ΤΑ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ INSTITUTIONS

ΜΑΡΙΑ ΔΗΜΑΡΟΓΚΩΝΑ

Επιβλέπων: ΠΕΤΡΟΣ ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Ε.Μ.Π.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σημείωμα του συγγραφέα

Αυτη η διπλωματική εργασία δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση συνεισφορά στην έρευνα, καθώς ούτε αποδεικνύει, με την αυστηρή μαθηματική έννοια του όρου, κάτι ούτε προτείνει κάτι καινούριο. Στη μελέτη αυτή παρουσιάζονται τόσο η θεωρία των Institutions, όσο και τα σημασιολογικά δίκτυα και από την παρατήρηση ήδη αποδεδειγμένων αποτελεσμάτων συνάγεται η σχέση μεταξύ των δύο αντικειμένων. Εφόσον τα σημασιολογικά δίκτυα είναι institutions, η εν λόγω θεωρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη τους και κατ' επέκταση τη μελέτη των τρόπων με τους οποίους αυτά τα δίκτυα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα μιας τέτοιας έρευνας μπορούν βέβαια να μεταφραστούν στο επίπεδο των αναπαραστάσεων της γνώσης, που τα σημασιολογικά δίκτυα αντιπροσωπεύουν. Η παρούσα εργασία σκοπό έχει να στρέψει τα βλέμματα στη θεωρία των institutions και να υποστηρίξει ότι ίσως έχει πολλά να προσφέρει, αν εντοπιστούν οι κατάλληλες γι' αυτήν εφαρμογές. Το δεύτερο, ομολογουμένος πολυ ισχυρό, κίνητρο για την εκλογή του θέματος ήταν η εξοικείωση του ίδιου του συγγραφέα με αυτά τα αντικείμενα. Από αυτή την άποψη πέτυχε ικανοποιητικά το σκοπό του. Θα ήμουν επαρκώς ικανοποιημένη αν τουλάχιστον μπορούσε να επιτύχει τον ίδιο σκοπό και στην περίπτωση άλλων, που επιθυμούν να αποκτήσουν μια παρόμοια εξοικείωση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία των institutions και τα σημασιολογικά δίκτυα είναι αντικείμενα που ανήκουν σε διαφορετικά γνωστικά πεδία. Αν και ο αυστηρός διαχωρισμός μεταξύ επιστημονικών κλάδων άνοιξε την πόρτα στην εξειδίκευση, τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μία τάση προς τη δημιουργία διεπιστημονικών γνωστικών πεδίων, με χαρακτηριστικότερο παράδειγμα την *γνωσιακή επιστήμη*, ή καλύτερα *τη νέα επιστήμη του Νου*[1]. Αυτή τη γενικότερη τάση ακολουθεί και η εργασία αυτή, μελετώντας τη σχέση μεταξύ μιας θεωρίας που τυποποιεί λογικά συστήματα με τα σημασιολογικά δίκτυα, που όπως θα δούμε, είναι εννοιολογικά δίκτυα αναπαράστασης γνώσης. Από τη μία η θεωρία των institutions μελετάει τα κοινά δομικά χαρακτηριστικά των διάφορων λογικών συστημάτων, ενώ από την άλλη έχουμε μία δομή που αναπαριστά τον τρόπο με τον οποίο είναι οργανωμένη η γνώση του κόσμου στο μυαλό ενός γνωστικού πράκτορα. Αν θεωρήσουμε το συλλογισμό ως την εφαρμογή διαφόρων δομών συναγωγής πάνω σε ένα σημασιολογικό δίκτυο, και περιορίσουμε την έννοια της νοημοσύνης σε μία από τις εκφάνσεις της, δηλαδή στη νοητική ικανότητα του συλλογισμού, καταλήγουμε να έχουμε μοντελοποιήσει έναν γνωστικό πράκτορα, τουλάχιστον όσον αφορά την ικανότητά του να ανταποκρίνεται στα ερεθίσματα του εξωτερικού κόσμου, κάνοντας χρήση της ορθολογικής συλλογιστικής - επί της γνωσιακής του βάσης δεδομένων - για την επεξεργασία τους. Υπάρχει βέβαια ένα μεγάλο φιλοσοφικό ζήτημα σχετικά με τη φύση της συλλογιστικής μας. Η διάψευση, από τα διάφορα πειραματικά δεδομένα, της βαθιά ριζωμένης πεποίθησης ότι η παραδοσιακή λογική αντικατοπτρίζει μοναδικά το πώς συλλογιζόμαστε, οδήγησε τα τελευταία χρόνια στην επικράτηση των πιθανοτικών μοντέλων για τη μελέτη της ανθρώπινης συλλογιστικής. Παρόλαυτά, η χρήση λογικών μοντέλων έχει έρθει πάλι δυναμικά στο προσκήνιο. Ερευνητές

[1] Το κατά πόσο, τόσο η ίδια η αγγλική τεχνική ορολογία, όσο και η ελληνική της μετάφραση, αντικατοπτρίζουν σωστά τις έννοιες που αναπαριστούν είναι ένα τεράστιο θέμα. Συγκεκριμένα για τον όρο cognitive science, μια μετάφραση όπως "*η νέα επιστήμη του Νου*" φαντάζει λιγότερο ακριβής από το σύνηθες "*γνωσιακή επιστήμη*", όμως με μια προσεκτικότερη ματιά γίνεται εμφανές ότι κάνει πιο κατανοητή την έννοια που αναπαριστά. Για μια εκτεταμένη ανάλυση: [3]

όπως ο Michiel van Lambalgen[2] από το ινστιτούτο λογικής, γλώσσας και υπολογισμού (ILLC) του πανεπιστημίου του Άμστερνταμ, δουλεύουν σε αυτή την κατεύθυνση[8], υποστηρίζοντας την άποψη ότι με τη χρήση των κατάλληλων, ανά περίπτωση, λογικών συστημάτων ως μοντέλων προκύπτουν επιτυχημένες προβλέψεις όχι μόνο όσον αφορά τη συμπεριφορά, αλλά και τη νευρολογική λειτουργία του υποκειμένου. Τα σημασιολογικά δίκτυα είναι ένας τρόπος μοντελοποίησης της γνωσιακής βάσης δεδομένων του υποκειμένου, ισοδύναμος σε εκφραστικότητα με το τυπικό σύστημα της πρωτοβάθμιας λογικής.

Το ερώτημα που γεννάται φυσικά μετά από μια, ακόμα και τόσο μικρή, εξοικείωση με τις προαναφερθείσες έννοιες, είναι κατά πόσο τα σημασιολογικά δίκτυα μπορούν να τυποποιηθούν στα πλαίσια της θεωρίας των institutions. Η απάντηση, όπως θα δούμε, είναι καταφατική και παρ' όλο που δεν μας δίνει στην ουσία κάποια καινούργια πληροφορία, συνεπάγεται ότι τα αποτελέσματα της μελέτης των λογικών συστημάτων - μέσω της θεωρίας των institutions - ισχύουν και για τα σημασιολογικά δίκτυα.

Η ΕΝΝΟΙΑ 'INSTITUTION'

Για να κατανοήσει κανείς την έννοια 'institution' πρέπει πρώτα να κατανοήσει τις επιστημονικές συνθήκες κάτω από τις οποίες εμφανίστηκε η αντίστοιχη θεωρία. Η συνεχώς αυξανόμενη χρήση διαφορετικών λογικών συστημάτων στον τομέα της επιστήμης των υπολογιστών, ανάλογα με τις ανάγκες της εκάστοτε εφαρμογής, οδήγησε στη συναγωγή ορισμένων αποτελεσμάτων που ήταν τελείως ανεξάρτητα από τα εμπλεκόμενα σε αυτά λογικά συστήματα. Το γεγονός αυτό, σε συνδιασμό με το μεγάλο κόστος που απαιτεί η υλοποίηση διαφορετικών μεταγλωτιστών και αποδεικτών θεωρημάτων για τις διάφορες γλώσσες λογικού προγραμματισμού, υποκίνησαν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη μελέτη των λογικών συστημάτων και των μεταξύ τους μεταφράσεων που διατηρούν την ορθότητα[3]

Κάθε λογικό σύστημα αποτελείται από δύο βασικά στοιχεία: το *συντακτικό* του και τη *σημασιολογία* του, δηλαδή τα συντακτικά του γνωρίσματα και τη σημασία των συμβόλων του. Οι δύο αυτές έννοιες, αν και διαφορετικής φύσεως, γεφυρώνονται απο τη *σχέση ικανοποίησης*, η οποία μελετάται από τη θεωρία μοντέλων. Η θεωρία μοντέλων συνδιάζει την *αφηρημένη άλγεβρα*[4] και τη λογική για να μελετήσει τη σχέση μεταξύ μιας τυπικής γλώσσας και των ερμηνειών, ή μοντέλων της. Ενώ η παραδοσιακή θεωρία μοντέλων υποθέτει ένα σταθερό λεξιλόγιο

[2] Prof.dr. Michiel van Lambalgen,Chair of Logic & Cognitive Science, ILLC/Department of Philosophy

[3] Στη μαθηματική λογική, ένα *παραγωγικό σύστημα* έχει την ιδιότητα της ορθότητας αν κάθε πρόταση που το σύστημα αποδεικνύει είναι επίσης αληθής σε όλες τις ερμηνείες ή μοντέλα της σημασιολογικής θεωρίας της γλώσσας του συστήματος. Με άλλα λόγια το σύστημα είναι ορθό αν κάθε θεώρημά του (κάθε τύπος αποδείξιμος από το κενό σύνολο) είναι έγκυρο σε κάθε δομή της γλώσσας και οι κανόνες συναγωγής του αποδεικνύουν μόνο τύπους που είναι έγκυροι σε σχέση με τη σημασιολογία του. Τις περισσότερες φορές, αλλά όχι πάντα, αυτό σημαίνει ότι οι κανόνες συναγωγής του διατηρούν την αλήθεια.

[4] Η *αφηρημένη άλγεβρα* μελετάει τα κοινά χαρακτηριστικά γνωστών αλγεβρικών συστημάτων, όπως είναι οι ομάδες, οι δακτύλιοι, τα πεδία, κτλ.

(συνήθως κάποια πρωτοβάθμια γλώσσα), η έννοια 'institution', που ουσιαστικά εισήχθει για να τυποποιήσει την έννοια 'λογικό σύστημα', μας επιτρέπει να θεωρήσουμε πολλά διαφορετικά λεξιλόγια ταυτόχρονα. Ένα institution αποτελείται από μια συλλογή από υπογραφές (τα διάφορα λεξιλόγια), καθε μια από τις οποίες ορίζει τα μη λογικά σύμβολα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή προτάσεων σε ένα τυπικό σύστημα. Εκτός από τις υπογραφές, περιλαμβάνει ακόμα μια συλλογή από μετασχηματισμούς μεταξύ υπογραφών, μια συλλογή από μοντέλα για κάθε υπογραφή, και μια σχέση ικανοποίησης μεταξύ των προτάσεων κάθε υπογραφής και των μοντέλων της. Η βασική απαίτηση είναι η σχέση ικανοποίησης να είναι συνεπής με την αλλαγή συμβολισμού, δηλαδή όποτε μια υπογραφή αλλάζει μέσω κάποιου μορφισμού υπογραφών, η ικανοποίηση των προτάσεων της καινούργιας υπογραφής από τα αντίστοιχα μοντέλα αλλάζει ανάλογα. Με αυτό τον τρόπο τα institutions μας επιτρέπουν να μελετήσουμε τη γενική δομή των διαφόρων τυπικών γλωσσών, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν τις συντακτικές και σημασιολογικές διαφορές τους. Κάτι τέτοιο μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μεγαλύτερες γλωσσικές δομές από μικρότερες με τον καθορισμό χαρακτηριστικών, πιθανότατα χρησιμοποιώντας παραμέτρους, και χωρίς να πρέπει δεσμευτούμε από κάποιο λογικό σύστημα .

Η θεωρία των institutions, εξαιτίας κυρίως του αφηρημένου χαρακτήρα της, έχει ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών σε τομείς όπως αυτός των *τυπικών προδιαγραφών* [5] και των γλωσσών προγραμματισμού, καθώς και στη θεωρία βάσεων δεδομένων και τη σημασιολογία τεχνητών και φυσικών γλωσσών.

Η ΕΝΝΟΙΑ 'ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ'

Τα σημασιολογικά δίκτυα περιγράφονται συχνά σαν γραφικός συμβολισμός για την αναπαράσταση γνώσης σε μοτίβα από ενδοσυνδεδεμένους κόμβους και τόξα. Αν όμως ρίξουμε μια προσεκτικότερη ματιά, θα δούμε ότι η έννοια αυτή εμπεριέχει πολύ περισσότερα. Τα σημασιολογικά δίκτυα εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στα πλαίσια της μελέτης της γλώσσας και αργότερα εξελίχθηκαν σε εργαλείο για την αναπαράσταση γνώσης και την κατασκευή αυτοματοποιημένων συστημάτων συναγωγής. Τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι τρία και αφορούν τη γλώσσα, τη λογική και τη σκέψη: προέρχονται από την εννοιολογική ανάλυση της γλώσσας, έχουν ισοδύναμη εκφραστικότητα με την πρωτοβάθμια λογική, και μπορούν να υποστηρίξουν συναγωγές μέσω ενός *ερμηνευτή* που διαχειρίζεται εσωτερικές αναπαραστάσεις.

Η προσπάθεια ορισμού της έννοιας του σημασιολογικού δικτύου, θα αποδεικνυόταν μάλλον δύσκολο εγχείρημα. Οι πολλές διαφορετικές απόψεις που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία καθιστούν φρονιμότερη προσέγγιση την παράθεση των

[5] Οι *τυπικές προδιαγραφές* είναι τεχνικές ανάπτυξης λογισμικού για τον τυπικό προσδιορισμό της συμπεριφοράς ενός συστήματος. Στην επιστήμη των υπολογιστών μία τυπική προδιαγραφή είναι μια μαθηματική περιγραφή λογισμικού ή υλικού, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υλοποίησή του. Περιγράφει τι θα έπρεπε να κάνει το σύστημα, και όχι απαραίτητα πως θα έπρεπε να το κάνει. Μέσω της θεωρίας των institutions μπορούμε να προσδιορίαουμε, όπως είδαμε, τα χαρακτηριστικά που καθορίζουν μια γλωσσική δομή , πριν αποφασίσουμε ποιο λογικό σύστημα θα την υλοποιήσει.

βασικών στοιχείων που περιλαμβάνονται σε όλους τους υπαρκτούς ορισμούς. Υπό αυτό το πρίσμα, ένα σημασιολογικό δίκτυο είναι ένας τρόπος να συλλογιζόμαστε για τη γνώση, σύμφωνα με τον οποίο αυτή οργανώνεται σε έννοιες και σχέσεις μεταξύ των εννοιών αυτών. Πρόκειται αφενός για μια διαγραμματική αναπαράσταση αποτελούμενη από κουτιά, τόξα, και ετικέτες, και αφετέρου για μια εξωτερική αναπαράσταση υπολογιστή που επιτρέπει δραστηριότητες παρόμοιες με αυτές μιας βάσης δεδομένων και ορθή συναγωγή. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρηση αλγορίθμων που εφαρμόζονται πάνω στις εσωτερικές υλοποιήσεις των σημασιολογικών δικτύων, τις οποίες διαχειρίζεται ένας *ερμηνευτής*. Επομένως, η συνηθισμένη περιγραφή των σημασιολογικών δικτύων ως διαγράμματα, μπορεί να βελτιωθεί αν θεωρήσουμε το αντίστοιχο διάγραμμα κάθε δικτύου σαν ένα τρόπο αναπαράστασής του. Το ίδιο το δίκτυο είναι στην ουσία ένα δίκτυο εννοιών όπως διατηρείται από έναν γνωστικό πράκτορα.

Τα σημασιολογικά δίκτυα, όπως ορίστηκαν παραπάνω, μπορούν να χρησιμοποίηθούν είτε για την αναπαράσταση γνώσης, είτε για την υποστήριξη αυτοματοποιημένων συστημάτων συλλογισμού για τη γνώση.

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ INSTITUTIONS, ΤΑ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ Η ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΛΟΓΙΚΗ

Για να γίνει φανερός ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται τα σημασιολογικά δίκτυα με τη θεωρία των institutions, είναι αναγκαία η μελέτη της σχέσης τους με τη συμβολική λογική. Είδαμε ότι το κοινό χαρακτηρηστικό όλων των σημασιολογικών δικτύων είναι ότι αποτελούν μία δηλωτική γραφική αναπαράσταση γνώσης, που μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή *αυτοματοποιημένων συστημάτων συναγωγής*. Η διαδικασία συναγωγής σε ένα σημασιολογικό δίκτυο λέγεται *κληρονομικότητα*, και επιτρέπει στα χαρακτηριστικά ενός κόμβου να αντιγραφούν από έναν απόγονό του. Κάποιοι τύποι σημασιολογικών δικτύων δεν επιδέχονται τυποποίηση , αλλά κάποιοι άλλοι αποτελούν τυπικά ορισμένα *συστήματα λογικής*.

Οι τυπικές πλευρές των σημασιολογικών δικτύων είναι σχεδόν μη διαχωρήσιμες από αυτές των παραδοσιακών λογικών συστημάτων. Η βασική τους διαφορα, που από πολλούς θεωρείται πλεονέκτημα για τα σημασιολογικά δίκτυα, βρίσκεται στο συμβολισμό. Ο γραφικός συμβολισμός των δικτύων επιτρέπει σε όλη την πληροφορία για μια οντότητα να βρίσκεται αποθηκευμένη σε έναν κόμβο και υποδεικνύει τις σχετικές με αυτήν πληροφορίες μέσω τόξων άμεσα συνδεδεμένων με τον κόμβο αυτό. Στην περίπτωση του συμβολικού λογικού συμβολισμού, το σκόρπισμα της πληροφορίας όχι μόνο καταστρέφει την αναγνωσιμότητα της φόρμουλας, αλλά επιπλέον σκιάζει τη σημασιολογική δομή της πρότασης από την οποία αυτή προήλθε. Το επιχείρημα αυτό είναι μόνο ένα κομμάτι ενός άλλου, πιο περίπλοκου επιχειρήματος, που αφορά τη φύση της σημασιολογίας και το πως διαφορετικοί συμβολισμοί μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά συστήματα με άλλες πραγματιστικές χρήσεις. Εκτός από την αναγνωσιμότητα και τη σημασιολογική δομή, ο γραφικός συμβολισμός έχει συχνά ευρετική αξία, η οποία συνίσταται στο ότι βοηθάει τους αναγνώστες να ανακαλύψουν μοτίβα που θα ήταν δύσκολο, ή αδύνατο, να εντοπίσουν μέσω της γραμμικής μορφής. Τέλος, φαίνεται ότι το βασικό πλεονέκτημα του γραφικού συμβολισμού είναι η ικανότητά του να παρουσιάζει ξεκάθαρα τις άμεσες συνδέσεις, ενώ ο γραμμικός συμβολισμός πρέπει να βασιστεί σε επαναλημένες εμφανίσεις μεταβλητών ή ονομάτων για να παρουσιάσει τις ίδιες σχέσεις.

Εκτός από τις διαφορές που περιγράφηκαν παραπάνω, οι γραφικοί και οι γραμμικοί συμβολισμοί μπορούν να εκφράσουν λογικά ισοδύναμη πληροφορία, έχοντας όμως διαφορετικό συντακτικό υπόβαθρο. Κάθε σημασιολογικό δίκτυο μπορεί να μετατραπεί εύκολα σε ένα σύνολο από φόρμουλες πρώτου βαθμού, και αντίστροφα. Επιπλέον, έχει δειχθεί ότι τα απλά σημασιολογικά δίκτυα μπορούν να επεκταθούν ώστε να έχουν την ίδια εκφραστική δύναμη με την πρωτοβάθμια λογική. Το συμπέρασμα που συνάγεται από όλα τα παραπάνω είναι ότι η παραδοσιακή συμβολική λογική και τα σημασιολογικά δίκτυα είναι στην ουσία διαφορετικοί φορμαλισμοί για την αναπαράσταση πληροφορίας, με τα σημασιολογικά δίκτυα να έχουν ισοδύναμη εκφραστικότητα με την πρωτοβάθμια λογική.

Υπάρχει ακόμα ένα τελευταίο βήμα που πρέπει να κάνουμε για να αποκαλύψουμε τη σύνδεση μεταξύ των σημασιολογικών δικτύων και της θεωρίας των institutions, κι αυτό είναι να προσδιορίσουμε τη σχέση της θεωρίας αυτής με την πρωτοβάθμια λογική. Έχει δειχθεί ότι η πρωτοβάθμια λογική είναι ένα institution. Στο τρίτο μέρος παρουσιάζεται μία σκιαγράφηση της απόδειξης[6] . Στο institution της πρωτοβάθμιας λογικής οι υπογραφές δίνονται από σύμβολα σχέσεων, συναρτήσεων και τύπων αντικειμένων, οι προτάσεις είναι οι συνήθεις πρωτοβάθμιες προτάσεις, και τα μοντέλα οι συνήθεις πρωτοβάθμιες δομές.

Συνδιάζοντας όλες τις παραπάνω πληροφορίες, βλέπουμε ξεκάθαρα ότι ο σύνδεσμος μεταξύ σημασιολογικών δικτύων και institutions έγκειται στη σχέση τους με την πρωτοβάθμια λογική. Το ερώτημα που φυσικά προκύπτει είναι εάν και πώς ένα σημασιολογικό δίκτυο μπορεί να τυποποιηθεί υπό τη μορφή ενός institution, όπως συμβαίνει στην περίπτωση της λογικής πρώτου βαθμού, εφόσον όχι μόνο και τα δύο αποτελούν φορμαλισμούς που αναπαριστούν πληροφορία, αλλά είναι επίσης ισοδύναμα όσον αφορά την εκφραστικότητα. Αναλύωντας λίγο προσεκτικότερα όλες τις εμπλεκώμενες έννοιες στο δεύτερο μέρος αυτής της εργασίας, γίνεται φανερό ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική.

[6] Για μια πληρέστερη απόδειξη :[5]

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ INSTITUTIONS

Οι *Joseph Goguen* και *Rod Burstall* εισήγαγαν την έννοια του institution το 1979. Από τότε η θεωρία των institutions αναπτύχθηκε σταδιακά από μία κομψή κατηγοριο-θεωρητική σύνθεση της άτυπης έννοιας του λογικού συστήματος, σε μια σημαντική τάση, που σήμερα αποκαλείται ***καθολική λογική***[7] με σημαντικές εφαρμογές και επιπτώσεις τόσο για τη λογική, όσο και για την επιστήμη των υπολογιστών.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ

Έχοντας εξοικειωθεί αρκετά με την έννοια του institution, μπορούμε να προχωρήσουμε στην παρουσίαση της αντίστοιχης θεωρίας, ξεκινώντας από τα στοιχεία της θεωρίας κατηγοριών που εμπλέκονται στον τυπικό ορισμό ενός institution.
Ο Scott δίνει μια οξυδερκή περιγραφή της θεωρίας κατηγοριών στο ακόλουθο απόσπασμα: "*What we are probably seeking, is a 'purer' view of functions. A theory of functions in themselves, not a theory of functions derived from sets. What, then, is a pure theory of functions? Category theory*" (*"Αυτό που πιθανώς ζητάμε είναι μία 'καθαρότερη' θεώρηση των συναρτήσεων. Μια θεωρία των ίδιων των συναρτήσεων, όχι μια θεωρία συναρτήσεων συναγώμενη από σύνολα. Ποια είναι τότε μια καθαρή θεωρία συναρτήσεων? Η θεωρία κατηγοριών*"). Η θεωρία κατηγοριών δεν αναφέρεται σε κάποιο συγκεκριμένο περιβάλλον. Είναι ένα βασικό εννοιολογικό πλαίσιο, όπως είναι και η θεωρία συνόλων, μόνο που ασχολείται με πιο αφηρημένες κατασκευές και απαιτεί πιο περίπλοκο συμβολισμό. Το κόστος της γενικότητάς της είναι ότι οι κατηγοριο-θεωρητικές συνθέσεις εννοιών μπορεί να είναι δυσκολότερο να κατανοηθούν απ' ότι οι αντίστοιχες συνθέσεις σε άλλους φορμαλισμούς. Το κέρδος είναι ότι οι διαφορες έννοιες μπορούν να αντιμετωπιστούν

[7] ***Η καθολική λογική*** μελετά τα κοινά χαρακτηριστικά όλων των λογικών δομών και είναι για τη ***λογική*** ότι και η αφηρημένη άλγεβρα για την άλγεβρα.

σε ένα ανώτερο επίπεδο, που επιτρέπει την εμφάνιση κρυμμένων κοινών χαρακτηριστικών. Τα βασικά αντικείμενα της θεωρίας κατηγοριών λέγονται *κατηγορίες*, και ορίζονται ως εξής:

Ορισμός
Μια κατηγορία $\mathfrak{C}$ αποτελείται από:

1. Μία συλλογή από *αντικείμενα*

2. Μία συλλογή από τόξα, που συχνά καλούνται *μορφισμοί*

3. Λειτουργίες που αναθέτουν σε κάθε τόξο f ένα αντικείμενο $domf$, το *domain* του, και ένα αντικείμενο *codf*, το *codomain* του. Γράφουμε $f : A \to B$, ή $A \xrightarrow{f} B$, για να δείξουμε ότι $domf = A$ και $codf = B$. Η συλλογή από τόξα με *domain* A και *codomain* B γράφεται $\mathfrak{C}\,(A, B)$.

4. Ένας τελεστής σύνθεσης που αντιστοιχεί σε κάθε ζευγάρι τόξων f, g με $codf = domg$ ένα σύνθετο τόξο $f \circ g : domf \to codg$, που ικανοποιεί τον προσεταιριστικό νόμο :

$$\begin{aligned} \text{για κάθε } f : A &\to B\ ,\ g : B \to C\ ,\ h : C \to D \\ h \circ (g \circ f) &= (h \circ g) \circ f \end{aligned}$$

5. Για κάθε αντικείμενο A, ένα τόξο ταυτότητας $id_A : A \to A$, που ικανοποιεί τον ταυτοτικό νόμο:

$$\begin{aligned} \text{για κάθε } f : A &\to B \\ id_B \circ f = f \quad &\text{και} \quad f \circ id_A = f \end{aligned}$$

Οι κατηγορίες ορίζονται παραπάνω με τη χρήση στοιχείων της συνήθους συνολοθεωρίας. Οι "συλλογές" δεν είναι παρά σύνολα, ή κάποιες φορές κύριες κλάσεις, εφόσον θέλουμε να μιλήσουμε για πράγματα όπως η συλλογή όλων των συνόλων, που είναι πολύ μεγάλα για να είναι σύνολα. Οι "λειτουργίες" είναι συνολοθεωρητικές συναρτήσεις. Η ισότητα είναι η συνολοθεωρητική ισότητα.

Παρουσιάζουμε τώρα κάποια παραδείγματα κατηγοριών, ξεκινώντας από μία πολύ απλή, την κατηγορία των συνόλων **Set**, και σταδιακά προσεγγίζοντας όλο και πιο περίπλοκες, όπως η κατηγορία $\Omega - \mathbf{Alg}$ των Ω-αλγεβρών.

Παράδειγμα 1 Η κατηγορία **Set**:

- Τα αντικείμενα της **Set** είναι σύνολα, κι ένα τόξο $f : A \to B$ στη **Set** είναι μία ολική συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .

- Για κάθε ολική συνάρτηση $f : A \to B$ έχουμε $domf = A$, $codf = B$ και $f \in \mathbf{Set}\,(A, B)$.

- Η σύνθεση των ολικών συναρτήσεων $f : A \to B$, $g : B \to C$ είναι η ολική συνάρτηση από το A στο C, που στέλνει κάθε στοιχείο $a \in A$ στο $g(f(a)) \in C$. Η σύνθεση ολικών συναρτήσεων ορισμένων πάνω σε σύνολα είναι επιμεριστικός τελεστής.

- Για κάθε σύνολο A το τόξο ταυτότητας id_A είναι μια ολική συνάρτηση με *domain* και *codomain* A. Για κάθε $f : A \to B$, οι συναρτήσεις ταυτότητας id_A καιd id_B ικανοποιούν το νόμο ταυτότητας.

  <u>Παράδειγμα 2</u> Μια μερική διάταξη $\leq_P$ πάνω σ' ένα σύνολο P είναι μια αυτοπαθής, μεταβατική, και αντισυμμετρική σχέση ορισμένη πάνω στα σ-τοιχεία του P. Μια μονότονη συνάρτηση, ή μια συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη, από το $(P, \leq_P)$ στο $(Q, \leq_Q)$ είναι μια συνάρτηση $f : P \to Q$ τέτοια ώστε αν $p \leq_P p'$, τότε $f(p) \leq_Q f(p')$.
  Η κατηγορία **Poset** περιγράφεται όπως παρακάτω:

- Ένα αντικείμενο στην **Poset** είναι ένα σύνολο P με μια αυτοπαθή, μεταβατική και αντισυμμετρική σχέση $\leq_P$ ορισμένη πάνω στα στοιχεία του.

- Ένα τόξο $f : (P, \leq_P) \to (Q, \leq_Q)$ στην **Poset** είναι μια ολική συνάρτηση από το P επί του Q που διατηρεί τη διαταξη του P, δηλαδή αν $p \leq_P p'$ τότε $f(p) \leq_Q f(p')$. Για κάθε ολική συνάρτηση διατήρησης διάταξης f με domain P και codomain Q, έχουμε $domf = (P, \leq_P)$, $codf = (Q, \leq_Q)$ και $f \in \mathbf{Poset}((P, \leq_P), (Q, \leq_Q))$.

- Η σύνθεση δύο ολικών συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη $f : P \to Q$, $g : Q \to R$ είναι μια ολική συνάρτηση $g \circ f : P \to R$. Επιπλέον, αν $p \leq_P p'$ τότε, εφόσον η f διατηρεί τη διάταξη του P , $f(p) \leq_Q f(p')$; και εφόσον η g διατηρεί τη διάταξη του Q , $g(f(p)) \leq_R g(f(p'))$. Επομένως η $g \circ f$ διατηρεί τη διάταξη του P. Η σύνθεση συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη είναι επιμεριστικός τελεστής γιατί δεν είναι παρά συναρτήσεις ορισμένες πάνω σε σύνολα και η σύνθεση συναρτήσεων υπακούει στον επιμεριστικό νόμο.

- Για κάθε μερική διάταξη $(P, \leq_P)$, η ταυτοτική συνάρτηση id_P διατηρεί τη διάταξη του P και ικανοποιεί τις εξισώσεις του ταυτοτικού νόμου..

  <u>Παράδειγμα 3</u> Η κατηγορία **Mon**.
  Ένα μονοειδές $(M, \cdot, e)$ είναι ένα σύνολο M εφοδιασμένο με μια δυαδική πράξη $\cdot$ από ζευγάρια στοιχείων του M επί του M τέτοια ώστε: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ για κάθε $x, y, z \in M$, και ένα ξεχωριστό στοιχείο e τέτοιο ώστε $e \cdot x = x = x \cdot e$ για κάθε $x \in M$. Ένας ομομορφισμός μονοειδών από το $(M, \cdot, e)$ στο $(M', \cdot', e')$ είναι μια συνάρτηση $f : M \to M'$ τέτοια ώστε $f(e) = e'$ και $f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y)$. Η σύνθεση δύο ομομορφισμών μο-νοειδών είναι η σύνθεσή τους ως συναρτήσεις ορισμένες επάνω σε σύνολα.
  Η κατηγορία **Mon** έχει για αντικείμενα μονοειδή και ομομορφισμούς μονοει-δών για τόξα. Η επαλήθευση ότι η **Mon** είναι κατηγορία ακολουθεί τα ίδια βήματα όπως και στην κατηγορία της **Poset**. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η σύνθεση δύο ομομορφισμών είναι ομομορφισμός.

<u>**Παράδειγμα 4**</u> Η κατηγορία $\Omega - \mathbf{Alg}$
Το Ω είναι ένα σύνολο από σύμβολα τελεστών, που συνήθως καλείται υπογραφή *(signature)*, εφοδιασμένο με μία αντιστοιχία ar μεταξύ στοιχείων του Ω και φυσικών αριθμών; για κάθε $\omega \in \Omega$, $ar(\omega)$ είναι ο αριθμός των ορισμάτων που δέχεται το ω. Μια $\Omega -$ άλγεβρα A αποτελείται από ένα σύνολο $|A|$ (ο *φορέας* της A), και για κάθε τελεστή ω, μια συνάρτηση $a_\omega : |A|^{ar(\omega)} \to |A|$, που καλείται ερμηνεία του ω και στέλνει $ar(\omega)$-πλειάδες στοιχείων του $|A|$ σε στοιχεία του $|A|$. Ένας $\Omega -$ ομομορφισμός από μια $\Omega -$ αλγεβρα A σε μια $\Omega -$ άλγεβρα B είναι μια συνάρτηση $h : |A| \to |B|$ τέτοια ώστε για κάθε τελεστή $\omega \in \Omega$ και tuple $x_1, \ldots, x_{ar(\omega)}$ στοιχείων του $|A|$, ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$h\left(a_\omega\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) = b_\omega\left(h\left(x_1\right), \ldots, h\left(x_n\right)\right)$$

Η κατηγορία $\Omega - \mathbf{Alg}$ έχει $\Omega -$ άλγεβρες για αντικείμενα και $\Omega -$ ομομορφισμούς για τόξα. Αυτή η κατασκευή μπορεί να τελειοποιηθεί προσθέτοντας στην υπογραφή Ω ένα σύνολο εξισώσεων E μεταξύ εκφράσεων αποτελούμενων από στοιχεία του Ω και ένα σύνολο $\{x, y, z, \ldots\}$ από σύμβολα μεταβλητών. Τότε οι $\Omega -$άλγεβρες για τις οποίες οι εξισώσεις της E ικανοποιούνται κάτω από όλες τις αναθέσεις στοιχείων του $|A|$ στα σύμβολα μεταβλητών, σχηματίζουν τα αντικείμενα της κατηγορίας $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{E}) - \mathbf{Alg}$. Για παράδειγμα:

$\Omega = \{\cdot, e\}$

$ar(\cdot) = 2$

$ar(e) = 0$

$E = \{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), e \cdot x = x, x \cdot e = x\}$

Η $(\Omega, E) - \mathbf{Alg}$ είναι ένα άλλο όνομα για τη $\mathbf{Mon}$.

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε μερικές ακόμα κατηγορίες, μαζί με τα αντικείμενα και τους μορφισμούς τους:

Σε όλες τις παραπάνω κατηγορίες, τα αντικείμενα είναι "σύνολα με δομή", και τα τόξα αντιστοιχίες μεταξύ τους που διατηρούν αναλλοίωτη τη δομή. Τέτοιες κατηγορίες καλούνται *συμπαγείς*. Μπορούμε τώρα εύκολα να αντιληφθούμε γιατί η θεωρία κατηγοριών περιγράφεται συχνά σαν μια γείκευση της *αφηρημένης άλγεβρας*, η οποία μελετάει τις κοινές ιδιότητες αλγεβρικών δομών. Οι συμπαγείς κατηγορίες σχηματίζουν μια σημαντική κλάση, αλλά υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες κατηγορίες που δεν ανήκουν σε αυτήν. Στα παρακάτω παράδειγμα παρουσιάζονται διάφορες χρήσιμες *πεπερασμένες* κατηγορίες.

Κατηγορία	**Αντικείμενα**	**Τόξα**
Set	σύνολα	ολικές συναρτήσεις
Pfn	σύνολα	μερικές συναρτήσεις
FinSet	πεπερασμένα σύνολα	πεπερασμένες ολικές συναρτήσεις
Mon	μονοειδή	ομομορφισμοί μονοειδών
Poset	μερικώς διατεταγμένα σύνολα	μονότονες συναρτήσεις
Grp	ομάδες	ομομορφισμοί ομάδων
$\Omega-$**Alg**	άλγεβρες με υπογραφή Ω	$\Omega-$ομομορφισμοί
CPO	πλήρεις μερικές διατάξεις	συνεχείς συναρτήσεις
Vect	διανυσματικοί χώροι	γραμμικοί μετασχηματισμοί
Met	μετρικοί χώροι	contraction maps (απεικονίσεις συστολής)
Top	τοπολογικοί χώροι	συνεχείς συναρτήσεις

Table 1: Κοινές *συμπαγείς* κατηγορίες

Παράδειγμα 5 Η κατηγορία **0** δεν έχει ούτε αντικείμενα ούτε τόξα. Ο επιμεριστκός και ο ταυτοτικός νόμος ικανοποιούνται κενά.

Παράδειγμα 6 Η κατηγορία **1** έχει ένα αντικείμενο και ένα τόξο. Για να ικανοποιεί τον ταυτοτικό νόμο, το τόξο πρέπει να είναι η το ταυτοτικό τόξο του αντικειμένου. Η σύνθεση αυτού του τόξου με τον εαυτό του είναι πάλι το ίδιο το τόξο, κι έτσι ικανοποιούνται ο επιμεριστικός και ο ταυτοτικός νόμος. Σημειώστε εδώ ότι δεν προσδιορίζουμε το είδος των μαθηματικών ή φυσικών οντοτήτων τις οποίες τα αντικείμενα και τα τόξα αναπαριστούν. Ενδιαφερόμαστε μόνο για τις αλγεβρικές ιδιότητες, οι οποίες καθορίζονται εξ' ολοκλήρου από τους νόμους των κατηγοριών.

Παράδειγμα 7 Η κατηγορία **2** έχει δύο αντικείμενα, δύο ταυτοτικά τόξα, και ένα τόξο από το ένα αντικείμενο στο άλλο. Υπάρχει μόνο ένας τρόπος για να οριστεί η σύνθεση και εύκολα αποδεικνύεται ότι ο επιμεριστικός και ο ταυτοτικός νόμος ικανοποιούνται.

Παράδειγμα 8 Η κατηγορία **3** έχει τρία αντικείμενα (ας τα αποκαλέσουμε A, B, C), τρία ταυτοτικά τόξα και τρία τόξα: $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : A \to C$. Η σύνθεση ορίζεται μοναδικά και οι κατυηγορικοί νόμοι ικανοποιούνται. Σημειώστε ότι εφόσον f, g και h είναι τα μόνο μη ταυτοτικά τόξα της **3**, πρέπει να ισχύει ότι $g \circ f = h$.

Οι κατηγορίες **2** και **3** μπορούν ν α αναπαρασταθούν γραφικά όπως φαίνεται στο σχήμα (0.0.1).

Ένα διαφορετικό είδος κατηγορίας προκύπτει αν θεωρήσουμε μια μεμονωμένη αλγεβρική δομή σαν κατηγορία.

Παράδειγμα 9 Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ σχηματίζει μια

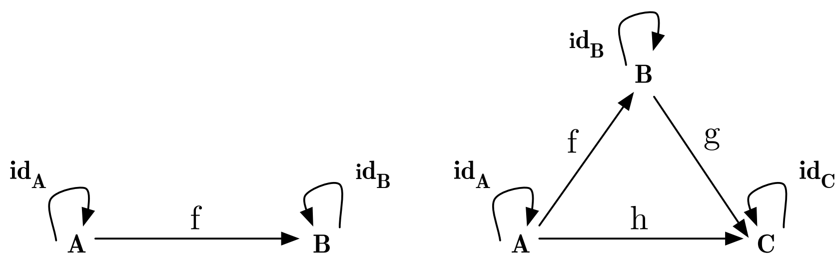

Figure 0.0.1: Γραφική αναπαράσταση των κατηγοριών **2** και **3**.

κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι τα στοιχεία του P. Ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι αντικειμένων p, p' με $p \leq p'$ υπάρχει ένα μοναδικό τόξο που αναπαριστά αυτό το γεγονός, ενώ δεν υπάρχει τόξο από το p στο p' όταν $p \nleq p'$. Η σύνθεση τόξων είναι εμφανώς επιμεριστική, εφόσον υπάρχει το πολύ ένα τόξο μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους αντικειμένων. Ο ταυτοτικός νόμος αντιστοιχεί εδώ στην αυτοπαθητική ιδιότητα των μερικών διατάξεων, ενώ η ύπαρξη σύνθετων τόξων αντιστοιχεί στη μεταβατική ιδιότητα. Η αντισυμμετρικότητα δεν απαιτείται για τον ορισμό της κατηγορίας: για την ακρίβεια κάθε προδιάταξη (preorder) (δηλαδή, κάθε σύνολο P εφοδιασμένο με μία αυτοπαθή και μεταβατική σχέση $\leq$) σχηματίζει μια κατηγορία. Αν δούμε τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως κατηγορίες, τότε η **Poset** είναι ένα παράδειγμα κατηγορίας κατηγοριών.

Παράδειγμα 10 Ένα μονοειδές $(M, \cdot, e)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως κατηγορία με μοναδικό αντικείμενο το σύνολο M. Τα στοιχεία του M αναπαρίστανται σαν τόξα από το αντικείμενο στον εαυτό του, το ταυτοτικό στοιχείο e είναι ταυτοτικό τόξο, και η πράξη $\cdot$ η σύνθεση τόξων. Αντίστροφα, κάθε κατηγορία με ένα μοναδικό αντικείμενο σχηματίζει ένα μονοειδές.

Για κάθε κατηγορία $\mathfrak{C}$, υπάρχει η δυική της κατηγορία $\mathfrak{C}^{op}$, που έχει τα ίδια αντικείμενα με τη $\mathfrak{C}$, ενώ τα τόξα της είναι τα αντίθετα από τα τόξα της $\mathfrak{C}$. Δηλαδή, αν $f : A \to B$ είναι ένα $\mathfrak{C}$-τοξο, τότε $f : B \to A$ είναι ένα $\mathfrak{C}^{op}$-τόξο. Η σύνθεση και τα ταυτοτικά τόξα ορίζονται με τον προφανή τρόπο. Όλοι οι ορισμοί για τις κατηγορίες μπορούν να αναδιατυπωθούν, με τα τόξα αντεστραμμένα, ως ορισμοί για τις αντιστοιχες δυικές κατηγορίες. Επιπλέον, κάθε πρόταση S που διατυπώνεται για κατηγορίες, μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία δυική πρόταση S^{op} ανταλλάσσοντας τις λέξεις "*domain*" , "*codomain*" και αντικαθιστώντας κάθε σύνθετο τόξο $g \circ f$ με το τόξο $f \circ g$. Αν η S είναι αληθής για μια κατηγορία $\mathfrak{C}$, τότε εξ' ορισμού, η S^{op} είναι αληθής για την $\mathfrak{C}^{op}$.

Όπως γίνεται φανερό από τον πίνακα με τις *συμπαγείς κατηγορίες* (1), πολλά μαθηματικά πεδία μπορούν να αναπαρασταθούν υπό την μορφή κατηγοριών. Αλλά οι ίδιες οι κατηγορίες αποτελούν ένα μαθηματικό πεδίο, και μάλιστα υπάρχουν κατηγορίες των οποίων τα αντικείμενα είναι άλλες κατηγορίες και τα τόξα είναι απεικονίσεις μεταξύ αυτών των κατηγοριών που διατηρούν τη δομή, και καλούνται *functors*.

Ορισμός

Ένας functor $\mathbf{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, όπου $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ είναι κατηγορίες, είναι μια απεικόνιση που στέλνει κάθε $\mathfrak{C}-$αντικείμενο A σε ένα $\mathfrak{D}-$αντικείμενο $F(A)$ και κάθε $\mathfrak{C}-$τόξο $f : A \to B$ σε ένα $\mathfrak{D}-$τόξο $F(f) : F(A) \to F(B)$ έτσι ώστε για όλα τα $\mathfrak{C}-$αντικείμενα A και όλα τα συνθέσιμα $\mathfrak{C}-$τόξα f, g να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} F(id_A) &= id_{F(A)} \\ F(f \circ g) &= F(f) \circ F(g) \end{aligned}$$

Οι functors που περιγράφονται από τον παραπάνω ορισμό καλούνται *covariant* functors. Ένας *contravariant* functor απεικονίζει αντικείμενα σε αντικείμενα όπως και πριν, αλλά απεικονίζει τόξα σε τόξα προς την αντίθετη κατεύθυνση. Πάραυτα, δεν προκειται για μία νέα έννοια, εφόσον ένας contravariant functor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ είναι ακριβώς το ίδιο με έναν covariant functor $F : \mathfrak{C}^{op} \to \mathfrak{D}$.
Ένα τετριμμένο παράδειγμα είναι ο ταυτοτικός functor $I_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ για κάθε κατηγορία $\mathfrak{C}$, που στέλνει κάθε $\mathfrak{C}-$αντικείμενο και κάθε $\mathfrak{C}-$τόξο στον εαυτό του. Ένα, λιγότερο τετριμμένο, παράδειγμα είναι ο *forgetful functor* $U : Mon \to Set$ που στέλνει κάθε μονοειδές $(M, \cdot, e)$ στο σύνολο M, και κάθε ομομορφισμό μονοειδών $h : (M, \cdot, e) \to (M', \cdot', e')$ στην αντίστοιχη συνάρτηση $h : M \to M'$.

Μία απλή και πολύ σημαντική κλάση από functors είναι οι *forgetful functors*. Το γράμμα U χρησιμοποιείται συχνά για το συμβολισμό ενός forgetful functor, επειδή συχνά τον αντιλαμβανόμαστε σαν μια απεικόνιση που ουσιατικά αφαιρεί από τα αντικείμενα μιας κατηγορίας την υποκείνενη δομή τους, στέλνοντάς τα - συνήθως - σε ένα σύνολο. Ο forgetful functor $\mathbf{U} : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$, για παράδειγμα, στέλνει κάθε μονοειδές $(M, \cdot, e)$ στο σύνολο M και κάθε ομομορφισμό μονοειδών $h : (M, \cdot, e) \to (M', \cdot', e')$ στην αντίστοιχη συνάρτηση $h : M \to M'$.

Έχοντας παρουσιάσει την έννοια του functor, μπορούμε τώρα να ορίσουμε την κατηγορία όλων των κατηγοριών **Cat**. Τα αντικείμενα της **Cat** είναι κατηγορίες και τα τόξα της functors . Η δυική της κατηγορία $\mathbf{Cat^{op}}$ έχει τα ίδια αντικείμενα και τα αντίθετα τόξα από αυτά της **Cat**. Εδώ οφείλουμε να σταματήσουμε και να αναρωτηθούμε αν η **Cat** μπορεί να θεωρηθεί αντικείμενο του εαυτού της, μιας και ο πληθάριθμός της είναι πελώριος. Προς αποφυγήν τέτοιων προβληματισμών, στην θεωρία κατηγοριών συνήθως διακρίνουμε τις κατηγορίες σε μικρές και μεγάλες, με μικρές αυτές στις οποίες τόσο οι συλλογές αντικειμένων, όσο και τα τόξα είναι σύνολα. Έτσι η **Cat** ορίζεται ακριβέστερα ως η κατηγορία που περιλαμβάνει όλες τις μικρές κατηγορίες, και είναι μια μεγάλη κατηγορία (άρα δεν μπορεί να περιέχει τον εαυτό της).

Ο ΤΥΠΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ INSTITUTION

Τα στοιχεία της θεωρίας κατηγοριών που παρουσιάστηκαν παραπάνω αποτελούν το απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο για την κατανόηση του τυπικού ορισμού ενός institution, που είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός
Ένα *institution* περιλαμβάνει:

1. Μια κατηγορία **Sign**, της οποίας τα αντικείμενα καλούνται *υπογραφές* και τα τόξα *μορφισμοί υπογραφών*.

2. Έναν functor $\mathbf{Sen} : \mathbf{Sign} \rightarrow \mathbf{Set}$ που αντιστοιχίζει σε κάθε υπογραφή Σ ένα σύνολο (αντικείμενο της κατηγορίας **Set**), του οποίου τα στοιχεία καλούνται *προτάσεις* πάνω σ' αυτή την υπογραφή.

3. Έναν functor $\mathbf{Mod} : \mathbf{Sign} \rightarrow \mathbf{Cat^{op}}$ που αντιστοιχίζει σε κάθε υπογραφή Σ μια κατηγορία, της οποίας τα αντικείμενα καλούνται *Σ-μοντέλα* και τα τόξα *μορφισμοί Σ-μοντέλων*.

4. Μια σχέση $\models_\Sigma \subseteq |Mod\,(\Sigma)\,| \times Sen\,(\Sigma)$ για κάθε $\Sigma \in |Sign|$ που καλείται *σχέση ικανοποίησης* και είναι τέτοια ώστε για κάθε μορφισμό υπογραφών $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma^{'}$ της $Sign$ ισχύει η *συνθήκη ικανοποίησης*:

$$\mathcal{M}^{'} \models_{\Sigma'} Sen\,(\phi)\,(e) \Leftrightarrow Mod\,(\phi)\left(\mathcal{M}^{'}\right) \models_\Sigma e$$

για κάθε $\mathcal{M}^{'} \in |Mod\left(\Sigma^{'}\right)|$ και κάθε $e \in Sen\,(\Sigma)$.

Η ουσία της έννοιας του institution έγκειται στην απαίτηση η αντικατάσταση μιας υπογραφής μέσω ενός μορφισμού υπογραφών να επιφέρει συνεπείς αλλαγές στις αντίστοιχες προτάσεις και τα αντίστοιχα μοντέλα. Η έννοια κατά την οποία αυτές οι αλλαγές είναι συνεπείς συγκεκριμενοποιείται από τη συνθήκη ικανοποίησης που δίνεται παραπάνω. Αυτή η συνθήκη ικανοποίησης πηγαίνει ένα βήμα πέρα από τον κλασσικό σημασιολογικό ορισμό της αλήθειας του Tarski[14] και γενικεύει το αξίωμα μετάφρασης του Barwise[8]. Το ευρύ φάσμα συνεπειών μιας τέτοιας εννοιολογικής επέκτασης και το γεγονός ότι ακόμα και για την *εξισωτική λογική*, που έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα institution, η επιβεβαίωση της ισχύος της συνθήκης ικανοποιησιμότητας δεν είναι τελείως τετριμμένη διαδικασία, αποτελούν ενδείξεις ότι αυτό το βήμα έχει κάποια σημασία. Επιπλέον αυτός ο τρόπος κατανόησης της *συνέπειας* προκύπτει φυσικά, εφόσον η αλήθεια μιας πρότασης στη λογική είναι ανεξάρτητη από τα σύμβολα που επιλέγονται για να αναπαραστήσουν τις συναρτήσεις και τις σχέσεις της, που σημαίνει ότι διατηρείται αναλλοίωτη κατά την αλλαγή συμβολισμού. Όταν ο συμβολισμός αλλάζει, οι προτάσεις μεταφράζονται στην ίδια κατεύθυνση με την αλλαγή, ενώ τα μοντέλα μεταφράζονται στην αντίθετη κατεύθυνση. Επειδή αν αντιστρέψουμε την κατεύθυνση των τόξων παίρνουμε έναν contravariant functor, ο παραπάνω ορισμός χρησιμοποιεί την Cat^{op}, τη δυϊκή

[8] **Βλέπε παράρτημα**

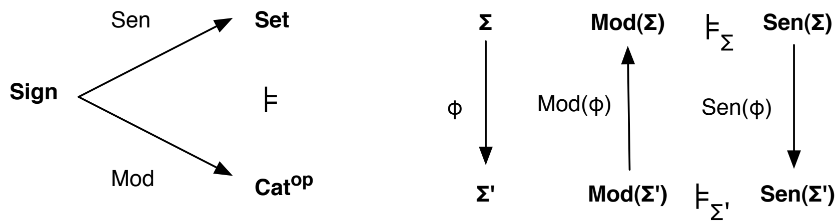

Figure 0.0.2: Οι σχέσεις που εμπλέκωνται στη συνθήκη ικανοποίησης ενός institution.

κατηγορία της κατηγορίας όλων των μικρών κατηγοριών, έτσι ώστε να αντιστρέφονται οι μορφισμοί μοντέλων, αλλά όχι οι μορφισμοί υπογραφών.

Χρησιμοποιώντας διάφορες συντακτικές συμβάσεις καταλήγουμε στην ακόλουθη συμπυκνωμένη μορφή της συνθήκης ικανοποίησης:

$$\mathcal{M}' \models \phi e \Leftrightarrow \phi\mathcal{M}' \models e$$

όπου γράφουμε ϕe για το $Sen\,(\phi)\,(e)$, $\phi\mathcal{M}'$ για το $Mod\,(\phi)\,(\mathcal{M}')$ και καταργούμε τους δείκτες υπογραφών στις σχέσεις ικανοποίησης.

Η εικόνα στο σχήμα (0.0.2) βοηθάει στην οπτικοποίηση των σχέσεων που περιλαμβάνει η συνθήκη ικανοποίησης.

ΤΑ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Όπως είδαμε στην εισαγωγή, τα σημασιολογικά δίκτυα είναι δίκτυα εννοιών που αντικατοπτρίζουν τον τρόπο με τον οποίο οι *γνωστικοί πράκτορες* οργανώνουν της γνώση του κόσμου που διαθέτουν, και τα οποία απλώς αναπαρίστανται από τα αντίστοιχα διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά είναι κατευθυνόμενοι γράφοι, στους οποίους κάθε κόμβος αναπαριστά ένα αντικείμενο, ή μία πρόταση[9] και κάθε τόξο μία σχέση μεταξύ αντικειμένων. Επομένως, τα σημασιολογικά δίκτυα μπορούν να αναπαραστήσουν μόνο προτασιακές πληροφορίες. Οι σχέσεις μεταξύ προτάσεων είναι πρωτεύοντος ενδιαφέροντος γιατί προσφέρουν τη βασική δομή για την οργάνωση της γνώσης. Μερικές σημαντικές τέτοιες σχέσεις είναι οι ακόλουθες:

- "IS-A", or "is an instance of", που αναφέρεται στο υπόδειγμα μιας κλάσης, όπου κλάση είναι μια ομάδα αντικειμένων με μία ή περισσότερες κοινές ιδιότητες.
- "A-KIND-OF", που συσχετίζει μια κλάση με μία άλλη.
- "HAS A", που συσχετίζει ιδιότητες με αντικείμενα.
- "CAUSE", που εκφράζει μια αιτιακή σχέση.

Παρόλο που τα σημασιολογικό δίκτυο είναι ισοδύναμα με ένα σύνολο πρωτοβάθμιων τύπων, έχουν δύο σημαντικά πλεονεκτήματα, που τα καθιστούν προτιμότερη επιλογή για ορισμένες εφαρμογές, όπως για παράδειγμα η κατανόηση φυσικής γλώσσας. Αποτελούν ένα πολύ απλό μοντέλο εκτέλεσης και μια εύκολα αναγνώσιμη αναπαράσταση, που καθιστά την οπτικοποίηση της οργάνωσης της γνώσης πολύ ευκολότερη. Έχει ήδη αναφερθει ότι κάποιες εκδοχές σημασιολογικών δικτύων είναι άτυπες, ενώ άλλες είναι τυπικά ορισμένα συστήματα λογικής. Ακολουθούν έξι από τους βασικότερους τύπους σημασιολογικών δικτύων:

1. Τα **Δίκτυα Ορισμών** δίνουν έμφαση στον *υποτύπο* ή την *is-a* σχέση ανάμεσα σε έναν τύπο έννοιας και έναν οριζόμενο υποτύπο. Το δίκτυο που

[9] Ο αγγλικός όρος proposition τυπικά είναι συνώνυμος με τον όρο sentence,. Στα πλαίσια όμως των διάφορων θεωριών νοήματος, ο όρος proposition αντιστοιχεί στη σημασία μιας πρότασης εκφρασμένης σε μια φυσική ή τυπική γλώσσα, που κατά τον Frege είναι ο αντικειμενικός τρόπος με τον οποίο η πρόταση παρουσιάζει την πληροφορία που περιέχει (Sinn).

προκύπτει καλείται επίσης *γενίκευση ή ιεραρχία ένταξης* και υποστηρίζει τον κανόνα της κληρονομικότητας (που είναι η λειτουργία συναγωγής στα σημασιολογικά δίκτυα), δηλαδή τη μεταφορά των ιδιοτήτων ενός υπερτύπου σε όλους τους υποτύπους του. Εφόσον οι ορισμοί είναι αληθείς (εξ' ορισμού), συχνά θεωρείται ότι η πληροφορία σε αυτά τα δίκτυα είναι αναγκαία αληθής.

2. Τα **Δηλωτικά Δίκτυα** σχεδιάζονται για την επιβεβαίωση προτάσεων. Η πληροφορία που υπάρχει σε αυτά τα δίκτυα θεωρείται ενδεχομενικά αληθής, εκτός κι αν έπεται κάποιου τροπικού τελεστή. Τέτοια δίκτυα έχουν προταθεί ως μοντέλα για τις εννοιολογικές δομές που βρίσκονται στο υπόβαθρο της σημασιολογίας φυσικών γλωσσών.

3. Τα **Δίκτυα Συνεπαγωγής** χρησιμοποιούν τη συνεπαγωγή ως την πρωταρχική σχέση σύνδεσης κόμβων. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν μοτίβα πεποιθήσεων, με τη χρήση σχέσεων είτε αιτιότητας, είτε συνεπαγωγής.

4. Τα **Εκτελέσιμα Δίκτυα** συμπεριλαμβάνουν κάποιους μηχανισμούς που μπορούν να εκτελέσουν συνεπαγωγές, να μεταφέρουν μηνύματα, ή να ψάξουν για μοτίβα και συνειρμούς.

5. Τα **Δίκτυα Μάθησης** χτίζουν ή επεκτείνουν τις αναπαραστάσεις τους εμπλουτίζοντας τη γνώση που διαθέτουν μέσω παραδειγμάτων.

6. Τα **Υβριδικά Δίκτυα** συνδιάζουν δύο ή περισσότερα από τα παραπάνω χαρακτηριστικά, είτε σε ένα δίκτυο, είτε σε ξεχωριστά δίκτυα, που όμως αλληλεπιδρούν έντονα μεταξύ τους.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση των σημασιολογικών δικτύων και το φαινόμενο της ισοδυναμίας τους με σύνολα πρωτοβάθμιων προτάσεων, πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε τη φύση και τη λειτουργία των παραπάνω βασικών τύπων τέτοιων δικτύων.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Δίκτυα Ορισμών

Το αρχαιότερο γνωστό σημασιολογικό δίκτυο σχεδιάστηκε τον 3^{o} αιώνα μ.Χ., από τον Έλληνα φιλόσοφο *Πορφύριο,* στα πλαίσια των σχολιασμών του πανώ στις κατηγορίες του Αριστοτέλη. Με τη χρήση του προσπάθησε να επεξηγήσει τη μέθοδο που χρησιμοποιεί ο Αριστοτέλης για να ορίσει τις κατηγορίες του, προσδιορίζοντας το *γένος ή γενικό τύπο* και την *ειδοποιό διαφορά* που διακρίνει διαφορετικούς υποτύπους (είδη) του ίδιου υπερτύπου (γένους).

Οι κατηγορίες είναι οι γενικοί τύποι του όντος και οι αντίστοιχοι γενικοί τύποι των εννοιών που περιγράφουν τις ιδιότητες και τις σχέσεις του. Παρόλα αυτά, αυτός δεν είναι ο ορισμός του Αριστοτέλη, μιας και πουθενά στο έργο του δεν

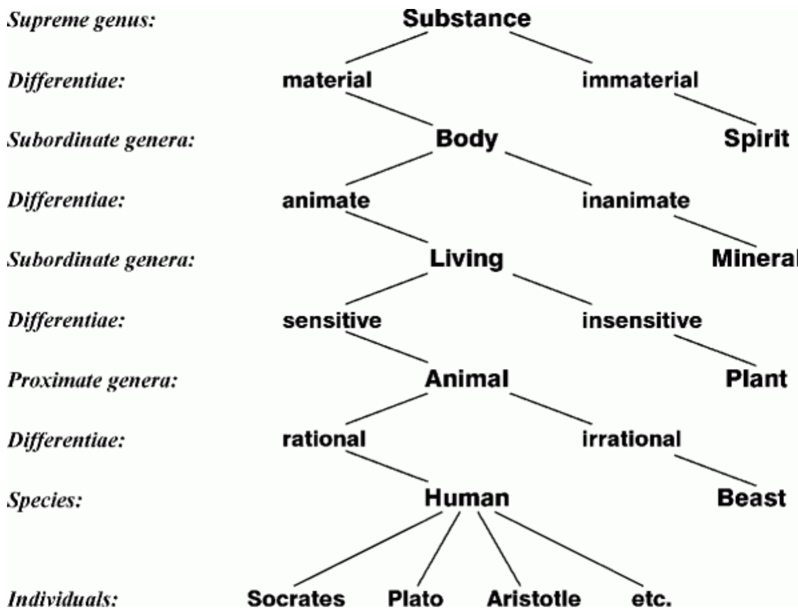

Figure 0.0.3: Το σημασιολογικό δίκτυο του *Πορφυρίου*

υπάρχει μια τέτοια ξεκάθαρη και ρητή περιγράφή της έννοιας της κατηγορίας. Στο οντολογικό επίπεδο, οι κατηγορίες είναι τα υψηλότερα *γένη* του όντος, στα οποία ανάγονται όλες οι ατομικές πλευρές και εκδηλώσεις του. Στο επιστημολογικό επίπεδο, οι κατηγορίες αποτελούν διαφορετικές θεωρήσεις των αντικειμένων, οι οποίες δεν μπορούν να αναχθούν σε μια ενοποιημένη θεώρηση, που να βρίσκεται πάνω από όλες τις άλλες. Στο βιβλίο του*"Κατηγορίαι"*, ο Αριστοτέλης συνάγει ότι οι κατηγορίες είναι δέκα: η *ουσία,* η *ποσότητα*, η *ποιότητα*, η *σχέση*, ο *χώρος*, ο *χρόνος*, η *θέση* (κείσθαι), η *κατάσταση* (έχειν), η *ενέργεια* (ποιείν) και η *πάθηση* (πάσχειν).

Στο σχήμα (0.0.3) απεικονίζεται η κατηγορία της ουσίας, που αποκαλείται το *ανώτατο γένος,* ή η πιο γενική κατηγορία, εφόσον, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για όλα όσα ανάγονται στις υπόλοιπες κατηγορίες. Αν οι κατηγορίες είναι τα πιο γενικά γένη ή τύποι κατηγορούμενων για κάθε ξεχωριστό αντικείμενο, τότε η ξεχωριστή ύπαρξη του ίδιου του αντικειμένου, η *ουσία* του, πρέπει να είναι η συνθήκη που επιτρέπει την πιθανότητα όλων των υπόλοιπων κατηγορημάτων.

Οι μέθοδοι ορισμού και συλλογισμού του Αριστοτέλη χρησιμοποιούνται ακόμα στους τομείς της τεχνητής νοημοσύνης, των αντικειμενοστρεφών γλωσσών προγραμματισμού και στη σύνταξη κάθε λεξικού από αρχαιοτάτων χρόνων μέχρι σήμερα.

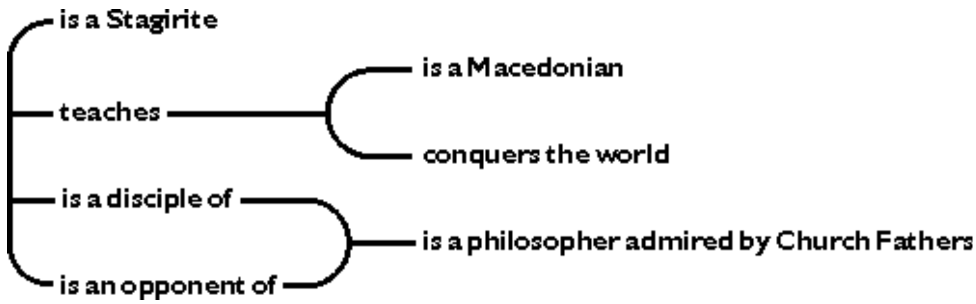

Figure 0.0.4: Ο σχεσιακός γράφος του Peirce

Υλοποίηση Δικτύων Ορισμών

Οι πρώτες υλοποιήσεις σημασιολογικών δικτύων χρησιμοποιήθηκαν για να ορίσουν εννοιολογικούς τύπους και μοτίβα σχέσεων για συστήματα μηχανικής μετάφρασης. Το σύστημα της Margaret Masterman[10] ήταν το πρώτο που αποκαλέστηκε σημασιολογικό δίκτυο. Μεταξύ των τωρινών συστημάτων, οι *περιγραφικές λογικές* αποτελούν επεκτάσεις των χαρακτηριστικών του *δέντρου του Πορφυρίου*. Το *δέντρου του Πορφυρίου* και πολλοί τύποι περιγραφικών λογικών συστημάτων είναι υποσύνολα της κλασσικής πρωτοβάθμιας λογικής. Ανήκουν στην κλάση των μονότονων λογικών συστημάτων, στην οποία η νέα, κάθε φορά, πληροφορία αυξάνει μονότονα τον αριθμό των αποδεικτέων θεωρημάτων, και κανένα κομμάτι της παλιάς πληροφορίας δεν μπορεί ποτέ ούτε να διαγραφεί, ούτε να τροποποιηθεί. Δύο πρόσφατα συστήματα περιγραφικής λογικής είναι το DAML και το OIL, που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση γνώσης στο σημασιολογικό ιστό, ένα γιγάντιο σημασιολογικό δίκτυο που εκτείνεται σε ολόκληρο το διαδίκτυο.

Δηλωτικά Δίκτυα

Ο Gottlob Frege (1879) ανέπτυξε ένα συμβολισμό δέντρου για την πρώτη πλήρη εκδοχή της πρωτοβάθμιας λογικής - το *Begriffsschrift* του (εννοιολογική σημείωση) . Ο *Charles Sanders Peirce (1880)* ανεξάρτητα ανέπτυξε έναν αλγεβρικό συμβολισμό, ο οποίος, με μια αλλαγή συμβόλων από τον *Peano (1889)*, εξελίχθηκε στο συμβολισμό που χρησιμοποιείται σήμερα στον κατηγορηματικό λογισμό. Παρόλο που ο ίδιος ο *Peirce* ανέπτυξε τον αλγεβρικό συμβολισμό, δεν ήταν ποτέ απόλυτα ευχαριστημένος με αυτόν. Ήδη από το 1882, έψαχνε για έναν γραφικό συμβολισμό, παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιούνταν στην οργανική χημεία, ο οποίος θα αναπαριστούσε καλύτερα *"τα άτομα και τα μόρια της λογικής"*.

Το σχήμα (0.0.4) δείχνει έναν από τους σχεσιακούς γράφους του *Peirce*, ο οποίος αναπαριστά την πρόταση: *"A Stagirite teacher of a Macedonian conqueror of the world is a disciple and an opponent of a philosopher admired by Church Fathers"* ("*Ένας Σταγειρήτης δάσκαλος ενός Μακεδόνα κατακτητή του κόσμου,*

[10] Βρετανή γλωσσολόγος και φιλόσοφος, περισσότερο γνωστή για τη δουλειά της στο πεδίο της υπολογιστικής γλωσσολογίας και ειδικότερα της μηχανικής μετάφρασης.

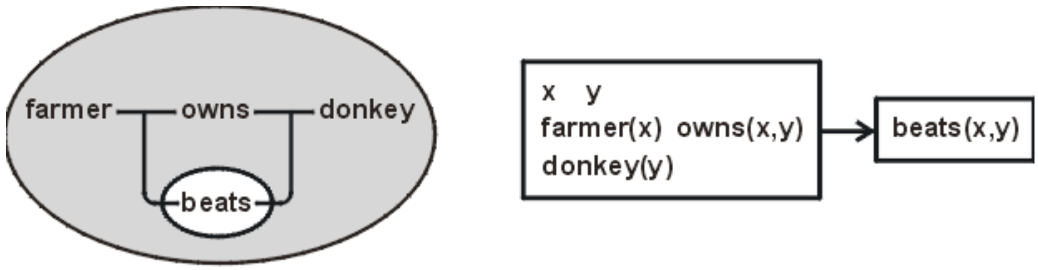

Figure 0.0.5: Υπαρξιακός γράφος που εκφράζει συνεπαγωγή και το αντίστοιχο διάγραμμα αναπαράστασης

είναι μαθητής και αντίπαλος ενός φιλοσόφου που θαυμάστηκε από την Εκκλησία των Πατέρων") . Ο γράφος περιλαμβάνει τρεις διακλαδούμενες γραμμές ταυτότητας, καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί, στον αλγεβρικό συμβολισμό, σε έναν υπαρξιακό ποσοδείκτη ακολουθούμενο από μια μεταβλητή. Οι λέξεις και οι φράσεις που συνδέονται με αυτές τις γραμμές αντιστοιχούν στις σχέσεις, ή τα κατηγορήματα, στον αλγεβρικό συμβολισμό. Η πρόταση που ακολουθεί είναι η μετάφραση του παραπάνω σχήματος στον κατηγορηματικό λογισμό :

$$(\exists x)\,(\exists y)\,((\exists z)\,isStagirite\,(x) \wedge teaches\,(x,y) \wedge isMacedonian\,(y) \wedge conquersTheWorl\,(y) \\ \wedge isDiscipleOf\,(x,z) \wedge isAnOpponentOf\,(x,z) \wedge isAdmiredByTheChrchFather\,(z))$$

Ένας σχεσιακός γράφος αναπαριστά μόνο δύο λογικές πράξεις, τη σύζευξη και τον υπαρξιακό ποσοδείκτη. Άλλες πράξεις όπως η άρνηση, η διάζευξη, η συνεπαγωγή και ο καθολικός ποσοδείκτης, είναι πιο δύσκολο να εκφραστούν γιατί χρειάζεται κάποιος τρόπος οριοθέτησης της εμβέλειάς τους.

Το 1897 ο *Peirce* έκανε μία απλή αλλά λαμπρή ανακάλυψη: εισαγάγει ένα οβάλ που μπορεί να εγκλείσει έναν τυχαίο μεγάλο γράφο ή υπογράφο, και αναπαριστά την άρνησή του. Οι συνδιασμοί από οβάλ, μαζί με τη σύζευξη και τον υπαρξιακό ποσοδείκτη μπορούν να εκφράσουν όλες τις υπολοιπες λογικές πράξεις του αλγεβρικού συμβολισμού. Αυτή η καινοτομία μετέτρεψε τους σχεσιακούς γράφους στο σύστημα των υπαρξιακών γράφων, το οποίο ο *Peirce* αποκάλεσε "*λογική του μέλλοντος*". Η συνεπαγωγή, για παράδειγμα, μπορεί να αναπαρασταθεί με το ενθέτοντας ένα οβάλ σε ένα άλλο, εφόσον το $(p \rightarrow q)$ είναι ισοδύναμο με το $\neg\,(p \wedge \neg q)$. Η μετάφραση του σχήματος (0.0.5) στον αλγεβρικό συμβολισμό είναι η ακόλουθη πρόταση:

$$\neg\,((\exists x)\,(\exists y)\,(farmer\,(x) \wedge donkey\,(y) \wedge owns\,(x,y) \wedge \neg beats\,(x,y)))$$

που είναι ισοδύναμη με τη φόρμουλα:

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(farmer\,(x) \wedge donkey\,(y) \wedge own\,(x,y) \rightarrow beats\,(x,y))$$

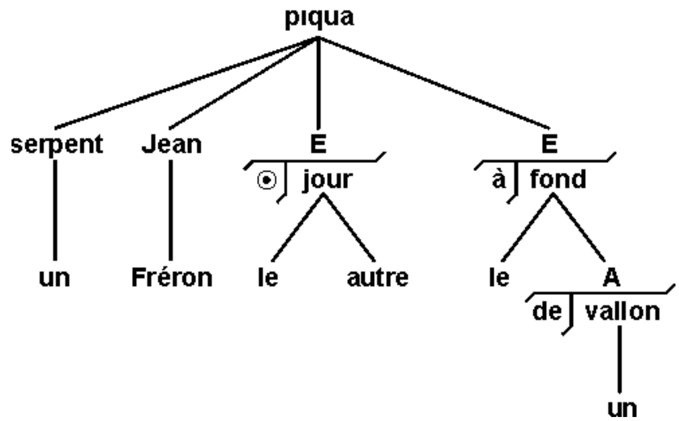

Figure 0.0.6: Ο γράφος εξάρτησης του Tesniere

Το διάγραμμα στα δεξιά είναι ένα *διάγραμμα αναπαράστασης (DRS)* που επινοήθηκε από τον *Hans Kamp* για την αναπαράσταση της σημασιολογίας φυσικών γλωσσών. Αντί για ένθετα οβάλ, ο *Kamp* χρησιμοποιεί κουτιά που συνδέονται μεταξύ τους με τόξα και αντί για γραμμές ταυτότητας χρησιμοποιεί μεταβλητές. Παρόλες τις διαφορές τους όσον αφορά το συμβολισμό, οι λογικές δομές των δύο αναπαραστάσεων είναι τυπικά ισοδύναμες, και οι ίδιες τεχνικές αναπαράστασης της λογικής στις φυσικές γλώσσες μπορούν να προσαρμοστούν και στους δύο συμβολισμούς.

Στον τομέα της γλωσσολογίας, ο *Lucien Tesniere (1959)* ανέπτυξε γραφικούς συμβολισμούς για το σύστημά του της *γραμματικής των εξαρτήσεων*. Το σχήμα (0.0.6) είναι ένας γράφος εξάρτησης - στο συμβολισμό του Tesniere - για την πρόταση "*L'autre jour, au fond d'un vallon, un serpent piqua Jean Freron*"(*"Τις προάλλες, στο βάθος μιας κοιλάδας, ένα φίδι τσίμπησε τον Jean Freron")* . Στην κορυφή του γράφου βρίσκεται το ρήμα *piqua* (τσίμπησε), και από αυτό κρέμονται οι λέξεις που εξαρτώνται άμεσα από το ρήμα: το υποκείμενο (*serpent*), το αντικείμενο (*Jean*) και δύο προτασιακές φράσεις. Το σύμβολο "μάτι του ταύρου" υποδεικνύει μια έμμεση πρόταση. Κάθε λέξη, εκτός από το ρήμα, κρέμεται κάτω από κάποια άλλη, από την οποία εξαρτάται.

Ο Tesniere άσκησε μεγάλη επιρροή στις γλωσσολογικές θεωρίες που δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στη σημασιολογία, έναντι του συντακτικού. *Ο David Hays (1964)* παρουσίασε τη θεωρία εξάρτησης σαν μια εναλλακτική πρόταση στους συντακτικούς συμβολισμούς του *Chomsky*, την οποία και υιοθέτησαν οι *Klein* και *Simmons* στα συστήματα μηχανικής μετάφρασης. Οι θεωρίες εξάρτησης έχουν επίσης επηρεαστεί από την *πτωτική γραμματική (Fillmore 1968)*, που προσφέρει ένα πρακτικό σύνολο ετικετών για τα τόξα του γράφου *(Somers 1987)*.

Κάτω από την επίδραση των *Hays* και *Simmons*, *ο Roger Schank* υιοθέτησε την θεωρία εξάρτησης, αλλά μετατόπισε το ενδιαφέρον από τις λέξεις, στις έννοιες. Το σχήμα (0.0.7)δείχνει ένα εννοιολογικό γράφο εξάρτησης για την πρόταση "*A dog is greedily eating a bone" ("Ενας σκύλος τρώει λαίμαργα ένα κόκκαλο"*). Αντί

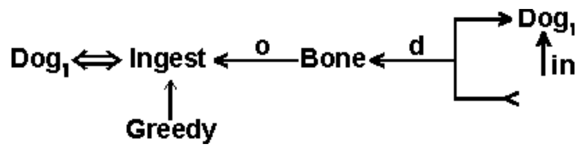

Figure 0.0.7: Ο εννοιολογικός γράφος του Schank

να χρησιμοποιήσει τον δενδρικό συμβολισμού του Tesniere, ο Schank χρησιμοποιεί διαφορετικά είδη τόξων για διαφορετικές σχέσεις. Οι εννοιολογικές εξαρτήσεις ήταν, αρχικά, κατάλληλες μόνο για την αναπαράσταση πληροφορίας στο προτασιακό επίπεδο, αλλά ο Schank και οι συνάδελφοί του ανέπτυξαν αργότερα συμβολισμούς για την αναπαράστηση μεγαλύτερων δομών, στις οποίες οι εξαρτήσεις στο επίπεδο των προτάσεων εμφανίζονταν σαν ένθετες υποδομές.

Οι γράφοι εξάρτησης του Tesniere έχουν, όσον αφορά τη λογική, την ίδια εκφραστική δύναμη με τους σχεσιακούς γράφους που επινόησε ο Peirce το 1882. Οι μόνοι λογικοί τελεστές που μπορούν να αναπαραστήσουν είναι οι συζεύξεις και ο υπαρξιακός ποσοδείκτης. Κατά τη διάρκεια του 1970 αναπτύχθηκαν διάφοροι συμβολισμοί δικτύων για την αναπαράσταση όλου του φάσματος των λογικών τελεστών. Η πιο επιτυχημένη προσέγγιση ήταν η μέθοδος της πρόσθεσης ξεχωριστών κόμβων για την αναπαράσταση των προτάσεων (propositions). Οι λογικοί τελεστές είτε συνδέουν τους προτασιακούς κόμβους, είτε είναι ένθετοι σε αυτούς. Με αυτά τα κριτήρια, η εννοιολογική σημείωση (*Begriffsschrift)* του Frege, οι υπαρξιακοί γράφοι του Peirce, και οι δομές αναπαράστασης του Kamp μπορούν να αποκαλεστούν *προτασιακά σημασιολογικά δίκτυα (propositional semantic networks*).

Υλοποίηση Δηλωτικών Δικτύων

Το πρώτο προτασιακό σημασιολογικό δίκτυο που υλοποιήθηκε στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης ήταν το σύστημα MIND, που αναπτύχθηκε από τον *Stuart Shapiro (1971)*. Αργότερα εξελίχθηκε στο *Semantic Network Processing System (SNePS),* που έχει χρησιμοποιηθεί για να αναπαραστήσει ένα ευρύ φάσμα από χαρακτηριστικά στη σημασιολογία φυσικών γλωσσών. Στο σχήμα (0.0.8) φαίνεται η *SNePS* αναπαράσταση για την πρόταση "*Sue thinks that Bob believes that a dog is eating a bone"* ("Η Sue σκέφτεται ότι ο Bob πιστεύει ότι ένας σκύλος τρώει ένα κόκκαλο"). Καθένας από τους κόμβους M1-M5 αναπαριστά μια ξεχωριστή πρόταση (proposition), της οποίας το σχεσιακό περιεχόμενο βρίσκεται μέσα σε προτασιακούς κόμβους. Η M1 δηλώνει ότι η *Sue* βιώνει (*Expr*) το ρήμα *Think*, του οποιου το θέμα (*Thme*) είναι μια άλλη πρόταση M2. Στη M2, αυτός που βιώνει είναι ο *Bob*, το ρήμα είναι *Believe*, και το θέμα είναι η πρόταση M3. Στη M3, ο πράκτορας (*Agnt*) είναι κάποια οντότητα B1, που είναι μέλος της κλάσης *Dog*, το ρήμα είναι *Eat,* και ο ασθενής (*Ptnt*) είναι μια οντότητα B2, η οποία είναι μέλος της κλάσης *Bone*. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι προτάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο μεταεπίπεδο για να κάνουν δηλώσεις για άλλες προτάσεις: η

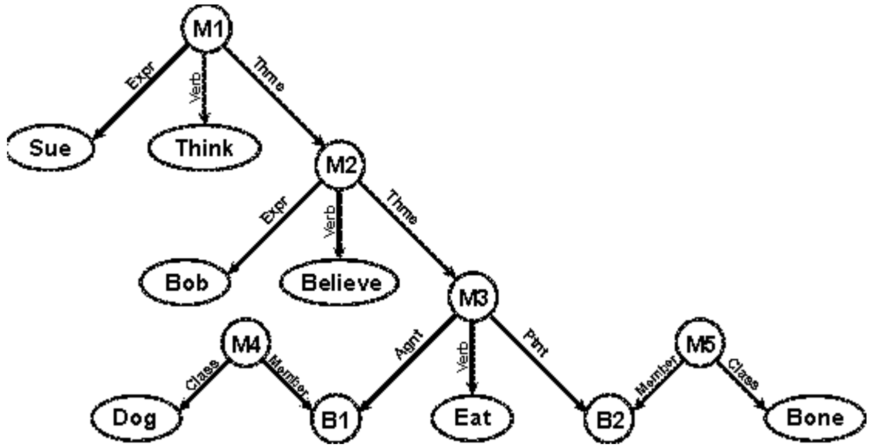

Figure 0.0.8: H *SNePS* αναπαράσταση μιας πρότασης

M1 δηλώνει ότι η *Sue* σκέφτεται τη M2 , και η M2 δηλώνει ότι ο *Bob* πιστεύει τη M3 .

Οι *εννοιολογικοί γράφοι (Sowa 1976, 1984, 2000)* είναι ένα είδος προτασιακών σημασιολογικών δικτύων στο οποίο οι σχέσεις είναι ένθετες σε προτασιακούς κόμβους. Εξελίχθηκαν σαν ένας συνδιασμός των γράφων εξάρτησης του Tesniere και των λογικών χαρακτηριστικών των υπαρξιακών γράφων του Peirce, με έντονες επιρροες από τους τομείς της τεχνητής νοημοσύνης και της υπολογιστικής γλωσσολογίας.
Οι πιο προφανείς διαφορές μεταξύ υπαρξιακών και εννοιολογικών γράφων είναι, όπως φαίνεται στο σχήμα (0.0.9), κοσμητικές: τα οβάλ γίνονται τετράγωνα για να σχηματίσουν κουτιά, και οι έμμεσες αρνήσεις των υπαρξιακών γράφων σημειώνονται ρητώς για καλυτερη αναγνωσιμότητα. Οι πιο λεπτές διαφορές παρατηρούνται στην εμβέλεια των ποσοδεικτών, και στο σημείο εμφάνισής τους. Στην περίπτωση των υπαρξιακών γράφων, μια γραμμή ταυτότητας αναπαριστά έναν υπαρξιακό ποσοδείκτη $(\exists x)$ ή $(\exists y)$, ο οποίος διατρέχει όλα τα στοιχεία του λόγου. Στην περίπτωση του εννοιολογικού γράφου, κάθε κουτί καλείται *έννοια* και αναπαριστά έναν ποσοδείκτη $(\exists x : Farmer)$ ή $(\exists y : Donkey)$, που περιορίζεται στον τύπο ή είδος *Farmer* και *Donkey*. Στον εννοιολογικό γράφο τα τόξα υποδεικνύουν τα ορίσματα των σχέσεων (για τη διάκριση των τόξων που αντιστοιχούν σε σχέσεις με περισσότερα από ένα ορίσματα χρησιμοποιούνται αριθμοί). Στο σχήμα (0.0.10) φαίνεται ο εννοιολογικός γράφος που αντιστοιχεί στο *SNePS* διάγραμμα του σχήματος (0.0.8). Κάθε κουτί/έννοια σε έναν εννοιολογικό γράφο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας ξεχωριστός προτασιακός κόμβος που μεταφράζεται ως πλήρη πρόταση. Η έννοια *Dog* μπορεί να εκφραστεί από την πρόταση “*there exists a dog”(”υπάρχει ένας σκύλος”),* που αντιστοιχεί στην *SNePS* πρόταση (proposition) M4. Η έννοια *Sue* εκφράζει την πρόταση *“there exists a person named Sue*” (”*υπάρχει ένα άτομο που λέγεται Sue*”). Με τη χρήση παρόμοιων μεθόδων, είναι δυνατή η μετάφραση προ-

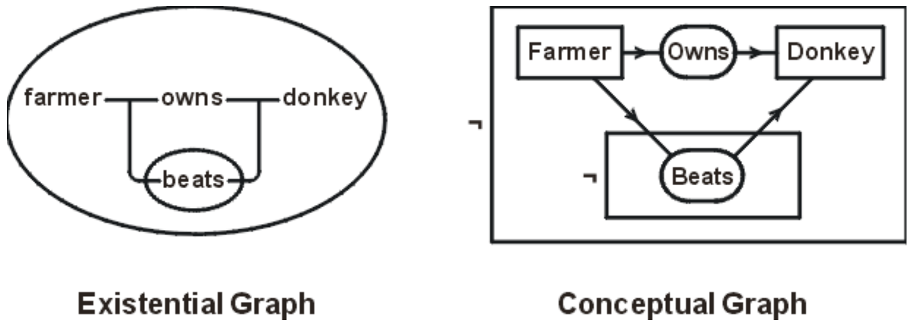

Figure 0.0.9: Υπαρξιακός γράφος του Peirce και ο αντίστοιχός του εννοιολογικός γράφος

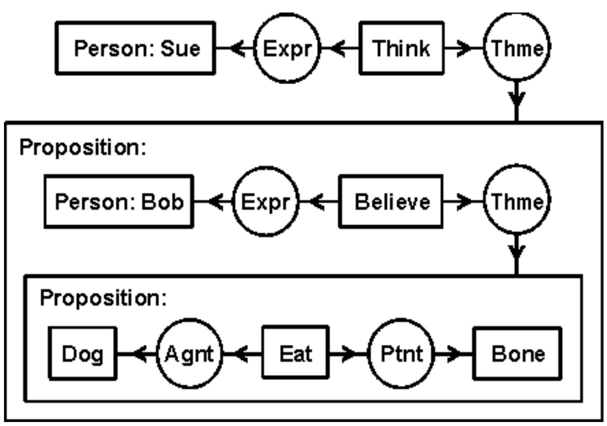

Figure 0.0.10: Εννοιολογικός γράφος του σχήματος (0.0.8)

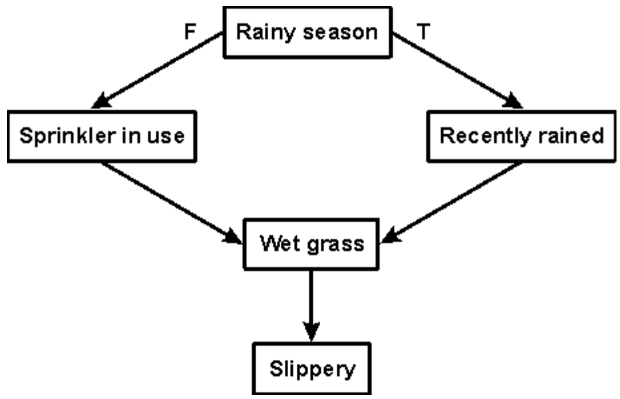

Figure 0.0.11: Δίκτυο συνεπαγωγής

τάσεων εκφρασμένων στο *SNePS,* ή σε εννοιολογικούς γράφους, στους άλλους συμβολισμούς.

Διαφορετικοί τύποι προτασιακών σημασιολογικών δικτύων έχουν διαφορετικούς συντακτικούς μηχανισμούς για τη σύνδεση του σχεσιακού περιεχομένου με τους προτασιακούς κόμβους, αλλά μπορούν να οριστούν κανόνες τυπικής μετάφρασης για την απεικόνιση της μιας στην άλλη. Ο Peirce, ο Sowa, και ο Kamp, χρησιμοποίησαν μόνο ένθετες προτασιακές εγκλίσεις, με μεταβλητές ή γραμμές για την υπόδειξη ομοιοαναφορών μεταξύ διαφορετικών εγκλίσεων. Ο Frege και ο Shapiro έβαλαν τις σχέσεις μέσα στους προτασιακούς κόμβους (ή στις γραμμές, στο συμβολισμό του Frege).

Δίκτυα Συνεπαγωγής

Ενα δίκτυο συνεπαγωγής είναι μια ειδική περίπτωση προτασιακού σημασιολογικού δικτύου στο οποίο η πρωταρχική σχέση είναι η συνεπαγωγή. Μέσα στους προτασιακούς κόμβους μπορούν να εγκλεισθούν και άλλες σχέσεις, οι οποίες όμως αγνοούνται από τις διαδικασίες συνεπαγωγής. Ανάλογα με την ερμηνεία, τέτοια δίκτυα μπορούν να κληθούν *δίκτυα πεποιθήσεων, αιτιολογικά δίκτυα, Bayesian δίκτυα, ή συστήματα διατήρησης της αλήθειας.* Στο σχήμα (0.0.11) φαίνονται οι πιθανές αιτίες ολισθηρού γρασιδιού: κάθε κουτί αναπαριστά μία πρόταση και τα τόξα δείχνουν τις συνεπαγωγές από μια πρόταση σε μια άλλη. Αν είναι η εποχή των βροχών, το τόξο T συνεπάγεται ότι έβρεξε πρόσφατα. Αν δεν είναι η εποχή των βροχών, το τόξο F συνεπάγεται ότι το αυτόματο πότισμα είναι σε λειτουργία. Για τα κουτιά με μόνο ένα εξερχόμενο τόξο, η αλήθεια της πρώτης πρότασης συνεπάγεται την αλήθεια της δεύτερης, αλλά αν η πρώτη δεν είναι αληθής δεν μπορούμε να κάνουμε καμία πρόβλεψη για την αλήθεια της δεύτερης. Το σχήμα (0.0.11) είναι ένα δίκτυο συνεπαγωγής για το συλλογιμό σχετικά με το υγρό γρασίδι. Έστω ότι κάποιος που περπατάει κατά μήκος του γκαζόν γλιστράει στο γρασίδι. Το σχήμα αναπαριστά το είδος γνώσης που μπορεί να χρησιμοποιήσει για να συλλογιστεί σχετικά με το αίτιο της πτώσης του. Αυτό το είδος συλλογιστικής μπορεί να εκτελεστεί από διάφορα συστήματα τεχνητής νοημοσύνης. Ο *Chuck Rieger (1976)* ανέπτυξε μια εκδοχή *αιτιολογικών δικτύων*, την οποία και χρησιμοποίησε για την ανάλυση περιγραφών προβλημάτων στα αγγλικά και τη μετάφρασή τους σε ένα δίκτυο το οποίο θα μπορούσε να υποστηρίξει μετασυλλογιστική. Η *Judea Pearl (1988, 2000)*, που ανέπτυξε τεχνικές για την εφαρμογή στατιστικής και πιθανοτήτων στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης, εισήγαγε τα *δίκτυα πεποιθήσεων*, που είναι αιτιολογικά δίκτυα στα τόξα των οποίων προστίθενται πιθανότητες ως ετικέτες.

Διαφορετικές μέθοδοι συλλογιστικής μπορούν να εφαρμοστούν πάνω στον ίδιο βασικό γράφο, μερικές φορές με την προσθήκη ετικετών που υποδεικνύουν αληθοτιμές ή πιθανότητες. Παρακάτω παρουσιάζονται δύο από τις επικρατέστερες προσεγγίσεις:

- *Λογική Συλλογιστική*
  Μέθοδοι λογικής συνεπαγωγής χρησιμοποιούνται σε *συστήματα διατήρησης της αλήθειας (TMS) (Doyle 1979; De Kleer 1986)*. Ένα *TMS* ξεκινάει από κόμβους που η αληθοτιμή τους είναι γνωστή, και εξαπλώνεται σε ολόκληρο το δίκτυο. Για την περίπτωση του ατόμου που γλίστρησε στο γρασίδι, ξεκινάει με την αληθοτιμή T για το γεγονός ότι το γρασίδι είναι ολισθηρό και συνεχίζει προς τα πίσω. Εναλλακτικά, ένα *TMS* μπορεί να ξεκινήσει από το γεγονός ότι τώρα είναι περίοδος βροχών και να συνεχίσει προς τα εμπρός. Κάνοντας συνδιασμούς συλλογιστικής προς τα εμπρός και προς τα πίσω, ένα *TMS* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επαλήθευση της συνέπειας του δικτύου, την αναζήτηση αντιφάσεων, ή την εύρεση θέσεων όπου το δίκτυο μπορεί να τροποποιηθεί με την πρόσθεση, ή διαγραφή κόμβων. Το αποτέλεσμα είναι ένα είδος μη μονότονης συλλογιστικής που καλείται *επαναθεώρηση πεποιθήσεων*.

- *Συλλογιστική Πιθανοτήτων*
  Ένα μεγάλο κομμάτι της προς τα εμπρός και της προς τα πίσω συλλογιστικής που χρησιμοποιεί ένα *TMS* μπορεί να προσαρμοστεί σε μία πιθανοτική ερμηνεία, εφόσον η αλήθεια και το ψεύδος μπορούν να θεωρηθούν ως πιθανότητες με τιμές 1.0, και 0.0. αντίστοιχα. Όμως το συνεχές πεδίο πιθανοτήτων από το 0.0. μέχρι το 1.0 απαιτεί πιο λεπτές ερμηνείες και υψηλότερη πολυπλοκότητα στους υπολογισμούς. Η πιο λεπτομερής μελέτη της πιθανοτικής συλλογιστικής στα δίκτυα πεποιθήσεων, ή τα αιτιολογικά δίκτυα, έγινε από την *Pearl (2000)*. Στο σχήμα (0.0.11) , η δύτιμη - $\{T, F\}$ - ερμηνεία είναι μόνο μια χονδροειδής προσέγγιση, εφόσον δεν βρέχει κάθε μέρα σε μια περίοδο βροχών και το αυτόματο πότισμα μπορεί να μη χρησιμοποιείται ακόμα και σε μια περίοδο ξηρασίας. Η *Pearl* ανέλυσε διάφορες τεχνικές για την εφαρμογή Bayesian στατιστικής με σκοπό τη συναγωγή ενός αιτιολογικού δικτύου από δεδομένα της παρατήρησης και το συλλογισμό πάνω σε αυτά.

Τόσο στα λογικά, όσο και στα πιθανοτικά συστήματα, η σχεσιακή πληροφορία που χρησιμοποιήθηκε για τη συναγωγή των συνεπαγωγών αγνοείται από τις διαδικασίες συνεπαγωγής. *Ο Doyle* ανέπτυξε το πρώτο *TMS* αποσπώντας έναν υπογράφο συνεπαγωγών από τους κανόνες ενός έμπειρου συστήματος[11]. *Οι Martin* και *Shapiro (1988)* απέσπασαν ένα *TMS* από το *SNePS* αναλύοντας μόνο τους Boolean connectives που συνδέουν τους προτασιακούς κόμβους. Παρόμοιες τεχνικές μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλα προτασιακά δίκτυα για τη συναγωγή ενός υπογράφου συνεπαγωγής που θα μπορούσε να αναλυθεί με χρήσει λογικών ή πιθανοτικών μοντέλων.

Παρόλο που τα δίκτυα συνεπαγωγής δίνουν έμφαση στη συνεπαγωγή, είναι ικανά να εκφράσουν όλους τους δυαδικούς συνδέσμους επιτρέποντας μία σύζευξη των εισόδων σε ένα προτασιακό κόμβο και μία διάζευξη των εξόδων. Ο *Gerhard Gentzen (1935)* έδειξε ότι μια συλλογή από συνεπαγωγές σε αυτή τη μορφή, καλούμενες *sequents* (ακολουθητά- λογισμός ακολουθητών), μπορεί να εκφράσει όλη την προτασιακή λογική. Η γενική μορφή ενός *sequent*, γραμμένη στην προτασιακή μορφή του *Gentzen*, είναι η ακόλουθη:

$$p_1, \ldots, p_n \Rightarrow q_1, \ldots, q_n$$

Τα p καλούνται *υποθέσεις (antecedents)* της συνεπαγωγής, και τα q *συμπεράσματα (consequents)*. Ο γενικευμένος κανόνας του *modus ponens* δηλώνει ότι όταν όλες οι *υποθέσεις* είναι αληθείς, τουλάχιστον ένα από τα *συμπεράσματα* πρέπει να είναι αληθές. Επομένως τα κόμματα στην υπόθεση επιδρούν σαν τελεστές σύζευξης, ενώ τα κόμματα στο συμπέρασμα σαν τελεστές διάζευξης. Το αρχικό *TMS* του *Doyle* υποστήριζε μόνο έναν όρο στο *συμπέρασμα* και η λογική που υλοποιεί καλείται *Horn-clause logic* (χρησιμοποιείται ευρέως στην κατασκευή έμπειρων συστημάτων). Για να υποστηρίξουν πλήρως την προτασιακή λογική, νεότερες εκδόσεις *TMS* έχουν γενικευτεί ώστε να επιτρέπουν πολλαπλούς τελεστές διάζευξης στο *συμπέρασμα*.

Εκτελέσιμα Δίκτυα

Τα εκτελέσιμα σημασιολογικά δίκτυα περιέχουν μηχανισμούς που μπορούν να προκαλέσουν αλλαγές στο ίδιο το δίκτυο. Οι εκτελέσιμοι μηχανισμοί τα διαχωρίζουν από τα δίκτυα που αποτελούν στατικές δομές δεδομένων και τα οποία αλλάζουν μόνο μέσω της δράσης εξωτερικών προγραμμάτων. Τρία είναι τα είδη των εκτελέσιμων μηχανισμών που χρησιμοποιούνται συνήθως σε αυτό το είδος δικτύων:

- Τα *Δίκτυα μεταφοράς μηνύματος* μπορούν να μεταφέρουν δεδομένα από έναν κόμβο σε έναν άλλο. Τα δεδομένα μπορεί να αποτελούνται από ένα μοναδικό bit, την αποκαλούμενη *σκυτάλη*, ή να είναι ένα αριθμητικό *βάρος* ή ένα τυχαίο μεγάλο *μήνυμα*.

[11] Ένα *έμπειρο σύστημα* είναι ένα πρόγραμμα που προσομοιώνει την κρίση και την συμπεριφορά ενός ανθρώπου ή οργανισμού που διαθέτει ειδική γνώσηωκαι εμπειρία σε ένα συγκεκριμένο πεδίο. Ένα τέτοιο σύστημα συνήθως περιέχει μια γνωσιακή βάση που αποτελείται από συσσωρευμένη εμπειρία και ένα σύνολο κανόνων για την εφαρμογή της γνωσιακής βάσης σε κάθε συγκεκριμένη κατάσταση που περιγράφεται στο πρόγραμμα.

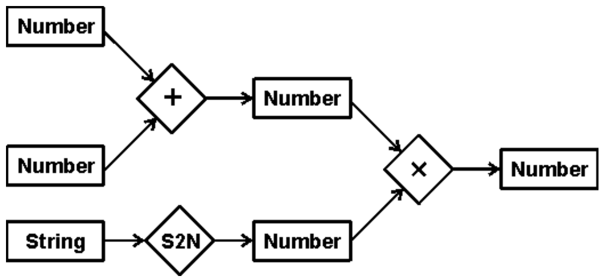

Figure 0.0.12: *Γράφος ροής δεδομένων*

- Οι *Επισυνημμένες διαδικασίες* είναι προγράμματα που περιέχονται, ή είναι συνδεδεμένα, σε έναν κόμβο και εκτελούν κάποια ενέργεια ή υπολογισμό πάνω στα δεδομένα του κόμβου αυτού, ή κάποιου γειτονικού του.
- Οι *μετασχηματισμοί γράφων* συνδιάζουν γράφους, τους τροποποιούν, ή τους σπάνε σε μικρότερους υπογράφους. Στους τυπικούς αποδείκτες θεωρημάτων τέτοιοι μετασχηματισμοί εκτελούνται από ένα πρόγραμμα που βρίσκεται εκτός του γράφου και όταν ενεργοποιούνται -από τους ίδιους τους γράφους- συμπεριφέρονται σαν χημικές ενώσεις ή διασπάσεις μορίων.

Αυτοί οι τρεις μηχανισμοί μπορούν να συνδιαστούν με διάφορους τρόπους. Μηνύματα που μεταφέρονται από τον ένα κόμβο στον άλλο μπορούν να γίνουν αντικείμενα επεξεργασίας διαδικασιών επισυννημένων σε αυτούς τους κόμβους και οι μετασχηματισμοί γράφων μπορούν επίσης να ενεργοποιηθούν από μηνύματα που εμφανίζονται σε κάποιους από τους κόμβους.

Τα απλούστερα δίκτυα με επισυννημένες διαδικασίες είναι οι *γράφοι ροής δεδομένων*, οι οποίοι περιέχουν παθητικούς κόμβους που αποθηκεύουν δεδομένα και ενεργούς κόμβους που δέχονται δεδομένα από κόμβους εισόδου και στέλνουν αποτελέσματα σε κόμβους εξόδου. Στο σχήμα (0.0.12) φαίνεται ένας γράφος ροής δεδομένων όπου τα κουτιά αναπαριστούν τους παθητικούς κόμβους και τα διαμάντια τους ενεργητικούς. Οι ετικέτες μέσα στα κουτιά υποδεικνύουν τον τύπο δεδομένων (*Number* ή *String),* ενώ οι ετικέτες μέσα στα διαμάντια υποδεικνύουν το όνομα της συνάρτησης ($+, \times$, ή $S2N$ που μετατρέπει strings σε numbers). Στην περίπτωση αριθμητικών υπολογισμών, οι γράφοι ροής δεδομένων έχουν πολύ μικρό πλεονέκτημα έναντι του αλγεβρικού συμβολισμού που χρησιμοποιείται στις περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού. Το παραπάνω σχήμα, για παράδειγμα, θα αντιστοιχούσε στην ακόλουθη δήλωση ανάθεσης:

$$X = (A + B) \times S2N\,(C)$$

Οι γραφικοί συμβολισμοί χρησιμοποιούνται περισσότερο σε *Ενσωματωμένα Περιβάλλοντα Ανάπτυξης (IDE)* για τη σύνδεση διαφορετικών προγραμμάτων σε

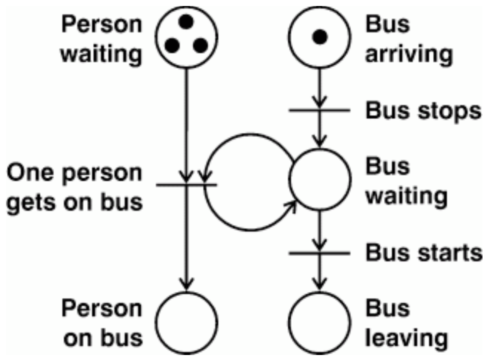

Figure 0.0.13: *Δίκτυο Petri*

ένα πλήρες σύστημα. Όταν οι γράφοι ροής δεδομένων συμπληρώνονται με μία γραφική μέθοδο για τον προσδιορισμό συνθηκών όπως η *if-then-else*, καθώς και με έναν τρόπο ορισμού αναδρομικών συναρτήσεων, τότε μπορούν να σχηματίσουν μια πλήρη γλώσσα προγραμματισμού παρόμοια με συναρτησιακές γλώσσες όπως η *Scheme*[12] και η *ML*[13].

Τα *δίκτυα Petri* είναι ο πιο πολυχρησιμοποιημένος φορμαλισμός εκτελέσιμου δικτύου και συνδιάζει *μεταφορά σκυτάλης* με *επισυννημένες διαδικασίες*. Τα δίκτυα Petri, όπως και οι γράφοι ροής δεδομένων, έχουν παθητικούς και ενεργητικούς κόμβους, τις *περιοχές* και τις *σκυτάλες* αντίστοιχα. Στο σχήμα (0.0.13) φαίνεται ένα δίκτυο Petri για μια στάση λεωφορείου, όπου οι τρεις σκυτάλες στα αριστερά αναπαριστούν ανθρώπους που περιμένουν και η μία σκυτάλη στα δεξιά αναπαριστά το λεωφορείο που έρχεται. Η μετάβαση που επισημαίνεται ως *Bus stops* αναπαριστά ένα γεγονός που ενεργοποιείται με την αφαίρεση της σκυτάλης από την περιοχή άφιξης (*Bus arriving)* και την τοποθέτησή της στην περιοχή αναμονής (*bus waiting).* Όταν το λεωφορείο περιμένει, η μετάβαση που επισημαίνεται ως *One person gets on the bus* είναι ενεργοποιημένη, γιατί έχει τουλάχιστον μία σκυτάλη και στις δύο περιοχές εισόδους της. Ενεργοποιείται με την απόσπαση πρώτα μιας σκυτάλης και από τις δύο περιοχές εισόδου της και μετά την τοποθέτηση μιας σκυτάλης σε καθεμία από τις περιοχές εξόδου της (συμπεριλαμβανομένης και της περιοχής *Bus waiting,* από όπου μία σκυτάλη μόλις αφαιρέθηκε). Όσο το λεωφορείο περιμένει και υπάρχουν άνθρωποι που περιμένουν, αυτή η μετάβαση μπορεί να συνεχίζει να ενεργοποιείται. Σταματάει όταν είτε δεν υπάρχουν άλλοι άνθρωποι στην περιοχή *Person waiting*, είτε όταν ενεργοποιείται η μετάβαση *Bus starts* , αποσπώντας τη σκυτάλη από την περιοχή *Bus waiting* και τοποθετώντας μια σκυτάλη στην περιοχή

[12] **Η *Scheme* είναι η μία από τις δύο διαλέκτους της γλώσσας προγραμματισμού *Lisp*. *Αναπτύχθηκε στο MIT AI Lab* από τους *Guy L. Steele* και *Gerald Jay Sussman*.**

[13] ***Η ML είναι μία συναρτησιακή γλώσσα προγραμματισμού γενικού σκοπού*, που αναπτύχθηκε από τον *Robert Milner* και άλλους στο τέλος του 1970 στο *University of Edinburg*.**

Bus leaving.

Κάθε περιοχή σε ένα δίκτυο Petri αναπαριστά μια προσυνθήκη για τις μεταβάσεις που τη χρησιμοποιούν σαν είσοδο, και μία προσυνθήκη για αυτές που τη χρησιμοποιούν σαν έξοδο. Μια σκυτάλη τοποθετημένη σε μια περιοχή εξασφαλίζει ότι η αντίστοιχη προσυνθήκη ικανοποιείται. Αν αφαιρεθεί μια σκυτάλη από κάθε περιοχή εισόδου, η ενεργοποίηση της μετάβασης ανακαλείται, αφού οι προσυνθήκες της παύουν να ικανοποιούνται. Αν προστεθεί μια σκυτάλη σε κάθε περιοχή εξόδου, εξασφαλίζεται ότι όλες οι μετασυνθήκες έχουν ικανοποιηθεί. Τα δίκτυα Petri μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουν ή να προσομοιώσουν γεγονότα. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση διαδικασιών που λαμβάνουν χώρα στο υλικό και το λογισμικό του υπολογιστή. Στο σχήμα (0.0.13), κάθε σκυτάλη αναπαριστά ένα μοναδικό bit πληροφορίας. Μια επέκταση που καλείται *χρωματισμένα δίκτυα Petri*, μπορεί να συσχετίσει μία τυχαία ποσότητα δεδομένων με κάθε σκυτάλη *(Jensen 1992)*.

Εκτός από τη μεταφορά σκυτάλης και τις επισυννημένες διαδικασίες, η τρίτη μέθοδος για τη δημιουργία εκτελέσιμων δικτύων συνίσταται στο να αφήνονται τα δίκτυα να αναπτυχθούν και να αλλάξουν δυναμικά. Σύμφωνα με τον Peirce, μπορούμε να αντιληφθούμε τις πράξεις συνεπαγωγής πάνω σε υπαρξιακούς γράφους σαν *"μια κινούμενη εικόνα της σκέψης"*. Τυπικά, οι μετασχηματισμοί πάνω σε δίκτυα μπορούν να οριστούν χωρίς αναφορά στους μηχανισμούς που τους εκτελούν. Στα δίκτυα Petri, για παράδειγμα, μια μετάβαση μπορεί να ενεργοποιηθεί όταν σε όλες τις εισόδους της περιέχεται μία σκυτάλη. Ο μηχανισμός που εκτελεί την ενεργοποίηση μπορεί να είναι εξωτερικός ή εσωτερικός σε σχέση με αυτήν. Στην περίπτωση μιας υλοποίησης σε υπολογιστή, μπορεί να είναι βολικό να αντιμετωπήσουμε τα δίκτυα σαν παθητικές δομές δεδομένων και να γράψουμε ένα πρόγραμμα που να τα διαχειρίζεται. Παρόλαυτά,στα πλαίσια της γνωστικής θεωρίας, οι μετασχηματισμοί μπορούν να ερμηνευτούν σαν πράξεις του δικτύου και να εκτελούνται από το ίδιο το δίκτυο. Και οι δύο ερμηνείες είναι συνεπής με τους ίδιους τυπικούς ορισμούς.

Δίκτυα Μάθησης

Ένα σύστημα μάθησης, φυσικό ή τεχνητό, κατά την επαφή του με νέα πληροφορία αντιδρά τροποποιώντας εσωτερικές αναπαραστάσεις με ένα τρόπο που του επιτρέπει να ανταποκριθεί πιο αποδοτικά στα ερεθίσματα του περιβάλλοντός του. Συστήματα που χρησιμοποιούν δικτυακές αναπαραστάσεις μπορούν να τροποποιήσουν το δίκτυο με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

1. *Μη-λογική μνήμη.* Η απλούστερη μορφή μάθησης είναι η μετατροπή της νέας πληροφορίας σε δίκτυο και η, χωρίς περεταίρω αλλαγές, προσθήκη του στο υπάρχων δίκτυο.

2. *Αλλαγή βαρών.* Κάποια δίκτυα έχουν αριθμούς, που καλούνται *βάρη* και συνδέονται με τους κόμβους και τα τόξα τους. Σε ένα δίκτυο συνεπαγωγής, για παράδειγμα, αυτά τα βάρη μπορεί να αναπαριστούν πιθανότητες ώστε κάθε εμφάνιση του ίδιου τύπου δικτύου αυξάνει την αναμενόμενη πιθανότητα επανεμφάνισής του.

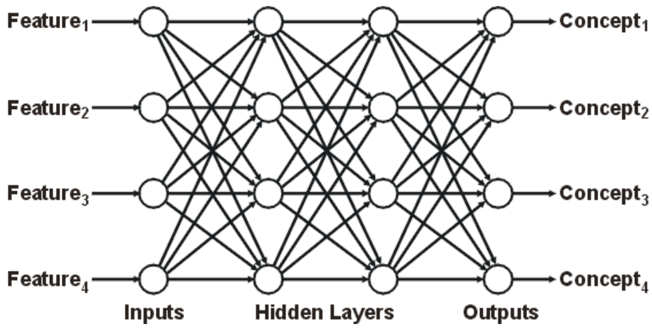

Figure 0.0.14: Τυπικό νευρωνικό δίκτυο

3. *Αναδόμηση.* Η πιο περίπλοκη μορφή μάθησης, που επιφέρει θεμελειώδεις αλλαγές στη δομή του δικτύου.

Συστήματα που μαθαίνουν με επανάληψη ή με αλλαγή βαρών μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα, αλλά συστήματα που μαθαίνουν αναδιαρθρώνοντας το δίκτυο, τυπικά χρησιμοποιούν και τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους.

Τα *Νευρωνικά Δίκτυα* είναι μια τεχνική μάθησης που χρησιμοποιείται ευρέως και η οποία αλλάζει τα βάρη που είναι προσαρτημένα στους κόμβους και τα τόξα του δικτύου. Στο σχήμα (0.0.14) φαίνεται ένα τυπικό νευρωνικό δίκτυο, η είσοδος του οποίου είναι μια ακολουθία αριθμών, που αναπαριστά το σχετικό ποσοστό κάποιων επιλεγμένων χαρακτηριστικών, και του οποίου η έξοδος είναι μια άλλη ακολουθία αριθμών, που αναπαριστά την έννοια που περιγράφει καλύτερα αυτό το συνδιασμό χαρακτηριστκών.
Σε ένα τυπικό νευρωνικό δίκτυο, η δομή των κόμβων και των τόξων είναι σταθερή και οι μόνες αλλαγές που μπορεί να προκύψουν είναι οι αναθέσεις βαρών στα τόξα. Όταν παρουσιάζεται μια νέα είσοδος, τα βάρη στα τόξα συνδιάζονται με τα βάρη στα χαρακτηρηστικά της εισόδου για να καθορίσουν τα βάρη στα κρυμμένα στρώματα του δικτύου και τελικά τα βάρη στις εξόδους. Στο στάδιο της μάθησης, το σύστημα ενημερώνεται για το αν τα βάρη που προβλέπει είναι σωστά και διάφορες μέθοδοι *εξάπλωσης προς τα πίσω* χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή στα τόξα των βαρών που οδηγούν στο αποτέλεσμα.

Η *μη λογική μνήμη* ταιριάζει περισσότερο σε εφαρμογές που απαιτούν ακριβή ανάκτηση των πρωτότυπων δεδομένων, ενώ η *αλλαγή βαρών* ταιριάζουν περισσότερο στην αναγνώριση προτύπων. Για πιο ευέλικτους και δημιουργικούς τύπους μάθησης, κάποιος τρόπος αναδιάρθρωσης του δικτύου είναι απαραίτητος. Αλλά ο αριθμός τρόπων αναδιοργάνωσης ενός δικτύου είναι τόσο μεγάλος, ώστε το πεδίο πιθανοτήτων που συγκροτούν παραμένει ουσιαστικά ανεξερεύνητο. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα:

- Στην *βασισμένη σε περιπτώσεις συλλογιστική* (*Kolodner 1993*; *Schank & Riesbeck 1994*) το σύστημα μάθησης χρησιμοποιεί μη λογική μνήμη για να αποθηκεύσει διάφορες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα ιατρικές διαγνώσεις και νομικές διαμάχες. Για κάθε περίπτωση αποθηκεύει σχετικές πληροφορίες, όπως η χορηγούμενη θεραπεία καιτο αποτέλεσμά της, ή το νομικό επιχείρημα και η δικαστική απόφαση. Όταν παρουσιάζεται μια νέα περίπτωση, το σύστημα βρίσκει τις πιο όμοιες με αυτήν περιπτώσεις και ανακτά το αποτέλεσμα. Κρίσιμες προυποθέσεις για την επιτυχία της case-based reasoning είναι τα καλά μέτρα ομοιότητας και οι αποδοτικοί τρόποι αναζήτησης για παρόμοιες περιπτώσεις. Για να οργανώσει την αναζήτηση και να εκτιμήσει την ομοιότητα, το μαθησιακό σύστημα πρέπει να προβεί σε αναδιάρθρωση, ώστε να βρει κοινά μοτίβα στις μεμονωμένες περιπτώσεις και να τα χρησιμοποιήσει σαν κλειδιά για να ευρετηριάσει (index) τη βάση δεδομένων.

- Οι *Basili, Pazienza* and *Velardi* (*1993*; *1996*) ανέπτυξαν μεθόδους μάθησης σημασιολογικών μοτίβων από ένα σώμα κειμένων φυσικής γλώσσας. Ξεκίνησαν με έναν συντακτικό αναλυτή, εφοδιασμένο με ένα λεξικό που περιείχε ένα περιορισμένο ποσό σημασιολογικής πληροφορίας σχετικά με τα αναμενόμενα λεξικολογικά μοτίβα για κάθε λέξη.Πρώτα ανέλυαν τα κείμενα για να συνάγουν πιο λεπτομερή δίκτυα αναπαράστασης των σημασιολογικών μοτίβων που εμφανίζονταν στα κείμενα. Μετά το σύστημα γενίκευε αυτά τα μοτίβα για να υποθέσει καλύτερους ορισμούς της λεξικολογικής σημασιολογίας των λέξεων, τις οποίες θα επαλήθευε ένας γλωσσολόγος πριν προστεθούν στο λεξικό. Το σύστημα μπορούσε να χρησιμοποιήσει το αναθεωρημένο λεξικό για να αναλύσει εκ νέου το σώμα κειμένων και να προτείνει ακόμα πιο εκλεπτυσμένους ορισμούς.

- *Ο Robert Levinson* (*1996*) ανέπτυξε ένα γενικό σύστημα για τη μάθηση επιτραπέζιων παιχνιδιών όπως το σκάκι και η ντάμα. Για κάθε είδος παιχνιδιού, δίνονται στο σύστημα οι κανόνες επιτρεπτών κινήσεων, αλλά καμία περεταίρω πληροφορία σχετικά με το ποιες κινήσεις είναι καλές και ποιες κακές και για το πως να καθορίσει αν κέρδισε, ή αν έχασε ένα παιχνίδι. Κατα τη διάρκεια της μαθησιακής φάσης το σύστημα παίζει παιχνίδια εναντίον ενός δασκάλου (συνήθως ένα άλλο πρόγραμμα που παίζει πολύ καλά, όπως το *Gnu Chess*). Στο τέλος κάθε παιχνιδιού ο δάσκαλος πληροφορεί το σύστημα για το αν το αποτέλεσμα είναι νίκη, ήττα, ή ισοπαλία. Για τη μαθησιακή φάση ο *Levinson* χρησιμοποίησε ένα συνδιασμό από μη λογική μνήμη και αναδόμηση, για να συνάγει σημαντικές γενικεύσεις, ένα μέτρο ομοιότητας βασισμένο σε αυτές τις γενικεύσεις και μια μέθοδο εξάπλωσης προς τα πίσω για την εκτίμηση της τιμής κάθε περίπτωσης που εμφανιζόταν στο παιχνίδι. Στο σκάκι οι περιπτώσεις ήταν οι θέσεις επάνω στη σκακιέρα που αναπαρίσταντο με γράφους . Κάθε θέση που εμφανιζόταν σε ένα παιχνίδι αποθηκευόταν σε μια ιεραρχία γενίκευσης, όπως αυτές που χρησιμοποιούνται σε οριστικά δίκτυα. Στο τέλος κάθε παιχνιδιού το σύστημα χρησιμοποιούσε εξάπλωση προς τα πίσω για να προσαρμόσει τίς εκτιμούμενες τιμές κάθε θέσης που οδήγησαν στη νίκη, ήττα, ή ισοπαλία. Σε κάθε παιχνίδι το σύστημα εξετάζει όλες τις επιτρεπτές κινήσεις από μία δοσμένη θέση, αναζητά για παρόμοιες θέσεις στην ιεραρχία και διαλέγει την κίνηση που οδήγησε σε μία τέτοια θέση ώστε η πιο όμοια με αυτήν θέση να έχει την τιμή που προβλέφθηκε καλύτερα.

Υβριδικά δίκτυα

Πολλά συστήματα υπολογιστών είναι υβριδικά, όπως ένας συνδιασμός ενός συστήματος βάσης δεδομένων, ενός πακέτου γραφικών για τον έλεγχο της διεπαφής και μια γλώσσα προγραμματισμού για λεπτομερή υπολογισμό. Στον τομέα της γνωσιακής αναπαράστασης, το σύστημα *Krypton* (*Brachman 1983*) ήταν ένα υβρίδιο οριστικού δικτύου, βασισμένο πάνω στην *KL-ONE,* με ένα έμπειρο σύστημα που χρησιμοποιούσε γραμμικό συμβολισμό για την επιβεβαίωση κανόνων και γεγονότων. Με τα κριτήρια που καθιστούντο *Krypton* ένα υβριδικό σύστημα, οι περισσότερες αντικειμενοστρεφείς γλώσσες προγραμματισμού μπορούν να θεωρηθούν υβρίδια: η *C++,* για παράδειγμα, είναι ένα υβρίδιο της διαδικαστικής γλώσσας C, με μια οριστική γλώσσα για τον ορισμό τύπων και κλάσεων. Υβριδικά καλούνται συνήθως τα συστήματα που συμπεριλαμβάνουν γλώσσες με διαφορετικό συντακτικό. Οι εννοιλογικοί γράφοι περιέχουν μια οριστική γλώσσα για τον ορισμό τύπων και μία δηλωτική που χρησιμοποιεί αυτούς τους τύπους σε γράφους που δηλώνουν προτάσεις. Παρόλαυτά συνήθως δεν θεωρούνται υβρίδια, γιατί και οι δύο γλώσσες έχουν το ίδιο συντακτικό.

Το πιο ευρέως διαδεδομένο υβριδικο δίκτυο πολλαπλών συμβολισμών είναι η *Ενοποιημένη Γλώσσα Μοντελοποίησης (UML)*[14]. Παρόλο που η *UML* δεν καλείται συνήθως σημασιολογικό δίκτυο, οι συμβολισμοί της μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με τις κατηγορίες των σημασιολογικών δικτύων που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

- Κεντρικό στοιχείο της UML είναι ένα οριστικό δίκτυο για τον ορισμό τύπων αντικειμένων. Περιλαμβάνει τα βασικά χαρακτηριστικά του *δένδρου του Πορφύριου*: σύνδεσμοι τύπου-υποτύπου, σύνδεσμοι τύπου-στιγμιότυπου , ιδιότητες που λειτουργούν σαν ειδοποιός διαφορά για τη διάκριση ενός τύπου από τον υπερτύπο του και κληρονομικότητα των ιδιοτήτων από υπερτύπο σε υποτύπο.

- Η UML περιλαμβάνει δύο ήδη εκτελέσιμων δικτύων που μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις δικτύων *Petri*: τα *διαγράμματα καταστάσεων*, που είναι δίκτυα Petri που δεν υποστηρίζουν παραλληλισμό[15], και τα διαγράμματα δραστηριοτήτων που είναι σχεδόν πανομοιότυπα με τα δίκτυα Petri, εκτός από το γεγονός ότι δεν χρησιμοποιούν σκυτάλες για να ενεργοποιήσουν τις μεταβάσεις.

[14] *"Η Unified Modeling Language (UML) είναι μία γραφική γλώσσα για την οπτικοποίηση, τον προσδιορισμό, την κατασκευή και την καταγραφή των αντικειμένων (artifacts) ενός software-intensive system. Η UML προσφέρει έναντυποποιημένο τρόπο για την καταγραφή των προσχεδιών ενός συστήματος, συμπεριλαμβανομένων εννοιολογικών αντικειμένων όπως οι εργασιακές διαδικασίες και οι συναρτήσεις του συστήματος, καθώς και συγκεκριμένων αντικειμένων όπως οι δηλώσεις (statements) της γλώσσας προγραμματισμού, σχεδιαγράμματα της βάσης δεδομένων και επαναχρησιμοποιήσιμα στοιχεία λογισμικού." OMG* specification για την UML.

[15] δηλαδή τη μοντελοποίηση προγραμμάτων που τρέχουν παράλληλα

- Τα άλλα δίκτυα στη UML μπορούν να θεωρηθούν τύποι σχεσιακών δικτύων ειδικευμένων στην αναπαράσταση μετα-πληροφοριών. Περιλαμβάνουν, για παράδειγμα, ένα είδος διαγραμμάτων οντοτήτων-συσχετίσεων (*Chen 1976)*, που είναι σχεσιακοί γράφοι σχεδιασμένοι για να εκφράσουν τους περιορισμούς πληθικότητας και τους τύπους των παραμέτρων των διάφορων σχέσεων.

- Ο πιο γενικός από όλους τους συμβολισμούς της UML είναι ένας γραμμικός συμβολισμός που καλείται *Γλώσσα Περιορισμού Αντικειμένων (OCL)*. Η OCL είναι μια εκδοχή πρωτοβάθμιας λογικής με συμβολισμό που έχει συντακτικά χαρακτηριστικά παρόμοια με κάποιες αντικειμενοστρεφείς γλώσσες προγραμματισμού. Παρακάτω φαίνεται η δήλωση ότι όλες οι παράμετροι μιας οντότητας έχουν μοναδικά ονόματα εκφρασμένη στην OCL :

$$self.parameter \rightarrow forAll\,(p1, p2 \mid p1.name = p2.name \text{ implies } p1 = p2)$$

Στην OCL, η δεσμευμένη λέξη *self* αναφέρεται στην εκάστοτε οριζόμενη οντότητα και τα ονόματα των συναρτήσεων γράφονται μετά την οντότητα στην οποία εφαρμόζονται.Στον κατηγορηματικό λογισμό η σειρά θα αντιστρεφόταν: το $p1.name$ θα γραφόταν $name\,(p1)$. Ακολουθεί μια μετάφραση της παραπάνω δήλωσης στην πρωτοβάθμια λογική, με το σύμβολο $\#self$ να αναπαριστά την τρέχουσα οντότητα:

$$(\forall p_1)\,(\forall p_2)$$
$$((p_1 \in parameter\,(\#self) \wedge p_2 \in parameter\,(\#self) \wedge name\,(p_1) = name\,(p_2))$$
$$\rightarrow p_1 = p_2)$$

Αυτή η φόρμουλα λέει ότι για κάθε p_1 και p_2, αν είναι παράμετροι της οντότητας και το όνομα του p_1 είναι ίδιο με το όνομα του p_2,τότε το p_1 είναι ίδιο με το p_2.

Κριτική έχει ασκηθεί στη UML για την έλλειψη τυπικού ορισμού που να τη χαρακτηρίζει, γεγονός που έχει οδηγήσει σε ασυνέπειες μεταξύ των διαφόρων συμβολισμών της (*Kent 1999)*. Τελευταία γίνεται μια προσπάθεια για αναθεώρηση της UML με τυπικούς ορισμούς για όλους τους συμβολισμούς της. Μια άλλη πιθανότητα θα ήταν να σχεδιαστεί ένα προτασιακό σημασιολογικό δίκτυο ισοδύναμο με την πλήρη πρωτοβάθμια λογική συν τις επεκτάσεις μεταεπιπέδου και να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό όλων των στοιχείων της UML.

Έχοντας παρουσιάσει με ικανοποιητική λεπτομέρεια τους πιο γνωστούς τύπους σημασιολογικών δικτύων, συνεχίζουμε με μια μικρή ανάλυση σχετικά με την έννοια του νοήματος, εφόσον γύρω του περιστρέφονται τοσο ο σχεδιασμός, όσο και η χρήση των γνωσιακών αναπαραστάσεων.

Η ΕΝΝΟΙΑ ‘ΝΟΗΜΑ’

Ένα καλο σημείο εκκίνησης για την εξέτασης της συναρπαστικά μυστηριώδους έννοιας του νοήματος, είναι το καλούμενο τρίγωνο των *Orgden* και *Richards*. Το τρίγωνο του σχήματος (0.0.15) σχετίζει αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, έννοιες που αντιστοιχούν σε αυτά τα αντικείμενα και σύμβολα που οι γλώσσες χρησιμοποιούν για να αναφερθούν σε αυτά. Η προτεινόμενη θέση τότε ήταν ότι η γλώσσα αποκτά νόημα μόνο μέσω κάποιου γνωστικού πράκτορα. Στο τρίγωνο

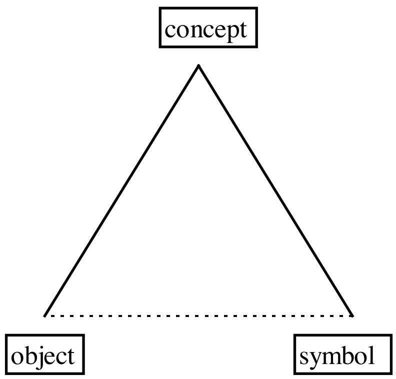

Figure 0.0.15: Το τρίγωνο του *Orgden* και *Richards*

δεν υπάρχει ισχυρός σύνδεσμος μεταξύ συμβόλου και αντικειμένου. Σε μαθηματικούς όρους, αυτή η απεικόνηση υπάρχει μόνο σαν σύνθεση των απεικονίσεων $symbol \rightarrow concept$ και $concept \rightarrow object$.
Δεν είναι σύμπτωση ότι το τρίγωνο του νοήματος ακολουθεί μια οπτική μεταφορά. Καταρχήν το τρίγωνο σχεδιάζεται πάντα ως ισόπλευρο, δίνοντας έτσι στους κόμβους ισοδύναμη υπόσταση. Δεύτερον είναι συμμετρικό, δίνοντας έτσι κεντρικό ρόλο στην έννοια, καθώς βρίσκεται μεταξύ συμβόλου και αντικειμένου. Τρίτον, οι διακεκομένες γραμμές υποδεικνύουν μία ασθενέστερη σύνδεση απ' ότι οι συνεχόμενες γραμμές. Το παραπάνω σχήμα επιδεικνύει γενικά καλή χρήση διαγραμματικών χαρακτηριστικών, τα οποία δεν είναι διαθέσιμα στις κλασσικές συμβολικές μορφές. Παρόλαυτά, είναι φανερό ότι τα χαρακτηριστικά αυτά μπορούν να κακομεταχειριστούν, μεταφέροντας έτσι τη λάθος πληροφορία. Είναι ολοφάνερο ότι τα διαγράμματα μπορούν να έχουν ένα συντακτικό, αλλά το ότι αυτό το συντακτικό συμπληρώνεται από μία ξεκάθαρη σημασιολογία είναι λιγότερο εμφανές.

Επίπεδα Αναπαράστασης

Η γνώση μας δίνει έναν ορισμό, ή μία κατανόηση των γεγονότων και δρα μέσα στον κόσμο. Η γνώση περιγράφει τον κόσμο και του δίνει νόημα. Η περιγραφή του προβλήματος που πρόκειται να λύσει ένας υπολογιστής καλείται γνωσιακή αναπαράσταση. Το τρίγωνο του νοήματος επιμένει ότι το νόημα είναι μια σύνθεση δύο σχέσεων, από τα σύμβολα της γλώσσας στον πραγματικό κόσμο, μέσω ενός πράκτορα που είναι ικανός να σχηματίζει έννοιες. Στο πεδίο της τυπικής σημασιολογίας, οι συμβολικές δομές αποκτούν μήνυμα μέσω ερμηνευτικών απεικονίσεων, ή μοντέλων, που εχουν ως πεδίο τιμών κάποια τυπική κατασκευή που χρησιμοποιεί μαθηματικές, ή τουλάχιστον, αφαιρετικές ιδέες. Η τυπική κατασκευή συχνά επιδιώκει να αιχμαλωτίσει με κάποιο τρόπο τον πραγματικό κόσμο, αλλά δεν είναι τελικά ο πραγματικός κόσμος. Συνήθως αυτό γίνεται για συμβολικά συστήματα όπως οι

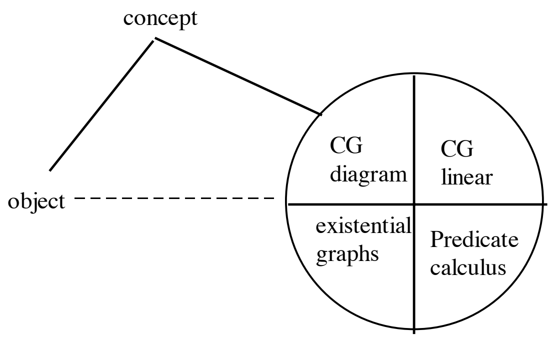

Figure 0.0.16: Το νοηματικό τρίγωνο με τέσσερα εναλλακτικά συμβολικά συστήματα

τυπικές λογικές, αλλά επίσης και για γλώσσες προγραμματισμού.

Ο Brachman εξέτασε πέντε επίπεδα αναπαράστασης που ορίζονται από γνωστά σημασιολογικά δίκτυα και υπέθεσε ότι είναι ισοδύναμα, με την έννοια ότι έχουν το ίδιο τελικό νόημα. Ένα επίπεδο ορίζεται ως ένας ξεχωριστός τύπος δικτύου κόμβων και τα πέντε διαφορετικά επίπεδα είναι τα ακόλουθα: το επίπεδο υλοποίησης, το λογικό επίπεδο , το επιστημολογικό επίπεδο , το εννοιολογικό επίπεδο και το γλωσσικό επίπεδο. Ο Brachman θεωρεί ότι το επιστημολογικό επίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στο λογικό και το εννοιολογικό επίπεδο, και σε ένα δίκτυο συνδέει την τυπική δομή με τις εννοιολογικές μονάδες δημιουργώντας ένα σύνολο των μεταξύ τους σχέσεων, είναι απών. Η πρόθεσή του ήταν να δείξει ότι οι αναπαραστάσεις μπορούν να είναι "*υψηλού επιπέδου*" και "*χαμηλού επιπέδου*", ακριβώς όπως και οι γλώσσες προγραμματισμού. Υπό αυτή την έννοια, η λογική είναι ο συναρμολογητής (assembler) των συστημάτων αναπαράστασης, όντας μόνο ένα επίπεδο πάνω από το επίπεδο μηχανής, ενώ η φυσική γλώσσα είναι το πιο απομακρυσμένο από τη μηχανή επίπεδο.Επομένως, ένα σημασιολογικό δίκτυο που αναπαριστάται στο εννοιολογικό επίπεδο μπορεί να μεταφραστεί στο επιστημολογικό επίπεδο, μετά στο λογικό επίπεδο, και τελικά στις δομές δεδομένων της μηχανής. Οι ιδέες που εμπεριέχονται σε αυτή την προσέγγιση είναι σημαντικές, αλλά η πεποίθηση ότι υπάρχουν ξεκάθαρα διαχωρισμένα επίπεδα είναι μάλλον λανθασμένη. Η απλή διάκριση του Sowa μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων μοιάζει πιο ρεαλιστική, εφόσον υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των μορφών που μπορεί να διαβάσει ο άνθρωπος και των μορφών που αποθηκεύονται και επεξεργάζονται στη μνήμη ενός υπολογιστή.

Το δεύτερο πρόβλημα στα επίπεδα αναπαράστασης του *Brachman* είναι ότι το νοηματικό τρίγωνο δεν κάνει διακρίσεις μεταξύ επιπέδων συμβόλων. Τόσο τα λογικά όσο και τα σημασιολογικά δίκτυα (τουλάχιστον οι εννοιλογικοί γράφοι) έχουν ισοδύναμες μορφές το καθένα στο άλλο: οι μεν εννοιολογικοί γράφοι γραμμική μορφή κειμένου, η δε λογική διαγραμματική μορφή. Αν αποπειραθούμε να

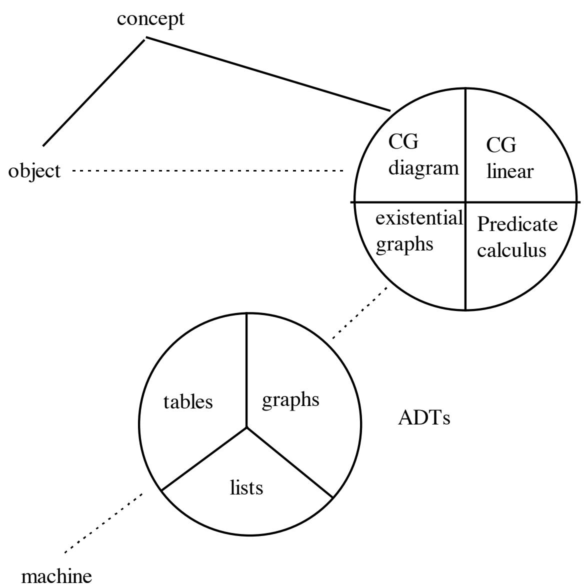

Figure 0.0.17: Το σχήμα 0.0.18, με την προσθήκη του συνδέσμου σύμβολο-μηχανή

εντάξουμε αυτές τις μορφές στο νοηματικό τρίγωνο, παίρνουμε το διάγραμμα του σχήματος (0.0.18) για ενοιολογικούς γράφους και πρωτοβάθμια λογική, καθένα με τις δύο συμβολικές του μορφές. Στο σχήμα βλέπουμε το νοηματικό τρίγωνο με τέσσερα εναλλακτικά συμβολικά συστήματα. Επομένως, τα συμβολικά συστήματα έχουν όλα το ίδιο νόημα (παρόλο που η μέθοδος απεικόνισης στον κόμβο concept είναι διαφορετική σε κάθε περίπτωση, υπαινίσσεται μία παρόμοια διαμέρισή του).
Οι αναπαραστάσεις στον κύκλο είναι εναλλακτικές εξωτερικές μορφές. Μπορούμε να προσθέσουμε, στην εικόνα που έχουμε μέχρι στιγμής, τη διάκριση μεταξύ εσωτερικής και εξωτερικής αναπαράστασης . Μια γλώσσα προγραμματισμού χρησιμοποιείται σαν μεσολαβητής μεταξύ έννοιας και μηχανής. Επομένως οι εσωτερικές αναπαραστάσεις πρέπει να μεσολαβούνται από έναν αφηρημένο τύπο δεδομένων (ADT): έναν που υποστηρίζεται από την επιλεγμένη γλώσσα. Ένας τρόπος ερμηνείας αυτών των επιπρόσθετων επιπέδων που φαίνονται στο σχήμα(0.0.17), είναι ότι προσπαθούμε να σχηματίσουμε ένα σύνδεσμο μεταξύ συμβόλου και αντικειμένου χτρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της μηχανής σαν υποκατάστατο του πραγματικού κόσμου. Με άλλα λόγια, η σχέση $symbol \rightarrow object$, που προηγουμένως μπορούσε να σχηματιστεί μόνο μέσω ενός γνωστικού πράκτορα, μπορεί τώρα να γίνει σαφής, ακόμα και να τυποποιηθεί, μέσω του ADT επιπέδου. Το ADT τότε διαμεσολαβεί τη σχέση μεταξύ συμβόλου και μηχανής ($symbol \rightarrow machine$), και μπορεί να θεωρηθεί τυπική αφαίρεση του εννοιολογικού πράκτορα. Βεβαια καταλήγουμε με ένα αντικείμενο διαφορετικού είδους, που τουλάχιστον όμως δεν είναι μια πλήρης αφαίρεση. Η μηχανή είναι ένα πραγματικό αντικείμενο με πραγματική συμπεριφορα. Απλώς πρέπει να ερμηνεύσουμε τη συμπεριφορά της σαν να ήταν

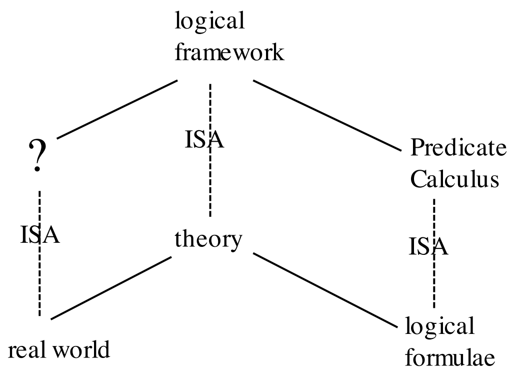

Figure 0.0.18: Το νοηματικό τρίγωνο σε δύο επίπεδα

συμπεριφορά πραγματικού κόσμου, και μπορεί βέβαια να δίνουμε λάθος ερμηνεία, εφόσον ο προγραμματισμός μας μπορεί να είναι ανεπαρκής ή λανθασμένος.

Εννοιολογικά Προσχέδια και Τυπικοί Κόσμοι

Παρόλο που έχουμε ήδη δει ότι όλα τα συμβολικά συστήματα είναι κατά μία έννοια ισοδύναμα, παραμένει το γεγονός ότι διαφορετικοί φορμαλισμοί έχουν διαφορετικά σημεία εκκίνησης. Είναι αδιαμφισβήτητο ότι διαφορετικοί γνωστικοί πράκτορες έχουν διαφορετικούς τρόπους να βλέπουν τον κόσμο. Ας ονομάσουμε το πώς βλέπει ένας πράκτορας τον κόσμο *εννοιολογικό προσχέδιο*. Αν το προσχέδιο μπορεί να περιγραφεί σαν λογικό, τότε κάθε αρχικοποίησή του θα είναι επίσης λογικής φύσεως. Η αρχικοποίηση ενός λογικού συστήματος είναι αυτό που ονομάζουμε *θεωρία* – μια συγκεκριμένη συλλογή από προτάσεις, όλες υποτιθέμενες ως αληθείς, και συνεπείς η μια με την άλλη. Η εξωτερική εκδήλωση της θεωρίας μπορεί να είναι στον κατηγορηματικό λογισμό, μια συμβολική γλώσσα. Το σχήμα(0.0.18) δείχνει το νοηματικό τρίγωνο σε δύο επίπεδας. Το κατώτερο είναι μια αρχικοποίηση του ανώτερου επιπέδου. Το ερωτηματικό είναι το αφηρημένο αντίστοιχο του πραγματικού κόσμου, το προσχέδιο, του οποίου ο πραγματικός κόσμος είναι μια εμφάνιση.

Σε αυτό το σημείο, εισερχόμαστε στον τομέα της οντολογίας, τον κλάδο αυτό της φιλοσοφίας που εξετάζει το ον γενικά, δηλαδή τις ειδικές συνθήκες που το κάνουν να υπάρχει, ανεξάρτητα από τις συμπτωματικές αλλαγές. Η οντολογία της λογικής είναι αρκετά απλή. Υπάρχουν αντικείμενα, διαχωριζόμενα μόνο από το όνομα, και υπάρχουν διαφόρων ειδών σχέσεις που μπορούν να συσχετίσουν αντικείμενα μεταξύ τους. Ο κόσμος συλλαμβάνεται άρα σαν στατική οργάνωση αντικειμένων. Η εναλλακτική του σημασιολογικού δικτύου πηγάζει ουσιαστικά από την ίδια θεώρηση. Δεν είναι περίεργο που η οπτικοποίησή του με τη μορφή κόμβων και τόξων ταιριάζει ακριβώς στην εικόνα της λογικής οντολογίας. Η παρουσία ενός γνωστικού πράκτορα στην εικόνα αυτή δεν επιτρέπεται να την αλλάξει, εφόσον η

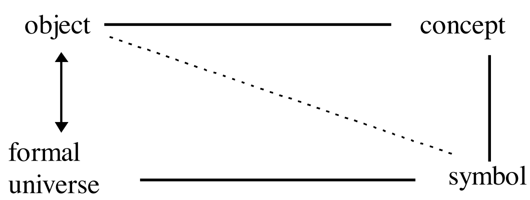

Figure 0.0.19: Τυπικό μοντέλο ως υποκατάστατο του πραγματικού κόσμου

οντολογία είναι απλή και σταθερή.

Τα συστήματα σημασιολογικών δικτύων συνήθως κατασκευάζονταν είτε με ανεπίσημη σημασιολογία, που αναπαρίσταντο από τη συμπεριφορά του προγράμματος (αυτό που κάνει το πρόγραμμα ορίζει τη σημασιολογία), είτε με ελλιπή σημασιολογία. Αυτοί που βασίζονται στην ισοδυναμία μεταξύ λογικής και εξωτερικών αναπαραστάσεων συνήθως συντάσσονται και με την καλώς ορισμένη τυπική σημασιολογία στη λογική. Παρόλαυτά πολλές από τις οπτικές διαστάσεις των σημασιολογικών δικτύων δεν παίζουν κανένα ρόλο εδώ , εφόσον δεν έχουν τυπικό αντίστοιχο στη λογική. Επομένως η εγγύτητα και η τοποθέτηση των κόμβων όπως και τα βάρη των συνδέσμων, δεν έχουν θέση στη λογική.

Ο συνήθης τρόπος για την προμήθεια τυπικής σημασιολογίας είναι ο ορισμός ενός αφηρημένου υποκατάστατου του πραγματικού κόσμου στο νοηματικό τρίγωνο. Στο σχήμα (0.0.19) φαίνεται ότι, για παράδειγμα, ένα τυπικό μοντέλο μπορεί να υποκαθιστά τον πραγματικό κόσμο, με σκοπό να παρακάμψει τη συνήθη επισύναψη νοήματος σε ένα σύμβολο μέσω ενός γνωστικού πράκτορα. Ο τέταρτος κόμβος θεωρείται ως μια τυπική αφαίρεση του πραγματικού κόσμου, κατάλληλο για τις τεχνικές της δηλωτικής σημασιολογίας και της θεωρίας μοντέλων. Το τόξο με τα δύο βέλη στο διάγραμμα δηλώνει μια υποτιθέμενη σχέση μεταξύ των στοιχείων του τυπικού μοντέλου και του πραγματικού κόσμου, παρόλο που κάποιες φορες υπάρχουν αφηρημένα αντικείμενα στο τυπικό σύμπαν που δεν έχουν εμφανή αντίστοιχα στον πραγματικό κόσμο.

Η συμβολή της Επιστήμης των Υπολογιστών

Έχει μέχρι στιγμής γίνει σαφές από την παραπάνω ανάλυση ότι το νοηματικό τρίγωνο πραγματικά συσχετίζει μια οντολογία με ένα εννοιολογικό προσχέδιο και ένα (εξωτερικό) σύστημα συμβόλων. Παρόλαυτά η επιστήμη των υπολογιστών, μέσω του πεδίου της τεχνητής νοημοσύνης, πρόσθεσε ένα τέταρτο πόδι – την εσωτερική αναπαράσταση. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης αυτών των εσωτερικών αναπαραστάσεων είναι τα ακόλουθα:

1. Μπορούν να κάνουν τις γλωσσικές αναπαραστάσεις υπολογίσιμες. Αυτό σημαίνει ότι οι κανόνες ενός τυπικού συστήματος μπορούν να εφαρμοστούν

στις αναπαραστάσεις για την εξερεύνηση πολύπλοκων πιθανοτήτων συνεπαγωγής, ακόμα και απόδειξης.

2. Καθιστούν τις εξακολουθητικές γνωσιακές βάσεις δεδομένων υλοποιήσισμες.

3. Μπορούν να κάνουν τις διαγραμματικές αναπαραστάσεις χρήσιμες πέρα και πάνω από τη χρήση τους ως παραδείγματα (motivational examples).

Η ερώτηση σχετικά με το αν τα σημασιολογικά δίκτυα εκφράζουν υπολογιστικά πλεονεκτήματα έναντι άλλων τύπων αναπαραστάσεων, όπως η λογική, είναι αμφιλεγόμενη. Όπως το ανθρώπινο μάτι μπορεί να ακολουθήσει αποδοτικά συνδέσεις σε ένα δικτυακό διάγραμμα, έτσι και ο υπολογιστής με την εσωτερική του υλοποίηση του δικτύου. Επομένως το οπτικό πλεονέκτημα μετατρέπεται μερικώς σε υπολογιστικό πλεονέκτημα. Αν πάρουμε ένα σημασιολογικό δίκτυο, μεταφράσουμε, με κάποιο τρόπο, αυτό που λέει σε έναν τοπικό φορμαλισμό και μετά υλοποιήσουμε την κατασκευή αυτή, δε θα καταλήξουμε αναγκαστικά στον ίδιο τύπο και στους ίδιους βαθμούς αποδοτικότητας. Αλλά μπορούμε να υλοποιήσουμε τη λογική με τέτοιο τρόπο ώστε η ισοδυναμία να ισχύει. Επιπλέον, η εκλογή του ADT που θα χρησιμοποιηθεί καθορίζει το τελικό αποτέλεσμα.

Μία πλήρη σύγκριση της λογικής και των σημασιολογικών δικτύων θα πρέπει να αναφέρει επίσης τον τρόπο με τον οποίο τα σημασιολογικά δίκτυα διευκολύνουν την βασισμένη σε κληρονομικότητα συλλογιστική και επιτρέπουν εξαιρέσεις σε κληρονομημένες πληροφορίες. Εδώ ξανά δεν υπάρχει πραγματικό πλεονέκτημα έναντι της λογικής, γιατί οι λογικές μπορούν να υλοποιηθούν ή να σχεδιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν αυτά τα πλεονεκτήματα. Μία σύγχρονη τάση είναι η χρήση περιγραφικών λογικών, που είναι ειδικά σχεδιασμένες για την καταγραφή κάποιων πλεονεκτημάτων των σημασιολογικών δικτύων.

Τα σημασιολογικά δίκτυα έχουν ουσιαστικά διτή ύπαρξη (have led a dual existence), αφ' ενός ως διαγραμματική μορφή γνωστικής αναπαράστασης και αφ' ετέρου σαν εξωτερική αναπαράσταση υπολογιστή, κατάλληλη για μια ποικιλία υπολογιστικών μεθόδων. Παρόλαυτα η οπτική τους διάσταση, ενώ έχει αναγνωριστεί, δεν έχει μελετηθεί εκτενώς και η επαναφορά τους στο προσκήνιο ως εργαλεία για την οπτικοποίηση της δομής της γνώσης πρέπει να εξερευνηθεί περεταίρω.

ΤΟ INSTITUTION ΤΩΝ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Είδαμε ότι τα σημασιολογικά δίκτυα είναι ουσιαστικά εννοιολογικά δίκτυα οργάνωσης και αναπαράστασης της γνώσης, όπως αυτά διατηρούνται από έναν γνωστικό πράκτορα. Είδαμε ακόμα ότι κάθε σημασιολογικό δίκτυο είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο προτάσεων της πρωτοβάθμιας λογικής, και μπορεί να επεκταθεί ώστε να έχει την ίδια εκφραστική δύναμη με αυτήν. Είναι εμφανές λοιπόν ότι για να δείξουμε ότι τα σημασιολογικά δίκτυα σχηματίζουν ένα institution θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση τους με την πρωτοβάθμια λογική. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η κατηγορηματική λογική είναι ένα institution, και παρακάτω επιχειρείται μια σκιαγράφιση της απόδειξης αυτής, πάνω στην οποία βασίζεται η αντίστοιχη απόδειξη για τα σημασιολογικά δίκτυα.

ΤΟ INSTITUTION ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ (ΠΟΛΛΩΝ ΤΥΠΩΝ)

Για να δειχθεί ότι η κατηγορηματική λογική είναι ένα institution πρέπει να μπορεί να τυποποιηθεί έτσι ώστε να αποτελείται από μια κατηγορία υπογραφών **Sign**, έναν functor **Sen** : **Sign** → **Set**, που στέλνει κάθε υπογραφή Σ στο σύνολο προτάσεών της, έναν functor **Mod** : **Sign** → $\mathbf{Cat^{op}}$, που στέλνει κάθε Σ στην κατηγορία των μοντέλων της και μια σχέση ικανοποίησης $\models_\Sigma \subseteq |Mod\,(\Sigma)| \times Sen\,(\Sigma)$ τέτοια ώστε για κάθε μορφισμό υπογραφών $\phi : \Sigma \to \Sigma^{'}$ της **Sign** να ισχύει η συνθήκη ικανοποίησης

$$\mathcal{M}' \models \phi e \Leftrightarrow \phi \mathcal{M}' \models e$$

για κάθε $\mathcal{M}^{'} \in |Mod\left(\Sigma^{'}\right)|$ και κάθε $e \in Sen\,(\Sigma)$.

Η απόδειξη για την πρωτοβάθμια λογική ακολουθεί τα ίδια βήματα με αυτήν για την *εξισωτική λογική* που, όντας ένα λιγότερο περίπλοκο λογικό σύστημα, εκφράζει καθαρότερα την υποκείμενη συλλογιστική.

Οι όροι της εξισωτικής λογικής σχηματίζονται από μεταβλητές, σταθερές και σύμβολα συναρτήσεων (ή πράξεων) και η τυπική της γλώσσα αποτελείται από τις ταυτότητες της μορφής $s = t$, όπου s, t όροι. Οι κανόνες συναγωγής συνίστανται στην αυτοπαθητικότητα, τη συμμετρικότητα και τη μεταβατικότητα της ταυτότητας, την αντικατάσταση ταυτοτικών τύπων -όταν αυτοί εμφανίζονται σαν ορίσματα συναρτησιακών συμβόλων- και την ταυτότητα όρων που ταυτίζονταν πρωτού υποστούν την ίδια αντικατάσταση μεταβλητών. Συνήθως το σύατημα περιλαμβάνει και ένα σύνολο από ταυτότητες που λειτουργούν σαν προσχέδια αξιωμάτων.

Η τυποποίηση ενός λογικού συστήματος απαιτεί τον ορισμό των κατάλληλων μαθηματικών αντικειμένων ώστε το institution που θα προκύψει να συλλαμβάνει πλήρως τη δομή του. Πρώτα πρέπει να οριστεί η κατηγορία εξισωτικών υπογραφών, που εφόσον αντιστοιχεί στα διάφορα πιθανά λεξιλόγια, θα πρέπει να αποτελείται από κάποια σύμβολα τύπων (που ανυτιστοιχίζονται στους τύπους των διαφόρων δεδομένων) και κάποια σύμβολα τελεστών (που αντιστοιχίζονται στις συναρτήσεις μεταξύ δεδομένων συγκεκριμένων τύπων) μαζί με μία λίστα από τύπους εισόδου και έναν τύπο εξόδου. Ένας μορφισμός μεταξύ υπογραφών θα πρέπει τότε να απεικονίζει τύπους σε τύπους και τελεστές σε τελεστές, διατηρώντας τους τύπους εισόδου και εξόδου. Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός μιας εξισωτικής υπογραφής:

Ορισμός 1

Μια *εξισωτική υπογραφή* είναι ένα ζευγάρι $\langle S, \Sigma \rangle$ όπου το S είναι ένα σύνολο από ονόματα τύπων και το Σ μια οικογένεια συνόλων από ονόματα τελεστών με δείκτες από το σύνολο $S \times S^*$, με $S^* = \{u | u = s1...sn : si \in S \ \forall i = 1, ..., n, \ n \in \mathbb{N}\}$ Πολλές φορές γράφουμε απλά Σ αντί του πλήρους $\langle S, \Sigma \rangle$. Ένα $\sigma \in \Sigma_{u,s}$ λέμε ότι έχει *τάξη* u, *τύπο* s και *βαθμό* u, s, και γράφουμε $\sigma : u \to s$

Ορισμός 2

Ένας μορφισμός εξισωτικών υπογραφών ϕ από μια υπογραφή $\langle S, \Sigma \rangle$ σε μια άλλη $\langle S', \Sigma' \rangle$ είναι ένα ζευγάρι $\langle f, g \rangle$ που αποτελείται από μια απεικόνιση $f : S \to S'$ και μία οικογένεια απεικονίσεων $g = \Big\{ g_{u,s} | g_{u,s} : \Sigma_{u,s} \to \Sigma'_{f^*(u), f(s)}, \ u \in S^*, \ s \in S \Big\}$, με δείκτες από το σύνολο $S \times S^*$ και όπου $f^* : S^* \to S'^*$ η επέκταση της f σε συμβολοσειρές. Πολλές φορές γράφουμε $\phi(s)$ για $f(s)$, $\phi(u)$ για $f^*(s)$ και $\phi(\sigma)$ ή $\phi\sigma$ για $g_{u,s}(\sigma)$ όταν $\sigma \in \Sigma_{u,s}$.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την κατηγορία των εξισωτικών υπογραφών.

Ορισμός 3

Η κατηγορία των εξισωτικών υπογραφών **Sig** έχει για αντικείμενα εξισωτικές υπογραφές, και για τόξα μορφισμούς εξισωτικών υπογραφών. Το ταυτοτικό τόξο πάνω στην $\langle S, \Sigma \rangle$ είναι το αντίστοιχο ζευγάρι ταυτοτικών απεικονίσεων και η σύνθεση τόξων είναι η σύνθεση των αντίστοιχών απεικονίσεων.

Το επόμενο βήμα είναι οι ορισμοί των functors $\mathbf{Sen} : \mathbf{Sig} \to \mathbf{Set}$ και $\mathbf{Mod} : \mathbf{Sig} \to \mathbf{Cat^{op}}$. Ο functor **Mod** στέλνει κάθε υπογραφή στην κατηγορία των μοντέλων της. Αλλά μια εξισωτική υπογραφή $\langle S, \Sigma \rangle$ μπορεί να μοντελοποιηθεί από μία $\Sigma-$άλγεβρα, η οποία ερμηνεύει κάθε σύμβολο τύπου σαν ένα σύνολο και κάθε σύμβολο τελεστή σαν μια συνάρτηση. Οι άλγεβρες αντιστοιχούν, σύμφωνα με την προγραμματιστική διαίσθηση, σε συγκεκριμένους τύπους δεδομένων. Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός μιας $\Sigma-$άλγεβρας:

<u>Ορισμός</u> 4
Έστω $\langle S, \Sigma \rangle$ μια εξισωτική υπογραφή. Μία $\Sigma-$άλγεβρα $\langle A, \mathfrak{a} \rangle$ είναι μια οικογένεια συνόλων $|A| = \langle A_s | s \in S \rangle$ - οι φορείς της A - μαζί με μία οικογένεια απεικονίσεων $\mathfrak{a}$, με δείκτες από το σύνολο $S^* \times S$, που περιλαμβάνει όλες τις $\mathfrak{a}_{u,s} : \Sigma_{u,s} \to [A_u \to A_s]$ με $u \in S^*$ και $s \in S$, όπου $A_{s1...sn} = A_{s1} \times ... \times A_{sn}$ και με $[A \to B]$ δηλώνεται το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B. Αν $u = s1...sn$, $\sigma \in \Sigma_{u,s}$ και $\langle \alpha 1, ...\alpha n \rangle \in A_u$ γράφουμε $\sigma (\alpha 1, ...\alpha n)$ για $\mathfrak{a}_{u,s} (\sigma) (\alpha 1, ..., \alpha n)$, εάν δεν προκύπτει κάποια αμφισημία.

Η κατηγορία των μοντέλων κάθε υπογραφής Σ έχει ως αντικείμενα $\Sigma-$άλγεβρες, και ως τόξα $\Sigma-$ομομορφισμούς.

<u>Ορισμός</u> 5
Δοθείσης μιας εξισωτικής υπογραφής $\langle S, \Sigma \rangle$, ένας $\Sigma-$ομομορφισμός από μια $\Sigma-$άλγεβρα $\langle A, \mathfrak{a} \rangle$ σε μία άλλη $\langle A', \mathfrak{a}' \rangle$ είναι μια οικογένεια απεικονίσεων f, με με δείκτες από το σύνολο S, $f : A \to A'$ τέτοια ώστε για όλα τα $\sigma \in \Sigma_{u,s}$ και όλα τα $\alpha = \langle \alpha 1, ..., \alpha n \rangle \in A_u$ να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη ομομορφισμού:

$$f_s (\mathfrak{a} (\sigma) (\alpha 1, ..., \alpha n)) = \mathfrak{a}' (\sigma) (f_{s1} (\alpha 1) , ..., f_{sn} (\alpha n))$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία $\mathbf{Alg_\Sigma}$ που έχει $\Sigma-$άλγεβρες σαν αντικείμενα και $\Sigma-$ομομορφισμούς σαν τόξα. Η σύνθεση και η ταυτότητα είναι η σύνθεση και η ταυτότητα των αντίστοιχων απεικονίσεων. Όπως είναι φανερό η $\mathbf{Alg_\Sigma}$ είναι η κατηγορία των μοντέλων της υπογραφής Σ και έχουμε πλέον όλα τα απαιτούμενα για τον ορισμό του functor που στέλνει κάθε Σ στην αντίστοιχή της $\mathbf{Alg_\Sigma}$.

<u>Ορισμός</u> 6
O functor $\mathbf{Alg} : \mathbf{Sig} \to \mathbf{Cat^{op}}$ στέλνει κάθε υπογραφή Σ στην κατηγορία $\mathbf{Alg_\Sigma}$ όλων των $\Sigma-$αλγεβρών και κάθε μορφισμό υπογραφών $\phi = \langle f : S \to S', g : \Sigma \to \Sigma' \rangle$ στον functor $Alg (\phi) : Alg_{\Sigma'} \to Alg_{\Sigma} \in Cat^{op}$ ο οποίος

1. στέλνει κάθε $\Sigma-$άλγεβρα $\langle A', \alpha' \rangle$ στη $\Sigma-$άλγεβρα $\langle A, \mathfrak{a} \rangle$ με $\mathrm{A}_s = A'_{f(s)}$ και $\mathfrak{a} = g\mathfrak{a}'$ και

2. στέλνει κάθε $\Sigma-$ομομορφισμό $h' : A' \to B'$ ston $\Sigma-$ομομορφισμό

$$Alg (\phi) (h') = h : Alg (\phi) (A') \to Alg (\phi) (B')$$

   που ορίζεται από το $h_s = h'_{f(s)}$

Πολλές φορές γράφουμε $\phi (A')$ ή $\phi A'$ για το $Alg (\phi) (A')$ και $\phi (h')$ για το $Alg (\phi) (h')$. O functor $\mathbf{Alg}$ είναι ο functor $\mathbf{Mod}$ του institution της εξισωτικής λογικής πολλών τύπων.

Για τον ορισμό του functor $\mathbf{Sen} : \mathbf{Sig} \to \mathbf{Set}$, που στέλνει κάθε υπογραφή στο σύνολο των προτάσεων που ορίζονται πάνω σε αυτήν, χρειαζόμαστε μερικούς

ακόμα ορισμούς. Πρέπει να οριστούν οι $\Sigma-$εξισώσεις (που δεν είναι παρά οι προτάσεις που ορίζονται πάνω σε μια υπογραφή Σ) και η σχέση ικανοποίησης μιας $\Sigma-$εξίσωσης από μία $\Sigma-$άλγεβρα , δηλαδή τη σχέση ικανοποίησης μεταξύ των προτάσεων μιας υπογραφής και των μοντέλων της. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{X}$ είναι ένα άπειρο σύνολο μεταβλητών. Για να δώσουμε αυτούς τους ορισμούς χρειαζόμαστε, όπως θα δούμε, την ακόλουθη κατασκευή:
Αν S είναι το σύνολο τύπων της υπογραφής Σ, τότε υπάρχει ένας *forgetful functor* $U : Alg_{\Sigma} \rightarrow Set_S$, ο οποίος στέλνει κάθε άλγεβρα στην οικογένεια των φορέων της που έχει σύνολο δεικτών S και κάθε $\Sigma-$ομομορφισμό στην υποκείμενή του απεικόνιση με σύνολο δεικτών S. Ο U είναι functor διότι $U = Alg\,(\phi)$, όπου ϕ είναι ο εγκλισμός υπογραφών $\langle S, \emptyset \rangle \rightarrow \Sigma$.
Για κάθε σύνολο $X = \{x_s | s \in S\}$ υπάρχει μια *ελεύθερη άλγεβρα* $T_{\Sigma}\,(X)$ τέτοια ώστε η $T_{\Sigma}\,(X)_{\,s}$ να αποτελείται από όλους τους $\Sigma-$όρους τύπου s που χρησιμοποιούν σύμβολα μεταβλητών από το X.

Έστω ένα άπειρο σύνολο $\mathcal{X}$ που αποτελείται από σύμβολα μεταβλητών και μία ανάθεση τύπων X, δηλαδή μια μερική συνάρτηση $X : \mathcal{X} \rightarrow S$, όπου S είναι ένα σύνολο τύπων. Δηλαδή η X αναθέτει σε κάθε σύμβολο μεταβλητής του $\mathcal{X}$ ένα σύμβολο τύπου $s \in S$. Το X μπορεί να γραφεί και ως $\{X_s | s \in S\}$ όπου $X_s = \{x \in \mathcal{X} | X\,(x) = s\}$

Ορισμός 7
Μία $\Sigma-$εξίσωση e είναι μια τριάδα $\langle X, t1, t2 \rangle$, όπου $X : \mathcal{X} \rightarrow S$ μια ανάθεση τύπων, με S το σύνολο τύπων της Σ, και $t1, t2 \in |T_{\Sigma}\,(X)\,|_s$ είναι όροι με σύμβολα μεταβλητών από το X που έχουν τον ίδιο τύπο $s \in S$. Μια τέτοια εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή $(\forall X)\,t1 = t2$.

Ορισμός 8
Μια $\Sigma-$άλγεβρα A ικανοποιεί μια $\Sigma-$εξίσωση $e : (\forall X)\,t1 = t2$ αν και μόνο αν $\alpha^{\#}\,(t1) = \alpha^{\#}\,(t2)$ για κάθε ανάθεση $\alpha^{\#} : X \rightarrow |A|$. Τότε γράφουμε $A \models e$.

Τώρα ορίζουμε έναν functor **Eqn** από την κατηγορία των υπογραφών στην κατηγορία των μοντελων . Πρώτα όμως πρέπει για κάθε μορφισμό υπογραφών $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ να ορίσουμε μια συνάρτηση $\phi^{\frown}$ που στέλνει $\Sigma-$όρους σε $\Sigma'-$όρους.

Ορισμός 9
Έστω $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ ένας μορφισμός υπογραφών $\langle f : S \rightarrow S', g \rangle$ και $X : \mathcal{X} \rightarrow S$ μια ανάθεση τύπων, με $X^{'} = f \circ X : \mathcal{X} \rightarrow S'$. Τότε ορίζεται μία οικογένεια απεικονίσεων, με δείκτες από το σύνολο S, $\phi^{\frown} : |T_{\Sigma}\,(X)\,| \rightarrow |\phi\left(T_{\Sigma'}\left(X^{'}\right)\right)|$ ως ακολούθως: έχουμε ότι $X \subseteq |\phi\,(T_{\Sigma'}\,(X'))\,|$ εφόσον αν $x \in X_s$ τότε $x \in X'_{f(s)}$ και $X'_{f(s)} \subseteq |T_{\Sigma'}\,(X')\,|_{f(s)} = |\phi\,(T_{\Sigma'}\,(X'))\,|_s$. Έστω ότι η $j : X \rightarrow |\phi\,(T_{\Sigma'}\,(X'))\,|$ δηλώνει αυτή την έγκλιση. Τότε η j έχει μοναδική επέκταση, ως $\Sigma-$ομομορφισμός, την $j^{\#} : T_{\Sigma}\,(X) \rightarrow \phi\,(T_{\Sigma'}\,(X'))$[16] και ορίζουμε την $\phi^{\sim} = |j^{\#}|$.

Ορισμός 10
Ο functor $\mathbf{Eqn} : \mathbf{Sig} \rightarrow \mathbf{Set}$ στέλνει κάθε υπογραφή Σ στο σύνολο όλων των $\Sigma-$εξισώσεων $\mathbf{Eqn}\,(\Sigma)$ και κάθε $\phi = \langle f, g \rangle : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ στη συνάρτηση $\mathbf{Eqn}\,(\phi)$:

[16] θεώρημα 52, σελ. 35

$\mathbf{Eqn}\,(\Sigma) \to \mathbf{Eqn}\,(\Sigma')$ που ορίζεται όπως παρακάτω:

$$Eqn\,(\phi)\,(\langle X, t1, t2\rangle) = \langle f \circ X, \phi^{\sim}\,(t1)\,, \phi^{\sim}\,(t2)\rangle$$

Συχνά γράφουμε $\phi\,(e)$, ή ϕe αντί του $Eqn\,(\phi)\,(e)$.

Τέλος, χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη ικανοποίησης

- Αν $\phi : \Sigma \to \Sigma'$, e μια $\Sigma-$εξίσωση και A' μια $\Sigma'-$άλγεβρα, τότε

$$A' \models \phi\,(e) \Leftrightarrow \phi\,(A') \models e$$

Με αυτόν λοιπόν τον τρόπο, και αφού ορίστηκαν όλα τα απαραίτητα αντικείμενα, καταφέραμε να τυποποιήσουμε την εξισωτική λογική πολλών τύπων, σχηματίζοντας ένα institution. Όπως φαίνεται παραπάνω, απαιτείται μεγάλη ακρίβεια και προσοχή κατά τον ορισμό των απαιτούμεων τυπικών αντικειμένων. Επομένως η εξισωτική λογική πολλών τύπων είναι ένα institution, με κατηγορία υπογραφών την κατηγορία **Sig** των εξισωτικών υπογραφών (ορ. 1), functor **Mod** τον functor **Alg** (ορ. 6), functor **Sen** τον functor **Eqn** (ορ. 10) και σχέση ικανοποίησης την εξισωτική ικανοποίηση (ορ. 8), για την οποία ισχύει η αντίστοιχη συνθήκη. Αυτό το institution συμβολίζεται με $\mathcal{EQ}$.

ΤΟ INSTITUTION ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΛΟΓΙΚΗΣ (ΠΟΛΛΩΝ ΤΥΠΩΝ)

Αποδεικνύεται, όπως έχει ήδη αναφερθεί, ότι η πρωτοβάθμια λογική πολλών τύπων είναι ένα institution και η απόδειξη ακολουθεί παρόμοια βήματα με αυτά της αντίστοιχης απόδειξης για την εξισωτική λογική. Πρώτα ορίζουμε την κατηγορία πρωτοβάθμιων υπογραφών Ω.

Ορισμός 11

Μια πρωτοβάθμια υπογραφή Ω είναι μία τριάδα $\langle S, \Sigma, \Pi\rangle$ όπου

1. το S είναι ένα σύνολο από σύμβολα τύπων
2. το Σ είναι μία οικογένεια συνόλων από σύμβολα τελεστών, ή συναρτήσεων, με δείκτες από το σύνολο $S^* \times S$
3. το Π είναι μια οικογένεια συνόλων από σύμβολα κατηγορημάτων, ή σχέσεων, με δείκτες από το σύνολο S^*

Ορισμός 12

Ένας μορφισμός πρωτοβάθμιων υπογραφών από την Ω στην Ω' είναι μια τριάδα $\langle\phi_1, \phi_2, \phi_3\rangle$ όπου

1. $\phi_1 : S \to S'$ είναι μια συνάρτηση

2. $\phi_2 : \Sigma \to \Sigma'$ είναι μία οικογένεια συναρτήσεων $(\phi_2)_{u,s} : \Sigma_{u,s} \to \Sigma'_{\phi_1^*(u),\phi_1(s)}$ με δείκτες από το σύνολο $S^* \times S$

3. $\phi_3 : \Pi \to \Pi'$ είναι μία οικογένεια συναρτήσεων $(\phi_3)_u : \Pi_u \to \Pi'_{\phi_1^*(u)}$ με δείκτες από το σύνολο S^*

Η κατηγορία με αντικείμενα πρωτοβάθμιες υπογραφές και τόξα μορφισμούς πρωτοβάθμιων υπογραφών (μαζί με την αντίστοιχη σύνθεση και ταυτότητα) συμβολίζεται με **FoSig**.

Η απόδειξη συνεχίζεται με τον ορισμό των $\Omega-$μοντέλων και των πρωτοβάθμιων $\Omega-$ομομορφισμών μεταξύ $\Omega-$μοντέλων και σχηματίζεται η κατηγορία των πρωτοβάθμιων μοντέλων και πρωτοβάθμιων ομομορφισμών **FoMod**. Η κατηγορία αυτή επεκτείνεται σε έναν functor $\mathbf{FoMod} : \mathbf{FoSig} \to \mathbf{Cat^{op}}$, που στέλνει κάθε υπογραφή Ω στην κατηγορία των μοντέλων της.

<u>Ορισμός 13</u>

Έστω μια πρωτοβάθμια υπογραφή Ω. Ένα $\Omega-$μοντέλο (ή $\Omega-$δομή) A αποτελείται από

1. Μία οικογένεια $|A|$ μη κενών συνόλων $\{A_s | s \in S\}$, όπου το A_s είναι ο φορέας του τύπου s

2. Μία οικογένεια συναρήσεων $\alpha = \{\alpha_{u,s} | \alpha_{u,s} : \Sigma_{u,s} \to [A_u \to A_s], u \in S^*, s \in S\}$ με δείκτες από το σύνολο $S^* \times S$, που αναθέτει μία συνάρτηση σε κάθε συναρτησιακό σύμβολο

3. και μία οικογένεια συναρτήσεων $\beta = \{\beta_u | \beta_u : \Pi_u \to Pow(A_u)\}$ με δείκτες από το σύνολο S^* που αναθέτει μια σχέση σε κάθε κατηγορηματικό σύμβολο , όπου $Pow(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A.

Για $\pi \in \Pi_u$ με $u = s1, ..., sn$ και $\mathfrak{a}i \in A_{si}$ για $i = 1, ..., n$ λέμε ότι "το $\pi(\mathfrak{a}1, ..., \mathfrak{a}n)$ ισχύει στην A" αν και μόνο αν $(\mathfrak{a}1, ..., \mathfrak{a}n) \in \beta(\pi)$.

<u>Ορισμός 14</u>

Ένας πρωτοβάθμιος $\Omega-$ομομορφισμός $f : A \to A'$ μεταξύ $\Omega-$μοντέλων είναι μία οικογένεια συναρτήσεων $f_s : A_s \to A'_s$ τέτοια ώστε για κάθε $\pi \in \Pi_u$ με $u = s1...sn$ και $\mathfrak{a}i \in A_{si}$ για $i = 1, ..., n$

$$\beta(\pi)(\mathfrak{a}1, ..., \mathfrak{a}n) \implies \beta'(\pi)(f_{s1}(\mathfrak{a}1), ..., f_{sn}(\mathfrak{a}n))$$

Συμβολίζουμε με **FoMod** την κατηγορία με αντικέιμενα πρωτοβάθμια μοντέλα και πρωτοβάθμιους μορφισμούς μεταξύ μοντέλων, με την προφανή πράξη σύνθεσης. Η **FoMod** επεκτείνεται σε έναν functor $\mathbf{FoMod} : \mathbf{FoSig} \to \mathbf{Cat^{op}}$με τον ακόλουθο τρόπο

Δοθέντος ενός πρωτοβάθμιου μορφισμού υπογραφών $\phi : \Omega \to \Omega'$ ορίζουμε τον functor

$$\mathbf{FoMod}(\phi) : \mathbf{FoMod}(\mathbf{\Omega'}) \to \mathbf{FoMod}(\mathbf{\Omega})$$

ο οποίος στέλνει κάθε μοντέλο $A' \in \mathbf{FoMod}(\Omega')$ στο $A = \phi A'$ με τον ακόλουθο τρόπο:

1. $A_s = A'_{s'}$ για $s \in S$ με $s' = \phi_1(s)$

2. $\alpha_{u,s}(\sigma) = \alpha'_{u',s'}\left((\phi_2)_{u,s}(\sigma)\right)$ για $u \in S^*$, $s \in S$ και $\sigma \in \Sigma_{u,s}$ όπου $u' = \phi_1^*(u)$ και $s' = \phi_1(s)$

3. $\beta_u(\pi) = \beta'_{u'}((\phi_3)_u(\pi))$ για $u \in S^*$ και $\pi \in \Pi_u$ με u' όπως παραπάνω.

και κάθε ομομορφισμό μεταξύ μοντέλων $f' : A' \to B' \in \mathbf{FoMod}(\mathbf{\Omega}')$ στο $\phi f' : A \to B \in \mathbf{FoMod}(\Omega)$, όπου $A = \phi A'$ και $B = \phi B'$, με $f_s = f'_{s'}$ όπου $s' = \phi_1(s)$.

Το επόμενο βήμα είναι να οριστούν οι προτάσεις πάνω σε μια πρωτοβάθμια υπογραφή Ω. Αυτό γίνεται με το συνήθη τρόπο, ορίζοντας πρώτα τους όρους και τις καλά ορισμένες φόρμουλες. Σε αυτό το σημείο απαιτείται μεγάλη προσοχή στο χειρισμό των μεταβλητών. Έστω $X : \mathcal{X} \to S$ μια μερική συνάρτηση (ανάθεση τύπων). Όπως και πριν, η X μπορεί να γραφεί και σαν οικογένεια συνόλων $X = \{X_s | x \in \mathcal{X} : X(x) = s\}$. Μετά ορίζουμε την οικογένεια $TERM_X(\Omega)$ των $(\Omega, X)-$όρων με δείκτες από το σύνολο S, που αποτελείται από τους φορείς της $T_\Sigma(X)$ - της *ελεύθερης άλγεβρας* με γεννήτορες X - , και τη συνάρτηση $Free$ που ορίζεται επαγωγικά πάνω στην $TERM_X(\Omega)$ ως εξής:

1. $Free_s(x) = \{x\}$ για $x \in X_s$

2. $Free_s(\sigma(t1, ..., tn)) = \bigcup_{i=1}^{n} Free_{si}(ti)$

Η (ξένη) ένωση όλων των $TERM_X(\Omega)$ συμβολίζεται με $TERM(\Omega)$. Εδώ, όπως και στην περίπτωση της εξισωτικής λογικής, υπονοείται πως υποθέτουμε ότι κάθε $\Omega-$όρος δίνεται μαζί με μία ρητή ένδειξη του ποιες είναι οι μεταβλητές που περιέχει.

<u>Ορισμός 15</u>

Μία *καλώς ορισμένη* $(\Omega, X)-$*φόρμουλα* είναι ένα στοιχείο του φορέα της *ελεύθερης άλγεβρας* ενός τύπου $WFF_X(\Omega)$ που έχει ως γεννήτορες τις *ατομικές* $(\Omega, X)-$*φόρμουλες*

$$\{\pi(t1, ..., tn) | \pi \in \Pi_u \textit{ με } u = s1...sn \textit{ και } ti \in TERM_X(\Omega)_{si}\}$$

και έχοντας ως υπογραφή (ενός τύπου)

1. μία σταθερά *true*

2. έναν *μονομελή προθεματικό τελεστή* $\neg$

3. έναν διμελή ενθεματικό τελεστή &

4. έναν μονομελή προθεματικό τελεστή $(\forall x)$ γα κάθε $x \in X$

Η ένωση όλων όλων των $WFF_X(\Omega)$ συμβολίζεται με $WFF(\Omega)$.

Οι συναρτήσεις Var και $Free$, οι οποίες μας δίνουν τα σύνολα των μεταβλητών και των ελεύθερων μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στις $\Omega-$φορμουλες, μπορουν να οριστούν επαγωγικά μέσω των παραπάνω λογικών συνδέσμων ως εξής:

1. $Var\,(true) = Free\,(true) = \emptyset$
2. $Var\,(\pi\,(t1, ..., tn)) = Free\,(\pi\,(t1, ..., tn)) = \bigcup_{i=1}^{n} Fre\,(ti)$
3. $Var\,(\neg P) = Var\,(P)$ και $Free\,(\neg P) = Free\,(P)$
4. $Var\,(P\&Q) = Var\,(P) \cup Var\,(Q)$ και $Free\,(P\&Q) = Free\,(P) \cup Free\,(Q)$
5. $Var\,((\forall x)\,P) = Var\,(P) \cup \{x\}$ και $Free\,((\forall x)\,P) = Free\,(P) - \{x\}$

Μία $\Omega-$πρόταση είναι μια κλειστή $\Omega-$φόρμουλα, δηλαδή μια $\Omega-$φόρμουλα P με $Free\,(P) = \emptyset$ (μια *καλως ορισμένη φόρμουλα* που δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές). Έστω $FoSen\,(\Omega)$ το σύνολο όλων των $\Omega-$προτάσεων, δηλαδή η ένωση των συνόλων $FoSen_X\,(\Omega)$ που αποτελούνται από τις κλειστές $(\Omega, X)-$φόρμουλες. Μπορούμε τώρα, για ευκολία, να ορίσουμε τους υπόλοιπους λογικούς συνδέσμους $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ και $\exists x$ χρησιμοποιώντας τους βασικούς συνδέσμους που ορίστηκαν παραπάνω, με το συνήθη τρόπο.

Τελικά ορίζεται ο functor **FoSigSet** : **FoSig** $\rightarrow$ **Set** που στέλνει κάθε πρωτοβάθμια υπογραφή στο σύνολο των προτάσεων που ορίζονται πάνω σε αυτήν, με τον ακόλουθο τρόπο:
Δοθέντος ενός μορφισμού υπογραφών $\phi : \Omega \rightarrow \Omega'$, θα ορίσουμε τη συνάρτηση $FoSen_X\,(\phi) : FoSen_X\,(\Omega) \rightarrow FoSen_X\,(\Omega')$. Εφόσον $(\phi_1, \phi_2) : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ είναι ένας μορφισμός υπογραφών, υπάρχει ένας μορφισμός $\psi : T_\Sigma\,(X) \rightarrow T_{\Sigma'}\,(X')$ όπου $X' = \phi_1 \circ X$, και ο οποίος μας δίνει τη συνάρτηση $\psi : TERM_X\,(\Omega) \rightarrow TERM_{X'}\,(\Omega')$. Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση $WFF_X\,(\phi) : WFF_X\,(\Omega) \rightarrow WFF_X\,(\Omega')$, μέσω της επίδρασής της στους γεννήτορες του $WFF_X\,(\Omega)$, που είναι οι ατομικές φόρμουλες

$$WFF_X\,(\phi)\,(\pi\,(t1, ..., tn)) = \phi_3\,(\pi)\,(\psi\,(t1)\,, ..., \psi\,(tn))$$

Η $FoSen_X\,(\phi)$ ορίζεται ως ο περιορισμός της $WFF_X\,(\phi)$ στο $FoSen_X\,(\Omega) \subseteq WFF_X\,(\Omega)$. Αυτό συμβαίνει διότι το $WFF_X\,(\phi)$ στέλνει κλειστές $\Omega-$φόρμουλες σε κλειστές $\Omega'-$φόρμουλες. Τέλος, ο $FoSen\,(\phi)$ ορίζεται ως η ένωση των συναρτήσεων $FoSen_X\,(\phi)$ πάνω στην ένωση των συνόλων $FoSen_X\,(\Omega)$.

Παραμένει να οριστεί η σχέση ικανοποίησης, που εδώ αντιστοιχεί στο συνήθη σημασιολογικό ορισμό της αλήθειας του Tarski. Αν το A είναι ένα πρωτοβάθμιο μοντέλο, ορίζουμε το σύνολο $Asg\,(A)$ όλων των δυνατών αναθέσεων τιμών από το A σε μεταβλητές από το X, δηλαδή $[X \rightarrow A]$ είναι το σύνολο όλων των $S-$indexed συναρτήσεων $f : X \rightarrow A$, με δείκτες από το σύνολο S.

<u>Ορισμός 16</u>

Δοθείσας μιας πρότασης P, το σύνολο $Asg_X\,(A, P)$ των αναθέσεων τιμών από το A για τις οποίες η P είναι αληθής ορίζεται επαγωγικά όπως ακολούθως:

1. Αν $P = \pi(t1, ..., tn)$ τότε $f \in Asgn_X(A, P)$ αν και μόνο αν $\left(f^{\#}(t1), ..., f^{\#}(tn)\right) \in \beta(\pi)$ όπου $f^{\#}(t)$ είναι η εκτίμηση του $\Sigma-$όρου t στη $\Sigma-$άλγεβρα του A με τις τιμές των μεταβλητών να δίνονται από την ανάθεση f με χρήση αρχικοποίησης:
2. $Asgn_X(A, true) = Asgn_X(A)$
3. $Asgn_X(A, \neg P) = Asgn_X(A) - Asgn_X(A, P)$
4. $Asgn_X(A, P\&Q) = Asgn_X(A, P) \cap Asgn_X(A, Q)$
5. $Asgn_X(A, (\forall x) P) = \{f | Asgn_X(A, f, x) \subseteq Asgn_X(A, P)\}$ όπου $Asgn_X(A, f, x)$ είναι το σύνολο όλων των αναθέσεων f' που συμφωνούν με την f εκτός, πιθανώς, από την τιμή της μεταβλητής $x \in X$

Ένα μοντέλο A ικανοποιεί μια πρόταση P με μεταβλητές από το X, συμβολικά $A \models P$ αν και μόνο αν $Asgn_X(A, P) = Asgn_X(A)$.

Η επαλήθευση της ισχύος της συνθήκης ικανοποίησης ακολουθεί ένα παρόμοιο επιχείρημα με αυτό στην περίπτωση της εξισωτικής λογικής. Έτσι λοιπόν ολοκληρώνεται η κατασκευή της τυποποιημένης μορφής της πρωτοβάθμιας λογικής πολλών τύπων, του institution που συμβολιζουμε με $\mathcal{FOL}$.

ΤΟ INSTITUTION ΤΩΝ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Απόδειξη

Στο δεύτερο μέρος περιγράψαμε τα σημασιολογικά δίκτυα και είδαμε ότι πρωτοεμφανίστηκαν σαν μια διαγραμματική μορφή γνωστικής αναπαράστασης. Στο γενικό πλαίσιο του νοηματικού τριγώνου, αντιμετωπίζονται ως συμβολικά συστήματα,που χρησιμοποιούνται για την αναφορά σε έννοιες που αντιστοιχούν σε αντικείμενα του πραγματικού κόσμου. Όμως τα σημασιολογικά δίκτυα μπορούν, στα πλαίσια της επιστήμης των υπολογιστών, να θεωρηθούν εξωτερικές αναπαραστάσεις που με τη μεσολάβηση του αφηρημένου τύπου δεδομένων που υποστηρίζεται από την εκάστοτε γλώσσα, συνδέονται με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις του υπολογιστή. Τα συμβολικά συστήματα, τόσο της κατηγορηματικής λογικής, όσο και των σημασιολογικών δικτύων, έχουν την ίδια σημασία, δηλαδή αντιστοιχούν στο ίδιο πεδίο εννοιών. Μπορεί το καθένα να απεικονίζεται με διαφορετικό τρόπο στο κοινό πεδίο εννοιών, το γεγονός όμως της εκφραστικής τους ισοδυναμίας υπονοεί μια παρόμοια διαμέρισή του από τις δύο αυτές απεικονίσεις. Η επέκταση του νοηματικού τριγώνου προς τα κάτω με την προσθήκη του επιπέδου των *αφηρημένων τύπων δεδομένων* (ADT), και τελικά της μηχανής, μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσπάθεια σύνδεσης του συμβόλου με το αντικείμενο αποφεύγοντας τη μεσολάβηση του γνωστικού πράκτορα, που είναι ο φορέας του πεδίου εννοιών. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται μια προσπάθεια αποφυγής της συνήθους ασάφειας της σχέσης συμβόλου-αντικειμένου, εφόσον μπορεί πλέον να τυποποιηθεί μέσω του επιπέδου

ADT. Βέβαια κάτι τέτοιο δε θα ήταν δυνατό έχοντας σαν αντικείμενο τον πραγματικό κόσμο , οπότε το τίμημα είναι η αντικατάστασή του από τη μηχανή, που αν και απέχει πολύ σε πολυπλοκότητα και ποικιλομορφία, τουλάχιστον δεν είναι μια πλήρης αφαίρεση. Πρόκειται για ένα πραγματικό αντικείμενο με πραγματική συμπεριφορά την οποία προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε κάνοντας χρήση των διαφόρων προγραμματιστικών γλωσσών.

Τα συμβολικά συστήματα της κατηγορηματικής λογικής και των σημασιολογικών δικτύων εκφράζουν την ίδια πληροφορία. Η διαφορά τους έγκειται ουσιαστικά στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζουν την πληροφορία αυτή οπτικά. Ακόμα και τα υπολογιστικά πλεονεκτήματα των σημασιολογικών δικτύων είναι αμφιλεγόμενα, όπως μαρτυρά η συγχρονη τάση χρήσης περιγραφικών λογικών. Εφόσον λοιπόν οι δομικές τους διαφορές είναι αμελητέες και κάθε σημασιολογικό δίκτυο μπορεί να επεκταθεί ώστε να έχει την εκφραστικότητα της πρωτοβάθμιας λογικής, τα σημασιολογικά δίκτυα θα πρέπει να μπορούν να τυποποιηθούν ώστε να σχηματίσουν ένα institution.

Όπως είδαμε στην εισαγωγή, δεν υπάρχει κοινώς αποδεκτός ορισμός για την έννοια του σημασιολογικού δικτύου. Μπορούμε όμως να την προσεγγίσουμε σε ικανοποιητικό βαθμό θεωρώντας τα βασικά στοιχεία που εμπεριέχονται σε όλους τους υπαρκτούς ορισμούς. Κάθε σημασιολογικό δίκτυο αποτελείται από ένα σύνολο εννοιών εκφρασμένων μέσω του συμβολικού συστήματος μιας φυσικής γλώσσας, και ένα σύνολο σχέσεων μεταξύ των εννοιών αυτών. Στη γραφική αναπαράσταση του δικτύου οι έννοιες είναι οι κόμβοι και οι σχέσεις μεταξύ τους τα τόξα που τους συνδέουν. Για να αποδείξουμε ότι τα σημασιολογικά δίκτυα σχηματίζουν ένα institution θα πρέπει να τυποποιηθεί κατάλληλα η δομή τους.

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της έννοιας του institution είναι ότι μας επιτρέπει, κατα την τυποποίηση ενός λογικού συστήματος, να θεωρήσουμε πολλά λεξιλόγια ταυτόχρονα. Αυτός είναι ο ρόλος της κατηγορίας υπογραφών· καθε μία ορίζει τα μη λογικά σύμβολα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή προτάσεων σε ένα τυπικό σύστημα. Στην περίπτωση του σημασιολογικού δικτύου η κατηγορία υπογραφών, ας την καλέσουμε **SemSig**, αποτελείται από ένα σύνολο S που περιέχει σύμβολα τύπων, και μια οικογένεια συνόλων Π από σύμβολα κατηγορημάτων ή σχέσεων με δείκτες από το σύνολο S^* . Τα σύμβολα τύπων αντιστοιχούν στους τύπους των εννοιών και η οικογένεια Π στα διαφορετικά σύνολα σχέσεων που ορίζονται μεταξύ των εννοιών.Ένας μορφισμός σημασιολογικών υπογραφών είναι ένα ζευγάρι $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ όπου $\phi_1 : S \to S'$ συνάρτηση, και $\phi_2 : \Pi \to \Pi'$ οικογένεια συναρτήσεων $(\phi_2)_u : \Pi_u \to \Pi'_{\phi_1^*(u)}$. Επομένως η **SemSig** έχει σαν αντικείμενα σημασιολογικές υπογραφές και σαν τόξα τους μεταξύ τους μορφισμούς.

Το επόμενο βήμα είναι ο ορισμός μιας κατηγορίας μοντέλων για κάθε υπογραφή. Παρατηρούμε ότι η **SemSig** είναι ουσιαστικά η **FoSig** των ορισμών 11 και 12, αν από αυτούς αφαιρέσουμε το (2) και θέσουμεϕ_2 στη θέση του ϕ_3. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση του ορισμού σημασιολογικών μοντέλων και των μεταξύ τους ομομορφισμών. Αφαιρούμε από τον ορισμό των πρωτοβάθμιων μοντέλων τις συναρτήσεις που αναθέτουν σε κάθε συναρτησιακό σύμβολο μία συνάρτηση , για τον απλούστατο λόγο ότι δεν στην περίπτωση των σημασιολογικών δικτύων δεν υπάρχουν σύμβολα συναρτήσεων. Ορίζονται μόνο η οικογλενεια $|A|$ μη κενών συνόλων $\langle A_s | s \in S\rangle$ - όπου το A_s καλείται *φορέας του τύπου* s - και μια οικογένεια συναρτήσεων $\beta = \{\beta_u : \Pi_u \rightarrow Pow\,(A_u)\}$ η οποία αναθέτει μια σχέση σε κάθε κατηγορηματικό σύμβολο. Ένας ομομορφισμός μεταξύ δυό μοντέλων A και A' ορίζεται ως μια οικογένεια συναρτήσεων $f = \{f_s | f_s : A_s \rightarrow A'_s, s \in S\}$, τέτοια ώστε για κάθε σχεσιακό σύμβολο $\pi \in \Pi_u$ με $u = s1...sn$ και$\alpha_i \in A_{s_i}$ για $i = 1, ..., n$ ισχύει η συνθήκη ομομορφισμου

$$\beta\,(\pi)\,(\alpha 1, ..., \alpha n) \Rightarrow \beta'\,(\pi)\,(f_{s_1}\,(\alpha 1)\,, ..., f_{s_n}\,(\alpha n))$$

Σύμφωνα με τους $Goguen$ και $Burstall$ [5] στον παραπάνω τύπο έχουμε συνεπαγωγή γιατί η ύπαρξη διπλής συνεπαγωγής θα επέβαλε μια πιο ισχυρή έννοια ομομορφισμού, που θα άφηνε εκτός πολλές απεικονίσεις που είναι απαραίτητες για την κατασκευή άλλων institutions, όπως αυτό της *λογικής των προτάσεων του Horn*. Η κατηγορία μοντέλων που προκύπτει καλείται **SemMod** και επεκτείνεται στον functor **SemMod** : **SemSig** $\rightarrow$ $\mathbf{Cat^{op}}$ με τον ακόλουθο τρόπο:

Δοθέντος ενός σημασιολογικού μορφισμού $\phi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$, όπου $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ σημασιολογικές υπογραφές, ορίζουμε τον functor

$$\mathbf{SemMod}\,(\phi) : \mathbf{SemMod}\,(\mathcal{Y}') \rightarrow \mathbf{SemMod}\,(\mathcal{Y})$$

που στέλνει το $A' \in |\mathbf{SemMod}\,(\mathcal{Y}')\,|$ στο $A = \phi A'$ που ορίζεται ως εξης

1. $A_s = A'_{s'}$ για κάθε $s \in S$ με $s' = \phi_1\,(s)$
2. $\beta_u\,(\pi) = \beta'_{u'}\,((\phi_2)_u\,(\pi))$ για $u \in S^*$ και $\pi \in \Pi_u$ με $u' = \phi_1^*\,(u)$

και στέλνει το $f' : A' \rightarrow B' \in \mathbf{SemMod}\,(\mathcal{Y}')$ στο $f = \phi f' : A \rightarrow B \in \mathbf{SemMod}\,(\mathcal{Y})$, όπου $A = \phi A'$ και $B = \phi B'$ οπιζόμενα από τις $f_s = f'_{s'}$ όπου $s' = \phi_1\,(s)$.
Και αυτός ο ορισμός ταυτίζεται με τον αντίστοιχο για την πρωτοβάθμια λογική, με τη διαφορά ότι δεν συμπεριλαμβάνει τα κομμάτια αυτά που αφορούν συναρτησιακά σύμβολα. Η κατάσταση παραμένει η ίδια και κατά τον ορισμό των προτάσεων πάνω σε μια σημασιολογική υπογραφή $\mathcal{Y}$. Χρησιμοποιώντας τους $\mathcal{Y}-$όρους, τις (καλώς ορισμένες) $\mathcal{Y}-$φόρμουλες και τις $\mathcal{Y}-$προτάσεις ορίζεται ο functor **SemSen** : **SemSig** $\rightarrow$ **Set** ο οποίος στέλνει κάθε υπογραφή $\mathcal{Y}$ στο σύνολο των $\mathcal{Y}-$προτάσεων που ορίζονται πάνω σε αυτήν.
Τέλος, μένει να οριστεί η σχέση ικανοποίησης και να επαληθευθεί η αντίστοιχη συνθήκη. Και εδώ έχουμε αντιστοιχία με την περίπτωση της πρωτοβάθμιας λογικής: ένα σημασιολογικό $\mathcal{Y}-$μοντέλο A ικανοποιεί μια $\mathcal{Y}-$πρόταση P με μεταβλητές από το X - $A \models P$ - αν και μόνο αν $Asgn_X\,(A, P) = Asgn_X\,(A)$.

Η βασική απαίτηση, που κωδικοποιείται στη συνθήκη ικανοποίησης, είναι η σχέση ικανοποίησης να είναι συνεπής με την αλλαγή συμβολισμού, δηλαδή όποτε μια υπογραφή αλλάζει μέσω κάποιου μορφισμού υπογραφών, η ικανοποίηση των προτάσεων της καινούργιας υπογραφής από τα αντίστοιχα μοντέλα αλλάζει ανάλογα. Μιας και η μέχρι τώρα τυποποίηση των σημασιολογικών δικτύων διαφέρει από αυτήν της πρωτοβάθμιας λογικής μόνο στο ότι δεν περιλαμβάνει συναρτησιακά σύμβολα (και άρα όλους τους ορισμούς που τα αφορούν), η ισχύς της συνθήκης είναι άμεση συνέπεια της ισχύς της για την περίπτωση της κατηγορηματικής λογικής. Μέσω της παραπάνω διαδικασίας κατασκευάζεται ένα institution που αποτελεί την τυποποιημένη μορφή των σημασιολογικών δικτύων.

Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της θεωρίας των institutions, τα διάφορα λογικά συστήματα όπως η εξισωτική λογική, η πρωτοβάθμια λογική, και η λογική των προτάσεων του *Horn* τυποποιούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η ταυτόχρονη θεώρηση πολλών λεξιλογίων (γι'αυτό αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς, θα πρέπει να λέμε ότι π.χ. η εξισωτική λογική πολλών τύπων είναι institution). Το ίδιο ισχύει και για τα υπολοιπα λογικά συστήματα. Στην περίπτωση των σημασιολογικών δικτύων αυτό που τυποποιείται είναι η βασική δομή - που είναι μια λογική δομη - των εννοιολογικών αυτών δικτύων γνωστικής αναπαράστασης, ενώ η κατηγορία των υπογραφών διαχωρίζει τους διάφορους τύπους τέτοιων δικτύων, καθορίζοντας τους τύπους εννοιών και τις σχέσεις που τους συνδέουν.

Το ενδιαφέρον στην περίπτωση των σημασιολογικών δικτύων είναι ότι τα μοντέλα μιας υπογραφής αποτελούνται από έννοιες και εννοιολογικές σχέσεις. Η μελέτη των δικτύων αυτών υπό το πρίσμα της θεωρίας των institutions επιτρέπει τη μελέτη της γενικής δομής τους χωρίς να λαμβάνονται υπόψιν οι σημασιολογικές διαφορές μεταξύ των διαφόρων τύπων τους (οριστικά, δηλωτικά, συνεπαγωγικά κτλ. σημασιολογικά δίκτυα), καθώς και οι "συντακτικές" τους διαφορές, δηλαδή οι διαφορετικοί τρόποι γραφικών τους απεικονίσεων.

Τα κοινά δομικά χαρακτηριστικά των διαφόρων λογικών συστημάτων που προκύπτουν από τη συγκριτική μελέτη των institutions που αυτά σχηματίζουν, εφαρμόζονται στην κατασκευή μεγαλύτερων γλωσσικών δομών από μικρότερες. Η επέκταση γίνεται με τον καθορισμό αυτών των χαρακτηριστικών, και έχει σαν συνέπεια την αποφυγή της δέσμευσης, σε αυτό το στάδιο, σε κάποιο συγκεκριμένο λογικό σύστημα. Μια τέτοια κατασκευή μπορεί να καθρεφτιστεί σε ένα σημασιολογικό δίκτυο - εφόσον τα χαρακτηριστικά που την καθορίζουν μεταφράζονται στα αντίστοιχα χαρακτηριστικά που καθορίζουν ένα τέτοιο δίκτυο - , και μάλιστα η μετάφραση μπορεί να παραχθεί μηχανικά. Είδαμε όμως ότι το ουσιαστικό πλεονέκτημα των σημασιολογικών δικτύων έναντι του λογικού συμβολισμού είναι ο τρόπος οπτικοποίησης της πληροφορίας που αυτά παρουσιάζουν , δηλαδή το γεγονός ότι αναπαρίστανται γραφικά.

Ας θυμηθούμε, σε αυτό το σημείο, ότι τα σημασιολογικά δίκτυα είναι επίσης εξωτερικές αναπαστάσεις υπολογιστή, κατάλληλες για μια σειρά υπολογιστικών μεθόδων. Είναι αδιαμφισβήτητο γεγονός ότι το ανθρώπινο μάτι μπορεί να ακολουθήσει αποδοτικά συνδέσεις σε ένα δικτυακό διάγραμμα. Κατά έναν παρόμοιο τρόπο, ο υπολογιστής μπορεί να υλοποιήσει εσωτερικά αποδοτικότερα τις δικτυακές αναπαραστάσεις των σημασιολογικών δικτύων. Το οπτικό πλεονέκτημα μετατρέπεται μερικώς σε υπολογιστικό πλεονέκτημα. Το να μπορούμε αλγοριθμικά να παράγουμε για κάθε προσδιορισμένη γλωσσική δομή ένα σημασιολογικό δίκτυο που να καθρεφτίζει τα χαρακτηριστικά της, επιτρέπει την αποδοτικότερη μελέτη της, εξαιτίας της ευκολίας με την οποία το σημασιολογικό δίκτυο υλοποιείται εσωτερικά από έναν υπολογιστή. Η καταλληλότητα του συμβολισμού αυτού για διάφορες υπολογιστικές μεθόδους, ή συλλογιστικές επί αυτής της εννοιολογικής οργάνωσης της γνώσης, ευνοεί τη μελέτη του παραχθέντως δικτύου, και άρα τη μελέτη της γλωσσικής δομής από την οποία προήλθε.

Αντιστοιχία Ελληνικών-Αγγλικών Όρων

Α
αναστοχασμός - reflection
αιτιολογικά δίκτυα - causal networks
αποδείκτης θεωρημάτων - theorem prover
αλλαγή βαρών - changing weights
αναδόμηση - restructuring
αφηρημένη άλγεβρα, καθολική άλγεβρα - universal algebra
αυτοματοποιημένο σύστημα συναγωγής - computerized inference system
αφηρημένος τύπος δεδομένων - abstract data type
Β
βαθμός - rank
Γ
γραμματική των εξαρτήσεων - dependency grammar
γράφος ροής δεδομένων - dataflow graph
γνωστική θεωρία - cognitive theory
γνωσιακή αναπαράσταση - cognitive representation
γλώσσα περιορισμού αντικειμένων - object constraint language
γνωστικός πράκτορας - cognitive agent
Δ
δίκτυο ορισμών - definitional network
δηλωτικό δίκτυο- assertional network
δίκτυο συνεπαγωγής - implicational network
δίκτυο μάθησης - learning network
διάγραμμα αναπαράστασης - representation diagram
δίκτυα πεποιθήσεων - belief networks
δυαδικός σύνδεσμος - Boolean connective
δήλωση ανάθεσης - assigning statement
διεπαφή - interface
διάγράμμα καταστάσεων - statechart
διάγραμμα οντοτήτων-συσχετίσεων - entity-relationship diagram
Ε
εκτελέσιμο δίκτυο - executable network
επαγωγή - induction
εκδοχή, τύπος, είδος - version
ένθεση - nest
εννοιολογικός γράφος εξάρτησης - conceptual dependency graph
επαναθεώρηση πεποιθήσεων - belief revision
έμπειρο σύστημα - expert system
επισυνημμένες διαδικασίες - attached procedures
ενσωματωμένο περιβάλλον ανάπτυξης - integrated development environment
εξάπλωση προς τα πίσω - back-propagation
ενοποιημένη γλώσσα μοντελοποίησης - unified modeling language
εννοιολογικό προσχέδιο - conceptual schema
εξακολουθητική γνωστική βάση δεδομένων - persistent cognitive database
ερμηνευτής - interpreter
ευρετικός - heuristic

εξισωτική λογική πολλών τύπων - many-sorted equational logic
επιλήσμων συναρτητής - forgetful functor
ελεύθερη άλγεβρα - free algebra, term algebra
Z
H
η νέα επιστήμη του Νου, γνωστιακή επιστήμη - cognitive science
Θ
I
ιεραρχία ένταξης - subsumption hierarchy
K
κληρονομικότητα - inheritance
καθολική λογική - universal logic
καλώς ορισμένη φόρμουλα - well formed formula
Λ
λογική των προτάσεων του *Horn* - *Horn* clause logic
M
μοτίβο - pattern
μηχανική μετάφραση - machine translation
μετασυλλογιστική - metareasoning
μεταφορά σκυτάλης - marker passing
μη-λογική μνήμη - rote memory
μεταγλωτιστής - compiler
μονοειδές - monoid
μονομελή προθεματικό τελεστή - unaru prefix operator
N
νόηση - cognition
Ξ
O
ουσία - substance
ομοιοαναφορά - coreference
ορθολογικότητα - rationality
Π
παραγωγή - deduction
περιγραφική λογική - description logic
πτωτική γραμματική - case grammar
προτασιακά σημασιολογικά δίκτυα - propositional semantic networks
πεποίθηση - belief
παραγωγικό σύστημα - deductive system
P
Σ
συλλογιστική, συλλογισμός - reasoning
συναγωγή, συμπερασμός - inference
συνεπαγωγή - implication
συνειρμός - association
σύστηματα διατήρησης της αλήθειας - true-maintenance system
σκυτάλη - token, marker

στρώμα - layer
συλλογιστική βασισμένη σε περιπτώσεις - case-based reasoning
συντακτικό αναλυτή - syntactic parser
σημασιολογία - semantics
σχέση ικανοποίησης - satisfaction relation
συμπαγής κατηγορία - concrete category
συνέπεια - consistency
συναρτητής - functor
Τ
τυπικές προδιαγραφές - formal specifications
τάξη - arity
τύπος - sort
Υ
υβριδικό δίκτυο - hybrid network
υπαρξιακός γράφος - existential graph
υπογραφή - signature
Φ
Χ
χρωματισμένα δίκτυα - colored Petri nets
Ψ
Ω

Το Αξίωμα Μετάφρασης του Barwise

Ο Lindstorm περιέγραψε τον όρο *abstract logics* ως "μια λίστα από γενικές ιδιότητες που οι οριζόμενες κλάσεις μοντέλων κάθε αφηρημένης λογικής πρέπει να έχουν". Στον ορισμό του δεν γίνεται καμία αναφορά στο συντακτικό της λογικής. Με αυτόν τον τρόπο ο Lindstorm πέτυχε μια ακραία γενικότητα. Ο Barwise, από την άλλη, έδινε μεγάλη έμφαση στο ρόλο του συντακτικού ακόμα και στην αφηρημένη θεωρία μοντέλων. Να πως αυτός αντιλαμβάνεται τον ορό *abstract logics:*

Έστω L ένα λεξιλόγιο και η έννοια της L-δομής όπως συνήθως. Μία *αλλαγή ονόματος* είναι μία *ενα-προς-ένα* και *επί* συνάρτηση από το L σε ένα άλλο λεξιλόγιο L' που στέλνει κατηγορηματικά σύμβολα n θέσεων σε κατηγορηματικά σύμβολα n θέσεων, συναρτησιακά σύμβολα n ορισμάτων σε συναρτησιακά σύμβολα n ορισμάτων και σύμβολα σταθερών σε σύμβολα σταθερών. Κάθε *αλλαγή ονόματος* σχετίζεται με μία φυσική πράξη πάνω σε δομές, η οποία στέλνει μία L-δομή A σε μια L-δομή B.

Μία *αφηρημένη λογική* γα ένα λεξιλόγιο L είναι ένα ζευγάρι $(L*, \models *)$, όπου το $L*$ είναι ένα σύνολο από αντικείμενα που καλούνται προτάσεις της γλώσσας με λεξιλόγιο L και η $\models *$ είναι μια σχέση μεταξύ L-δομών και προτάσεων από το $L*$. Η $\models *$ καλείται σχέση ικανοποίησης του L$*$ και υπακούει την ακόλουθη συνθήκη ισομορφισμού:

Αν L είναι το λεξιλόγιο και ϕ είναι μια $L*$-πρόταση τότε για κάθε L-δομή M ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $M \models *\phi$ και $M \simeq N$, τότε $N \models *\phi$.
   Ένα *system of logics* είναι μια πράξη $*$ που συσχετίζει κάθε αριθμήσιμο λεξιλόγιο L με μια αφηρημένη λογική για το L έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

2. Αν $K \subseteq L$, τότε $K* \subseteq L*$ και για κάθε $\phi \in K*$ και κάθε L-δομή M, $M, K \models *\phi$ αν και μόνο αν $M \models *\phi$.

3. Αν $L \to K$ είναι μια *αλλαγή ονόματος*, τότε για κάθε $L*$-πρόταση ϕ υπάρχει μία $K*$-πρόταση ϕ τέτοια ώστε $M \models *\phi$ αν και μόνο αν $M \models *\phi$.

Η συνθήκη (3) είναι το αξίωμα μετάφρασης του Barwise.

Bibliography

[1] R. A. Kowalski A. Deliyanni. Logic and semantic networks. 1979.

[2] John Bell. Basic model theory.

[3] Stella Bosniadou. *Cognitive Science: the new science of the mind*. Gutemberg, 2010.

[4] Rasvan Diaconescu. Three decades of institution theory.

[5] Rod Burstall Joseph A Goguen. *Institutions: Abstract Model Theory for Specification and Programming*. LFCS Report Series, University of Edinburgh, 1990.

[6] S.Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1971.

[7] David Marker. Introduction to model theory. 2000.

[8] Keith Stenning Michiel van Lambalgen. *Human Reasoning and Cognitive Science*. MIT Press, 2008.

[9] Benjamin C. Pierce. *Basic Category Theory for Computer Scientists*. The MIT Press, 1991.

[10] Taje I. Ramsamujh. Equational logic and abstract algebra.

[11] H.J. Levesque R.J. Brachman. *Knowledge Representation and Reasoning*. Elsevier, 2004.

[12] John Barnden Roger Hartley. Semantic networks: Visualizations of knowledge.

[13] J. F. Sowa. *Semantic Networks in Encyclopedia od Artificial Intelligence, S.C. Shapiro Edition*. Wiley and Sons, 1987.

[14] Alfred Tarski. The semantic conception of truth: and the foundations of semantics. 1944.