



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

$f(R)$ Θεωρίες Βαρύτητας

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του Δημήτρη Τζώρτζη

Επιβλέπων: Λευτέρης Παπαντωνόπουλος

Αθήνα, Φεβρουάριος, 2018

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη τους και τον και τον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της εργασίας Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο, για την ευκαιρία που μου έδωσε να συμμετάσχω στο γρουπ σχετικότητας της σχολής.

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	6
2	Κοσμολογία	7
2.1	Μέγιστα συμμετρικοί χώροι	7
2.2	FRW μετρικές	8
2.3	Υλη και ακτινοβολία	9
2.4	Εξισώσεις Friedmann	11
2.5	Κοσμολογική μετατόπιση προς το ερυθρό	12
2.6	Ιστορία του σύμπαντος	13
3	f(R) και Scalar-Tensor Θεωρίες	14
3.1	Η ανάγκη για τροποποίηση της GR	14
3.2	Εξισώσεις πεδίου	15
3.2.1	Άλλοι φορμαλισμοί	16
3.3	Scalar-tensor θεωρίες και Conformal μετασχηματισμοί	17
3.4	Ισοδυναμία f(R) και scalar-tensor θεωριών	19
4	Σκοτεινή ενέργεια από καμπυλότητα	20
4.1	Τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann	20
4.2	Σκοτεινή ενέργεια	22
4.3	Ανάλυση ενός μοντέλου για επιταχυνόμενη διαστολή	23
4.4	Νευτώνειο όριο	27
5	Πληθωρισμός	29
5.1	Προβλήματα συμβατικής κοσμολογίας	29
5.2	Πληθωρισμός ως λύση	31
5.3	Πληθωρισμός από βαθμωτό πεδίο	31
5.4	Starobinsky πληθωρισμός	33
6	Φορμαλισμός NP	36
6.1	Τετράδες	36
6.2	NP τετράδα	37
6.3	Κατηγοριοποίηση Πετροφ	38
7	Βαρυτικά κύματα	42
7.1	Βαρυτικά κύματα στη γενική σχετικότητα	42
7.2	Βαρυτικά κύματα σε f(R) θεωρίες	44
7.3	E(2) κατηγοριοποίηση	47

Βιβλιογραφία

52

Κεφάλαιο 1

Πρόλογος

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία θα ασχοληθώ με τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας και πιο συγκεκριμένα με $f(R)$ θεωρίες βαρύτητας κατά τις οποίες αντικαθιστούμε το βαθμωτό Ricci στις εξισώσεις Einstein με μια γενική συνάρτηση $f(R)$. Αρχικά θα αναλυθούν τα κοσμολογικά μοντέλα που προκύπτουν από τέτοιου είδους θεωρίες και πώς αυτά μπορούν να βοηθήσουν στη λύση σύγχρονων κοσμολογικών προβλημάτων όπως η σκοτεινή ενέργεια και η σκοτεινή ύλη. Έπειτα θα αναλυθούν τα βαρυτικά κύματα στις $f(R)$ θεωρίες και πώς προκύπτουν επιπλέον πολικότητες από αυτές τις γενικής σχετικότητας. Τέλος, θα αναλυθούν τα βαρυτικά κύματα και οι πολικότητες σε πιο γενικές θεωρίες μετρικής καθότι οι πολικότητες αποτελούν εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την επιβεβαίωση ή τον αποκλεισμό τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας.

Κεφάλαιο 2

Κοσμολογία

2.1 Μέγιστα συμμετρικοί χώροι

Οι συμμετρίες ενός χώρου περιγράφονται πλήρως από τα διανύσματα killing για τα οποία ισχύει:

$$\nabla_\rho K_\sigma + \nabla_\sigma K_\rho = 0 \quad (2.1.1)$$

Από τον ορισμό του τανυστή Riemann αν αντικαταστήσουμε το διανυσματικό πεδίο K παίρνουμε [11]:

$$K_{\sigma;\rho;\mu} - K_{\sigma;\mu;\rho} = -R^\lambda_{\sigma\rho\mu} K_\lambda \quad (2.1.2)$$

Από την κυκλική ιδιότητα του τανυστή Riemann έχουμε:

$$R^\lambda_{\sigma\rho\mu} + R^\lambda_{\mu\sigma\rho} + R^\lambda_{\rho\mu\sigma} = 0 \quad (2.1.3)$$

και άρα:

$$K_{\sigma;\rho;\mu} - K_{\sigma;\mu;\rho} - K_{\mu;\sigma;\rho} - K_{\mu;\rho;\sigma} + K_{\rho;\mu;\sigma} - K_{\rho;\sigma;\mu} = 0 \quad (2.1.4)$$

Επίσης, από την εξίσωση killing έχουμε [11]:

$$K_{\sigma;\rho;\mu} - K_{\sigma;\mu;\rho} - K_{\mu;\rho;\sigma} = 0 \quad (2.1.5)$$

από όπου ο μεταθέτης των συναλλοιώτων παραγώγων γίνεται:

$$K_{\mu;\rho;\sigma} = -R^\lambda_{\sigma\rho\mu} K_\lambda \quad (2.1.6)$$

Από τον ορισμό του τανυστή Riemann έχουμε:

$$K_{\sigma;\mu;\rho;\nu} - K_{\rho;\mu;\nu;\sigma} = -R^\lambda_{\rho\sigma\nu} K_{\lambda;\mu} - R^\lambda_{\mu\sigma\nu} K_{\rho;\lambda} \quad (2.1.7)$$

Για να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση θα πρέπει:

$$R^\lambda_{\sigma\rho\mu} K_{\lambda;\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu} K_{\lambda;\sigma} + (R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu;\sigma}) K_\lambda = -R^\lambda_{\rho\sigma\nu} K_{\lambda;\mu} - R^\lambda_{\mu\sigma\nu} K_{\rho;\lambda} \quad (2.1.8)$$

και από την εξίσωση killing :

$$-R^\lambda_{\rho\sigma\nu} \delta_\mu^k + R^\lambda_{\mu\sigma\nu} \delta_\rho^k - R^\lambda_{\sigma\rho\mu} \delta_\nu^k + R^\lambda_{\nu\rho\mu} \delta_\sigma^k K_{\lambda;k} = (R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu;\sigma}) K_\lambda \quad (2.1.9)$$

Για μέγιστα συμμετρικούς χώρους θα ισχύει ότι:

$$K_\lambda = 0$$

$$K_{\lambda;\nu} = -K_{\nu;\lambda}$$

οπότε για n διαστάσεις:

$$-nR^\lambda_{\rho\sigma\nu} + R^\lambda_{\sigma\rho\nu} + R^\lambda_{\sigma\rho\nu} + R^\lambda_{\nu\rho\sigma} = R^\lambda_{\rho\sigma\nu} + R_{\sigma\rho}\delta_\nu^\lambda - +R_{\nu\rho}\delta_\sigma^\lambda \quad (2.1.10)$$

και από την κυκλική ιδιότητα του τανυστή Riemann έχουμε:

$$(n-1)R_{\alpha\rho\sigma\nu} = R_{\nu\rho}g_{\alpha\sigma} - R_{\sigma\rho}g_{\alpha\nu} \quad (2.1.11)$$

Λόγω συμμετρίας και πολλαπλασιάζοντας με $g^{\alpha\lambda}$ παίρνουμε:

$$R_{\sigma\rho} - nR_{\sigma\rho} = -R^\lambda_{\lambda}g_{\sigma\rho} + R_{\rho\sigma} \quad (2.1.12)$$

και ο τανυστής Ricci γίνεται :

$$R_{\sigma\rho} = \frac{1}{n}g_{\sigma\rho}R^\lambda_{\lambda} \quad (2.1.13)$$

Άρα ο τανυστής Riemann γίνεται:

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = \frac{R^\alpha_{\alpha}}{n(n-1)}(g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}) \quad (2.1.14)$$

και επειδή το R^α_{α} είναι παντού σταθερό λόγω ισοτροπίας, ο τανυστής Riemann μπορεί να γραφτεί ως:

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = k(g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}) \quad (2.1.15)$$

2.2 FRW μετρικές

Αν και το σύμπαν με μια πρώτη ματιά μοιάζει να είναι πολύπλοκο και ανομοιογενές, σε πολύ μεγάλες κλίμακες μπορούμε να το θεωρήσουμε ομοιογενές και ισότροπο, δηλαδή αναλλοίωτο κάτω από μεταθέσεις και στροφές. Αυτά φυσικά ισχύουν μόνο για το χωρικό κομμάτι της μετρικής, δηλαδή για μια τρισδιάστατη τομή στο χρόνο. Έτσι, η μετρική για το σύμπαν θα μπορεί να γραφτεί στη μορφή [1]:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha(t)^2 g_{ij}(u) du^i du^j \quad (2.2.1)$$

όπου το $a(t)$ μας δείχνει κατά πόσο οι χωρικές αποστάσεις του σύμπαντος μεγαλώνουν ή μικραίνουν με το χρόνο. Εφόσον το σύμπαν διαθέτει ισοτροπία και ομοιογένεια, θα διαθέτει και σφαιρική συμμετρία οπότε το χωρικό μέρος της μετρικής θα γράφεται ως:

$$d\sigma^2 = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.2.2)$$

όπου

$$\beta = -\frac{1}{2}\ln(1 - kr^2) \quad (2.2.3)$$

και άρα η μετρική θα γίνεται:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.2.4)$$

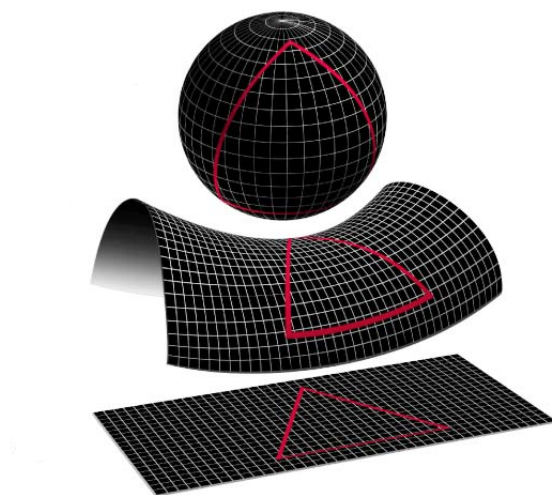
Ανάλογα με την τιμή της σταθεράς καμπυλότητας κ διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

$$\kappa = -1$$

$$\kappa = 0$$

$$\kappa = 1$$

που αντιστοιχούν σε χώρους με αρνητική, μηδενική και θετική καμπυλότητα αντίστοιχα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα [1].



Για $\kappa=0$ έχουμε:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.2.5)$$

Για $\kappa=1$

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2 \quad (2.2.6)$$

Για $\kappa=-1$

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sinh^2\psi d\Omega^2 \quad (2.2.7)$$

όπου:

$$r = \sin\chi$$

$$r = \sinh\psi$$

2.3 Ύλη και ακτινοβολία

Οι γαλαξίες και οι μεγάλες δομές του σύμπαντος μπορούν να προσεγγιστούν ως τέλεια ρευστά με τον ταχυστή ενέργειας ορμής να δίνεται από [12]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.3.1)$$

Στο σύστημα ηρεμίας η ταχύτητα θα είναι:

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (2.3.2)$$

και άρα ο τανυστής ενέργειας ορμής θα γίνεται:

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

Από την εξίσωση συνέχειας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^\mu_0 &= 0 \\ \partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda &= 0 \\ -\partial_t \rho - 3 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} (\rho + p) &= 0 \\ 3H(\rho + p) + \partial_t \rho &= 0 \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε την παράμετρο Hubble:

$$H = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad (2.3.4)$$

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής θα ισχύει ότι:

$$d(\delta E) = -pd(\delta V) \quad (2.3.5)$$

Όπου η μεταβολή στο όγκο θα αλλάζει με το χρόνο ανάλογα με τον παράγοντα κλίμακας:

$$\delta V = \alpha(t)^3 \delta V_C \quad (2.3.6)$$

με V_C ο *comoving* όγκος. Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt} [\rho(t) \alpha(t)^3] = -p(t) \frac{d}{dt} [\alpha(t)^3] \quad (2.3.7)$$

Οι γαλαξίες προσεγγίζονται καλά με ασυμπίεστο αέριο, δηλαδή τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και άρα η πίεση είναι μηδενική:

$$\frac{d}{dt} [\rho(t) \alpha(t)^3] = 0 \quad (2.3.8)$$

Για ακτινοβολία ισχύει ότι:

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (2.3.9)$$

και άρα βρίσκουμε:

$$\rho(t) = \rho(t_0) \left[\frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t)} \right]^4 \quad (2.3.10)$$

Γενικότερα για οποιαδήποτε κατάσταση ενέργειας η καταστατική εξίσωση είναι της μορφής:

$$p = w\rho \quad (2.3.11)$$

και επειδή η εξίσωση συνέχειας μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad (2.3.12)$$

θα έχουμε μια σχέση της μορφής:

$$\rho \alpha^{-3(1+w)} \quad (2.3.13)$$

2.4 Εξισώσεις Friedmann

Υπολογίζοντας τα σύμβολα Christoffel και άρα τον ταυιστή Ricci μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις Einstein .Οι σχετικές ποσότητες έχουν υπολογιστεί αναλυτικά για τις f(R)θεωρίες παρακάτω οπότε δε θα τα υπολογίσουμε και εδώ.Για τη 00 συνιστώσα έχουμε:

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \quad (2.4.1)$$

και από τις χωρικές συνιστώσες παίρνουμε:

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + 2\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} + 2\frac{k}{\alpha^2} = 4\pi G(\rho - p) \quad (2.4.2)$$

Εδώ τα ρ και p αποτελούνται από τη συνολική πυκνότητα ενέργειας και πίεση του σύμπαντος. Παρατηρούμε ότι για να έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος(που παρατηρείται σήμερα) θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &> 0 \\ \rho + 3p &< 0 \\ w &< -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Όμως με τη συνολική πίεση και ενέργειας ύλης και ακτινοβολίας δεν μπορούμε να το επιτύχουμε αυτό για αυτό εισαγάγουμε την κοσμολογική σταθερά με καταστατική εξίσωση

$$p = -\rho \quad (2.4.3)$$

και έτσι επιτυγχάνουμε επιταχυνόμενη διαστολή. Γενικά είναι επίσης χρήσιμο να εισαγάγουμε κάποιες χρήσιμες ποσότητες που βοηθούν στην ανάλυση κοσμολογικών μοντέλων.Κατ'άρχας, ορίζουμε την κρίσιμη πυκνότητα ενέργειας:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.4.4)$$

και τις παράμετρος πυκνότητας:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad (2.4.5)$$

Με αυτό τον τρόπο, η εξίσωση Friedmann παίρνει τη μορφή

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2\alpha^2} \quad (2.4.6)$$

Αυτή η έκδοση της εξίσωσης Friedmann είναι ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί συνδέει τις παραμέτρους πυκνότητας με τη σταθερά καμπυλότητας.Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} \Omega - 1 &< 0 \text{ ανοιχτό} \\ \Omega - 1 &= 0 \text{ επίπεδο} \\ \Omega - 1 &> 0 \text{ κλειστό} \end{aligned}$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι ανάλογα με την εποχή της ιστορίας του σύμπαντος η κυριαρχία της εκάστοτε ενέργειας αλλάζει. Πιο συγκεκριμένα αν το σύμπαν κυριαρχείται από ύλη, τότε οι υπόλοιποι παράμετροι πυκνότητας είναι πρακτικά μηδέν, οπότε για τον συντελεστή κλίμακας βρίσκουμε ότι:

$$\alpha(t) \propto t^{2/3} \quad (2.4.7)$$

Για σύμπαν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία:

$$\alpha(t) \propto t^{1/2} \quad (2.4.8)$$

και για σύμπαν κυριαρχούμενο από σκοτεινή ενέργεια:

$$\alpha(t) \propto e^{Ht} \quad (2.4.9)$$

2.5 Κοσμολογική μετατόπιση προς το ερυθρό

Ας υποθέσουμε ότι ένας απομακρυσμένος γαλαξίας στέλνει ένα φωτεινό παλμό τη χρονική στιγμή t_e με αντίστοιχη συχνότητα ω_e και εμείς το λαμβάνουμε τη χρονική στιγμή t_0 με συχνότητα ω_0 . Ο γαλαξίας βρίσκεται σε απόσταση R και ο παλμός θα ακολουθεί την κοσμική γραμμή [12]:

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + \alpha(t)^2 dr^2 \quad (2.5.1)$$

και θα διανύσει απόσταση:

$$R = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} \quad (2.5.2)$$

Αν ο γαλαξίας στέλνει τους παλμούς σε ίσα χρονικά διαστήματα θα ισχύει:

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} = R \quad (2.5.3)$$

και η μεταβολή στο χρόνο θα είναι μηδενική:

$$\frac{\delta t_0}{\alpha(t_0)} - \frac{\delta t_e}{\alpha(t_e)} = 0 \quad (2.5.4)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{\alpha(t_e)}{\alpha(t_0)} \quad (2.5.5)$$

Έτσι, η συχνότητα λήψης θα είναι μικρότερη από τη συχνότητα εκπομπής και έχουμε κοσμολογική μετατόπιση προς το ερυθρό.

$$1 + z = \frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t_e)} \quad (2.5.6)$$

Η κοσμολογική μετατόπιση προς το ερυθρό συνδέεται άμεσα και με το νόμο του Hubble που μας λέει ότι όσο πιο μακριά βρίσκεται ένας γαλαξίας, τόσο πιο γρήγορα απομακρύνεται:

$$v = H_0 d \quad (2.5.7)$$

2.6 Ιστορία του σύμπαντος

Η εικόνα που έχουμε σήμερα για το σύμπαν είναι ότι ξεκίνησε από μια ζεστή και πυκνή κατάσταση όπου οι δυνάμεις ήταν ενοποιημένες και μετά υπήρξε μια εποχή πληθωρισμού όπου το σύμπαν υπέστη μια εκθετική διαστολή. Για να εξηγηθεί αυτή η διαστολή υποθέτουμε ένα βαθμωτό πεδίο που την προκάλεσε. Έπειτα λόγω της διαστολής το σύμπαν άρχισε να κρυώνει. Κατά τα πρώτα 300000 χρόνια του σύμπαντος η κατάσταση της ύλης ήταν ένα πλάσμα όπου δεν μπορούσαν να δημιουργηθούν άτομα. Από εκείνη τη στιγμή το σύμπαν άρχισε να γίνεται διαμπερές και έτσι τα φωτόνια μπόρεσαν να δραπετεύσουν και τα βλέπουμε σήμερα ως την ακτινοβολία υποβάθρου. Έπειτα άρχισαν σιγά σιγά να δημιουργούνται οι γαλαξίες και φτάνουμε στο σήμερα όπου το σύμπαν διασέλλεται επιταχυνόμενα, σε αντίθεση με την εποχή κυριαρχίας της ύλης όπου είχαμε επιβραδυνόμενη διαστολή.

Κεφάλαιο 3

f(R) και Scalar-Tensor Θεωρίες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια εισαγωγή στις f(R) θεωρίες βαρύτητας. Αρχικά θα εξηγήσουμε γιατί χρειαζόμαστε μια πιο βελτιωμένη θεωρία από τη γενική σχετικότητα (παρόλες τις μέχρι τώρα επιτυχίες της) και πώς οι f(R) μπορούν να βοηθήσουν, στη συνέχεια θα εξαγάγουμε τις εξισώσεις πεδίου και τέλος θα εξετάσουμε την αντιστοίχιση που υπάρχει μεταξύ f(r) θεωρίες και scalar-tensor θεωρίες.

3.1 Η ανάγκη για τροποποίηση της GR

Το 1998 οι ανεξάρτητες ομάδες Supernova Cosmology Project και High-Z Supernova Search Team μελετώντας τις φωτεινότητες απομακρυσμένων γαλαξιών παρατήρησαν ότι το σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα, σε αντίθεση με την πεποίθηση που υπήρχε από την εποχή του Hubble, ότι λόγω της θετικής βαρυτικής έλξης του συνόλου των γαλαξιών το σύμπαν θα έπρεπε να επιβραδύνεται. Αν συμπεριλάβουμε σε αυτό και το γεγονός ότι σε ένα σμήνος γαλαξιών η γωνιακή ταχύτητα των πιο απομακρυσμένων γαλαξιών δεν φθίνει σε συνάρτηση με την απόσταση όπως θα περιμέναμε προσεγγιστικά από τον νόμο του Kepler αλλά παρουσιάζουν ένα διάστημα σταθερών ταχυτήτων που δεν εξηγείται με την υπολογισμένη μάζα του σμήνους. Έτσι, σήμερα γνωρίζουμε ότι το σύμπαν αποτελείται από 70% σκοτεινή ενέργεια, 25% σκοτεινή ύλη και το standard model αποτελεί μόνο το 5%. Όσον αφορά τη σκοτεινή ενέργεια, το ρόλο της παίρνει πιο συχνά η κοσμολογική σταθερά αφού έχει καταστατική εξίσωση $p = -1$ και έτσι όπως είδαμε οδηγεί σε επιταχυνόμενη διαστολή. Η τιμή της σήμερα υπολογίζεται ως $\rho_\Lambda 10^{-47} GeV^4$. Από την άλλη η ενέργεια κενού που υπολογίζουμε από την κβαντική θεωρία πεδίου είναι $\langle T_{00} \rangle = 10^{76} GeV^4$, δηλαδή 123 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη. Επίσης, γνωρίζουμε ότι η κβαντική βαρύτητα δεν είναι επακανονικοποιήσιμη και π.χ. σε θεωρίες χορδών έχει παρατηρηθεί ότι χρειάζονται επιπλέον διορθωτικοί όροι ανώτερης τάξης στη δράση της γενικής σχετικότητας. Έτσι είναι λογικό να προσπαθήσουμε να λύσουμε αυτά τα προβλήματα τροποποιώντας τη δράση της γενικής σχετικότητας, κρατώντας βέβαια τη βασική δομή της. Γενικά υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι να προσπαθήσει κάποιος να τροποποιήσει τις εξισώσεις Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.1.1)$$

Ο ένας είναι να τροποποιήσουμε τον ταυστή ύλοενέργειας και ο άλλος είναι να τροποποιήσουμε το μέρος της βαρύτητας. Εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με το δεύτερο και πιο συγκεκριμένα με f(r) θεωρίες βαρύτητας στις οποίες αντικαθιστούμε το βαθμωτό Ricci με μια γενική συνάρτηση του,

δηλαδή:

$$S[g] = \int \frac{1}{2\kappa} f(R) \sqrt{-g} \quad (3.1.2)$$

Έτσι, έχουμε μια σχετική ελευθερία ως προς τη διαλογή της συνάρτησης και έτσι μπορούμε να προσπαθήσουμε να λύσουμε τα παραπάνω κοσμολογικά προβλήματα.

3.2 Εξισώσεις πεδίου

Γενικά ισχύει ότι: $\det(e^A) = e^{\text{tr}A}$ και $\ln(\det B) = \text{tr}(\ln B) \rightarrow \frac{\delta \det B}{\det B} = \text{tr} \frac{\delta B}{B}$
 Άρα για $B = g_{ab}$ παίρνουμε:

$$\frac{\delta g}{g} = g^{ab} \delta g_{ab} \rightarrow \delta g = g g^{ab} \delta g_{ab} \quad (3.2.1)$$

και τελικά η μεταβολή της ορίζουσας γίνεται:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab} \quad (3.2.2)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τη μεταβολή του ταυυστή Ricci :

$$R_{\alpha\beta} = R^\rho{}_{\alpha\rho\beta} = \partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - \partial_\beta \Gamma^\rho{}_{\rho\alpha} + \Gamma^\rho{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\rho{}_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\alpha} = 2\Gamma^\rho{}_{\alpha[\beta,\rho]} + 2\Gamma^\rho{}_{\lambda[\rho} \Gamma^\lambda{}_{\beta]\alpha} \quad (3.2.3)$$

Είναι χρήσιμο να μεταβούμε τοπικά σε κανονικές συντεταγμένες Riemann όπου τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται, αλλά όχι και οι παράγωγοί τους:

$$R_{\alpha\beta} = R^\rho{}_{\alpha\rho\beta} = \partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} - \partial_\beta \Gamma^\rho{}_{\rho\alpha} + \Gamma^\rho{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} \quad (3.2.4)$$

Τα σύμβολα Christoffel ως προς τη μετρική δίνονται από τη σχέση:

$$\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}) \quad (3.2.5)$$

Επειδή βρισκόμαστε σε κανονικές συντεταγμένες, αν πάρουμε τη μεταβολή της αντίστροφης μετρικής θα προκύψει ξανά σύμβολο Christoffel που όπως είδαμε μηδενίζεται. Άρα η μεταβολή του ταυυστή Ricci θα γίνει:

$$\delta R_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\delta g_{da,bc} + g_{db,ac} - g_{ab,dc}) - \frac{1}{2} g^{cd} \delta g_{dc,ab} \quad (3.2.6)$$

$$g^{ab} \delta R_{ab} = g^{ab} g^{cd} (\nabla_b \nabla_c \delta g_{ad} - \nabla_a \nabla_b \delta g_{cd}) \quad (3.2.7)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση:

$$g_{ab} g^{bd} = \delta_a^d \rightarrow \delta g_{ab} = -g_{ab} \delta g^{bc} \quad (3.2.8)$$

παίρνουμε:

$$g^{ab} \delta R_{ab} = g^{ab} \nabla_a \nabla_b g_{cd} \delta g^{dc} - g_{ad} g^{ab} \nabla_b \nabla_c \delta g^{dc} \quad (3.2.9)$$

$$= \square \delta g^{ab} g_{ab} - \delta_d^b \nabla_b \nabla_c \delta g^{dc} \quad (3.2.10)$$

$$= g_{ab} \square \delta g^{ab} - \nabla_a \nabla_b g^{ab} \quad (3.2.11)$$

$$= \nabla_c (\nabla^c \delta g - \nabla_b \delta g^{bc}) \quad (3.2.12)$$

δηλαδή είναι ολική παράγωγος. Είμαστε σε θέση τώρα να υπολογίσουμε τις εξισώσεις κίνησης ως εξής:

$$\begin{aligned}\delta S[g] &= \int \frac{1}{2\kappa} (\delta f(R)\sqrt{-g} + f(R)\delta\sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int \frac{1}{2\kappa} \left(F(R)\delta R\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} f(R) \right)\end{aligned}$$

όπου $F(R) = \frac{\delta f}{\delta R}$. Όμως $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \rightarrow \delta R = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ που το έχουμε υπολογίσει. Άρα εκτελώντας στα επόμενα διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις παίρνουμε [9]:

$$\delta S[g] = \int \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} \left(F(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} f(R) \right) \quad (3.2.13)$$

$$\delta S[g] = \int \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left(F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + [g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu]F(R) \right) \quad (3.2.14)$$

$$\frac{1}{\kappa}F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + [g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu]F(R) = 0 \quad (3.2.15)$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις πεδίου στο κενό για την $f(R)$ βαρύτητα. Φυσικά, αν προσθέσουμε στη δράση υλοενέργειες τότε παίρνουμε:

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + [g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu]F(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.2.16)$$

Θα είναι χρήσιμο επίσης να ορίσουμε και το ίχνος της εξίσωσης πολλαπλασιάζοντας με την αντίστροφη μετρική:

$$RF(R) - 2f(R) + 3\square F(R) = \kappa T \quad (3.2.17)$$

3.2.1 Άλλοι φορμαλισμοί

Η θεωρία που δείξαμε εδώ ονομάζεται και $f(r)$ θεωρία μετρικής. Υπάρχουν άλλοι δύο φορμαλισμοί για την εξαγωγή των εξισώσεων πεδίου και αν και δεν θα ασχοληθούμε με αυτούς τους αναφέρουμε για λόγους πληρότητας. Ο πρώτος από αυτούς είναι ο λεγόμενος φορμαλισμός Palatini κατά τον οποίο μεταβάλλουμε τη δράση ως προς τη μετρική και τη σύνδεση με ανεξάρτητο τρόπο. Η δράση τώρα παίρνει τη μορφή [9]:

$$S_p = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.2.18)$$

όπου \tilde{R} είναι ο Ricci τανυστής υπολογισμένος με την ανεξάρτητη σύνδεση. Η μεταβολή του επίσης θα επηρεάζεται από την ανεξαρτησία της σύνδεσης και θα είναι:

$$\delta\tilde{R} = \tilde{\nabla}_\lambda\gamma_{\mu\nu}{}^\lambda - \tilde{\nabla}_\nu\gamma_{\mu\lambda}{}^\lambda \quad (3.2.19)$$

Έτσι, μεταβάλλοντας τη δράση ανεξάρτητα ως προς τη μετρική και τη σύνδεση τελικά παίρνουμε:

$$f'(\tilde{R})\tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f'(\tilde{R})g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.2.20)$$

$$-\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{\mu\lambda}) + \tilde{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{\sigma(\mu})\delta_{\lambda}{}^{\nu)}) = 0 \quad (3.2.21)$$

Για $f(\tilde{R})$ λαμβάνουμε τις εξισώσεις γενικής σχετικότητας, δηλαδή στη γενική σχετικότητα οι φορμαλισμοί είναι ισοδύναμοι. Ψάχνει και ένας τρίτος φορμαλισμός (metric affine gravity) όπου η δράση είναι :

$$S_p = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi, \Gamma_{\mu\lambda}{}^\lambda) \quad (3.2.22)$$

3.3 Scalar-tensor θεωρίες και Conformal μετασχηματισμοί

Η πιο γενική scalar-tensor θεωρία έχει τη μορφή:

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sum_{i=2}^5 \frac{1}{8\pi G_N} \mathcal{L}_i[g_{\mu\nu}, \phi] + \mathcal{L}_M[g_{\mu\nu}, \psi_M] \right] \quad (3.3.1)$$

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi, X) \quad (3.3.2)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi \quad (3.3.3)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X}(\phi, X) [(\square \phi)^2 - \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}] \quad (3.3.4)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5,X}(\phi, X) [(\square \phi)^3 + 2\phi_{;\mu}{}^\nu \phi_{;\nu}{}^\alpha \phi_{;\alpha}{}^\mu - 3\phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} \square \phi] \quad (3.3.5)$$

Μια ειδική περίπτωση τέτοιων θεωριών είναι η brans-dicke θεωρία με δράση:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) + \mathcal{L}_M \right) \quad (3.3.6)$$

με αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{2\omega}{\phi} \square \phi + R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V' = 0 \quad (3.3.7)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_m u \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu} \quad (3.3.8)$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια θεωρία και περιγράφεται από μια μετρική. Τότε μπορούμε να κάνουμε ένα μετασχηματισμό στη μετρική της μορφής [13].

$$g'_{\mu\nu} = \Omega(t, x)^2 g_{\mu\nu} \quad (3.3.9)$$

Επισημαίνουμε ότι ένας τέτοιος μετασχηματισμός δεν σχετίζεται με ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων. Πιο συγκεκριμένα η κυριότερη συνέπεια του μετασχηματισμού θα είναι ότι

$$ds'^2 = \Omega(t, x)^2 ds^2 \quad (3.3.10)$$

Δηλαδή οι χωροχρονικές αποστάσεις αλλάζουν. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός είναι σταθερός τότε έχουμε ένα scaling της αρχικής θεωρίας. Έτσι, όταν αλλάζουμε από ένα σύστημα σε ένα άλλο λέμε ότι πηγαίνουμε σε νέο σύμμορφο σύστημα. Οι εξισώσεις πεδίου που βγάλαμε προηγουμένως ανήκουν στο Jordan σύστημα. Παρατηρούμε ότι το βαθμωτό πεδίο έχει μη μεδενική σύζευξη με την καμπυλότητα του χωροχρόνου. Για να αποφύγουμε αυτή τη σύζευξη εκτελούμε ένα σύμμορφο μετασχηματισμό για τον οποίο θα ισχύουν:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g'_{\mu\nu} \quad (3.3.11)$$

$$g^{\mu\nu} = \Omega^2 g'^{\mu\nu} \quad (3.3.12)$$

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-4} \sqrt{-g'} \quad (3.3.13)$$

Για τα σύμβολα Christoffel θα έχουμε:

$$\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\mu} = \Gamma'_{\nu\lambda}{}^{\mu} - (f_{\nu}\delta_{\lambda}{}^{\mu} + f_{\lambda}\delta_{\nu}{}^{\mu} - f'^{\mu}g'_{\nu\lambda}) \quad (3.3.14)$$

όπου

$$f = \ln\Omega \quad (3.3.15)$$

$$f_{\nu} = \frac{\partial_{\nu}\Omega}{\Omega} = \partial_{\nu}f \quad (3.3.16)$$

Επίσης ο τανυστής Ricci θα γίνεται:

$$R = \Omega^2(R' + 6\Box'f - 6g^{\mu\nu}f_{\mu}f_{\nu}) \quad (3.3.17)$$

$$\Box'f = \frac{1}{\sqrt{-g'}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g'}g'^{\mu\nu}\partial_{\nu}f) \quad (3.3.18)$$

Άρα για τη Λαγκραντζιανή της brans dicke χωρίς τη δράση ύλης έχουμε τρεις όρους:

$$L_1 = \sqrt{-g}\phi R \quad (3.3.19)$$

$$L_2 = \sqrt{-g}\frac{\omega}{\phi}(\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi) \quad (3.3.20)$$

$$L_3 = V(\phi) \quad (3.3.21)$$

Για λόγους που θα φανούν στη συνέχεια ας πάρουμε την περίπτωση $\omega=0$, οπότε ο δεύτερος όρος μηδενίζεται. Έτσι,για τον πρώτο όρο έχουμε:

$$L_1 = \sqrt{-g}\phi R = \Omega^{-4}\sqrt{-g'}\phi\Omega^2(R' + 6\Box'f - 6g^{\mu\nu}f_{\mu}f_{\nu}) \quad (3.3.22)$$

$$= \sqrt{-g'}\Omega^{-2}\phi(R' + 6\Box'f - 6g^{\mu\nu}f_{\mu}f_{\nu}) \quad (3.3.23)$$

Όμως δεν έχουμε προσδιορίσει ακόμα το σύμμορφο μετασχηματισμό οπότε μπορούμε να διαλέξουμε:

$$\Omega^{-2} = 1 \quad (3.3.24)$$

και άρα έχουμε:

$$f_{\mu} = \frac{\partial_{\mu}\Omega}{\Omega} = \frac{1}{2}\frac{\partial_{\mu}\phi}{\phi} \quad (3.3.25)$$

Αν λάβουμε υπόψη και το γεγονός ότι ο κυματικός όρος θα μηδενιστεί μετά από ολοκλήρωση κατά παράγοντες κατά τη μεταβολή της δράσης τελικά παίρνουμε:

$$L_1 = \sqrt{-g'}(R' - \frac{3}{2}g'^{\mu\nu}\frac{\partial_{\mu}\phi^2}{\phi^2}) \quad (3.3.26)$$

Ορίζοντας το πεδίο

$$\phi = \exp(\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\psi) \quad (3.3.27)$$

και εκφράζοντας το δυναμικό ως προς το καινούργιο βαθμωτό πεδίο παίρνουμε τη δράση Brans-Dicke στο σύστημα Einstein:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g'}(\frac{R'}{2\kappa} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - V(\psi)) \quad (3.3.28)$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο δεν είναι πια συζευγμένο με την καμπυλότητα. Το πιο από τα δύο σύμμορφα συστήματα είναι το 'φυσικό' σύστημα πρέπει να επιβεβαιωθεί από το πείραμα αν και ακόμα και θεωρητικά έχειδειχθεί ότι στο Jordan σύστημα οι ενέργειες του πεδίου δεν είναι καλά καθορισμένες.

3.4 Ισοδυναμία $f(R)$ και scalar-tensor θεωριών

Ας επιστρέψουμε τώρα στις $f(R)$ θεωρίες:

$$S[g] = \int \frac{1}{2\kappa} f(R) \sqrt{-g} \quad (3.4.1)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πεδίο x και να γράψουμε τη δράση ως [9]:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (f(x) + f'(x)(R - x)) \quad (3.4.2)$$

Μεταβάλλοντας τη δράση ως προς το πεδίο x παίρνουμε:

$$f''(x)(x - R) = 0 \quad (3.4.3)$$

οπότε για μη μηδενικό $f''(x)$ παίρνουμε $x = R$ και άρα την αρχική δράση. Επιπλέον αν ορίσουμε:

$$\phi = f'(x) \quad (3.4.4)$$

$$V(\phi) = x(\phi)\phi - f(x(\phi)) \quad (3.4.5)$$

παίρνουμε:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R - V(\phi)) \quad (3.4.6)$$

δηλαδή οι $f(R)$ θεωρίες πεδίου είναι πλήρως ισοδύναμες με scalar-tensor θεωρίες στο Jordan σύστημα.

Κεφάλαιο 4

Σκοτεινή ενέργεια από καμπυλότητα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξαγάγουμε τις εξισώσεις Friedmann για τις $f(r)$ θεωρίες και στη συνέχεια θα αναλύσουμε ένα toy model για να δείξουμε πως μπορεί να δημιουργηθεί επιταχυνόμενη διαστολή στην παρούσα φάση του σύμπαντος. Τέλος, θα δείξουμε πολύ σύντομα πως η τροποποίηση της αρχικής δράσης της γενικής σχετικότητας μπορεί ενδεχομένως να εξηγήσει και το φαινόμενο της σκοτεινής ύλης.

4.1 Τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann

θα εφαρμόσουμε τώρα τη μετρική για ομοιογενές και ισοτροπικό σύμπαν:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 \quad (4.1.1)$$

στις πεδιακές εξισώσεις:

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + [g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu]F(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (4.1.2)$$

Αρχικά για τη μετρική θα ισχύουν τα εξής:

$$g_{00} = -1 = g^{00} \quad (4.1.3)$$

$$g_{11} = a(t)^2 \quad (4.1.4)$$

$$g^{11} = \frac{1}{a^2(t)} \quad (4.1.5)$$

$$\sqrt{-g} = a(t)^3 \quad (4.1.6)$$

Για τα σύμβολα Cristoffel υπολογίζουμε:

$$\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}\partial_t a(t)^2 - \frac{1}{2}g^{0j}\partial_j g_{00} = a(t)\dot{a}(t) \quad (4.1.7)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \Gamma_{00}^2 = \Gamma_{00}^3 = 0 \quad (4.1.8)$$

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{30}^0 = 0 \quad (4.1.9)$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = \frac{a(t)}{a(t)} \quad (4.1.10)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = 0 \quad (4.1.11)$$

$$\Gamma_{01}^2 = \frac{1}{2}g^{2\delta}(g_{1\delta,0} + g_{0\delta,1} - g_{01,\delta}) = \Gamma_{01}^3 = \Gamma_{02}^1 = \Gamma_{02}^3 = \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{03}^2 = 0 \quad (4.1.12)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{2\delta}(g_{1\delta,1} + g_{1\delta,1} - g_{11,\delta}) = \Gamma_{11}^3 = 0 \quad (4.1.13)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{2\delta}(g_{2\delta,1} + g_{1\delta,2} - g_{12,\delta}) = \Gamma_{13}^3 = 0 \quad (4.1.14)$$

Για τη χρονική συνιστώσα του τανυστή Ricci θα έχουμε:

$$R_{00} = \Gamma_{00}^{\alpha}{}_{,\alpha} - \Gamma_{0\alpha}^{\alpha}{}_{,0} + \Gamma_{0\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{i\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^i - \Gamma_{00}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^0 - \Gamma_{0i}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^i \quad (4.1.15)$$

$$= -3\partial_t \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - \Gamma_{01}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^1 - \Gamma_{02}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^2 - \Gamma_{03}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^3 \quad (4.1.16)$$

$$= -3\partial_t \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - 3\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha} = -3\frac{\ddot{\alpha}\alpha - \dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - 3\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha} \quad (4.1.17)$$

$$= -3\frac{\ddot{\alpha}\alpha + 3\dot{\alpha}^2 - 3\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -3\frac{\ddot{\alpha}\alpha}{\alpha^2} = -3\frac{\ddot{\alpha}\alpha}{\alpha^2} - 3\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} \quad (4.1.18)$$

$$= 3\left(\frac{\dot{\alpha}^2 - \ddot{\alpha}\alpha}{\alpha^2}\right) - 3\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha} \quad (4.1.19)$$

$$= -3\dot{H} - 3H^2 \quad (4.1.20)$$

Αντίστοιχα, για τις χωρικές συνιστώσες έχουμε:

$$R_{11} = \Gamma_{11}^{\alpha}{}_{,\alpha} - \Gamma_{1\alpha}^{\alpha}{}_{,1} + \Gamma_{\delta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{11}^{\delta} - \Gamma_{1\delta}^{\alpha}\Gamma_{1\alpha}^{\delta} \quad (4.1.21)$$

$$= \partial_t(a(t)\dot{\alpha}) + \Gamma_{0\alpha}^{\alpha}\Gamma_{11}^0 + \Gamma_{1\alpha}^{\alpha}\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{2\alpha}^{\alpha}\Gamma_{11}^2\Gamma_{3\alpha}^{\alpha}\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{10}^{\alpha}\Gamma_{1\alpha}^0 - \Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{1\alpha}^1 - \Gamma_{21}^{\alpha}\Gamma_{1\alpha}^2 - \Gamma_{13}^{\alpha}\Gamma_{1\alpha}^3 \quad (4.1.22)$$

$$= \partial_t(\alpha\dot{\alpha}) + 3\frac{\dot{\alpha}\dot{\alpha}\alpha}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\alpha\dot{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\alpha\dot{\alpha} \quad (4.1.23)$$

$$= \partial_t(\alpha\dot{\alpha}) + 3\dot{\alpha}^2 - 2\dot{\alpha}^2 = \partial_t(\alpha\dot{\alpha}) + \dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 = 2\dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha} = R_{22} = R_{33} \quad (4.1.24)$$

Για το βαθμωτό Ricci θα έχουμε:

$$R = g^{00}R_{00} + 3g^{11}R_{11} = \frac{3\ddot{\alpha}\alpha + 6\dot{\alpha}^2 + 3\alpha\ddot{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{6\alpha\ddot{\alpha} + 6\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} \quad (4.1.25)$$

$$= 6\left(\frac{\alpha\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}^2 + 2\dot{\alpha}^2}{\alpha^2}\right) = 6\dot{H} + 12H^2 = 6(\dot{H} + 2H^2) \quad (4.1.26)$$

Για τις εξισώσεις πεδίου θα χρειαστούμε και τον όρο:

$$g_{00}\square F(R) = (-1)\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_t(\sqrt{-g}g^{00}\partial_t F(R)) \quad (4.1.27)$$

$$= -\frac{1}{\alpha^3}\partial_t(-\alpha^3(t)\partial_t F(R)) = \frac{3}{\alpha^3}\alpha^2\dot{\alpha}F(\dot{R}) + F(\ddot{R}) \quad (4.1.28)$$

$$= 3H\dot{F} + \ddot{F} \quad (4.1.29)$$

Αντικαθιστώντας στις πεδιακές εξισώσεις παίρνουμε:

$$FR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}fg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square F - \nabla_\mu\nabla_\nu F = kT_{\mu\nu} \quad (4.1.30)$$

$$FR_{00} - \frac{1}{2}fg_{00} + g_{00}F - \partial_{tt}F = k\rho \quad (4.1.31)$$

$$F(-\frac{1}{2}R + 3H^2) + \frac{1}{2}f + 3H\dot{F} + \ddot{F} - \ddot{F} = k\rho \quad (4.1.32)$$

$$-\frac{1}{2}FR + 3FH^2 + \frac{1}{2}f + 3H\dot{F} = k\rho \quad (4.1.33)$$

$$3FH^2 = k\rho - \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}FR - 3H\dot{F} \quad (4.1.34)$$

$$3FH^2 = k\rho + \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} \quad (4.1.35)$$

και αντίστοιχα βρίσκουμε τις χωρικές συνιστώσες :

$$-2F\dot{H} = \ddot{F} - HF + k^2(\rho + p) \quad (4.1.36)$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα πως θα μπορούσαμε να λάβουμε την επίδραση της σκοτεινής ενέργειας γράφουμε τις εξισώσεις Friedmann στη μορφή:

$$H^2 = \frac{1}{3F}[k\rho + \frac{RF - f}{2} - 3H\dot{F}] \quad (4.1.37)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{F} \quad (4.1.38)$$

4.2 Σκοτεινή ενέργεια

Οι εξισώσεις Φριεδμανν για τη γενική σχετικότητα μπορούν να γραφτούν και στη μορφή:

$$H^2 = \frac{k}{3}\rho \quad (4.2.1)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -kp \quad (4.2.2)$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε τις πεδιακές εξισώσεις που εξαγάγαμε ως:

$$H^2 = \frac{k}{3f'}[\rho + \frac{1}{2}(RF' - f) - 3H\dot{R}f''] \quad (4.2.3)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{f'}[p + \dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')] \quad (4.2.4)$$

Και άρα στο κενό, δηλαδή απουσία ύλης παίρνουν τη μορφή [9]:

$$H^2 = \frac{k}{3f'} \left[\frac{1}{2}(RF' - f) - 3H\dot{R}f'' \right] \quad (4.2.5)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{f'} [\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')] \quad (4.2.6)$$

Παρατηρούμε ότι έχουν την ίδια μορφή με τις κανονικές εξισώσεις Φριεδμανν αν ορίσουμε ένα 'γεωμετρικό' ρευστό με πυκνότητα και πίεση αντίστοιχα:

$$\rho_{eff} = \frac{1}{f'} \left[\frac{1}{2}(RF' - f) - 3H\dot{R}f'' \right] \quad (4.2.7)$$

$$\frac{1}{f'} [\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')] \quad (4.2.8)$$

και η καταστατική εξίσωση του ρευστού θα είναι:

$$w_{ff} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{\frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f''} \quad (4.2.9)$$

Αυτού του είδους το γεωμετρικό ρευστό μπορούμε να το δούμε σαφέστερα αν ξαναγράψουμε τις εξισώσεις πεδίου σε μορφή που να μοιάζουν πιο πολύ στις εξισώσεις Einstein ως:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T^{eff}_{\mu\nu} + \frac{T_{\mu\nu}}{f'} \quad (4.2.10)$$

με

$$T^{eff}_{\mu\nu} = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2}(f - Rf')g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f' - g_{\mu\nu} \square f' \right] \quad (4.2.11)$$

Από την εξίσωση επιτάχυνσης:

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{k}{6}(\rho + 3p) \quad (4.2.12)$$

βλέπουμε ότι για να επέλθει επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος θα πρέπει να ισχύει:

$$\ddot{\alpha} > 0 \quad (4.2.13)$$

$$\rho + 3p > 0 \quad (4.2.14)$$

$$w < \frac{-1}{3} \quad (4.2.15)$$

4.3 Ανάλυση ενός μοντέλου για επιταχυνόμενη διαστολή

Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε το μοντέλο [8]:

$$f(R) = R - \frac{\mu^4}{R} \quad (4.3.1)$$

Αν κι έχει δειχθεί ότι αυτό το μοντέλο έχει διάφορα κοσμολογικά προβλήματα(πιο συγκεκριμένα δεν δίνει περίοδο του σύμπαντος που να κυριαρχείται από ύλη) αποτελεί καλό εισαγωγικό μοντέλο

για να κατανοήσουμε το πως μπορεί να συντελεσθεί επιταχυνόμενη διαστολή σε μεταγενέστερους χρόνους χωρίς την ανάγκη για σκοτεινή ενέργεια και κοσμολογική σταθερά. Για να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση στην τροποποιημένη εξίσωση Friedmann :

$$3FH^2 = k\rho + \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} \quad (4.3.2)$$

θα χρειαστούμε τις παρακάτω ποσότητες:

$$F = \frac{df}{dR} = 1 + \frac{\mu^4}{R^2} = 1 + \frac{\mu^4}{36(\dot{H} + 2H^2)^2} \quad (4.3.3)$$

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) \quad (4.3.4)$$

$$\dot{F} = \frac{-2\mu^4 R\dot{R}}{R^4} = \frac{-\mu^4(\ddot{H} + 4H\dot{H})}{18(\dot{H} + 2H^2)^2} \quad (4.3.5)$$

$$FR = \left(1 + \frac{\mu^4}{36(\dot{H} + 2H^2)^2}\right) (6(\dot{H} + 2H^2)) \quad (4.3.6)$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις πεδίου παίρνουμε:

$$3H^2 + \frac{3\mu^4 H^2}{36(\dot{H} + 2H^2)^2} = k\rho + 3(\dot{H} + 2H^2) + \frac{\mu^4}{12(\dot{H} + 2H^2)} \quad (4.3.7)$$

$$- \frac{R}{2} + \frac{\mu^4}{2R} + \frac{2H\mu^4(\ddot{H} + 4H\dot{H})}{12(\dot{H} + 2H^2)^3} \quad (4.3.8)$$

$$3H^2 + \frac{\mu^4 H^2}{12(\dot{H} + 2H^2)^2} = k\rho + 3(\dot{H} + 2H^2) + \frac{\mu^4}{12(\dot{H} + 2H^2)} - 3(\dot{H} + 2H^2) \quad (4.3.9)$$

$$+ \frac{\mu^4}{12(\dot{H} + 2H^2)} + \frac{2H\mu^4(\ddot{H} + 4H\dot{H})}{12(\dot{H} + 2H^2)^3} \quad (4.3.10)$$

$$3H^2 + \frac{\mu^4 H^2(\dot{H} + 2H^2)}{12(\dot{H} + 2H^2)^3} = k\rho + \frac{2\mu^4(\dot{H} + 2H^2)^2}{12(\dot{H} + 2H^2)^3} + \frac{2H\mu^4(\ddot{H} + 4H\dot{H})}{12(\dot{H} + 2H^2)^3} \quad (4.3.11)$$

$$3H^2 - \frac{\mu^4}{12(\dot{H} + 2H^2)^3} (15\dot{H}H^2 + 6H^4 + 2\dot{H}^2 + 2H\ddot{H}) = k\rho \quad (4.3.12)$$

Αντίστοιχα, για τις χωρικές συνιστώσες των εξισώσεων πεδίου λαμβάνουμε:

$$\dot{H} + \frac{3}{2}H^2 - \frac{\mu^4}{72(\dot{H} + 2H^2)^2} [4\dot{H} + 9H^2 - R^2\partial_t\partial_t(\frac{1}{R^2}) - 2R^2H\partial_t(\frac{1}{R^2})] = -\frac{k\rho}{2} \quad (4.3.13)$$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι 4ης τάξης και έτσι είναι πολύ δύσκολο να τις διαχειριστούμε. Όπως όμως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο κάθε $f(r)$ θεωρία βαρύτητας ισοδυναμεί με μια scalar-tensor θεωρία. Πιο συγκεκριμένα είδαμε ότι ισοδυναμεί με τη θεωρία Brans-Dicke με $\omega=0$ στο Jordan σύστημα. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι θα ισοδυναμεί και στο Einstein σύστημα το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε. Έτσι, ξεκινώντας από τη δράση [10]:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x f(R) + \int d^4L_m \quad (4.3.14)$$

εκτελώντας ένα σύμμορφο μετασχηματισμο της μορφής

$$g'_{\mu\nu} = F(R)g_{\mu\nu} \quad (4.3.15)$$

και με τους ορίσμούς που δώσαμε στο κεφάλαιο για τους σύμμορφους μετασχηματισμούς βρίσκουμε:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g'} \left[\frac{1}{2k^2} [R' + 6\Box(\ln(\Omega)) - 6g'^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu (\ln(\Omega)) - \frac{1}{2k^2} \frac{(RF - f)}{F^2}] \right] + \int d^4x L_m \quad (4.3.16)$$

και ορίζοντας το πεδίο:

$$\phi = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{3}{2}} \ln F \rightarrow F = \exp\left(k \sqrt{\frac{2}{3}} \phi\right) \quad (4.3.17)$$

παίρνουμε τη δράση:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g'} \left[\frac{1}{2k^2} R' - \frac{1}{2} g'^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x L_m \quad (4.3.18)$$

Ας δούμε τώρα την εξίσωση που ικανοποιεί το βαθμωτό πεδίο. Η Λαγκραντζιανή θα είναι [10]:

$$L = -\sqrt{g'} \frac{1}{2} g'^{\mu\nu} \nabla_{\mu\alpha} \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) + L_m \quad (4.3.19)$$

Οι Euler-Lagrange εξισώσεις θα είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial L_m}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \quad (4.3.20)$$

και παίρνουμε:

$$\Box' \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{\partial L_m}{\sqrt{g'} \partial \phi} = 0 \quad (4.3.21)$$

Για τον τελευταίο όρο θα έχουμε:

$$\frac{\partial L_m}{\partial \phi} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \left(\frac{-2\partial L}{\sqrt{-g} \partial g^{\mu\nu}} \right) \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \phi} \quad (4.3.22)$$

$$= -\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \phi} = -\frac{\sqrt{-g'}}{2F} \frac{\partial F g^{\mu\nu}}{\partial \phi} T_{\mu\nu} = \sqrt{-g'} k Q T' \quad (4.3.23)$$

με

$$T'_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{F} \quad (4.3.24)$$

$$Q = \frac{-1}{2kF} \frac{\partial F}{\partial \phi} \quad (4.3.25)$$

και άρα παίρνουμε την εξίσωση:

$$\Box' \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} + k Q T' = 0 \quad (4.3.26)$$

Για το μοντέλο που εξετάζουμε ο σύμμορφος μετασχηματισμός θα είναι:

$$1 + \frac{\mu^4}{R^2} = \exp\left(\frac{\sqrt{2}\phi}{3M^2}\right) \quad (4.3.27)$$

Επίσης θέλουμε να φέρουμε τη σύμμορφη μετρική σε μορφή ανάλογη με την:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t)dx \quad (4.3.28)$$

Οπότε είναι χρήσιμο να εκτελέσουμε τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων:

$$dt' = \sqrt{F}dt \quad (4.3.29)$$

$$\alpha' = \sqrt{F}\alpha \quad (4.3.30)$$

και η καινούργια παράμετρος Hubble θα γίνεται:

$$H' = \frac{\dot{\alpha}'}{\alpha'} = \frac{H}{\sqrt{F}} + \frac{1}{2F} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{M^2} \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \phi \frac{1}{M^2}\right) \phi' \quad (4.3.31)$$

$$= \frac{H}{\sqrt{F}} + \frac{\phi'}{\sqrt{6}M^2} \quad (4.3.32)$$

Για την εξίσωση Friedmann στο σύμμορφο σύστημα παίρνουμε:

$$3H'^2 = \frac{1}{M^2}(\rho_\phi + \rho) \quad (4.3.33)$$

Ο κυματικός τελεστής για το βαθμωτό πεδίο στο σύμμορφο σύστημα θα είναι:

$$\square' \phi = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \partial_\mu (\sqrt{-g'} g'^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \quad (4.3.34)$$

$$= \frac{\partial_\mu g'}{2g'} g'^{\mu\nu} \partial_\nu \phi + \partial_\mu g'^{\mu\nu} \partial_\nu \phi + g'^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_\nu \phi) \quad (4.3.35)$$

$$= -3H' \phi' - \phi'' \quad (4.3.36)$$

Ακόμη, για την πυκνότητα ενέργειας του βαθμωτού πεδίου και τη δυναμικό για τη συγκεκριμένη θεωρία έχουμε

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \quad (4.3.37)$$

$$V = \mu^4 M \frac{\sqrt{F-1}}{F^2} \quad (4.3.38)$$

Αν το πεδίο έχει την κατάλληλη αρχική τιμή τότε θα ξεπεράσει το μέγιστο δυναμικό και για $F-1 \rightarrow F$ το δυναμικό θα προσεγγίσει την τιμή:

$$V = \mu^2 M^2 \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{M}\right) \quad (4.3.39)$$

δίνοντας για το scale factor

$$\alpha(t) t^{4/3} \quad (4.3.40)$$

στο σύμμορφο σύστημα και

$$\alpha(t) t^2 \quad (4.3.41)$$

στο φυσικό σύστημα, δίνοντας επιταχυνόμενη διαστολή. Στα παραπάνω θεωρήσαμε ότι το δυναμικό υπερεισχύει της κινητικής ενέργειας του πεδίου και βλέπουμε ότι όταν έχουμε μεγάλη καμπυλότητα (κοντά στην αρχή του σύμπαντος) υπερεισχύει ο όρος R , ενώ όσο το σύμπαν διαστέλλεται υπερεισχύει ο όρος $1/R$.

4.4 Νευτώνειο όριο

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε το Νευτώνειο όριο των $f(R)$ θεωριών. Γνωρίζουμε ότι η Λαγκραντζιανή για ένα σωματίδιο σε βαρυτικό πεδίο δίνεται από τη σχέση [15]:

$$L = \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}\right)^{1/2} \quad (4.4.1)$$

που μπορεί να γραφτεί ως

$$L = (-g_{00} - 2g_{0j}v^j - g_{jk}v^jv^k)^{1/2} \quad (4.4.2)$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι από τη γενική σχετικότητα ότι το Νευτώνειο δυναμικό δίνεται από:

$$g_{00} = -1 + 2U \quad (4.4.3)$$

Άρα το Νευτώνειο όριο αντιστοιχεί σε :

$$L = (1 - 2U - v^2)^{1/2} \quad (4.4.4)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα v είναι μια ποσότητα πρώτης τάξης τότε θα έχουμε:

$$U \sim v^2 \sim O(2) \quad (4.4.5)$$

και άρα η Λαγκραντζιανή θα είναι δεύτερης τάξης. Άρα το Νευτώνειο όριο είναι δεύτερης τάξης, το μετα-Νευτώνειο 4ης κλπ. Αυτό υποδηλώνει ότι θα αναπτύξουμε τη μετρική ως:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00}^{(2)} + O(4) \\ g_{0i} &= O(3) \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + h_{ij}^{(2)} + O(4) \end{aligned}$$

Από αυτή την ανάπτυξη της μετρικής προκύπτουν αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(2)} \\ R_{0i} &= O(3) \\ R_{ij} &= \frac{1}{2}(-\nabla^2 h_{ij}^{(2)} + h_{00}^{(2)}{}_{,ij} - h_{kk}^{(2)}{}_{,ij} + h_{ik}^{(2)}{}_{,kj} + h_{kj}^{(2)}{}_{,ki}) + O(4) \\ R &= R^{(2)} + O(4) \\ f(R) &= f'(0)R^{(2)} + O(4) \\ f'(R) &= f'(0) + f''(0)R^{(2)} + O(4) \\ T^{00} &= T^{00(2)} + O(4) \\ T^{0i} &= O(3) \\ T^{ij} &= O(4) \end{aligned}$$

όπου έχει γίνει η υπόθεση ότι η f είναι αναλυτική στο 0. Αντικαθιστώντας οι εξισώσεις τελικά παίρνουμε σε δεύτερη τάξη [3]:

$$\begin{aligned}\nabla^2 R^{(2)} &= \frac{1}{3f''(0)} kT^{00(2)} + \frac{f'(0)}{3f''(0)} R^{(2)} \\ \nabla^2 h_{00}^{(2)} &= -\frac{k}{f'(0)} T^{00(2)} + \frac{f''(0)}{f'(0)} \nabla^2 R^{(2)} \\ \nabla^2 h_{ij}^{(2)} &= -\left(\frac{k}{f'(0)} T^{00(2)} + \frac{f''(0)}{f'(0)} \nabla^2 R^{(2)}\right) \delta_{ij}\end{aligned}$$

Η λύσης της πρώτης εξίσωσης είναι:

$$R^{(2)} = -\frac{2a}{\Psi}(x, t)\Psi = -G \int \frac{\rho(x', t)e^{-a|x-x'|}}{|x-x'|} d^3x' \quad (4.4.6)$$

με $a^2 = \frac{f'(0)}{3f''(0)}$. Οι λύσεις των επόμενων δύο εξισώσεων είναι:

$$\begin{aligned}h_{00}^{(2)} &= -2\left(\Phi(x, t) + \frac{1}{3}\Psi(x, t)\right) \\ h_{ij}^{(2)} &= -2\left(\Phi(x, t) + \frac{1}{3}\Psi(x, t)\right)\delta_{ij}\end{aligned}$$

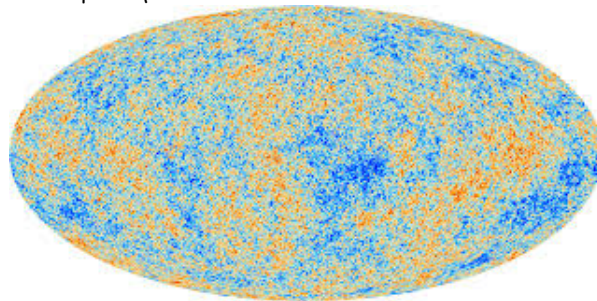
με $\Phi = -G \int \frac{\rho(x', t)}{|x-x'|} d^3x'$. Έτσι, παρατηρούμε ότι *Yukawa* διορθώσεις στο δυναμικό που θα μπορούσαν να μειώσουν την ποσότητα σκοτεινής ύλης στο σύμπαν.

Κεφάλαιο 5

Πληθωρισμός

5.1 Προβλήματα συμβατικής κοσμολογίας

Η ακτινοβολία υποβάθρου μας λέει ότι το σύμπαν ήταν πολύ ομοιόμορφο 370000 χρόνια μετά τη μεγάλη έκρηξη όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Θέλουμε να δούμε αν τα φωτόνια είχαν αρκετό χρόνο να ταξιδέψουν από το ένα σημείο στο άλλο έτσι ώστε να έχουν έρθει σε θερμική ισορροπία. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο που απέχει από εμάς φυσική απόσταση την τωρινή στιγμή:

$$d_p(t_0) = 28x10^9 ly \quad (5.1.1)$$

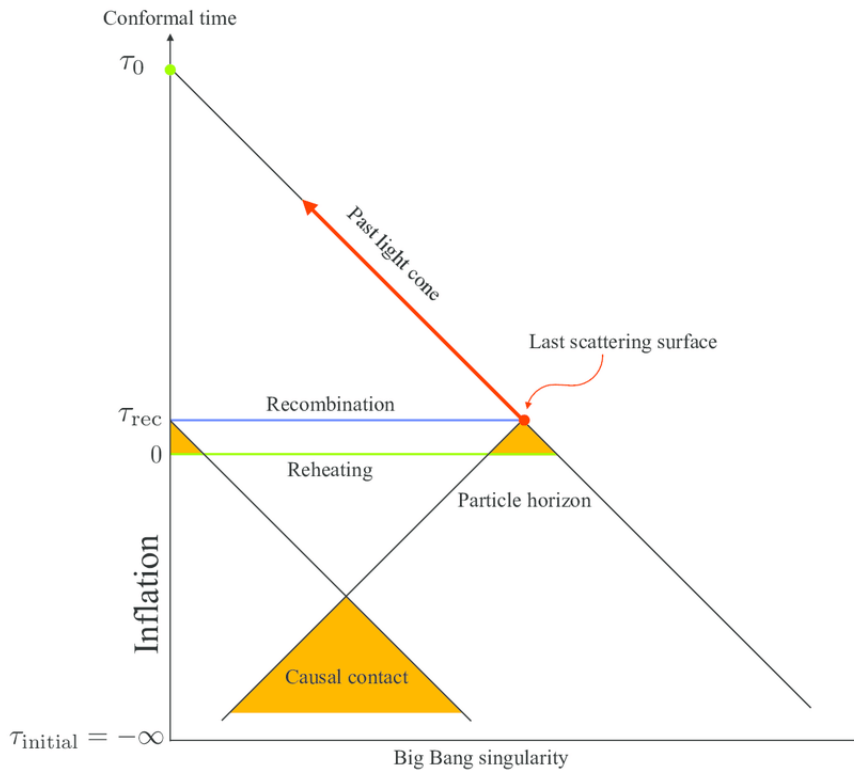
τότε τη στιγμή του decoupling που τα φωτόνια άρχισαν να εκπέμπονται η απόσταση θα ήταν:

$$d_p(t_d) = \frac{\alpha(t_d)}{\alpha(t_0)} = 256x10^7 ly \quad (5.1.2)$$

Απ την άλλη η μέγιστη απόσταση που θα μπορούσε να έχει ταξιδέψει ένα φωτόνιο μέχρι εκείνη τη στιγμή είναι:

$$d_h = 10^6 ly \quad (5.1.3)$$

Άρα η απόσταση δύο αντιδιαμετρικών σημείων από τη γη τη στιγμή του decoupling απείχαν 46 φορές την απόσταση του ορίζοντα. Άρα δε θα έπρεπε να έχουν έρθει σε θερμική ισορροπία εκτός και αν θεωρήσουμε ότι η αρχική μοναδικότητα ήταν τελείως ομοιόμορφη [2].



Ένα άλλο πρόβλημα της συμβατικής θεωρίας της μεγάλης έκρηξης είναι το πρόβλημα της καμπυλότητας. Πιο συγκεκριμένα γνωρίζουμε σήμερα ότι το σύμπαν είναι σχεδόν επίπεδο χωρικά. Από το δορυφόρο Planck γνωρίζουμε ότι:

$$\Omega_0 - 1 = 0.0010 + -0.0065 \quad (5.1.4)$$

Θέλουμε να βρούμε ποιά θα έπρεπε να είναι η τιμή του Ω τη χρονική στιγμή $\Omega=1s$. Γι αυτό ξαναγράφουμε την εξίσωση Friedman [14]:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{\alpha^2} \quad (5.1.5)$$

στη μορφή:

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = A \frac{T}{\rho} \quad (5.1.6)$$

όπου

$$A = \frac{3kc^2}{8\pi G\alpha^2 T^2} = const \quad (5.1.7)$$

Θεωρούμε ότι το σύμπαν από τα 50000 χρόνια μέχρι σήμερα είναι κυριαρχούμενο από ύλη. Αυτό φυσικά δεν ισχύει αφού γνωρίζουμε ότι εδώ και λίγα χιλιάδες χρόνια έχουμε μπει σε μια περίοδο όπου κυριαρχεί η σκοτεινή ενέργεια αλλά είναι για λόγους απλότητας. Για σύμπαν κυριαρχούμενο από ύλη θα έχουμε

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} \propto t^{2/3} \quad (5.1.8)$$

και άρα:

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} \Big|_{50000sec} = \frac{50000}{13.8 \times 10^9}^{2/3} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right) \quad (5.1.9)$$

για χρόνο από 1 δευτερόλεπτο μέχρι 50000 το σύμπαν είναι κυριαρχούμενο από ακτινοβολία οπότε:

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} t \quad (5.1.10)$$

και άρα

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega}_{1sec} = \frac{1}{50000}^{2/3} \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega} \right)_{50000} \quad (5.1.11)$$

οπότε τελικά έχουμε ότι τη χρονικά στιγμή του ενός δευτερολέπτου θα έπρεπε:

$$|\Omega - 1| < 10^{-18} \quad (5.1.12)$$

5.2 Πληθωρισμός ως λύση

Ο ορίζοντας που ταξιδεύει ένα φωτόνιο εκφράζεται μαθηματικά ως [2]:

$$d_p = \int_{t_i}^t \frac{dt}{\alpha} = \int_{\ln \alpha_i}^{\ln \alpha} (\alpha H)^{-1} d \ln \alpha \quad (5.2.1)$$

όπου

$$(\alpha H)^{-1} = H_0^{-1} \alpha^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (5.2.2)$$

ονομάζεται comoving Hubble σφαίρα και παρατηρούμε ότι αυξάνεται για συμβατικές μορφές ύλης. Έτσι ο ορίζοντας θα γράφεται ως:

$$d_p = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3w)} [\alpha^{\frac{1}{2}(1+3w)} - \alpha_i^{\frac{1}{2}(1+3w)}] \quad (5.2.3)$$

Παρατηρούμε ότι για συμβατικές μορφές ύλης που ισχύει ότι:

$$w > \frac{1}{3} \quad (5.2.4)$$

το ολοκλήρωμα λαμβάνει την κύρια τιμή του από μεταγενέστερους χρόνους γιατί καθώς το α πηγαίνει προς το 0 το κάτω άκρο του ολοκληρώματος πηγαίνει προς το 0. Αν όμως θεωρήσουμε ότι έχουμε μια μορφή ύλης για την οποία:

$$w < \frac{1}{2} \quad (5.2.5)$$

τότε παρατηρούμε ότι καθώς $\alpha_i \rightarrow 0$ το κάτω άκρο του ολοκληρώματος πηγαίνει στο $-\inf$.

5.3 Πληθωρισμός από βαθμωτό πεδίο

Ο πιο απλό τρόπος παραγωγής πληθωρισμούς είναι να θεωρήσουμε ένα βαθμωτό πεδίο με Λαγκραντζιανή [2]:

$$L_\phi = \frac{1}{2} \partial^\nu \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (5.3.1)$$

με πυκνότητα ενέργειας:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (5.3.2)$$

και πίεση:

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (5.3.3)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Friedmann έχουμε:

$$H^2 = \frac{1}{3M^2}[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)] \quad (5.3.4)$$

και από τη δεύτερη εξίσωση Friedmann παίρνουμε:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{M^2} \quad (5.3.5)$$

Συνδυάζοντάς τες παίρνουμε την εξίσωση κίνησης του πεδίου:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0 \quad (5.3.6)$$

Η χρονική παράγωγος της comoving Hubble σφαίρας γράφεται ως:

$$\frac{d}{dt}(\alpha H)^{-1} = -\frac{1}{\alpha}(1 - \epsilon) \quad (5.3.7)$$

με

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (5.3.8)$$

Άρα για να έχουμε πληθωρισμό θα πρέπει:

$$\epsilon \ll 1 \quad (5.3.9)$$

Επίσης θέλουμε ο πληθωρισμός να διαρκέσει αρκετό χρονικό διάστημα για να προλάβουν να επικοινωνήσουν όλες οι μη αιτιατά συνδεδεμένες περιοχές και έτσι ορίζουμε την παράμετρο:

$$\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \quad (5.3.10)$$

και απαιτούμε $|\eta| < 1$. Σε όρους πεδίου οι παράμετροι γίνονται:

$$\epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2M^2H^2} \quad (5.3.11)$$

που σημαίνει ότι για πληθωρισμό απαιτούμε η κινητική ενέργεια του πεδίου να είναι πολύ μικρότερη από το δυναμικό. Επίσης ορίζουμε την παράμετρο:

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \quad (5.3.12)$$

$$\eta = 2(\epsilon - \delta) \quad (5.3.13)$$

και έτσι οι συνθήκες για πληθωρισμό είναι:

$$\epsilon, |\delta| < 1 \quad (5.3.14)$$

Το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια πρέπει να είναι ολύ μικρότερη από το δυναμικό σημαίνει ότι:

$$H^2 = \frac{V}{3M^2} \quad (5.3.15)$$

και επειδή η επιτάχυνση θεωρείται αμελητέα:

$$3H\dot{\phi} = -V' \quad (5.3.16)$$

Η παράμετρος ϵ θα γίνεται:

$$\epsilon_v = \frac{M^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (5.3.17)$$

και η παράγωγος της KG εξίσωσης γίνεται:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -V''\dot{\phi} \quad (5.3.18)$$

Έτσι αν ορίσουμε την ποσότητα:

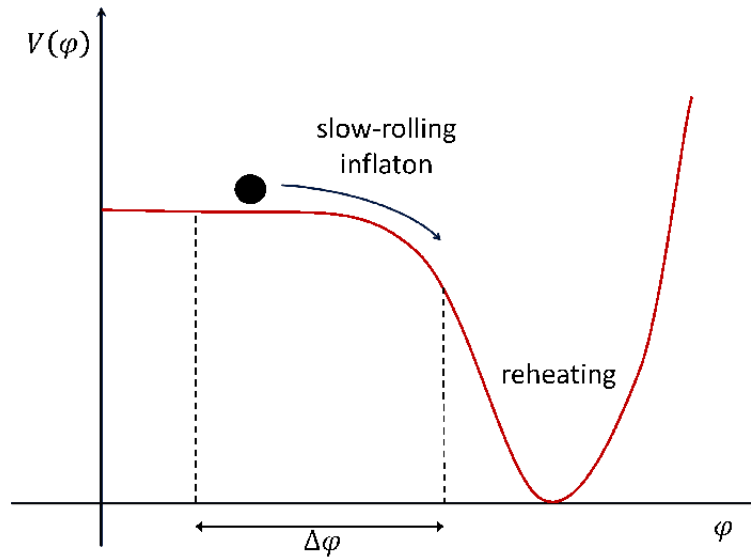
$$\eta_v = M^2 \frac{V''}{V} \quad (5.3.19)$$

ο πληθωρισμός υλοποιείται για:

$$\epsilon_v < 1$$

$$\eta_v < 1$$

Ένα παράδειγμα slow-roll πληθωρισμού δίνεται στην παρακάτω εικόνα [19]:



5.4 Starobinsky πληθωρισμός

Ένα από τα πρώτα μοντέλα $f(R)$ είχε προταθεί από τον Starobinsky πριν την ανακάλυψη της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος και αφορούσε τον πληθωρισμό χωρίς την ανάγκη ενός βαθμωτού πεδίου. Το μοντέλο αποτελείται από τη συνάρτηση [16]:

$$f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2} \quad (5.4.1)$$

Θέλουμε να την αντικαταστήσουμε στην πρώτη τροποποιημένη εξίσωση Friedmann :

$$3FH^2 = \frac{FR}{2} \frac{f}{2} - 3H\dot{F} \quad (5.4.2)$$

Άρα θα χρειαστούμε τις παρακάτω ποσότητες [18]:

$$\begin{aligned} F &= 1 + \frac{R}{3M^2} = 1 + \frac{6\dot{H} + 12H^2}{3M^2} \\ \dot{F} &= \frac{\dot{R}}{3M^2} = \frac{2\ddot{H} + 8H\dot{H}}{M^2} \\ FH^2 &= H^2 + \frac{6\dot{H}H^2 + 12H^4}{3M^2} \\ FR &= R + \frac{R^2}{3M^2} = R\ddot{H} + 12H^2 + 36\left(\frac{\dot{H}^2 + 4\dot{H}H^2 + 4H^4}{3M^2}\right) \\ f &= 6\dot{H} + 12H^2 + 36\left(\frac{\dot{H}^2 + 4\dot{H}H^2 + 4H^4}{6M^2}\right) \\ H\dot{F} &= \frac{2H\ddot{H} + 8H^2\dot{H}}{M^2} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 3H^2 + \frac{6\dot{H} + 12H^2}{M^2} &= \frac{R}{2} + \frac{R^2}{6M^2} - \frac{R}{2} - \frac{R^2}{12M^2} - 3H\dot{F} \\ 3H^2 + \frac{6\dot{H} + 12H^2}{M^2} &= \frac{R^2}{12M^2} - \frac{6H\ddot{H} + 24H^2\dot{H}}{M^2} \\ 3H^2 + \frac{6\dot{H} + 12H^2}{M^2} &= \frac{36(\dot{H}^2 + 4\dot{H}H^2 + 4H^4)}{12M^2} - \frac{6H\ddot{H} + 24H^2\dot{H}}{M^2} \\ \frac{36M^2H^2}{12M^2} + \frac{72\dot{H}H^2 + 144H^4}{12M^2} &= \frac{36\dot{H}^2 + 144\dot{H}H^2 + 144H^4}{12M^2} - \frac{72H\ddot{H} + 288H^2\dot{H}}{12M^2} \\ \frac{36M^2H^2 + 18\dot{H}H^2 + 6H\ddot{H} - 3\dot{H}^2}{M^2} &= 0 \\ 3M^2H^2 + 18\dot{H}H^2 + 6H\ddot{H} - 3\dot{H}^2 &= 0 \\ \ddot{H} + \frac{M^2H}{2} - \frac{\dot{H}^2}{2H} + 3\dot{H}H &= 0 \end{aligned}$$

Η συνθήκη για να έχουμε πληθωρισμό είναι ότι η παράμετρος Hubble αλλάζει πολύ αργά οπότε οι όροι:

$$\ddot{H}, \frac{\dot{H}^2}{2H} \quad (5.4.3)$$

μηδενίζονται. Άρα παίρνουμε:

$$\dot{H} = -\frac{M^2}{6} \quad (5.4.4)$$

ή αλλιώς:

$$dH = -\frac{M^2}{6} dt$$

και ολοκληρώνοντας για τη διάρκεια ου πληθωρισμού παίρνουμε:

$$H = H_i - \frac{M^2}{6}(t - t_i) \quad (5.4.5)$$

ή ως προς τον παράγοντα κλιμακας:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{\alpha} &= dtH_i - \frac{M^2}{6}(t - t_i)dt \\ \alpha &= ce^{H_i(t-t_i) - \frac{M^2}{12}(t-t_i)^2} \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε εκθετική διαστολή.

Κεφάλαιο 6

Φορμαλισμός NP

6.1 Τετράδες

Σε διάφορες περιπτώσεις στη γενική σχετικότητα και όχι μόνο είναι χρήσιμο να δουλέψουμε με το φορμαλισμό των τετράδων. Σε κάθε σημείο του χωροχρόνου αντιστοιχούμε μια τετράδα διανυσματικών πεδίων:

$$e_{(a)} = e_{(a)}^i \partial_\mu \quad (6.1.1)$$

και αντίστοιχα ορίζουμε τη δυαδικά τετράδα διανυσματικών πεδίων:

$$e^{(a)} = e_i^{(a)} dx^\mu \quad (6.1.2)$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται η δυαδική σχέση:

$$e^{(a)}(e_{(b)}) = e_i^{(a)} e_{(b)}^i = \delta_{(b)}^{(a)} \quad (6.1.3)$$

Κάθε τετράδα ορίζει μια νέα μετρική η οποία έχει δείκτες τους δείκτες των τετράδων. Πιο συγκεκριμένα:

$$\eta^{(a)(b)} \eta_{(b)(c)} = \delta_{(c)}^{(a)} \quad (6.1.4)$$

και ως συνέπεια θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\eta_{(a)(b)} e^{(a)}_i = e_{(b)i} \quad (6.1.5)$$

$$\eta^{(a)(b)} e_{(a)i} = e^{(b)}_i \quad (6.1.6)$$

$$e_{(a)i} e^{(a)}_j = g_{ij} \quad (6.1.7)$$

Επίσης, έχοντας κατασκευάσει μια τετράδα σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας θα έχουμε και τις αντίστοιχες συνιστώσες διαδυσμάτων και διδιανυσμάτων:

$$A_{(a)} = e_{(a)j} A^j \quad (6.1.8)$$

$$A^{(a)} = \eta^{(a)(b)} A_{(b)} \quad (6.1.9)$$

και γενικότερα, για κάθε ταυιστή οι συνιστώσες στο σύστημα των τετράδων και στο σύστημα συντεταγμένων αντίστοιχα θα δίνονται ως:

$$A_{(a)(b)} = e_{(a)}^i e_{(b)j} T_{ij} \quad (6.1.10)$$

$$T_{ij} = e^{(a)}_i e^{(b)}_j A_{(a)} \quad (6.1.11)$$

6.2 NP τετράδα

Μια ειδικά κατηγορία τετράδων, ειδικά χρήσιμη για τη μελέτη βαρυτικών κυμάτων είναι η τετράδα NP η οποία ορίζεται ως από ένα σύστημα διανυσμάτων που συνδέονται με τις εξής σχέσεις:

$$lm = m\bar{m} = nm = n\bar{m} = 0$$

$$ll = nn = mm - \bar{m}\bar{m} = 0$$

$$ln = 1$$

$$m\bar{m} = 1$$

Γενικά, γνωρίζουμε ότι ο τανυστής καμπυλότητας μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα του Weyl τανυστή, του Ricci τανυστή με μηδενικό ίχνος και του βαθμωτού Ricci [7]:

$$R_{abcd} = C_{abcd} - \frac{1}{2}(\eta_{ac}R_{bd} - \eta_{bc}R_{ad} - \eta_{ad}R_{bc} + \eta_{bd}R_{ac}) + \frac{1}{6}(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})R$$

$$R_{ac} = \eta^{bd}R_{abcd}$$

$$R = 2(R_{12} - R_{34})$$

$$C_{1234} + C_{1342} + C_{1423} = 0$$

$$C_{1314} = C_{2324} = C_{1332} = C_{1442} = 0$$

$$C_{1231} = C_{1334}$$

$$C_{1241} = C_{1443}$$

$$C_{1232} = C_{2343}$$

$$C_{1242} = C_{2434}$$

$$C_{1212} = C_{3434}$$

$$C_{1342} = \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234})$$

και οι συνιστώσες του weyl και του Riemann τανυστή συνδέονται ως:

$$R_{1212} = C_{1212} + R_{12} - \frac{1}{6}R$$

$$R_{1324} = C_{1324} + \frac{1}{12}R$$

$$R_{1234} = C_{1234} \tag{6.2.1}$$

$$R_{3434} = C_{3434} - R_{34} - \frac{1}{6}R \tag{6.2.2}$$

$$R_{1314} = C_{1313} \tag{6.2.3}$$

$$R_{2323} = C_{2323} \tag{6.2.4}$$

$$R_{1314} = \frac{1}{2}R_{11} \tag{6.2.5}$$

$$R_{2324} = \frac{1}{2}R_{22} \tag{6.2.6}$$

$$\tag{6.2.7}$$

$$R_{3132} = -\frac{1}{2}R_{33}$$

$$R_{1213} = C_{1213} + \frac{1}{2}R_{13}$$

$$R_{1334} = C_{1334} + \frac{1}{2}R_{13}$$

$$R_{1223} = C_{1223} - \frac{2}{3}$$

$$R_{2334} = C_{2334} + \frac{1}{2}R_{23}$$

Έτσι, οι 10 ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή Weyl θα δίνονται από τις παρακάτω βαθμωτές ποσότητες:

$$\Psi_0 = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s$$

$$\Psi_0 = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s$$

$$\Psi_0 = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s$$

$$\Psi_0 = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s$$

$$\Psi_0 = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s$$

Αντίστοιχα, θα έχουμε και τις 10 ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή και του βαθμωτού Ricci θα έχουμε:

$$\Phi_{00} = -\frac{1}{2}R_{11}$$

$$\Phi_{22} = -\frac{1}{2}R_{22}$$

$$\Phi_{02} = -\frac{1}{2}R_{33}$$

$$\Phi_{20} = -\frac{1}{2}R_{44}$$

$$\Phi_{11} = -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34})$$

$$\Phi_{01} = -\frac{1}{2}R_{13}$$

$$\Phi_{10} = -\frac{1}{2}R_{14}$$

$$\Phi_{12} = -\frac{1}{2}R_{23}$$

$$\Phi_{21} = -\frac{1}{2}R_{24}$$

$$\Lambda = \frac{1}{24}R$$

6.3 Κατηγοριοποίηση Πετροφ

Αυτές οι βαθμωτές ποσότητες είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων, αλλά δεν είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε

μετασχηματισμούς που αφήνουν τα πρώτα δύο διανύσματα αναλλοίωτα ή να μην αλλάζουν τη διεύθυνσή τους. Πιο συγκεκριμένα έχουμε θεωρούμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς [7]:

$$\begin{aligned}
 A) : l &\rightarrow l \\
 m &\rightarrow m + \alpha l \\
 \bar{m} &\rightarrow \bar{m} + \alpha * l \\
 n &\rightarrow n + \alpha * m + \alpha \bar{m} + \alpha \alpha^* l
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B) : n &\rightarrow n \\
 m &\rightarrow m + \beta n \\
 \bar{m} &\rightarrow \bar{m} + \beta^* n \\
 l &\rightarrow l + \beta * m + \beta \bar{m} + \beta \beta^* n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C) : l &\rightarrow A^{-1}l \\
 n &\rightarrow An \\
 m &\rightarrow e^{i\theta} m \\
 \bar{m} &\rightarrow e^{-i\theta} \bar{m}
 \end{aligned}$$

Τέτοιου είδους μετασχηματισμούς μπορούμε να τους εφαρμόσουμε τοπικά σε ένα σημείο της πολλαπλότητας και στη συνέχεια να τους επεκτείνουμε σε ολόκληρη την πολλαπλότητα. Κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς οι βαθμωτές ποσότητες μετασχηματίζονται αντίστοιχα ως εξής:

$$\begin{aligned}
 A) : \Psi'_0 &\rightarrow \Psi_0 \\
 \Psi'_1 &\rightarrow \Psi_1 + \alpha^* \Psi_0 \\
 \Psi'_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2\alpha^* \Psi_1 + \alpha^{*2} \Psi_0 \\
 \Psi'_3 &\rightarrow \Psi_3 + 3\alpha^* \Psi_2 + 3\alpha^{*2} \Psi_1 + \alpha^{*3} \Psi_0 \\
 \Psi'_4 &\rightarrow \Psi_4 + 4\alpha^* \Psi_3 + 6\alpha^{*2} \Psi_2 + 4\alpha^{*3} \Psi_1 + \alpha^{*4} \Psi_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B) : \Psi'_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 \\
 \Psi'_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4 \\
 \Psi'_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4 \\
 \Psi'_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4 \\
 \Psi'_4 &\rightarrow \Psi_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C) : \Psi'_0 &\rightarrow A^{-2}e^{2i\theta} & \Psi_0 \\
 \Psi'_1 &\rightarrow A^{-1}e^{i\theta} & \Psi_1 \\
 \Psi'_2 &\rightarrow \Psi_2 \\
 \Psi'_3 &\rightarrow Ae^{-i\theta}\Psi_3 \\
 \Psi'_4 &\rightarrow A^2e^{-2i\theta} & \Psi_4
 \end{aligned}$$

Θέλουμε τώρα να εξερευνήσουμε κατά πόσο αυτές οι βαθμωτές ποσότητες μπορούν να μηδενιστούν, κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς. Έστω τότε ότι ισχύει $\Psi_4 \neq 0$ και άρα οι μετασχηματισμοί της δεύτερης κλάσης θα γίνονται:

$$\begin{aligned} B) : \Psi'_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 \\ \Psi'_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4 \\ \Psi'_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4 \\ \Psi'_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4 \\ \Psi'_4 &\rightarrow \Psi_4 = \Psi_4 \end{aligned}$$

Τότε, για να μηδενιστεί και το Ψ_0 θα πρέπει η εξίσωση:

$$\Psi_4 b^4 + 4b^3\Psi_3 + 6b^2\Psi_2 + 4b\Psi_1 + \Psi_0 = 0 \quad (6.3.1)$$

να έχει λύση το b . Η παραπάνω εξίσωση έχει 4 ρίζες και οι καινούργιες κατευθύνσεις του διανύσματος l , δηλαδή οι

$$l \rightarrow l + \beta * m + \beta \bar{m} + \beta \beta^* n \quad (6.3.2)$$

ονομάζονται principal null direction του τανυστή Weyl. Αν δύο η περισσότερες ρίζες συμπίπτουν τότε ο τανυστής λέγεται ότι είναι αλγεβρικά ειδικός, αλλιώς αλγεβρικά γενικός. Ανάλογα με την πολλαπλότητα των ριζών της εξίσωσης παίρνουμε την κατηγοριοποίηση Πετροφ [7], [20]:

$$\begin{aligned} \text{PETROV TYPE I} &: b_1, b_2, b_3, b_4 \\ \text{PETROV TYPE II} &: b_1 = b_2, b_3, b_4 \\ \text{PETROV TYPE D} &: b_1(\text{double}), b_2(\text{double}) \\ \text{PETROV TYPE III} &: b_1 = b_2 = b_3 \neq b_4 \\ \text{PETROV TYPE N} &: b_1 = b_2 = b_3 = b_4 \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες βαθμωτές ποσότητες που μπορούν ή όχι να μηδενιστούν είναι [20]:

$$\begin{aligned} \text{PETROV TYPE I} &: \Psi_0 = \Psi_4 = 0, \Psi_1 \neq 0, \Psi_2 \neq 0, \Psi_3 \neq 0 \\ \text{PETROV TYPE II} &: \Psi_1 = \Psi_3 = 0 = \Psi_4, \Psi_0 \neq 0, \Psi_2 \neq 0 \\ \text{PETROV TYPE D} &: \Psi_1 = \Psi_3 = 0 = \Psi_4 = \Psi_0, \Psi_2 \neq 0 \\ \text{PETROV TYPE III} &: \Psi_0 = \Psi_2 = 0 = \Psi_3 = \Psi_4, \Psi_1 \neq 0 \\ \text{PETROV TYPE N} &: \Psi_1 = \Psi_3 = 0 = \Psi_4 = \Psi_2, \Psi_0 \neq 0 \end{aligned}$$

PETROV TYPE I: Four distinct principal null directions
 PETROV TYPE II: Two principal null directions coincide
 PETROV TYPE D: Principal null directions coincide in couples
 PETROV TYPE III: Three principal null directions coincide
 PETROV TYPE N: All four principal null directions coincide

Αν ισχύουν τα παραπάνω τότε μπορεί ναδειχθεί ότι οι αντίστοιχες σχέσεις για το διάνυσμα l θα είναι:

$$\text{PETROV TYPE I : } l_{[a} C_{p]qr[s} l_t] l^r = 0$$

$$\text{PETROV TYPE II : } C_{pqr[s} l_t] l^q l^r = 0$$

$$\text{PETROV TYPE D : } C_{pqr[s} l_t] l^q l^r = 0, C_{pqr[s} n_t] n^q n^r = 0$$

$$\text{PETROV TYPE III : } C_{pqr[s} l_t] l^r = 0$$

$$\text{PETROV TYPE N : } C_{pqrs} l^s = 0$$

Κεφάλαιο 7

Βαρυτικά κύματα

7.1 Βαρυτικά κύματα στη γενική σχετικότητα

Σε αυτή την παράγραφο θα κάνουμε μια μικρή επανάληψη των βαρυτικών κυμάτων στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας. Για να μελετήσουμε βαρυτικά κύματα θεωρούμε μικρές διαταραχές στη μετρική Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (7.1.1)$$

Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε τη διαταραχή να ταξιδεύει σε επίπεδο χωροχρόνο και άρα μπορούμε να ανεβοκατεβάζουμε δείκτες με τη μετρική Minkowski και οι συναλλοίωτες παράγωγοι θα γίνονται μερικές παραγωγοί. Ο γραμμικοποιημένος τανυστής Einstein άρα θα είναι:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [h_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{,\beta})] \quad (7.1.2)$$

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε την ποσότητα:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \quad (7.1.3)$$

και άρα ο τανυστής Einstein θα γίνεται:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} [\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha}] \quad (7.1.4)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μετασχηματισμούς συντεταγμένων της μορφής:

$$x'^a = x^a - \epsilon \xi^a(x^\beta) \quad (7.1.5)$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^a - \xi_{,\beta}^a \quad (7.1.6)$$

Ακόμη, από την πρώτη σχέση έχουμε ότι:

$$x^a = x'^a + \epsilon \xi^a(x^\beta) \quad (7.1.7)$$

Απαιτώντας τώρα ότι το ξ^a είναι μικρό και κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε:

$$\frac{\partial x^a}{\partial x'^\gamma} = \delta_\gamma^a + \epsilon \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\beta} \simeq \delta_\gamma^a + \epsilon \xi_{,\gamma}^a \quad (7.1.8)$$

αφού οι συνιστώσες του δέλτα του Kronecker είναι ίδιες σε κάθε σύστημα συντεταγμένων. Γνωρίζουμε όμως ότι ο κανόνας για το μετασχηματισμό της μετρικής είναι ο :

$$g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad (7.1.9)$$

Αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$g'_{\alpha\beta} = (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \epsilon_{\xi,\alpha}^\mu \delta_\beta^\nu + \epsilon_{\xi,\beta}^\nu \delta_\alpha^\mu) \eta_{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu h_{\mu\nu} \implies g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} + \epsilon_{\xi,\alpha,\beta} + \epsilon_{\xi\beta,\alpha} \implies h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + 2\epsilon_{(\alpha\xi\beta)} \quad (7.1.10)$$

ή επαναορίζοντας:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \lambda_{\mu,\nu} - \lambda_{\nu,\mu} \quad (7.1.11)$$

Έτσι, βλέπουμε ότι έχουμε αρκετή ελευθερία να επιλέξουμε τα λ ώστε να επιβάλουμε διάφορες συνθήκες στη διαταραχή. Πιο συγκεκριμένα, αν επιβάλουμε τη συνθήκη:

$$\square \lambda^\mu = \bar{h}^{\mu\nu},{}_{,\nu} \quad (7.1.12)$$

τότε για τη διαταραχή θα ισχύει

$$\bar{h}^{\mu\alpha} = 0 \quad (7.1.13)$$

και παρατηρούμε ότι οι τρεις τελευταίοι όροι του τανυστή Einstein μηδενίζονται και έτσι μένουμε με την κυματική εξίσωση:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (7.1.14)$$

με λύση:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (7.1.15)$$

Όμως δεν έχουμε εξαντήσει όλη την ελευθερία για την επιλογή της βαθμίδας. Πιο συγκεκριμένα, αν κάνουμε ακόμα ένα μετασχηματισμό της μορφής:

$$\square \psi^\mu = 0 \quad (7.1.16)$$

τότε ακόμα θα ικανοποιείται η βαθμίδα Lorenz και επιπλέον μπορούμε να διαλέξουμε τα ψ ώστε να κάνουμε τη διαταραχή μηδενικού ίχνους και χωρική. Επίσης η αρχική βαθμίδα μας λέει ότι η διαταραχή είναι επίσης εγκάρσια. Οπότε τελικά παίρνουμε:

$$\bar{h} = 0 \quad A_{0\nu} = 0 \quad (7.1.17)$$

με το τανυστικό πλάτος να γράφεται ως:

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.18)$$

Για να κατανοήσουμε την επίδραση των βαρυτικών κυμάτων σε δοκιμαστικές μάζες θα πρέπει να θεωρήσουμε την εξίσωση γεωδαιτικής απόκλισης, καθώς είναι η μόνη φυσική οντότητα που μπορούμε να μετρήσουμε:

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma \quad (7.1.19)$$

και επειδή η διαταραχή είναι καθαρά χωρική και θεωρούμε τα σωματίδια να κινούνται αργά οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες θα είναι:

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2}\partial_0\partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} \quad (7.1.20)$$

Μετονομάζοντας τα πλάτη:

$$h_+ = A_{11} \quad (7.1.21)$$

$$h_x = A_{12} \quad (7.1.22)$$

Παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση για το διάνυσμα διαχωρισμού:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{TT\mu}{}_\sigma, h_x = 0 \quad (7.1.23)$$

Μηδενίζοντας το ένα από τα δύο τα πλάτη:

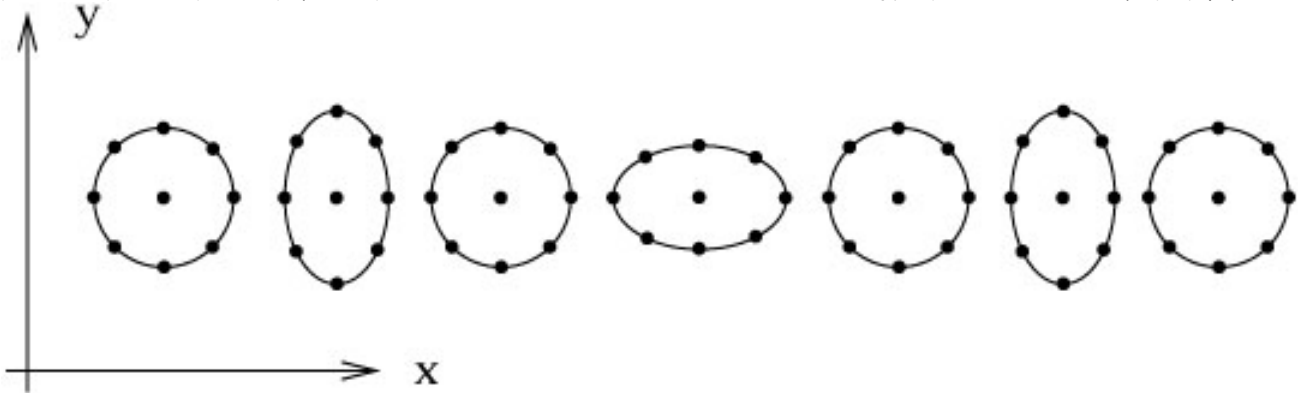
$$h_x = 0 \quad (7.1.24)$$

οι λύσεις που παίρνουμε για τις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα θα είναι:

$$S^1 = (1 + \frac{1}{2}h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^1(0) \quad (7.1.25)$$

$$S^2 = (1 - \frac{1}{2}h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^2(0) \quad (7.1.26)$$

που σημαίνει ότι σωματίδια αρχικά διαχωρισμένα στη x διεύθυνση ταλαντώνονται στη x διεύθυνση και σωματίδια χωρισμένα την y διεύθυνση ταλαντώνονται στη y διεύθυνση αλλά με ένα πρόσημο '-' που σημαίνει ότι τα μεν διαστέλλονται και τα δε συστέλλονται. Αντίστοιχα αποτελέσματα βρίσκουμε και με το μηδενισμό του άλλου πλάτους, οπότε τελικά έχουμε πολώσεις της μορφής [1]:



7.2 Βαρυτικά κύματα σε f(R) θεωρίες

Θα μελετήσουμε τώρα βαρυτικά κύματα σε f(R) θεωρίες, οπότε θεωρούμε τις εξισώσεις πεδίου:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = 0 \quad (7.2.1)$$

και το ίχνος των εξισώσεων:

$$f'(R)R + 3\square f'(R) - 2f(R) = 0 \quad (7.2.2)$$

Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την ισοδύναμη μορφή των $f(R)$ θεωριών που ταυτίζεται με scalar-tensor θεωρίες οπότε θεωρούμε τους μετασχηματισμούς [4]:

$$\phi = f'(R) \quad (7.2.3)$$

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{2f'(R) - Rf''(R)}{3} \quad (7.2.4)$$

και οι εξισώσεις πεδίου παίρνουν τη μορφή:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi) + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right) \quad (7.2.5)$$

Γραμμικοποιούμε τώρα τη θεωρία θεωρώντας διαταραχές στο ταυστικό πεδίο, καθώς και στο βαθμωτό πεδίο:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (7.2.6)$$

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi \quad (7.2.7)$$

Επίσης θεωρούμε τετραγωνικές διαταραχές στο δυναμικό:

$$V = V_0 + \frac{1}{2}m^2\delta\phi^2 \quad (7.2.8)$$

και εξισώσεις πεδίου σε πρώτη τάξη γίνονται:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\eta_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu h_f - \eta_{\mu\nu} \square h_f \quad (7.2.9)$$

Παίρνοντας το ίχνος της εξίσωσης έχουμε:

$$(\square - m^2)h_f = 0 \quad (7.2.10)$$

με

$$h_f = \frac{\delta\phi}{\phi_0} = a(\vec{p}) \exp(iq^\alpha x_\alpha) \quad (7.2.11)$$

και το κυματικό τετράνυσμα:

$$q^\alpha = (\omega, \vec{p}) \quad (7.2.12)$$

Αντίστοιχα με τη γενική σχετικότητα, ορίζουμε την ποσότητα:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h_f \quad (7.2.13)$$

με ίχνος:

$$\bar{h} = -h - 4h_f \quad (7.2.14)$$

Η φυσική διαταραχή άρα θα γράφεται ως:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h_f \quad (7.2.15)$$

Θεωρούμε και πάλι μετασχηματισμούς συντεταγμένων:

$$x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (7.2.16)$$

άτω από τους οποίους η μετρική αλλάζει ως:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu \quad (7.2.17)$$

και αντίστοιχα το ίχνος:

$$h' = h - 2\partial_\mu \epsilon^\mu \quad (7.2.18)$$

και άρα μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό για το $\bar{h}_{\mu\nu}$ και το ίχνος του :

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho \\ \bar{h}' &= \bar{h} + 2\partial_\rho \epsilon^\rho \end{aligned}$$

Θέλουμε να κάνουμε τη διαταραχή εγκάρσια και μηδενικού ίχνους, οπότε για να έχουμε τη βαθμίδα Lorenz θα πρέπει:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} - \square \epsilon_\nu - \partial^\mu \partial_\nu \epsilon_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial_\rho \epsilon^\rho &= 0 \\ \partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} &= \square \epsilon_\nu \end{aligned}$$

Ακόμη, κάνοντας ένα δεύτερο μετασχηματισμό θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \bar{h}''_{\mu\nu} &= \bar{h}'_{\mu\nu} - \partial_\mu k_\nu - \partial_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho k^\rho \\ \partial^\mu \bar{h}''_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

δηλαδή η συνθήκη Lorenz θα ισχύει λαο για το ίχνος έχουμε:

$$\bar{h}'' = \bar{h}' + 2\partial_\rho k^\rho \quad (7.2.19)$$

Διαλέγουμε το k ώστε $\partial_\mu k^\mu = \frac{\bar{h}'}{2}$ και έτσι μηδενίζουμε το ίχνος. Υπό αυτές τις συνθήκες η φυσική διαταραχή θα γράφεται ως:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h_f \quad (7.2.20)$$

Ο γραμμικοποιημένος ταυστής Ricci δίνεται ως:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\rho h_\nu{}^\rho + \partial_\nu \partial_\rho h_\mu{}^\rho - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \quad (7.2.21)$$

Αντικαθιστώντας τη μετρική υπό τις συνθήκες που επιβάλαμε και στη συνέχεια τον ταυστή Ricci στις πεδιακές εξισώσεις αυτό που μένει είναι:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (7.2.22)$$

δηλαδή η κυματική εξίσωση. Αυτό που δείξαμε στην ουσία είναι ότι η διαταραχή αποτελείται από το άθροισμα δύο κυμάτων με το πρώτο να είναι η κυματική διαταραχή της γενικής θεωρίας σχετικότητας και άρα δεν χρειάζεται να μελετήσουμε τις πολώσεις του αφού τις ξέρουμε ήδη. Θα μελετήσουμε μόνο την επίδραση του τρίτου βαθμού ελευθερίας σε δοκιμαστικές μάζες. Ο γραμμικοποιημένος ταυστής Riemann είναι:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\nu\alpha,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\alpha,\nu\beta} - h_{\nu\beta,\mu\alpha}) \quad (7.2.23)$$

από όπου οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες θα είναι:

$$R_{i0j0} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} h_{f,00} - h_{f,ij}) \quad (7.2.24)$$

Αντικαθιστώτας στην εξίσωση γεωδαιτικής απόκλισης:

$$a_i = R_{i0j0}x^j \quad (7.2.25)$$

Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{2}\ddot{h}_f x \\ a_y &= \frac{1}{2}\ddot{h}_f y \\ a_z &= \frac{1}{2}(\ddot{h}_f - h_{f,zz})z - \frac{1}{2}m^2 a(\vec{p}) \cos(p_z z - \omega t) \end{aligned}$$

7.3 E(2) κατηγοριοποίηση

Θα εφαρμόσουμε τώρα το φορμαλισμό Newman-Penrose στα βαρυτικά κύματα. Θεωρούμε την τετράδα:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_t + e_z) \quad l = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_t - e_z)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y) \quad \bar{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y)$$

που ικανοποιούν τις σχέσεις κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} -kl &= m\bar{m} = 1 \\ km &= k\bar{m} = lm = l\bar{m} = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα ένα επίπεδο κύμα που ταξιδεύει κατά την z διεύθυνση. Όπως είδαμε η σημαντική φυσική ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι ο τανυστής Riemann λόγω της γεωδαιτικής απόκλισης. Έτσι θεωρούμε ότι η καμπυλότητα θα εξαρτάται από τη φάση $t - z$ και λόγω της μορφής της τετράδας θα ισχύει [5] :

$$R_{abcd,p} = 0 \quad (p, q, \dots = k, m, \bar{m}) \quad (7.3.1)$$

Ακόμη, από την ταυτότητα Bianchi θα έχουμε ότι:

$$R_{ab[pq,l]} = 0 = \frac{1}{3}R_{abpq,l} \quad (7.3.2)$$

και άρα

$$R_{abpq} = 0 = R_{pqab} \quad (7.3.3)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν έξι μη μηδενικές ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή Riemann και όλες έχουν τη μορφή:

$$R_{plql} \quad (7.3.4)$$

δηλαδή πρέπει υποχρεωτικά ο ένας από τους δύο πρώτους δείκτες και ο ένας από τους δύο

τελευταίους δείκτες να είναι l . Οι μόνες μη μηδενικές NP ποσότητες θα είναι οι [5]:

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 &= \Psi_1 = 0 \\
 \Psi_2 &= -\frac{1}{6}R_{lk lk} \\
 \Psi_3 &= -\frac{1}{2}R_{lk l\bar{m}} \\
 \Psi_3 &= -R_{l\bar{m} l\bar{m}} \\
 \Phi_{00} &= \Phi_{01} = \Phi_{10} = \Phi_{02} = \Phi_{20} = 0 \\
 \Phi_{22} &= -R_{l\bar{m} l\bar{m}} \quad \Phi_{11} = \frac{3}{2}\Psi_2 \\
 \Phi_{12} &= \Phi_{21} = \bar{\Psi}_3 \\
 \Lambda &= -\frac{1}{2}\Psi_2
 \end{aligned}$$

Αυτές οι ποσότητες 'κωδικοποιούν' τις διάφορες πολώσεις που μπορεί να έχει μια οποιαδήποτε μετρική θεωρία βαρύτητας. Αυτό γίνεται πιο εμφανές αν τις εκφράσουμε στο αρχικό σύστημα βάσης συντεταγμένων:

$$\begin{aligned}
 \Psi_2 &= -\frac{1}{6}R_{z0z0} \\
 \Psi_3 &= -\frac{1}{2}R_{x0z0} + \frac{1}{2}iR_{z0z0} \\
 \Psi_4 &= -R_{x0x0} + R_{y0y0} + 2iR_{x0y0} \\
 \Phi'_{22} &= -R_{x0x0} - R_{y0y0}
 \end{aligned}$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι αυτές οι ποσότητες δεν είναι πειραματικά ανιχνεύσιμες. Αυτό που μετράσει ο πειραματιστής είναι ο πίνακας:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(Re\Psi_4 + \Phi'_{22}) & \frac{1}{2}Im\Psi_4 & -2Re\Psi_3 \\ \frac{1}{2}Im\Psi_4 & \frac{1}{2}(Re\Psi_4 - \Phi'_{22}) & 2Im\Psi_3 \\ -2Re\Psi_3 & 2Im\Psi_3 & -6\Psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.3.5)$$

Η χρησιμότητα του συγκεκριμένου φορμαλισμού έγκειται στο ότι παρόλο που οι NP ποσότητες είναι αναλλοίωτες κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων εξαρτώνται από τους μετασχηματισμούς Lorentz των τετράδων. Πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι η τετράδα έχει διαλεχτεί με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα k να είναι η παράγωγος της φάσης του κύματος, δηλαδή:

$$k_\mu = -\partial_\mu u \quad (7.3.6)$$

με $u = t - z$ Έτσι, για τους μετασχηματισμούς Lorentz που θα εκτελέσουμε απαιτούμε να διατηρούν την ίδια διεύθυνση και την ίδια συχνότητα για τους παρατηρητές, δηλαδή :

$$\begin{aligned}
 k' &= k \\
 m' &= e^{i\phi}(m + ak) \\
 \bar{m}' &= e^{-i\phi}(\bar{m} + \bar{a}k) \\
 l' &= l + \bar{a}m + a\bar{m} + a\bar{a}l
 \end{aligned}$$

Κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς οι ποσότητες NP μετασχηματίζονται ως:

$$\begin{aligned}\Psi'_2 &= \Psi_2 \\ \Psi'_3 &= e^{-i\phi}(\Psi_3 + 3\bar{a}\Psi_2) \\ \Psi'_4 &= e^{-i2\phi}(\Psi_4 + 4\bar{a}\Psi_3 + 6\bar{a}^2\Psi_2) \\ \Phi'_{22} &= \Phi_{22} + 2a\Psi_3 + 2a\bar{\Psi}_3 + 6a\bar{a}\Psi_2\end{aligned}$$

Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε είναι ότι έχουμε ελικότητες:

$$\begin{aligned}\Psi_2 : s &= 0 \\ \Psi_3 : s &= -1 & \bar{\Psi}_3 : s &= 1 \\ \Psi_4 : s &= -2 & \bar{\Psi}_4 : s &= 2 \\ \Phi'_{22} : s &= 0\end{aligned}$$

που αντιστοιχούν σε βαρυτόνια με σπιν 0,1 και 2 αντίστοιχα. Η ομάδα μετασχηματισμών που εκτελέσαμε αποτελεί μια υποομάδα της ομάδας Lorentz και πιο συγκεκριμένα είναι ισομορφική με τη διδιάστατη Ευκλείδεια ομάδα. Έτσι, ανάλογα με τις ποσότητες που μπορούν να μηδενιστούν κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς μπορούμε να κάνουμε την παρακάτω κατηγοριοποίηση:

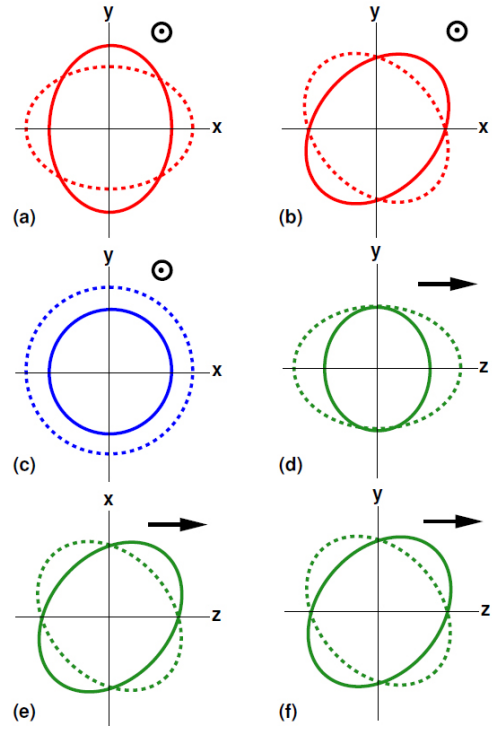
$$\begin{aligned}II_6 : \Psi_2 &\neq 0 \\ III_5 : \Psi_2 = 0 &\neq \Psi_3 \\ N_3 : \Psi_2 = 0\Psi_3, \Psi_4 &\neq 0 \neq \Phi_{22} \\ N_2 : \Psi_2 = 0\Psi_3, \Psi_4 &\neq 0 = \Phi_{22} \\ 0_1 : \Psi_2 = 0\Psi_3, \Psi_4 &= 0 \neq \Phi_{22} \\ 0_0 : \Psi_2 = 0\Psi_3, \Psi_4 &= 0 = \Phi_{22}\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, για τη γενική σχετικότητα θα έχουμε:

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= 0 \\ R_{iklk} = R_{lmlm} = R_{iklm} = R_{ikl\bar{m}} &= 0 \\ \Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} &= 0 \\ \Psi_4 &\neq 0\end{aligned}$$

και άρα η κλάση της γενικής σχετικότητας θα είναι N_3 . Η κλάση της κάθε θεωρίας δεν είναι η ίδια με την κλάση των βαρυτικών κυμάτων πάντα. Για παράδειγμα μια πηγή μπορεί να μην έχει εκπέμψει μια συγκεκριμένη πόλωση. Ακόμη, είναι γνωστό ότι η γενική σχετικότητα εκπέμπει τετραπολική ακτινοβολία, ενώ όπως είδαμε οι $f(R)$ θεωρίες έχουν και ένα βαθμωτό βαθμό ελευθερίας που συνεπάγεται και μονοπολική ακτινοβολία. Έτσι, για την ανίχνευση νέων πολώσεων θα πρέπει να στοχεύσουμε σε σφαιρικά συμμετρικά αντικείμενα, καθότι δεν εκπέμπουν τετραπολική ακτινοβολία αλλά θα εκπέμπουν μονοπολική. Παρακάτω παραθέτουμε τις διάφορες πολώσεις που μπορούν να υπάρξουν σε μετρικές θεωρίες [5]:

Gravitational-Wave Polarization



Βιβλιογραφία

- [1] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison-Wesley, San Francisco, 2004
- [2] <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/TEACHING/INFLATION/Lectures.pdf>
- [3] M. Lubini, C. Tortora, J. Näf, Ph. Jetzer, S. Capozziello, (2011), arXiv:1104.2851 [gr-qc]
- [4] Salvatore Capozziello, Christian Corda, Maria Felicia De Laurentis, (2008), arXiv:0812.2272 [astro-ph]
- [5] D. M. Eardley, D. L. Lee, and A. P. Lightman, Phys. Rev. D 8, 3308 (1973)
- [6] E. Newman and R. Penrose, J. Math. Phys. 3, 566 (1962)
- [7] Chandrasekhar S Mathematical Theory of Black Holes (Oxford: Clarendon Press, 1983)
- [8] Sean M. Carroll, Vikram Duvvuri, Mark Trodden, Michael S. Turner, (2003), arXiv:astro-ph/0306438
- [9] Thomas P. Sotiriou, Valerio Faraoni, (2008), arXiv:0805.1726 [gr-qc]
- [10] Ciprian A. Sporea, (2014), arXiv:1403.3852 [gr-qc]
- [11] <http://www.physics.ucc.ie/apeer/PY4112/Cosmology.pdf>
- [12] James B. Hartle, *Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco, 2003
- [13] Yasunori Fujii, Kei-Ichi Maeda *The scalar-tensor theory of gravitation*, Cambridge University Press, 2003
- [14] Alan Guth, Problems of the Conventional (Non-inflationary) Hot Big Bang Model, <https://www.youtube.com/watch?v=PK1KNojfvMQ&t=3007s>
- [15] Will, Clifford M., *Theory and experiment in gravitational physics, Rev. ed.*, Cambridge University Press, 1981, 1993
- [16] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B 91, 99 (1980)
- [17] <https://www.youtube.com/watch?v=c5w1e4ATg6E>
- [18] <http://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/dissertations/2010/Konstantinos-Karakatsanis-Dissertation.pdf>

- [19] M.C. Guzzetti, N. Bartolo, M. Liguori and S. Matarrese , arXiv:1605.01615v3 [astro-ph.CO]
- [20] https://opus.bibliothek.uni-wuerzburg.de/opus4-wuerzburg/frontdoor/deliver/index/docId/3422/file/thesis_oliverelbracht.pdf