω αξιόπαινων μηχανικών ιδιοτήτων, δεν λαμβανόταν υπόψιν του οι φλεξοηλεκτρικές του ικανότητες, πόσο μάλλον ως συσκευή παραγωγής ενέργειας από την φόρτιση του («vibration energy harvester»).

Οι ερευνητές μελέτησαν «PVDF β -phase» και πιο συγκεκριμένα ένα υλικό το οποίο το ονόμασα «PVEH» το οποίο είχε έναν ελαστικό πυρήνα και πάνω και κάτω στρώσεις από «PVDF» με ανάλυση της δυναμικής του συμπεριφοράς (ιδιομορφές) μέσω πεπερασμένων στοιχείων, όπως φαίνεται και στην εικόνα. Θεώρησαν ότι η πολικότητα προέρχεται από το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού, ταυτόχρονα με το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού. Στην συνέχεια υπολόγισαν την τροπή για διαφορές συχνότητες φόρτισης και τον ρυθμό μεταβολής της.

Περίεργως όμως βρήκαν αποτελέσματα αρκετά μικρά συγκριτικά με άλλους ερευνητές της τάξης των « $10^{-12} C$ » (βέβαια αυτό μπορεί να οφείλεται ότι το PVDF δεν καμπτότανε πολύ συγκριτικά με το πόσο θλιβότανε, αφού βρισκότανε πάνω και κάτω). Επιπλέον απορίες προκαλεί το γεγονός ότι μέτρησαν και πιεζοηλεκτρισμό.

Ωραία παρατήρηση είναι ο τρόπος που υπολόγισαν την πολικότητα μέσω της τάσης. Με την χρήση πυκνωτή εφαρμόζοντας τον τύπο που φαίνεται παρακάτω.

$$P_{avg} = \frac{C * V}{2\Delta T}$$

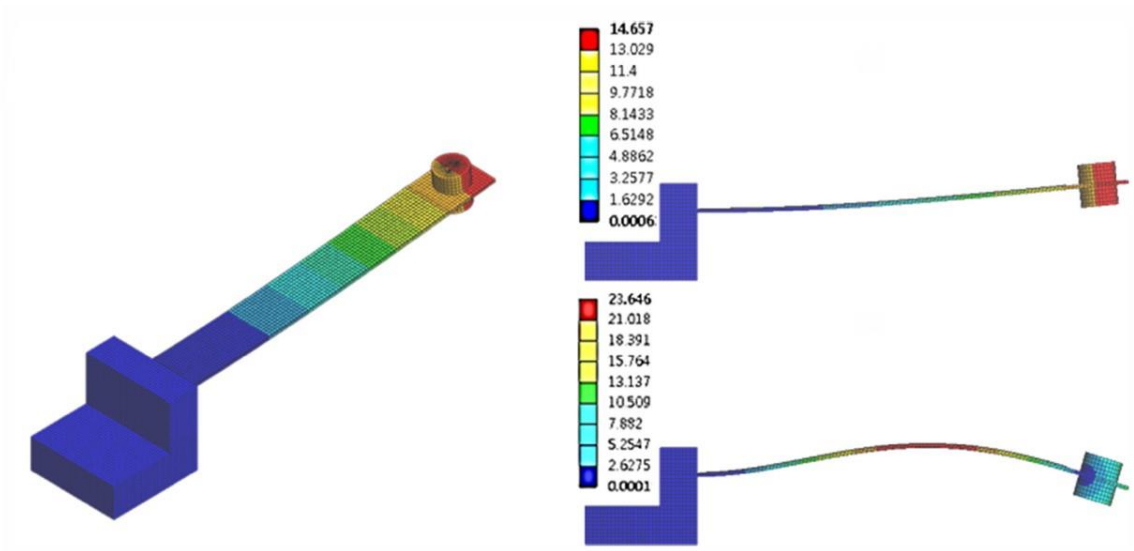


Figure 27. Εικόνα από δημοσίευση με τίτλο "Measurement of flexoelectric response in polyvinylidene fluoride films for piezoelectric vibration energy harvesters" των "Seung-bok Choi" & "Gi-Wo Kim" (fig 4.)
Ανάλυση με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, ο φορέας και οι δύο πρώτες ιδιομορφές..

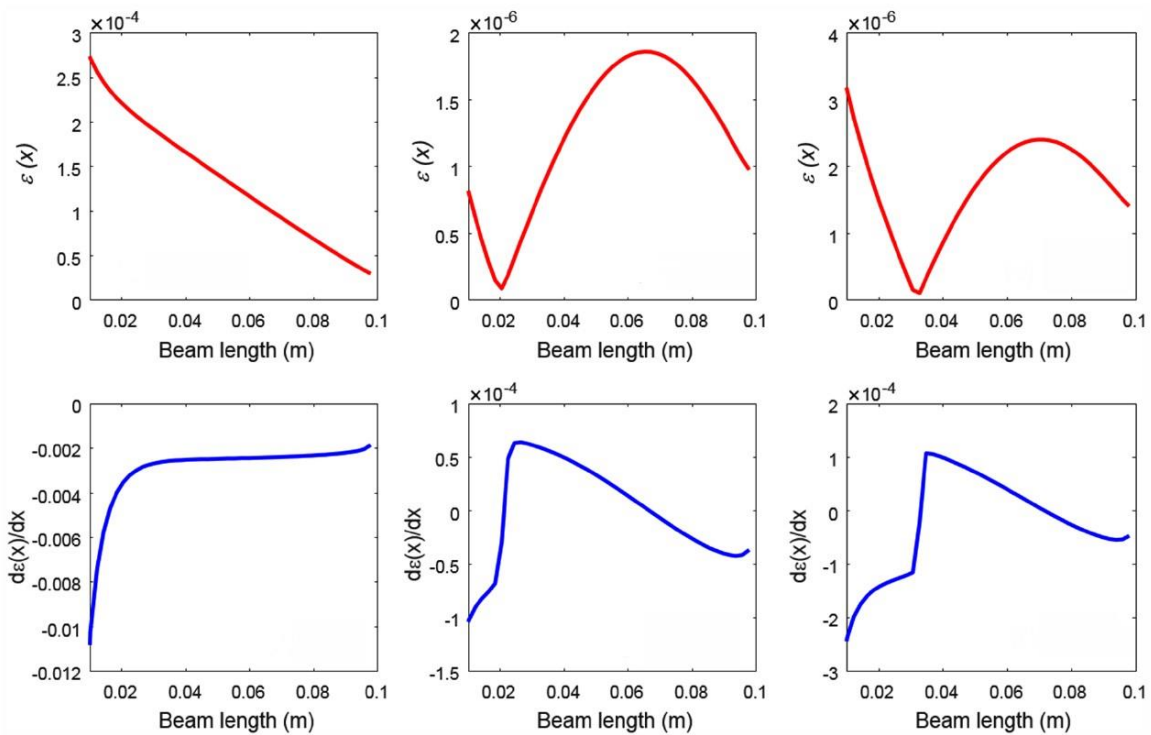


Figure 28. Εικόνα από δημοσίευση με τίτλο "Measurement of flexoelectric response in polyvinylidene fluoride films for piezoelectric vibration energy harvesters" των "Seung-bok Choi" & "Gi-Wo Kim" (fig 7.)
Το «strain» και το «strain gradient» κατά μήκος του προβόλου, για διάφορες συχνότητες.

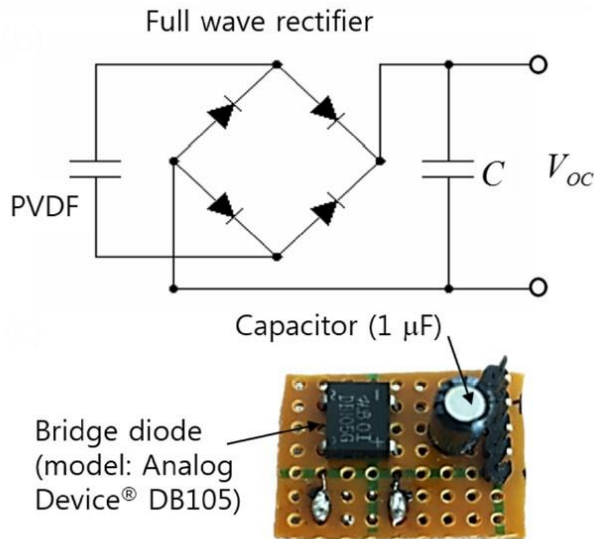


Figure 29. Εικόνα από δημοσίευση με τίτλο "Measurement of flexoelectric response in polyvinylidene fluoride films for piezoelectric vibration energy harvesters" των "Seung-bok Choi" & "Gi-Wo Kim" (fig 11).

Η διάταξη με την οποία μετέτρεψαν την τάση που μετρήθηκε από τον παλμογράφο σε πολικότητα.

Στα τέλη του 2016 ο ερευνητής «Zhi Yan» έκανε γνωστή την εργασία του. Παρατήρησε ότι σε μία δοκό, οι τάσεις στην επιφάνεια είναι παράξενες, και θεώρησε ότι θα μπορούσε να συνδυάσει φαινόμενα όπως το «surface elasticity» «residual surface stress» «surface piezoelectricity» και «bulk flexoelectricity». Το όραμα του: πακέτα ενέργειας με δυνατότητες επαναφόρτισης για την ανάπτυξη πολλών εφαρμογών. Ένα σχόλιο που κάνει και είναι σημαντικό, το οποίο βέβαια έχει ξανά επισημανθεί είναι η οικουμενικότητα του φλεξοηλεκτρισμού, ότι δηλαδή όλα τα υλικά είναι φλεξοηλεκτρικά, με κάποια πιο πολύ από κάποια άλλα.

Ο ερευνητής θεώρησε ότι τα «surface effects» έχουν την ικανότητα να βελτιστοποιήσουν το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού. Για να αποδείξει την θεωρία αυτή χρησιμοποίησε μία σύνθετη διατομή με τρεις στρώσεις, μία στρώση ο πυρήνας που είναι φλεξοηλεκτρικός από ένα πιεζοκεραμικό, και δύο στρώσεις πάνω και κάτω με μικρό πάχος, για να πιάσει τα επιφανειακά φαινόμενα. Στην πειραματική του διάταξη πρόσθεσε και έναν αντιστάτη, για να μετρήσει με πιο εύκολο τρόπο τις τάσεις του συστήματος. Επίσης αναφέρει ότι το φαινόμενο στην άλλη διεύθυνση, αυτό που στην παρούσα εργασία το έχουμε ονομάσει φαινόμενο ίνας ή στρώματος, είναι πολύ μικρό, και γι' αυτό το αγνοεί. Ακόμα αγνοεί και τυχόν πιεζοηλεκτρισμό αφού και αυτός αναιρείται λόγω της φόρτισης.

Το πείραμα έγινε με χρήση του υλικού «PVDF» με διαστάσεις « $3mm * 0.3mm * 0.003mm$ » Η φόρτιση έγινε δυναμικά με συγκεκριμένη συχνότητα. Στην συνέχεια έγινε και επιλογή άλλου υλικού «PZT», στο οποίο η δοκός ήταν φυσιολογική, αλλά είναι σημαντικό να ενημερώσουμε ότι το μέτρο ελαστικότητας του δεύτερου είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό του πρώτου. Τα πειράματα έδειξαν ότι η επιλογή του «PZT» χωρίς στρώματα, ήταν καλύτερη από αυτήν του «PVDF», και ότι τα «surface effects» δεν είχαν μεγάλη σημασία αλλά υπάρχουν.

Την ίδια εποχή οι ερευνητές «A. G. Moura» και «A. Erturk» μελέτησαν σε μεγάλο βαθμό τόσο το απευθείας φαινόμενο όσο και το αντίστροφο (από ηλεκτρικό έργο σε μηχανικό) μάλιστα προσδιόρισαν τον συντελεστή του αντίστροφου φαινομένου, σαν ανάλογο του απευθείας φαινομένου και αντιστρόφως ανάλογο της διηλεκτρικής σταθεράς. Χρησιμοποίησαν μαθηματικές εκφράσεις αρκετά περίπλοκες για να εκφράσουν τις σταθερές του κανονικού και του αντιστρόφου

φαινομένου, και υποστηρίζουν ότι το πάχος της διατομής του δοκιμίου παίζει σημαντικό ρόλο στην σταθερά, πράγμα που θα μπορούσε κάλλιστα να συμφωνεί με προηγούμενους ερευνητές οι οποίοι υποστήριξαν ότι το φαινόμενο είναι πιο ισχυρό σε διατομές «film» απ' ότι σε ολόσωμες.

Στα πειράματα τους χρησιμοποίησαν αντίσταση. Τα δοκίμια τους είχαν διαστάσεις «μήκος/Πλάτος/ύψος = 100/5/1». Με αυτά απέδειξαν και πειραματικά, ότι μικραίνοντας το ύψος της διατομής ενισχύεται το φαινόμενο (δηλαδή δεν είναι μόνο «scaling effect» λόγω της αδράνειας αλλά και εσωτερικά, λόγω της κρυσταλλικότητας). Την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος την πήραν χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm. Εντέλει η σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού που υπολογίστηκε ήταν της τάξης του « 10^{-9} C/m»

Σε αυτό το σημείο η ιστορική αναδρομή για την εξέλιξη του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού φτάνει στο τέλος της. Σημαντικοί ερευνητές, απίθανες εφαρμογές, λανθασμένα και βιαστικά συμπεράσματα από κάποιους, πολύ σχολαστική και υπολογιστικά περιποιημένη εργασία από κάποιους άλλους.

3. Ανάλυση Περιπτώσεων

Ένα από τα αναπτυγμένα κομμάτια στην παρούσα εργασία, είναι αυτό που ονομάσαμε ανάλυση περιπτώσεων. Δοκιμάσαμε ορισμένους δομικούς φορείς, όπως είναι ο πρόβολος και η αμφιέρεστη δοκός, και μελετήσαμε, μέσω μηχανικής, το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού.

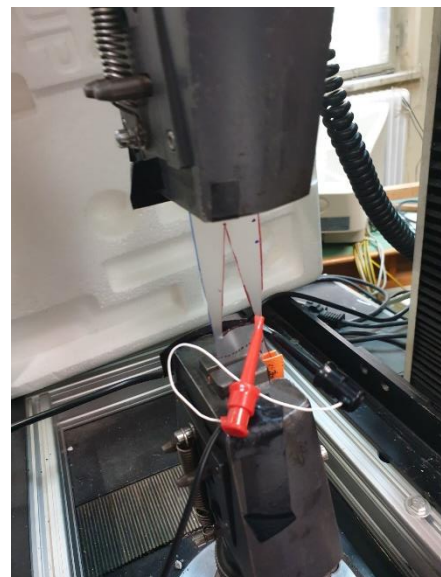
Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου, και κατ' επέκταση και της εργασίας, είναι η αποκάλυψη, ότι υλικά, που έχουν σημαντικές φλεξοηλεκτρικές ικανότητες θα μπορούσαν, όχι μόνο, να υπάρξουν σαν μέλη ενός φέροντος στοιχείου, όπως τοποθετημένα ως ενίσχυση, αλλά και να υπάρξουν αυτά καθ' αυτά, σαν δομικός φορέας. Σε μία κατασκευή, είναι πολύ ωραίο, να υπάρχει το ενεργειακό σήμα, ιδιαίτερα από κάτι ανέξοδο, όπως είναι η καταπόνηση. Θα μπορούσε ένας ουρανοξύστης ή ένα χαμηλότερο κτήριο, να θέσει πόρους, που παράχθηκαν λόγω του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, σε λειτουργίες που επιφέρουν την ενεργειακή απόδοση του κτηρίου. Ο όρος είναι έξυπνο κτήριο, «Smart House». Ακόμα θα μπορούσε αυτό το ηλεκτρικό σήμα, να λειτουργήσει σαν «sensor», δηλαδή να εντοπίσει μία καταπόνηση. «Active vibration control». Έτσι λέγεται, να εντοπίζεις τον σεισμό, από το ίδιο του το φορτίο, και να ενεργοποιείς την εγκατεστημένη σεισμική μόνωση, που θα μπορούσε να είναι αποδέσμευση των στροφικών στηρίξεων ώστε να γίνουν αρθρώσεις, κάτι όπως και στην γέφυρα του Ρίου Αντιρρίου.

Ο στόχος αυτής της σύνδεσης, ανάλυση δομικών μελών, με το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, αναγράφεται παρακάτω. Το σήμα του φλεξοηλεκτρισμού, το οποίο είναι διαθέσιμο σε όλα τα διηλεκτρικά, δηλαδή σε σχεδόν όλα τα υλικά, αλλά είναι αρκετά αδύναμο, θα μπορούσε να ενισχυθεί, έτσι ώστε να εμφανιστεί σε κάθε περίπτωση. Το παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σχετίζεται αποκλειστικά από τον ρυθμό μεταβολής των τροπών («strain gradient»). Αυτή η κλίση του διαγράμματος των τροπών μπορεί παραχθεί με πολλούς τρόπους.

Οι Τρόποι με τους οποίους γίνεται προσπάθεια δημιουργίας «strain gradient» είναι:

- Με το είδος της φόρτισης
Η καμπτική φόρτιση, εξ' ορισμού παράγει κλίση του διαγράμματος των τροπών, τόσο στην διατομή, όσο και την μηκοτομή, ενώ φορτίσεις όπως ο εφελκυσμός, δεν δημιουργούν.
- Η Γεωμετρία της δοκού.
Η εξίσωση δοκού των Euler Bernoulli έχει μέσα της, τον όρο που ονομάζεται μέτρο του Young. Το Μέτρο ελαστικότητας επί την ροπή αδρανείας. Σε αυτήν την εργασία θα πειράζουμε την ροπή αδρανείας, δηλαδή αλλάζοντας το πλάτος και το ύψος της διατομής, ή διατηρώντας το μεταβαλλόμενο με μία κλίση. Βέβαια και η επεξεργασία του μέτρου ελαστικότητας φαντάζει αρκετά υποσχόμενη.
- Με τις συννοριακές συνθήκες.
Διαφορετική μπορεί να είναι η φλεξοηλεκτρική συμπεριφορά ενός δομικού στοιχείου, αν αυτό είναι πρόβολος, ή αμφιέρεστη δοκός, ή τετραέρεστη πλάκα.
- Τέλος, ατέλειες στον φορέα, οι οποίες δυστυχώς δεν έχουν υποστεί ανάλυση, αλλά έχουν περάσει από πειραματική δοκιμή. Τέτοιες ατέλειες είναι τριγωνικές οπές ή μικρορωγμές.

Figure 1. Δοκίμιο με μία μεγάλη τριγωνική ρωγμή, που δοκιμάστηκε σε εφελκυσμό, στο εργαστήριο του τομέα μηχανικής, της σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π.



Η Μεθοδολογία της ανάλυσης που ακολουθήθηκε είναι παρόμοια με αυτήν που προτείνουν οι «Chu Baojin & Salem D.», στην δημοσίευση με τίτλο «Flexoelectricity in several thermoplastic and thermosetting polymers» που δημοσιεύτηκε το «2012». Σημαντικό ρόλο σε αυτήν την ανάλυση έπαιξε και η σχέση που πρώτο - δημοσιεύτηκε με την πρωτότυπη μορφή της από τους «Marvan M. & Havranek A.» στην δημοσίευση με τίτλο «Flexoelectric effect in elastomers» το έτος «1988»

Η Σχέση αυτή, υπέστη επεξεργασία, και έχει την παρακάτω μορφή, να σημειωθεί ότι οι παρακάτω, δεν είναι τανυστες, και ο συμβολισμός, είναι απλά τυπικός.

$$P_{ij} = \mu_{ij} * \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_j}$$

Η μεθοδολογία ανάλυσης έχει ως εξής:

1. Προσδιορισμός του φορέα και των μεταβλητών του προβλήματος.
2. Προσδιορισμός της εντατικής κατάστασης.
3. Προσδιορισμός των αδρανειακών χαρακτηριστικών του φορέα.
4. Προσδιορισμός της παραμορφωμένης εικόνας, π.χ. το βέλος κάμψης.
5. Προσδιορισμός των τάσεων που μάς ενδιαφέρουν, δηλαδή τάσεις που αναπτύσσονται στον έναν άξονα, και μεταβάλλονται κατά μήκος του ίδιου άξονα ή άλλου.
6. Προσδιορισμός της πολικότητας με την σχέση που φαίνεται παραπάνω.
7. Προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος της διατομής.
8. Αντικατάσταση των εντατικών μεγεθών στην σχέση με το συνολικό φορτίο σε όλη την δοκό, με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα όποια είναι πιο εύκολα προσδιορίσιμα, γιατί φαίνονται.

Θα μπορούσαμε κάλλιστα να διακόπταμε την διαδικασία σε κάθε στάδιο από το βήμα 7. και μετά, διότι η πολικότητα είναι αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως, αλλά τότε η ανάλυση δεν θα ήταν πλήρης. Εξάλλου σε ένα δομικό στοιχείο, από υλικό με σημαντικές φλεξοηλεκτρικές ικανότητες, δε θα βάλουμε μηχανισμούς εκμετάλλευσης του ηλεκτρικού φορτίου σημειακά, αλλά σε μία μεγαλύτερη επιφάνεια.

Σε αρκετά βήματα της παραπάνω μεθοδολογίας αντιστοιχούν διαγράμματα, με σκοπό τον προσδιορισμό της βέλτιστης κατάστασης. Κάποιες φορές όμως κάτι τέτοιο είναι δύσκολο γιατί δεν είναι εύκολα προσδιορίσιμο, τότε η αύξηση μίας μεταβλητής βοηθάει τότε όχι, το φαινόμενο παραγωγής ηλεκτρικού φορτίου μέσω του φλεξοηλεκτρισμού.

Κάθε περίπτωση που αναλύθηκε, έχει έναν κωδικό, αυτός δεν είναι τίποτα άλλο, πάρα μία ένδειξη για το τί φορέας είναι. Θεωρούμε μία αρίθμηση «i.j.k.» όπου τα «i», «j», «k» δεν είναι τίποτε περισσότερο από μεταβλητές που παίρνουν τιμές από το 0 μέχρι και το 4.

Ο συντελεστής «i», δηλώνει το τύπο του φορέα (πώς στηρίζεται ο φορέας). Έτσι για «i = 1» έχουμε φορέα πρόβολο, «i = 2» έχουμε αμφίπακτο φορέα, και συνεχίζοντας έτσι με τους φορείς. Στην παρούσα εργασία έχουμε μέχρι αμφιέρεστο φορέα.

Ο συντελεστής «j» δηλώνει την μεταβολή της γεωμετρίας του φορέα. Για «j = 0» ο η διατομή του φορέα είναι σταθερή, για «j = 1» έχουμε διατομή με μεταβαλλόμενο πλάτος, για «j = 2» το μεταβαλλόμενο μέγεθος είναι το ύψος της διατομής, για «j = 3» έχουμε ταυτόχρονα μεταβαλλόμενα και το ύψος και το πλάτος της διατομής, ενώ για «j = 4», έχω ειδική περίπτωση.

Τέλος, ο συντελεστής «k» αντιπροσωπεύει το φορτίο που ασκείται στον φορέα. Μπορεί το φορτίο να είναι μία κατακόρυφη δύναμη, μία καμπτική ροπή, μία αξονική δύναμη, ή φορτίο μίας ειδικής περίπτωσης. Η αρίθμηση γίνεται αντίστοιχα.

	«i»	«j»	«k»
0		Σταθερή Διατομή	
1	Πρόβολος	Μεταβλητό πλάτος	Διατμητική Δύναμη
2	Αμφιέρεστος Φορέας	Μεταβλητό ύψος	Καμπ. Ροπή
3	...	Μεταβλητά και τα δύο	Αξονική Δύναμη
4	...	Ε.Π.	Ε.Π.

Figure 2. Πίνακας που δείχνει τον τρόπο ονομασίας των περιπτώσεων.

Έτσι, για παράδειγμα ο πρόβολος μεταβλητής διατομής (ύψος) με αξονικό φορτίο στην άκρη έχει τον κωδικό «1.3.3».

Η τελευταία παρατήρηση πριν αρχίσει η ανάλυση των περιπτώσεων, είναι για την κατασκευή διαγραμμάτων σχετικά με την βελτιστοποίηση του φαινομένου. Γενικά, εξισώσεις που απεικονίζονται σε διαγράμματα καλό είναι να είναι αδιάστατες. Γι' αυτό, στην τελική σχέση που υπολογίζεται μετά από πράξεις, εκτελούμε μια αδιαστατικοποίηση, ουσιαστικά διαίρεση, έτσι ώστε οι διαστάσεις να απαλειφούν. Μετά, από πολλές δοκιμές η καλύτερη αδιαστατικοποίηση περιγράφεται στις επόμενες προτάσεις.

- Διαιρώ όλα τα μεγέθη απόστασης με το μήκος της δοκού: «L»
- Διαιρω το φορτίο με το μέτρο ελαστικότητας πολλαπλασιασμένο με το μήκος της δοκού στο τετράγωνο: « $E * L^2$ »
- Διαιρώ το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο με την σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού πολλαπλασιασμένη με το μήκος της δοκού: « $\mu_{ij} * L$ »
- Διαιρώ την παραγόμενη πολικότητα με την σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού, ενώ ταυτόχρονα την πολλαπλασιάζω με το μήκος του προβόλου: « μ_{ij}/L »

Συνοπτικά, οι κανονικοποιήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέγεθος	Συμβολισμός	Διάσταση	Κανονικοποιημένη τιμή
Αρχικό Πλάτος Διατομής	b_0	[L]	b_0/L
Αρχικό ύψος Διατομής	h_0	[L]	h_0/L
Ρυθμός μεταβολής του πλάτους	α (ή t)	[-]	α (ή t)
Ρυθμός μεταβολή του ύψους	α (ή t)	[-]	α (ή t)
Συντεταγμένη στον άξονα την δοκού	x	[L]	x/L
Συντεταγμένη κατά μήκος του ύψους της διατομής	z	[L]	z/L
Εξωτερική Δύναμη	P	[F]	$P/(E*L^2)$
Εξωτερική Ροπή	M	[F*L]	$M/(E*L^3)$
Βέλος κάμψης	W(x)	[L]	$W(x)/L$
Ηλεκτρική Πολικότητα	PoI	[Q*L ²]	$(PoI*L)/\mu_{ij}$
Ηλεκτρικό φορτίο	Q	[Q]	$Q/(\mu_{ij}*L)$

Figure 3. Πίνακας με την μέθοδο της αδιαστατικοποίησης των μεταβλητών. Με τι πολλαπλασιάζω τον κάθε όρο για να τον κάνω αδιάστατο.

3.1. Περίπτωση 1.0.1. Πρόβολος Σταθερής Διατομής με φορτίο στην άκρη

Σαν πρώτη περίπτωση, επιλέχθηκε να αναλυθεί μία απλή δοκός μορφής προβόλου, με ένα τέμνον φορτίο στην άκρη. Αυτή μπορεί να είναι δοκός από κάποιο δομικό υλικό, όπως είναι το σκυρόδεμα, διότι είναι και αυτό φλεξοηλεκτρικό, ή κάποιο άλλο στοιχείο, σε κατασκευή ή μηχανισμό, όπως ένα μικρού πάχους φιλμ.

Το πρόβλημα περιλαμβάνει κάποιες παραμέτρους όπως είναι:

- ✓ Το πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Το ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Το κατακόρυφο φορτίο που βρίσκεται στην άκρη: P [N]

Παρατηρούμε όμως ότι ένα πρόβλημα μπορεί να απαρτίζεται και από άλλες παραμέτρους όπως είναι το μέτρο ελαστικότητας. Σε αυτήν την εργασία, δεν έχουν αναλυθεί δομικά στοιχεία με μεταβαλλόμενο μέτρο ελαστικότητας, γιατί, αν γινότανε κάτι τέτοιο, η πολυπλοκότητα του προβλήματος θα αυξανόταν πάρα πολύ.

Σε κάθε πρόβλημα υπάρχει ένα είδος παραμέτρων, πέρα των γεωμετρικών και μηχανικών, που έχουν σημαντικό ρόλο. Στην δική μας την περίπτωση μία τέτοια παράμετρος είναι η συντεταγμένη

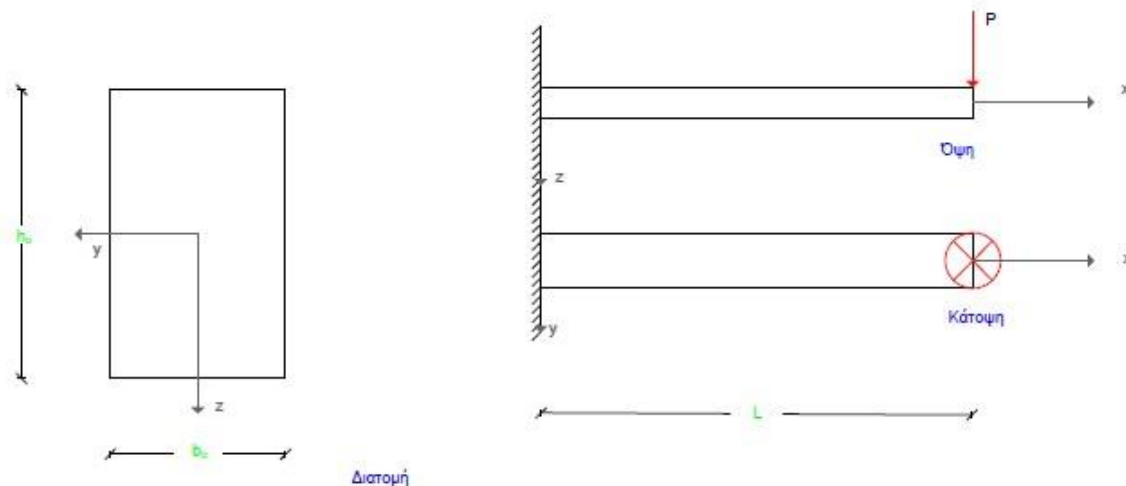


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.0.1. είναι πρόβολος σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

κατά μήκος της δοκού.

- ✓ Η συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

Πρόκειται για έναν ισοστατικό φορέα και η επίλυση του γίνεται αρκετά εύκολα με το χέρι. Από τις εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν τα εξής:

- $V_{\text{πάκτωσης}} = P$ [kN]
- $H_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $M_{\text{πάκτωσης}} = P * L$ [kN*m]

Και στην συνέχεια μπορεί κανείς να προσδιορίσει τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών, καμπτικής ροπής, τέμνουσας και αξονικής, όπως φαίνεται παρακάτω. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να προεξοφλήσουμε τα διαγράμματα και να τα αντιστοιχίσουμε με εξισώσεις συμβατές με αυτά.

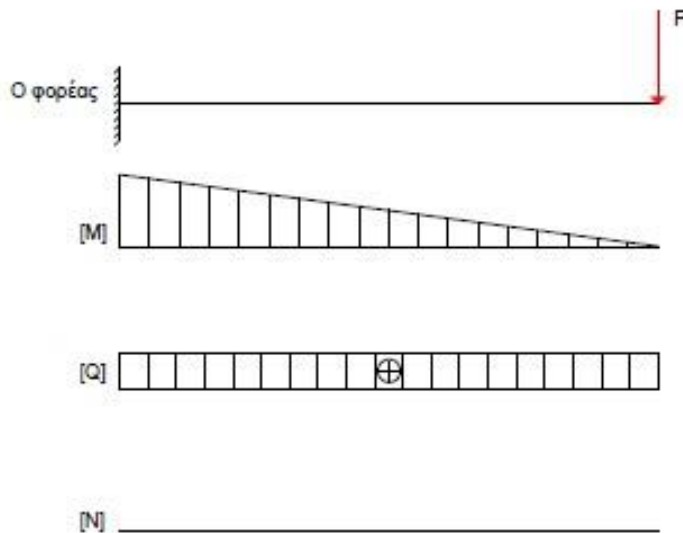


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη στην περίπτωση προβόλου σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

Τα διαγράμματα των $[M]$, $[Q]$, $[N]$ μπορούν να υπολογισθούν με τους παρακάτω τύπους.

$$\begin{aligned} \checkmark \quad M(x) &= P * (x - L) & [\text{kN} * \text{m}] \\ \checkmark \quad Q(x) &= P & [\text{kN}] \\ \checkmark \quad N(x) &= 0 & [\text{kN}] \end{aligned}$$

Στην συνέχεια πρέπει να κάνουμε υπολογισμό των αδρανειακών μεγεθών της διατομής, όπως είναι το εμβαδόν και η ροπή αδρανείας, δύο για κάθε άξονα.

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \text{Εμβαδόν:} & \quad A = b_0 * h_0 & [\text{m}^2] \\ \checkmark \quad \text{Ροπή Αδρανείας} & \quad I_{yy} = \frac{b_0 * h_0^3}{12} & [\text{m}^4] \\ & \quad I_{zz} = \frac{b_0^3 * h_0}{12} & [\text{m}^4] \end{aligned}$$

Η παραμορφωμένη εικόνα, λόγω αυτής της φόρτισης θα έχει ένα βέλος κάμψης, δηλαδή μια κατακόρυφη μετακίνηση, λόγω της καμπτικής ροπής. Θα έχουμε επίσης και στροφές στην διατομή, λόγω της τέμνουσας, και αν θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι παραδοχές Bernoulli, αυτές είναι αμελητέα μικρές, και άρα τις θεωρούμε μηδενικές.

Ο προσδιορισμός του βέλους κάμψης γίνεται με την χρήση της εξίσωσης Euler- Bernoulli. Η δεύτερη παράγωγος του βέλους κάμψης πολλαπλασιασμένο με το μέτρο του Young ισούται με το αντίθετο μέγεθος της ροπής κάμψης. Έτσι έχουμε όπως φαίνεται παρακάτω:

$$E * I * w''(x) = -M(x) = P * (L - x)$$

$$w''(x) * E * \frac{b_0 * h_0^3}{12} = P * (L - x)$$

$$w''(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * (L - x)$$

$$W'(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left(x * L - \frac{x^2}{2} \right) + C$$

Όπου το «C» είναι σταθερά ολοκλήρωσης και προσδιορίζεται από την συνοριακή συνθήκη πάκτωσης: « $w'(x = 0) = 0$ », η οποία δίνει τιμή σε αυτήν την σταθερά ολοκλήρωσης: « $C = 0$ », επομένως τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε για δεύτερη φορά,

$$W'(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left(x * L - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$W(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left(L * \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C$$

Όπου πάλι η σταθερά ολοκλήρωσης «C» βρίσκεται με την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης, ότι δηλαδή « $w(x = 0) = 0$ », η οποία δίνει την τιμή σταθεράς « $C = 0$ ». Έτσι το βέλος κάμψης για τον πρόβολο σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη, δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$W(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left(L * \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να δείξουμε κάποια διαγράμματα για το πως μεταβάλλεται το βέλος κάμψης ή αλλιώς η κατακόρυφη μετακίνηση του προβόλου, συναρτήσει των μεταβλητών του. Για να γίνεται κάτι τέτοιο πρέπει να κάνουμε μια αδιαστατοποίηση, σύμφωνα με αυτή που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και η σχέση του βέλους κάμψης παίρνει την μορφή που φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{W(x)}{L} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-3} * \left(\frac{(x/L)^2}{2} - \frac{(x/L)^3}{6} \right)$$

Την παραπάνω σχέση, η οποία αποτελείται από όρους που κανένας από αυτούς δεν έχει διαστάσεις μπορούμε να την αποτυπώσουμε σε διαγράμματα, τα οποία φαίνονται παρακάτω.

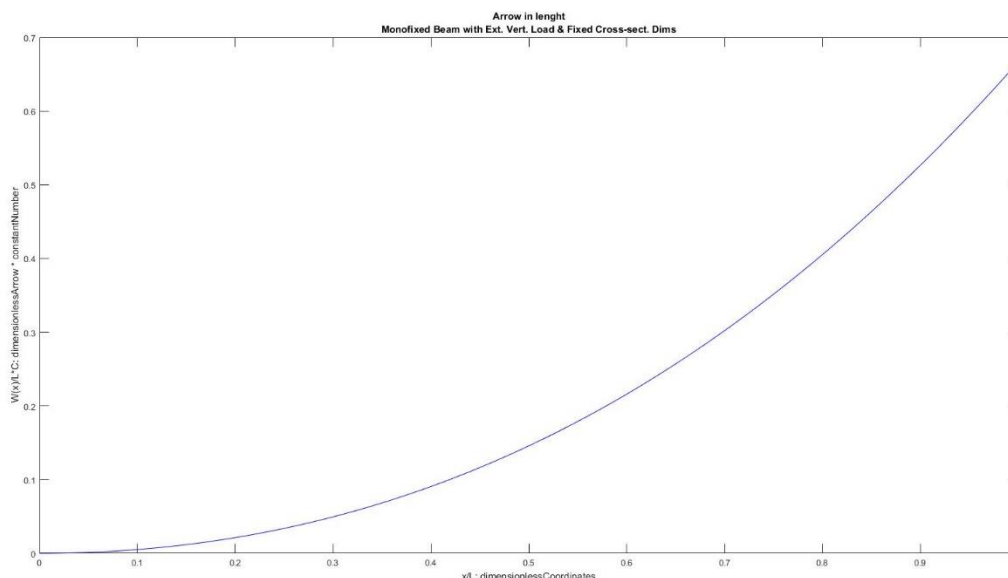


Figure 3. Το Βέλος Κάμψης μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της συντεταγμένης κατά μήκος της δοκού. Οι διαστάσεις τις διατομής όπως και το εξωτερικό φορτίο βρίσκονται στο πρώτο μέρος την εξίσωσης.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{P}{E * L^2} \right)^{-1} * \left(\frac{b_0}{L} \right) * \left(\frac{h_0}{L} \right)^3 = f(x).$$

Το Διάγραμμα αυτό είναι εκτός από λογικό, αναμενόμενο, διότι θυμίζει την παραμορφωμένη εικόνα της δοκού (προς τα πάνω αντί για προς τα κάτω).

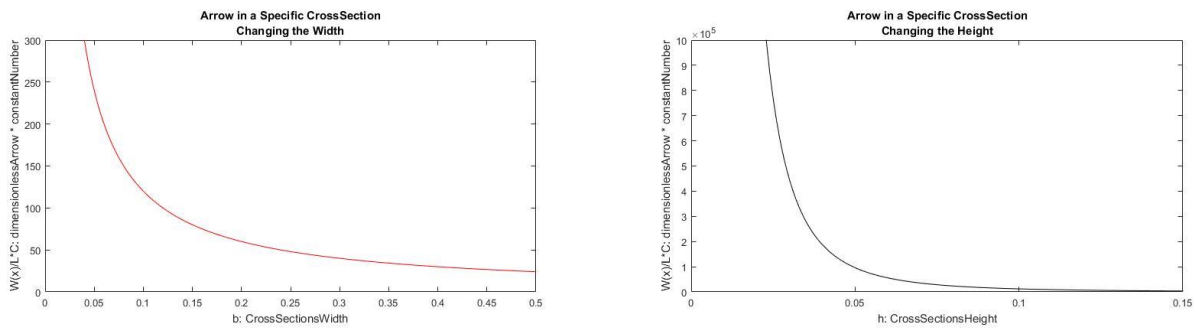


Figure 4. Η Καμπτική παραμόρφωση, για την θέση της άκρης του προβόλου (" $x/L = 1$ ") για μεταβολή του ύψους της διατομής, ενώ το πλάτος και το εξωτερικό φορτίο θεωρούνται σταθερά (Αριστερό Διάγραμμα), και για μεταβολή του πλάτους της διατομής, ενώ το ύψος της διατομής και το εξωτερικό φορτίο θεωρούνται σταθερά. (Δεξί Διάγραμμα). Οι Σχέσεις φαίνονται παρακάτω αντίστοιχα.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{P}{E * I^2}\right)^{-1} * \left(\frac{b_0}{L}\right) = f(h_0, x = L).$$

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{P}{E * I^2}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 = f(b_0, x = L).$$

Σημαντικό σχόλιο είναι το «scaling effect» για μικρά ύψη.

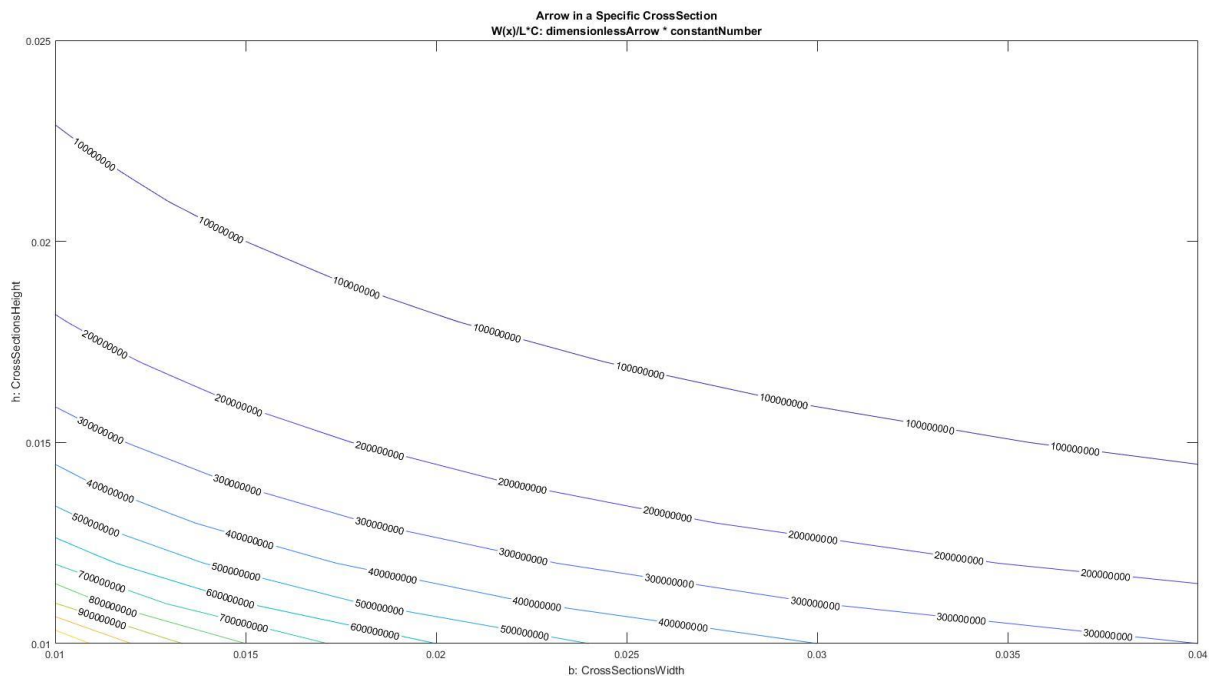


Figure 5. Το Βέλος κάμψης για ένα συνδυασμό, των διαστάσεων της διατομής, στην θέση μέγιστου βέλους, κατακόρυφης μετακίνησης, στο άκρο του προβόλου.

Το «scaling effect» φαίνεται και σε αυτήν την περίπτωση.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{P}{E * I^2}\right)^{-1} = f(b_0, h_0)$$

Στην συνέχεια πρέπει να προσδιορίσουμε τις τάσεις, που έχουν ρυθμό μεταβολής, δηλαδή «gradient». Αυτές προσδιορίζονται από την θεωρία δοκού σε κάμψη και περιγράφονται παρακάτω.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E \cdot I_{yy}} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{P * (x-L)}{E * b_0 * h_0^3} * Z$$

Η πολικότητα, που προκαλεί το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, δίνεται από την παράγωγο της τροπής προς την διεύθυνση στην οποία υπάρχει ο ρυθμός μεταβολής. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τον άξονα «z». Επίσης πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με την σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού. Έχουμε τάσεις στον άξονα «x» που μπορεί κάποιος να τον πει αλλιώς «1» και το «strain gradient» γίνεται στον άξονα «z» που λέγεται «3» άρα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το «μ₁₃»

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{P * (x-L)}{E * b_0 * h_0^3}$$

Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που περιγράφεται από το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού προσδιορίζεται από το γινόμενο της πολικότητας, με το εμβαδόν που είναι κάθετο σε αυτήν. Άρα το πλάτος της διατομής και το μήκος του προβόλου. Για το πλάτος της διατομής, του οποίου η συντεταγμένη είναι «y», για κάθε «y» από το «-b₀ → b₀» το «strain gradient» διατηρείται σταθερό, άρα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε. Για το μήκος του προβόλου όπως, κατά την διεύθυνση του «x» η πολικότητα αλλάζει για διαφορετικά «x», και έτσι πρέπει να προσδιορίσουμε το γινόμενο σαν άθροισμα στοιχειωδών τμημάτων, δηλαδή να ολοκληρώσουμε.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P * (x-L)}{E * b_0 * h_0^3} * b_0 * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left[\frac{x^2}{2} - x * L \right]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left[\frac{L^2}{2} - L^2 \right]$$

$$Q_{13} = -6 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * L^2$$

Στην συνέχεια πρέπει να εφαρμόσουμε την κανονικοποίηση που ορίστηκε προηγούμενος. Και έτσι καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση, η οποία δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο σε έναν πρόβολο σταθερής διατομής, όταν σε αυτόν ασκείται φορτίο στην άκρη, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-3}$$

Στην συνέχεια γίνεται η αποτύπωση της παραπάνω σχέσης σε διαγράμματα, τα οποία βρίσκονται στην δίπλα σελίδα.

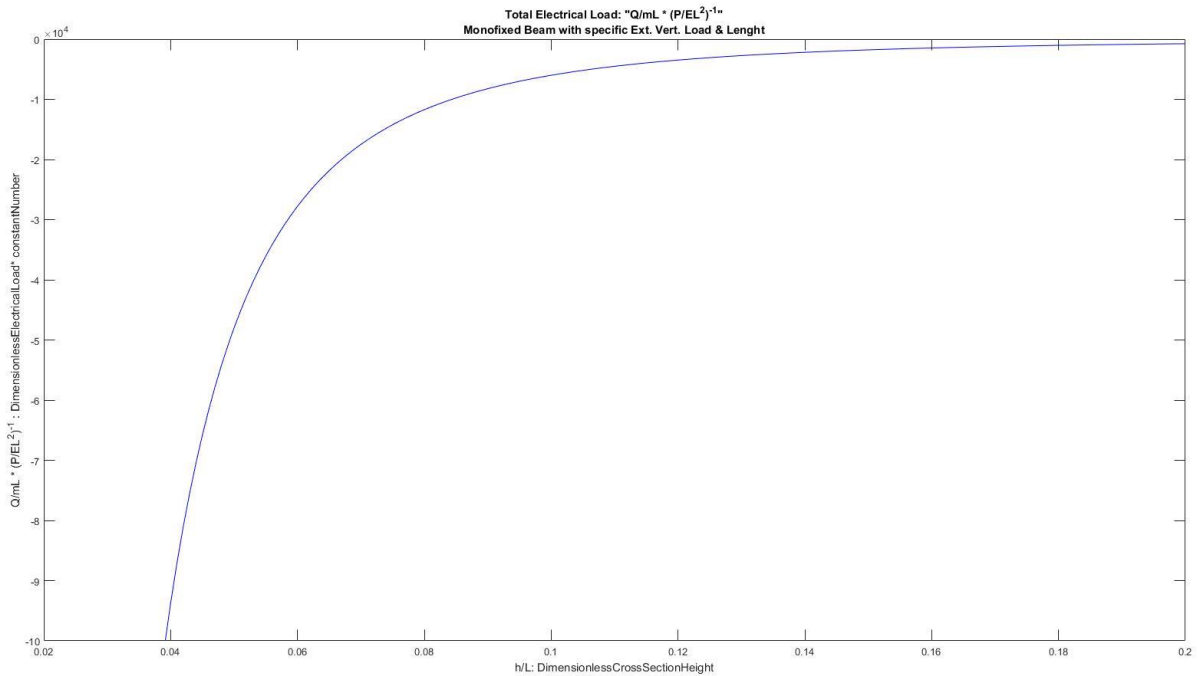


Figure 6. Το συνολικό Ηλεκτρικό φορτίο που παράγεται στο σύνολο του μήκους του προβόλου πολλαπλασιασμένο με το εξωτερικό φορτίο, ως συνάρτηση του αρχικού ύψους της διατομής. Όσο μικραίνει το ύψος, τόσο μεγαλύτερα αποτελέσματα έχουμε «scaling effect».

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} * \left(\frac{P}{E * L^2}\right)^{-1} = f(h_0)$$

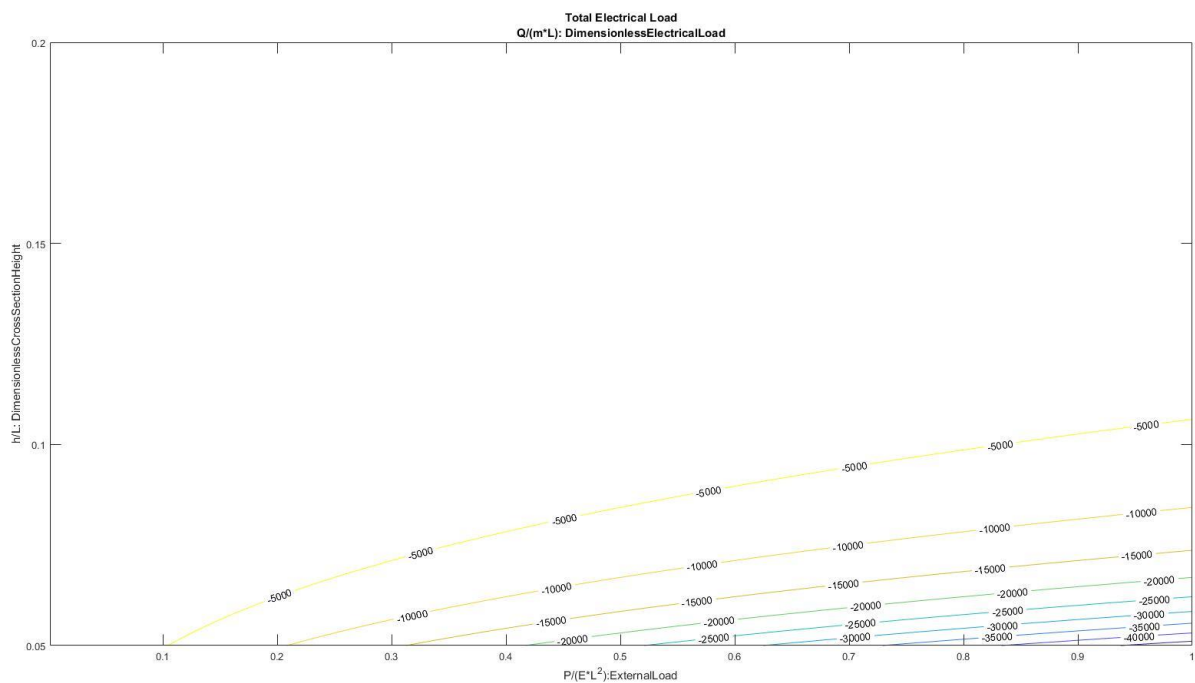


Figure 7. Το Συνολικό Ηλεκτρικό φορτίο που παράγεται στο σύνολο της δοκού, για έναν συνδυασμό του εξωτερικού μηχανικού φορτίου και του ύψους της διατομής. Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα για μεγάλο «effect» χρειάζεται ταυτόχρονα μικρό ύψος διατομής αλλά μεγάλο εξωτερικό φορτίο.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(b_0, P)$$

Ένα τελευταίο βήμα, για να ολοκληρωθεί η διαδικασία της ανάλυσης είναι η αντικατάσταση των εντατικών μεγεθών με τα παραμορφωσιακά, δηλαδή το εξωτερικό φορτίο με την κατακόρυφη μετακίνηση. Αυτό γίνεται για τον απλούστατο λόγο, ότι τα παραμορφωσιακά χαρακτηριστικά είναι πιο εύκολα προσδιορίσιμα, από τα εντατικά, διότι απλά φαίνονται με το μάτι. Η αντικατάσταση περιλαμβάνει την επεξεργασία των δύο παραπάνω τελικών εκφράσεων και έχει ως εξής.

$$\frac{W(x)}{L} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{(x/L)^2}{2} - \frac{(x/L)^3}{6}\right) \leftrightarrow$$

$$\frac{W(x)}{L} * \frac{1}{2} * \left(\frac{b_0}{L}\right) * \left(\frac{(x/L)^2}{2} - \frac{(x/L)^3}{6}\right)^{-1} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} \leftrightarrow$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -\frac{1}{2} * \frac{W(x)}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right) * \left(\frac{(x/L)^2}{2} - \frac{(x/L)^3}{6}\right)^{-1}$$

Όπου η παραπάνω σχέση δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο σε μία δοκό προβόλου, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν σε σημείο «x₀» έχουμε κατακόρυφη παραμόρφωση «W(x₀)». Είναι σημαντικό να σχολιάσουμε ότι σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να θεωρήσουμε ότι στην θέση «x₀» έχουμε το ηλεκτρικό φορτίο του διαγράμματος. Σημαντικό είναι να καταλάβει κάποιος ότι για να υπάρχει το ηλεκτρικό φορτίο, σε όλη την δοκό, πρέπει στην θέση «x» να υπάρχει η παραμόρφωση «w(x)».

Με την χρήση της παραπάνω σχέσης καταλήγουμε στα παρακάτω διαγράμματα.

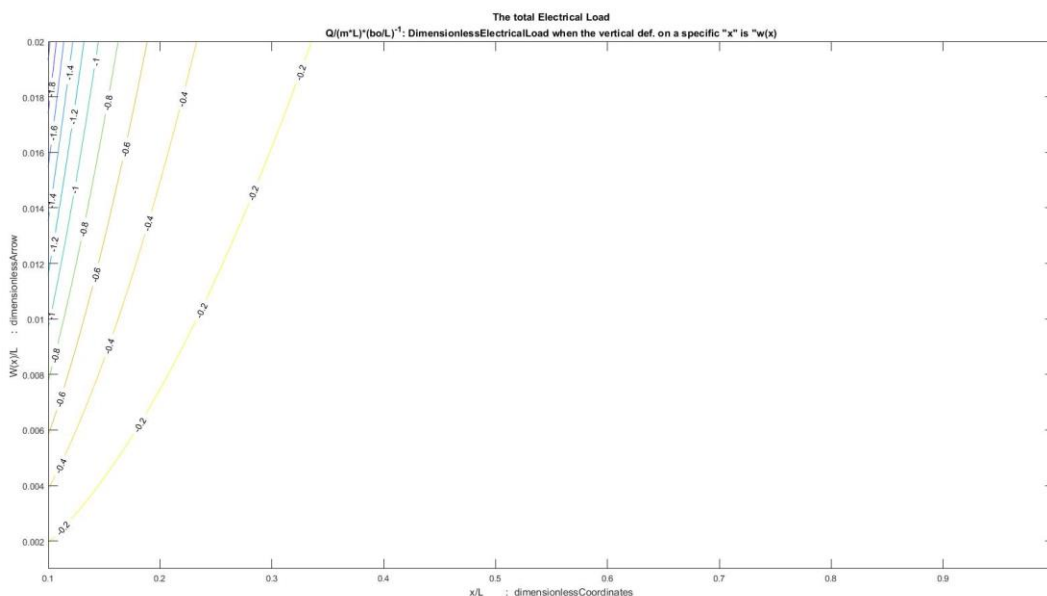


Figure 8. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος τής δοκού, όταν σε θέση «x» παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση «w(x)». Για σταθερό αρχικό πλάτος διατομής.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} = f(w, x)$$

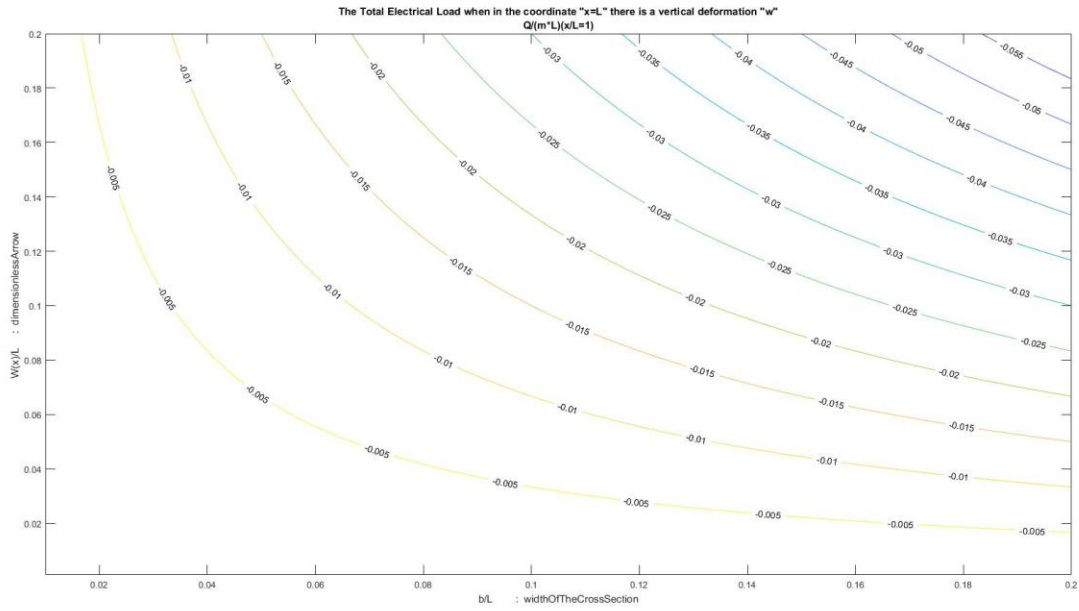


Figure 9. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που προκύπτει από συνδυασμό του αρχικού πλάτους της διατομής και του βέλους που θα παρατηρηθεί στην θέση «x=L»

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, b_0, x = L)$$

3.2. Περίπτωση 1.0.2. Πρόβολος Σταθερής Διατομής με καμπτική ροπή στην άκρη

Στην συνέχεια πρέπει να δούμε τι γίνεται με ένα διαφορετικό φορτίο. Τι γίνεται αν αντί του κατακόρυφου φορτίου που είχαμε στην άκρη τώρα έχουμε ένα ζεύγος δυνάμεων σε μία απόσταση μικρή μεταξύ τους, δηλαδή έχουμε μία καμπτική ροπή. Τα δεδομένα του προηγούμενου προβλήματος ξαναεμφανίζονται με μόνη διαφορά το εξωτερικό φορτίο. Επομένως το πρόβλημα περιλαμβάνει τις παραμέτρους:

- ✓ Το πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Το ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Καμπτική ροπή που βρίσκεται στην άκρη: M [$N \cdot m$]

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, μία ακόμα σημαντική παράμετρος, την οποία πρέπει να λάβουμε υπόψιν είναι η συντεταγμένη κατά μήκος της δοκού.

- ✓ Η συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

Η επίλυση του φορέα μπορεί να γίνει με το χέρι, και έτσι μπορεί κανείς να υπολογίσει τις αντιδράσεις στήριξης, όπως φαίνονται παρακάτω.

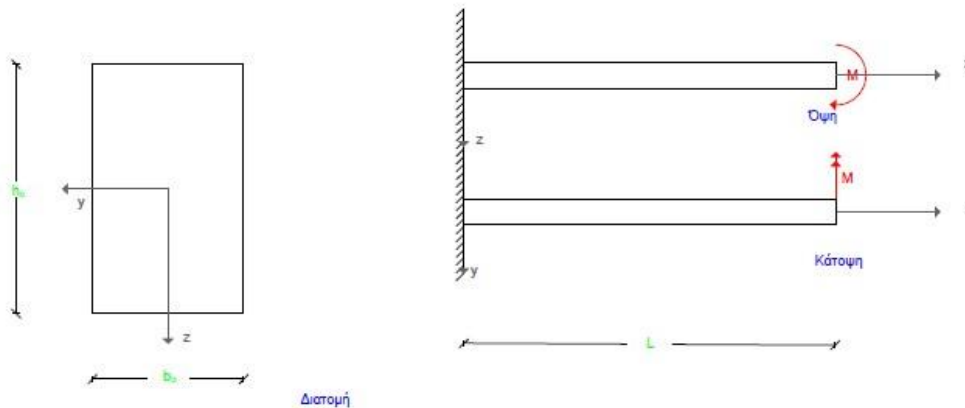


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.0.2. είναι πρόβολος σταθερής διατομής με καμπτική ροπή στην άκρη.

- $V_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $H_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $M_{\text{πάκτωσης}} = M$ [kN*m]

Και στην συνέχεια είναι δυνατή η σχεδίαση των διαγραμμάτων $[M]$, $[Q]$, $[N]$.

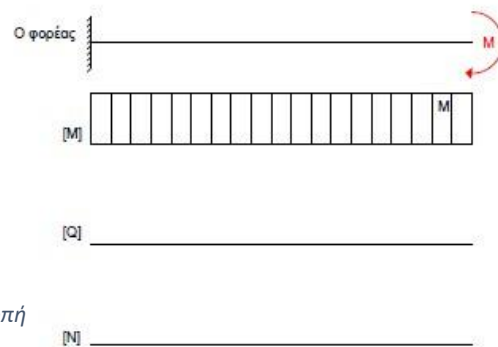


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη στην περίπτωση προβόλου σταθερής διατομής με καμπτική ροπή στην άκρη.

Οι εξισώσεις που διέπουν τα διαγράμματα αυτά μπορεί να γραφούν ως:

$$\begin{aligned} \checkmark \quad M(x) &= -M && [\text{kN}\cdot\text{m}] \\ \checkmark \quad Q(x) &= 0 && [\text{kN}] \\ \checkmark \quad N(x) &= 0 && [\text{kN}] \end{aligned}$$

Τα Αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής έχουν όπως πριν:

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \text{Εμβαδόν:} & \quad A = b_0 * h_0 && [\text{m}^2] \\ \checkmark \quad \text{Ροπή Αδρανείας} & \quad I_{yy} = \frac{b_0 * h_0^3}{12} && [\text{m}^4] \\ & \quad I_{zz} = \frac{b_0^3 * h_0}{12} && [\text{m}^4] \end{aligned}$$

Ενώ η παραμορφωμένη εικόνα, από την στιγμή που υπάρχει μόνο καμπτική ροπή, έχει μόνο καμπτική κατακόρυφη παραμόρφωση, δηλαδή βέλος κάμψης, το οποίο προσδιορίζεται ως ακολούθως.

$$E * I * w''(x) = -M(x) = M$$

$$w''(x) * E * \frac{b_0 * h_0^3}{12} = M$$

$$w''(x) = 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3}$$

$$W'(x) = 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * x + C$$

Ο όρος «C» αποτελεί σταθερά ολοκλήρωσης και αν θεωρήσουμε την συνοριακή συνθήκη πάκτωσης, « $w'(x = 0) = 0$ », τότε η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδενική.

$$W'(x) = 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * x$$

$$W(x) = 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \frac{x^2}{2} + C$$

Πάλι, μπορούμε να προσδιορίσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης μέσω της συνοριακής συνθήκης της πάκτωσης, « $w(x = 0) = 0$ », και έτσι μπορεί κανείς να υπολογίσει ότι : « $C = 0$ », και το βέλος κάμψης προκύπτει όπως παρακάτω.

$$W(x) = 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \frac{x^2}{2}$$

Στην συνέχεια, με σκοπό να αποτυπώσουμε το βέλος κάμψης, σε διαγράμματα, εφαρμόζουμε την κανονικοποίηση που περιγράφηκε προηγουμένως και καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

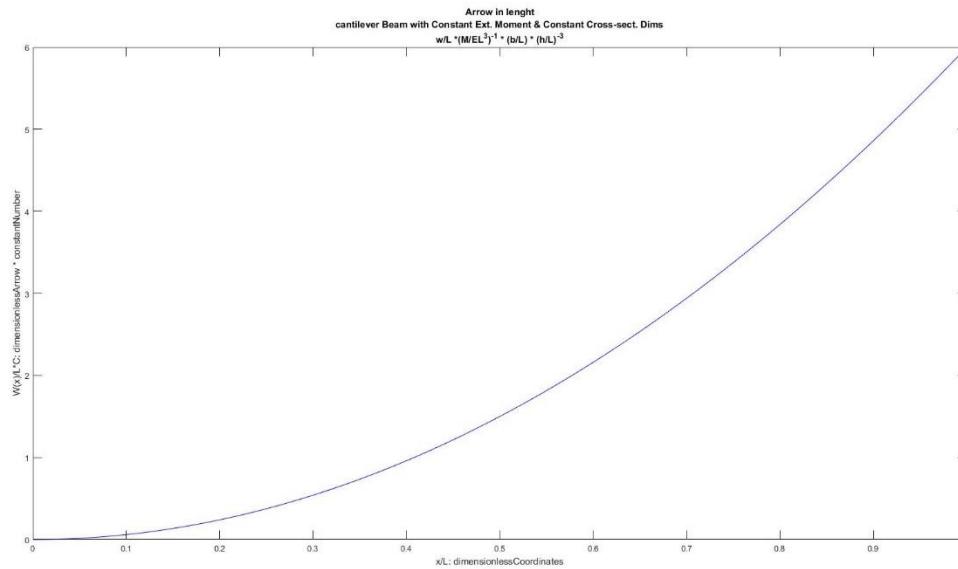


Figure 3. Το Βέλος Κάμψης μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της συντεταγμένης κατά μήκος της δοκού. Οι διαστάσεις τις διατομής όπως και το εξωτερικό φορτίο βρίσκονται στο πρώτο μέρος την εξίσωσης.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3}\right)^{-1} * \left(\frac{b_0}{L}\right) * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 = f(x).$$

Το Διάγραμμα αυτό είναι εκτός από λογικό και αναμενόμενο, διότι θυμίζει την παραμορφωμένη εικόνα της δοκού (προς τα πάνω αντί για προς τα κάτω).

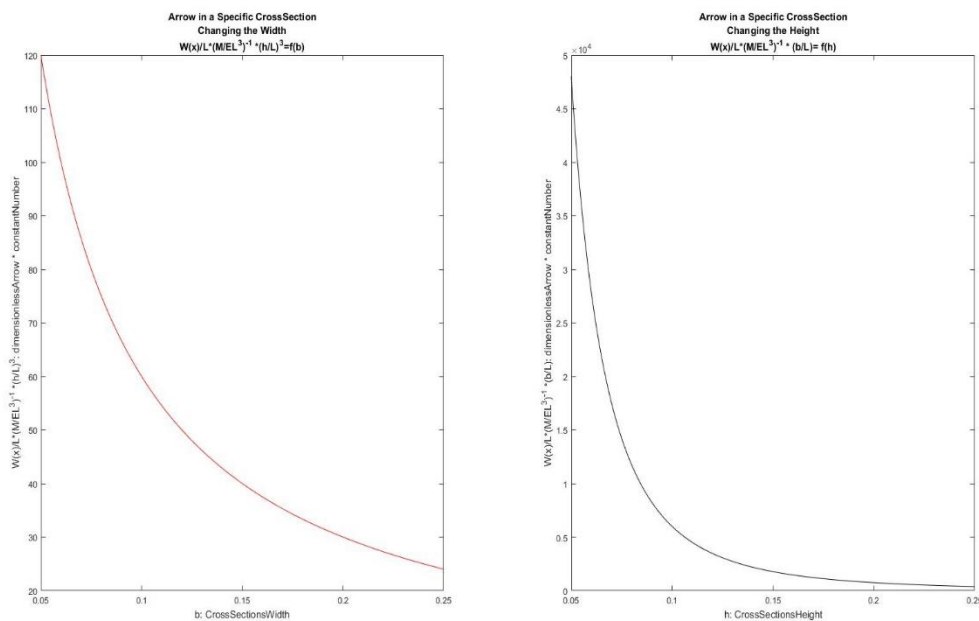


Figure 4. Η Καμπτική παραμόρφωση, για την θέση της άκρης του προβόλου ("x/L =1") για μεταβολή του ύψους της διατομής, ενώ το πλάτος και το εξωτερικό φορτίο θεωρούνται σταθερά (Αριστερό Διάγραμμα), και για μεταβολή του πλάτους της διατομής, ενώ το ύψος της διατομής και το εξωτερικό φορτίο θεωρούνται σταθερά. (Δεξί Διάγραμμα). Οι σχέσεις φαίνονται παρακάτω αντίστοιχα.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3}\right)^{-1} * \left(\frac{b_0}{L}\right) = f(h_0, x = L).$$

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 = f(b_0, x = L).$$

Σημαντικό σχόλιο είναι το «scaling effect» για μικρά ύψη.

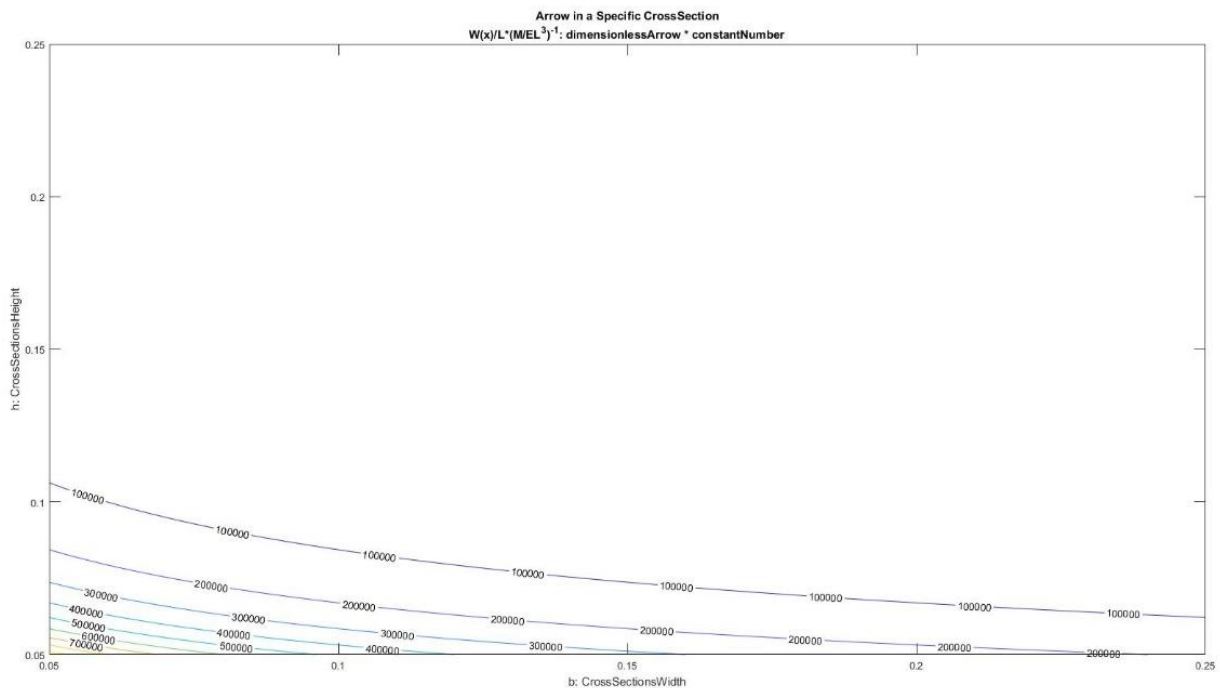


Figure 5. Το Βέλος κάμψης για ένα συνδυασμό, των διαστάσεων της διατομής, στην θέση μέγιστου βέλους, κατακόρυφης μετακίνησης, στο άκρο του προβόλου.

Το «scaling effect» φαίνεται και σε αυτήν την περίπτωση.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3}\right)^{-1} = f(b_0, h_0)$$

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός των τάσεων που μας ενδιαφέρουν, και ο ρυθμός μεταβολής τους, δηλαδή το «strain gradient». Αυτά δίνονται από τη θεωρία δοκού σε κάμψη. Για τον προσδιορισμό της πολικότητας, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την σταθερά «μ» ή οποία θα είναι πάλι «μ₁₃», διότι οι τάσεις που έχουν «gradient» είναι «σ₁» και το «gradient» εμφανίζεται στον άξονα «3».

Για την τροπή:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E * I_{yy}} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{-M}{E * b_0 * h_0^3} * Z$$

Για την πολικότητα:

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{-M}{E * b_0 * h_0^3}$$

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος του προβόλου. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδης τμήματα. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{-M}{E * b_0 * h_0^3} * b_0 * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{-M}{E} * h_0^{-3} * [x]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{-M}{E} * h_0^{-3} * [L]$$

$$Q_{13} = -12 * \mu_{13} * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * L$$

Εφαρμόζοντας την γνωστή κανονικοποίηση η σχέση που δίνει το συνολικό φορτίο σε όλο το μήκος του προβόλου είναι.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Έτσι μπορεί να γίνει αποτύπωση διαγραμμάτων που περιγράφουν το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο στο μήκος της δοκού.

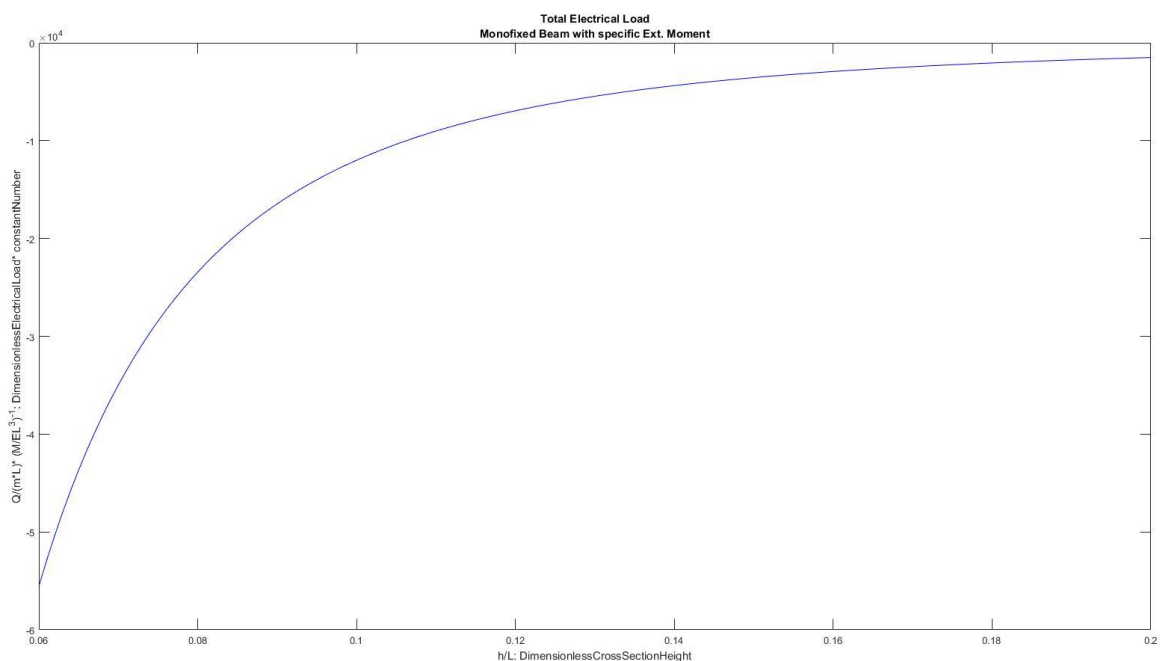


Figure 6. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που παράγεται στο σύνολο του μήκους του προβόλου πολλαπλασιασμένο με το εξωτερικό φορτίο, ως συνάρτηση του αρχικού ύψους της διατομής. Όσο μικραίνει το ύψος, τόσο μεγαλύτερα αποτελέσματα έχουμε «scaling effect».

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} * \left(\frac{M}{E * L^3}\right)^{-1} = f(h_0)$$

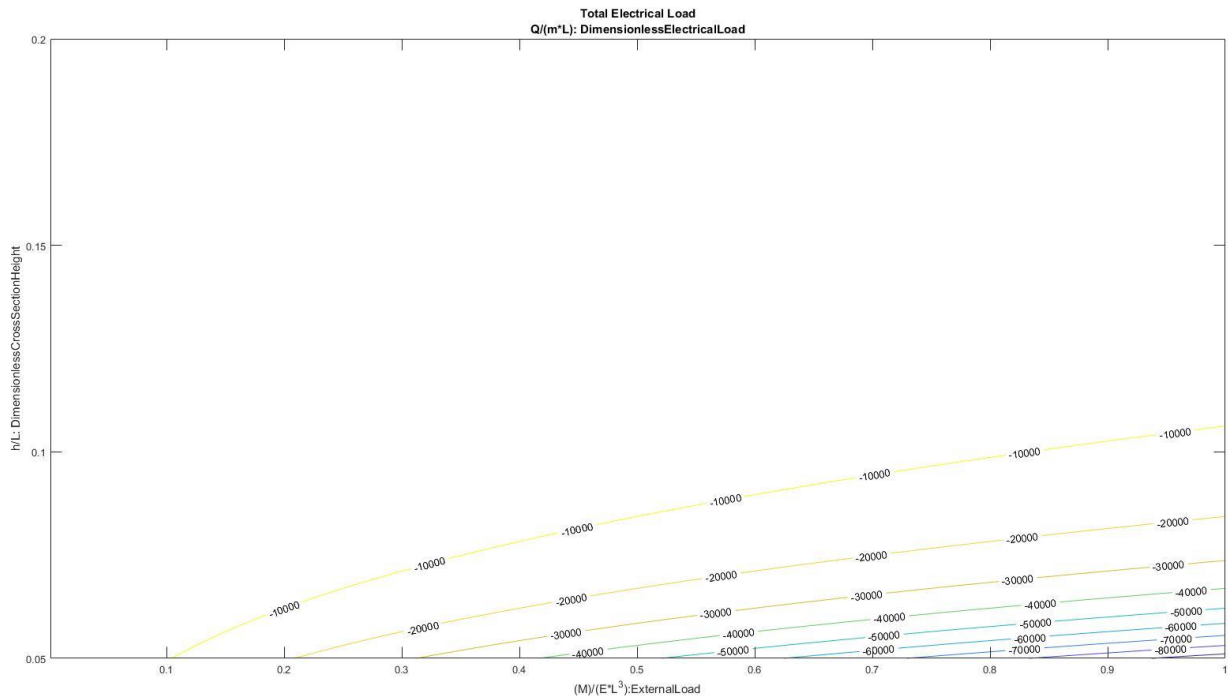


Figure 7. Το Συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που παράγεται στο σύνολο της δοκού, για έναν συνδυασμό του εξωτερικού μηχανικού φορτίου και του ύψους της διατομής. Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα για μεγάλο «effect» χρειάζεται ταυτόχρονα μικρό ύψος διατομής αλλά μεγάλο εξωτερικό φορτίο.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(b_0, M)$$

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$\frac{W(x)}{L} * 2 * \frac{b_0}{L} * \left(\frac{x}{L}\right)^{-2} = 12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -2 * \frac{W(x)}{L} * \frac{b_0}{L} * \left(\frac{x}{L}\right)^{-2}$$

Η παραπάνω σχέση δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που υπάρχει σε ολόκληρη την δοκό όταν παρατηρηθεί σε θέση « x_0 » μία κατακόρυφη μετακίνηση « $W(x_0)$ ». Σε καμία περίπτωση δεν δίνει το ηλεκτρικό φορτίο σε θέση « x_0 ».

Με χρήση της παραπάνω σχέσης μπορεί κανείς να κατασκευάσει τα ακόλουθα διαγράμματα.

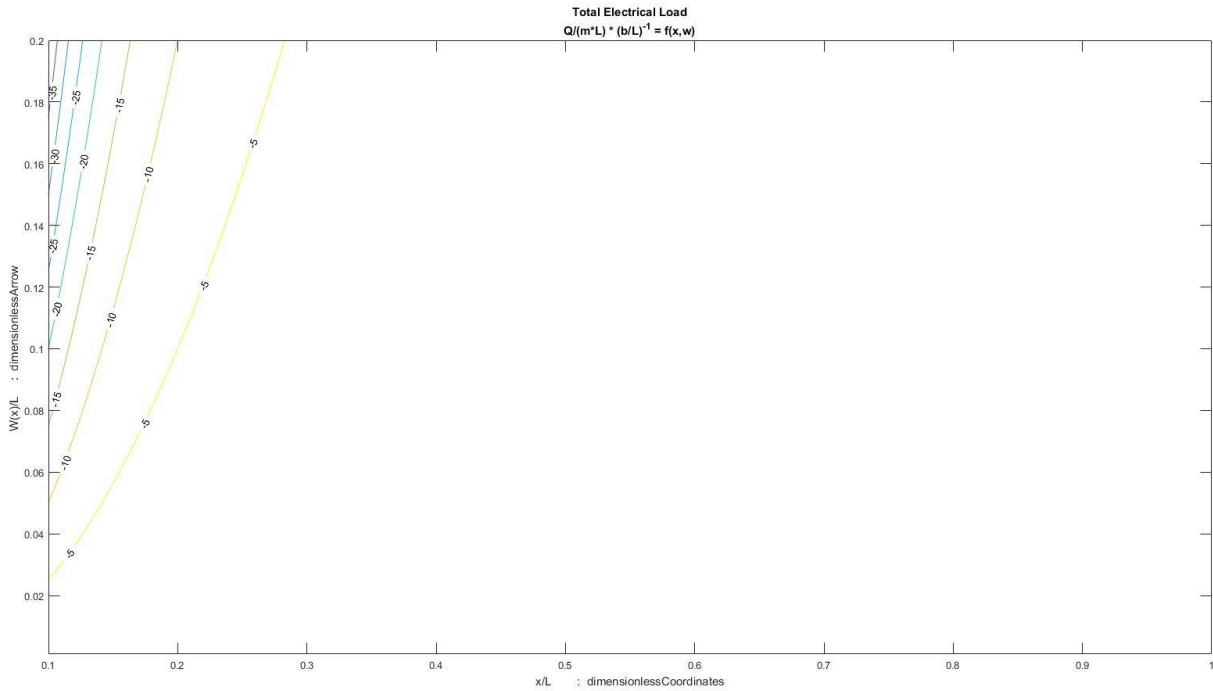


Figure 8. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, όταν σε θέση « x » παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση « $w(x)$ ». Για σταθερό αρχικό πλάτος διατομής.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} = f(w, x)$$

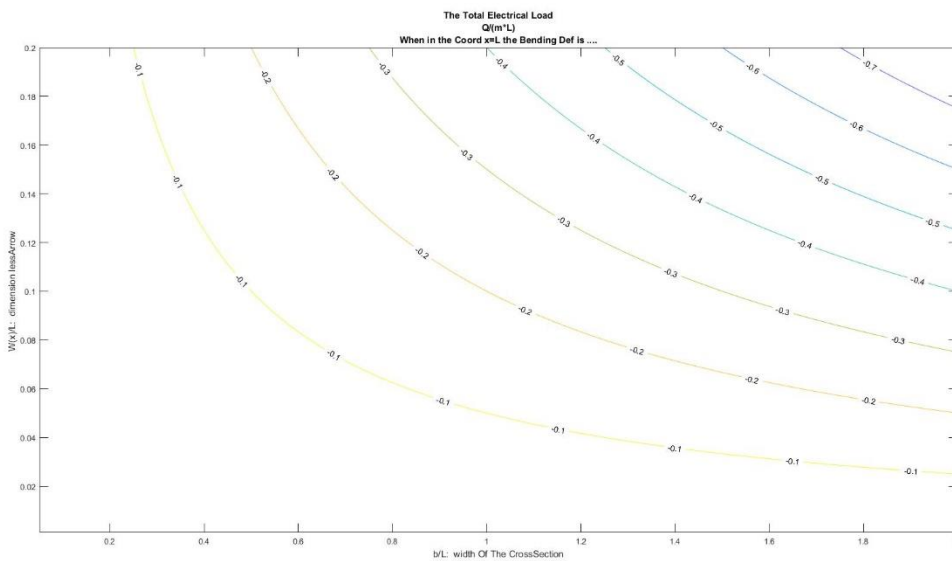


Figure 9. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που προκύπτει από συνδυασμό του αρχικού πλάτους της διατομής και του βέλους που θα παρατηρηθεί στην θέση « $x=L$ »

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, b_0, x = L)$$

3.3. Περίπτωση 1.0.3. Πρόβολος Σταθερής Διατομής με αξονικό φορτίο στην άκρη

Στην συνέχεια, αλλάζοντας το φορτίο, πάμε στην περίπτωση, όπου το φορτίο είναι αξονικό στην άκρη του προβόλου. Οι τάσεις που προκαλεί είναι αξονικές και ομοιόμορφες σε κάθε διατομή. Οι παράμετροι που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι παρακάτω:

- ✓ Το πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Το ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Το κατακόρυφο φορτίο που βρίσκεται στην άκρη: P [N]

Ενώ σημαντική είναι και η συντεταγμένη εις μήκος του άξονα.

- ✓ Η συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

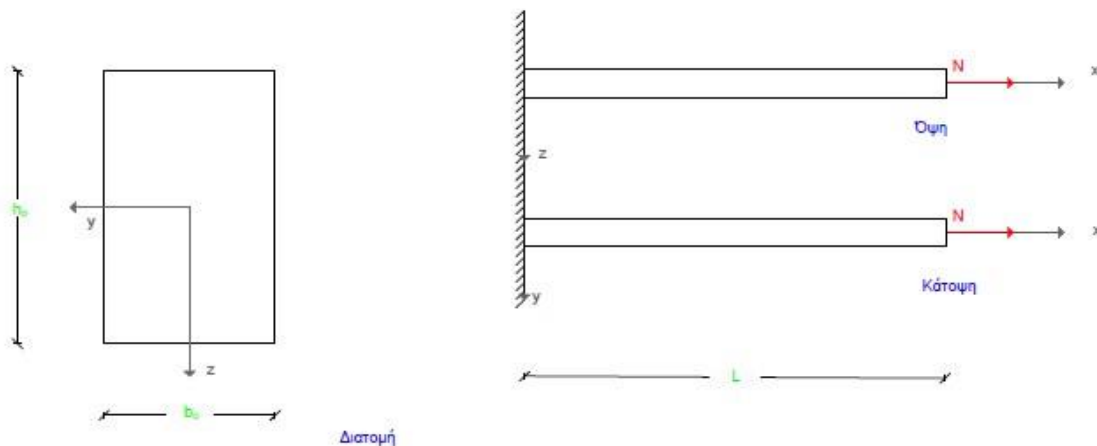


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.0.3. είναι πρόβολος σταθερής διατομής με αξονικό φορτίο στην άκρη.

Η επίλυση του φορέα μπορεί να γίνει με το χέρι, αφού το πρόβλημα είναι ισοστατικό. Έτσι είναι δυνατόν κάποιος εύκολα να υπολογίσει τις αντιδράσεις της πάκτωσης, και στην συνέχεια τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών και τις εξισώσεις που προκύπτουν από αυτά.

- $V_{πάκτωσης} = 0$ [kN]
- $H_{πάκτωσης} = -N$ [kN]
- $M_{πάκτωσης} = 0$ [kN*m]

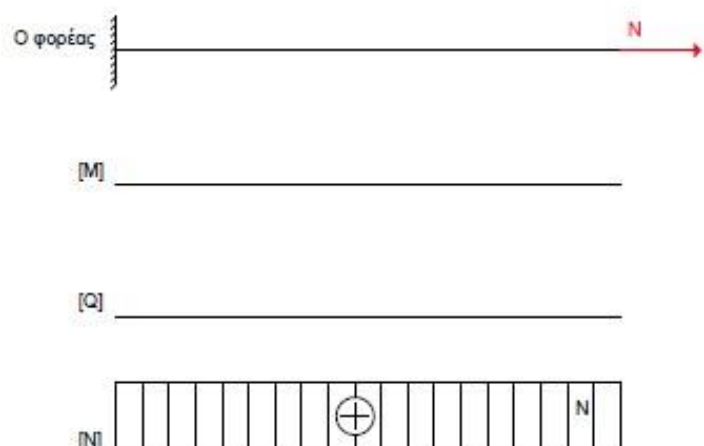


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη στην περίπτωση προβόλου σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

- ✓ $M(x) = 0$ [kN*m]
- ✓ $Q(x) = 0$ [kN]
- ✓ $N(x) = N$ [kN]

Ο προσδιορισμός των αδρανειακών μεγεθών δίνει αποτελέσματα παρόμοια με των προηγούμενων περιπτώσεων και φαίνονται παρακάτω:

- ✓ Εμβαδόν: $A = b_0 * h_0$ [m²]
- ✓ Ροπή Αδρανείας $I_{yy} = \frac{b_0 * h_0^3}{12}$ [m⁴]
- $I_{zz} = \frac{b_0^3 * h_0}{12}$ [m⁴]

Για την παραμορφωμένη εικόνα όμως, έχουμε ορθή δράση, εφελκυσμό, άρα και επιμήκυνση. Οι τροπές κατανέμονται σύμφωνα με τον νόμο του Hooke και η κατανομή φαίνεται σχηματικά σε ένα 3-D προσομοίωμα.

- ✓ $\sigma = \frac{F}{A}$
- ✓ $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A * E}$
- ✓ $\delta = \varepsilon * L = \frac{L * F}{A * E}$

Επίσης η κατανομή των τάσεων είναι ομοιόμορφη, ίδιες τάσεις και ίδιες τροπές σε όλη την διατομή, σε όλες τις διατομές. Δεν υπάρχει ρυθμός μεταβολής των τροπών, «strain gradient», και γι' αυτό το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού δεν εμφανίζεται σε αυτήν την περίπτωση.

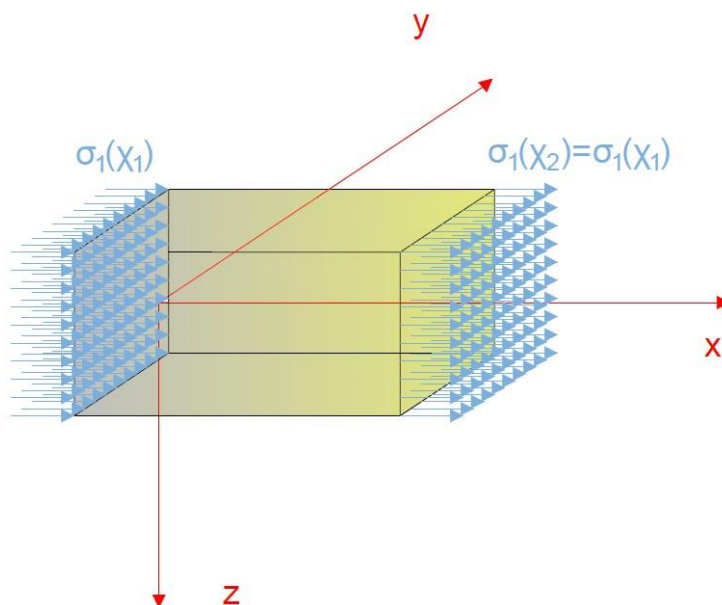


Figure 3. Η κατανομή των τάσεων, των τροπών αφού συνδέονται με τον νόμο του Hooke, απόλυτα γραμμικά και ανάλογα. Σε μία Διατομή οι τάσεις και άρα οι τροπές είναι ίδιες. Σε μια διατομή οι τάσεις και οι τροπές είναι ίδιες με αυτές μιας άλλης διατομής. Δεν υπάρχει «strain gradient»

3.4. Περίπτωση 1.1.1. Πρόβολος μεταβλητού πλάτους με τέμνον φορτίο στην άκρη

Πρόκειται για επανάληψη της πρώτης περίπτωσης, αν θεωρήσουμε μία άλλη διατομή, όπου το πλάτος της μεταβάλλεται στο μήκος της. Μάλιστα μπορεί κανείς να ορίσει έναν συντελεστή μεταβολής του πλάτους, κάτι σαν κλίση. Όσο αυξάνεται η συντεταγμένη κατά μήκος του άξονα τόσο αλλάζει και το πλάτος.

Μία τέτοια σχέση είναι η « $b = b_0 + a * x$ » όπου το « a » μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Σε κάθε περίπτωση όμως πρέπει το πλάτος να είναι θετικό και ο πρόβολος να υπακούει στις παραδοχές «Bernoulli». Γι' αυτό ορίζουμε σαν μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει αυτή η κλίση την « $\alpha_{max} = 0.11$ » ενώ η ελάχιστη, ώστε να ισχύουν τα δύο παραπάνω, να είναι « $\alpha_{min} = \max(-0.11 ; -\frac{b_0}{x})$ ». Ο αριθμός «0.11» αντιστοιχεί σε μία κλίση γύρω στις «6.3°». Είναι αρκετά μικρή, και εννοείται ότι στα πειράματα που δοκιμάσαμε να εκτελέσουμε, χρησιμοποιήσαμε μεγαλύτερες, αλλά τουλάχιστον οι παραδοχές «Bernoulli» σίγουρα ισχύουν.

$$\theta = \arctan(a)$$

Σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα του προβόλου με μεταβλητό πλάτος και κατακόρυφο φορτίο στην άκρη περιέχει τις εξής παραμέτρους:

- ✓ Το αρχικό πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Τον συντελεστή μεταβολής του πλάτους: a [-]
- ✓ Το ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Την κατακόρυφη δύναμη που βρίσκεται στην άκρη: P [N]
- ✓ Την συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

Ο φορέας μπορεί να επιλυθεί εύκολα με το χέρι, αφού είναι ισοστατικός. Οι αντιδράσεις στήριξης προκύπτουν όμοιες με την περίπτωση σταθερής διατομής, αφού ο φορέας είναι ισοστατικός και στις εξισώσεις ισορροπίας δεν παίζει κάποιο ρόλο η γεωμετρία της διατομής, όπως και στα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών, τα οποία μπορεί κανείς να τα προεξοφλήσει στις ακόλουθες εξισώσεις.

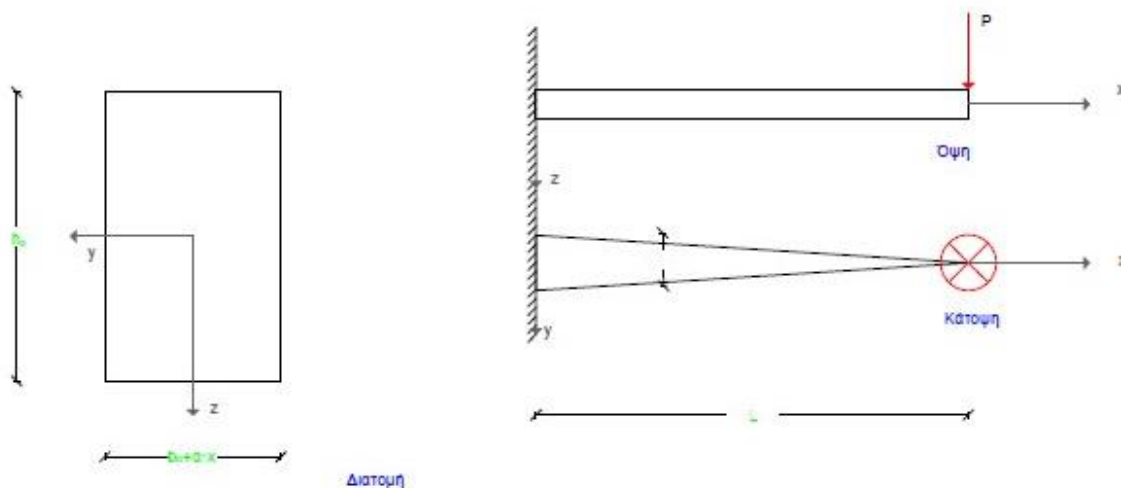


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.1.1. είναι πρόβολος διατομής μεταβλητού πάχους με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

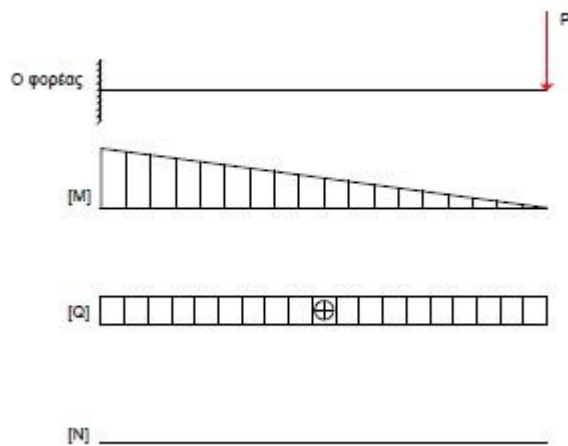


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη στην περίπτωση προβόλου μεταβλητού πλάτους διατομή με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

Οι αντιδράσεις στήριξης.

- $V_{\text{πάκτωσης}} = P$ [kN]
- $H_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $M_{\text{πάκτωσης}} = P * L$ [kN*m]

Και οι εξισώσεις των διαγραμμάτων [M], [Q], [N].

- ✓ $M(x) = P * (x - L)$ [kN*m]
- ✓ $Q(x) = P$ [kN]
- ✓ $N(x) = 0$ [kN]

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται ως:

- ✓ Εμβαδόν: $A = (b_0 + \alpha * x) * h_0$ [m²]
- ✓ Ροπή Αδρανείας $I_{yy} = \frac{(b_0 + \alpha * x) * h_0^3}{12}$ [m⁴]
 $I_{zz} = \frac{(b_0 + \alpha * x)^3 * h_0}{12}$ [m⁴]

Οι δυσκολίες αρχίζουν με το βέλος κάμψης το οποίο είναι όχι μόνο παράγουσα της ροπής αλλά και της γεωμετρίας της δοκού.

$$E * I(x) * w''(x) = -M(x) = P * (L - x)$$

$$w''(x) * E * \frac{(b_0 + \alpha * x) * h_0^3}{12} = P * (L - x)$$

$$w''(x) = 12 * \frac{P}{E} * (b_0 + \alpha * x)^{-1} * h_0^{-3} * (L - x)$$

$$W'(x) = -12 * \frac{P}{E} * a^{-2} * h_0^{-3} * (a * x - (a * L + b_0) * \ln(a * x + b_0)) + C \quad ^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : «w'(x = 0) = 0»

$$W'(0) = -12 * \frac{P}{E} * a^{-2} * h_0^{-3} * (-(a * L + b_0) * \ln(b_0)) + C = 0 \rightarrow$$

$$C = +12 * \frac{P}{E} * a^{-2} * h_0^{-3} * (-(a * L + b_0) * \ln(b_0))$$

Και άρα καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W'(x) = -12 * \frac{P}{E} * a^{-2} * h_0^{-3} * \left(a * x - (a * L + b_0) * \ln\left(\frac{a * x + b_0}{b_0}\right) \right)$$

$$W(x) = 6 * \frac{P}{E} * a^{-3} * h_0^{-3} * \left(a * x \left(-2 * (a * L + b_0) * \ln\left(\frac{a * x + b_0}{b_0}\right) + 2 * a * L + a * x + 2 * b_0 \right) - 2 * b_0 * (a * L + b_0) * \ln(a * x + b_0) \right) + C \quad ^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : «w(x = 0) = 0»

$$W(0) = 6 * \frac{P}{E} * a^{-3} * h_0^{-3} * (-2 * b_0 * (a * L + b_0) * \ln(a * x + b_0)) + C = 0$$

$$C = -6 * \frac{P}{E} * a^{-3} * h_0^{-3} * (-2 * b_0 * (a * L + b_0) * \ln(a * x + b_0))$$

Άρα το βέλος κάμψης δίνεται με την παρακάτω σχέση, αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W(x) = 6 * \frac{P}{E} * a^{-3} * h_0^{-3} * \left(a * x \left(-2 * (a * L + b_0) * \ln\left(\frac{a * x + b_0}{b_0}\right) + 2 * a * L + a * x + 2 * b_0 \right) - 2 * b_0 * (a * L + b_0) * \ln\left(\frac{a * x + b_0}{b_0}\right) \right)$$

Αυτή η σχέση, με σκοπό να αποτυπωθεί ως διάγραμμα, πρέπει να αδιαστατοποιηθεί. Με αυτά που περιεγράφηκαν προηγουμένως, έχουμε:

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * a^{-3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(a * \frac{x}{L} \left(-2 * \left(a + \frac{b_0}{L} \right) * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1 \right) + 2 * a + a * \frac{x}{L} + 2 * \frac{b_0}{L} \right) - 2 * \frac{b_0}{L} * \left(a + \frac{b_0}{L} \right) * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1 \right) \right)$$

¹ Η ολοκλήρωση έγινε με χρήση της γλώσσας υπολογιστικής νοημοσύνης «WolframAlpha» (<https://www.wolframalpha.com/>). Για λόγους ασφάλειας έγινε επαλήθευση με δύο τρόπους. Θεωρώντας ότι ο συντελεστής κλίσης είναι μηδενικός, το όριο πρέπει να βγει όσο της περίπτωσης 1.0.1 το αποτέλεσμα, και παραγωγίζοντας πίσω πρέπει να βγει η αρχική σχέση. Αυτές οι επαληθεύσεις έγιναν σε κάθε περίπτωση που χρειάστηκε υπολογιστικό πρόγραμμα, να κάνει αναλυτικά πράξεις. Οι επαληθεύσεις, για λόγους απλούστευσης των πράξεων δεν παρατίθενται σε αυτό το σημείο.

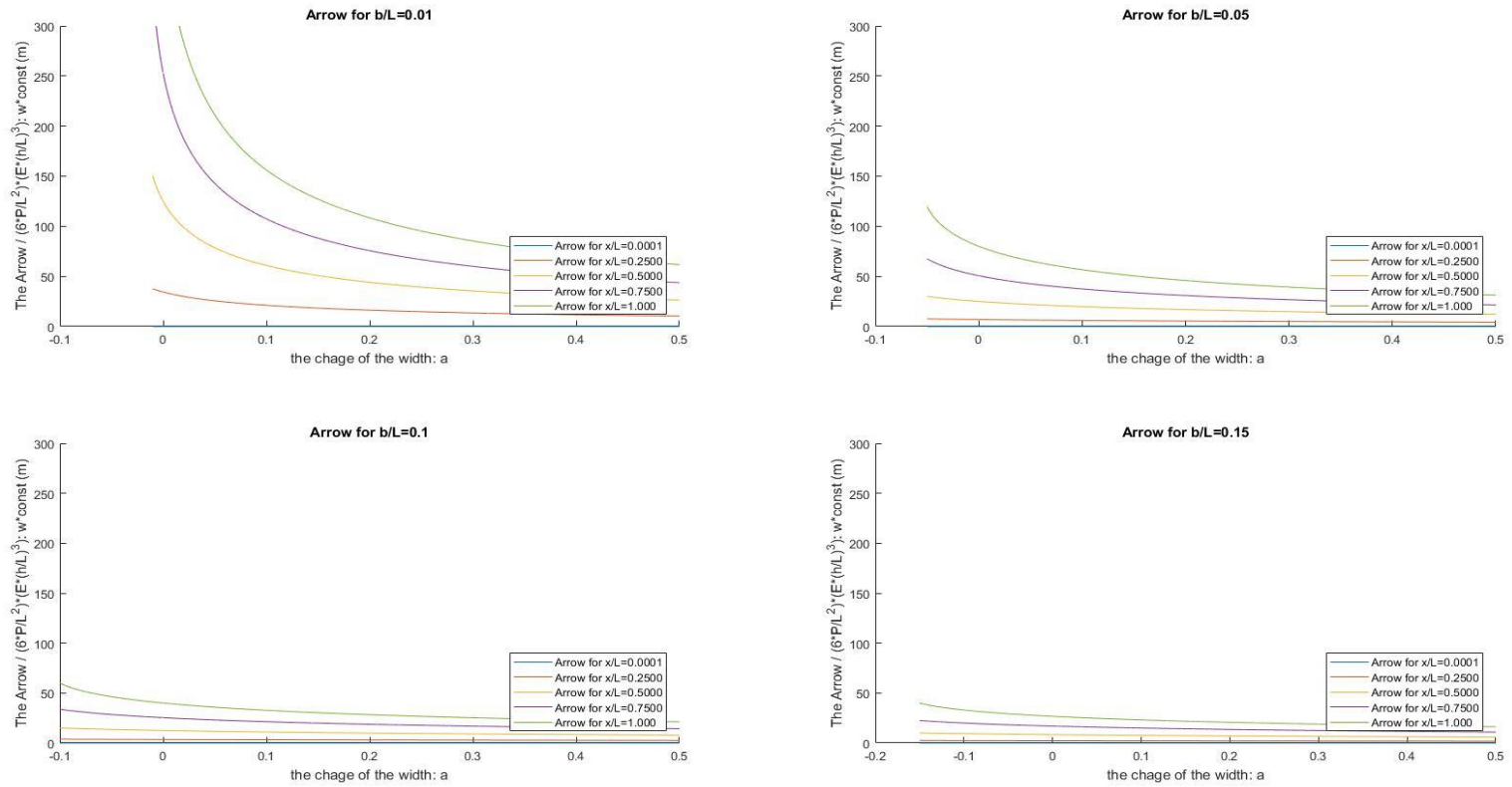


Figure 3. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του βέλους κάμψης σε διάφορα σημεία «x» για διάφορες τιμές του αρχικού πλάτους της διατομής καθώς μεταβάλουμε το συντελεστή κλίσης του πλάτους.

$$\frac{w(x)}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 * \left(\frac{P}{E * L^2}\right)^{-1} = f(a)$$

Μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει:

- ✓ Το μέγιστο βέλος συναντάται για «x=L», και για πολύ μικρό «x» το βέλος είναι μηδενικό, αφού έχουμε φορέα πρόβολο.
- ✓ Για μικρά αρχικά πλάτη της διατομής έχουμε μεγαλύτερα βέλη, αλλά αυτό δεν σημαίνει τίποτα ιδιαίτερο, διότι μικραίνοντας το πλάτος μικραίνει και η αντοχή.

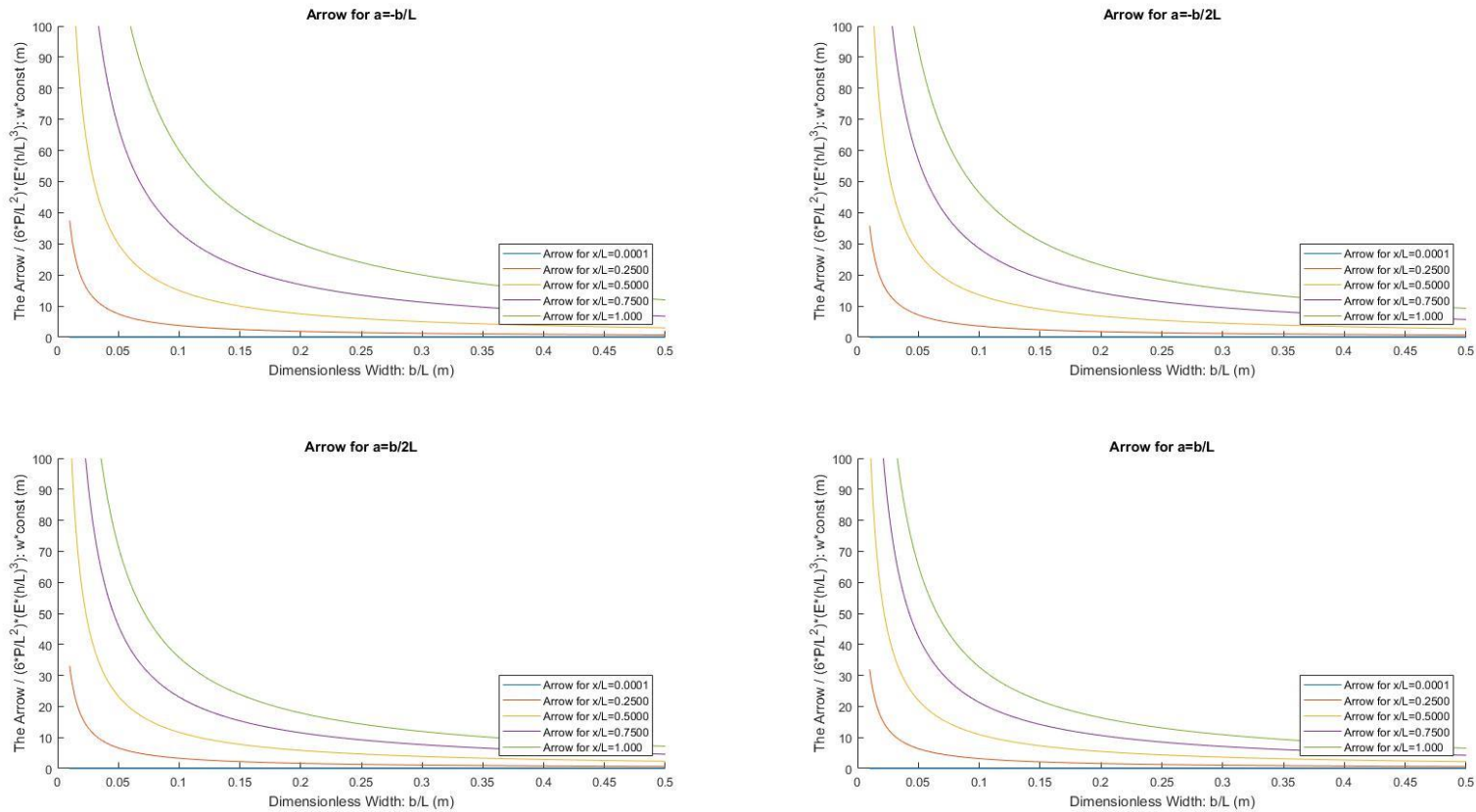


Figure 4. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του βέλους κάμψης σε διάφορα σημεία «x» για διάφορές τιμές της κλίσης του πλάτους της διατομής καθώς μεταβάλλεται το αρχικό πλάτος της διατομής.

$$\frac{w(x)}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 * \left(\frac{P}{E * L^2}\right)^{-1} = f(b_0)$$

Μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει πόσο μοιάζουν τα διαγράμματα αυτά με τα αντίστοιχα της περίπτωσης « 1.0.1 πρόβολος σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη ». Για μικρά αρχικά πλάτη διατομής συναντάμε μεγάλα βέλη κάμψης. Επίσης μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ότι το «Scaling effect», ανάλογα με την κλίση του πλάτους γίνεται για μικρότερα ή μεγαλύτερα αρχικά πλάτη.

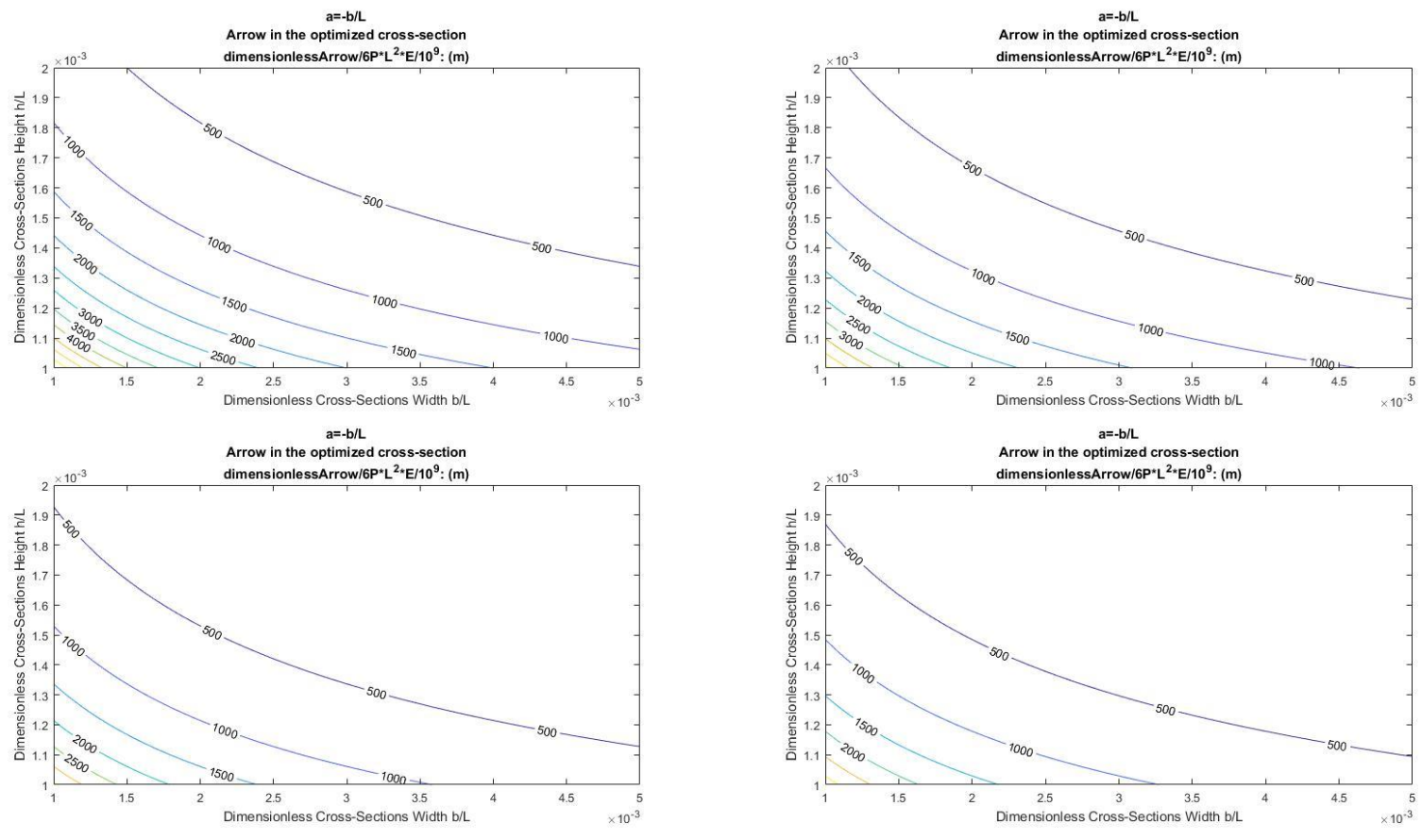


Figure 5. Αν θεωρήσουμε ως θέση μέγιστης κατακόρυφης παραμόρφωσης, την άκρη του προβόλου, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατακόρυφη αυτήν παραμόρφωση, ως συνδυασμό, των αρχικών διαστάσεων της διατομής, πλάτος και ύψος, για διαφορές τιμές του ρυθμού μεταβολής του πλάτους.

$$\frac{w(x)}{L} * \left(\frac{P}{E * L^2}\right)^{-1} = f(b_0, h_0, x = L)$$

Συγκρίνοντας, αυτές τις καμπύλες τόσο μεταξύ τους όσο και με την περίπτωση «a=0», μπορεί κανείς να προσδιορίσει ότι ο συντελεστής μεταβολής του πλάτους της διατομής, αν είναι αρκετά μικρός, η κατακόρυφη παραμόρφωση, είναι μεγαλύτερη.

Σε αυτό το σημείο είναι καλό να επισημάνουμε, ότι ανατρέχοντας, στην προηγούμενη περίπτωση, η κλίμακα των διαγραμμάτων δεν συμβαδίζει. Αυτό προκύπτει από τους συντελεστές που προκύπτουν από την ολοκλήρωση. Την μία υπολογίστηκε συντελεστής ίσος με την μονάδα και άρα «12→12», την άλλη προέκυψε συντελεστής ίσος με «0.5» και έτσι «12→6». Αν κάποιος ανατρέξει στις εξισώσεις, μπορεί να το διαπιστώσει, αλλά κάνοντας έτσι ξεφεύγει από την σημαντικότητα της κάθε επίλυσης, ως ανεξάρτητη. Ναι μεν η μεθοδολογία ήταν κοινή, αλλά οι σχέσεις έπαψαν να είναι γραμμικές όταν μπλέχτηκε η μαθηματική ανάλυση.

Στην συνέχεια γίνεται προσδιορισμός των τάσεων που έχουν «gradient». Αυτό γίνεται με την θεωρία δοκού σε κάμψη, που έχει ως εξής.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E \cdot I_{yy}(x)} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{P * (x-L)}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3} * Z$$

Ενώ η πολικότητα, προσδιορίζεται με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής, δηλαδή την παράγωγο της προς την συντεταγμένη του άξονα στον οποίο υπάρχει (άξονα «3» ή αλλιώς «z»), έχουμε τάσεις στον άξονα «1» και ρυθμό μεταβολής αυτών στον άξονα «3», άρα πρέπει όπως και στην προηγούμενη «περίπτωση 1.0.1» να χρησιμοποιήσουμε τον όρο «μ₁₃».

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{P * (x-L)}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3}$$

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος του προβόλου. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδης κομματάκια. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P * (x-L)}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3} * (b_0 + \alpha * x) * dx$$

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P * (x-L)}{E * h_0^3} * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left[\frac{x^2}{2} - x * L \right]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left[\frac{L^2}{2} - L^2 \right]$$

$$Q_{13} = -6 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * L^2$$

Και εφαρμόζοντας την κανονικοποίηση που περιγράφηκε στην αρχή:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-3}$$

Η οποία σχέση στην συνέχεια μπορεί να αποτυπωθεί.

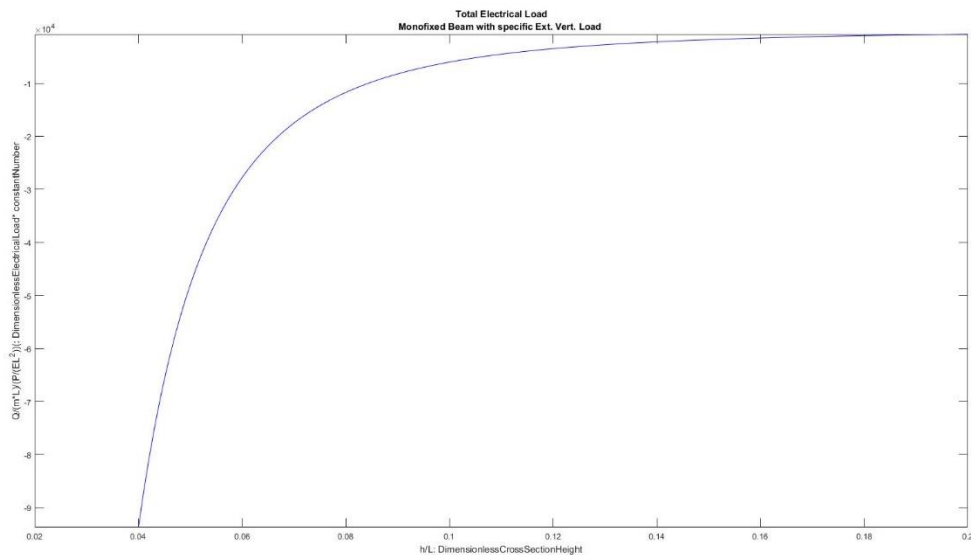


Figure 6. Διάγραμμα, που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου που παράγεται σε όλο το μήκος της δοκού, σαν συνάρτηση του αρχικού ύψους τις διατομής.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} * \left(\frac{P}{E * L^2} \right)^{-1} = f(h_0)$$

Εύκολα μπορεί κανείς να διακρίνει το «Scaling effect». Οι ομοιότητες με την περίπτωση προβόλου σταθερής διατομής, με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη (περίπτωση 1.0.1.) είναι προφανείς, αφού εξάλλου είναι ίδιος ο τύπος που διέπει το πρόβλημα.

Αυτό το «scaling effect», είναι και ο λόγος που οι ερευνητές, για να υπολογίσουν αυτό το φαινόμενο, πάνε σε λεπτά ύψη διατομής, δηλαδή σε φιλμ μικρού πάχους. Σε μια κατασκευή από σκυρόδεμα, ένας πρόβολος, έχει μήκος «2m» και ύψος διατομής «0.5m», το κανονικοποιημένο ύψος ισούται με: «0.5/2 = 0.25», πάρα πολύ μεγάλο, και το φαινόμενο είναι σχεδόν ανύπαρκτο. Αν πάμε στην πλάκα, θεωρώντας ότι η πλάκα έχει ένα ύψος διατομής «0.2m» τότε το κανονικοποιημένο ύψος της διατομής είναι: «0.2/2 = 0.1», το οποίο εξακολουθεί να είναι πάρα πολύ μεγάλο, και το φαινόμενο κρύβεται. Τέλος αν πάμε σε ένα μικρού πάχους φιλμ με ύψος διατομής «0.0005 m = 0.5 mm» το οποίο μπορεί να έχει ένα μήκος γύρω στο «L = 100 mm» τότε το κανονικοποιημένο ύψος της διατομής είναι: «0.5/100 = 0.0005» που είναι αρκετά μικρό, και το «scaling effect» έχει δράσει.

Ένας άλλος παράγοντας αύξησης του φαινομένου, τον οποίο στην περίπτωση 1.0.1 τον αφήσαμε ασχολίαστο είναι το εξωτερικό φορτίο. Ο λόγος που έμεινε το εξωτερικό φορτίο ασχολίαστο είναι ο έξης: Ναι μεν με την αύξηση του φορτίου αυξάνει το φαινόμενο, αλλά δε φτάνει το υλικό στην αντοχή του συνάμα. Επομένως μπορεί ο παράγοντας του εξωτερικού φορτίου να αυξάνει το «effect», αλλά καλύτερα θα ήταν να αυξηθεί, με έναν άλλον τρόπο.

Ακόμα μιλάμε για το κανονικοποιημένο φορτίο. Έστω ότι ένας πρόβολος μήκους «2m» φορτίζεται με φορτίο «P = 100kN», το οποίο είναι τρομερά μεγάλο φορτίο. Το μέτρο ελαστικότητας του σκυροδέματος είναι «E = 30GPa», αλλά αυτό σημαίνει ότι το κανονικοποιημένο φορτίο είναι ίσο με:

$$\frac{P}{E * L^2} = \frac{100 * 10^3}{30 * 10^9 * 2^2} = \frac{100}{120} * 10^{-6} \leq 10^{-6}$$

Το οποίο είναι απίστευτα μικρό. Άρα στο διάγραμμα που φαίνεται παρακάτω, η κατάσταση με μία συμβατική κατασκευή είναι κολλημένη στο πάνω αριστερά μέρος. Αυτό είναι και ένας λόγος να προτιμήσει κανείς εύκαμπτα υλικά με μικρό μέτρο ελαστικότητας.

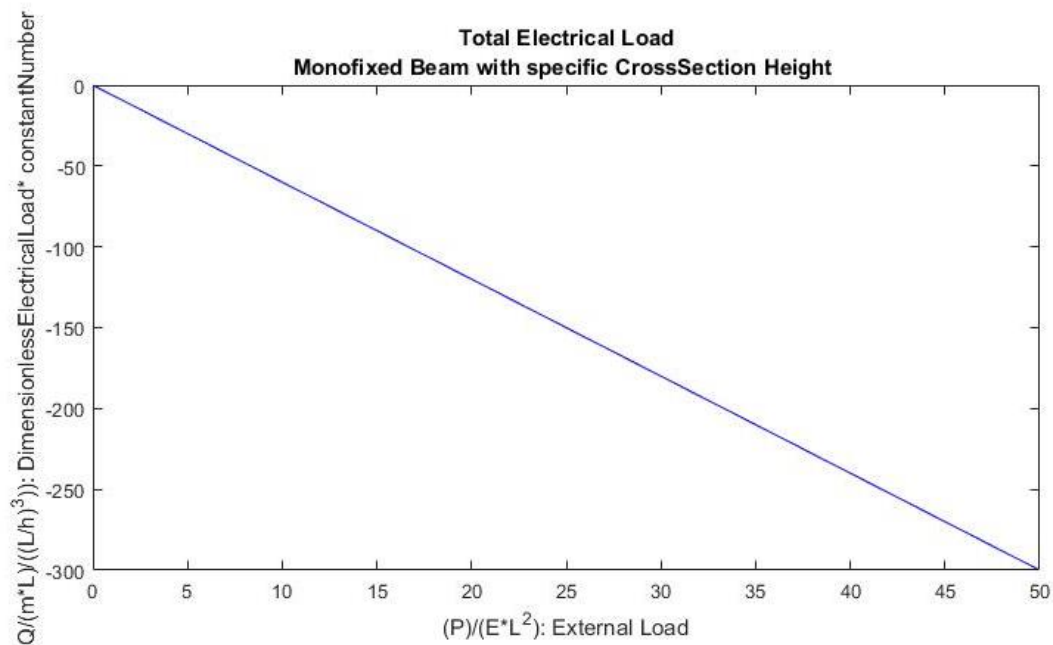


Figure 7. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου. Ο όρος του ύψους της διατομής βρίσκεται στο πρώτο μέρος της εξίσωσης και θεωρείται σταθερός.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 = f(P)$$

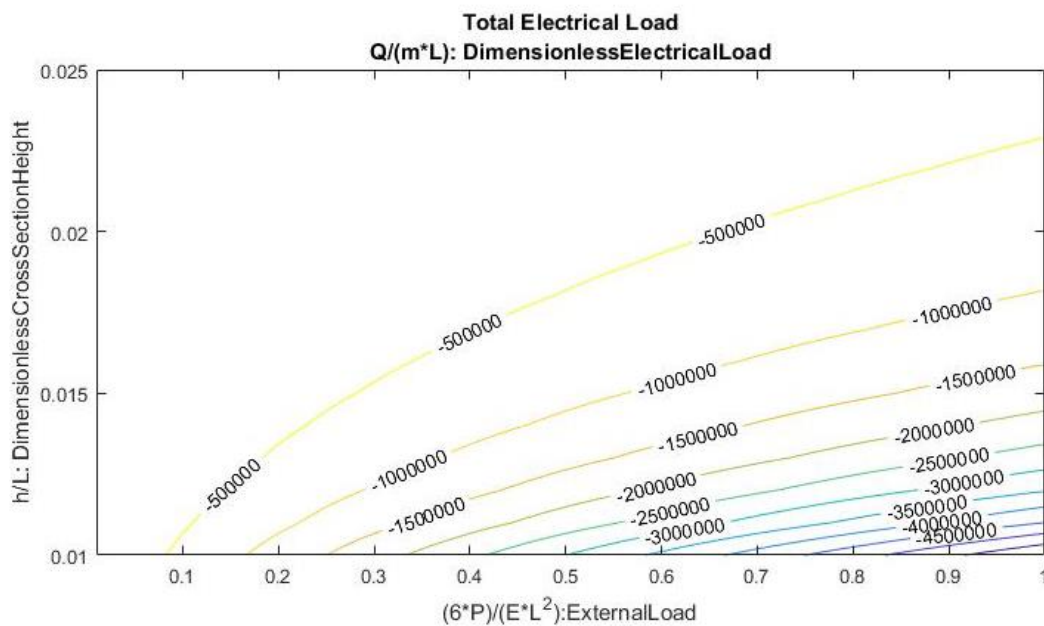


Figure 8. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου που παράγεται, σε όλο το μήκος της δοκού, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, για έναν συνδυασμό εξωτερικού φορτίου και αρχικού ύψους της διατομής. Μεγάλα φορτία, σε μικρά ύψη διατομών προκαλούν βελτιστοποίηση του φαινομένου.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(P, h_0)$$

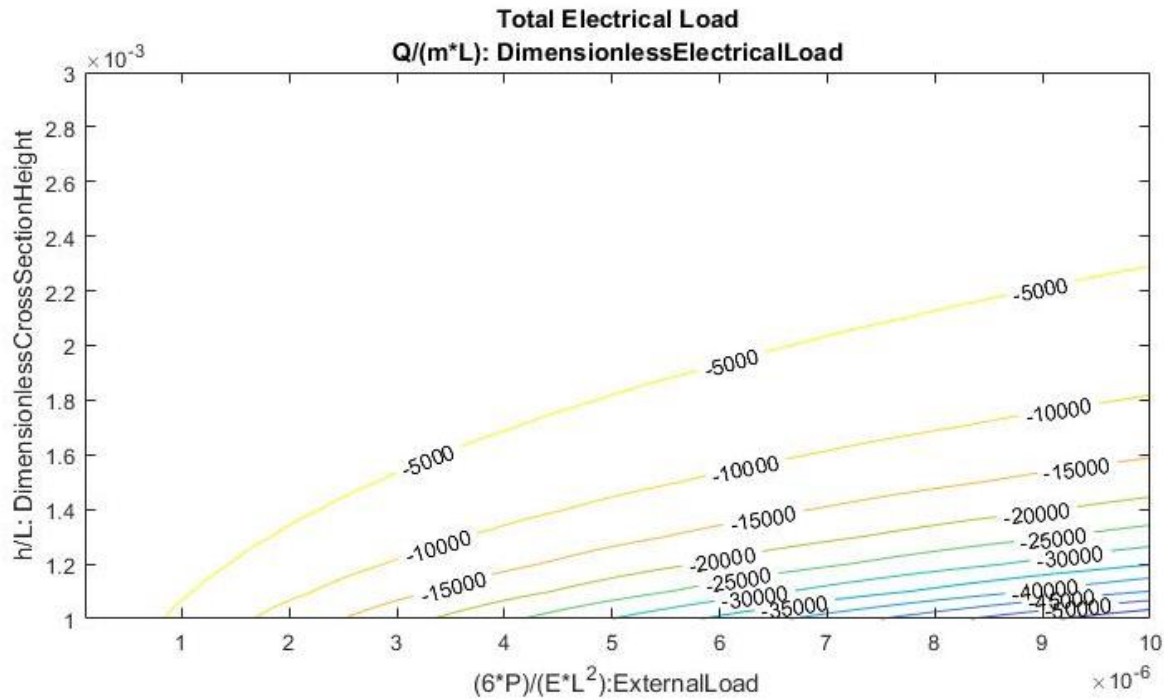


Figure 9. Επανάληψη του προηγούμενου διαγράμματος, Με ρυθμισμένους τους άξονες, έτσι ώστε, να υπάρχει πιο αληθοφανής σχέση συνδυασμού, ύψους διατομής και εξωτερικού φορτίου.

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

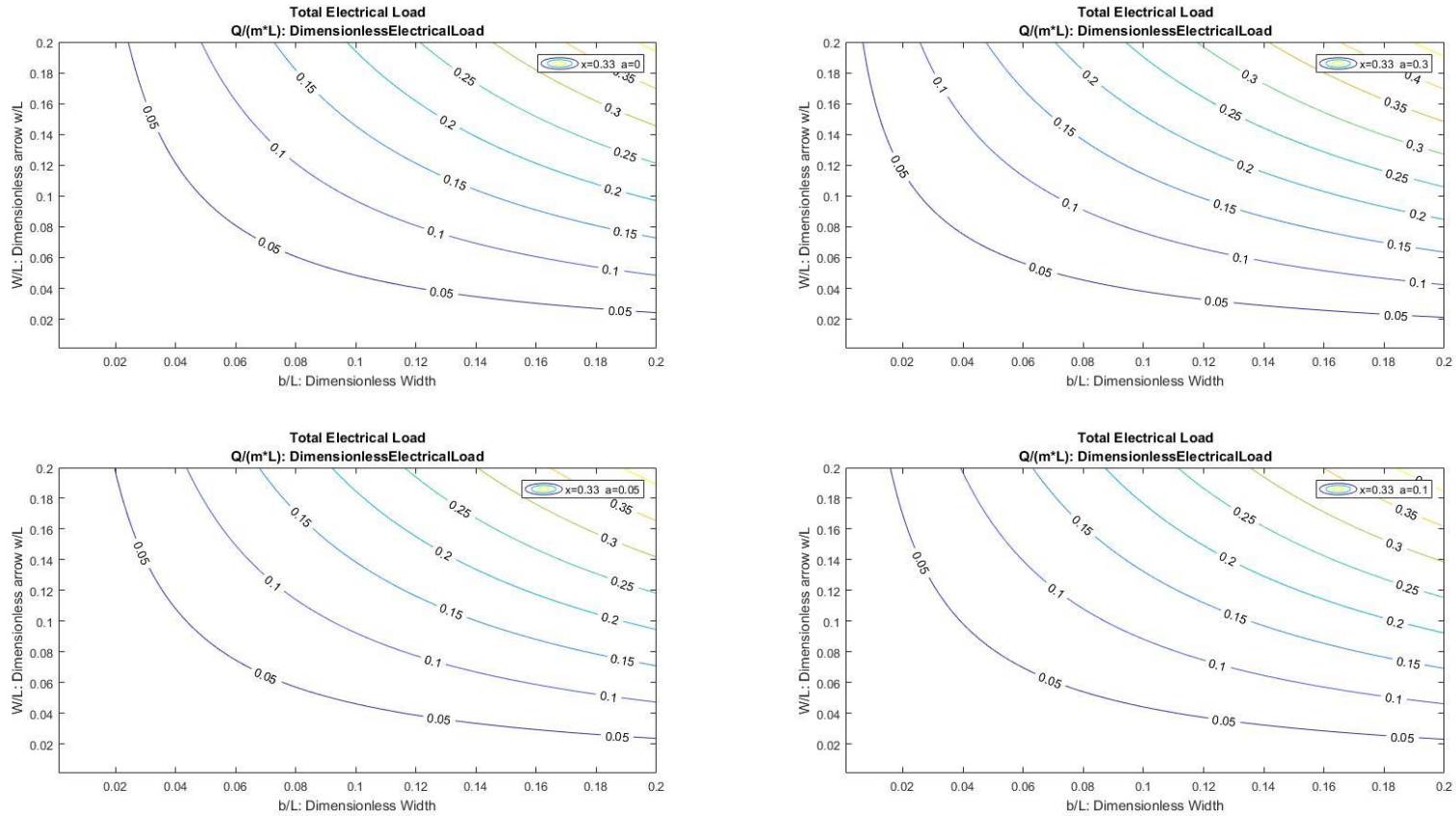
$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * a^{-3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(a * \frac{x}{L} \left(-2 * \left(a + \frac{b_0}{L}\right) * \ln \left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) + 2 * a + a * \frac{x}{L} + 2 * \frac{b_0}{L}\right) - 2 * \frac{b_0}{L} * \left(a + \frac{b_0}{L}\right) * \ln \left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1\right)\right)$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση στην δεύτερη καταλήγουμε στην σχέση που φαίνεται παρακάτω, η οποία δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που παράγεται σε μία δοκό, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν σε θέση «x₀», παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση «w(x₀)»

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -\frac{W(x)}{L} * a^3 \left(a * \frac{x}{L} \left(-2 * \left(a + \frac{b_0}{L}\right) * \ln \left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) + 2 * a + a * \frac{x}{L} + 2 * \frac{b_0}{L}\right) - 2 * \frac{b_0}{L} * \left(a + \frac{b_0}{L}\right) * \ln \left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1\right)\right)^{-1}$$

Η σχέση αυτή είναι αδιάστατη και μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί σε διαγράμματα.



80

Figure 11. Πως μεταβάλλεται το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, για έναν συνδυασμό, του αρχικού πλάτους της διατομής, και της κατακόρυφης παραμόρφωσης, δηλαδή του βέλους κάμψης, όταν εξετάζω την διατομή « $x=0.33L$ », Δηλαδή για έναν συνδυασμό του βέλους κάμψης στο « $x=0.33L$ », και του αρχικού πλάτους της διατομής, καθώς η κλίση του πλάτους παίρνει διαφορές τιμές. Η σχέση που διέπει το πρόβλημα είναι:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, b_0, x \cong 0.33L, a = \dots)$$

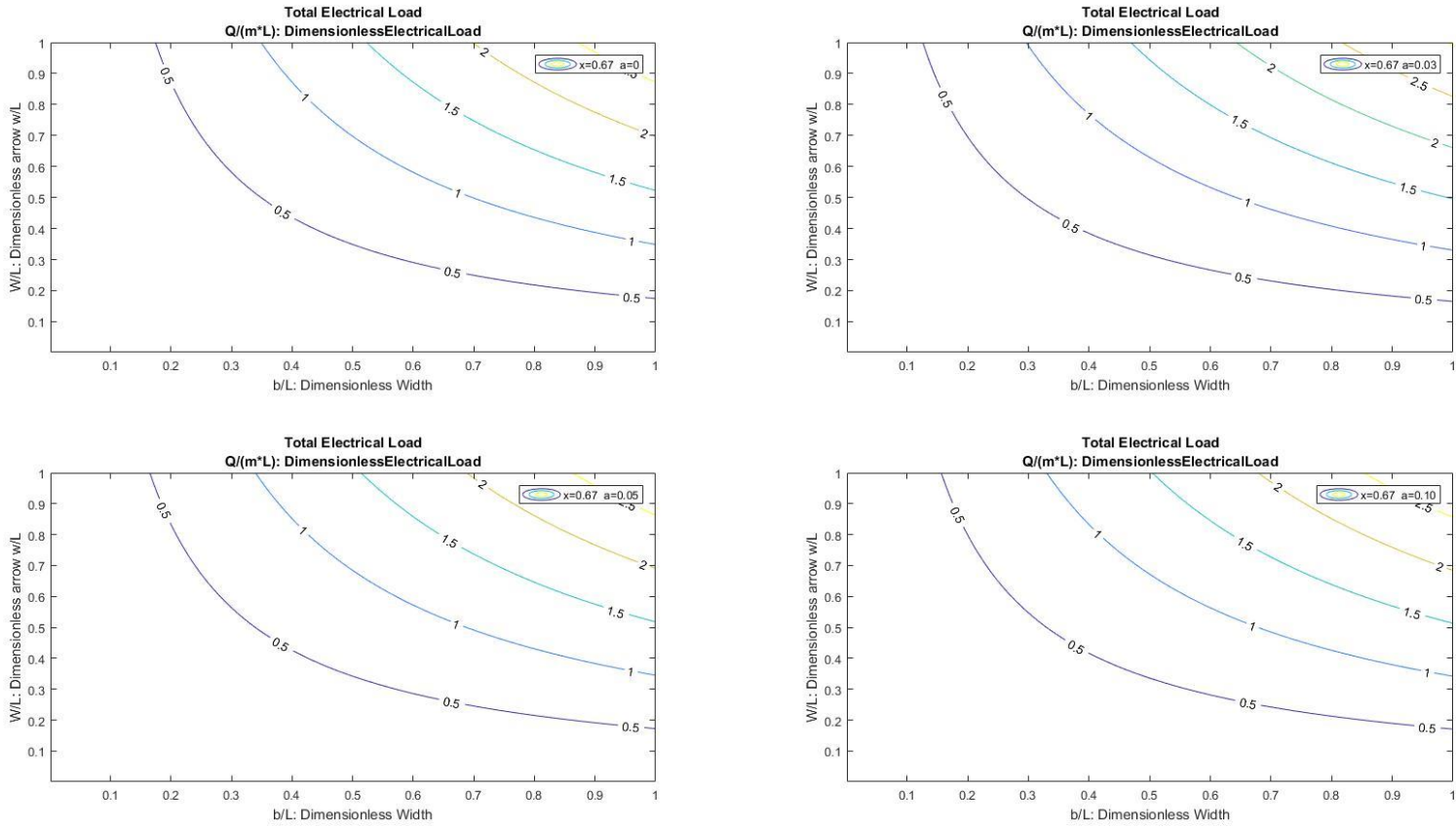


Figure 12. Πως μεταβάλλεται το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, για έναν συνδυασμό, του αρχικού πλάτους της διατομής, και της κατακόρυφης παραμόρφωσης, δηλαδή του βέλους κάμψης, όταν εξετάζω την διατομή « $x=0.67L$ », Δηλαδή για έναν συνδυασμό του βέλους κάμψης στο « $x=0.67L$ », και του αρχικού πλάτους της διατομής, καθώς η κλίση του πλάτους παίρνει διαφορετικές τιμές.

Η σχέση που διέπει το πρόβλημα είναι:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, b_0, x = 0,67L, a = \dots)$$

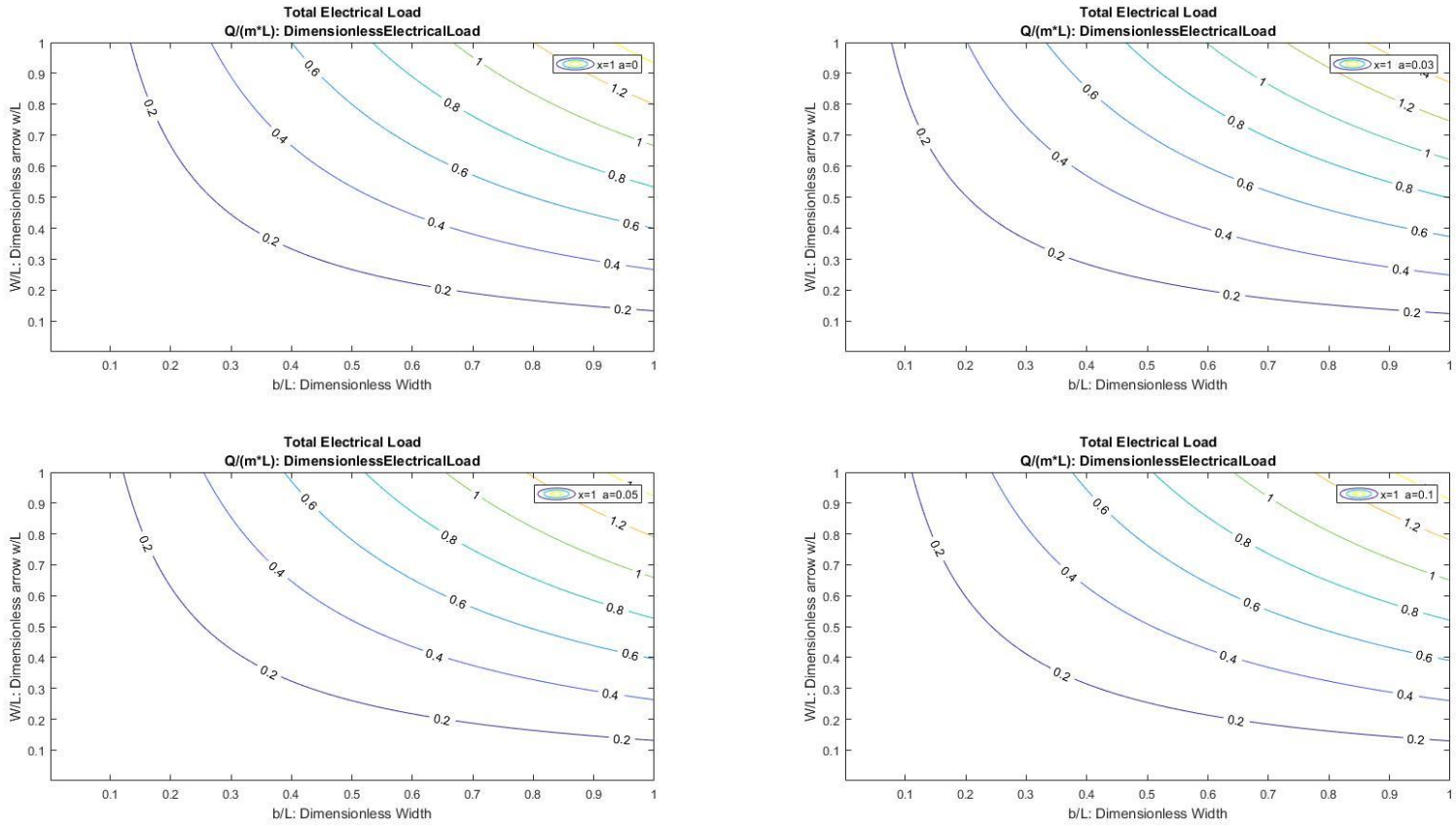


Figure 13. Πως μεταβάλλεται το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, για έναν συνδυασμό, του αρχικού πλάτους της διατομής, και της κατακόρυφης παραμόρφωσης, δηλαδή του βέλους κάμψης, όταν εξετάζω την διατομή « $x \cong 1L$ », Δηλαδή για έναν συνδυασμό του βέλους κάμψης στο « $x \cong 1L$ », και του αρχικού πλάτους της διατομής, καθώς η κλίση του πλάτους παίρνει διαφορεές τιμές. Η σχέση που διέπει το πρόβλημα είναι:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, b_0, x \cong 1L, a = \dots)$$

Από τα προηγούμενα διαγράμματα μπορεί κανείς να βγάλει πλήθος συμπερασμάτων. Από το «Figure 10», το οποίο είναι ένα σύνολο διαγραμμάτων, κανείς να εξακριβώσει ορισμένες πληροφορίες όπως τη θέση μέγιστου φορτίου, το βέλος μέγιστου φορτίου, ποιος συντελεστής κλίσης του πλάτους είναι ιδανικός για το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, και ποια είναι η αρχική διατομή, και συγκεκριμένα το ιδανικό πλάτος.

Σε καμία περίπτωση όμως δεν πρέπει να σκεφτεί κανείς ότι το να επιλέξει μεγάλο συντελεστή κλίσης του πλάτους «α» σημαίνει μεγαλύτερο «effect» διότι σε αυτό το διάγραμμα, έχει πρωτεύοντα ρόλο, το βέλος κάμψης. Ένα μεγάλο «α» ισοδυναμεί με μικρότερο βέλος κάμψης και έτσι για να έχουμε τα ίδια αποτελέσματα πρέπει να ασκήσουμε μεγαλύτερο φορτίο. Θα αντέξει το μεγαλύτερο φορτίο, η διατομή ή όχι;

Η πιο πολύτιμη παρατήρηση σε αυτό το διάγραμμα, δεν είναι άλλη παρά από το ότι κάθε ισούψης σε αυτό αντιστοιχεί σε μία φόρτιση. Έτσι μπορούμε μετρώντας το ηλεκτρικό φορτίο, να προσδιορίσουμε το μηχανικό φορτίο ή τουλάχιστον το βέλος κάμψης («Actuator metrology»).

Όσο για τα επόμενα τρία σύνολα διαγραμμάτων «Figure 11», «Figure 12», «Figure 13», τα οποία θα μπορούσαν να είναι και ένα, με 16 διαγράμματα, μπορεί κανείς να προσδιορίσει, με έναν πιο εύκολο τρόπο το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, αφού πλέον έχουμε παγιώσει την θέση που θα προσδιορισθεί η κατακόρυφη παραμόρφωση. Βέβαια και σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να έχουμε υπόψιν ότι το βέλος κάμψης επηρεάζεται από την γωνία κλίσης και το αρχικό πλάτος της διατομής.

Στην συνέχεια προτάθηκε η κατασκευή διαγραμμάτων, με απλές και ευθείες σχέσεις που δείχνουν, αλλάζοντας ποια παράμετρο θα αλλάξουμε το φαινόμενο, και αν η αλλαγή αυτής της παραμέτρου προς τα πάνω ή προς τα κάτω, έχει μεγαλύτερη σημασία. Για αυτά τα διαγράμματα, έχει θεωρηθεί ένα σύνολο τιμών σταθερό, και ένα άλλο να μεταβάλλεται. Τα διαγράμματα αυτά φαίνονται παρακάτω.

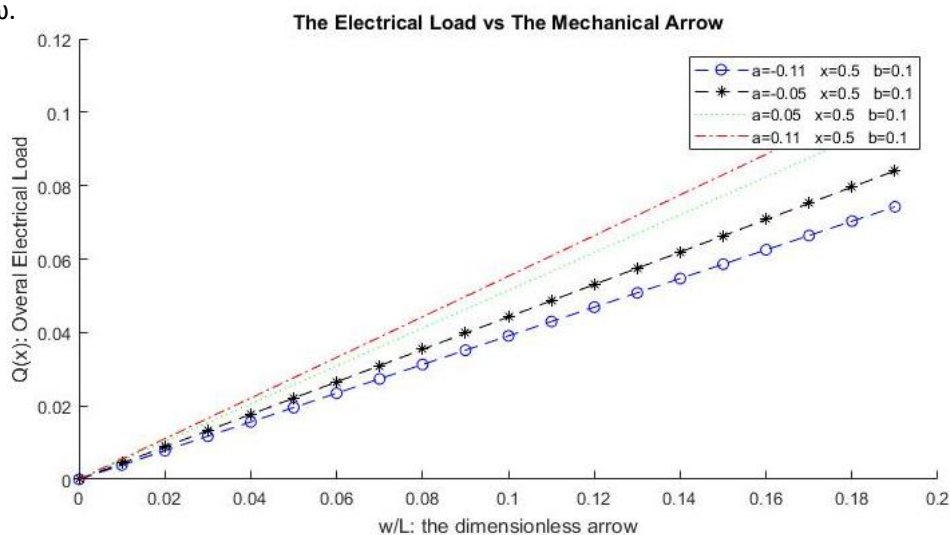


Figure 14. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σαν συνάρτηση του βέλους κάμψης σε μία συγκεκριμένη θέση « $x = 0.5 * L$ ». Το αρχικό πλάτος του προβόλου είναι ίσο με « $b_0 = 0.01 * L$ », και ο συντελεστής κλίσης του πλάτους αλλάζει τιμές.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, b_0 = 0.1 * L, x = 0.5 * L, a = \dots)$$

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι όσο αυξάνει η κλίση του πλάτους, τόσο αυξάνεται και το ηλεκτρικό φορτίο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι για ίδιο εξωτερικό φορτίο, προκαλείται μικρότερο βέλος κάμψης, αυξάνοντας τον ρυθμό μεταβολής του πλάτους.

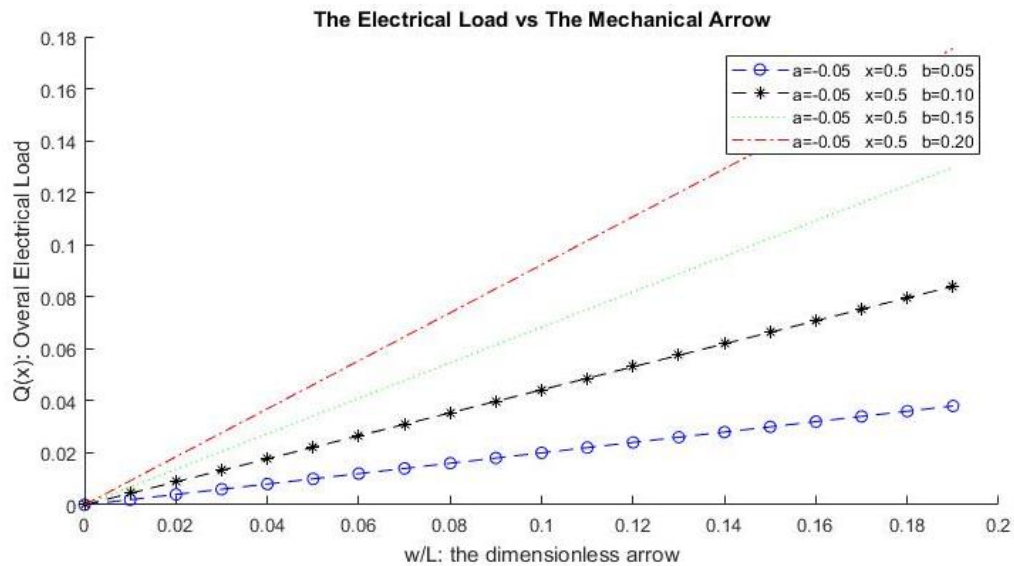


Figure 15. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σαν συνάρτηση του βέλους κάμψης σε μία σε μία διατομή « $x = 0.5 * L$ », ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους της διατομής είναι σταθερός, ίσος με « $a = -0.05$ » και το αρχικό πλάτος της διατομής, παίρνει διάφορες τιμές

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, b_0 = , , * L, x = 0.5 * L, a = -0.05)$$

Μπορεί κανείς ευκολα να παρατηρήσει ότι μεγαλύτερο πλάτος οδηγεί σε μεγαλύτερο ηλεκτρικό φορτίο όμως δε πρέπει να ξεχνάμε ότι μεγαλύτερο πλάτος, σημαίνει μικρότερο βέλος κάμψης για το ίδιο σημείο.

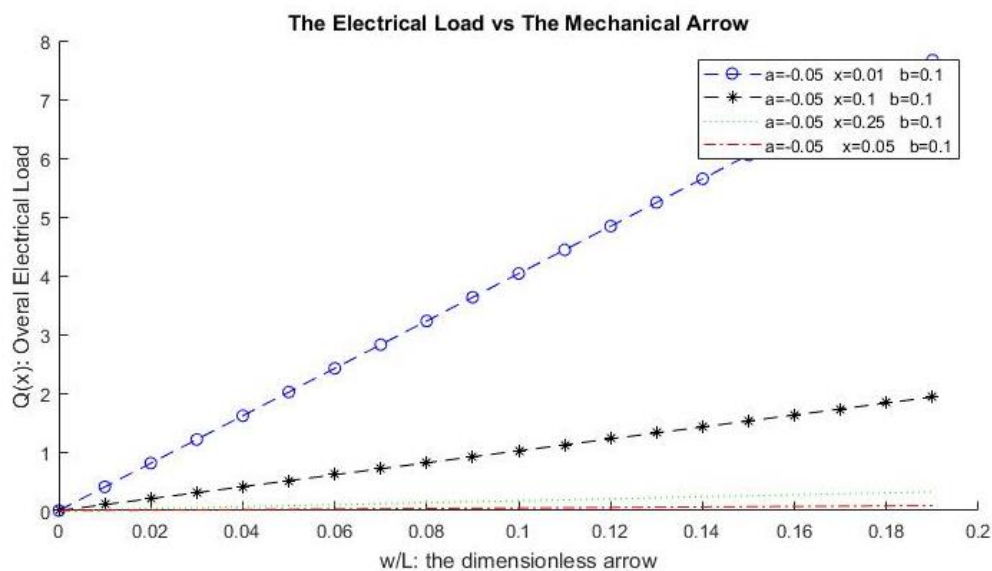


Figure 16. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου, σαν συνάρτηση του βέλους κάμψης σε διαφορεές θέσεις « x », όταν η γεωμετρία του φορέα είναι καθορισμένη (« $b_0 = 0.1 * L$ », « $a = -0.05$ »)

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, b_0 = 0.1 * L, x = , , , , a = -0.05)$$

Μπορεί κανείς ευκολα να θεωρήσει ότι το φαινόμενο είναι πιο ισχυρό, για μικρά « x » όμως, πάλι, μικρά « x » αντιστοιχούν με μικρότερα βέλη κάμψης.

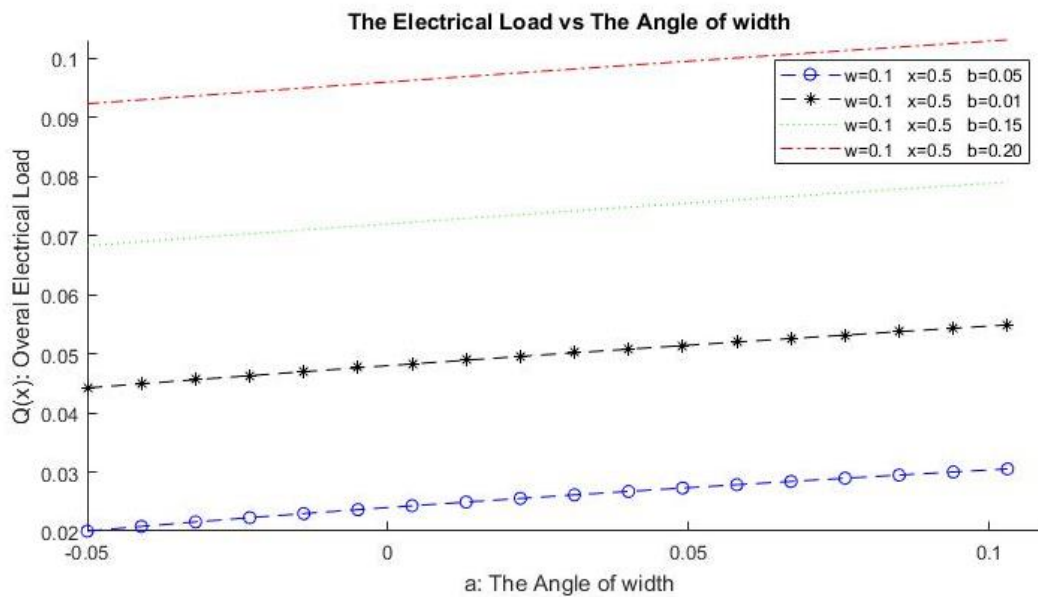


Figure 17. Διάγραμμα που δείχνει, την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σαν συνάρτηση του συντελεστή κλίσης του πλάτους της διατομής, όταν στην θέση « $x = 0.5 * L$ » παρατηρηθεί βέλος « $w(x) = 0.1 * L$ »

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(a, w = 0.1 * L, b_0 = \dots, x = 0.5 * L)$$

Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο αυξάνεται με την αύξηση της κλίσης « α » και του αρχικού πλάτους της διατομής, όμως αυτό που τονίστηκε τόσες πολλές φορές προηγουμένως ισχύει, ότι με αυξημένες τέτοιες παραμέτρους, πάμε σε μικρότερα βέλη.

Ένα αρκετά σημαντικό σημείο που οφείλουμε να επισημάνουμε είναι το ότι στο υπόμνημα του γραφήματος, πολλές φορές παραλείπονται οι τα « $/L$ », και άρα για παράδειγμα ο όρος « w » αντιπροσωπεύει τον όρο « w/L ». Σε καμία περίπτωση δεν έγιναν διαγράμματα με διαστάσεις.

Το συμπέρασμα, που μπορεί να βγάλει κανείς άμεσα με αυτήν την πληθώρα διαγραμμάτων, είναι ότι παρόλο που φαίνεται μεν απλό το πρόβλημα (αλλάζω μία μεταβλητή, αυξάνω το φαινόμενο), δεν είναι τόσο, διότι οι παράγοντες αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους.

3.5. Περίπτωση 1.1.2. Πρόβολος μεταβλητού πλάτους με καμπτική ροπή στην άκρη

Όπως και τον πρόβολο σταθερής διατομής που τον υποβάλαμε σε καμπτική ροπή στην άκρη, έτσι θα επαναλάβουμε την διαδικασία, σε πρόβολο μεταβλητής διατομής. Το πλάτος συσχετίζεται με την συντεταγμένη κατά μήκος της δοκού με τον προηγούμενο τρόπο. Όπως παρατηρήθηκε πολύ σωστά, αυτή η μεταβολή του πλάτους δεν μπορεί να είναι ανεξέλεγκτη, πρέπει να ισχύουν οι παραδοχές Bernoulli, και έτσι ο συντελεστής κλίσης «α» να παίρνει μέγιστες και ελάχιστες τιμές, όσο ήταν και στην προηγούμενη ενότητα,

- « $\alpha_{max} = 0.11$ »
- « $\alpha_{min} = \max(-0.11 ; -\frac{b_0}{x})$ »

Ο αριθμός «0.11» αντιστοιχεί σε μία κλίση γύρω στις «6.3°». Είναι αρκετά μικρή, και εννοείται ότι στα πειράματα, που δοκιμάσαμε να εκτελέσουμε, χρησιμοποιήσαμε μεγαλύτερες, αλλά τουλάχιστον οι παραδοχές «Bernoulli» σίγουρα ισχύουν.

$$\theta = \arctan(a)$$

Σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα του προβόλου με μεταβλητό πλάτος και καμπτική ροπή στην άκρη περιέχει τις εξής παραμέτρους:

- ✓ Το αρχικό πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Τον συντελεστή μεταβολής του πλάτους: α [-]
- ✓ Το ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Την καμπτική ροπή που βρίσκεται στην άκρη: M [$N * m$]
- ✓ Την συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

Ο φορέας του προβλήματος μπορεί να επιλυθεί εύκολα με χέρι. Έτσι είναι εύκολος ο προσδιορισμός των δράσεων στήριξης, των διαγραμμάτων των εντατικών μεγεθών, και των εξισώσεων που προεξοφλούν αυτά τα διαγράμματα.

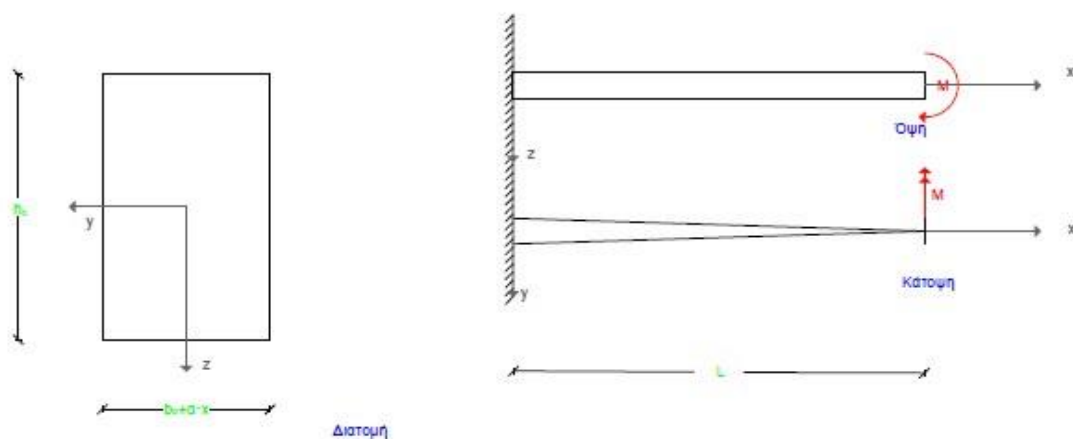


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.1.2. είναι πρόβολος διατομής μεταβλητού πάχους με καμπτική ροπή στην άκρη

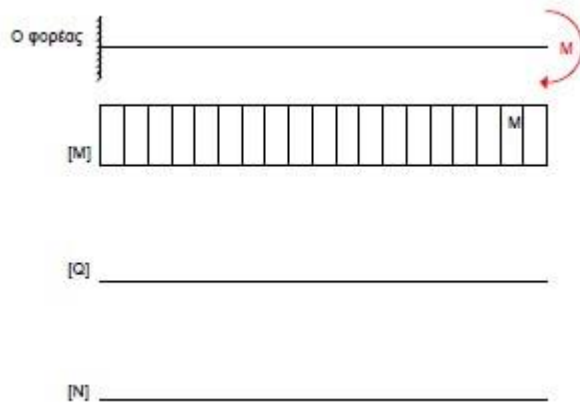


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη στην περίπτωση προβόλου μεταβλητού πλάτους διατομή με καμπτική ροπή στην άκρη.

Οι αντιδράσεις στήριξης.

- $V_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $H_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $M_{\text{πάκτωσης}} = M$ [kN*m]

Και οι εξισώσεις των διαγραμμάτων [M], [Q], [N].

- ✓ $M(x) = -M$ [kN*m]
- ✓ $Q(x) = 0$ [kN]
- ✓ $N(x) = 0$ [kN]

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται ως:

- ✓ Εμβαδόν: $A = (b_0 + \alpha * x) * h_0$ [m²]
- ✓ Ροπή Αδρανείας $I_{yy} = \frac{(b_0 + \alpha * x) * h_0^3}{12}$ [m⁴]
- $I_{zz} = \frac{(b_0 + \alpha * x)^3 * h_0}{12}$ [m⁴]

Οι δυσκολίες αρχίζουν με το βέλος κάμψης το οποίο είναι όχι μόνο παράγουσα της ροπής αλλά και της γεωμετρίας της δοκού.

$$E * I(x) * w''(x) = -M(x) = M$$

$$w''(x) * E * \frac{(b_0 + \alpha * x) * h_0^3}{12} = M$$

$$w''(x) = 12 * \frac{M}{E} * (b_0 + \alpha * x)^{-1} * h_0^{-3}$$

$$W'(x) = 12 * \frac{M}{E} * a^{-1} * h_0^{-3} * (\ln(a * x + b_0)) + C^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : « $w'(x = 0) = 0$ »

¹ Η ολοκλήρωση έγινε με χρήση της γλώσσας αναλυτικού προγραμματισμού «Maple». Για λόγους ασφάλειας έγινε επαλήθευση με δύο τρόπους. Θεωρώντας ότι ο συντελεστής κλίσης είναι μηδενικός, το όριο πρέπει να βγει όσο της περίπτωσης 1.0.2 το αποτέλεσμα, και παραγωγίζοντας πίσω πρέπει να βγει η αρχική σχέση. Αυτές οι επαληθεύσεις έγιναν σε κάθε περίπτωση που χρειάστηκε υπολογιστικό πρόγραμμα, να κάνει αναλυτικά πράξεις. Οι επαληθεύσεις, για λόγους απλούστευσης των πράξεων δεν παρατίθενται σε αυτό το σημείο.

$$W'(0) = 12 * \frac{M}{E} * a^{-1} * h_0^{-3} * (\ln(b_0)) + C = 0 \rightarrow$$

$$C = -12 * \frac{M}{E} * a^{-1} * h_0^{-3} * (\ln(b_0))$$

Και άρα καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W'(x) = 12 * \frac{M}{E} * a^{-1} * h_0^{-3} * \ln\left(\frac{a*x+b_0}{b_0}\right)$$

$$W(x) = 12 * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * \left(\frac{b_0}{a^2} * \ln\left(\frac{a*x+b_0}{b_0}\right) + \frac{x}{a} * \ln\left(\frac{a*x+b_0}{b_0}\right) + \frac{b_0}{a^2} - \frac{x}{a}\right) + C^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : «w(x = 0) = 0»

$$W(0) = 12 * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * \frac{b_0}{a^2} + C = 0$$

$$C = -12 * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * \frac{b_0}{a^2}$$

Άρα το βέλος κάμψης δίνεται με την παρακάτω σχέση, αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W(x) = 12 * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * \left(\frac{b_0}{a^2} * \ln\left(\frac{a*x+b_0}{b_0}\right) + \frac{x}{a} * \ln\left(\frac{a*x+b_0}{b_0}\right) - \frac{x}{a}\right)$$

Αυτήν η σχέση, με σκοπό να αποτυπωθεί ως διάγραμμα, πρέπει να αδιαστατοποιηθεί. Με αυτά που περιεγράφηκαν προηγουμένως, έχουμε:

$$\frac{W(x)}{L} = 12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{b_0}{a^2 * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) + \frac{x}{a * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) - \frac{x}{a * L}\right)$$

$$\begin{aligned} &> W2 := x \rightarrow \frac{12 \cdot M}{(E \cdot (b + a \cdot x) \cdot h^3)}; \\ & \qquad \qquad \qquad W2 := x \mapsto \frac{12 M}{E (a x + b) h^3} \qquad \qquad \qquad (1) \\ &> \text{int}(W2(x), x); \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{12 M \ln(a x + b)}{E h^3 a} \qquad \qquad \qquad (2) \\ &> W1 := x \rightarrow \frac{12 \cdot M}{E \cdot h^3} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{a \cdot x + b}{b}\right); \\ & \qquad \qquad \qquad W1 := x \mapsto \frac{12 M \ln\left(\frac{a x + b}{b}\right)}{E h^3 a} \qquad \qquad \qquad (3) \\ &> \text{int}(W1(x), x); \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{12 M b \ln\left(1 + \frac{a x}{b}\right)}{E h^3 a^2} + \frac{12 M \ln\left(1 + \frac{a x}{b}\right) x}{E h^3 a} - \frac{12 M b}{E h^3 a^2} - \frac{12 M x}{E h^3 a} \qquad \qquad \qquad (4) \\ &> \end{aligned}$$

Figure 3. Ο κώδικας, ολοκλήρωσης για τον προσδιορισμό του βέλους κάμψης, με τη βοήθεια της γλώσσας αναλυτικού προγραμματισμού «Maple».

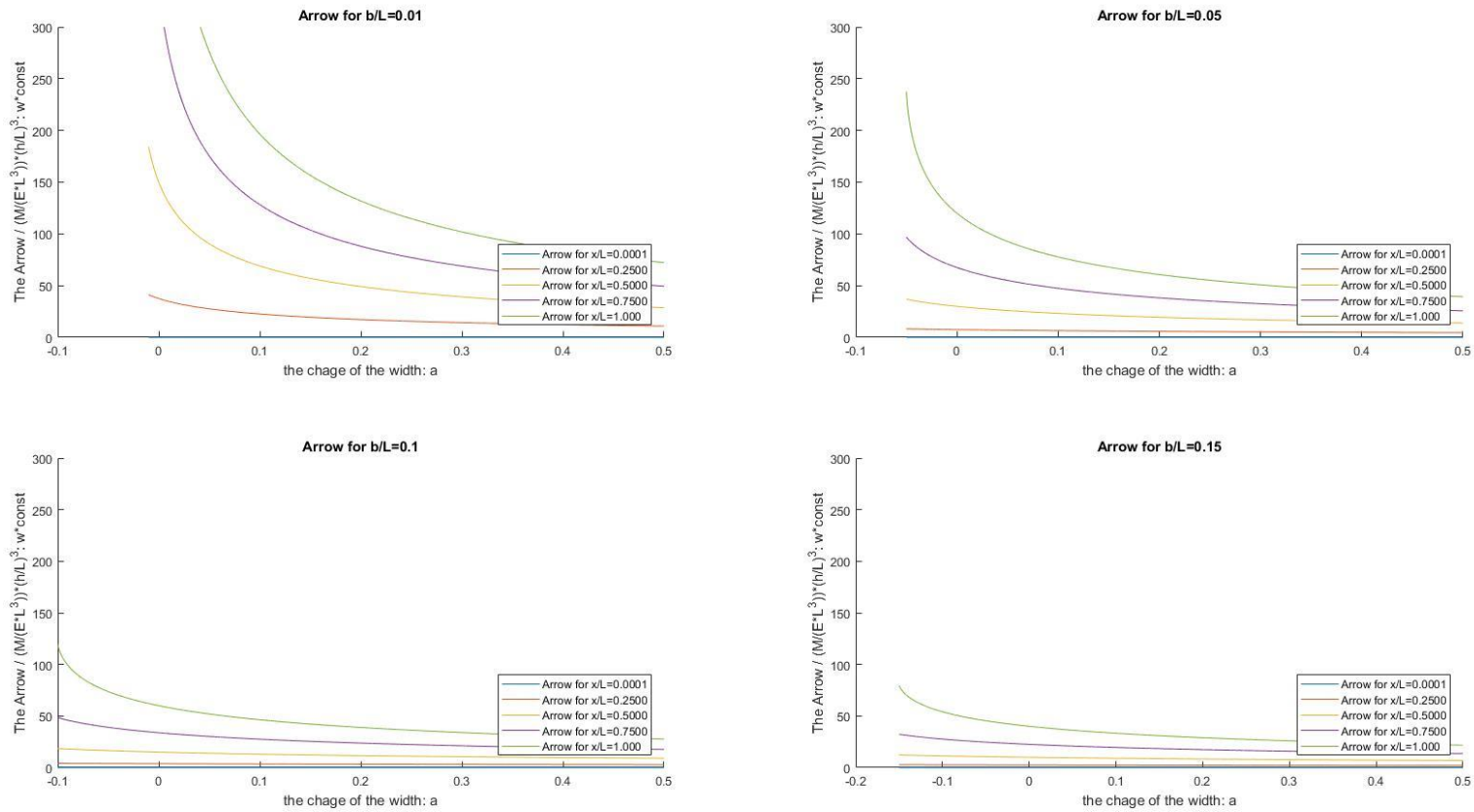


Figure 4. Το Βέλος κάμψης, σαν συνάρτηση του συντελεστή κλίσης του πλάτους, για διάφορες θέσεις κατά μήκος της δοκού, για διάφορα αρχικά πλάτη της διατομής της δοκού. Το ύψος της διατομής, όπως και το εξωτερικό φορτίο είναι στο πρώτο μέρος της εξίσωσης.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 = f(a, x = \dots, b_0 = \dots)$$

Θα μπορούσε κανείς με μία γρήγορη ματιά, να ελέγξει την περίπτωση με μεταβαλλόμενο πλάτος και κατακόρυφο φορτίο στην άκρη, τα αποτελέσματα αυτής την περίπτωσης είναι περίπου διπλάσια από αυτά εκείνης, διότι το εμβαδόν του διαγράμματος των ροπών είναι περίπου το διπλάσιο.

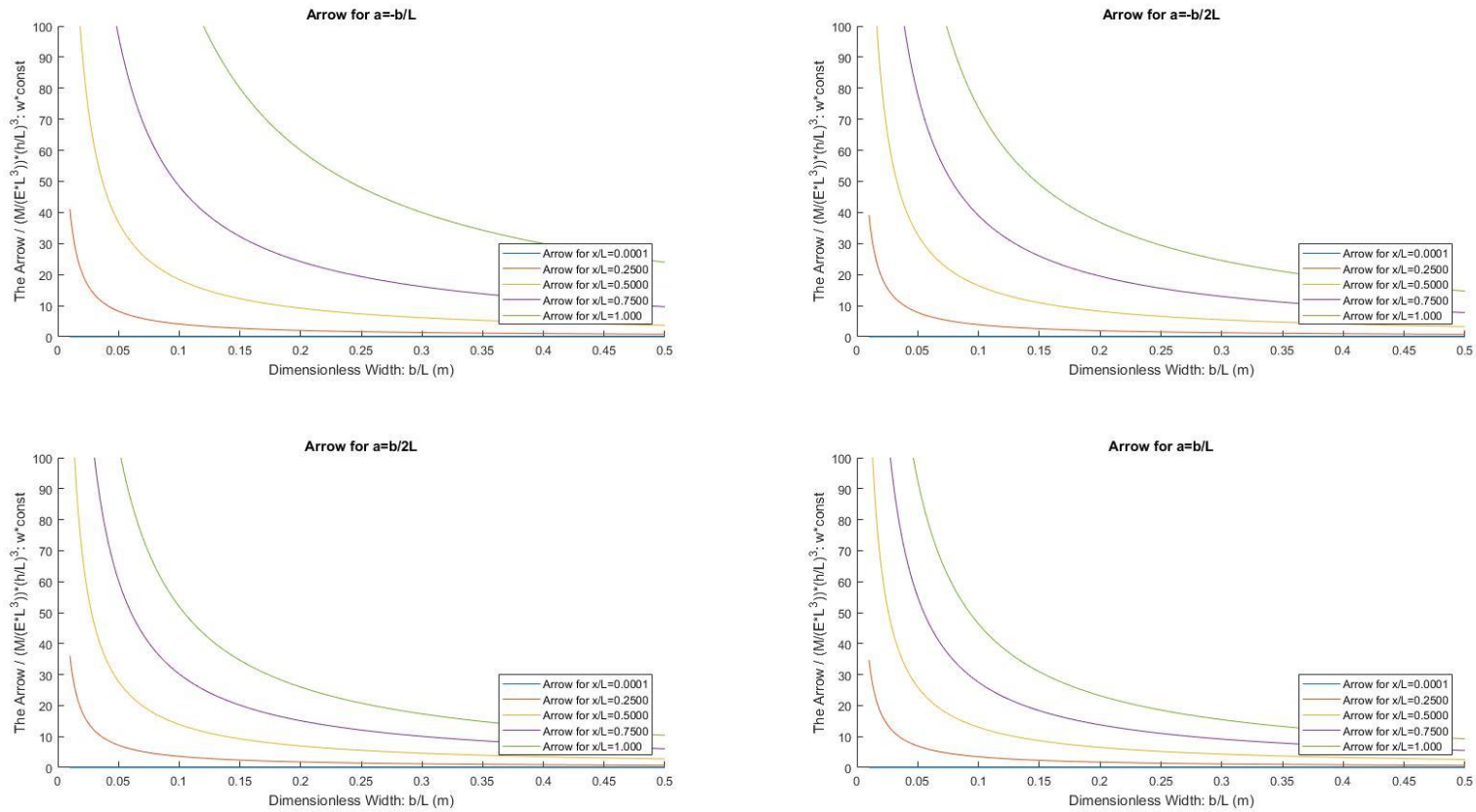


Figure 5. Διαγράμματα που δείχνουν την μεταβολή του βέλους κάμψης, σαν συνάρτηση του αρχικού πλάτους της διατομής, σε διάφορες θέσεις στο μήκος της δοκού, καθώς η κλίση του πλάτους αλλάζει σαν συνάρτηση με το αρχικό πλάτος της διατομής, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 = f(b_0, a = g(b_0), x = \dots)$$

Προσοχή, δεν πρόκειται για ένα από σύνολο διαγραμμάτων. Το γεγονός ότι η κλίση της διατομής είναι συνάρτηση του αρχικού πλάτους μπορεί να έχει, και έχει, μεγάλες επιπτώσεις.

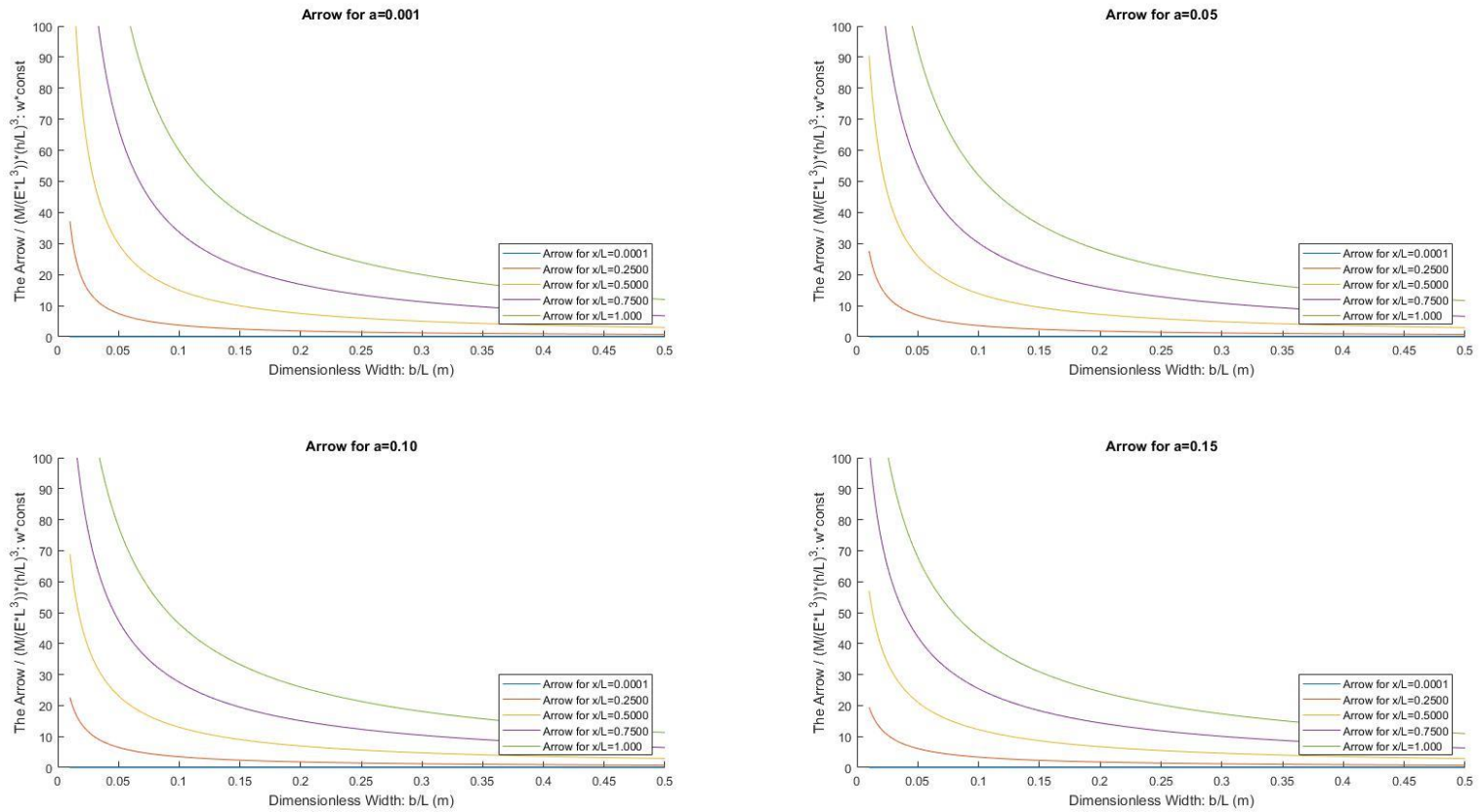


Figure 6. Σύνολο διαγραμμάτων που δείχνουν την μεταβολή του βέλους κάμψης, σαν συνάρτηση του αρχικού πλάτους διατομής της δοκού, για διάφορες θέσεις στο μήκος της δοκού, και για προκαθορισμένους ρυθμούς μεταβολής του πλάτους της δοκού. Είναι όπως το προηγούμενο διάγραμμα, αλλά χωρίς την ιδιαιτερότητα, με την σύνθετη συνάρτηση.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 = f(b_0, a = \dots, x = \dots)$$

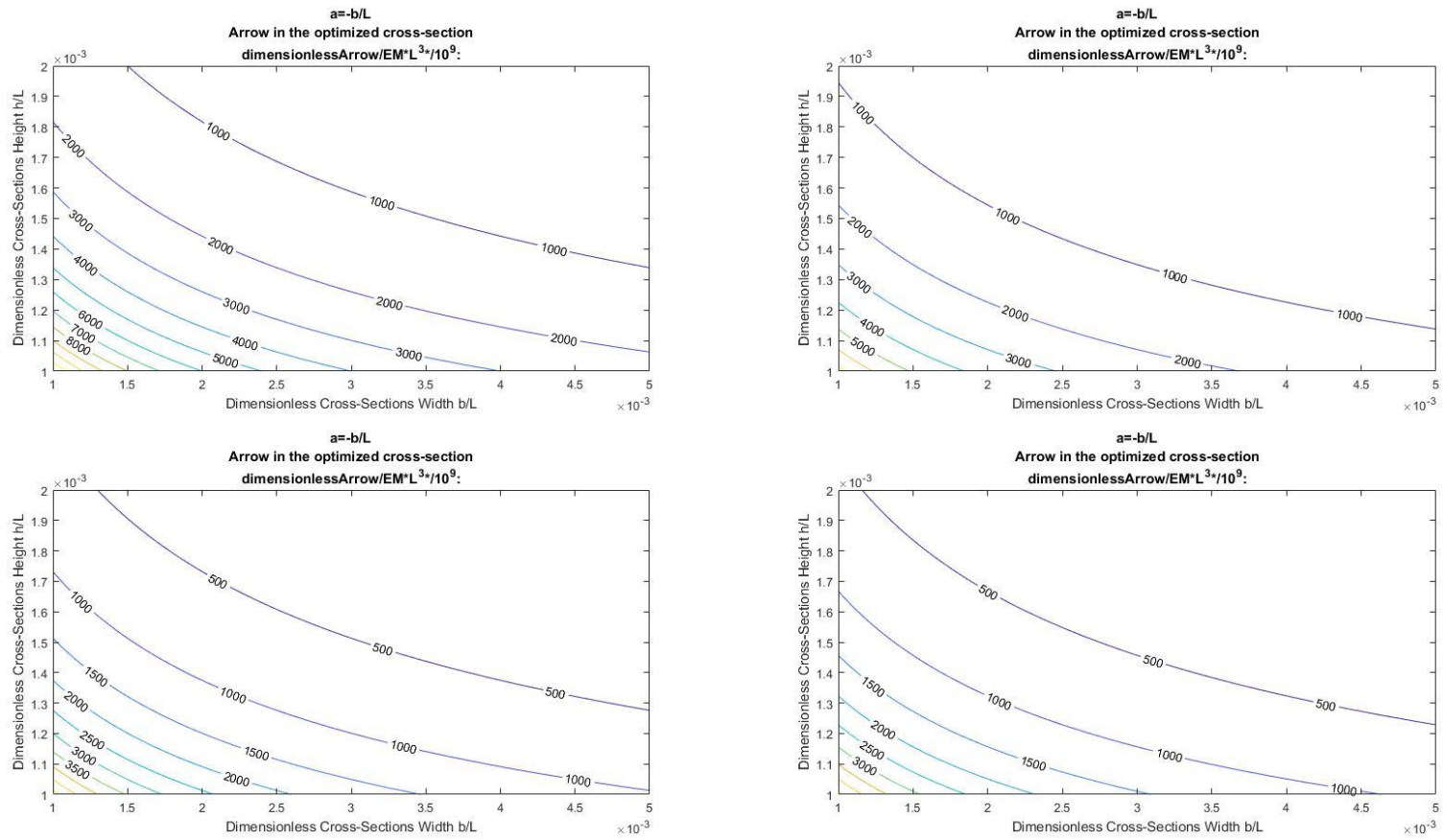


Figure 7. Διαγράμματα που δείχνουν την μεταβολή του βέλους κάμψης, για έναν συνδυασμό των αρχικών διαστάσεων την διατομής, στην θέση μέγιστου βέλους της διατομής « $x=L$ », καθώς ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους, είναι συνάρτηση του πλάτους.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3} \right)^{-1} = f(b_0, h_0, a = g(b_0), x = L)$$

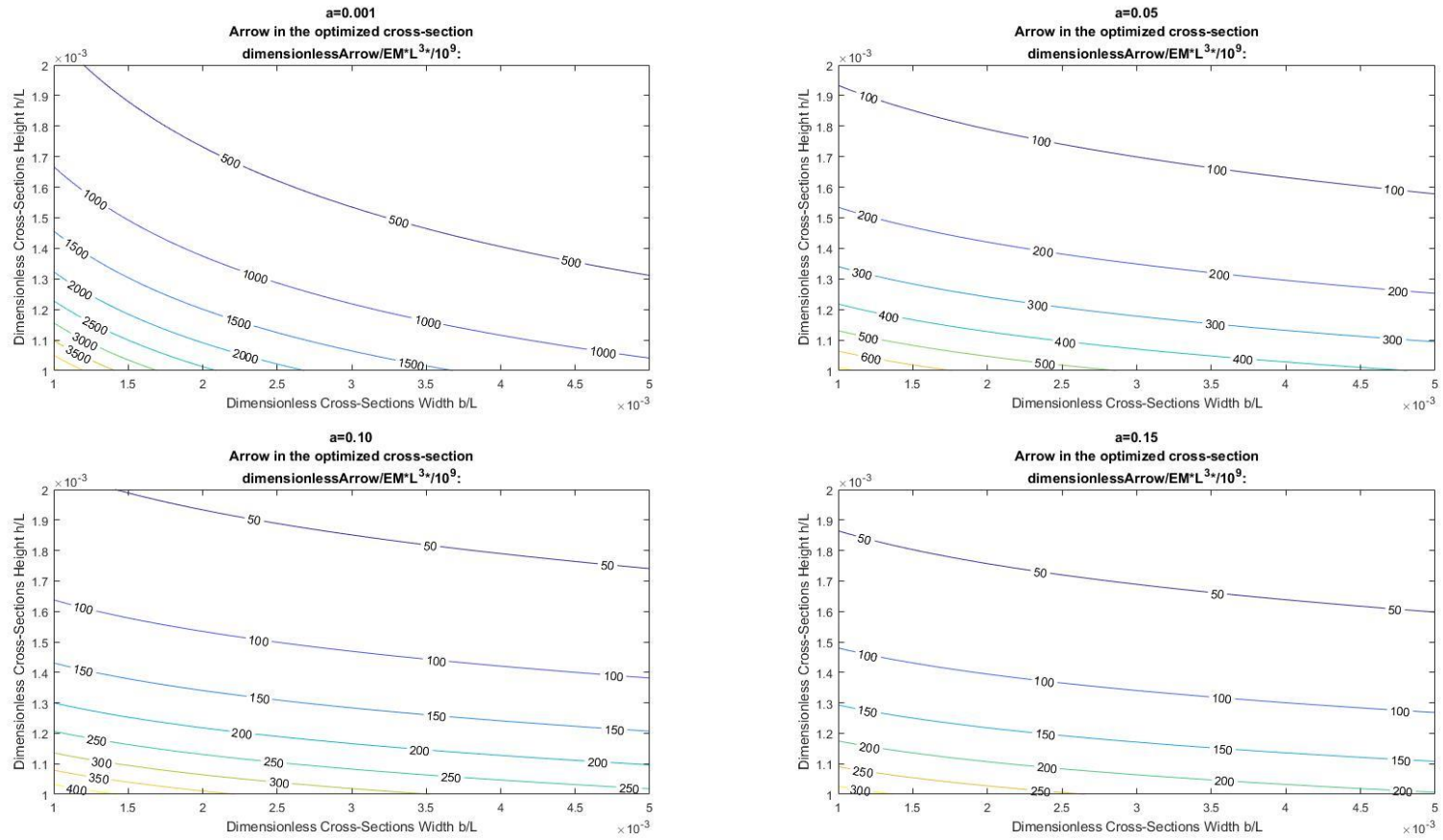


Figure 8. Διαγράμματα που δείχνουν την μεταβολή του βέλους κάμψης, για έναν συνδυασμό των αρχικών διαστάσεων την διατομής, στην θέση μέγιστου βέλους της διατομής « $x=L$ », καθώς ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους παίρνει συγκεκριμένες τιμές.

$$\frac{W(x)}{L} * \left(\frac{M}{E * L^3} \right)^{-1} = f(b_0, h_0, a = \dots, x = L)$$

Από τα παραπάνω διαγράμματα, κάποια συμπεράσματα που μπορούν να παραχθούν είναι τα εξής:

- Μεγαλύτερο βέλος έχουμε για θέσεις μακριά από την πάκτωση.
- Με την αύξηση του ρυθμού μεταβολής του πλάτους, τα βέλη μικραίνουν. Για οριακά μικρά βέλη μάλιστα, παρατηρείται μεγιστοποίηση του βέλους κάμψης.
- Η αύξηση του ύψους της διατομής προκαλεί, πολύ μεγαλύτερη μείωση του βέλους κάμψης, από την αύξηση του πλάτους της διατομής.

Στην συνέχεια γίνεται προσδιορισμός των τάσεων που έχουν «gradient». Αυτό γίνεται με την θεωρία δοκού σε κάμψη, που έχει ως εξής.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E \cdot I_{yy}(x)} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{M}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3} * Z$$

Ενώ η πολικότητα, προσδιορίζεται με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής, δηλαδή την παράγωγο της προς την συντεταγμένη του άξονα στον οποίο υπάρχει (άξονα «3» ή αλλιώς «z»), έχουμε τάσεις στον άξονα «1» και ρυθμό μεταβολής αυτών στον άξονα «3», άρα πρέπει όπως και στην προηγούμενη «περίπτωση 1.0.1» να χρησιμοποιήσουμε τον όρο «μ₁₃».

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{M}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3}$$

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος του πρόβολου. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδη τμήματα. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{M}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3} * (b_0 + \alpha * x) * dx$$

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{M}{E * h_0^3} * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * [x]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * [L]$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * L$$

Κάποιος μπορεί να παρατηρήσει ότι το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού δεν σχετίζεται καθόλου με την κλίση του πλάτους της διατομής. Εφαρμόζοντας την κανονικοποίηση που περιγράφηκε στην αρχή:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Στην συνέχεια, η σχέση αυτή μπορεί να αποτυπωθεί.

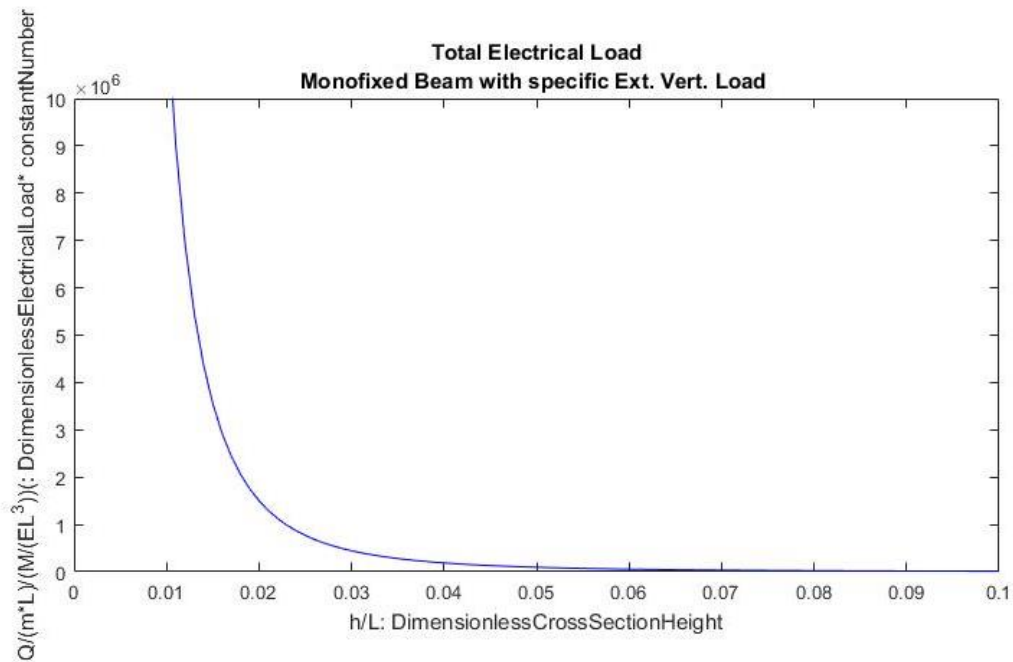


Figure 9. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού ως συνάρτηση του ύψους της διατομής. Το εξωτερικό φορτίο βρίσκεται στο πρώτο μέλος της εξίσωσης αφού θεωρείται σταθερό.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} * \left(\frac{M}{E * L^3} \right)^{-1} = f(h_0)$$

Το «scaling effect» κάνει αισθητή την παρουσία του, για αρκετά μικρά ύψη έχουμε μεγάλα ηλεκτρικά φορτία.

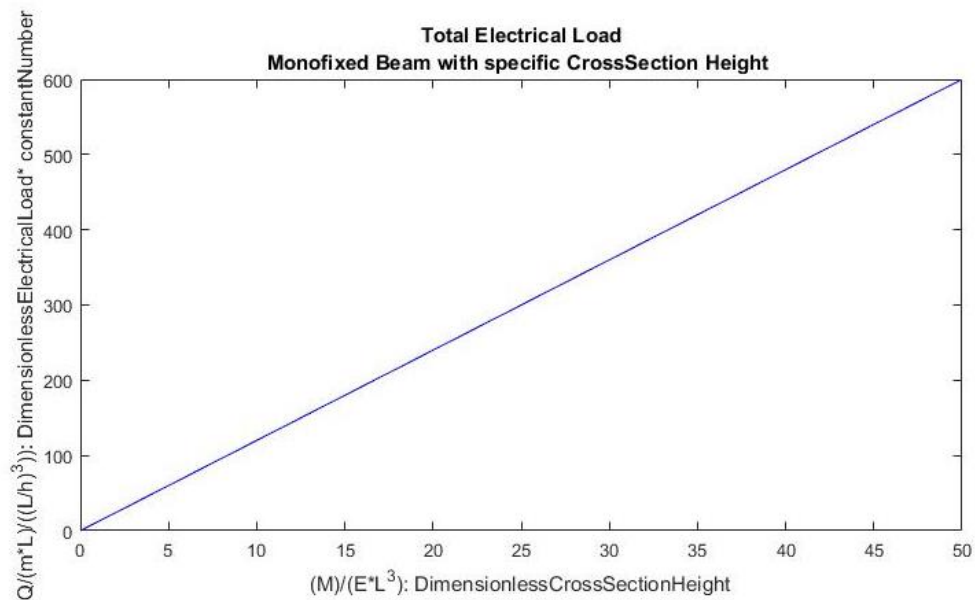


Figure 10. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού ως συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου. Το ύψος της διατομής βρίσκεται στο πρώτο μέρος της εξίσωσης.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^3 = f(M)$$

Η σχέση είναι απόλυτα γραμμική, όσο αυξάνεται το εξωτερικό φορτίο, τόσο αυξάνεται και το «effect».

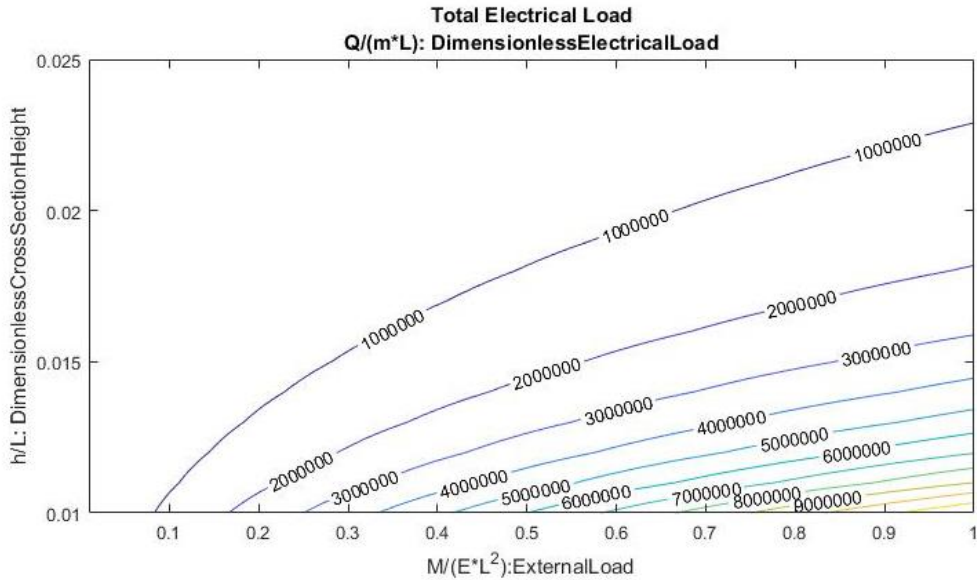


Figure 11. Το συνολικά ηλεκτρικό παραγόμενο φορτίο, για έναν συνδυασμό του ύψους της διατομής και του εξωτερικού φορτίου, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, για μεγιστοποίηση του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού χρειαζόμαστε ταυτόχρονα, μεγάλα φορτία, και μικρά ύψη διατομής.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(M, h_0)$$

Σπάνια, μια κατασκευή, έχει τέτοιες διαστάσεις, συνήθως το ύψος της διατομής είναι αρκετά μεγαλύτερο, και το εξωτερικό φορτίο αρκετά μικρότερο. Όπως είχε δειχθεί και σε προηγούμενη ενότητα, μία διατομή σκυροδέματος, βρίσκεται στο πάνω αριστερά μέρος του διαγράμματος.

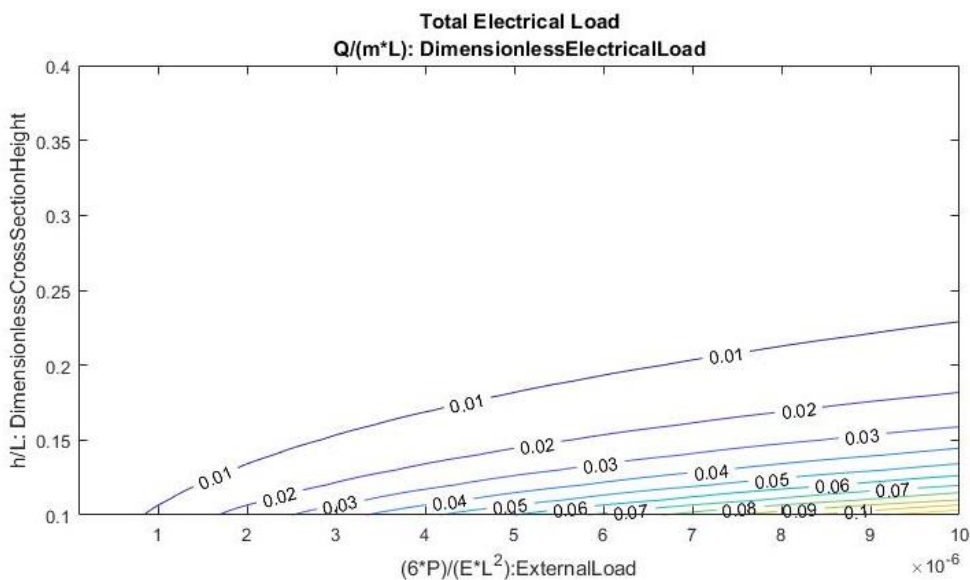


Figure 12 Το συνολικά ηλεκτρικό παραγόμενο φορτίο, για έναν συνδυασμό του ύψους της διατομής και του εξωτερικού φορτίου, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, για μεγιστοποίηση του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού χρειαζόμαστε ταυτόχρονα, μεγάλα φορτία, και μικρά ύψη διατομής.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(M, h_0)$$

Η κλίμακα έχει μονταριστεί για διατομή μίας συμβατικής κατασκευής.

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

$$\frac{W(x)}{L} = 12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{b_0}{a^2 * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) + \frac{x}{a * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) - \frac{x}{a * L}\right)$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση στην δεύτερη καταλήγουμε στην σχέση που φαίνεται παρακάτω, η οποία δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που παράγεται σε μία δοκό, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν σε θέση « x_0 », παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση « $w(x_0)$ »

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = \frac{W(x)}{L} * \left(\frac{b_0}{a^2 * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) + \frac{x}{a * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) - \frac{x}{a * L}\right)^{-1}$$

Η σχέση αυτή είναι αδιάστατη και μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί σε διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά φαίνονται παρακάτω, και αποτελούν πηγή έμπνευσης για κάποια συμπεράσματα.

Το πρώτο διάγραμμα, ακολουθεί τα πρότυπα της προηγούμενης περίπτωσης, με κάποιες μικροδιαφορές που αναμένονταν, όπως η κλίση των καμπύλων, και οι τιμές της.

Το δεύτερο διάγραμμα, που αντιστοιχεί σε τρία κομμένα διαγράμματα της περίπτωσης 1.1.1. έχει πάρα πολλές διαφορές. Πέρα από τις τιμές και τα πρόσημα, που αναμένονταν για κάτι τέτοιο, αυτό που εντυπωσιάζει είναι ο προσανατολισμός της αύξησης των τιμών του ηλεκτρικού πεδίου.

Μείωση του αρχικού πλάτους, επιφέρει αύξηση του βέλους κάμψης, και επομένως, οπωσδήποτε αύξηση του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου.

Στην συνέχεια προτάθηκε η κατασκευή διαγραμμάτων, με απλές και ευθείες σχέσεις που δείχνουν, αλλάζοντας κάποια παράμετρο πως θα αλλάξουμε το φαινόμενο, και αν η αλλαγή αυτής της παραμέτρου προς τα πάνω ή προς τα κάτω, έχει μεγαλύτερη σημασία. Για αυτά τα διαγράμματα, έχει θεωρηθεί ένα σύνολο τιμών σταθερό, και ένα άλλο να μεταβάλλεται. Τα διαγράμματα αυτά ακολουθούν τα προηγούμενα.

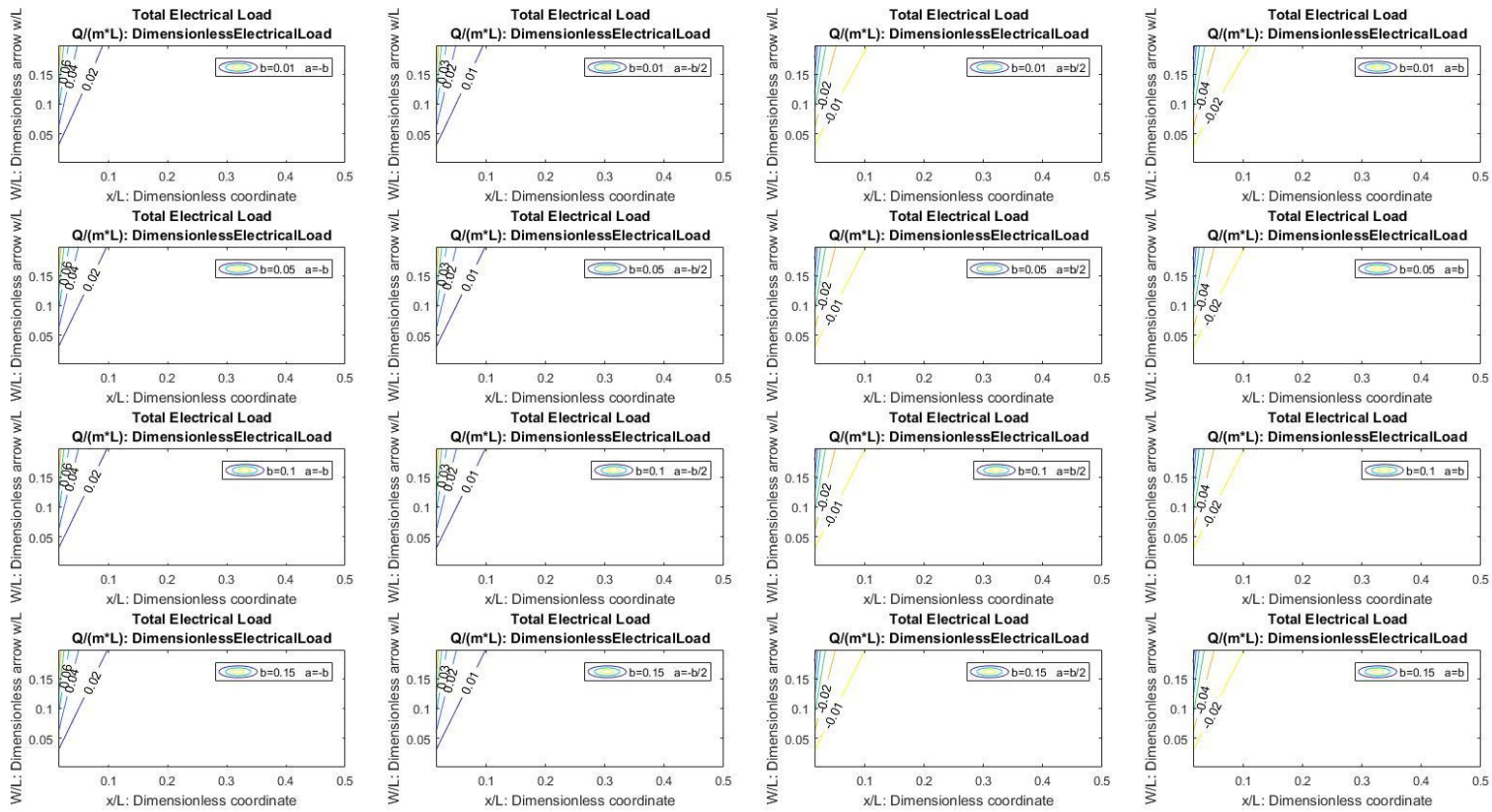


Figure 13. Πώς μεταβάλλεται το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο εμφανίζεται σε όλο το μήκος της δοκού, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν παρατηρηθεί σε μία θέση « x_0 », κατακόρυφη παραμόρφωση ίση με « $w(x_0)$ ». Τα διαγράμματα τυπώθηκαν για διάφορους συνδυασμούς του πλάτους της διατομής (Αρχικό πλάτος και κλίση).

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, x, b_0 = \dots, a = \dots)$$

Συγκρίνοντας με την περίπτωση κατακόρυφου φορτίου στην άκρη, βλέπουμε σαφώς μεγαλύτερα αποτελέσματα, και οπωσδήποτε, διαφορετική δύναμη της καμπύλης. Πριν είχαμε καμπύλη, τώρα έχουμε ευθεία.

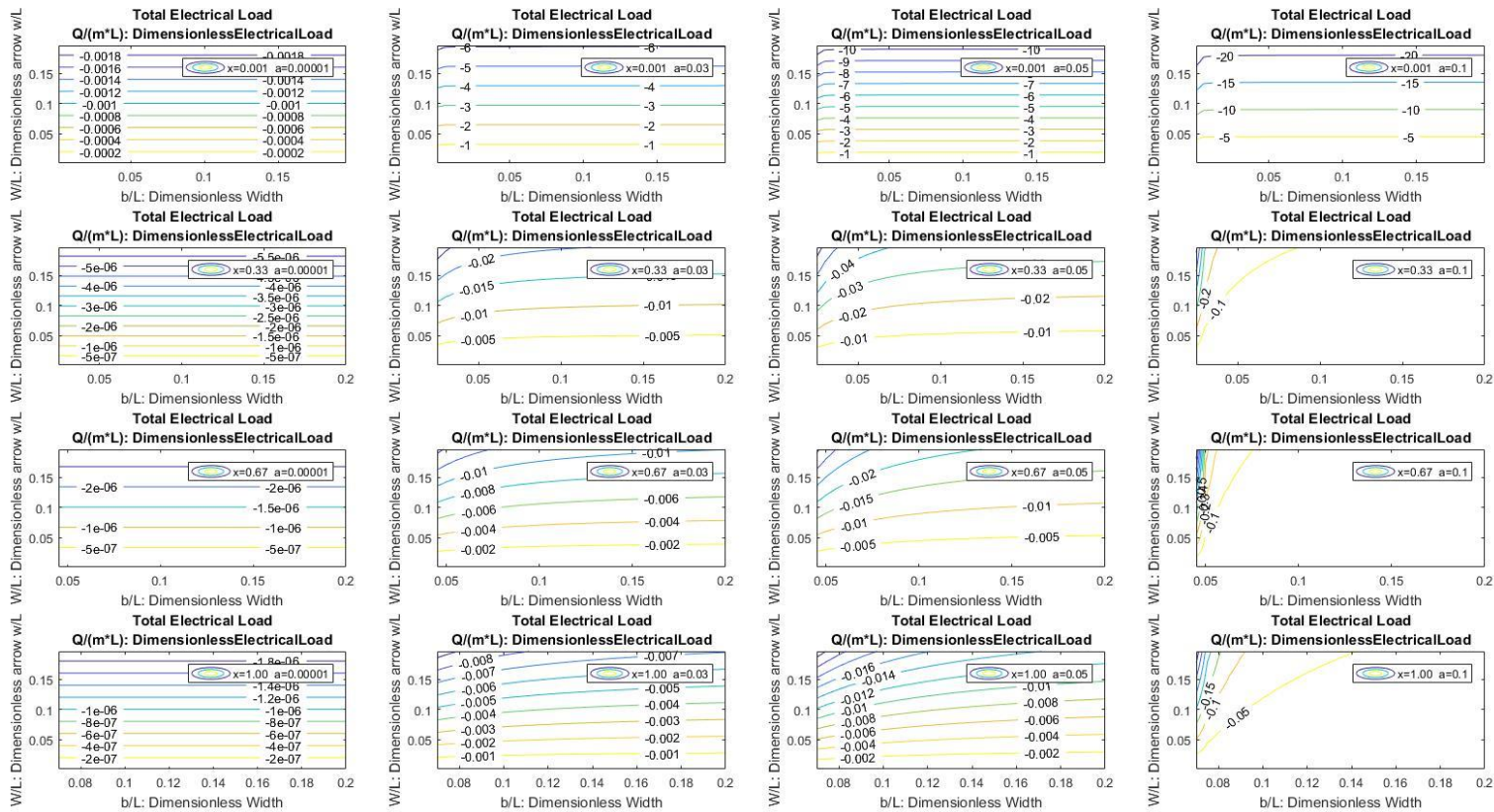


Figure 14. Πώς μεταβάλλεται το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό κατακόρυφης παραμόρφωσης σε προκαθορισμένη θέση « x_0 » και αρχικού πλάτους της διατομής. Ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους της διατομής παίρνει διάφορες τιμές, όπως φαίνεται και παραπάνω στο διάγραμμα.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(w, x, b_0 = \dots, a = \dots)$$

Συγκρίνοντας με τα αντίστοιχα διαγράμματα της προηγούμενης σχέσης βλέπουμε σημαντικές αλλαγές. Σε αυτή την περίπτωση θέλουμε μικρότερο αρχικό πλάτος διατομής, ενώ στην προηγούμενη μεγαλύτερο, έτσι ώστε να ενισχύσουμε το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού.

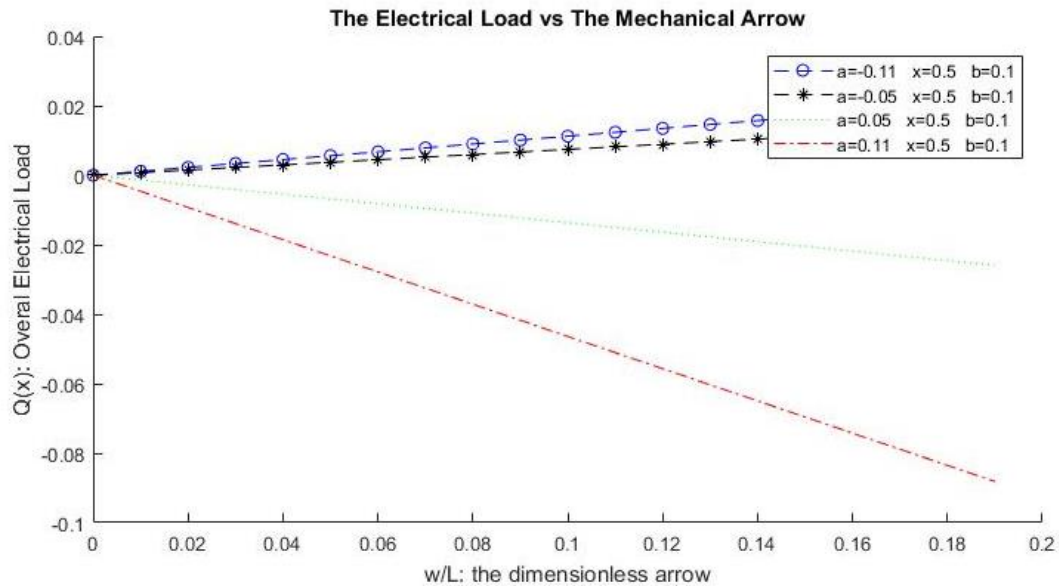


Figure 15. διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σαν συνάρτηση της κατακόρυφης παραμόρφωσης σε μία συγκεκριμένη θέση « x_0 ». Το αρχικό πλάτος του προβόλου είναι « $b_0 = 0,1 * L$ » και ο ρυθμός μεταβολής του « a » παίρνει διάφορες τιμές.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(x = 0.5 * L, b_0 = 0,1 * L, a = \dots)$$

Υπάρχει διακριτοποίηση λόγω του προσήμου του συντελεστή κλίσης, κάτι που δεν υπήρχε προηγουμένως, αλλά είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι παρόλο που τα « a » είναι αντίθετα, το διάγραμμα δεν είναι συμμετρικό. Έχουμε μεγαλύτερο ηλεκτρικό φορτίο για αρνητικά « a »

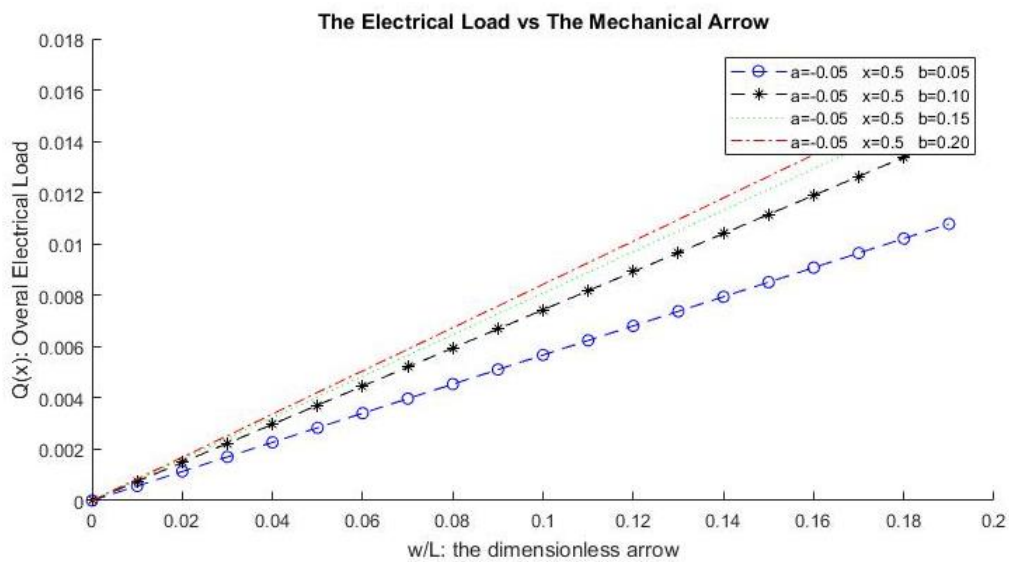


Figure 16. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σαν συνάρτηση της κατακόρυφης παραμόρφωσης σε μία συγκεκριμένη θέση « x_0 ». Το αρχικό πλάτος του προβόλου είναι « b_0 » παίρνει διάφορες τιμές και ο ρυθμός μεταβολής του « $a = -0.05$ ».

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(x = 0.5 * L, b_0 = \dots, a = -0.05)$$

Το διάγραμμα θυμίζει την προηγούμενη περίπτωση, μάλιστα έδω φαίνεται σαν να χρειαζόμαστε μεγάλο πλάτος διατομής για μεγαλύτερο φαινόμενο, αλλά σε κάθε περίπτωση, μεγαλύτερο πλάτος αντιστοιχεί σε μικρότερο βέλος κάμψης.

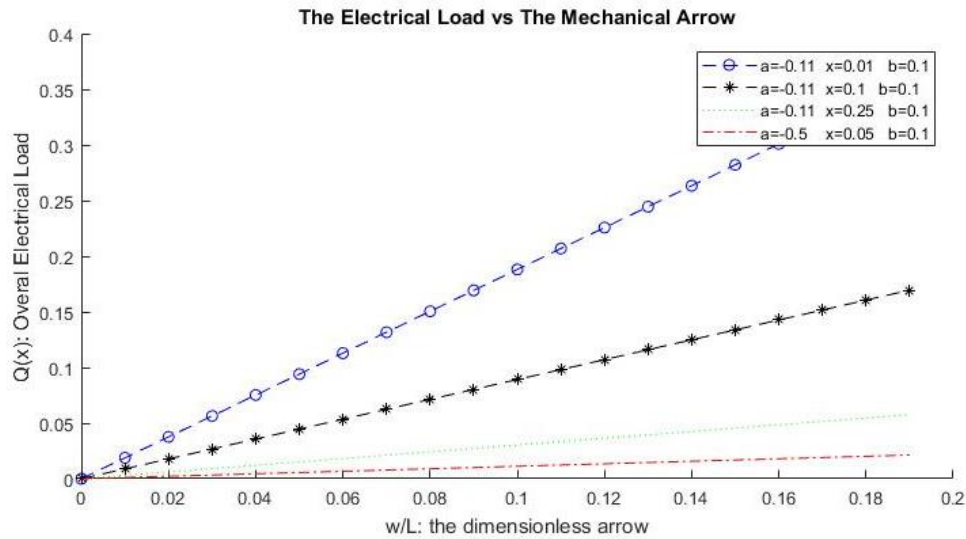


Figure 17. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σαν συνάρτηση της κατακόρυφης παραμόρφωσης σε μία συγκεκριμένη θέση « x_0 » που παίρνει διάφορες τιμές. Το αρχικό πλάτος του προβόλου είναι « $b_0 = 0.1 * L$ » παίρνει διάφορες τιμές και ο ρυθμός μεταβολής του « $\alpha = -0.05$ ».

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(x = \dots, b_0 = 0.1 * L, \alpha = -0.11)$$

Το διάγραμμα θυμίζει την προηγούμενη περίπτωση.

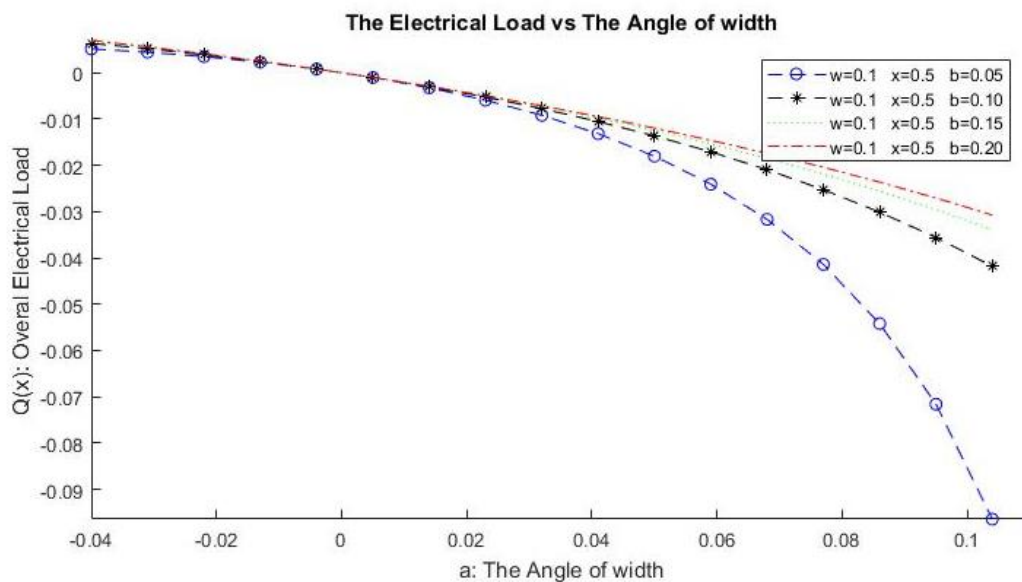


Figure 18. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σαν συνάρτηση της κλίσης του πλάτους « α » όταν η κατακόρυφος παραμόρφωση σε μία συγκεκριμένη θέση « $x_0 = 0.5 * L$ » είναι « $w(x_0) = 0.1$ ». Το αρχικό πλάτος του προβόλου είναι « b_0 » παίρνει διάφορες τιμές.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = f(x = 0.5 * L, b_0 = \dots, w = 0.1)$$

Τεράστιες οι διαφορές σε ίσως ένα από τα σημαντικότερα διαγράμματα, Το βέλος σε μία θέση σημαίνει να δείχνει μία εντατική κατάσταση. Από το διαγραμμα βλέπουμε ότι μεγάλες κλίσεις σε μικρά αρχικά πλάτη επιφέρουν μεγάλο ηλεκτρικό φορτίο. Αλλά σε κάθε περίπτωση, μια ένταση είναι πιο πιθανό να την αντέξει ένα παχύ στοιχείο περισσότερο από ένα λεπτό.

Ένα αρκετά σημαντικό σημείο που οφείλουμε να επισημάνουμε είναι το ότι στο υπόμνημα του γραφήματος, πολλές φορές παραλείπονται τα «/L», και άρα για παράδειγμα ο όρος «w» αντιπροσωπεύει τον όρο «w/L». Σε καμία περίπτωση δεν έγιναν διαγράμματα με διαστάσεις.

Το συμπέρασμα, που μπορεί να βγάλει κανείς άμεσα με αυτήν την πληθώρα διαγραμμάτων, είναι ότι παρόλο που φαίνεται μεν απλό το πρόβλημα (αλλάζω μία μεταβλητή, αυξάνω το φαινόμενο), δεν είναι τόσο, διότι οι παράγοντες αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους.

3.6. Συνάρτηση Dirac, «δ – functions»

Για την επιτυχή ανάλυση των περιπτώσεων, ειδικότερα του πρόβολου, χρησιμοποιήθηκε μια πολύ σημαντική παραδοχή, που πρέπει πρώτα να εξασφαλιστεί αν είναι σωστή, για να συνεχίσουμε ή όχι. Σε όλες τις περιπτώσεις, έγινε η παραδοχή ότι μπορούμε να προεξοφλήσουμε το διάγραμμα ροπών, για τον προσδιορισμό της εξίσωσης που διέπει τις ροπές. Αυτό είναι ένα πόρισμα, που θα χρειαζότανε μία δικαιολόγηση. Είναι λογική μια τέτοια παραδοχή;

Η πιο σωστή απάντηση είναι η πραγματική απάντηση. Η εντατική κατάσταση, σε μία δοκό, το φορτίο και καταπόνηση του, μπορούν να περιγραφούν με απόλυτο τρόπο, με τη συνάρτηση «Dirac» και τη συνάρτηση «Heaviside».

Επιλέχτηκαν δύο περιπτώσεις ανάλυσης με τις συναρτήσεις αυτές («δ-functions»):

- Η περίπτωση 1.0.2., πρόβολος σταθερής διατομής με συγκεντρωμένη ροπή στο άκρο.
- Η περίπτωση 1.1.2., πρόβολος μεταβλητού πάχους με συγκεντρωμένη ροπή στο άκρο.

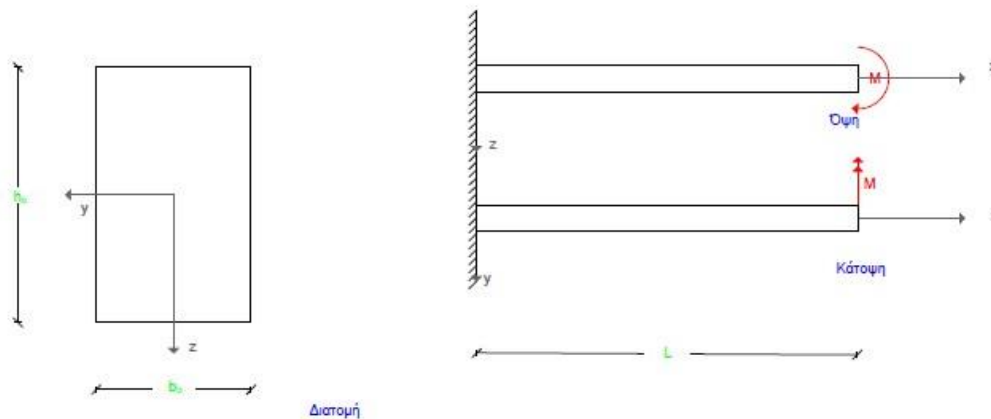


Figure 1. Η περίπτωση 1.0.2.

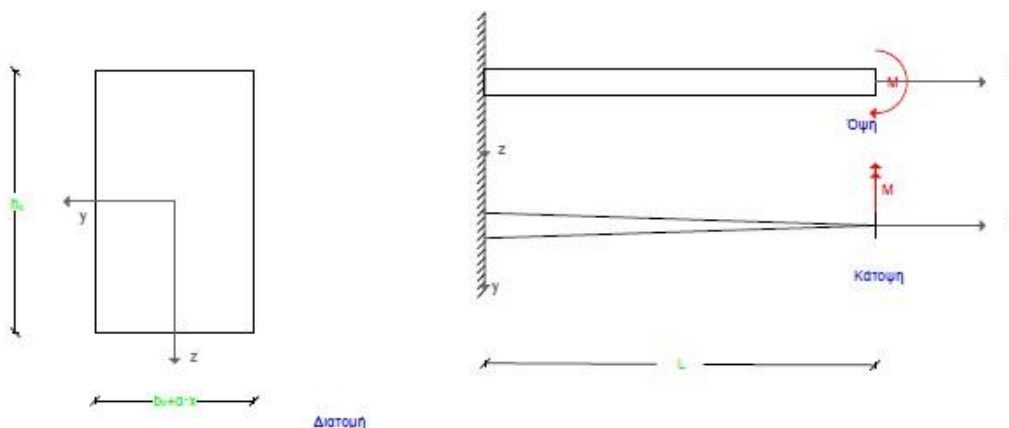


Figure 2. Η περίπτωση 1.1.2.

Σε κάθε περίπτωση για την περιγραφή του εντατικού μεγέθους της ροπής θα χρησιμοποιηθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

- $M(x) = -M_0 * \langle x \rangle^0$

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά, της διατομής του φορέα είναι διαφορετικά για κάθε περίπτωση.

- Περίπτωση 1.0.2.,
πρόβολος σταθερής διατομής με συγκεντρωμένη ροπή στο άκρο.

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ Εμβαδόν:} & \quad A = b_0 * h_0 \quad [\text{m}^2] \\ \checkmark \text{ Ροπή Αδρανείας} & \quad I_{yy} = \frac{b_0 * h_0^3}{12} \quad [\text{m}^4] \\ & \quad I_{zz} = \frac{b_0^3 * h_0}{12} \quad [\text{m}^4] \end{aligned}$$

Η παραμορφωμένη εικόνα, από την στιγμή που υπάρχει μόνο καμπτική ροπή, έχει μόνο καμπτική κατακόρυφη παραμόρφωση, δηλαδή βέλος κάμψης, το οποίο προσδιορίζεται ως ακολούθως.

$$E * I * w''(x) = -M(x) = M_0 * \langle x \rangle^0$$

$$w''(x) * E * \frac{b_0 * h_0^3}{12} = M_0 * \langle x \rangle^0$$

$$w''(x) = 12 * \frac{M_0}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \langle x \rangle^0$$

$$W'(x) = 12 * \frac{M_0}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \langle x \rangle^1 + C$$

Ο όρος «C» αποτελεί σταθερά ολοκλήρωσης και αν θεωρήσουμε την συνοριακή συνθήκη πάκτωσης, « $w'(x = 0) = 0$ », τότε η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδενική.

$$W'(x) = 12 * \frac{M_0}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \langle x \rangle^1$$

$$W(x) = 12 * \frac{M_0}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \frac{\langle x \rangle^2}{2} + C$$

Πάλι, μπορούμε να προσδιορίσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης μέσω της συνοριακής συνθήκης της πάκτωσης, « $w(x = 0) = 0$ », και έτσι μπορεί κανείς να υπολογίσει ότι : « $C = 0$ », και το βέλος κάμψης προκύπτει όπως παρακάτω.

$$W(x) = 12 * \frac{M_0}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \frac{\langle x \rangle^2}{2}$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζουμε την κανονικοποίηση που περιγράφηκε προηγουμένως και καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{M_0}{E * L^3} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{\langle x \rangle}{L}\right)^2$$

Γίνεται ο προσδιορισμός των τάσεων που μας ενδιαφέρουν, και ο ρυθμός μεταβολής τους, δηλαδή το «strain gradient». Αυτά δίνονται από της θεωρία δοκού σε κάμψη. Για τον προσδιορισμό της πολικότητας, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την σταθερά «μ» ή οποία θα είναι πάλι « μ_{13} », διότι οι τάσεις που έχουν «gradient» είναι « σ_1 » και το «gradient» εμφανίζεται στον άξονα «3».

Για την τροπή:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E * I_{yy}} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{-M_0 * \langle x \rangle^0}{E * b_0 * h_0^3} * Z$$

Για την πολικότητα:

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{-M_0 * \langle x \rangle^0}{E * b_0 * h_0^3}$$

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος του προβόλου. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδη τμήματα. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{-M_0 * \langle x \rangle^0}{E * b_0 * h_0^3} * b_0 * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{-M}{E} * h_0^{-3} * [\langle x \rangle^1]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{-M}{E} * h_0^{-3} * [L]$$

$$Q_{13} = -12 * \mu_{13} * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * L$$

Εφαρμόζοντας την γνωστή κανονικοποίηση η σχέση που δίνει το συνολικό φορτίο σε όλο το μήκος του προβόλου είναι.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{M_0}{E * L^3} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{\langle x \rangle}{L}\right)^2$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -2 * \frac{W(x)}{L} * \frac{b_0}{L} * \left(\frac{\langle x \rangle}{L}\right)^{-2}$$

Επειδή στην συγκεκριμένη περίπτωση « $x > 0$ » το γενικευμένο ολοκλήρωμα, δεν έχει κάποια επίδραση, και έτσι η σχέση που δίνει το συνολικό φορτίο, που παράγεται σε μία δοκό, πρόβολη σταθερής διατομής και καμπτική ροπή στην άκρη φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -2 * \frac{W(x)}{L} * \frac{b_0}{L} * \left(\frac{x}{L}\right)^{-2}$$

Τόσο η σχέση της κατακόρυφης παραμόρφωσης της πολικότητας, όσο και του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου, είτε εφαρμόσουμε την αντικατάσταση είτε όχι, είναι ίδιες με αυτά της ίδιας περίπτωσης, θεωρώντας ότι είναι δυνατή η προεξόφληση των διαγραμμάτων των εντατικών μεγεθών.

- Περίπτωση 1.1.2.,
πρόβολος μεταβλητού πλάτους με συγκεντρωμένη ροπή στο άκρο.

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται ως:

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ Εμβαδόν:} & \quad A = (b_0 + \alpha * x) * h_0 \quad [\text{m}^2] \\ \checkmark \text{ Ροπή Αδρανείας} & \quad I_{yy} = \frac{(b_0 + \alpha * x) * h_0^3}{12} \quad [\text{m}^4] \\ & \quad I_{zz} = \frac{(b_0 + \alpha * x)^3 * h_0}{12} \quad [\text{m}^4] \end{aligned}$$

Οι δυσκολίες αρχίζουν με το βέλος κάμψης το οποίο είναι όχι μόνο παράγουσα της ροπής αλλά και της γεωμετρίας της δοκού.

$$E * I(x) * w''(x) = -M(x) = M_0 * \langle x \rangle^0$$

$$w''(x) * E * \frac{(b_0 + \alpha * x) * h_0^3}{12} = M_0 * \langle x \rangle^0$$

$$w''(x) = 12 * \frac{M_0}{E} * (b_0 + \alpha * x)^{-1} * \langle x \rangle^0 * h_0^{-3}$$

$$W'(x) = 12 * \frac{M_0}{E} * a^{-1} * h_0^{-3} * \langle x \rangle^0 * [\ln(b_0) - \ln(a * x + b_0)] + C \quad ^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : « $w'(x = 0) = 0$ »

$$W'(0) = 0 + C = 0 \rightarrow$$

$$C = 0$$

Και άρα καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W'(x) = 12 * \frac{M}{E} * a^{-1} * h_0^{-3} * \langle x \rangle^0 * \ln\left(\frac{a * x + b_0}{b_0}\right)$$

¹ Η ολοκλήρωση έγινε με χρήση της γλώσσας αναλυτικού προγραμματισμού «Maple». Για λόγους ασφάλειας έγινε επαλήθευση με δύο τρόπους. Θεωρώντας ότι ο συντελεστής κλίσης είναι μηδενικός, το όριο πρέπει να βγει όσο της περίπτωσης 1.0.2 το αποτέλεσμα, και παραγωγίζοντας πίσω πρέπει να βγει η αρχική σχέση. Αυτές οι επαληθεύσεις έγιναν σε κάθε περίπτωση που χρειάστηκε υπολογιστικό πρόγραμμα, να κάνει αναλυτικά πράξεις. Οι επαληθεύσεις, για λόγους απλούστευσης των πράξεων δεν παρατίθενται σε αυτό το σημείο.

$$W(x) = 12 * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * \langle x \rangle^0 * \left(\frac{b_0}{a^2} * \ln \left(\frac{a*x+b_0}{b_0} \right) + \frac{x}{a} * \ln \left(\frac{a*x+b_0}{b_0} \right) - \frac{x}{a} \right) + C \quad 1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : « $w(x = 0) = 0$ »

$$W(0) = 0 + C = 0$$

$$C = 0$$

Άρα το βέλος κάμψης δίνεται με την παρακάτω σχέση, αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W(x) = 12 * \frac{M}{E} * h_0^{-3} * \langle x \rangle^0 * \left(\frac{b_0}{a^2} * \ln \left(\frac{a*x+b_0}{b_0} \right) + \frac{x}{a} * \ln \left(\frac{a*x+b_0}{b_0} \right) - \frac{x}{a} \right)$$

Αυτή η σχέση πρέπει να αδιαστατοποιηθεί. Με αυτά που περιγράψαμε προηγουμένως, έχουμε:

$$\frac{W(x)}{L} = 12 * \frac{M}{E*L^3} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-3} * \langle x \rangle^0 * \left(\frac{b_0}{a^2*L} * \ln \left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1 \right) + \frac{x}{a*L} * \ln \left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1 \right) - \frac{x}{a*L} \right)$$

Στην συνέχεια γίνεται προσδιορισμός των τάσεων που έχουν «gradient». Αυτό γίνεται με την θεωρία δοκού σε κάμψη, που έχει ως εξής.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E*I_{yy}(x)} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{M_0 * \langle x \rangle^0}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3} * Z$$

Ενώ η πολικότητα, προσδιορίζεται με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής, δηλαδή την παράγωγο της προς την συντεταγμένη του άξονα στον οποίο υπάρχει (άξονα «3» ή αλλιώς «z», έχουμε τάσεις στον άξονα «1» και ρυθμό μεταβολής αυτών στον άξονα «3», άρα πρέπει όπως και στην προηγούμενη «περίπτωση 1.0.1» να χρησιμοποιήσουμε τον όρο « μ_{13} ».

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{M_0 * \langle x \rangle^0}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3}$$

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος του προβόλου. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδη τμήματα. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{M_0 * \langle x \rangle^0}{E * (b_0 + \alpha * x) * h_0^3} * (b_0 + \alpha * x) * dx$$

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{M_0}{E * h_0^3} * \langle x \rangle^0 * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{M_0}{E} * h_0^{-3} * [\langle x \rangle^1]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{M_0}{E} * h_0^{-3} * [L]$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{M_0}{E} * h_0^{-3} * L$$

Κάποιος μπορεί να παρατηρήσει ότι το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού δεν σχετίζεται καθόλου με την κλίση του πλάτους της διατομής. Εφαρμόζοντας την κανονικοποίηση που περιγράφηκε στην αρχή:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 12 * \frac{M_0}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

$$\frac{W(x)}{L} = 12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \langle x \rangle^0 * \left(\frac{b_0}{a^2 * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) + \frac{x}{a * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) - \frac{x}{a * L}\right)$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση στην δεύτερη καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση, η οποία δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που παράγεται σε μία δοκό, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν σε θέση «x₀», παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση «w(x₀)»

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = \frac{W(x)}{L} * \langle x \rangle^0 * \left(\frac{b_0}{a^2 * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) + \frac{x}{a * L} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \frac{L}{b_0} + 1\right) - \frac{x}{a * L}\right)^{-1}$$

Τόσο η σχέση της κατακόρυφης παραμόρφωσής, της πολικότητας, όσο και του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου, είτε εφαρμόσουμε την αντικατάσταση είτε όχι, είναι ίδιες με αυτές της ίδιας περίπτωσης, θεωρώντας ότι είναι δυνατή η προεξόφληση των διαγραμμάτων των εντατικών μεγεθών.

Αφού ο σωστός τρόπος προσδιορισμού των χαρακτηριστικών του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, δίνει ίδια αποτελέσματα, με τον απλοποιημένο, τότε πολύ σωστά μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει αυτήν την απλοποίηση έτσι ώστε να διευκολυνθεί.

3.7. Περίπτωση 1.1.3. Πρόβολος μεταβλητού πλάτους με αξονικό φορτίο στην άκρη

Όπως και τον πρόβολο σταθερής διατομής που τον υποβάλαμε σε αξονική δράση, έτσι θα επαναλάβουμε την διαδικασία, σε πρόβολο μεταβλητής διατομής. Το πλάτος συσχετίζεται με την συντεταγμένη κατά μήκος της δοκού με τον προηγούμενο τρόπο. Όπως παρατηρήθηκε πολύ σωστά, αυτή η μεταβολή του πλάτους δεν μπορεί να είναι ανεξέλεγκτη, πρέπει να ισχύουν οι παραδοχές Bernoulli, και έτσι ο συντελεστής κλίσης «α» να παίρνει μέγιστες και ελάχιστες τιμές, όσο ήταν και στην προηγούμενη ενότητα,

- « $\alpha_{max} = 0.11$ »
- « $\alpha_{min} = \max(-0.11 ; -\frac{b_0}{x})$ »

Ο αριθμός «0.11» αντιστοιχεί σε μία κλίση γύρω στις «6.3°». Είναι αρκετά μικρή και εννοείται ότι στα πειράματα που δοκιμάσαμε να εκτελέσουμε, χρησιμοποιήσαμε μεγαλύτερες, αλλά τουλάχιστον οι παραδοχές «Bernoulli» σίγουρα ισχύουν.

$$\theta = \arctan(\alpha)$$

Σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα του προβόλου με μεταβλητό πλάτος και καμπτική ροπή στην άκρη περιέχει τις εξής παραμέτρους:

- ✓ Το αρχικό πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Τον συντελεστή μεταβολής του πλάτους: α [-]
- ✓ Το ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Την αξονική δύναμη που βρίσκεται στην άκρη: P [N]
- ✓ Την συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

Ο φορέας του προβλήματος μπορεί να επιλυθεί εύκολα με χέρι. Έτσι είναι εύκολος ο προσδιορισμός των δράσεων στήριξης, των διαγραμμάτων των εντατικών μεγεθών, και των εξισώσεων που προεξοφλούν αυτά τα διαγράμματα.

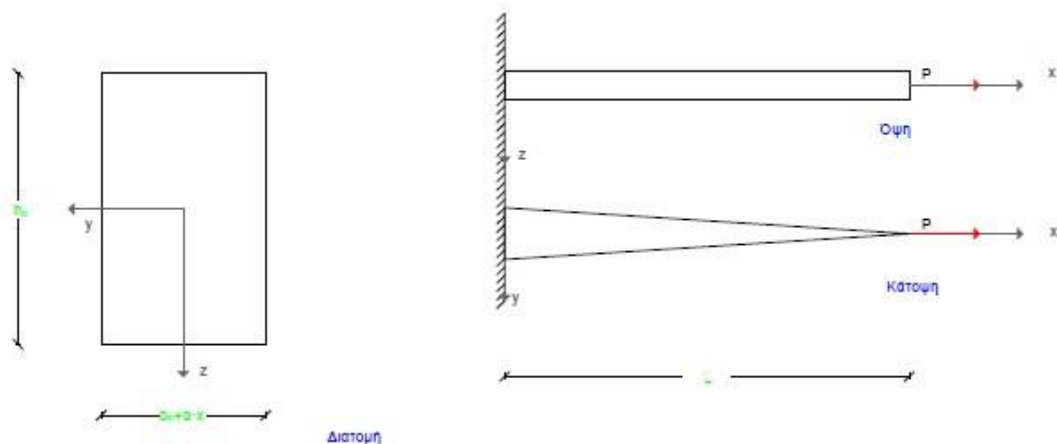


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.1.3. είναι πρόβολος διατομής μεταβλητού πάχους αξονική δύναμη στην άκρη.

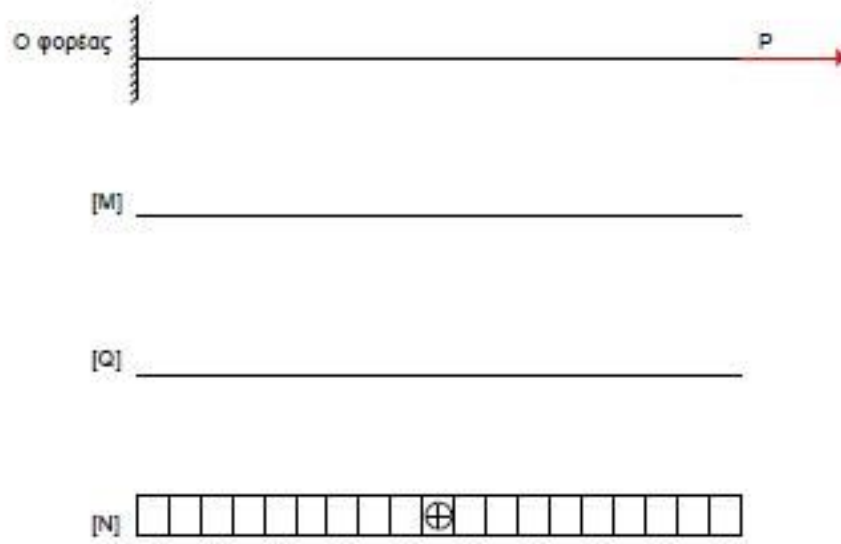


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη στην περίπτωση προβόλου μεταβλητού πλάτους διατομή με αξονικό φορτίο στην άκρη.

Οι αντιδράσεις στήριξης.

- $V_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $H_{\text{πάκτωσης}} = -P$ [kN]
- $M_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN*m]

Και οι εξισώσεις των διαγραμμάτων [M], [Q], [N].

- ✓ $M(x) = 0$ [kN*m]
- ✓ $Q(x) = 0$ [kN]
- ✓ $N(x) = P$ [kN]

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται ως:

- ✓ Εμβαδόν: $A = (b_0 + \alpha * x) * h_0$ [m²]
- ✓ Ροπή Αδρανείας $I_{yy} = \frac{(b_0 + \alpha * x) * h_0^3}{12}$ [m⁴]
 $I_{zz} = \frac{(b_0 + \alpha * x)^3 * h_0}{12}$ [m⁴]

Ο προσδιορισμός της παραμορφωμένης εικόνας είναι αρκετά διαφορετικός. Σε αυτήν την περίπτωση, δεν έχουμε κατακόρυφη παραμόρφωση, πάρα μόνο επιμήκυνση. Σε μία τυχαία θέση «x», έχει παρατηρηθεί τροπή ίση με «ε(x)»,

$$\varepsilon(x) = \frac{P/A}{E} = \frac{P}{E} * A^{-1}$$

Στην σχέση αυτή μπορώ να αντικαταστήσω το εμβαδόν της διατομής και έτσι έχω:

$$\varepsilon(x) = \frac{P}{E} * ((b_0 + \alpha * x) * h_0)^{-1}$$

Η τροπή αυτή είναι αντιστρόφως ανάλογη της συντεταγμένης κατά μήκος της δοκού. Έστω δύο σημεία, « x_1 » και « x_2 » με « $x_1 < x_2$ », τότε « $\varepsilon(x_1) > \varepsilon(x_2) >$ ». Το διάγραμμα των τροπών επομένως έχει μία κλίση, «strain gradient», κλίση κατά μήκος του προβόλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

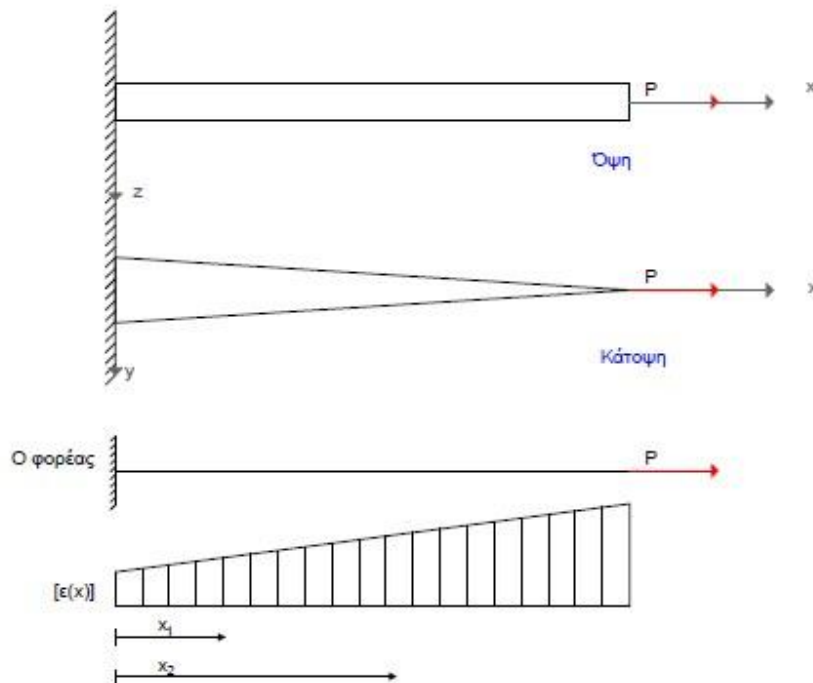


Figure 3. Η κατανομή της τροπής εις μήκος της δοκού. Προφανώς υπάρχει μία κλίση.

Η υπολογισμός της τροπής σε ένα σημείο φαίνεται με την παραπάνω σχέση. Για την αποτύπωση της σε διαγράμματα χρειάζεται η κανονικοποίηση που περιγράφηκε στην αρχή. Η τελική σχέση, η οποία και αποτυπώνεται στα διαγράμματα έχει όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\varepsilon(x) = \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L} \right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1}$$

The strain in comparison with the normalised coordinate
for a variety of width gradients and for some initials widths
 $\epsilon * (P/(EL^2))^{-1} * (h/L)$

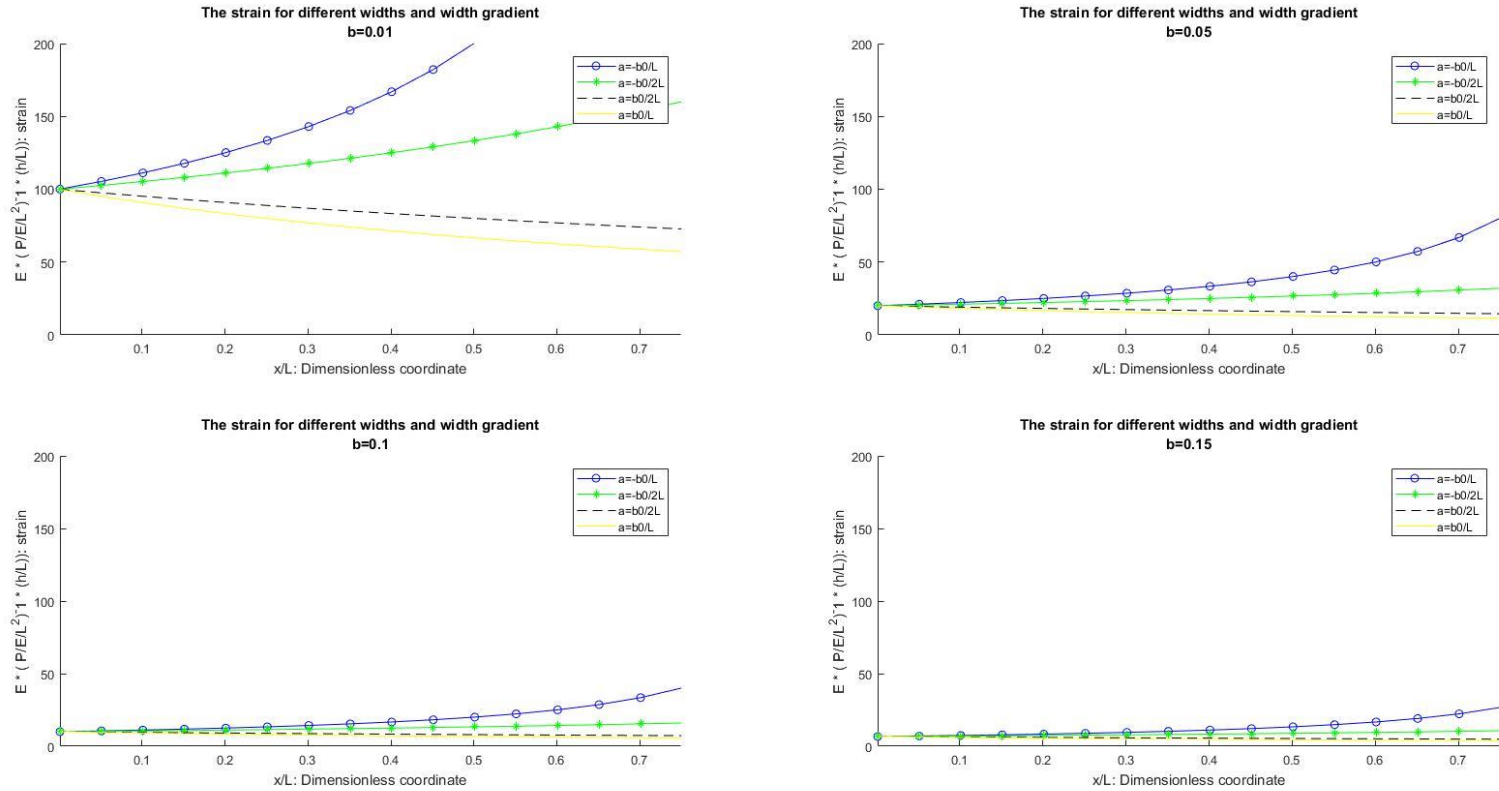


Figure 4. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή της κατά μήκος τροπής « $\epsilon(x)$ » σε σχέση με την συντεταγμένη κατά μήκος του άξονα « x ». Το εξωτερικό φορτίο και το ύψος της διατομής θεωρούνται σταθερά, ενώ το αρχικό πλάτος της διατομής παίρνει διάφορες τιμές. Ο συντελεστής κλίσης, είναι και αυτός συνάρτηση του αρχικού πλάτους της διατομής.

$$\epsilon(x) * \left(\frac{P}{E * L^2}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right) = f(x, b_0 = \dots, a = g(b_0))$$

The strain in comparison with the width gradient
for a variety of initials widths and some specific coordinates
 $\epsilon * (P/(EL^2))^{-1} * (h/L)$

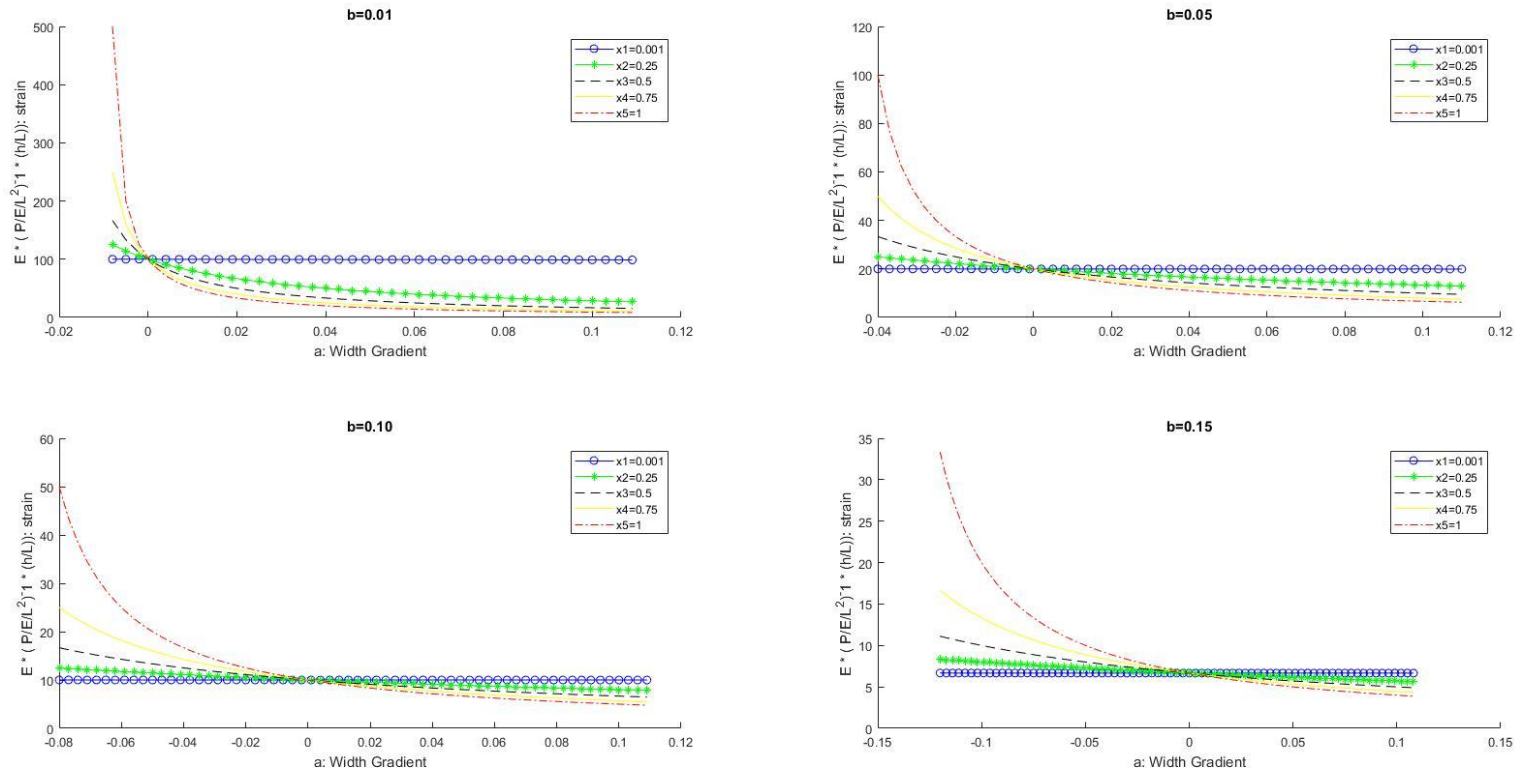


Figure 5. Προσδιορισμός της κατά μήκος τροπής «ε(x)», ως συνάρτηση της κλίσης του πλάτους «α», καθώς το εξωτερικό φορτίο και το αρχικό ύψος της διατομής θεωρούνται σταθερά στο πρώτο μέρος της εξίσωσης, η συντεταγμένη «x», και το αρχικό πλάτος της διατομής «b₀», παίρνουν διαφορές τιμές.

$$\epsilon(x) * \left(\frac{P}{E * L^2}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right) = f(\alpha, b_0 = \dots, x = \dots)$$

The strain in comparison with the normalised External load P/EL^2
for a variety of width gradients and for some specific coordinates
 $\epsilon * (b_0/L) * (h/L)$

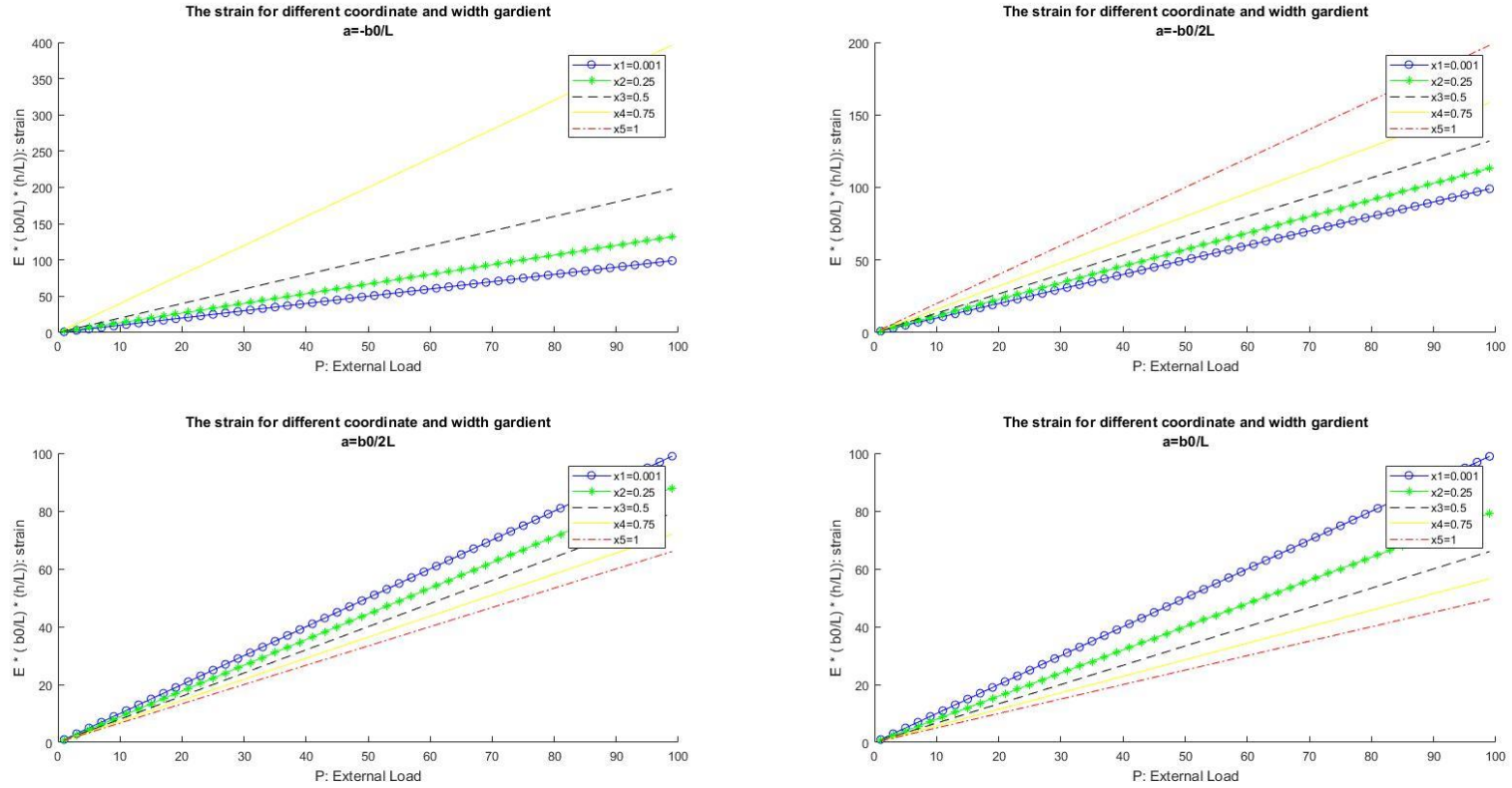


Figure 6. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή της κατά μήκος τροπής « $\epsilon(x)$ », σε συγκεκριμένες θέσεις « x », ως συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου « P », καθώς η αρχική διατομή είναι σταθερή, και η κλίση είναι συνάρτηση του αρχικού πλάτους της διατομής.

$$\epsilon(x) * \left(\frac{b_0}{L}\right)^3 * \left(\frac{h_0}{L}\right) = f(P, x = \dots, a = g(b_0))$$

Average curvature
 $(e_1 - e_2) / (x_1 - x_2) * L$
a combination of two different coordinates

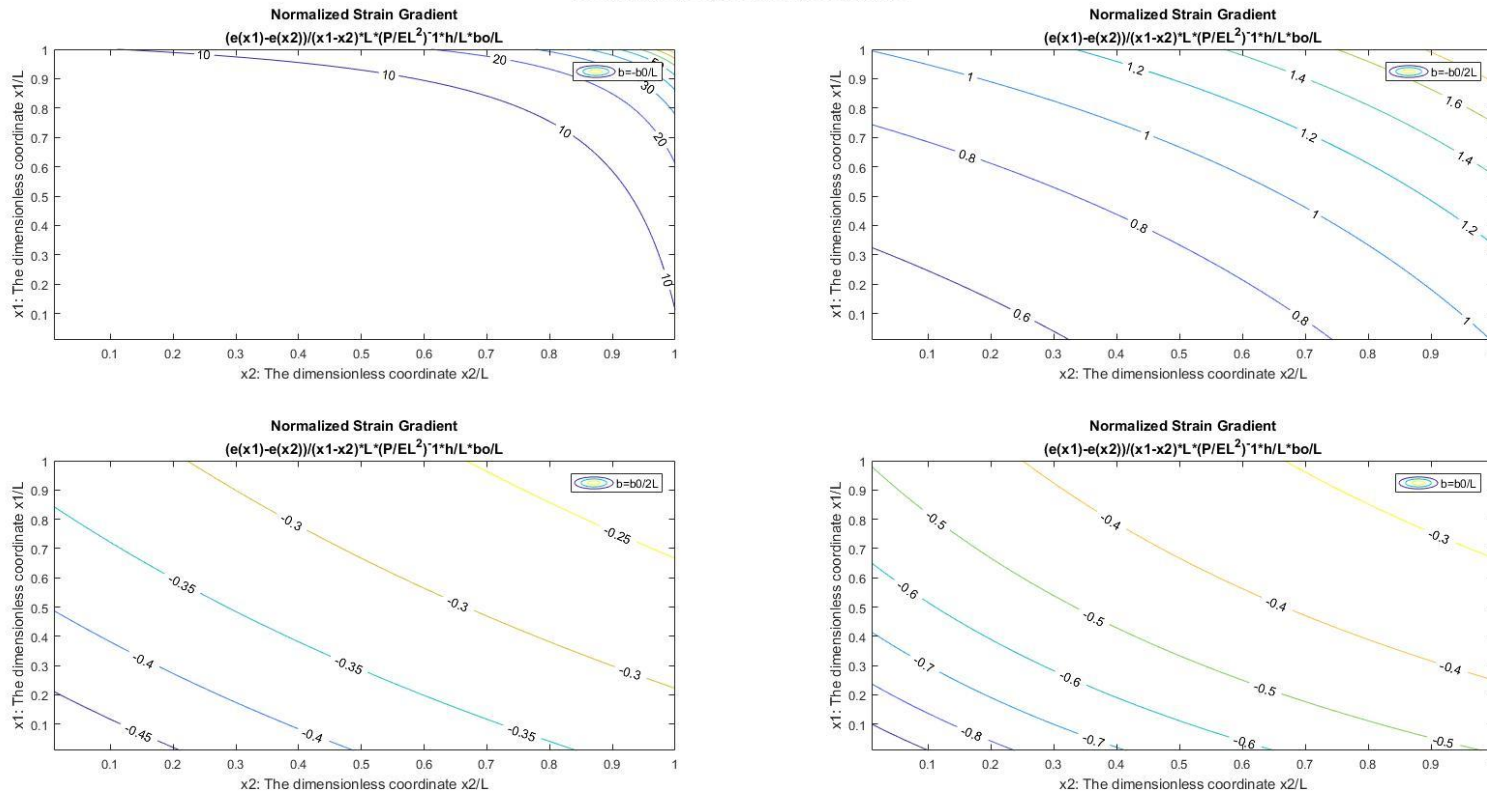


Figure 7. Σε μία συγκεκριμένη δοκό, συγκεκριμένης σταθερής διατομής, και ρυθμό μεταβολής του πλάτους, για το ίδιο εξωτερικό φορτίο, πόση είναι η διαφορά της τροπής μεταξύ δύο σημείων κατά μήκος της δοκού, σε συνδυασμό, με τις συντεταγμένες των δύο σημείων, και πόσο θα επηρέαζε αυτήν την μεταβολή μια διαφορετική κλίση του πλάτους.

Από αυτά τα διαγράμματα, των οποίων ο χαρακτηρισμός είναι «average curvature», μπορούμε να διακρίνουμε πόσο σημαντική είναι η αλλαγή του πρόσημου της κλίσης του πλάτους της δοκού. Αλλάζει την καμπυλότητα (κοίλα πάνω στα « $\alpha < 0$ » και κάτω στα « $\alpha > 0$ »).

Τελικά μπορούμε να διακρίνουμε το «folding effect» που δημιουργεί «singularities»- ιδιομορφίες, ιδιαίτερα στην περίπτωση με οριακά μικρό « α ».

Να σημειωθεί ότι στο υπόμνημα του διαγράμματος, δίνεται η τιμή του συντελεστή « α »

Για να υπολογίσουμε το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, πρέπει να κάνουμε μία διαδικασία. Αρχικά οι τάσεις που μας ενδιαφέρουν σε αυτήν την περίπτωση, δεν είναι άλλες παρά αυτές που προσδιορίστηκαν προηγουμένως.

$$\varepsilon(x) = \frac{P}{E} * ((b_0 + \alpha * x) * h_0)^{-1}$$

Η πολικότητα προσδιορίζεται πολλαπλασιάζοντας την παράγωγο των τάσεων, προς την διεύθυνση, στην οποία υπάρχει αυτή η κλίση, με τον συντελεστή φλεξοηλεκτρισμού. Προφανώς οι τάσεις αναπτύσσονται στο άξονα «1», όπως και το «strain gradient». Επομένως η σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού, που χρειαζόμαστε, είναι η « μ_{11} ». Έτσι η πολικότητα προσδιορίζεται ως εξής:

$$Pol_{11} = \mu_{11} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x}$$

$$Pol_{11} = \mu_{11} * \frac{P}{E} * h_0^{-1} * (-\alpha) * ((b_0 + \alpha * x))^{-2}$$

Η σχέση της πολικότητας, μπορεί και αυτή να αποτυπωθεί σε διαγράμματα, παίρνοντας, την παρακάτω αδιάστατη μορφή.

$$\frac{Pol_{11} * L}{\mu_{11}} = -\alpha * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{b_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L}\right)^{-2}$$

Για να προσδιορίσουμε το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την πολικότητα, με το εμβαδόν κάθετα σε αυτή. Όσο αφορά τον άξονα «3», ύψος, η πολικότητα μένει σταθερή, καθώς αυτό παίρνει τιμές από το « $-h_0/2 \rightarrow h_0/2$ ». Το ίδιο όμως δεν συμβαίνει στην έννοια του πλάτους της διατομής, όπου το πλάτος αλλάζει. Άρα πρέπει να επιλύσουμε ένα ολοκλήρωμα, ως προς το « $d(b_0 + \alpha * x)$ ».

Το « x » κυμαίνεται από « $0 \rightarrow L$ » και άρα ο όρος « $b_0 + \alpha * x$ » παίρνει τιμές: « $b_0 \rightarrow b_0 + \alpha * L$ », και έτσι το ολοκλήρωμα που οφείλουμε να λύσουμε είναι το παρακάτω.

$$Q_{11} = \int_{b_0}^{b_0 + \alpha * L} \mu_{11} * \frac{P}{E} * h_0^{-1} * (-\alpha) * ((b_0 + \alpha * x))^{-2} * h_0 * d(b_0 + \alpha * x)$$

$$Q_{11} = \int_{b_0}^{b_0 + \alpha * L} \mu_{11} * \frac{P}{E} * (-\alpha) * (Y)^{-2} * dY$$

$$Q_{11} = \mu_{11} * \frac{P}{E} * (\alpha) * Y^{-1} \Big|_{b_0}^{b_0 + \alpha * L}$$

Το οποίο όταν αδιαστατοποιηθεί παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = \alpha * \frac{P}{E * L^2} * \frac{a}{\left(b_0/L\right)^2 + a * b_0/L}$$

Μία υπέροχη σχέση. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε μία δοκό μεταβαλλόμενου πλάτους που εφελκύεται εξαρτάται από το εξωτερικό μηχανικό φορτίο, τον ρυθμό μεταβολής του πλάτους, καθώς και το αρχικό πλάτος. Μάλιστα, όσον αφορά το εξωτερικό φορτίο, η σχέση είναι απόλυτα γραμμική. Όσο μεγαλύτερος είναι ο όρος «α» προφανώς, τόσο καλύτερο το αποτέλεσμα, αφού αυτός είναι ο όρος που προκαλεί το «strain gradient». Ο τελευταίος όρος της σχέσης αυτής, που είναι λίγο περίπλοκος, είναι ο παρονομαστής του κλάσματος. Με μία πιο προσεκτική ματιά μπορεί να δει κανείς, ότι πρόκειται για μια επανάληψη του όρου «α», αφού ουσιαστικά ισούται με την διαφορά των αντίστροφων αρχικού πλάτους και τελικού.

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτήν την σχέση, μπορεί κανείς να κατασκευάσει κατάλληλα διαγράμματα, τόσο για το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, όσο και για την πολικότητα, που εμφανίζεται σε ένα σημείο της διατομής.

Τέλος στην συγκεκριμένη επεξεργασία της περίπτωσης φέρνει η αντικατάσταση, στην τελευταία σχέση, που δίνει το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, των εντατικών μεγεθών με αντίστοιχα παραμορφωσιακά. Συγκεκριμένα:

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = \alpha * \frac{P}{E * L^2} * \frac{a}{\left(b_0/L\right)^2 + a * b_0/L}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1}$$

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = \varepsilon(x) * \left(\frac{h_0}{L}\right) * \frac{a^2}{\left(b_0/L\right)^2 + a * b_0/L} * \left(\frac{b_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L}\right)$$

Η σχέση αυτή είναι αδιαστατοποιημένη και έτοιμη, να απεικονιστεί σε διαγράμματα.

Στην συνέχεια προτάθηκε η κατασκευή διαγραμμάτων, με απλές και ευθείες σχέσεις που δείχνουν, αλλάζοντας κάποια παράμετρο πώς θα αλλάξουμε το φαινόμενο, και αν η αλλαγή αυτής της παραμέτρου προς τα πάνω ή προς τα κάτω, έχει μεγαλύτερη σημασία. Για αυτά τα διαγράμματα, έχει θεωρηθεί ένα σύνολο τιμών σταθερό, και ένα άλλο να μεταβάλλεται. Τα διαγράμματα αυτά ακολουθούν τα προηγούμενα.

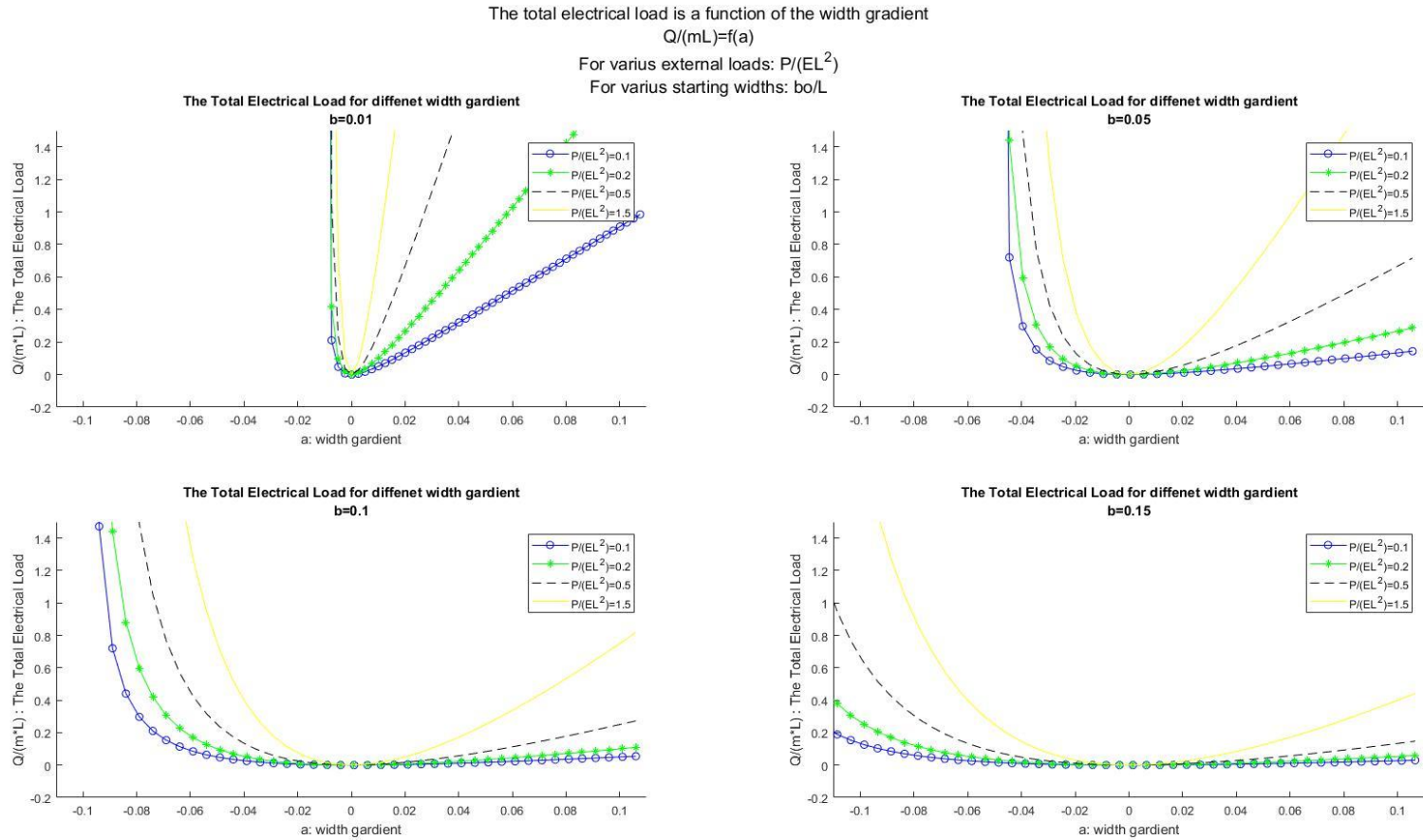


Figure 8. το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής τους πλάτους της διατομής. Για διάφορες τιμές του εξωτερικού φορτίου, όσο το πλάτος της διατομής, παίρνει ορισμένες τιμές. Όπως φαίνεται προτιμάμε μικρά αρχικά πλάτη, και μικρές αρνητικές κλίσεις. Το εξωτερικό φορτίο, είναι ανάλογο με το φαινόμενο.

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = f(a, b_0 = \dots, P = \dots)$$

The total electrical load is a function of the external loads

$$Q/(mL) = f(P/(EL^2))$$

For various width gradient: a
For various starting widths: b0/L

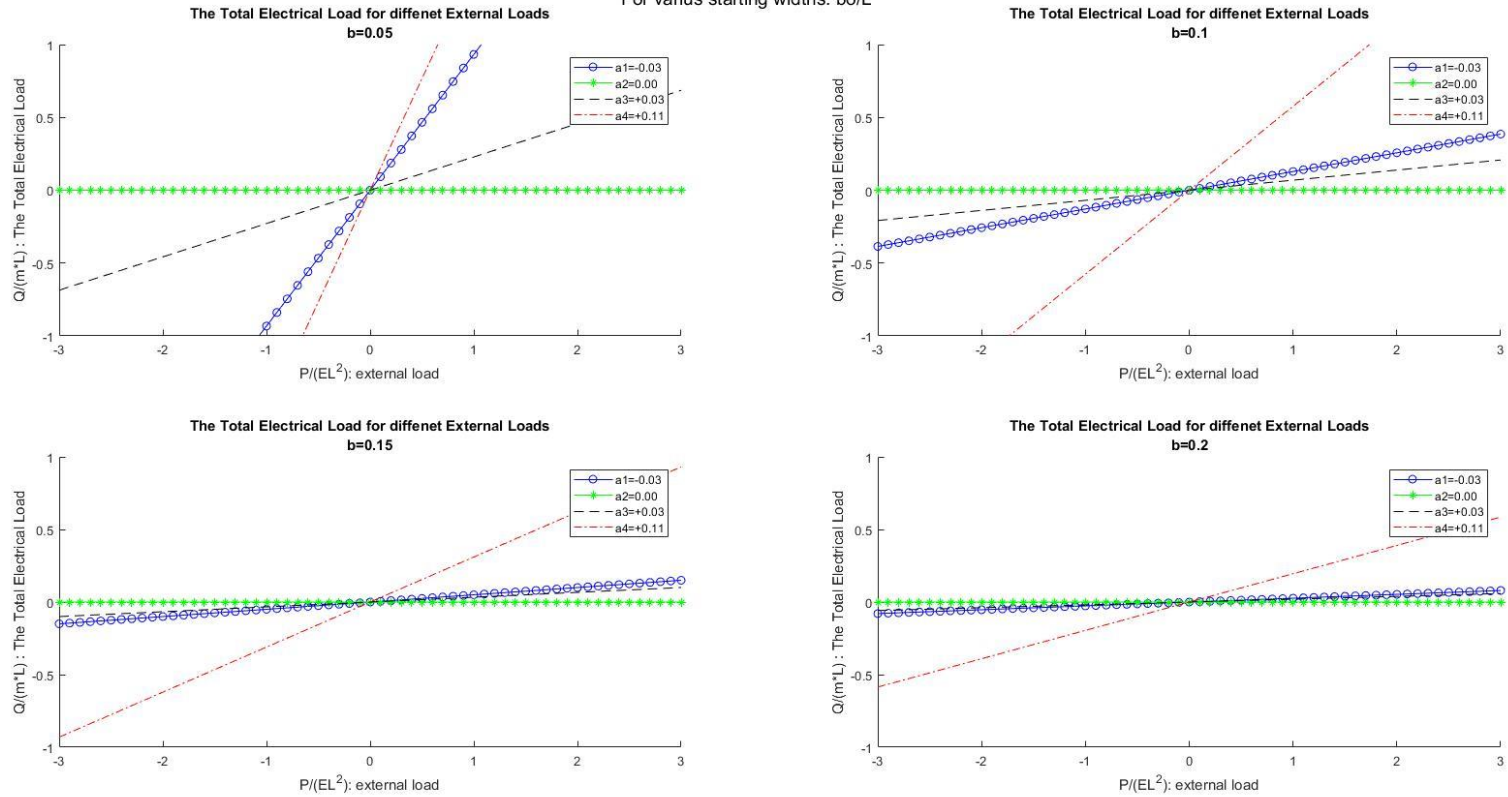


Figure 9. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικά φορτίου, ως συνάρτηση του εξωτερικό φορτίου για διάφορες κλίσεις μεταβολής του πλάτους, για διάφορα αρχικά πλάτη.

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = f(P, b_0 = \dots, a = \dots)$$

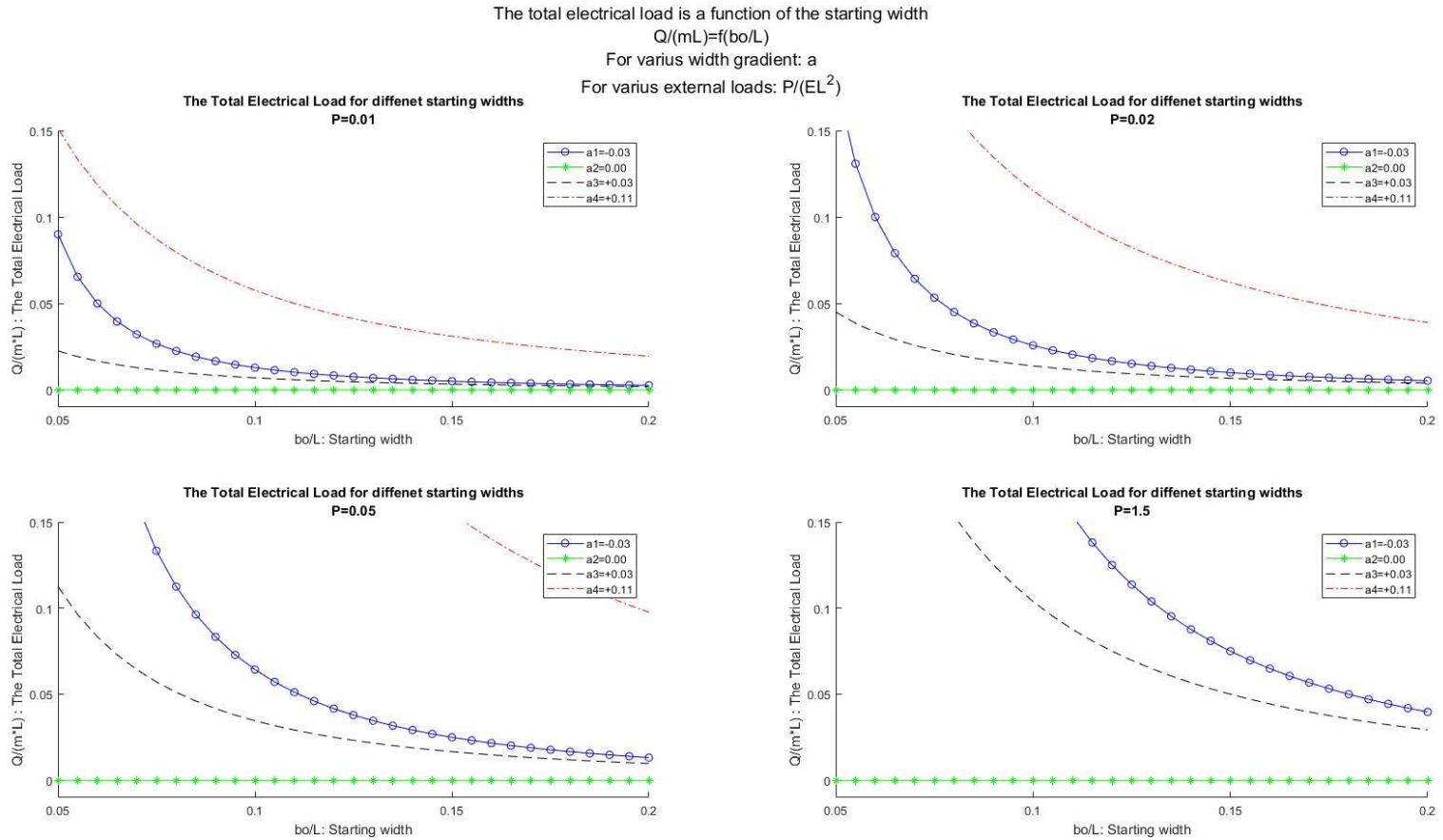


Figure 10. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, ως συνάρτηση του αρχικού πλάτους της διατομής, για διάφορες τιμές της κλίσης μεταβολής του πλάτους, και σε διαφορετικά διαγράμματα, για διάφορα εξωτερικά φορτία. Ωραία παρατήρηση είναι η διάφορα μιας θετικής κλίσης με μία αρνητική, π.χ. « $\alpha=-0.03$ », « $\alpha=0.03$ »

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = f(b_0, \alpha = \dots, P = \dots)$$

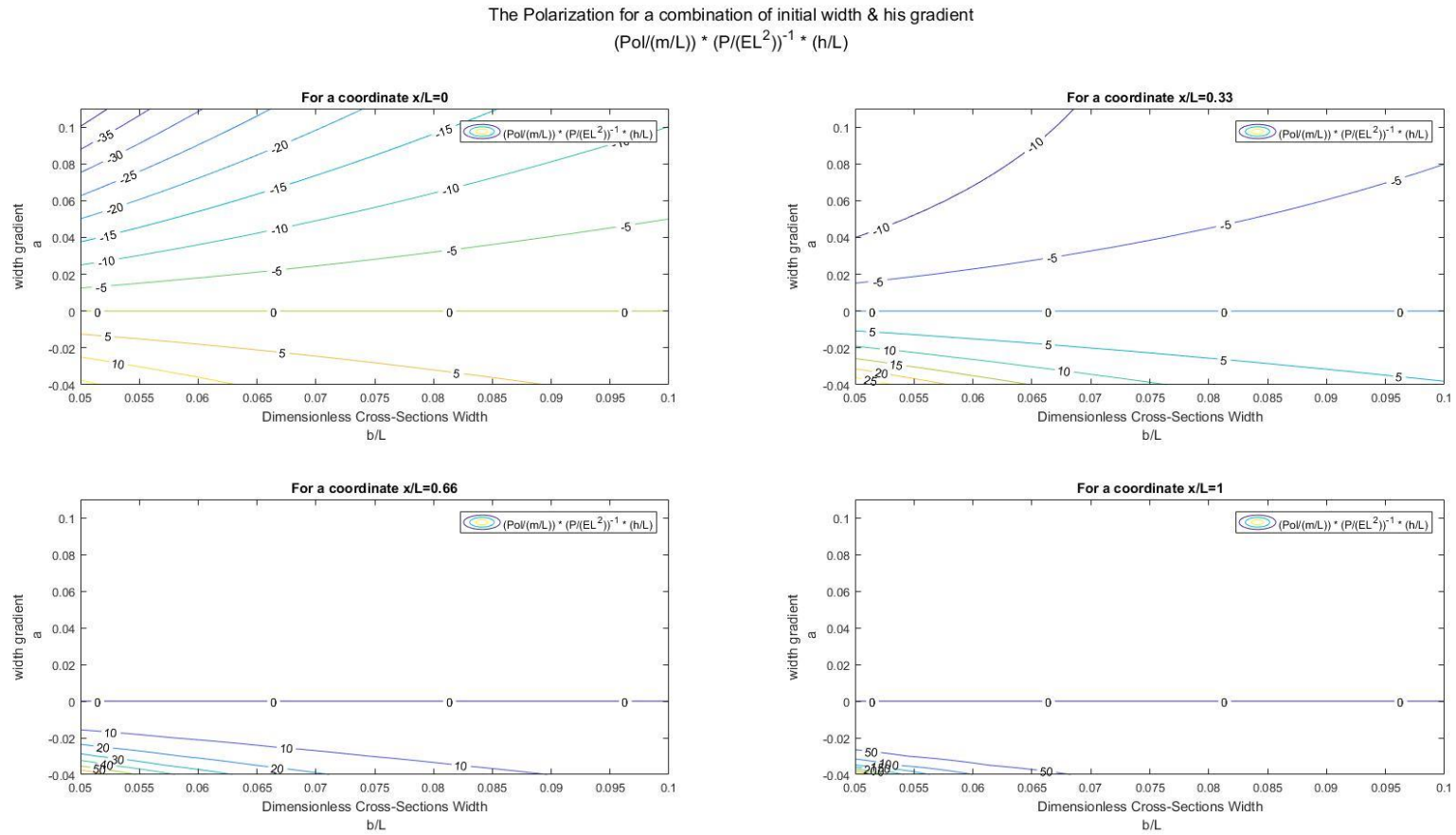


Figure 11. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή της πολικότητας, σε ορισμένες θέσεις τις δοκού, για συνδυασμούς πλάτους και κλίσης του πλάτους της δοκού.

$$\frac{Pol_{11} * L}{\mu_{11}} * \left(\frac{P}{E * L^2}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right) = f(b_0, a, x = \dots)$$

The Polarization for different widths gradients

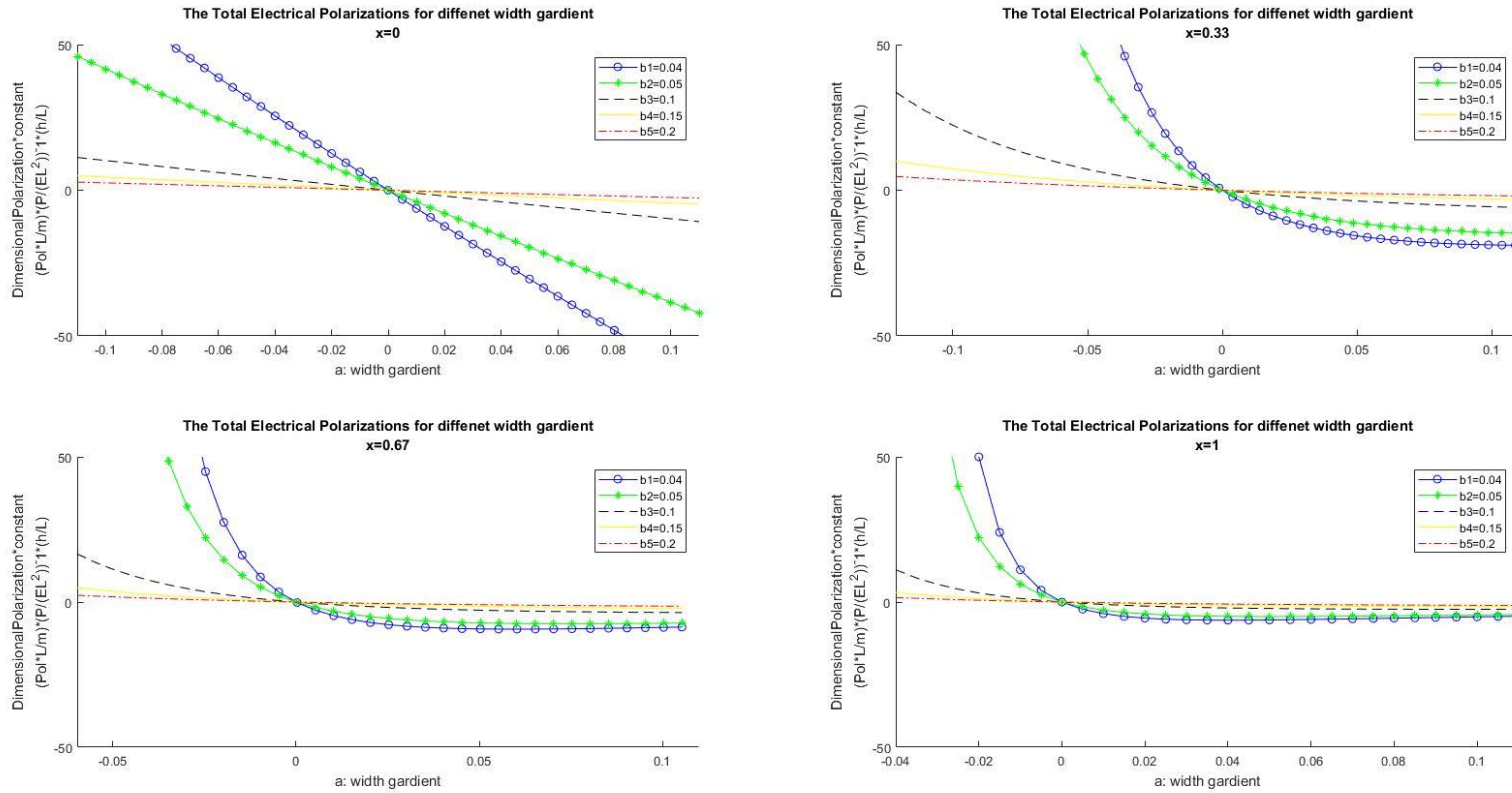


Figure 12. Η πολικότητα σε συγκεκριμένες θέσεις στο μήκος της δοκού ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του πλάτους για διάφορα αρχικά πλάτη.

$$\frac{\rho_{l11} * L}{\mu_{11}} * \left(\frac{P}{E * L^2}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right) = f(a, b_0 = \dots, x = \dots)$$

The Total Electrical load for a combination of strain and coordinate
(Q/(mL)) * (h/L)⁻¹

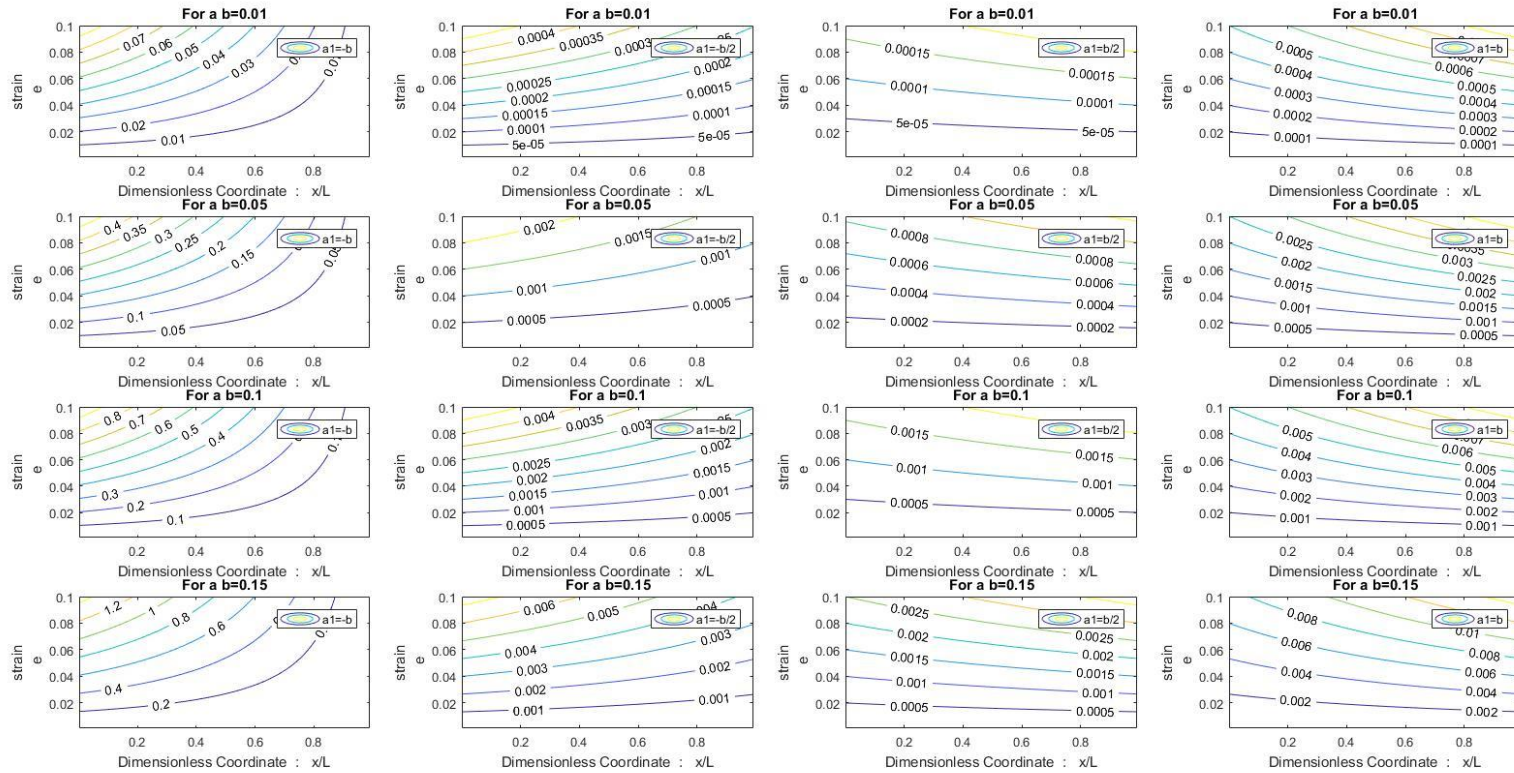


Figure 13. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό συντεταγμένης «x» και παραμόρφωσης «ε», καθώς το αρχικό πλάτος της διατομής παίρνει διάφορες τιμές και η κλίση του είναι συνάρτηση αυτού, η οποία φαίνεται στο υπόμνημα κάθε διαγράμματος.

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} = f(\varepsilon, x, b_0 = \dots, a = g(b_0))$$

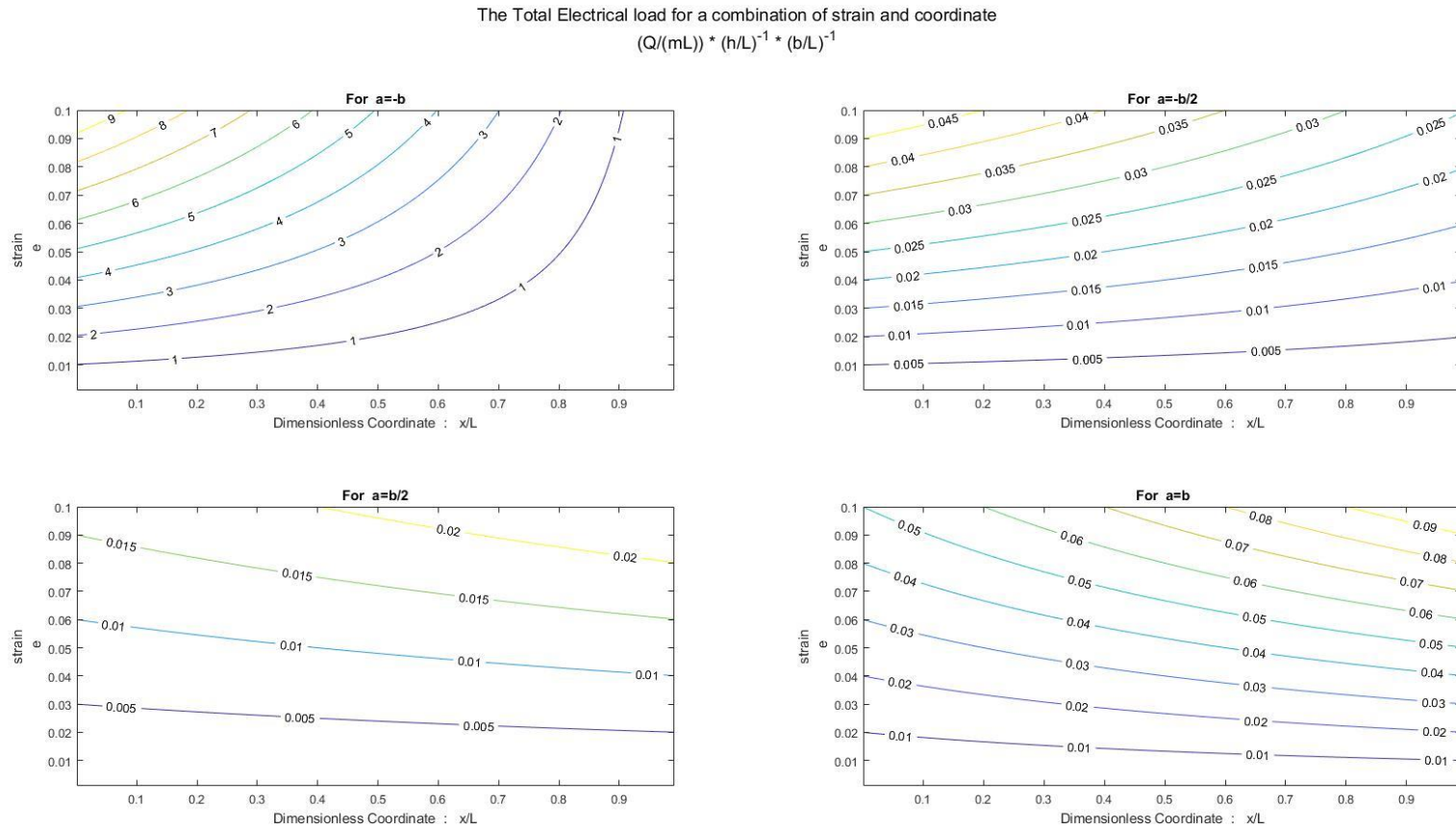


Figure 14. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό συντεταγμένης «x» και παραμόρφωσης «ε», καθώς το αρχικό πλάτος της διατομής θεωρείται σταθερό και η κλίση του είναι συνάρτηση αυτού, η οποία φαίνεται στο τίτλο κάθε διαγράμματος.

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} = f(\varepsilon, x, = \dots, a = g(b_0))$$

The Total Electrical load for a combination of strain and initial Width
($Q/(mL) * (h/L)^{-1}$)

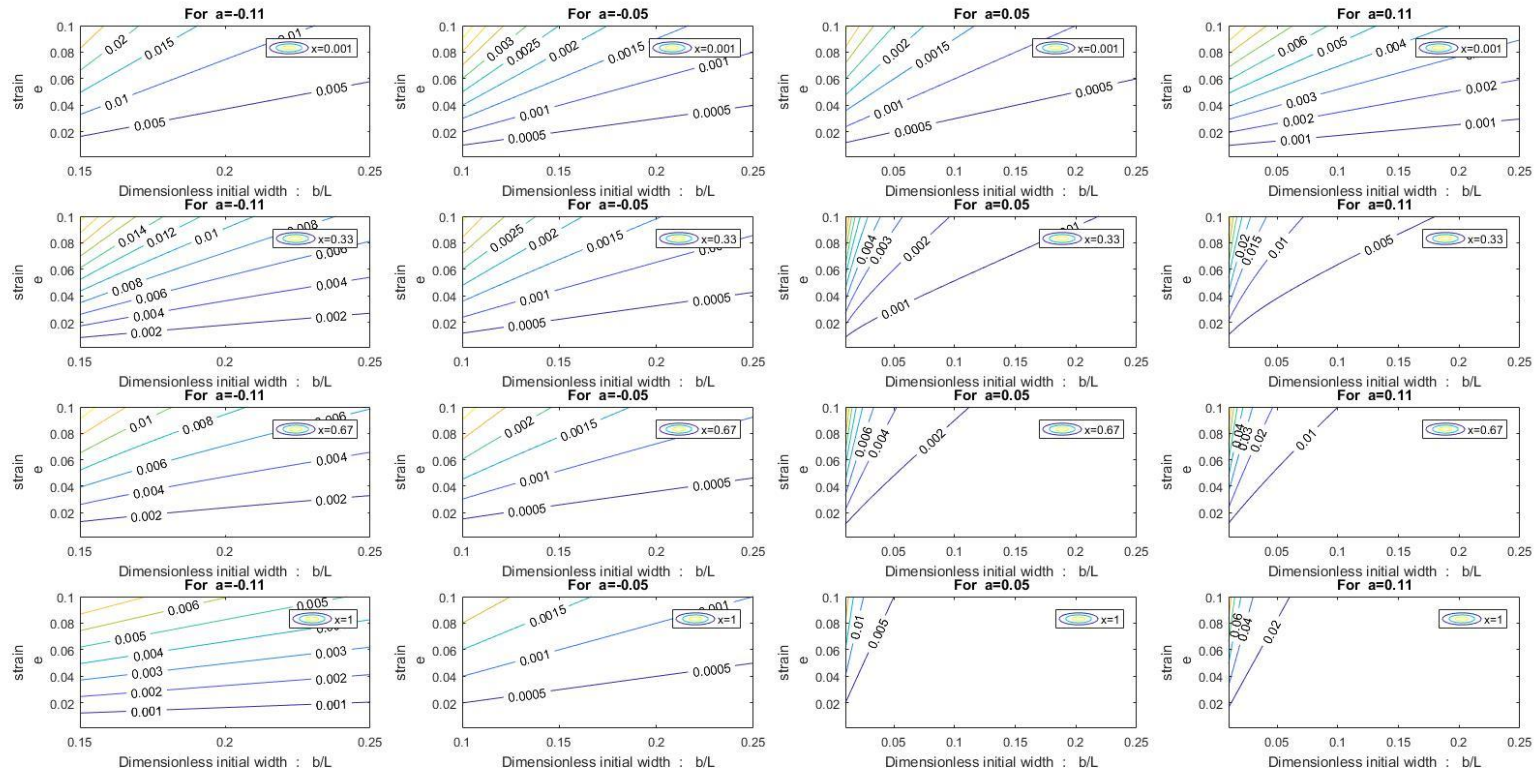


Figure 15. Η μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου που παράγεται, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό τροπής, σε μία συγκεκριμένη θέση «x», και αρχικού πλάτους της διατομής, για διαφορές κλίσης του πλάτους.

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} = f(\epsilon, b_0, x = \dots, a = \dots)$$

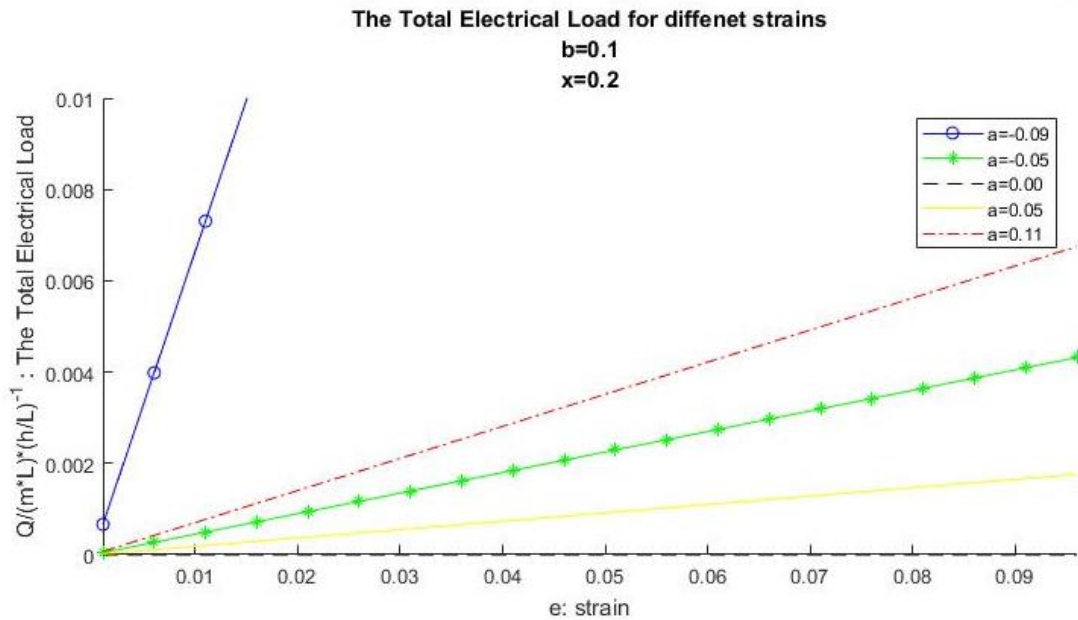


Figure 16. Η μεταβολή του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου με μεταβολή της παραμόρφωσης, σε μία συγκεκριμένη θέση « $x = 0.2 * L$ », για δοκό, με αρχικό πλάτος διατομής ίσο με « $b_0 = 0.1 * L$ », και για διάφορες τιμές του ρυθμού μεταβολής του πλάτους της διατομής.

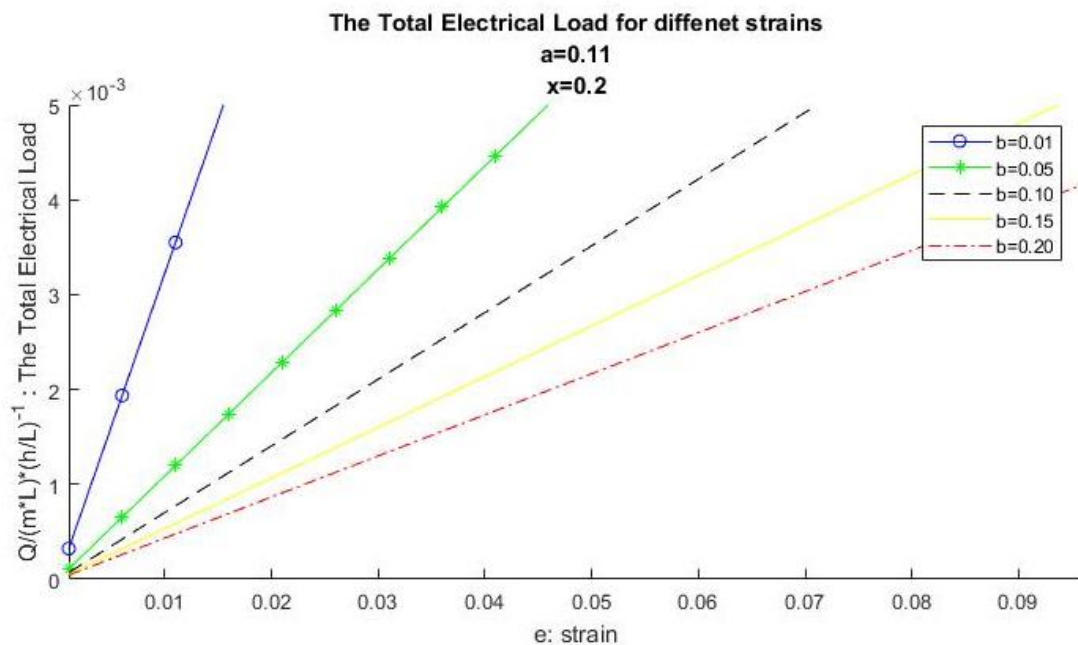


Figure 17. Η μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου σε όλη την δοκό συναρτήσει της παραμόρφωσης, σε μία συγκεκριμένη θέση « $x = 0.2 * L$ », για έναν συγκεκριμένο ρυθμό μεταβολής του πλάτους « $a = 0.11$ », καθώς το αρχικό πλάτος παίρνει διάφορες τιμές.

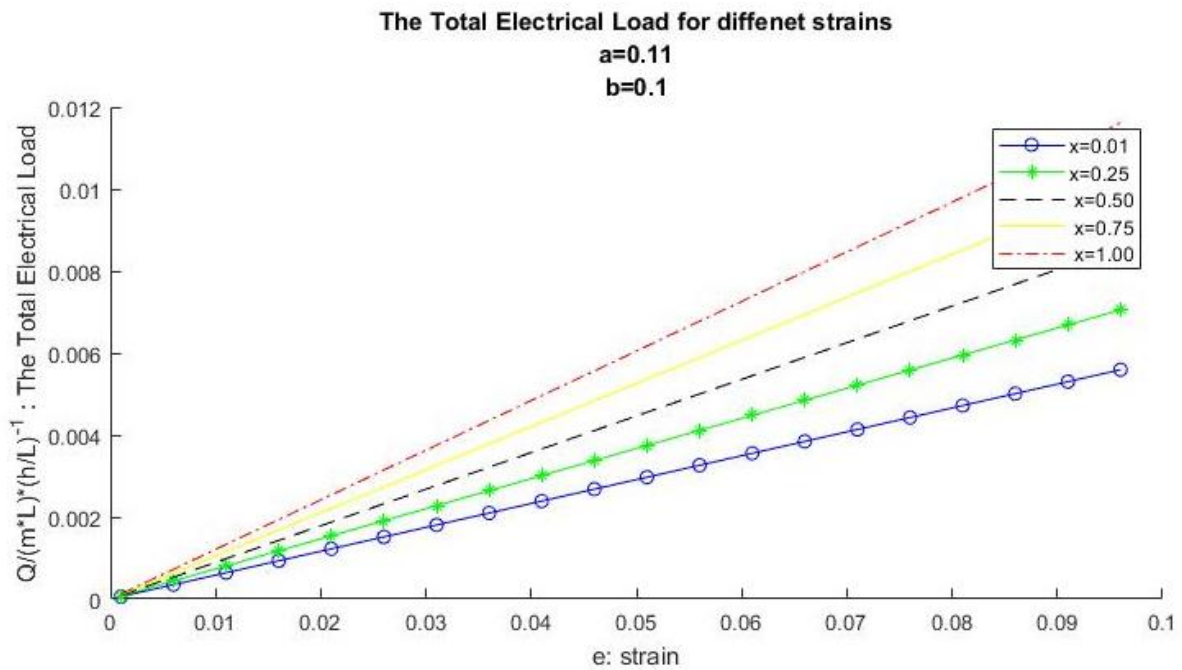


Figure 18. Η μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου σε όλη την δοκό συναρτῆσει της παραμόρφωσης, σε διάφορες θέσεις « $x = \dots$ », για έναν συγκεκριμένο ρυθμό μεταβολής του πλάτους « $\alpha = 0.11$ », καθώς το αρχικό πλάτος διατομής είναι ίσο με « $b_0 = 0.1 * L$ ».

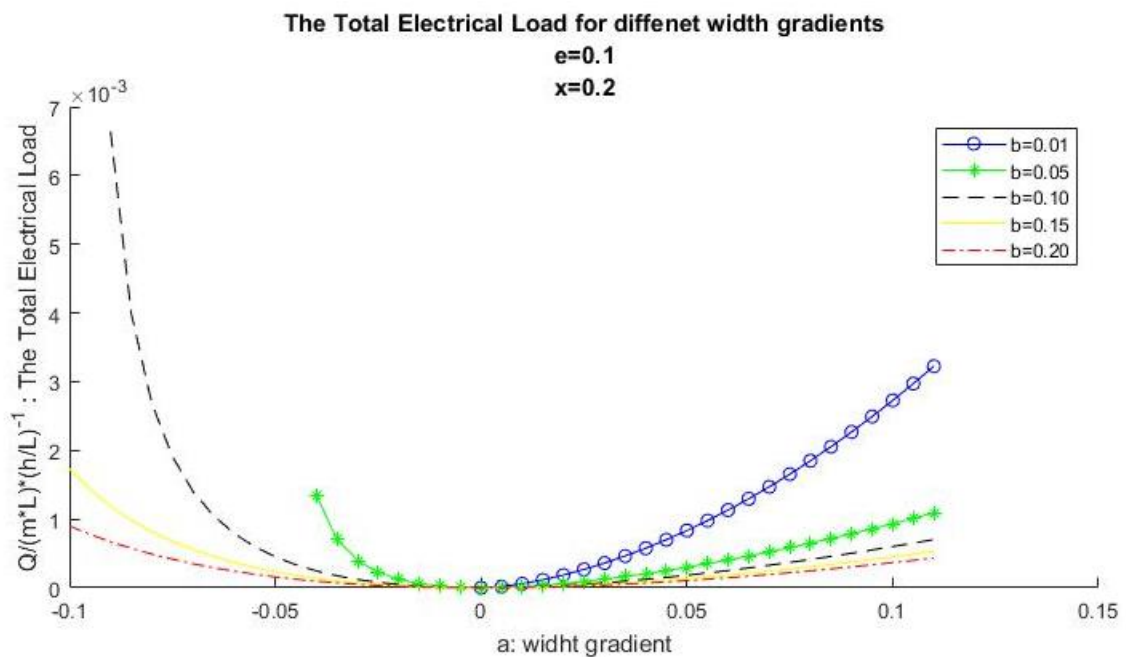


Figure 19. Η μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου σε όλη την δοκό συναρτῆσει του ρυθμού μεταβολής του πλάτους της διατομής, όταν η παραμόρφωση σε μία θέση « $x = 0.2 * L$ » είναι ίση με « $\varepsilon = 0.1$ », καθώς οι τιμές του αρχικού πλάτους της διατομής είναι διάφορες.

Σημαντικό σχόλιο, στα τελευταία διαγράμματα, που έχουν να κάνουν με το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο είναι συνάρτηση της συντεταγμένης κατά μήκος της διατομής, είναι ότι δεν σχετίζεται η θέση αυτή με την θέση που θα βάλουμε κάτι, να πάρει την ενέργεια. Το σήμα αυτό, παράχθηκε σε όλο το μήκος, και ξέρουμε ότι όταν θα γίνει σε συγκεκριμένη θέση συγκεκριμένη παραμόρφωση, τότε, εύκολα βρίσκουμε το συνολικό φορτίο.

Από την ανάλυση που έγινε μέσω διαγραμμάτων, μπορεί κανείς να καταλήξει στα ακόλουθα συμπεράσματα.

- Γενικά θέλουμε μεγάλες κλίσεις, και κατά προτίμηση αρνητικές. Είναι όμως άξιο σχολιασμού, ότι εμείς έχουμε επιλέξει, μία αρχή συντεταγμένων, και θα ήταν λάθος να υποστηρίξει κανείς ότι «αρνητική-θετική κλίση, δεν έχει σημασία».
- Προτιμάμε μικρές διαστάσεις, και συγκεκριμένα μικρό αρχικό πλάτος.
- Είναι αποδεκτό να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερα αρχικά, πλάτη με σκοπό την επίτευξη μικρότερων κλίσεων του πλάτους.
- Γενικά θέλουμε μεγάλες δυνάμεις, αλλά επειδή αυτό είναι δύσκολο, μπορούμε να αρκεστούμε σε υλικά που είναι σχετικά εύκαμπτα, τα οποία έχουν μικρό μέτρο ελαστικότητας.

Μία ακόμα παρατήρηση που πρέπει να γίνει εδώ, είναι η εξής: Η περίπτωση, αυτή, με την περίπτωση δοκού με μεταβαλλόμενο ύψος διατομής, έχουν τα ίδια αποτελέσματα, με μόνη διάφορα, μία απλή αντιμετάθεση του αρχικού πλάτους, με το ύψος.

3.8. Περίπτωση 1.2.1. Πρόβολος μεταβλητού ύψους με τέμνον φορτίο στην άκρη

Πρόκειται για περίπτωση επανάληψης της πρώτης περίπτωσης, αν θεωρήσουμε μία άλλη διατομή, όπου το ύψος της μεταβάλλεται στο μήκος της. Μάλιστα μπορεί κανείς να ορίσει έναν συντελεστή μεταβολής του ύψους, κάτι σαν κλίση. Όσο αυξάνεται η συντεταγμένη κατά μήκος του άξονα τόσο αλλάζει και το ύψος της διατομής.

Μία τέτοια σχέση είναι η « $h = h_0 + a * x$ » όπου το « a » μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Σε κάθε περίπτωση όμως πρέπει το ύψος να είναι θετικό και ο πρόβολος να υπακούει στις παραδοχές «Bernoulli». Γι' αυτό ορίζουμε σαν μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει αυτή η κλίση την « $\alpha_{max} = 0.11$ » ενώ η ελάχιστη, ώστε να ισχύουν τα δύο παραπάνω, να είναι « $\alpha_{min} = \max(-0.11 ; -\frac{h_0}{x})$ », σε απόλυτη αντιστοιχία, με την περίπτωση μεταβαλλόμενου πλάτους. Ο αριθμός «0.11» αντιστοιχεί σε μία κλίση γύρω στις «6.3°». Είναι αρκετά μικρή, και εννοείται ότι στα πειράματα, που δοκιμάσαμε να εκτελέσουμε, χρησιμοποιήσαμε μεγαλύτερες, αλλά τουλάχιστον οι παραδοχές «Bernoulli» σίγουρα ισχύουν.

$$\theta = \arctan(a)$$

Σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα του προβόλου με μεταβλητό πλάτος και κατακόρυφο φορτίο στην άκρη περιέχει τις εξής παραμέτρους:

- ✓ Το αρχικό ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Τον συντελεστή μεταβολής του πλάτους: a [-]
- ✓ Το πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Την κατακόρυφη δύναμη που βρίσκεται στην άκρη: P [N]
- ✓ Την συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

Ο φορέας μπορεί να επιλυθεί εύκολα με το χέρι, αφού είναι ισοστατικός. Οι αντιδράσεις στήριξης προκύπτουν όμοιες με την περίπτωση σταθερής διατομής, αφού ο φορέας είναι ισοστατικός και στις εξισώσεις ισορροπίας δεν παίζει κάποιο ρόλο η γεωμετρία της διατομής, όπως και στα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών, τα οποία μπορεί κανείς να τα προεξοφλήσει στις ακόλουθες εξισώσεις.

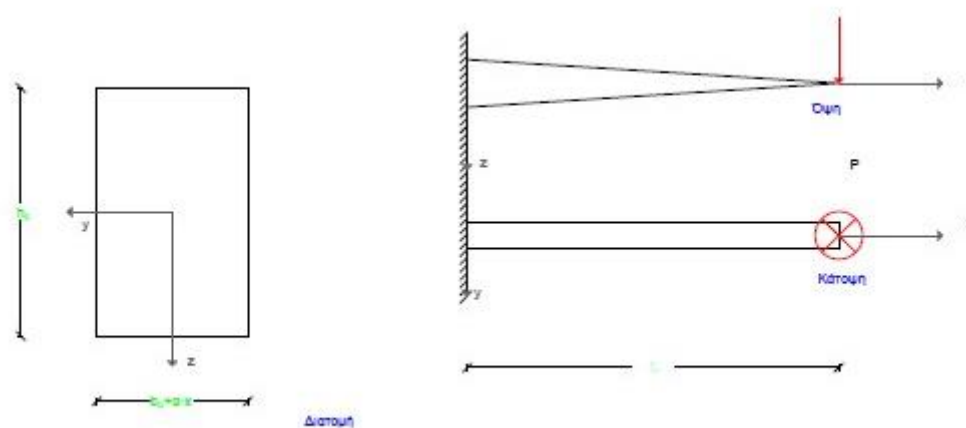


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.2.1. είναι πρόβολος διατομής μεταβλητού ύψους με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

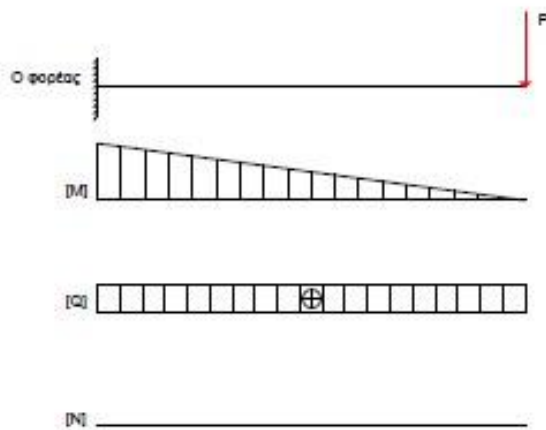


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη στην περίπτωση προβόλου μεταβλητού πλάτους διατομής με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

Οι αντιδράσεις στήριξης.

- $V_{\text{πάκτωσης}} = P$ [kN]
- $H_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $M_{\text{πάκτωσης}} = P * L$ [kN*m]

Και οι εξισώσεις των διαγραμμάτων [M], [Q], [N].

- ✓ $M(x) = P * (x - L)$ [kN*m]
- ✓ $Q(x) = P$ [kN]
- ✓ $N(x) = 0$ [kN]

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται ως:

- ✓ Εμβαδόν: $A = (h_0 + \alpha * x) * b_0$ [m²]
- ✓ Ροπή Αδρανείας $I_{yy} = \frac{b_0 * (h_0 + \alpha * x)^3}{12}$ [m⁴]
- $I_{zz} = \frac{(b_0)^3 * (h_0 + \alpha * x)}{12}$ [m⁴]

Οι δυσκολίες αρχίζουν με το βέλος κάμψης το οποίο είναι όχι μόνο παράγουσα της ροπής αλλά και της γεωμετρίας της δοκού.

$$E * I(x) * w''(x) = -M(x) = P * (L - x)$$

$$w''(x) * E * \frac{b_0 * (h_0 + \alpha * x)^3}{12} = P * (L - x)$$

$$w''(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * (h_0 + \alpha * x)^{-3} * (L - x)$$

$$W'(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * \left(\frac{1}{a^2 * (a * x + h_0)} - \frac{L * a + h_0}{2 * a^2 * (a * x + h_0)^2} \right) + C^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : « $w'(x = 0) = 0$ »

$$W'(0) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * \left(\frac{1}{a^2 * (h_0)} - \frac{L * a + h_0}{2 * a^2 * h_0^2} \right) + C = 0 \rightarrow$$

$$C = -12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * \left(\frac{1}{a^2 * (h_0)} - \frac{L * a + h_0}{2 * a^2 * h_0^2} \right)$$

Και άρα καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W'(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * \left(\frac{1}{a^2 * (a * x + h_0)} - \frac{1}{a^2 * h_0} - \frac{L * a + h_0}{2 * a^2 * (a * x + h_0)^2} + \frac{L * a + h_0}{2 * a * h_0^2} \right)$$

$$W(x) = 6 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * \left(\frac{x * L}{a * h_0^2} - \frac{x}{a^2 * h_0} + \frac{2 * \ln(a * x + h_0)}{a^3} + \frac{L}{a^2 * (a * x + h_0)} + \frac{h_0}{a^3 * (a * x + h_0)} \right) + C^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : « $w(x = 0) = 0$ »

$$W(0) = 6 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * \left(\frac{2 * \ln(h_0)}{a^3} + \frac{L}{a^2 * h_0} + \frac{h_0}{a^3 * h_0} \right) + C = 0$$

$$C = 6 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * \left(-\frac{2 * \ln(h_0)}{a^3} - \frac{L}{a^2 * h_0} - \frac{h_0}{a^3 * h_0} \right)$$

Άρα το βέλος κάμψης δίνεται με την παρακάτω σχέση, αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W(x) = 6 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * \left(\frac{x * L}{a * h_0^2} - \frac{x}{a^2 * h_0} + \frac{2 * \ln\left(a * \frac{x}{h_0} + 1\right)}{a^3} + \frac{a * L + h_0}{a^3 * (a * x + h_0)} - \frac{a * L + h_0}{a^3 * h_0} \right)$$

Αυτή η σχέση, με σκοπό να αποτυπωθεί ως διάγραμμα, πρέπει να αδιαστατοποιηθεί. Με αυτά που περιγράφηκαν προηγουμένως, έχουμε:

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} * \left(a^{-1} * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-2} - a^{-2} * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1} + 2 * a^{-3} * \ln \left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1} + 1 \right) + a^{-3} * \left(a + \frac{h_0}{L} \right) * \left(a * \frac{x}{L} + \frac{h_0}{L} \right)^{-1} - a^{-3} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1} * \left(a + \frac{h_0}{L} \right) \right)$$

¹ Η ολοκλήρωση έγινε με χρήση της γλώσσας αναλυτικού προγραμματισμού «Maple». Για λόγους ασφάλειας έγινε επαλήθευση με δύο τρόπους. Θεωρώντας ότι ο συντελεστής κλίσης είναι μηδενικός, το όριο πρέπει να βγει όσο της περίπτωσης 1.0.2 το αποτέλεσμα, και παραγωγίζοντας πίσω πρέπει να βγει η αρχική σχέση. Αυτές οι επαληθεύσεις έγιναν σε κάθε περίπτωση που χρειάστηκε υπολογιστικό πρόγραμμα, να κάνει αναλυτικά πράξεις. Οι επαληθεύσεις, για λόγους απλούστευσης των πράξεων δεν παρατίθενται σε αυτό το σημείο.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & > W2 := x \rightarrow \frac{12 \cdot P \cdot (L - x)}{(E \cdot (h + a \cdot x)^3 \cdot b)}; \\
 & \qquad \qquad \qquad W2 := x \mapsto \frac{12 P (L - x)}{E (a x + h)^3 b}
 \end{aligned} \right\} \quad (1) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & > \text{int}(W2(x), x); \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{12 P \left(\frac{1}{a^2 (a x + h)} - \frac{L a + h}{2 a^2 (a x + h)^2} \right)}{E b}
 \end{aligned} \right\} \quad (2) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & > W1 := x \rightarrow \frac{12 \cdot P}{E \cdot b} \cdot \left(\frac{1}{a^2 \cdot (a \cdot x + h)} - \frac{1}{a^2 \cdot h} - \frac{L \cdot a + h}{2 \cdot a^2 \cdot (a \cdot x + h)^2} + \frac{L \cdot a + h}{2 \cdot a^2 \cdot h^2} \right); \\
 & \qquad \qquad \qquad W1 := x \mapsto \frac{12 P \left(\frac{1}{a^2 (a x + h)} - \frac{1}{a^2 h} - \frac{L a + h}{2 a^2 (a x + h)^2} + \frac{L a + h}{2 a^2 h^2} \right)}{E b}
 \end{aligned} \right\} \quad (3) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & > \text{int}(W1(x), x); \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{6 P x L}{E b a h^2} - \frac{6 P x}{E b a^2 h} + \frac{12 P \ln(a x + h)}{E b a^3} + \frac{6 P L}{E b a^2 (a x + h)} + \frac{6 P h}{E b a^3 (a x + h)}
 \end{aligned} \right\} \quad (4) \\
 & >
 \end{aligned}$$

Figure 3. Η διαδικασία ολοκλήρωσης της εξίσωσης Euler-Bernoulli, με σκοπό τον προσδιορισμό, του βέλους κάμψης

Με την προηγούμενη αδιάστατη σχέση είναι δυνατή η παραγωγή διαγραμμάτων, που αφορούν στην μεταβολή της κατακόρυφης παραμόρφωσης σε έναν πρόβολο μεταβαλλόμενου ύψους, μεταβάλλοντας τις παραμέτρους του προβλήματος. Τα διαγράμματα, παρουσιάζονται παρακάτω.

Στην συνέχεια γίνεται προσδιορισμός των τάσεων που έχουν «gradient». Αυτό γίνεται με την θεωρία δοκού σε κάμψη, που έχει ως εξής.

$$\epsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E \cdot I_{yy}(x)} \cdot z$$

$$\epsilon_{xx} = 12 \cdot \frac{P \cdot (x-L)}{E \cdot b_0 \cdot (h_0 + a \cdot x)^3} \cdot z$$

Ενώ η πολικότητα, προσδιορίζεται με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής, δηλαδή την παράγωγο της προς την συντεταγμένη του άξονα στον οποίο υπάρχει (άξονα «3» ή αλλιώς «z»), έχουμε τάσεις στον άξονα «1» και ρυθμό μεταβολής αυτών στον άξονα «3», άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον όρο «μ₁₃».

$$Pol_{13} = \mu_{13} \cdot \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} \cdot 12 \cdot \frac{P \cdot (x-L)}{E \cdot b_0 \cdot (h_0 + a \cdot x)^3}$$

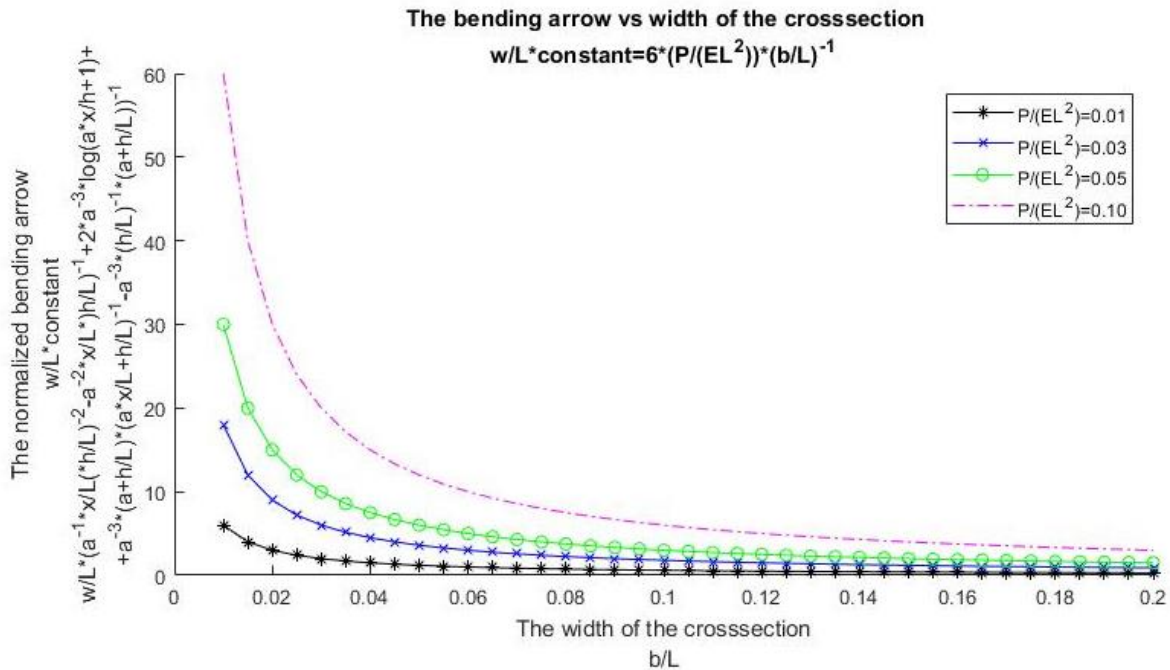


Figure 4. Η κατακόρυφη παραμόρφωση, ως συνάρτηση του αρχικού πλάτους της διατομής. Το εξωτερικό φορτίο παίρνει διάφορες τιμές ενώ το αρχικό ύψος της διατομής, ο ρυθμός μεταβολής του και η θέση, που παρατηρούμε την κατακόρυφη παραμόρφωση είναι σταθερή στο πρώτο μέρος της εξίσωσης.

Τα μεγέθη: αρχικό πλάτος διατομής και κατακόρυφη μετακίνηση είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Όσο μεγαλύτερο αρχικό πλάτος διατομής διαθέτει μία διατομή τόσο πιο μικρό θέλος κάμψης θα έχει. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει και το αντίθετο.

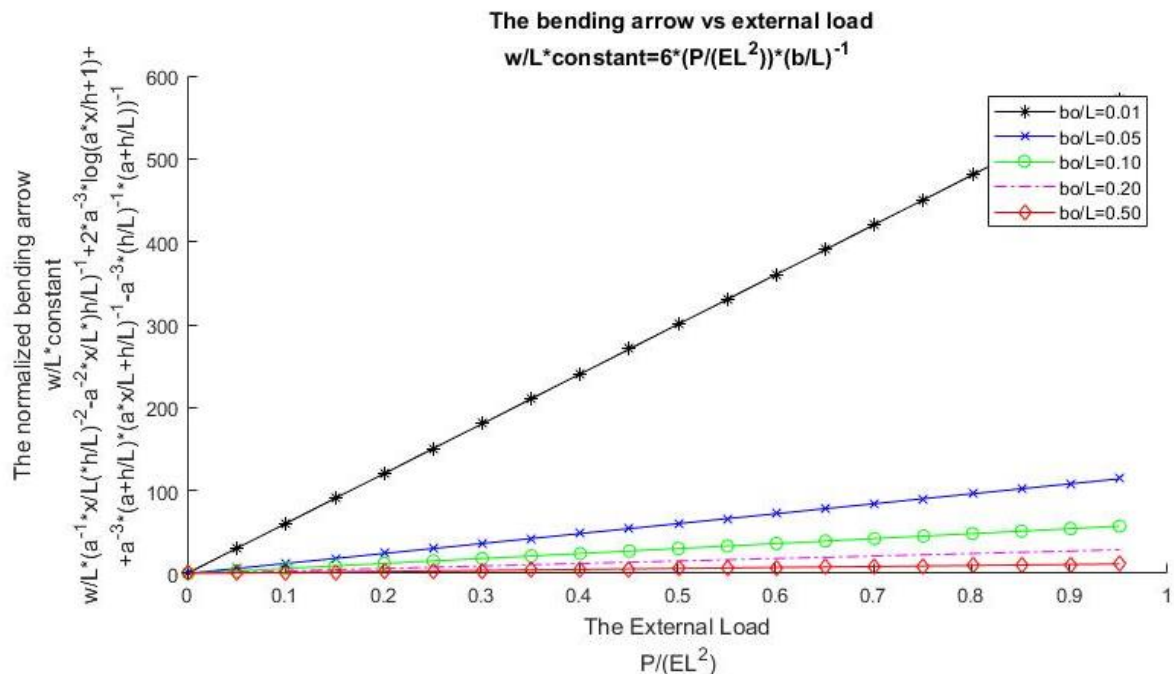


Figure 5. Σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της κατακόρυφης παραμόρφωσης, ως συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου. Σε ομοιότητα με το προηγούμενο διάγραμμα, η σχέση είναι για διάφορες τιμές του αρχικού πλάτους ενώ όλες οι άλλες μεταβλητές θεωρούνται σταθερές.

Τα δύο αυτά μεγέθη είναι ανάλογα.

Γιο όσο μεγαλύτερο φορτίο, τόσο μεγαλύτερο είναι το φαινόμενο. Το ερώτημα είναι η αντοχή. Αν θέλουμε να συνδυάσουμε το μικρό πλάτος με μεγάλη δύναμη, τι θα καταφέρναμε.

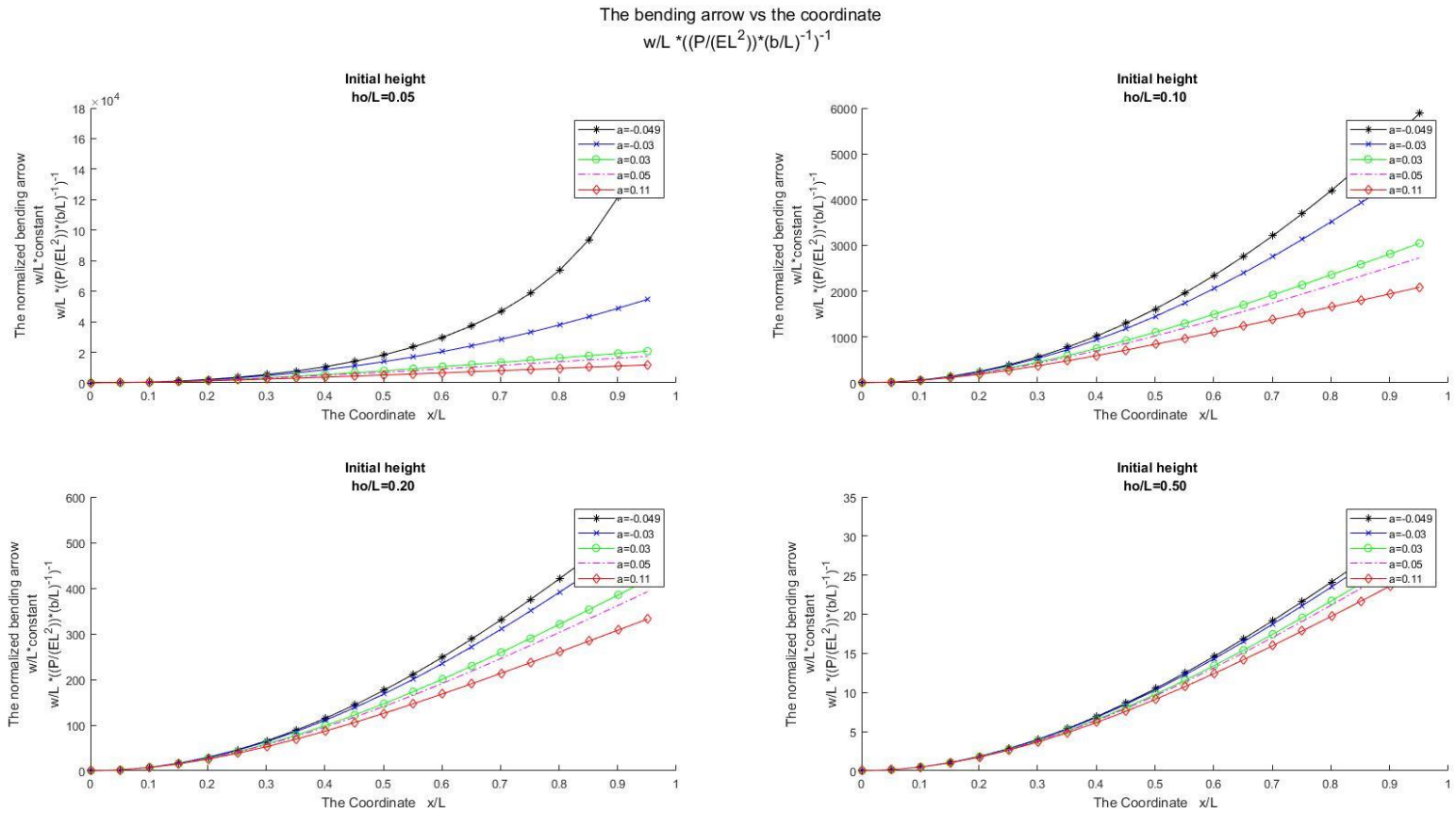


Figure 6. Η μεταβολή της κατακόρυφης μετακίνησης, ως συνάρτηση της συντεταγμένης κατά μήκος της δοκού. Το αρχικό ύψος της διατομής και ο ρυθμός μεταβολής του ύψους παίρνουν διάφορες τιμές, καθώς όλες οι άλλες μεταβλητές όπως το αρχικό πλάτος της διατομής και το εξωτερικό φορτίο, θεωρούνται σταθερές.

Η κλίση των διαγραμμάτων είναι αναμενόμενη, και σχηματικά παρόμοια με άλλες περιπτώσεις.

Υπάρχει μεγαλύτερη κατακόρυφη παραμόρφωση, σε διατομές με μικρά αρχικά ύψη, και με μικρούς ρυθμούς μεταβολής του ύψους της διατομής. Συγκεκριμένα, μία δοκός με μηδενική κλίση, έχει βέλος μεγαλύτερο από μία με θετική κλίση.

The bending arrow vs crosssection height gradient
 $w/L \cdot ((P/(EL^2)) \cdot (b/L)^{-1})^{-1}$

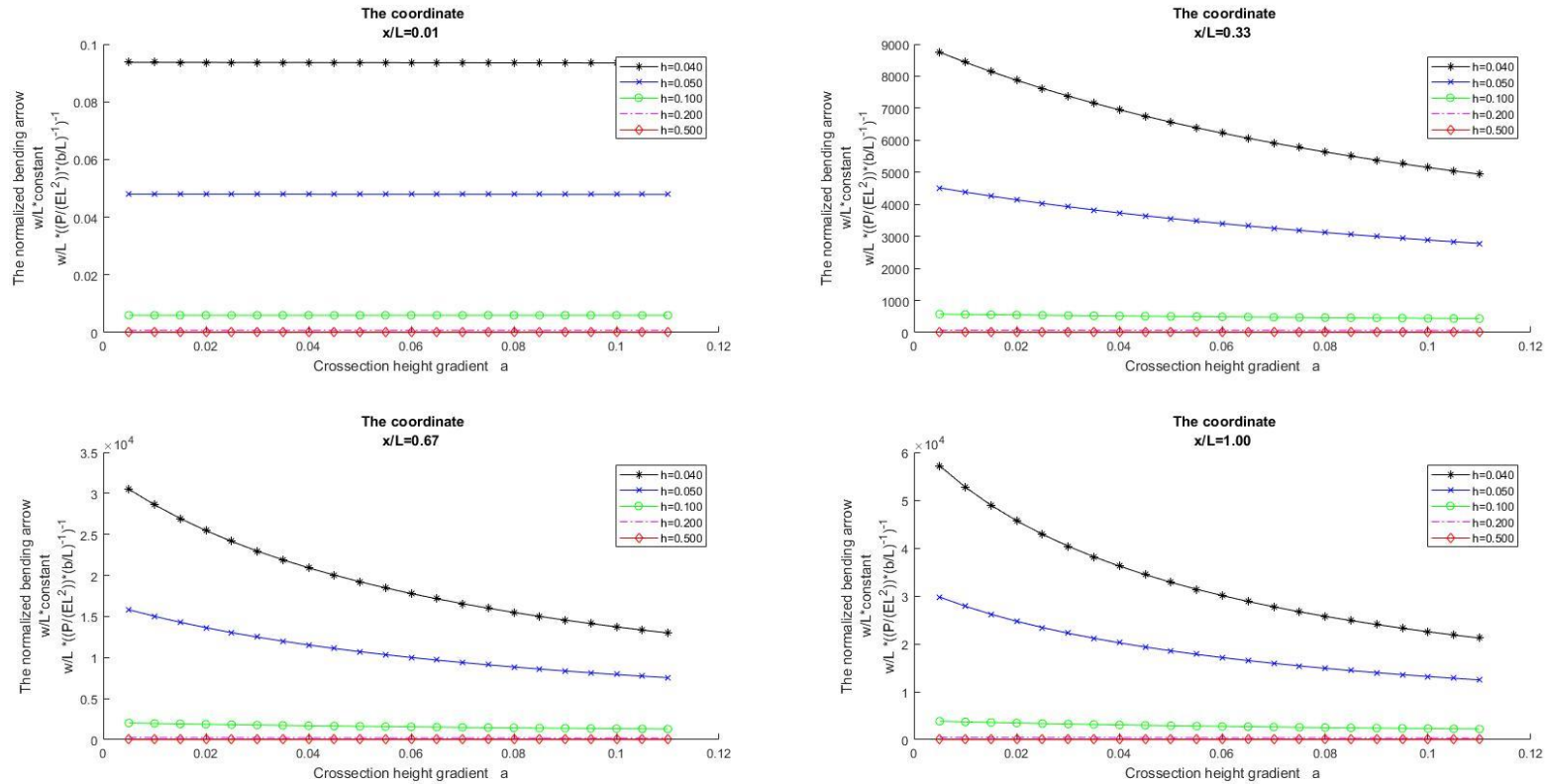


Figure 7. Για διάφορες θέσεις κατά μήκος της δοκού, πως μεταβάλλεται η κατακόρυφη παραμόρφωση ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, καθώς το αρχικό ύψος της μεταβάλει τις τιμές του, όπως φαίνεται στο υπόμνημα των διαγραμμάτων (ο όρος «h» αντιστοιχεί στο κανονικοποιημένο αρχικό ύψος της διατομής, όπως αυτή η κανονικοποίηση περιγράφηκε αρχικά).

Σε μία θέση μη μηδενικής κατακόρυφης παραμόρφωσης, μπορεί κανείς να διακρίνει ότι με την αύξηση του ρυθμού μεταβολής επιτυγχάνεται μείωση του βέλους κάμψης, δηλαδή, ένας πρόβολος με όψη, μορφής τραπεζίου, με την μικρή βάση πακτωμένη (ο ρυθμός μεταβολής ύψους διατομής είναι θετικός), έχει μικρότερο βέλος με έναν όμοιο με μηδενικό ρυθμό μεταβολής.

Η μείωση του αρχικού ύψους της διατομής επιφέρει και αυτή αύξηση του βέλους κάμψης.

The bending arrow vs The initial crosssection height
 $w/L * ((P/(EL^2)) * (b/L)^{-1})^{-1}$

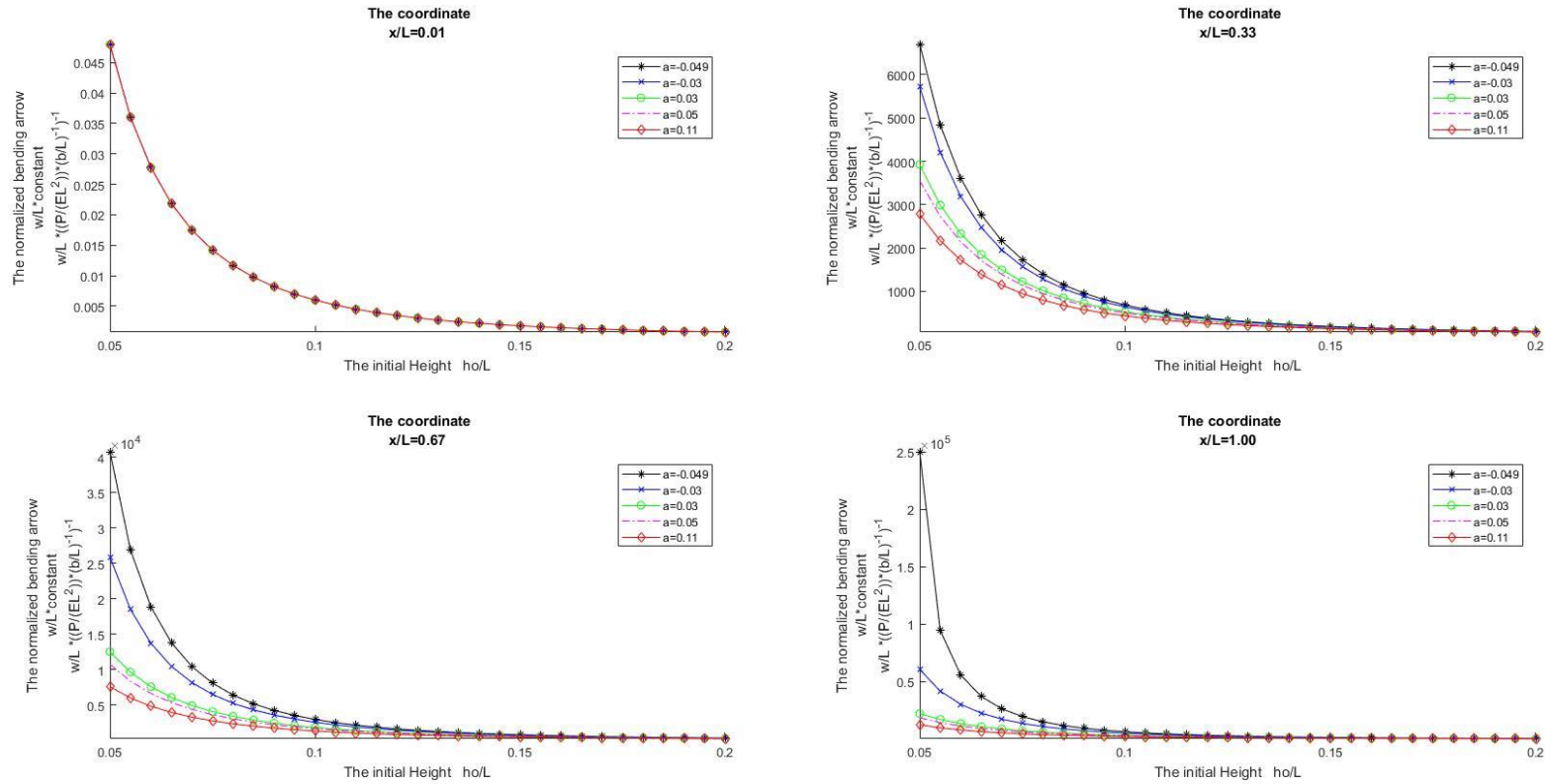


Figure 8. Σε διάφορες θέσεις κατά μήκος της δοκού, βλέπουμε πως μεταβάλλεται η κατακόρυφη παραμόρφωση, σε σχέση με το αρχικό πλάτος της διατομής, καθώς ο ρυθμός μεταβολής της διατομής παίρνει διάφορες τιμές, και το εξωτερικό φορτίο, όπως και το πλάτος μένουν σταθερά. Όπως ήταν αναμενόμενο πλέον, και αυτά τα διαγράμματα κάνουν ευδιάκριτη, την συσχέτιση του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, με την κατακόρυφη παραμόρφωση. Όσο μεγαλύτερος ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της διατομής, τόσο μικρότερη η κατακόρυφη παραμόρφωση.

The bending arrow for a combination of
Height gradient (a) - Initial height (ho/L)
 $w/L * ((P/(EL^2)) * (b/L)^{-1})^{-1}$

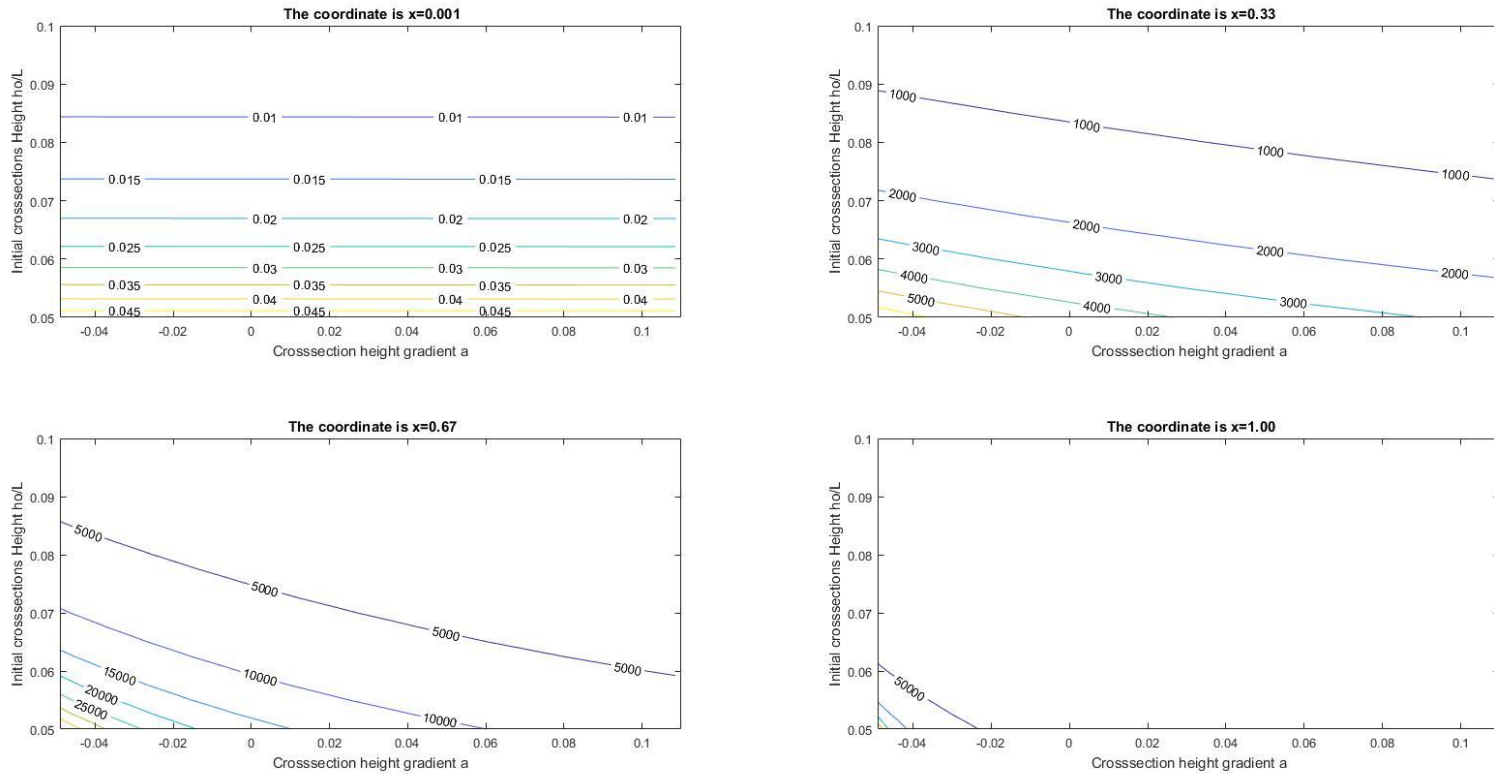


Figure 9. Η κατακόρυφη μετακίνηση σε μία συγκεκριμένη θέση στο μήκος της δοκού, όπως φαίνεται και στα διαγράμματα- μία θέση για κάθε διάγραμμα - για έναν συνδυασμό αρχικού ύψους διατομής και ρυθμού μεταβολής αυτού. Οι υπόλοιποι παράγοντες θεωρούνται σταθεροί. Από τα παραπάνω διαγράμματα μπορεί κανείς να συμπεράνει τις παρατηρήσεις, που σημειώθηκαν και στα προηγούμενα διαγράμματα. Αύξηση του βέλους κάμψης ισοδυναμεί, με μείωση του ύψους της διατομής, αλλά και επίτευξη, μικρού συντελεστή «α», (αρνητικό).

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος του προβόλου. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδη τμήματα. Η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P*(x-L)}{E*b_0*(h_0+\alpha*x)^3} * b_0 * dx$$

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P*(x-L)}{E*(h_0+\alpha*x)^3} * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \left[\frac{a*(L-2*x)-h_0}{2*a^2*(a*x+h_0)^2} \right]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \left[\frac{-a*L-h_0}{2*a^2*(a*L+h_0)^2} - \frac{a*L-h_0}{2*a^2*h_0^2} \right]$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \frac{1}{2*a^2} \left[\frac{-1}{(a*L+h_0)} - \frac{a*L-h_0}{h_0^2} \right]$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \frac{1}{2*a^2} \left[\frac{-h_0^2-(a*L)^2+h_0^2}{(a*L+h_0)*h_0^2} \right]$$

$$Q_{13} = -\frac{12}{2} * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \left[\frac{L^2}{a*L*h_0^2+h_0^3} \right]$$

Και εφαρμόζοντας την κανονικοποίηση που περιγράφηκε στην αρχή:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\alpha * \left(\frac{h_0}{L} \right)^2 + \left(\frac{h_0}{L} \right)^3 \right)^{-1}$$

Η σχέση αυτή στην συνέχεια μπορεί να αποτυπωθεί, αφού πρώτα, ακολουθήσει μερικός σχολιασμός: Το εξωτερικό φορτίο δεν είναι πολύ ενδιαφέρον, αφού η σχέση είναι γραμμική, μπορώ ευκολά να το θεωρήσω σταθερό στο αριστερό μέρος της εξίσωσης. Γ' αυτόν τον λόγο και το κάνω.

Τα διαγράμματα που κατασκευάζονται για το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο παρουσιάζονται παρακάτω, ενώ στην συνέχεια παρουσιάζονται και διαγράμματα για την πολικότητα, η οποία δίνεται από την σχέση:

$$\frac{Pol_{13} * L}{\mu_{13}} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L} \right)^{-3} * \left(\frac{x}{L} - 1 \right)$$

² Το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα, που ήταν αρκετά δύσκολό να το προσδιορίσει κανείς με το χέρι, αντιμετωπίστηκε, με γλώσσα υπολογιστικής νοημοσύνης «wolframalpha». Για λόγους ακριβείας, έγινε επαλήθευση, αλλά στην παρούσα εργασία, απουσιάζει, για λόγους εξοικονόμησης χώρου και χρόνου.

The Total Electrical Load vs The gradient of height
For different initial height : h_0/L & For different External Loads : $P/(EL^2)$

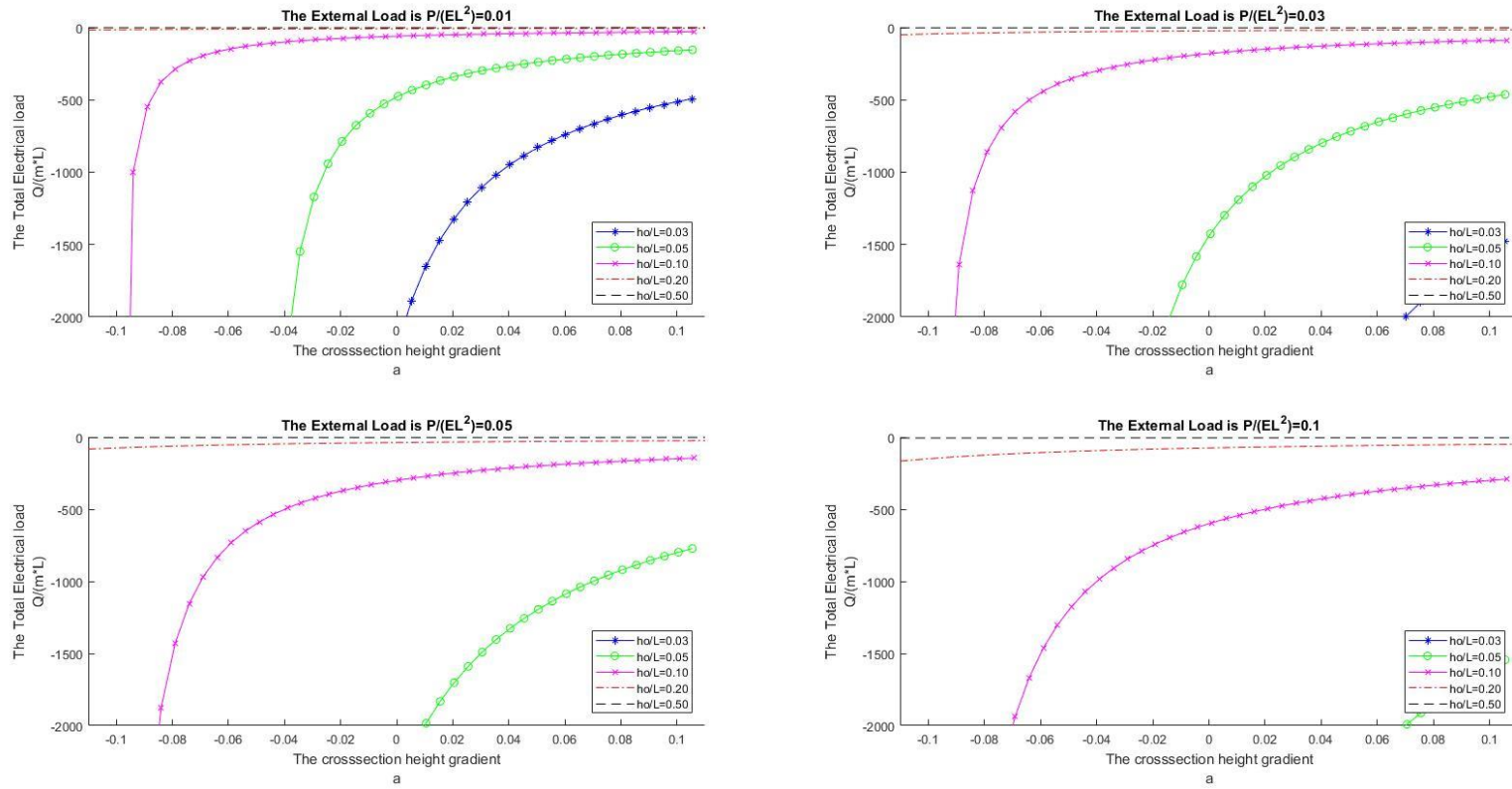


Figure 10. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού σαν συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους διατομήςγια διάφορες τιμές του αρχικού ύψους της διατομής και για διάφορα εξωτερικά φορτία.

Όπως ήταν αναμενόμενο, το μεγαλύτερο εξωτερικό φορτίο, δίνει μεγαλύτερο ηλεκτρικά παραγόμενο φορτίο.

Μικρότερα αρχικά ύψη διατομής δίνουν μεγαλύτερα ηλεκτρικά φορτία.

Μικρότεροι (αρνητικοί) ρυθμοί μεταβολής του πλάτους της διατομής δίνουν μεγαλύτερα ηλεκτρικά φορτία.

The Total Electrical Load vs The initial crosssection height
For different gradients of height :a & For different External Loads :P/(EL²)

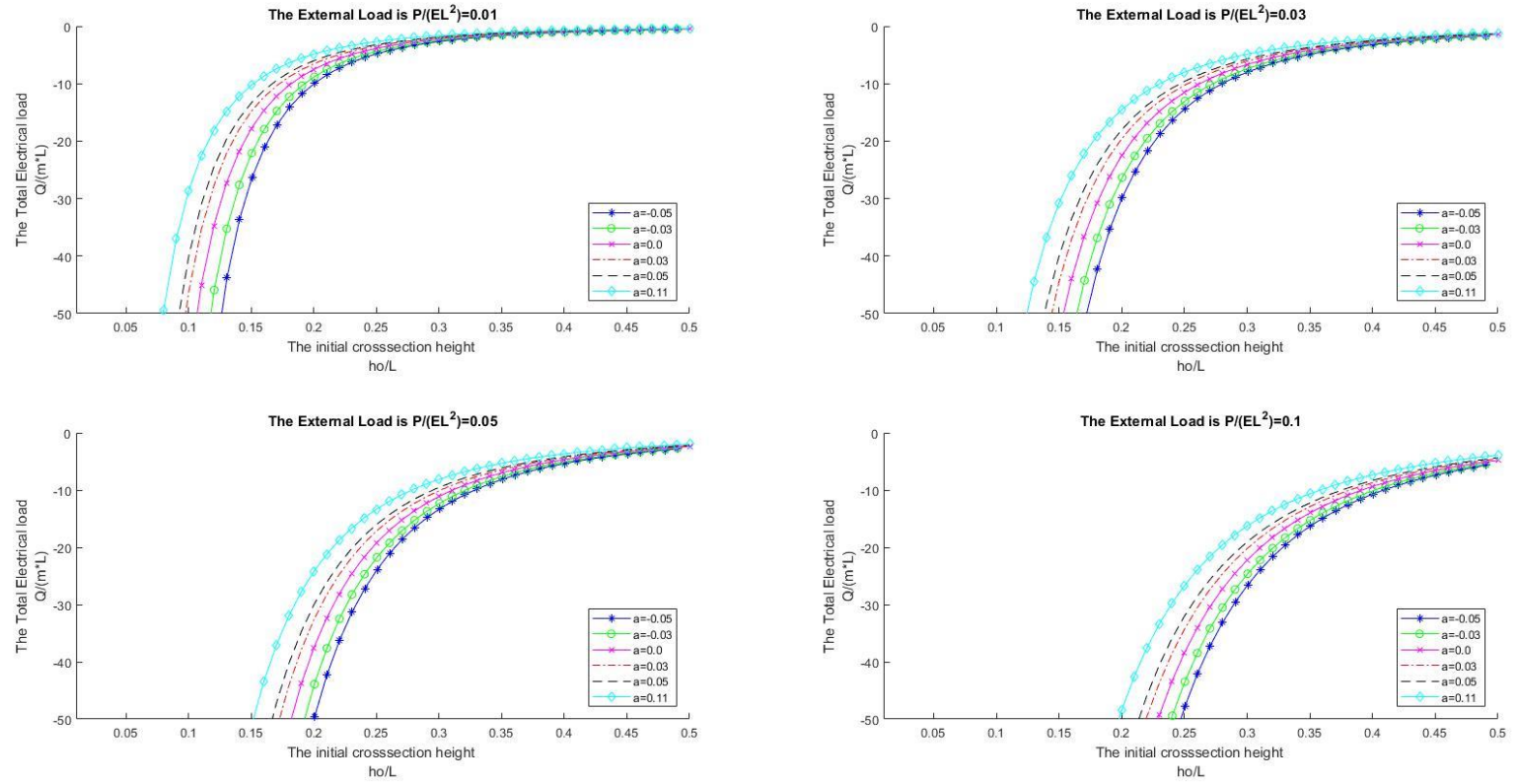


Figure 11. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σαν συνάρτηση του αρχικού ύψους της διατομής, για διάφορες τιμές του ρυθμού μεταβολής του ύψους της. Το εξωτερικό φορτίο παίρνει διαφορετική τιμή σε κάθε διάγραμμα. Μεγάλα συνολικά παραγόμενα ηλεκτρικά φορτία, αντιστοιχούν σε συνδυασμό μικρού αρχικού ύψους της διατομής, με μικρό ρυθμό μεταβολής αυτού. Για μεγάλο εξωτερικό φορτίο, έχουμε μεγιστοποίηση του φαινομένου. Πρόκειται για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, το φορτίο το αντέχει μια διατομή, ανάλογα με τα αδρανειακά της χαρακτηριστικά, (όσο μεγαλύτερα, τόσο περισσότερο φορτίο αντέχει).

The Total Electrical Load for a combination of
The crosssection height (ho/L) & its gradiend (a)

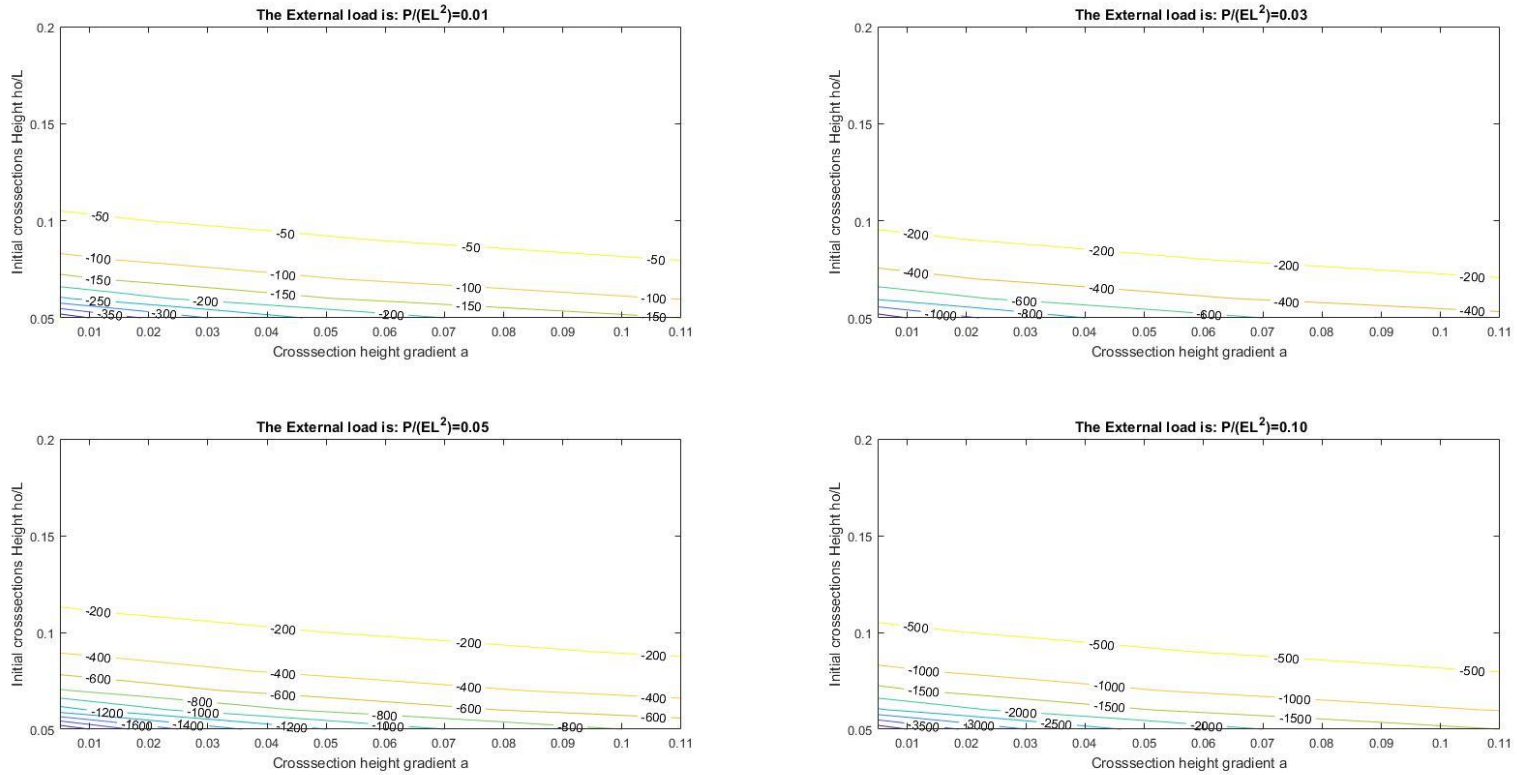


Figure 12. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό, αρχικού ύψους της διατομής, και ρυθμού μεταβολής αυτού. Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει διαφορετικό εξωτερικό φορτίο.

Από αυτό το διάγραμμα μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι είναι πολύ πιο δραστική η μείωση του αρχικού ύψους της διατομής, παρά η μείωση του ρυθμού μεταβολής αυτού.

The Polarization for a combination of the initial crosssection height (ho/L) and its gradient (a)
 $(P^*L/m)^*(b/L)^*(P/(EL^2))^{-1}$

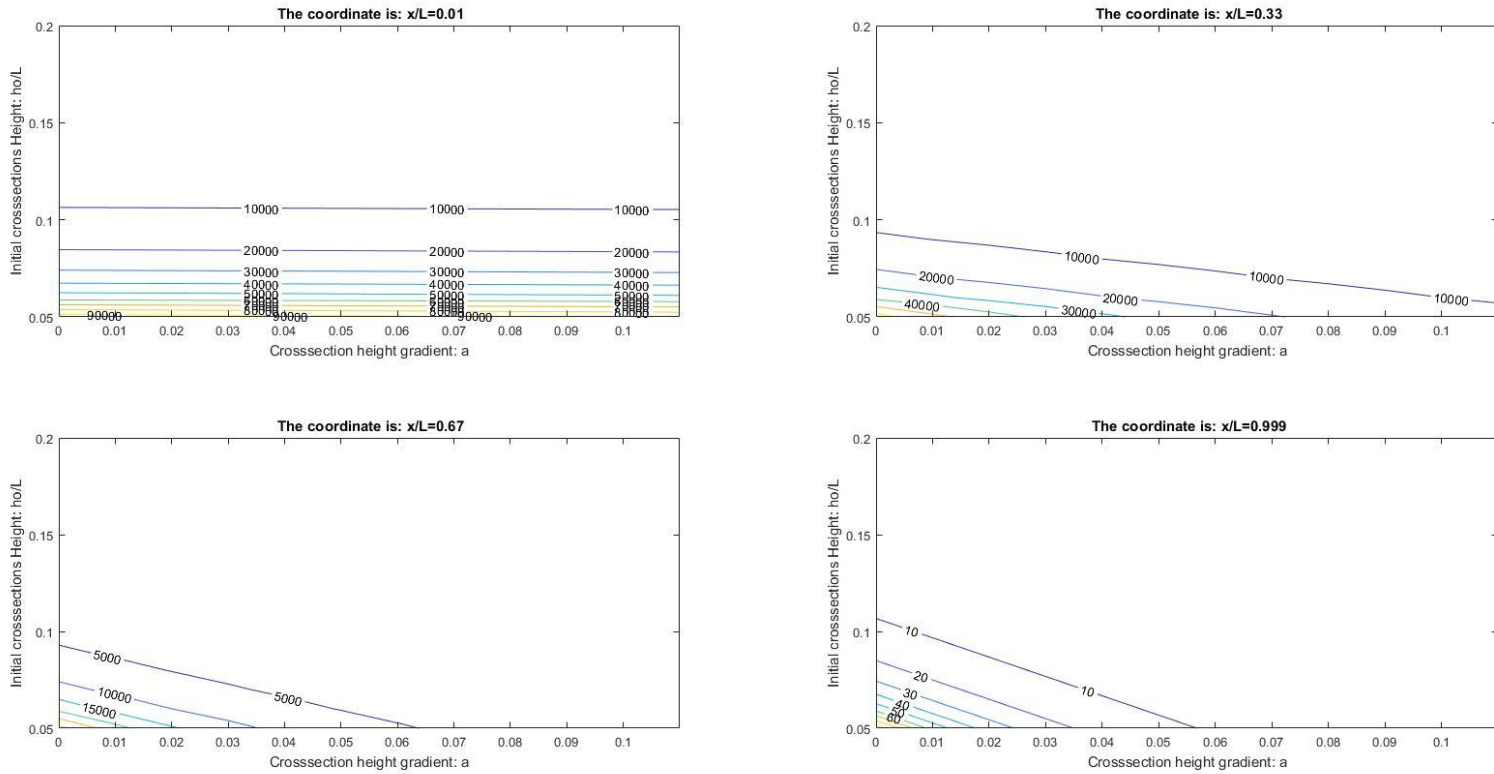


Figure 13. Η πολικότητα, που δημιουργείται σε μία συγκεκριμένη θέση, κατά μήκος της δοκού (σε κάθε διάγραμμα, άλλη θέση), ως ένας συνδυασμός αρχικού ύψους της διατομής, και του ρυθμού μεταβολής αυτού. Το αρχικό πλάτος της διατομής και το εξωτερικό φορτίο, θεωρούνται σταθερά στο πρώτο μέρος της εξίσωσης.

The Polarization vs the gradien of the crosssection height (a)

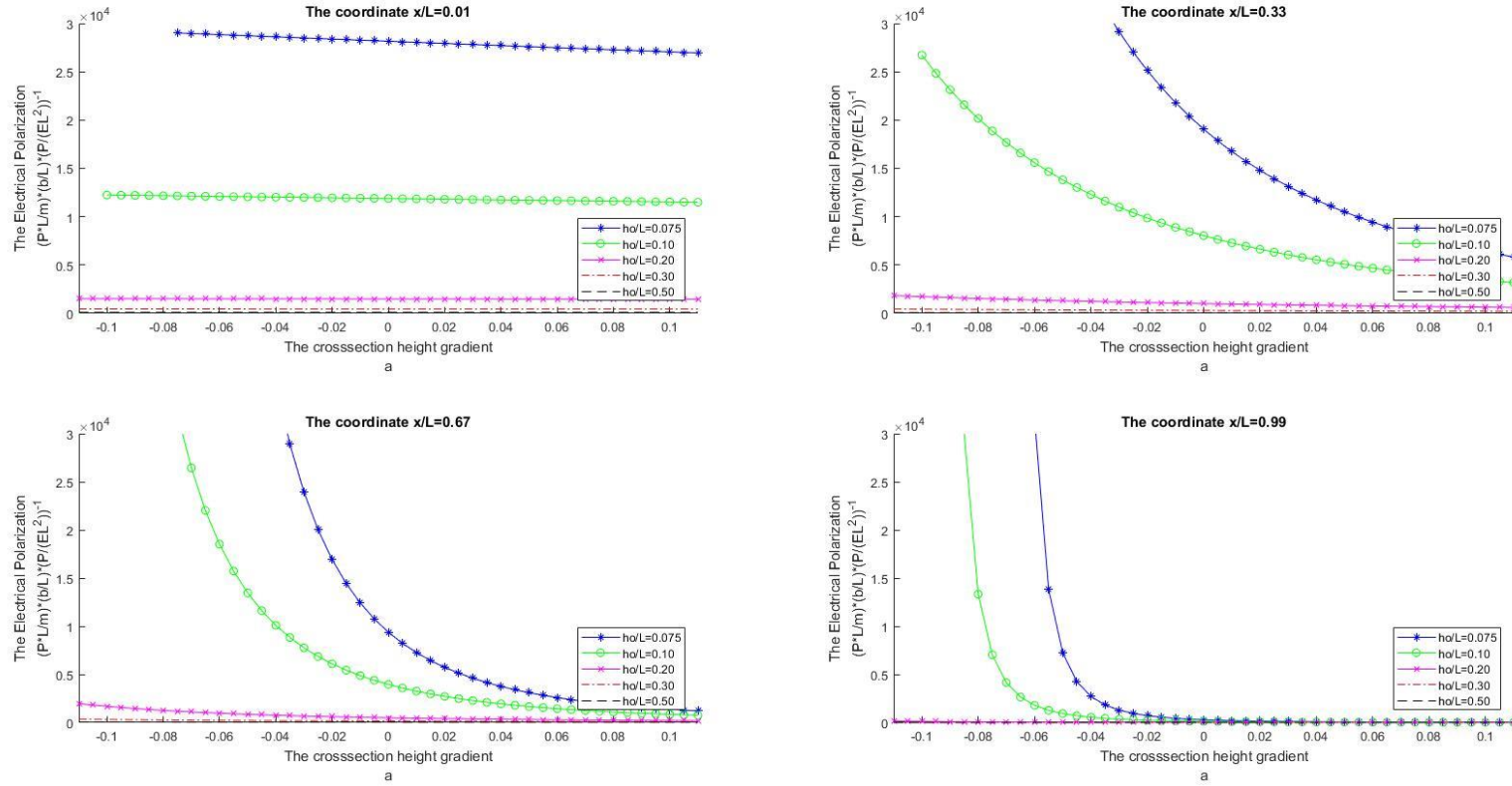


Figure 14. Η πολικότητα, που αναπτύσσεται σε μία συγκεκριμένη θέση κατά μήκος της δοκού, συναρτήσει του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, για διάφορες τιμές του αρχικού της ύψους. Σε κάθε διάγραμμα, αυτή η θέση είναι διαφορετική. Το αρχικό πλάτος της διατομής, και το εξωτερικό φορτίο, είναι σταθερά στο πρώτο μέρος της εξίσωσης.

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(a^{-1} * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-2} - a^{-2} * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 2 * a^{-3} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) + a^{-3} * \left(a + \frac{h_0}{L}\right) * \left(a * \frac{x}{L} + \frac{h_0}{L}\right)^{-1} - a^{-3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} * \left(a + \frac{h_0}{L}\right)\right)$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\alpha * \left(\frac{h_0}{L}\right)^2 + \left(\frac{h_0}{L}\right)^3\right)^{-1}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση στην δεύτερη καταλήγουμε στην σχέση που φαίνεται παρακάτω, η οποία δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που παράγεται σε μία δοκό, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν σε θέση « x_0 », παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση « $w(x_0)$ »

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -\frac{W(x)}{L} \left(a^{-1} * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-2} - a^{-2} * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 2 * a^{-3} * \ln\left(a * \frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) + a^{-3} * \left(a + \frac{h_0}{L}\right) * \left(a * \frac{x}{L} + \frac{h_0}{L}\right)^{-1} - a^{-3} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} * \left(a + \frac{h_0}{L}\right)\right)^{-1} * \left(\alpha * \left(\frac{h_0}{L}\right)^2 + \left(\frac{h_0}{L}\right)^3\right)^{-1}$$

Η σχέση αυτή είναι αδιάστατη και μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί σε διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά φαίνονται παρακάτω.

The Total Electrical Load For a Combination Of the arrow and the coordinate $Q/(m*L)^*(b/L)^{-1}$

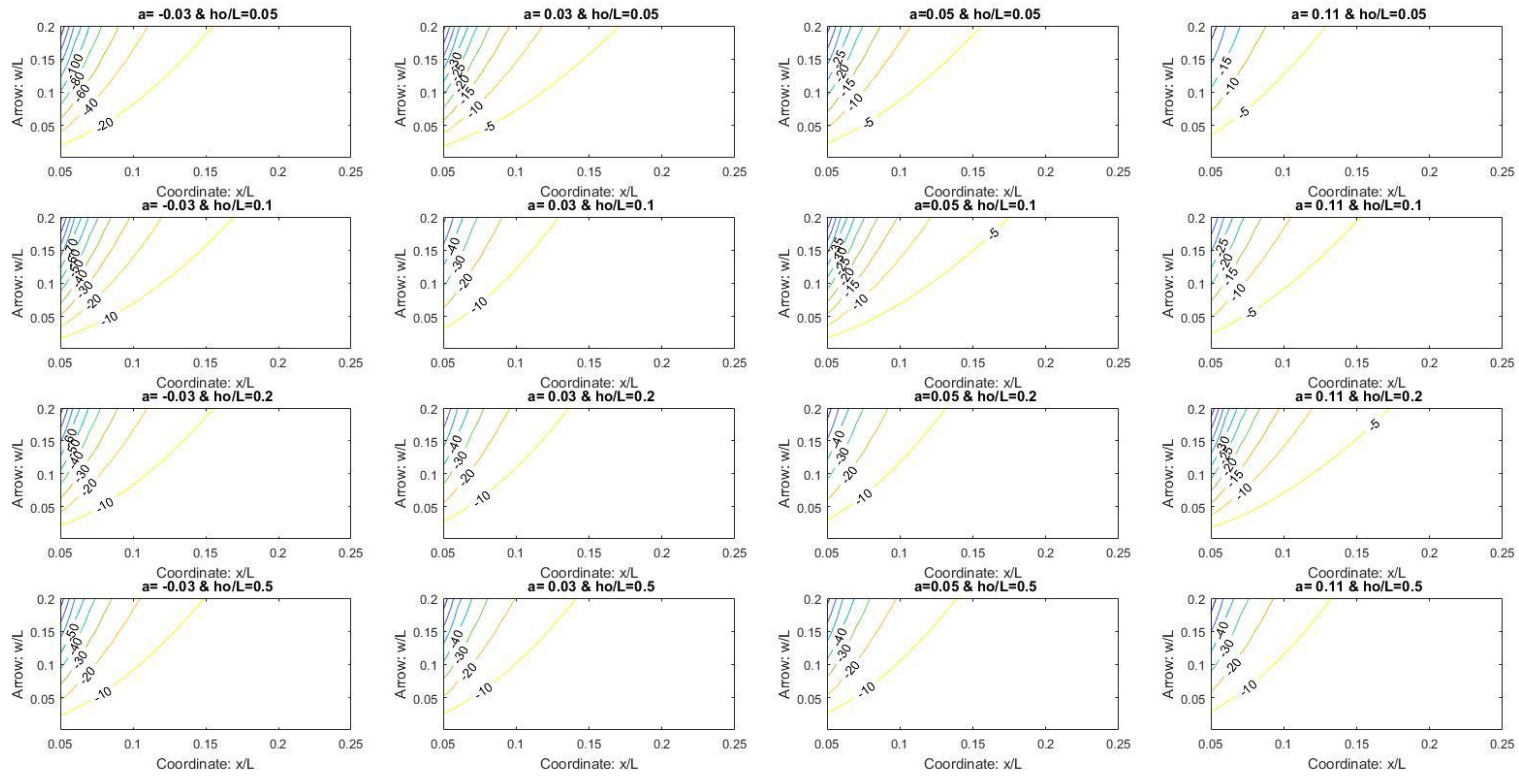


Figure 15. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο τη μήκος της διατομής, όταν σε μία θέση «x», έχουμε μία συγκεκριμένη κατακόρυφη μετακίνηση «w(x)». Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει ένας διαφορετικός συνδυασμός του αρχικού ύψους της διατομής, και του ρυθμού μεταβολής αυτού, ενώ το αρχικό πλάτος της διατομής θεωρείται σταθερό. Τα διαγράμματα αυτά έχουν μία μορφή, που εμφανίζεται αρκετά συχνά, σε αυτού του είδους τα διαγράμματα.

The Total Electrical Load For a Combination Of the arrow and the height gradient: $Q/(m^*L)*(b/L)^{-1}$

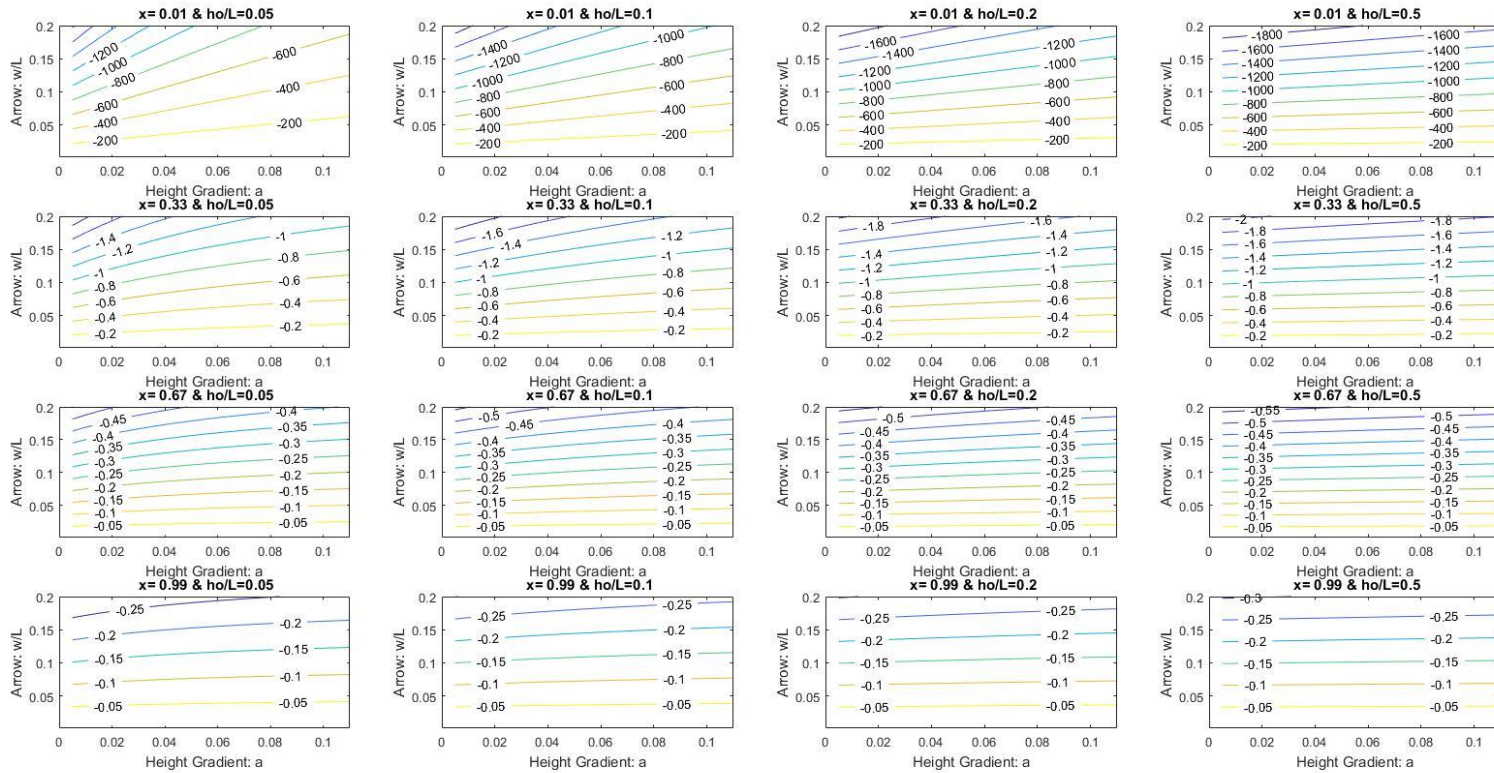


Figure 16. Το συνολικά παραγόμενο φορτίο, σε όλο το μήκος της διατομής, για έναν συνδυασμό, του βέλους κάμψης σε μία συγκεκριμένη θέση «x», και του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής.

Σε κάθε διάγραμμα, η θέση «x» και το αρχικό ύψος της διατομής, παίρνουν συγκεκριμένες τιμές, όπως φαίνεται παραπάνω, και το αρχικό πλάτος της διατομής θεωρείται σταθερό.

The Total Electrical Load For a Combination Of the arrow and the height : $Q/(m \cdot L) \cdot (b/L)^{-1}$

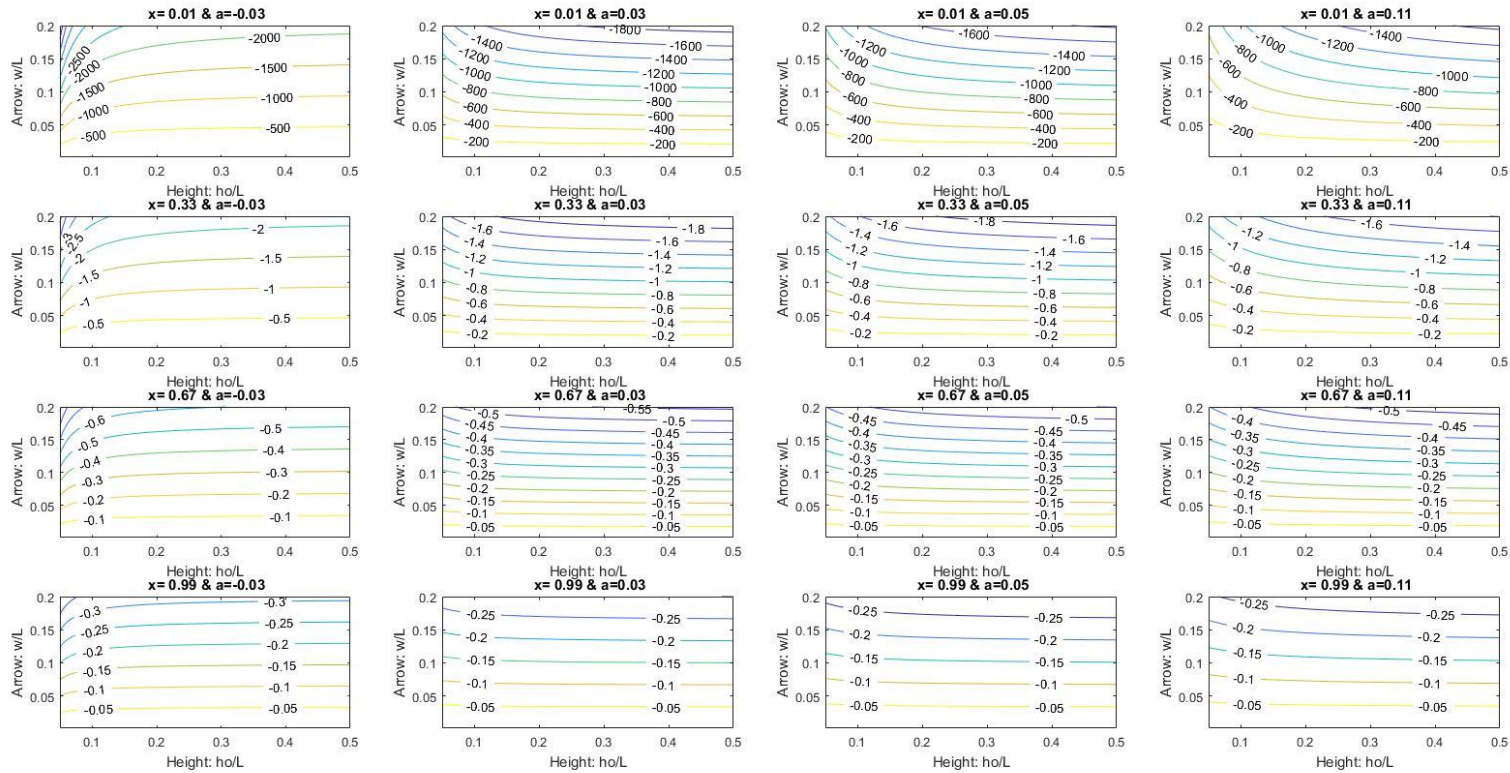


Figure 17. Η μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό του βέλους κάμψης σε μία συγκεκριμένη θέση «x», και του αρχικού ύψους της διατομής.

Σε κάθε διάγραμμα, διαφοροποιείται η θέση «x» και ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της διατομής.

Σημαντική παρατήρηση είναι ότι με αρνητικούς ρυθμούς μεταβολής, οι ισοψείς αλλάζουν κοίλα.

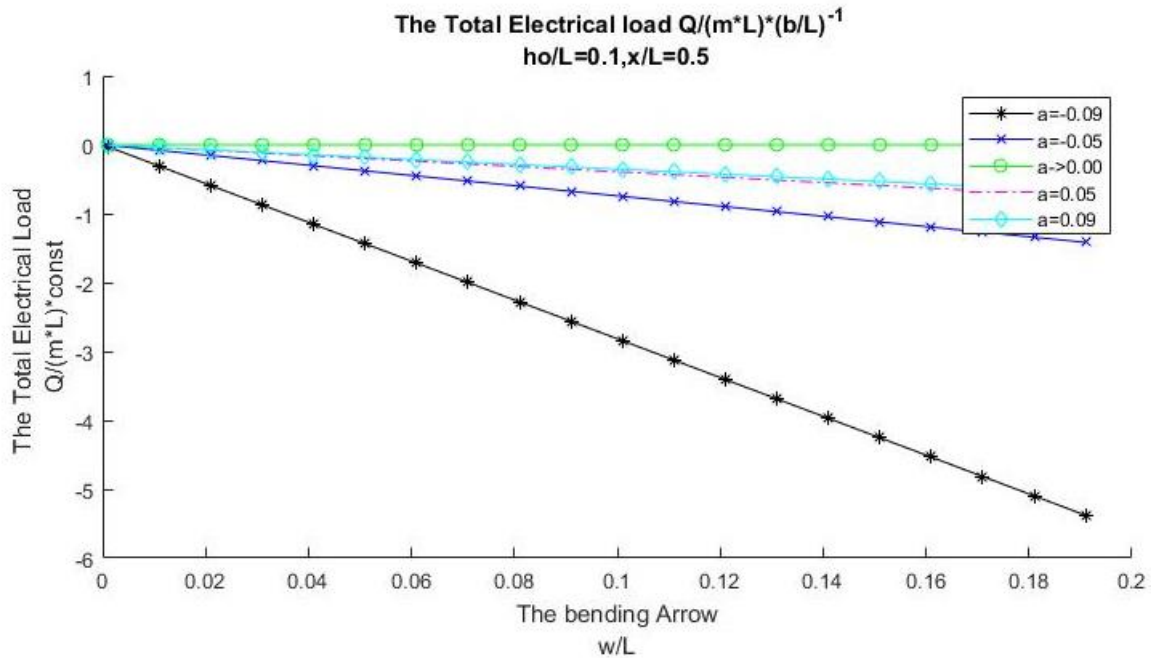


Figure 18. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, σαν συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης που θα παρατηρηθεί στο μέσο της δοκού, για ένα σταθερό αρχικό ύψος της διατομής. Οι διάφορες καμπύλες συμβολίζουν τους διάφορους ρυθμούς μεταβολής του ύψους της διατομής. Το φαινόμενο αυξάνεται, για μικρότερους ρυθμούς μεταβολής του ύψους της διατομής.

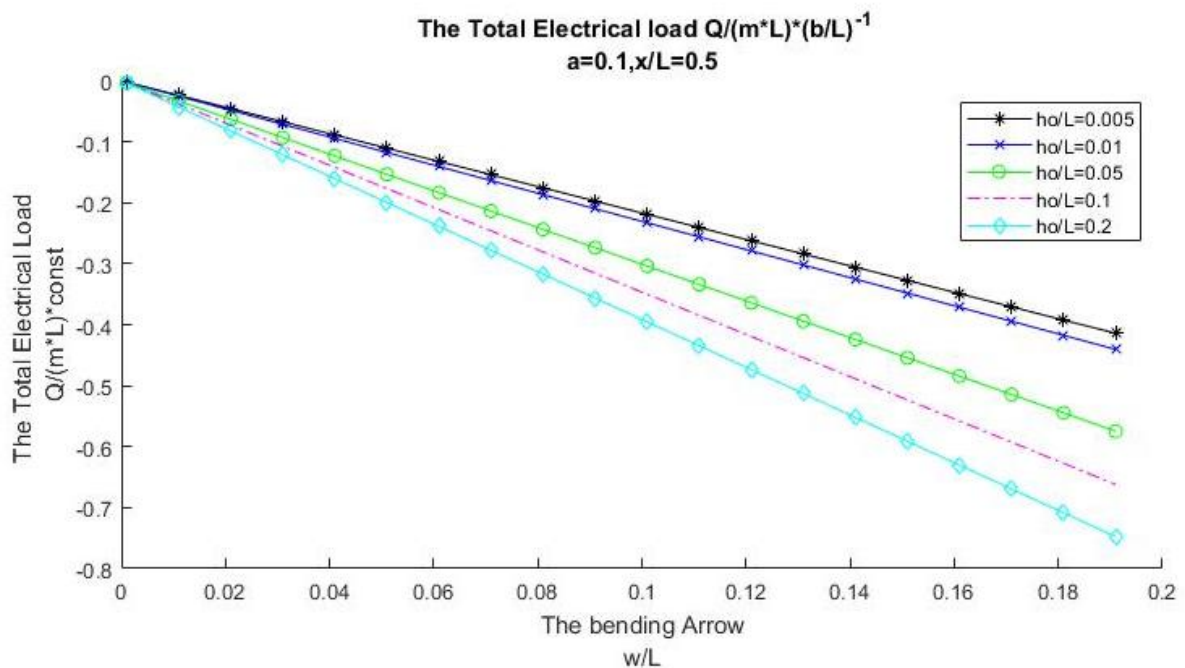


Figure 19. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της διατομής, ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης που θα παρατηρηθεί στο μέσον της δοκού, για μία συγκεκριμένη, σχετικά μεγάλη κλίση του ύψους. Κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε διαφορετικό αρχικό ύψος της διατομής. Αυτό το διάγραμμα υποστηρίζει ότι μεγαλύτερη διάσταση επιφέρει μεγαλύτερο φορτίο, όμως πρέπει κανείς να αναλογιστεί, την εκθετική μείωση που προκαλεί το ύψος της διατομής, στο βέλος κάμψης, σύμφωνα με της θεωρία δοκού σε κάμψη. Άρα δεν είναι τόσο απλό όσο φαίνεται.

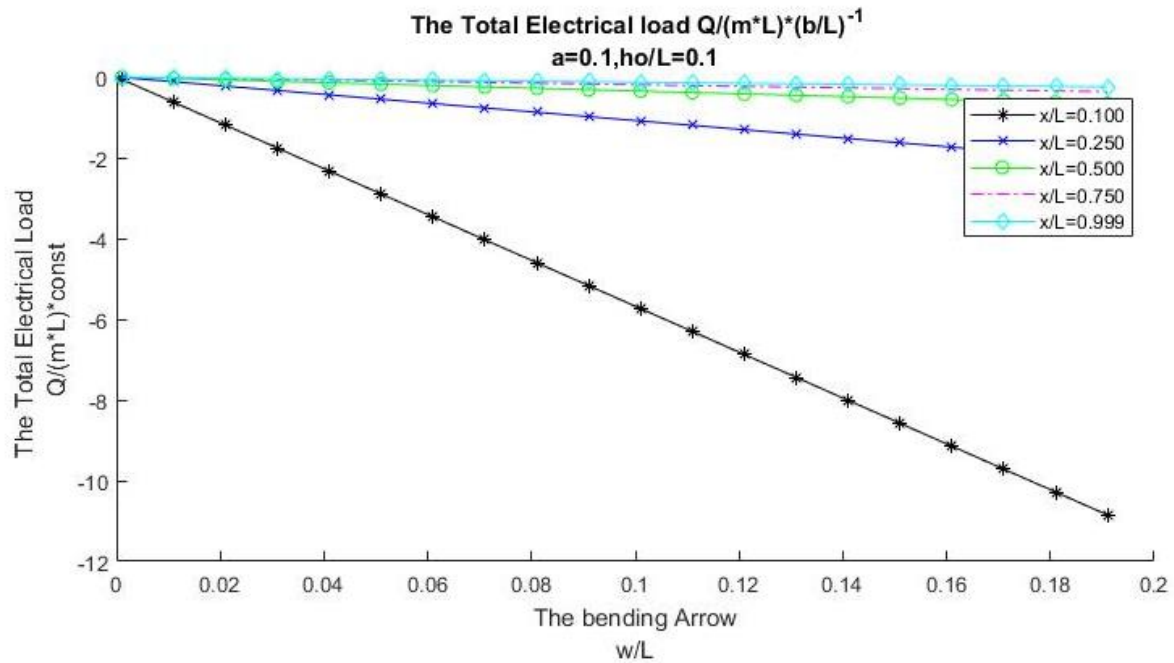


Figure 20. Το συνολικά ηλεκτρικό παραγόμενο φορτίο, σε όλο το μήκος της διατομής, καθώς η γεωμετρική διάσταση θεωρείται σταθερή, με έναν σχετικά μεγάλο ρυθμό μεταβολής, ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης σε διάφορες θέσεις, όπως δείχνουν οι διάφορες καμπύλες. Σε μία μακρινή από την πάκτωση, θέση το μεγαλύτερο βέλος εμφανίζεται πιο εύκολα, ενώ σε μία κοντά στην πάκτωση θέση, έχουμε, πολύ μικρότερα βέλη κάμψης.

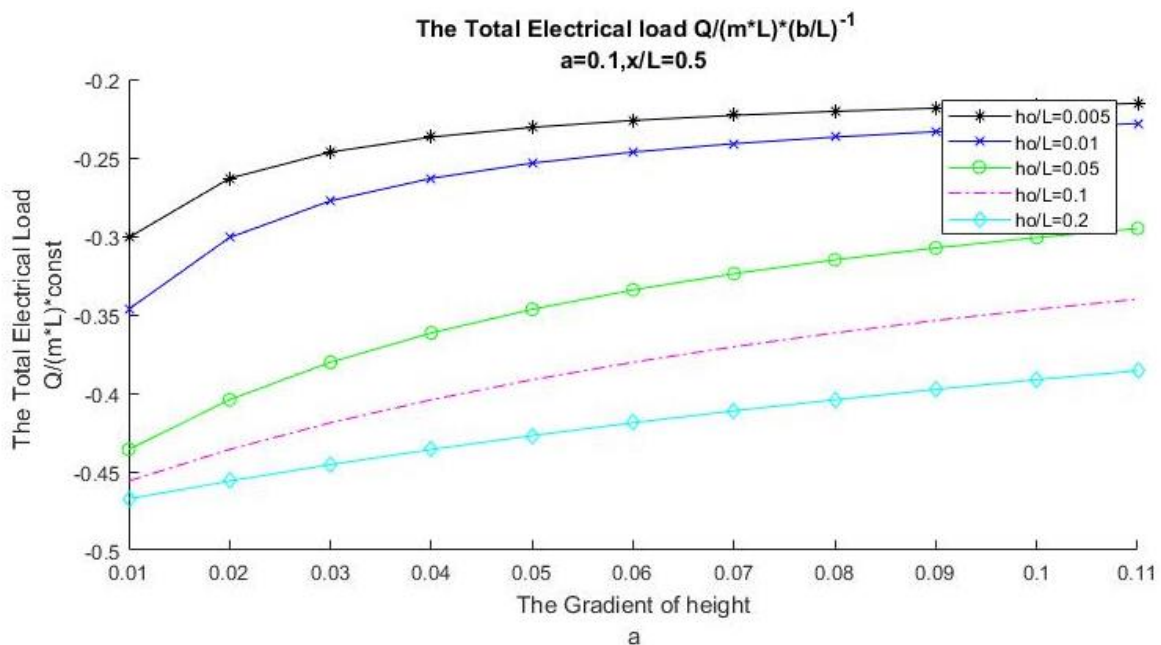


Figure 21. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου, σε όλο το μήκος της δοκού, όταν στο μέσο της δοκού παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, για διάφορες τιμές του αρχικού πλάτους. Μεγαλύτερο ηλεκτρικό φορτίο, επιτυγχάνει κανείς, για μικρούς ρυθμούς μεταβολής του ύψους, και μικρά αρχικά ύψη διατομής.

3.9. Περίπτωση 1.2.2. Πρόβολος μεταβλητού ύψους με καμπτική ροπή στην άκρη

Όπως και τον πρόβολο σταθερής διατομής που τον υποβάλαμε σε καμπτική ροπή στην άκρη, έτσι θα επαναλάβουμε την διαδικασία, σε πρόβολο μεταβλητής διατομής. Το ύψος συσχετίζεται με την συντεταγμένη κατά μήκος της δοκού με τον προηγούμενο τρόπο. Όπως παρατηρήθηκε πολύ σωστά, αυτή η μεταβολή του ύψους δεν μπορεί να είναι ανεξέλεγκτη, πρέπει να ισχύουν οι παραδοχές Bernoulli, και έτσι ο συντελεστής κλίσης «α» να παίρνει μέγιστες και ελάχιστες τιμές, παρόμοια με την προηγούμενη ενότητα.

- « $\alpha_{max} = 0.11$ »
- « $\alpha_{min} = \max(-0.11 ; -\frac{h_0}{x})$ »

Ο αριθμός «0.11» αντιστοιχεί σε μία κλίση γύρω στις «6.3°». Είναι αρκετά μικρή, και εννοείται ότι στα πειράματα, που δοκιμάσαμε να εκτελέσουμε, χρησιμοποιήσαμε μεγαλύτερες, αλλά τουλάχιστον οι παραδοχές «Bernoulli» σίγουρα ισχύουν.

$$\theta = \arctan(\alpha)$$

Σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα του προβόλου με μεταβλητό ύψος και καμπτική ροπή στην άκρη περιέχει τις εξής παραμέτρους:

- ✓ Το αρχικό ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Τον συντελεστή μεταβολής του πλάτους: α [-]
- ✓ Το πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Την κατακόρυφη δύναμη που βρίσκεται στην άκρη: P [N]
- ✓ Την συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

Ο φορέας του προβλήματος μπορεί να επιλυθεί εύκολα με χέρι. Έτσι είναι εύκολος ο προσδιορισμός των δράσεων στήριξης, των διαγραμμάτων των εντατικών μεγεθών, και των εξισώσεων που προεξοφλούν αυτά τα διαγράμματα.

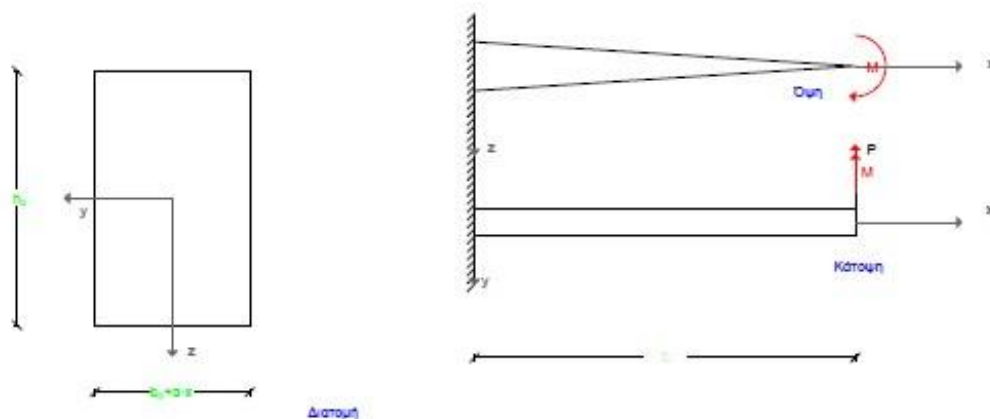


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.2.2. είναι πρόβολος διατομής μεταβλητού ύψους με καμπτική ροπή στην άκρη

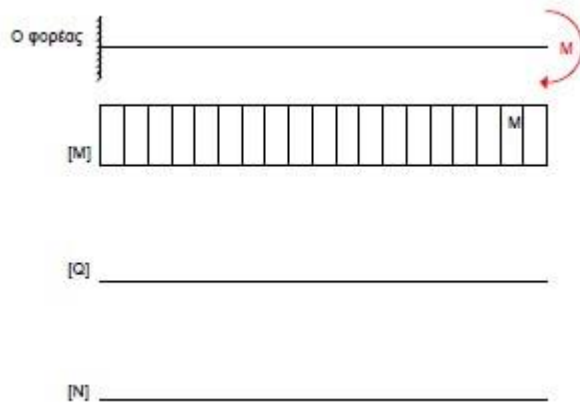


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη στην περίπτωση προβόλου μεταβλητού ύψους διατομής με καμπτική ροπή στην άκρη.

Οι αντιδράσεις στήριξης.

- $V_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $H_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $M_{\text{πάκτωσης}} = M$ [kN*m]

Και οι εξισώσεις των διαγραμμάτων [M], [Q], [N].

- ✓ $M(x) = -M$ [kN*m]
- ✓ $Q(x) = 0$ [kN]
- ✓ $N(x) = 0$ [kN]

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται ως:

- ✓ Εμβαδόν: $A = (h_0 + \alpha * x) * b_0$ [m²]
- ✓ Ροπή Αδρανείας $I_{yy} = \frac{b_0 * (h_0 + \alpha * x)^3}{12}$ [m⁴]
- $I_{zz} = \frac{(b_0)^3 * (h_0 + \alpha * x)}{12}$ [m⁴]

Οι δυσκολίες αρχίζουν με το βέλος κάμψης το οποίο είναι όχι μόνο παράγουσα της ροπής αλλά και της γεωμετρίας της δοκού.

$$E * I(x) * w''(x) = -M(x) = M$$

$$w''(x) * E * \frac{b_0 * (h_0 + \alpha * x)^3}{12} = M$$

$$w''(x) = 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * (h_0 + \alpha * x)^{-3}$$

$$W'(x) = -\frac{1}{2} * 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * \alpha^{-1} * (h_0 + \alpha * x)^{-2} + C^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : « $w'(x = 0) = 0$ »

$$W'(0) = -\frac{1}{2} * 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * \alpha^{-1} * (h_0)^{-2} + C = 0 \rightarrow$$

¹ Η ολοκλήρωση, έγινε με το χέρι, διότι ήταν αρκετά απλή.

$$C = \frac{1}{2} * 12 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * \alpha^{-1} * (h_0)^{-2}$$

Και άρα καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W'(x) = 6 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * \alpha^{-1} * \left(\frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{(h_0 + \alpha * x)^2} \right)$$

$$W(x) = 6 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * \alpha^{-1} * \left(\frac{1}{h_0^2} * x + \alpha^{-1} * \frac{1}{h_0 + \alpha * x} \right) + C^2$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : « $w(x = 0) = 0$ »

$$W(0) = 6 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * \alpha^{-1} * \left(+\alpha^{-1} * \frac{1}{h_0} \right) + C = 0$$

$$C = -6 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * \alpha^{-2} * \frac{1}{h_0}$$

Άρα το βέλος κάμψης δίνεται με την παρακάτω σχέση, αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W(x) = 6 * \frac{M}{E} * b_0^{-1} * \alpha^{-2} * \left(\frac{a}{h_0^2} * x - \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_0 + \alpha * x} \right)$$

Αυτή η σχέση, με σκοπό να αποτυπωθεί ως διάγραμμα, πρέπει να αδιαστατοποιηθεί. Με αυτά που περιγράφηκαν προηγουμένως, έχουμε:

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} * \alpha^{-2} * \left(a * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-2} * x - \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1} + \left(\frac{h_0}{L} + a * \frac{x}{L} \right)^{-1} \right)^3$$

Με την παραπάνω αδιάστατη σχέση είναι δυνατή η παραγωγή διαγραμμάτων, που αφορούν την μεταβολή της κατακόρυφης παραμόρφωσης σε έναν πρόβολο μεταβαλλόμενου ύψους, αλλάζοντας τις παραμέτρους του προβλήματος. Τα διαγράμματα, παρουσιάζονται παρακάτω.

Στην συνέχεια γίνεται προσδιορισμός των τάσεων που έχουν «gradient». Αυτό γίνεται με την θεωρία δοκού σε κάμψη, που έχει ως εξής.

$$\epsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E * I_{yy}(x)} * Z$$

$$\epsilon_{xx} = -12 * \frac{M}{E * b_0 * (h_0 + \alpha * x)^3} * Z$$

² Η ολοκλήρωση, έγινε με το χέρι, διότι ήταν αρκετά απλή.

³ Σε κάθε περίπτωση, μετά από κάθε ολοκλήρωση, έγινε και επαλήθευση, με δύο τρόπους. Ο πρώτος ορίζει ότι η δεύτερη παράγωγος του αποτελέσματος, πρέπει να μας δίνει την αρχική σχέση, ενώ ο δεύτερος, ορίζει το αποτέλεσμα του ορίου για « $\alpha \rightarrow 0$ » να είναι ίσο, με το αποτέλεσμά της περίπτωσης 1.0.2.

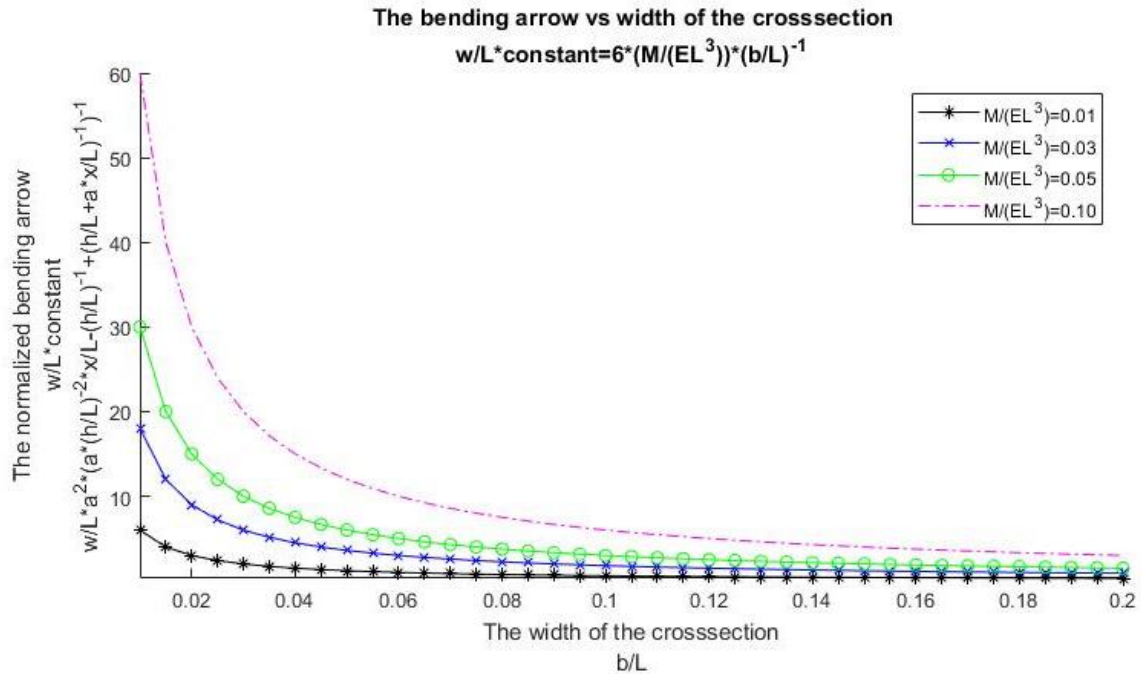


Figure 3. Η κατακόρυφη παραμόρφωση, ως συνάρτηση του αρχικού πλάτους της διατομής. Το εξωτερικό φορτίο παίρνει διάφορες τιμές ενώ το αρχικό ύψος της διατομής, ο ρυθμός μεταβολής του και η θέση που παρατηρούμε την κατακόρυφη παραμόρφωση, είναι σταθερά, στο πρώτο μέρος της εξίσωσης.

Τα μεγέθη: αρχικό πλάτος διατομής και κατακόρυφη μετακίνηση είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Όσο μεγαλύτερο αρχικό πλάτος διατομής διαθέτει μία διατομή τόσο πιο μικρό θέλος κάμψης θα έχει. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει και το αντίθετο.

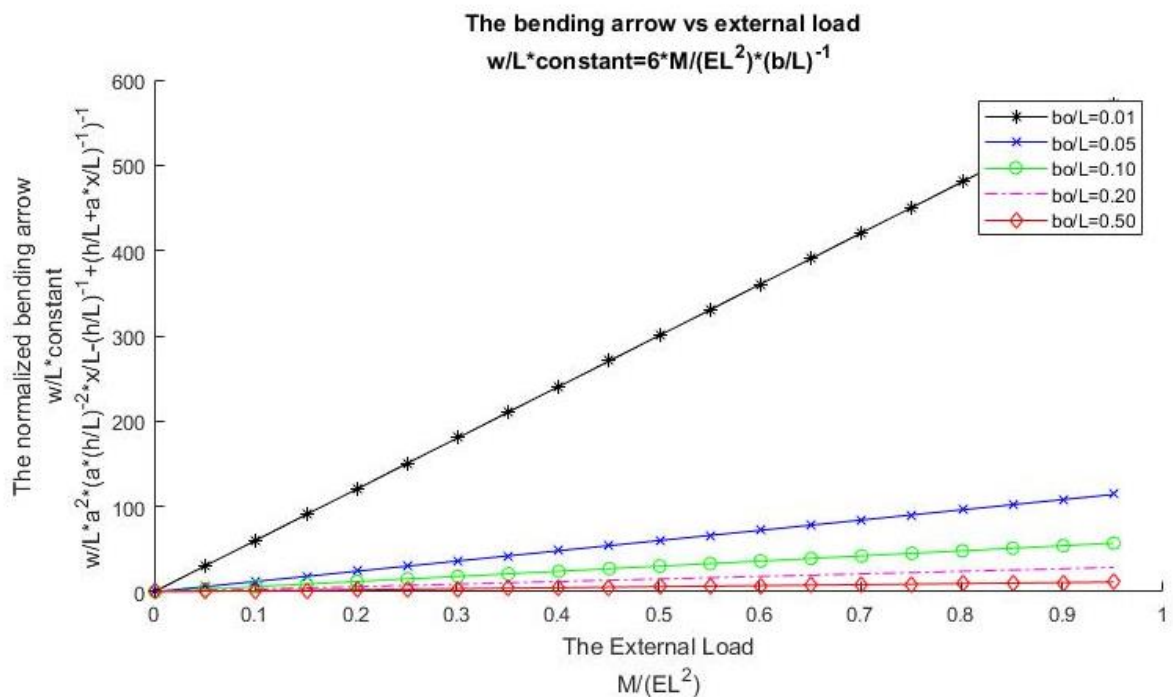


Figure 4. Σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της κατακόρυφης παραμόρφωσης, ως συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου. Σε ομοιότητα με το προηγούμενο διάγραμμα, η σχέση είναι για διάφορες τιμές του αρχικού πλάτους ενώ όλες οι άλλες μεταβλητές θεωρούνται σταθερές.

Τα δύο αυτά μεγέθη είναι ανάλογα.

Για όσο μεγαλύτερο φορτίο, τόσο μεγαλύτερο είναι το φαινόμενο. Το ερώτημα είναι η αντοχή. Αν θέλουμε να συνδυάσουμε το μικρό πλάτος με μεγάλη δύναμη, τι θα καταφέρναμε.

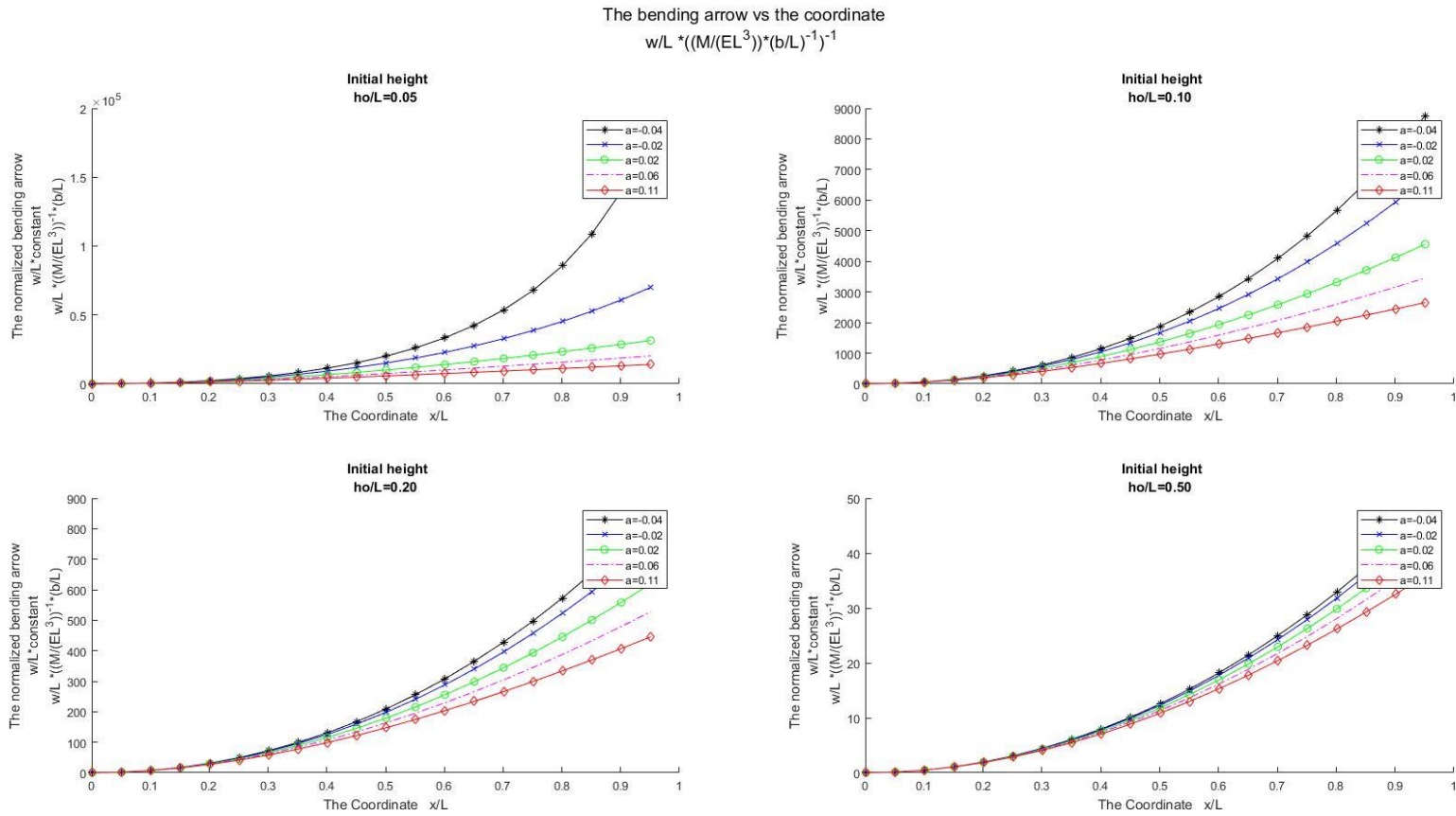


Figure 5. Η μεταβολή της κατακόρυφης μετακίνησης, ως συνάρτηση της συντεταγμένης κατά μήκος της δοκού. Το αρχικό ύψος της διατομής και ο ρυθμός μεταβολής του ύψους παίρνουν διάφορες τιμές, καθώς όλες οι άλλες μεταβλητές όπως το αρχικό πλάτος της διατομής και το εξωτερικό φορτίο, θεωρούνται σταθερές.

Η κλίση των διαγραμμάτων είναι αναμενόμενη, και σχηματικά παρόμοια με άλλες περιπτώσεις.

Υπάρχει μεγαλύτερη κατακόρυφη παραμόρφωση, σε διατομές με μικρά αρχικά ύψη, και με μικρούς ρυθμούς μεταβολής του ύψους της διατομής. Συγκεκριμένα, μία δοκός με μηδενική κλίση, έχει βέλος μεγαλύτερο από μία με θετική κλίση.

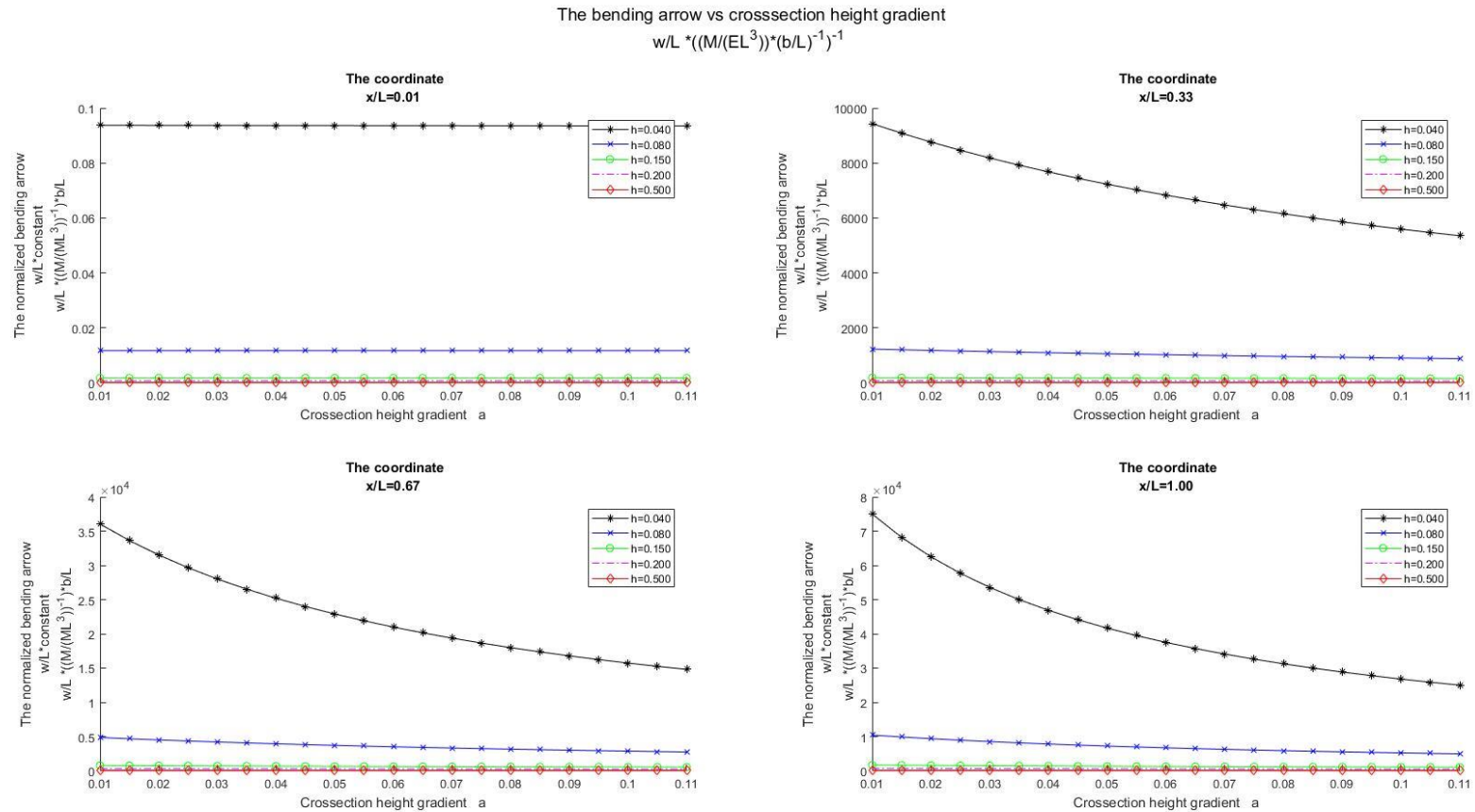


Figure 6. Για διάφορες θέσεις κατά μήκος της δοκού, πως μεταβάλλεται η κατακόρυφη παραμόρφωση ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, καθώς το αρχικό ύψος της μεταβάλλει τις τιμές του, όπως φαίνεται στο υπόμνημα των διαγραμμάτων (ο όρος «h» αντιστοιχεί στο κανονικοποιημένο αρχικό ύψος της διατομής, όπως αυτή η κανονικοποίηση περιγράφηκε αρχικά).

Σε μία θέση μη μηδενικής κατακόρυφης παραμόρφωσης, μπορεί κανείς να διακρίνει ότι με την αύξηση του ρυθμού μεταβολής επιτυγχάνεται μείωση του βέλους κάμψης, δηλαδή, ένας πρόβολος με όψη, μορφής τραπεζίου, με την μικρή βάση πακτωμένη (ο ρυθμός μεταβολής ύψους διατομής είναι θετικός), έχει μικρότερο βέλος με έναν όμοιο με μηδενικό ρυθμό μεταβολής.

Η μείωση του αρχικού ύψους της διατομής επιφέρει και αυτή αύξηση του βέλους κάμψης.

The bending arrow vs The initial crossection height
 $w/L * ((M/(EL^3)) * (b/L)^{-1})^{-1}$

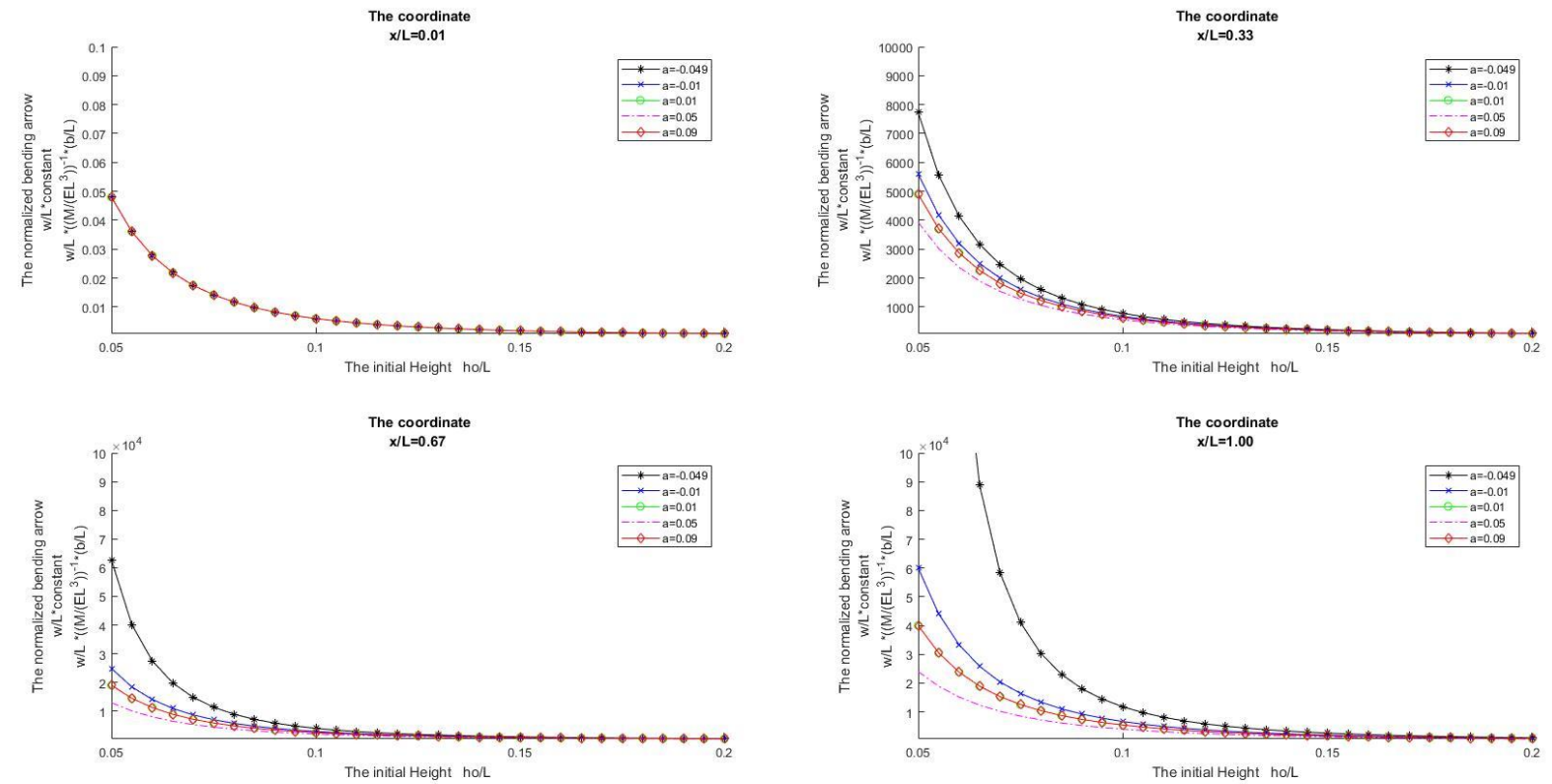


Figure 7. Πως μεταβάλλεται η κατακόρυφη παραμόρφωση, σε διάφορες θέσεις κατά μήκος της δοκού, σε σχέση με το αρχικό πλάτος της διατομής, καθώς ο ρυθμός μεταβολής της διατομής παίρνει διάφορες τιμές, και το εξωτερικό φορτίο, όπως και το πλάτος μένουν σταθερά. Όπως ήταν αναμενόμενο πλέον, και αυτά τα διαγράμματα κάνουν ευδιάκριτη, την συσχέτιση του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, με την κατακόρυφη παραμόρφωση. Όσο μεγαλύτερος ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της διατομής, τόσο μικρότερη η κατακόρυφη παραμόρφωση.

The bending arrow for a combination of
Height gradient (a) - Initial height (ho/L)
 $w/L * ((M/(EL^3)) * (b/L)^{-1})^{-1}$

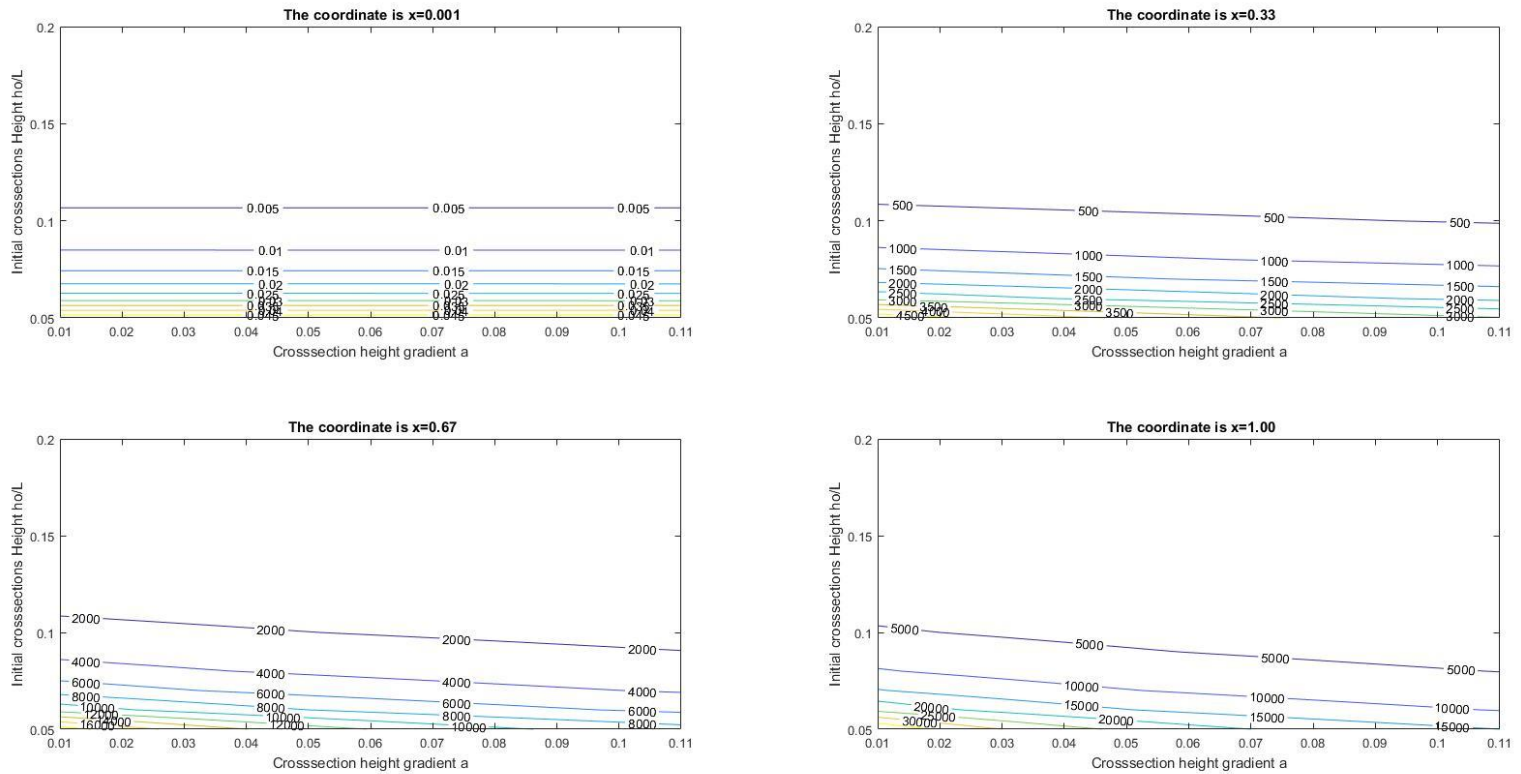


Figure 8. Η κατακόρυφη μετακίνηση σε μία συγκεκριμένη θέση στο μήκος της δοκού, όπως φαίνεται και στα διαγράμματα - μία θέση για κάθε διάγραμμα - για έναν συνδυασμό αρχικού ύψους διατομής και ρυθμού μεταβολής αυτού. Οι υπόλοιποι παράγοντες θεωρούνται σταθεροί. Από τα παραπάνω διαγράμματα μπορεί κανείς να συμπεράνει τις παρατηρήσεις, που σημειώθηκαν και στα προηγούμενα διαγράμματα. Αύξηση του βέλους κάμψης ισοδυναμεί, με μείωση του ύψους της διατομής, αλλά και επίτευξη, μικρού συντελεστή «α», (αρνητικό).

Ενώ η πολικότητα, προσδιορίζεται με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής, δηλαδή την παράγωγο της προς την συντεταγμένη του άξονα στον οποίο βρίσκεται (άξονα «3» ή αλλιώς «z»), έχουμε τάσεις στον άξονα «1» και ρυθμό μεταβολής αυτών στον άξονα «3», άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον όρο « μ_{13} ».

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = -\mu_{13} * 12 * \frac{M}{E * b_0 * (h_0 + \alpha * x)^3}$$

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος του προβόλου. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδη τμήματα. Η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L -\mu_{13} * 12 * \frac{M}{E * b_0 * (h_0 + \alpha * x)^3} * b_0 * dx$$

$$Q_{13} = \int_0^L -\mu_{13} * 12 * \frac{M}{E * (h_0 + \alpha * x)^3} * dx$$

$$Q_{13} = 6 * \mu_{13} * \frac{M}{E} * a^{-1} * [(h_0 + \alpha * x)^{-2}]_0^L \quad 4$$

$$Q_{13} = 6 * \mu_{13} * \frac{M}{E} * a^{-1} * [(h_0 + \alpha * L)^{-2} - (h_0)^{-2}]$$

Και εφαρμόζοντας την κανονικοποίηση που περιγράφηκε στην αρχή:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 6 * \frac{M}{E * L^3} * a^{-1} * \left[\left(\frac{h_0}{L} + \alpha \right)^{-2} - \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-2} \right]$$

Η σχέση αυτή στην συνέχεια μπορεί να αποτυπωθεί, αφού πρώτα, ακολουθήσει μερικός σχολιασμός: Το εξωτερικό φορτίο δεν είναι πολύ ενδιαφέρον, αφού η σχέση είναι γραμμική, μπορώ ευκολά να το θεωρήσω σταθερό στο αριστερό μέρος της εξίσωσης. Γι' αυτόν τον λόγο και το κάνω.

Τα διαγράμματα που κατασκευάζονται για το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο παρουσιάζονται παρακάτω, ενώ στην συνέχεια παρουσιάζονται και διαγράμματα για την πολικότητα, η οποία δίνεται από την σχέση:

$$\frac{Pol_{13} * L}{\mu_{13}} = -12 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L} \right)^{-3}$$

⁴ Το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα αντιμετωπίστηκε με το χέρι. Για λόγους ακριβείας, έγινε επαλήθευση, αλλά στην παρούσα εργασία, απουσιάζει, για λόγους, όπως η εξοικονόμηση χώρου και χρόνου.

The Total Electrical Load vs The gradient of height
For different initial height : h_0/L & For different External Loads : $M/(EL^3)$

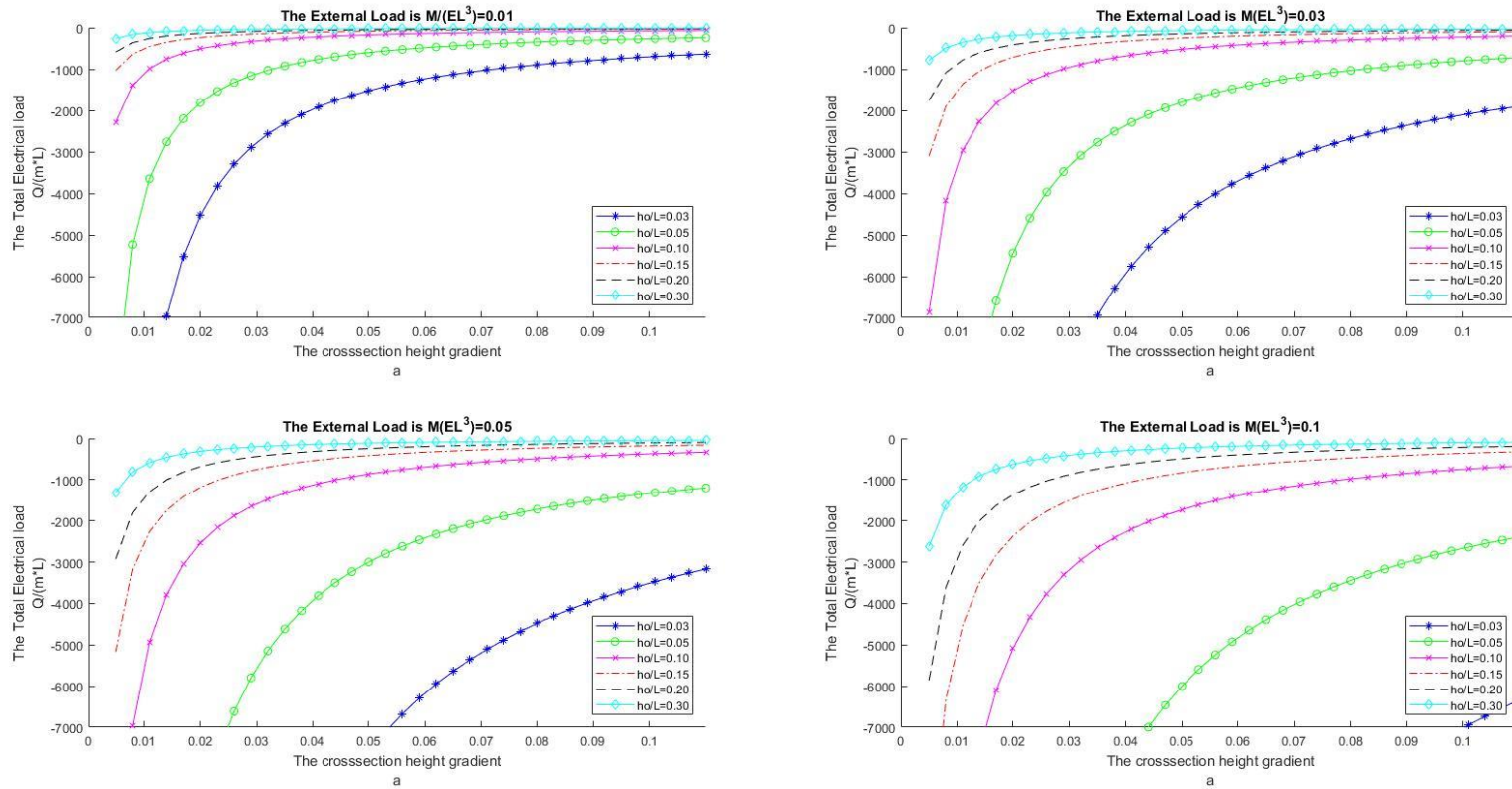


Figure 9. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού σαν συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους διατομής της δοκού για διάφορες τιμές του αρχικού ύψους της διατομής, για διάφορα εξωτερικά φορτία.

Όπως ήταν αναμενόμενο, το μεγαλύτερο το εξωτερικό φορτίο, δίνει μεγαλύτερο ηλεκτρικό παραγόμενο φορτίο.

Μικρότερα αρχικά ύψη διατομής δίνουν μεγαλύτερα ηλεκτρικά φορτία.

Μικρότεροι ρυθμοί μεταβολής του πλάτους της διατομής δίνουν μεγαλύτερα ηλεκτρικά φορτία.

The Total Electrical Load vs The initial crosssection height
For different gradients of height :a & For different External Loads : $P/(EL)^2$

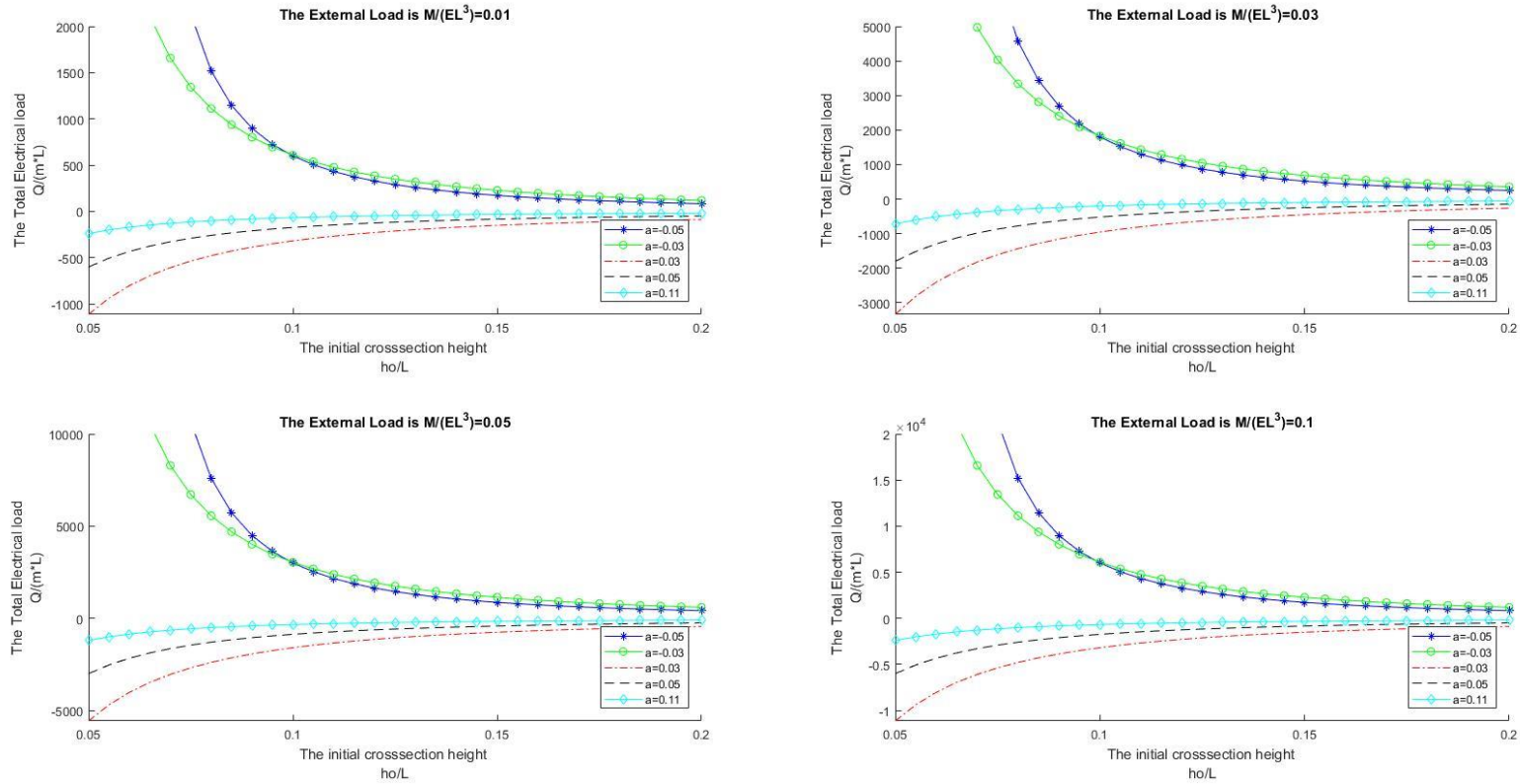


Figure 10. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σαν συνάρτηση του αρχικού ύψους της διατομής, για διάφορες τιμές του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής. Το εξωτερικό φορτίο παίρνει διαφορετική τιμή σε κάθε διάγραμμα.

Μεγάλα συνολικά παραγόμενα ηλεκτρικά φορτία, αντιστοιχούν σε συνδυασμό, μικρού αρχικού ύψους της διατομής, με μικρό ρυθμό μεταβολής αυτού. Για μεγάλο εξωτερικό φορτίο, έχουμε μεγιστοποίηση του φαινομένου.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι αυτή εδώ η περίπτωση, έχει μεγάλη διαφορά από προηγούμενες, π.χ. με την περίπτωση 1.2.1., διότι σε αυτήν, ο συντελεστής «α» παίζει τεράστιο ρόλο, λόγω πρόσημου. Εδώ ένα αρνητικό «α» παράγει διαφορετικό φορτίο, σε σχέση με ένα θετικό.

Κάτι έγινε στην ολοκλήρωση, που έκανε την συνάρτηση περιττή, ως προς το «α»

The Total Electrical Load for a combination of
The crosssection height (ho/L) & its gradiend (a)

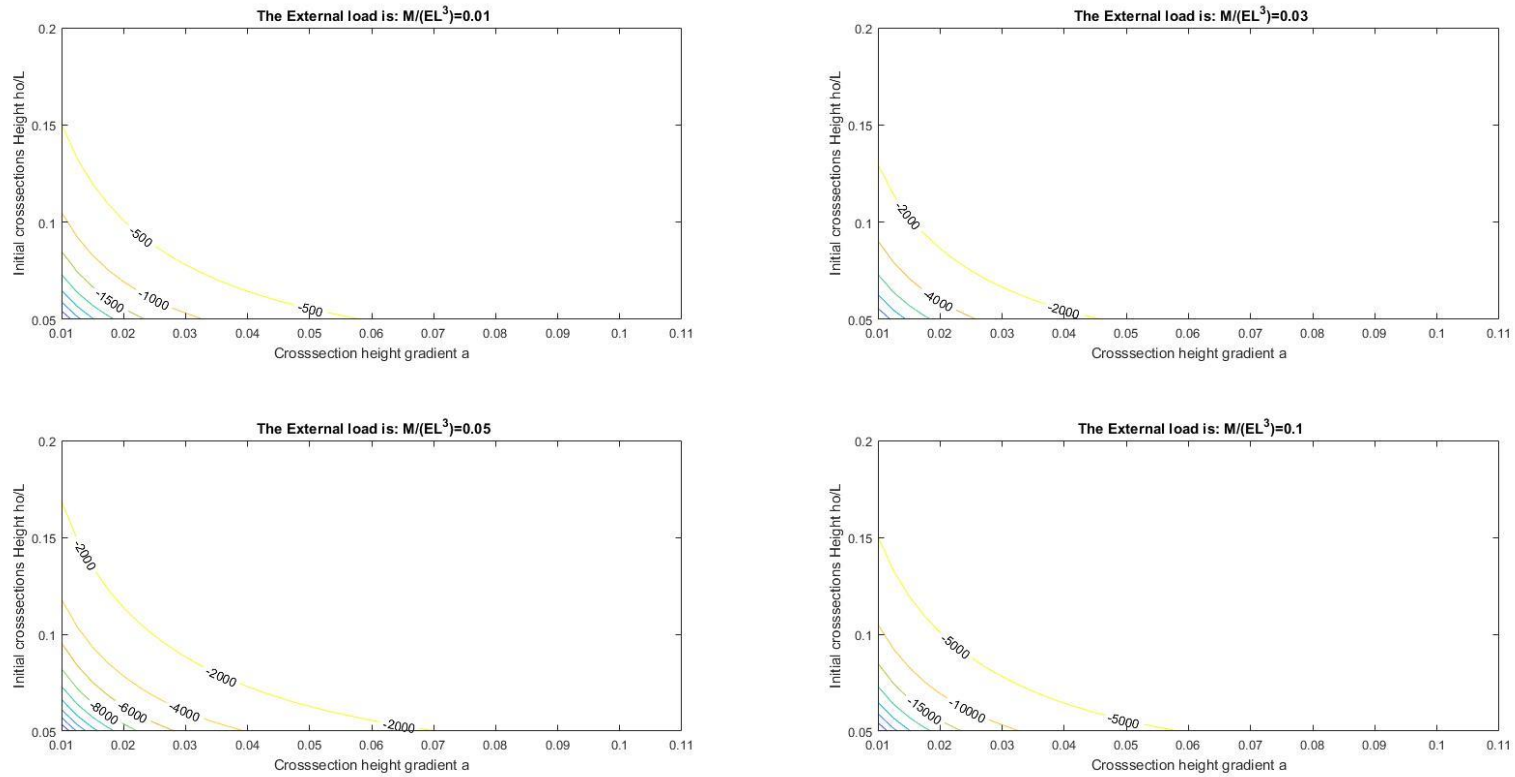


Figure 11. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό, αρχικού ύψους της διατομής, και ρυθμού μεταβολής αυτού. Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει διαφορετικό εξωτερικό φορτίο.

Από αυτό το διάγραμμα μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι είναι πολύ πιο δραστική η μείωση του αρχικού ύψους της διατομής, παρά η μείωση του ρυθμού μεταβολής αυτού.

Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι ότι, σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, που αντί της ροπής υπήρχε φορτίο, έχει αλλάξει η καμπυλότητα των ισοϋψών. Εδώ είναι καμπύλες, ενώ προηγουμένως ευθείες. Μιλάμε για διαφορά μίας τάξεως, όση ήταν και η διαφορά του εντατικού μεγέθους της ροπής. Έτσι το αποτέλεσμα είναι λογικότατο.

The Polarization for a combination of the initial crosssection height (ho/L) and its gradient (a)
 $(P \cdot L/m) \cdot (b/L) \cdot (M/(EL^3))^{-1}$

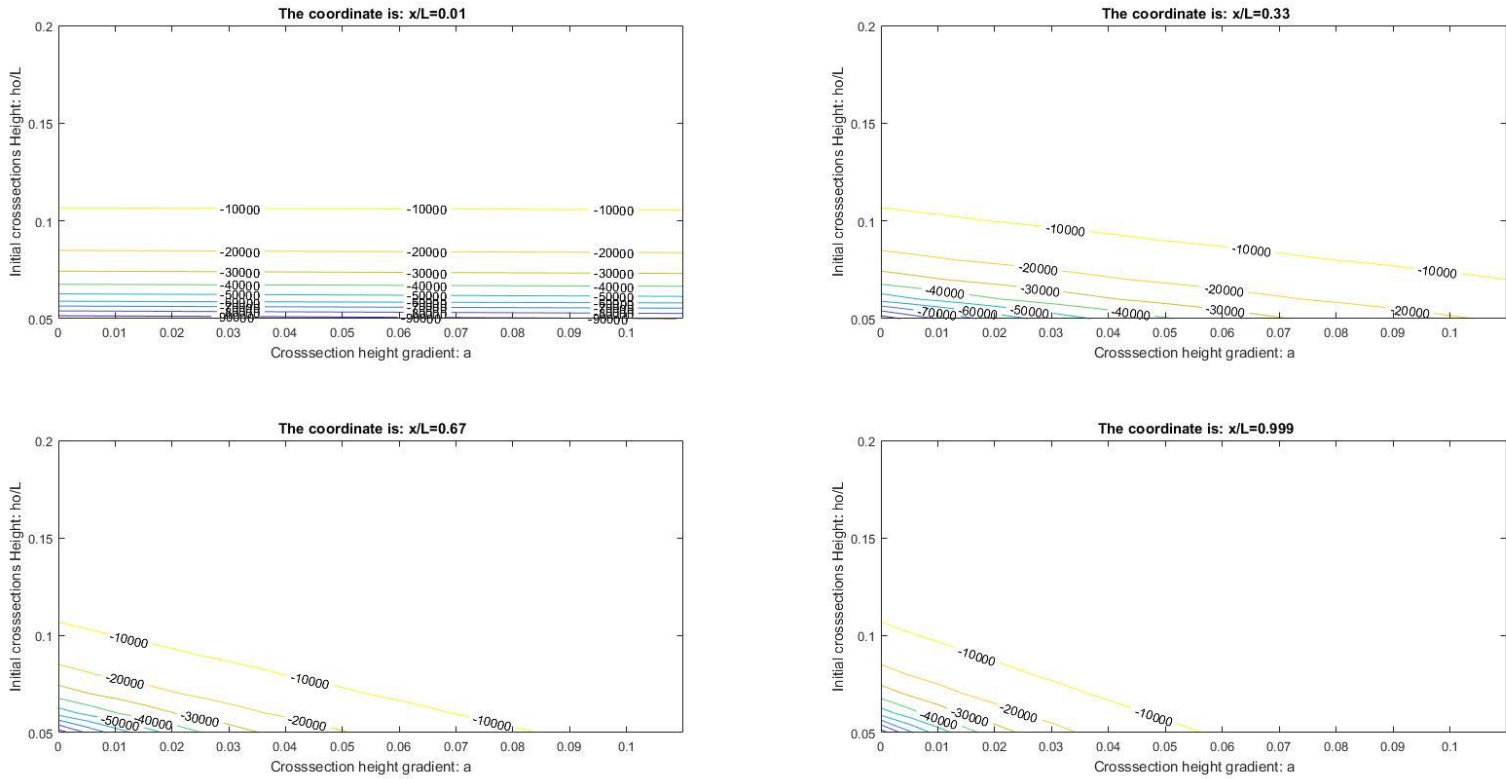


Figure 12. Η πολικότητα, που δημιουργείται σε μία συγκεκριμένη θέση, κατά μήκος της δοκού (σε κάθε διάγραμμα, άλλη θέση), ως ένας συνδυασμός αρχικού ύψους της διατομής, και του ρυθμού μεταβολής αυτού. Το αρχικό πλάτος της διατομής και το εξωτερικό φορτίο, θεωρούνται σταθερά στο πρώτο μέρος της εξίσωσης. Σημαντικές διαφορές είναι ότι στην περίπτωση 1.2.1. υπήρχε μία μεταβολή των τιμών των ισοϋψών, με την μεταβολή της συντεταγμένης. Εδώ δεν υπάρχει αυτό. Λογικό συμπέρασμα, αφού η καμπτική ροπή είναι σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού, αντίθετα με την περίπτωση 1.2.1. στην οποία αλλάζει (ενεργεί το «bulk effect»).

The Polarization vs the gradien of the crosssection height (a)

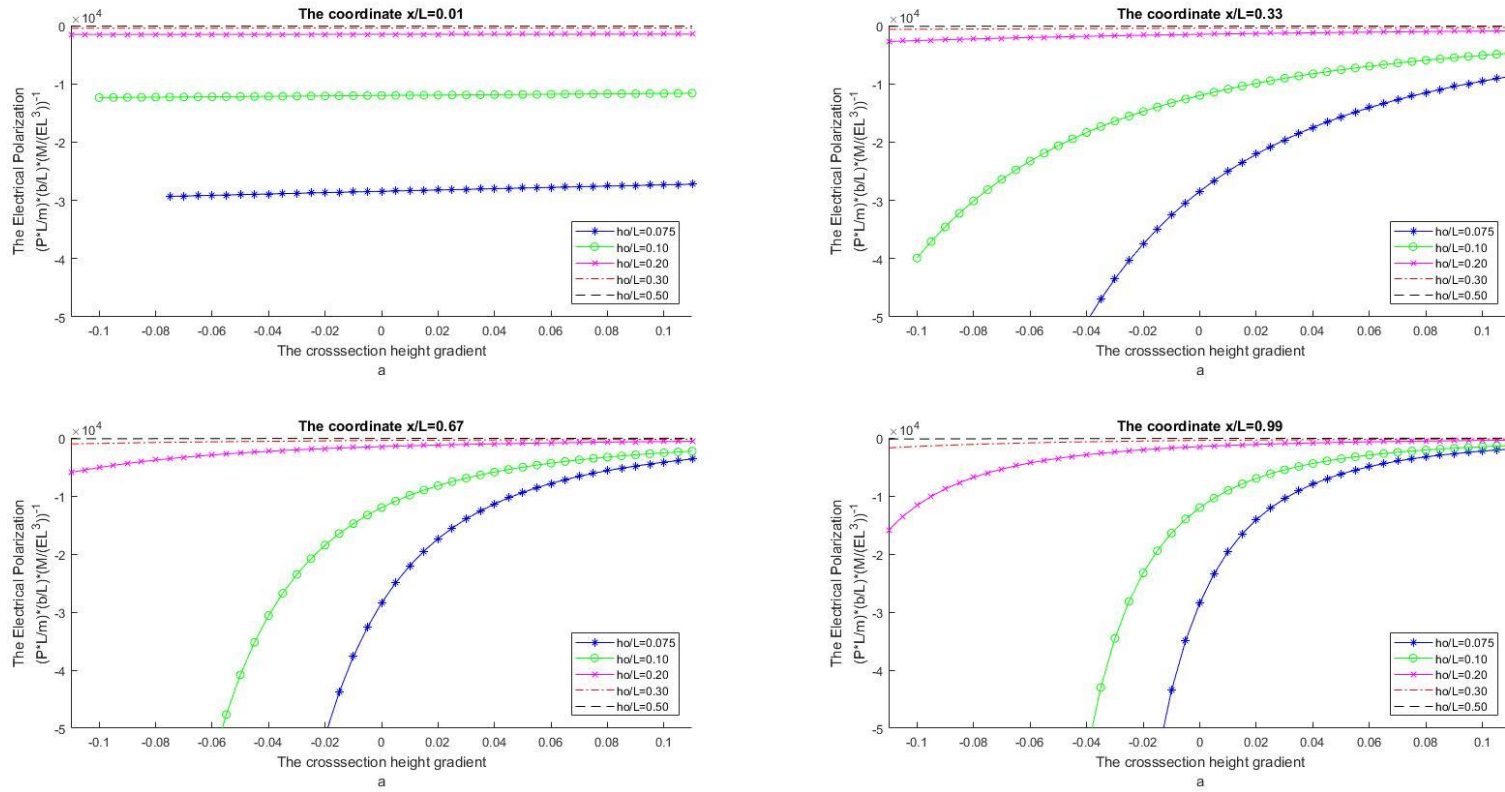


Figure 13. Η πολικότητα, που αναπτύσσεται σε μία συγκεκριμένη θέση κατά μήκος της δοκού, συναρτήσετου ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, για διάφορες τιμές του αρχικού ύψους της διατομής. Σε κάθε διάγραμμα, αυτή η θέση είναι διαφορετική. Το αρχικό πλάτος της διατομής, και το εξωτερικό φορτίο, είναι σταθερά στο πρώτο μέρος της εξίσωσης. Η μόνη διαφορά είναι η αλλαγή του πρόσημου της πολικότητας από την περίπτωση 1.2.1..

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{M}{E * L^3} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \alpha^{-2} * \left(a * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-2} * x - \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + \left(\frac{h_0}{L} + a * \frac{x}{L}\right)^{-1}\right)$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 6 * \frac{M}{E * L^3} * \alpha^{-1} * \left[\left(\frac{h_0}{L} + \alpha\right)^{-2} - \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-2}\right]$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση στην δεύτερη καταλήγουμε στην σχέση που φαίνεται παρακάτω, η οποία δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που παράγεται σε μία δοκό, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν σε θέση « x_0 », παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση « $w(x_0)$ »

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = \frac{W(x)}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \alpha * \left[a * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-2} * x - \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + \left(\frac{h_0}{L} + a * \frac{x}{L}\right)^{-1}\right]^{-1} * \left[\left(\frac{h_0}{L} + \alpha\right)^{-2} - \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-2}\right]$$

Η σχέση αυτή είναι αδιάστατη και μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί σε διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά φαίνονται παρακάτω, και αποτελούν πηγή έμπνευσης για κάποια συμπεράσματα.

Στην συνέχεια προτάθηκε η κατασκευή διαγραμμάτων, με απλές και ευθείες σχέσεις που δείχνουν, αλλάζοντας κάποια παράμετρο πως θα αλλάξουμε το φαινόμενο και αν η αλλαγή αυτής της παραμέτρου προς τα πάνω ή προς τα κάτω, έχει μεγαλύτερη σημασία. Για αυτά τα διαγράμματα, έχει θεωρηθεί ένα σύνολο τιμών σταθερό, και ένα άλλο να μεταβάλλεται. Τα διαγράμματα αυτά ακολουθούν τα προηγούμενα.

The Total Electrical Load For a Combination Of the arrow and the coordinate $Q/(m \cdot L) \cdot (b/L)^{-1}$

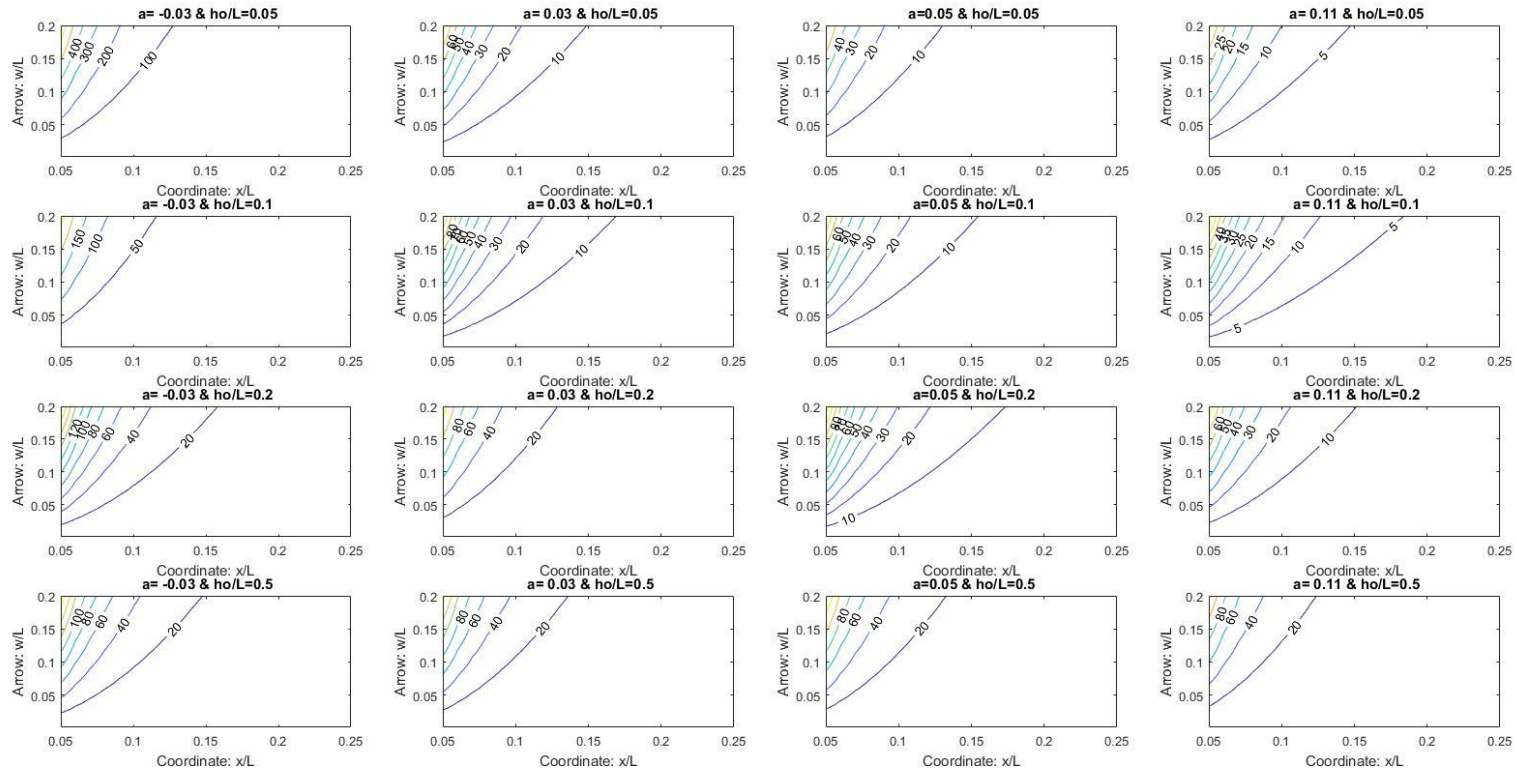


Figure 14. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο τη μήκος της διατομής, όταν σε μία θέση «x», έχουμε μία συγκεκριμένη κατακόρυφη μετακίνηση «w(x)». Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει ένας διαφορετικός συνδυασμός του αρχικού ύψους της διατομής, και του ρυθμού μεταβολής αυτού, ενώ το αρχικό πλάτος της διατομής θεωρείται σταθερό. Τα διαγράμματα αυτά έχουν μία μορφή, που εμφανίζεται αρκετά συχνά, σε αυτού του είδους τα διαγράμματα.

The Total Electrical Load For a Combination Of the arrow and the height gradient: $Q/(m \cdot L) \cdot (b/L)^{-1}$

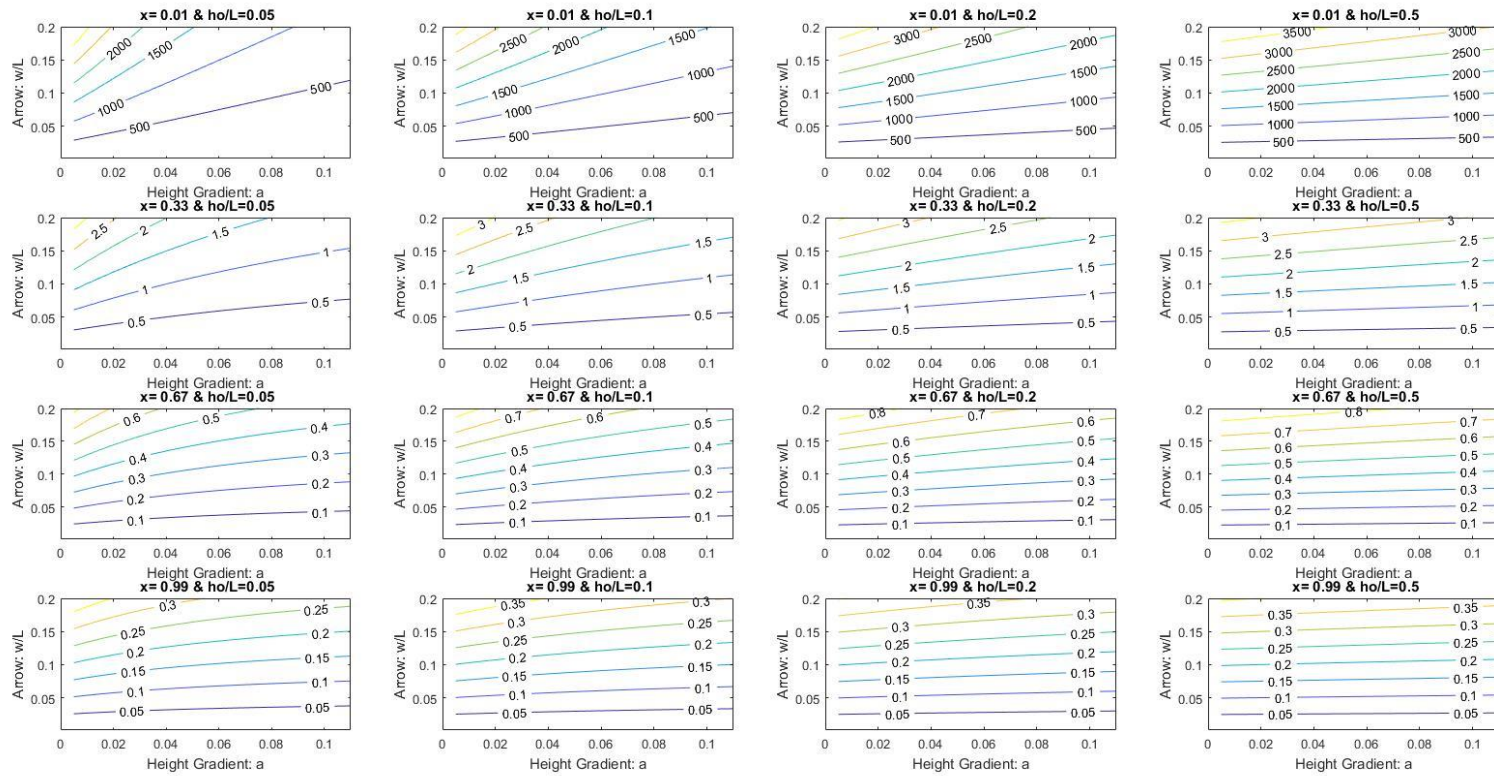


Figure 15. Το συνολικά παραγόμενο φορτίο, σε όλο το μήκος της διατομής, για έναν συνδυασμό, του βέλους κάμψης σε μία συγκεκριμένη θέση «x», και του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής.

Σε κάθε διάγραμμα, η θέση «x» και το αρχικό ύψος της διατομής, παίρνουν συγκεκριμένες τιμές, όπως φαίνεται παραπάνω, και το αρχικό πλάτος της διατομής θεωρείται σταθερό.

The Total Electrical Load For a Combination Of the arrow and the height : $Q/(m^*L)*(b/L)^{-1}$

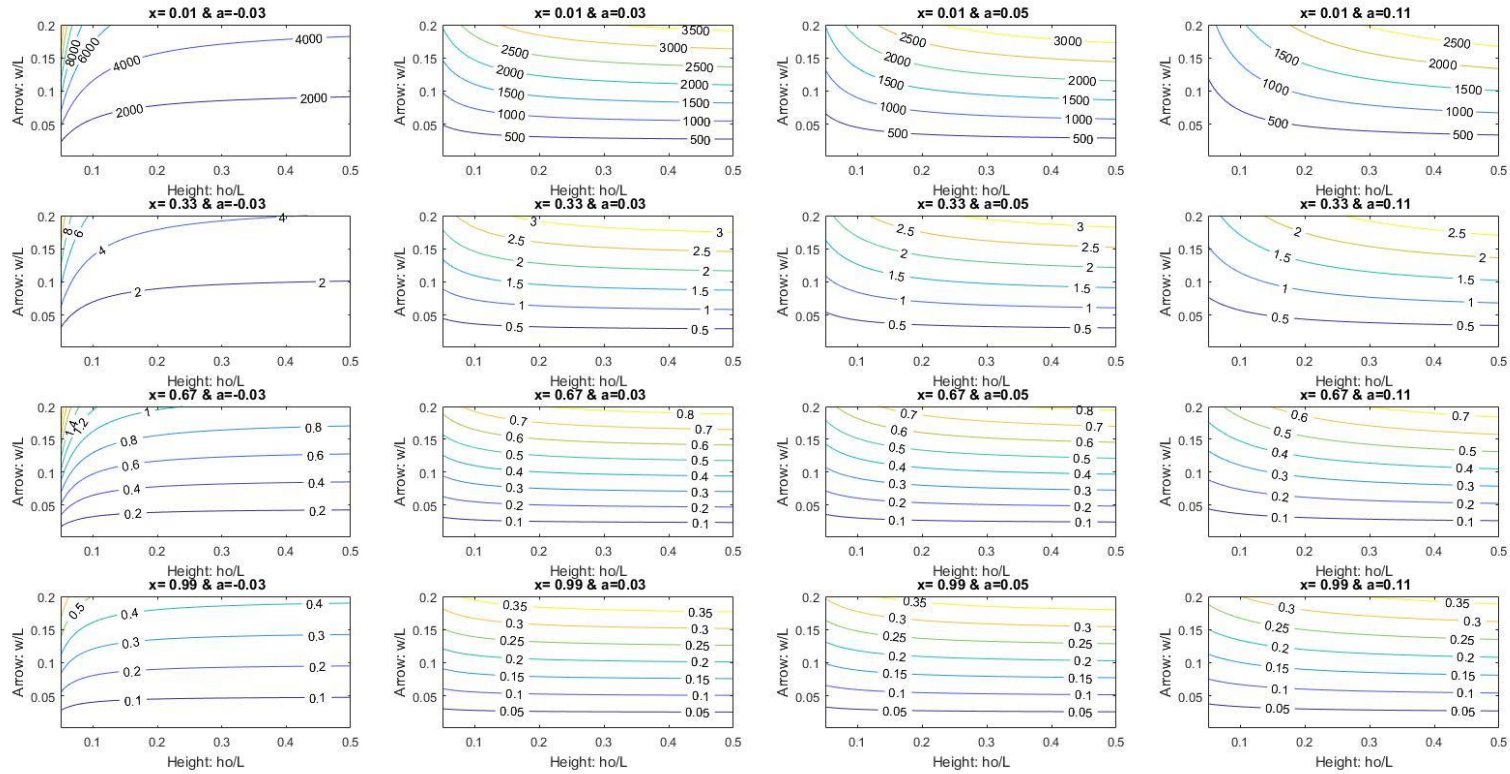


Figure 16. Η μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό του βέλους κάμψης σε μία συγκεκριμένη θέση «x», και του αρχικού ύψους της διατομής.

Σε κάθε διάγραμμα, διαφοροποιείται η θέση «x» και ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της διατομής.

Σημαντική παρατήρηση είναι ότι με αρνητικούς ρυθμούς μεταβολής, οι ισοϋψείς αλλάζουν κοίλα.

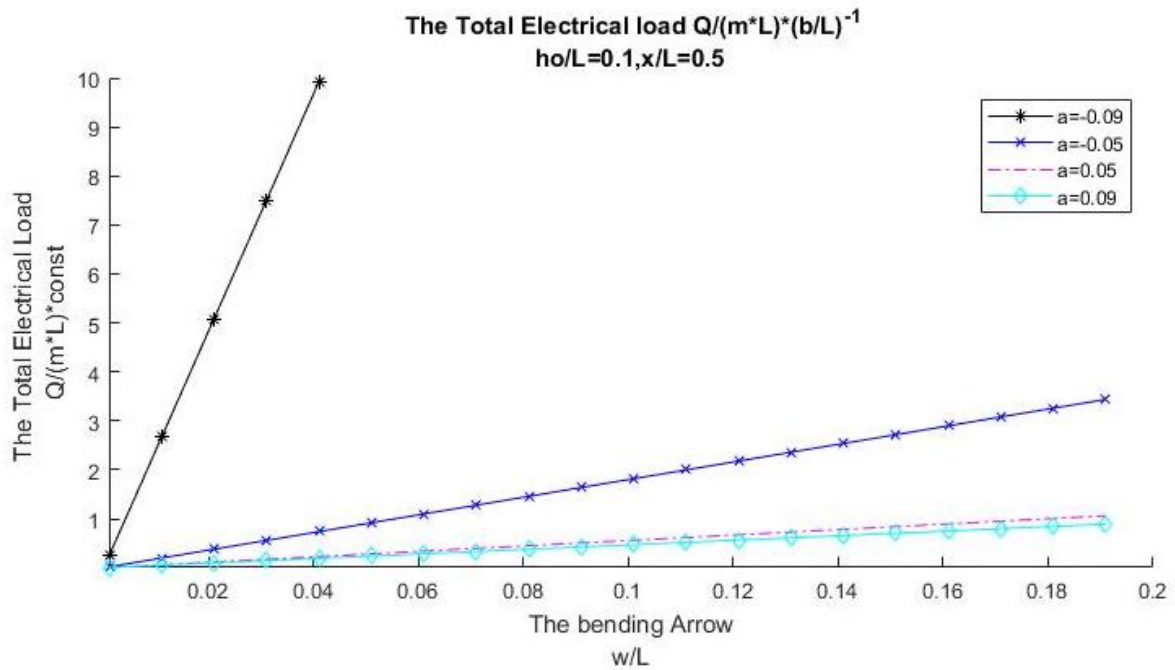


Figure 18. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, σαν συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης που θα παρατηρηθεί στο μέσο της δοκού, για ένα σταθερό αρχικό ύψος της διατομής. Οι διάφορες καμπύλες συμβολίζουν τους διάφορους ρυθμούς μεταβολής του ύψους της διατομής. Το φαινόμενο αυξάνεται, για μικρότερους ρυθμούς μεταβολής του ύψους της διατομής.

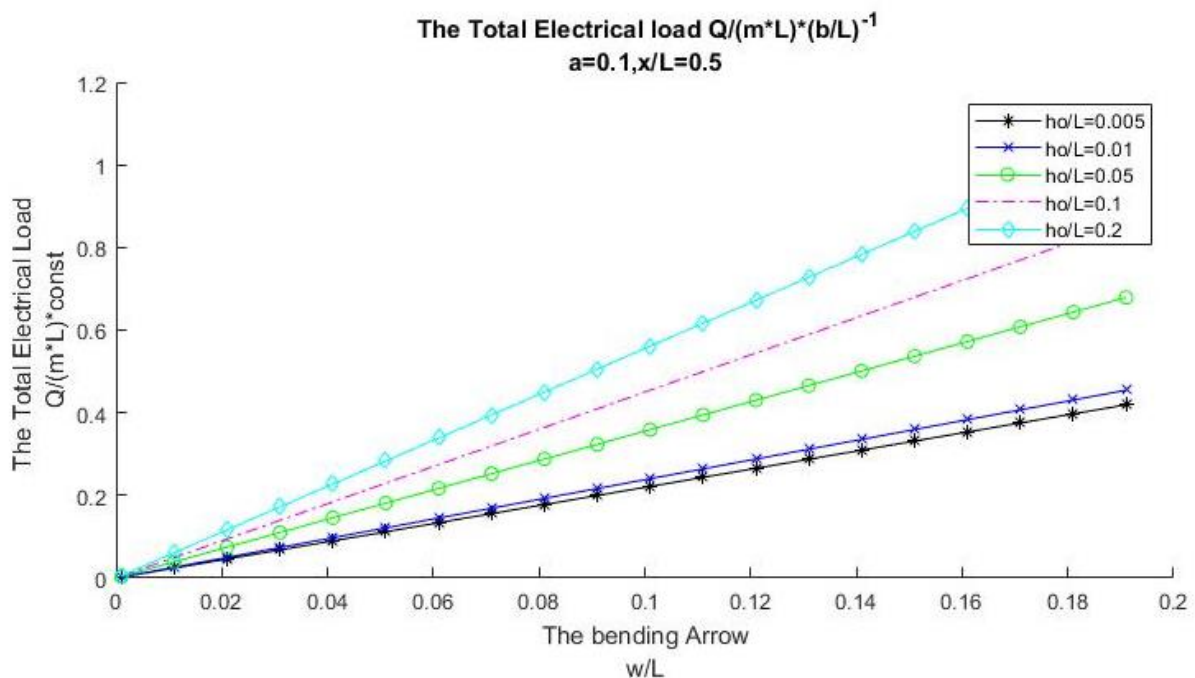


Figure 17 Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της διατομής, ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης που θα παρατηρηθεί στο μέσον της δοκού, για μία συγκεκριμένη, σχετικά μεγάλη κλίση του ύψους. Κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε διαφορετικό αρχικό ύψος της διατομής. Αυτό το διάγραμμα υποστηρίζει ότι μεγαλύτερη διάσταση επιφέρει μεγαλύτερο φορτίο, όμως πρέπει κανείς να αναλογιστεί, την εκθετική μείωση που προκαλεί το ύψος της διατομής, στο βέλος κάμψης, σύμφωνα με της θεωρία δοκού σε κάμψη. Άρα δεν είναι τόσο απλό όσο φαίνεται.

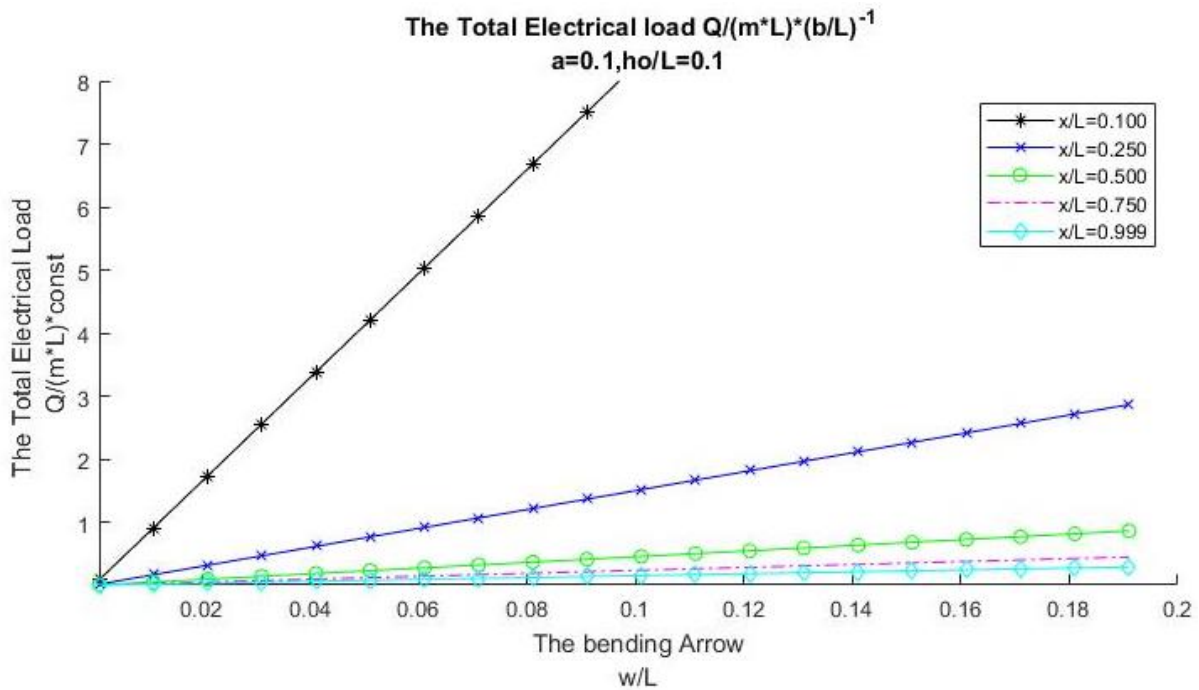


Figure 19. Το συνολικά ηλεκτρικό παραγόμενο φορτίο, σε όλο το μήκος της διατομής, καθώς η γεωμετρική διάσταση θεωρείται σταθερή, με έναν σχετικά μεγάλο ρυθμό μεταβολής, ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης σε διάφορες θέσεις, όπως δείχνουν οι διάφορες καμπύλες.

Σε μία μακρινή από την πάκτωση, θέση το μεγαλύτερο βέλος εμφανίζεται πιο εύκολα, ενώ σε μία κοντά στην πάκτωση θέση, έχουμε, πολύ μικρότερα βέλη κάμψης.

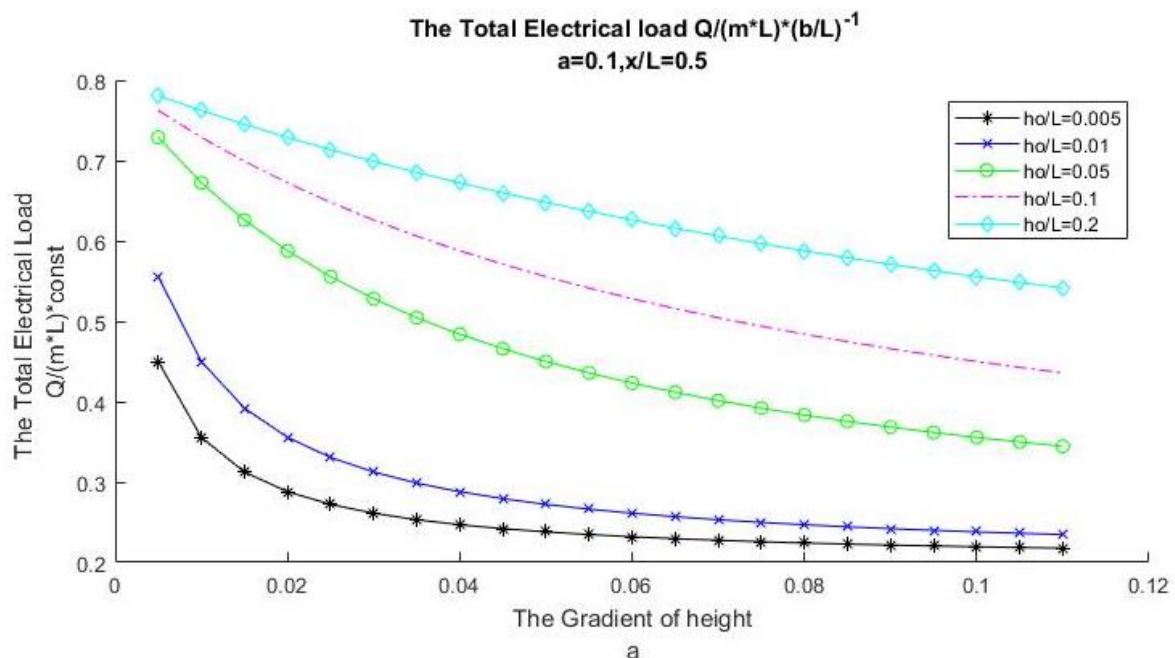


Figure 20. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου, σε όλο το μήκος της δοκού, όταν στο μέσο της δοκού παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, για διάφορες τιμές του αρχικού πλάτους.

Μεγαλύτερο ηλεκτρικό φορτίο, επιτυγχάνει κανείς, για μικρούς ρυθμούς μεταβολής του ύψους, και μικρά αρχικά ύψη διατομής.

3.10. Περίπτωση 1.2.3. Πρόβολος μεταβλητού ύψους με αξονικό φορτίο στην άκρη στην άκρη

Αυτή η περίπτωση, είναι η αντίστοιχη του προβόλου, με μεταβαλλόμενο πλάτος. Μάλιστα, δεν έχει καμία απολύτως διαφορά, τόσο στον ορισμό του συντελεστή κλίσης του ύψους της διατομής, όσο και στα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα είναι τα ίδια, με μία αντιμετάθεση του όρου του πλάτους, με τον όρο του ύψους.

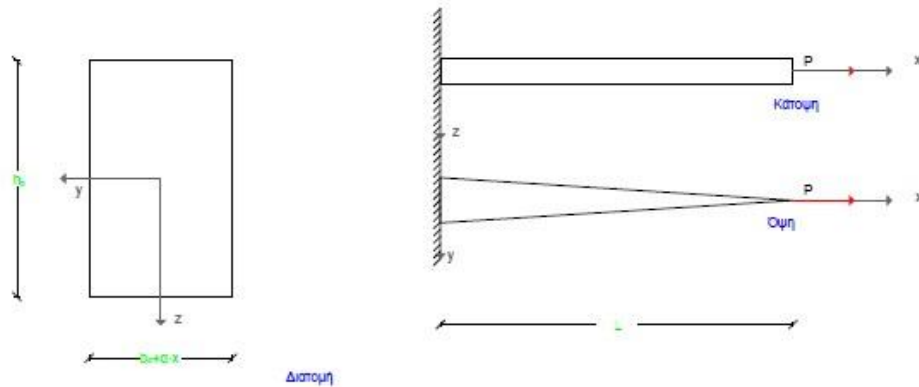


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.2.3. είναι πρόβολος μεταβλητού ύψους διατομής, με αξονικό φορτίο στην άκρη.

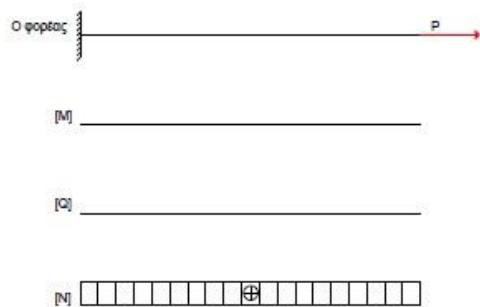


Figure 2. Τα εντατικά μεγέθη του φορέα της περίπτωσης 1.2.3. πρόβολος μεταβλητού ύψους διατομής, με αξονικό φορτίο στην άκρη.

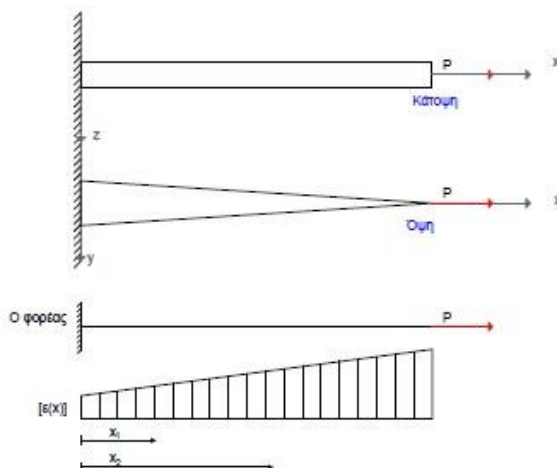


Figure 3. Η κατανομή των τάσεων σε μία στρώση της δοκού.

Έτσι η κατά μήκος παραμόρφωση δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon(x) = \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L} \right)^{-1} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1}$$

Η αναπτυσσόμενη πολικότητα από τον τύπο:

$$\frac{Pol_{11} * L}{\mu_{11}} = -\alpha * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L} \right)^{-2}$$

Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού:

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = \alpha * \frac{P}{E * L^2} * \frac{a}{\left(\frac{h_0}{L} \right)^2 + a * \frac{h_0}{L}}$$

Ενώ αν κανείς αντικαταστήσει τα εντατικά μεγέθη με τα παραμορφωσιακά:

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = \varepsilon(x) * \left(\frac{b_0}{L} \right) * \frac{a^2}{\left(\frac{h_0}{L} \right)^2 + a * \frac{h_0}{L}} * \left(\frac{h_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L} \right)$$

Για την μελέτη των διαγραμμάτων, προτείνεται να ανατρέξει κανείς στην περίπτωση 1.1.3.

3.11. Περίπτωση 1.3.1. Πρόβολος μεταβλητού πλάτους και ύψους, με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη

Μία ιδιαίτερη προσέγγιση στο πρόβλημα, αυτήν την στιγμή, είναι η ανάλυση, του φαινομένου του προβόλου, όταν μεταβλητή δεν είναι μόνο η μία διάσταση της διατομής αλλά και οι δύο. Για την κάθε διάσταση πρέπει να ισχύουν τα προηγούμενα και να είναι πάντα θετικές. Έτσι πρέπει να ορίσουμε ένα πεδίο αναφοράς. Μπορεί κανείς να ορίσει τον συντελεστή κλίσης στην μία διεύθυνση (πλάτος) με τον όρο «α».

- « $\alpha_{max} = 0.11$ »
- « $\alpha_{min} = \max(-0.11 ; -\frac{b_0}{x})$ »

Και στην συνέχεια να ορίσει και τον άλλον ρυθμό μεταβολής της διάστασης με τον όρο «t».

- « $t_{max} = 0.11$ »
- « $t_{min} = \max(-0.11 ; -\frac{h_0}{x})$ »

Ο αριθμός «0.11» αντιστοιχεί σε μία κλίση γύρω στις «6.3°». Είναι αρκετά μικρή, και εννοείται ότι στα πειράματα που δοκιμάσαμε να εκτελέσουμε, χρησιμοποιήσαμε μεγαλύτερες, αλλά τουλάχιστον οι παραδοχές «Bernoulli» σίγουρα ισχύουν.

$$\theta = \arctan(\alpha)$$

Σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα του προβόλου με μεταβλητό πλάτος και ύψος και κατακόρυφο φορτίο στην άκρη περιέχει τις εξής παραμέτρους:

- ✓ Τον συντελεστή μεταβολής του ύψους: t [-]
- ✓ Το αρχικό ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Τον συντελεστή μεταβολής του πλάτους: α [-]
- ✓ Το πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Την κατακόρυφη δύναμη που βρίσκεται στην άκρη: P [N]
- ✓ Την συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]

Ο φορέας του προβλήματος μπορεί να επιλυθεί εύκολα με χέρι. Έτσι είναι εύκολος ο προσδιορισμός των δράσεων στήριξης, των διαγραμμάτων των εντατικών μεγεθών, και των εξισώσεων που προεξοφλούν αυτά τα διαγράμματα.

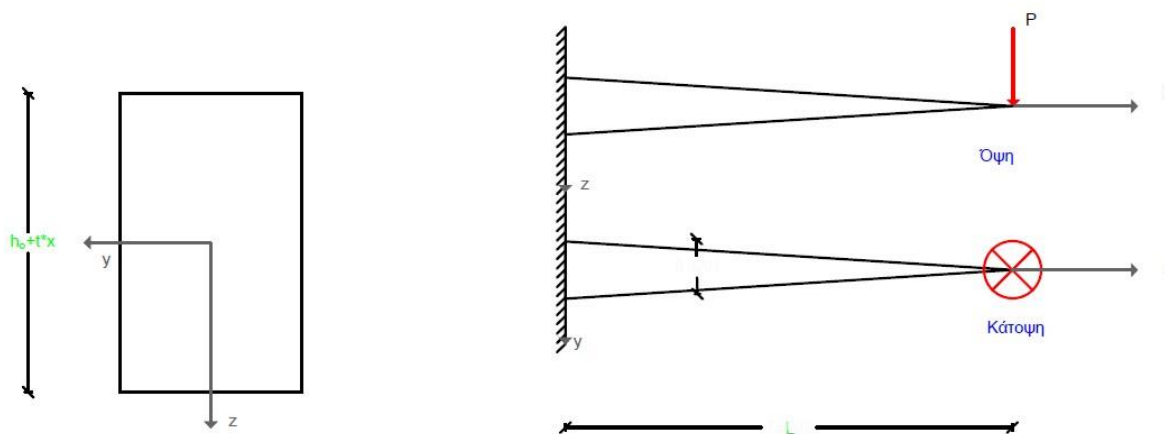


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 1.3.1. είναι πρόβολος μεταβλητού πλάτους και ύψους διατομής, με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

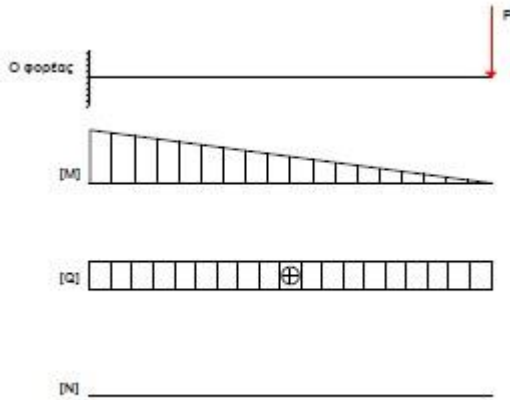


Figure 2. η εντατική κατάσταση του φορέα της περίπτωσης 1.3.1.

Οι αντιδράσεις στήριξης.

- $V_{\text{πάκτωσης}} = P$ [kN]
- $H_{\text{πάκτωσης}} = 0$ [kN]
- $M_{\text{πάκτωσης}} = P * L$ [kN*m]

Και οι εξισώσεις των διαγραμμάτων [M], [Q], [N].

- ✓ $M(x) = P * (x - L)$ [kN*m]
- ✓ $Q(x) = P$ [kN]
- ✓ $N(x) = 0$ [kN]

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται ως:

- ✓ Εμβαδόν: $A = (b_0 + \alpha * x) * (h_0 + t * x)$ [m²]
- ✓ Ροπή Αδρανείας $I_{yy} = \frac{(b_0 + \alpha * x) * (h_0 + t * x)^3}{12}$ [m⁴]
- $I_{zz} = \frac{(b_0 + \alpha * x)^3 * (h_0 + t * x)}{12}$ [m⁴]

Το βέλος κάμψης αυτής της περίπτωσης βρίσκεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$E * I(x) * w''(x) = -M(x) = P * (L - x)$$

$$w''(x) * E * \frac{(b_0 + \alpha * x) * (h_0 + t * x)^3}{12} = P * (L - x)$$

$$w''(x) = 12 * \frac{P}{E} * (b_0 + \alpha * x)^{-1} * (h_0 + t * x)^{-3} * (L - x)$$

$$W'(x) = 6 * \frac{P}{E} * \left[\frac{L}{(h_0 * a - b_0 * t) * (t * x + h_0)^2} + \frac{h_0}{t * (h_0 * a - b_0 * t) * (t * x + h_0)^2} + \frac{2 * L * a}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * (t * x + h_0)} + \frac{2 * b_0}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * (t * x + h_0)} - \frac{2 * a^2 * L * \ln(t * x + h_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} - \frac{2 * a * b_0 * \ln(t * x + h_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} + \frac{2 * a^2 * L * \ln(a * x + b_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} + \frac{2 * a * b_0 * \ln(a * x + b_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} \right] + C^1$$

Ο όρος «C» αποτελεί την σταθερά ολοκλήρωσης και μπορεί να υπολογισθεί από την συνοριακή συνθήκη της πάκτωσης: : « $w'(x = 0) = 0$ »

$$W'(0) = 6 * \frac{P}{E} * \left[\frac{L}{(h_0 * a - b_0 * t) * h_0^2} + \frac{h_0}{t * (h_0 * a - b_0 * t) * h_0^2} + \frac{2 * L * a}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * h_0} + \frac{2 * b_0}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * h_0} - \frac{2 * a^2 * L * \ln(h_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} - \frac{2 * a * b_0 * \ln(h_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} + \frac{2 * a^2 * L * \ln(b_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} + \frac{2 * a * b_0 * \ln(b_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} \right] + C = 0$$

$$C = -6 * \frac{P}{E} * \left[\frac{L}{(h_0 * a - b_0 * t) * h_0^2} + \frac{h_0}{t * (h_0 * a - b_0 * t) * h_0^2} + \frac{2 * L * a}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * h_0} + \frac{2 * b_0}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * h_0} - \frac{2 * a^2 * L * \ln(h_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} - \frac{2 * a * b_0 * \ln(h_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} + \frac{2 * a^2 * L * \ln(b_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} + \frac{2 * a * b_0 * \ln(b_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} \right]$$

Και άρα καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση αφού αντικαταστήσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης.

$$W'(x) = 6 * \frac{P}{E} * \left[\frac{2 * (t * L + h_0)}{(h_0 * a - b_0 * t) * (t * x + h_0)^2 * t} + \frac{2 * L * a + 2 * b_0}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * (t * x + h_0)} - \frac{t * L + h_0}{(h_0 * a - b_0 * t) * (h_0)^2 * t} + \frac{2 * L * a + 2 * b_0}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * h_0} - \frac{2 * a^2 * L * \ln\left(\frac{t * x + h_0}{h_0}\right)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} - \frac{2 * a * b_0 * \ln\left(\frac{t * x + h_0}{h_0}\right)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} + \frac{2 * a^2 * L * \ln\left(\frac{a * x + b_0}{b_0}\right)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} + \frac{2 * a * b_0 * \ln\left(\frac{a * x + b_0}{b_0}\right)}{(h_0 * a - b_0 * t)^3} \right]$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση δεύτερη φορά και λαμβάνοντας υπόψιν την σταθερά ολοκλήρωσης, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση, που δίνει το βέλος της κάμψης, στην κατακόρυφη παραμόρφωση.

$$W(x) = 6 * \frac{P}{E} * \left\{ \frac{(L * a + b_0) * \ln\left(t * \frac{x}{h_0} + 1\right)}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * t} - \frac{t * L + h_0}{(h_0 * a - b_0 * t) * (t * x + h_0) * t^2} + \frac{t * L + h_0}{(h_0 * a - b_0 * t) * h_0 * t^2} - \frac{2 * x * (L * a + b_0)}{(h_0 * a - b_0 * t)^2 * h_0} + \left[(2 * x * b_0 * a + 2 * b_0^2) * \ln\left(a * \frac{x}{b_0} + 1\right) - (2 * a * b_0 * x + 2 * \frac{a}{t} * b_0 * h_0) * \ln\left(t * \frac{x}{h_0} + 1\right) + (2 * a^2 * L * x + 2 * a * L * b_0) * \ln\left(a * \frac{x}{b_0} + 1\right) - (2 * a^2 * L * x + 2 * \frac{a^2}{t} * L * h_0) * \ln\left(t * \frac{x}{h_0} + 1\right) \right] * [(h_0 * a - b_0 * t)^3]^{-1} - \frac{x * L * h_0^{-2} + x * t^{-1} * h_0^{-1}}{h_0 * a - b_0 * t} \right\}^1$$

Αυτή η σχέση, με σκοπό να αποτυπωθεί ως διάγραμμα, πρέπει να αδιαστατοποιηθεί. Με αυτά που περιγράφηκαν στην αρχή του κεφαλαίου η κατακόρυφη παραμόρφωση στην περίπτωση που έχουμε μεταβλητό πλάτος και ύψος διατομής και κατακόρυφο φορτίο στην άκρη έχει ως εξής:

¹ Η ολοκλήρωση έγινε με χρήση της γλώσσας αναλυτικού προγραμματισμού «Maple». Για λόγους ασφάλειας έγινε επαλήθευση με δύο τρόπους. Θεωρώντας ότι ο συντελεστής κλίσης είναι μηδενικός, το όριο πρέπει να βγει όσο της περίπτωσης 1.0.2 το αποτέλεσμα, και παραγωγίζοντας πίσω πρέπει να βγει η αρχική σχέση. Αυτές οι επαληθεύσεις έγιναν σε κάθε περίπτωση που χρειάστηκε υπολογιστικό πρόγραμμα, να κάνει αναλυτικά πράξεις. Οι επαληθεύσεις, για λογούς συντομίας των πράξεων φαίνονται σε εικόνα παρακάτω.

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{2 * \left(a + \frac{b_0}{L} \right) * \ln \left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1} + 1 \right)}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t \right)^2 * t} - \frac{t + \frac{h_0}{L}}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t \right) * \left(t * \frac{x}{L} + \frac{h_0}{L} \right) * t^2} + \frac{t + \frac{h_0}{L}}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t \right) * \frac{h_0}{L} * t^2} - \right.$$

$$\frac{2 * \frac{x}{L} * \left(a + \frac{b_0}{L} \right)}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t \right)^2 * \frac{h_0}{L}} + \left[\left(2 * \frac{x}{L} * \frac{b_0}{L} * a + 2 * \left(\frac{b_0}{L} \right)^2 \right) * \ln \left(a * \frac{x}{L} \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} + 1 \right) - \left(2 * a * \frac{b_0}{L} * \frac{x}{L} + 2 * \frac{a}{t} * \frac{b_0}{L} * \right.$$

$$\frac{h_0}{L} \right) * \ln \left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1} + 1 \right) + \left(2 * a^2 * \frac{x}{L} + 2 * a * \frac{b_0}{L} \right) * \ln \left(a * \frac{x}{L} \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} + 1 \right) - \left(2 * a^2 * \frac{x}{L} + 2 * \right.$$

$$\left. \frac{a^2}{t} * \frac{h_0}{L} \right) * \ln \left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1} + 1 \right) \left. \right] * \left[\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t \right)^3 \right]^{-1} - \frac{\frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-2} + \frac{x}{L} * t^{-1} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-1}}{\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t}$$

```

> W2 := x -> -12 * P * (x - L) / (E * (b + a * x) * (h + t * x)^3);
> int(W2(x), x);
12 * P * a^2 * ln(a * x + b) * L / (E * (h * a - b * t)^3) + 12 * P * a * ln(a * x + b) * b / (E * (h * a - b * t)^3) + 6 * P * L / (E * (h * a - b * t) * (t * x + h)^2)
+ 6 * P * h / (E * (h * a - b * t) * t * (t * x + h)^2) + 12 * P * L * a / (E * (h * a - b * t)^2 * (t * x + h)) + 12 * P * b / (E * (h * a - b * t)^2 * (t * x + h))
- 12 * P * a^2 * ln(t * x + h) * L / (E * (h * a - b * t)^3) - 12 * P * a * ln(t * x + h) * b / (E * (h * a - b * t)^3);
> W1 := x -> L * t + h / (t * (h * a - b * t) * (t * x + h)^2) - L * t + h / ((h * a - b * t) * t * h^2) + (2 * L * a + 2 * b) / ((h * a - b * t)^2 * (t * x + h))
- (2 * L * a + 2 * b) / ((h * a - b * t)^2 * h) - 2 * a^2 * ln(t * x / h + 1) * L / ((h * a - b * t)^3) - 2 * a * ln(t * x / h + 1) * b / ((h * a - b * t)^3)
+ 2 * a^2 * ln(a * x / b + 1) * L / ((h * a - b * t)^3) + 2 * a * ln(a * x / b + 1) * b / ((h * a - b * t)^3);
> int(W1(x), x);
2 * ln(t * x + h) * L * a / ((h * a - b * t)^2 * t) + 2 * ln(t * x + h) * b / ((h * a - b * t)^2 * t) - L / ((h * a - b * t) * t * (t * x + h)) - h / ((h * a - b * t) * t^2 * (t * x + h))
- 2 * x * L * a / ((h * a - b * t)^2 * h) - 2 * x * b / ((h * a - b * t)^2 * h) + 2 * b * ln(a * x / b + 1) * a * x / ((h * a - b * t)^3) + 2 * b^2 * ln(a * x / b + 1) / ((h * a - b * t)^3)
- 2 * b^2 / ((h * a - b * t)^3) - 2 * a * b * ln(t * x / h + 1) * x / ((h * a - b * t)^3) - 2 * a * b * h * ln(t * x / h + 1) / ((h * a - b * t)^3 * t) + 2 * a * b * h / ((h * a - b * t)^3 * t)
+ 2 * a^2 * L * ln(a * x / b + 1) * x / ((h * a - b * t)^3) + 2 * a * L * b * ln(a * x / b + 1) / ((h * a - b * t)^3) - 2 * a * L * b / ((h * a - b * t)^3)
- 2 * a^2 * L * ln(t * x / h + 1) * x / ((h * a - b * t)^3) - 2 * a^2 * L * h * ln(t * x / h + 1) / ((h * a - b * t)^3 * t) + 2 * a^2 * L * h / ((h * a - b * t)^3 * t) - x * L / ((h * a - b * t) * h^2)
- x / (t * (h * a - b * t) * h)

```

Figure 3. Η διαδικασία, ο κώδικας, σε προγραμματιστική γλώσσα «maple» για τον προσδιορισμό της κατακόρυφης περίπτωσης στον φορέα 1.3.1.

$$\begin{aligned}
 & > w := x \rightarrow \frac{2 \cdot (La + b) \cdot \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right)}{(h \cdot a - b \cdot t)^2 \cdot t} - \frac{L \cdot t + h}{(h \cdot a - b \cdot t) \cdot (tx + h) \cdot t^2} + \frac{L \cdot t + h}{(h \cdot a - b \cdot t) \cdot h \cdot t^2} \\
 & - \frac{2 \cdot x \cdot (L \cdot a + b)}{(h \cdot a - b \cdot t)^2 \cdot h} + \frac{1}{(h \cdot a - b \cdot t)^3} \left((2 \cdot x \cdot b \cdot a + 2 \cdot b^2) \cdot \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - (2 \cdot a \cdot b \cdot x \right. \\
 & + \frac{2 \cdot a}{t} \cdot b \cdot h) \cdot \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) + (2 \cdot a^2 \cdot L \cdot x + 2 \cdot a \cdot L \cdot b) \cdot \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - \left(2 \cdot a^2 \cdot L \cdot x + \frac{2 \cdot a^2}{t} \right. \\
 & \cdot L \cdot h) \cdot \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) \left. \right) - \frac{x \cdot L \cdot h^{-2} + x \cdot t^{-1} \cdot h^{-1}}{(h \cdot a - b \cdot t)}; \\
 & w := x \rightarrow \frac{(2La + 2b) \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right)}{(ha - bt)^2 t} - \frac{Lt + h}{(ha - bt)(tx + h)t^2} + \frac{Lt + h}{(ha - bt)ht^2} \quad (1) \\
 & - \frac{2x(La + b)}{(ha - bt)^2 h} + \frac{1}{(ha - bt)^3} \left((2xb a + 2b^2) \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - (2x b a \right. \\
 & + \frac{2ab h}{t}) \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) + (2a^2 Lx + 2La b) \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - \left(2a^2 Lx \right. \\
 & + \frac{2a^2 Lh}{t}) \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) \left. \right) - \frac{\frac{xL}{h^2} + \frac{x}{th}}{ha - bt} \\
 & > \text{diff}(w(x), x); \\
 & \frac{2La + 2b}{h \left(\frac{tx}{h} + 1\right) (ha - bt)^2} + \frac{Lt + h}{(ha - bt)(tx + h)^2 t} - \frac{2(La + b)}{(ha - bt)^2 h} \quad (2) \\
 & + \frac{1}{(ha - bt)^3} \left(2ab \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) + \frac{(2x b a + 2b^2) a}{b \left(\frac{ax}{b} + 1\right)} - 2ab \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) \right. \\
 & - \frac{(2x b a + \frac{2ab h}{t}) t}{h \left(\frac{tx}{h} + 1\right)} + 2a^2 L \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) + \frac{(2a^2 Lx + 2La b) a}{b \left(\frac{ax}{b} + 1\right)} \\
 & \left. - 2a^2 L \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) - \frac{(2a^2 Lx + \frac{2a^2 Lh}{t}) t}{h \left(\frac{tx}{h} + 1\right)} - \frac{\frac{L}{h^2} + \frac{1}{th}}{ha - bt} \right) \\
 & > \text{diff}(\% x); \\
 & - \frac{(2La + 2b) t}{h^2 \left(\frac{tx}{h} + 1\right)^2 (ha - bt)^2} - \frac{2(Lt + h)}{(ha - bt)(tx + h)^3} + \frac{1}{(ha - bt)^3} \left(\frac{4a^2}{\frac{ax}{b} + 1} \right. \quad (3) \\
 & - \frac{(2x b a + 2b^2) a^2}{b^2 \left(\frac{ax}{b} + 1\right)^2} - \frac{4ab t}{h \left(\frac{tx}{h} + 1\right)} + \frac{(2x b a + \frac{2ab h}{t}) t^2}{h^2 \left(\frac{tx}{h} + 1\right)^2} + \frac{4a^3 L}{b \left(\frac{ax}{b} + 1\right)} \\
 & \left. - \frac{(2a^2 Lx + 2La b) a^2}{b^2 \left(\frac{ax}{b} + 1\right)^2} - \frac{4a^2 L t}{h \left(\frac{tx}{h} + 1\right)} + \frac{(2a^2 Lx + \frac{2a^2 Lh}{t}) t^2}{h^2 \left(\frac{tx}{h} + 1\right)^2} \right) \\
 & > \text{simplify}(\%); \\
 & \frac{2L - 2x}{(ax + b)(tx + h)^3} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Figure 4. Η επαλήθευση, σε προγραμματιστική γλώσσα «maple» παραγωγίζοντας πίσω.

$$\begin{aligned}
 > w := a \rightarrow \frac{2 \cdot (La + b) \cdot \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right)}{(h \cdot a - b \cdot t)^2 \cdot t} - \frac{L \cdot t + h}{(h \cdot a - b \cdot t) \cdot (tx + h) \cdot t^2} + \frac{L \cdot t + h}{(h \cdot a - b \cdot t) \cdot h \cdot t^2} \\
 & - \frac{2 \cdot x \cdot (L \cdot a + b)}{(h \cdot a - b \cdot t)^2 \cdot h} + \frac{1}{(h \cdot a - b \cdot t)^3} \left((2 \cdot x \cdot b \cdot a + 2 \cdot b^2) \cdot \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - (2 \cdot a \cdot b \cdot x \right. \\
 & \left. + \frac{2 \cdot a}{t} \cdot b \cdot h) \cdot \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) + (2 \cdot a^2 \cdot L \cdot x + 2 \cdot a \cdot L \cdot b) \cdot \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - \left(2 \cdot a^2 \cdot L \cdot x + \frac{2 \cdot a^2}{t} \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot L \cdot h) \cdot \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) \right) - \frac{x \cdot L \cdot h^{-2} + x \cdot t^{-1} \cdot h^{-1}}{(h \cdot a - b \cdot t)}; \\
 w := a \rightarrow & \frac{(2La + 2b) \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right)}{(ha - bt)^2 t} - \frac{Lt + h}{(ha - bt)(tx + h)t^2} + \frac{Lt + h}{(ha - bt)ht^2} \\
 & - \frac{2x(La + b)}{(ha - bt)^2 h} + \frac{1}{(ha - bt)^3} \left((2xb a + 2b^2) \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - (2x b a \right. \\
 & \left. + \frac{2a b h}{t}) \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) + (2a^2 L x + 2La b) \ln\left(\frac{ax}{b} + 1\right) - (2a^2 L x \right.
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \frac{2a^2 L h}{t}) \ln\left(\frac{tx}{h} + 1\right) \right) - \frac{\frac{xL}{h^2} + \frac{x}{th}}{ha - bt} \\
 > \text{limit}(w(a), a=0); \\
 & \frac{Lx^2 t^3 + 2 \ln\left(\frac{tx+h}{h}\right) x h^2 t - x^2 h t^2 + 2 h^3 \ln\left(\frac{tx+h}{h}\right) - 2 x h^2 t}{b h^2 t^4 x + b h^3 t^3}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 > \text{limit}\left(\frac{Lx^2 t^3 + 2 \ln\left(\frac{tx+h}{h}\right) x t h^2 - x^2 t^2 h + 2 h^3 \ln\left(\frac{tx+h}{h}\right) - 2 x t h^2}{b h^2 t^4 x + b h^3 t^3}, t=0\right); \\
 & \frac{3 L x^2 - x^3}{3 b h^3}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Figure 5. Η διαδικασία επαλήθευσης σε περιβάλλον «maple» υπολογίζοντας το όριο « $a \rightarrow 0$ »

Κατά την διάρκεια παραγωγής διαγραμμάτων, σωστό είναι να σκεφτεί κανείς την πολυπλοκότητα του εγχειρήματος. Γι' αυτό πολλές φορές έχουμε χρησιμοποιήσει διάφορους συνδυασμούς των δύο κλίσεων. Να είναι ίσα, το ένα μισό του άλλου, και το ένα τέσσερις φορές το άλλο. Έχοντας αυτήν την μικρή παραδοχή στο μυαλό μας, είναι πλέον πιο εύκολη η αντιμετώπιση αυτής της πολυπαραμετρικότητας που διέπει το πρόβλημα του προβόλου μεταβλητού πάχους και ύψους με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη.

Ακόμα φαντάζει ύψιστης σημασίας η ανάλυση περίπτωσης μου μεταβάλλονται και τα δύο γεωμετρικά χαρακτηριστικά, αφού δεν μπορώ να κάνω επαλληλία. (Θα ήταν δυνατή η επαλληλία αν το «non-linearity» οφειλόταν κάπου αλλού π.χ. στο φορτίο).

The Vertical Deformation in comparison with The Coordinate

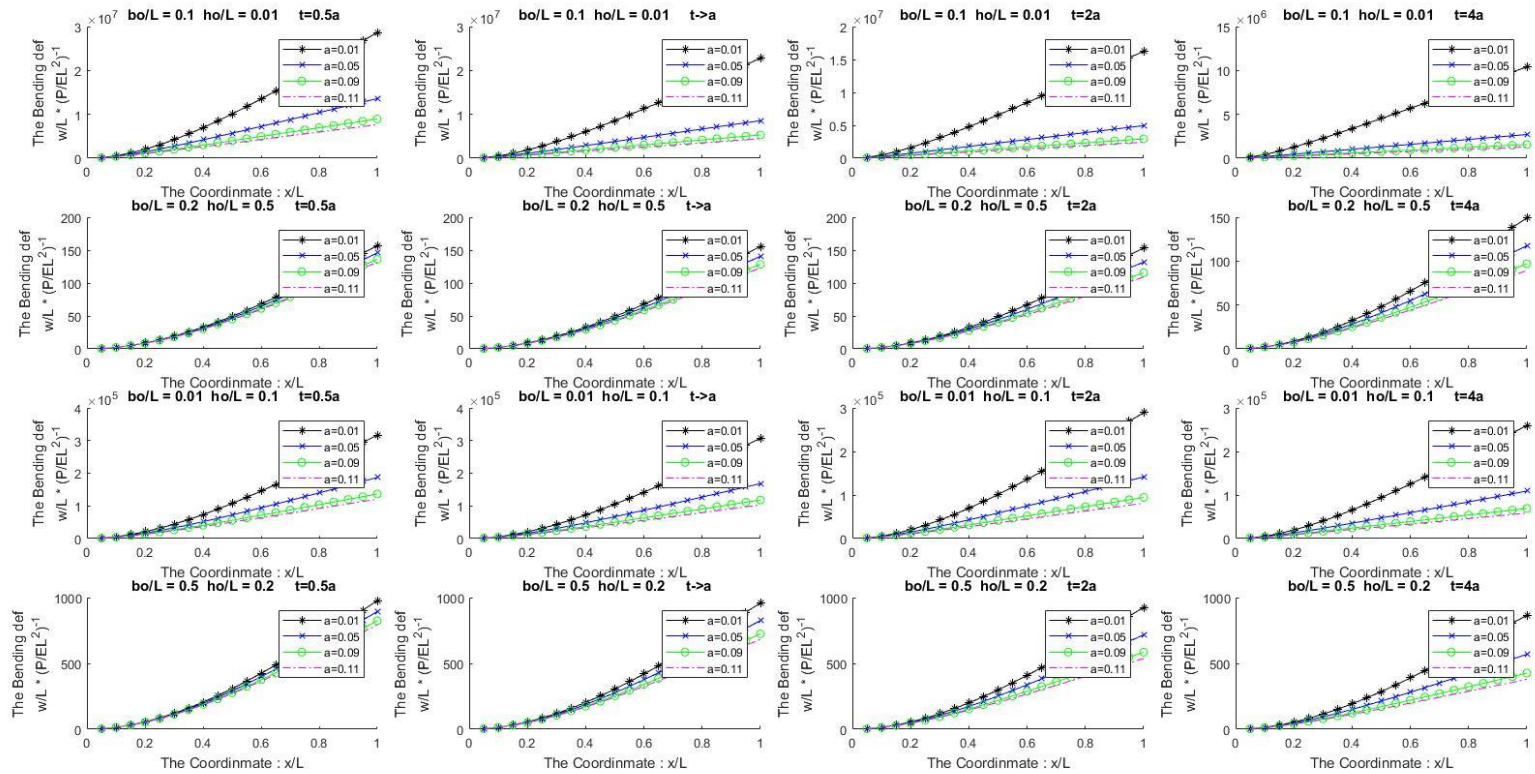


Figure 6. Η κατακόρυφη παραμόρφωση σε θέση πάνω στην δοκό κατά μήκος, ως συνάρτηση της θέσης αυτής, ενώ η αρχική διάσταση της διατομής, έχει συγκεκριμένες θέσεις και ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι μία συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του πλάτους, όπως φαίνεται και στο τίτλο κάθε γραφήματος. Σε κάθε διάγραμμα οι διαφορετικές καμπύλες, ορίζονται από διαφορετικές τιμές του ρυθμού μεταβολής του πλάτους.

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι καθώς μεγαλώνουν οι αρχικές διαστάσεις, αλλά μικραίνει ο ρυθμός μεταβολής του ύψους, της διατομής, οι καμπύλες συγκλίνουν, γίνονται «clusters»

Δυστυχώς είναι αδύνατο, να παρατηρηθεί, ποιος όρος μεταβάλλει περισσότερο το βέλος κάμψης, εκτός από το αρχικό ύψος της διατομής, που όταν είναι μεγάλο, η κατακόρυφη αυτή παραμόρφωση είναι πολύ μικρή.

The bending Displacement for a combination of width gradient (a) & height gradient (t) - $w/L * (P/(EL^2))$

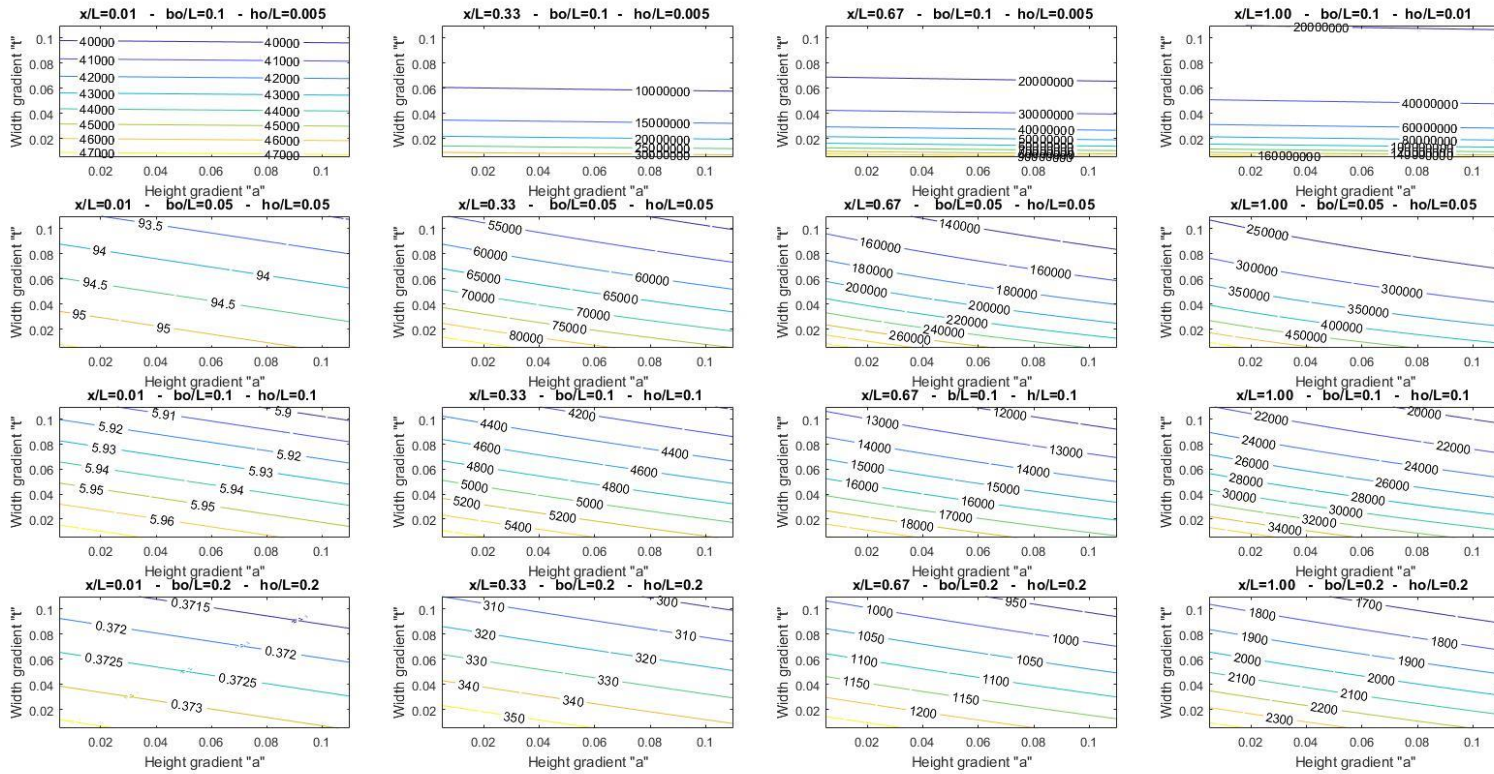


Figure 7. Διάγραμμα που δείχνει την κατακόρυφη μετακίνηση, σε μία συγκεκριμένη θέση στο μήκος της δοκού, ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του πλάτους της διατομής. Σε κάθε διάγραμμα πέρα από το σημείο, στο οποίο αναφέρεται η μετακίνηση αυτή, αλλάζει και η αρχική διάσταση της διατομής. Σημαντικό σχόλιο είναι η υπεραισθησία των διαγραμμάτων για τους συνδυασμούς αρχικού πλάτους και ύψους, όταν η διαφορά τους είναι πάρα πολύ μεγάλη.

The bending displacement in comp. with the width grad for $x/L=0.5$
 $w/L * ((P/(EL^2))^1$

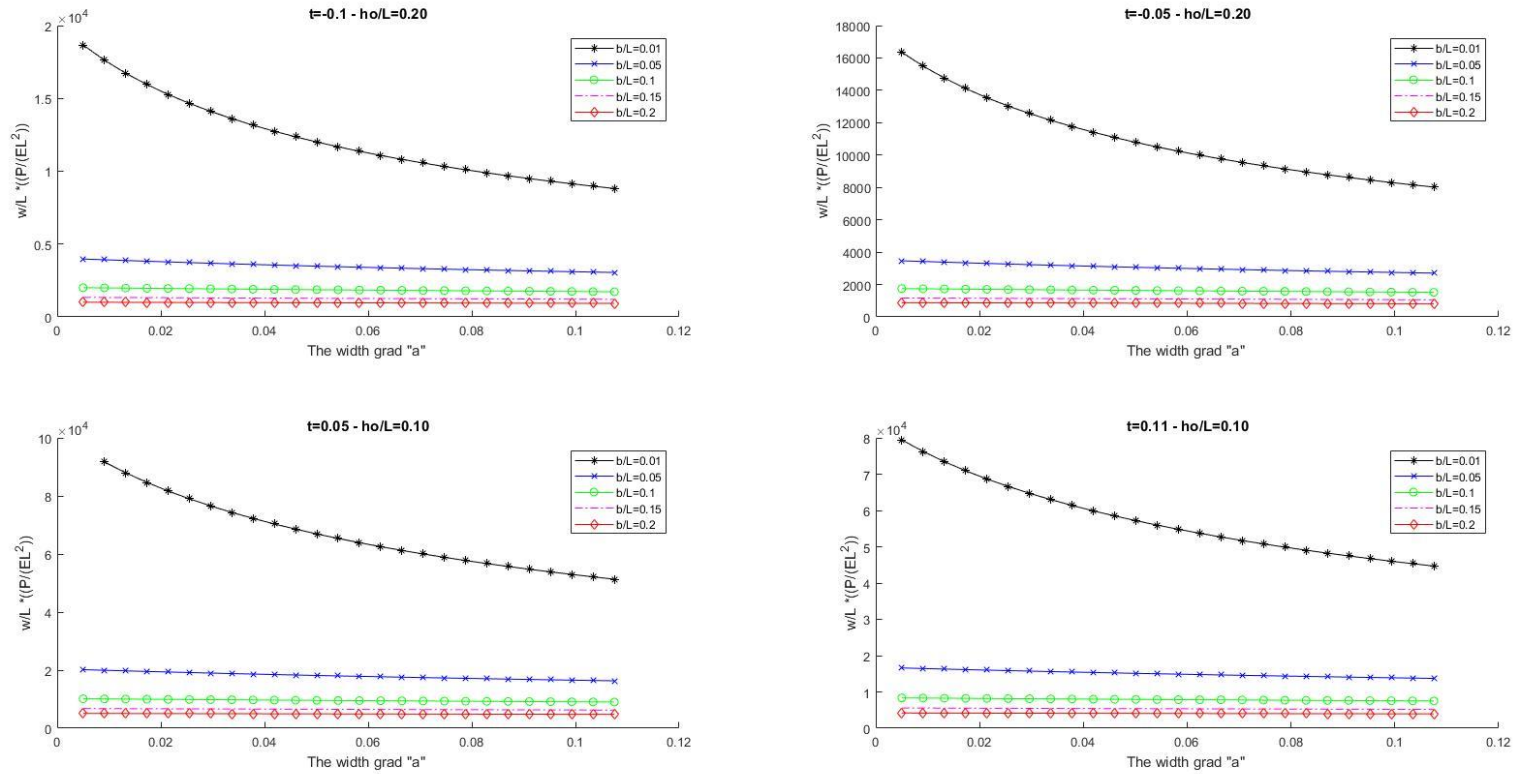


Figure 8. Η κατακόρυφη παραμόρφωση, στο μέσον της δοκού, ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του πλάτους της διατομής, για διάφορα αρχικά πλάτη της διατομής. Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει διαφορετικό ύψος της διατομής, δηλαδή αρχικό ύψος και ρυθμός μεταβολής αυτού.

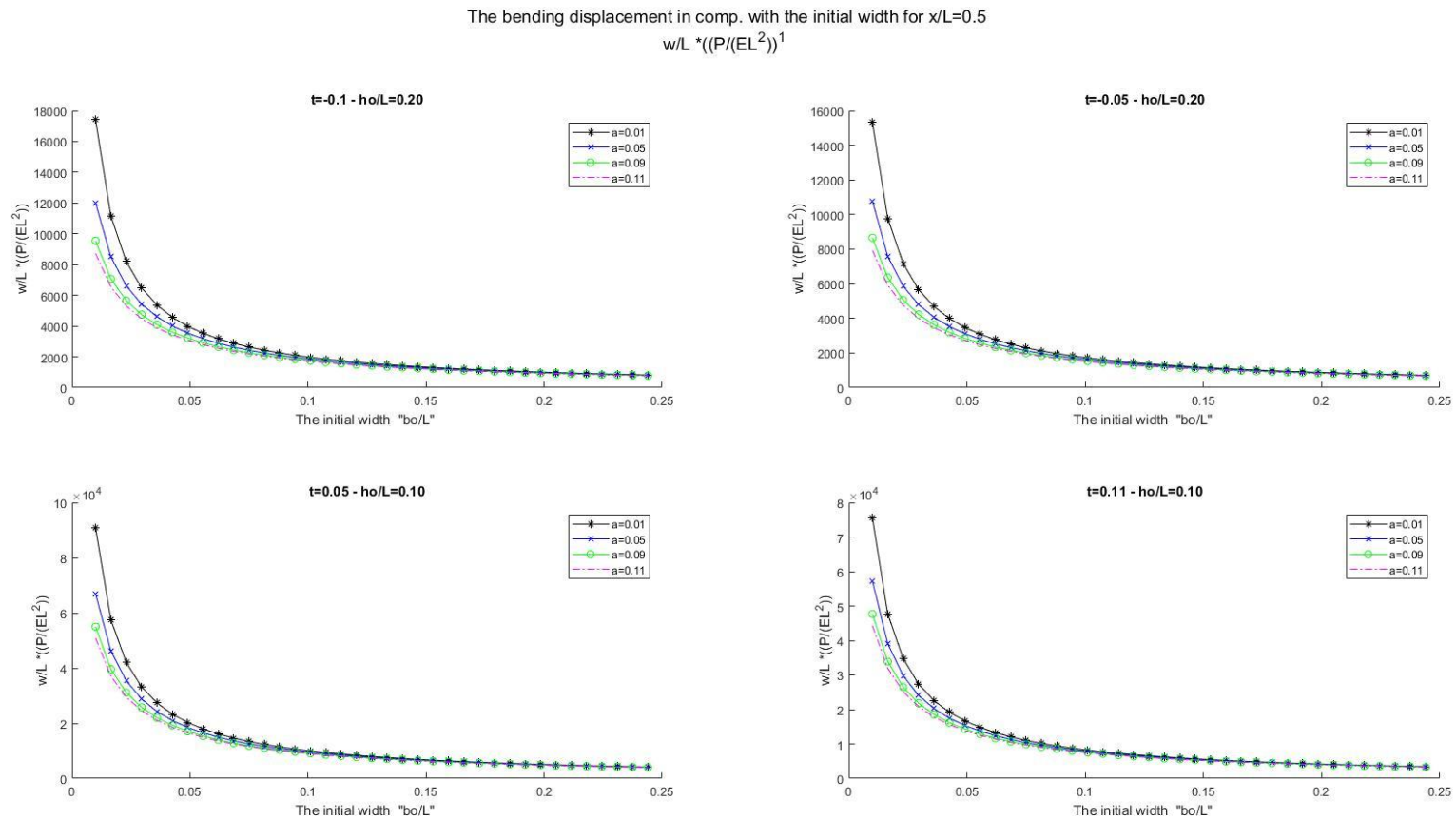


Figure 9. Η κατακόρυφη παραμόρφωση, στο μέσον της δοκού, ως συνάρτηση του αρχικού πλάτους της διατομής, για διάφορους ρυθμούς μεταβολής του πλάτους της διατομής. Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει διαφορετικό ύψος της διατομής, δηλαδή αρχικό ύψος και ρυθμός μεταβολής αυτού. Σημαντικό είναι να σημειωθεί, σε αυτήν την περίπτωση, ότι υπήρξαν κάποιες απροσδιοριστίες, για κάποιους ρυθμούς μεταβολής. Η συνάρτηση όμως είναι συνεχής και έτσι, απλά αλλάχθηκε το θήμα. Συγκρίνοντας με την περίπτωση 1.2.1. (τέταρτο διάγραμμα) μπορεί να παρατηρήσει κανείς πόσο διαφορετικές είναι οι εικόνες. Αυτό καθιστά την επαλληλία «superposition» τελείως αδύνατη.

The bending displacement in comp. with the Height grad for $x/L=0.5$
 $w/L * ((P/(EI^2)))^1$

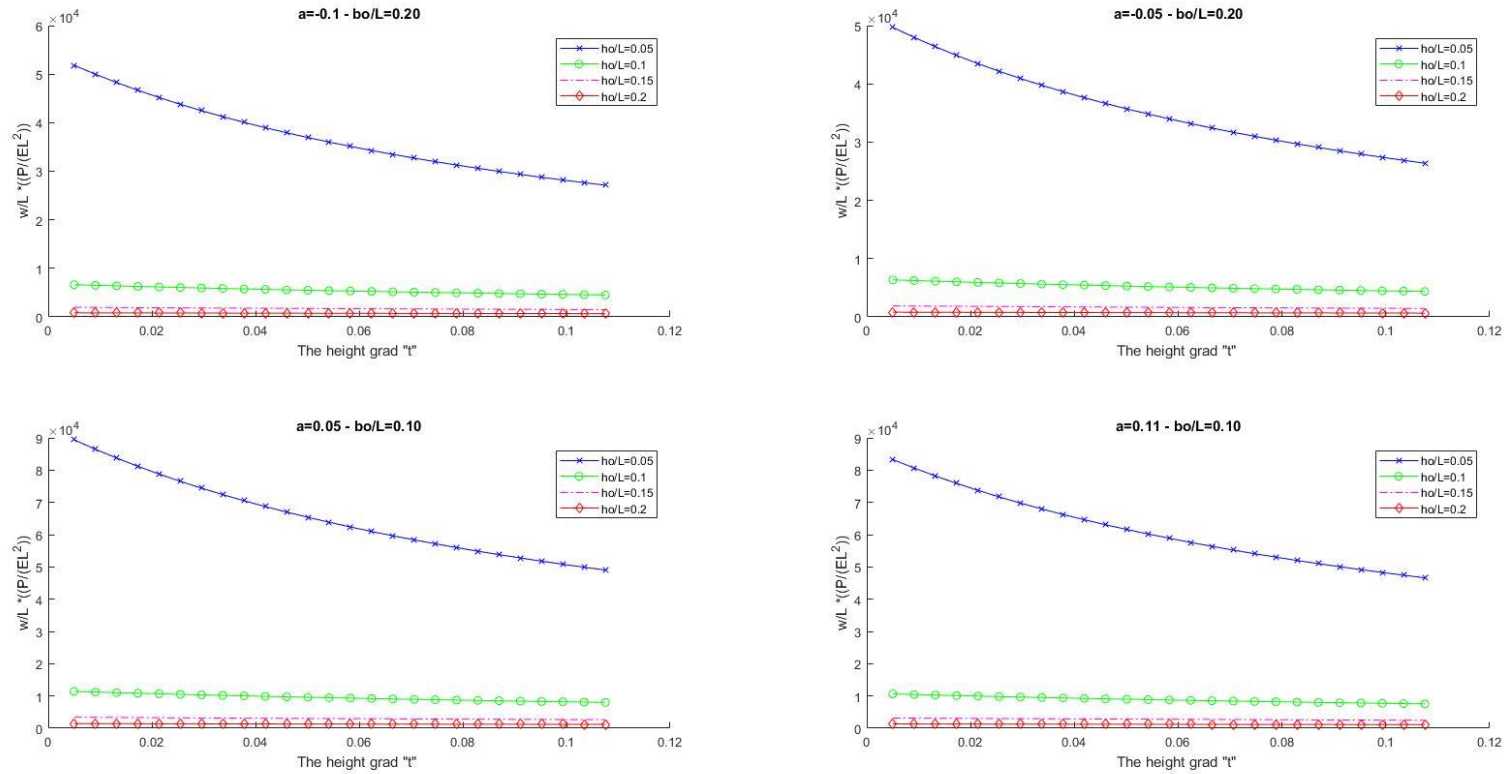


Figure 10. Η κατακόρυφη παραμόρφωση, στο μέσον της δοκού, ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, για διάφορα αρχικά ύψη της διατομής. Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει διαφορετικό πλάτος της διατομής, δηλαδή αρχικό πλάτος και ρυθμός μεταβολής αυτού. Σε αυτό το σύνολο διαγραμμάτων μπορεί κανείς να παρατηρήσει την σημασία του μικρού αρχικού ύψους διατομής. Αν κανείς δοκιμάσει να συγκρίνει με την περίπτωση 1.2.1. πρέπει να τονιστεί ότι στην περίπτωση 1.2.1. το « t » λεγόταν « a ».

The bending displacement in comp. with the initial height for $x/L=0.5$
 $w/L * ((P/(EI^2))^1$

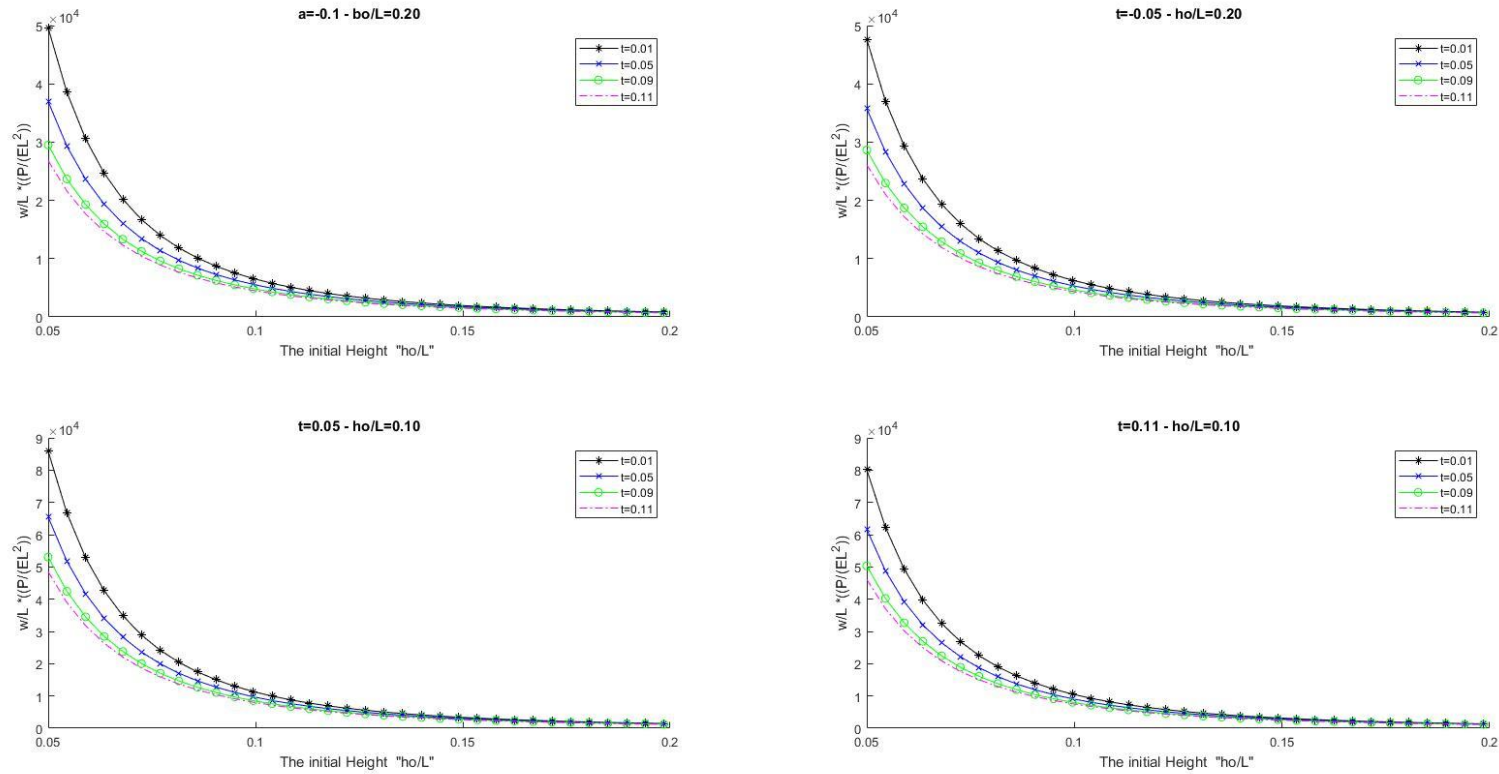


Figure 11. Η κατακόρυφη παραμόρφωση, στο μέσον της δοκού, ως συνάρτηση του αρχικού ύψους της διατομής, για διάφορους ρυθμούς μεταβολής του ύψους της διατομής. Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει διαφορετικό πλάτος της διατομής, δηλαδή αρχικό πλάτος και ρυθμός μεταβολής αυτού.

Στην συνέχεια γίνεται προσδιορισμός των τάσεων που έχουν «gradient». Αυτό γίνεται με την θεωρία δοκού σε κάμψη, που έχει ως εξής.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E \cdot I_{yy}(x)} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{P * (x-L)}{E * (b_0 + \alpha * x) * (h_0 + t * x)^3} * Z$$

Ενώ η πολικότητα, προσδιορίζεται με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής, δηλαδή την παράγωγο της προς την συντεταγμένη του άξονα στον οποίο υπάρχει (άξονα «3» ή αλλιώς «z»), έχουμε τάσεις στον άξονα «1» και ρυθμό μεταβολής αυτών στον άξονα «3», άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον όρο « μ_{13} ».

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{P * (x-L)}{E * (b_0 + \alpha * x) * (h_0 + t * x)^3}$$

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος του προβόλου. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδη τμήματα, Η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P * (x-L)}{E * (b_0 + \alpha * x) * (h_0 + t * x)^3} * (b_0 + \alpha * x) * dx$$

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P * (x-L)}{E * (h_0 + t * x)^3} * dx^2$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \left[\frac{t * (L - 2 * x) - h_0}{2 * t^2 * (t * x + h_0)^2} \right]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \left[\frac{-t * L - h_0}{2 * t^2 * (t * L + h_0)^2} - \frac{t * L - h_0}{2 * t^2 * h_0^2} \right]$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \frac{1}{2 * t^2} \left[\frac{-1}{(t * L + h_0)} - \frac{t * L - h_0}{h_0^2} \right]$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \frac{1}{2 * t} \left[\frac{-h_0^2 - (t * L)^2 + h_0^2}{(t * L + h_0) * h_0^2} \right]$$

$$Q_{13} = -\frac{12}{2} * \mu_{13} * \frac{P}{E} * \left[\frac{L^2}{t * L * h_0^2 + h_0^3} \right]$$

² Το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα, είναι ακριβώς το ίδιο στην περίπτωση με μεταβαλλόμενο ύψος διατομής. Αυτό γίνεται γιατί η πολικότητα βρίσκεται στον άξονα κατά ύψος και άρα η επιφάνεια κάθετα σε αυτήν περιλαμβάνει το πλάτος. Επομένως πολλαπλασιάζεται το πλάτος και έτσι απαλείφεται από την εξίσωση.

Και εφαρμόζοντας την κανονικοποίηση που περιγράφηκε στην αρχή:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(t * \left(\frac{h_0}{L} \right)^2 + \left(\frac{h_0}{L} \right)^3 \right)^{-1}$$

Αυτή η σχέση στην συνέχεια μπορεί να αποτυπωθεί, αφού πρώτα, ακολουθήσει μερικός σχολιασμός: Το εξωτερικό φορτίο δεν είναι πολύ ενδιαφέρον, αφού η σχέση είναι γραμμική, μπορώ εύκολα να το θεωρήσω σταθερό στο αριστερό μέρος της εξίσωσης. Γι' αυτόν τον λόγο και το κάνω.

Τα διαγράμματα που κατασκευάζονται για το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο παρουσιάζονται παρακάτω, ενώ στην συνέχεια παρουσιάζονται και διαγράμματα για την πολικότητα, η οποία δίνεται από την σχέση:

$$\frac{Pol_{13} * L}{\mu_{13}} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L} \right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L} + t * \frac{x}{L} \right)^{-3} * \left(\frac{x}{L} - 1 \right)$$

The Total Electrical Load vs The gradient of height
 For different initial height : h_0/L & For different External Loads : $P/(EL^2)$

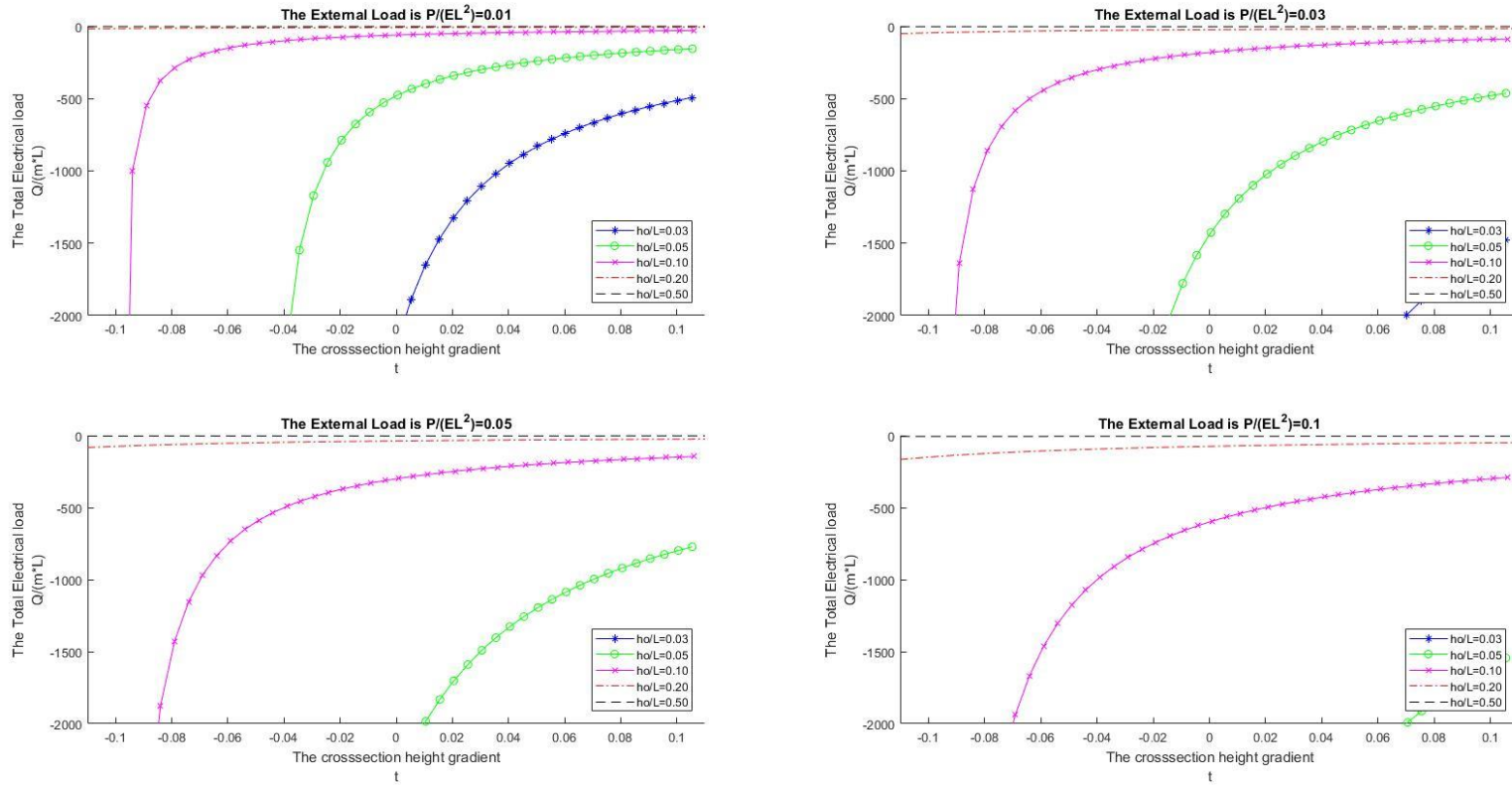


Figure 12. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού σαν συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους διατομής της για διάφορες τιμές του αρχικού ύψους της διατομής και για διαφορά εξωτερικά φορτία.

Όπως ήταν αναμενόμενο, το μεγαλύτερο εξωτερικό φορτίο, δίνει μεγαλύτερο ηλεκτρικά παραγόμενο φορτίο.

Μικρότερα αρχικά ύψη διατομής δίνουν μεγαλύτερα ηλεκτρικά φορτία.

Μικρότεροι (αρνητικοί) ρυθμοί μεταβολής του πλάτους της διατομής δίνουν μεγαλύτερα ηλεκτρικά φορτία.

The Total Electrical Load vs The initial crosssection height
 For different gradients of height "t" & For different External Loads "P/(EL²)"

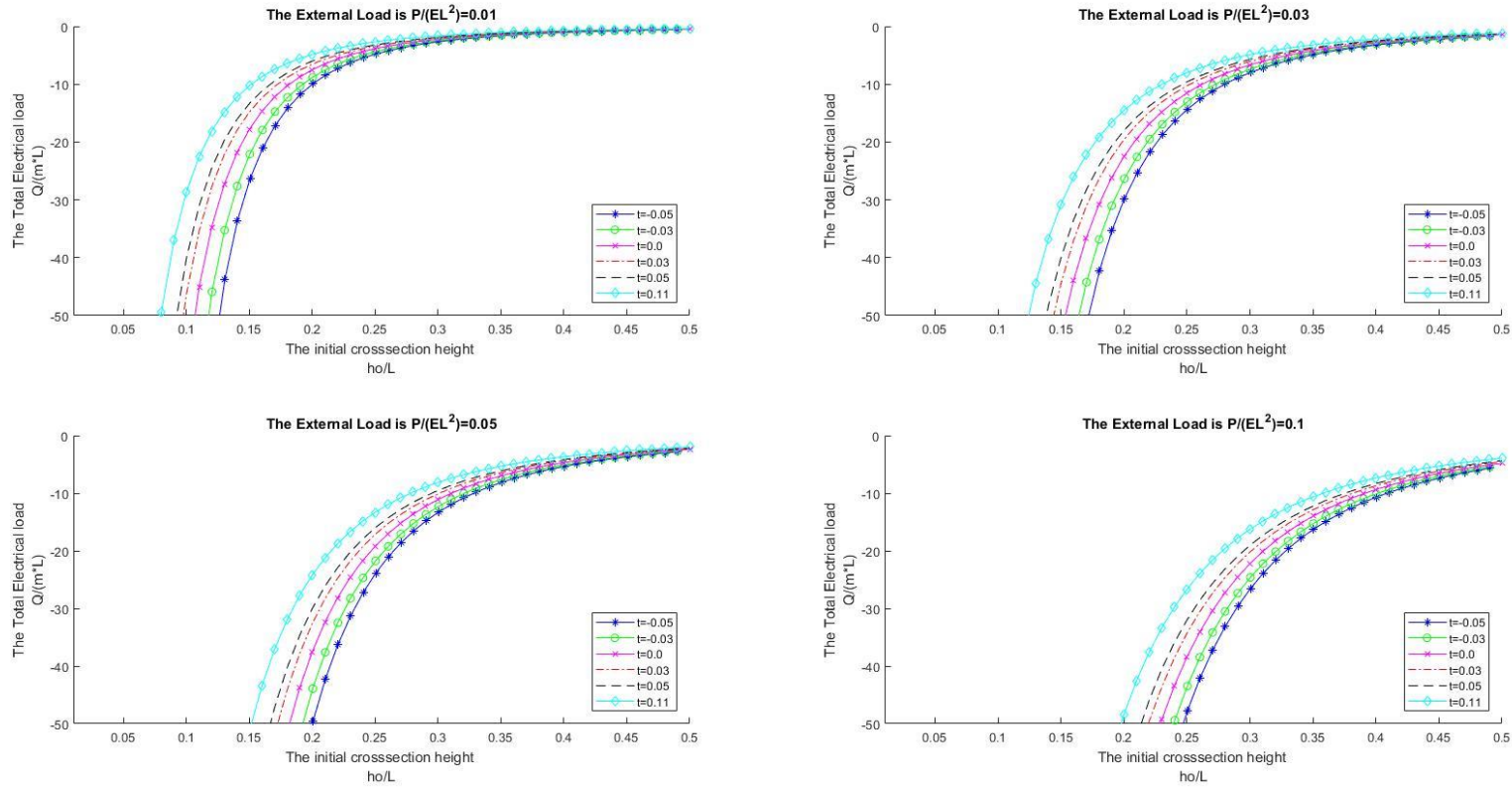


Figure 13. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σαν συνάρτηση του αρχικού ύψους της διατομής, για διάφορες τιμές του ρυθμού μεταβολής του ύψους της. Το εξωτερικό φορτίο παίρνει διαφορετική τιμή σε κάθε διάγραμμα.

Μεγάλα συνολικά παραγόμενα ηλεκτρικά φορτία, αντιστοιχούν σε συνδυασμό, μικρού αρχικού ύψους της διατομής, με μικρό ρυθμό μεταβολής αυτού. Για μεγάλο εξωτερικό φορτίο, έχουμε μεγιστοποίηση του φαινομένου.

Πρόκειται για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, το φορτίο το αντέχει μια διατομή, ανάλογα με τα αδρανειακά της χαρακτηριστικά, (όσο μεγαλύτερα, τόσο περισσότερο φορτίο αντέχει).

The Total Electrical Load for a combination of
The crosssection height (ho/L) & its gradiend (t)

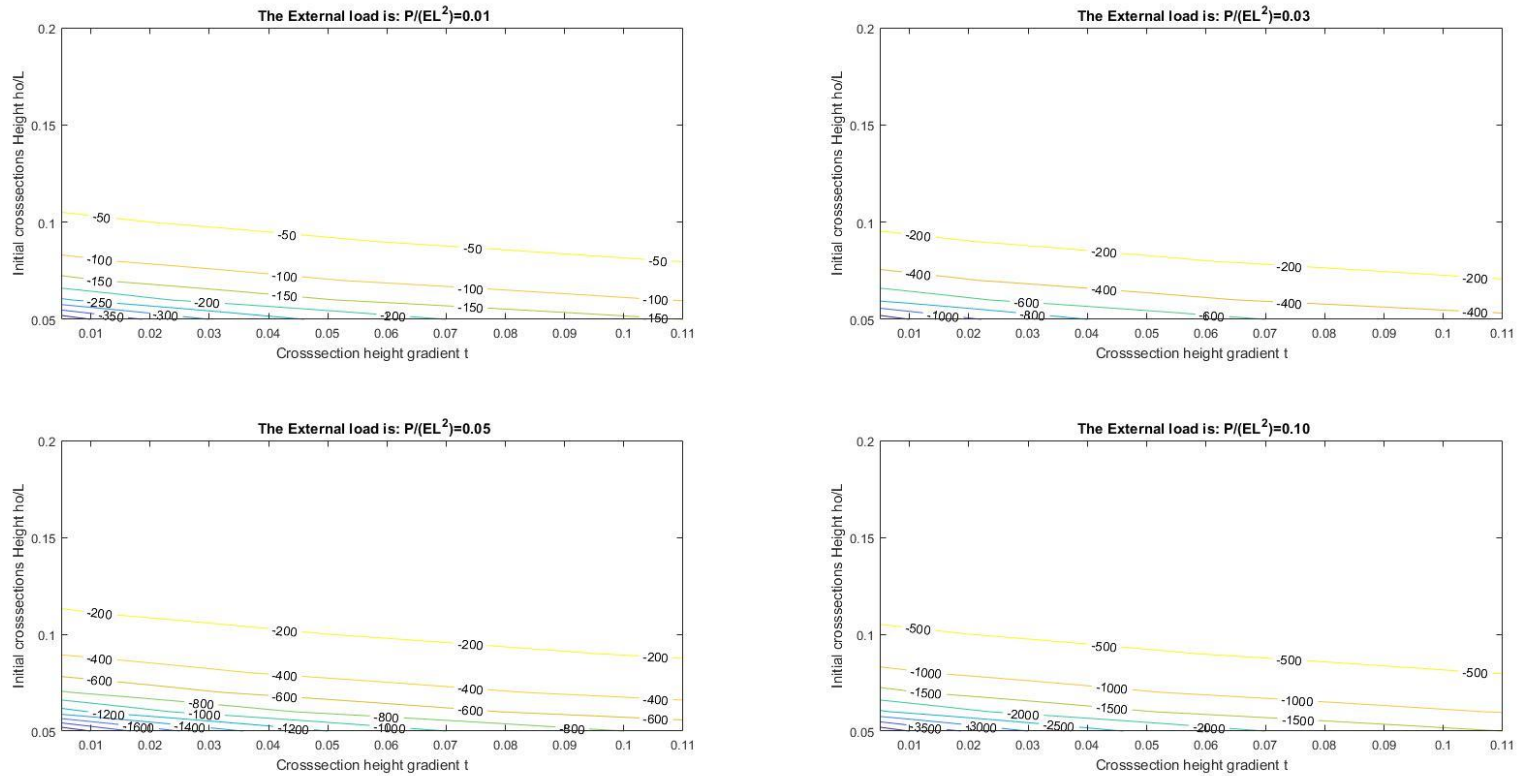


Figure 14. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό, αρχικού ύψους της διατομής, και ρυθμά μεταβολής αυτού. Σε κάθε διάγραμμα υπάρχει διαφορετικό εξωτερικό φορτίο.

Από αυτό το διάγραμμα μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι είναι πολύ πιο δραστική η μείωση του αρχικού ύψους της διατομής, παρά η μείωση του ρυθμού μεταβολής αυτού.

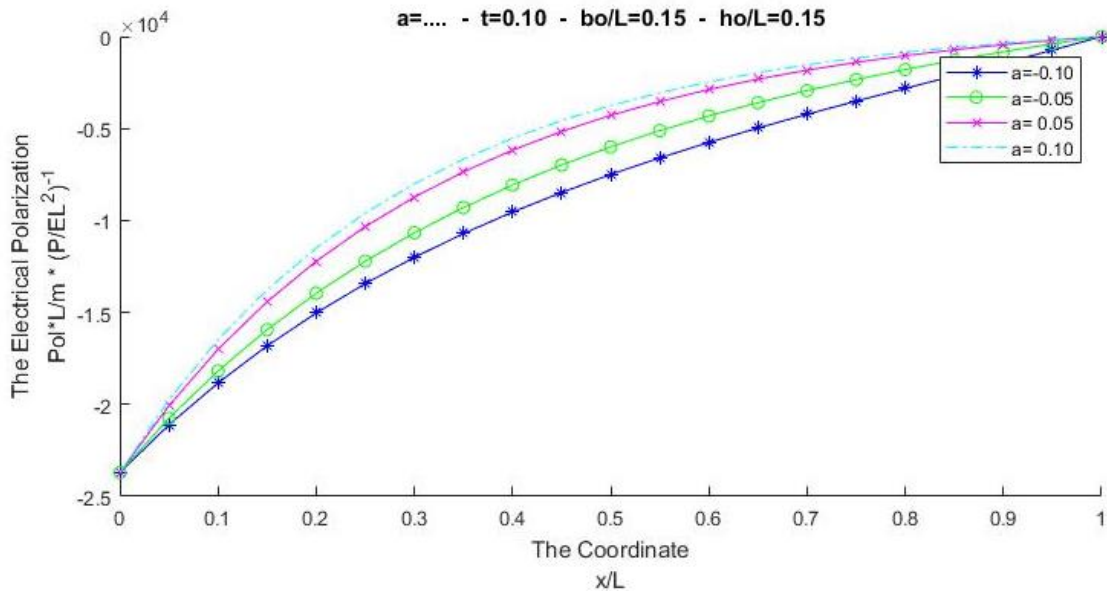


Figure 15. Η πολικότητα που αναπτύσσεται με μία συγκεκριμένη θέση «x» ως συνάρτηση αυτής της θέσης «x», καθώς οι μεταβλητές, αρχικό πλάτος και ύψος διατομής, και ρυθμός μεταβολής του ύψους της διατομής θεωρούνται σταθερά, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους της διατομής μεταβάλλει τις τιμές του.

Η πολικότητα, δεν αλλάζει στις ακραίες τιμές, παρά μόνο στις ενδιάμεσες, όπου μια μικρή (αρνητική) κλίση, επιφέρει καλύτερο αποτέλεσμα.

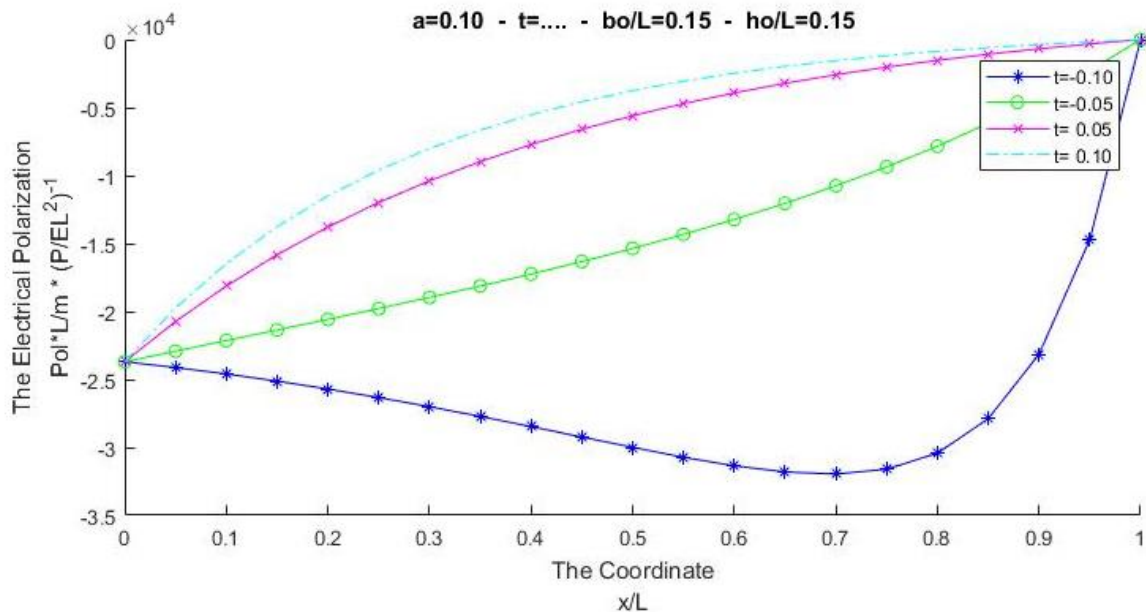


Figure 16. Η πολικότητα που αναπτύσσεται με μία συγκεκριμένη θέση «x» ως συνάρτηση αυτής της θέσης «x», καθώς οι μεταβλητές, αρχικό πλάτος και ύψος διατομής, και ρυθμός μεταβολής του πλάτους της διατομής θεωρούνται σταθερά, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της διατομής μεταβάλλει τις τιμές του.

Η πολικότητα, δεν αλλάζει στις ακραίες τιμές, παρά μόνο στις ενδιάμεσες, όπου μια μικρή (αρνητική) κλίση, επιφέρει καλύτερο αποτέλεσμα.

Μάλιστα είναι εντυπωσιακό, το γεγονός ότι για αρνητική κλίση, η μέγιστη τιμή της πολικότητας, δεν είναι στην μέγιστη τιμή της ροπή.

Αυτό το διάγραμμα υπενθυμίζει την σημασία, της κάθε περίπτωσης. Τα πράγματα είναι διαφορετικά.

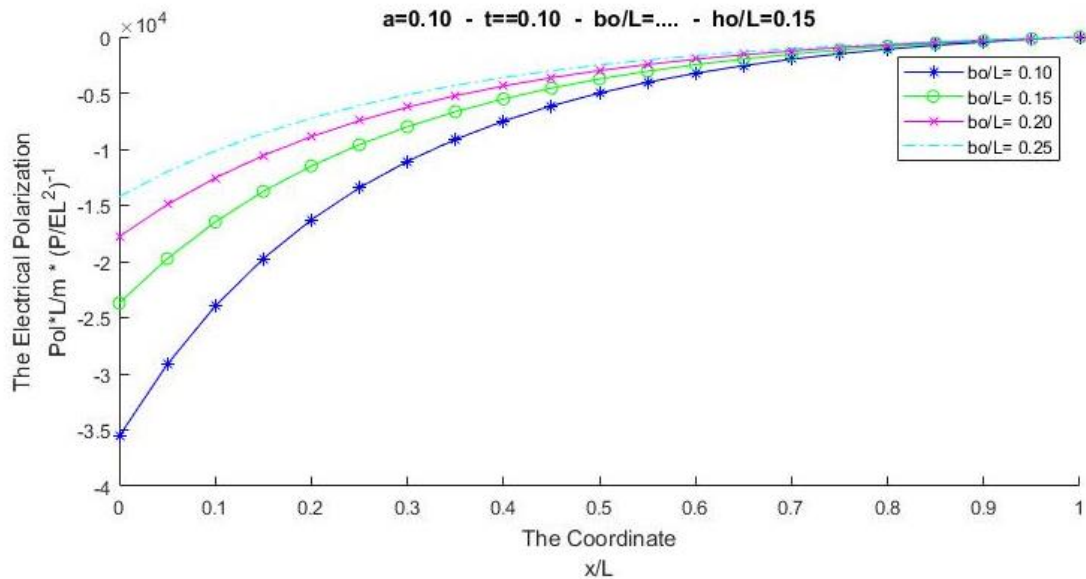


Figure 17. Η πολικότητα που αναπτύσσεται με μία συγκεκριμένη θέση «x» ως συνάρτηση αυτής της θέσης «x», καθώς οι μεταβλητές, αρχικό ύψος διατομής, και οι ρυθμοί μεταβολής του ύψους και του πλάτους της διατομής θεωρούνται σταθερά, ενώ το αρχικό πλάτος της διατομής μεταβάλλει τις τιμές του. Η πολικότητα αλλάζει στην θέση μέγιστης ροπής την τιμή της, καθώς και σε ενδιάμεσες τιμές. Ένα μικρότερο αρχικό πλάτος της διατομής επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα.

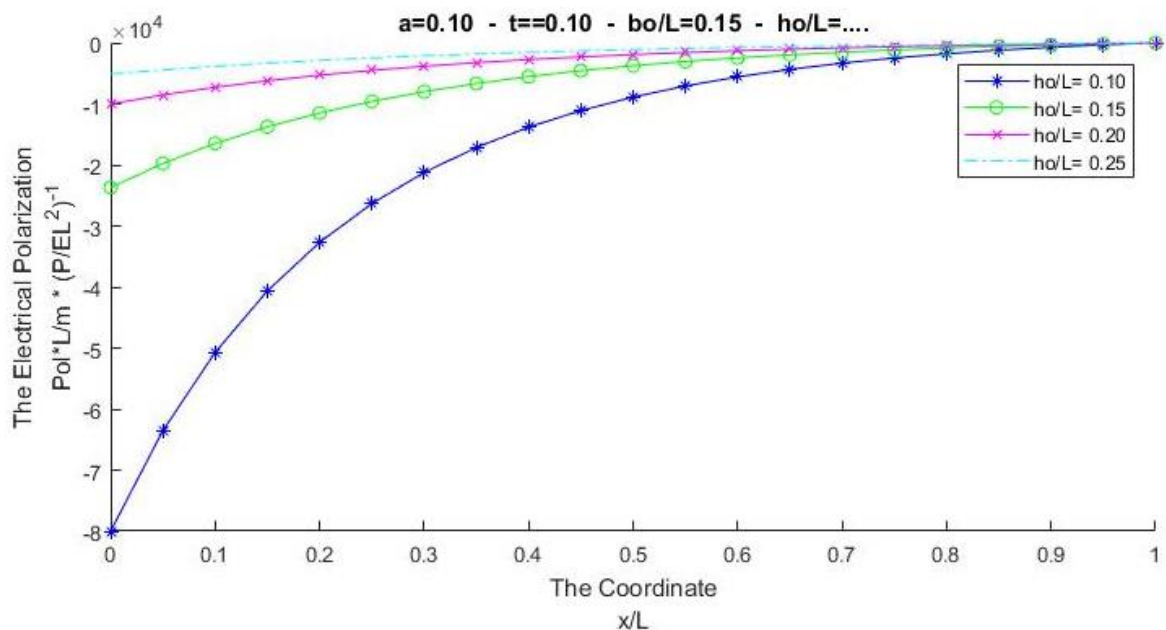


Figure 18. Η πολικότητα που αναπτύσσεται με μία συγκεκριμένη θέση «x» ως συνάρτηση αυτής της θέσης «x», καθώς οι μεταβλητές, αρχικό πλάτος διατομής, και οι ρυθμοί μεταβολής του ύψους και του πλάτους της διατομής θεωρούνται σταθερά, ενώ το αρχικό ύψος της διατομής μεταβάλλει τις τιμές του. Η πολικότητα αλλάζει στην θέση μέγιστης ροπής την τιμή της, καθώς και σε ενδιάμεσες τιμές. Ένα μικρότερο αρχικό ύψος της διατομής επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα. Μάλιστα, η μεταβολή του ύψους είναι πολύ πιο δραστική από αυτήν του πλάτους.

The Electrical Polarization For a Combination of the Width and Height Gradient
 $" Pol \cdot L/m \cdot (P/EL^2)^{-1} "$
 For The Coordinate $x/L=0.5$

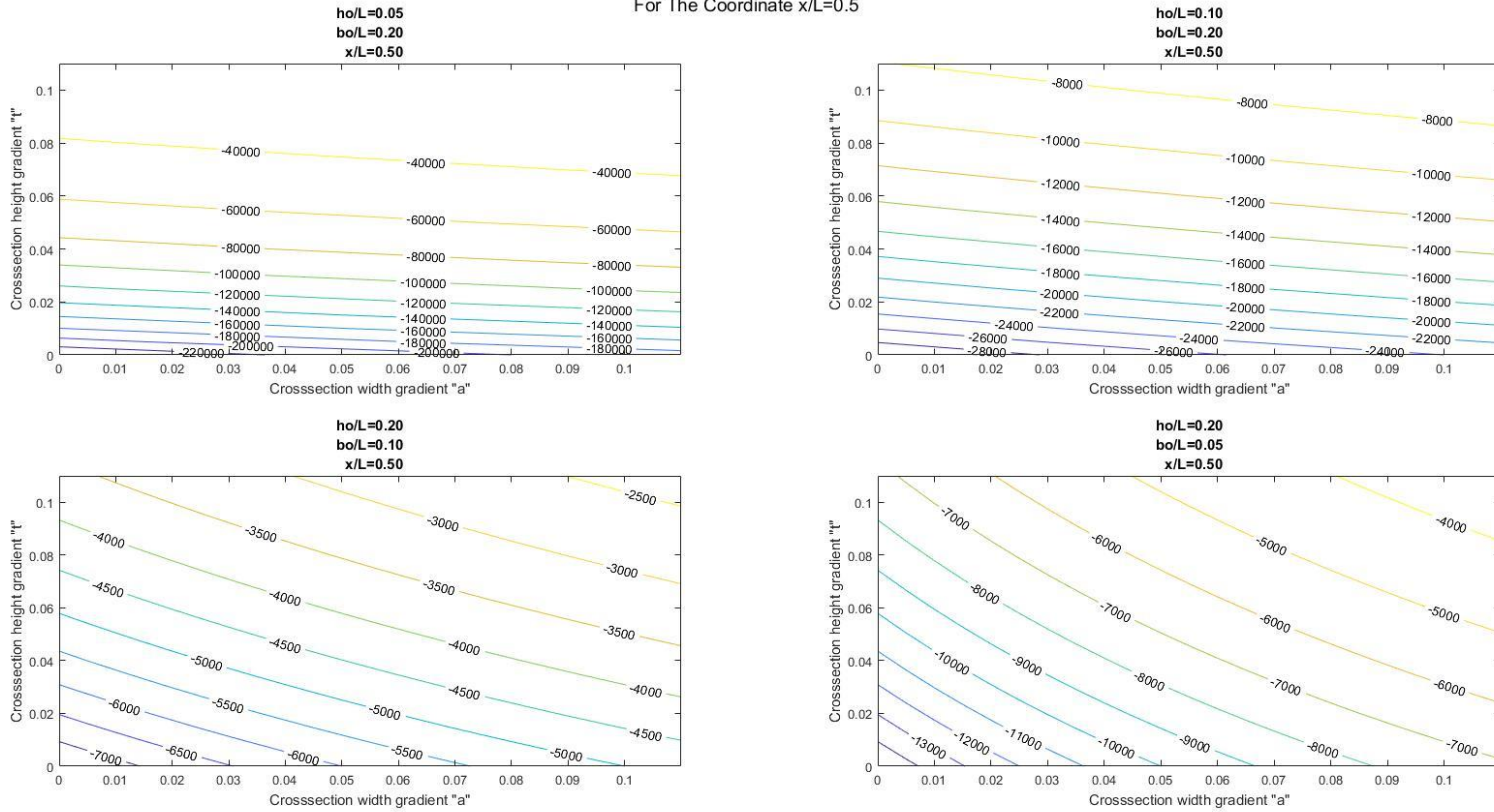


Figure 19. Διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή της πολικότητας, στο μέσο της δοκού για διάφορους συνδυασμούς των ρυθμών μεταβολής πλάτους και ύψους. Σε κάθε διάγραμμα, η αρχική διατομή έχει διαφορετικές διαστάσεις. Φαίνεται ξεκάθαρα, η δραστικότητα, της μεταβολής του ύψους σε σχέση με το πλάτος. Μάλιστα αυτή η δραστικότητα επηρεάζεται από τις αρχικές διαστάσεις. Αν το αρχικό ύψος είναι μικρό (μικρότερο από το αρχικό πλάτος) αυτή η δραστικότητα είναι τεράστια.

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

$$\frac{W(x)}{L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left\{ \frac{2 * \left(a + \frac{b_0}{L}\right) * \ln\left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 1\right)}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right)^2 * t} - \frac{t + \frac{h_0}{L}}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right) * \left(t * \frac{x}{L} + \frac{h_0}{L}\right) * t^2} + \frac{t + \frac{h_0}{L}}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right) * \frac{h_0}{L} * t^2} - \right.$$

$$\frac{2 * \frac{x}{L} * \left(a + \frac{b_0}{L}\right)}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right)^2 * \frac{h_0}{L}} + \left[\left(2 * \frac{x}{L} * \frac{b_0}{L} * a + 2 * \left(\frac{b_0}{L}\right)^2\right) * \ln\left(a * \frac{x}{L} \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) - \left(2 * a * \frac{b_0}{L} * \frac{x}{L} + 2 * \frac{a}{t} * \frac{b_0}{L} * \right.$$

$$\frac{h_0}{L} * \ln\left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) + \left(2 * a^2 * \frac{x}{L} + 2 * a * \frac{b_0}{L}\right) * \ln\left(a * \frac{x}{L} \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) - \left(2 * a^2 * \frac{x}{L} + 2 * \right.$$

$$\left. \frac{a^2}{t} * \frac{h_0}{L} * \ln\left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) \right] * \left[\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right)^3 \right]^{-1} - \frac{\frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-2} + \frac{x}{L} * t^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1}}{\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t} \right\}$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(t * \left(\frac{h_0}{L}\right)^2 + \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 \right)^{-1}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση στην δεύτερη καταλήγουμε στην σχέση που φαίνεται παρακάτω, η οποία δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που παράγεται σε μία δοκό, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν σε θέση «x₀», παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση «w(x₀)»

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = - \frac{W(x)}{L} \left\{ \frac{2 * \left(a + \frac{b_0}{L}\right) * \ln\left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 1\right)}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right)^2 * t} - \frac{t + \frac{h_0}{L}}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right) * \left(t * \frac{x}{L} + \frac{h_0}{L}\right) * t^2} + \frac{t + \frac{h_0}{L}}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right) * \frac{h_0}{L} * t^2} - \right.$$

$$\frac{2 * \frac{x}{L} * \left(a + \frac{b_0}{L}\right)}{\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right)^2 * \frac{h_0}{L}} + \left[\left(2 * \frac{x}{L} * \frac{b_0}{L} * a + 2 * \left(\frac{b_0}{L}\right)^2\right) * \ln\left(a * \frac{x}{L} \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) - \left(2 * a * \frac{b_0}{L} * \frac{x}{L} + 2 * \frac{a}{t} * \frac{b_0}{L} * \right.$$

$$\frac{h_0}{L} * \ln\left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) + \left(2 * a^2 * \frac{x}{L} + 2 * a * \frac{b_0}{L}\right) * \ln\left(a * \frac{x}{L} \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) - \left(2 * a^2 * \frac{x}{L} + 2 * \right.$$

$$\left. \frac{a^2}{t} * \frac{h_0}{L} * \ln\left(t * \frac{x}{L} \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} + 1\right) \right] * \left[\left(\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t\right)^3 \right]^{-1} - \frac{\frac{x}{L} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-2} + \frac{x}{L} * t^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1}}{\frac{h_0}{L} * a - \frac{b_0}{L} * t} \right\} * \left(t * \left(\frac{h_0}{L}\right)^2 + \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 \right)^{-1}$$

Η σχέση αυτή είναι αδιάστατη και μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί σε διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά φαίνονται στις επόμενες σελίδες.

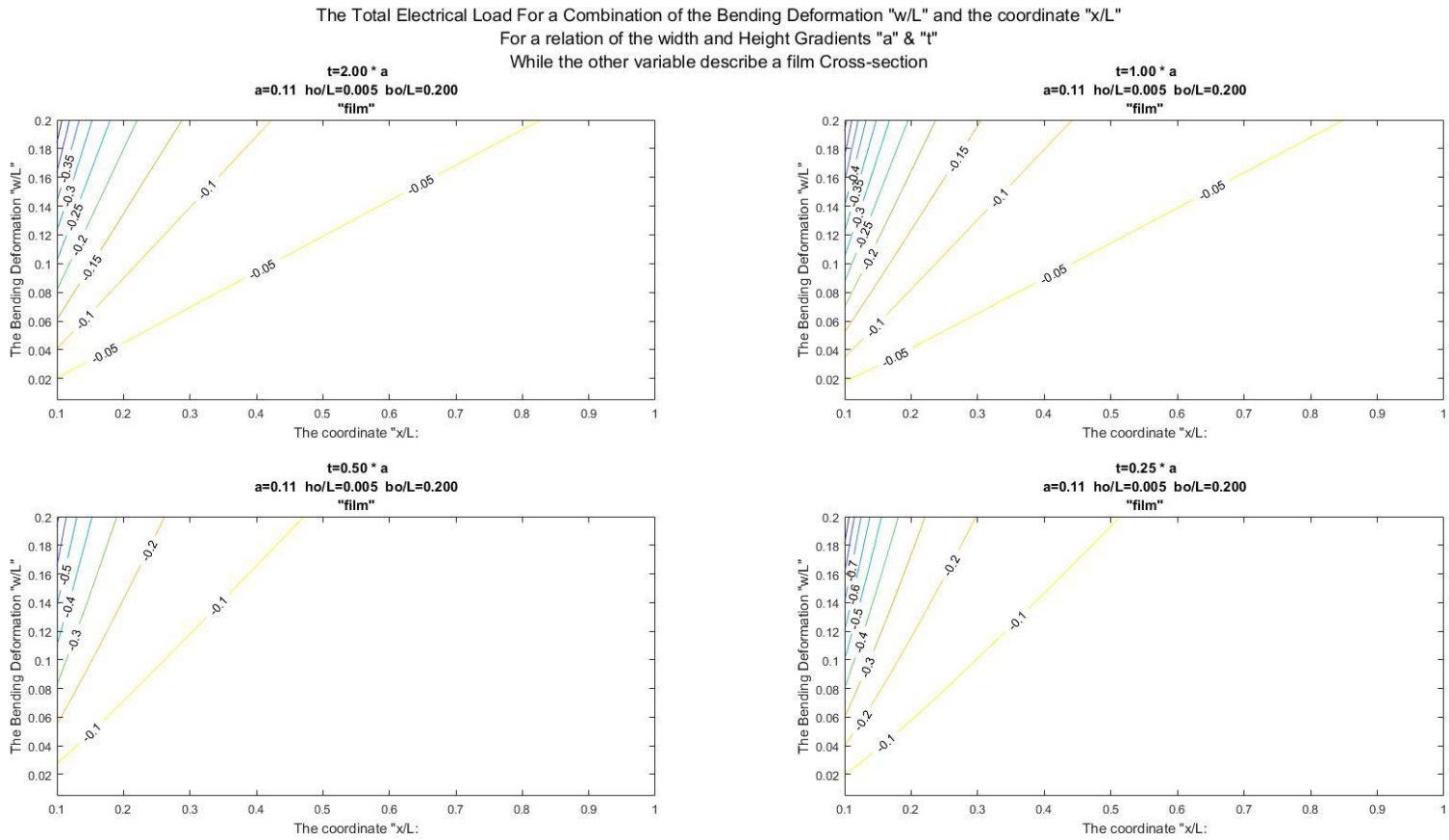


Figure 20. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό της κατακόρυφης παραμόρφωσης, που θα παρατηρηθεί σε ένα σημείο «x», και την συντεταγμένη του σημείου αυτού.

Οι άλλες παράμετροι του προβλήματος θεωρούνται σε κάθε διάγραμμα σταθερές. Η αρχική διατομή θεωρείται διατομή φιλμ, ενώ η μεταβολή του πλάτους της διατομής ίση με « $a = 0.11$ ». Η μικρότερη δυνατή τιμή του συντελεστή μεταβολής του ύψους διατομής, δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

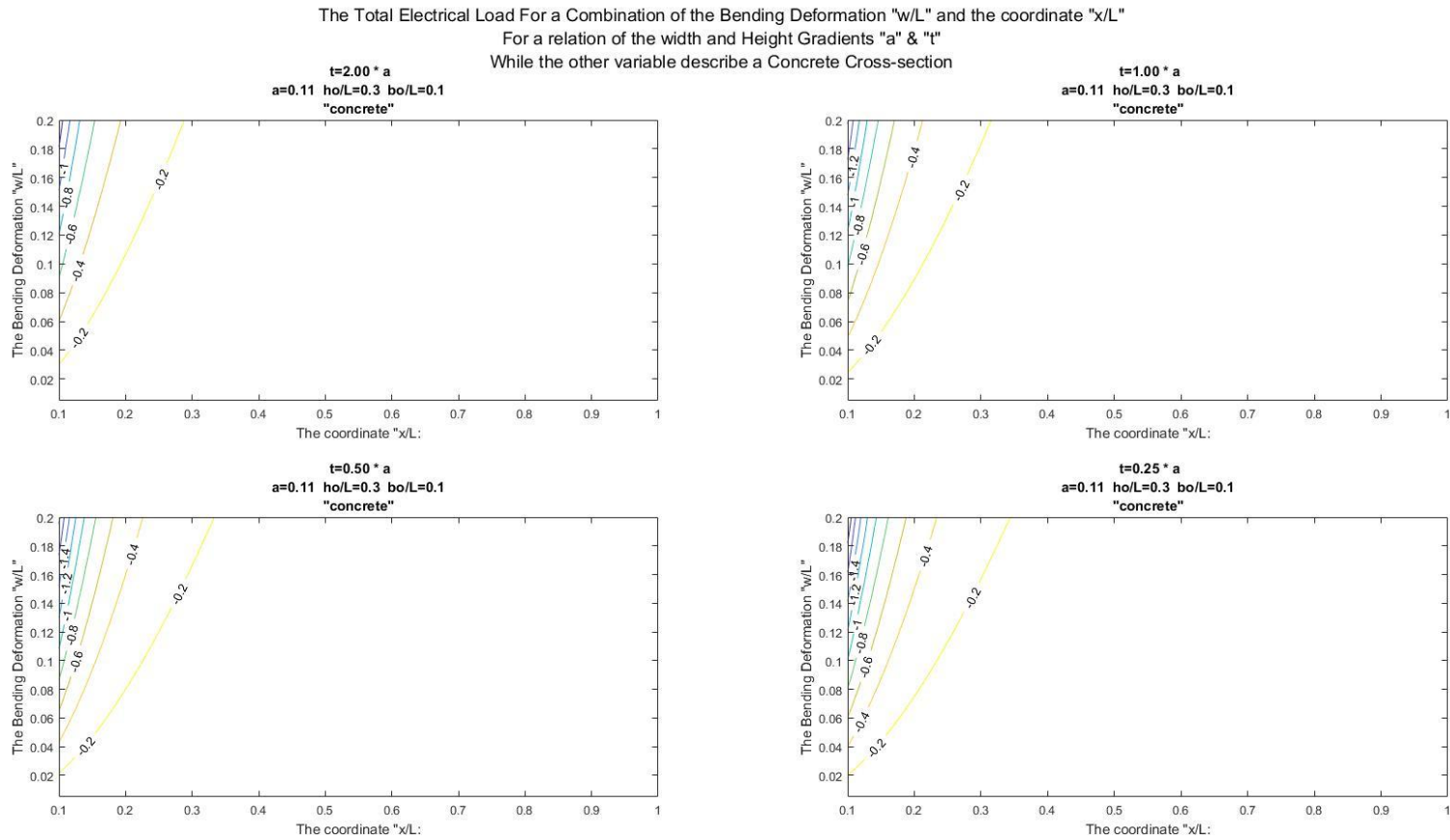


Figure 21. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό της κατακόρυφης παραμόρφωσης, που θα παρατηρηθεί σε ένα σημείο «x», και την συντεταγμένη του σημείου αυτού.

Οι άλλες παράμετροι του προβλήματος θεωρούνται σε κάθε διάγραμμα σταθερές.

Η αρχική διατομή θεωρείται διατομή σκυροδέματος, ενώ η μεταβολή του πλάτους της διατομής ίση με « $\alpha = 0.11$ ».

Η μικρότερη δυνατή τιμή του συντελεστή μεταβολής του ύψους διατομής, δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Είναι φανερό, ότι οι μεταβολές, λόγω του ρυθμού μεταβολής του ύψους διατομής, σε αυτήν την περίπτωση είναι πολύ μικρές.

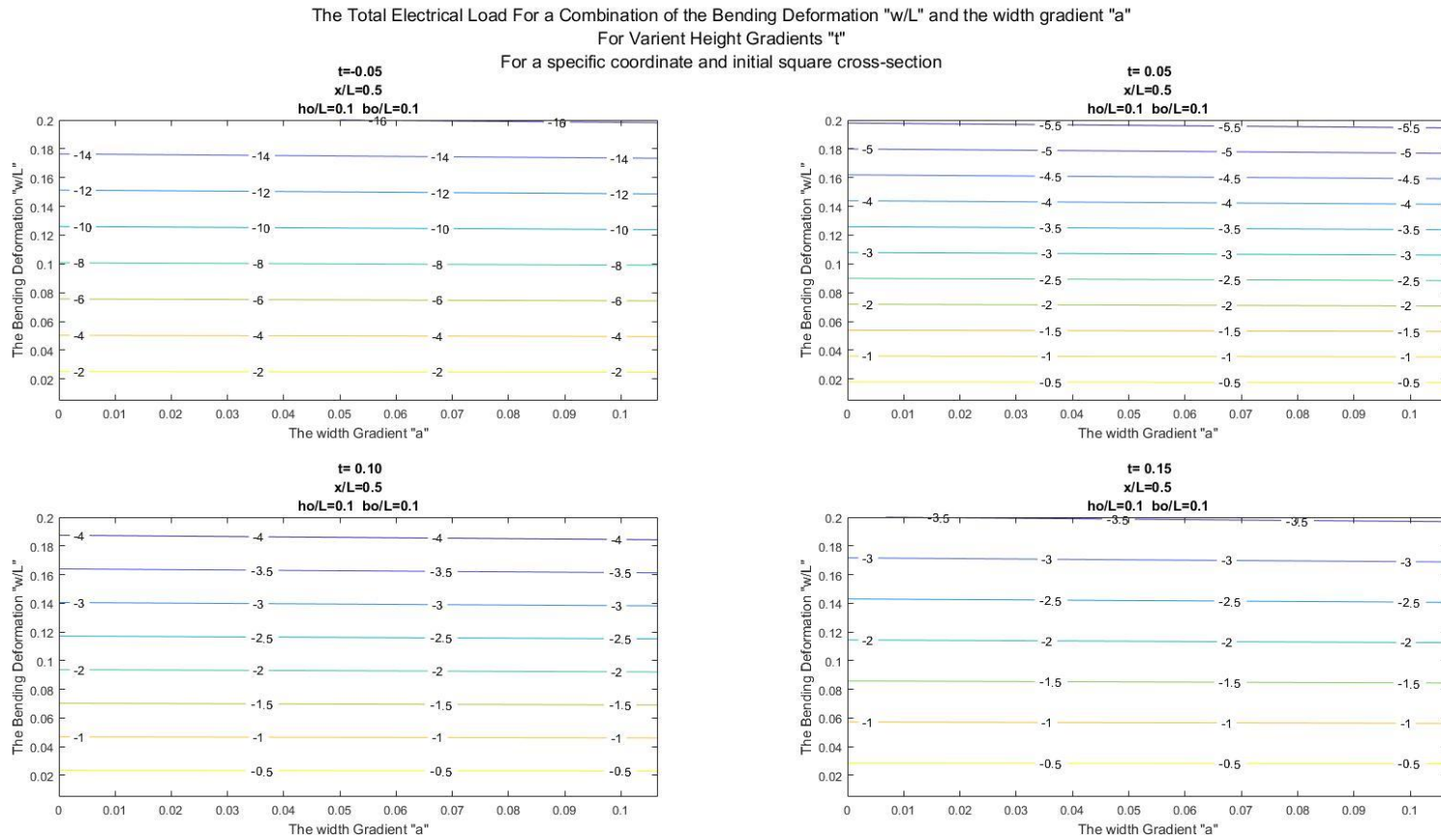


Figure 22. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό κατακόρυφης παραμόρφωσης στο μέσο της δοκού, και του ρυθμού μεταβολής του πλάτους της διατομής. Η αρχική διατομή θεωρείται τετράγωνη, και ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της διατομής μεταβάλλει τις τιμές του. Αυτό που κάνει ιδιαίτερη εντύπωση, είναι το πόσο λίγο επιδρά ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους. Οι γραμμές είναι σχεδόν παράλληλες και οριζόντιες. Οι συντελεστές κλίσης συνεργούν.

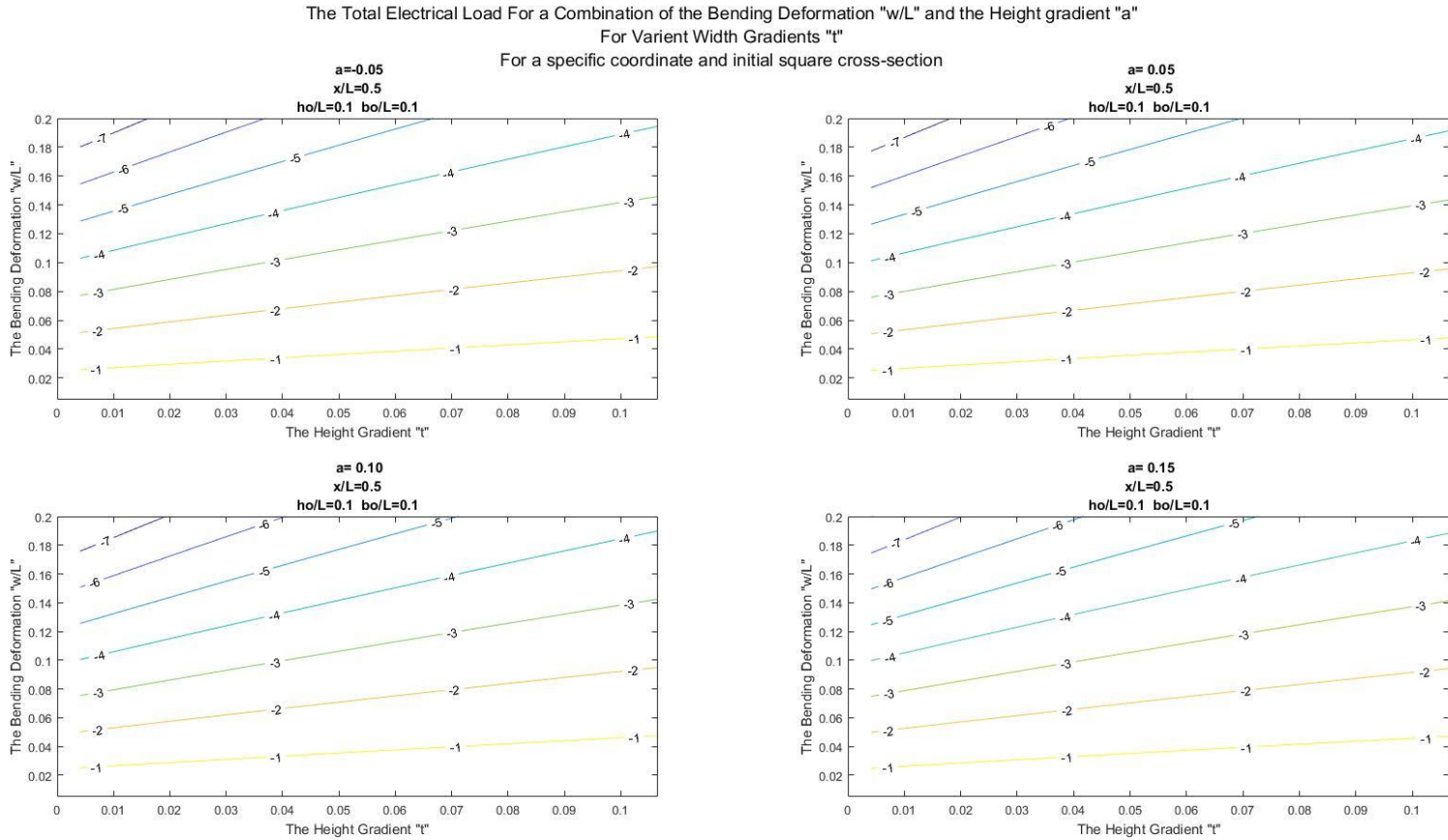


Figure 23. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό της κατακόρυφης παραμόρφωσης στο μέσον της δοκού, και του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής. Η αρχική διατομή θεωρείται τετράγωνη, και ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους της διατομής μεταβάλλει τις τιμές του.

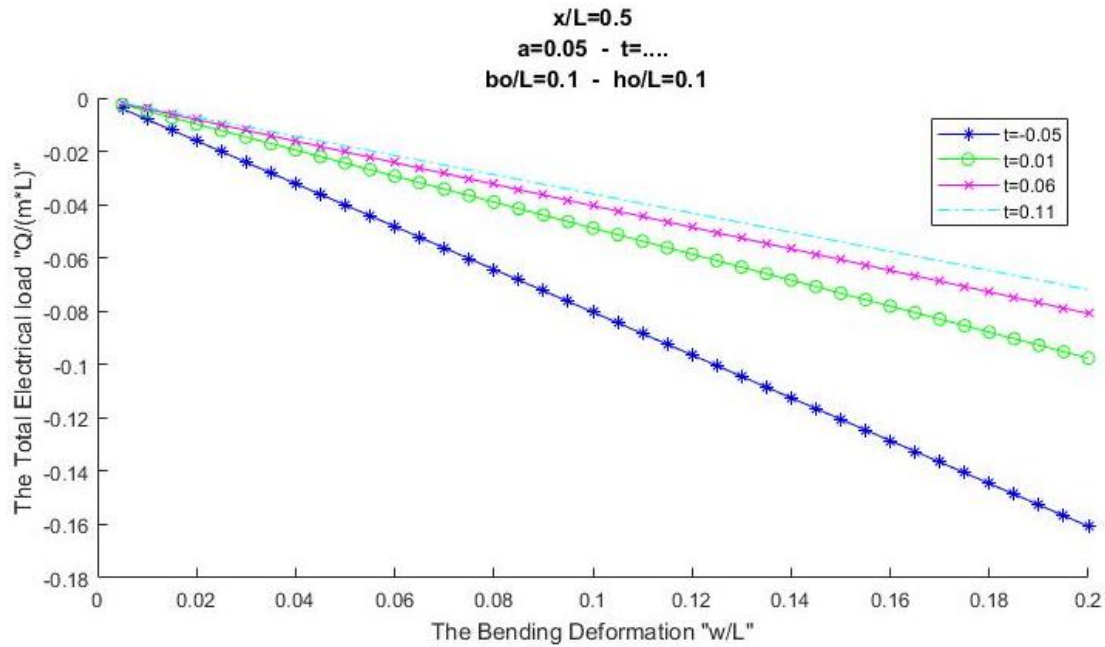


Figure 24. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση του βέλους κάμψης που θα παρατηρηθεί στο μέσον της δοκού, όταν οι αρχική διάσταση της διατομής είναι συγκεκριμένη και τετράγωνη. Ο συντελεστής μεταβολής του πλάτους είναι σταθερός και θετικός ενώ του ύψους αλλάζει τιμές. Η αύξηση του φορτίου με μείωση του ρυθμού μεταβολής, είναι αναμενόμενη.

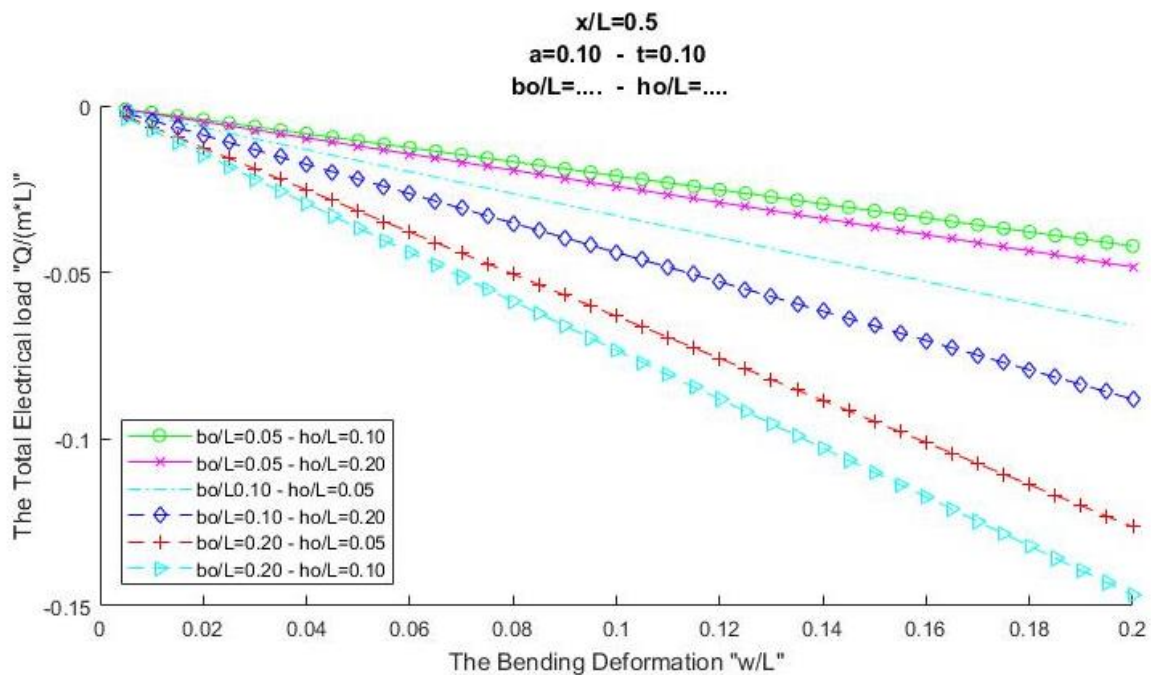


Figure 25. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση του βέλους κάμψης που θα παρατηρηθεί στο μέσον της δοκού, όταν οι αρχική διάσταση της διατομής είναι συγκεκριμένη και τετράγωνη. Ο συντελεστής μεταβολής του πλάτους και του ύψους παίρνουν διάφορες τιμές..

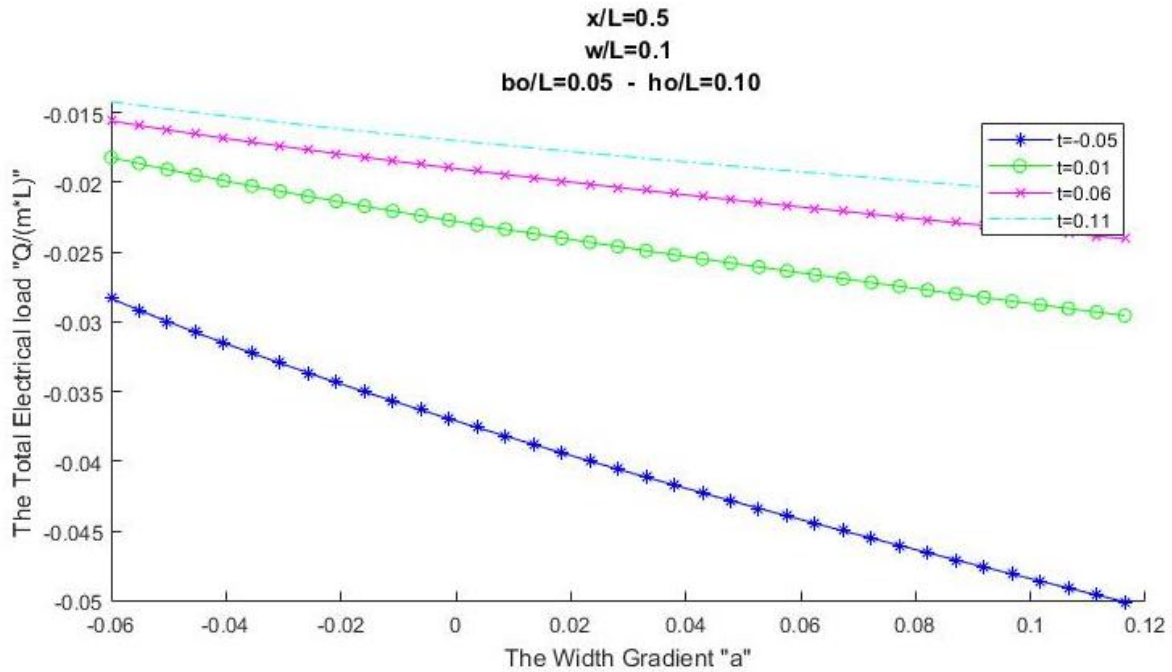


Figure 27. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του πλάτους της διατομής, όταν η κατακόρυφη μετακίνηση το μέσο της δοκού γίνει ίση με « $w = 0.1 * L$ », για μία συγκεκριμένη αρχική διατομή, καθώς ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της διατομής αλλάζει τιμές.

Αναπάντεχη παρατήρηση, ότι η επίτευξη μέγιστου φορτίου γίνεται για παράλληλα μικρό ρυθμό μεταβολής του ύψους αλλά μεγάλο του πλάτους.

Πρέπει, όμως, σε κάθε περίπτωση να σκεφτόμαστε, ότι το βέλος κάμψης επηρεάζεται από τους ρυθμούς αυτούς.

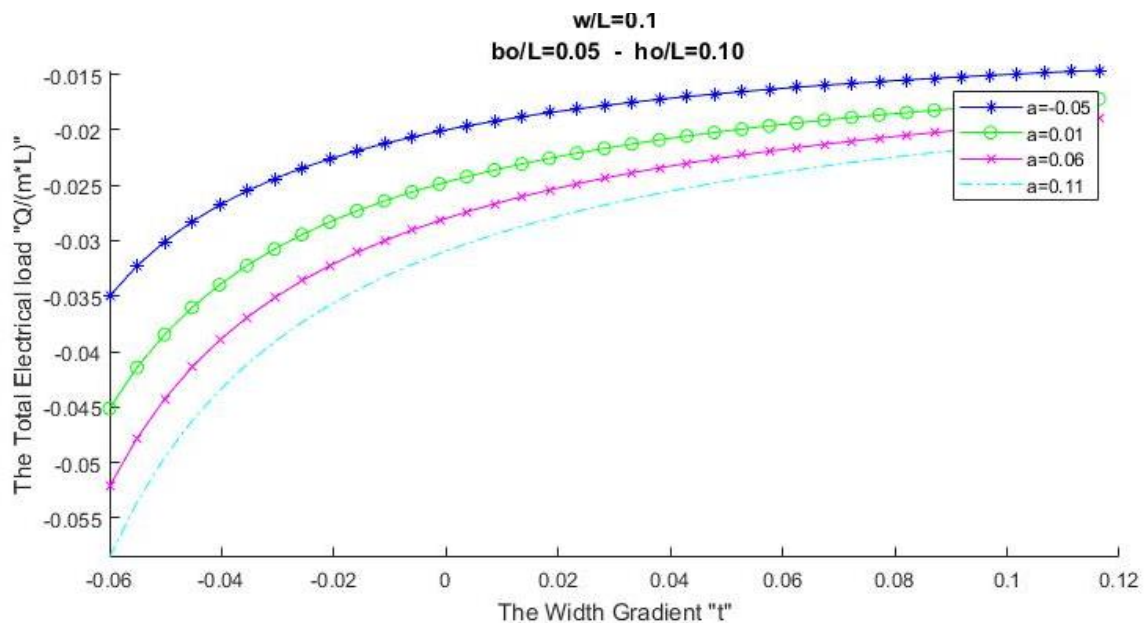


Figure 26. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής του ύψους της διατομής, όταν η κατακόρυφη μετακίνηση το μέσο της δοκού γίνει ίση με « $w = 0.1 * L$ », για μία συγκεκριμένη αρχική διατομή, καθώς ο ρυθμός μεταβολής του πλάτους της διατομής αλλάζει τιμές.

Αναπάντεχη παρατήρηση, ότι η επίτευξη μέγιστου φορτίου γίνεται για παράλληλα μικρό ρυθμό μεταβολής του ύψους αλλά μεγάλο του πλάτους.

Πρέπει, όμως, σε κάθε περίπτωση να σκεφτόμαστε, ότι το βέλος κάμψης επηρεάζεται από τους ρυθμούς αυτούς.

3.12. Περίπτωση 2.0.1. Αμφιέρεστος φορέας με τέμνον φορτίο, με σταθερή διατομή

Όπως ασχοληθήκαμε σε μεγάλο βαθμό με τον φορέα του προβόλου, καλό θα ήταν να ασχοληθούμε και με άλλους φορείς, όπως είναι και ένας αμφιέρεστος φορέας. Αυτόν το αμφιέρεστο φορέα («simply supported beam»), θα τον θεωρήσουμε φορτισμένο με ένα τέμνον φορτίο, σε θέση μεταξύ των δύο στηρίξεων («three point bending»). Βέβαια, με αυτό το σκεπτικό είναι δυνατό κανείς να φανταστεί την παλινδρομική κίνηση του φορτίου πάνω στο δοκάρι, ένα φλεξοηλεκτρικό στοιχείο, και στην συνέχεια να επεκταθεί και σε άλλα φορτία, όπως έξω των στηρίξεων του φορέα.

Ο φορέας που φαίνεται παρακάτω, έχει εξωτερικό φορτίο, κατακόρυφη δύναμη, σταθερή διατομή σε όλο το μήκος, το οποίο είναι και αυτό σταθερό. Οι παράμετροι που απαρτίζουν το πρόβλημα είναι:

- ✓ Το ύψος της διατομής: h_0 [m]
- ✓ Το πλάτος της διατομής: b_0 [m]
- ✓ Το μήκος του προβόλου: L [m]
- ✓ Η κατακόρυφη δύναμη που βρίσκεται στην άκρη: P [N]
- ✓ Η συντεταγμένη στον άξονα κατά μήκος της δοκού: x [m]
- ✓ Η απόσταση από την αριστερή στήριξη του φορτίου: l_1 [m]

Κατ' επέκταση της l_1 μπορεί κανείς να ορίσει και την l_2 , η οποία είναι η απόσταση του κατακόρυφου φορτίου από την άλλη άκρη και ισούται με:

$$l_2 = L - l_1$$

Ή διαφορετικά, με την κανονικοποίηση που υποδείχθηκε στην αρχή της ενότητας,

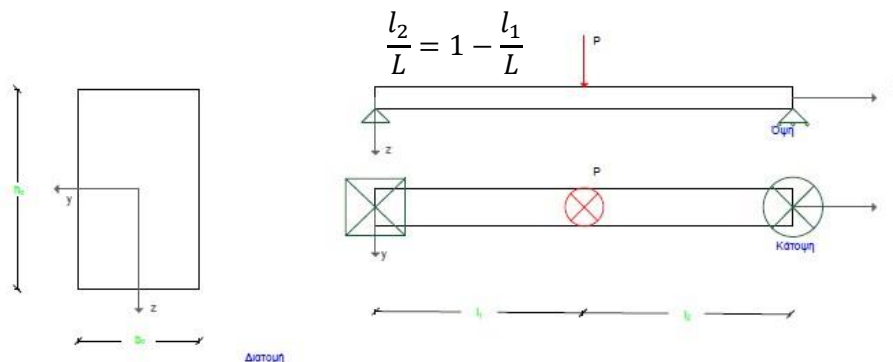


Figure 1. Ο φορέας της περίπτωσης 2.0.1. είναι αμφιέρεστη δοκός με κατακόρυφο φορτίο.

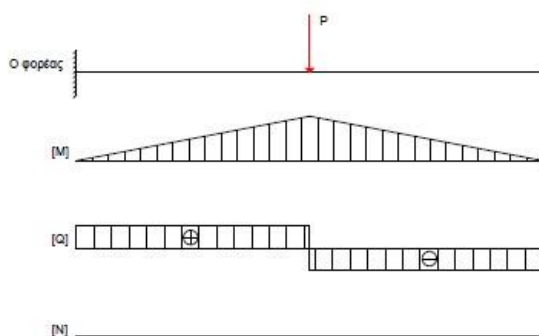


Figure 2. Τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών του φορέα της περίπτωσης 2.0.1.

Ο φορέας μπορεί να επιλυθεί εύκολα με το χέρι, αφού είναι ισοστατικός.

Οι αντιδράσεις στήριξης.

- $V_{αριστερά} = l_2 * \frac{P}{L}$ [kN]
- $V_{δεξιά} = l_1 * \frac{P}{L}$ [kN]
- $H_{αρθρωσης} = 0$ [kN]

Και οι εξισώσεις των διαγραμμάτων [M], [Q], [N].

$$\checkmark M(x) = l_2 * \frac{P}{L} * x - P * \langle x - l_1 \rangle \quad [\text{kN} * \text{m}]$$

$$\checkmark Q(x) = l_2 * \frac{P}{L} - \langle x - l_1 \rangle^0 * P \quad [\text{kN}]$$

$$\checkmark N(x) = 0 \quad [\text{kN}]$$

Τα αδρανειακά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται ως:

$$\checkmark \text{Εμβαδόν:} \quad A = h_0 * b_0 \quad [\text{m}^2]$$

$$\checkmark \text{Ροπή Αδρανείας} \quad I_{yy} = \frac{b_0 * h_0^3}{12} \quad [\text{m}^4]$$

$$I_{zz} = \frac{b_0^3 * h_0}{12} \quad [\text{m}^4]$$

Το βέλος κάμψης μπορεί να υπολογιστεί, με την χρήση της εξίσωσης Euler- Bernoulli όπως φαίνεται παρακάτω.

$$E * I(x) * w''(x) = -M(x) = -P * \left(l_2 * \frac{x}{L} - \langle x - l_1 \rangle \right)$$

$$w''(x) * E * \frac{b_0 * h_0^3}{12} = P * \left(-l_2 * \frac{x}{L} + \langle x - l_1 \rangle \right)$$

$$w''(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left(\langle x - l_1 \rangle - l_2 * \frac{x}{L} \right)$$

$$W'(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left(\frac{\langle x - l_1 \rangle^2}{2} - \frac{l_2}{L} * \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

$$W(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left(\frac{\langle x - l_1 \rangle^3}{6} - \frac{l_2}{L} * \frac{x^3}{6} \right) + C_1 * x + C_2$$

Οι συνοριακές συνθήκες που δίνουν οι αντιδράσεις στήριξης, μπορούν να βοηθήσουν στον προσδιορισμό των σταθερών ολοκλήρωσης.

$$W(x = 0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$W(x = L) = 0 \rightarrow 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left(\frac{l_2^3}{6} - \frac{l_2}{L} * \frac{L^3}{6} \right) + C_1 * L = 0 \rightarrow$$

$$C_1 = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \frac{1}{6} * \left(\frac{l_2^3}{L} - l_2 * L \right)$$

Και άρα το βέλος κάμψης, αφού κιάλας αδιαστατοποιηθεί με αυτά που περιεγράφηκαν στην αρχή παίρνει την παρακάτω μορφή.

$$\frac{W(x)}{L} = 2 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\left(\frac{x}{L} - \frac{l_1}{L}\right)^3 - \frac{l_2}{L} * \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} * \frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^3 * \frac{x}{L}\right)$$

Από την σχέση αυτή μπορούν να κατασκευασθούν πολλά διαγράμματα, που φαίνονται στις επόμενες σελίδες.

Επίσης, επειδή οι παράμετροι του προβλήματος είναι πολλές σε αριθμό, δεχόμαστε την παραδοχή, ότι το φορτίο, που ασκείται στην αμφιέρεστη δοκό, ασκείται σε τέσσερεις θέσεις όπως αυτές περιγράφονται παρακάτω.

	$\frac{l_1}{L}$	$\frac{l_2}{L}$
Θέση 1	0.500	0.500
Θέση 2	0.333	0.667
Θέση 3	0.250	0.750
Θέση 4	0.100	0.900

Figure 3. Πίνακας, με την διάφορες θέσεις του κατακόρυφου φορτίου, πάνω στην αμφιέρεστη δοκό.

Για την κατασκευή των διαγραμμάτων, σε γλώσσα περιβάλλοντος «matlab» χρειάστηκε τέχνασμα, αντιμετώπισης του γενικευμένου ολοκληρώματος στην σχέση. Αυτό έγινε χωρίζοντας τις μεταβλητές σε δύο σύνολα, ένα με το γενικευμένο και ένα χωρίς αυτό.

Στην συνέχεια γίνεται προσδιορισμός των τάσεων που έχουν «gradient». Αυτό γίνεται με την θεωρία δοκού σε κάμψη, που έχει ως εξής.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E * I_{yy}(x)} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{P * \left(l_2 * \frac{x}{L} - (x - l_1)\right)}{E * b_0 * h_0^3} * Z$$

Ενώ η πολικότητα, προσδιορίζεται με τον ρυθμό μεταβολής της τροπής, δηλαδή την παράγωγο της προς την συντεταγμένη του άξονα στον οποίο υπάρχει (άξονα «3» ή αλλιώς «z»), έχουμε τάσεις στον άξονα «1» και ρυθμό μεταβολής αυτών στον άξονα «3», άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον όρο «μ₁₃».

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{P * \left(l_2 * \frac{x}{L} - (x - l_1)\right)}{E * b_0 * h_0^3}$$

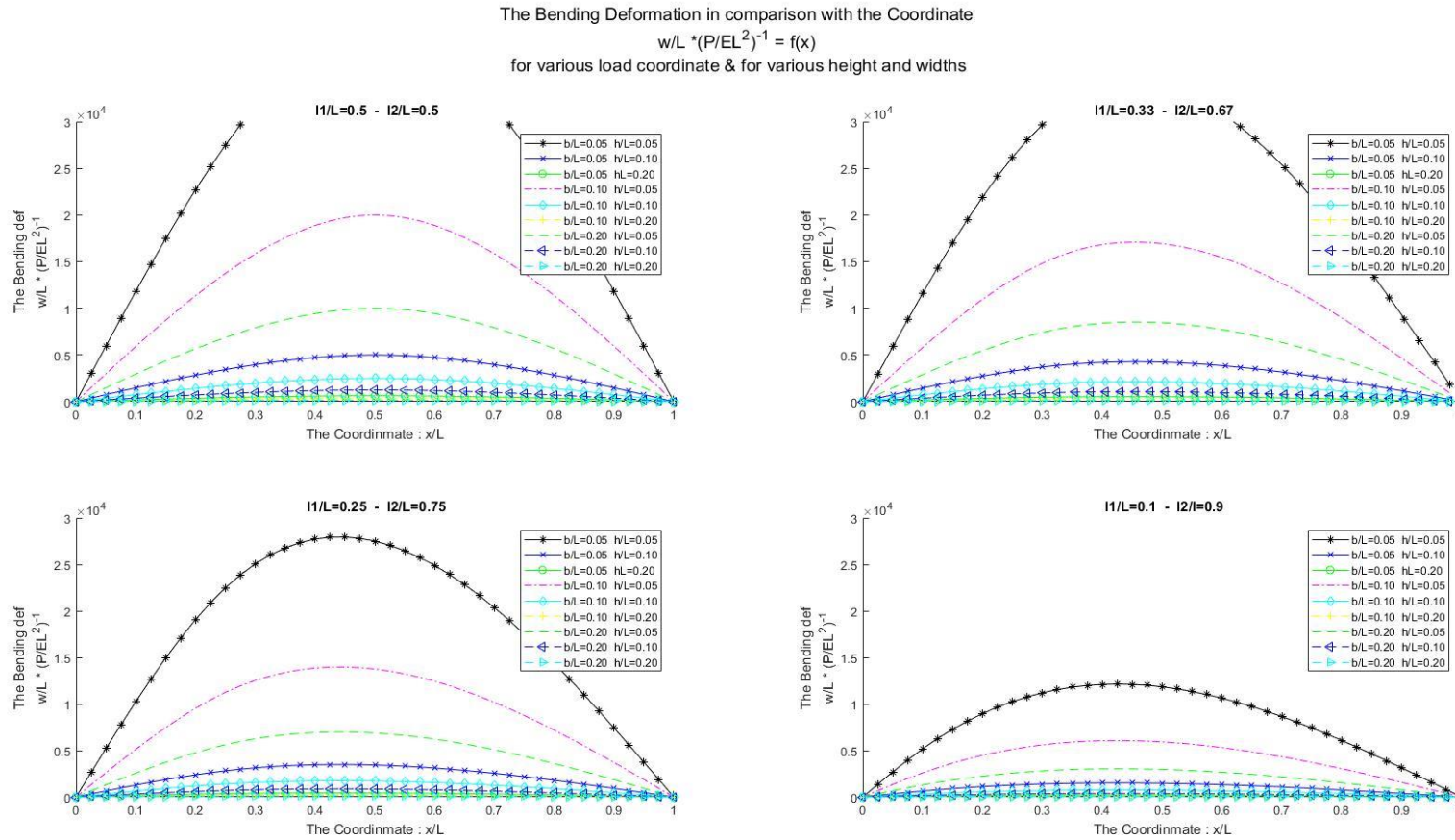


Figure 4. Η κατακόρυφη μετακίνηση ως συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου για διάφορες τιμές τις διατομής της δοκού. Το εξωτερικό φορτίο θεωρείται σταθερό και είναι στο πρώτο μέρος της εξίσωσης. Προφανώς όσο πιο στιβαρή διατομή, τόσο μικρότερη η κατακόρυφη μετακίνηση. Εδώ αξίζει να σημειωθεί, ότι για λόγους ευκρίνειας, έχει παραληφθεί το πάνω μέρος του διαγράμματος. Η μαύρη καμπύλη δεν διακόπτεται, αλλά συνεχίζει έξω από αυτό, διότι διαφορετικά όλες οι άλλες καμπύλες θα έπεφταν η μία πάνω στην άλλη. Ενδιαφέρον έχει να προσέξει κανείς ότι για την μετακίνηση του φορτίου στην άκρη, η καμπύλωση δεν αλλάζει τόσο, όσο μικραίνει η τιμή της κατακόρυφης παραμόρφωσης.

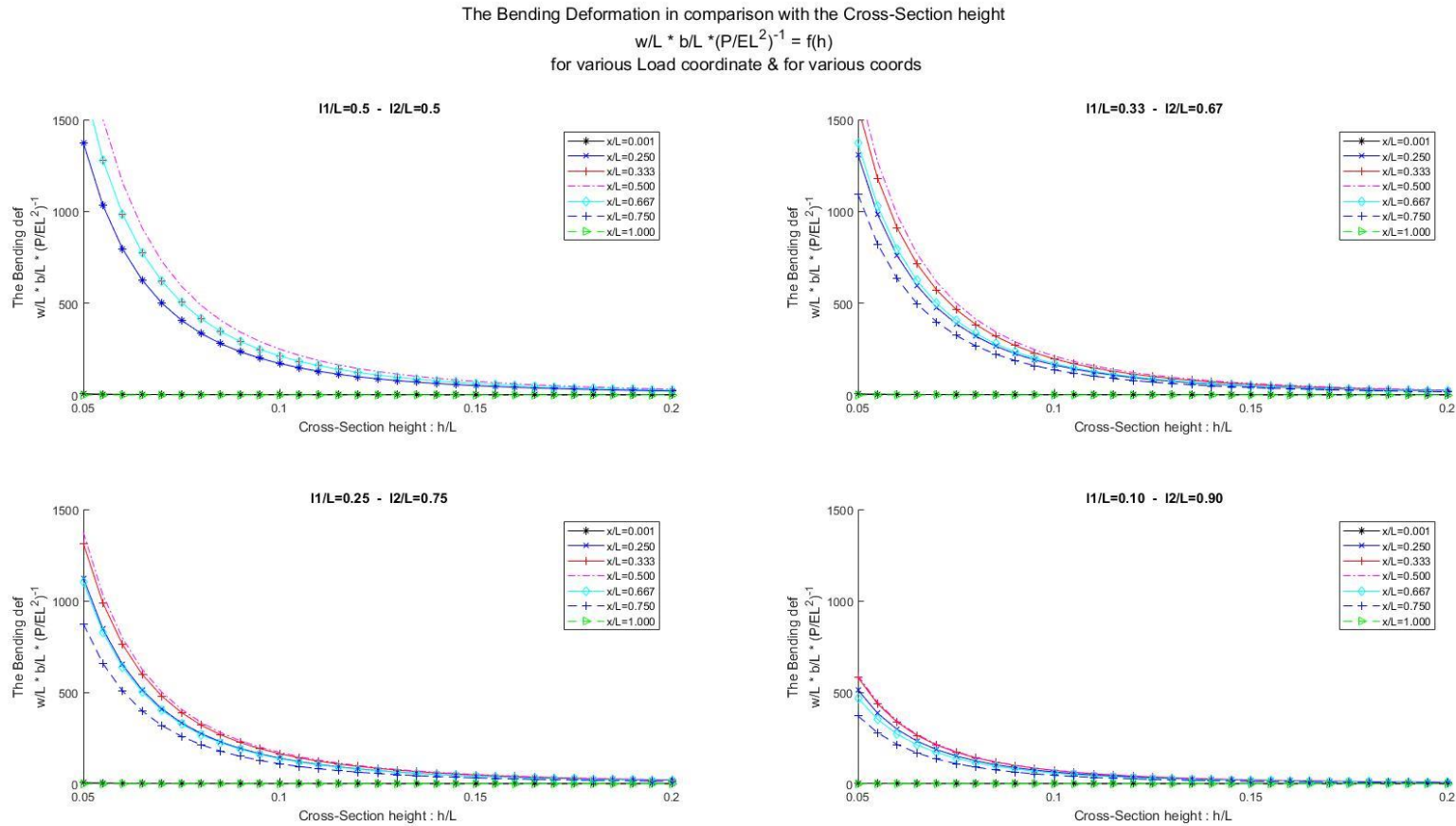


Figure 5. Η κατακόρυφη μετακίνηση, ως συνάρτηση του ύψους της διατομής, σε διάφορες θέσεις τις δοκού. Σε κάθε διάγραμμα το κατακόρυφο φορτίο, βρίσκεται σε διαφορετική θέση. Η άλλη διάσταση θεωρείται σταθερή.

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει, ότι στα διαγράμματα που το φορτίο είναι πιο κοντά σε κάποια στήριξη, η κατακόρυφη παραμόρφωση πέφτει ραγδαία. Επομένως καταλήγει κανείς στο συμπέρασμα ότι ο φορέας πρέπει να γεμίζει με ροπή, για να παραλάβει μεγαλύτερο βέλος, εφόσον αντέχει βέβαια.

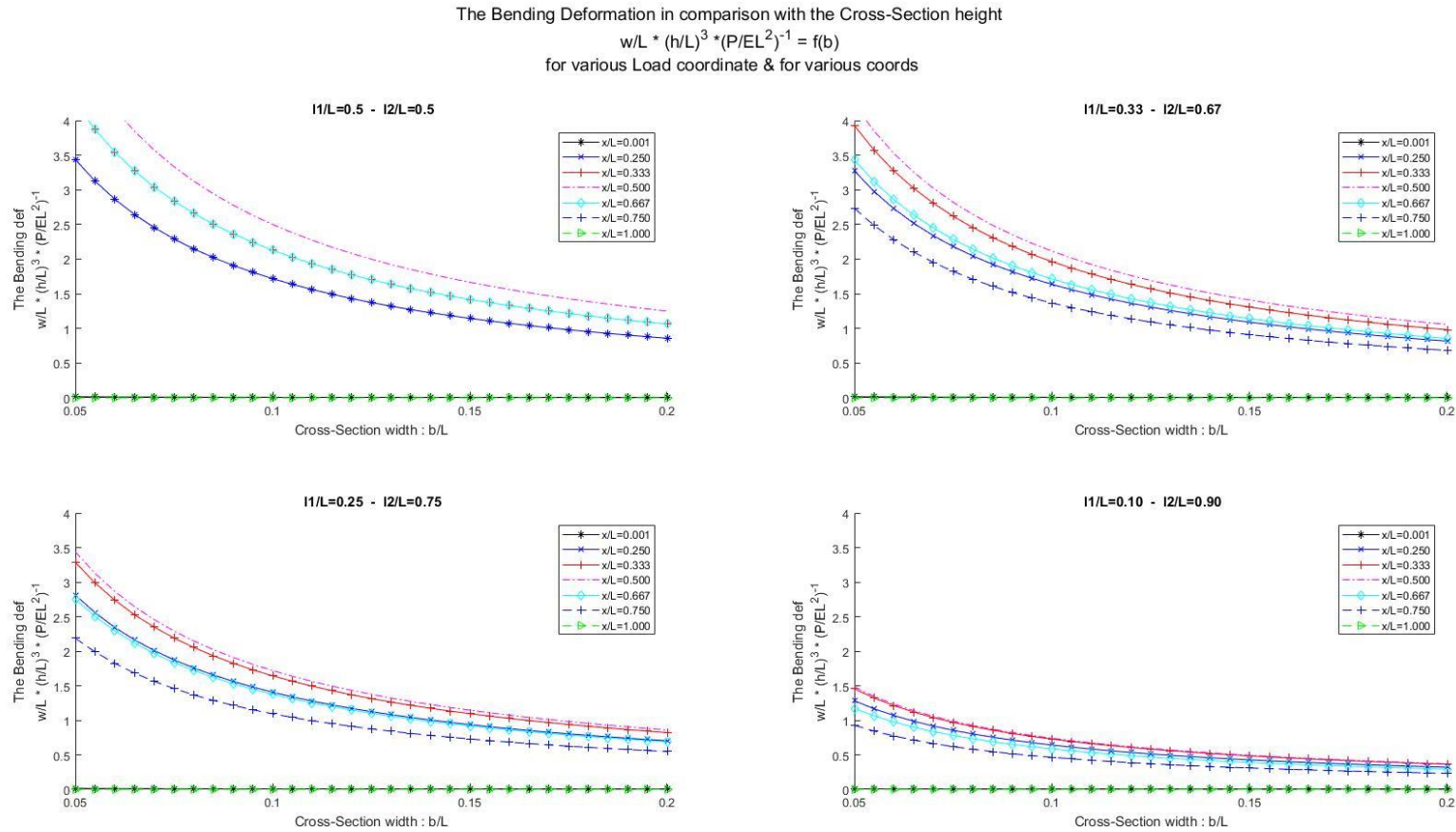


Figure 6. Η κατακόρυφη μετακίνηση, ως συνάρτηση του πλάτους της διατομής, σε διάφορες θέσεις τις δοκού. Σε κάθε διάγραμμα το κατακόρυφο φορτίο, βρίσκεται σε διαφορετική θέση. Η άλλη διάσταση θεωρείται σταθερή.

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει, ότι στα διαγράμματα που το φορτίο είναι πιο κοντά σε κάποια στήριξη, η κατακόρυφη παραμόρφωση πέφτει ραγδαία. Επομένως καταλήγει κανείς στο συμπέρασμα ότι ο φορέας πρέπει να γεμίζει με ροπή, για να παραλάβει μεγαλύτερο βέλος, εφόσον αντέχει βέβαια.

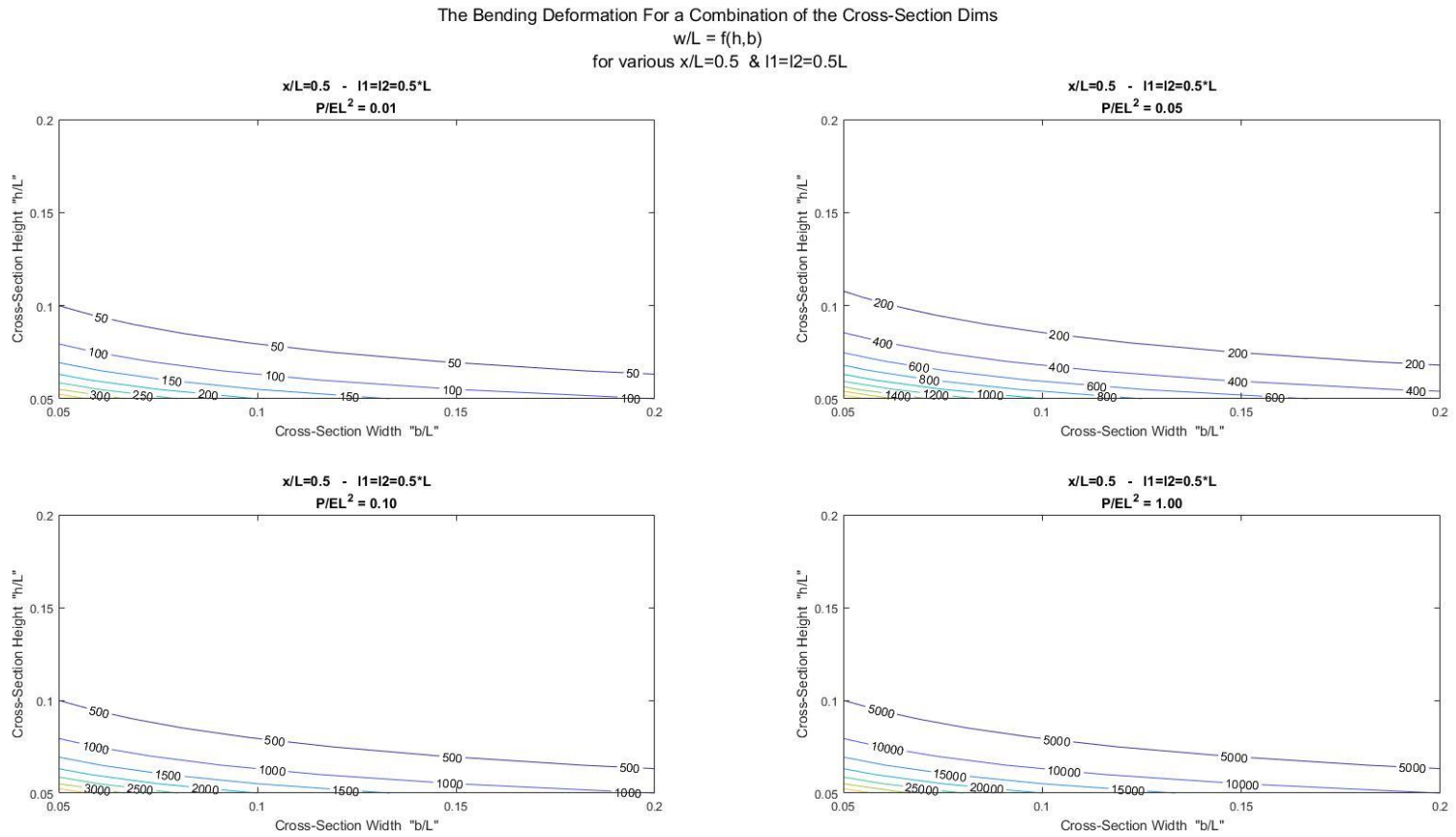


Figure 7. η κατακόρυφη παραμόρφωση στο μέσον του φορέα αμφιέρεστος δοκού σταθερής διατομής, για έναν συνδυασμό πλάτους και ύψους διατομής. Η μεταβολή του ύψους είναι πολύ πιο δραστική.
Σε κάθε διάγραμμα, αλλάζει η θέση επιβολής του φορτίου.

Στην συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός του συνολικού ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος της δοκού. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πολικότητα με το εμβαδόν κάθετα σε αυτήν, για στοιχειώδη τμήματα. Η πολικότητα μένει σταθερή στην έννοια του πλάτους αλλά μεταβάλλεται στην έννοια του μήκους της διατομής, και έτσι χρειάζεται να επιλυθεί το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P * \left(l_2 * \frac{x}{L} - (x - l_1) \right)}{E * b_0 * h_0^3} * b_0 * dx$$

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P * \left(l_2 * \frac{x}{L} - (x - l_1) \right)}{E * h_0^3} * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left[l_2 * \frac{x^2}{2 * L} - \frac{(x - l_1)^2}{2} \right]_0^L$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left[l_2 * \frac{L^2}{2 * L} - \frac{l_2^2}{2} \right]$$

$$Q_{13} = 6 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * [l_2 * L - l_2^2]$$

Και εφαρμόζοντας την κανονικοποίηση που περιγράφηκε στην αρχή:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-3} * \left[\frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L} \right)^2 \right]$$

Η σχέση αυτή στην συνέχεια μπορεί να αποτυπωθεί, αφού πρώτα, ακολουθήσει μερικός σχολιασμός: Το εξωτερικό φορτίο δεν είναι πολύ ενδιαφέρον, αφού η σχέση είναι γραμμική, μπορώ εύκολα να το θεωρήσω σταθερό στο αριστερό μέρος της εξίσωσης. Γι' αυτόν τον λόγο και το κάνω.

Τα διαγράμματα που κατασκευάζονται για το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο παρουσιάζονται παρακάτω, ενώ στην συνέχεια παρουσιάζονται και διαγράμματα για την πολικότητα, η οποία δίνεται από την σχέση:

$$\frac{Pol_{13} * L}{\mu_{13}} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-3} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^{-1} * \left[\frac{l_2}{L} * \frac{x}{L} - \left\langle \frac{x}{L} - \frac{l_1}{L} \right\rangle \right]$$

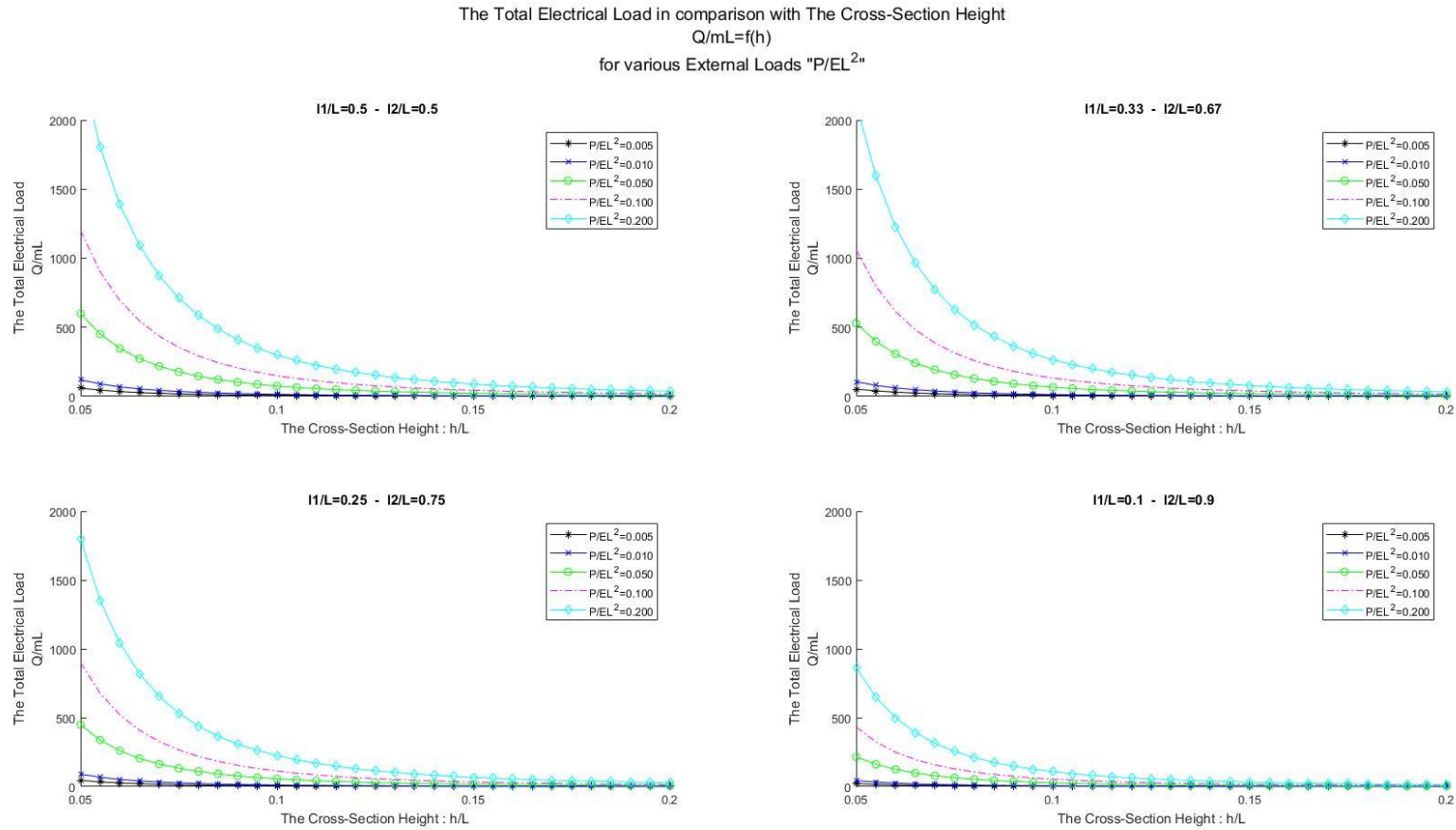


Figure 8. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση του ύψους της διατομής, για διάφορες τιμές εξωτερικού φορτίου. Σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαγράμματα, η θέση του φορτίου μεταβάλλεται.

Όσο πιο κοντά είναι το φορτίο στην στήριξη, τόσο μικρότερη η παραμόρφωση, και τόσο μικρότερο και το συνολικά παραγόμενο φορτίο.

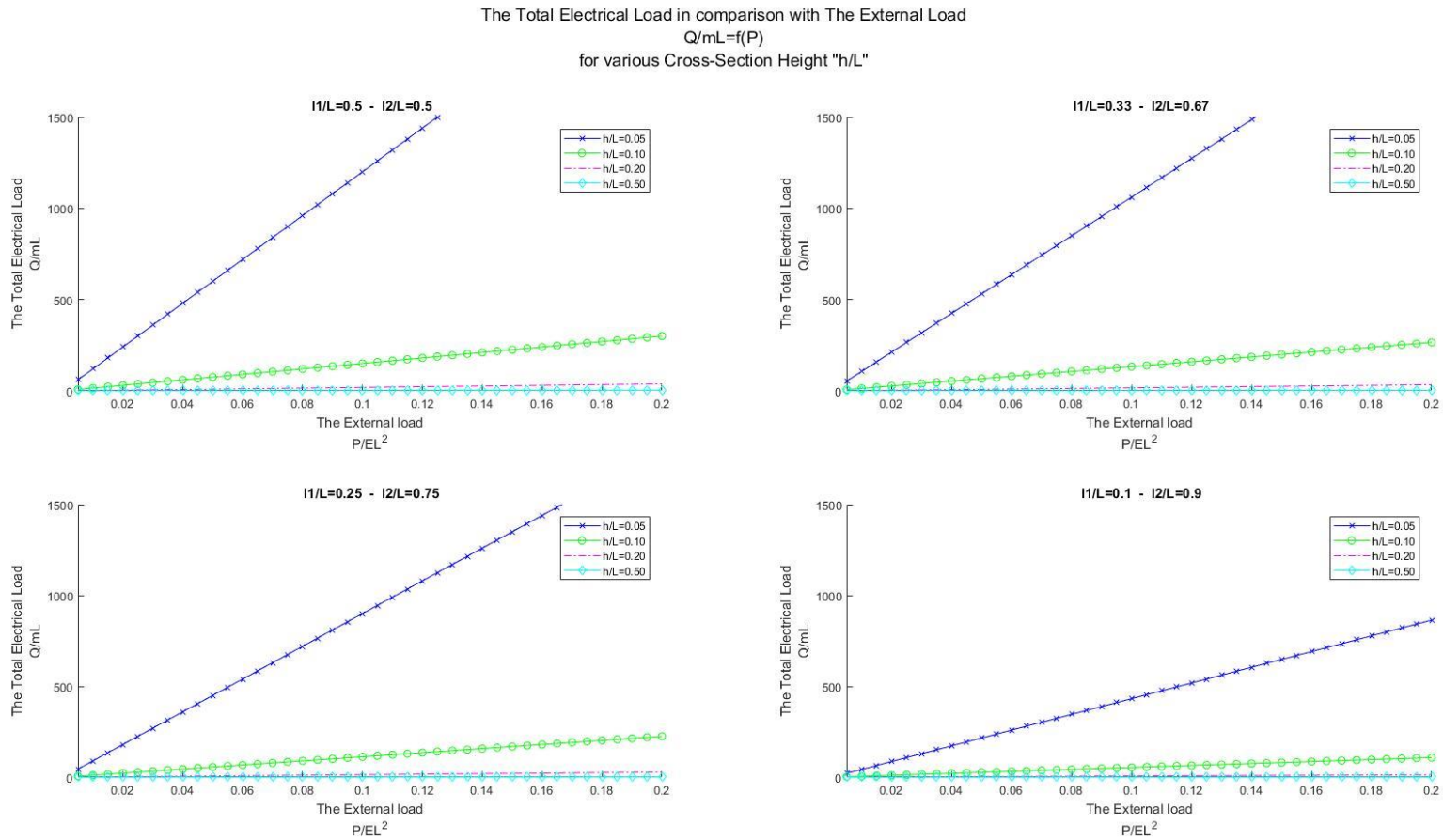


Figure 9. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου, για διάφορες τιμές του ύψους της διατομής. Σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαγράμματα, η θέση του φορτίου μεταβάλλεται.

The Total Electrical Load For a Combination of the Ext. Load and the Cross-Section Height
 $Q/mL=f(P,h)$
 for various Load Position

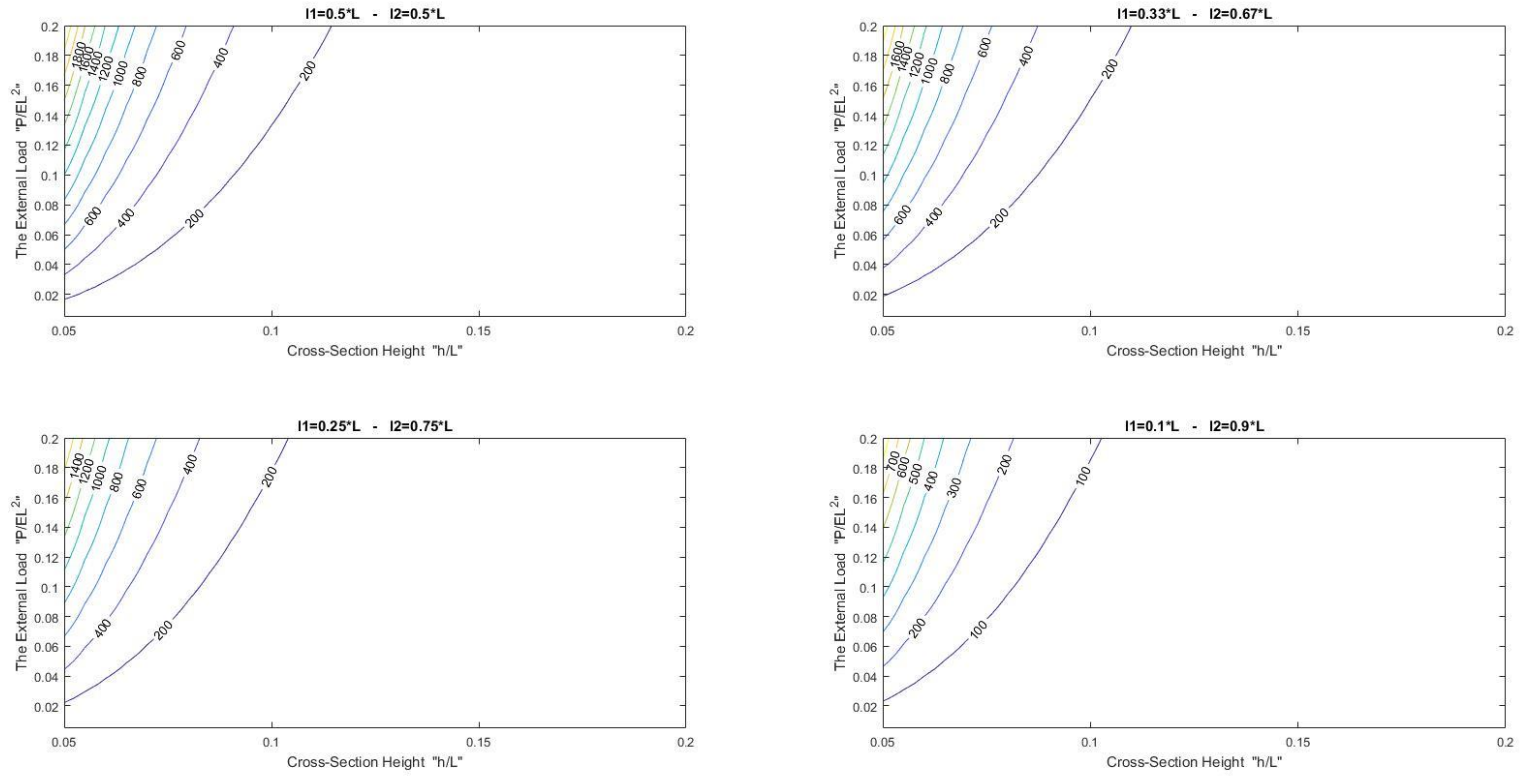


Figure 10. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού για έναν συνδυασμό ύψους της διατομής και εξωτερικού φορτίου. Σε κάθε διάγραμμα η θέση του φορτίου μεταβάλλεται.

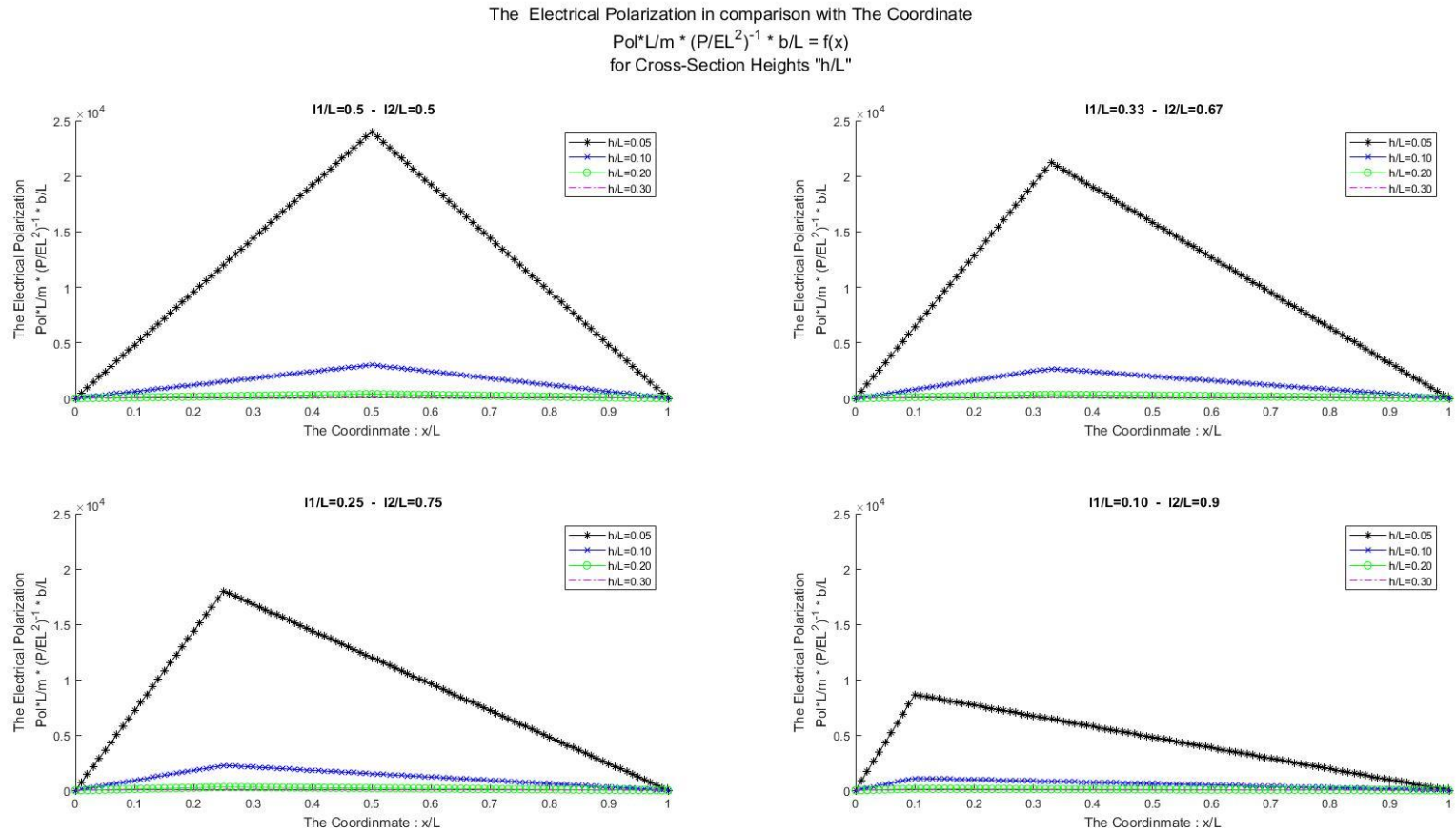


Figure 11. Η ηλεκτρική πολικότητα, που αναπτύσσεται σε μία θέση «x» ως συνάρτηση της συντεταγμένης αυτής της θέσης, για διάφορα αρχικά ύψη διατομής. Το εξωτερικό φορτίο και το πλάτος της διατομής θεωρούνται σταθερά. Σε κάθε διάγραμμα αλλάζει η θέση του φορτίου πάνω στην δοκό. Τα παραπάνω διαγράμματα, δίνουν προοπτική σε μια μέθοδο εντοπισμού φορτίου πάνω στην δοκό («Remotely Load detector»).

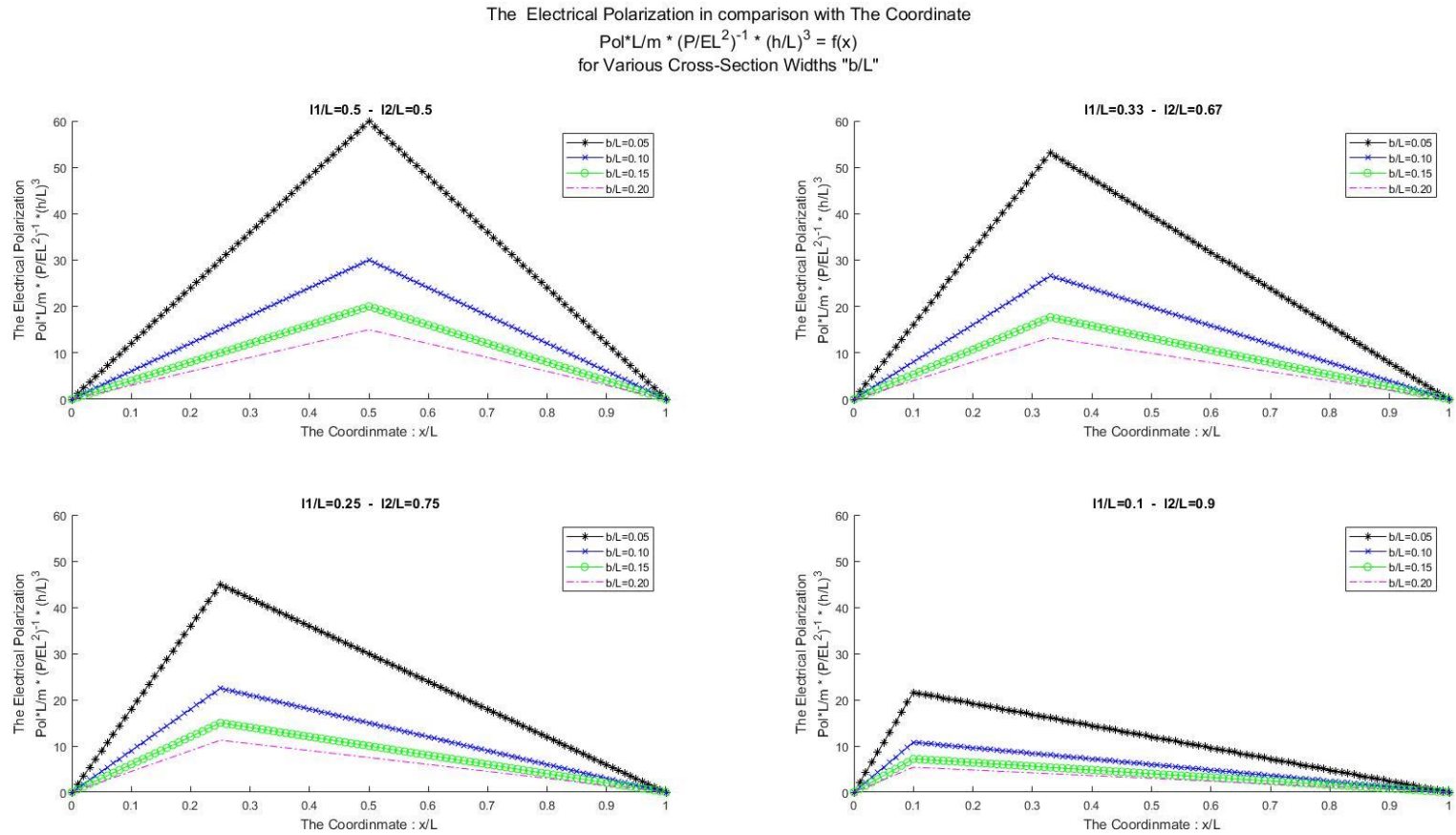


Figure 12. Η ηλεκτρική πολικότητα, που αναπτύσσεται σε μία θέση «x» ως συνάρτηση της συνεταγμένης αυτής της θέσης, για διάφορα αρχικά πλάτη διατομής. Το εξωτερικό φορτίο και το ύψος της διατομής θεωρούνται σταθερά. Σε κάθε διάγραμμα αλλάζει η θέση του φορτίου πάνω στην δοκό. Τα παραπάνω διαγράμματα, δίνουν προοπτική σε μια μέθοδο εντοπισμού φορτίου πάνω στην δοκό («Remotely Load detector»).

The Electrical Polarization for a combination of the Cross-Section Dims
 $Pol \cdot L/m \cdot (P/EL^2)^{-1} = f(h,b)$
 for Various coordinates "x/L" - For The Load In The middle of the Beam - I1=I2=0.5L

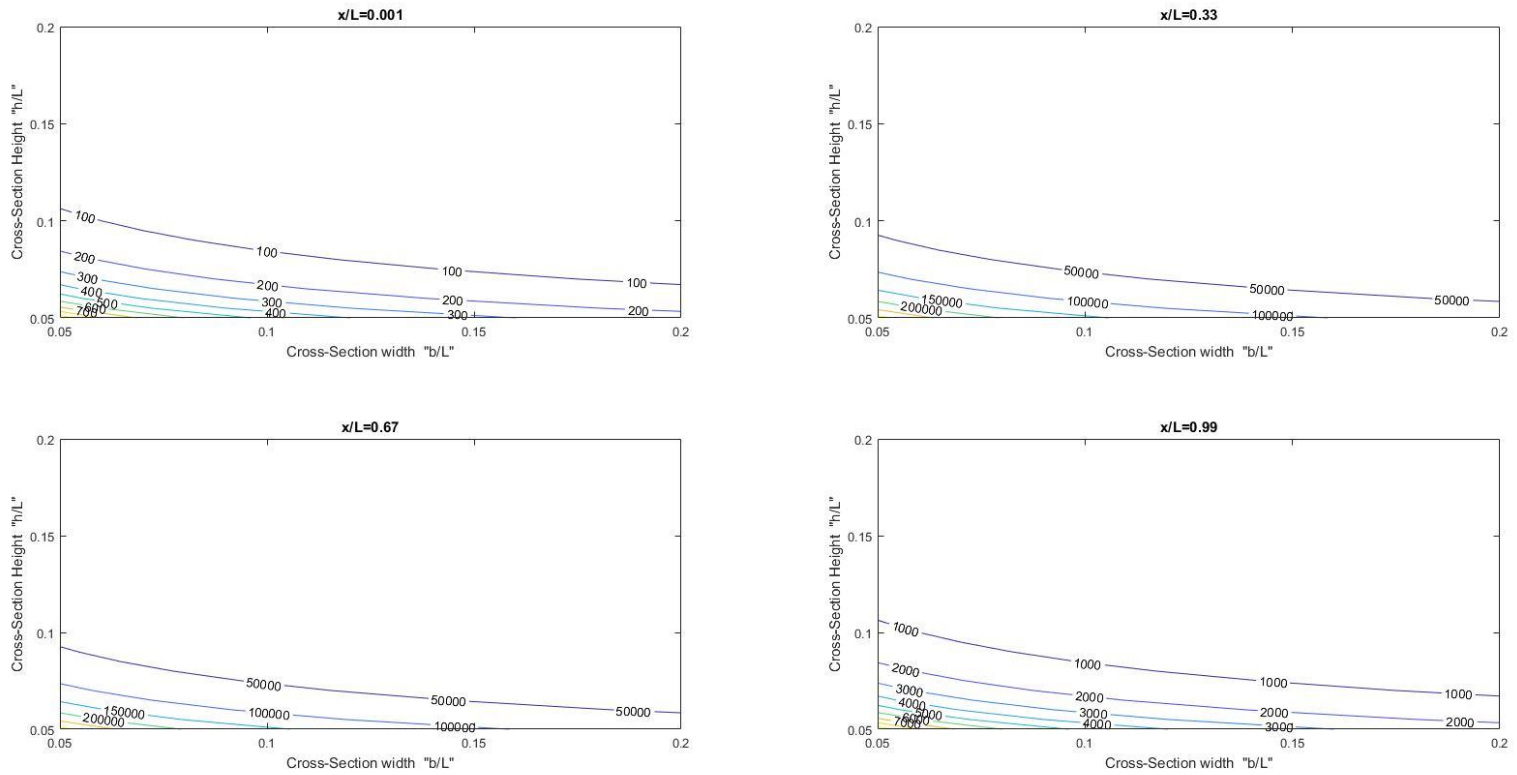


Figure 13. Η Ηλεκτρική πολικότητα, που αναπτύσσεται σε μια συγκεκριμένη θέση κατά μήκος της δοκού, για έναν συνδυασμό πλάτους της διατομής και ύψους. Σε κάθε διάγραμμα αυτή η θέση μεταβάλλεται. Αυτό που μπορεί να παρατηρήσει κανείς είναι ότι η μεταβολή του ύψους είναι πιο δραστική.

Τέλος, οφείλουμε να αντικαταστήσουμε τα εντατικά χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα παραμορφωσιακά, τα οποία είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμα.

$$\frac{W(x)}{L} = 2 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\left(\frac{x}{L} - \frac{l_1}{L}\right)^3 - \frac{l_2}{L} * \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} * \frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^3 * \frac{x}{L} \right)$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left[\frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^2 \right]$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση στην δεύτερη καταλήγουμε στην σχέση που φαίνεται παρακάτω, η οποία δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που παράγεται σε μία δοκό, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, όταν σε θέση « x_0 », παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση « $w(x_0)$ »

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 3 * \frac{W(x)}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right) * \left[\left(\frac{x}{L} - \frac{l_1}{L}\right)^3 - \frac{l_2}{L} * \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} * \frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^3 * \frac{x}{L} \right]^{-1} * \left[\frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^2 \right]$$

Η σχέση αυτή είναι αδιάστατη και μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί σε διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά φαίνονται παρακάτω.

The Total Electrical Load for a combination of the coordinate and the bending def.
 $Q/mL * b/L = f(x,w)$
 for various Load coordinate "I2,I2"

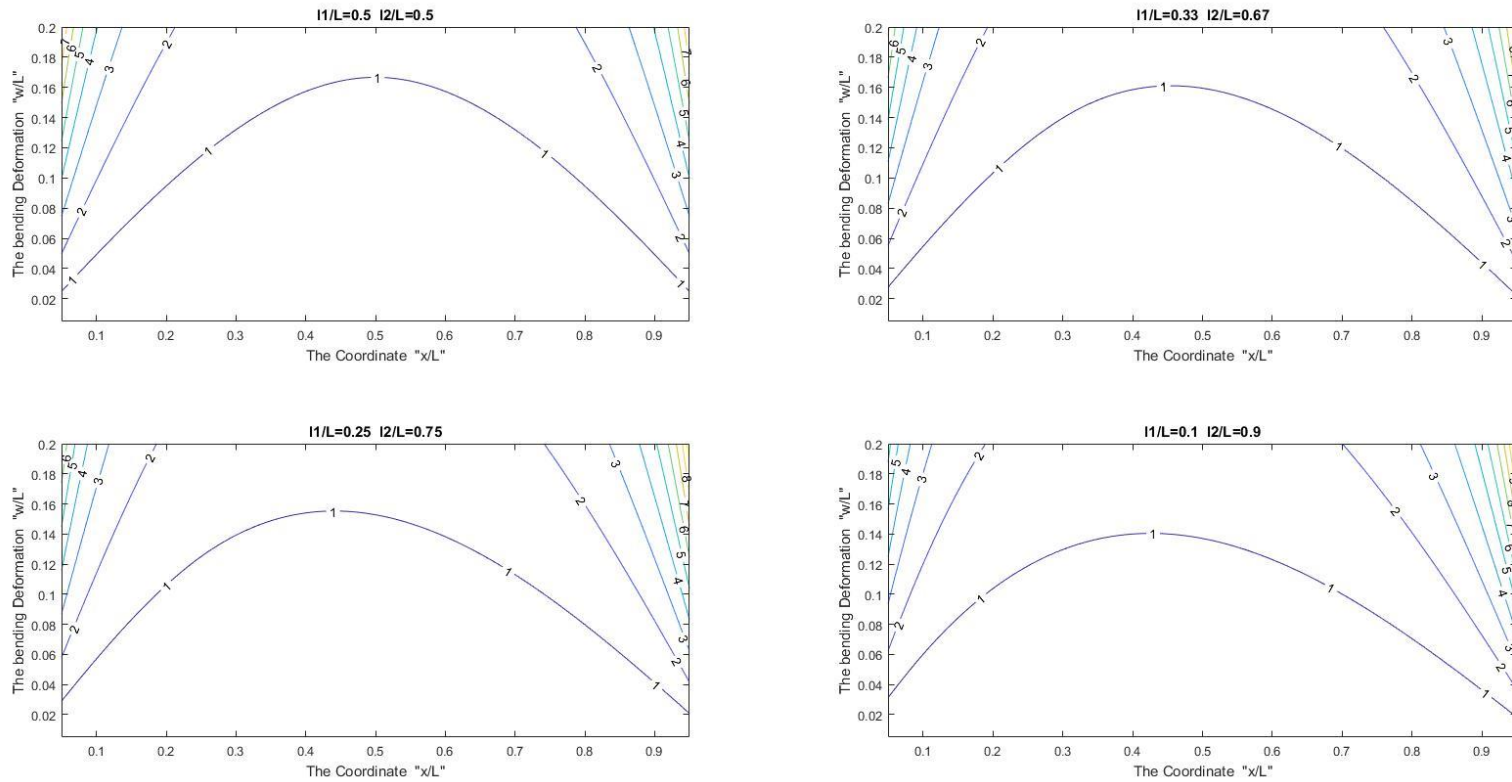


Figure 14. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της διατομής, για έναν συνδυασμό, της κατακόρυφης παραμόρφωσης σε μία συγκεκριμένη θέση, και της συνεταγμένης της θέσης αυτή. Σε κάθε διάγραμμα, αλλάζει η θέση του φορτίου. Το πλάτος της διατομής θεωρείται σταθερό στο πρώτο μέρος της εξίσωσης. Αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι ότι στον φορέα προβόλου, βλέπαμε μόνο το μισό διάγραμμα, ενώ τώρα συνεχίζεται συμμετρικά και από την άλλη. Μια ακόμα παρατήρηση που δεν φαίνεται εύκολα είναι ότι η αλλαγή της θέσης του φορτίου έχει επίδραση, αλλά πολύ μικρή.

The Electrical Polarization for a combination of the Cross Section Width and the bending def.
 $Q/mL = f(b,w)$
 for various coordinates
 While the Load is in the middle of the beam

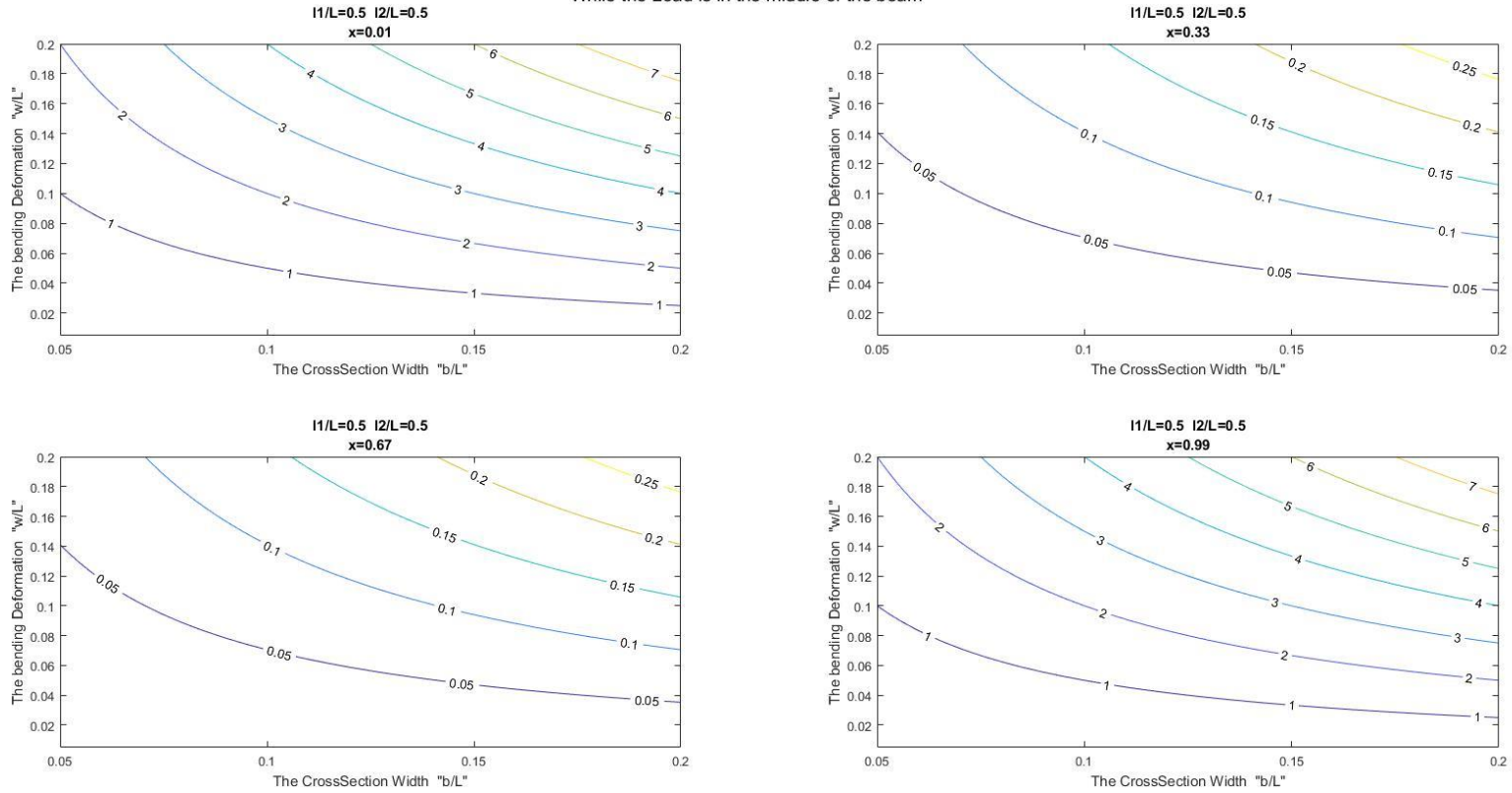


Figure 15. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της διατομής, για έναν συνδυασμό της κατακόρυφης παραμόρφωσής που προκύπτει σε ένα συγκεκριμένο σημείο, και του πλάτους της διατομής.
 Σε κάθε διάγραμμα αλλάζει το σημείο αυτό.
 Το φορτίο θεωρείται ότι βρίσκεται στο μέσον της δοκού.

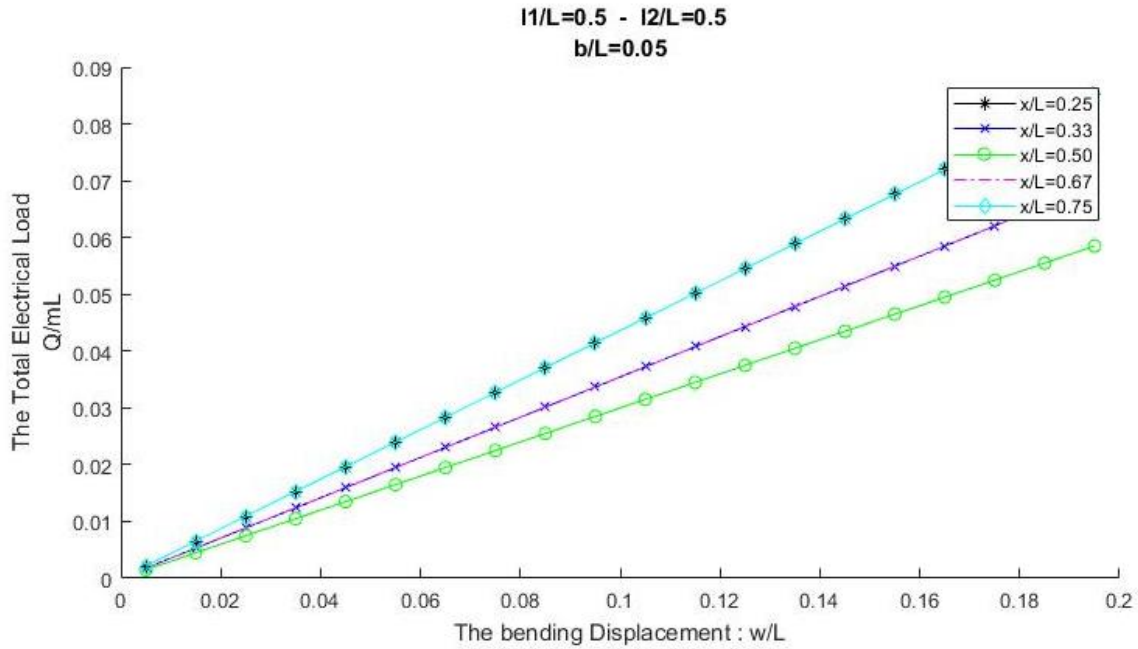


Figure 16. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης σε διάφορα σημεία στο μήκος της δοκού.

Το φορτίο βρίσκεται στην μέση και το πλάτος της διατομής είναι σταθερό.

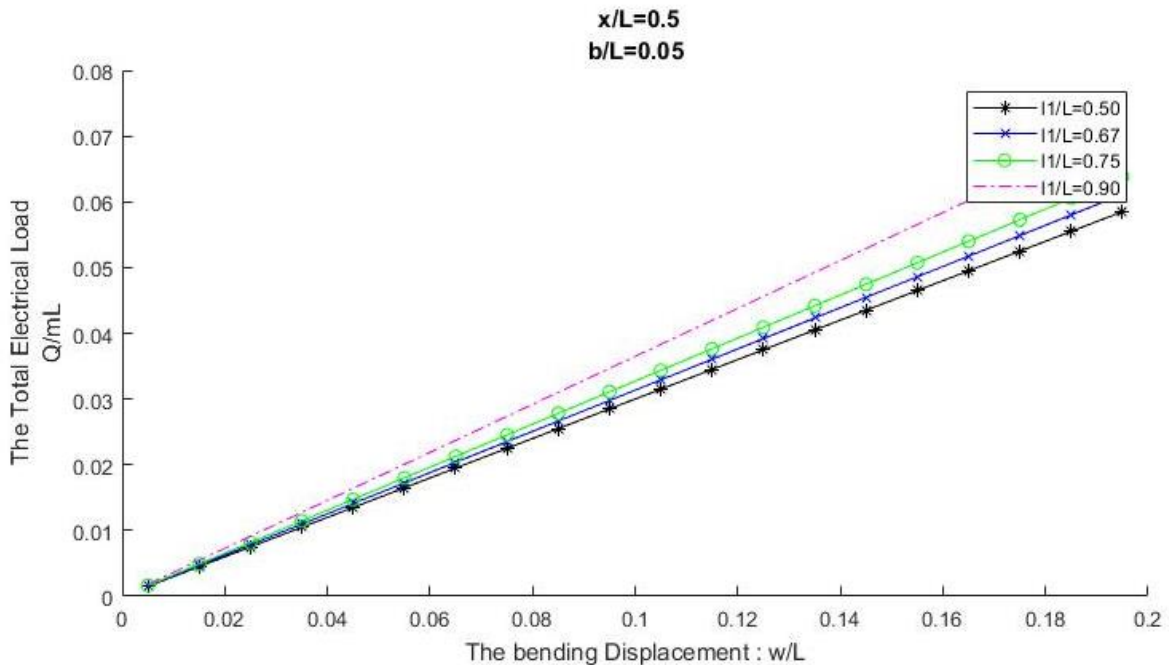


Figure 17. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης στο μέσον της δοκού για διάφορες θέσεις του εξωτερικού μηχανικού φορτίου. Το πλάτος της διατομής είναι σταθερό.

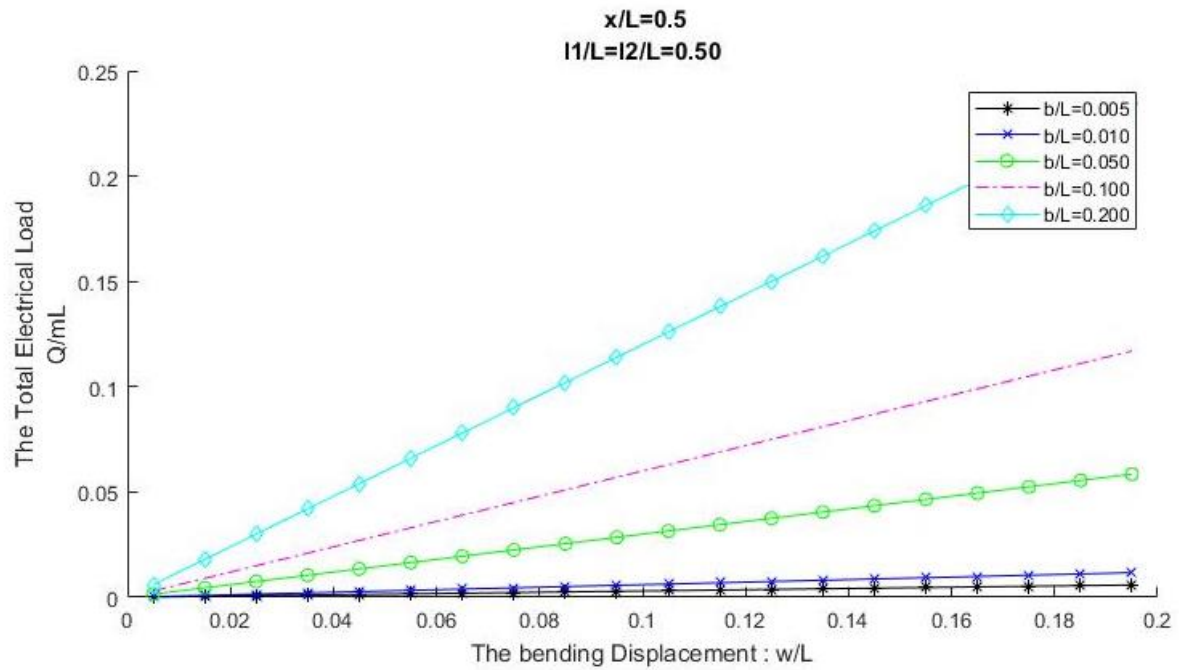


Figure 18. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, σε όλο το μήκος της δοκού, ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης που προκύπτει στο μέσο της δοκού, όταν το φορτίο βρίσκεται στο μέσο της δοκού, για διάφορες τιμές του πλάτους της διατομής.

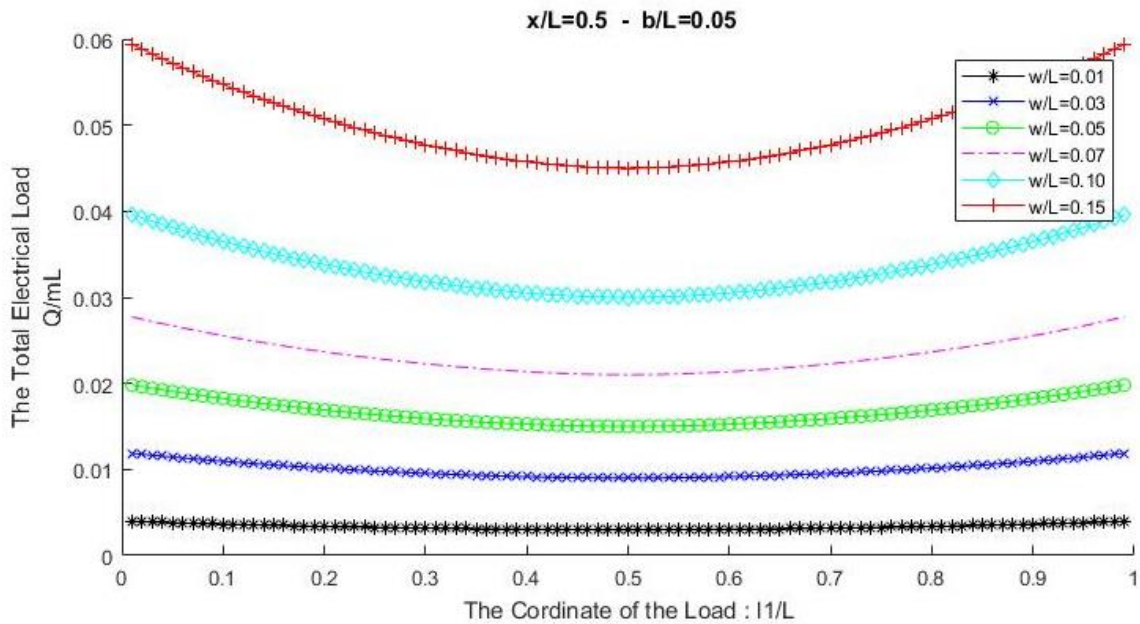


Figure 19. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού, όταν στο μέσο της δοκού, εμφανιστούν διάφορες κατακόρυφες μετακινήσεις, ως συνάρτηση της θέσης του φορτίου. Το αρχικό πλάτος της διατομής θεωρείται σταθερό. Το διάγραμμα αυτό είναι συμμετρικό, όπως και θα όφειλε.

4. Γραμμές επιρροής

Αφού ασχοληθήκαμε σε μεγάλο βαθμό με την περίπτωση αμφιέρεστης δοκού με σταθερή διατομή και είδαμε την δυνατότητα που υπάρχει το φορτίο να μην είναι σε μία συγκεκριμένη θέση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γνώσεις κλασικής στατικής, και να εντάξουμε σε αυτήν το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, με την χρήση των γραμμών επιρροής. Οι γραμμές επιρροής είναι γραμμές που περιγράφουν τι γίνεται σε ένα μέγεθος, καθώς μοναδιαίο φορτίο κινείται στο μήκος του.

Έτσι εμείς θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε διάφορα μεγέθη του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, καθώς ένα φορτίο κινείται πάνω στον φορέα. Για την ανάλυση χρειαζόμαστε απλούς φορείς. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον πρόβολο σταθερής διατομής με κατακόρυφο κινητό φορτίο, και την αμφιέρεστη δοκό σταθερής διατομής με κατακόρυφο κινητό φορτίο.

Είναι προφανέστατο, πόσο σημαντικά θα ήταν τέτοιου είδους διαγράμματα, και για άλλες περιπτώσεις, αλλά μια τέτοιου μεγέθους ανάλυση είναι υπερβολικά αναλυτική.

- **Πρόβολος σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο**

Ο πρόβολος σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο, είναι ένας απλός ισοστατικός φορέας, ο οποίος μπορεί ευκολά να λυθεί με το χέρι.

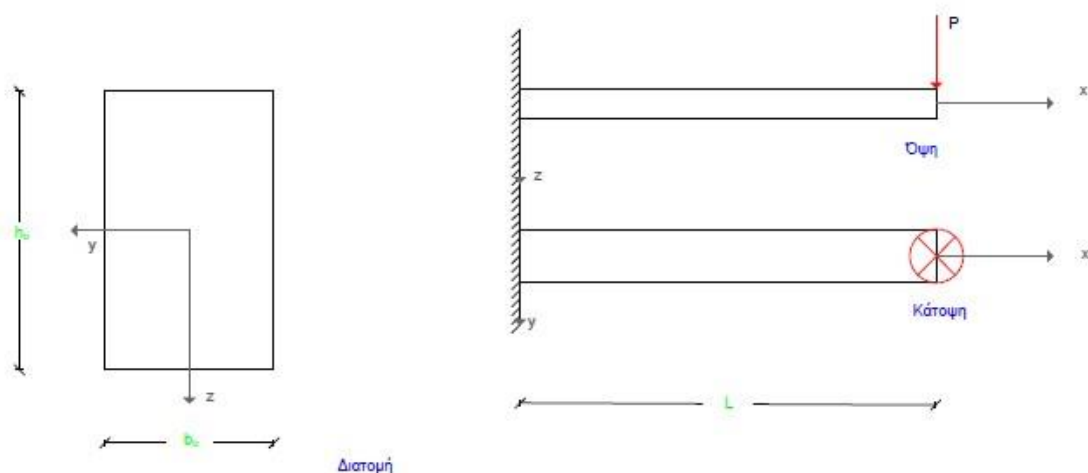


Figure 1. Πρόβολος σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο.

Η καμπτική ροπή, του προβόλου δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$M = -P[l - x + \langle x - l \rangle]^1$$

Το βέλος κάμψης μπορεί να προσδιορισθεί από την εξίσωση Euler – Bernoulli, με τον παρακάτω τρόπο.

$$E * I * w''(x) = -M(x) = P[l - x + \langle x - l \rangle]$$

¹ Σε αυτό το σημείο είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση «Heaviside», διότι δεν γνωρίζουμε την συγκεκριμένη θέση του φορτίου.

$$w''(x) * E * \frac{b_0 * h_0^3}{12} = P[l - x + \langle x - l \rangle]$$

$$w''(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * [l - x + \langle x - l \rangle]$$

$$W'(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left[l * x - \frac{x^2}{2} + \frac{\langle x - l \rangle^2}{2} \right] + C$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης υπολογίζεται για την συνθήκη: $W'(0) = 0 \rightarrow C = 0$

$$W'(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left[l * x - \frac{x^2}{2} + \frac{\langle x - l \rangle^2}{2} \right]$$

$$W(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left[l * \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{\langle x - l \rangle^3}{6} \right] + C$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης υπολογίζεται για την συνθήκη: $W(0) = 0 \rightarrow C = 0$

$$W(x) = 12 * \frac{P}{E} * b_0^{-1} * h_0^{-3} * \left[l * \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{\langle x - l \rangle^3}{6} \right]$$

Και μετά από την κανονικοποίηση που χρησιμοποιείται σε αυτήν την εργασία.

$$\frac{W(x)}{L} = 12 * \frac{P}{E * L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left[\frac{l}{L} * \frac{(x/L)^2}{2} - \frac{(x/L)^3}{6} + \frac{\langle x/L - l/L \rangle^3}{6} \right]$$

Ο προσδιορισμός της πολικότητας ακολουθεί συγκεκριμένη μεθοδολογία. Πρώτα βρίσκουμε τις τάσεις που μας ενδιαφέρουν, μετρά το «strain gradient» και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την κατάλληλη σταθερά του φλεξοηλεκτρισμού, σε αυτήν την περίπτωση την « μ_{13} ».

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E * I_{yy}} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{P * [l - x + \langle x - l \rangle]}{E * b_0 * h_0^3} * Z$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{P * [l - x + \langle x - l \rangle]}{E * b_0 * h_0^3}$$

Μετά από την κανονικοποίηση που επιβάλλεται σε αυτήν την εργασία, η πολικότητα παίρνει την παρακάτω μορφή.

$$\frac{Pol_{13} * L}{\mu_{13}} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left[\frac{l}{L} - \frac{x}{L} + \left\langle \frac{x}{L} - \frac{l}{L} \right\rangle \right]$$

Τέλος το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού προσδιορίζεται όπως φαίνεται παρακάτω.

$$Q_{13} = \int_0^L \mu_{13} * 12 * \frac{P * [l - x + (x - l)]}{E * b_0 * h_0^3} * b_0 * dx$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left\{ \left[l * x - \frac{x^2}{2} + (x - l) \right]_0^l + \left[l * x - \frac{x^2}{2} + \frac{(x - l)^2}{2} \right]_l^L \right\}$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left\{ \left[l^2 - \frac{l^2}{2} \right] + \left[l * L - \frac{L^2}{2} + \frac{(L - l)^2}{2} - l^2 + \frac{l^2}{2} \right] \right\}$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left\{ \left[l^2 - \frac{l^2}{2} \right] + \left[l * L - \frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{2} - L * l + \frac{l^2}{2} - l^2 + \frac{l^2}{2} \right] \right\}$$

$$Q_{13} = 12 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * \left\{ \left[l^2 - \frac{l^2}{2} \right] \right\}$$

$$Q_{13} = -6 * \mu_{13} * \frac{P}{E} * h_0^{-3} * l^2$$

Και όταν εφαρμόσω την κανονικοποίηση:

$$\frac{Q_{13}}{L * \mu_{13}} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L} \right)^{-3} * \left(\frac{l}{L} \right)^2$$

Τέλος αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση τα παραμορφωσιακά χαρακτηριστικά, αντί για τα εντατικά θα έχουμε:

$$\frac{Q_{13}}{L * \mu_{13}} = -\frac{1}{2} * \frac{W(x)}{L} * \left(\frac{b_0}{L} \right)^1 * \left(\frac{l}{L} \right)^2 * \left[\frac{l}{L} * \frac{(x/L)^2}{2} - \frac{(x/L)^3}{6} + \frac{(x/L - l/L)^3}{6} \right]^{-1}$$

Καθώς κατασκευάζουμε τις γραμμές επιρροής θα πρέπει να έχουμε υπόψιν μας τρία θέματα. Αν σε κάποιο θέση «l» ασκηθεί φορτίο ίσο με «P» τότε:

1. Ποσό θα είναι το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο της δοκού.
2. Ποια θα είναι η πολικότητα σε συγκεκριμένες θέσεις
3. Πόσο θα είναι το συνολικό φορτίο της δοκού όταν σε θέση «x» αναπτυχθεί βέλος «w(x)»

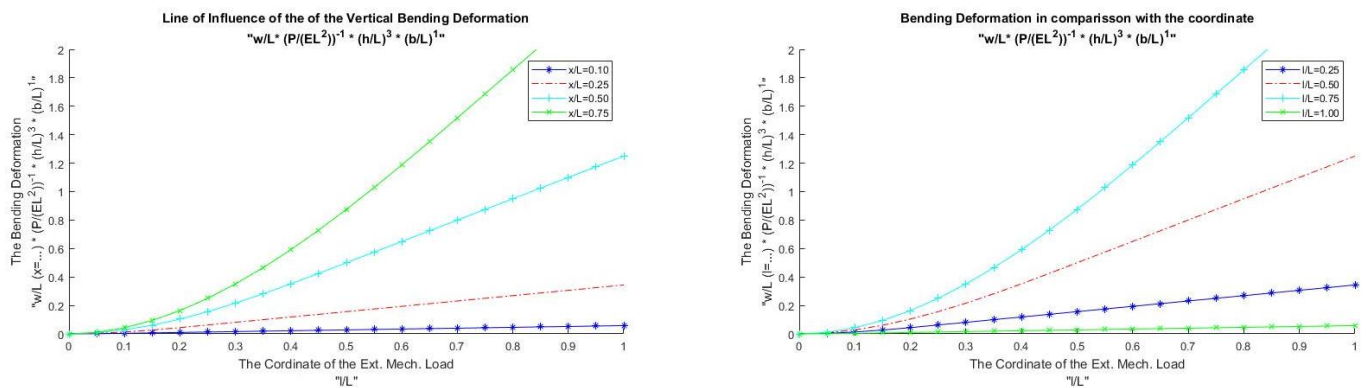


Figure 2.

Γραμμή επιρροής της κατακόρυφης μετακίνησης. Η κατακόρυφη μετακίνηση σε έναν πρόβολο σταθερής διατομής, σε διάφορες θέσεις κατά μήκος του, ως συνάρτηση της θέσης του φορτίου (αριστερό διάγραμμα).

Η κατακόρυφη παραμόρφωση σε μία θέση στο μήκος του προβόλου, ως συνάρτηση της συντεταγμένης αυτής της θέσης, καθώς το φορτίο βρίσκεται σε διάφορες θέσεις. (δεξι διάγραμμα).

Αυτά τα διαγράμματα έγιναν περισσότερο σαν εποπτεία των αποτελεσμάτων των προηγούμενων πράξεων, και δεν αντιπροσωπεύουν μία σημαντική γραμμή επιρροής.

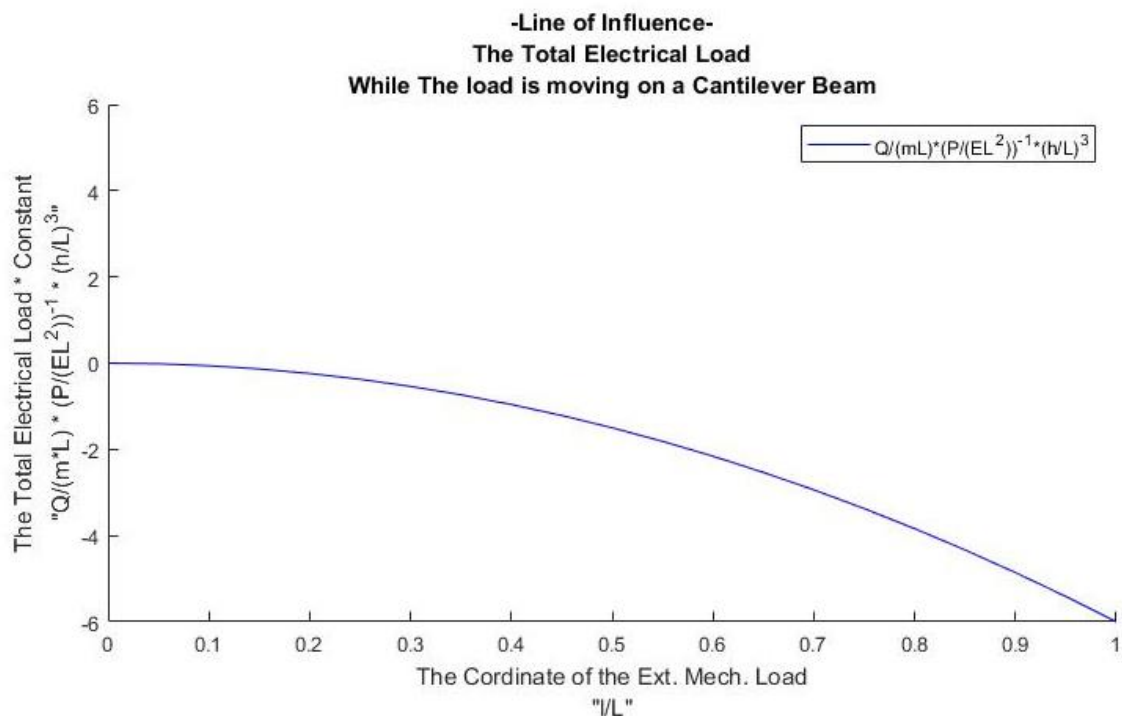


Figure 3. Η γραμμή επιρροής του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου.

Διάγραμμα που δείχνει το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο ως συνάρτηση της θέσης του φορτίου, ενώ το εξωτερικό μηχανικό φορτίο και το ύψος της διατομής θεωρούνται σταθερά.

Όσο πιο κοντά στην πάκτωση ασκείται το μηχανικό φορτίο, τόσο λιγότερο ηλεκτρικό φορτίο δίνει το φαινόμενο.

-Line of Influence-
The Electrical Polarization
While The load is moving on a Cantilever Beam

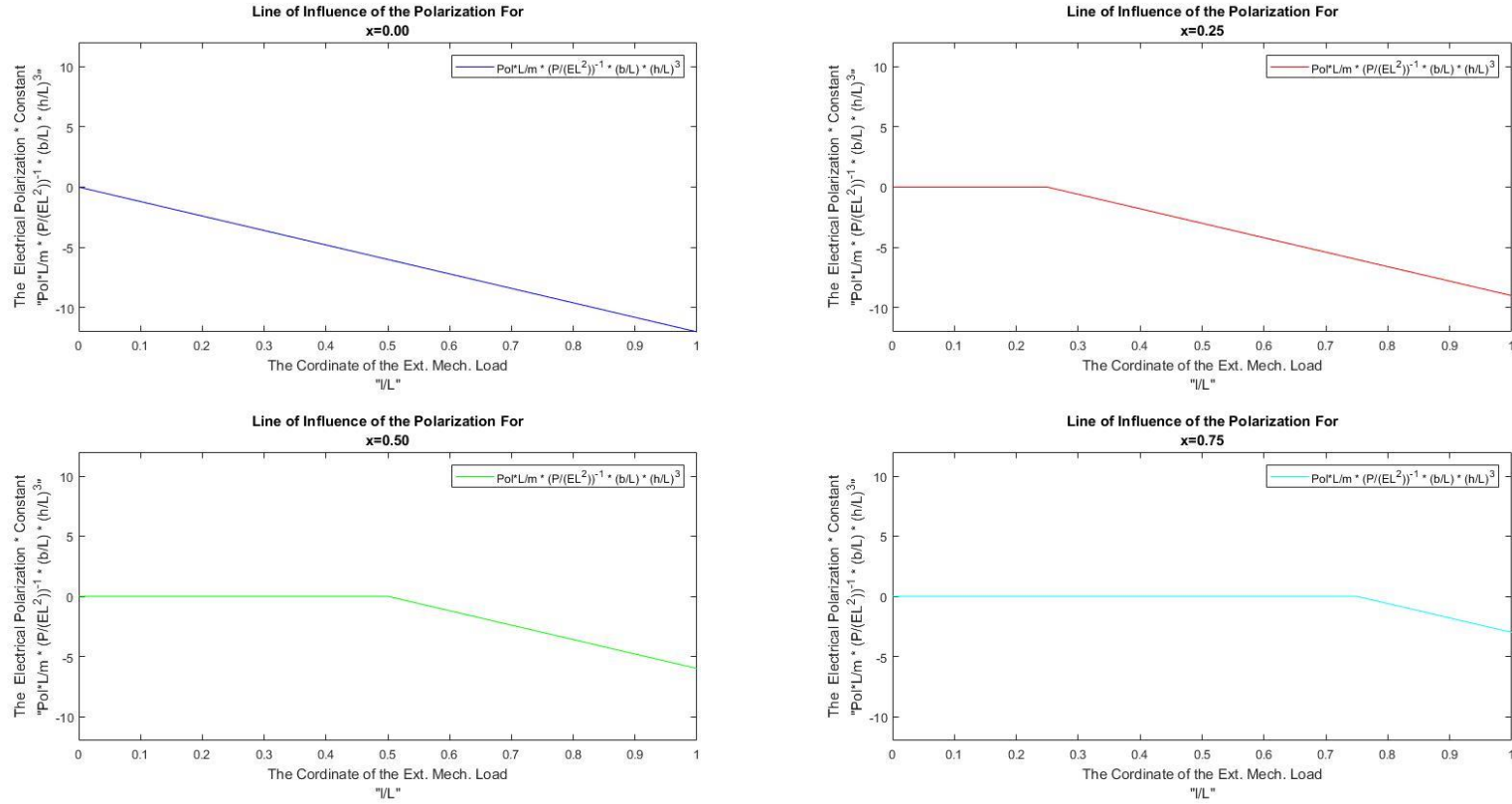


Figure 4. Γραμμή επιρροής της πολικότητας σε διάφορες θέσεις κατά το μήκος της δοκού.

Η μεταβολή της πολικότητας σε κάποιες θέσεις, ως συνάρτηση της θέσης του φορτίου. Σε κάθε διάγραμμα αυτή η θέση είναι διαφορετική. Η θέση εξέτασης της πολικότητας δηλαδή. Το εξωτερικό μηχανικό φορτίο και η διάσταση της διατομής θεωρούνται σταθερά.

Μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει ότι αν το σημείο αναφοράς είναι μετά το σημείο μηχανικής φόρτισης, τότε η πολικότητα είναι μηδενική. Αν το φορτίο είναι μετά, τότε η πολικότητα αυξάνει γραμμικά, από την θέση αναφοράς της πολικότητας.

-Line of Influence-
The Total Electrical Load ,while in the coord "x/L" the bending def. is "w(x)/L"
While The load is moving on a Cantilever Beam

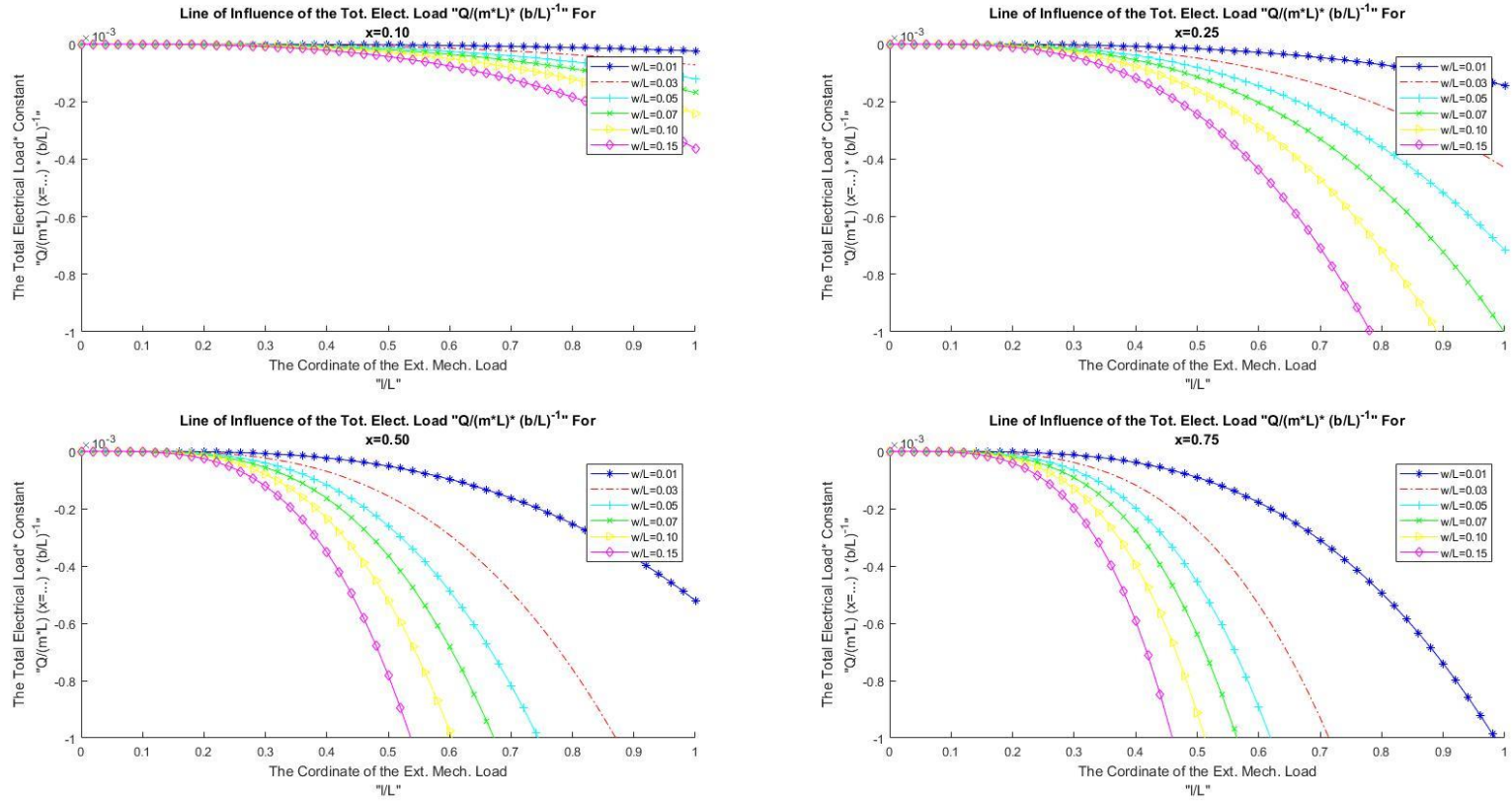


Figure 5.Γραμμή επιρροής του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου.
Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος του προβόλου, όταν η κατακόρυφη παραμόρφωση σε θέση «x» γίνει «w(x)», σαν συνάρτηση της θέσης του φορτίου.
Κάθε διάγραμμα αναφέρεται σε μία συγκεκριμένη θέση αναφοράς «x» και κάθε καμπύλη, μέσα σε κάθε διάγραμμα αναφέρεται σε μία διαφορετική τιμή της κατακόρυφης παραμόρφωσης.

- **Η αμφιέρεση δοκός σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο**

Η αμφιέρεση δοκός σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο, είναι ένας απλός ισοστατικός φορέας, ο οποίος μπορεί ευκολά να λυθεί με το χέρι.

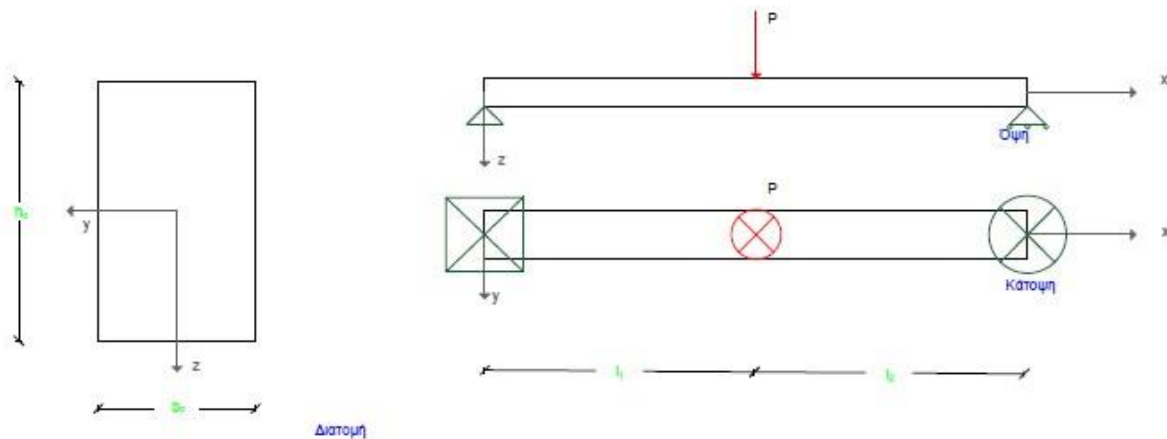


Figure 6. Αμφιέρεση δοκός με σταθερή διατομή.

Η επίλυση αυτής της περίπτωσης έγινε με γενικευμένα ολοκληρώματα, διότι κατά την διάρκεια της επίλυσης θέλαμε να ελέγξουμε τις διάφορες θέσεις που ασκείται το φορτίο. Η επίλυση έγινε και για αυτό το λόγο τα αποτελέσματα απλά παρουσιάζονται.

Η κατακόρυφη παραμόρφωση δίνεται από την σχέση:

$$\frac{W(x)}{L} = 2 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\left\langle \frac{x}{L} - \frac{l_1}{L} \right\rangle^3 - \frac{l_2}{L} * \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} * \frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^3 * \frac{x}{L}\right)$$

Η πολικότητα έχει ως εξής:

$$\frac{P o l_{13} * L}{\mu_{13}} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left[\frac{l_2}{L} * \frac{x}{L} - \left\langle \frac{x}{L} - \frac{l_1}{L} \right\rangle\right]$$

Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο ισούται με:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left[\frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^2\right]$$

Ενώ αν αντικαταστήσουμε τα εντατικά μεγέθη με τα παραμορφωσιακά:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = 3 * \frac{W(x)}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right) * \left[\left(\frac{x}{L} - \frac{l_1}{L}\right)^3 - \frac{l_2}{L} * \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} * \frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^3 * \frac{x}{L}\right]^{-1} * \left[\frac{l_2}{L} - \left(\frac{l_2}{L}\right)^2\right]$$

Έτσι είναι εύκολο να κατασκευάσουμε τις «γραμμές επιρροής». Όμως καθώς κατασκευάζουμε τις γραμμές επιρροής θα πρέπει να έχουμε υπόψιν μας τρία θέματα. Αν σε κάποιο θέση « l_1 » ασκηθεί φορτίο ίσο με « P » τότε:

1. Ποσό θα είναι το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο της δοκού.
2. Ποια θα είναι η πολικότητα σε συγκεκριμένες θέσεις
3. Πόσο θα είναι το συνολικό φορτίο της δοκού όταν σε θέση « x » αναπτυχθεί βέλος « $w(x)$ »

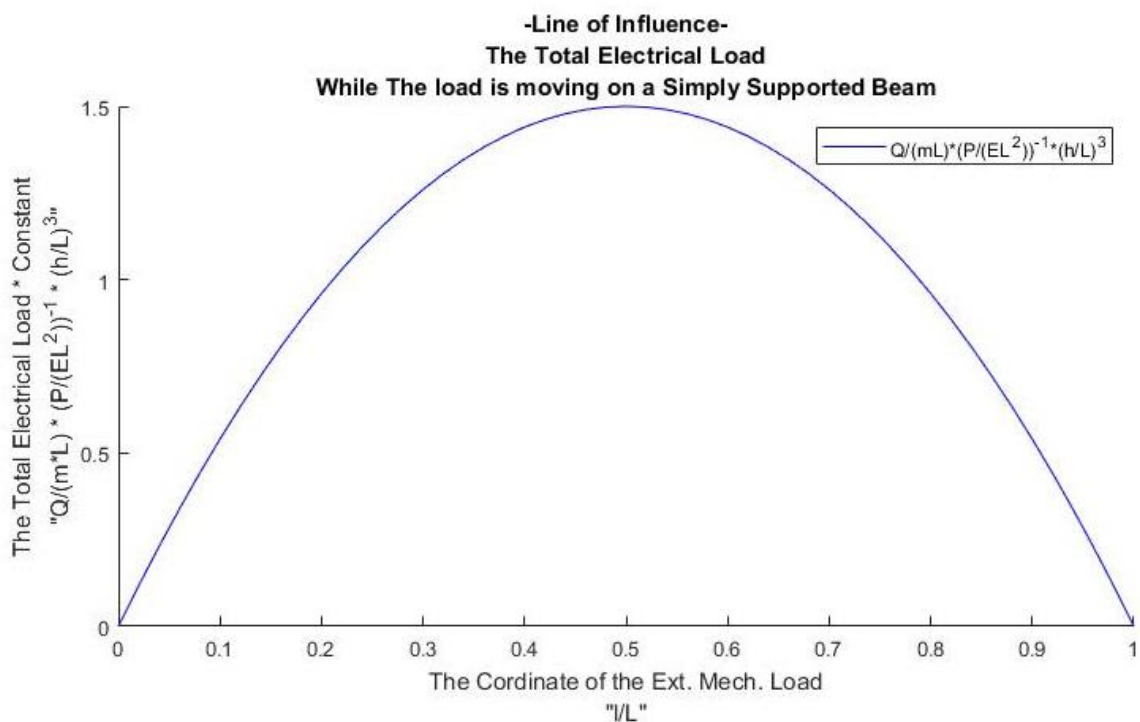


Figure 7. Γραμμή επιρροής του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου.
Η μεταβολή του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου, ως συνάρτηση της θέσης του φορτίου, ενώ το εξωτερικό φορτίο και το ύψος της διατομής είναι σταθερά.

-Line of Influence-
The Electrical Polarization
While The load is moving on a Simply Supported Beam

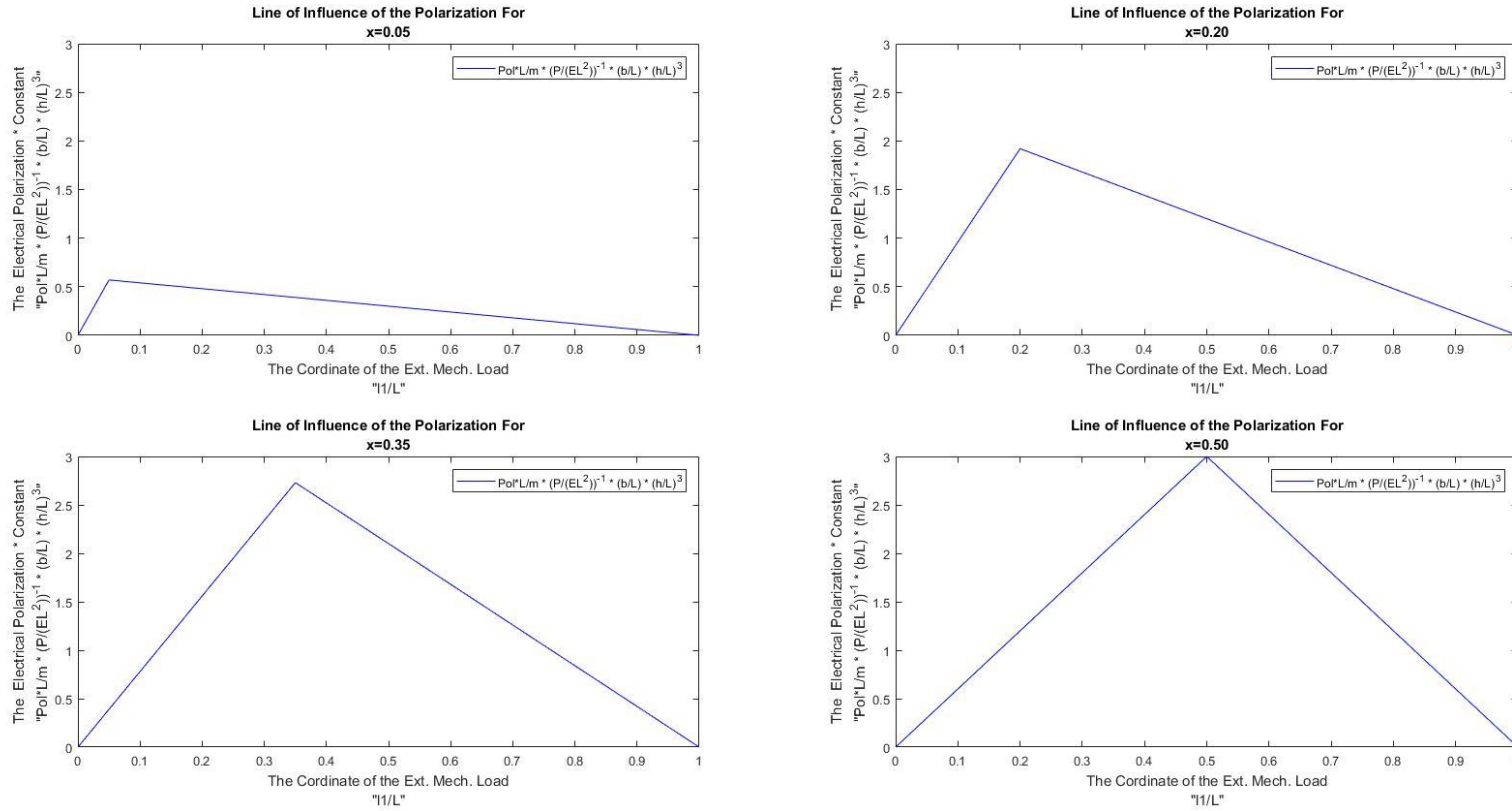


Figure 8. Γραμμή επιρροής της πολικότητας σε διάφορες θέσεις στο μήκος της δοκού.

Πώς μεταβάλλεται η πολικότητα σε μία συγκεκριμένη θέση, όταν το φορτίο που την προκαλεί κινείται. Κάθε διάγραμμα ορίζεται από διαφορετικό σημείο.

Πολύ σημαντικό πόρισμα από αυτό το διάγραμμα είναι ο εντοπισμός του φορτίου, με βάση την πολικότητα. («remote load detector»). Πάμε σε μία θέση « x » και μετράμε την πολικότητα.

Μετά πάμε στην γραμμή επιρροής για το ίδιο « x », φέρνουμε οριζόντια, ίση με την πολικότητα που μετρήσαμε, και έτσι ξέρουμε την θέση που ασκήθηκε το φορτίο.

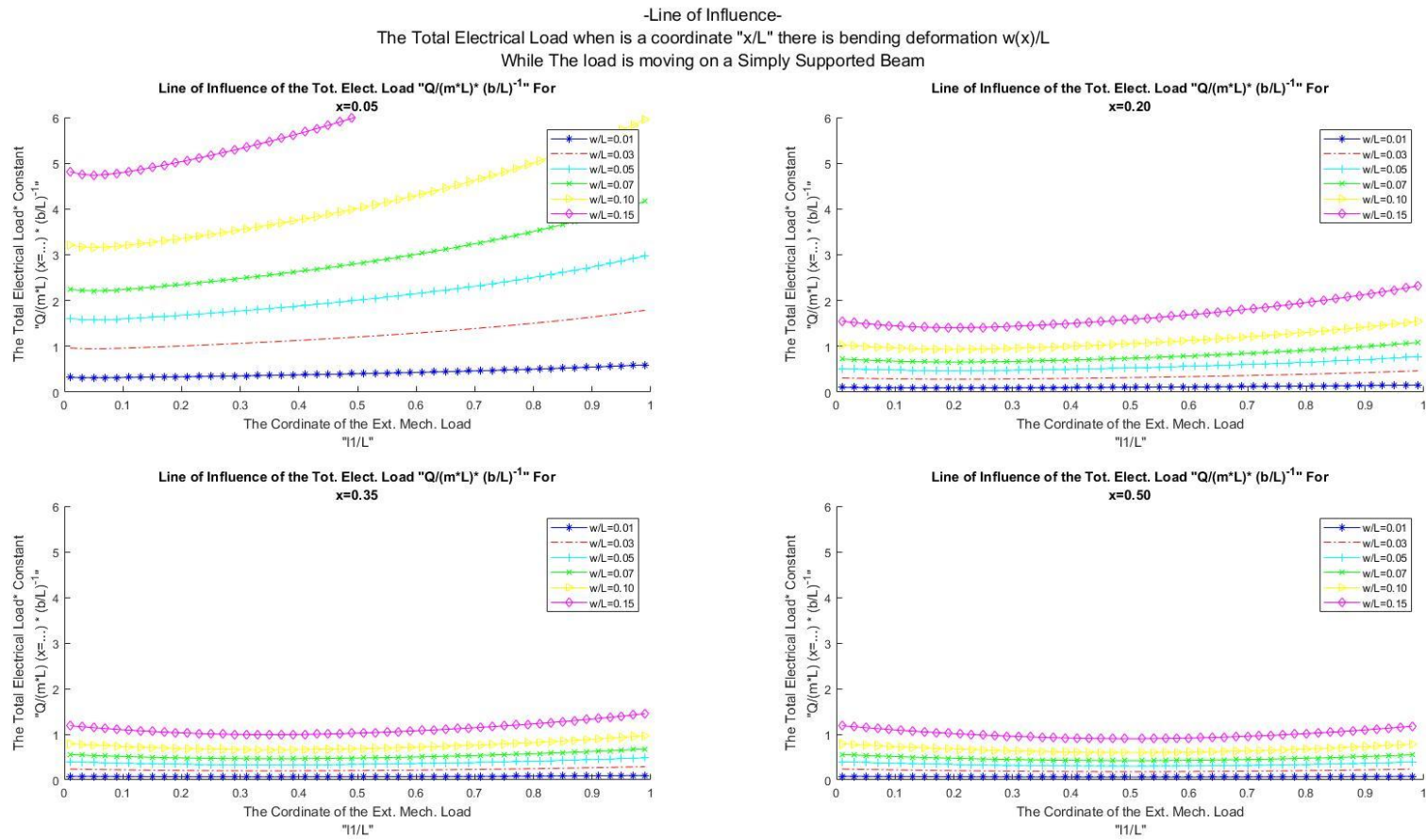


Figure 9. Γραμμή επιρροής του συνολικά παραγόμενου ηλεκτρικού φορτίου σε όλο το μήκος της δοκού.
Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού, όταν σε θέση «x» παρατηρηθεί κατακόρυφη παραμόρφωση «w(x)», συναρτήσει της θέσης του φορτίου.
Το πλάτος της διατομής θεωρείται σταθερό.

5. Το φαινόμενο στην άλλη διεύθυνση

Μια άλλη πτυχή του φαινομένου, που αξίζει να λάβει κανείς υπόψιν του, είναι η άλλη διεύθυνση. Όπως αναφέρθηκε αρκετές φορές μέχρι τώρα, το μόνο που χρειάζεται ένα υλικό, για να δώσει ηλεκτρικό σήμα, μέσω του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, είναι ο ρυθμός μεταβολής των τάσεων, «strain gradient». Εμείς ασχοληθήκαμε με την κατανομή των τάσεων στην κύρια διεύθυνση, εκεί που είναι μεγαλύτερη. Δηλαδή σε δοκό που κάμπτεται μελετήσαμε την διατομή, αλλά αυτή δεν είναι η μόνη περίπτωση που εμφανίζεται στο φορέα «strain gradient».

Σε ένα μεγάλο αριθμό φορέων, με ένα συγκεκριμένο είδος φόρτισης, είναι δυνατή, η ανάπτυξη τάσεων σε δύο ή περισσότερες διευθύνσεις. Έτσι είναι το ίδιο αποτελεσματικό, να θεωρούμε την τομή κάθετα στο μήκος του φορέα που παρέχει την διατομή, ή μπορούμε να θεωρούμε και την τομή παράλληλα στο μήκος του φορέα, σαν ένα στρώμα. Η πλαστική ανάλυση των φορέων αναφέρει έναν διαχωρισμό, σε μία διατομή σε στρώσεις, που λέγεται πολυστρωματική θεώρηση, μέσω της οποίας είναι δυνατόν, να παρατηρεί κανείς πώς πλαστικοποιείται μία διατομή. Αυτή η μεθοδολογία της πλαστικής ανάλυσης των κατασκευών, δίνει έναυσμα, για διαχωρισμό μίας δοκού σε στρώματα και μελέτη του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού σε κάθε ένα από αυτά.

Αρχίζοντας από τα βασικά, μία δοκός – πρόβολος, με σταθερή διατομή, μπορεί να έχει μία συγκεντρωμένη ροπή στην άκρη ή ένα συγκεντρωμένο φορτίο στην άκρη. Στην πρώτη περίπτωση το διάγραμμα των ροπών της είναι σταθερό, ίσο με την εξωτερική ροπή, ενώ στην δεύτερη περίπτωση, το διάγραμμα των ροπών είναι τριγωνικό. Αυτό σημαίνει ότι μία διατομή, κοντά στην στήριξη έχει μεγαλύτερη ροπή από μία άλλη που είναι πιο μακριά.

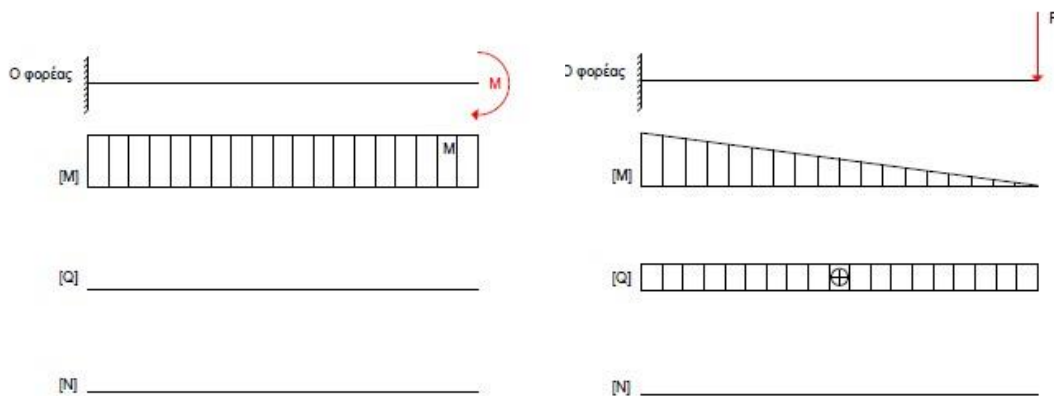


Figure 2. Φορέας με συγκεντρωμένη καμπτική ροπή στην άκρη, το διάγραμμα των ροπών του είναι σταθερό. Σε αυτόν τον φορέα δεν έχουμε το φαινόμενο στην άλλη διεύθυνση.

Figure 1. Φορέας με συγκεντρωμένη κατακόρυφη δύναμη στην άκρη. Το διάγραμμα των ροπών του είναι τριγωνικό. Σε αυτόν τον φορέα, έχουμε το φαινόμενο στην άλλη διεύθυνση.

Αυτό σημαίνει ότι αν επιλέξουμε ένα στρώμα, που μπορεί να το αποκαλέσουμε πολλές φορές και ίνα, λόγω της 2D – απεικόνισής του, στην περίπτωση του προβόλου με κατακόρυφο φορτίο, στην άκρη, τότε αυτό το στρώμα, θα έχει μία κατανομή των τάσεων, ανάλογη με την κατανομή της ροπής στον φορέα, σύμφωνα με την θεωρία δοκού σε κάμψη.

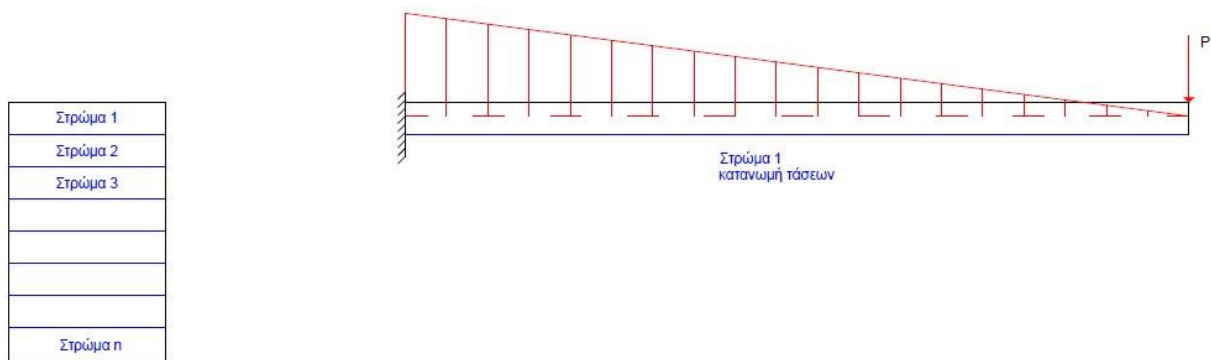


Figure 3. Διαχωρισμός της διατομής σε στρώματα και κατανομή των τάσεων σε ένα από αυτά.

Συνεχίζοντας την ανάλυση στην περίπτωση προβόλου σταθερής διατομής με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή των τροπών πάνω σε ένα στρώμα, με την θεωρία δοκού σε κάμψη και στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον νόμο του Hooke:

$$\epsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E \cdot I_{yy}} * Z$$

$$\epsilon_{xx} = 12 * \frac{P * (x-L)}{E * b_0 * h_0^3} * Z$$

$$\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} = 12 * \frac{P}{E * b_0 * h_0^3} Z$$

Η πολικότητα που δημιουργείται είναι στην διεύθυνση του στρώματος, δηλαδή παράλληλά στον άξονα της δοκού, δηλαδή κατά τον άξονα «1», και οι τάσεις που την προκαλούν είναι και αυτές στον άξονα «1», άρα σε αυτό το σημείο, χρειαζόμαστε την σταθερά « μ_{11} »

$$Pol_{11} = \mu_{11} * 12 * \frac{P * Z}{E * b_0 * h_0^3}$$

Η οποία σχέση ισοδυναμεί με την παρακάτω.

$$\frac{Pol_{11} * L}{\mu_{11}} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \frac{Z}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Εδώ αξίζει να σημειώσει κανείς, ότι η πολικότητα έχει κατεύθυνση, (από τα μικρά προς τα μεγάλα). Άρα στο πάνω μέρος της διατομής, που οι τάσεις είναι θλιπτικές, η πολικότητα έχει διαφορετικό πρόσημο, από αυτήν που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διατομής. Έτσι υπάρχει ένα είδος εξουδετέρωσης της πολικότητας, στην δοκό, αλλά αυτό δεν καθιστά, αδύνατη την εκμετάλλευση του φαινομένου.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η πολικότητα, σε κάθε στρώμα και πώς αυτή εξουδετερώνεται. Για να εκμεταλλευτεί κανείς, αυτό το φαινόμενο, και πόσο μάλλον για να το μετρήσει, πρέπει να τοποθετήσει τα ηλεκτρόδια, σε θέση όπως φαίνεται παρακάτω.

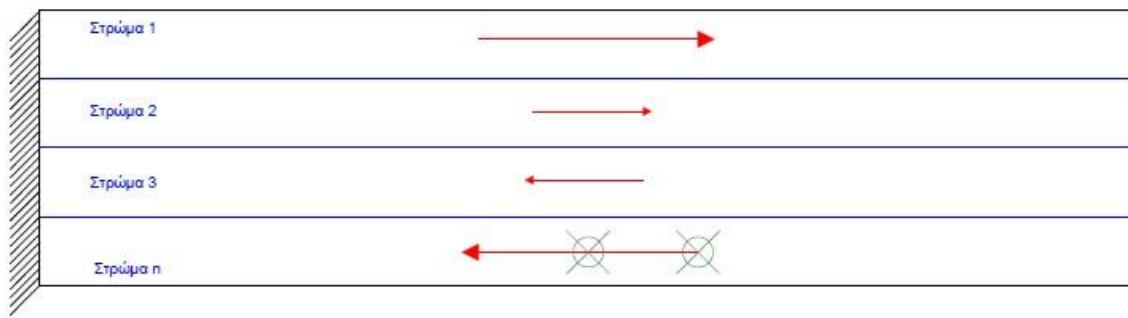


Figure 4. Η πολικότητα σε έναν πρόβολο σταθερής διατομής, με τριγωνικό διάγραμμα ροπών. (το φαινόμενο στρώματος). Η πολικότητα εξουδετερώνεται αλλά μπορεί να μετρηθεί αν τοποθετηθούν ηλεκτρόδια στις θέσεις που στοχοποιούνται.

Ο προσδιορισμός του συνολικά παραγόμενου φορτίου σε όλο το μήκος της δοκού, είναι για ευνόητους λόγους μηδενικός. Το ολοκλήρωμα είναι από το « $-\frac{h_0}{2} \rightarrow \frac{h_0}{2}$ », ως προς την μεταβλητή «z», αφού και η πολικότητα μεταβάλλεται σε αυτήν την διεύθυνση, και για τον λόγο που υποδείχτηκε παραπάνω, το φορτίο είναι μηδενικό.

Παρόλο που το φαινόμενο γίνεται «cancel out» υπάρχει πληθώρα εφαρμογών, με τις οποίες μπορεί κανείς να το εκμεταλλευτεί.

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αλλά σχήματα διατομών, ασύμμετρα, ώστε να μην γίνει «cancel out».
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σύνθετες διατομές, «composite materials».
- Με παρόμοιο τρόπο και άλλες κατασκευές τύπου «sandwich», με πάνω και κάτω στρώμα, από διαφορετικό υλικό, και να πάρουμε το φορτίο από πάνω και κάτω στρώμα ξεχωριστά.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι δεν χρειάζεται να εκμεταλλευόμαστε κατ' ανάγκην μόνο τα εξωτερικά στρώματα.

Θεωρούμε μία σύνθετη διατομή τύπου «sandwich», όπως φαίνεται και στο παραπλεύριο σχήμα, με πάχος στρώματος ίσο με «t». Τώρα το ολοκλήρωμα προσδιορίζεται, ξεχωριστά για κάθε στρώμα, από το « $-\frac{h_0}{2} - t \rightarrow \frac{h_0}{2}$ », και έτσι το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, για ένα στρώμα πάχους «t» δίνεται από τον παρακάτω τύπο. Ο οποίος στην συνέχεια αποτυπώνεται σε γραφήματα.

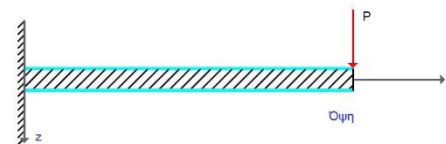


Figure 5. Πρόβολος τύπου «sandwich».

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left[\frac{h_0}{L} * \frac{t}{L} - \left(\frac{t}{L}\right)^2\right]^2$$

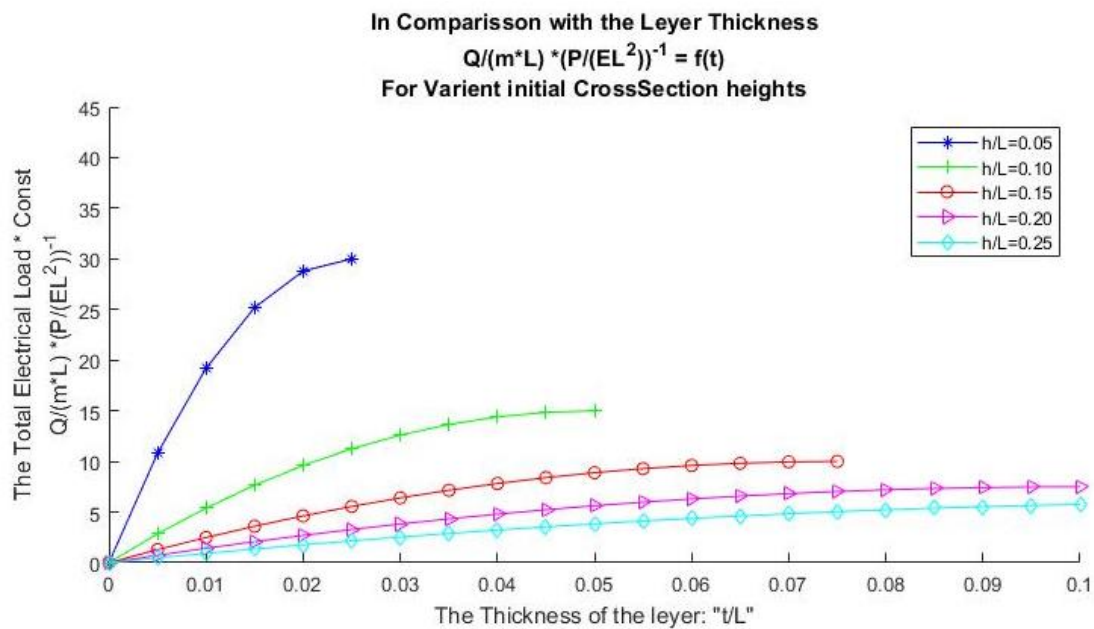


Figure 6. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε ένα στρώμα, ως συνάρτηση του πάχους του στρώματος, για διάφορα ύψη διατομής.

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα, και ήταν και αναμενόμενο, μεγιστοποίηση του φαινομένου έχουμε για μικρά ύψη διατομής και μεγάλα πάχη στρώματος. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι το πάχος στρώματος μπορεί να φτάσει μέχρι το μισό του ύψους της διατομής.

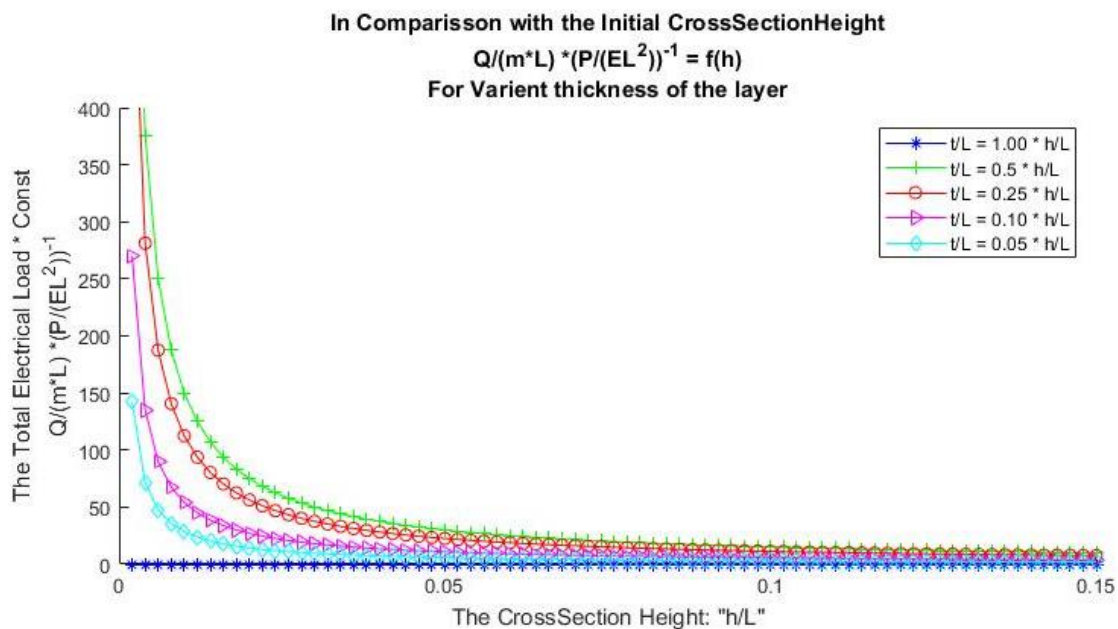


Figure 7. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε ένα στρώμα της δοκού, σαν συνάρτηση του ύψους της διατομής, για διαφορά πάχη στρώματος. Έχουμε αύξηση του φαινομένου για αύξηση του πάχους του στρώματος, μέχρι το μισό της διατομής. Από εκεί και έπειτα μικραίνει, μέχρι που μηδενίζεται (Μπλε αστέρια).

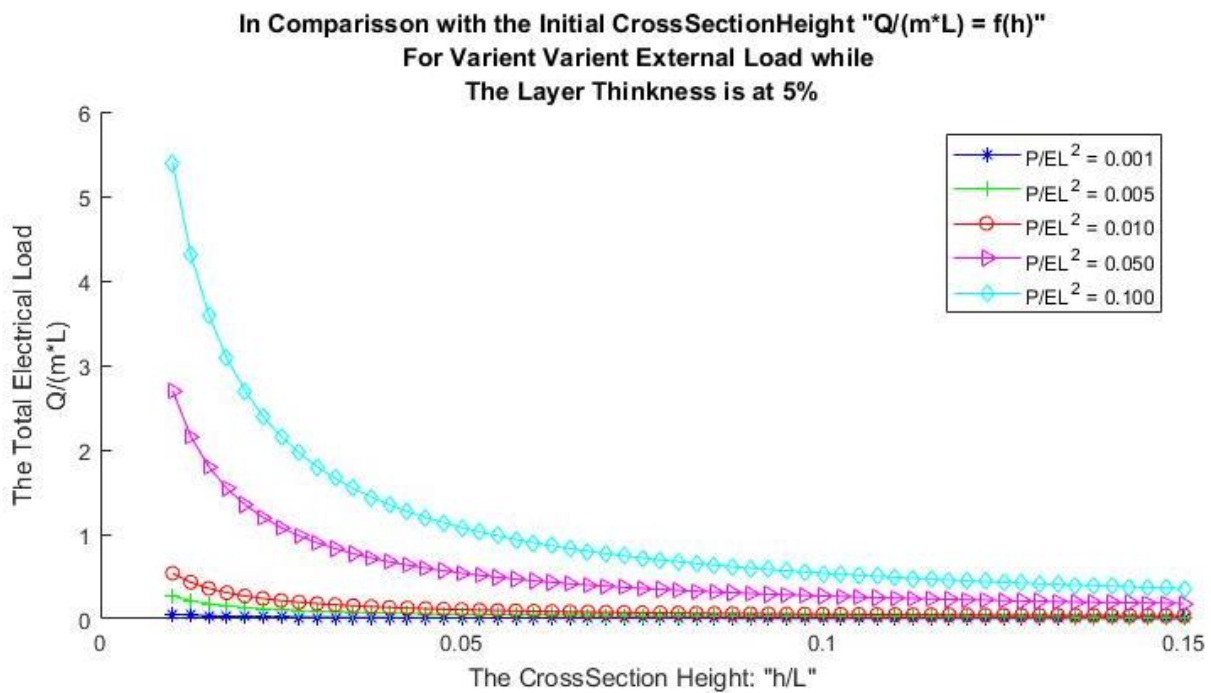


Figure 8. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε ένα στρώμα, ως συνάρτηση του ύψους της διατομής, όταν το πάχος τους στρώματος είναι στο 5% του ύψους της διατομής, για διάφορα εξωτερικά φορτία.

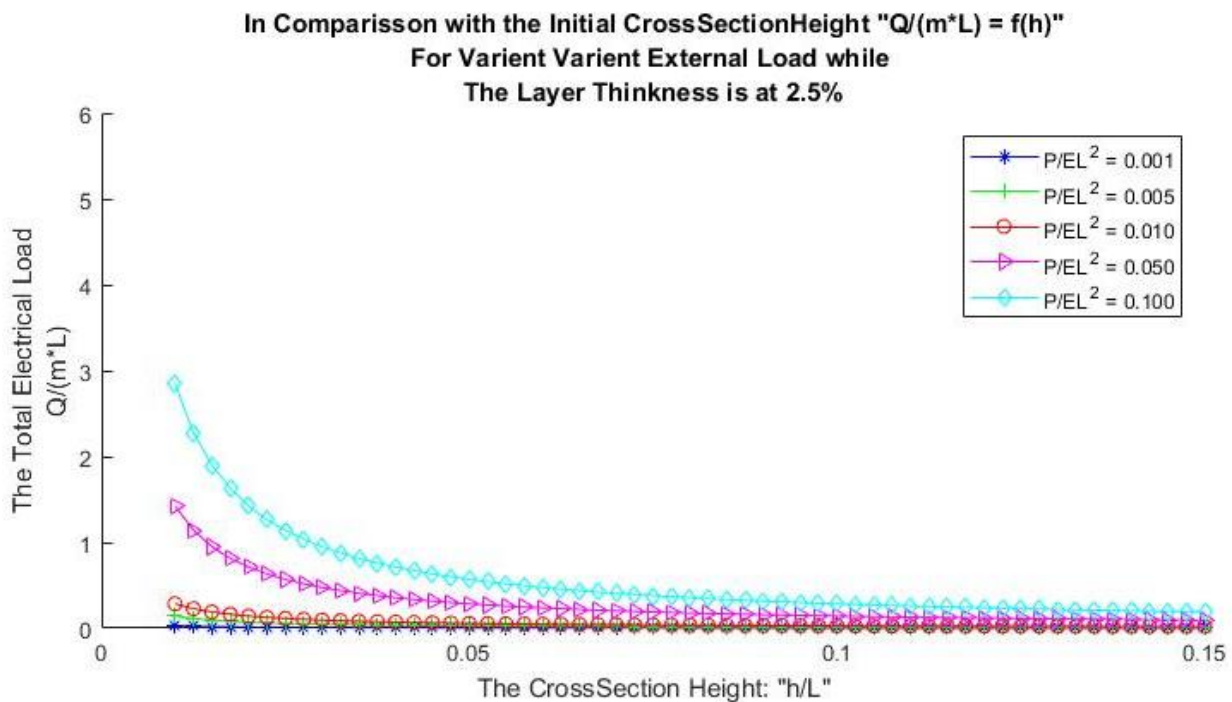


Figure 9. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε ένα στρώμα, ως συνάρτηση του ύψους της διατομής, όταν το πάχος τους στρώματος είναι στο 2.5% του ύψους της διατομής, για διάφορα εξωτερικά φορτία.

The electrical Polarization of the flexoelectric effect on a cantilever beam via the layer phenomenon
 $Pol \cdot L/m \cdot (P/EL^3)^{-1} = f(h,b)$
 in comparison with the CrossSection Dims "h/L", "b/L"

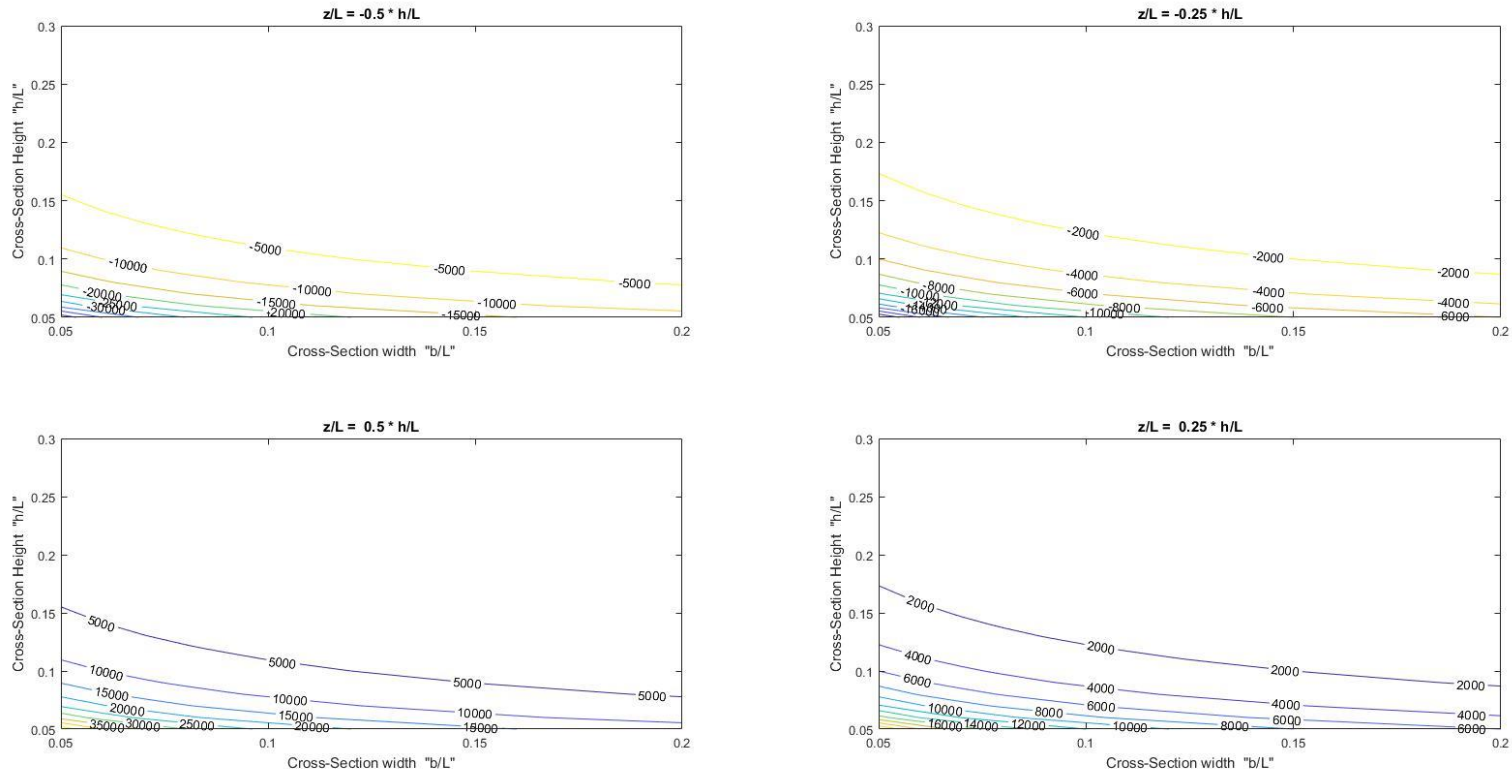
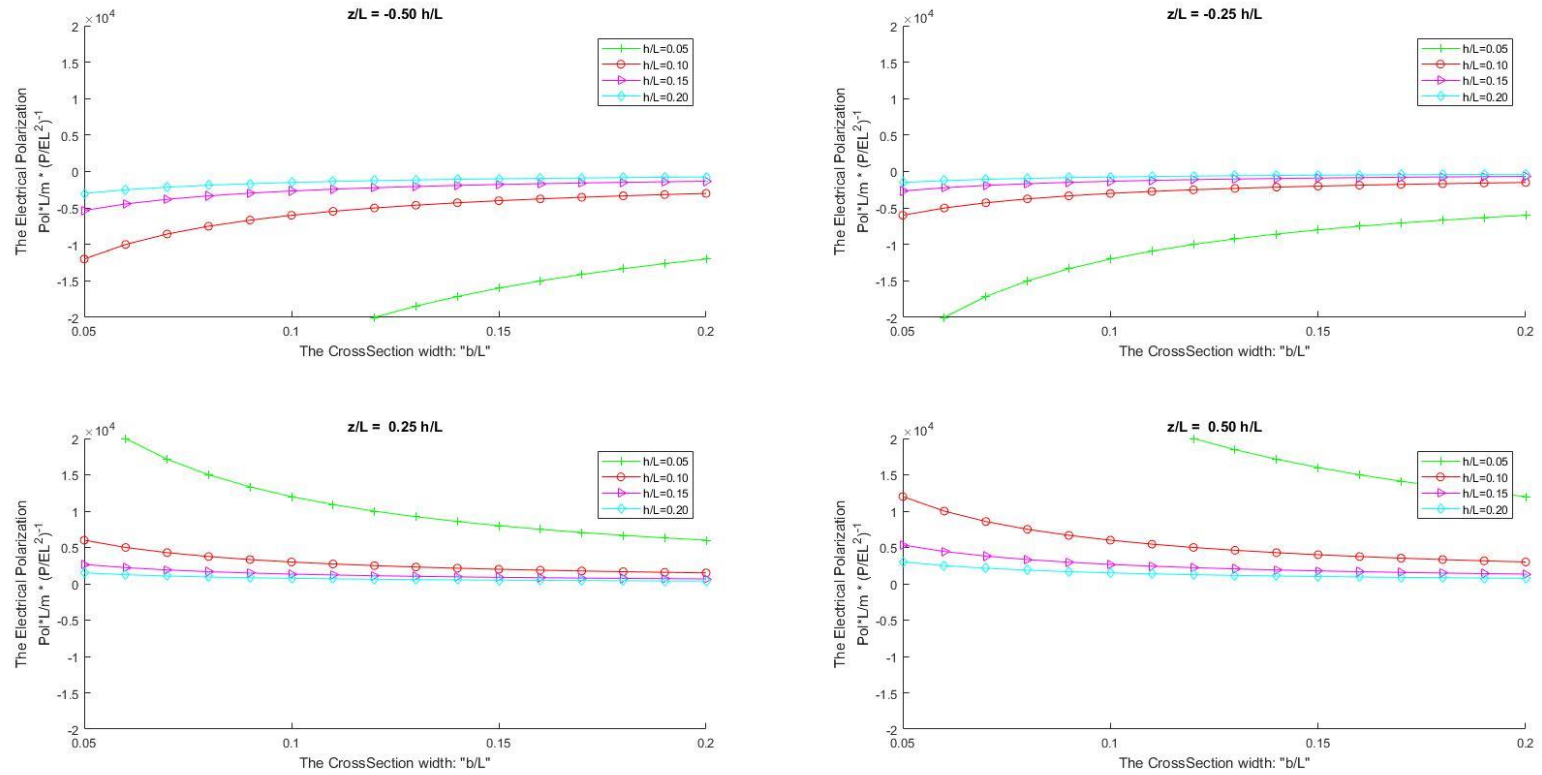


Figure 10. Η ηλεκτρική πολικότητα, σύμφωνα με το φαινόμενο στρώματος, σε έναν πρόβολο με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη, για έναν συνδυασμό των διαστάσεων της διατομής, για σταθερό εξωτερικό φορτίο, που βρίσκεται στο πρώτο μέρος της εξίσωσης. Σε κάθε διάγραμμα έχει επιλεχθεί διαφορετικό στρώμα. Είναι ολοφάνερη η συμμετρία γύρω από το μηδέν. Επίσης, πιο απομακρυσμένο στρώμα αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη πολικότητα. Τέλος είναι προφανές ότι το ύψος της διατομής είναι πολύ πιο δραστικό από το πλάτος της σε αυτό το φαινόμενο.

The electrical Polarization: "Pol*L/m * (P/EL²)⁻¹
In Comparison with the crossSection width
For Varient z-Coords and CrossSection heights



234

Figure 11. Η ηλεκτρικό πολικότητα, λόγω του φαινομένου του φαεζοηλεκτρισμού, σε ένα στρώμα μίας δοκού-προβόλου, με κατακόρυφο φορτίο στην άκρη, συναρτήσει του πλάτους της διατομής για διάφορα ύψη της διατομής.

Σε κάθε διάγραμμα είναι διαφορετική η θέση του στρώματος. Το εξωτερικό φορτίο θεωρείται σταθερό στο πρώτο μέρος της εξίσωσης.

Μικρά ύψη διατομής, σε πιο απομακρυσμένα στρώματα, προκαλούν βελτιστοποίηση.

Ακόμα επιθυμητό είναι να υπάρχει και μικρό πλάτος διατομής.

Η συμμετρία των διαγραμμάτων γύρω από το μηδέν, ήταν ένα συμπέρασμα, ήδη γνωστό.

The electrical Polarization: "Pol*L/m * (P/EL²)⁻¹
In Comparison with the crossSection Height
For Varient z-Coords and CrossSectiophn Widths

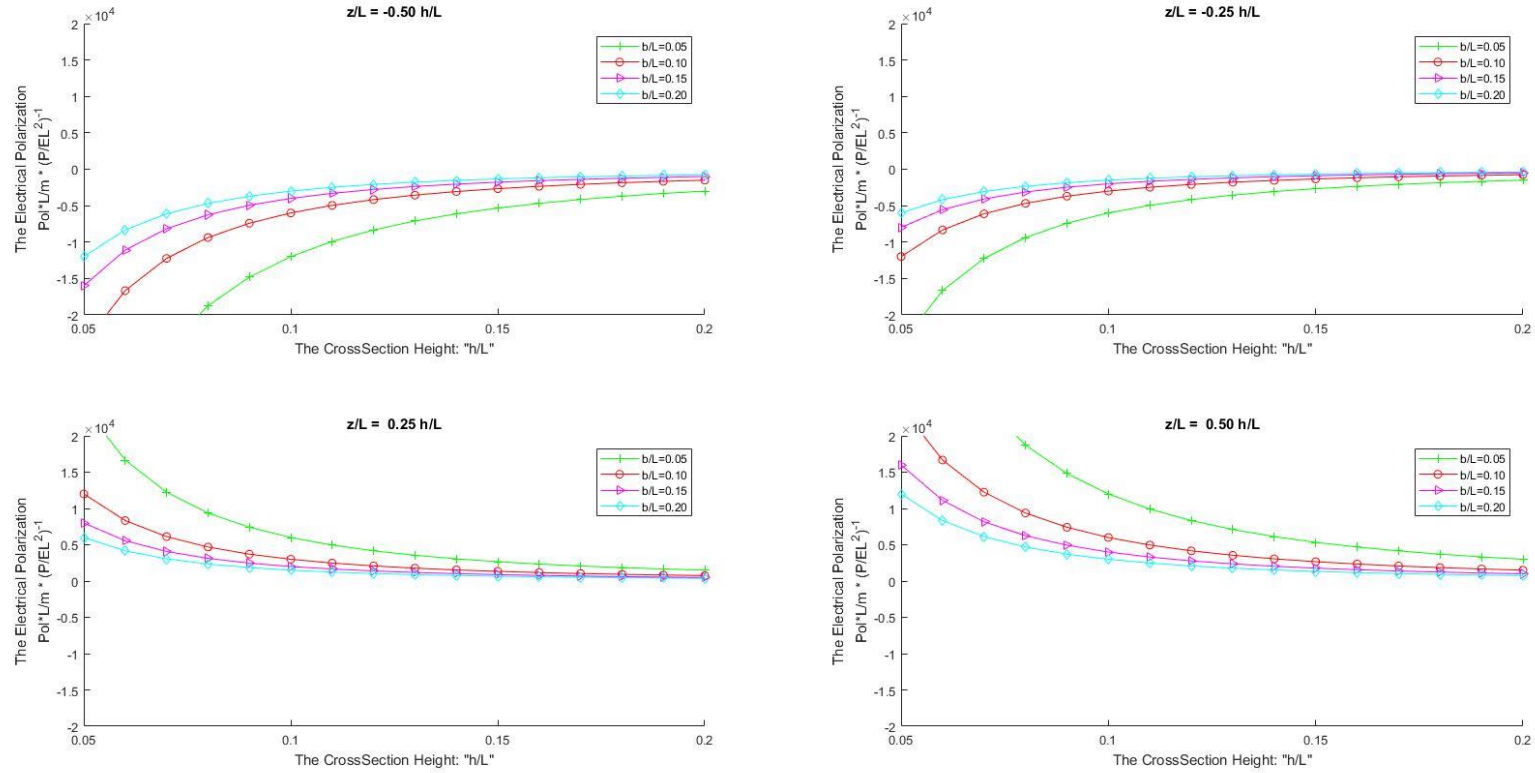


Figure 12. Όμοια είναι και η μορφή των διαγραμμάτων της πολικότητας, αυτήν την φορά ως συνάρτηση του ύψους της διατομής για διάφορες τιμές του πλάτους της. Φανερό είναι, αν κάποιος συγκρίνει αυτά τα διαγράμματα με τα προηγούμενα, η δραστηριότητα του ύψους της διατομής, έναντι του πλάτους, σε αυτό το φαινόμενο.

Σε αυτό το σημείο είναι προτεινόμενη η αντικατάσταση στην σχέση του συνολικά παραγόμενου φορτίου της διατομής, του εντατικού μέγεθος με το αντίστοιχο παραμορφωσιακό, το οποίο είναι το βέλος κάμψης, και υπολογίστηκε στην περίπτωση 1.0.1

$$\frac{W(x)}{L} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left(\frac{(x/L)^2}{2} - \frac{(x/L)^3}{6}\right)$$

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{11} * L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left[\frac{h_0}{L} * \frac{t}{L} - \left(\frac{t}{L}\right)^2\right]^2$$

Αντικαθιστώντας καταλήγει κανείς στην παρακάτω σχέση.

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = \frac{1}{2} * \frac{W(x)}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right) * \left[\frac{h_0}{L} * \frac{t}{L} - \left(\frac{t}{L}\right)^2\right]^2 * \left(\frac{(x/L)^2}{2} - \frac{(x/L)^3}{6}\right)^{-1}$$

Σημαντικό είναι να επισημάνουμε ότι αυτή η σχέση, δίνει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που παρατηρείται σε ένα στρώμα πάτους «t», όταν η κατακόρυφη παραμόρφωση σε ένα σημείο γίνει συγκεκριμένη.

Μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί σε διαγράμματα τα οποία φαίνονται στις επόμενες σελίδες.

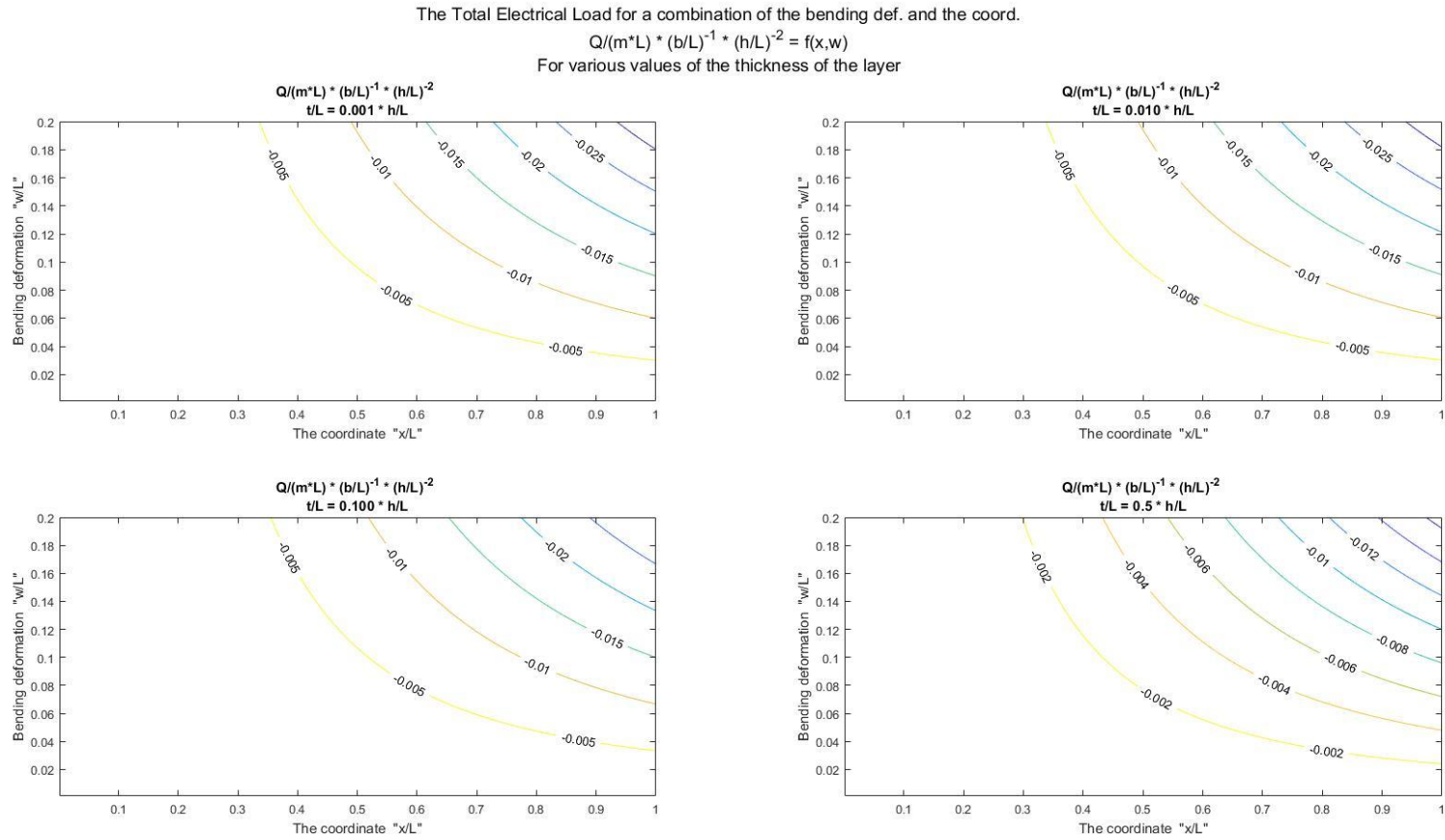


Figure 13. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που αναπτύσσεται σε ένα στρώμα πάχους «t» για έναν συνδυασμό της κατακόρυφης παραμόρφωσης που θα εμφανιστεί σε μία θέση, και την συντεταγμένη της θέσης αυτής.

Σε κάθε διάγραμμα το πάχος του στρώματος είναι διαφορετικό.

Οι διαστάσεις της διατομής θεωρούνται σταθερές στο πρώτο μέρος της εξίσωσης.

Όσο μεγαλώνει το πάχος του στρώματος, τόσο αυξάνει και το φαινόμενο, μέχρι τουλάχιστον να γίνει μισή διατομή, έπειτα αρχίζει και μικραίνει.

The Total Electrical Load for a combination of the bending def. and the Width.

$$Q/(m^*L) = f(b,w)$$

$$z/h = 5\% \text{ \& } x = 0.5L$$

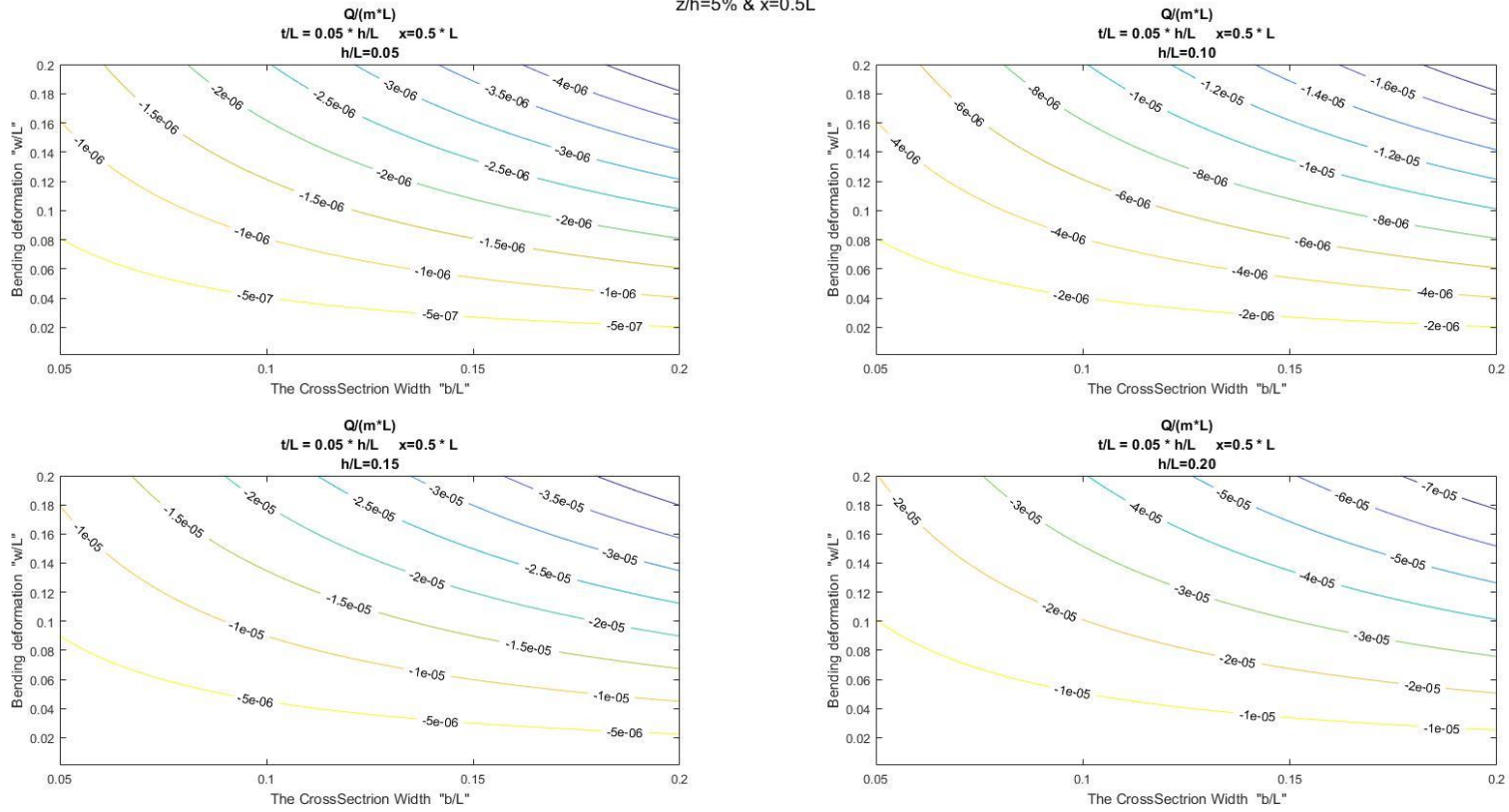


Figure 14. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που αναπτύσσεται σε ένα στρώμα, με πάχος 2.5% του ύψους της διατομής, για έναν συνδυασμό της κατακόρυφης μετακίνησης που θα παρατηρηθεί, στο μέσο του προβόλου, και του πλάτους της διατομής. Σε κάθε διάγραμμα, το ύψος της διατομής μεταβάλλει τις τιμές του.

The Total Electrical Load for a combination of the bending def. and the height.
 $Q/(m \cdot L) = f(h, w)$
 $z/h = 5\% \text{ \& } x = 0.5L$

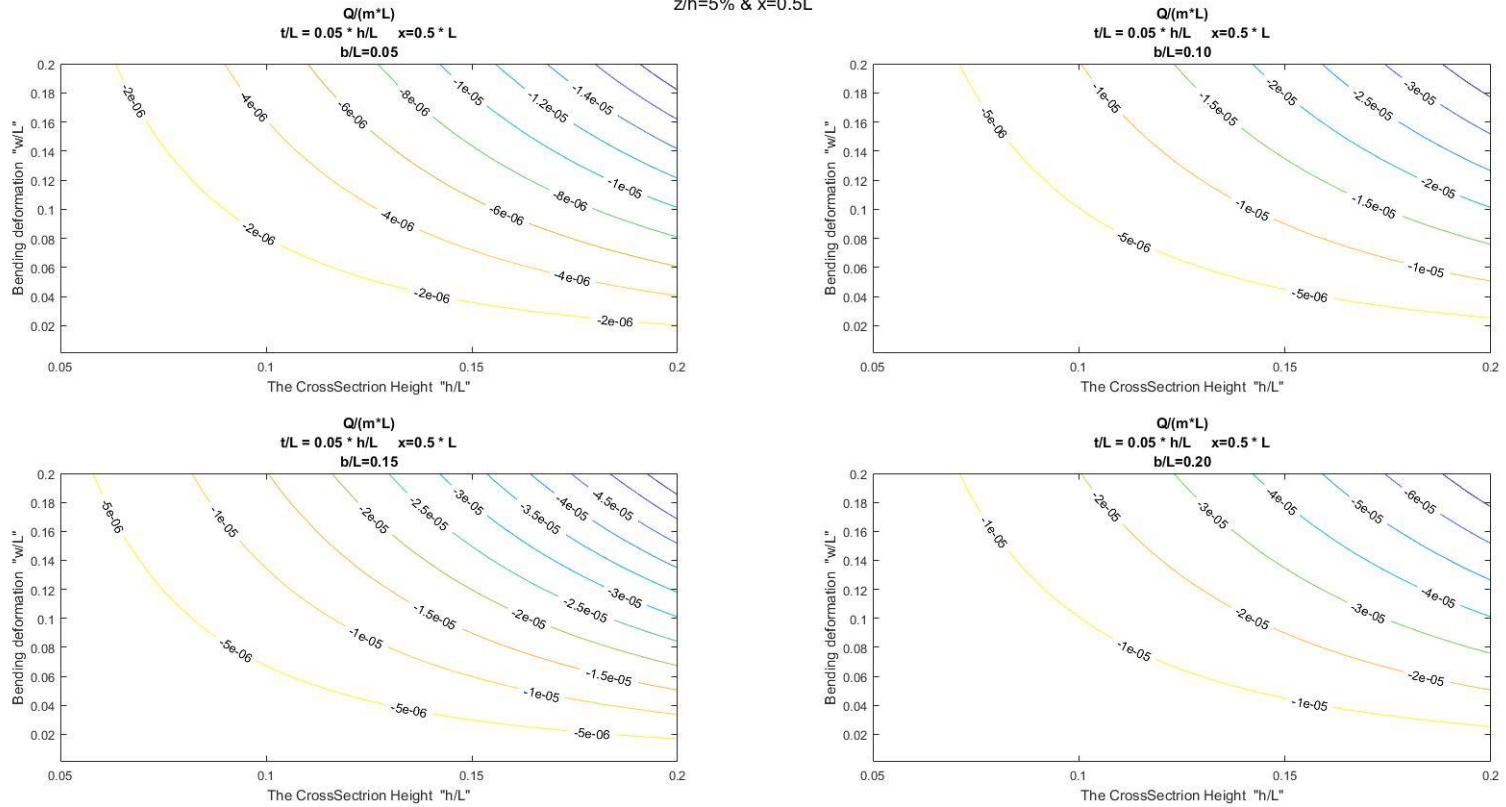


Figure 15. Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που αναπτύσσεται σε ένα στρώμα, με πάχος 2.5% του ύψους της διατομής, για έναν συνδυασμό της κατακόρυφης μετακίνησης που θα παρατηρηθεί, στο μέσω του προβόλου, και του ύψους της διατομής

. Σε κάθε διάγραμμα, το πλάτος της διατομής μεταβάλλει τις τιμές του.

Συγκρίνοντας κανείς αυτά τα διαγράμματα με τα προηγούμενα, μπορεί να καταλάβει, πόσο πιο δραστική είναι η μεταβολή του ύψους της διατομής, από αυτή του πλάτους στο φαινόμενο αυτό.

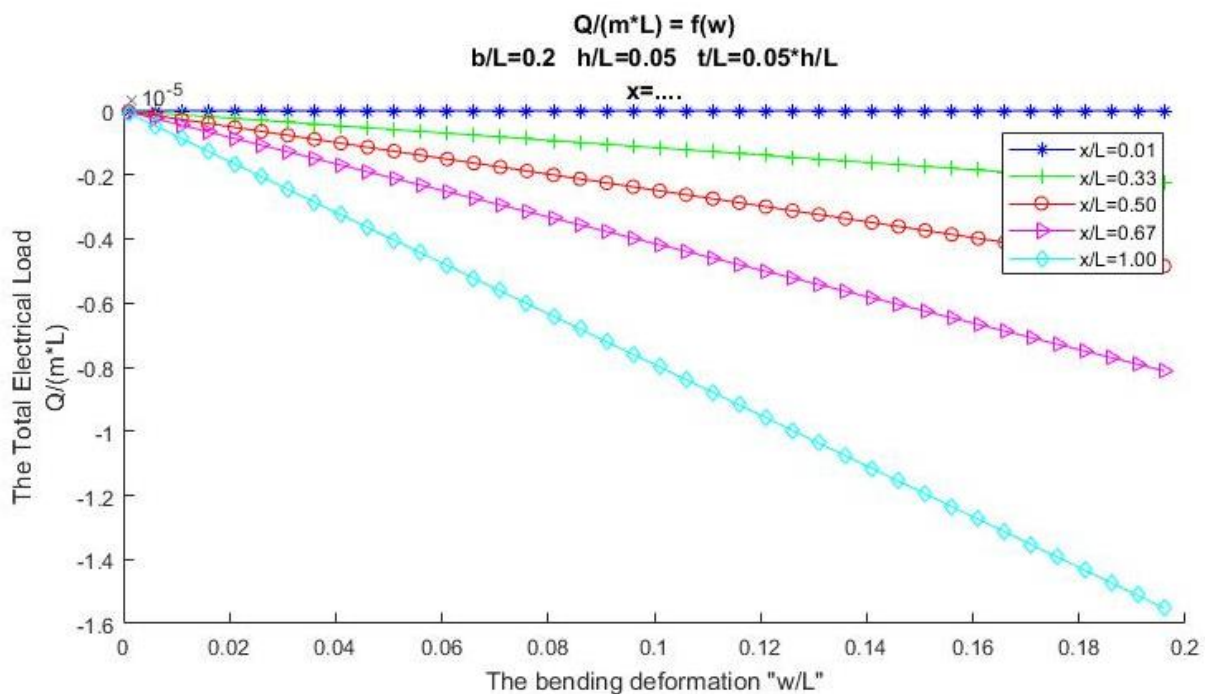
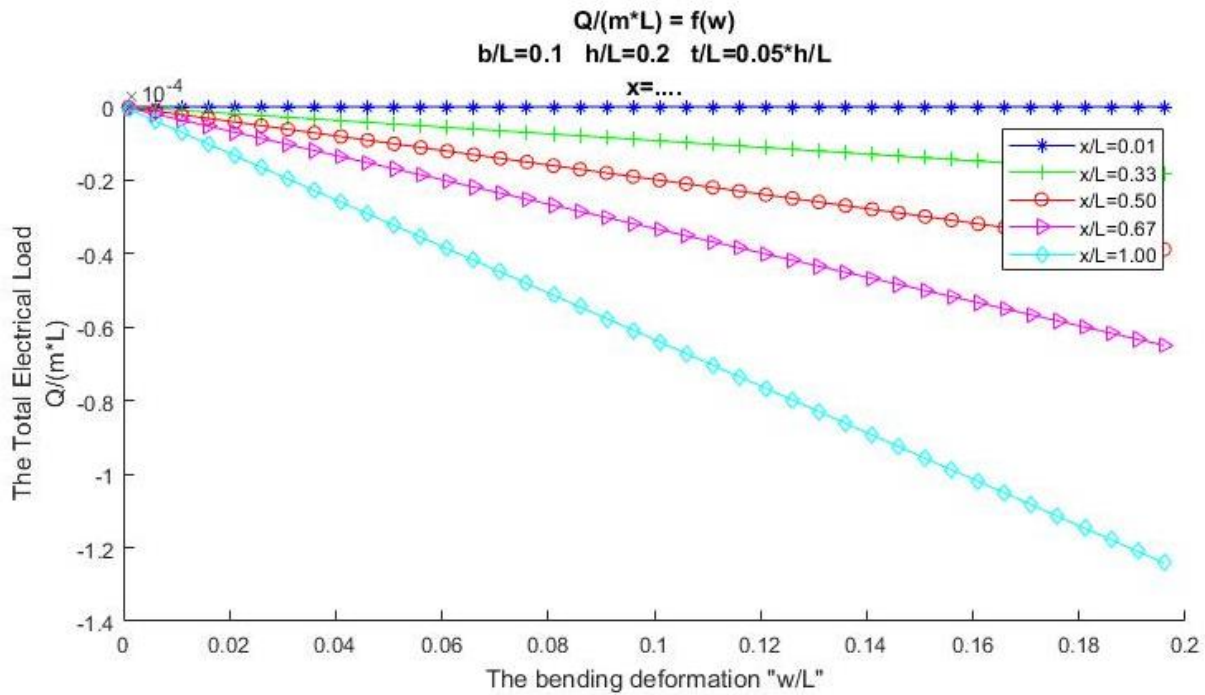


Figure 16. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε ένα στρώμα πάχους «t», ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης που θα εμφανιστεί σε ορισμένα σημεία της δοκού. Κάθε καμπύλη μες στο διάγραμμα αντιστοιχεί σε διαφορετικό σημείο. Οι αρχικές διαστάσεις της διατομής είναι διαφορετικές στα δύο διαγράμματα. Στο πρώτο είναι διατομή φιλμ, ενώ στο δεύτερο σκυροδεματική. Το πάχος του στρώματος είναι σταθερό στο 2.5% του ύψους.

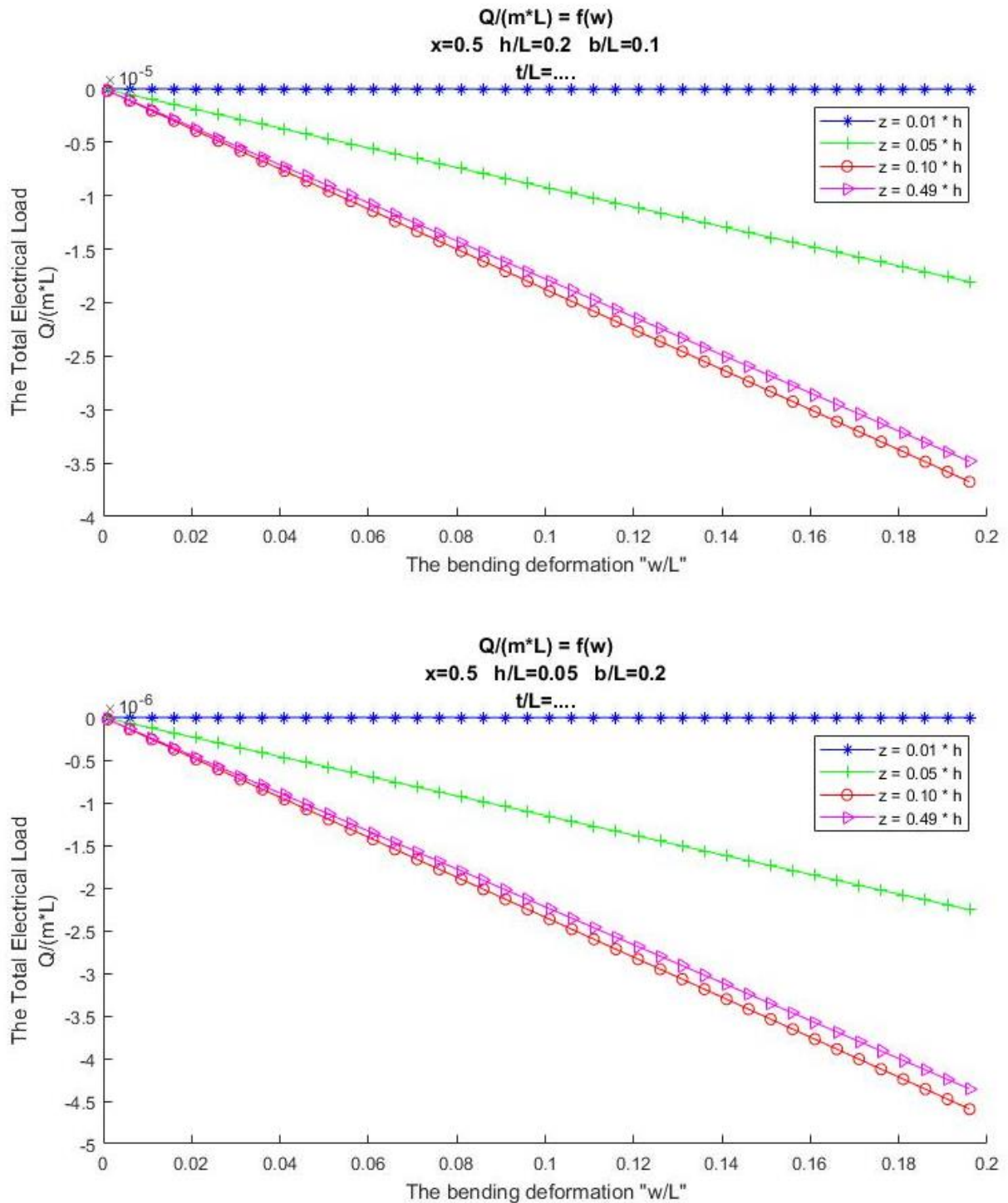


Figure 17. Το συνολικά παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο, σε ένα στρώμα πάχους «t», ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης στο μέσο του προβόλου, για διάφορες τιμές του πάχους του στρώματος. Σε κάθε διάγραμμα διαφοροποιούνται οι διαστάσεις της διατομής, όπως και στο προηγούμενο ζεύγος διαγραμμάτων. Στο πάνω έχουμε μια διατομή φιλμ, ενώ στο κάτω, μία σκυροδεματική.

Τέλος, αφού ολοκληρώθηκε με επιτυχία, μία ανάλυση φαινομένου στρώματος, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον, να συγκριθούν τα αποτελέσματα, του φαινομένου του στρώματος με αυτά της διατομής.

Το φαινόμενο του στρώματος απαρτίζεται από μία πολικότητα και ένα συνολικά παραγόμενο φορτίο που φαίνονται παρακάτω.

- Το συνολικά παραγόμενο φορτίο:

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * L} = 6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3} * \left[\frac{h_0}{L} * \frac{t}{L} - \left(\frac{t}{L}\right)^2\right]^2$$

- Η πολικότητα:

$$\frac{Pol_{11} * L}{\mu_{11}} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \frac{z}{L} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

Ομοίως και το φαινόμενο διατομής όπως φαίνεται παρακάτω.

- Το συνολικά παραγόμενο φορτίο:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * L} = -6 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-3}$$

- Η πολικότητα:

$$\frac{Pol_{13} * L}{\mu_{13}} = 12 * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{b_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^3 * \left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

Η διαδικασία της σύγκρισης, μπορεί να γίνει με μία απλή διαίρεση. Έτσι αν συγκρίνω τα συνολικά παραγόμενα φορτία για κάθε περίπτωση έχω τον λόγο:

$$\frac{Q_{13} / \mu_{13} * L}{Q_{11} / \mu_{11} * L} = \left[\frac{h_0}{L} * \frac{t}{L} - \left(\frac{t}{L}\right)^2\right]^2$$

Αν αυτός ο λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας, κατά απόλυτη τιμή, τότε το φαινόμενο της διατομής, είναι πιο ισχυρό από αυτό του στρώματος, αν όχι, τότε ισχύει το αντίθετο.

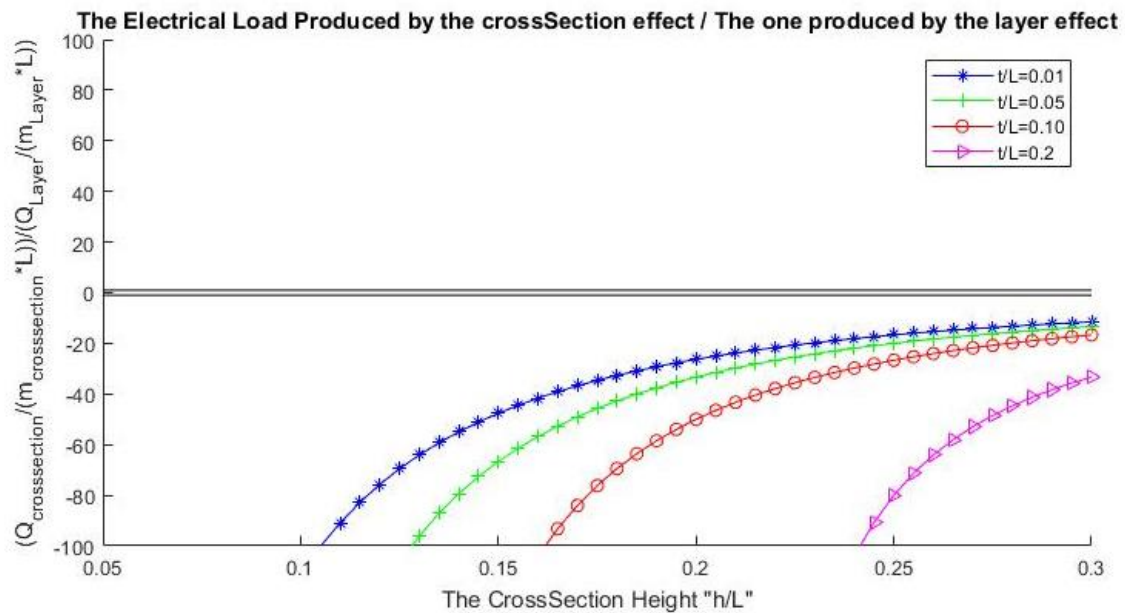


Figure 18. Συγκρίνοντας τα δύο φαινόμενα. Το φαινόμενο της διατομής υπερτερεί σε μεγάλο βαθμό από αυτό του στρώματος. Για μικρά ύψη διατομής και μικρά πάχη στρώματος, ίσως κάποτε να βελτιωθεί η σχέση τους.

Στην συνέχεια μπορούμε να συγκρίνουμε και της πολικότητες με την ίδια διαίρεση.

$$\frac{Pol_{13} * L / \mu_{13}}{Pol_{11} * L / \mu_{11}} = \frac{\left| \frac{x}{L} - 1 \right|}{\left| \frac{z}{L} \right|}$$

Αν αυτός ο λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας, τότε το φαινόμενο της διατομής, είναι πιο ισχυρό από αυτό του στρώματος, αν όχι, τότε ισχύει το αντίθετο.

Ακολουθως παρουσιάζονται διαγράμματα. Ένα σχόλιο που πρέπει να γίνει μετά από μελέτη των αποτελεσμάτων, είναι ότι ναι μεν το φαινόμενο του στρώματος είναι αρκετά πιο ασθενές, αλλά ένα απόλυτο συμπέρασμα, θεωρείται πολύ βιαστικό, γιατί όχι μόνο, συναντήσαμε περιπτώσεις που είναι πιο ισχυρό, αλλά ακόμα μπορεί να ενισχυθεί και άλλο, όταν δώσουμε μία πιο περίεργη συνάρτηση φορτίου, όπως κατανεμημένα φορτία, ή μεταβάλουμε διάφορες παράμερους, όπως η ροπή αδρανείας και το μέτρο ελαστικότητας.

Το «superposition», η επαλληλία, είναι δυνατή αλλά πρέπει να γίνεται κάθε φορά σε όρους φορτίου, και ποτέ κανονικοποιημένου φορτίου.

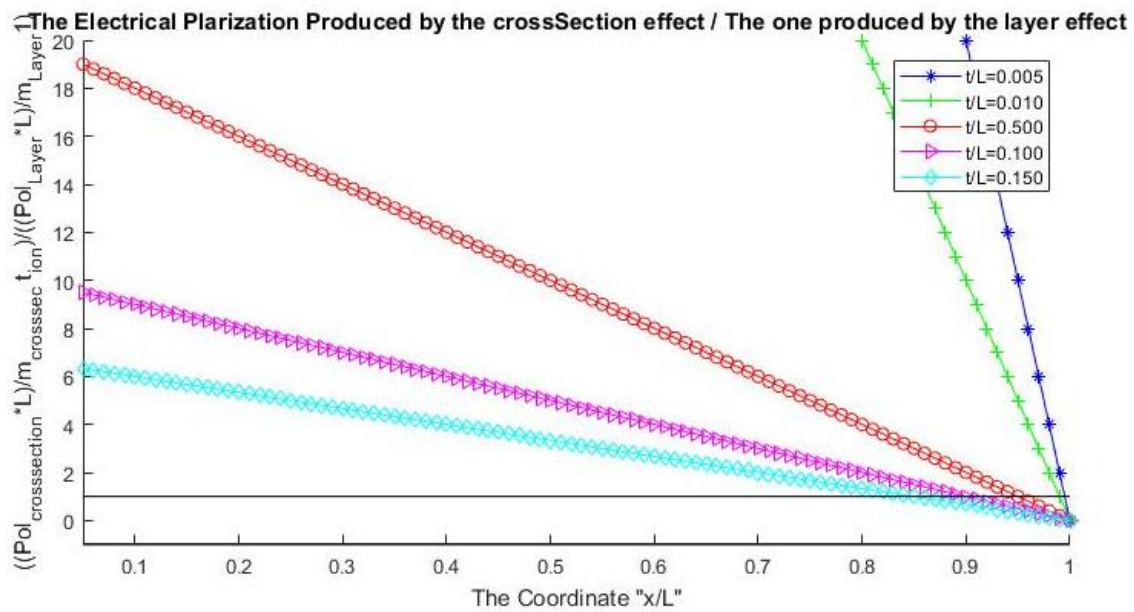


Figure 20. Συγκρίνοντας την πολικότητα των δύο φαινομένων. Χρειάζονται θέσεις πολύ μικρής ροπής, για να νικήσει το φαινόμενο στρώματος, το φαινόμενο διατομής.
Ένα μεγάλο πάχος στρώματος, βοηθάει, σε αυτό το κατόρθωμα.

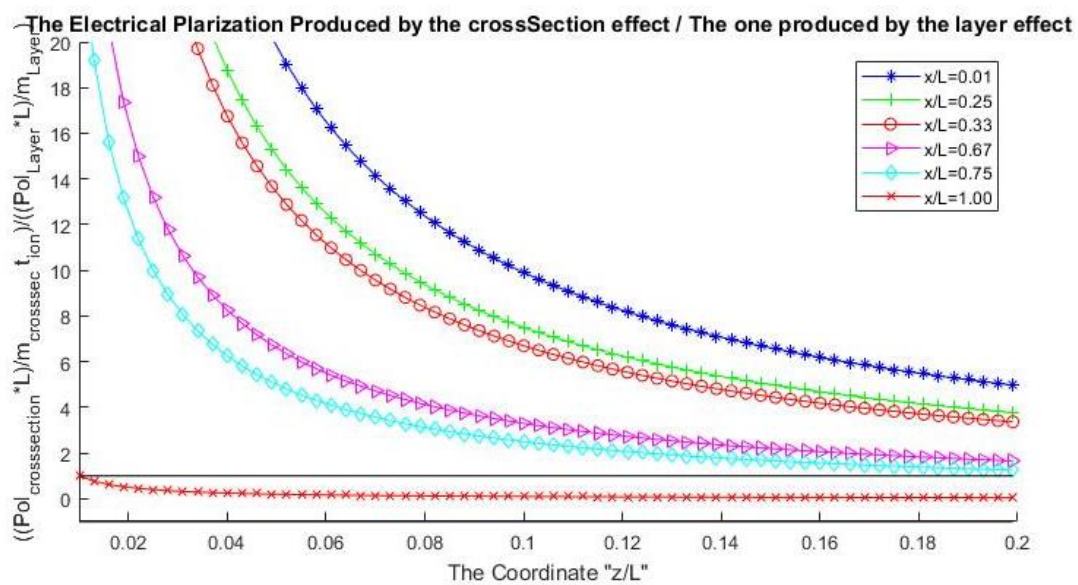


Figure 19. Συγκρίνοντας τις δύο περιπτώσεις. Η πολικότητα του φαινομένου στρώματος, δεν θα ξεπεράσει με τίποτα, αυτήν της διατομής, εκτός αν μιλάμε για θέσεις πολύ μικρής ροπής.
Όσο αυξάνεται το πάχος του στρώματος, τόσο βελτιώνεται η συμπεριφορά του.

6. Δομικά Στοιχεία

6.1. Φορείς «MEMS», μικρο-ηλεκτρο-μηχανισμοί

Από μηχανικής απόψευς, δύο φορείς έχουν ιδιαίτερη σημασία. Αυτοί οι φορείς λέγονται φορείς «MEMS», και είναι τόσο σημαντικοί, γιατί προεδρεύουν κάθε είδους φόρτισης. Ο ένας το στατικό φορτίο, και ο άλλος το σεισμικό. Αυτοί οι φορείς, είναι οι παρακάτω.

- Αμφίπακτη δοκός με κατακόρυφο φορτίο στην μέση
- Αμφίπακτο πλαίσιο, με οριζόντιο φορτίο.

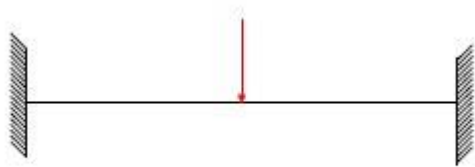


Figure 1. Αμφίπακτη δοκός με φορτίο στο μέσο.

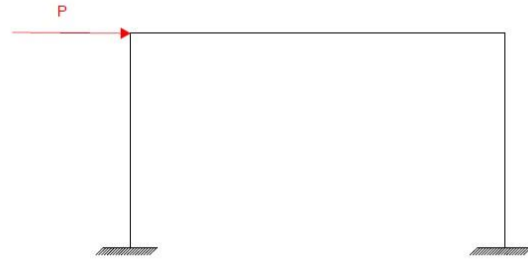


Figure 2. Αμφίπακτο πλαίσιο με οριζόντιο φορτίο.

Σε αυτήν την φάση δεν πρόκειται να κάνουμε επίλυση αυτών των φορέων. Τουλάχιστον όχι απόλυτη λύση παρά μία πρόχειρη.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την αμφίπακτη δοκό, που έχει το κατακόρυφο φορτίο στην μέση. Το διάγραμμα είναι τριγωνικό, και για ένα στοιχειώδες φορτίο έχει ως εξής.

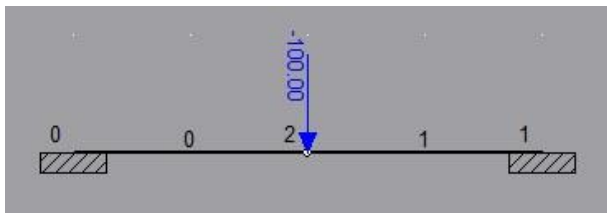


Figure 3. Το στατικό προσομοίωμα σε περιβάλλον «linPro».

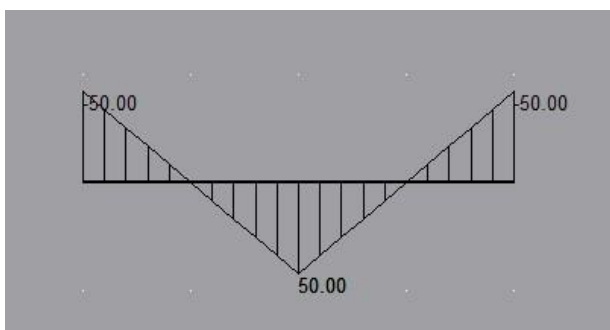


Figure 1. Το διάγραμμα των ροπών

Η επίλυση έγινε θεωρώντας μία διατομή ενιαία, με ένα συγκεκριμένο μέτρο ελαστικότητας, και συγκεκριμένη σιβαρότητα. Συνήθως όμως, σε τέτοια περίπτωση αυτή είναι η επίλυση, διότι δεν συνηθίζει ένα στοιχείο να έχει διαφορετικά μηχανικά χαρακτηριστικά. Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε μία δοκό μεταβλητής διατομής, αλλά αυτό ξεφεύγει.

Η αμφίπακτη δοκός, με φορτίο στο μέσο σχηματίζει ροπή τριγωνικής κατανομής, με μέγιστες τιμές τα άκρα και το μέσο της. Σε άλλες ενδιάμεσες θέσεις έχει μικρότερες τιμές (πάντα κατ' απόλυτη τιμή). Σημαντική είναι και η θέση μηδενισμού της ροπής που είναι στο ένα τέταρτο της απόστασης. Η δοκός κάμπτεται, πέρα από το ότι τέμνεται φυσικά. Άρα ισχύει η θεωρία δοκού σε κάμψη και άρα η κατανομή των τάσεων στην διατομή έχει ως εξής.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E \cdot I_{yy}(x)} \cdot Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 \cdot \frac{M(x)}{E \cdot b_0 \cdot h_0^3} \cdot Z$$

Καθώς και η πολικότητα δίνεται από την σχέση:

$$Pol_{13} = \mu_{13} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$Pol_{13} = \mu_{13} \cdot 12 \cdot \frac{M(x)}{E \cdot b_0 \cdot h_0^3}$$

Για τον προσδιορισμό του συνολικού φορτίου της δοκού χρειάζεται μία ολοκλήρωση. Επίσης σχεδιάζεται να θεωρήσουμε σε ποιο μήκος της δοκού θέλουμε, να υπολογίσουμε το παραγόμενο φορτίο. Μπορούμε σε όλη την δοκό ή και στην μισή.

Η σχέση που διέπει την ροπή, σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$M(x) = P \cdot \left(-\frac{L}{8} + \frac{x}{2} - \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 \right)$$

Ο τύπος αυτός δεν έχει καμία σχέση με την επίλυση του φορέα, απλά περιγράφει με απόλυτη επιτυχία το διάγραμμα των ροπών. Αντικαθιστώντας την πολικότητα, μπορεί κανείς να εφαρμόσει την ολοκλήρωση και να υπολογίσει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο, που υπάρχει διαθέσιμο σε μία αμφίπακτη δοκό, όταν αυτή κάμπτεται με κατακόρυφο φορτίο στο μέσο.

Στην συνέχεια, θα αναλύσουμε το πλαίσιο. Η επίλυση του πλαισίου, είναι πιο απαιτητική. Συνήθως τα υποστυλώματα έχουν διαφορετική στιβαρότητα από την δοκό. Επίσης μπορεί να υπάρχει και μία μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας. Σε κάθε περίπτωση, δεν θα ασχοληθούμε, σε μεγάλο βαθμό με την ροπή, αλλά περισσότερο με την μορφή της.



Figure 2. Ο φορέας σε περιβάλλον «linPro»

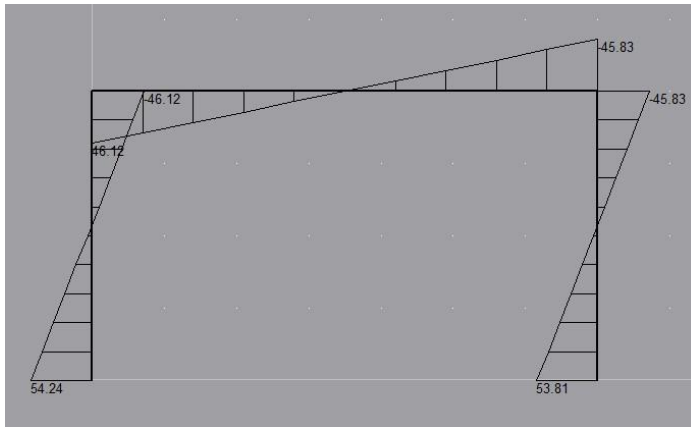


Figure 3. Η κατανομή της ροπής στον φορέα.

Σε κάθε περίπτωση, αυτός ο φορέας κάμπτεται, έτσι ισχύει η θεωρία δοκού σε κάμψη, και είναι δυνατός ο προσδιορισμός της πολικότητας.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M(x)}{E \cdot I_{yy}(x)} * Z$$

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{M(x)}{E * b_0 * h_0^3} * Z$$

$$\rho l_{13} = \mu_{13} * \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$\rho l_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{M(x)}{E * b_0 * h_0^3}$$

Σημαντικό είναι να διακρίνουμε το πλήθος των θέσεων με αυξημένη πολικότητα. Πέρα από τις στηρίξεις, μεγάλη πολικότητα αναπτύσσεται και στις γωνιές του πλαισίου. Η ροπή μηδενίζεται περίπου στην μέση των στύλων καθώς και της δοκού. Η κατανομή της ροπής είναι γραμμική, και το συνολικό φορτίο θα είναι το ολοκλήρωμα της.

Με μία περιέργη και σύνθετη διαδικασία, θα μπορούσε κάποιος να περιγράψει με μία εξίσωση το διάγραμμα των ροπών, αλλά αυτό θα ήταν μεταβλητό ως προς τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής.

Σημαντικό σε αυτό το σημείο είναι να διακρίνουμε, τι φορέα έχουμε. Η αλήθεια είναι ότι έχουμε 3 φορείς, και ο καθένας θα μπορούσε κάλλιστα να είχε το δικό του ηλεκτρικό φορτίο. Μάλιστα το φορτίο στους δύο στύλους θα ήταν ίδιο.

Σε κάθε περίπτωση, το φαινόμενο του «strain gradient» υπάρχει. Μάλιστα είναι πολύ δύσκολο να υπάρξει εφαρμογή χωρίς αυτό. Κάθε κατασκευή έχει τις ικανότητες να παράξει σήμα μέσω του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, είτε με στατικό φορτίο είτε με δυναμικό.

6.2. Εφαρμογές

Όπως έχει ήδη ειπωθεί πολλές φορές, ο φλεξοηλεκτρισμός είναι μια ιδιότητα μιας τεράστιας γκάμας υλικών, πολλά από τα οποία είναι δομικά στοιχεία, όπως διάφορα πολυμερή, ή ακόμα και το σκυρόδεμα. Μάλιστα κάποια πολυμερή με εκπληκτικές φλεξοηλεκτρικές ικανότητες χρησιμοποιούνται και σήμερα, σε θέματα ενίσχυσης υφιστάμενων κατασκευών. Ένα από αυτά είναι το φιλμ από το «PVDF».

Τι γίνεται αν ενισχύσουμε μια κατασκευή, με φλεξοηλεκτρικό υλικό, όχι για αντοχή, αλλά για το σήμα. Ή και για την αντοχή. Θεωρούμε ένα πλαίσιο από ελαστικό υλικό, όπως είναι ο χάλυβας, με υποστυλώματα διαστάσεων «40cm * 40cm» με ένα δοκάρι διαστάσεων «40cm * 60cm» ύψους «4m» και ανοίγματος «7m». Το δοκάρι αυτό, έχει ενισχυθεί με «PVDF» μορφής τριγώνου. Με την μία διάσταση «40cm» και την άλλη «3.5m». για την ακρίβεια έχουν τοποθετηθεί δύο, ένα σε κάθε παριά, όπως φαίνεται και στην παρακάτω σκαρίφημα.

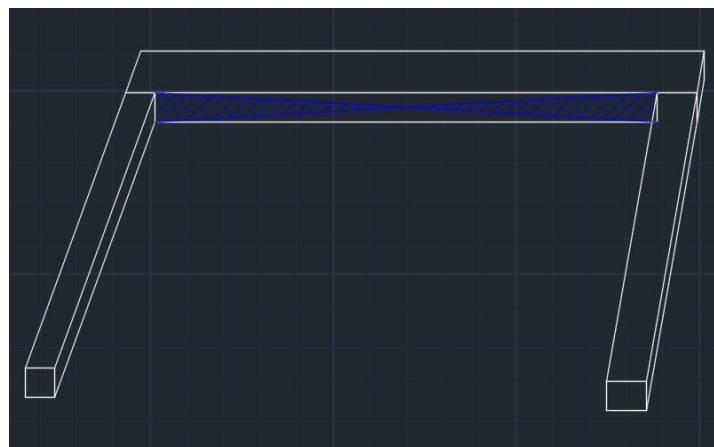


Figure 1. Το πλαίσιο ξαπλωμένο, έτσι ώστε να φαίνεται το κάτω μέρος του δοκαριού, και η ενίσχυσή από PVDF

Η ενίσχυση αυτή γίνεται με ένα φιλμ πάχους «0.0254m», όπως αυτά που προμηθευτήκαμε για την πειραματική διαδικασία, μέτρου ελαστικότητας ίσο με «1.72GPa». Αυτό το πλαίσιο, λόγω σεισμού φορτίζεται με εναλλασσόμενη οριζόντια δύναμη ίση με «50kN». Θεωρούμε ότι ο χάλυβας έχει μέτρο ελαστικότητας «200GPa».

Σε αυτήν τη φάση δε θα μελετήσουμε την αντοχή, που προφανώς αντέχει, αλλά το φορτίο που θα παραχθεί. Το φιλμ, είναι αρκετά λεπτό, για να μην επηρεάσει τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής, ή τουλάχιστον να τα επηρεάσει ελάχιστα, η αντοχή της προφανώς αυξάνεται, σε μεγάλο βαθμό, ιδιαίτερα στον σεισμό, που προκαλεί ροπή, αντίστοιχη με την μορφή της ενίσχυσης.

Τοποθετώντας τα δεδομένα του προβλήματος, σε πρόγραμμα γραμμικής στατικής «LinPro». Έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Figure 2. Ο φορέας του προβλήματος σε περιβάλλον «linPro», με την σεισμική φόρτιση που περιγράφηκε.



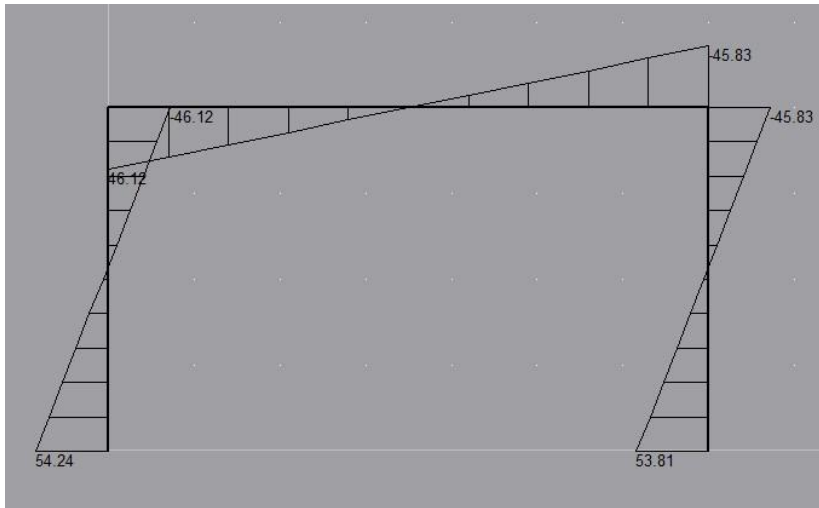


Figure 3. Το διάγραμμα των ροπών [M].

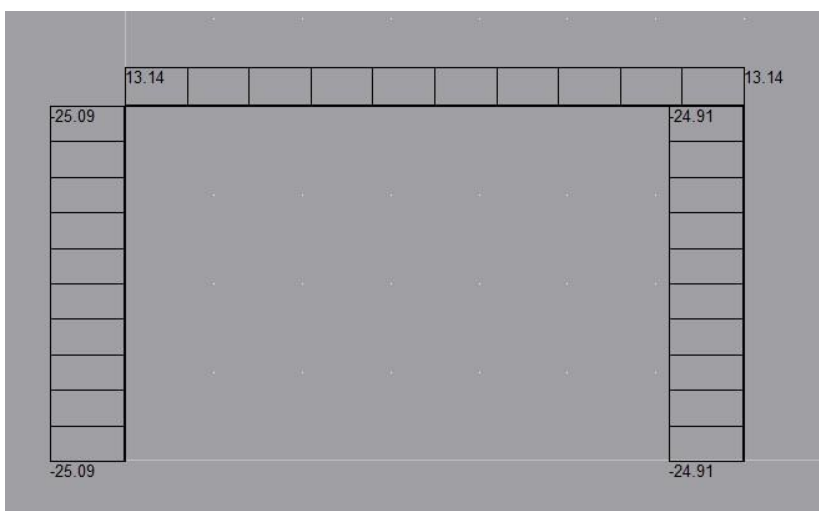


Figure 4. Το διάγραμμα των τεμνουσών [Q].

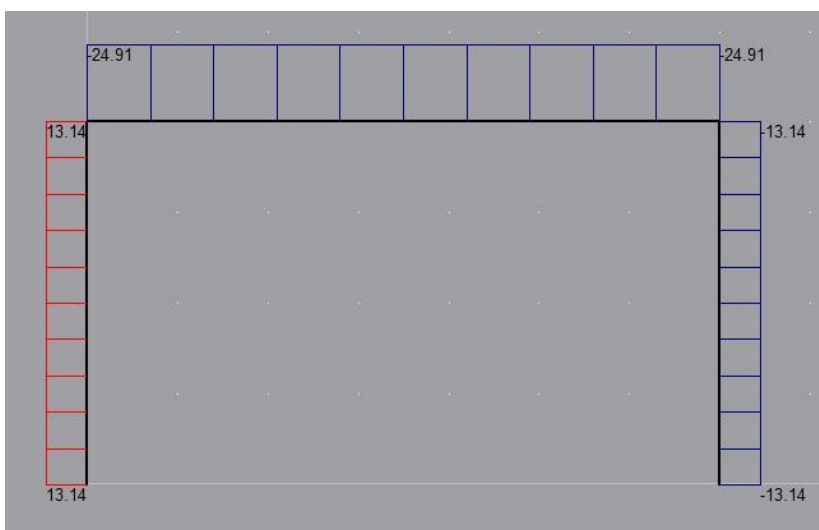


Figure 5. Το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων [N]

Η καμπτική ροπή προκαλεί έναν εφελκυσμό στην ενίσχυση, ο οποίος όμως μειώνεται καθώς πάμε προς το κέντρο της δοκού. Η παραμόρφωση που θα έχει το PVDF στην θέση μέγιστης ροπής, στην δοκό, θα είναι ίση, σύμφωνα με την θεωρία δοκού σε κάμψη με:

$$\varepsilon_{xx} = 12 * \frac{M}{E * b_0 * h_0^3} * z$$

- $M = 46.12 \text{ kN}$
- $E = 210 \text{ GPa}$
- $b_0 = 0.4 \text{ m}$
- $h_0 = 0.6 \text{ m}$
- $z = 0.3 \text{ m}$

$$\varepsilon_{xx} = 9.1507 * 10^{-6}$$

Η οποία αντιστοιχεί σε μία δύναμη:

$$P = E * A * \varepsilon_{xx} = 1.72 * 10^6 * 9.1507 * 10^{-6} * 0.0254 * 0.4 = 0.1599 \text{ kN}$$

Και στην συνέχεια για να γίνει μέση δύναμη, σε όλο τη μήκος του δοκιμίου:

$$P_{\text{μέσο}} = \frac{P}{2}$$

$$P_{\text{μέσο}} = 0.08 \text{ kN}^1$$

Πέρα από αυτήν την αξονική δύναμη στο φιλμ, που προήλθε από την εσωτερική ισορροπία των δυνάμεων στην διατομή, υπάρχει και το εντατικό μέγεθος της αξονικής, αλλά λόγω του τεράστιου μέτρου ελαστικότητας, και του μικρού εμβαδού του φιλμ είναι τρομακτικά μικρό.

$$P_{\text{αξονικό}} = \frac{E_{\text{PVDF}}}{E_{\text{χαλύβα}}} * \frac{A_{\text{PVDF}}}{A_{\text{συνολικό}}} * N = \frac{1.72}{210} * \frac{0.4 * 0.0254}{0.4 * 0.6} * 24.91 = 0.0086 \text{ kN}$$

Και δικαίως μπορεί να αμεληθεί. Αυτό όμως δεν θα ισχύει πάντα. Σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα, το μέτρο ελαστικότητας δεν είναι τόσο μεγάλο. Ούτε σε συνήθεις χαλύβιδνες κατασκευές, έχουμε τόσο μεγάλες διατομές.

Σε κάθε περίπτωση, τώρα είμαστε έτοιμοι να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση «1.1.3. Πρόβολος μεταβλητής διατομής, με αξονική φορτίο στην άκρη».

$$\frac{P o l_{11} * L}{\mu_{11}} = -\alpha * \frac{P}{E * L^2} * \left(\frac{h_0}{L}\right)^{-1} * \left(\frac{b_0}{L} + \alpha * \frac{x}{L}\right)^{-2}$$

$$\frac{P o l_{11} * 3.5}{\mu_{11}} = -0.1143 * \frac{0.08}{1.72 * 10^6 * 3.5^2} * \left(\frac{0.0254}{3.5}\right)^{-1} * \left(\frac{0.4}{3.5} - 0.1143 * \frac{x}{3.5}\right)^{-2}$$

Για την θέση μέγιστης ροπής «x=0»

¹ Εδώ πρέπει να σημειώσουμε, ότι αυτό το εγχείρημα είναι μόνο θεωρητικό, διότι η δύναμη αυτή είναι αρκετά μεγάλη και τα δοκίμια πολύ λεπτά.

$$\frac{P_{011} * 3.5}{\mu_{11}} = -0.1143 * \frac{0.08}{1.72 * 10^6 * 3.5^2} * \left(\frac{0.0254}{3.5}\right)^{-1} * \left(\frac{0.4}{3.5}\right)^{-2} = -4.5784 * 10^{-6}$$

Το οποίο δυστυχώς είναι πάρα πολύ μικρό, αλλά εξακολουθεί να είναι κάτι.

Συνεχίζοντας με το φορτίο:

$$\frac{Q_{11}}{\mu_{11} * 3.5} = 0.1143 * \frac{0.08}{1.72 * 10^6 * 3.5^2} * \frac{0.1143}{\left(\frac{0.4}{3.5}\right)^2 - 0.1143 * \frac{0.4}{3.5}} = -3.038 * 10^{-5}$$

Αυτό το εγχείρημα δεν έφερε ωραία αποτελέσματα. Ίσως έφταιγε, η μορφή του δοκιμίου, ίσως έφταιγε, η μικρή συνεισφορά του στον σεισμό. Σε ένα δοκίμιο από σκυρόδεμα, το υλικό αυτό δουλεύει σαν οπλισμός. Έτσι η δύναμη είναι αρκετά μεγαλύτερη.

Σε κάθε περίπτωση όμως, το μεγαλύτερο πρόβλημα ήταν το τεράστιο μέτρο ελαστικότητας.

Σαν δεύτερο εγχείρημα, θεωρούμε πλαίσιο, παρόμοιο με αυτό της παρακάτω εικόνας, από πολυμερές όπως το PVDF. Από αυτό το υλικό, κατασκευάστηκε σήμανση σε οδική αρτηρία. Το πλαίσιο, που κάμπτεται στην άλλη διεύθυνση, σαν δύο πρόβολοι, έχει ύψος 7 μέτρων (6 μέτρα το φορτηγό συν ένα μετρό εκατέρωθεν η πινακίδα. Και άνοιγμα 9 μέτρα (2 λωρίδες και κάτι).



Figure 6. Εικόνα από Ιστότοπο
«<https://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwi46qCx2KDjAhWSGewKHRUxAPMqjRx6BAgBEAU&url=http%3A%2F%2Fwww.argolidaportal.gr%2Fnews%2F30130%2Fellepsi-pinakidon-simansis-gia-nayplio-stin-ethnikiodo-athinon-korinthoy-patron&psig=AOvVaw0FQDVCfuRMzYzC3xD3dGVF&ust=1562515153348387>»

Τύποι πινακίδων που θα μπορούσαν να κατασκευασθούν από PVDF

Το πλαίσιο θα έχει υποστυλώματα διαστάσεων «40cm * 40cm» με ένα δοκάρι διαστάσεων «40cm * 60cm»

Η πινακίδα θα έχει εμβαδόν «2m * 6m» και το φορτίο του ανέμου θα είναι «1 $\frac{kN}{m^2}$ »

Το συνολικό φορτίο ίσο με «1 $\frac{kN}{m^2}$ * 2m * 6m = 12 kN» μοιράζεται στα δύο υποστυλώματα, σαν κατακόρυφο φορτίο στην άκρη προβόλου.

Σε αυτό το σημείο έχουμε να λύσουμε την περίπτωση 1.0.1 με φορτίο «6kN» από PVDF

$$Pol_{13} = \mu_{13} * 12 * \frac{P*(x-L)}{E*b_0*h_0^3}$$

- $P = 6kN$
- $E = 1.72 GPa$
- $b_0 = 0.4 m$
- $h_0 = 0.4 m$

$$\frac{Pol_{13}}{\mu_{13}} = 12 * \frac{6*(x-3.5)}{1.72*10^6*0.4*0.4^3}$$

Αν πάμε στην θέση μέγιστης ροπής « $x = 0$ »

$$\frac{Pol_{13}}{\mu_{13}} = 12 * \frac{6 * (3.5)}{1.72 * 10^6 * 0.4 * 0.4^3} = 5.723 * 10^{-3}$$

Ενώ το ηλεκτρικό φορτίο είναι:

$$\frac{Q_{13}}{\mu_{13} * 3.5} = -6 * \frac{6}{1.72 * 10^6 * 3.5^2} * \left(\frac{0.4}{3.5}\right)^{-3} = 1.145 * 10^{-3}$$

Τα αποτελέσματα αυτά, είναι αρκετά καλύτερα από αυτά της προηγούμενη περίπτωσης. Αυτό το ηλεκτρικό φορτίο, θα μπορούσε να μετατραπεί σε φωτισμό, για τις πινακίδες τις βραδινές ώρες.

6.3. Προσομοίωση με πεπερασμένα στοιχεία

Μία δοκιμή για την βελτιστοποίηση του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού, είναι η δημιουργία μικρό - ατελειών, στον φορέα. Έτσι έχουμε φορείς μορφής τραπεζίου, με διάφορες οπές, και με μικρό - ρωγμές. Για να δούμε αν μια κατάσταση είναι ευνοϊκή για το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, αρκεί να δούμε την κατανομή των τάσεων της. Αν αυτές μεταβάλλονται με μεγάλη ταχύτητα, τότε το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού ενδυναμώνεται.

Πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, είναι ικανό να παρουσιάσει αυτήν την κατανομή των τάσεων στον φορέα μας.

Στην δική μας περίπτωση χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων «Femap» με το Nastran». Αυτό το πρόγραμμα είναι αρκετά εύχρηστο, και με πολλές δυνατότητες, τόσο στην σχεδίαση, όσο και στην ανάλυση. Οι φορείς που χρησιμοποιήθηκαν σε ανάλυση μέσω πεπερασμένων στοιχείων, ήταν διάφοροι φορείς πρόβολοι, που εφελκύνταν. Μάλιστα, αυτοί είναι οι φορείς που χρησιμοποιήθηκαν στην πειραματική διαδικασία.

Οι διαστάσεις των φορέων ήταν « $10 * 3 * 0.5$ », και ο καθένας είχε την δική του ιδιαιτερότητα. Το αξονικό φορτίο ήταν ίσο με « $P = 100kN$ »

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης μέσω πεπερασμένων στοιχείων φαίνονται παρακάτω.

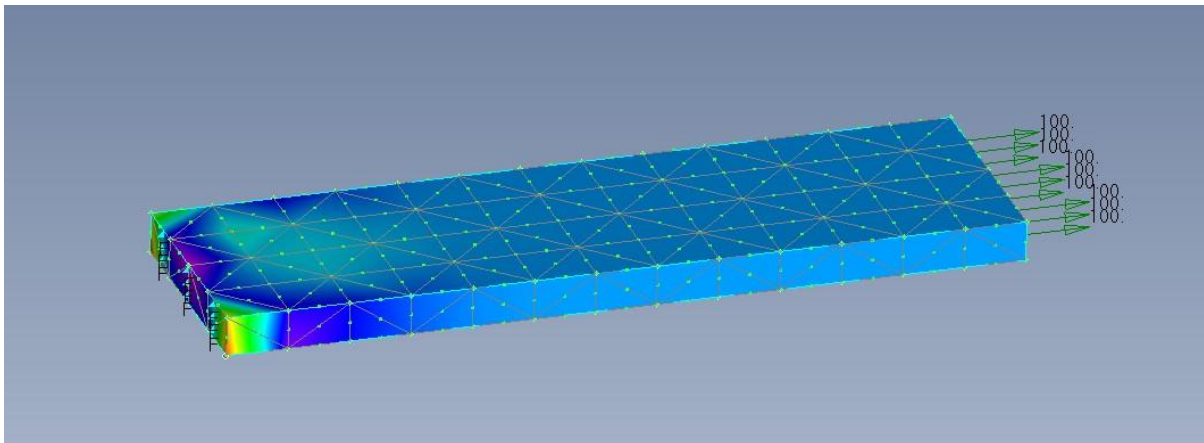


Figure 1. Φορέας προβόλου, με σταθερή διατομή, χωρίς καμία ιδιαιτερότητα. Η κατανομή των τάσεων είναι σταθερή.

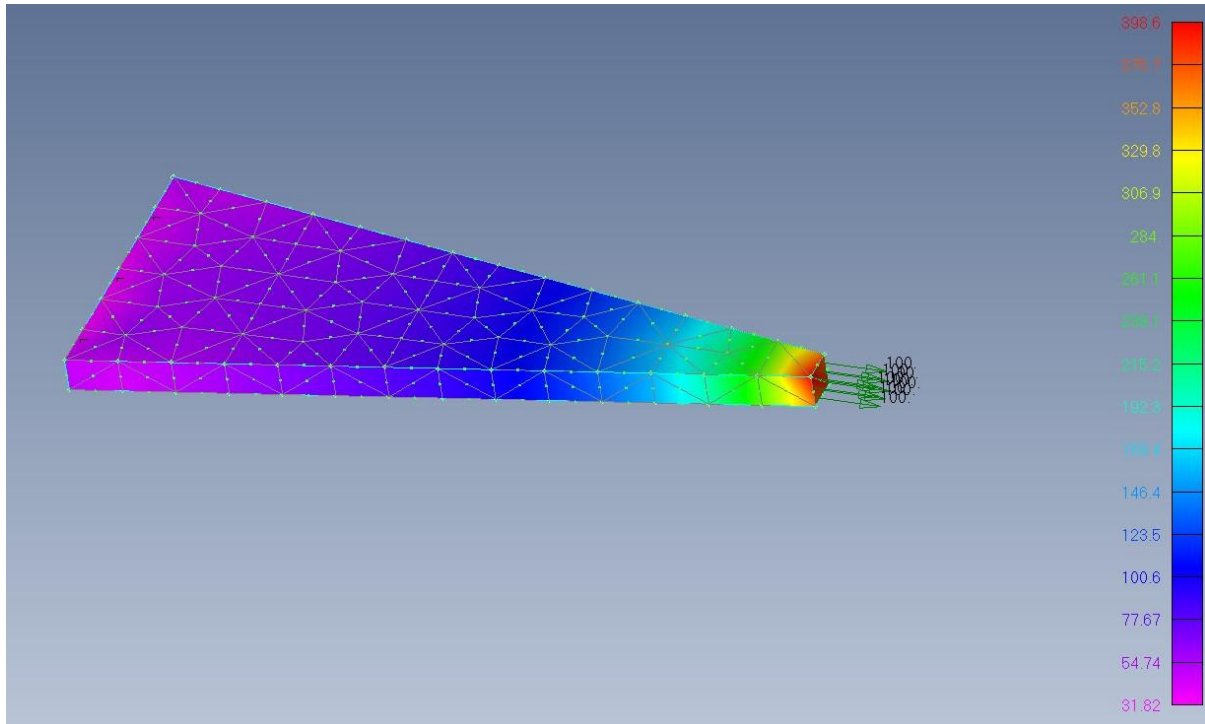


Figure 3. Πρόβολος μορφής τραπεζίου, μεγάλης βάσης ίση με 4 και μικρής ίσης με 0.5. Ο ρυθμός μεταβολής των τάσεων είναι φανερός και πιο έντονος προς την μικρή βάση. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει το φαινόμενο του φλεξεηλεκτρισμού.

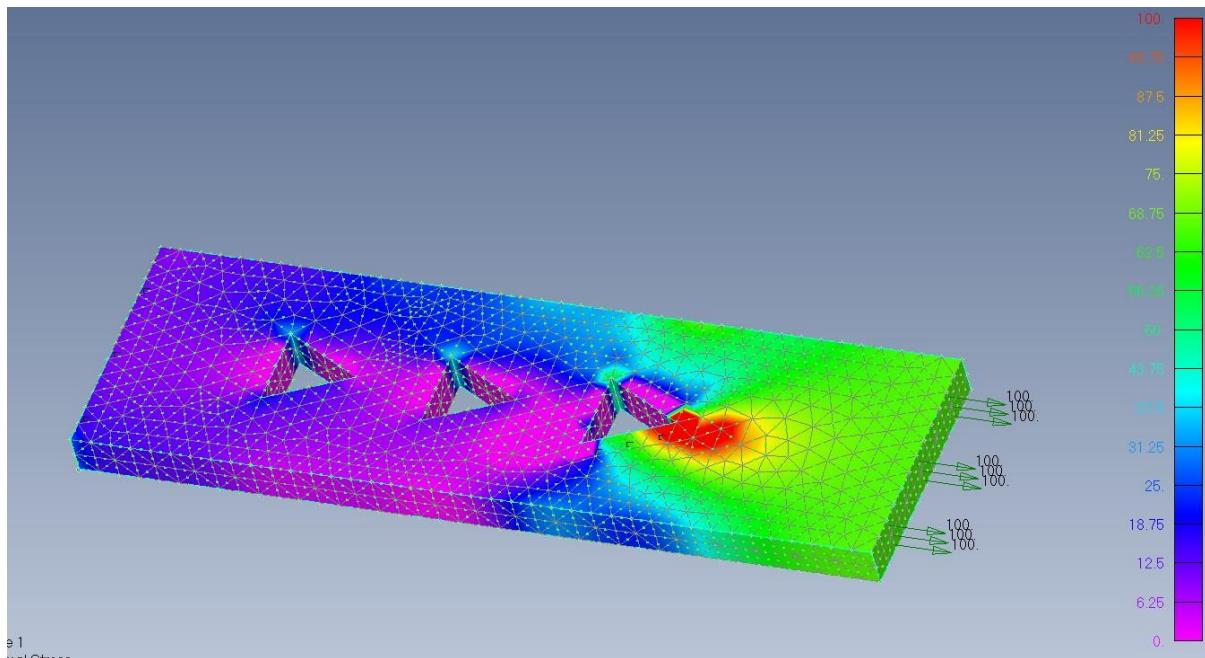


Figure 2. Πρόβολος σταθερής διατομής, με τρία ισοσκελή τρίγωνα, βάσεως 1. Το «stain gradient» είναι αρκετά πιο έντονο, αρκεί να βρεθεί το σωστό σημείο κοντά στην ρωγμή. Το φαινόμενου του φλεξεηλεκτρισμού υπάρχει και σε αυτήν την περίπτωση. Σημαντικό είναι να τονιστεί ότι σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει ιδιαίτερη ευαισθησία στην γεωμετρία και στην φόρτιση.

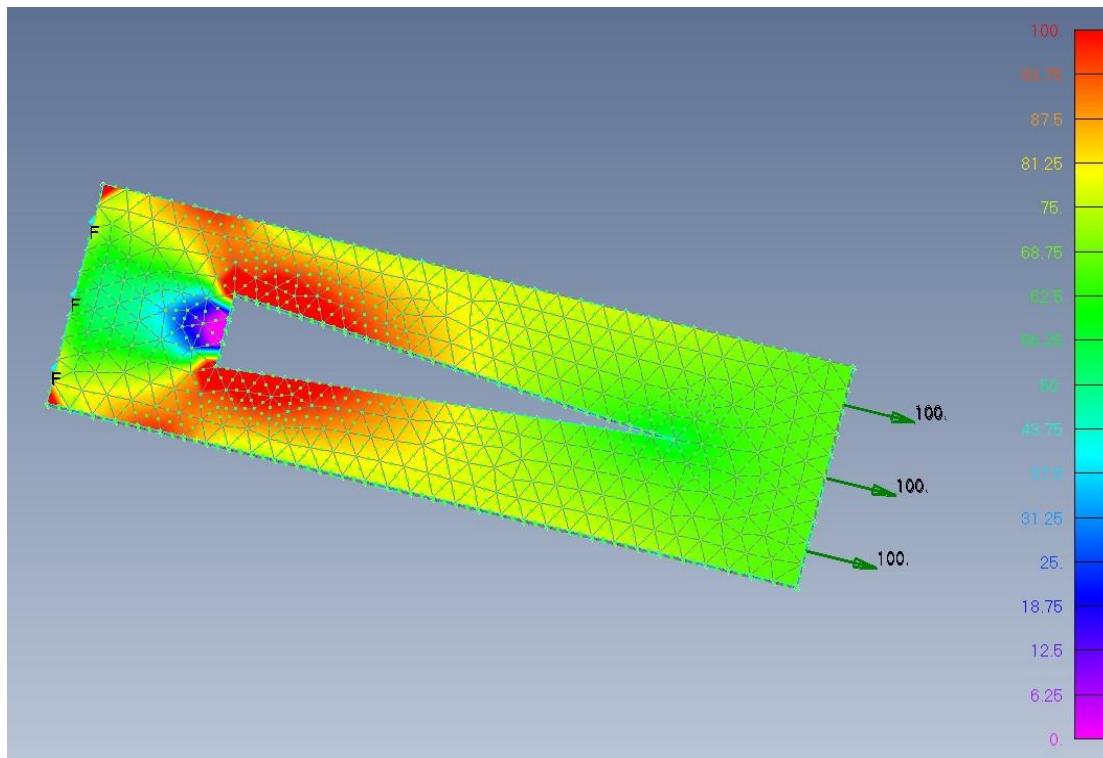


Figure 4. Φορέας με μία μεγάλη τριγωνική οπή στο κέντρο του. Αυτή είναι ισοσκελής με βάση 1 μονάδα και ύψος 6 μονάδες. Και σε αυτήν την περίπτωση το «strain gradient» είναι ισχυρό και το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, καλύτερο.

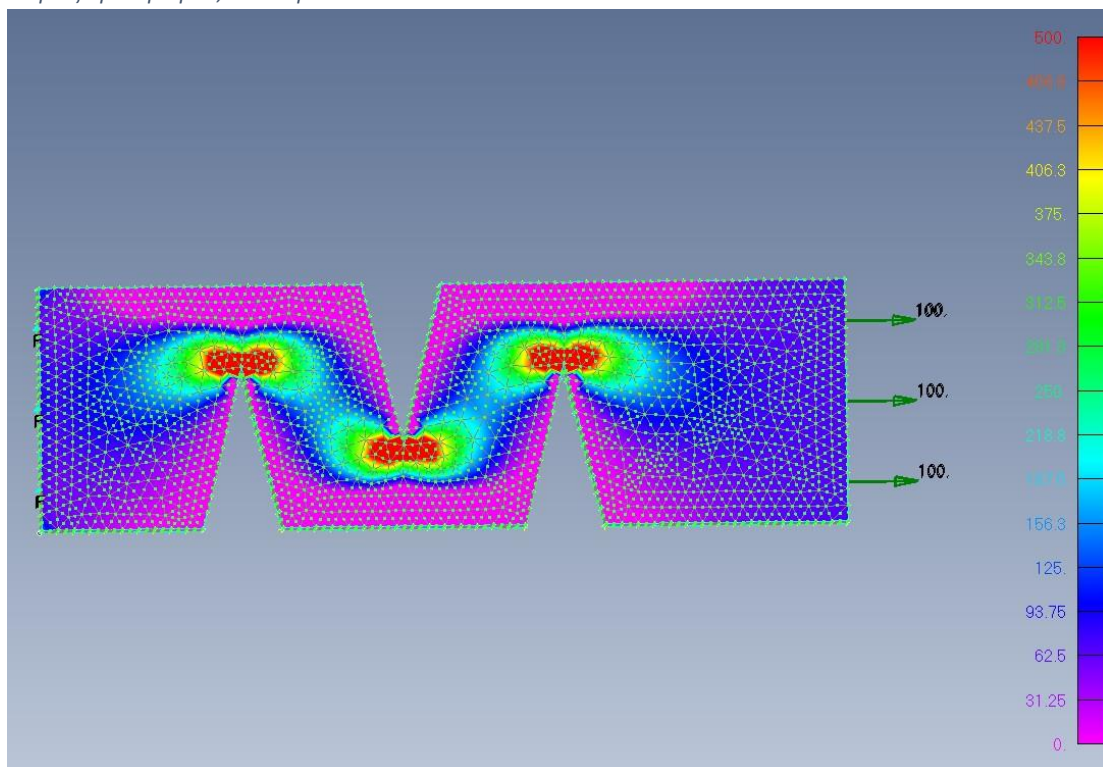


Figure 5. Πρόβολος με μικρορωγμές. Παρόλο που η κατανομή των τάσεων έχει έναν ρυθμό μεταβολής, αυτός είναι περιέργως, διότι δημιουργείται ενός είδους ροή των τάσεων στην δοκό. Το φαινόμενο υπάρχει, αλλά δεν είναι τόσο ισχυρό όπως με τις άλλες περιπτώσεις.

7. Πειραματική Διαδικασία

Η εξακρίβωση, ότι το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού υπάρχει, δε θα μπορούσε για κανένα λόγο, να γίνει με άλλον τρόπο πέρα από μία πειραματική διαδικασία. Το εργαστήριο, στο οποίο η πρόσβαση, ήταν διαθέσιμη, διέθετε ένα μηχάνημα θλίψης και εφελκυσμού. «τύπου Instron 1121», μέγιστου φορτίου 10 kN, και μεγάλη γκάμα επιβολής ταχύτητας αρπαγών. Και έναν παλμογράφο

τύπου «SIGLENT – SDS 1072CNL» Δοκίμια αγοράστηκαν από την εταιρία «CS Hyde Company», film «PVDF» πάχους « $d = 0.0254mm$ » και « $0.508mm$ ». Τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού, και τα διηλεκτρικά χαρακτηριστικά, ειπώθηκαν στην εισαγωγή αυτής της εργασίας. Από το φιλμ πολυμερούς, επιλέχθηκαν κομμάτια, τα οποία πήραν μορφή, που θεωρήθηκε ότι θα δώσει μεγαλύτερα «strain gradient», επομένως ακολουθήθηκε μία διαδικασία χαρτοκοπτικής, με σκοπό τα δοκίμια να αποκτήσουν μορφή, «tapered beam», δοκού με τριγωνικές σπές, δοκού με μία μεγάλη τριγωνική ρωγμή («double tapered»), και δοκού με μικρορωγμές, όπως φαίνεται παρακάτω.



Figure 1. Εικόνα από την μεταπτυχιακή εργασία του «Γ. Δ. Γεωργούση» με τίτλο «Μετρήσεις Ηλεκτρικής Αγωγιμότητας για Αίσθηση Φθοράς σε Σύνθετα Υλικά» την χρονιά 2011.

Η μηχανή «Instron 1121», που χρησιμοποιήθηκε για την πειραματική.

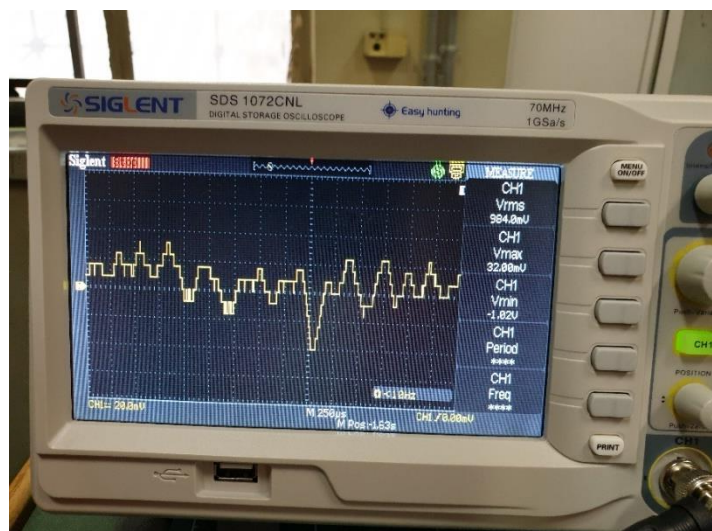


Figure 2. Ο παλμογράφος «Siglent» που χρησιμοποιήθηκε για την εξακρίβωση ηλεκτρικού σήματος, τάσης δηλαδή.

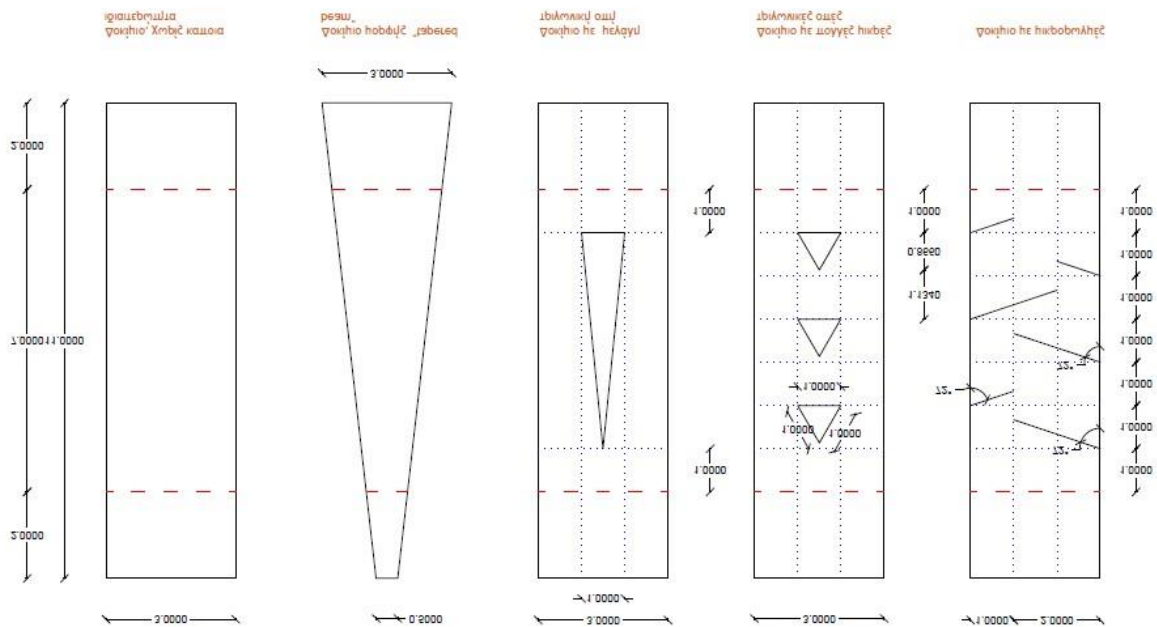


Figure 3. Τα είδη των δοκιμών που χρησιμοποιήθηκαν.

Εργαστηριακή προσπάθεια έγινε τρεις φορές, όπου κάθε μία γινόταν με περισσότερη οργάνωση, και με πραγματοποίηση λύσεων προβλημάτων που προέκυψαν στην προηγούμενη.

Η πρώτη προσπάθεια ήταν αρκετά απροετοίμαστη, και έγινε, κυρίως, για έλεγχο των υλικών. Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν περισσότερο τυχαία, και περισσότερη σημασία δόθηκε στον παλμογράφο. Τα δοκίμια καταπονθήθηκαν αρχικά σε στατική φόρτιση, μετά σε κύκλους δυναμικής φόρτισης και τέλος σε θραύση. Σε αυτήν την επιχείρηση έγινε και δοκιμή σε κάμψη, η οποία όμως δεν πολυσυζητήθηκε, ούτε αναλύθηκε περισσότερο, σε πειραματική διαδικασία.

Περιληπτικά, με την βοήθεια των Ε. Κοντού και Γ. Γεωργούση από αυτήν την πρώτη πειραματική δοκιμή, που ήταν τελείως δοκιμαστική, η εκθεση έχει περιληπτικά ως εξής:

«Στην δοκιμή εφελκυσμού με την μηχανή τύπου «Instron 1121», μέγιστου φορτίου $10kN$, και μεγάλη γκάμα επιβολής ταχύτητας φόρτισης, όταν αυτή η ταχύτητα ήταν ίση με $150mm/min$ με φορτίο να κυμαίνεται μεταξύ των $10N \rightarrow 250N$, υπήρχε ελάχιστο σήμα, το οποίο ενισχύθηκε την στιγμή της θραύσης. Οι αρχικές διαστάσεις του δοκιμίου ήταν ελεύθερο μήκος: $67mm$, πλάτος: $10mm$ και $17mm$ (Tapered beam), ο θόρυβος ήταν μεταξύ των $88mV$ και $30mV$, αλλά το σήμα ήταν περίπου $86mV$. Η διαδικασία επαναλήφθηκε, αλλά το μέγιστο ήταν στην θραύση σε κάθε περίπτωση.

Σε μηχανή, ικανή να θέσει το δοκίμιο σε κάμψη το σήμα που βρέθηκε ήταν $86mV$ »

Από αυτήν την πρώτη δοκιμή, μείναμε μεν ευχαριστημένοι, γιατί εντοπίσαμε σήμα, αλλά ήταν μικρό. Υπήρχε, μήπως ήταν θόρυβος; Θέλοντας να ενισχύσουμε κι άλλο το σήμα, θεωρήθηκε ότι έπρεπε να σχηματίσουμε μορφές δοκού που να έχουν μεγαλύτερα strain gradient. Και στην συνέχεια, ξαναεπισκευτήκαμε το εργαστήριο.

Σε αυτήν την επίσκεψη, ήρθαμε πιο οργανωμένοι, θέλαμε να δούμε μεγαλύτερο σήμα, έτσι δοκιμάσαμε μεγαλύτερες κλίσεις στο «Tapered beam», καθώς και άλλους τρόπους μεγιστοποίησης του φορτίου. Παρόλο που ήμασταν πιο οργανωμένοι, αυτή η προσπάθεια δεν ήταν πάρα μία δοκιμή, έτσι ώστε να εξακριβώσουμε κι' άλλα προβλήματα.

Αφού δοκιμάσαμε, αρκετά δοκίμια, με τον ίδιο τρόπο, πρώτα στατικά, μετά σε κύκλους και τέλος σε απότομη θραύση, πήραμε κάποια πολύ ενδιαφέροντα σήματα που φαίνονται παρακάτω, αλλά από ένα σημείο και μετά, δεν εμφανιζόταν τίποτα, παρά μόνο θόρυβος, συχνότητας 50 herz όση και η συχνότητα εναλλασσόμενου ρεύματός του παρόχου ηλεκτρικής ενέργειας. Μπορεί να είχε κάτι λάθος η γείωση, μπορεί λόγω υγρασίας να βραχυκύκλωσε το περιβάλλον, μπορεί να συνέβησαν διάφορα πράγματα. Σε κάθε περίπτωση ήταν ένα πρόβλημα, που χρειαζόταν αντιμετώπιση.

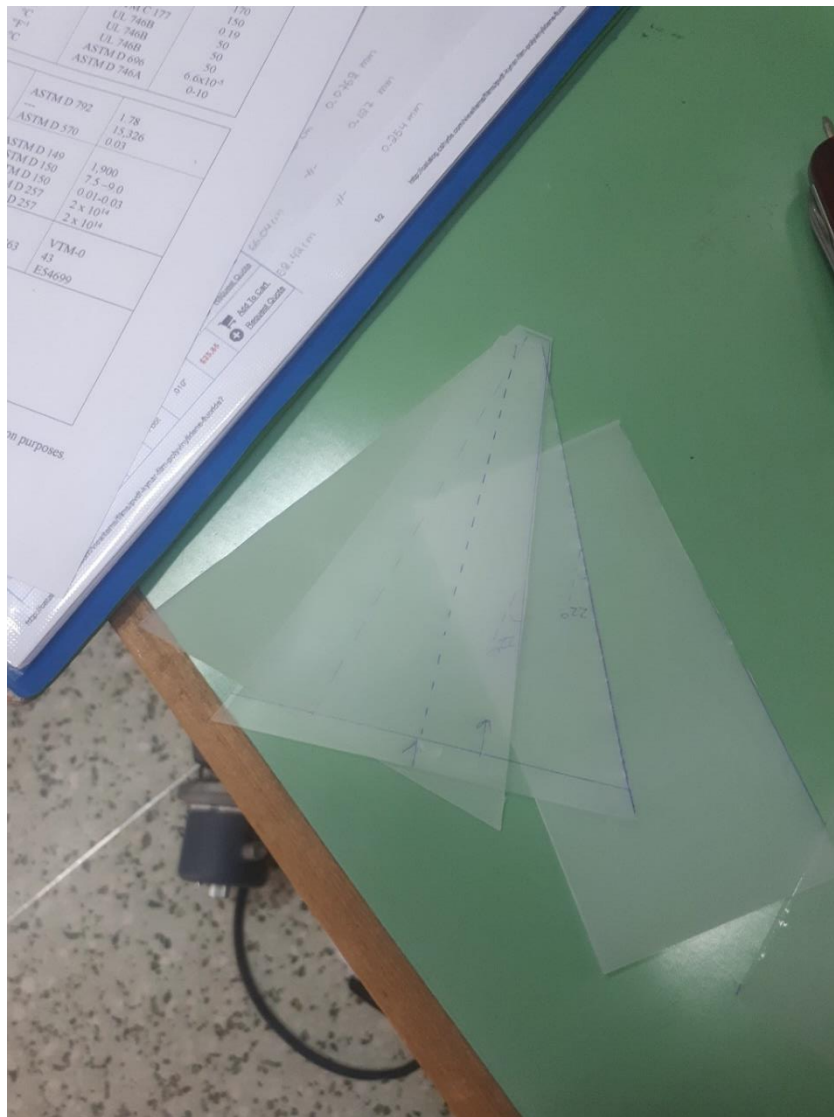


Figure 4. Τα δοκίμια, που αρχικά προετοιμάσαμε να ελέγξουμε στο φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, με τρομερά μεγάλες κλίσεις, αλλά δυστυχώς δεν χώραγαν μέσα στις αρπάγες της μηχανής εφελκυσμού.

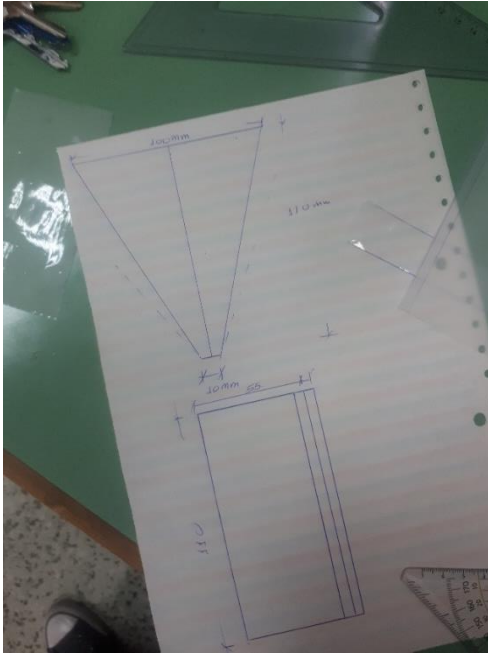


Figure 5. Το μοντέλο σχεδιασμού των δοκιμών. Τελικά, ήταν υπερβολικά μεγάλη η μία διάσταση.



Figure 6. Η δοκιμή εφελκυσμού ενός «tapered» beam μικρού πάχους.

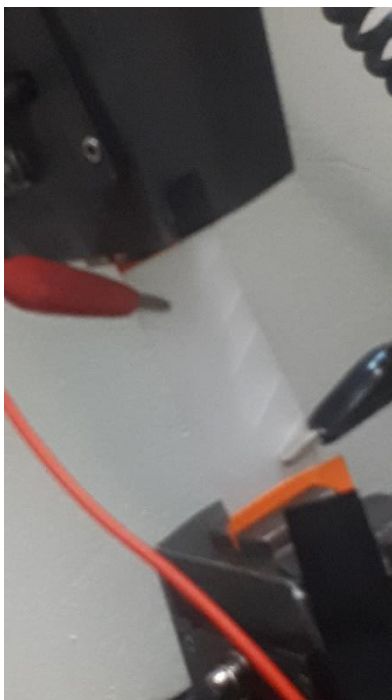


Figure 7. Δοκίμιο με μικρορωγμές.



Figure 8. Μέτρηση σε δοκίμιο, στην στιγμή της θραύσης μεγάλου πάχους. Σε αυτήν την δοκιμή προέκυψε το παρακάτω σήμα.



Figure 9. Το ηλεκτρικό σήμα, που παρουσιάστηκε στην παραπάνω δοκιμή, είναι εντυπωσιακό και τεράστιο. Κατά απόλυτη τιμή είναι 1Volt αλλά λαμβάνοντας υπόψη τον υψηλό θόρυβο, μπορεί να φτάνει και το 1.5 Volts.

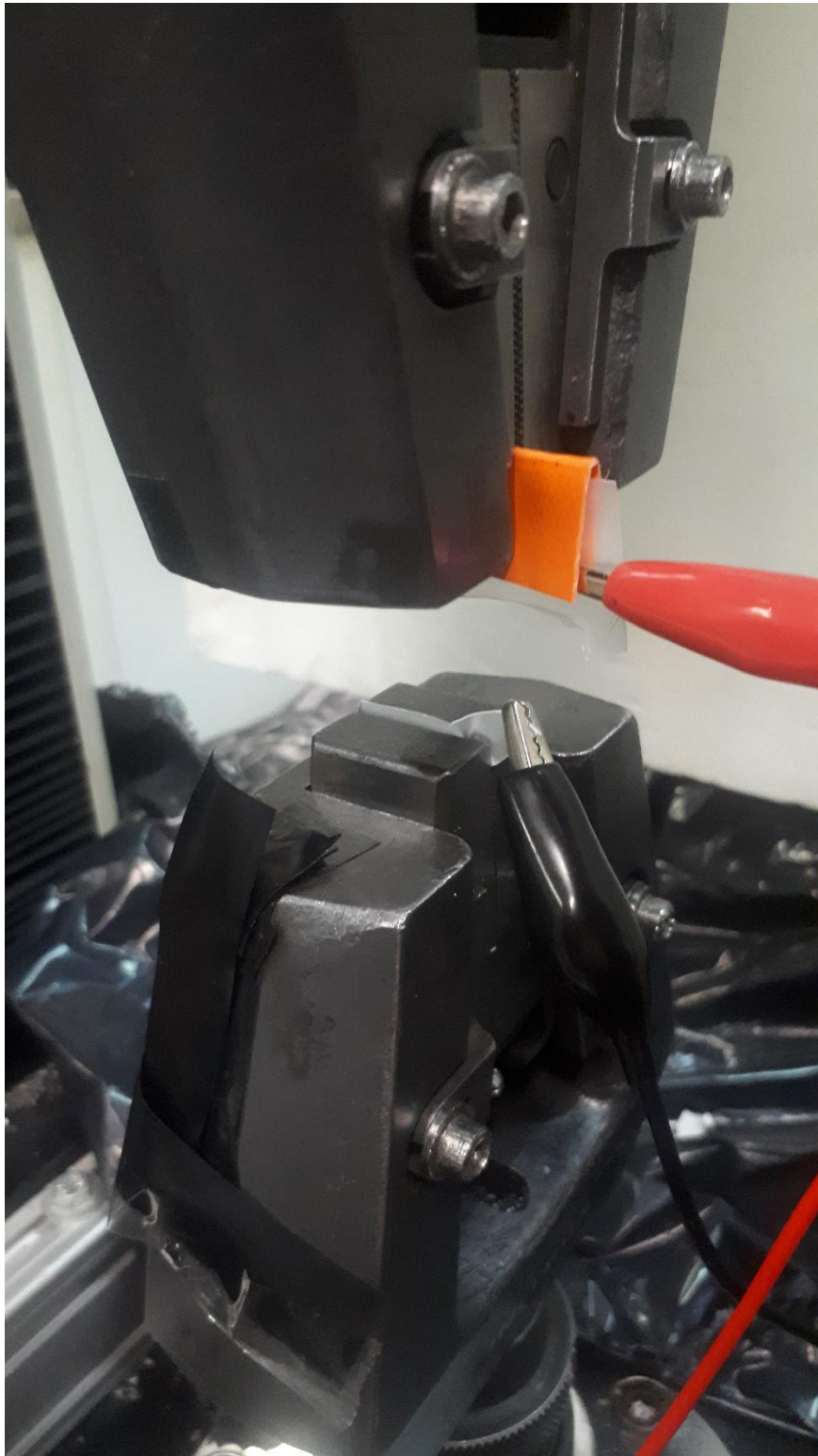


Figure 10. Το δοκίμιο μετά την θραύση.



Figure 11. Η μηχανή «Instron 1121» σε κοντινό πλάνο.

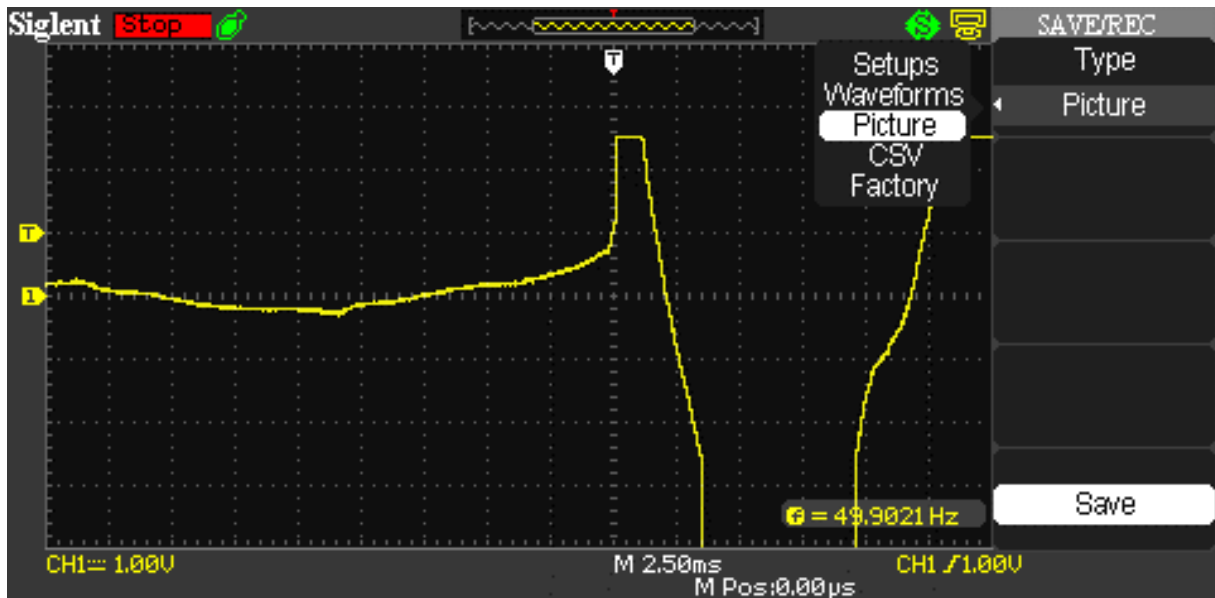


Figure 12. Ενδιαφέρον σήμα που λήφθηκε, στην 2η πειραματική διαδικασία.

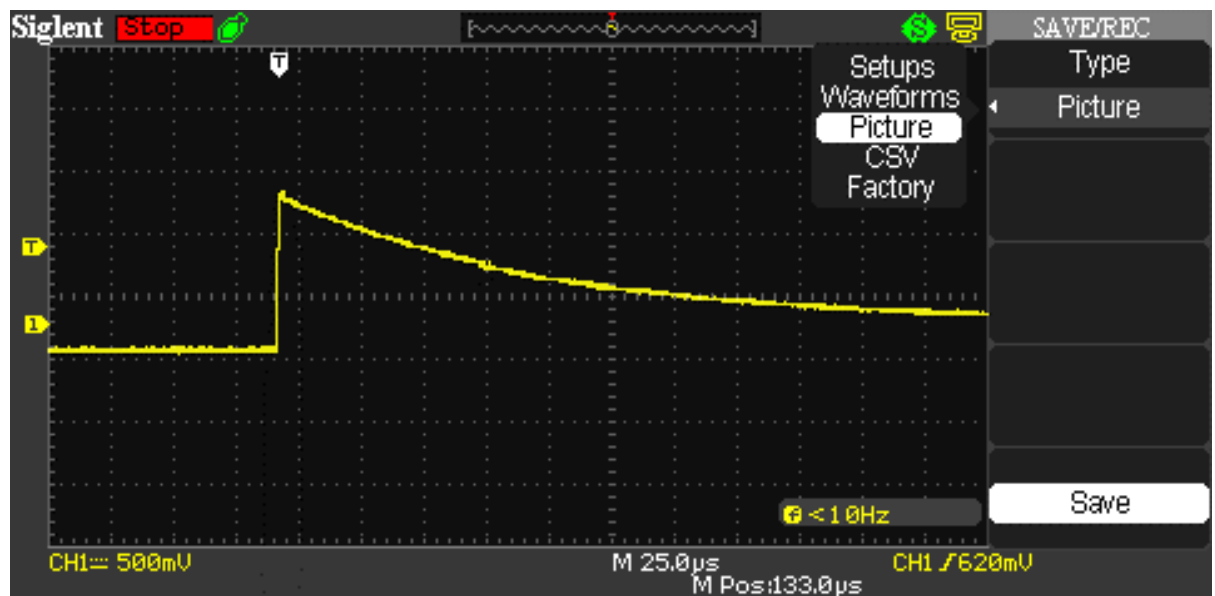


Figure 13. Το σήμα που εμφανίστηκε πριν, με την τριάδα, πιο απομονωμένο (ένα από τα τρία «peaks»).

Τα προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν στην τρίτη επιχείρηση μέτρησης του φαινομένου, αφορούσαν κυρίως το φαινόμενο του θορύβου. Μετά από επικοινωνία με τον ειδικό Ξ. Λιγνό, έγινε προσπάθεια βελτιστοποίησης των ηλεκτροδίων μέτρησης. Προτάθηκε δηλαδή χρήση «κλιπς», και καλώδια με «μπλεντάζ.» Επίσης προτάθηκε επανάληψη της δοκιμής, σε ώρα με λιγότερη αιχμή στο δίκτυο του εργαστηρίου, δηλαδή του κτηρίου του εργαστηρίου. Η προμήθεια του ηλεκτρολογικού εξοπλισμού έγινε από το κατάστημα «Φανός», και η συναρμολόγηση τους έγινε με χρήση συγκόλλησης. Μαζί με τα «κλιπς» προμηθεύτηκαν και μερικοί «κροκόδειλοι», για περιπτώσεις που τα πρώτα δεν μπορούσαν να τοποθετηθούν. Στην συνέχεια, χρειάστηκε να ξαναφτιάξουμε τα δοκίμια, αυτήν την φορά πιο οργανωμένα, να ακολουθούν τελείως τα παραπάνω πρότυπα (σκαρίφημα). Επιλέχτηκε μέρα του καλοκαιριού, μετά την εξεταστική, που το κτήριο είχε λίγο κόσμο, και το περιβάλλον ήταν ιδιαίτερα ξηρό, και επαναλήφθηκαν οι δοκιμές.



Figure 15. Συγκόλληση κροκόδειλου σε καλώδιο «1 και μπλεντάζ».



Figure 14. Η επεξεργασία «κλιπ» και η ένωση σε καλώδιο «2 και μπλεντάζ» Το «μπλεντάζ» έμεινε στον αέρα.



Figure 16. Η συγκόλληση καλωδίου με «κλιπ».

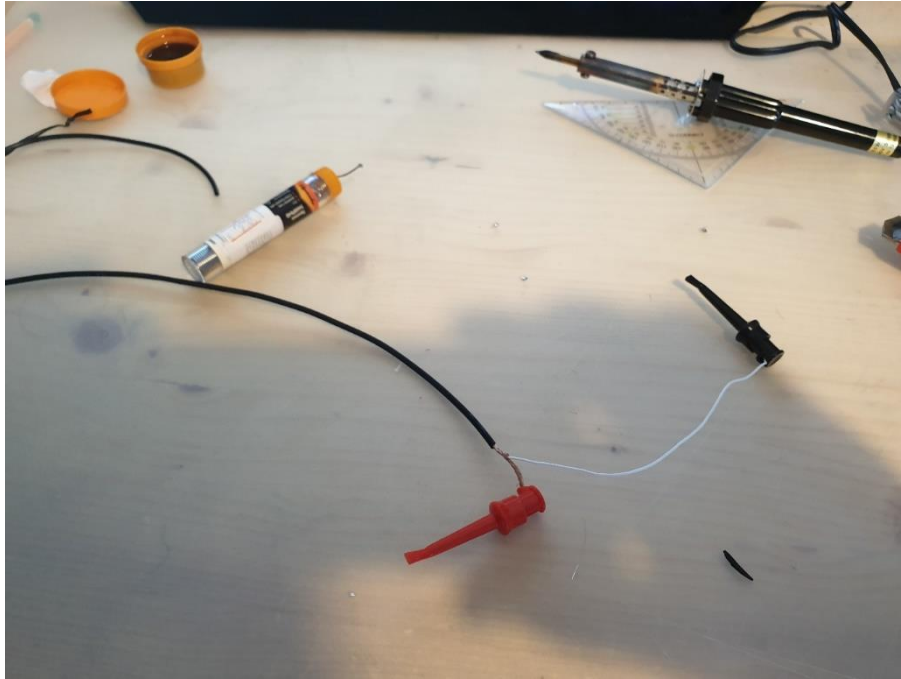


Figure 17. Ο εξοπλισμός, που χρειάστηκε για την κατασκευή των ηλεκτροδίων, ένα κοπίδι, ένας συγκολλητήρας, και σύρμα συγκόλλησης.

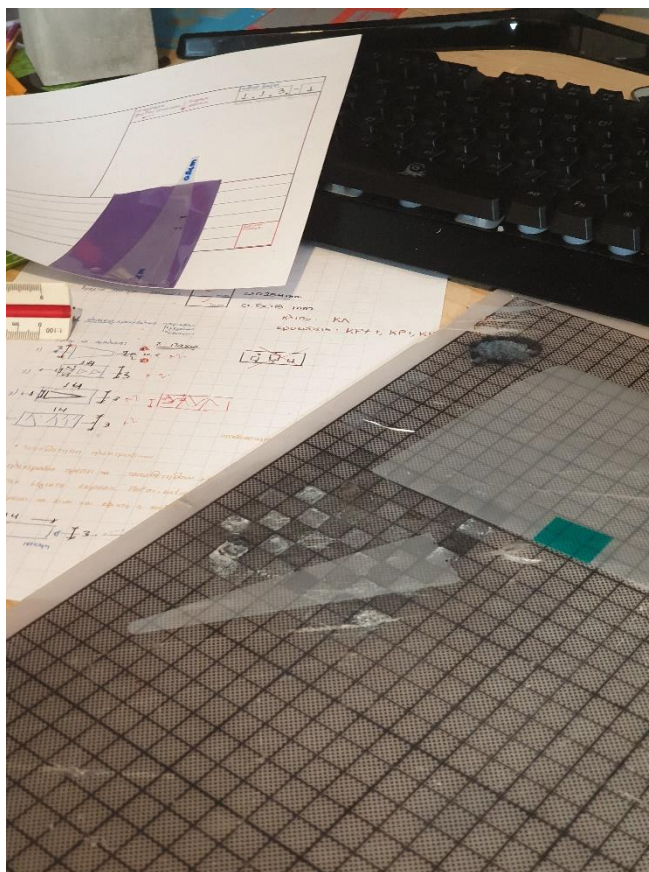


Figure 18. Η μορφοποίηση των δοκιμών έγινε με χρήση κοπιδιού και κόφτη τραπέζης, σε πάγκο κοπής, ακολουθώντας κατά γράμμα, τις παραδοχές.

Έγιναν δοκιμές, 16 στο πλήθος, των δοκιμίων. Η διαδικασία ήταν ως εξής: αρχικά φορτίζουμε στατικά, μετά εφαρμόζουμε κύκλους φόρτισης, και στην συνέχεια προχωράμε σε θραύση του δοκιμίου. Τα δείγματα που δοκιμάστηκαν στις παραπάνω φορτίσεις, ήταν διαφορετικού πάχους. Για την ακρίβεια, δοκιμάστηκαν δύο λεπτά και δύο χοντρά δοκίμια για κάθε γεωμετρία. Στην περίπτωση δοκού μορφής « tapered beam » δοκιμάστηκε μόνο ένα πάχος, αφού τα αποτελέσματα, ήταν υπερικανοποιητικά. Πολλές περιπτώσεις δεν έδωσαν σήμα, αλλά αρκετές έδωσαν.

1. Το πρώτο λεπτό φιλμ μορφής « tapered beam ».
Στις μεγάλες παραμορφώσεις, λίγο πριν την θραύση, έδωσε ένα πάρα πολύ ωραίο σήμα. Τα ηλεκτρόδια είχαν πιαστεί με κλιπς στην εξωτερική παριά του φιλμ, από την ίδια πλευρά, αρκετά κοντά μεταξύ τους. Το σήμα ήταν της τάξης των $60 mV$
2. Το δεύτερο δοκίμιο λεπτού φιλμ με τριγωνικές οπές.
Έδωσε σήμα, γύρω στα $30 mV$, όταν πήγε να θραυστεί. Τα ηλεκτρόδια είχαν πιαστεί με κλιπς πάνω και κάτω της ρωγμής.
3. Το δεύτερο δοκίμιο λεπτού φιλμ με μεγάλη τριγωνική οπή.
Έδωσε σήμα πριν σπάσει, αλλά τίποτα από ηλεκτρικό σήμα να την προμηνύει. Τα κλιπς πάλι είχαν πιαστεί στο ίδιο σημείο, πάνω και κάτω της ρωγμής.
4. Το τρίτο δοκίμιο μορφής « tapered beam », ήταν παχύ.
Έδωσε πολύ ωραίο σήμα, κατά την διάρκεια της φόρτισης, το οποίο ήταν συνεχόμενο, και επαναλαμβανόμενο, και αύξανε με την αύξηση της δύναμής του μηχανήματος.
5. Το τρίτο δοκίμιο με τριγωνικές οπές, το οποίο ήταν και παχύ.
Έδωσε ένα μικρό σήμα, το οποίο θα μπορούσε να είναι και θόρυβος, καθώς φορτιζότανε με κύκλους φόρτισης.

Γεωμετρία που δεν έδωσε σήμα ήταν το δοκίμιο με τις μικρορωγμές. Γι' αυτό μπορεί να ευθύνεται ότι οι εκατέρωθεν μικρορωγμές εξουδετέρωσαν το σήμα. Ή σε κάθε περίπτωση το « strain gradient » να μην είναι τόσο μεγάλο όσο φάνταζε.

Η φόρτιση που παραδόξως δεν έδωσε σήμα, ήταν ο λυγισμός, ο οποίος ήταν πολλά υποσχόμενος. Σε αυτόν, πήραμε την περίπτωση γεωμετρίας συμβατικού δοκιμίου (1° σκαρίφημα) και το υποβάλαμε σε θλίψη, κατά την διαμήκη διεύθυνση. Αυτό λύγισε. Τα κλιπς ήταν συνδεδεμένα με την πάνω και την κάτω πλευρά του φιλμ (κατά την λεπτή πλευρά, στην οποία και λύγισε), αλλά σήμα δεν βρέθηκε πουθενά. Ίσως ήταν πολύ χοντρό το φιλμ.

Στην συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα δύναμης παραμόρφωσης και ηλεκτρικής τάσης, των δοκιμίων που έδωσαν σήμα, εξαιτίας του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

Σημαντικό είναι, να αποκαλύψουμε, ότι ο παλμογράφος, δεν ήταν ιδιαίτερης ποιότητας, αρκετά οικονομικός, αλλά καλής κατασκευής. Ο θόρυβος ήταν σε κάθε περίπτωση απαγορευτικός, αλλά αισθητά μειωμένος σε σχέση με την δεύτερη δοκιμή. Μια $4^{\text{η}}$ επανάληψη θα ήταν χρήσιμη, υπό την προϋπόθεση πιο καλού ηλεκτρομετρικού εξοπλισμού (« Lock in Amplifier »), και βελτιωμένης μόνωσης.

Σε αυτό το σημείο, ευχαριστώ πάρα πολύ, τον κ. Γεώργιο Δ. Γεωργούση, για την πολύτιμη, συνεισφορά του στην πειραματική διαδικασία, και την πολύτιμη συμβουλευτική.

1.

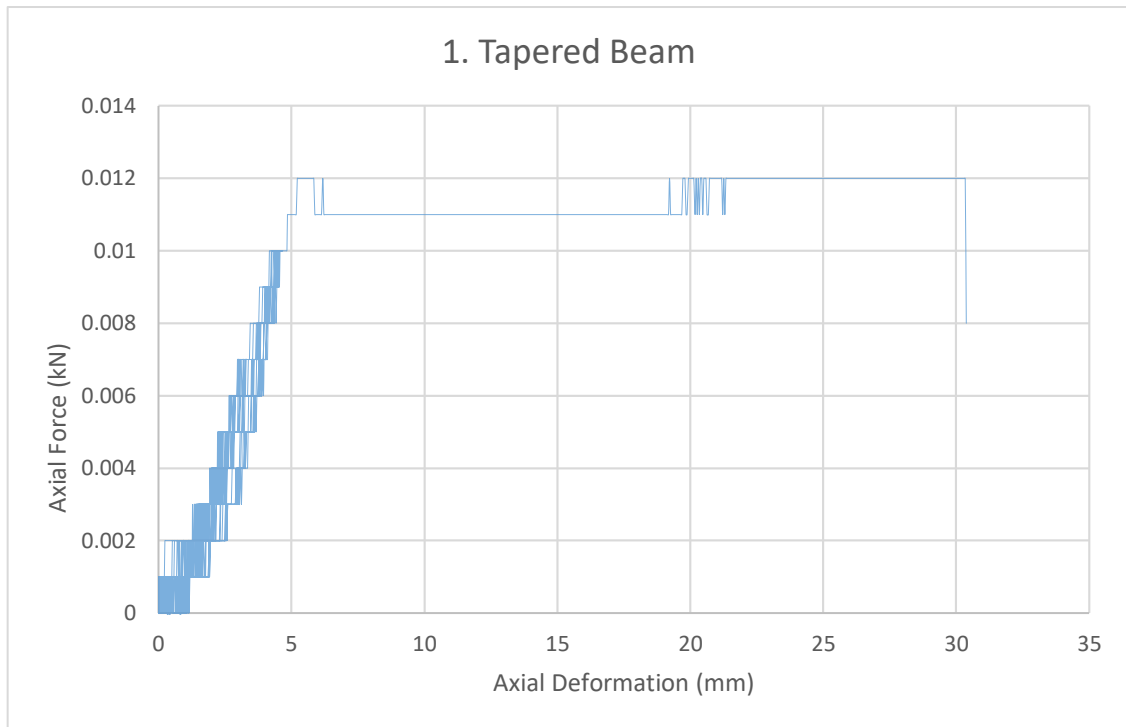


Figure 19. Διάγραμμα Δύναμης-Παραμόρφωσης στην περίπτωση 1.

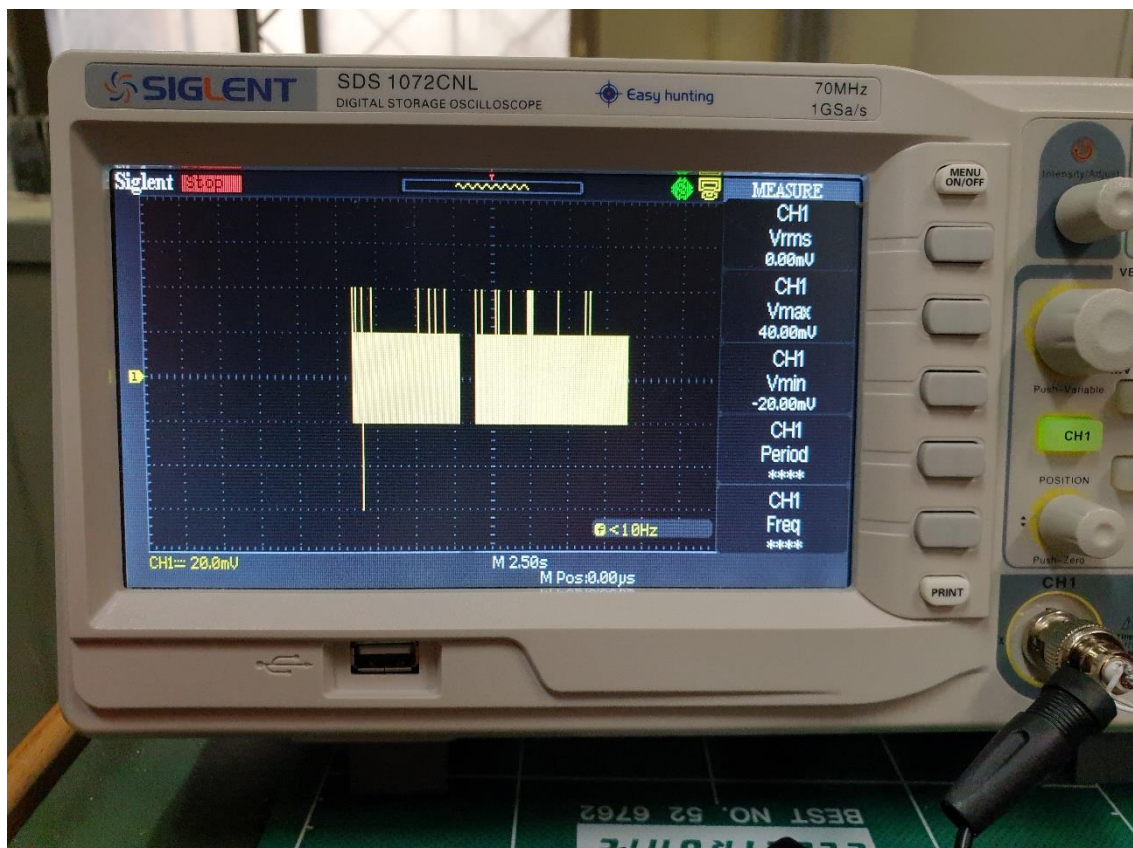


Figure 20. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 1.

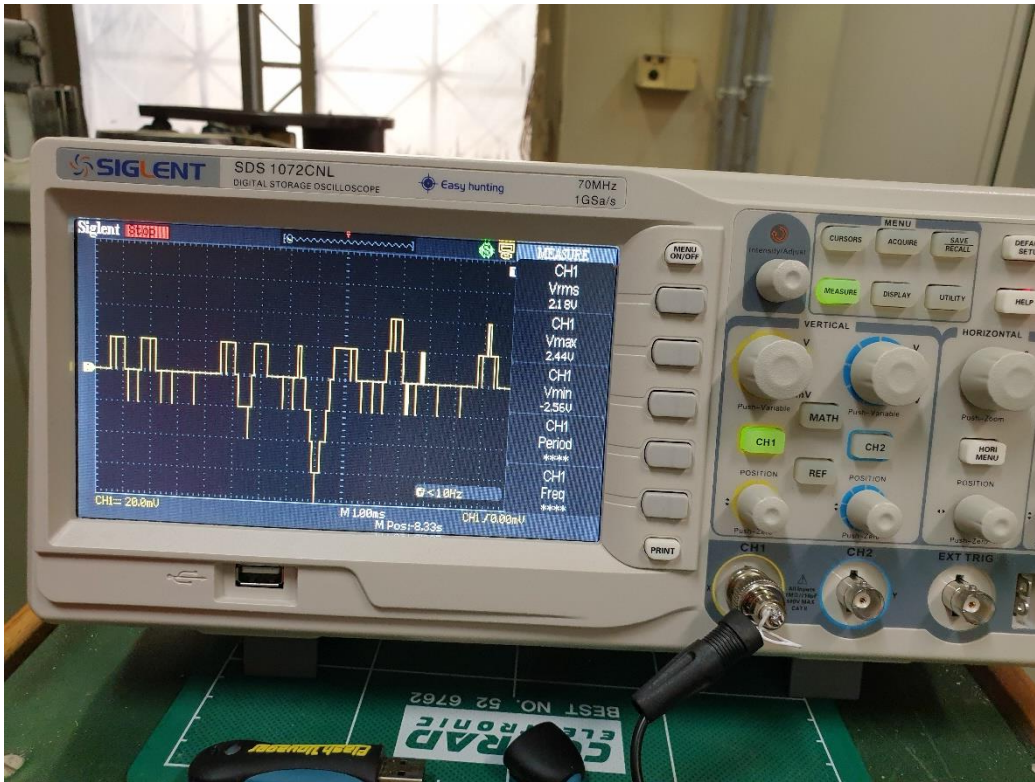


Figure 21. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 1. Αυτήν την φορά με καλύτερη ανάλυση.

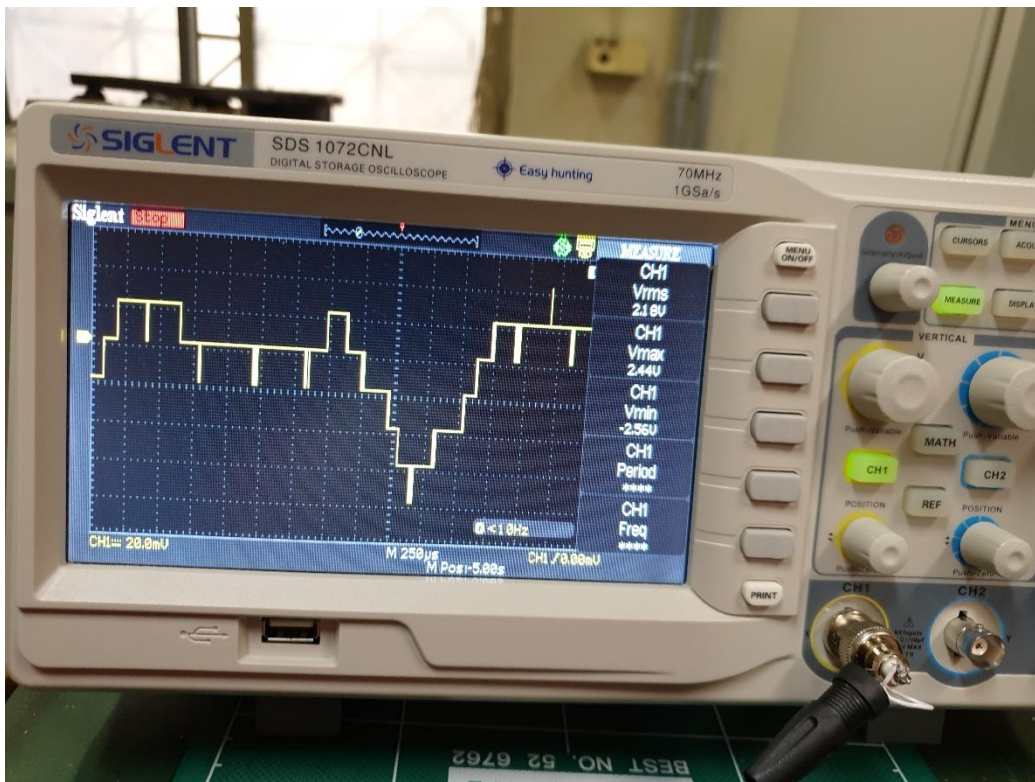


Figure 22. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 1. Αυτήν την φορά με ακόμα καλύτερη ανάλυση.

2.

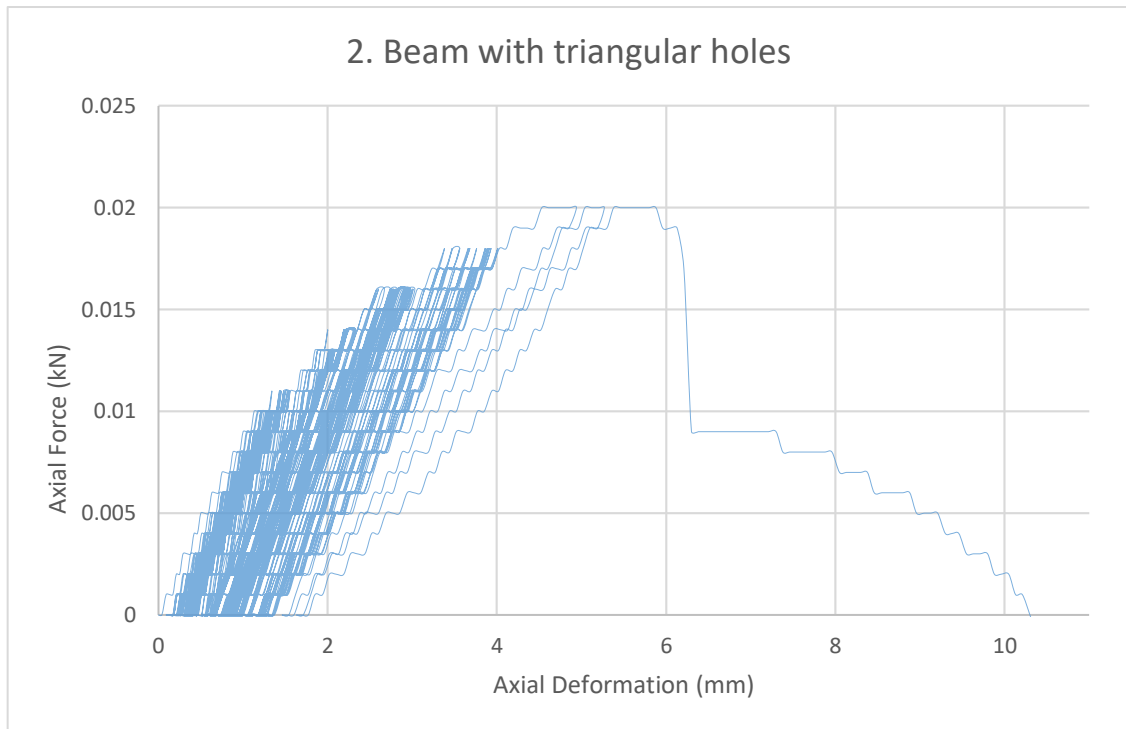


Figure 23. Διάγραμμα Δύναμης-Παραμόρφωσης στην περίπτωση 2.



Figure 24. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 2.

3.

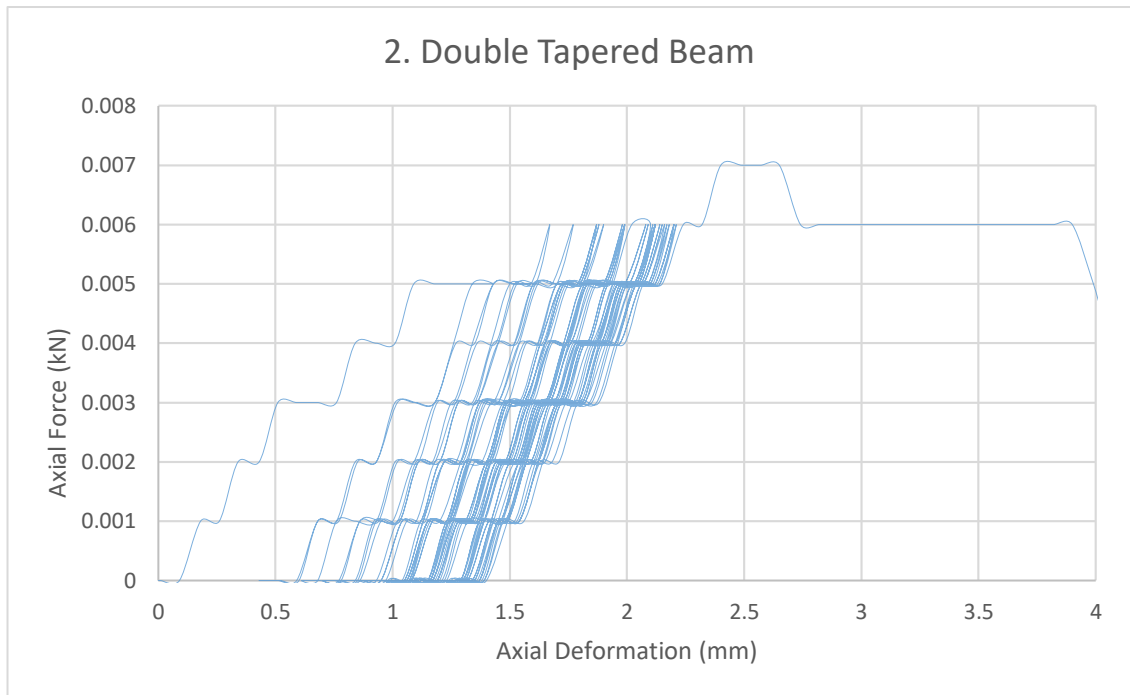


Figure 25. Διάγραμμα Δύναμης-Παραμόρφωσης στην περίπτωση 3.

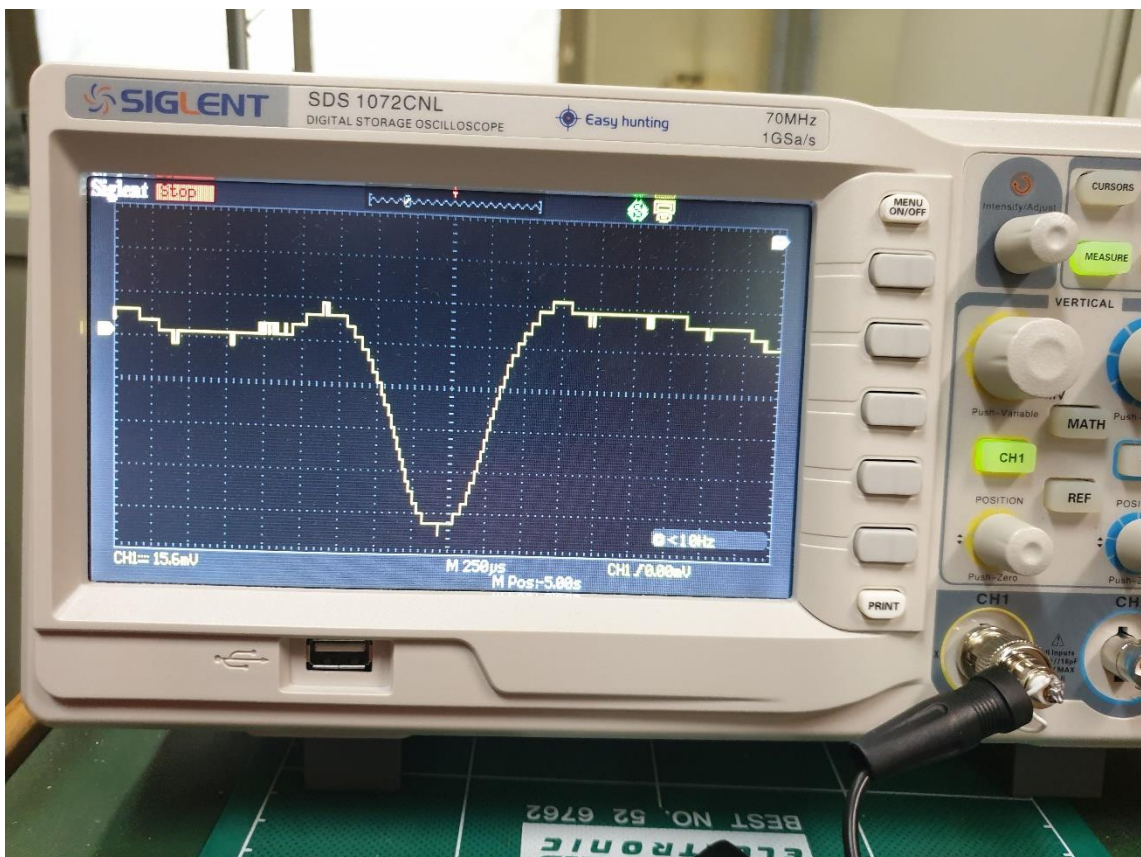


Figure 26. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 3.

4.

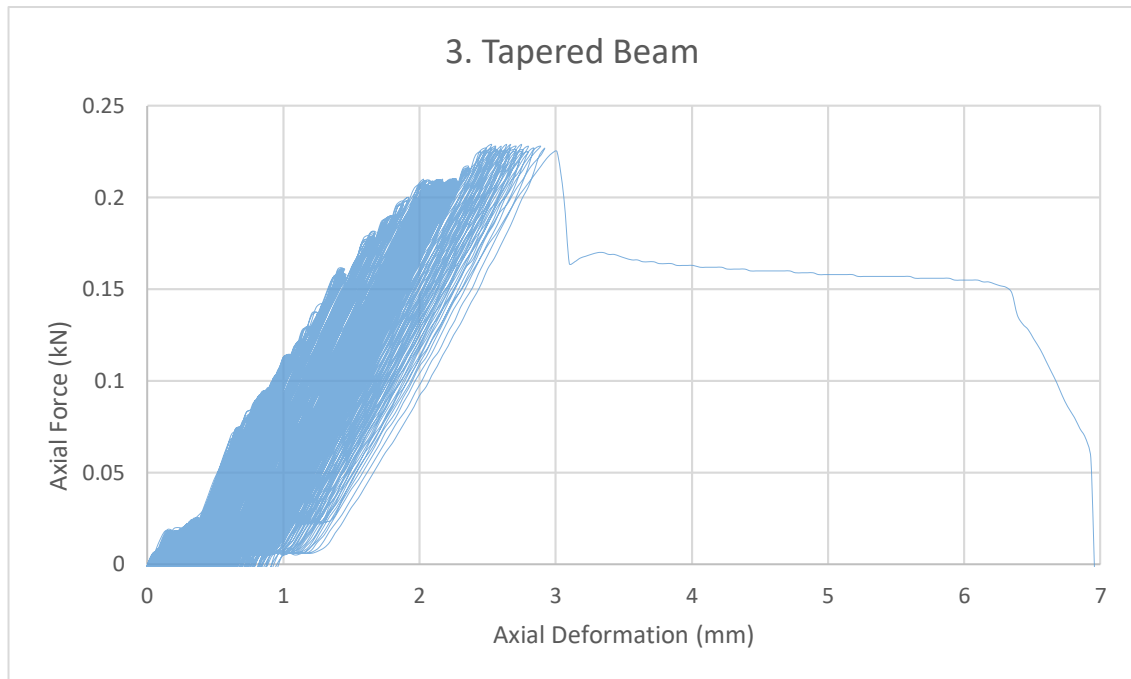


Figure 27. Διάγραμμα Δύναμης-Παραμόρφωσης στην περίπτωση 4.

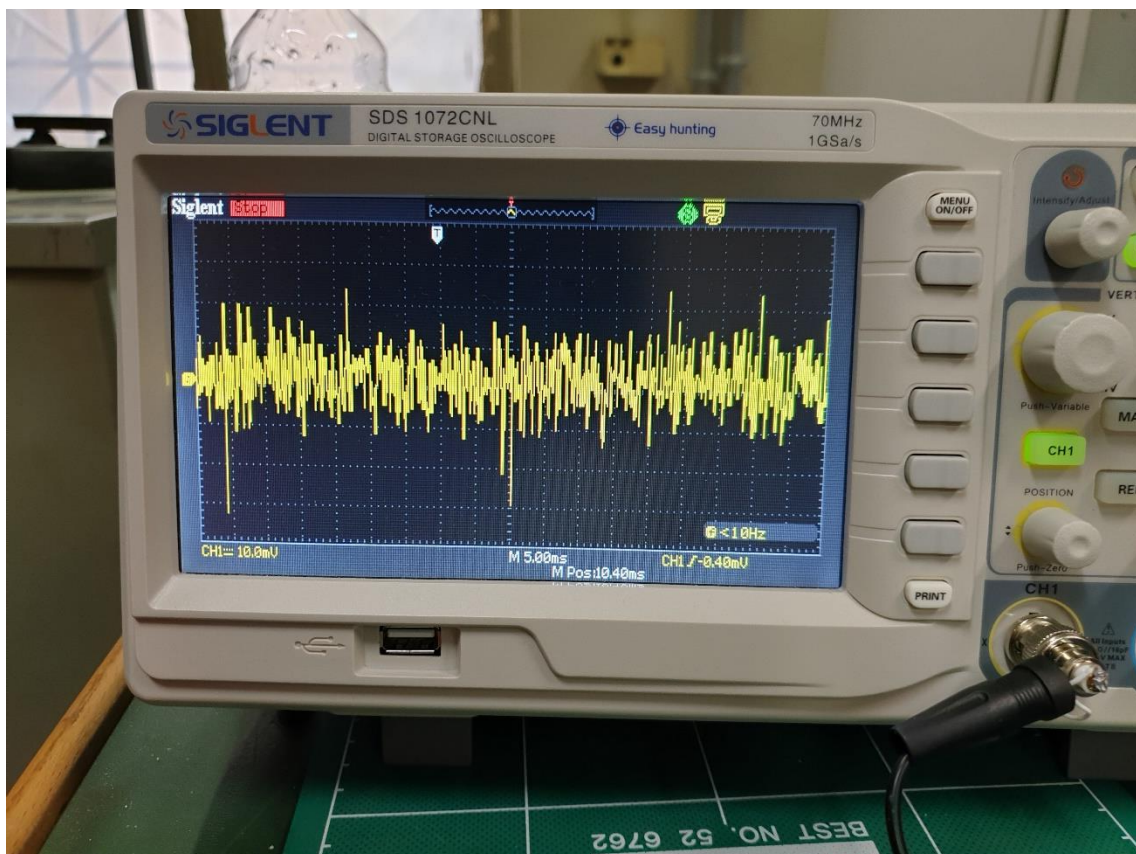


Figure 28. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 4.

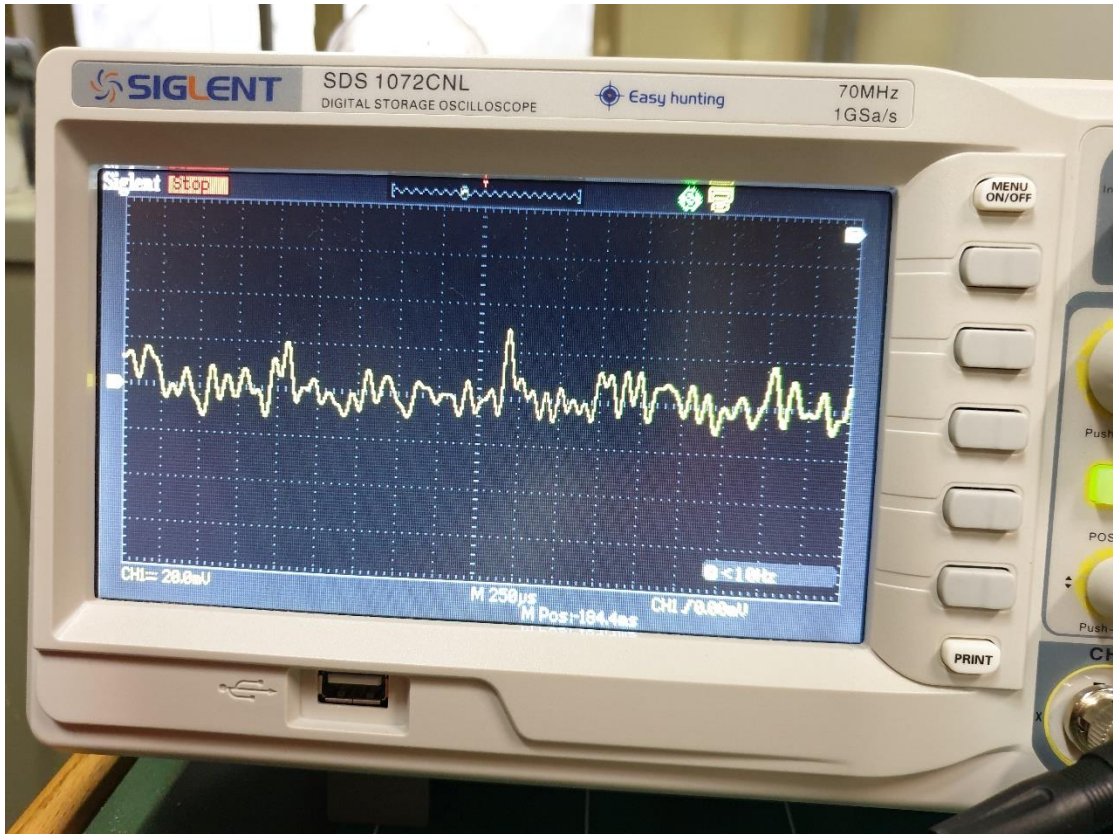


Figure 29. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 4, πιο αναλυτικά.

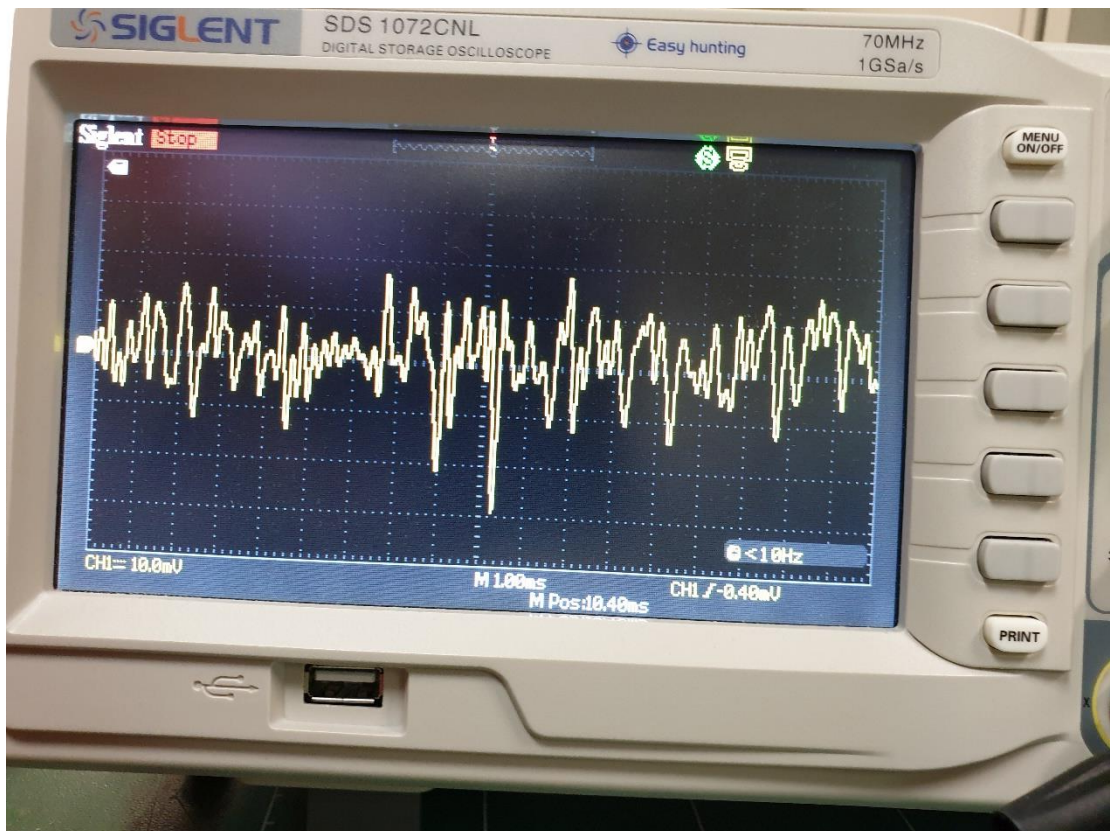


Figure 30. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 4, με ακόμα μεγαλύτερη ανάλυση.

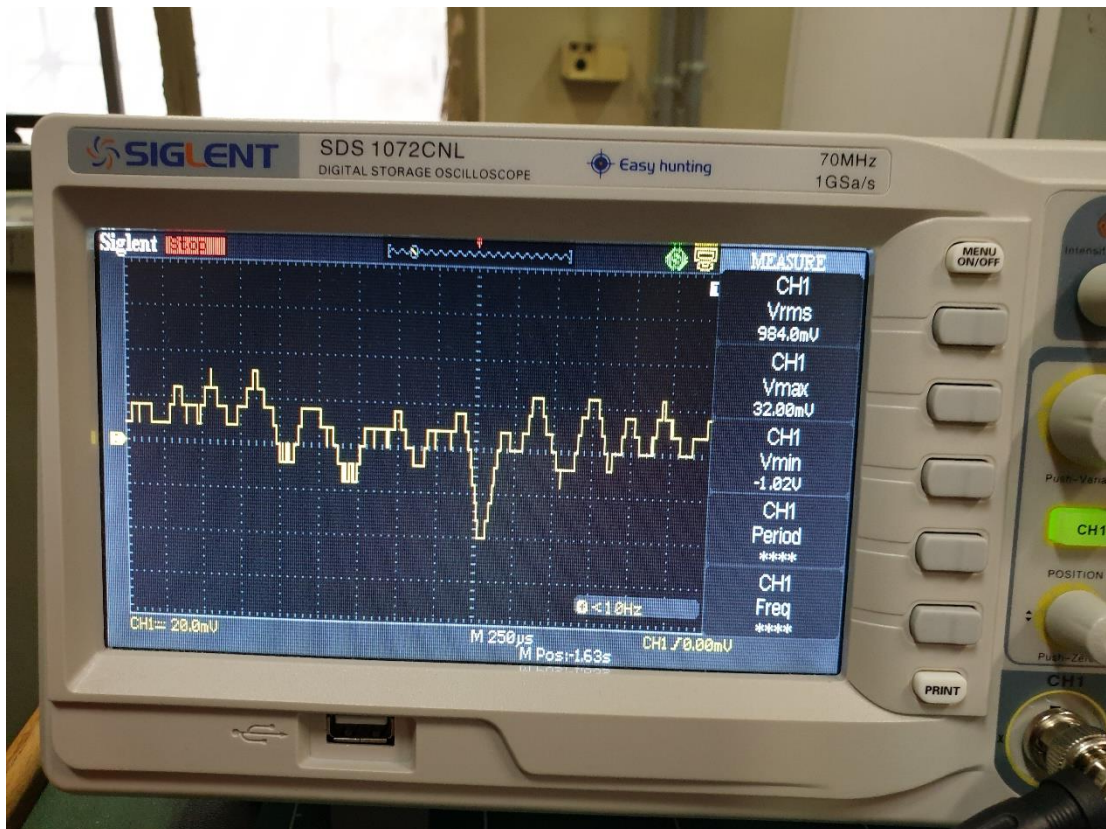


Figure 31. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 4, με μέγιστη ανάλυση.

5.

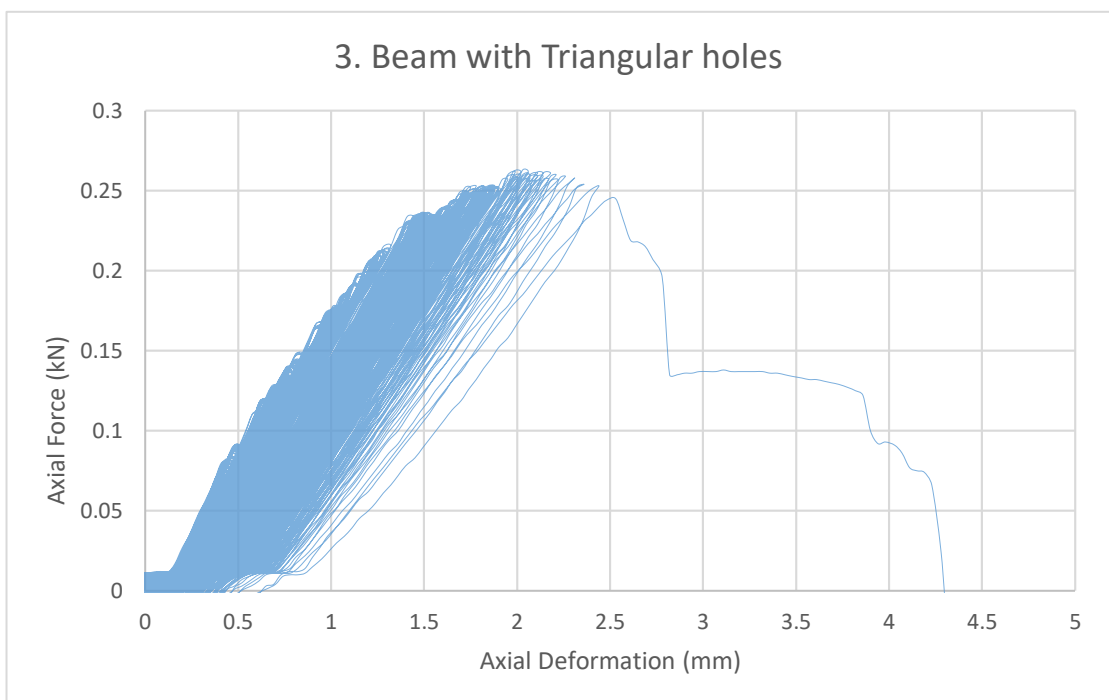


Figure 32. Διάγραμμα Δύναμης-Παραμόρφωσης στην περίπτωση 5.

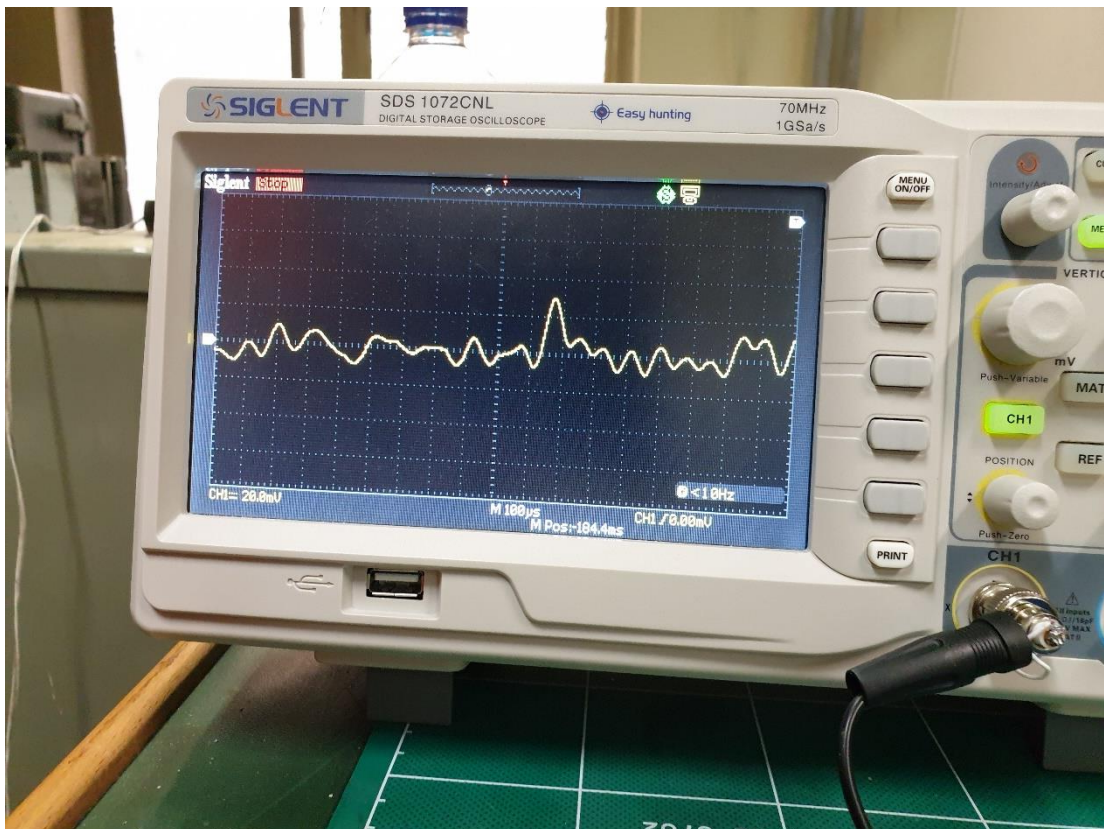


Figure 33. Ηλεκτρικό σήμα που παρατηρήθηκε στην περίπτωση 5.

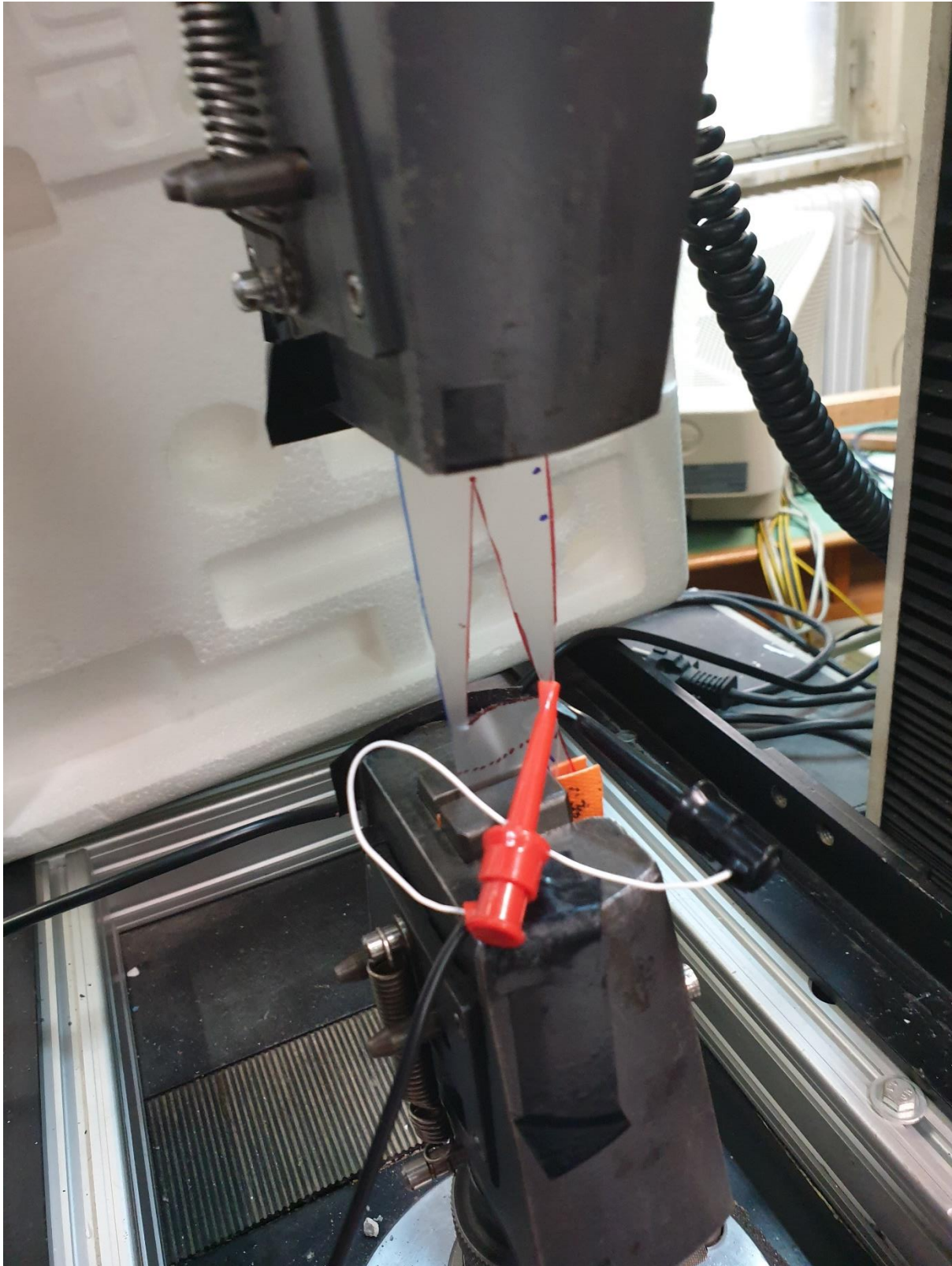


Figure 34. Εφελκυσμός δοκιμίου με μεγάλη τριγωνική σπή. Το δοκίμιο είναι λεπτό.

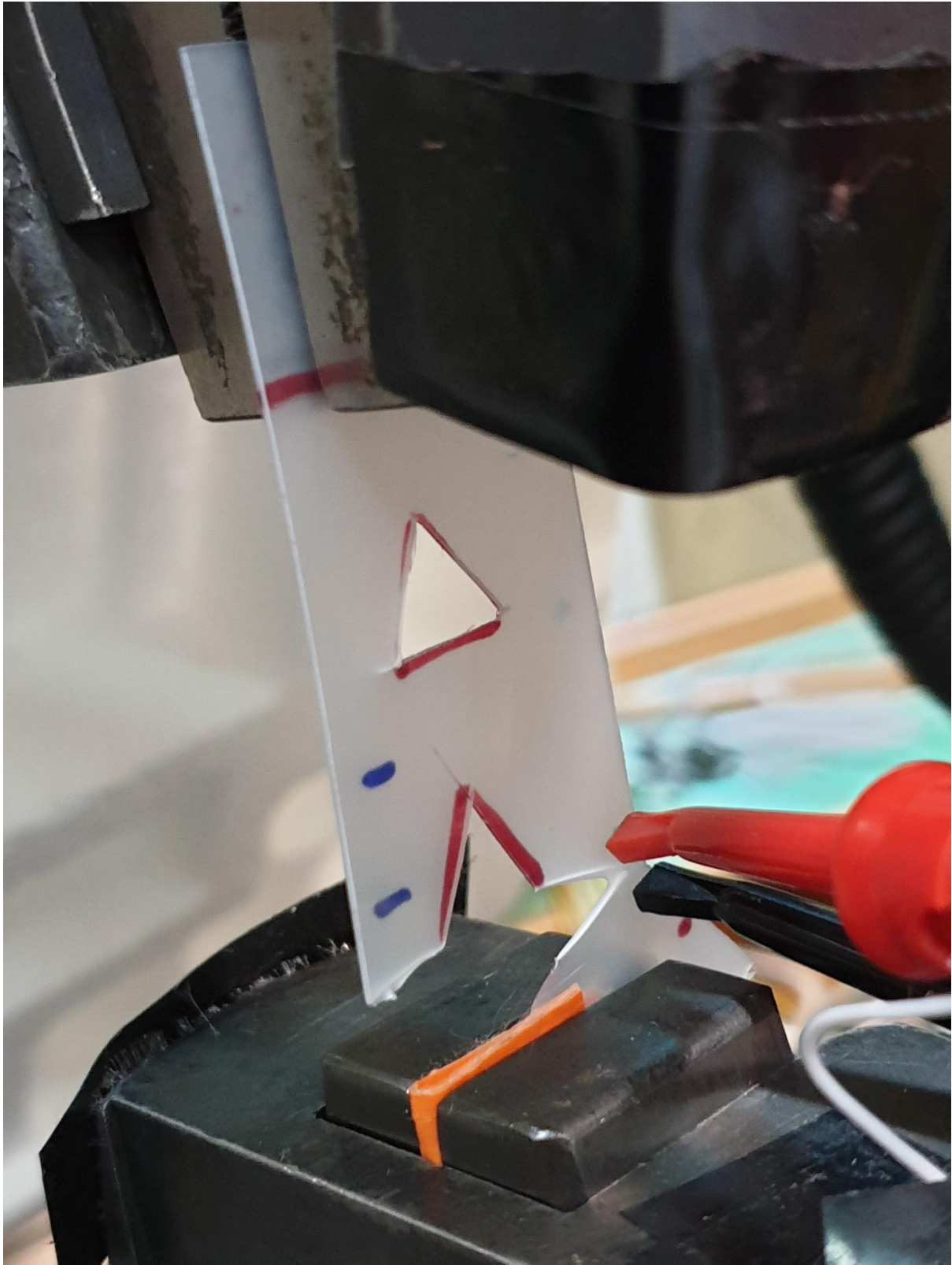


Figure 35. Εφελκυσμός δοκιμίου με τριγωνικές οπές. Το δοκίμιο είναι παχύ.

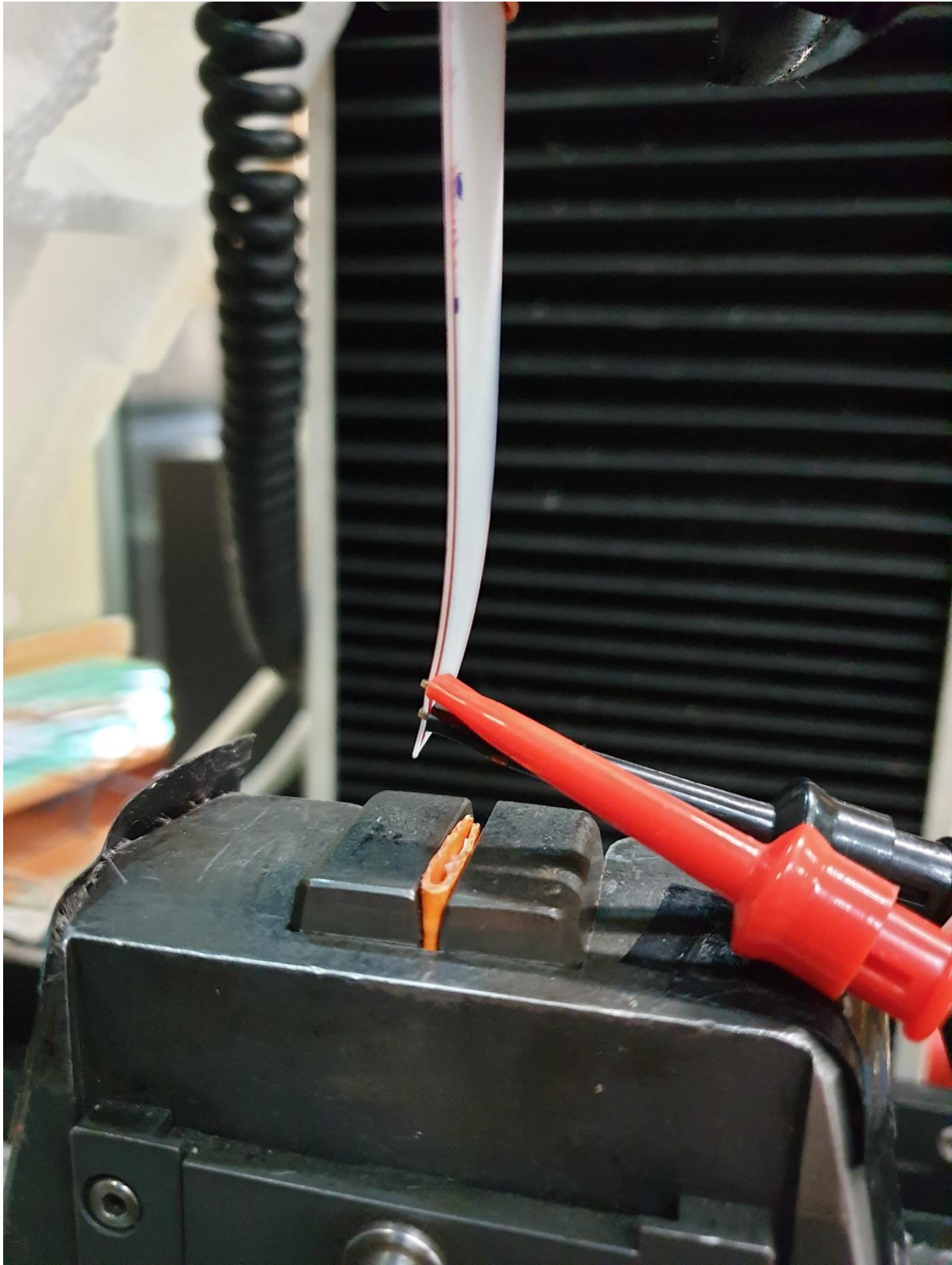


Figure 36. Εφελκυσμός δοκιμίου μορφής «tapered beam». Η τοποθέτηση των κλιπς σε αυτήν την θέση έγινε με σκοπό τον εντοπισμό σήματος, κατά την θραύση. Δυστυχώς η επιλογή της θέσης αστόχησε.

8. Το όραμα

Το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, μπορεί να βρει εφαρμογές σε πληθώρα μηχανισμών, και κατασκευών. Καταρχάς σε εφαρμογές που χρησιμοποιείται το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού, αλλά με τον φλεξοηλεκτρισμό, είμαστε πιο ανοιχτοί: μηχανήματα όπως αναπτήρες, ρολόγια, ακόμα και ραντάρ υποβρυχίων «sonar», χρησιμοποιούν το πιεζοηλεκτρισμό.

Πέρα από μηχανολογικές κατασκευές, είναι δυνατή η χρήση του φαινομένου σε εφαρμογές πολιτικού μηχανικού. Είναι δυνατός ο εντοπισμός φορτίων, είτε αυτά γίνουν από άνεμο, από σεισμό, ή από ένα μεγάλο φορτηγό. (φαινόμενο κόπωσης στις γέφυρες). Είναι μία πρόταση της μελέτης του φαινομένου η ανάπτυξη κατασκευών σεισμικά μονωμένης με σύστημα «active vibration control». Σεισμικά συστήματα, που εντοπίζουν τον σεισμό, και στην συνέχεια παρέχουν μεγάλη τάση, για την εξουδετέρωση τους, υπό την προϋπόθεση ότι την δράση του σεισμού την δέχονται φλεξοηλεκτρικά υλικά (συνδυασμός «direct effect» με «converse effect»).

Ακόμα, με την χρήση φλεξοηλεκτρισμού είναι δυνατή η ενεργειακή αναβάθμιση των κτηρίων, τα οποία θα παίρνουν ενέργεια από διάφορες φορτίσεις και θα την αποθηκεύουν. Στην συνέχεια θα την δαπανούν για να μειώσουν την ηλεκτρική κατανάλωση.

Το φλεξοηλεκτρικό υλικό, θα μπορούσε να τοποθετηθεί σαν ενίσχυση σε ήδη υπάρχουσες κατασκευές και σε καινούριες σαν δομικό στοιχείο. Η αλήθεια είναι ότι σαν δομικό στοιχείο ήδη χρησιμοποιείται, αφού και το σκυρόδεμα έχει τέτοιες ιδιότητες, αν και σε αρκετά μικρό βαθμό. Σε μία κατασκευή μπορεί επιπλέον να χρησιμοποιηθεί και ο χάλυβας της όπλισης, σαν αγωγός – ηλεκτρόδιο.

Είναι δυνατή η κατασκευή αυτοφορτιζόμενων σημάτων, σε εθνικές αρτηρίες, που φορτίζονται από τον άνεμο, μέσω του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού. Και σε αυτήν την εφαρμογή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο χάλυβας, γιατί κυρίως από αυτόν είναι κατασκευασμένες τέτοιες πινακίδες.

Μια ακόμα σημαντική εφαρμογή του φαινομένου στα κτήρια λέγεται «Health structures monitoring», σύμφωνα, με την οποία μπορεί κανείς να διακρίνει, στο κατά πόσο ένα στοιχείο έχει φτάσει στα όρια του. Πόσο του απομένει και τι μπορεί να πάρει ακόμα. Το φαινόμενο την κόπωσης λαμβάνεται υπόψιν σε αυτήν την παρατήρηση.

Τέλος η σημασία του φαινομένου φαίνεται από την οικουμενικότητα του. Υλικά με φλεξοηλεκτρικές ικανότητες υπάρχουν παντού, κάποια που δεν αναμενόταν είναι:

- Ο μανδύας της γης
- Ο πάγος
- Ο σκυρόδεμα
- Οστά & Δόντια

Στην ιστορία, έχουμε συναντήσει φαινόμενα φλεξοηλεκτρισμού σε τεράστια κλίμακα, που σχετίζονται με τα παραπάνω υλικά. Έχουμε ρωσικά υποβρύχια να σπάνε το πάγο, και να χαλάνε όλα τους τα ηλεκτρικά συστήματα. Στην δημιουργία ρηγμάτων, υπάρχει το φαινόμενο αυτό καθώς και σε άλλες εφαρμογές.

9. Επίλογος

Το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, είναι ένα αρκετά υποσχόμενο εγχείρημα της σύγχρονης έρευνας, από αυτό μπορούν να προκύψουν χρήσιμες εφαρμογές, καθώς και αντικατάσταση του φαινομένου του πιεζοηλεκτρισμού. Αυτά όμως είναι υπό προϋποθέσεις. Η βελτιστοποίηση του φαινομένου είναι απαραίτητη, διότι τα ηλεκτρικά σήματα είναι πολύ μικρά. Οπωσδήποτε χρειάζεται μια πιο αναλυτική μελέτη, ή πολλές πιο αναλυτικές.

Το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού, θα είναι οπωσδήποτε σημαντικό στοιχείο στην τεχνολογία του μέλλοντος.

10. Βιβλιογραφία

Δημοσιεύσεις:

1. Baskaran S., et al. (2011)
Giant Flexoelectricity in polyvinyliden fluoride films
Physics Letters A
375: 2082-2084
2. Baskaran S., et al. (2011)
Experimental studies on the direct flexoelectric effect in α -phase polyvinylidene fluoride film
Applied Physics Letters 98
98 / 242901: 1 - 3
3. Baskaran S., et al. (2012)
Strain gradient induced electric polarization in α -phase polyvinylidene fluoride films under bending conditions
Journal of Applied Physics
111 / 014109: 1-5
4. Choi S. B. & Kim G. W. (2017)
Measurement of flexoelectric response in Polyvinylidene fluoride films for Piezoelectric vibration energy harvesting
Journal of Physics D: Applied Physics
50 / 075502: 1-8
5. Chu Baojin & Salem D. (2012)
Flexoelectricity in several thermoplastic and thermosetting polymers
Applied Physics letters
101 / 103905: 1-4
6. Cross E.L. (2006)
Flexoelectric effects: Charge separation in insulating solids subjected to elastic strain gradients
Journal of Materials Science 41
41: 53 - 63
7. Deng B. L., et al (2015)
Optimal Position For Multiple Flexoelectric Actuators on Beams
Proceedings of the A.S.M.E. 2015 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, (IMECE 2015)
53321: 1-11
8. Gi-Woo Kim, et al. (2014)
Flexible Piezoelectric Vibration Energy Harvester using a Trunk – Shaped Beam Structure Inspired by an Electric Fish Fin
International Journal of Precision Engineering and Manufacturing
15 (9): 1967 – 1971
9. Häsler E. et al. (1984)
Implantable physiological power supply with PVDF film
Ferroelectrics
60: 277-282

10. Hidemi Mutsuda et al. (2014)
Flexible Piezoelectric Sheet for Wind Energy Harvesting
International Journal of Energy Engineering
4 (2):67-75
11. Hu. S.D., et al. (2015)
Distributed flexoelectric structural sensing: Theory and experiment
Journal of Sound and Vibration
348: 126-136
12. Jianfeng Lu, et al. (2016)
Improved approach to measure the direct flexoelectric coefficient of bulk polyvinylidene fluoride
Journal of Applied Physics
119 / 094104: 1-6
13. Kenji Omote, et al. (1996)
Temperature dependence of elastic, dielectric, and piezoelectric properties of “single crystalline” films of vinylidene fluoride trifluoroethylene copolymer
J. Appl. Phys.
81 (6): 2760 – 2769
14. Krichen S. & Sharma P. (2016)
Flexoelectricity: A Perspective on an Unusual Electromechanical Coupling
Journal of Applied Mechanics
83 / 030801: 1-5
15. Zhi Yan (2017)
Modeling of a nanoscale flexoelectric energy harvester with surface effects
Physica E
88: 125-132
16. Wenbin Huang, et al. (2013)
A trapezoidal flexoelectric accelerometer
Journal of Intelligent Materials System and Structures
25 (3): 271-277
17. Vantansever D., et al. (2011)
An investigation of energy harvesting from renewable sources with PVDF and PZT
Smart Materials and Structures
20 / 055019: 1-6
18. Maranganti R. et al. (2006)
Electromechanical coupling in nonpiezoelectric materials due to nanoscale nonlocal size effect: Green’s function solution and embedded inclusions
Physical Review B
74 / 024110: 1-14
19. Martins P., et al. (2014)
Electroactive phase of poly(vinylidene fluoride): Determination, processing and applications
Progress in polymer Science
39: 683-706
20. Marvan M. & Havranek A. (1988)
Flexoelectric effect in elastomers
Progress in Colloid & Polymer Science
78: 33-36

21. Moura A. G. & Erturk A. (2017)
Electroelastodynamics of flexoelectric energy conversion and harvesting in elastic dielectrics
Journal of Applied Physics
121 / 064110: 0-12
22. Poddar S. & Ducharme S. (2014)
Temperature dependence of the flexoelectric response in ferroelectric and relaxor polymer thin films
Journal of Applied Physics
116 / 114105: 1-5
23. Qingshen Jing & Sohini Kar – Narayan
Nanostructure polymer-based piezoelectric and triboelectric materials and devices for energy harvesting applications
Journal of Physics D: Applied Physics
51 / 3030001: 1-22
24. Xiaoning Jiang, et al. (2013)
Flexoelectric nano-generator: Materials Structures and devices
Nano Energy
2: 1079-1092
25. Yan Z. & Jinag L. Y. (2014)
Flexoelectric effect on the electroelastic responses of bending piezoelectric nanobeams
Journal of Applied Physics
113 / 194102: 1-9

Βιβλία:

26. Ashby M. et al (2017)
Materials Engineering, science, processing and design (Μετάφραση: Καρανικολός Κ., Επιμελητής: Ψαρράς Γ.)
Εκδόσεις Κλειδάριθμός
27. Βλάχος Ιωάννης et al.
Β' Γενικού Λυκείου Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
Ινστιτούτο Τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»
28. Νικόλαος Αντωνίου et al.
Γ' Γυμνασίου Φυσική
Ινστιτούτο Τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»
29. Ρουμελιώτης Ι. & Τσαλαμέγκας Ι. (2010)
Ηλεκτρομαγνητικά πεδία β' τόμος
Εκδόσεις Τζιόλα

Προηγούμενες Εργασίες

30. Γεωργούσης Γ. (2011)
Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία: « Μετρήσεις Ηλεκτρικής Αγωγιμότητας για Αίσθηση Φθοράς σε Σύνθετα Υλικά».

Ιστότοπος

31. «https://en.wikipedia.org/wiki/Polyvinylidene_fluoride».
32. «<https://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwi46qCx2KDjAhWSGewKHRUxAPMQjRx6BAgBEAU&url=http%3A%2F%2Fwww.argolidaportal.gr%2Fnews%2F30130%2Fellepsi-pinakidon-simansis-gia-nayplio-stin-ethniki-odo-athinon-korinthoy-patron&psig=AOvVaw0FQDVCFuRMzYzC3xD3dGVF&ust=1562515153348387>»
33. «<https://catalog.cshyde.com/Asset/Data%20Sheet%2032-F.doc>»
34. «<https://www.wolframalpha.com/>»

Προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν

1. AutoCad
2. Femap
3. LightShot
4. LinPro
5. Maple
6. Matlab
7. Office

