



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

**Μελέτη της εξάρτησης της οπτικής ισχύος του
κερατοειδούς από την εσωτερική πίεση (ΙΟΡ) με την
Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Γεωργίου Ι. Καλογείτονα

Επιβλέπουσα: Μυρσίνη Μακροπούλου
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Αθήνα, Μάιος 2011

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 2011.

.....

Περίληψη

Ο κερατοειδής χιτώνας είναι ο διαφανής ιστός που αποτελεί το πρόσθιο θολωτό τμήμα του εξωτερικού στρώματος του ματιού. Διαθλά το φως και προστατεύει το περιεχόμενο του ματιού. Το πάχος του κυμαίνεται μεταξύ 450 και 610 μm και, κατά μέσο όρο έχει 550 μm πάχος στην Καυκάσια φυλή. Ο δείκτης διάθλασης του κερατοειδούς χιτώνα είναι 1.376 και μαζί με τον φακό του ματιού είναι τα κύρια διαθλαστικά όργανα του οφθαλμού. Ο κερατοειδής χιτώνας εκτρέπει το φως και μάλιστα ευθύνεται για τα δύο τρίτα της οπτικής ισχύος του ματιού.

Στην διαθλαστική χειρουργική ο στόχος είναι να μεταβάλουμε την οπτική ισχύ του κερατοειδούς χιτώνα μεταβάλλοντας το σχήμα του και πιο συγκεκριμένα την καμπυλότητα της εξωτερικής του επιφάνειας. Παλιότερα θεωρούσαν ότι, η μεταβολή του σχήματος του κερατοειδούς χιτώνα καθορίζεται άμεσα από την μορφή της αποδόμησης που του προκαλούμε. Σήμερα όμως, είναι γνωστό ότι, το παραπάνω είναι μια υπεραπλούστευση της πραγματικότητας, αφού η μεταβολή στις μηχανικές ιδιότητες του κερατοειδούς χιτώνα που προκύπτουν από την αλλαγή της γεωμετρίας του, επηρεάζουν το τελικό σχήμα του και κατ' επέκταση την οπτική του ισχύ.

Σε αυτήν την διπλωματική δημιουργήσαμε ένα μοντέλο του κερατοειδούς και μελετήσαμε με την Μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων (Μ.Π.Σ) την συμπεριφορά του, κάτω από διάφορες συνθήκες εσωτερικής πίεσης. Οι προσομοιώσεις, μας έδειξαν ότι, η οπτική ισχύς του κερατοειδούς χιτώνα είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης σε αυτόν ενδοφθάλμιας πίεσης.

Ακόμα, υποθέσαμε μια εικονική αποδόμηση με laser στο υπάρχον μοντέλο και συγκρίναμε τα αποτελέσματα πριν και μετά την αποδόμηση, ώστε να δούμε πως και σε ποιό βαθμό επηρέασε η αποδόμηση τον κερατοειδή.

Οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν με το υπολογιστικό λογισμικό, για την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, ANSYS της Canonsburg, Pennsylvania.

Τέλος, για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας δημιουργήσαμε μια εφαρμογή, η οποία φαίνεται στο παράρτημα. Η εφαρμογή μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίζουμε τις διοπτρίες από τα δεδομένα των προσομοιώσεων και να οπτικοποιούμε τα αποτελέσματά μας.

Περίληψη

The cornea is the transparent front part of the eye that covers the iris, pupil, and anterior chamber. It refracts the light and protects the eye. The thickness varies between 450 and 610 mm and an average thickness of 550 mm in Caucasians. The refractive index of the cornea is 1.376 and along with the lens of the eye are the main organs of refractive eye. The cornea deflects the light and even accounts for two thirds of the optical power of the eye.

In keratorefractive surgery, the aim is to alter the cornea's refractive power by changing its shape. In the early days of laser vision correction, it was assumed that, the postoperative change in corneal shape was determined directly by the pattern of tissue ablation. Now it is clear that this is an oversimplification because biomechanical and wound healing changes also influence final corneal shape.

In this thesis we create a model for the cornea and study with the Finite Element method its behavior, under various conditions the internal pressure. Our simulations show that the visual power of the cornea is similar to that applied internal pressure.

Even assumed a virtual dismantling the existing model and compared the results of the new, with the old cornea in order to see how and what extent the degradation of the cornea did.

The simulations was made using the computational software for Finite Element ANSYS of Canonsburg, Pennsylvania.

Finally, for the purposes of this study, an application was created that appears in the Annex. Application enables us to calculate binoculars from data simulations and visualize the results.

Στους γονείς μου

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την συμπαράστασή τους στην μέχρι τώρα πορεία μου. Επίσης, ευχαριστώ την καθηγήτριά μου, κα Μυρσίνη Μακροπούλου, για την παρουσία της στην εξέλιξη της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κουμπάρο και συμφοιτητή μου Καρακασίλη Δημήτριο για την πολύτιμη βοήθεια του με την γλώσσα προγραμματισμού Python στην δημιουργία της εφαρμογής του παραρτήματος και την γυναίκα του Νικολέτα Μπετεβή για την επιμέλεια των κειμένων.

Περιεχόμενα

I	Εισαγωγικό Μέρος	8
1	Μέρη του οφθαλμού	10
1.1	Ο σκληρός χιτώνας	11
1.2	Ο κερατοειδής χιτώνας	13
1.3	Το υδατώδες υγρό	13
1.4	Η κόρη	15
1.5	Ίριδα	15
1.6	Ο Φακός του ματιού	16
1.7	Το υαλώδες υγρό ή υαλώδες σώμα	17
1.8	Ο αμφιβληστροειδής χιτώνας	18
1.9	Ο χοριοειδής χιτώνας	21
2	Οπτική ισχύς και ελαττωματική Όραση	22
2.1	Εστιακή απόσταση - οπτική ισχύς	22
2.2	Ελαττωματική Όραση	27
2.2.1	Μυωπία	27
2.2.2	Υπερμετρωπία	27
2.2.3	Πρεσβυωπία	27
2.2.4	Αστιγματισμός	28
2.3	Διαθλαστική χειρουργική	29
2.3.1	Φωτοδιαθλαστική κερατεκτομή (PRK: Photorefractive Keratectomy)	32
2.3.2	LASIK (Laser in Situ Keratomileusis)	36
2.3.3	LASEK και EPI-LASIK	37
3	Βασικές αρχές της μηχανικής	39
3.1	Τάση	40
3.2	Παραμορφώσεις	42
3.3	Λόγος του Poisson	43
3.4	Νόμος του Hooke	45

3.4.1	Μέτρο του Young	45
3.4.2	Μη γραμμικά υλικά	45
3.5	Γενικευμένος Νόμος του Hooke	45
3.6	Ιξωδοελαστικότητα	48
3.7	Ακαμψία	49
3.8	Δισδιάστατα προβλήματα ελαστικότητας	49
3.8.1	Επίπεδη Εντατική Κατάσταση	49
3.8.2	Επίπεδη Παραμορφωσιακή Κατάσταση	50
3.8.3	Αξονοσυμμετρικά προβλήματα	50

II Ειδικό Μέρος **53**

4 Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων **55**

4.1	Εισαγωγή	55
4.2	Το φυσικό πρόβλημα και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	57
4.3	Βασικά βήματα στην ανάπτυξη της Μεθόδου των Πεπερασμένων στοιχείων	59
4.3.1	Διακριτοποίηση της κατασκευής	59
4.3.2	Υπολογισμός μητρώου ακαμψίας του στοιχείου.	61
4.3.3	Διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας	69
4.3.4	Επίλυση του τελικού συστήματος ακαμψίας	72
4.3.5	Υπολογισμός εντατικών και παραμορφωσιακών μεγεθών	72
4.4	Η Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων με την βοήθεια του Η/Υ	73

5 Ο Κερατοειδής Χιτώνας **75**

5.1	Γενικά	75
5.2	Δομή	76
5.2.1	Επιθήλιο	77
5.2.2	Μεμβράνη Bowman	77
5.2.3	Στρώμα	78
5.2.4	Δεσκεμέτειος Μεμβράνη	79
5.2.5	Ενδοθήλιο	80

6 Προσομοίωση Κερατοειδούς με την ΜΠΣ **81**

6.1	Περιγραφή του μοντέλου	81
6.2	Προσομοιώσεις κερατοειδούς	83
6.2.1	Προσομοίωση γραμμικού μοντέλου	85

6.2.2	Προσομοίωση μη γραμμικού μοντέλου	88
6.3	Αποδόμηση κερατοειδούς	97
6.4	Επίλογος	102
6.5	Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη	102
III	Παράρτημα	105
	Παράρτημα	107
A	Ο κώδικας της εφαρμογής	107
A.1	circlefit.py	107
A.2	pcollector.py	113
B	Οι προσομοιώσεις	118

Μέρος Ι
Εισαγωγικό Μέρος

Κεφάλαιο 1

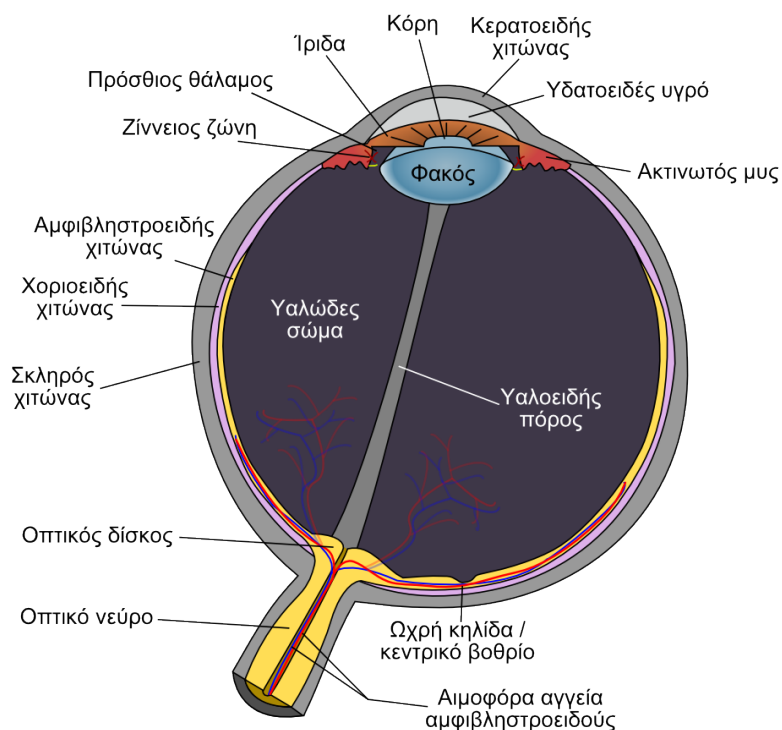
Μέρη του οφθαλμού

Το μεγαλύτερο μέρος των γνώσεων που έχουμε για τον κόσμο προέρχεται από την αίσθηση της όρασης μέσω των οφθαλμών. Η αίσθηση της όρασης δημιουργείται σε τρία στάδια:

- Το στάδιο των οφθαλμών. Από τους οφθαλμούς εισέρχεται το φως και εστιάζεται σε μια φωτοευαίσθητη περιοχή, τον αμφιβληστροειδή, όπου η οπτική πληροφορία μετατρέπεται σε ηλεκτρική μέσω εξειδικευμένων κυττάρων, δημιουργώντας έτσι την εικόνα του εξωτερικού κόσμου.
- Ένα σύστημα εκατομμυρίων νευρώνων, οι οποίοι μεταφέρουν τα ηλεκτρικά σήματα από τον αμφιβληστροειδή στο εσωτερικό του εγκεφάλου.
- Τέλος η οπτική περιοχή του φλοιού του εγκεφάλου, όπου συναρμολογείται η εικόνα του εξωτερικού κόσμου και έχουμε αυτό που ονομάζουμε όραση.

Ο οφθαλμός του ενήλικα έχει κατά μέσο όρο διάμετρο 24 mm. Το φυσιολογικό μήκος του προσθοπίσθιου άξονα κυμαίνεται μεταξύ 21mm και 26mm. Αυτό είναι μικρότερο στην υπερμετρωπία και μεγαλύτερο στην μυωπία. Η εγκάρσια διάμετρος έχει μικρότερες διακυμάνσεις.

Τα οπτικά μέσα του οφθαλμού είναι οργανωμένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτρέπουν την διάδοση του ορατού φωτός με πολύ χαμηλά επίπεδα σκέδασης. Για το τυπικό αξονικό μήκος ενός οφθαλμού, που είναι περίπου 24mm, η γεωμετρία των οπτικών μέσων είναι τέτοια, ώστε να επιτρέπεται ο σχηματισμός ενός ευκρινούς ειδώλου στον αμφιβληστροειδή, με λίγες οπτικές εκτροπές.



Σχήμα 1.1: Σχηματικό διάγραμμα του ανθρώπινου ματιού.

Στην εικόνα 1.1 έχουμε μια σχηματική αναπαράσταση της τομής του ανθρώπινου ματιού, όπου μπορούμε να διακρίνουμε την ανατομία του οφθαλμού και τα μέρη που τον απαρτίζουν.

1.1 Ο σκληρός χιτώνας

Ο σκληρός χιτώνας αποτελεί το μεγαλύτερο τμήμα του ινώδους χιτώνα του βολβού και είναι αδιαφανής. Ενώνεται στο μπροστά μέρος του οφθαλμού με τον κερατοειδή. Στο πίσω μέρος φέρει σπή από την οποία διέρχεται το οπτικό νεύρο. Ακόμη παρουσιάζει διάφορες μικρότερες σπές μέσω των οποίων διέρχονται αγγεία και νεύρα.

Το πρόσθιο τμήμα του σκληρού είναι ορατό κάτω από τον διαφανή επιπεφυκότα και αντιστοιχεί στο λευκό του οφθαλμού. Στον ενήλικα ο σκληρός έχει λευκωπό χρώμα, ενώ στα παιδιά, επειδή είναι λεπτότερος, αφήνει εν μέρει να διαφαίνεται το μαύρο χρώμα του χοριοειδούς χιτώνα,

λαμβάνοντας κυανίζουσα απόχρωση. Στους ηλικιωμένους ο σκληρός παίρνει χρώμα υποκίτρινο, λόγω εναποθέσεων λιπιδίων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η κίτρινη απόχρωση του σκληρού στον ίκτερο δεν οφείλεται στη χρώση του σκληρού αλλά στην χολερυθρίνη που κυκλοφορεί στο πλούσιο αγγειακό πλέγμα του επιπεφυκότα.

Ο σκληρός χιτώνας έχει σχετικά λίγα αιμοφόρα αγγεία. Εν τούτοις, στο πρόσθιο τμήμα του επισκληρίου, υπάρχει πυκνό αγγειακό πλέγμα που σχηματίζεται από κλάδους των πρόσθιων ακτινοειδών αρτηριών. Το πλούσιο αγγειακό πλέγμα του πρόσθιου τμήματος του σκληρού, σε φυσιολογικές συνθήκες, δεν είναι ευδιάκριτο. Σε περίπτωση όμως φλεγμονής διευρύνεται, με αποτέλεσμα το έντονο ερυθρό χρώμα στην περιοχή αυτή. Εκτός από το επισκληρικό αγγειακό πλέγμα, το πρόσθιο τμήμα του σκληρού φέρει και το εν τω βάθει αγγειακό πλέγμα, που επικοινωνεί με το αγγειακό δίκτυο του πρόσθιου ραγοειδούς. Το πίσω τμήμα του σκληρού, αιματώνεται από κλάδους των μακρών και βραχέων οπίσθιων ακτινοειδών αρτηριών.

Το πάχος του σκληρού είναι διαφορετικό στα διάφορα τμήματα του. Ο σκληρός πίσω από τον ισημερινό έχει πάχος 1mm, στην περιοχή του ισημερινού 0,6mm και στην περιοχή μπροστά από τις καταφύσεις των οφθαλμοκινητικών μυών και μέχρι το σκληροκερατοειδές όριο 0,8mm. Είναι ιδιαίτερα λεπτός πίσω από τις καταφύσεις των ορθών μυών. Ο σκληρός διαιρείται, περισσότερο για περιγραφικούς λόγους, σε τρία πέταλα : Το εξωτερικό πέταλο που ονομάζεται επισκλήριο, το στρώμα και το εσωτερικό πέταλο, που έρχεται σε σχάση με τον ραγοειδή χιτώνα [11].

Το **Επισκλήριο** αποτελείται από χαλαρό συνδετικό ιστό και συνδέεται εξωτερικά με την τενώνιο κάψα με λεπτές ίνες. Προς τα μέσα ενώνεται με το στρώμα του σκληρού. Το επισκλήριο προοδευτικά γίνεται λεπτότερο προς το οπίσθιο τμήμα του βολβού.

Το **Στρώμα** αποτελείται από δεμάτια κολλαγόνου ποικίλου μεγέθους και σχήματος, που δεν διατάσσονται ομοιόμορφα, όπως συμβαίνει στο στρώμα του κερατοειδούς και για το λόγο αυτό ο σκληρός είναι αδιαφανής. Αποτελεί το μεγαλύτερο τμήμα του πάχους του σκληρού.

Το **Εσωτερικό πέταλο** έχει ασθενή καφεοειδή χροιά λόγω της ύπαρξης μελανοκυττάρων. Έρχεται σε επαφή με τον ραγοειδή χιτώνα και συνδέεται με αυτόν χαλαρά με κολλαγονικά ινίδια τα οποία διασχίζουν ένα χώρο, τον υπερχοριοειδικό χώρο. Σε φυσιολογικές συνθήκες ο χώρος αυτός δεν διακρίνεται, σχηματίζεται όμως σε παθολογικές καταστάσεις, με την συκέντρωση μεγάλης ποσότητας υγρού.



Σχήμα 1.2: Στρώμα του σκληρού χιτώνα

1.2 Ο κερατοειδής χιτώνας

Ο κερατοειδής χιτώνας είναι το μπροστινό διάφανο μέρος του ματιού το οποίο καλύπτει την κόρη και την ίριδα. Ο κερατοειδής χιτώνας μαζί με τον φακό του ματιού, είναι τα κύρια διαθλαστικά όργανα του οφθαλμού. Ο κερατοειδής εκτρέπει το φως και μάλιστα ευθύνεται για τα δύο τρίτα τις οπτική ισχύος του ματιού. Περισσότερα για τον κερατοειδή χιτώνα αναφέρονται σε επόμενο κεφάλαιο, στο οποίο θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τον κερατοειδή.

1.3 Το υδατώδες υγρό

Το υδατώδες υγρό ή υδατοειδές γεμίζει τον χώρο μεταξύ του κερατοειδή και του φακού του ματιού. Το υγρό αυτό, αποτελείται κυρίως από νερό και παράγεται συνεχώς από ένα στρώμα κυττάρων στην επιφάνεια του ακτινωτού σώματος. Η περίσσεια του διαφεύγει από ένα σωλήνα παροχέτευσης, το κανάλι του Schlemm. Απόφραξη αυτού του καναλιού, έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της πίεσης στον οφθαλμό, μια κατάσταση η οποία είναι γνωστή ως γλαύκωμα.

Εάν η πίεση είναι συνεχώς αυξημένη άνω των 20 mmHg. τότε προκαλείται πίεση στο οπτικό νεύρο προκαλώντας ατροφία των οπτικών ινών και



Σχήμα 1.3: Στάδια Όρασης Ασθενών με Γλαύκωμα

καταστροφή του νεύρου. Σε ορισμένους τύπους γλαυκώματος, πιθανόν συνυπάρχει μειωμένη αιματική ροή με συνέπεια το οπτικό μας νεύρο να μην διατρέφεται σωστά. Αιτίες που δημιουργούν μειωμένη αιματική ροή, είναι κυρίως αυτές που έχουν σχέση με το καρδιακό και αγγειακό μας σύστημα.

Το υδατώδες υγρό, παρέχει θρεπτικά συστατικά στο μπροστινό μέρος του ματιού (ιδίως στον κερατοειδή και το φακό που δεν έχουν αιμοφόρα αγγεία), αφαιρεί τα υπολείμματα του μεταβολισμού και δημιουργεί την ενδοφθάλμια πίεση ώστε το μάτι να διατηρεί το σχήμα του και να λειτουργεί φυσιολογικά. Η φυσιολογική πίεση του ματιού είναι μεταξύ 12 και 21 χιλιοστόμετρα υδραργύρου (mmHg).

Αύξηση της ενδοφθάλμιας πίεσης, εκτός από γλαύκωμα, μπορεί να μεταβάλει και την οπτική ισχύ του ματιού μεταβάλλοντας το σχήμα του κερατοειδούς χιτώνα. Να σημειώσουμε ότι κερατοειδούς έρχεται σε άμεση επαφή με το υδατοειδές υγρό.

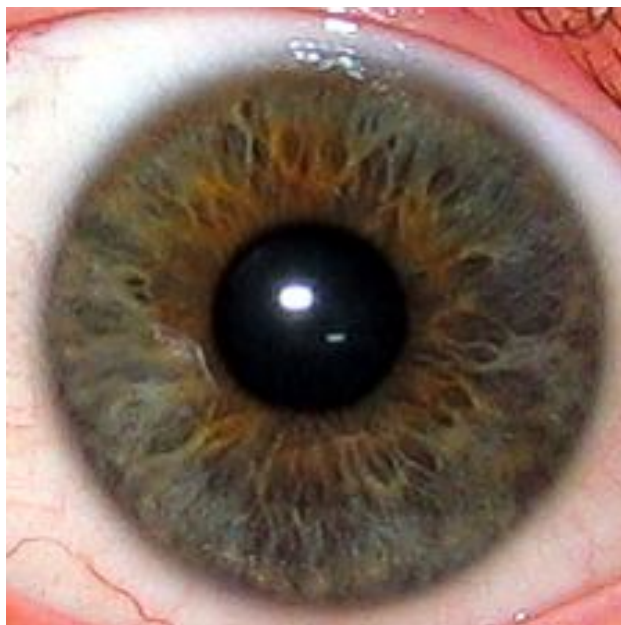
1.4 Η κόρη

Η κόρη είναι το άνοιγμα που βρίσκεται στο κέντρο της ίριδας από όπου το φως εισέρχεται στο μάτι. Φαίνεται μαύρη, επειδή σχεδόν όλο το φως που εισέρχεται, απορροφάται προς το εσωτερικό του οφθαλμού. Υπό συνθήκες μετρίου φωτός, το άνοιγμα της κόρης έχει διάμετρο περίπου 4mm.

Όταν στο μάτι πέφτει δυνατό φως, η κόρη συστέλλεται αυτόματα (μύση) ενώ αντίστοιχα η κόρη διαστέλλεται (μυδρίαση) σε συνθήκες αμυδρού φωτισμού, με την διάμετρο της κόρης να κυμαίνεται από 3mm (μύση) μέχρι τα 8mm (μυδρίαση). Αυτή η αντίδραση είναι το λεγόμενο φωτοανακλαστικό και η λειτουργία του ή μη, αποτελεί σοβαρή ένδειξη για τον έλεγχο της λειτουργίας των βασικών εγκεφαλικών λειτουργιών. Επιπλέον, η κόρη συστέλλεται όταν βλέπουμε κοντινά αντικείμενα (αντανακλαστικό της προσαρμογής), όταν ένα ξένο σώμα αγγίζει τον κερατοειδή (αντανακλαστικό του τριδύμου) και όταν κλείνουμε τα βλέφαρα (αντανακλαστικό του σφιγκτήρα των βλεφάρων). Αντίθετα, η κόρη διαστέλλεται (μυδρίαση) αν κάποιος δει ένα αντικείμενο που προκαλεί ενδιαφέρον, ή αν αισθανθεί απειλή, κίνδυνο ή πόνο (ψυχοαισθητικό αντανακλαστικό). Επίσης, όταν μόνο το ένα μάτι φωτίζεται, συστέλλονται και οι δύο κόρες (συνεργές αντανακλαστικό). Ορισμένα φάρμακα και ναρκωτικά, όπως η ηρωίνη, προκαλούν μύση, δηλαδή συστολή της κόρης. Άλλες ουσίες, όπως το αλκοόλ, προκαλούν μυδρίαση, δηλαδή διαστολή. Η μη προσαρμογή και απουσία αντίδρασης της κόρης σε διαφορετικές συνθήκες φωτισμού λέγεται κυκλοπληγία και μπορεί να προκληθεί τεχνητά με τη χρήση ουσιών για ιατρικούς σκοπούς.

1.5 Ίριδα

Ίριδα ονομάζεται το δισκοειδές διάφραγμα στο μπροστινό μέρος του οφθαλμού, που βρίσκεται ανάμεσα στον κερατοειδή και στο φακό του ματιού και στο κέντρο της βρίσκεται το άνοιγμα της κόρης. Η ίριδα μπορεί να έχει διάφορα χρώματα, όπως μαύρο, καφέ, γαλάζιο ή πράσινο. Σε μερικούς ανθρώπους η ίριδα του ενός ματιού έχει διαφορετικό χρώμα από του άλλου, μια κατάσταση που ονομάζεται ετεροχρωμία. Ο ρόλος της Ίριδας στο ανθρώπινο μάτι, είναι να ρυθμίζει την ένταση του φωτός που εισέρχεται στο μάτι μέσω της κόρης και φτάνει στον αμφιβληστροειδή. Αυτό το επιτυγχάνει μεταβάλλοντας την διάμετρο της κόρης όπως αναφέρεται παραπάνω. Επιπλέον, σε συνθήκες δυνατού φωτός παίζει σημαντικό ρόλο στην μείωση των ατελειών του φακού.

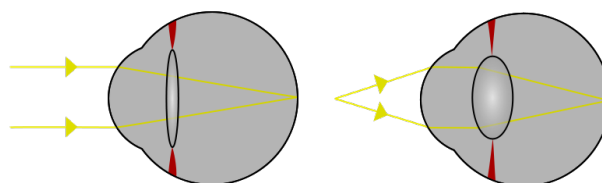


Σχήμα 1.4: Η κόρη είναι η κεντρική διαφανής περιοχή που φαίνεται μαύρη. Η καφεπράσινη που την κυκλώνει είναι η Ίριδα

1.6 Ο Φακός του ματιού

Ο φακός του ματιού είναι μια διαφανής αμφίκυρτη μεμβράνη στο μπροστινό μέρος του οφθαλμού, η οποία κείται μεταξύ της ίριδας και του υαλώδους σώματος. Ο φακός παρουσιάζει μεγαλύτερη κυρτότητα στην οπίσθια από ότι στην πρόσθια επιφάνεια του, ενώ έχει την δυνατότητα να μεταβάλλει την εστιακή του απόσταση, μεταβάλλοντας την κυρτότητα του. Στον φακό οφείλεται το ένα τρίτο της οπτικής ισχύος του ματιού, αρκετά μικρότερο σε σχέση με αυτό του κερατοειδούς, εξαιτίας του γεγονότος ότι ο δείκτης διάθλασης των ουσιών που τον περικλείουν είναι παρόμοιος με τον δικό του. Ο δείκτης διάθλασης του φακού δεν είναι μεγαλύτερος του 1,336, μια τιμή που προκύπτει από την μέση τιμή των επιμέρους δεικτών διάθλασης των στοιβάδων από τις οποίες αποτελείται [1].

Ο Φακός έχει ένα εύκαμπτο κάλυμμα το οποίο συμφύεται με τις ίνες του ακτινωτού σώματος. Όταν αυτές οι ίνες συστέλλονται διευρύνεται η κόρη του οφθαλμού, ο ακτινωτός σύνδεσμος χαλαρώνει, η τάση στην κάψα του φακού μειώνεται και η πρόσθια επιφάνεια του φακού αυξάνει την κυρτότητα της. Με αυτόν τον τρόπο εστιάζονται κοντινά αντικείμενα. Αντίθετα, όταν ο ακτινωτός μυς βρίσκεται σε ηρεμία, ο φακός μένει κατά κάποιο τρόπο επιπεδωμένος και προσαρμοσμένος στην ελάχιστη εστιακή



Σχήμα 1.5: Φως προερχόμενο από μακρινό αντικείμενο (αριστερά) και φως προερχόμενο από κοντινό αντικείμενο (δεξιά), εστιάζονται στον αμφιβληστροειδή μέσω της προσαρμογής του φακού

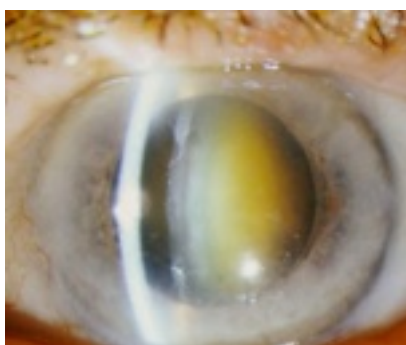
του ικανότητα. Τότε ο οφθαλμός εστιάζει σε μακρινά αντικείμενα. Το πιο μακρινό σημείο από τον οφθαλμό, από όπου εστιάζονται τα μακρινά αντικείμενα λέγεται απώτερο σημείο όρασης. Αντίστοιχα, το κοντινότερο σημείο προς τον οφθαλμό από όπου μπορεί ένα αντικείμενο να εστιαστεί με σαφήνεια στον αμφιβληστροειδή, καλείται εγγύτερο σημείο όρασης. Στην περίπτωση αυτή, ο φακός αποκτά την μεγαλύτερη ικανότητα εστίασης. Η ικανότητα αυτή του φακού να μεταβάλλει την εστιακή του ικανότητα ονομάζεται προσαρμογή.

Με την πάροδο του χρόνου ο φακός του ματιού χάνει την ικανότητα προσαρμογής του, με αποτέλεσμα να απομακρύνεται το εγγύτερο σημείο όρασης, μια πάθηση η οποία είναι γνωστή και σαν πρεσβυωπία.

Ο φακός του ματιού όπως και ο κερατοειδής μπορεί να υποστεί βλάβη από την υπεριώδη ακτινοβολία και να χάσει μερικώς την διαύγεια του, μια κατάσταση η οποία ονομάζεται καταρράκτης. Σε αυτήν την περίπτωση, ο κατεστραμμένος φακός μπορεί να αφαιρεθεί με χειρουργική επέμβαση. Παλαιότερα, η οπτική ισχύς που χανόταν λόγω της αφαίρεσης του φακού, αναπληρώνονταν με ισχυρούς εξωτερικούς φακούς, ενώ σήμερα είναι δυνατή η τοποθέτηση πλαστικών φακών στην θέση του κατεστραμμένου φακού του ματιού.

1.7 Το υαλώδες υγρό ή υαλώδες σώμα

Το υαλώδες υγρό ή υαλώδες σώμα, καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος του οφθαλμού (περίπου το 60%) και παρεμβάλλεται μεταξύ του φακού και του αμφιβληστροειδούς χιτώνα. Το υαλώδες υγρό είναι διάφανο και βοηθάει στο να διατηρεί ο βολβός του ματιού το σχήμα του, ενώ ο δείκτης διάθλασης τού είναι 1,340.



Σχήμα 1.6: Φωτογραφία “ώριμου” καταρράκτη (άσπρος Φακός)



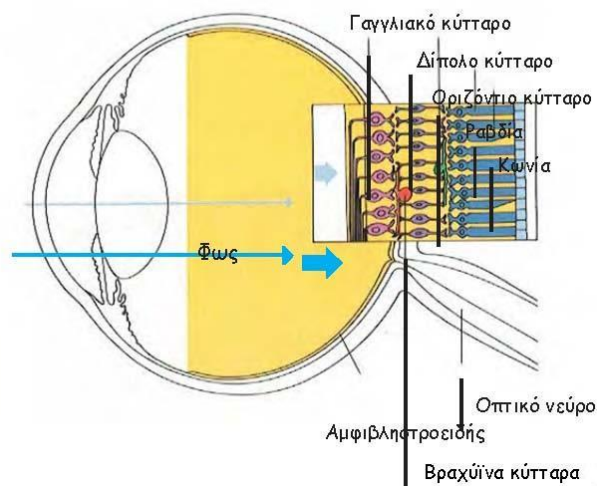
Σχήμα 1.7: Φωτογραφία έντονα θολωμένου Φακού με καφέ πυρήνα

1.8 Ο αμφιβληστροειδής χιτώνας

Ο αμφιβληστροειδής χιτώνας είναι μια λεπτή, ημιδιαφανής μεμβράνη που καλύπτει το οπίσθιο μέρος του βολβού και είναι το φωτοευαίσθητο τμήμα του οφθαλμού. Η λειτουργία του είναι να μετατρέπει τα φωτεινά σήματα σε ηλεκτρικές ώσεις, οι οποίες φτάνουν στον εγκέφαλο μέσω των οπτικών νεύρων. Θα μπορούσαμε να παρομοιάσουμε τον ρόλο του αμφιβληστροειδούς, με αυτόν του ccd αισθητήρα μια ψηφιακής φωτογραφικής μηχανής ή κάμερας.

Η απορρόφηση ενός φωτονίου από τους φωτοϋποδοχείς, προκαλεί μια φωτοχημική αντίδραση, από την οποία προκαλείται ένα δυναμικό δράσης, το οποίο μεταφέρεται στον εγκέφαλο. Για να πραγματοποιηθεί αυτή η αντίδραση, απαιτείται κάποια ελάχιστη ενέργεια από το φωτόνιο και γι' αυτό το λόγο δεν μπορούμε να δούμε φως από το υπέρυθρο φάσμα του φωτός, αφού φωτόνια σε αυτά τα μήκη κύματος δεν έχουν την απαιτούμενη ενέργεια ώστε να πραγματοποιηθεί η αντίδραση. Φωτόνια που ανήκουν στο υπεριώδες φάσμα της ακτινοβολίας, δεν βλέπουμε γιατί αυτά απορροφούνται από άλλα μέρη του ματιού όπως ο κερατοειδής και ο φακός, στα οποία μάλιστα όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί να προξενήσουν σοβαρές βλάβες.

Στον αμφιβληστροειδή υπάρχουν δύο είδη φωτουποδοχέων, τα ραβδία και τα κωνία. Τα ραβδία και τα κωνία είναι κατανεμημένα συμμετρικά προς όλες τις κατευθύνσεις στον αμφιβληστροειδή, εκτός από δύο περιοχές. Η μια είναι το τυφλό σημείο ή οπτική θηλή, από όπου εισέρχεται το οπτικό νεύρο και όπου δεν υπάρχουν καθόλου ραβδία ή κωνία και η άλλη είναι το κεντρικό βοθρίο, όπου υπάρχουν μόνο κωνία. Τα ραβδία και τα κωνία δεν βρίσκονται στην επιφάνεια του αμφιβληστροειδούς, άλλα πίσω από

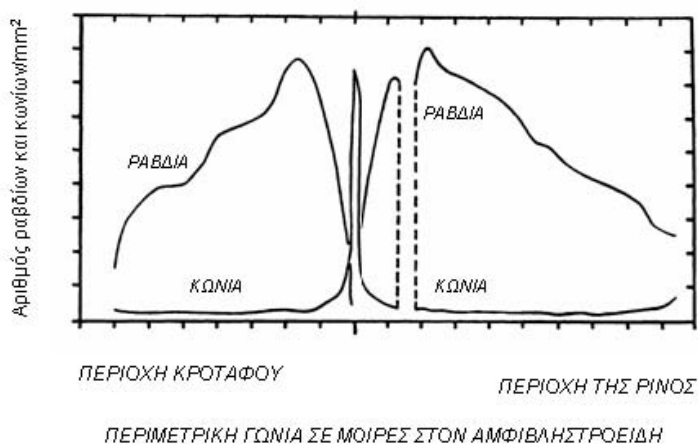


Σχήμα 1.8: Ο αμφιβληστροειδής χιτώνας

μερικά στρώματα νευρικού ιστού, τα οποία το φως πρέπει να διαπεράσει για να φτάσει στους φωτοϋποδοχείς [1].

Και οι δύο τύποι κυττάρων έχουν ουσιαστικά την ίδια δομή. Το κυτταρικό σώμα περιέχει τον πυρήνα, ο οποίος στηρίζει ένα εξωτερικό τμήμα που περιέχει περίπου 1000 ξεχωριστά στρώματα μορίων λίπους. Σε κάθε στρώμα είναι ενσωματωμένα έως 10.000 φωτοευαίσθητα μόρια φωτοχρωστικής ουσίας, της οψίνης. Η οψίνη των ραβδίων λέγεται ροδοψίνη, ενώ η παραλλαγή της, που λειτουργεί εντός των κωνίων, καλείται ιωδοψίνη. Όταν το φως ερεθίζει την χρωστική, διακόπτεται η συνοχή της και τότε δημιουργεί ηλεκτρικές ώσεις που αποστέλλονται στο συναπτικό νευρωνικό δίκτυο του αμφιβληστροειδούς χιτώνα. Έτσι, με τις ηλεκτρικές αυτές ώσεις, πραγματοποιείται η λειτουργία της όρασης. Οι μεν ώσεις που προκαλούνται από την διάσπαση της ροδοψίνης των ραβδίων είναι υπεύθυνες για την αντίληψη του φωτός, οι δε ωθήσεις που προκαλούνται από την διάσπαση της ιωδοψίνης των κωνίων ευθύνονται για την αντίληψη των χρωμάτων.

Τα κωνία είναι περίπου 6,5 εκατομμύρια σε κάθε οφθαλμό και λειτουργούν για την όραση υπό το φως της μέρας. Τα κωνία είναι υπεύθυνα για την έγχρωμη όραση (το να αναγνωρίζουμε δηλαδή τα διάφορα χρώματα), καθώς και για να διακρίνουμε λεπτομέρειες. Τα κωνία βρίσκονται κυρίως στην περιοχή του κεντρικού βοθρίου, αλλά και διασκορπισμένα στον υπόλοιπο αμφιβληστροειδή. Μάλιστα τα κωνία του κεντρικού βοθρίου έχουν το κάθε ένα την δική του οπτική ίνα προς τον εγκέφαλο, σε αντίθεση με



Σχήμα 1.9: Κατανομή των ραβδίων και των κωνίων στον αμφιβληστροειδή χιτώνα

τους φωτοϋποδοχείς στον υπόλοιπο αμφιβληστροειδή όπου πολλοί φωτοϋποδοχείς μοιράζονται μία οπτική ίνα [1]. Υπάρχουν τρία είδη κωνικών κυττάρων:

- S-κωνία: είναι ευαίσθητα σε φωτόνια μικρού μήκους κύματος και παρουσιάζουν μέγιστη ευαισθησία σε μήκος κύματος περίπου 420 nm. Είναι ευαίσθητα στο μπλε φως.
- M-κωνία: είναι ευαίσθητα σε φωτόνια μεσαίου μήκους κύματος και παρουσιάζουν μέγιστη ευαισθησία σε μήκος κύματος περίπου 530 nm. Είναι ευαίσθητα στο πράσινο φως.
- L-κωνία: είναι ευαίσθητα σε φωτόνια μεγάλου μήκους κύματος και παρουσιάζουν μέγιστη ευαισθησία σε μήκος κύματος περίπου 560 nm. Είναι ευαίσθητα στο κόκκινο φως.

Τα ραβδία είναι πολύ περισσότερα από τα κωνία, περί τα 120 εκατομμύρια, και λειτουργούν περισσότερο κατά την νυκτερινή ή σκωτοπική όραση, όπως επίσης και για την περιφερειακή όραση. Τα ραβδία συνδέονται ανά εκατοντάδες με την ίδια οπτική ίνα, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα να έχουμε μικρή διακριτική ικανότητά στην περιφερειακή μας όραση. Τέλος τα ραβδία, είναι περισσότερο ευαίσθητα στο μπλε πράσινο φως στα 510nm.

1.9 Ο χοριοειδής χιτώνας

Είναι το αγγειακό στρώμα του βολβού του ματιού και βρίσκεται μεταξύ του αμφιβληστροειδή και του σκληρού χιτώνα. Ο χοριοειδής εφοδιάζει με οξυγόνο και θρεπτικές ουσίες την εξωτερική στιβάδα του αμφιβληστροειδούς. Μαζί με το ακτινωτό σώμα και την ίριδα, ο χοριοειδής συγκροτεί τον ραγοειδή χιτώνα. Στους ανθρώπους και άλλα πρωτεύοντα θηλαστικά, η σκοτεινόχρωμη χρωστική μελανίνη του χοριοειδή, βοηθάει να περιοριστούν οι αντανάκλασεις μέσα στο μάτι και έτσι να βελτιωθεί η ποιότητα της εικόνας

Κεφάλαιο 2

Οπτική ισχύς και ελαττωματική Όραση

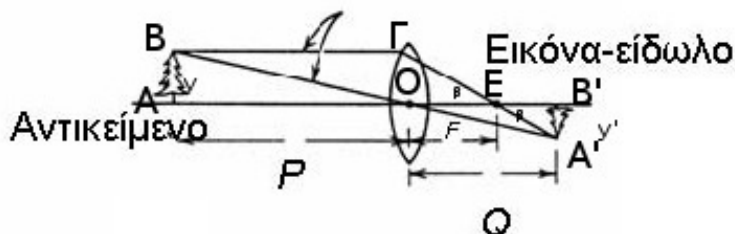
Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην οπτική ισχύ του ματιού, στον τρόπο που αυτή κατανέμεται μεταξύ του κερατοειδή χιτώνα και του φακού του ματιού, όπως και στον μηχανισμό, με τον οποίο καταφέρνει το μάτι να μεταβάλει την οπτική του ισχύ, ώστε να μπορεί να εστιάσει άλλοτε σε κοντινά και άλλοτε σε μακρινά αντικείμενα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε το τι είναι η οπτική ισχύς και πως αυτή υπολογίζεται.

2.1 Εστιακή απόσταση - οπτική ισχύς

Σε έναν λεπτό φακό, όπως αυτός που απεικονίζεται στην εικόνα 2.1, όταν διέρχεται μια δέσμη παράλληλων ακτίνων αυτές συγκλίνουν σε απόσταση F . Το σημείο, στο οποίο συγκλίνουν οι ακτίνες, ονομάζεται εστιακό σημείο ή εστία και η απόσταση F ονομάζεται εστιακή απόσταση. Έτσι όταν μια δέσμη ακτίνων προσπίπτει σε έναν φακό, όπως αυτός της εικόνας 2.2.α συγκλίνει δημιουργώντας είδωλο στα δεξιά του φακού (πραγματικό είδωλο). Τότε ο φακός ονομάζεται συγκλίνων φακός και η εστιακή του απόσταση είναι θετική. Αντίθετα όταν οι ακτίνες μετά την διέλευση τους από έναν φακό αποκλίνουν, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.2.β, δημιουργούν ένα είδωλο, το οποίο βρίσκεται στα αριστερά του φακού και σχηματίζεται από τις τομές των προεκτάσεων των διαθλώμενων ακτίνων (φανταστικό είδωλο). Σε αυτήν την περίπτωση, ο φακός ονομάζεται αποκλίνων φακός και η εστιακή του απόσταση είναι αρνητική.

Στον φακό της εικόνας 2.1 η ακτίνα ΒΓ, που ξεκινάει από την κορυφή του αντικειμένου, διαθλώμενη από τον φακό θα περάσει από την εστία

Ακτίνες φωτός που βοηθούν στον σχηματισμό της εικόνας



Σχήμα 2.1: Η απόσταση P του φακού από το αντικείμενο και η απόσταση Q του φακού από το σημείο που σχηματίζεται η εικόνα-είδωλο, σχετίζονται με την εστιακή απόσταση F ενός θετικού συγκλίνοντος φακού και δίνονται με την εξίσωση: $1/F = 1/P + 1/Q$

Ε του φακού που βρίσκεται σε απόσταση F από τον φακό. Η ακτίνα AO προσπίπτει στο κέντρο του φακού και συνεχίζει χωρίς να εκτραπεί. Έτσι, από την πορεία αυτών των ακτίνων, προσδιορίζεται η θέση του ειδώλου $A'B'$. Από το σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε εύκολα, ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $OΓE$ και $A'B'E$ είναι όμοια λόγω των ίσων γωνιών β .

$$\tan \beta = \frac{OΓ}{OE} = \frac{A'B'}{AE}$$

Βλέπουμε όμως, από το σχήμα, ότι $OΓ=AB$ που είναι ίσο με το ύψος y του πραγματικού ειδώλου, και ότι το ευθύγραμμο τμήμα OE ισούται με την εστιακή απόσταση F , ενώ το AE μπορεί να γραφεί σαν $Q - F$. Άρα έχουμε:

$$\frac{y}{F} = \frac{-y'}{Q-F} \iff \frac{y'}{y} = -\frac{Q-F}{F}$$

Το αρνητικό πρόσημο στο ύψος του ειδώλου του αντικειμένου οφείλεται στο ότι το είδωλο είναι ανεστραμμένο και συνεπώς το πρόσημό του είναι αρνητικό.

Από την ομοιότητα των τριγώνων AOB και $A'OB'$, τα οποία είναι όμοια σαν ορθογώνια τρίγωνα με ίση την γωνία α , παίρνουμε:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{AO} = \frac{A'B'}{OA'}$$

$$\frac{y}{P} = \frac{-y'}{Q}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-Q}{P}$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε και την εγκάρσια μεγέθυνση του αντικειμένου, η οποία, όπως βλέπουμε, είναι ο λόγος των αποστάσεων του αντικειμένου και του ειδώλου, από τον φακό.

Από την ισότητα των δύο σχέσεων

$$\frac{Q-F}{F} = \frac{Q}{P}$$

Διαιρώντας με Q

$$\frac{Q-F}{FQ} = \frac{Q}{PQ}$$

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{Q} = \frac{1}{P}$$

Ως εκ τούτου, καταλήγουμε σε μια απλή μαθηματική σχέση που συνδέει την εστιακή απόσταση F ενός φακού, με την απόσταση του αντικειμένου P από τον φακό και την απόσταση στην οποία δημιουργείται το είδωλο Q.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}$$

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση και για έναν αποκλίνοντα φακό αντί του συγκλίνοντα που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα μας.

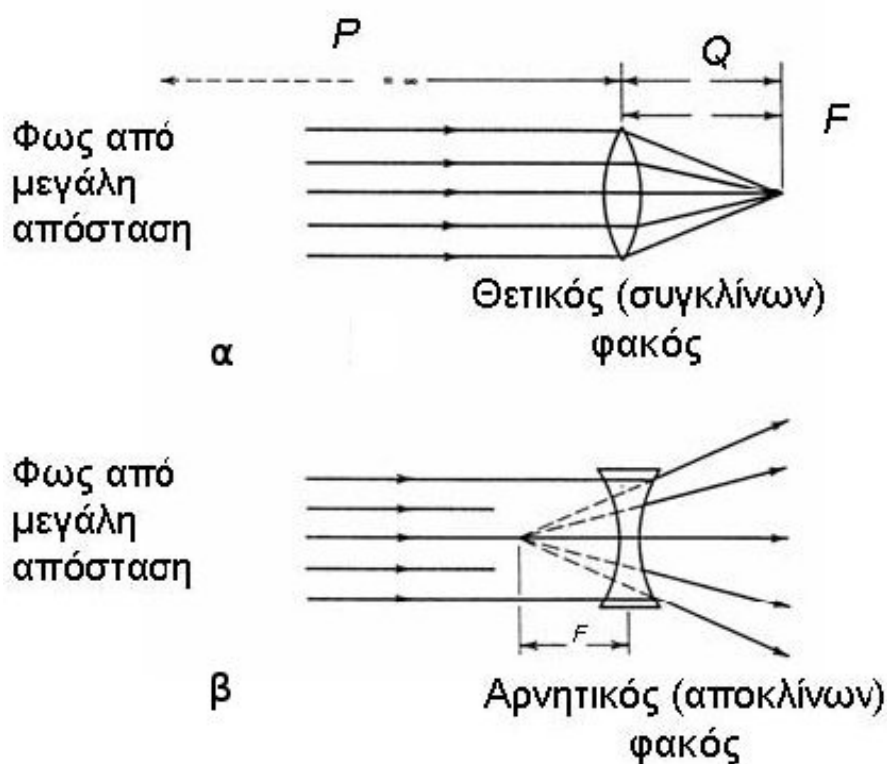
Αν το F το μετράμε σε μέτρα, τότε το $1/F$ ονομάζεται οπτική ισχύς του φακού και μετράται σε διοπτρίες D. Έτσι, ένας συγκλίνων φακός παίρνει θετικές τιμές για την οπτική του ισχύ, αφού έχει θετική εστιακή του απόσταση, ενώ ένας αποκλίνων φακός παίρνει αρνητικές τιμές για την οπτική του ισχύ, αφού η εστιακή του απόσταση είναι αρνητική.

Για ένα σύστημα φακών που βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους, η οπτική του ισχύς D ισούται με το άθροισμα των επιμέρους φακών από τους οποίους αποτελείται.

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \dots$$

Σε έναν φακό, η ισχύς του, και κατ' επέκταση, η εστιακή του απόσταση μπορεί να υπολογιστεί από τον κατασκευαστικό τύπο των φακών:

$$D = \frac{1}{F} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_0}{R_2}$$



Σχήμα 2.2: α) Το φως που προέρχεται (από αριστερά) από μεγάλη απόσταση (παράλληλη δέσμη) και προσπίπτει σε ένα θετικό φακό, συγκλίνει στην δεξιά εστία του φακού. β) Το φως που προέρχεται (από αριστερά) από μεγάλη απόσταση (παράλληλη δέσμη) και προσπίπτει σε έναν αρνητικό (αποκλίνοντα) φακό, αποκλίνει.

Όπου R_1 είναι η καμπυλότητα της πρώτης επιφάνειας του φακού και $n_0 - n_1$ η διαφορά του δείκτη διάθλασης ανάμεσα, στο υλικό που είναι έξω από την πρώτη από τα αριστερά επιφάνεια (υποθέτουμε ότι το φως προσπίπτει από τα αριστερά στον φακό) και τον δείκτη διάθλασης του φακού. Αντίστοιχα, R_2 η καμπυλότητα της δεύτερης επιφάνειας και $n_2 - n_0$ η διαφορά του δείκτη διάθλασης ανάμεσα, στο υλικό έξω από την δεύτερη επιφάνεια και τον δείκτη διάθλασης του φακού. Τα πρόσημα των R_1, R_2 διαμορφώνονται σύμφωνα με τα παρακάτω:

- Οι φωτεινές ακτίνες προσπίπτουν στο φακό από αριστερά.
- Όταν οι ακτίνες προσπίπτουν σε κυρτή επιφάνεια, η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας έχει (+) πρόσημο.
- Όταν οι ακτίνες προσπίπτουν σε κοίλη επιφάνεια, η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας έχει (-) πρόσημο.

Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται φανερό γιατί το κύριο διαθλαστικό όργανο του οφθαλμού είναι ο κερατοειδής χιτώνας, αφού έρχεται σε επαφή με το αέρα και έτσι στην εξωτερική του επιφάνεια έχουμε την μεγαλύτερη διαφορά ανάμεσα στους δυο δείκτες διάθλασης (αέρα - κερατοειδή). Επίσης απαντάται και το γιατί, όταν βρισκόμαστε μέσα στο νερό το μάτι χάνει το μεγαλύτερο μέρος της οπτικής του ισχύος, με εξήγηση το ότι ο δείκτης διάθλασης του νερού (1,33) δεν διαφέρει πολύ από τον δείκτη διάθλασης του κερατοειδούς (1,376). Οι δύτες διατηρούν αέρα γύρω από τον κερατοειδή τους φορώντας μάσκα στο πρόσωπο.

Σε φυσιολογικό μάτι και λαμβάνοντας υπόψιν, ότι η απόσταση από τον κερατοειδή μέχρι τον αμφιβληστροειδή είναι περίπου 0,02m όταν ο οφθαλμός εστιάζει στο άπειρο ($P = \infty$), τότε το $F = Q$.

$$D = \frac{1}{F_\infty} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{0.017} = 58.8D$$

Ενώ στην περίπτωση που το μάτι εστιάζει σε κάτι κοντινό, ας πούμε ένα αντικείμενο στα 0,25m

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{0.25} + \frac{1}{0.017} = 62.8D$$

Άρα το μάτι θα πρέπει να μπορεί να μεταβάλει την οπτική του ισχύ. Αυτό είναι μια λειτουργία που, όπως είδαμε, άπτεται του φακού του ματιού, ο οποίος έχει την δυνατότητα να μεταβάλει την οπτική του ισχύ αλλάζοντας την καμπυλότητα του.

2.2 Ελαττωματική Όραση

Ένα μάτι, όπως το περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, δηλαδή ένα μάτι που έχει την δυνατότητα να εστιάζει τόσο σε μακρινά αντικείμενα στο άπειρο, όσο και σε αντικείμενα εγγύτερα προς αυτό, ονομάζεται εμμετρωπικό. Πολλές είναι, όμως, οι περιπτώσεις όπου οι άνθρωποι δεν έχουν αυτή την δυνατότητα και τότε μιλάμε για μια κατάσταση, την οποία ονομάζουμε αμετρωπία. Υπάρχουν τέσσερις γενικοί τύποι αμετρωπίας, η μυωπία, η υπερμετρωπία, η πρεσβυωπία, και ο αστιγματισμός.

2.2.1 Μυωπία

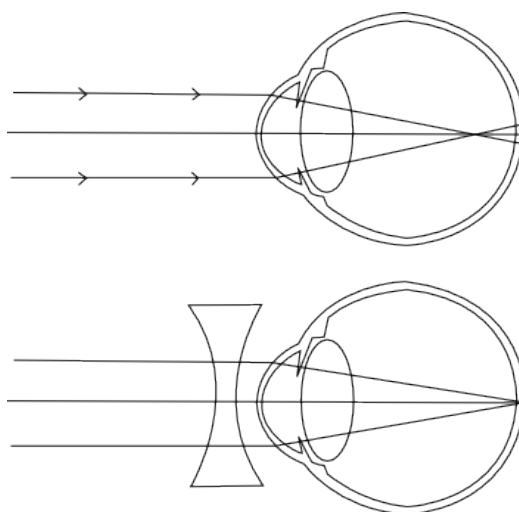
Στην μυωπία τα μακρινά αντικείμενα εστιάζονται μπροστά από τον αμφιβληστροειδή και στην συνέχεια οι ακτίνες συνεχίζουν αποκλίνοντας, με συνέπεια το είδωλο που δημιουργείται στον αμφιβληστροειδή να είναι θολό. Η μυωπία στις περισσότερες περιπτώσεις οφείλεται στο, ότι ο οφθαλμικός βολβός μπορεί να είναι πιο μακρύτερος από το κανονικό σφαιρικό σχήμα είτε στο, ότι η καμπυλότητα του κερατοειδούς είναι μεγαλύτερη από το φυσιολογικό. Η μυωπία μπορεί να διορθωθεί με την χρήση αποκλιόντων φακών (γυαλιά), με την χρήση φακών επαφής, ή με διαθλαστική χειρουργική, κατά την οποία αποδομείται ο κερατοειδής μειώνοντας έτσι την καμπυλότητα του μέχρι το σημείο όπου έχουμε ευκρινή όραση.

2.2.2 Υπερμετρωπία

Στην υπερμετρωπία το μάτι έχει μικρότερο βάθος από το φυσιολογικό και πιο δισκοειδές σχήμα ή ο κερατοειδής έχει μικρότερη καμπυλότητα από το φυσιολογικό. Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ένας υπερμετρωπικός οφθαλμός να έχει εγγύτερο σημείο σε απόσταση μακρύτερη από την φυσιολογική. Έτσι οι ακτίνες του φωτός, οι οποίες προέρχονται από ένα κοντινό αντικείμενο, εστιάζονται θεωρητικός πίσω από τον αμφιβληστροειδή, με αποτέλεσμα να έχουμε μια θολή εικόνα του αντικειμένου. Η συγκεκριμένη κατάσταση μπορεί να αντιμετωπιστεί με συγκλίνοντες φακούς επαφής ή με χειρουργική επέμβαση, μεταβάλλοντας την οπτική ισχύ του κερατοειδούς.

2.2.3 Πρεσβυωπία

Η πρεσβυωπία είναι μία κατάσταση με ίδια συμπτώματα με την υπερμετρωπία, δηλαδή εγγύτερο σημείο σε απόσταση μακρύτερη από την φυ-

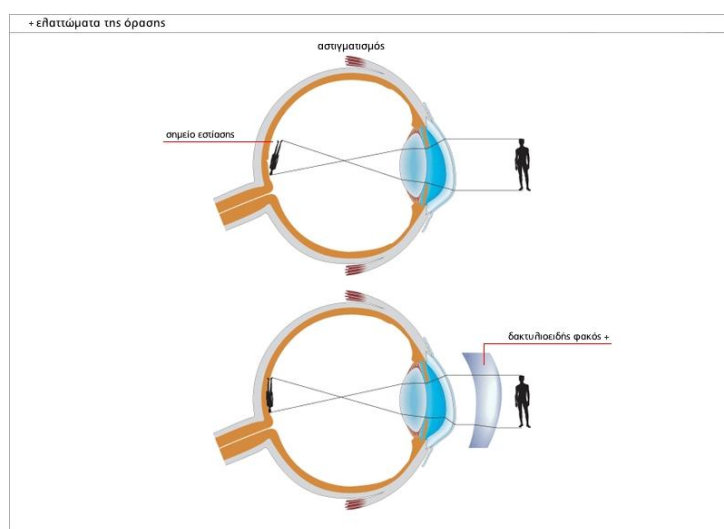


Σχήμα 2.3: Στο πάνω μέρος της εικόνας φαίνονται οι ακτίνες φωτός στο μάτι του μύωπα, οι οποίες, εστιάζουν μπροστά από τον αμφιβληστροειδή. Στο κάτω μέρος παρατηρούμε, ότι ο αρνητικός φακός διορθώνει την πάθηση

σιολογική, έτσι ώστε να μην έχουμε καλή κοντινή όραση, αλλά με διαφορετικά αίτια. Σε αυτήν την περίπτωση, δεν ευθύνεται το μήκος του οφθαλμικού βολβού ούτε η καμπυλότητα του κερατοειδούς, αλλά η απώλεια της ικανότητας προσαρμογής του ματιού. Με την πάροδο του χρόνου ο φακός του ματιού γίνεται λιγότερο εύκαμπτος με αποτέλεσμα η εφαρμοζόμενη τάση σε αυτόν να αλλάζει ελάχιστα την καμπυλότητα του.

2.2.4 Αστιγματισμός

Στον αστιγματισμό η καμπυλότητα του κερατοειδούς είναι ανομοιόμορφη, με αποτέλεσμα να υπάρχει διαφορετική οπτική ικανότητα σε κάθε επίπεδο. Η διόρθωση γίνεται με ασύμμετρο φακό του οποίου η ισχύς είναι διαφορετική στο ένα επίπεδο από ότι στο άλλο. Για την διόρθωση του αστιγματισμού χρησιμοποιούνται διπλοεστιακά γυαλιά ή διπλοεστιακοί φακοί επαφής, διόρθωση μπορεί να έχουμε και με χειρουργική επέμβαση και τοποθέτηση διπλοεστιακών ενδοφακών [1] .



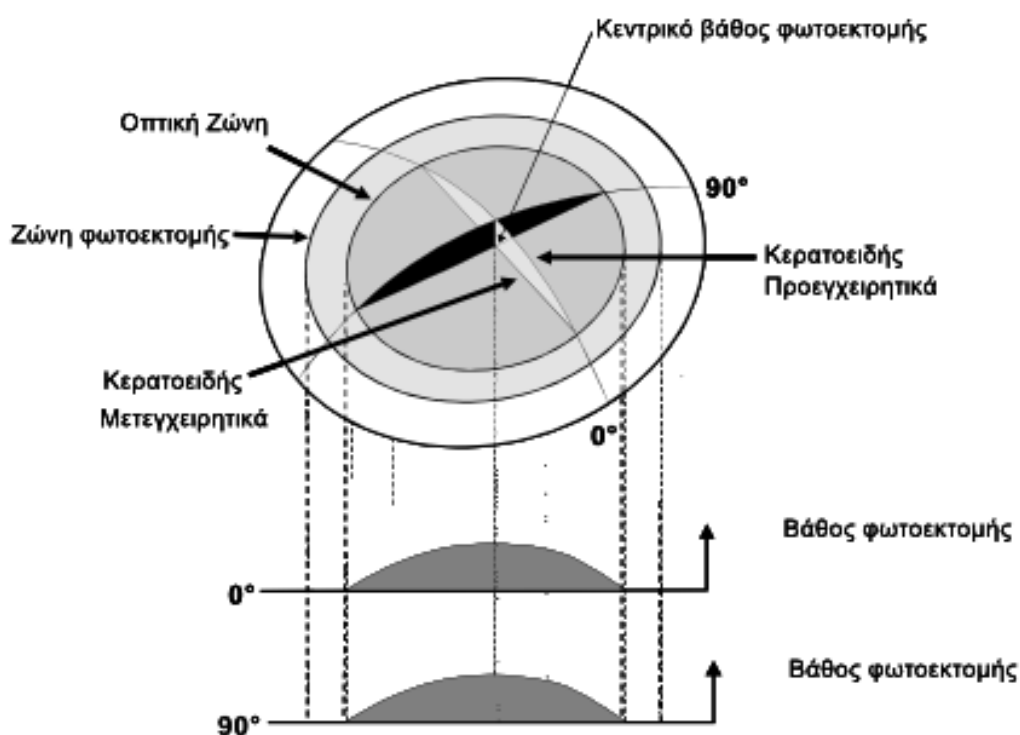
Σχήμα 2.4: Στο πάνω μέρος της εικόνας φαίνεται ο τρόπος, με τον οποίο εστιάζουν οι ακτίνες φωτός σε ένα αστιγματικό μάτι. Στο κάτω μέρος βλέπουμε ότι ο φακός διορθώνει την πάθηση

2.3 Διαθλαστική χειρουργική

Η διαθλαστική χειρουργική περιλαμβάνει μια σειρά επεμβάσεων που αποσκοπούν στη διόρθωση των αμετρωπιών. Οι πρώτες τεχνικές περιελάμβαναν την δημιουργία, με ειδικά μικρομαχαιρίδια, τομών στον κερατοειδή για την θεραπεία της μυωπίας και του αστιγματισμού. Με τις τομές αυτές, το τελικό διαθλαστικό αποτέλεσμα ήταν αδύνατο να προβλεφθεί και, για το λόγο αυτό, η χρήση τους έχει περιοριστεί. Σήμερα η πιο διαδεδομένη μέθοδος, σε όλο τον κόσμο, για την διόρθωση μυωπίας, υπερμετρωπίας και αστιγματισμού είναι η διόρθωση με Excimer laser. Το 1989, η McDonald και η ομάδα της, εφάρμοσε το συγκεκριμένο Excimer Laser για να φωτοαποδομήσουν την επιφάνεια του κερατοειδούς σε ανθρώπινο οφθαλμό. Η διαδικασία ονομάστηκε φωτοδιαθλαστική κερατεκτομή PRK (Photorefractive keratectomy). Την ίδια εποχή στην Ελλάδα ο Παλλήκαρης, επινόησε την τεχνική LASIK (Laser in Situ Keratomileusis), την πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη τεχνική έως σήμερα. Με Excimer Laser μπορούν να διορθωθούν οι περισσότερες περιπτώσεις αμετρωπίας με πολύ καλά αποτελέσματα. Για την διόρθωση των διαθλαστικών ανωμαλιών το laser μεταβάλλει ελεγχόμενα την καμπυλότητα της πρόσθιας επιφάνειας του κερατοειδούς. Με κάθε παλμό του Laser έχουμε αποδόμηση μερικών δεκάτων του μικρόμετρου, σε διάμετρο ίση με την διάμετρο της ακτίνας του laser. Με την κατάλληλη επαλληλία παλμών μπορούμε να προσδώσουμε στον κερατοειδή



Σχήμα 2.5: Σχηματική αναπαράσταση της φυσιολογικής και ελαττωματικής εστίασης. Οι κυματιστές γραμμές υποδηλώνουν την θολή στον αμφιβληστροειδή εικόνα [1]



Σχήμα 2.6: Κατανομή φωτοεκτομής για την επιπέδωση της πρόσθιας επιφάνειας του κερατοειδούς με αποτέλεσμα την διόρθωση της μυωπίας [6]

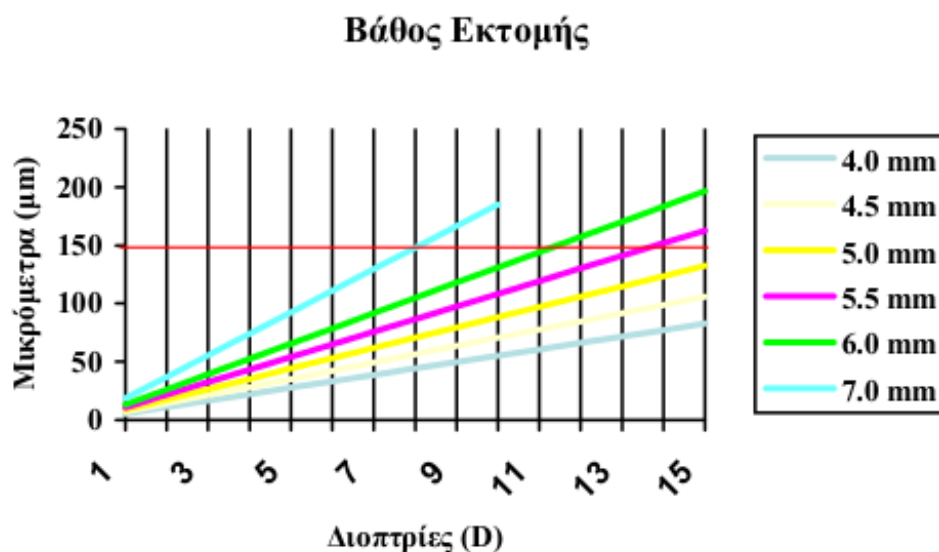
το επιθυμητό σχήμα. Η αλλαγή της καμπυλότητας γίνεται σε ζώνη αποδόμησης στην κεντρική περιοχή του κερατοειδούς, η οποία να είναι τουλάχιστον ίση με την διάμετρο της κόρης, σε συνθήκες χαμηλού φωτισμού. Με τις διαθλαστικές επεμβάσεις, με Excimer Laser, ο κερατοειδής γίνεται ομαλά πιο πλατύς ή πιο κυρτός, ανάλογα με την διόρθωση που θέλουμε να επιτύχουμε.

Στην περίπτωση της μυωπίας, η διόρθωσή της γίνεται συμμετρικά με επιπέδωση του κερατοειδούς, και μεγαλύτερο βάθος εκτομής κεντρικά, εικόνα 2.6.

Ο αλγόριθμος φωτοαποδόμησης, που χρησιμοποιείται για την διόρθωση της μυωπίας, βασίζεται στον τύπο του Munnerlyn [17]

$$a_0 = \frac{1}{3} \Delta D \cdot d^2$$

Όπου a_0 το βάθος της εκτομής κεντρικά, d η διάμετρος της αποδομούμενης περιοχής και ΔD η επιθυμητή διόρθωσή σε διοπτρίες.



Σχήμα 2.7: Γραφική παράσταση της εξίσωσης του Munnerlyn για διαφορετικές διαμέτρους της ζώνης εκτομής

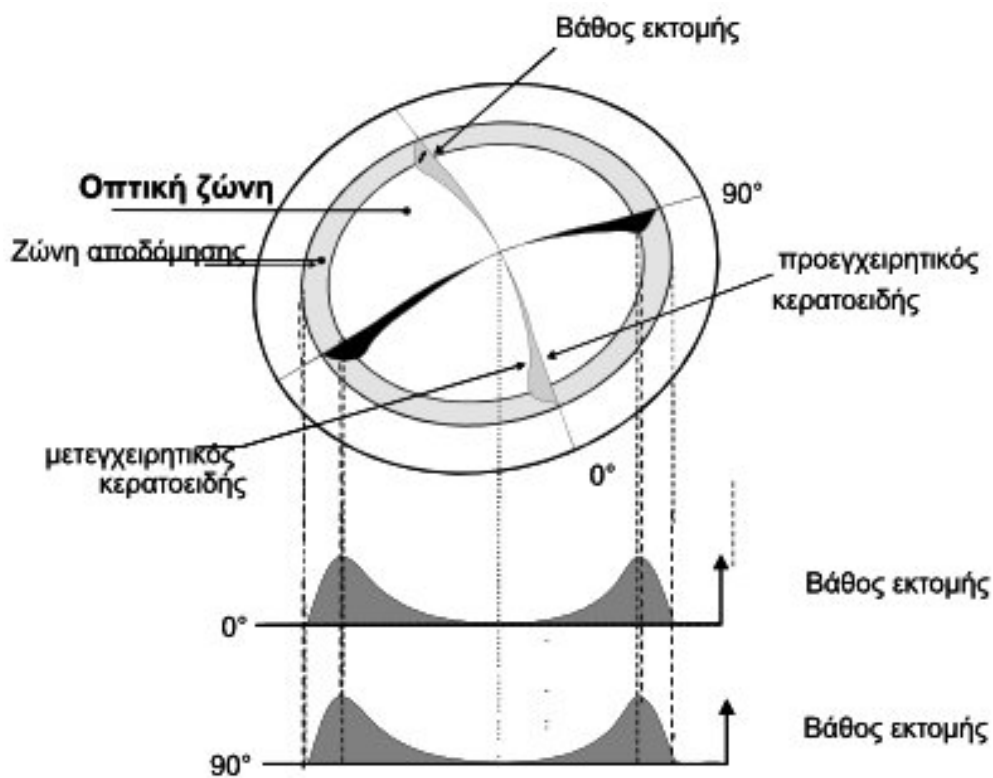
Αντίθετα, στην περίπτωση της υπερμετρωπίας, για να την διορθώσουμε, η αποδόμηση γίνεται στην περιφέρεια, εικόνα 2.8.

Στην περίπτωση του αστιγματισμού, η διόρθωση γίνεται αλλάζοντας την καμπυλότητα στους δύο μεσημβρινούς με την μέγιστη και ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας, εικόνες 2.9 και 2.10.

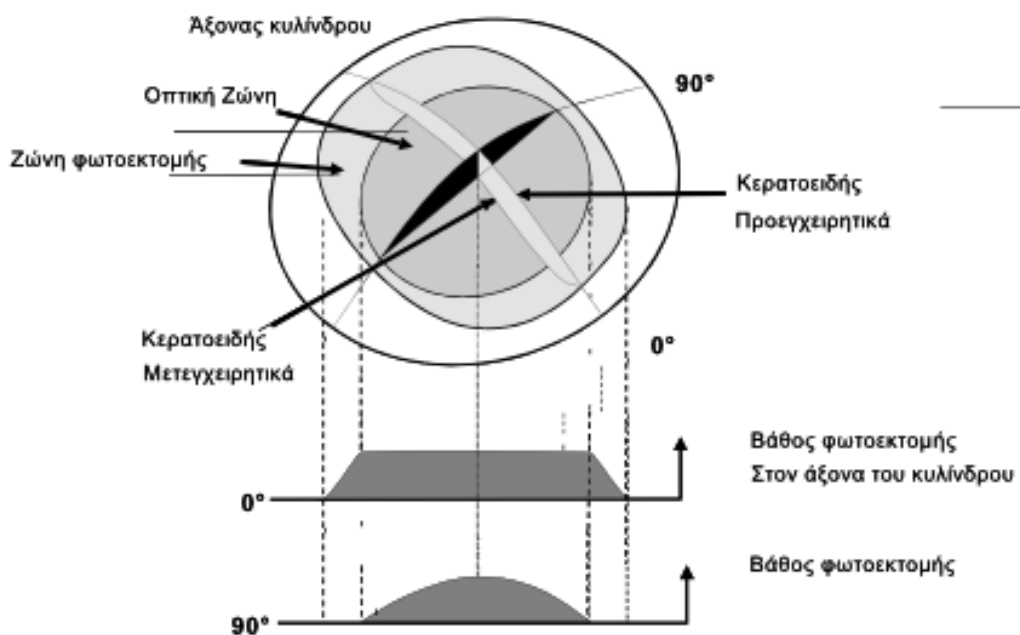
2.3.1 Φωτοδιαθλαστική κερατεκτομή (PRK: Photorefractive Keratectomy)

Η φωτοδιαθλαστική κερατεκτομή είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται ευρέως στην Οφθαλμολογία για την διόρθωση διαθλαστικών ανωμαλιών, με την εφαρμογή του Excimer laser μήκους κύματος 193nm. Στην τεχνική αυτή, μετά την αφαίρεση του επιθηλίου του κερατοειδή με ειδικό βουρτσάκι, εφαρμόζουμε φωτοεκτομή στο εκτεθειμένο στρώμα του κερατοειδή με σκοπό τον ανασχηματισμό της κυρτότητάς του. Με την μέθοδο αυτή, διορθώνεται η μυωπία, η υπερμετρωπία και ο αστιγματισμός. [7].

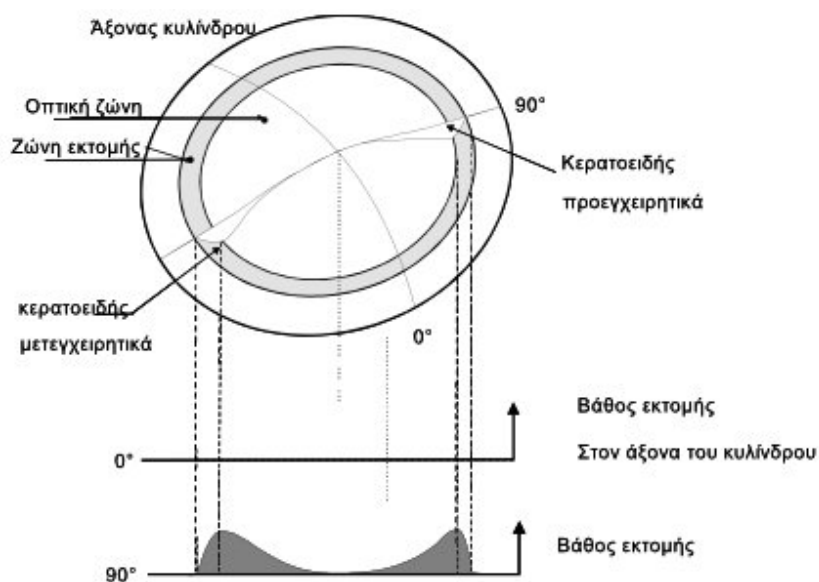
Ο μηχανισμός αλληλεπίδρασης του laser του συγκεκριμένου μήκους κύματος με τον ιστό, είναι γνωστός ως εκρηκτική φωτοαποδόμηση (ablative photodecomposition) του κερατοειδή. Ο παλμός του Excimer laser, κατευθυνόμενος προς τον κερατοειδή, απορροφάται από ένα επιφανειακό στρώμα



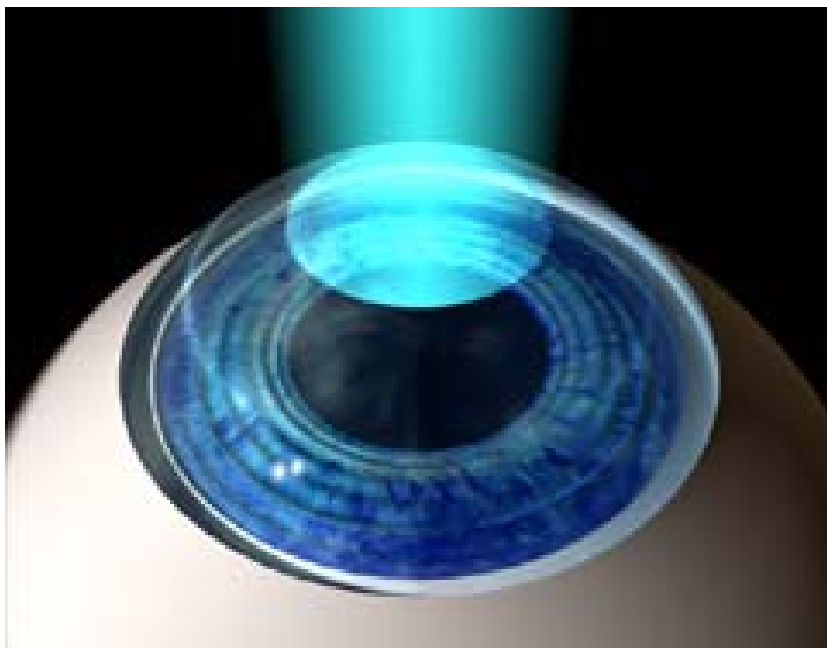
Σχήμα 2.8: Κατανομή φωτοεκτομής, η οποία αυξάνει την καμπυλότητα της κεντρικής περιοχής για την διόρθωση της υπερμετρωπίας [6]



Σχήμα 2.9: Κατανομή φωτοεκτομής, η οποία αλλάζει ανάλογα με τον άξονα του κυλίνδρου την πρόσθια επιφάνεια του κερατοειδούς, με αποτέλεσμα την διόρθωση μυωπικού αστιγματισμού [6]



Σχήμα 2.10: Κατανομή φωτοεκτομής για διόρθωση υπερμετρικού αστιγματισμού [6]

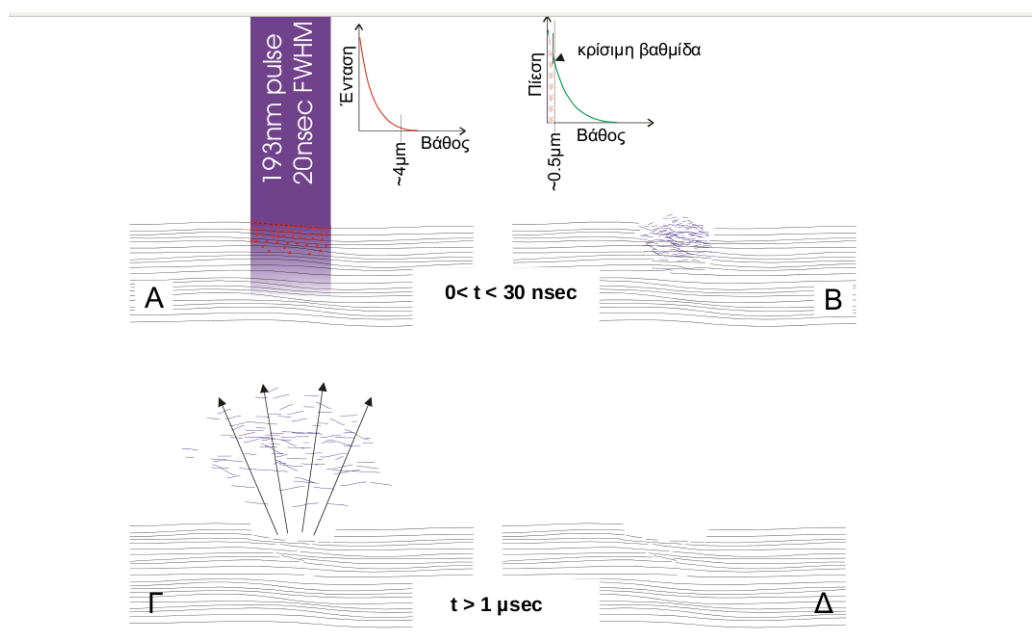


Σχήμα 2.11: Φωτοδιαθλαστική κερατεκτομή

του. Το βάθος διείσδυσης εκτιμάται σε μερικά μικρόμετρα. Κατά την απορρόφηση πραγματοποιούνται διασπάσεις των μοριακών δεσμών των δομικών στοιχείων του κερατοειδή, εικόνα 2.12Α. Η διάσπαση αυτή είναι κατά βάση φωτοχημική. Η απορρόφηση των φωτονίων της ακτινοβολίας των 193nm, ενέργειας (6,4 eV), υπερβαίνει την ενέργεια των δεσμών των μορίων του πλέγματος των ινών του κολλαγόνου (4 eV), με αποτέλεσμα να τους διασπά [6]. Ταυτόχρονα με τη φωτοδιάσπαση, αναπτύσσεται μία βαθμίδα πίεσης, η οποία τείνει να αποκολλήσει τα θραύσματα από την επιφάνεια (εικόνα 2.12Β). Για συνήθεις πυκνότητες ενέργειας, η πίεση κοντά στην επιφάνεια μπορεί να φτάσει τα 100 bar. Τα προϊόντα της φωτοχημικής διάσπασης εκτονώνονται γρήγορα υπό το καθεστώς αυτής της βαθμίδας πίεσης και αποκτούν υπερηχητικές ταχύτητες (εικόνα 2.12Γ). Η διαδικασία της απομάκρυνσης ολοκληρώνεται σε χρόνους της τάξης των μsec [8].

Με το τέλος της φωτοεκτομής, που διαρκεί δευτερόλεπτα, ένας φακός επαφής τοποθετείται προληπτικά, μέχρι να επουλωθεί πλήρως το επιθήλιο.

Στα πλεονεκτήματα της τεχνικής αυτής, συγκριτικά με τη LASIK, συγκαταλέγονται: η καλύτερη εμβιομηχανική κατάσταση του κερατοειδικού ιστού μετεγχειρητικά (δεν έχουμε κρημνό, flap) και η απουσία επιπλοκών από τη χρήση μικροκερατόμου. Ο μετεγχειρητικός πόνος και η αργή απο-



Σχήμα 2.12: μηχανισμός της εκρηκτικής φωτοαποδόμησης του κερατοειδή από την ακτινοβολία του Excimer laser [8]

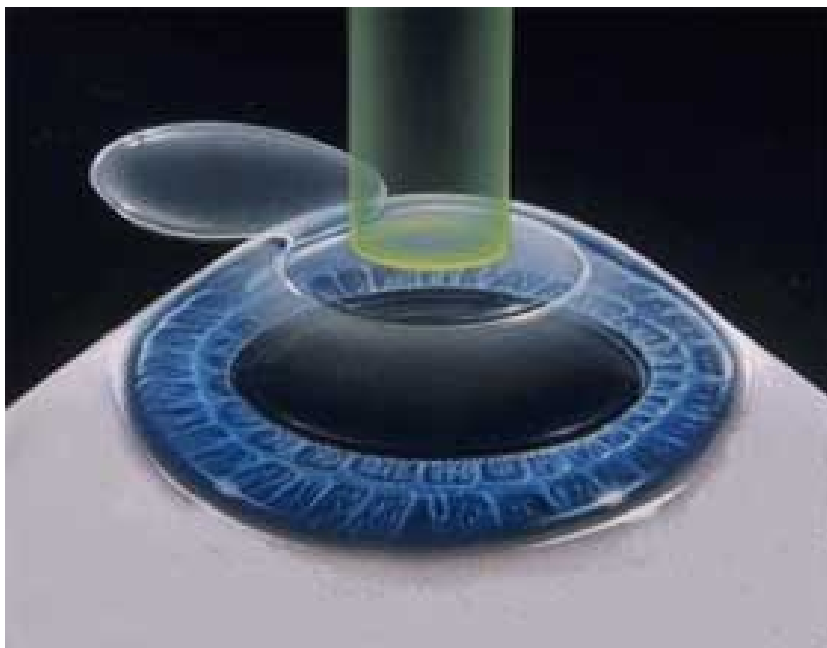
κατάσταση της όρασης αποτελούν βασικά μειονεκτήματα της. Η κύρια επιπλοκή της τεχνικής PRK είναι η μετεγχειρητική θόλωση (haze) του κερατοειδή [7].

2.3.2 LASIK (Laser in Situ Keratomileusis)

Στην τεχνική Lasik η αποδόμηση του κερατοειδούς γίνεται μέσα στο στρώμα του κερατοειδούς αφού πρώτα, με την βοήθεια ενός ειδικού εργαλείου του μικροκερατόμου, έχει δημιουργηθεί ένας κερατοειδικός κρημνός (flap) (εικόνα 2.13) πάχους 90-140 μm [7] που συγκρατείται από μίσχο στην περιφέρεια. Μετά την εφαρμογή του laser, λεπτός κρημνός που συγκρατείται από τον μίσχο επανατοποθετείται και καλύπτει την επιφάνεια, στην οποία έχει επενεργήσει το laser, προσφέροντας πιο γρήγορη και πιο άνετη ανάρρωση.

Τα κύρια πλεονεκτήματα αυτής της τεχνικής είναι : ο ελάχιστος μετεγχειρητικός πόνος, η ταχύτερη αποκατάσταση της όρασης, η σημαντικά μειωμένη πιθανότητα μόλυνσης αφού το επιθήλιο μένει σχεδόν ανέπαφο και η μικρή πιθανότητα μετεγχειρητικής υποεπιθηλιακής θόλωσης συγκριτικά με την PRK.

Στα μειονεκτήματα της LASIK αναφέρονται, κυρίως, η αυξημένη πιθανό-



Σχήμα 2.13: LASIK: η φωτοαποδόμηση εφαρμόζεται μετά τη δημιουργία του κρημνού (flap)

νότητα εκτασίας και οι επιπλοκές που αφορούν στη λειτουργία του μικροκερατόμου. Οι επιπλοκές της τεχνικής αυτής είναι σχετικά λίγες, συγκριτικά με το μεγάλο αριθμό επεμβάσεων που γίνονται παγκοσμίως.

2.3.3 LASEK και EPI-LASIK

Στην LASEK γίνεται αποκόλληση του επιθηλίου του κερατοειδούς, με χρήση διαλύματος αλκοόλης, το οποίο και επανατοποθετούμε στη θέση του μετά την φωτοκερατεκτομή του υπόλοιπου στρώματος. Ενω στην EPI LASIK, με ειδικό μικροκερατόμο, γίνεται διαχωρισμός του επιθηλίου από την μεμβράνη του Bowman, το οποίο επανατοποθετούμε στη θέση του, αφού εφαρμόσουμε την φωτοκερατεκτομή στο στρώμα. Το LASEK (ή το Epi-LASIK με το οποίο έχει αρκετές ομοιότητες) προτιμάται όταν ο κερατοειδής είναι λεπτός ή όχι απόλυτα φυσιολογικός, τα μάτια ξηρότερα, η μυωπία χαμηλότερη και σε άτομα που είναι πιο πιθανό να τραυματιστούν κάποτε στα μάτια, για λόγους επαγγέλματος ή χόμπυ. Οι τεχνικές LASEK και EPI-LASIK προσπάθησαν να συνδυάσουν το πλεονέκτημα της LASIK, όσον αφορά την έλλειψη μετεγχειρητικής θόλωσης, και το πλεονέκτημα της PRK, για καλύτερη μηχανική αντοχή του κερατοειδή μετεγχειρη-

τικά. Ωστόσο η χειρουργική τεχνική απαιτεί λεπτότερους χειρισμούς και γι' αυτό το λόγο δεν έχουν τύχει μεγάλης απήχησης.

Κεφάλαιο 3

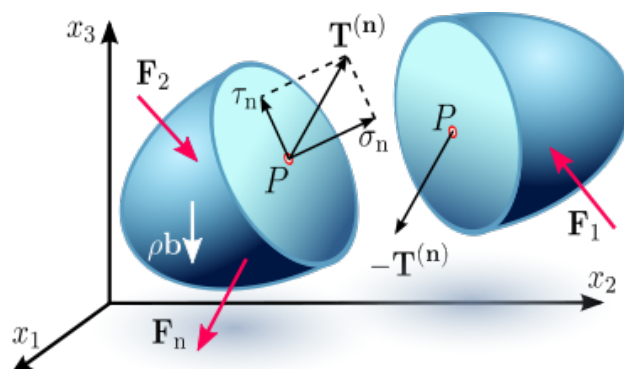
Βασικές αρχές της μηχανικής

Τα περισσότερα σώματα αποτελούνται από ανομοιογενείς κόκκους, οι οποίοι συνήθως παρουσιάζουν εντελώς διαφορετικές ιδιότητες μεταξύ τους και είναι ανισότροποι. Αν, όμως, η διάταξη αυτών των κόκκων είναι τυχαία μέσα στο σώμα και δεν εμφανίζει κενά, τότε μπορούμε να πούμε, ότι το σώμα μας είναι ομογενές, ισότροπο και συνεχές.

Ισότροπο ονομάζουμε ένα σώμα, το οποίο εμφανίζει τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες σε όλες τις διευθύνσεις του. Αντίθετα, ένα σώμα, του οποίου οι μηχανικές ιδιότητες διαφέρουν ανάλογα με την διεύθυνση, κατά την οποία γίνονται οι μετρήσεις, ονομάζεται ανισότροπο. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι μια ξύλινη σανίδα, η οποία, λόγω των ινών από τις οποίες αποτελείται και έχουν κατεύθυνση κατά μήκος της, θα παρουσιάζει διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες και αντοχή στην διεύθυνση που δείχνουν οι ίνες, σε σχέση με την εγκάρσια προς αυτές διεύθυνση.

Αν όμως πολτοποιήσουμε την σανίδα και την μετατρέψουμε σε χαρτόνι, τότε το χαρτόνι θα αποτελείται από κόκκους υλικού με διαφορετικό προσανατολισμό μεταξύ τους, με αποτέλεσμα το υλικό να είναι ισότροπο. Τα περισσότερα υλικά, όπως τα μέταλλα και το σκυρόδεμα είναι ισότροπα. Αντίθετα, τα περισσότερα βιολογικά υλικά μεταξύ αυτών και ο κερατοειδής είναι ανισότροπα, λόγω ακριβώς του γεγονότος, ότι αποτελούνται από ίνες, οι οποίες έχουν συνήθως μια προτιμητέα διεύθυνση.

Ομογενές είναι ένα σώμα που παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες σε όλα τα σημεία της μάζας του. Έτσι, η ομοιογένεια εξασφαλίζει την ομοιομορφία των ιδιοτήτων από σημείο σε σημείο, ενώ η ιστροπία, την ομοιομορφία των ιδιοτήτων κατά τις διάφορες διευθύνσεις.



Σχήμα 3.1: Διάνυσμα τάσης σε μια εσωτερική επιφάνεια S με κάθετο διάνυσμα n .

3.1 Τάση

Η τάση ασκείται σε κάθε σώμα, το οποίο υπόκειται σε κάποιο φορτίο - δύναμη. Μια εκτεταμένη εξωτερική δύναμη προσπαθεί να διαχωρίσει τα άτομα από το υλικό. Σε αυτήν την δύναμη αντιστέκονται οι εσωτερικές δυνάμεις, οι οποίες αναπτύσσονται από έναν μεγάλο αριθμό ατόμων ενός τμήματος του σώματος, με τα αντίστοιχα άτομα στο άλλο τμήμα του σώματος. Εφόσον το σώμα μας δεν υπόκειται σε θραύση, τότε έχουμε ισορροπία μεταξύ των εσωτερικών δυνάμεων, ανάμεσα στα άτομα του σώματος και των εξωτερικών δυνάμεων. Έτσι αν θεωρήσουμε μια τυχαία τομή στο σώμα, ως τάση, ορίζουμε τη δύναμη που ασκείται από κάθε τμήμα του ενός κομματιού του σώματος με το αντίστοιχο τμήμα του άλλου κομματιού, προς το εμβαδόν που αυτά καλύπτουν.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

Η τάση είναι ένα διανυσματικό μέγεθος και εκφράζει την πυκνότητα των εσωτερικών δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας στην εξεταζόμενη τομή. Η τάση είναι θεμελιακό μέγεθος στην μελέτη των κατασκευών [2].

Σε αναλογία με τις εσωτερικές δυνάμεις, η συνιστώσα της τάσης μπορεί να αναλυθεί σε μια συνιστώσα που είναι κάθετη στην επιφάνεια και ονομάζεται ορθή τάση και σε μία συνιστώσα που είναι παράλληλη στην επιφάνεια και ονομάζεται διατμητική τάση. Η ορθή τάση, που προκαλεί εφελκυσμό του σώματος λέγεται εφελκυστική τάση και είναι θετική, ενώ η ορθή τάση που προκαλεί θλίψη ονομάζεται θλιπτική τάση και είναι αρνητική. Αντίθετα με την ορθή τάση, η διατμητική τάση δεν έχει κάποιον τέτοιο

διαχωρισμό. Η ορθή τάση μπορεί να προκύψει απ' ευθείας από την ορθή συνιστώσα της δύναμης ΔF_{nn} και η διατμητική τάση από την διατμητική συνιστώσα της δύναμης ΔT_n δηλαδή

$$\sigma_n = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{nn}}{\Delta A}$$

$$\tau_n = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

Σε ένα τρισδιάστατο σύστημα η ορθή τάση αναλύεται σε τρεις συνιστώσες σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} και αντίστοιχα η διατμητική τάση αναλύεται στις τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} που είναι οι διατμητικές συνιστώσες της ως προς το σύστημα αξόνων x , y , z .

Οι τάσεις σε έναν στοιχειώδη όγκο ενός φορτισμένου σώματος, ορίζονται με τη μορφή τανυστή, ως εξής:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Εάν πάρουμε την ισορροπία ενός στοιχειώδους παραλληλεπίπεδου βρίσκουμε τις παρακάτω σχέσεις :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

Όπου $f^T = [f_x, f_y, f_z]$ το διάνυσμα των ανά μονάδα όγκου εφαρμοσμένων καθολικών δυνάμεων.

Οι σχέσεις αυτές λέγονται διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας και είναι οι διαφορικές εξισώσεις που επιλύουν το πρόβλημα ενός παραμορφώσιμου σώματος.

Αν στο σύνορο του σώματος εφαρμόζονται και κατανεμημένες δυνάμεις $T^T = [T_x, T_y, T_z]$ αυτές συνδέονται με τις τάσεις που αναπτύσσονται στο σώμα με τις σχέσεις:

$$T_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z$$

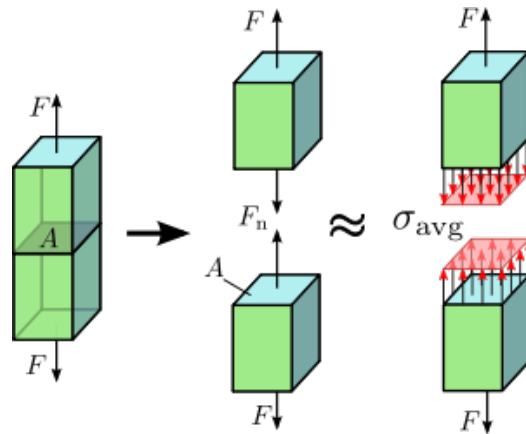
$$T_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z$$

$$T_z = \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z$$

όπου n_x, n_y, n_z τα συνημίτονα κατεύθυνσης σ' ένα δεδομένο σημείο της επιφάνειας του σώματος.

Μονάδες μέτρησης της τάσης στο SI είναι το Pascal (Pa) όπου είναι ίσο με $1\text{N}/\text{m}^2$ και τα πολλαπλάσια του KPa, MPa, GPa

Αν θεωρήσουμε ότι το σώμα είναι ομοιόμορφα φορτισμένο και το υλικό του είναι ομογενές, όπως στην περίπτωση μίας αξονικά φορτισμένης ράβδου, η τάση στην ράβδο είναι :



$$\sigma = \frac{F_{\epsilon\xi}}{A}$$

Σχήμα 3.2: Αξονικά φορτισμένη ράβδος

Αφού, όπως είδαμε, το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με την εξωτερικά εφαρμοζόμενη δύναμη.

3.2 Παραμορφώσεις

Η ύπαρξη δυνάμεων που επενεργούν επί ενός σώματος έχει σαν συνέπεια την δημιουργία μετατοπίσεων και παραμορφώσεων στα σημεία του σώματος. Η παραμόρφωση στη μία διάσταση εκφράζεται ως, ο λόγος της μεταβολής του μήκους προς το αρχικό μήκος, και είναι αδιάστατο μέγεθος.

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Στις τρεις διαστάσεις η παραμορφωσιακή κατάσταση μπορεί να οριστεί με την μορφή τανυστή, ως εξής:

$$\epsilon^T = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Εάν οι μετατοπίσεις ενός σημείου του σώματος, κατά τις διευθύνσεις x, y, z , είναι αντίστοιχα u, v, w , οι σχέσεις μεταξύ των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων του δοθέντος σημείου, είναι:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

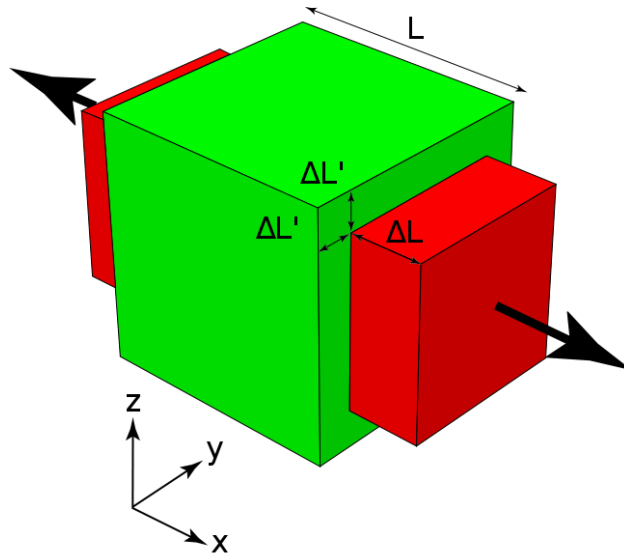
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Οι παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι οι μετατοπίσεις u, v, w είναι απειροστές, ώστε τα γινόμενα των παραγώγων τους να είναι αμελητέες ποσότητες, καθώς και ότι οι u, v, w είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντεταγμένων x, y, z .

3.3 Λόγος του Poisson

Όταν ένα δοκίμιο εφελκύεται στην μία διάσταση, τότε τείνει να γίνει λεπτότερο στις άλλες δυο διαστάσεις. Αντίθετα, η θλίψη συνοδεύεται από μια αύξηση των άλλων διαστάσεων του δοκιμίου. Αυτό ονομάζεται φαινόμενο Poisson και πήρε το ονομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Siméon Dennis Poisson.

Στο σχήμα 3.3 βλέπουμε ένα στοιχειώδης κύβο από ισότροπο υλικό το οποίο εφελκύεται κατά την διεύθυνση x με μία τάση σ_{xx} . Βλέπουμε ότι η επιμήκυνση ΔL κατά την διεύθυνση x συνοδεύεται από βράχυνση των άλλων διαστάσεων. Λόγω ισοτροπίας του υλικού, οι βραχύνσεις στις άλλες δυο διαστάσεις θα είναι ίσες



Σχήμα 3.3: Κύβος ισότροπου, γραμμικά ελαστικού υλικού με λόγο του Poisson 0,5 και μήκος ακμών L , υπόκειται σε τάση κατά τον x άξονα. Ο πράσινος κύβος είναι πριν την εφαρμογή της τάσης, ενώ ο κόκκινος έχει εκταθεί κατά ΔL κατά την διεύθυνση x και έχει συρρικνωθεί στις άλλες δυο διαστάσεις κατά $\Delta L'$.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L}, \epsilon_{yy} = -\frac{\Delta L'}{L}, \epsilon_{zz} = -\frac{\Delta L'}{L}$$

Οι ϵ_{yy} και ϵ_{zz} ονομάζονται πλευρικές τροπές. Ο λόγος της απόλυτης τιμής της πλευρικής τροπής προς την αξονική ϵ_{xx} ονομάζεται λόγος του Poisson.

$$\nu = \frac{|\epsilon_{yy}|}{\epsilon_{xx}} = \frac{|\epsilon_{zz}|}{\epsilon_{xx}}$$

Ο λόγος του Poisson, όπως φαίνεται και από τον παραπάνω τύπο, είναι αδιάστατο μέγεθος και παίρνει πάντα θετικές τιμές μικρότερες του 0,150. Τα περισσότερα βιολογικά υλικά, μεταξύ αυτών και ο κερατοειδής, θεωρούνται ασυμπίεστα και ο λόγος του Poisson γι αυτά είναι 0,50 που είναι και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει [2].

3.4 Νόμος του Hooke

3.4.1 Μέτρο του Young

Για μικρές τάσεις, η παραμόρφωση είναι ανάλογη της τάσης που εφαρμόζεται. Μέχρι μια τιμή της παραμόρφωσης του υλικού, όταν η φόρτιση στο σώμα αρθεί, το σώμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση. Πάνω, όμως, από αυτό το όριο, το υλικό υπόκειται σε πλαστική παραμόρφωση, η οποία παραμένει ακόμα και μετά την άρση της φόρτισης του σώματος ή ακόμα μπορεί να έχουμε και κατάρρευση του υλικού σε κάποια σημεία του.

Η συσχέτιση της παραμόρφωσης, με την τάση που προκαλεί την παραμόρφωση δίνεται από τον νόμο του Hooke :

$$\sigma = \frac{E \cdot \Delta L}{L} = \epsilon \cdot E$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

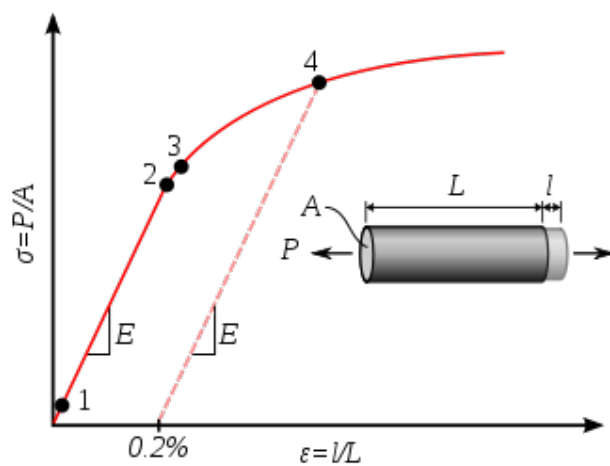
όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young (Young modulus). Ως μέτρο του Young ορίζεται ο λόγος της ελαστικής παραμόρφωσης προς την τάση που εφαρμόζεται στο σώμα, και εξαρτάται από το υλικό του σώματος. Επισημαίνεται ότι, για ένα καθαρά ελαστικό υλικό, όλο το έργο που γίνεται για την παραμόρφωση του υλικού, αποθηκεύεται ως ελαστική ενέργεια και μπορεί να ανακτηθεί όταν το υλικό επιτρέπεται να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση.

3.4.2 Μη γραμμικά υλικά

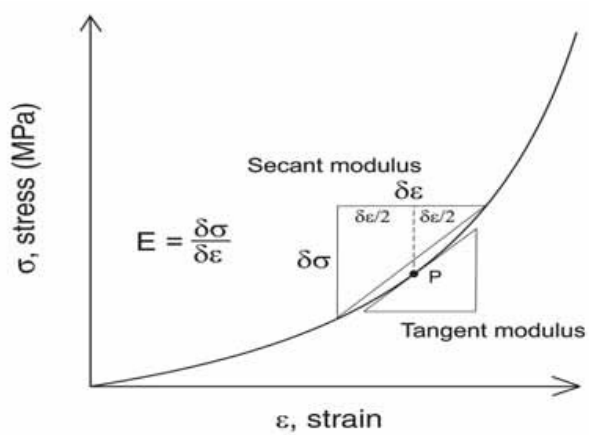
Σε αντίθεση με τα κοινά γραμμικά υλικά, τα οποία κάτω από τα όρια ελαστικότητας έχουν μια συγκεκριμένη τιμή για το μέτρο του Young, τα βιολογικά υλικά δεν έχουν μια συγκεκριμένη τιμή για το μέτρο του Young αλλά περιγράφονται από την εφαπτομένη της καμπύλης τάσης - τροπής.

3.5 Γενικευμένος Νόμος του Hooke

Οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις συνιστούν το γενικευμένο νόμο του Hooke. Οι σχέσεις αυτές σ' ένα τρισδιάστατο σώμα είναι :



Σχήμα 3.4: Γράφημα Τάσης Τροπής.



Σχήμα 3.5: Γράφημα Τάσης Τροπής σε μη γραμμικό υλικό

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} & D_{1,4} & D_{1,5} & D_{1,6} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} & D_{2,4} & D_{2,5} & D_{2,6} \\ D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} & D_{3,4} & D_{3,5} & D_{3,6} \\ D_{4,1} & D_{4,2} & D_{4,3} & D_{4,4} & D_{4,5} & D_{4,6} \\ D_{5,1} & D_{5,2} & D_{5,3} & D_{5,4} & D_{5,5} & D_{5,6} \\ D_{6,1} & D_{6,2} & D_{6,3} & D_{6,4} & D_{6,5} & D_{6,6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

με ανάλογο τρόπο, οι παραμορφώσεις συνδέονται με τις τάσεις, ως εξής :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} & C_{1,5} & C_{1,6} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & C_{2,5} & C_{2,6} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} & C_{3,5} & C_{3,6} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & C_{4,5} & C_{4,6} \\ C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} & C_{5,6} \\ C_{6,1} & C_{6,2} & C_{6,3} & C_{6,4} & C_{6,5} & C_{6,6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = C \cdot \sigma$$

Οι συντελεστές D_{ij} των σχέσεων καλούνται ελαστικές σταθερές, ενώ οι συντελεστές C_{ij} των σχέσεων καλούνται ελαστικοί συντελεστές. Τα μητρώα D και C είναι συμμετρικά, επομένως για την πλήρη περιγραφή ενός ανισότροπου υλικού απαιτείται η εκτίμηση των 21 ελαστικών σταθερών D_{ij} ή των 21 ελαστικών συντελεστών C_{ij} .

Στην περίπτωση ενός γραμμικού, ισότροπου και ελαστικού υλικού, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & \sigma\nu\mu. & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

ή ως προς τις συνιστώσες των παραμορφώσεων:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & \text{συμ.} & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

όπου, E το μέτρο του Young και ν ο λόγος του Poisson.

3.6 Ιξωδοελαστικότητα

Ιξώδες είναι η ιδιότητα ενός υλικού που υποδηλώνει αντίσταση σε συνεχή παραμόρφωση. Αντίθετα με την ελαστικότητα, η τάση δεν σχετίζεται με την παραμόρφωση αλλά με τον ρυθμό παραμόρφωσης. Ιξωδοελαστικά υλικά, όπως το μέλι, υποβάλλονται σε συνεχή παραμόρφωση για όσο χρονικό διάστημα υποβάλλονται στην τάση. Τα ιξωδοελαστικά υλικά, μεταξύ αυτών και όλα τα οργανικά υλικά έχουν άμεση ελαστική αντίδραση σε οποιαδήποτε αλλαγή της φόρτισης του υλικού η οποία ακολουθείται και από μια παρατεταμένη ιξωδική αντίσταση. Εάν ένα τέτοιο υλικό παραμορφωθεί, θα επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση όταν η τάση που προκάλεσε την παραμόρφωση αποσυρθεί. Τα ιξωδοελαστικά υλικά έχουν διαφορετική καμπύλη τάσης-τροπής κατά την φόρτιση τους από ότι κατά τη αποφόρτιση, ένα φαινόμενο το οποίο καλείται υστέρηση. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω αυτά απορροφούν ενέργεια κατά την φόρτιση την οποία και αποδίδουν με την μορφή θερμότητας κατά την αποφόρτιση του υλικού. Η ενέργεια που απορροφάται από το υλικό εξαιτίας τις υστέρησης, διασκορπίζεται ως θερμότητα και μπορεί να οδηγήσει σε συσσώρευση μικροβλαβών με την πάροδο του χρόνου, μια διαδικασία που ονομάζεται κόπωση [10]

3.7 Ακαμψία

Ακαμψία είναι η αντίσταση που προβάλλει ένα ελαστικό σώμα στην παραμόρφωση από μία εφαρμοζόμενη δύναμη, όταν οι βαθμοί ελευθερίας και τα σημεία από τα οποία ασκείται η δύναμη έχουν καθορισθεί. Η ακαμψία σε ένα σώμα ορίζεται και μετράται ως, η δύναμη που ασκείται προς την παραμόρφωση που προκλήθηκε στο σώμα.

$$\sigma = \frac{F}{\epsilon}$$

Σε αντίθεση με το μέτρο του Young, η ακαμψία εξαρτάται από την δύναμη και όχι από την τάση στο σώμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην είναι ένα χρήσιμο μέγεθος, αν δεν είναι γνωστή η γεωμετρία του ελαστικού σώματος. Παρόλα αυτά, είναι πολύ χρήσιμο στο να εκτιμήσουμε την μεταβολή, η οποία επήλθε στις μηχανικές ιδιότητες ενός σώματος μετά από κάποια αλλαγή στην γεωμετρία.

3.8 Δισδιάστατα προβλήματα ελαστικότητας

3.8.1 Επίπεδη Εντατική Κατάσταση

Η επίπεδη εντατική κατάσταση χαρακτηρίζεται από την πολύ μικρότερη z- διάσταση του σώματος, σε σχέση με τις x,y διαστάσεις του. Επίσης, οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις στα σύνορα του σώματος, είναι παράλληλες προς το επίπεδο (x,y) και επιπλέον είναι συμμετρικά κατανεμημένες ως προς το μέσο επίπεδό του. Οπότε, ισχύει [3]:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$$

Οι συνιστώσες της παραμόρφωσης γ_{zx} , γ_{zy} εξαφανίζονται ενώ η ϵ_{zz} δίνεται από την σχέση :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$$

Έτσι η σχέση τάσεων - τροπών γράφεται :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

3.8.2 Επίπεδη Παραμορφωσιακή Κατάσταση

Αντίθετα από την επίπεδη εντατική κατάσταση, η επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση χαρακτηρίζεται από την πολύ μεγαλύτερη z-διάσταση του σώματος σε σχέση με τις x,y διαστάσεις του. Επίσης, η φόρτιση λαμβάνει χώρα μόνο κάθετα προς τα επιμήκη στοιχεία του σώματος και δεν μεταβάλλεται σημαντικά κατά το μήκος του. Εάν επιπλέον θεωρηθεί, ότι η μετακίνηση w του σώματος κατά την z-διεύθυνση είναι μηδέν σε κάθε εγκάρσια διατομή, προκύπτει [3]:

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Οπότε, η συνιστώσα της τάσης σ_{zz} δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Η σχέση τάσεων - παραμορφώσεων γίνεται:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

3.8.3 Αξονοσυμμετρικά προβλήματα

Αξονοσυμμετρικά προβλήματα είναι εκείνα στα οποία η κατασκευή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των z και τα οποία καταπονούνται αξονικά με συμμετρική φόρτιση. Εκφράζοντας αυτά τα προβλήματα συναρτήσει των κυλινδρικών συντεταγμένων και γνωρίζοντας, εξαιτίας της συμμετρίας, ότι η φόρτιση και οι συνθήκες στήριξης, είναι ανεξάρτητες της γωνίας (θ) γύρω από τον άξονα z, τελικά προκύπτει :

$$u = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$$

ενώ

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

Εδώ οι σχέσεις τάσεων-τροπών είναι

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ \sigma_{\nu\mu} & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix}$$

Μέρος II

Ειδικό Μέρος

Κεφάλαιο 4

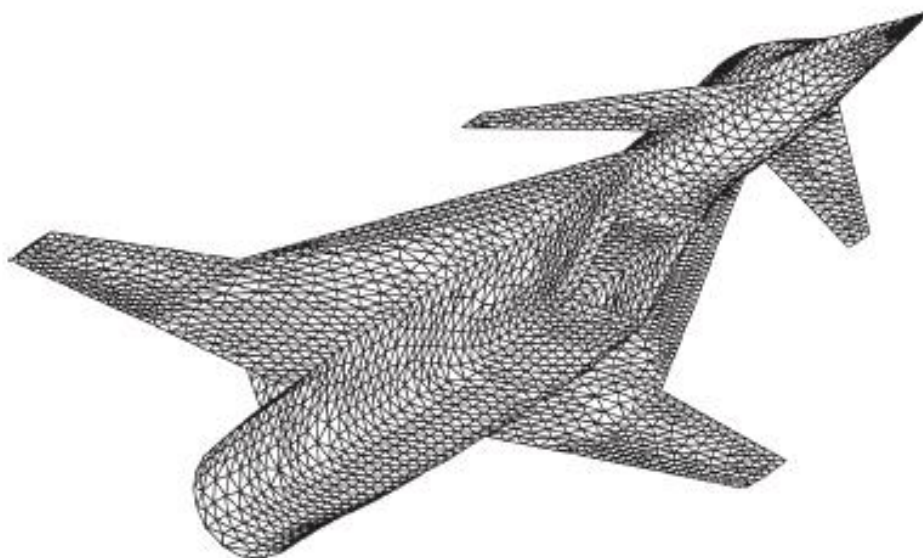
Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

4.1 Εισαγωγή

Στην δεκαετία του 1950 οι αεροναυπηγοί βρέθηκαν μπροστά στην ανάγκη να βρουν μεθόδους υπολογισμού των αεροναυπηγικών κατασκευών. Στα μέσα, λοιπόν, της δεκαετίας αυτής αναπτύχθηκαν ιδέες που μπορούν να θεωρηθούν οι προπομποί της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή η κατασκευή μπορεί να χωριστεί σε μικρότερα τμήματα - στοιχεία που συνδεόνταν μεταξύ τους με κόμβους. Οι κομβικές δυνάμεις και οι κομβικές μετατοπίσεις μας δίνουν εξισώσεις για κάθε κόμβο, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους και μπορούν να επιλυθούν σαν ένα μεγάλο σύστημα.

Η πρώτη δημοσίευση σχετικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων έγινε από τον διάσημο μαθηματικό Courant το 1943. Όμως, η εργασία αυτή πέρασε απαρατήρητη από τους μαθηματικούς και δεν έγινε γνωστή στους μηχανικούς, οι οποίοι ανακάλυψαν ξανά και θεμελίωσαν την μέθοδο. Με τα πεπερασμένα στοιχεία οι μαθηματικοί ασχολούνται ουσιαστικά μετά το 1967, οπότε και δημοσιεύθηκε η πρώτη έκδοση του βιβλίου του O.C Zieniewicz πάνω στα πεπερασμένα στοιχεία και επικεντρώθηκαν στο να υπολογίσουν το σφάλμα, καθώς και την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου.

Στα πεπερασμένα στοιχεία, όπως είπαμε παραπάνω, η κατασκευή μας χωρίζεται σε στοιχεία, τα όποια είναι από το ίδιο υλικό με το αρχικό σώμα που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε. Για να έχουμε μια ακριβή λύση του προβλήματος θα πρέπει το μέγεθος των στοιχείων να γίνει απειροστό και ο αριθμός τους άπειρος. 1 Σε κάθε άλλη περίπτωση τα αποτελέσματα



Σχήμα 4.1: Κάνναβος μαχητικού αεροσκάφους

μας είναι προσεγγιστικά και το σφάλμα μας εξαρτάται από το μέγεθος των στοιχείων που έχουμε διαλέξει. Βέβαια, όσο περισσότερα είναι τα στοιχεία τόσο μεγαλύτερο είναι το σύστημα που θα πρέπει να λύσουμε και άρα τόσο περισσότερη υπολογιστική δύναμη θα χρειαστούμε. Ευτυχώς με την ραγδαία ανάπτυξη στον τομέα των υπολογιστών έγινε δυνατή η επίλυση τεράστιων συστημάτων, των οποίων η επίλυση με το χέρι θα ήταν αδύνατη ή τουλάχιστον θα απαιτούσε τόσο μεγάλο διάστημα που θα έκανε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μη λειτουργική [3].

Μια άλλη προσέγγιση εισάγεται στη σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις στους κόμβους με τις κομβικές δυνάμεις. Η απόδειξη αυτών των σχέσεων βασίζεται σε ενεργειακά θεωρήματα και διευκολύνεται από την μορφή των στοιχείων. Στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων έχουμε δύο κύρια μοντέλα ανάπτυξης της μεθόδου, το μοντέλο των μετατοπίσεων και το μοντέλο των δυνάμεων, όπου σαν βασικές μεταβλητές εκλέγουμε είτε τις κομβικές μετατοπίσεις είτε τις κομβικές δυνάμεις αντίστοιχα. Επίσης, υπάρχει και το μικτό μοντέλο, όπου έχουμε μεταβλητές και από τις δυο κατηγορίες (μετατοπίσεις και δυνάμεις), καθώς και το υβριδικό μοντέλο που είναι ακόμα πιο σύνθετο. Βέβαια, το μοντέλο που χρησιμοποιείται κατά κόρον είναι το μοντέλο των μετατοπίσεων, λόγω της ευκολίας στην εξαγωγή των σχέσεων και της απλότητας του προγραμματισμού του.

4.2 Το φυσικό πρόβλημα και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Μία κατασκευή ή ένα στοιχείο κατασκευής που υποβάλλεται σε φόρτιση αποτελεί το «φυσικό πρόβλημα» που καλείται να υπολογίσει ένας μηχανικός. Για να μπορέσει κανείς να υπολογίσει την κατασκευή πρέπει να κατασκευαστεί το μαθηματικό μοντέλο. Πρέπει να παρασταθεί η γεωμετρία του σώματος. Η διαδικασία αυτή εμπεριέχει προσέγγιση, αφού η επιφάνεια προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο. Πρέπει ακόμα να παρασταθεί η συμπεριφορά του υλικού με τα υπάρχοντα μοντέλα. Το ίδιο πρέπει να γίνει με την παράσταση των φορτίων και των συνοριακών συνθηκών.

Η διαδικασία συνολικά παριστάνεται στο Σχήμα 4.2 Μετά τις προσεγγίσεις αυτές είναι δυνατό να κατασκευαστεί το μαθηματικό μοντέλο, δηλαδή να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα. Είναι βέβαια κατανοητό, ότι και το πιο εξελιγμένο μαθηματικό μοντέλο δεν αναπαράγει ακριβώς το φυσικό πρόβλημα. Εκείνο που ελπίζουμε είναι να το προσεγγίσει κατά τον καλύτερο τρόπο.

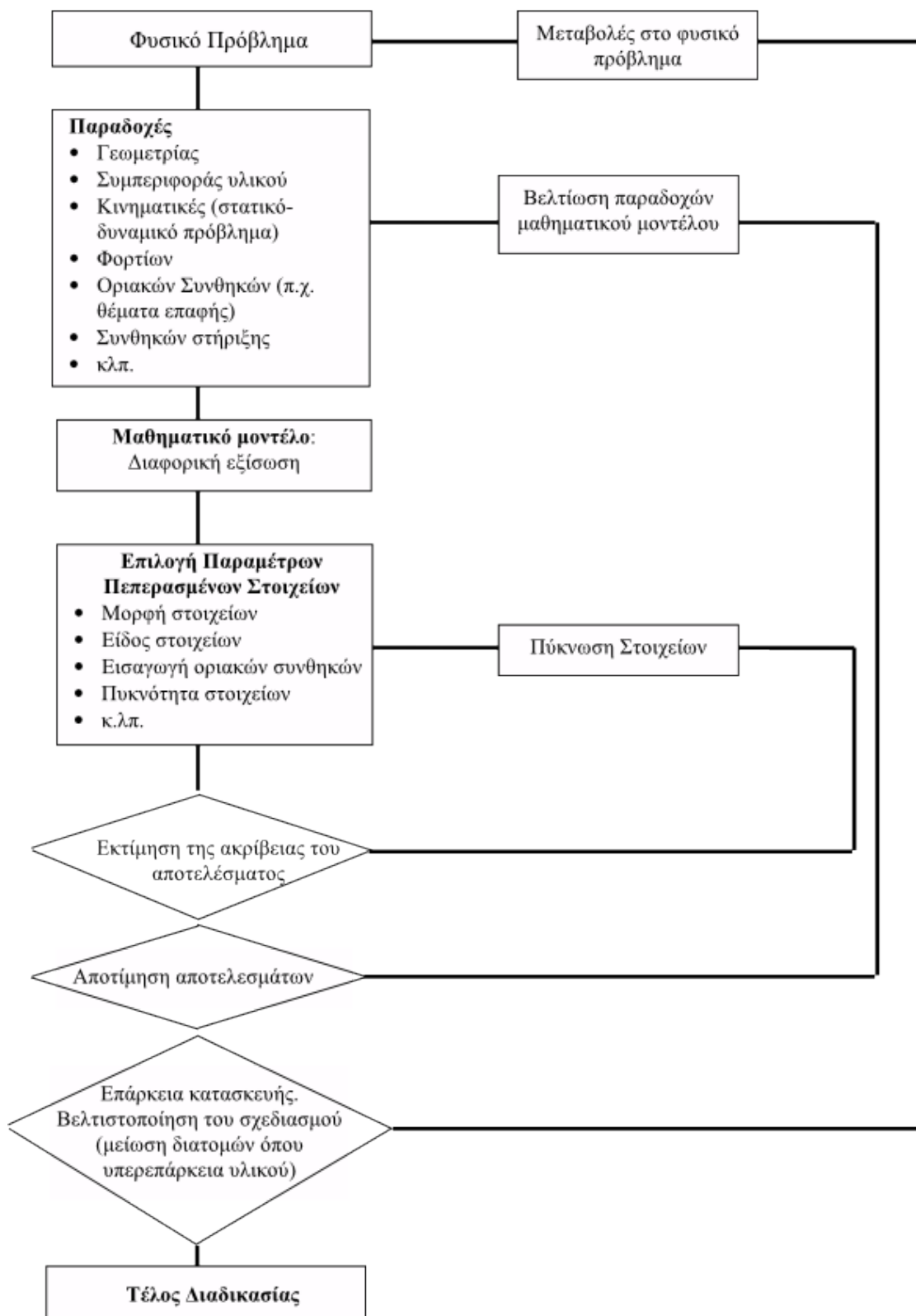
Πρέπει, βέβαια, το μαθηματικό μοντέλο να είναι «αποτελεσματικό», δηλαδή να επιτυγχάνει την λύση με ικανοποιητική ακρίβεια και λογικό κόστος. Πρέπει, επίσης να είναι «αξιόπιστο», δηλαδή να μπορεί να πετύχει τη λύση με μία προκαθορισμένη ακρίβεια.

Είναι επικίνδυνο να ξεκινήσει κανείς από ένα πολύ σύνθετο μοντέλο γιατί τότε δεν μπορεί να ελέγξει καθόλου το αποτέλεσμα. Συνήθως, ξεκινάμε από ένα απλοϊκό μοντέλο για να καταλήξουμε στο πιο σύνθετο με διαδοχικά βήματα. Το απλοϊκό μοντέλο χρησιμοποιείται για να έχουμε έναν πρώτο έλεγχο του αποτελέσματος.

Γενικά θεωρούμε, ότι το πιο αποτελεσματικό μοντέλο είναι αυτό που μας δίνει απαντήσεις στο πρόβλημά μας με τον πιο αξιόπιστο τρόπο (δηλαδή, με ένα αποδεκτό σφάλμα) και με την λιγότερη προσπάθεια.

Είναι προφανές, ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων εφαρμόζεται στο μαθηματικό πρόβλημα που επιλέξαμε και δεν μπορεί να δώσει λύση στο αρχικό, φυσικό πρόβλημα. Όπως δείχνουμε στο σχήμα, αν η ακρίβεια στα αποτελέσματα του μαθηματικού προβλήματος που επιλέξαμε δεν είναι επαρκής τότε προσφεύγουμε σε πύκνωση των στοιχείων και νέα επίλυση του προβλήματος. Η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί 2-3 φορές. Αν τα αποτελέσματα της τελευταίας επίλυσης και της προηγούμενης δεν διαφέρουν σημαντικά, θεωρούμε ότι η επίλυση συνέκλινε, αλλιώς επαναλαμβάνουμε την διαδικασία πύκνωσης - επίλυσης.

Ένα άλλο σημείο που πρέπει να ελεγχθεί είναι η επάρκεια των διατομών που έχουμε επιλέξει για τα κατασκευαστικά μας στοιχεία. Είναι πολύ



Σχήμα 4.2: Διαδικασία επίλυσης του προβλήματος με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων

πιθανό σε κάποια διατομή, οι τάσεις να ξεπερνούν τις ανεκτές. Τότε πρέπει να γίνει επανασχεδιασμός της κατασκευής. Σε επανασχεδιασμό της κατασκευής καταλήγει και η τυχούσα βελτιστοποίηση του σχεδιασμού, δηλαδή η μείωση της διατομής στα σημεία που υπάρχει υπερεπάρκεια υλικού και, άρα, μικρές τάσεις και ενίσχυση της διατομής στα σημεία που οι τάσεις είναι εξαιρετικά ψηλές. Σε περιπτώσεις σαν αυτές που περιγράψαμε, προβαίνουμε σε νέα κατάρτιση και του μαθηματικού μοντέλου και του μοντέλου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Αν παρ' όλα αυτά τα αποτελέσματα δεν ικανοποιούν βασικές προϋποθέσεις του φυσικού προβλήματος ή καταλήγουν σε «αφύσικα» παράλογα αποτελέσματα τότε είναι αναγκαίο να καταφύγουμε σ' ένα βελτιωμένο μαθηματικό μοντέλο.

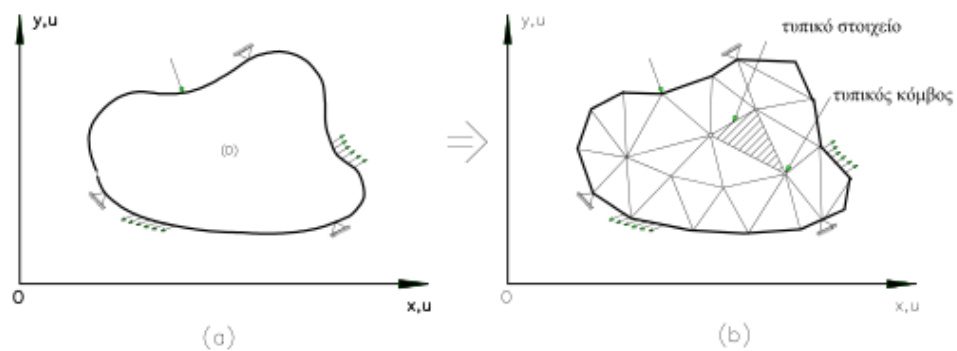
4.3 Βασικά βήματα στην ανάπτυξη της Μεθόδου των Πεπερασμένων στοιχείων

Παρακάτω αναλύουμε τα βασικά βήματα που εμπλέκονται στην επίλυση ενός προβλήματος με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Επισημαίνεται ότι στην διαδικασία που αναπτύσσουμε παρακάτω έχει εφαρμοστεί το μοντέλο των μετατοπίσεων.

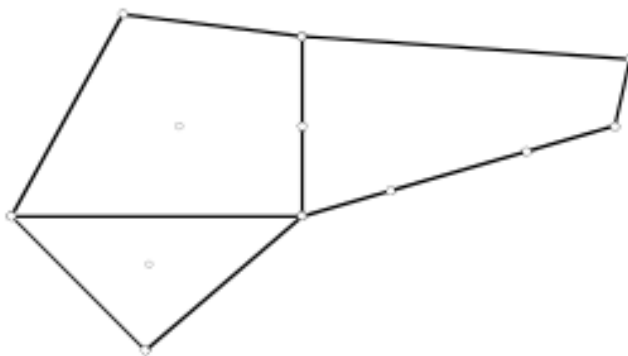
4.3.1 Διακριτοποίηση της κατασκευής

Σε αυτό το στάδιο η κατασκευή χωρίζεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων. Η υποδιαίρεση αυτή δεν αναπαριστά πάντοτε με ακρίβεια την γεωμετρία και το σχήμα, της υπό εξέταση κατασκευής. Ένα κλασικό τέτοιο παράδειγμα είναι οι καμπύλες επιφάνειες όπως αυτές του σχήματος 4.3, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν με απόλυτη ακρίβεια. Οπότε ή κατασκευή που τελικά επιλύουμε, είναι μια κατασκευή που προσεγγίζει την αρχική, αλλά δεν ταυτίζεται απόλυτα με αυτήν. Η κατασκευή μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω, όσον αφορά την παράσταση οριακών συνθηκών, όπως για παράδειγμα με αντικατάσταση κατανεμημένων φορτίων με συγκεντρωμένα φορτία στους κόμβους.

Τα στοιχεία αυτά είναι τμήματα της κατασκευής, τα οποία αποκόπτονται από αυτήν με ιδεατές επιφάνειες και συνδέονται μεταξύ τους σε διακριτά σημεία, τους κόμβους, σχήμα 4.4. Σε κάθε κόμβο ενός στοιχείου αντιστοιχεί ένας αριθμός κομβικών παραμέτρων. Οι παράμετροι αυτοί είναι οι γενικευμένες μετατοπίσεις, δηλαδή η μετατοπίσεις με τους παραγώγους τους.



Σχήμα 4.3: (α) Τυχαία κατασκευή D . (β) διακεκριμενοποίηση της κατασκευής



Σχήμα 4.4: Στοιχεία συνδεδεμένα μεταξύ τους

Σε καμπτόμενες κατασκευές η ύπαρξη των παραγώγων των μετατοπίσεων είναι υποχρεωτική δεδομένου ότι κάθε κόμβος έχει την δυνατότητα μετατόπισης κατά τους άξονες x και y άλλα και στροφής γύρω από τον άξονα z . Σε άλλες κατασκευές η προσθήκη των παραγώγων απλά αυξάνει την ακρίβεια του στοιχείου. Από τα προηγούμενα παρατηρούμε, ότι ο αριθμός k των κομβικών παραμέτρων μπορεί να διαφέρει από τον βαθμό ελευθερίας m του κάθε κόμβου. Έστω τώρα N ο συνολικός αριθμός των στοιχείων, στα οποία υποδιαιρείται η κατασκευή και n ο συνολικός αριθμός κόμβων της κατασκευής. Τότε, ο συνολικός αριθμός των κομβικών παραμέτρων της κατασκευής είναι M , όπου το M συνήθως είναι ίσο με kn .

4.3.2 Υπολογισμός μητρώου ακαμψίας του στοιχείου.

Κάθε πεπερασμένο στοιχείο έχει τις ίδιες ιδιότητες με το αρχικό σώμα και υπόκειται στις ίδιες καταστατικές εξισώσεις. Το κέρδος που προκύπτει από την διακεκριμενοποίηση της κατασκευής, είναι ότι τα πεπερασμένα στοιχεία έχουν πολύ μικρό μέγεθος και πολύ απλούστερη μορφή. Βέβαια αυτές οι ιδιότητες του στοιχείου δεν μας επιτρέπουν να βρούμε αναλυτικές σχέσεις που να μας δίνουν την ένταση του στοιχείου σε κάποιο σημείο του με την βοήθεια των κομβικών παραμέτρων. Επόμενο είναι, ότι δεν υπάρχει και η συνακόλουθη σχέση που να συνδέει τις κομβικές παραμέτρους με τις κομβικές δυνάμεις δηλαδή το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου. Γι αυτό σε αυτό το σημείο χρειάζεται να εισαχθούν δύο βοηθητικά στάδια, α) αναζητείται μια συνάρτηση που να συνδέει τις μετατοπίσεις σε κάθε στοιχείο με τις κομβικές παραμέτρους, να αναπαριστά δηλαδή την φυσική συμπεριφορά του κάθε στοιχείου, και β) με την βοήθεια της αρχής των δυνατών έργων να υπολογιστεί το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου.

Προσδιορισμός των μετατοπίσεων του στοιχείου.

Θεωρώντας ότι γνωρίζουμε τις μετατοπίσεις των κόμβων ενός στοιχείου προσπαθούμε να εκφράσουμε τις εσωτερικές μετατοπίσεις με την βοήθεια μια κατάλληλης παρεμβολής. Όσο μικρότερο είναι το στοιχείο τόσο μικρότερο είναι και το σφάλμα που κάνουμε με αυτήν την παραδοχή, ενώ σημαντικό ρόλο παίζει και , ότι τα στοιχεία που έχουμε επιλέξει έχουν σχετικά απλό σχήμα. Συνήθως για την παρεμβολή χρησιμοποιούνται πολυώνυμα. Η επιλογή αυτή γίνεται γιατί οι αλγεβρικές πράξεις με τα πολυώνυμα (όπως η ολοκλήρωση, ή η παραγώγιση) είναι σχετικά εύκολες και έτσι μπορούμε να δώσουμε τις τελικές εκφράσεις σε κλειστή μορφή. Έχοντας, λοιπόν, ορίσει ένα παρεμβολικό τύπο για κάθε στοιχείο, το πεδίο των μετατοπίσεων ορίζεται ξεχωριστά σ' αυτό. Στην περίπτωση ενός

μονοδιάστατου στοιχείου e η γενική μορφή του πολωνύμου παρεμβολής που δίνει τη μετατόπιση $q(x)=u(x)$ κατά τη διεύθυνση του στοιχείου είναι:

$$q(x) = u(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + A_{m+1}x^m + \dots$$

όπου $q(x)$ η μετατόπιση ενός σημείου του e .

Η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$q(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^m \quad \dots] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ή αλλιώς

$$q(x) = M(x) \cdot \alpha$$

Οι όροι α είναι σταθεροί, προκύπτουν ανάλογα με το στοιχείο και ονομάζονται γενικευμένες συντεταγμένες, επειδή δεν είναι απαραίτητα μόνο συνδεδεμένοι με τις μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου. Αυτές μπορεί να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ορισμένων κομβικών μετατοπίσεων και ενδεχομένως παραγώγων τους όπως συμβαίνει στα καμπτόμενα στοιχεία (δηλαδή δοκούς, πλάκες και κελύφη). Ο αριθμός των όρων α πρέπει να είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των κομβικών παραμέτρων του στοιχείου. Οι συναρτήσεις $M(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις μετατόπισης.

Στην περίπτωση της επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης έχουμε δυο συνιστώσες $u(x,y)$ και $v(x,y)$ της μετατόπισης. Το πολυώνυμο της παρεμβολής για κάθε μετατόπιση είναι :

$$\begin{aligned} u(x) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \\ v(x) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 \end{aligned}$$

Οι οποίες μπορούν να γραφούν σε μητρική και ως:

$$q(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & y & x^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

4.3. ΒΑΣΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ 63

$$q(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(x, y) & 0 \\ 0 & G(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix}$$

όπου

$$G(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad \dots]$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

και τελικά μπορεί να γραφτεί

$$q(x, y) = M(x, y) \cdot \alpha$$

όπου, α είναι το μητρώο στήλη των συντελεστών a, b

Αντίστοιχα στην τρισδιάστατη κατάσταση έχουμε :

$$q(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & G(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & G(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

όπου

$$G(x, y, z) = [1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad xy \quad \dots]$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως:

$$q(x, y, z) = M(x, y, z) \cdot \alpha \quad (4.1)$$

όπου, και εδώ, α είναι το μητρώο στήλη των συντελεστών a, b, c

Η προηγούμενη σχέση μας δίνει τις μετατοπίσεις για κάθε σημείο του στοιχείου. Επομένως αν στις συντεταγμένες (x, y, z) βάλουμε τις συντεταγμένες των κόμβων πρέπει να μας δώσει τις μετατοπίσεις τους.

Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για τις μετατοπίσεις των κόμβων q :

$$q_1 = M(x_1, y_1, z_1) \cdot \alpha$$

$$q_2 = M(x_2, y_2, z_2) \cdot \alpha$$

$$q_3 = M(x_3, y_3, z_3) \cdot \alpha$$

⋮

που σε μητρική μορφή γράφεται

$$q^e = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{x_1, y_1, z_1} \\ M_{x_2, y_2, z_2} \\ M_{x_3, y_3, z_3} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \alpha$$

ή

$$q^e = A \cdot \alpha$$

η οποία μπορεί να αντιστραφεί εκφράζοντας τις γενικευμένες συντεταγμένες συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων.

$$\alpha = A^{-1} \cdot q^e \quad (4.2)$$

όπου A^{-1} είναι το μετασχηματισμένο μητρώο των μετατοπίσεων. Από την προηγούμενη σχέση παρατηρούμε, ότι ο ολικός αριθμός των γενικευμένων μετατοπίσεων είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου e . Αντικαθιστώντας την 4.2 στην 4.1 βρίσκουμε :

$$q(x, y, z) = N(x, y, z)q^e \quad (4.3)$$

όπου

$$N(x, y, z) = M(x, y, z)A^{-1} \quad (4.4)$$

Τα $l(x, y, z)$ όπου $(l = 1, 2, 3, \dots)$ γράφονται :

$$N_l(x, y, z) = \begin{bmatrix} \nu_l(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_l(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_l(x, y, z) \end{bmatrix} = \nu_l(x, y, z)I$$

Όπου I το μοναδιαίο μητρώο.

Οι συναρτήσεις $\nu_l(x, y, z)$ ($l=i, j, m, k$) είναι πολυώνυμα τα οποία ονομάζονται συναρτήσεις σχήματος και εξαρτώνται από τη γεωμετρία του στοιχείου και τον παρεμβολικό τύπο που χρησιμοποιήθηκε.

Η 4.3 δίνει κατευθείαν τις μετατοπίσεις μέσα στο τυχόν στοιχείο e συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων του στοιχείου. Το βασικό πρόβλημα της προτεινόμενης διαδικασίας είναι ότι δεν είναι πάντα δυνατή η αντιστροφή του μητρώου A . Λύση στο πρόβλημα αποτελεί η απ' ευθείας εισαγωγή της συνάρτησης σχήματος χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες.

Παραμορφώσεις και τάσεις του στοιχείου

Οι παραμορφώσεις στο τυχόν στοιχείο e συνδέονται, με τις μετατοπίσεις $q(x, y, z)$, όπως έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο, με την σχέση

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Η οποία μπορεί να πάρει την μορφή

$$\epsilon = \aleph \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \aleph q(x, y, z)$$

όπου \aleph ένα μητρώο τελεστή της μορφής

$$\aleph = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση τις μετατοπίσεις $q(x,y,z)$ από την σχέση 4.3 έχουμε :

$$\epsilon = B \cdot q^e \quad (4.5)$$

οπού

$$B = \aleph N(x, y, z) \quad (4.6)$$

Απο την 4.5 έχουμε τις παραμορφώσεις των μετατοπίσεων των κόμβων q^e και του μητρώου B που όμως προσδιορίζεται πολύ απλά εφόσον οι μετατοπίσεις έχουν εκφραστεί συναρτήσει των κομβικών παραμέτρων και των συναρτήσεων σχήματος. Αν, μάλιστα, οι συναρτήσεις σχήματος $N(x,y,z)$ είναι γραμμικές τότε οι παραμορφώσεις θα είναι σταθερές σε κάθε σημείο του e .

Αν ϵ_0 οι αρχικές παραμορφώσεις του στοιχείου e δηλαδή οι παραμορφώσεις που οφείλονται στην ανομοιόμορφη αλλαγή της θερμοκρασίας στη συστολή ή διόγκωση, κλπ, στις οποίες είναι δυνατόν να έχει υποβληθεί ο χώρος D^h , τότε οι τάσεις θα προέρχονται από την διαφορά μεταξύ πραγματικών και αρχικών παραμορφώσεων. Οπότε

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0) \quad (4.7)$$

όπου D το μητρώο των ελαστικών σταθερών.

Υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου.

Στην περίπτωση επιφανειακών φορέων κτλ το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου δεν μπορεί να προκύψει αναλυτικά, αλλά από την εφαρμογή της αρχής δυνατών έργων στο στοιχείο e. Για αυτό το λόγο, απομονώνουμε ένα στοιχείο από την κατασκευή και θεωρούμε σαν εξωτερικά φορτία τις τάσεις που εφαρμόζονται από το υπόλοιπο τμήμα της κατασκευής. Με την αρχή των δυνατών έργων στο στοιχείο μπορούμε να βρούμε κάποιες κομβικές δυνάμεις στους κόμβους, που να δρουν στους κόμβους και να παράγουν έργο ίσο με αυτό του κατανεμημένου φορτίου [3].

Αν $T = [T_x \ T_y \ T_z]^T$ η κατανομή των επιφανειακών τάσεων και $f = [f_x \ f_y \ f_z]^T$ το διάνυσμα των καθολικών δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχείο e.

Τότε θεωρούμε $P_i = [P_{xi} \ P_{yi} \ P_{zi}]^T$ τις συγκεντρωμένες δυνάμεις που δρουν σε κάθε κόμβο. Άρα, σε όλους τους κόμβους του στοιχείου θα δρουν οι δυνάμεις $F_p^e = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots]^T$.

Εφαρμόζοντας τώρα την αρχή των ελαχίστων έργων στο στοιχείο e, το οποίο έχει όγκο V^e και συνολική επιφάνεια S^e βρίσκουμε :

$$\{\delta q^e\}^T F_p^e + \int_{V^e} \delta q^T f \cdot dV + \int_{S^e} \delta q^T T \cdot dS = \int_{V^e} \delta \epsilon^T \sigma \cdot dV \quad (4.8)$$

Οι δυνατές μετατοπίσεις δq και οι δυνατές παραμορφώσεις $\delta \epsilon$ δίνονται από τους τύπους 4.3, 4.5 με τις πραγματικές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις με αντικατάσταση του q^e με το δq^e .

$$\delta q = N \delta q^e$$

$$\delta \epsilon = B \delta q^e$$

Επομένως, ο δεύτερος όρος του αριστερού μέλους της 4.8 που παριστάνει το δυνατό έργο των καθολικών δυνάμεων γράφεται

$$\int_{V^e} \delta q^T f \cdot dV = (\delta q^T) \int_{V^e} N^T \cdot f \cdot dV$$

Το διάνυσμα

$$F_f^e = \int_{V^e} N^T \cdot f \cdot dV$$

παριστάνει τις στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις. ηλαδή δυνάμεις εφαρμοζόμενες στους κόμβους του στοιχείου e που παράγουν ισοδύναμο έργο με τις καθολικές f που δρουν σε όλους τους κόκκους του στοιχείου e . Μ' αυτό τον τρόπο μπορούν να αντικατασταθούν οι καθολικές δυνάμεις f με δυνάμεις F_f^e . Αντίστοιχα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε και τις επιφανειακές τάσεις T με τις στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις

$$F_T^e = \int_{V^e} N^T \cdot T \cdot dS$$

Επομένως, η σχέση 4.8 λαμβάνοντας υπόψη και την 4.7 παίρνει την μορφή

$$(\delta q^e)^T (F_f^e + F_T^e + F_{\epsilon_0}^e + F_P^e - K^e q^e) = 0 \quad (4.9)$$

όπου

$$F_{\epsilon_0}^e = \int_{V^e} B^T \cdot D \cdot \epsilon_0 dS$$

οι στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις που ισορροπούν το έργο των αρχικών παραμορφώσεων και

$$k^e = \int_{V^e} B^T \cdot D \cdot B dS$$

το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου e .

Εφόσον το q^e είναι τυχαίο διάνυσμα διάφορο του μηδενός η 4.9 γράφεται

$$F^e = K^e q^e$$

όπου

$$F^e = F_f^e + F_T^e + F_p^e + F_{\epsilon_0}^e$$

είναι το διάνυσμα της συνισταμένης των γενικευμένων κομβικών δυνάμεων του στοιχείου e .

Χρησιμοποιώντας την αρχή των δυνατών έργων στο τυχαίο στοιχείο e , οι γενικοί τύποι για το μητρώο ακαμψίας και τα διανύσματα των γενικευμένων κομβικών δυνάμεων παραμένουν οι ίδιοι ανεξάρτητα από το στοιχείο που χρησιμοποιείται.

4.3.3 Διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας

Η διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας θα γίνει με την αρχή των δυνατών έργων. Εναλλακτικά, σε απλά προβλήματα, όπου δεν έχουμε να αντιμετωπίσουμε εσωτερικούς κόμβους ή επιπλέον κομβικές παραμέτρους, όπως παραγωγούς των μετατοπίσεων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η διαδικασία ισορροπίας των επί μέρους κόμβων. Έτσι, υποθέτουμε ότι η κατασκευή έχει χωριστεί σε N πεπερασμένα στοιχεία και ότι τα πεδία των μετατοπίσεων παραμορφώσεων και τάσεων είναι αρκούτως ομαλά ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε τα δυνατά έργα ως άθροισμα των δυνατών έργων των επιμέρους στοιχείων [3].

$$\sum_{e=1}^N \left[\int_{V^e} \delta q^T f \cdot dV + \int_{S^e} \delta q^T T^T \cdot dS \right] = \sum_{e=1}^N \int_{V^e} \delta \epsilon^T \sigma dV$$

Οπότε

$$\sum_{e=1}^N (\delta q^e)^T \left[\int_{V^e} N^T f \cdot dV + \int_{S^e} N^T dS + \int_{V^e} B^T D \epsilon_0 dV - \left(\int_{V^e} B^T D B dV \right) q^e \right] = 0$$

Αν \bar{F}_e το διάνυσμα της συνισταμένης του ισοδύναμου συστήματος των γενικευμένων κομβικών δυνάμεων του στοιχείου e , η προηγούμενη γράφεται

$$\sum_{e=1}^N (\delta q^e)^T (F^e - K^e q^e) = 0$$

ή

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \delta q^1 \\ \delta q^2 \\ \vdots \\ \delta q^e \\ \vdots \\ \delta q^N \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta F^1 \\ \delta F^2 \\ \vdots \\ \delta F^e \\ \vdots \\ \delta F^N \end{bmatrix} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} k^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k^2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & k^e & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & k^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^e \\ \vdots \\ q^N \end{bmatrix} = 0$$

ή σε πιο συμπυκνωμένη μορφή

$$(\delta \mathbf{q})^T (\mathbf{F} - \mathbf{K}^* \mathbf{q}) = 0 \quad (4.10)$$

όπου, \mathbf{K}^* συμβολίζει το διαγώνιο υπερμητρώο με στοιχεία τα

$$k^1, k^2, \dots, k^e, \dots, k^n$$

\mathbf{F} το υπερμητρώο διάνυσμα με στοιχεία τα

$$k^1, k^2, \dots, k^e, \dots, k^n$$

δηλαδή τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις των N πεπερασμένων στοιχείων

και \mathbf{q} το υπερμητρώο διάνυσμα με στοιχεία τα

$$q^1, q^2, \dots, q^e, \dots, q^n$$

δηλαδή, τις γενικευμένες κομβικές μετατοπίσεις των N πεπερασμένων στοιχείων.

Τα \mathbf{K}^* , \mathbf{F} , \mathbf{q} λέγονται συναθροισμένα μητρώα.

Τα στοιχεία του μητρώου \mathbf{q} δεν είναι μεταξύ τους εντελώς ανεξάρτητα, επειδή κάθε κόμβος ανήκει σε περισσότερα από ένα στοιχεία. Έστω r το μητρώο διάνυσμα των k_n μετατοπίσεων των n κόμβων του σώματος (όπου k ο αριθμός των κομβικών παραμέτρων κάθε κόμβου) και \mathbf{R} το μητρώο διάνυσμα των k_n κομβικών δυνάμεων. Το διάνυσμα \mathbf{q} συνδέεται με το διάνυσμα \mathbf{r} με μια σχέση της μορφής

4.3. ΒΑΣΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ 71

$$\mathbf{q} = \mathbf{t}_1 \mathbf{r} \quad (4.11)$$

όπου, \mathbf{t}_1 είναι ένα λογικό μητρώο συνδέσεως ή μετασχηματισμού ανάλογα με την περίπτωση, διαστάσεων Άρα, το δυνατό έργο που παράγουν οι δυνάμεις \mathbf{F} κατά τις δυνατές μετατοπίσεις $\delta \mathbf{q}$ θα πρέπει να είναι ίσο με το έργο των δυνάμεων \mathbf{R} κατά τις δυνατές μετατοπίσεις $\delta \mathbf{r}$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{F} &= \delta \mathbf{r}^T \mathbf{R} \\ \delta \mathbf{r}^T (\mathbf{t}_1^T \mathbf{F} - \mathbf{R}) &= 0 \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει

$$\mathbf{R} = \mathbf{t}_1^T \mathbf{F} \quad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας τις 4.11 και 4.12 στην 4.10

$$\delta \mathbf{r}^T (\mathbf{R} - \mathbf{t}_1^T \mathbf{K}^* \mathbf{t}_1 \mathbf{r}) = 0 \quad (4.13)$$

Έχοντας ότι το $\delta \mathbf{r}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα διάφορο του μηδενός, έχουμε

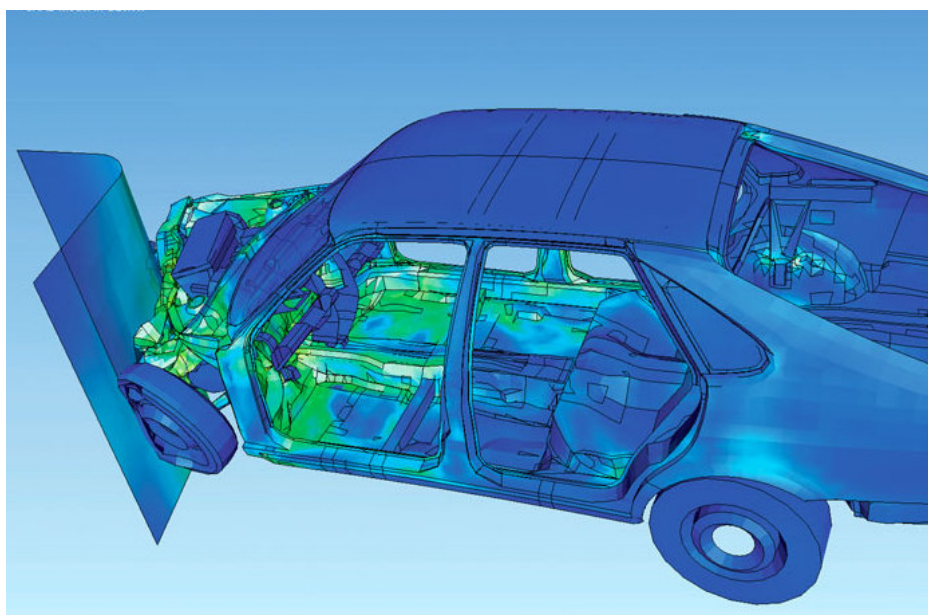
$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{R} \quad (4.14)$$

όπου

$$\mathbf{K} = \mathbf{t}_1^T \mathbf{K}^* \mathbf{t}_1 \quad (4.15)$$

είναι το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής.

Στην ουσία το μητρώο \mathbf{t}_1 δεν κάνει τίποτα άλλο στην σχέση 4.15 παρά να δημιουργεί ένα μητρώο \mathbf{K} διαστάσεων $(kn \times kn)$ που αποτελεί σύνθεση των μητρώων ακαμψίας k^e των επιμέρους στοιχείων.



Σχήμα 4.5: Προσομοίωση της παραμόρφωσης αυτοκινήτου σε ένα τρακάρισμα, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

4.3.4 Επίλυση του τελικού συστήματος ακαμψίας

Η επίλυση του τελικού συστήματος, είναι μια τυποποιημένη διαδικασία. Για την επίλυση του συστήματος μπορούμε να επωφεληθούμε από κάποιες ιδιότητες του μητρώου ακαμψίας \mathbf{K} , όπως το ότι είναι συμμετρικό, καλά ορισμένο και αραιό δηλαδή πολλά από τα στοιχεία του είναι μηδέν, άρα με κατάλληλη αρίθμηση των κόμβων τα μη μηδενικά στοιχεία μπορούν να συγκεντρωθούν σε μια στενή λωρίδα γύρω από την κύρια διαγώνιο.

4.3.5 Υπολογισμός εντατικών και παραμορφωσιακών μεγεθών

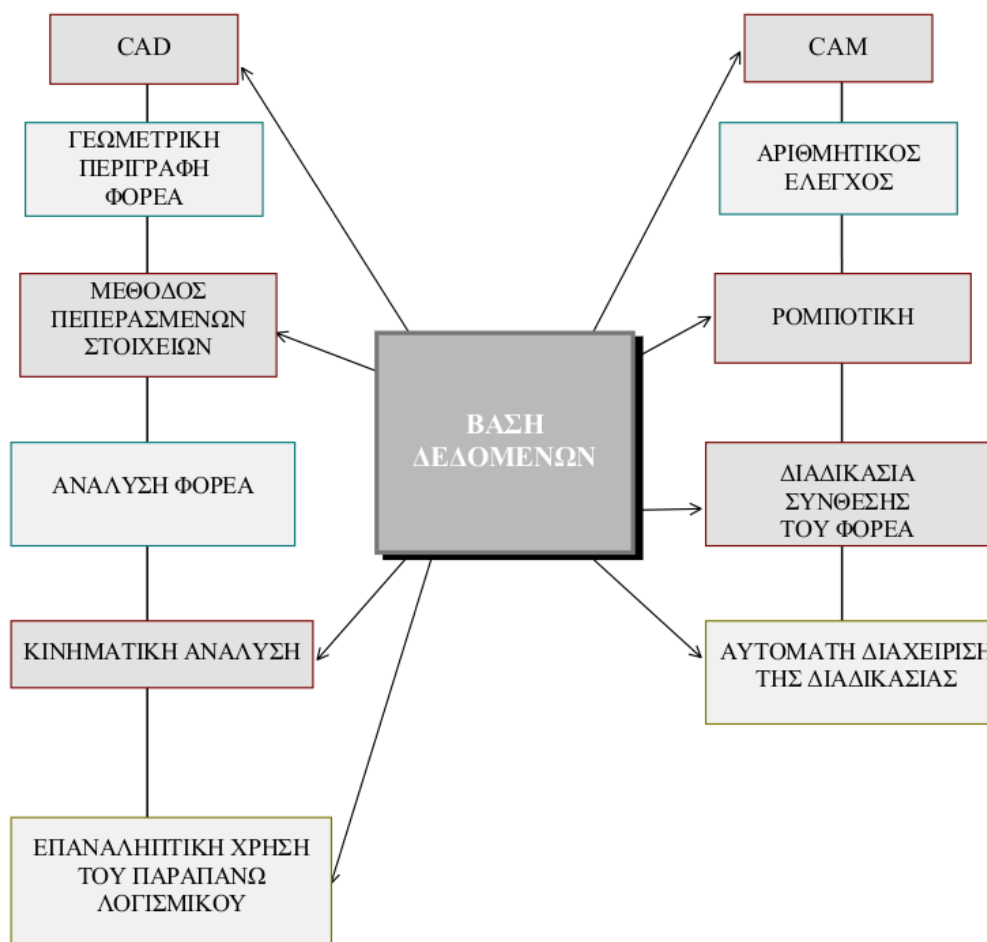
Αφού επιλυθεί το σύστημα και γνωρίζουμε τις κομβικές μετατοπίσεις μπορούμε να βρούμε και τις μετατοπίσεις σε κάθε σημείο της κατασκευής και κατά συνέπεια να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις και οι τάσεις.

4.4 Η Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων με την βοήθεια του Η/Υ

Αν και είναι ένα πολύ ενδιαφέρον πεδίο δραστηριότητας, η ανάλυση των κατασκευών αποτελεί μόνον ένα μικρό μέρος της διαδικασίας που λέγεται "Σχεδιασμός των Κατασκευών". Η ανάλυση βοηθάει στον εντοπισμό αξιόλογων νέων μεθόδων σχεδιασμού και μπορεί να οδηγήσει στην βελτίωση του σχεδιασμού, σε σχέση με την απόδοση και το κόστος.

Στα πρώτα χρόνια εφαρμογής της, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ), χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την ανάλυση αεροσκαφών και κατασκευών πολιτικού μηχανικού. Από τη στιγμή όμως που αποκαλύφθηκαν οι μεγάλες δυνατότητες της ΜΠΣ και οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές μπήκαν δυναμικά στον σχεδιασμό των κατασκευών, δόθηκε έμφαση στην ένταξη της ΜΠΣ στον συνολικό σχεδιασμό των κατασκευών, μηχανολόγου, πολιτικού και αεροναυπηγού μηχανικού.

Η εικόνα 4.6 δείχνει σχηματικά τα βήματα σε έναν τυπικό σχεδιασμό με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η ΜΠΣ περιλαμβάνεται σ' αυτόν. Βλέπουμε ότι το πρώτο βήμα στην εικόνα είναι η δημιουργία μιας γεωμετρικής αναπαράστασης της κατασκευής που πρόκειται να σχεδιαστεί. Πολλά και διαφορετικά προγράμματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον σκοπό αυτό. Το πιο δημοφιλές απ' αυτά είναι το AutoCAD. Σ' αυτό το βήμα ορίζονται, οι ιδιότητες του υλικού, τα επιβαλλόμενα φορτία και οι συντοριακές συνθήκες της κατασκευής. Επειδή η γεωμετρία και άλλα χαρακτηριστικά της πραγματικής κατασκευής μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκα, είναι συνήθως αναγκαίο να απλοποιήσουμε τη γεωμετρία και τα επιβαλλόμενα φορτία, έτσι ώστε να προκύψει ένα σχετικά απλό μαθηματικό προσομοίωμα. Βέβαια αυτό το μαθηματικό προσομοίωμα πρέπει να είναι αξιόπιστο για την ανάλυση που κάνουμε. Η ΜΠΣ λύνει αυτό το μαθηματικό προσομοίωμα, το οποίο και μπορούμε να τροποποιήσουμε στην πορεία.



Σχήμα 4.6: Τα βήματα σε έναν τυπικό σχεδιασμό με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή

Κεφάλαιο 5

Ο Κερατοειδής Χιτώνας

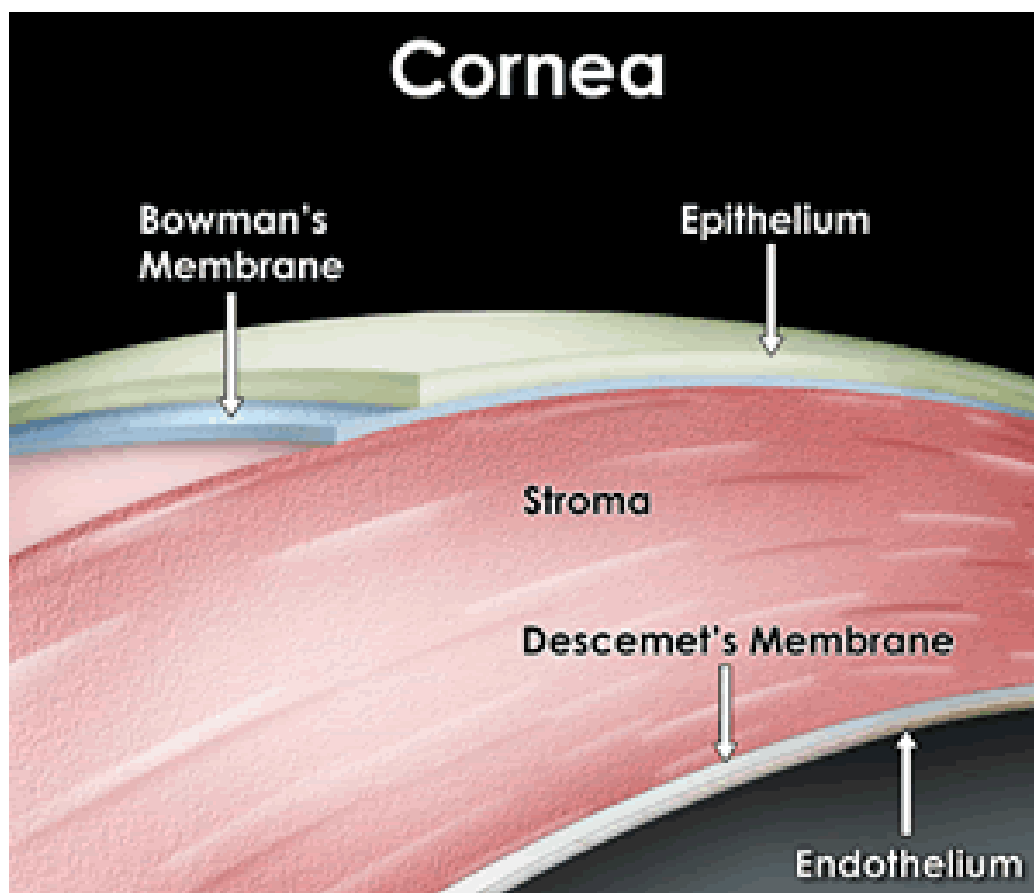
5.1 Γενικά

Ο κερατοειδής αποτελεί το μπροστινό διάφανο τμήμα του οφθαλμού, το οποίο καλύπτει την κόρη και την ίριδα, κατάλαμβάνοντας τον πρόσθιο πόλο του βολβού. Ο κερατοειδής είναι το κύριο διαθλαστικό όργανο του ματιού. Η οπτική του ισχύς είναι περίπου 43 διοπτρίες, που αντιστοιχεί στα δύο τρίτα της οπτικής ισχύος του οφθαλμού [18]. Ένας φυσιολογικός κερατοειδής έχει δείκτη διάθλασης 1.376.

Το σκληροκερατοειδές όριο, το οποίο είναι το όριο του κερατοειδούς και του σκληρού, είναι φαιό και διάφανο. Οι εξωβόλβιοι μύες προσφύονται σε διάφορα σημεία από το σκληροκερατοειδές όριο [6].

Επειδή ο σκληρός και ο επιπεφυκότας καλύπτουν τον κερατοειδή προς τα εμπρός, λίγο περισσότερο στο άνω και κάτω τμήμα από ότι στο έσω και έξω, ο κερατοειδής παίρνει σχήμα ελλειπτικό όταν εξετάζεται από εμπρός. Η πρόσθια οριζόντια διάμετρος είναι 12 mm και η πρόσθια κάθετη διάμετρος είναι 11mm [7]. Η ακτίνα καμπυλότητας του κεντρικού κερατοειδή στην πρόσθια του επιφάνεια είναι 7,8 mm και στην οπίσθια του επιφάνεια είναι 6,7 mm. Το πάχος στο κέντρο είναι περίπου 0,50 mm, ενώ στην περιφέρεια είναι 0,67 mm.

Τα κύτταρα του κερατοειδούς δεν οξυγονώνονται από το αίμα, όπως τα υπόλοιπα κύτταρα του σώματος, αλλά λαμβάνουν το οξυγόνο που χρειάζονται απευθείας από τον αέρα. Εξάλλου η ύπαρξη αδιαφανών αιμοφόρων αγγείων πάνω στον κερατοειδή δεν θα βοηθούσε ιδιαίτερα στην όραση! Τα υπόλοιπα θρεπτικά συστατικά ο κερατοειδής τα προμηθεύεται από το υδατοειδές υγρό, το οποίο έρχεται σε επαφή με την οπίσθια επιφάνεια του κερατοειδούς και έχει όλα τα θρεπτικά συστατικά του αίματος. Ο κερατοειδής έχει την ιδιότητα να επουλώνεται μόνος του όταν υπο-



Σχήμα 5.1: Οι ιστολογικές στιβάδες του κερατοειδούς

στεί μικρές βλάβες, ενώ μερικά είδη ακτινοβολίας όπως ακτίνες Χ μπορεί να προκαλέσουν μόνιμη βλάβη στον κερατοειδή. Λόγω του χαμηλού ρυθμού μεταβολισμού του κερατοειδούς είναι δυνατό να γίνει μεταμόσχευση κερατοειδούς με μεγάλες πιθανότητες επιτυχίας, αφού το μόσχευμα δεν απορρίπτεται από τον οργανισμό του λήπτη. [1]

5.2 Δομή

Οι ιστολογικές στιβάδες του κερατοειδούς είναι το επιθήλιο, η στιβάδα του Bowman, το στρώμα, η δεσκεμέτειος μεμβράνη και το ενδοθήλιο όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.1. Η εξωτερική επιφάνεια του κερατοειδούς καλύπτεται από την δακρυϊκή στοιβάδα, και η εσωτερική βρέχεται από το υδατοειδές υγρό.

5.2.1 Επιθήλιο

Το επιθήλιο είναι μια διαφανής μεμβράνη, στην εξωτερική πλευρά του κερατοειδούς, το οποίο έχει την ιδιότητα να αποτελεί φραγμό στην απώλεια υγρού μέσω των στενών συνδέσμων μεταξύ των κυττάρων του, φραγμό απέναντι σε παθογόνους οργανισμούς, καθώς και να προβάλλει αντίσταση στις διαβρώσεις. Η θέση του, εξάλλου, απαιτεί να έχει γρήγορη επουλωτική αντίδραση στο τραύμα.

Το επιθήλιο έχει πάχος στο κέντρο περίπου 50μm και αποτελείται από 5 με 7 στρώματα κυττάρων. Πάνω στο επιθήλιο βρίσκεται η δακρυϊκή στιβάδα, η οποία μέσω της επιφανειακής τάσης παίρνει λείο σχήμα και έτσι η διάθλαση του φωτός γίνεται χωρίς σημαντική σκέδαση. Κάτω από το επιθήλιο βρίσκεται η βασική μεμβράνη του επιθηλίου, η οποία αποτελείται από ίνες κολλαγόνου.

Η επιφανειακή στιβάδα του επιθηλίου αποτελείται από 2 σειρές από επιμηκυμένα επιφανειακά κύτταρα με αποπλατυσμένους πυρήνες, η μεσαία στιβάδα του επιθηλίου αποτελείται από 2-3 στίχους πολυεδρικών κυττάρων και μια μονή στιβάδα από βασικά κυλινδρικά κύτταρα προσκολλημένα πάνω στη βασική τους μεμβράνη.

Τα κύτταρα του επιθηλίου αναγεννιούνται περίπου κάθε επτά μέρες και ο πολλαπλασιασμός τους πραγματοποιείται κυρίως στην περιφέρεια του κερατοειδή και συγκεκριμένα στο σκληροκερατοειδικό όριο. Η πορεία τους από την μίτωση έως την απόπτωση γίνεται μαζί με την μετακίνησή τους από την περιφέρεια προς το κέντρο και από την βάση του επιθηλίου προς την επιφάνεια.

5.2.2 Μεμβράνη Bowman

Η μεμβράνη του Bowman είναι μια ακυταρρική μεμβράνη, πάχους 8-12μm, που αποτελείται από διαπλεκόμενες ίνες κολλαγόνου. Οι ίνες αυτές βρίσκονται μέσα σε μία μεσοκυττάρια ουσία από γλυκοζαμινογλυκάνες (GAG) που της παρέχουν πλαστικότητα και δομική υποστήριξη. Η στιβάδα του Bowman θεωρείται ότι αποτελεί ένα από τα δομικά χαρακτηριστικά του κερατοειδή που του προσδίδουν μηχανική σταθερότητα. Εάν καταστραφεί, όπως για παράδειγμα σε περίπτωση τραυματισμού, η αρχική δομή της δεν αποκαθίσταται αφού τα κερατοκύτταρα που την αποτελούν δεν έχουν την δυνατότητα αναπαραγωγής έτσι ώστε να επουλώσουν τυχόν τραύμα [9].

5.2.3 Στρώμα

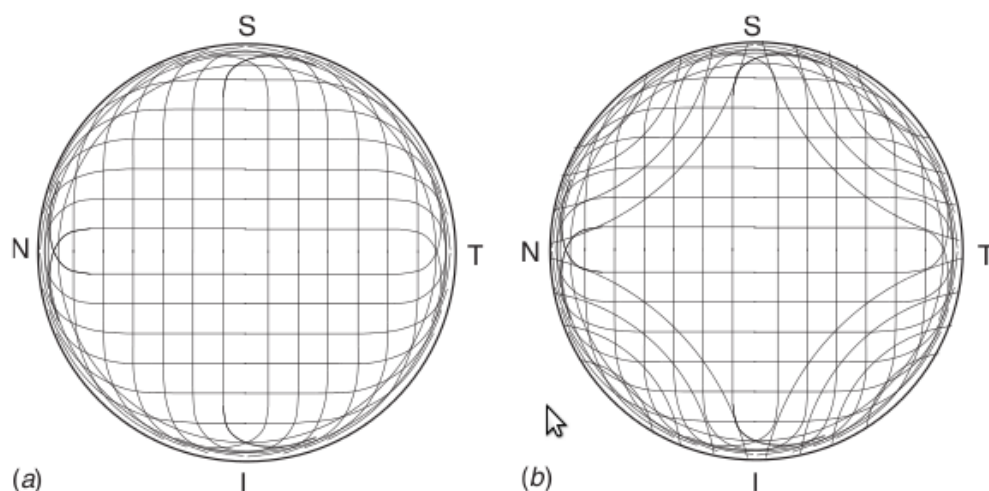
Το στρώμα απαρτίζει το 90% του πάχους του κερατοειδούς και αποτελείται από επίπεδα πετάλια ινιδίων κολλαγόνου προσανατολισμένων σε παράλληλη διάταξη στην επιφάνεια του κερατοειδούς. Στο στρώμα ο κερατοειδής οφείλει σχεδόν όλη την εμβιομηχανική του δύναμη αφού τα υπόλοιπα στρώματα είναι λιγότερο σχετικά με την μηχανική των στερεών. Τα πετάλια είναι περίπου 200-250 στον ανθρώπινο κερατοειδή. Καθένα από αυτά έχει 1.2μm πάχος και πλάτος από 0.25μm μέχρι μεγαλύτερο από 1μm [10].

Στο πρόσθιο ένα τρίτο του στρώματος, οι ίνες είναι μικρότερες και εμπλέκονται μεταξύ τους, σε αντίθεση με τα πίσω δυο τρίτα όπου οι ίνες είναι μεγαλύτερες και εμπλέκονται σε μικρότερο βαθμό.

Ο Meek και η ομάδα του [19] αποκάλυψαν την παρουσία δύο προνομιούχων διευθύνσεων NT και SI, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.2. Οι Daxer and Fratzl ήταν οι πρώτοι που ποσοτικοποίησαν την ανισοτροπία του κερατοειδούς [22]. Αυτοί υπολόγισαν το βαθμό του προσανατολισμού των ινιδίων του στρώματος ως 66% για τις ίνες που βρίσκονται σε ένα τομέα 45 μοιρών ανάμεσα στις NT και SI διευθύνσεις, και 33% για τις ίνες που βρίσκονται στα υπόλοιπα τμήματα. Οι Meek and Newton [20] με τις μετρήσεις τους επιβεβαίωσαν τα παραπάνω και αποκάλυψαν την ύπαρξη ενός δακτυλίου από ίνες κολλαγόνου στην περιφέρεια εκεί όπου ο κερατοειδής συμφύεται με τον σκληρό χιτώνα (εικόνα 5.2.a). Λόγω του ότι δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ, με τη βοήθεια ηλεκτρονικού μικροσκοπίου, το τέλος των ινών κολλαγόνου του στρώματος, έχει υποθεθεί ότι αυτές ξεκινούν από το περιφερειακό δακτυλίδι και ταξιδεύουν από άκρη ως άκρη του κερατοειδούς.

Η μέση απόσταση μεταξύ των δομικών στοιχείων του στρώματος είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος του (ορατού) φωτός του οποίου καλείται να υποστηρίξει τη διάδοση.

Το στρώμα του κερατοειδούς έχει συνολικά 80% περιεκτικότητα σε νερό. Παράγεται και διατηρείται από τους στρωματικούς ινοβλάστες, οι οποίοι ονομάζονται κερατοκύτταρα. Αυτά βρίσκονται ανάμεσα στα πετάλια, και είναι επίπεδα, με ένα κύριο κυτταρικό σώμα, από το οποίο ξεκινούν μακριές προεκβολές προς όλες τις κατευθύνσεις. Πρόσφατη μελέτη έδειξε ότι το στρώμα έχει και ένα σχετικά υψηλό αριθμό δενδριτικών, αντιγονικών κυττάρων (APC cells) που προέρχονται από το μυελό των οστών και τα οποία συμβάλλουν στις ανοσολογικές και φλεγμονώδεις αποκρίσεις.



Σχήμα 5.2: Σχηματική αναπαράσταση της διεύθυνσης των ινών του κερατοειδούς στο ανθρώπινο μάτι. α) Μοντέλο όπως προτάθηκε από τους Meek and Newton [20] β) Μοντέλο που προτάθηκε από τον Aghamohammadzadeh και την ομάδα του [21].

5.2.4 Δεσκεμέτειος Μembrάνη

Στην εσωτερική πλευρά του κερατοειδούς υπάρχει η δεσκεμέτειος μεμβράνη, η οποία είναι η βασική μεμβράνη του ενδοθηλίου του κερατοειδούς και συντίθεται από αυτό. Η δεσκεμέτειος μεμβράνη συντίθεται από τις πρωτεΐνες, φιμπρονεκτίνη και λαμινίνη, από κολλαγόνο τύπου IV και VIII και από πρωτεογλυκάνες που περιέχουν θειική ηπαράνη, θειική δερματάνη και θειική κερατάνη. Κατά τη γέννηση έχει πάχος 2μm, αλλά φτάνει μέχρι τα 10μm σε προχωρημένη ηλικία [23].

Η σύνδεση της μεμβράνης του Descemet με το στρώμα είναι σχετικά αδύνατη και η μεμβράνη μπορεί εύκολα να αποσπαστεί απ' αυτό (απόσπαση δεσκεμετείου).

Με την ηλεκτρονική μικροσκοπία διακρίνονται δύο περιοχές της δεσκεμέτειου μεμβράνης. Το πρόσθιο μισό ή ένα τρίτο της, ανάλογα με την ηλικία, είναι η παλιότερη στιβάδα της μεμβράνης και διακρίνεται από ένα πλέγμα κολλαγόνου, ενώ το οπίσθιο τμήμα της είναι άμορφη ουσία. Ο μηχανισμός μετάπτωσης από το ένα τμήμα της μεμβράνης στο άλλο είναι άγνωστος. Με την ηλικία αυξάνεται το οπίσθιο τμήμα της μεμβράνης. Οι βασικές μεμβράνες, γενικά, θεωρούνται ότι φιλτράρουν ό,τι κινείται από και προς το επιθήλιο και προκαλούν την πολικότητα και τη διαφοροποίηση του επιθηλίου. Παραμένει άγνωστο γιατί η δεσκεμέτειος μεμβράνη έχει

αυξημένο, συγκριτικά με άλλες βασικές μεμβράνες, πάχος.

5.2.5 Ενδοθηλίο

Αποτελείται από μία μονοκυτταρική στρώση εξαγωγικών κυττάρων η οποία σχηματίζει ένα φραγμό ανάμεσα στο στρώμα του κερατοειδούς και τον πρόσθιο θάλαμο. Τα κύτταρα του ενδοθηλίου δεν αναγεννώνται και αφετέρου παίζουν ζωτικό ρόλο στη διατήρηση της διαύγειας του κερατοειδή μέσω της άντλησης νερού από τον κερατοειδή προς τον πρόσθιο θάλαμο. Αυτή η αντλία εξασφαλίζει την πυκνή διάταξη των ινών κολλαγόνου του στρώματος σε διαδοχικές στρώσεις όπως προαναφέρθηκε. Σε περίπτωση ανεπάρκειας του ενδοθηλίου να επιτελέσει αυτή τη λειτουργία, η μέση απόσταση μεταξύ των ινών του κολλαγόνου αυξάνει (οίδημα), με αποτέλεσμα τη σκέδαση και την απώλεια της διαύγειας του κερατοειδή [24]. Γενικά, η σχετική έλλειψη πολλαπλασιασμού οδηγεί στην ελάττωση της κυτταρικής πυκνότητας με την ηλικία, με μία μέση απώλεια κυττάρων της τάξης του 0.3% με 0.6% ανά έτος.

Κεφάλαιο 6

Προσομοίωση Κερατοειδούς με την ΜΠΣ

6.1 Περιγραφή του μοντέλου

Για την κατασκευή του μοντέλου υποθέσαμε έναν κερατοειδή με διάμετρο βάσης 12mm. Το πάχος του κερατοειδή μεταβάλλεται κατά μήκος του κερατοειδούς με μέγιστο πάχος στην βάση 0,67mm και ελάχιστο στην κορυφή 0,50mm. Η συνολική επιφάνεια που καλύπτεται έτσι ο κερατοειδής υπολογίζεται σε $3,6mm^2$.

Επίσης, ο κερατοειδής μοντελοποιήθηκε με ένα αξονοσυμμετρικό μοντέλο, με άξονα συμμετρίας την ευθεία που έρχεται από το εσωτερικό του ματιού προς τα έξω [12].

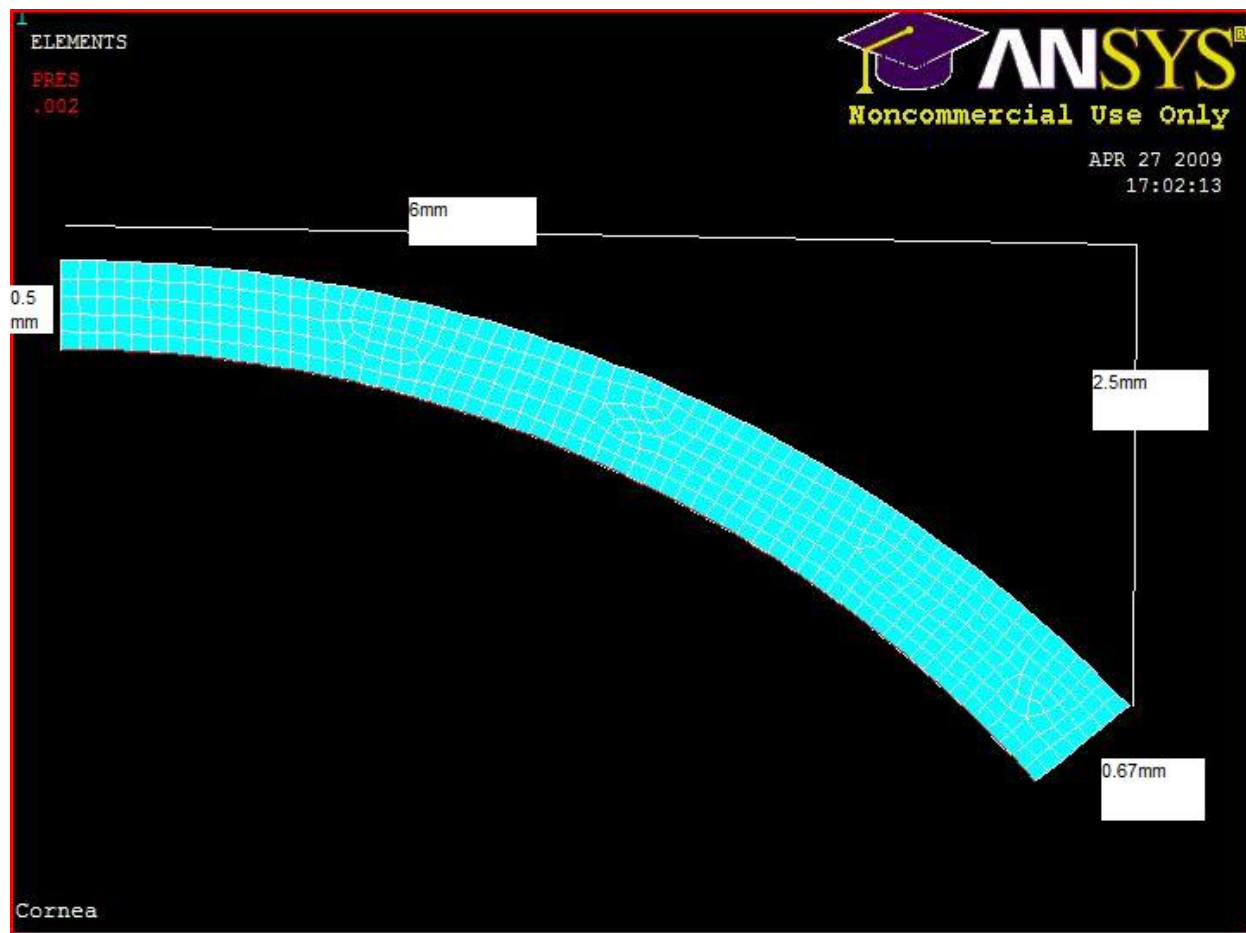
Οπότε προκύπτει το γεωμετρικό μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα 6.1. και σε τρισδιάστατη μορφή στο σχήμα 5,2, όπου ουσιαστικά βλέπουμε μια περιστροφή του αξονοσυμμετρικού μοντέλου κατά 180 μοίρες. Έτσι, με βάση τα παραπάνω δεδομένα, έχουμε το μοντέλο του κερατοειδούς να περικλείεται ανάμεσα σε δυο ελλειψοειδείς επιφάνειες. Την εξωτερική επιφάνεια, η οποία περιγράφεται από την καμπύλη:

$$\frac{x^2}{8.738^2} + \frac{y^2}{7.56^2} = 1$$

και την εσωτερική που περιγράφεται από την καμπύλη :

$$\frac{x^2}{7.255^2} + \frac{y^2}{7.06^2} = 1$$

Στο μοντέλο ως οριακές συνθήκες θεωρήσαμε ότι στην βάση του, ο κερατοειδής δεν έχει καμία ελευθερία κίνησης, τόσο στην οριζόντια διεύθυνση



Σχήμα 6.1: Γεωμετρικό μοντέλο του κερατοειδούς όπως παράχθηκε από το Ansys.

όσο και στην κάθετη, αλλά μπορεί μόνο να περιστραφεί. Ενώ στο κέντρο του και λόγω του ότι επιλέξαμε ένα αξονοσυμμετρικό μοντέλο έχουμε ελευθερία κίνησης κατά την κάθετη διεύθυνση αλλά όχι κατά την οριζόντια.

Για τις προσομοιώσεις χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο Ansys academic research με άδεια η οποία μας εκχωρήθηκε από το πολυτεχνείο. Για το σχηματισμό του κάρναβου χρησιμοποιήθηκε το στοιχείο plane82 του Ansys με ακμή 0,0001.

Ο κερατοειδής θεωρήθηκε σαν ένα σχεδόν ασυμπίεστο υλικό με λόγο του Poisson ίσον με 0,49. Για τις προσομοιώσεις δημιουργήθηκαν δύο μοντέλα ένα απλό ισότροπο - γραμμικό ώστε να έχουμε μια αρχική εποπτική εικόνα των αποτελεσμάτων και ένα ισότροπο - μη γραμμικό μοντέλο.

Στο ισότροπο - γραμμικό μοντέλο το μέτρο του Young θεωρήθηκε ίσο με $0.363N/mm^2$ το οποίο προκύπτει από πειραματικές μετρήσεις των A. M. Niaz, R. M. Kurtz, G. P. Djotyan και T. Juhasz για 10% παραμόρφωση των επιπέδων του κερατοειδούς [12].

Στο ισότροπο - μη γραμμικό μοντέλο η μη γραμμικότητα μοντελοποιήθηκε από την παρακάτω σχέση τάσης -τροπής:

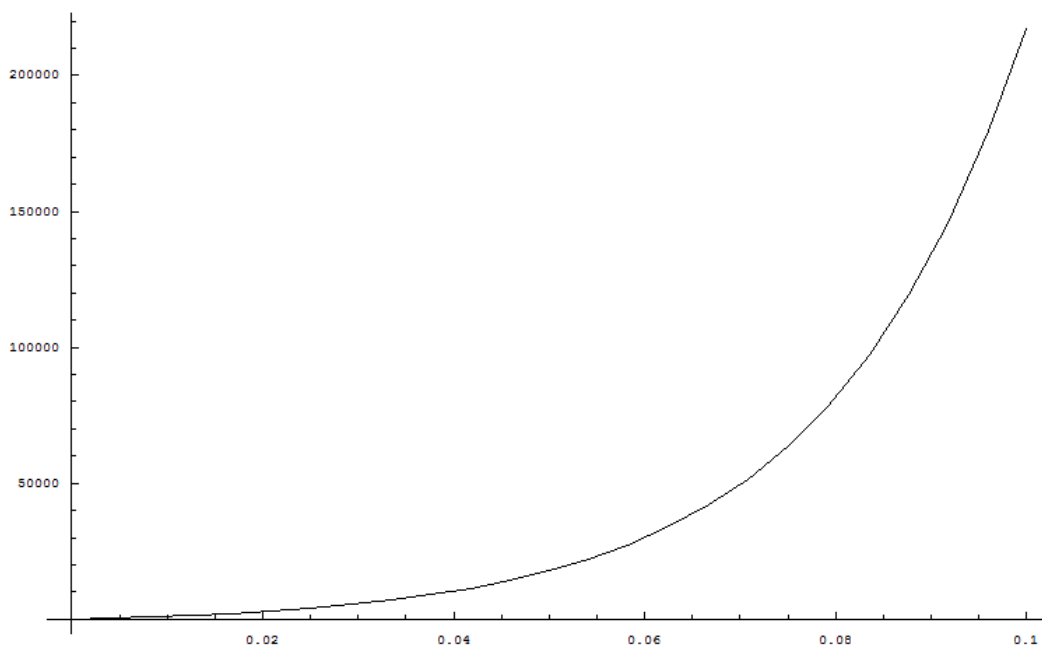
$$\sigma = \alpha \cdot [\exp(\beta \cdot \epsilon) - 1]$$

$$\text{όπου } \alpha = 17,5 * 10^{-4} \text{ και } \beta = 48.3 [12] [13]$$

6.2 Προσομοιώσεις κερατοειδούς

Παρακάτω φαίνονται οι πίνακες με τα αποτελέσματα, όπως προέκυψαν από τις προσομοιώσεις. Στους πίνακες βλέπουμε τα αποτελέσματα για μία γκάμα εσωτερικών πιέσεων, από 10mmHg έως 30mmHg, μια περιοχή πιέσεων τις οποίες μπορεί να έχει ο ανθρώπινος οφθαλμός κάτω από προϋποθέσεις (γλαύκωμα). Στα αποτελέσματα έχουμε τις μετατοπίσεις του κορυφαίου σημείου του κερατοειδούς, το οποίο μας δίνει και μία εικόνα της παραμόρφωσης του, την μεταβολή των καμπυλοτήτων, τόσο της εσωτερικής όσο και της εξωτερικής επιφάνειας και τέλος την μεταβολή της οπτικής ισχύος του κερατοειδούς μετρημένη σε διοπτρίες.

Οι ακτίνες καμπυλότητας υπολογίστηκαν για την κεντρική περιοχή του κερατοειδούς, διαλέγοντας τους κόμβους της εξωτερικής και της εσωτερικής επιφάνειας και εφαρμόζοντας σε αυτούς τον βέλτιστο κύκλο, όπως προκύπτει με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Τόσο η επιλογή των σημείων, όσο και η εύρεση των κύκλων έγινε με την εφαρμογή που κατασκευάστηκε για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής.



Σχήμα 6.2: Σχέση τάσης - τροπής στο μη γραμμικό μοντέλο

Η εφαρμογή γράφτηκε στην interpreted γλώσσα προγραμματισμού Python. Κάποιοι λόγοι για την επιλογή αυτή είναι ότι είναι ελεύθερο λογισμικό, τρέχει σε πολλές διαφορετικές πλατφόρμες (linux, windows, mac κτλ.), και υποστηρίζεται από ένα μεγάλο πλήθος βιβλιοθηκών. Η εφαρμογή μας χρησιμοποιεί τις ακόλουθες βιβλιοθήκες :matplotlib, numpy. Ο κώδικας της εφαρμογής υπάρχει στο παράρτημα της διπλωματικής.

Οι διοπτρίες υπολογίστηκαν με βάση τον κατασκευαστικό τύπο των φακών:

$$D = \frac{1}{F} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_0}{R_2}$$

Όπου R_1 είναι η καμπυλότητα της εξωτερικής επιφάνειας του κερατοειδούς, R_2 είναι η καμπυλότητα της εσωτερικής επιφάνειας του κερατοειδούς, $n_0 = 1.376$ ο δείκτης διάθλασης του κερατοειδούς, $n_1 = 1$ ο δείκτης διάθλασης του αέρα και $n_2 = 1.336$ ο δείκτης διάθλασης του υδατοειδούς υγρού [14].

$$D = \frac{1.376 - 1}{R_1} + \frac{1.376 - 1.336}{R_2}$$

$$D = \frac{0.376}{R_1} - \frac{0.04}{R_2}$$

6.2.1 Προσομοίωση γραμμικού μοντέλου

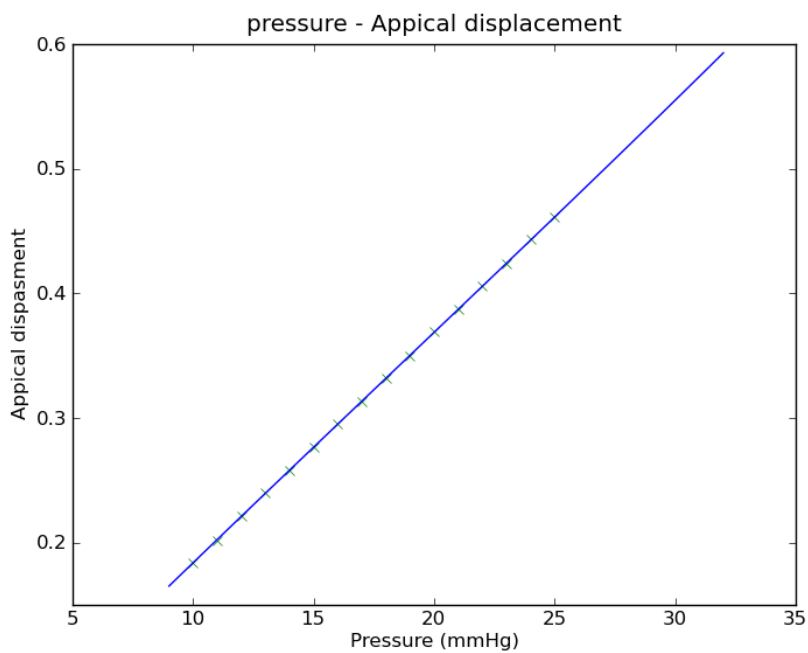
Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας με τα αποτελέσματα όπως προέκυψαν από τις προσομοιώσεις για το γραμμικό μοντέλο.

Προσομοιώσεις μη γραμμικού μοντέλου		
Πίεση	Μετατόπιση κορυφής(mm)	Διοπτρίες
10mm	0.184	41.12
11mm	0.202	41.37
12mm	0.221	41.62
13mm	0.240	41.87
14mm	0.258	42.12
15mm	0.277	42.61
16mm	0.295	42.61
17mm	0.313	42.85
18mm	0.332	43.09
19mm	0.350	43.32
20mm	0.369	43.56
21mm	0.387	43.80
22mm	0.406	44.03
23mm	0.424	44.25
24mm	0.443	44.85
25mm	0.461	44.70

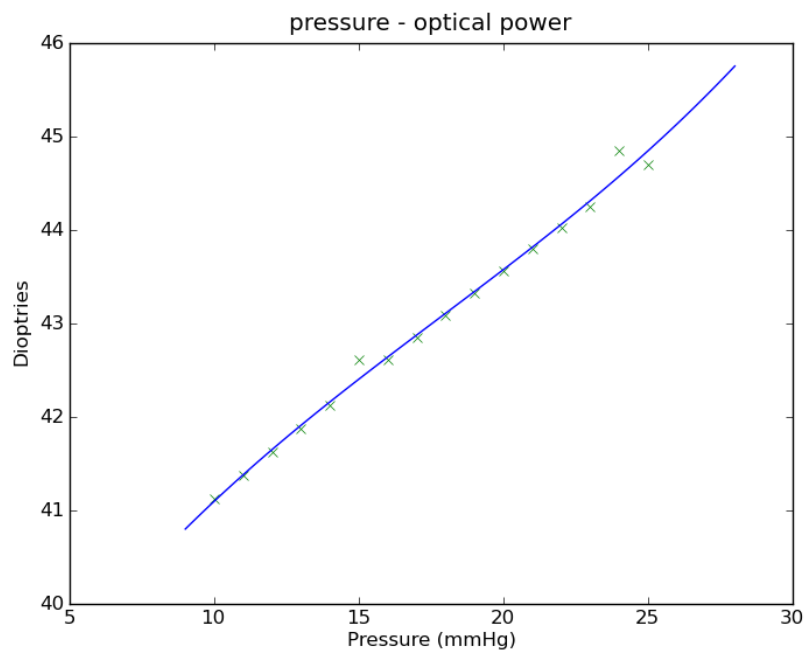
Στα διαγράμματα που ακολουθούν 6.3 και 6.4 βλέπουμε την μετατόπιση της κορυφής του κερατοειδούς και την μεταβολή της οπτικής ισχύος του κερατοειδούς.

Από τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι, η μετατόπιση του κορυφαίου σημείου του κερατοειδούς, ένα μέγεθος ενδεικτικό στις παραμορφώσεις του, αυξάνεται γραμμικά με την αύξηση της εσωτερικής πίεσης, πράγμα που ήταν αναμενόμενο για το ισότροπο γραμμικό μοντέλο, το οποίο χρησιμοποιήθηκε. Αυτό που επίσης έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε είναι η αύξηση της οπτικής ισχύος του κερατοειδούς, η οποία και αυτή αυξάνεται γραμμικά με την εσωτερική πίεση και μάλιστα με τρόπο πανομοιότυπο με την μετατόπιση του κορυφαίου σημείου.

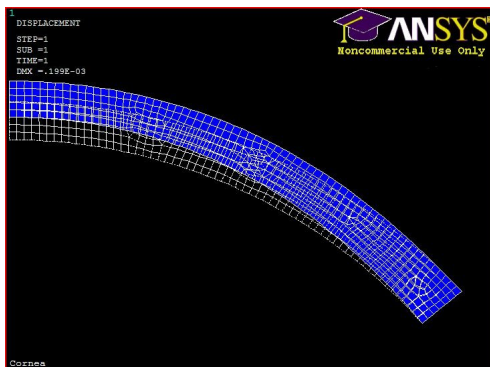
Από την εικόνα 6.5 έως την εικόνα 6.6 βλέπουμε τα γραφήματα τις μετατοπίσεις και της ισοδύναμης, κατά von - mises, τάσης για κάποιες ενδεικτικές τιμές της εσωτερικής πίεσης, όπως αυτές παράχθηκαν από το Ansys.



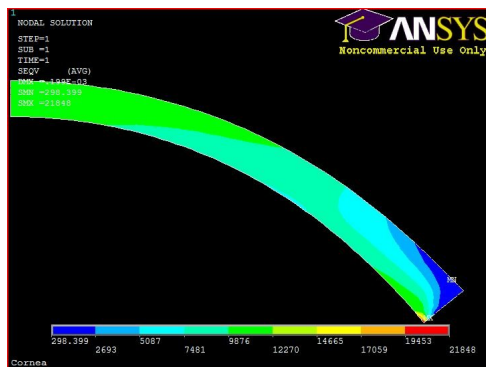
Σχήμα 6.3: Διάγραμμα πίεσης- Μετατόπισης κορυφής



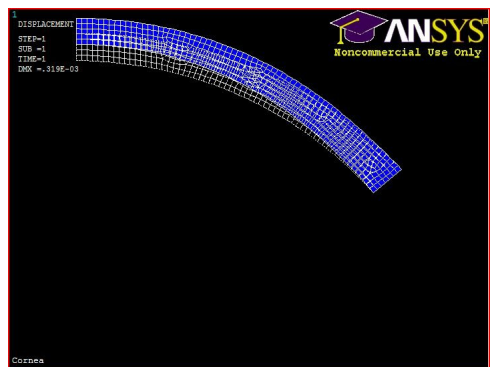
Σχήμα 6.4: Διάγραμμα πίεσης- οπτικής ισχύος



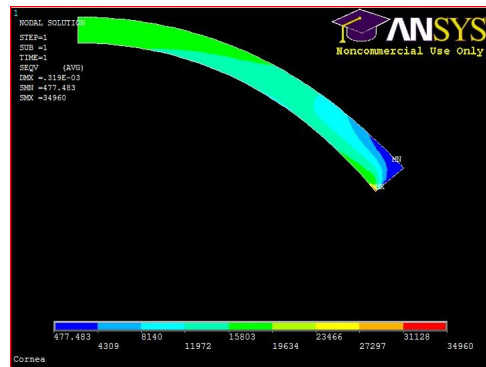
Σχήμα 6.5: Γράφημα μετατόπισης για 10mmHg



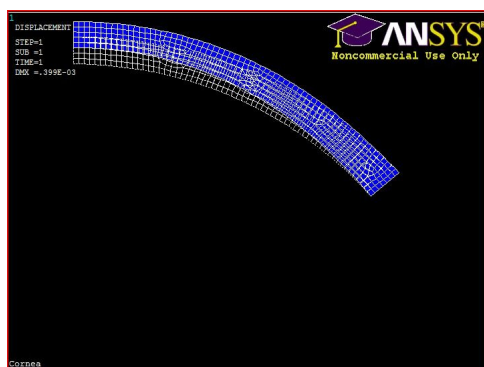
Σχήμα 6.6: Γράφημα ισοδύναμης κατά von-mises τάσης για 10mmHg



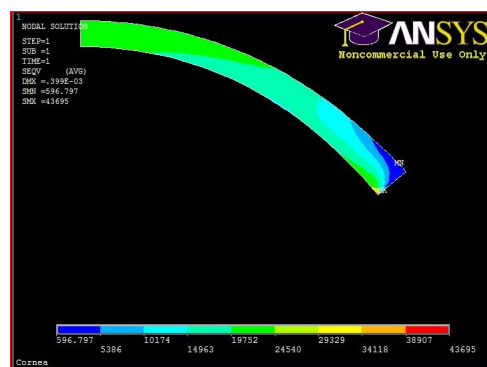
Σχήμα 6.7: Γράφημα μετατόπισης για 15mmHg



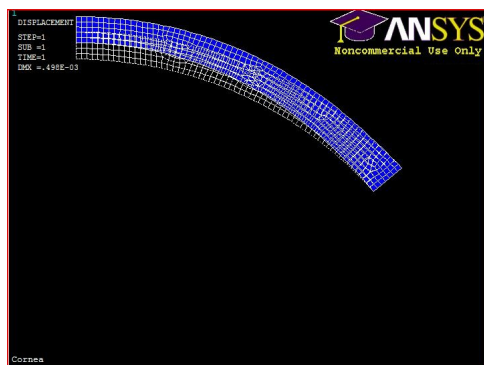
Σχήμα 6.8: Γράφημα ισοδύναμης κατά von-mises τάσης για 15mmHg



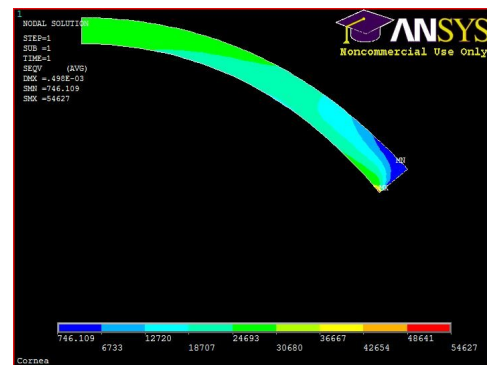
Σχήμα 6.9: Γράφημα μετατόπισης για 20mmHg



Σχήμα 6.10: Γράφημα ισοδύναμης κατά von-misses τάσης για 20mmHg



Σχήμα 6.11: Γράφημα μετατόπισης για 25mmHg



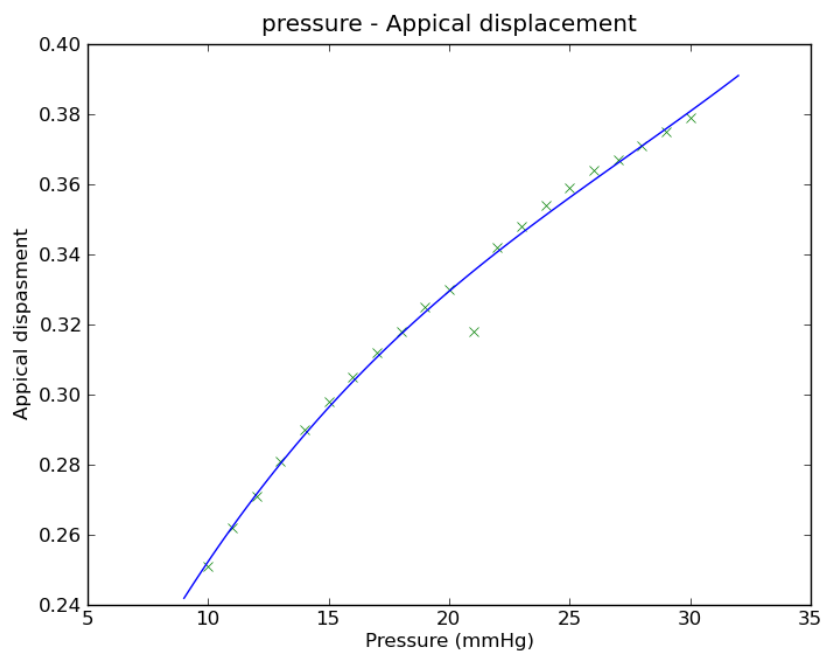
Σχήμα 6.12: Γράφημα ισοδύναμης κατά von-misses τάσης για 25mmHg

6.2.2 Προσομοίωση μη γραμμικού μοντέλου

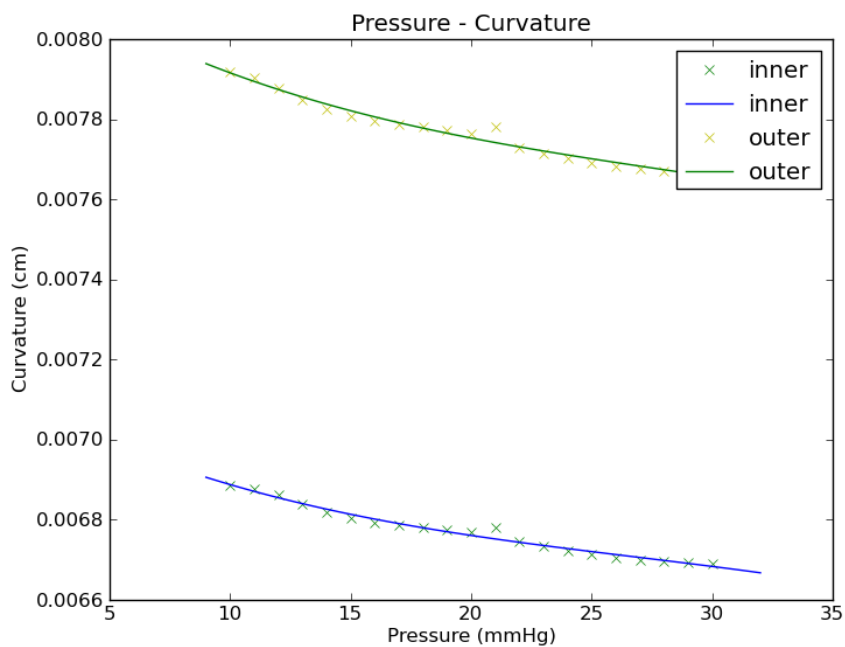
Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας με τα αποτελέσματα, όπως προέκυψαν από τις προσομοιώσεις για το μη γραμμικό μοντέλο.

Προσομοιώσεις μη γραμμικού μοντέλου				
Πίεση	Μετ. κορυφής(mm)	R εσωτερικό(m)	R εξωτερικό(m)	Διοπτρίες
10mm	0.251	0.00689	0.00792	41.68
11mm	0.262	0.00688	0.00790	41.75
12mm	0.271	0.00686	0.00788	41.90
13mm	0.281	0.00684	0.00785	42.05
14mm	0.290	0.00682	0.00783	42.18
15mm	0.298	0.00680	0.00781	42.27
16mm	0.305	0.00679	0.00779	42.35
17mm	0.312	0.00679	0.00779	42.38
18mm	0.318	0.00678	0.00778	42.42
19mm	0.325	0.00678	0.00777	42.46
20mm	0.330	0.00677	0.00776	42.53
21mm	0.318	0.00678	0.00778	42.42
22mm	0.342	0.00675	0.00773	42.71
23mm	0.348	0.00673	0.00771	42.80
24mm	0.354	0.00672	0.00770	42.87
25mm	0.359	0.00671	0.00769	42.93
26mm	0.364	0.00670	0.00768	42.98
27mm	0.367	0.00670	0.00768	43.02
28mm	0.371	0.00670	0.00767	43.04
29mm	0.375	0.00669	0.00767	43.05
30mm	0.379	0.00669	0.00767	43.08

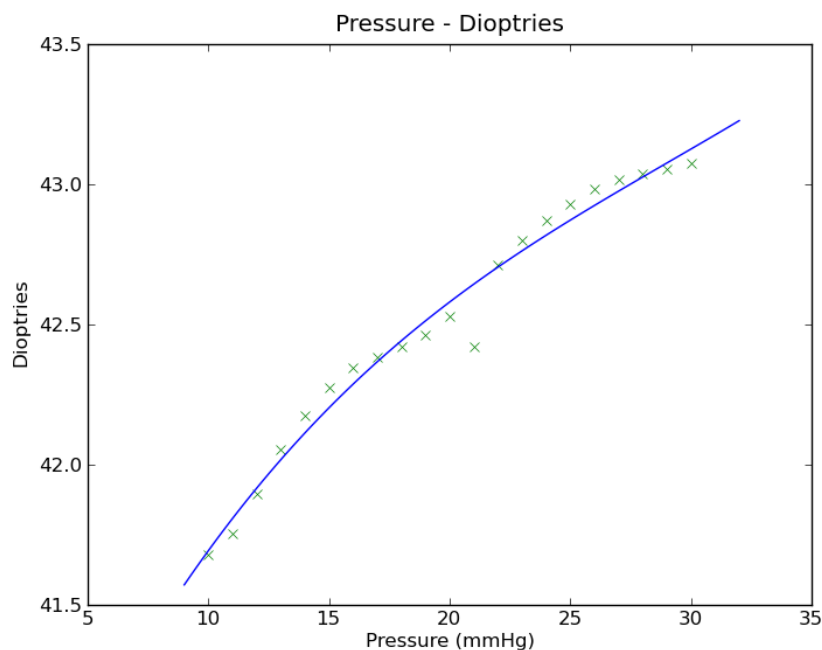
Στα διαγράμματα που ακολουθούν 6.13 6.14 και 6.15 βλέπουμε την μετατόπιση της κορυφής του κερατοειδούς, την μεταβολή των καμπυλοτήτων για την εξωτερική και εσωτερική επιφάνεια του και την μεταβολή της οπτικής ισχύος του κερατοειδούς. Μια παρατήρηση που πρέπει να γίνει έχει να κάνει με την προσομοίωση για την τιμή των 21mmHg όπου παρατηρούμε μια ανωμαλία στο διάγραμμα και πιθανός οφείλεται σε ατέλειες του μοντέλου.



Σχήμα 6.13: Διάγραμμα πίεσης- Μετατόπισης κορυφής



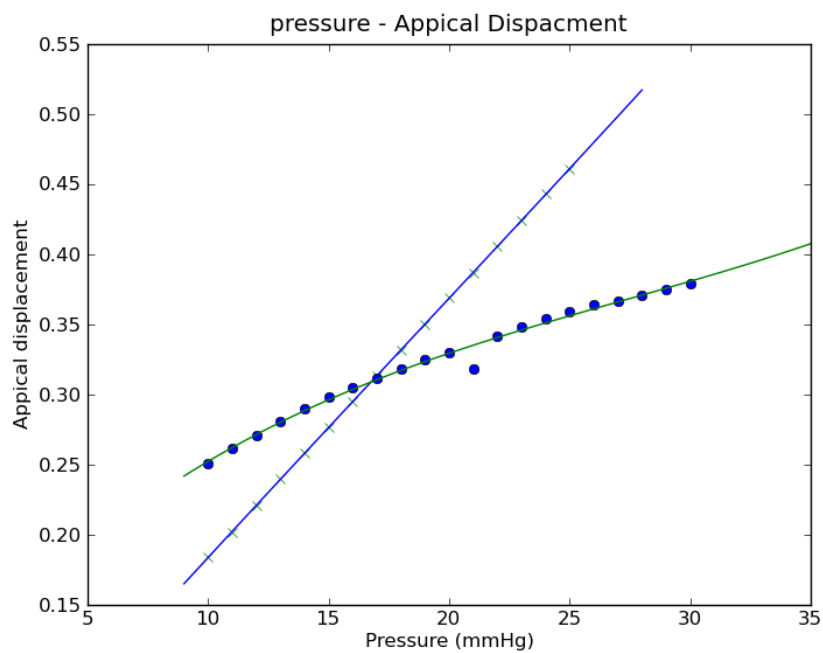
Σχήμα 6.14: Διάγραμμα πίεσης- καμπυλότητας



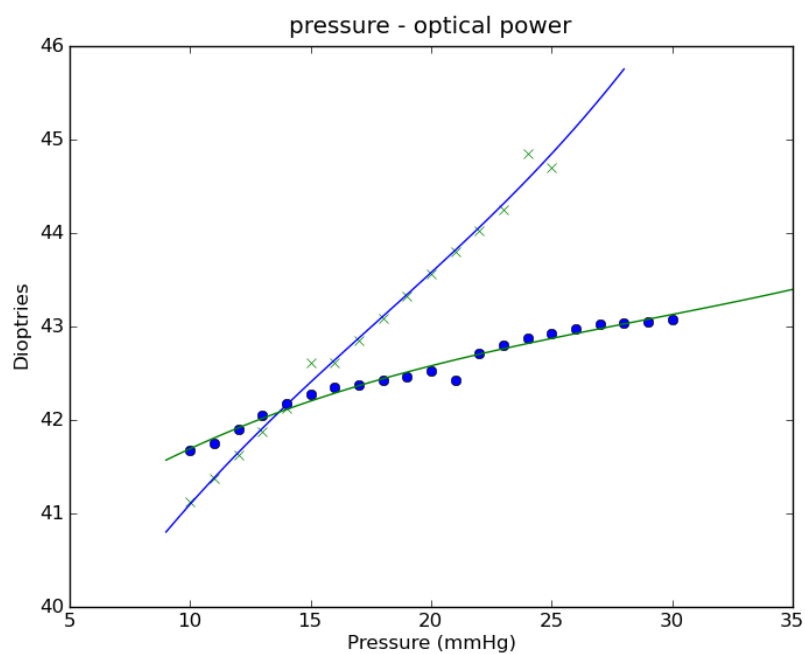
Σχήμα 6.15: Διάγραμμα πίεσης- οπτικής ισχύος

Και εδώ, όπως ήταν αναμενόμενο, βλέπουμε μια εξάρτηση της παραμόρφωσης και της οπτικής ισχύος του κερατοειδούς από την εσωτερική πίεση. Η διαφορά με το γραμμικό μοντέλο είναι ότι εδώ, τόσο η παραμόρφωση, όσο και η οπτική ισχύς δεν έχουν μια ακριβώς γραμμική εξάρτηση από την εσωτερική πίεση. Αυτό, όμως, είναι κάτι το οποίο αναμέναμε, αφού σε αυτήν την εκδοχή του μοντέλου δεν πήραμε μια συγκεκριμένη τιμή για το μέτρο του Young (E) του υλικού, αλλά μία μη γραμμική σχέση, η οποία συνδέει την τάση με την τροπή του, όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Στις εικόνες 6.16 και 6.17 φαίνονται τα συγκριτικά διαγράμματα για την μετατόπιση του κορυφαίου σημείου και της οπτικής ισχύος, για τα δύο μοντέλα που αναπτύχθηκαν (Η πράσινη καμπύλη είναι το μη γραμμικό μοντέλο και η μπλε το γραμμικό).

Στην εικόνα 6.18 φαίνονται τα διαγράμματα της μεταβολή της οπτικής ισχύος συναρτήσει της εσωτερικής πίεσης και της μεταβολής, της μετατόπισης της κορυφής του κερατοειδούς, συναρτήσει της εσωτερικής πίεσης, όπως υπολογίστηκαν από τις προσομοιώσεις των Anna Pandolfi και Gerhard A. Holzapfel [15]. Εκεί, λοιπόν, βλέπουμε ότι τα αποτελέσματά μας έρχονται σε καλή συμφωνία με τα δικά τους, αλλά και με τα πειραματικά αποτελέσματα του Anderson [16] εικόνα (6.18β), τόσο στις τιμές,

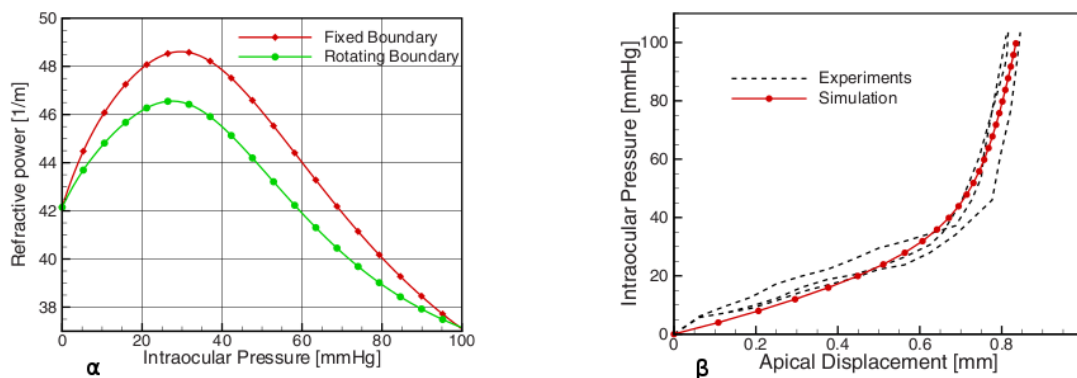


Σχήμα 6.16: Διάγραμμα πίεσης- Μετατόπισης κορυφής



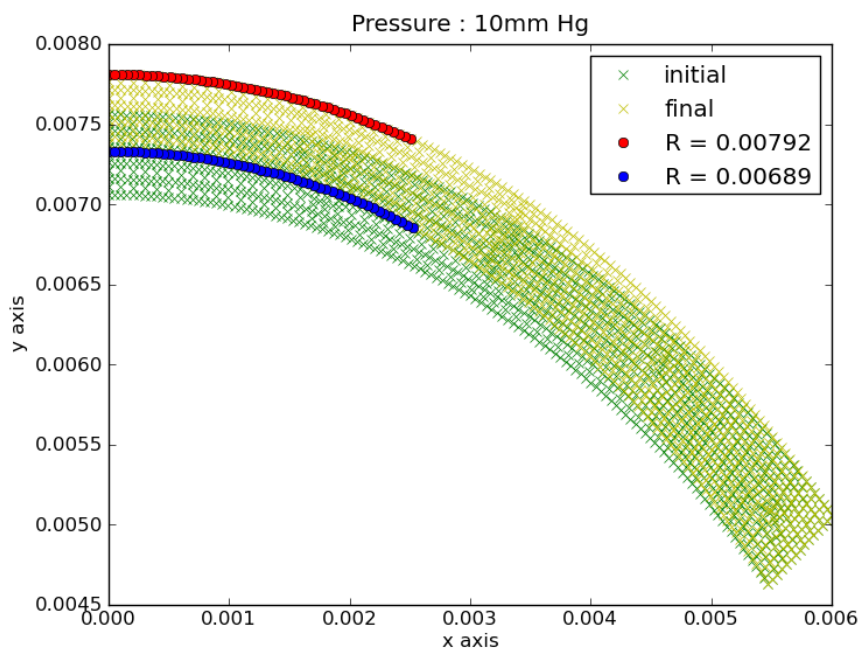
Σχήμα 6.17: Διάγραμμα πίεσης- οπτικής ισχύος

όσο και στην μορφή των καμπυλών, π.χ στην τιμή των 15mmHg βλέπουμε ότι βρίσκουν για το κορυφαίο σημείο μετατόπιση 0,3mm και εμείς αντίστοιχα βρίσκουμε 0,298mm. Βέβαια για μεγαλύτερες τιμές της εσωτερικής πίεσης παρατηρούμε κάποια διαφορά αλλά και πάλι διατηρούμαστε στην ίδια τάξη μεγέθους.



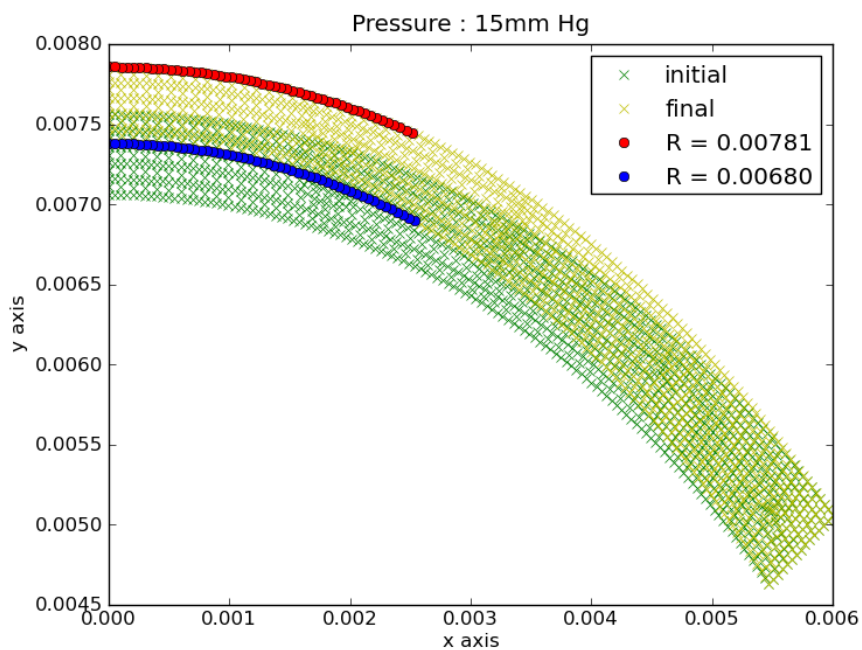
Σχήμα 6.18: α) Μεταβολή της οπτικής ισχύος συναρτήσει της μεταβολής της εσωτερικής πίεσης όπως υπολογίστηκε από τις προσομοιώσεις των Anna Pandolfi και Gerhard A. Holzapfel [15].

β) Μεταβολή της μετατόπισης της κορυφής του κερατοειδούς, συναρτήσει της μεταβολής της εσωτερικής πίεσης, όπως υπολογίστηκε από τις προσομοιώσεις των Anna Pandolfi και Gerhard A. Holzapfel [15] συγκρινόμενα με πειραματικά δεδομένα από τον Anderson και την ομάδα του [16].

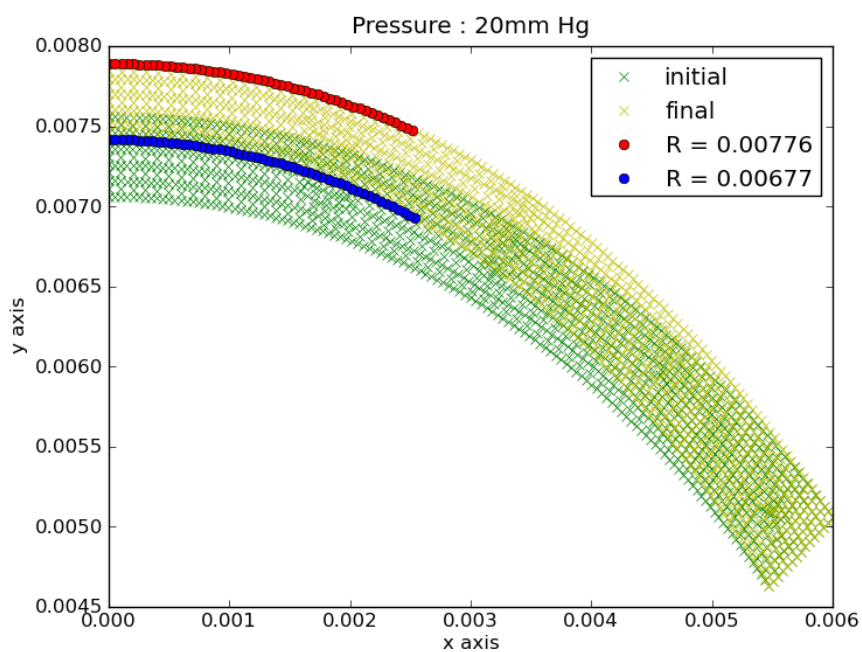


Σχήμα 6.19: Παραμόρφωση για 10mmHg

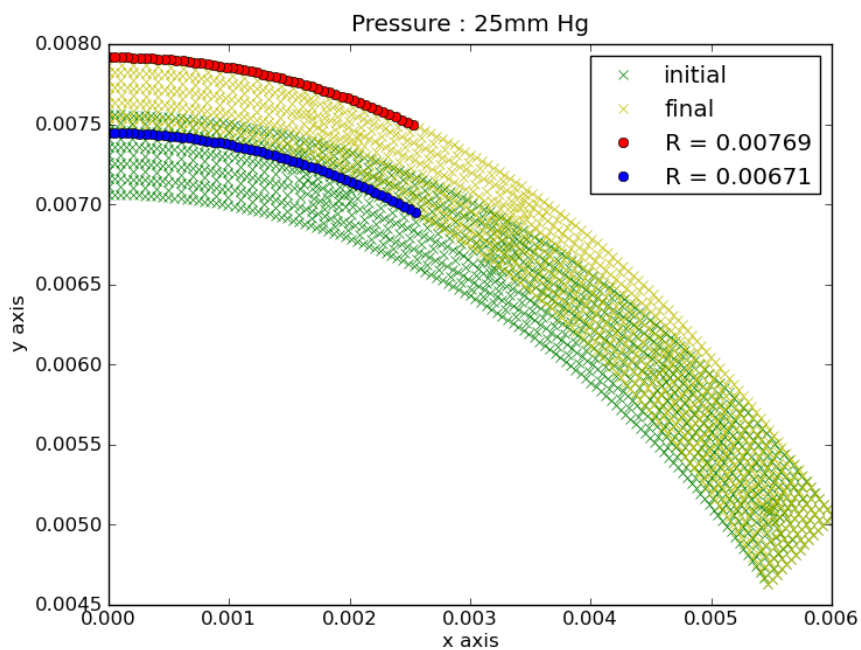
Στις εικόνες 6.19 μέχρι 6.23 φαίνονται κάποια ενδεικτικά γραφήματα μετατόπισης του κερατοειδούς, όπως αυτά προέκυψαν από τις προσομοιώσεις. Τα γραφήματα αυτά δημιουργήθηκαν με το πρόγραμμα του παραρτήματος και πάνω σε αυτά φαίνονται τα σημεία που επιλέχθηκαν για τον υπολογισμό της οπτικής ισχύος του κερατοειδούς. Με μπλε είναι οι κόμβοι της εξωτερικής επιφάνειας και με κόκκινο οι κόμβοι της εσωτερικής επιφάνειας, όπως προκύπτουν μετά την εφαρμογή της εσωτερικής πίεσης. Αναλυτικά όλες οι προσομοιώσεις φαίνονται στο Παράρτημα Β.



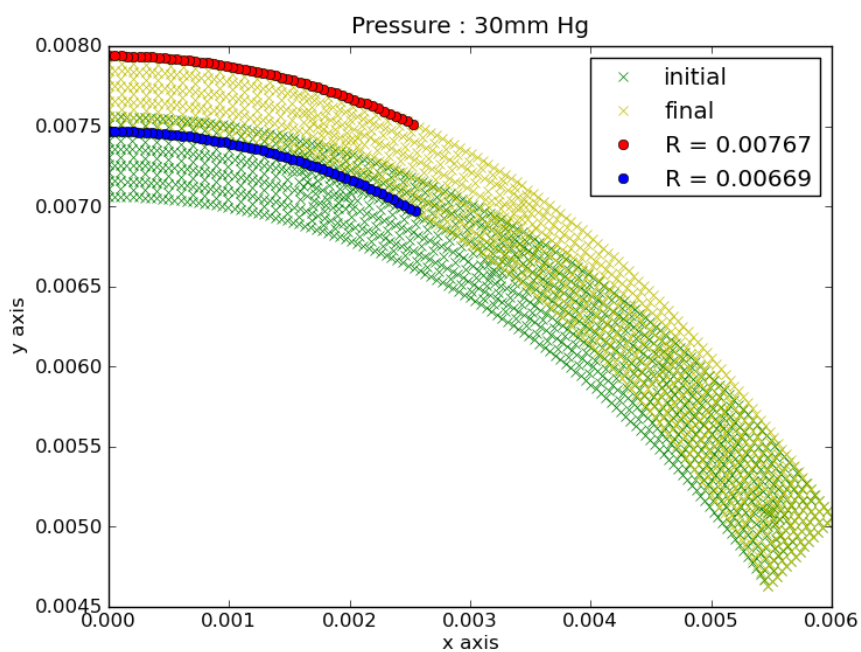
Σχήμα 6.20: Παραμόρφωση για 15mmHg



Σχήμα 6.21: Παραμόρφωση για 20mmHg



Σχήμα 6.22: Παραμόρφωση για 25mmHg



Σχήμα 6.23: Παραμόρφωση για 30mmHg

6.3 Αποδόμηση κερατοειδούς

Σε αυτήν την ενότητα αφαιρέσαμε από το μοντέλο μας ιστό διαμέτρου 2,5mm (που αντιστοιχεί σε διάμετρο 5mm από τον κερατοειδή, αφού το μοντέλο που χρησιμοποιούμε είναι αξονοσυμμετρικό) και πάχους 8,3μm. Η αφαίρεση έγινε από την κεντρική περιοχή του κερατοειδούς σε μορφή κυκλικού τόξου.

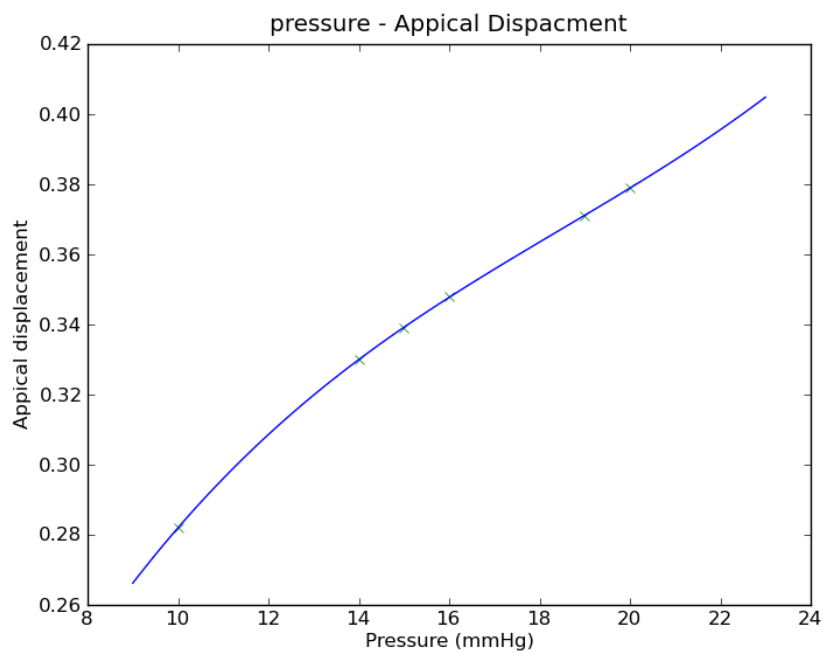
Η οπτική ισχύς του κερατοειδή μετά την αποδόμηση είναι 37,28 διοπτρίες, περίπου μια διοπτρία λιγότερη από το μοντέλο πριν την αποδόμηση, στο οποίο η οπτική ισχύς υπολογίστηκε 38,49 διοπτρίες. Η διαφορά αυτή ήταν αναμενόμενη, αφού αν αντικαταστήσουμε τα δεδομένα της αποδόμησης στο τύπο του Munnerlyn προκύπτει διαφορά μιας διοπτρίας.

Γι' αυτό το μοντέλο τρέξαμε ξανά τις προσομοιώσεις ώστε να δούμε πως αντιδρά στις μεταβολές της εσωτερικής πίεσης.

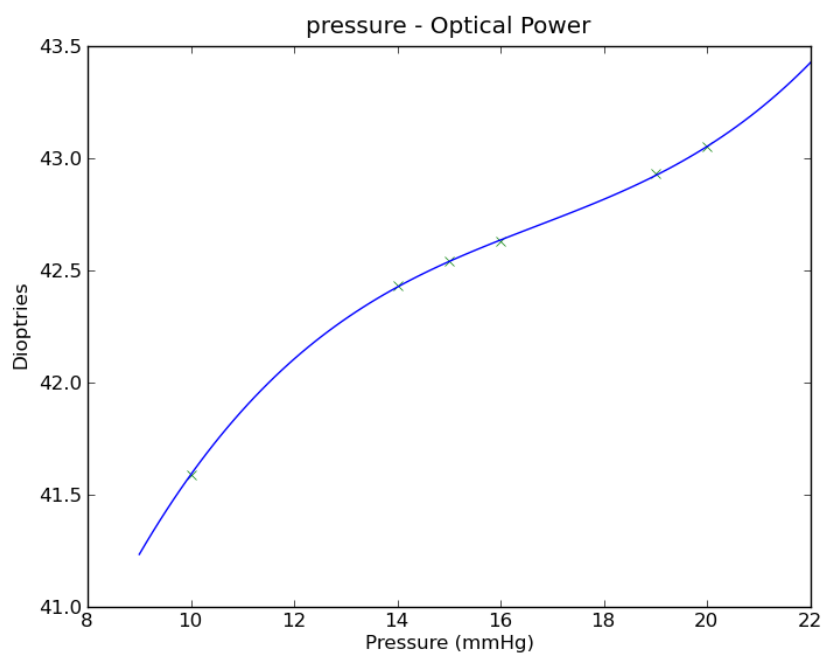
Προσομοιώσεις μετά την εφαρμογή της αποδόμησης		
Πίεση	Μετατόπιση κορυφής(mm)	Διοπτρίες
10mm	0.282	41.59
14mm	0.330	42.43
15mm	0.339	42.54
16mm	0.348	42.63
19mm	0,371	42.93
20mm	0,379	43.05

Στις εικόνες 6.26 και 6.27 φαίνονται τα συγκριτικά γραφήματα για τον κερατοειδή πριν και μετά την αποδόμηση. Παρατηρούμε η αποδόμηση μεταβάλλει την ακαμψία του κερατοειδούς και τον κάνει πιο ευαίσθητο στην μεταβολή της εσωτερικής πίεσης. Συγκεκριμένα, ο ρυθμός μεταβολής της οπτικής ισχύος του κερατοειδούς, μετά την επιβολή της αποδόμησης, αυξάνεται τόσο ώστε πάνω από τα 11mmHg η οπτική του ισχύς να ξεπερνά αυτή του κερατοειδούς πριν την αποδόμηση.

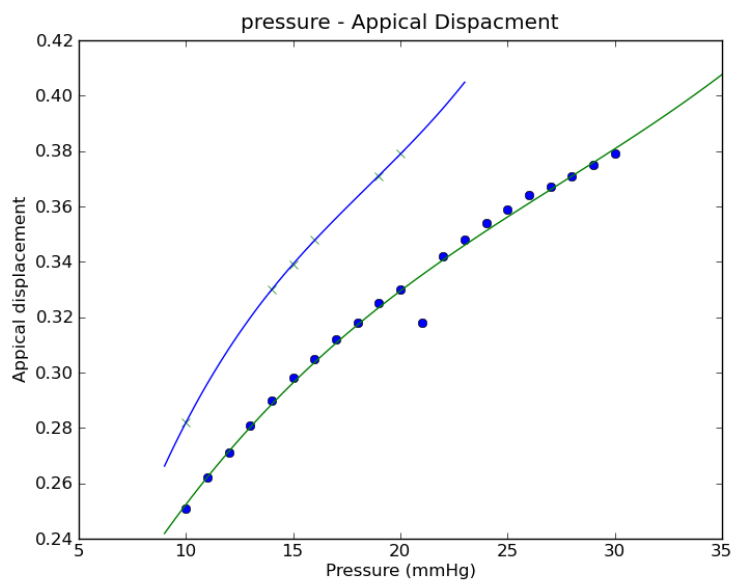
Προσοχή, εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι σε καμία περίπτωση δεν θέλουμε να πούμε ότι μετά την εγχείρηση της μυωπίας θα επιδεινώνονταν το πρόβλημα του ασθενούς (άλλωστε δεν παρατηρείται κάτι τέτοιο), αφού στην διαθλαστική χειρουργική, η αποδόμηση συμβαίνει στο ήδη φορτισμένο από την εσωτερική πίεση κερατοειδή, ενώ εμείς μεταβάλλαμε την γεωμετρία και μετά τρέξαμε την προσομοίωση εφαρμόζοντας την εσωτερική πίεση στο μοντέλο. Απλά, είναι μια ένδειξη ότι μεταβάλλοντας την γεωμετρία του κερατοειδούς μεταβάλλουμε ταυτόχρονα και την ακαμψία του με



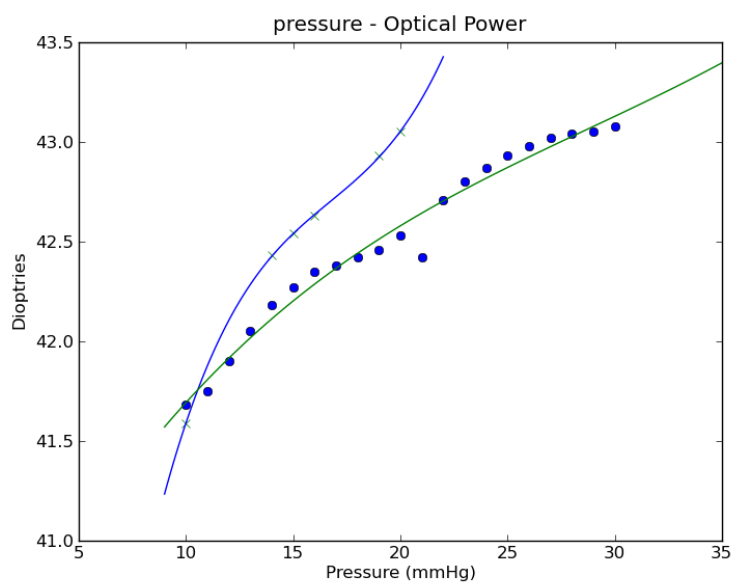
Σχήμα 6.24: Διάγραμμα πίεσης- Μετατόπισης κορυφής



Σχήμα 6.25: Διάγραμμα πίεσης- οπτικής ισχύος



Σχήμα 6.26: Διάγραμμα πίεσης- Μετατόπισης κορυφής. Με μπλε η καμπύλη μετά την εφαρμογή της αποδόμησης και με πράσινο η καμπύλη πριν.



Σχήμα 6.27: Διάγραμμα πίεσης- οπτικής ισχύος. Με μπλε η καμπύλη μετά την εφαρμογή της αποδόμησης και με πράσινο η καμπύλη πριν.

αποτέλεσμα η μετεγχειρητική του μορφή να μην είναι αυτή που προέκυψε απευθείας από την μορφή της αποδόμησης.

6.4 Επίλογος

Μετά το πέρας της παρούσας διπλωματικής θα θέλαμε να αναφερθούμε στα συμπεράσματα που καταλήξαμε και στο τι πετύχαμε μέσα από αυτήν την μελέτη.

- Κατ' αρχήν κατασκευάσαμε ένα μοντέλο για την μελέτη του κερατοειδούς. Τονίζουμε το μελέτη, αφού το μοντέλο που κατασκευάστηκε είναι ένα απλοποιημένο μοντέλο με αρκετές παραδοχές. Για εφαρμογές που έχουν να κάνουν με κάτι παραπάνω από την μελέτη της συμπεριφοράς του κερατοειδούς, όπως για παράδειγμα εφαρμογές στην οφθαλμιατρική, θα χρειαζόνταν πιο σύνθετα μοντέλα.
- Μελετήσαμε την μεταβολή της οπτικής ισχύος του κερατοειδούς σε συνάρτηση με την αύξηση της ενδοφθάλμιας πίεσης και βρήκαμε ότι, ο φακός αυξάνει την οπτική του ισχύ όσο αυξάνεται η πίεση που του ασκείται από το υδατοειδές υγρό.
- Βρήκαμε ότι, ο μετεγχειρητικός κερατοειδής είναι πιο ευαίσθητος στις αλλαγές της εσωτερικής πίεσης.
- Και τέλος, κατασκευάστηκε ένα πρόγραμμα, το οποίο είναι ικανό να επιλέξει τους επιφανειακούς κόμβους των αποτελεσμάτων και, παρεμβάλλοντας σε αυτούς κάποιον βέλτιστο κύκλο με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, να υπολογίσει την οπτική ισχύ του μοντέλου με την προσομοίωση. Εργαλείο απαραίτητο για όποιον θελήσει να μελετήσει την οπτική ισχύ του κερατοειδούς χιτώνα σε διάφορες συνθήκες.

6.5 Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Σε αυτό το σημείο, και επειδή μια επιστημονική εργασία δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος προτείνουμε κάποιες κατευθύνσεις όπου θα μπορούσαν να κινηθούν μελλοντικές εργασίες πάνω στην μελέτη του κερατοειδούς.

- Θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένα μοντέλο που να ανταποκρίνεται περισσότερο στην φυσιολογία του κερατοειδούς. Δηλαδή, να γίνει ένα μη γραμμικό ανισότροπο μοντέλο, το οποίο να λαμβάνει υπόψη την ανισοτροπία του κερατοειδούς με βάση την διεύθυνση των ινών κολλαγόνου στον κερατοειδή.

- Θα μπορούσε να δημιουργηθεί ένα μοντέλο με βάση την γεωμετρία ενός πραγματικού κερατοειδή, τον οποίο θα έχουμε την δυνατότητα να μελετήσουμε στο εργαστήριο, ώστε να μπορεί να γίνει αντιπαράβολή των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης με αυτά του εργαστηρίου.
- Να μελετηθεί τι επίδραση θα έχουν τυχόν ατέλειες του κερατοειδούς χιτώνα, όπως κερατόκωνος, στην εμβιομηχανική του συμπεριφορά.
- Ακόμα, θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να εκτιμηθεί, μέσω προσομοιώσεων, το σφάλμα που θα προκύψει στην διαθλαστική χειρουργική, εξαιτίας της μεταβολής της εμβιομηχανικής του κερατοειδούς.

Μέρος III

Παράρτημα

Παράρτημα Α

Ο κώδικας της εφαρμογής

Παρακάτω δίνεται ο κώδικας, του προγράμματος που δημιουργήθηκε για τις ανάγκες αυτής της διπλωματικής

A.1 circlefit.py

```
1 #!/usr/bin/env python
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3
4 """
5 http://www.scipy.org/Cookbook/Least_Squares_Circle
6 """
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 import pcollector as pc
9 from numpy import *
10 import numpy as np
11 # Coordinates of the 2D points
12 #curves = [(r_[pc.upper_solutions()[0]],r_[pc.
13 upper_solutions()[1]]),(r_[pc.lower_solutions()
14 [0]],r_[pc.lower_solutions()[1]])]
15
16 import os
17
18 # Decorator to count functions calls
19 import functools
20 def countcalls(fn):
21     "decorator function count function calls "
```

```

21     @functools.wraps(fn)
22     def wrapped(*args):
23         wrapped.ncalls +=1
24         return fn(*args)
25
26     wrapped.ncalls = 0
27     return wrapped
28
29
30 # == METHOD 2 ==
31 # Basic usage of optimize.leastsq
32 from scipy import optimize
33
34 method_2 = "leastsq"
35
36 def calc_R(xc, yc):
37     """ calculate the distance of each 2D points from
38         the center (xc, yc) """
39     return sqrt((x-xc)**2 + (y-yc)**2)
40
41 @countcalls
42 def f_2(c):
43     """ calculate the algebraic distance between the 2
44         D points and the mean circle centered at c=(xc,
45         yc) """
46     Ri = calc_R(*c)
47     return Ri - Ri.mean()
48
49 def find_curves(x,y):
50     basename = 'circle'
51
52     # == METHOD 1 ==
53     method_1 = 'algebraic'
54
55     # coordinates of the barycenter
56     x_m = mean(x)
57     y_m = mean(y)
58

```

```

59 # calculation of the reduced coordinates
60 u = x - x_m
61 v = y - y_m
62
63 # linear system defining the center in reduced
    coordinates (uc, vc):
64 #     Suu * uc + Suv * vc = (Suuu + Suvv)/2
65 #     Suv * uc + Svv * vc = (Suvv + Svvv)/2
66 Suv = sum(u*v)
67 Suu = sum(u**2)
68 Svv = sum(v**2)
69 Suuv = sum(u**2 * v)
70 Suvv = sum(u * v**2)
71 Suuu = sum(u**3)
72 Svvv = sum(v**3)
73
74 # Solving the linear system
75 A = array([ [ Suu, Suv ], [Suv, Svv]])
76 B = array([ Suuu + Suvv, Svvv + Suuv ])/2.0
77 uc, vc = linalg.solve(A, B)
78
79 xc_1 = x_m + uc
80 yc_1 = y_m + vc
81
82 # Calculation of all distances from the center (xc_1
    , yc_1)
83 Ri_1 = sqrt((x-xc_1)**2 + (y-yc_1)**2)
84 R_1 = mean(Ri_1)
85 residu_1 = sum((Ri_1-R_1)**2)
86 residu2_1 = sum((Ri_1**2-R_1**2)**2)
87
88
89
90 center_estimate = x_m, y_m
91 center_2, ier = optimize.leastsq(f_2,
    center_estimate)
92
93 xc_2, yc_2 = center_2
94 Ri_2 = calc_R(xc_2, yc_2)
95 R_2 = Ri_2.mean()
96 residu_2 = sum((Ri_2 - R_2)**2)

```

```

97     residu2_2 = sum((Ri_2**2-R_2**2)**2)
98     ncalls_2 = f_2.ncalls
99
100
101
102     # Summary
103 # fmt = '%-22s %10.5f %10.5f %10.5f %10d %10.6f %10.6f
      %10.2f'
104 # print ('\n%-22s' + ' %10s'*7) % tuple('METHOD Xc Yc
      Rc nb_calls std(Ri) residu residu2'.split())
105 # print '-'*(22 +7*(10+1))
106 # print fmt % (method_2 , xc_2 , yc_2 , R_2 ,
      ncalls_2 , Ri_2.std() , residu_2 , residu2_2 )
107     return R_2
108
109
110 def print_res(cur_file,data_file,data_solution_file):
111
112     #print '-'*(22 +7*(10+1))
113     global x,y,R_upper,R_lower,Dioptries
114
115     x = r_[pc.upper_solutions(data_file,
      data_solution_file)[0]]
116     y = r_[pc.upper_solutions(data_file,
      data_solution_file)[1]]
117     R_upper = find_curves(x,y)
118
119     x = r_[pc.lower_solutions(data_file,
      data_solution_file)[0]]
120     y = r_[pc.lower_solutions(data_file,
      data_solution_file)[1]]
121     R_lower = find_curves(x,y)
122
123     #print '%s ----> R_upper : %5.5f , R_lower : %5.5f
      Dioptries : %5.5f' % (cur_file, R_upper , R_lower
      , 0.376/R_upper - 0.04/R_lower)
124
125     Dioptries = (1.376-1)/R_upper + (1.336 - 1.376)/
      R_lower
126     #print for latex table

```



```
127 print '%s & & %5.5f & %5.5f & %5.2f \\\\' % (
      cur_file, R_lower , R_upper ,Dioptries)
128
129 def sortedWalk(top, topdown=True, onerror=None):
130     """ Walk into directories in filesystem
131         Ripped from os module and slightly modified
132         for alphabetical sorting"""
133
134     from os.path import join, isdir, islink
135
136     names = os.listdir(top)
137     names.sort()
138     dirs, nondirs = [], []
139
140     for name in names:
141         if isdir(os.path.join(top, name)):
142             dirs.append(name)
143         else:
144             nondirs.append(name)
145
146     if topdown:
147         yield top, dirs, nondirs
148     for name in dirs:
149         path = join(top, name)
150         if not os.path.islink(path):
151             for x in sortedWalk(path, topdown, onerror):
152                 yield x
153     if not topdown:
154         yield top, dirs, nondirs
155
156
157 rootdir='simulations'
158
159 #This list saves all the results for the final plots
160 pressure_curves = []
161
162 #for subdir, dirs, files in os.walk(rootdir):
163 for subdir, dirs, files in sortedWalk(rootdir):
164     for cur_file in files:
165         if not cur_file=='nodes':
```

```
166     print_res(cur_file, 'simulations/nodes', '
        simulations/'+cur_file)
167     pressure_curves.append({"Pressure":cur_file
        [0:-2], "R_lower":R_lower, "R_upper":R_upper, "
        Dioptries":Dioptries})
168     pc.plot_them(cur_file, R_upper, R_lower)
169
170
171 #Build the Pressure - Curvature plot
172 plt.clf()
173 plt.xlabel("Pressure (mmHg)")
174 plt.ylabel("Curvature")
175 x = np.array([int(n["Pressure"]) for n in
        pressure_curves])
176
177 y = np.array([n["R_lower"] for n in pressure_curves])
178 z = polyfit(x, y, 3)
179 p = poly1d(z)
180 xp = np.linspace(9, 32, 100)
181 plt.plot([n["Pressure"] for n in pressure_curves], [n["
        R_lower"] for n in pressure_curves], "gx", xp, p(xp)
        , '-', label="inner")
182
183
184 y = np.array([n["R_upper"] for n in pressure_curves])
185 z = polyfit(x, y, 3)
186 p = poly1d(z)
187 xp = np.linspace(9, 32, 100)
188 plt.plot([n["Pressure"] for n in pressure_curves], [n["
        R_upper"] for n in pressure_curves], "yx", xp, p(xp),
        '-', label="outer")
189
190 plt.legend(numpoints=1)
191 plt.title('Pressure - Curvature')
192 plt.savefig('P-C.png')
193 # add a 'best fit' line
194
195
196
197 y = np.array([n["Dioptries"] for n in pressure_curves
        ])
```

```

198 z = polyfit(x, y, 3)
199
200 p = poly1d(z)
201 xp = np.linspace(9, 32, 100)
202
203 #Build the Pressure - Dioptries plot
204 plt.clf()
205 plt.xlabel("Pressure (mmHg)")
206 plt.ylabel("Dioptries")
207 plt.plot([n["Pressure"] for n in pressure_curves],[n["
    Dioptries"] for n in pressure_curves],"gx",xp, p(xp
    ), '-',label="Dioptries")
208 plt.title('Pressure - Dioptries')
209 plt.savefig('P-D.png')

```

circlefit.py

A.2 pcollector.py

```

1 #!/usr/bin/env python
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3
4
5 """
6 This script does the the job
7 """
8
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import pdb
11
12 #data_file = "nodalcord.txt"
13 #data_solution_file = "nodalsolution.txt"
14
15 def get_data_list(fl):
16     data_tmp = fl.readlines()
17
18     data_fin = []
19     data_tmp2 =[]
20
21     for line in data_tmp :

```

```
22     data_tmp2.append(line.split())
23
24     for line in data_tmp2:
25         if len(line)>0:
26             if line[0].isdigit():
27                 data_fin.append(line)
28     return data_fin
29
30 def get_xs(lista):
31     """This function returns x coords from a coord list
32     """
33     return [float(l[1]) for l in lista]
34
35 def get_ys(lista):
36     """This function returns y coords from a coord list
37     """
38     return [float(l[2]) for l in lista]
39
40 def add_xpoints(points):
41     """This function add points
42     We want to add x coordinate from points file with x
43     difference from solutions file.
44     solutions list is zero indexed so we take i[0]-1.
45     point and solut are lists of lists.
46     """
47     return [float(sim1.solut[int(i[0])-1][1])+float(i
48             [1]) for i in points]
49
50 def add_ypoints(points):
51     """This function add points"""
52     return [float(sim1.solut[int(i[0])-1][2])+float(i
53             [2]) for i in points]
54
55 class simulation():
56     """
57     In this class we will store everything about our
58     simulation
59     """
60     def __init__(self, fdata_name=None, fsolut_name=None):
61         try :
62             fdata = open(fdata_name, "r")
```

```
56     fsolut = open(fsolut_name,"r")
57     except:
58         print "Couldn't read the files"
59
60     self.filename = fdata
61     self.data = get_data_list(fdata)
62     self.filename2 = fsolut
63     self.solut = get_data_list(fsolut)
64
65     def upper_points(self):
66         """This method chooses the upper point of the
67             cornea"""
68         points = []
69         for l in self.data:      #Choose a point
70             choosen = 1
71             for l2 in self.data:
72                 # pdb.set_trace()
73                 if float(l2[1])>float(l[1]) and float(l2[2])>
74                     float(l[2]):      #choose the points with a x
75                         greater than the choosen point
76                     choosen=0
77                     break
78             if choosen == 1 and float(l[1])<0.0025:
79                 points.append(l)
80         return points
81
82     def lower_points(self):
83         """This method chooses the upper point of the
84             cornea"""
85         points = []
86         for l in self.data:      #Choose a point
87             choosen = 1
88             for l2 in self.data:
89                 # pdb.set_trace()
90                 if float(l2[1])<=float(l[1]) and float(l2[2])<
91                     float(l[2]):      #choose the points with a x
92                         greater than the choosen point
93                     choosen=0
94                     break
95             if choosen == 1 and float(l[1])<0.0025:
96                 points.append(l)
```

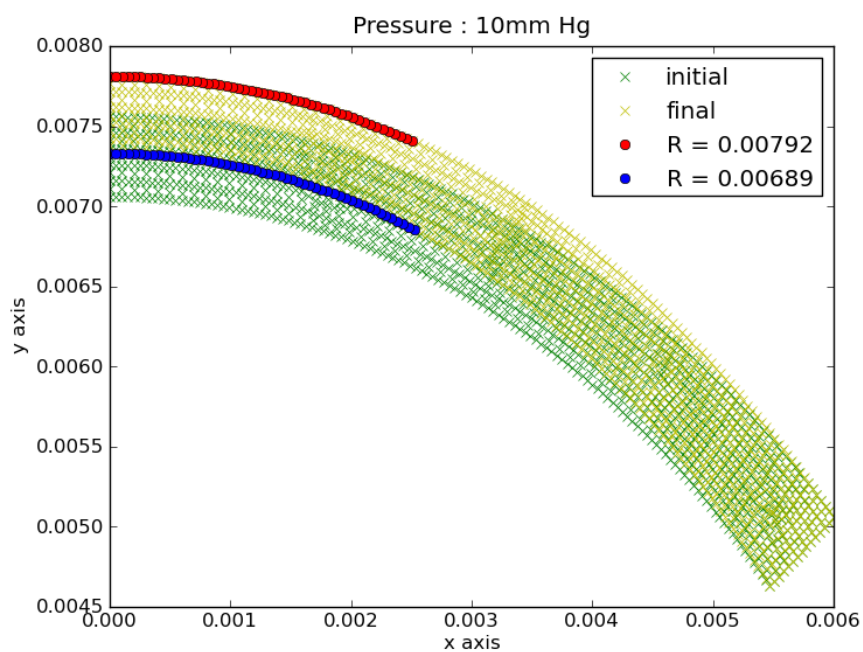
```
91     return points
92
93 def upper_solutions(data_file,data_solution_file):
94     global sim1
95     sim1 = simulation(data_file,data_solution_file)
96     return [add_xpoints(sim1.upper_points()),add_ypoints
97             (sim1.upper_points())]
98
99 def lower_solutions(data_file,data_solution_file):
100     global sim1
101     sim1 = simulation(data_file,data_solution_file)
102     return [add_xpoints(sim1.lower_points()),add_ypoints
103             (sim1.lower_points())]
104
105 def plot_them(figsize,R_upper,R_lower):
106     plt.xlabel("x axis")
107     plt.ylabel("y axis")
108     plt.plot(get_xs(sim1.data),get_ys(sim1.data),"gx",
109             label="initial")
110     plt.plot(add_xpoints(sim1.data),add_ypoints(sim1.
111             data),"yx",label="final")
112     plt.plot(add_xpoints(sim1.upper_points()),
113             add_ypoints(sim1.upper_points()),"ro",label="R =
114             %1.5f" % R_upper)
115     plt.plot(add_xpoints(sim1.lower_points()),
116             add_ypoints(sim1.lower_points()),"bo",label="R =
117             %1.5f" % R_lower)
118     plt.legend(numpoints=1)
119     plt.title('Pressure : '+figname+' Hg')
120     plt.savefig(figname+'.png')
121     plt.clf()
122
123 if __name__ == "__main__" :
124     sim1 = simulation(data_file,data_solution_file)
125     plot_them()
126     i=0
```

```
124 print "upper points"
125 for l in add_xpoints(sim1.upper_points()):
126     print "{" , l, "," , add_ypoints(sim1.upper_points
127         ())[i] , ", 0 }" ,","
128
129 i=0
130 print "lower points"
131 for l in add_xpoints(sim1.lower_points()):
132     print "{" , l, "," , add_ypoints(sim1.lower_points
133         ())[i] , ", 0 }" ,","
```

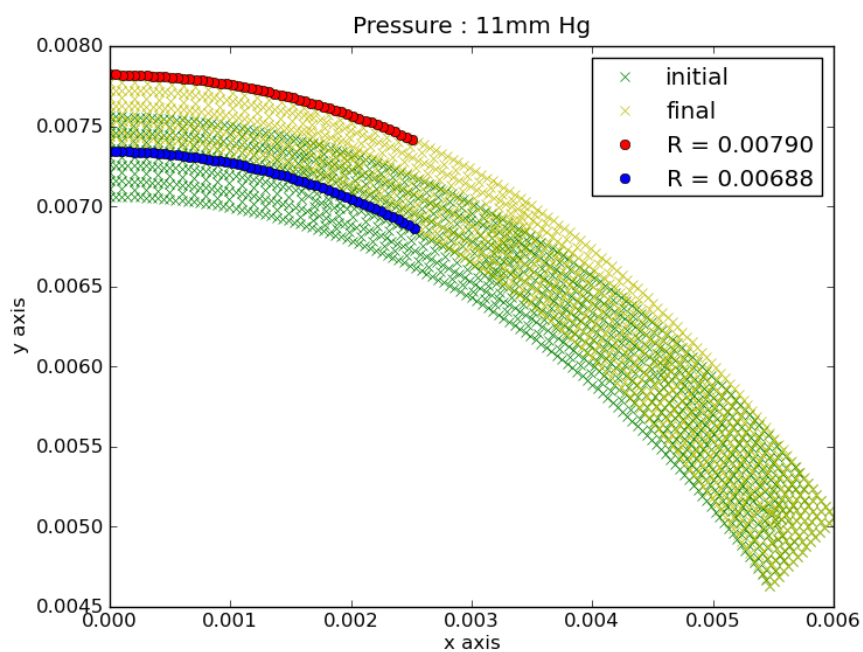
pcollector.py

Παράρτημα Β

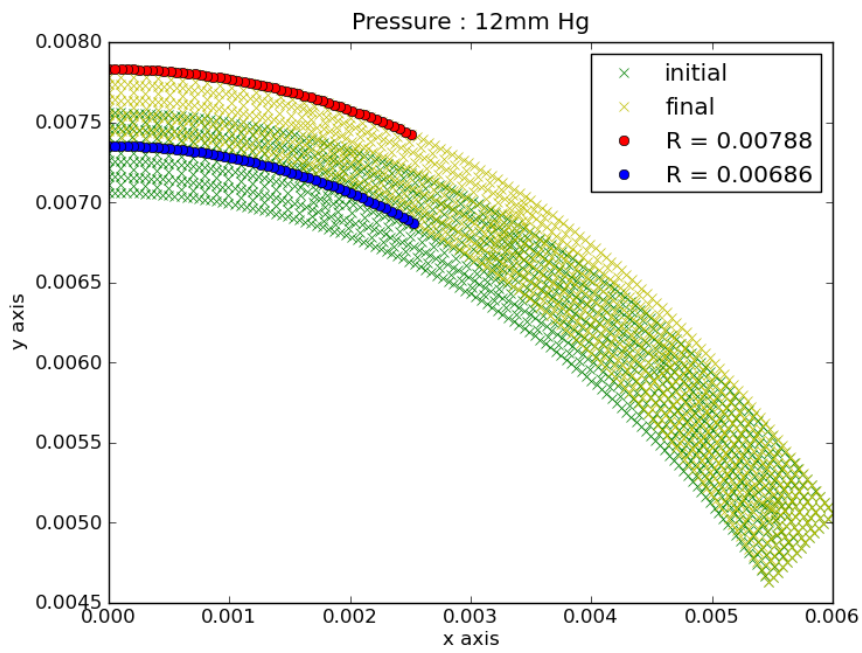
Οι προσομοιώσεις



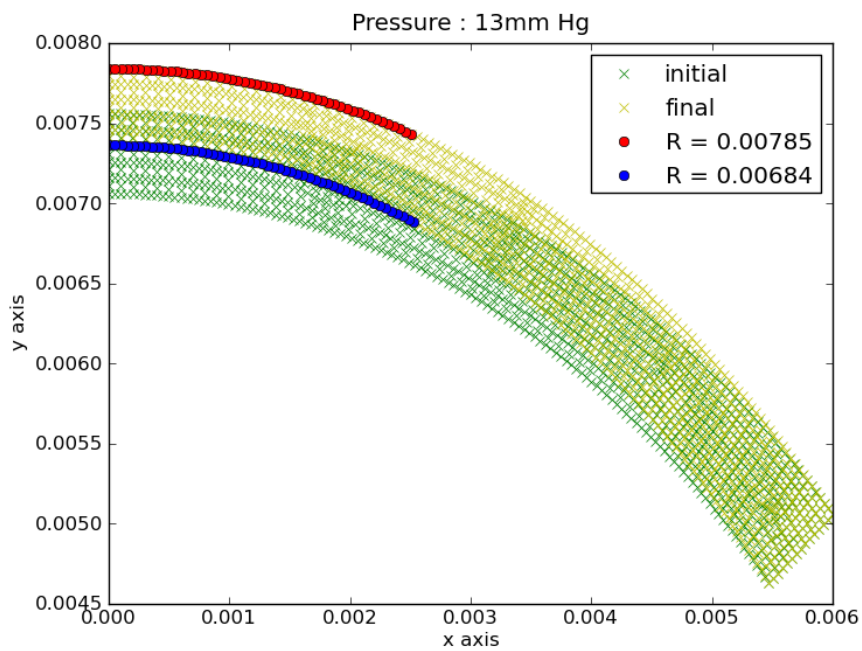
Σχήμα Β .1: Παραμόρφωση για 10mmHg



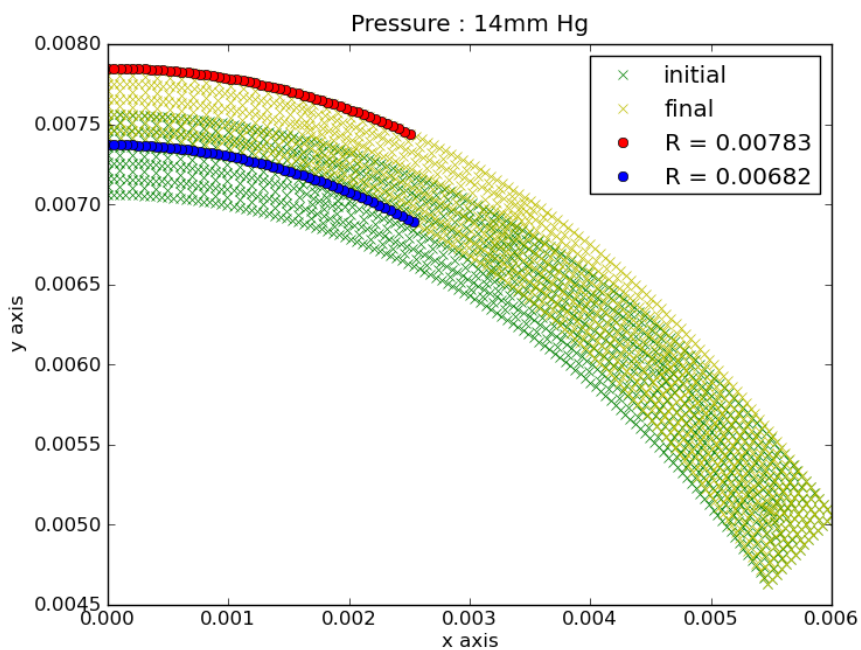
Σχήμα Β .2: Παραμόρφωση για 11mmHg



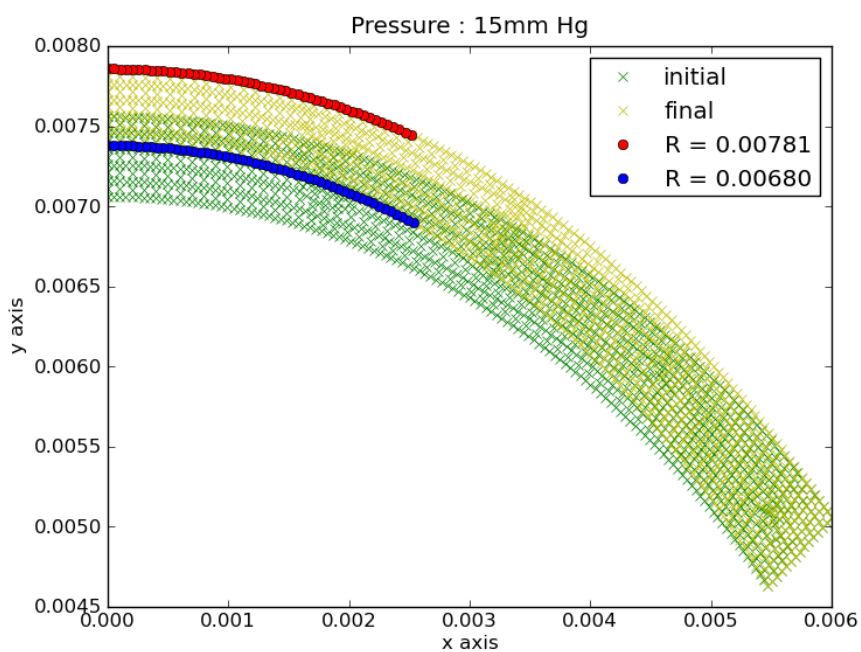
Σχήμα Β .3: Παραμόρφωση για 12mmHg



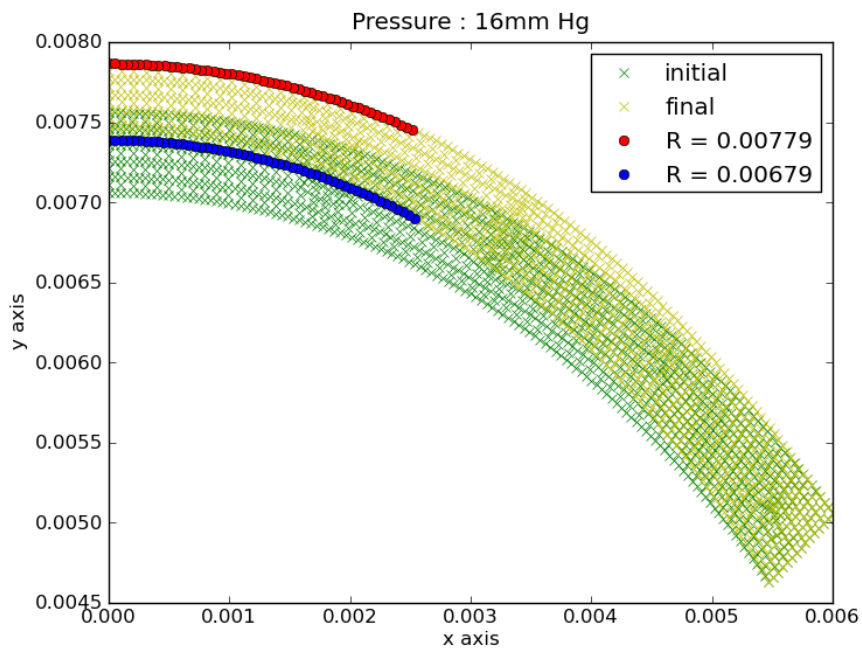
Σχήμα Β .4: Παραμόρφωση για 13mmHg



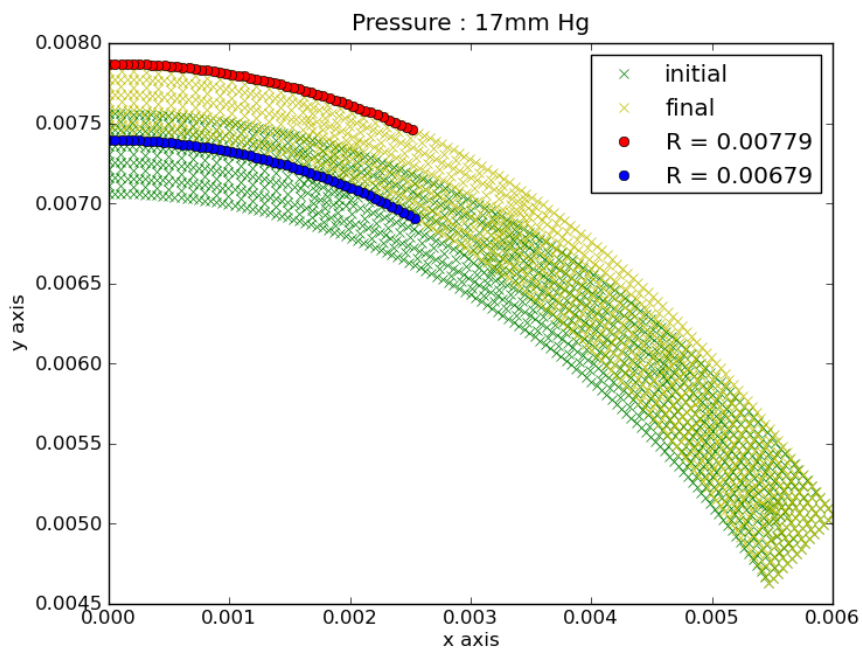
Σχήμα Β .5: Παραμόρφωση για 14mmHg



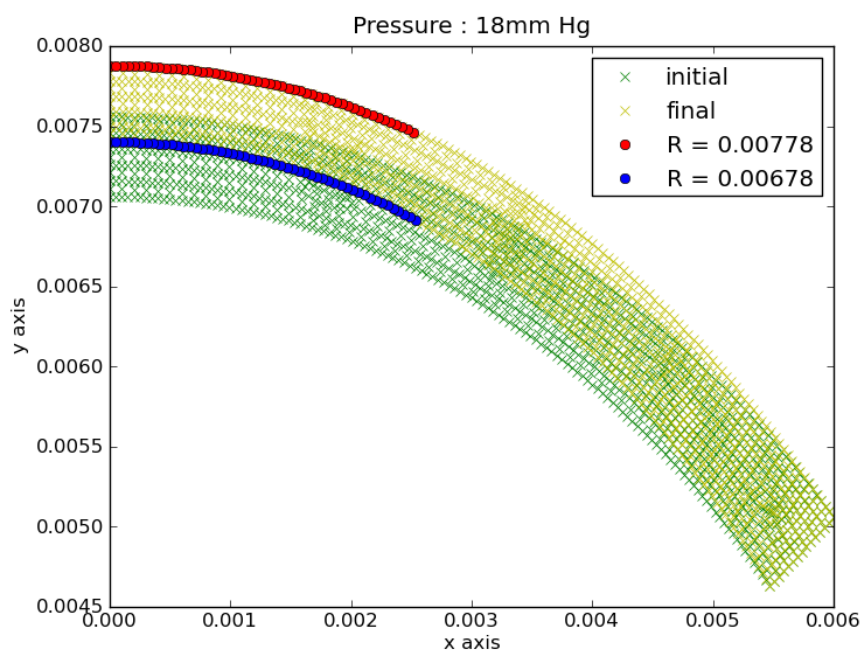
Σχήμα Β .6: Παραμόρφωση για 15mmHg



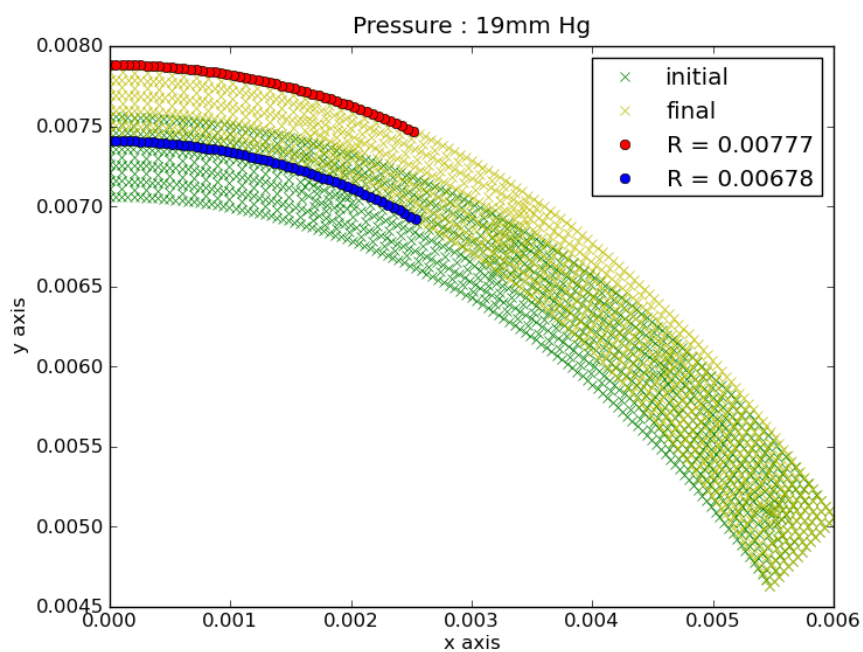
Σχήμα Β .7: Παραμόρφωση για 16mmHg



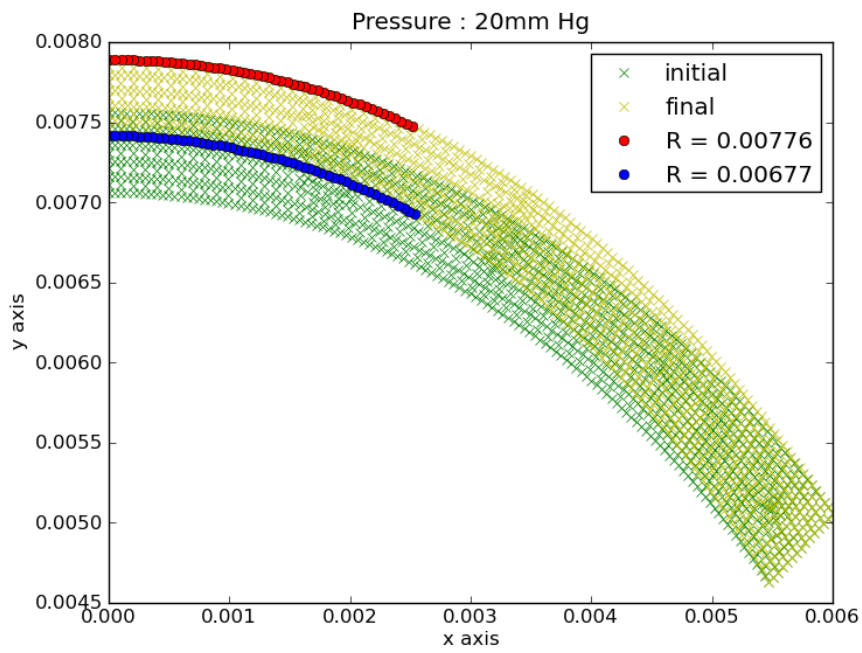
Σχήμα Β .8: Παραμόρφωση για 17mmHg



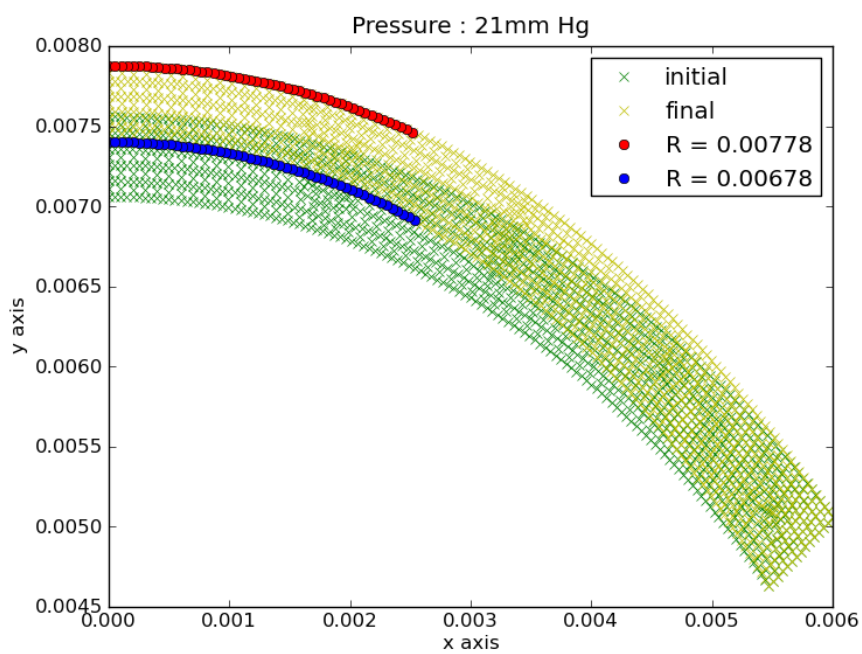
Σχήμα Β .9: Παραμόρφωση για 18mmHg



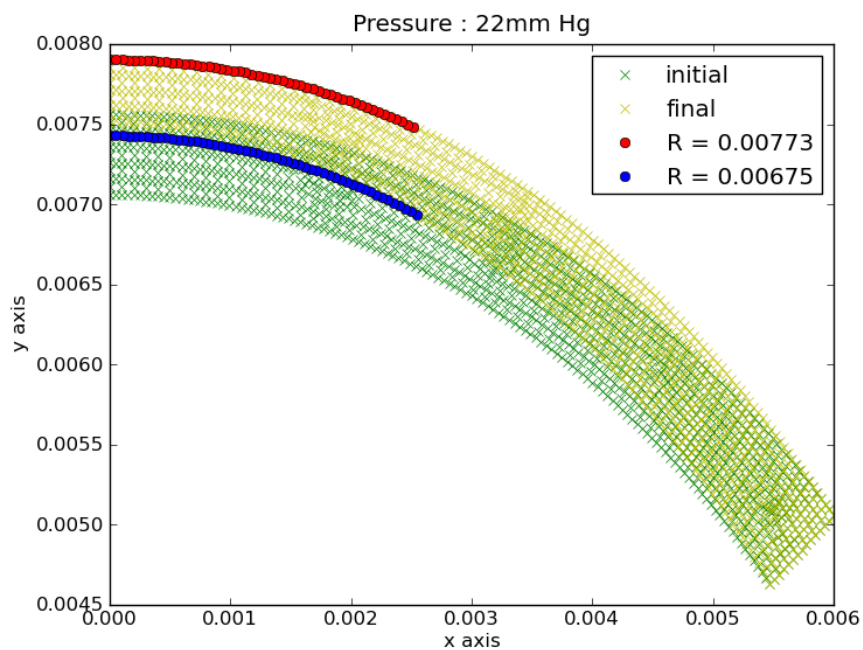
Σχήμα Β .10: Παραμόρφωση για 19mmHg



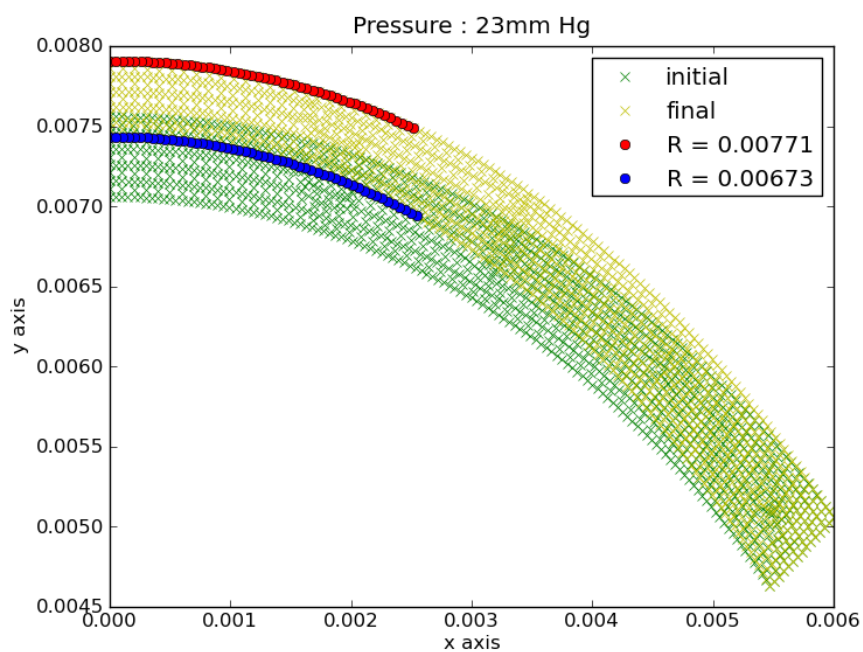
Σχήμα Β .11: Παραμόρφωση για 20mmHg



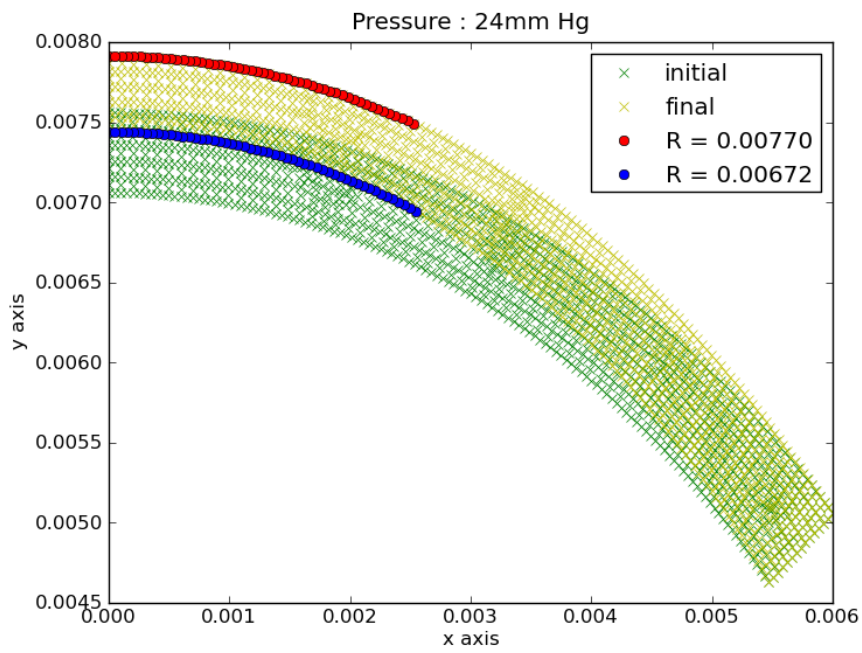
Σχήμα Β .12: Παραμόρφωση για 21mmHg



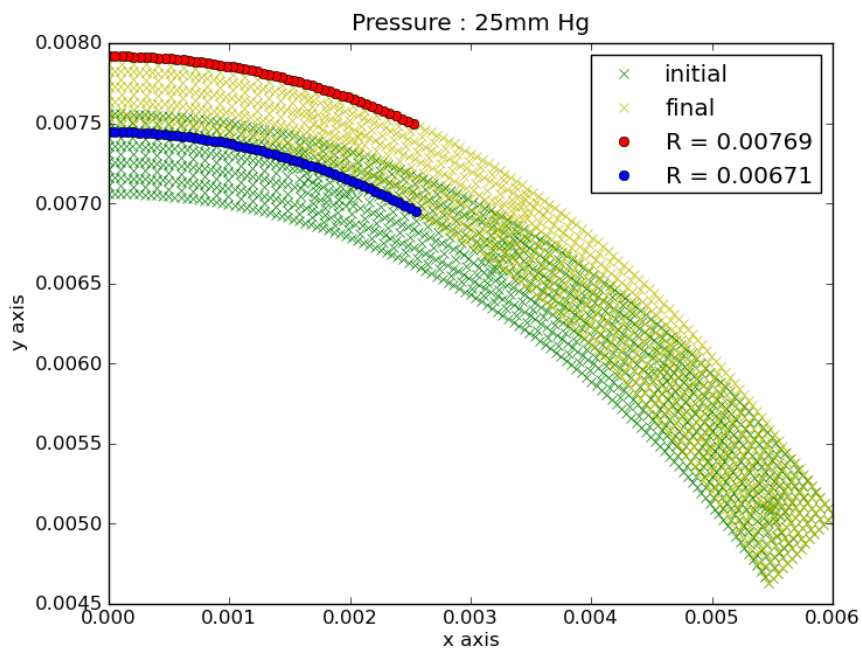
Σχήμα Β .13: Παραμόρφωση για 22mmHg



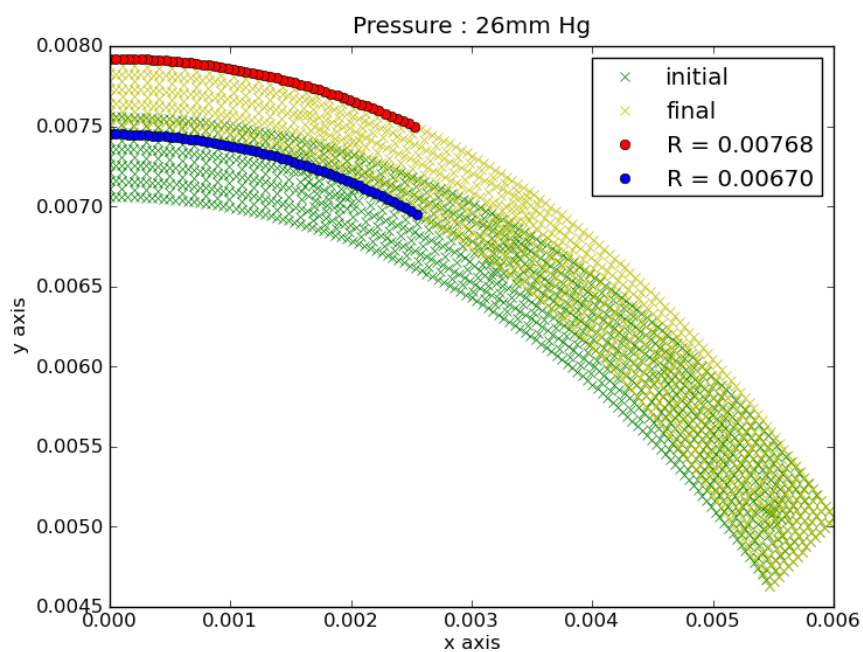
Σχήμα Β .14: Παραμόρφωση για 23mmHg



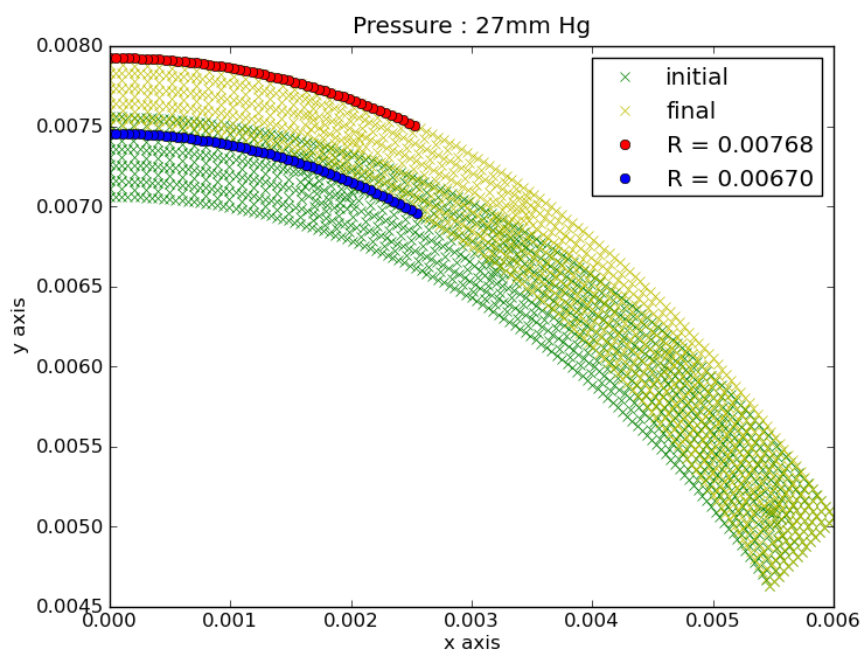
Σχήμα Β .15: Παραμόρφωση για 24mmHg



Σχήμα Β .16: Παραμόρφωση για 25mmHg



Σχήμα Β .17: Παραμόρφωση για 26mmHg



Σχήμα Β .18: Παραμόρφωση για 27mmHg

Βιβλιογραφία

- [1] John R. Cameron, James G. Skofronick, Roderic M. Grant 'Φυσική του ανθρώπινου σώματος' επιστημονικές εκδόσεις Παρισιανος.
- [2] Γ. Ι. Τσαμασφύρος 'Μηχανική Παραμορφώσιμου σώματος Ι', εκδόσεις Συμετρία Σεπτέμβριος 1990.
- [3] Γ. Ι. Τσαμασφύρος, Ε. Ε. Θεοτόκογλου 'Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων' εκδόσεις Συμετρία Αθήνα 2005.
- [4] Saeed Moaveni, 'Finite Element Analysis Theory and Applications with ANSYS'.
- [5] Δημήτρης Ζευγώλης, 'Εφαρμοσμένη Οπτική'. Εκδόσεις Φιλομάθεια 2005
- [6] ΣΟΦΙΑ Ι. ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΥ Ανάπτυξη υπολογιστικού μοντέλου για τον ανασχηματισμό του κερατοειδούς κατά την φωτοδιαθλαστική κερατεκτομή του Οφθαλμούμε Excimer Laser. Ηράκλειο 2005. Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- [7] Αιμιλιανός Α. Στράτος, MD Πολυπαραγοντική ανάλυση αποτελεσμάτων διαθλαστικής χειρουργικής ΙΟΥΛΙΟΣ 2009. Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Κρήτης. .
- [8] Χ. Γκίνης, 'Αλληλεπίδραση laser κερατοειδή και εισαγωγικές έννοιες της διαθλαστικής χειρουργικής.' Σημειώσεις από το μάθημα Φυσιολογική Οπτική & Εφαρμογές II, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Οπτική & Όραση
- [9] Ανδρουλάκης Αντώνης 'Μαθηματικό μοντέλο της εξομάλυνσης που επιφέρει το επιθήλιο στην ελεύθερη επιφάνεια του κερατοειδή'. Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- [10] Nathaniel E. Knox Cartwright, BM BCh MA MRCOphth Christopher C. Hull, PhD "The biomechanics of keratorefractive surgery" MODULE 11 PART 9 COURSE CODE: C-8161, 2008

- [11] Αττιτή Ειρήνη 2006 “Χρήση της μεθόδου Monte Carlo για τον υπολογισμό παραμέτρων της διασκληρικής ακτινοβόλησης του ακτινωτού σώματος με διοδικό laser“. Διπλωματική εργασία.
- [12] Delia Cabrera Fernandez, A. M. Niazy, R. M. Kurtz, G. P. Djotyan, T. Juhasz *Finite element analysis applied to cornea reshaping*, Journal of Biomedical Optics 106, 064018 November/December 2005
- [13] Jie-zhen Xie, Bo-liang Wang, Ying Ju, Bo Liu ‘*Biomechanical Model of Cornea Deformation and Simulation*’, IEEE 1818, 2008.
- [14] Pandolfi, A., Fotia, G., and Manganiello, F., 2008, “*Finite Element Simulation of Laser Refractive Corneal Surgery*,” Eng. Comput., in press.
- [15] Anna Pandolfi Gerhard, A. Holzapfel 2008 *Three-Dimensional Modeling and Computational Analysis of the Human Cornea Considering Distributed Collagen Fibril Orientations*, J Biomechanical Engineering vol 130, 2008
- [16] Anderson, K., El-Sheikh, A., and Newson, T., 2004, “*Application of Structural Analysis to the Mechanical Behaviour of the Cornea* ” J. R. Soc., Interface
- [17] Munnerlyn CR, Koons SJ, Marshall J. 1988. *Photorefractive keratectomy: a technique for laser refractive surgery*. J Cataract Refract Surg 14: 46-52
- [18] <http://panacea.med.uoa.gr/topic.aspx?id=913&red=true&kn=2&un=0&kn1=31395&kn2=31395&kn3=31395&kn4=31395&kn5=31395&kn6=31395&kn7=31395&kn8=31395&kn9=31395&kn10=31395&kn11=31395&kn12=31395&kn13=31395&kn14=31395&kn15=31395&kn16=31395&kn17=31395&kn18=31395&kn19=31395&kn20=31395&kn21=31395&kn22=31395&kn23=31395&kn24=31395&kn25=31395&kn26=31395&kn27=31395&kn28=31395&kn29=31395&kn30=31395&kn31=31395&kn32=31395&kn33=31395&kn34=31395&kn35=31395&kn36=31395&kn37=31395&kn38=31395&kn39=31395&kn40=31395&kn41=31395&kn42=31395&kn43=31395&kn44=31395&kn45=31395&kn46=31395&kn47=31395&kn48=31395&kn49=31395&kn50=31395&kn51=31395&kn52=31395&kn53=31395&kn54=31395&kn55=31395&kn56=31395&kn57=31395&kn58=31395&kn59=31395&kn60=31395&kn61=31395&kn62=31395&kn63=31395&kn64=31395&kn65=31395&kn66=31395&kn67=31395&kn68=31395&kn69=31395&kn70=31395&kn71=31395&kn72=31395&kn73=31395&kn74=31395&kn75=31395&kn76=31395&kn77=31395&kn78=31395&kn79=31395&kn80=31395&kn81=31395&kn82=31395&kn83=31395&kn84=31395&kn85=31395&kn86=31395&kn87=31395&kn88=31395&kn89=31395&kn90=31395&kn91=31395&kn92=31395&kn93=31395&kn94=31395&kn95=31395&kn96=31395&kn97=31395&kn98=31395&kn99=31395&kn100=31395>
- [19] Meek, K. M., Blamires, T., Elliott, G. F., Gyi, T. J., and Nave, C., 1987, “*The Organisation of Collagen Fibrils in the Human Corneal Stroma: A Synchrotron X-Ray Diffraction Study*,” Curr. Eye Res., 6, pp. 841 846.
- [20] Meek, K. M., and Newton, R. H., 1999, “*Organization of Collagen Fibrils in the Corneal Stroma in Relation to Mechanical Properties and Surgical Practice*,” J. Refract. Surg., 15, pp. 695 699.
- [21] Aghamohammadzadeh, H., Newton, R. H., and Meek, K. M., 2004, “*X-Ray cattering Used to Map the Preferred Collagen Orientation in the Human Cornea and Limbus*,” Structure London, 12, pp. 249 256.
- [22] Daxer, A., and Fratzl, P., 1997, “*Collagen Fibril Orientation in the Human Corneal Stroma and Its Implication in Keratoconus*,” Invest. Ophthalmol. Visual Sci., 38, pp. 121 129

- [23] Αρχοντία Δημητρίου Πολυώνυμα Zernike και τεχνητά νευρωνικά δίκτυα στη μελέτη του σφάλματος στη διαθλαστική χειρουργική, 2011, Διπλωματική εργασία ΕΜΠ.
- [24] Γιάννης Σγουρός Ένα φυσικό μοντέλο που προσομοιώνει την σκέδαση στον κερατοειδή μετά από επεμβάσεις διαθλαστικής χειρουργικής βασισμένο σε μικροσφαιρίδια γυαλιού εμποτισμένα σε διάλυμα κολλαγόνου, 2006, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Κρήτης. .