



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Hallén με τον Προσεγγιστικό Πυρήνα σε Αγώγιμο Περιβάλλον

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Χρήστος Μυστιλίδης

Επιβλέπων: Γιώργος Φικιώρης Παναγιώτης Παπακανέλλος
Καθηγητής ΕΜΠ Επίκουρος Καθηγητής Σχολή Ικάρων

Αθήνα, Δεκέμβριος 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Hallén με τον Προσεγγιστικό Πυρήνα σε Αγώγιμο Περιβάλλον

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Χρήστος Μυστιλίδης

Επιβλέπων: Γιώργος Φικιώρης Παναγιώτης Παπακανέλλος
Καθηγητής ΕΜΠ Επίκουρος Καθηγητής Σχολή Ικάρων

Εγκρίθηκε από την κάτωθι τριμελή επιτροπή τη 17^η Δεκεμβρίου 2019.

Γιώργος Φικιώρης
Καθηγητής

Παναγιώτης Παπακανέλλος
Επίκουρος Καθηγητής

Ηλίας Γλύτσας
Καθηγητής

Χρήστος Μυστιλίδης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Copyright © Χρήστος Μυστιλίδης, 2019
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Από τη διατύπωσή της τη δεκαετία του '30, η ολοκληρωτική εξίσωση, που σήμερα ονομάζουμε εξίσωση Hallén, έχει αποδειχτεί μια από τις πιο δημοφιλείς εξισώσεις του Εφαρμοσμένου Ηλεκτρομαγνητισμού και της Θεωρίας Κεραίων ειδικότερα. Μεγάλος όγκος εργασιών και βιβλίων την αναλύουν ή επιχειρούν να τη διδάξουν. Από τις πρώτες προσπάθειες εύρεσης προσεγγιστικών λύσεων από τον R. W. P. King έως πρόσφατες μεθόδους βελτιστοποίησης των αριθμητικών τεχνικών έχει απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα. Η διαχρονικότητά της φάνεται να ξεπερνά την εξέλιξη της τεχνολογίας: μια εξίσωση που εφαρμόζεται κλασικά σε ευθείες κεραίες σύρματος, αλλά μπορεί να προεκταθεί και σε κεκαμμένες κεραίες ή βροχοκεραίες, αξιοποιείται εκτενώς και στο δυναμικά αναπτυσσόμενο πεδίο των νανοκεραίων άνθρακα, με ενδιαφέρουσες μελέτες να γίνονται πρόσφατα. Η παρούσα εργασία στοχεύει να είναι μια χρήσιμη προσθήκη στις γνώσεις μας γύρω από αυτήν την εξίσωση.

Είναι ενδιαφέρον ότι η πιο δημοφιλής μορφή της εξίσωσης Hallén, η λεγόμενη προσεγγιστική ή με προσεγγιστικό πυρήνα, η οποία χρησιμοποιείται από τα περισσότερα λογισμικά ανάλυσης κεραίων σύρματος, είναι μια μη επιλύσιμη εξίσωση. Η αριθμητική επίλυση μιας μη επιλύσιμης εξίσωσης είναι φυσικά ένα πολύ γοητευτικό αντικείμενο μελέτης, καθώς είναι εξαιρετικά δύσκολο να μπορεί κανείς να προβλέψει εκ των προτέρων τη συμπεριφορά της λύσης. Ακόμη και αυτό αν είναι δυνατόν, η λύση αυτή έχει νόημα; Στην περίπτωση της εξίσωσης Hallén οι αριθμητικές λύσεις, όταν κανείς ακολουθεί μια μέθοδο Galerkin, είναι ισχυρές, ταχείες και αφύσικες ταλαντώσεις στην τροφοδοσία και ασθενέστερες στα άκρα της κεραίας. Μετά από αρκετές ανεπιτυχείς προσπάθειες, οι Φικιώρης και Wu στα 2001 απέδωσαν τη συμπεριφορά αυτήν στη μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης και περιέγραψαν ασυμπτωτικά τις κεντρικές ταλαντώσεις για μια ευθεία κεραία σύρματος εμβαπτισμένη σε κενό.

Στην παρούσα εργασία επεκτείνουμε τα συμπεράσματα των Φικιώρη και Wu στην περίπτωση που η κεραία βρίσκεται σε χώρο με αγωγιμότητα. Πέρα από το θεωρητικό ενδιαφέρον, η επιλογή μέσου με αγωγιμότητα (με απώλειες) είναι μια εξαιρετικά ρεαλιστική επιλογή: τα περισσότερα υλικά στις μικροκυματικές συχνότητες εμφανίζουν μικρή, αλλά όχι αμελητέα αγωγιμότητα. Ακολουθούμε την ίδια ασυμπτωτική και αριθμητική ανάλυση με τους Φικιώρη και Wu, αλλά καταλήγουμε σε νέα φαινόμενα, τα οποία μελετώνται ενδελεχώς, ιδιαίτερα η εμφάνιση ταλαντώσεων στο πραγματικό μέρος, αποτέλεσμα της λογαριθμικής ιδιομορφίας που εμφανίζεται εκεί και που δεν έχει μελετηθεί στη βιβλιογραφία, ως τώρα.

Αν με έναν απλό υπολογιστικά τρόπο μπορούμε να απαλείψουμε τις ανεπιθύμητες ταλαντώσεις, τότε ο προσεγγιστικός πυρήνας, σημαντικά απλούστερος από τον ακριβή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί αξιόπιστα για την ανάλυση κεραίων σύρματος. Η μέθοδος του ενεργού ρεύματος, αρχικά μια έννοια της Μεθόδου των Βοηθητικών Πηγών, παρουσιάστηκε στα 2011 με εξαιρετικά αποτελέσματα για την περίπτωση κεραίων-σύρματος σε κενό. Εδώ αποδεικνύουμε θεωρητικά τις ευεργετικές ιδιότητες του ενεργού ρεύματος, δηλαδή την εξομάλυνση των ταλαντώσεων και την καλή προσέγγιση του ακριβούς ρεύματος και επιδεικνύουμε τη συμπεριφορά αυτή σε ρεαλιστικές κεραίες μέσα σε υλικό με απώλειες, με αριθμητικά πειράματα.

Λέξεις-κλειδιά: Εξίσωση Hallén, Προσεγγιστικός Πυρήνας, Κεραίες Σύρματος, Μέθοδος Galerkin, Ενεργό Ρεύμα, Περιβάλλοντα με Απώλειες.

Abstract

Since its definition during the thirties, the integral equation now known as Hallén's equation has proved itself one of the most popular equations of Applied Electromagnetics and especially of Antenna Theory. A vast number of publications and books are analysing or teaching it. From the first efforts of approximate solutions made by R. W. P. King to recent optimisation methods of appropriate numerical techniques, Hallén's equation has attracted the interest of the scientific community. Its timelessness and versatility seems to overcome the evolution of technology: an equation, naturally, applied on straight wire-antennas, that can be extended to curved and loop antennas, is currently used in the fastly developing field of carbon nanotubes (CNTs), as it is demonstrated in recent studies.

It is interesting, that the most popular form of Hallén's equation, the so-called approximate Hallén's equation or using the approximate kernel, which is currently used by most antenna analysis software, is a non solvable equation. The numerical solution of a non solvable equation is a most fascinating subject of study, because it is extremely difficult to predict a priori the solution's behaviour. But even this can be achieved, does this solution have any physical meaning? Concerning the Hallén's equation the numerical solutions, result of a Galerkin's method, demonstrate acute, fast and unphysical oscillations at the antenna's feed and weaker oscillations at its ends. After several fruitless efforts, Fikioris and Wu at 2001 attributed this behaviour to the equation's non solvability and described asymptotically the central oscillations for a straight wire-antenna in vacuum.

Aim of the current study is to extend the Fikioris' and Wu's results on the case of an antenna surrounded by a lossy (conducting) medium. Aside from the theoretical interest, this is a very realistic choice: most materials demonstrate small but not negligible conductivity at microwave frequencies. We are following the same asymptotic and numerical method as Fikioris and Wu did, but, naturally we are arriving at different phenomena, which are studied rigorously, especially oscillations near the centre of the real part of the current distribution, due to the logarithmic singularity there and that have not been studied yet.

If we are able to eliminate the adverse oscillations with a method of low computational complexity, then the approximate kernel, much simpler than the exact one, can be used much more reliably for wire-antenna analysis. The effective current method, initially a notion of Method of Auxiliary Sources, was presented at 2011 with exceptional success, concerning wire-antennas in vacuum. In this study we are proving theoretically the beneficial properties of the effective current, viz the approximate current smoothing and demonstrate this behaviour in real antennas inside lossy medium, via numerical experiments.

Keywords: Hallén Equation, Wire-Antennas, Approximate Kernel, Galerkin Method, Effective Current, Lossy Media.

Ευχαριστίες

Αγαπώ ιδιαίτερα τις ευχαριστίες στην αρχή των διαφόρων επιστημονικών έργων, διότι επιτρέπουν στον κάθε συγγραφέα να χρησιμοποιήσει μια πιο απολαυστική, αφού συναισθηματική, γραφή από αυτή που μας συνήθισε το υπόλοιπο έργο του. Το να πει κανείς κλισέ του τύπου "διακρίνω τον άνθρωπο" αγγίζουν τη γελοιότητα, αλλά σίγουρα αποτελεί –τις περισσότερες φορές– μια ενδιαφέρουσα ματιά στο τι τελικά είναι αυτός ο άνθρωπος, πέρα από επιστήμονας.

Έτσι, πρέπει πρώτα από όλους να ευχαριστήσω τους γονείς μου, διότι είναι σπουδαίο να είσαι καλός επιστήμονας, αλλά είναι πολύ σπουδαιότερο να είσαι καλός άνθρωπος. Εκείνοι, με τα σωστά και τα λάθη τους, είναι. Ευελπιστώ να είμαι κι εγώ. Δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τους αγαπημένους μου φίλους οι οποίοι έκαναν διασκεδαστικά, συντροφικά, άξια να έχει ζήσει κανείς αυτά τα πέντε (και ως ελπίζουμε όχι έξι) χρόνια περισσότερο από κάθε βαθμό, από κάθε εργασία. Για να μην παραπονεθεί κανένας τους γράφω εδώ αλφαβητικά: Αντώνη, Δήμητρα, Δημήτρη, Κανέλλο, Μάνο, Μαριγώ, Μπέμπα, Νίνα, Φιλαρέτη και Χρήστο είστε όλοι υπέροχοι και σας ευχαριστώ. Από αυτούς που δεν είναι εδώ, ευχαριστώ τη γιαγιά μου, Όλγα, που δεν ήξερε τίποτα από κεραιές και εξισώσεις, αλλά ήξερε πολλά από την πιο απαλή, διακριτική αγάπη.

Στους επιστήμονες τώρα, δε θα μπορούσα να ξεχάσω το Θέμη Μαυρογορδάτο. Οι επιστημονικές του δυνατότητες και το κοντινό της ηλικίας μας με έφεραν πολλές φορές σε δύσκολη θέση, αλλά η τεράστια βοήθεια που μου παρείχε στο δεύτερο μέρος της διπλωματικής και το γεγονός ότι είναι ένας πραγματικά ευχάριστος άνθρωπος με έκαναν να τον εκτιμήσω βαθύτατα. Συν τοις άλλοις, η εργασία του στο εξωτερικό, μου επέτρεψε να αναφέρομαι σε αυτόν ως "ο συνεργάτης από τη Στοκχόλμη" δίνοντας έναν κοσμοπολίτικο αέρα την εργασία μου. Ένα μεγάλο ευχαριστώ στον κύριο Παπακανέλλο, γλυκύτατο όσο και άορατο επιβλέποντα: είχαμε μια εξαιρετική και φιλική συνεργασία μόνο διαδικτυακά ή μέσω τηλεφώνου, αποδεικνύοντας περίτρανα ότι ορισμένες σχέσεις από απόσταση μπορούν να σταθούν. Τον ευχαριστώ πολύ για την πάντα άμεση βοήθεια του (επίσης για την ανακάλυψη της μεθόδου του ενεργού ρεύματος, επέκταση της οποίας αποτελεί το δεύτερο μέρος της διπλωματικής!) και το τεράστιο οπλοστάσιό του από υπέροχες, όσο παλιές εργασίες. Τέλος, ευχαριστώ το Γιώργο Φικιώρη, ο οποίος κατάφερε, μέσα σε αυτό τον ενάμιση χρόνο που είναι επιβλέποντάς μου και στον οποίον ήταν κάθε μέρα δίπλα μου, με θαυμαστή και σπάνια συνέπεια να ενσαρκώσει το πρότυπο του μέντορα, όπως το είχα στο μυαλό μου από τη στιγμή που μπήκα στο πανεπιστήμιο. Το να καταφέρει κανείς να γκρεμίσει το είδωλο ("ο μέντορας") και να τοποθετήσει τον εαυτό του στη θέση αυτή είναι ένας μεγαλειώδης άθλος, ταιριαστός σε λίγους ανθρώπους μέσα σε μία ζωή. Τον ευχαριστώ βαθύτατα.

Ό,τι γνωρίζω για τον Ηλεκτρομαγνητισμό το οφείλω στους Ι. Τσαλαμέγκα, Ι. Ρουμελιώτη και Γ. Φικιώρη.

Περιεχόμενα

1	Θεμελιώδεις Γνώσεις Ηλεκτρομαγνητισμού	10
1	Οι Εξισώσεις του Maxwell	10
2	Συντακτικές Σχέσεις	12
3	Οριακές Συνθήκες	14
4	Οι Εξισώσεις του Maxwell στο Πεδίο της Συχνότητας	15
5	Επίλυση των Εξισώσεων Maxwell και Ηλεκτρομαγνητικά Δυναμικά	17
6	Βιβλιογραφία	22
2	Το Σωληνοειδές Δίπολο και η Εξίσωση Hallén	24
1	Ορίζοντας τη Διάταξη	24
2	Η Εξίσωση Rocklington	25
3	Η Εξίσωση Hallén	31
4	Το Ρεύμα Κοντά στην Πηγή Τροφοδοσίας και στα Άκρα της Κεραίας	32
5	Μοντέλα Τροφοδοσίας	35
6	Αναλυτική Επίλυση της Εξίσωσης Hallén	37
7	Βιβλιογραφία	39
3	Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Hallén	42
1	Ο Προσεγγιστικός Πυρήνας	42
2	Η Αντιμετώπιση των Αφύσιων Ταλαντώσεων από την Επιστημονική Κοινότητα.	45
3	Η μη Επίλυσιμότητα της Προσεγγιστικής Εξίσωσης Hallén	48
4	Οι Εξελίξεις από το 2001 και Έπειτα	50
5	Βιβλιογραφία	52
4	Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Hallén:	
	Η Περίπτωση Αγώγιμου Μέσου	56
1	Η Αριθμητική Μέθοδος στην Πεπερασμένη Κεραία	56
2	Η Αριθμητική Μέθοδος στην Άπειρη Κεραία και Ασυμπτωτική Ανάλυση	59
3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	63
4	Βιβλιογραφία	69
5	Η Μέθοδος του Ενεργού Ρεύματος	71
1	Ο Εκτεταμένος Πυρήνας	71
2	Η Φυσική Σημασία του Ενεργού Ρεύματος	72
3	Η Αριθμητική Μέθοδος στην Πεπερασμένη Κεραία: Ανάλυση για το Ενεργό Ρεύμα	76
4	Η Αριθμητική Μέθοδος στην Άπειρη Κεραία και Ασυμπτωτική Ανάλυση: Η Περίπτωση του Ενεργού Ρεύματος	78
5	Αριθμητικά Αποτελέσματα	82
6	Βιβλιογραφία	85
6	Επίλογος	87
1	Συμπεράσματα	87
2	Μελλοντικές Επεκτάσεις	88

Πίνακας Σχημάτων

2.1	Το πεπερασμένο σωληνοειδές δίπολο.	25
2.2	Εφαρμογή του πρώτου νόμου Kirchhoff στα άκρα του σωληνοειδούς διπόλου. Με συνεχή γραμμή συμβολίζεται το διάνυσμα επιφανειακού ρεύματος στο εσωτερικό τοίχωμα του διπόλου και με διάστικτη το εξωτερικό.	27
2.3	Η γεωμετρία που ορίζει το R	28
3.1	Το πραγματικό και φανταστικό μέρος του ρεύματος επί κεραίας εντός κενού με $h = 0.25\lambda$, $a = 0.007022\lambda$ και $N = 200$, όπως προκύπτει από την επίλυση της ακριβούς εξίσωσης Hallén. Η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης θεωρείται ότι εφαρμόζει μοναδιαίο βαθμωτό δυναμικό (δηλαδή $V = 1$), άρα οι άνωθεν κυματομορφές είναι συνάμα και κυματομορφές αγωγιμότητας της κεραίας.	43
3.2	Το πραγματικό και φανταστικό μέρος του ρεύματος επί κεραίας εντός κενού με $h = 0.25\lambda$, $a = 0.007022\lambda$ και $N = 200$, όπως προκύπτει από την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén. Η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης θεωρείται ότι εφαρμόζει μοναδιαίο βαθμωτό δυναμικό (δηλαδή $V = 1$), άρα οι άνωθεν κυματομορφές είναι συνάμα και κυματομορφές αγωγιμότητας της κεραίας.	45
4.1	Το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας, όπως προκύπτει από την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén. Η κεραία έχει μήκος $2h = \lambda/2$, ακτίνα $a = 0.007022\lambda$, πλήθος συναρτήσεων βάσης $N = 200$ και συντακτικές παραμέτρους χώρου στον οποίο βρίσκεται η κεραία $(\epsilon, \mu, \gamma) = (\epsilon_0, \mu_0, 0.1)$, ενώ θεωρούμε $\omega = 2\pi \times 5 \times 10^8$ r/s και $V = 1$, συνεπώς η παραπάνω κυματομορφή είναι και κυματομορφή ρεύματος.	64
4.2	Το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας, όπως προκύπτει από την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén. Η κεραία έχει μήκος $2h = \lambda/2$, ακτίνα $a = 0.007022\lambda$, πλήθος συναρτήσεων βάσης $N = 200$ και συντακτικές παραμέτρους χώρου στον οποίο βρίσκεται η κεραία $(\epsilon, \mu, \gamma) = (\epsilon_0, \mu_0, 0.1)$, ενώ θεωρούμε $\omega = 2\pi \times 5 \times 10^8$ r/s και $V = 1$, συνεπώς η παραπάνω κυματομορφή είναι και κυματομορφή ρεύματος.	65
4.3	Δείκτης κατάστασης για κεραία μήκους $2h = \lambda/2$, ακτίνας $a = 0.007022\lambda$, με τροφοδοσία πλάτους $V = 1$ V και συχνότητας $\omega = 2\pi \times 5 \times 10^8$ r/s σε κενό (στίγματα), σε μέσο με αγωγιμότητα $\gamma = 0.02$ S/m (ασυνεχής γραμμή) και σε μέσο με αγωγιμότητα $\gamma = 0.1$ S/m. Παντού θεωρούμε ότι $(\epsilon, \mu) = (\epsilon_0, \mu_0)$. Παρατηρήστε την εκθετική σχέση μεταξύ n και δείκτη κατάστασης.	67
4.4	Εστίαση στο πραγματικό και φανταστικό μέρος των Σχημάτων 4.1 και 4.2. Με συνεχή γραμμή σχεδιάζουμε το ακριβές ρεύμα/αγωγιμότητα και με στίγματα το προσεγγιστικό. Εδώ γίνονται εμφανείς οι –ασθενείς– ταλαντώσεις των άκρων, οι λογαριθμικές ιδιομορφίες τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος (για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα), αλλά και στο γεγονός ότι μακριά από το κέντρο και –όχι τόσο– τα άκρα, ο προσεγγιστικός πυρήνας παρέχει πολύ καλές προσεγγίσεις του ρεύματος/αγωγιμότητας επί της κεραίας. Αρκετές τιμές των κεντρικών ταλαντώσεων ήταν εκτός κλίμακας, οπότε δε φαίνονται σε αυτά τα διαγράμματα.	68
5.1	Το πραγματικό μέρος του ρεύματος/αγωγιμότητας για την περίπτωση της κεραίας και των λοιπών παραμέτρων των Σχημάτων 4.1 και 4.2, όπως προκύπτει με τη χρήση του εκτεταμένου πυρήνα. Οι προηγούμενοι ισχυρισμοί μας επαληθεύονται: οι ταλαντώσεις είναι πιο αργές –αραιότερες– ενώ το πλάτος τους είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερο.	72
5.2	Το πραγματικό μέρος του ρεύματος/αγωγιμότητας για την περίπτωση της κεραίας και των λοιπών παραμέτρων των Σχημάτων 4.1 και 4.2, όπως προκύπτει με τη χρήση του εκτεταμένου πυρήνα. Τα ευρήματά της [5] επαληθεύονται και εδώ.	73

5.3	Σύγκριση ενεργού (λεπτή γραμμή) και ακριβούς ρεύματος (παχιά γραμμή) για κεραία μικρού μήκους, για το πραγματικό μέρος. Η ακρίβεια είναι εμφανής με ορισμένες αποκλίσεις να παρατηρούνται στα άκρα και το κέντρο της κεραίας. Η τραχιά μορφή του ενεργού ρεύματος το κέντρο –που παρόλα αυτά ακολουθεί την ιδιομορφία– οφείλεται στην προσέγγιση με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης.	82
5.4	Σύγκριση ενεργού (λεπτή γραμμή) και ακριβούς ρεύματος (παχιά γραμμή) για κεραία μικρού μήκους, για το φανταστικό μέρος. Η ακρίβεια είναι εμφανής με ορισμένες αποκλίσεις να παρατηρούνται μακριά από το κέντρο της κεραίας. Η τραχιά μορφή του ενεργού ρεύματος το κέντρο –που παρόλα αυτά ακολουθεί την ιδιομορφία– οφείλεται στην προσέγγιση με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης. Ενδιαφέρουσα είναι η σύγκριση με τα αντίστοιχα σχήματα της [1].	83
5.5	Πραγματικό και φανταστικό μέρος του ενεργού (λεπτή γραμμή) και ακριβούς (παχιά γραμμή) ρεύματος σε κεραία μεγάλου μήκους. Τα δύο ρεύμα πρακτικά ταυτίζονται. . .	84

Πίνακας Πινάκων

4.1	Επίδραση της αγωγιμότητας στο φανταστικό μέρος του προσεγγιστικού ρεύματος. Μελετάμε την κεραία ενδιαφέροντος με τη συνήθη τροφοδοσία και $N = 200$. Οι διαφορές είναι αμελητέες και αυξάνονται για μεγάλα γ , σημάδι ότι πλησιάζουμε στην παραβίαση των (4.29) συγκεκριμένα της τρίτης.	65
4.2	Σύγκλιση της μεθόδου για πυκνότερη διακριτοποίηση. Μελετάμε την κεραία ενδιαφέροντος με τη συνήθη τροφοδοσία και $\gamma = 0.1$. Το σφάλμα αν και πάντα μικρό μειώνεται καθώς αυξάνουμε το N , άρα πυκνώνουμε τη διακριτοποίηση, σημάδι σύγκλισης, αφού πληρούμε όλο και περισσότερο τις συνθήκες (4.29) και συγκεκριμένα την πρώτη. . . .	66
4.3	Σύγκριση των πρώτων 32 τιμών του μιγαδικού I_n/V όπως προκύπτει από τη μέθοδο Galerkin (για την κεραία πεπερασμένου μήκους) με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από τη σχέση (4.36) (για την κεραία άπειρου μήκους). Οι παράμετροι είναι αυτές των Σχημάτων 4.1 και 4.2. Η ακρίβεια είναι εντυπωσιακή.	67

Κεφάλαιο 1

Θεμελιώδεις Γνώσεις Ηλεκτρομαγνητισμού

Στα 1865 ο James Clerk Maxwell διατύπωσε ένα από τα πιο κομψά και όμορφα αποτελέσματα της Φυσικής [1]: τις ομώνυμες εξισώσεις του. Κάθε εργασία που αφορά τον Ηλεκτρομαγνητισμό -όπως και τούτη- βασίζεται σε αυτό το απλό, αλλά τόσο μεστό σε φυσικό περιεχόμενο σύνολο εξισώσεων. Στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας θα κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των νόμων που αποτελούν τις θεμελιωδέστερες γνώσεις Ηλεκτρομαγνητισμού, δίνοντας έμφαση στην εφαρμογή και στα αποτελέσματά τους σε περιβάλλοντα με απώλειες, δηλαδή με πεπερασμένη, μη μηδενική αγωγιμότητα.

1 Οι Εξισώσεις του Maxwell

Η τετράδα εξισώσεων (ή πεντάδα αν κανείς συμπληρώσει και την εξίσωση συνεχείας [2]), που πλέον γνωρίζουμε ως εξισώσεις του Maxwell είχε διατυπωθεί πριν από τον ίδιο το Maxwell. Στο κλασικό του βιβλίο ο Jackson [3] γράφει ότι η διάνοια του Maxwell έγκειται ακριβώς στην παρατήρηση ότι οι προϋπάρχουσες εξισώσεις (και ειδικά μια ατέλεια του νόμου του Ampère) δεν ήταν ένα συνεπές σύνολο εξισώσεων για ταχέα μεταβαλλόμενα πεδία. Πέρα από τη σταχυολόγηση των εξισώσεων, η συνεισφορά του Maxwell μπορεί να εστιαστεί στην εισαγωγή μιας διόρθωσης της εξίσωσης Ampère, γνωστής ως ρεύμα μετατόπισης, χάρις στην οποία προβλέπεται η ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η μελέτη της ρευματικής κατανομής σε μία κεραία δεν είναι παρά μια προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος ακτινοβολίας, δηλαδή αποκτά νόημα ακριβώς χάρις στη διόρθωση αυτή.

Οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται σε δύο μορφές: την ολοκληρωτική (ή ολοκληρωματική) και τη διαφορική (ή σημειακή). Ενώ η ολοκληρωτική είναι πιο πλήρης (με την έννοια ότι η διαφορική μορφή θα πρέπει να συνοδεύεται από κατάλληλες οριακές συνθήκες, αλλά και λόγω ορισμένων περιορισμών που θα πρέπει να πληρούν οι πεδιακές κατανομές προκειμένου να έχουν νόημα οι διαφορικές αυτές εξισώσεις [2]) και με πιο προφανή φυσική σημασία, η πρακτική της αξία είναι περιορισμένη, καθώς η (αναλυτική) επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων, που εμπλέκονται, συχνά βασίζεται στην ύπαρξη κατάλληλων, βολικών συμμετριών, προϋπόθεση δύσκολη στη μελέτη πραγματικών προβλημάτων. Έτσι παρουσιάζουμε αποκλειστικά τις εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή.

Πριν συνεχίσουμε στην παρουσίαση των νόμων κάνουμε μια σύντομη παρέκβαση για να συζητήσουμε το -φιλολογικό ενδιαφέροντος- ζήτημα της ονομασίας ορισμένων μεγεθών, καθώς υπάρχουν πολλές εναλλακτικές στη διεθνή και ελληνική βιβλιογραφία. Οι όροι που θα εισαγάγουμε εδώ θα χρησιμοποιούνται σε όλη την έκταση της εργασίας. Τα επίμαχα μεγέθη είναι τα \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} και \vec{H} . Ο αναγνώστης που είναι οικείος με τον Ηλεκτρομαγνητισμό θα πρέπει να γνωρίζει μερικά ονόματα για τα παραπάνω: ένταση ηλεκτρικού πεδίου [2], [4], [5] ή ηλεκτρικό πεδίο [3], [6] για το \vec{E} , πυκνότητα ηλεκτρικής ροής [2], [4], [5] ή ηλεκτρική μετατόπιση [3], [6] ή διηλεκτρική μετατόπιση [2] για το \vec{D} , πυκνότητα μαγνητικής ροής [3], [5], μαγνητική επαγωγή [2], [3], [4] ή μαγνητικό πεδίο [5], [6] για το \vec{B} και ένταση μαγνητικού πεδίου [2], [4] ή μαγνητικό πεδίο [3], [5] ή απλά \vec{H} [5], [6] για το \vec{H} . Εμείς ακολουθούμε την ορολογία του -απολαυστικού- βιβλίου του Griffiths [6] για όλα τα μεγέθη πλην του \vec{D} για το οποίο θα ακολουθήσουμε την ορολογία των Τσαλαμέγκα-Ρουμेलιώτη [2].

Χωρίς περαιτέρω καθυστέρηση, οι τέσσερις νόμοι του Maxwell είναι:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.1)$$

που είναι ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό και ρ είναι η χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

ο νόμος του Gauss για το μαγνητισμό,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

ο νόμος επαγωγής του Faraday και

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

που είναι ο νόμος των Ampère-Maxwell και \vec{J} είναι η χωρική πυκνότητα ρεύματος. Ο δεύτερος όρος του αριστερού μέλους είναι το ρεύμα μετατόπισης που συζητήσαμε παραπάνω.

Μπορούμε να συνοψίσουμε μερικά βασικά χαρακτηριστικά των εξισώσεων Maxwell [2], [3], [6].

1. Οι εξισώσεις Maxwell είναι ένα συνεπές (ή συμβιβαστό) σύστημα εξισώσεων.
2. Οι εξισώσεις Maxwell δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, κανείς μπορεί να καταλήξει στους δύο νόμους του Gauss μέσω των νόμων του Faraday και των Ampère-Maxwell και της εξίσωσης συνεχείας. Οι όροι που προκαλούν αυτό το φαινόμενο (συγκεκριμένα οι χρονικές παράγωγοι των σχέσεων (1.3) και (1.4)) είναι γνωστοί και ως όροι σύζευξης [2]. Συνεπώς, ανεξαρτησία υπάρχει μόνο στη στατική.
3. Οι εξισώσεις Maxwell είναι γραμμικές (ενώ τούτο ισχύει πάντα από μαθηματικής σκοπιάς, προκειμένου να παρέχεται ουσιαστική πληροφορία, οι εξισώσεις Maxwell θα πρέπει να εφοδιάζονται από κατάλληλες, γραμμικές, συντακτικές σχέσεις, όπως συζητάμε στην παράγραφο 2 του παρόντος κεφαλαίου).
4. Οι εξισώσεις Maxwell είναι ανεξάρτητες του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε (όπως και κάθε φυσικός νόμος).
5. Οι εξισώσεις Maxwell σε συνδυασμό με το νόμο της δύναμης Lorentz αρκούν για την εξήγηση (σχεδόν [6]) όλων των φαινομένων της κλασικής ηλεκτροδυναμικής.
6. Η εξίσωση συνεχείας και άρα το θεμελιωδέστατο συμπέρασμα της αρχής διατήρησης του φορτίου μπορεί να ιδωθεί ως μια μαθηματική συνέπεια των εξισώσεων Maxwell. Για λόγους πληρότητας γράφουμε τη διαφορική μορφή της εξίσωσης συνεχείας:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

Μια γρήγορη ματιά στις εξισώσεις που μόλις γράψαμε αποκαλύπτει τη συμμετοχή έξι μεγεθών. Μπορούμε να τα διαχωρίσουμε σε δύο κατηγορίες: τα αίτια, γνωστά ως πηγές, που είναι τα ρ και \vec{J} και τα αποτελέσματα, δηλαδή τα πεδία \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} και \vec{H} . Σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά που γράψαμε παραπάνω και ειδικά το (2), κανείς μπορεί να παρατηρήσει ότι οι εξισώσεις Maxwell μαζί με την εξίσωση συνεχείας δεν αρκούν· περισεύουν ανεξάρτητες μεταβλητές. Το κενό έρχονται να συμπληρώσουν οι συντακτικές (ή καταστατικές) σχέσεις, εξισώσεις που συσχετίζουν τα τέσσερα πεδία μεταξύ τους. Οι συντακτικές σχέσεις διαμορφώνονται σύμφωνα με το χώρο στον οποίο εξελίσσονται τα φαινόμενα. Μέσα από τη συζήτηση περί συντακτικών σχέσεων θα μας δοθεί μια καλή ευκαιρία να συζητήσουμε αχροθιγώς για κατηγοριοποιήσεις υλικών και να αναδείξουμε εκείνες τις κατηγορίες στις οποίες η μελέτη μας θα εστιαστεί στη συνέχεια.

2 Συντακτικές Σχέσεις

Η σχέση μεταξύ των θεμελιωδών πεδιακών μεγεθών του Ηλεκτρομαγνητισμού [2], \vec{E} και \vec{B} , με τα \vec{D} και \vec{H} μπορεί να εμφανίζει υψηλή πολυπλοκότητα ανάλογα με το υλικό στο οποίο μελετάμε την εξέλιξη του πεδίου. Στη γενικότερη μορφή τους, οι συντακτικές σχέσεις γράφονται ως [3]:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= f(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{H} &= g(\vec{E}, \vec{B})\end{aligned}\quad (1.6)$$

όπου f και g συναρτήσεις που εξαρτώνται από το υλικό (οι (1.5) εναλλακτικά καλούνται εξισώσεις υλικού [7] για προφανείς λόγους).

Σε πλείστες περιπτώσεις υλικών η διηλεκτρική μετατόπιση και το \vec{H} γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων μεγεθών γνωστών ως συντακτικές παράμετροι, των ϵ , μ , ξ και ζ . Οι δύο πρώτες δεν είναι άλλες από την ηλεκτρική επιτρεπτότητα και τη μαγνητική διαπερατότητα, ενώ οι τελευταίες είναι οι μαγνητο-ηλεκτρικές παράμετροι [2], [8]. Έχοντας εισάγει αυτήν την τετράδα μεγεθών μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε πολύ βολικά τα διάφορα υλικά ενδιαφέροντος.

Εάν όλες οι συντακτικές παράμετροι είναι ανεξάρτητες των πεδιακών μεγεθών, τότε το υλικό καλείται γραμμικό, διαφορετικά μη γραμμικό [2]. Στην εργασία μας το μέσο στο οποίο βρίσκεται η κεραία θεωρείται γραμμικό. Εντούτοις, τούτη η υπόθεση δεν περιορίζει σημαντικά τη μελέτη μας: ως υποθέσουμε ότι κάθε συντακτική παράμετρος μπορεί να αναπτυχθεί σε δυνάμεις κάποιου πεδιακού μεγέθους (πρακτικά να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor). Για συνήθεις τιμές πεδιακών εντάσεων [3], κανείς μπορεί να αμελήσει όλους τους όρους πλην τον μηδενικής τάξης, διασφαλίζοντας έτσι την ανεξαρτησία από τα πεδιακά μεγέθη.

Εάν όλες οι συντακτικές παράμετροι εμφανίζουν χωρική ανεξαρτησία, δηλαδή δεν είναι συναρτήσεις της θέσης, τότε το υλικό καλείται ομοιογενές (ή ομογενές), διαφορετικά ετερογενές (ή ανομοιογενές) [6]. Το περιβάλλον του ενδιαφέροντός μας ακολουθεί αυτήν την υπόθεση. Σημειώνουμε ότι είναι σαφώς αυστηρότερη από τη γραμμικότητα [6], ωστόσο είναι άραγε περιοριστική για τη μελέτη μας; Η αλήθεια είναι πως όχι, καθώς η μελέτη της ρευματικής κατανομής μιας κεραίας είναι, βέβαια, ένα πρόβλημα κοντινού πεδίου, συνεπώς η υπόθεση τοπικής ομοιογένειας του χώρου είναι εύλογη.

Ακόμη και αν ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις περαιτέρω απλοποίηση μπορεί να συμβεί υποθέτοντας ότι οι συντακτικές παράμετροι δε μεταβάλλονται στις διάφορες διευθύνσεις του υλικού. Σε αυτήν την περίπτωση το υλικό καλείται ιστροπικό [6]. Αυτή η υπόθεση είναι επίσης αρκετά ελαστική: τα περισσότερα υγρά και αέρια [2] εμφανίζουν τέτοια συμπεριφορά. Επειδή η μελέτη μας είναι μακροσκοπική και επειδή η πλήρης χρυσταλλικότητα ενός υλικού (μονοκρυσταλλικά υλικά) είναι σπάνια στη φύση ακόμα και πολλά στερεά μπορούν να θεωρηθούν ως (μακροσκοπικά) άμορφα και άρα ιστροπικά [2], [5]. Αυτό σημαίνει ότι τοπική χρυσταλλικότητα επιτρέπεται (για παράδειγμα σε κύβους του $1 \mu m^3$), άρα συμπεριλαμβάμε και τα πολυκρυσταλλικά υλικά. Επίσης οι μαγνητο-ηλεκτρικές παράμετροι μηδενίζονται (στα συνήθη υλικά [4] αυτό ισχύει [2]). Αν δεν ισχύει η ανεξαρτησία των συντακτικών παραμέτρων από τις διευθύνσεις του υλικού, τότε αυτό κατηγοριοποιείται στην ευρεία κατηγορία των ανιστροπικών υλικών. Εδώ κανείς μπορεί να συναντήσει τα ηλεκτρικώς και μαγνητικώς ανιστροπικά υλικά, στα οποία η ηλεκτρική επιτρεπτότητα ή η μαγνητική διαπερατότητα είναι τανυστές, ενώ οι μαγνητο-ηλεκτρικές παράμετροι μηδενίζονται, τα δις-ανιστροπικά υλικά που επιπλέον διαθέτουν μαγνητο-ηλεκτρικές παραμέτρους (που πλέουν είναι τανυστές), τα δις-ιστροπικά υλικά τα οποία εμφανίζουν ιστροπικότητα, αλλά και μη μηδενικές μαγνητο-ηλεκτρικές παραμέτρους και τα χειρότροπα υλικά που πρακτικά είναι δις-ιστροπικά υλικά με ίσες μαγνητο-ηλεκτρικές παραμέτρους [2].

Οι τρεις προηγούμενες παράγραφοι μας οδηγούν στις τελικές συντακτικές σχέσεις που εμείς θα αξιοποιήσουμε και που αποτελούν σημαντικές απλοποιήσεις της (1.5). Έτσι:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.7)$$

και

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.8)$$

Συνοψίζοντας ό,τι συζητήσαμε σε αυτήν την ενότητα:

- Η εξάρτηση (ή μη) από τα πεδιακά μεγέθη καθορίζει τη γραμμικότητα του υλικού.
- Η εξάρτηση (ή μη) από τη θέση καθορίζει την ομοιογένεια του υλικού.
- Η εξάρτηση (ή μη) από τη διεύθυνση καθορίζει την ισοτροπικότητα του υλικού.

Έχουμε καταλήξει ότι η ηλεκτρική επιτρεπτότητα και η μαγνητική διαπερατότητα είναι απλές σταθερές. Η προφανής απορία είναι: ως αριθμοί τα ϵ και μ σε ποιο σύνολο ανήκουν; Σημειώνουμε ότι αναρωτιόμαστε πρακτικά για την ύπαρξη ή όχι φανταστικού μέρους των σταθερών (και αδιαφορούμε για το υποσύνολο των πραγματικών στο οποίο μπορεί να ανήκει το πραγματικό μέρος). Η απάντηση κρύβει σημαντική πληροφορία για την αγωγιμότητα του χώρου.

Ξεκινάμε από τη μαγνητική διαπερατότητα. Οι Patitz, Brock και Powell [9] έδειξαν πειραματικά ότι για ποικίλες περιπτώσεις εδάφους (ξηρά, λιγότερο και περισσότερο υγρά δείγματα) το φανταστικό μέρος της μαγνητικής διαπερατότητας είναι πρακτικά μηδέν. Βασιζόμενοι σε αυτό το συμπέρασμα και στο γεγονός ότι ύπαρξη φανταστικού μέρους απαντάται σε μαγνητικά υλικά [10], [11] (τα όποια δεν περιλαμβάνονται στη μελέτη μας), υποθέτουμε πραγματική μαγνητική διαπερατότητα. Μπορούμε να γράψουμε συνεπώς:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (1.9)$$

όπου μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού που θεωρείται ίση με $1.2566370614 \cdot 10^{-6}$ και μ_r είναι η σχετική μαγνητική διαπερατότητα που εξαρτάται από το υλικό.

Αντίθετα, υποθέτουμε μιγαδική ηλεκτρική επιτρεπτότητα. Το φανταστικό μέρος αυτής συνδέεται με την ειδική αγωγιμότητα γ , χαρακτηριστικό που εμφανίζουν όλα τα υλικά [2] (αλλά όχι αποκλειστικά: το φανταστικό μέρος είναι ένα συνολικό μέγεθος που περιλαμβάνει την κλασσική ωμική αγωγιμότητα, τη δυνατότητα μεταφοράς ηλεκτρικών φορέων δηλαδή, αλλά και οποιαδήποτε διαδικασία απώλειας ενέργειας -συχνότητα εξαρτώμενης-, όπως για παράδειγμα φαινόμενα τριβής που προκύπτουν κατά την πόλωση των μικροσκοπικών διπόλων εντός του υλικού [12]). Η ηλεκτρική επιτρεπτότητα γράφεται:

$$\epsilon_c = \epsilon_0 \epsilon_r + j \frac{\gamma}{\omega} \quad (1.10)$$

όπου ϵ_0 είναι η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του κενού και θεωρείται ίση με $8.854187817 \cdot 10^{-12}$, ϵ_r είναι η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του μέσου που, προφανώς, εξαρτάται από αυτό και ω είναι η κυκλική συχνότητα που καθορίζεται από τις πηγές του προβλήματος. Χρησιμοποιούμε ως κοινό παράγοντα στην παραπάνω εξίσωση το γινόμενο $\epsilon_0 \epsilon_r$, οπότε:

$$\epsilon_c = \epsilon_0 \epsilon_r (1 + j \tan \delta) \quad (1.11)$$

όπου $\tan \delta = \gamma / (\epsilon_0 \epsilon_r \omega)$. Το μέγεθος $\tan \delta$, γνωστό ως εφαπτομένη απωλειών, είναι ίσως το πιο σημαντικό μέγεθος που παρουσιάζουμε σε τούτην την εισαγωγή, η αξία του οποίου θα γίνει πλήρως κατανοητή στον αναγνώστη στο κεφάλαιο 4. Πέρα από έναν συνοπτικό τρόπο να περιγράψουμε την ποσότητα $\gamma / (\omega \epsilon_0 \epsilon_r)$, η εφαπτομένη απωλειών αποτελεί το λόγο της πυκνότητας ρεύματος αγωγιμότητας προς το ρεύμα μετατόπισης [2].

Εφόσον στην προηγούμενη παράγραφο συζητήσαμε το ζήτημα της αγωγιμότητας, κρίνουμε σκόπιμο να αναφερθούμε σε ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα, το οποίο μέρος της βιβλιογραφίας [2] αντιμετωπίζει ως συντακτική σχέση, είναι όμως γνωστό και ως η μικροσκοπική εκδοχή του νόμου του Ohm

[6]. Για τα υλικά ενδιαφέροντός μας (γραμμικά, ομοιογενή, ιστροπικά και πλέον αγώγιμα) ο νόμος του Ohm γράφεται:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (1.12)$$

δηλαδή, η πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας είναι ανάλογη της δύναμης ανά μονάδα φορτίου (δηλαδή του ηλεκτρικού πεδίου) [6]. Σημειώνεται ο χαρακτηρισμός "αγωγιμότητας": η σχέση (1.11) δεν εφαρμόζεται σε ρευματικές κατανομές των εξωτερικών πηγών (που είναι ανεξάρτητες του περιβάλλοντός τους [2])· αντίθετα η συζήτηση και η σχέση αφορούν ρεύματα που επάγονται από τις πηγές. Αυτό είναι ένα κρίσιμο σημείο το οποίο θα αντιμετωπίσουμε κατά την επίλυση των εξισώσεων Maxwell. Ο προσεκτικός αναγνώστης ίσως παρατήρησε μια ασυνέπεια ανάμεσα στις εξισώσεις (1.9) και (1.10) που γράψαμε παραπάνω και τη βιβλιογραφία [2], [3], [4], [5], [6], [9], [12]: θεωρούμε το φανταστικό μέρος θετικό, ενώ στα συγγράμματα και εργασίες στα οποία βασιζόμαστε θεωρείται αρνητικό. Τούτο, ωστόσο λίγη σημασία έχει: διαλέξαμε απλά διαφορετικό ορισμό για τη φανταστική μονάδα, θεωρούμε δηλαδή ότι ισχύει $j = -i$, όπου j είναι η φανταστική μονάδα της παρούσας εργασίας και i η φανταστική μονάδα των πηγών. Προφανώς και για τις δύο ισχύει ότι $j^2 = i^2 = -1$.

Κλείνοντας αυτήν την ενότητα υπενθυμίζουμε ξανά τη σημασία της: εδώ μαζί με τη συζήτηση σχετικά με τις συντακτικές θέσεις ορίσαμε το ηλεκτρομαγνητικό περιβάλλον στο οποίο θα εστιάσει η μελέτη μας.

3 Οριακές Συνθήκες

Στην παράγραφο 1 του παρόντος κεφαλαίου συζητήσαμε για τις εξισώσεις του Maxwell στη διαφορική μορφή, αλλά παραλείψαμε οποιαδήποτε αναφορά στις οριακές συνθήκες που τις συνοδεύουν, όπως και κάθε διαφορική εξίσωση. Δίχως τις οριακές συνθήκες οι εξισώσεις του Maxwell ισχύουν μόνο σε εσωτερικά σημεία συνεχών μέσων [2]. Αν δηλαδή στο πρόβλημα υπάρχει κάποια διαχωριστική επιφάνεια άρα παραπάνω από ένα υλικό, τότε τι συμβαίνει πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια; Συμβαίνει οι εξισώσεις του Maxwell να μην ισχύουν σε σημεία διαχωριστικών επιφανειών. Στο πρόβλημα ενδιαφέροντος συναντούμε ένα τέτοιο φαινόμενο στα όρια μεταξύ της κεραίας (τέλειος αγωγός) και περιβάλλοντος χώρου (διηλεκτρικό με απώλειες). Οι οριακές συνθήκες λύνουν αυτό το πρόβλημα περιγράφοντας τη συμπεριφορά των πεδίων λίγο πριν και λίγο μετά από το σύνορο [6]. Υπάρχει μια τετράδα οριακών συνθηκών (των οποίων η απόδειξη μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε από τα κλασσικά εγχειρίδια [2], [6] και παραλείπεται) που περιγράφει τη συμπεριφορά των επαπτομενικών ή κάθετων συνιστωσών των τεσσάρων πεδίων μεγεθών. Βεβαίως, στο ηλεκτρομαγνητικό περιβάλλον που έχουμε θεωρήσει (παράγραφος 2) αρκεί να αποφανθούμε μόνο για τα θεμελιώδη μεγέθη. Γενικά έχουμε:

1. τη συνέχεια των επαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad (1.13)$$

2. την ασυνέχεια της κάθετης συνιστώσας της διηλεκτρικής μετατόπισης (άρα του ηλεκτρικού πεδίου)

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \quad (1.14)$$

3. τη συνέχεια της κάθετης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου:

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.15)$$

4. την ασυνέχεια των επαπτομενικών συνιστωσών του \vec{H} (άρα του μαγνητικού πεδίου):

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (1.16)$$

όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στη διαχωριστική επιφάνεια, \vec{K} η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος εκεί και \hat{n} το μοναδιαίο, κάθετο διάνυσμα στη διαχωριστική επιφάνεια με κατεύθυνση από το μέσο 1 στο μέσο 2. Για λόγους πληρότητας σημειώνουμε ότι και η εξίσωση συνεχείας διαθέτει μια οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του \vec{J} .

Η παρατήρηση (2) για τις εξισώσεις του Maxwell έχει αποτελέσματα και στις οριακές συνθήκες: δεν είναι ούτε αυτές όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι πλήρωση μέρους τους θα ισοδυναμεί με πλήρωση όλων των οριακών συνθηκών. Πράγματι όλη η πληροφορία που μπορεί να δοθεί από τις οριακές συνθήκες συνοψίζεται στις σχέσεις (1.12) και (1.15). Το αποτέλεσμα που τις πληροί θα πληροί αυτόματα και τις λοιπές [2].

Οι οριακές συνθήκες, όπως και οι εξισώσεις του Maxwell, έχουν γενική εφαρμογή και αδιαφορούν για την ομοιογένεια, την ιστροπικότητα ή τη γραμμικότητα του υλικού στο οποίο της εφαρμόζουμε. Ωστόσο, στην περίπτωση ομοιογενών, γραμμικών και ιστροπικών μέσων, καθώς αυτό που μελετάμε ισχύει ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα γνωστό ως θεώρημα της μοναδικότητας [2] (σημειώνουμε ότι στον ηλεκτρομαγνητισμό υπάρχουν πολλαπλά θεωρήματα μοναδικότητας με παρεμφερή διατύπωση [6]- εδώ παρουσιάζουμε ένα από αυτά). Σύμφωνα με αυτό αν ένα πεδίο αποτελεί λύση των εξισώσεων Maxwell και πληροί τις οριακές συνθήκες τότε αυτό το πεδίο είναι το μοναδικό δυνατό. Στη μελέτη μας η ύπαρξη αυτού του θεωρήματος παρέχει αυτοπεποίθηση για τις λύσεις που θα προκύψουν (διαφορετικά θα είχαμε πάνω από μία λύση), ωστόσο αποτελεί τον πυλώνα μιας εξαιρετικά κομψής μεθόδου του ηλεκτρομαγνητισμού γνωστής ως μέθοδος των ειδώλων [6] (την οποία όμως δε θα χρησιμοποιήσουμε).

Όταν το μέσο στο οποίο εδράζεται το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα εκτείνεται ως το άπειρο, τότε προφανώς οι παραπάνω οριακές συνθήκες δεν επαρκούν (σημειώνουμε ότι ένας επιπλέον περιορισμός των παραπάνω συνθηκών είναι η -σιωπηλή- υπόθεση ότι η διαχωριστική επιφάνεια είναι λεία· αν παρουσιάζει ιδιομορφίες, όπως είναι οι ακμές, τότε οι παραπάνω οριακές συνθήκες αντικαθίστανται από τις συνθήκες άκρων ή ακμών [2], αλλά αυτές ξεφεύγουν από τα όρια της εργασίας). Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη συνθήκη ακτινοβολίας [2] (γνωστή και ως συνθήκη Sommerfeld) σύμφωνα με την οποία οι πηγές ηλεκτρομαγνητικών πεδίων πρέπει να είναι πηγές και όχι καταβόθρες [13] (η πρωτότυπη εργασία βρίσκεται εδώ [14]). Αυτό σημαίνει ότι κάθε ηλεκτρομαγνητικό κύμα θα πρέπει να διαδίδεται από την πηγή του στο άπειρο. Εναλλακτικά, η οριακή συνθήκη που χρησιμοποιείται και διασφαλίζει πάλι τη μοναδικότητα των λύσεων [2] απαιτεί μηδενισμό των πεδίων σε μεγάλη απόσταση από μια εντοπισμένη κατανομή φορτίων (όπως είναι η κεραία) [6].

4 Οι Εξισώσεις του Maxwell στο Πεδίο της Συχνότητας

Στη γενικότερη περίπτωση, τα τέσσερα πεδία μεγέθη που συμμετέχουν στις εξισώσεις του Maxwell (ενότητα 1, κεφάλαιο 1) είναι διανυσματικές συναρτήσεις τεσσάρων μεταβλητών: τριών χωρικών (που εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε) και μίας χρονικής. Εγείρεται το ερώτημα της συχνοτικής συμπεριφοράς των πεδίων, των φασμάτων τους δηλαδή, κυρίως χάρις στα εξαιρετικά ισχυρά εργαλεία που μας παρέχει η θεωρία των σημάτων [15]. Μπορούμε δηλαδή να πάρουμε αποδοτικότερα αποτελέσματα στο πεδίο της συχνότητας από ό,τι στο πεδίο του χρόνου (για παράδειγμα, ένα σημαντικό πεδίο του ηλεκτρομαγνητισμού που αξιοποιείται εκτενώς η συχνοτική περιγραφή των πεδίων μεγεθών είναι η ανάλυση και σχεδίαση οπτικών ινών [16]). Βασικό εργαλείο αποτελεί ο μετασχηματισμός Fourier, ο οποίος ορίζεται ως:

$$G(u, v, w, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, v, w, t) \exp(j2\pi ft) dt \quad (1.17)$$

όπου $f = \omega/(2\pi)$ η συχνότητα επιβαλλόμενη από τις πηγές και (u, v, w) οι γενικές ή καμπυλόγραμμες συντεταγμένες [17]. Το σήμα $g(t)$ προκειμένου να μπορεί να αναπαρασταθεί κατά Fourier θα πρέπει να πληροί τρεις συνθήκες, γνωστές ως συνθήκες Dirichlet [15]. Θα θεωρήσουμε ότι τα πεδία που

διαχειριζόμαστε πληρούν αυτές τις συνθήκες. Αν κανείς θέλει να επιστρέψει στο πεδίο του χρόνου δεν έχει παρά να εφαρμόσει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier που ορίζεται ως:

$$g(u, v, w, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v, w, f) \exp(-j2\pi ft) df \quad (1.18)$$

Είναι εμφανές ότι η πολυπλοκότητα αυξάνεται σημαντικά, σε σχέση με το πρόβλημα στο πεδίο του χρόνου, καθώς δεν είναι δυνατό να εγγυηθούμε, για τις γενικές συναρτήσεις g και G , ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Τεράστια απλοποίηση θα προκύψει εάν θυμηθούμε τη φυσική σημασία του μετασχηματισμού Fourier: μέσω της εισαγωγής της συνάρτησης δέλτα του Dirac είναι δυνατό να συνδεθεί ο μετασχηματισμός Fourier με τις ομώνυμες σειρές [15]. Αναπτύσσουμε, δηλαδή το σήμα (ή πεδίο) σε ένα άθροισμα διακριτό (σειρά) ή συνεχές (ολοκλήρωμα) ημιτονοειδών συναρτήσεων (κάθε συνιστώσα, που διαθέτει διαφορετική συχνότητα από τις υπόλοιπες, καλείται αρμονική). Σημειώσαμε παραπάνω ότι το μέσο που πραγματευόμαστε είναι γραμμικό. Θεωρώντας ότι οι πηγές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ενδιαφέροντος έχουν αυθαίρετη χρονική μεταβολή και εκμεταλλευόμενοι τη γραμμικότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας [2], μπορούμε δηλαδή να ισχυριστούμε ότι το τελικό πεδίο αποτελείται από τις διάφορες πεδριακές συνιστώσες που είναι αποτελέσματα κάθε αρμονικής ξεχωριστά. Συνεπώς, το πρόβλημα της μελέτης του φάσματος ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εξαρτώμενου με αυθαίρετο τρόπο από το χρόνο απλοποιείται στη μελέτη ενός αρμονικά, χρονικά εξαρτώμενου πεδίου, με εξάρτηση δηλαδή της μορφής $\exp(-j\omega t)$ [6]. Τέτοια χρονική εξάρτηση θα παρουσιάζουν και τα κύματα ενδιαφέροντος στην εργασία.

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier της παραγωγίσης στο χρόνο [15] μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Maxwell στο πεδίο των συχνοτήτων (και σε πιο φιλική μορφή). Έτσι:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega \vec{B} \quad (1.21)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} - j\omega \vec{D} \quad (1.22)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε στο πεδίο των συχνοτήτων και τις οριακές συνθήκες. Τα γνώριμα μεγέθη των εξισώσεων (1.18)-(1.21) καλούνται παραστατικοί μιγαδικοί ή φασιθέτες [2], δεν εμφανίζουν εξάρτηση ούτε από το χρόνο ούτε από τη συχνότητα [18] και αποτελούν απόδειξη της υπολογιστικής διευκόλυνσης που συζητήσαμε νωρίτερα. Κατά τετριμμένο τρόπο μπορούμε να πάρουμε από έναν παραστατικό μιγαδικό την έκφραση ενός πεδίου χρονικά:

$$f(u, v, w, t) = \text{Re}\{F(u, v, w) \exp(-j\omega t)\} \quad (1.23)$$

όπου f είναι το πεδίο και F ο παραστατικός μιγαδικός του. Θα αποφύγουμε τους περιττούς συμβολισμούς για την ένδειξη ενός παραστατικού μιγαδικού. Όποτε εργαζόμαστε στο πεδίο της συχνότητας θα το αναφέρουμε ρητά.

Ένα τελευταίο και πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα με τη χρήση αρμονικά εξαρτώμενων πεδίων (ή πεδίων που βρίσκονται στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση [2], όπως λέγεται) είναι η εξίσωση συνεχείας. Η συχνοτική της εκδοχή είναι:

$$\nabla \cdot \vec{J} - j\omega \rho = 0 \quad (1.24)$$

Γνώση της χωρικής πυκνότητας ρεύματος εγγύαται γνώση (και μάλιστα με απλό τρόπο) της χωρικής πυκνότητας φορτίου, γεγονός αρκετά απλοποιητικό (αλλά όχι το αντίστροφο· όπως θα δούμε παρακάτω θα χρειαζόταν και ο στροβιλισμός του \vec{J} δεδομένου του ρ για να μπορέσουμε να αξιοποιήσουμε την (1.24)).

5 Επίλυση των Εξισώσεων Maxwell και Ηλεκτρομαγνητικά Δυναμικά

Επόμενο βήμα στη μελέτη μας είναι η επίλυση των εξισώσεων Maxwell στο περιβάλλον ενδιαφέροντος που συζητήσαμε στην ενότητα 2 του παρόντος κεφαλαίου. Μπορούμε με ορισμένους απλούς μαθηματικούς χειρισμούς να καταλήξουμε σε κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό πεδίο και το \vec{H} , φυσικά μέσω των (1.6) και (1.7) μπορούμε να καταλήξουμε σε παρόμοιες σχέσεις για τα άλλα δύο (η μεθοδολογία που θα ακολουθήσει μοιάζει με αυτή των [2], [19], αλλά για την περίπτωση αγωγίμου περιβάλλοντος).

Εφαρμόζουμε στροβιλισμό στο νόμο του Faraday (1.3) οπότε:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.25)$$

Εναλλάσσοντας τους τελεστές στροβιλισμό και μερική παράγωγο και αξιοποιώντας το νόμο των Maxwell-Ampère (1.4) και τη σχέση (1.7):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (1.26)$$

Αξιοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (1.27)$$

η (1.25) γίνεται:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (1.28)$$

Ας απαλλαγούμε από τη διηλεκτρική μετατόπιση μέσω της (1.6) και ας παρατηρήσουμε ότι η απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου σχετίζεται με τη χωρική πυκνότητα φορτίου μέσω του νόμου του Gauss (1.1):

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\nabla \rho}{\epsilon} \quad (1.29)$$

Η αγωγιμότητα του περιβάλλοντος μας επιβάλλει μεγαλύτερη προσοχή στη χωρική πυκνότητα ρεύματος: αυτή αποτελείται από δύο συνιστώσες: την πυκνότητα ρεύματος που επιβάλλεται εξωγενώς από τις πηγές και την πυκνότητα ρεύματος που είναι αποτέλεσμα των αναπτυσσόμενων στο χώρο ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Μπορούμε να γράψουμε συνεπώς [2]:

$$\vec{J} = \vec{J}_\pi + \vec{J}_c \quad (1.30)$$

όπου \vec{J}_π η πυκνότητα ρεύματος των πηγών και \vec{J}_c η πυκνότητα ρεύματος επιβαλλόμενη δευτερογενώς από τα πεδία. Αξιοποιώντας το νόμο του Ohm (1.11) για την \vec{J}_c :

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{J}_\pi}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} \quad (1.31)$$

που είναι η κυματική εξίσωση ενδιαφέροντος για το ηλεκτρικό πεδίο. Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να εξάγουμε μία κυματική εξίσωση για το \vec{H} η οποία βρίσκεται:

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu \gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{J}_\pi \quad (1.32)$$

Σχετική απλοποίηση θα επέλθει με το πέρασμα στο πεδίο των συχνοτήτων, θεωρώντας αρμονική, χρονική εξάρτηση. Η (1.30) γίνεται:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} + j\omega \mu \gamma \vec{E} = -j\mu \omega \vec{J}_\pi + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} \quad (1.33)$$

Αξιοποιώντας την εξίσωση συνεχείας (1.23) μπορούμε να απαλλαγούμε από τη μία από τις δύο πηγές. Παράλληλα με λίγη άλγεβρα η (1.32) γίνεται:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \left(\epsilon + j \frac{\gamma}{\omega} \right) \vec{E} = -j\mu \omega \vec{J}_\pi - j \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{J}_\pi)}{\omega \epsilon} \quad (1.34)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.9) καταλήγουμε στο:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon_c \mu \vec{E} = -j\mu \omega \vec{J}_\pi - j \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{J}_\pi)}{\omega \epsilon} \quad (1.35)$$

όπου ϵ_c είναι η μιγαδική ηλεκτρική επιτρεπτότητα. Εισάγοντας τον κυματάρημο $k_c = \omega \sqrt{\epsilon_c \mu}$, η (1.34) παίρνει την τελική της μορφή που είναι γνωστή ως μη ομογενής, διανυσματική εξίσωση Helmholtz [19]:

$$\nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = -j\mu \omega \vec{J}_\pi - j \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{J}_\pi)}{\omega \epsilon} \quad (1.36)$$

Αντίστοιχη εξίσωση Helmholtz υπάρχει για το \vec{H} :

$$\nabla^2 \vec{H} + k_c^2 \vec{H} = -\nabla \times \vec{J}_\pi \quad (1.37)$$

Επίλυση των δύο παραπάνω εξισώσεων, σε συνδυασμό με κατάλληλες οριακές συνθήκες οδηγούν στη λύση κάθε ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος. Τούτο είναι μερικώς αληθές. Παρατηρώντας τις παραπάνω εξισώσεις και λαμβάνοντας υπόψιν τη διαδικασία εξαγωγής τους σημειώνουμε τα παρακάτω σημεία [19], [20]:

- οι όροι του δεξιού μέλους (όροι εξαναγκασμού ή διέγερσης ή μη ομογενείς όροι) είναι πολύπλοκοι: θα προτιμούσαμε μία απλή σχέση που να συνδέει το αίτιο (πηγές) με το αποτέλεσμα (πεδία),
- οι ίδιοι όροι επιβάλλουν αυστηρούς περιορισμούς στις πηγές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, για παράδειγμα η βαθμίδα της απόκλισης της χωρικής πυκνότητας ρεύματος απαιτεί πηγές τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες, δηλαδή με αρκετά καλή συμπεριφορά και
- η εφαρμογή διαφορικών τελεστών για την εξαγωγή των κυματικών εξισώσεων ή εξισώσεων Helmholtz οδηγεί στην απώλεια της ισοδυναμίας με τις εξισώσεις Maxwell, θα πρέπει δηλαδή κανείς να ελέγχει αν το αποτέλεσμα των (1.35) και (1.36) πληροί τις (1.18)-(1.21).

Η μη αποτελεσματικότητα των κυματικών εξισώσεων των πεδίων οδηγεί στον ορισμό βοηθητικών συναρτήσεων που θα προσφέρουν σημαντική υπολογιστική διευκόλυνση και λύση των παραπάνω παθολογιών. Αυτές είναι γνωστές ως συναρτήσεις δυναμικού. Αν και υπάρχει πλειάδα, οι πιο δημοφιλείς είναι το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό και το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό. Ήδη παρατηρούμε μια σημαντική ελάφρυνση: έναντι έξι συνιστωσών (τρεις του ηλεκτρικού πεδίου και τρεις του \vec{H}) έχουμε να υπολογίσουμε μόνο τέσσερις. Θα αντιμετωπίσουμε τα δυναμικά ως πλήρως μαθηματικές έννοιες: όπως γράφει ο Griffiths, η ασάφεια στον ορισμό τους (η εξάρτηση από το σημείο αναφοράς δηλαδή) τους στερεί αυτομάτως κάθε φυσική έννοια [6] (σαφή φυσική σημασία έχει από την άλλη η διαφορά δυναμικού).

Για τον ορισμό του διανυσματικού δυναμικού ξεκινάμε από το νόμο του Gauss για το μαγνητισμό (1.2). Όταν η απόκλιση ενός διανυσματικού μεγέθους (εδώ του μαγνητικού πεδίου) είναι μηδενική τούτο καλείται σωληνοειδές [2] και ισούται με το στροβιλισμό μιας άλλης διανυσματικής συνάρτησης [6], έστω \vec{A} , δηλαδή:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.38)$$

Είναι προφανές ότι ο ορισμός αυτός διακατέχεται από μία ασάφεια, όπως σημειώσαμε παραπάνω: αν στο \vec{A} προσθέσουμε την κλίση οποιασδήποτε βαθμωτής συνάρτησης τότε η (1.37) πάλι στέκει [6]. Αντικαθιστώντας την (1.37) στο νόμο του Faraday (1.3) παίρνουμε:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (1.39)$$

Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο αθροιζόμενο με τη μερική, χρονική παράγωγο του \vec{A} αποτελεί ένα αστρόβιλο πεδίο, το οποίο ισούται με την απόκλιση μιας βαθμωτής συνάρτησης [6], έστω ϕ , δηλαδή:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (1.40)$$

ή:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.41)$$

Και ο ορισμός του ϕ εμπεριέχει ασάφεια: πρόσθεση οποιασδήποτε σταθεράς στη συνάρτηση αυτή δεν παραβιάζει την (1.40) [6]. Αν ορίσουμε την απόκλιση του \vec{A} τότε έχουμε καθορίσει πλήρως αυτό το μέγεθος σύμφωνα με το θεώρημα Helmholtz (δεδομένης της οριακής συνθήκης για μηδενισμό των πεδίων για άπειρη απόσταση με τις πηγές). Παρεμπιπτόντως, η συγκεκριμένη γραφή των εξισώσεων Maxwell αντανακλά ακριβώς αυτό το γεγονός, ότι δηλαδή η γνώση της απόκλισης και του στροβιλισμού ενός πεδίου (κάτω από ορισμένες συνθήκες) οδηγεί στη γνώση του πεδίου. Το πρόβλημά μας λύνει η συνθήκη Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.42)$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η παραπάνω εκδοχή είναι μόνο μία (αν και η πιο δημοφιλής) από τις διάφορες της συνθήκης Lorentz (γενικά υπάρχουν άπειρες επιλογές, ανάλογα με το πρόβλημα· τούτο θα αξιοποιηθεί στη συνέχεια). Ο αναγνώστης ίσως μάντεψε ότι το διανυσματικό, μαγνητικό δυναμικό είναι το μέγεθος \vec{A} και το βαθμωτό, ηλεκτρικό δυναμικό είναι το μέγεθος ϕ .

Οι κυματικές εξισώσεις που πληρούν τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά βρίσκονται πολύ εύκολα. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση Ampère-Maxwell και τη σχέση (1.38) αντικαθιστώντας το \vec{H} και τη διηλεκτρική μετατόπιση με τα αντίστοιχα θεμελιώδη μεγέθη, όπως φαίνεται στις (1.7), (1.9), οπότε:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.43)$$

Χρησιμοποιούμε τη διανυσματική ταυτότητα (1.27) και υπενθυμίζουμε ότι το ρεύμα αποτελείται από δύο συνιστώσες, οπότε:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu(\vec{J}_\pi + \vec{J}_c) + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.44)$$

Ο νόμος του Ohm (1.11) για το \vec{J}_c δίνει:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}_\pi + \vec{E} \left(\mu\gamma + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (1.45)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο αντικαθίσταται από τη σχέση (1.41):

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}_\pi + \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \left(\mu\gamma + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (1.46)$$

Μετά από λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στην (1.47):

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}_\pi - \mu\gamma \nabla\phi - \mu\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (1.47)$$

Αναδιατάσσουμε τους όρους:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \vec{J}_\pi - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\gamma\phi + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (1.48)$$

Απαιτούμε:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\gamma\phi + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.49)$$

που είναι η συνθήκη Lorentz για το πρόβλημά μας (παρατηρήστε ότι διαθέτει έναν επιπλέον όρο σε σχέση με την κλασική (1.42), απόρροια της αγωγιμότητας γ). Συνδυάζοντας τις (1.49) και (1.48) καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση για το διανυσματικό, μαγνητικό δυναμικό:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \vec{J}_\pi \quad (1.50)$$

Θεωρώντας ημιτονοειδή, χρονική εξάρτηση και εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Fourier στην παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{A} + \mu\gamma \vec{A} = -\mu \vec{J}_\pi \quad (1.51)$$

ή:

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu \left(\epsilon + \frac{\gamma}{\omega} \right) \vec{A} = -\mu \vec{J}_\pi \quad (1.52)$$

ή:

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu \epsilon_c \vec{A} = -\mu \vec{J}_\pi \quad (1.53)$$

και εισάγοντας το μιγαδικό κυματάριθμο k_c καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση για το \vec{A} στην ημιτονική μόνιμη κατάσταση:

$$\nabla^2 \vec{A} + k_c^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_\pi \quad (1.54)$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει την απλότητα της παραπάνω έκφρασης συγκρίνοντας το μη ομογενή όρο της εξίσωσης με τον αντίστοιχο της (1.37).

Για την εξαγωγή των αντίστοιχων κυματικών εξισώσεων για το βαθμωτό, ηλεκτρικό δυναμικό θα ακολουθήσουμε διαφορετική πορεία. Ξεκινάμε από το νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό και χρησιμοποιούμε τη συντακτική σχέση (1.7) για τη διηλεκτρική μετατόπιση:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.55)$$

Αντικαθιστούμε το ηλεκτρικό πεδίο από τη σχέση (1.41) και οδηγούμαστε στη:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.56)$$

και χρησιμοποιώντας την (1.49) παίρνουμε:

$$\nabla^2 \phi - \mu\gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.57)$$

Αυτή είναι η κυματική εξίσωση για το βαθμωτό, ηλεκτρικό δυναμικό, στο πεδίο του χρόνου. Πολύ εύκολα καταλήγουμε στην αντίστοιχη κυματική εξίσωση στην ημιτονική μόνιμη κατάσταση. Τελικά:

$$\nabla^2 \phi + k_e^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.58)$$

Οι λύσεις των κυματικών εξισώσεων δυναμικού (1.54) και (1.58) μπορούν να γραφούν σε ολοκληρωτική μορφή (είναι, συγκεκριμένα, ολοκληρώματα επαλληλίας), δηλαδή [2], [20]:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}) dV \quad (1.59)$$

και:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}) dV \quad (1.60)$$

όπου \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου παρατήρησης, \vec{r}' είναι το διάνυσμα θέσης των πηγών ακτινοβολίας και G είναι η συνάρτηση Green, που για το πρόβλημα ενδιαφέροντος ισούται με:

$$G(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{e^{jkR}}{4\pi R} \quad (1.61)$$

και όπου R είναι η απόσταση (βαθμωτό μέγεθος) μεταξύ σημείου παρατήρησης και (κάθε) σημείου πηγής, δηλαδή:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (1.62)$$

Σα μια τελική σημείωση αξίζει να αναφερθεί ότι πολύ σημαντικά σε ηλεκτρομαγνητικές μελέτες αποδεικνύονται το διανυσματικό ηλεκτρικό δυναμικό \vec{F} και το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό ϕ_m , ιδιαίτερα σε προβλήματα που ευνοούν το μετασχηματισμό πηγών (από ηλεκτρικές σε ισοδύναμες μαγνητικές) [19] και στη μελέτη μαγνητικών υλικών [2], αλλά και τα υπολογιστικά ισχυρά δυναμικά Hertz, ηλεκτρικό $\vec{\Pi}$ και μαγνητικό $\vec{\Pi}_m$, τα πρώτα για ηλεκτρικές και τα δεύτερα για μαγνητικές πηγές, και τα οποία μπορούν να διαχειριστούν οποιοδήποτε ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα [19] (ο αναγνώστης μπορεί να βρει μια αρκετά συμπαγή παρουσίαση των δυναμικών Hertz στις σημειώσεις του Τσαλαμέγκα [19], όπως και στο βιβλίο του Χρυσουλίδη [20], ενώ για εφαρμογές μπορεί να ανατρέξει σε άρθρα των Shuba, Maksimenko και Lakhtakia [21], [22] και στο πιο εκπαιδευτικό άρθρο του Essex [23]).

Στο κεφάλαιο αυτό υπενθυμίστηκαν βασικές γνώσεις ηλεκτρομαγνητισμού, αλλά και οριοθετήθηκε το ηλεκτρομαγνητικό υπόβαθρο στο οποίο θα λειτουργήσει η κεραία μας (πολύ βοηθητική αποδείχτηκε η εργασία [24] και το βιβλίο [25]). Πώς θα αντιμετωπίσουμε, όμως την κεραία, ποιο μοντέλο, δηλαδή θα υιοθετηθεί για την ικανοποιητική απεικόνιση (προσφέροντας ταυτόχρονα απλότητα, αλλά και δυνατότητα ανάπτυξης διαίσθησης); Τούτο το ερώτημα πραγματευόμαστε στο επόμενο κεφάλαιο.

6 Βιβλιογραφία

- [1] Maxwell, J.C. (1865). A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155, 459–512. doi: 10.1038/119125a0
- [2] Τσαλαμέγκας, Ι.Α., και Ρουμελιώτης, Ι.Α. (2015). Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Τόμος Α': Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία & Κύματα. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη. Βελτιωμένη Έκδοση.
- [3] Jackson, J.D. (1975). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York. Second Edition.
- [4] Βομβορίδης, Ι.Α. (2012). Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Μέρος Β'. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα. Δεύτερη Έκδοση
- [5] Krauss, J.D. (1993). Ηλεκτρομαγνητισμός. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη. Τέταρτη Έκδοση.
- [6] Griffiths D.J. (2014). Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο. Δεύτερη Αναθεωρημένη Έκδοση.
- [7] Liu, C.H., and Yeh, K.C. (1972). *Theory of Ionospheric Waves*. Academic Press, New York. doi:10.1016/s0074-6142(08)60136-9
- [8] Γλύτσης, Η.Ν. (2018). Συμπληρωματικές Σημειώσεις για το μάθημα Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Α'. Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [9] Patitz, W.E., Brock, B.C., and Powell, E.G. (1995). *Measurement of Dielectric and Magnetic Properties of Soil*. Sandia National Labs, Albuquerque.
- [10] Meuche, H., and Esguerra, M. (2007). Correlation between Losses, Complex Permeability and Electron Diffusion in Power Ferrites. *Le Journal de Physique IV* 07, C1-95-C1-98. doi: 10.1051/jp4:1997127
- [11] Ghodgaonkar, D.K., Varadan, V.V., and Varadan, V.K. (1990). Free-Space Measurement of Complex Permittivity and Complex Permeability of Magnetic Materials at Microwave Frequencies. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 39, 387–394. doi: 10.1109/19.52520
- [12] von Hippel, A.R. (1994). *Dielectrics and Waves*. Artech House, Boston. Second Edition.
- [13] Schot, S.H. (1992). Eighty years of Sommerfeld's radiation condition. *Historia Mathematica* 19, 385–401. doi:10.1016/0315-0860(92)90004-U
- [14] Sommerfeld, A. (1912). Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 21, 309-353. Reprinted in *Gesammelte Schriften*, 1, 272-316.
- [15] Haykin, S., και Moher, M. (2010). Συστήματα Επικοινωνίας. Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα. Πέμπτη Έκδοση.
- [16] Αβραμόπουλος, Η. Φωτονική Τεχνολογία για Τηλεπικοινωνίες. Σημειώσεις για το μάθημα Φωτονική Τεχνολογία για Τηλεπικοινωνίες, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.

- [17] Ρουmeliώτης, Ι.Α. (2005). Ειδικά Θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού. Σημειώσεις για το μάθημα Ειδικά Θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [18] Ουζούνoglou, Ν.Κ. (1994). Εισαγωγή στα Μικροκύματα. Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα. Δεύτερη Έκδοση.
- [19] Τσαλαμέγκας, Ι.Α. (2017). Τα Ηλεκτρομαγνητικά Δυναμικά. Σημειώσεις για το μάθημα Ειδικά Θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού. Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [20] Χρυσουλίδης, Δ.Π. (2004). Σκέδαση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη.
- [21] Shuba, M.V., Maksimenko, S.A., and Lakhtakia, A. (2007). Electromagnetic wave propagation in an almost circular bundle of closely packed metallic carbon nanotubes. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* 76. doi: 10.1103/PhysRevB.76.155407
- [22] Shuba, M.V., Slepyan, G.Y., Maksimenko, S.A., Thomsen, C., and Lakhtakia, A. (2009). Theory of multiwall carbon nanotubes as waveguides and antennas in the infrared and the visible regimes. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* 79. doi: 10.1103/PhysRevB.79.155403
- [23] Essex, E.A. (1977). Hertz Vector Potentials of Electromagnetic Theory. *American Journal of Physics* 45, 1099–1101. doi: 10.1119/1.10955
- [24] Παπαθανασόπουλος, Α. (2017). Περί της Εφαρμογής των Αριθμητικών Μεθόδων σε Νανοκεραίες Άνθρακα. Διπλωματική Εργασία, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα
- [25] Balanis, C.A. (1989). *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, New York.

Κεφάλαιο 2

Το Σωληνοειδές Δίπολο και η Εξίσωση Hallén

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει μόνο το ήμισυ του προβλήματος που πραγματευόμαστε. Στο κεφάλαιο 1 ορίστηκε το ηλεκτρομαγνητικό υπόβαθρο του προβλήματος, τώρα θα ορίσουμε τη διάταξη και πώς αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί αποτελεσματικά. Η μοντελοποίηση μιας ευθύγραμμης, λεπτής κεραίας σύρματος, καθώς αυτή που μελετάμε, και φυσικά η εξαγωγή ουσιώδους πληροφορίας από αυτό το μοντέλο απασχόλησαν τους σημαντικότερους επιστήμονες του λεγόμενου Εφαρμοσμένου Ηλεκτρομαγνητισμού, ειδικά κατά τις δεκαετίες του 50' και 60'. Εδώ θα σταχυολογήσουμε τα πιο αξιολογα και ενδιαφέροντα (κατά τη γνώμη του γράφοντος) αποτελέσματα.

1 Ορίζοντας τη Διάταξη

Η διάταξη αποτελείται από μία ευθύγραμμη, λεπτή κεραία σύρματος. Τι σημαίνει αυτό; Το Σχήμα 2.1 παρακάτω, φωτίζει την εξαιρετικά λιτή διατύπωση. Η κεραία αποτελείται από ένα σωλήνα κυκλικής διατομής, μήκους $2h$ και ακτίνας a . Ο σωλήνας είναι εσωτερικά κενός και τα τοιχώματά του είναι τελείως αγωγίμα και υποτίθεται ότι έχουν αμελητέο πάχος. Η κεραία είναι κεντρικά τροφοδοτούμενη, δηλαδή στο κέντρο του νοητού άξονά της υπάρχει ένα απειροστό κενό, στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα βαθμωτό δυναμικό:

$$V_{\text{exc}} = \text{Re}\{V e^{-j\omega t}\} \quad (2.1)$$

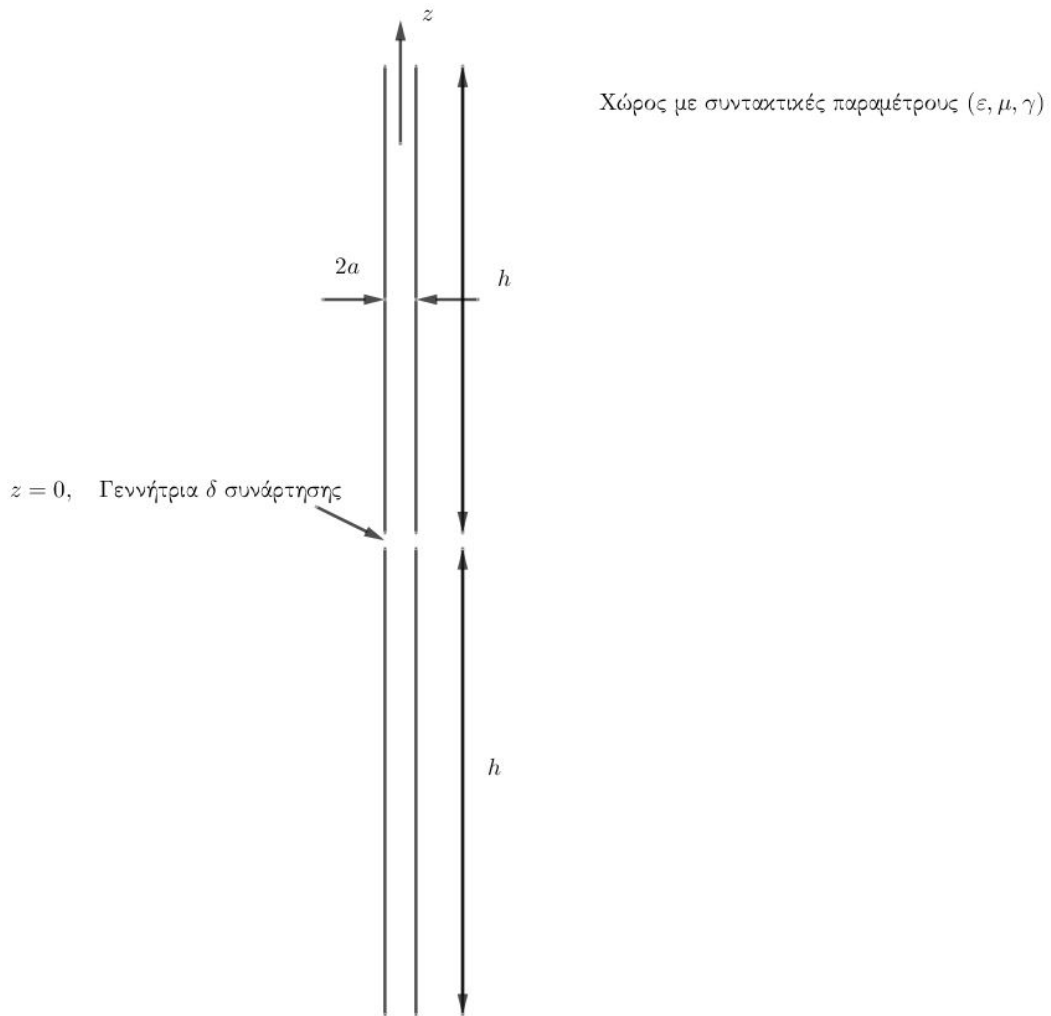
Η κεραία θεωρείται λεπτή τόσο γεωμετρικά όσο και ηλεκτρικά [1], δηλαδή:

$$a \ll 2h \quad \text{και} \quad \text{Re}\{k_c\}a \ll 1 \quad (2.2)$$

Η τελευταία συνθήκη, προφανώς, ισοδυναμεί με την απαίτηση η ακτίνα να είναι πολύ μικρότερη του επιβαλλόμενου από την πηγή, μήκους κύματος (εξ ου και "ηλεκτρικά λεπτή"). Ο Wu [2] σημειώνει ότι κανείς μπορεί να αποφύγει τη δεύτερη ανισότητα και να απαιτήσει το γινόμενο $\text{Re}\{k_c\}a$ να είναι μικρότερο από την πρώτη ρίζα της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης (περίπου 2.405 [3]), δηλαδή να απαιτήσει την ανυπαρξία μεταδιδόμενου ρυθμού μέσα στο σωλήνα κυκλικής διατομής (η λογική αυτή μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή αν κανείς αντιμετωπίσει την κεραία ως μεταλλικό, κυλινδρικό κυματοδηγό κυκλικής διατομής [4]). Προκύπτει η εύλογη απορία: για ποιο λόγο συζητάμε για λεπτές (και με τις δύο έννοιες) κεραίες; Η απάντηση είναι ότι κατά την ανάλυση που θα ακολουθήσει θα λάβουμε σημαντική διευκόλυνση ακριβώς χάρις στη συνθήκη (2.2).

Κανείς μπορεί να αναρωτηθεί επίσης για τη μορφή των άκρων της κεραίας. Στο σχήμα 2.1 είναι ανοικτά. Αυτή είναι μια ρεαλιστική προσέγγιση; Η απάντηση είναι ότι είναι η απλούστερη προσέγγιση, η οποία μπορεί να μας δώσει πληροφορία και συνάμα να προσαρμόζεται με εύκολα (με μικρές διορθώσεις δηλαδή) σε ένα πρακτικό πρόβλημα. Τα άκρα μιας κεραίας μπορεί να έχουν για παράδειγμα ημισφαιρική μορφή. Τότε, απλά αντιμετωπίζουμε την κεραία σα να έχει ανοικτά άκρα και μήκος ίσο με το άθροισμα της ακτίνας του ημισφαιρικού καπακιού και το μήκος της κεραίας δίχως αυτό [1].

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την περιγραφή του μοντέλου και απαντούν σε (ή σωστότερα υποδεικνύουν) ερωτήσεις σχετικά με τις διάφορες επιλογές. Είναι ένα ιδιαίτερα δημοφιλές μοντέλο, γνωστό ως το σωληνοειδές δίπολο, ανάμεσα στους επιστήμονες που ασχολούνται με τη Θεωρία Κεραιών και μπορεί να απαντηθεί σε σχεδόν όλες τις βιβλιογραφικές αναφορές του παρόντος κεφαλαίου (η περιγραφή που δόθηκε σε αυτήν την παράγραφο ακολουθεί τη [2]). Η συγκεκριμένη επιλογή διέγερσης της κεραίας είναι γνωστή ως γεννήτρια δέλτα συνάρτησης. Θα αναφερθούμε σε αυτήν, αλλά και σε άλλες επιλογές διέγερσης παρακάτω.



Σχήμα 2.1: Το πεπερασμένο σωληνοειδές δίπολο.

2 Η Εξίσωση Pocklington

Σε αυτήν την παράγραφο θα εξάγουμε την πρώτη εξίσωση ενδιαφέροντος (τόσο στη ροή της παρούσας εργασίας, όσο και ιστορικά εφόσον πρωτοδημοσιεύτηκε στα 1897 [5]!) που είναι γνωστή ως εξίσωση του Pocklington. Μέσω αυτής μπορούμε να υπολογίσουμε τη ρευματική κατανομή επί της κεραίας και μετέπειτα να προβούμε σε πλήρη χαρακτηρισμό της, δεδομένου ότι όλα τα μεγέθη ενδιαφέροντος (μακρινό πεδίο, διάγραμμα ακτινοβολίας, ισχύς εκπομπής, κατευθυντικότητα, για να αναφέρουμε μερικά) μπορούν να υπολογιστούν μέσω του ρεύματος [1], [6]. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι ο αναγνώστης είναι πολύ πιθανόν να έχει συναντήσει το ρεύμα της κεραίας, στη διεθνή βιβλιογραφία, αλλά και στις πρακτικές εφαρμογές, ως δεδομένο (πλην της τιμής του στο κέντρο της τροφοδοσίας [7]). Συγκεκριμένα,

υποτίθεται ότι ακολουθεί ημιτονοειδή κατανομή, δηλαδή της μορφής [6]:

$$I(z) = \begin{cases} I(0) \sin [k_c (h - z)], & 0 \leq z \leq h \\ I(0) \sin [k_c (h + z)], & -h \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Αυτή η προσέγγιση δίνει εξαιρετικά αποτελέσματα [6], [7] για κεραίες μήκους $\lambda/2$, ενώ είναι αρκετά καλή μέχρι και κεραίες μήκους περίπου λ . Ωστόσο, τα αποτελέσματα δεν είναι ακριβή για κάθε μήκος, πέρα από τα προαναφερθέντα. Επιπλέον για να προκύψει η σχέση (2.3) γίνεται η υπόθεση ότι η ακτίνα της κεραίας σύρματος είναι εξαιρετικά μικρή (ακόμη και μηδενική). Για κεραίες ακτίνας μεγαλύτερης των 0.025λ [6] (δηλαδή και πάλι αρκετά μικρής ακτίνας) η υπόθεση αποτυγχάνει επίσης. Οι κεραίες της μελέτης μας εμπίπτουν και στις δύο περιπτώσεις αποτυχίας της προσέγγισης. Η αντιμετώπιση σε αυτές τις περιπτώσεις είναι να θεωρηθεί άγνωστη η κατανομή του ρεύματος επί της κεραίας και έπειτα να προσδιοριστεί μέσω μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης [7] (θα δώσουμε παρακάτω τον ορισμό της ολοκληρωτικής εξίσωσης). Η μέθοδος αυτή είναι πιο ακριβής και βαθιά, επιστημονικά τεκμηριωμένη (μάλιστα ο King, από τους κορυφαίους επιστήμονες στο χώρο των Κεραίων του 20^{ου} αιώνα κατηγορεί την προσεγγιστική μέθοδο ως "αμφιλεγόμενη" [8]· για μια τεκμηρίωση ωστόσο των προσεγγίσεων ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [6], [9]) αν και μπορεί να αποδειχθεί επίπονη πνευματικά! Συνεχίζουμε στην εξαγωγή της εξίσωσης σημειώνοντας ότι η ανάλυση που θα ακολουθήσει γίνεται στο πεδίο της συχνότητας, οπότε όλα τα μεγέθη είναι φασιδέτες.

Αρχικά ως συζητήσουμε ορισμένα βασικά συμπεράσματα από τη γεωμετρία του μοντέλου που χρησιμοποιούμε. Το Σχήμα 2.1 κάνει προφανές ότι το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι μονοδιάστατο: η κυλινδρική συμμετρία εγγυάται ανεξαρτησία των μεγεθών ενδιαφέροντος από τη γωνία ϕ^1 , ενώ εστιάζουμε (τουλάχιστον για τον υπολογισμό της ρευματικής κατανομής) στην περίπτωση που $\rho = a$ (εναλλακτικά η ακτίνα συμβολίζεται ως r_T σε πολλά εκπαιδευτικά εγχειρίδια, για παράδειγμα [11]· σημειώνεται επίσης ότι εξάρτηση από την ακτίνα υπάρχει, απλά δε θα την αναγράφουμε ρητά, αφού μελετάμε μόνο μία πιθανή τιμή της), δηλαδή επί του μεταλλικού σωλήνα (απειροστού πάχους). Άρα, μόνο η μεταβλητή z αποτελεί εξαρτημένη μεταβλητή στα διάφορα μεγέθη.

Η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης (και γενικά οποιαδήποτε διέγερση) έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη επιφανειακών ρευμάτων και φορτίων επί του σωληνοειδούς διπόλου (λόγω της άπειρης αγωγιμότητάς του). Στη γενική περίπτωση το επιφανειακό ρεύμα θα διαθέτει τις συνιστώσες:

$$\vec{K}(a, z) = \hat{z}K_z(a, z) + \hat{\phi}K_\phi(a, z) + \hat{\rho}K_\rho(a, z) \quad (2.4)$$

Η κυλινδρική συμμετρία της διάταξης εγγυάται ότι η συνιστώσα K_ϕ θα είναι μηδενική [2], [7]. Επίσης, δεδομένου ότι τα δύο τμήματα μήκους h που αποτελούν το δίπολο είναι ομοιόμορφης διατομής (κυκλικής) η ακτινική συνιστώσα του ρεύματος δεν είναι αμελητέα μοναχά στα άκρα και την τροφοδοσία [2] (οι Πορονιό, Dragονιό, και Djordjjević ισχυρίζονται το ίδιο βασιζόμενοι στη μεγάλη λεπτότητα της κεραίας [1]· αριθμητικά αποτελέσματα των ίδιων αποδεικνύουν ότι η συνιστώσα K_ϕ είναι έως και 11,000 φορές μικρότερη για $a/\lambda=0.001$ από την συνιστώσα K_z με τη διαφορά να μειώνεται με αύξηση της ακτίνας [12]· τούτο στην περίπτωση διέγερσης που παρουσιάζει ϕ εξάρτηση· σε κάθε περίπτωση, συνεπώς η ϕ συνιστώσα θεωρείται αμελητέα). Άρα μπορούμε να εστιάσουμε στη z -συνιστώσα του ρεύματος.

Αξιοποιώντας ξανά το επιχειρήμα περί ομοιόμορφης διατομής των δύο τμημάτων του διπόλου, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια του διπόλου, άρα:

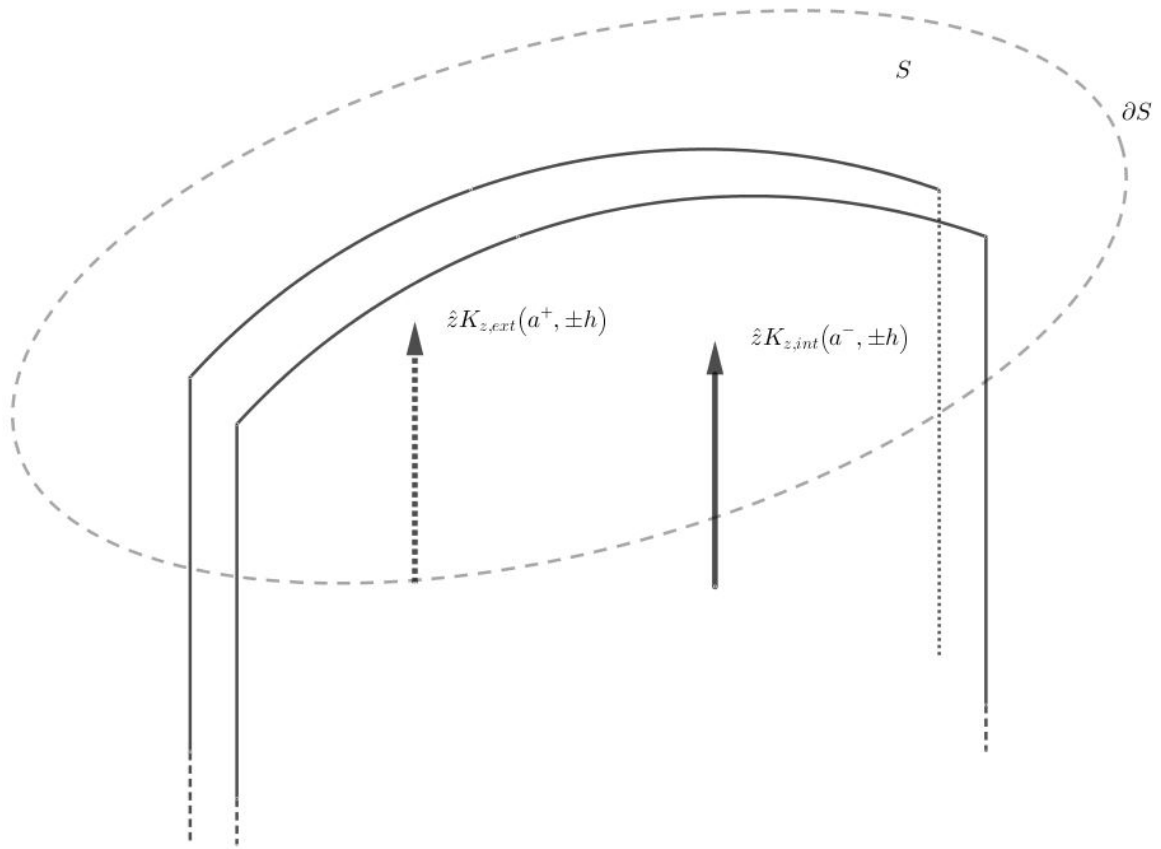
$$K_z(a, z) = \frac{I(z)}{2\pi a} \quad (2.5)$$

¹Βέβαια αυτό εξαρτάται και από τη διέγερση: για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη ο Kao [10] έδειξε ότι μια ορισμένη μεταβολή της z -συνιστώσας του επιφανειακού ρεύματος της κεραίας υπάρχει συναρτήσει της γωνίας ϕ , αν κανείς θεωρήσει διέγερση που διαθέτει και μη αξονική συνιστώσα, όχι μεγάλη βέβαια ώστε να τη λάβουμε εδώ υπόψη

Εδώ πρέπει να κάνουμε μια σημαντική διευκρίνιση: το ρεύμα K_z είναι το συνολικό ρεύμα στην επιφάνεια του διπόλου, συμπεριλαμβανομένων δηλαδή των συνεισφορών και από το εσωτερικό και από το εξωτερικό του σωλήνα [2], [7]. Με βάση αυτά, η (2.5) μπορεί να γραφεί:

$$I(z) = 2\pi a (K_{z,\text{ext}}(a^+, z) + K_{z,\text{int}}(a^-, z)) \quad (2.6)$$

Για τα άκρα της κεραίας υποθέτουμε ότι τα ρεύματα είτε συνεχίζουν σε κάποιο (νοητό) επόμενο σύρμα είτε μηδενίζονται, δηλαδή απαιτούμε την ισχύ του πρώτου νόμου του Kirchhoff [1]. Αυτή η απαίτηση μας τροφοδοτεί με την κατάλληλη οριακή συνθήκη για το ρεύμα της κεραίας: θεωρούμε την επιφάνεια S του παρακάτω σχήματος που είναι πρακτικά μια μεγάλη εστίαση μιας τομής του σωληνοειδούς διπόλου. Εφαρμόζοντας τον πρώτο νόμο του Kirchhoff εκεί παίρνουμε:



Σχήμα 2.2: Εφαρμογή του πρώτου νόμου Kirchhoff στα άκρα του σωληνοειδούς διπόλου. Με συνεχή γραμμή συμβολίζεται το διάνυσμα επιφανειακού ρεύματος στο εσωτερικό τοίχωμα του διπόλου και με διάστικτη το εξωτερικό.

$$K_{z,\text{ext}}(a^+, \pm h) + K_{z,\text{int}}(a^-, \pm h) = 0 \quad (2.7)$$

Συνδυάζοντας τη (2.7) με τη (2.6) παίρνουμε:

$$I(\pm h) = 0 \quad (2.8)$$

Σημειώνουμε ότι η προσέγγιση ημιτονοειδούς ρευματικής κατανομής της σχέσης (2.3) είναι σύμφωνη με την ανωτέρω συνθήκη.

Εφόσον το ρεύμα είναι παράλληλο του διανύσματος \hat{z} , το μαγνητικό, διανυσματικό δυναμικό θα είναι επίσης παράλληλό του [11], δηλαδή:

$$\vec{A} = \hat{z}A_z \quad (2.9)$$

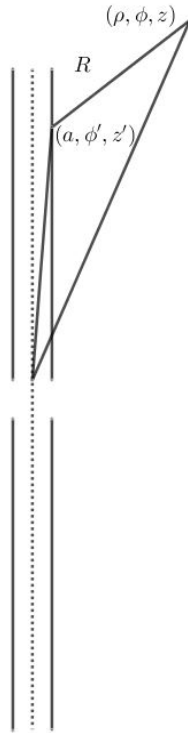
Εναλλακτικά, τα επιχειρήματα που απέδειξαν απουσία των K_ϕ και K_z μπορούν να αναπαραχθούν εδώ για τις αντίστοιχες συνιστώσες του δυναμικού. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της επαλληλίας (1.44) παίρνουμε:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \vec{K}(a, z) \frac{e^{jk_c R}}{R} d\vec{s}' \quad (2.10)$$

όπου S είναι η επιφάνεια του σωληνοειδούς διπόλου και δε θα πρέπει να συγχέεται με την ομώνυμη βοηθητική επιφάνεια που χρησιμοποιήσαμε νωρίτερα. Το στοιχείο επιφανείας μπορεί να γραφεί ως $d\vec{s}' = \hat{z}ad\phi'dz'$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.5) για το ρεύμα παίρνουμε:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{I(z')}{2\pi a} \frac{e^{jk_c R}}{R} ad\phi'dz' \quad (2.11)$$

Συνεπώς καλούμαστε να υπολογίσουμε την απόσταση R . Όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.3 αυτή αντιστοιχεί στην απόσταση μεταξύ ενός σημείου του μεταλλικού σωλήνα του διπόλου (a, ϕ', z') , πρακτικά ενός σημείου πηγής και του σημείου παρατήρησης (ρ, ϕ, z) . Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε



Σχήμα 2.3: Η γεωμετρία που ορίζει το R .

κυλινδρικές συντεταγμένες μπορεί να βρεθεί απλά [13]:

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + (a - \rho)^2 - 2a\rho \cos(\phi - \phi')} \quad (2.12)$$

Για σημεία παρατήρησης πάνω στην επιφάνεια του διπόλου ισχύει ότι $R = a$, ενώ η κυλινδρική συμμετρία εγγυάται ότι όποια τιμή της ϕ και να επιλέξουμε το αποτέλεσμα θα είναι αμετάβλητο. Έτσι:

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 2a^2 - 2a^2 \cos(\phi')} = \sqrt{(z - z')^2 + 2a^2 (1 - \cos(\phi'))} \quad (2.13)$$

Αξιοποιώντας τον τύπο αποτετραγωνισμού του ημιτόνου καταλήγουμε στην έκφραση:

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)} \quad (2.14)$$

Επιστρέφοντας στη (2.11) παίρνουμε:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^h \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(z')}{2\pi a} \frac{e^{jk_c \sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)}}}{\sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)}} a d\phi' dz' \quad (2.15)$$

Σημειώνουμε ότι η ολοκλήρωση ως προς ϕ' μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε διάστημα εύρους 2π . Τέλος, γράφουμε:

$$K_{\text{ex}}(z - z') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{jk_c \sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)}}}{\sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)}} d\phi' \quad (2.16)$$

Αυτή η συνάρτηση θα αποδειχθεί κρίσιμης σημασίας στη μελέτη μας. Με αυτήν την επιλογή η (2.15) μπορεί να γραφεί πολύ πιο κομψά:

$$A_z = \mu \int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z - z') I(z') dz' \quad (2.17)$$

Τώρα ας στρέψουμε την προσοχή μας στο ηλεκτρικό πεδίο. Συγκεκριμένα ενδιαφερόμαστε για τη z -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου (και υπενθυμίζουμε ότι λόγω κυλινδρικής συμμετρίας δεν υπάρχει ϕ -συνιστώσα). Τούτη, καθώς εφαπτομενική της επιφάνειας του διπόλου και καθώς η επιφάνεια είναι τελείως αγωγίμη, θα είναι μηδενική εκτός φυσικά από το σημείο $z = 0$, όπου εκεί θα υπάρχει μια έκρηξη στο άπειρο, λόγω της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης [7]. Αυτός ο ισχυρισμός σε συμπαγή μορφή μπορεί να γραφεί ως:

$$E_z = -V\delta(z) \quad (2.18)$$

Αν και αυτονόητο σημειώνουμε ότι πάντα $|z| \leq h$. Πώς προκύπτει το αρνητικό πρόσημο; Πολύ απλά, εφαρμόζοντας τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στην τροφοδοσία παίρνουμε ότι το πεδίο εκεί είναι αντίθετο του επιβαλλόμενου πεδίου από αυτήν. Στην περίπτωση της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης το επιβαλλόμενο πεδίο είναι $E_i = V\delta(z)$. Συνεχίζοντας, η συνθήκη Lorentz (1.42), που συνδέει το διανυσματικό, μαγνητικό με το βαθμωτό, ηλεκτρικό δυναμικό παίρνει μια πολύ βολική μορφή στο πρόβλημά μας:

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = j\omega\epsilon\mu\phi \quad (2.19)$$

ή, αξιοποιώντας τη σχέση $k_c = \omega \sqrt{\epsilon_c \mu}$:

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = j \frac{k_c^2}{\omega} \phi \quad (2.20)$$

Η (1.41), που συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο με τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά (ϕ, \vec{A}) , στο πεδίο των συχνοτήτων γράφεται:

$$\vec{E} = -\nabla\phi + j\omega\vec{A} \quad (2.21)$$

και μέσω της (2.20):

$$\vec{E} = \frac{j\omega}{k_c^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{A} + j\omega\vec{A} \quad (2.22)$$

Όμως το δυναμικό \vec{A} έχει μόνο z -συνιστώσα, σύμφωνα με τη σχέση (2.9), άρα:

$$\vec{E} = \hat{z} j\omega \left(\frac{1}{k_c^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 1 \right) A_z \quad (2.23)$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.17) παίρνουμε ότι:

$$E_z = \frac{j\omega}{k_c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_c^2 \right) \mu \int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z') I(z') dz' \quad (2.24)$$

Αξιοποιώντας την έκφραση (2.18) καταλήγουμε στην επιθυμητή εξίσωση του Pocklington:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_c^2 \right) \int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z') I(z') dz' = j\omega\epsilon V\delta(z) \quad (2.25)$$

Η εξίσωση του Pocklington είναι μια ολοκληρωδιαφορική εξίσωση, δηλαδή μια εξίσωση που εμπλέκει ταυτόχρονα ολοκληρωτικούς και διαφορικούς τελεστές [14], αν και συχνά (και απλουστευτικά) την ονομάζουμε ολοκληρωτική εξίσωση [7]. Η μόνη άγνωστη ποσότητα είναι η ρευματική κατανομή επί της κεραίας, που αναζητούμε. Η γνωστή συνάρτηση $K_{\text{ex}}(z-z')$, που καθορίστηκε από την εξίσωση (2.16) καλείται ακριβής πυρήνας της Pocklington, για το λόγο ότι δεν έγιναν προσεγγίσεις κατά την εξαγωγή του. Με τη χρήση αυτού του πυρήνα η εξίσωση Pocklington είναι ακριβής για το μοντέλο του σωληνοειδούς μοντέλου που πραγματευόμαστε: κάθε επιχείρημα χρησιμοποιεί τις παραδοχές του μοντέλου μας, αλλά σε κανένα σημείο δεν έγινε προσέγγιση [7]. Αυτό είναι ένα εξαιρετικά ισχυρό επιχείρημα υπέρ του μοντέλου. Προβλήματα αντιμετωπίζει κανείς όταν θέλει να λύσει την εξίσωση Pocklington: μονάχα στην περίπτωση της άπειρης κεραίας (όπως θα δούμε παρακάτω ενός εξαιρετικού εργαλείου κατανόησης πεπερασμένων κεραίων) μπορεί κανείς να εξάγει λύση σε κλειστή μορφή. Άρα στην περίπτωση πραγματικών κεραίων μόνο αριθμητική μπορεί να είναι η λύση της (2.25) (παρακάτω θα δούμε ότι υπάρχει μια συλλογή από προσεγγιστικές λύσεις, ωστόσο σήμερα που δεν υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί υπολογιστικής ισχύος έχουν παραγκωνισθεί). Τούτο ενέχει σημαντικές δυσκολίες καθώς πρόκειται για διπλή αριθμητική ολοκλήρωση, δεδομένης της πολυπλοκότητας του πυρήνα (σημειώνεται βέβαια πως κεντρικό σημείο τούτης της εργασίας είναι ότι, πιθανή απλοποίηση του πυρήνα, αν και χρησιμοποιείται εκτεταμένα, επιφυλάσσει πολύ πιο δυσάρεστες εκπλήξεις· θα γίνουμε πιο αναλυτικοί αργότερα). Στη μελέτη του ρεύματος περί της τροφοδοσίας και των άκρων της κεραίας θα δούμε ότι, λόγω της ύπαρξης λογαριθμικής ιδιομορφίας της ολοκληρωτέας ποσότητας δεν είναι δυνατό να περάσουμε το διαφορικό τελεστή εντός του ολοκληρώματος, γεγονός που υποδεικνύει την ανάγκη και αριθμητικής παραγωγίσης. Κλείνοντας σημειώνουμε ότι βασιστήκαμε στην πορεία εξαγωγής της εξίσωσης στις σημειώσεις του Φικιώρη [7], αν και ο παρατηρητικός αναγνώστης θα πρόσεξε ότι αυτή η μελέτη, όσο και αυτές των [1], [2] γίνονται σε χώρους που μοιάζουν καθόλα στο δικό μας, αλλά που δεν έχουν αγωγιμότητα. Όμως αξιολογώντας ξανά τα επιχειρήματά μας είναι προφανές ότι πουθενά δεν απαιτήθηκε ο κυματάριθμος να είναι πραγματικός αριθμός (που εισήχθει, αρχικά στη (2.10)). Άρα οι εξισώσεις είναι σε πλήρη ισχύ και με τη χρήση μιγαδικού κυματάριθμου.

3 Η Εξίσωση Hallén

Απλός, μαθηματικός χειρισμός των μεγεθών που συζητήσαμε παραπάνω μας δίνουν την εξίσωση του Hallén, την πιο δημοφιλή, ολοκληρωτική εξίσωση που θα αναφέρουμε σε τούτην την εργασία και την πηγή του συνόλου σχεδόν των γνώσεων που έχουμε πάνω στις γραμμικές κεραίες [2]. Αυτό που σήμερα ονομάζουμε εξίσωση του Hallén διατυπώθηκε στη δεκαετία του '30 στις ανεξάρτητες εργασίες των Hallén και King [15], [16].

Τα επιχειρήματα της προηγούμενης παραγράφου μας οδήγησαν, μεταξύ άλλων, στη σχέση (2.23). Την επαναλαμβάνουμε με ελάχιστες αλλαγές:

$$\vec{E} = \hat{z} \frac{j\omega}{k_c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_c^2 \right) A_z \quad (2.26)$$

Αντί να αντικαταστήσουμε το μαγνητικό δυναμικό από το ολοκλήρωμα επαλληλίας (2.17) χρησιμοποιούμε την οριακή συνθήκη (2.18), οπότε:

$$\frac{j\omega}{k_c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_c^2 \right) A_z = -V\delta(z) \quad (2.27)$$

ή, αναδιατάσσοντας του όρους:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_c^2 \right) A_z = \frac{jk_c^2}{\omega} V\delta(z) \quad (2.28)$$

Η (2.28) είναι μια απλή, συνήθης και γραμμική διαφορική εξίσωση, δεύτερης τάξης, οπότε λύνεται εύκολα θεωρώντας την τελική λύση ως υπέρθεση μιας γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μιας μερικής λύσης της αυτής εξίσωσης (με παρόντα δηλαδή τον όρο εξαναγκασμού). Έτσι:

$$A_z = A_{z(g)} + A_{z(p)} \quad (2.29)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στη γενική λύση και ο δεύτερος στη μερική. Επαληθεύεται εύκολα ότι αυτοί είναι [17]:

$$A_z = \frac{j}{c} (C_1 \cos(k_c z) + C_2 \sin(k_c z)) + \frac{Vk_c}{2\omega} e^{jk_c|z|} \quad (2.30)$$

όπου $c = 1/\sqrt{\epsilon_c \mu}$ είναι η ταχύτητα μετάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο μέσο με απώλειες περί της κεραίας. Εφόσον η κεραία, γεωμετρικά, είναι συμμετρική ως προς το μέσο της, την τροφοδοσία της δηλαδή και εφόσον είναι κεντρικά τροφοδοτούμενη, δηλαδή η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης είναι τοποθετημένη ακριβώς στο μέσο της, τότε το δυναμικό θα είναι άρτια συνάρτηση του z [17]. Έτσι, ο περιττός όρος στην εξίσωση (2.30), το ημίτονο δηλαδή, θα πρέπει να εξαφανιστεί, άρα $C_2 = 0$. Μετατρέποντας την εκθετική σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις και παρατηρώντας ότι το απόλυτο εντός του συνημιτόνου μπορεί να εξαλειφθεί, χάρις στην αρτιότητα της συνάρτησης, γράφουμε:

$$A_z = \frac{j}{c} \left(\cos(k_c z) \left(C_1 - \frac{jV}{2} \right) + \frac{V}{2} \sin(k_c|z|) \right) \quad (2.31)$$

ή, σε πιο συμπαγή μορφή:

$$A_z = \frac{j}{c} \left(C \cos(k_c z) + \frac{V}{2} \sin(k_c|z|) \right) \quad (2.32)$$

Η σταθερά C μπορεί να προσδιοριστεί από τις οριακές συνθήκες για το ρεύμα στα άκρα της κεραίας, συγκεκριμένα από τη σχέση (2.8). Χρησιμοποιώντας τώρα το ολοκλήρωμα επαλληλίας (2.17) παίρνουμε τη σχέση:

$$\mu \int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z - z') I(z') dz' = \frac{j}{c} \left(C \cos(k_c z) + \frac{V}{2} \sin(k_c|z|) \right) \quad (2.33)$$

και τελικά η εξίσωση Hallén γράφεται στη μορφή:

$$\int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z') I(z') dz' = C \cos(k_c z) + \frac{jV}{2\zeta_c} \sin(k_c |z|) \quad (2.34)$$

όπου $\zeta_c = \sqrt{\mu/\epsilon_c}$, είναι η κυματική αντίσταση του μέσου διάδοσης του πεδίου. Σημειώνεται ότι εμείς ακολουθήσαμε το σύγγραμμα [17] για την εξαγωγή της εξίσωσης Hallén, ωστόσο στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα οδηγείται κανείς αν αντιμετωπίσει την εξίσωση Pocklington ως διαφορική εξίσωση με ανεξάρτητη μεταβλητή ολόκληρο το ολοκλήρωμα (αυτή η ροή σκέψης ακολουθείται, για παράδειγμα στα [1], [7]).

Η εξίσωση Hallén είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση (συγκεκριμένα είναι ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους [7]), δεδομένου ότι η άγνωστη ποσότητα, το ρεύμα δηλαδή επί της κεραίας, βρίσκεται μέσα στον ολοκληρωτικό τελεστή. Σημειώνουμε ότι τούτο είναι το ολικό ρεύμα της κεραίας, όπως δείχνει η εξίσωση (2.6), όμως για κεραίες που υπόκεινται στις συνθήκες (2.2) και συγκεκριμένα στη δεύτερη, κανείς μπορεί να θεωρήσει ότι η συνεισφορά της συνιστώσας του εσωτερικού τοιχώματος του κυλίνδρου είναι αμελητέα, εκτός από μικρές περιοχές στα άκρα της κεραίας [17]. Όπως και η εξίσωση Pocklington, η εξίσωση Hallén δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά για οποιοδήποτε μήκος κεραίας πλην του απείρου². Έτσι μια τεράστια συλλογή από αριθμητικές μεθόδους αναπτύχθηκε ήδη από τη δεκαετία του '50 για να αντιμετωπιστεί. Τούτες θα μας απασχολήσουν σε όλο το υπόλοιπο της εργασίας, μετά το πέρας του παρόντος κεφαλαίου. Επίσης, και η εξίσωση Hallén είναι ακριβής για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Αυτός ο ισχυρισμός περιλαμβάνει βέβαια και την μοντελοποίηση της τροφοδοσίας. Οι King και Harisson [17] πολύ εύστοχα παρατηρούν ότι τούτο δεν εγγυάται καθόλου ότι η λύση που αποκτάται από τη (2.34) μπορεί να έχει κάποιο φυσικό νόημα, όταν η κεραία οδηγείται από κάποια ρεαλιστική πηγή (όπως μια γραμμή μεταφοράς). Στην επόμενη παράγραφο για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα συζητάμε τη συμπεριφορά του ρεύματος κοντά στην πηγή τροφοδοσίας, αλλά και στα άκρα της κεραίας.

4 Το Ρεύμα Κοντά στην Πηγή Τροφοδοσίας και στα Άκρα της Κεραίας

Στο σύγγραμμα [1] τα άκρα της κεραίας, η περιοχή κοντά στην τροφοδοσία, καθώς και πιθανές διακλαδώσεις του σύρματος (δε θα μας απασχολήσουν εδώ) αναφέρονται ως ασυνέχειες, κυρίως διότι εκεί τα ρεύματα εμφανίζουν ταχύτατα μεταβαλλόμενες και μεγάλου πλάτους (ακόμη και στα όρια της ιδιομορφίας) μη αξονικές και αξονικές συνιστώσες (υπενθυμίζουμε ότι όλη η παραπάνω ανάλυση έγινε αμελώντας οποιαδήποτε μη αξονική συνιστώσα), άρα η περαιτέρω μελέτη τους είναι μείζονος σημασίας.

Στο μοντέλο τροφοδοσίας που χρησιμοποιούμε η υπόθεση πρακτικά μηδενικού διακένου ανάμεσα στους δύο σωλήνες που αποτελούν την κεραία έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση άπειρης χωρητικότητας στην είσοδο (ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει αυτό το επιχείρημα ανατρέχοντας στον τύπο της χωρητικότητας του απλού, επίπεδου πυκνωτή). Τούτο σημαίνει ότι το ρεύμα στην είσοδο, από το νόμο του Ohm, είναι άπειρο. Αυτή η ιδιομορφία ενέχει σημαντικούς κινδύνους για τη φυσική συνέπεια του μοντέλου, δεδομένου ότι τέτοια συμπεριφορά δεν εμφανίζει καμία κεντρικά τροφοδοτούμενη κεραία της πράξης. Οι King και Wu [19] έδειξαν ότι η ιδιομορφία αυτή είναι λογαριθμική και, κυρίως ότι εκτείνεται σε πολύ μικρή περιοχή περί την τροφοδοσία. Τούτο σημαίνει ότι πλην της εξαιρετικά μικρής

²Σημειώνεται ότι όπως και η εξίσωση Pocklington, έτσι και η Hallén είναι απόλυτα ακριβής, στη μορφή που μόλις παρουσιάσαμε. Τούτο είναι ορθό όταν η κεραία βρίσκεται σε περιβάλλον χωρίς απώλειες. Στην αντίθετη περίπτωση, που είναι το αντικείμενο της εργασίας, ρεύματα διαρροής υπάρχουν από την κεραία στο περιβάλλον, εντονότερα στο σώμα της κεραίας και ασθενέστερα στα άκρα. Συνεπώς, η (2.34) γίνεται προσεγγιστική σχέση. Παρόλα αυτά, σημειώνεται ότι όλα τα κλασσικά βιβλία [1], [17], [18] συνεχίζουν να την χρησιμοποιούν, με την παρατήρηση που μόλις κάναμε, μια επιλογή που θα ακολουθήσουμε.

περιοχής το υπόλοιπο ρεύμα μπορεί να αντιστοιχηθεί με το πραγματικό που μετράται πειραματικά σε μια κεραία [1]. Τούτο το εύρημα ισχυροποιεί περαιτέρω το μοντέλο που εφόσον διαθέτει ακρίβεια, φυσική αλήθεια και συνάμα απλότητα κρίνεται ως επιτυχημένο. Σημειώνεται ότι ακόμη και η ιδιομορφία δεν είναι αποτέλεσμα της υπέρ του μέτρου εξιδανίκευσης του μοντέλου αυτού καθεαυτού, αλλά της πηγής τροφοδοσίας [2], δηλαδή της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης που όπως θα δούμε παρακάτω είναι και η απλούστερη δυνατή.

Εδώ παρουσιάζουμε μια ενδιαφέρουσα απόδειξη, η οποία μπορεί να βρεθεί στο [20] σχετικά με τη λογαριθμική φύση της ασυνέχειας (πιο ενδελεχής είναι η ανάλυση που κάνει ο Wu [2]) για την περίπτωση του πολύ δημοφιλούς θεωρητικού εργαλείου, του άπειρου σωληνοειδούς διπόλου. Αρχικά, σημειώνουμε ότι κοντά στην τροφοδοσία, δηλαδή για $z \rightarrow 0$, το κύμα ρεύματος θα πρέπει να απομακρύνεται από αυτήν. Αυτή η απαίτηση μπορεί να πραγματοποιηθεί απλά με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς C , συγκεκριμένα θα πρέπει $C = V/2\zeta_c$. Τότε, το δεξί μέλος της (2.34) μετατρέπεται σε μιγαδικό εκθετικό:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{ex}}(z - z') I(z') dz' = \frac{V}{2\zeta_c} e^{jk_c|z|} \quad (2.35)$$

Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της (2.35) είναι ένα συνελικτικό ολοκλήρωμα, συνεπώς μπορεί να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά με τη βοήθεια του (χωρικού) μετασχηματισμού Fourier, συγκεκριμένα μέσω του θεωρήματος της συνέλιξης:

$$\bar{I}(\lambda)\bar{K}_{\text{ex}}(\lambda) = \frac{jk_c V}{\zeta_c} \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \quad (2.36)$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης (2.35) διαθέτει γνωστό μετασχηματισμό Fourier, αν η σταθερά a της έκφρασης $\exp(-a|z|)$, έχει θετικό πραγματικό μέρος. Αυτό οδηγεί στην απαίτηση το φανταστικό μέρος του κυματάριθμου να είναι θετικό. Τούτη η απαίτηση θα μας συνοδεύσει ως το τέλος της παρούσας εργασίας. Στη συνέχεια, το ρεύμα μπορεί να υπολογιστεί μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$I(z) = \frac{jk_c V}{\zeta_c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k_c^2 - \lambda^2) \bar{K}_{\text{ex}}(\lambda)} e^{-j\lambda z} d\lambda \quad (2.37)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του ακριβούς πυρήνα είναι γνωστός [2]:

$$\bar{K}_{\text{ex}}(\lambda) = \begin{cases} \frac{j}{4} J_0(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2}) \\ \frac{1}{2\pi} I_0(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2}) K_0(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2}) \end{cases} \quad (2.38)$$

Σημειώνουμε ότι οι δύο κλάδοι της (2.38) αποτελούν αναλυτικές επεκτάσεις ο ένας του άλλου, δηλαδή μερικές εκπροσωπήσεις μιας συνολικής συνάρτησης, που ορίζονται, με την έννοια ότι είναι αναλυτικές, σε διαφορετικά χωρία του μιγαδικού επιπέδου. Άρα, κανείς θα μπορούσε να τοποθετήσει το σύμβολο της ισότητας μεταξύ των δύο κλάδων. Επίσης σημειώνουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του ακριβούς πυρήνα είναι άρτια συνάρτηση του λ , όπως και η συνάρτηση:

$$g(\lambda) = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \quad (2.39)$$

άρα η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι, συνολικά, άρτια συνάρτηση του λ . Τότε [21] ο μετασχηματισμός Fourier με βάση το μιγαδικό εκθετικό συνδέεται πολύ απλά με το μετασχηματισμό Fourier με βάση το συνημίτονο, δηλαδή:

$$I(z) = \frac{jk_c V}{2\pi\zeta_c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k_c^2 - \lambda^2) \bar{K}_{\text{ex}}(\lambda)} e^{-j\lambda z} d\lambda = \frac{jk_c V}{\pi\zeta_c} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda z)}{(k_c^2 - \lambda^2) \bar{K}_{\text{ex}}(\lambda)} d\lambda \quad (2.40)$$

Η έκφραση των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel πρώτης και δεύτερης τάξης και μηδενικού βαθμού, που εμφανίζονται στην εξίσωση (2.38), για μεγάλα ορίσματα είναι γνωστές. Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} I_0(x) &\sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (x \rightarrow +\infty) \\ K_0(x) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad (x \rightarrow +\infty) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Με απλή αντικατάσταση αυτών στον κάτω κλάδο της (2.38) (που όπως είπαμε, λόγω αναλυτικής επέκτασης, είναι πλήρως αντιπροσωπευτικός του πυρήνα) και για $x = a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2} \sim a|\lambda|$, για $\lambda \rightarrow \infty$ καταλήγουμε στην απλή σχέση:

$$\bar{K}_{\text{ex}} \sim \frac{1}{4\pi a} \frac{1}{|\lambda|}, \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad (2.42)$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε τη (2.42) στο τρίτο μέλος της (2.40) και χρησιμοποιούμε ως κάτω άκρο ολοκλήρωσης τον αριθμό A , οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{I(z)}{B} &= \int_0^A \frac{\cos(\lambda z)}{(k_c^2 - \lambda^2) \bar{K}_{\text{ex}}(\lambda)} d\lambda \\ &+ \int_A^{+\infty} \frac{\cos(\lambda z)}{-\lambda^2 \cdot \frac{1}{4\pi a \lambda}} d\lambda \\ &+ \int_A^{+\infty} \frac{\cos(\lambda z)}{k_c^2 - \lambda^2} \left(\frac{1}{\bar{K}_{\text{ex}}(\lambda)} - 4\pi a \lambda \right) d\lambda \end{aligned} \quad (2.43)$$

Η σταθερά B χρησιμοποιήθηκε για οικονομία χώρου και είναι $B = jk_c V / \pi \zeta_c$. Η σταθερά A χρησιμοποιήθηκε για να διασφαλιστεί η σύγκλιση του δεύτερου ολοκληρώματος, ενώ έχουμε απαλλαγεί από κάθε απόλυτο παρατηρώντας ότι τα όρια ολοκλήρωσης σαφώνουν μόνο θετικούς πραγματικούς. Για $z \rightarrow 0$, παρατηρούμε ότι τόσο το πρώτο όσο και το τρίτο ολοκλήρωμα δίνουν συγκεκριμένες, αριθμητικές τιμές, συνεπώς είναι $O(1)$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα έχει παραπάνω ενδιαφέρον και γράφεται:

$$I(z) = \frac{jk_c V}{\pi \zeta_c} \int_A^\infty -4\pi a \frac{\cos(\lambda z)}{\lambda} d\lambda + O(1) = -\frac{j4k_c a V}{\zeta_c} \int_A^\infty \frac{\cos(\lambda z)}{\lambda} d\lambda + O(1) \quad (2.44)$$

Θέτουμε $y = \lambda z$, οπότε:

$$I(z) = -\frac{j4k_c a V}{\zeta_c} \int_{Az}^{+\infty} \frac{\cos(y)}{y} dy \quad (2.45)$$

Αναγνωρίζουμε το ολοκλήρωμα ως το ολοκλήρωμα συνημιτόνου $\text{Ci}(z)$, του οποίου η συμπεριφορά για μικρά ορίσματα είναι γνωστή [20], άρα:

$$I(z) = \frac{j4k_c a V}{\zeta_c} \text{Ci}(Az) + O(1) = \frac{j4k_c a V}{\zeta_c} \left(-\ln \frac{1}{|z|} + O(1) \right) + O(1), \quad z \rightarrow 0 \quad (2.46)$$

και τελικά:

$$I(z) \sim -\frac{j4k_c a V}{\zeta_c} \ln \frac{1}{|z|}, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.47)$$

Το αποτέλεσμα αυτό αφορά την άπειρη κεραία, αλλά μπορεί να γενικευτεί στην πεπερασμένη [20], ένα αρχικό παράδειγμα της χρησιμότητας της κεραίας άπειρου μήκους ως αποτελεσματικό, θεωρητικό εργαλείο. Η πιο σημαντική πληροφορία που μας δίνει η (2.47) και ουσιαστική διαφορά όταν η κεραία

βρίσκεται σε μέσο με απώλειες, είναι το γεγονός ότι λογαριθμική ιδιομορφία εμφανίζεται τόσο στο φανταστικό όσο και στο πραγματικό μέρος του ρεύματος, όπως φαίνεται από το μιγαδικό ημίτιχο k_c/ζ_c . Στην περίπτωση κενού ή χώρου με $\gamma = 0$ το ίδιο ημίτιχο είναι πραγματικό αριθμός, άρα η ιδιομορφία εμφανίζεται μόνο στο φανταστικό μέρος.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια μικρή συζήτηση σχετικά με τη συμπεριφορά του ρεύματος στα άκρα της κεραίας. Η πρώτη και ιδιαίτερα εναργής προσπάθεια θεωρητικής ανάλυσης του ρεύματος στα άκρα της κεραίας έγινε από τους Shen και Wu [22], μόλις στα 1989. Η μεγάλη συγκέντρωση ηλεκτρικού φορτίου στα άκρα της κεραίας, αποτέλεσμα της άπωσης μεταξύ ομόσημων φορτίων, που προβλέπει ο νόμος του Coulomb, επιβάλει και μια διαφορετική κατανομή ρεύματος από αυτήν σε τμήματα της κεραίας μακριά από τα άκρα (που όπως συζητήσαμε είναι ημιτονοειδής ή σωστότερα αποτελείται από ένα πεπερασμένο άθροισμα ημιτόνων [22]). Χρησιμοποιώντας εκλεπτυσμένους μαθηματικούς χειρισμούς, που δεν είναι το αντικείμενο της παρούσας εργασίας, οι συγγραφείς κατέληξαν ότι το ρεύμα στα άκρα μηδενίζεται (σε συμφωνία με τη (2.8)) ως $O(\sqrt{h-z})$. Για μια φυσική ερμηνεία του αποτελέσματος παραπέμπουμε στο κλασικό πρόβλημα του Sommerfeld, στην πρόσπτωση δηλαδή ενός επίπεδου, τυχαία πολωμένου πεδίου σε τελείως αγωγίμο ημιπίεδο. Το ρεύμα κοντά στη διεπιφάνεια αγωγού-τέλειου διηλεκτρικού (από όπου προέρχεται το πεδίο) έχει την ίδια συμπεριφορά με τη ρευματική κατανομή στην κεραία, διότι ακριβώς το άκρο της κεραίας μπορεί να αντιμετωπιστεί ως αυτή η διεπιφάνεια. Ο αναγνώστης ίσως παρατηρεί τη διαφωνία ανάμεσα στην απόδειξη των Shen και Wu [22] και τον ισχυρισμό των Πορονιέ, Dragονιέ και Djordjević [1] που αναφέραμε προηγουμένως, περί των υψηλών τιμών του ρεύματος στα άκρα της κεραίας. Πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το ρεύμα που μελετάται εδώ, όπως υποδεικνύει η σχέση (2.6), είναι το άθροισμα ενός εξωτερικού και ενός εσωτερικού ρεύματος που ρέουν στα τοιχώματα της κεραίας. Τούτα πράγματι απειρίζονται στα άκρα.

5 Μοντέλα Τροφοδοσίας

Όλα τα αποτελέσματα που έχουν δοθεί παραπάνω αφορούν ένα συγκεκριμένο μοντέλο τροφοδοσίας, τη γεννήτρια δέλτα συνάρτησης, ακολουθώντας τη ροή της εργασίας του Wu [2]. Η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης, υπενθυμίζουμε, ένα βαθμωτό δυναμικό που εφαρμόζεται σε ένα απειροστό διάκενο στο κέντρο της κεραίας, είναι η απλούστερη και πιο συχνά χρησιμοποιημένη τροφοδοσία, παρέχοντας (το τονίζουμε) ακριβή αποτελέσματα. Το γεγονός ότι είναι η απλούστερη (σε μαθηματική πολυπλοκότητα: αυτός ο ισχυρισμός μπορεί να αξιολογηθεί παρατηρώντας το δεξί μέλος της σχέσης (2.34) που οφείλεται στην πηγή) σημαίνει ότι χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερες εξιδανικεύσεις από άλλα μοντέλα. Μόλις στην προηγούμενη παράγραφο συζητήσαμε περί της λογαριθμικής ιδιομορφίας στο κέντρο της κεραίας. Ο προσεκτικός αναγνώστης ίσως παρατήρησε ακόμη ότι το δεξί μέλος της εξίσωσης (2.34) δεν παραγωγίζεται στο $z = 0$, ένα συμπέρασμα τεράστιας σημασίας, το οποίο θα αναλύσουμε ενδελεχώς στο επόμενο κεφάλαιο. Σημειώνουμε ότι η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης χρησιμοποιήθηκε στις πρωτόλειες εργασίες [15], [16] και σύντομα έγινε ιδιαίτερα δημοφιλές μοντέλο (για παράδειγμα οι Stratton και Chu [23] -ιδιαίτερα γνωστοί για τη διατύπωση των ομώνυμων εξισώσεων, που παρέχουν την άμεση ολοκλήρωση των πεδιακών μεγεθών, δηλαδή απουσία συναρτήσεων δυναμικού και άρα των ενδιάμεσων σχέσεων (1.43) και (1.44) σε διατάξεις τυχαίας γεωμετρίας, με τις πηγές στο εξωτερικό αυτής [24]- που την χρησιμοποιούν για να υπολογίσουν την αντίσταση εισόδου σε έναν άπειρο, αγωγίμο κύλινδρο κυκλικής διατομής, ελάχιστα χρόνια μετά τη διατύπωση της εξίσωσης Hallén).

Μια απλή αλλαγή στο μοντέλο της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης, είναι να διευρύνει κανείς το διάκενο μεταξύ των κυλινδρικών "άκρων", στο κέντρο της κεραίας, καθιστώντας το πεπερασμένο και λαμβάνοντας έτσι τη γεννήτρια πεπερασμένου διακένου. Τούτη προτάθηκε αρχικά από τον Infeld [25], στα 1947, με στόχο ακριβώς τη διερεύνηση της επιρροής των διακένων σε μια κεραία (δεδομένου ότι τούτο δεν είναι δυνατό με τη γεννήτρια δέλτα συνάρτησης). Είναι ενδιαφέρον να παραθέσουμε την

εξίσωση Hallén για αυτήν την περίπτωση [26]:

$$\int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z - z') I(z') dz' = C \cos(k_c z) + r_1(z) \quad (2.48)$$

όπου η σταθερά C προσδιορίζεται από τις οριακές συνθήκες για το ρεύμα στα άκρα της κεραίας και η ποσότητα $r_1(z)$ είναι:

$$r_1(z) = \begin{cases} \frac{jV}{\zeta_c k_c \Delta} (1 - \cos(k_c z)), & |z| < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{jV}{\zeta_c k_c \Delta} [\cos(k_c |z| - \frac{k_c \Delta}{2}) - \cos(k_c z)], & \frac{\Delta}{2} < |z| < h \end{cases} \quad (2.49)$$

όπου Δ είναι το εύρος του διακένου. Η (2.47) είναι ελαφρώς πιο πολύπλοκη από τη (2.34), αλλά όλη η διαφορά εστιάζεται στο δεξί μέλος των δύο εξισώσεων, πρακτικά στη z συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, όπως επιβάλλεται από την έκαστη τροφοδοσία. Πολύ εύκολα κανείς μπορεί να δείξει ότι, αν $\Delta \rightarrow 0$ τότε η (2.47) παίρνει τη γνώριμη μορφή της (2.34) (για το δεύτερο κλάδο η διαδικασία είναι τετριμμένη και απαιτεί απλώς την εφαρμογή του κανόνα De l'Hôpital μία φορά, για τον πρώτο κλάδο θα πρέπει να παρθεί και το όριο $z \rightarrow 0$, τότε το αποτέλεσμα είναι 0, και συμφωνεί με τον υπολογισμό για τον κάτω κλάδο [26]). Άρα η γεννήτρια πεπερασμένου διακένου δεν είναι παρά μια επέκταση της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης, εφόσον περιλαμβάνει την τελευταία ως οριακή περίπτωση. Σημειώνουμε επίσης ότι ενώ η (2.34) μας δίνει φυσικά αποδεκτές λύσεις για το ρεύμα επί της κεραίας (όπως συζητήσαμε και στην παραπάνω παράγραφο), η (2.47) μας δίνει αποδεκτά ρεύματα μόνο στο διάστημα $\Delta/2 < |z| < h$ [26]. Για αυτό δίνεται μια ωραία εξήγηση στην εργασία των Τατσσόγλου και Φικιώρη [26]: τα διάκενα είναι θεωρητικές εξιδανικεύσεις, αν και πολύ χρήσιμες, συμπληρώνοντας τον King [27], ο οποίος γράφει ότι σε πραγματικές κεραίες δεν υπάρχουν διάκενα απειροστού ή πεπερασμένου εύρους. Συνεπώς, η μελέτη του ρεύματος επί του διακένου στερείται φυσικού νοήματος. Για μια συλλογή δημοσιεύσεων σχετικά με τη γεννήτρια πεπερασμένου διακένου ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [26].

Αυτό που συγκρατούμε από τα μοντέλα τροφοδοσίας που έχουμε δει ως τώρα είναι το ηλεκτρικό πεδίο που αυτά διεγείρουν στο κέντρο της κεραίας (και συγκεκριμένα τη z συνιστώσα του). Σε μια πιο αφαιρετική προσέγγιση μπορούμε να αμελήσουμε την αναφορά στον τρόπο παραγωγής και να υποθέσουμε ότι ηλεκτρικό πεδίο, πολωμένο κατά τη z συνιστώσα προσπίπτει στο κέντρο της κεραίας, οπότε μια συγκεκριμένη ρευματική κατανομή παράγεται επί της κεραίας, εξαρτώμενη από τη μορφή του προσπίπτοντος πεδίου. Με άλλα λόγια, συζητάμε για μια κεραία λήψης (βέβαια, σύμφωνα με το θεώρημα της αμοιβαιότητας, τούτο δεν έχει και τόσο σημασία). Οι King, Mack και Sandler πραγματεύονται τη συγκεκριμένη διέγερση στο βιβλίο τους [28], ενώ χρησιμοποιείται και από τους Ρορονιέ, Dragονιέ και Djordjjević [1] αρκετά γενικά, ως ένα εργαλείο παρουσίασης των διαφόρων ολοκληρωτικών εξισώσεων των ευθύγραμμων, λεπτών κεραίων σύρματος. Ενώ υπάρχουν και κάποιες πιο σύγχρονες εργασίες [29], δε φαίνεται η συγκεκριμένη μέθοδος να έχει κινήσει το ενδιαφέρον. Για πληρότητα παρουσιάζουμε την εξίσωση Hallén σε αυτήν την περίπτωση:

$$\int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z - z') I(z') dz' = C \cos(k_c z) + \frac{1}{k_c} \int_0^z e_i(t) \sin(k_c(z - t)) dt \quad (2.50)$$

όπου C είναι σταθερά που προσδιορίζεται από τις οριακές συνθήκες για το ρεύμα και $e_i(t)$ είναι το z πολωμένο, προσπίπτον πεδίο.

Από την άλλη αρκετά δημοφιλές είναι το τελευταίο μοντέλο τροφοδοσίας που θα εξετάσουμε, γνωστό ως μοντέλο ισοδύναμου, μαγνητικού δακτυλιοειδούς ρεύματος. Τούτο χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Tsai [30] για να υπολογίσει αυτό καθαυτό το κοντινό και μακρινό πεδίο που παράγεται από μία τέτοια διέγερση. Το μοντέλο είναι πάλι απλό, αλλά σημαντικά συνθετότερο των μοντέλων διακένων ή του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου. Θεωρούμε ένα δακτύλιο που βρίσκεται σε επίπεδο που τέμνει

κάθετα τον άξονα συμμετρίας της κεραίας (δηλαδή τον άξονα z), με κέντρο το κέντρο της κεραίας, εσωτερική ακτίνα a (συχνά ίση με αυτήν της κεραίας [31]) και εξωτερική ακτίνα b (σαν ένα ομοαξονικό καλώδιο δηλαδή). Μέσα στο δακτύλιο ρέει μαγνητικό ρεύμα προσανατολισμένο κατά ϕ , το οποίο φυσιολογικά παράγει ηλεκτρικό πεδίο αξονικά προσανατολισμένο, δηλαδή κατά z . Για τον υπολογισμό του μαγνητικού ρεύματος δεχόμαστε ότι η πεδιακή κατανομή στο δακτύλιο αντιστοιχεί σε αυτήν μιας ομοαξονικής γραμμής απείρου μήκους που κυματοδηγεί TEM ρυθμό [30]. Το μοντέλο ισοδύναμου, μαγνητικού, δακτυλιοειδούς ρεύματος θεωρείται [32] πιο ακριβές από την πλέον συνηθισμένη γεννήτρια δέλτα συνάρτησης (δεδομένου ότι βρίσκεται πιο κοντά στις πραγματικές τροφοδοσίες, που είναι για παράδειγμα οι ομοαξονικές γραμμές) αν και μάλλον είναι το πιο πολύπλοκο από όσα συζητήσαμε. Προς αυτό, παρουσιάζουμε την εξίσωση Hallén [32]:

$$\int_{-h}^h K_{ex}(z - z', a) I(z') dz' = C \cos(k_c z) + \frac{1}{k_c} \int_0^z g(t) \sin(k_c(z - t)) dt \quad (2.51)$$

Όπως και σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις C είναι σταθερά που καθορίζεται από τις οριακές σχέσεις (2.8), $g(t)$ είναι το αξονικό πεδίο που επάγεται από το μαγνητικό ρεύμα [32]:

$$g(t) = \frac{jk_c V}{2\zeta_c \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{\exp(jk_c \sqrt{t^2 + a^2})}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{\exp(jk_c \sqrt{t^2 + b^2})}{\sqrt{t^2 + b^2}} \right] \quad (2.52)$$

Εδώ V είναι μια σταθερά ανάλογη της τάσης που οδηγεί το δακτύλιο ρεύματος. Επίσης, δεδομένου ότι το μαγνητικό ρεύμα εμφανίζει ακτινική εξάρτηση κρίθηκε σκόπιμο να εισαχθεί η ακτινική εξάρτηση και στον πυρήνα.

6 Αναλυτική Επίλυση της Εξίσωσης Hallén

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο με μια συζήτηση σχετικά με τις διάφορες προτεινόμενες αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Hallén που έγιναν, ιδιαίτερα τον προηγούμενο αιώνα, δεδομένου ότι ακόμη δεν υπήρχε ούτε η υπολογιστική ισχύς ούτε μια θεωρία που να εξηγεί πλήρως τα (ομολογουμένως ενδιαφέροντα, αλλά ιδιότροπα) αποτελέσματα αριθμητικών μεθόδων. Λόγω της εγγενούς δυσκολίας της (2.34) η πληροφορία που μπορεί να λάβει κανείς (αναλυτικά), μελετώντας μια κεραία πεπερασμένου μήκους, είναι αρκετά περιορισμένη. Όπως ήδη συζητήσαμε, αναλυτική λύση μπορεί να υπάρξει μελετώντας την εξιδανικευμένη, άπειρη κεραία και μπορούν να ληφθούν και πολλά συμπεράσματα που εφαρμόζονται στην πεπερασμένη. Ένα απλό παράδειγμα είναι η συμπεριφορά του ρεύματος της κεραίας στο κέντρο αυτής, που παρουσιάσαμε παραπάνω. Μάλιστα η (2.40) είναι πράγματι αναλυτική λύση του προβλήματος. Αν και δεν αποτελεί αναλυτική λύση της εξίσωσης Hallén, σημειώνουμε ότι στην περίπτωση της άπειρης κεραίας ο Wu [2] παρουσίασε μια λύση που αξιοποιεί αποκλειστικά της εξισώσεις Maxwell (όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 1). Παρά το επώδυνο της διαδικασίας, ο συγγραφέας κατορθώνει να πάρει, πέρα φυσικά από τις πεδιακές κατανομές στο χώρο, τις δύο συνιστώσες του ρεύματος (την εξωτερική και την εσωτερική), κάτι που όπως έχουμε συζητήσει δεν είναι δυνατό μέσω της εξίσωσης Hallén (θα πρέπει να περιοριστούμε στο συνολικό ρεύμα).

Στην παραπάνω παράγραφο οι μέθοδοι αναλυτικής λύσης, ορίζοντας την αναλυτική λύση αυστηρά ως το αποτέλεσμα ενός αλγορίθμου που δεν περιλαμβάνει καμία προσέγγιση που θα διευκόλυνε την εξαγωγή ακριβούς συμπεράσματος ούτε οποιαδήποτε αριθμητική τεχνική, έχουν εξαντληθεί! Ωστόσο κατά τη διάρκεια του 20^{ου} αιώνα, μια πλειάδα τεχνικών αναπτύχθηκαν που ενώ παραβιάζουν τον παραπάνω ορισμό (για παράδειγμα εκμεταλλεύονται πιο βολικούς, αλλά προσεγγιστικούς πυρήνες από τον ακριβή (2.16) ή περιλαμβάνουν ακόμη και επαναληπτικές τεχνικές) θα αντιμετωπιστούν ως αναλυτικές, διότι (και είναι σημαντικό και συνάμα ενδιαφέρον) την εποχή που αναπτύχθηκαν ήταν ό,τι καλύτερο μπορούσε

να έχει η επιστημονική κοινότητα για την εξαγωγή πληροφορίας για τις κεραίες που πραγματευόμαστε, ελλείψει σημαντικής υπολογιστικής ισχύος ή ακόμα και υπολογιστών.

Μια ενδιαφέρουσα συλλογή τέτοιων μεθόδων (και ταυτόχρονα μια ωραία περιδιάβαση στην εξέλιξη των κεραιών, ως την ημερομηνία συγγραφής βέβαια) δίνεται από τον King [33] στα 1967. Μέθοδοι όπως αυτές που περιγράψαμε παραπάνω είχαν αναπτυχθεί ήδη από τους King [16] και Hallén [15] κατά τη διατύπωση της εξίσωσης που φέρει το όνομα του τελευταίου. Η μέθοδος του Hallén είναι επαναληπτική, όπως είναι και η αρκετά δημοφιλής μέθοδος King-Middleton [34], [35] που αναπτύχθηκε μόλις οχτώ χρόνια μετά την αρχική δημοσίευση του Hallén (σημειώνουμε βέβαια ότι κατά το Wu [2] οι διάφορες επαναληπτικές μέθοδοι δεν έχουν μεγάλη διαφορά στα αποτελέσματά τους). Βάση αυτής της μεθόδου είναι ότι ο λόγος μεταξύ του διανυσματικού δυναμικού και του ρεύματος επί της κεραίας, οριακά έξω από την κεραία είναι σταθερός, εκτός από μια περιοχή στα άκρα αυτής (λόγω του μηδενισμού του ρεύματος και του γεγονότος ότι το δυναμικό παραμένει μικρό, αλλά μη μηδενικό) [17]. Άρα θεωρώντας τον τελεστή [2]:

$$(KI)(z) = \int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z - z') I(z') dz' \quad (2.53)$$

τον γράφουμε, με βάση την παραπάνω παρατήρηση ως:

$$(KI)(z) \approx \Psi I(z) \quad (2.54)$$

όπου Ψ είναι ένας αριθμός. Με αυτόν τον τρόπο η ολοκληρωτική εξίσωση απλοποιείται σημαντικά, εφόσον αποπλέκεται το ρεύμα από τον πυρήνα (και το ολοκλήρωμα). Οι Duncan και Hinchey [36], αφού σημειώνουν ότι όλες οι επαναληπτικές μέθοδοι περιορίζονται υπολογιστικά στις δύο με τρεις επαναλήψεις (σημειώνουμε ότι η εργασία είναι γραμμένη στα 1960) αντιπροτείνουν μια μέθοδο βασισμένη στην ανάπτυξη του ζητούμενου ρεύματος σε σειρά Fourier, με αποτέλεσμα οι άγνωστοι πλέον να καθίστανται οι συντελεστές Fourier που τελικά θα υπολογιστούν μέσω ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων (παρόμοια μέθοδο με την [36], αν και με αναποτελεσματικό τρόπο, σύμφωνα με τους συγγραφείς της, χρησιμοποιούν οι Storm [37], Zhurt [38] και Bohn [39]). Φυσικά, ο Wu έχει συνεισφορά και σε αυτό το πεδίο, με την εργασία του [40] που αξιοποιεί ολοκληρωτικές εξισώσεις Wiener-Hopf και προσπαθεί να συμπληρώσει τις υπάρχουσες τεχνικές που αποτύγχαναν για μεγάλα μήκη κεραίας (συγκεκριμένα για μήκη κεραίας μεγαλύτερα του διπλάσιου του μήκους κύματος που επιβάλλει η διέγερση). Οι μαθηματικοί χειρισμοί των Duncan και Hinchey και Wu είναι ιδιαίτερα εκλεπτυσμένοι και βέβαια έχουν επιθυμητά αποτελέσματα (και απολαυστική γραφή!), ωστόσο ο Mei [41], ήδη από τα 1965, παρουσιάζει μία συνοπτική εργασία, που επιχειρεί να λύσει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας απευθείας αριθμητική ολοκλήρωση (και μάλιστα μια διακριτοποίηση αρκετά όμοια με αυτή ύστερων τεχνικών), απόδειξη ότι το ενδιαφέρον άρχισε δειλά να μετατοπίζεται σε τεχνικές με βάση περισσότερο του ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Βέβαια, το ενδιαφέρον στις πιο παραδοσιακές μεθόδους δεν είχε ακόμη εξασθενήσει. Σε ένα από τα τελευταία έργα του King [42] παρουσιάζεται μια μέθοδος (με ορισμένα κοινά στοιχεία με τη μέθοδο King-Middleton) που στοχεύει να μετατρέψει την ολοκληρωτική σε αλγεβρικές εξισώσεις (για τις οποίες υπάρχουν εξαιρετικά αποτελεσματικά εργαλεία), εκμεταλλευόμενη τη συμπεριφορά, μεταξύ άλλων ενός διαφορετικού πυρήνα από τον ακριβή, που έχουμε συζητήσει ως τώρα, που είναι γνωστός ως προσεγγιστικός πυρήνας και που θα μας απασχολήσει εκτεταμένα στο επόμενο κεφάλαιο.

7 Βιβλιογραφία

- [1] Popović, B.D., Dragović, M.B., and Djordjević, A.R. (1982). *Analysis and Synthesis of Wire Antennas*. Research Studies Press, Chichester.
- [2] Wu, T.T. (1969). *Introduction to Linear Antennas*. In *Antenna Theory Part I*, edited by R.E.Collins and F.J.Zucker. McGraw-Hill, New York.
- [3] Beattie, C.L. (1958). Table of First 700 Zeros of Bessel Functions — $J_l(x)$ and $J'_l(x)$. *Bell System Technical Journal* 37, 689–697. doi: 10.1002/j.1538-7305.1958.tb03881.x
- [4] Τσαλαμέγκας, Ι.Α. (2017). Προβλήματα Διαδόσεως και Σκεδάσεως σε Κυλινδρικές Διατάξεις. Σημειώσεις για το μάθημα Ειδικά Θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού. Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [5] Pocklington, H.C. (1897). *Electrical Oscillations in Wire*. Cambridge Philosophical Society Proceedings, 9, 324-332.
- [6] Μπαλάνης, Κ.Α. (2005). *Κεραίες: Ανάλυση & Σχεδίαση*. Εκδόσεις Ίων, Αθήνα. Πρώτη Ελληνική Έκδοση.
- [7] Φικιώρης, Γ. (2016). Προσδιορισμός Ρεύματος σε Γραμμική Κεραία μέσω Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Σημειώσεις για το μάθημα Ασύρματες Ζεύξεις και Διάδοση. Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [8] King, R.W.P., Sandler, B., and Wu, T.T. (1969). Cylindrical Antennas Immersed in Arbitrary Homogeneous Isotropic Media. *Journal of Applied Physics* 40, 5049–5065. doi: 10.1063/1.1657353
- [9] Φικιώρης, Γ. (2004). MININEC. Σημειώσεις για το μάθημα Κεραίες. Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [10] Kao, C.C. (1969). Three-Dimensional Electromagnetic Scattering from a Circular Tube of Finite Length. *Journal of Applied Physics* 40, 4732-4740. doi: 10.1063/1.1657281
- [11] Τσαλαμέγκας, Ι.Α., και Ρουμελιώτης, Ι.Α. (2015). *Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Τόμος Α': Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία & Κύματα*. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη. Βελτιωμένη Έκδοση.
- [12] Newman, E., Schrote, M., Djordjevic, A., Popovic, B., and Dragovic, M. (1981). Some Effects of the Circumferential Polarization of Current on Thin-Wire Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 29, 815–817. doi: 10.1109/tap.1981.1142675
- [13] Ρουμελιώτης, Ι.Α. (2005). Ειδικά Θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού. Σημειώσεις για το μάθημα Ειδικά Θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [14] Σταυραράκης, Ν.Μ. (2015). *Διαφορικές Εξισώσεις: Συνήθεις και Μερικές, Θεωρία και Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*. Εκδόσεις Νικόλαος Μ. Σταυραράκης, Αθήνα.
- [15] Hallén, E. (1938). *Theoretical Investigations into the Transmitting and Receiving Qualities of Antennae*. *Nova acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis* 11, 4.

- [16] King, L.V. (1937). On the Radiation Field of a Perfectly Conducting Base Insulated Cylindrical Antenna over a Perfectly Conducting Plane Earth, and the Calculation of Radiation Resistance and Reactance. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 236, 381–422. doi: 10.1098/rsta.1937.0006
- [17] King, R.W.P., and Harrison, C.W. (1969). *Antennas and Waves: A Modern Approach*. The M.I.T. Press, Cambridge.
- [18] King, R.W.P., Smith, G.S., Owens, M., and Wu, T.T. (1981). *Antennas in Matter: Fundamentals, Theory, and Applications*. The MIT Press, Cambridge.
- [19] Wu, T.T., and King, R.W.P. (1959). Driving Point and Input Admittance of Linear Antennas. *Journal of Applied Physics* 30, 74–76. doi: 10.1063/1.1734978
- [20] Fikioris, G., Tastsoglou, I., and Bakas, O.N. (2013). Selected Asymptotic Methods with Applications to Electromagnetics and Antennas. *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics* 8, 1–207. doi: 10.2200/s00525ed1v01y201307cem031
- [21] Yip, P. (2000). Sine and Cosine Transforms. In *The Transforms and Applications Handbook*, edited by A.D.Poularikas. CRC Press, Boca Raton. Second Edition. doi: 10.1201/9781420066531
- [22] Shen, H.M., and Wu, T.T. (1989). The Universal Current Distribution Near the End of a Tubular Antenna. *Journal of Mathematical Physics* 30, 2721–2729. doi: 10.1063/1.528505
- [23] Stratton, J.A., and Chu, L.J. (1941). Steady-state solutions of electromagnetic field problems. I. Forced oscillations of a cylindrical conductor. *Journal of Applied Physics* 12, 230–235. doi: 10.1063/1.1712899
- [24] Χρυσουλίδης, Δ.Π. (2004). *Σκέδαση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων*. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη.
- [25] Infeld, L. (1947). The Influence of the Width of the Gap Upon the Theory of Antennas. *Quarterly of Applied Mathematics* 5, 113–132. doi: 10.1090/qam/21895
- [26] Tastsoglou, I., and Fikioris, G. (2013). Fundamentals of Thin-Wire Integral Equations With the Finite-Gap Generator - Part I. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 61, 5517–5526. doi: 10.1109/TAP.2013.2279423
- [27] King, R.W.P. (1955). Gap Problem in Antenna Theory. *Journal of Applied Physics* 26, 317. doi: 10.1063/1.1721985
- [28] King, R.W.P., Mack, R.B., and Sandler, S.S. (1968). *Arrays of Cylindrical Dipoles*. Cambridge University Press, New York.
- [29] Fikioris, G. (2001). The Approximate Integral Equation for a Cylindrical Scatterer Has no Solution. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 15, 1153–1159. doi: 10.1163/156939301X01075
- [30] Tsai, L.L. (1972). A Numerical Solution for the Near and Far Fields of an Annular Ring of Magnetic Current. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 20, 569–576. doi: 10.1109/TAP.1972.1140283

- [31] Ταστσόγλου, Ι.Π. (2014). Θεμελιώδεις Ιδιότητες των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Hallén και Pocklington σε Γραμμικές Κεραίες Τροφοδοτούμενες Μέσω Διακένων. Διδακτορική Διατριβή. Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [32] Fikioris, G., Lionas, J., and Lioutas, C.G. (2003). The Use of the Frill Generator in Thin-Wire Integral Equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *51*, 1847–1854. doi: 10.1109/TAP.2003.815412
- [33] King, R.W.P. (1967). The Linear Antenna—Eighty Years of Progress. *Proceedings of the IEEE* *55*, 2–16. doi: 10.1109/PROC.1967.5373
- [34] King, R.W.P, and Middleton, D. (1946). The Cylindrical Antenna: Current and Impedance. *Quarterly of Applied Mathematics* *3*, 302-335.
- [35] King, R.W.P. (1956). *The Theory of Linear Antennas*. Harvard University Press.
- [36] Duncan, R.H., and Hinchey, F.A. (1960). Cylindrical Antenna Theory. *Journal of Research of the National Bureau of Standards* *64D*, 569-584.
- [37] Storm, B. (1953). *Investigations Into Modern Aerial Theory and a New Solution of Hallen’s Integral Equation for a Cylindrical Aerial*. Doctoral Dissertation, Imperial College, London.
- [38] Zhurt, H. (1950). Eine Strenge Berechnung der Dipolantennen mit Röhrformigen Querschnitt. *Frequenz*, *4*, 150.
- [39] Bohn, E.V. (1957). The Current Distribution and Input Impedance of Cylindrical Antennas. *IRE Transactions on Antennas and Propagation* *5*, 343–348. doi: 10.1109/TAP.1957.1144529.
- [40] Wu, T.T. (1961). Theory of the Dipole Antenna and the Two-Wire Transmission Line. *Journal of Mathematical Physics* *2*, 550-574. doi: 10.1063/1.1703740
- [41] Mei, K.K. (1965). On the Integral Equations of Thin Wire Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *AP-13*, 374–378. doi: 10.1109/TAP.1965.1138432
- [42] King, R.W.P., Fikioris, G.J., and Mack, R.B. (2002). *Cylindrical Antennas and Arrays*. Cambridge University Press. New York.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Hallén

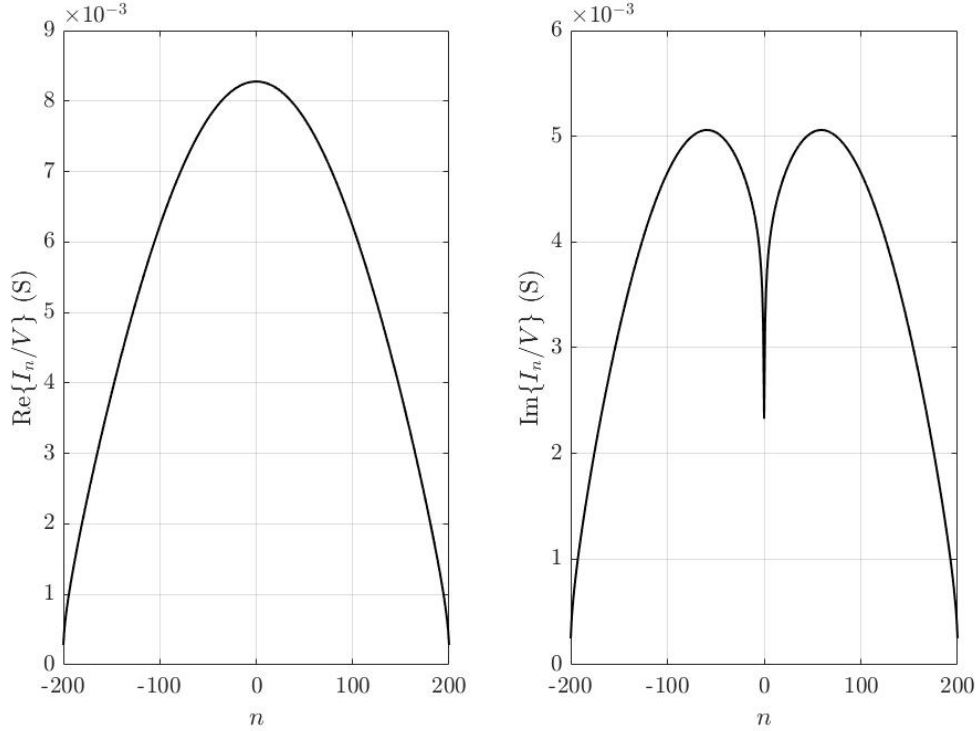
Στο τελευταίο κεφάλαιο χρησιμοποιήσαμε συχνά τις εκφράσεις "ακριβής"³ και "αναλυτική" σε σχέσεις ή τεχνικές που παρουσιάσαμε. Τα επίθετα αυτά έχουν θετικό πρόσημο όχι μόνο στον Ηλεκτρομαγνητισμό, αλλά πρακτικά σε κάθε τομέα της επιστήμης. Το πρώτο επίθετο περιγράφει το πιο επιθυμητό χαρακτηριστικό της μοντελοποίησης ενός προβλήματος: απόλυτη αντιστοιχία με τη φυσική πραγματικότητα. Το δεύτερο είναι ένα από τα πιο επιθυμητά, μαθηματικά χαρακτηριστικά των ποσοτήτων που διαχειριζόμαστε: υποδεικνύει πολύ καλή συμπεριφορά (ευνοϊκή δηλαδή για πλειάδα μαθηματικών τεχνικών). Συχνά, συγχέεται ο πρώτος όρος με το δεύτερο. Ο Pozar [1], πολύ σοφά, σημειώνει ότι οι αναλυτικές λύσεις, συνήθως περιέχουν σημαντικές απλοποιήσεις του αρχικού προβλήματος, προσεγγίσεις στην ακριβή λύση του. Άρα αυτές οι λύσεις (και κατ' επέκταση οι μέθοδοι που τις παράγουν) εμφανίζουν σφάλματα. Οι μέθοδοι που σταχυολογήσαμε στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου 2 υπάγονται σε αυτήν την κατηγορία: είναι αναλυτικές, αλλά προσεγγιστικές. Μπορεί μέχρι τη δεκαετία του 1960 να ήταν μονόδρομος, όμως μετά τη δημοσίευση του Mei [2] και τη σταδιακή αύξηση της υπολογιστικής δύναμης που είχε διαθέσιμη ο κάθε επιστήμονας μια νέα κατηγορία μεθόδων και λύσεων έγινε διαθέσιμη που μπορεί να μη διέθετε αναλυτικές λύσεις, αλλά σημαντικά μικρότερα σφάλματα που τελικά είναι και το ζητούμενο. Δεν είναι άλλες από τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης, μεθόδους ειδικά σχεδιασμένες για εφαρμογή από υπολογιστικό σύστημα που αποτελούν πεμπτούσια του σύγχρονου (αν και ο συγκεκριμένος τομέας δε θα μπορούσε παρά και μόνο να είναι σύγχρονος) Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού. Στη βιβλιογραφία ο αναγνώστης μπορεί να συναντήσει μια τεράστια ποικιλία από αριθμητικές μεθόδους, αδιαμφισβήτητα η κάθε μία με τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Αν πρέπει να αναφέρουμε οπωσδήποτε κάποιες ορισμένες οικογένειες τέτοιων μεθόδων δε θα πρέπει να παραλείψουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με σημαντικές συνεισφορές από τον Courant [3] και τον Αργύρη [4] (και αρκετά νωρίς: στα 1943 και 1954 αντιστοίχως!), τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών του Yee [5] στα 1966 και φυσικά τη μέθοδο των ροπών του Harrington [6] στα 1968 (μια ειδική κατηγορία αυτής της μεθόδου, η μέθοδος Galerkin, που θα χρησιμοποιήσουμε εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο, ήταν γνωστή στη Σοβιετική Ένωση, από τον ομώνυμο μηχανικό, ήδη από τη δεκαετία του 1920 [7]).

1 Ο Προσεγγιστικός Πυρήνας

Η μέθοδος των ροπών μέσα σε λίγα χρόνια από το κλασικό βιβλίο του Harrington [6] έγινε πιθανότατα το πιο δημοφιλές εργαλείο στη μελέτη και ανάλυση κεραιών λεπτού σύρματος όπως αυτών που συζητήσαμε στο κεφάλαιο 2 (αλλά και πολύ γενικότερων αυτών). Ο αναγνώστης μπορεί να βρει έναν τεράστιο αριθμό εργασιών που συζητάνε τις λεπτομέρειες της μεθόδου, τρόπους βελτιστοποίησης της σύγκλισης ή ελαχιστοποίησης των υπολογιστικών απαιτήσεων, όλες βασισμένες στο παράδειγμα της επίλυσης της εξίσωσης Hallén (και Rocklington). Η μέθοδος εφαρμοζόταν δηλαδή στην εξίσωση (2.34) του προηγούμενου κεφαλαίου; Η απάντηση είναι όχι ακριβώς. Ο ακριβής πυρήνας, όπως φαίνεται από τη σχέση (2.16), είναι ένα ολοκλήρωμα, συνεπώς χρειάζεται διπλή αριθμητική ολοκλήρωση, που για τις δεκαετίες του 60', του 70' ακόμη και του '80 ήταν μια σχεδόν απαγορευτική απαίτηση. Παράλληλα η λογαριθμική ιδιομορφία (σχέση (2.47)) χρειαζόταν ιδιαίτερους χειρισμούς για την εξαγωγή ρεαλιστικών αριθμητικών αποτελεσμάτων (πλέον και τα δύο προβλήματα είναι τετριμμένα). Συνεπώς, μια εύλογη

³Εδώ δε χρησιμοποιούμε την έννοια "ακρίβεια", όπως στο κεφάλαιο 2 για την περιγραφή του ακριβούς πυρήνα. Εκεί "ακρίβεια" ήταν η εξαγωγή αποτελέσματος μόνο με βάση τις υποθέσεις του μοντέλου, δίχως άλλη προσέγγιση δηλαδή. Εδώ "ακρίβεια" είναι η ύπαρξη μηδαμινού σφάλματος ως προς τη φυσικά μετρούμενη ποσότητα.

προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε, για την επίλυση των υπολογιστικών δυσκολιών του ακριβούς πυρήνα, η οποία χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα. Ο προσεγγιστικός (επίσης συναντάται ως ελαττωμένος ή



Σχήμα 3.1: Το πραγματικό και φανταστικό μέρος του ρεύματος επί κεραίας εντός κενού με $h = 0.25\lambda$, $a = 0.007022\lambda$ και $N = 200$, όπως προκύπτει από την επίλυση της ακριβούς εξίσωσης Hallén. Η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης θεωρείται ότι εφαρμόζει μοναδιαίο βαθμωτό δυναμικό (δηλαδή $V = 1$), άρα οι άνωθεν κυματομορφές είναι συνάμα και κυματομορφές αγωγιμότητας της κεραίας.

λεπτού σύρματος στη βιβλιογραφία) πυρήνας είναι και ο πιο δημοφιλής για χρήση στη μέθοδο των ροπών. Η χρήση του είναι αποκλειστική σε λεπτές κεραίες σύρματος (εξ ου και η εναλλακτική ονομασία) και ισοδυναμεί με την εξής προσέγγιση: θεωρείται ότι το σύνολο της ρευματικής κατανομής επί της κεραίας βρίσκεται επί του άξονα της κεραίας (σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση του z). Τούτο προφανώς ενέχει σφάλματα: έχουμε συζητήσει ότι στο μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου το ρεύμα της κεραίας είναι επιφανειακό και ρέει στο εσωτερικό και το εξωτερικό του σωλήνα, σίγουρα όχι νηματοειδές. Όπως θα γίνει σαφές στη συνέχεια, παρόλ' αυτά, τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι πολύ καλά. Ο προσεγγιστικός πυρήνας έχει πολύ απλή έκφραση:

$$K_{\text{ap}}(z - z') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk_c \sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} \quad (3.1)$$

Οι εξισώσεις Pocklington και Hallén ισχύουν πλήρως: απλά αντικαθιστούμε όπου K_{ex} το K_{ap} , για ευκολία επαναλαμβάνουμε εδώ την τελευταία:

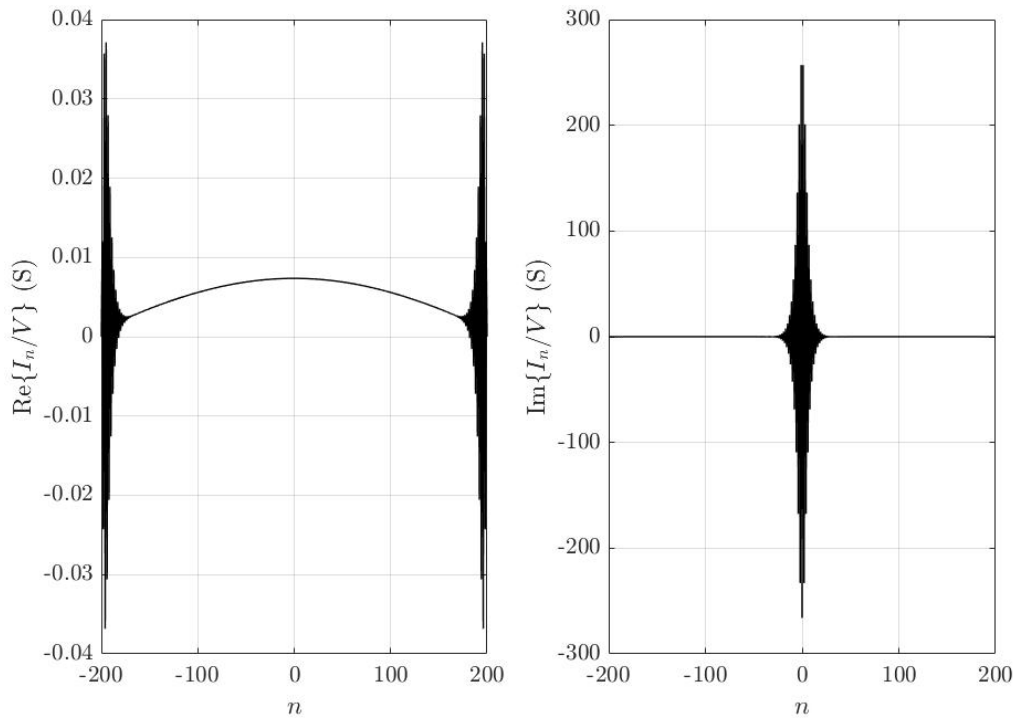
$$\int_{-h}^h K_{\text{ap}}(z - z') I(z') dz' = C \cos(k_c z) + \frac{jV}{2\zeta} \sin(k_c |z|) \quad (3.2)$$

Την ανωτέρω μορφή της εξίσωσης Hallén λύνει ο πιο διάσημος προσομοιωτής κεραιών σύρματος (και έως, ανεπίσημα, τη δεκαετία του '90 και επίσημα το 2003 τεχνολογία αποκλειστική των αμερικανικών ενόπλων δυνάμεων) το NEC (Numerical Electromagnetics Code) [8].

Όπως κάναμε φανερό, λύνουμε την παραπάνω εξίσωση με τη μέθοδο Galerkin και αναμένουμε να πάρουμε μια ρευματική κατανομή αρκετά κοντά στην πραγματικότητα (φυσικά με ορισμένο, αριθμητικό σφάλμα). Για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης παρουσιάζουμε τη ρευματική κατανομή (πραγματικό και φανταστικό μέρος) σε κεραία που περιβάλλεται από κενό (δηλαδή $\mu = \mu_0$ και $\epsilon_c = \epsilon_0$) μήκους $2h = \lambda/2$, μια εξαιρετικά δημοφιλής επιλογή, λόγω του ότι παρέχει αντίσταση εισόδου 73Ω , άρα απευθείας προσαρμογή για συνήθεις τροφοδοσίες, όπως γραμμές μεταφοράς 75Ω [13], και ακτίνας $a = 0.007022\lambda$ (τούτη η επιλογή δεν έχει κάτι εξαιρετικό, αλλά ήταν η επιλογή ακτίνας κεραίας των επιδραστικών πειραμάτων του Mack [9]), όπως προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης Hallén με τη χρήση του ακριβούς πυρήνα και με μια μέθοδο Galerkin με $N = 200$ συναρτήσεις βάσεις (που είναι τετραγωνικοί παλμοί: στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνουμε πιο αναλυτικοί επί της μεθόδου Galerkin). Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται το ρεύμα επί της κεραίας, όπως είναι στην πραγματικότητα (σωστότερα πολύ κοντά της).

Είναι εμφανής ο ισχυρισμός των Shen και Wu [10]: το ρεύμα (τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος του) δεν είναι παρά μια ημιτονοειδής συνάρτηση. Η απότομη βύθιση στο φανταστικό μέρος, κοντά στην τροφοδοσία (που θα είναι πάντα η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης) οφείλεται στη λογαριθμική ιδιομορφία του ακριβούς πυρήνα και είναι απόλυτα αναμενόμενη (στην πραγματικότητα καμία τροφοδοσία δεν προκαλεί τέτοια συμπεριφορά). Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζουμε τη ρευματική κατανομή, όπως δίνεται λύνοντας με την ίδια μέθοδο Galerkin την ίδια εξίσωση, για την ίδια κεραία, αλλά χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό πυρήνα.

Τα αποτελέσματα φαίνονται απογοητευτικά: μόνο τμήμα του πραγματικού μέρους έχει λογική μορφή (και ομαλή). Κατά τα άλλα παρατηρούμε ταλαντώσεις στα άκρα του πραγματικού μέρους (σημειώνεται ότι οι ίδιες ταλαντώσεις εμφανίζονται και στα άκρα του φανταστικού μέρους, ωστόσο δεν μπορούν να φανούν στη συγκεκριμένη κλίμακα) και ιδιαίτερα ισχυρές ταλαντώσεις στο κέντρο του φανταστικού. Τι συμβαίνει; Έχει λάθος ο κώδικας, η μοντελοποίηση ή η αριθμητική μέθοδος; Ή ακόμα οφείλεται σε σφάλματα του υπολογιστή; Αυτά τα ερωτήματα απασχόλησαν την επιστημονική κοινότητα για περίπου 40 χρόνια έως ότου βρέθηκε η λύση! Η σχετική αυτή καθυστέρηση οφείλεται σε δύο λόγους: αρχικά, μόλις πρόσφατα έγιναν διαθέσιμοι οι υπολογιστικοί πόροι ώστε να έχει τη δυνατότητα ένας επιστήμονας να ελέγξει πολλαπλές φορές τη μέθοδο και για διαφορετικές παραμέτρους, σε εύλογα χρονικά διαστήματα (οι παραπάνω κυματομορφές παράχθηκαν σε ενάμιση λεπτό στα 2019, αλλά θα χρειαζόταν πολύ παραπάνω 40 χρόνια πριν!). Στο ίδιο επιχείρημα συμπεριλαμβάνεται το γεγονός ότι για μικρό N , ισοδύναμα για μια χονδροειδή διακριτοποίηση του προβλήματος, το πρόβλημα δεν εμφανίζεται ισχυρά. Η δυνατότητα να χρησιμοποιήσει κανείς 200 συναρτήσεις βάσεις, όπως στην προσομοίωσή μας, ήταν μια δυνατότητα της δεκαετίας του '90 και έπειτα. Κατά δεύτερον, παρά τη διόλου θελκτική μορφή, οι κυματομορφές αυτές δίνουν αποδεκτά αποτελέσματα, η ακρίβειά τους δηλαδή είναι ικανοποιητική για μια χονδροειδή εκτίμηση. Συγκεκριμένα, με τον ακριβή πυρήνα προκύπτει ότι στο σημείο τροφοδοσίας $I_{\text{ex}} = 7.75 \times 10^{-3} + j5.04 \times 10^{-3}$, ενώ με τον προσεγγιστικό $I_{\text{ap}} = 7.36 \times 10^{-3} - j2.66 \times 10^2$ με τη μεγάλη διαφορά να εστιάζεται στο φανταστικό μέρος (για μικρότερο N τούτο διορθώνεται). Μπορεί συνεπώς τα αποτελέσματα να ήταν αποδεκτά, ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, αντιμετωπίζονταν με αμηχανία, καχυποψία ή έκπληξη από τους επιστήμονες.



Σχήμα 3.2: Το πραγματικό και φανταστικό μέρος του ρεύματος επί κεραίας εντός κενού με $h = 0.25\lambda$, $a = 0.007022\lambda$ και $N = 200$, όπως προκύπτει από την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén. Η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης θεωρείται ότι εφαρμόζει μοναδιαίο βαθμωτό δυναμικό (δηλαδή $V = 1$), άρα οι άνωθεν κυματομορφές είναι συνάμα και κυματομορφές αγωγιμότητας της κεραίας.

2 Η Αντιμετώπιση των Αφύσικων Ταλαντώσεων από την Επιστημονική Κοινότητα.

Εφόσον δεν υπήρχε κάποια πειστική τεκμηρίωση για τη συμπεριφορά που μόλις παρουσιάσαμε, δεν υπήρχε και μια μεθοδική, κοινή αντιμετώπιση από τους επιστήμονες που ασχολούνταν με το ζήτημα. Υπογραμμίζουμε ότι η εξίσωση Hallén βρισκόταν και βρίσκεται σε κάθε εισαγωγικό βιβλίο σχετικό με κεραίες και δεδομένης της δημοφιλίας του προσεγγιστικού πυρήνα, ο κάθε συγγραφέας θα ήταν αναγκασμένος να αναφερθεί σε αυτόν, αλλά και στην ενδεικνυόμενη μέθοδο επίλυσης (που είναι κατάλληλη μέθοδος ροπών). Σε τούτη την παράγραφο θα συλλέξουμε διάφορα εκπαιδευτικά βιβλία, αλλά και δημοσιεύσεις που καταπιάνονται άμεσα ή έμμεσα με το θέμα και θα παρουσιάσουμε ιστορικά τις διάφορες αντιλήψεις που είχαν, μέχρι την ανακάλυψη της τελικής λύσης, κορυφαίοι επιστήμονες στο χώρο των Κεραίων, του Ηλεκτρομαγνητισμού και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών γενικότερα. Τούτες θα σταχυολογηθούν ως προς τη "συγγενεία" τους, δηλαδή την ομοιότητα στην αντιμετώπισή τους, ενώ θα παρουσιαστούν σύντομες ανασκευές για κάθε ζήτημα.

Έτσι, μια μεγάλη κατηγορία βιβλίων, απλά παραλείπει να αναφερθεί στην παρουσία του οποιοδήποτε προβλήματος σχετικά με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Στη διεθνή βιβλιογραφία οι Wang [11], Tesche, Ianoz και Karlsson [12] και στην ελληνική ο Μπαλάνης [13] (φυσικά το διάσημο σύγγραμμα, μάλ-

λον ανήκει περισσότερο στη διεθνή βιβλιογραφία) και οι Καψάλης και Κωττής [14] δεν κάνουν κάποια αναφορά. Στο ίδιο μήκος κύματος και το βιβλίο του Booton [15], το οποίο δεν αναφέρεται σε κάποιο πρόβλημα, ωστόσο ενθαρρύνει τον αναγνώστη να υπολογίσει τις κυματομορφές ρεύματος επί κεραίας, με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα και να πειραματιστεί, αυξανοντας το N και μελετώντας τη σύγκλιση. Ο αναγνώστης σαφέστατα θα παρατηρήσει ταλαντώσεις από μια τιμή του N και έπειτα. Η συγκεκριμένη άσκηση όπως είναι δοσμένη και εφόσον δεν παρέχεται θεωρητικό υπόβαθρο στο βιβλίο, μπορεί να είναι παραπλανητική: απλή μελέτη της ρευματικής κατανομής θα οδηγήσει σε ισχυρότερες (και φυσικά πυκνότερες) ταλαντώσεις αυξανόμενου του N , που φυσικά δεν οδηγεί σε κανένα συμπέρασμα σχετικά με τη σύγκλιση της μεθόδου. Θα ήταν πιο αποτελεσματικό να μελετούνταν η συμπεριφορά του σχετικού σφάλματος μεταξύ της λύσης με τον ακριβή και το προσεγγιστικό πυρήνα αυξανόμενου του N . Τότε πράγματι θα παρατηρούνταν μείωση του σφάλματος, άρα σύγκλιση. Σημειώνεται, ωστόσο ότι ο επίδοξος λύτης θα εξήγε δυσάρεστα αποτελέσματα δεδομένου ότι εξισώσεις σαν την (3.2), δηλαδή ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm πρώτου είδους με αναλυτικό πυρήνα, παρουσιάζουν ιδιαίτερα υψηλούς δείκτες κατάστασης, δηλαδή είναι ευαίσθητες σε αριθμητικά σφάλματα, με πιο χαρακτηριστικό το σφάλμα στρογγυλοποίησης που εισάγει κάθε υπολογιστής πεπερασμένου μήκους λέξης [16] (για την αύξηση του δείκτη κατάστασης⁴ για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχουν αναφερθεί οι Mittra και Klein [17] ήδη από τα 1975 και συγκεκριμένα για μια σχέση της μορφής $\text{cond}(A) \sim \exp N$, όπου $\text{cond}(A)$ ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A που επαληθεύεται και αριθμητικά [18]). Συνεπώς, μετά από ένα σημείο το σχετικό σφάλμα θα αυξανόταν και ο αναγνώστης δε θα είχε κάποια πειστική απάντηση (εφόσον δεν παρέχεται ικανό θεωρητικό υπόβαθρο): η μέθοδος αποτυγχάνει ή είναι σφάλμα του υπολογιστή; Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, παραθέτουμε τα βιβλία των Davidson [19] και Garg [20] τα οποία υιοθετούν μια αρκετά όμοια παρουσίαση του ζητήματος, με απουσία αναφοράς στο επίμαχο σημείο. Παραθέτουν και οι δύο γραφήματα του μέτρου της ρευματικής κατανομής, όπως προκύπτει από την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén με τη χρήση μιας μεθόδου ροπών. Τούτα δεν είναι ιδιαίτερα ενδεικτικά: πράγματι, αν κανείς επιλέξει την πολική μορφή αναπαράστασης του (μικαδικού) ρεύματος θα λάβει ομαλές κυματομορφές μέτρου, ακόμη και για υψηλότερα N από αυτά των συγγραφέων. Οι ταλαντώσεις (στα άκρα και στο κέντρο) θα εμφανιστούν τώρα στο διάγραμμα φάσης του ρεύματος (ένα πάρα πολύ ενδιαφέρον, παρόμοιο αποτέλεσμα έλαβε ο Richmond [21] μόλις στα 1965, πριν την αυστηρή διατύπωση των μεθόδων των ροπών και ακολουθώντας, φυσικά, άλλη μέθοδο). Συνεπώς η παρουσίαση των βιβλίων [19], [20] είναι ελλιπής.

Άλλοι συγγραφείς επέλεξαν να κάνουν μία νύξη στη συμπεριφορά αυτή των λύσεων, χαρακτηρίζοντάς τες (αρνητικά) και περιγράφοντας ορισμένες συνθήκες κάτω από τις οποίες εκδηλώνονται οι ταλαντώσεις ή τα αποτελέσματα είναι (ως προς την ακρίβεια) ικανοποιητικά, συχνά σωστές. Η κριτική που θα διατυπωθεί ενάντια σε αυτούς τους χαρακτηρισμούς δεν είναι φιλολογικός ενδιαφέροντος: κάθε χαρακτηρισμός μπορεί να αποδομηθεί με αυστηρά επιχειρήματα. Συχνά, οι αφύσικες ταλαντώσεις που εμφανίζονται στο Σχήμα 3.2, χαρακτηρίζονται ως λανθασμένη συμπεριφορά [17], [22], [23], [24], [25]. Όπως συζητήσαμε, το βιβλίο [17] βρίσκει σωστά τη συμπεριφορά του δείκτη κατάστασης και ακόμα εντοπίζει το πρόβλημα στην ταυτόχρονη ύπαρξη του προσεγγιστικού πυρήνα και της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης που είναι μια πολύ σωστή κατεύθυνση. Αντίστοιχα, ο Booton [23] παρατηρεί ότι οι ταλαντώσεις εκδηλώνονται για πυκνή διακριτοποίηση (υψηλό N), αλλά τόσο αυτός όσο και οι Mittra-Klein [17] αναφέρονται στην αστάθεια των αριθμητικών, ταλαντούμενων λύσεων της εξίσωσης Hallén. Η ταλαντωτική συμπεριφορά των λύσεων δεν είναι λανθασμένη: είναι φυσιολογική συνέπεια του γεγονότος ότι η εξίσωση (3.2) είναι μη επιλύσιμη, άρα προφανώς θα εκδηλώνεται με κάποιον τρόπο αυτή η ιδιότητα (θα αφιερώσουμε την επόμενη παράγραφο στη μη επιλυσιμότητα, οπότε περιοριζόμαστε στον ισχυρισμό αυτό). Οι λύσεις, επίσης δεν είναι επηρεάζονται ισχυρά από σφάλματα στρογγυλοποίησης ή

⁴Ο δείκτης κατάστασης είναι ένα ποσοτικό μέτρο ευστάθειας ενός γραμμικού συστήματος, υποδεικνύει τη μεταβολή που θα υποστεί ένα πίνακας εάν οι τιμές των στοιχείων του μετατοπιστούν ελαφρώς.

σφάλματα αριθμητικών τεχνικών ⁵: πράγματι οι δείκτες κατάστασης είναι υψηλοί, ωστόσο υπάρχει ένα αριθμητικό παράθυρο στο οποίο μπορούν να γίνουν ακριβείς υπολογισμοί, ευσταθώς· έπειτα το σφάλμα στρογγυλοποίησης ενισχύεται σημαντικά και δεν είναι δυνατό να γίνει ανάλυση. Ακριβώς στο σφάλμα στρογγυλοποίησης και τους υψηλούς δείκτες κατάστασης αποδίδεται το πρόβλημα στην εργασία [27]. Ωστόσο ακόμη και αν διαθέταμε έναν ιδανικό υπολογιστή, με άπειρο μήκος λέξης, άρα και μηδενικά σφάλματα στρογγυλοποίησης, ακόμη αν θεωρούσαμε ότι οι προσεγγιστικές, αριθμητικές ολοκληρώσεις ήταν επίσης δίχως σφάλματα, ταλαντώσεις θα υπήρχαν, εφόσον η εξίσωση που προσεγγίζουμε συνεχίζει να μην επιλύεται. Διαφορετικής υφής λανθασμένος χαρακτηρισμός είναι αυτός του βιβλίου των Peterson, Ray και Mittra [28]: θεωρούν τις λύσεις (τις ταλαντώσεις τους πιο συγκεκριμένα) ακανόνιστες. Αυτό είναι αμύσημο, αλλά σε κάθε περίπτωση μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για τις ταλαντώσεις στο κέντρο της κεραίας διαθέτουμε πλέον έναν (ασυμπτωτικό) τύπο που τις προβλέπει με ικανοποιητική ακρίβεια. Παρά τις λανθασμένες κρίσεις αρχίζουν να διαφαίνονται σημαντικές παράμετροι στο πρόβλημα, πέρα από την προφανή, το N . Έτσι βλέπουμε να αποδίδεται σημασία στο εύρος των παλμών που χρησιμοποιούνται [27] (το οποίο θα συμβολίζουμε ως z_0) ή τις γεωμετρικές διαστάσεις της κεραίας (για παράδειγμα σημειώνεται [28] ότι τα αποτελέσματα της αριθμητικής μεθόδου είναι πράγματι αρκετά ακριβή, αν $h/a \geq 10$). Με παρόμοια συμπεράσματα ως προς τις κρίσιμες παραμέτρους φαίνονται οι εργασίες [22], που αναφέρεται ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου z_0/a εμφανίζονται ταλαντώσεις (αυτή είναι μια αρκετά εύστοχη επιλογή παραμέτρου, αν και επαναλαμβάνουμε ότι αιτία των ταλαντώσεων είναι η μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης!) και [29], όπου, αντίστοιχα απαιτείται (για καταπίεση των ταλαντώσεων) $z_0/a \geq 2$ (σημειώνεται ότι το [29] είναι μάλλον το πιο ουδέτερο από τα έργα που σταχυολογήσαμε, χαρακτηρίζοντας τις ταλαντώσεις ως οξείες, που φυσικά είναι ακριβές).

Αν και οι παραπάνω εργασίες είναι πολύ ενδιαφέρουσες (και εκτείνονται από το 1972 μέχρι το 2008!) δεν έχουν ως κύριο σκοπό να επιλύσουν και εξηγήσουν το πρόβλημα: οι προτάσεις για περιορισμό των παραμέτρων σε ορισμένες περιοχές τιμών είναι μάλλον εμπειρικές και σκοπεύουν στη γρήγορη και ακριβή εξαγωγή αποτελεσμάτων. Από τη δεκαετία του '80 και έπειτα έγιναν πιο συστηματικές προσπάθειες εξήγησης αυτού του φαινομένου. Συγκεκριμένα μία ερώτηση ταλάνιζε τους εμπλεκόμενους επιστήμονες: μήπως τελικά το πρόβλημα βρισκόταν στην εξίσωση ενδογενώς και όχι στην αριθμητική μέθοδο ή τα σφάλματα υπολογιστή; Δηλαδή, μήπως το πρόβλημα υπήρχε ακόμη και όταν χρησιμοποιούνταν ο ακριβής πυρήνας; Στα 1981 ο σπουδαίος μαθηματικός Jones δημοσίευσε μια μελέτη [30], απάντηση σε προσωπική συνομιλία με έναν επίσης ταλαντούχο επιστήμονα του κλάδου, το Sarkar, στην οποία αποδείκνυε ότι η εξίσωση (2.34) διαθέτει λύση και ότι αυτή είναι μοναδική. Σύμφωνα με τον Jones τούτες οι συνθήκες ήταν ικανές και αναγκαίες, ώστε η (2.34) να είναι μια καλώς τοποθετημένη⁶ εξίσωση. Η επιστημονική αντίθεση πήρε μεγαλύτερες διαστάσεις όταν μόλις δύο χρόνια αργότερα ο Sarkar δημοσίευσε τη διαβόητη εργασία του [32] στην οποία ανέφερε ότι, η απόδειξη του Jones είναι ελλιπής: συγκεκριμένα της λείπει μια προκείμενη. Θα έπρεπε ο τελεστής της εξίσωσης Hallén (ο K της σχέσης (2.54)) να είναι φραγμένος. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει κατά το Sarkar, άρα η εξίσωση Hallén, αντίθετα στους ισχυρισμούς του Jones, είναι κακώς τοποθετημένη. Παράλληλα, επιχειρηματολόγησε υπέρ της εξίσωσης Rocklington, ως μιας καλύτερης εναλλακτικής στην Hallén. Το συμπέρασμα αυτό επέδρασε στην επιστημονική σκέψη στη δεκαετία του '80, αλλά και πέρα από αυτήν. Για παράδειγμα, ο Booton σε δύο εργασίες του [23] και [33] ακολουθεί τον τρόπο σκέψης και παρέχει αριθμητικά αποτελέσματα για να τον στηρίξει (παρεμπιπτόντως, στη δεύτερη εντοπίζει πολύ εύστοχα ότι το πρόβλημα οφείλεται στην έλλειψη ιδιομορφίας στον προσεγγιστικό πυρήνα), όπως και οι Tijhuis,

⁵Σημειώνεται ωστόσο, και θα γίνει σαφές και αργότερα, ότι η εξίσωση Hallén με τον προσεγγιστικό πυρήνα είναι όντως σταθής, αφού είναι μη επιλύσιμη, συνεπώς τα όποια σφάλματα υπερκαλύπτονται από αυτήν την ιδιότητα [26], οι συγγραφείς που ανασκευάζουμε όμως αναφέρονται απλά στην ενίσχυση σφαλμάτων λόγω υψηλού δείκτη κατάστασης.

⁶Καλώς τοποθετημένη είναι η προσπάθεια μετάφρασης της αγγλικής ορολογίας well-posed (αντίστοιχα κακώς τοποθετημένη, ill-posed). Μια εξίσωση είναι καλώς τοποθετημένη όταν πληροί τρεις προϋποθέσεις, όπως ορίστηκαν από το Hadamard [31]: ύπαρξη λύσης, μοναδικότητα αυτής και συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα του προβλήματος. Οι δύο περιγράφονται από τον Jones [30] και με την τρίτη ασχολείται ο Sarkar [32].

Zhongqiu και Bretones [34]. Ωστόσο, στα 1992, ο μαθηματικός Rynne [35] κατέρριψε το επιχείρημα του Sarkar, αποδεικνύοντας ότι η εξίσωση Hallén δεν είναι κακώς τοποθετημένη. Άρα η αιτία των ταλαντώσεων έπρεπε να αναζητηθεί αλλού.

Βλέπουμε από την παραπάνω αναδρομή ότι μέχρι τη δεκαετία του '90 ορισμένα βασικά συμπεράσματα είχαν εξαχθεί, ενώ αδιέξοδες ιδέες είχαν αποκλειστεί, συνεπώς υπήρχαν οι βάσεις για την πλήρη εξήγηση του προβλήματος. Πριν προχωρήσουμε σε αυτήν αναφέρουμε ότι μέρος της επιστημονικής κοινότητας προσπάθησε να αποφύγει τελείως το ζήτημα του προσεγγιστικού πυρήνα. Άλλοι προσπάθησαν να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες του ακριβούς πυρήνα (για παράδειγμα [36] και [37]), ενώ άλλοι, ιδιαίτερα από τη Σοβιετική Ένωση, προσπάθησαν να μετατρέψουν την εξίσωση Hallén, που όπως έχουμε πει είναι ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους, σε ολοκληρωτική εξίσωση δεύτερου είδους, για την αντιμετώπιση της οποίας υπάρχουν πιο συστηματικά εργαλεία (για παράδειγμα [38], στο οποίο βασίζεται και ο Sarkar [32] και [39]).

Αξιοποιώντας την εμπειρία που είχε συγκεντρωθεί, οι Φικιώρης και Wu [40] μόλις στα 2001 (και 63 χρόνια μετά τη διατύπωση της εξίσωσης Hallén) έβαλαν τέρμα σε κάθε αμφιβολία γύρω από το ζήτημα των ταλαντώσεων των αριθμητικών λύσεων, στο κέντρο της τροφοδοσίας (δηλαδή του φανταστικού μέρους). Το σύνολο των επιχειρημάτων και των αντιθέσεων που προβάλλαμε παραπάνω προέρχεται από αυτό το άρθρο, στο οποίο τονίζεται ότι στη μη επιλυσιμότητα της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén οφείλεται η ύπαρξη ταλαντώσεων, μελετάται ασυμπτωτικά, κάτω από αυστηρές συνθήκες η περίπτωση της κεραίας απείρου μήκους, εξάγεται μια έκφραση για τις ταλαντώσεις της κοντά στην τροφοδοσία (αν και όπως θα δούμε, η έκφραση αποδεικνύεται εφαρμόσιμη και στην περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας) και αποδεικνύεται η ισοδυναμία των εξισώσεων Pocklington και Hallén, αναφορικά στην εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων (όπως η μέθοδος Galerkin).

Για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη σημειώνουμε ότι η ακριβής συμπεριφορά των ταλαντώσεων τα άκρα της κεραίας είναι ακόμη ανοιχτό ζήτημα.

3 Η μη Επιλυσιμότητα της Προσεγγιστικής Εξίσωσης Hallén

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε τη μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης Hallén για διάφορα μοντέλα τροφοδοσίας, τα οποία περιγράψαμε στην παράγραφο 5 του κεφαλαίου 2.

Ξεκινώντας από την πιο απλή περίπτωση, αλλά και αυτή που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια, τη γεννήτρια δέλτα συνάρτησης, σημειώνουμε πως η γνώση της μη επιλυσιμότητας της (3.2) μπορεί να βρεθεί αρκετά παλιά, στα έργα των κορυφαίων επιστημόνων του τομέα όπως ο Schelkunoff (1952) [41], ο King (1956) [42] και ο Wu (1969) [43] (αν και η ιδιότητα αυτή δεν αναφέρεται στα πιο σύγχρονα εγχειρίδια που καταγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο). Είναι πολύ απλό να επαληθεύσει κανείς τη μη επιλυσιμότητα της (3.2): ο προσεγγιστικός πυρήνας είναι εμφανώς μια αναλυτική συνάρτηση στο $z = 0$ (παρατηρήστε ότι αυτό δεν ισχύει για τον ακριβή πυρήνα, που εμφανίζει λογαριθμική ιδιομορφία) άρα και το αριστερό μέλος είναι αναλυτικό εκεί, ενώ το δεξί μέλος (η διέγερση δηλαδή) δεν είναι, για $V \neq 0$, αναλυτικό στο ίδιο σημείο, όπως επιβάλει το απόλυτο εντός του ημιτόνου. Συνεπώς, η εξίσωση δε λύνεται. Πιο αυστηρά [43], αν η ρευματική κατανομή είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή αν:

$$\int_{-h}^h |I(z)| dz < \infty \quad (3.3)$$

τότε η ρευματική κατανομή δεν μπορεί να είναι λύση της εξίσωσης Hallén⁷ (πρακτικά, οι ρευματικές κατανομές επί των κεραίων που μελετάμε είναι ομαλές συναρτήσεις, άρα σχεδόν πάντα απολύτως

⁷Μια ενδιαφέρουσα και πολύ αυστηρή απόδειξη της μη επιλυσιμότητας μιας αρκετά παρόμοιας εξίσωσης με την Hallén στην ηλεκτροστατική, δίνεται εδώ [44]. Οι συγγραφείς αποτυπώνουν το αποτέλεσμα της σε ένα θεώρημα (Θεώρημα 1) σύμφωνα με το οποίο, η εξίσωση Hallén για $V \neq 0$ δεν έχει λύση που να ανήκει στο χώρο $L^1[-h, h]$ των κατά Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων –πρακτικά αυτών που ικανοποιούν τη σχέση (3.3).

ολοκληρώσιμες). Αυτό οδηγεί και στη μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης Pocklington, εφόσον αυτή είναι ισοδύναμη με την εξίσωση Hallén. Το αποτέλεσμα, αρνητικό προφανώς, είναι οι έντονες ταλαντώσεις στη ρευματική κατανομή. Σημειώνεται τέλος, ότι πέρα από το μαθηματικό επιχείρημα που δόθηκε, κανείς μπορεί να καταλήξει στη μη επιλυσιμότητα αξιοποιώντας φυσικά επιχειρήματα: όπως συζητήσαμε η χρήση προσεγγιστικού πυρήνα ισοδυναμεί με τη θεώρηση νηματοειδούς ρεύματος επί του άξονα της κεραίας. Απαιτούμε, μέσω της εξίσωσης Hallén αυτή η πηγή να παράγει το ίδιο πεδίο σε απόσταση $\rho = a$ από τον άξονα, με επιφανειακά ρεύματα (πηγές), που περιγράφει ο ακριβής πυρήνας που βρίσκονται εκεί. Αυτό προφανώς είναι αδύνατο (σε αυτό το επιχείρημα κανείς μπορεί να εντοπίσει παραλληλισμούς με τη μέθοδο βοηθητικών πηγών, μια άλλη αριθμητική μέθοδο του Ηλεκτρομαγνητισμού [45]).

Η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης είναι μια ειδική περίπτωση της γεννήτριας πεπερασμένου διακένου, η οποία ήταν πρόσφατα αντικείμενο μελέτης των Ταστσόγλου και Φικιώρη [46], [47]. Η εξίσωση Hallén τότε παίρνει τη μορφή (2.48) με τη συνάρτηση $r_1(z)$ να δίνεται από τη σχέση (2.49) και η απόδειξη της μη επιλυσιμότητας ακολουθεί παρόμοια λογική με την περίπτωση της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης. Δεδομένου ότι το ρεύμα είναι απολύτως ολοκληρώσιμο και αφού ο πυρήνας είναι αναλυτική συνάρτηση στο κέντρο τροφοδοσίας, ισότητα δεν μπορεί να υπάρξει (άρα ούτε λύση), εφόσον το δεξί μέλος, αν και λεία συνάρτηση σε περιοχή γύρω από το $z = 0$, διαθέτει ασυνεχή δεύτερη παράγωγο στην περιοχή αυτή (η συμπεριφορά οφείλεται εξ ολοκλήρου στη συνάρτηση $r_1(z)$) [46].

Στην περίπτωση της διέγερσης μέσω πρόσπτωσης πεδίου στο κέντρο της κεραίας, τα επιχειρήματα είναι πιο πολύπλοκα. Ο Φικιώρης [48] μελέτησε την περίπτωση ενός προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου με z πόλωση, οπότε η γενικότερη μορφή της εξίσωσης Hallén (2.50) μετατρέπεται στη:

$$\int_{-h}^h K_{\text{ap}}(z - z') I(z') dz' = C \cos(kz) + \frac{j}{\zeta} V \quad (3.4)$$

Εδώ τόσο το δεξί όσο και το αριστερό μέλος είναι αναλυτικές συναρτήσεις στην αρχή του άξονα z , άρα το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Σημειώνουμε, αρχικά ότι το δεξί μέλος είναι αναλυτικό σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, άρα και επί της κεραίας (άξονας z). Ο τελευταίος ισχυρισμός εφαρμόζεται στο αριστερό μέλος; Αρχικά θα μελετήσουμε κατά πόσο μπορούμε να επεκτείνουμε αναλυτικά τα δύο μέλη (σε χωρία όπου ο z είναι μιγαδικός –στη συνέχεια το υποθέτουμε προς στιγμήν– από χωρία που ο z είναι πραγματικός).

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το αριστερό μέλος θα είναι αναλυτικό σε όλο το μιγαδικό επίπεδο πλην των κλαδικών σημείων στα $z - z' = \pm ja$. Αυτό προκύπτει στοιχειωδώς από τη συμπεριφορά της (πλειότιμης) συνάρτησης $((z - z')^2 - a^2)^{1/2}$. Επίσης, κάνουμε την –εύλογη– υπόθεση, ότι το ρεύμα είναι συνεχής συνάρτηση του (μιγαδικού αριθμού) z . Για $z' \in [-h, h]$ και:

$$f(z', z) = K_{\text{ap}}(z - z') I(z') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}} I(z') \quad (3.5)$$

παρατηρούμε ότι η ανωτέρω συνάρτηση είναι συνεχής, με συνεχή πρώτη παράγωγο (άρα λεία) ως προς z , αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο πλην των κλαδικών σημείων που προαναφέραμε και με την πρώτη παράγωγο ως προς το z να είναι ομοιόμορφα συνεχής ως προς τη μεταβλητή z' , άρα [50] το ορισμένο ολοκλήρωμα αυτής με διαδρομή ολοκλήρωσης αυτήν του z' θα είναι αναλυτική συνάρτηση του z παντού εκτός από δύο ευθύγραμμα τμήματα μήκους $2h$, παράλληλα στην κεραία και διερχόμενα από τα σημεία (αντιστοίχως) $z - z' = \pm ja$. Συνεπώς, η αναλυτική επέκταση του αριστερού μέλους είναι δυνατή, όπως και του δεξιού κατά τετριμμένο τρόπο.

Επιστρέφουμε στην αρχική θεώρηση, ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός. Για μεγάλες τιμές του z η $f(z', z)$ και άρα το αριστερό μέλος της (3.4) θα φθίνει καθώς (τουλάχιστον: εξαρτάται και από το ρευματικό συντελεστή) $1/z$, σε αντίθεση με το δεξί μέλος που, για μεγάλες τιμές του z , ταλαντώνεται. Συνεπώς, έχουμε δύο συναρτήσεις με διαφορετικές αναλυτικές επεκτάσεις πάνω στη διαδρομή

$[-h, h]$ των οποίων τα χωρία στα οποία είναι αναλυτικές ταυτίζονται πλην της περιοχής του αριστερού μέλους, που προσδιορίσαμε παραπάνω όπου αυτό δεν είναι, ενώ το δεξί, είναι αναλυτικό. Σε αυτήν την περίπτωση, εφόσον δηλαδή η τομή των δύο χωρίων είναι ένα σύνολο (ένα χωρίο) και μόνο, θα έπρεπε να υπάρχει μόνο μία πιθανή αναλυτική επέκταση [51], άρα η ύπαρξη δύο είναι άτοπη και άρα η (3.4) δεν έχει λύση. Και σε αυτήν την περίπτωση το αποτέλεσμα θα είναι ταλαντωτική συμπεριφορά των αριθμητικών λύσεων. Σημειώνεται ότι ο van Beurden [49] ασκεί ελαφριά κριτική στο [48] γράφοντας ότι για κατάλληλη επιλογή προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου, η (2.50) θα μπορούσε να έχει λύση (αν και το ερώτημα μένει στο κατά πόσο η επιλογή αυτή θα έχει φυσική αντιστοίχιση), η οποία τότε θα ήταν μοναδική.

Τέλος, θα μελετήσουμε το πιο ακριβές και το πιο πολύπλοκο μοντέλο τροφοδοσίας, το μοντέλο ισοδύναμου, δακτυλιοειδούς, μαγνητικού ρεύματος. Η απόδειξη της μη επιλυσιμότητας της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén (2.51) δόθηκε από τους Φικιώρη, Λιώνα και Λιούτα [18]. Αν και διαφορετική, η απόδειξη θα βασιστεί σε παρόμοια επιχειρήματα με την προηγούμενη απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά, ότι το ρεύμα είναι συνεχής συνάρτηση πάνω στην κεραία, μια λογική υπόθεση, όπως προαναφέραμε. Όπως και πριν υποθέτουμε ότι ο z είναι ένας μιγαδικός αριθμός και σύμφωνα με το θεώρημα περί ορισμένων ολοκληρωμάτων αναλυτικών συναρτήσεων [50] που παρουσιάσαμε παραπάνω, το αριστερό μέλος θα είναι αναλυτική συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο πλην δύο ευθύγραμμων τμημάτων μήκους $2h$, παράλληλων στον άξονα της κεραίας και τα οποία διέρχονται (αντίστοιχα) από τα σημεία $z - z' = \pm ja$. Μόλις επεκτείναμε αναλυτικά το αριστερό μέλος από πραγματικές τιμές του z σε μιγαδικές. Το δεξί μέλος, για z μιγαδικό είναι επίσης αναλυτική συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τέσσερα κλαδικά σημεία στις θέσεις $z = \pm ja$ και $z = \pm jb$. Με βάση αυτήν την περιγραφή, οι συνθήκες του θεωρήματος μοναδικότητας [51] που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση πρόσπτωσης επίπεδου κύματος ως διέγερση, πληρούνται (και στις δύο περιπτώσεις $z' \in [-h, h]$ και η τομή των χωρίων όπου τα δύο μέλη είναι αναλυτικά είναι ένα μοναδικό χωρίο). Εφόσον $b \neq a$ έχουμε δύο διαφορετικές αναλυτικές επεκτάσεις που είναι άτοπο. Άρα ούτε η (2.51) έχει λύση. Το αποτέλεσμα είναι πάλι εμφάνιση ταλαντούμενων αριθμητικών λύσεων.

Υπογραμμίζουμε ότι όλα τα επιχειρήματά μας αφορούν τις προσεγγιστικές εκδοχές (δηλαδή με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα) της εξίσωσης Hallén και της εξίσωσης Pocklington. Τα επιχειρήματα δεν εφαρμόζονται στην περίπτωση του ακριβούς και τότε η εξίσωση έχει όντως λύση.

4 Οι Εξελίξεις από το 2001 και Έπειτα

Η εργασία των Φικιώρη και Wu [40] άνοιξε το δρόμο σε ένα μεγάλο αριθμό δημοσιεύσεων που επέκτειναν και γενίκευσαν τα συμπεράσματα της αρχικής: μη επιλυσιμότητα των εξισώσεων Pocklington και Hallén και η εύρεση ενός ασυμπτωτικού τύπου (και άρα κατάλληλων συνθηκών) που περιγράφει πλήρως τις ταλαντώσεις στην τροφοδοσία μιας κεραίας απείρου μήκους. Η κεραία ήταν τελείως αγωγίμη και εντός κενού, ενώ το μοντέλο τροφοδοσίας ήταν η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης. Σημειώνουμε επίσης, ότι οι συναρτήσεις βάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στη μέθοδο Galerkin που εφαρμόστηκε ήταν τετραγωνικοί παλμοί⁸.

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι, σε ένα πρώτο στάδιο τα συμπεράσματα γενικεύτηκαν στα διάφορα μοντέλα τροφοδοσίας [46], [47], [48], [18]. Στη συνέχεια, τα συμπεράσματα επεκτάθηκαν σε μια άλλη, πολύ δημοφιλή κατηγορία κεραιών τις βροχοκεραίες (ή μαγνητικές κεραίες) [53], όπου η γενίκευση δεν είναι τετριμμένη, εφόσον για τροφοδοσία ισοδύναμου, δακτυλιοειδούς, μαγνητικού ρεύματος και πρόσπτωσης επίπεδου κύματος η αντίστοιχη εξίσωση λύνεται, συνεπώς δεν παρουσιάζονται ταλαντώσεις. Στα 2009 [54] μελετήθηκε η συμπεριφορά των συναρτήσεων βάσεις ολικού πεδίου, με παρόμοια αντιμετώπιση με το [40] και με αρκετά κοντινά αποτελέσματα (δηλαδή ταλαντώσεις στα

⁸Τέτοιες συναρτήσεις βάσεις είναι γνωστές ως συναρτήσεις βάσεις μερικού πεδίου επειδή έχουν εύρος $-h$ κάθε μία-μικρότερο του μήκους ($2h$) της κεραίας [52], διαφορετικά λέγονται συναρτήσεις βάσεις ολικού πεδίου.

άκρα και στο κέντρο του φανταστικού μέρους). Ταλαντώσεις εμφανίζονται ακόμα και όταν κανείς χρησιμοποιήσει το λεγόμενο εκτεταμένο πυρήνα, έναν απλοϊκό τρόπο να αντιμετωπιστούν, παλαιότερα και μερικώς, οι ταλαντώσεις, αλλά και να επεκταθεί η χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα σε κεραίες μεγαλύτερου πάχους, όπως αποδείχτηκε στα 2016 από τους Παπακανελλο, Πασχαλίδη και Φικιώρη [55], αν και η πιο ενδιαφέρουσα (και αρκετά πρόσφατη) εξέλιξη ήταν αδιαμφισβήτητη η περιγραφή της μεθόδου του ενεργού ρεύματος [56], [57]. Η μέθοδος αυτή, με την οποία θα ασχοληθούμε και την οποία θα εφαρμόσουμε στο κεφάλαιο 5, παρέχει έναν αρκετά απλό τρόπο επεξεργασίας του προσεγγιστικού ρεύματος με αποτέλεσμα την ολική εξάλειψη των ταλαντώσεων (ακραίων και κεντρικών) και κοντινά αποτελέσματα σε σχέση με αυτά του ακριβούς πυρήνα. Πιο πρόσφατα, στα 2018, μελετήθηκε η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Hallén στην περίπτωση που η κεραία εμφανίζει πεπερασμένη αγωγιμότητα, μέσα από το παράδειγμα των δυναμικά ανερχόμενων κεραιών νανοσωλήνων άνθρακα [58] και εφαρμόστηκε και σε αυτήν την περίπτωση και η μέθοδος του ενεργού ρεύματος [59].

Στο επόμενο κεφάλαιο θα συμπληρώσουμε αυτόν τον κατάλογο εργασιών, μελετώντας το συμπληρωματικό πρόβλημα του [58]: τι συμβαίνει όταν η κεραία είναι τελείως αγωγίμη, κεντρικά τροφοδοτούμενη με γεννήτρια δέλτα συνάρτησης, αλλά βρίσκεται σε χώρο με πεπερασμένη αγωγιμότητα;

5 Βιβλιογραφία

- [1] Pozar, D.M. (1990). Comments on "The Role of Analysis in an Age of Computers: View from the Analytical Side. *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 32, 43-44 . doi: 10.1109/74.80616
- [2] Mei, K.K. (1965). On the Integral Equations of Thin Wire Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation AP-13*, 374-378. doi: 10.1109/TAP.1965.1138432
- [3] Courant, R. (1943). Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society* 49, 1-23. doi: 10.1090/S0002-9904-1943-07818-4
- [4] Argyris, J.H. (1954). Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations Part I. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology* 26, 410-422. doi: 10.1108/eb032502
- [5] Yee, K.S. (1966). Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 14, 302-307. doi: 10.1109/TAP.1966.1138693
- [6] Harrington, R.F. (1968). *Field Computation by Moment Methods*. Macmillan, New York.
- [7] Ney, M.M. (1985). Method of Moments as Applied to Electromagnetic Problems. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques MTT-33*, 972-980. doi: 10.1109/TMTT.1985.1133158
- [8] Burke, G., and Poggio, A. (1981). *Numerical Electromagnetics Code (NEC) - Method of Moments*. Lawrence Livermore Laboratory. Διαθέσιμο εδώ: <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a956129.pdf>
- [9] King, R.W.P. (1971). *Tables of Antenna Characteristics*. Springer, New York.
- [10] Shen, H.M., and Wu, T.T. (1989). The Universal Current Distribution Near the End of a Tubular Antenna. *Journal of Mathematical Physics* 30, 2721-2729. doi: 10.1063/1.528505
- [11] Wang, J.J.H. (1991). *Generalised Moment Methods in Electromagnetics*. John Wiley and Sons, New York.
- [12] Tesche, F.M., Ianoz, M.V., and Karlsson, T. (1997). *EMC Analysis Methods and Computational Models*. John Wiley and Sons, New York
- [13] Μπαλάνης, Κ.Α. (2005). *Κεραίες: Ανάλυση & Σχεδίαση*. Εκδόσεις Ίων, Αθήνα. Πρώτη Ελληνική Έκδοση.
- [14] Καψάλης, Χ., και Κωττής, Π. (2011). *Κεραίες-Ασύρματες Ζεύξεις*. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη.
- [15] Booton, R.C. (1992). *Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves*. John Wiley and Sons, New York.
- [16] Kress, R. (1999). *Linear Integral Equations*. Springer, New York. Second Edition.

- [17] Mittra, R., and Klein, C.A. (1975). Stability and Convergence of Moment Method Solutions. In *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, edited by R.Mittra. Springer-Verlag, Berlin.
- [18] Fikioris, G., Lionas, J., and Lioutas, C.G. (2003). The Use of the Frill Generator in Thin-Wire Integral Equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *51*, 1847–1854. doi: 10.1109/TAP.2003.815412
- [19] Davidson, D.B. (2005). *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [20] Garg, R. (2008). *Analytical and Computational Methods in Electromagnetics*. Artech House, Norwood.
- [21] Richmond, J.H. (1965). Digital Computer Solutions of the Rigorous Equations for Scattering Problems. *Proceedings of the IEEE* *53*, 796-804. doi: 10.1109/PROC.1965.4057
- [22] Burke, G.J. (1980). The Numerical Electromagnetics Code (NEC). In *Applications of the Method of Moments to Electromagnetic Fields*, edited by B.J. Strait. The SCEEE Press.
- [23] Booton, R.C. (1993). A Numerical Study of the Ill-Posed Nature of Hallén’s Equation. *URSI National Radioscience Meeting*, University of Colorado, Boulder.
- [24] Bancroft, R. (1996). *Understanding Electromagnetic Scattering Using the Moment Method: A Practical Approach*. Artech House, Norwood.
- [25] Bonderson, A., Rylander, T., and Inglestrom, P. (2005). *Computational Electromagnetics*. Springer, Berlin.
- [26] Papakanellos, P.J., Fikioris, G., and Michalopoulou, A. (2010). On the Oscillations Appearing in Numerical Solutions of Solvable and Nonsolvable Integral Equations for Thin-Wire Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *58*, 1635–1644.
- [27] Taylor, C., and Wilton, D. (1972). The Extended Boundary Condition Solution of the Dipole Antenna of Revolution. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *20*, 772–776. doi: 10.1109/tap.1972.1140316
- [28] Peterson, A.S., Ray, S.L., and Mittra, R. (1998). *Computational Methods for Electromagnetics*. IEEE Press, Piscataway.
- [29] Lo, Y.T, and Lee, S.W. (1994). *Antenna Handbook. Volume I: Antenna Fundamentals and Mathematical Techniques*. Chapman and Hall, New York.
- [30] Jones, D.S. (1981). Note on the Integral Equation for a Straight Wire Antenna. *IEE Proceedings H: Microwaves Optics and Antennas* *128*, 114–116. doi: 10.1049/ip-h-1.1981.0018
- [31] Hadamard, J. (1902). *Sur les Problèmes aux Dérivées Partielles et leur Signification Physique*. Princeton University Bulletin, Princeton.
- [32] Sarkar, T.K. (1983). A Study of the Various Methods for Computing Electromagnetic Field Utilizing Thin Wire Integral Equations. *Radio Science* *18*, 29–38. doi: 10.1029/RS018i001p00029
- [33] Booton, R.C. (1994). More on the Ill-Posed Nature of Hallén’s Equation. *URSI Abstracts*, University of Colorado, Boulder.

- [34] Tijhuis, A.G., Zhongqiu, P., and Bretones, A.R. (1992). Transient Excitation of a Straight Thin-Wire Segment: a New Look at an Old Problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *40*, 1132–1146. doi: 10.1109/8.182445
- [35] Rynne, B.P. (1992). The Well-Posedness of the Integral Equations for Thin Wire Antennas. *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)* *49*, 35–44. doi: 10.1093/imamat/49.1.35
- [36] Pearson, L.W. (1975). A Separation of the Logarithmic Singularity in the Exact Kernel of the Cylindrical Antenna Integral Equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *23*, 256–258.
- [37] Butler, C.M. (1975). Evaluation of Potential Integral at Singularity of Exact Kernel in Thin-Wire Calculations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *23*, 293–295. doi: 10.1109/TAP.1975.1141028
- [38] Tikhonov, A.N., and Dmitriyev. (1968). A Method for Calculating the Current Distribution in a System of Linear Bipoles and of the Radiation Pattern in Such a System. *Universitet Vychislitey'nyy Tsent. Sobrnik Rabot*, *10*, 3-8 (translated).
- [39] Nosich, A.I. (1999). Method of Analytical Regularization in Wave-Scattering and Eigenvalue Problems: Foundations and Review of Solutions. *IEEE Antennas and Propagation Magazine* *41*, 34–39.
- [40] Fikioris, G., and Wu, T.T. (2001). On the Application of Numerical Methods to Hallén's Equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *49*, 383–392. doi: 10.1109/8.918612
- [41] Schelkunoff, A. (1952). *Advanced Antenna Theory*. Wiley, New York.
- [42] King, R.W.P. (1956). *The Theory of Linear Antennas*. Harvard University Press, Cambridge.
- [43] Wu, T.T. (1969). Introduction to Linear Antennas. In *Antenna Theory Part I*, edited by R.E.Collins and F.J.Zucker. McGraw-Hill, New Work.
- [44] Fikioris, G., Tastsoglou, I., Kolezas, G.D., and Hatziafratis, T. (2017). Unphysical Moment-Method Solutions of an Approximate Integral Equation of Electrostatics. *IEEE Antennas and Propagation Magazine* *59*, 142–153.
- [45] Andrianesis, P., and Fikioris, G. (2012). Superdirective-Type Near Fields in the Method of Auxiliary Sources. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *60*, 3056–3060. doi: 10.1109/TAP.2012.2194671
- [46] Tastsoglou, I., and Fikioris, G. (2013). Fundamentals of thin-wire integral equations with the finite-gap generator - Part I. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *61*, 5517–5526. doi:10.1109/TAP.2013.2279423
- [47] Tastsoglou, I., and Fikioris, G. (2013). Fundamentals of thin-wire integral equations with the finite-gap generator - Part II. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *61*, 5527–5532.
- [48] Fikioris, G. (2001). The Approximate Integral Equation for a Cylindrical Scatterer Has no Solution. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* *15*, 1153–1159. doi: 10.1163/156939301X01075

- [49] van Beurden, M. (2003). *Integro-Differential Equations for Electromagnetic Scattering*. Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven.
- [50] Whittaker, E.T., and Watson, N. (1927, reprinted 1992). *A Course in Modern Analysis*. Cambridge University Press, New York. Fourth Edition.
- [51] Knopp, K. (1996). *Theory of Functions, Parts I and II*. Dover, New York.
- [52] Kaklamani, D.I., and Uzunoglu, N.K. (1997). Analysis of Dielectrically Loaded Radiators Using Entire-Domain Galerkin Technique. *IEEE Antennas and Propagation Magazine* *39*, 30–53. doi: 10.1109/74.637105
- [53] Fikioris, G., Papakanellos, P.J., and Anastassiou, H.T. (2008). On the Use of Nonsingular Kernels in Certain Integral Equations for Thin-Wire Circular-Loop Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *56*, 151–157. doi: 10.1109/TAP.2007.913076
- [54] Fikioris, G., and Michalopoulou, A. (2009). On the Use of Entire-Domain Basis Functions in Galerkin mMethods Applied to Certain Integral Equations for Wire Antennas With the Approximate Kernel. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* *51*, 409–412. doi: 10.1109/TEMPC.2008.2010711
- [55] Papakanellos, P.J., Paschalidis, P., and Fikioris, G. (2016). On the Extended Thin-Wire Kernel. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *64*, 3180–3184. doi: 10.1109/TAP.2016.2555336
- [56] Papakanellos, P.J., and Fikioris, G. (2007). A Possible Remedy for the Oscillations Occurring in Thin-Wire MOM Analysis of Cylindrical Antennas. *Progress in Electromagnetics Research* *69*, 77–92. doi: 10.2528/PIER06120502
- [57] Fikioris, G., Papakanellos, P.J., Mavrogordatos, T.K., Lafkas, N., and Koulikas, D. (2011). Eliminating Unphysical Oscillations Arising in Galerkin Solutions to Classical Integral Equations of Antenna Theory: An Asymptotic study. *SIAM Journal on Applied Mathematics* *71*, 559–585. doi: 10.1137/100785727
- [58] Fikioris, G., and Papathanasopoulos, A. (2018). On the Thin-Wire Integral Equations for Carbon Nanotube Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *66*, 3567–3576. doi: 10.1109/TAP.2018.2826651
- [59] Mavrogordatos, T.K., Papathanasopoulos, A., and Fikioris, G. (2019). An Effective Current Approach for Hallén’s Equation in Center-Fed Dipole Antennas with Finite Conductivity. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *67*, 3680–3687. doi: 10.1109/TAP.2019.2902714

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Hallén: Η Περίπτωση Αγώγιμου Μέσου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη μελέτη των αριθμητικών λύσεων της εξίσωσης Hallén λεπτής κεραίας σύρματος, που βρίσκεται σε αγώγιμο μέσο (ή μέσο με απώλειες), μια μελέτη πρωτότυπη στη διεθνή βιβλιογραφία που αποτελεί επέκταση της [1]. Όπως και σε αυτήν, θα εφαρμόσουμε μια μέθοδο Galerkin τόσο στην ακριβή όσο και στην προσεγγιστική εξίσωση Hallén (σχέσεις (2.34) και (3.2) αντίστοιχα), στην περίπτωση της (πραγματικής) κεραίας πεπερασμένου μήκους, ώστε να λάβουμε αριθμητικά αποτελέσματα, αλλά και στην (εξιδανικευμένη) κεραία απείρου μήκους, στην οποία θα εφαρμόσουμε ασυμπτωτικές τεχνικές ώστε να παρουσιάσουμε μια αναλυτική έκφραση για τις εξισώσεις στο κέντρο της τροφοδοσίας. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματά μας είναι ίδια (ως προς τη μορφή τουλάχιστον – και αυτό δεν ήταν καθόλου αναμενόμενο) με αυτά της [1] με τη διαφορά ότι στις αντίστοιχες σχέσεις έχουμε πλέον μιγαδικό κυματάρημο και μιγαδική κυματική αντίσταση. Θα δούμε παρακάτω ότι αυτή η ελάσσονα διαφορά προκαλεί σημαντικές διαφορές στη συμπεριφορά του προσεγγιστικού ρεύματος, ειδικά στο πραγματικό μέρος τους.

1 Η Αριθμητική Μέθοδος στην Πεπερασμένη Κεραία

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση Hallén κεντρικά τροφοδοτούμενης από τη γεννήτρια δέλτα συνάρτησης, πλάτους V και συχνότητας ω , κεραίας λεπτού σύρματος μήκους $2h$ και ακτίνας a , σε μέσο με συντακτικές παραμέτρους $(\epsilon_0, \mu_0, \gamma)$ και υποθέτοντας αρμονική χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{-j\omega t}$.

Επαναλαμβάνουμε εδώ την εξίσωση Hallén:

$$\int_{-h}^h K(z-z') I(z') dz' = C \cos(k_c z) + \frac{jV}{2\zeta_c} \sin(k_c |z|), \quad |z| < h \quad (4.1)$$

όπου $K(z-z')$ είναι ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης και μπορεί να είναι ο ακριβής ή ο προσεγγιστικός. Θεωρούμε ότι το ρεύμα αποτελείται από δύο συνιστώσες $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h K(z-z') I^{(1)}(z') dz' &= \cos(k_c z), & |z| < h \\ \int_{-h}^h K(z-z') I^{(2)}(z') dz' &= \frac{jV}{2\zeta_c} \sin(k_c |z|), & |z| < h \end{aligned} \quad (4.2)$$

χωρίσαμε δηλαδή την (4.1) σε δύο συνιστώσες κάθε μία οφειλόμενη σε έναν από τους δύο όρους διέγερσης στο δεξί μέλος της (4.1). Εφαρμόζουμε μία μέθοδο Galerkin στα ρεύματα $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$, δηλαδή τα εκφράζουμε σαν ένα πεπερασμένο άθροισμα συναρτήσεων βάσης, όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} I^{(1)}(z) &\cong \sum_{n=-N}^N I_n^{(1)} u_n(z) \\ I^{(2)}(z) &\cong \sum_{n=-N}^N I_n^{(2)} u_n(z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Η (4.3) μας δίνει δύο σημαντικές πληροφορίες: αρχικά πετύχαμε τη διακριτοποίηση του προβλήματος. Η διακριτοποίηση είναι μια θεμελιώδης διεργασία των αριθμητικών μεθόδων, ώστε να μπορούμε να λάβουμε ικανοποιητικής ακρίβειας αποτελέσματα σε εύλογο χρόνο. Εδώ διακριτοποίησαμε την κεραία σε $2N + 1$ υπολογιστικούς κόμβους (φυσιολογικά η κεραία έχει άπειρους υπολογιστικούς, σημειακούς κόμβους). Το N , το πλήθος δηλαδή των συναρτήσεων βάσης φαίνεται μια κρίσιμη παράμετρος για το πρόβλημα: αύξησή της πυκνώνει τη διακριτοποίηση και αυξάνει εκ πρώτης όψεως την ακρίβεια, αλλά προκαλεί και την εκδήλωση ταλαντώσεων στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος επηρεάζεται κυρίως από αυτήν την παράμετρο. Η δεύτερη πληροφορία έχει να κάνει με τη σημασία των συναρτήσεων βάσης: γύρω από κάθε υπολογιστικό κόμβο n η μορφή των συναρτήσεων βάσης είναι η μορφή της ρευματικής κατανομής, διαμορφωμένη από ένα συντελεστή $I_n^{(1)}$ ή $I_n^{(2)}$. Μια εύλογη απορία, που όμως δεν έχει απάντηση είναι: ποια είναι η βέλτιστη επιλογή συναρτήσεων βάσης; Ο Bibby [2], [3] μελέτησε ενδελεχώς το ζήτημα, ωστόσο δεν κατέληξε σε κάποιο σαφές συμπέρασμα (πέρα από το ότι οι ολικού πεδίου είναι καλύτερες από τις μερικού). Έτσι μπορούμε να σταχυολογήσουμε τις πιο δημοφιλείς: τετραγωνικοί παλμοί, ημιτονοειδείς παλμοί (τέτοιιοι χρησιμοποιούνται και στο NEC [4]), τριγωνικοί (που είναι μια προσέγγιση των ημιτονοειδών) από τις μερικού πεδίου και πολυώνυμα Chebyshev ή Hermite από τις ολικού. Εμείς θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με συναρτήσεις βάσεις μερικού πεδίου και συγκεκριμένα τετραγωνικούς παλμούς, αφενός λόγω της ευκολίας της ανάλυσης αφετέρου, διότι τα αποτελέσματα δεν είναι πολύ διαφορετικά (αν και στο επόμενο κεφάλαιο θα συζητήσουμε δύο πλεονεκτήματα των ημιτονοειδών παλμών).

Οι συναρτήσεις βάσεις, με βάση τα παραπάνω, θα έχουν τη μορφή:

$$u_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } (n - 1/2)z_0 < z < (n + 1/2)z_0 \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases} \quad (4.4)$$

όπου z_0 είναι το εύρος κάθε παλμού περί του κόμβου n και, επιλέγοντας ομοιόμορφη διαμέριση, βρίσκεται:

$$z_0 = \frac{2h}{2N + 1} \quad (4.5)$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των συναρτήσεων βάσης είναι ένα ορθογώνιο σύνολο: θεωρώντας μια συνάρτηση $u_l(z)$, με l έναν ακέραιο αριθμό, το γινόμενο αυτή με τη $u_n(z)$ μπορεί να είναι 0 ή 1 ανάλογα με τη σχέση των δεικτών (συγκεκριμένα είναι 1 για $n - 1 < l < n + 1$ και 0 διαφορετικά). Με βάση αυτό μπορούμε εύκολα να φτάσουμε στην ουσιαστική διευκόλυνση που μας παρέχει η μέθοδος Galerkin: μετατροπή των ολοκληρωτικών εξισώσεων (4.2) σε σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Αυτό επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας την (4.3) στην (4.2), πολλαπλασιάζοντας με $u_l(z)$ και ολοκληρώνοντας από $z = -h$ ως $z = h$). Έτσι παίρνουμε δύο συστήματα (ένα για κάθε ρεύμα) εξισώσεων:

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} I_n^{(1)} = B_l^{(1)} \quad \text{και} \quad \sum_{n=-N}^N A_{ln} I_n^{(2)} = B_l^{(2)}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.6)$$

Τα $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά [5]:

$$B_l^{(1)} = \int_{(l-1/2)z_0}^{(l+1/2)z_0} \cos(k_c z) dz = \frac{2}{k_c} \sin(k_c z_0/2) \cos(k_c z_0 l) \quad (4.7)$$

$$B_l^{(2)} = \int_{(l-1/2)z_0}^{(l+1/2)z_0} \frac{jV}{2\zeta_c} \sin(k_c |z|) dz = \begin{cases} \frac{j8\pi V}{\zeta_c k_c} \sin^2 k_c z_0/4, & l = 0 \\ \frac{j4\pi V}{\zeta_c k_c} \sin(k_c z_0/2) \sin(k_c z_0 |l|), & l \neq 0 \end{cases}$$

Οι συντελεστές A_{ln} από την άλλη, είναι διπλά ολοκληρώματα, όμως δύο δείκτες από τους οποίους εξαρτώνται οι συντελεστές, δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Ανατρέχοντας στο επιχείρημα περί ορθογωνιότητας μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι συντελεστές δεν εξαρτώνται από τα l και n ξεχωριστά,

αλλά από την απόστασή τους, την απόλυτη διαφορά τους δηλαδή. Έτσι:

$$A_{ln} = A_{nl} = A_{|l-n|} \quad (4.8)$$

Με λίγα λόγια, αν θεωρήσουμε τους συντελεστές A σαν πίνακα, τούτος εμφανίζει πολύ θελκτικές ιδιότητες υπολογιστικά, χαρακτηριστικές της οικογένειας πινάκων στην οποία ανήκει. Οι πίνακες Toeplitz, όπως λέγονται, εμφανίζουν την ίδια τιμή σε όλα τα στοιχεία που ανήκουν στις ίδιες διαγωνίους του πίνακα, παρέχοντας έτσι έναν ιδιαίτερα ταχύ τρόπο προσέλασής τους [6]. Παράλληλα οι συντελεστές μπορούν να εκφυλιστούν (με αρκετό κόπο) σε μονά ολοκληρώματα, καθώς [1]:

$$A_l = \int_0^{z_0} (z_0 - z) [K(z + lz_0) + K(z - lz_0)] dz \quad (4.9)$$

Η υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος έγκειται στην αριθμητική ολοκλήρωση της (4.9). Είναι προφανές ότι η μορφή του πυρήνα (ακριβής ή προσεγγιστικός) καθορίζει την ταχύτητα των υπολογισμών, αφού στην πρώτη περίπτωση καλούμαστε να εφαρμόσουμε διπλή, αριθμητική ολοκλήρωση, που σε μία μέση υλοποίηση αποτελεί τροχοπέδη της ταχύτητας της προσομοίωσης (ωστόσο αποτελεσματικοί αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί για το γρήγορο υπολογισμό ρευματικών κατανομών με τον ακριβή πυρήνα, για παράδειγμα [7]). Απλή αριθμητική ολοκλήρωση αντιμετωπίζουμε όταν χρησιμοποιούμε τον προσεγγιστικό πυρήνα.

Γνωρίζοντας όλους του συντελεστές των συστημάτων εξισώσεων (4.6) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλασικές μεθόδους επίλυσης (για παράδειγμα η LU παραγοντοποίηση χρησιμοποιήθηκε με άριστα αποτελέσματα, φυσικά μέθοδοι που λαμβάνουν υπόψιν τους ότι ο πίνακας του προβλήματος είναι Toeplitz είναι γρηγορότερες). Παράλληλα μπορούμε να διακρίνουμε τη φυσική σημασία των συντελεστών B και A : οι μεν είναι συντελεστές τάσης (άρα σχηματίζουν μια μήτρα τάσης) και οι δε συντελεστές αγωγιμότητας (δηλαδή σχηματίζουν μια μήτρα αγωγιμότητας). Έτσι υπολογίζουμε τους συντελεστές $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$ οι οποίοι συνδέονται απλά με το συνολικό ρεύμα, χρησιμοποιώντας την (4.3):

$$I(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n u_n(z) = \sum_{n=-N}^N [I_n^{(2)} + CI_n^{(1)}] u_n(z) \quad (4.10)$$

οπότε απομένει να καθορίσουμε τη σταθερά C . Όπως συζητήσαμε στο κεφάλαιο 2, αυτή βρίσκεται από την οριακή συνθήκη στα άκρα της κεραίας, συγκεκριμένα απαιτούμε μηδενισμό του ρεύματος εκεί, όπως απέδειξαν οι Shen και Wu [8]. Με βάση αυτό η C βρίσκεται:

$$C = -\frac{I_N^{(2)}}{I_N^{(1)}} \quad (4.11)$$

Αυτόν τον τύπο χρησιμοποιήσαμε για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα. Για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα κανείς μπορεί απλά να επιταχύνει τη σύγκλιση χρησιμοποιώντας τον τύπο [1]:

$$C \cong -\frac{\sqrt{3}I_N^{(2)} - I_{N-1}^{(2)}}{\sqrt{3}I_N^{(1)} - I_{N-1}^{(1)}} \quad (4.12)$$

Με τον υπολογισμό της C το ρεύμα υπολογίζεται από την (4.10) και η αριθμητική μέθοδος τερματίζει. Αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου τόσο για τον προσεγγιστικό όσο και για τον ακριβή πυρήνα θα παρουσιάσουμε σε ύστερη παράγραφο.

2 Η Αριθμητική Μέθοδος στην Άπειρη Κεραία και Ασυμπτωτική Ανάλυση

Στην περίπτωση του θεωρητικού εργαλείου, της άπειρης κεραίας (κεραία άπειρου μήκους) εφαρμόζουμε την αριθμητική μέθοδο της παραπάνω παραγράφου. Πριν την εφαρμόσουμε σημειώνουμε ότι επιλέγουμε την κατάλληλη (ελαφρώς διαφορετική από ό,τι στην πεπερασμένη κεραία) μορφή της εξίσωσης Hallén [9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(z-z') I(z') dz' = \frac{V}{2\zeta_c} e^{jk_c|z|}, \quad |z| < \infty \quad (4.13)$$

Παρατηρήστε ότι η ανωτέρω εξίσωση δεν παρουσιάζει συντελεστή C εξαρτώμενο από την οριακή συνθήκη στα άκρα της κεραίας. Τούτο είναι απόλυτα λογικό, διότι η άπειρη κεραία, δε διαθέτει άκρα, άρα δεν υπάρχει κάποια οριακή συνθήκη στην περίπτωση της.

Το ρεύμα γράφεται προσεγγιστικά:

$$I^{(\infty)}(z) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^{(\infty)} u_n(z), \quad |z| < +\infty \quad (4.14)$$

όπου $I^{(\infty)}(z)$ είναι το ρεύμα επί της άπειρης κεραίας. Παρατηρούμε ότι τα άκρα άθροισης είναι $\pm\infty$, γεγονός απόλυτα φυσιολογικό, αφού θα χρειαστούμε άπειρες συναρτήσεις βάσης για την περιγραφή της κεραίας⁹.

Συνεχίζοντας τα βήματα που περιγράψαμε νωρίτερα καταλήγουμε στην:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{l-n} I_n^{(\infty)} = B_l^{(\infty)} \quad (4.15)$$

όπου $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, οι συντελεστές A_{l-n} υπολογίζονται από τη σχέση (4.9), ενώ οι συντελεστές $B_l^{(\infty)}$ μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, καθώς:

$$B_l^{(\infty)} = \frac{V}{2\zeta_c} \int_{(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \exp(jk_c|z|) dz = \begin{cases} \frac{j2V}{\zeta_c k_c} \sin^2 \frac{k_c z_0}{4} + \frac{V}{\zeta_c k_c} \sin \frac{k_c z_0}{2}, & \text{αν } l = 0; \\ \frac{V}{\zeta_c k_c} \sin \frac{k_c z_0}{2} e^{j|l|k_c z_0}, & \text{αν } l = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (4.16)$$

Άγνωστοι παραμένουν οι ρευματικοί συντελεστές $I_n^{(\infty)}$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.15) είναι μια διακριτή συνέλιξη, συνεπώς λύνεται εύκολα με τη βοήθεια σειρών Fourier (στην εργασία [1] σημειώνεται ότι συστήματα της μορφής (4.15), δηλαδή άπειρα συστήματα Toeplitz διαθέτουν λύση σε κλειστή μορφή). Προς αυτό εισάγουμε τις σειρές Fourier:

$$\bar{A}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{jl\theta}, \quad \bar{B}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l^{(\infty)} e^{jl\theta}, \quad \bar{I}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l^{(\infty)} e^{jl\theta} \quad (4.17)$$

όπου $-\pi < \theta \leq \pi$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα της συνέλιξης, οπότε:

$$\bar{A}(\theta) \bar{I}(\theta) = \bar{B}(\theta) \quad (4.18)$$

Από την (4.17) είναι εμφανές ότι οι ρευματικοί συντελεστές δεν είναι παρά οι συντελεστές (μιγαδικής σειράς) Fourier. Λύνοντας ως προς $\bar{I}(\theta)$ και εφαρμόζοντας τη σχέση αντιστροφής για τις σειρές Fourier, οπότε:

$$I_n^{(\infty)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{I}(\theta) e^{-jn\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} e^{-jn\theta} d\theta \quad (4.19)$$

⁹Το πλήθος των συναρτήσεων βάσης καθορίζεται από εμάς βάσει ενός συμβιβασμού ακρίβειας και υπολογιστικής πολυπλοκότητας, ωστόσο είναι και συνάρτηση του μήκους της κεραίας: 30 συναρτήσεις βάσης δημιουργούν μια αραιή διακριτοποίηση για κεραίες μήκους $\lambda/2$ πόσο μάλλον για μια κεραία μήκους 10 λ !

όπου αντικαταστήσαμε την (4.18), λυμένη ως προς $I(\theta)$ στην τελευταία ισότητα.

Εφόσον γνωρίζουμε τις τιμές των συντελεστών $B_l^{(\infty)}$ μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το δεύτερο άθροισμα της (4.17). Συγκεκριμένα [1]:

$$\bar{B}(\theta) = -\frac{jV}{\zeta_c} \frac{2}{k_c} \sin^2 \frac{k_c z_0}{4} \frac{\cos \frac{k_c z_0}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta + k_c z_0}{2} \sin \frac{\theta - k_c z_0}{2}} \quad (4.20)$$

Η σειρά συγκλίνει στο ανωτέρω αποτέλεσμα αν και μόνο αν $\text{Im}\{k_c\} > 0$. Αυτήν τη συνθήκη συναντήσαμε και στην απόδειξη της λογαριθμικής ιδιομορφίας του ακριβούς πυρήνα (τότε ήταν απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier). Την ίδια συνθήκη χρησιμοποιούν και οι συγγραφείς της [1] που ακολουθούμε: εκεί η απαίτηση ήταν μια απαίτηση μαθηματικής φύσης (αφού η κεραία ήταν εμβαπτισμένη στο κενό, άρα είχε αυστηρά πραγματικό κυματάριθμο), εδώ προκύπτει φυσιολογικά από το ηλεκτρομαγνητικό περιβάλλον του προβλήματος.

Πιο επίπονη είναι η διαδικασία για τον καθορισμό της $A(\theta)$. Αντικαθιστούμε την (4.9) στην πρώτη ισότητα της (4.17) και χρησιμοποιούμε τον τύπο αθροίσματος Poisson [10], οπότε:

$$\bar{A}(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} (z_0 - z) [K(z + xz_0) + K(z - xz_0)] e^{jx(\theta - 2m\pi)} dz dx \quad (4.21)$$

Με λίγη άλγεβρα η παραπάνω σχέση απλοποιείται σημαντικά:

$$\bar{A}(\theta) = z_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{K} \left(\frac{2m\pi - \theta}{z_0} \right) \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{(m\pi - \frac{\theta}{2})^2} \quad (4.22)$$

όπου $\bar{K}(\lambda)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του πυρήνα, που όπως είπαμε μπορεί να είναι είτε ο ακριβής είτε ο προσεγγιστικός. Στη σχέση (2.38) φαίνεται ο μετασχηματισμός Fourier του ακριβούς πυρήνα, αλλά εδώ θα επαναλάβουμε και τους δύο ¹⁰ [9]:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\text{ex}}(\lambda) &= \begin{cases} \frac{j}{4} J_0 \left(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2} \right) H_0^{(1)} \left(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2} \right) \\ \frac{1}{2\pi} I_0 \left(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2} \right) K_0 \left(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2} \right) \end{cases} \\ \bar{K}_{\text{ap}}(\lambda) &= \begin{cases} \frac{j}{4} H_0^{(1)} \left(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2} \right) \\ \frac{1}{2\pi} K_0 \left(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Εφόσον το πηλίκο $\bar{B}(\theta)/\bar{A}(\theta)$ είναι άρτια συνάρτηση του θ στην (4.19) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση συνημιτόνου για τους συντελεστές της (4.19), δηλαδή:

$$I_n^{(\infty)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} \cos(n\theta) d\theta \quad (4.24)$$

Από την (4.20) εύκολα φαίνεται ότι κλαδικά σημεία εμφανίζονται στις θέσεις $\theta = \pm k_c z_0$ συνεπώς η διαδρομή ολοκλήρωσης της (4.24) θα πρέπει να κάτω από το $\theta = k_c z_0$ (το δεύτερο δε βρίσκεται επί της διαδρομής, οπότε μας είναι αδιάφορο).

Αρχικά, θεωρούμε ότι $\bar{K}(\lambda) = \bar{K}_{\text{ex}}(\lambda)$. Στο όριο που το εύρος των παλμών μηδενίζεται, δηλαδή που $z_0 \rightarrow 0$, κάτι που συμβαίνει για πολύ πυκνή διακριτοποίηση (δηλαδή για $N \rightarrow \infty$) μπορούν εύκολα να

¹⁰Όπως στο κεφάλαιο 2, σημειώνουμε ότι οι δύο κλάδοι (για κάθε πυρήνα) αποτελούν αναλυτικές επεκτάσεις ο ένας του άλλου, συνεπώς θα μπορούσαμε να έχουμε και ισότητα μεταξύ των κλάδων. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το βολικότερο για τη μαθηματική ανάλυση, χωρίς βλάβη της γενικότητας.

βρεθούν ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων $\bar{B}(\theta)$ και $\bar{A}(\theta)$. Για την πρώτη πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με $\theta^2 - (k_c z_0)^2$:

$$\bar{B}(\theta) \sim -\frac{jV}{2k_c \zeta_c} \frac{(k_c z_0)^2}{\theta^2 - (k_c z_0)^2} \frac{1 + \cos^2(\theta/2)}{[\sin^2(\theta/2)/(\theta/2)]^2}, \quad (z_0 \rightarrow 0) \quad (4.25)$$

ενώ για τη δεύτερη μπορούμε να διατηρήσουμε μόνον τον πρώτο όρο του αθροίσματος (σχέση (4.22)), δηλαδή για $m = 0$, αφού για τους λοιπούς το όρισμα του πυρήνα απειρίζεται, άρα ο πυρήνας μηδενίζεται. Έτσι:

$$\bar{A}(\theta) \sim z_0 \bar{K}_{\text{ex}} \left(\frac{\theta}{z_0} \right) [\sin^2(\theta/2)/(\theta/2)]^2, \quad (z_0 \rightarrow 0) \quad (4.26)$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα αυτά στην (4.24), θέτοντας όπου θ το λz_0 (εννοείται ότι $z_0 \rightarrow 0$) παίρνουμε την αριθμητική, ακριβή λύση της εξίσωσης Hallén για κεραία άπειρου μήκους, δηλαδή:

$$I_{\text{ex},n}^{(\infty)} \sim \frac{j k_c V}{\pi \zeta_c} \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda n z_0)}{(k_c^2 - \lambda^2) \bar{K}_{\text{ex}}(\lambda)}, \quad (z_0 \rightarrow 0) \quad (4.27)$$

Σημειώνουμε ότι παραπάνω θεωρούμε ότι η ποσότητα είναι $n z_0$ είναι σταθερή (πρακτικά ο έκαστος κόμβος αντισταθμίζει το μικρό εύρος παλμού). Πάλι έχουμε (ενδιαφέρον) κλαδικό σημείο στη θέση $\lambda = k_c$, οπότε η διαδρομή ολοκλήρωσης περνάει κάτω από αυτό. Είναι εμφανές ότι η αριθμητική λύση (4.27) ταυτίζεται με την αναλυτική που βρήκαμε στο δεύτερο κεφάλαιο (σχέση (2.40)). Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο και προσδίδει εμπιστοσύνη στη μέθοδό μας. Το πιο ενδιαφέρον είναι ότι εφόσον η (2.40) είναι η αφετηρία για την απόδειξη της λογαριθμικής ιδιομορφίας, αυτή θα μεταφέρεται και στην αριθμητική λύση, μέσω της (4.27). Τούτο είναι εμφανές στο Σχήμα 3.1, στο κέντρο της κεραίας.

Τα πιο σημαντικά αποτελέσματά μας προέρχονται, φυσικά, από τη μελέτη στην περίπτωση που $\bar{K}(\lambda) = \bar{K}_{\text{ap}}(\lambda)$. Για $a|\lambda| \gg 1$, από το τέταρτο σκέλος της (4.23) (φυσικά, σωστή επιλογή θα ήταν και το τρίτο, αφού τόσο στον ακριβή όσο και στον προσεγγιστικό τα δύο σκέλη αποτελούν αναλυτικές επεκτάσεις το ένα του άλλου, συνεπώς είναι ισοδύναμα) και χρησιμοποιώντας τη (2.41) παίρνουμε:

$$\bar{K}_{\text{ap}}(\lambda) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi a|\lambda|}} e^{-a|\lambda|}, \quad (a|\lambda| \gg 1) \quad (4.28)$$

Αυτή είναι και η προσέγγιση που γίνεται και στην εργασία [1]. Είναι δελεαστικό να διατηρήσουμε όρους ανώτερης τάξης, ώστε να εκδηλωθεί ο μιγαδικός κυματάριθμος. Αριθμητικά πειράματα έδειξαν ότι η συνεισφορά των όρων ανώτερης τάξης είναι αμελητέα, συνεπώς η προσέγγιση (4.28) συνεχίζει να ισχύει. Συνεχίζει να ισχύει και η σχέση (4.27), απλά με τον προσεγγιστικό αντί του ακριβούς πυρήνα. Όμως, όπως φαίνεται από την (4.28) και εφόσον ο πυρήνας είναι στον παρανομαστή, το ολοκλήρωμα αποκλίνει. Η απόκλιση, εντούτοις μπορεί να μελετηθεί ασυμπτωτικά.

Όλα τα αποτελέσματά μας στο εξής υπόκεινται στις παρακάτω συνθήκες:

$$\frac{z_0}{a} \ll 1, \quad \frac{n z_0}{a} = O(1), \quad |k_c| z_0 \ll 1 \quad (4.29)$$

Οι δύο πρώτες βρίσκονται στην [1] (σημειώστε την ομοιότητά τους με τις προτεινόμενες κρίσιμες συνθήκες των συγγραμμάτων που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3!), ενώ η τρίτη είναι μια νέα προσθήκη που αντανακλά το γεγονός ότι τα ασυμπτωτικά αποτελέσματά μας αποτυγχάνουν για υψηλές τιμές της αγωγιμότητας (περίπου για $\gamma > 0.3 \text{ S/m}^{11}$).

¹¹ Αν και αυτές οι τιμές ειδικής αγωγιμότητας φαίνονται μικρές, σημειώνεται ότι στις μικροκυματικές συχνότητες που μας ενδιαφέρουν τα περισσότερα υλικά παρουσιάζουν μικρή αγωγιμότητα μικρότερη από 0.01 S/m [11].

Φυσικά η μορφή της συνάρτησης $\bar{B}(\theta)$ δεν αλλάζει όταν μεταβάλλουμε τον πυρήνα σε αντίθεση με της $\bar{A}(\theta)$. Η εκθετικά μειούμενες τιμές του φάσματος του πυρήνα μας επιτρέπουν να διατηρήσουμε λίγους (συγκεκριμένα τους πρώτους δύο) στο άθροισμα της (4.22). Έτσι:

$$\bar{A}(\theta) \sim 4z_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\bar{K}_{\text{ap}}\left(\frac{\theta}{z_0}\right) + \bar{K}\left(\frac{2\pi-\theta}{z_0}\right) \frac{1}{(2\pi-\theta)^2} \right], \quad \left(\frac{z_0}{a} \rightarrow 0\right) \quad (4.30)$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω εξίσωση στην (4.24) και θέτοντας $\phi = \pi - \theta$ παίρνουμε την:

$$I_{\text{ap},n}^{(\infty)} \sim \frac{(-1)^n}{4\pi z_0} \int_0^\pi \frac{\bar{B}(\pi-\phi)/\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\bar{K}_{\text{ap}}\left(\frac{\pi-\phi}{z_0}\right)/(\pi-\phi)^2 + \bar{K}_{\text{ap}}\left(\frac{\pi+\phi}{z_0}\right)/(\pi+\phi)^2} \cos(n\phi) d\phi, \quad \left(\frac{z_0}{a} \rightarrow 0\right) \quad (4.31)$$

Οι συνθήκες (4.29) επιβάλλουν υψηλές τιμές μόνο σε μια μικρή περιοχή περί του $\phi = 0$ στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Άρα μπορούμε να αλλάξουμε το άνω άκρο ολοκλήρωσης σε 1 (ή τάξης 1) με αμελητέο σφάλμα. Τούτο σε συνδυασμό με την προσέγγιση (4.28) και την αλλαγή μεταβλητής $x = \phi a/z_0$ μας δίνει:

$$I_{\text{ap},n}^{(\infty)} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k_c z_0 \sqrt{\frac{z_0}{a}} (-1)^n e^{\pi \frac{a}{z_0}} f\left(\frac{z_0}{a}, k_c a, n \frac{z_0}{a}\right) \quad (4.32)$$

όπου:

$$f\left(\frac{z_0}{a}, k_c a, n \frac{z_0}{a}\right) = \int_0^{\frac{a}{z_0}} g\left(x; \frac{z_0}{a}, k_c a\right) \cos\left(n \frac{z_0}{a} x\right) dx \quad (4.33)$$

και:

$$g\left(x; \frac{z_0}{a}, k_c a\right) = \frac{\bar{B}\left(\pi - \frac{z_0}{a} x\right) / \left(k_c z_0^2 \cos^2 \frac{1}{2} \frac{z_0}{a} x\right)}{e^x \left(\pi - \frac{z_0}{a} x\right)^{-5/2} + e^{-x} \left(\pi + \frac{z_0}{a} x\right)^{-5/2}} \quad (4.34)$$

Χρησιμοποιούμε την (4.25) και αναπτύσσουμε την g σε δυνάμεις του z_0/a , οπότε:

$$g\left(x; \frac{z_0}{a}, k_c a\right) = \frac{-jV\pi^{5/2}}{16\zeta_c} \frac{1}{\cosh x} \left(1 - \frac{5}{2\pi} \frac{z_0}{a} x \tanh x\right) + O\left(\left(\frac{z_0}{a}\right)^2\right) \quad (4.35)$$

Αντικαθιστώντας την (4.35) στην (4.33) και αντικαθιστώντας το άνω άκρο ολοκλήρωσης με ∞ (αφού $z_0/a \rightarrow 0$) προκύπτουν δύο ολοκλήρωματα (οι δύο πρώτοι όροι της σειράς Taylor της f) των οποίων το αποτέλεσμα βρίσκεται εδώ [12]. Η (4.32) μας δίνει τότε το τελικό αποτέλεσμα:

$$I_{\text{ap},n}^{(\infty)} \sim -j \frac{V}{\zeta_c} \frac{\pi^3}{32\sqrt{2}} k_c z_0 \sqrt{\frac{z_0}{a}} (-1)^n \exp\left(\frac{a\pi}{z_0}\right) \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_0}{a} n\right)} \left[1 - \frac{5}{2\pi} \frac{z_0}{a} + \frac{5}{4} n \left(\frac{z_0}{a}\right)^2 \tanh\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_0}{a} n\right)\right] \quad (4.36)$$

που υπόκειται στις συνθήκες (4.29). Σημειώνουμε ότι ακόμη και ο πρώτος όρος της ανωτέρω αναπαράστασης είναι πολύ καλή προσέγγιση των ταλαντώσεων (θα τον αξιοποιήσουμε περαιτέρω στο επόμενο κεφάλαιο). Διαιρούμε κατα μέλη την ανωτέρω εξίσωση με την εξίσωση (38) της [1], οπότε:

$$\frac{I_{n,\text{lossy}}^{(\infty)}/V}{I_{n,\text{lossless}}^{(\infty)}/V} \sim \frac{k_c/\zeta_c}{k/\zeta_0} \quad (4.37)$$

όπου k ο πραγματικό κυματάρηθος στο κενό και $\zeta_0 = 376.73 \Omega$ η κυματική αντίσταση του κενού. Κάνοντας τις απλές πράξεις:

$$\frac{I_{n,\text{lossy}}^{(\infty)}}{V} \sim (1 + j \tan \delta) \frac{I_{n,\text{lossless}}^{(\infty)}}{V} \quad (4.38)$$

Οι σχέσεις (4.36) και (4.38) είναι οι σημαντικότερες της παρούσας εργασίας. Από αυτές και τα όσα συζητήσαμε στο παρόν κεφάλαιο, μπορούμε να συνοψίσουμε τα νέα συμπεράσματα που εξήχθησαν από τη μελέτη των αριθμητικών λύσεων της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén κεραίας εμβαπτισμένης σε μέσο με απώλειες:

- Οι αφύσικες, αριθμητικές λύσεις οφείλονται στη μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης Hallén, αποτέλεσμα της χρήσης του (αναλυτικού) προσεγγιστικού πυρήνα και της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης.
- Η μη επιλυσιμότητα εκδηλώνεται με ταλαντώσεις, όπως υποδεικνύει ο παράγοντας $(-1)^n$ στην (4.36), με εκθετικά μεγάλο πλάτος, όπως υποδεικνύει ο παράγοντας $\exp\left(\frac{a\pi}{z_0}\right)$ στην ίδια εξίσωση, καθώς μειώνεται το εύρος των παλμών ή καθώς αυξάνεται το πλήθος τους για κεραία ορισμένης γεωμετρίας. Οι ταλαντώσεις που μελετήσαμε αφορούν το κέντρο της τροφοδοσίας αν και υπάρχουν ασθηνείς ταλαντώσεις και στα άκρα της κεραίας.
- Ταλαντώσεις εμφανίζονται τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος της ρευματικής κατανομή, μια σημαντική διαφορά μεταξύ της μελέτης μας και της [1], όπου ταλαντώσεις στο κέντρο της τροφοδοσίας εμφανίζονταν μόνο στο φανταστικό μέρος.
- Κοντά στην τροφοδοσία γνωρίζουμε χάρις στις (4.36) και (4.38) τη συμπεριφορά των ταλαντώσεων αυτών: το φανταστικό μέρος έχει πλάτος ασυμπτωτικά ανεξάρτητο από την αγωγιμότητα του χώρου, οπότε αναμένουμε πολύ κοντινά αποτελέσματα με αυτά που έχουν αναφερθεί στην πρωτόλεια εργασία [1]. Για το πραγματικό μέρος κανείς μπορεί να εκτιμήσει το πλάτος των ταλαντώσεων εύκολα διότι ισούται με το πλάτος των ταλαντώσεων του φανταστικού μέρους επί έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα $-\tan \delta$. Το προαναφερθέν είναι ένα εξαιρετικά κομψό αποτέλεσμα, διότι ενώνει ένα καθαρά αριθμητικό πρόβλημα με ένα πολύ δημοφιλές φυσικό μέγεθος με πολύ εναργή τροπό.

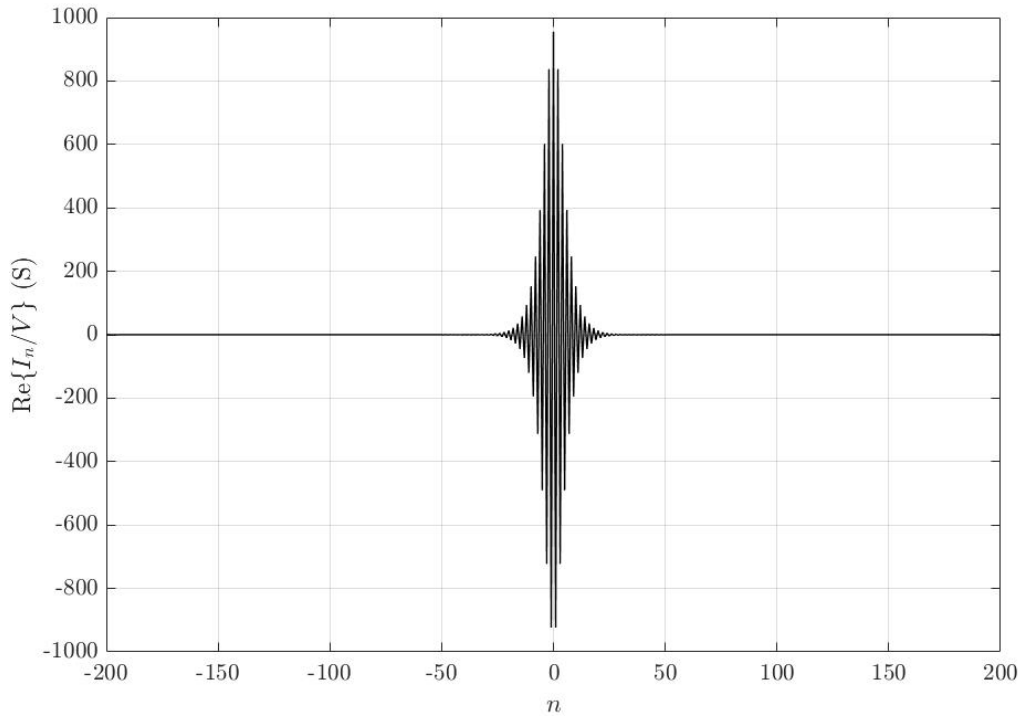
Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζουμε αριθμητικά δεδομένα που στηρίζουν όλα μας τα συμπεράσματα και τα επεκτείνουν στην περίπτωση των κεραίων πεπερασμένου μήκους, πραγματικών κεραίων δηλαδή.

3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Η κεραία που θα μελετήσουμε είναι αυτή του κεφαλαίου 3, δηλαδή έχει μήκος $2h = \lambda/2^{12}$, ακτίνα $a = 0.007022\lambda$, πλήθος συναρτήσεων βάσης $N = 200$ και συντακτικές παραμέτρους χώρου στον οποίο βρίσκεται η κεραία $(\epsilon, \mu, \gamma) = (\epsilon_0, \mu_0, 0.1)$. Σημειώνεται ότι η τιμή της αγωγιμότητας είναι μια σχετικά υψηλή τιμή (αντιστοιχεί σε $\tan \delta = 3.6$), ώστε να μελετήσουμε μια ακραία, πιο επικίνδυνη περίπτωση (τα αποτελέσματα θα είναι ακόμη καλύτερα για $\gamma < 0.1$ S/m). Σημειώνουμε ότι η συγκεκριμένη αγωγιμότητα για συχνότητα $f = 500$ MHz αντιστοιχεί σε υγρό έδαφος (η αγωγιμότητα ενός υλικού αυξάνει με την υγρασία του [13]) από την αεροπορική βάση του Kirtland [14]. Μάλιστα από αυτή τη συχνότητα και έπειτα η αγωγιμότητα κορέννυται στα 0.1 S/m, και για αυτό η ανωτέρω συχνότητα επιλέγεται για τη γεννήτρια δέλτα συνάρτησης. Το πλάτος της τάσης θεωρείται μοναδιαίο.

Το πρώτο που θα ελέγξουμε είναι η εμφάνιση ταλαντώσεων τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος. Από τα Σχήματα 4.1 και 4.2 τούτο είναι εμφανές και στην περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας. Είναι αξιοσημείωτο ότι το Σχήμα 4.2 εμφανίζει τεράστιες ομοιότητες με τη δεύτερη γραφική του Σχήματος 3.2. Τούτο ισχυροποιεί τον ισχυρισμό μας ότι δηλαδή, ασυμπτωτικά, η επιρροή της μη μηδενικής αγωγιμότητας στις ταλαντώσεις του φανταστικού μέρους είναι αμελητέα. Στη συνέχεια, το πλάτος του φανταστικού μέρους του ρεύματος στην τροφοδοσία υπολογίζεται στα $\text{Im}\{I_{\text{ap}}(0)\} =$

¹²Το μήκος κύματος λ στα παρακάτω αποτελέσματα υπολογίζεται από τον τύπο $\lambda = c/f$, όπου $c = 3 \times 10^8$ m/s η ταχύτητα του φωτός στο κενό.



Σχήμα 4.1: Το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας, όπως προκύπτει από την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén. Η κεραία έχει μήκος $2h = \lambda/2$, ακτίνα $a = 0.007022\lambda$, πλήθος συναρτήσεων βάσης $N = 200$ και συντακτικές παραμέτρους χώρου στον οποίο βρίσκεται η κεραία $(\epsilon, \mu, \gamma) = (\epsilon_0, \mu_0, 0.1)$, ενώ θεωρούμε $\omega = 2\pi \times 5 \times 10^8$ r/s και $V = 1$, συνεπώς η παραπάνω κυματομορφή είναι και κυματομορφή ρεύματος.

-2.66×10^2 A. Πολλαπλασιάζοντας με $-\tan \delta = 3.60$ λαμβάνουμε την τιμή 9.58×10^2 . Από την άλλη στην τροφοδοσία το πραγματικό μέρος του ρεύματος βρίσκεται ίσο με $\text{Re}\{I_{ap}(0)\} = 9.56 \times 10^2$ A, δηλαδή έχουμε μόλις 0.07% σφάλμα!

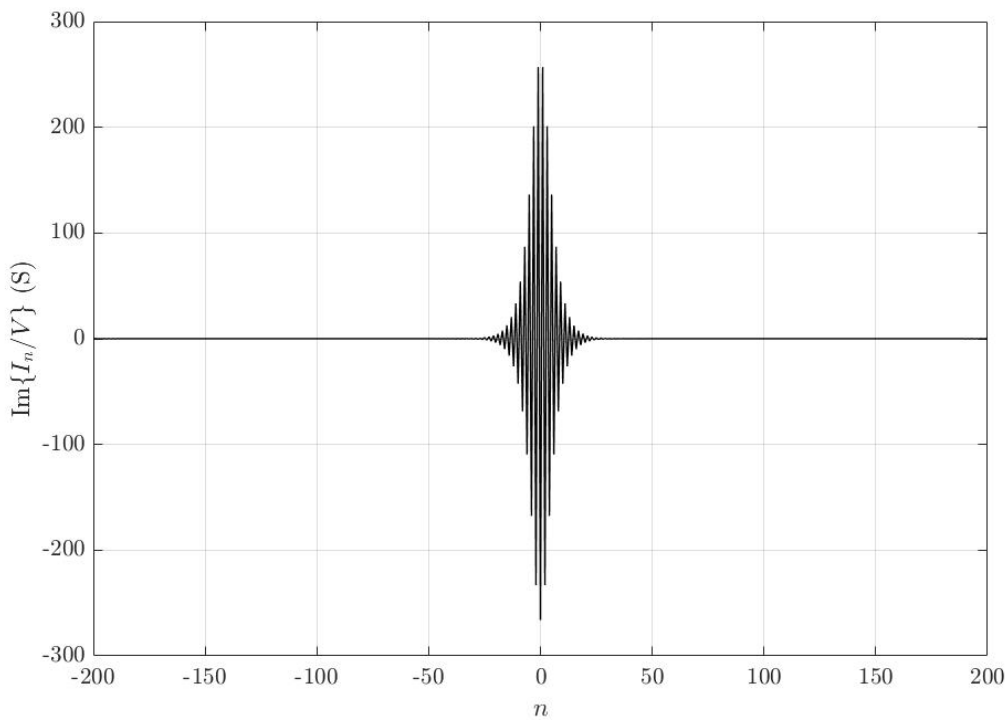
Για να ενισχύσουμε αυτά τα συμπεράσματα, στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζουμε το φανταστικό μέρος της ρευματικής κατανομή για διάφορες τιμές της αγωγιμότητας, ενώ στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζουμε τα σχετικά σφάλματα μεταξύ της απόλυτης τιμής του λόγου πραγματικού προς φανταστικού μέρους στην τροφοδοσία της κεραίας και της εφαπτομένης απωλειών.

Όπως συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η κεραία που μελετάμε είναι εξαιρετικά δημοφιλής, ενώ όπως υποδεικνύουν οι σχέσεις (4.29), η ανάλυσή μας εφαρμόζεται πρακτικά για τεράστια επιλογή διαστάσεων, οπότε δε θα ασχοληθούμε με τη γεωμετρία της κεραίας στο παρόν κεφάλαιο. Ένα αριθμητικό αποτέλεσμα που πρέπει να παρουσιαστεί όμως είναι η σύγκριση μεταξύ της ασυμπτωτικής σχέσης (4.36) και των αριθμητικών αποτελεσμάτων, τελευταίο τεκμήριο της επιτυχίας της ανάλυσης και της επέκτασής της από της κεραίες άπειρου μήκους στις κεραίες πεπερασμένου, η οποία φαίνεται στον Πίνακα 4.3.

Στα Σχήματα 4.3 και 4.4 φαίνεται η σύγκριση μεταξύ του ρεύματος, όπως αυτό προκύπτει από τη χρήση του ακριβούς και του προσεγγιστικού πυρήνα και παρουσιάζονται και οι ταλαντώσεις στα άκρα,

γ	$\text{Im}\{I_n/V\}$
0.00	-2.6586×10^2
0.02	-2.6587×10^2
0.04	-2.6589×10^2
0.06	-2.6592×10^2
0.08	-2.6598×10^2
0.10	-2.6604×10^2

Πίνακας 4.1: Επίδραση της αγωγιμότητας στο φανταστικό μέρος του προσεγγιστικού ρεύματος. Μελετάμε την κεραία ενδιαφέροντος με τη συνήθη τροφοδοσία και $N = 200$. Οι διαφορές είναι αμελητέες και αυξάνονται για μεγάλα γ , σημάδι ότι πλησιάζουμε στην παραβίαση των (4.29) συγκεκριμένα της τρίτης.



Σχήμα 4.2: Το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας, όπως προκύπτει από την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén. Η κεραία έχει μήκος $2h = \lambda/2$, ακτίνα $a = 0.007022\lambda$, πλήθος συναρτήσεων βάσης $N = 200$ και συντακτικές παραμέτρους χώρου στον οποίο βρίσκεται η κεραία $(\epsilon, \mu, \gamma) = (\epsilon_0, \mu_0, 0.1)$, ενώ θεωρούμε $\omega = 2\pi \times 5 \times 10^8$ r/s και $V = 1$ V, συνεπώς η παραπάνω κυματομορφή είναι και κυματομορφή ρεύματος.

που λόγω κλίμακας δεν μπορούν να εμφανιστούν στα Σχήματα 4.1 και 4.2, των οποίων η ακριβής περιγραφή παραμένει άλυτο ζήτημα. Σημειώνεται ότι η συμμετρία της κεραίας μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε μόνο το ένα μισό της κεραίας (το άλλο μπορεί να σχεδιαστεί εύκολα, αφού υπάρχει άρτια συμμετρία).

N	Σχετικό Σφάλμα (%)
100	4.3361×10^0
110	1.9881×10^0
120	0.8735×10^0
130	0.3503×10^0
140	0.1087×10^0
150	3.2400×10^{-4}
160	0.0477×10^0
170	0.0668×10^0
180	0.0732×10^0
190	0.0740×10^0
200	0.0724×10^0

Πίνακας 4.2: Σύγκλιση της μεθόδου για πυκνότερη διακριτοποίηση. Μελετάμε την κεραία ενδιαφέροντος με τη συνθήκη τροφοδοσία και $\gamma = 0.1$. Το σφάλμα αν και πάντα μικρό μειώνεται καθώς αυξάνουμε το N , άρα πυκνώνουμε τη διακριτοποίηση, σημάδι σύγκλισης, αφού πληρούμε όλο και περισσότερο τις συνθήκες (4.29) και συγκεκριμένα την πρώτη.

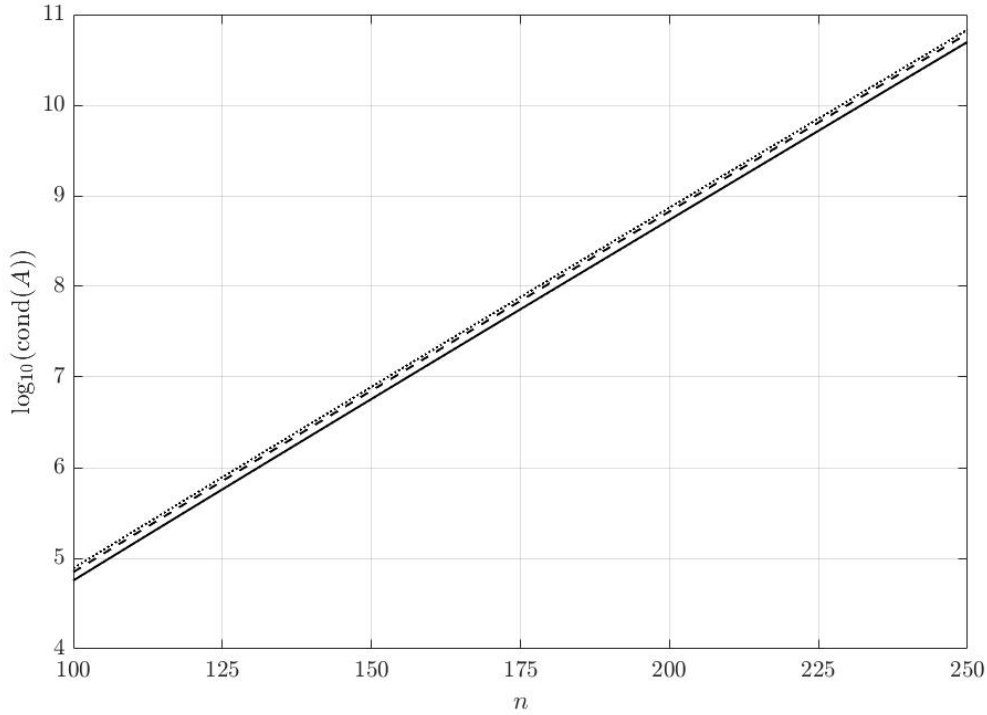
Σχεδιάζοντας τον ακριβή πυρήνα, αλλά και από τη σχέση (2.47) είναι εμφανές ότι λογαριθμική ιδιομορφία εμφανίζεται και στο πραγματικό μέρος του ρεύματος. Όπως στην περίπτωση του κενού, η αριθμητική μέθοδος προσεγγίζει με ταλαντώσεις τη λογαριθμική ιδιομορφία, που εκεί εμφανίζεται μόνο στο φανταστικό μέρος, έτσι και στην περίπτωση μέσου με απώλειες με ταλαντώσεις προσεγγίζονται οι λογαριθμικές ιδιομορφίες που εμφανίζονται τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος του ρεύματος.

Τέλος, στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζουμε σε ημιλογαριθμικό χαρτί τους δείκτες κατάστασης για τη μήτρα αγωγιμότητας A (σχέση (4.9)) για διαφορετικά πλήθη συναρτήσεων βάσης σε περιβάλλοντα χωρίς και με αγωγιμότητα. Είναι εμφανές ότι οι τιμές των δεικτών αυξάνονται εκθετικά με το πλήθος συναρτήσεων βάσης, όμως υπάρχει ένα υπολογιστικό παράθυρο, στο οποίο υπολογισμοί μπορούν να γίνουν δίχως την (ισχυρή) επιρροή του σφάλματος στρογγυλοποίησης, όπως γράφτηκε και στην εργασία [15], άρα σε κάθε περίπτωση το σφάλμα στρογγυλοποίησης δεν προκαλεί τις ταλαντώσεις. Η αμελητέα επιρροή του ελέγχθηκε με τη χρήση εναλλακτικών μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων (LU και Cholesky παραγοντοποίηση συγκεκριμένα): όλες έδιναν τα ίδια αποτελέσματα, με την ίδια ευστάθεια. Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον το γεγονός ότι υπαρξή μη μηδενικής αγωγιμότητας στο μέσο που βρίσκεται η κεραία ευεργετεί (ελαφρά) τους υπολογισμούς μειώνοντας το δείκτη κατάστασης!

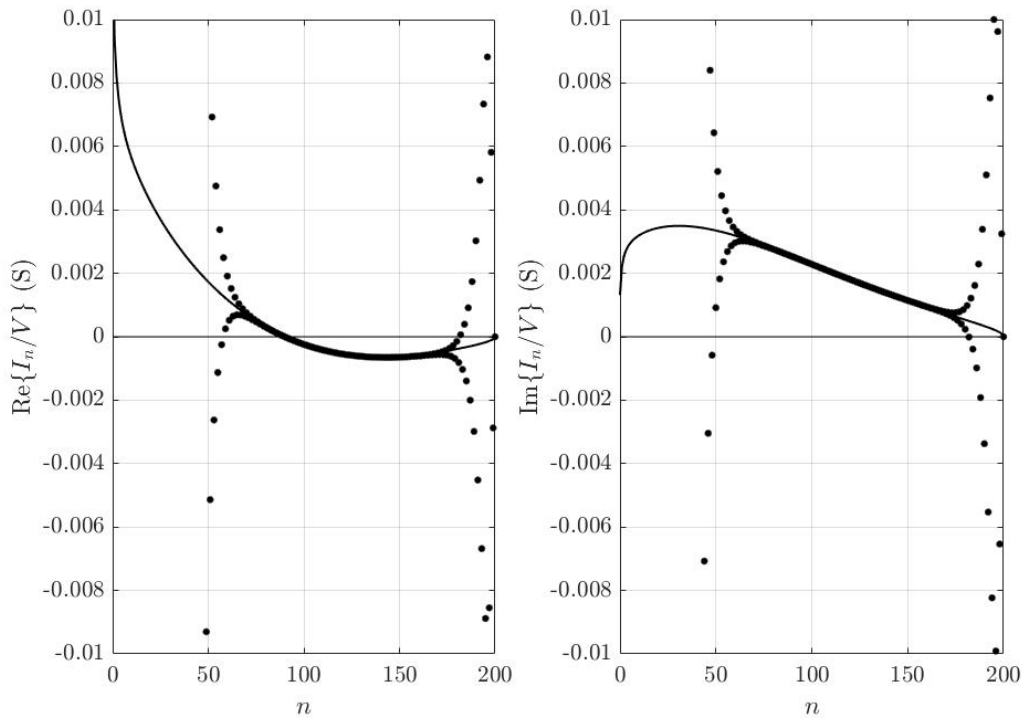
Κανείς μπορεί να ισχυριστεί ότι τα αποτελέσματά μας στέκουν μόνο στην πολύ συγκεκριμένη περίπτωση της γεωμετρίας που μελετάμε (λεπτή κεραία σύρματος), στις συναρτήσεις βάσεις που χρησιμοποιούμε (τετραγωνικοί παλμοί) και στην εξίσωση που λύνουμε (προσεγγιστική εξίσωση Hallén). Όπως έχει αποδειχτεί εδώ [1] και μπορεί να επεκταθεί τετριμμένα στην περίπτωσή μας, πράγματι τα ποσοτικά αποτελέσματα (κυρίως η εξίσωση (4.36)) αφορούν αποκλειστικά την πολύ συγκεκριμένη περίπτωση που μελετάμε. Η μέθοδος ανάλυσης όμως, καθώς και τα ποιοτικά συμπεράσματα –τα τέσσερα σημεία της προηγούμενης παραγράφου– στέκουν σε πιο πολύπλοκες διατάξεις, όπως κεκαμμένες κεραίες σύρματος, που μπορούν να θεωρηθούν ως υπέρθεση απλών, ευθείων κεραιών [16] ή συστοιχίες παραλλήλων κεραιών. Ακόμη διαφορετικές συναρτήσεις βάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όπως θα δείξουμε αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο. Τέλος, την ίδια συμπεριφορά εμφανίζουν ταλαντώσεις όταν προέρχονται από την αριθμητική λύση της εξίσωσης Pocklington. Τούτο είναι λογικό διαισθητικά, αφού στην περίπτωση της προσεγγιστικής εξίσωσης Pocklington, δεδομένης της αναλυτικότητας των ολοκληρωτέων συναρτήσεων, ο διαφορικός τελεστής που υπάρχει επιπρόσθετα μπορεί να εναλλαχθεί

n	$\text{Re}\{I_n/V\}$	$\text{Re}\{I_n^{(\infty)}/V\}$	$\text{Im}\{I_n/V\}$	$\text{Im}\{I_n^{(\infty)}/V\}$	n	$\text{Re}\{I_n/V\}$	$\text{Re}\{I_n^{(\infty)}/V\}$	$\text{Im}\{I_n/V\}$	$\text{Im}\{I_n^{(\infty)}/V\}$
0	9.56×10^2	8.95×10^2	-2.66×10^2	-2.49×10^2	16	3.54×10^1	3.58×10^1	-9.86×10^0	-9.95×10^0
1	-9.23×10^2	-8.72×10^2	2.57×10^2	2.42×10^2	17	-2.77×10^1	-2.77×10^1	7.72×10^0	7.73×10^0
2	8.37×10^2	8.07×10^2	-2.33×10^2	-2.25×10^2	18	2.17×10^1	2.16×10^1	-6.04×10^0	-6.00×10^0
3	-7.23×10^2	-7.14×10^2	2.01×10^2	1.99×10^2	19	-1.70×10^1	-1.67×10^1	4.73×10^0	4.65×10^0
4	6.02×10^2	6.08×10^2	-1.68×10^2	-1.69×10^2	20	1.33×10^1	1.30×10^1	-3.70×10^0	-3.61×10^0
5	-4.90×10^2	-5.03×10^2	1.36×10^2	1.40×10^2	21	-1.04×10^1	-1.00×10^1	2.91×10^0	2.79×10^0
6	3.93×10^2	4.07×10^2	-1.09×10^2	-1.13×10^2	22	8.17×10^0	7.78×10^0	-2.27×10^0	-2.16×10^0
7	-3.13×10^2	-3.26×10^2	8.70×10^1	9.06×10^1	23	-6.39×10^0	-6.02×10^0	1.78×10^0	1.67×10^0
8	2.47×10^2	2.58×10^2	-6.88×10^1	-7.12×10^1	24	5.01×10^0	4.66×10^0	-1.39×10^0	-1.30×10^0
9	-1.95×10^2	-2.03×10^2	5.41×10^1	5.65×10^1	25	-3.92×10^0	-3.60×10^0	1.10×10^0	1.00×10^0
10	1.53×10^2	1.59×10^2	-4.25×10^1	-4.44×10^1	26	3.08×10^0	2.78×10^0	-8.52×10^{-1}	-7.74×10^{-1}
11	-1.20×10^2	-1.25×10^2	3.34×10^1	3.47×10^1	27	-2.40×10^0	-2.15×10^0	6.73×10^{-1}	5.98×10^{-1}
12	9.40×10^1	9.74×10^1	-2.62×10^1	-2.71×10^1	28	1.89×10^0	1.66×10^0	-5.21×10^{-1}	-4.61×10^{-1}
13	-7.37×10^1	-7.60×10^1	2.05×10^1	2.11×10^1	29	-1.47×10^0	-1.28×10^0	4.14×10^{-1}	3.56×10^{-1}
14	5.77×10^1	5.92×10^1	-1.61×10^1	-1.65×10^1	30	1.16×10^0	9.88×10^{-1}	-3.18×10^{-1}	-2.75×10^{-1}
15	-4.52×10^1	-4.60×10^1	1.26×10^1	1.28×10^1	31	-9.01×10^{-1}	-7.62×10^{-1}	2.55×10^{-1}	2.12×10^{-1}

Πίνακας 4.3: Σύγκριση των πρώτων 32 τιμών του μιγαδικού I_n/V όπως προκύπτει από τη μέθοδο Galerkin (για την κεραία πεπερασμένου μήκους) με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από τη σχέση (4.36) (για την κεραία άπειρου μήκους). Οι παράμετροι είναι αυτές των Σχημάτων 4.1 και 4.2. Η ακρίβεια είναι εντυπωσιακή.



Σχήμα 4.3: Δείκτης κατάστασης για κεραία μήκους $2h = \lambda/2$, ακτίνας $a = 0.007022\lambda$, με τροφοδοσία πλάτους $V = 1$ V και συχνότητας $\omega = 2\pi \times 5 \times 10^8$ r/s σε κενό (στίγματα), σε μέσο με αγωγιμότητα $\gamma = 0.02$ S/m (ασυνεχής γραμμή) και σε μέσο με αγωγιμότητα $\gamma = 0.1$ S/m. Παντού θεωρούμε ότι $(\epsilon, \mu) = (\epsilon_0, \mu_0)$. Παρατηρήστε την εκθετική σχέση μεταξύ n και δείκτη κατάστασης.



Σχήμα 4.4: Εστίαση στο πραγματικό και φανταστικό μέρος των Σχημάτων 4.1 και 4.2. Με συνεχή γραμμή σχεδιάζουμε το ακριβές ρεύμα/αγωγιμότητα και με στίγματα το προσεγγιστικό. Εδώ γίνονται εμφανείς οι –ασθενείς– ταλαντώσεις των άκρων, οι λογαριθμικές ιδιομορφίες τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος (για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα), αλλά και στο γεγονός ότι μακριά από το κέντρο και –όχι τόσο– τα άκρα, ο προσεγγιστικός πυρήνας παρέχει πολύ καλές προσεγγίσεις του ρεύματος/αγωγιμότητας επί της κεραίας. Αρκετές τιμές των κεντρικών ταλαντώσεων ήταν εκτός κλίμακας, οπότε δε φαίνονται σε αυτά τα διαγράμματα.

με το ολοκλήρωμα, δίνοντάς μας την εξίσωση Hallén. Στην περίπτωση της ακριβούς Pocklington από την άλλη, η λογαριθμική ιδιομορφία του πυρήνα απαγορεύει αυτήν τη μετάθεση.

Έχοντας παρουσιάσει το πρόβλημα, τις ταλαντώσεις δηλαδή, και έχοντάς το μελετήσει διεξοδικά, φυσιολογική επέκταση της μελέτης μας είναι η προσπάθεια εξομάλυνσης των ταλαντώσεων. Η μέθοδος του ενεργού ρεύματος εφαρμόστηκε με επιτυχία πριν από λίγα χρόνια [17] για την εξομάλυνση των ταλαντώσεων στην περίπτωση κεραίας σε κενό. Θα μελετήσουμε κατά πόσο μπορεί να επεκταθεί η μέθοδος σε κεραία εντός περιβάλλοντος με απώλειες.

4 Βιβλιογραφία

- [1] Fikioris, G., and Wu, T.T. (2001). On the Application of Numerical Methods to Hallén's Equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 49, 383–392. doi: 10.1109/8.918612
- [2] Bibby, M.M. (2002). A Comparative Study of Expansion Functions Using the Boundary Residual Method on a Linear Dipole - Part I: Entire-Domain Functions. *Applied Computational Electromagnetics Society Newsletter* 17, 42–53.
- [3] Bibby, M.M. (2002). A Comparative Study of Expansion Functions Using the Boundary Residual Method on a Linear Dipole - Part II: Sub-Domain Functions. *Applied Computational Electromagnetics Society Newsletter* 17, 54–62.
- [4] Burke, G., and Poggio, A. (1981). Numerical Electromagnetics Code (NEC) - Method of Moments. Lawrence Livermore Laboratory. Διαθέσιμο εδώ: <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a956129.pdf>
- [5] King, R.W.P., Fikioris, G.J., and Mack, R.B. (2002). *Cylindrical Antennas and Arrays*. Cambridge University Press. New York.
- [6] Gray, R.M. (2006). Toeplitz and Circulant Matrices: A Review. Διαθέσιμο εδώ: <https://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf>
- [7] Bruno, O.P., and Haslam, M.C. (2007). Regularity Theory and Superalgebraic Solvers for Wire Antenna Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing* 29, 1375–1402. doi: 10.1137/050648262
- [8] Shen, H.M., and Wu, T.T. (1989). The Universal Current Distribution Near the End of a Tubular Antenna. *Journal of Mathematical Physics* 30, 2721–2729. doi: 10.1063/1.528505
- [9] Wu, T.T. (1969). Introduction to Linear Antennas. In *Antenna Theory Part I*, edited by R.E.Collins and F.J.Zucker. McGraw-Hill, New Work.
- [10] Fikioris, G., Tastsoglou, I., and Bakas, O.N. (2013). Selected Asymptotic Methods with Applications to Electromagnetics and Antennas. *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics* 8, 1–207. doi: 10.2200/s00525ed1v01y201307cem031
- [11] Sebastian, M.T. (2008). *Dielectric Materials for Wireless Communication*. Elsevier, Amsterdam.
- [12] Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I. (1986). *Integrals and Series: Elementary Functions*, vol. 1. Gordon & Breach, Amsterdam.
- [13] Cihlar, J., and Ulaby, F.T. (1974). Dielectric Properties of Soils as a Function of Moisture Content. The University of Kansas Space Technology Center, Lawrence. Διαθέσιμο εδώ: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19750018483.pdf>
- [14] Patitz, W.E., Brock, B.C., and Powell, E.G. (1995). Measurement of Dielectric and Magnetic Properties of Soil. Sandia National Labs, Albuquerque. Διαθέσιμο εδώ: https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/27/040/27040410.pdf

- [15] Fikioris, G., Lionas, J., and Lioutas, C.G. (2003). The Use of the Frill Generator in Thin-Wire Integral Equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *51*, 1847–1854. doi: 10.1109/TAP.2003.815412
- [16] Popović, B.D., Dragović, M.B., and Djordjević, A.R. (1982). *Analysis and Synthesis of Wire Antennas*. Research Studies Press, Chichester.
- [17] Fikioris, G., Papakanellos, P.J., Mavrogordatos, T.K., Lafkas, N., and Koulikas, D. (2011). Eliminating Unphysical Oscillations Arising in Galerkin Solutions to Classical Integral Equations of Antenna Theory: An Asymptotic Study. *SIAM Journal on Applied Mathematics* *71*, 559–585. doi: 10.1137/100785727

Κεφάλαιο 5

Η Μέθοδος του Ενεργού Ρεύματος

Η μέθοδος του ενεργού ρεύματος είναι πιθανότατα η πιο πρόσφατη, σημαντική προσθήκη στον (μεγάλο) όγκο εργασιών που αφορούν την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén, με την κύρια εργασία να δημοσιεύεται μόλις στα 2011 [1] (με μια συζήτηση λίγο νωρίτερα [2]) αν και το ενεργό ρεύμα, ρεύμα δηλαδή υπολογισμένο στην επιφάνεια του της κεραίας μέσω του μαγνητικού πεδίου που παράγει σε αυτήν ακριβώς την επιφάνεια το βοηθητικό-προσεγγιστικό, νηματοειδές ρεύμα επί του άξονα της κεραίας, είναι μια έννοια γνωστή από αρκετά παλιά [3], όπως παλιά είναι και η γνώση περί εντόνων, αφύσικων ταλαντώσεων στο προσεγγιστικό ρεύμα. Συνεπώς, από αρκετά νωρίς υπήρξε μια προσπάθεια να αντιμετωπιστούν αυτές οι ταλαντώσεις, αν και ανεπιτυχώς. Το κέντρο αυτής της προσπάθειας εστιάζει στην εισαγωγή ενός νέου, προσεγγιστικού πυρήνα, γνωστού ως εκτεταμένου.

1 Ο Εκτεταμένος Πυρήνας

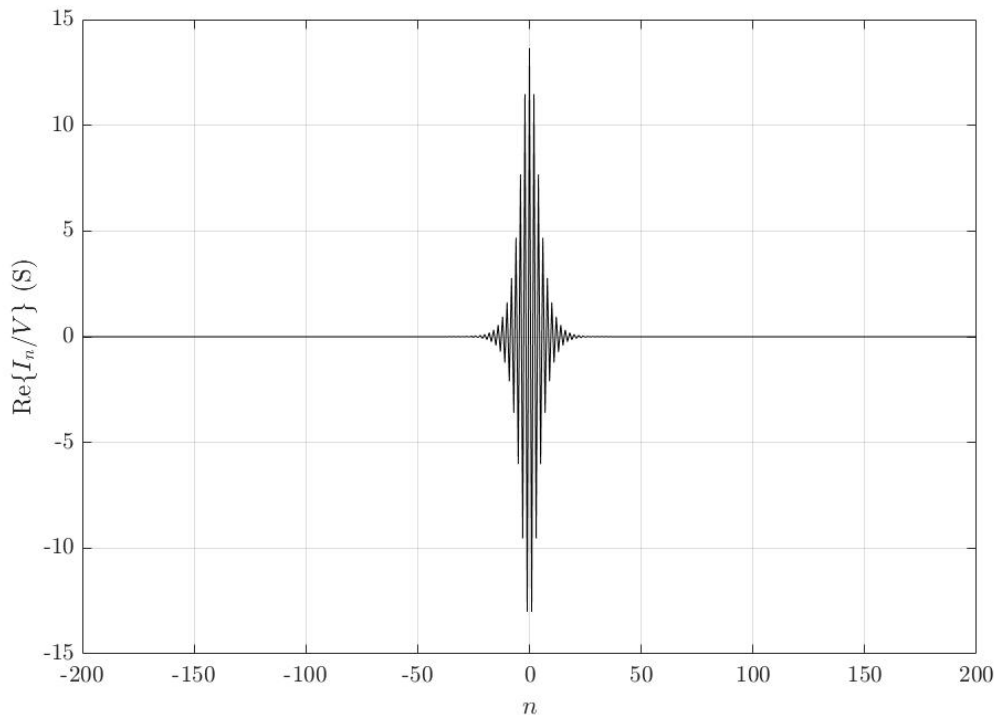
Ο εκτεταμένος πυρήνας προτάθηκε αρχικά από τους Roggio (δημιουργό του NEC) και Adams στα 1977 [4], αρχικά για να αντιμετωπιστούν οι ανακρίβειες του προσεγγιστικού πυρήνα, που τότε (και σωστά) θεωρούνταν η έλλειψη λογαριθμικής ιδιομορφίας στο $z = 0$. Οι συγγραφείς έγραψαν τον ακριβή πυρήνα υπό μορφή σειράς δυνάμεων του:

$$L(z) = \left(1 + \frac{1}{k_c} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) K_{\text{ap}}(z) \quad (5.1)$$

όπου αναγνωρίζουμε το διαφορικό τελεστή ως αυτόν (πρακτικά) που ενυπάρχει στην εξίσωση Pocklington (σχέση (2.25)). Άρα, ο προσεγγιστικός πυρήνας δεν είναι παρά μια προσέγγιση μηδενικού βαθμού του ακριβούς. Ο εκτεταμένος είναι μια καλύτερη, πρωτοβάθμια προσέγγιση, συγκεκριμένα:

$$K_{\text{ext}}(z) = \left[1 - \frac{(k_c a)^2}{4} \left(1 + \frac{1}{k_c} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right] K_{\text{ap}}(z) \quad (5.2)$$

Η δεύτερη παράγωγος αναμένουμε να οδηγήσει σε πιο οξείες συμπεριφορές, ωστόσο δεν κατορθώνει να προσδώσει ιδιομορφία στον πυρήνα αυτόν, όπως παρατηρούν οι συγγραφείς [4], οπότε η εξίσωση Hallén συνεχίζει να είναι μη επιλύσιμη (για διέγερση γεννήτριας δέλτα συνάρτησης και το απλούστατο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για τον προσεγγιστικό πυρήνα), όπως αποδεικνύεται σε πρόσφατη εργασία [5]. Στην ίδια εργασία αποδεικνύεται (με την ασυμπτωτική τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) η ύπαρξη ταλαντώσεων (γνωστή από αριθμητικά πειράματα) και στην περίπτωση του εκτεταμένου πυρήνα, αλλά με αρκετά ασθενέστερες και πιο αργές ταλαντώσεις (οι συγγραφείς μελέτησαν κεραία σε κενό, άρα αναφερόμαστε σε κεντρικές ταλαντώσεις του φανταστικού μέρους μόνο). Σημειώνεται ότι αυτό το συμπέρασμα επιβεβαιώνει από άλλη οπτική τον αρχικό ισχυρισμό των Roggio και Adams, ότι δηλαδή ενώ ο εκτεταμένος πυρήνας αναμένεται επίσης ανακριβής, τα αποτελέσματα θα είναι έγκυρα για μεγαλύτερο σύνολο παραμέτρων από ό,τι ο προσεγγιστικός [4]. Τότε οι συγγραφείς αναφέρονταν κατά κύριο λόγο στο πάχος της κεραίας που μπορεί να μελετηθεί (ο εκτεταμένος πυρήνας προσφέρει υπολογιστική διευκόλυνση και κάποια ακρίβεια για πιο παχιές κεραίες). Δεδομένου ότι η έναυση και η ένταση των ταλαντώσεων τόσο στην περίπτωση του προσεγγιστικού όσο και του εκτεταμένου πυρήνα εξαρτώνται από το πηλίκο z_0/a είναι προφανές ότι τα συμπεράσματα των δύο εργασιών [4], [5] έρχονται σε συμφωνία. Αριθμητικά πειράματα ενισχύουν τα συμπεράσματα των συγγραφέων και στην περίπτωση περιβάλλοντος με αγωγιμότητα, όπως φαίνεται στα Σχήματα 5.1 και 5.2. Παρατηρούμε,



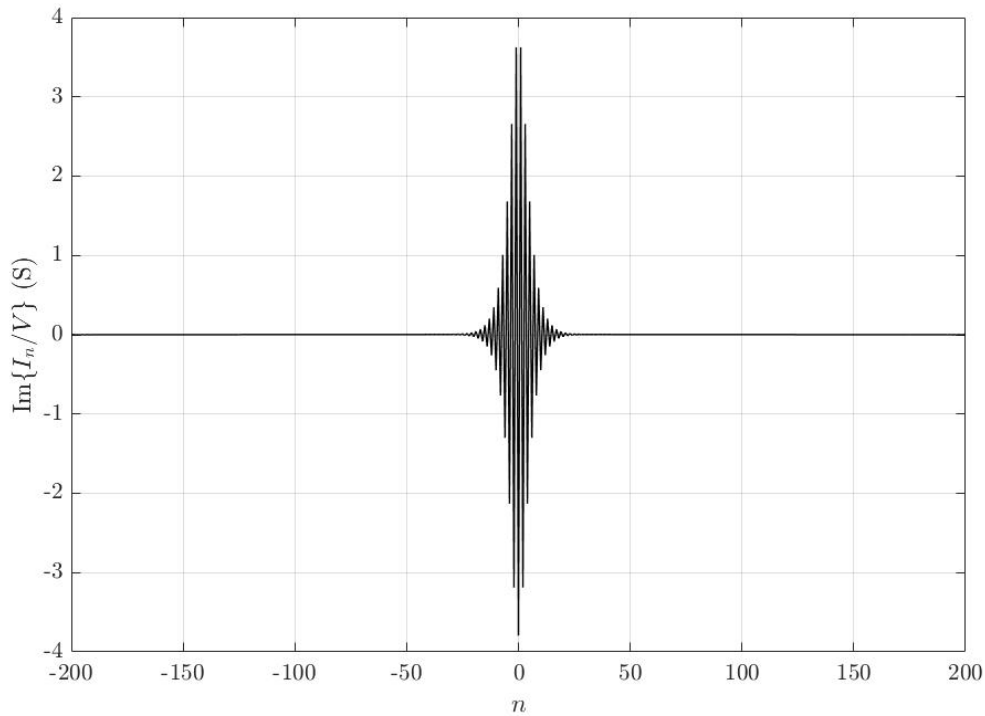
Σχήμα 5.1: Το πραγματικό μέρος του ρεύματος/αγωγιμότητας για την περίπτωση της κεραίας και των λοιπών παραμέτρων των Σχημάτων 4.1 και 4.2, όπως προκύπτει με τη χρήση του εκτεταμένου πυρήνα. Οι προηγούμενοι ισχυρισμοί μας επαληθεύονται: οι ταλαντώσεις είναι πιο αργές –αραιότερες– ενώ το πλάτος τους είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερο.

όπως αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τον προσεγγιστικό πυρήνα, ύπαρξη ταλαντώσεων και στο πραγματικό μέρος.

2 Η Φυσική Σημασία του Ενεργού Ρεύματος

Η μέθοδος του ενεργού ρεύματος, όπως αυτή χρησιμοποιήθηκε στην καθοριστική εργασία [1], είχε δοθεί νωρίτερα σε αρκετά διαφορετικό πλαίσιο από τους Παπακωνσταντόπουλο και Καψάλη [6]. Εκεί αντικείμενο μελέτης ήταν πάλι οι κεραίες λεπτού σύρματος και στόχος ο καθορισμός των παραμέτρων τους, όπως το ρεύμα στην επιφάνεια της κεραίας. Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τη Μέθοδο των Βοηθητικών Πηγών, μια εναλλακτική αριθμητική μέθοδο [7] προς αυτήν την κατεύθυνση, αντικαθιστώντας τις πραγματικές επιφανειακές πηγές με στοιχειώδη δίπολα με ημιτονοειδείς κατανομές ρευμάτων πάνω στον άξονα της κεραίας. Τούτο μας θυμίζει αρκετά τη λογική πίσω από τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου (εκτός των πηγών) μπορεί να υπολογιστεί ως η υπέρθεση των στοιχειωδών πεδίων που παράγει κάθε δίπολο ξεχωριστά και από εκεί (συγκεκριμένα από το μαγνητικό πεδίο) μπορεί να υπολογιστεί η επιθυμητή ρευματική κατανομή με καλή ακρίβεια.

Πάνω σε αυτήν τη λογική βασίστηκαν και οι εργασίες [2], [1]. Γιατί εκτιμάται ότι ο ανωτέρω υπολογισμός θα δώσει ένα ρεύμα δίχως ταλαντώσεις και (αν είναι δυνατόν) αρκετά κοντά στο ακριβές; Η



Σχήμα 5.2: Το πραγματικό μέρος του ρεύματος/αγωγιμότητας για την περίπτωση της κεραίας και των λοιπών παραμέτρων των Σχημάτων 4.1 και 4.2, όπως προκύπτει με τη χρήση του εκτεταμένου πυρήνα. Τα ευρήματά της [5] επαληθεύονται και εδώ.

διαισθητική απάντηση δίνεται ωραία στην [1]: εφόσον με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα αναζητούμε ένα ρεύμα που βρίσκεται στον άξονα z , δηλαδή για $\rho = 0$, αντί του πραγματικού, επιφανειακού που βρίσκεται στην περιφέρεια $\rho = a$, ο υπολογισμός ενός μαγνητικού πεδίου, λόγω του νηματοειδούς, προσεγγιστικού ρεύματος (για ορισμένο εύρος παλμών z_0) σε απόσταση $\rho = a$ και ο καθορισμός ενός νέου ρεύματος, του ενεργού σε αυτήν την απόσταση, μοιάζει, κάπως αφηρημένα, σε μια αντιστάθμιση της χρήσης του προσεγγιστικού πυρήνα, άρα μπορεί να δίνει ομαλά αποτελέσματα. Αν ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει (και ισχύει σύμφωνα με το [1] και ύστερες παραγράφους της παρούσας εργασίας) έχουμε έναν απλούστατο υπολογιστικά τρόπο να λαμβάνουμε εξαιρετικά αποτελέσματα χωρίς να καταφεύγουμε σε κοπιώδεις τεχνικές υπολογισμού του ακριβούς ρεύματος. Εδώ όμως επανέρχεται ένα σημαντικό ερώτημα που συναντήσαμε στο κεφάλαιο 2, όταν αναφερόμασταν στη χρήση της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης: ένα μοντέλο πρέπει να είναι ακούρντως απλό και κοντά στη φυσική πραγματικότητα. Αντίστοιχα, μια προσεγγιστική μέθοδος. Ο ισχυρισμός ότι το ενεργό ρεύμα είναι πολύ κοντά στο ακριβές και συνάμα ομαλό, σημαίνει ότι, όπως το ακριβές, έτσι και αυτό θα εμφανίζει λογαριθμική ιδιομορφία στο πραγματικό και φανταστικό μέρος του. Άρα από μια νηματοειδή πηγή στον άξονα ($\rho = 0$) προκαλείται ιδιομορφία σε απόσταση $\rho = a$, γεγονός που φαίνεται να παραβιάζει τις εξισώσεις Maxwell. Η ιδιομορφία του ενεργού ρεύματος όμως, έχει αποδειχτεί και θα δείξουμε, είναι ασυμπτωτική, συγκεκριμένα ισχύει στο όριο $z_0 \rightarrow 0$, δηλαδή για άπειρο πλήθος συναρτήσεων βάσης. Αυτό δεν είναι μια πραγματική ποσότητα που μπορεί να προκύψει από την οσοδήποτε ακριβή,

αριθμητική ανάλυση, αλλά ένα μαθηματικό όριο, άρα μια αμιγώς μαθηματική ποσότητα, του πραγματικού πεδίου, που όπως σημειώθηκε νωρίτερα είναι αποτέλεσμα των βοηθητικών πηγών/συναρτήσεων βάσης, οι οποίες διαθέτουν μικρό ίσως, αλλά πεπερασμένο z_0 . Με λίγα λόγια, το ενεργό ρεύμα αναπαράγει πλήρως την ιδιομορφία του ακριβούς όταν χάνει τις φυσικές ιδιότητές του και εκφυλίζεται σε ένα μαθηματικό ρεύμα. Φυσικά, το πρόβλημα του φυσικού ρεύματος (όταν το z_0 είναι πεπερασμένο) έγκειται στη μη πλήρη αναπαραγωγή της ιδιομορφίας (θα δούμε μέσα από αριθμητικά πειράματα ότι η περιοχή με τα μέγιστα σφάλματα είναι ακριβώς το κέντρο του ενεργού ρεύματος, όπου αναμένουμε τη λογαριθμική ιδιομορφία).

Έχοντας δείξει τη φυσική αλήθεια του ενεργού ρεύματος, μπορούμε να συνεχίσουμε στην αντιστοίχισή του με κάποιο πραγματικό, φυσικό μέγεθος του προβλήματος. Ένα παρόμοιο πρόβλημα αντιμετωπίζει ο Wu [8] του οποίου τη σκέψη ακολουθούμε σε αυτήν την παράγραφο. Θεωρούμε τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz για τη z συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου:

$$(\nabla^2 + k_c^2)E_z(\rho, z) = 0 \quad (5.3)$$

Εφαρμογή (χωρικού) μετασχηματισμού Fourier στην παραπάνω εξίσωση έχει ως αποτέλεσμα μια εξίσωση Bessel, όπως παρακάτω:

$$\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \bar{E}_z(\rho, \lambda) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{E}_z(\rho, \lambda) + \rho^2(k_c^2 - \lambda^2) \bar{E}_z(\rho, \lambda) = 0 \quad (5.4)$$

Αυτή μπορεί να λυθεί απλά αν συνδυαστεί με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες. Εδώ τις επιβάλλει η γεννήτρια δέλτα συνάρτησης και είναι:

$$E_z^{\text{in}}(a, z) = E_z^{\text{out}}(a, z) = -V\delta(z) \quad (5.5)$$

ή μετασχηματισμένες κατά Fourier:

$$\bar{E}_z^{\text{in}}(a, \lambda) = \bar{E}_z^{\text{out}}(a, \lambda) = -V \quad (5.6)$$

Στηριζόμενοι στις παραπάνω μπορούμε να βρούμε κατά τετριμμένο τρόπο τις φυσικά αποδέκτες λύσεις της (5.4) για κάθε περιοχή του χώρου. Έτσι για $\rho < a$, εντός της κεραίας δηλαδή απαιτούμε στάσιμα κύματα, συνεπώς [8]:

$$\bar{E}_z^{\text{in}}(\rho, \lambda) = -V \frac{J_0(\rho\sqrt{k_c^2 - \lambda^2})}{J_0(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2})} \quad (5.7)$$

Για $|k_c| < |\lambda|$ βρίσκουμε την αναλυτική επέκταση (πρακτικά εμφανίζεται όρισμα της μορφής ja στην συνάρτηση πρώτου Bessel είδους και μηδενικής τάξης, οπότε μπορούμε να την αντικαταστήσουμε την αντίστοιχη τροποποιημένη συνάρτηση Bessel) της ανωτέρω σχέσης [8]:

$$\bar{E}_z^{\text{in}}(\rho, \lambda) = -V \frac{I_0(\rho\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})}{I_0(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})} \quad (5.8)$$

Από την άλλη, στο εξωτερικό και ακολουθώντας τη συνθήκη του Sommerfeld απαιτούμε κύματα διαδιδόμενα από τις πηγές προς το άπειρο και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο επιχείρημα περί αναλυτικής

επέκτασης καταλήγουμε στο [8]:

$$\bar{E}_z^{\text{out}}(\rho, \lambda) = \begin{cases} -V \frac{H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_c^2 - \lambda^2})}{H_0^{(1)}(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2})} \\ -V \frac{K_0(\rho\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})}{K_0(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})} \end{cases} \quad (5.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Faraday και Ampère-Maxwell μπορούμε να αποπλέξουμε τις επιμέρους ποσότητες και να καταλήξουμε στην:

$$\bar{B}_\phi(\rho, \lambda) = \frac{jk_c}{c} \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{E}_z(\rho, \lambda) \quad (5.10)$$

όπου c η ταχύτητα διάδοσης στο μέσο με απώλειες που μελετάμε και αξιοποιώντας τις βολικότερες μορφές των (5.7)-(5.9):

$$\bar{B}_\phi(\rho, \lambda) = \begin{cases} \frac{jk_c V}{c} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_c^2}} \frac{I_1(\rho\sqrt{k_c^2 - \lambda^2})}{I_0(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2})}, & \rho \leq a \\ \frac{jk_c V}{c} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_c^2}} \frac{K_1(\rho\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})}{K_0(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})}, & \rho > a \end{cases} \quad (5.11)$$

Σε αυτό το σημείο είναι στοιχειώδες να υπολογίσουμε τα επιφανειακά ρεύματα στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια της κεραίας από την οριακή συνθήκη για την ασυνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του μαγνητικό πεδίου:

$$\bar{K}_z^{\text{in}}(\lambda) = -\frac{1}{\mu_0} \bar{B}_\phi^{\text{in}}(a, \lambda) = -\frac{iV k_c}{\zeta_c} \frac{1}{\sqrt{k_c^2 - \lambda^2}} \frac{J_1(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2})}{J_0(a\sqrt{k_c^2 - \lambda^2})} \quad (5.12)$$

και:

$$\bar{K}_z^{\text{out}}(\lambda) = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_\phi^{\text{out}}(a, \lambda) = -\frac{iV k_c}{\zeta_c} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_c^2}} \frac{K_1(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})}{K_0(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})} \quad (5.13)$$

Στην εργασία των Τατσσόγλου-Φικιώρη [9] το ενεργό ρεύμα γράφεται στη μορφή:

$$\bar{I}_{\text{eff}}(\rho, \lambda) = w_{\text{eff}}(\rho, \lambda) \bar{r}(\lambda) \quad (5.14)$$

όπου:

$$w_{\text{eff}}(\lambda, \rho) = -\frac{2\pi\rho}{\sqrt{\lambda^2 - k_c^2}} \frac{K_1(\rho\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})}{K_0(a\sqrt{\lambda^2 - k_c^2})} \quad (5.15)$$

και:

$$\bar{r}(\lambda) = \frac{jV k_c \sin\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right)}{\zeta_c \frac{\lambda\Delta}{2}} \quad (5.16)$$

ποσότητα οφειλόμενη στη γεννήτρια πεπερασμένου διακένου που χρησιμοποιούν εκεί οι συγγραφείς. Πλην της (5.16) και σύμφωνα με την ανάλυση του κεφαλαίου 4 μπορούμε να γενικεύσουμε τη μελέτη τους στην περίπτωση αγωγίμου περιβάλλοντος της κεραίας. Για να επανέλθουμε στο δικό μας πρόβλημα, που χρησιμοποιούμε γεννήτρια δέλτα συνάρτησης, παίρνουμε το όριο $\Delta \rightarrow 0$, οπότε:

$$\bar{r}_{\text{DFG}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{r}_{\text{FGG}} = \frac{jV k_c}{\zeta_c} \quad (5.17)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier λαμβάνουμε το τελικό μας αποτέλεσμα:

$$I_{\text{eff}}(a, z) = 2\pi a K_z^{\text{out}}(z) \quad (5.18)$$

Συνεπώς, το ενεργό ρεύμα σε απόσταση $\rho = a$ από τον άξονα της κεραίας είναι πρακτικά η εξωτερική, επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος που συναντήσαμε πολύ νωρίτερα στο κεφάλαιο 2. Αυτό το συμπέρασμα ενισχύει ακόμη περισσότερο την πιστότητα της μεθόδου, καθώς το ενεργό ρεύμα αντιστοιχεί σε ένα κομμάτι του ακριβούς ρεύματος! Αποκλίσεις φυσικά θα υπάρχουν, αφού σύμφωνα με τη σχέση (2.6) το ακριβές ρεύμα αποτελείται από δύο συνιστώσες. Από την άλλη στο βιβλίο τους οι King και Harisson παρατηρούν ότι για λεπτές (ηλεκτρικά) κεραίες, όπως αυτές που μελετάμε, η συνεισφορά της εσωτερικής, επιφανειακής πυκνότητας είναι πρακτικά αμελητέα εκτός ίσως από τα άκρα [10]¹³, άρα το ενεργό ρεύμα φαίνεται, υπό το φως αυτής της παρατήρησης, μια εξαιρετική προσέγγιση του ακριβούς, όπως θα αναδείξουμε στη συνέχεια με αριθμητικά δεδομένα.

3 Η Αριθμητική Μέθοδος στην Πεπερασμένη Κεραία: Ανάλυση για το Ενεργό Ρεύμα

Για να υπολογίσουμε το ρεύμα αριθμητικά χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικές μεθόδους, αποδεικνύοντας την ευελιξία της μεθόδου, αλλά και την ευρύτητα των συμπερασμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου, αλλά και για λόγους υπολογιστικούς (σε αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι ορισμένες συναρτήσεις βάσεις έχουν καλύτερη συμπεριφορά από άλλες).

Η πρώτη μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι μια κλασσική μέθοδος Galerkin με συναρτήσεις βάσεις τετραγωνικούς παλμούς, ακριβώς όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Συνεπώς, η ανάλυση της παραγράφου 1, κεφάλαιο 4 ισχύει επακριβώς.

Όπως συζητήσαμε και νωρίτερα, το πιο δύσκολο βήμα για τον υπολογισμό του ενεργού ρεύματος είναι ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση $\rho = a$ από τον άξονα της κεραίας, ως υπέρθεση των πεδίων που παράγουν οι συναρτήσεις βάσης. Η θεώρηση των συναρτήσεων βάσης ως τετραγωνικούς παλμούς είναι ισοδύναμη με το να θεωρήσουμε ότι επί της κεραίας υπάρχουν $2N + 1$ δίπολα μικρού (αλλά όχι απειροστού) μήκους, τα οποία βέβαια ακτινοβολούν [1]. Το μαγνητικό πεδίο που παράγει το καθένα από αυτά βρίσκεται σε όλα τα βιβλία ανάλυσης κεραιών, για παράδειγμα [12]:

$$H_n(a, z, z_0) = a \int_{-z_0/2}^{z_0/2} \frac{1 - jk_c R_n}{4\pi R_n^3} e^{jk_c R_n} dz' \quad (5.19)$$

όπου R_n είναι η απόσταση από το δίπολο/συνάρτηση βάσης n ως ένα σημείο πάνω σε άξονα παράλληλο στον z , σε απόσταση $\rho = a$ και ύψος από την αρχή των αξόνων z (το οποίο διακριτοποιείται στην αριθμητική μέθοδο και γράφεται ως mz_0 , όπου m φυσικός αριθμός):

$$R_n = \sqrt{a^2 + (z - nz_0 - z')^2} \quad (5.20)$$

¹³Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι στην [1] γράφεται ότι κοντά στα άκρα το ενεργό ρεύμα αποτυγχάνει να μιμηθεί τη μείωση σαν τετραγωνική ρίζα που εμφανίζει το ακριβές ρεύμα [11]. Συνδυάζοντας την πληροφορία από το [10] βρίσκουμε μια πιθανή και προφανή αιτία.

Το ενεργό ρεύμα σε απόσταση $\rho = a$ από τον άξονα της κεραίας βρίσκεται απλά έπειτα:

$$I_{\text{eff}}(a, z, z_0) = 2\pi a \sum_{n=-N}^N I_{\text{ap},n} H_n(a, z, z_0) \quad (5.21)$$

Είναι εμφανές ότι η σχέση (5.19) δεν είναι η καλύτερη υπολογιστικά, δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς, συνεπώς απαιτεί αριθμητική ολοκλήρωση και μάλιστα $2N + 1$ φορές. Υπολογιστική διευκόλυνση μπορούμε να πάρουμε εάν θεωρήσουμε ότι τα δίπολα που απαρτίζουν την κεραία έχουν απειροστό μήκος, είναι με λίγα λόγια δίπολα Hertz. Για τα πεδία τους υπάρχουν αναλυτικές εκφράσεις, οπότε γνωρίζουμε ότι [12]:

$$H_n(a, z, z_0) = z_0 a \frac{1 - jk_c R_n}{4\pi R_n^3} e^{jk_c R_n} \quad (5.22)$$

με την απόσταση R_n να υπολογίζεται:

$$R_n = \sqrt{a^2 + (z - nz_0)^2} \quad (5.23)$$

Το ρεύμα έπειτα θα υπολογιστεί από την (5.21). Ενώ η (5.22) είναι ιδιαίτερα θελκτική υπολογιστικά, η θεώρηση διπόλων Hertz ως βοηθητικών πηγών/συναρτήσεων βάσης, έχει συνδυαστεί με ανεπιθύμητες ταλαντώσεις στην κατανομή ενεργού ρεύματος που οφείλονται σε κορυφώσεις των πεδίων των διπόλων Hertz [13], συνεπώς η επιθυμητή εξομάλυνση του προσεγγιστικού ρεύματος δε θα επιτευχθεί.

Μια καλύτερη αντιμετώπιση των υπολογιστικών προβλημάτων που προκαλεί η ανωτέρω επιλογή συναρτήσεων βάσης προσφέρουν οι τριγωνικές συναρτήσεις βάσης. Τώρα αναπτύσσουμε το ρεύμα επί της κεραίας στην ακόλουθη σειρά:

$$I(z) \cong \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_{\text{ap},n} t(z - nz_0) \quad (5.24)$$

όπου $t(z)$ είναι οι τριγωνικές συναρτήσεις βάσης που ορίζονται καθώς:

$$t(z) = \begin{cases} \frac{z_0 - |z|}{z_0}, & -z_0 \leq z \leq z_0 \\ 0, & z_0 < |z| \end{cases} \quad (5.25)$$

με $t(0) = 1$ και $t(\pm z_0) = 0$, όπως ορίζονται εδώ [14]. Θεωρούμε δηλαδή ότι στον άξονα της κεραίας βρίσκονται $2N - 1$ δίπολα μήκους $2z_0$ με τριγωνική ρευματική κατανομή. Σημειώνεται ότι αυτήν τη μέθοδο χρησιμοποιούν οι συγγραφείς στη Μέθοδο Βοηθητικών Πηγών [6] με την προσθήκη επιπλέον δύο μονοπόλων (πρακτικά "μισών" τριγωνικών συναρτήσεων) στα άκρα της κεραίας τους. Στην (5.24) $I_{\text{ap},n}$ είναι οι ρευματικοί συντελεστές που υπολογίζαμε αριθμητικά στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτή τη φορά όμως με διαφορετική μέθοδο. Τελικά, πάλι καλούμαστε να λύσουμε ένα σύστημα της μορφής:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} I_{\text{ap},n} = B_l^{(2)} + C B_l^{(1)}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.26)$$

όπου οι συντελεστές A υπολογίζονται από τη σχέση (4.9) ξανά, όμως οι συντελεστές $B^{(1)}$ και $B^{(2)}$ διαφέρουν, συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} B_l^{(1)} &= z_0 \cos(k_c z_0 l) \\ B_l^{(2)} &= \frac{jV z_0}{2\zeta_c} \sin(k_c z_0 |l|) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ο συντελεστής C υπολογίζεται και πάλι από την οριακή συνθήκη για τα άκρα της κεραίας, εν προκειμένω τη σχέση (4.11) για τον προσεγγιστικό και την (4.12) για τον ακριβή πυρήνα. Στη [14] αποδεικνύεται ότι η συμπεριφορά των ρευματικών συντελεστών τότε είναι πολύ κοντά σε αυτήν που έχουμε ήδη μελετήσει με την προηγούμενη μέθοδο. Συγκεκριμένα, στην άπειρη κεραία οι κεντρικές ταλαντώσεις περιγράφονται με μια σχέση όμοια με την (4.36), με ένα συντελεστή δύο. Συνεπώς, όλα τα αποτελέσματα (ποιοτικά) και συμπεράσματα του προηγούμενου κεφαλαίου ισχύουν ακόμη και αν επιλέξουμε αυτές τις βολικότερες συναρτήσεις βάσης για τον υπολογισμό του ενεργού ρεύματος. Το ενεργό ρεύμα τότε προκύπτει:

$$I_{\text{eff}}(a, z, z_0) = \frac{1}{2j \sin(k_c z_0)} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_{\text{ap},n} [f_{n+1} + f_{n-1} - 2 \cos k_c z_0 f_n] \quad (5.28)$$

όπου $f_n = e^{jk_c \sqrt{(nz_0 - z)^2 + a^2}}$. Στην αριθμητική μέθοδο, όπως και πριν, διακριτοποιούμε τη (συνεχή) μεταβλητή z σε m κομμάτια μήκους z_0 . Η υπολογιστική απλότητα που παρέχει η (5.28) είναι προφανής και αυτή τη σχέση (και μέθοδο) θα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό πιο απαιτητικών συστημάτων, όπως κεραίων μεγάλου μήκους που θα παρουσιάσουμε στα αριθμητικά αποτελέσματα στη συνέχεια.

4 Η Αριθμητική Μέθοδος στην Άπειρη Κεραία και Ασυμπτωτική Ανάλυση: Η Περίπτωση του Ενεργού Ρεύματος

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, στρεφόμεστε στο θεωρητικό εργαλείο της κεραίας άπειρου μήκους, όπου η (ασυμπτωτική) ανάλυση είναι δυνατή, ώστε να εξάγουμε ποιοτικά συμπεράσματα σχετικά με τη συμπεριφορά του ενεργού ρεύματος και την ομοιότητά του με το ακριβές. Εδώ ακολουθούμε την ανάλυση του [1], με το οποίο έχουμε πολλά κοινά συμπεράσματα (πάλι ειδοποιός διαφορά φαίνεται το πηλίκο k_c/ζ_c)

Εδώ αναπτύσσουμε το ρεύμα σε σειρά ημιτονοειδών συναρτήσεων βάσης, δηλαδή:

$$I(z) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{\text{ap},n}^{(\infty)} s(z - nz_0) \quad (5.29)$$

όπου οι συναρτήσεις βάσης $s(z)$, εύρους $2z_0$ ορίζονται καθώς:

$$s(z) = \begin{cases} \frac{\sin[k(z_0 - |z|)]}{\sin(kz_0)}, & -z_0 \leq z \leq z_0 \\ 0, & z_0 < |z| \end{cases} \quad (5.30)$$

και στη συνέχεια παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο (πολλαπλασιάζουμε και ολοκληρώνουμε από $z = -h$ έως $z = h$) με τις τριγωνικές συναρτήσεις βάσης που ορίσαμε προηγουμένως (5.25) και που είναι ορθογώνιες προς τις ημιτονοειδείς, αφού ταυτίζονται πρακτικά στο όριο $k_c(z_0 - |z|) \ll 1$, οπότε προκύπτει πάλι ένα άπειρο σύστημα Toeplitz, συγκεκριμένα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{l-n}^{(\infty)} I_{\text{ap},n}^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{jV k_c}{\zeta_c}, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

όπου οι συντελεστές E υπολογίζονται από τη σχέση:

$$E_l^{(\infty)} = \frac{k_c}{z_0 \sin(k_c z_0)} [A_{l+1}^{(\infty)} + A_{l-1}^{(\infty)} - 2 \cos(k_c z_0) A_l^{(\infty)}] \quad (5.32)$$

και οι συντελεστές A_l υπολογίζονται από την (4.9).

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι το σύστημα (5.29) είναι μια διακριτή συνέλιξη, εισάγουμε τις σειρές Fourier:

$$\bar{E}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l^{(\infty)} e^{jl\theta}, \quad \bar{A}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l^{(\infty)} e^{jl\theta}, \quad \bar{I}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l^{(\infty)} e^{jl\theta} \quad (5.33)$$

και χρησιμοποιούμε το θεώρημα της συνέλιξης $\bar{E}(\theta)\bar{I}(\theta) = jk_c V/\zeta_c$, οπότε, και χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\bar{E}(\theta)$:

$$\bar{E}(\theta) = \frac{2k_c}{z_0 \sin(k_c z_0)} (\cos(\theta) - \cos(k_c z_0)) \bar{A}(\theta) \quad (5.34)$$

Η συνάρτηση $\bar{A}(\theta)$ μπορεί να υπολογιστεί με τους χειρισμούς του κεφαλαίου 4, οπότε καταλήγουμε στην (4.22):

$$\bar{A}(\theta) = z_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{K} \left(\frac{2m\pi - \theta}{z_0} \right) \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{(m\pi - \frac{\theta}{2})^2} \quad (5.35)$$

Βάση των (5.34) και (5.35) μπορούμε να υπολογίσουμε τους ρευματικούς συντελεστές που μπορεί να είναι ακριβείς ή προσεγγιστικοί ανάλογα με την επιλογή πυρήνα στην (5.35), από τη σχέση (4.24):

$$I_n^{(\infty)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} e^{-jn\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} \cos(n\theta) d\theta \quad (5.36)$$

όπου:

$$\bar{B}(\theta) = \frac{jV z_0 \sin(k_c z_0)}{2\zeta_c (\cos(\theta) - \cos(k_c z_0))} \quad (5.37)$$

Έχοντας υπολογίσει τους ρευματικούς συντελεστές απομένει να βρούμε το μαγνητικό πεδίο, οφειλόμενο στην υπέρθεση των πεδίων των ημιτονοειδών συναρτήσεων βάσης. Αυτό βρίσκεται αναλυτικά [15]:

$$H_{\phi,n}(\rho, z, z_0) = \frac{I_n^{(\infty)}}{j4\pi\rho \sin(k_c z_0)} (f_{n+1} + f_{n-1} - 2 \cos k_c z_0 f_n) \quad (5.38)$$

όπου $f_n = e^{jk_c \sqrt{(nz_0 - z)^2 + \rho^2}}$. Τότε και χρησιμοποιώντας τους προσεγγιστικούς συντελεστές ρεύματος, το ενεργό ρεύμα θα είναι $I_{\text{eff}}(\rho, z, z_0) = 2\pi\rho H_{\phi,n}(\rho, z, z_0)$, δηλαδή:

$$I_{\text{eff}}(\rho, z, z_0) = \frac{1}{2j \sin(k_c z_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{\text{ap},n}^{(\infty)} [f_{n+1} + f_{n-1} - 2 \cos(k_c z_0) f_n] \quad (5.39)$$

Προσπαθούμε να βρούμε μια κατάλληλη ασυμπτωτική έκφραση για την (5.39) όπως κάναμε στο κεφάλαιο 4. Το πρόβλημα εμφανίζεται εξαιτίας των συντελεστών $I_{\text{ap},n}^{(\infty)}$, οι οποίοι δε διαθέτουν όριο για $z_0 \rightarrow 0$ (που αντιστοιχεί στην ασυμπτωτική συνθήκη $z_0/a \ll 1$ του προηγούμενου κεφαλαίου). Χρησιμοποιώντας την (5.36) (δεύτερο μέλος) και την (5.38) έχουμε:

$$I_{\text{eff}}(\rho, z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} \bar{D}(\theta, z) d\theta \quad (5.40)$$

όπου:

$$\bar{D}(\theta, z) = \frac{1}{2j \sin(k_c z_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\theta} [f_{n+1} + f_{n-1} - 2 \cos(k_c z_0) f_n] \quad (5.41)$$

Εφόσον $\text{Im}\{k_c\} > 0$, μπορούμε να σπάσουμε το άθροισμα της (5.40) στα επιμέρους (δεδομένου ότι αυτά συγκλίνουν [1]) και ορίζουμε την ποσότητα:

$$\bar{F}(\theta, \rho, z, z_0) = \frac{Vz_0}{2\zeta_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk_c \sqrt{(nz_0-z)^2 + \rho^2}} e^{-jn\theta} \quad (5.42)$$

οπότε η $\bar{D}(\theta, z)$ γράφεται:

$$\bar{D}(\theta, z) = \frac{2\zeta_c}{jVz_0 \sin(k_c z_0)} (\cos(\theta)) - \cos(k_c z_0) \bar{F}(\theta, \rho, z, z_0) \quad (5.43)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο αθροίσματος Poisson στην (5.42) παίρνουμε:

$$\bar{F}(\theta, \rho, z, z_0) = \frac{V}{2\zeta_c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi m - \theta}{z_0} z} \bar{L}\left(\frac{2\pi m - \theta}{z_0}, \rho\right) \quad (5.44)$$

όπου:

$$\bar{L}(\lambda, \rho) = \frac{2k_c \rho}{j\sqrt{\lambda^2 - k_c^2}} K_1\left(\rho\sqrt{\lambda^2 - k_c^2}\right) \quad (5.45)$$

ο μετασχηματισμός Fourier της ποσότητας $\exp\left(jk_c \sqrt{z^2 + \rho^2}\right)$ ¹⁴. Συνδυάζοντας τις (5.37), (5.40) και (5.41) έχουμε ότι:

$$I_{\text{eff}}(\rho, z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{F}(\theta, \rho, z, z_0)}{\bar{A}(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\bar{F}(\theta, \rho, z, z_0) + \bar{F}(-\theta, \rho, z, z_0)}{\bar{A}(\theta)} d\theta \quad (5.46)$$

Η ανωτέρω έκφραση, μαζί με τις (5.35), (5.44), (5.45) και (4.24) αποτελεί μια ακριβή περιγραφή του ενεργού ρεύματος για πεπερασμένο εύρος παλμών z_0 και για $0 \leq \rho \leq a$.

Για $|a|\lambda \gg 1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση (4.28) για τον προσεγγιστικό πυρήνα, οπότε από την (5.46), για $\rho = a$ και $z_0 \rightarrow 0$ βρίσκουμε ότι [16]:

$$\frac{I_{\text{eff}}^{(\infty)}(a, z, z_0 \rightarrow 0)}{V} \sim -j \frac{2k_c a}{\zeta_c} \ln \frac{1}{|z|}, \quad (z \rightarrow 0) \quad (5.47)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό, διότι μας λέει ότι στο όριο που $z_0 \rightarrow 0$, δηλαδή για άριστη διακριτοποίηση το ενεργό ρεύμα αναπαράγει με έναν συντελεστή $1/2$ τη λογαριθμική ιδιομορφία στο πραγματικό και φανταστικό μέρος του ακριβούς ρεύματος¹⁵. Εδώ βρίσκουμε και μια σημαντική διαφορά σε σχέση με την περίπτωση κεραίας σε κενό της εργασίας [1]: το πραγματικό μέρος του ενεργού ρεύματος δεν ταυτίζεται με το πραγματικό μέρος του ακριβούς για $z_0 \rightarrow 0$. Εντούτοις, θα δούμε στα αριθμητικά αποτελέσματα ότι τούτο δε μειώνει την ακρίβεια της μεθόδου (αντίθετα και αναπάντεχα πετυχαίνουμε καλύτερη ακρίβεια από ό,τι στην εργασία [1] στο πραγματικό μέρος –αυτήν την παρατήρηση κάνουν και οι συγγραφείς [1] που παρατηρούν μεγαλύτερη ακρίβεια στο φανταστικό μέρος, όπου βρίσκουν και εκείνοι ιδιομορφία), πέραν από την περιοχή κοντά στην ιδιομορφία.

Θα μελετήσουμε τώρα τη συμπεριφορά του ενεργού ρεύματος υπό τις συνθήκες:

$$\frac{z_0}{a} \ll 1, \quad \frac{nz_0}{a} = O(1), \quad \frac{\rho}{a} \ll 1, \quad |k_c|z_0 \ll 1 \quad (5.48)$$

¹⁴Εδώ κανείς θα πρέπει να παρατηρήσει ότι $\bar{L}(\lambda, a) = -j4\pi\partial\bar{K}_{\text{ap}}(\lambda)/\partial k_c$ και να παραγωγίσει τη σχέση (4.23), για τον προσεγγιστικό πυρήνα.

¹⁵Στην παράγραφο 2 του παρόντος κεφαλαίου συζητήσαμε τις πιθανές ανησυχίες που μπορεί να προκαλεί μια τέτοια συμπεριφορά.

Αρχικά σημειώνουμε ότι για $\rho \sim z_0 \rightarrow 0$ από την (5.39) παίρνουμε:

$$I_{\text{eff}}^{(\infty)}(z_0, mz_0, z_0) \sim I_{\text{ap},n}^{(\infty)}, \quad (\rho \sim z_0 \rightarrow 0) \quad (5.49)$$

δηλαδή αναμένουμε το ενεργό ρεύμα να προσεγγίζει το προσεγγιστικό, άρα να γίνεται ταλαντωτικό και αυτό, στο κέντρο. Η τελευταία συνθήκη της (5.48) εισήχθη και πάλι για να καταδειχθεί η απόκλιση της ανάλυσης για μεγάλες τιμές της αγωγιμότητας (στα αριθμητικά πειράματα τούτη ήταν εμφανής με ασθενείς περατωτικές ταλαντώσεις στα άκρα του ενεργού ρεύματος).

Υπό αυτές τις συνθήκες η (4.30) συνεχίζει να ισχύει, όπως και η (4.31) μόνο που τώρα στο αριστερό μέλος βρίσκεται το ενεργό ρεύμα. Η διαδικασία με λίγα λόγια μοιάζει πολύ με αυτήν που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την εξαγωγή της (4.36). Έτσι οι (4.32) και (4.33) ισχύουν επίσης, όμως διαφορετική υπολογίζεται η (4.34) [16]:

$$g\left(x; \frac{z_0}{a}, k_c a\right) = \frac{q\left(x; \frac{z_0}{a}, k_c a, \frac{\rho}{z_0}\right)}{e^x \left(\pi - \frac{z_0}{a}x\right)^{-5/2} + e^{-x} \left(\pi + \frac{z_0}{a}x\right)^{-5/2}} \quad (5.50)$$

όπου:

$$q\left(x; \frac{z_0}{a}, k_c a, \frac{\rho}{z_0}\right) = -j \frac{V}{\zeta_c} \sec^2\left(\frac{z_0 x}{2a}\right) \frac{\rho}{z_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_m} K_1\left(\frac{\rho}{z_0} r_m\right) \quad (5.51)$$

με:

$$r_m = \sqrt{\left[(2m-1)\pi - \frac{z_0 x}{a}\right]^2 - (k_c z_0)^2} \simeq \left|(2m-1)\pi - \frac{z_0 x}{a}\right| \quad (5.52)$$

λόγω της τελευταίας συνθήκης της (5.48). Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις και για $\rho \sim z_0 \rightarrow 0$ παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$g\left(x; \frac{z_0}{a}, k_c a\right) \sim -\frac{jV}{\zeta_c} \frac{\pi^{5/2}}{8} \frac{1}{\cosh(x)} \eta\left(\frac{\rho}{z_0}\right), \quad (\rho \sim z_0 \rightarrow 0) \quad (5.53)$$

όπου:

$$\eta(x) = \frac{8x}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} K_1((2m-1)\pi x), \quad x \geq 0 \quad (5.54)$$

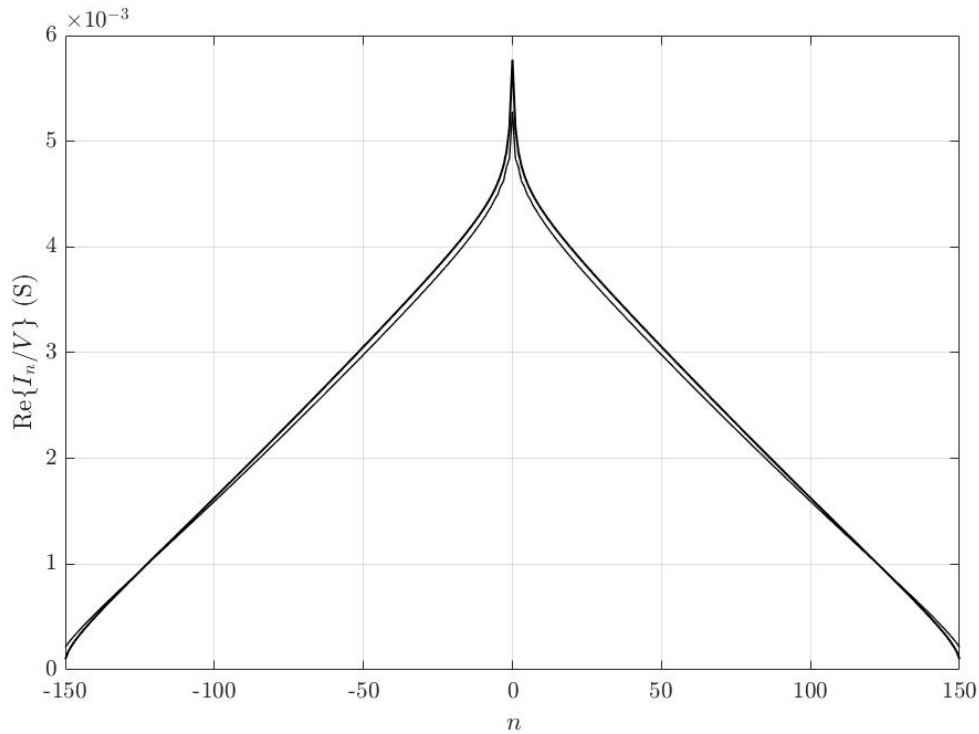
και $\eta(0) = 1$. Αντικαθιστώντας την (5.53) στην (αντίστοιχη) (4.33) και αλλάζοντας το άνω ολοκλήρωσης σε ∞ :

$$f\left(\frac{z_0}{a}, k_c a, n \frac{z_0}{a}\right) = -\frac{jV}{\zeta_c} \frac{\pi^{5/2}}{8} \eta\left(\frac{\rho}{z_0}\right) \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(n \frac{z_0}{a} x\right)}{\cosh(x)} dx \quad (5.55)$$

Τελικά, το ενεργό ρεύμα σε ακτίνα ίση με τη διακριτοποίηση του προβλήματος (και τόσο μικρή ώστε βρισκόμαστε πρακτικά στον άξονα της κεραίας) βρίσκεται:

$$I_{\text{eff}}^{(\infty)}(\rho, nz_0, z_0) \sim \frac{-jV}{\zeta_c} \frac{\pi^3}{16\sqrt{2}} k_c z_0 \sqrt{\frac{z_0}{a}} (-1)^n \exp\left(\pi \frac{a}{z_0}\right) \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi n z_0}{2a}\right)} \eta\left(\frac{\rho}{z_0}\right) \quad (5.56)$$

που, για $\rho \rightarrow 0$ καταλήγει στον πρώτο όρο της (4.36) επί ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα δύο (που οφείλεται στις διαφορετικές συναρτήσεις βάσης), δηλαδή όπως γράψαμε και στην (5.49) απειροστά κοντά στον άξονα της κεραίας κανείς ανακτά το προσεγγιστικό ρεύμα (αριθμητικά, αποκτά ρεύμα με ταλαντωτική συμπεριφορά στο κέντρο ίδιας τάξης μεγέθους με αυτήν του προσεγγιστικού ρεύματος). Όταν απομακρυνόμαστε από τον άξονα της κεραίας, αλλά συνεχίζουμε να είμαστε μακριά από την



Σχήμα 5.3: Σύγκριση ενεργού (λεπτή γραμμή) και ακριβούς ρεύματος (παχιά γραμμή) για κεραία μικρού μήκους, για το πραγματικό μέρος. Η ακρίβεια είναι εμφανής με ορισμένες αποκλίσεις να παρατηρούνται στα άκρα και το κέντρο της κεραίας. Η τραχιά μορφή του ενεργού ρεύματος το κέντρο –που παρόλα αυτά ακολουθεί την ιδιομορφία– οφείλεται στην προσέγγιση με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης.

ακτίνα a , δηλαδή για $z_0 \ll \rho \ll a$ παίρνουμε την:

$$I_{\text{eff}}^{(\infty)}(\rho, nz_0, z_0) \sim -j(-1)^n \frac{\pi^2 V}{2\zeta_c} k_c z_0 \sqrt{\frac{\rho}{a}} \exp[\pi(a-\rho)/z_0] \cos\left(\frac{\pi\rho}{2a}\right) \frac{\cosh[n\pi z_0/(2a)]}{\cosh(n\pi z_0/a) + \cos(\pi\rho/a)} \quad (5.57)$$

δηλαδή παίρνουμε ταλαντώσεις συνεχώς μειούμενες με την απόσταση με αποκορύφωμα την πλήρη εξάλειψή τους για $\rho = a$. Σημειώνεται ότι για άλλη μια φορά η διαφορά ανάμεσα στις (5.56) και (5.57) με τις αντίστοιχες σχέσεις της [16] είναι το πηλίκο k_c/ζ_c που τώρα είναι μιγαδικό.

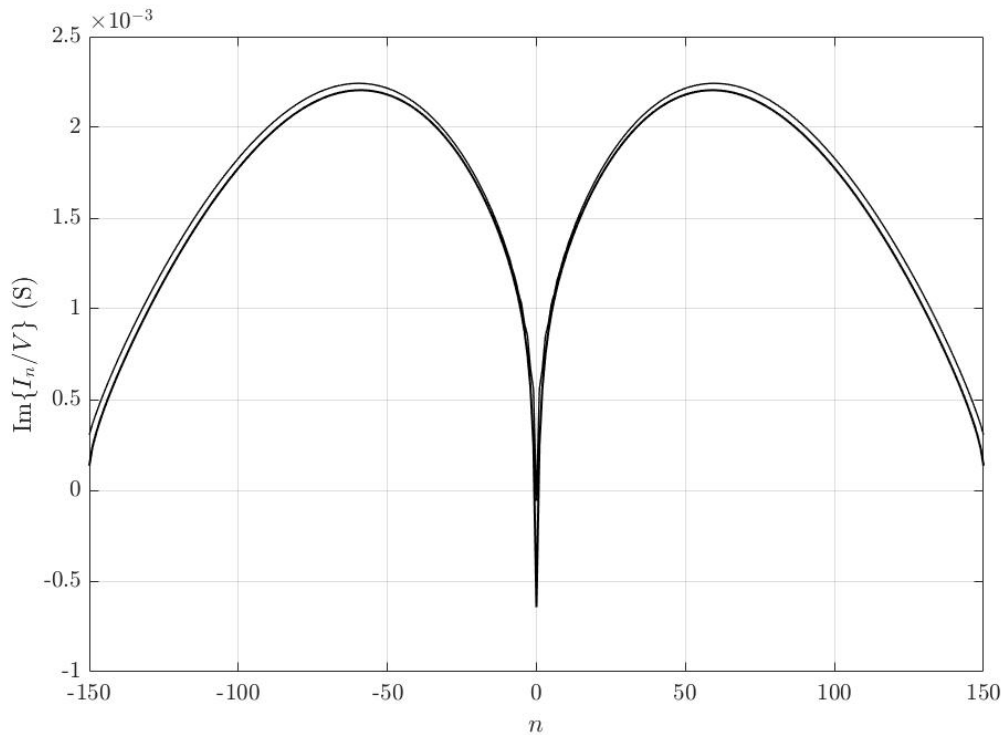
5 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Σε αυτήν την τελική παράγραφο της εργασίας παρουσιάζουμε αριθμητικά δεδομένα που αποδίδουν την εξομάλυνση που επιτυγχάνει το ενεργό ρεύμα και συνάμα την ακρίβειά του, σε σύγκριση με το ακριβές. Σε μια μέση υλοποίηση, σημειώνεται ότι ο υπολογισμός του ενεργού έναντι του ακριβούς ρεύματος, είναι υπολογιστικά θελκτικότερος. Τα αποτελέσματά μας επικεντρώνονται στην παρουσίαση του ενεργού ρεύματος για $\rho = a$ και για κεραίες μικρού και μεγάλου μήκους.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκει η προσφιλής μας επιλογή του προηγούμενου κεφαλαίου, με χαρακτηριστικά μήκος $2h = \lambda/2$, ακτίνα $a = 0.007022\lambda$, πλήθος συναρτήσεων βάσης $N = 150$ και συντα-

κτικές παραμέτρους χώρου στον οποίο βρίσκεται η κεραία $(\epsilon, \mu, \gamma) = (\epsilon_0, \mu_0, 0.02)$ (μειώσαμε την αγωγιμότητα, διότι για μεγάλα μήκη κεραιών είχαμε στα άκρα αναπάντεχα –και θορυβώδη θα μπορούσαμε να πούμε– αποτελέσματα που εκτιμήσαμε ότι οφείλονται σε ορισμένη παραβίαση της τελευταίας συνθήκης της (5.48)).

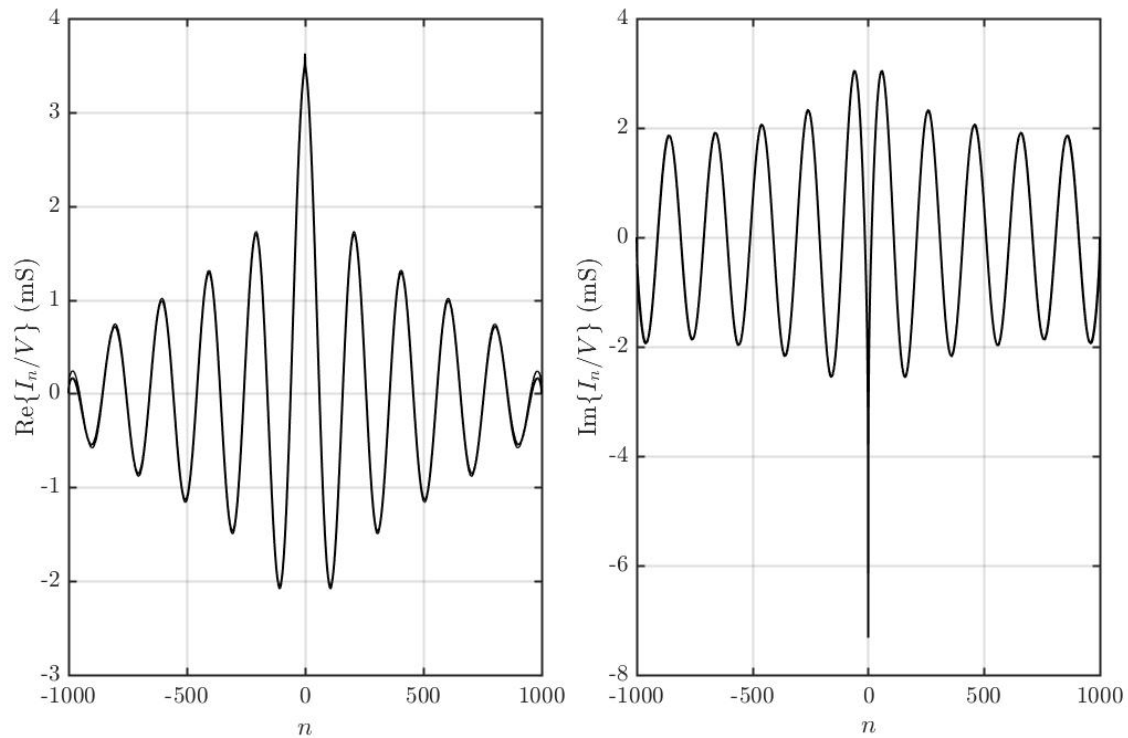
Επίσης χρησιμοποιούμε γεννήτρια δέλτα συνάρτησης συχνότητας $\omega = 2\pi \times 5 \times 10^8$ r/s και πλάτους $V = 1$ V. Τα αποτελέσματά μας είναι και πάλι απαλλαγμένα από σφάλματα στρογγυλοποίησης όπως αποδεικνύουν μετρήσεις του δείκτη κατάστασης της μήτρας αγωγιμότητας (είναι περίπου 10^7). Πολύ ενδιαφέρον έχει το Σχήμα 5.3 δεδομένου ότι είναι η πρώτη, αριθμητική επίδειξη σε αυτήν την εργασία της ιδιομορφίας που εμφανίζεται και στο πραγματικό μέρος σε χώρο με αγωγιμότητα (συγκρίνετε με τα αντίστοιχα διαγράμματα των King, Sandler και Wu [17]).



Σχήμα 5.4: Σύγκριση ενεργού (λεπτή γραμμή) και ακριβούς ρεύματος (παχιά γραμμή) για κεραία μικρού μήκους, για το φανταστικό μέρος. Η ακρίβεια είναι εμφανής με ορισμένες αποκλίσεις να παρατηρούνται μακριά από το κέντρο της κεραίας. Η τραχιά μορφή του ενεργού ρεύματος το κέντρο –που παρόλα αυτά ακολουθεί την ιδιομορφία– οφείλεται στην προσέγγιση με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης. Ενδιαφέρουσα είναι η σύγκριση με τα αντίστοιχα σχήματα της [1].

Στη δεύτερη κατηγορία χρησιμοποιούμε μια κεραία μήκους 10λ και ακτίνας 0.02λ (μια σχετικά μεγάλη ακτίνα για τον προσεγγιστικό πυρήνα), $N = 1000$ συναρτήσεις βάσης και κλασικά γεννήτρια δέλτα συνάρτησης, συχνότητας $\omega = 2\pi \times 5 \times 10^8$ r/s και πλάτους $V = 1$ V. Ο χώρος έχει συντακτικές παραμέτρους $(\epsilon, \mu, \gamma) = (\epsilon_0, \mu_0, 0.0085)$ (πραιτέρω μείωση της αγωγιμότητας χρειάστηκε, διότι οι κεραίες μεγάλου μήκους φαίνεται να εμφανίζουν μεγαλύτερη ευαισθησία σε μεγάλες τιμές της αγωγιμότητας). Πάλι τα αποτελέσματα είναι απαλλαγμένα από σφάλματα στρογγυλοποίησης με το δείκτη

κατάστασης να υπολογίζεται στα 10^6 . Εδώ η σύγκριση με το αντίστοιχο διάγραμμα της [1] είναι πολύ ενδιαφέρουσα εφόσον φαίνεται ξεκάθαρα η επιρροή της αγωγιμότητας στο ρεύμα της κεραίας: ενώ εκεί οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις είχαν σταθερό πλάτος εδώ βλέπουμε ισχυρή εξασθένηση στο πραγματικό και ασθενή στο φανταστικό. Περαιτέρω αύξηση της αγωγιμότητας οδηγεί σε μηδενισμό του ρεύματος πριν από τα άκρα του. Επίσης, πρέπει να παρατηρήσει κανείς ότι με εξαίρεση τα άκρα του πραγματικού μέρους, οι κυματομορφές ενεργού και ακριβούς ρεύματος δεν είναι δυνατό να διαχωριστούν. Τούτο παρατηρήθηκε και στην [1] για αύξηση του h/λ , όπως κάνουμε εδώ.



Σχήμα 5.5: Πραγματικό και φανταστικό μέρος του ενεργού (λεπτή γραμμή) και ακριβούς (παχιά γραμμή) ρεύματος σε κεραία μεγάλου μήκους. Τα δύο ρεύμα πρακτικά ταυτίζονται.

6 Βιβλιογραφία

- [1] Fikioris, G., Papakanellos, P.J., Mavrogordatos, T.K., Lafkas, N., and Koulikas, D. (2011). Eliminating Unphysical Oscillations Arising in Galerkin Solutions to Classical Integral Equations of Antenna Theory: An Asymptotic Study. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 71, 559–585. doi: 10.1137/100785727
- [2] Papakanellos, P.J., and Fikioris, G. (2007). A Possible Remedy for the Oscillations Occurring in Thin-Wire MOM Analysis of Cylindrical Antennas. *Progress in Electromagnetics Research* 69, 77–92. doi:10.2528/PIER06120502
- [3] Yatskevitch, V.A., and Karshakevitch, S.F. (1981). Stability of the Convergence of the Numerical Solution in Electrodynamics. *Radioelectronic Communication Systems*, 62, 57-62.
- [4] Poggio, A.J., and Adams, R.W. (1977). Approximations for Terms Related to the Kernel in Thin-Wire Integral Equations. Lawrence Livermore National Laboratory, Lawrence, UCRL-51985
- [5] Papakanellos, P.J., Paschalidis, P., and Fikioris, G. (2016). On the Extended Thin-Wire Kernel. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 64, 3180–3184. doi: 10.1109/TAP.2016.2555336
- [6] Papakanellos, P.J., and Capsalis, C.N. (2004). On the Combination of the Method of Auxiliary Sources With Reaction Matching for the Analysis of Thin Cylindrical Antennas. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* 17, 433–449. doi: 10.1002/jnm.549
- [7] Kupradze, V. (1935). *Method of Integral Equations in the Theory of Diffraction*. Moscow-Leningrad.
- [8] Wu, T.T. (1969). Introduction to Linear Antennas. In *Antenna Theory Part I*, edited by R.E.Collins and F.J.Zucker. McGraw-Hill, New Work.
- [9] Tastsoglou, I., and Fikioris, G. (2013). Fundamentals of Thin-Wire Integral Equations With the Finite-Gap Generator - Part I. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 61, 5517–5526. doi:10.1109/TAP.2013.2279423
- [10] King, R.W.P., and Harrison, C.W. (1969). *Antennas and Waves: A Modern Approach*. The M.I.T. Press, Cambridge.
- [11] Shen, H.M., and Wu, T.T. (1989). The Universal Current Distribution Near the End of a Tubular Antenna. *Journal of Mathematical Physics* 30, 2721–2729. doi: 10.1063/1.528505
- [12] King, R.W.P., Fikioris, G.J., and Mack, R.B. (2002). *Cylindrical Antennas and Arrays*. Cambridge University Press. New York.
- [13] Λαύκας Ν., και Κούλικας Δ. (2007). Αντιμετώπιση του Προβλήματος των Ταλαντώσεων κατά την Εφαρμογή Μεθόδων Ροπών σε Εξισώσεις Hallen και Pocklington. Διπλωματική Εργασία, Σχολή Ικάρων, Δεκέλεια.

- [14] Fikioris, G., and Wu, T.T. (2001). On the Application of Numerical Methods to Hallén's Equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* *49*, 383–392. doi: 10.1109/8.918612
- [15] King, R.W.P. (1956). *The Theory of Linear Antennas*. Harvard University Press, Cambridge.
- [16] Fikioris, G., Papakanellos, P.J., and Mavrogordatos, T.K. (2013). Surface-Wave and Superdirectivity Aspects of Effective Current for Linear Antennas. *SIAM Journal on Applied Mathematics* *73*, 1926–1940. doi: 10.1137/120892155
- [17] King, R.W.P., Sandler, B., and Wu, T.T. (1969). Cylindrical Antennas Immersed in Arbitrary Homogeneous Isotropic Media. *Journal of Applied Physics* *40*, 5049–5065. doi: 10.1063/1.1657353

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Σε αυτό το καταληκτικό κεφάλαιο θα συνοψίσουμε τα αποτελέσματα της μελέτης μας και θα προτείνουμε νέους δρόμους που θα μπορούσε να ακολουθήσει μελλοντικά η έρευνα και οι οποίοι θα φωτίσουν περαιτέρω το ζήτημα.

1 Συμπεράσματα

Μελετήσαμε ευθείες, λεπτές κεραίες σύρματος εμβαπτισμένες σε μέσο με απώλειες. Για τη μελέτη μας χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Η κεραία θεωρήθηκε κεντρικά τροφοδοτούμενη από μία γεννήτρια δέλτα συνάρτησης. Η μελέτη στόχευσε στα εξής:

1. Αριθμητική επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén για την κεραία που περιγράφηκε παραπάνω.
2. Ανάλυση και πρόβλεψη συμπεριφοράς των αφύσικων ταλαντώσεων που παρατηρήθηκαν, μέσω της άπειρης κεραίας.
3. Εφαρμογή και επέκταση της μεθόδου του ενεργού ρεύματος που είχε ήδη εφαρμοστεί επιτυχημένα, για την περίπτωση κεραίων σε μέσα χωρίς απώλειες, για την εξομάλυνση των παρατηρούμενων ταλαντώσεων.

Για τον πρώτο στόχο αναπτύχθηκε κώδικας Octave, ο οποίος έλυσε αριθμητικά την εξίσωση Hallén, η οποία περιγράφηκε αναλυτικά για το μέσο ενδιαφέροντος στο κεφάλαιο 2, με μία μέθοδο Galerkin. Τα αριθμητικά αποτελέσματα (Σχήματα 4.1, 4.2 και 4.4) έδειξαν εμφάνιση ταλαντώσεων τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος, μια σημαντική διαφοροποίηση από προηγούμενες μελέτες που είχαν αντιμετωπίσει την περίπτωση μέσου χωρίς απώλειες και που εντόπισαν ταλαντώσεις μόνο στο φανταστικό μέρος. Οι δείκτες κατάστασης, των μητρών αγωγιμότητας, ενώ υψηλοί δεν υποδείκνυαν την προέλευση των ταλαντώσεων σε σφάλματα στρογγυλοποίησης ή σε συσσώρευση των ενδογενών σφαλμάτων που εμφανίζουν οι αριθμητικές ολοκληρώσεις που χρησιμοποιήσαμε. Η εμπιστοσύνη στην ευστάθεια της μεθόδου ενισχύθηκε με τη χρήση διαφορετικών λυτών γραμμικών συστημάτων και διαφορετικών συναρτήσεων βάσης: όλοι έδιναν εξαιρετικά κοντινά αποτελέσματα.

Στο κεφάλαιο 2 αποδείξαμε την ύπαρξη λογαριθμικής ιδιομορφίας στο κέντρο τροφοδοσίας τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος του (ακριβούς) ρεύματος επί της κεραίας. Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 3 δείξαμε ότι τέτοια συμπεριφορά δεν επιδεικνύει ο προσεγγιστικός πυρήνας, ο οποίος είναι αναλυτική συνάρτηση, παντού. Τούτο είναι η αιτία της μη επιλυσιμότητας της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén, ένα αποτέλεσμα γνωστό εδώ και πάνω από μισό αιώνα. Οι ταλαντώσεις που παρατηρήσαμε στα αριθμητικά αποτελέσματα δεν είναι παρά μια εκδήλωση αυτής της μη επιλυσιμότητας, ενώ η εμφάνιση ταλαντώσεων και στο πραγματικό μέρος πρέπει να αποδοθεί στην εκδήλωση ιδιομορφίας εκεί, σε αντίθεση με την περίπτωση χωρίς απώλειες.

Έχοντας θέσει το πρόβλημα σε παρόμοιες βάσεις με αυτές που είχαν 18 χρόνια νωρίτερα οι Φικιώρης και Wu, ακολουθούμε την ασυμπτωτική μέθοδό τους για την άπειρη κεραία, ώστε να λάβουμε ποιοτικά, αλλά και ποσοτικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά των ταλαντώσεων. Ήταν αναπάντεχο το ότι μοιραζόμαστε κοινά αποτελέσματα με τους Φικιώρη και Wu με μία κρίσιμη διαφορά όμως: το πηλίκο k_c/ζ_c που εμφανίζεται σε όλες τις εξισώσεις ενδιαφέροντος και στο τελικό αποτέλεσμα είναι μιγαδικό στην περίπτωση μας και όχι πραγματικό. Η συμφωνία ασυμπτωτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων

είναι εμφανής μέσω του Πίνακα 4.3, ενώ δύο είναι τα βασικά, ποιοτικά αποτελέσματα: οι ταλαντώσεις στο φανταστικό μέρος είναι ασυμπτωτικά ίσες με αυτές που εμφανίζονται στην περίπτωση μέσου χωρίς αγωγιμότητα και ο λόγος πραγματικού και φανταστικού μέρους είναι κατά απόλυτο ίσος με την εφαιπτομένη απωλειών, όπως την ορίζει το μέσο. Σημειώνουμε ότι, ενώ τα αποτελέσματά μας υπόκεινται σε αρκετά περιοριστικές συνθήκες, αριθμητικοί πειραματισμοί έδειξαν ότι αυτές επιτρέπουν ένα μεγάλο εύρος αγωγιμοτήτων, συχνοτήτων και διαστάσεων κεραίας, που καλύπτει το σύνολο των ρεαλιστικών περιπτώσεων. Έτσι, επιτύχαμε το δεύτερο στόχο της εργασίας.

Για τον τρίτο στόχο επεκτείναμε τον κώδικά μας, ώστε να υπολογίζει το ενεργό ρεύμα ως το γινόμενο της περιμέτρου κύκλου ακτίνας a και του μαγνητικού πεδίου που παράγει το προσεγγιστικό ρεύμα, υπολογισμένο στην ακτίνα αυτή. Τα αριθμητικά αποτελέσματα (Σχήματα 5.3, 5.4 και 5.5) απέδειξαν ότι εξομάλυνση επιτυγχάνεται για μεγάλο εύρος παραμέτρων. Η θεωρητική ανάλυση ακολούθησε την πορεία της εργασίας των Φικιώρη, Παπακωνέλλο, Μαυρογορδάτο, Λαύκα και Κουλίκα (2013). Πάλι βασική διαφορά ανάμεσα στα αποτελέσματά μας και αυτά των ερευνητών είναι το μιγαδικό πηλίκο k_c/ζ_c . Έτσι, μελετώντας ασυμπτωτικά την άπειρη κεραία δείξαμε ότι το ενεργό ρεύμα (το οποίο υπολογίσαμε αναλυτικά για την περίπτωση ημιτονοειδών συναρτήσεων βάσης) αναπαράγει το προσεγγιστικό, όταν υπολογιστεί στο όριο της διακριτοποίησης, δηλαδή για $\rho \sim z_0 \rightarrow 0$. Αυξάνοντάς την ακτίνα ρ στην οποία υπολογίζουμε το ενεργό ρεύμα, παρατηρούμε εκθετική μείωση του πλάτους των ταλαντώσεων και τελικά εξομάλυνση μόλις $\rho = a$, ένα φαινόμενο παρόμοιο με τη συμπεριφορά του κοντινού πεδίου υπερκατευθυντικών κεραιών. Σημειώνεται ότι το ενεργό ρεύμα αναπαράγει τη λογαριθμική ιδιομορφία του πραγματικού και φανταστικού μέρους του ρεύματος, με ένα συντελεστή ίσο με $1/2$. Ωστόσο, σε αντίθεση με την περίπτωση μέσου χωρίς απώλειες, το πραγματικό μέρος του ενεργού ρεύματος δεν ισούται με το πραγματικό μέρος του ακριβούς ρεύματος. Τούτο δε βλάπτει καθόλου την ακρίβεια της μεθόδου, όπως μπορεί να επιβεβαιώσει ο αναγνώστης από τα Σχήματα 5.3, 5.4 και 5.5. Μάλιστα –και προς έκπληξή μας– η ακρίβεια στο πραγματικό μέρος φαίνεται καλύτερη από αυτήν που επιτυγχάνεται στην περίπτωση μέσου χωρίς απώλειες, στο πραγματικό μέρος πάλι. Τέλος, λύνοντας ένα πρόβλημα οριακών συνθηκών, αντίστοιχο με αυτό που παρουσίασαν νωρίτερα ο Wu (1969) και οι Ταστσόγλου και Φικιώρης (2013), καταφέραμε να συνδέσουμε το ενεργό ρεύμα με πραγματικά, φυσικά μεγέθη. Συγκεκριμένα, το ενεργό ρεύμα δεν είναι παρά το ρεύμα που ρέει στην εξωτερική επιφάνεια του σωληνοειδούς διπόλου, όπως συζητήσαμε στο κεφάλαιο 2, αιτία της ακρίβειας και των αποκλίσεων συνάμα της μεθόδου.

2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Η πρώτη επέκταση που θα προτείνουμε είναι στην πραγματικότητα μια εφαρμογή των αποτελεσμάτων μας (ειδικά της μεθόδου του ενεργού ρεύματος). Δεδομένου ότι πολλά και δημοφιλή λογισμικά ανάλυσης κεραιών χρησιμοποιούν ακόμα την προσεγγιστική εξίσωση Hallén, για τον υπολογισμό της ρευματικής κατανομής κατά μήκος μίας κεραίας, είναι θεμιτή η ενσωμάτωση του υπολογισμού του ενεργού ρεύματος, ειδικά στην περίπτωση επιλογής μεγάλου αριθμού συναρτήσεων βάσης. Όπως συζητήσαμε και αποδείξαμε το ενεργό ρεύμα είναι μια ιδιαίτερα ακριβής προσέγγιση του ακριβούς ρεύματος, απαιτώντας μικρό υπολογιστικό κόπο και έχοντας τετριμμένη υλοποίηση. Έτσι προσφέρεται μια θελκτική εναλλακτική στη χρήση του ακριβούς πυρήνα που χαρακτηρίζεται από πολύ μεγαλύτερη πολυπλοκότητα ή από αρκετά πιο δύσκολη υλοποίηση.

Αυτή η εργασία, όπως και καμία προγενέστερή της δεν έχει αποφανθεί σχετικά με τις ασθενείς ταλαντώσεις που εμφανίζονται στα άκρα της κεραίας. Οι ταλαντώσεις αυτές, εμφανείς τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος, είτε το μέσο έχει αγωγιμότητα είτε όχι, επισκιάζονται από τις κεντρικές που είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες, δεν μπορούν να παραγνωριστούν ωστόσο, ενώ η φύση τους παραμένει αδιευκρίνιστη. Είναι αδιαμφισβήτητη παραπροϊόν της μη επιλυσιμότητας της προσεγγιστικής εξίσωσης Hallén, ωστόσο καμία συστηματική μελέτη δεν έχει τις περιγράψει ούτε ποσοτικά ούτε

ποιοτικά.

Μια κατεύθυνση που μπορούν να ακολουθήσουν μελλοντικές έρευνες είναι η μελέτη κεραίας σε μέσο με αγωγιμότητα, που οδηγείται από διαφορετικά μοντέλα τροφοδοσίας. Όπως έχουμε συζητήσει, η γεννήτρια πεπερασμένου διακένου, η διέγερση από εξωτερικό προσπίπτον πεδίο στο κέντρο της κεραίας (με ορισμένη πόλωση), η γεννήτρια δακτυλιοειδούς, ισοδύναμου, μαγνητικού ρεύματος είναι όλες εναλλακτικές της γεννήτριας δέλτα συνάρτησης, ορισμένες με αρκετά διαφορετική συμπεριφορά, ειδικά, η τελευταία που είναι η συνθετότερη (με μηδαμινή επιπρόσθετη πολυπλοκότητα ωστόσο) και η πιο ακριβής. Το ενδιαφέρον εδώ έγκειται στο γεγονός ότι η λογαριθμική ιδιομορφία που εμφανίζεται στο ρεύμα είναι αποτέλεσμα ακριβώς του (υπέρ το δέον εξιδανικευμένου) μοντέλου της δέλτα γεννήτρια συνάρτησης. Πώς θα συμπεριφέρονταν η αριθμητική λύση για μια άλλη διέγερση; Τέτοια προβλήματα έχουν ήδη αντιμετωπιστεί στην περίπτωση κεραίας στο κενό, με ενδιαφέροντα ευρήματα, όπως έχουμε ήδη συζητήσει στο κεφάλαιο 3.

Στο ίδιο πλαίσιο, μπορούμε να σκεφτούμε επεκτάσεις σε διαφορετικές διατάξεις, στις οποίες εξισώσεις παρόμοιες της Hallén ισχύουν. Ποια είναι η επιρροή της αγωγιμότητας του περιβάλλοντος για μια βροχοκεραία ή μια συστοιχία ευθείων κεραιών σύρματος ή για μια κεραία που παρουσιάζει κάμψεις; Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, ενώ οι εξισώσεις που μπορούν να διατυπωθούν είναι άμεσες γενικεύσεις της Hallén το ίδιο δεν μπορεί να ειπωθεί σίγουρα για τα ποσοτικά (τα οποία εξαρτώνται ισχυρά από τη γεωμετρία που χρησιμοποιήσαμε), αλλά και για τα ποιοτικά αποτελέσματά μας.

Ακόμη όμως και στην απλή περίπτωση της ευθείας κεραίας σύρματος, μια συνολική μελέτη δεν έχει ακόμα γίνει: η παρούσα εργασία αποτελεί γενίκευση της μελέτης των Φικιώρη και Wu, όπως γενίκευση αποτελεί και η πρόσφατη εργασία των Παπαθανασόπουλου και Φικιώρη (2019) που μελετά ατελώς αγωγίμες κεραίες, δηλαδή κεραίες με πεπερασμένη αγωγιμότητα των μεταλλικών τοιχωμάτων τους, εντός μέσου χωρίς αγωγιμότητα. Συνδυασμός των δύο αυτών μελετών καλύπτει την πιο ρεαλιστική περίπτωση (στην πραγματικότητα κάθε κεραία έχει πεπερασμένη αγωγιμότητα και κάθε μέσο έχει μία, έστω και αμελητέα αγωγιμότητα).

Είναι εμφανές ότι ένα αποτέλεσμα, δημοσιευμένο πάνω από 80 χρόνια πριν από τη στιγμή συγγραφής αυτής της εργασίας κινεί ακόμη το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας, έχει ακόμη ανοιχτά ζητήματα και έχει ακόμη απαντήσεις να δώσει και να φωτίσει έτσι ένα πεδίο αυτόφωτο από τη φύση του, αυτό των κεραιών.