Θέματα στην γενική τοπολογία

Νίκος Φλώρος

Δεκέμβριος 2018

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε αυτην την εργασία θα ασχοληθούμε με ένα από τα βασικότερα θεωρήματα της γενικής τοπολογίας,το θεώρημα Tychonoff.Θα δώσουμε τέσσερις διαφορετικές αποδειξεις αυτού του θεωρήματος,αναπτύσσοντας παράλληλα κ τα καταλληλα μαθηματικα εργαλεία για αυτές τις αποδείξεις,όπως για παράδειγμα κάποια στοιχεία από τη θεωρία των υπερφίλτρων η το λήμμα υποβάσης του Alexander.Επίσης θα αποδείξουμε ότι το θεώρημα ότι του Tychonoff,αν το δεχτουμε αξιωματικά,συνεπάγεται το αξίωμα της επιλογής.Ακολούθως θα ορίσουμε την έννοια της συμπαγοποίησης ενός τοπολογικού χώρου και θα ασχοληθούμε ειδικότερα με ένα συγκεκριμένο είδος συμπαγοποίησης,την λεγόμενη Stone-Cech συμπαγοποίηση. Τέλος θα ασχοληθούμε κ με άλλα δύο σημαντικά θεωρήματα της τοπολογίας,το λήμμα του Ursyshon κ το θεώρημα απέκτασης του Tietze.

1 Εισαγωγικά στη γενική τοπολογία

Σε αυτή την πρώτη ενότητα θα παρουσιάσουμε βασικούς ορισμούς και προτάσεις από την γενική τοπολογία που θα μας χρειαστούν στα επόμενα.Ξεκινάμε από τον ορισμό του τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 1.1
Τοπολογικός χώρος είναι ένα μη κενό σύνολο X και μια κλάση T υποσυνόλων του X ,συμβολίζουμε (X, T),τέτοια ώστε:
1)Αν $\{V_i\}_{i \in I}$ αυθαίρετη οικογένεια υποσυνόλων του X με $V_i \in T$ για κάθε $i \in I$ τότε ισχύει $\cup_{i \in I} V_i = X$.Δηλαδή η κλάση T είναι κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις.
2)Αν $V_1, V_1 \in T$ τότε $V_1 \cap V_2 \in T$, δηλαδή η T είναι κλειστή στην πεπερασμένη τομή
3$X, \emptyset \in T$

Τα υποσύνολα του X που ανήκουν στην T λέγονται ανοικτά σύνολα.Η τοπολογία λοιπόν είναι το σύνολο των ανοικτών συνόλων.

Παράδειγματα 1.2
ι)Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ η ανοικτή σφαίρα με κέντρο x και ακτίνα r.Τότε το σύνολο:
$T := \{G \subseteq X : \forall x \in G, \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq G\}$ είναι μια τοπολογία στο X,η τοπολογία που επάγεται από την μετρική d.Μια μετρική λοιπόν πάντα επάγει μια τοπολογία,αλλά για μια τυχούσα τοπολογία όμως δεν υπάρχει πάντα μετρική που να την παράγει.Αν υπάρχει μια τέτοια μετρική,η οποία αν υπάρχει δεν είναι μοναδική,ο τοπολογικός χώρος ονομάζεται μετρικοποιήσιμος.

ιι)Το σύνολο $\{X, \emptyset\}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που μπορεί να οριστεί σε ένα σύνολο X.Είναι η λεγόμενη τετριμμένη τοπολογία.Το δυναμοσύνολο $P(X)$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία που μπορεί να οριστεί στο X,η οποία ονομάζεται διακριτή τοπολογία.

ιιι)Έστω X σύνολο.Η οικογένεια

$$T = \{G \subseteq X : card(X \setminus G) < \infty\}$$

είναι μια τοπολογία στο X,η λεγόμενη συμπεπερασμένη τοπολογία.Αν το X είναι πεπερασμένο σύνολο τότε η συμπεπερασμένη τοπολογία ταυτίζεται με τη διακριτή.Αν το X είναι άπειρο τότε ο χώρος δεν είναι μετρικοποιήσιμος γιατί κάθε δύο ανοικτά και μη κενά σύνολα έχουν μη κενή τομή,πράγμα που δεν συμβαίνει στους μετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.3
Έστω (X,T) τοπολογικός χώρος και V υποσύνολο του X.Το V θα λέγεται κλειστό σύνολο αν το $X \setminus V$ είναι ανοικτό.

Ορισμός 1.4
Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{B} \subseteq T$.Η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για την T αν κάθε ανοικτό σύνολο μπορεί να γραφτεί ως ένωση στοιχείων της $\mathfrak{B}$,δηλαδή για κάθε V που ανήκει στην T υπάρχουν $B_i, i \in I$ τέτοια ώστε $V = \cup_{i \in I} B_i$.

Παράδειγμα 1.5
Το σύνολο των ανοικτών σφαιρών σε ένα μετρικό χώρο αποτελεί βάση για την τοπολογία που επάγεται από την μετρική.

Θεώρημα 1.6
1)Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{B} \subseteq T$.Η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για την T αν και μόνο αν για κάθε $G \in T$ και κάθε $x \in G$ υπάρχει $B \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq G$.
2)Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{B}$ βάση για την T.Ενα σύνολο $G \subseteq X$ είναι ανοικτό,αν και μόνο αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq G$.

Απόδειξη
1)($\Longrightarrow$),Εστω $G \subseteq X$ ανοικτό και $x \in G$.Αφού η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για την T υπάρχουν $B_i \in \mathfrak{B}, i \in I$ τέτοια ώστε $G = \cup_{i \in I} B_i$.Επομένως υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $x \in B_{i_0} \subseteq G$.

($\Longleftarrow$),Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό.Από υπόθεση,για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B_x \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq G$. Επομένως $G = \cup_{x \in G} B_x$,δηλαδή το G είναι ένωση στειχείων της $\mathfrak{B}$.

2)$\Longrightarrow$,Απόδειξη ακριβώς ίδια με το ($\Longrightarrow$) του 1).
($\Longleftarrow$),Έστω $G \subseteq X$ σύνολο που ικανοποιεί την υπόθεση. Τότε για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B_x \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq G$.Άρα $G = \cup_{x \in G} B_x$.Επομένως το G είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων.

Το επόμενο θεώρημα απαντάει στο εξής ερώτημα:Έστω X ένα σύνολο και $\mathfrak{B}$ μια κλάση υποσυνόλων του.Υπο ποιές συνθήκες η κλάση $\mathfrak{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία του X·

Θεώρημα 1.7
Έστω X ένα σύνολο και $\mathfrak{B}$ μια κλάση υποσυνόλων του X.Η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία στο X αν και μόνο αν:
1)$X = \cup_{B \in \mathfrak{B}} B$
2)Για κάθε $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ και κάθε $x \in B_1 \cap B_2$ υπάρχει $B_3 \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Απόδειξη
$(\Rightarrow)$Έστω ότι η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία.Τότε επειδή το X είναι ανοικτό σύνολο,θα υπάρχουν $B_i \in \mathfrak{B}, i \in I$ τέτοια ώστε $X = \cup_{i \in I} B_i$,επομένως $X = \cup_{B \in \mathfrak{B}} B$.Έπειτα,έστω $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ και $x \in (B_1 \cap B_2)$.Το $B_1 \cap B_2$ είναι ανοικτό,άρα από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $B_3 \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

$(\Leftarrow)$Θέτουμε
$$\mathfrak{T} = \{G \subseteq X : \forall x \in G, \exists B \in \mathfrak{B} : x \in B \subseteq G\}.$$
Τότε η $\mathfrak{T}$ είναι μια τοπολογία στο X που έχει βάση την $\mathfrak{B}$. Πράγματι,είναι προφανές ότι $\emptyset \in \mathfrak{T}$ και ότι η $\mathfrak{T}$ είναι κλειστή ως προς τις ενώσεις.Τό ότι $X \in \mathfrak{T}$ προκύπτει από την συνθήκη 1).Επίσης η $\mathfrak{T}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές διότι, αν $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}$ και $x \in G_1 \cap G_2$ τότε από τον ορισμό της $\mathfrak{T}$ υπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ τέτοια ώστε $x \in B_1 \subseteq G_1$ και $x \in B_2 \subseteq G_2$.Τότε όμως από τη συνθήκη 2) συνεπάγεται ότι υπάρχει $B_3 \in \mathfrak{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq G_1 \cap G_2$.Επομένως $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}$ κ άρα αυτή είναι κλειστή ως προς την πεπερασμένη τομή.Άρα η $\mathfrak{T}$ είναι τοπολογία στο X.Το ότι η $\mathfrak{B}$ είναι μια βάση για την $\mathfrak{T}$ προκύπτει από το γεγονός ότι $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ και από το προηγούμενο θεώρημα.

Παράδειγμα 1.8(Η τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων στο R).
Στο R η οικογένεια διαστημάτων:
$$\{(a, b] : a, b \in R, a < b\}$$
αποτελεί βάση,σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα,για κάποια τοπολογία των πραγματικών αριθμών.
Πράγματι,ισχύουν:
ι)$R = \cup_{n=1}^{\infty}(-n, n]$ και
ιι)Αν $(a_1, b_1], (a_2, b_2]$ είναι μη κενά στοιχεία της παραπάνω οικογένειας διαστημάτων τότε η τομή $(a_1, b_b] \cap (a_2, b_2]$ ανήκει στην οικογένεια επειδή:
$(a_1, b_1] \cap a_2, b_2] = \emptyset$ αν $b_1 \leq a_2$ η $b_2 \leq a_1$
$=(a_2, b_1]$,αν $a_1 \leq a_2 < b_1 \leq b_2$

$=(a_2, b_2]$,αν $a_1 \leq a_2 < b_2 < b_1$
$=(a_1, b_1]$,αν $a_2 < a_1 < b_1 < b_2$
$=(a_1, b_2]$,αν $a_2 < a_1 < b_2 < b_1$
επομένως η οικογένεια των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων ικανοποιεί τις προυποθέσεις του παραπάνώ θεωρήματος,άρα είναι βάση για κάποια τοπολογία των πραγματικών αριθμών.Μάλιστα η τοπολογία αυτή είναι ευρύτερη από την συνηθισμένη τοπολογία του R.Πράγματι,τα ανοικτά διαστήματα ανήκουν στην τοπολογία αυτή ,αφού $(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty}(a, b - 1/n]$ και επομένως ανήκουν στην τοπολογία αυτή όλα τα ανοικτά σύνολα της συνηθισμένης τοπολογίας του R.

Θεώρημα 1.9
Έστω X ένα σύνολο και $\mathfrak{b}$ μια αυθαίρετη οικογένεια υποσυνόλων του X. Τότε η οικογένεια συνόλων:

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}} = \{C_1 \cap ... \cap C_n : n = 1, 2, ..., C_1, C_2, ...C_n \in b\} \cup \{X\}$$

(δηλαδή όλες οι πεπερασμένες τομές συνόλων της $\mathfrak{b}$) είναι βάση για μια τοπολογία στο X.Την τοπολογία αυτή θα τη συμβολίζουμε με $T(\mathfrak{b})$ και είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την $\mathfrak{b}$.Η $\mathfrak{b}$ ονομάζεται υποβάση της $T(\mathfrak{b})$ και λέμε ότι η $\mathfrak{b}$ παράγει την $T(\mathfrak{b})$.

Απόδειξη
Αφού $X \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}$,η $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}$ προφανώς ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος.Επίσης είναι φανερό από τον ορισμό της ότι είναι κλειστή στην πεπερασμένη τομή,άρα ικανοποιεί και την δεύτερη συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος.Επομένως είναι βάση για κάποια τοπολογία $T(\mathfrak{b})$.Έστω τώρα T_1 μια άλλη τοπολογία στο X τέτοια ώστε $\mathfrak{b} \subseteq T_1$.Κάθε σύνολο της $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}$ είναι πεπερασμένη τομή συνόλων της $\mathfrak{b}$.Αφού η T_1 είναι κλειστή, ως τοπολογία,στην πεπερασμένη τομή,έχουμε ότι $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}} \subseteq T_1$.Τώρα,κάθε σύνολο της $T(\mathfrak{b})$ είναι ένωση συνόλων της $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}$.Επομένως $T_{\mathfrak{b}} \subseteq T_1$ επειδή η T_1 είναι κλειστή,ως τοπολογία,στις ενώσεις.Συνεπώς η $T(\mathfrak{b})$ είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την οικογένεια $\mathfrak{b}$.

Παρατήρηση 1.10
Μια δεδομένη οικογένεια υποσυνόλων $\mathfrak{b}$ μπορεί να μην είναι βάση για καμία τοπολογία.Είναι όμως πάντα υποβάση της $T(\mathfrak{b})$.Με αυτή την έννοια κάθε οικογένεια υποσυνόλων παράγει μια τοπολογία.

Παράδειγμα 1.11
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών,η οικογένεια

$$\{(-\infty, a) : a \in R\} \cup \{(b, +\infty) : b \in R\}$$

παράγει τη συνηθισμένη τοπολογία,αλλά όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος,δεν είναι βάση της.
Ομοίως η οικογένεια:

$$\{(-\infty, a] : a \in R\} \cup \{(b, +\infty) : b \in R\}$$

παράγει την τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων,αλλά δεν είναι βάση της.

Μια έννοια που θα χρειαστούμε παρακάτω ειναι η έννοια της κλειστης θήκης η κλειστότητας ενός συνόλου.Κατάρχήν θα παρατηρήσουμε ότι από τους ορισμούς του ανοικτού και του κλειστού συνόλου και από τους κανόνες του De Morgan άμεσα προκύπτει ότι το σύνολο των κλειστών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου X ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:
1)$X, \emptyset$ είναι κλειστά σύνολα
2)Αν V_1, V_2 κλειστά,τότε και η ένωση $V_1 \cup V_2$ είναι κλειστή
3)Αν $\{V_i\}_{i \in I}$ αυθαίρετη οικογένεια κλειστών συνόλων,τότε η τομή $\cap_{i \in I} V_i$ είναι κλειστό σύνολο.

Η οικογένεια λοιπόν των κλειστών συνόλων ενος τοπολογικού χώρου είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και στις αυθαίρετες τομές,ανάποδα δηλαδή απ'ότι ισχύει για τα ανοικτά σύνολα.Οι έννοιες του ανοικτού και του κλειστού συνόλου λέμε μερικές φορές ότι είναι δυικές μεταξύ τους.Με βάση και τα παραπάνω είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό της κλειστής θήκης.

Ορισμός 1.12
Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$.Τότε η κλειστή θήκη η κλειστότητα του A ορίζεται να είναι το σύνολο:

$$\overline{A} = cl(A) = \cap_{F, A \subseteq F} F \text{ όπου } F \text{ κλειστό.}$$

Με απλά λόγια η κλειστή θήκη ενός συνόλου A ορίζεται να είναι η τομή όλων των κλειστών συνόλων που το περιέχουν.Αυτή η τομή,όπως προκύπτει από τα παραπάνω,είναι ένα κλειστό σύνολο.Μάλιστα είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A. Από αυτά που είπαμε εύκολα προκύπτει ότι ένα σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν είναι ίσο με την κλειστή του θήκη $A = clA$!

Παράδειγμα 1.13
Η κλειστή θήκη του $(a, b]$ και η κλειστή θήκη του (a, b) είναι $cl((a, b)) = cl((a, b]) = [a, b]$.

Πρόταση 1.14
Έστω X τοπολογικός χώρος,$A \subseteq X$,και $x \in X$.Τότε $x \in cl(A)$ αν και μόνο αν κάθε για κάθε ανοικτό σύνολο U που περιέχει το x ισχύει $A \cap U \neq \emptyset$.

Απόδειξη
$(\Rightarrow)$Έστω $x \in cl(a)$ και υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο V που περιέχει το x τέτοιο ώστε $V \cap A = \emptyset$.Τότε το $X \setminus V$ είναι κλειστό και $A \subseteq X \setminus V$ και επειδή η κλειστή θήκη είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A θα έχουμε ότι $cl(A) \subseteq X \setminus V$,το οποίο συνεπάγεται ότι $x \notin V$,άτοπο.

$(\Leftarrow)$Έστω ότι κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το x έχει μη κενή τομή με το A και ας υποθέσουμε,προς απαγωγή σε άτοπο,ότι $x \notin cl(A)$.Τότε το σύνολο $X \setminus cl(A)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το x,επομένως από υπόθεση έχει μη κενή τομή με το A,άτοπο επείδη τα σύνολα A και $X \setminus cl(A)$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Το επόμενο θέμα που θα μας απασχολήσει σε αυτή την ενότητα είναι το ζήτημα της σύγκλισης σε τοπολογικούς χώρους. Γνωρίζουμε από την πραγματική ανάλυση την έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο.Επίσης είναι γνωστό ότι τοπολογικές έννοιες,όπως η έννοια του κλειστού συνόλου,της κλειστότητας ενός συνόλου,της συμπάγειας,της συνέχειας κ.τ.λ. έχουν ισοδύναμους χαρακτηρισμούς που διατυπώνονται μέσω ακολουθιών.Στους γενικούς τοπολογικούς χώρους όμως αυτές οι ισοδυναμίες παύουν να ισχύουν.Για να διατυπώσουμε παρόμοια αποτελέσματα σε γενικούς τοπολογικούς χώρους πρέπει να ορίσουμε μια γενίκευση της έννοιας της ακολουθίας,την έννοια του δικτύου.Έτσι όλοι οι ακολουθιακοί χαρακτηρισμοί των τοπολογικών εννοιών που ξέρουμε από τη θεωρία μετρικών χώρων μεταφέρωνται και στους γενικούς τοπολογικούς χώρους,αν όπου υπάρχει η λέξη ακολουθία η υπακολουθία,αντικατασταθεί με τη λέξη δίκτυο η υποδίκτυο.Θα δώσουμε παρακάτω κατάλληλα παραδείγματα.

Ορισμός 1.15
Έστω X τοπολογικός χώρος και $x_n, n \in N$ ακολουθία στοιχείων του X και $x \in X$.Τότε λέμε ότι η x_n συγκλίνει στο x και γράφουμε $x_n \to x$ αν για κάθε ανοικτό σύνολο V που περιέχει το x υπάρχει δείκτης $n_0 \in N$ τέτοιος ώστε $x_n \in V$ για κάθε $n > n_0$.

Παρατηρήσεις 1.16
1)Σε ένα μετρικό χώρο,ο ορισμός που δώσαμε παραπάνω συμπίπτει με τον γνωστό ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας.
2)Γνωρίζουμε ότι σε ένα μετρικό χώρο,το όριο μιας ακολουθίας, αν υπάρχει,είναι μοναδικό.Αυτό όμως δεν ισχύει γενικά στους τοπολογικούς χώρους.Μια ακολουθία μάλιστα σε ένα τοπολογικό χώρο μπορεί να συγκλινει σε παραπάνω από ένα σημείο,ακόμα και σε άπειρα σημεία!Για παράδειγμα,στους φυσικούς αριθμούς με την συμπεπερασμένη τοπολογία η ακολουθία $x_n = n$ συγκλίνει σε κάθε φυσικό αριθμό.Πράγματι,έστω V ένα ανοικτό σύνολο σε αυτή την τοπολογία που περιέχει ένα φυσικό αριθμό m.Τότε το σύνολο $X \setminus V$ είναι πεπερασμένο,επομένως υπάρχει $n_0 \in N$ τέτοιο ώστε $\{n_0, n_0+1, ..\} = \{x_n : n \geq n_0\} \subseteq V$.Άρα η x_n συγκλίνει σε κάθε φυσικό αριθμό.
3)Αν T_1, T_2 τοπολογίες στο X με $T_1 \subseteq T_2$ τότε σύγκλιση μιας ακολουθίας ως προς την T_2 συνεπάγεται σύγκλιση ως προς την T_1.

Παραδείγματα 1.17
1)Μια τελικά σταθερή ακολουθία σε ένα χώρο πάντα συγκλίνει (τελικά σταθερή σημαίνει ότι οι όροι της είναι ίσοι από κάποιον δείκτη n_0 και πάνω.)
2)Στον τετριμμένο τοπολογικό χώρο κάθε ακολουθία συγκλίνει σε κάθε στοιχείο,αφού υπάρχει μονο ένα μη κενό ανοικτό σύνολο, ολόκληρος ο X.
3)Στους πραγματικούς αριθμούς με την τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων η ακολουθία $1/n$ δεν συγκλίνει. Πράγματι αν συνέκλινε,θα έπρεπε να συγκλίνει μόνο στο 0 επειδή η τοπολογία των αριστερά ημιανοικτών διαστημάτων είναι ευρύτερη της συνηθισμένης τοπολογίας.Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει επειδή το $(-1, 0]$ είναι ένα ανοικτό σύνολο αυτής της τοπολογίας που περιέχει το 0 όμως κανένας όρος της ακολοθίας δεν ανήκει σε αυτό το διάστημα.

Ορισμός 1.18
Ένα προδιατεταγμένο σύνολο είναι ένα ζεύγος της μορφής $(\Lambda, \preceq)$,όπου Λ είναι ένα σύνολο και $\preceq$ μια διμελής σχέση στο Λ τέτοια ώστε:
1)$\lambda \preceq \lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.αυτοπάθεια
2)για κάθε $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ αν $\lambda \preceq \mu$ και $\mu \preceq \nu$ τότε $\lambda \preceq \nu$,μεταβατικότητα

Παράδειγμα 1.19
Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε $z \preceq w$ αν $|z| \leq |w|$.Τότε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι προδιατεταγμένο.

Ορισμός 1.20
Ένα κατευθυνόμενο σύνολο είναι ένα προδιατεταγμένο σύνολο $(\Lambda, \preceq)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ υπάρχει λ_3 τέτοιο ώστε $\lambda_1 \preceq \lambda_3$,$\lambda_2 \preceq \lambda_3$.

Παράδειγμα 1.21
1)Οι φυσικοί και οι πραγματικοί αριθμοί με τη συνηθισμένη διάταξη είναι κατευθυνόμενα σύνολα.

Ορισμός 1.22
Έστω X ένα σύνολο και $(\Lambda, \preceq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο.Μια συνάρτηση $x : \Lambda \to X$ λέγεται δίκτυο στο X. Αντί για $x(\lambda)$ γράφουμε x_λ.

Σχόλιο 1.23
Μια ακολουθία είναι ειδική περίπτωση δικτύου.

Ορισμός 1.24
Έστω X τοπολογικός χώρος,$x \in X$ και $x_\lambda, \lambda \in \Lambda$ δίκτυο στο X.Λέμε ότι το δίκτυο x_λ συγκλίνει στο x,γράφουμε $x_\lambda \to x$,αν για κάθε ανοικτό σύνολο V που περιέχει το x υπάρχει δείκτης λ_0 τέτοιος ώστε $x_\lambda \in V$ για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$.

Παράδειγμα 1.25
Στους πραγματικούς αριθμούς με τη συνήθη τοπολογία και τη συνήθη διάταξη θεωρούμε το δίκτυο $x_a = a, a \in R$ (που είναι η ταυτοτική απεικόνιση).Τότε αυτό το δίκτυο δεν συγκλίνει σε κανένα στοιχείο του R.Αν όμως εφοδιάσουμε το R με τη συμπεπερασμένη τοπολογία,τότε αυτό το δίκτυο συγκλίνει σε κάθε πραγματικό αριθμό.!

Ορισμός 1.26
Έστω X τοπολογικός χώρος,$A \subseteq X$ και x_λ δίκτυο στο X. Θα λέμε ότι το δίκτυο βρίσκεται τελικώς στο A αν υπάρχει λ_0 τέτοιο ώστε $x_\lambda \in A$ για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$.

Ορισμός 1.27
Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ένα δίκτυο στο σύνολο X και $A \subseteq X$.Τότε θα λέμε ότι το δίκτυο βρίσκεται συχνά στο A,αν για κάθε $\lambda \in \Lambda$,υπάρχει $\lambda_0 \succeq \lambda$ τέτοιο ώστε να ισχύει $x_{\lambda_0} \in A$.

Ορισμός 1.28
Έστω $(\Lambda, \preceq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο και N ένα υποσύνολο του.Το N θα λέγεται ομοτελικό (στο Λ),αν για κάθε $\lambda \in \Lambda$ υπάρχει $\nu \in N$ τέτοιο ώστε $\nu \succeq \lambda$.

Ορισμός 1.29
Έστω $(\Lambda, \preceq), (M, \preceq)$ κατευθυνόμενα σύνολα.Τότε μια συνάρτηση $\varphi : M \to \Lambda$ θα λέγεται αύξουσα αν για κάθε $\mu_1 \preceq \mu_2$ ισχύει $\varphi(\mu_1) \preceq \varphi(\mu_2)$.

Ορισμός 1.30
Έστω $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο σύνολο X.Έστω επίσης $(M, \preceq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο και $\varphi : M \to \Lambda$ μια αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε το $\varphi(M)$ είναι ένα ομοτελικό υποσύνολο του Λ. Τότε η συνάρτηση $y : (M \preceq) \to X$ με $y = x \circ \varphi$ θα είναι ένα υποδίκτυο του X.
Ένα υποδίκτυο λοιπόν ενός δικτύου καθορίζεται από το ζεύγος (M, φ) και πολύ εύκολα διαπιστώνει κάποιος ότι είναι κ αυτό ένα δίκτυο στο X.Όπως έχουμε δει,ένα δίκτυο $x : \Lambda \to X$ το συμβολίζουμε συνήθως με $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Το υποδίκτυο $y = x \circ \varphi : M \to X$ θα το συμβολίζουμε με $(x_{\varphi_\mu})_{\mu\in M}$ η αλλιώς $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\in M}$.

Παρατηρήση 1.31
1)Έστω $x : (\Lambda \preceq) \to X$ ένα δίκτυο στο σύνολο X.Αν M είναι ένα ομοτελικό υποσύνολο του Λ με την επαγόμενη σχέση $\preceq$ και $\varphi : M \to \Lambda$ η ταυτοτική συνάρτηση,τότε το δίκτυο $y = x \circ \varphi : (M, \preceq) \to X$ έιναι ένα υποδίκτυο του $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
Πράγματι,αν το M είναι ομοτελικό σύνολο του Λ,τότε είναι κατευθυνόμενο επειδή αν $\mu_1, \mu_2 \in M$ υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\mu_1, \mu_2 \preceq \lambda$($\Lambda$ κατευθυνόμενο) και επίσης υπάρχει $\mu \in M$ τέτοιο ώστε $\lambda \preceq \mu$ (M ομοτελικό).Επισης,η ταυτοτική συνάρτηση φ είναι μια αύξουσα συνάρτηση.

Θεώρημα 1.32
Έστω X τοπολογικός χώρος και x_λ δίκτυο στο X και $x \in X$. Τότε το δίκτυο αυτό συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε υποδίκτυο του συγκλίνει στο x.

Απόδειξη
$(\Rightarrow)$Έστω $y = x \circ \varphi : M \to X$ υποδίκτυο του x_λ και V ανοικτό σύνολο που περιέχει το x.Αφού το x_λ συγκλίνει στο x τότε υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \in V$ για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$.Επειδή τώρα το $\varphi(M)$ είναι ομοτελικό στο Λ,υπάρχει $\mu_0 \in M$ τέτοιο ώστε $\varphi(\mu_0) \succeq \lambda_0$.Επειδή τώρα η συνάρτηση φ είναι αύξουσα,για κάθε $\mu \in M$ με $\mu \succeq \mu_0$ θα ισχύει $\varphi(\mu) \succeq \varphi(\mu_0) \succeq \lambda_0$ και έτσι θα έχουμε ότι

$x_{\varphi(\mu)} \in V$ για κάθε $\mu \succeq \mu_0$.Άρα το θεωρούμενο υποδίκτυο συγκλίνει στο x.

Σχόλιο 1.33
Γνωρίζουμε από τη θεωρία μετρικών χώρων το εξής: $x \in cl(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στοιχείων του συνόλου A που να συγκλίνει στο x.Με τη βοήθεια των δικτύων διατυπώνουμε το αντίστοιχο θεώρημα σε γενικούς τοπολογικούς χώρους.

Θεώρημα 1.34
Εστω X τοπολογικός χώρος,$A \subseteq X$ και $x \in X$.Τότε το x ανήκει στην κλειστή θήκη του A αν και μόνο αν υπάρχει δίκτυο x_λ από στοιχεία του A που να συγκλίνει στο x.

Απόδειξη
($\Rightarrow$)Θεωρούμε το σύνολο N όλων των ανοικτών συνόλων που περιέχουν το x εφοδιασμένο με τη σχέση του αντίστροφου περιέχεσθαι $(N, \supseteq)$,δηλαδή αν $U, V \in N$ τότε $U \preceq V$ ανν $U \supseteq V$.Τότε το σύνολο αυτό είναι κατευθυνόμενο επειδή αν U, V ανοικτά σύνολα που περιέχουν το x η τομή τους θα είναι ανοιχτό σύνολο που περιέχει το x και θα είναι υποσύνολο και των δυο συνόλων.Αφού $x \in cl(A)$ έχουμε ότι για κάθε $U \in N$ υπάρχει $x_U \in A \cap V$.Τότε το δίκτυο x_U συγκλίνει στο x.Πράγματι,αν W ανοικτό που περιέχει το x τότε για $U \in N$ με $U \subseteq W$ έχουμε $x_U \in U \subseteq W$.

($\Leftarrow$)Έστω $x_\lambda, \lambda \in \Lambda$ δίκτυο στο A με $x_\lambda \to x$.Θα δείξουμε ότι $x \in cl(A)$.Έστω λοιπόν V ανοικτό σύνολο που περιέχει το x.Τότε υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x_{\lambda_0} \in U$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $A \cap U \neq \emptyset$,και η πρόταση αποδείχτηκε.

Ορισμός 1.35
Ένα δίκτυο στο σύνολο X θα λέγεται καθολικό αν για κάθε υποσύνολο A του X το δίκτυο βρίσκεται τελικώς είτε στο A είτε στο συμπλήρωμα του $X \setminus A$.

Πρόταση 1.36
Έστω X, Y σύνολα,$f : X \to Y$ συνάρτηση και x_λ καθολικό δίκτυο στο X.Τότε το $f(x_\lambda)$ είναι ένα καθολικό δίκτυο στο Y.

Απόδειξη
Έστω A υποσύνολο του Y.Τότε,από την υπόθεση το δίκτυο βρίσκεται τελικώς

είτε στο $f^{-1}(A)$,είτε στο $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$.Άρα η εικόνα του δικτύου μέσω της f βρίσκεται τελικώς είτε στο A είτε στο συμπλήρωμα του,επομένως το $f(x_\lambda)$ είναι καθολικό στον Y.

Το επόμενο θεώρημα θα το αναφέρουμε χωρίς απόδειξη. Θα σημειώσουμε το πολύ ενδιαφέρον γεγονός,ότι η επόμενη πρόταση είναι και αυτή ισοδύναμη με το αξίωμα της επιλογής.Εκτός ίσως από τετριμμένες περιπτώσεις ,ο ορισμός του καθολικού δικτύου είναι τόσο ισχυρός που ο αναγνώστης μπορεί να αμφιβάλει για την ύπαρξη τους.Ισχύει όμως το επόμενο.

Θεώρημα 1.37
Κάθε δίκτυο έχει καθολικό υποδίκτυο.

Η επόμενη τοπολογική έννοια που θα μας χρειαστεί είναι η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων.Ο ορισμός που θα δώσουμε γενικεύει τον ορισμό της συνέχειας μιας πραγματικής συνάρτησης,όπως κανεις τον μαθαίνει στη στοιχειώδη ανάληση,σε αφηρημένους τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός 1.38
Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι,$f : X \to Y$ μια συνάρτηση,και $x \in X$.Η f θα λέμε ότι είναι συνεχής στο x αν για κάθε ανοικτό σύνολο $V \subseteq Y$ που περιέχει το $f(x)$,(ένα τέτοιο σύνολο λέγεται και περιοχή του $f(x)$),υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $f(U) \subseteq V$.Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X τότε λέμε ότι είναι συνεχής.

Θεώρημα 1.39
Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων.Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1)Η f είναι συνεχής
2)Για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό,το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό.
3)Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό,το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.
4Για κάθε $A \subseteq X$,$f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$.

Απόδειξη
$(1) \Rightarrow (2)$Έστω $G \subseteq Y$ ανοικτό και $x \in f^{-1}(G)$.Αφού το $f(x) \in G$ και το G είναι ανοικτό,έπεται ότι το G είναι περιοχή του $f(x)$. Από την υπόθεση έπεται ότι υπάρχει U_x περιοχή του x,ώστε $f(U_x) \subseteq G$. Θεωρώ τώρα την ένωση $\cup_{x\in f^{-1}(G)}(U_x) = f^{-1}(G)$.Αρα το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό σύνολο,ως ένωση ανοικτών συνόλων.

$(2) \Rightarrow (1)$Έστω $x \in X$ και V μια περιοχή του $f(x)$.Από υπόθεση,το $U := f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό,άρα είναι περιοχή του x.Αλλά $f(U) = f(f^{-1})(V) \subseteq V$.

$(2) \Rightarrow (3)$Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό.Τότε το $Y \setminus F$ είναι ανοικτό,άρα από υπόθεση $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό,επομένως το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

$(3) \Rightarrow (2)$Τελείως ανάλογο με το προηγούμενο.

$(3) \Rightarrow (4)$,Το σύνολο $cl(f(A))$ είναι κλειστό,άρα από υπόθεση $f^{-1}(cl(f(A)))$ είναι κλειστό.Επίσης,γνωρίζουμε ότι ισχύει $A \subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$.Επομένως $cl(A) \subseteq f^{-1}(cl(f(A)))$.Συνεπώς $f(cl(A)) \subseteq f(f^{-1}(cl(f(A)))) \subseteq cl(f(A))$.

$(4) \Rightarrow (3)$,Εστω $F \subseteq Y$ κλειστό.Από υπόθεση έχουμε ότι $f(cl(f^{-1}(F))) \subseteq cl(f(f^{-1}(F))) \subseteq cl(F) = F$.Επομένως $cl(f^{-1}(F)) \subseteq f^{-1}(F)$, άρα το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

Παρατήρηση 1.40
Η συνεπαγωγή $(2) \Rightarrow (1)$ εξακολουθεί να ισχύει αν αντί της αντίστροφης εικόνας κάθε ανοικτού συνόλου,πάρουμε την αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού συνόλου μιας υποβάσης της τοπολογίας του Y.

Θεώρημα 1.41
Εστω X, Y, Z τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y, g : Y \to Z$ συναρτήσεις όπου η f είναι συνεχής στο $x \in X$ και η g είναι συνεχής στο $f(x) \in Y$.Τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής στο x.

Απόδειξη
Έστω $x \in X$ και έστω V μια περιοχή του $g(f(x))$.Τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $f(x)$,υπάρχει περιοχή U του $f(x)$ τέτοια ώστε $g(U) \subseteq V$.Επειδή τώρα η f είναι συνεχής στο x υπάρχει περιοχή W του x τέτοια ώστε $f(W) \subseteq U$.Δείξαμε δηλαδή ότι για κάθε περιοχή του $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ υπάρχει περιοχή του x τέτοια ώστε η εικόνα της μέσω της $g \circ f$ να περιέχεται σε αυτήν.Άρα η σύνθεση είναι συνεχής στο x.

Ορισμός 1.42
Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι.Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός αν είναι 1-1,επί,συνεχής και η αντίστροφη συνάρτηση είναι επίσης συνεχής.Αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f : X \to Y$ τότε λέμε ότι οι χώροι X, Y λέγονται ομοιομορφικοί.Το γεγονός αυτό το συμβολίζουμε ως $X \sim Y$.

Παρατήρηση 1.43
Εύκολα διαπιστώνει κάποιος ότι η σχέση του ομοιομορφισμου είναι μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα στους τοπολογικούς χώρους.Πράγματι:
1)$X \sim X$
(η ταυτοτική απεικόνιση είναι ομοιομορφισμός).
2)Αν $X \sim Y$ τότε $Y \sim X$
(αν η $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός,τότε και η αντιστροφή f^{-1} είναι ομοιομορφισμός)
3)Αν $X \sim Y$ και $Y \sim Z$ τότε $X \sim Z$
(αν οι $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι ομοιομορφισμοί,τότε η $g \circ f$ είναι ομοιομορφισμός)

Σχόλιο 1.44
Δυο τοπολογικοί χώροι που είναι ομοιομορφικοί θεωρούνται ταυτόσημοι ως τοπολογικές δομές.Μέσω ενός ομοιομορφισμού τα ανοικτά σύνολα των δυο χώρων τίθενται σε μια ενα προς ενα αντιστοιχια.Ιδιότητες όπως συνέχεια συναρτήσεων ή η σύγκλιση ακολουθιών και δικτύων,που θα δούμε παρακάτω,μένουν ανναλοίωτες όταν εργαζόμαστε με ομοιομορφικούς χώρους.Γενικά μια ιδιότητα που αν την έχει ένας τοπολογικός χώρος την έχει και κάθε χώρος ομοιομορφικός με αυτόν ονομάζεται τοπολογική ιδιότητα.Τέτοια ιδιότητα είναι για παράδειγμα η συμπάγεια,που θα ορίσουμε σε πολύ λίγο.

Η επόμενη πρόταση είναι γενίκευση στα πλαίσια των γενικών τοπολογικών χώρων του θεωρήματος μεταφοράς,που είναι γνωστό από την πραγματική ανάλυση και είναι ένας χαρακτηρισμός της συνέχειας συναρτήσεων μέσω ακολουθιών.

Θεώρημα 1.45
Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι,$f : X \to Y$ συνάρτηση,$x \in X$. Τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο x_λ του X που συγκλίνει στο x έχουμε ότι $f(x_\lambda)$ συγκλίνει στο $f(x)$.

Απόδειξη
($\Rightarrow$)Έστω δίκτυο $x_\lambda, \lambda \in \Lambda$ το οποίο συγκλίνει στο x και V ανοικτό σύνολο που περιέχει το $f(x)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x υπάρχει ανοικτό U περιέχει το x με $f(U) \subseteq V$.Αφού το x_λ συγκλίνει στο x υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$.Επομένως $f(x_\lambda) \in f(U) \subseteq V$ για κάθε $\lambda \succeq \lambda_0$.

($\Leftarrow$)Εστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x.Τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο V που περιέχει το $f(x)$ τέτοιο ώστε για κάθε περιοχή U του x να ισχύει $f(U) \nsubseteq V$.Επομένως για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $x_U \in U$ τέτοιο ώστε $f(x_U) \notin V$.Έστω τώρα N η οικογένεια όλων των ανοικτών συνόλων που περιέχουν το x εφοδιασμένη με τη σχέση του αντίστροφου περιέχεσθαι.Τότε το δίκτυο $x_U, U \in N$ συγκλίνει στο x,επομένως από την υπόθεση το δίκτυο $f(x_U)$ θα συγκλίνει στο $f(x)$. Επομένως υπάρχει $U_0 \in N$ τέτοιο ώστε $f(x_{U_0})$ να ανήκει στο V,άτοπο.

Το θέμα που θα θίξουμε παρακάτω θα είναι το πως από δοσμένους τοπολογικούς χώρους μπορούμε να ορίσουμε καινούργιους τοπολογικούς χώρους που η τοπολογία τους να σχετίζεται με κάποιον τρόπο με την τοπολογία των αρχικών χώρων.Θα δούμε λοιπόν την σχετική τοπολογία,πως από μια τοπολογία στο X επάγεται μια τοπολογία σε ένα υποσύνολό του και την τοπολογία του γινομένου,πως όταν έχουμε μια οικογένεια τοπολογικών χώρων μπορούμε να ορίσουμε μια τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο τους. Η τοπολογία γινόμενο θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα στο επόμενο κεφάλαιο όπου και θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα Tychonoff.

Ορισμός 1.46
Έστω (X,T) τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$.Η οικογένεια $T_Y := \{G \cap Y : G \in T\}$ είναι πολύ εύκολο να δειχθεί ότι είναι μια τοπολογία στο Y.Η T_Y ονομάζεται σχετική τοπολογία του Y (ως προς την T).

Σχόλιο 1.47
Τα σύνολα της T_Y θα τα λέμε ανοικτά στο Y.Ομοίως τα κλειστά σύνολα της T_Y θα τα λέμε κλειστά στο Y.Επίσης,όταν μιλάμε για την κλειστότητα ενός συνόλου $A \subseteq Y$ ως προς την T_Y θα γράφουμε $cl_Y(A)$.Όταν θα λέμε ανοικτό,κλειστό,κ.λ.π. χωρίς κάποιον άλλον προσδιορισμό,θα εννοούμε ως προς την τοπολογία ολόκληρου του X.

Θεώρημα 1.48
Έστω X τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$.Τότε:
1)Αν $\mathfrak{B}$ είναι μια βάση (αντίστοιχα υποβάση) για την τοπολογία του X τότε η οικογένεια $\{B \cap Y : B \in \mathfrak{B}\}$ είναι μια βάση(αντίστοιχα υποβάση) για την σχετική τοπολογία του Y.
2)Ένα σύνολο $A \subseteq Y$ είναι κλειστό στο Y αν και μόνο αν υπάρχει $F \subseteq X$ κλειστό,τέτοιο ώστε $A = F \cap Y$.
3)Αν το Y είναι ανοικτό(αντίστοιχα κλειστό),τότε ένα σύνολο $A \subseteq Y$ είναι ανοικτό(αντίστοιχα κλειστό) στο Y αν και μόνο αν είναι ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό).
4)Αν $A \subseteq Y$ τότε $cl_Y(A) = Y \cap cl(A)$.
5)Αν Z είναι κάποιος άλλος τοπολογικός χώρος και $f : X \to Z$ μια συνεχής συνάρτηση,τότε ο περιορισμός $f|_Y : Y \to Z$ είναι συνεχής.

Απόδειξη
(1)Έστω $A \subseteq Y$ ανοικτό στο Y.Τότε υπάρχει $G \subseteq X$ ανοικτό τέτοιο ώστε $A = G \cap Y$.Επειδή η $\mathfrak{B}$ είναι βάση υπάρχουν $B_i, i \in I$ τέτοια ώστε $G = \cup_{i \in I} B_i$.Αλλά τότε $A = \cup_{i \in I}(B_i \cap Y)$.Άρα η οικογένεια $\{B \cap Y : B \in \mathfrak{B}\}$ είναι βάση για την σχετική τοπολογία.Ομοίως και για την υποβάση.
(2)Αν το A είναι κλειστό στο Y τότε το $Y \setminus A$ είναι ανοικτό στο Y, άρα υπάρχει $G \subseteq X$ ανοικτό, τέτοιο ώστε $Y \setminus A = G \cap Y$, επομένως $A = (X \setminus G) \cap Y$ με $X \setminus G$ κλειστό.
Αντίστροφα,αν $A = F \cap Y$ για κάποιο F κλειστό,τότε $Y \setminus A = (X \setminus F) \cap Y$ με $X \setminus F$ ανοικτό.Άρα το $Y \setminus A$ είναι ανοικτό στο Y,επομένως το A είναι κλειστό στο Y.
(3)Έστω ότι το Y είναι ανοικτό.Αν τώρα το A είναι ανοικτό στο Y τότε $A = G \cap Y$ για κάποιο G ανοικτό.Άρα και το A είναι ανοικτό ως τομή δυο ανοικτών συνόλων.Αντίστροφα,αν το A είναι ανοικτό τότε γράφουμε $A = A \cap Y$ και συμπεραίνουμε ότι το A είναι ανοικτό στο Y από τον ορισμό της σχετικής τοπολογίας.Ομοίως για τα κλειστά.
(4)Κατάρχήν το $cl(A) \cap Y$ είναι κλειστό στο Y και περιέχει το A.Άρα θα έχουμε $cl_Y(A) \subseteq cl(A) \cap Y$.Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να αποδείξουμε ότι αν το F είναι κλειστό στο Y και $A \subseteq F$ τότε $cl(A) \cap Y \subseteq F$,και επειδή το $cl_Y(A)$ είναι κλειστό στο Y και $A \subseteq cl_Y(A)$ θα θέσουμε $F = cl_Y(A)$ και τελειώσαμε.Έστω λοιπόν F κλειστό στο Y και $A \subseteq F$.Από την (2) υπάρχει κλειστό υποσύνολο K του X,τέτοιο ώστε $F = K \cap Y$.Αρα $A \subseteq F \subseteq K$,άρα $cl(A) \subseteq K$ και τελικά $cl(A) \cap Y \subseteq K \cap Y = F$.
(5)Από παραπάνω πρόταση,αρκεί να δείξουμε ότι ο περιορισμός αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα.Έστω $V \subseteq Z$ ανοικτό.Τότε επειδή η f

είναι συνεχής έπεται ότι $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό.Όμως ισχύει ότι $f|_Y^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap Y$ το οποίο είναι ανοικτό στο Y.Άρα η $f|_Y$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 1.49
Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση.
1)Αν η f είναι συνεχής και $A \subseteq X$ τότε και η $f|A$ είναι συνεχής.
2)Αν $B \subseteq Y$,,τέτοιο ώστε $f(X) \subseteq B$ τότε η f είναι συνεχής ως συνάρτηση από το X στο Y αν και μόνο αν είναι συνεχής ως συνάρτηση από το X στο B.
3)Αν $\{A_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων που καλύπτει το X,τότε η f είναι συνεχής, αν και μόνο αν η $f|A_i$ είναι συνεχής για κάθε $i \in I$.
4)Αν $\{F_k : k = 1, 2..., n\}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων που καλύπτει το X τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η $f|F_k$ είναι συνεχής για κάθε $k = 1, 2, ..., n$.

Απόδειξη
1)Έστω $\tau : A \to X$,με $\tau(x) = x, x \in A$ η ταυτοτική συνάρτηση. Τότε $f|A = f \circ \tau$.Επομένως αν η f είναι συνεχής,τότε και ο περιορισμός της $f|A$ θα είναι συνεχής ως σύνθεση δυο συνεχών συναρτήσεων.
2)Εστω ότι η $f : X \to Y$ είναι συνεχής και $H \subseteq B$ ανοικτό στο B.Από τον ορισμό της σχετικής τοπολογίας, υπάρχει $G \subseteq Y$ ανοικτό τέτοιο ώστε $H = G \cap B$. Επειδή $f(X) \subseteq B$ έχουμε ότι $f^{-1}(H) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(G) \cap X = f^{-1}(G)$.Επομένως το $f^{-1}(H)$ είναι ανοικτό, άρα η f είναι συνεχής,ως συνάρτηση από το X στο B.
Αντίστροφα,έστω ότι η f είναι συνεχής ως συνάρτηση από το X στο B και $G \subseteq Y$ ανοικτό.Τότε το $f^{-1}(G \cap B)$ είναι ανοικτό σύνολο του X,ως αντίστροφη εικόνα του ανοικτού στο B συνόλου $G \cap B$ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης από το X στο B.Επειδή όμως $f^{-1}(G \cap B) = f^{-1}(G)$ έπεται ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό σύνολο του X.Επομένως η f είναι συνεχής,ως συνάρτηση από το X στο Y.
3)Αν η f είναι συνεχής,τότε και οι συναρτήσεις $f|A_i$ θα είναι συνεχείς,όπως προκύπτει από την πρόταση 1).
Αντίστροφα,έστω ότι οι $f|A_i$ είναι συνεχείς για κάθε $i \in I$,και $G \subseteq Y$ ανοικτό.Επειδή ισχύει ότι $X = \cup_{i \in I} A_i$ έπεται ότι $f^{-1}(G) = \cup_{i \in I}(f^{-1}(G) \cap A_i)$.Το σύνολο $f^{-1}(G) \cap A_i$ είναι ανοικτό στο A_i για κάθε $i \in I$,εοειδή $f^{-1}(G) \cap A_i = (f|A_i)^{-1}(G)$. Τα σύνολα $f^{-1}(G) \cap A_i$ είναι ανοικτά και στο X, επειδή το A_i είναι ανοικτό στο X για κάθε $i \in I$. Άρα το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X ως ένωση ανοικτών συνόλων.Επομένως η f είναι συνεχής συνάρτηση.
4)Αν η f είναι συνεχής,τότε και οι συναρτήσεις $f|F_k$ είναι συνεχείς για κάθε $k = 1, 2..., n$,όπως προκύπτει από την πρόταση 1).

Αντίστροφα,αν οι συναρτήσεις $f|F_k$ είναι συνεχείς για κάθε $k = 1, 2..., n$ τότε και η f θα είναι συνεχείς επειδή για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό,έχουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(F) = \cup_{k=1}^{n}(f^{-1}(F) \cap F_k) = \cup_{k=1}^{n}(f|F_k)^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X, ως ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων.

Παρατηρήσεις 1.50

1)Κάποιος θα μπορουσε να σκεφτεί ότι ο πιο προφανής τρόπος να ορίσουμε μια τοπολογία στο Y που να επάγεται από την τοπολογία του X είναι να θεωρήσουμε την οικογένεια $\{G \in T : G \subseteq Y\}$.Το πρόβλημα όμως με αυτόν τον ορισμό είναι ότι αν το Y δεν είναι ανοικτό τότε αυτή η οικογένεια δεν είναι τοπολογία.Μάλιστα είναι δυνατόν να αποτελείται μόνο από το κενό σύνολο.
2)Η σχετική τοπολογία όπως ορίστηκε,εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος ότι είναι η μικρότερη τοπολογία στον Y ως προς την οποία η ταυτοτική απεικόνιση $\varphi : Y \to X, \varphi(y) = y$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το καρτεσιανό γινόμενο τοπολογικών χώρων και τον ορισμό της τοπολογίας του γινομένου.

Ορισμός 1.51

Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μια μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων. Το καρτεσιανό γινόμενο της οικογένειας,συμβολίζουμε με $\prod_{i\in I} X_i$,είναι το σύνολο των συναρτήσεων $x : I \to \cup X_i$ με την ιδιότητα $x(i) \in X_i$ για κάθε $i \in I$. Θα γράφουμε x_i αντί για $x(i)$.

Το καρτεσιανό γινόμενο λοιπόν είναι στην ουσία το σύνολο των συναρτήσεων οι οποίες για κάθε i επιλέγουν από το X_i ένα στοιχείο του.Το καρτεσιανό γινόμενο, μπορούμε να λέμε ότι είναι το σύνολο των συναρτήσεων επιλογής.Το πολύ γνωστό στα μαθηματικά αξίωμα της επιλογής,με το οποίο θα ασχοληθούμε παρακάτω,μας λέει ότι το σύνολο των συναρτήσεων επιλογής,είναι μη κενό.Το καρτεσιανό γινόμενο όπως ορίστηκε αποτελεί γενίκευση της έννοιας του συνόλου διατεταγμένων ν-άδων από μαθηματικά αντικείμενα,όπως για παράδειγμα το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων πραγματικών αριθμών (ο R^n για πάραδειγμα!) που συναντά κανείς στη στοιχειώδη ανάλυση.

Ορισμός 1.52

Έστω $\{X_i\}_{\imath\in I}$ οικογένεια συνόλων και το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$.Η j προβολή,συμβολίζουμε με π_j,είναι μια συνάρτηση $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ τέτοια ώστε:$\pi_j(x) = x_j$. Η j προβολή λοιπόν δέχεται ως όρισμα μια συνάρτηση επιλογής και μας επιστρέφει το στοιχείο που επέλεξε αυτή η συνάρτηση από το X_j.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό της τοπολογίας του γινομένου,που θα μας είναι πολύ απαραίτητος για την συνέχεια.

Ορισμός 1.53.
Εστω $(X_i, T_i), i \in I$ μια αυθαίρετη οικογένεια τοπολογικών χώρων.Η τοπολογία του γινομένου ή καρτεσιανή τοπολογία είναι εκείνη η τοπολογία στον $X := \prod_{i \in I} X_i$ που έχει ως βάση $\mathfrak{B}$ την οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής:$\prod_{i \in I} G_i$ όπου $G_i \in T_i$ και το σύνολο των δεικτών $\{i \in I : G_i \neq X_i\}$ είναι το πολύ πεπερασμένο.

Παρατήρηση 1.54
Ειναι πολύ απλό,με το κριτήριο που αποδείξαμε παραπάνω (θεώρημα 1.7) να δειχθεί ότι η $\mathfrak{B}$ είναι πράγματι βάση για μια τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο. Πράγματι είναι προφανές ότι το $X \in \mathfrak{B}$ και εύκολα φαίνεται ότι η $\mathfrak{B}$ είναι κλειστή στην πεπερασμένη τομή.

Πρόταση 1.55
Εστω $(X_i, T_i), i \in I$ οικογένεια τοπολογικών χώρων,και T η καρτεσιανή τοπολογία του $X = \prod_{i \in I} X_i$.Τότε:
(1)Η οικογένεια
$$\mathfrak{C} = \{\pi_i^{-1}(G) : i \in I, G \in T_i\}$$
είναι μια υποβάση για την T.
(2)Η καρτεσιανή τοπολογία T είναι η μικρότερη τοπολογία στο γινόμενο ως προς την οποία οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις.
3)Ένα δίκτυο $x_\lambda, \lambda \in \Lambda$ του X συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν για κάθε $i \in I$ το δίκτυο $\pi_i(x_\lambda)$ συγκλίνει στο $\pi_i(x)$.
4)Μια συνάρτηση $f : Z \to X$,όπου Z τοπολογικός χώρος,είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $f_i : Z \to X_i$,με $f_i = \pi_i \circ f$ είναι συνεχείς για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη
(1)Αρκεί να κάνουμε την παρατήρηση ότι η βάση $\mathfrak{B}$ της T δεν είναι παρά η οικογένεια όλων των τομών πεπερασμένου πλήθους σοιχείων της $\mathfrak{C}$. Πράγματι αν $\prod_{i \in I} G_i \in \mathfrak{B}$ με $G_i \in T_i$ για $i \in I$ και $\{i \in I : G_i \neq X_i\} = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$

πεπερασμένο, τότε $\prod_{i\in I} G_i = \cap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$.
(2)Έστω $i \in I$.Για κάθε $G \subseteq X_i$ ανοικτό έχουμε ότι: $\pi_i^{-1}(G) \in \mathfrak{CB} \subseteq T$.Επομένως η π_i είναι συνεχής για κάθε $i \in I$.
Έστω $\mathfrak{S}$ μια τοπολογία του X τέτοια ώστε κάθε προβολή π_i να είναι συνεχής.Τότε για κάθε $i \in I$ και $G_i \in T_i$,έχουμε ότι $\pi_i^{-1}(G_i) \in \mathfrak{S}$.Αρα $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}$ και άρα $T \subseteq \mathfrak{S}$.
3)($\Rightarrow$)Αν το δίκτυο $x_\lambda, \lambda \in \Lambda$ του X συγκλίνει στο x,τότε το δίκτυο $\pi_i(x_\lambda)$ συγκλίνει στο $\pi_i(x)$ αφού οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις.
($\Leftarrow$)Εστω $\pi_i(x_\lambda) \to x_i$ για κάθε $i \in I$.Θέτουμε $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ και έστω U μια περιοχή του x στο X.Έπεται ότι υπάρχουν $i_1, ..., i_n \in I$ και $G_{i_k} \in T_{i_k}$ για $k = 1, 2..., n$ τέτοια ώστε

$$x \in \cap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \subseteq U$$

Αφού $\pi_{i_k}(x_\lambda) \to x_{i_k}$,υπάρχει $\lambda_k \in \Lambda$ ώστε $\pi_{i_k}(x_\lambda) \in G_{i_k}$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_k, k = 1, 2..., n$.Επιλέγουμε $\lambda_0 \in \Lambda$, ώστε $\lambda_0 \geq \lambda_k$ για κάθε $k = 1, 2, ..., n$.Τότε $x_\lambda \in \cap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}(G_{i_k}) \subseteq U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$.Άρα $x_\lambda \to x$.
(4)($\Rightarrow$)Αν η συνάρτηση $f : Z \to X$ είναι συνεχής,τότε και οι συναρτήσεις $f_i = \pi_i \circ f$ για $i \in I$ είναι συνεχείς ως συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων.
($\Leftarrow$)Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος μεταφοράς που αποδείξαμε παραπάνω (θεώρημα 1.38).Εστω z_λ ένα δίκτυο του Z που συγκλίνει στο $z \in Z$.Τότε από το γεγονός ότι οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις και από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε ότι $\pi_i(f(z_\lambda)) = f_i(z_\lambda) \to f_i(z) = \pi_i(f(z))$ για κάθε $i \in I$.Επομένως από το 3) έχουμε ότι $f(z_\lambda) \to f(z)$.Αρα η f από το θεώρημα μεταφοράς είναι συνεχής.

Σχόλιο 1.56

Η τελευταία ιδιότητα μας λέει ότι μια συνάρτηση με πεδίο τιμών ένα καρτεσιανό γινόμενο είναι συνεχής αν και μόνο αν οι "συνιστώσες" συναρτήσεις $\pi_i \circ f$ είναι συνεχείς.Αυτό γενικεύει ένα γνωστό θεώρημα της στοιχειώδους ανάλυσης,ότι μια διανυσματική συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συνιστώσες συναρτήσεις της είναι συνεχείς.

Παρατήρηση 1.57

Στο καρτεσιανό γινόμενο $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι δυνατόν να ορίσουμε,εκτός από την καρτεσιανή τοπολογία,και μια άλλη τοπολογία,που ίσως να φαίνεται πιο φυσιολογική και απλούστερη.Συγκεκριμένα την τοπολογία που έχει ως βάση την οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής $\prod_{i\in I} G_i$ με G_i ανοικτό στο X_i για κάθε $i \in I$,χωρίς τον περιορισμό ότι το σύνολο $i \in I : X_i \neq G_i$ είναι πεπερασμένο.Αυτή η οικογένεια,όπως πολύ εύκολα μπορεί να δειχθεί,είναι βάση για μια τοπολογία στο X,τη λεγόμενη τοπολογία box.Βέβαια η καρτεσιανή τοπολογία και η τοπολογία box ταυτίζονται για I πεπερασμένο.Όμως διαφέρουν γνήσια όταν το I είναι άπειρο και τα X_i δεν είναι μονοσύνολα η κενά σύνολα.Γενικά η box τοπολογία είναι ισχυρότερη(μεγαλύτερη) από την καρτεσιανη.Αυτό είναι φανερό από τον ορισμό τους.Ωστόσο θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η τοπολογία box στο καρτεσιανό γινόμενο,είναι απλώς ένα ενδιαφέρον παράδειγμα τοπολογίας,ενώ η καρτεσιανή τοπολογία έχει θεμελιώδη σημασία.Η μεγάλη σημασία της θα φανεί στην επόμενη ενότητα,με την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος Tychonoff για την συμπάγεια του γινομένου συμπαγών χώρων.

Αμέσως παρακάτω θα μιλήσουμε για τις λεγόμενες διαχωριστικές ιδιότητες που μπορεί να έχει ένας τοπολογικός χώρος,δηλαδή τη δυνατότητα να διαχωριστούν ξένα μεταξύ τους κλειστα σύνολα(η απλά σημεία) από ανοικτά σύνολα.

Ορισμός 1.58

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι χώρος T_1 αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο G του X τέτοιο ώστε $x \in G$ και $y \notin G$.Δηλαδή ένας τοπολογικός χώρος είναι T_1 αν για κάθε δυο διαφορετικά σημεία του μπορούμε να βρούμε δυο ανοικτά σύνολα που το καθένα να περιέχει το ένα από τα δύο σημεία αλλά να μην περιέχει το άλλο.

Πρόταση 1.59

Έστω X τοπολογικός χώρος.Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(1)Ο X είναι χώρος T_1
(2)Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη

$(1) \Rightarrow (2)$Έστω $x \in X$.Για κάθε y που δεν ανήκει στο $\{x\}$ υπάρχει V_y ανοικτό υποσύνολο του X,ώστε $y \in V_y$ και $x \notin V_y$. Συνεπώς

$$X \setminus \{x\} = \cup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y$$

το οποίο σημαίνει ότι το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό,άρα το $\{x\}$ είναι κλειστό.
$(2) \Rightarrow (1)$Αντίστροφα υποθέτουμε ότι κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό.Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$.Προφανώς ισχύει ότι $y \in X \setminus \{x\}$, $x \notin X \setminus \{x\}$ και ότι το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό.Όμοια $x \in X \setminus \{y\}$,$y \notin X \setminus \{y\}$ και $X \setminus \{y\}$ ανοικτό.

Ορισμός 1.60

Ένας τοπολογικός χώρος είναι T_2(η Hausdorff) αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$

υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά,τέτοια ώστε $x \in G_1, y \in G_2$ και G_1, G_2 ξένα μεταξύ τους.
Είναι σαφές ότι ένας χώρος T_2 είναι και T_1,ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.

Θεώρημα 1.61
Έστω X τοπολογικός χώρος.Τα ακόλουθα είνα ισοδύναμα:
1)Ο X είναι χώρος Hausdorff
2)Για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει ανοικτό σύνολο V που περιέχει το x τέτοιο ώστε $y \notin cl(V)$.

Απόδειξη
(1) $\Rightarrow$ (2),Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$.Επειδή ο X από υπόθεση είναι χώρος T_2 θα υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_1, G_2 τέτοια ώστε $x \in G_1, y \in G_2$ και τα G_1, G_2 είναι ξένα μεταξύ τους.Θέτουμε $V = G_1$.Επειδή $G_1 \subseteq X \setminus G_2$ και το $X \setminus G_2$ είναι κλειστό σύνολο,θα έχουμε ότι $cl(G_1) \subseteq X \setminus G_2$.Άρα $y \notin cl(V)$.

(2) $\Leftarrow$ (1)Έστω $x, y \in X$ διαφορετικά μεταξύ τους.Τότε από την υπόθεση υπάρχει ανοικτό σύνολο V που περιέχει το x τέτοιο ώστε $y \notin cl(V)$.Τότε το σύνολο $X \setminus cl(V)$ είναι ανοικτό,περιέχει το y και είναι ξένο με το V.

Οταν αναφερθήκαμε παραπάνω στη σύγκλιση ακολουθιών και γενικά δικτύων σε ένα τοπολογικό χώρο είδαμε ότι αν ένα δίκτυο συγκλίνει,μπορεί τα όρια να είναι περισσότερα του ενός.Όπως όμως θα δούμε στο παρακάτω θεώρημα η ιδιότητα Hausdorff ειναι ισοδύναμη με την απαίτηση,το όριο,αν υπάρχει,ενός δικτύου να είναι μοναδικό.

Θεώρημα 1.62
Ενας τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε δίκτυο του που συγκλίνει,συγκλίνει ακριβώς σε ένα σημείο.

Απόδειξη
($\Rightarrow$)Έστω ότι ο X είναι χώρος Hausdorff και προς απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα δίκτυο σε αυτόν,έστω $x_\lambda, \lambda \in \Lambda$,το οποίο συγκλίνει σε δυο διαφορετικά σημεία του x, y. Αφού ο X είναι χώρος Hausdorff,υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά υποσύνολα του X τέτοια ώστε $x \in G_1, y \in G_2$ και G_1, G_2 ξένα μεταξύ τους.Επειδή το δίκτυο x_λ συγκλίνει στο x,υπάρχει $\lambda_1 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \in G_1$ για κάθε $\lambda \succeq \lambda_1$,και επειδή το δίκτυο συγκλίνει και στο y,υπάρχει $\lambda_2 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \in G_2$ για κάθε $\lambda \succeq \lambda_2$.Επειδή το Λ είναι κατευθυνόμενο σύνολο,υπάρχει $\lambda_3 \notin \Lambda$ τετοιο ώστε $\lambda_3 \succeq \lambda_1$ και $\lambda_3 \succeq \lambda_2$.Επομένως θα ισχύει

ότι $x_{\lambda_3} \in G_1 \cap G_2$ το οποίο είναι άτοπο αφού G_1, G_2 ξένα μεταξύ τους.Άρα κάθε δίκτυο που συγκλίνει,έχει μοναδικό όριο.
($\Leftarrow$)Έστω ότι κάθε δίκτυο που συγκλίνει έχει μοναδικό όριο,αλλά προς απαγωγή σε άτοπο ο X δεν είναι χώρος Hausdorff.Τότε θα υπάρχουν $x, y \in X$ διαφορετικά τέτοια ώστε $U \cap V \neq \emptyset$ για κάθε U, V ανοιχτές περιοχές των x, y αντίστοιχα.Θέτουμε

$$\Lambda = \{(U, V) : U \in N_x, V \in N_y\}$$

(N_x είναι το σύνολο όλων των περιοχών του x) .Ορίζουμε μια σχέση $\preceq$ στο Λ ως εξής: $(U_1, V_1) \preceq (U_2, V_2)$ αν και μόνο αν $U_2 \subseteq U_1$ και $V_2 \subseteq V_1$. Ευκολα διαπιστώνεται ότι το (Λ,$\preceq$) είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο.Για κάθε $(U, V) \in \Lambda$ επιλέγουμε,κάνοντας χρήση του αξιώματος της επιλογής ,ένα στοιχείο $x_{(U,V)} \in U \cap V$.Το δίκτυο $(x_{(U,V)})_{(U,V)\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x και στο y ταυτόχρονα.Πράγματι για κάθε G περιοχή του x υπάρχει $(G, X) \in \Lambda$,ώστε:

$$x_{(U,V)} \in U \cap V \subseteq U \subseteq G \text{ για κάθε } (G, X) \preceq (U, V).$$

Επομένως το δίκτυο $x_{U,V}$ συγκλίνει στο x και εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται ότι συγκλίνει και στο y,άτοπο.

Ορισμός 1.63

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι T_3(η κανονικός) αν για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X και για κάθε $x \in X$ με $x \notin F$,υπάρχουν ξένα μεταξύ τους,ανοικτά υποσύνολα G_1, G_2 του X τέτοια ώστε $x \in G_1, F \subseteq G_2$.

Σχόλιο 1.64

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι κάθε χώρος που είναι T_1 και T_3 είναι Hausdorff.

Θεώρημα 1.65

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι κανονικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο U που περιέχει το x υπάρχει ανοικτό σύνολο V που περιέχει το x,τέτοιο ώστε:$V \subseteq cl(V) \subseteq U$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$)Έστω $x \in X$ και U ανοικτό σύνολο που περιέχει το x.Τότε το σύνολο $X \setminus U$ είναι κλειστό και δεν περιέχει το x.Επειδή ο X είναι κανονικός,υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά σύνολα,ξένα μεταξύ τους,τέτοια ώστε $x \in G_1, X \setminus U \subseteq G_2$.Θέτουμε $V = G_1$. Το V είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το x.Ισχύει ότι $V \subseteq X \setminus G_2$.Τότε το $X \setminus G_2$ είναι ένα κλειστό σύνολο που περιέχει το V,επομένως ισχύει $cl(V) \subseteq X \setminus G_2$.Επομένως έχουμε ότι $x \in V \subseteq cl(V) \subseteq X \setminus G_2 \subseteq U$

($\Leftarrow$)Έστω $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο που δεν περιέχει το x.Θέτω

$U = X \setminus F$.Το U είναι ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το x,οπότε από υπόθεση,υπάρχει ανοικτό σύνολο V,τέτοιο ώστε $x \in V \setminus cl(V) \setminus U$. Τότε όμως το σύνολο $X \setminus cl(V)$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το F και είναι ξένο με το V.Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ορισμός 1.66
Ένας χώρος X είναι φυσιολογικός (η χώρος T_4) αν για κάθε F_1, F_2 κλειστα και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X,υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά σύνολα,ξένα μεταξύ τους,τέτοια ώστε $F_1 \subseteq G_1,\ F_2 \subseteq G_2$.

Είναι πάλι εύκολο να δείξει κανείς ότι ένας χώρος T_1 και T_4 είναι T_3.

Θεώρημα 1.67
Έστω X τοπολογικός χώρος.Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(1)Ο X είναι φυσιολογικός.
(2)Για κάθε $F \subseteq X$ κλειστό και $G \subseteq X$ ανοικτό,ώστε $F \subseteq G$ υπάρχει $V \subseteq X$ ανοικτό,έτσι ώστε:

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq G.$$

(3)Για κάθε δυο κλειστά ξένα υποσύνολα F_1, F_2 του X,υπάρχει $V \subseteq X$ ανοικτό ώστε:

$$F_1 \subseteq V \text{ και } \overline{V} \cap F_2 = \emptyset$$

(4)Για κάθε δυο κλειστά,ξένα υποσύνολα F_1, F_2 του X υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_1, G_2 τέτοια ώστε:

$$F_1 \subseteq G_1, F_2 \subseteq G_2 \text{ και } \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset.$$

Απόδειξη
$(1) \Rightarrow (2)$Έστω $F \subseteq X$ κλειστό,$G \subseteq X$ ανοικτό,ώστε $F \subseteq G$.Τα σύνολα $F, X \setminus G$ είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους ,επομένος αφού ο X είναι φυσιολογικός χώρος,υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_1, G_2 τέτοια ώστε $F \subseteq G_1, X \setminus G \subseteq G_2$ και G_1, G_2 ξένα μεταξύ τους.Θέτουμε $V = G_1$,οπότε έχουμε:

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus G_2 \subseteq G.$$

$(2) \Rightarrow (3)$Έστω F_1, F_2 κλειστά και ξένα μεταξύ του υποσύνολα του X. Το σύνολο $X \setminus F_2$ είναι ανοικτό και $F_1 \subseteq X \subseteq F_2$. Από την υπόθεση υπάρχει $V \subseteq X$ ανοικτό,ώστε $F_1 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \subseteq F_2$.Επομένως, ισχύει $\overline{V} \cap F_2 = \emptyset$ και $F_1 \subseteq V$.

$(3) \Rightarrow (4)$Έστω F_1, F_2 κλειστά και ξένα υποσύνολα του X.Από το (3) υπάρχει $V \subseteq X$ ανοικτό,ώστε $F_1 \subseteq V$ και $\overline{V} \cap F_2 = \emptyset$.Τα σύνολα $\overline{V}, F_2$ είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους,οπότε πάλι από υπόθεση υπάρχει $G \subseteq X$ ανοικτό ώστε $F_2 \subseteq G$ και $\overline{V} \cap \overline{G} = \emptyset$.Θέτουμε $G_1 = V$ και $G_2 = G$ και έχουμε το (4).

$(4) \Rightarrow (1)$Ειναι άμεσο!

Θεώρημα 1.68
Έστω X φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και $\{U_1, ..., U_n\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X.Τότε υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα $\{V_1, ..., V_n\}$ του X τέτοιο ώστε $cl(V_k) \subseteq U_k$ για $k = 1, 2..., n$.
(Το κάλυμμα $\{V_1, ..., V_n\}$ λέγεται συρρίκνωση του $\{U_1, ..., U_n\}$).

Απόδειξη
Αρκείνα δείξουμε ότι υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο V_1 τετοιο ώστε $cl(V_1) \subseteq U_1$ και το σύνολο $\{V_1, U_2, ..., U_n\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X .Από εκεί το αποτέλεσμα έπεται άμεσα με επαγωγή.
Πράγματι,θέτουμε $F = X \setminus (U_2 \cup .... \cup U_n)$ και $G = U_1$.Τότε το σύνολο F είναι κλειστό,το G είναι ανοικτό και $F \subseteq G$,και άρα,επειδή ο X είναι φυσιολογικός χώρος,έπεται από την προηγούμενη πρόταση ότι υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $V_1 \subseteq X$ τέτοιο ώστε $F \subseteq V_1 \subseteq cl(V_1) \subseteq G$.Δε μένει παρά να παρατηρήσουμε ότι:$X = F \cup U_2 \cup ... \cup U_n \subseteq V_1 \cup U_2 \cup .... \cup U_n$ και $cl(V_1) \subseteq G = U_1$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Θεώρημα 1.69
Αν $X_i, i \in I$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων με την διαχωριστική ιδιότητα $T_j, j = 1, 2, 3$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $X = \prod_{i \in I} X_i$ εφοδιασμένο με την καρτεσιανή τοπολογία είναι επίσης T_j χώρος για $j = 1, 2, 3$ αντίστοιχα.
ΣχόλιοΜια ιδιότητα P που μπορεί να έχει ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται πολλαπλασιαστική αν όταν κάθε χώρος μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων την έχει,θα την έχει και το καρτεσιανό γινόμενό τους.Επομένως οι διαχωριστικές ιδιότητες T_1, T_2, T_3 είναι πολλάπλασιαστικές,όπως είναι και η ιδιότητα της συμπάγειας,που θα δούμε παρακάτω (θεώρημα Tychonoff).

Απόδειξη
$(j = 1)$Έστω $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in X$ με $x \neq y$.Επειδή τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους, υπάρχει δείκτης $i_0 \in I$ τέτοιος ώστε $x_{i_0} \neq y_{i_0}$.Επειδή ο χώρος X_{i_0} είναι T_1,υπάρχει $G \subseteq X_{i_0}$ ανοικτό,τέτοιο ώστε $x_{i_0} \in G$ και $y_{i_0} \notin G$.Το σύνολο $\pi_{i_0}^{-1}(G)$ είναι ανοικτό ως προς την καρτεσιανή τοπολογία και είναι προφανές ότι $x \in \pi_{i_0}^{-1}(G)$ ενώ $y \notin \pi_{i_0}^{-1}(G)$.Αρα ο X είναι T_1.
$(j = 2)$Έστω $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in X$ με $x \neq y$.Επειδή είναι διαφορετικά,υπάρχει δείκτης $i_0 \in I$ τέτοιος ώστε $x_{i_0} \neq y_{i_0}$.Επειδή τώρα ο X_{i_0} είναι χώρος Hausdorff,υπάρχουν G, H ανοικτά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του

X_{i_0}, τέτοια ώστε $x_{i_0} \in G$ και $y_{i_0} \in H$.Τότε $x \in \pi_{i_0}^{-1}(G)$ και $y \in \pi_{i_0}^{-1}(H)$ και $\pi_{i_0}^{-1}(G) \cap \pi_{i_0}^{-1}(H) = \pi_{i_0}^{-1}(G \cap H) = \emptyset$ και τα σύνολα $\pi_{i_0}^{-1}(G), \pi_{i_0}^{-1}(H)$ είναι ανοικτά ως προς την καρτεσιανή τοπολογία του X.Άρα ο X είναι χώρος Hausdorff .

$(j = 3)$Έστω $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ και U μια περιοχή του x στο X.Σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση (1.57),αρκεί να υπάρχει περιοχή V του x τέτοια ώστε $x \in V \subseteq cl(V) \subseteq U$.Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και το x ανήκει σε αυτό,υπάρχει στοιχείο B της κανονικής βάσης της καρτεσιανής τοπολογίας,τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U$.Έστω $B = \prod_{i \in I} G_i$ με G_i ανοικτό για κάθε $i \in I$ και το σύνολο $i \in I : G_i \neq X_i = \{i_1, ..., i_n\}$ είναι πεπερασμένο.Τότε $x_{i_k} \in G_{i_k}$ για $k = 1, 2..., n$ και επειδή οι χώροι $X_{i_k}, k = 1, 2...., n$ είναι κανονικοί χώροι,υπάρχει V_{i_k} περιοχή του x_{i_k} στον X_{i_k},ώστε $x_{i_k} \in V_{i_k} \subseteq cl(V_{i_k}) \subseteq G_{i_k}$ για $k = 1, 2..., n$.Θέτουμε $V = \pi_{i_1}^{-1}(V_{i_1}) \cap .... \cap \pi_{i_n}^{-1}(V_{i_n})$.Τότε το V είναι περιοχή του x και $x \in V \subseteq cl(V) = cl(\cap_{i=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) = \cap_{i=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(cl(V_{i_k})) \subseteq \prod_{i \in I} G_i = B \subseteq U$.

Ορισμός 1.70

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι τελείος κανονικός η $(T_{3\frac{1}{2}})$ αν για κάθε $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X και το x να μην ανήκει στο F υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$.

Παρατηρήσεις 1.71

Είναι άμεσο ότι κάθε τελείως κανονικός χώρος είναι κανονικός. Πράγματι,εφ'όσον για κάθε $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$,αν $f : X \to [0, 1]$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$,τότε $x \in f^{-1}((-\infty, 1/2))$ και $F \subseteq f^{-1}((1/2, \infty))$ και τα ανοικτά σύνολα,(ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών συνόλων μέσω συνεχούς συνάρτησης),$f^{-1}((-\infty, 1/2)), f^{-1}((1/2, \infty))$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Πρόταση 1.72

Κάθε T_1 φυσιολογικός χώρος είναι τελείως κανονικός.

Απόδειξη

Έστω X T_1 και φυσιολογικός χώρος,$x \in X$ και F ένα κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$.Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό αφού ο X είναι T_1 και άρα για τα ξένα και κλειστά υποσύνολα $\{x\}, F$ του φυσιολογικού χώρου X

από το λήμμα του Uryshonn (δες αντίστοιχη ενότητα για τη διατύπωση του θεωρήματος),υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$.Άρα ο X είναι τελείως κανονικός.

Πρόταση 1.73
Κάθε υποσύνολο ενός τελείως κανονικού χώρου εφοδιασμένο με τη σχετική τοπολογία είναι τελείος κανονικός.

Απόδειξη
Εστω X τελείως κανονικός χώρος και A υποσύνολο του X.Αν $x \in A$ και F ένα κλειστό υποσύνολο του A όπου $x \notin F$,τότε υπάρχει H κλειστό υποσύνολο του X με $F = A \cap H$.Εφ'όσον ο X είναι τελείως κανονικός,υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in H$. Τότε ο περιορισμός $f|A$ είναι συνεχής στο A(θεώρημα 1.41),$(f|A)(x) = 0$ και $(f|A)(y) = 1$ για κάθε $y \in F$.Αρα ο A είναι τελείως κανονικός.

Θεώρημα 1.74
Έστω $\{X_i : i \in I\}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και έστω $X = \prod_{i \in I} X_i$ ο χώρος γινόμενο εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία. Τότε:
1)Αν ο X είναι μη κενός,τελείως κανονικός χώρος,τότε ο X_i είναι τελείως κανονικός για κάθε $i \in I$.
2)Αν ο X_i είναι τελείως κανονικός για κάθε $i \in I$,τότε ο X είναι τελείως κανονικός.

Απόδειξη
1)Υποθέτουμε ότι ο X είναι μη κενός και τελείως κανονικός χώρος.Έστω $(p_i)_{i \in I}$ ενα στοιχείο του X.Για κάθε $i \in I$ ο χώρος $X_i \times \prod_{j \neq i}\{p_j\}$,που αποτελεί ένα υποσύνολο του X,είναι ομοιομορφικός με τον X_i. Επομένως,από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι ο X_i είναι τελείως κανονικός.
2)Έστω $x \in X$,F κλειστό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $x \notin F$.Τότε υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο της συνήθους βάσης της καρτεσιανής τοπολογία της μορφής $\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1} \cap ... \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ που περίχει το x και είναι ξένο προς το F.Αυτό ισχύει διότι το $X \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το x επομένως υπάρχει στοιχείο της βάσης που να περιέχει το x και να είναι υποσύνολο του $X \setminus F$ και άρα ξένο προς το F.Για κάθε $k = 1, 2...., n$ στον χώρο X_{i_k} το σημείο x_{i_K} δεν ανήκει στο κλειστό σύνολο $X_{i_k} \setminus U_{i_k}$ και,εφόσον ο χώρος X_{i_k} είναι τελείως κανονικός,έπεται ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f_{i_k} : X_{i_k} \to [0,1]$

τέτοια ώστε $f_{i_k}(x_{i_k}) = 0$ και $f|(X_{i_k} \setminus U_{i_k}) = 1$.Θέτουμε $f : X \to [0,1]$ με $f(z) = max\{(f_{i_k} \circ \pi_{i_k})(z), k = 1, 2..., n\}$ για κάθε $z \in X$.Τότε η f είναι καλα ορισμένη και συνεχής.Επίσης $f(x) = 0$ και ακόμη αν $y \in F$ τότε υπάρχει $1 \leq k \leq n$ τέτοιο ώστε $y_{i_k} \notin U_{i_k}$,οπότε $f_k(y_{i_k}) = 1$ και άρα $f(y) = max\{(f_k \circ \pi_{i_k})(y) : k = 1, 2..., n\} = 1$,επομένως ο X είναι τελείως κανονικός.

Η επόμενη ,πολύ σημαντική,τοπολογική έννοια που θα ορίσουμε είναι η έννοια του συμπαγούς χώρου.

Ορισμός 1.75
Εστω X τοπολογικός χώρος.Ο X θα ονομάζεται συμπαγής αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του,δηλαδη κάθε οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $\{V_i\}_{i \in I}$ με $\cup_{i \in I} V_i = X$,έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $i_1, ..., i_k$ του I τέτοιο ώστε $X = V_{i_1} \cup V_{i_2} \cup .... \cup V_{i_k}$.

Ορισμός 1.76
Εστω X τοπολογικός χώρος και K υποσύνολο του.Το K θα λέγεται συμπαγές,αν είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος ως προς την σχετική τοπολογία,δηλαδή αν κάθε κάλυμμα του K από ανοικτά στο K σύνολα,έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο συμπάγειας ενός υποσυνόλου K,διότι μας επιτρέπει να αποφύγουμε την αναφορά στη σχετική τοπολογία και να εργαστούμε με την τοπολογία του X,που συνήθως είναι απλούστερο.

Πρόταση 1.77
Έστω X τοπολογικός χώρος και K υποσύνολο του X.Το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K,δηλαδή κάθε οικογένεια $\{V_i\}_{i \in I}$ από ανοικτά στο X σύνολα με $K \subseteq \cup_{i \in I} V_i$,έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Απόδειξη
($\Rightarrow$)Έστω K συμπαγές και $V_i, i \in I$ οικογένεια ανοικτών (στο X) συνόλων που καλύπτουν το K.Ισχύει ότι $\cup_{i \in I}(V_i \cap K) = K$.Αλλά τα σύνολα $V_i \cap K$ είναι ανοικτά στο K,άρα αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του K στη σχετική τοπολογία.Επειδή K συμπαγές έπεται ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του I ,$\{i_1, ..., i_k\}$ τέτοιο ώστε $V_{i_1} \cap K \cup ... \cup V_{i_k} \cap K = K$ το οποίο όμως συνεπάγεται ότι $K \subseteq V_{i_1} \cup ... \cup V_{i_k}$.

($\Leftarrow$)Έστω $\{V_i\}, i \in I$ ανοικτά σύνολα τέτοια ώστε $\cup_{i \in I}(V_i \cap K) = K$.Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $K \subseteq \cup_{i\in I} V_i$,αλλά από την υπόθεση έπεται ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του $I, \{i_1, ..., i_k\}$ τέτοιο ώστε $K \subseteq V_{i_1} \cup .... \cup V_{i_k}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $K = V_{i_1} \cap K \cup .... \cup V_{i_K} \cap K$,δηλαδή το K είναι συμπαγές.

Θεώρημα 1.78
Έστω X τοπολογικός χώρος συμπαγής και F κλειστό υποσύνολο του.Τότε το F είναι συμπαγές.

Απόδειξη
Έστω $\{V_i\}_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του υποχώρου F.Αφού για κάθε $i \in I$ το V_i είναι ανοικτό (στη σχετική τοπολογία) υποσύνολο του F,τότε υπάρχει U_i ανοικτό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $V_i = U_i \cap F$.Έχουμε λοιπόν ότι:

$$F = \cup_{i\in I} V_i = \cup_{i\in I}(U_i \cap F) = (\cup_{i\in I} U_i) \cap F$$

Άρα θα πρέπει $F \subseteq \cup_{i\in I} U_i$.Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus F\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X,αφού το $X \setminus F$ είναι ανοικτό.Επομένως λόγω συμπάγειας,υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_i\}_{i\in G} \cup X \setminus F$,και άρα $F \subseteq \cup_{i\in G} U_i$,όπου G πεπερασμένο υποσύνολο του I. (Παρατηρήστε ότι στο πεπερασμένο υποκάλυμμα του X το σύνολο $X \setminus F$ είναι απαραίτητο,διότι το $\{U_i\}_{i\in I}$ δεν καλύπτει κατάνάγκη το X.) Συνεπώς υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\{V_i\}_{i\in I}$ αφού

$$F = (\cup_{i\in G} U_i) \cap F = \cup_{i\in G}(U_i \cap F) = \cup_{i\in G} V_i$$

και το G είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I.

Ορισμός 1.79
Εστω X σύνολο και $\{G_i\}_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του. Λέμε ότι η $\{G_i\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του I ισχύει ότι:$\cap_{i\in F} G_i \neq \emptyset$.

Με τον παραπάνω ορισμό είμαστε έτοιμοι να δώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της εννοιας της συμπάγειας που θα μας φανεί χρήσιμος στα παρακάτω.

Θεώρημα 1.80
Έστω X τοπολογικός χώρος.Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(1)Ο X είναι συμπαγής
(2)Κάθε οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων που έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής έχει μη κενή τομή,δηλαδή ισχύει:

$$\cap_{i\in I} G_i \neq \emptyset$$

Απόδειξη

(1) $\Rightarrow$ (2)Έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομης και προς απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι $\cap_{i\in I}G_i = \emptyset$.Τότε $\cup_{i\in I}(X \setminus G_i) = X$. Το $X \setminus G_i$ είναι ανοικτό για κάθε $i \in I$,άρα η οικογένεια $\{(X \setminus G_i\}_{i\in I})$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X.Επειδή ο X είναι συμπαγής,υπαρχει πεπερασμένο υποσύνολο F του I τέτοιο ώστε $\cup_{i\in F}(X \setminus G_i) = X$.Από εδώ συνεπάγεται ότι $\cap_{i\in F}G_i = \emptyset$,το οποίο είναι άτοπο επειδή από την υπόθεση η $\{G_i\}_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

(2) $\Rightarrow$ (1)Έστω $\{U_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X.Αυτό σημαίνει ότι $X = \cup_{i\in I}U_i$ και άρα έχουμε $\cap_{i\in I}(X \setminus U_i) = \emptyset$.Η οικογένεια $\{(X \setminus U_i)\}$ αποτελείται από κλειστά υποσύνολα του X,άρα από την υπόθεση δεν μπορεί να έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Επομένως υπάρχει F πεπερασμένο υποσύνολο του I τέτοιο ώστε $\cap_{i\in F}(X \setminus U_i) = \emptyset$.Συμπαιρένουμε λοιπόν ότι $X = \cup_{i\in F}U_i$ από το οποίο συνεπάγεται ότι ο X είναι συμπαγής.

Παρατήρηση 1.81
Το (2) του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα και ως εξής:Για κάθε $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει ότι $\cap_{i\in I}\overline{A_i} \neq \emptyset$.

Πρόταση 1.82
Έστω X τοπολογικός χώρος.Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
1)Ο X είναι συμπαγής.
2)Κάθε συλλογή κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής έχει μη κενή τομή.
3)Κάθε καθολικό δίκτυο στο X συγκλίνει.
4)Κάθε δίκτυο στο X έχει συγκλίνων υποδίκτυο.

Απόδειξη
Την ισοδυναμία των 1 και 2 την έχουμε ήδη αποδείξει!
1) $\Rightarrow$ 3)Έστω x_λ ένα καθολικό δίκτυο στο X που δεν συγκλίνει.Τότε για δωθέν $x \in X$ υπάρχει ανοικτό σύνολο V_x που περιέχει το x τέτοιο ώστε το δίκτυο δεν περιέχεται τελικώς στο V.Τότε από τον ορισμό του καθολικού δικτύου,το δίκτυο βρίσκεται τελικώς στο $X \setminus V_x$. Τότε υπάρχει δείκτης λ_x τέτοιος ώστε $x_\lambda \notin V$ για κάθε $\lambda \succeq \lambda_x$.Επειδή τώρα ο X είναι συμπαγής θα ισχύει ότι $X = V_{x_1} \cup ... \cup V_{x_n}$.Θεωρούμε λοιπόν $\lambda \succeq \lambda_{x_i}$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$.Τότε $x_\lambda \notin V_{x_i}$ για κάθε $i = 1, ..., n$, επομένως το x_λ δεν είναι στοιχείο του συνόλου X,που είναι φυσικά άτοπο.

3) $\Rightarrow$ 4)Είναι άμεσο από το γεγονός ότι κάθε δίκτυο έχει καθολικό υποδίκτυο.

4) $\Rightarrow$ 2) Έστω F μια συλλογή κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.Μπορούμε,χωρίς βλάβη της γενικότητας,να επισυνάψουμε στο F όλες τις πεπερασμένες τομές στοιχείων του,έτσι ώστε το σύνολο που θα προκύψει να είναι και κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές.Εφοδιάζουμε έπειτα το F με τη σχέση του αντίστροφου περιέχεσθαι $\supseteq$ και έτσι το καθιστούμε κατευθυνόμενο σύνολο.Σε κάθε $C \in F$ αντιστοιχούμε ένα $x_C \in C$ ορίζοντας ένα δίκτυο.Από υπόθεση υπάρχει ένα συγκλίνων υποδίκτυο που ορίζεται από την απεικόνιση $\varphi : D \to F$.Έστω ότι το εν λόγω υποδίκτυο συγκλίνει στο $x \in X$.Έστω $C \in F$.Τότε υπάρχει $\mu_0 \in D$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mu \succeq \mu_0$ να έχουμε ότι $\varphi(\mu) \subseteq C$ και έτσι να ισχύει $x_{\varphi(\mu)} \in \varphi(\mu) \subseteq C$.Άρα,το υποδίκτυο που αποτελείται από σημεία του C συγκλίνει στο x,και επειδή το C είναι κλειστό,θα έχουμε $x \in C$.Επειδή το C είναι άνα τυχαίο στοιχείο της F,θα ισχύει $x \cap C \in F$,άρα έχουμε $\cap F \neq \emptyset$.

Πρόταση 1.83

Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος,Y τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ συνάρτηση.Αν η f είναι συνεχής τότε η εικόνα $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

Απόδειξη

Έστω $\{V_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$.Τότε η οικογένεια $\{f^{-1}(V_i)_{i\in I}\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X.Πράγματι,κάθε στοιχείο της οικογένειας είναι ανοικτό,ως αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης.Επιπλέον είναι κάλυμμα του X διότι:

$$X = f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i).$$

Λόγω συμπάγειας του X υπάρχει $\{i_1, ..., i_n\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του I τέτοιο ώστε $X = \cup_{k=1}^{n}(f^{-1}(V_{i_n})$.Συνεπώς

$$f(X) = f(\cup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})) = \cup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(V_{i_k})) \subseteq \cup_{k=1}^{n} V_{i_k}.$$

Επομένως,το $\{V_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\{V_i\}_{i\in I}$ και άρα η εικόνα $f(X)$ είναι συμπαγής.

Σχόλιο 1.84

Η παραπάνω πρόταση συνεπάγεται ότι η συμπάγεια είναι τοπολογική ιδιότητα,δηλαδή παραμένει αναλοίωτη κάτω από ομοιομορφισμούς.Επίσης μας δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε ως πόρισμα,μια γενίκευση του θεωρήματος μέγιστης και ελάχιστης τιμής που γνωρίζουμε από το λύκειο!

Πόρισμα
Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος και $f : X \to R$ συνεχής πραγματική συνάρτηση.Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη
Επειδή f συνεχής και X συμπαγής,έπεται ότι το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του R,δηλαδή κλειστό και φραγμένο.Αφού είναι φραγμένο,έπεται ότι έχει supremum και infimum στο R. Επειδή όμως είναι κλειστό,έπεται ότι το supremum και το infimum περιέχονται στο σύνολο και είναι η μέγιστη και η ελάχιστη αντίστοιχα τιμή του $f(X)$.

Πρόταση 1.85
Έστω X τοπολογικός χώρος Hausdorff και $G \subseteq X$ συμπαγές.Τότε το G είναι κλειστό.

Απόδειξη
Θα δείξουμε ισοδύναμα ότι το συμπλήρωμα του G,$X \setminus G$ είναι ανοικτό.Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in X \setminus G$ υπάρχει ανοικτό σύνολο U_x τέτοιο ώστε $x \in U_x \subseteq X \setminus G$.Τότε θα έχουμε $\cup_{x \in X \setminus G} U_x = X \setminus G$,άρα το $X \setminus G$ θα είναι ένωση ανοικτών συνόλων,επομένως θα είναι ανοικτό.Έστω $x \in X \setminus G$. Τότε κάθε $y \in G$ θα είναι διαφορετικό από το x.Άρα επειδή ο X είναι χώρος Hausdorff,για κάθε $y \in G$ θα υπάρχουν ανοικτά σύνολα U_y, V_y ξένα μεταξύ τους,τέτοια ώστε $x \in U_y, y \in V_y$.Με αυτόν τον τρόπο δημιουργήσαμε ένα ανοικτό κάλυμμα του G,το $\{V_y : y \in G\}$.Τώρα αφού το G είναι συμπαγές θα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα,δηλαδη θα υπάρχει $\{y_1, ..., y_n\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του G τέτοιο ώστε $G \subseteq \cup_{i=1}^n V_{y_i}$.Θέτουμε $V = \cup_{i=1}^n V_{y_i}$ και $U = \cap_{i=1}^n U_{y_i}$ τα οποία είναι ανοικτά.Επίσης παρατηρούμε ότι $G \subseteq V, x \in U$ και $V \cap U = \emptyset$. Αφού τα U, V είναι ξένα μεταξύ τους και το V καλύπτει το G έπεται ότι τα U, G είναι ξένα,δηλαδή ότι το U περιέχεται στο $X \setminus G$.Συνεπώς $x \in U \subseteq X \setminus G$,·άρα έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 1.86
Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος,Y Hausdorff χώρος και $f : X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση 1-1 και επί.Τότε η f είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη
Το μόνο που πρέπει να δείξουμε είναι ότι η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} είναι συνεχής.Από παραπάνω πρόταση (1.32),αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι κλειστή απεικόνιση,δηλαδή ότι απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του X σε κλειστά

υποσύνολα του Y.Εστω λοιπόν $F \subseteq X$ κλειστό.Το F είναι συμπαγές,ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου.Αρα επειδή η f είναι συνεχής,το $f(F)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.Τέλος,αφού ο Y είναι χώρος Hausdorff,από την τελευταία πρόταση έπεται ότι το $f(F)$ είναι κλειστό και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Θεώρημα 1.87
Κάθε τοπολογικός χώρος X που είναι Hausdorff και συμπαγής,είναι κανονικός.

Απόδειξη
Έστω X τοπολογικός χώρος που είναι Hausdorff και συμπαγής.Έστω $x \in X$ και F υποσύνολο του X κλειστό,που δεν περιέχει το x.Επειδή ο X είναι Hausdorff για κάθε $y \in F$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα,ξένα μεταξύ τους,U_y, V_y τέτοια ώστε $x \in U_y, y \in V_y$.Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{V_y : y \in F\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του F και επίσης το F είναι συμπαγές,ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου.Αρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{V_{y_i} : i = 1, 2..., n\}$.Θέτουμε:

$$V = \cup_{i=1}^{n} V_{y_i} \text{ και } U = \cap_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

τα οποία είναι ανοικτά υποσύνολα του X.Επίσης ισχύει ότι $x \in U$ και $F \subseteq V$.Αν δείξουμε τώρα και ότι τα U, V είναι ξένα μεταξύ τους θα έχουμε τελειώσει .Έστω z να ανήκει στην τομή τους.Τότε υπάρχει δείκτης $i_0 \in \{1, 2, ...n\}$ τέτοιως ώστε $z \in V_{y_{i_0}}$.Επίσης $z \in U_{y_i}$ για κάθε $i = 1, 2, .., n$.Αυτό όμως είναι άτοπο διότι τα V_{i_0} και U_{i_0} είναι ξένα μεταξύ τους.

Θεώρημα 1.88
Ένας τοπολογικός χώρος που είναι Hausdorff και συμπαγής είναι φυσιολογικός.

Απόδειξη
Έστω X συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος. Επιλέγουμε έπειτα $F_1, F_2 \subseteq X$ δυο κλειστά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα.Ξέρουμε από την προηγούμενη πρόταση ότι ο X είναι κανονικός. Συνεπώς,για κάθε $x \in F_1$,υπάρχουν U_x, V_x ανοικτά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα τέτοια ώστε $x \in U_x$ και $F_2 \subseteq V_x$.Άρα $F_1 \subseteq \cup_{x \in F_1} U_x$ και επειδή το F_1 είναι συμπαγές,ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου,έπεται ότι υπάρχει $n \in N$ τέτοιο ώστε $F_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.Θέτουμε $U = \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ και $V = \cap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ τα οποία είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Τέλος παρατηρούμε ότι $F_1 \subseteq U, F_2 \subseteq V$ και U, V ξένα μεταξύ τους.

Τα παρακάτω θα μας φανούν χρήσιμα στο κεφάλαιο της συμπαγοποίησης τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 1.89

Έστω $X, Y_i, i \in I$ τοπολογικοί χώροι και $f_i : X \to Y_i$ συναρτήσεις για $i \in I$.
1)Η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X αν για κάθε $x_1 x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$,υπάρχει i_0 με $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$.
2)Η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X αν για κάθε $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$ υπάρχει $i_0 \in I$ με $f_{i_0}(x) \notin cl(f_{i_0}(F))$.
3)Η συνάρτηση $e : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ με $e(x) = (f_i(x))_{i\in I}$,είναι η συνάρτηση εκτίμησης (ως προς την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$).

Παρατήρηση 1.90

Αν ο χώρος X είναι T_1 και η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X τότε η$(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει και τα σημεία του X.

Θεώρημα 1.91 (λήμμα της εμφύτευσης)

Εστω X, Y_i τοπολογικοί χώροι και $f_i : X \to Y_i$ συνάρτηση για $i \in I$ Τότε:
1)αν η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι 1-1.
2)αν η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X,τότε η συνάρτηση εκτίμησης είναι ανοικτή απεικόνιση από το X στο $e(X)$. (Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται ανοικτή αν η εικόνα κάθε ανοικτού υποσυνόλου του X είναι ανοικτό υποσύνολο του Y).
3)αν η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις,τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι συνεχής.
4)αν η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, διαχωρίζει τα σημεία του X και διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X,τότε η συνάρτηση εκτίμησης e είναι ένας ομοιομορφισμός του X και του $e(X)$.

Απόδειξη

1)Έστω $x_1 \neq x_2$.Εφόσον η $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X,υπάρχει $i_0 \in I$ με $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$.Άρα $e(x_1) = (f_i(x_1))_{i\in I} \neq (f_i(x_2)_{i\in I} = e(x_2)$ και άρα η e είναι 1-1.
2)Έστω U ανοικτό υποσύνολο του X και $x \in U$.Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} Y_i$ τέτοιο ώστε $e(x) \in V \cap e(X) \subseteq e(U)$.Από την υπόθεση για το σημείο $x \in X$ και το κλειστό σύνολο $X \setminus U$,υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $f_{i_0}(x) \notin (f_{i_0}(cl(X \setminus U)$.Θέτουμε $V = \pi_{i_0}^{-1}(Y_{i_0} \setminus cl(f_{i_0}(X \setminus U)$,όπου $\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} Y_{I\in I} \to Y_{i_0}$ η συνήθης προβολή.Τότε το V είναι ανοικτό στο $\prod_{i\in I} Y_i$

και $V \cap e(X) \subseteq e(U)$.Πράγματι,αν $y \in V \cap e(X)$ τότε υπάρχει $z \in V$ ώστε $y = e(z) = (f_{i\in I}(z))_{i\in I}$ και,εφ'όσον $y \in V$,έπεται ότι $\pi_{i_0}(y) = f_{i_0}(z) =\notin cl(f_{i_0}(X \setminus U)$,και άρα $z \notin X \setminus U$,δηλαδή $z \in U$ και $e(Z) \in e(U)$.
3)Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 1..
4)Έπεται από τα 1),2),3).

Θεώρημα 1.92
Έστω X τοπολογικός χώρος.Τότε ο X είναι T_1 και τελείως κανονικός αν και μόνο αν είναι ομοιομορφικός προς ένα υπόχωρο του $[0,1]^I$ για κάποιο σύνολο δεικτών I.(Το σύμβολο A^B παριστάνει το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το σύνολο B στο σύνολο A).Το $[0,1]$ θεωρείται υπόχωρος του R με τη συνήθη τοπολογία.

Απόδειξη
($\Rightarrow$)Έστω $(f_i)_{i\in I}$ η οικογένεια όλων των συνεχών συναρτήσεων από τον X στο $[0,1]$.Επειδή ο X είναι τελείως κανονικός έπεται ότι η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X. Πράγματι,έστω $x \in X$ και $F \subseteq X$,με $x \notin F$. Τότε,επειδή ο X είναι τελείως κανονικός,υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_{i_0} : X \to [0,1]$ τέτοια ώστε $f_{i_0}(x) = 0$ και $f_{i_0}(y) = 1, \forall y \in F$. Τότε όμως $f_{i_0}(x) \notin \{1\} = cl(\{1\}) = cl(f(F))$, (το μονοσύνολο $\{1\}$ είναι κλειστό στο $[0,1]$). Αρα η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X. Επομένως διαχωρίζει και τα σημεία του X,αφου ο X είναι και T_1.Ετσι η συνάρτηση εκτίμησης ως προς την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$,$e : X \to [0,1]^I$ με $e(x) = (f_i)_{i\in I}$ είναι ομοιομορφική εμφύτευση προς έναν υπόχωρο του $[0,1]^I$.

($\Leftarrow$)Από προηγούμενη πρόταση (1.74) προκύπτει ότι ο χώρος $[0,1]^I$ είναι τελείως κανονικός,αφού ο $[0,1]$ είναι τελείως κανονικός.Ο $[0,1]$ είναι τελείως κανονικός, επειδή είναι συμπαγής και Hausdorff, άρα είναι φυσιολογικός,από προηγούμενη πρόταση,και T_1. Άρα ο X είναι τελείως κανονικός αφού είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο ενός τελείος κανονικού χώρου.Είναι επίσης και χώρος T_1,διότι ισχυριζόμαστε ότι κάθε υπόχωρος ενός T_1 χώρου είναι T_1 με τη σχετική τοπολογία.Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό και τελειώσαμε!Έστω λοιπόν X χώρος T_1 και $A \subseteq X$ και $x \in A$.Αρκεί να αποδείξουμε ότι το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό στο A.Επειδή X είναι T_1, το $\{x\}$ είναι κλειστό,άρα το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό.Αρα το $A \setminus \{x\} = (X \setminus \{x\}) \cap A$ είναι ανοικτό και ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.

Θεώρημα 1.93
Έστω X τοπολογικός χώρος Hausdorff.Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.
1)Ο X είναι συμπαγής.
2)Ο X είναι ομοιομορφικός με ένα κλειστό υπόχωρο του $[0,1]^I$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο για κάποιο σύνολο δεικτών I.

Απόδειξη
($\Rightarrow$)Αφού ο X είναι συμπαγής και Hausdorff είναι φυσιολογικός (Πρόταση 1.88) και άρα τελείως κανονικός, (πρόταση 1.72).Επομένως ο X είναι T_1 και τελείως κανονικός, επομένως από θεώρημα 1.92 είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του $[0,1]^I$ για κάποιο σύνολο δεικτών I.Όμως αφού ο X είναι συμπαγής,και η συμπάγεια είναι τοπολογική ιδιότητα,αυτός ο υπόχωρος του $[0,1]^I$ θα είναι και εκείνος συμπαγής.Επίσης το $[0,1]$ με τη σχετική τοπολογία είναι χώρος Hausdorff,επομένως από το θεώρημα 1.69 και ο $[0,1]^I$ είναι Hausdorff.Ο εν λόγω υπόχωρος λοιπόν είναι ένα συμπαγές υποσύνολο ενός Hausdorff χώρου,άρα από την πρόταση 1.85 είναι κλειστό. Επομένως προκύπτει το 2).

($\Leftarrow$)Από το θεώρημα Tychonoff(δες επόμενη ενότητα) ,αφού ο $[0,1]$ είναι συμπαγής,έπεται ότι ο $[0,1]^I$ είναι συμπαγής.Ο X λοιπόν από υπόθεση είναι ομοιομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς χώρου.Αλλά ένα κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς χώρου είναι συμπαγές από πρόταση 1.78.Επομένως ο X είναι ομοιομορφικός με ένα συμπαγές σύνολο,άρα είναι συμπαγής.

2 Θεώρημα Tychonoff

Θα παρουσιάσουμε πρώτα την απόδειξη του θεωρήματος στην περίπτωση πεπερασμένης οικογένειας τοπολογικών χώρων,η οποία μπορεί να αποδειχθεί χωρίς χρήση του αξιώματος της επιλογής,και μετά θα δώσουμε και την απόδειξη στην γενική περίπτωση αυθαίρετου πλήθους τοπολογικών χώρων,η οποία είναι δυσκολότερη και χρειάζεται απαραίτητα το αξίωμα της επιλογής.

Θεώρημα 2.1 Tychonoff,πεπερασμένη περίπτωση
Έστω X, Y συμπαγείς τοπολογικοί χώροι.Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ εφοδιασμένο με την τοπολογία του γινομένου είναι συμπαγές.

Απόδειξη
Έστω W ένα ανοικτό κάλυμμα του $X \times Y$.Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο A του X ικανοποιεί την ιδιότητα (*) αν το $A \times Y$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του W.Επομένως θέλουμε να δείξουμε ότι ο X ικανοποιεί την ιδιότητα (*).

1ο ΒήμαΘα δείξουμε ότι αν $A_1, ..., A_k$ είναι υποσύνολα του X που ικανοποιούν την (*) τότε το $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$ικανοποιεί την (*).Έστω ότι το $A_i \times Y$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (του W) το W_i,όπου $i = 1, 2, ..., k$.Ευκολα ελέγχει κανείς ότι ισχύει:

$$A \times Y = \cup_{i=1}^{k} (A_i \times Y).$$

Τότε το $A \times Y$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα το $W_1 \cup ... \cup W_k$.

2ο ΒήμαΘα δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $U_x \subseteq X$ ανοικτό με $x \in U_x$ ώστε να ικανοποιεί την (*).
Έστω $x \in X$.Για κάθε $y \in Y$ υπάρχει W_y στοιχείο του W,έτσι ώστε $(x, y) \in W_y$.Τότε υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο.δηλαδή στοιχείο της βάσης της καρτασιανής τοπολογίας που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο,$U_y \times V_y$ έτσι ώστε:

$$(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq W_y$$

Θεωρούμε την οικογένεια $\{V_y : y \in Y\}$.Αυτή προφανώς αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του Y,συνεπώς λόγω συμπάγειας του Y υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{V_{y_i} : i = 1, 2, ...k\}$.Θέτουμε:

$$U_x = \cap_{i=1}^{k} U_{y_i}.$$

Κατάρχάς παρατηρούμε ότι είναι ανοικτό και ότι $x \in U_x$.Κατόπιν παρατηρούμε ότι $U_x \times V_{y_i} \subseteq U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq W_{y_i}$. για κάθε $i \in \{1, 2, ..., k\}$.Άρα:

$$\cup_{i=1}^{k} (U_x \times V_{y_i}) \subseteq \cup_{i=1}^{k} W_{y_i}.$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\cup_{i=1}^{k} (U_x \times V_{y_i}) = U_x \times (\cup_{i=1}^{k} V_{y_i}) = U_x \times Y.$$

Επομένως,$U_x \times Y \subseteq \cup_{i=1}^{k} W_{y_i}$,και άρα το U_x ικανοποιεί την (*) αφου τα W_{y_i} είναι στοιχεία του W.

3ο ΒήμαΘα δείξουμε ότι ο X ικανοποιεί την (*).
Το 2ο βήμα μας εξασφαλίζει ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει U_x που ικανοποιεί την (*).Η οικογένεια $\{U_x : x \in X\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X.Επειδή ο X είναι συμπαγής,υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_{x_i} : i = 1, 2..., n\}$. Αυτό σημαίνει ότι $X = \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.Από το πρώτο βήμα λοιπόν έπεται ότι ο X ικανοποιεί την (*).

Παρατήρηση 2.2(1)Χρησιμοποιώντας επαγωγή μπορούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω θεώρημα για οποιαδήποτε πεπερασμένη οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων
(2)Παρατηρήστε ότι αν $\{X_i\}_{i \in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων τέτοια ώστε ο χώρος γινόμενο να είναι συμπαγής,τότε X_i συμπαγής για κάθε $i \in I$ διότι οι προβολές π_i είναι συνεχείς και επί και ξέρουμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις απεικονίζουν συμπαγείς χώρους σε συμπαγείς χώρους.

Τώρα θα αποδείξουμε το θεώρημα Tychonoff στην γενική περίπτωση αυθαίρετου πλήθους τοπολογικών χώρων.

Θεώρημα 2.3 Tychonoff
Εστω $(X_i, T_i) : i \in I$ οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων.Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $X = \prod_{i \in I} X_i$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.

Απόδειξη 1
Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι ο χώρος X δεν είναι συμπαγής.Τότε το σύνολο που έχει ώς στοιχεία του τις οικογένειες ανοικτών καλυμμάτων του X που δεν έχουν πεπερασμένο υποκάλυμμα,έστω Γ, είναι διάφορο του κενού. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το Γ εφοδιασμένο με τη σχέση του περιέχεσθαι είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο το οποίο ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος Zorn.Πράγματι,αν $(C_j), j \in J$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του Γ το ανοικτό κάλυμμα $C = \cup_{j \in J} C_j$ ανήκει στο Γ,επειδή για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{V_1, ..., V_k\}$ του C υπάρχει δείκτης $j_0 \in J$ τέτοιος ώστε $\{V_1, ..., V_k\} \subseteq C_{j_0}$, αφού (C_j) είναι ολικά διατεταγμένο, και άρα δεν καλύπτει το X και ακόμη είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{C_j, j \in J\}$. Επο-

μένως,από το λήμμα του Zorn συνεπάγεται ότι το Γ έχει μεγιστικό στοιχείο. Εστω C_0 ένα μεγιστικό στοιχείο του Γ. Σημειώνουμε ότι αν $V \subseteq X$ ανοικτό σύνολο,τέτοιο ώστε $V \notin C_0$ τότε υπάρχουν $V_1, ..., V_k$ που ανήκουν στο C_0 τέτοια ώστε $X = V_1 \cup ... \cup V_k \cup V$.Πράγματι, αν αυτό δεν είναι αλήθεια τότε το σύνολο $C_0 \cup \{V\}$ θα είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα,δηλαδή στοιχείο του Γ,γνήσια μεγαλύτερο του C_0,το οποίο είναι άτοπο επειδή το C_0 είναι μεγιστικό στοιχείο.
Παρατηρούμε επίσης το εξής:για κάθε $i \in I$ ισχύει ότι

$$\cup\{W \subseteq X_i : W \in T_i, \pi_i^{-1}(W) \in C_0\} \neq X_i.$$

Πράγματι,σε διαφορετική περίπτωση,επειδή ο X_i είναι συμπαγής,θα υπήρχαν $W_1, ...W_m$ ανοικτά υποσύνολα του X_i τέτοια ώστε $W_1 \cup .... \cup W_m = X_i$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\pi_i^{-1}(W_1) \cup .... \cup \pi_i^{-1}(W_m) = X$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του C_0 .Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτό το γεγονός,για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε

$$y_i \in X_i \setminus \cup\{W \subseteq X_i, W \in T_i : \pi_i^{-1}(W) \in C_0\}$$

και θέτουμε $y = (y_i)_{i \in I}$.Εφ'όσον το C_0 είναι ανοικτό κάλυμμα του X,υπάρχει $U \in C_0$ με $y \in U$ και ένα βασικό ανοικτό σύνολο,δηλαδή ένα σύνολο που να α-νήκει στη βάση της καρτεσιανής τοπολογίας που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο,(ορισμός 1.53) τέτοιο ώστε:

$$y \in \pi_{i_1}^{-1}(W_1) \cap .... \cap \pi_{i_l}^{-1}(W_l) \subseteq U.$$

όπου $W_1 \in T_{i_1}, ...W_l \in T_{i_l}$.
Εχουμε ότι για κάθε $m = 1, .., l$ $\pi_{i_m}^{-1}(W_m) \notin C_0$ και άρα από προηγούμενη παρατήρηση που κάναμε,υπάρχουν $V_{m,1}, ..., V_{m,k_m} \in C_0$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$V_{m,1} \cup ... \cup V_{m,k_m} \cup \pi_{i_m}^{-1}(W_m) = X.$$

Τότε όμως ισχυριζόμαστε ότι το πεπερασμένο υποσύνολο

$$\{V_{m,1}, ..., V_{m,k_m}, m = 1, ...l\} \cup \{U\}$$

του C_0 καλύπτει το X,το οποίο είναι άτοπο, και έτσι η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί.
Πράγματι αν $x \notin \cup_{m=1}^{l} \cup_{n=1}^{k_m} V_{m,n}$ τότε $x \in \pi_{i_m}^{-1}(W_m)$ για κάθε $m = 1, 2, ..., l$ και επομένως $x \in \pi_{i_1}^{-1}(W_1) \cap .... \cap \pi_{i_l}^{-1}(W_l) \subseteq U$.

Σχόλιο 2.4

Για την απόδειξη στην περίπτωση αυθαίρετου πλήθους οικογένειας τοπολογικών χώρων χρησιμοποιήσαμε το λήμμα του Zorn που είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής.Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που μπορεί να κάνει κάποιος είναι αν είναι δυνατόν να αποδείξουμε το θεώρημα του Tychonoff χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα της επιλογής.
Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική.Ο John Kelley το 1950 δημο-

σίευσε μια σύντομη εργασία με τίτλο 'The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice¨,με την οποία απέδειξε ότι το αξίωμα της επιλογής είναι συνέπεια του θεωρήματος Tychonoff.Αρα η αναζήτηση μιας απόδειξης του θεωρήματος Tychonoff στην αξιωματική θεωρία ZF χωρίς το αξίωμα της επιλογής είναι ισοδύναμη με την αναζήτηση μιας απόδειξης του αξιώματος της επιλογής στην ZF.Αυτό όμως,όπως είναι γνωστό,είναι αδύνατο διότι το αξίωμα της επιλογής είναι ανεξάρτητο της ZF.
Σημειώνουμε ότι στην εργασία του ο Kelley επισημαίνει πως ο Kakutani ήταν αυτός που είχε διατυπώσει την εικασία ότι το θεώρημα του Tychonoff συνεπάγεται το αξίωμα της επιλογής.
Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Kelley.

Για την επόμενη απόδειξη θα χρειαστούμε ένα θεώρημα γνωστό ως θεώρημα υποβάσης του Alexander.

Θεώρημα 2.5 Alexander

Εστω (X, T) τοπολογικός χώρος και A υποβάση για την T.Αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X από στοιχεία της A έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα τότε X συμπαγής.

Απόδειξη

Εστω προς απαγωγή σε άτοπο,ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Τότε το σύνολο των ανοικτών καλυμμάτων του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα,έστω Γ,είναι διάφορο του κενού.Το Γ εφοδιασμένο με τη σχέση $\subseteq$ του περιέχεσθαι είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.Έστω $(C_i)_{i\in I}$ ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του.Τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι η ένωση $\cup_{i\in I} C_i$ ανήκει στο Γ και είναι μέγιστο στοιχείο αυτού του υποσυνόλου. Επομένως εφαρμόζεται το λήμμα του Zorn και έστω C_0 ένα μεγιστικό στοιχείο του Γ.Θέτουμε τότε $B = A \cap C_0$.Τότε ισχύει ότι $X \neq \cup B$.Πράγματι,αν ίσχυε $X = \cup B$ τότε επειδή $B \subseteq A$ και από την υπόθεση,το B θα είχε πεπερασμένο υποκάλυμμα,και επειδή $B \subseteq C_0$ και το C_0 θα είχε πεπερασμένο υποκάλυμμα,άτοπο.Αν $x \in X \setminus \cup B$,υπάρχει $V \in C_0$ τέτοιο ώστε $x \in V$ και υπάρχουν $U_1, ..., U_m$,αφού η A είναι υποβάση,τέτοια ώστε $x \in U_1 \cap ... \cap U_m \subseteq V$.Επειδή $x \notin \cup B$ έπεται ότι $U_i \notin C_0$ για κάθε $i = 1, 2, ..., m$ γιατι αν αυτό δεν συνεβαινε τότε το x θα άνηκε σε κάποιο U_i το οποίο θα άνηκε και στο A και στο C_0, αλλά όχι στο B που είναι η τομή τους,άτοπο.Επίσης παρατηρούμε ότι αν G ανοικτό που δεν ανήκει στο C_0,τότε υπάρχουν $G_1, ..., G_k \in C_0$,τέτοια ώστε $X = G_1 \cup ... \cup G_k \cup G$,επειδή αν αυτό δεν ίσχυε τότε το $C_0 \cup \{G\}$ θα ήταν ανοικτό κάλυμμα του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα,γνήσια ,μεγαλύτερο του C_0,άτοπο.(Παρόμοια παρατήρηση κάναμε και στην προηγούμενη απόδειξη!!).Από την παραπάνω λοιπόν παρατήρηση έπεται ότι υπάρχουν $V_{n,1}, ..., V_{n,k_n}$ στο C_0 για κάθε $n = 1, 2, ..., m$ τέτοια ώστε:

$$U_n \cup V_{n,1} \cup ... \cup V_{n,k_n} = X.$$

Από το προηγούμενο λοιπόν προκύπτει ότι:για κάθε $x \in X$, $x \in U_n$ για κάθε $n = 1, 2, ...m$ η $x \in \cup_{n=1}^{m} \cup_{i=1}^{k_n} V_{n,i}$.Άρα έχουμε ότι $V \cup \cup_{n=1}^{m} \cup_{i=1}^{k_n} V_{n,i} \supseteq \cap_{j=1}^{m} U_j \cup \cup_{n=1}^{m} \cup_{i=1}^{k_n} V_{n,i} = X$.Από το προηγούμενο προκυπτει ότι η οικογένεια C_0 είναι ανοικτό κάλυμμα με πεπερασμένο υποκάλυμμα,που είναι άτοπο και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Θεώρημα 2.6Tychonoff 2η Απόδειξη

Από το θεώρημα Alexander αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα του X από στοιχεία κάποιας υποβάσης του έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.Ως υποβάση,A για την τοπολογία γινόμενο θα χρησιμοποιήσουμε την $A = \{\pi_i^{-1}(G) : i \in I, G \subseteq X_i, G \in T_i\}$. Εστω C ανοικτό υποβασικό κάλυμμα κ ορίζουμε $C_i = \{V \subseteq X_i : V \in T_i, \pi_i^{-1}(V) \in C\}$ για κάθε $i \in I$.Τότε ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε το C_{i_0} είναι ανοικτό κάλυμμα του X_{i_0}.Πράγματι,αν αυτό δεν ισχύει τότε μπορούμε να επιλέξουμε $x_i \in (X_i \setminus \cup C_i), \forall i \in I$ και θέτουμε $x = (x_i)_{i \in I}$.Τότε $x \notin \pi_i^{-1}(U)$ για κανένα από τα υποβασικά σύνολα $\pi_i^{-1}(U) \in C$,το οποίο είναι άτοπο αφού C ανοικτό κάλυμμα του X.Έπειτα επειδή X_{i_0} συμπαγές υπάρχουν $V_1, ..., V_k$ που ανήκουν στο C_{i_0} με $V_1 \cup V_2, .., \cup V_k = X_{i_0}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\pi_{i_0}^{-1}(X_{i_0}) = \pi_{i_0}^{-1}(V_1) \cup ..., \cup \pi_{i_0}^{-1}(V_k)$ το οποίο τελικά συνεπάγεται ότι $X = \pi_{i_0}^{-1}(V_1) \cup, ..., \cup \pi_{i_0}^{-1}(V_k)$ όπου όλα τα σύνολα που αποτελούν την ένωση ανήκουν στο C.Δηλαδή το C έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα,άρα από το θεώρημα Alexander έπεται ότι ο X είναι συμπαγής.

Για την 3η απόδειξη του θεωρήματος θα δώσουμε μερικα στοιχεια από την θεωρία των υπερφιλτρων που θα μας επιτρέψουν να δώσουμε μια σύντομη απόδειξη του θεωρήματοςTychonoff..

Ορισμός 2.7

Εστω X σύνολο.Φίλτρο στο X είναι ένα σύνολο $F \subseteq P(X)$ τέτοιο ώστε:
1)$X \in F$
2)$\emptyset \notin F$
3)Αν $A \in F$ και $A \subseteq B$ τότε $B \in F$
4)Αν $A, B \in F$ τότε $A \cap B \in F$

Από τον παραπάνω ορισμό άμεσα προκύπτει ότι ένα φίλτρο F έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής,δηλαδή αν $A_1, A_2, ..., A_n \in F$ τότε $\cap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$.

Παραδείγματα 2.8
1)Το τετριμμένο φίλτρο $F = \{X\}$
2)Το πρωτεύον φίλτρο που παράγεται από το $x \in X$,$F = \{A \subseteq X : x \in A\}$.
3)Οταν το X είναι άπειρο ορίζεται το συμπεπερασμένο φίλτρο $F = \{A \subseteq X : card(X \setminus A) < \infty\}$

Ορισμός 2.9
Ενα φίλτρο F στο X είναι υπερφίλτρο αν για κάθε $A \subseteq X$,$A \in F$ ή $X \setminus A \in F$.

Πρόταση 2.10
Εστω F φίλτρο στο X.Τότε το F είναι υπερφίλτρο αν κ μόνο αν η δήλωση $\cup_{i=1}^n A_i \in F$ συνεπάγεται ότι $A_i \in F$ για κάποιο i.

Απόδειξη
$(\Rightarrow)$Έστω F ένα φίλτρο στο X. Προς απαγωγή σε άτοπο,έστω ότι το συμπέρασμα είναι ψευδές,δηλαδη υπάρχουν $A_1, .., A_n \subseteq X$ τέτοια ώστε $\cup_{i=1}^n A_i \in F$ αλλά $A_i \notin F$ για κάθε $i = 1, 2, ...n$.Τότε,επειδή F υπερφίλτρο θα έχουμε $X \setminus A_i \in F$ για κάθε $i = 1, .., n$.Το προηγούμενο συνεπάγεται ότι $\cap_{i=1}^n X \setminus A_i \in F$.Από τον ορισμό του φίλτρου,άμεσα προκύπτει ότι αν $A \in F$ τότε $X \setminus A \notin F$.Άρα από τα προηγούμενα έχουμε $X \setminus \cap_{i=1}^n (X \setminus A_i) \notin F$ το οποίο από τον κανόνα του De Morgan συνεπάγεται $\cup_{i=1}^n A_i \notin F$, άτοπο.

$(\Leftarrow)$Εστω τώρα ότι $\cup_{i=1}^n A_i \in F \Rightarrow A_i \in F, \forall i = 1..., n$,αλλά προς απαγωγή σε άτοπο,F όχι υπερφίλτρο.Τότε υπάρχει $A \subseteq X$ τέτοιο ώστε αυτό και το συμπλήρωμα του να μην ανήκουν στο F.Όμως η ένωση τους,που ισούται με το X,ανήκει στο F,επομένως από την υπόθεση κάποιο από τα δυο ανήκει στο F,άτοπο.

Πρόταση 2.11
Κάθε υποσύνολο $S \subseteq P(X)$ με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής έχει ένα ελάχιστο φίλρο που το περιέχει,το φίλτρο που παράγεται από το S.

Απόδειξη
Το ζητούμενο προκύπτει αν επισυνάψουμε στο S,όλες τις πεπερασμένες τομές από στοιχεία του κ όλα τα υπερσύνολα στοιχείων του.Για την κλάση υποσυνόλων που προκύπτει εύκολα διαπιστώνεται ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες του φίλτρου.

Πρόταση 2.12
Κάθε φίλτρο F περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο.

Απόδειξη
Θεωρούμε το σύνολο όλων των φίλτρων στο X που περιέχουν το F, εφοδιασμένο με την μερική διάταξη $\subseteq$.Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ένωση μιας αλυσίδας τέτοιων φίλτρων είναι φίλτρο στο X. Αρα από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό στοιχείο F_1.Ισχυριζόμαστε ότι ένα μεγιστικό φίλτρο είναι υπερφίλτρο. Πράγματι,αν F_1 όχι υπερφίλτρο,τότε υπάρχει $A \subseteq X$ τέτοιο ώστε $A \notin F_1$ και $X \setminus A \notin F_1$.Τότε όμως το σύνο λο $F_1 \cup \{A\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής,άρα το F_1 περιέχεται γνήσια στο φίλτρο που παράγεται από το $F_1 \cup \{A\}$,άτοπο επειδή F_1 μεγιστικό.

Πόρισμα 2.13
Κάθε $S \subseteq P(X)$ που έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο.Αυτό προκύπτει άμεσα από τις δυο προηγούμενες προτάσεις.

Ορισμός 2.14
Ενα φίλτρο F σε έναν τοπολογικό χώρο X συγκλινει σε ένα σημείο y του X αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το y ανήκει στο F.

Ορισμός 2.15
Εστω F ένα (υπερ)φίλτρο στο σύνολο X και $f : X \to Y$ όπου Y σύνολο.Τότε ορίζουμε το σύνολο $f_*F = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in F\}$.

Θεώρημα 2.16
Έστω F (υπερ)φίλτρο στο σύνολο X και $f : X \to Y$ συνάρτηση.Τότε το σύνολο $f_*F = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in F\}$ είναι (υπερ)φίλτρο στο Y.

Απόδειξη
Θα ελέγξουμε μια-μια τις προυποθέσεις.
1)$f^{-1}(Y) = X \in F$ άρα $Y \in f_*F$
2)$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin F$ άρα $\emptyset \notin f_*F$.
3)Εστω $A, B \in f_*F$ δηλαδή $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in F$ επομενως,από γνωστή ιδιότητα της αντίστροφης απεικόνισης $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in F$,άρα $A \cap B \in f_*F$.
4)Εστω $A \in f_*F$ Και $B \supseteq A$.Τότε $f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(A) \in F$,άρα $f^{-1}(B) \in F$, επομένως $B \in f_*F$.
Έστω τώρα ότι το F είναι υπερφίλτρο στο X.Έστω επίσης $A \subseteq Y$.Τότε,αφού F υπερφίλτρο,θα έχουμε ότι είτε $f^{-1}(A) \in F$ και άρα $A \in f_*F$,είτε $f^{-1}(Y \setminus A) =$

$X \setminus f^{-1}(A) \in F$ και άρα $Y \setminus A \in f_*F$.Αρα το f_*F είναι υπερφίλτρο στο Y.

Ορισμός 2.17
Εστω X σύνολο ,F φίλτρο στο X,Y τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ συνάρτηση.Τότε το $y \in Y$ είναι ένα F-οριακό σημείο της f αν το f_*F συγκλίνει στο y.

Το παρακάτω θεώρημα θα μας χρησιμεύσει για να δώσουμε μια ακόμα απόδειξη του θεωρήματος Tychonoff.

Θεώρημα 2.18
Ενας τοπολογικός χώρος Y είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε υπερφίλτρο στον Y συγκλίνει σε τουλάχιστον ένα σημείο.

Απόδειξη
Προς απαγωγή σε άτοπο,έστω ότι Y συμπαγής αλλά κάποιο υπερφίλτρο F δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο του Y.Τότε για οποιοδήποτε $y \in Y$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο V_y που περιέχει το y τέτοιο ώστε $V_y \notin F$.Τότε έχουμε ότι $\cup_y V_y = Y$. Από συμπάγεια όμως του Y συνεπάγεται ότι υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{y_i, i = 1, 2, .., n\}$ τέτοιο ώστε $Y = \cup_{i=1}^{n} V_{y_i}$.Επειδή $Y \in F$,από προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $V_{y_i} \in F$ για κάποιο i,το οποίο είναι άτοπο.
Αντίστροφα,έστω Y όχι συμπαγής.Τότε υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα $Y = \cup_i V_i$,χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.Τότε από κανόνα De Morgan έχουμε $\cap_i(Y \setminus V_i) = \emptyset$ αλλά καμία πεπερασμένη υποτομή δεν είναι κενή.Το σύνολο επομένως $\{Y \setminus V_i\}_i$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, επομένως υπάρχει ένα υπερφίλτρο F που το περιέχει.Για κάθε σημείο y που ανήκει στον Y υπάρχει V_i που το περιέχει και για το οποίο ισχύει ότι $V_i \notin F$,επειδή $Y \setminus V_i \in F$, άρα το τυχαίο σημείο y δεν μπορεί να είναι σημείο σύγκλισης του F,το ζητούμενο αποδείχθηκε!

Θεώρημα 2.19 Tychonoff(3η Απόδειξη)
Εστω $\{X_i\}_i$ οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων.Για να αποδείξουμε ότι ο χώρος γινόμενο X είναι συμπαγής αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε υπερφίλτρο F του X συγκλίνει. Εστω $\pi_i : X \to X_i$ η i-οστη προβολή.Τότε το $(\pi_i)_*F$ είναι υπερφίλτρο στο X_i κ αφού ο X_i είναι συμπαγής από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι αυτό το υπερφίλτρο συγκλίνει σε ένα $x_i \in X_i$.Τα προηγούμενα ισχύουν για κάθε i,οπότε θέτουμε $x = (x_i) \in X$.Ισχυριζόμαστε ότι το x είναι σημείο σύγκλισης του υπερφίλτρου F.Είναι γνωστό ότι η τοπολογία του γινομένου παράγεται από σύνολα της μορφής $V = \pi_i^{-1}(U)$ όπου U είναι ένα ανοικτό σύνολο του X_i.Αρα κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το x περιέχει μια πεπερασμένη τομή από σύνολα αυτής της μορφής,τα οποία περιέχουν το

x.Επειδή το F είναι κλειστό ως προς τα υπερσύνολα και τις πεπερασμένες τομές, τελικά αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \in V = \pi_i^{-1}(U)$ τότε $V \in F$.Εστω λοιπόν $x \in V$.Τότε το x_i θα ανήκει στο U επομένως το U θα ανήκει στο $(\pi_i)_*F$,αφού το x_i είναι σημείο σύγκλισης του $(\pi_i)_*F$.Τότε όμως από τον ορισμό του $(\pi_i)_*F$ άμεσα προκύπτει ότι $V \in F$.Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Θεώρημα 2.20 Tychonoff(4η απόδειξη)
Έστω $X = \prod_{i \in I} X_i$ χώρος γινομένου X_i συμπαγής για κάθε i.Έστω επίσης x_λ ένα καθολικό δίκτυο στον X.Τότε από παραπάνω πρόταση(1.36) η σύνθεση $\pi_i \circ x_\lambda$ είναι ένα καθολικό δίκτυο στον X_i.Επομένως,από παραπάνω (1.82),η σύνθεση συγκλίνει σε ένα στοιχείο x_i του X_i.Αλλά αυτό σημαίνει,πάλι από παραπάνω πρόταση (1.55),ότι το αρχικό δίκτυο x_λ συγκλίνει στο σημείο εκείνο του οποίου η i συνιστώσα είναι το x_i,για κάθε i. Επομένως κάθε καθολικό δίκτυο στον X συγκλίνει,και επομένως (1.82) ο X είναι συμπαγής.

3 Συμπαγοποίηση κατα Stone-Cech

Ορισμός 3.1Έστω X τοπολογικός χώρος.Ενας τοπολογικός χώρος Y είναι συμπαγοποίηση του X αν:
1)Ο Y είναι συμπαγής χώρος Hausdorff.
2)υπάρχει μια συνάρτηση $h : X \to Y$ όπου η $h : X \to h(X)$ είναι ομοιομορφισμός
3)το $h(X)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y

Σχόλιο 3.2
Πυκνό υποσύνολο ενός χώρου Y είναι ένα υποσύνολο του ,έστω A, τέτοιο ώστε $cl(A) = Y$.Κλασικό παράδειγμα πυκνού υποσυνόλου από τη στοιχειώδη ανάλυση είναι το σύνολο των ρητών μέσα στους πραγματικούς. Στην ουσία λοιπόν για την συμπαγοποίηση ενός τοπολογικού χώρου X,αναζητούμε έναν συμπαγή,Hausdorff τοπολογικό χώρο που να επιδέχεται μια ομοιομορφική εμφύτευση $h : X \to Y$ (όταν λέμε ομοιομορφική εμφύτευση εννοούμε μια συνάρτηση $h : X \to Y$ τέτοια ώστε η $h : X \to h(X)$ να είναι ομοιομορφισμός,δηλαδή 1-1,επί και συνεχής η h και η αντίστροφη της.). Τότε η συμπαγοποίση του X θα είναι η κλειστότητα του $h(X)$ μέσα στην τοπολογία του Y.

Θεώρημα 3.3
Ενας τοπολογικός χώρος X έχει συμπαγοποίηση αν και μόνο αν είναι τελείως κανονικός και Hausdorff χώρος.

Απόδειξη
Έστω Y μια συμπαγοποίηση του X και h ο ομοιομορφισμός που αναφέρεται στον ορισμό της συμπαγοποίησης.Ο Y είναι από υπόθεση συμπαγής και Hausdorff,οπότε είναι και φυσιολογικός. Συνεπώς ο Υ και κάθε υπόχωρος του θα είναι τελείως κανονικός και Hausdorff.Αρα ο $h(X)$ είναι τελείως κανονικός και Hausdorf,και επομένως και ο X είναι τελείως κανονικός και Hausdorff, ως ομοιομορφικός με τον $h(X)$.

Αντίστροφα,έστω X ένας τελείως κανονικός και Hausdorff χώρος.Τότε από προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι ο X είναι ομοιομορφικός προς έναν υπόχωρο του $[0,1]^I$ για κάποιο σύνολο δεικτών I,δηλαδή υπάρχει ομοιομορφική εμφύτευση $e : X \to [0,1]^I$.Ο $[0,1]^I$ είναι συμπαγής από το θεώρημα του Tychonoff και Hausdorff,ως καρτεσιανό γινόμενο χώρων Hausdorff.Επομένως από προηγούμενη παρατήρηση ο $Y = cl(e(X))$ είναι μια συμπαγοποίηση του X.

Θεώρημα 3.4
Έστω X τοπολογικός χώρος συμπαγής και Hausdorff. Τότε ο X είναι ομοιομορφικός με κάθε συμπαγοποίηση του.

Απόδειξη
Έστω X χώρος συμπαγής και Hausdorff και έστω Y μια συμπαγοποίηση του και h ο ομοιομορφισμός της εν λόγω συμπαγοποίησης.Επειδή η συνάρτηση h είναι ομοιομορφική εμφύτευση και ο X είναι συμπαγής,έπεται ότι το $h(X)$ είναι συμπαγές.Όμως ο Y είναι χώρος Hausdorff,άρα το $h(X)$ είναι κλειστό,ως συμπαγές υποσύνολο Hausdorff χώρου.Επομένως ισχύει ότι $h(X) = cl(h(X)) = Y$,δηλαδή η h είναι επί του Y, άρα ο X είναι ομοιομορφικός με τον Y.

Παράδειγμα 3.5
1)Έστω $X = (0,1) \subseteq R$.Τότε το κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι συμπαγές,είναι χώρος Hausdorff(ως προς την σχετική τοπολογία).Επίσης θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $h : (0,1) \to [0,1], h(x) = x$.Η απεικόνιση αυτή είναι ομοιομορφική εμφύτευση. Η κλειστότητα της εικόνας αυτή της απεικόνισης είναι το $[0,1]$, επομένως από την προηγούμενη παρατήρηση η συμπαγοποίηση του διαστήματος $(0,1)$ είναι το διάστημα $[0,1]$.

2)Θεωρούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών ,N,εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία,δηλαδή το δυναμοσύνολο.Θέτουμε έπειτα $Y = \{\frac{1}{n} : n \in N\} \cup \{0\}$ εφοδιασμένο με τη σχετική τοπολογία του R.Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : N \to Y$ με $h(n) = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in N$.Επειδή η διακριτή τοπολογία στους φυσικούς ισούται με την σχετική τοπολογία που επάγεται στο N από τη συνήθη τοπολογία του R και επειδή γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $y = 1/x$ είναι συνεχής,κάνοντας χρήση του θεωρήματος 1.49 του πρώτου κεφαλαίου συμπεραίνουμε ότι η 1-1 συνάρτηση h είναι ομοιομορφική εμφύτευση.Επίσης ισχύει ότι $cl(h(N)) = cl(\{1/n : n \in N\}) = Y$.Τέλος το σύνολο Y είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του R,άρα είναι συμπαγές. Επομένως ο χώρος Y είναι συμπαγοποίηση του N με τη διακριτή τοπολογία.

Ορισμός 3.6
Έστω X τοπολογικός χώρος.Το σύνολο $C(X)$ είναι το σύνολο των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων από το X στο R.

Παρατήρηση 3.7
Από το λήμμα της εμφύτευσης,έπεται ότι αν X είναι ένας τελείως κανονικός και Hausdorff τοπολογικός χώρος,τότε η συνάρτηση εκτίμησης $e : X \to \prod_{f \in C(X)} cl(f(X)) = Y$ των συναρτήσεων της οικογένειας $C(X)$ είναι ομοιομορφισμός.Επίσης ο $Y = \prod_{f \in C(X)} cl(f(X))$ είναι συμπαγής και Hausdorff.Άρα λοιπόν ο χώρος $cl_Y(e(x))$ με την σχετική τοπολογία,είναι συμπαγοποίηση του X.

Ορισμός 3.8
Έστω X ένας τελείως κανονικός και Hausdorff τοπολογικός χώρος.Η συμπαγοποίηση Stone-Cech είναι ο χώρος $\beta(X) = cl_Y(e(X))$,όπου $e : X \to \prod_{f \in C(X)} cl(f(X)) = Y$ είναι η συνάρτηση εκτίμησης $e(x) = (f(x))_{f \in C(X)}$.

Θεώρημα 3.9
Έστω X ένας τελείος κανονικός χώρος Hausdorff και $\beta(X)$ η Stone-Cech συμπαγοποίηση του. Τότε κάθε συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο X επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μια συνεχή συνάρτηση στο $\beta(X)$.

Απόδειξη
Έστω e η συνάρτηση εκτίμησης ως προς την οικογένεια $C(X)$,δηλαδή $e : X \to \prod_{f \in C(X)} cl(f(X)) = Y$.Με $\pi_f : Y \to f(X)$ συμβολίζουμε την προβολή κατά την f συντεταγμένη,για $f \in C(X)$.Τότε η συνάρτηση $\pi_f|\beta(X)$ είναι συνεχής και $\pi_f(e(x)) = f(x)$ για $x \in X$,δηλαδή επεκτείνει συνεχώς την f στο $\beta(X)$.

Θεώρημα 3.10
Έστω X ένας τελείως κανονικός χώρος Hausdorff, Υ συμπαγοποίηση του X,με την ιδιότητα κάθε συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : X \to R$ να επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μια συνεχή συνάρτηση $\overline{f} : Y \to R$, και K ένας συμπαγής χώρος Hausdorff.Τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $g : X \to K$ επεκτείνεται,κατά μοναδικό τρόπο σε μια συνεχή συνάρτηση $\overline{g} : Y \to K$.

Απόδειξη
Έστω $g : X \to K$ συνεχής συνάρτηση.Εφόσον ο K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff,από προηγούμενη πρόταση (1.93) έπεται ότι μπορούμε να υποθέσουμε $K \subseteq [-1,1]^I$ για κάποιο σύνολο δεικτών I.Για κάθε $i \in I$ η συνάρτηση $\pi_i \circ g : X \to [-1,1]$ είναι συνεχής και φραγμένη,και άρα από την υπόθεση για την συμπαγοποίηση Y,υπάρχει $\overline{g_i} : Y \to [-1,1]$ συνεχής επέκταση της $\pi_i \circ g$. Η συνάρτηση $\overline{g} : Y \to K \subseteq [-1,1]^I$,με $\overline{g} = (\overline{g_i})_{i \in I}$ είναι μια συνεχής επέκταση

της g.Η μοναδικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο X είναι πυκνός στην συμπαγοποίηση του Y και από το γεγονός ότι μια συνεχής συνάρτηση από ένα τοπολογικό χώρο X σε ένα Hausdorff χώρο Y καθορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές που παίρνει σε ένα πυκνό υποσύνολο του X.

Θεώρημα 3.11
Έστω X ένας τελείως κανονικός και Hausdorff χώρος.$\beta(X)$ η συμπαγοποίηση Stone-Cech του X και Y μια συμπαγοποίηση του X με την ιδιότητα: κάθε συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : X \to R$ επεκτείνεται συνεχώς σε μια συνεχή συνάρτηση $\overline{f} : Y \to R$. Τότε οι συμπαγοποιήσεις $\beta(X)$ και Y του X είναι ισοδύναμες,δηλαδή υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi : \beta(X) \to Y$ τέτοιος ώστε $\varphi|X$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση του X.

Απόδειξη
Υποθέτουμε ότι $X \subseteq \beta(X)$ και $X \subseteq Y$, και έστω $\tau : X \to Y$ η συνάρτηση $\tau(x) = x$ για $x \in X$. Από την πρόταση 3.9 υπάρχει συνεχής επέκταση $\varphi : \beta(X) \to Y$ της τ.Έστω $\sigma : X \to \beta(X)$ η συνάρτηση $\sigma(x) = x$ για $x \in X$.Από την παραπάνω πρόταση υπάρχει συνεχής επέκταση $\psi : Y \to \beta(X)$ της σ.Είναι προφανές ότι $(\psi \circ \varphi)(x) = x$ για κάθε $x \in X$ και άρα $\psi \circ \varphi = id_{\beta(X)}$,από οπου έπεται ότι η φ είναι 1-1. Επίσης επειδή $\varphi \circ \psi(x) = x$ για $x \in X$ έχουμε ότι $\varphi \circ \psi(x) = id_Y$,από το οποίο έπεται ότι η φ είναι επί.Συνεπώς η $\varphi : \beta(X) \to Y$ είναι 1-1,επί και συνεχής συνάρτηση,άρα είναι ομοιομορφισμός (πρόταση 1.86).Επί πλέον είναι σαφές ότι $\varphi(x) = x$ για κάθε $x \in X$.Αρα οι συμπαγοποιήσεις $\beta(X)$ και Y του X είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 3.12
Οπως είδαμε παραπάνω,το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ είναι μια συμπαγοποίηση του ανοικτού $(0, 1)$ η οποία όμως δεν είναι ισοδύναμη με την Stone-Cech συμπαγοποίηση του. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι υπάρχουν συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις $f : (0, 1) \to R$ που δεν επεκτείνονται συνεχώς στο $[0, 1]$.Τέτοια συνάρτηση είναι για παράδειγμα η $f(t) = sin(\frac{1}{t})$.

4 Θεώρημα Kelley

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ότι αν δεχτούμε αξιωματικά το θεώρημα του Tychonoff τότε μπορούμε να αποδείξουμε το αξίωμα της επιλογής.Επομένως η πρόταση Tychonoff είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της επιλογής δεδομένων των υπολοίπων αξιωμάτων της θεωριας συνόλων.

Θεώρημα 4.1 Kelley

Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μια μη κενή οικογένεια,μη κενών συνόλων. Τότε αν ισχύει το θεώρημα Tychonoff έπεται ότι $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$,δηλαδή θα ισχύει το αξίωμα της επιλογής (το ότι το καρτεσιανό γινόμενο είναι μη κενό,είναι μια ισοδύναμη εκδοχή του αξιώματος της επιλογής).

Απόδειξη

Κατ αρχήν,μπορεί να αποδειχθεί στην συνολοθεωρία ότι υπάρχει $a \notin \cup_{i\in I} X_i$. Έπειτα ορίζουμε $Y_i = X_i \cup \{a\}$ για κάθε $i \in I$ και $T_i = \{Y_i \setminus F : F \subseteq Y_i, card(F) < \infty\} \cup \{\emptyset, \{a\}\}$.Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η T_i είναι τοπολογία του Y_i για κάθε $i \in I$.

1)Το κενό σύνολο ανήκει από τον ορισμό στην T_i και $Y_i \in T_i$ επειδή $Y_i = Y_i \setminus \emptyset$ και το $\emptyset$ είναι πεπερασμένο.

2)Έστω $\{V_j\}_{j\in J}$ οικογένεια στοιχείων της T_i. Τότε τα στοιχεία V_j είτε θα είναι σύνολα της μορφής $Y_i \setminus F_j$ όπου F_j πεπερασμένο υποσύνολο του Y_i,είτε θα είναι ίσα με το κενό σύνολο ,είτε θα είναι ίσα με το μονοσύνολο $\{a\}$.Το κενό σύνολο φυσικά δεν συνεισφέρει στην ένωση,οπότε στην γενική περίπτωση που για κάποιο $j_0 \in J$ είναι $V_{j_0} = \{a\}$ θα έχουμε: $\cup_{j\in J} V_j = \cup_{j\neq j_0}(Y_i \setminus F_j) \cup \{a\} = (Y_i \setminus \cap_{j\neq j_0} F_j) \cup \{a\} = Y_i \setminus \cap_{j\neq j_0}(F_j \setminus \{a\})$ όπου η τομή $\cap_{j\neq j_0}(F_j \setminus \{a\})$ είναι πεπερασμένη ως τομή πεπερασμένων συνόλων.Άρα έχουμε ότι η ένωση $\cup_{j\in J} V_j \in T_i$,επομένως η οικογένεια T_i είναι κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις.

3)Έστω ότι V_1, V_2 ανοικτά σύνολα στην T_i.Τότε τα σύνολα αυτά θα έχουν μια από τις μορφές που περιγράψαμε στα παραπάνω.

ι)Αν κάποιο από τα δύο είναι το κενό τότε $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,το οποίο ανήκει στην T_i.

ιι)Αν $V_1, V_2 \neq \{a\}$ και μη κενά τότε $V_1 \cap V_2 = (Y_i \setminus F_1) \cap (Y_i \setminus F_2) = Y_i \setminus (F_1 \cup F_2)$ όπου το $F_1 \cup F_2$ είναι πεπερασμένο ως πεπερασμένη ένωση πεπερασμένων συνόλων.Αρα η τομή $V_1 \cap V_2$ ανήκει στην T_i.

iii)Τέλος αν και τα δυο είναι μη κενά και κάποιο από αυτά,έστω το V_2,ισούται με το μονοσύνολο $\{a\}$ θα έχουμε $V_1 \cap V_2 = (Y_i \setminus F_1) \cap \{a\}$.Αν $a \in (Y_i \setminus F_i)$ τότε $V_1 \cap V_2 = \{a\}$ που ανήκει στην T_i,αλλιώς η τομή θα ισούται με το κενό,που ανήκει στην T_i.Άρα η T_i είναι κλειστή στην πεπερασμένη τομή.

Από τα παραπάνω απόδείξαμε ότι η οικογένεια T_i είναι τοπολογία στο Y_i για κάθε $i \in I$.Μια χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι το X_i είναι κλειστό αφού ισούται

με το συμπλήρωμα $Y_i \setminus \{a\}$ και $\{\alpha\}$ ανοικτό στην T_i.
Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι ο τοπολογικός χώρος (Υ_i, T_i) είναι συμπαγής.Έστω λοιπόν $\{V_j\}_{j\in J}$ ανοικτό κάλυμμα του Y_i χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
1)$V_j \neq \{a\}$ για κάθε $j \in J$.Τότε έχουμε ότι $Y_i = \cup_{j\in J}(Y_i \setminus F_j)$.Από υπόθεση έχουμε ότι για οποιαδήποτε $j_1, ..., j_n \in J$ ισχύει $\cup_{k=1}^{n}(Y_i \setminus F_{j_k}) \subset Y_i$ (γνήσιο δηλαδή υποσύνολο).Από αυτό προκύπτει από κανόνα De Morgan ότι η τομή $\cap_{k=1}^{n}(F_{j_k})$ είναι μη κενή και επειδή τα $F_{j_1}, ..., F_{j_n}$ είναι πεπερασμένα και η τομή τους θα είναι πεπερασμένη,έστω ότι θα ισούται με $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$.Επειδή $Y_i = \cup_{j\in J}(Y_i \setminus F_j)$,για κάθε $x_l \in \cap_{k=1}^{n}F_{j_k}$ υπάρχει $j_{n+l} \in J$ τέτοιο ώστε $x_l \in (Y_i \setminus F_{j_{n+l}}) \Leftrightarrow x_l \notin F_{j_{n+l}}$.Έστω $L = \{j_1, ..., j_n, j_{n+1}, ..., j_{n+m}\}$.Τότε $\cap_{j\in L}F_j = \emptyset$ το οποίο συνεπάγεται $(Y_i \setminus \cap_{j\in L}F_j) = Y_i$,από το οποίο παίρνουμε τελικά ότι $\cup_{j\in L}(Y_i \setminus F_j) = Y_i$,βρήκαμε επομένως ένα πεπερασμενο υποκάλυμμα του $\{V_j\}_{j\in J}$ το οποίο είναι άτοπο.
2)Εστω τώρα ότι $V_{j_0} = \{a\}$ για κάποιον δείκτη $j_0 \in J$. Τότε θα έχουμε ότι: $Y_i = (\cup_{j\neq j_0}(Y_i \setminus F_j)) \cup \{a\}$.Όπως και στην πρώτη περίπτωση για οποιαδήποτε $j_1, ..., j_n \in J$ θα έχουμε $(\cap_{k=1}^{n}F_{j_k}) \cap (Y_i \setminus \{a\}) \neq \emptyset$,από το οποίο παίρνουμε ότι: $(\cap_{k=1}^{n}F_{j_k}) \cap X_i \neq \emptyset$.Επειδή $F_j \cap X_i = F_j \setminus \{a\}$ για κάθε $j \in J$ έπεται ότι $\cap_{k=1}^{n}(F_{j_k} \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.Τελικά όπως και στην πρώτη περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο αποδεικνύωντας ότι το $\{V_j\}_{j\in J}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι Y_i είναι συμπαγής χώρος για κάθε $i \in I$.Απο το θεώρημα του Tychonoff τώρα προκύπτει ότι το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} Y_i$ είναι συμπαγές. Παρατηρούμε τώρα ότι το $\pi_i^{-1}(X_i)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} Y_i$ για κάθε $i \in I$.Επίσης αν $F \subseteq I$ πεπερασμένο τότε η τομή $\cap_{i\in F}\pi_i^{-1}(X_i)$ είναι μη κενή.Πράγματι αφού το X_i είναι μη κενό επιλέγουμε $x_i \in X_i$ για $i \in F$,(το F είναι πεπερασμένο!),και $x_i = a$ για $i \in I \setminus F$.Θέτουμε $x = (x_i)i \in I$ και παρατηρούμε ότι $\pi_i(x) = x_i \in X_i$ οταν το i ανήκει στο F.Αρα $x \in \pi_i^{-1}(X_i)$,για κάθε $i \in F$,δηλαδή $x \in \cap_{i\in F}\pi_i^{-1}(X_i)$.Επομένως η οικογένεια $\{\pi_i^{-1}(X_i)\}_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.Από γνωστό τότε θεώρημα για τους συμπαγείς τοπολογικούς χώρους και επειδή ο $\prod Y_i$ είναι συμπαγής συνεπάγεται ότι $\cap_{i\in I}\pi_i^{-1}(X_i) \neq \emptyset$.Όμως έχουμε ότι η τομή της παραπάνω οικογένειας ισούται με τον χώρο $\prod X_i$,άρα αυτός ο χώρος είναι μη κενός και το θεώρημα αποδείχθηκε!

Σχολιο 4.2
Αποδείξαμε λοιπόν ότι το θεώρημα Tychonoff και το αξίωμα της επιλογής είναι ισοδύναμα,δεδομένων των υπολοίπων αξιωμάτων της συνολοθεωρίας.Υπάρχουν όμως αρκετές άλλες προτάσεις στα μαθηματικά,που είναι ισοδύναμες με το αξίωμα της επιλογής.Το λήμμα του Zorn για παράδειγμα,που το χρησιμοποιήσαμε σε

παραπάνω αποδείξεις.Ενα άλλο πολύ γνωστό παράδειγμα είναι η λεγόμενη αρχή της καλής διάταξης,ότι σε κάθε σύνολο μπορεί να οριστεί μια σχέση ολικής διάταξης τέτοια ώστε κάθε υποσύνολο του να έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς αυτή την διάταξη.Επίσης το ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει μια αλγεβρική (Hamel) βάση είναι μια άλλη ισοδύναμη πρόταση.Αυτές είναι μερικές μόνο από τις ισοδύναμες με το αξίωμα της επιλογής προτάσεις.Επίσης πολλά σημαντικά θεωρήματα της ανάλυσης,όπως για παράδειγμα το θεώρημα Hahn- Banach στη συναρτησιακή ανάλυση η το θεώρημα Vitali της ύπαρξης μη-Lebesque μετρήσιμων υποσυνόλων του R στη θεωρία μέτρου,απαιτούν για την απόδειξη τους το αξίωμα της επιλογής (η κάποια ισοδύναμη εκδοχή του).

5 Λήμμα Uryshonn

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε ένα ακόμα πολυ γνωστό θεώρημα της γενικής τοπολογίας,το λήμμα Uryshonn.Με τη βοήθεια αυτής της πρότασης αποδεικνύουμε στην τελευταια ενότητα αυτης της εργασίας το θεώρημα επέκτασης του Tietze για φυσιολογικούς χώρους!

Πριν δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος,θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση που θα μας χρειαστεί.

Λήμμα 5.1
Έστω X τοπολογικός χώρος,D πυκνό υποσύνολο του $[0,\infty)$ και$\{V_d : d \in D\}$ μια οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X τέτοια ώστε:
1)$X = \cup\{V_d : d \in D\}$ και
2)αν $d_1, d_2 \in D, d_1 < d_2$,τότε $\overline{V_{d_1}} \subseteq V_{d_2}$
Θέτουμε $f(x) = inf\{d \in D : x \in V_d\}$ για κάθε $x \in X$,τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη
Επειδή $X = \cup\{V_d : d \in D\}$ έπεται ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \in V_d$.Άρα το σύνολο $\{d \in D : x \in V_d\}$ είναι μη κενό,και επειδή είναι και κάτω φραγμένο από το 0,υπάρχει το $infimum$ του,άρα η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη.Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f^{-1} μεταφέρει την υποβάση του R $\{(-\infty, r), (s, \infty)\}$ σε ανοικτά υποσύνολα του X,το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής.

Ισχυρισμός 1. $f^{-1}((-\infty, r)) = \cup\{V_d : d \in D, d < r\}$
Έστω $x \in f^{-1}(-\infty, r)$,τότε $0 \leq f(x) < r$,άρα από τον ορισμό της f υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq d < r$ και $x \in V_d$.Αντίστροφα,έστω $x \in V_d$ για κάποιο $d \in D$ με $d < r$.Τότε $f(x) \leq d < r$ και άρα $x \in f^{-1}((-\infty, r))$.

Ισχυρισμός 2.$f^{-1}((-\infty, r]) = \cap\{\overline{V_d} : d \in D, d > r\}$.
Έστω $x \in f^{-1}((-\infty, r])$.Τότε $0 \leq f(x) \leq r$.Για κάθε $d \in D$,με $d > r$,έχουμε ότι $f(x) < d$,άρα από τον ορισμό της f υπάρχει $d' \in D$ με $f(x) \leq d' < d$ και $x \in V_{d'}$.Επομένως $x \in V_{d'} \subseteq \overline{V_{d'}} \subseteq V_d$.Αντίστροφα,έστω $x \in \overline{V_d}$ για κάθε $d > r$.Εφ'όσον $x \in \overline{V_d}$ και $\overline{V_d} \subseteq V_{d'}$ για κάθε $d < d'$ έχουμε από τον ορισμό της f ότι $f(x) \leq d'$. Αφού το D είναι πυκνό στο $[0,\infty)$ έχουμε ότι $f(x) \leq d$ για κάθε $d > r$ και άρα $f(x) \leq r$.
Είναι άμεσο τώρα από τον ισχυρισμό 2 ότι το σύνολο $f^{-1}((s,\infty))$ είναι ανοικτό αφού είναι ίσο με το συμπλήρωμα του κλειστού συνόλου $f^{-1}((-\infty, s])$.

Λήμμα 5.2 Uryshonn
Έστω X φυσιολογικός χώρος A, B κλειστά σύνολα,ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X.Τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$.

Απόδειξη
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι τα σύνολα A, B είναι μη κενά.Έστω $D = \{k/2^n : 0 \leq k \leq 2^n, n = 0, 1, 2, ...\}$το σύνολο των δυαδικών αριθμών στο διάστημα $[0,1]$.Σε κάθε $r \in D$ αντιστοιχούμε ένα ανοικτό σύνολο $U(r)$ στο X τέτοιο ώστε:
ι)$A \subseteq U(r)$ και $B \cap U(r) = \emptyset$ για κάθε $r \in D$ και
ιι)$\overline{U(r)} \subseteq U(r')$ για κάθε $r, r' \in D$ με $r < r'$.
Ο ορισμός των συνόλων $U(r)$ θα γίνει με επαγωγή στον εκθέτη n των δυαδικών αριθμών.Ορίζουμε πρώτα $U(1) = X \setminus B$.Από γνωστή πρόταση για τους φυσιολογικούς χώρους,θα υπάρχει ανοικτό σύνολο $U(0)$ τέτοιο ώστε: $A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$. Υποθέτουμε ότι $n \geq 0$ και ότι έχουμε ορίσει τα σύνολα $U(k/2^m)$ για $m = 0, 1, 2, ...n-1$ και $0 \leq k \leq 2^m$ και θα ορίσουμε τα σύνολα $U(k/2^n)$ για $0 \leq k \leq 2^n$.Αρκεί να ορίσουμε τα σύνολα $U(k/2^n)$ για $0 \leq k \leq 2^n$ με k περιττό,εφ όσον αν $k = 2l$ τότε το $U(k/2^n) = U(2l/2^n) = U(l/2^{n-1})$ έχει ήδη οριστεί από την επαγωγική υπόθεση.Αν $0 \leq k \leq 2^n$, k περιττός,έχουμε από την επαγωγική υπόθεση ότι $\overline{U((k-1)/2^n)} \subseteq U((k+1)/2^n)$.Ξανά από γνωστή πρόταση για φυσιολογικούς χώρους,υπάρξει ανοικτό σύνολο $U(k/2^n)$ τέτοιο ώστε: $\overline{U((k-1)/2^n)} \subseteq U(k/2^n) \subseteq \overline{U(k/2^n)} \subseteq U((k+1)/2^n)$.Ο επαγωγικός ορισμός των $U(k/2^n), 0 \leq k \leq 2^n, n = 0, 1, 2...$ είναι τώρα ολοκληρωμένος.Τέλος θέτουμε $U_r = X$ για κάθε $r \in R, r > 1$. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $D \cup (1, \infty)$ είναι πυκνό στο $[0, \infty)$.Για να το αποδείξουμε αυτό θα δείξουμε ότι για δυο οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς a, b,με $a < b$,υπάρχει μεταξύ τους ένας δυαδικός αριθμός.Κατ αρχήν,επιλέγω ένα $n_0 \in N$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^{n_0}} < b - a$.Έπειτα παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{\frac{k}{2^{n_0}} : k \in N\}$ δεν είναι άνω φραγμένο,και από αυτό το γεγονός συμπαιρένουμε ότι το σύνολο $\{k : \frac{k}{2^{n_0}} > a\}$ είναι μη κενό.Το σύνολο αυτό,είναι ένα μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών, επομένος έχει ελάχιστο στοιχείο.Θέτουμε $k_0 = min\{k : \frac{k}{2^{n_0}} > a\}$.Προφανώς ισχύει ότι $\frac{k_0}{2^{n_0}} > a$ και ισχυριζόμαστε επίσης ότι $\frac{k_0}{2^{n_0}} < b$,το οποίο ολοκληρώνει αυτό που θέλαμε να δείξουμε.Πράγματι,προς απαγωγή σε άτοπο,έστω $\frac{k_0}{2^{n_0}} \geq b$.Επίσης έχουμε ότι $-\frac{1}{2^{n_0}} > -(b-a)$.Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τις δυο προηγούμενες ανισότητες προκύπτει ότι $\frac{k_0-1}{2^{n_0}} > a$ το οποίο είναι άτοπο. Επίσης η οικογένεια $\{U(r) : r \in D \cup (1, \infty)\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος και επομένως η συνάρτηση $f : X \to R$ με $f(x) = inf\{r \in D : x \in U(r)\}$ είναι καλά ορισμένη,συνεχής και $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$.Επίσης αν

$x \in B$ τότε $f(x) = 1$,εφ όσον $x \notin U(r)$ για κάθε $r < 1$,και αν $x \in A$ τότε $f(x) = 0$,αφού $x \in U(0)$.

Παρατήρηση 5.3

Μια άμεση γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος είναι η ακόλουθη:Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι φυσιολογικός και A, B κλειστά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολά του και $a, b \in R$ τότε,θέτοντας I για το κλειστό διάστημα με άκρα τα a, b,υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $g : X \to I$ τέτοια ώστε $g(x) = a$ για κάθε $x \in A$ και $g(x) = b$ για κάθε $x \in B$.Πράγματι,αν f είναι η συνάρτηση που προκύπτει από το λήμμα του Uryshonn,τότε εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση $g = (b - a)f + a$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

6 Θεώρημα επέκτασης του Tietze

Σε αυτήν την τελυταία ενότητα αυτών των σημειώσεων θα δούμε ένα ακόμα πολύ γνωστό θεώρημα της γενικής τοπολογίας,το θεώρημα επέκτασης του Tietze.Το θεώρημα αυτό αναφέρεται στην δυνατότητα συνεχούς επέκτασης μιας συνεχούς πραγματικής συνάρτησης από ένα κλειστό υποσύνολο ενός φυσιολογικού τοπολογικού χώρου X σε ολόκληρο τον χώρο X.

Θεώρημα 6.1 επέκτασης του Tietze
Έστω X φυσιολογικός τοπολογικός χώρος,έστω επίσης F κλειστός υπόχωρος του και $f : F \to R$ συνεχής πραγματική συνάρτηση.Τότε υπάρχει συνεχής επέκταση της $g : X \to R$.Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη τότε για αυτήν την επέκταση θα έχουμε $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα αποδείξουμε μια βοηθητική πρόταση που θα μας χρειαστεί.

Λήμμα
Έστω X φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και F κλειστός υπόχωρος του.Έστω επίσης συνεχής συνάρτηση $f : F \to R$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq c$ για κάθε $x \in F$.Τότε υπάρχει $g : X \to R$,συνεχής,έτσι ώστε να ισχύουν:
1)$|g(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot c$,για κάθε $x \in X$
2)$|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot c$,για κάθε $x \in F$.

Απόδειξη
Ορίζουμε τα εξής σύνολα:
$A_- = f^{-1}([-c, -\frac{1}{3} \cdot c])$
$A_+ = f^{-1}([\frac{1}{3} \cdot c, c])$
Τα σύνολα A_-, A_+ είναι ξένα μεταξύ τους και κλειστά στο F,επειδή όμως το F είναι ένα κλειστό σύνολο,έπεται ότι είναι κλειστά και στο X.Επειδή τώρα ο X είναι φυσιολογικός,από το λήμμα του Uryshonn έπεται ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to [-\frac{1}{3} \cdot c, \frac{1}{3} \cdot c]$ τέτοια ώστε $g|A_- = -\frac{1}{3} \cdot c$ και $g|A_+ = \frac{1}{3} \cdot c$. Είμαστε εντάξει λοιπόν με την πρώτη συνθήκη!
Έστω τώρα $x \in F$. Θα θεωρήσουμε περιπτώσεις.Αν $x \in A_-$ τότε $-c \leq f(x) \leq -\frac{1}{3} \cdot c$ και $g(x) = -\frac{1}{3} \cdot c$,οπότε θα έχουμε $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot c$.Αν $x \in A_+$,τότε $\frac{1}{3} \cdot c \leq f(x) \leq c$ και $g(x) = \frac{1}{3} \cdot c$,οπότε θα έχουμε $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot c$.Τέλος,αν $x \in F \setminus (A_- \cup A_+)$ τότε θα ισχύει $-\frac{1}{3} \cdot c < f(x) < \frac{1}{3} \cdot c$ και επομένως πάλι θα έχουμε $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot c$.

Απόδειξη θεωρήματος

1)Θα αποδείξουμε πρώτα το θεώρημα στην περίπτωση που $|f(x)| \leq 1$ και έπειτα με τη βοήθεια αυτού του αποτελέσματος θα αποδείξουμε την γενική περίπτωση.Έστω λοιπόν $|f(x)| \leq 1$,το οποίο συνεπάγεται ότι $f : F \to [-1,1]$.Έστω $f_0 = f$.Τότε από το προηγούμενο λήμμα,υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g_0 : X \to [-1,1]$ τέτοια ώστε $|g_0(x)| \leq \frac{1}{3}, x \in X$ και $|f_0(x) - g_0(x)| \leq \frac{2}{3}, x \in F$.Θέτουμε έπειτα $f_1 = (f_0 - g_0)|F$.Τότε θα ισχύει $|f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$,και ξανά από το προηγούμενο λήμμα,υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g_1 : X \to [-1,1]$ τέτοια ώστε $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ και $|f_1(x) - g_1(x)| \leq (\frac{2}{3})^2, x \in F$. Συνεχίζοντας λοιπόν με τον ίδιο τρόπο,ορίζουμε επαγωγικά δυο ακολουθίες συνεχών συναρτήσεων, $g_n : X \to [-1,1]$, και $f_n : F \to [-1,1]$, τέτοιες ώστε να ισχύει,$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n$ για κάθε $x \in X$,$|f_n| \leq (\frac{2}{3})^n$ για κάθε $x \in F$,και $f_n = f_0 - (g_0 + ... + g_{n-1})|F$ για κάθε $n = 0, 1, ...$Από το κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.Πράγματι,ισχύει ότι $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n$ και έχουμε ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n < \infty$(η σειρά είναι γεωμετρική,με λόγο αυστηρά μικρότερο κατ απόλυτη τιμή της μονάδας,πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά,επομένως όπως γνωρίζουμε από την ανάλυση 1,συγκλίνει!).Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $g := \sum_{n=0}^{+\infty} g_n : X \to [-1.1]$,η οποία είναι συνεχής συνάρτηση,ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων.Μένει τώρα να δείξουμε ότι η g ταυτίζεται με την f όταν περιοριστεί στο F.Για κάθε $x \in F$ ισχύει ότι $f_0(x) - f_n(x) = g_0(x) + ... + g_n(x)$. Επειδή τώρα έχουμε ότι $|f_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ για κάθε $x \in F$,κρατώντας το x σταθερό και στέλνοντας το n στο άπειρο έπεται ότι,για $x \in F$,$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) = f_0(x) = f(x)$,άρα $g|F = f$ και η περίπτωση 1) αποδείχτηκε!

2)Στη γενική τώρα περίπτωση,έστω $f : F \to R$ μια συνεχής συνάρτηση.Γνωρίζουμε ότι το R είναι ομοιομορφικό με το $(-1,1)$, για παράδειγμα με την απεικόνιση,$\tau : R \to (-1,1)$ με $\tau(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Έστω λοιπόν $\tau : R \to (-1,1)$ ομοιομορφισμός.Από την περίπτωση 1) ,για την συνεχή συνάρτηση $\tau \circ f : F \to [-1,1]$,υπάρχει συνεχής $\psi : X \to [-1,1]$ με $\psi|F = \tau \circ f$.Έστω $H = \psi^{-1}(\{-1\}) \cup \psi^{-1}(\{1\})$.Το σύνολο H είναι κλειστό στο X αφού η ψ είναι συνεχής και $H \cap F = \emptyset$,εφ όσον $\psi(F) = \tau \circ f(F) \subseteq (-1,1)$.Από το λήμμα του Uryshonn υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $u : X \to [0,1]$ με $u(x) = 0$ για κάθε $x \in H$ και $u(x) = 1$ για κάθε $x \in F$.Θέτουμε $h = u \cdot \psi$.Η h είναι συνεχής και ισχύει $h|F = \tau \circ f$.Επίσης $h(x) \in (-1,1)$ αφού $h(x) = 0\psi(x) = 0$ για κάθε $x \in H$ και $|h(x)| = |u(x)\psi(x)| < 1$ για κάθε $x \notin H$.Η συνάρτηση $g = \tau^{-1} \circ h : X \to R$ είναι συνεχής,ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και $g|F = f$,επειδή,αν $x \in F$ τότε $g(x) = \tau^{-1}(h(x)) = \tau^{-1}(\psi(\chi)) = \tau^{-1}(\tau(f(x))) = f(x)$. Με αυτό τελειώνει και η γενική περίπτωση 2)!Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη και η g η συνεχής επέκταση της που προκύπτει από το 2),τότε η συνάρτηση $h : X \to R$ με $h = max\{min\{g, \|f\|\}, -\|f\|\}$ είναι μια συνεχής επέκταση της f τέτοια ώστε $\|f\| = \|h\|$.Πράγματι,έστω $x \in F$. Τότε $h(x) = max\{min\{g(x), \|f\|\}, -\|f\|\} = max\{g(x), -\|f\|\} = g(x) = f(x)$,άρα η h είναι επέκταση της f.Έστω τώρα $x \in X \setminus F$.Τότε $|h(x)| \leq \|f\|$.Επομένως ισχύει ότι $\|h\| = \|f\|$.

Παρατήρηση 6.2:Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι αν ο τοπολογικός χώρος X ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος του Tietze τότε είναι φυσιολογικός,δηλαδή ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος.Πράγματι αν A, B είναι ξένα μεταξύ τους ,κλειστά υποσύνολα του X και θέσουμε $f : A \cup B \to [0, 1]$ με $f(x)$=0 για $x \in A$ και $f(x) = 1$ για $x \in B$,τότε η f είναι συνεχής (από θεώρημα 1.49), επομένως από την υπόθεση υπάρχει $g : X \to [0, 1]$ συνεχής επέκταση της f.Τότε $A \subseteq g^{-1}((-\infty, 1/2))$, $B \subseteq g^{-1}((1/2, \infty))$.όπου η αντίστροφες εικόνες είναι ξένα μεταξύ τους ανοικτά σύνολα,άρα ο X είναι φυσιολογικός!

7 Βιβλιογραφία

1)Σ.Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης,Ν.Καλαμίδας,Β.Φαρμάκη Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση,Εκδόσεις Συμμετρία.

2)Glen Bredon,Topology and Geometry,Springer

3)Θέμης Μήτσης,Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας

4)Ηλεκτρονικές σημειώσεις του μαθήματος,Γενική Τοπολογία και Εφαρμογές.ΣΕΜΦΕ,ΕΜΠ.

5)Alex Kruckman,Notes on Ultrafilters