Πτυχιακή Εργασία

ΔΙΚΤΥΑ, ΦΙΛΤΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Άγγελος Φλεβοτόμος

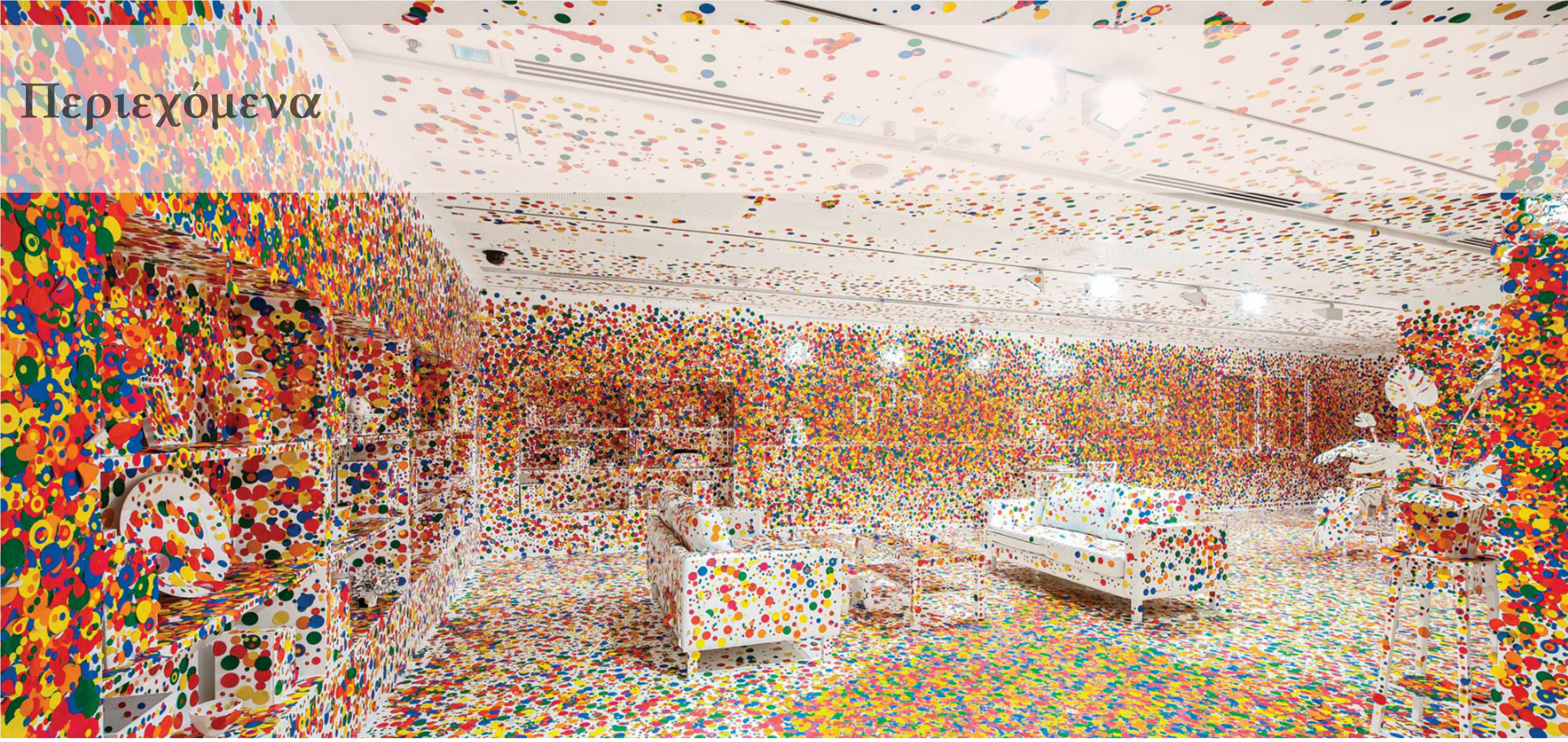
Επιβλέπων Καθηγητής: Αρβανιτάκης Αλέξανδρος

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Αθήνα 2019

Art. No 2019
ISBN xxxxx
Edition xxx--xx--xxxx--xx--x



Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα Πτυχιακή εργασία με τίτλο «Δίκτυα, Φίλτρα και Εφαρμογές στη Γενική Τοπολογία» εκπονήθηκε στο πλαίσιο της ολοκλήρωσης των προϋποθέσεων, για τη λήψη του πτυχίου μου από τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.). Η ανάληψή της ορίστηκε στις αρχές του 2019, με υπεύθυνο καθηγητή τον κ. Αρβανιτάκη Αλέξανδρο και ολοκληρώθηκε τον Οκτώβριο του 2019.

Έγινε προσπάθεια, έτσι ώστε το περιεχόμενο της εργασίας να είναι, στο μέτρο του δυνατού, κατανοητό και σαφές, έχοντας σαν βάση γνώσεις προπτυχιακών σπουδών στο πλαίσιο της Συναρτησιακής και Πραγματικής Ανάλυσης. Η διαδρομή που ακολουθήθηκε έχει σαν αρχή τη γνωριμία με την έννοια των Τοπολογικών Χώρων και των ιδιοτήτων τους, χρησιμοποιώντας σημαντικά εργαλεία, όπως τα δίκτυα και τα φίλτρα και καταλήγει με την εξερεύνηση σημαντικών Θεωρημάτων που περιγράφουν τους χώρους αυτούς, όπως το Λήμμα του Urysohn και το Λήμμα της Εμφύτευσης. Ελπίζω το περιεχόμενο της διαδρομής αυτής να καλύπτει σημαντικές πτυχές της Γενικής Τοπολογίας, αλλά και να ανταποκρίνεται και στις απαιτήσεις των καθηγητών μου.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου και καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, κ. Αρβανιτάκη Αλέξανδρο, για τη βοήθεια και τις χρήσιμες ιδέες του που συνέβαλαν στην βελτίωση της εργασίας αλλά, ακόμη περισσότερο, για τη συμβολή του στη γνωριμία μου με τον κόσμο των συνολοθεωρητικών Μαθηματικών και το μεγαλείο τους. Ευχαριστώ, επίσης, τον συμφοιτητή και φίλο Παναγιώτη Βαλλιανάτο, για τη βοήθεια που μου προσέφερε, ώστε να είμαι προετοιμασμένος για τη συγγραφή της παρούσας εργασίας, αλλά και την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους σε όλο το χρονικό διάστημα των σπουδών μου.

Τέλος, ευχαριστώ τους καθηγητές της σχολής που συνέβαλαν στην απόκτηση των απαραίτητων γνώσεων για την επιτυχή φοίτησή μου και την εκπόνηση της πτυχιακής εργασίας.

Αθήνα, Δεκέμβριος 2019

1. Τοπολογικοί Χώροι

1.1 Εισαγωγή

Για τη μελέτη των μετρικών χώρων, έχουμε ορίσει (σε κάθε μετρικό χώρο) την οικογένεια των ανοικτών συνόλων η οποία ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες. Έτσι, οι περεταίρω έννοιες όπως κλειστό σύνολο, εσωτερικό, κλειστότητα κ.λ.π ορίζονται πλέον χρησιμοποιώντας την έννοια του ανοικτού συνόλου. Κατ' αντιστοιχία, έχουμε τη δυνατότητα μελέτης κλάσεων χώρων πιο γενικών από την κλάση των μετρικών χώρων, στις οποίες πρωταρχική έννοια δεν είναι η μετρική (απ'την οποία ορίζεται η έννοια του ανοικτού συνόλου) αλλά η ίδια η έννοια του ανοικτού συνόλου. Μπορούμε λοιπόν να προσεγγίσουμε την έννοια της τοπολογίας, της οικογένειας δηλαδή των ανοικτών υποσυνόλων ενός συνόλου και του τοπολογικού χώρου, του ζεύγους δηλαδή ενός συνόλου και μίας τοπολογίας που ορίζεται σε αυτό. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η έννοια του τοπολογικού χώρου είναι μία τεράστια γενίκευση σε σχέση με την έννοια του μετρικού χώρου.

1.2 Τοπολογία, Ανοικτά Σύνολα, Βάσεις

Ορισμός: Έστω X ένα σύνολο. Μία τοπολογία του X είναι μία οικογένεια $\mathcal{T}$, υποσυνόλων του X, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το X και το κενό $\varnothing$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$
2. Η τομή πεπερασμένης οικογένειας στοιχείων της $\mathcal{T}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{T}$ (δηλαδή αν $n \in \mathbb{N}$ και $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathcal{T}$, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$)

3. Η ένωση αυθαίρετης οικογένειας στοιχείων της $\mathcal{T}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{T}$ (δηλαδή αν I είναι αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $G_i \in \mathcal{T}$, για $i \in I$, τότε $\bigcup_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$)

Το ζεύγος (X, $\mathcal{T}$) λέγεται τοπολογικός χώρος. Τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται ανοικτά σύνολα ως προς την $\mathcal{T}$, ή ανοικτά σύνολα του τοπολογικού χώρου (X, $\mathcal{T}$). Ανάλογα με την περίπτωση των μετρικών, σε ένα σύνολο X είναι δυνατόν να ορίζονται διαφορετικές μεταξύ τους τοπολογίες $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ... οπότε προκύπτουν διαφορετικοί τοπολογικοί χώροι (X, $\mathcal{T}_1$), (X, $\mathcal{T}_2$), ...
Παραδείγματα:

1. **Μετρική Τοπολογία**
   Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Η οικογένεια $\mathcal{T}_\rho$ όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X (όπως ορίζονται από την μετρική ρ) είναι μία τοπολογία του X. Η $\mathcal{T}_\rho$ λέγεται μετρική τοπολογία του X που καθορίζεται από την μετρική ρ. Ένας τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$) είναι μετρικοποιήσιμος όταν υπάρχει μία μετρική ρ στο σύνολο X τέτοια ώστε $\mathcal{T}$=$\mathcal{T}_\rho$

2. **Διακριτός Τοπολογικός Χώρος**
   Έστω X ένα σύνολο. Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ του X είναι μία τοπολογία, η διακριτή τοπολογία του X και (X, $\mathcal{P}(X)$) ο διακριτός χώρος. Είναι σαφές ότι αν ρ είναι η διακριτή μετρική στο X, τότε η μετρική τοπολογία $\mathcal{T}_\rho$ είναι η διακριτή τοπολογία του X. Επομένος ο διακριτός χώρος (X, $\mathcal{P}(X)$) είναι μετρικοποιήσιμος.

3. **Τετριμμένος Τοπολογικός Χώρος**
   Έστω X ένα σύνολο. Η οικογένεια $\mathcal{T}$={∅, X} είναι η τετριμμένη τοπολογία του X και (X, $\mathcal{T}$) ο τετριμμένος χώρος. Κάθε τετριμμένος τοπολογικός χώρος που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία δεν είναι μετρικοποιήσιμος. [Πράγματι, έστω $x_0 \in X$ και $\{x_0\} \neq X$. Το $X\setminus\{x_0\}$ ανήκει σε κάθε μετρική τοπολογία του X, εφ'όσον τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα σε κάθε μετρικό χώρο, όμως $X\setminus\{x_0\} \notin \mathcal{T}$. Άρα δεν υπάρχει μετρική ρ του X ώστε $\mathcal{T}$=$\mathcal{T}_\rho$]

4. **Ο Χώρος του Sierpinski**
   Έστω X={α, β} με $\alpha \neq \beta$. Οι οικογένειες $\mathcal{T}_1$={∅, X, {α}}, $\mathcal{T}_2$={∅, X, {β}} είναι τοπολογίες του X.

5. **Συμπεπερασμένη Τοπολογία**
   Έστω X ένα σύνολο. Η οικογένεια $\mathcal{T}$={A $\subset X$: X\ A είναι πεπερασμένο}∪{∅}

που περιέχει όλα τα συμπληρώματα των πεπερασμένων υποσυνόλων του X είναι μία τοπολογία, η συμπεπερασμένη τοπολογία του X. Αν το σύνολο X είναι πεπερασμένο τότε η συμπεπερασμένη τοπολογία ταυτίζεται με τη διακριτή του X.

6. **Συναριθμήσιμη Τοπολογία**
Έστω X ένα σύνολο. Η οικογένεια $\mathcal{T}$ ={A ⊂ X : X\ A είναι αριθμήσιμο}∪{∅} που περιέχει όλα τα συμπληρώματα των αριθμήσιμων υποσυνόλων του X είναι μία τοπολογία, η συναριθμήσιμη τοπολογία του X.

Ορισμός: Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ δύο τοπολογίες του X. Η $\mathcal{T}_1$ είναι ασθενέστερη (ή μικρότερη) της $\mathcal{T}_2$ αν κάθε ανοικτό σύνολο ως προς την $\mathcal{T}_1$ είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}_2$, δηλαδή αν $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Στην περίπτωση αυτή η $\mathcal{T}_2$ είναι ισχυρότερη (ή μεγαλύτερη) της $\mathcal{T}_1$.
Ο ορισμός αυτός είναι μία σχέση ≤ μερικής διάταξης στην οικογένεια όλων των τοπολογιών ενός συνόλου ($\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$).

Παραδείγματα:

1. Σε κάθε σύνολο X, η τετριμμένη τοπολογία είναι η ασθενέστερη και η διακριτή τοπολογία είναι η ισχυρότερη τοπολογία του X. Πράγματι, αν $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία του X, τότε $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$.

2. Η μερική διάταξη ≤ στην οικογένεια όλων των τοπολογιών ενός συνόλου X δεν είναι ολική, αν το σύνολο περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Πράγματι, αν α, β ∈ X με $\alpha \neq \beta$ τότε θέτουμε $\mathcal{T}_1$={∅, X, {α}}, $\mathcal{T}_2$={∅, X, {b}} και οι $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ είναι τοπολογίες του X για τις οποίες ούτε $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ούτε $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

Πρόταση: Έστω X ένα σύνολο. Αν $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ δύο τοπολογίες του X, τότε η τομή $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ είναι επίσης τοπολογία του X. Γενικότερα, αν $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ είναι μία οικογένεια τοπολογιών του X, τότε η τομή $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ είναι επίσης τοπολογία του X.
Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ είναι τοπολογία του X. Προφανώς, X, $\varnothing \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Αν $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, τότε $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_1$, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_2$ εφόσον οι $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ είναι τοπολογίες και άρα $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Επίσης, αν το I είναι σύνολο δεικτών και $G_i \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ για i ∈ I, τότε $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}_1$, $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}_2$, εφόσον οι $\mathcal{T}_1$,$\mathcal{T}_2$ είναι τοπολογίες, άρα $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Επομένως η οικογένεια $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού και είναι μία τοπολογία του X.

Παράδειγμα: Έστω X ένα άπειρο σύνολο, $x_0 \in X$. Η οικογένεια $\mathcal{T}$={A $\subset$ X :X\ A είναι πεπερασμένο και $x_0 \in$ X\ A}. Η $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία ως τομή της συμπεπερασμένης και της τοπολογίας του εξαιρούμενου σημείου $x_0 \in$ X.

Παρατήρηση: Είναι σαφές ότι η τομή $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ μίας οικογένειας τοπολογιών $\mathcal{T}_i$: i $\in$ I σε ένα σύνολο X είναι η μεγαλύτερη τοπολογία που είναι μικρότερη ή ίση από κάθε $\mathcal{T}_i$ (στη μερική διάταξη $\preceq$).
Η ένωση δύο τοπολογιών ενός συνόλου X δεν είναι κατά ανάγκη τοπολογία. Πράγματι, στο σύνολο X= $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ με $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ οι $\mathcal{T}_1$={∅, X, {α}}, $\mathcal{T}_2$={∅, X, {β}} είναι δύο τοπολογίες του X. Όμως, η ένωσή τους $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$={∅, X, {α}, {β}} δεν είναι τοπολογία του X, εφ'όσον $\{\alpha\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, $\{\beta\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ αλλά $\{\alpha, \beta\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

Σημείωση: Στους μετρικούς χώρους τα ανοικτά σύνολα ορίστηκαν αφού κατ'αρχήν ορίστηκε η έννοια της ανοικτής σφαίρας. Ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου είναι ανοικτό αν και μόνο αν είναι ίσο με την ένωση ανοικτών σφαιρών. Η διαδικασία της περιγραφής/παραγωγής μίας σύνθετης και πολύπλοκης οικογένειας συνόλων από μία απλούστερη, είναι συχνά χρήσιμη.

Ορισμός: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος. Μία υποοικογένεια $\mathcal{B}$ της $\mathcal{T}$ είναι μία βάση (για την τοπολογία $\mathcal{T}$) αν κάθε ανοικτό σύνολο είναι ίσο με την ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Δηλαδή αν για κάθε G $\in \mathcal{T}$ υπάρχουν $B_i, i \in I$ ώστε G = $\bigcup_{i\in I} B_i$
Τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ είναι βασικά (ανοικτά) σύνολα του (X, $\mathcal{T}$).
Σύμφωνα με τον ορισμό, κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση στοιχείων της βάσης. Επίσης, οι ενώσεις στοιχείων της βάσης είναι ανοικτά σύνολο εφ'όσον $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.
Επομένως τα ανοικτά σύνολα είναι ακριβώς οι ενώσεις των βασικών ανοικτών συνόλων.
Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν μία βάση παράγει την τοπολογία.

Πρόταση: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την $\mathcal{T}$.

2. Για κάθε $G \in \mathcal{T}$ και $x \in G$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subset G$.

Απόδειξη:
$1 \Rightarrow 2$: Έστω $\mathcal{B}$ μία βάση για την $\mathcal{T}$ και $G \in \mathcal{T}$. Τότε υπάρχει $B_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$, ώστε $G = \bigcup_{i \in I} B_i$. Επομένως, για κάθε $x \in G$ υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in B_{i0} \subset G$.
$2 \Rightarrow 1$: Έστω $G \in \mathcal{T}$. Από την (2), για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B_x \subset G$.
Επομένως $G = \bigcup_{x \in G} B_x$ όπου $B_x \in \mathcal{B}$. Άρα απ' τον ορισμό, η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την $\mathcal{T}$.

Παράδειγμα:

1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Η οικογένεια $\mathcal{B}=\{ S(x, \varepsilon): x \in X$ και $\varepsilon>0 \}$ όλων των ανοικτών σφαιρών του X είναι μία βάση για τη μετρική τοπολογία $\mathcal{T}_\rho$ του X.
2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Η ίδια η τοπολογία είναι μία βάση. Επίσης, αν $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την $\mathcal{T}$ και $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}$, τότε η $\mathcal{B}_1$ είναι επίσης μία βάση για την $\mathcal{T}$.

Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $\mathcal{B}$ μία βάση για την $\mathcal{T}$ και $G \subset X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το G είναι ανοικτό
2. Για κάθε $x \in G$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$: $x \in B \subset G$.

Απόδειξη:
$1 \Rightarrow 2$: Έστω ότι το G είναι ανοικτό και $x \in G$. Εφ'όσον η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την $\mathcal{T}$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subset G$ (Από προηγούμενη Πρόταση).
$2 \Rightarrow 1$: Έστω ότι για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B_x \subset G$. Τότε $G = \bigcup_{x \in G} B_x$. Άρα το G είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών.

Θεώρημα: Έστω $\mathcal{B}$ μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία του X αν και μόνο αν η $\mathcal{B}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
1. $X = \bigcup \{B: B \in \mathcal{B}\}$.
2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ και $x \in B_1 \cap B_2$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Μία υποοικογένεια $\mathcal{C}$ της $\mathcal{T}$

είναι υποβάση (για την τοπολογία $\mathcal{T}$) αν η οικογένεια των τομών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{C}$ είναι βάση της $\mathcal{T}$. Δηλαδή αν η οικογένεια $\mathcal{B}$= $\{\mathrm{C}_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n : n = 1, 2, ... C_1, C_2, ..., C_n \in \mathcal{C}\} \cup \{X\}$ είναι μία βάση της $\mathcal{T}$.
Επομένως η $\mathcal{C}$ είναι υποβάση για την $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν για κάθε $\mathrm{G} \in \mathcal{T}$ υπάρχει (αυθαίρετο) σύνολο δεικτών I, πεπερασμένα σύνολα $\mathrm{J}_i, i \in \mathrm{I}$ και $\mathrm{C}_{i,j} \in \mathcal{C}$ όπου $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ και $\mathrm{j} \in \mathrm{J}_i$,ώστε $G = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J_i}\mathrm{C}_{i,j}$.
Τα στοιχεία της $\mathcal{C}$ λέγονται υποβασικά ανοικτά υποσύνολα του X.

1.3 Κλειστότητα, Εσωτερικό

Ορισμός: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$. Το A λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμά του X\ A είναι ανοικτό (δηλαδή αν $\mathrm{X}\setminus \mathrm{A} \in \mathcal{T}$).

Παραδείγματα:

1. Σε κάθε τοπολογικό χώρο (X, $\mathcal{T}$), τα σύνολα X,∅ είναι κλειστά εφ'όσον X\ X=∅, X\ ∅=X και $\varnothing, \mathrm{X} \in \mathcal{T}$.

2. Σε κάθε διακριτό τοπολογικό χώρο όλα τα υποσύνολά του είναι κλειστά (και ανοικτά συγχρόνως), ενώ σε κάθε τετριμμένο τοπολογικό χώρο τα μόνα κλειστά υποσύνολα είναι το ∅ και το X.

Πρόταση: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος. Η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του X έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Τα σύνολα X,∅ είναι κλειστά σύνολα.

2. Η τομή μίας αυθαίρετης οικογένειας κλειστών υποσυνόλων είναι κλειστό σύνολο (F_i κλειστό $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i$ κλειστό, I αυθαίρετο σύνολο δεικτών.)

3. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό ($\mathrm{F}_1, F_2, ..., F_n$ κλειστά $\Rightarrow F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ κλειστό, $n \in \mathbb{N}$).

Απόδειξη:
1. ∅=X\ X, X=X\ ∅.
2. Έστω $(\mathrm{F}_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Θα δείξουμε ότι $\bigcap_{i\in I}\mathrm{F}_i$ κλειστό.Απ'τους τύπους De Morgan: $\mathrm{X}\setminus \bigcap_{i\in I}\mathrm{F}_i=\bigcup_{i\in I}(\mathrm{X}\setminus \mathrm{F}_i)$. Το $\mathrm{X}\setminus \bigcap_{i\in I}\mathrm{F}_i$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων, άρα το $\bigcap_{i\in I}\mathrm{F}_i$ είναι

κλειστό.
3. Αν $F_1, F_2, ..., F_n$ είναι κλειστά υποσύνολα του X τότε X\ F_1, X\ F_2, ..., X\ $F_n \in \mathcal{T}$. Απ'τον ορισμό της τοπολογίας έχουμε ότι $\bigcap_{i=1}^{n}$ (X\ F_i) $\in \mathcal{T}$. Όμως X\ $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ = $\bigcap_{i=1}^{n}$ (X\ F_i), άρα X\ $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{T}$ και συνεπώς το $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό.

Παρατηρήσεις:
1. Γενικά η ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο και A ένα άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολό του. Στον χώρο (X, $\mathcal{T}$) με τη συμπεπερασμένη τοπολογία, το A=$\bigcup_{x \in A}$\{x\} είναι (αριθμήσιμη) ένωση κλειστών υποσυνόλων του χώρου αλλά δεν είναι κλειστό σύνολο (X\ A όχι ανοικτό ⇒X\ A $\notin \mathcal{T}$ ⇒ A όχι πεπερασμένο).
2. Αν μία οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X έχει τις τρεις ιδιότητες της προηγούμενης Πρότασης και θέσουμε $\mathcal{T}$=\{G ⊂ X : X\ G ∈ $\mathcal{F}$ \}, τότε η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία του X και η $\mathcal{F}$ ταυτίζεται με την οικογένεια των κλειστών ως προς την $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X.

Ορισμός: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και A ⊂ X. Το εσωτερικό A^o του A είναι η ένωση όλων των ανοικτών συνόλων που περιέχονται στο A. Δηλαδή, A^o=$\bigcup$\{G ⊂X : G ανοικτό και G ⊂A \}. Το A^o είναι ανοικτό σύνολο (ως ένωση ανοικτών συνόλων), A^o ⊂ A και είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A.

Παραδείγματα:

1. Έστω (X, $\mathcal{T}$) διακριτός τοπολογικός χώρος. Τότε A^o=A για κάθε A ⊂ X (Εφ'όσον το A είναι ανοικτό).

2. Έστω (X, $\mathcal{T}$) τετριμμένος τοπολογικός χώρος. Τότε A^o=∅ αν A ⊂ X, A ≠ X και A^o=X αν A=X.

3. Έστω (\{α,β\}, \{∅, \{α\}, \{α,β\}\}) ο χώρος Sierpinski. Ισχύει $\{α\}^o$=α, $\{β\}^o$=∅.

Πρόταση: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος. Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. A^o⊂A για κάθε A⊂X

2. $(A^o)^o$=A^o για κάθε A⊂X

3. A⊂B ⇒A^o⊂B^o για κάθε A,B⊂X

4. $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$ για κάθε $A, B \subset X$
5. $A \subset X$ ανοικτό $\Leftrightarrow A = A^o$

Απόδειξη:
1. Από τον ορισμό, το εσωτερικό A^o είναι ίσο με την ένωση των ανοικτών συνόλων που περιέχονται στο A άρα $A^o \subset A$ και A^o ανοικτό σύνολο.
2. Εφ'όσον το A^o είναι ανοικτό, από τον ορισμό έχουμε ότι $A^o \subset (A^o)^o$. Από την (1) επίσης έχουμε ότι $(A^o)^o \subset A^o$ και άρα $(A^o)^o = A^o$.
3. Έστω $A \subset B$. Κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A περιέχεται και στο B και άρα $A^o \subset B^o$.
4. Έστω $A, B \subset X$. Από την (1) έχουμε ότι $A^o \subset A$ και $B^o \subset B$ άρα $A^o \cap B^o \subset A \cap B$. Το $A^o \cap B^o$ είναι ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών συνόλων που περιέχεται στο $A \cap B$, άρα $A^o \cap B^o \subset (A \cap B)^o$. Από την (3), εφ'όσον $A \cap B \subset A$ και $A \cap B \subset B$, έχουμε ότι $(A \cap B)^o \subset A^o$ και $(A \cap B)^o \subset B^o$, άρα $(A \cap B)^o \subset A^o \cap B^o$. Άρα $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.
5. Αν για $A \subset X$ ισχύει $A = A^o$, το A είναι ανοικτό εφ'όσον το A^o είναι ανοικτό. Αντίστροφα, αν το A είναι ανοικτό τότε $A \subset A^o$, επομένως $A = A^o$ αφού από την (1) ισχύει $A^o \subset A$.

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι η τομή όλων των κλειστών συνόλων που περιέχουν το A. Δηλαδή $\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ κλειστό και } A \subset F\}$.
Το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο, περιέχει το A και μάλιστα είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A.

Παράδειγμα: Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathcal{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία του X. Τότε $\overline{A} = A$ αν $A \subset X$ πεπερασμένο και $\overline{A} = X$ αν $A \subset X$ άπειρο (Αν το A είναι πεπερασμένο τότε είναι κλειστό γιατί $X \setminus A$ ανοικτό ($\in \mathcal{T}$) και αν είναι άπειρο, το μόνο κλειστό σύνολο που περιέχει το A είναι το X.)

Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ισχύουν τα ακόλουθα, για κάθε $A, B \subset X$:

1. $A \subset \overline{A}$
2. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$
3. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
4. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5. Α κλειστό $\Rightarrow A = \overline{A}$

Απόδειξη:

1. Από τον ορισμό η κλειστότητα $\overline{A}$ είναι ίση με την τομή όλων των κλειστών που περιέχουν το Α άρα $A \subset \overline{A}$ και το $\overline{A}$ είναι κλειστό.

2. Εφ'όσον το $\overline{A}$ είναι κλειστό θα ισχύει ότι $\overline{(\overline{A})} \subset \overline{A}$. Από την (1) έχουμε ότι $\overline{A} \subset \overline{(\overline{A})}$ και άρα τελικά $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

3. Έστω $A \subset B$. Κάθε κλειστό σύνολο που περιέχει το Β περιέχει και το Α άρα $\overline{A} \subset \overline{B}$.

4. Έστω $A, B \subset X$. Από την (1) έχουμε ότι $A \subset \overline{A}$ και $B \subset \overline{B}$, άρα $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Το σύνολο $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό ως ένωση δύο κλειστών και περιέχει το $A \cup B$, άρα $\overline{(A \cup B)} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Από την (3), εφ'όσον $A \subset A \cup B$ και $B \subset A \cup B$, έχουμε ότι $\overline{A} \subset \overline{(A \cup B)}$ και $\overline{B} \subset \overline{(A \cup B)}$ άρα $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{(A \cup B)}$. Επομένως $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5. Αν για $A \subset X$ ισχύει $A = \overline{A}$, το Α είναι κλειστό εφ'όσον το $\overline{A}$ είναι κλειστό. Αντίστροφα, αν το Α είναι κλειστό σύνολο, τότε $\overline{A} \subset A$. Επομένως από την (1) έχουμε $A = \overline{A}$.

Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subset X$ και $x \in X$. Το x ανήκει στο $\overline{A}$ αν και μόνο αν το Α τέμνει κάθε ανοικτό σύνολο G που περιέχει το x (Δηλαδή $x \in \overline{A} \Leftrightarrow G \cap A \neq \varnothing$ για κάθε $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G$)

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω $x \in \overline{A}$ και $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G$. Θα δείξουμε ότι $G \cap A \neq \varnothing$. Υποθέτουμε ότι $G \cap A = \varnothing$, δηλαδή $A \subset X \setminus G$. Από την προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι $\overline{A} \subset \overline{(X \setminus G)}$ και ότι $\overline{(X \setminus G)} = X \setminus G$ εφ'όσον το $X \setminus G$ είναι κλειστό σύνολο. Άρα $\overline{A} \subset X \setminus G$, δηλαδή $\overline{A} \cap G = \varnothing$. Άτοπο, αφού $x \in \overline{A} \cap G$. Επομένως $G \cap A \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G$ ισχύει $G \cap A \neq \varnothing$. Θα δείξουμε ότι $x \in \overline{A}$. Υποθέτουμε ότι $x \notin \overline{A}$, δηλαδή $x \in X \setminus \overline{A}$. Το $X \setminus \overline{A}$ είναι ανοικτό και περιέχει το x άρα σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $(X \setminus \overline{A}) \cap A \neq \varnothing$. Αυτό είναι άτοπο διότι $A \subset \overline{A}$. Επομένως $x \in \overline{A}$.

Παρατήρηση: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $\mathcal{B}$ μία βάση της $\mathcal{T}$, $A \subset X$ και $x \in X$. Τότε $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $B \cap A \neq \varnothing$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ με $x \in B$.

Πράγματι, αν $x \in \overline{A}$ τότε $B \cap A \neq \varnothing$, από την προηγούμενη Πρόταση και εφ'όσον $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

Αντίστροφα, για κάθε $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subset G$. Επομένως, αν $B \cap A \neq \varnothing$ τότε $G \cap A \neq \varnothing$, άρα $x \in \overline{A}$ από την προηγούμενη Πρόταση.

Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Τότε

1. $X\setminus A^o = \overline{(X\setminus A)}$
2. $X\setminus \overline{A} = (X\setminus A)^o$

Απόδειξη:
1. Από προηγούμενη Πρόταση, το $A^o \in \mathcal{T}$ και $A^o \subset A$, άρα το $X\setminus A^o$ είναι κλειστό και $X\setminus A \subset X\setminus A^o$. Επομένως έπεται ότι $\overline{(X\setminus A)} \subset X\setminus A^o$. Αρκεί να δείξουμε ότι $X\setminus A^o \subset \overline{(X\setminus A)}$. Έστω $x \in X\setminus A^o$ και $G \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in G$. Υποθέτουμε ότι $G \cap (X\setminus A) = \varnothing$ και τότε $G \subset A^o$ εφ'όσον $G \subset A$ και G ανοικτό σύνολο. Αυτό είναι άτοπο διότι $x \in G$ ενώ $x \notin A^o$. Άρα ισχύει $G \cap (X\setminus A) \neq \varnothing$ και άρα $x \in \overline{(X\setminus A)}$.
2. Θέτουμε $B=X\setminus A$. Από το (1) έπεται ότι $X\setminus B^o=\overline{(X\setminus B)}$, δηλαδή $X\setminus (X\setminus \overline{A})^o=\overline{A}$. Ισοδύναμα ισχύει ότι $X\setminus \overline{A} = (X\setminus A)^o$.

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $D \subset X$. Το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, αν $\overline{D}=X$.
Από προηγούμενη Πρόταση, έπεται ο παρακάτω χαρακτηρισμός:
Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $\mathcal{B}$ μία βάση της $\mathcal{T}$ και $D \subset X$. Το D είναι πυκνό υποσύνολο του X αν και μόνο αν $D \cap B \neq \varnothing$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$.

Παραδείγματα:

1. Έστω Έστω $(X, \mathcal{T})$ τετριμμένος τοπολογικός χώρος. Κάθε μη κενό υποσύνολο του X είναι πυκνό.
2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας διακριτός τοπολογικός χώρος. Το μόνο πυκνό υποσύνολο του X είναι το ίδιο το X. Πράγματι, αν $D \subset X$ είναι πυκνό, τότε πρέπει $D \cap \{x\} \neq \varnothing$ για κάθε $x \in X$ επομένως $x \in D$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $D=X$.

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subset X$ και $x \in X$. Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το x περιέχει τουλάχιστον άλλο ένα στοιχείο του A, διαφορετικό του x. Δηλαδή, αν για κάθε $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G$ έχουμε ότι $G \cap (A\setminus \{x\}) \neq \varnothing$.

Σημείωση:

- Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A συμβολίζεται με A' και λέγεται παράγωγο συνόλου του A.
- Γενικά δεν ισχύει A⊂A'. Κάθε σημείο του A που δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A λέγεται μεμονωμένο. Τότε, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G του X ώστε G∩A={x}

Παράδειγμα: Έστω (X, $\mathcal{T}$) διακριτός τοπολογικός χώρος. Κάθε σημείο του X είναι μεμονωμένο εφ'όσον {x} ∈ $\mathcal{T}$. Επομένως, για κάθε A⊂X έχουμε A'=∅.

1.4 Τοπικές Έννοιες

Στην παράγραφο αυτή συνεχίζουμε την περιγραφή εσωτερικών τοπολογικών εννοιών. Το επίκεντρο της προσοχής μας είναι τώρα η συμπεριφορά της τοπολογίας κοντά σε κάθε σημείο του χώρου. Έτσι, για ένα σημείο x ενός τοπολογικού χώρου (X, $\mathcal{T}$) θεωρούμε την οικογένεια (σύστημα) όλων των περιοχών του x, όλων των υποσυνόλων δηλαδή του X που περιέχουν το σημείο στο εσωτερικό τους. Μελετούμε τις ιδιότητες αυτού του συστήματος, τον τρόπο με τον οποίο μικρότερες υποοικογένειες, οι βάσεις περιοχών, παράγουν και καθορίζουν αυτό το σύστημα και τις ιδιότητες των βάσεων περιοχών ενός σημείου.

Ορισμός: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος, x ∈ X και U⊂X. Το U είναι περιοχή του x αν x ∈ U^o. Η οικογένεια όλων των περιοχών του x είναι το σύστημα περιοχών του x και συμβολίζεται με $\mathcal{N}_x$.

Παραδείγματα:

1. Κάθε ανοικτό σύνολο G του τοπολογικού χώρου X είναι περιοχή κάθε σημείου του, εφ'όσον x ∈ G^o=G για κάθε x ∈ G.
2. Μια περιοχή ενός σημείου x ∈ X δεν είναι κατ'ανάγκη ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, στο X=ℝ το διάστημα [a,b], με a<0<b είναι περιοχή του 0, εφ'όσον 0 ∈ (a,b)=$(a, b]^o$, ενώ δεν είναι περιοχή του b αφού b ∉ $(a, b]^o$=(a,b).
3. Σε κάθε τοπολογικό χώρο, η περιοχή ενός σημείου είναι υπερσύνολο των ανοικτών συνόλων που περιέχουν το σημείο. Πράγματι, έστω x ∈

X, G⊂X ανοικτό με x ∈ G και G⊂V. Τότε V ∈ $\mathcal{N}_x$, εφ'όσον x ∈ G⊂V^o (αφού G ανοικτό και G⊂V). Αντίστροφα, για κάθε V ∈ $\mathcal{N}_x$ υπάρχει G=V^o ανοικτό ώστε x ∈ V^o⊂V.

Πρόταση: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και $\mathcal{N}_x$ το σύστημα περιοχών του x ∈ X. Τότε:

1. Αν U ∈ $\mathcal{N}_x$, τότε U ≠ ∅ (και μάλιστα x ∈ U).
2. Αν $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x$, τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_x$.
3. Αν U ∈ $\mathcal{N}_x$ και U⊂V⊂X, τότε V ∈ $\mathcal{N}_x$.
4. Αν U ∈ $\mathcal{N}_x$, τότε υπάρχει G ∈ $\mathcal{N}_x$ ώστε G⊂U και G ∈ $\mathcal{N}_y$ για κάθε y ∈ G.
5. Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X ⇔ Το G είναι περιοχή κάθε σημείου του (G ∈ $\mathcal{T}$ ⇔ $G \in \mathcal{N}_x$ για κάθε x ∈ G).

Απόδειξη:
1. Αν U ∈ $\mathcal{N}_x$, τότε x ∈ U^o⊂U.
2. Αν $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x$, τότε x ∈ U_1^o και x ∈ U_2^o άρα x ∈ $U_1^o \cap U_2^o$. Από γνωστή Πρόταση, $U_1^o \cap U_2^o = (U_1 \cap U_2)^o$ επομένως x ∈ $(U_1 \cap U_2)^o \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_x$.
3. Αν U ∈ $\mathcal{N}_x$ και U⊂V⊂X, τότε x ∈ U^o και από γνωστή Πρόταση $U^o \subset V^o$. Επομένως x ∈ V^o ⇒ V ∈ $\mathcal{N}_x$.
4. Αν U ∈ $\mathcal{N}_x$, τότε x ∈ U^o. Θέτουμε G=U^o. Από γνωστή Πρόταση $G^o = (U^o)^o = (U^o)$=G. Επομένως για κάθε y ∈ G ισχύει y ∈ G^o δηλαδή G ∈ $\mathcal{N}_y$.
5. Αν το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε G=G^o, επομένως G ∈ $\mathcal{N}_x$ για κάθε x ∈ G. Αντίστροφα, αν G ∈ $\mathcal{N}_x$ για κάθε x ∈ G, τότε x ∈ G^o για κάθε x ∈ G. Επομένως G⊂G^o. Βέβαια G^o⊂G. Άρα G=G^o και συνεπώς το G είναι ανοικτό σύνολο.

Ορισμός: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και x ∈ X. Η υποοικογένεια $\mathcal{B}_x$ του συστήματος περιοχών $\mathcal{N}_x$ του x είναι μία βάση περιοχών του x, αν για κάθε U ∈ $\mathcal{N}_x$ υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}_x$ ώστε B⊂U.

Παράδειγμα: Το ίδιο το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$ του x είναι προφανώς μία βάση περιοχών του x. Επίσης, η οικογένεια $\mathcal{B}_x$={ G⊂X: G ανοικτό και x ∈ G } είναι μία βάση περιοχών του x, εφ'όσον $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ και για κάθε U ∈ $\mathcal{N}_x$, έχουμε ότι $U^o \in \mathcal{B}_x$ και βέβαια U^o⊂U.

Πρόταση: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν για κάθε x ∈ X η οικογένεια $\mathcal{B}_x$={ B ∈ $\mathcal{B}$: x ∈ B} είναι μία βάση περιοχών του x.

Απόδειξη:

(⇒) Έστω ότι η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι μία βάση της $\mathcal{T}$ και x ∈ X. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{B}_x$ είναι μία βάση περιοχών του x. Πράγματι, για κάθε B ∈ $\mathcal{B}_x$ το B είναι ανοικτό με x ∈ B, άρα B ∈ $\mathcal{N}_x$. Επομένως, ισχύει $\mathcal{B}_x\subset\mathcal{N}_x$. Για κάθε U ∈ $\mathcal{N}_x$ έχουμε ότι x ∈ U^o. Εφ'όσον το U^o είναι ανοικτό σύνολο και η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση της τοπολογίας, από γνωστή Πρόταση, υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}$ ώστε x ∈ B⊂U. Βέβαια, B ∈ $\mathcal{B}_x$ και B⊂U.

(⇐) Έστω ότι για κάθε x ∈ X, η οικογένεια $\mathcal{B}_x$ είναι μία βάση περιοχών του x. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$. Από γνωστή Πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε G⊂X ανοικτό και για κάθε x ∈ G, υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}$ ώστε x ∈ B⊂G. Πράγματι, αν το G είναι ανοικτό και x ∈ G, τότε G ∈ $\mathcal{N}_x$. Εφ'όσον η $\mathcal{B}_x$ είναι μία βάση περιοχών του x, υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}_x$ ώστε B⊂G. Βέβαια x ∈ B⊂G και B ∈ $\mathcal{T}$.

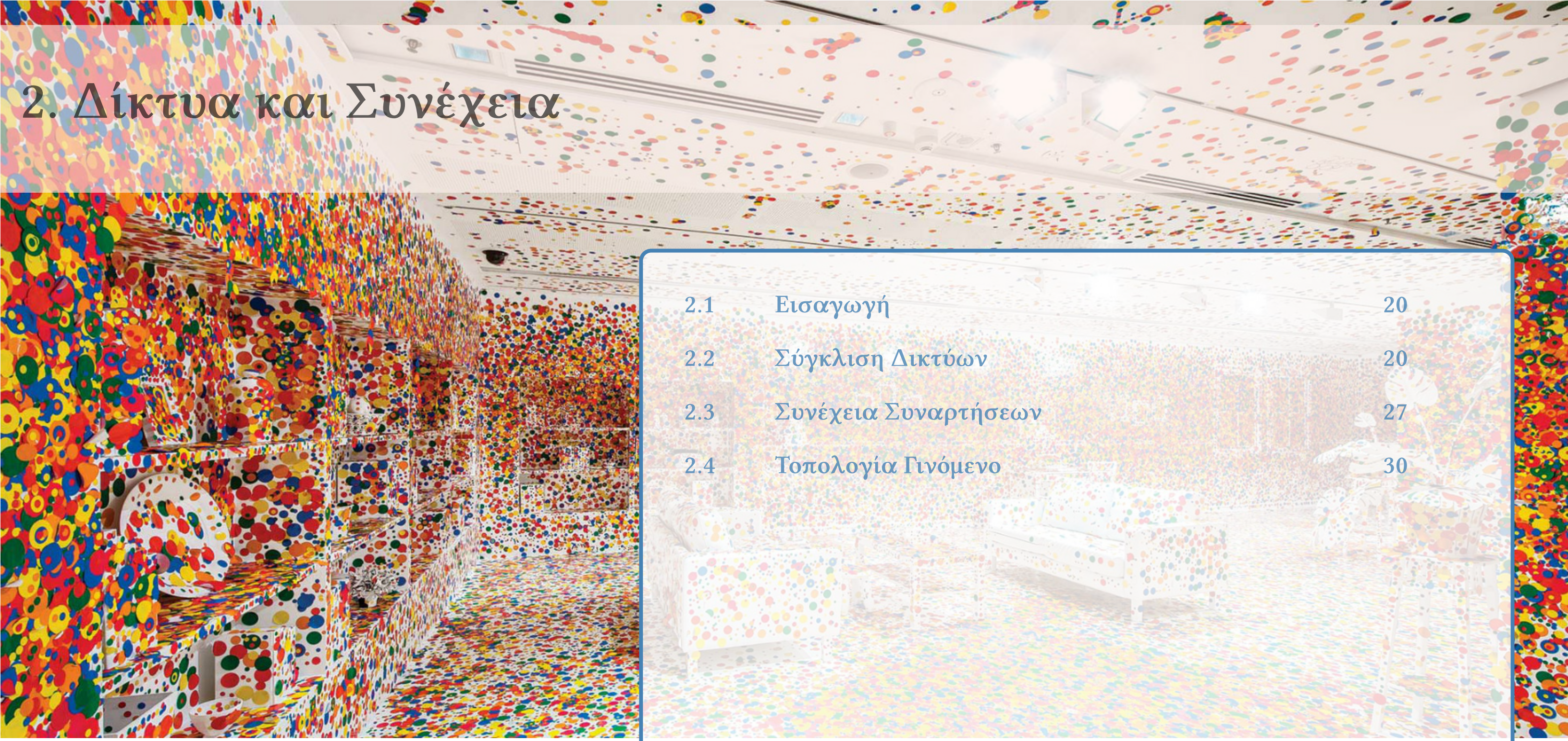
Πρόταση: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και για κάθε x ∈ X, $\mathcal{B}_x$ μία βάση περιοχών του x. Ισχύουν τα εξής:

1. Αν B ∈ $\mathcal{B}_x$, τότε B ≠ ∅ (και μάλιστα x ∈ B).
2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B_3 \subset B_1\cap B_2$.
3. Αν B ∈ $\mathcal{B}_x$, τότε υπάρχει G⊂X ώστε x ∈ G⊂B και για κάθε y ∈ G υπάρχει $B_y \in \mathcal{B}_y$ ώστε $B_y \subset$G.
4. Ένα υποσύνολο G του X είναι ανοικτό ⇔ για κάθε x ∈ G υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}_x$ ώστε B⊂G.

Απόδειξη:

1. Αν B ∈ $\mathcal{B}_x$, τότε B ∈ $\mathcal{N}_x$ άρα x ∈ $B^o\subset$B.
2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, τότε $B_1, B_2 \in \mathcal{N}_x$ άρα από γνωστή Πρόταση έπεται ότι $B_1\cap B_2 \in \mathcal{N}_x$. Εφ'όσον η $\mathcal{B}_x$ είναι μία βάση περιοχών του x, υπάρχει $B_3 \subset B_1\cap B_2$.
3. Έστω B ∈ $\mathcal{B}_x$, τότε B ∈ $\mathcal{N}_x$, άρα x ∈ B^o. Θέτουμε G=B^o, τότε x ∈ G⊂B και εφ'όσον το G είναι ανοικτό σύνολο, από γνωστή Πρόταση έχουμε ότι G ∈ $\mathcal{N}_y$ για κάθε y ∈ G. Επομένως για κάθε y ∈ G υπάρχει $B_y \in \mathcal{B}_y$ ώστε $B_y \subset$G.
4. Έστω G ανοικτό σύνολο του X. Από γνωστή Πρόταση έχουμε ότι G ∈ $\mathcal{N}_x$ για κάθε x ∈ G. Επομένως για κάθε x ∈ G υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}_x$ ώστε B⊂G. Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε x ∈ G υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}_x$, ώστε B⊂G. Εφόσον

$\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ για κάθε $x \in X$, από γνωστή Πρόταση έπεται ότι $G \in \mathcal{N}_x$ για κάθε $x \in G$. Επομένως, από γνωστή Πρόταση, το G είναι ανοικτό σύνολο.



2. Δίκτυα και Συνέχεια

2.1 Εισαγωγή

Για τη μελέτη των μετρικών χώρων και των τοπολογικών ιδιοτήτων τους, αποτέλεσαν βασικό μέσο οι ακολουθίες. Χρησίμευσαν ιδιαίτερα στον χαρακτηρισμό της κλειστότητας ενός συνόλου ή της συνέχειας μίας συνάρτησης μέσω της αρχής της μεταφοράς. Ο ορισμός της σύγκλισης ακολουθιών γενικεύεται φυσιολογικά για ακολουθίες σε τοπολογικούς χώρους. Για το λόγο αυτό, θα εξετάσουμε κατά πόσο η έννοια της ακολουθίας είναι ικανη να διατηρήσει κεντρικό ρόλο σετην ευρύτερη κλάση των τοπολογικών χώρων.

2.2 Σύγκλιση Δικτύων

Ορισμός: Έστω ο τοπολογικός χώρος X, (x_n) μία ακολουθία στον X και x $\in$ X. Η (x_n) συγκλίνει στο x αν για κάθε περιοχή U του x υπάρχει n_0=n_0(U) $\in \mathbb{N}$ ώστε $(x_n) \in$ U για κάθε $n \geqslant n_0$.

Παρατήρηση: Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $(x_n) \subset$X και x $\in$ X. Εφ'όσον για κάθε x $\in$ X μία βάση περιοχών του x είναι η οικογένεια των ανοικτών σφαιρών, ως προς τη μετρική ρ, με κέντρο το x, ο ορισμός της σύγκλισης μίας ακολουθίας για μετρικούς χώρους συμπίπτει με τον παραπάνω γενικό ορισμό. Έτσι, ο παραπάνω ορισμός γενικεύει την έννοια της σύγκλισης ακολουθιών σε αυθαίρετους τοπολογικούς χώρους.

Παραδείγματα:

1. Έστω X={α, β} με α ≠ β και $\mathcal{T}$={∅, {α}, {α,β}} (Χώρος Sierpinski).
   Η ακολουθία (x_n) του X, με x_n=α, n άρτιος
   x_n=β, n περιττός
   συγκλίνει στο β, ενώ δε συγκλίνει στο α
   Πράγματι, η μόνη περιοχή του β είναι το {α,β} και προφανώς $x_n \in$ {α,β} για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, εφ'όσον το {α} είναι περιοχή του α και για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$, n=2n_0+1>n_0 και $x_n \notin$ {α}, η ακολουθία (x_n) δε συγκλίνει στο α.

2. Έστω το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τη συμπεπερασμένη τοπολογία $\mathcal{T}$ και x_n=n για κάθε n=1,2,... Η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάθε x ∈ $\mathbb{N}$, ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$.
   Πράγματι, έστω x ∈ U ∈ $\mathcal{T}$. Τότε το σύνολο X\ U είναι πεπερασμένο, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $x_n \notin$ X\ U ⇒ $x_n \in$ U. Άρα $x_n \to$ x.

3. Στον τοπολογικό χώρο (X, $\mathcal{T}$), όπου X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{T}$ η συναριθμήσιμη τοπολογία παρατηρούμε:

   - Αν (x_n) ακολουθία στο X και x ∈ X ώστε $x_n \to$ x, τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ίση με x (Δηλαδή, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε x_n=x για κάθε $n \geqslant n_0$).
     Έστω προς άτοπο ότι η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή και ίση με x. Τότε το {$n \in \mathbb{N}$: $x_n \neq$ x} είναι άπειρο σύνολο. Άρα υπάρχει (x_{k_n}) υπακολουθια της (x_n) με $x_{k_n} \neq$ x για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε U=X\ {x_{k_n}: $n \in \mathbb{N}$}. Τότε x ∈ U ∈ $\mathcal{T}$, άρα U ∈ $\mathcal{N}_x$. Ακόμη $x_{k_n} \notin$ U για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $x_{k_n} \not\to$ x, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το ότι $x_n \to$ x.
   - Έστω x ∈ X. Θέτουμε A=X\ {x}. Τότε x ∈ $\overline{A}$.
     Πράγματι, αν x ∈ U ∈ $\mathcal{T}$, τότε το X\ U είναι αριθμήσιμο, άρα το U∩A είναι υπεραριθμήσιμο άρα μη κενό σύνολο. Έτσι, για κάθε x ∈ X έχουμε $\overline{(}$X\ {x}), αλλά δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X\ {x}, ώστε $x_n \to$ x.

Σημείωση: Τα παραπάνω παραδείγματα κάνουν φανερή, όχι μόνο τη στέρηση κάποιων συνήθων ιδιοτήτων των ακολουθιών, όπως η μοναδικότητα του ορίου (Παράδειγμα 2) αλλά και την ανικανότητά τους να περιγράψουν πλήρως έννοιες, όπως αυτή της κλειστότητας (Παράδειγμα 3).

Έτσι, η έννοια της ακολουθίας φαίνεται να είναι μάλλον ανεπαρκής για τους σκοπούς μας. Αυτή η παθογένεια εντοπίζεται, κατά κύριο λόγο, στο γεγονός ότι όλες οι βάσεις περιοχών ενός σημείου σε έναν τοπολογικό χώρο ενδέχεται να είναι (πληθαριθμικά) πολύ μεγαλύτερες από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Επομένως, επιχειρούμε να γενικεύσουμε την έννοια της ακολουθίας έτσι ώστε το νέο αντικείμενο να είναι ικανό να περιγράψει έναν τοπολογικό χώρο, όπως ακριβώς και οι ακολουθίες στους μετρικούς χώρους, επιτρέποντας στο αντικείμενο αυτό να ορίζεται σε αυθαίρετα "μεγάλα" σύνολα (τα οποία θα εφοδιάζονται με την ελάχιστη ικανή έννοια της διάταξης).

Σημείωση: Τα δίκτυα στους τοπολογικούς χώρους έχουν ακριβώς τον ίδιο ρόλο που έχουν οι ακολουθίες στους μετρικούς χώρους. Το μέτρο της γενίκευσης από την ακολουθία (που βασίζεται στους φυσικούς αριθμούς στη φυσική τους διάταξη) στο δίκτυο (που βασίζεται σε ένα οποιοδήποτε αυθαίρετα μεγάλο κατευθυνόμενο μερικά διατεταγμένο σύνολο) περιγράφει με ακρίβεια και το μέτρο γενίκευσης από τους μετρικούς στους τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός: Έστω $(\Lambda, \leqslant)$ ένα προδιατεταγμένο σύνολο. Το $(\Lambda, \leqslant)$ είναι κατευθυνόμενο αν για κάθε $\alpha,\beta \in \Lambda$ υπάρχει $\gamma \in \Lambda$, ώστε $\alpha\leqslant\gamma$ και $\beta\leqslant\gamma$.

Παραδείγματα:

1. Τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, είναι κατευθυνόμενα με τη συνηθισμένη διάταξη. Γενικότερα, κάθε ολικά διατεταγμένο σύνολο $(X,\leqslant)$ είναι κατευθυνόμενο (για κάθε $\alpha,\beta \in X$ ισχύει $\alpha\leqslant\beta$ ή $\beta\leq\alpha$, άρα θέτουμε $\gamma=\beta$ ή $\gamma=\alpha$ αντίστοιχα).

2. Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ κάθε συνόλου X είναι κατευθυνόμενο με τη σχέση:
   i. $A\leqslant B \Leftrightarrow A\subset B$
   Επίσης με τη σχέση
   ii. $A\leqslant B \Leftrightarrow B\subset A$

3. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$ του x είναι κατευθυνόμενο με τη σχέση: $U\leqslant V$ αν και μόνο αν $V\subset U$. Πράγματι, το $(\mathcal{N}_x, \leqslant)$ είναι προδιατεταγμένο και για κάθε $U,V \in \mathcal{N}_x$

ισχύει U∩V ∈ $\mathcal{N}_x$ και U⩽U∩V, V⩽U∩V.

Ορισμός: Έστω X σύνολο. Ένα δίκτυο στο X είναι μία συνάρτηση p: Λ→X, όπου (Λ, ⩽) είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Θέτουμε $p_\lambda = p(\lambda)$ για $\lambda \in \Lambda$ και συμβολίζουμε το δίκτυο με $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
Προφανώς, κάθε ακολουθία στο X είναι δίκτυο με κατευθυνόμενο σύνολο το (ℕ, ⩽) (φυσικοί αριθμοί με τη συνηθισμένη διάταξη)

Σημείωση: Όπως η έννοια της ακολουθίας εισάγεται στους μετρικούς χώρους ώστε να μελετηθεί η σύγκλισή τους, έτσι και τα δίκτυα μας ενδιαφέρουν κυρίως γιατί η σύγκλιση δικτύων είναι αρκετά ισχυρή έννοια σε αντίθεση με τη γενικά ανεπαρκή έννοια της σύγκλισης ακολουθιών στους τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός: Έστω X τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο X και x ∈ X. Το δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο σημείο x αν για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $\lambda_0 = \lambda_0(U) \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda_0 \leqslant \lambda$.
Αν το δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x, τότε γράφουμε $p_\lambda \to x$ ή $\lim p_\lambda = x$ και το x είναι ένα όριο του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Παραδείγματα:

1. Έστω (X, $\mathcal{T}$) διακριτός τοπολογικός χώρος. Ένα δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του X συγκλίνει στο σημείο x αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε x_λ=x για κάθε $\lambda_0 \leqslant \lambda$. Αυτό συμβαίναι διότι στη διακριτή τοπολογία το μονοσύνολο {x} είναι περιοχή του x.

2. Έστω (X, $\mathcal{T}$) τετριμμένος τοπολογικός χώρος. Κάθε δίκτυο του χώρου X συγκλίνει σε κάθε σημείο του X. Πράγματι, για κάθε δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του X και x ∈ X έχουμε ότι $x_\lambda \to x$, εφ'όσον η μόνη περιοχή του x είναι ο ίδιος ο χώρος X.

Παρατήρηση: Έστω $\mathcal{B}_x$ μία βάση περιοχών ενός σημείου x του τοπολογικού χώρου X. Για κάθε U ∈ $\mathcal{B}_x$ επιλέγουμε $x_u \in U$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}_x$ είναι κατευθυνόμενο με την αντίστροφη του περιέχεσθαι σχέση (δηλαδή U⩽V ⇔ $U \supset V$) και άρα ότι η συνάρτηση p: $\mathcal{B}_x \to X$ με p(U)=x_u είναι ένα δίκτυο του X. Το δίκτυο αυτό συγκλίνει στο x. Πράγματι, έστω G περιοχή του x. Υπάρχει $U_0 \in \mathcal{B}_x$, ώστε $U_0 \subset G$. Αν U ∈ $\mathcal{B}_x$ και $U_0 \leqslant U$, τότε $U \subset U_0$ και άρα $x_u \in U \subset U_0 \subset G$.

Πρόταση: Έστω X τοπολογικός χώρος, A⊂X και x ∈ X. Τότε x ∈ $\overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, ώστε p_λ ∈ A για λ ∈ Λ και το $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x.
Απόδειξη:
(⇒) Έστω x ∈ $\overline{A}$. Για κάθε U ∈ $\mathcal{N}_x$ ισχύει U∩A ≠ ∅ εφ'όσον x ∈ U^o και U^o∩A ≠ ∅ από γνωστή Πρόταση. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της επιλογής, για κάθε U ∈ $\mathcal{N}_x$ επιλέγουμε p_U ∈ U∩A. Το δίκτυο $(p_U)_{U\in\mathcal{N}x}$ συγκλίνει στο x, όπως είδαμε στην προηγούμενη Παρατήρηση.
(⇐) Έστω ότι υπάρχει δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στο X, ώστε p_λ ∈ A για λ ∈ Λ και p_λ → x. Θεωρούμε ένα ανοικτό σύνολο G με x ∈ G. Εφ'όσον p_λ → x υπάρχει λ_0 ∈ Λ ώστε p_λ ∈ G για κάθε $\lambda_0 \leqslant \lambda$, άρα G∩A ≠ ∅. Από γνωστή Πρόταση έχουμε ότι x ∈ $\overline{A}$.
Πόρισμα: Έστω X τοπολογικός χώρος και A⊂X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το A είναι κλειστό
2. Για κάθε δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ώστε p_λ ∈ A για λ ∈ Λ και p_λ → x, ισχύει x ∈ A

Πόρισμα: Έστω X τοπολογικός χώρος και A⊂X και x ∈ X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.
2. Υπάρχει δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ώστε p_λ ∈ A\ {x} για λ ∈ Λ και p_λ → x.

Ορισμός: Έστω p: (Λ, ⩽) → X ένα δίκτυο στο σύνολο X. Ένα υποδίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ καθορίζεται από ένα ζεύγος (M, φ) όπου το $(M, \prec)$ είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο, η φ: $(M, \prec)$ → (Λ, ⩽) είναι μία αύξουσα συνάρτηση (δηλαδή αν μ_1, μ_2 ∈ M, $\mu_1 \prec \mu_2$, τότε φ(μ_1) ⩽ φ(μ_1)) και η εικόνα φ(M) είναι ένα ομοτελικό υποσύνολο του Λ (δηλαδή για κάθε λ ∈ Λ υπάρχει μ ∈ M ώστε λ ⩽ φ(μ)). Το υποδίκτυο του p που καθορίζεται από το ζεύγος (M, φ) είναι η συνάρτηση q=p ∘ φ: $(M, \prec)$ → X.
Είναι σαφές ότι το υποδίκτυο ενός δικτύου στο X είναι δίκτυο στο X.
Το υποδίκτυο q=p ∘ φ: $(M, \prec)$ → X το συμβολίζουμε συνήθως με $(\mathrm{p}_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ ή με $(\mathrm{p}_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$

Παρατηρήσεις:
1. Έστω p: (Λ, $\leqslant$) $\rightarrow$ X ένα δίκτυο στο σύνολο X. Αν M είναι ένα ομοτελικό υποσύνολο Λ, με τη σχετική διάταξη $\leqslant$ και φ: M $\rightarrow$ Λ η ταυτοτική συνάρτηση τότε q=φ ∘ p: $(M, \leqslant) \rightarrow$ X είναι υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Πράγματι, αν το M είναι ομοτελικό του Λ, τότε είναι κατευθυνόμενο, εφ'όσον για μ_1, $\mu_2 \in$ M υπάρχει λ ∈ Λ ώστε μ_1, $\mu_2 \leqslant$ λ (από το ότι το Λ είναι κατευθυνόμενο) και υπάρχει $\mu \in$ M, λ $\leqslant$ μ (από το ότι το M είναι ομοτελικό με το Λ).
2. Αν $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο σε έναν τοπολογικό χώρο που δε συγκλίνει στο x ∈ X, τότε υπάρχει περιοχή U του x και ένα ομοτελικό υποσύνολο M του Λ, ώστε $x_\lambda \notin$ U για κάθε λ ∈ M.

Πρόταση: Έστω X τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο X και x ∈ X. Το δίκτιο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x.
Απόδειξη:
($\Rightarrow$) Έστω $p_\lambda \rightarrow$ x και $(\mathrm{p}_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ ένα υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Για κάθε U περιοχή του x υπάρχει λ_0 ∈ Λ ώστε $p_\lambda \in$ U για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$, αφού $p_\lambda \rightarrow$ x. Το σύνολο φ(M) είναι ομοτελικό υποσύνολο του Λ, άρα υπάρχει μ_0 ∈ M ώστε $\lambda_0 \leqslant \varphi(\mu_0)$. Για κάθε μ ∈ M με $\mu_0 \leqslant$ μ ισχύει $\lambda_0 \leqslant \varphi(\mu_0) \leqslant \varphi(\mu)$. Επομένως, $p_{\varphi(\mu)} \in$ U για κάθε $\mu_0 \leqslant$ μ. Άρα $p_{\varphi(\mu)} \rightarrow$ x.
($\Leftarrow$) Αν κάθε υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x, προφανώς $p_\lambda \rightarrow$ x.

Ορισμός: Έστω X τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο X και x ∈ X. Το x είναι οριακό σημείο του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ αν για κάθε περιοχή U του x και λ ∈ Λ υπάρχει μ ∈ Λ ώστε λ $\leqslant$ μ και $p_\mu \in$ U.

Παραδείγματα:

1. Έστω X τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο X που συγκλίνει στο x ∈ X. Το όριο x του δικτύου προφανώς είναι οριακό σημείο αυτού του δικτύου.

2. Έστω X={α, β} με α ≠ β και $\mathcal{T}$={∅, {α}, X} (Χώρος Sierpinski).
   Η ακολουθία (x_n) του X, με x_n=α, n άρτιος
   x_n=β, n περιττός
   έχει οριακό σημείο το α, ενώ δε συγκλίνει σε αυτό (όπως έχουμε δείξει).

Θεώρημα: Έστω X τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο X και x ∈ X. Το x είναι οριακό σημείο του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ αν και μόνο αν υπάχει υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ που συγκλίνει στο x.
Απόδειξη:
(⇒) Έστω x ∈ X ένα οριακό σημείο του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Θα κατασκευάσουμε ένα υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, που συγκλίνει στο x. Θέτουμε M={ (U, λ): U ∈ $\mathcal{N}_x$, λ ∈ Λ, p_λ ∈ U }.
Παρατηρούμε ότι M ≠ ∅, εφ'όσον για κάθε λ ∈ Λ, (X, λ) ∈ M.
Θέτουμε για $(\mathrm{U}_1, \lambda_1)$, $(\mathrm{U}_2, \lambda_2)$ ∈ M, $(\mathrm{U}_1, \lambda_1) \prec (\mathrm{U}_2, \lambda_2)$ αν και μόνο αν $U_2 \subset \mathrm{U}_1$ και $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

- Η σχέση ≺ είναι προδιάταξη στο M. Πράγματι, αν $(\mathrm{U}_1, \lambda_1)$, $(\mathrm{U}_2, \lambda_2)$, $(\mathrm{U}_3, \lambda_3)$ ∈ M, και $(\mathrm{U}_1, \lambda_1) \prec (\mathrm{U}_2, \lambda_2) \prec (\mathrm{U}_3, \lambda_3)$ τότε $(\mathrm{U}_1, \lambda_1) \prec (\mathrm{U}_3, \lambda_3)$, εφ'όσον $U_3 \subset \mathrm{U}_2 \subset \mathrm{U}_1$ και $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$, άρα $U_3 \subset \mathrm{U}_1$ και $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$.

- Το (M, ≺) είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Πράγματι, έστω $(\mathrm{U}_1, \lambda_1)$, $(\mathrm{U}_2, \lambda_2)$ ∈ M. Θέτουμε $U_3 = U_1 \cap \mathrm{U}_2$. Εφ'όσον το Λ είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $\lambda_1, \lambda_2 \leqslant \lambda_0$. Εφ'όσον το x είναι οριακό σημείο του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ και U_3 είναι περιοχή του x, υπάρχει $\lambda_3 \in \Lambda$ ώστε $p_{\lambda_3} \in U_3$ και $\lambda_0 \leqslant \lambda_3$. Παρατηρούμε ότι $(\mathrm{U}_3, \lambda_3)$ ∈ M και $(\mathrm{U}_1, \lambda_1)$, $(\mathrm{U}_2, \lambda_2) \prec (\mathrm{U}_3, \lambda_3)$.

- Θέτουμε φ: $(M, \prec) \to (\Lambda, \leqslant)$ με φ(U, λ)=λ. Η φ είναι αύξουσα συνάρτηση. Πράγματι, έστω μ_1=$(\mathrm{U}_1, \lambda_1) \prec (\mathrm{U}_2, \lambda_2)$=$\mu_2$. Τότε $\varphi(\mu_1) = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 = \varphi(\mu_2)$.

- Το φ(M) είναι ομοτελικό με το Λ. Πράγματι, για λ ∈ Λ, το μ=(X, λ) ∈ M και φ(μ)=λ. Άρα φ(M)=Λ.

- Το υποδίκτυο q=p ∘ φ συγκλίνει στο x. Πράγματι, έστω $U_0 \in \mathcal{N}_x$. Εφ'όσον το x είναι οριακό σημείο του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $p_{\lambda_0} \in U_0$. Θέτουμε μ_0=$(\mathrm{U}_0, \lambda_0)$ ∈ M. Έστω τώρα μ=(U, λ) ∈ M, με $\mu_0 \prec \mu$. Τότε $U_0 \in \mathcal{N}_x$, $\lambda \in \Lambda$, $p_\lambda \in$ U και U⊂U_0, $\lambda_0 \leqslant \lambda$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $p_{\varphi(\mu)} \in U_0$. Πράγματι, $p_{\varphi(\mu)}$=$p_\lambda \in$ U⊂U_0.

(⇐) Έστω $(\mathrm{p}_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ώστε $p_{\varphi(\mu)} \to$ x. Θέλουμε να δείξουμε ότι το x είναι οριακό σημείο του αρχικού δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Έστω U_0 περιοχή του x, $\lambda_0 \in \Lambda$ και θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ ώστε $\lambda_0 \leqslant \lambda$ και $p_\lambda \in U_0$. Εφ'όσον το φ(M) είναι ομοτελικό υποσύνολο του Λ, έπεται ότι υπάρχει μ_0 ∈ M ώστε $\lambda_0 \leqslant \varphi(\mu_0)$. Εφ'όσον $p_{\varphi(\mu)} \to$ x, υπάρχει μ

$\in$ M, $\mu_0 \leqslant \mu$, ώστε $p_{\varphi(\mu)} \in U_0$. Θέτουμε λ=φ(μ) $\in$ Λ και έχουμε ότι $\lambda_0 \leqslant \lambda$ και p_λ=$p_{\varphi(\mu)} \in U_0$.

2.3 Συνέχεια Συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $f: X \to Y$ μία συνάρτηση και $x_0 \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε περιοχή V του $f(x_0)$ υπάρχει περιοχή U του x_0 ώστε f(U)⊂V.
Η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$.

Παραδέιγματα:

1. Έστω (X, ρ), (Y, σ) μετρικοί χώροι, $f: X \to Y$ μία συνάρτηση και $x_0 \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_0 με την έννοια του ορισμού στους μετρικούς χώρους αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0 ως προς τις τοπολογίες $\mathcal{T}_\rho$, $\mathcal{T}_\sigma$ αντίστοιχα.

2. Κάθε σταθερή συνάρτηση $f: X \to Y$ με $f(x)$=y_0 για κάθε $x \in X$ είναι συνεχής

3. Κάθε συνάρτηση από ένα διακριτό χώρο σε έναν οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο είναι συνεχής.
   Πράγματι, έστω $f: X \to Y$ όπου X διακριτός τοπολογικός χώρος και x $\in$ X. Για κάθε περιοχή V του $f(x)$ υπάρχει η περιοχή U={x} του x, ώστε f(U)⊂V.

Θεώρημα: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Η είναι f συνεχής

2. Για κάθε G ανοικτό υποσύνολο του Y, το f^{-1}(G) είναι ανοικτό υποσύνολο του X

3. Για κάθε F κλειστό υποσύνολο του Y, το f^{-1}(F) είναι κλειστό υποσύνολο του X

4. Για κάθε A υποσύνολο του X ισχύει $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Απόδειξη:
(1⇒2) Έστω G⊂Y ανοικτό και x $\in f^{-1}$(G). Εφ'όσον $f(x) \in$ G και το G είναι

ανοικτό, έπεται ότι το G είναι περιοχή του $f(x)$. Από το (1) υπάρχει περιοχή U του x, ώστε f(U)⊂G. Άρα x ∈ U^o⊂U⊂f^{-1}(G). Επομένως το f^{-1}(G) είναι ανοικτό ως περιοχή κάθε σημείου του.

(2⇒3) Έστω F⊂Y κλειστό. Τότε το σύνολο Y\ F είναι ανοικτό. Από το (2) έπεται ότι το f^{-1}(Y\ F)⊂X είναι ανοικτό. Όμως f^{-1}(Y\ F)=X\ f^{-1}(F). Επομένως το f^{-1}(F) είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(3⇒4) Έστω A⊂X. Εφ'όσον f(A)⊂$\overline{f(A)}$, έπεται ότι A⊂$f^{-1}(\overline{f(A)})$. Εφ'όσον το $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, από το (3) έπεται ότι το $f^{-1}(\overline{f(A)})$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Από γνωστή Πρόταση στην Κλειστότητα έπεται ότι $\overline{A}$⊂$f^{-1}(\overline{f(A)})$, επομένως ισχύει $f(\overline{A})$⊂$\overline{f(A)}$.

(4⇒1) Έστω $x \in$ X. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Έστω V ανοικτή περιοχή του $f(x)$. Θέτουμε A=X\ f^{-1}(V)=f^{-1}(Y\ V). Τότε f(A)⊂$Y\setminus V$ και παρατηρούμε ότι το $Y\setminus V$ είναι κλειστό σύνολο. Από την (4) έχουμε $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\subset\overline{(Y\setminus V)}=Y\setminus V$.

Θέτουμε U=$X\setminus\overline{A}$ και παρατηρούμε ότι το U είναι ανοικτό και $x\in$ U (εφ'όσον αν $x \notin$ U τότε $x\in\overline{A}$ άρα $f(x)\in f(\overline{A})\subset Y\setminus V$, άτοπο από την παραπάνω σχέση). Τέλος, U⊂$X\setminus A$=f^{-1}(V), άρα f(U)⊂$f(f^{-1}$(V))⊂V.

Παρατήρηση: Έστω (X, $\mathcal{T}$), (Y, $\mathcal{S}$) τοπολογικοί χώροι, $\mathcal{B}$ μία βάση της $\mathcal{S}$ και f: X → Y μία συνάρτηση. Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα f^{-1}(B) κάθε βασικού συνόλου B ∈ $\mathcal{B}$ του Y είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Πράγματι, αν η f είναι συνεχής, τότε για κάθε B ∈ $\mathcal{B}$ το σύνολο f^{-1}(B) είναι ανοικτό υποσύνολο του X, εφ'όσον $\mathcal{B}\subset\mathcal{S}$. Αντίστροφα, έστω ότι f^{-1}(B) είναι ανοικτό υποσύνολο του X, για κάθε B ∈ $\mathcal{B}$. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο του G του Y, υπάρχουν $B_i \in \mathcal{B}$, με i ∈ I, ώστε G=$\bigcup_{i\in I} B_i$. Άρα το σύνολο f^{-1}(G)=$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών. Από το προηγούμενο Θεώρημα, η f είναι συνεχής.

Πρόταση: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, f: X → Y μία συνάρτηση και x_0 ∈ X. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στο X που συγκλίνει στο x_0, το δίκτυο $(f(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ στο Y συγκλίνει στο $f(x_0)$.

Απόδειξη:

(⇒) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και το δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x_0. Θα δείξουμε ότι το δίκτυο $(f(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $f(x_0)$. Έστω V περιοχή του $f(x_0)$. Τότε, εφ'όσον η f είναι συνεχής σο x_0, υπάρχει περιοχή U

του x_0 ώστε $f(\mathrm{U})\subset\mathrm{V}$. Εφ'όσον το $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x_0, υπάρχει $\lambda_0\in\Lambda$, ώστε $p_\lambda\in\mathrm{U}$ για κάθε $\lambda\geqslant\lambda_0$. Άρα $f(p_\lambda)\in\mathrm{V}$ για κάθε $\lambda\geqslant\lambda_0$. Επομένως το $(f(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.
($\Leftarrow$) Έστω ότι για κάθε δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στο X που σγκλίνει στο x_0, το δίκτυο $(f(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $f(x_0)\in\mathrm{Y}$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει περιοχή V του $f(x_0)$, ώστε για κάθε περιοχή U του x_0 ισχύει $f(U)\setminus V\neq\varnothing$. Επιλέγουμε $p_U\in\mathrm{U}$ ώστε $f(p_U)\in f(U)\setminus V$ για $\mathrm{U}\in\mathcal{N}_{x_0}$. Το δίκτυο $(p_U)_{U\in\mathcal{N}x_0}$ συγκλίνει στο x_0 εφ'όσον $p_U\in\mathrm{U}$ για κάθε $\mathrm{U}\in\mathcal{N}_{x_0}$. Όμως το δίκτυο $f(p_U)_{U\in\mathcal{N}x_0}$ δε συγκλίνει στο $f(x_0)$, εφ'όσον $f(p_U)\notin\mathrm{V}$, για κάθε $\mathrm{U}\in\mathcal{N}_{x_0}$. Άτοπο. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

Πόρισμα: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f\colon \mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ μία συνάρτηση. Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του X που συγκλίνει σε κάποιο $x\in\mathrm{X}$, το δίκτυο $(f(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ του Y συγκλίνει στο $f(x)$.
Απόδειξη: Άμεση από την προηγούμενη Πρόταση.

Παρατήρηση: Η ισοδυναμία της προηγούμενης Πρότασης δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα δίκτυα με ακολουθίες. Υπάρχει δηλαδή μία συνάρτηση $f\colon \mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ και $x_0\in\mathrm{X}$, ώστε για κάθε ακολουθία (x_n) στο X που συγκλίνει στο x_0 και η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$, ενώ η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Έστω $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ ο χώρος των πραγματικών αριθμών με τη συναριθμήσιμη τοπολογία και $I\colon(\mathbb{R},\mathcal{T})\to\mathbb{R}$ η ταυτοτική απεικόνιση του χώρου αυτού στον χώρο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τη συνηθισμένη τοπολογία. Κάθε ακολουθία $(x_n)\subset\mathbb{R}$ που συγκλίνει ως προς την $\mathcal{T}$ στο $x\in\mathbb{R}$ είναι τελικά ίση με x (έχει αποδειχθεί σε προηγούμενο Παράδειγμα), οπότε η (x_n)=$(I(x_n))$ συγκλίνει στο x=$I(x)$ και ως προς τη συνηθισμένη τοπολογία του $\mathbb{R}$. Όμως, η f δεν είναι συνεχής, διότι για κάθε α, β $\in\mathbb{R}$ έχουμε I^{-1}((α, β))=(α, β) και το σύνολο (α, β) είναι ανοικτό ως προς τη συνηθισμένη τοπολογία του $\mathbb{R}$ ενώ δεν είναι ανοικτό ως προς τη συναριθμήσιμη τοπολογία.

Πρόταση: Έστω X, Y, Z τοπολογικοί χώροι, $f\colon \mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ και $g\colon \mathrm{Y}\to\mathrm{Z}$ συνεχείς συναρτήσεις και $x_0\in\mathrm{X}$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση $g\circ f\colon \mathrm{X}\to\mathrm{Z}$ είναι συνεχής στο x_0.
Απόδειξη: Έστω $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο που συγκλίνει στο x_0. Εφ'όσον η f είναι συνεχής στο x_0, το δίκτυο $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $f(x_0)$ και εφ'όσον η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, το δίκτυο $(g(f(x_\lambda)))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $g(f(x_0))$.

Επομένως, από προηγούμενη Πρόταση, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Ορισμός: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση f: X → Y είναι ομοιομορφισμός αν είναι 1-1, επί, συνεχής και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}: Y → X είναι συνεχής. Αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός f: X → Y τότε οι χώροι X, Y λέγονται ομοιομορφικοί. Το γεγονός αυτό συμβολίζεται με X ∼ Y.
Για παράδειγμα, η απεικόνιση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)$=2x-1 είναι ομοιομορφισμός, με f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} := \frac{y+1}{2}$ συνεχή.

Παρατηρήσεις:

1. X ∼ X (η ταυτοτική συνάρτηση είναι ομοιομορφισμός)
2. Αν X ∼ Y τότε Y ∼ X (αν η f: X → Y είναι ομοιομορφισμός, τότε και η f^{-1}: Y → X είναι ομοιομορφισμός)
3. Αν X ∼ Y και Y ∼ Z τότε X ∼ Z (αν οι f: X → Y και g: Y → Z είναι ομοιομορφισμοί, τότε και η $g \circ f$: X → Z είναι ομοιομορφισμός)

2.4 Τοπολογία Γινόμενο

Η καρτεσιανή τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο τοπολογικών χώρων είναι μια κατασκευή που έχει ιδιαίτερη σημασία στη Γενική Τοπολογία. Η περίπτωση της τοπολογίας γινόμενο δύο ή γενικότερα πεπερασμένου πλήθους χώρων ορίζεται με προφανή τρόπο και ασφαλώς παρουσιάζει χρησιμότητα.

Ορισμός: Έστω n ∈ ℕ, X_1, ..., X_n σύνολα και $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων αυτών. Η συνάρτηση π_i : X→X_i με $\pi_i(x)$ =x_i για i=1, 2, ..., n είναι η i-προβολή ή προβολή i-τάξης για i=1, 2, ..., n αντίστοιχα.

Ορισμός: Έστω n ∈ ℕ και (X_1, $\mathcal{T}_1$), (X_2, $\mathcal{T}_2$), ..., (X_n, $\mathcal{T}_n$) τοπολογικοί χώροι. Η οικογένεια $\mathcal{B}$=$\{G_1 \times G_2 \times \cdots G_n : G_1 \in \mathcal{T}_1, ..., G_n \in \mathcal{T}_n\}$ είναι βάση για μία (μοναδική) τοπολογία $\mathcal{T}$ του καρτεσιανού γινομένου $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Η τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγεται καρτεσιανή τοπολογία ή τοπολογία γινόμενο του X και η οικογένεια $\mathcal{B}$ κανονική βάση της καρτεσιανής τοπολογίας του

X.

Παρατηρήσεις:

1. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ έχει τις δύο ιδιότητες γνωστού Θεωρήματος των βάσεων τοπολογίας, επομένως είναι βάση για μία (μοναδική) τοπολογία του $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

2. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ γενικά δεν είναι μία τοπολογία του X εφ'όσον η ένωση δύο στοιχείων της $\mathcal{B}$ δεν είναι πάντα στοιχείο της $\mathcal{B}$.

3. Αν $\mathcal{B}_1$, ..., $\mathcal{B}_n$ είναι βάσεις των τοπολογιών $\mathcal{T}_1$, ..., $\mathcal{T}_n$ αντίστοιχα, τότε είναι απλό να ελεγχθεί ότι η οικογένεια $\{\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$: $B_i \in \mathcal{B}_i$ για i=1, 2, ..., n $\}$ είναι επίσης μία βάση της καρτεσιανής τοπολογίας του $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

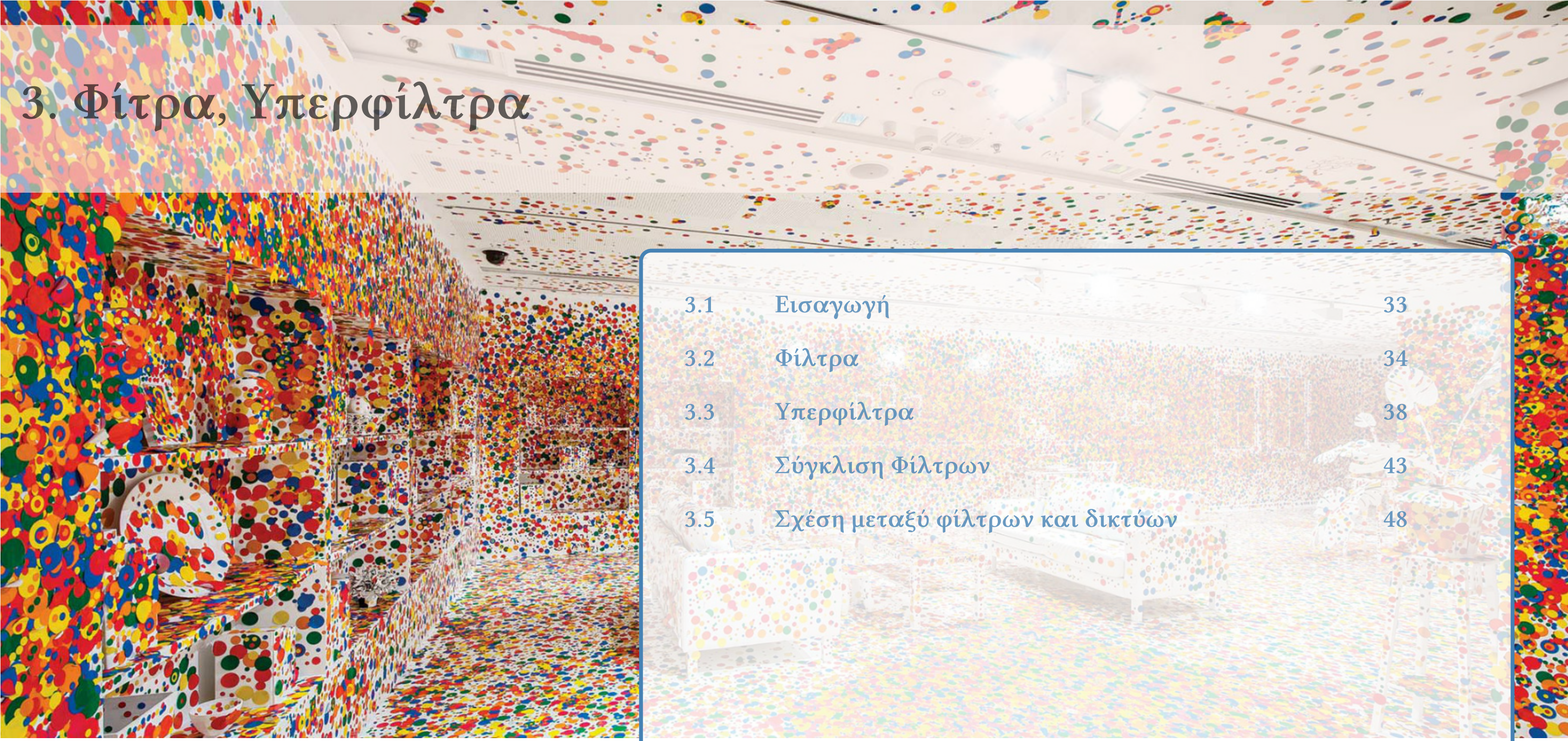
Η καρτεσιανή τοπολογία (ή τοπολογία γινόμενο) αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν ορίζεται στο καρτεσιναό γινόμενο μίας αυθαίρετης (πεπερασμένης ή άπειρης) οικογένειας τοπολογικών χώρων. Στη γενική αυτή περίπτωση ο ορισμός της καρτεσιανής τοπολογίας δεν είναι προφανής.

Ορισμός: Έστω X_i, i ∈ I μία οικογένεια συνόλων με σύνολο δεικτών το αυθαίρετο σύνολο I. Το καρτεσιανό γινόμενο της οικογένειας αυτής είναι το σύνολο X=$\prod_{i\in I} X_i$={x: I → $\bigcup_{i\in I} X_i$: x(i) ∈ X_i για κάθε i ∈ I}.
Τα στοιχεία του X συμβολίζονται με x=$(x_i)_{i\in I}$, όπου x_i=x(i) για i ∈ I.
Η συνάρτηση $\pi_i : X \to X_i$ με $\pi_i(x)$ =x$_i$ είναι η i-προβολή ή προβολή i-τάξης για i ∈ I.
Από το αξίωμα της επιλογής, αν για κάθε i ∈ I τα σύνολα X_i είναι μη κενά, τότε το X είναι μη κενό σύνολο.

Ορισμός: Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)$, i ∈ I μια οικογένεια τοπολογικών χώρων με δύνολο δεικτών το αυθαίρετο σύνολο I. Η καρτεσιανή τοπολογία ή τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}$ του καρτεσιανού γινομένου X=$\prod_{i\in I} X_i$ είναι η τοπολογία που έχει ως βάση $\mathcal{B}$ την οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής:
$\prod_{i\in I} G_i$ με $G_i \in \mathcal{T}_i$ για i ∈ I και το σύνολο δεικτών {i ∈ I: $G_i \neq X_i$} είναι (το πολύ) πεπερασμένο.
Δηλαδή, η βάση $\mathcal{B}$ της καρτεσιανής τοπολογίας είναι η οικογένεια
$\mathcal{B}$={ $\prod_{i\in I} G_i$: $G_i \in \mathcal{T}_i$ για i ∈ I και {i ∈ I: $G_i \neq X_i$} πεπερασμένο }.

Πρόταση: Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)$, i ∈ I μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και $\mathcal{T}$ η καρτεσιανή τοπολογία του X=$\prod_{i\in I} X_i$. Τότε:
(1) Η οικογένεια $\mathcal{C}$={π_i : $i \in$ I, G ∈ $\mathcal{T}_i$} είναι μία υποβάση της $\mathcal{T}$.
(2) Η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία του X, ώστε κάθε προβολή π_i : X→X_i, i ∈ I να είναι συνεχής.
(3) Ένα δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του X συγκλίνει στο x ∈ X ως προς την $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν για κάθε i ∈ I το δίκτυο $(\pi_i(\mathrm{x}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $\pi_i(x)$.
(4) Μία συνάρτηση f: Y→X είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις f_i: Y→X_i, με f_i=$\pi_i \circ f$, είναι συνεχείς για κάθε i ∈ I.

Απόδειξη:
(1) Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η βάση $\mathcal{B}$ της $\mathcal{T}$ είναι η οικογένεια όλων των τομών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{C}$. Πράγματι, αν { $\prod_{i\in I} G_i$ ∈ $\mathcal{B}$ με $G_i \in \mathcal{T}_i$ για i ∈ I και {i ∈ I: $G_i \neq X_i$}={i_1, ..., i_n} πεπερασμένο, τότε { $\prod_{i\in I} G_i$=$\bigcap_{k\leq 1\leq n} \pi_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$
(2) Έστω i ∈ I. Για κάθε G⊂X_i ανοικτό το $\pi_i^{-1}(G) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, όπου $\mathcal{B}$ η βάση της $\mathcal{T}$. Επομένως η π_i είναι συνεχής (από γνωστό Θεώρημα στη Συνέχεια Συναρτήσεων).
Έστω $\mathcal{S}$ μία τοπολογία του X, ώστε κάθε προβολή π_i, i ∈ I είναι συνεχής. Τότε για κάθε i ∈ I και $G_i \in \mathcal{T}_i$, έχουμε ότι $\pi_i^{-1}(G) \in \mathcal{S}$. Άρα $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ και άρα $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$.
(3) (⇒) Αν το δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του X συγκλίνει στο x ∈ X, τότε το δίκτυο $(\pi_i(\mathrm{x}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ του X_i συγκλίνει στο π_i(x) για i ∈ I εφ'όσον από το (2) οι προβολές π_i, i ∈ I είναι συνεχείς συναρτήσεις
(⇐) Έστω ότι $\pi_i(\mathrm{x}_\lambda) \to x_i$ για κάθε i ∈ I. Θέτουμε x=$(x_i)_{i\in I}$ ∈ X και έστω U μία περιοχή του x στο X. Άρα υπάρχουν i_1, ..., i_n ∈ I και $G_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$ για k=1, 2, ..., n, ώστε x ∈ $\bigcap_{k\leq 1\leq n} \pi_{i_k}^{-1}(\mathrm{G}_{i_k}) \subset U$.
Εφ'όσον $\pi_{i_k}(x_\lambda) \to x_{i_k}$, υπάρχει $\lambda_k \in \Lambda$ ώστε $\pi_{i_k}(x_\lambda) \in G_{i_k}$ για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_k$, k=1, 2, ..., n. Επιλέγουμε $\lambda_0 \in \Lambda$, ώστε $\lambda_0 \geqslant \lambda_k$ για κάθε k=1, ..., n. Τότε $x_\lambda \in \bigcap_{k\leq 1\leq n} \pi_{i_k}(G_{i_k}) \subset U$ για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$. Άρα $x_\lambda \to$x.
(4) (⇒) Αν η συνάρτηση f: Y→X είναι συνεχής, τότε και οι συναρτήσεις f_i=$\pi_i \circ f$ για i ∈ I είναι συνεχείς ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
(⇐) Έστω ότι οι συναρτήσεις f_i=$\pi_i \circ f$ είναι συνεχείς για κάθε i ∈ I και y_λ ένα δίκτυο του Y που συγκλίνει στο y ∈ Y. Τότε, από γνωστή Πρόταση, έχουμε ότι $\pi_i(f(y_\lambda))$=$f_i(y_\lambda) \to f_i$(y)=$\pi_i(f$(y)) για κάθε i ∈ I. Επομένως, από το (3), έχουμε ότι $f(y_\lambda) \to f$(y) ως προς την $\mathcal{T}$. Άρα η f είναι συνεχής.



3. Φίτρα, Υπερφίλτρα

Η έννοια των φίλτρων πρωτοεμφανίστηκε το 1914 σε άρθρο του Root. Η έννοια όμως των φίλτρων όπως την ξέρουμε σήμερα εμφανίστηκε το 1936 στα άρθρα του H.Cartan, "Theorie des Filters" και "Filtres et Ultrafilters" με σκοπό τη γενίκευση των ακολουθιών. Η πιο ολοκληρωμένη μελέτη των φίλτρων έγινε το 1961 από τον Kovalsky

3.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε, η ανεπάρκεια των ακολουθιών στους τοπολογικούς χώρους οδήγησε στην ανάγκη να ορίσουμε την έννοια των δικτύων για να περιγράψουμε έννοιες όπως η κλειστότητα, η συνέχεια συνάρτησης κ.α (σε αυτούς τους χώρους). Ταυτόχρονα, προς την ίδια κατεύθυνση, ορίστηκε επίσης η συνολοθεωρητική έννοια των φίλτρων ώστε η σύγκλισή τους να είναι αρκετά ισχυρή και να περιγράφει ορισμένες ιδιότητες των χώρων. Συνεπώς, απ΄ τη μια έχουμε τα δίκτυα, η δομή των οποίων μοιάζει πολύ με τη δομή των ακολουθιών και γι΄ αυτό οι προτάσεις που ισχύουν για τις ακολουθίες προσαρμόζονται σχετικά εύκολα ώστε να ισχύουν και για τα δίκτυα. Απ΄ την άλλη έχουμε τα φίλτρα, η δομή των οποίων είναι καθαρά συνολοθεωρητική και μοιάζει με τη δομή των τοπολογιών.

3.2 Φίλτρα

Ορισμός: Έστω σύνολο X. Μία μη κενή κλάση $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X ονομάζεται φίλτρο στο X αν

1. Για κάθε F ∈ $\mathcal{F}$, F ≠ ∅
2. Αν $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$
3. Αν F ∈ $\mathcal{F}$ και F⊂G ⇒ G ∈ $\mathcal{F}$

Παρατήρηση: Η δεύτερη συνθήκη μπορεί να αντικατασταθεί από την ισοδύναμη:
αν $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \in \mathcal{F}$ (Ιδιότητα της πεπερασμένης τομής).

Παραδείγματα:

1. Η κλάση $\mathcal{P}(X)$ δεν είναι φίλτρο στο X, αφού ∅ ∈ $\mathcal{P}(X)$
2. Έστω σύνολο X και A ένα υποσύνολό του. Τότε η κλάση $\mathcal{F}$={F⊂X: A⊂F} είναι ένα φίλτρο. Το φίλτρο αυτό ονομάζεται τετριμμένο φίλτρο.
   Κατά συνέπεια, η κλάση $\mathcal{F}$={F⊂X: x ∈ F} είναι το τετριμμένο φίλτρο που αντιστοιχεί στο σύνολο {x}
3. Έστω τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$). Τότε για κάθε x ∈ X, το σύστημα περιοχών του x, $\mathcal{N}$(x), είναι ένα φίλτρο στο X.

Πρόταση: Αν $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ είναι μία οικογένεια φίλτρων σε ένα σύνολο X, τότε η τομή $\mathcal{F}=\bigcap\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ είναι ένα φίλτρο στο X.

Ορισμός: Έστω σύνολο X και $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ δύο φίλτρα στο X τέτοια ώστε $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Τότε λέμε ότι το φίλτρο $\mathcal{F}$ είναι ασθενέστερο του $\mathcal{G}$ και το $\mathcal{G}$ ισχυρότερο του $\mathcal{F}$.

Πρόταση: Έστω $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ μία οικογένεια φίλτρων στο X τέτοια ώστε για κάθε κ, $\lambda \in I$ να ισχύει $\mathcal{F}_\kappa \subset \mathcal{F}_\lambda$ ή $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{F}_\kappa$. Τότε η κλάση $\mathcal{G}=\bigcup\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ είναι ένα φίλτρο στο X.
Απόδειξη:
(1) Επειδή για κάθε i ∈ I, το $\mathcal{F}_i$ είναι ένα φίλτρο θα ισχύει $F \neq \emptyset$, για κάθε $F \in \mathcal{F}_i$. Έτσι, για κάθε $G \in \mathcal{G}$, υπάρχει i ∈ I: $G \in \mathcal{F}_i \Rightarrow G \neq \emptyset$.

(2) Αν G_1, $G_2 \in \mathcal{G}$, υπάρχουν κ, $\lambda \in I$: $G_1 \in \mathcal{F}_\kappa$ και $G_2 \in \mathcal{F}_\lambda$. Επειδή το $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ είναι ολικά διατεταγμένο, θα έχουμε ότι υπάρχει $\mu \in I$: G_1, $G_2 \in \mathcal{F}_\mu \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{F}_\mu \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$.
(3) Αν $G \in \mathcal{G}$ και $G \subset U$, τότε υπάρχει $\mathrm{i} \in I$: $G \in \mathcal{F}_i \Rightarrow U \in \mathcal{F}_i \Rightarrow U \in \mathcal{G}$.

"Όπως στους τοπολογικούς χώρους μπορούμε να παράγουμε τοπολογίες από μικρότερες κλάσεις συνόλων, τις βάσεις τοπολογίας, έτσι και εδώ μπορούμε να παράγουμε φίλτρα από μικρότερες κλάσεις συνόλων, τις βάσεις φίλτρων."

Ορισμός: Μία κλάση $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του Χ λέγεται βάση φίλτρου αν

1. Για κάθε $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \varnothing$
2. αν B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$, υπάρχει $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, $B_3 \in \mathcal{B}$

Θεώρημα: Έστω $\mathcal{B}$ μία βάση φίλτρου στο Χ. Τότε η κλάση $\mathcal{F} = \{F \subset X$: $\exists$ $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $B \subset F\}$ είναι ένα φίλτρο στο Χ. Το φίλτρο αυτό λέμε ότι παράγεται από τη βάση $\mathcal{B}$ και η βάση $\mathcal{B}$ λέγεται βάση του φίλτρου $\mathcal{F}$.
Απόδειξη:
(1) Αφού για κάθε $F \in \mathcal{F}$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $B \subset F$ και η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου, έπεται ότι για κάθε $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \varnothing$
(2) Αν F_1, $F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow$ Υπάρχουν B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε $B_1 \subset F_1$ και $B_2 \subset F_2$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου, υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Όμως $B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2 \Rightarrow B_3 \subset F_1 \cap F_2 \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$
(3) Έστω $F \in \mathcal{F}$ και $F \subset G$. Τότε, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$: $B \subset F \subset G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$.

Παρατήρηση: Απ'τη δεύτερη συνθήκη του ορισμού της βάσης φίλτρου, φαίνεται ότι κάθε βάση φίλτρου $\mathcal{B}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Αντίστροφα, αν $\mathcal{G}$ είναι μία κλάση με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, τότε θέτοντας $\mathcal{B}=\{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$: $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{G}\}$ παίρνουμε μία βάση φίλτρου. Δηλαδή, κάθε κλάση συνόλων με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής περιέχεται σε μία βάση φίλτρου. Επειδή κάθε βάση φίλτρου περιέχεται στο φίλτρο που παράγει, θα έχουμε ότι κάθε κλάση συνόλων με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής περιέχεται σε κάποιο φίλτρο.

Παραδείγματα:

1. Κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο Χ είναι και βάση φίλτρου και το φίλτρο που πα-

ράγει είναι το ίδιο το $\mathcal{F}$.

2. Σε έναν τοπολογικό χώρο (X, $\mathcal{T}$), η βάση περιοχών $\mathcal{B}$(x) ενός σημείου x του X είναι βάση φίλτρου και το φίλτρο που παράγει είναι το φίλτρο περιοχών του x, $\mathcal{N}$(x).

3. Έστω σύνολο X και x ∈ X. Η κλάση $\mathcal{B}$={{x}} είναι μία βάση φίλτρου και το φίλτρο που παράγει είναι το τετριμμένο φίλτρο που αντιστοιχεί στο σύνολο {x}.

Πρόταση: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία σημείων του συνόλου X. Για κάθε n ∈ ℕ θεωρούμε το σύνολο T_n={x_m : $m \geqslant$ n} και την κλάση $\mathcal{B}$={T_n: n ∈ ℕ}. Τότε η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου. Το φίλτρο που παράγεται από τη βάση αυτή λέγεται στοιχειώδες φίλτρο που αντιστοιχεί στην ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Απόδειξη: Προφανώς, για κάθε n ∈ ℕ, $T_n \neq \varnothing$. Επίσης, αν T_κ,$T_\lambda \in \mathcal{B}$ και θέσουμε μ=max{κ, λ} έχουμε ότι υπάρχει $T_\mu \in \mathcal{B}$: $T_\mu \subset T_\kappa \cap T_\lambda$. Δηλαδή ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη του ορισμού και επομένως η κλάση $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου.

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη Πρόταση φαίνεται ότι σε κάθε ακολουθία μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα φίλτρο. Με αυτή τη λογική, τα φίλτρα μπορούν να θεωρηθούν γενικεύσεις των ακολουθιών (δεν είναι απαραίτητα αριθμήσιμα και δεν έχουν σύνολο δεικτών(όπως οι ακολουθίες το ℕ). Είναι σύνολα συνόλων και, όπως θα δούμε παρακάτω, έχουμε σύγκλιση με τις λιγότερες δυνατές προϋποθέσεις.

Πρόταση: Έστω $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ δύο φίλτρα στο X, τέτοια ώστε για κάθε $F \in \mathcal{F}$ και για κάθε $G \in \mathcal{G}$ να ισχύει $F \cap G \neq \varnothing$. Τότε, η κλάση $\mathcal{B}$={$F \cap G$: $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$} είναι μία βάση φίλτρου και το φίλτρο που παράγει είναι ισχυρότερο από τα $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$.
Απόδειξη: Η κλάση $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου, επειδή:
(1) Για κάθε $F \in \mathcal{F}$ και για κάθε $G \in \mathcal{G}$ ισχύει $F \cap G \neq \varnothing \Rightarrow \varnothing \notin \mathcal{B}$.
(2) Έστω B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$. Τότε B_1=$F_1 \cap G_1$ και B_2=$F_2 \cap G_2$ με F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$, G_1, $G_2 \in \mathcal{G}$. Οπότε $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ και $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$. Επομένως $(F_1 \cap F_2) \cap (G_1 \cap G_2) \in \mathcal{B}$ $\Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Δηλαδή, για κάθε B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$, υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ (B_3=$B_1 \cap B_2$) τέτοιο ώστε $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
Οπότε, η κλάση $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου και έστω $\mathcal{F}$ το φίλτρο που παράγει. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ και $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$.

Από προηγούμενο Θεώρημα, έχουμε ότι $\mathcal{U}= \{U \subset X\colon \exists\ B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $B \subset U\}=\{U \subset X\colon \exists\ F \in \mathcal{F}$ και $G \in \mathcal{G}$ τέτοια ώστε $F \cap G \subset U\}$. Έτσι, αν $F \in \mathcal{F}$ και $G \in \mathcal{G}$, δεδομένου ότι $X \in \mathcal{F}$ και $X \in \mathcal{G}$, έχουμε ότι $F=F \cap X \in \mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ και $G=G \cap X \in \mathcal{B} \subset \mathcal{U}$.
Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ και $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$.

Πρόταση: Έστω $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο σύνολο X και $A \subset X$ τέτοιο ώστε για κάθε $F \in \mathcal{F}$, $F \cap A \neq \emptyset$. Τότε, η κλάση $\mathcal{B}=\{F \cap A\colon F \in \mathcal{F}\}$ είναι μία βάση φίλτρου και το φίλτρο $\mathcal{G}$ που παράγει είναι ισχυρότερο από το φίλτρο $\mathcal{F}$ και περιέχει το σύνολο A.
Απόδειξη: Όμοια με την προηγούμενη Πρόταση, αποδεικνύεται ότι η κλάση $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου. Αν $\mathcal{B}$ το φίλτρο που παράγει, από Θεώρημα, έχουμε ότι $\mathcal{G}=\{G \subset X\colon \exists\ B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $B \subset G\}=\{G \subset X\colon \exists\ F \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $F \cap A \subset G\}$.
Εφ'όσον $X \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι $A=X \cap A \in \mathcal{B}$. Αυτό σημαίνει ότι $A \in \mathcal{G}$.
Επίσης, αν $F \in \mathcal{F}$, $F \cap A \in \mathcal{B} \Rightarrow F \cap A \in \mathcal{G}$.
Επειδή $F \cap A \subset F$ και το $\mathcal{G}$ είναι φίλτρο θα ισχύει $F \in \mathcal{G}$. Συνεπώς $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Πρόταση: Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα X και Y και την απεικόνιση $f\colon X \to Y$. Αν το $\mathcal{F}$ είναι ένα φίλτρο στο X, τότε η κλάση $\mathcal{B}=\{f(\mathrm{F})\colon \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$ είναι μία βάση φίλτρου στο Y.
Το φίλτρο που παράγεται από τη βάση αυτή λέγεται εικόνα του φίλτρου $\mathcal{F}$ μέσω της απεικόνισης f και συμβολίζεται με $f(\mathcal{F})$.
Απόδειξη:
(1) Επειδή για κάθε $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, $\mathrm{F} \neq \emptyset$, θα ισχύει για κάθε $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, $f(\mathrm{F}) \neq \emptyset \Rightarrow$ Για κάθε $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$, $\mathrm{B} \neq \emptyset$.
(2) Έστω B_1, B_2 δύο υποσύνολα του $\mathcal{B}$. Τότε υπάρχουν F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $f(F_1)=B_1$ και $f(F_2)=B_2$. Επειδή $f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$ και $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, αν θέσουμε $F_3=F_1 \cap F_2$ έχουμε ότι υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ ($B_3=f(F_3)$) τέτοιο ώστε $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
Επομένως, η κλάση $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου.

Πρόταση: Θεωρούμε την απεικόνιση $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ και ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο Y. Αν για κάθε $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ ισχύει $f^{-1}(\mathrm{F}) \neq \emptyset$, η κλάση $\mathcal{B}=\{f^{-1}(\mathrm{F})\colon \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$ είναι μία βάση φίλτρου στο X. Το φίλτρο που παράγεται από αυτή τη βάση λέγεται αντίστροφη εικόνα του $\mathcal{F}$ στο X μέσω της απεικόνισης f και συμβολίζεται

με $f^{-1}(\mathcal{F})$.
Απόδειξη:
(1) Λόγω της υπόθεσης, ισχύει για κάθε $B \in \mathcal{B}$, $B \neq \varnothing$
(2) Έστω B_1, B_2 δύο υποσύνολα του $\mathcal{B}$. Τότε υπάρχουν F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $f^{-1}(F_1)$=B_1 και $f^{-1}(F_2)$=B_2. Επειδή $B_1 \cap B_2 = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) = f^{-1}(F_1 \cap F_2)$ και $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, αν θέσουμε $F = F_1 \cap F_2$ θα υπάρχει $B_3 = f^{-1}(\mathrm{F}) \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $B_3 = B_1 \cap B_2$.
Επομένως, η κλάση $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου.

Πρόταση: Θεωρούμε μία απεικόνιση $f\colon X \to Y$, ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X και την εικόνα $f(\mathcal{F})$ του$\mathcal{F}$ στο Y. Τότε, υπάρχει η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(f(\mathcal{F}))$ και μάλιστα $f^{-1}(f(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}$.
Απόδειξη:
Έστω $\mathrm{F}' \in f(\mathcal{F})$. Τότε, επειδή η $\mathcal{B} = \{f(\mathrm{F})\colon \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$ είναι βάση του φίλτρου $f(\mathcal{F})$ θα έχουμε ότι υπάρχει $B \in \mathcal{B}$: $B \subset \mathrm{F}'$ $\Rightarrow$ Υπάρχει $f \in \mathcal{F}$: $f(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}'$.
Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\mathrm{x} \in \mathrm{F}$, $f(\mathrm{x}) \in \mathrm{F}'$ $\Rightarrow$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathrm{F}$, $\mathrm{x} \in f^{-1}(\mathrm{F}')$ $\Rightarrow$ $\mathrm{F} \subset f^{-1}(\mathrm{F}')$
Επειδή $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ θα ισχύει $\mathrm{F} \neq \varnothing$, οπότε $f^{-1}(\mathrm{F}') \neq \varnothing$ και άρα για κάθε $\mathrm{F}' \in f(\mathcal{F})$, $f^{-1}(\mathrm{F}') \neq \varnothing$.
Επομένως, από την προηγούμενη Πρόταση, ορίζεται η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(f(\mathcal{F}))$ του φίλτρου $f(\mathcal{F})$ και έχει ως βάση την κλάση $\mathcal{G} = \{f^{-1}(\mathrm{F}')\colon \mathrm{F}' \in f(\mathcal{F})\}$. Θεωρούμε τώρα ένα $\mathrm{F} \in f^{-1}(f(\mathcal{F}))$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$. Επειδή η $\mathcal{G}$ είναι βάση του φίλτρου $f^{-1}(f(\mathcal{F}))$ θα έχουμε ότι $\mathrm{F} \in f^{-1}(f(\mathcal{F}))$ $\Rightarrow$ Υπάρχει $\mathrm{F}' \in f(\mathcal{F})$: $f^{-1}(\mathrm{F}') \subset \mathrm{F}$ και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση του φίλτρου $f(\mathcal{F})$ θα υπάρχει $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$: $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{F}'$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(f(\mathrm{U})) \subset f^{-1}(\mathrm{F}') \subset \mathrm{F}$. Όμως, για κάθε απεικόνιση f και κάθε σύνολο U ισχύει $\mathrm{U} \subset f^{-1}(f(\mathrm{U}))$, οπότε $\mathrm{U} \subset \mathrm{F}$.
Επειδή $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$ και το $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο, θα ισχύει $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$.
Επομένως $f^{-1}(f(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}$.

3.3 Υπερφίλτρα

Ορισμός: Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X λέγεται υπερφίλτρο αν δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα άλλο φίλτρο στο X, δηλαδή αν $\mathcal{G}$ ένα φίλτρο στο X με $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, τότε $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Τα υπερφίλτρα τα συμβολίζουμε με p, q.

Παράδειγμα: Έστω X ένα σύνολο και $x_0 \in X$. Το τετριμμένο φίλτρο $\mathcal{F}=\{F\subset X: x_0 \in F\}$ είναι ένα υπερφίλτρο.

Έστω, αντίθετα, ότι υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F}\subsetneq\mathcal{G}$. Τότε, υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε $G \notin \mathcal{F} \Rightarrow$ υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε $x_0 \notin G$. Όμως, $\{x_0\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{x_0\} \in \mathcal{G}$. Αυτό σημαίνει ότι $\{x_0\}\cap G \in \mathcal{G} \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{G}$, άτοπο.

Θεώρημα: Για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X υπάρχει τουλάχιστον ένα υπερφίλτρο στο X που να το περιέχει.

Απόδειξη:

Θεωρούμε το σύνολο όλων των φίλτρων στο X που περιέχουν το $\mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{T}=\{\mathcal{G}: \mathcal{G}$ φίλτρο στο X τέτοιο ώστε $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}\}$. Τότε, το σύνολο $(\mathcal{T}, \subset)$ είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και τέτοιο ώστε κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολό του να έχει άνω φράγμα:

Έστω $\mathcal{A}=\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $(\mathcal{T}, \subset)$. Τότε, η κλάση $\mathcal{L}=\bigcup\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ είναι ένα φίλτρο (από γνωστή Πρόταση) και εφ'όσον $\mathcal{F}_i \subset\mathcal{L}$, για κάθε $i \in I$, το $\mathcal{L}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\mathcal{A}$.

Επομένως, από το Λήμμα του Zorn, το $\mathcal{T}$ έχει μεγιστικό στοιχείο το οποίο θα είναι υπερφίλτρο, έστω p. Τότε, αφού $p \in \mathcal{T}$, θα ισχύει $\mathcal{F}\subset p$.

Παρατήρηση: Προφανώς, κάθε βάση φίλτρου περιέχεται σε κάποιο φίλτρο και άρα σε κάποιο υπερφίλτρο. Επίσης, από προηγούμενη Παρατήρηση, ξέρουμε ότι κάθε κλάση συνόλων με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής περιέχεται σε κάποιο φίλτρο και από το προηγούμενο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε κλάση συνόλων με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής περιέχεται σε κάποιο υπερφίλτρο.

Πρόταση: Έστω X ένα σύνολο, p ένα υπερφίλτρο στο X και $A\subset X$ τέτοιο ώστε $A \notin p$. Τότε, υπάρχει $B \in p$ τέτοιο ώστε $A\cap B=\varnothing$.

Απόδειξη:

Έστω, αντίθετα, ότι $A\cap B\neq\varnothing$ για κάθε $B \in p$. Από προηγούμενη Πρόταση, η κλάση $\mathcal{B}=\{A\cap B: B \in p\}$ είναι μία βάση φίλτρου και το φίλτρο $\mathcal{F}$ που παράγει περιέχει το σύνολο A και το υπερφίλτρο p. Επειδή όμως, το p είναι υπερφίλτρο, θα έχουμε ότι $\mathcal{F}=p \Rightarrow A \in p$, άτοπο λόγω υπόθεσης.

Πόρισμα: Έστω σύνολο X, p υπερφίλτρο στο X και $A, B\subset X$ με $A\cap B=\varnothing$

και A∪B $\in p$. Τότε A $\in p$ ή B $\in p$.

Απόδειξη:

Αν A, B $\notin p$, τότε, από την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχουν C, D $\in p$ τέτοια ώστε A∩C=B∩D=∅. Αυτό όμως σημαίνει ότι C∩D $\in p$ και ότι (A∪B)∩(C∩D) $\in p \Rightarrow$ (A∩C∩D)∪(B∩C∩D) $\in p \Rightarrow \varnothing \in p$. Άτοπο, άρα ισχύει A $\in p$ ή B $\in p$.

Θεώρημα: Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο σύνολο X είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν για κάθε A⊂X, A $\in \mathcal{F}$ ή $X\setminus A \in \mathcal{F}$.

Απόδειξη:

(⇒) Άμεσο από το προηγούμενο Πόρισμα.

(⇐) Υποθέτουμε ότι για κάθε A⊂X, A $\in \mathcal{F}$ ή $X\setminus A \in \mathcal{F}$ και έστω ότι το $\mathcal{F}$ δεν είναι υπερφίλτρο. Τότε, υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G}$ στο X τέτοιο ώστε $\mathcal{F}\subsetneq\mathcal{G}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει G $\in \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε G $\notin \mathcal{F}$. Τότε, λόγω της υπόθεσης, $X\setminus G \in \mathcal{F} \Rightarrow X\setminus G \in \mathcal{G}$. Άρα, υπάρχει G $\in \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε $X\setminus G \in \mathcal{G} \Rightarrow$ G∩($X\setminus$G) $\in \mathcal{G} \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{G}$, άτοπο.

Επομένως, το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο.

Πρόταση: Ένα τετριμμένο φίλτρο στο X είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν είναι της μορφής $\mathcal{F}$={F⊂X: x $\in$ F} για κάποιο x $\in$ X.

Απόδειξη:

(⇒) Θεωρούμε ένα υποσύνολο A του X και υποθέτουμε ότι το τετριμμένο φίλτρο $\mathcal{F}$={F⊂X: A ⊂ F} είναι υπερφίλτρο. Επίσης, υποθέτουμε ότι A≠{x} για κάθε x $\in$ X. Για κάθε x $\in$ A δημιουργούμε το φίλτρο $\mathcal{F}_x$={F⊂X: x $\in$ F}. Θα δείξουμε ότι για κάθε x $\in$ A το φίλτρο $\mathcal{F}_x$ είναι αυστηρά ισχυρότερο του $\mathcal{F}$. Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε F $\in \mathcal{F}$, A⊂F ⇒ Για κάθε x $\in$ A το x $\in$ F για κάθε F $\in \mathcal{F} \Rightarrow$ Για κάθε F $\in \mathcal{F}$, το F $\in \mathcal{F}_x$ για κάθε x $\in$ A και επομένως $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_x$ για κάθε x $\in$ A. Επίσης, για κάθε x $\in$ A, {x} $\in \mathcal{F}_x$ και {x} $\notin \mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{F}\subsetneq\mathcal{F}_x$ για κάθε x $\in$ A. Συνεπώς το $\mathcal{F}$ δεν είναι υπερφίλτρο, πράγμα άτοπο.

Επομένως, κάθε τετριμμένο υπερφίλτρο είναι της μορφής $\mathcal{F}$={F⊂X: x $\in$ F} για κάποιο x $\in$ X.

(⇐) Έστω x $\in$ X και το τετριμμένο φίλτρο $\mathcal{F}$={F⊂X: x $\in$ F}.

Το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο, αφού για οποιοδήποτε υποσύνολο A του X ισχύει είτε x $\in$ A ⇒ A $\in \mathcal{F}$ είτε x $\in X\setminus A \Rightarrow X\setminus A \in \mathcal{F}$ και άρα από το προηγούμενο Θεώρημα το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο.

Παρατήρηση: Αποδείξαμε σε προηγούμενο Θεώρημα ότι κάθε φίλτρο πε-

ριέχεται σε κάποιο υπερφίλτρο. Από την προηγούμενη Πρόταση συμπεραίνουμε ότι το υπερφίλτρο αυτό δεν είναι μοναδικό κατ' ανάγκη:
Είδαμε ότι αν A είναι ένα υποσύνολο του X και $\mathcal{F}$ το τετριμμένο φίλτρο που αντιστοιχεί στο A, για κάθε x ∈ A το φίλτρο $\mathcal{F}_x$ είναι υπερφίλτρο που περιέχει το $\mathcal{F}$. Επομένως, για κάθε x ∈ A έχουμε ένα υπερφίλτρο που περιέχει το $\mathcal{F}$.

Θεώρημα: Έστω X ένα άπειρο σύνολο. Τότε:

1. Υπάρχει μη τετριμμένο υπερφίλτρο.
2. Κάθε στοιχείο ενός μη τετριμμένου υπερφίλτρου είναι άπειρο.

Απόδειξη:
(1) Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{B}$={$X \setminus F$: F πεπερασμένο υποσύνολο του X}. H $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου αφού:

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$
2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow$ Υπάρχουν F_1, F_2 πεπερασμένα υποσύνολα του X, τέτοια ώστε B_1=$X \setminus F_1$ και B_2=$X \setminus F_2$. Έτσι, θα έχουμε ότι $B_1 \cap B_2$=$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2)$= =$X \setminus (F_1 \cup F_2)$. Όμως, F_1, F_2 πεπερασμένα $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ πεπερασμένο $\Rightarrow X \setminus (F_1 \cup F_2)$ $\in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$

Από προηγούμενη Πρόταση, η $\mathcal{B}$ περιέχεται σε κάποιο υπερφίλτρο, έστω το p. Για κάθε x ∈ X, $X \setminus \{x\} \in \mathcal{B} \Rightarrow X \setminus \{x\} \in p$ και επειδή το p είναι υπερφίλτρο έπεται ότι {x} $\notin p$. Από προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει A $\in p$ τέτοιο ώστε A∩{x}=∅ ⇒ Υπάρχει A $\in p$ τέτοιο ώστε x ∉ A. Επομένως το p είναι μη τετριμμένο.
(2) Έστω p ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο και A ένα στοιχείο του p. Υποθέτουμε ότι το A είναι πεπερασμένο και ίσο με A=$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ για κάποιο n ∈ ℕ. Το p είναι μη τετριμμένο υπερφίλτρο και επομένως για κάθε x ∈ X, υπάρχει U⊂X τέτοιο ώστε U $\in p$ και x ∉ U, δηλαδή για κάθε k=1, 2, ..., n υπάρχει $A_k \in p$: $x_k \notin A_k$. Έχουμε λοιπόν ότι $A_1, A_2, ..., A_k \in p \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \in p$ και αφού A $\in p$ θα ισχύει $A \cap A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \in p$. Εφ'όσον $x_k \in$ A και $x_k \notin A_k, k = 1, 2, ..., n, A \cap A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k = \varnothing \Rightarrow \varnothing \in p$. Άτοπο. Επομένως, κάθε στοιχείο ενός μη τετριμμένου υπερφίλτρου είναι άπειρο.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το σύνολο Σ=ℕ∪{p} όπου το p είναι μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο ℕ (το ℕ είναι άπειρο σύνολο οπότε υπάρχει μη τετριμμένο

υπερφίλτρο). Δημιουργούμε τα σύνολα $\mathcal{B}_p$={A∪{p}: A ∈ p} και $\mathcal{B}_n$={{n}}, για κάθε n ∈ ℕ.
Το σύνολο $\mathcal{B}$=$\mathcal{B}_p$∪{$\mathcal{B}_n$: n ∈ ℕ} είναι μία βάση τοπολογίας τέτοια ώστε το $\mathcal{B}_p$ να είναι μία βάση περιοχών του p και για κάθε n ∈ ℕ το $\mathcal{B}_n$ να είναι μία βάση περιοχών του n (αντίστοιχη Πρόταση στις Τοπικές Έννοιες).
Έστω $\mathcal{T}$ η τοπολογία που παράγει η $\mathcal{B}$. Τότε δημιουργείται ο τοπολογικός χώρος (Σ, $\mathcal{T}$), για τον οποίο παρατηρούμε τα εξής:

- Κάθε n ∈ ℕ είναι απομωνομένο σημείο του Σ: Έστω ένα n ∈ ℕ. Επειδή το σύνολο {n} είναι ανοικτό, το n είναι απομονωμένο σημείο του Σ [Το n είναι σημείο συσσώρευσης του Σ αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το n, περιέχει τουλάχιστον άλλο ένα στοιχείο του Σ, διαφορετικό του n. Αλλιώς, κάθε σημείο του Σ που δεν είναι σημείο συσσώρευσης, είναι μεμονωμένο]
- Το p είναι σημείο συσσώρευσης του Σ: Αν G είναι μία ανοικτή περιοχή του p, υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}_p$: B⊂G ⇒ Υπάρχει A ∈ p: A∪{p}⊂G. Τότε G∩(Σ$\setminus\{p\}$)⊃(A∪{p})∩(Σ$\setminus\{p\}$)=A∩ℕ ≠ ∅, αφού A⊂ℕ. Δηλαδή, για κάθε ανοικτή περιοχή G του p ισχύει G∩(Σ$\setminus\{p\}$) ≠ ∅ ⇒ Το p είναι σημείο συσσώρευσης του Σ.
- Το ℕ είναι πυκνό στο Σ, δηλαδή $\overline{\mathbb{N}}$=Σ:
Προφανώς, για κάθε n ∈ ℕ, n ∈ $\overline{\mathbb{N}}$. Επίσης, είδαμε ότι γα κάθε περιοχή (ανοικτή) G του p ισχύει G∩(Σ$\setminus\{p\}$) ≠ ∅ ⇒ G∩ℕ ≠ ∅. Συνεπώς $p \in \overline{\mathbb{N}}$.
Άρα έχουμε $\overline{\mathbb{N}}$=Σ.

Πρόταση: Θεωρούμε μία απεικόνιση $f : X \to Y$ απ'το σύνολο X στο σύνολο Y και ένα υπερφίλτρο p στο X. Τότε, η εικόνα $f(p)$ του p είναι υπερφίλτρο στο Y.
Απόδειξη:
Έστω A ένα υποσύνοο του Y. Τότε f^{-1}(A) ∈ X και επομένως, από προηγούμενο Θεώρημα, θα ισχύει f^{-1}(A) ∈ p ή $X\setminus$(f^{-1}(A)) ∈ p. Από τον ορισμό της εικόνας $f(p)$ του φίλτρου p θα έχουμε ότι f^{-1}(A) ∈ p ⇒ $f(f^{-1}$(A)) ∈ $f(p)$ ή $X\setminus$(f^{-1}(A))=$f^{-1}(X\setminus A) \in p \Rightarrow f(f^{-1}(X\setminus A)) \in f(p)$.
Επειδή για κάθε απεικόνιση f και κάθε σύνολο A ισχύει $f(f^{-1}$(A))⊂A και $f(f^{-1}(X\setminus A)) \subset X\setminus A$ και το $f(p)$ είναι φίλτρο (από γνωστή Πρόταση), θα έχουμε A ∈ $f(p)$ ή $X\setminus A \in f(p)$. Οπότε, λόγω γνωστού Θεωρήματιος, το $f(p)$ είναι υπερφίλτρο στο Y.

3.4 Σύγκλιση Φίλτρων

Ορισμός: Έστω (X, $\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στον X. Το φίλτρο $\mathcal{F}$ συγκλίνει σε ένα σημείο x του X αν $\mathcal{N}$(x)$\subset\mathcal{F}$ (Δηλαδή αν το σύστημα περιοχών του x περιέχεται στο $\mathcal{F}$).
Τότε λέμε ότι το x είναι όριο του φίλτρου $\mathcal{F}$. Το σύνολο των ορίων του $\mathcal{F}$ συμβολίζεται με lim$\mathcal{F}$. Έτσι, αν το x είναι το όριο του φίλτρου $\mathcal{F}$ γράφουμε $\mathcal{F} \to$ x ή x $\in$ lim$\mathcal{F}$ και αν είναι το μοναδικό όριο του φίλτρου γράφουμε x=lim$\mathcal{F}$.

Παραδείγματα:

1. Σε κάθε τοπολογικό χώρο (X, $\mathcal{T}$) και για κάθε x $\in$ X, το φίλτρο $\mathcal{N}$(x) συγκλίνει στο σημείο x.

2. Έστω ο τετριμμένος τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$) και ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X. Τότε, για κάθε x $\in$ X, $\mathcal{N}$(x)={X}. Επίσης, X $\in \mathcal{F}$ για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$. Επομένως, κάθε φίλτρο στον X συγκλίνει σε κάθε σημείο του X.
   Είναι φανερό ότι η βάση περιοχών ενός στοιχείου x παίζει για τα φίλτρα τον ίδιο ρόλο που παίζει για τις ακολουθίες η σταθερή ακολουθία, αφού πάντα συγκλίνει στο ίδιο το x.

3. Έστω ο διακεκριμένος τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{P}(X)$). Τότε, κάθε φίλτρο συγκλίνει το πολύ σε ένα σημείο:
   Έστω, αντίθετα, ότι κάποιο φίλτρο $\mathcal{F}$ συγκλίνει σε δύο σημεία x_1, $x_2 \in$ X με $x_1 \neq x_2$. Τότε $\mathcal{N}(x_1) \subset \mathcal{F}$ και $\mathcal{N}(x_2) \subset \mathcal{F}$. Όμως {$\mathrm{x}_1$} $\in \mathcal{N}(x_1)$ και {x_2} $\in \mathcal{N}(x_2)$, οπότε {x_1}, $\{x_2\} \in \mathcal{F} \Rightarrow$ {x_1}$\cap${x_2} $\in \mathcal{F} \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{F}$, άτοπο.

4. Θεωρούμε ένα σύνολο X, ένα υποσύνολο A του X και την τοπολογία $\mathcal{T}$={$\varnothing$, A, $X \backslash A$, X}. Το φίλτρο $\mathcal{F}$={X} δε συγκλίνει σε κανένα σημείο του X.
   Πράγματι, αν x $\in$ A τότε $\mathcal{N}$(x)={A,X} και τότε $\mathcal{N}$(x)$\not\subset\mathcal{F}$={X}
   Αν x $\in X \backslash A$ τότε $\mathcal{N}$(x)={$X \backslash A$,X} και τότε $\mathcal{N}$(x)$\not\subset\mathcal{F}$={X}.

Παρατήρηση: Ένα φίλτρο μπορεί να μη συγκλίνει σε κανένα σημείο, να συγκλίνει το πολύ σε ένα σημείο ή να συγκλίνει σε περισσότερα από ένα σημεία.

Πρόταση: Αν ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον τοπολογικό χώρο (X, $\mathcal{T}$) συγκλίνει σε ένα σημείο x ∈ X, τότε και κάθε φίλτρο $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ συγκλίνει στο x.

Θεώρημα: Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα φίλτρο στον τοπολογικό χώρο (X, $\mathcal{T}$) και x ∈ X, τότε $\mathcal{F} \to$ x αν και μόνο αν για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), υπάρχει F ∈ $\mathcal{F}$: F⊂U.
Απόδειξη:
(⇒) Αν $\mathcal{F} \to$ x ⇒ $\mathcal{N}$(x)⊂$\mathcal{F}$, οπότε για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), υπάρχει F ∈ $\mathcal{F}$ (F=U): F⊂U.
(⇐) Έστω U ∈ $\mathcal{N}$(x). Από την υπόθεση, υπάρχει F ∈ $\mathcal{F}$: F⊂U, οπότε, επειδή το $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο, θα ισχύει U ∈ $\mathcal{F}$. Άρα $\mathcal{N}$(x)⊂$\mathcal{F}$.

Θεώρημα: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος, A υποσύνολο του X και x ένα σημείο του X. Το x ανήκει στο $\overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X, τέτοιο ώστε A ∈ $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F} \to$ x.
Απόδειξη:
(⇒) Έστω x ∈ $\overline{A}$. Τότε για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), U∩A ≠ ∅. Από προηγούμενη Πρόταση και επειδή το $\mathcal{N}$(x) είναι φίλτρο, η κλάση $\mathcal{B}$={U∩A: U ∈ $\mathcal{N}$(x)} είναι βάση φίλτρου και το φίλτρο $\mathcal{F}$ που παράγει είναι ισχυρότερο του $\mathcal{N}$(x) και περιέχει το σύνολο A. Εφ'όσον $\mathcal{N}$(x)⊂$\mathcal{F}$ και $\mathcal{N}$(x) → x θα ισχύει $\mathcal{F} \to$ x. Δηλαδή, υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$ με A ∈ $\mathcal{F}$ που συγκλίνει στο σημείο x.
(⇐) Έστω, αντίστροφα, ότι υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$ με A ∈ $\mathcal{F}$ που συγκλίνει στο σημείο x. Τότε $\mathcal{N}$(x)⊂$\mathcal{F}$ ⇒ Για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), U ∈ $\mathcal{F}$. Αυτό όμως, σημαίνει ότι για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), A∩U ∈ $\mathcal{F}$ και επομένως για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), A∩U ≠ ∅ ⇒ x ∈ $\overline{A}$.

Θεώρημα: Έστω (X_1, $\mathcal{T}_1$), (X_2, $\mathcal{T}_2$) δύο τοπολογικοί χώροι και μία απεικόνιση f: $X_1 \to X_2$. Η f είναι συνεχής στο σημείο x ∈ X_1 αν και μόνο αν για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X_1 τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \to$ x, ισχύει ότι $f(\mathcal{F}) \to f$(x).
Απόδειξη:
(⇒) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x ∈ X_1 και $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στον X_1 τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \to$ x. Θα δείξουμε ότι $f(\mathcal{F}) \to f$(x). Εφ'όσον η f είναι συνεχής στο x, για κάθε V ∈ $\mathcal{N}(f$(x)), υπάρχει U ∈ $\mathcal{N}$(x): f(U)⊂V **(1)**
Επίσης, επειδή $\mathcal{F} \to$ x, θα ισχύει $\mathcal{N}$(x)⊂$\mathcal{F}$, οπότε η **(1)** γίνεται : για κάθε V ∈ $\mathcal{N}(f$(x)), υπάρχει F ∈ $\mathcal{F}$ (F=U): f(F)⊂V **(2)**

Όμως, η κλάση $\mathcal{B}$={f(F): F $\in \mathcal{F}$} είναι βάση του φίλτρου $f(\mathcal{F})$ στον X_2 και άρα η **(2)** γίνεται: για κάθε V $\in \mathcal{N}(f(\mathrm{x}))$, υπάρχει f(F) $\in f(\mathcal{F})$: f(F)$\subset$V.
Έτσι, από προηγούμενο Θεώρημα θα έχουμε ότι $f(\mathrm{F}) \to f(\mathrm{x})$.
(⇐) Ας υποθέσουμε τώρα ότι x $\in X_1$ και ότι για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X_1 τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \to$ x, για την εικόνα $f(\mathcal{F})$ ισχύει $f(\mathcal{F}) \to f(\mathrm{x})$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x.
Επειδή $\mathcal{N}(\mathrm{x}) \to \mathrm{x} \Rightarrow f(\mathcal{N}(\mathrm{x})) \to f(\mathrm{x})$, από προηγούμενο Θεώρημα θα έχουμε ότι για κάθε V $\in \mathcal{N}(f(\mathrm{x}))$, υπάρχει F $\in f(\mathcal{N}(\mathrm{x}))$: F$\subset$V **(3)**
Όμως, η κλάση $\mathcal{B}$={f(U): U $\in \mathcal{N}$(x)} είναι μία βάση του φίλτρου $f(\mathcal{N}(\mathrm{x}))$, επομένως η **(3)** γίνεται: για κάθε V $\in \mathcal{N}(f(\mathrm{x}))$, υπάρχει U $\in \mathcal{N}$(x): f(U)$\subset$F$\subset$V.
Αυτό όμως σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x.

Θεώρημα: Έστω $\{(X_i, \mathcal{T}_i)$: i $\in I\}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων, X=$\prod_{i\in I} X_i$ το καρτεσιανό γινόμενο και $x = (x_i)_{i\in I}$ ένα σημείο του X, όπου $x_i \in X_i$, για κάθε i $\in I$. Θεωρούμε την καρτεσιανή τοπολογία $\mathcal{T}$ και ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον χώρο (X, $\mathcal{T}$). Τότε $\mathcal{F} \to x \Rightarrow \pi_i(\mathcal{F}) \to x_i$, για κάθε i $\in I$.
Απόδειξη:
(⇒) Υποθέτουμε ότι το φίλτρο $\mathcal{F}$ συγκλίνει στο σημείο x. Επειδή οι i-προβολές είναι συνεχείς απεικονίσεις, από το προηγούμενο Θεώρημα θα έχουμε ότι για κάθε i $\in I$, $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(\mathrm{x})$ =$\mathrm{x}_i \in X_i$.
(⇐) Υποθέτουμε ότι για κάθε i $\in I$, $\pi_i(\mathcal{F}) \to x_i \in X_i$, δηλαδή ότι για κάθε i $\in I$, $\mathcal{N}_{\mathcal{T}_i}(x_i) \subset \pi_i(\mathcal{F})$ **(4)**
Αν $\mathcal{B}$ είναι η φυσική βάση της καρτεσιανής τοπολογίας, τότε η κλάση $\mathcal{B}(x)$={B: B $\in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε x $\in$ B} είναι μία βάση περιοχών του σημείου $x = (x_i)_{i\in I} \in$ X (Από γνωστή Πρόταση στις Τοπικές Έννοιες) και επομένως για κάθε U $\in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)$, υπάρχει B $\in \mathcal{B}(x)$: B$\subset$U.
Επειδή όμως $\mathcal{B}$={ $\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(\mathrm{G}_j)$: $J \subset I$, J πεπερασμένο και για κάθε j $\in$ J, $\mathrm{G}_j \in \mathcal{T}_j$}, θα έχουμε ότι για κάθε U $\in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)$, υπάρχει J$\subset I$, J πεπερασμένο και για κάθε j $\in$ J, υπάρχει $G_j \in \mathcal{T}_j$ τέτοιο ώστε x $\in \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(\mathrm{G}_j) \subset$U **(5)**
Όμως, x $\in \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(\mathrm{G}_j) \subset$U $\Rightarrow$ για κάθε j $\in$ J, $\pi_j(x)$=$x_j \in G_j$. Εφ'όσον $x_j \in G_j$ και $G_j \in \mathcal{T}_j$, θα ισχύει $G_j \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}_j}(x_j)$ **(6)** και επομένως, χάρη στις **(4)** και **(6)** για κάθε j $\in$ J, $G_j \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}_j}(x_j) \subset \pi_j(\mathcal{F})$. Τώρα, χάρη σε γνωστή Πρόταση:
Για κάθε j $\in$ J, $\pi_j^{-1}(\mathrm{G}_j) \in \pi_j^{-1}(\pi_j(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}$. Έχουμε δηλαδή ότι για κάθε j $\in$ J, $\pi_j^{-1}(\mathrm{G}_j) \in \mathcal{F}$ και επειδή το J είναι πεπερασμένο και το $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο θα ισχύει $\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(\mathrm{G}_j) \in \mathcal{F}$. Συνεπώς, λόγω της **(5)**, θα έχουμε ότι για κάθε U

$\in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)$, υπάρχει F $\in \mathcal{F}$ (F=$\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}$(G$_j$))$F$ ⊂U πράγμα που, λόγω γνωστού Θεωρήματος, σημαίνει ότι $\mathcal{F} \to x$.

Ορισμός: Έστω ένας τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$), ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X και ένα σημείο x του X. Λέμε ότι το x είναι οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$ αν x $\in \bigcap\{\overline{F}$: F $\in \mathcal{F}\}$.
Το σύνολο των οριακών σημείων του φίλτρου $\mathcal{F}$ συμβολίζεται με $adh\mathcal{F}$.

Πρόταση: Έστω ένας τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$).

1. Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα φίλτρο στον X και $\mathcal{B}$ μία βάση του $\mathcal{F}$, τότε $adh\mathcal{F}=\bigcap\{\overline{B}$: B $\in \mathcal{B}\}$
2. Αν $\mathcal{G}$ είναι μία κλάση υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, η $\mathcal{B}=\{B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_n$: n $\in \mathbb{N}$, B_1, B_2, ..., $B_n \in \mathcal{G}\}$ είναι μία βάση φίλτρου και έστω $\mathcal{F}$ το φίλτρο που παράγει. Τότε $adh\mathcal{F}=\bigcap\{\overline{B}$: B $\in \mathcal{B}\}=\bigcap\{\overline{C}$: C $\in \mathcal{G}\}$

Απόδειξη:
(1) Έχουμε ότι $\mathcal{B}\subset\mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\{\overline{B}$: B $\in \mathcal{B}\}\subset\bigcap\{\overline{F}$: F $\in \mathcal{F}\}=adh\mathcal{F}$. Έστω τώρα ένα F $\in \mathcal{F}$. Τότε, υπάρχει B $\in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε B⊂F. Συνεπώς $\bigcap\{\overline{F}$: F $\in \mathcal{F}\}\subset\bigcap\{\overline{B}$: B $\in \mathcal{B}\}$. Επομένως, $adh\mathcal{F}=\bigcap\{\overline{F}$: F $\in \mathcal{F}\}=\bigcap\{\overline{B}$: B $\in \mathcal{B}\}$.
(2) Έχουμε ότι $\mathcal{G}\subset\mathcal{B} \Rightarrow \bigcap\{\overline{C}$: C $\in \mathcal{G}\}\subset\bigcap\{\overline{B}$: B $\in \mathcal{B}\}=adh\mathcal{F}$
Έστω τώρα ένα B $\in \mathcal{B}$. Τότε, υπάρχουν C_1, C_2, ..., $C_n \in \mathcal{G}$ τέτοια ώστε B=$C_1\cap C_2\cap\ldots\cap C_n \Rightarrow$ υπάρχει C $\in \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε C⊂B. Συνεπώς, $\bigcap\{\overline{B}$: B $\in \mathcal{B}\}\subset\bigcap\{\overline{C}$: C $\in \mathcal{G}\}$.
Επομένως, $adh\mathcal{F}=\bigcap\{\overline{B}$: B $\in \mathcal{B}\}=\bigcap\{\overline{C}$: C $\in \mathcal{G}\}$.

Θεώρημα: Έστω ένας τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$), ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X και ένα σημείο x του X. Το x είναι οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$, αν και μόνο αν για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x) και για κάθε F $\in \mathcal{F}$ ισχύει U∩F $\neq \emptyset$.
Απόδειξη:
Προφανής, από τον ορισμό του σημείου περιβήματος και τον ορισμό του οριακού σημείου φίλτρου.

Παραδείγματα:

1. Έστω (X, $\mathcal{T}$) ο τετριμμένος τοπολογικός χώρος και ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X. Το $\mathcal{F}$ έχει οριακό σημείο κάθε σημείο του X, αφού η μόνη περιοχή του

x είναι το X και για κάθε F $\in \mathcal{F}$ ισχύει F$\cap$X=F $\neq \varnothing$. Από το προηγούμενο Θεώρημα, το x είναι οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$.

2. Έστω (X, $\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος, A ένα υποσύνολο του X και το τετριμμένο φίλτρο $\mathcal{F}$={F$\subset$X: A$\subset$F}. Κάθε σημείο του $\overline{A}$ είναι οριακό σημείο του $\mathcal{F}$.
   Αυτό συμβαίνει διότι x $\in \overline{A} \Rightarrow$ για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x), U$\cap$A $\neq \varnothing$ και επειδή για κάθε F $\in \mathcal{F}$, A$\subset$F θα έχουμε ότι για κάθε F $\in \mathcal{F}$ και για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x) ισχύει U$\cap$F $\neq \varnothing$.

Πρόταση: Έστω ένας τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$), ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X και ένα σημείο x του X. Τότε x $\in$ *adh*$\mathcal{F}$ αν και μόνο αν υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G}$ στο X τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ και $\mathcal{G} \rightarrow$ x.
Απόδειξη:
(⇒) Έστω ότι x $\in$ *adh*$\mathcal{F}$. Τότε, από προηγούμενο Θεώρημα, F$\cap$U $\neq \varnothing$, για κάθε F $\in \mathcal{F}$ και για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x). Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{B}$={F$\cap$U: F $\in \mathcal{F}$ και U $\in \mathcal{N}$(x)}. Επειδή το $\mathcal{N}$(x) είναι φίλτρο, ισχύει η γνωστή Πρόταση που μας λέει ότι η κλάση $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου, έστω $\mathcal{G}$ το φίλτρο που παράγει. Τότε $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ και $\mathcal{N}$(x)$\subset \mathcal{G}$. Λόγω του ορισμού του ορίου φίλτρου, θα έχουμε ότι $\mathcal{G} \rightarrow$ x. Δηλαδή, υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ και $\mathcal{G} \rightarrow$ x.
(⇐) Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G}$ στο X τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ και $\mathcal{G} \rightarrow$ x ή, ισοδύναμα, ότι υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G}$ στο X τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ και $\mathcal{N}$(x)$\subset \mathcal{G}$. Οπότε, για κάθε F $\in \mathcal{F} \Rightarrow$ F $\in \mathcal{G}$ και για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x) $\Rightarrow$ U $\in \mathcal{G}$ και επειδή το $\mathcal{G}$ είναι φίλτρο, F$\cap$U $\in \mathcal{G}$. Δηλαδή F$\cap$U $\neq \varnothing$, για κάθε F $\in \mathcal{F}$ και για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x).
Άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα, έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση: Έστω ένας τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{T}$) και ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X. Τότε lim$\mathcal{F} \subset$*adh*$\mathcal{F}$
Απόδειξη:
Έστω ένα x $\in$ lim$\mathcal{F} \Rightarrow$ για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x), U $\in \mathcal{F}$. Οπότε, για κάθε F $\in \mathcal{F}$ και για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x) ισχύει F$\cap$U $\in \mathcal{F} \Rightarrow$ F$\cap$U $\neq \varnothing$.
Επομένως x $\in$ *adh*$\mathcal{F}$.

Πρόταση: Αν το *p* είναι ένα υπερφίλτρο στο X, τότε lim*p*=*adhp*
Απόδειξη:
Έστω ένα x $\in$ *adhp*. Τότε, από προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει $\mathcal{G}$ φίλτρο στο X τέτοιο ώστε *p*$\subset \mathcal{G}$ και $\mathcal{G} \rightarrow$ x. Επειδή όμως το *p* είναι υπερφίλτρο και

αφού $p \subset \mathcal{G}$, θα ισχύει $p = \mathcal{G}$. Δηλαδή $p \to$ x. Άρα $adhp \subset \lim p$.
Όμως, από την προηγούμενη Πρόταση, έχουμε $\lim p \subset adhp$. Επομένως $\lim p = adhp$.

Δεν ισχύει το αντίστροφο (π.χ. στον τετριμμένο τοπολογικό χώρο):
Πράγματι, στον τετριμμένο τοπολογικό χώρο κάθε φίλτρο συγκλίνει σε κάθε σημείο του X και έχει οριακό σημείο κάθε σημείο του X. Δηλαδή, για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στον τετριμμένο τοπολογικό χώρο ισχύει $\lim\mathcal{F} = adh\mathcal{F}$. Κάθε φίλτρο όμως δεν είναι υπερφίλτρο.

Θεώρημα: Έστω (X, $\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X έχει οριακό σημείο

2. Κάθε υπερφίλτρο p στον X έχει όριο

Απόδειξη:
(1)⇒(2): Η συνεπαγωγή αυτή, χάρη στην προηγούμενη Πρόταση, είναι προφανής.
(2)⇒(1): Έστω ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X. Τότε, από γνωστό Θεώρημα, περιέχεται σε κάποιο υπερφίλτρο p το οποίο, λόγω της υπόθεσης, έχει όριο, έστω το x. Επειδή, από την προηγούμενη Πρόταση, ισχύει $\lim p = adhp$, το x είναι οριακό σημείο του υπερφίλτρου p δηλαδή $x \in \bigcap\{\overline{P} : P \in p\}$.
Όμως, $\mathcal{F} \subset p$, οπότε $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \supset \bigcap\{\overline{P} : P \in p\}$ και επομένως $x \in \bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Δηλαδή το x είναι οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$.
Άρα κάθε φίλτρο έχει οριακό σημείο.

3.5 Σχέση μεταξύ φίλτρων και δικτύων

Απ΄ τη μια έχουμε τα δίκτυα, η δομή των οποίων μοιάζει πολύ με τη δομή των ακολουθιών και γι΄ αυτό οι προτάσεις που ισχύουν για τις ακολουθίες προσαρμόζονται σχετικά εύκολα ώστε να ισχύουν και για τα δίκτυα. Έτσι, τα δίκτυα προσφέρουν πιο «αναλυτικά» επιχειρήματα και έχουν μεγάλη χρησιμότητα στη Συναρτησιακή Ανάλυση. Απ΄ την άλλη έχουμε τα φίλτρα, η δομή των οποίων είναι καθαρά συνολοθεωρητική και μοιάζει με τη δομή των τοπολογιών. Γι΄ αυτό και είναι μεγάλη η χρησιμότητά τους στην Τοπολογία. Σε αυτή την ενότητα, θα δούμε ενδεικτικά κάποιες προτάσεις σχετικά με τη σχέση φίλτρων-δικτύων συμπεραίνοντας ότι κάποιες ιδιότητες στους τοπολογικούς χώρους μπορούν να μελετηθούν και με τις δύο αυτές έννοιες. Ωστόσο, είναι προτιμότερο κάποιος να επιλέγει τι θα χρησιμοποιήσει ανάλογα με την περίσταση.

Πρόταση: Έστω X ένα σύνολο και $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο X. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ θεωρούμε το σύνολο F_λ={p_μ: $\mu \in \Lambda$, $\mu \geqslant \lambda$} και την κλάση $\mathcal{B}$={F_λ: $\lambda \in \Lambda$}. Τότε η $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου.
Απόδειξη:
(1) Έστω $F_\lambda \in \mathcal{B}$. Πρόφανώς $p_\lambda \in F_\lambda$, άρα $F_\lambda \neq \varnothing$.
(2) Έστω $F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2} \in \mathcal{B}$. Τότε, επειδή το σύνολο Λ είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει κάποιο $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\lambda_1, \lambda_2 \leqslant \lambda$. Επομένως, θα έχουμε F_λ={p_μ: $\mu \geqslant \lambda$}⊂{p_μ: $\mu \geqslant \lambda_1$}∩{p_μ: $\mu \geqslant \lambda_2$}=$F_{\lambda_1} \cap F_{\lambda_2}$. Δηλαδή, υπάρχει $F_\lambda \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $F_\lambda \subset F_{\lambda_1} \cap F_{\lambda_2}$.

Ορισμός: Έστω X ένα σύνολο και $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο X. Θεωρούμε τα σύνολα F_λ={p_μ: $\mu \in \Lambda$, $\mu \geqslant \lambda$} και τη βάση φίλτρου $\mathcal{B}$={F_λ: $\lambda \in \Lambda$}. Το φίλτρο $\mathcal{F}$ που παράγεται από τη $\mathcal{B}$ ονομάζεται φίλτρο που παράγεται από το δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Θεώρημα: Έστω (X, $\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον X και $\mathcal{F}$ το φίλτρο που παράγει. Τότε lim$\mathcal{F}$=limp_λ.
Απόδειξη:
Έστω x ∈ limp_λ. Τότε για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $p_\lambda \in$ U για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$. Αυτό σημαίνει ότι F_{λ_0}={p_λ: $\lambda \geqslant \lambda_0$}⊂U. Δηλαδή, για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε F_{λ_0}⊂U.
Όμως $F_{\lambda_0} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ και αφού $F_{\lambda_0} \subset$ U θα έχουμε ότι U ∈ $\mathcal{F}$. Επομένως $\mathcal{N}$(x)⊂$\mathcal{F}$ ⇒ $\mathcal{F} \to$ x. Δηλαδή limp_λ⊂lim$\mathcal{F}$.
Έστω x ∈ lim$\mathcal{F}$. Τότε $\mathcal{N}$(x)⊂$\mathcal{F}$. Θεωρούμε ένα U ∈ $\mathcal{N}$(x), οπότε θα ισχύει U ∈ $\mathcal{F}$, δηλαδή υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}$ τέτοιο ώστε B⊂U ⇒ υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε U ⊃ F_{λ_0}. Έστω τώρα ένα $\lambda \geqslant \lambda_0$. Τότε $F_\lambda=\{p_\mu : \mu \geqslant \lambda\} \subset \{p_\mu : \mu \geqslant \lambda_0\}=F_{\lambda_0}$. Δηλαδή $F_\lambda \subset F_{\lambda_0}$⊂U και επομένως για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$, $p_\lambda \in$ U. Συνεπώς έχουμε ότι για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $p_\lambda \in$ U για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_0$ ⇒ x ∈ limp_λ. Δηλαδή lim$\mathcal{F}$⊂limp_λ.
Συνεπώς lim$\mathcal{F}$=limp_λ.

Θεώρημα: Έστω (X, $\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον X και $\mathcal{F}$ το φίλτρο που παράγει. Τότε $adh\mathcal{F}=adhp_\lambda$.

Απόδειξη:
Έστω x ένα οριακό σημείο του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το x είναι και οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$, δηλαδή ότι $x \in \bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Θεωρούμε ένα F ∈ $\mathcal{F}$, οπότε υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}$ τέτοιο ώστε B⊂F ⇒ υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε F_{λ_0}⊂F ⇒ υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\overline{F_{\lambda_0}} \subset \overline{F}$. Έστω U ∈ $\mathcal{N}$(x) και το $\lambda_0 \in \Lambda$. Επειδή το x είναι οριακό σημείο του δικτύου, υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\lambda \geqslant \lambda_0$ και $p_\lambda \in$ U. Όμως, $F_{\lambda_0}=\{p_\mu : \mu \geqslant \lambda_0\}$ οπότε $p_\lambda \in F_{\lambda_0}$ και συνεπώς U∩$F_{\lambda_0} \neq \varnothing$. Δηλαδή, για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), U∩$F_{\lambda_0} \neq \varnothing$ ⇒ x ∈ $\overline{F_{\lambda_0}}$. Αυτό σημαίνει ότι x ∈ $\overline{F}$ για κάθε F ∈ $\mathcal{F}$. Αποδείξαμε δηλαδή ότι $adhp_\lambda \subset adh\mathcal{F}$.
Έστω τώρα x ένα οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$. Τότε, από γνωστή Πρόταση, x ∈ $\overline{B}$, για κάθε B ∈ $\mathcal{B}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x) και για κάθε B ∈ $\mathcal{B}$ ισχύει U∩B ≠ ∅. Έτσι, αν U ∈ $\mathcal{N}$(x) και $\lambda \in \Lambda$, επειδή $F_{\lambda_0} \in \mathcal{B}$ θα ισχύει U∩$F_{\lambda_0} \neq \varnothing$. Όμως, τα στοιχεία του F_{λ_0} είναι της μορφής p_λ με $\lambda \geqslant \lambda_0$. Δηλαδή υπάρχει $\lambda \geqslant \lambda_0$ τέτοιο ώστε $p_\lambda \in$ U. Συνεπώς για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x) και για κάθε $\lambda_0 \in \Lambda$, υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\lambda \geqslant \lambda_0$ και $p_\lambda \in$ U. Δηλαδή το x είναι οριακό σημείο του δικτύου. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $adh\mathcal{F} \subset adhp_\lambda$.
Επομένως, $adh\mathcal{F} = adhp_\lambda$.

Πρόταση: Έστω $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο σύνολο X. Θεωρούμε το σύνολο Λ = {(a, A) : A ∈ $\mathcal{F}$, a ∈ A} και ορίζουμε σε αυτό την εξής διάταξη: (a, A) ⩽ (·, B) αν και μόνο αν A ⊃ B. Τότε η απεικόνιση $p : \Lambda \to X$ όπου p((a, A)) = a είναι ένα δίκτυο στο X.
Απόδειξη: Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο Λ είναι κατευθυνόμενο. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η σχέση (a, A) ⩽ (·, B) αν και μόνο αν A ⊃ B είναι μια προδιάταξη:
(i) Προφανώς για κάθε (a, A) ∈ Λ, (a, A) ⩽ (a, A).
(ii) Αν (a, A), (·, B), (γ, Γ) ∈ Λ με (a, A) ⩽ (·, B) και (·, B) ⩽ (γ, Γ), έχουμε ότι A ⊃ B και B ⊃ Γ ⇒ A ⊃ Γ.
Δηλαδή (a, A) ⩽ (γ, Γ).
Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το σύνολο Λ είναι κατευθυνόμενο: Αν (a, A), (·, B) ∈ Λ, τότε υπάρχει (γ, Γ) ∈ Λ τέτοιο ώστε (a, A), (·, B) ⩽ (γ, Γ). Πράγματι, αν θεωρήσουμε Γ = $A \backslash B$ έχουμε το ζητούμενο.

Ορισμός: Θεωρούμε ένα σύνολο X, ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X, το κατευθυνόμενο σύνολο Λ = {(a, A) : A ∈ $\mathcal{F}$, a ∈ A} με σχέση προδιάταξης (a, A) ⩽ (·, B) αν

και μόνο αν A ⊃ B και το δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, όπου p((a, A)) = a.
Το δίκτυο αυτό ονομάζεται δίκτυο που παράγεται από το φίλτρο $\mathcal{F}$

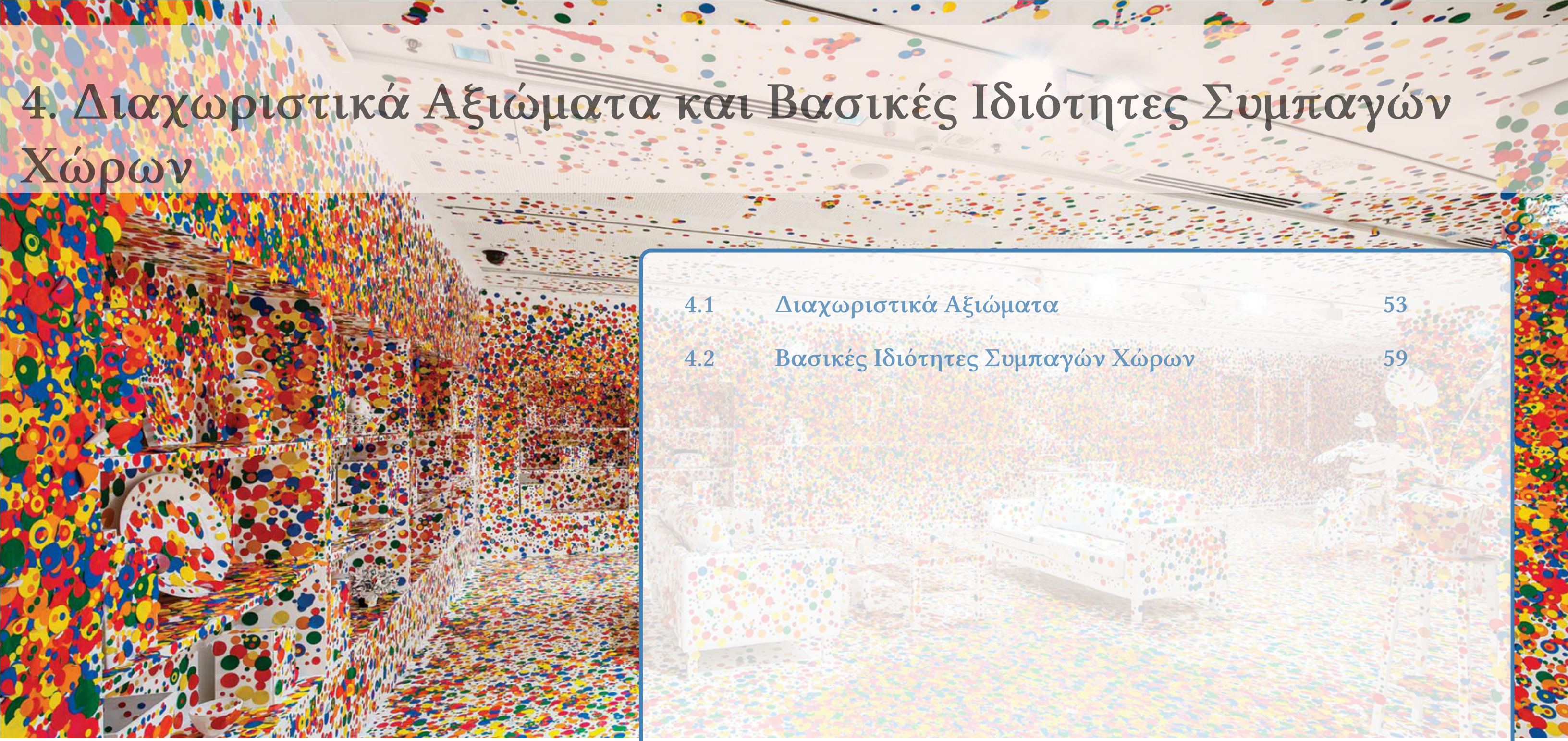
Θεώρημα: Έστω (X, $\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X και έστω $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ το δίκτυο που παράγει. Τότε lim$\mathcal{F}$ = limp_λ.
Απόδειξη:
(i) Έστω x ∈ lim$\mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{N}$(x)⊂$\mathcal{F}$. Θεωρούμε ένα U ∈ $\mathcal{N}$(x), οπότε U ∈ $\mathcal{F}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει λ_0 = (x, U) με x ∈ U, δηλαδή υπάρχει λ_0 ∈ Λ, όπου Λ το κατευθυνόμενο σύνολο του ορισμού με την προδιάταξη ⩽, όπως αυτή ορίστηκε στον παραπάνω ορισμό. Αν τώρα πάρουμε ένα λ = (μ, M) ∈ Λ τέτοιο ώστε λ ⩾ λ_0, δηλαδή τέτοιο ώστε M ⊂ U, θα έχουμε ότι μ ∈ M ⊂ U ⇒ p_λ = μ ∈ U.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x), υπάρχει λ_0 ∈ Λ τέτοιο ώστε p_λ ∈ U, για κάθε λ ⩾ λ_0, δηλαδή x ∈ limp_λ. Επομένως, lim$\mathcal{F}$⊂limp_λ.
(ii) Έστω, αντίστροφα, x ∈ limp_λ. Θεωρούμε ένα U ∈ $\mathcal{N}$(x). Τότε υπάρχει λ_0 ∈ Λ τέτοιο ώστε p_λ ∈ U, για κάθε λ ⩾ λ_0, (*) όπου το λ_0 είναι της μορφής λ_0 = (x, F), με F ∈ $\mathcal{F}$ και x ∈ F. Θα δείξουμε ότι F ⊂ U. Έστω α ∈ F. Τότε, αν λ = (α, F), θα ισχύει $\lambda \geqslant \lambda_0$ και λόγω της (*) έχουμε ότι p_λ ∈ U ⇒ α ∈ U. Δηλαδή F ⊂ U και επειδή F ∈ $\mathcal{F}$, U ∈ $\mathcal{F}$. Επομένως, $\mathcal{N}$(x) ⊂ $\mathcal{F}$ ⇒ x ∈ lim$\mathcal{F}$. Συνεπώς, limp_λ ⊂ lim$\mathcal{F}$.
Τελικά θα έχουμε ότι limp_λ = lim$\mathcal{F}$.

Θεώρημα: Έστω (X, $\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X και έστω $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ το δίκτυο που παράγει. Τότε $adh\mathcal{F}=adh(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
Απόδειξη:
(i) Έστω x ένα οριακό σημείο του φίλτρου. Τότε x ∈ $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$, δηλαδή για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x) και για κάθε F ∈ $\mathcal{F}$, U∩F≠∅.
Έτσι, αν U ∈ $\mathcal{N}$(x) και λ_0=(α, A) ∈ Λ (δηλαδή A ∈ $\mathcal{F}$ και α ∈ A), θα έχουμε ότι U∩A≠∅⇒υπάρχει β ∈ U∩A.
Τότε, όμως, λ=(β, A) ∈ Λ και $\lambda \geqslant \lambda_0$. Επίσης p_λ=β ∈ U. Δηλαδή, για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x) και για κάθε λ_0 ∈ Λ υπάρχει λ ∈ Λ έτσι ώστε $\lambda \geqslant \lambda_0$ και p_λ ∈ U.
Αυτό όμως σημαίνει ότι το x είναι οριακό σημείο του δικτύου και άρα αποδείξαμε ότι $adh\mathcal{F}\subset adh(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
(ii) Έστω x ένα οριακό σημείο του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, δηλαδή για κάθε U ∈ $\mathcal{N}$(x) και για κάθε λ_0 ∈ Λ υπάρχει λ ∈ Λ έτσι ώστε $\lambda \geqslant \lambda_0$ και p_λ ∈ U (∗). Θέλουμε να δείξουμε ότι το x είναι οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$, δηλαδή

ότι x $\in \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$.
Θεωρούμε ένα F $\in \mathcal{F}$, ένα U $\in \mathcal{N}$(x) και ένα λ_0=(α, F) $\in \Lambda$.
Λόγω της (∗), θα έχουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ έτσι ώστε $\lambda \geqslant \lambda_0$ και $p_\lambda \in$ U. Έστω λ=(β, K) με K $\in \mathcal{F}$ και β $\in$ K. Επειδή $\lambda \geqslant \lambda_0$ θα έχουμε ότι K⊂F και άρα β $\in \mathcal{F}$. Επίσης $p_\lambda \in$ U $\Rightarrow$ β $\in$ U, δηλαδή β $\in$ U∩F.
Επομένως, U∩F≠∅ για κάθε U $\in \mathcal{N}$(x) και για κάθε F $\in \mathcal{F} \Rightarrow$ x $\in \overline{F}$, για κάθε F $\in \mathcal{F}$.
Συνεπώς το x είναι οριακό σημείο του φίλτρου $\mathcal{F}$ και άρα $adh(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset adh\mathcal{F}$.

Αποδείξαμε δηλαδή τελικά ότι $adh\mathcal{F} = adh(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Παρατήρηση: Τα προηγούμενα θεωρήματα μας δίνουν μια γέφυρα ανάμεσα στα φίλτρα και τα δίκτυα, δείχνοντάς μας με ποιον τρόπο οι έννοιες αυτές είναι ισοδύναμες: τα φίλτρα αντιστοιχίζονται με τα δίκτυα και τα ισχυρότερα φίλτρα με τα υποδίκτυα.



4. Διαχωριστικά Αξιώματα και Βασικές Ιδιότητες Συμπαγών Χώρων

4.1 Διαχωριστικά Αξιώματα

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος X, είναι T_1 αν για κάθε x, y ∈ X με x ≠ y υπάρχει ανοικτό υποσύνολο G του X, ώστε x ∈ G και y ∉ G.

Πρόταση: Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. O X είναι T_1 χώρος
2. Το μονοσύνολο {x} είναι κλειστό στο X για κάθε x ∈ X.
3. Για κάθε x ∈ X και $\mathcal{B}_x$ βάση περιοχών του x ισχύει $\bigcap\mathcal{B}_x$={x}

Απόδειξη:
(1⇒2) Έστω x ∈ X. Από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι το σύνολο X\{x} είναι ανοικτό, άρα το {x} είναι κλειστό στο X.
(2⇒3) Έστω x ∈ X και $\mathcal{B}_x$ μία βάση περιοχών του x. Τότε {x}⊂$\bigcap\mathcal{B}_x$. Αν y ∈ X, y ≠ x, τότε το X\{y} είναι ανοικτό και x ∈ X\{y}, άρα υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}_x$ ώστε y ∉ B. Το συμπέρασμα έπεται άμεσα.
(3⇒1) Έστω x, y ∈ X, x ≠ y. Από το (3) υπάρχει B ∈ $\mathcal{B}_x$ ώστε y ∉ B. Τότε το σύνολο G=B^o ανοικτό, περιέχει το x και δεν περιέχει το y.

Πρόταση: Έστω X ένας χώρος T_1, A⊂X και x ∈ X. Τότε x ∈ A' αν και μόνο αν κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα σημεία του A.
Απόδειξη:
(⇒) Αν κάθε περιοχή U του x περιέχει άπειρα σημεία του A, τότε $U \cap A\setminus\{x\}$

$\neq \varnothing$. Επομένως, από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης έπεται ότι x $\in$ A'.
($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι x $\in$ A' και ότι υπάρχει περιοχή U του x που περιέχει πεπερασμένο αριθμό σημείων του A, έστω $U \cap A\setminus\{x\}$=$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Τότε $(X\setminus\{x_1, x_2, ..., x_n\})$∩U∩$(A\setminus\{x\}) = \varnothing$.
Άτοπο αφού x $\in$ A' και το $(X\setminus\{x_1, x_2, ..., x_n\})$∩U είναι μία περιοχή του x, εφ'όσον τα πεπερασμένα υποσύνολα ενός χώρου T_1 είναι κλειστά.

Παραδείγματα:

1. Κάθε μετρικός χώρος είναι T_1, εφ'όσον για κάθε x, y $\in$ X με x $\neq$ y, y $\notin$ S(x, ε), όπου ε=$\frac{\rho(x,y)}{2}$>0

2. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία του X. Ο χώρος (X, $\mathcal{T}$) είναι T_1 εφ'όσον για κάθε x $\in$ X το μονοσύνολο {x} είναι κλειστό.
   Ένας τοπολογικός χώρος (X, $\mathcal{S}$) είναι T_1 αν και μόνο αν η $\mathcal{S}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση της συμπεπερασμένης τοπολογίας $\mathcal{T}$ του X.
   Πράγματι, αν $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, τότε εφ'όσον για κάθε x $\in$ X το μονοσύνολο {x} είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{T}$ θα είναι κλειστό και ως προς την $\mathcal{S}$, άρα ο χώρος (X, $\mathcal{S}$) είναι T_1.
   Αντίστροφα, αν ο χώρος (X, $\mathcal{S}$) είναι T_1, τότε τα μονοσύνολα {x}, x $\in$ X είναι κλειστά άρα και τα πεπερασμένα υποσύνολα του X είναι κλειστά ως πεπερασμένη ένωση κλειστών. Επομένως $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$.

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος είναι **Hausdorff** (ή T_2), αν για κάθε x, y $\in$ X με x $\neq$ y υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε x $\in$ G_1, y $\in$ G_2 και $G_1 \cap G_2$=$\varnothing$.
*Κάθε χώρος T_2 είναι T_1 (το αντίστροφο δεν ισχύει)
*Αν ο (X, $\mathcal{T}$) είναι T_2 και $\mathcal{S}$ μία τοπολογία μεγαλύτερη της $\mathcal{T}$, τότε και ο (X, $\mathcal{S}$) είναι T_2.

Πρόταση: Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Ο X είναι Hausdorff

2. Για κάθε x, y $\in$ X με x$\neq$y υπάρχει περιοχή U του x, ώστε y $\notin \overline{U}$.

3. $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\}$={x} για κάθε x $\in$ X.

Απόδειξη:
(1⇒2) Έστω x, y ∈ X με x ≠ y. Εφ'όσον ο X είναι Hausdorff, υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X ώστε x ∈ G_1, y ∈ G_2 και $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Θέτουμε U=$G_1$. Το U είναι περιοχή του x. Επειδή $G_1 \subset X \setminus G_2$ και το $X \setminus G_2$ είναι κλειστό, ισχύει $\overline{G_1} \subset X \setminus G_2$, άρα y ∉ $\overline{U}$.
(2⇒3) Έστω x ∈ X. Από το (2) έπεται ότι για κάθε x, y με x ≠ y υπάρχει περιοχή U του x, ώστε y ∉ $\overline{U}$. Άρα $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\}=\{x\}$.
(3⇒1) Έστω x, y ∈ X με x ≠ y. Από το (3) έχουμε ότι y ∉ $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{N}_x\}$. Άρα υπάρχει U ∈ $\mathcal{N}_x$, ώστε y ∉ $\overline{U}$. Θέτουμε $G_1 = U^o$ και $G_2 = X \setminus \overline{U}$. Τα G_1, G_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του X, x ∈ G_1, y ∈ G_2 και $G_1 \cap G_2 = U^o \cap (X \setminus \overline{U}) = \varnothing$. Επομένως ο X είναι Hausdorff.

Θεώρημα: Ένας τοπολογικός χώρος είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε δίκτυο που συγκλίνει στο X συγκλίνει ακριβώς σε ένα σημείο του X.
Απόδειξη:
(⇒) Έστω ότι ο X είναι Hausdorff. Υποθέτουμε ότι ένα δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ στο X συγκλίνει σε δύο διαφορετικά σημεία x, y του X. Εφ'όσον ο X είναι Hausdorff υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα G_1, G_2 του X, ώστε x ∈ G_1, y ∈ G_2 και $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Επειδή το δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει στο x, υπάρχει $\lambda_1 \in \Lambda$, ώστε $p_\lambda \in G_1$ για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_1$ και επειδή το δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει και στο y, υπάρχει $\lambda_2 \in \Lambda$, ώστε $p_\lambda \in G_2$ για κάθε $\lambda \geqslant \lambda_2$. Αφού το Λ είναι κατευθυνόμενο σύνολο, υπάρχει $\lambda_3 \in \Lambda$ ώστε $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ και $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$. Επομένως $p_{\lambda_3} \in G_1 \cap G_2$, άτοπο εφ'όσον $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Άρα κάθε δίκτυο που συγκλίνει στο X, συγκλίνει ακριβώς σε ένα σημείο.
(⇐) Έστω ότι κάθε δίκτυο που συγκλίνει στο X, συγκλίνει ακριβώς σε ένα σημείο του X. Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι Hausdorff χώρος. Από τον ορισμό, υπάρχουν x, y ∈ X με x ≠ y, ώστε U∩V≠∅ για κάθε U, V περιοχές των x, y αντίστοιχα. Θέτουμε Λ={(U, V): U ∈ $\mathcal{N}_x$ και V ∈ $\mathcal{N}_y$}. Ορίζουμε σχέση ⩽ στο Λ ως εξής:
$(U_1, V_1) \leqslant (U_2, V_2)$ αν και μόνο αν $U_2 \subset U_1$ και $V_2 \subset V_1$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το Λ είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της επιλογής, επιλέγουμε για κάθε $(U, V) \in \Lambda$ ένα στοιχείο $p_{U,V} \in U \cap V$. Το δίκτυο $(p_{U,V})_{(U,V) \in \Lambda}$ συγκλίνει στο x και στο y συγχρόνως. Πράγματι, για κάθε G περιοχή του x, υπάρχει (G, X) ∈ Λ ώστε $p_{U,V} \in U \cap V \subset U \subset G$ για κάθε $(G, X) \leqslant (U, V)$. Επομένως, το δίκτυο $(p_{U,V})_{(U,V) \in \Lambda}$ συγκλίνει στο x. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι συγκλίνει και στο y. Άτοπο.

Άρα ο X είναι Hausdorff χώρος.

Παραδείγματα:

1. Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) είναι Hausdorff.
   Πράγματι, για κάθε x, y ∈ X με x≠y έχουμε $\mathcal{S}$(x, ε)∩$\mathcal{S}$(y, ε)=∅, όπου ε=$\frac{\rho(x,y)}{2}$>0.

2. Έστω X ένα άπειρο σύνολο και $\mathcal{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία του X. Ο χώρος (X, $\mathcal{T}$) είναι T_1, δεν είναι T_2, αφού δεν έχει ανοικτά ξένα σύνολα. Πράγματι, έστω G_1, $G_2 \in \mathcal{T}$ και $G_1 \cap G_2$=∅. Τότε τα σύνολα $X \setminus G_1$, $X \setminus G_2$ είναι πεπερασμένα και X=($X \setminus G_1$)∪($X \setminus G_2$), άρα το X είναι πεπερασμένο. Άτοπο!

3. Ο χώρος $\mathbb{R}_{\mathcal{S}}$ των πραγματικών αριθμών με την τοπολογία των αριστερά ημιανοιχτών διαστημάτων είναι T_2, εφ'όσον η τοπολογία αυτή είναι μεγαλύτερη της συνηθισμένης τοπολογίας του $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος X είναι κανονικός (ή T_3) αν για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X και για κάθε x ∈ X ώστε x ∉ F, υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε x ∈ G_1, F⊂G_2 και $G_1 \cap G_2$=∅.

Πρόταση: Κάθε τοπολογικός χώρος T_1 και T_3 είναι T_2.
Απόδειξη: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα μονοσύνολα σε ένα χώρο T_1 είναι κλειστά.
Πρόταση: Έστω ένας τοπολογικός χώρος X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Ο X είναι κανονικός χώρος

2. Για κάθε x ∈ X και κάθε περιοχή U του x υπάρχει περιοχή V του x, ώστε x ∈ V⊂$\overline{V}$⊂U.

3. Για κάθε x ∈ X υπάρχει μία βάση περιοχών του x που αποτελείται απο κλειστά σύνολα.

4. Για κάθε x ∈ X και F κλειστό υποσύνολο του X, ώστε x ∉ F, υπάρχει περιοχή V του X ώστε $\overline{V}$∩F=∅

Απόδειξη:
(1⇒2) Έστω x ∈ X και U περιοχή του x. Τότε x ∈ U^o, άρα x ∉ $X \setminus$U^o. Εφ'όσον ο X είναι κανονικός χώρος και το $X \setminus$U^o κλειστό υποσύνολό του, υπάρχουν

G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε x ∈ G_1, $X \setminus U^o \subset G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Θέτουμε V=$G_1$. Προφανώς το V είναι περιοχή του x. Εφ'όσον $G_1 \subset X \setminus G_2$ και το $X \setminus G_2$ είναι κλειστό, ισχύει $\overline{V} \subset X \setminus G_2$. Επίσης, εφ'όσον $X \setminus U^o \subset G_2$, ισχύει $X \setminus G_2 \subset U^o \subset U$. Επομένως ισχύει ότι x ∈ $V \subset \overline{V} \subset X \setminus G_2 \subset U^o \subset U$.
(2⇒3) Έστω x ∈ X. Η οικογένεια $\mathcal{B}_x = \{\overline{V}$: V περιοχή του x$\}$ είναι μία βάση περιοχών του x σύμφωνα με το (2) (και από γνωστή Πρόταση στις Βάσεις περιοχών).
(3⇒4) Έστω x ∈ X και F κλειστό υποσύνολο του x ώστε x ∉ F. Το σύνολο $X \setminus F$ είναι ανοικτό και x ∈ $X \setminus F$, άρα το $X \setminus F$ είναι περιοχή του x. Από το (3), υπάρχει βασική περιοχή V του x, ώστε $\overline{V} \subset X \setminus F$, δηλαδή $\overline{V} \cap F = \varnothing$.
(4⇒1) Έστω x ∈ X και F κλειστό υποσύνολο του X, ώστε x ∉ F. Από το (4) υπάρχει V περιοχή του x, ώστε $\overline{V} \cap F = \varnothing$. Θέτουμε $G_1 = V^o$ και $G_2 = X \setminus \overline{V}$. Τα G_1, G_2 είναι ανοικτά, x ∈ G_1, F⊂G_2 και $G_1 \cap G_2 = V^o \cap (X \setminus \overline{V}) = \varnothing$. Επομένως, ο X είναι κανονικός χώρος.

Πόρισμα: Έστω ο τοπολογικός χώρος X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Ο X είναι κανονικός χώρος
2. Για κάθε x ∈ X και F κλειστό υποσύνολο του X ώστε x ∉ F, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα G_1, G_2 του X, ώστε x ∈ G_1, F⊂G_2 και $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \varnothing$

Απόδειξη:
(1⇒2) Έστω F⊂X κλειστό και x ∉ F. Αν ο χώρος X είναι κανονικός, υπάρχουν U_1, U_2 ανοικτά υποσύνολα του X ώστε x ∈ U_1, F⊂U_2 και $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση υπάρχει περιοχή V_1 του x, ώστε x ∈ $V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$. Θέτουμε $G_1 = V_1^o$ και $G_2 = U_2$. Τα σύνολα G_1, G_2 είναι ανοικτά, x ∈ G_1, F⊂G_2 και $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \varnothing$, εφ'όσον $\overline{G_2} \subset X \setminus U_1 \subset X \setminus \overline{V_1} \subset X \setminus \overline{G_1}$.
(2⇒1) Είναι άμεσο από τον ορισμό.

Παραδείγματα:

1. Έστω X={α, β, γ} και $\mathcal{T}$={∅, X, {α}, {β, γ}} μία τοπολογία του X. Ο χώρος (X, $\mathcal{T}$) δεν είναι T_1 εφ'όσον το {β} δεν είναι κλειστό (επομένως δεν είναι και T_2), όμως είναι T_3 διότι τα ανοικτά υποσύνολα του X είναι συγχρόνως και κλειστά.
2. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ θεωρούμε την τοπολογία $\mathcal{T}$ που έχει υποβάση την οικογένεια $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, όπου $\mathcal{T}_1$ είναι η συνηθισμένη

τοπολογία του $\mathbb{R}$ και $\mathcal{T}_2$ η συναριθμήσιμη τοπολογία του $\mathbb{R}$.
Ισχυρισμός: O $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ είναι χώρος T_2 και όχι T_3.
Πράγματι, η $\mathcal{T}$ είναι μεγαλύτερη της $\mathcal{T}_1$, επομένως ο $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ είναι T_2. Για να αποδείξουμε ότι ο χώρος $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ δεν είναι T_3, παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ και επιλέγουμε $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Υποθέτουμε ότι ότι υπάρχουν G_1, $G_2 \in \mathcal{T}$, ώστε $x \in G_1$, $\mathbb{Q}\subset G_2$ και $G_1\cap G_2=\varnothing$. Τότε $G_1=U_1\setminus A$, όπου U_1 είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως προς την συνηθισμένη τοπολογία και το $A\subset\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο. Εφ'όσον $x \in G_1\subset U_1$, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset U_1$. Αφού $G_1\subset X\setminus G_2$ και το $X\setminus G_2$ είναι κλειστό σύνολο ως προς την $\mathcal{T}$, έπεται ότι $\mathbf{cl}_{\mathcal{T}} G_1\subset X\setminus G_2$. Όμως ισχύει ότι $\mathbf{cl}_{\mathcal{T}} G_1=\mathbf{cl}_{\mathcal{T}_1} G_1$. Επομένως $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]=\mathbf{cl}_{\mathcal{T}_1}((x-\epsilon, x+\epsilon)\setminus A)\subset\mathbf{cl}_{\mathcal{T}_1} G_1\subset X\setminus G_2\subset X\setminus\mathbb{Q}$. Άτοπο.
Άρα ο $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ δεν είναι T_3.

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος X είναι φυσιολογικός (ή χώρος T_4) αν για κάθε F_1, F_2 κλειστά υποσύνολα του X, ώστε $F_1\cap F_2=\varnothing$, υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X, ώστε $F_1\subset G_1$, $F_2\subset G_2$ και $G_1\cap G_2=\varnothing$.

Πρόταση: Κάθε τοπολογικός χώρος T_1 και T_4 είναι T_3.
Απόδειξη: Έστω F ένα κλειστό σύνολο ενός χώρου X που είναι T_1 και T_4 και έστω $x \in X$ ώστε $x \notin F$. Εφ'όσον ο X είναι T_1, το $\{x\}$ είναι κλειστό και εφ'όσον ο X είναι T_4 υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $\{x\}\subset G_1$, $F\subset G_2$ και $G_1\cap G_2=\varnothing$. Άρα ο X είναι T_3.

Πρόταση: Έστω ο τοπολογικός χώρος X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. O X είναι T_4
2. Για κάθε $F\subset X$ κλειστό και $G\subset X$ ανοικτό, ώστε $F\subset G$, υπάρχει $V\subset X$ ανοικτό ώστε $F\subset V\subset\overline{V}\subset G$
3. Για κάθε δύο κλειστά, ξένα υποσύνολα F_1, F_2 του X, υπάρχει $V\subset X$ ανοικτό ώστε $F_1\subset V$ και $\overline{V}\cap F_2=\varnothing$
4. Για κάθε δύο κλειστά, ξένα υποσύνολα F_1, F_2 του X, υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_1, G_2 ώστε $F_1\subset G_1$, $F_2\subset G_2$ και $\overline{G_1}\cap\overline{G_2}=\varnothing$

Απόδειξη:
(1⇒2) Έστω $F\subset X$ και $G\subset X$ ανοικτό ώστε $F\subset G$. Τα σύνολα F, $X\setminus G$ είναι κλειστά και ξένα επομένως, εφ'όσον ο X είναι T_4 χώρος, υπάρχουν ανοικτά

σύνολα G_1, G_2 ώστε F⊂G_1, $X\setminus G$⊂G_2 και G_1∩G_2=∅. Θέτουμε V=G_1, οπότε έχουμε F⊂V⊂$\overline{V}$⊂$X\setminus G_2$⊂G.
(2⇒3) Έστω F_1, F_2 κλειστά ξένα υποσύνολα του X. Το σύνολο $X\setminus F_2$ είναι ανοικτό και F_1⊂$X\setminus F_2$. Από το (2) υπάρχει V⊂X ανοικτό, ώστε F_1⊂V⊂$\overline{V}$⊂$X\setminus F_2$. Επομένως, ισχύει $\overline{V}$∩F_2=∅ και F_1⊂V.
(3⇒4) Έστω F_1, F_2 κλειστά, ξένα υποσύνολα του X. Από το (3) υπάρχει V(⊂X ανοικτο, ώστε F_1⊂V και $\overline{V}$∩F_2=∅. Τα σύνολα $\overline{V}$, F_2 είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους οπότε πάλι από το (3) υπάρχει G⊂X ανοικτό ώστε F_2⊂G και $\overline{V}$∩$\overline{G}$=∅. Θέτουμε G_1=V και G_2=G και έχουμε το (4).
(4⇒1) Είναι άμεσο.

4.2 Βασικές Ιδιότητες Συμπαγών Χώρων

Ορισμός: Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και A⊂X. Μία οικογένεια ανοικτών συνόλων G_i, i ∈ I, τέτοια ώστε A⊂$\bigcup_{i\in I} G_i$ λέγεται ανοικτή κάλυψη του A.

Ορισμός: Ένας χώρος Hausdorff X λέγεται συμπαγής αν κάθε ανοικτή κάλυψη του X έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων G_i, i ∈ I, με $\bigcup_{i\in I} G_i$=X, υπάρχουν $\mathrm{i}_1, i_2, ..., i_n$ ∈ I τέτοια ώστε $\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{G}_{i_k}$=X. Ένα υποσύνολο A⊂X λέγεται συμπαγές αν είναι συμπαγής χώρος ως προς τη σχετική τοπολογία.

Παραδείγματα:
1. Το $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία και την τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων δεν είναι συμπαγής χώρος γιατί η ανοικτή κάλυψη (-n, n), n ∈ $\mathbb{N}$, δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.
2. Ένας διακριτός χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν το X είναι πεπερασμένο. Η μία κατεύθυνση είναι προφανής. Για την άλλη κατεύθυνση, θεωρούμε την ανοικτή κάλυψη {{x}: x ∈ X}. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_n$ ∈ X τέτοια ώστε X={$\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_n$}.

Πρόταση: Αν ο X είναι συμπαγής χώρος και το A⊂X κλειστό, τότε το A είναι συμπαγές.
Απόδειξη:

Έστω G_i, i ∈ I, μία ανοικτή κάλυψη του A. Τότε η οικογένεια $\{X\setminus A\}\cup\{G_i$: i ∈ I}, είναι ανοικτή κάλυψη του X, άρα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{X\setminus A\}\cup\{G_{i_k}$: k=1, ..., n}. Επομένως, τα G_{i_k} αποτελούν πεπερασμένη υποκάλυψη του A.

Θεώρημα: Αν ο X είναι Hausdorff, το A⊂X συμπαγές και x ∉ A, τότε υπάρχουν U, V ⊂ X ανοικτά και ξένα τέτοια ώστε x ∈ U και A⊂V.
Απόδειξη:
Έστω x ∉ A. Τότε για κάθε y ∈ A υπάρχουν περιοχές U_y, V_y των x και y αντίστοιχα τέτοιες ώστε $U_y \cap V_y = \emptyset$. Η οικογένεια V_y, y ∈ A, είναι ανοικτή κάλυψη του A άρα υπάρχουν $y_1, y_2, ..., y_n$ ∈ A τέτοια ώστε $A\subset\bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$.
Θέτουμε $U=\bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}$, $V=\bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$ και έχουμε το ζητούμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα: Αν ο X είναι Hausdorff και A, B ⊂ X συμπαγή και ξένα, τότε υπάρχουν U, V ⊂ X ανοικτά και ξένα τέτοια ώστε A⊂U και B⊂V.
Απόδειξη:
Από το προηγούμενο Θεώρημα, για κάθε x ∈ A, υπάρχουν U_x, V_x ανοικτά και ξένα τέτοια ώστε x ∈ U_x και B⊂V_x. Η οικογένεια U_x, x ∈ A, είναι ανοικτή κάλυψη του A, άρα υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_n$ ∈ A τέτοια ώστε $A\subset\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$.
Θέτουμε $U=\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$, $V=\bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$.
Τότε τα U, V είναι ανοικτά και ξένα υπερσύνολα των A, B αντίστοιχα.

Πόρισμα: Κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff X είναι φυσιολογικός (T_4).
Απόδειξη:
Αν F, H είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X τότε από προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι τα F, H είναι συμπαγή και τώρα το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο Θεώρημα.

Πόρισμα: Έστω X τοπολογικός χώρος Hausdorff και F ένα συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το F είναι κλειστό.
Απόδειξη:
Αν x ∈ $X\setminus F$ τότε, εφ'όσον το {x} είναι συμπαγές υποσύνολο του X ξένο προς το F και ο X είναι χώρος Hausdorff, από προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι υπάρχουν U, V ανοικτά με x ∈ U, F⊂V και U∩V=∅. Άρα το $X\setminus F$ είναι ανοικτό και άρα το F είναι κλειστό.

Πρόταση: Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος

και $f : X \to Y$ μία συνεχής, επί συνάρτηση. Τότε ο Y είναι συμπαγής.
Απόδειξη:
Έστω $\{V_i : i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του Y. Εφ'όσον η f είναι συνεχής, η οικογένεια $\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X και, εφ΄όσον ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $i_1, i_2, ..., i_k \in I$ ώστε $X \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup ... \cup f^{-1}(V_{i_k})$. Τότε, εφ'όσον η f είναι επί, $Y = V_{i_1} \cup ... \cup V_{i_k}$ και άρα ο Y είναι συμπαγής.

Πρόταση: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, με τον X συμπαγή και τον Y χώρο Hausdorff και $f : X \to Y$, 1-1, επί, συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιομορφισμός.
Απόδειξη:
Για να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, αρκεί να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι κλειστή συνάρτηση. Έστω $F \subset X$ κλειστό. Από προηγούμενη Πρόταση, έπεται ότι το F είναι συμπαγές υποσύνολο του X και άρα το $f(F)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y επειδή η f είναι συνεχής, από την προηγούμενη Πρόταση. Εφ'όσον ο Y είναι χώρος Hausdorff, από το τελευταίο Πόρισμα έπεται ότι το $f(F)$ είναι κλειστό.

5. Λήμμα του Urysohn και Συνέπειες

5.1 Εισαγωγή

Η σημασία του Λήμματος του Urysohn έγκειται στην παραγωγή πολλών συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στους φυσιολογικούς χώρους. Το ίδιο το λήμμα του Urysohn προσδίδει ιδιαίτερη σημασία στην κλάση των φυσιολογικών χώρων καθώς μέσω αυτού συμπεραίνεται ότι κάθε T_1 φυσιολογικός χώρος είναι τελείως κανονικός. Συνέπειά του επίσης είναι το πολύ χρήσιμο θεώρημα επέκτασης του Tietze για φυσιολογικούς χώρους. Τέλος, πολύ σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο ένας συμπαγής Hausdorff χώρος εμφυτεύεται ομοιομορφικά σε έναν υπόχωρο του $[0,1]^{\mathrm{I}}$, για κάποιο σύνολο I. Αυτά είναι τα βασικά στοιχεία που θα μελετήσουμε στην παράγραφο αυτή.

5.2 Λήμμα του Urysohn

Λήμμα: Έστω X τοπολογικός χώρος, D πυκνό υποσύνολο του $[0, +\infty)$ και $\{U_d : d \in D\}$ μία οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X ώστε:

1. X$=\bigcup\{U_d : d \in D\}$ και

2. αν $d_1, d_2 \in D, d_1 < d_2$, τότε $\overline{U}_{d_1} \subset U_{d_2}$

Θέτουμε $f(\mathrm{x}) = \inf\{d \in D : x \in U_d\}$ για x $\in$ X.
Τότε η f:X$\to\mathbb{R}$ είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση.

Απόδειξη:
Εφ'όσον ο X=$\bigcup\{U_d$: d $\in$ D$\}$ έπεται ότι για κάθε x $\in$ X υπάρχει d $\in$ D με x $\in U_d$. Άρα, το σύνολο {d $\in$ D: x $\in U_d$} είναι διάφορο του κενού και εφ'όσον είναι κάτω φραγμένοαπό το 0 έπεται ότι υπάρχει το inf{d $\in$ D: x $\in U_d$}. Έτσι, η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f^{-1} μεταφέρει την υποβάση {$(-\infty$, r), (s, $+\infty$): r, s $\in \mathbb{R}$} σε ανοικτά υποσύνολα του X, οπότε από γνωστή Πρόταση έπεται ότι η f είναι συνεχής.

Ισχυρισμός 1: f^{-1}((-∞, r))=$\bigcup\{U_d$: d $\in$ D, d<r}
Έστω x $\in f^{-1}$((-∞, r)). Τότε 0$\leqslant f$(x)<r, άρα από τον ορισμό της f υπάρχει d $\in$ D με f(x)$\leqslant$d<r και x $\in U_d$. Αντίστροφα, έστω x $\in U_d$ για κάποιο d $\in$ D με d<r. Τότε f(x)$\leqslant$d<r και άρα x $\in f^{-1}$((-∞, r)).

Ισχυρισμός 1: f^{-1}((-∞, r])=$\bigcap\{\overline{U_d}$: d $\in$ D, d>r}.
Έστω x $\in f^{-1}$((-∞, r]). Τότε 0$\leqslant f$(x)$\leqslant$r. Για κάθε d $\in$ D, με d>r, έχουμε ότι f(x)<d, άρα από τον ορισμό της f υπάρχει d' $\in$ D με f(x)$\leqslant$d'<d και x $\in U_d$. Επομένως x $\in U'_d \subset \overline{U'_d} \subset U_d$. Αντίστροφα, έστω x $\in \overline{U_d}$ για κάθε d>r. Εφ'όσον x $\in \overline{U_d}$ και $\overline{U_d} \subset U'_d$ για κάθε d<d', έχουμε από τον ορισμό της f ότι f(x)$\leqslant$d'. Εφ'όσον το D είναι πυκνό στο [0, +∞), έχουμε ότι f(x)$\leqslant$d για κάθε d>r και άρα f(x)$\leqslant$r.

Είναι άμεσο από τον Ισχυρισμό 2 ότι το σύνολο f^{-1}((s, +∞) είναι ανοικτό αφού είναι ίσο με το συμπλήρωμα του κλειστού συνόλου f^{-1}((-∞, s]).

Θεώρημα (*Λήμμα του Urysohn*): Έστω X φυσιολογικός (T_4) χώρος, A, B κλειστά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X. Τότε υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση f: X $\to$ [0, 1] με f(x)=0 για κάθε x $\in$ A και f(x)=1 για κάθε x $\in$ B.
Απόδειξη:
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι τα σύνολ A, B είναι μη κενά. Έστω Δ={$\frac{k}{2^n}$: 0$\leqslant$k$\leqslant 2^n$, n=1, 2, ..., } το σύνολο των δυαδικών αριθμών στο [0, 1]. Σε κάθε r $\in$ Δ αντιστοιχούμε ένα ανοικτό σύνολο U(r) στο X ώστε

1. A$\subset$U(r) και B$\cap$U(r)=$\varnothing$ για κάθε r $\in$ Δ, και
2. $\overline{U(r)}\subset$U(r') για κάθε r, r' $\in$ Δ με r<r'

Ο ορισμός των συνόλων U(r) θα γίνει με επαγωγή στον εκθέτη n των δυα-

δικών αριθμών.
Ορίζουμε U(1)=$X \setminus B$ (ανοικτό σύνολο). Από γνωστή Πρόταση στα Διαχωριστικά Αξιώματα και εφ'όσον ο X είναι T_4, υπάρχει ανοικτό σύνολο U(O) ώστε A⊂U(0)⊂$\overline{U(0)}$⊂U(1).
Υποθέτουμε ότι n⩾1 και ότι έχουμε ορίσει τα σύνολα U($\frac{k}{2^m}$) για m=1, 2, ..., n-1 και 0⩽k⩽2^m και θα ορίσουμε τα σύνολα U($\frac{k}{2^n}$) για 0⩽k⩽2^n.
Αρκεί να ορίσουμε τα σύνολα U($\frac{k}{2^n}$) για 0⩽k⩽2^n, k περιττό, αφού αν k=2l τότε το U($\frac{k}{2^n}$)=U($\frac{2l}{2^n}$)=U($\frac{l}{2^{n-1}}$) έχει ήδη ορισθεί από την επαγωγική υπόθεση.
Αν 0⩽k⩽2^n, k περιττός, έχουμε από την επαγωγική υπόθεση $\overline{U(\frac{k-1}{2^n})}$⊂U($\frac{k+1}{2^n}$) (αφού k-1, k+1 άρτιοι).
Από γνωστή Πρόταση στα Διαχωριστικά Αξιώματα, εφ'όσον ο X είναι T_4, υπάρχει ανοικτό σύνολο U($\frac{k}{2^n}$) ώστε $\overline{U(\frac{k-1}{2^n})}$⊂U($\frac{k}{2^n}$)⊂$\overline{U(\frac{k}{2^n})}$⊂U($\frac{k+1}{2^n}$). O επαγωγικός ορισμός του U($\frac{k}{2^n}$), 0⩽k⩽2^n είναι τώρα πλήρης.
Τέλος, θέτουμε U_r=X για κάθε r ∈ ℝ, r>1. Παρατηρούμε ότι το σύνολο Δ∪(1, ∞) είναι πυκνό στο [0, ∞] και ότι η οικογένεια {U(r): r ∈ Δ∪(1, ∞)} ικανοποιεί τις υποθέσεις (1), (2) του προηγούμενου Λήμματος και άρα η συνάρτηση με f(x)=inf{r ∈ Δ: x ∈ U(r)}, είναι καλά ορισμένη, συνεχής και 0⩽f(x)⩽1 για x ∈ X. Επίσης, αν x ∈ B τότε f(x)=1, εφ'όσον x ∉ U(r) για κάθε r<1 και αν x ∈ A τότε f(x)=0, εφ'όσον x ∈ U(0).

Παρατήρηση: Μία άμεση γενίκευση του Λήμματος του Urysohn είναι η ακόλουθη: Αν ο X είναι T_4 και A, B ξένα, κλειστά υποσύνολα του X και α, β ∈ ℝ τότε, θέτοντας I για το κλειστό διάστημα με άκρα τα α, β υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση g: X → I ώστε g(x)=α για κάθε x ∈ A και g(x)=β για κάθε x ∈ B. Πράγματι, αν f είναι η συνάρτηση που προκύπτει από το Λήμμα του Urysohn, τότε η g=(α-β)f+α έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος X είναι τελείως κανονικός (ή $T_{3_{1/2}}$) χώρος αν για κάθε x ∈ X και F κλειστό υποσύνολο του X με x ∉ F υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση f: X → [0, 1] με f(x)=0 και f(y)=1 για κάθε y ∈ F.
Είναι άμεσο ότι κάθε τελείως κανονικός χώρος είναι κανονικός.
Επίσης, αν ο X είναι τελείως κανονικός και ο Y είναι ομοιομορφικός προς τον X τότε και ο Y είναι τελείως κανονικός.
Πρόταση: Κάθε T_1 φυσιολογικός χώρος είναι τελείως κανονικός.
Απόδειξη:
Έστω X T_1 φυσιολογικός χώρος, x ∈ X και F ένα κλειστό υποσύνολο του

X με x ∉ F. Το μονοσύνολο {x} είναι κλειστό, εφ'όσον ο X είναι T_1 και από γνωστή Πρόταση στα Διαχωριστικά Αξιώματα και άρα για τα ξένα κλειστά υποσύνολα {x}, F του φυσιολογικού χώρου X από το λήμμα του Urysohn υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$, με f(x)=0 και f(y)=1 για κάθε y ∈ F. Άρα ο X είναι τελείως κανονικός.

Πρόταση: Κάθε υπόχωρος ενός τελείως κανονικού χώρου είναι τελείως κανονικός.

Απόδειξη:
Έστω X τελείως κανονικός χώρος και A⊂X. Αν x ∈ A και F ένα κλειστό υποσύνολο του A με x ∉ F, τότε υπάρχει H κλειστό υποσύνολο του X με F=A∩H. Εφ'όσον ο X είναι τελείως κανονικός, υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ με f(x)=0 και f(y)=1 για κάθε y ∈ H. Τότε ο περιορισμός $f|A$ της f στο A είναι συνεχής στο A, $(f|A)$(x)=0 και $(f|A)$(y)=1 για κάθε y ∈ F. Άρα ο A είναι τελείως κανονικός.

Πρόταση: Έστω $\{X_i$: i ∈ I} μία οικογένεια τοπολογικών χώρων και X=$\prod_{i\in I} X_i$ ο χώρος γινόμενο με την καρτεσιανή τοπολογία. Τότε

1. αν ο X είναι μη κενός, τελείως κανονικός, τότε ο X_i είναι τελείως κανονικός για κάθε i ∈ I και

2. αν ο X_i είναι τελείως κανονικός για κάθε i ∈ I, τότε ο X είναι τελείως κανονικός

Απόδειξη:
(1) Υποθέτουμε ότι ο X είναι μη κενός , τελείως κανονικός χώρος. Έστω p=$p_{i\in I}$ ένα στοιχείο του X. Για κάθε i ∈ I, ο χώρος X_i είναι ομοιομορφικός προς τον χώρο $X_i \times \prod_{i\neq j}\{p_j\}$ και άρα, από την προηγούμενη Πρόταση, έπεται ότι ο X_i είναι τελείως κανονικός.
(2) Έστω x ∈ X, F κλειστό υποσύνολο του X με x ∉ F. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό, βασικό σύνολο της μορφής $\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ του X που περιέχει το x και είναι ξένο προς το F. Για κάθε k=1, 2, ..., n στον χώρο X_{i_k} το σημείο x_{i_k} δεν ανήκει στο κλειστό σύνολο $X_{i_k} \setminus U_{i_k}$ και, εφ'όσον ο χώρος X_{i_k} είναι τελείως κανονικός, έπεται ότι υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f_{i_k}: X_{i_k} \to [0, 1]$ με $f_{i_k}(x_{i_k})$=0 και $f_{i_k}|X_{i_k} \setminus U_{i_k}$=1. Θέτουμε $f : X \to [0, 1]$ με f(x)=max$\{f_{i_k} \circ \pi_{i_k}$(x): k=1, 2, ..., n} για κάθε x ∈ X. Τότε η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Επίσης f(x)=0 και ακόμη αν y ∈ F τότε υπάρχει 1⩽k⩽n ώστε $y_{i_k} \notin U_{i_k}$,

οπότε $f_k(y_{i_k})$=1 και άρα f(y)=max{$f_k \circ \pi_{i_k}$(x): k=1, 2, ..., n}=1.

5.3 Θεώρημα επέκτασης του Tietze

Θεώρημα (*επέκτασης του Tietze*): Αν ο X είναι φυσιολογικός χώρος, ο F κλειστός υπόχωρος του X και f: X $\to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση g: X $\to \mathbb{R}$ με g|F=f. Δηλαδή η f έχει συνεχή επέκταση.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι $\|f\|_\infty$=1, δηλαδή ότι f: F $\to$ [-1, 1]. Θέτουμε f_0=f, A_0=f^{-1}([-1, -$\frac{1}{3}$]) και B_0=f^{-1}([$\frac{1}{3}$, 1]). Τα σύνολα A_0, B_0 είναι ξένα και κλειστά στο F και, εφ'όσον το F είναι κλειστό στο X, έπεται ότι αυτά είναι κλειστά στο X. Από το λήμμα του Urysohn υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση g_0: X $\to$ [-1, 1] με $g_0|A_0$=-$\frac{1}{3}$ και $g_0|B_0$=$\frac{1}{3}$. Έστω f_1=(f_0-g_0)|F. Παρατηρούμε ότι $|f_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}$, για κάθε x $\in$ F. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή για τα κλειστά και ξένα σύνολα A_1=f^{-1}([-1, -$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$]), B_1=f^{-1}([$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$, 1]) και έπεται από το λήμμα του Urysohn ότι υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση g_1: X $\to$ [-1, 1], με $g_1|A_1$=-$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$ και $g_1|B_1$=$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$. Έστω f_2=(f_1-g_1)|F=f_0-(g_1+g_0)|F. Παρατηρούμε ότι $|f_2(x)| \leqslant (\frac{2}{3})^2$ για κάθε x $\in$ F.

Επαγωγικά ορίζουμε ακολουθίες συνεχών συναρτήσεων g_n: X $\to$ [-1, 1], και f_n: F $\to$ [-1, 1] για n=1, 2, ..., ώστε $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^n$ για κάθε x $\in$ X, $|f_n(x)| \leqslant (\frac{2}{3})^n$ για κάθε x $\in$ F και f_n=f_0-(g_0+g_1+...+g_{n-1})|F για n=1, 2, ... Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X από το κριτήριο του Weierstrass και άρα η συνάρτηση g=$\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ είναι συνεχής και προφανώς $|g(x)| \leqslant 1$ για κάθε x $\in$ X. Εφ'όσον $|f_n(x)| \leqslant (\frac{2}{3})^n$ για κάθε x $\in$ F, καθώς n $\to \infty$, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$(x)=f_0(x)=f(x) για κάθε x $\in$ F και άρα g|F=f.

Παρατήρηση: Ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος του Tietze. Αν ένας χώρος Hausdorff έχει την ιδιότητα ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε κάθε κλειστό σύνολο έχει συνεχή επέκταση, τότε ο χώρος είναι T_4. Πράγματι, αν A, B είναι κλειστά και ξένα, τότε η f: A∪B $\to$ [0, 1] με f|A=0 και f|B=1 είναι συνεχής, άρα έχει συνεχή επέκταση σ' ολόκληρο το χώρο. Δηλαδή, τα A και B διαχωρίζονται από μια συνεχή συνάρτηση, επομένως ο χώρος είναι φυσιολογικός.

5.4 Λήμμα της Εμφύτευσης

Ορισμοί: Έστω X, Y_i τοπολογικοί χώροι και f_i: X $\rightarrow$ Y_i συναρτήσεις για i $\in$ I.

1. Η οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X αν για κάθε x_1, x_2 $\in$ X, με $x_1 \neq x_2$, υπάρχει i_0 $\in$ I με $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$.

2. Η οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X αν για κάθε x $\in$ X και F κλειστό υποσύνολο του X με x $\notin$ F, υπάρχει i_0 $\in$ I με f_{i_0}(x) $\notin$ $\overline{f(F)}$.

3. Η συνάρτηση e: X $\rightarrow$ $\prod_{i \in I} Y_i$, με e(x)=$(f_i(x))_{i \in I}$, είναι η συνάρτηση εκτίμησης (ως προς την οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$).

Παρατήρηση: Αν ο χώρος X είναι T_1 και η οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X, τότε η $(f_i)_{i \in I}$ διαχωρίζει και τα σημεία του X.

Θεώρημα (*Λήμμα της Εμφύτευσης*): Έστω X, Y_i τοπολογικοί χώροι και f_i: X $\rightarrow$ Y_i συνάρτηση για i $\in$ I. Τότε

1. αν η οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι 1-1,

2. αν η οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X, τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι ανοικτή απεικόνιση από το X στο e(X),

3. αν η οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι συνεχής, και

4. αν η οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, διαχωρίζει τα σημεία του X και διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X, τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι ένας ομοιομορφισμός του X και του e(X).

Απόδειξη:

(1) Έστω $x_1 \neq x_2$. Εφ'όσον η $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, υπάρχει $i_0 \in$ I με $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$. Άρα $e(x_1)=(f_i(x_1))_{i\in I} \neq (f_i(x_2))_{i\in I}=e(x_2)$ και άρα η e είναι 1-1.

(2) Έστω U ανοικτό υποσύνολο του X και x ∈ U. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} Y_i$ ώστε e(x) ∈ V∩e(X)⊂e(U). Από την υπόθεση για το σημείο x ∈ X και το κλειστό σύνολο $X\setminus U$ υπάρχει $i_0 \in$ I ώστε f_{i_0}(x) $\notin$ $(\overline{f_{i_0}(X\setminus U)})$. Θέτουμε V=$\pi_{i_0}^{-1}[Y_{i_0}\setminus(\overline{f_{i_0}(X\setminus U)})]$, όπου $\pi_{i_0}\colon \prod_{i\in I} Y_i \to Y_{i_0}$ η συνήθης προβολή. Τότε το V είναι ανοικτό στο $\prod_{i\in I} Y_i$ και V∩e(X)⊂e(U). Πράγματι, αν y ∈ V∩e(X), τότε υπάρχει z ∈ X ώστε y=e(z)=$(f_i(z))_{i\in I}$ και εφ'όσον y ∈ V, έπεται ότι π_{i_0}=f_{i_0}(z) $\notin$ $(\overline{f_{i_0}(X\setminus U)})$ και άρα z $\notin X\setminus U$, δηλαδή z ∈ U και e(z) ∈ e(U).

(3) Έχουμε $\pi_i\colon \prod_{i\in I} Y_i \to Y_i$ την συνήθη προβολή και $\pi_i \circ e = f_i$ συνεχείς για κάθε i ∈ I και $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο του X που συγκλίνει στο x ∈ X. Τότε, από γνωστή Πρόταση στη Συνέχεια Συναρτήσεων έχουμε ότι $\pi_i(e(x_\lambda))=f_i(\mathrm{x}_\lambda)$ $\to f_i(\mathrm{x})=\pi_i(e(x))$ για κάθε i ∈ I. Τότε όμως, γνωρίζουμε για την καρτεσιανή τοπολογία πως ισχύει $f(\mathrm{x}_\lambda) \to f(\mathrm{x})$. Άρα η e είναι συνεχής (από γνωστή Πρόταση στη Συνέχεια Συναρτήσεων).

(4) Έπεται από τα **(1)**, **(2)**, **(3)**.

Πόρισμα: Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

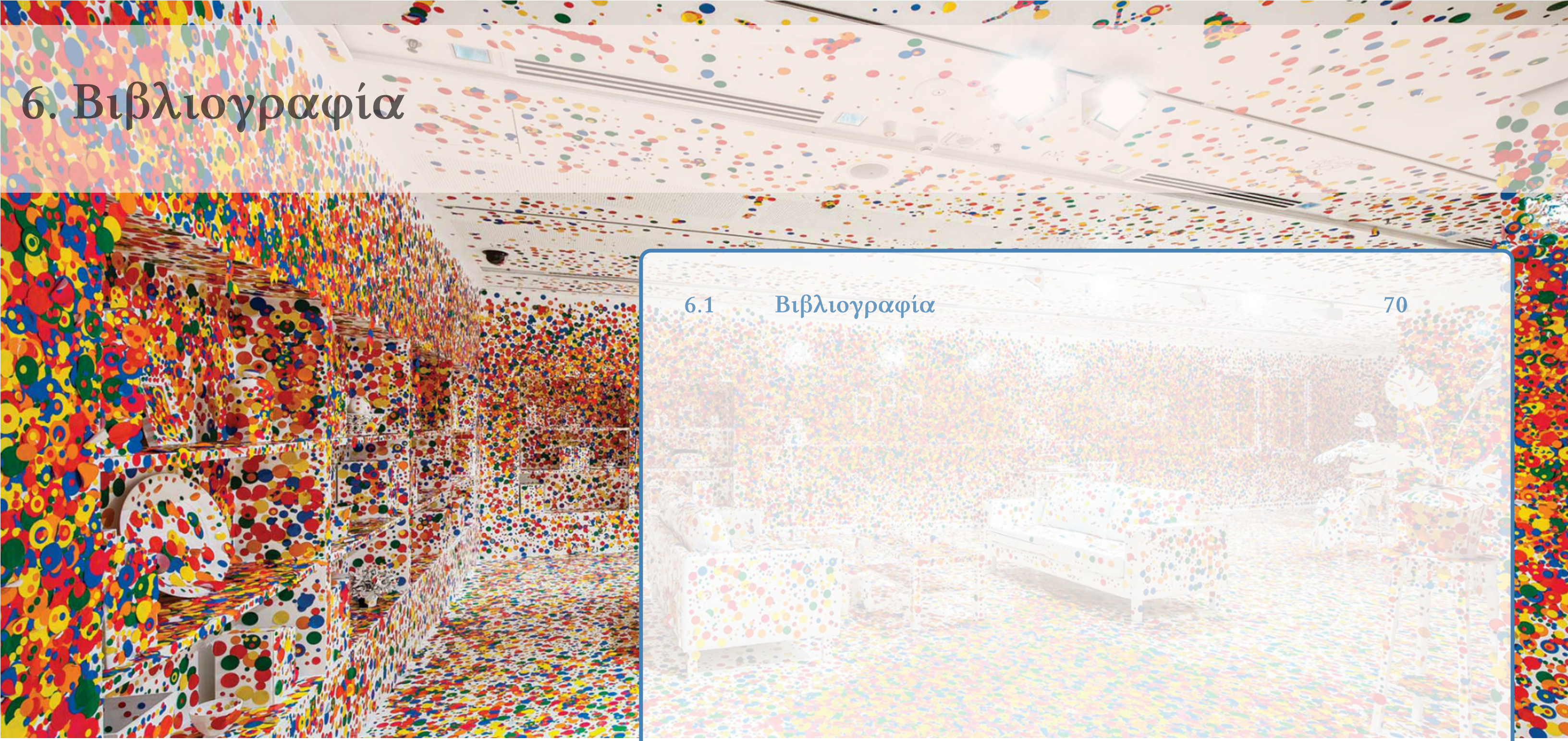
1. O X είναι T_1 και τελείως κανονικός
2. O X είναι ομοιομορφικός προς έναν υπόχωρο του $[0,1]^I$ για κάποιο σύνολο I.

Απόδειξη:

(1)⇒(2) Έστω $(f_i)_{i\in I}$ η οικογένεια όλων των συνεχών συναρτήσεων του X στο [0, 1]. Εφ'όσον ο X είναι τελείως κανονικός, έπεται ότι η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X και άρα και τα σημεία του X, αφού ο X είναι και T_1 (από προηγούμενη Παρατήρηση). Έτσι η συνάρτηση εκτίμησης ως προς την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$, e: X $\to [0,1]^I$ με $e(x)=(f_i(x))_{i\in I}$ είναι ομοιομορφική εμφύτευση και άρα ο X είναι ομοιομορφικός προς έναν υπόχωρο του $[0,1]^I$.

(2)⇒(1) Από προηγούμενη Πρόταση, έπεται ότι ο χώρος $[0,1]^I$ είναι τελείως κανονικός, εφ'όσον ο [0, 1] είναι τελείως κανονικός. Άρα ο X είναι τελείως κανονικός εφ'όσον είναι ομοιομορφικός προς έναν υπόχωρο ενός ενός τελείως κανονικού χώρου. Προφανώς είναι και T_1 χώρος.

Πόρισμα: Κάθε συμπαγής και Hausdorff χώρος X εμφυτεύεται ομοιομορφικά σε έναν υπόχωρο του $[0,1]^I$, για κάποιο σύνολο I.
Απόδειξη: Έχουμε αποδείξει ότι κάθε συμπαγής και Hausdorff χώρος είναι φυσιολογικός. Γνωρίζοντας ότι ένας Hausdorff (T_2) χώρος είναι και T_1 έχουμε, τελικά, για τον X ότι είναι T_1 φυσιολογικός χώρος. Όμως, χρησιμοποιώντας παραπάνω το λήμμα του Urysohn, αποδείξαμε ότι κάθε T_1 φυσιολογικός χώρος είναι τελείως κανονικός και άρα σύμφωνα με το προηγούμενο Πόρισμα έχουμε το ζητούμενο.



6. Βιβλιογραφία

6.1 Βιβλιογραφία

- «Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση», Εκδόσεις ΑΙΘΡΑ (1988), Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη
- «Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας», Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης, Θέμης Μήτσης
- «Μελέτη Δικτύων, Φίλτρων, Ιδεωδών και η Χρησιμότητά τους σε Διάφορες Έννοιες Συμπαγότητας», Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης (Τμήμα Μαθηματικών) (2012), Μποζέλου Μαρία
- «Εισαγωγή στην Τοπολογία», Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (Τμήμα Μαθηματικών), Κουμουλλής Γεώργιος
- «Introduction to Topology and Geometry» (1999), Saul Stahl
- «The Theory of Ultrafilters», New York (1974), Σ. Νεγρεπόντης, W.W.Comfort