

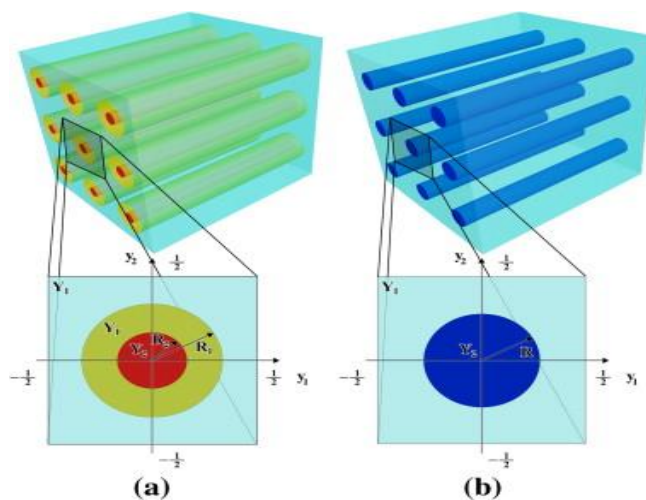
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΤΜΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΣΤΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ ΘΕΟΤΟΚΟΓΛΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΤΟΜΕΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ Ε.Μ.Π.

ΣΥΓΓΡΑΦΗ:

ΜΑΚΕΔΟΝΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2020

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους εκείνους που με βοήθησαν και με στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, συμβάλλοντας έτσι στην επιτυχή ολοκλήρωσή της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ευστάθιο Θεοτόκογλου Καθηγητή ΕΜΠ για την αμέριστη συμβολή του, τις επιστημονικές του συμβουλές και την συνεχή υποστήριξη του στην συντέλεση της εν λόγω εργασίας.

Επιπλέον, ευχαριστώ τον συν-επιβλέποντα καθηγητή κ. Αιμίλιο Σιδερίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή ΕΜΠ, για την αμέριστη συμπαράστασή του καθώς για όλες τις γνώσεις που έλαβα κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τους γονείς της συζύγου μου, την αδερφή μου, τον θείο μου καθώς και την σύζυγό μου για την στήριξη και την κατανόηση που έδειξαν και συνεχίζουν να δείχνουν στις προσπάθειες μου, καθώς και τα παιδιά μου για τις ώρες που χρειάστηκε να μην είμαι κοντά τους.

Με τιμή,
Μακεδόνας Ιωάννης
Αθήνα, Ιανουάριος 2020

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	7
ABSTRACT	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ	9
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	9
1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	10
1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	15
1.4 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	17
1.5 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ-ΜΗΤΡΕΣ	18
1.5.1 ΠΟΛΥΜΕΡΗ.....	18
1.5.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ.....	18
1.5.1.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ	19
1.5.2 ΕΓΚΛΥΣΜΑΤΑ	20
1.5.3 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ	21
1.5.4 ΜΗΤΡΕΣ.....	23
1.5.4.1 ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ.....	24
1.5.4.2 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ.....	26
1.5.4.3 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ.....	26
1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ	27
1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ-ΟΡΙΣΜΟΣ	27
1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ	28
1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ	28
1.6.4 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ	29
1.7 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ	30
1.7.1 ΟΡΙΣΜΟΣ.....	30
1.7.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	31
1.7.3 ΕΙΔΗ ΙΝΩΝ	32
1.7.3.1 ΙΝΕΣ ΓΥΑΛΙΟΥ	32
1.7.3.2 ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ	35
1.7.3.3 ΙΝΕΣ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ.....	38
1.7.3.4 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΙΝΕΣ	40
1.7.3.5 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΙΝΕΣ.....	41
1.7.3.6 ΤΡΙΧΙΤΕΣ (WHISKERS)	42
1.7.3.7 ΙΝΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ.....	43
1.7.3.8 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ ΙΝΩΝ	44
1.8 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ	44
1.9 ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ	47

1.10 ΙΝΩΔΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ-ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ...	48
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ	52
2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	52
2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ	52
2.1.2 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ, ΣΤΕΡΡΟΤΗΤΑ.....	57
2.1.3 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ	58
2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ	59
2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΠΤΩΣΗΣ T_g	59
2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ	60
2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ	61
2.2.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ	64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ.....	69
3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΕΤΡΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	69
3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΝΩΝ	69
3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ	73
3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	73
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ	79
4.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ .	79
4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ	81
4.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	89
4.3 ΑΝΤΟΧΗ ΙΝΩΔΟΥΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ.....	100
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	103
5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	103
5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L	104
5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}	107
5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{TT}	108
5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T	110
5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}	112
5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ E_θ , G_θ , ν_θ	114
5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	115
5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L	115
5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}	116

5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T	117
5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}	118
5.9 ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ -ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	120
5.9.1 ΠΙΝΑΚΕΣ.....	120
5.9.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ	126
5.10 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	131
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ-ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ ΤΟΥ “HASHIN”	135
6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	135
6.2 ΣΥΝΘΕΤΟ (ΜΙΓΑΔΙΚΟ) ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	137
6.3 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ.....	139
6.4 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ.....	139
6.5 ΣΥΝΘΕΤΟ (ΜΙΓΑΔΙΚΟ) ΜΕΤΡΟ ΕΝΔΟΣΕΩΣ	141
6.6 ΣΥΝΘΕΤΟΣ (ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ) ΛΟΓΟΣ POISSON	141
6.7 ΣΥΝΘΕΤΟ (ΜΙΓΑΔΙΚΟ) ΜΕΤΡΟ ΔΙΟΓΚΩΣΗΣ.....	141
6.8 ΣΥΝΘΕΤΟ (ΜΙΓΑΔΙΚΟ) ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ.....	142
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ	143
7.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΤΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΣΤΑΤΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ	143
7.2.1 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.....	143
7.2.2 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ.....	145
7.3.1 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON.....	146
7.3.2 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ	148
7.3.3 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΤΩΝ WHITNEY-RILEY	149
7.4.1 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON	150
7.4.2 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ	151
7.5.1 ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	152
7.5.2 ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ	158
7.6.1 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ.....	162
7.6.2 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ	164
7.7 ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ	167
7.7.1 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ	167
7.7.2 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ	169
7.7.3 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ.....	170
7.7.4 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ	172
7.7.5 ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ.....	173

7.7.6 ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ	176
7.8 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ	178
7.8.1 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΓΙΑ ($U_f=0.4, f=100\text{Hz}$)	180
7.8.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΓΙΑ ($U_f=0.4, f=800\text{Hz}$)	194
7.8.3 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΓΙΑ ($U_f=0.65, f=110\text{Hz}$).....	197
7.8.4 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ	212
7.8.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	219
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ANSYS.....	220
8.1 ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ-ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ- ΦΟΡΤΙΣΗ	220
8.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	224
8.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	226
8.3.1 ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΕ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ U_f	226
8.3.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	229
8.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L	231
8.3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}	240
8.3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{TT}	245
8.3.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T	246
8.4 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ-ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ - ΦΟΡΤΙΣΗ.....	250
8.4.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΔΙΑΜΗΚΗ ΛΟΓΟΥ POISSON ΓΙΑ $U_f=40\%$ - $f=100\text{Hz}$ & $U_f=65$ - $f=110\text{Hz}$	252
8.4.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΥ POISSON ΓΙΑ $U_f=40\%$ - $f=100\text{Hz}$ & $U_f=65\%$ - $f=110\text{Hz}$	260
8.5 ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.....	263
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	265

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία χρησιμοποιώντας την θεωρία ελαστικότητας, αναπτύχθηκαν θεωρητικές εκφράσεις για τον υπολογισμό των στατικών και δυναμικών ελαστικών σταθερών ενός ινώδους σύνθετου υλικού μονής διευθύνσεως. Επίσης για την πρόβλεψη αυτών των σταθερών, αναπτύχθηκαν με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τα αντίστοιχα υπολογιστικά μοντέλα (μέσω του εμπορικού προγράμματος ANSYS 19).

Για την ανάπτυξη του μοντέλου ενστερνιστήκαμε την θεώρηση της ενδιάμεσου φάσεως ανάμεσα στις ίνες και τη μήτρα. Χρησιμοποιήσαμε ένα κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο όπου το σύνθετο υλικό αποτελείται από επτά φάσεις. Η αλληλουχία των φάσεων του μοντέλου μας ήταν ίνα-ενδιάμεση φάση-μήτρα-ενδιάμεση φάση-ίνα-ενδιάμεση φάση-μήτρα. Η ενδιάμεση φάση είναι το τμήμα της πολυμερικής μήτρας που γειτνιάζει με την επιφάνεια της ίνας. Θεωρήσαμε ότι η ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής, με συνεχώς μεταβαλλόμενες μηχανικές ιδιότητες κατά την ακτινική κατεύθυνση του μοντέλου.

Για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών του σύνθετου υλικού θεωρήσαμε ότι οι μηχανικές ιδιότητες της ενδιάμεσου φάσης ακολουθούν τον νόμο της παραβολικής μεταβολής.

Αρχικά υπολογίσαμε τις στατικές ελαστικές σταθερές για διαφορετικές περιεκτικότητες σε έγκλεισμα και στην συνέχεια συγκρίναμε τα αποτελέσματα αυτά με εκείνα άλλων ερευνητών καθώς και με τα υφιστάμενα πειραματικά δεδομένα.

Κατόπιν χρησιμοποιώντας την αρχή της αντιστοιχίας του Hashin, μελετήσαμε την ιξωδοελαστική συμπεριφορά του μοντέλου για συγκεκριμένες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα, προσδιορίζοντας στις δυναμικές ελαστικές σταθερές, ακόμα και σε διαφορετικές γωνίες φόρτισης σε σχέση με τις ίνες. Τα αποτελέσματα αυτά τα συγκρίναμε με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα.

Τέλος τα αποτελέσματα που εξήχθησαν με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες τιμές των θεωρητικών μοντέλων όπως επίσης και με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα που προέκυψαν, τόσο από τα θεωρητικά όσο και τα υπολογιστικά μοντέλα, μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικά αφού προσεγγίζουν με καλή ακρίβεια τα πειραματικά δεδομένα.

ABSTRACT

In this postgraduate thesis using the theory of elasticity, theoretical expressions have been developed to calculate the static and dynamic elastic constants of a one-way fiber-reinforced composite material. Also for predicting these constants, the corresponding computational models were developed using the finite element analysis method (via the ANSYS 19 program).

For the development of the model we have adopted the theory of the intermediate phase (interphase) between the fibers and the matrix. We used a cylindrical seven-phase model where the composite material consists of seven phases. The sequence of the phases of our model was fiber-interphase-matrix-interphase-phase-fiber-interphase-matrix. The interphase is the portion of the polymeric matrix adjacent to the fiber surface. We considered the interphase to be heterogeneous with constantly changing mechanical properties in the radial direction of the model.

For the determination of the elastic constants of the composite material, we considered that the mechanical properties of the interphase follow the law of parabolic change.

We first calculated the static elastic constants for different fiber content and then compared these results with those of other researchers as well as with existing experimental data.

Then using the Hashin principle, we studied the viscoelastic behavior of the model for specific fiber contents and determining the dynamic elastic constants, even at different loading angles relative to the fibers. We compared these results with the available experimental data.

Finally, the results obtained by the finite element method were compared with the corresponding values of the theoretical models as well as with the corresponding experimental data.

Summarizing, results of both the theoretical and the computational models can be considered satisfactory as they approximate the experimental data with good accuracy.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

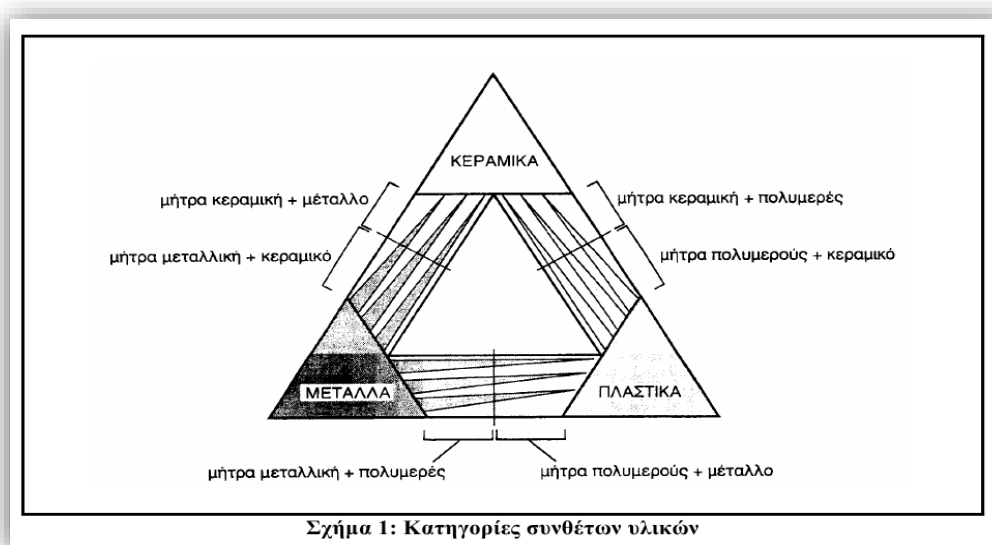
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Για ένα σύστημα ο όρος “σύνθετο υλικό” σημαίνει ότι αυτό αποτελείται από δύο ή περισσότερα διακριτά μέρη. Από γενική άποψη, λοιπόν, ένα υλικό αποτελούμενο από δύο ή περισσότερα διαφορετικά υλικά ή φάσεις, μπορεί να χαρακτηριστεί ως σύνθετο υλικό (composite material).

Τις περισσότερες φορές το ένα εκ' των δύο διακριτών υλικών «παίζει» το ρόλο της ενίσχυσης και καλείται **έγκλεισμα**, προσδίδοντας στο σύνθετο υλικό βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες, ενώ το άλλο υλικό «παίζει» συνδετικό ρόλο και καλείται **μήτρα**. Το τελευταίο είναι συνήθως χαμηλής πυκνότητας. Η συμμετοχή της μήτρας στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων του εγκλείσματος.

Για να καταταχθεί ένα υλικό στην κατηγορία των σύνθετων, θα ακολουθείται ο εξής κανόνας: Το υλικό πρέπει να προκύπτει ως συνδυασμός συστατικών μερών, στα οποία οι ιδιότητες του ενός από τα μέρη αυτά να είναι σημαντικά μεγαλύτερες από του άλλου (τουλάχιστον 5πλάσιες) και η κατ' όγκο περιεκτικότητα του ενός είναι μεγαλύτερη από 10%.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ο συνδυασμός ανά δύο των βασικών οικογενειών υλικών (μεταλλικά, πολυμερικά και κεραμικά υλικά) και οι τύποι συνθέτων που προκύπτουν .



Εικόνα 1.1 Κατηγορίες σύνθετων υλικών

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Από αρχαιοτάτων χρόνων διαφάνηκε η χρήση και η εξέλιξη από τον άνθρωπο των σύνθετων υλικών. Στη Βίβλο αναγράφεται ότι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα πλινθότουβλα. Οι Αιγύπτιοι κατάλαβαν ότι τα στρώματα ξύλου έχουν τη δυνατότητα να συνδυαστούν καταλλήλως, ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις καθώς και να είναι ανθεκτικά στη διόγκωση και στη στρέβλωση που προκαλούνται από την υγρασία. Έτσι δημιούργησαν ένα αρχέγονο είδος «κόντρα πλακέ». Επίσης, στην Αίγυπτο και στη Μεσοποταμία εμφανίστηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου με προσθήκη ασφάλτου.

Οι Ασσύριοι κατασκεύασαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλτο. Το Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων. Στη Μεσοποταμία (1000 π.Χ.) εφαρμόστηκε η τεχνική του βερνικόματος των τούβλων και των πλακιδίων με σκοπό τον περιορισμό της επιφανειακής φθοράς, ενώ κατά τους Ρωμαϊκούς χρόνους η οδοποιία στηρίχθηκε στην ενίσχυση του οδοστρώματος με τρίμματα κεραμιδιών.

Η χρήση της σιδερόβεργας για προεντεταμένο σκυρόδεμα, που χρησιμοποιείται στις οικοδομές της σύγχρονης εποχής, δεν είναι παρά η μετεξέλιξη της τεχνικής της ανάμιξης γύψου με ζωικό τρίχωμα, η οποία ήταν μια πρακτική μέθοδος ενίσχυσης εύθραυστων υλικών κατασκευής στους αναπτυσσόμενους πολιτισμούς.

Το πρώτο συνθετικό υλικό βασισμένο σε μήτρα πλαστικού εμφανίστηκε τη δεκαετία του 1920 και επρόκειτο για μίγμα ινιδίων ξύλου με φαινολική φορμαλδεΐδη, γνωστό αργότερα ως βακελίτης προς τιμήν του Βέλγου επιστήμονα Leo Baekeland.

Η ανάπτυξη των σύνθετων υλικών με ενίσχυση ινών κατά την διάρκεια των τελευταίων 30 ετών υπήρξε ραγδαία ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης των υψηλής αντοχής ινών γυαλιού και των υψηλής δυσκαμψίας ινών βορίου (1960). Επίσης συνέβαλε η έντονη τάση της αεροδιαστημικής βιομηχανίας για μεγαλύτερη απόδοση με παράλληλη μείωση βάρους αεροσκαφών και διαστημοπλοίων.

Το 1964 διατέθηκαν στην αγορά, αρχικά σε μικρές ποσότητες, οι ίνες άνθρακα (carbon fibers), οι οποίες τελευταία αποτελούν τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες ενισχύσεις στις αεροδιαστημικές κατασκευαστικές εφαρμογές.

Το 1971 διατέθηκαν στο εμπόριο οι ίνες αραμιδίου (Kevlar), οι οποίες τώρα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα ελαστικά αυτοκινήτων, καθώς και σε αρκετές αεροδιαστημικές και ναυπηγικές κατασκευές.

Η ειδική αντοχή (λόγος αντοχής προς πυκνότητα) και η ειδική δυσκαμψία (λόγος δυσκαμψίας προς πυκνότητα) των ενισχυτικών ινών βαίνουν συνεχώς αυξανόμενες τα τελευταία 30 χρόνια, π.χ. η ειδική αντοχή και η ειδική δυσκαμψία των ινών γυαλιού, άνθρακα, αραμιδίου και βορίου έχουν φτάσει στο 10-14 πλάσιο των αντίστοιχων τιμών του αλουμινίου (ελαφρό μέταλλο) [1α],[2α].

Τα σύνθετα υλικά καλύπτουν ένα μεγάλο μέρος στις κατασκευές που ενστερνίζονται νέες τεχνολογίες αιχμής και έχουν μεταβάλει σημαντικά τις ακολουθούμενες διαδικασίες σχεδίασης, παραγωγής, ελέγχου και συντήρησης.

Η μεγάλη ποικιλία ινών και ρητινών, καθώς και οι διάφορες μέθοδοι κατασκευής παρέχουν στο σχεδιαστή τη δυνατότητα να επιλέξει το καταλληλότερο σύστημα υλικών που καλύπτει τις απαιτήσεις του και που έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και ιδιότητες. Πολλές φορές παρατηρείται ότι τα χαρακτηριστικά αυτά μπορεί να είναι μοναδικά.

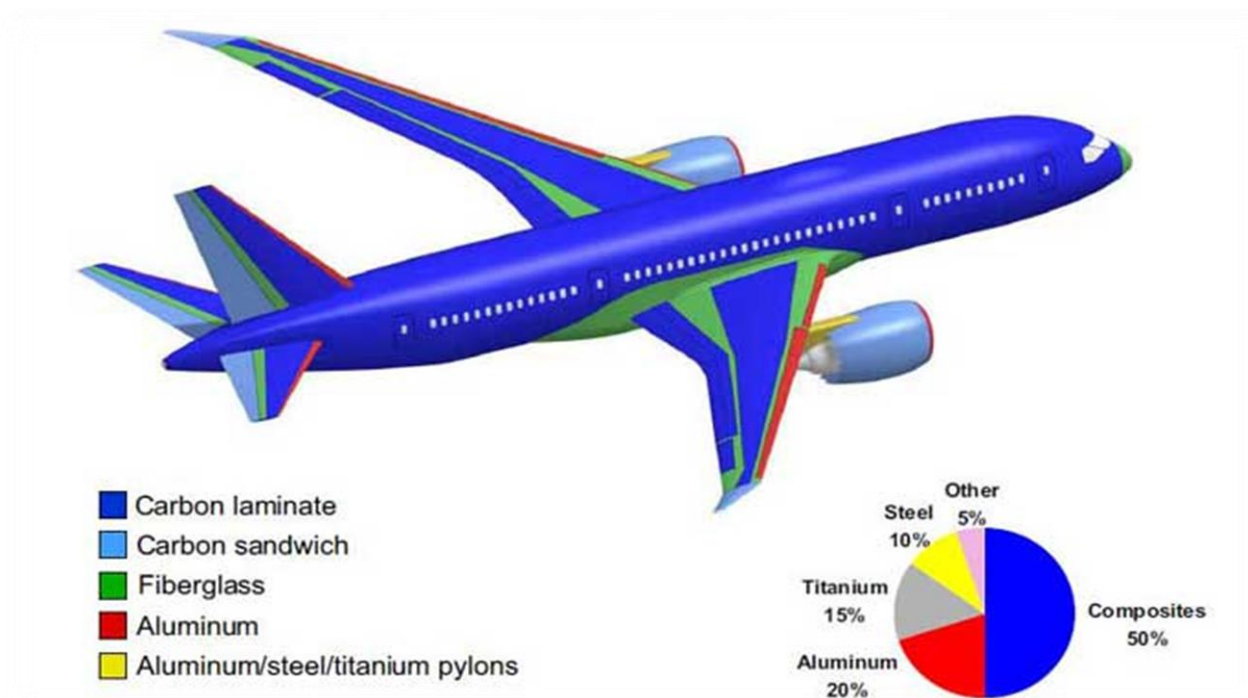
Το μικρό βάρος, η υψηλή αντοχή, η εξαιρετική αντοχή σε διάβρωση, η πολύ καλή συμπεριφορά σε κόπωση, σε κρούση και στη διάδοση ρωγμών, οι σχετικά εύκολες διαδικασίες παραγωγής και το μικρό κόστος συντήρησης είναι μερικοί από τους παράγοντες εκείνους που έχουν οδηγήσει τα σύνθετα υλικά στην πρώτη θέση μεταξύ των κατασκευαστικών υλικών για μεγάλο πλήθος εφαρμογών.

Μερικά μειονεκτήματα των συνθέτων υλικών, όπως τα υψηλά επίπεδα ερπυσμού, η μικρή αντίσταση σε μηχανική φθορά, η ιδιαίτερη και πολλές φορές ευαίσθητη συμπεριφορά σε δυσμενείς συνθήκες περιβάλλοντος (θαλάσσιο περιβάλλον, υψηλές θερμοκρασίες, χημικό περιβάλλον, κλπ) καθώς και το υψηλό αρχικό τους κόστος, σταδιακά αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά μέσω της συνεχούς τεχνολογικής ανάπτυξης στην παραγωγή νέων και καλύτερων ινών, ρητινών και εξέλιξης των μεθόδων παραγωγής.

Τα σύνθετα υλικά, τα πλαστικά και τα κεραμικά έχουν επικρατήσει σε καθημερινές εφαρμογές από τη δεκαετία του 80 και μετά. Μερικές από τις εφαρμογές των σύνθετων υλικών περιγράφονται στις παρακάτω εικόνες [1α],[2α].



Εικόνα 1.2 Ίνες Γραφίτη



Εικόνα 1.3 Boeing 787



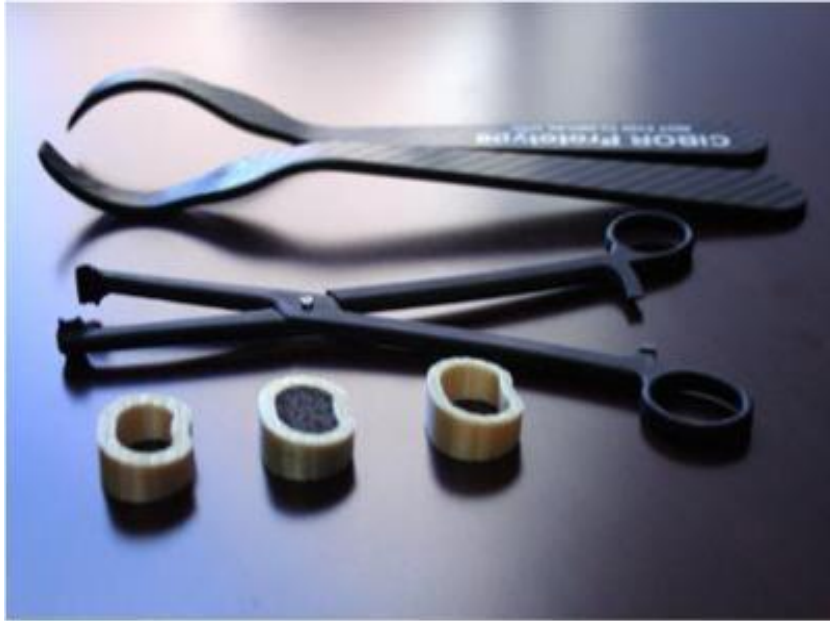
Εικόνα 1.4 Πολυεστερικό σκάφος



Εικόνα 1.5 Ρακέτα του τένις από γραφίτη



Εικόνα 1.6 Αλεξίσφαιρα γιλέκα



Εικόνα 1.7 Ιατρικά Εργαλεία

Τα σύγχρονα αεροσκάφη κάνουν εκτεταμένη χρήση των σύνθετων υλικών. Παραδείγματα είναι το αεροσκάφος Rafale της Dassault-Brequet, το Lavi της Ισραηλινής αεροπορικής βιομηχανίας, το JAS-39 Gripen της Σουηδικής Saab-Scania και το μαχητικό αεροσκάφος (European Fighter Aircraft) της σύμπραξης μεταξύ Βρετανίας, Γερμανίας, Ιταλίας και Ισπανίας.



Εικόνα 1.8 European Fighter Aircraft

Εκτός της αεροναυπηγικής βιομηχανίας, τα υψηλής τεχνολογίας σύνθετα υλικά βρίσκουν εφαρμογές και σε άλλους τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας με στόχο την παραγωγή προϊόντων υψηλών επιδόσεων και προδιαγραφών. Ιστιοπλοϊκά σκάφη, αγωνιστικά αυτοκίνητα, ποδήλατα, αθλητικά είδη (ρακέτες τένις, μαστούνια baseball κλπ.) και γενικότερα εξαρτήματα και συστήματα όπου το βάρος, η ακαμψία και η αντοχή παίζουν σημαντικό ρόλο στη λειτουργικότητα τους, είναι κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά.



Εικόνα 1.9 Ποδήλατο Υψηλών Επιδόσεων

1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια ραγδαία αύξηση στο ρυθμό αντικατάστασης παραδοσιακών υλικών από σύνθετα, σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές και κατασκευές. Αυτή η τάση αντικατάστασης μόνο τυχαία δε θα μπορούσε να θεωρηθεί, μιας και τα σύνθετα υλικά πλεονεκτούν έναντι των παραδοσιακών υλικών σε μια σειρά από παραμέτρους και ιδιότητες και κυρίως στο γεγονός ότι διαθέτουν συνήθως τις βέλτιστες ιδιότητες των υλικών που τα αποτελούν, αλλά επιπλέον ιδιότητες που τα αρχικά υλικά δεν διαθέτουν.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών έναντι των παραδοσιακών, είναι οι άριστες μηχανικές ιδιότητες με γνώμονα την κατασκευή που προορίζονται, που είναι αποτέλεσμα της από κοινού συνεισφοράς ινών και μήτρας στη βελτίωση της συνολικής μηχανικής συμπεριφοράς του σύνθετου.

Καταλυτικό ρόλο σε αυτή τη πτυχή των συνθέτων, έπαιξε η δυνατότητα σχεδιασμού και κατασκευής ενός υλικού με επιθυμητές ιδιότητες, με γνώμονα τις ανάγκες της εκάστοτε εφαρμογής για την οποία προορίζεται. Κατά τον σχεδιασμό ενός σύνθετου υλικού υπάρχει μια σειρά παραμέτρων, που εάν ληφθούν υπόψη, μπορούν να συμβάλλουν ουσιαστικά στις τέλειες ιδιότητες, αλλά και στη συμπεριφορά του σύνθετου. Η συμβατότητα για παράδειγμα, των αρχικών υλικών που θα επιλεγθούν να απαρτίσουν ένα σύνθετο είναι μείζονος σημασίας, όπως επίσης και ο τρόπος κατασκευής του.

Ο σημαντικότερος λόγος που επιλέγονται τα σύνθετα υλικά σε διάφορες εφαρμογές, είναι οι «ειδικές ιδιότητες» (specific properties) που διαθέτουν, έναντι άλλων υλικών. Με τον όρο ειδική ιδιότητα, αναφερόμαστε στο λόγο μιας ιδιότητας του υλικού, προς την πυκνότητα του. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της ειδικής ιδιότητας, τόσο ελαφρύτερο είναι το υλικό, διαθέτοντας ταυτόχρονα υψηλότερη τιμή της συγκεκριμένης ιδιότητας. Αυτή η παράμετρος είναι ζωτικής σημασίας για τη χρήση των συνθέτων σαν δομικά στοιχεία, σε εφαρμογές όπου η ελάττωση του βάρους έχει αντίκτυπο στην αποδοτικότερη λειτουργία τους, όπως επίσης και στη μείωση του κόστους. Αντικαθιστώντας μεταλλικά υλικά με σύνθετα σε κατασκευές, όπως οι άτρακτοι των αεροπλάνων, οι μειώσεις του βάρους μπορούν να φτάσουν αλλά και να υπερβούν ορισμένες φορές το 50%.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των σύνθετων υλικών είναι τα μεγάλα φορτία που εξακολουθούν να αναλαμβάνουν, ακόμα και μετά από πιθανή αστοχία τους. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε σε στατικές δοκιμές σε ινώδη σύνθετα υλικά και οφείλεται στο γεγονός ότι ακόμα και μετά την αστοχία του σύνθετου, παρόλο που οι ίνες θραύονται, η τάση μεταβιβάζεται σε πολλαπλές κατευθύνσεις μέσα στη μάζα του υλικού και κυρίως σε άλλες ίνες οι οποίες δεν έχουν ακόμη αστοχήσει. Παρατηρήθηκε επίσης ότι τα ινώδη σύνθετα παρουσιάζουν μικρή ευαισθησία στην ύπαρξη εγχοπών, ενώ η διάδοση των ρωγμών είναι περιορισμένη. Κατασκευές από τέτοια σύνθετα υλικά, επέδειξαν μεγαλύτερη διάρκεια ζωής και αυξημένη αντοχή σε κόπωση, συγκριτικά με αυτή αντίστοιχων μεταλλικών κατασκευών.

Κάποια άλλα πλεονεκτήματα των συνθέτων είναι η καταπληκτική αντίσταση τους στην ηλεκτροχημική διάβρωση, φαινόμενο ασυνήθιστο στα μεταλλικά υλικά. Η απόσβεση ταλαντώσεων που παρουσιάζουν κάποιοι τύποι σύνθετων (sandwich), μέσω της μεγάλης απορρόφησης ενέργειας είναι ένα χαρακτηριστικό τους γνώρισμα, όπως επίσης και η υψηλή αντοχή που επιδεικνύουν τα ινώδη σύνθετα σε κρουστικά φορτία υψηλής ενέργειας, με αποτέλεσμα τη διατήρηση της σταθερότητας των κατασκευών στις οποίες βρίσκουν εφαρμογή.

Η υψηλή αντοχή των ινώδων σύνθετων υλικών σε κρουστικά φορτία υψηλής ενέργειας έχει σαν αποτέλεσμα την περιορισμένη καταστροφή της κατασκευής και την διατήρηση του περιγράμματος στις περιοχές γύρω από την καταστροφή. Η διάτρηση που προκύπτει από την βαλλιστική κρούση περιορίζεται σε μία περιοχή του υλικού που είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή του βλήματος. Η συγκέντρωση των τάσεων γύρω από την περιοχή της καταστροφής στα μέταλλα είναι εξαιρετικά υψηλή ενώ αντίθετα στα ινώδη υλικά είναι σχετικά μικρή και στην περιοχή της διάτρησης δεν εμφανίζονται φαινόμενα ρωγμών [1α],[2α].

1.4 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης, τα σύνθετα κατατάσσονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

α. Ινώδη Σύνθετα (Fibrous Composites): Με ενίσχυση ινών εμποτισμένων σε υλικό μήτρας.

β. Κοκκώδη Σύνθετα (Particulate Composites): Με ενίσχυση σωματιδίων διασκορπισμένων στο υλικό μήτρας.

γ. Στρωματικά Σύνθετα ή Πολύστρωτα (Πολυστρώματα) (Laminated Composites): Με επάλληλες στρώσεις υλικών.

Τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται περαιτέρω ανάλογα με τον προσανατολισμό και τη διάταξη των ινών μέσα στη μήτρα. Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται σε [1α],[2α]:

α. Μονοδιευθυντικά σύνθετα: Οι ίνες έχουν όλες την ίδια διεύθυνση.

β. Πολυδιευθυντικά σύνθετα: Οι ίνες έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.

Η ιδιότητα αυτή οδηγεί άμεσα σε ταξινόμηση των πολυδιευθυντικών σύνθετων στις ακόλουθες υποομάδες:

α. Σύνθετα με ίνες τυχαίας διεύθυνσης.

β. Σύνθετα με ίνες σε πλέξη ύφανσης

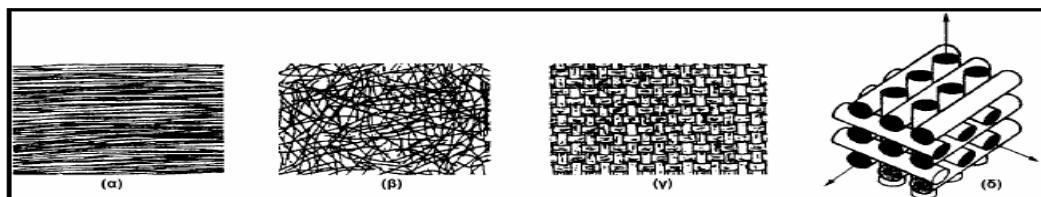
γ. Σύνθετα με ίνες σε τρις-ορθογώνια ύφανση.

Μία επιπλέον διάκριση των ινωδών σύνθετων στηρίζεται στο λόγο μήκους προς διάμετρο (l/d) των ινών, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως εξής:

α. Συνεχείς ή μεγάλου μήκους ίνες (continuous fibers), όταν είναι $l/d > 100$.

β. Ασυνεχείς ή βραχείες (κοντές) ίνες (discontinuous fibers), όταν είναι $l/d < 100$.

γ. Νηματίδια ή τριχίτες (whiskers), όταν $d < 1\mu\text{m}$ και $l = 100\mu\text{m}$ (πρόκειται για λεπτούς μονοκρυστάλλους κεραμικού υλικού).



Εικόνα 1.9 α) Ίνες μίας κατεύθυνσης β) Ίνες τυχαίας κατεύθυνσης
γ) Ίνες με πλέξη ύφανσης δ) Ίνες τρις-ορθογώνιας πλέξης

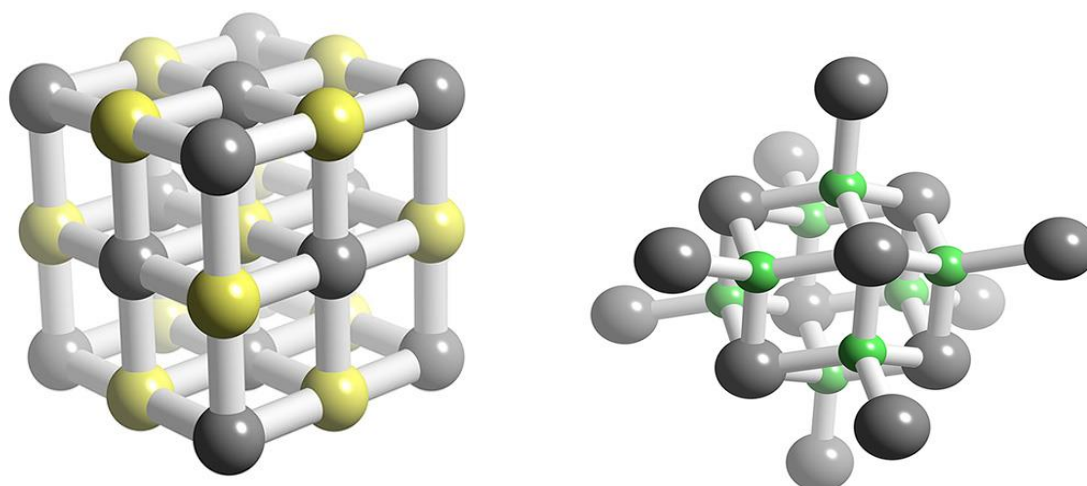
1.5 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ-ΜΗΤΡΕΣ

Όπως ήδη αναφέραμε τα σύνθετα υλικά αποτελούνται από το έγκλεισμα (filler) και την μήτρα (matrix) που θα μελετήσουμε αναλυτικά παρακάτω. Πρωτίστως είναι χρήσιμο να γίνει μια συνοπτική περιγραφή των πολυμερών ενώσεων από τις οποίες μπορεί να έχει δημιουργηθεί κάποιο από τα συστατικά του σύνθετου υλικού.

1.5.1 ΠΟΛΥΜΕΡΗ

1.5.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Πολυμερή ονομάζονται οι χημικές ενώσεις με μεγάλα μόρια, τα «μακρομόρια», που σχηματίζονται από τη σύνδεση πολλών μικρών μορίων. Τα πολυμερή προκύπτουν από την χημική αντίδραση των μονομερών που ονομάζεται πολυμερισμός [1α],[2α].

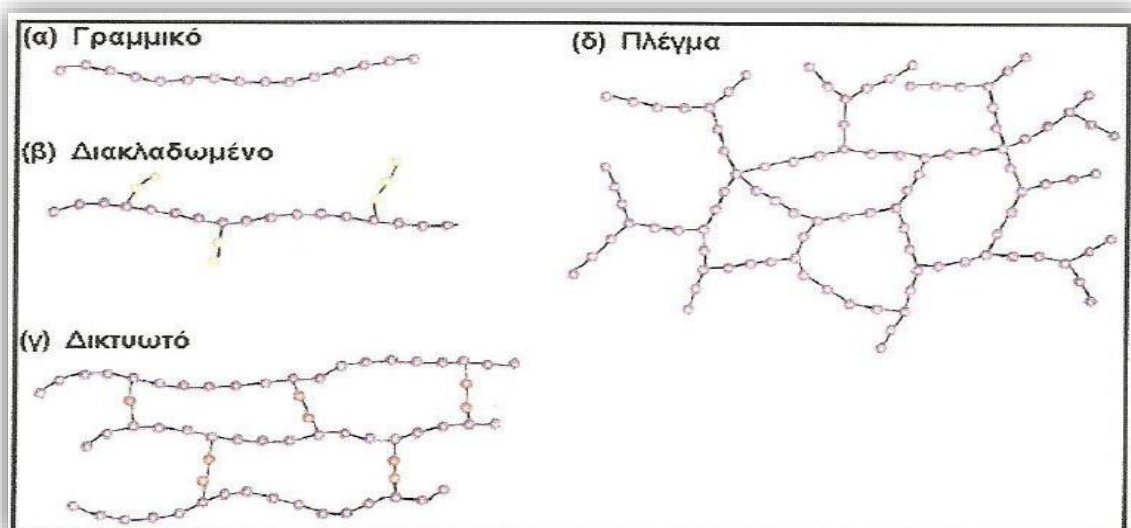


Εικόνα 1.10 Μοριακή δομή πολυμερών υλικών

1.5.1.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ

α. Με κοινή την αρχιτεκτονική της πολυμερικής αλυσίδας τους διακρίνονται σε [1α],[2α]:

- Γραμμικά
- Διακλαδωμένα
- Δικτυωτά ή διασταυρούμενα (crosslinked) ή πλέγμα (network)



Εικόνα 1.11 Είδη αλυσίδας πολυμερών

β. Με κριτήριο το είδος των ατόμων που συμμετέχουν στη δομή της κύριας αλυσίδας τους [1α],[2α] :

1. Ομοαλυσωτά: Η αλυσίδα τους αποτελείται από ένα είδος ατόμων
2. Ετεροαλυσωτά: Η αλυσίδα τους αποτελείται από περισσότερα είδη ατόμων

γ. Με κριτήριο την προέλευση και τη χημική τους σύσταση διακρίνονται σε [1α],[2α]:

1. Φυσικά: Λαμβάνονται απευθείας από τη φύση (μαλλί, μετάξι)
2. Ημισυνθετικά: Προκύπτουν από χημικό μετασχηματισμό φυσικών προϊόντων (εβονίτης, νιτροκυτταρίνη, rayon, cellofan)
3. Συνθετικά: Τα μονομερή που τα συνθέτουν, δεν υπάρχουν στη φύση (PVC, Nylon 6 και 6.6, Teflon).

δ. Με κριτήριο τη χρήση τους διακρίνονται σε [1α],[2α] :

1. Ευρείας χρήσης: Παράγονται σε πολύ υψηλό ποσοστό, είναι φθηνά και έχουν ποικίλα πεδία εφαρμογών στην καθημερινή ζωή (πολυαιθυλένιο, πολυστυρένιο, PVC, ABS).

2. Τεχνικά: Με μηχανικές ιδιότητες σημαντικά ανώτερες από εκείνες των πολυμερών ευρείας χρήσης, χρησιμοποιούνται, σε τμήματα μηχανών και διάφορων κατασκευών προς αντικατάσταση των μεταλλικών τμημάτων τους (πολυαμίδια (nylon), πολυανθρακικά (PC), εποξειδικές ρητίνες)

3. Προηγμένα: Με εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες και μεγάλη σταθερότητα σε υψηλές θερμοκρασίες, παράγονται σε μικρές ποσότητες και προορίζονται για ειδικές εφαρμογές (Πολυαμίδια, πολύ-αιθεροκετόνη, πολύ-μεθακρυλικό μεθύλιο).

1.5.2 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ

Τα εγκλείσματα (ή ενισχυτικά υλικά) είναι **ανόργανα υλικά** που περικλείονται μέσα σε μία μήτρα και επιτελούν πολλές σημαντικές λειτουργίες. Κατά κύριο λόγο, οι επιθυμητές ιδιότητες επιτυγχάνονται επιλέγοντας τον κατάλληλο τύπο και υλικό ενίσχυσης. Έχουν επιφορτισθεί με το να φέρουν εις πέρας τις αυξημένες μηχανικές απαιτήσεις που χαρακτηρίζουν τα σύνθετα υλικά, μίας και είναι εκείνα που παραλαμβάνουν τα φορτία. Τα εγκλείσματα έχουν μηχανικές ιδιότητες πολύ ανώτερες σε σχέση με το υλικό που αποτελεί την μήτρα, προσδίδοντας στο σύνθετο υλικό αυξημένη αντοχή και μέτρο ελαστικότητας. Υπάρχουν πολλών ειδών εγκλείσματα που διαφέρουν ως προς το μέγεθος την γεωμετρία και τα φυσικά χαρακτηριστικά τους [1α],[2α].

Τρεις είναι οι κύριες κατηγορίες εγκλεισμάτων βάσει του σχήματός τους είναι:

- Εγκλείσματα σε μορφή **κόκκων**.
- Εγκλείσματα σε μορφή **ινών**.
- Εγκλείσματα σε μορφή **νιφάδων**.

Τα εγκλείσματα έχουν αρκετά μικρές διαστάσεις της τάξης του «micro».

1.5.3 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

- **Συστολή**

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται σταδιακά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη [1α],[2α].

- **Μέτρο ελαστικότητας**

Η παρουσία των εγκλεισμάτων στις ρητίνες γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται. Η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος [1α],[2α].

- **Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση**

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα, ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν την αντοχή αυτή σε υγρασία. Τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά και επίσης συμμετέχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με μέταλλα. Ιόντα που υπάρχουν στην στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ψήγματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα [1α],[2α].

- **Ειδική πυκνότητα**

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από την ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ' όγκο περιεκτικότητα τους. Έτσι η παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος του σύνθετου υλικού [1α],[2α].

- **Ιξώδες**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με ινώδη υλικά και λιγότερο με κοκκώδη εγκλείσματα [1α],[2α].

- **Συντελεστής θερμικής διαστολής**

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ' όγκο συγκέντρωσης σε έγκλεισμα. Η ελάττωση αυτή δεν είναι γραμμική [1α],[2α].

- **Πρόσφυση**

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά [1α],[2α].

- **Θερμική σταθερότητα**

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας [1α],[2α].

- **Θερμική αγωγιμότητα**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών. Βέβαια σε μεγάλες περιεκτικότητες αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστό αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα [1α],[2α].

- **Αντοχή στη συμπίεση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν [1α],[2α].

- **Συμπεριφορά στην κρούση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που ποικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δομικής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση [1α],[2α].

- **Συμπεριφορά στην κάμψη**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη [1α],[2α].

- **Σκληρότητα επιφάνειας-αντίσταση στην τριβή**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του σύνθετου και την αντίσταση σε τριβή [1α],[2α].

1.5.4 ΜΗΤΡΕΣ

Ο ρόλος της μήτρας συνίσταται σε [1α],[2α]:

- Συγκράτηση των ινών μεταξύ τους.
- Προστασία των ινών από περιβαλλοντικές φθορές και προσβολές.
- Μεταβίβαση των μηχανικών τάσεων που ασκούνται συνολικά στο σύνθετο υλικό προς τις ίνες.
- Ανακοπή της διάδοσης των ρωγμών, που ξεκινούν από θραύση των ινών.

Για να ικανοποιεί το ρόλο, με τον οποίο είναι επιφορτισμένη η μήτρα, πρέπει να χαρακτηρίζεται από:

- Ολκιμότητα.
- Ανθεκτικότητα.
- Σχετική ευκαμψία.
- Σημείο τήξης μεγαλύτερο από τη μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας του συνθέτου υλικού.

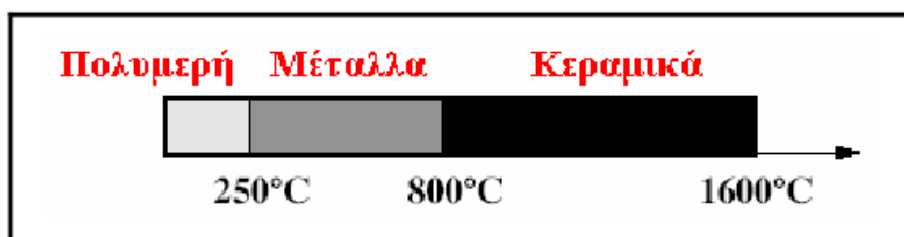
Οι ιδιότητες αυτές πρέπει επίσης να παρουσιάζουν «συμβατότητα» με τις αντίστοιχες ιδιότητες των ενισχυτικών ινών.

Συνήθως, το υλικό της μήτρας έχει χαμηλότερη πυκνότητα, αντοχή και δυσκαμψία από τις ίνες. Τέλος, για τη σωστή λειτουργία του συνθέτου υλικού, καθοριστικός παράγοντας είναι η καλή πρόσφυση ίνας – μήτρας.

Ανάλογα με το υλικό της μήτρας διακρίνουμε τις ακόλουθες ομάδες υλικών μήτρας για σύνθετα υλικά:

- Οργανικές.
- Μεταλλικές.
- Κεραμικές.

Η επιλογή κατάλληλης μήτρας εξαρτάται από τη θερμοκρασία και το περιβάλλον χρήσης του συνθέτου. Μία γενική οδηγία αναφορικά με τα θερμοκρασιακά όρια για κάθε ομάδα υλικών παρουσιάζεται παρακάτω.



Εικόνα 1.12 Όρια θερμοκρασίας υλικού μήτρας

Τα αντίστοιχα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται με τις ακόλουθες συντμήσεις:

PMC: Polymer Matrix Composite

MMC: Metal Matrix Composite

CMC: Ceramic Matrix Composite

1.5.4.1 ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε [1α],[2α]:

1. Θερμοπλαστικές:

Πρόκειται για πολυμερή με γραμμικές αλυσίδες. Παρουσιάζουν δομή, όπου οι μοριακές αλυσίδες διασυνδέονται με ασθενείς δυνάμεις Van der Waals, που εξασθενούν με την αύξηση της θερμοκρασίας με αντιστρεπτή όμως διαδικασία, καθιστώντας το υλικό μαλακότερο σε υψηλές θερμοκρασίες.

Λόγω του χαμηλού τους κόστους, χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι μήτρες πολυαιθυλενίου (PE) και πολυστυρενίου (PS). Ως ενισχυτικά υλικά θερμοπλαστικών μητρών χρησιμοποιούνται φθηνά υλικά (αμίαντος, μαρμαρυγίες, κ.α.), ώστε και το τελικό προϊόν να είναι χαμηλής τιμής.

2. Θερμοσκληρυνόμενες:

Χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου απαιτούνται καλύτερες μηχανικές ιδιότητες. Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή παρουσιάζουν τρισδιάστατη δομή πλέγματος από πρωτογενείς ισχυρούς δεσμούς μεταξύ των μοριακών αλυσίδων. Αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνει το πλήθος των διαμοριακών δεσμών καθιστώντας τα υλικά αυτά σκληρότερα και πιο ψαθυρά.

Τέτοιες μήτρες είναι:

- **Πολυεστερικές ρητίνες** που ενισχύονται με ίνες γυαλιού.
- **Εποξυδικές ρητίνες** με μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους 200 °C, καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις προηγούμενες και χρήση στη αεροναυπηγική.
- **Φαινολικές ρητίνες**, οι οποίες έχουν χαμηλή πλαστικότητα και μέτριες μηχανικές ιδιότητες. Η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους φτάνει τους 400 °C.

3. Ελαστομερείς:

Είναι συνήθως γραμμικά πολυμερή με διακλαδισμένες αλυσίδες οι οποίες έχουν τυχαίο προσανατολισμό. Διαθέτουν μικρή δυσκαμψία με αποτέλεσμα όταν υποστούν μεγάλες παραμορφώσεις να επανέρχονται στο αρχικό τους σχήμα μετά την άρση του εξωτερικού φορτίου που τις προκάλεσε. Το φυσικό και συνθετικό καουτσούκ βρίσκει την κυριότερη εφαρμογή του στα λάστιχα των αυτοκινήτων. Το φυσικό καουτσούκ (λάστιχο), δεν επανέρχεται πλήρως στο αρχικό του μήκος μετά την αποφόρτιση γιατί τα μακρομόρια του έχουν υποστεί πλαστική παραμόρφωση. Για να αποφευχθεί η πλαστική παραμόρφωση γίνεται ο λεγόμενος βουλκανισμό, όπου το καουτσούκ θερμαίνεται με θείο. Η διαδικασία του βουλκανισμού έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία σταυροδεσμών (cross-link) μεταξύ των μορίων, οι οποίοι ενισχύουν τη δομή του ελαστικού. Με τον τρόπο αυτόν το ελαστομερές γίνεται σκληρότερο, ανθεκτικότερο, αποκτά αντίσταση στη διάβρωση από λάδια, όζον, οξέα και καθίσταται λιγότερο ευαίσθητο στις θερμοκρασιακές μεταβολές. Όμως η διαδικασία του βουλκανισμού είναι μια πολυδάπανη και χρονοβόρα διαδικασία, για αυτό αναπτύχθηκαν τα ελαστομερή που διαθέτουν τις ιδιότητες του καουτσούκ και των οποίων η μορφοποίηση είναι εύκολη, αντίστοιχη με εκείνης των θερμοπλαστικών.



Εικόνα 1.13 Πολυεστερική ρητίνη

1.5.4.2 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Μέταλλα, όπως το αλουμίνιο, το τιτάνιο και το νικέλιο, χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο ως υλικά μήτρας προσφέροντας σημαντικά πλεονεκτήματα. Για εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών επιβάλλεται η χρήση μεταλλικών ή κεραμικών μητρών, αφού η μέγιστη επιτρεπτή θεοκρασία χρησιμοποίησης οργανικών μητρών είναι πολύ χαμηλή (~300 °C), ενώ οι ανθρακούχες μήτρες οξειδώνονται σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από 500 °C.

Σε σχέση με τις οργανικές μήτρες, οι μεταλλικές παρουσιάζουν πλεονεκτήματα, αλλά και μειονεκτήματα, τα σπουδαιότερα των οποίων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα [1α],[2α].

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
<ul style="list-style-type: none">• Μεγαλύτερη ολκιμότητα και καλλίτερες μηχανικές ιδιότητες.• Βελτίωση μηχανικών ιδιοτήτων του συνθέτου σε καταπονήσεις ασκούμενες σε διευθύνσεις διαφορετικές από αυτές του προσανατολισμού των ινών.• Βελτίωση της ακαμψίας και αύξηση του μέτρου ελαστικότητας του συνθέτου.• Μείωση της ευαισθησίας του συνθέτου στην παρουσία διαλυτών και διεύρυνση των θερμοκρασιακών ορίων χρήσης του συνθέτου.• Βελτίωση της θερμικής και ηλεκτρικής αγωγιμότητας του συνθέτου για ειδικές εφαρμογές.• Ευκολότερη σύνδεση τεμαχίων του συνθέτου υλικού (συγκόλληση, κόλληση).	<ul style="list-style-type: none">• Δημιουργία εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων στη διεπιφάνεια μετάλλου-ίνας συμβάλλουν στην αποκόλληση ινών από τη μήτρα που οδηγεί στη μικρορωγμάτωση και τη θραύση των ινών.• Μεγαλύτερη πυκνότητα και επομένως μεγαλύτερο βάρος της συνολικής κατασκευής.• Φαινόμενα διάλυσης ινών στη μήτρα, σε υψηλές θερμοκρασίες (π.χ. διάλυση ινών SiO₂ σε μήτρα Al).• Ασυνέχεια της καμπύλης εφελκυσμού των συνθέτων υλικών στο όριο διαρροής της μήτρας.• Δύσκολη παραγωγή συνθέτου υλικού και μεγαλύτερο κόστος.

Εικόνα 1.14 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των μμεταλλικών μητρών (έναντι των οργανικών μητρών)

1.5.4.3 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Τα κεραμικά υλικά είναι σκληρά, δύστηκτα, μεγάλης στιβαρότητας και μεγάλης αντοχής στη διάβρωση αλλά και στην χημική προσβολή. Στην περίπτωση της κεραμικής μήτρας, οι ίνες αποβλέπουν στη βελτίωση της αντοχής του κεραμικού κατά τους θερμικούς αιφνιδιασμούς, με ταυτόχρονη αύξηση της μηχανικής του αντοχής. Η ολκιμότητα και το ποσοστό των ινών επιδρούν ευνοϊκά στη βελτίωση της αντοχής της μήτρας. Το σημαντικότερο πρόβλημα στη χρήση κεραμικών μητρών εντοπίζεται στη συνάφεια ινών – μήτρας και οφείλεται στη μεγάλη διαφορά μεταξύ των συντελεστών γραμμικής διαστολής της κεραμικής μήτρας και αυτής των συνήθων ενισχυτικών ινών. Μεγάλη εφαρμογή βρίσκουν, επίσης, οι μήτρες άνθρακα, ενώ ειδική περίπτωση

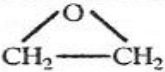
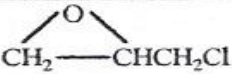
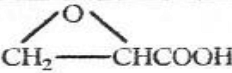
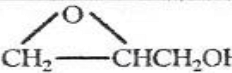
κεραμικής μήτρας αποτελεί το τσιμέντο. Είναι γνωστές οι οικοδομικές κατασκευές τσιμέντου με ενίσχυση χάλυβα (οπλισμένο σκυρόδεμα), ινών αμιάντου (ελενίτ), ινών γυαλιού, καθώς επίσης και οι κατασκευές από γύψο με ενίσχυση ινών γυαλιού ή αμιάντου [1α],[2α].

1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ-ΟΡΙΣΜΟΣ

Με τον όρο εποξειδική ρητίνη [1α],[2α] εννοούμε την ένωση η οποία σχηματίζεται από περισσότερα από ένα εποξείδια τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Ως εποξείδιο ή εποξειδικό εννοούμε τη χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου [O], ενωμένο με δύο άτομα άνθρακα [C] που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.

Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται οι συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων και η αντίστοιχη ονοματολογία τους. Η ονοματολογία αυτή προκύπτει από το όνομα της ομάδας που ενώνεται με το τρίτο άτομο άνθρακα του εποξειδίου.

	εποξείδιον του αιθυλενίου
	επιχλωροϋδρίνη
	γλυκιδικό οξύ
	γλυκιδολική ομάδα

Εικόνα 1.15 Συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων

Οι εποξειδικές ρητίνες ανήκουν στην κατηγορία των θερμοσκληρυνόμενων ή θερμοσταθερών πολυμερών. Είναι προϊόντα ατελούς πολυμερισμού που θερμαινόμενα γίνονται μαλακά. Με την αύξηση όμως της θερμοκρασίας, ο πολυμερισμός καθίσταται πλήρης και σκληραίνονται οριστικά.

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση τριβής και επίσης πολύ καλή χημική αντίσταση.

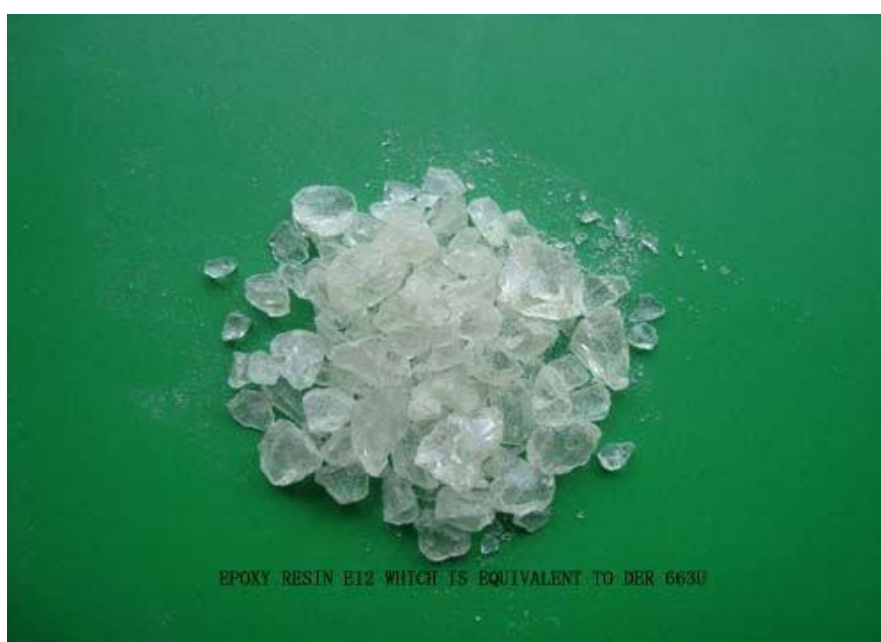
Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών συγκρινόμενων με τις με τις υγρές, είναι η εύκολη επεξεργασία τους, η μηχανική αντοχή, η υψηλή χημική αντίσταση και το άριστο κολλώδες.

Οι καλές φυσικοχημικές ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών είχαν ως αποτέλεσμα την γρήγορη ανάπτυξη και ευρεία χρήση τους. Έτσι αποτελούν σχεδόν

πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό. Σε πάρα πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και εντελώς μόνες τους.

1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες είναι άκαμπτα άμορφα στερεά που μοιάζουν με γυαλί. Επίσης οι στερεές εποξειδικές ρητίνες έχουν σκληρή και αμετάβλητη αντίσταση τριβής και πολύ καλή χημική σύσταση. Τα σημαντικότερα **πλεονεκτήματα** των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σχέση με τις υγρές ρητίνες είναι η **εύκολη επεξεργασία** τους, η **μηχανική αντοχή**, η **υψηλή χημική αντίσταση** και το **άριστο κολλώδες** [1α],[2α].



Εικόνα 1.16 Εποξειδική ρητίνη σε στερεά μορφή

1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι υγρές εποξειδικές ρητίνες [1α],[2α] παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Χαμηλή υγροσκοπικότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση διαλύματος οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών.
2. Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες (low viscosity), όπως και τα μίγματα τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές) με αποτέλεσμα τη εύκολη κατεργασία τους.
3. Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής (ανάμιξη με κάποιο

πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων), κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα την ποικιλία των εφαρμογών.

4. Υψηλή δύναμη συγκόλλησης, ιδιότητα που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών.

5. Υψηλές μηχανικές ιδιότητες και άριστη ηλεκτρική μόνωση.

6. Εύκολη επεξεργασία των ρητινών από 5°C έως 150°C, βέβαια αυτό εξαρτάται και από την εκλογή του προσθέτου.

7. Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας τους, που αποτελεί μεγάλο πλεονέκτημα.

8. Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες, ενώ στερεοποιούνται και κάτω από την επιφάνεια ύδατος. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά, όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα και ξύλο.

9. Παρουσιάζουν καλή χημική αντίσταση, που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται. Συνολικά οι περισσότερες ρητίνες έχουν υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.

10. Δεν αυξάνουν τον όγκο τους κατά την σκλήρυνση, ενώ παρουσιάζουν υψηλή αντοχή χωρίς να γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.

1.6.4 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών είναι οι ακόλουθες [1α],[2α]:

1. Στην κατασκευή κτιρίων, αυτοκινητοδρόμων, γενικά σε κατασκευές που έχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση (βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος).

2. Στη αεροναυπηγική βιομηχανία καθώς και στην βιομηχανία αυτοκινήτων και πλοίων (βασικό συγκολλητικό σε δομικά μέρη της ατράκτου αεροσκάφους, μεταλλικών και πλαστικών τμημάτων σε βάρκες και αυτοκίνητα) λόγω της υψηλής και τέλειας στεγανότητας.

3. Στην κατασκευή τριχών για πινέλα

4. Ως φυλλώδεις ρητίνες (laminated resins) για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.

5. Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν ως βασικό συστατικό τη ρητίνη. Αυτά είναι χρήσιμα για τη συντήρηση και την κατασκευή τελειωμάτων όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, τελειώματα λιθοδομής, τελειώματα αεροσκαφών. Ακόμη χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις

δεξαμενών, πτυσσόμενων αγωγών και πλακών σκυροδέματος.

6. Συστήματα εποξειδικών-ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σαν μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.

7. Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξειδικών-ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλιών και σωλήνων, εργαλείων, μητρών, καθώς και ηλεκτρομαγνητικών μονωτικών ειδών.

Επίσης υπάρχουν ρητίνες (wetsome) δύο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

1. Οι ρητίνες αυτές προορίζονται για υδρομόνωση, προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς και άλλους χώρους.

2. Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος, τσιμεντοκονιάματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου, ασφάλτου κ.α.

3. Για τη σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος κυρίως σε υγρούς χώρους.

4. Για την προστασία κτιρίων από τη διάβρωση και διείσδυση της υγρασίας.

5. Για την υδρομόνωση πισινών και δεξαμενών.

6. Για την υδρομόνωση υπογείων χώρων και παταριών, δαπέδων κ.λπ

Μειονέκτημα των εποξειδικών ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστος. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται όμως από τη μεγάλη χρησιμότητα τους και την ευρεία εφαρμογή που έχουν.

1.7 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

1.7.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη κατηγορία σύνθετων υλικών, δεδομένης της ευρύτατης εξάπλωσης που αυτά γνωρίζουν σε πληθώρα εφαρμογών. Ο οπλισμός, ο οποίος είναι τοποθετημένος στη μήτρα με τη μορφή ινών, αποτελείται εναλλακτικά από γυαλί (Glass), βόριο (Boron), άνθρακα (Carbon), γραφίτη (graphite), αραμίδιο (Κέβλαρ) ή και κάποιο μέταλλο, αντίθετα η μήτρα είναι συνήθως μια εποξειδική ρητίνη ή κάποιο άλλο πολυμερές, χωρίς να απαγορεύει την κατάταξη στην ίδια κατηγορία συνθέτων υλικών με μεταλλική μήτρα (π.χ αλουμινίου) και τη χρήση οπλισμού από ένα ή περισσότερα παραπάνω υλικά.

Μια ίνα χαρακτηρίζεται από τον πολύ μεγάλο λόγο μήκους/διαμέτρου. Οι ίνες διαφόρων υλικών είναι σε γενικές γραμμές αρκετά πιο ανθεκτικές από τα αντίστοιχα

υλικά στη συνήθη μορφή τους. Για παράδειγμα, τα συνηθισμένα φύλλα υάλου θραύονται σε τάσεις μόνο μερικών MPa, ενώ οι ίνες υάλου δύνανται να έχουν αντοχή θραύσεως η οποία ανέρχεται από 2.8GPa έως 4.8GPa όταν αυτές διατίθενται στο εμπόριο, ενώ μέχρι 7.0GPa όταν αυτές έχουν παρασκευασθεί στο εργαστήριο. Αυτό προφανώς δείχνει ότι η γεωμετρία και η δομή μιας ίνας είναι αποφασιστικής σημασίας για τον υπολογισμό της αντοχής της και θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη στις σχετικές εφαρμογές. Το παράδοξο της ίνας, η οποία έχει διαφορετικές ιδιότητες από αυτές τις οποίες έχει το υλικό όταν δεν είναι διαμορφωμένο σε μορφή ίνας, οφείλεται στην πλέον τέλεια δομή της. Έτσι, εντός της ίνας οι κρύσταλλοι του υλικού είναι ευθυγραμμισμένοι κατά τον διαμήκη άξονα της ίνας. Επιπλέον υπάρχουν λιγότερες εσωτερικές ατέλειες στην ίνα σε σχέση με το σύνθετο υλικό το οποίο έχει άλλη τυχαία διαμόρφωση [1α],[2α].

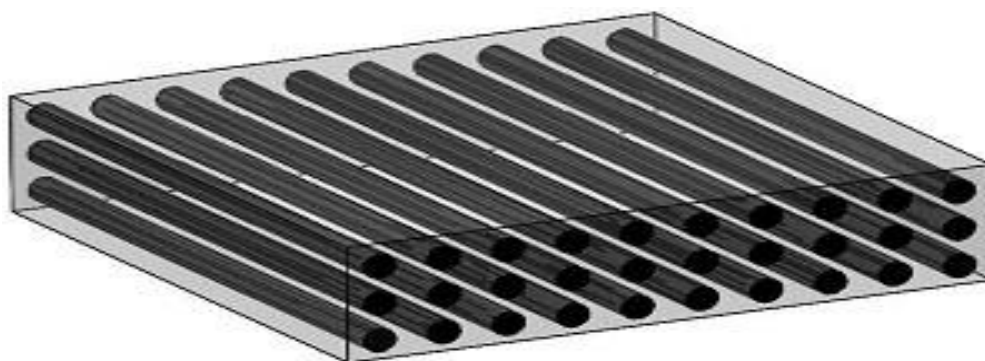
1.7.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα ινώδη σύνθετα υλικά παρουσιάζουν γενικά πολύ καλή συμπεριφορά σε εφελκυσμό ειδικά κατά την περίπτωση που η διεύθυνση της τάσης ταυτίζεται με αυτή των ινών. Θα πρέπει βέβαια να σημειωθεί, πως για να παρουσιάζει το σύνθετο υλικό καλύτερες ιδιότητες από τη μήτρα, χρειάζεται η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών U_f να ξεπερνά μια κρίσιμη ελάχιστη τιμή, γιατί διαφορετικά η εφαρμοζόμενη τάση αναλαμβάνεται από την όλκιμη μήτρα η οποία και παραμορφώνεται.

Η αντοχή τους σε θλίψη είναι μειωμένη κάτι που οφείλεται σε φαινόμενα κύρτωσης, αναδίπλωσης και λυγισμού των ινών (buckling effect) που προκαλούνται όταν ασκούνται θλιπτικά φορτία.

Η συμπεριφορά τους σε κόπωση, είναι δύσκολο να προβλεφθεί, αφού δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή ο κανόνας των μειγμάτων, αλλά απαιτούνται πειραματικές δοκιμές για κάθε συγκεκριμένο ινώδες υλικό. Ανάλογες δοκιμές έδειξαν πως την καλύτερη συμπεριφορά σε κόπωση παρουσιάζουν τα ινώδη υλικά αποτελούμενα από εποξειδική μήτρα και ίνες γραφίτη.

Όσον αφορά τη συμπεριφορά τους σε τριβή, αυτή εξαρτάται από το μήκος, τον προσανατολισμό και τις μηχανικές ιδιότητες των ινών [1α],[2α].



Εικόνα 1.17 Ινώδες υλικό με συνεχείς ίνες

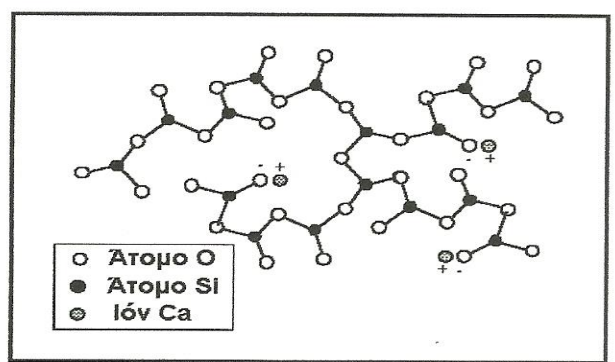
1.7.3 ΕΙΔΗ ΙΝΩΝ

Παρακάτω αναφέρονται συνοπτικά τα είδη ινών που χρησιμοποιούνται στα σύνθετα υλικά [1α],[2α].

1.7.3.1 ΙΝΕΣ ΓΥΑΛΙΟΥ

Οι ίνες γυαλιού χρησιμοποιήθηκαν στα σύνθετα πρώτης γενιάς (1940) και η χρήση τους συνεχίζεται επιτυχώς μέχρι σήμερα. Είναι από τους πλέον διαδεδομένους τύπους ενισχυτικών ινών στα σύνθετα πολυμερικής μήτρας. Η δομική τους βάση είναι τα οξείδια πυριτίου, ασβεστίου, βορίου, αλουμινίου κ.α. Θεωρούνται από τα πιο φθηνά ενισχυτικά υλικά.

Χαρακτηριστική δομή του γυαλιού παρουσιάζεται στην εικόνα που ακολουθεί.



Εικόνα 1.18 Δομή ίνας γυαλιού

Ανάλογα με τη χημική τους σύσταση οι ίνες γυαλιού χαρακτηρίζονται τύπου E, C και S των οποίων οι κύριες φυσικές και μηχανικές ιδιότητες παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΤΥΠΟΣ			
	E	C	S	SiO ₂ καθαρή
Χημική σύσταση (%)				
SiO ₂	54	60	65	>99,5
Al ₂ O ₃	16	25	25	-
B ₂ O ₃	8	-	-	-
CaO	17	9	-	-
MgO	5	6	10	-
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	75	80	84	72
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2100-3400	2500-4400	2800-4800	3500-8800
Πυκνότητα (g/cm ³)	2,54	2,50	2,48	2,20
Θερμοκρασία τήξης (°C)	900-1200	1400-1600	1400-1600	1720
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	550	650	650	750

Εικόνα 1.19 Χαρακτηριστικά των διαφόρων τύπων ινών γυαλιού

E- glass (E=electrical): Πρόκειται για τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα υαλονήματα με καλές ηλεκτρικές ιδιότητες, αντοχή, και δυσκαμψία, καθώς και πολύ καλή συμπεριφορά στην αλλαγή των καιρικών συνθηκών, αλλά με μέτρια αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια.

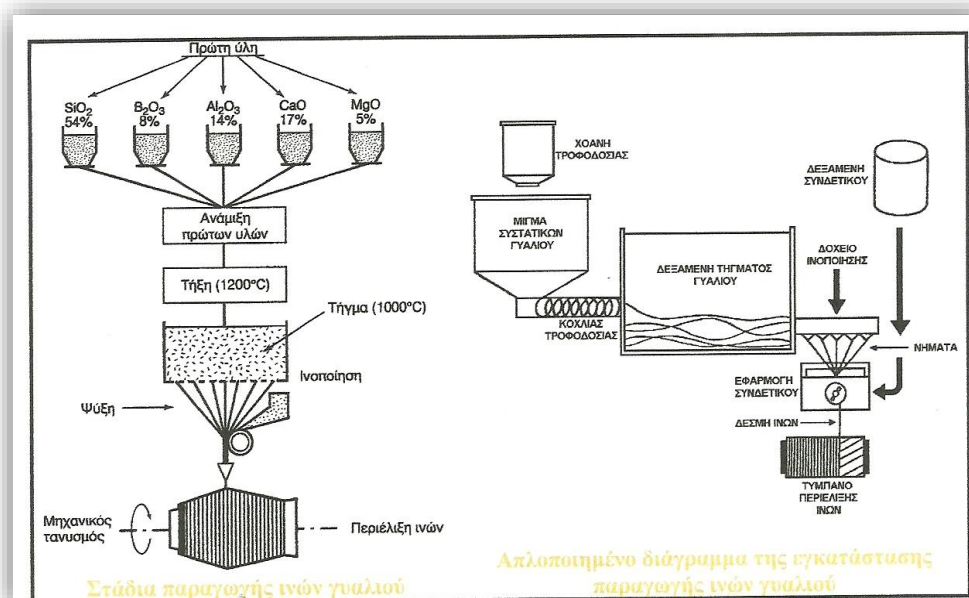
C-glass (C=corrosion): Υαλονήματα με υψηλή αντίσταση στη χημική διάβρωση και καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις ίνες τύπου E, από τις οποίες όμως είναι ακριβότερες.

S-glass (S=stiffness): Ακριβότερο υλικό από το E-glass με υψηλότερη δυσκαμψία και θερμική αντοχή. Χρησιμοποιείται κυρίως στην αεροπορική βιομηχανία.

Όταν περιέχονται μεγάλα ποσοστά SiO_2 (>99.5%) παρατηρούνται αυξημένες τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων της ίνας και της μέγιστης θερμοκρασίας χρήσης του σύνθετου. Γι' αυτό το λόγο, σε ειδικές εφαρμογές όπου απαιτούνται υψηλές μηχανικές ιδιότητες κάτω από υψηλή θερμοκρασία χρησιμοποιούνται ίνες από 100% καθαρή πυρίτια.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των υαλονημάτων είναι το χαμηλό κόστος και η υψηλή αντοχή, ενώ στα κύρια μειονεκτήματα τους εντάσσονται το χαμηλό μέτρο ελαστικότητας και η μικρή αντοχή τους έναντι φθοράς εκ τριβής (λύση της συνέχειας της επιφάνειάς τους). Εγχαράξεις και εκδορές δημιουργούν περιοχές συγκέντρωσης τάσεων στην επιφάνεια της ίνας, με αποτέλεσμα την ταχεία υποβάθμιση των μηχανικών τους ιδιοτήτων και της ικανότητας πρόσφυσης τους στη πολυμερική μήτρα.

Η παραγωγή των ινών γυαλιού γίνεται με εκβολή τήγματος γυαλιού διαμέσου μήτρας με διάτρητο πυθμένα και περιλαμβάνει τις ακόλουθες φάσεις:



Εικόνα 1.20 Διάγραμμα σταδίων παραγωγής ινών γυαλιού

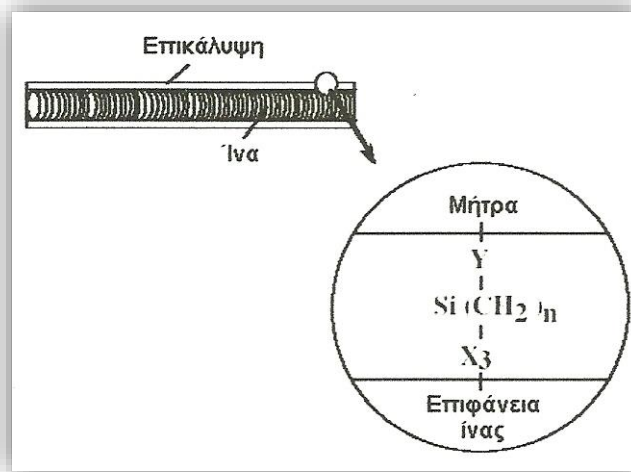
- Η πρώτη ύλη τοποθετείται σε δεξαμενή, όπου τήκεται.
- Το τήγμα τοποθετείται σε σειρά κυλινδρικών δοχείων με διάτρητο πυθμένα (διάμετρος οπών 1-2 mm)
- Το γυαλί ρέει μέσα από τις οπές του πυθμένα υπό την επίδραση της βαρύτητας.
- Οι παραγόμενες ίνες συγκεντρώνονται σε ένα σύνολο και τανύονται μηχανικά μέχρις ότου αποκτήσουν την κατάλληλη διάμετρο (1-15 μm) και ακολουθεί ελαφρός ψεκασμός τους με νερό (ψύξη).
- Ακολούθως οι ίνες διέρχονται από ιμάντα που επιβάλλει σε αυτές προστατευτικό λιπαντικό συνδετικό υλικό (binder) ή ειδικά κολλοειδή πρόσθετα που δρουν ως προστατευτικές επικαλύψεις και συνεισφέρουν στην καλύτερη πρόσφυση ινών-μήτρας.
- Τέλος, οι ίνες περιτυλίγονται ανά δέσμες (stand ή end) των 204 νηματίων (τυπική τιμή) γύρω από τύμπανο, που περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα (της τάξης των 50m/s).
- Οι ρόλοι υαλονήματος υφίστανται ξήρανση πριν υποβληθούν σε οποιαδήποτε περαιτέρω διεργασία μορφής.

Ειδικές σημειώσεις:

- Ο έλεγχος της διαμέτρου των ινών γίνεται με ρύθμιση της στάθμης τήγματος μέσα στη δεξαμενή, της πυκνότητας του, της διαμέτρου των οπών και της ταχύτητας περιστροφής του τυμπάνου.
- Κατά τη διάρκεια παραγωγής των ινών, πρέπει να αποφεύγεται η επαφή ινών μεταξύ τους, καθώς και με άλλα αντικείμενα, που μπορεί να προκαλέσουν επιφανειακές κακώσεις στην ίνα.
- Τα χημικά πρόσθετα (sizes) διακρίνονται σε προσωρινά και συμβατά. Τα προσωρινά πρόσθετα έχουν κύριο στόχο αφενός τη προστασία της ίνας έναντι μείωσης της αντοχής λόγω τριβής της με τις άλλες ίνες και αφετέρου τη σύνδεση των ινών μεταξύ τους στην περίπτωση που διαμορφωθούν σε πλέξη ύφανσης. Ακόμη προσδίδουν στην ίνα αντιστατικές ιδιότητες.

Συνήθως χρησιμοποιούνται αμυλέλαια, που διευκολύνουν αποτελεσματικά την πρόσφυση ίνας και ρητίνης εμποτισμού. Τα προσωρινά πρόσθετα απομακρύνονται εύκολα με θέρμανση των ινών σε κλιματιζόμενο περιβάλλον σε θερμοκρασία $> 340^{\circ}\text{C}$ για χρονικό διάστημα 15-20h.

Τα συμβατά πρόσθετα έχουν στόχο τη βελτίωση της αρχικής πρόσφυσης ρητίνης-γυαλιού και τη μείωση των δυσάρεστων επιπτώσεων της υγρασίας ή άλλων περιβαλλοντικών επιδράσεων. Πρόκειται περί οργανοπυριτικών ενώσεων τύπου $\text{X}_3\text{Si}(\text{CH}_2)_n\text{Y}$, όπου η Y ομάδα είναι συμβατή προς την πολυμερική μήτρα, η X υδρολυόμενη ομάδα στο πυρίτιο και $n=0-3$. Αυτά περιγράφονται στο παρακάτω σχήμα



Εικόνα 1.21 Διάγραμμα σταδίων παραγωγής ινών γυαλιού

- Η αντοχή και η δυσκαμψία του γυαλιού προσδιορίζεται από την τρισδιάστατη δομή και διάταξη των συστατικών οξειδίων του. Λόγω αυτής της δομής τα υαλονήματα είναι ισότροπα υλικά και παρουσιάζουν γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Η συμμετοχή και μεταλλικών οξειδίων στη σύνθεση των ινών μπορεί να επιφέρει αλλαγές στις φυσικοχημικές τους ιδιότητες.

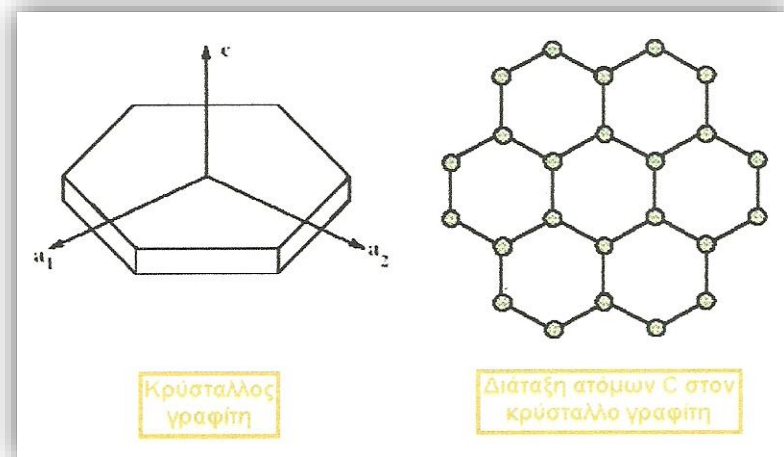
1.7.3.2 ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ

Οι ίνες γραφίτη είναι η επικρατέστερη ενίσχυση τόσο υψηλής αντοχής, όσο και υψηλού μέτρου ελαστικότητας, η οποία χρησιμοποιείται για την παρασκευή υψηλών επιδόσεων σύνθετων υλικών ρητινικής μήτρας. Γενικά, όταν απαιτείται ο βέλτιστος συνδυασμός μηχανικής συμπεριφοράς και ελάττωσης βάρους, οι χρησιμοποιούμενες ίνες είναι συνήθως, ίνες άνθρακα.

Επίσης, οι ίνες άνθρακα προτιμώνται όταν η θερμική διαστολή ενός υλικού πρέπει να συγκρατηθεί σε χαμηλό επίπεδο ή όταν απαιτείται συμβατότητα των χαρακτηριστικών διαστολής δύο συνενωμένων διαφορετικών υλικών.

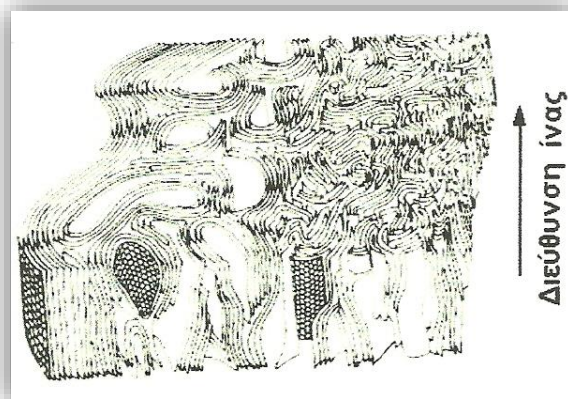
Η υπεροχή αυτή των ανθρακονημάτων οφείλεται στη φύση του άνθρακα (ως στοιχείου) καθώς και στους ενδοατομικούς δεσμούς που σχηματίζει με άλλα άτομα άνθρακα. Ο γραφίτης αποτελείται από ανισότροπους πολυκρυσταλλίτες, των οποίων η ανισοτροπία εξαρτάται από τις συνθήκες παρασκευής τους.

Αποτέλεσμα του ισχυρού προσανατολισμού των κρυσταλλιτών παράλληλα στο διαμήκη άξονα των ανθρακονημάτων, είναι η υψηλή στιβαρότητα, η αντοχή σε θραύση και ο χαμηλός συντελεστής θερμικής διαστολής κατά τη διεύθυνση αυτή. Στη γραφίτη δομή τα άτομα C έχουν πυκνή διάταξη, με μορφή εξαγωνικών επιπέδων όπως στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 1.22 Γραφίτη δομή

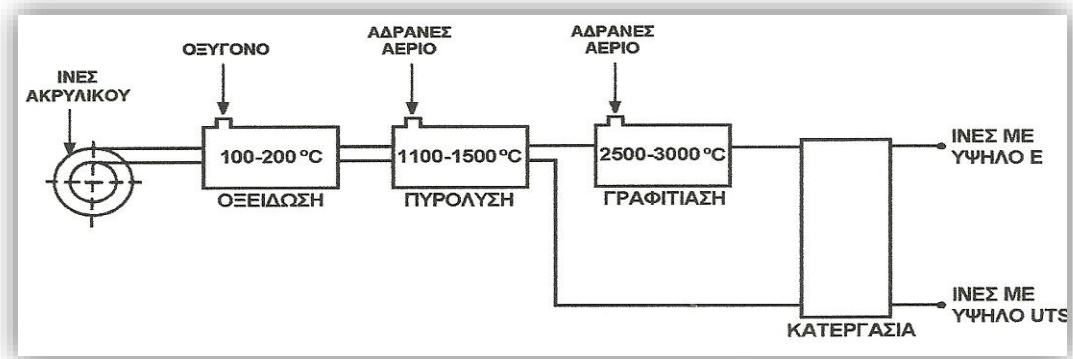
Ο ισχυρός δεσμός μεταξύ των ατόμων στις επίπεδες αυτές εξαγωνικές στρώσεις οδηγεί σε εξαιρετικά υψηλό μέτρο ελαστικότητας. Αντίθετα, ο ασθενής δεσμός τύπου Van Der Waals που υφίσταται μεταξύ γειτονικών στρώσεων, έχει ως αποτέλεσμα ένα χαμηλότερο μέτρο ελαστικότητας προς αυτή τη διεύθυνση. Τυπική δομή του ανθρακονήματος, όπως έχει ληφθεί από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο παρουσιάζεται στην εικόνα που ακολουθεί.



Εικόνα 1.23 Δομή ανθρακονήματος

Στην παραγωγή ανθρακονημάτων, ως πρώτη ύλη χρησιμοποιούνται πολυμερικές ίνες πολυακρυλονιτρίλιου (PAN), ίνες τεχνητής μετάξας (rayon) και πίσσα.

Η παραγωγή ινών γραφίτη από ίνες (PAN) πραγματοποιείται σε τρία στάδια:



Εικόνα 1.24 Διάγραμμα σταδίων παραγωγής ινών γραφίτη

- Οξείδωση των ινών PAN στον αέρα και σε χαμηλή θερμοκρασία (100-200°C), με ταυτόχρονη εφαρμογή τάσης, η οποία είναι απαραίτητη για την ευθυγράμμιση των αλυσίδων του πολυμερούς.
- Πυρόλυση, υπό τάση, σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα και σε θερμοκρασία 1100-1500°C. Οι παραγόμενες ίνες στο στάδιο αυτό χαρακτηρίζονται ως ίνες υψηλής αντοχής (high strength carbon fibers) και η αντοχή τους φτάνει τα 3000 MPa.
- Η θέρμανση σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα συνεχίζεται σε υψηλές θερμοκρασίες (2500-3500 °C), οπότε πραγματοποιείται γραφίτιωση, με ταυτόχρονη ανακρυστάλλωση, που οδηγεί σε ισχυρό προσανατολισμό των κρυσταλλιτών. Οι παραγόμενες ίνες σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίζονται ως ίνες υψηλού μέτρου ελαστικότητας (high module carbon fibers) και έχουν μέτρο ελαστικότητας περίπου 400GPa, η δε διάμετρος τους είναι περίπου 10μm. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ινών άνθρακα που έχουν παραχθεί σε δύο στάδια οξείδωση και πυρόλυση) και σε τρία στάδια (οξείδωση, πυρόλυση, θέρμανση σε υψηλή θερμοκρασία), αντίστοιχα.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	180-230	350-420
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2500-3400	1900-2300
% περιεκτικότητα άνθρακα	95-98	99
Πυκνότητα (g/cm ³)	1,8	1,9
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	2000	2500

Εικόνα 1.25 Ιδιότητες ινών γραφίτη

Σημειώνεται τα ακόλουθα:

- Σε οξειδωτική ατμόσφαιρα, η μέγιστη θερμοκρασία χρήσης των ανθρακονημάτων περιορίζεται στους 500 °C και για τους δύο τύπους ινών. Κατά το σχεδιασμό του συνθέτου πρέπει οπωσδήποτε να λαμβάνεται υπόψη και η μέγιστη θερμοκρασία χρήσης της μήτρας.
- Οι ιδιότητες των χρησιμοποιούμενων ανθρακονημάτων εξαρτώνται σημαντικά από την αρχιτεκτονική των ινών του PAN (μονοδιευθυντικές ίνες, διδιάστατο πλέγμα, τρισδιάστατο πλέγμα). Ο τρόπος διεύθησης των ινών αυτών καθορίζει και το βαθμό ανισοτροπίας των ανθρακονημάτων που προκύπτουν και μπορεί να ποικίλλει από την πλήρη ισοτροπία ως την πλήρη ανισοτροπία.
- Η δυνατότητα επιλογής, από ένα μεγάλο εύρος τιμών της θερμοκρασίας κάθε σταδίου παραγωγής ανθρακονημάτων, δίνει την ευχέρεια παραγωγής ανθρακονημάτων διαφορετικού βαθμού γραφιτιάσης και διαφορετικών ιδιοτήτων (οι μηχανικές και φυσικές ιδιότητες, όπως η θερμική και η ηλεκτρική αγωγιμότητα, εξαρτώνται από το βαθμό γραφιτιάσης και το βαθμό ανισοτροπίας). Γενικά, όσο καλύτερα προσανατολισμένες είναι οι ίνες και όσο υψηλότερη περιεκτικότητα σε γραφίτη διαθέτουν τόσο καλύτερες μηχανικές ιδιότητες επιδεικνύουν.
- Τέλος το κόστος παραγωγής των ινών γραφίτη είναι δέκα φορές τουλάχιστον υψηλότερο από το κόστος παραγωγής των ινών γυαλιού.

1.7.3.3 ΙΝΕΣ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ

Οι πιο διαδεδομένες ίνες πολυμερούς είναι οι ίνες από Nylon, πολυαιθυλένιο και Kevlar. Τα νήματα Nylon και πολυεστέρα παράγονται με φυγοκεντρική περιδίνηση τήγματος, ενώ ακρυλικά και κυτταρινικά νήματα παρασκευάζονται με φυγοκεντρική περιδίνηση διαλύματος και συνακόλουθες τεχνικές καθίζησης ιζήματος. Η αντοχή τους δεν ξεπερνά τα 10Pa, ενώ το μέτρο ελαστικότητας πλησιάζει τα 1000 Pa. Παρόλο που από μηχανικής άποψης δεν κατατάσσονται στις ίνες υψηλής απόδοσης, εντούτοις το χαμηλό κόστος παραγωγής τους τις καθιστά δημοφιλείς στην αγορά.

Η πρώτη υψηλής απόδοσης οργανική ίνα αραμιδίου κατασκευάστηκε από την DuPont και έγινε γνωστή με την εμπορική ονομασία Kevlar και παράγεται σε τρεις τύπους:

- **Kevlar-29:** Με μέτρο ελαστικότητας 60 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,6GPa.
- **Kevlar-49:** Με μέτρο ελαστικότητας 120 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,6 GPa.

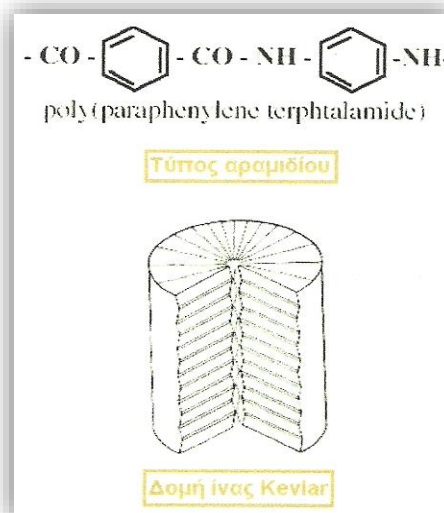
- **Kevlar-149:** Με μέτρο ελαστικότητας 180 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,4 GPa.

Η πυκνότητα και των τριών τύπων είναι ίδια (1.45 g/cm^3). Η διαφορετική ελαστικότητα οφείλεται στο γεγονός της βελτιωμένης ευθυγράμμισης των μοριακών αλυσίδων, που αυξάνει την δυσκαμψία στη διεύθυνση του άξονα της ίνας. Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται οι βασικές ιδιότητες των ινών Kevlar.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	Kevlar 29	Kevlar 49
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	60	130
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2700	3600
Επιμήκυνση θραύσης (%)	4.5	2
Πυκνότητα (g/cm^3)	1.45	1.45
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης ($^{\circ}\text{C}$)	200	200
Θερμοκρασία αστοχίας ($^{\circ}\text{C}$)	400	425

Εικόνα 1.26 Ιδιότητες ινών Kevlar

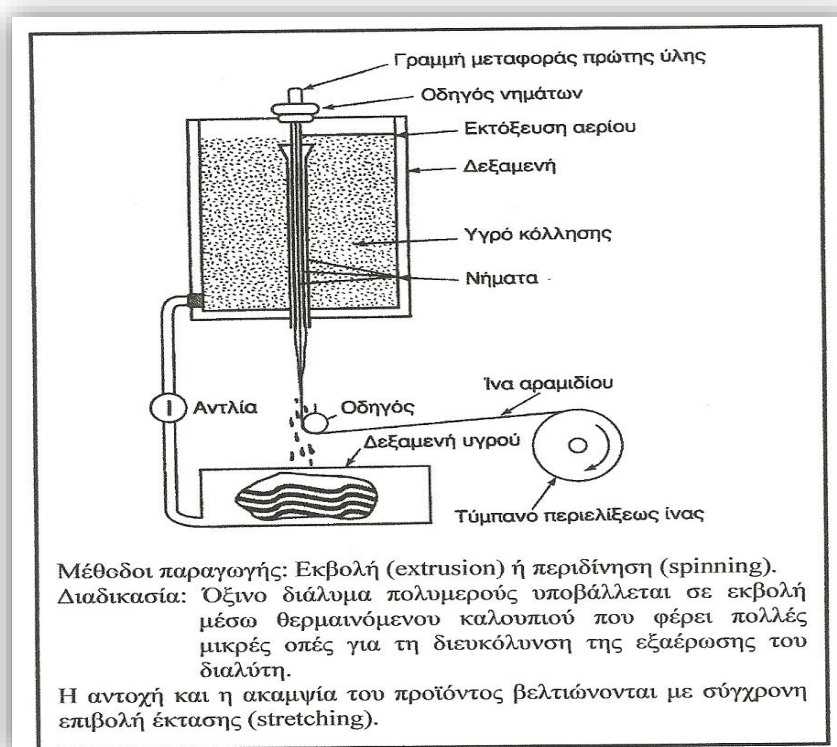
Οι υψηλές τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων του Kevlar οφείλονται στο γεγονός ότι οι πολυμερικές δομικές αλυσίδες του υλικού είναι αυτές καθαυτές πιο ισχυρές και συντάσσονται έτσι, ώστε να δημιουργούν ένα σταθερότερο πλέγμα, σε μορφή επίπεδης ταινίας όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 1.27 Ιδιότητες ινών γραφίτη

Ο κυλινδρικός φλοιός της ίνας περικλείει και συγκρατεί το υλικό του πυρήνα αποδίδοντας στο προϊόν ιδιαίτερα υψηλές επιδόσεις κατά την αξονική διεύθυνση, αλλά φτωχή συμπεριφορά κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Επιπλέον, ενώ στην εφελκυστική καταπόνηση το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά με παραμόρφωση έως και 2%, η μεγάλη του αδυναμία εμφανίζεται στη θλίψη, όπου σε 0,3% θλιπτική παραμόρφωση

αναπτύσσεται πλαστικού τύπου αστοχία. Αξιοσημείωτο, όμως, είναι ότι η αστοχία αυτή δεν είναι καταστροφική, αλλά έχει τη μορφή πτυχώσεων (kink bands).



Εικόνα 1.28 Μέθοδος παραγωγής Αραμιδίου

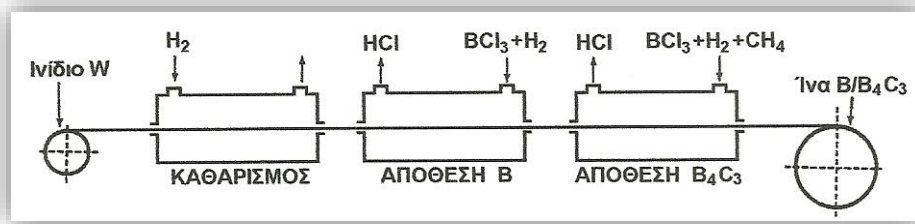
1.7.3.4 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Διάφορα μέταλλα όπως το βόριο (B), το βηρύλλιο (Be) και το βολφράμιο (W) θα μπορούσαν να αποτελέσουν εξαιρετικό ενισχυτικό συνθέτων υλικών, αφού παρουσιάζουν υψηλή τιμή ακαμψίας σε σχέση με το ειδικό βάρος τους (ειδική ακαμψία). Το βόριο είναι το περισσότερο υποσχόμενο υλικό για την κατασκευή ινών ενίσχυσης. Παρόλα αυτά οι τεχνικές παραγωγής μεταλλικών ινών ενίσχυσης εξακολουθούν να παραμένουν πολύ δαπανηρές.

Σήμερα χρησιμοποιούνται δύο τεχνικές για την παραγωγή ινών βορίου:

- Αναγωγή από αλογονίδιο του βορίου

Αλογονίδιο του βορίου (συνήθως BCl_3) ανάγεται από υδρογόνο σε έναν κλειστό θάλαμο υψηλής θερμοκρασίας ($1100\text{ }^\circ\text{C}$) και αποτίθεται σε πολύ λεπτό νήμα βολφραμίου, διαμέτρου 10-15 μm , όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Η διάμετρος των παραγόμενων ινών με αυτήν την τεχνική κυμαίνεται μεταξύ 100-200 μm , ενώ οι ίνες παρουσιάζουν εξαιρετική δυσκαμψία και μηχανική αντοχή.



Εικόνα 1.29 Μέθοδος παραγωγής με αναγωγή από αλογονίδιο του βορίου

- Απόθεση με τεχνική CVD

Το βόριο αποτίθεται σε νήμα άνθρακα ή βολφραμίου με την τεχνική της χημικής εναπόθεσης ατμών (CVD). Η τεχνική αυτή είναι η οικονομικότερη από την προηγούμενη, αλλά το προϊόν έχει χαμηλότερη μηχανική αντοχή.

Οι ίνες βορίου έχουν υψηλή μηχανική αντοχή ($E=300-420$ GPa, $UTS=3000-3700$ MPa), ενώ οι τιμές των ιδιοτήτων τους διατηρούνται σταθερές ως τους 500 °C. Για τη χρήση τους σε υψηλότερες θερμοκρασίες, θα πρέπει να χρησιμοποιείται προστατευτικό επίστρωμα καρβιδίου του πυριτίου (ίνες Borsic) ή νιτριδίου του βορίου. Τα επιστρώματα αυτά αποτρέπουν την αντίδραση του υλικού ενίσχυσης με αυτό της μήτρας. Σε υψηλές θερμοκρασίες, κυρίως σε σύνθετα με μεταλλική μήτρα τιτανίου ή αλουμινίου, ευνοείται η διάχυση μέσω της διεπιφάνειας ίνας-μήτρα καθώς και οι αντιδράσεις σε στερεά κατάσταση που οδηγούν στο σχηματισμό εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων και αστοχία του συνθέτου.

1.7.3.5 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Οι κεραμικές ίνες χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών. Χαρακτηρίζονται από υψηλή αντοχή, στιβαρότητα και θερμική ευστάθεια. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες κεραμικές ίνες είναι οι ίνες καρβιδίου και πυριτίου (SiC) και αλουμινίου (Al_2O_3), ενώ σπανιότερα συναντώνται και ίνες Si_3N_4 , BeO, B_4C και ZrO_2 .

Το καρβίδιο του πυριτίου (SiC) και αλουμίνας (Al_2O_3), είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως ενισχυτικό υλικό είτε με τη μορφή ινών, είτε με τη μορφή φυλλιδίων. Οι ίνες SiC παρουσιάζουν υψηλές τιμές αντοχής και ανώτερες μηχανικές ιδιότητες από τα φυλλίδια. Οι μέθοδοι παραγωγής των υπόψη ινών συνίστανται στις παρακάτω:

- Με χημική εναπόθεση ατμών (CVD) χλωριούχου σιλανίου σε ίνες άνθρακα. Οι παραγόμενες ίνες έχουν πυρήνα διαμέτρου $10-25$ μm και εξωτερική διάμετρο $100-150$ μm .

- Από πολυμερικές ίνες (Nicalon).

Θέρμανση σε κενό σε θερμοκρασία 850 °C μετατρέπει την πολυμερική ίνα σε ανόργανο SiC , ενώ θέρμανση σε υψηλότερη θερμοκρασία (>1000 °C) προκαλεί κρυστάλλωση σε β- SiC. Οι παραγόμενες ίνες έχουν διάμετρο 10-15μm.

- Τριχίτες SiC από φλοιό ρυζιού.

Ο φλοιός του ρυζιού περιέχει ~15% κ.β SiO₂. Θέρμανση σε θερμοκρασία 700-900 °C οδηγεί σε υπόλειμμα SiO₂ και ελεύθερο άνθρακα. Θέρμανση του υπολείμματος σε θερμοκρασία ~1500 °C και σε περιβάλλον αζώτου ή αμμωνίας οδηγεί στο σχηματισμό SiC. Οι παραγόμενοι τριχίτες έχουν διάμετρο ~0,1-1 μm και μήκος ~50μm.

Παρακάτω παρουσιάζεται συγκριτικός πίνακας των ιδιοτήτων των ινών από κάθε μέθοδο.

Μέθοδος	CVD	Nicalon	Τριχίτες
Ιδιότητα			
Πυκνότητα, ρ (g/cm ³)	3.3	2.6	-
Αντοχή, UTS (MPa)	3500	2000	7000
Μέτρο ελαστικότητας, E (GPa)	430	180	480
Διάμετρος ίνας, d (μm)	140	15	<1

Εικόνα 1.30 Ιδιότητες ινών από διαφορετική μέθοδο παραγωγής

Γενικά οι μέθοδοι παρασκευής των κεραμικών ινών είναι ιδιαίτερα δαπανηρές.

Το SiC παρουσιάζει σταθερή μηχανική αντοχή ως τους 1400 °C, ωστόσο η μέγιστη επιτρεπτή θερμοκρασία χρήσης του, περιορίζεται στους 900 °C, λόγω της σημαντικής δραστηριότητας του πάνω από τη θερμοκρασία αυτή.

Οι μονοκρυσταλλικές ίνες αλουμίνας (Al₂O₃) διαμέτρου 250μm έχουν εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες. Λόγω της ισχυρής φύσεως των χημικών δεσμών, η σταθερότητα των μηχανικών τους ιδιοτήτων διατηρείται ως τους 800 °C. Οι μονοκρυσταλλικές ίνες αλουμίνας είναι εξαιρετικά ευαίσθητες έναντι επιφανειακής φθοράς που οδηγεί ταχύτατα σε αστοχία.

1.7.3.6 ΤΡΙΧΙΤΕΣ (WHISKERS)

Οι τριχίτες είναι νηματικοί μονοκρύσταλλοι που παράγονται με αποσύνθεση άλατος μετάλλου σε αναγωγική ατμόσφαιρα, κάτω από αυστηρά ελεγχόμενες συνθήκες θερμοκρασίας. Η διάμετρος τους είναι της τάξης του 1μm, ενώ το μήκος τους μπορεί να φτάσει τα μερικά χιλιοστά και παρουσιάζουν τις μηχανικές ιδιότητες ενός τέλειου κρυστάλλου. Οι εξωτερικές τους επιφάνειες είναι λείες και δεν παρουσιάζουν ζώνες συγκέντρωσης τάσεων.

Οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενοι τριχίτες είναι από αλουμίνα, γραφίτη, καρβίδιο του πυριτίου, βηρύλλια και νιτρίδιο του πυριτίου. Η παραγωγή τριχιτών σε βιομηχανική κλίμακα είναι δύσκολη. Στο πίνακα γίνεται σύγκριση των ιδιοτήτων ινών τριχιτών από SiC και Al₂O₃.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	SiC _{INA}	SiC _{ΤΡΙΧΙΤΗΣ}	Al ₂ O ₃ _{INA}	Al ₂ O ₃ _{ΤΡΙΧΙΤΗΣ}
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	480	840	500	755
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2300	21000	2000	19500
Πυκνότητα (g/cm ³)	3,2	3,2	4,0	4,0
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	900	1600	800	1300

Εικόνα 1.31 Ιδιότητες ινών από SiC και Al₂O₃

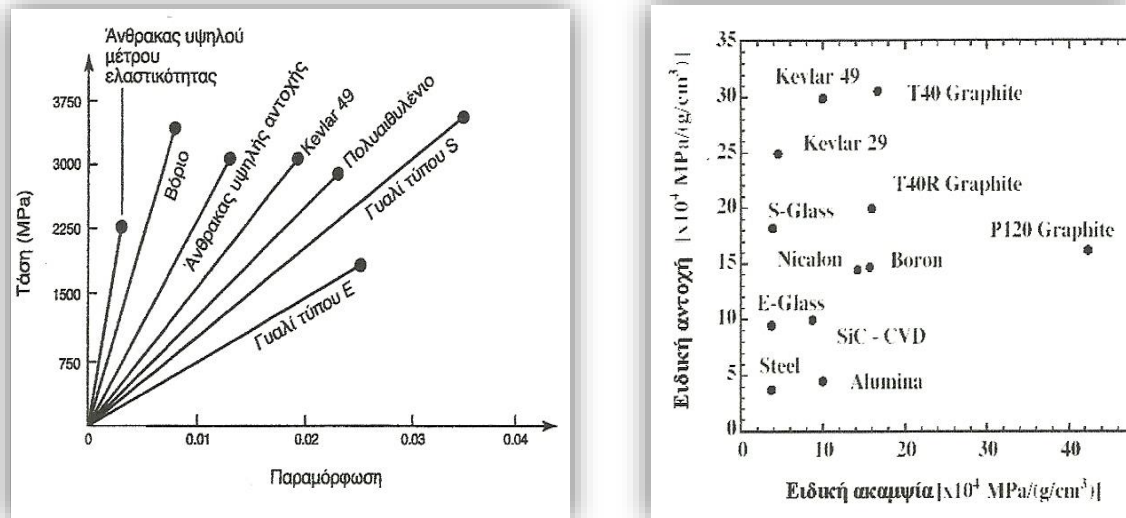
1.7.3.7 ΙΝΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

Αρκετά ορυκτά που βρίσκονται σε ινώδη ή φυλλώδη μορφή, μπορούν να αποτελέσουν φθινό ενισχυτικό υλικό, αλλά χαμηλών προδιαγραφών. Ευρύτερα χρησιμοποιούμενα τέτοια ορυκτά είναι ο αμίαντος και η μαρμαρυγία (mica).

Οι ίνες αμιάντου αποτελούνται από 500 περίπου στοιχειώδη ινίδια, διαμέτρου ~10nm, και έχουν διάμετρο ~2010μm και μήκος αρκετά cm. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέχρι θερμοκρασία 500 °C, οπότε η μηχανική αντοχή του υλικού μειώνεται σημαντικά. Το μέτρο ελαστικότητας της ίνας είναι της τάξης των 160GPa, ενώ η μηχανική αντοχή μπορεί να φθάσει μέχρι 5500GPa. Ο αμίαντος λόγω του χαμηλού του κόστους χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Οι μαρμαρυγίες ανήκουν στην κατηγορία των φυλλοπυριτικών ορυκτών, χαρακτηρίζονται από τέλειο σχισμό και αποχωρίζονται εύκολα από το πέτρωμα με μορφή φυλλιδίων, τα οποία χρησιμοποιούνται ως συστατικό ενίσχυσης του σύνθετου υλικού. Η αντοχή σε εφελκυσμό μπορεί να φθάσει μέχρι 2500 MPa (τέλεια φυλλίδια), ενώ λόγω ατελειών στις άκρες των φυλλιδίων, οι συνήθεις τιμές της αντοχής κυμαίνονται στην περιοχή 700-900MPa. Το μέτρο ελαστικότητας των μαρμαρυγιών είναι περίπου 250 GPa και η πυκνότητα τους 2,8 g/cm³

1.7.3.8 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ ΙΝΩΝ



Εικόνα 1.32 Ως προς την ειδική αντοχή και ειδική ακαμψία

Υα	T _{max} (°C)
Spectra	150
Kevlar	250
Glass	800
SiC	1000
Alumina	1370
Carbon	2000*

* Παρουσία οξυγόνου: T_{max}=500 °C

Εικόνα 1.33 Ως προς την θερμική ευστάθεια

Υα	Παραμόρφωση θραύσης (%)
Kevlar	3-4
Glass	2
Carbon	1
Ceramic	<1

Εικόνα 1.34 Ως προς την παραμόρφωση θραύσης

1.8 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά [1α],[2α] αποτελούνται από πολύ μικρά σωματίδια σε σχήμα κόκκου, κάποιου ισχυρού και ανθεκτικού υλικού, τα οποία είναι διασπαρμένα μέσα στη μήτρα η οποία είναι από διαφορετικό υλικό. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή μη, όπως επίσης και η μήτρα. Τα κοκκώδη υλικά έχουν υποδεέστερες μηχανικές ιδιότητες σε σχέση με τα ινώδη, μιας και η συνεισφορά των

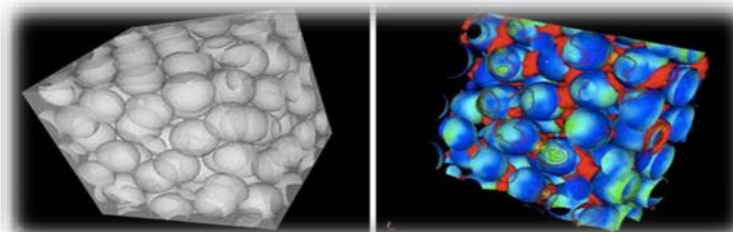
σωματιδίων στη μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου είναι μικρότερη από αυτή των ινών. Ένα σημαντικό γνώρισμα των κοκκωδών σύνθετων υλικών, είναι η χαμηλή συνήθως πυκνότητα σε σωματίδια, που όμως προσδίδει αρκετές καλές ιδιότητες σε αυτά τα υλικά. Ως πρώτη ύλη στα κοκκώδη, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κάποια φυσικά ορυκτά όπως ο τάλκης, ενώ η διαδικασία μορφοποίησης αυτών των υλικών είναι σχετικά απλή και αυτοματοποιημένη, γεγονός που επιτρέπει την μαζική παραγωγή προϊόντων. Κοκκώδη υλικά χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές μη υψηλών απαιτήσεων όπως αντικείμενα καθημερινής χρήσης, εξαρτήματα αυτοκινήτων και άλλα. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικής υφής ή μη και δύναται να συνδυασθούν με διαφόρων τύπων μήτρες. Οι διάφοροι συνδυασμοί μήτρας/κόκκων που μπορούν να επιτευχθούν, αναφέρονται παρακάτω. Έτσι, από αυτήν την άποψη έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς:

1. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Το μη οπλισμένο σκυρόδεμα αποτελεί το πιο κοινό παράδειγμα ενός τέτοιου υλικού. Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας «δεμένους» με ένα μείγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας. Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως ο μαρμαρυγίας ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας.

2. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το εγκλείσμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με εγκλείσμα χαλκού, υπό μορφή φλούδας. Σκοπός της παρασκευής τέτοιων σύνθετων υλικών είναι η δημιουργία ενός υλικού με βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες (αντοχή, μέτρο ελαστικότητας, όριο διαρροής), η αύξηση της ηλεκτρικής και θερμικής αγωγιμότητας καθώς και η μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και της φθοράς της μήτρας.



Εικόνα 1.35 Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

3. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Ένα παράδειγμα υλικού αυτής της κατηγορίας είναι τα κράματα χαλκού ή χάλυβα που περιέχουν κόκκους μόλυβδου, η ύπαρξη των οποίων καθιστά τα παραπάνω υλικά κατεργάσιμα στις εργαλειομηχανές. Πολλά μέταλλα όπως είναι το χρώμιο, το βολφράμιο και το μολυβδαίνιο, αν και είναι εύθραυστα σε θερμοκρασία περιβάλλοντος έχουν παρόλα αυτά πολύτιμες ιδιότητες. Έτσι μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα άλλων μετάλλων, τα οποία παρουσιάζουν όγκιμη συμπεριφορά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Το σύνθετο υλικό που προκύπτει είναι όγκιμο στη θερμοκρασία αυτή, ενώ διαθέτει παράλληλα και κάποιες από τις ιδιότητες του εύθραυστου εγκλείσματος.

4. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα υλικά που προκύπτουν ονομάζονται **κεραμομέταλλα**. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δυο ειδών ανάλογα με το εγκλείσμα.

Το πρώτο είδος είναι **κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική.

Το δεύτερο είδος είναι τα **κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**. Έτσι, το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών, τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κ.α. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά δύναται να ταξινομηθούν και με κριτήριο το μέγεθος των κόκκων ως εξής:

1. Σύνθετα με ενίσχυση σωματιδίων μεγάλου μεγέθους.

Τα σωματίδια έχουν διάμετρο λίγων μm και περιέχονται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 25%. Η συνήθης κατ' όγκο περιεκτικότητα κυμαίνεται ανάμεσα 60-90%.

2. Σύνθετα με ενίσχυση μικρών σωματιδίων σε διασπορά.

Τα εγκλείσματα, που συνήθως πρόκειται για οξείδια, περιέχονται στο σύνθετο σε συγκεντρώσεις μικρότερες του 15% κατ' όγκο. Η διάμετρος των σωματιδίων ποικίλει μεταξύ 0,01-0,1 μm. Η ισχυροποίηση της μήτρας επιτυγχάνεται με την παρεμπόδιση της μετάδοσης των διαταραχών εξαιτίας της ύπαρξης σωματιδίων.

1.9 ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

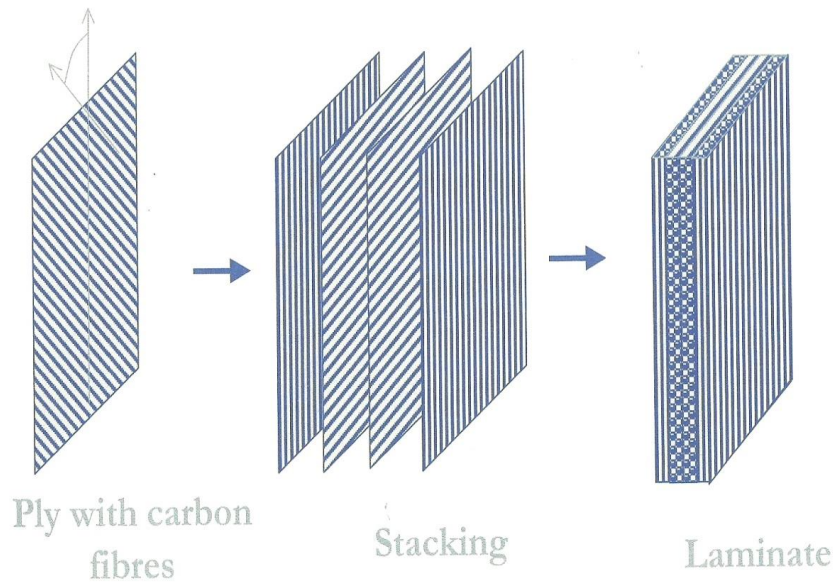
Τα πολύστρωτα (laminates) ή στρωματικά σύνθετα υλικά [1α],[2α] είναι μια κατηγορία σύνθετων υλικών στην οποία τα υλικά της μήτρας και της ενίσχυσης είναι υπό τη μορφή στρώσεων και φύλλων. Διάφορα υλικά μπορούν να συνδυασθούν ή και να αποτελέσουν τις στρώσεις (στρώματα ή φύλλα (ply)) που συνθέτουν τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Τα σύνθετα αυτού του τύπου μπορεί να έχουν πολύ καλές ιδιότητες, όπως δυσκαμψία, αντοχή, αντίσταση στη διάβρωση και στη φθορά, ακουστική και θερμική μόνωση κ.α.

Οι επιμέρους στρώσεις αποτελούνται από ίνες υψηλής αντοχής και μέτρου ελαστικότητας, «δεμένες» με ένα πολυμερές, μεταλλικό ή κεραμικό συνδετικό υλικό. Να πούμε εδώ ότι οι ίνες των στρώσεων μπορούν να είναι και διαφορετικά προσανατολισμένες όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, πράγμα το οποίο βελτιώνει τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού σε πολλές διευθύνσεις. Ίνες που χρησιμοποιούνται συνήθως, περιλαμβάνουν γραφίτη, γυαλί, βόριο, και καρβίδιο του πυριτίου. Μερικά συνδετικά υλικά είναι εποξειδικές ρητίνες, οι πολυϊμίδες, το αλουμίνιο, το τιτάνιο και η αλουμίνα. Επίσης οι επιμέρους στρώσεις γενικά είναι ορθότροπες (δηλαδή, με κύριες ιδιότητες σε ορθογώνιες κατευθύνσεις) ή εγκάρσιως ισότροπες (με ισότροπες ιδιότητες στο εγκάρσιο επίπεδο). Ωστόσο οι επιμέρους στρώσεις μπορούν να παρουσιάζουν και ανισότροπες (με μεταβλητή κατεύθυνση των κύριων ιδιοτήτων), ορθότροπες, ή ημι-ισότροπες ιδιότητες. Τα ημι-ισοτροπικά ελάσματα εμφανίζουν ισότροπη (δηλαδή, ανεξάρτητη από την κατεύθυνση) απόκριση εντός του επιπέδου αλλά δεν περιορίζονται σε ισοτροπική (καμπτική) απόκριση εκτός αυτού.

Τα κυριότερα είδη των πολύστρωτων σύνθετων υλικών είναι:

1. Τα διμέταλλα
2. Τα επιμεταλλωμένα μέταλλα
3. Η ύαλος ασφαλείας
4. Τα υλικά με επίστρωση πλαστικού

Carbon epoxy laminated composites

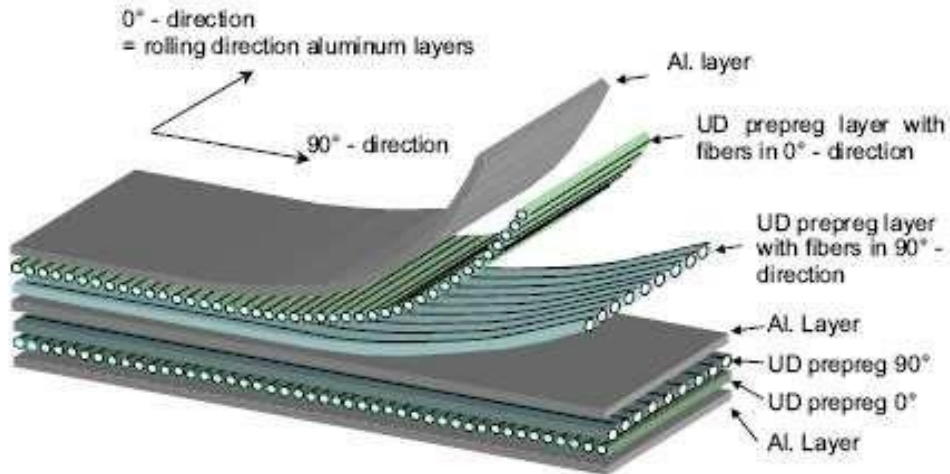


Εικόνα 1.36 Πολύστρωτα σύνθετα υλικά

1.10 ΙΝΩΔΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ-ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ (Fiber-Metal laminates)

Αξίζει να γίνει ειδική μνεία σε αυτού του είδους σύνθετα υλικά [3] γιατί παρουσιάζουν ορισμένες εξαιρετικές ιδιότητες. Αυτά αποτελούνται από διαδοχικές στρώσεις μεταλλικών πλακών και στρώσεις ενισχυμένων με ίνες σύνθετων υλικών που έχουν κολληθεί μεταξύ τους. Οι στρώσεις αυτές εναλλάσσονται μεταξύ τους και αποτελούν το υβριδικό πολύστρωτο. Η κάθε στρώση σύνθετου υλικού αποτελείται από ένα επίπεδο (λεπτού πάχους) ινώδους σύνθετου υλικού του οποίου οι ίνες έχουν συγκεκριμένο προσανατολισμό και διατάσσονται κάθετα στην διεύθυνση του πάχους.

Το πρώτο ινώδες-μεταλλικό πολύστρωτο παρουσιάστηκε από το πανεπιστήμιο του Delft το 1981 και ήταν το επονομαζόμενο ARALL (Aramid Reinforced Aluminum Laminates) το οποίο προοριζόταν για χρήση στην αεροναυπηγική βιομηχανία. Στο ARALL οι στρώσεις του σύνθετου υλικού είναι ενισχυμένες με ίνες αραμιδίου (Kevlar). Δεν καθιερώθηκε λόγω υψηλού κόστους κατασκευής. Επίσης τελευταία έχει δημιουργηθεί και το επονομαζόμενο CARALL (Carbon Reinforced Aluminum Laminates) βασισμένο σε ίνες άνθρακα. Το πρώτο ινώδες μεταλλικό πολύστρωτο που η χρήση του καθιερώθηκε είναι το GLARE (Glass Reinforced). Αυτό έγινε γύρω στο 1991 και από τότε έχει διαδοθεί αρκετά. Ο τρόπος κατασκευής του απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 1.37 Glare Hybrid composite material

Το Glare συνδυάζοντας τις μηχανικές ιδιότητες των υλικών που το αποτελούν, παρουσιάζει εξαιρετική συμπεριφορά σε κόπωση. Επίσης η αντοχή του σε κρούση, σε διάβρωση, σε φλόγα καθώς και σε στατικές καταπονήσεις μηχανολογικών κατασκευών ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, είναι κατά πολύ βελτιωμένες συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες του απλού αλουμινίου. Παρακάτω αναγράφονται οι βασικοί τύποι Glare που παρουσιάζουν όπως είναι φυσικό διαφορετικές ιδιότητες.

Βασικός τύπος GLARE	Εκδοχή	Χρώμα αλουμινίου	Προσανατολισμός ινών κάθε στρώσης	Πλεονεκτήματα
GLARE 1		7475-T761	0°/0°	αντοχή σε κόπωση, υψηλή τάση διαρροής, αντοχή σε 0°
GLARE 2	GLARE 2A	2024-T3	0°/0°	αντοχή σε κόπωση, αντοχή σε 0°
	GLARE 2B	2024-T3	90°/90°	αντοχή σε κόπωση, αντοχή σε 90°
GLARE 3		2024-T3	0°/90°	αντοχή σε κόπωση, αντοχή σε κρούση

Εικόνα 1.38 Κατηγορίες Glare

Πιο αναλυτικά όσον αφορά τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα αυτού του υλικού, είναι ότι σε σχέση με το απλό αλουμίνιο παρουσιάζει εξαιρετική αντοχή σε κόπωση όπως έχουν δείξει πειραματικές διαδικασίες καθώς αντέχει σε πολύ μεγαλύτερο αριθμό κύκλων φόρτισης για το ίδιο μήκος ρωγμής. Η μείωση του ρυθμού διάδοσης των ρωγμών οφείλεται στην ύπαρξη των ινών στις στρώσεις του σύνθετου υλικού. Οι ίνες δεν επηρεάζονται από τα φορτία κόπωσης σε αντίθεση με τις μεταλλικές στρώσεις

αλουμινίου, όπου ξεκινούν και διαδίδονται ραγδαία οι οποιοσδήποτε ρωγμές. Οι ίνες κατά την φόρτιση παραμένουν άθικτες, παραλαμβάνοντας το φορτίο στην περιοχή της ρωγμής και παράλληλα περιορίζουν το άνοιγμα της. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται ινώδης γεφύρωση και προκαλεί μείωση του ρυθμού διάδοσης των ρωγμών.

Επίσης η αντοχή σε κρούση είναι πάρα πολύ μεγάλη, ενώ με πειράματα έχει αποδειχθεί ότι είναι πολύ καλύτερη από αυτήν του αλουμινίου. Η πολύ καλή απόκριση του Glare σε κρούσεις οφείλεται στην υψηλή εφελκυστική αντοχή των γυάλινων ινών του, αλλά κυρίως στην αύξηση της εφελκυστικής αντοχής τους σε υψηλό ρυθμό μεταβολής των παραμορφώσεων.

Παρουσιάζει πολύ υψηλή παραμένουσα αντοχή, δηλαδή υπολειπόμενη στατική αντοχή ύστερα από οποιαδήποτε ζημιά όπως για παράδειγμα λόγω κρούσης με κάποιο αντικείμενο. Για τον λόγο αυτό είναι πολύ διαδεδομένη η χρήση του Glare στην αεροναυπηγική βιομηχανία.

Έχει πολύ καλή συμπεριφορά στην διάβρωση αντίστοιχη με το μονολιθικό αλουμίνιο. Η όποια τυχόν διάβρωση σταματά στις εξωτερικές στρώσεις αλουμινίου, αφού στην συνέχεια οι στρώσεις του σύνθετου υλικού δεν επιτρέπουν την περαιτέρω διάβρωση στο εσωτερικό του.

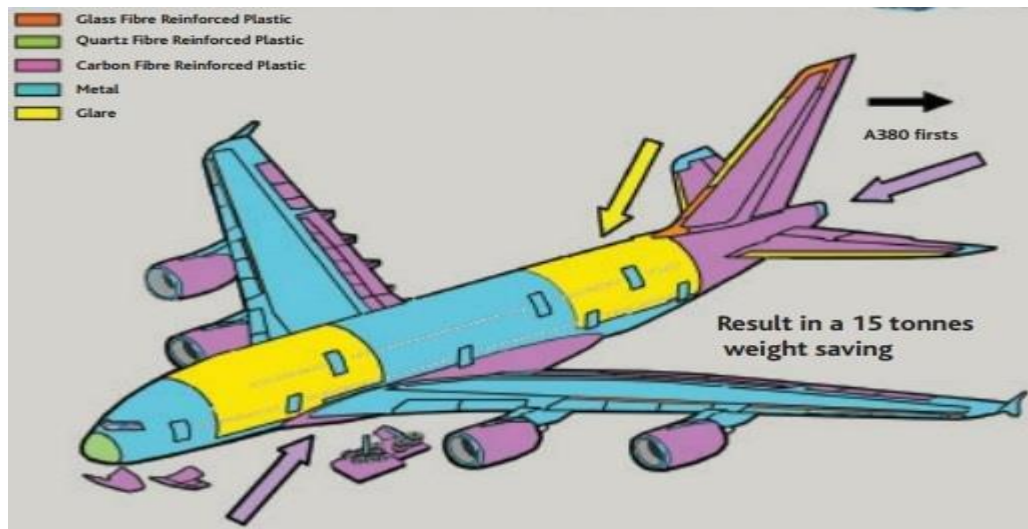
Επιπλέον έχει πάρα πολύ καλή αντοχή σε φλόγα, αφού έχει πυρίμαχες ιδιότητες πολύ ανώτερες τόσο από το μονολιθικό αλουμίνιο όσο και από τα κλασικά σύνθετα υλικά. Αυτό συμβαίνει γιατί στις υψηλές θερμοκρασίες το εξωτερικό στρώμα αλουμινίου λιώνει, όμως στο επόμενο στρώμα με το σύνθετο υλικό ενώ η μήτρα λιώνει, οι ίνες παραμένουν άθικτες με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα φράγμα πυρός. Επίσης η θερμική μόνωση αυξάνεται λόγω του αποχωρισμού των στρώσεων από την θερμότητα. Τελικά οι εσωτερικές στρώσεις αλουμινίου πίσω από αυτές του σύνθετου παραμένουν αναλλοίωτες, έτσι ώστε η αντίθετα πλευρά από εκείνη της φλόγας να παραμένει σε ανεκτά επίπεδα θερμοκρασίας με ικανοποιητική μηχανική αντοχή. Η ανωτέρω ιδιότητα μαζί με την πολύ καλή αντοχή σε κρούση προσδίδουν στο Glare μεγάλη αντοχή σε φορτία λόγω εκρήξεων.

Λόγω των εξωτερικών στρώσεων αλουμινίου παρουσιάζει πολύ καλή αντοχή στην υγρασία, αφού η μήτρα του σύνθετου υλικού έρχεται σε επαφή με το υγρό στοιχείο μόνο από τις ελεύθερες άκρες του υλικού.

Έχει ειδικό βάρος περίπου 10% μικρότερο από του αλουμινίου, ενώ επιτρέπει την εύκολη κατεργασία και μορφοποίηση του. Επισκευάζεται με μεθόδους αντίστοιχες με αυτές που εφαρμόζονται για την επισκευή του αλουμινίου.

Εφαρμόζεται κατά κύριο λόγο στην αεροπορική βιομηχανία, τόσο για την κατασκευή ατράκτων, όσο και ενισχυτικών στοιχείων. Επίσης χρησιμοποιείται για την επισκευή ρηγματώσεων μεταλλικών ατράκτων (patch repair), όπου παρουσιάζει πολύ καλύτερη συμπεριφορά από τα κλασικά σύνθετα υλικά, λόγω της μικρότερης θερμικής ασυμβατότητας. Δηλαδή της διαφοράς που υπάρχει μεταξύ των συντελεστών θερμικής διαστολής στο Glare και στο αλουμίνιο, που είναι σχεδόν μηδενική, συγκριτικά με αυτής που υπάρχει μεταξύ κλασικού σύνθετου και αλουμινίου.

Στη παρακάτω εικόνα παρουσιάζονται εφαρμογές του Glare στο Airbus A-380 όπου πολλά τμήματα της ατράκτου είναι αποκλειστικά από Glare.



Εικόνα 1.39 Airbus A-380



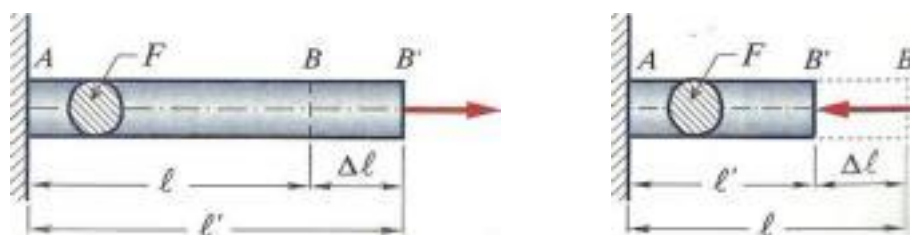
Εικόνα 1.40 Ολοκληρωμένο τμήμα ατράκτου Airbus A-380 από Glare

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Νόμος του Hooke [1β],[2β],[60]:



Εικόνα 2.1 Εφελκυσμός –θλίψη ράβδου

Ο Robert Hooke (1678) απέδειξε πειραματικά ότι υπάρχει σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης η οποία διατυπώνεται παρακάτω.

Έστω η πρισματική αβαρής ράβδος AB , η οποία καταπονείται από αξονική εφελκυστική δύναμη P που ασκείται στο κέντρο βάρους B της διατομής της Εικόνας (2.1). Έστω επίσης F το εμβαδό της διατομής, το οποίο θεωρείται σταθερό σε ολόκληρο το μήκος l της ράβδου.

Με την επενέργεια της εφελκυστικής δύναμης P η ράβδος θα επιμηκυνθεί κατά Δl και τελικά το σημείο B εφαρμογής της δύναμης, θα μετατοπιστεί δεξιότερα στη θέση B' οπότε το τελικό μήκος της ράβδου, γίνει l' .

Ο Hooke πειραματιζόμενος με τέτοιες πρισματικές ράβδους ποικίλων υλικών, υποβαλλόμενες σε μονοαξονικό εφελκυσμό εντός της περιοχής της ελαστικής συμπεριφοράς των υλικών, παρατήρησε ότι η επιμήκυνση Δl της ράβδου ήταν ανάλογη τόσο προς την εφελκύνουσα δύναμη P , όσο και προς το αρχικό της μήκος l και αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού P της διατομής.

Η πλήρης μαθηματική διατύπωση του νόμου του Hooke είναι η παρακάτω:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} \quad (2.1.1)$$

Όπου $\Delta l = l' - l = (BB')$ είναι η παραμόρφωση της ράβδου που για τον εφελκυσμό καλείται επιμήκυνση ή μήκυνση ενώ για τη θλίψη επιβράχυνση ή βράχυνση (σε m, cm, mm κλπ).

P , είναι το αξονικό φορτίο (δύναμη) εφελκυσμού (σε N, t, κλπ).

F , είναι το εμβαδό της κάθετης διατομής στον άξονα της ράβδου (σε m^2 , cm^2 , κλπ).

E , είναι ο συντελεστής αναλογίας, που είναι η ελαστική σταθερά η οποία εξαρτάται από το είδος του υλικού. Η σταθερά αυτή ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας** ή μέτρο του **Young** (σε N/m^2 , at, κλπ).

Ο νόμος αυτός επιβεβαιώθηκε στη συνέχεια από πολλούς ερευνητές, οι οποίοι πειραματίστηκαν σε μεγάλο πλήθος δοκιμίων και από διάφορα υλικά. Διαπιστώθηκε δε ότι αυτός ισχύει όχι μόνο για δοκίμια υποβαλλόμενα σε εφελκυσμό αλλά και θλίψη. Με την παραδοχή ότι οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις σε μία τυχαία διατομή της ράβδου κατανέμονται ομοιόμορφα σε αυτήν (όπως συμβαίνει περίπου και στην πράξη) και αν αμελήσουμε το ίδιο το βάρος της, η ορθή τάση σ είναι $\sigma = P/F$, η δε ανηγμένη παραμόρφωση ε από τη σχέση ορισμού της είναι $\varepsilon = \Delta l / l$.

Οπότε λαμβάνοντας υπόψη τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, ο νόμος του Hooke γράφεται και με την εξής απλούστερη μορφή:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (2.1.2)$$

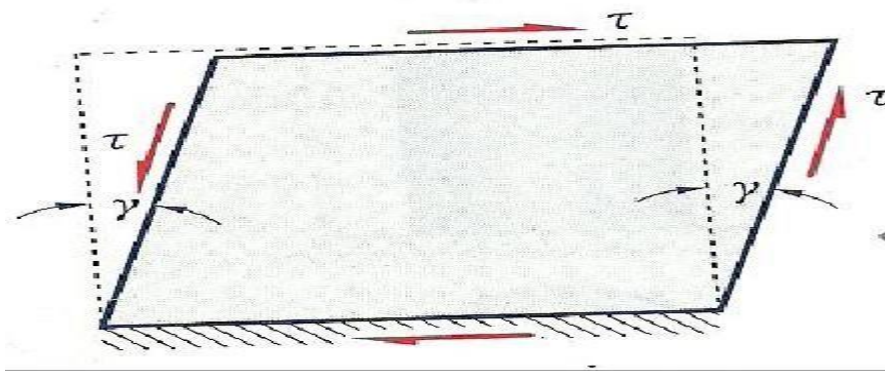
Η ανωτέρω εξίσωση εκφρασμένη με λόγια, διατυπώνει συνοπτικά το νόμο του Hooke ως εξής :« **Η τάση είναι ανάλογη προς την ανηγμένη παραμόρφωση**».

Το μέτρο ελαστικότητας E είναι ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ της τάσης και της ανηγμένης παραμόρφωσης, όπως προκύπτει από την ανωτέρω εξίσωση. Λύνοντας τη δε ως προς E έχουμε :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2.1.3)$$

Επειδή η ανηγμένη παραμόρφωση ε είναι αδιάστατο μέγεθος, το μέτρο ελαστικότητας E έχει μονάδες τάσης. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το E αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη σ , η οποία θα προκαλούσε ανηγμένη παραμόρφωση $\varepsilon=1$, δηλαδή $\Delta l = l$ ή διαφορετικά, αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη η οποία θα διπλασίαζε το αρχικό μήκος μιας ράβδου.

Μέτρο Διάτμησης [1β],[2β],[60]:



Εικόνα 2.2 Διάτμηση

Διαπιστώσαμε ότι ο νόμος του Hooke συνδέει τις ορθές τάσεις με την ανηγμένη παραμόρφωση στην ελαστική περιοχή, με την γραμμική σχέση $\sigma = \varepsilon E$. Αντίστοιχα ο νόμος του Hooke συνδέει τις διατμητικές τάσεις τ με τη γωνιακή παραμόρφωση γ με την ανάλογη γραμμική σχέση.

$$\tau = G\gamma \text{ όπου } \gamma \text{ σε rad.} \quad (2.1.4)$$

Το G είναι σταθερή ποσότητα που έχει διαστάσεις τάσης, όπως φαίνεται από την παραπάνω εξίσωση και χαρακτηρίζει τις μηχανικές ιδιότητες των διαφόρων υλικών. Είναι δε κάτι ανάλογο του μέτρου ελαστικότητας E και ονομάζεται **μέτρο διάτμησης**.

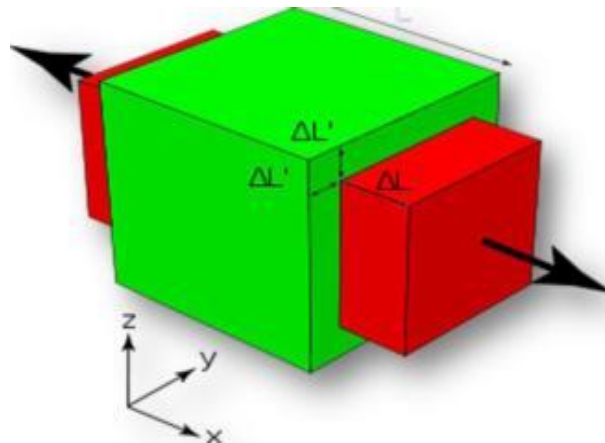
Λόγος Poisson [1β],[2β],[60]:

Μία πρισματική ράβδος μήκους l , με την επενέργεια εφελκυστικής δύναμης P παρουσιάζει μεταβολή και συγκεκριμένα αύξηση του ανηγμένων πλευρικών βραχύνσεων ε_y και ε_z κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα. Οι βραχύνσεις αυτές προς την ανηγμένη αξονική επιμήκυνση μας δίνουν τον σταθερό αριθμό ν , για κάθε υλικό που καταπονείται με φορτία τέτοια ώστε να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η σταθερά αυτή ονομάζεται **λόγος του Poisson** ή **συντελεστής εγκάρσιας παραμόρφωσης**.

Έτσι ισχύει η σχέση:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (2.1.5)$$

Δεδομένου ότι οι ανηγμένες βραχύνσεις είναι αρνητικοί αριθμοί, το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (2.1.5), δικαιολογείται. Ο λόγος Poisson είναι «καθαρός» αριθμός, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος ή ίσος από 0.5 και μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Για τα μέταλλα για παράδειγμα ισχύει ότι $0.25 \leq \nu \leq 0.35$. Ο λόγος Poisson παίρνει την μεγαλύτερή του τιμή για κάποιο υλικό, στο όριο ανάμεσα στην «ελαστική» και «πλαστική» περιοχή, όπου και σταματά να ισχύει ο νόμος του Hooke.

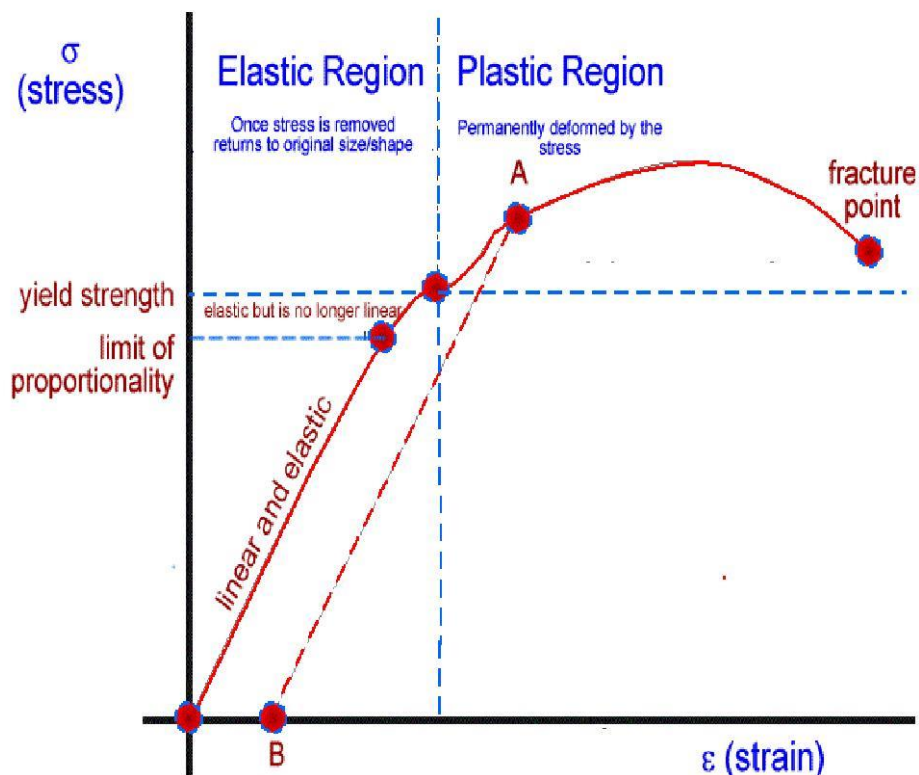


Εικόνα 2.3 Ορθές τάσεις

Ομοιογενές υλικό: ονομάζεται εκείνο το υλικό που παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες σε όλα τα σημεία της μάζας του. Διαφορετικά λέγεται **ανομοιογενές**.

«Τελείως ελαστικό» σώμα: ονομάζεται το σώμα εκείνο, το οποίο επανέρχεται ακριβώς στο αρχικό του σχήμα και όγκο μετά την αποφόρτιση. Οι δε, προκαλούμενες παραμορφώσεις, ονομάζονται τότε «ελαστικές».

«Τελείως πλαστικό» σώμα: χαρακτηρίζεται το σώμα εκείνο, το οποίο παραμένει απολύτως στη παραμορφωμένη κατάσταση που έφτασε και μετά την αποφόρτιση. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το σώμα έχει υποστεί μόνιμη ή πλαστική παραμόρφωση.



Εικόνα 2.4 Διάγραμμα Τάσεων-Παραμορφώσεων

Ανηγμένη διόγκωση [1β],[2β],[60]:

Κατά την καταπόνηση μιας ράβδου σε εφελκυσμό πριν από την επιβολή του εξωτερικού φορτίου, η ράβδος είχε μήκος l (Εικόνα 2.3), εμβαδό διατομής F ανάλογο του τετραγώνου της διάστασης b , δηλαδή $F = \lambda b^2$ και όγκο $V = l F = \lambda l b^2$, όπου το λ είναι καθαρός αριθμός χαρακτηριστικός του είδους της διατομής.

Μετά την επιβολή του εφελκυστικού φορτίου και την δημιουργία της αντίστοιχης παραμόρφωση, το τελικό μήκος έστω l' της ράβδου γίνεται:

$$l' = l + \Delta l = l(1 + \varepsilon) \tag{2.1.6}$$

Η τελική διάσταση της εγκάρσιας πλευράς - της ράβδου, προκύπτει από τη σχέση ορισμού του λόγου Poisson ν και είναι:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = -\frac{b'-b}{\varepsilon b} \Rightarrow b' = b(1 - \nu\varepsilon) \quad (2.1.7)$$

Το τελικό εμβαδό F' της διατομής μετά την παραμόρφωση είναι:

$$V' = F' \ell = \lambda b^2 (1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)^2 = \lambda b^2 (1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\nu\varepsilon^2 + \varepsilon^2) \quad (2.1.8)$$

Επειδή το ε στην ελαστική περιοχή είναι πολύ μικρός αριθμός, χωρίς σημαντικό σφάλμα, μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους που περιέχουν ε^2 και ε^3 στην πιο πάνω εξίσωση, οπότε ο νέος όγκος είναι περίπου:

$$V' \approx \lambda b^2 (1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon) \quad (2.1.9)$$

Ονομάζουμε ανηγμένη μεταβολή όγκου Θ (ή ανηγμένη διόγκωση) της ράβδου το πηλίκο:

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\nu) \quad (2.1.10)$$

Μέτρο Διόγκωσης [1β],[2β],[60]:

Ονομάζουμε μέτρο διόγκωσης K ενός υλικού, το λόγο:

$$K = \frac{\sigma}{\Theta} = \frac{P}{\Delta V/V} \quad (2.1.11)$$

Όπου p είναι η ομοιόμορφη πίεση που ασκείται στο σώμα και Θ η ανηγμένη διόγκωση. Το K από τη σχέση ορισμού του προκύπτει ότι έχει μονάδες τάσης $[N/m^2]$.

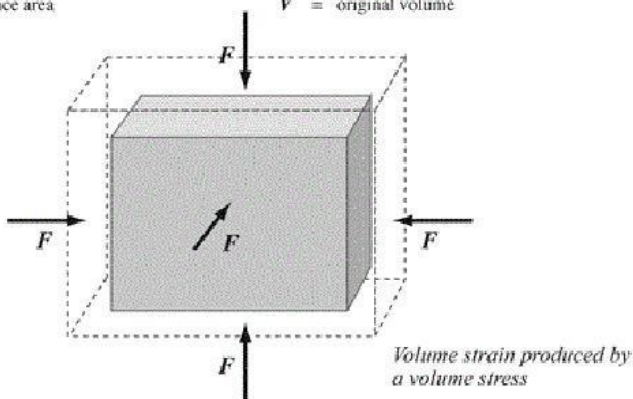
Είναι δηλαδή και αυτό μία ελαστική σταθερά, όπως το E και το G.

$$\text{bulk modulus} = - \frac{F/A}{\Delta V/V}$$

volume stress = $\frac{F}{A}$ volume strain = $\frac{\Delta V}{V}$

F = normal force
 A = surface area

ΔV = change in volume
 V = original volume



Volume strain produced by a volume stress

Εικόνα 2.5 Σταθερά διόγκωσης

2.1.2 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ, ΣΤΕΡΡΟΤΗΤΑ

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματός τους [1β],[2β],[60].

Η αλλαγή του όγκου ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές παραμορφώσεις. Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με διαφορετικές διαστάσεις των ακμών του.

Η αλλαγή σχήματος ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να επιτευχθεί με δυο τρόπους:

α) Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (π.χ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).

β) Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεων οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Αυτό βεβαία σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάξουν τιμή, όπως και εκείνες των διαγώνιων του. Επομένως, η αλλαγή του σχήματός του επιτυγχάνεται τόσο από ορθές όσο και από διατμητικές παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που επιτυγχάνεται από την επιβολή φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως **ενέργεια παραμόρφωσης**, η οποία αποτελείται από δυο προσθετέους, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται **ενέργεια μεταβολής όγκου** και έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή σχήματος ή αλλιώς στρέβλωση του υλικού και καλείται **στροφική ενέργεια**. Προφανώς το άθροισμα των δυο αυτών όρων αποτελεί το σύνολο της ενέργειας παραμόρφωσης που αποθηκεύτηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη σ - ϵ και τον άξονα των παραμορφώσεων (Εικ.2.4) παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης που είναι αποθηκευμένη στο υλικό ή έχει καταναλωθεί από αυτό από την αρχή της φόρτισης του μέχρι τη στιγμή που η τάση γίνεται σ (τυχαίο σημείο) που αντιστοιχεί σε παραμόρφωση ϵ (τυχαίο σημείο). Όταν το ζεύγος (σ , ϵ) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσης θ του υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης καλείται **στερρότητα** του υλικού και αποτελεί μέτρο της απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

2.1.3 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Ανισότροπο τρικλινές μέσο: το μέσο το οποίο δεν παρουσιάζει συμμετρίες και έχει 21 ελαστικές σταθερές ανεξάρτητες.

Μονοκλινές μέσο: το μέσο αυτό έχει ένα επίπεδο συμμετρίας και κάθε διεύθυνση έχει ίδιες ιδιότητες με την συμμετρική της ως προς το επίπεδο αυτό. Αποδεικνύεται ότι το μέσο αυτό έχει 13 ελαστικές σταθερές.

Ορθότροπο μέσο: όταν το υλικό παρουσιάζει συνολικά δύο κάθετα επίπεδα συμμετρίας τότε λέγεται ορθότροπο. Το μέσο αυτό έχει 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

Εγκαρσίως ισότροπο μέσο: μια ακόμα ανώτερη τάξη ελαστικής συμμετρίας από αυτή του ορθότροπου μέσου. Το μέσο σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζει έναν άξονα συμμετρίας ως προς τις μηχανικές ιδιότητες. Οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι 5.

Ισότροπο μέσο: τα μέσα στα οποία κάθε διεύθυνση είναι διεύθυνση υλικής συμμετρίας. Αρκούν μόνο 2 ελαστικές σταθερές για την περιγραφή του μέσου (το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν ή κάποιες από τις υπόλοιπες σταθερές όπως μ , λ και κ και χρήση των σχετικών εξισώσεων μετατροπής).

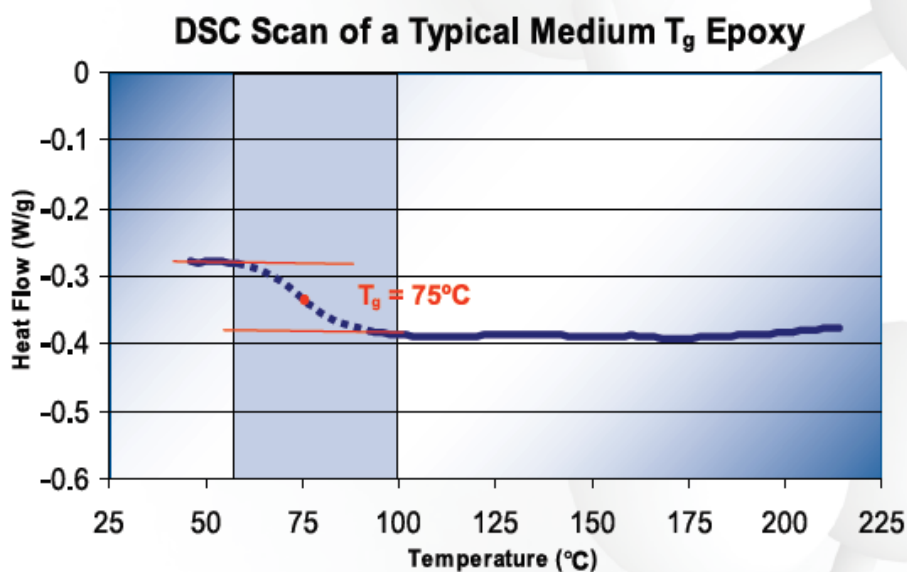
2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΠΤΩΣΗΣ T_g

Η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (T_g) είναι ένα εύρος θερμοκρασιών όπου ένα θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές μεταβαίνει από τη σκληρή, στερεά και υαλώδη κατάσταση σε μία περισσότερο εύκαμπτη μαλακή, ελαστική [1γ],[2γ],[61]. Δηλαδή είναι ένα εύρος θερμοκρασιών που ένα υλικό αλλάζει συμπεριφορά από στερεό σε ρευστό ή το ανάποδο.

Στην πραγματικότητα το (T_g) δεν είναι μία ξεκάθαρη θερμοδυναμική μετάβαση, αλλά ένα εύρος θερμοκρασιών στο οποίο αυξάνεται σημαντικά η κινητικότητα των πολυμερικών αλυσίδων. Η μέγιστη τιμή (T_g) καθορίζεται από τη χημική δομή της εποξειδικής ρητίνης, τον τύπο του σκληρυντή και το βαθμό της θερμικής κατεργασίας.

Δεδομένου ότι η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (T_g), είναι ένα εύρος θερμοκρασιών και όχι μία συγκεκριμένη θερμοκρασία, είναι βολικό να ορίζουμε μία μέση τιμή της περιοχής που οριοθετείται από τις εφαπτόμενες στις δύο επίπεδες περιοχές της καμπύλης ροής της θερμότητας. Στην περίπτωση του εποξειδικού υλικού όπως φαίνεται στην παρακάτω καμπύλη είναι η T_g είναι $75\text{ }^\circ\text{C}$.



Εικόνα 2.5 Διάγραμμα DCS θερμοκρασίας υαλώδους μετάπτωσης

Τονίζεται ότι η T_g μετριέται χρησιμοποιώντας το θερμικό αναλυτή Differential Scanning Calorimetry (DSC) που χρησιμοποίησε ο Lipaton.

Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος TMA (Thermomechanical Analysis) ή μέθοδος DMA (Dynamic Mechanical Analysis).

2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών με πολυμερική μήτρα, είναι [1γ],[2γ]:

- η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των εγκλείσμάτων.
- η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος.

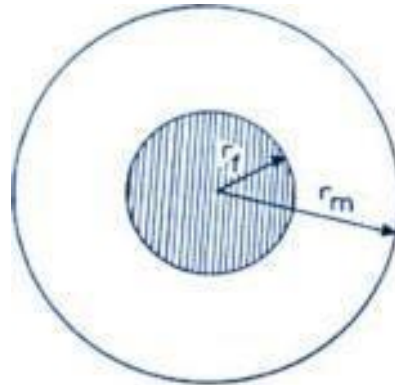
Η προσρόφηση των πολυμερικών μακρομορίων από το έγκλεισμα, είναι η κύρια αιτία για την διαφορετική διαμόρφωση των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα σε σχέση με τη διαμόρφωση τους στη μήτρα γενικότερα. Η αλλαγή της κατάστασης των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα, προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από τη μήτρα. Έτσι, καταλήγουμε ότι η παρουσία εγκλείσματος μέσα στην πολυμερική μήτρα δημιουργεί μία ατέλεια στο πολυμερικό δομικό δίκτυο της.

Είναι γνωστό ότι οι ιδιότητες των πολυμερικών σύνθετων υλικών κατά την χαλάρωση, επηρεάζονται σημαντικά από την ύπαρξη της ενδιάμεσης φάσης [4]-[10]. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς αυτών των σύνθετων υλικών και η συλλογή πληροφοριών για την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης, καθώς επίσης και την επίδραση της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του σύνθετου συστήματος μας.

Ωστόσο, η δομή και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, σε σημαντικό βαθμό, από την **μεθοδολογία** που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Ως συνέπεια των παραπάνω, τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους προσδιορισμού της ενδιάμεσης φάσης είναι συχνά διαφορετικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι ο προσδιορισμός της ενδιάμεσης φάσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g . Ωστόσο, ενώ υπάρχουν αρκετές πειραματικές μέθοδοι για την εύρεση τιμών για την T_g , όπως η θερμιδομετρία, η διαστολομετρία, οι δυναμικές μετρήσεις κ.α., αυτές εξάγουν διαφορετικά αποτελέσματα μεταξύ τους [11],[12].

Λόγω της παραπάνω δυσκολίας, δημιουργήθηκε ένα χάσμα ανάμεσα στα ευρήματα διαφόρων ερευνητών για την επίδραση της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος, στην υαλώδη μεταβατική θερμοκρασία T_g [13]. Για παράδειγμα, αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα ενός σύνθετου υλικού, αυξάνεται και η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι ερευνητές βρήκαν ότι η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g δεν επηρεάζεται σημαντικά από την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος [14],[15],[16]. Τέλος υπήρχαν και ερευνητές που βρήκαν ότι οι τιμές της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας T_g εξαρτώνται πολύ από την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, μάλιστα σε πολλές περιπτώσεις η T_g ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα [17].

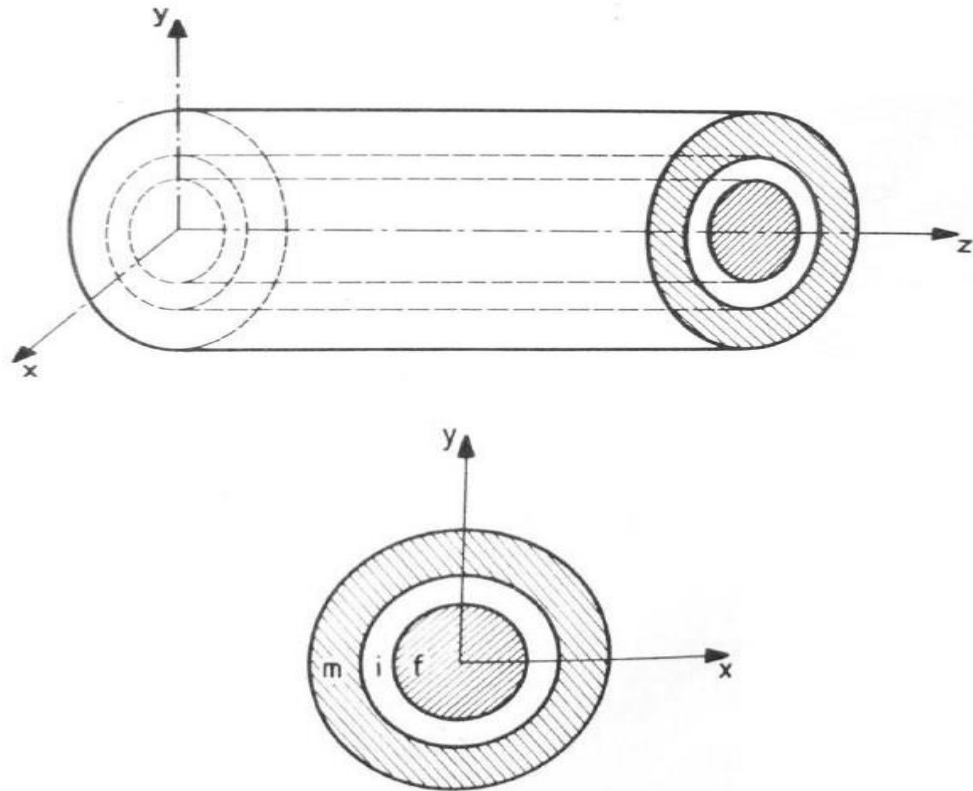
Στην περίπτωση μετρήσεων με την μέθοδο της θερμιδομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στον προσδιορισμό των υαλώδων μεταβατικών θερμοκρασιών T_g , είναι ο ρυθμός θέρμανσης ανά μάζα ή αλλιώς ειδική θερμότητα. Έχει παρατηρηθεί ότι, σε D.S.C μετρήσεις που έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή, η εξάρτηση της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας από την ειδική θερμότητα H_f , είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως των 15°C να μπορούν να παρατηρηθούν για διαφορετικούς ρυθμούς θέρμανσης [18],[19],[20].



Εικόνα 2.6 Διφασικό Μοντέλο Εγκλείσματος –Μήτρας

2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Πιο αναλυτικά παρακάτω θα περιγραφεί η διαδικασία εύρεσης του πάχους της ενδιάμεσης φάσης. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο ελέγχου κάνοντας χρήση του τριφασικού μοντέλου (Εικ.2.7), το οποίο προκύπτει ουσιαστικά από το διφασικό μοντέλο (Εικ.2.6) με την προσθήκη της ενδιάμεσης φάσης, και είναι το δομικό «κύτταρο» για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, το οποίο αποτελείται από μέσα προς τα έξω, από έγκλεισμα, ενδιάμεση φάση και μήτρα αντίστοιχα. Να σημειωθεί ότι δεν αλλάζει ο συνολικός όγκος σε σχέση με το διφασικό μοντέλο γιατί η ενδιάμεση φάση είναι απλά αλλοιωμένη μήτρα, άρα καταλαμβάνει τμήμα του όγκου που έχει η μήτρα στο διφασικό μοντέλο.



Εικόνα 2.7 Τριφασικό μοντέλο

Αν ορίσουμε ως r_f , r_i και r_m τις ακτίνες των περιοχών των φάσεων του παραπάνω μοντέλου, με τους δείκτες f , i , m να συμβολίζουν το έγκλεισμα, την ενδιάμεση φάση και την μήτρα αντιστοίχως, τότε οι αντίστοιχες κατ' όγκο περιεκτικότητες θα γράφονται ως:

$$U_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}, U_i = \frac{r_i^2 - r_f^2}{r_m^2}, U_m = \frac{r_m^2 - r_i^2}{r_m^2} \quad (2.2.1)$$

Και επίσης θα ισχύει

$$U_m = (1 - U_f - U_i) \quad (2.2.2)$$

Καθώς η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων της μήτρας, τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα, επίσης **αυξάνεται**. Αυτό ισοδυναμεί με αύξηση της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης, που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ΔC_p το οποίο εκφράζει την απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας στην υαλώδη μεταβατική περιοχή μιας ουσίας, και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης. Η σχέση αυτή για τα ινώδη υλικά εκφράζεται από τον παρακάτω τύπο[21],[22]:

$$\frac{(r_f + \Delta r)^2}{r_f^2} - 1 = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (2.2.3)$$

Όπου το Δr εκφράζει το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και η παράμετρος μ δίνεται βάσει από τον τύπο:

$$\mu = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \quad (2.2.4)$$

Όπου ΔC_p^f είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα με έγκλεισμα, ενώ ΔC_p^0 είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα «σκέτη», χωρίς έγκλεισμα, στις αντίστοιχες υαλώδεις μεταβατικές θερμοκρασίες τους.

Η σχέση (2.2.3), αφού $r_f + \Delta r$ που ισούται ουσιαστικά με r_i , με την βοήθεια των σχέσεων (2.2.1), μπορεί να γραφτεί και σαν:

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (2.2.5)$$

Η σχέση (2.2.5) μαζί με την (2.2.1) και την (2.2.2) εξάγουν την εξής σχέση:

$$cnt = \frac{r_f^2}{r_i^2} = \frac{U_f}{U_f + U_i} = \frac{1 - U_f}{1 - U_f(1 - \mu)} \quad (2.2.6)$$

Τελικά υπολογίζουμε με την βοήθεια των DSC (differential scanning calorimetry) μετρήσεων, τα άλματα της ειδικής θερμότητας ΔC_p στην υαλώδη μετάβαση ενός ινώδους σύνθετου υλικού και του αντίστοιχου πολυμερούς, από το οποίο είναι αποκλειστικά φτιαγμένη η μήτρα του εν λόγω σύνθετου υλικού (δηλαδή χωρίς να υπάρχει καθόλου έγκλεισμα). Έτσι μπορούμε να εκτιμήσουμε τον παράγοντα μ και άρα και το πάχος της ενδιάμεσης φάσης, αφού μας είναι γνωστή η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

2.2.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του ΕΜΠ έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και ινών γυαλιού. Παρακάτω θα περιγράψουμε μία από τις πειραματικές έρευνες [23],[24],[25] που έγιναν για την μέτρηση του πάχους και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης.

Στην συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης αποτελούμενα από μία εποξειδική μήτρα (PermaglassXE5/1, Permali Ltd.,U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-E. Το υλικό της μήτρας βασίστηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης A, συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη (Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν **διάμετρο $1,2 \times 10^{-5} \text{ m}$** και η κατ' όγκο περιεκτικότητά τους ήταν **0.65**.

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών γυαλιού προσδιορίστηκε με το συνήθη τρόπο, δηλαδή καίγοντας δείγματα του ινώδους σύνθετου υλικού και ζυγίζοντας το υπόλοιπο. Έτσι η κατά μάζα περιεκτικότητα του γυαλιού υπολογίστηκε 79.6% (+/- 0.28%). Με την χρήση του αποτελέσματος αυτού και των τιμών των ειδικών πυκνοτήτων του γυαλιού ($\rho_g = 2.55 \text{ gr/cm}^3$) και της εποξειδικής μήτρας ($\rho_c = 1.20 \text{ gr/cm}^3$), και κάνοντας και κάποιους εύκολους υπολογισμούς, υπολογίζεται ότι η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών γυαλιού του πειράματος μας είναι 0.65.

Από την άλλη μεριά, δοκίμια με διάμετρο 0.004 m και πάχους που ποικίλει από 0.001m μέχρι 0.0015m, φτιαγμένα είτε από ινώδες σύνθετο υλικό σε διάφορες κατ' όγκο περιεκτικότητες είτε φτιαγμένα από το υλικό αποκλειστικά της μήτρας υποβλήθηκαν σε δοκιμές DSC, με θερμικό αναλυτή στην περιοχή της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας τους, έτσι ώστε να προσδιορισθούν οι τιμές της ειδικής θερμότητάς τους.

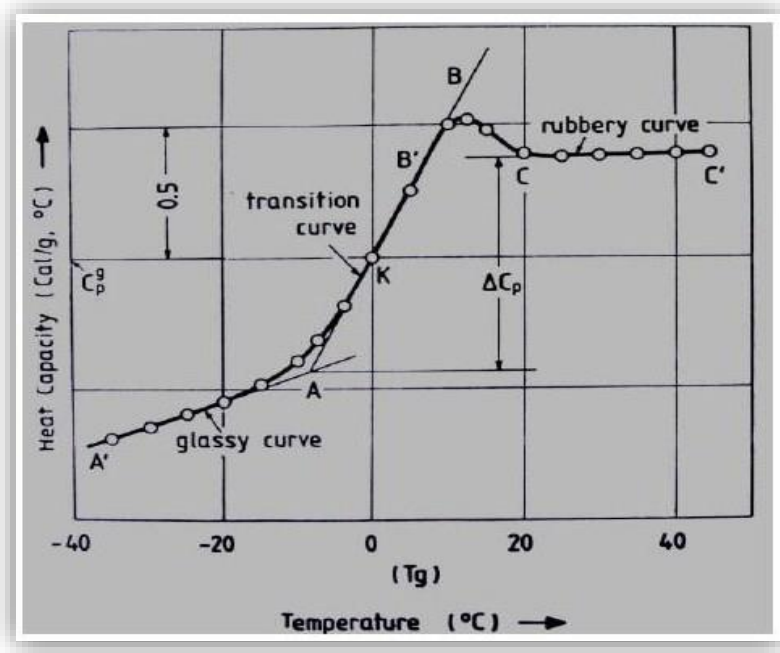
Οι τιμές του παράγοντα μ (σχέση 2.2.4) εξήχθησαν από τις τιμές των αλμάτων των ειδικών θερμοτήτων της μήτρας ενισχυμένης με ίνες γυαλιού και της μη ενισχυμένης μήτρας, δηλαδή των ΔC_p^f και ΔC_p^0 αντίστοιχα, που υπολογίσθηκαν από τα $\Delta C_p = f(T)$ διαγράμματα, σύμφωνα με το διάγραμμα της **Εικόνας 2.8**. Οι τιμές του μ που προσδιορίστηκαν από τις DSC δοκιμές, επέτρεψαν και την εκτίμηση του πάχους της ενδιάμεσης φάσης για κάθε σύνθετο υλικό (για κάθε διαφορετική κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα).

Έχει δειχθεί [22] ότι για της μιας κατεύθυνσης ινώδη σύνθετα υλικά, υπάρχει μια παραβολική σχέση ανάμεσα στην κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και στην κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

Αυτή η σχέση είναι ως εξής:

$$U_i = CU_f^2 \quad (2.2.7)$$

Όπου με U_i και U_f συμβολίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και του εγκλείσματος αντίστοιχα.
 Η σταθερά C στην περίπτωση μας είναι ίση με 0.123 [26].

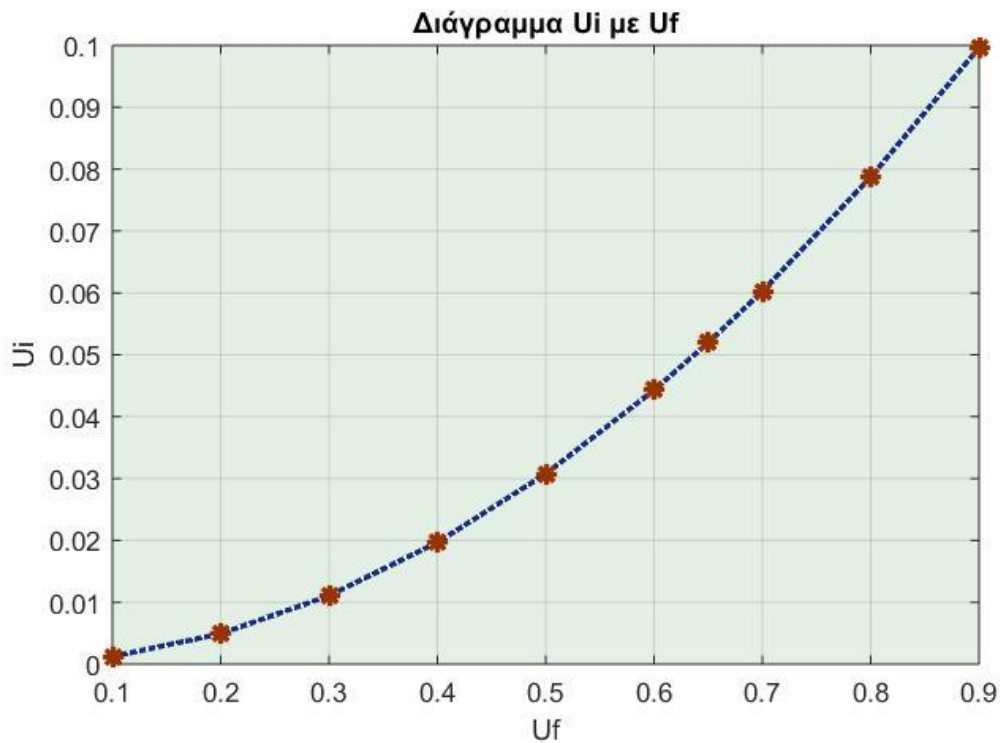


Εικόνα 2.8 Διάγραμμα $C_p = f(T)$

Να σημειώσουμε εδώ ότι ύστερα από τον υπολογισμό της σχέσης (2.2.7) και με την βοήθεια της σχέσης (2.2.3) εξάγεται ο παρακάτω πίνακας τιμών για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και παρατηρούμε από το ακόλουθο διάγραμμα ότι η μεταβολή της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος είναι περίπου παραβολική [1γ],[2γ]:

U_f	U_i	$r_i(\mu m)$
0.10	0.00120	6.036
0.20	0.00492	6.073
0.30	0.01107	6.110
0.40	0.01968	6.146
0.50	0.03075	6.182
0.60	0.04428	6.217
0.65	0.05200	6.235
0.70	0.06027	6.254
0.80	0.07872	6.288
0.90	0.09963	6.323

Πίνακας α



Εικόνα 2.8 Διάγραμμα $U_f - U_i$

Η σχέση (2.2.7) όμως για περιεκτικότητες εγκλείσματος μεγαλύτερες από 0,65 δεν ευσταθεί, καθώς παρατηρούμε ότι για $U_f = 0,90$ το υπόλοιπο 0,10 σύμφωνα με τα παραπάνω θα αποτελεί την περιεκτικότητα της ενδιάμεσου φάσεως. Αυτό συνεπάγεται πως η περιεκτικότητα της μήτρας είναι μηδενική πράγμα άτοπο. Επομένως θα πρέπει να επεκτείνουμε τις προβλέψεις μας για τους συντελεστές πέρα της $U_f = 0,65$ η οποία και είναι η βασική περιεκτικότητα ινών που χρησιμοποιείται στις πειραματικές μεθόδους.

Έτσι λοιπόν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η περιεκτικότητα της ενδιάμεσου φάσεως, η οποία είναι μηδέν για $U_f = 0$ αφού δεν υπάρχουν ίνες, αυξάνεται και φτάνει σε μία μέγιστη τιμή για μια συγκεκριμένη περιεκτικότητα U_f και έπειτα μειώνεται τείνοντας στο μηδέν όταν $U_f = 1$ όπου δεν υπάρχει πλέον καθόλου μήτρα καθώς σύμφωνα με το μοντέλο μας ισχύει η σχέση $U_i = 1 - U_f - U_m$. Βέβαια στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε πως για ένα πραγματικό υλικό **η περιεκτικότητα του σε ίνες δεν μπορεί να υπερβεί το 90%** για οποιαδήποτε κατανομή ινών.

Έτσι λοιπόν θεωρούμε μία τριτοβάθμια παραβολική σχέση, η οποία μπορεί να περιγράψει καλύτερα τη σχέση μεταξύ εγκλείσματος και ενδιάμεσου φάσεως:

$$U_i = C_1 U_f^3 + C_2 U_f^2 + C_3 U_f + C_4$$

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 μπορούμε να επιλέξουμε τη πειραματική τιμή για $U_f = 0,65$ καθώς και τις συνοριακές συνθήκες:

α) $U_i = 0$ όταν $U_f = 0$ καθώς εκεί δεν έχουμε ίνες

β) $U_i = 0$ όταν $U_f = 1$ (στη πραγματικότητα $U_f = 0,90$) όπου δεν υπάρχει καθόλου μήτρα¹

γ) για $U_f = 0$ υπάρχει τοπικό ακρότατο δηλαδή θα ισχύει $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0$

δ) για $U_f = 0,65$ θα πρέπει $U_i = 0,052$.

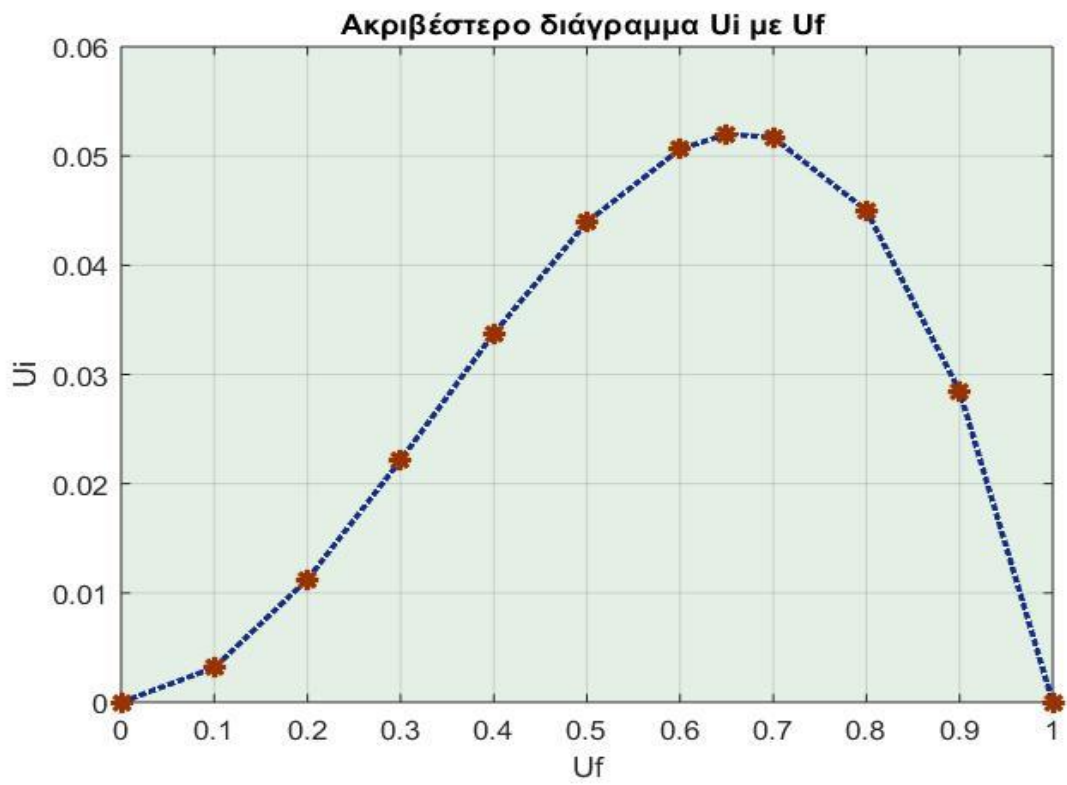
Χρησιμοποιώντας αυτές τις συνοριακές συνθήκες υπολογίζουμε τις σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 και έχουμε : $C_1 = -0.3516, C_2 = 0.3516, C_3 = 0$ και $C_4 = 0$. Επομένως η ακριβής σχέση είναι η:

$$U_i = -0.3516U_f^3 + 0.3516U_f^2$$

Μετά από υπολογισμούς με την παραπάνω σχέση προκύπτει ο παρακάτω πίνακας τιμών για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση. Από το ακόλουθο διάγραμμα παρατηρούμε ότι η μεταβολή της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος είναι περίπου παραβολική:

U_f	U_i
0,10	0.0031644
0,20	0.0112512
0,30	0.0221508
0,40	0.0337536
0,50	0.0439500
0,60	0.0506304
0,65	0.0519929
0,70	0.0516852
0,80	0.0450048
0,90	0.0284796

Πίνακας β



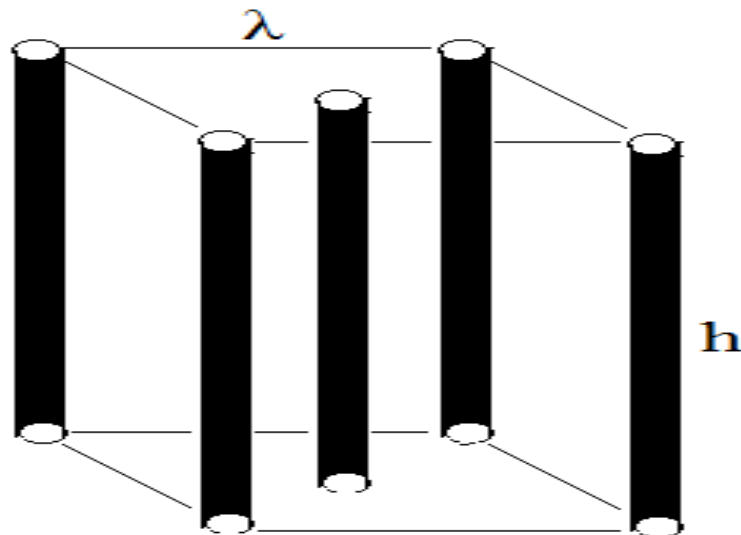
Εικόνα 2.9 Ακριβέστερο διάγραμμα U_f - U_i

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

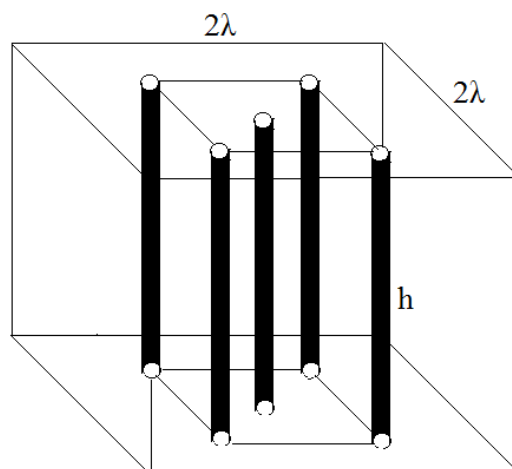
3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΕΤΡΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΝΩΝ

Σε αυτήν την υπό-ενότητα, θα θεωρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι ίνες γυαλιού(ινώδη εγκλείσματα) μέσα στη μάζα της μήτρας ενός ινώδους σύνθετου υλικού έτσι ώστε να μπορέσουμε ύστερα να προσδιορίσουμε τις ακτίνες του κυλινδρικού μοντέλου που θα προκύψει μέσα από αυτήν την μελέτη [1δ],[2δ].



Εικόνα 3.1 Μοντέλο με 5 ίνες

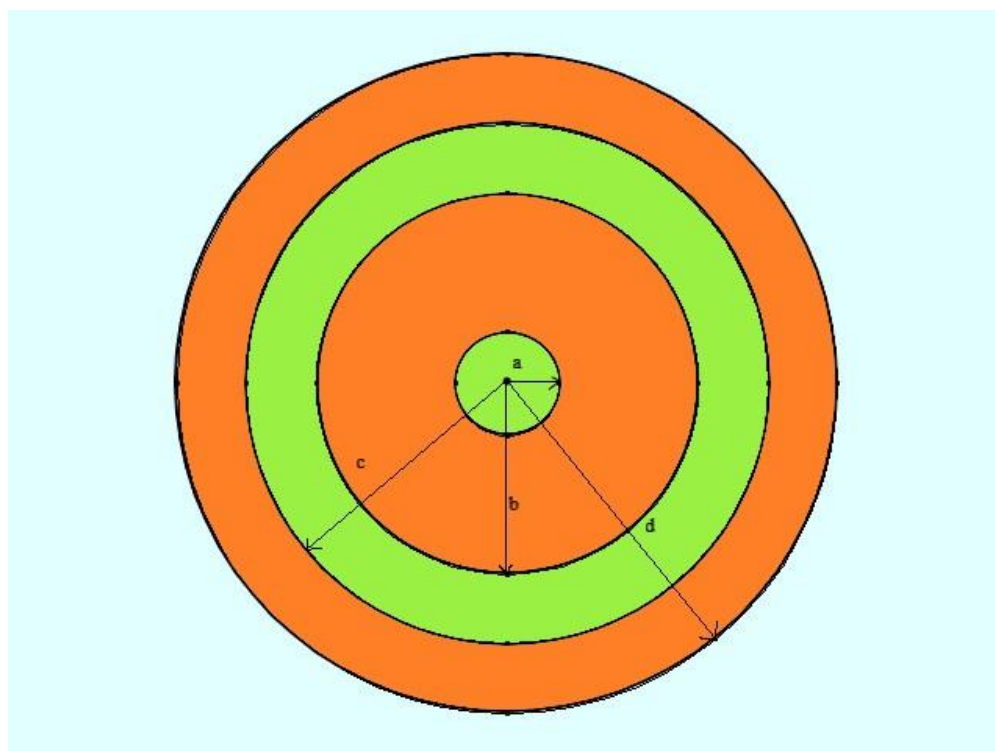


Εικόνα 3.2 Στοιχειώδες Δομικό Κύτταρο

Θεωρούμε λοιπόν ότι 4 ίνες καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός τυχαίου τετραγωνικού πρίσματος ακμής λ και πεπερασμένου μήκους h και μία ίνα καταλαμβάνει το κέντρο βάρους του. Το υπόψη πρίσμα περικλείεται σε ένα δεύτερο τετραγωνικό πρίσμα ακμής 2λ και ίδιου μήκους (Εικ.3.1,Εικ.3.2).Το πρίσμα αυτό επαναλαμβάνεται συμμετρικά σε όλη την μάζα του σύνθετου υλικού και το ορίζουμε ως **το στοιχειώδες δομικό «κύτταρο»** του υλικού. Το τμήμα μεταξύ των ινών αλλά και το τμήμα ανάμεσα στο αρχικό τετραγωνικό πρίσμα και το δομικό «κύτταρο» του υλικού, αντιπροσωπεύει την μήτρα του σύνθετου υλικού.

Το πρίσμα ακμής 2λ θα το αναγάγουμε τώρα, σε ένα «ισοδύναμο» κυλινδρικό μοντέλο με ίδιο μήκος h για να εκμεταλλευθούμε έτσι την κυλινδρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτήν, σε ένα τετραφασικό μοντέλο.

Το τετραφασικό μοντέλο μας, θα αποτελείται από τέσσερις ομόκεντρους κυλίνδρους ακτίνας a, b, c, d ($a < b < c < d$) (Εικ.3.3). Σε αυτό το μοντέλο, η δεύτερη και η τέταρτη φάση (πορτοκαλί), που τις αποτελούν ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b , και ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα c και εξωτερική ακτίνα d , αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας και θα τα συμβολίζουμε με m . Ο κύλινδρος με ακτίνα a καθώς και ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c , πρώτη και τρίτη φάση (πράσινο), αντιπροσωπεύουν το σύνολο των ινών του δομικού μας «κυττάρου» και τα συμβολίζουμε με f .



Εικόνα 3.3 Κυλινδρικό Τετραφασικό Μοντέλο

Για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, ξέρουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών του U_f , όπως επίσης και την ακτίνα των ινών του r_f . Για το πρίσμα ακμής 2λ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των πέντε ινών του, προς τον όγκο ολόκληρου του πρίσματος, δηλαδή:

$$U_f = \frac{V_f}{V_{\omega}} = \frac{5\pi r_f^2 h}{(2\lambda)^2 h} = \frac{5\pi r_f^2}{4\lambda^2} \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt{\frac{5\pi}{4U_f}} \quad (3.1.1)$$

Επίσης ο όγκος του πρίσματος με ακμή 2λ αντιπροσωπεύεται από τον όγκο του κυλίνδρου ακτίνας d στο κυλινδρικό μοντέλο. Έτσι θα έχουμε:

$$(2\lambda)^2 h = \pi d^2 h \Rightarrow d = 2\lambda \sqrt{\frac{1}{\pi}} \quad (3.1.2)$$

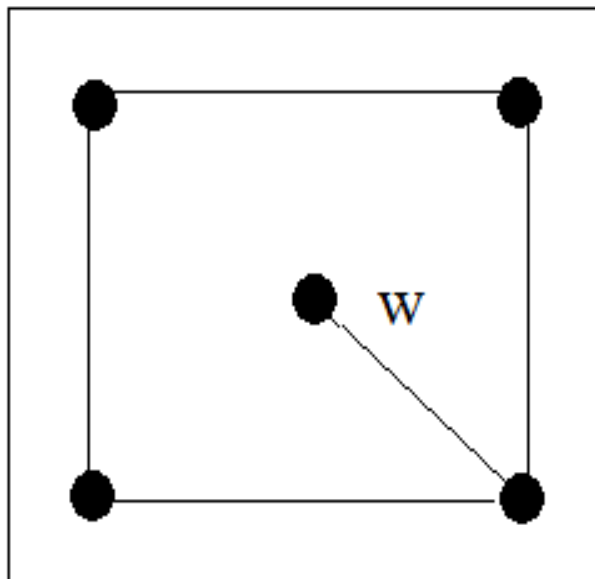
Η πρώτη φάση αποτελείται από την κυλινδρική ίνα που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του πρίσματος. Οπότε θα ισχύει:

$$a = r_f \quad (3.1.3)$$

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των ακτινών b, c .

Θεωρούμε το τετραγωνικό πρίσμα ακμής λ όπως πριν. Η απόσταση από τον κεντρικό άξονα του, έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από εφαρμογή γεωμετρικών υπολογισμών, έχει μήκος $\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda$. Αν ονομάσουμε αυτήν την απόσταση w , το w θα αντιπροσωπεύει την απόσταση του άξονα του πρίσματος από τα κέντρα των ινών και ισχύει ότι (Εικ.3.4):

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \quad (3.1.4)$$



Εικόνα 3.4 Τετραγωνικό πρίσμα

Θεωρούμε επίσης ότι ο κυλινδρικός φλοιός με ακτίνες b, c κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της κυλινδρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w , προσαρμοσμένη στο τετραφασικό μοντέλο. Θα ισχύει λοιπόν:

$$\pi(c^2 - w^2)h = \pi(w^2 - b^2)h \Rightarrow 2w^2 = b^2 + c^2 \quad (3.1.5)$$

Ο όγκος της τρίτης φάσης ισούται με τον όγκο των τεσσάρων ινών και άρα θα πρέπει:

$$\pi(c^2 - b^2)h = 4\pi r_f^2 h \Rightarrow c^2 - b^2 = 4r_f^2 \quad (3.1.6)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.1.5), (3.1.6) προκύπτουν οι εκφράσεις των c, b ως εξής:

$$b = \sqrt{w^2 - 2r_f^2} \quad (3.1.7)$$

$$c = \sqrt{w^2 + 2r_f^2} \quad (3.1.8)$$

Και άρα από τις σχέσεις (3.1.1) και (3.1.3) θα έχουμε:

$$a = r_f \quad (3.1.9)$$

$$b = \sqrt{\frac{5\pi r_f^2}{8U_f} - 2r_f^2} \quad (3.1.10)$$

$$c = \sqrt{\frac{5\pi r_f^2}{8U_f} + 2r_f^2} \quad (3.1.11)$$

$$d = r_f \sqrt{\frac{5}{U_f}} \quad (3.1.12)$$

Καταφέραμε έτσι να εκφράσουμε τις ακτίνες a, b, c, d συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f και r_f .

3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Σε αυτή την υποενότητα θα εξετάσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν για το κυλινδρικό τετραφασικό μοντέλο χωρίς ενδιάμεση φάση, βάσει της κατανομής των ινών γυαλιού που έχουμε θεωρήσει. Να σημειώσουμε εδώ ότι η θεώρηση ύπαρξης ενδιάμεσης φάσης στο συγκεκριμένο μοντέλο, δεν επηρεάζει τις σχέσεις των γεωμετρικών περιορισμών και αυτό διότι **η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και συνεπώς είναι μέρος της μήτρας**. Άρα θα έχουμε:

$$b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{5\pi r_f^2}{4U_f} - 2r_f^2} > 0 \Rightarrow \frac{5\pi r_f^2}{4U_f} - 2r_f^2 > 0 \Rightarrow \quad (3.1.13)$$

$$U_f < \frac{5\pi}{8} \Rightarrow U_f < 1,9625$$

$$a < b \Rightarrow r_f < \sqrt{w^2 - 2r_f^2} \Rightarrow 3r_f^2 < w^2 \Rightarrow \quad (3.1.14)$$
$$3r_f^2 < \frac{1}{2} r_f^2 \frac{5\pi}{4U_f} \Rightarrow U_f < \frac{5\pi}{24} \Rightarrow U_f < 0,65416$$

$$c < d \Rightarrow \sqrt{w^2 + 2r_f^2} < 2\lambda \sqrt{\frac{1}{\pi}} \Rightarrow 2r_f^2 + \frac{\lambda^2}{2} < \frac{4\lambda^2}{\pi} \Rightarrow \quad (3.1.15)$$
$$2r_f^2 < 0,773r_f^2 \frac{5\pi}{4U_f} \Rightarrow U_f < 1,51$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι βάσει αυτού του μοντέλου **η μέγιστη επιτρεπτή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε ινώδες έγκλεισμα** θα είναι **$U_f < 0,65416$** .

3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η πρώτη φάση, από μέσα προς τα έξω, με ακτίνα r_1 αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή του εγκλείσματος.

Η δεύτερη φάση, είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την r_1 και εξωτερική ακτίνα την r_2 και αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.

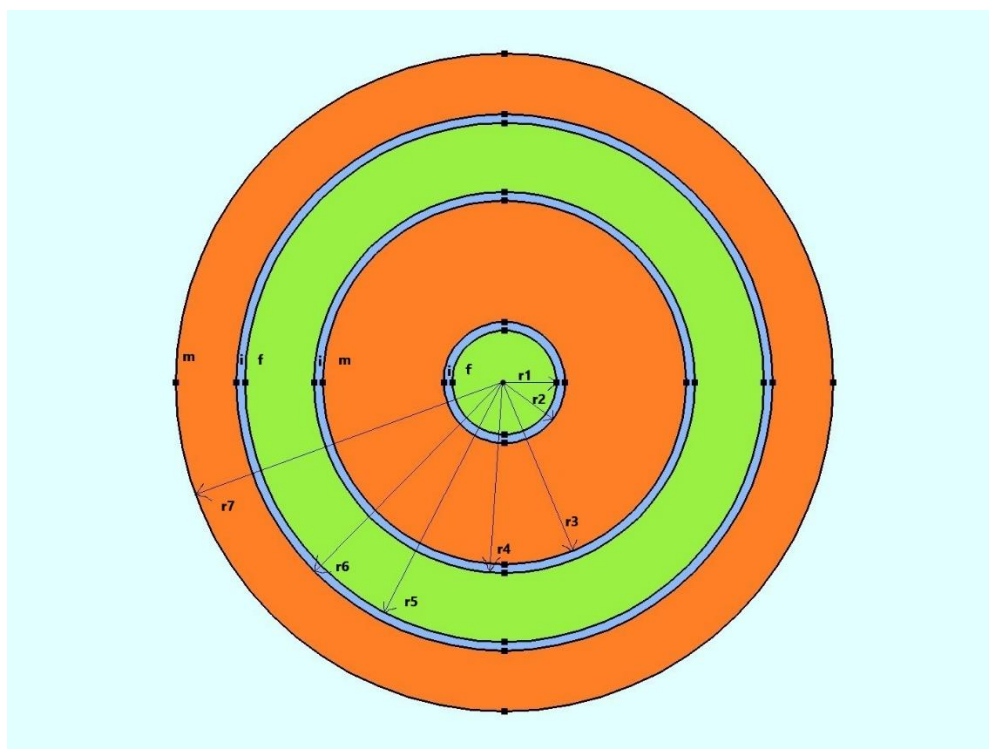
Η τρίτη φάση, είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την r_2 και εξωτερική ακτίνα την r_3 και αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή της μήτρας.

Η τέταρτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την r_3 και εξωτερική ακτίνα την r_4 και αντιπροσωπεύει την δεύτερη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.

Η πέμπτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την r_4 και εξωτερική ακτίνα την r_5 και αντιπροσωπεύει την δεύτερη περιοχή του εγκλείσματος.

Η έκτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα r_5 και εξωτερική ακτίνα r_6 και αντιπροσωπεύει τη τρίτη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.

Η έβδομη και τελευταία φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα r_6 και εξωτερική ακτίνα r_7 και αντιπροσωπεύει τη δεύτερη περιοχή της μήτρας.



Εικόνα 3.5 Επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο

Αρχικά πρέπει να προσδιορίσουμε τις ακτίνες στις περιοχές της ενδιάμεσης φάσης, την r_2 , r_4 και r_6 (Εικ.3.5), καθώς και την κατ' όγκο περιεκτικότητα κάθε μίας από τις περιοχές αυτές.

Οι κατ' όγκο περιεκτικότητες στο επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο ορίζονται ως εξής:

1. U_1 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής του εγκλείσματος (πρώτη φάση).
2. U_2 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (δεύτερη φάση).
3. U_3 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής της μήτρας (Τρίτη φάση).
4. U_4 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (τέταρτη φάση).

5. U_5 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής του εγκλείσματος (πέμπτη φάση).

6. U_6 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της τρίτης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (έκτη φάση).

7. U_7 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής της μήτρας (έβδομη φάση).

Θεωρούμε επίσης τα κάτωθι:

1. $U_m = U_3 + U_7$, όπου U_m είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της μήτρας στο μοντέλο

2. $U_i = U_2 + U_4 + U_6$, όπου U_i είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης

3. $U_f = U_1 + U_5$, όπου U_f είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της ίνας.

Επίσης συμβολίζουμε ως εξής:

$$1. \quad U_1 = U_{f,1}$$

$$2. \quad U_2 = U_{i,1}$$

$$3. \quad U_3 = U_{m,1}$$

$$4. \quad U_4 = U_{i,2}$$

$$5. \quad U_5 = U_{f,2}$$

$$6. \quad U_6 = U_{i,3}$$

$$7. \quad U_7 = U_{m,2}$$

Κάνοντας τη παραδοχή τώρα, ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί μήτρα και ότι η αναλογία της θα είναι σταθερή και στις δύο περιοχές εμφάνισης της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}+U_{i,2}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,1} + U_{i,2} + U_{i,3}}{U_{m,1} + U_{m,2}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1-U_f-U_i} = k \quad (3.2.1)$$

Γνωρίζοντας βέβαια ότι γενικά ισχύει:

$$U_m = 1 - U_f - U_i \quad (3.2.2)$$

Άρα από τις σχέσεις (3.2.1), (3.2.2) θεωρώντας ότι $U_{i,1} = U_{i,2}$ προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\frac{2U_{i,1}}{U_{m,1}} = k \Rightarrow \frac{kU_{m,1}}{2} = U_{i,1} \Rightarrow \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)h}{\pi d^2 h} = k \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)h}{2\pi d^2 h} \Rightarrow (r_2^2 - r_1^2) = \frac{k}{2}(r_3^2 - r_2^2) \Rightarrow$$

$$(k+2)r_2^2 = kr_3^2 + 2r_1^2 \Rightarrow r_2^2 = \frac{kr_3^2 + 2r_1^2}{k+2} \Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{kr_3^2 + 2r_1^2}{k+2}}$$
(3.2.3)

$$U_{i,2} = \frac{k}{2}U_{m,1} \Rightarrow \frac{\pi(r_4^2 - r_3^2)h}{\pi d^2 h} = k \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)h}{2\pi d^2 h} \Rightarrow (r_4^2 - r_3^2) = \frac{k}{2}(r_3^2 - r_2^2) \Rightarrow$$

$$2r_4^2 = (k+2)r_3^2 - kr_2^2 \Rightarrow r_4 = \sqrt{\frac{(k+2)r_3^2 - kr_2^2}{2}}$$
(3.2.4)

$$U_{i,3} = kU_{m,2} \Rightarrow \frac{\pi(r_6^2 - r_5^2)h}{\pi d^2 h} = k \frac{\pi(r_7^2 - r_6^2)h}{\pi d^2 h} \Rightarrow (r_6^2 - r_5^2) = k(r_7^2 - r_6^2) \Rightarrow$$

$$(k+1)r_6^2 = kr_7^2 + r_5^2 \Rightarrow r_6^2 = \frac{kr_7^2 + r_5^2}{(k+1)} \Rightarrow r_6 = \sqrt{\frac{kr_7^2 + r_5^2}{(k+1)}}$$
(3.2.5)

Σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι οι σχέσεις των ακτινών του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, που συμβολίζονταν στη προηγούμενη ενότητα (βλ. Εικ. 3.3) με a, b, c, d χρησιμοποιούνται και στη θεωρητική ανάπτυξη του επταφασικού μοντέλου. Οι ακτίνες a, b, c, d του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, απλώς μετονομάζονται σε r_1, r_3, r_5, r_7 αντίστοιχα και ορίζουν τις εξωτερικές ακτίνες των περιοχών της 1^{ης}, 3^{ης}, 5^{ης}, 7^{ης} φάσης του επταφασικού μοντέλου.

Αυτό συμβαίνει γιατί η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και άρα δεν υπάρχει προσθήκη άλλου υλικού στο μοντέλο μας. Ως εκ τούτου η εξωτερική ακτίνα του επταφασικού μοντέλου που προκύπτει κατά την θεώρηση της εισαγωγής της ενδιάμεσης φάσης γύρω από το έγκλεισμα, παραμένει ίδια με του τετραφασικού μοντέλου. Επίσης παραμένει όμοια και η εξωτερική και εσωτερική ακτίνα της δεύτερης φάσης του εγκλείσματος του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, με τις αντίστοιχες στο επταφασικό μοντέλο. Δηλαδή η θεώρηση της ενδιάμεσης φάσης δεν επηρεάζει την κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, παρά μόνο την κατ' όγκο περιεκτικότητα σε μήτρα.

Από προηγούμενη μελέτη (βλέπε κεφ.2), για κάθε τιμή της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε ενδιάμεση φάση. Τα ζευγάρια των τιμών των παραπάνω περιεκτικότητων παρουσιάζονται στο **Πίνακα β**.

U_f	U_i
0,10	0.0031644
0,20	0.0112512
0,30	0.0221508
0,40	0.0337536
0,50	0.0439500
0,60	0.0506304
0,65	0.0519929
0,70	0.0516852
0,80	0.0450048
0,90	0.0284796

Πίνακας β

Χρησιμοποιώντας τώρα, τις σχέσεις (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12), (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) για κάθε ζεύγος τιμών (U_f , U_i) του **Πίνακα β**, υπολογίζονται οι ακτίνες για όλες τις φάσεις του επαφασικού μας μοντέλου και παρουσιάζονται αναλυτικά στο **Πίνακα γ**. Εδώ να αναφέρουμε ότι η διάμετρος των εγκλεισμάτων θεωρείται γνωστή, και έχει τιμή 12μm. Άρα και η ακτίνα τους, r_f θα είναι ίση με 6μm.

U_f	U_i	r_1 (μm)	r_2 (μm)	r_3 (μm)	r_4 (μm)	r_5 (μm)	r_6 (μm)	r_7 (μm)
0.10	0.0031644	6	6.08725	25.19640	25.21732	27.90803	27.97228	42.42641
0.20	0.0112512	6	6.14313	16.77585	16.82757	20.62594	20.78710	30.00000
0.30	0.0221508	6	6.16860	12.79138	12.87133	17.53908	17.80089	24.49490
0.40	0.0337536	6	6.16350	10.23302	10.32973	15.77069	16.12570	21.21320
0.50	0.0439500	6	6.12651	8.32897	8.42056	14.60725	15.04195	18.97367
0.60	0.0506304	6	6.05498	6.76829	6.81707	13.77714	14.27435	17.32051
0.65	0.0519929	6	6.00500	6.06197	6.06691	13.44423	13.96547	16.64101

Πίνακας γ

Έχοντας υπολογίσει τις ακτίνες του επαφασικού κυλινδρικού μας μοντέλου θα είναι εύκολος και ο υπολογισμός των κατ' όγκο περιεκτικότητας των επτά φάσεων. Για τις κατ' όγκο περιεκτικότητες και των επτά φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$\begin{aligned}
 U_1 = U_{f,1} &= \frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_7^2 h} = \frac{r_1^2}{r_7^2} \\
 U_2 = U_{i,1} &= \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_7^2} \\
 U_3 = U_{m,1} &= \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{r_7^2} \\
 U_4 = U_{i,2} &= \frac{\pi(r_4^2 - r_3^2)h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_4^2 - r_3^2)}{r_7^2}
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$U_5 = U_{f,2} = \frac{\pi(r_5^2 - r_4^2)h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_5^2 - r_4^2)}{r_7^2}$$

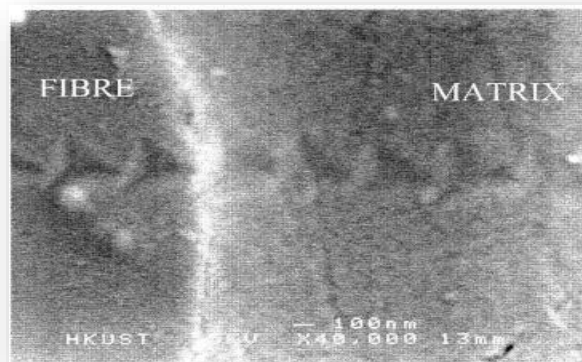
$$U_6 = U_{i,3} = \frac{\pi(r_6^2 - r_5^2)h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_6^2 - r_5^2)}{r_7^2}$$

$$U_7 = U_{m,2} = \frac{\pi(r_7^2 - r_6^2)h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_7^2 - r_6^2)}{r_7^2}$$

Παρακάτω παραθέτουμε τον **Πίνακα δ** με συγκεντρωμένες τις τιμές των κατ' όγκο περιεκτικοτήτων των επτά φάσεων, για τις αντίστοιχες τιμές της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του **πίνακα γ**. Επίσης στους **Πίνακες γ και δ** έχουμε λάβει υπόψιν και τους γεωμετρικούς περιορισμούς που μελετήθηκαν στην υποενότητα 3.1.2.

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0.020585959	0.000585915	0.332113167	0.000585915	0.079414085	0.001994630	0.565306288
0.041931200	0.001931200	0.270767882	0.001931200	0.158068800	0.007415960	0.519884958
0.063419427	0.003419427	0.209279655	0.003419427	0.236580573	0.015420150	0.471880768
0.084419429	0.004419430	0.148279652	0.004419430	0.315580571	0.025163361	0.422137558
0.104261440	0.004261414	0.088437668	0.004261414	0.395738586	0.035801751	0.371499168
0.122209280	0.002209280	0.030489801	0.002209280	0.477790720	0.046491481	0.320809437
0.130216561	0.000216561	0.002482521	0.000216561	0.519783439	0.051591948	0.295708970

Πίνακας δ



Εικόνα 3.6 Ενδιάμεση Φάση Σύνθετου Υλικού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

4.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδραση τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του [1ε],[2ε].

Γενικώς το μέτρο ελαστικότητας E_i , το μέτρο διάτμησης G_i και ο λόγος Poisson ν_i της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφραστούν ως ένα πολυώνυμο n βαθμού με μεταβλητή ακτίνα r .

Δηλαδή:

$$E_i = f(r), G_i = h(r) \text{ και } \nu_i(r) = g(r)$$

ή

$$E_i(r) = A_1 r^n + B_1 r^{n-1} + C_1 r^{n-2} + \dots, G_i(r) = A_2 r^n + B_2 r^{n-1} + C_2 r^{n-2} + \dots,$$

$$\nu_i(r) = A_3 r^n + B_3 r^{n-1} + C_3 r^{n-2} + \dots$$

όπου

$$r_{f,1} \leq r \leq r_{i,1}, r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2} \text{ και } r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3} \text{ για κάθε ενδιάμεση φάση.}$$

Στη μελέτη αυτή για λόγους απλούστευσης, λαμβάνουμε υπόψη την παραβολική μεταβολή των E_i , G_i , ν_i , καθώς αυτού του είδους η μεταβολή έχει παρατηρηθεί, ότι συγκρινόμενη με την γραμμική, την υπερβολική και την εκθετική δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα σε σχέση με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα [27].

Θεωρούμε ότι $E_m \leq E_i(r) \leq E_f$, $G_m \leq G_i(r) \leq G_f$ και $\nu_f \leq \nu_i(r) \leq \nu_m$ όταν $r_{f,1} \leq r \leq r_{i,1}$, $r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2}$ και $r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση. Επειδή στο επταφασικό μοντέλο έχουμε 3 ενδιάμεσες φάσεις, οι οριακές συνθήκες θα είναι οι παρακάτω:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση (περιοχή 2 στην Εικ.3.5)

$$\text{Στο } r = r_{f,1} : E_i(r) = nE_f, G_i(r) = nG_f \text{ και } \nu_i(r) = n\nu_f \quad (4.1.1)$$

$$\text{Στο } r = r_{i,1} : E_i(r) = E_m, G_i(r) = G_m \text{ και } \nu_i(r) = \nu_m \quad (4.1.2)$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση (περιοχή 4 στην Εικ.3.5)

$$\text{Στο } r = r_{m,1} : E_i(r) = E_m, G_i(r) = G_m \text{ και } \nu_i(r) = \nu_m \quad (4.1.3)$$

$$\text{Στο } r = r_{i,2} : E_i(r) = nE_f, G_i(r) = nG_f \text{ και } \nu_i(r) = n\nu_f \quad (4.1.4)$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση (περιοχή 6 στην Εικ.3.5)

$$\text{Στο } r = r_{f,2} : E_i(r) = nE_f, G_i(r) = nG_f \text{ και } \nu_i(r) = n\nu_f \quad (4.1.5)$$

$$\text{Στο } r = r_{i,3} : E_i(r) = E_m, G_i(r) = G_m \text{ και } \nu_i(r) = \nu_m \quad (4.1.6)$$

Με i, m, f θα συμβολίζουμε την ενδιάμεση φάση, την μήτρα και το έγκλεισμα αντίστοιχα.

Δεχόμαστε δηλαδή, ότι τα $E_i(r), G_i(r)$ και $\nu_i(r)$ της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με τη μήτρα είναι ίσα με E_m, G_m και ν_m αντιστοίχως, **αφού θεωρήσαμε ότι η ενδιάμεση φάση είναι μια περιοχή αλλοιωμένης μήτρας**. Αντίστοιχα στο όριο με το έγκλεισμα η ενδιάμεση φάση καθότι αλλοιωμένη μήτρα δεν δύναται να φθάσει τις τιμές E_f, G_f και ν_f του εγκλείσματος. Η μηχανικές ιδιότητες της ενδιάμεσου φάσεως κοντά στο έγκλεισμα εκφράζονται με βάση τον συντελεστή προσφύσεως n , που παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες με 1. Δηλαδή θεωρούμε ότι υφίσταται ένα ποσοστό επίδρασης του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση, που εκφράζεται μέσω αυτού του συντελεστή. Για να εκτιμήσουμε τη μέγιστη δυνατή επίδραση της ενδιάμεσης φάσης, θα θεωρήσουμε ότι τα $E_i(r), G_i(r)$ και $\nu_i(r)$ στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι ίσα με E_f, G_f και ν_f αντιστοίχως, δηλαδή ότι $n=1$.

Να σημειώσουμε ότι οι μετρήσεις και οι υπολογισμοί για τις παρακάτω υποενοότητες έγιναν με βάση τις τιμές της μελέτης για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση [27],[23],[24] και παρουσιάζονται στον **Πίνακα ε**.

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E(GPa)	Λόγος Poisson ν	Μέτρο διατμήσεως G(GPa)
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Υαλος	70	0.20	30

Πίνακας ε

4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σύμφωνα με αυτή τη μεταβολή τα $E_i(r)$, $G_i(r)$, $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A_1 r^2 + B_1 r + C_1$$

$$G_i(r) = A_2 r^2 + B_2 r + C_2 \quad \text{με } r_{f,i} \leq r \leq r_{i,1}, r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2} \text{ και } r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3}$$

$$v_i(r) = A_3 r^2 + B_3 r + C_3$$

αντίστοιχα για την κάθε ενδιάμεση φάση.

Εφαρμόζοντας τώρα και τις οριακές συνθήκες που έχουμε αναφέρει πιο πάνω και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις, υπολογίζουμε τις σταθερές $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$. Για τον υπολογισμό των παραπάνω εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6) θα θεωρήσουμε ότι τα $E_i(r)$, $G_i(r)$ για $r=r_{i,1}$, $r=r_{m,1}$ και $r=r_{i,3}$ θα παρουσιάζουν ελάχιστο, ενώ το $v_i(r)$ θα παρουσιάζει μέγιστο για $r=r_{i,1}$, $r=r_{m,1}$ και $r=r_{i,3}$.

$$\text{Στα σημεία που έχουμε ελάχιστο ισχύει: } \frac{dM_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με } \frac{d^2M_i(r)}{dr^2} > 0$$

$$\text{Στα σημεία που έχουμε μέγιστο ισχύει: } \frac{dM_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με } \frac{d^2M_i(r)}{dr^2} < 0$$

Έτσι προκύπτει ότι:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$A_1 = \frac{nE_f - E_m}{(r_2 - r_1)^2} \quad B_1 = -\frac{(nE_f - E_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} \quad C_1 = E_m + \frac{(nE_f - E_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2$$

$$A_2 = \frac{nG_f - G_m}{(r_2 - r_1)^2} \quad B_2 = -\frac{(nG_f - G_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} \quad C_2 = G_m + \frac{(nG_f - G_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2$$

$$A_3 = \frac{nv_f - v_m}{(r_2 - r_1)^2} \quad B_3 = -\frac{(nv_f - v_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} \quad C_3 = v_m + \frac{(nv_f - v_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2$$

Άρα :

$$E_{i,1}(r) = \left(\frac{nE_f - E_m}{(r_2 - r_1)^2} \right) r^2 - \left(\frac{(nE_f - E_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} \right) r + E_m + \frac{(nE_f - E_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2 \quad (4.1.1.1)$$

$$G_{i,1}(r) = \left(\frac{nG_f - G_m}{(r_2 - r_1)^2} \right) r^2 - \left(\frac{(nG_f - G_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} \right) r + G_m + \frac{(nG_f - G_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2 \quad (4.1.1.2)$$

$$v_{i,1}(r) = \left(\frac{nv_f - v_m}{(r_2 - r_1)^2} \right) r^2 - \left(\frac{(nv_f - v_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} \right) r + v_m + \frac{(nv_f - v_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2 \quad (4.1.1.3)$$

• Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$A_1 = \frac{(nE_f - E_m)}{(r_4 - r_3)^2} \quad B_1 = -\frac{(nE_f - E_m)2r_3}{(r_4 - r_3)^2} \quad C_1 = E_m + \frac{(nE_f - E_m)}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2$$

$$A_2 = \frac{(nG_f - G_m)}{(r_4 - r_3)^2} \quad B_2 = -\frac{(nG_f - G_m)2r_3}{(r_4 - r_3)^2} \quad C_2 = G_m + \frac{(nG_f - G_m)}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2$$

$$A_3 = \frac{(nv_f - v_m)}{(r_4 - r_3)^2} \quad B_3 = -\frac{(nv_f - v_m)2r_3}{(r_4 - r_3)^2} \quad C_3 = v_m + \frac{(nv_f - v_m)}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2$$

Άρα:

$$E_{i,2}(r) = \frac{(nE_f - E_m)}{(r_4 - r_3)^2} r^2 - \frac{(nE_f - E_m)2r_3}{(r_4 - r_3)^2} r + E_m + \frac{(nE_f - E_m)}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2 \quad (4.1.1.4)$$

$$G_{i,2}(r) = \frac{(nG_f - G_m)}{(r_4 - r_3)^2} r^2 - \frac{(nG_f - G_m)2r_3}{(r_4 - r_3)^2} r + G_m + \frac{(nG_f - G_m)}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2 \quad (4.1.1.5)$$

$$v_{i,2}(r) = \frac{(nv_f - v_m)}{(r_4 - r_3)^2} r^2 - \frac{(nv_f - v_m)2r_3}{(r_4 - r_3)^2} r + v_m + \frac{(nv_f - v_m)}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2 \quad (4.1.1.6)$$

- Για την Τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$A_1 = \frac{nE_f - E_m}{(r_6 - r_5)^2} \quad B_1 = -\frac{(nE_f - E_m)2r_6}{(r_6 - r_5)^2} \quad C_1 = E_m + \frac{(nE_f - E_m)}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2$$

$$A_2 = \frac{nG_f - G_m}{(r_6 - r_5)^2} \quad B_2 = -\frac{(nG_f - G_m)2r_6}{(r_6 - r_5)^2} \quad C_2 = G_m + \frac{(nG_f - G_m)}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2$$

$$A_3 = \frac{nv_f - v_m}{(r_6 - r_5)^2} \quad B_3 = -\frac{(nv_f - v_m)2r_6}{(r_6 - r_5)^2} \quad C_3 = v_m + \frac{(nv_f - v_m)}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2$$

Άρα:

$$E_{i,3(r)} = \left(\frac{nE_f - E_m}{(r_6 - r_5)^2} \right) r^2 - \left(\frac{(nE_f - E_m)2r_6}{(r_6 - r_5)^2} \right) r + E_m + \frac{(nE_f - E_m)}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2 \quad (4.1.1.7)$$

$$G_{i,3(r)} = \left(\frac{nG_f - G_m}{(r_6 - r_5)^2} \right) r^2 - \left(\frac{(nG_f - G_m)2r_6}{(r_6 - r_5)^2} \right) r + G_m + \frac{(nG_f - G_m)}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2 \quad (4.1.1.8)$$

$$v_{i,3}(r) = \left(\frac{nv_f - v_m}{(r_6 - r_5)^2} \right) r^2 - \left(\frac{(nv_f - v_m)2r_6}{(r_6 - r_5)^2} \right) r + v_m + \frac{(nv_f - v_m)}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2 \quad (4.1.1.9)$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και του λόγου Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_{i,1} = \frac{1}{V_{i,1}} \int_{r_1}^{r_2} E_{i,1}(r) dV$$

$$\bar{G}_{i,1} = \frac{1}{V_{i,1}} \int_{r_1}^{r_2} G_{i,1}(r) dV$$

$$\bar{\nu}_{i,1} = \frac{1}{V_{i,1}} \int_{r_1}^{r_2} \nu_{i,1}(r) dV$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_{i,2} = \frac{1}{V_{i,2}} \int_{r_3}^{r_4} E_{i,2}(r) dV$$

$$\bar{G}_{i,2} = \frac{1}{V_{i,2}} \int_{r_3}^{r_4} G_{i,2}(r) dV$$

$$\bar{\nu}_{i,2} = \frac{1}{V_{i,2}} \int_{r_3}^{r_4} \nu_{i,2}(r) dV$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_{i,3} = \frac{1}{V_{i,3}} \int_{r_5}^{r_6} E_{i,3}(r) dV$$

$$\bar{G}_{i,3} = \frac{1}{V_{i,3}} \int_{r_5}^{r_6} G_{i,3}(r) dV$$

$$\bar{\nu}_{i,3} = \frac{1}{V_{i,3}} \int_{r_5}^{r_6} \nu_{i,3}(r) dV$$

$$V_{i,1} = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

Όπου $V_{i,2} = \pi(r_4^2 - r_3^2)h$ και $dV = 2\pi r h dr$

$$V_{i,3} = \pi(r_6^2 - r_5^2)h$$

Επομένως προκύπτει:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_{i,1} = \frac{(3E_m r_1 + 5E_m r_2 + 3E_f n r_1 + E_f n r_2)}{6(r_1 + r_2)} \quad (4.1.1.10)$$

$$\bar{G}_{i,1} = \frac{(3G_m r_1 + 5G_m r_2 + 3G_f n r_1 + G_f n r_2)}{6(r_1 + r_2)} \quad (4.1.1.11)$$

$$\bar{V}_{i,1} = \frac{(3\nu_m r_1 + 5\nu_m r_2 + 3\nu_f n r_1 + \nu_f n r_2)}{6(r_1 + r_2)} \quad (4.1.1.12)$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_{i,2} = \frac{(5E_m r_3 + 3E_m r_4 + E_f n r_3 + 3E_f n r_4)}{6(r_4 + r_3)} \quad (4.1.1.13)$$

$$\bar{G}_{i,2} = \frac{(5G_m r_3 + 3G_m r_4 + G_f n r_3 + 3G_f n r_4)}{6(r_4 + r_3)} \quad (4.1.1.14)$$

$$\bar{V}_{i,2} = \frac{(5\nu_m r_3 + 3\nu_m r_4 + \nu_f n r_3 + 3\nu_f n r_4)}{6(r_4 + r_3)} \quad (4.1.1.15)$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_{i,3} = \frac{(3E_m r_5 + 5E_m r_6 + 3E_f n r_5 + E_f n r_6)}{6(r_6 + r_5)} \quad (4.1.1.16)$$

$$\bar{G}_{i,3} = \frac{(3G_m r_5 + 5G_m r_6 + 3G_f n r_5 + G_f n r_6)}{6(r_6 + r_5)} \quad (4.1.1.17)$$

$$\bar{V}_{i,3} = \frac{(3\nu_m r_5 + 5\nu_m r_6 + 3\nu_f n r_5 + \nu_f n r_6)}{6(r_6 + r_5)} \quad (4.1.1.18)$$

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για τις τρεις ενδιάμεσες φάσεις στο κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο, με παραβολική μεταβολή για διάφορες τιμές του n .

1^η Ενδιάμεση Φάση

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	6.9874	11.6372	16.2870	20.9368	25.5867
0,20	6.9794	11.6185	16.2577	20.8969	25.5360
0,30	6.9758	11.6101	16.2444	20.8788	25.5131
0,40	6.9765	11.6118	16.2471	20.8824	25.5177
0,50	6.9817	11.6241	16.2664	20.9087	25.5510
0,60	6.9920	11.6480	16.3041	20.9601	25.6161
0,65	6.9993	11.6650	16.3307	20.9964	25.6621

Πίνακας στ.1

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	2.8543	4.8471	6.8399	8.8327	10.8255
0,20	2.8507	4.8390	6.8272	8.8154	10.8036
0,30	2.8491	4.8353	6.8214	8.8076	10.7937
0,40	2.8494	4.8360	6.8226	8.8091	10.7957
0,50	2.8518	4.8414	6.8309	8.8205	10.8101
0,60	2.8564	4.8519	6.8473	8.8427	10.8382
0,65	2.8597	4.8593	6.8588	8.8584	10.8580

Πίνακας στ.2

ΛΟΓΟΣ POISSON (ν)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	0.2470	0.2603	0.2736	0.2869	0.3002
0,20	0.2473	0.2605	0.2738	0.2870	0.3003
0,30	0.2474	0.2606	0.2739	0.2871	0.3003
0,40	0.2474	0.2606	0.2738	0.2871	0.3003
0,50	0.2472	0.2605	0.2737	0.2870	0.3003
0,60	0.2469	0.2602	0.2735	0.2868	0.3001
0,65	0.2467	0.2600	0.2733	0.2867	0.3000

Πίνακας στ.3

2^η Ενδιάμεση Φάση

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	7.0007	11.6684	16.3360	21.0036	25.6713
0,20	7.0027	11.6730	16.3432	21.0135	25.6837
0,30	7.0055	11.6794	16.3533	21.0273	25.7012
0,40	7.0082	11.6859	16.3635	21.0412	25.7188
0,50	7.0096	11.6890	16.3684	21.0478	25.7273
0,60	7.0063	11.6813	16.3564	21.0314	25.7065
0,65	7.0007	11.6683	16.3359	21.0036	25.6712

Πίνακας ζ.1

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	2.8603	4.8607	6.8612	8.8616	10.8620
0,20	2.8612	4.8627	6.8643	8.8658	10.8674
0,30	2.8624	4.8656	6.8687	8.8718	10.8749
0,40	2.8637	4.8684	6.8731	8.8778	10.8825
0,50	2.8643	4.8698	6.8752	8.8807	10.8862
0,60	2.8628	4.8664	6.8700	8.8736	10.8772
0,65	2.8603	4.8607	6.8611	8.8615	10.8619

Πίνακας ζ.2

ΛΟΓΟΣ POISSON (ν)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	0.2466	0.2600	0.2733	0.2867	0.3000
0,20	0.2466	0.2599	0.2733	0.2866	0.3000
0,30	0.2465	0.2599	0.2732	0.2866	0.2999
0,40	0.2464	0.2598	0.2732	0.2865	0.2999
0,50	0.2464	0.2598	0.2731	0.2865	0.2999
0,60	0.2465	0.2598	0.2732	0.2866	0.2999
0,65	0.2466	0.2600	0.2733	0.2867	0.3000

Πίνακας ζ.3

3^η Ενδιάμεση Φάση

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	6.9980	11.6620	16.3260	20.9899	25.6539
0,20	6.9932	11.6508	16.3084	20.9660	25.6235
0,30	6.9870	11.6364	16.2858	20.9352	25.5846
0,40	6.9805	11.6212	16.2619	20.9026	25.5433
0,50	6.9743	11.6068	16.2393	20.8717	25.5042
0,60	6.9690	11.5943	16.2196	20.8449	25.4702
0,65	6.9667	11.5890	16.2113	20.8336	25.4559

Πίνακας η.1

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	2.8591	4.8579	6.8568	8.8556	10.8545
0,20	2.8569	4.8531	6.8492	8.8453	10.8414
0,30	2.8542	4.8468	6.8394	8.8320	10.8246
0,40	2.8513	4.8401	6.8290	8.8179	10.8067
0,50	2.8485	4.8338	6.8192	8.8045	10.7898
0,60	2.8461	4.8284	6.8106	8.7929	10.7752
0,65	2.8451	4.8261	6.8070	8.7880	10.7690

Πίνακας η.2

ΛΟΓΟΣ POISSON (ν)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	0.2467	0.2601	0.2734	0.2867	0.3000
0,20	0.2469	0.2602	0.2735	0.2868	0.3001
0,30	0.2470	0.2603	0.2736	0.2869	0.3002
0,40	0.2472	0.2605	0.2738	0.2870	0.3003
0,50	0.2474	0.2607	0.2739	0.2871	0.3004
0,60	0.2476	0.2608	0.2740	0.2872	0.3004
0,65	0.2476	0.2609	0.2741	0.2873	0.3005

Πίνακας η.3

4.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών για μια συγκεκριμένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, για κάθε μία από τις τρεις ενδιάμεσες φάσεις του επταφασικού μοντέλου ακολουθώντας παραβολική μεταβολή. Η κατ' όγκο περιεκτικότητα που επιλέχθηκε είναι η $U_f = 0.65$, δηλαδή η μέγιστη που μπορεί να μελετηθεί με το μοντέλο μας.

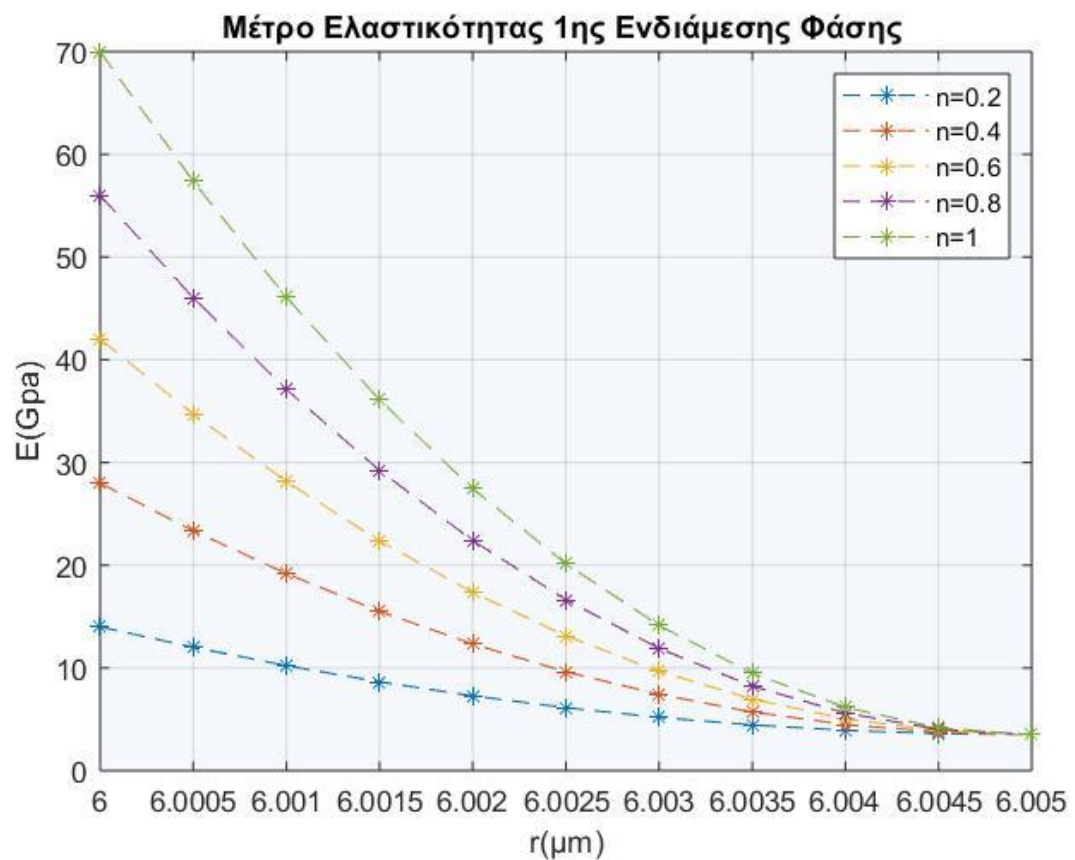
Στη παρουσίαση που ακολουθεί έχουμε ενεργήσει ως εξής:

Για την παραπάνω κατ' όγκο περιεκτικότητα από τον πίνακα γ του προηγούμενου κεφαλαίου γνωρίζουμε τα όρια των ακτίνων r που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις τρεις ενδιάμεσες φάσεις, του θεωρητικού επταφασικού μοντέλου με παραβολική μεταβολή της ενδιάμεσου φάσεως. Αυτήν την μεταβολή της ακτίνας της κάθε ενδιάμεσης φάσης, την χωρίζουμε σε 10 ίσα διαστήματα. Μετά από αυτή την διαδικασία στις τιμές που προκύπτουν για την ακτίνα r της ενδιάμεσου φάσεως, υπολογίζουμε τις ελαστικές σταθερές για 5 τιμές του συντελεστή n επίδρασης του εγκλείσματος.

Μέτρο Ελαστικότητας 1^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 1 ^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6.0000	14.0000	28.0000	42.0000	56.0000	70.0000
6.0005	12.0050	23.3450	34.6850	46.0250	57.3650
6.0010	10.2200	19.1800	28.1400	37.1000	46.0600
6.0015	8.6450	15.5050	22.3650	29.2250	36.0850
6.0020	7.2800	12.3200	17.3600	22.4000	27.4400
6.0025	6.1250	9.6250	13.1250	16.6250	20.1250
6.0030	5.1800	7.4200	9.6600	11.9000	14.1400
6.0035	4.4450	5.7050	6.9650	8.2250	9.4850
6.0040	3.9200	4.4800	5.0400	5.6000	6.1600
6.0045	3.6050	3.7450	3.8850	4.0250	4.1650
6.0050	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000

Πίνακας θ.1

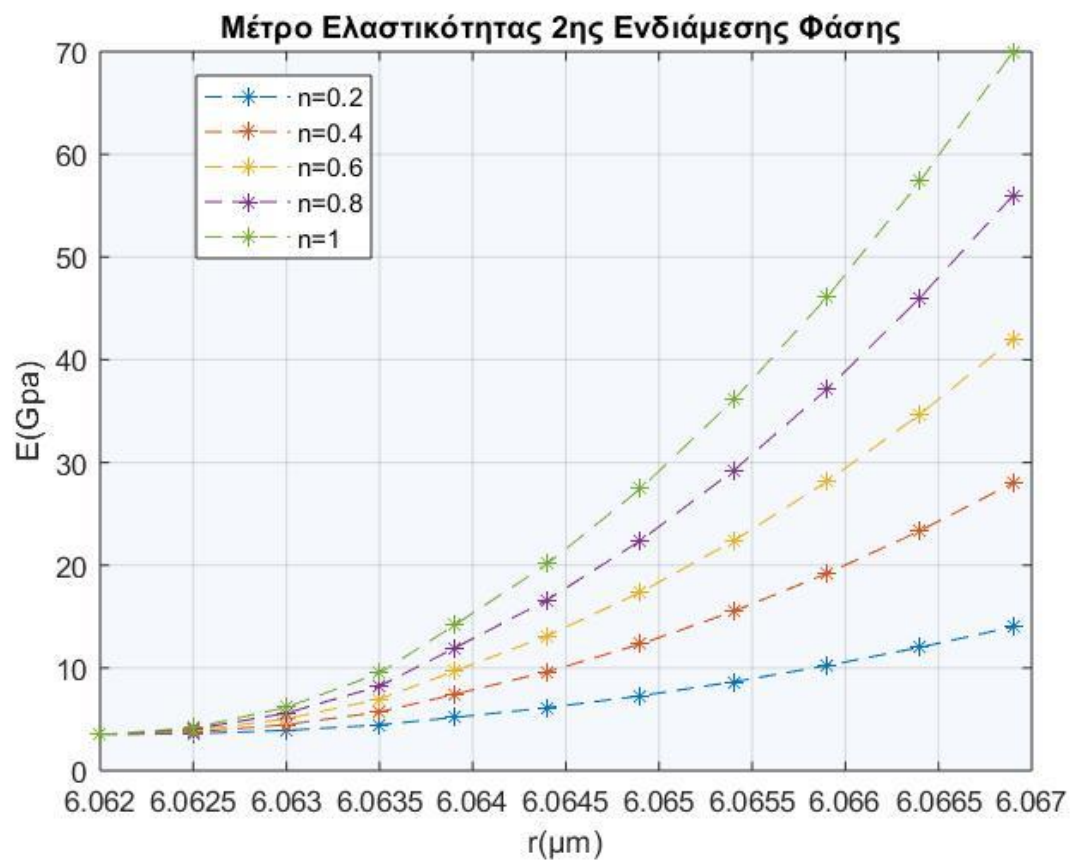


Εικόνα 4.1 Διάγραμμα E_{i,1}

Μέτρο Ελαστικότητας 2^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 2 ^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης E (GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6.0620	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000
6.0625	3.6050	3.7450	3.8850	4.0250	4.1650
6.0630	3.9200	4.4800	5.0400	5.6000	6.1600
6.0635	4.4450	5.7050	6.9650	8.2250	9.4850
6.0639	5.1800	7.4200	9.6600	11.9000	14.1400
6.0644	6.1250	9.6250	13.1250	16.6250	20.1250
6.0649	7.2800	12.3200	17.3600	22.4000	27.4400
6.0654	8.6450	15.5050	22.3650	29.2250	36.0850
6.0659	10.2200	19.1800	28.1400	37.1000	46.0600
6.0664	12.0050	23.3450	34.6850	46.0250	57.3650
6.0669	14.0000	28.0000	42.0000	56.0000	70.0000

Πίνακας θ.2

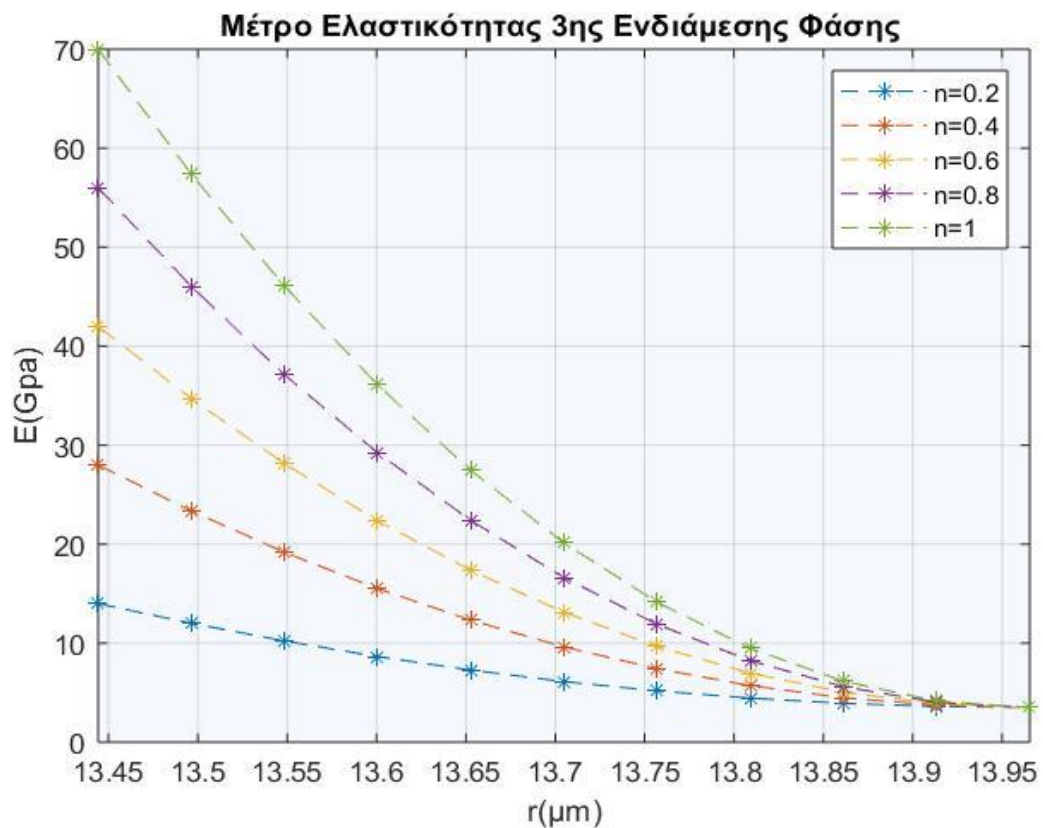


Εικόνα 4.2 Διάγραμμα E_{i,2}

Μέτρο Ελαστικότητας 3^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 3 ^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
13.4442	14.0000	28.0000	42.0000	56.0000	70.0000
13.4964	12.0050	23.3450	34.6850	46.0250	57.3650
13.5485	10.2200	19.1800	28.1400	37.1000	46.0600
13.6006	8.6450	15.5050	22.3650	29.2250	36.0850
13.6527	7.2800	12.3200	17.3600	22.4000	27.4400
13.7048	6.1250	9.6250	13.1250	16.6250	20.1250
13.7570	5.1800	7.4200	9.6600	11.9000	14.1400
13.8091	4.4450	5.7050	6.9650	8.2250	9.4850
13.8612	3.9200	4.4800	5.0400	5.6000	6.1600
13.9133	3.6050	3.7450	3.8850	4.0250	4.1650
13.9655	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000

Πίνακας θ.3

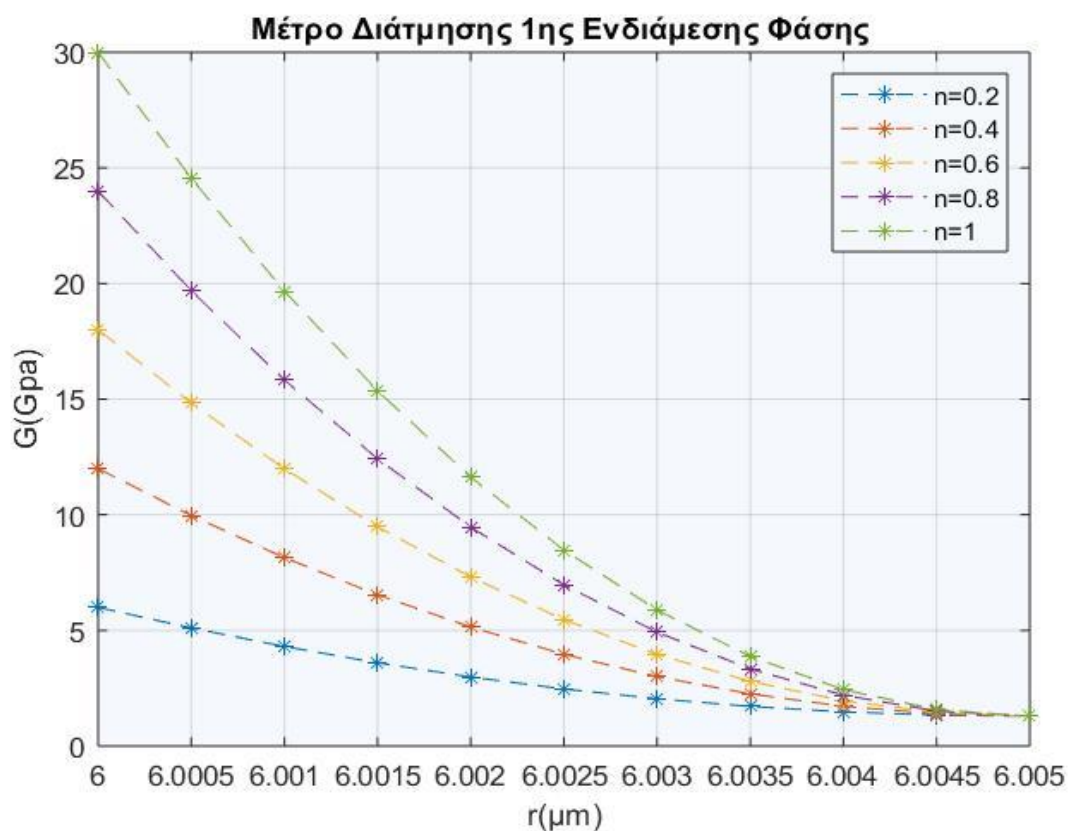


Εικόνα 4.3 Διάγραμμα E_{i,3}

Μέτρο Διατήμσεως 1^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Διάτμησης 1 ^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6.0000	6.0000	12.0000	18.0000	24.0000	30.0000
6.0005	5.1051	9.9651	14.8251	19.6851	24.5451
6.0010	4.3044	8.1444	11.9844	15.8244	19.6644
6.0015	3.5979	6.5379	9.4779	12.4179	15.3579
6.0020	2.9856	5.1456	7.3056	9.4656	11.6256
6.0025	2.4675	3.9675	5.4675	6.9675	8.4675
6.0030	2.0436	3.0036	3.9636	4.9236	5.8836
6.0035	1.7139	2.2539	2.7939	3.3339	3.8739
6.0040	1.4784	1.7184	1.9584	2.1984	2.4384
6.0045	1.3371	1.3971	1.4571	1.5171	1.5771
6.0050	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900

Πίνακας ι.1

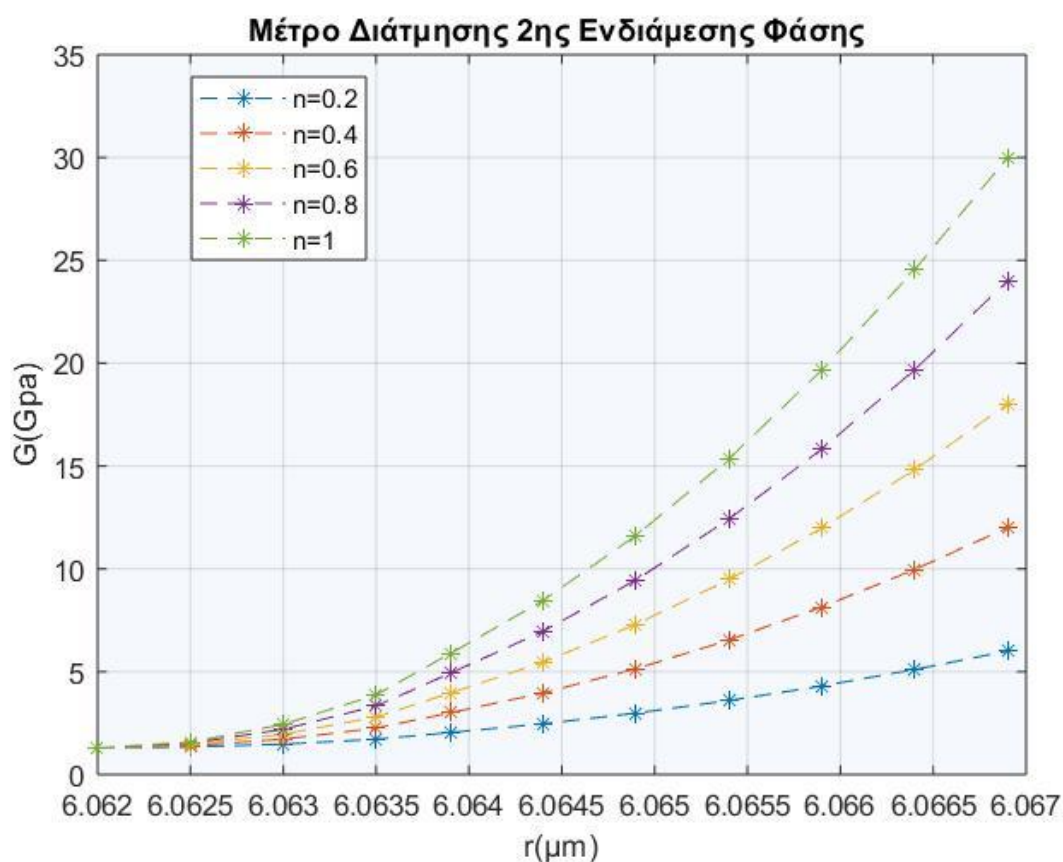


Εικόνα 4.4 Διάγραμμα G_{i,1}

Μέτρο Διατήσεως 2^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Διάτησης 2 ^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6.0620	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900
6.0625	1.3371	1.3971	1.4571	1.5171	1.5771
6.0630	1.4784	1.7184	1.9584	2.1984	2.4384
6.0635	1.7139	2.2539	2.7939	3.3339	3.8739
6.0639	2.0436	3.0036	3.9636	4.9236	5.8836
6.0644	2.4675	3.9675	5.4675	6.9675	8.4675
6.0649	2.9856	5.1456	7.3056	9.4656	11.6256
6.0654	3.5979	6.5379	9.4779	12.4179	15.3579
6.0659	4.3044	8.1444	11.9844	15.8244	19.6644
6.0664	5.1051	9.9651	14.8251	19.6851	24.5451
6.0669	6.0000	12.0000	18.0000	24.0000	30.0000

Πίνακας ι.2

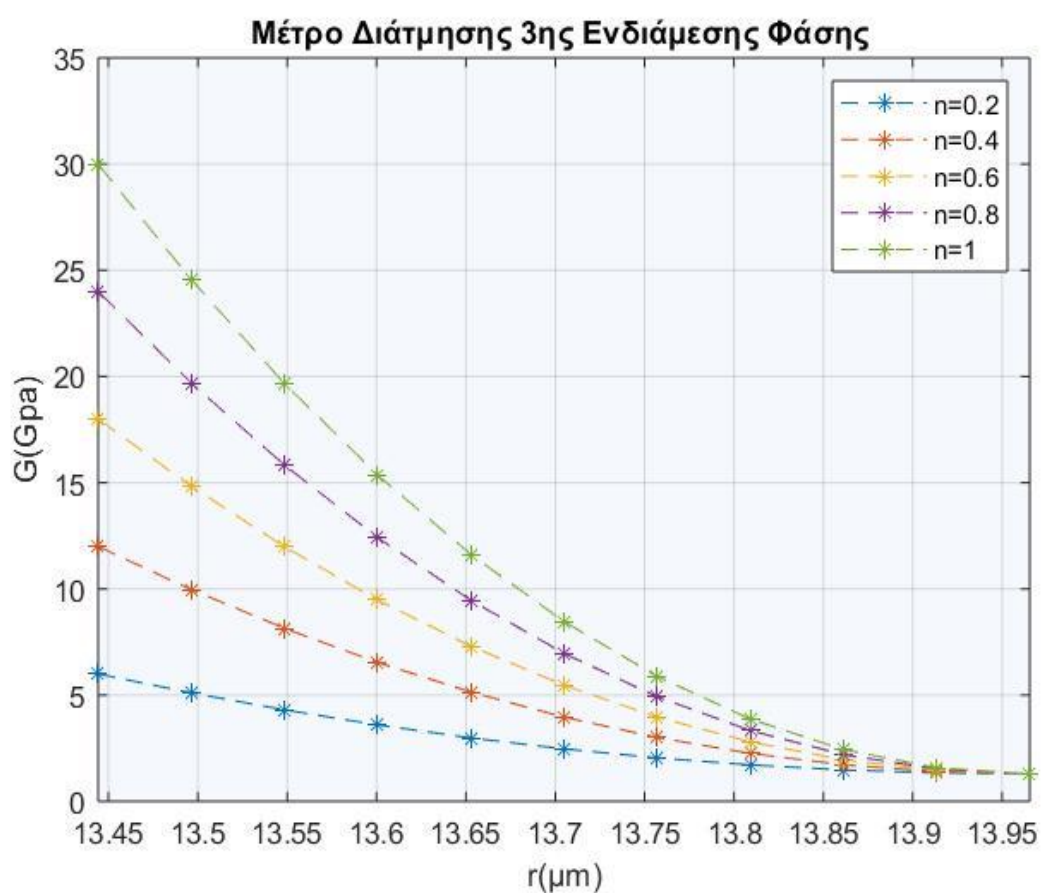


Εικόνα 4.5 Διάγραμμα G_{i,2}

Μέτρο Διατήσεως 3^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Διατήσεως 3 ^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
13.4442	6.0000	12.0000	18.0000	24.0000	30.0000
13.4964	5.1051	9.9651	14.8251	19.6851	24.5451
13.5485	4.3044	8.1444	11.9844	15.8244	19.6644
13.6006	3.5979	6.5379	9.4779	12.4179	15.3579
13.6527	2.9856	5.1456	7.3056	9.4656	11.6256
13.7048	2.4675	3.9675	5.4675	6.9675	8.4675
13.7570	2.0436	3.0036	3.9636	4.9236	5.8836
13.8091	1.7139	2.2539	2.7939	3.3339	3.8739
13.8612	1.4784	1.7184	1.9584	2.1984	2.4384
13.9133	1.3371	1.3971	1.4571	1.5171	1.5771
13.9655	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900

Πίνακας ι.3

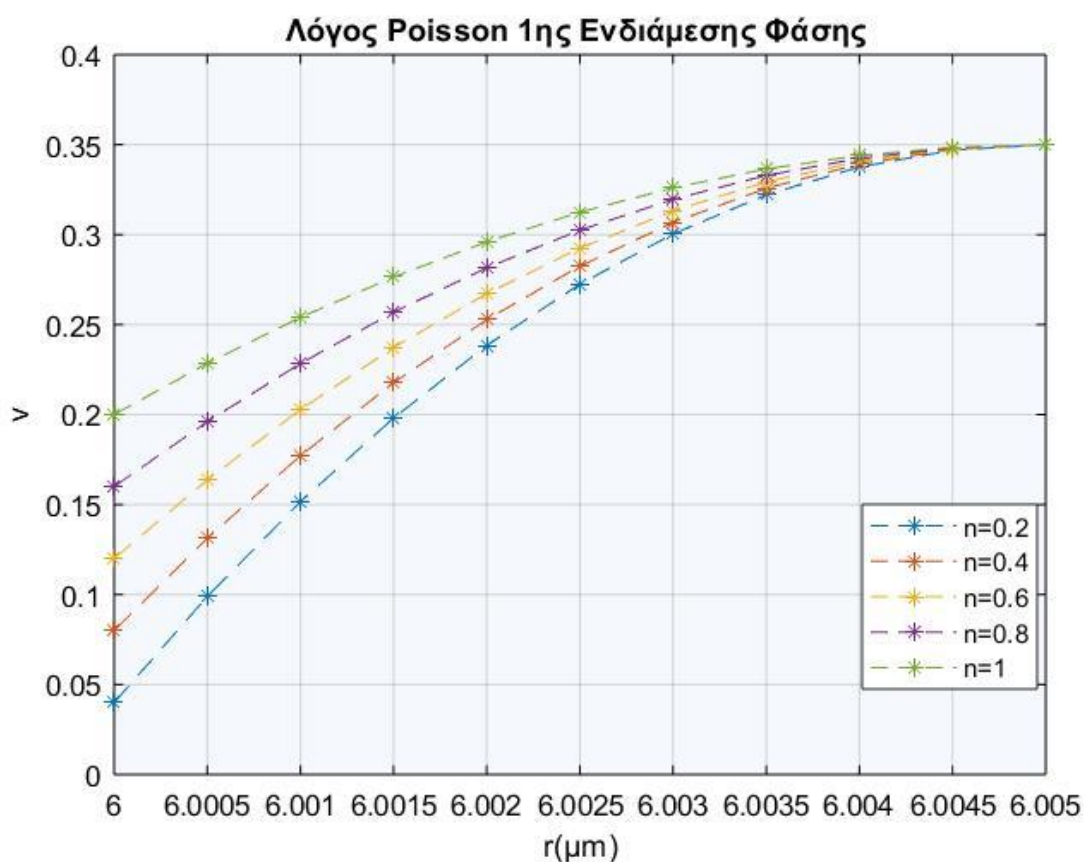


Εικόνα 4.6 Διάγραμμα G_{i,3}

Λόγος Poisson 1^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (ν) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης					
$r(\mu\text{m})$	$n=0,2$	$n=0,4$	$n=0,6$	$n=0,8$	$n=1$
6.0000	0.0400	0.0800	0.1200	0.1600	0.2000
6.0005	0.0989	0.1313	0.1200	0.1961	0.2285
6.0010	0.1516	0.1772	0.1637	0.2284	0.2540
6.0015	0.1981	0.2177	0.2028	0.2569	0.2765
6.0020	0.2384	0.2528	0.2373	0.2816	0.2960
6.0025	0.2725	0.2825	0.2672	0.3025	0.3125
6.0030	0.3004	0.3068	0.2925	0.3196	0.3260
6.0035	0.3221	0.3257	0.3132	0.3329	0.3365
6.0040	0.3376	0.3392	0.3293	0.3424	0.3440
6.0045	0.3469	0.3473	0.3408	0.3481	0.3485
6.0050	0.3500	0.3500	0.3477	0.3500	0.3500

Πίνακας ια.1

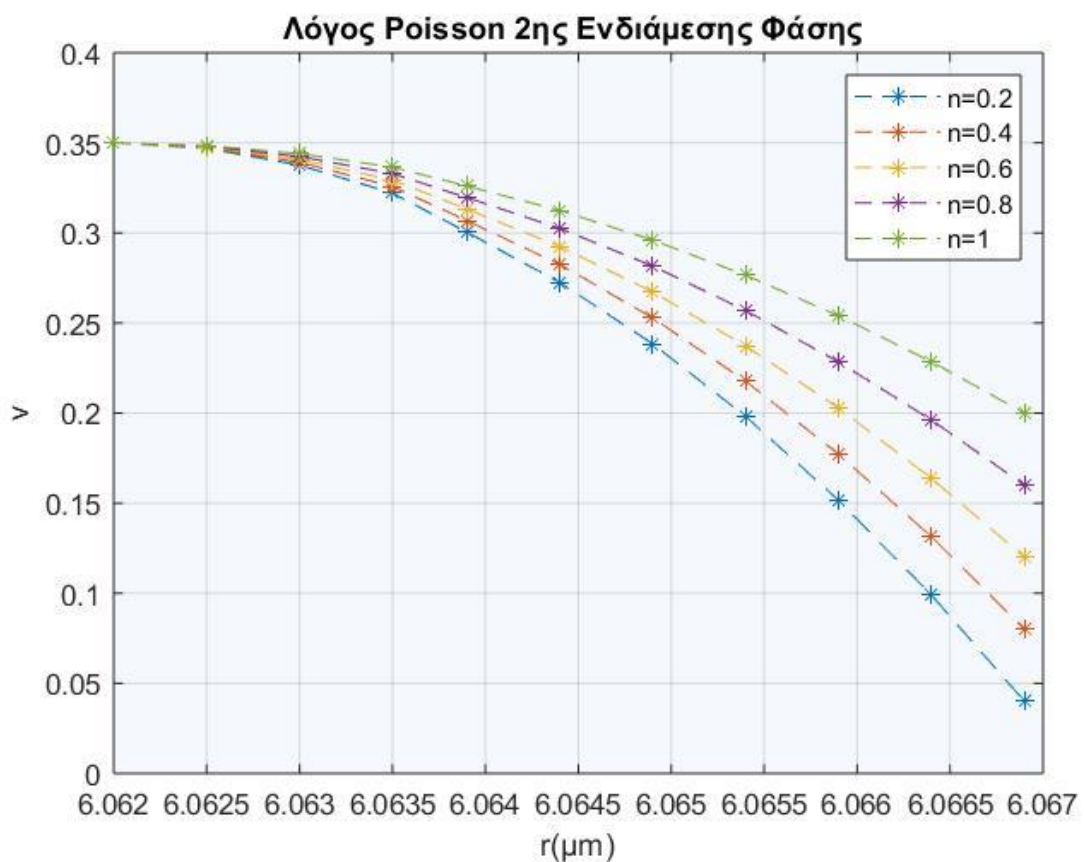


Εικόνα 4.7 Διάγραμμα $\nu_{i,1}$

Λόγος Poisson 2^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (ν) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης					
$r(\mu\text{m})$	$n=0,2$	$n=0,4$	$n=0,6$	$n=0,8$	$n=1$
6.0620	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500
6.0625	0.3469	0.3473	0.3477	0.3481	0.3485
6.0630	0.3376	0.3392	0.3408	0.3424	0.3440
6.0635	0.3221	0.3257	0.3293	0.3329	0.3365
6.0639	0.3004	0.3068	0.3132	0.3196	0.3260
6.0644	0.2725	0.2825	0.2925	0.3025	0.3125
6.0649	0.2384	0.2528	0.2672	0.2816	0.2960
6.0654	0.1981	0.2177	0.2373	0.2569	0.2765
6.0659	0.1516	0.1772	0.2028	0.2284	0.2540
6.0664	0.0989	0.1313	0.1637	0.1961	0.2285
6.0669	0.0400	0.0800	0.1200	0.1600	0.2000

Πίνακας ια.2

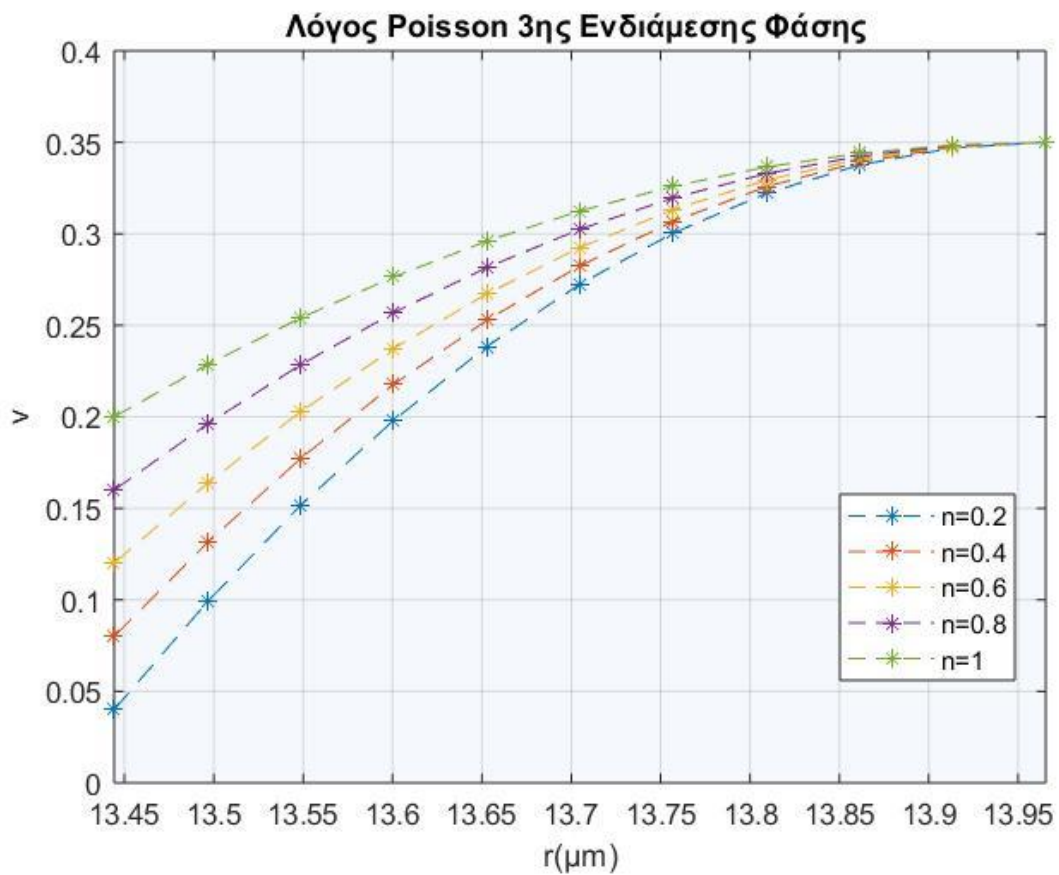


Εικόνα 4.8 Διάγραμμα $\nu_{i,2}$

Λόγος Poisson 3^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (ν) 3ης Ενδιάμεσης Φάσης					
$r(\mu\text{m})$	$n=0,2$	$n=0,4$	$n=0,6$	$n=0,8$	$n=1$
13.4442	0.0400	0.0800	0.1200	0.1600	0.2000
13.4964	0.0989	0.1313	0.1637	0.1961	0.2285
13.5485	0.1516	0.1772	0.2028	0.2284	0.2540
13.6006	0.1981	0.2177	0.2373	0.2569	0.2765
13.6527	0.2384	0.2528	0.2672	0.2816	0.2960
13.7048	0.2725	0.2825	0.2925	0.3025	0.3125
13.7570	0.3004	0.3068	0.3132	0.3196	0.3260
13.8091	0.3221	0.3257	0.3293	0.3329	0.3365
13.8612	0.3376	0.3392	0.3408	0.3424	0.3440
13.9133	0.3469	0.3473	0.3477	0.3481	0.3485
13.9655	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500

Πίνακας ια.3



Εικόνα 4.9 Διάγραμμα $\nu_{i,3}$

Τα γενικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την παραπάνω μελέτη είναι τα εξής:

Στην 1^η ενδιάμεση φάση παρατηρούμε μία μείωση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης καθώς αυξάνεται η ακτίνας r . Αυτό είναι κάτι που περιμέναμε καθώς όσο απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα πλησιάζουμε τη μήτρα, που έχει μικρότερο μέτρο ελαστικότητας και μικρότερο μέτρο διάτμησης αντίστοιχα. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του συντελεστή προσφύσεως n οι καμπύλες δίνουν μικρότερες τιμές για τις αρχικές τιμές του r , ενώ όσο αυξάνεται το r τείνουν να συγκλίνουν σε μια μόνο τιμή. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής προσφύσεως n τόσο περισσότερο επηρεάζεται η ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά, έχουμε θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση η τιμές των ελαστικών σταθερών θα συμπίπτουν με αυτές της μήτρας για κάθε συντελεστή προσφύσεως n .

Σε ότι αφορά την 2^η ενδιάμεση φάση παρατηρούμε μία αύξηση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης με την αύξηση της ακτίνας r . Αυτό είναι λογικό γιατί καθώς απομακρυνόμαστε από την περιοχή της μήτρας και πλησιάζουμε την περιοχή του εγκλείσματος, τα μέτρα ελαστικότητας και διατμήσεως τείνουν να αυξηθούν και να πλησιάσουν εκείνα του εγκλείσματος, που ως γνωστών είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα της μήτρας.

Επίσης παρατηρούμε ότι αρχικά οι καμπύλες ξεκινούν από μια μόνο τιμή, αφού η 2^η ενδιάμεση φάση ξεκινά από περιοχή μήτρας και στην συνέχεια παρουσιάζουν άνοδο. Ακόμα βλέπουμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του n οι καμπύλες δίνουν μικρότερες τιμές. Αυτό συμβαίνει γιατί όπως είπαμε και παραπάνω όσο βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα ο συντελεστής n επηρεάζει άμεσα την ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά, έχουμε θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση η τιμές των ελαστικών σταθερών θα συμπίπτουν με αυτές της μήτρας.

Σε ότι αφορά την 3^η ενδιάμεση φάση παρατηρούμε μία μείωση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης με την αύξηση της ακτίνας r . Αυτό είναι κάτι που αναμέναμε καθώς όσο απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα, πλησιάζουμε πιο κοντά στην περιοχή της μήτρας η οποία έχει μικρότερο μέτρο ελαστικότητας και μέτρο διατμήσεως. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του n οι καμπύλες δίνουν μικρότερες τιμές. Αυτό συμβαίνει για τους λόγους που αναφέραμε παραπάνω.

Όσον αφορά την 1^η ενδιάμεση φάση παρατηρούμε μία αύξηση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας r . Αυτό είναι αναμενόμενο αφού όσο απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα, τόσο πλησιάζουμε πιο κοντά στην περιοχή της μήτρας η οποία έχει μεγαλύτερο λόγο Poisson.

Στην 2^η ενδιάμεση φάση παρατηρούμε μία μείωση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας r . Αυτό είναι αναμενόμενο αφού όσο απομακρυνόμαστε από τη μήτρα, τόσο πλησιάζουμε πιο κοντά στην περιοχή του εγκλείσματος το οποίο έχει

μικρότερο λόγο Poisson.

Τέλος σε ότι αφορά την 3^η ενδιάμεση φάση παρατηρούμε μία αύξηση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας r . Αυτό είναι αναμενόμενο αφού όσο απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα, τόσο πλησιάζουμε πιο κοντά στην περιοχή της μήτρας η οποία έχει μεγαλύτερο λόγο Poisson. Στα διαγράμματα του λόγου Poisson και των τριών ενδιάμεσων φάσεων, όσον αφορά την μεταβολή του συντελεστή προσφύσεως η παρατηρούμε ότι όσο αυτός μειώνεται τόσο μικρότερη τιμή παίρνει ο λόγος Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης στο σύνορο της με το έγκλεισμα.

4.3 ANTOXH INΩΔΟΥΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

Επειδή οι ίνες είναι ψαθυρά υλικά και θεωρούνται ελαστικά, με σχεδόν γραμμική μεταβολή στο διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης (σ - ε), η αντοχή τους είναι και το σημείο θραύσης τους.

Αντίστοιχα η μήτρα, που είναι βισκοελαστικό υλικό, παρουσιάζει ευθύγραμμο τμήμα στην αρχή του διαγράμματος σ - ε , αλλά εν συνεχεία το διάγραμμα έχει και καμπύλη μορφή. Σε ένα τέτοιο υλικό, η αντοχή δύναται να θεωρηθεί ως το όριο θραύσης, αλλά ακόμη και κάποιο μαθηματικό μέγιστο στο διάγραμμα. Παρόλα αυτά, όταν το διάγραμμα σ - ε της ρητίνης θεωρείται ως διάγραμμα ελαστικού υλικού με γραμμική μεταβολή, τότε η αντοχή του θεωρείται η τάση θραύσης.

Στο παρακάτω διάγραμμα [28α] η αντοχή σε εφελκυσμό του σύνθετου υλικού δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma_{avr.} = \sigma_f U_f + \sigma_m U_m \quad (4.3.1)$$

ή αντίστοιχα αν έχουμε ενδιάμεση φάση η σχέση γίνεται:

$$\sigma_{avr.} = \sigma_f U_f + \sigma_m U_m + \sigma_i U_i \quad (4.3.2)$$

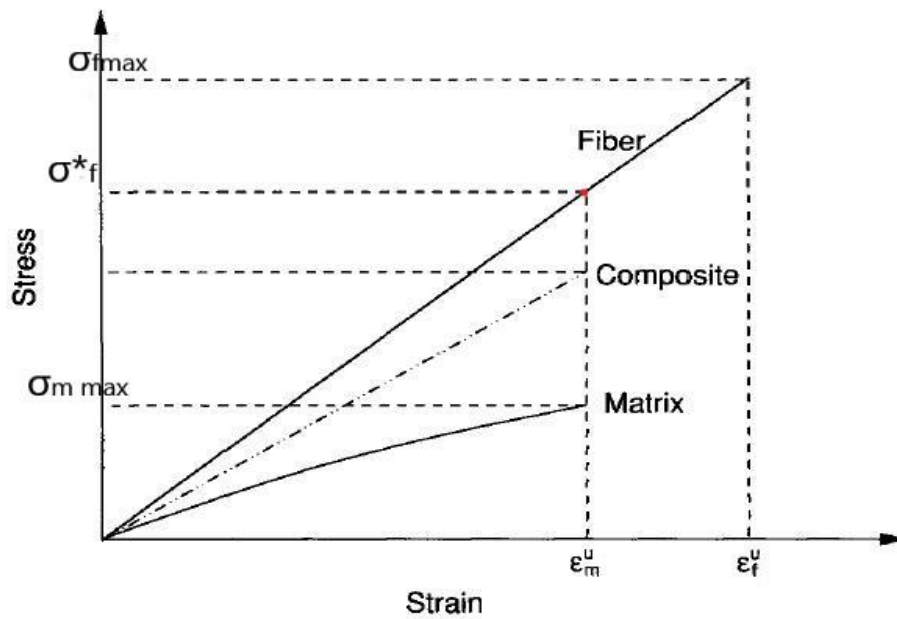
Όπου U_f, U_m και U_i οι περιεκτικότητες του εγκλείσματος της μήτρας και της ενδιάμεσου φάσεως και η αντίστοιχη αντοχή.

Σύμφωνα με τους πίνακες Α.2 και Α.3 στην παραπομπή [28] και τον πίνακα ε του 2^{ου} κεφαλαίου της μελέτης μας έχουμε σαν δεδομένα:

$$\begin{aligned} \sigma_f &= 3308 \text{Mpa}, E_f = 70 \text{Gpa}, \varepsilon_{f \max} = 0.04726 \\ \sigma_m &= 84 \text{Mpa}, E_m = 3.5 \text{Gpa}, \varepsilon_{m \max} = 0.024 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Θεωρώντας ότι το έγκλεισμα έχει την μέγιστη επίδραση στην ενδιάμεση φάση και θεωρώντας ότι $\varepsilon_{i \max} = (\varepsilon_{f \max} + \varepsilon_{m \max}) / 2 = (0.04726 + 0.024) / 2 = 0.03563$ τότε έχουμε: $\sigma_i = 938 \text{Mpa}, E_i = 25.6 \text{Gpa}$

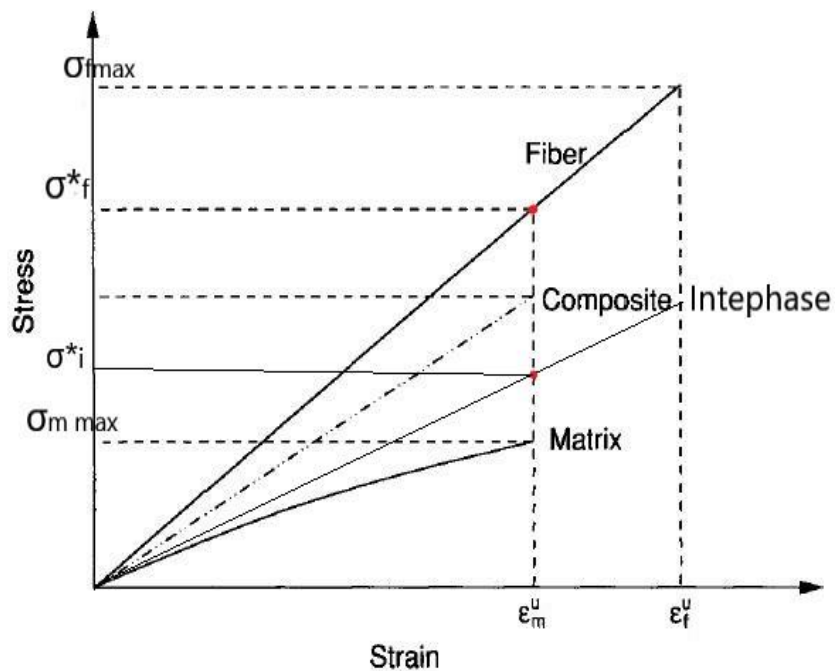
Με τα παραπάνω δεδομένα βρισκόμαστε επομένως στην 2^η περίπτωση του κεφαλαίου 5 της παραπομπής [28] σύμφωνα με το ακόλουθο διάγραμμα:



Εικόνα 4.10 Διάγραμμα σ - ϵ

Οπότε ισχύει ότι $\sigma_{avr.} = \sigma_f^* U_f + \sigma_m U_m$ όπου σαν αντοχή για το έγκλεισμα παίρνουμε το σημείο όπου τέμνει την καμπύλη του εγκλείσματος η κάθετη στο $\epsilon_{m \max}$. Άρα $\sigma_f^* = \epsilon_{m \max} \cdot E_f = 0.024 \cdot 70 = 1.68 \text{GPa}$ οπότε για περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 65% που είναι η μέγιστη στην οποία ανταποκρίνεται κυλινδρικό μοντέλο μας έχουμε ότι:
 $\sigma_{avr.} = \sigma_f^* U_f + \sigma_m U_m = 0.65 \cdot 1680 + 0.35 \cdot 84 = \mathbf{1121 \text{Mpa}}$

Στην περίπτωση μας που έχουμε και ενδιάμεση φάση το διάγραμμα γίνεται



Εικόνα 4.11 Διάγραμμα σ - ϵ με ενδιάμεση φάση

Οπότε ισχύει ότι $\sigma_{αντ.} = \sigma_f^* U_f + \sigma_m U_m + \sigma_i^* U_i$ όπου αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση σαν αντοχή της ενδιάμεσου φάσεως παίρνουμε το σημείο όπου τέμνει την καμπύλη της ενδιάμεσου φάσεως η κάθετη στο $\varepsilon_{m \max}$. Άρα $\sigma_i^* = \varepsilon_{m \max} \cdot E_i = 0.024 \cdot 25.6 = 0.6144 \text{Gra}$ οπότε για περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 65% που είναι η μέγιστη που μπορεί να πετύχει το κυλινδρικό μοντέλο μας έχουμε ότι:

$$\sigma_{αντ.} = \sigma_f^* U_f + \sigma_m U_m + \sigma_i^* U_i = 0.65 \cdot 1680 + 0.2980071 \cdot 84 + 0.05199 \cdot 614.4 = \mathbf{1149 \text{Mpa}}$$

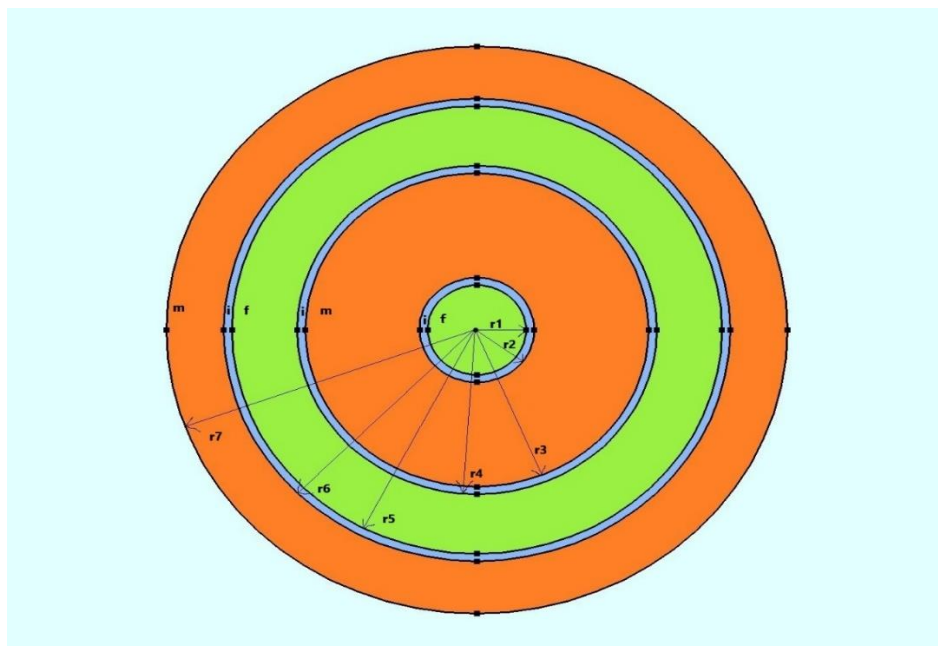
Που είναι ρεαλιστική τιμή αφού σύμφωνα με τον πίνακα A.4 της παραπομπής [28], για σύνθετο υλικό με περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 55% η αντοχή που δίνεται είναι **1140Mpa**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Η θεωρητική ανάπτυξη του κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε για την παρακάτω μελέτη βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- Το έγκλεισμα αποτελείται από ίνες που έχουν τέλειο κυλινδρικό σχήμα
- Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων.



Εικόνα 5.1 Κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι:

$R_{r,1} = R_1$ το «1» συμβολίζει την 1^η φάση (περιοχή με έγκλεισμα)

$R_{i,1} = R_2$ το «2» συμβολίζει την 2^η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$R_{m,1} = R_3$ το «3» συμβολίζει την 3^η φάση (περιοχή με μήτρα)

$R_{i,2} = R_4$ το «4» συμβολίζει την 4^η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$R_{f,2} = R_5$ το «5» συμβολίζει την 5^η φάση (περιοχή με έγκλεισμα)

$R_{i,3} = R_6$ το «6» συμβολίζει την 6^η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$R_{m,2} = R_7$ το «7» συμβολίζει την 7^η φάση (περιοχή με μήτρα)

Όπου R μπορεί να συμβολίζει είτε το μέτρο ελαστικότητας E , είτε το λόγο Poisson ν , είτε το μέτρο διατμήσεως G .

Στις ενότητες που θα ακολουθήσουν, θα αναφέρουμε θεωρητικούς τύπους που έχουν εξαχθεί από προηγούμενες μελέτες [1στ],[2στ] με την βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας, για τον υπολογισμό του διαμήκους και του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, του διαμήκους και εγκάρσιου λόγου Poisson και του διαμήκους μέτρου διατμήσεως, ενός σύνθετου υλικού με βάση το κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο. Στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών ενός σύνθετου υλικού υπό γωνία φόρτισης, για συγκεκριμένη όμως κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L

Από προηγούμενες μελέτες [1στ] και [2στ] με χρήση της τασικής συνάρτησης του Airy Φ για κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} \quad (5.2.1)$$

και την θεωρία ελαστικότητας έχει προκύψει η παρακάτω σχέση για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L .

$$E_L \int_0^{r_7} r dr = E_1 \int_0^{r_1} r dr + \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_3 \int_{r_2}^{r_3} r dr + \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr + E_5 \int_{r_4}^{r_5} r dr + \int_{r_5}^{r_6} r E_6(r) dr + E_7 \int_{r_6}^{r_7} r dr \quad (5.2.2)$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_7^2}$
- $U_2 = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_7^2}$
- $U_3 = \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{r_7^2}$
- $U_4 = \frac{(r_4^2 - r_3^2)}{r_7^2}$

(5.2.3)

- $U_5 = \frac{(r_5^2 - r_4^2)}{r_7^2}$
- $U_6 = \frac{(r_6^2 - r_5^2)}{r_7^2}$
- $U_7 = \frac{(r_7^2 - r_6^2)}{r_7^2}$

$$\begin{aligned} E_1 &= E_f \\ E_3 &= E_m \\ \text{Καθώς και ότι:} \quad E_5 &= E_f \\ E_7 &= E_m \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Θα έχουμε:

$$E_L = E_1 U_1 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_3 U_3 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr + E_5 U_5 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} r E_6(r) dr + E_7 U_7 \tag{5.2.5}$$

Και τελικά:

$$\begin{aligned} E_L &= E_f U_1 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_m U_3 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr + E_f U_5 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} r E_6(r) dr + E_m U_7 \Rightarrow \\ E_L &= E_f U_{f,1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} r E_{i,1}(r) dr + E_m U_{m,1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} r E_{i,2}(r) dr + E_f U_{f,2} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} r E_{i,3}(r) dr + E_m U_{m,2} \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Θεωρούμε τώρα ότι οι συναρτήσεις $E_{i,1}(r)$, $E_{i,2}(r)$ και $E_{i,3}(r)$ ακολουθούν την παραβολική μεταβολή σύμφωνα με τις σχέσεις (4.1.1.1), (4.1.1.4) και (4.1.1.7), όπου λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$, έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

Επίσης όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο έχει αποδειχθεί ότι αυτού του είδους η μεταβολή σε σχέση με την γραμμική, την υπερβολική και την εκθετική δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα [27],[29].

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις με χρήση της παραβολικής μεταβολής θα έχουμε:

$$E_L = E_f U_1 + E_f U_5 + E_m U_3 + E_m U_7 - \frac{((r_1 - r_2)(3E_f r_1 + E_f r_2 + 3E_m r_1 + 5E_m r_2))}{6r_7^2} - \frac{((r_3 - r_4)(E_f r_3 + 3E_f r_4 + 5E_m r_3 + 3E_m r_4))}{6r_7^2} - \frac{((r_5 - r_6)(3E_f r_5 + E_f r_6 + 3E_m r_5 + 5E_m r_6))}{6r_7^2}$$

(5.2.7)

Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τις ακτίνες με τις κατ' όγκο περιεκτικότητες της μήτρας, του εγκλείσματος και της ενδιαμέσου φάσεως θα έχουμε τον τελικό τύπο για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού:

$$E_L = \frac{2E_f U_1}{3} + \frac{E_f U_2}{6} + \frac{E_f U_4}{6} + \frac{2E_f U_5}{3} + \frac{E_f U_6}{6} + \frac{E_m U_1}{3} + \frac{5E_m U_2}{6} + E_m U_3 + \frac{5E_m U_4}{6} + \frac{E_m U_5}{3} + \frac{5E_m U_6}{6} + E_m U_7 - \frac{E_f (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{E_m (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{E_f U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} - \frac{E_m U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} + \frac{E_f (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} - \frac{E_m (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3}$$

(5.2.8)

5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON v_{LT}

Ο διαμήκης λόγος Poisson όπως έχει διατυπωθεί από προηγούμενες μελέτες [1στ] και [2στ] προκύπτει από τον νόμο των φάσεων θεωρώντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_7^2}$
- $U_2 = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_7^2}$
- $U_3 = \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{r_7^2}$
- $U_4 = \frac{(r_4^2 - r_3^2)}{r_7^2}$
- $U_5 = \frac{(r_5^2 - r_4^2)}{r_7^2}$
- $U_6 = \frac{(r_6^2 - r_5^2)}{r_7^2}$
- $U_7 = \frac{(r_7^2 - r_6^2)}{r_7^2}$

Οπότε προκύπτει:

$$v_{LT} = v_1 U_1 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} v_2(r) r dr + v_3 U_3 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} v_4(r) r dr + v_5 U_5 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} v_6(r) r dr + v_7 U_7 \Rightarrow$$

$$v_{LT} = v_f U_{f,1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} v_{i,1}(r) r dr + v_m U_{m,1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} v_{i,2}(r) r dr + v_f U_{f,2} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} v_{i,3}(r) r dr + v_m U_{m,2}$$

(5.3.2)

Οι συναρτήσεις $v_{i,1}(r), v_{i,2}(r), v_{i,3}(r)$ θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή όπως και στην προηγούμενη παράγραφο σύμφωνα με τις σχέσεις, (4.1.1.3), (4.1.1.7) και (4.1.1.9), όπου λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$, έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις με χρήση της παραβολικής μεταβολής θα έχουμε:

$$v_{LT} = v_f U_1 + v_f U_5 + v_m U_3 + v_m U_7 - \frac{((r_1 - r_2)(3v_f r_1 + v_f r_2 + 3v_m r_1 + 5v_m r_2))}{6r_7^2} - \frac{((r_3 - r_4)(v_f r_3 + 3v_f r_4 + 5v_m r_3 + 3v_m r_4))}{6r_7^2} - \frac{((r_5 - r_6)(3v_f r_5 + v_f r_6 + 3v_m r_5 + 5v_m r_6))}{6r_7^2} \quad (5.3.3)$$

Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τις ακτίνες με τις κατ' όγκο περιεκτικότητες της μήτρας, του εγκλείσματος και της ενδιαμέσου φάσεως θα έχουμε τον τελικό τύπο για το διάμηκες λόγο Poisson του σύνθετου υλικού:

$$v_{LT} = \frac{2v_f U_1}{3} + \frac{v_f U_2}{6} + \frac{v_f U_4}{6} + \frac{2v_f U_5}{3} + \frac{v_f U_6}{6} + \frac{v_m U_1}{3} + \frac{5v_m U_2}{6} + v_m U_3 + \frac{5v_m U_4}{6} + \frac{v_m U_5}{3} + \frac{5v_m U_6}{6} + v_m U_7 - \frac{v_f (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{v_m (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{v_f U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} - \frac{E_m U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} + \frac{E_f (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} - \frac{E_m (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \quad (5.3.4)$$

5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON v_{TT}

Τον εγκάρσιο λόγο Poisson του σύνθετου υλικού θα τον υπολογίσουμε από τον αντίστροφο νόμο των φάσεων, όπως έχει γίνει και σε προηγούμενες μελέτες [1στ] και [2στ], με την χρήση του επταφασικού κυλινδρικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση, από την σχέση:

$$\frac{1}{v_{TT}} = \frac{U_1}{v_1} + \frac{U_2}{v_2(r)} + \frac{U_3}{v_3} + \frac{U_4}{v_4(r)} + \frac{U_5}{v_5} + \frac{U_6}{v_6(r)} + \frac{U_7}{v_7} \quad (5.4.1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$U_2 = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_7^2} \quad (5.4.2)$$

$$U_4 = \frac{(r_4^2 - r_3^2)}{r_7^2}$$

$$U_6 = \frac{(r_6^2 - r_5^2)}{r_7^2}$$

Η σχέση (5.4.1) μπορεί με χρήση της (5.4.2) να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{\pi}} &= \frac{U_1}{v_1} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_7^2} \frac{1}{v_2(r)} + \frac{U_3}{v_3} + \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_7^2} \frac{1}{v_4(r)} + \frac{U_5}{v_5} + \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_7^2} \frac{1}{v_6(r)} + \frac{U_7}{v_7} \Rightarrow \\ \frac{1}{v_{\pi}} &= \frac{U_1}{v_1} + \frac{1}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{v_2(r)} dr + \frac{U_3}{v_3} + \frac{1}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{v_4(r)} dr + \frac{U_5}{v_5} + \frac{1}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{v_6(r)} dr + \frac{U_7}{v_7} \Rightarrow \\ \frac{1}{v_{\pi}} &= \frac{U_1}{v_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_2(r)} dr + \frac{U_3}{v_3} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_4(r)} dr + \frac{U_5}{v_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_6(r)} dr + \frac{U_7}{v_7} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Θεωρώντας ότι οι όροι που είναι υψωμένοι στο τετράγωνο είναι πολύ μικροί τελικά θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{\pi}} &= \frac{U_1}{v_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_2(r)} dr + \frac{U_3}{v_3} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_4(r)} dr + \frac{U_5}{v_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_6(r)} dr + \frac{U_7}{v_7} \Rightarrow \\ \frac{1}{v_{\pi}} &= \frac{U_1}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_{i,1}(r)} dr + \frac{U_3}{v_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_{i,2}(r)} dr + \frac{U_5}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_{i,3}(r)} dr + \frac{U_7}{v_m} \Rightarrow \\ v_{\pi} &= 1 / \left[\frac{U_1}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_{i,1}(r)} dr + \frac{U_3}{v_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_{i,2}(r)} dr + \frac{U_5}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_{i,3}(r)} dr + \frac{U_7}{v_m} \right] \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Οι συναρτήσεις $v_{i,1}(r), v_{i,2}(r), v_{i,3}(r)$ θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή όπως και στις προηγούμενες παραγράφους σύμφωνα με τις σχέσεις, (4.1.1.3), (4.1.1.7) και (4.1.1.9), όπου λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$, έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

Από προηγούμενες μελέτες [1στ] και [2στ] για το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο με χρήση της τασικής συνάρτησης του Airy Φ για κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} \quad (5.5.1)$$

και την θεωρία ελαστικότητας έχει εξαχθεί ο παρακάτω θεωρητικός τύπος για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K_c} \int_0^{r_7} r dr &= \frac{(2 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} \int_0^{r_1} r dr + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_2(r) - (2\nu_2(r))^2]}{E_2(r)} r dr + \frac{(2 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3} \int_{r_2}^{r_3} r dr + \\ &+ 2 \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_4(r) - (2\nu_4(r))^2]}{E_4(r)} r dr + \frac{(2 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5} \int_{r_4}^{r_5} r dr + 2 \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - \nu_6(r) - (2\nu_6(r))^2]}{E_6(r)} r dr + \\ &+ \frac{(2 - \nu_7 - 2\nu_7^2)}{E_7} \int_{r_6}^{r_7} r dr \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_7^2}$
- $U_2 = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_7^2}$
- $U_3 = \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{r_7^2}$
- $U_4 = \frac{(r_4^2 - r_3^2)}{r_7^2}$
- $U_5 = \frac{(r_5^2 - r_4^2)}{r_7^2}$
- $U_6 = \frac{(r_6^2 - r_5^2)}{r_7^2}$
- $U_7 = \frac{(r_7^2 - r_6^2)}{r_7^2}$

Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K_c} = & \frac{U_1(1-v_1-2v_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1-v_2(r)-2(v_2(r))^2]r}{E_2(r)} dr + \frac{U_3(1-v_3-2v_3^2)}{E_3} + \\ & + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1-v_4(r)-2(v_4(r))^2]r}{E_4(r)} dr + \frac{U_5(1-v_5-2v_5^2)}{E_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1-v_6(r)-2(v_6(r))^2]r}{E_6(r)} dr + \\ & + \frac{U_7(1-v_7-2v_7^2)}{E_7} \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Το μέτρο διόγκωσης για το σύνθετο υλικό μας γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με [23]:

$$K_c = \frac{P}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{2 \left[\frac{1-v_{\pi\pi}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^2}{E_T} \right]} \quad (5.5.4)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (5.4.3), η (5.4.4) θα γίνει:

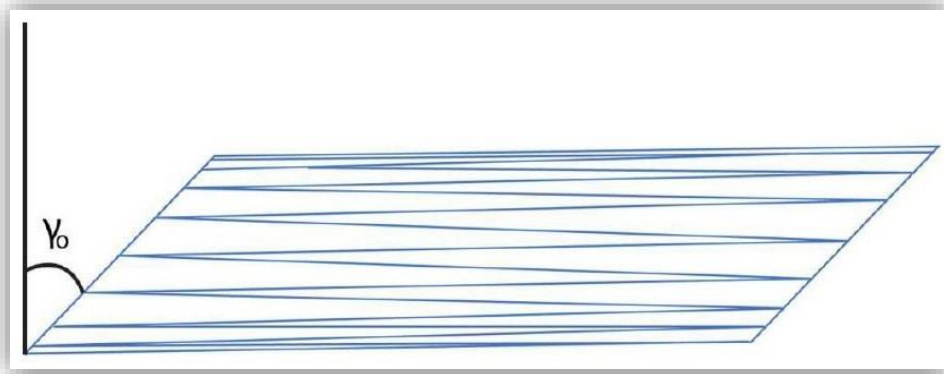
$$\begin{aligned} \frac{1-v_{\pi\pi}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^2}{E_L} = & \frac{U_1(1-v_1-2v_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1-v_2(r)-2(v_2(r))^2]r}{E_2(r)} dr + \frac{U_3(1-v_3-2v_3^2)}{E_3} + \\ & + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1-v_4(r)-2(v_4(r))^2]r}{E_4(r)} dr + \frac{U_5(1-v_5-2v_5^2)}{E_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1-v_6(r)-2(v_6(r))^2]r}{E_6(r)} dr + \\ & + \frac{U_7(1-v_7-2v_7^2)}{E_7} \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Η σχέση (5.5.5) μας δίνει το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T . Οι συναρτήσεις $v_{i,1}(r), v_{i,2}(r), v_{i,3}(r), E_{i,1}(r), E_{i,2}(r), E_{i,3}(r)$ θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή όπως και στις προηγούμενες παραγράφους σύμφωνα με τις σχέσεις (4.1.1.1), (4.1.1.3), (4.1.1.4), (4.1.1.6), (4.1.1.7) και (4.1.1.9), όπου λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$, έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

Οι θεωρητικοί τύποι του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L , του διαμήκους λόγου Poisson v_{LT} και του εγκάρσιου λόγου Poisson $v_{\pi\pi}$ έχουν υπολογιστεί στις προηγούμενες παραγράφους. Έτσι ο θεωρητικός τύπος του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T είναι:

$$\begin{aligned}
E_T = (1 - \nu_{TT}) / & \left\{ \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} + \frac{U_{f,1}(1 - \nu_f - 2\nu_f^2)}{E_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_2(r) - 2(\nu_2(r))^2]r}{E_2(r)} dr \right. \\
& + \frac{U_{m,1}(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)}{E_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_4(r) - 2(\nu_4(r))^2]r}{E_4(r)} dr + \frac{U_{f,2}(1 - \nu_f - 2\nu_f^2)}{E_f} \\
& \left. + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - \nu_6(r) - 2(\nu_6(r))^2]r}{E_6(r)} dr + \frac{U_{m,2}(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)}{E_m} \right\}
\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}



Εικόνα 5.2 Διάτμηση γ_0

Για τον προσδιορισμό του μέτρου διατμήσεως G_{LT} που ασκείται μια διάτμηση γ_0 (Εικόνα 5.2) θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση των ερευνητών **Tsai-Hahn** [30] που δίνει καλά αποτελέσματα παρότι αποτελεί μία βελτιωμένη μορφή του αντίστροφου νόμου των φάσεων με χρήση ενός συντελεστή $n_2 = 0.50$.

Tsai-Hahn

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_f + n_2 U_m} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m} \right] \tag{5.6.1}$$

Ο τύπος των **Tsai-Hahn** στην περίπτωση του θεωρητικού επαφασικού μοντέλου μετασχηματίζεται ως εξής

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_f + n_2 U_m} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m} \right]$$

⇓

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_{f,1} + U_{f,2} + n_2(U_{m,1} + U_{m,2}) + U_{i,1} + U_{i,2} + U_{i,3}} \left[\frac{U_{f,1}}{G_f} + \frac{U_{i,1}}{G_{i,1}} + \frac{n_2 U_{m,1}}{G_m} + \frac{U_{i,2}}{G_{i,2}} + \frac{U_{f,2}}{G_f} + \frac{U_{i,3}}{G_{i,3}} + \frac{n_2 U_{m,2}}{G_m} \right] =$$

$$\frac{1}{U_{f-total} + n_2 U_{m-total} + U_{i-total}} \left[\frac{U_{f-total}}{G_f} + \frac{n_2 U_{m-total}}{G_m} + \frac{U_{i,1}}{G_{i,1}} + \frac{U_{i,2}}{G_{i,2}} + \frac{U_{i,3}}{G_{i,3}} \right]$$

(5.6.2)

Οπότε η τελική σχέση του διαμήκους μέτρου διατμήσεως θέτοντας

$$U_{f-total} = U_f$$

$$U_{m-total} = U_m$$

$$U_{i-total} = U_i$$

Είναι

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{G_{i,1}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{G_{i,2}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{G_{i,3}(r)} dr \right] \Rightarrow$$

$$G_{LT} = 1 / \left[\frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{G_{i,1}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{G_{i,2}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{G_{i,3}(r)} dr \right] \right]$$

(5.6.3)

Όπου όπως και στις προηγούμενες παραγράφους θεωρούμε ότι τα $G_{i,1}(r), G_{i,2}(r), G_{i,3}(r)$ ακολουθούν την παραβολική μεταβολή σύμφωνα με τις σχέσεις (4.1.1.2), (4.1.1.5) και (4.1.1.8), όπου λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$, έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ E_θ , G_θ , ν_θ

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για το μέτρο ελαστικότητας, το μέτρο διατμήσεως και το λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης θ . Η γωνία θ , είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας φορτίσεως με την διεύθυνση των ινών. Οι σχέσεις που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθες [25]:

Για το μέτρο ελαστικότητας E_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{1}{E_L} (\cos\theta)^4 + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) (\sin\theta)^2 (\cos\theta)^2 + \frac{1}{E_T} (\sin\theta)^4 \quad (5.7.1)$$

Για το μέτρο διατμήσεως G_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$\frac{1}{G_\theta} = 2 \left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + \frac{4\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) (\sin\theta)^2 (\cos\theta)^2 + \frac{1}{G_{LT}} [(\sin\theta)^4 + (\cos\theta)^4] \quad (5.7.2)$$

Για τον λόγο Poisson ν_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$\nu_\theta = E_\theta \left[\frac{\nu_{LT}}{E_L} [(\sin\theta)^4 + (\cos\theta)^4] - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) (\sin\theta)^2 (\cos\theta)^2 \right] \quad (5.7.3)$$

Η εφαρμογή των εκφράσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω για τα $E_\theta, \nu_\theta, G_\theta$ θα γίνει παρακάτω για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 0,65 [31] οπότε και τα μεγέθη $E_L, E_T, G_{LT}, \nu_{LT}$ θα είναι υπολογισμένα στην συγκεκριμένη περιεκτικότητα.

5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στη συνέχεια παραθέτουμε θεωρητικές σχέσεις που κατά καιρούς έχουν εκφράσει διάφοροι ερευνητές για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L , του διαμήκη λόγου Poisson ν_L , του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T και του διαμήκους μέτρου διάτμησης G_{LT} . Να αναφέρουμε κατά τα γνωστά πως ο δείκτης f δηλώνει το έγκλεισμα (filler) ενώ ο δείκτης m δηλώνει την μήτρα (matrix).

5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L

Εξίσωση Θεογάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου[27]:

Οι παραπάνω ερευνητές θεώρησαν την ύπαρξη μιας ενδιάμεσης φάσης η οποία δημιουργείται ανάμεσα στην μήτρα και στο έγκλεισμα. Το μοντέλο τους είναι κυλινδρικό τριφασικό και η κατανομή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης στον παρακάτω τύπο επιλέχθηκε να είναι παραβολική.

$$\begin{aligned}
 E_L = E_f U_f + E_m U_m + & \frac{3(E_f + E_m)(1 - U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6 \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} + \\
 & + \frac{8(E_f - E_m)(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{6 \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} + \\
 & + \frac{6 \left\{ E_f(1 - U_m) + E_m U_f - 2E_m [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]}
 \end{aligned}$$

(5.8.1)

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

Νόμος των φάσεων (mixture law):

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m$$

(5.8.2)

Εξίσωση Ekvall [32]:

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m \quad (5.8.3)$$

$$\text{Όπου } E_m' = \frac{E_m}{(1 - 2\nu_m)^2}$$

5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT} **Εξίσωση Θεογάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27]:**

Θεωρώντας και πάλι το κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση και χρησιμοποιώντας την παραβολική μεταβολή, οι παραπάνω ερευνητές έδειξαν ότι ισχύει η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \nu_{LT} = & \nu_f U_f + \nu_m U_m + \frac{3(\nu_f + \nu_m)(1 - U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6 \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} + \\ & + \frac{8(\nu_f - \nu_m)(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{6 \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} + \\ & + \frac{6 \left\{ \nu_f(1 - U_m) + \nu_m U_f - 2\nu_m [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

Νόμος των φάσεων (mixture law):

$$\nu_L = \nu_f U_f + \nu_m U_m \quad (5.8.5)$$

Εξίσωση Rosen [33]:

$$\nu_{LT} = \frac{U_f E_f L_1 + U_m E_m L_2 \nu_m}{U_f E_f L_3 + U_m E_m L_2} \quad (5.8.6)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} L_1 &= 2v_f(1-v_m^2)U_f + v_m(1+v_m)U_m \\ L_2 &= U_f(1-v_f-2v_f^2)U_f + (1+v_m)U_m \\ L_3 &= 2(1-v_m^2)U_f + (1+v_m)U_m \end{aligned}$$

5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

Εξίσωση Σιδερίδη [23]:

Θεωρώντας την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης στο κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο και έστω ότι $E_i(r)$ και $v_i(r)$ οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο Poisson της ενδιάμεσης φάσης, με βάση την παραβολική μεταβολή, τότε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του μοντέλου E_T θα είναι:

$$\frac{1-v_{TT}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^2}{E_L} = \frac{1}{E_f}(1-v_f-2v_f^2)U_f + \frac{1}{E_m}(1-v_m-2v_m^2)U_m + \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b \frac{(1-v_i(r)-2v_i^2(r))}{E_i(r)} r dr \quad (5.8.7)$$

Όπου τα E_L και τα v_{LT} δίνονται από τις σχέσεις (5.8.1) και (5.8.4). Πάλι λόγω της ενδιάμεσης φάσης θα ισχύει ότι $U_m = 1 - U_f - U_i$

Εξίσωση Paul [34]:

Η εξίσωση του Paul αποτελεί ένα ελάχιστο όριο για το E_T και είναι η εξής:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m} \quad (5.8.8)$$

Εξίσωση Whitney-Riley [35]:

$$E_T = \frac{2K_c(1-v_T)E_L}{E_L + 4K_c v_L^2} \quad (5.8.9)$$

Όπου K_c το μέτρο διογκώσεως του σύνθετου υλικού και ισχύει η σχέση:

$$K_c = \frac{(k_f + G_m)k_m - (k_f - k_m)G_m U_f}{(k_f + G_m) - (k_f - k_m)U_f}$$

$$\text{με } k_f = \frac{E_f}{(1-v_f-2v_f^2)} \text{ και } k_m = \frac{E_m}{(1-v_m-2v_m^2)}$$

Εξίσωση Ekvall [36]:

$$E_T = \frac{E_f E_m'}{U_f E_m' + U_m E_f (1 - \nu_m^2)} \quad (5.8.10)$$

$$\text{Όπου } E_m' = \frac{E_m}{(1 - 2\nu_m)^2}$$

Εξίσωση Tsai-Hahn [30]:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{U_f + n_2 U_m} \left[\frac{U_f}{E_f} + \frac{n_2 U_m}{E_m} \right] \quad \text{όπου } n_2 = 0.50 \quad (5.8.11)$$

Εξίσωση Halpin-Tsai [30]:

$$E_T = E_m \left(\frac{1 + \xi n U_f}{1 - n U_f} \right) \quad \text{όπου } n = \frac{E_f/E_m - 1}{E_f/E_m + \xi} \quad \text{και } \xi = 2 \quad (5.8.12)$$

5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}

Εξίσωση Σιδερίδη [24]:

Θεωρείται από τον ερευνητή το τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση, όπου με $G_i(r)$ συμβολίζεται το διάμηκες μέτρο διατμήσεως της ενδιάμεσης φάσης, το οποίο περιγράφεται με την παραβολική μεταβολή. Το διάμηκες μέτρο διατμήσεως G_{LT} θα είναι:

$$G_{LT} \gamma_0 = G_f (A + \gamma_0)^2 U_f + \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b G_i(r) (D + \gamma_0)^2 r dr + G_m \left[(K + \gamma_0)^2 + \frac{K^2}{1 - U_m} \right] U_m \quad (5.8.13)$$

$$\text{Όπου } A = D = \frac{(G_m - G_i)(c^2 - b^2)}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_0, \quad K = \frac{(G_i - G_m)b^2}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_0$$

$$\text{και } U_m = 1 - U_f - U_i$$

Νόμος των φάσεων (mixture law):

$$G_{LT} = \frac{G_f G_m}{G_f U_m + G_m U_f} \quad (5.8.14)$$

Εξίσωση Hashin-Rosen [37]:

Οι Hashin και Rosen έδωσαν μια έκφραση η οποία αποτελεί ένα κάτω όριο για το G_{LT} και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_m \frac{(1+U_f)G_f + G_m U_m}{(1+U_f)G_m + G_f U_m} \quad (5.8.15)$$

Εξίσωση Hashin [38]:

Ο Hashin έδωσε επίσης μια έκφραση που αποτελεί ένα άνω όριο για το G_{LT} και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_f \frac{(1+U_m)G_m + G_f U_f}{(1+U_m)G_f + G_m U_f} \quad (5.8.16)$$

Εξίσωση Ekvall-Greszczuk [39],[40]:

$$G_{LT} = \frac{G_m G_f}{R \Phi G_m + (1-R)G_f} \quad (5.8.17)$$
$$\mu\epsilon \quad \Phi = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta d\theta}{(G_m/G_f) + \sin\theta(1-(G_m/G_f))}$$

R είναι ο λόγος της ακτίνας της ίνας προς το μήκος του στοιχείου κατά την διεύθυνση φόρτισης θ

Εξίσωση Tsai-Hahn [30]:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_f + n_2 U_m} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m} \right] \quad \text{όπου } n_2 = 0.50 \quad (5.8.18)$$

Εξίσωση Halpin-Tsai [30]:

$$G_{LT} = G_m \left(\frac{1 + \xi n U_f}{1 - n U_f} \right) \quad \text{όπου } n = \frac{G_f/G_m - 1}{G_f/G_m + \xi}, \xi = 2 \quad \text{και } \xi = 2 \quad (5.8.19)$$

5.9 ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ -ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Για τον υπολογισμό των τελικών σχέσεων των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson, όπως εξήχθησαν στις προηγούμενες παραγράφους, χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα "Matlab 2019".

Οι τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson εξήχθησαν από τις ακόλουθες θεωρητικές σχέσεις:

- α. Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L (5.2.6) και (5.2.7), (5.2.8).
- β. Διάμηκες Λόγου POISSON ν_{LT} (5.3.2), (5.3.3) και (5.3.4)
- γ. Εγκάρσιου Λόγου POISSON ν_{TT} (5.4.4)
- δ. Εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T (5.5.6)
- ε. Διάμηκες μέτρο Διατμήσεως G_{LT} (5.5.3)

Οι τιμές των ελαστικών σταθερών των συστατικών του σύνθετου υλικού που χρησιμοποιήθηκε στην μελέτη, δίνονται στον **πίνακα ε του Κεφαλαίου 4**. Αναλυτικότερη περιγραφή των συστατικών του σύνθετου υλικού θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο στην ανάλυση των δυναμικών ελαστικών σταθερών.

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E(GPa)	Λόγος Poisson ν	Μέτρο διατμήσεως G(GPa)
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Υαλος	70	0.20	30

Πίνακας ε

5.9.1 ΠΙΝΑΚΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα παραθέσουμε τις τιμές των ελαστικών σταθερών για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα, όπως υπολογίστηκαν από τις θεωρητικές σχέσεις που εξήγαμε για το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο.

Για λόγους σύγκρισης τόσο στους πίνακες τιμών όσο και στα αντίστοιχα διαγράμματα θα παραθέσουμε και τις τιμές που προκύπτουν από τα μοντέλα έτερων ερευνητών.

Στον **Πίνακα ιβ** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά ανάλογα με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, η κατ' όγκο περιεκτικότητα της κάθε φάσης, η αντίστοιχη ακτίνα της και οι ελαστικές σταθερές του σύνθετου υλικού. Αυτά υπολογίστηκαν βάσει του κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου με παραβολική μεταβολή της ενδιάμεσου φάσεως.

Επιπρόσθετα στον ίδιο πίνακα αναγράφουμε τις τιμές λ του μήκους της πλευράς του εσωτερικού τετραγωνικού πρίσματος του δομικού «κυττάρου» του σύνθετου υλικού, πριν αυτό το αναγάγουμε σε κυλινδρικό.

Στον **Πίνακα ιγ** παραθέτουμε τις τιμές του **Διαμήκους Μέτρου Ελαστικότητας** E_L όπως υπολογίστηκε για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα από το θεωρητικό

επταφασικό μοντέλο, τις τιμές που προκύπτουν από άλλους ερευνητές καθώς και τα πειραματικά αποτελέσματα που έχουν αντληθεί από τις πηγές [41],[42] και [43] της βιβλιογραφίας και αναφέρονται στον πίνακα ως **Experiment Data I**, **Experiment Data II** και **Experiment Data III**.

Στον **Πίνακα ιδ** παραθέτουμε τις τιμές του **Διαμήκους Λόγου Poisson** ν_{LT} όπως υπολογίστηκε για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο, τις τιμές που προκύπτουν από άλλους ερευνητές καθώς και τα πειραματικά αποτελέσματα που έχουν αντληθεί από τις πηγές [42] και [44] της βιβλιογραφίας και αναφέρονται στον πίνακα ως **Experiment Data I** και **Experiment Data II**.

Στον **Πίνακα ιε** παραθέτουμε τις τιμές του **Εγκάρσιου Λόγου Poisson** ν_{TT} όπως υπολογίστηκε για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο.

Στον **Πίνακα ιστ** παραθέτουμε τις τιμές του **Εγκάρσιου Μέτρου Ελαστικότητας** E_T όπως υπολογίστηκε για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο, τις τιμές που προκύπτουν από άλλους ερευνητές καθώς και τα πειραματικά αποτελέσματα που έχουν αντληθεί από τις πηγές [42],[45] και [46] της βιβλιογραφίας και αναφέρονται στον πίνακα ως **Experiment Data I**, **Experiment Data II** και **Experiment Data III**.

Στον **Πίνακα ιζ** παραθέτουμε τις τιμές του **Διαμήκους Μέτρου Διατμήσεως** G_{LT} όπως υπολογίστηκε για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο, τις τιμές που προκύπτουν από άλλους ερευνητές καθώς και τα πειραματικά αποτελέσματα που έχουν αντληθεί από τις πηγές [47] και [48] της βιβλιογραφίας και αναφέρονται στον πίνακα ως **Experiment Data I** και **Experiment Data II**.

Στον **Πίνακα ιη** παραθέτουμε τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας E_θ , του μέτρου διατμήσεως G_θ και του λόγου Poisson ν_θ υπό γωνία φόρτισης θ (από 0° μέχρι 90°), για 0.65 κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα όπως προκύπτουν από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο. Επίσης **αναγράφουμε** τα πειραματικά αποτελέσματα που έχουν αντληθεί από την πηγή [31] της βιβλιογραφίας και αναφέρονται στον πίνακα ως **Experiment Data E_θ** , **Experiment Data G_θ** και **Experiment Data ν_θ** .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τα πειραματικά δεδομένα για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T και το διάμηκες μέτρο διατμήσεως G_{LT} προέκυψαν από ανάγνωση αντίστοιχων διαγραμμάτων. Εξαιτίας του γεγονότος ότι δεν υπήρχαν οι πίνακες με τις ακριβείς πειραματικές τιμές, είναι πιθανή μια μικρή απόκλιση από τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές των πειραμάτων.

ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ							
U_f	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%
U₁	0.0200000	0.0400000	0.0600000	0.0800000	0.1000000	0.1200000	0.1300000
U₂	0.000585915	0.001931200	0.003419427	0.004419430	0.004261414	0.002209280	0.000216561
U₃	0.332113167	0.270767882	0.209279655	0.148279652	0.088437668	0.030489801	0.002482521
U₄	0.000585915	0.001931200	0.003419427	0.004419430	0.004261414	0.002209280	0.000216561
U₅	0.079414085	0.158068800	0.236580573	0.315580571	0.395738586	0.477790720	0.519783439
U₆	0.001994630	0.007415960	0.015420150	0.025163361	0.035801751	0.046491481	0.051591948
U₇	0.565306288	0.519884958	0.471880768	0.422137558	0.371499168	0.320809437	0.295708970
λ(μm)	37.59943	26.58681	21.70804	18.79971	16.81497	15.34990	14.74771
r₁(μm)	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000
r₂(μm)	6.08725	6.14313	6.16860	6.16350	6.12651	6.05498	6.00500
r₃(μm)	25.19640	16.77585	12.79138	10.23302	8.32897	6.76829	6.06197
r₄(μm)	25.21732	16.82757	12.87133	10.32973	8.42056	6.81707	6.06691
r₅(μm)	27.90803	20.62594	17.53908	15.77069	14.60725	13.77714	13.44423
r₆(μm)	27.97228	20.78710	17.80089	16.12570	15.04195	14.27435	13.96547
r₇(μm)	42.42641	30.00000	24.49490	21.21320	18.973667	17.32051	16.64101
E_L	10.1812	16.9210	23.7143	30.5563	37.4431	44.3724	47.8529
v_{LT}	0.331	0.314	0.297	0.281	0.266	0.252	0.245
v_{TT}	0.3349	0.3197	0.3044	0.2890	0.2734	0.2578	0.2500
E_T	5.2571	6.4408	7.7129	9.2841	11.3800	14.3632	16.3913
G_{LT}	1.5695	1.9277	2.3937	3.0133	3.8642	5.0892	5.9232

Πίνακας ιβ

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L (Gpa)								
U_f κατ'ογκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%
ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	3.500	10.1812	16.9210	23.7143	30.5563	37.4431	44.3724	47.8529
ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	3.500	10.38	17.31	24.3	31.35	38.45	45.60	49.13
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	3.500	10.35	17.20	24.05	30.90	37.75	44.60	48.03
EKVALL	4.640	11.37	18.11	24.85	31.59	38.32	45.05	48.42
Experiment Data I	3.500	10.36	17.22	26.07	30.92	37.77	44.62	48.13
Experiment Data II	3.450	10.41	17.38	-	-	38.11	45.12	48.62
Experiment Data III	-	-	-	-	-	-	48.14	52.15

Πίνακας ιγ

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{LT}								
U_f κατ'ογκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%
ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤΕΛΟ	0.350	0.331	0.314	0.297	0.281	0.266	0.252	0.245
ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	0.350	0.335	0.320	0.304	0.289	0.273	0.258	0.250
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	0.350	0.335	0.320	0.305	0.290	0.275	0.260	0.253
ROSEN	0.350	0.331	0.314	0.297	0.281	0.266	0.252	0.245
Experiment Data I	0.350	0.332	0.315	0.300	0.286	0.273	0.262	0.256
Experiment Data II	0.350	0.330	0.320	-	-	0.280	0.260	-

Πίνακας Ιδ

ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{TT}								
U_f κατ'ογκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%
ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤΕΛΟ	0.3500	0.3349	0.3197	0.3044	0.2890	0.2734	0.2578	0.2500

Πίνακας ιε

ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T (Gpa)									
U_f κατ'ογκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	55%	60%	65%
ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	3.5000	5.2571	6.4408	7.7129	9.2841	11.3800	-	14.3632	16.3913
ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ	3.50	5.32	6.56	7.88	9.48	11.60	-	14.67	17.15
PAUL – LOWER BOUND	3.50	3.87	4.32	4.90	5.65	6.68	-	8.16	9.32
WHITNEY-RILEY	3.50	5.13	6.08	6.98	8.02	9.31	-	11.04	12.28
EKVALL	4.64	5.12	5.70	6.45	7.41	8.74	-	10.57	12.00
HALPIN-TSAI	3.50	4.50	5.70	7.19	9.08	11.54	-	14.88	17.29
TSAI-HAHN	3.50	4.23	5.13	6.28	7.80	9.93	-	13.15	15.48
Experment Data I	-	-	4.40	7.52	-	11.60	-	15.00	-
Experment Data II	-	-	-	-	-	-	15.80	-	17.60
Experment Data III	-	-	-	-	-	-	-	15.40	-

Πίνακας ιστ

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G_{LT} (GPa)									
U_f κατ'ογκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	55%	60%	65%
ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	1.2900	1.5695	1.9277	2.3937	3.0133	3.8642	-	5.0892	5.9232
ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ	1.2900	1.57	1.90	2.33	2.91	3.74	-	4.99	5.89
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	1.2900	4.17	7.04	9.91	12.78	15.65	-	18.52	19.96
TSAI-HAHN	1.2900	1.56	1.90	2.33	2.90	3.70	-	4.93	5.82
EKVALL-GRESZCZUK	1.2900	1.44	1.61	1.82	2.11	2.49	-	3.05	3.44
HASHIN-ROSEN	1.2900	1.56	1.88	2.29	2.81	3.50	-	4.48	5.14
HASHIN	1.2900	2.87	4.61	6.54	8.71	11.14	-	13.90	15.42
Experiment Data I	-	-	-	-	-	-	6.41	6.88	7.50
Experiment Data II	-	-	-	-	-	-	-	6.09	6.79

Πίνακας ιζ

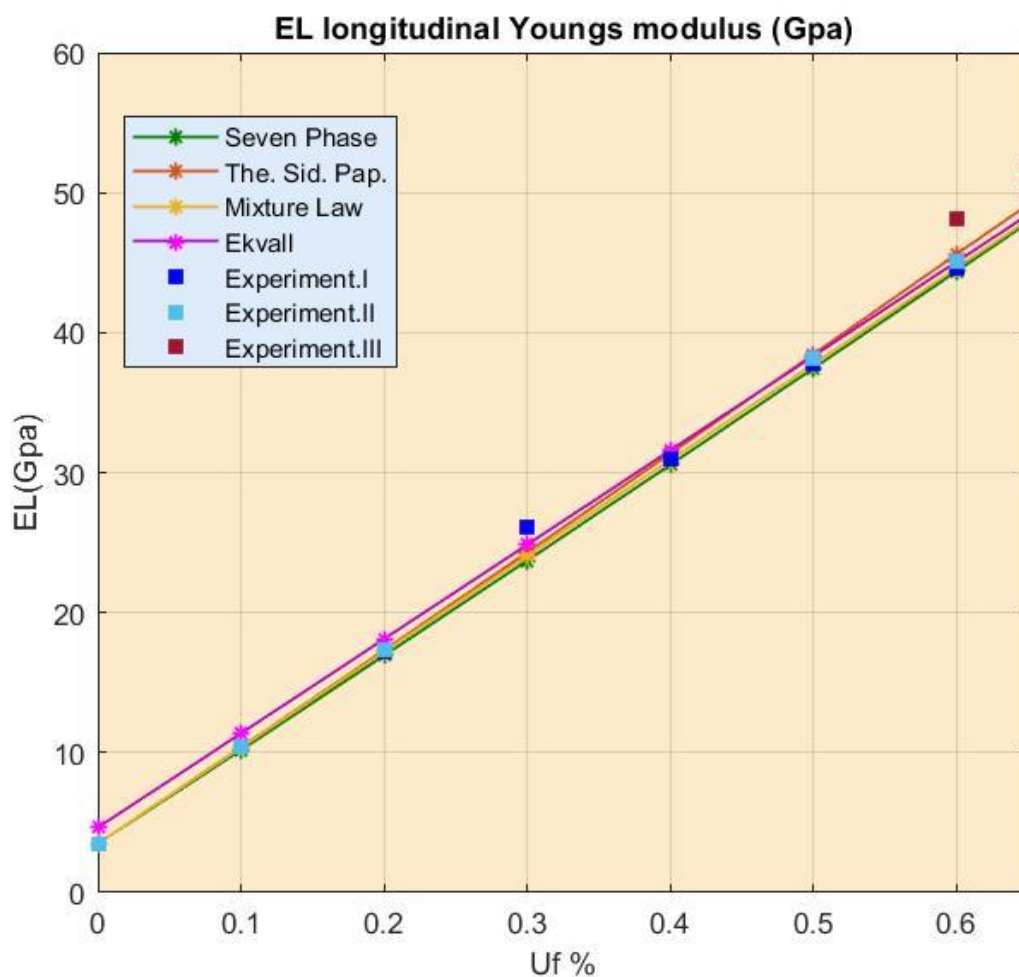
E_{θ}, v_{θ}, G_{θ} $U_f=65\%$						
θ°	E_{θ}	v_{θ}	G_{θ}	E_{θ} Experiment Data	v_{θ} Experiment Data	G_{θ} Experiment Data
0	47.8529	0.2450	5.9232	49.130	0.249	6.450
5	45.9134	0.2616	6.0055	-	-	-
10	41.0688	0.3024	6.2556	-	-	-
15	35.2399	0.3493	6.6819	37.273	0.342	7.229
20	29.8416	0.3892	7.2916	-	-	-
25	25.4381	0.4164	8.0757	-	-	-
30	22.0736	0.4304	8.9835	23.735	0.416	9.532
35	19.5996	0.4321	9.8897	-	-	-
40	17.8372	0.4230	10.5868	-	-	-
45	16.6325	0.4040	10.8525	17.921	-	11.339
50	15.8660	0.3762	10.5868	-	-	-
55	15.4464	0.3406	9.8897	-	-	-
60	15.3003	0.2983	8.9835	16.363	0.287	9.532
65	15.3625	0.2515	8.0757	-	-	-
70	15.5674	0.2030	7.2916	-	-	-
75	15.8444	0.1571	6.6819	16.749	0.154	7.229
80	16.1184	0.1187	6.2556	-	-	-
85	16.3182	0.0930	6.0055	-	-	-
90	16.3913	0.0839	5.9232	17.220	0.086	6.450

Πίνακας η

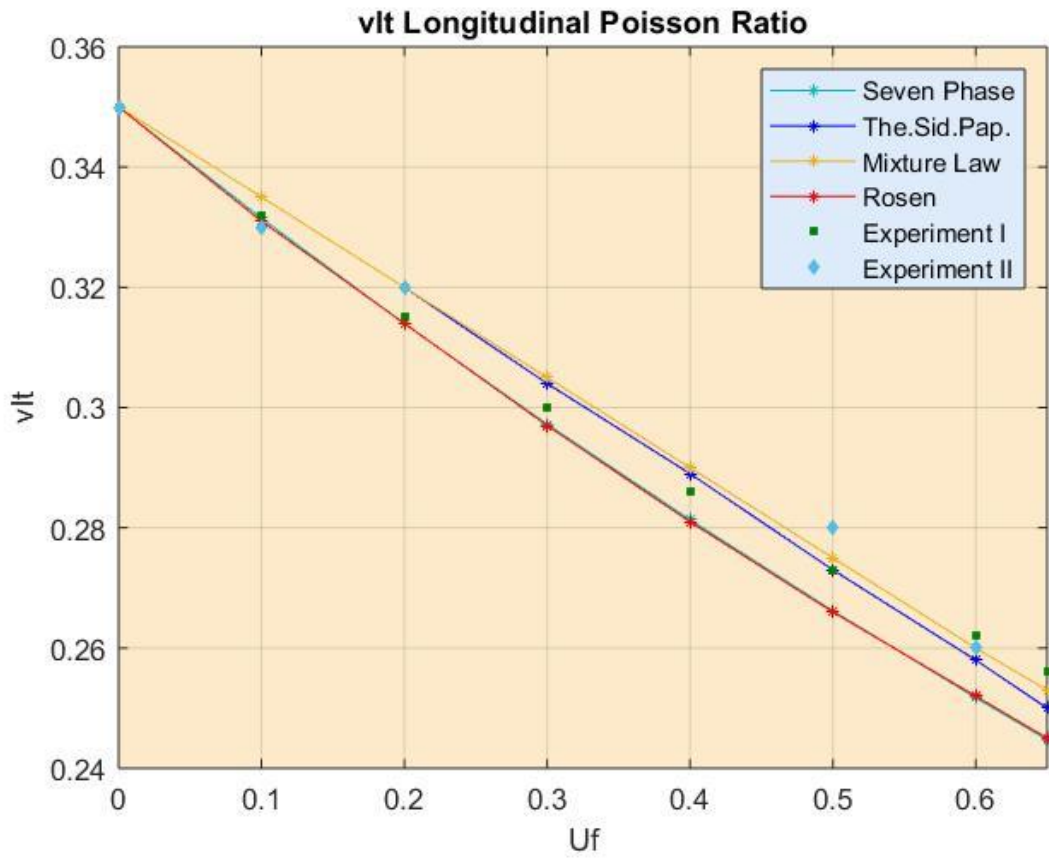
5.9.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Παρακάτω παρατίθενται τα συγκριτικά διαγράμματα με τις ελαστικές σταθερές για το επταφασικό μοντέλο, τα μοντέλα των άλλων μελετητών και τις υφιστάμενες πειραματικές τιμές. Τα θεωρητικά μοντέλα απεικονίζονται με μία συνεχή γραμμή διαφορετικού χρώματος ενώ τα υφιστάμενα πειραματικά δεδομένα μόνο ως σημεία.

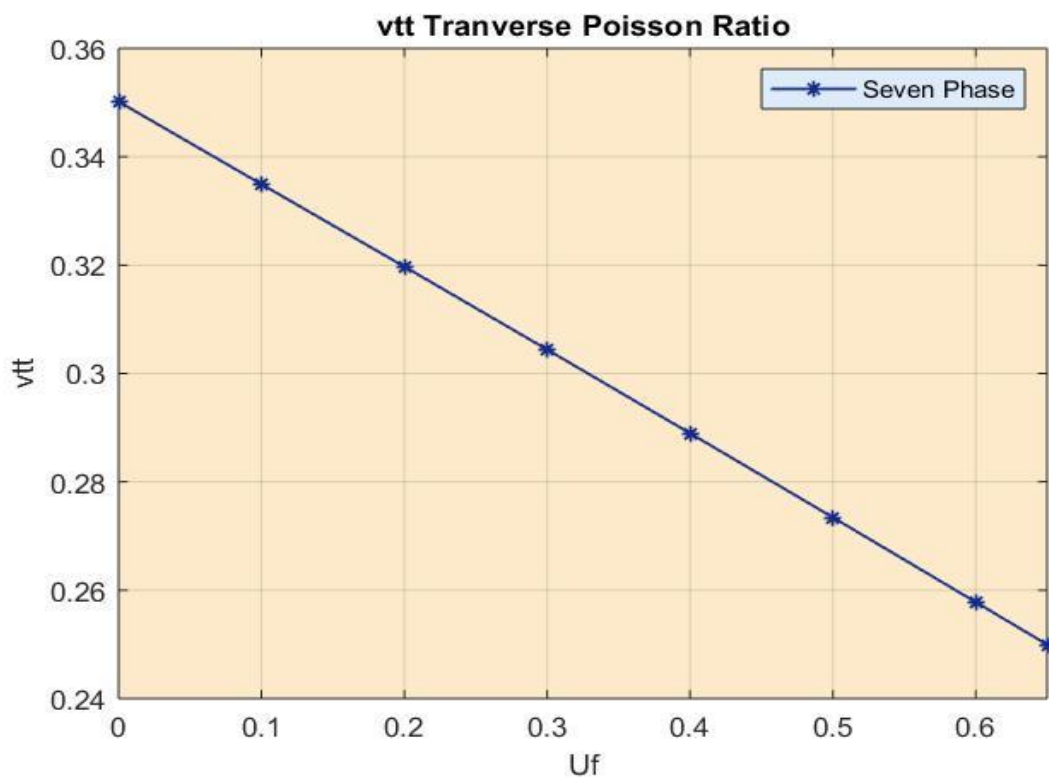
Επίσης παρατίθενται και τα διαγράμματα που προέκυψαν από το επταφασικό μας μοντέλο των $E_\theta, G_\theta, \nu_\theta$ μαζί τις πειραματικές τιμές αυτών, για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 65%.



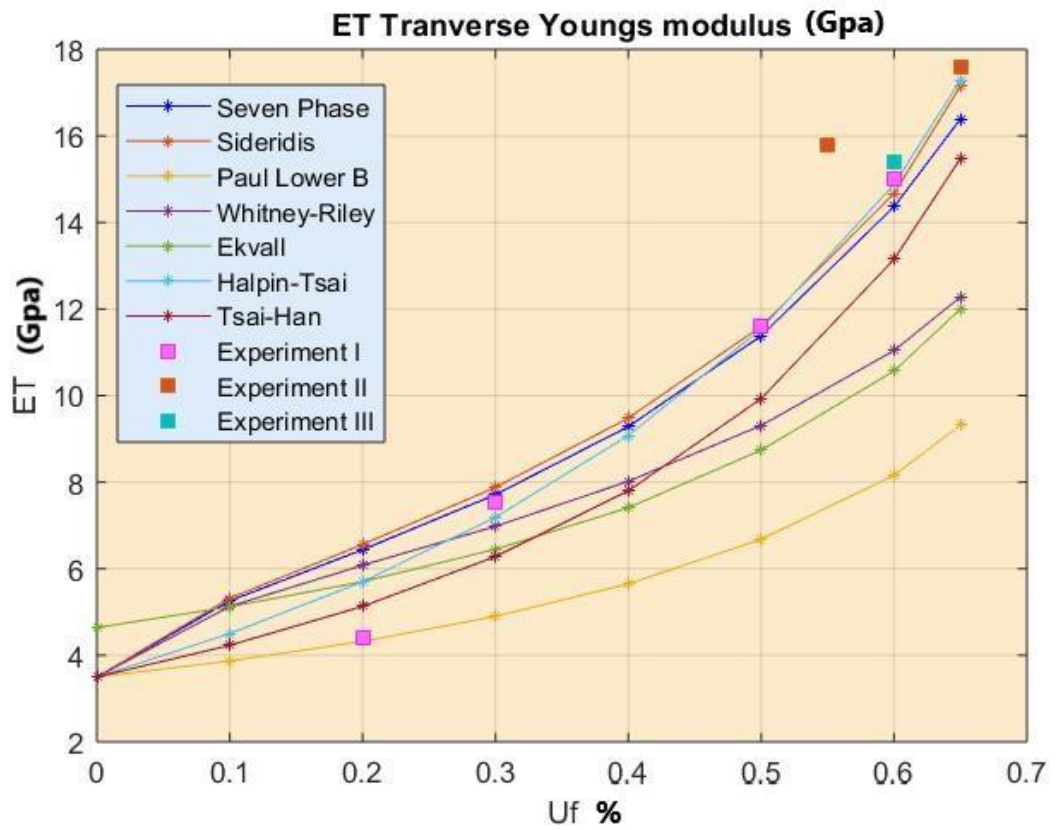
Εικόνα 5.2 Διάγραμμα E_L



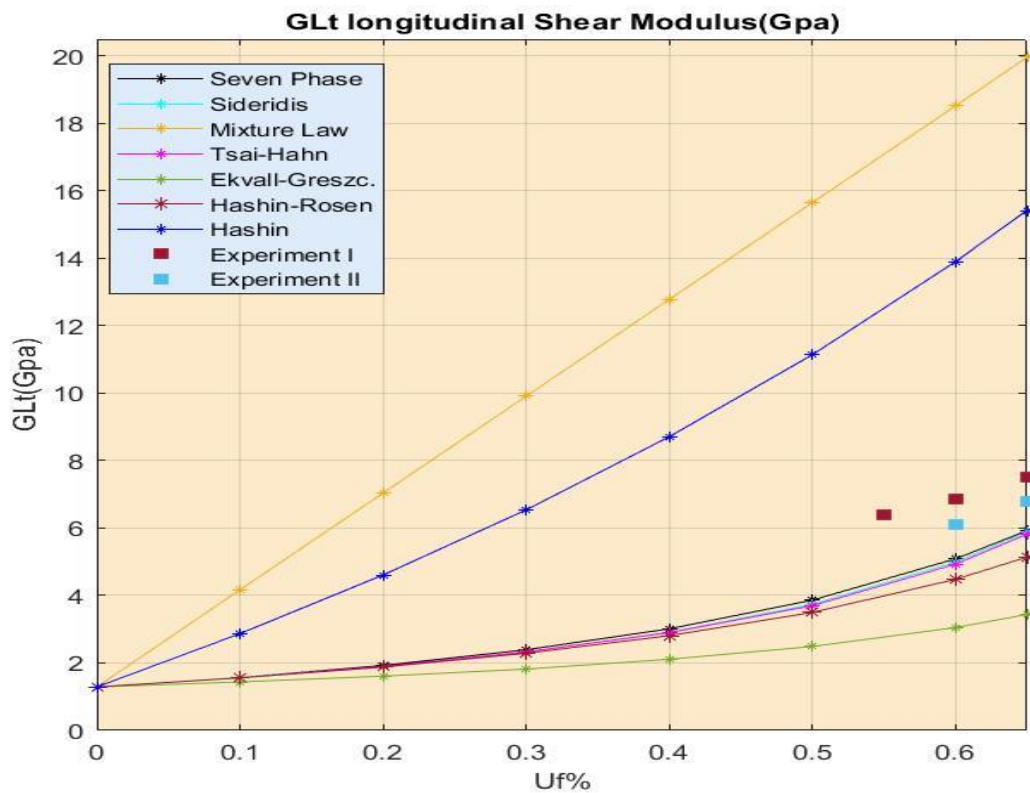
Εικόνα 5.3 Διάγραμμα ν_{LT}



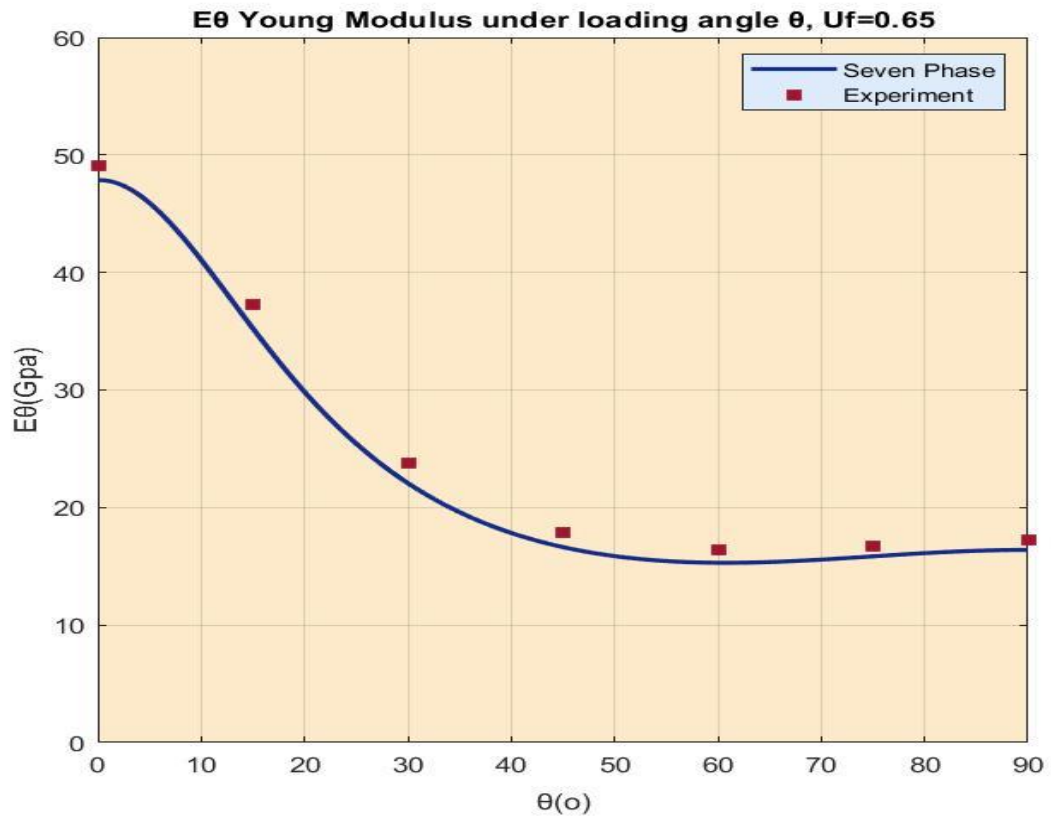
Εικόνα 5.4 Διάγραμμα ν_{TT}



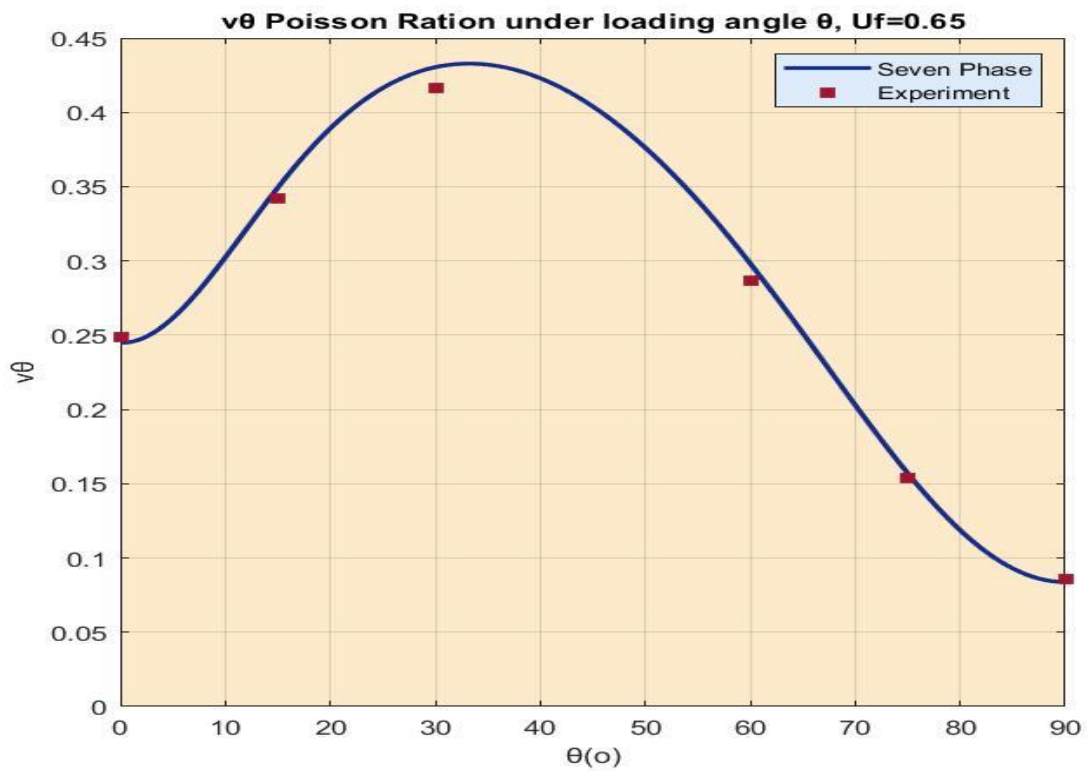
Εικόνα 5.5 Διάγραμμα E_T



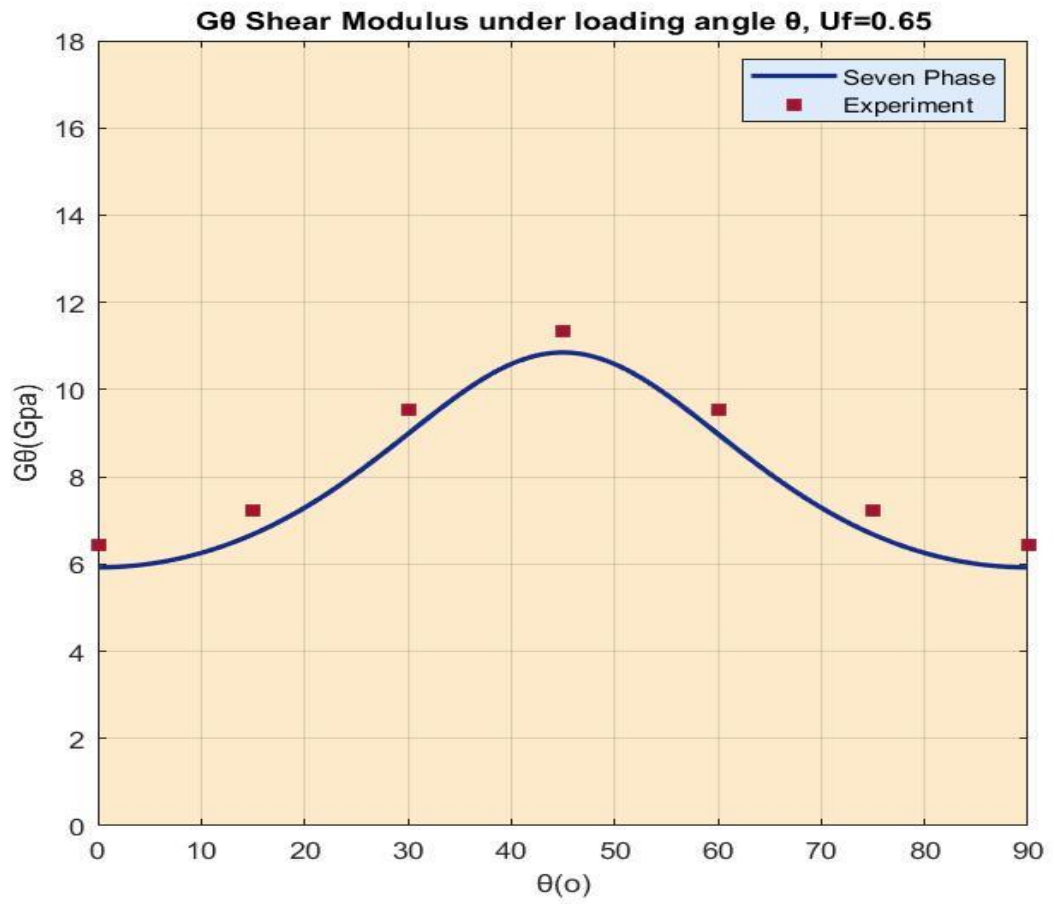
Εικόνα 5.6 Διάγραμμα G_{LT}



Εικόνα 5.7 Διάγραμμα E_{θ}



Εικόνα 5.8 Διάγραμμα ν_{θ}



Εικόνα 5.9 Διάγραμμα G_{θ}

5.10 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αρχικά να αναφέρουμε ότι η απόκλιση των τιμών των ελαστικών σταθερών, που εξήχθησαν από το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο, σε σχέση με τα υφιστάμενα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη για τους εξής κατασκευαστικούς κυρίως λόγους:

- Η κατανομή των ινών μέσα στη ρητίνη αν και την θεωρούμε ομοιογενή στην πραγματικότητα δεν είναι.
- Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φυσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ.)
- Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
- Το θεωρητικό μοντέλο προβλέπει τέλεια γεωμετρικά σχήματα (κυλινδρικές ίνες) ενώ στην πραγματικότητα δύναται να υπάρχουν μικρές ατέλειες στην επιφάνεια και καθώς και ίνες με διαφορετικό μέγεθος.
- Η τέλεια ευθυγράμμιση των ινών είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί στα δοκίμια των πειραμάτων.
- Τα πειραματικά δεδομένα εμπεριέχουν και αυτά σφάλματα μετρήσεων τόσο από τους χειριστές οργάνων όσο και από τα ίδια τα όργανα.

Πέρα των ανωτέρω το **Θεωρητικό Επταφασικό Μοντέλο** δείχνει να ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην πραγματικότητα αφού οι τιμές που εξήχθησαν από αυτό, προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα υφιστάμενα πειραματικά δεδομένα στις περισσότερες των περιπτώσεων. Παρακάτω θα σχολιάσουμε αναλυτικότερα τα αποτελέσματα των διαγραμμάτων της προηγούμενης παραγράφου.

Διαμήκες Μέτρο Ελαστικότητας E_L

Στο διάγραμμα της εικόνας 5.2 αποτυπώνεται η μεταβολή του **Διαμήκους Μέρους Ελαστικότητας (E_L)** του σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα U_f . Στο διάγραμμα εκτός από το επταφασικό μοντέλο φαίνονται και τα αποτελέσματα των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27] και Ekvall [32], τα αποτελέσματα του Νόμου των Φάσεων [5.8.2] καθώς και τα πειραματικά δεδομένα που αντλήθηκαν από την βιβλιογραφία **experiment data I** [41], **experiment data II** [42] και **experiment data III** [43].

Αυτό που παρατηρούμε σε όλες τις μελέτες και στα πειραματικά δεδομένα είναι ότι το μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Επίσης παρατηρούμε πολύ καλή σύγκλιση τιμών σε όλες τις θεωρητικές μελέτες ιδιαίτερα μεταξύ του επταφασικού μοντέλου, του μοντέλου των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27] και του νόμου των φάσεων [5.8.2]. Μία αμυδρή διαφορά υπάρχει μεταξύ των προηγούμενων μοντέλων και του μοντέλου του ερευνητή Ekvall [32]

Τέλος πολύ καλή σύγκλιση παρατηρούμε μεταξύ των θεωρητικών μοντέλων και των υφιστάμενων πειραματικών δεδομένων

Διαμήκης Λόγος Poisson ν_{LT}

Στο διάγραμμα της εικόνας 5.3 αποτυπώνεται η μεταβολή του Διαμήκους Λόγου Poisson (ν_{LT}) του σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα U_f . Στο διάγραμμα εκτός από το επταφασικό μοντέλο φαίνονται και τα αποτελέσματα των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27] και Rosen [33], τα αποτελέσματα του Νόμου των Φάσεων [5.8.5] καθώς και τα πειραματικά δεδομένα που αντλήθηκαν από την βιβλιογραφία **experiment data I** [42] και **experiment data II** [44].

Αυτό που παρατηρούμε σε όλες τις μελέτες και στα πειραματικά δεδομένα είναι ότι ο διαμήκης λόγος Poisson μειώνεται όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Επίσης παρατηρούμε μια σχεδόν τέλεια σύγκλιση τιμών μεταξύ του επταφασικού μοντέλου και του μοντέλου του Rosen [33] καθώς και μια σχεδόν τέλεια σύγκλιση του μοντέλου των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27] και του νόμου των φάσεων [5.8.5].

Γενικότερα παρατηρούμε καλή σύγκλιση όλων των θεωρητικών μοντέλων μεταξύ τους καθώς και πολύ καλή σύγκλιση μεταξύ των θεωρητικών μοντέλων και των υφιστάμενων πειραματικών δεδομένων.

Εγκάρσιος Λόγος Poisson ν_{TT}

Στο διάγραμμα της εικόνας 5.4 αποτυπώνεται η μεταβολή του Εγκάρσιου Λόγου Poisson (ν_{TT}) του σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα U_f .

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι ο Εγκάρσιος Λόγος Poisson μειώνεται όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Για τον Εγκάρσιο Λόγο Poisson δεν έχουμε στοιχεία από άλλους μελετητές ή πειραματικά δεδομένα.

Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας E_T

Στο διάγραμμα της εικόνας 5.5 αποτυπώνεται η μεταβολή του Εγκάρσιου Μέρους Ελαστικότητας (E_T) του σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα U_f . Στο διάγραμμα εκτός από το επταφασικό μοντέλο φαίνονται και τα αποτελέσματα των ερευνητών Σιδερίδη [23], Paul-Lower Bound [34], Whitney-Riley [35], Ekvall [36], Tsai-Hahn [30] και Halpin-Tsai [30] καθώς και τα πειραματικά δεδομένα που αντλήθηκαν από την βιβλιογραφία **experiment data I** [42], **experiment data II** [45] και **experiment data III** [46].

Αυτό που παρατηρούμε σε όλες τις μελέτες και στα πειραματικά δεδομένα είναι ότι το Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας αυξάνεται όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Παρατηρούμε σχεδόν τέλεια σύγκλιση τιμών του θεωρητικού επταφασικού μοντέλου και των τιμών που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [23], που θα την χαρακτηρίζαμε αναμενόμενη καθώς και τα δύο μοντέλα προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψιν της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως. Το μοντέλο των Halpin-Tsai [30] συγκλίνει με τα προηγούμενα δύο σε λίγο μικρότερο βαθμό για

περιεκτικότητες σε έγκλεισμα μέχρι $U_f=0.4$, ενώ για μεγαλύτερες περιεκτικότητες η σύγκλιση είναι πολύ καλή. Σε μικρότερο βαθμό είναι η σύγκλιση με το μοντέλο των ερευνητών Tsai-Hahn[30]. Ακόμα παρατηρούμε σύγκλιση των τιμών μεταξύ των ερευνητών Whitney-Riley [35] και Ekvall [36] που όμως δεν είναι κοντά στις τιμές προκύπτουν από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο, ιδιαίτερα όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Οι τιμές του μοντέλου των Paul-Lower Bound [34] δεν συγκλίνουν με τις τιμές κάποιου από τα προαναφερόμενα μοντέλα και θα λέγαμε ότι εμφανίζονται αρκετά μειωμένες.

Τέλος πολύ καλή σύγκλιση παρατηρούμε μεταξύ του Θεωρητικού Επταφασικού Μοντέλου και των υφιστάμενων πειραματικών δεδομένων.

Διαμήκες Μέτρο Διατμήσεως G_{LT}

Στο διάγραμμα της εικόνας 5.6 αποτυπώνεται η μεταβολή του Διαμήκου Μέτρου Διατμήσεως (G_{LT}) του σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα U_f . Στο διάγραμμα εκτός από το επταφασικό μοντέλο φαίνονται και τα αποτελέσματα των ερευνητών Σιδερίδη [24], Ekvall-Greszczuk [39] , [40], Hashin [38], Hashin-Rosen [37], Tsai-Hahn[30], τα αποτελέσματα του Νόμο των Φάσεων [5.8.14] καθώς και τα πειραματικά δεδομένα που αντλήθηκαν από την βιβλιογραφία **experiment data I** [47] και **experiment data II** [48] .

Αυτό που παρατηρούμε σε όλες τις μελέτες και στα πειραματικά δεδομένα είναι ότι το Διάμηκες Μέτρο Διατμήσεως αυξάνεται όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Παρατηρούμε σχεδόν τέλεια σύγκλιση τιμών του θεωρητικού επταφασικού μοντέλου και των τιμών που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [24] και των ερευνητών Tsai-Hahn[30]. Αυτό είναι κάτι που αναμέναμε καθώς όπως ήδη αναφέραμε το Θεωρητικό Επταφασικό Μοντέλο που μελετήσαμε προκύπτει από το μοντέλο των Tsai-Hahn λαμβάνοντας υπόψιν της θεωρία της ενδιάμεσου φάσεως. Το μοντέλο Σιδερίδη λαμβάνει επίσης υπόψιν αυτή την θεώρηση.

Το μοντέλο των Hashin-Rosen [37] συγκλίνει με τα προηγούμενα τρία σε καλό βαθμό ιδιαίτερα για περιεκτικότητες σε έγκλεισμα μέχρι $U_f=0.4$, ενώ για μεγαλύτερες περιεκτικότητες η σύγκλιση είναι μικρότερη. Σε μικρότερο βαθμό είναι η σύγκλιση θεωρητικού επταφασικού μοντέλου, με το μοντέλο των ερευνητών Ekvall-Greszczuk [39],[40] που δίνει χαμηλότερες τιμές όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Τα μοντέλα που προκύπτουν από τον Νόμο των Φάσεων [5.8.14] και του εξερευνητή Hashin [38] δεν εμφανίζουν καλή σύγκλιση με το Θεωρητικό Επταφασικό Μοντέλο.

Τέλος καλή σύγκλιση παρατηρούμε μεταξύ του Θεωρητικού Επταφασικού Μοντέλου και των υφιστάμενων πειραματικών δεδομένων.

Διαγράμματα Ελαστικών Σταθερών υπό γωνία φόρτισης θ

Στα διαγράμματα που αφορούν την φόρτιση υπό γωνία, για λόγους ομαλοποίησης των διαγραμμάτων αλλά και οικονομίας υπολογιστικού χρόνου χρησιμοποιήσαμε την εντολή “fit ('cubicinterp')- Piecewise cubic interpolation” του Matlab ώστε να κάνουμε το λεγόμενο “curve fitting”.

Διαφορετικά θα απαιτούνταν πολύ περισσότερα σημεία και υπολογιστικός

χρόνος ώστε να έχουμε ομαλή μορφή στα εξαγόμενα διαγράμματα.

Μέτρο Ελαστικότητας υπό γωνία φόρτισης E_{θ}

Στο διάγραμμα της εικόνας 5.7 αποτυπώνεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας E_{θ} του ινώδους σύνθετου υλικού συναρτήσει της γωνίας ινών (θ), βάση του θεωρητικού επταφασικού μοντέλου.

Παρατηρούμε μία αρχικά έντονη μείωση του Μέτρου Ελαστικότητας από τις 0° που έχει την τιμή του **Διαμήκους Μέτρου Ελαστικότητας** μέχρι περίπου τις 50° , στην συνέχεια μία σχετική σταθεροποίηση μέχρι τις 70° και τέλος μία μικρή αύξηση μέχρι τις 90° που συμπίπτει, όπως και ήταν αναμενόμενο από την θεωρία των σύνθετων υλικών [28β], με την τιμή του Εγκάρσιου Μέτρου Ελαστικότητας E_T .

Οι τιμές των πειραματικών δεδομένων ακολουθούν την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη του E_{θ} , ενώ παρατηρούμε πολύ καλή σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών δεδομένων και των τιμών οι οποίες προκύπτουν από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο.

Λόγος Poisson υπό γωνία φόρτισης ν_{θ}

Στο διάγραμμα της εικόνας 5.8 αποτυπώνεται η μεταβολή του λόγου Poisson ν_{θ} του ινώδους σύνθετου υλικού συναρτήσει της γωνίας ινών (θ), βάση του θεωρητικού επταφασικού μοντέλου.

Παρατηρούμε ότι το ν_{θ} αυξάνει από τις 0° που είναι η τιμή του διαμήκους λόγου Poisson μέχρι τις 35° περίπου όπου υπάρχει ένα μέγιστο στην συνέχεια ελαττώνεται μέχρι τις 90° .

Οι τιμές των πειραματικών δεδομένων ακολουθούν την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη του ν_{θ} , ενώ παρατηρούμε πολύ καλή σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών δεδομένων και των τιμών οι οποίες προκύπτουν από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο.

Μέτρο Διατμήσεως υπό γωνία φόρτισης G_{θ}

Στο διάγραμμα της εικόνας 5.9 αποτυπώνεται η μεταβολή του μέτρου Διατμήσεως G_{θ} του ινώδους σύνθετου υλικού συναρτήσει της γωνίας ινών (θ), βάση του θεωρητικού επταφασικού μοντέλου.

Παρατηρούμε μία αύξηση από τις 0° μέχρι τις 45° όπου έχουμε μέγιστη τιμή. Στην συνέχεια έχουμε ελάττωση μέχρι τις 90° όπου ξαναπαίρνει την αρχική τιμή. Το διάγραμμα που προκύπτει είναι τελικά συμμετρικό ως προς την γωνία φόρτισης όπως και ήταν αναμενόμενο από την θεωρία των σύνθετων υλικών [28β].

Οι τιμές των πειραματικών δεδομένων ακολουθούν την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη του G_{θ} , ενώ παρατηρούμε καλή σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών δεδομένων και των τιμών οι οποίες προκύπτουν από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ-ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ ΤΟΥ “HASHIN”

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κλασσική θεωρία της ελαστικότητας ασχολείται με τις μηχανικές ιδιότητες των ελαστικών στερεών, για τα οποία, σύμφωνα με το νόμο του Hooke, η τάση είναι πάντα ευθέως **ανάλογη με την παραμόρφωση**, για μικρές παραμορφώσεις, αλλά ανεξάρτητη από την ταχύτητα παραμόρφωσης. Η κλασσική θεωρία της υδροδυναμικής ασχολείται με τις ιδιότητες ιξωδών υγρών, όπου σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, η τάση είναι πάντα ανάλογη **με την ταχύτητα παραμόρφωσης**, αλλά ανεξάρτητη από **την ίδια την παραμόρφωση**. Οι παραπάνω θεωρίες αφορούν ιδανικές καταστάσεις, παρά το γεγονός ότι η συμπεριφορά πολλών στερεών πλησιάζει **το νόμο του Hooke** και πολλά υγρά προσεγγίζουν **το νόμο του Νεύτωνα** για απειροστές ταχύτητες παραμόρφωσης.

Συνήθως παρατηρούνται δυο ειδών αποκλίσεις. Πρώτον, όταν επιβάλλονται πεπερασμένες παραμορφώσεις σε στερεά, συνήθως πολύ μαλακά για να παραμορφώνονται χωρίς να σπάνε, οι σχέσεις τάσεων- παραμορφώσεων γίνονται αρκετά περίπλοκες. Αντίστοιχα σε περιπτώσεις σταθερής ροής με πεπερασμένη ταχύτητα παραμόρφωσης, πολλά υγρά αποκλίνουν σημαντικά από τη Νευτωνική συμπεριφορά. Η διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στο πεπερασμένο και το απειροστό κυμαίνεται σημαντικά και συχνά εξαρτάται κύρια από το υλικό.

Δεύτερον, όταν η παραμόρφωση, όσο και η ταχύτητα παραμόρφωσης είναι απειροστές, ένα σύστημα μπορεί να εμφανίζεται με συνδυασμένα χαρακτηριστικά τόσο της υγρής, όσο και της στερεής κατάστασης. Έτσι ένα υλικό, που δεν είναι ακριβώς στερεό δε διατηρεί μια σταθερή παραμόρφωση κάτω από σταθερή τάση, αλλά παραμορφώνεται αργά με το χρόνο, ή έρπει. Όταν το ίδιο υλικό έχει μια σταθερή παραμόρφωση, η τάση που χρειάζεται για να τη διατηρήσει σταθερή ελαττώνεται βαθμιαία. Επίσης ένα υλικό που δεν είναι ακριβώς υγρό, μπορεί, ενώ ρέει με την επιβολή μιας σταθερής τάσης, να αποθηκεύσει μέρος της ενέργειας που δέχεται αντί να την διασκορπίσει σαν θερμότητα. Όταν υλικά αυτής της μορφής βρίσκονται στην επίδραση **εναλλασσόμενης τάσης**, η παραμόρφωση δεν είναι ούτε ακριβώς σε φάση με την τάση (περίπτωση τέλει ελαστικού στερεού), ούτε σε διαφορά φάσης 90° (περίπτωση τέλει ιξώδους υγρού), αλλά είναι κάπου ανάμεσα.

Μέρος της εισαγόμενης ενέργειας **αποθηκεύεται** και ανακτάται **σε κάθε κύκλο**, ενώ ένα μέρος **σκεδάζεται σαν θερμότητα**. Υλικά των οποίων η συμπεριφορά έχει τέτοια χαρακτηριστικά λέγονται «**βισκοελαστικά**». Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης και ταχύτητας παραμόρφωσης, έχουμε γραμμική βισκοελαστική

συμπεριφορά και τότε η τάση προς παραμόρφωση είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου (ή της συχνότητας) και όχι του μεγέθους της τάσης.

Η φαινομενολογική θεωρία της γραμμικής βισκοελαστικότητας έγινε με πειράματα ερπυσμού και χαλάρωσης σε ίνες μετάλλου ή γυαλιού με τη σκέδαση της ενέργειας σε ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενες παραμορφώσεις. Η θεωρία αυτή έδωσε χρήσιμες πληροφορίες για τη δομή των μετάλλων, με τις αποκλίσεις από την κλασική ελαστικότητα να είναι μικρές. Αντίθετα στα σύνθετα υλικά η μηχανική συμπεριφορά κυριαρχείται από τα βισκοελαστικά φαινόμενα που συχνά είναι θεαματικά. Η υπεροχή της βισκοελαστικότητας στα σύνθετα υλικά είναι κάτι που αναμένεται, αν αναλογιστεί κανείς τις πολύπλοκες μοριακές διευθετήσεις που γίνονται με την επίδραση κάποιας μακροσκοπικής μηχανικής παραμόρφωσης.

Όταν παραμορφώνεται κάποιο σκληρό στερεό, όπως το διαμάντι, τα άτομα μετατοπίζονται από τις θέσεις ισορροπίας σε περιοχές δυνάμεων τοπικού χαρακτήρα. Σε κάποιο υγρό, η ιξώδης ροή, με την επιβολή μιας τάσης, αντανakλά την αλλαγή με τον χρόνο της κατανομής των μορίων που περιβάλλουν ένα δεδομένο μόριο.

Οι μετρήσεις των βισκοελαστικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών δίνουν σημαντική πληροφόρηση για την φύση και την ταχύτητα των μοριακών διευθύνσεων. Επιπλέον, οι μετρήσεις αυτές αποκτούν ιδιαίτερη σημασία, λόγω της πρακτικής αξίας της μηχανικής συμπεριφοράς, στη διεργασία και χρήση των ελαστομερών, των πλαστικών και των ινών. Πειράματα στα οποία επιβάλλεται στο υλικό μια κυμαινόμενη τάση ή παραμόρφωση, είναι σημαντικά για τη μελέτη της βισκοελαστικής συμπεριφοράς των σύνθετων υλικών. **Τα περισσότερα υλικά που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές, έχουν σε ένα βαθμό ιξωδοελαστικό χαρακτήρα.** Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητος ο έλεγχος των υλικών αυτών πριν από την σχεδίαση των τελικών προϊόντων. Οι συνηθέστεροι έλεγχοι βασίζονται σε μετρήσεις [49]:

- α. Ερπυσμού
- β. Χαλάρωσης τάσεων
- γ. Δυναμομηχανικής φόρτισης

Με τις μετρήσεις αυτές παίρνουμε δεδομένα που συσχετίζουν τάση, ανηγμένη παραμόρφωση, θερμοκρασία και χρόνο.

Από τις στατικές ελαστικές σταθερές για να “περάσουμε” στις αντίστοιχες δυναμικές, χρησιμοποιούμε την αρχή της αντιστοιχίας, σύμφωνα με την οποία έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις :

$$\begin{aligned} E_f^* &= E_f' + iE_f'', & E_m^* &= E_m' + iE_m'' \\ V_f^* &= V_f' - iV_f'', & V_m^* &= V_m' - iV_m'' \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Για λόγους απλοποίησης των πολύ μικρών, συγκριτικά, όρων θεωρούμε ότι:

$$E_f'' \approx 0 \text{ και δευτερευόντος } v_m'' \approx 0$$

οπότε έχουμε:

$$E_f^* = E_f' \approx E_f \tag{6.1.2}$$

$$v_f^* = v_f' \approx v_f$$

$$v_m^* = v_m' \approx v_m$$

Αυτή η διαδικασία του υπολογισμού των μιγαδικών μέτρων, των βισκοελαστικών υλικών από τις αντίστοιχες εκφράσεις των ελαστικών σταθερών (για τα ελαστικά υλικά) ονομάζεται αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** [50].

Στην παρούσα ανάλυση ακολουθώντας αυτή την διαδικασία υπολογίζονται οι εκφράσεις για τα δυναμικά μέτρα των ελαστικών σταθερών του ινώδους σύνθετου υλικού. Εφαρμόζουμε δηλαδή την αρχή της αντιστοιχίας, στην έκφραση του μέτρου ελαστικότητας, μέτρου διατμήσεως και λόγου Poisson που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, με βάση το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο λαμβάνοντας υπόψιν την θεωρία της ενδιαμέσου φάσεως.

6.2 ΣΥΝΘΕΤΟ (ΜΙΓΑΔΙΚΟ) ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Οι χρονικά εξαρτημένες μηχανικές ιδιότητες των πολυμερών με ενίσχυση εγκλεισμάτων είναι διαφορετικές από εκείνες των μη ενισχυμένων. Τρεις είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν τις μηχανικές αυτές ιδιότητες:

- α) Οι ιδιότητες του επιφανειακού στρώματος του πολυμερούς.
- β) Ο σχηματισμός πρόσθετων δεσμών πολυμερούς επιφανείας.
- γ) Η παρουσία εγκλεισμάτων.

Για τις εποξειδικές ρητίνες οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον σχηματισμό της μήτρας των σύνθετων υλικών, έχει γίνει αρκετή έρευνα επάνω στην δυναμική μηχανική συμπεριφορά τους όπου οι ίνες είναι ενισχυμένες με εγκλείσματα. Ο Dally έκανε έρευνα σχετικά με την κόπωση αυτών των υλικών για συχνότητα έως 40Hz. Ο Plunkett διερεύνησε τις πειραματικές μεθόδους για την μέτρηση του συντελεστή αποσβέσεως και υπόδειξε κάποιες προφυλάξεις που πρέπει να λαμβάνονται όταν γίνονται μετρήσεις. Ο Murayama ανέπτυξε μια νέα μέθοδο για την μέτρηση των δυναμικών μηχανικών σταθερών των σύνθετων υλικών, σε κάμψη για διάφορες θερμοκρασίες. Επίσης, διάφοροι ερευνητές αναφέρουν αποτελέσματα για τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας και τον συντελεστή αποσβέσεως μέσα από πειράματα ταλαντώσεων που έγιναν σε δοκούς.

Οι Schultz και Tsai αναφέρουν καλά αποτελέσματα για τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας, αλλά μόνο ποιοτική συμφωνία για τον συντελεστή αποσβέσεως και μια ανώμαλη εξάρτηση από την συχνότητα.

Η δυναμομηχανική φόρτιση χρησιμοποιείται για να ληφθούν ορισμένες πληροφορίες, με τις οποίες γίνεται δυνατός ο **διαχωρισμός της ελαστικής από την**

ιξώδη απόκριση των υλικών. Ακολουθεί η περιγραφή της απόκρισης των υλικών κάτω από δυναμομηχανική φόρτιση. Είναι γνωστό ότι η πλειοψηφία των στερεών όταν υπόκειται σε μικρές παραμορφώσεις, ακολουθεί το νόμο του Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6.2.1)$$

Εάν υποθέσουμε ότι στο υλικό επιβάλλεται μια τάση δόνησης ημιτονοειδούς μορφής, τότε και η εμφανιζόμενη ανηγμένη παραμόρφωση είναι ημιτονοειδούς μορφής της ίδιας συχνότητας, παρουσιάζει όμως μια διαφορά φάσης δ . Έτσι, αν:

$$\sigma = \sigma_0 \eta \mu(\omega t) \quad (6.2.2)$$

Τότε,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \eta \mu(\omega t - \delta) \quad (6.2.3)$$

Όπου:

σ_0 = το πλάτος της τάσης
 ω = η κυκλική συχνότητα - $\omega = 2\pi f$
 f = η συχνότητα ταλαντώσεων
 t = χρόνος

Μια άλλη έκφραση είναι :

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \sigma_0 e^{i\omega t} \\ \varepsilon^* &= \varepsilon_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Με τη βοήθεια των δύο παραπάνω σχέσεων, μπορούμε να ορίσουμε το μιγαδικό μέτρο ελαστικότητας E^* ως εξής:

$$E^* = E' + iE'' = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \quad (6.2.5)$$

Αν στην πιο πάνω σχέση αντικαταστήσουμε τις σχέσεις που δίνουν τα σ^* και ε^* , υπολογίζουμε:

$$E^* = E' + iE'' = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right) e^{i\delta} = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right) (\sigma \nu \delta + i \eta \mu \delta) \quad (6.2.6)$$

Επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned} E' &= \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right) \text{συν}\delta \\ E'' &= \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right) \eta\mu\delta \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το E' που είναι **το πραγματικό μέρος** του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας ονομάζεται **δυναμικό μέτρο αποθήκευσης**, ενώ το E'' που είναι **το φανταστικό μέρος** του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας, ονομάζεται **δυναμικό μέτρο απωλειών**. Η τάση που δεν βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση, μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μια βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση και η άλλη θα διαφέρει από αυτήν κατά φάση ίση με $\pi/2$. Έτσι μπορούμε να έχουμε έναν ποιοτικό προσδιορισμό των E' και E'' [49].

6.3 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας E' είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας. Είναι ίσο με το λόγο μεταξύ του μέρους της τάσης που βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση, προς την τιμή αυτής της παραμόρφωσης. Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας χαρακτηρίζει την ποσότητα ενέργειας που λαμβάνεται και που ελκύεται από μια μονάδα κάποιου όγκου ενός σώματος σε διάρκεια μιας περιόδου. Για ταλαντώσεις σταθερού πλάτους η τιμή του δυναμικού μέτρου ελαστικότητας E' **αυξάνει (ή μένει σταθερή)** με μια αντίστοιχη αύξηση της συχνότητας [49].

6.4 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ

Το μέτρο απωλειών E'' είναι ο λόγος μεταξύ του μέρους της τάσης που βρίσκεται σε διαφορά φάσης $\pi/2$ με την παραμόρφωση, προς την τιμή αυτής της παραμόρφωσης. Το μέτρο απωλειών E'' χαρακτηρίζει το μέτρο εκείνο της ενέργειας της ελαστικής ταλάντωσης που χάνεται υπό μορφή θερμότητας κατά τη διάρκεια μιας περιόδου ταλάντωσης. Όταν η διαφορά φάσης ανάμεσα στην τάση και στην παραμόρφωση γίνει μέγιστη, το μέτρο απωλειών E'' λαμβάνει μια μέγιστη τιμή. Έτσι το **μέτρο απωλειών** χαρακτηρίζει τη **διασπορά της ενέργειας** της ταλάντωσης σε ένα βισκοελαστικό σώμα.

Η ακριβής τιμή του σύνθετου μέτρου ελαστικότητας, είναι:

$$E^* = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} \tag{6.4.1}$$

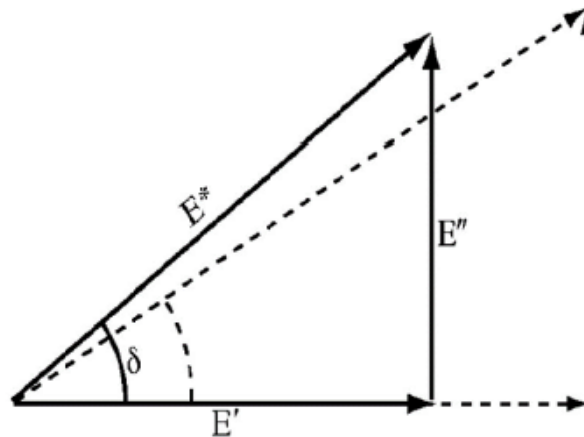
Από την άλλη μεριά η σχέση μεταξύ του πλάτους των τιμών της τάσης και της παραμόρφωσης μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} \quad (6.4.2)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης-παραμόρφωσης είναι καθορισμένη συνήθως από τον συντελεστή των μηχανικών απωλειών.

$$\varepsilon\phi\delta = \frac{E''}{E'} \quad (6.4.3)$$

Οι σχέσεις μεταξύ του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας E^* και της διαφοράς φάσης δ μπορούν εύκολα να αποδοθούν από το διανυσματικό διάγραμμα της Εικόνας 6.1:



Εικόνα 6.1 Διανυσματικό διάγραμμα μιγαδικού μέτρου απωλειών

$$\begin{aligned} E' &= E^* \cos\delta \\ E'' &= E^* \eta\mu\delta \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Αν ένα σώμα είναι ιδανικά ελαστικό, τότε έχουμε $\delta=0$ και $E^* = E'$ όπως προκύπτει από τις σχέσεις 6.4.1 και 6.4.4. Στην πραγματικότητα κανένα στέρεο σώμα δεν είναι ιδανικά ελαστικό. **Όλα τα στερεά έχουν μαζί ελαστικές και ιξώδεις ιδιότητες** μέχρι ένα οριστικό μέγεθος. Η ιξώδης συμπεριφορά σε πολλά από αυτά εκδηλώνεται τόσο αδύναμα, ώστε πρακτικά αυτά τα υλικά να θεωρούνται **ιδανικά ελαστικά** [49].

6.5 ΣΥΝΘΕΤΟ (ΜΙΓΑΔΙΚΟ) ΜΕΤΡΟ ΕΝΔΟΣΕΩΣ

Μερικές φορές χρησιμοποιείται η έννοια του μιγαδικού μέτρου ενδόσεως ως ο αποκλίνων ταυστής του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή:

$$D^* = \frac{1}{E^*} = D' - iD'' \quad (6.5.1)$$

Όπου το D' ονομάζεται δυναμικό μέτρο ενδόσεως και το D'' ονομάζεται απώλεια ενδόσεως. Ακολουθούν οι σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες του σύνθετου μέτρου ενδόσεως με αυτές του σύνθετου μέτρου ελαστικότητας [49].

$$D^* = \frac{\frac{1}{E'} - i \frac{1}{E'} \epsilon \phi \delta}{1 + \epsilon \phi^2 \delta} \quad (6.5.2)$$

$$D' = \frac{\frac{1}{E'}}{1 + \epsilon \phi^2 \delta} \quad (6.5.3)$$

$$D'' = \frac{\frac{\epsilon \phi \delta}{E'}}{1 + \epsilon \phi^2 \delta} = \frac{\frac{1}{E''}}{(1 + \epsilon \phi^2 \delta) - 1} \quad (6.5.4)$$

6.6 ΣΥΝΘΕΤΟΣ (ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ) ΛΟΓΟΣ POISSON

Δυο ακόμα σημαντικά μεγέθη είναι ο μιγαδικός λόγος του Poisson ν^* και το μιγαδικό μέτρο διόγκωσης K^* . Τα δυο αυτά μεγέθη δίνονται από τις σχέσεις [49]:

$$\nu^* = \nu' - i\nu'' = \frac{E^*}{2G^*} - 1 \quad (6.6.1)$$

6.7 ΣΥΝΘΕΤΟ (ΜΙΓΑΔΙΚΟ) ΜΕΤΡΟ ΔΙΟΓΚΩΣΗΣ

$$K^* = K' - iK'' = \frac{E^*}{3(1 - 2\nu^*)} \quad (6.7.1)$$

6.8 ΣΥΝΘΕΤΟ (ΜΙΓΑΔΙΚΟ) ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

$$G^* = G' - iG'' = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)} \quad (6.8.1)$$

Για να περιγραφεί η βισκοελαστική συμπεριφορά ενός ισότροπου σώματος χρειάζονται δυο ανεξάρτητες μιγαδικές σταθερές ελαστικότητας, για παράδειγμα το μιγαδικό μέτρο ελαστικότητας E^* και το μιγαδικό μέτρο διάτμησης G^* , ή ο μιγαδικός λόγος Poisson [49].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

7.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΤΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΣΤΑΤΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ

7.2.1 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού διαμήκους μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή στην εξίσωση (5.2.6) έχουμε:

$$E_L = E_f U_1 + \frac{2}{r_7} \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_m U_3 + \frac{2}{r_7} \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr + E_f U_5 + \frac{2}{r_7} \int_{r_5}^{r_6} r E_6(r) dr + E_m U_7 \quad (5.2.6)$$

$$\begin{aligned} E_L^* &= E_f^* U_1 + \frac{2}{r_7} \int_{r_1}^{r_2} r E_2^*(r) dr + E_m^* U_3 + \frac{2}{r_7} \int_{r_3}^{r_4} r E_4^*(r) dr + E_f^* U_5 + \frac{2}{r_7} \int_{r_5}^{r_6} r E_6^*(r) dr + E_m^* U_7 \Rightarrow \\ E_L' + i E_L'' &= (E_f' + i E_f'') U_1 + (E_m' + i E_m'') U_3 + (E_f' + i E_f'') U_5 + (E_m' + i E_m'') U_7 \\ &+ \frac{2}{r_7} \int_{r_1}^{r_2} (E_2'(r) + i E_2''(r)) r dr + \frac{2}{r_7} \int_{r_3}^{r_4} (E_4'(r) + i E_4''(r)) r dr + \frac{2}{r_7} \int_{r_5}^{r_6} (E_6'(r) + i E_6''(r)) r dr \end{aligned} \quad (7.2.1.1)$$

Θεωρούμε τώρα ότι οι συναρτήσεις $E_{i,1}'(r) \equiv E_2'(r), E_{i,2}'(r) \equiv E_4'(r), E_{i,3}'(r) \equiv E_6'(r)$ και $E_{i,1}''(r) \equiv E_2''(r), E_{i,2}''(r) \equiv E_4''(r), E_{i,3}''(r) \equiv E_6''(r)$ ακολουθούν την παραβολική μεταβολή σύμφωνα με τις σχέσεις (4.1.1.1), (4.1.1.4) και (4.1.1.7), όπου λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$, έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

Άρα χωρίζοντας το πραγματικό μέρος με το φανταστικό μέρος των μιγαδικών που προκύπτουν έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E'_L &= E'_f U_1 + E'_m U_3 + E'_f U_5 + E'_m U_7 \\
&+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} E'_2(r) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} E'_4(r) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} E'_6(r) r dr = \\
&\frac{2E'_f U_1}{3} + \frac{E'_f U_2}{6} + \frac{E'_f U_4}{6} + \frac{2E'_f U_5}{3} \\
&+ \frac{E'_f U_6}{6} + \frac{E'_m U_1}{3} + \frac{5E'_m U_2}{6} + E'_m U_3 + \frac{5E'_m U_4}{6} \\
&+ \frac{E'_m U_5}{3} + \frac{5E'_m U_6}{6} + E'_m U_7 - \frac{E'_f (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} \\
&+ \frac{E'_m (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{E'_f U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} \\
&- \frac{E'_m U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} + \frac{E'_f (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \\
&- \frac{E'_m (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3}
\end{aligned}$$

(7.2.1.2)

Και αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E''_L &= E''_f U_1 + E''_m U_3 + E''_f U_5 + E''_m U_7 \\
&+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} E''_2(r) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} E''_4(r) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} E''_6(r) r dr = \\
&\frac{2E''_f U_1}{3} + \frac{E''_f U_2}{6} + \frac{E''_f U_4}{6} + \frac{2E''_f U_5}{3} \\
&+ \frac{E''_f U_6}{6} + \frac{E''_m U_1}{3} + \frac{5E''_m U_2}{6} + E''_m U_3 + \frac{5E''_m U_4}{6} \\
&+ \frac{E''_m U_5}{3} + \frac{5E''_m U_6}{6} + E''_m U_7 - \frac{E''_f (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} \\
&+ \frac{E''_m (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{E''_f U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} \\
&- \frac{E''_m U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} + \\
&\frac{E''_f (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \\
&- \frac{E''_m (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3}
\end{aligned}$$

(7.2.1.3)

7.2.2 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Ισχύει ότι: $E_f' \approx E_f$, αφού $E_f'' \approx 0$ επειδή το υλικό της ίνας δεν θεωρείται βισκοελαστικό υλικό αλλά τελείως ελαστικό.

Επιπλέον οι δυναμικοί λόγοι Poisson της μήτρας και του εγκλείσματος του συνθέτου υλικού δύνανται να θεωρηθούν ως πραγματικοί αριθμοί [51]. Αυτό συμβαίνει γιατί οι συντελεστές απωλειών σε εφελκυσμό και διάτμηση ν_E ή $\tan\delta_E$ και ν_G ή $\tan\delta_G$ είναι προσεγγιστικά ίσοι [52],[53].

Δηλαδή

$$\mathbf{v}_m^* \approx \mathbf{v}_m, \text{αφού } \mathbf{v}_m'' \approx 0$$

$$\mathbf{v}_f^* \approx \mathbf{v}_f, \text{αφού } \mathbf{v}_f'' \approx 0$$

Οπότε με βάση τα παραπάνω προκύπτουν:

$$\begin{aligned} E_L' = & \frac{2E_f U_1}{3} + \frac{E_f U_2}{6} + \frac{E_f U_4}{6} + \frac{2E_f U_5}{3} \\ & + \frac{E_f U_6}{6} + \frac{E_m' U_1}{3} + \frac{5E_m' U_2}{6} + E_m' U_3 + \frac{5E_m' U_4}{6} \\ & + \frac{E_m' U_5}{3} + \frac{5E_m' U_6}{6} + E_m' U_7 - \frac{E_f (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} \\ & + \frac{E_m' (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{E_f U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} \\ & - \frac{E_m' U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} + \frac{E_f (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \\ & - \frac{E_m' (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \end{aligned} \quad (7.2.2.1)$$

$$\begin{aligned} E_L'' = & \frac{E_m'' U_1}{3} + \frac{5E_m'' U_2}{6} + E_m'' U_3 + \frac{5E_m'' U_4}{6} + \frac{E_m'' U_5}{3} + \frac{5E_m'' U_6}{6} \\ & + E_m'' U_7 + \frac{E_m'' (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} - \frac{E_m'' U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} \\ & - \frac{E_m'' (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \end{aligned}$$

(7.2.2.2)

7.3.1 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού διαμήκους λόγου Poisson, δηλαδή στην εξίσωση (5.3.2) έχουμε:

$$v_{LT} = v_1 U_1 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} v_2(r) r dr + v_3 U_3 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} v_4(r) r dr + v_5 U_5 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} v_6(r) r dr + v_7 U_7 \Rightarrow$$

$$v_{LT} = v_f U_1 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} v_{i,1}(r) r dr + v_m U_3 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} v_{i,2}(r) r dr + v_f U_5 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} v_{i,3}(r) r dr + v_m U_7$$

(5.3.2)

$$v_{LT}^* = v'_{LT} - i v''_{LT} = (v'_f - i v''_f) U_1 + (v'_m - i v''_m) U_3 + (v'_f - i v''_f) U_5 + (v'_m - i v''_m) U_7$$

$$+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} (v'_2(r) - i v''_2(r)) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} (v'_4(r) - i v''_4(r)) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} (v'_6(r) - i v''_6(r)) r dr$$

(7.3.1.1)

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $v'_{i,1}(r) \equiv v'_2(r)$, $v'_{i,2}(r) \equiv v'_4(r)$, $v'_{i,3}(r) \equiv v'_6(r)$ και $v''_{i,1}(r) \equiv v''_2(r)$, $v''_{i,2}(r) \equiv v''_4(r)$, $v''_{i,3}(r) \equiv v''_6(r)$ ακολουθούν την παραβολική μεταβολή σύμφωνα με τις σχέσεις, (4.1.1.3), (4.1.1.7) και (4.1.1.9), όπου λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$, έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

Άρα χωρίζοντας το πραγματικό μέρος με το φανταστικόν μέρος των μιγαδικών που προκύπτουν έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v'_{LT} = v'_f U_1 + v'_m U_3 + v'_f U_5 + v'_m U_7 \\
&+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} v'_2(r) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} v'_4(r) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} v'_6(r) r dr = \\
&\frac{2v'_f U_1}{3} + \frac{v'_f U_2}{6} + \frac{v'_f U_4}{6} + \frac{2v'_f U_5}{3} \\
&+ \frac{v'_f U_6}{6} + \frac{v'_m U_1}{3} + \frac{5v'_m U_2}{6} + v'_m U_3 + \frac{5v'_m U_4}{6} \\
&+ \frac{v'_m U_5}{3} + \frac{5v'_m U_6}{6} + v'_m U_7 - \frac{v'_f (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} \\
&+ \frac{v'_m (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{v'_f U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} \\
&- \frac{v'_m U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} + \frac{v'_f (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \\
&- \frac{v'_m (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3}
\end{aligned} \tag{7.3.1.2}$$

Και αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v''_{LT} = v''_f U_1 + v''_m U_3 + v''_f U_5 + v''_m U_7 \\
&+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} v''_2(r) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} v''_4(r) r dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} v''_6(r) r dr = \\
&\frac{2v''_f U_1}{3} + \frac{v''_f U_2}{6} + \frac{v''_f U_4}{6} + \frac{2v''_f U_5}{3} \\
&+ \frac{v''_f U_6}{6} + \frac{v''_m U_1}{3} + \frac{5v''_m U_2}{6} + v''_m U_3 + \frac{5v''_m U_4}{6} \\
&+ \frac{v''_m U_5}{3} + \frac{5v''_m U_6}{6} + v''_m U_7 - \frac{v''_f (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} \\
&+ \frac{v''_m (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{v''_f U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} \\
&- \frac{v''_m U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} \\
&+ \frac{v''_f (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \\
&- \frac{v''_m (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3}
\end{aligned} \tag{7.3.1.3}$$

7.3.2 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 7.2.2 Θεωρούμε ότι:

$$\mathbf{E}_f' \approx \mathbf{E}_f, \text{αφού } \mathbf{E}_f'' \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_m^* \approx \mathbf{v}_m, \text{αφού } \mathbf{v}_m'' \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_f^* \approx \mathbf{v}_f, \text{αφού } \mathbf{v}_f'' \approx \mathbf{0}$$

Οπότε προκύπτουν

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{LT}' = & \frac{2v_f U_1}{3} + \frac{v_f U_2}{6} + \frac{v_f U_4}{6} + \frac{2v_f U_5}{3} \\ & + \frac{v_f U_6}{6} + \frac{v_m U_1}{3} + \frac{5v_m U_2}{6} + v_m U_3 + \frac{5v_m U_4}{6} \\ & + \frac{v_m U_5}{3} + \frac{5v_m U_6}{6} + v_m U_7 - \frac{v_f (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} \\ & + \frac{v_m (U_1 + U_2 + U_3)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)^{1/2}}{3} + \frac{v_f U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} \\ & - \frac{v_m U_1^{1/2} (U_1 + U_2)^{1/2}}{3} + \frac{v_f (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \\ & - \frac{v_m (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)^{1/2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)^{1/2}}{3} \end{aligned} \quad (7.3.2.1)$$

$$\mathbf{v}_{LT}'' = \mathbf{0} \quad (7.3.2.2)$$

7.3.3 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΤΩΝ WHITNEY-RILEY

Για σύγκριση των παραπάνω αποτελεσμάτων από το επαφασικό μοντέλο χρησιμοποιούμε την σχέση για το στατικό διαμήκη λόγο Poisson των **Whitney-riley** [44]:

$$\mathbf{v}_{LT} = \mathbf{v}_m - \frac{2(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_f)(1 - \mathbf{v}_m^2) \mathbf{E}_f \mathbf{U}_f}{\mathbf{E}_m (1 - \mathbf{U}_f)(1 - \mathbf{v}_f - 2\mathbf{v}_f^2) + \left[(1 - \mathbf{v}_m - 2\mathbf{v}_m^2) \mathbf{U}_f + (1 + \mathbf{v}_m) \right] \mathbf{E}_f} \quad (7.3.3.1)$$

Εφαρμόζοντας της αρχή αντιστοιχίας του Hashin έχουμε, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}' - i\mathbf{v}''$

Το πραγματικό μέρος:

$$\mathbf{v}'_{LT} = \mathbf{v}'_m - \frac{2(\mathbf{v}'_m - \mathbf{v}'_f)(1 - \mathbf{v}'_m{}^2) \mathbf{E}'_f \mathbf{U}_f}{\mathbf{E}'_m (1 - \mathbf{U}_f)(1 - \mathbf{v}'_f - 2\mathbf{v}'_f{}^2) + \left[(1 - \mathbf{v}'_m - 2\mathbf{v}'_m{}^2) \mathbf{U}_f + (1 + \mathbf{v}'_m) \right] \mathbf{E}'_f} \quad (7.3.3.2)$$

Το φανταστικό μέρος:

$$\mathbf{v}''_{LT} = \mathbf{v}''_m - \frac{2(\mathbf{v}''_m - \mathbf{v}''_f)(1 - \mathbf{v}''_m{}^2) \mathbf{E}''_f \mathbf{U}_f}{\mathbf{E}''_m (1 - \mathbf{U}_f)(1 - \mathbf{v}''_f - 2\mathbf{v}''_f{}^2) + \left[(1 - \mathbf{v}''_m - 2\mathbf{v}''_m{}^2) \mathbf{U}_f + (1 + \mathbf{v}''_m) \right] \mathbf{E}''_f} \quad (7.3.3.3)$$

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 7.2.2 Θεωρούμε ότι:

$$\mathbf{E}'_f \approx \mathbf{E}_f, \text{ αφού } \mathbf{E}''_f \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^*_m \approx \mathbf{v}_m, \text{ αφού } \mathbf{v}''_m \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^*_f \approx \mathbf{v}_f, \text{ αφού } \mathbf{v}''_f \approx \mathbf{0}$$

Οπότε καταλήγουμε ότι $\mathbf{v}''_{LT} = \mathbf{0}$

7.4.1 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού εγκάρσιου λόγου Poisson, δηλαδή στην εξίσωση (5.4.4) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{\text{TT}}} &= \frac{U_1}{v_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_2(r)} dr + \frac{U_3}{v_3} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_4(r)} dr + \frac{U_5}{v_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_6(r)} dr + \frac{U_7}{v_7} \Rightarrow \\ & \frac{1}{v_{\text{TT}}} = \frac{U_1}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_{i,1}(r)} dr + \frac{U_3}{v_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_{i,2}(r)} dr + \frac{U_5}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_{i,3}(r)} dr + \frac{U_7}{v_m} \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{\text{TT}}^*} &= \frac{U_{f,1}}{(v_f' - iv_f'')} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{(v_{i,1}'(r) - iv_{i,1}''(r))} dr + \frac{U_{m,1}}{(v_m' - iv_m'')} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{(v_{i,2}'(r) - iv_{i,2}''(r))} dr \\ &+ \frac{U_{f,2}}{(v_f' - iv_f'')} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{(v_{i,3}'(r) - iv_{i,3}''(r))} dr + \frac{U_{m,2}}{(v_m' - iv_m'')} \Rightarrow \\ \frac{1}{(v_{\text{TT}}' - iv_{\text{TT}}'')} &= \frac{U_{f,1}}{(v_f' - iv_f'')} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{(v_{i,1}'(r) - iv_{i,1}''(r))} dr + \frac{U_{m,1}}{(v_m' - iv_m'')} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{(v_{i,2}'(r) - iv_{i,2}''(r))} dr \\ &+ \frac{U_{f,2}}{(v_f' - iv_f'')} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{(v_{i,3}'(r) - iv_{i,3}''(r))} dr + \frac{U_{m,2}}{(v_m' - iv_m'')} \Rightarrow \end{aligned} \quad (7.4.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{TT}}' + iv_{\text{TT}}''}{(v_{\text{TT}}^{2'} + v_{\text{TT}}^{2''})} &= \frac{U_{f,1}(v_f' + iv_f'')}{v_f^{2'} + v_f^{2''}} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(v_{i,1}'(r) + iv_{i,1}''(r))r}{(v_{i,1}^{2'}(r) + v_{i,1}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{m,1}(v_m' + iv_m'')}{v_m^{2'} + v_m^{2''}} \\ &+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{(v_{i,2}'(r) + iv_{i,2}''(r))r}{(v_{i,2}^{2'}(r) + v_{i,2}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{f,2}(v_f' + iv_f'')}{v_f^{2'} + v_f^{2''}} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{(v_{i,3}'(r) + iv_{i,3}''(r))r}{(v_{i,3}^{2'}(r) + v_{i,3}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{m,2}(v_m' + iv_m'')}{v_m^{2'} + v_m^{2''}} \end{aligned} \quad (7.4.1.2)$$

Άρα χωρίζοντας το πραγματικό μέρος με το φανταστικό μέρος των μιγαδικών στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{TT}}'}{(v_{\text{TT}}^{2'} + v_{\text{TT}}^{2''})} &= \frac{U_{f,1}v_f'}{v_f^{2'} + v_f^{2''}} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{v_{i,1}'(r)r}{(v_{i,1}^{2'}(r) + v_{i,1}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{m,1}v_m'}{v_m^{2'} + v_m^{2''}} \\ &+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{v_{i,2}'(r)r}{(v_{i,2}^{2'}(r) + v_{i,2}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{f,2}v_f'}{v_f^{2'} + v_f^{2''}} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{v_{i,3}'(r)r}{(v_{i,3}^{2'}(r) + v_{i,3}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{m,2}v_m'}{v_m^{2'} + v_m^{2''}} = L \end{aligned} \quad (7.4.1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{\Pi}''}{(v_{\Pi}^{2'} + v_{\Pi}^{2''})} &= \frac{U_{f,1} v_f''}{v_f^{2'} + v_f^{2''}} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{v_{i,1}''(r)r}{(v_{i,1}^{2'}(r) + v_{i,1}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{m,1} v_m''}{v_m^{2'} + v_m^{2''}} \\ &+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{v_{i,2}''(r)r}{(v_{i,2}^{2'}(r) + v_{i,2}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{f,2} v_f''}{v_f^{2'} + v_f^{2''}} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{v_{i,3}''(r)r}{(v_{i,3}^{2'}(r) + v_{i,3}^{2''}(r))} dr + \frac{U_{m,2} v_m''}{v_m^{2'} + v_m^{2''}} = B \end{aligned} \quad (7.4.1.4)$$

7.4.2 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 7.2.2 Θεωρούμε ότι:

$$\mathbf{E}_f' \approx \mathbf{E}_f, \text{ αφο\acute{u}} \quad \mathbf{E}_f'' \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_m^* \approx \mathbf{v}_m, \text{ αφο\acute{u}} \quad \mathbf{v}_m'' \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_f^* \approx \mathbf{v}_f, \text{ αφο\acute{u}} \quad \mathbf{v}_f'' \approx \mathbf{0}$$

Οπότε με δεδομένο τις σχέσεις για το λόγο Poisson των ενδιάμεσων φάσεων $v_{i,1}'(r) \equiv v_2'(r), v_{i,2}'(r) \equiv v_4'(r), v_{i,3}'(r) \equiv v_6'(r)$ και $v_{i,1}''(r) \equiv v_2''(r), v_{i,2}''(r) \equiv v_4''(r), v_{i,3}''(r) \equiv v_6''(r)$ όπως προκύπτουν από τις σχέσεις (4.1.1.3), (4.1.1.6) και (4.1.1.9) και εφαρμόζοντας τις προηγούμενες παραδοχές προκύπτει ότι $v_{i,1,2,3}''(r) = 0$ τελικά έχουμε:

$$\frac{v_{\Pi}'}{(v_{\Pi}^{2'} + v_{\Pi}^{2''})} = \frac{U_{f,1}}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_{i,1}'(r)} dr + \frac{U_{m,1}}{v_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_{i,2}'(r)} dr + \frac{U_{f,2}}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_{i,3}'(r)} dr + \frac{U_{m,2}}{v_m} \quad (7.4.2.1)$$

$$\frac{v_{\Pi}''}{(v_{\Pi}^{2'} + v_{\Pi}^{2''})} = 0 \Rightarrow v_{\Pi}'' = 0 \quad (7.4.2.2)$$

Οπότε από τα παραπάνω έχουμε:

$$\frac{1}{v_{\Pi}'} = \frac{U_{f,1}}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_{i,1}'(r)} dr + \frac{U_{m,1}}{v_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_{i,2}'(r)} dr + \frac{U_{f,2}}{v_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_{i,3}'(r)} dr + \frac{U_{m,2}}{v_m} \quad (7.4.2.3)$$

7.5.1 ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή στην εξίσωση (5.5.5) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1-v_{TT}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^2}{E_L} &= \frac{U_1(1-v_1-2v_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1-v_2(r)-2(v_2(r))^2]r}{E_2(r)} dr + \frac{U_3(1-v_3-2v_3^2)}{E_3} + \\ &+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1-v_4(r)-2(v_4(r))^2]r}{E_4(r)} dr + \frac{U_5(1-v_5-2v_5^2)}{E_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1-v_6(r)-2(v_6(r))^2]r}{E_6(r)} dr + \\ &+ \frac{U_7(1-v_7-2v_7^2)}{E_7} \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \frac{1-v_{TT}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^2}{E_L} &= \frac{U_1(1-v_f-2v_f^2)}{E_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1-v_{i,1}(r)-2(v_{i,1}(r))^2]r}{E_{i,1}(r)} dr + \frac{U_3(1-v_m-2v_m^2)}{E_m} + \\ &+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1-v_{i,2}(r)-2(v_{i,2}(r))^2]r}{E_{i,2}(r)} dr + \frac{U_5(1-v_f-2v_f^2)}{E_f} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1-v_{i,3}(r)-2(v_{i,3}(r))^2]r}{E_{i,3}(r)} dr + \\ &+ \frac{U_7(1-v_m-2v_m^2)}{E_m} \end{aligned} \quad (7.5.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-v_{TT}^*}{E_T^*} - \frac{2v_{LT}^{*2}}{E_L^*} &= \frac{U_1(1-v_f^*-2v_f^{*2})}{E_f^*} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1-v_{i,1}^*(r)-2(v_{i,1}^*(r))^2]r}{E_{i,1}^*(r)} dr + \frac{U_3(1-v_m^*-2v_m^{*2})}{E_m^*} + \\ &+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1-v_{i,2}^*(r)-2(v_{i,2}^*(r))^2]r}{E_{i,2}^*(r)} dr + \frac{U_5(1-v_f^*-2v_f^{*2})}{E_f^*} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1-v_{i,3}^*(r)-2(v_{i,3}^*(r))^2]r}{E_{i,3}^*(r)} dr + \\ &+ \frac{U_7(1-v_m^*-2v_m^{*2})}{E_m^*} \end{aligned} \quad (7.5.1.2)$$

Η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - (v'_{TT} - iv''_{TT})}{E'_T + iE''_T} - \frac{2(v'_{LT} - v''_{LT})^2}{E'_L + iE''_L} = \frac{U_1(1 - (v'_f - iv''_f) - 2(v'_f - iv''_f)^2)}{E'_f + iE''_f} \\
 & + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - (v'_{i,1}(r) - iv''_{i,1}(r)) - 2(v'_{i,1}(r) - iv''_{i,1}(r))^2]}{E'_{i,1}(r) + iE''_{i,1}(r)} r \, dr + \frac{U_3(1 - (v'_m - iv''_m) - 2(v'_m - iv''_m)^2)}{E'_m + iE''_m} \\
 & + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - (v'_{i,2}(r) - iv''_{i,2}(r)) - 2(v'_{i,2}(r) - iv''_{i,2}(r))^2]}{E'_{i,2}(r) + iE''_{i,2}(r)} r \, dr + \frac{U_5(1 - (v'_f - iv''_f) - 2(v'_f - iv''_f)^2)}{E'_f + iE''_f} \\
 & + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - (v'_{i,3}(r) - iv''_{i,3}(r)) - 2(v'_{i,3}(r) - iv''_{i,3}(r))^2]}{E'_{i,3}(r) + iE''_{i,3}(r)} r \, dr + \frac{U_7(1 - (v'_m - iv''_m) - 2(v'_m - iv''_m)^2)}{E'_m + iE''_m} \Rightarrow
 \end{aligned} \tag{7.5.1.3}$$

Αριστερό μέλος της σχέσης (7.5.1.3):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - (v'_{TT} - iv''_{TT})}{E'_T + iE''_T} - \frac{2(v'_{LT} - v''_{LT})^2}{E'_L + iE''_L} = \frac{(1 - v'_{TT} + iv''_{TT})(E'_T - iE''_T)}{(E'_T + iE''_T)(E'_T - iE''_T)} - \frac{2(v'_{LT} - v''_{LT})^2(E'_L - iE''_L)}{(E'_L + iE''_L)} = \\
 & \frac{[(1 - v'_{TT})E'_T + v''_{TT}E''_T] + i[E'_T v''_{TT} - (1 - v'_{TT})E''_T]}{E_T'^2 + E_T''^2} - \frac{2(v_{LT}'^2 - 2iv'_{LT}v''_{LT} - v_{LT}''^2)(E'_L - iE''_L)}{E_L'^2 + iE_L''^2} = \\
 & \frac{[(1 - v'_{TT})E'_T + v''_{TT}E''_T] + i[E'_T v''_{TT} - (1 - v'_{TT})E''_T]}{E_T'^2 + E_T''^2} \\
 & - \frac{2[(v_{LT}'^2 - v_{LT}''^2)E'_L - 2v'_{LT}v''_{LT}E''_L] - i2[(v_{LT}'^2 - v_{LT}''^2)E'_L + 2v'_{LT}v''_{LT}E''_L]}{E_L'^2 + iE_L''^2} = \\
 & \left\{ \frac{[(1 - v'_{TT})E'_T + v''_{TT}E''_T]}{E_T'^2 + E_T''^2} - \frac{2[(v_{LT}'^2 - v_{LT}''^2)E'_L - 2v'_{LT}v''_{LT}E''_L]}{E_L'^2 + E_L''^2} \right\} \\
 & + i \left\{ \frac{[E'_T v''_{TT} - (1 - v'_{TT})E''_T]}{E_T'^2 + E_T''^2} + \frac{2[(v_{LT}'^2 - v_{LT}''^2)E''_L + 2v'_{LT}v''_{LT}E'_L]}{E_L'^2 + E_L''^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{7.5.1.4}$$

Δεξιά μέλος της σχέσης (7.5.1.3):

- Έγκλεισμα και μήτρα:

$$\begin{aligned}
 & \frac{U_{f,1}(1-(v'_f - iv''_f) - 2(v'_f - iv''_f)^2)}{E'_f + iE''_f} + \frac{U_{m,1}(1-(v'_m - iv''_m) - 2(v'_m - iv''_m)^2)}{E'_m + iE''_m} \\
 & + \frac{U_{f,2}(1-(v'_f - iv''_f) - 2(v'_f - iv''_f)^2)}{E'_f + iE''_f} + \frac{U_{m,2}(1-(v'_m - iv''_m) - 2(v'_m - iv''_m)^2)}{E'_m + iE''_m} = \\
 & \frac{U_{f,1}(1-(v'_f - iv''_f) - 2(v'_f - iv''_f)^2)(E'_f - iE''_f)}{E_f'^2 + E_f''^2} + \frac{U_{m,1}(1-(v'_m - iv''_m) - 2(v'_m - iv''_m)^2)(E'_m + iE''_m)}{E_m'^2 + E_m''^2} \\
 & \frac{U_{f,2}(1-(v'_f - iv''_f) - 2(v'_f - iv''_f)^2)(E'_f - iE''_f)}{E_f'^2 + E_f''^2} + \frac{U_{m,2}(1-(v'_m - iv''_m) - 2(v'_m - iv''_m)^2)(E'_m + iE''_m)}{E_m'^2 + E_m''^2} = \\
 & \frac{U_{f,1}[(1 - v'_f - 2v_f'^2 + 2v_f''^2)E'_f + (1 + 4v'_f)v''_f E''_f]}{E_f'^2 + E_f''^2} + i \frac{U_{f,1}[-(1 - v'_f - 2v_f'^2 + 2v_f''^2)E''_f + (1 + 4v'_f)v''_f E'_f]}{E_f'^2 + E_f''^2} \\
 & + \frac{U_{m,1}[(1 - v'_m - 2v_m'^2 + 2v_m''^2)E'_m + (1 + 4v'_m)v''_m E''_m]}{E_m'^2 + E_m''^2} + i \frac{U_{m,1}[-(1 - v'_m - 2v_m'^2 + 2v_m''^2)E''_m + (1 + 4v'_m)v''_m E'_m]}{E_m'^2 + E_m''^2} \\
 & + \frac{U_{f,2}[(1 - v'_f - 2v_f'^2 + 2v_f''^2)E'_f + (1 + 4v'_f)v''_f E''_f]}{E_f'^2 + E_f''^2} + i \frac{U_{f,2}[-(1 - v'_f - 2v_f'^2 + 2v_f''^2)E''_f + (1 + 4v'_f)v''_f E'_f]}{E_f'^2 + E_f''^2} \\
 & + \frac{U_{m,2}[(1 - v'_m - 2v_m'^2 + 2v_m''^2)E'_m + (1 + 4v'_m)v''_m E''_m]}{E_m'^2 + E_m''^2} + i \frac{U_{m,2}[-(1 - v'_m - 2v_m'^2 + 2v_m''^2)E''_m + (1 + 4v'_m)v''_m E'_m]}{E_m'^2 + E_m''^2} = \\
 & \left\{ \frac{(U_{f,1} + U_{f,2})[(1 - v'_f - 2v_f'^2 + 2v_f''^2)E'_f + (1 + 4v'_f)v''_f E''_f]}{E_f'^2 + E_f''^2} \dots \right. \\
 & \left. \dots + \frac{(U_{m,1} + U_{m,2})[(1 - v'_m - 2v_m'^2 + 2v_m''^2)E'_m + (1 + 4v'_m)v''_m E''_m]}{E_m'^2 + E_m''^2} \right\} \\
 & + i \left\{ \frac{(U_{f,1} + U_{f,2})[-(1 - v'_f - 2v_f'^2 + 2v_f''^2)E''_f + (1 + 4v'_f)v''_f E'_f]}{E_f'^2 + E_f''^2} \dots \right. \\
 & \left. \dots + \frac{(U_{m,1} + U_{m,2})[-(1 - v'_m - 2v_m'^2 + 2v_m''^2)E''_m + (1 + 4v'_m)v''_m E'_m]}{E_m'^2 + E_m''^2} \right\}
 \end{aligned}$$

(7.5.1.5)

- Ενδιάμεσες φάσεις της σχέσης (7.5.1.3):

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - v_{i,1}^*(r) - 2(v_{i,1}^*(r))^2]}{E_{i,1}^*(r)} r \, dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - v_{i,2}^*(r) - 2(v_{i,2}^*(r))^2]}{E_{i,2}^*(r)} r \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - v_{i,3}^*(r) - 2(v_{i,3}^*(r))^2]}{E_{i,3}^*(r)} r \, dr = \\
& \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - (v'_{i,1}(r) - iv''_{i,1}(r)) - 2(v'_{i,1}(r) - iv''_{i,1}(r))^2]}{E'_{i,1}(r) + iE''_{i,1}(r)} r \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - (v'_{i,2}(r) - iv''_{i,2}(r)) - 2(v'_{i,2}(r) - iv''_{i,2}(r))^2]}{E'_{i,2}(r) + iE''_{i,2}(r)} r \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - (v'_{i,3}(r) - iv''_{i,3}(r)) - 2(v'_{i,3}(r) - iv''_{i,3}(r))^2]}{E'_{i,3}(r) + iE''_{i,3}(r)} r \, dr = \\
& \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - (v'_{i,1}(r) - iv''_{i,1}(r)) - 2(v_{i,1}'^2(r) - 2iv'_{i,1}(r)v''_{i,1}(r) - v_{i,1}''^2(r))] (E'_{i,1}(r) - iE''_{i,1}(r)) r}{E_{i,1}'^2(r) + E_{i,1}''^2(r)} \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - (v'_{i,2}(r) - iv''_{i,2}(r)) - 2(v_{i,2}'^2(r) - 2iv'_{i,2}(r)v''_{i,2}(r) - v_{i,2}''^2(r))] (E'_{i,2}(r) - iE''_{i,2}(r)) r}{E_{i,2}'^2(r) + E_{i,2}''^2(r)} \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - (v'_{i,3}(r) - iv''_{i,3}(r)) - 2(v_{i,3}'^2(r) - 2iv'_{i,3}(r)v''_{i,3}(r) - v_{i,3}''^2(r))] (E'_{i,3}(r) - iE''_{i,3}(r)) r}{E_{i,3}'^2(r) + E_{i,3}''^2(r)} \, dr = \\
& \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[E'_{i,1}(r)(1 - v'_{i,1}(r) - 2v_{i,1}'^2(r) + 2v_{i,1}''^2(r)) + E''_{i,1}(r)v''_{i,1}(r)(1 + 4v'_{i,1}(r))] r}{E_{i,1}'^2(r) + E_{i,1}''^2(r)} \, dr \\
& + i \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[-E''_{i,1}(r)(1 - v'_{i,1}(r) - 2v_{i,1}'^2(r) + 2v_{i,1}''^2(r)) + E'_{i,1}(r)v''_{i,1}(r)(1 + 4v'_{i,1}(r))] r}{E_{i,1}'^2(r) + E_{i,1}''^2(r)} \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[E'_{i,2}(r)(1 - v'_{i,2}(r) - 2v_{i,2}'^2(r) + 2v_{i,2}''^2(r)) + E''_{i,2}(r)v''_{i,2}(r)(1 + 4v'_{i,2}(r))] r}{E_{i,2}'^2(r) + E_{i,2}''^2(r)} \, dr \\
& + i \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[-E''_{i,2}(r)(1 - v'_{i,2}(r) - 2v_{i,2}'^2(r) + 2v_{i,2}''^2(r)) + E'_{i,2}(r)v''_{i,2}(r)(1 + 4v'_{i,2}(r))] r}{E_{i,2}'^2(r) + E_{i,2}''^2(r)} \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[E'_{i,3}(r)(1 - v'_{i,3}(r) - 2v_{i,3}'^2(r) + 2v_{i,3}''^2(r)) + E''_{i,3}(r)v''_{i,3}(r)(1 + 4v'_{i,3}(r))] r}{E_{i,3}'^2(r) + E_{i,3}''^2(r)} \, dr \\
& + i \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[-E''_{i,3}(r)(1 - v'_{i,3}(r) - 2v_{i,3}'^2(r) + 2v_{i,3}''^2(r)) + E'_{i,3}(r)v''_{i,3}(r)(1 + 4v'_{i,3}(r))] r}{E_{i,3}'^2(r) + E_{i,3}''^2(r)} \, dr \Rightarrow
\end{aligned}$$

(7.5.1.6)

Οπότε τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - v_{i,1}^*(r) - 2(v_{i,1}^*(r))^2]r}{E_{i,1}^*(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - v_{i,2}^*(r) - 2(v_{i,2}^*(r))^2]r}{E_{i,2}^*(r)} dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - v_{i,3}^*(r) - 2(v_{i,3}^*(r))^2]r}{E_{i,3}^*(r)} dr = \\
& \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[E_{i,1}'(r)(1 - v_{i,1}'(r) - 2v_{i,1}'^2(r) + 2v_{i,1}''^2(r)) + E_{i,1}''(r)v_{i,1}''(r)(1 + 4v_{i,1}'(r))]r}{E_{i,1}'^2(r) + E_{i,1}''^2(r)} dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[E_{i,2}'(r)(1 - v_{i,2}'(r) - 2v_{i,2}'^2(r) + 2v_{i,2}''^2(r)) + E_{i,2}''(r)v_{i,2}''(r)(1 + 4v_{i,2}'(r))]r}{E_{i,2}'^2(r) + E_{i,2}''^2(r)} dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[E_{i,3}'(r)(1 - v_{i,3}'(r) - 2v_{i,3}'^2(r) + 2v_{i,3}''^2(r)) + E_{i,3}''(r)v_{i,3}''(r)(1 + 4v_{i,3}'(r))]r}{E_{i,3}'^2(r) + E_{i,3}''^2(r)} dr \\
& + i \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[-E_{i,1}''(r)(1 - v_{i,1}'(r) - 2v_{i,1}'^2(r) + 2v_{i,1}''^2(r)) + E_{i,1}'(r)v_{i,1}''(r)(1 + 4v_{i,1}'(r))]r}{E_{i,1}'^2(r) + E_{i,1}''^2(r)} dr \\
& + i \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[-E_{i,2}''(r)(1 - v_{i,2}'(r) - 2v_{i,2}'^2(r) + 2v_{i,2}''^2(r)) + E_{i,2}'(r)v_{i,2}''(r)(1 + 4v_{i,2}'(r))]r}{E_{i,2}'^2(r) + E_{i,2}''^2(r)} dr \\
& + i \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[-E_{i,3}''(r)(1 - v_{i,3}'(r) - 2v_{i,3}'^2(r) + 2v_{i,3}''^2(r)) + E_{i,3}'(r)v_{i,3}''(r)(1 + 4v_{i,3}'(r))]r}{E_{i,3}'^2(r) + E_{i,3}''^2(r)} dr
\end{aligned}$$

(7.5.1.7)

Άρα χωρίζοντας το πραγματικό μέρος με το φανταστικόν μέρος των μιγαδικών που προκύπτουν στις σχέσεις (7.5.1.4) έως (7.5.1.7) έχουμε:

Πραγματικό μέρος:

$$\begin{aligned}
& \frac{[(1 - v_{TT}')E_T' + v_{TT}''E_T'']}{E_T'^2 + E_T''^2} - \frac{2[(v_{LT}'^2 - v_{LT}''^2)E_L' - 2v_{LT}'v_{LT}''E_L'']}{E_L'^2 + E_L''^2} = \\
& \frac{(U_{f,1} + U_{f,2})[(1 - v_f' - 2v_f'^2 + 2v_f''^2)E_f' + (1 + 4v_f')v_f''E_f'']}{E_f'^2 + E_f''^2} + \\
& \frac{(U_{m,1} + U_{m,2})[(1 - v_m' - 2v_m'^2 + 2v_m''^2)E_m' + (1 + 4v_m')v_m''E_m'']}{E_m'^2 + E_m''^2} \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{E_{i,1}'(r)(1 - v_{i,1}'(r) - 2v_{i,1}'^2(r) + 2v_{i,1}''^2(r)) + E_{i,1}''(r)v_{i,1}''(r)(1 + 4v_{i,1}'(r))}{E_{i,1}'^2(r) + E_{i,1}''^2(r)} \right] r \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \left[\frac{E_{i,2}'(r)(1 - v_{i,2}'(r) - 2v_{i,2}'^2(r) + 2v_{i,2}''^2(r)) + E_{i,2}''(r)v_{i,2}''(r)(1 + 4v_{i,2}'(r))}{E_{i,2}'^2(r) + E_{i,2}''^2(r)} \right] r \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \left[\frac{E_{i,3}'(r)(1 - v_{i,3}'(r) - 2v_{i,3}'^2(r) + 2v_{i,3}''^2(r)) + E_{i,3}''(r)v_{i,3}''(r)(1 + 4v_{i,3}'(r))}{E_{i,3}'^2(r) + E_{i,3}''^2(r)} \right] r \, dr
\end{aligned} \tag{7.5.1.8}$$

Και αντίστοιχα από το φανταστικό μέρος:

$$\begin{aligned}
& \frac{[E_T'v_{TT}'' - (1 - v_{TT}')E_T'']}{E_T'^2 + E_T''^2} + \frac{2[(v_{LT}'^2 - v_{LT}''^2)E_L'' + 2v_{LT}'v_{LT}''E_L']}{E_L'^2 + iE_L''^2} = \\
& \frac{(U_{f,1} + U_{f,2})[-(1 - v_f' - 2v_f'^2 + 2v_f''^2)E_f'' + (1 + 4v_f')v_f''E_f']}{E_f'^2 + E_f''^2} \\
& + \frac{(U_{m,1} + U_{m,2})[-(1 - v_m' - 2v_m'^2 + 2v_m''^2)E_m'' + (1 + 4v_m')v_m''E_m']}{E_m'^2 + E_m''^2} \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{-E_{i,1}''(r)(1 - v_{i,1}'(r) - 2v_{i,1}'^2(r) + 2v_{i,1}''^2(r)) + E_{i,1}'(r)v_{i,1}''(r)(1 + 4v_{i,1}'(r))}{E_{i,1}'^2(r) + E_{i,1}''^2(r)} \right] r \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \left[\frac{-E_{i,2}''(r)(1 - v_{i,2}'(r) - 2v_{i,2}'^2(r) + 2v_{i,2}''^2(r)) + E_{i,2}'(r)v_{i,2}''(r)(1 + 4v_{i,2}'(r))}{E_{i,2}'^2(r) + E_{i,2}''^2(r)} \right] r \, dr \\
& + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \left[\frac{-E_{i,3}''(r)(1 - v_{i,3}'(r) - 2v_{i,3}'^2(r) + 2v_{i,3}''^2(r)) + E_{i,3}'(r)v_{i,3}''(r)(1 + 4v_{i,3}'(r))}{E_{i,3}'^2(r) + E_{i,3}''^2(r)} \right] r \, dr
\end{aligned} \tag{7.5.1.9}$$

7.5.2 ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 7.2.2 Θεωρούμε ότι:

$$\mathbf{E}'_f \approx \mathbf{E}_f, \text{αφού } \mathbf{E}''_f \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^*_m \approx \mathbf{v}_m, \text{αφού } \mathbf{v}''_m \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^*_f \approx \mathbf{v}_f, \text{αφού } \mathbf{v}''_f \approx \mathbf{0}$$

Επίσης έχει προκύψει από τις σχέσεις (7.3.2.2) και (7.4.3.2) ότι $\mathbf{v}''_{LT} = \mathbf{0}$.
 $\mathbf{v}''_{TT} = \mathbf{0}$

Επιπρόσθετα θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $E'_{i,1}(r) \equiv E'_2(r), E'_{i,2}(r) \equiv E'_4(r), E'_{i,3}(r) \equiv E'_6(r)$ και $E''_{i,1}(r)E''_2(r), E''_{i,2}(r) \equiv E''_4(r), E''_{i,3}(r) \equiv E''_6(r)$, σύμφωνα με τις σχέσεις (4.1.1.1), (4.1.1.4) και (4.1.1.7) καθώς και οι συναρτήσεις $v'_{i,1}(r) \equiv v'_2(r), v'_{i,2}(r) \equiv v'_4(r), v'_{i,3}(r) \equiv v'_6(r)$ και $v''_{i,1}(r) \equiv v''_2(r), v''_{i,2}(r) \equiv v''_4(r), v''_{i,3}(r) \equiv v''_6(r)$ σύμφωνα με τις σχέσεις, (4.1.1.3), (4.1.1.7) και (4.1.1.9), ακολουθούν την παραβολική μεταβολή λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$, που έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

Οπότε έχουμε:

$$E^*_{i,1}(r) = E'_{i,1}(r) + iE''_{i,1}(r) = \frac{(n(E'_f + iE''_f) - (E'_m + iE''_m))}{(r_2 - r_1)^2} r^2 - \frac{(n(E'_f + iE''_f) - (E'_m + iE''_m))2r_2}{(r_2 - r_1)^2} r$$

$$+ E'_m + iE''_m + \frac{(n(E'_f + iE''_f) - (E'_m + iE''_m))}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2 \Rightarrow$$

$$E'_{i,1}(r) = \frac{(nE'_f - E'_m)}{(r_2 - r_1)^2} r^2 - \frac{(nE'_f - E'_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} r + E'_m + \frac{(nE'_f - E'_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2$$

$$E''_{i,1}(r) = \frac{(nE''_f - E''_m)}{(r_2 - r_1)^2} r^2 - \frac{(nE''_f - E''_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} r + E''_m + \frac{(nE''_f - E''_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2$$

άρα με τις παραδοχές θα έχουμε:

$$E'_{i,1}(r) = \frac{(nE_f - E'_m)}{(r_2 - r_1)^2} r^2 - \frac{(nE_f - E'_m)2r_2}{(r_2 - r_1)^2} r + E'_m + \frac{(nE_f - E'_m)}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2$$

$$E''_{i,1}(r) = \frac{-E''_m}{(r_2 - r_1)^2} r^2 + \frac{2r_2 E''_m}{(r_2 - r_1)^2} r + E''_m + \frac{-E''_m}{(r_2 - r_1)^2} r_2^2$$

(7.5.2.1)

$$E_{i,2}^*(r) = E_{i,2}'(r) + iE_{i,2}''(r) = \frac{(n(E_f' + iE_f'') - (E_m' + iE_m''))}{(r_4 - r_3)^2} r^2 - \frac{(n(E_f' + iE_f'') - (E_m' + iE_m'')) 2r_3}{(r_4 - r_3)^2} r$$

$$+ E_m' + iE_m'' + \frac{(n(E_f' + iE_f'') - (E_m' + iE_m''))}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2 \Rightarrow$$

$$E_{i,2}'(r) = \frac{(nE_f' - E_m')}{(r_4 - r_3)^2} r^2 - \frac{(nE_f' - E_m') 2r_3}{(r_4 - r_3)^2} r + E_m' + \frac{(nE_f' - E_m')}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2$$

$$E_{i,2}''(r) = \frac{(nE_f'' - E_m'')}{(r_4 - r_3)^2} r^2 - \frac{(nE_f'' - E_m'') 2r_3}{(r_4 - r_3)^2} r + E_m'' + \frac{(nE_f'' - E_m'')}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2$$

άρα με τις παραδοχές θα έχουμε:

$$E_{i,2}'(r) = \frac{(nE_f' - E_m')}{(r_4 - r_3)^2} r^2 - \frac{(nE_f' - E_m') 2r_3}{(r_4 - r_3)^2} r + E_m' + \frac{(nE_f' - E_m')}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2$$

$$E_{i,2}''(r) = \frac{-E_m''}{(r_4 - r_3)^2} r^2 + \frac{2r_3 E_m''}{(r_4 - r_3)^2} r + E_m'' + \frac{-E_m''}{(r_4 - r_3)^2} r_3^2$$

(7.5.2.2)

$$E_{i,3}^*(r) = E_{i,3}'(r) + iE_{i,3}''(r) = \frac{(n(E_f' + iE_f'') - (E_m' + iE_m''))}{(r_6 - r_5)^2} r^2 - \frac{(n(E_f' + iE_f'') - (E_m' + iE_m'')) 2r_6}{(r_6 - r_5)^2} r$$

$$+ E_m' + iE_m'' + \frac{(n(E_f' + iE_f'') - (E_m' + iE_m''))}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2 \Rightarrow$$

$$E_{i,3}'(r) = \frac{(nE_f' - E_m')}{(r_6 - r_5)^2} r^2 - \frac{(nE_f' - E_m') 2r_6}{(r_6 - r_5)^2} r + E_m' + \frac{(nE_f' - E_m')}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2$$

$$E_{i,3}''(r) = \frac{(nE_f'' - E_m'')}{(r_6 - r_5)^2} r^2 - \frac{(nE_f'' - E_m'') 2r_6}{(r_6 - r_5)^2} r + E_m'' + \frac{(nE_f'' - E_m'')}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2$$

άρα με τις παραδοχές θα έχουμε:

$$E_{i,3}'(r) = \frac{(nE_f' - E_m')}{(r_6 - r_5)^2} r^2 - \frac{(nE_f' - E_m') 2r_6}{(r_6 - r_5)^2} r + E_m' + \frac{(nE_f' - E_m')}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2$$

$$E_{i,3}''(r) = \frac{-E_m''}{(r_6 - r_5)^2} r^2 + \frac{2r_6 E_m''}{(r_6 - r_5)^2} r + E_m'' + \frac{-E_m''}{(r_6 - r_5)^2} r_6^2$$

(7.5.2.3)

Τα αντίστοιχα ισχύουν για τους λόγους Poisson των ενδιάμεσων φάσεων. Οπότε τελικά σε συνδυασμό με όλες τις παραπάνω σχέσεις και τις σχέσεις (7.5.1.8) και (7.5.1.9) προκύπτει:

Πραγματικό μέρος:

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - v'_{TT})E'_T}{E'^2_T + E''^2_T} &= \frac{2v'^2_{LT}E'_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{(U_{f,1} + U_{f,2})(1 - v_f - 2v'^2_f)E_f}{E'^2_f} \\
&+ \frac{(U_{m,1} + U_{m,2})(1 - v'_m - 2v'^2_m)E'_f}{E'^2_m + E''^2_m} \\
&+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[E'_{i,1}(r)(1 - v'_{i,1}(r) - 2v'^2_{i,1}(r) + 2v''^2_{i,1}(r)) + E''_{i,1}(r)v''_{i,1}(r)(1 + 4v'_{i,1}(r))]}{E'^2_{i,1}(r) + E''^2_{i,1}(r)} r \, dr \\
&+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[E'_{i,2}(r)(1 - v'_{i,2}(r) - 2v'^2_{i,2}(r) + 2v''^2_{i,2}(r)) + E''_{i,2}(r)v''_{i,2}(r)(1 + 4v'_{i,2}(r))]}{E'^2_{i,2}(r) + E''^2_{i,2}(r)} r \, dr \\
&+ \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[E'_{i,3}(r)(1 - v'_{i,3}(r) - 2v'^2_{i,3}(r) + 2v''^2_{i,3}(r)) + E''_{i,3}(r)v''_{i,3}(r)(1 + 4v'_{i,3}(r))]}{E'^2_{i,3}(r) + E''^2_{i,3}(r)} r \, dr
\end{aligned}
\tag{7.5.2.4}$$

Φανταστικό μέρος:

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - v'_{TT})E''_T}{E'^2_T + E''^2_T} &= \frac{2v'^2_{LT}E''_L}{E'^2_L + iE''^2_L} + \frac{(U_{m,1} + U_{m,2})[(1 - v'_m - 2v'^2_m)E''_m]}{E'^2_m + E''^2_m} \\
&- \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[-E''_{i,1}(r)(1 - v'_{i,1}(r) - 2v'^2_{i,1}(r) + 2v''^2_{i,1}(r)) + E'_{i,1}(r)v''_{i,1}(r)(1 + 4v'_{i,1}(r))]}{E'^2_{i,1}(r) + E''^2_{i,1}(r)} r \, dr \\
&- \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[-E''_{i,2}(r)(1 - v'_{i,2}(r) - 2v'^2_{i,2}(r) + 2v''^2_{i,2}(r)) + E'_{i,2}(r)v''_{i,2}(r)(1 + 4v'_{i,2}(r))]}{E'^2_{i,2}(r) + E''^2_{i,2}(r)} r \, dr \\
&- \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[-E''_{i,3}(r)(1 - v'_{i,3}(r) - 2v'^2_{i,3}(r) + 2v''^2_{i,3}(r)) + E'_{i,3}(r)v''_{i,3}(r)(1 + 4v'_{i,3}(r))]}{E'^2_{i,3}(r) + E''^2_{i,3}(r)} r \, dr
\end{aligned}
\tag{7.5.2.5}$$

Θέτοντας μεταβλητές στις σχέσεις (7.5.2.4) και (7.5.2.5) προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1-v'_{\pi})E'_T}{E_T^2 + E_T'^2} &= W, \\ \frac{(1-v'_{\pi})E''_T}{E_T^2 + E_T''^2} &= V, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{E'_T}{E''_T} = \frac{W}{V} \Rightarrow E'_T = \frac{W}{V} E''_T$$

$$\frac{(1-v'_{\pi})\frac{W}{V} E''_T}{\left(\frac{W}{V} E''_T\right)^2 + E_T''^2} = W \Rightarrow \frac{(1-v'_{\pi})\frac{W}{V}}{\left(\left(\frac{W}{V}\right)^2 + 1\right) E_T''} = W \Rightarrow$$

$$E_T'' = \frac{\frac{(1-v'_{\pi})}{V}}{\left(\left(\frac{W}{V}\right)^2 + 1\right)} = \frac{(1-v'_{\pi})V}{W^2 + V^2}$$

οπότε τελικά:

$$E_T'' = \frac{(1-v'_{\pi})V}{W^2 + V^2} \tag{7.5.2.6}$$

$$E_T' = \frac{(1-v'_{\pi})W}{W^2 + V^2} \tag{7.5.2.7}$$

Οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.5.2.4) έως (7.5.2.7) προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα E'_T και E''_T που αναφέρονται στην παράγραφο 7.8

7.6.1 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ

Εφαρμόζουμε την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού διαμήκους μέτρου διατμήσεως, δηλαδή στην εξίσωση (5.6.3). Όπως ήδη αναφέραμε προήλθε από τον μετασχηματισμό της εξίσωσης των ερευνητών **Tsai-Hahn** για την περίπτωση του επαφασικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{G_{i,1}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{G_{i,2}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{G_{i,3}(r)} dr \right] \Rightarrow$$

$$G_{LT} = 1 / \left[\frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{G_{i,1}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{G_{i,2}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{G_{i,3}(r)} dr \right] \right] \quad (5.6.3)$$

Οπότε:

$$\frac{1}{G_{LT}^*} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f}{G_f^*} + \frac{n_2 U_m}{G_m^*} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{G_{i,1}^*(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{G_{i,2}^*(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{G_{i,3}^*(r)} dr \right] \quad (7.6.1.1)$$

$$\frac{1}{G_{LT}' + iG_{LT}''} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f}{G_f' + iG_f''} + \frac{n_2 U_m}{G_m' + iG_m''} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{G_{i,1}'(r) + iG_{i,1}''(r)} dr + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{G_{i,2}'(r) + iG_{i,2}''(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{G_{i,3}'(r) + iG_{i,3}''(r)} dr \right] \Rightarrow$$

$$\frac{G_{LT}' - iG_{LT}''}{G_{LT}'' + G_{LT}'^2} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f (G_f' - iG_f'')}{G_f'^2 + G_f''^2} + \frac{n_2 U_m (G_m' - iG_m'')}{G_m'^2 + G_m''^2} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r (G_{i,1}'(r) - iG_{i,1}''(r))}{G_{i,1}'^2(r) + G_{i,1}''^2(r)} dr + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r (G_{i,2}'(r) - iG_{i,2}''(r))}{G_{i,2}'^2(r) + G_{i,2}''^2(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r (G_{i,3}'(r) - iG_{i,3}''(r))}{G_{i,3}'^2(r) + G_{i,3}''^2(r)} dr \right] \quad (7.6.1.2)$$

Άρα χωρίζοντας το πραγματικό μέρος με το φανταστικόν μέρος των μιγαδικών στην παραπάνω σχέση (7.6.1.2) έχουμε:

Πραγματικό μέρος:

$$\frac{G'_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f G'_f}{G'^2_f + G''^2_f} + \frac{n_2 U_m G'_m}{G'^2_m + G''^2_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r G'_{i,1}(r)}{G'^2_{i,1}(r) + G''^2_{i,1}(r)} dr + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r G'_{i,2}(r)}{G'^2_{i,2}(r) + G''^2_{i,2}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r G'_{i,3}(r)}{G'^2_{i,3}(r) + G''^2_{i,3}(r)} dr \right] \quad (7.6.1.3)$$

Φανταστικό μέρος:

$$\frac{G''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f G''_f}{G'^2_f + G''^2_f} + \frac{n_2 U_m G''_m}{G'^2_m + G''^2_m} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r G''_{i,1}(r)}{G'^2_{i,1}(r) + G''^2_{i,1}(r)} dr + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r G''_{i,2}(r)}{G'^2_{i,2}(r) + G''^2_{i,2}(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r G''_{i,3}(r)}{G'^2_{i,3}(r) + G''^2_{i,3}(r)} dr \right] \quad (7.6.1.4)$$

Θέτοντας μεταβλητές στις σχέσεις (7.6.1.3) και (7.6.1.4) προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} \frac{G'_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} = C \\ \frac{G''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} = D \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{G'_{LT}}{G''_{LT}} = \frac{C}{D} \Rightarrow G'_{LT} = \frac{C}{D} G''_{LT}$$

$$\frac{\frac{C}{D} G''_{LT}}{\left(\frac{C}{D} G''_{LT}\right)^2 + G''^2_{LT}} = C \Rightarrow \frac{\frac{C}{D}}{\left(\left(\frac{C}{D}\right)^2 + 1\right) G''_{LT}} = C \Rightarrow G''_{LT} = \frac{D}{C^2 + D^2}$$

οπότε τελικά:

$$G''_{LT} = \frac{D}{C^2 + D^2} \quad (7.6.1.5)$$

$$G'_{LT} = \frac{C}{C^2 + D^2} \quad (7.6.1.6)$$

7.6.2 ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 7.2.2 Θεωρούμε ότι:

$$\mathbf{E}'_f \approx \mathbf{E}_f, \text{αφού } \mathbf{E}''_f \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^*_m \approx \mathbf{v}_m, \text{αφού } \mathbf{v}''_m \approx \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^*_f \approx \mathbf{v}_f, \text{αφού } \mathbf{v}''_f \approx \mathbf{0}$$

Επιπρόσθετα έχουμε:

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow G^* = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)} \Rightarrow \\ G' + iG'' &= \frac{(E' + iE'')(1 + \nu' + i\nu'')}{2(1 + \nu' - i\nu'')(1 + \nu' + i\nu'')} = \frac{(E' + iE'')(1 + \nu' + i\nu'')}{2\left[(1 + \nu')^2 + \nu''^2\right]} \Rightarrow \\ G' + iG'' &= \frac{E' + E'\nu' + i\nu''E' + iE'' + iE''\nu' - E''\nu''}{2\left[(1 + \nu')^2 + \nu''^2\right]} = \frac{E' + E'\nu' - E''\nu'' + i(\nu''E' + E'' + E''\nu')}{2\left[(1 + \nu')^2 + \nu''^2\right]} \end{aligned} \quad (7.6.2.1)$$

Οπότε χωρίζοντας πραγματικό με φανταστικό μέρος της σχέσης (7.6.2.1) έχουμε:

$$G' = \frac{E'(1 + \nu') - E''\nu''}{2\left[(1 + \nu')^2 + \nu''^2\right]} \quad (7.6.2.2)$$

$$G'' = \frac{\nu''E' + E''(1 + \nu')}{2\left[(1 + \nu')^2 + \nu''^2\right]} \quad (7.6.2.3)$$

Έτσι οι σχέσεις (7.6.2.2) και (7.6.2.3) με χρήση των παραπάνω παραδοχών γίνονται για το έγκλεισμα και την μήτρα αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} G'_f &= \frac{E'_f(1 + \nu'_f) - E''_f\nu''_f}{2\left[(1 + \nu'_f)^2 + \nu''_f{}^2\right]} = \frac{E'_f(1 + \nu'_f)}{2(1 + \nu'_f)^2} = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = G_f \\ G'_m &= \frac{E'_m(1 + \nu'_m) - E''_m\nu''_m}{2\left[(1 + \nu'_m)^2 + \nu''_m{}^2\right]} = \frac{E'_m(1 + \nu'_m)}{2(1 + \nu'_m)^2} = \frac{E'_m}{2(1 + \nu_m)} \end{aligned} \quad (7.6.2.4)$$

$$G_f'' = \frac{v_f'' E_f' + E_f'' (1 + v_f')}{2 \left[(1 + v_f')^2 + v_f''^2 \right]} = 0$$

$$G_m'' = \frac{v_m'' E_m' + E_m'' (1 + v_m')}{2 \left[(1 + v_m')^2 + v_m''^2 \right]} = \frac{E_m'' (1 + v_m')}{2 (1 + v_m')^2} = \frac{E_m''}{2 (1 + v_m)}$$
(7.6.2.5)

Όπότε με χρήση συνολικά των παραπάνω παραδοχών οι σχέσεις (7.6.1.3) και (7.6.1.4) γίνονται:

Πραγματικό μέρος:

$$\frac{G_{LT}'}{G_{LT}' + G_{LT}''} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{U_f}{G_f'} + \frac{n_2 U_m G_m'}{G_m'^2 + G_m''^2} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r G_{i,1}'(r)}{G_{i,1}'^2(r) + G_{i,1}''^2(r)} dr + \dots \right]$$

$$\dots + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r G_{i,2}'(r)}{G_{i,2}'^2(r) + G_{i,2}''^2(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r G_{i,3}'(r)}{G_{i,3}'^2(r) + G_{i,3}''^2(r)} dr$$
(7.6.2.6)

Φανταστικό μέρος:

$$\frac{G_{LT}''}{G_{LT}' + G_{LT}''} = \frac{1}{(U_f + n_2 U_m + U_i)} \left[\frac{n_2 U_m G_m''}{G_m'^2 + G_m''^2} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r G_{i,1}''(r)}{G_{i,1}'^2(r) + G_{i,1}''^2(r)} dr + \dots \right]$$

$$\dots + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r G_{i,2}''(r)}{G_{i,2}'^2(r) + G_{i,2}''^2(r)} dr + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r G_{i,3}''(r)}{G_{i,3}'^2(r) + G_{i,3}''^2(r)} dr$$
(7.6.2.7)

Όπου για τον υπολογισμό των $G_{i,1}'(r), G_{i,2}'(r), G_{i,3}'(r)$ και $G_{i,1}''(r), G_{i,2}''(r), G_{i,3}''(r)$ θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή σύμφωνα με τις σχέσεις (4.1.1.2), (4.1.1.5) και (4.1.1.8), λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση για $n=1$ που έχουμε την μέγιστη επίδραση του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

Θέτοντας μεταβλητές στις σχέσεις με τις παραδοχές (7.6.2.6) και (7.6.2.7) προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} \frac{G'_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} &= C_o \\ \frac{G''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} &= D_o \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{G'_{LT}}{G''_{LT}} = \frac{C_o}{D_o} \Rightarrow G'_{LT} = \frac{C_o}{D_o} G''_{LT}$$

$$\frac{\frac{C_o}{D_o} G''_{LT}}{\left(\frac{C_o}{D_o} G''_{LT}\right)^2 + G''^2_{LT}} = C_o \Rightarrow \frac{\frac{C_o}{D_o}}{\left(\left(\frac{C_o}{D_o}\right)^2 + 1\right) G''_{LT}} = C_o \Rightarrow G''_{LT} = \frac{D_o}{C_o^2 + D_o^2}$$

οπότε τελικά:

$$G''_{LT} = \frac{D_o}{C_o^2 + D_o^2} \quad (7.6.2.8)$$

$$G'_{LT} = \frac{C_o}{C_o^2 + D_o^2} \quad (7.6.2.9)$$

Οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.6.2.6) έως (7.6.2.9) προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα G'_{LT} και G''_{LT} που αναφέρονται στην παράγραφο 7.8.

7.7 ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

7.7.1 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία στατικό μέτρο ελαστικότητας (5.7.1), δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{1}{E_{\theta}} = \frac{1}{E_L} (\cos\theta)^4 + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) (\sin\theta)^2 (\cos\theta)^2 + \frac{1}{E_T} (\sin\theta)^4 \quad (5.7.1)$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{\theta}^*} &= \frac{\cos^4\theta}{E_L^*} + \frac{\sin^4\theta}{E_T^*} + \left(\frac{1}{G_{LT}^*} - \frac{2\nu_{LT}^*}{E_L^*} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta \Rightarrow \\ \frac{1}{E_{\theta}' + iE_{\theta}''} &= \frac{\cos^4\theta}{E_L' + iE_L''} + \frac{\sin^4\theta}{E_T' + iE_T''} + \left(\frac{1}{G_{LT}' + iG_{LT}''} - \frac{2(\nu_{LT}' - i\nu_{LT}'')}{E_L' + iE_L''} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta \end{aligned} \quad (7.7.1.1)$$

Αριστερό μέλος γίνεται:

$$\frac{1}{E_{\theta}' + iE_{\theta}''} = \frac{E_{\theta}' - iE_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} \quad (7.7.1.2)$$

Δεξιό μέλος:

$$1^{\text{ος}} \text{ όρος} \quad \frac{\cos^4\theta}{E_L' + iE_L''} = \frac{(E_L' - iE_L'') \cos^4\theta}{E_L'^2 + E_L''^2} \quad (7.7.1.3)$$

$$2^{\text{ος}} \text{ όρος} \quad \frac{\sin^4\theta}{E_T' + iE_T''} = \frac{(E_T' - iE_T'') \sin^4\theta}{E_T'^2 + E_T''^2} \quad (7.7.1.4)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{G_{LT}' + iG_{LT}''} - \frac{2(\nu_{LT}' - i\nu_{LT}'')}{E_L' + iE_L''} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta = \\ 3^{\text{ος}} \text{ όρος} &\left(\frac{G_{LT}' - iG_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2(\nu_{LT}' - i\nu_{LT}'')(E_L' - iE_L'')}{E_L'^2 + E_L''^2} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta = \\ &\left(\frac{G_{LT}' - iG_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2[(\nu_{LT}' E_L' - \nu_{LT}'' E_L'') - i(\nu_{LT}'' E_L' + \nu_{LT}' E_L'')]}{E_L'^2 + E_L''^2} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta \end{aligned} \quad (7.7.1.5)$$

Έτσι από τις σχέσεις (7.7.1.1) έως (7.7.1.5) χωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος προκύπτουν:

Πραγματικό μέρος

$$\frac{E_{\theta}'}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = \frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} \cos^4 \theta + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G_{LT}'}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2[v_{LT}' E_L' - v_{LT}'' E_L'']}{E_L'^2 + E_L''^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = Z \quad (7.7.1.6)$$

Φανταστικό μέρος

$$\frac{E_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = \frac{E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} \cos^4 \theta + \frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2[v_{LT}'' E_L' + v_{LT}' E_L'']}{E_L'^2 + E_L''^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = T \quad (7.7.1.7)$$

Από τις σχέσεις (7.7.1.6) και (7.7.1.7)

$$\frac{E_{\theta}'}{E_{\theta}''} = \frac{Z}{T} \Rightarrow E_{\theta}' = \frac{Z}{T} E_{\theta}''$$

$$\frac{\frac{Z}{T} E_{\theta}''}{\left(\frac{Z}{T} E_{\theta}''\right)^2 + E_{\theta}''^2} = Z \Rightarrow \frac{\frac{Z}{T} E_{\theta}''}{E_{\theta}''^2 \left[\left(\frac{Z}{T}\right)^2 + 1 \right]} = Z$$

$$E_{\theta}'' = \frac{\frac{1}{T}}{\left[\left(\frac{Z}{T}\right)^2 + 1 \right]} = \frac{T}{Z^2 + T^2}$$

οπότε τελικά:

$$E_{\theta}' = \frac{Z}{Z^2 + T^2} \quad (7.7.1.8)$$

$$E_{\theta}'' = \frac{T}{Z^2 + T^2} \quad (7.7.1.9)$$

και

$$\tan \delta_{\theta} = \frac{E_{\theta}''}{E_{\theta}'} = \frac{\frac{T}{Z^2 + T^2}}{\frac{Z}{Z^2 + T^2}} = \frac{T}{Z} \quad (7.7.1.10)$$

7.7.2 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 7.2.2 Θεωρούμε ότι:

$$E_f' \approx E_f, \text{ αφού } E_f'' \approx 0$$

$$v_m^* \approx v_m, \text{ αφού } v_m'' \approx 0$$

$$v_f^* \approx v_f, \text{ αφού } v_f'' \approx 0$$

Από τις σχέσεις (7.3.2.2) και (7.4.3.2) έχει προκύψει ότι $v_{LT}'' = 0$, $v_{TT}'' = 0$,

Έτσι από τις σχέσεις (7.7.1.6) έως (7.7.1.7) προκύπτουν:

Πραγματικό μέρος

$$\frac{E_\theta'}{E_\theta'^2 + E_\theta''^2} = \frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} \cos^4 \theta + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G_{LT}'}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2\nu_{LT}' E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = Z_0 \quad (7.7.2.1)$$

Φανταστικό μέρος

$$\frac{E_\theta''}{E_\theta'^2 + E_\theta''^2} = \frac{E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} \cos^4 \theta + \frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2\nu_{LT}' E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = T_0 \quad (7.7.2.2)$$

Από τις σχέσεις (7.7.2.1) και (7.7.2.2) και θεωρώντας ότι τα Z_0, T_0 έχουν υπολογιστεί με βάση τις παραδοχές που αναφέραμε έχουμε:

$$\frac{E'_{\theta}}{E''_{\theta}} = \frac{Z_0}{T_0} \Rightarrow E'_{\theta} = \frac{Z_0}{T_0} E''_{\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{Z_0}{T_0} E''_{\theta}}{\left(\frac{Z_0}{T_0} E''_{\theta}\right)^2 + E''_{\theta}{}^2} = Z_0 \Rightarrow \frac{\frac{Z_0}{T_0} E''_{\theta}}{E''_{\theta}{}^2 \left[\left(\frac{Z_0}{T_0}\right)^2 + 1\right]} = Z_0$$

$$E''_{\theta} = \frac{\frac{1}{T_0}}{\left[\left(\frac{Z_0}{T_0}\right)^2 + 1\right]} = \frac{T_0}{Z_0^2 + T_0^2}$$

οπότε τελικά:

$$E'_{\theta} = \frac{Z_0}{Z_0^2 + T_0^2} \quad (7.7.2.3)$$

$$E''_{\theta} = \frac{T_0}{Z_0^2 + T_0^2} \quad (7.7.2.4)$$

και

$$\tan \delta_{\theta} = \frac{E''_{\theta}}{E'_{\theta}} = \frac{\frac{T_0}{Z_0^2 + T_0^2}}{\frac{Z_0}{Z_0^2 + T_0^2}} = \frac{T_0}{Z_0} \quad (7.7.2.5)$$

Οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.7.2.1) έως (7.7.2.4) προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα E'_{θ} και E''_{θ} που αναφέρονται στην παράγραφο 7.8.

7.7.3 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία στατικό μέτρο διατμήσεως (5.7.2), δηλαδή στην εξίσωση:

$$\frac{1}{G_{\theta}} = 4 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \quad (5.7.2)$$

Οπότε

$$\frac{1}{G_{\theta}^*} = 4 \left(\frac{1}{E_L^*} + \frac{1}{E_T^*} + \frac{2v_{LT}^*}{E_L^*} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{1}{G_{LT}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{G_{\theta}' + iG_{\theta}''} =$$

$$4 \left(\frac{1}{E_L' + iE_L''} + \frac{1}{E_T' + iE_T''} + \frac{2(v_{LT}' - iv_{LT}'')}{E_L' + iE_L''} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{1}{G_{LT}' + iG_{LT}''} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2$$

(7.7.3.1)

Έτσι προκύπτει

$$\frac{G_{\theta}' - iG_{\theta}''}{G_{\theta}'^2 + G_{\theta}''^2} =$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_L' - iE_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T' - iE_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} + \dots \\ \dots + \frac{2(v_{LT}' - iv_{LT}'')(E_L' - iE_L'')}{E_L'^2 + E_L''^2} \end{array} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G_{LT}' - iG_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{G_{\theta}' - iG_{\theta}''}{G_{\theta}'^2 + G_{\theta}''^2} =$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_L' - iE_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T' - iE_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} + \dots \\ \dots + \frac{2 \left[(v_{LT}'E_L' - v_{LT}''E_L'') - i(v_{LT}''E_L' + v_{LT}'E_L'') \right]}{E_L'^2 + E_L''^2} \end{array} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G_{LT}' - iG_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2$$

(7.7.3.2)

Έτσι από την σχέση (7.7.3.2) χωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος προκύπτει:

Πραγματικό μέρος

$$\frac{G_{\theta}'}{G_{\theta}'^2 + G_{\theta}''^2} =$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} + \dots \\ \dots + \frac{2(v_{LT}'E_L' - v_{LT}''E_L'')}{E_L'^2 + E_L''^2} \end{array} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G_{LT}'}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = F$$

(7.7.3.3)

Φανταστικό μέρος

$$\frac{G_{\theta}''}{G_{\theta}'^2 + G_{\theta}''^2} = 4 \left\{ \frac{E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2(v_{LT}'' E_L' + v_{LT}' E_L'')}{E_L'^2 + E_L''^2} \right\} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{G_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 = S \quad (7.7.3.4)$$

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με την προηγούμενη παράγραφο έχουμε

$$G_{\theta}' = \frac{F}{F^2 + S^2} \quad (7.7.3.5)$$

$$G_{\theta}'' = \frac{S}{F^2 + S^2}$$

7.7.4 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΛΟΧΕΣ

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 7.2.2 Θεωρούμε ότι:

$$E_f' \approx E_f, \text{ αφού } E_f'' \approx 0$$

$$v_m^* \approx v_m, \text{ αφού } v_m'' \approx 0$$

$$v_f^* \approx v_f, \text{ αφού } v_f'' \approx 0$$

Από τις σχέσεις (7.3.2.2) και (7.4.3.2) έχει προκύψει ότι $v_{LT}'' = 0$, $v_{TT}'' = 0$,

Έτσι από τις σχέσεις (7.7.3.3) και (7.7.3.4) προκύπτουν:

Πραγματικό μέρος

$$\frac{G_{\theta}'}{G_{\theta}'^2 + G_{\theta}''^2} = 4 \left\{ \frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2v_{LT}' E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} \right\} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{G_{LT}'}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 = F_0 \quad (7.7.4.1)$$

Φανταστικό μέρος

$$\frac{G_{\theta}''}{G_{\theta}'^2 + G_{\theta}''^2} = 4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} + \dots \\ \dots + \frac{2\nu_{LT}' E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} \end{array} \right\} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{G_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 = S_0 \quad (7.7.4.2)$$

Από τις σχέσεις (7.7.4.1) και (7.7.4.2) και θεωρώντας ότι τα F_0, S_0 έχουν υπολογιστεί με βάση τις παραδοχές που αναφέραμε έχουμε:

$$G_{\theta}' = \frac{F_0}{F_0^2 + S_0^2} \quad (7.7.4.3)$$

$$G_{\theta}'' = \frac{S_0}{F_0^2 + S_0^2}$$

Οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.7.4.1) έως (7.7.4.3) προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα G_{θ}' και G_{θ}'' που αναφέρονται στην παράγραφο 7.8.

7.7.5 ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία στατικό λόγο Poisson (5.7.3), δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{\nu_{\theta}}{E_{\theta}} = - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\nu_{LT}}{E_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \quad (5.7.3)$$

Οπότε

$$\frac{\nu_{\theta}^*}{E_{\theta}^*} = - \left(\frac{1}{E_L^*} + \frac{1}{E_T^*} - \frac{1}{G_{LT}^*} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\nu_{LT}^*}{E_L^*} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \quad (7.7.5.1)$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\theta}' - iv_{\theta}''}{E_{\theta}' + iE_{\theta}''} &= \\ - \left(\frac{1}{E_L' + iE_L''} + \frac{1}{E_T' + iE_T''} - \frac{1}{G_{LT}' + iG_{LT}''} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{v_{LT}' - iv_{LT}''}{E_L' + iE_L''} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) &\Rightarrow \\ \frac{(v_{\theta}' - iv_{\theta}'')(E_{\theta}' - iE_{\theta}'')}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} &= - \left(\frac{E_L' - iE_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T' - iE_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} - \frac{G_{LT}' - iG_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \\ + \frac{(v_{LT}' - iv_{LT}'')(E_L' - iE_L'')}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) &\Rightarrow \\ \frac{(v_{\theta}'E_{\theta}' - v_{\theta}''E_{\theta}'') - i(v_{\theta}''E_{\theta}' + v_{\theta}'E_{\theta}'')}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} &= - \left(\frac{E_L' - iE_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T' - iE_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} - \frac{G_{LT}' - iG_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \\ + \frac{(v_{LT}'E_L' - v_{LT}''E_L'') - i(v_{LT}''E_L' + v_{LT}'E_L'')}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) & \end{aligned} \quad (7.7.5.2)$$

Έτσι από την σχέση (7.7.5.2) χωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος προκύπτει:

Πραγματικό μέρος

$$\begin{aligned} \frac{v_{\theta}'E_{\theta}' - v_{\theta}''E_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} &= \\ - \left(\frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} \dots \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{v_{LT}'E_L' - v_{LT}''E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) &= H \end{aligned} \quad (7.7.5.3)$$

Φανταστικό μέρος

$$\frac{v_{\theta}'' E_{\theta}' + v_{\theta}' E_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} =$$

$$- \left(\begin{array}{c} \frac{E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} \dots \\ \dots - \frac{G_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} \end{array} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{v_{LT}'' E_L' + v_{LT}' E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = J$$

(7.7.5.4)

Από την σχέση (7.7.5.3) προκύπτει:

$$\frac{v_{\theta}' E_{\theta}' - v_{\theta}'' E_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = H \Rightarrow v_{\theta}' E_{\theta}' = H (E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) + v_{\theta}'' E_{\theta}'' \Rightarrow$$

$$v_{\theta}' = \frac{H (E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) + v_{\theta}'' E_{\theta}''}{E_{\theta}'}$$

(7.7.5.5)

$$\frac{v_{\theta}'' E_{\theta}' + v_{\theta}' E_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = J \stackrel{(7.7.5.5)}{\Rightarrow}$$

$$v_{\theta}'' E_{\theta}' = J (E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) - \left(\frac{H (E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) + v_{\theta}'' E_{\theta}''}{E_{\theta}'} \right) E_{\theta}'' \Rightarrow$$

$$v_{\theta}'' (E_{\theta}' + \frac{E_{\theta}''}{E_{\theta}'} E_{\theta}'') = J (E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) - \frac{H (E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) E_{\theta}''}{E_{\theta}'} \stackrel{(7.7.1.10)}{\Rightarrow}$$

$$v_{\theta}'' (E_{\theta}' + \frac{E_{\theta}''}{E_{\theta}'} E_{\theta}'') = (E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) \left(J - \frac{H E_{\theta}''}{E_{\theta}'} \right) \Rightarrow$$

$$v_{\theta}'' (E_{\theta}' + \tan \delta_{\theta} E_{\theta}'') = (E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) (J - H \tan \delta_{\theta}) \Rightarrow$$

$$v_{\theta}'' = \frac{(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) (J - H \tan \delta_{\theta})}{(E_{\theta}' + \tan \delta_{\theta} E_{\theta}'')} \stackrel{\left(\frac{E_{\theta}''}{E_{\theta}'} = \tan \delta_{\theta} \right)}{=} J E_{\theta}' - H E_{\theta}''$$

(7.7.5.6)

Οπότε από (7.7.5.5) και (7.7.5.6) έχουμε

$$\begin{aligned}
 v_{\theta}' &= \frac{H(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) + \frac{(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2)(J - H \tan \delta_{\theta})}{(E_{\theta}' + \tan \delta_{\theta} E_{\theta}'')} E_{\theta}''}{E_{\theta}'} = \\
 &= \frac{H(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2)}{E_{\theta}'} + \frac{(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2)(J - H \tan \delta_{\theta})}{(E_{\theta}' + \tan \delta_{\theta} E_{\theta}'')} \tan \delta_{\theta} = \\
 &= \frac{H(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2)}{E_{\theta}'} + \frac{(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2) \left(J - H \frac{T}{Z} \right)}{\left(E_{\theta}' + \frac{T}{Z} E_{\theta}'' \right)} \frac{E_{\theta}''}{E_{\theta}'} = \\
 &= \frac{H}{Z} + \frac{\left(J - H \frac{T}{Z} \right)}{Z \left(E_{\theta}' + \frac{T}{Z} E_{\theta}'' \right)} E_{\theta}'' = \frac{H}{Z} + \frac{\left(J - H \frac{T}{Z} \right)}{Z E_{\theta}'' \left(\frac{E_{\theta}'}{E_{\theta}''} + \frac{T}{Z} \right)} E_{\theta}'' \stackrel{(7.7.1.10)}{=} \frac{H}{Z} + \frac{\left(J - H \frac{T}{Z} \right)}{Z \left(\frac{Z}{T} + \frac{T}{Z} \right)} = \\
 &= \frac{H}{Z} + \frac{T}{Z} \frac{\left(\frac{J}{T} - \frac{H}{Z} \right)}{\left(\frac{Z}{T} + \frac{T}{Z} \right)} = \frac{H}{Z} + \frac{T}{Z} \frac{\left(\frac{JZ}{TZ} - \frac{HT}{TZ} \right)}{\left(\frac{Z^2}{TZ} + \frac{T^2}{TZ} \right)} = \frac{H}{Z} + \frac{T}{Z} \frac{(JZ - HT)}{(Z^2 + T^2)}
 \end{aligned}$$

(7.7.5.7)

Και τελικά από (7.7.5.7), (7.7.1.8) και (7.7.1.9) έχουμε:

$$v_{\theta}' = \frac{H}{Z} + \frac{T}{Z} (J E_{\theta}' - H E_{\theta}'') = \frac{H}{Z} + \frac{T}{Z} v_{\theta}'' = \frac{1}{Z} (H + T v_{\theta}'') \quad (7.7.5.8)$$

7.7.6 ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΛΟΧΕΣ

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 7.2.2 Θεωρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
 E_f' &\approx E_f, \text{ αφού } E_f'' \approx 0 \\
 v_m^* &\approx v_m, \text{ αφού } v_m'' \approx 0 \\
 v_f^* &\approx v_f, \text{ αφού } v_f'' \approx 0
 \end{aligned}$$

Αφού έχει προκύψει από τις σχέσεις (7.3.2.2) και (7.4.3.2) ότι $v_{LT}'' = 0$, καθώς $v_{TT}'' = 0$

και από τις εξισώσεις (7.7.5.3) και (7.7.5.4) έχουμε:

Πραγματικό μέρος

$$\frac{v_{\theta}' E_{\theta}' - v_{\theta}'' E_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = - \left(\frac{\frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2}}{\dots - \frac{G_{LT}'}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{v_{LT}' E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = H_0 \quad (7.7.6.1)$$

Φανταστικό μέρος

$$\frac{v_{\theta}'' E_{\theta}' + v_{\theta}' E_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = - \left(\frac{\frac{E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2}}{\dots - \frac{G_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{v_{LT}'' E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = J_0 \quad (7.7.6.2)$$

Από τις σχέσεις (7.7.6.1) και (7.7.6.2) και θεωρώντας ότι τα H_0, J_0 έχουν υπολογιστεί με βάση τις παραδοχές που αναφέραμε έχουμε:

$$v_{\theta}'' = \frac{(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2)(J_0 - H_0 \tan \delta_{\theta})}{(E_{\theta}' + \tan \delta_{\theta} E_{\theta}'')} = J_0 E_{\theta}' - H_0 E_{\theta}'' \quad (7.7.6.3)$$

$$v_{\theta}' = \frac{H_0}{Z_0} + \frac{T_0}{Z_0} (J_0 E_{\theta}' - H_0 E_{\theta}'') = \frac{H_0}{Z_0} + \frac{T_0}{Z_0} v_{\theta}'' = \frac{1}{Z_0} (H_0 + T_0 v_{\theta}'') \quad (7.7.6.4)$$

Οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.7.6.1) έως (7.7.6.4) προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα v_{θ}' και v_{θ}'' που αναφέρονται στην παράγραφο 7.8.

7.8 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Η εφαρμογή του μοντέλου και των θεωρητικών σχέσεων έγινε για ένα ινώδες σύνθετο υλικό αποτελούμενο από εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με ίνες γυαλιού. Συγκεκριμένα το υλικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα είναι ένα σύνθετο υλικό (Permaglass XE5/1, Permali Ltd U.K.), το οποίο αποτελείται από μήτρα εποξειδικής ρητίνης (diglycidyl ether of bisphenol A), με σκληρυντή αμίνης (Araldite MY 750/HT 972, CibaGeigy U.K.) και με συνεχείς ίνες υάλου (glass fibres) διαμέτρου $d = 1,2 \times 10^{-5}m$ με χαρακτηριστικά στοιχεία όπως δίνονται από τον προμηθευτή. Από μετρήσεις που έγιναν, η περιεκτικότητα σε ίνες υάλου βρέθηκε περίπου 80% κατά βάρος και 65% κατ' όγκο και 60% κατά βάρος και 40% κατ' όγκο. Ο προσδιορισμός της περιεκτικότητας των ινών έγινε με την μέθοδο της καύσεως (burn off test) σύμφωνα με την προδιαγραφή BS 2782. Ένα ορθογώνιο τεμάχιο κόπτεται από κάθε δοκίμιο και αφού ζυγισθεί τοποθετείται σε κλίβανο σε θερμοκρασία $620 \pm 20^\circ C$ για να καεί η ρητίνη. Από το βάρος του υπολείμματος το οποίο θεωρείται ότι είναι ίνες υάλου υπολογίζεται η κατά βάρος περιεκτικότητα. Ο προσδιορισμός της κατ' όγκο περιεκτικότητας γίνεται από την σχέση:

$$U_f = \frac{1}{1 + \frac{M_m \rho_f}{M_f \rho_m}} \quad (7.8.1)$$

Όπου

M_f = η περιεκτικότητα κατά βάρος των ινών

M_m = η περιεκτικότητα κατά βάρος της ρητίνης

ρ_f = η πυκνότητα των ινών

ρ_m = η πυκνότητα της ρητίνης

Οι μετρήσεις έδωσαν κατά βάρος περιεκτικότητα του υλικού σε ίνες υάλου $(79,6 \pm 0,28)\%$, $(59,6 \pm 0,28)\%$, με δεδομένο τις πυκνότητες $\rho_f = 2,55 gr/cm^3$ και $\rho_m = 1,20 gr/cm^3$ οι οποίες δίνονταν από τους προμηθευτές του υλικού.

Οι τιμές των στατικών ελαστικών σταθερών των συστατικών του σύνθετου υλικού είναι αυτές που παρατίθενται στον παρακάτω **πίνακα ε** όπως δόθηκε και για τους υπολογισμούς στο κεφάλαιο 4.

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E(GPa)	Λόγος Poisson ν	Μέτρο διατμήσεως G (GPa)
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Υαλος	70	0.20	30

Πίνακας ε

Για να επαληθευθούν οι θεωρητικές τιμές του μοντέλου, δοκίμια από το ίδιο υλικό δοκιμάστηκαν και προσδιορίστηκαν οι δυναμικές ελαστικές σταθερές τους, σε ένα εύρος θερμοκρασιών. Η συσκευή μέτρησης δυναμικών ελαστικών σταθερών (viscoelastometer) εφαρμόζε ημιτονοειδή εφελκυστική παραμόρφωση σε συνεχή συχνότητα στο ένα άκρο του δοκιμίου και η απόκριση της τάσεως μετριοταν στο άλλο άκρο. Οι τιμές των E' και E'' λαμβάνονταν απευθείας με την χρήση δύο μετατροπέων. Δυναμικές μετρήσεις έγιναν σε συχνότητες $f=100\text{Hz}$, $f=110\text{Hz}$ και $f=800\text{Hz}$ με το εύρος των παραμορφώσεων να είναι από 0,4% έως 0,6%. Κατά την διάρκεια των πειραμάτων τα δοκίμια θερμάνθηκαν με ρυθμό $1^\circ\text{C}/\text{min}$. Οι διαστάσεις των δοκιμίων ήταν $100 \times 12 \times 3,5\text{mm}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω στα παρακάτω διαγράμματα και πίνακες αναγράφονται για λόγους σύγκρισης τα πειραματικά δεδομένα που προέκυψαν από την παραπάνω πειραματική διαδικασία [54].

7.8.1 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΓΙΑ (Uf=0.4,f=100Hz)

Uf=0.40 , f=100Hz		
T(°C)	E'_m (GPa)	E''_m (GPa)
30	3.395	0.297
40	3.148	0.306
50	2.901	0.309
60	2.716	0.312
70	2.469	0.314
80	2.284	0.316
90	2.037	0.322
100	1.534	0.327

Πίνακας ιθ

Uf=0.40 , f=100Hz			
T(°C)	E'_L (GPa)	Πείραμα I	Πείραμα II
30	30.4940	29.8765	30.392
40	30.3475	29.7778	30.196
50	30.2010	29.6914	30.000
60	30.0913	29.6296	30.000
70	29.9448	29.5062	29.902
80	29.8350	29.4444	29.804
90	29.6885	29.3827	29.706
100	29.3902	28.9506	29.118

Πίνακας κ

Uf=0.40 , f=100Hz		
T(°C)	E''_L (GPa)	Πείραμα
30	0.1762	0.1867
40	0.1815	0.1887
50	0.1833	0.1918
60	0.1851	0.1943
70	0.1862	0.1953
80	0.1874	0.1964
90	0.1910	0.2001
100	0.1940	0.2037

Πίνακας κα

Uf=0.40 , f=100Hz		
T(°C)	ν'_{LT} 7 phase	ν'_{LT} W-R
30	0.281	0.281309
40	0.281	0.281241
50	0.281	0.281172
60	0.281	0.281121
70	0.281	0.281052
80	0.281	0.281000
90	0.281	0.280932
100	0.281	0.280790

Πίνακας κβ

Uf=0.40 , f=100Hz	
T(°C)	ν'_{TT}
30	0.288971
40	0.288971
50	0.288971
60	0.288971
70	0.288971
80	0.288971
90	0.288971
100	0.288971

Πίνακας κγ

Uf=0.40 , f=100Hz	
T(°C)	E'_T (GPa)
30	9.0454
40	8.4638
50	7.8720
60	7.4220
70	6.8117
80	6.3475
90	5.7178
100	4.3980

Πίνακας κδ

Uf=0.40,f=100Hz	
T(°C)	E''_T (GPa)
30	0.6945
40	0.7276
50	0.7475
60	0.7647
70	0.7834
80	0.7991
90	0.8295
100	0.8757

Πίνακας κε

Uf=0.40 , f=100Hz	
T(°C)	G'_{LT} (GPa)
30	2.9541
40	2.7518
50	2.5477
60	2.3937
70	2.1864
80	2.0300
90	1.8194
100	1.3846

Πίνακας κστ

Uf=0.40,f=100Hz	
T(°C)	G''_{LT} (GPa)
30	0.2415
40	0.2510
50	0.2557
60	0.2599
70	0.2640
80	0.2675
90	0.2751
100	0.2848

Πίνακας κζ

Seven Phase Model E'_θ (GPa) – Experiment E'_θ (GPa), Uf=0.40,f=100Hz														
T(°C)	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp
30	30.4940	30.15	20.4169	24.55	11.7232	15.8	8.6328	12.7	8.0478	10.75	8.5914	10.25	9.0454	10
40	30.3475	29.87	19.7320	24.2	11.0504	15.55	8.0665	12.47	7.5079	10.57	8.0282	10	8.4638	9.75
50	30.2010	29.75	18.9945	23.95	10.3563	15.42	7.4917	12.22	6.9617	10,25	7.4566	9.75	7.8720	9.5
60	30.0913	29.63	18.4044	23.73	9.8224	15.17	7.0558	11.85	6.5485	10	7.0230	9.38	7.4220	9.14
70	29.9448	29.5	17.5572	23.45	9.0886	14.93	6.4660	11.6	5.9909	9.75	6.4362	9.14	6.8117	8.88
80	29.8350	29.38	16.8736	23.2	8.5233	14.68	6.0186	11.35	5.5690	9.38	5.9910	8.88	6.3475	8.65
90	29.6885	29.25	15.8852	22.84	7.7458	14.3	5.4129	11.01	4.9996	9.14	5.3884	8.52	5.7178	8.27
100	29.3902	28.88	13.5321	22.35	6.0742	13.44	4.1497	10.52	3.8181	8.75	4.1311	8.15	4.3980	7.9

Πίνακας κη

Seven Phase Model E_0'' (GPa), $U_f=0.40, f=100\text{Hz}$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
T(°C)	E_0''	E_0''	E_0''	E_0''	E_0''	E_0''	E_0''
30	0.1762	0.7992	0.7964	0.6750	0.6448	0.6727	0.6945
40	0.1815	0.8834	0.8455	0.7055	0.6720	0.7031	0.7276
50	0.1833	0.9618	0.8806	0.7229	0.6865	0.7205	0.7475
60	0.1851	1.0310	0.9106	0.7380	0.6993	0.7356	0.7647
70	0.1862	1.1299	0.9471	0.7542	0.7123	0.7517	0.7834
80	0.1874	1.2167	0.9774	0.7677	0.7234	0.7652	0.7991
90	0.1910	1.3652	1.0311	0.7946	0.7462	0.7921	0.8295
100	0.1940	1.7291	1.1278	0.8338	0.7775	0.8312	0.8757

Πίνακας κθ

Seven Phase Model G_0' (GPa), $U_f=0.40, f=100\text{Hz}$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
T(°C)	G_0'	G_0'	G_0'	G_0'	G_0'	G_0'	G_0'
30	2.9541	3.3984	4.8593	6.1881	4.8593	3.3984	2.9541
40	2.7518	3.1760	4.5904	5.9035	4.5904	3.1760	2.7518
50	2.5477	2.9502	4.3118	5.6034	4.3118	2.9502	2.5477
60	2.3937	2.7789	4.0967	5.3679	4.0967	2.7789	2.3937
70	2.1864	2.5471	3.8001	5.0374	3.8001	2.5471	2.1864
80	2.0300	2.3712	3.5706	4.7770	3.5706	2.3712	2.0300
90	1.8194	2.1330	3.2537	4.4105	3.2537	2.1330	1.8194
100	1.3846	1.6359	2.5669	3.5850	2.5669	1.6359	1.3846

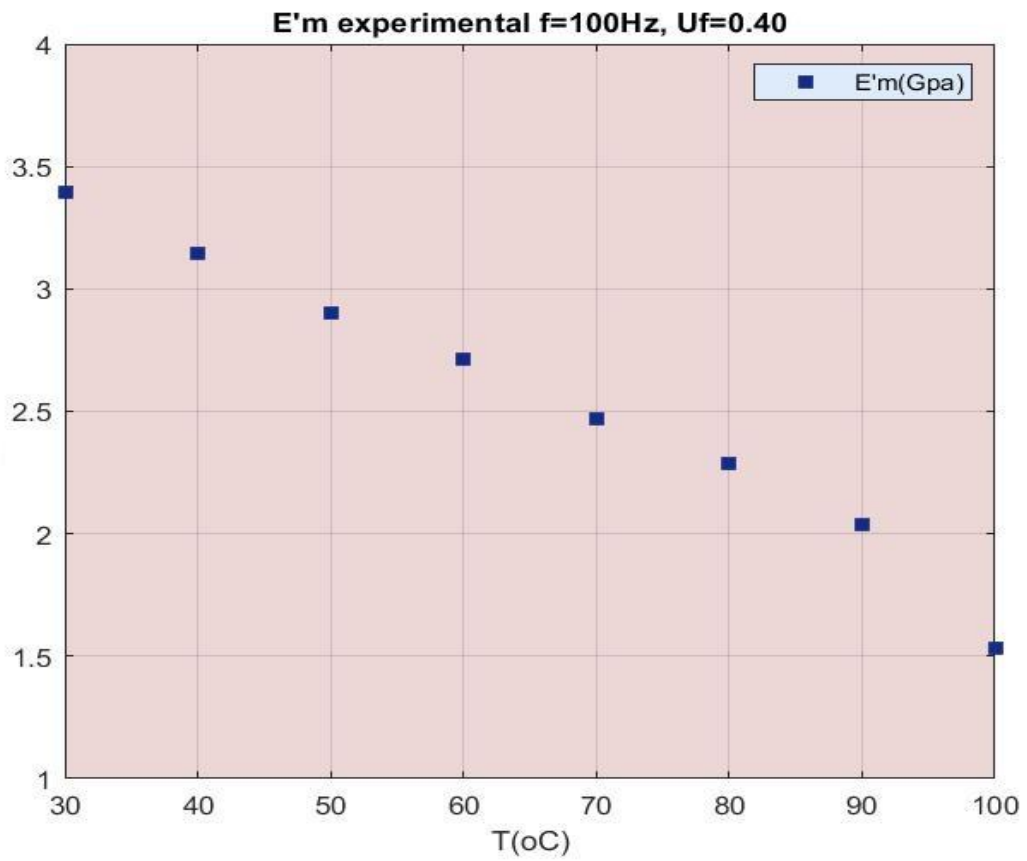
Πίνακας λ

Seven Phase Model G_0'' (GPa), $U_f=0.40, f=100\text{Hz}$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
T(°C)	G_0''	G_0''	G_0''	G_0''	G_0''	G_0''	G_0''
30	0.2415	0.2649	0.3183	0.3354	0.3183	0.2649	0.2415
40	0.2510	0.2770	0.3392	0.3635	0.3392	0.2770	0.2510
50	0.2557	0.2839	0.3547	0.3871	0.3547	0.2839	0.2557
60	0.2599	0.2899	0.3680	0.4073	0.3680	0.2899	0.2599
70	0.2640	0.2964	0.3844	0.4343	0.3844	0.2964	0.2640
80	0.2675	0.3018	0.3981	0.4572	0.3981	0.3018	0.2675
90	0.2751	0.3124	0.4220	0.4962	0.4220	0.3124	0.2751
100	0.2848	0.3281	0.4666	0.5789	0.4666	0.3281	0.2848

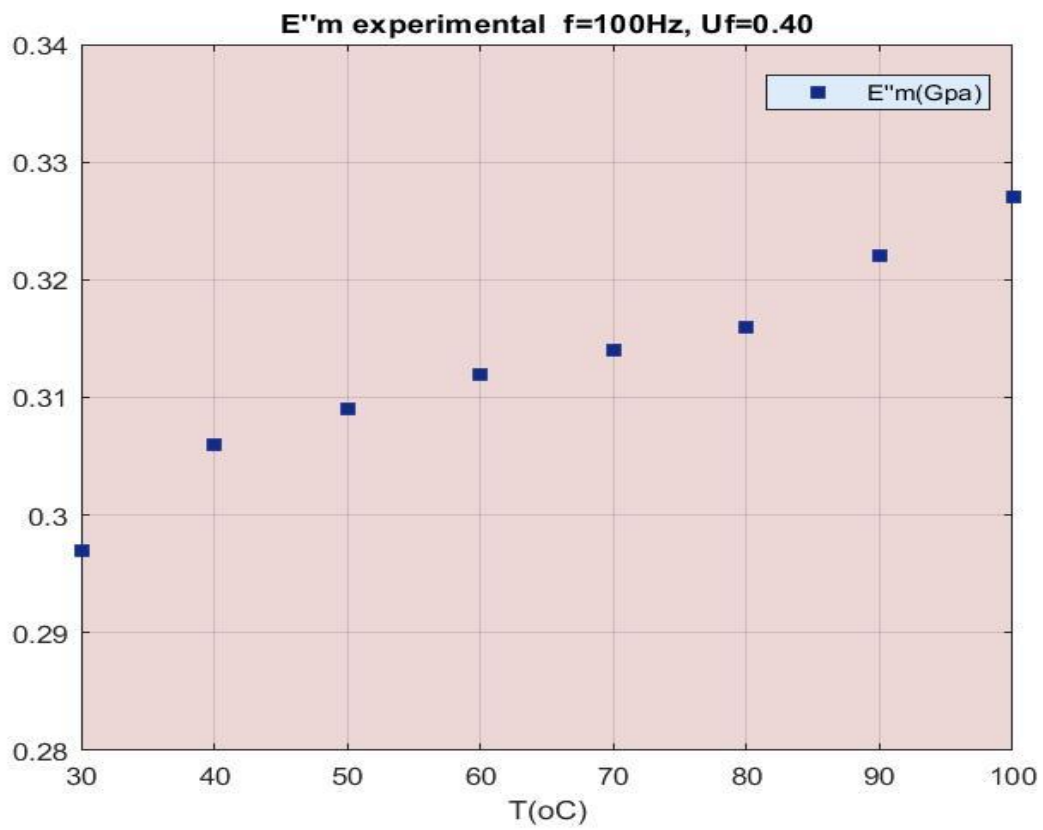
Πίνακας λα

Seven Phase Model ν'_θ (GPa), $Uf=0.40, f=100\text{Hz}$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
T(°C)	ν'_θ	ν'_θ	ν'_θ	ν'_θ	ν'_θ	ν'_θ	ν'_θ
30	0.2810	0.4126	0.4958	0.4607	0.3407	0.1740	0.0834
40	0.2810	0.4203	0.5030	0.4652	0.3422	0.1715	0.0784
50	0.2810	0.4289	0.5105	0.4697	0.3436	0.1689	0.0733
60	0.2810	0.4358	0.5163	0.4732	0.3448	0.1670	0.0693
70	0.2810	0.4459	0.5244	0.4780	0.3463	0.1643	0.0640
80	0.2810	0.4542	0.5307	0.4816	0.3474	0.1622	0.0598
90	0.2810	0.4664	0.5394	0.4866	0.3490	0.1594	0.0542
100	0.2810	0.4963	0.5586	0.4971	0.3524	0.1534	0.0421

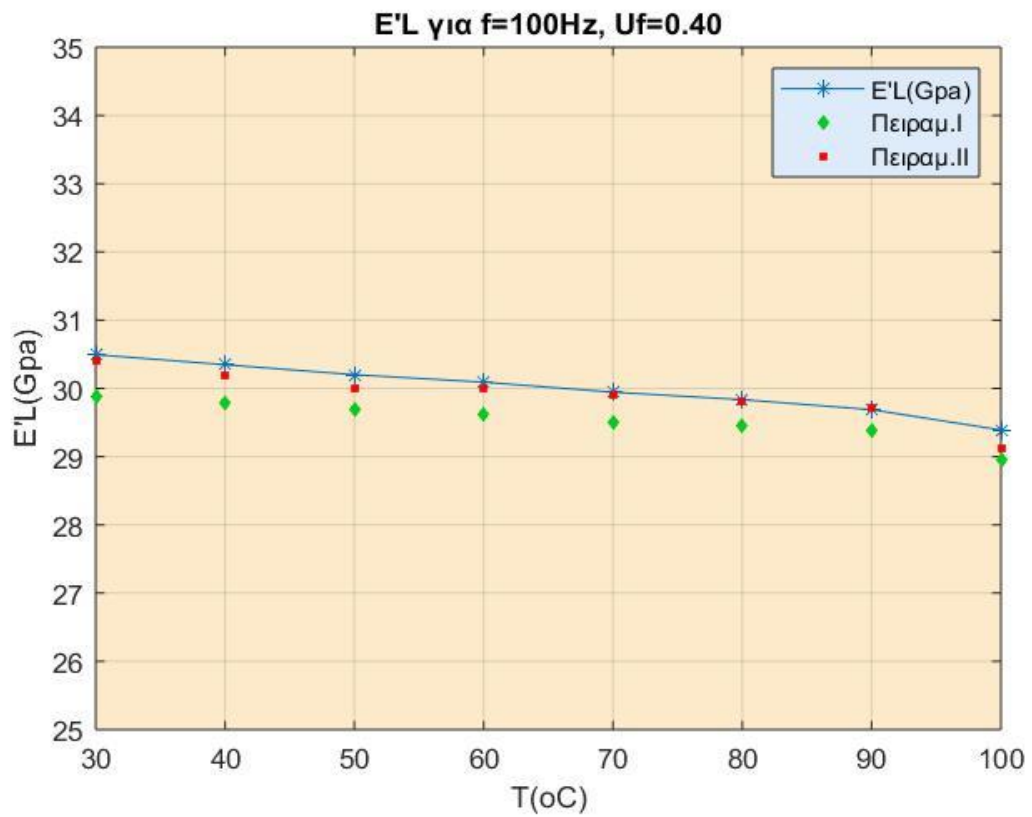
Πίνακας λβ



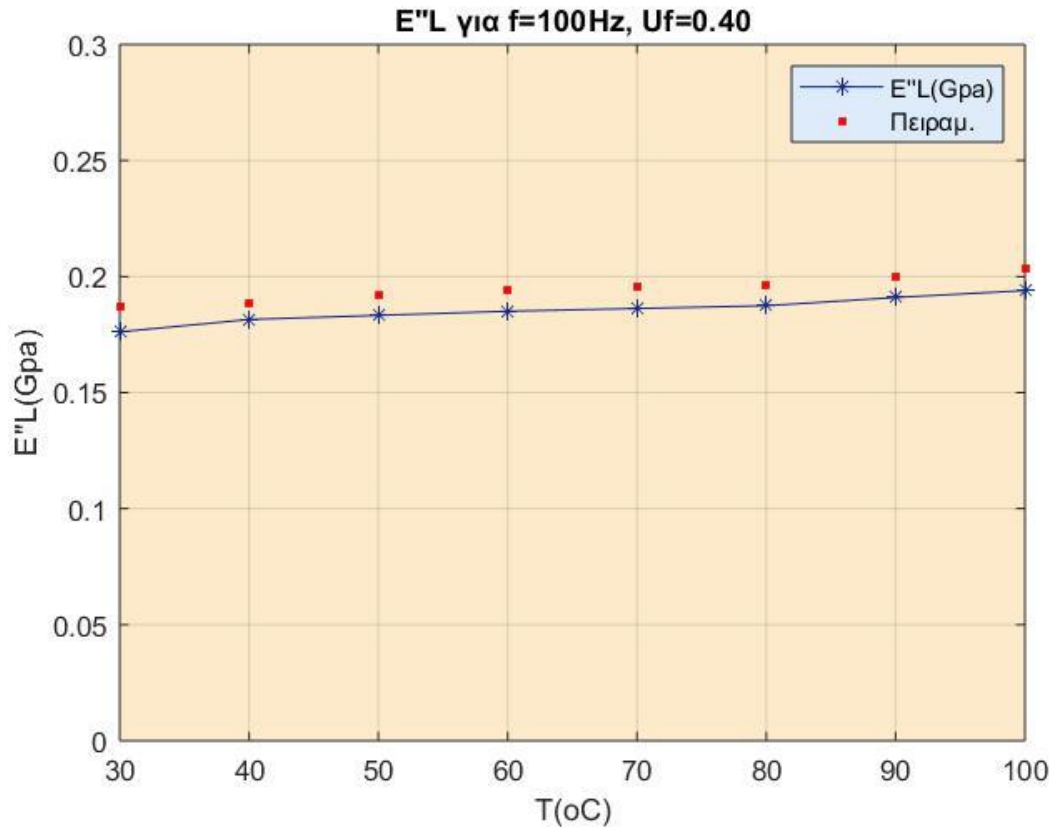
Εικόνα 7.8.1.1 Διάγραμμα πειραματικών τιμών E'_m



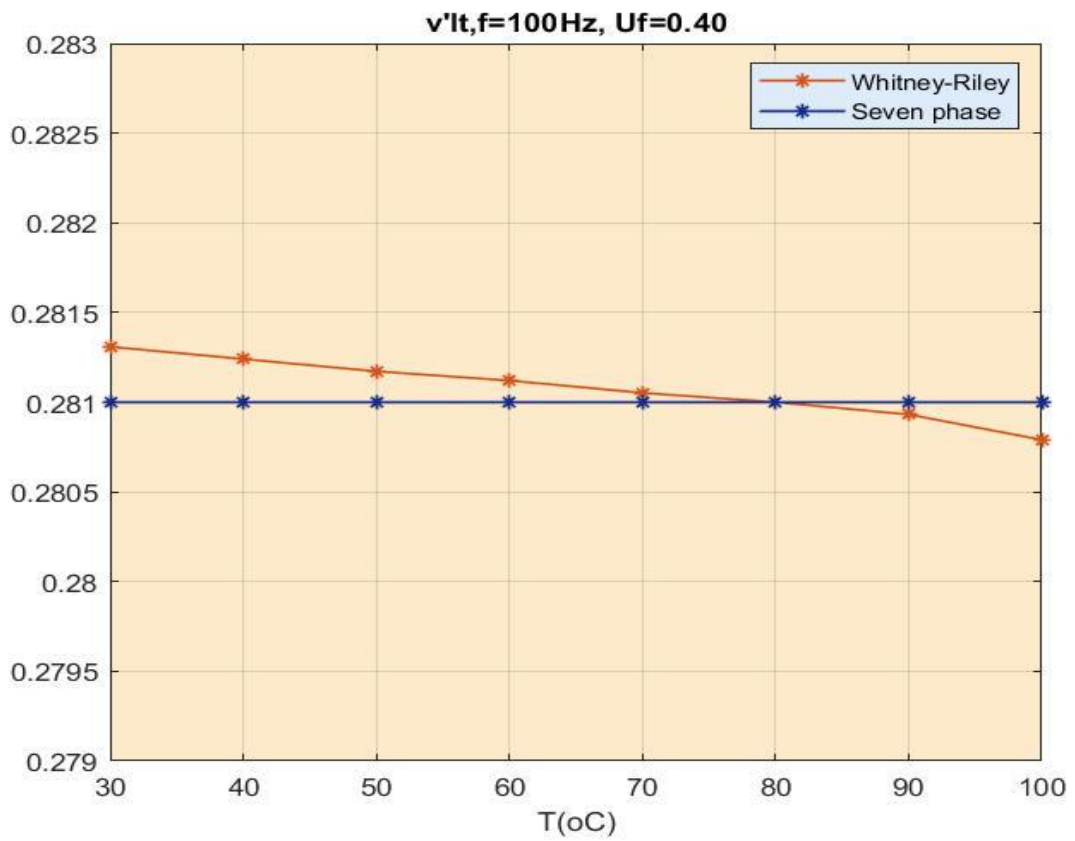
Εικόνα 7.8.1.2 Διάγραμμα πειραματικών τιμών E''_m



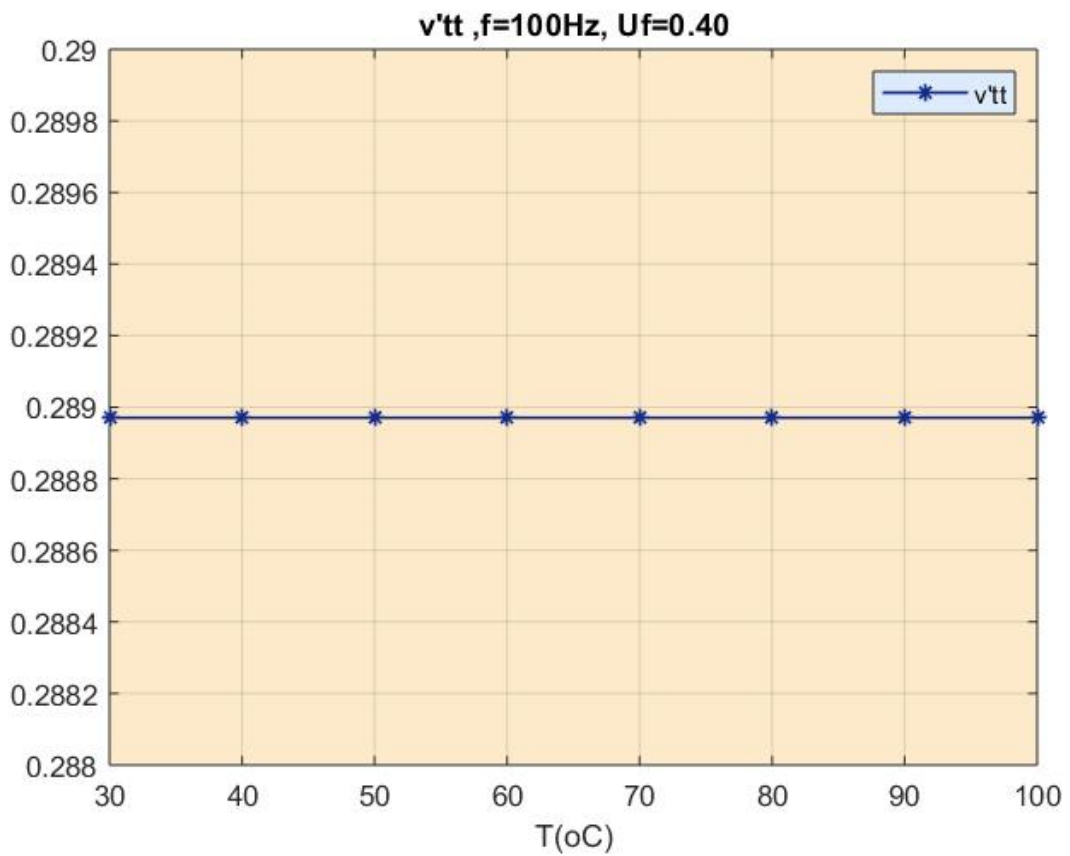
Εικόνα 7.8.1.3 Διάγραμμα E'_L



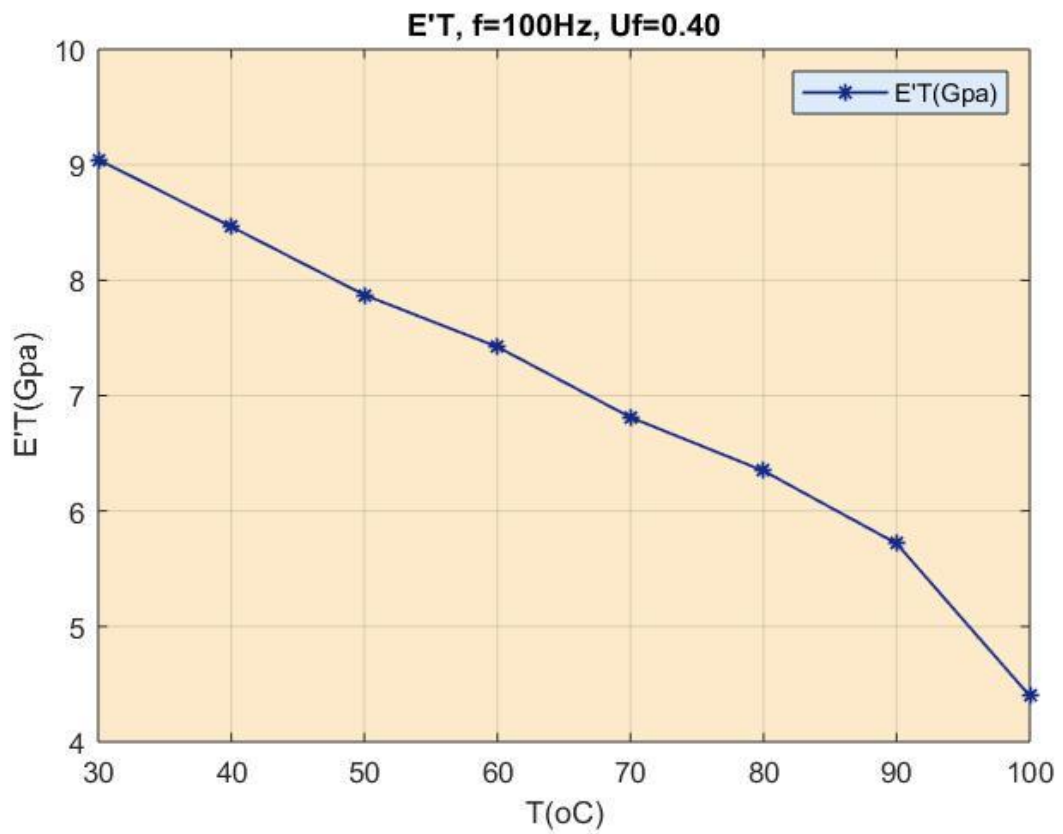
Εικόνα 7.8.1.4 Διάγραμμα E''_L



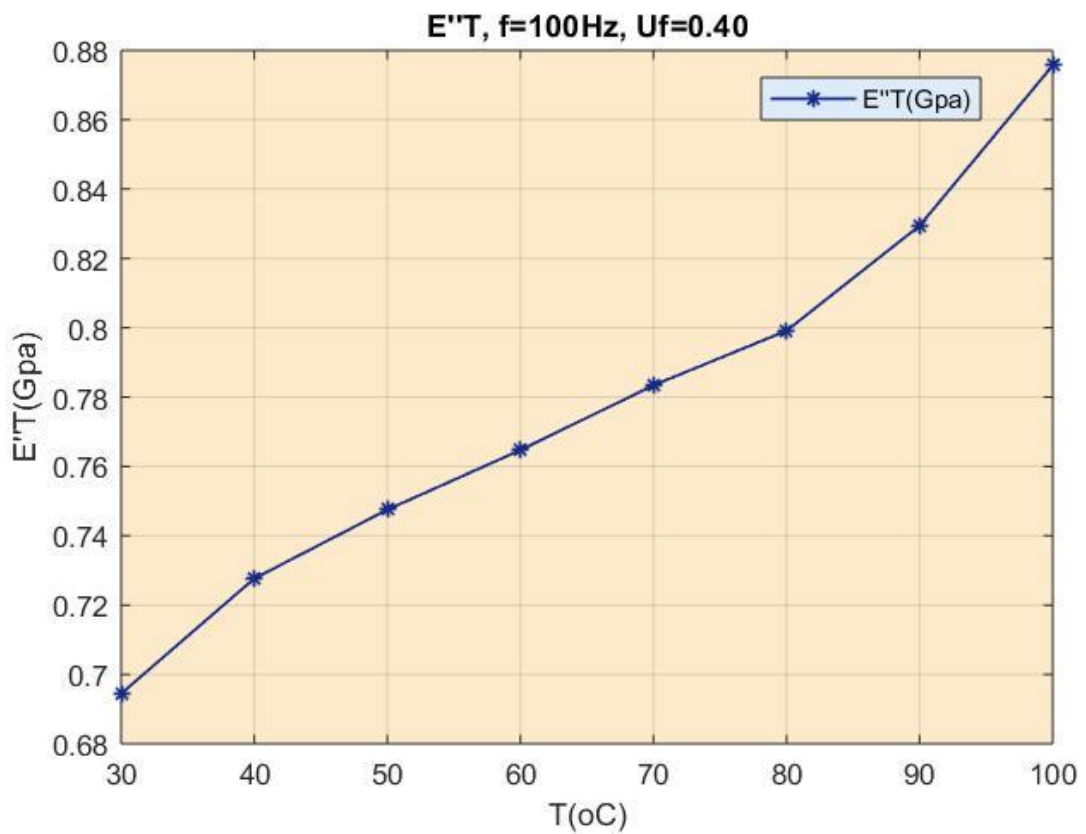
Εικόνα 7.8.1.5 Διάγραμμα ν'_{LT}



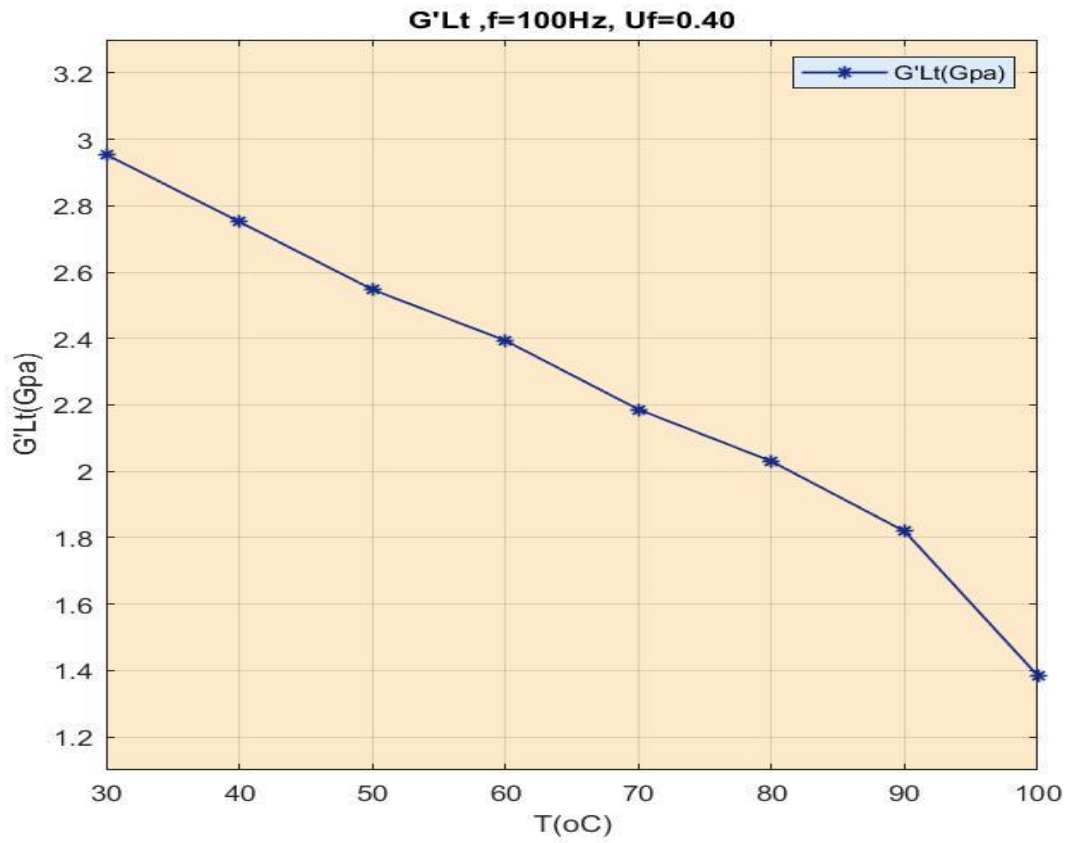
Εικόνα 7.8.1.6 Διάγραμμα ν'_{TT}



Εικόνα 7.8.1.7 Διάγραμμα E_T'



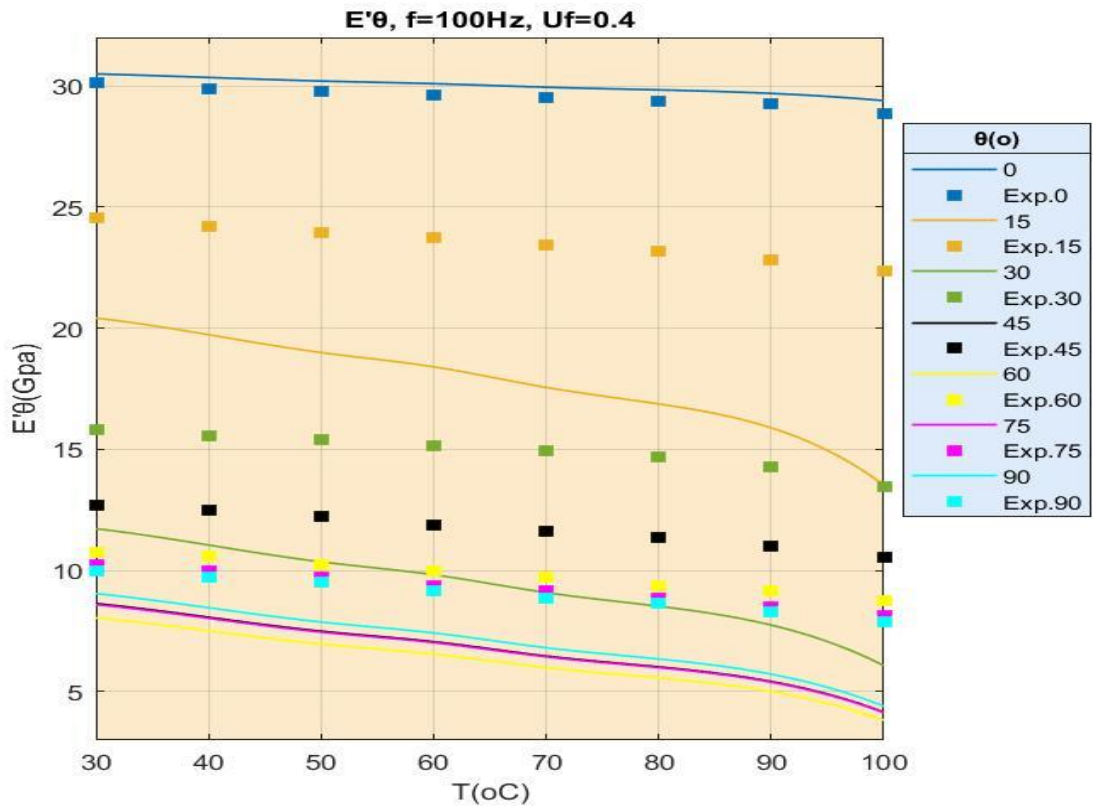
Εικόνα 7.8.1.8 Διάγραμμα E_T''



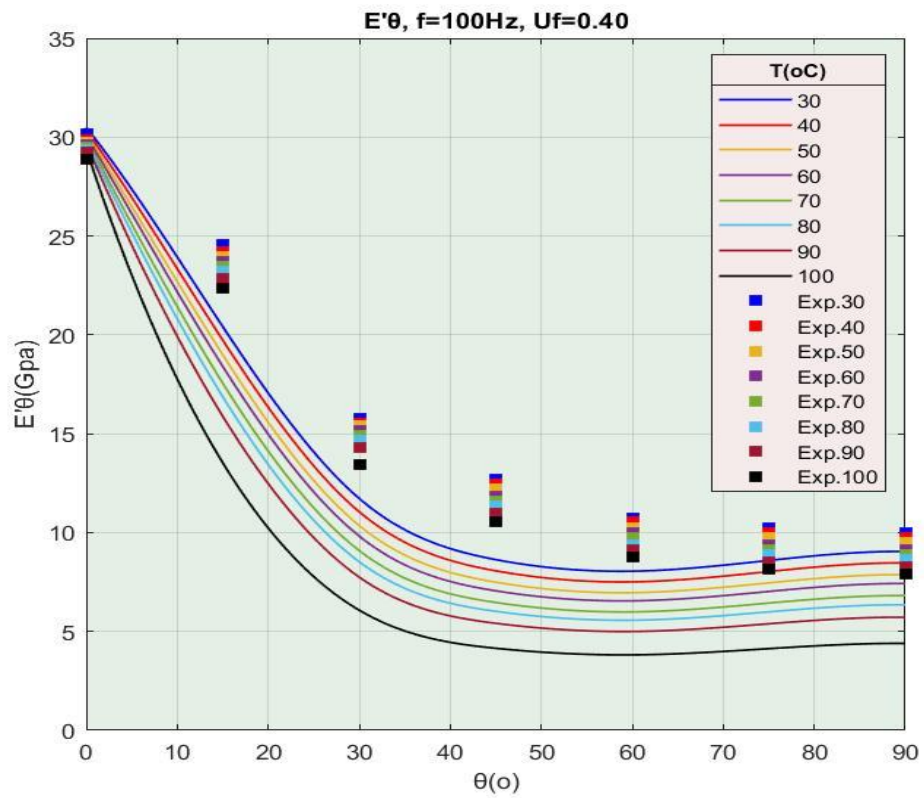
Εικόνα 7.8.1.9 Διάγραμμα G'_{LT}



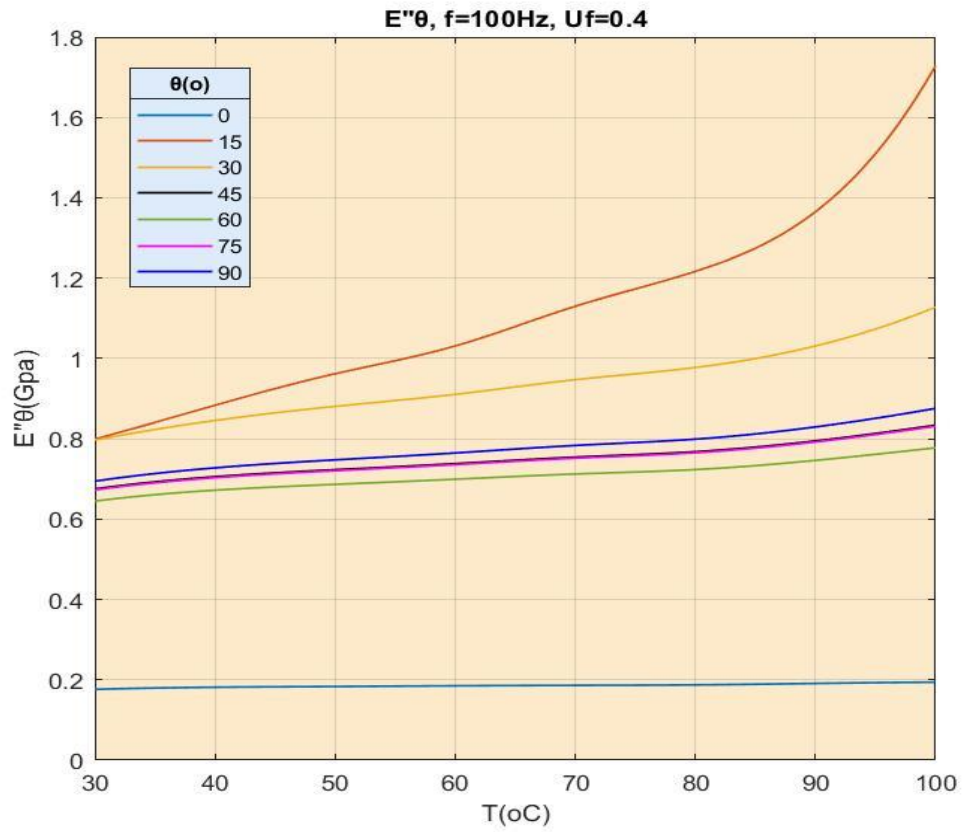
Εικόνα 7.8.1.10 Διάγραμμα G''_{LT}



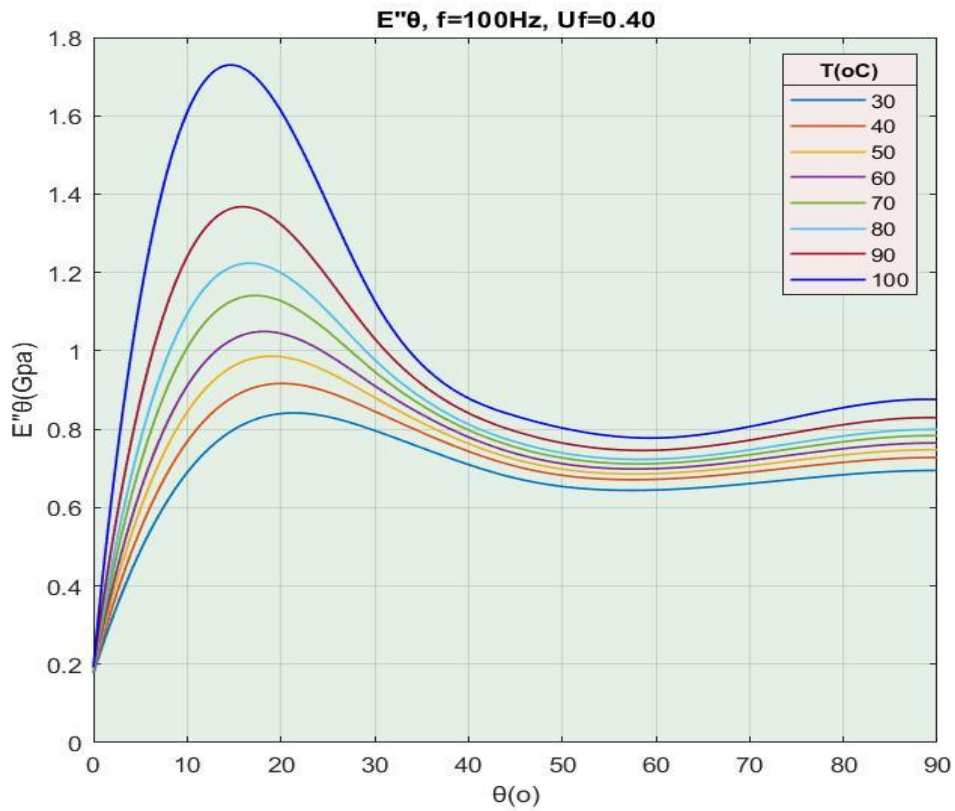
Εικόνα 7.8.1.11α Διάγραμμα E'_θ



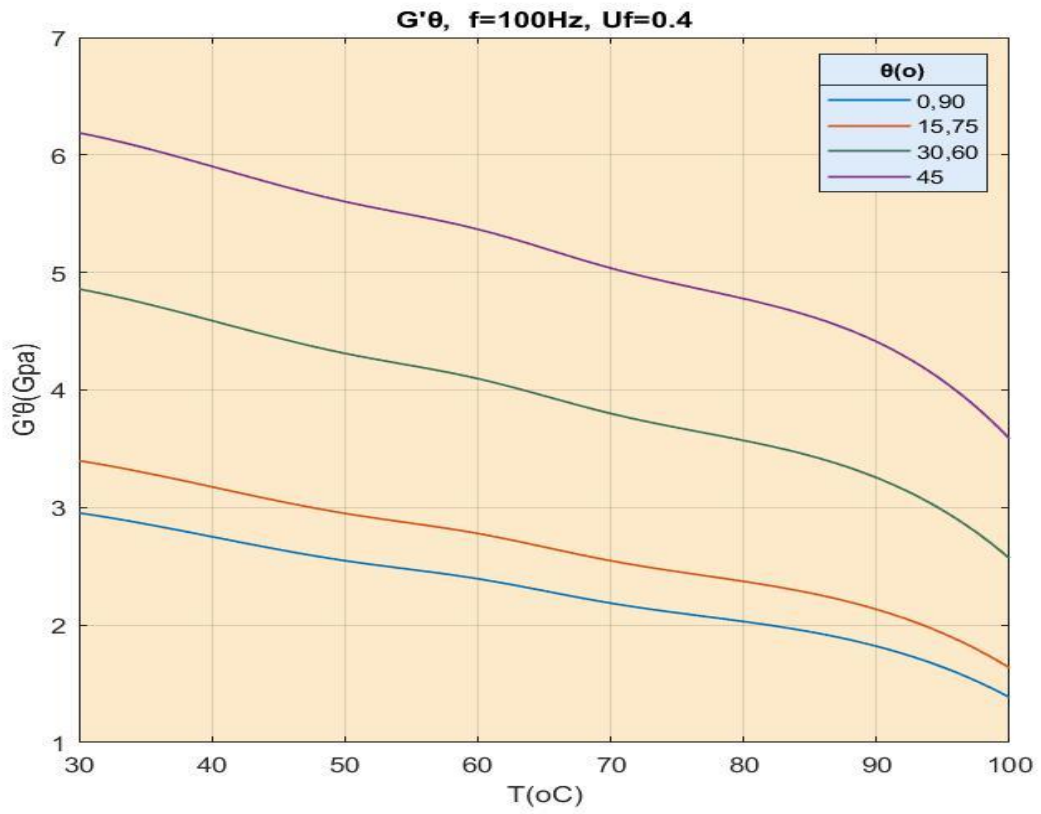
Εικόνα 7.8.1.11β Διάγραμμα E'_θ σε σχέση με την γωνία φόρτισης



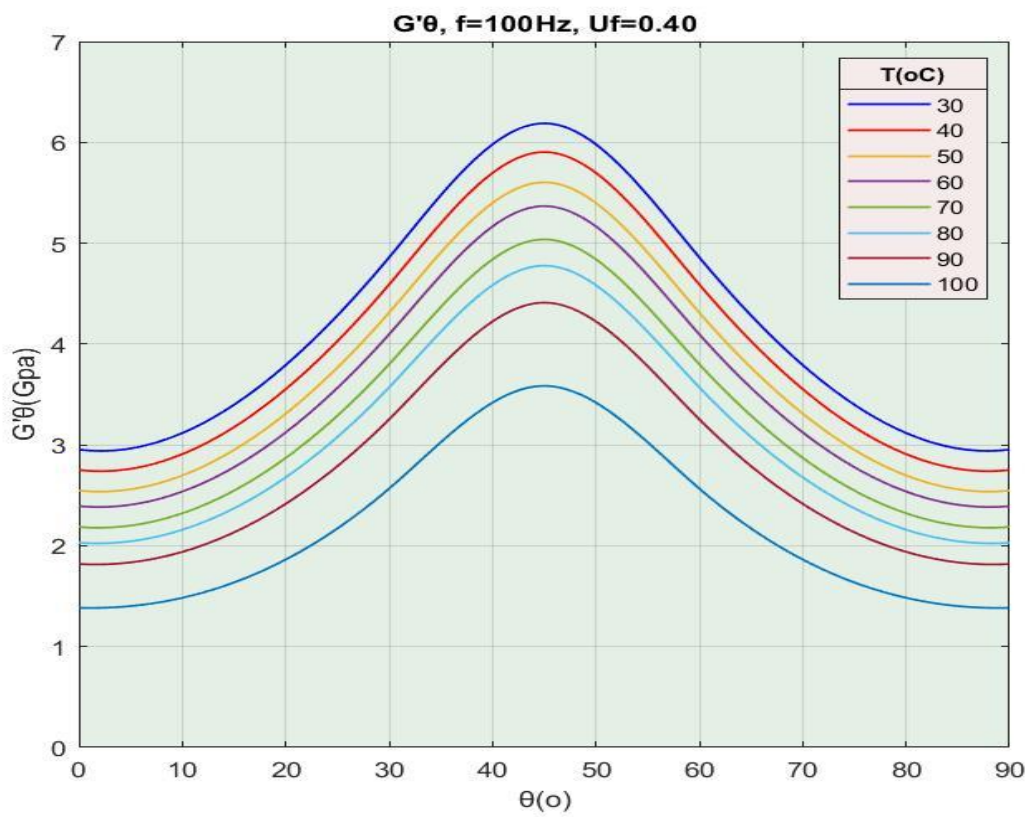
Εικόνα 7.8.1.12α Διάγραμμα E''_{θ}



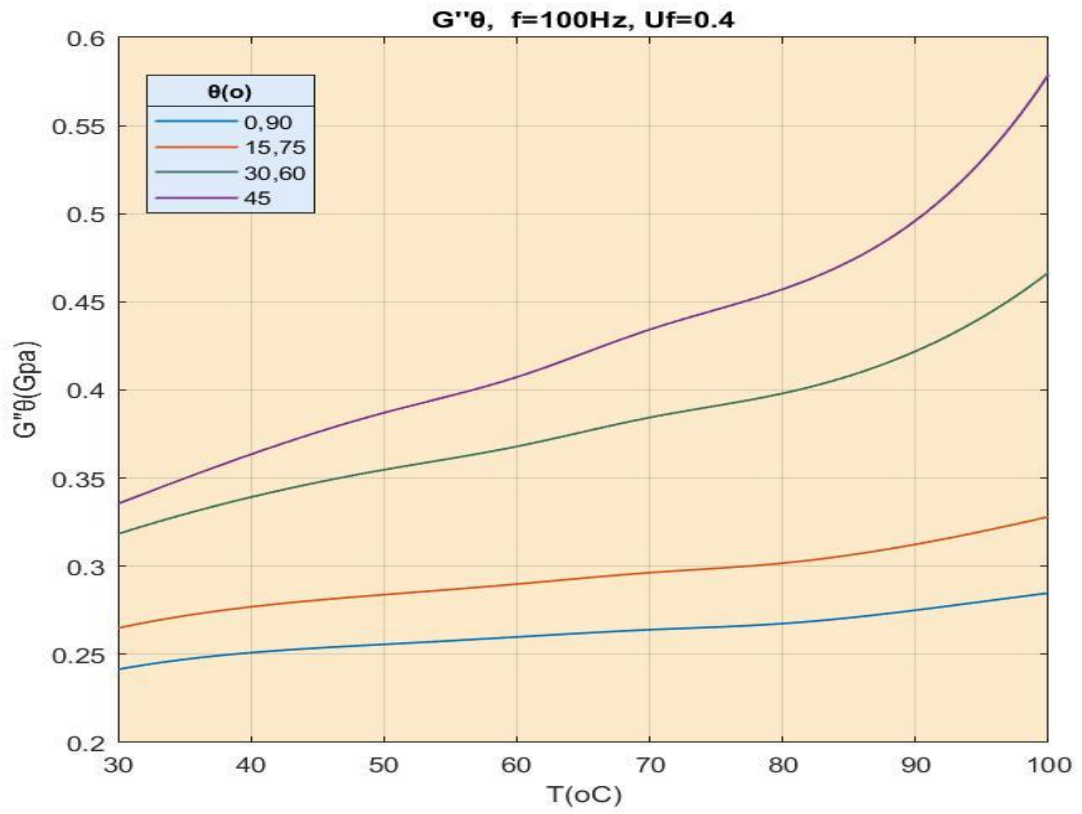
Εικόνα 7.8.1.12β Διάγραμμα E''_{θ}



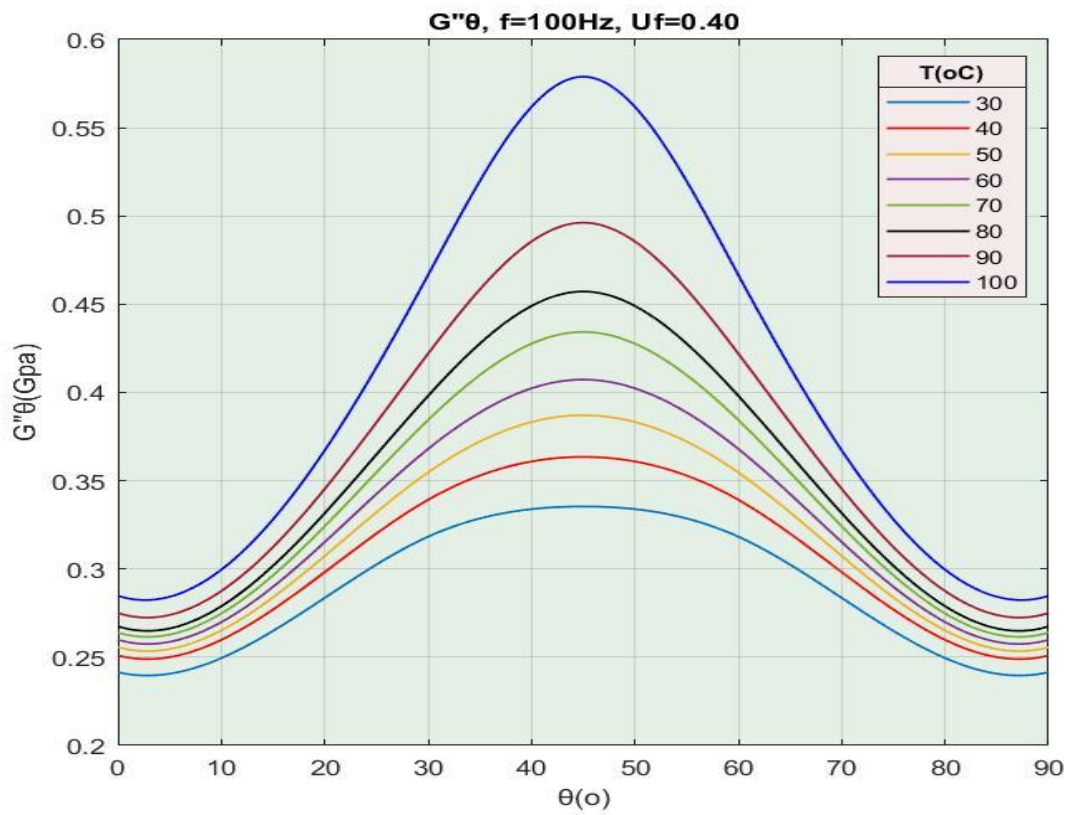
Εικόνα 7.8.1.13α Διάγραμμα G'_θ



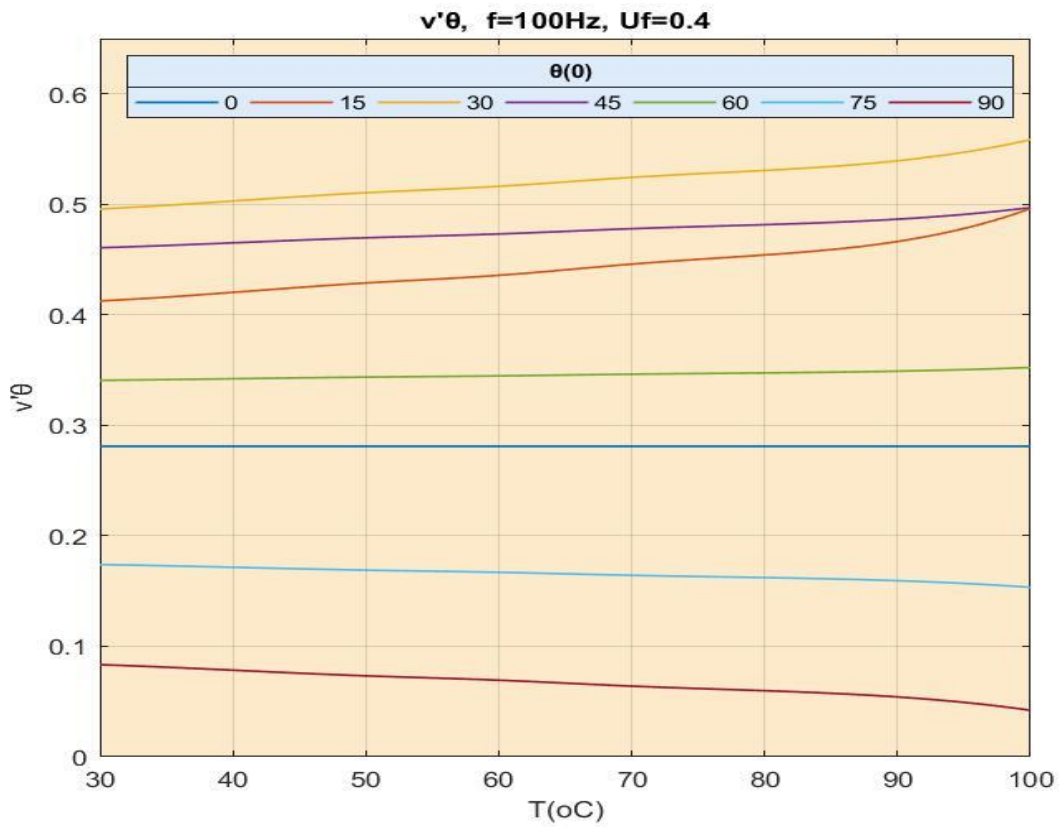
Εικόνα 7.8.1.13β Διάγραμμα G'_θ



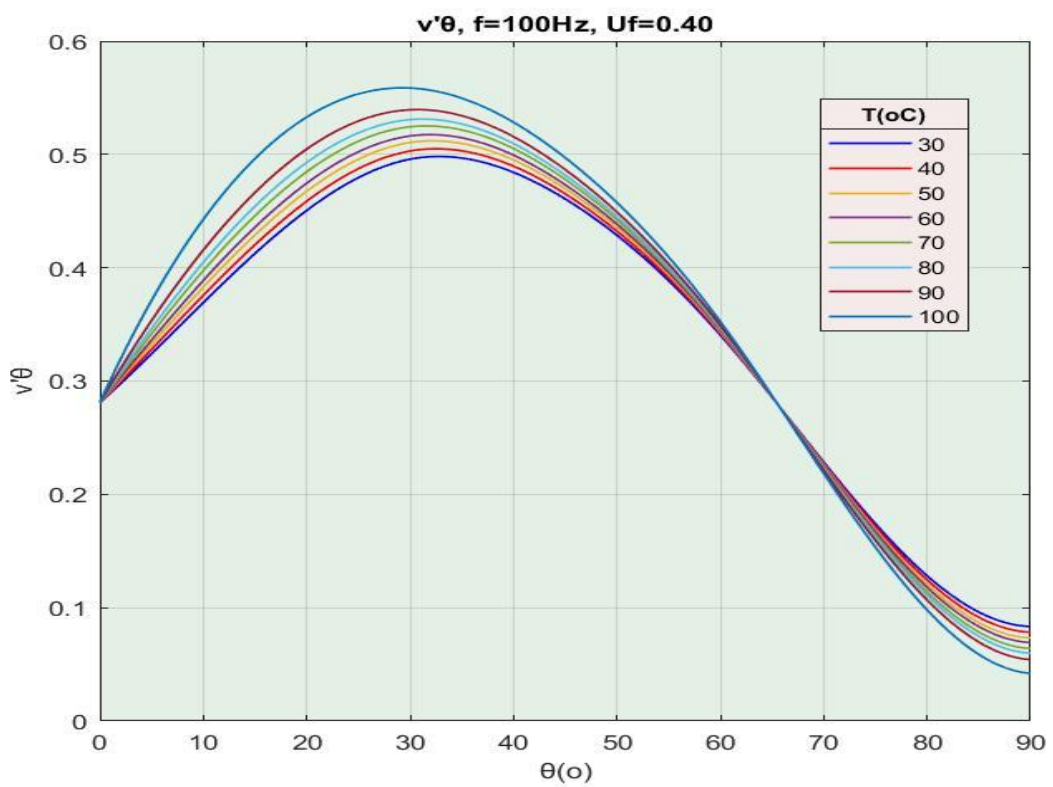
Εικόνα 7.8.1.14α Διάγραμμα G''_{θ}



Εικόνα 7.8.1.14β Διάγραμμα G''_{θ}



Εικόνα 7.8.1.15α Διάγραμμα v'_θ



Εικόνα 7.8.1.15β Διάγραμμα v'_θ

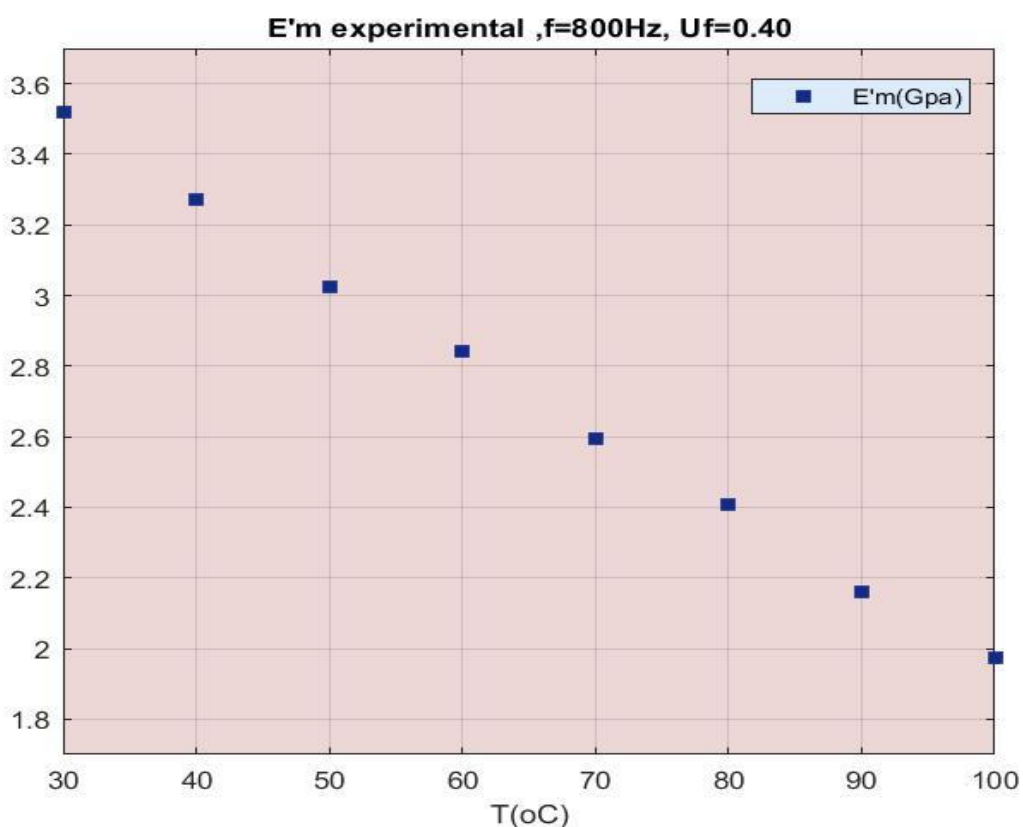
7.8.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΓΙΑ (Uf=0.4,f=800Hz)

Uf=0.40 , f=800Hz	
T(°C)	E'_m (GPa)
30	3.519
40	3.271
50	3.025
60	2.84
70	2.593
80	2.407
90	2.161
100	1.975

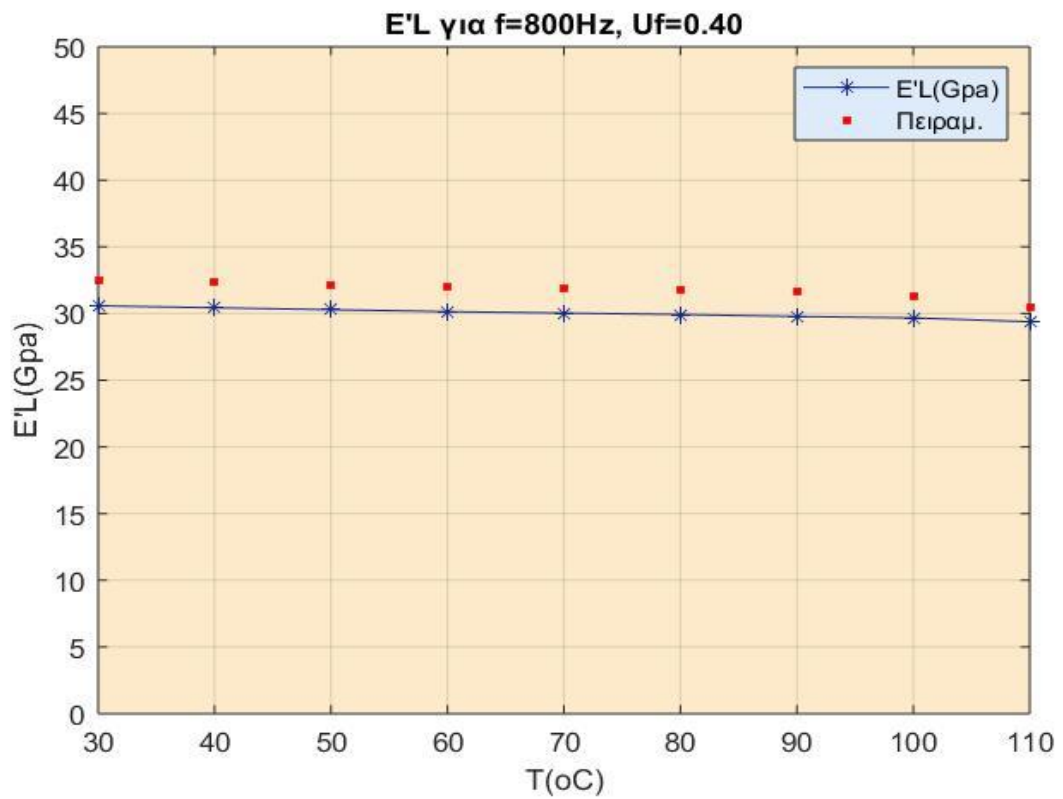
Πίνακας λγ

Uf=0.40 , f=800Hz		
T(°C)	E'_L (GPa)	Πείραμα
30	30.5782	32.479
40	30.4335	32.355
50	30.2888	32.107
60	30.1441	32.045
70	30.0355	31.860
80	29.9270	31.736
90	29.7822	31.612
100	29.6737	31.240

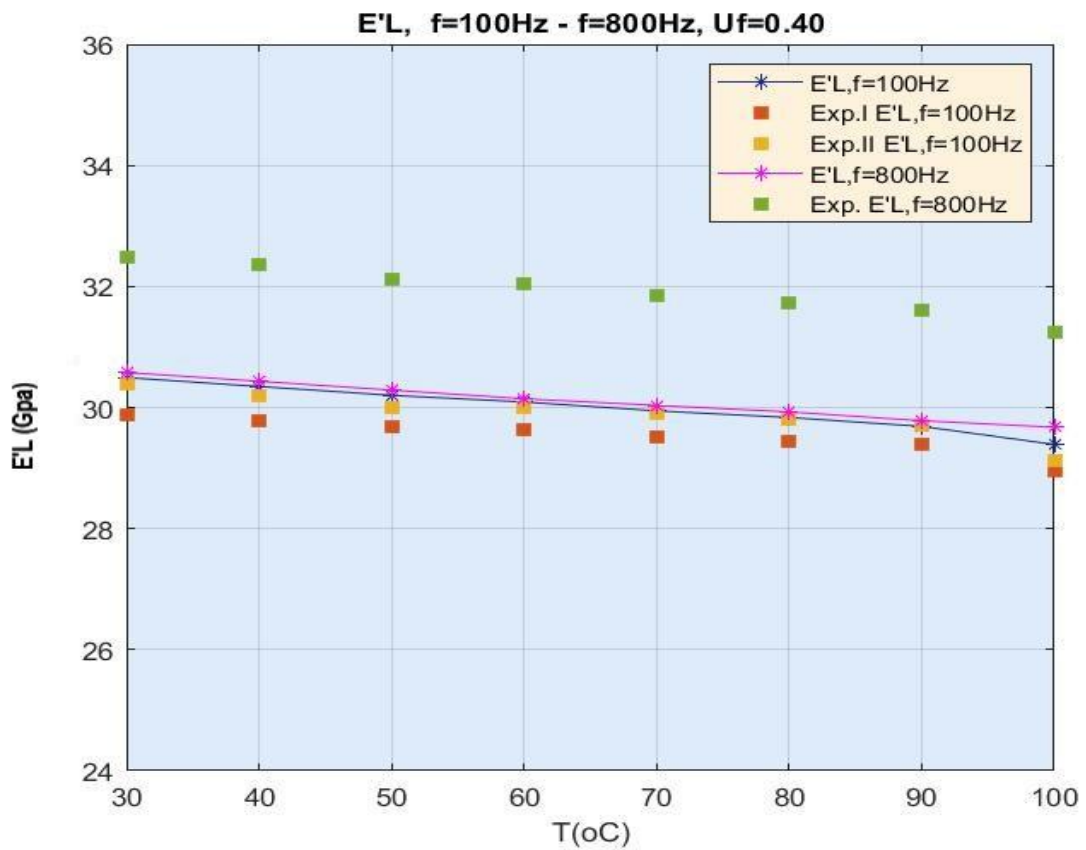
Πίνακας λδ



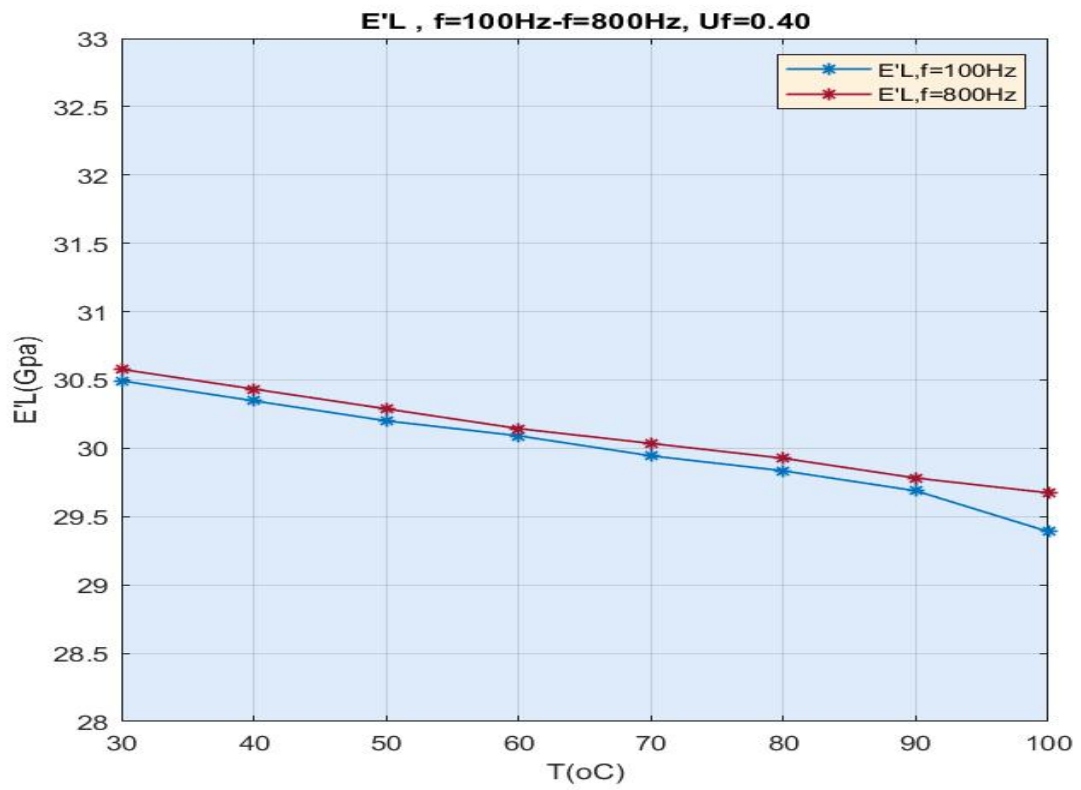
Εικόνα 7.8.2.1 Διάγραμμα πειραματικών τιμών E'_m



Εικόνα 7.8.2.2 Διάγραμμα E'_L



Εικόνα 7.8.2.3α Συγκριτικό Διάγραμμα E'_L για διαφορετικές συχνότητες φόρτισης



Εικόνα 7.8.2.3β Συγκριτικό Διάγραμμα E'_L για διαφορετικές συχνότητες φόρτισης

7.8.3 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΓΙΑ (Uf=0.65,f=110Hz)

Uf=0.65 , f=110Hz		
T(°C)	E_m' (GPa)	E_m'' (GPa)
20	3.9	0.0405
30	3.75	0.042
40	3.55	0.0435
50	3.4	0.0435
60	3.25	0.0435
70	3.1	0.0435
80	2.97	0.0435
90	2.85	0.045
100	2.7	0.046
110	2.55	0.049

Πίνακας λε

Uf=0.65 , f=110Hz		
T(°C)	E_L (GPa)	Πείραμα
20	49.3201	53.6
30	49.2701	
40	49.2035	52.6
50	49.1536	
60	49.1036	52.1
70	49.0537	
80	49.0104	51.6
90	48.9704	
100	48.9204	51
110	48.8705	

Πίνακας λστ

Uf=0.65 , f=110Hz		
T(°C)	E_L (GPa)	Πείραμα
20	0.0135	0.0108
30	0.0140	
40	0.0145	0.0114
50	0.0145	
60	0.0145	0.0116
70	0.0145	
80	0.0145	0.0119
90	0.0150	
100	0.0153	0.0122
110	0.0163	

Πίνακας λζ

Uf=0.65 , f=110Hz		
T(°C)	v_{LT}^* 7 phase	v_{LT}^* W-R
20	0.245	0.244848
30	0.245	0.244813
40	0.245	0.244767
50	0.245	0.244732
60	0.245	0.244697
70	0.245	0.244662
80	0.245	0.244631
90	0.245	0.244603
100	0.245	0.244568
110	0.245	0.244533

Πίνακας λη

Uf=0.65 , f=110Hz	
T(°C)	v_{TT}^*
20	0.249956
30	0.249956
40	0.249956
50	0.249956
60	0.249956
70	0.249956
80	0.249956
90	0.249956
100	0.249956
110	0.249956

Πίνακας λθ

Uf=0.65 , f=110Hz		
T(°C)	E_T^* (Gpa)	Πείραμα
20	17.9380	19.45
30	17.4050	-
40	16.6798	18.92
50	16.1245	-
60	15.5591	18.1
70	14.9833	-
80	14.4756	16.75
90	13.9997	-
100	13.3946	15.14
110	12.7779	-

Πίνακας μ

Uf=0.65 , f=110Hz		
T(°C)	E_T^* (Gpa)	Πείραμα
20	0.1427	0.189
30	0.1506	-
40	0.1597	0.195
50	0.1626	-
60	0.1655	0.2
70	0.1686	-
80	0.1713	0.203
90	0.1799	-
100	0.1874	0.21
110	0.2035	-

Πίνακας μα

Uf=0.65 , f=110Hz	
T(°C)	G_{LT}^* (Gpa)
20	6.5030
30	6.2973
40	6.0187
50	5.8064
60	5.5911
70	5.3727
80	5.1810
90	5.0019
100	4.7750
110	4.5449

Πίνακας μβ

Uf=0.65 , f=110Hz	
T(°C)	G_{LT}^* (Gpa)
20	0.0539
30	0.0567
40	0.0599
50	0.0607
60	0.0616
70	0.0625
80	0.0633
90	0.0663
100	0.0688
110	0.0744

Πίνακας μγ

Seven Phase Model E'_θ (GPa) – Experiment E'_θ (GPa), $U_f=0.65$, $f=110\text{Hz}$														
	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
T(°C)	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp	E'_θ	Exp
20	49.3201	54	37.1885	39	23.8898	33.5	18.1932	30.5	16.7798	24	17.3581	21.5	17.9380	20
30	49.2701	53.5	36.7258	39	23.3008	32	17.6520	30	16.2610	23	16.8323	20	17.4050	18.5
40	49.2035	53	36.0719	38.5	22.4900	31	16.9158	29	15.5571	22.5	16.1179	19.5	16.6798	18.2
50	49.1536	-	35.5510	-	21.8618	-	16.3522	-	15.0197	-	15.5717	-	16.1245	-
60	49.1036	52.5	35.0011	38	21.2153	29	15.7784	27.5	14.4739	21	15.0161	18.5	15.5591	17
70	49.0537	-	34.4195	-	20.5495	-	15.1940	-	13.9195	-	14.4511	-	14.9833	-
80	49.0104	52	33.8877	37.5	19.9565	27	14.6789	25	13.4320	20	13.9535	17.5	14.4756	16
90	48.9704	51.5	33.3717	37.5	19.3952	26.5	14.1961	23.5	12.9760	19	13.4876	16.5	13.9997	15.5
100	48.9204	-	32.6894	-	18.6735	-	13.5822	-	12.3975	-	12.8958	-	13.3946	-
110	48.8705	51	31.9623	36.5	17.9294	24	12.9567	22.5	11.8098	17.5	12.2936	15.5	12.7779	14

Πίνακας μδ

Seven Phase Model E''_θ (GPa), $U_f=0.65$, $f=110\text{Hz}$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
T(°C)	E''_θ	E''_θ	E''_θ	E''_θ	E''_θ	E''_θ	E''_θ
20	0.0135	0.1194	0.1537	0.1424	0.1375	0.1403	0.1427
30	0.0140	0.1301	0.1639	0.1503	0.1448	0.1479	0.1506
40	0.0145	0.1444	0.1764	0.1596	0.1531	0.1566	0.1597
50	0.0145	0.1521	0.1814	0.1624	0.1555	0.1593	0.1626
60	0.0145	0.1608	0.1868	0.1654	0.1579	0.1619	0.1655
70	0.0145	0.1703	0.1924	0.1685	0.1605	0.1648	0.1686
80	0.0145	0.1793	0.1976	0.1712	0.1627	0.1672	0.1713
90	0.0150	0.1949	0.2096	0.1799	0.1706	0.1755	0.1799
100	0.0153	0.2122	0.2211	0.1875	0.1772	0.1825	0.1874
110	0.0163	0.2415	0.2432	0.2036	0.1919	0.1980	0.2035

Πίνακας με

Seven Phase Model G'_θ (GPa), $U_f=0.65$, $f=110\text{Hz}$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
T(°C)	G'_θ	G'_θ	G'_θ	G'_θ	G'_θ	G'_θ	G'_θ
20	6.5030	7.3088	9.7171	11.6337	9.7171	7.3088	6.5030
30	6.2973	7.0911	9.4813	11.4032	9.4813	7.0911	6.2973
40	6.0187	6.7949	9.1565	11.0824	9.1565	6.7949	6.0187
50	5.8064	6.5682	8.9046	10.8309	8.9046	6.5682	5.8064
60	5.5911	6.3373	8.6450	10.5694	8.6450	6.3373	5.5911
70	5.3727	6.1023	8.3776	10.2972	8.3776	6.1023	5.3727
80	5.1810	5.8952	8.1391	10.0522	8.1391	5.8952	5.1810
90	5.0019	5.7011	7.9132	9.8180	7.9132	5.7011	5.0019
100	4.7750	5.4542	7.6226	9.5138	7.6226	5.4542	4.7750
110	4.5449	5.2028	7.3226	9.1959	7.3226	5.2028	4.5449

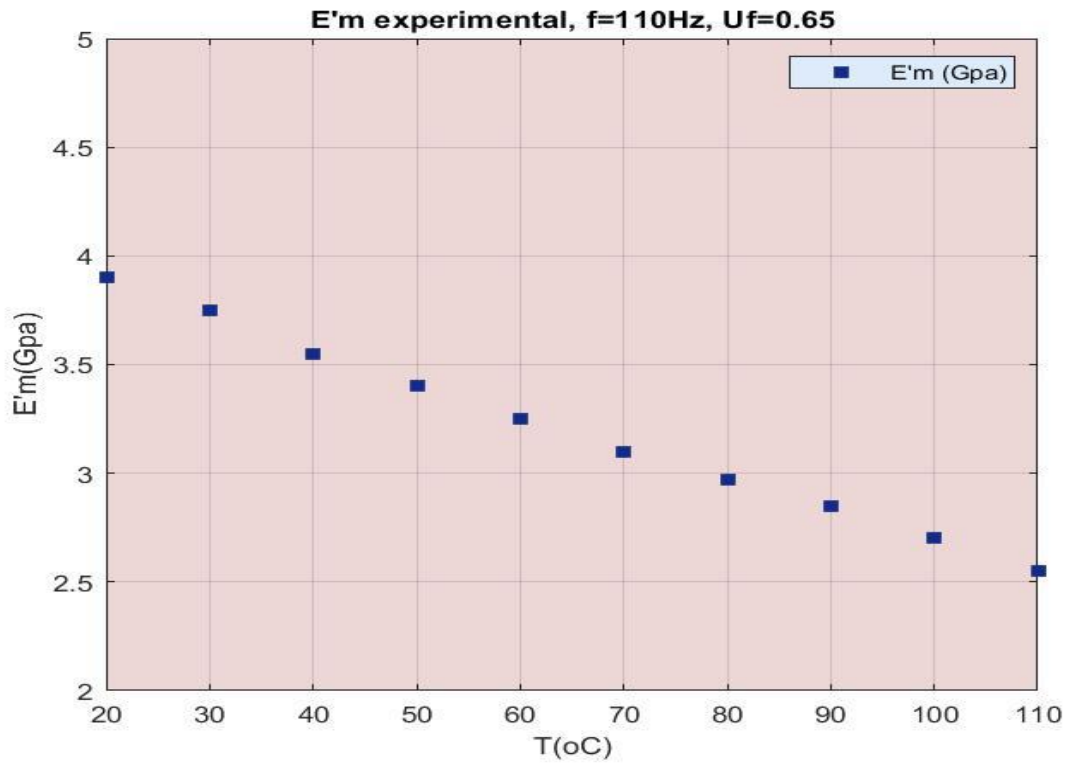
Πίνακας μστ

Seven Phase Model G''_0 (GPa), $U_f=0.65$, $f=110\text{Hz}$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
T(°C)	G''_0	G''_0	G''_0	G''_0	G''_0	G''_0	G''_0
20	0.0539	0.0571	0.0621	0.0611	0.0621	0.0571	0.0539
30	0.0567	0.0603	0.0662	0.0658	0.0662	0.0603	0.0567
40	0.0599	0.0640	0.0713	0.0716	0.0713	0.0640	0.0599
50	0.0607	0.0651	0.0734	0.0744	0.0734	0.0651	0.0607
60	0.0616	0.0663	0.0756	0.0774	0.0756	0.0663	0.0616
70	0.0625	0.0675	0.0780	0.0806	0.0780	0.0675	0.0625
80	0.0633	0.0686	0.0801	0.0835	0.0801	0.0686	0.0633
90	0.0663	0.0721	0.0850	0.0894	0.0850	0.0721	0.0663
100	0.0688	0.0752	0.0898	0.0954	0.0898	0.0752	0.0688
110	0.0744	0.0816	0.0988	0.1062	0.0988	0.0816	0.0744

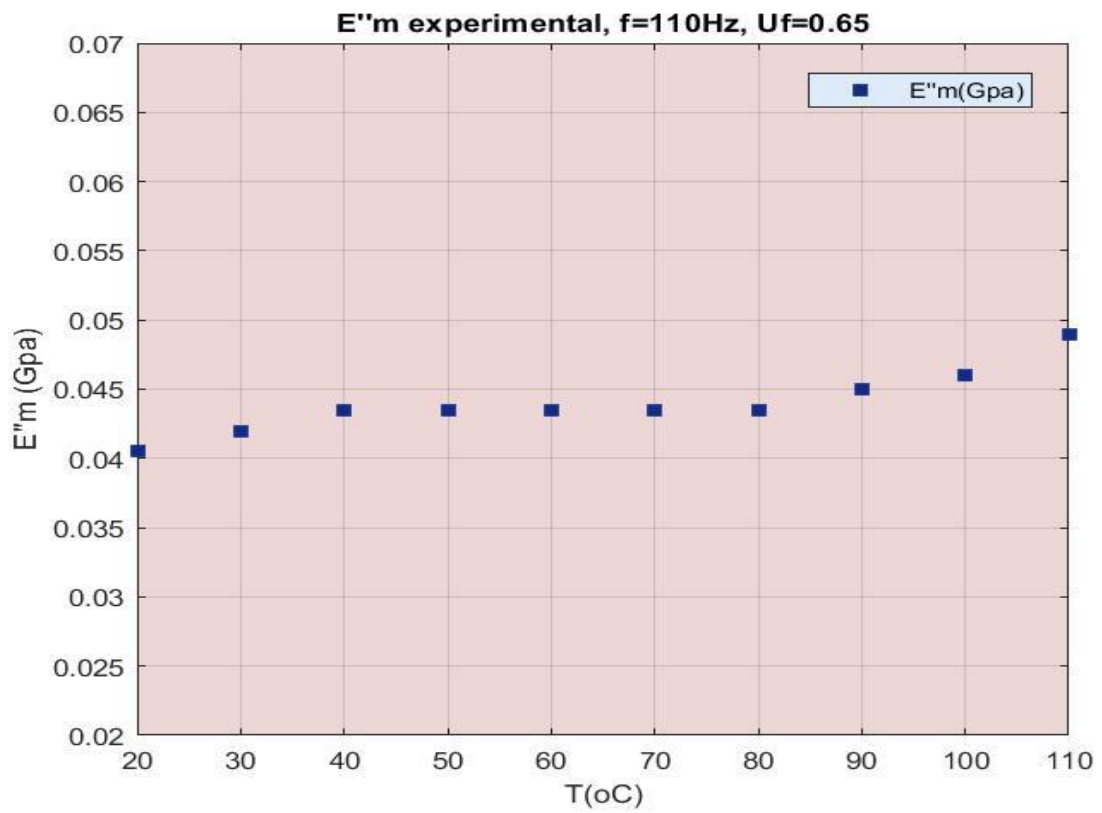
Πίνακας μζ

Seven Phase Model ν'_0 (GPa), $U_f=0.65$, $f=110\text{Hz}$							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
T(°C)	ν'_0	ν'_0	ν'_0	ν'_0	ν'_0	ν'_0	ν'_0
20	0.245	0.3424	0.4224	0.3988	0.2967	0.1598	0.0891
30	0.245	0.3458	0.4265	0.4015	0.2976	0.1585	0.0865
40	0.245	0.3507	0.4321	0.4053	0.2989	0.1567	0.0831
50	0.245	0.3547	0.4364	0.4081	0.2999	0.1554	0.0804
60	0.245	0.3589	0.4409	0.4110	0.3008	0.1540	0.0776
70	0.245	0.3634	0.4456	0.4140	0.3018	0.1526	0.0748
80	0.245	0.3675	0.4497	0.4166	0.3027	0.1513	0.0724
90	0.245	0.3715	0.4536	0.4191	0.3035	0.1501	0.0700
100	0.245	0.3768	0.4587	0.4222	0.3046	0.1487	0.0671
110	0.245	0.3825	0.4640	0.4254	0.3056	0.1471	0.0641

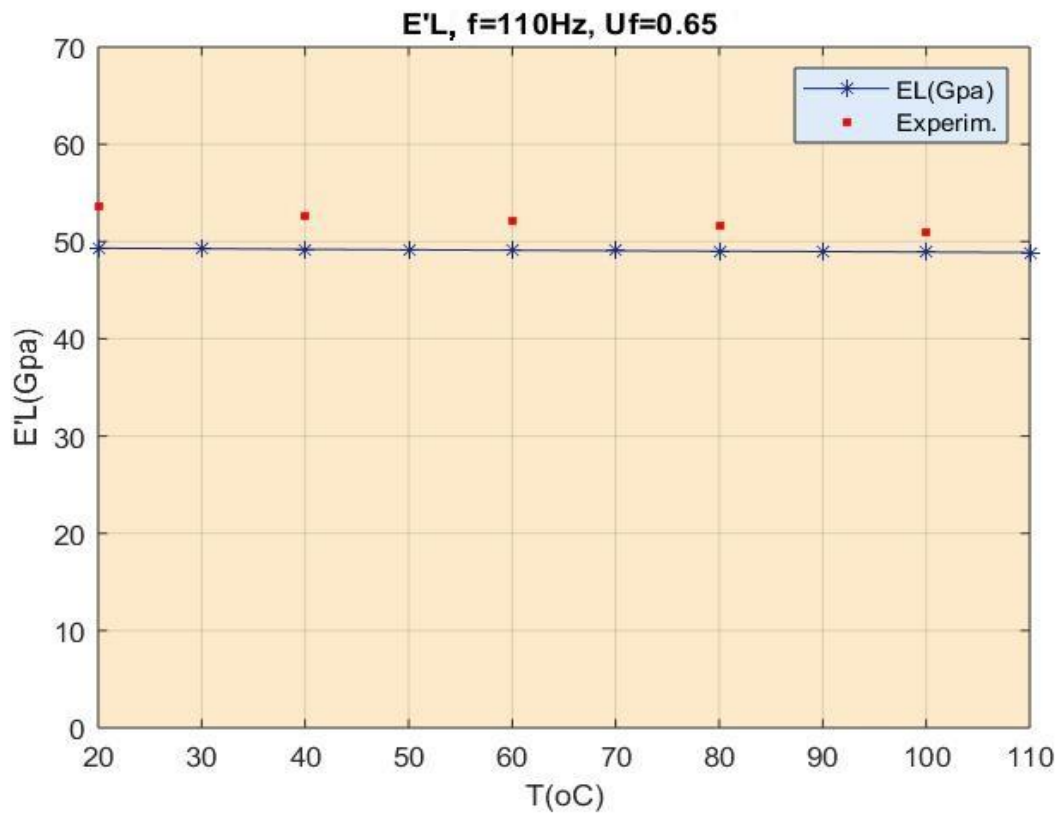
Πίνακας μη



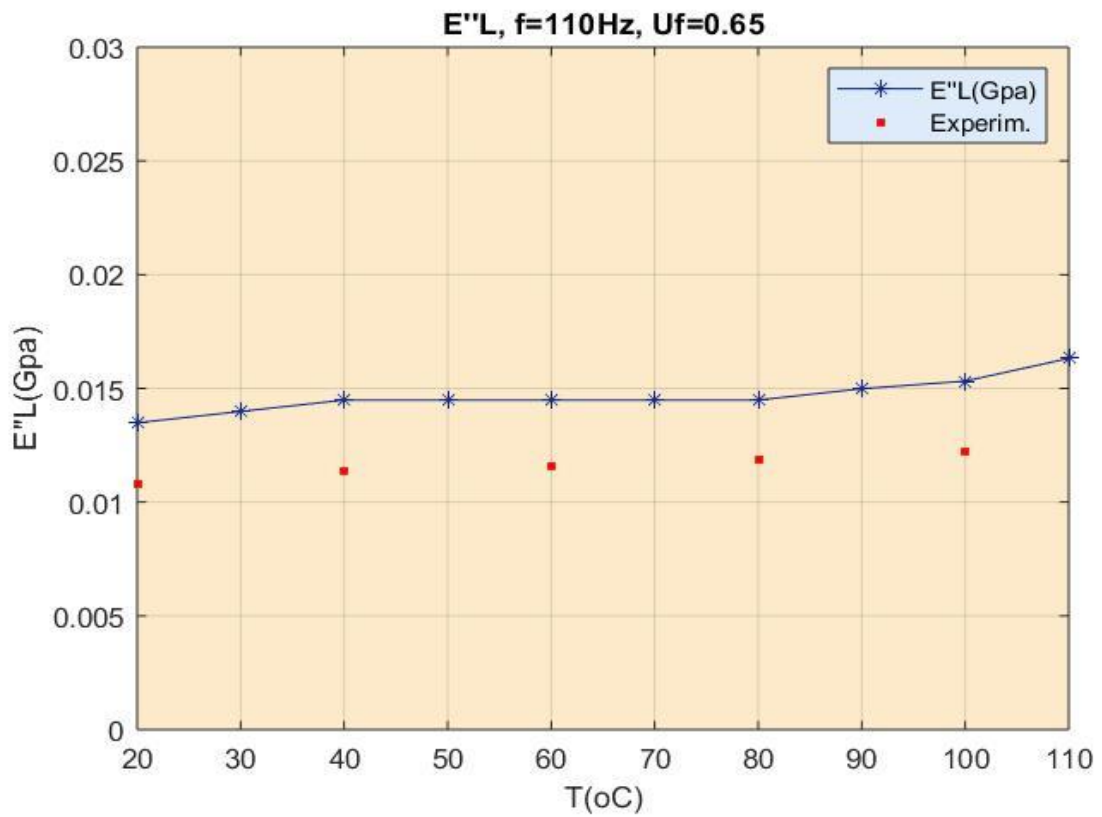
Εικόνα 7.8.3.1 Διάγραμμα πειραματικών τιμών E'_m



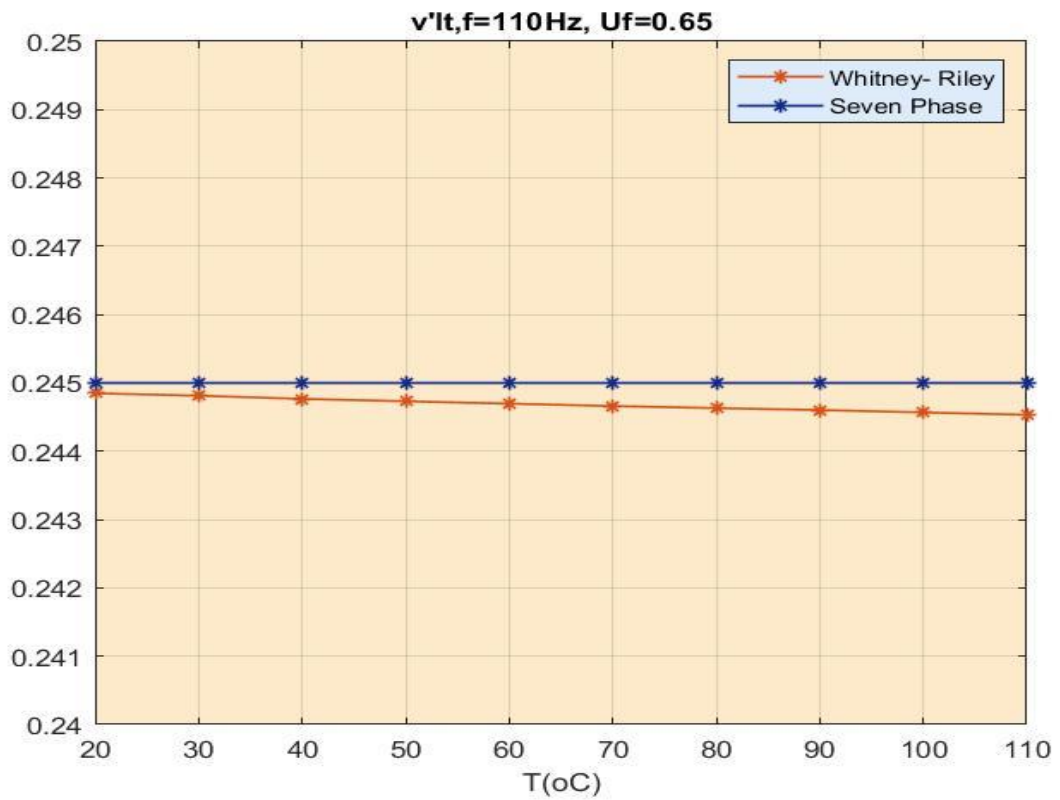
Εικόνα 7.8.3.2 Διάγραμμα πειραματικών τιμών E''_m



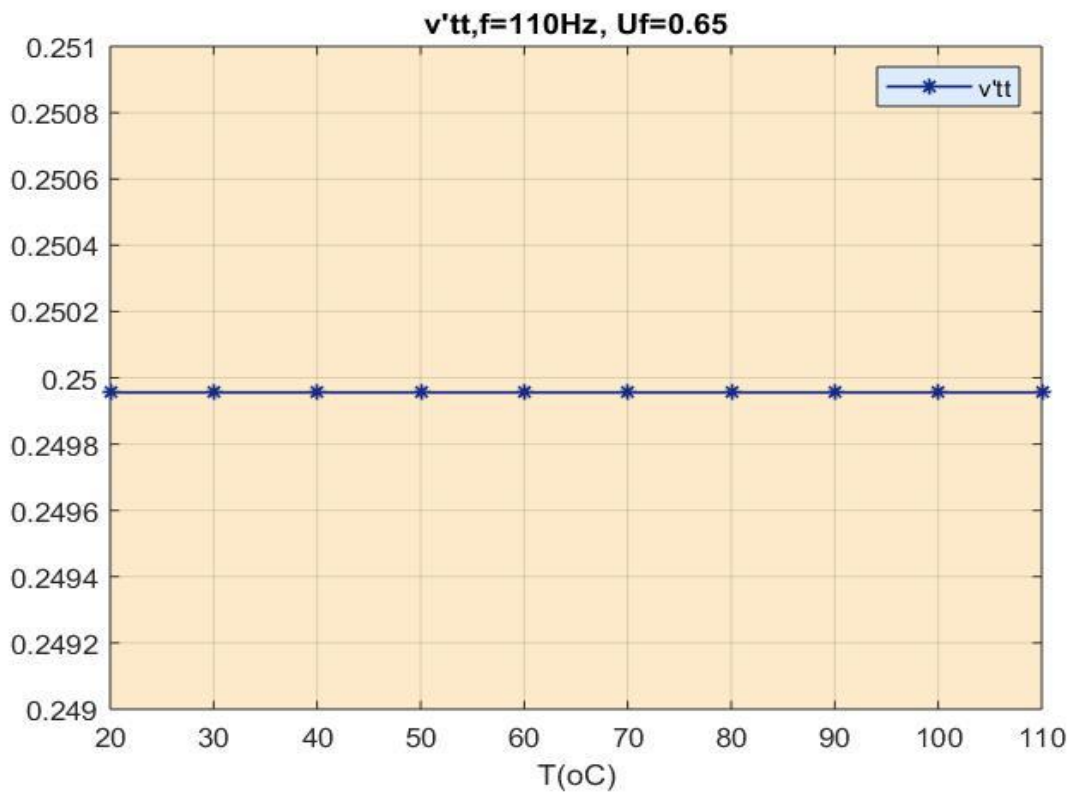
Εικόνα 7.8.3.3 Διάγραμμα E'_L



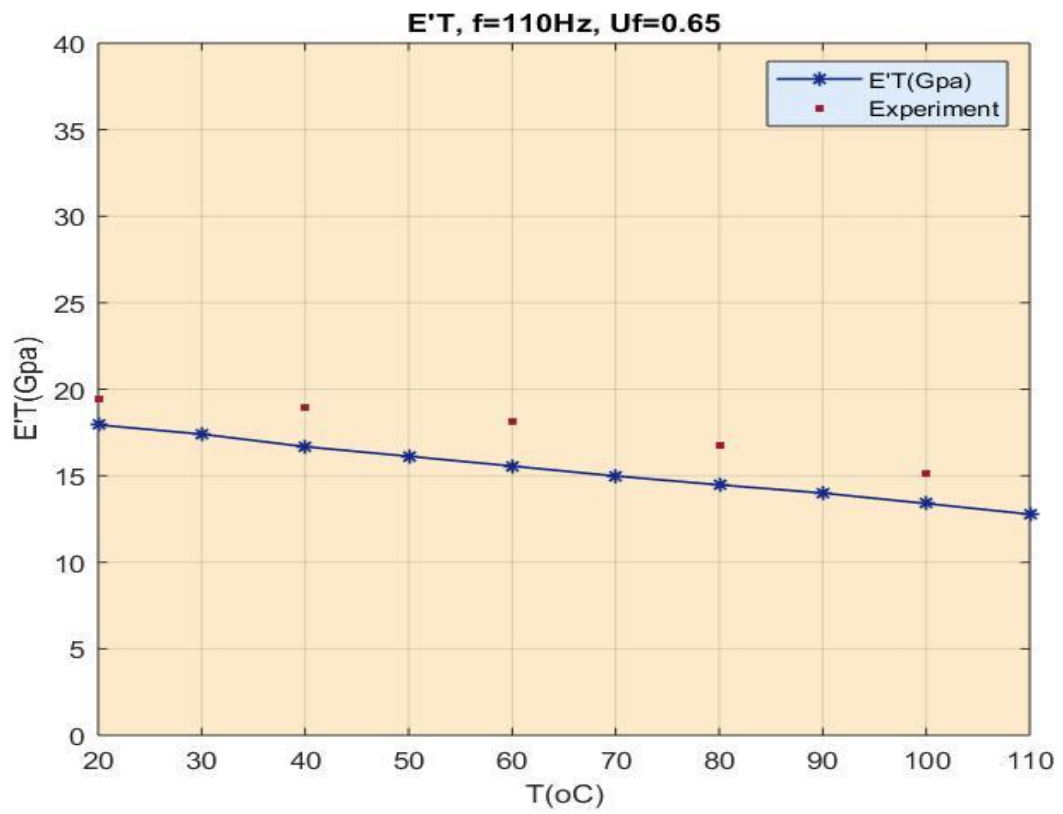
Εικόνα 7.8.3.4 Διάγραμμα E''_L



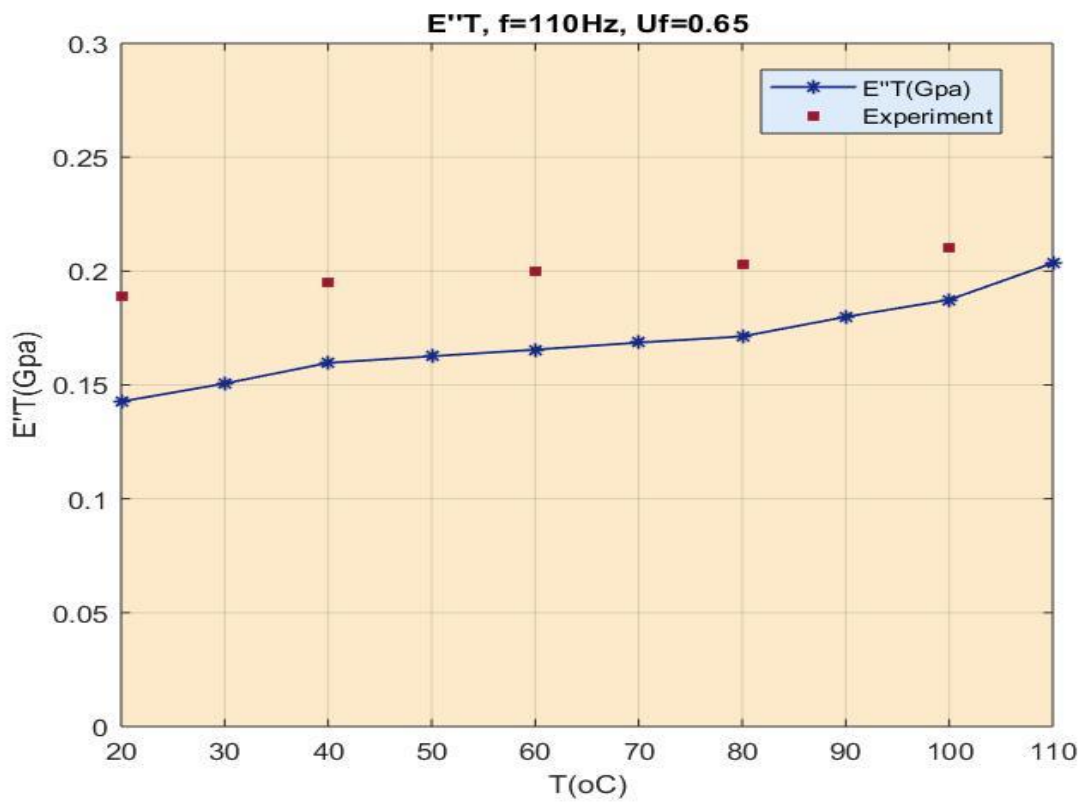
Εικόνα 7.8.3.5 Διάγραμμα v'_{LT}



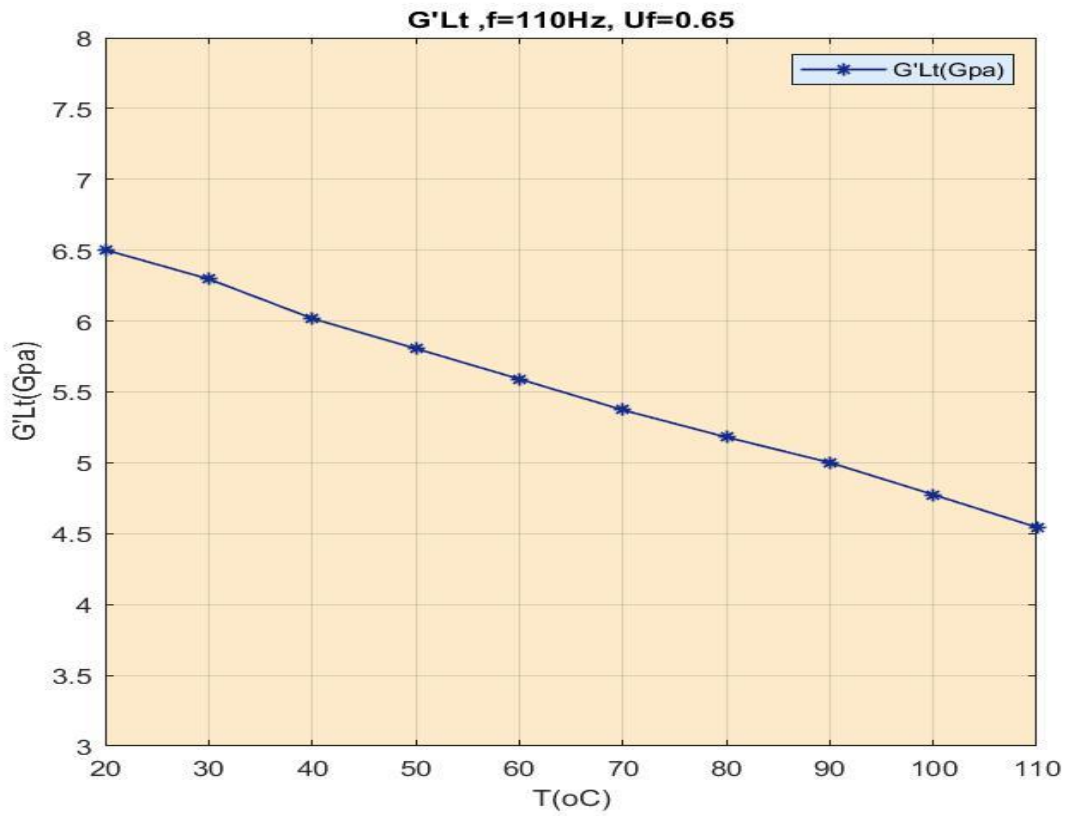
Εικόνα 7.8.3.6 Διάγραμμα v'_{TT}



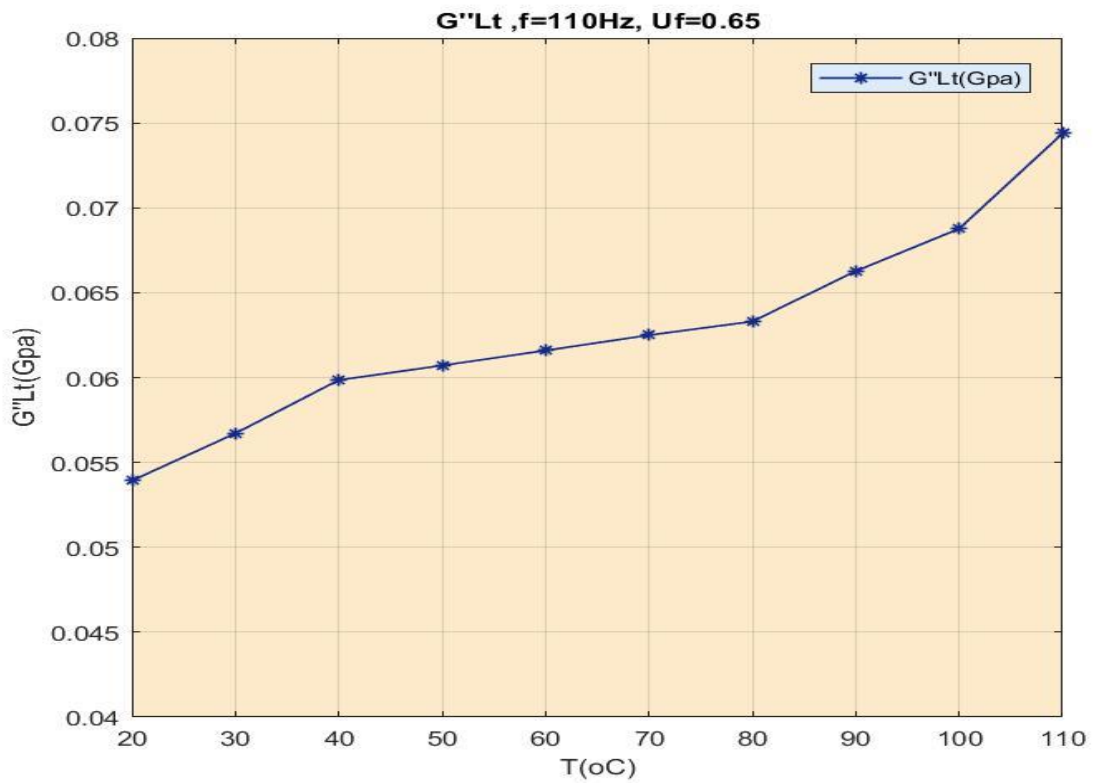
Εικόνα 7.8.3.7 Διάγραμμα E'_T



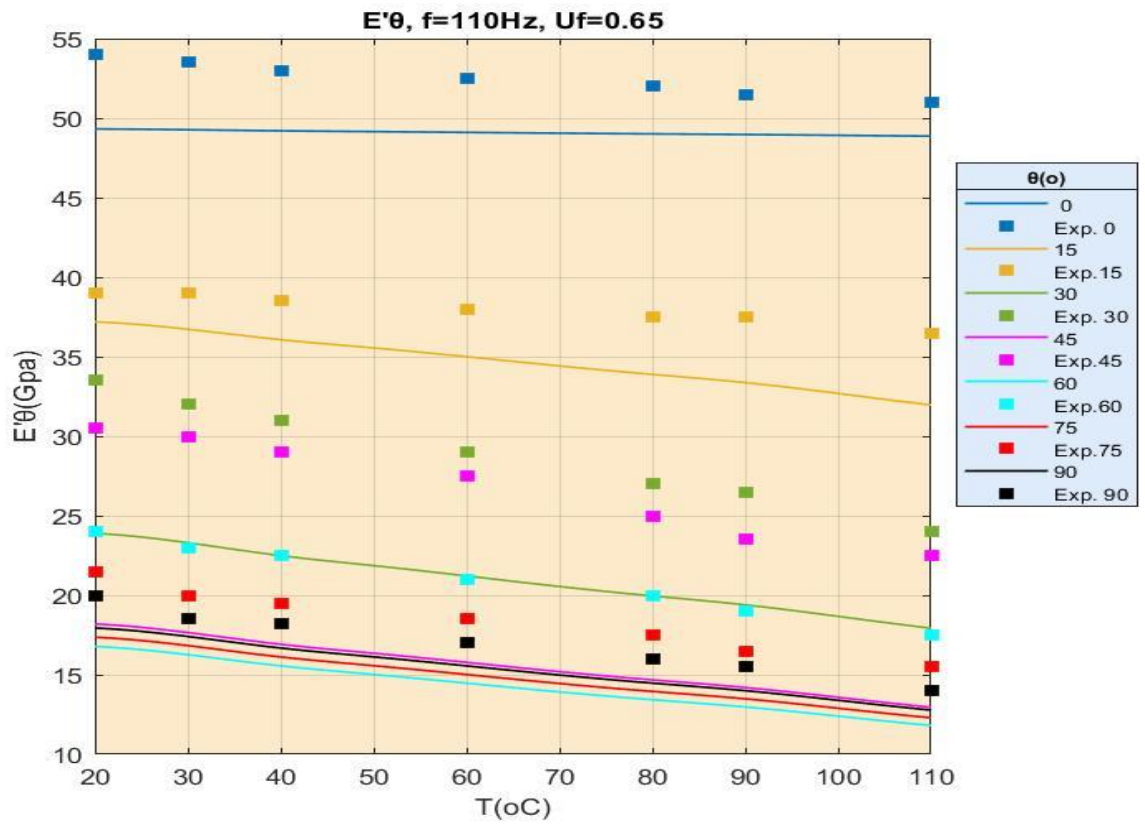
Εικόνα 7.8.3.8 Διάγραμμα E''_T



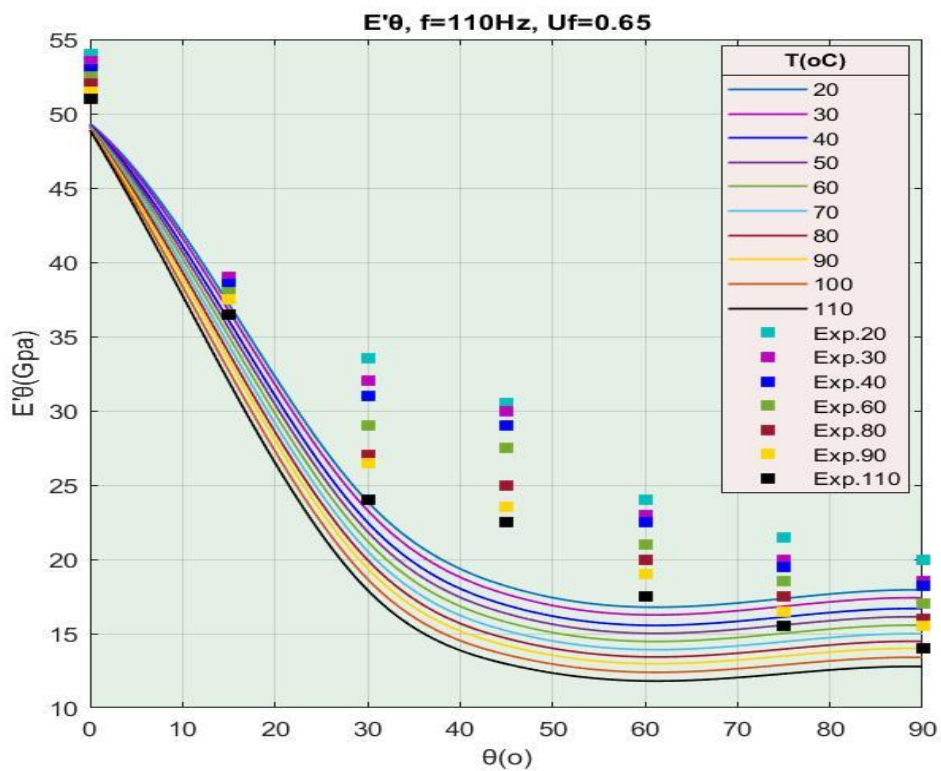
Εικόνα 7.8.3.9 Διάγραμμα G'_{LT}



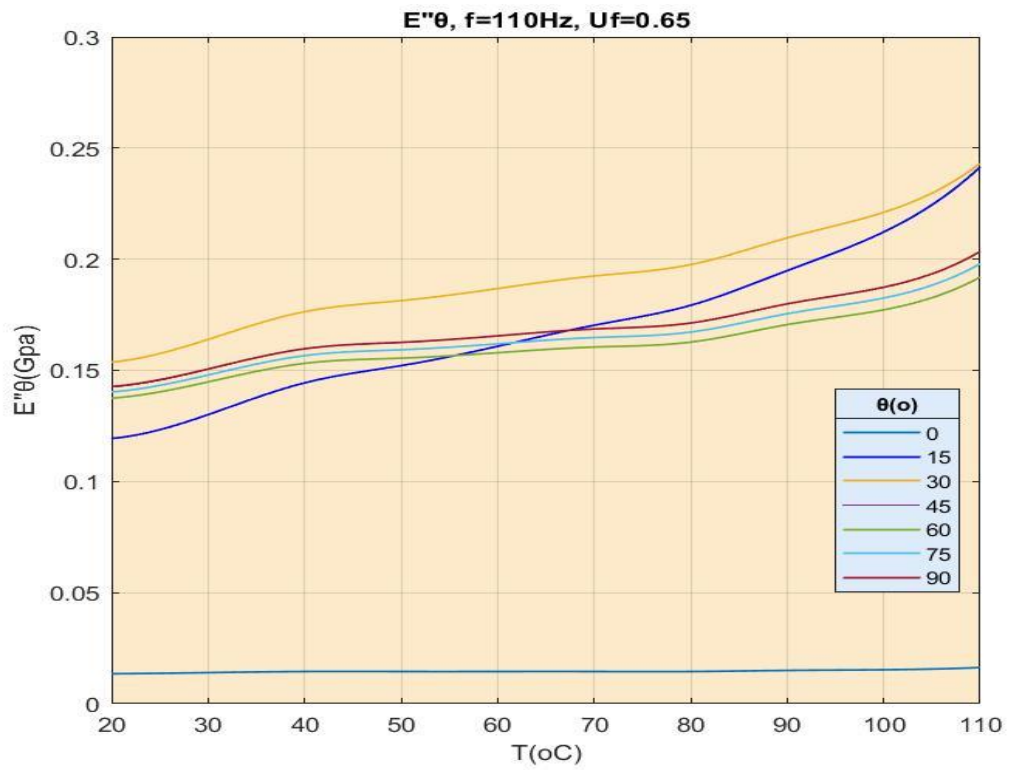
Εικόνα 7.8.3.10 Διάγραμμα G''_{LT}



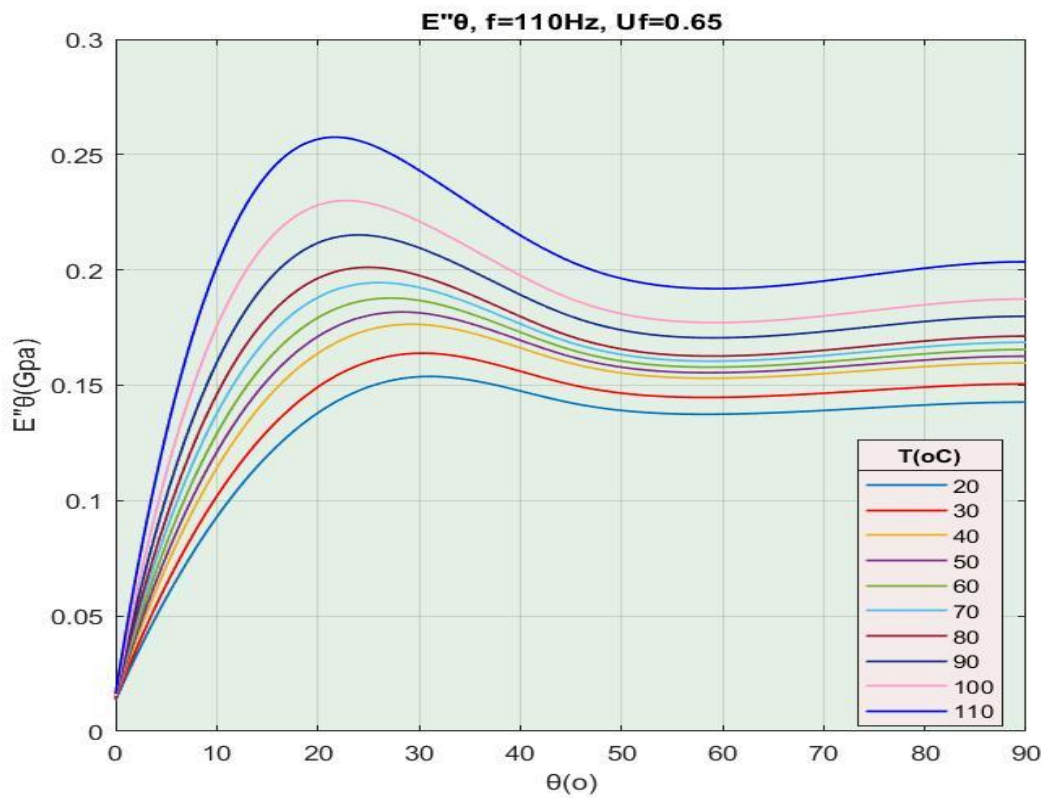
Εικόνα 7.8.3.11α Διάγραμμα E'_θ



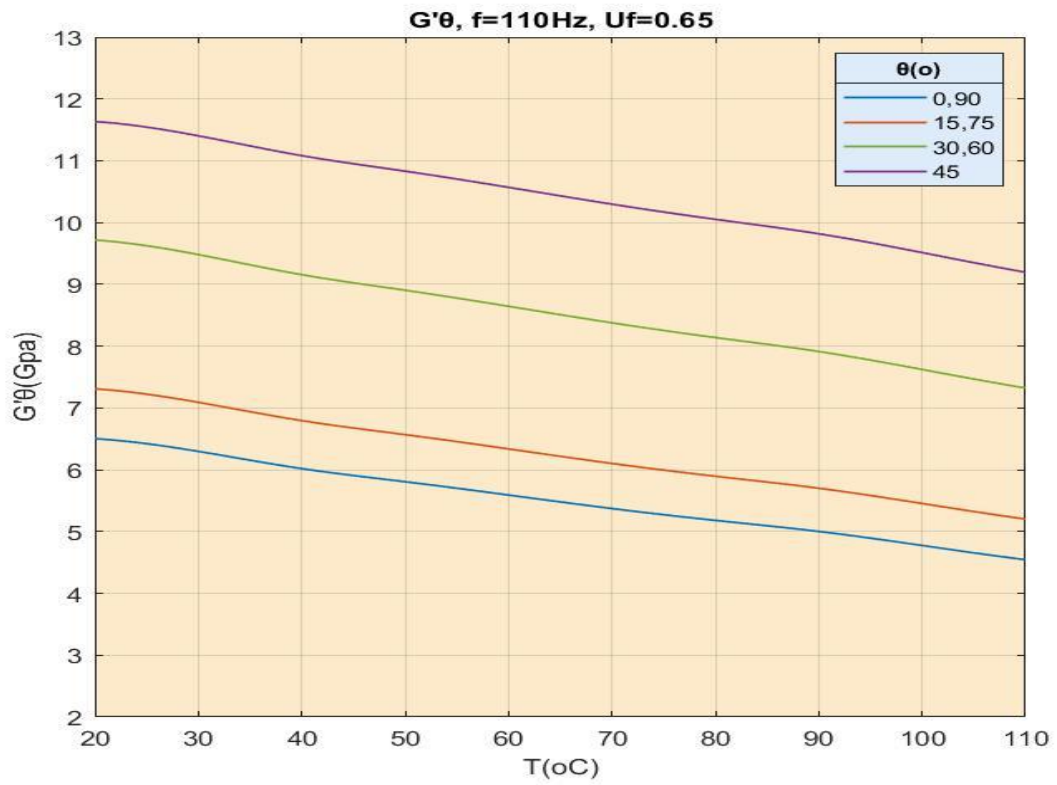
Εικόνα 7.8.3.11β Διάγραμμα E'_θ σε σχέση με την γωνία φόρτισης



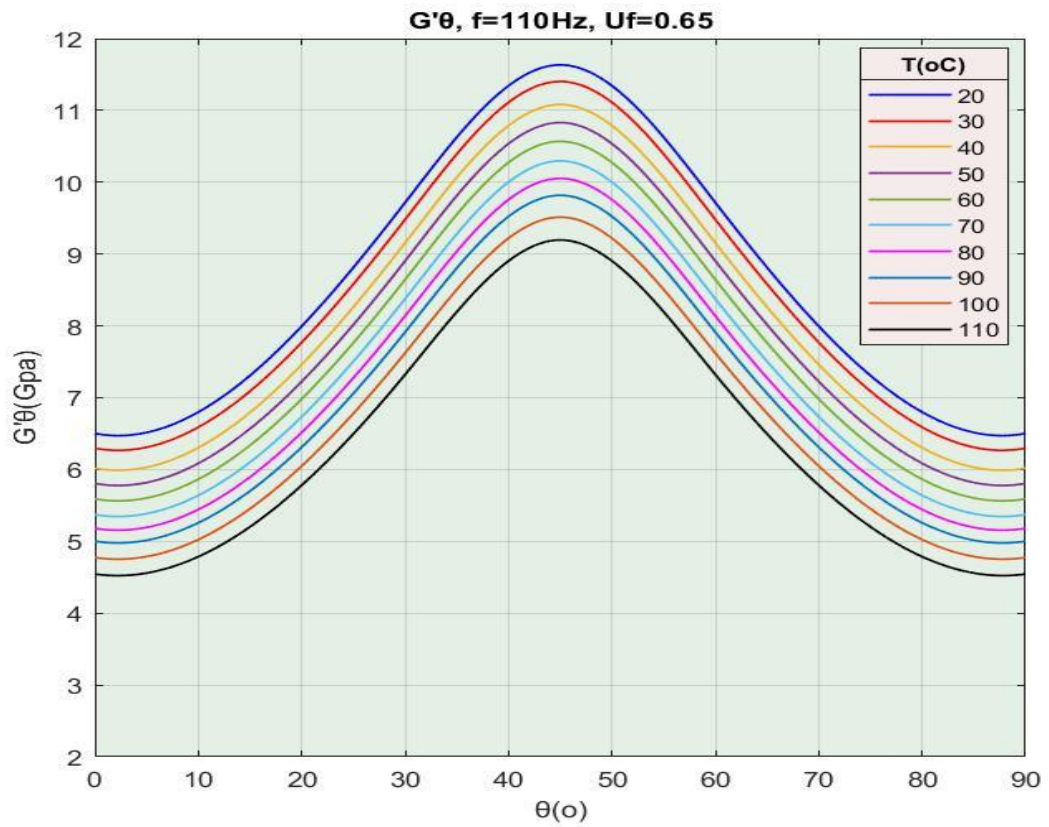
Εικόνα 7.8.3.12α Διάγραμμα E''_{θ}



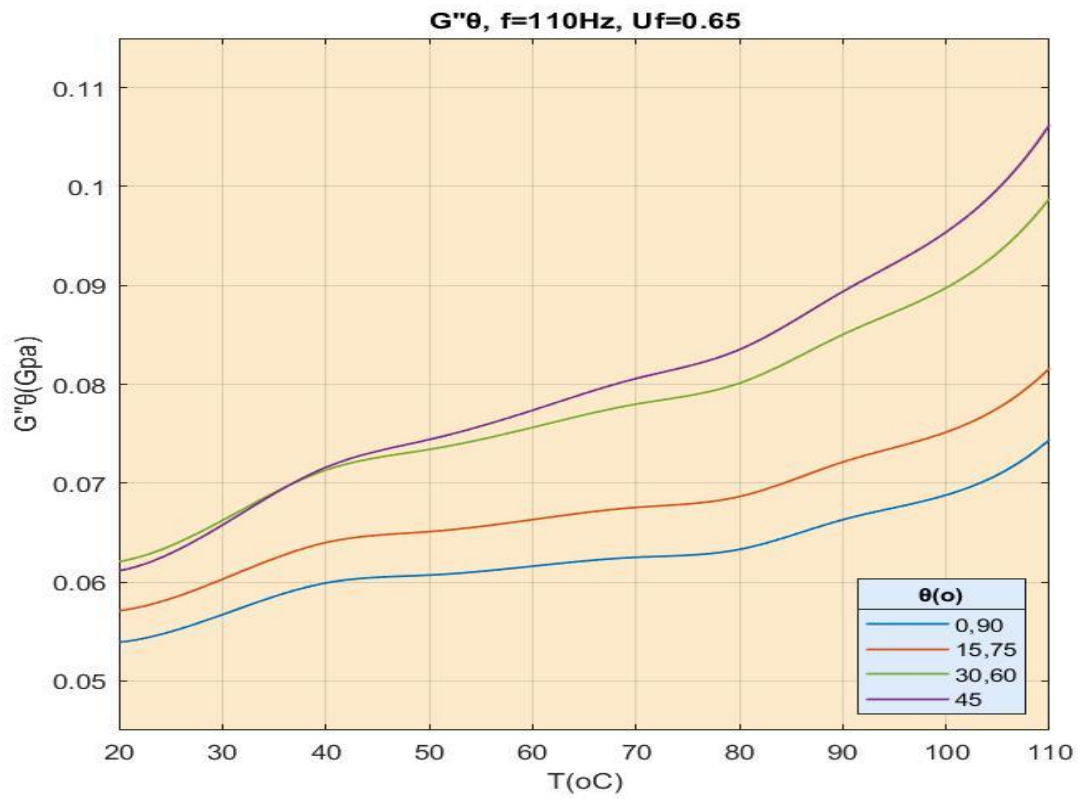
Εικόνα 7.8.3.12β Διάγραμμα E''_{θ}



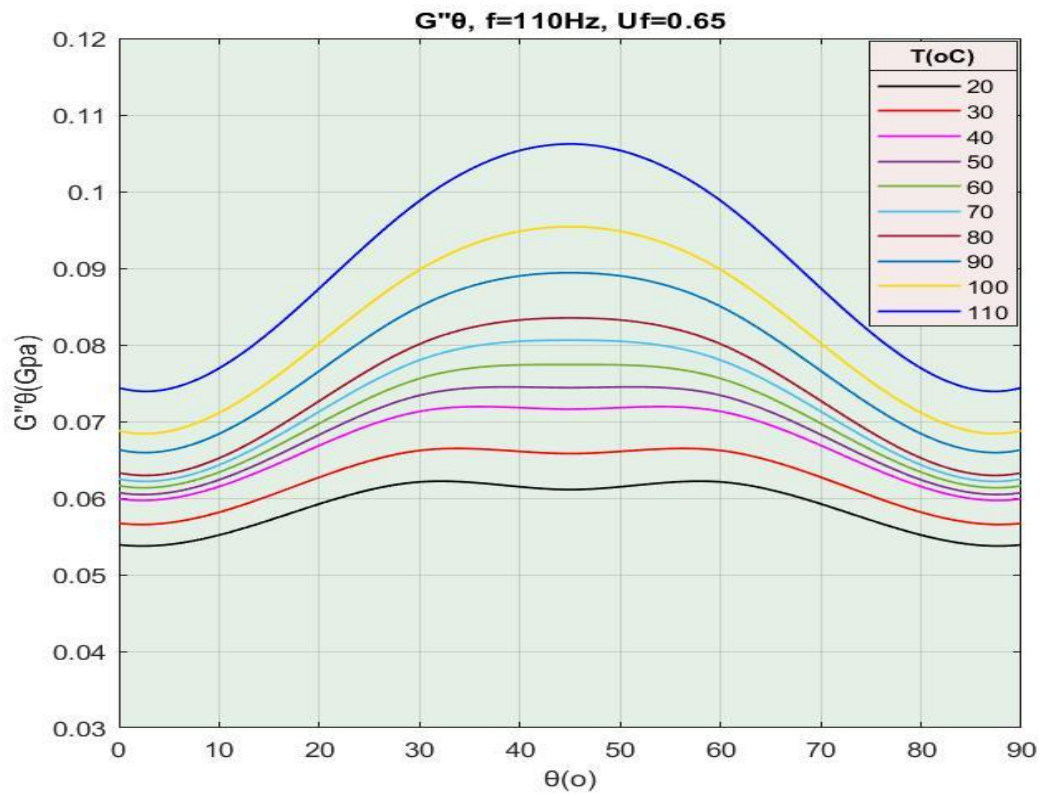
Εικόνα 7.8.3.13α Διάγραμμα G'_θ



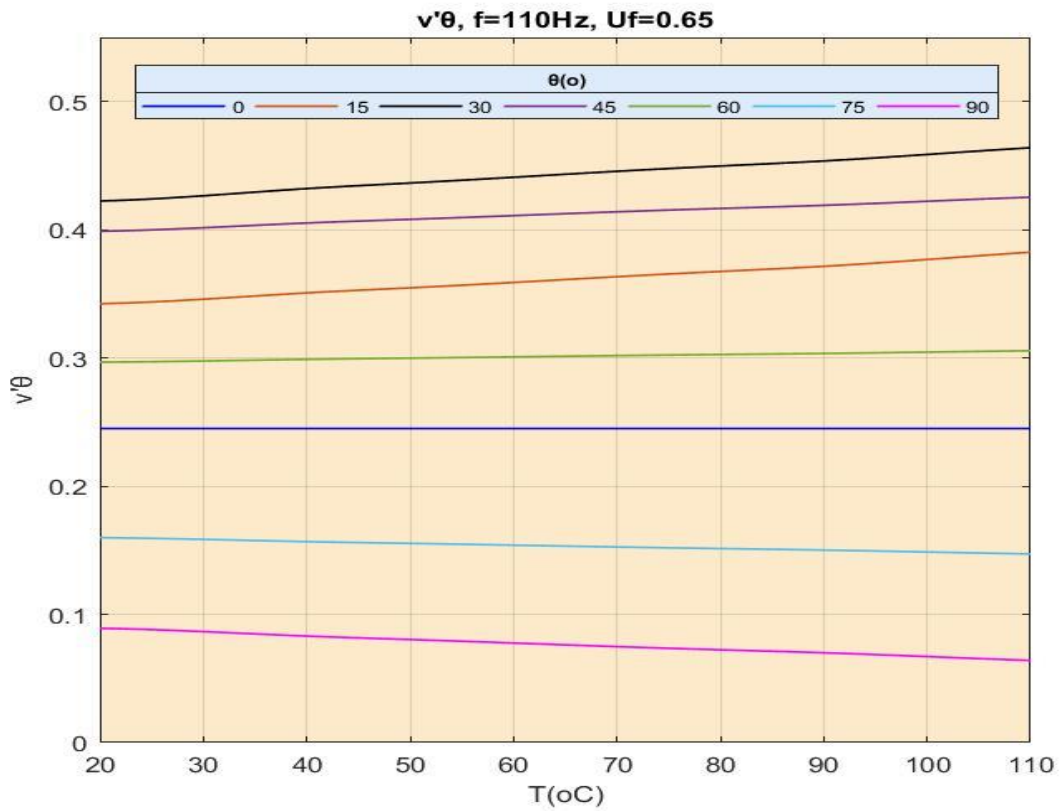
Εικόνα 7.8.3.13β Διάγραμμα G'_θ



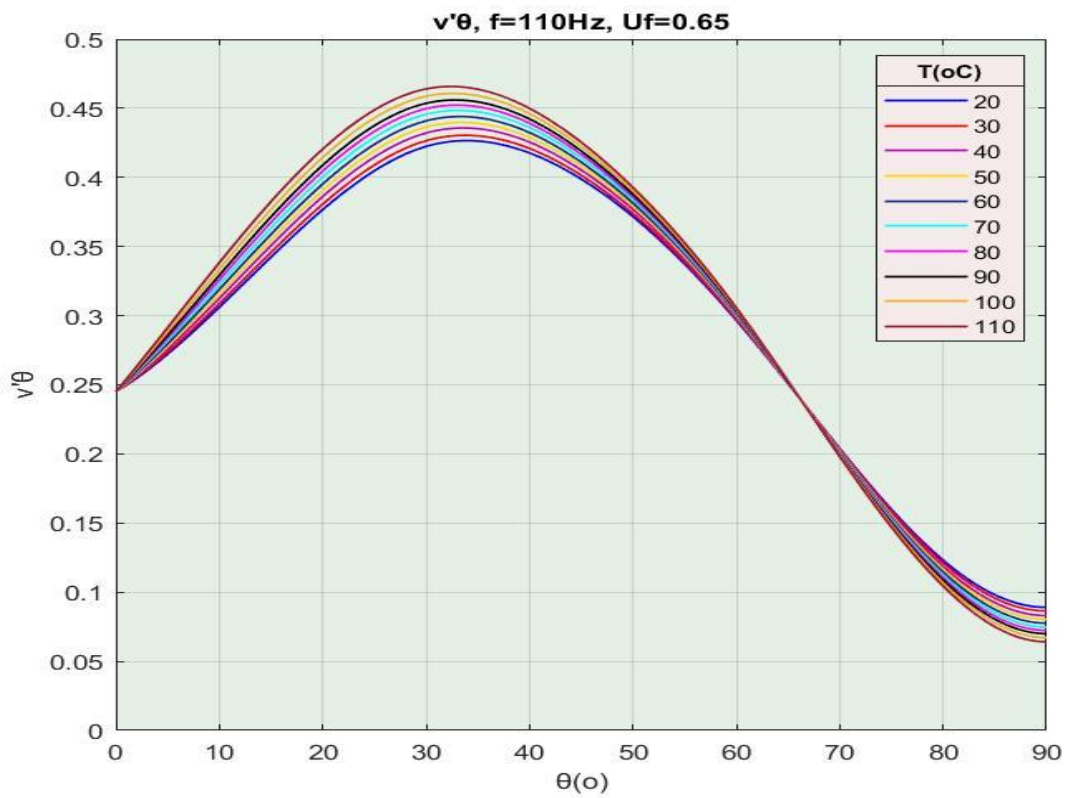
Εικόνα 7.8.3.14α Διάγραμμα G''_{θ}



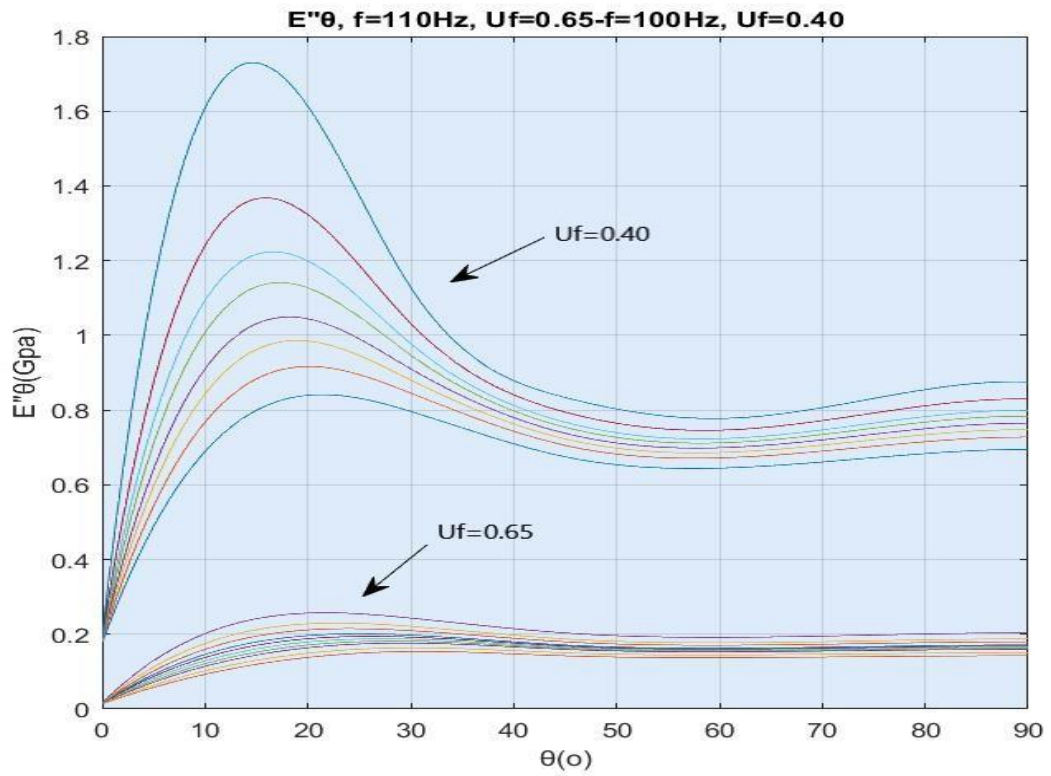
Εικόνα 7.8.3.14β Διάγραμμα G''_{θ}



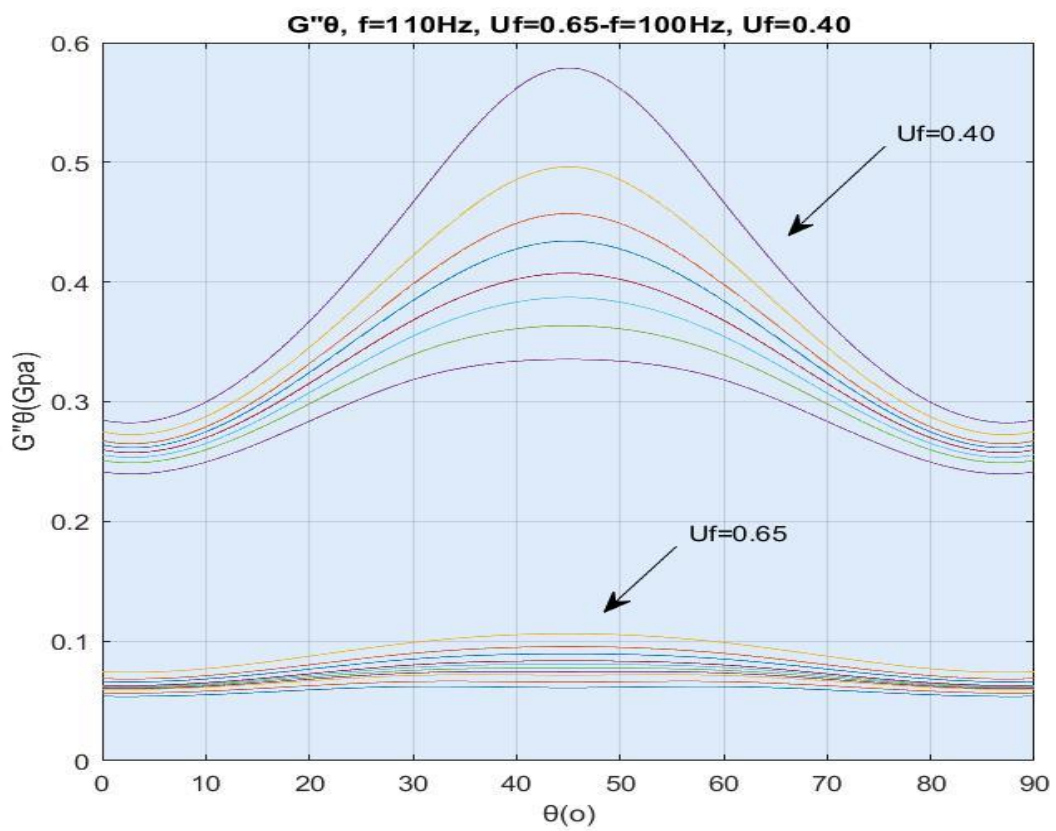
Εικόνα 7.8.3.15α Διάγραμμα v'_θ



Εικόνα 7.8.3.15β Διάγραμμα v'_θ



Εικόνα 7.8.3.16 Συγκριτικό Διάγραμμα E''_{θ}



Εικόνα 7.8.3.17 Συγκριτικό Διάγραμμα G''_{θ}

7.8.4 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μέτρο αποθηκεύσεως και απωλειών της μήτρας E'_m & E''_m

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.1&7.8.1.2 ($U_f=40\%,f=100\text{Hz}$), 7.8.2.1 ($U_f=40\%,f=800\text{Hz}$) και 7.8.3.1&7.8.3.2 ($U_f=65\%,f=110\text{Hz}$) αποτυπώνεται η μεταβολή του πειραματικού μέτρου αποθηκεύσεως E'_m και του πειραματικού μέτρου απωλειών E''_m της μήτρας συναρτήσει της θερμοκρασίας. Μελετώντας τα ανωτέρω διαγράμματα διαπιστώνουμε ότι οι τιμές του μέτρου αποθηκεύσεως E'_m και στις 3 περιπτώσεις που αναφέραμε, φθίνουν καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία, κάτι που αναμέναμε καθώς όσο αυξάνεται η θερμοκρασία υποβιβάζονται ελαφρώς οι μηχανικές ιδιότητες των υλικών. Αντίθετα το μέτρο απωλειών E''_m αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας κάτι που επίσης είναι αναμενόμενο μια και η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί περαιτέρω αύξηση των θερμικών απωλειών.

Διάμηκες μέτρο αποθηκεύσεως E'_L

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.3 ($U_f=40\%,f=100\text{Hz}$), 7.8.2.2 ($U_f=40\%,f=800\text{Hz}$) και 7.8.3.3 ($U_f=65\%,f=110\text{Hz}$) αποτυπώνεται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου αποθηκεύσεως του σύνθετου υλικού E'_L συναρτήσει της θερμοκρασίας. Παρατηρούμε ότι και στις 3 περιπτώσεις που αναφέραμε έχουμε μια ασθενή πτωτική εξάρτηση από την θερμοκρασία, γεγονός που επιβεβαιώνουν και τα πειραματικά δεδομένα. Τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο μας για το E'_L μπορούν να χαρακτηρισθούν ικανοποιητικά αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε καλό βαθμό σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών. Οι τιμές που προβλέπει είναι σταθερά μεγαλύτερες στην πρώτη περίπτωση σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις είναι σταθερά μικρότερες.

Επιπρόσθετα στο διάγραμμα της εικόνας 7.8.2.3 επιχειρείται σύγκριση των θεωρητικών και πειραματικών τιμών για τις πρώτες δύο περιπτώσεις που αναφέραμε, όπου έχουμε φόρτιση με διαφορετική συχνότητα για την ίδια περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Όπως είπαμε και παραπάνω οι τιμές είναι πολύ κοντά στις πειραματικές και αυτό που παρατηρούμε είναι μια πολύ μικρή αύξηση των τιμών του E'_L σε όλο το εύρος θερμοκρασιών, με την αύξηση της συχνότητας της φόρτισης. Βέβαια η αύξηση είναι τόσο μικρή που πρακτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν επηρεάζεται καθόλου από την συχνότητα. Αυτό εξάλλου είναι και το συμπέρασμα που αναφέρεται στην παραπομπή [54]. Επίσης παρατηρούμε ότι οι τιμές των αποτελεσμάτων για συχνότητα φόρτισης 100Hz είναι λίγο μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες πειραματικές αλλά με μεγάλη ακρίβεια προσέγγισης. Στην περίπτωση της φόρτισης με 800Hz οι θεωρητικές τιμές του μοντέλου είναι μικρότερες από τις πειραματικές αλλά με λιγότερη ακρίβεια προσέγγισης σε σχέση με την προαναφερθείσα περίπτωση.

Διάμηκες μέτρο απωλειών E_L''

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.4 ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.4 ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επαφασικού μοντέλου αποτυπώνεται η μεταβολή του E_L'' σε σχέση με την θερμοκρασία. Παρατηρούμε και στις δύο περιπτώσεις ότι η τιμή του διαμήκους μέτρου απωλειών αυξάνεται όσο αυξάνει η θερμοκρασία, γεγονός που επιβεβαιώνεται από τα πειραματικά δεδομένα. Ο ρυθμός της αύξησης του E_L'' παρατηρούμε ότι μεγαλώνει για $T > 80^\circ\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης της μήτρας άρα και του σύνθετου υλικού. Τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο μας για το E_L'' μπορούν να χαρακτηρισθούν ικανοποιητικά αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε καλό βαθμό σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών. Οι τιμές που προβλέπει είναι σταθερά μικρότερες σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα στην πρώτη περίπτωση ενώ στην δεύτερη περίπτωση είναι σταθερά μεγαλύτερες.

Δυναμικός διαμήκης λόγος Poisson ν_{LT}'

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.5 ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.5 ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επαφασικού μοντέλου αποτυπώνεται η μεταβολή του ν_{LT}' σε συνάρτηση με την θερμοκρασία. Όπως διαπιστώνουμε από τα διαγράμματα δεν παρατηρείται μεταβολή σε σχέση με την θερμοκρασία, μία και στα αποτελέσματα που καταλήξαμε δεν περιλαμβάνεται στους όρους των εξισώσεων το μέτρο αποθηκεύσεως E_m' ή το μέτρο απωλειών E_m'' που εξαρτώνται αμφότερα από την θερμοκρασία. Επιπρόσθετα στα ίδια διαγράμματα παραθέτουμε τα αποτελέσματα από την μελέτη των Whitney –Riley όπου παρατηρούμε ότι υφίσταται μια πολύ ασθενή πτωτική εξάρτηση του ν_{LT}' από την θερμοκρασία. Η μεταβολή αυτή είναι ελάχιστη οπότε αυτό εξασφαλίζει την ορθότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από το δικό μας μοντέλο.

Δυναμικός εγκάρσιος λόγος Poisson ν_{TT}'

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.6 ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.6 ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επαφασικού μοντέλου αποτυπώνεται η μεταβολή του ν_{TT}' σε συνάρτηση με την θερμοκρασία. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν δείχνουν ότι ο δυναμικός εγκάρσιος λόγος Poisson είναι ανεξάρτητος της θερμοκρασίας, μία και στα αποτελέσματα που καταλήξαμε δεν περιλαμβάνεται στους όρους των εξισώσεων το μέτρο αποθηκεύσεως E_m' ή το μέτρο απωλειών E_m'' που εξαρτώνται αμφότερα από την θερμοκρασία.

Εγκάρσιο μέτρο αποθηκεύσεως E'_T

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.7 ($U_f=40\%,f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.7 ($U_f=65\%,f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επαφασικού μοντέλου αποτυπώνεται το εγκάρσιο μέτρο αποθηκεύσεως. Το E'_T εμφανίζει πτωτική εξάρτηση από την θερμοκρασία. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνουν και τα πειραματικά δεδομένα της δεύτερης περίπτωσης καθώς για την πρώτη δεν είχαμε στην διάθεσή μας πειραματικά στοιχεία. Το επαφασικό μοντέλο δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε καλό βαθμό σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών. Παρατηρώντας το διάγραμμα της δεύτερης περίπτωσης, οι τιμές που προβλέπει είναι σταθερά μικρότερες από τις τιμές του πειράματος.

Εγκάρσιο μέτρο απωλειών E''_T

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.8 ($U_f=40\%,f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.8 ($U_f=65\%,f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επαφασικού μοντέλου αποτυπώνεται το εγκάρσιο μέτρο απωλειών. Το E''_T αυξάνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνουν τα πειραματικά δεδομένα της δεύτερης περίπτωσης καθώς για την πρώτη δεν είχαμε στην διάθεσή μας πειραματικά στοιχεία. Το επαφασικό μοντέλο δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε καλό βαθμό σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών. Παρατηρώντας το διάγραμμα της δεύτερης περίπτωσης, οι τιμές που προβλέπει είναι σταθερά μικρότερες από τις τιμές του πειράματος. Τέλος παρατηρούμε ότι ο ρυθμός της αύξησης του E''_T μεγαλώνει για $T>80^\circ\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης της μήτρας άρα και του σύνθετου υλικού.

Δυναμικό διάμηκες μέτρο αποθηκεύσεως σε διάτμηση G'_{LT}

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.9 ($U_f=40\%,f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.9 ($U_f=65\%,f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επαφασικού μοντέλου αποτυπώνεται το δυναμικό διάμηκες μέτρο αποθηκεύσεως σε διάτμηση. Το G'_{LT} όπως βλέπουμε στα παραπάνω διαγράμματα μειώνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία των δοκιμίων. Επίσης παρατηρούμε μία αναλογία στον τρόπο μεταβολής ανάλογη με αυτή των υπόλοιπων μέτρων αποθηκεύσεως.

Δυναμικό διάμηκες μέτρο απωλειών σε Διάτμηση G''_{LT}

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.10 ($U_f=40\%,f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.10 ($U_f=65\%,f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επαφασικού μοντέλου αποτυπώνεται το δυναμικό διάμηκες μέτρο απωλειών σε διάτμηση. Το G''_{LT} όπως βλέπουμε στα παραπάνω διαγράμματα αυξάνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία των δοκιμίων, ακολουθεί δηλαδή όμοιο τρόπο μεταβολής με τα υπόλοιπα δυναμικά μέτρα απωλειών. Τέλος παρατηρούμε ότι ο ρυθμός της αύξησης του G''_{LT} βλέπουμε ότι

μεγαλώνει για $T > 80^{\circ}\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης της μήτρας άρα και του σύνθετου υλικού.

Διαγράμματα Δυναμικών Ελαστικών Σταθερών υπό γωνία φόρτισης θ

Στα διαγράμματα που αφορούν την φόρτιση υπό γωνία, για λόγους ομαλοποίησης των διαγραμμάτων αλλά και οικονομίας υπολογιστικού χρόνου χρησιμοποιήσαμε την εντολή “fit ('cubicinterp')- Piecewise cubic interpolation” του Matlab ώστε να κάνουμε το λεγόμενο “curve fitting”.

Διαφορετικά θα απαιτούνταν πολύ περισσότερα σημεία και υπολογιστικός χρόνος ώστε να έχουμε ομαλή μορφή στα εξαγόμενα διαγράμματα.

Δυναμικό Μέτρο Αποθηκεύσεως υπό γωνία φόρτισης E'_{θ}

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.11α ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.11α ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επταφασικού μοντέλου, αποτυπώνεται το δυναμικό μέτρο αποθηκεύσεως για κάθε διαφορετική γωνία φόρτισης από 0° έως 90° μοίρες σε συνάρτηση με την θερμοκρασία. Το E'_{θ} παρατηρούμε ότι μειώνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία.

Για να μπορέσουμε να δούμε καλύτερα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προαναφερόμενα διαγράμματα, τα απεικονίσαμε ξανά, αλλά αυτή την φορά σε σχέση με την γωνία φόρτισης, για κάθε μια θερμοκρασία του σύνθετου υλικού. Έτσι προκύπτουν διαγράμματα 7.8.1.11β ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.11β ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) όπου φαίνεται καθαρά ότι το E'_{θ} μειώνεται απότομα σε σχέση με την γωνία φόρτισης από 0° μέχρι και τις 45° ενώ ακολουθεί μια ομαλότερη μείωση μέχρι τις 60° περίπου. Σε γωνία φόρτισης σε σχέση με τις ίνες 60° το μέτρο αποθηκεύσεως λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του. Σε γωνία ινών μεγαλύτερη από 60° το μέτρο αποθηκεύσεως αυξάνεται ελαφρά μέχρι και τις 90° .

Επίσης παρατηρούμε, όπως είναι αναμενόμενο από την θεωρία των συνθέτων υλικών [28β], ότι οι ακραίες τιμές που λαμβάνουμε για 0° και 90° αντιστοίχως, είναι οι τιμές E'_L και E'_T που έχουμε υπολογίσει στα προηγούμενα.

Οι τιμές των πειραματικών δεδομένων για όλες τις θερμοκρασίες και γωνίες φόρτισης ακολουθούν την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη του E'_{θ} . Η σύγκλιση που προκύπτει μεταξύ των πειραματικών δεδομένων και των τιμών οι οποίες προκύπτουν από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο μπορούμε να πούμε ότι είναι μέτρια, εκτός από τις γωνίες 0° , 75° και 90° που είναι ικανοποιητική στην 1^η περίπτωση εγκλείσματος και αντίστοιχα στις γωνίες 15° , 75° και 90° στην 2^η περίπτωση. Σε όλες τις περιπτώσεις τα πειραματικά δεδομένα εμφανίζονται να έχουν μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τις τιμές του θεωρητικού μοντέλου. Αυτό δεν συμβαίνει μόνο στην 1^η περίπτωση για γωνία φόρτισης 0° και $U_f=40\%, f=100\text{Hz}$ που είναι ανάποδα.

Τέλος παρατηρούμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας του εγκλείσματος U_f

οδηγεί και σε αύξηση του E'_{θ} , που είναι λογικό όπως είχαμε παρατηρήσει και στην μελέτη του στατικού μοντέλου. Οι καμπύλες που προκύπτουν και για τις δύο περιπτώσεις έχουν παρόμοια μορφή.

Δυναμικό μέτρο απωλειών υπό γωνία φόρτισης E''_{θ}

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.12α ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.12α ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επταφασικού μοντέλου, αποτυπώνεται το δυναμικό μέτρο απωλειών για κάθε διαφορετική γωνία φόρτισης από 0° έως 90° μοίρες σε συνάρτηση με την θερμοκρασία. Το E''_{θ} παρατηρούμε ότι αυξάνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία.

Για να μπορέσουμε να δούμε καλύτερα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προαναφερόμενα διαγράμματα, τα απεικονίσαμε ξανά, αλλά αυτή την φορά σε σχέση με την γωνία φόρτισης, για κάθε μια θερμοκρασία του σύνθετου υλικού. Έτσι προκύπτουν τα διαγράμματα 7.8.1.12β ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.12β ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) όπου φαίνεται καθαρά ότι το E''_{θ} αυξάνεται απότομα σε σχέση με την γωνία φόρτισης από 0° μέχρι και τις 15° για την 1^η περίπτωση που μελετήσαμε και αντίστοιχα από 0° μέχρι και τις 20° για την 2^η περίπτωση. Δηλαδή στις 15° και 20° λαμβάνει αντίστοιχα την μέγιστη τιμή. Στην συνέχεια για την 1^η περίπτωση παρατηρούμε μία απότομη μείωση της τιμής του E''_{θ} μέχρι τις 35° περίπου ενώ συνεχίζει να μειώνεται με μικρότερο ρυθμό μέχρι τις 60° που λαμβάνει την ελάχιστη τιμή. Στην συνέχεια αρχίζει να αυξάνεται ομαλά μέχρι και τις 90° . Αντίστοιχα στην 2^η περίπτωση μετά τις 20° έχουμε ομαλή σχετικά μείωση της τιμής του E''_{θ} μέχρι τις 60° που λαμβάνει την ελάχιστη τιμή. Τελικά και εδώ έχουμε ομαλή αύξηση μέχρι τις 90° . Αυτά φαίνονται και από το συγκριτικό διάγραμμα μεταξύ των δύο περιπτώσεων 7.8.3.16.

Επίσης παρατηρούμε, όπως είναι αναμενόμενο από την θεωρία των συνθέτων υλικών [28β], ότι οι ακραίες τιμές που λαμβάνουμε για 0° και 90° αντιστοίχως, είναι οι τιμές E'_L και E'_T που έχουμε υπολογίσει στα προηγούμενα.

Τέλος παρατηρούμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας εγκλείσματος U_f οδηγεί και σε μείωση του E''_{θ} , κάτι που είναι λογικό μια και οι απώλειες προέρχονται κυρίως από την περιοχή της μήτρας. Μάλιστα παρατηρώντας το συγκριτικό διάγραμμα των δύο περιπτώσεων φαίνεται ότι η αύξηση της περιεκτικότητας επηρεάζει και τον ρυθμό αύξησης του μέτρου απωλειών, ο οποίος μειώνεται αυξανόμενου του U_f .

Δυναμικό μέτρο αποθηκείσεως σε διάτμηση υπό γωνία φόρτισης G'_θ .

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.13α ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.13α ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επταφασικού μοντέλου, αποτυπώνεται το δυναμικό μέτρο αποθηκείσεως σε διάτμηση για κάθε διαφορετική γωνία φόρτισης από 0° έως 90° μοίρες, σε συνάρτηση την θερμοκρασία. Το G'_θ παρατηρούμε ότι μειώνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία.

Για να μπορέσουμε να δούμε καλύτερα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προαναφερόμενα διαγράμματα, τα απεικονίσαμε ξανά, αλλά αυτή την φορά σε σχέση με την γωνία φόρτισης, για κάθε μια θερμοκρασία του σύνθετου υλικού. Έτσι προκύπτουν τα διαγράμματα 7.8.1.13β ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.13β ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) όπου φαίνεται καθαρά ότι το G'_θ αυξάνεται απότομα σε σχέση με την γωνία φόρτισης από 0° μέχρι και τις 45° . Σε γωνία φόρτισης σε σχέση με τις ίνες 45° το μέτρο αποθηκείσεως σε διάτμηση λαμβάνει την μέγιστη τιμή του. Στην συνέχεια μειώνεται απότομα μέχρι και τις 90° . Παρατηρούμε όπως είναι αναμενόμενο από την θεωρία των συνθέτων υλικών [28β], ότι τα διαγράμματα που προκύπτουν και στις δύο περιπτώσεις είναι συμμετρικά ως προς την γωνία φόρτισης 45° , έτσι ώστε οι συμπληρωματικές γωνίες εκατέρωθεν αυτής να δίνουν τις ίδιες τιμές. Τέλος παρατηρούμε ότι οι ακραίες τιμές που λαμβάνουμε για 0° και 90° αντιστοίχως, είναι η τιμή του G'_{LT} που έχουμε υπολογίσει στα προηγούμενα.

Δυναμικό μέτρο απωλειών σε διάτμηση υπό γωνία φόρτισης G''_θ .

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.14α ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.14α ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επταφασικού μοντέλου, αποτυπώνεται το δυναμικό μέτρο απωλειών σε διάτμηση για κάθε διαφορετική γωνία φόρτισης από 0° έως 90° μοίρες, σε συνάρτηση με την θερμοκρασία. Το G''_θ παρατηρούμε ότι αυξάνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, κάτι που είναι αναμενόμενο. Ο ρυθμός της αύξησης του G''_θ επιταχύνεται για $T > 80^\circ\text{C}$, λόγω του ότι πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης της μήτρας άρα και του σύνθετου υλικού.

Για να μπορέσουμε να δούμε καλύτερα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προαναφερόμενα διαγράμματα, τα απεικονίσαμε ξανά, αλλά αυτή την φορά σε σχέση με την γωνία φόρτισης, για κάθε μια θερμοκρασία του σύνθετου υλικού. Έτσι προκύπτουν τα διαγράμματα 7.8.1.14β ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.14β ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$). Στην 1^η περίπτωση φαίνεται καθαρά ότι το G''_θ αυξάνεται απότομα σε σχέση με την γωνία φόρτισης από 0° μέχρι και τις 45° . Σε γωνία φόρτισης σε σχέση με τις ίνες 45° , το μέτρο απωλειών σε διάτμηση λαμβάνει την μέγιστη τιμή του. Στην συνέχεια μειώνεται απότομα μέχρι και τις 90° . Ο ρυθμός αύξησης αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας του συνθέτου υλικού.

Στην δεύτερη περίπτωση φαίνεται ότι λόγω της αύξησης του U_f , υπάρχει μια αλλαγή στην μορφή του διαγράμματος σε σχέση με την 1^η περίπτωση. Από 20°C μέχρι και 60°C παρατηρούμε αρχικά ομαλή αύξηση της τιμής του G''_{θ} για γωνίες φόρτισης 0° μέχρι 30° ενώ στην συνέχεια έχουμε μικρή μείωση από τις 30° μέχρι 45°. Στην συνέχεια το διάγραμμα ακολουθεί συμμετρική αυξομείωση σε σχέση με τις 45° μέχρι και τις 90°. Επίσης διαπιστώνουμε ότι το G''_{θ} αυξάνεται σχετικά ομαλά για θερμοκρασίες από 70°C μέχρι 110°C, σε σχέση με την γωνία φόρτισης από 0° μέχρι και τις 45° όπου λαμβάνει μέγιστη τιμή και στην συνέχεια μειώνεται με τον ίδιο ρυθμό μέχρι τις 90°. Αυτά φαίνονται καλύτερα στο συγκριτικό διάγραμμα μεταξύ των δύο περιπτώσεων 7.8.3.17 όπου βλέπουμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα οδηγεί σε μείωση των απωλειών, καθώς και σε μείωση του ρυθμού αύξησης των απωλειών σε σχέση με την αύξηση της θερμοκρασίας.

Παρατηρούμε όπως είναι αναμενόμενο από την θεωρία των συνθέτων υλικών [28β], ότι τα διαγράμματα που προκύπτουν και στις δύο περιπτώσεις είναι συμμετρικά ως προς την γωνία φόρτισης 45°, έτσι ώστε οι συμπληρωματικές γωνίες εκατέρωθεν αυτής να δίνουν τις ίδιες τιμές. Τέλος παρατηρούμε ότι οι ακραίες τιμές που λαμβάνουμε για 0° και 90° αντιστοίχως, είναι η τιμή του G''_{LT} που έχουμε υπολογίσει στα προηγούμενα.

Δυναμικός λόγος Poisson υπό γωνία φόρτισης ν'_{θ}

Στα διαγράμματα των εικόνων 7.8.1.15α ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.15α ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$) που προέκυψαν από τη μελέτη του επταφασικού μοντέλου, αποτυπώνεται ο δυναμικός λόγος Poisson για κάθε διαφορετική γωνία φόρτισης από 0° έως 90° μοίρες, σε συνάρτηση την θερμοκρασία.

Ο ν'_{θ} και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι παραμένει σταθερός στις 0° σε συνάρτηση με την θερμοκρασία. Μεταξύ 15° και 60° αυξάνεται ενώ για 75° έως 90° βαίνει μειούμενος όσο αυξάνεται η θερμοκρασία. Επίσης παρατηρούμε μία μεταβολή στον ρυθμό αύξησης και μείωσης του ν'_{θ} . Συγκεκριμένα μεταξύ 0° και 15° ο ρυθμός της αύξησης μεγαλώνει, ενώ αντίστοιχα μεταξύ 15° και 60° έχουμε μία μείωση του ρυθμού αύξησης σε συνάρτηση με την θερμοκρασία. Από 60° μέχρι 90° ο ν'_{θ} μειώνεται καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται, με σταδιακή αύξηση του ρυθμού μείωσης σε σχέση με την γωνία φόρτισης.

Για να μπορέσουμε να δούμε καλύτερα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προαναφερόμενα διαγράμματα, τα απεικονίσαμε ξανά, αλλά αυτή την φορά σε σχέση με την γωνία φόρτισης, για κάθε μια θερμοκρασία του σύνθετου υλικού. Έτσι προκύπτουν τα διαγράμματα 7.8.1.15β ($U_f=40\%, f=100\text{Hz}$) και 7.8.3.15β ($U_f=65\%, f=110\text{Hz}$). Ο ν'_{θ} στην 1^η περίπτωση φαίνεται καθαρά ότι αυξάνεται από τις 0° μέχρι τις 29° περίπου, όπου παρουσιάζει μέγιστο ενώ στην συνέχεια βαίνει μειούμενος μέχρι τις 90°. Στην 2^η περίπτωση διαπιστώνουμε παρόμοια συμπεριφορά όμως η μέγιστη τιμή παρουσιάζεται στις 32° περίπου. Επίσης παρατηρούμε και στις

δύο περιπτώσεις μια μικρή ολίσθηση της μέγιστης τιμής του ν'_θ προς μικρότερη γωνία φόρτισης όσο αυξάνεται η θερμοκρασία του σύνθετου υλικού. Επιπρόσθετα για γωνίες φόρτισης μέχρι 65° περίπου, η αύξηση της θερμοκρασίας συνεπάγεται και αύξηση του δυναμικού λόγου Poisson. Για μεγαλύτερες γωνίες φόρτισης μέχρι τις 90° η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί σε μείωση του δυναμικού λόγου Poisson. Μάλιστα όσο μεγαλώνει η γωνία φόρτισης τόσο περισσότερο μειώνεται το ν'_θ .

7.8.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η απόκλιση των τιμών των ελαστικών σταθερών αλλά και των λόγων Poisson, που εξήχθησαν από το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο, σε σύγκριση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα, αν και γενικά μπορεί να θεωρηθεί μικρή είναι αναμενόμενη, λόγω των ατελειών στην κατασκευή των σύνθετων υλικών που αναφέραμε στα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων των στατικών σχέσεων στην παράγραφο 5.10.

Συμπερασματικά και για τις δύο περιπτώσεις περιεκτικότητας μπορούμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα των δυναμικών ελαστικών σταθερών που προκύπτουν από το **θεωρητικό κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο** είναι αρκετά ικανοποιητικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ANSYS

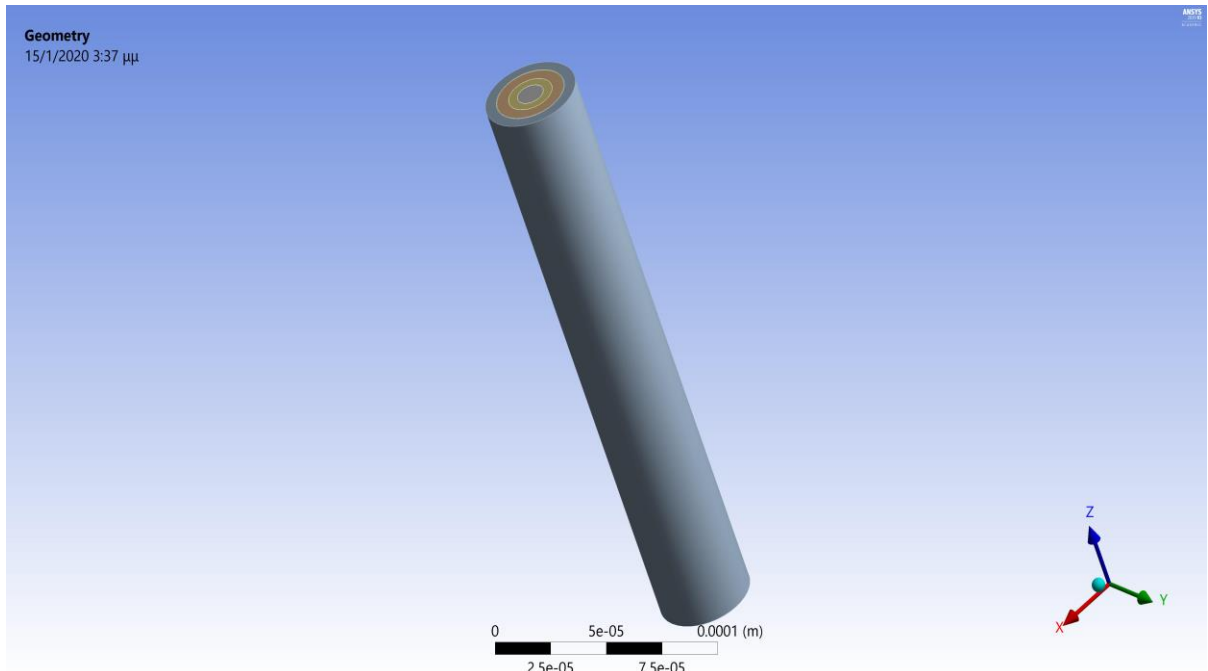
Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα που εξήχθησαν στα προηγούμενα κεφάλαια από το θεωρητικό επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο. Το μοντέλο που θα ακολουθήσουμε απαρτίζεται, από επτά φάσεις με διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες και την παραδοχή ότι είναι ομογενείς και ισότροπες. Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων, στοιχείων μέσω του εμπορικού προγράμματος ANSYS, με σκοπό να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου, με τα αντίστοιχα θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα (όπου αυτά υφίστανται). Αρχικά θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις στατικές ελαστικές σταθερές και στην συνέχεια τις αντίστοιχες δυναμικές όπως ακριβώς κάναμε και στην θεωρητική μελέτη.

Δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε την ανωτέρω μέθοδο για να υπολογίσουμε τα ακόλουθα μεγέθη του σύνθετου υλικού:

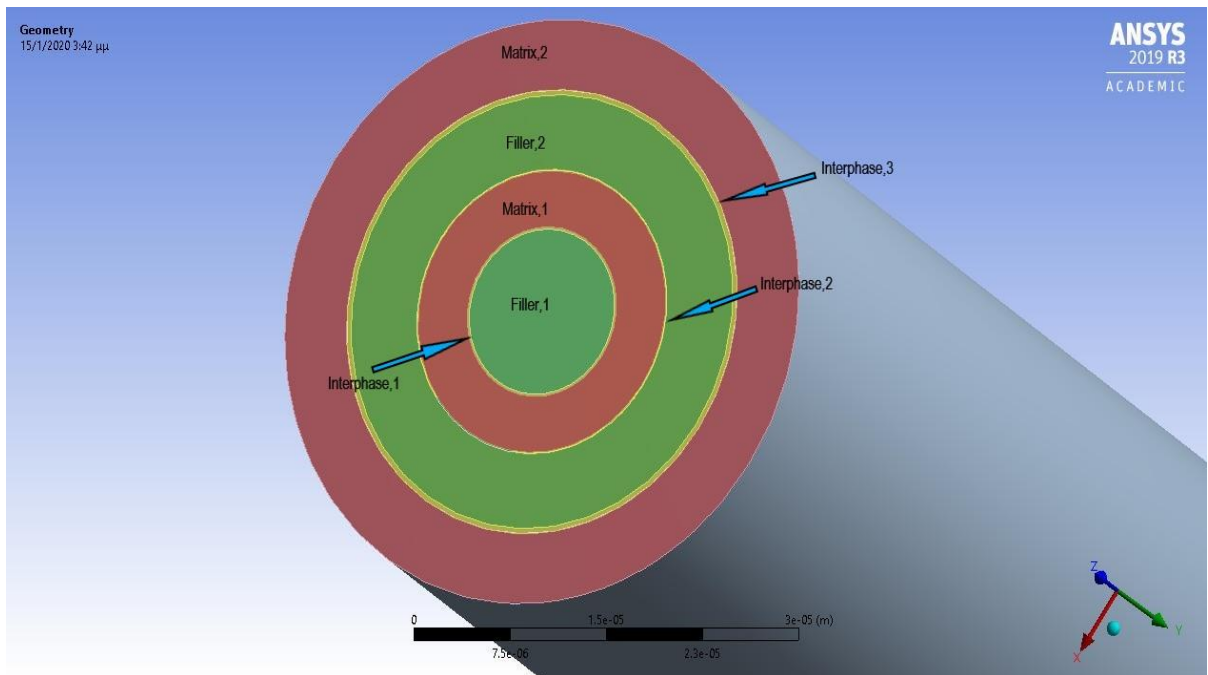
- Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L του συνθέτου (longitudinal modulus of elasticity)
- Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T του συνθέτου (transverse modulus of elasticity)
- Το λόγο Poisson ν_{LT} του συνθέτου, δηλαδή τον αρνητικό λόγο της εγκάρσιας προς την διαμήκη τροπή.
- Το λόγο Poisson ν_{TT} του συνθέτου, δηλαδή τον αρνητικό λόγο της διαμήκους προς την εγκάρσια τροπή.

8.1 ΣΤΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ-ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ- ΦΟΡΤΙΣΗ

Στις παρακάτω εικόνες φαίνεται σχηματικά το μοντέλο που προσπαθήσαμε να μελετήσουμε. Ο κάθε κύλινδρος συμβολίζει μία φάση, οπότε έχουμε επτά κυλίνδρους τον ένα μέσα στον άλλο.



Εικόνα 8.1 Κυλινδρικό επαφασικό μοντέλο



Εικόνα 8.2 Κυλινδρικό Επαφασικό μοντέλο

Όπως φαίνεται από τις παραπάνω εικόνες 8.1 και 8.2 προκύπτουν οι παρακάτω επτά περιοχές R (Regions) κατά την μοντελοποίηση ως ακολούθως:

$R_{f,1} = R_1$ το «1» συμβολίζει την 1^η φάση (1^η περιοχή εγκλείσματος) ίνας γυαλιού.

$R_{i,1} = R_2$ το «2» συμβολίζει την 2^η φάση (1^η περιοχή περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$R_{m,1} = R_3$ το «3» συμβολίζει την 3^η φάση (1^η περιοχή μήτρας) εποξικής ρητίνης

$R_{i,2} = R_4$ το «4» συμβολίζει την 4^η φάση (2^η περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$R_{f,2} = R_5$ το «5» συμβολίζει την 5^η φάση (2^η περιοχή με έγκλεισμα)

$R_{i,3} = R_6$ το «6» συμβολίζει την 6^η φάση (3^η περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

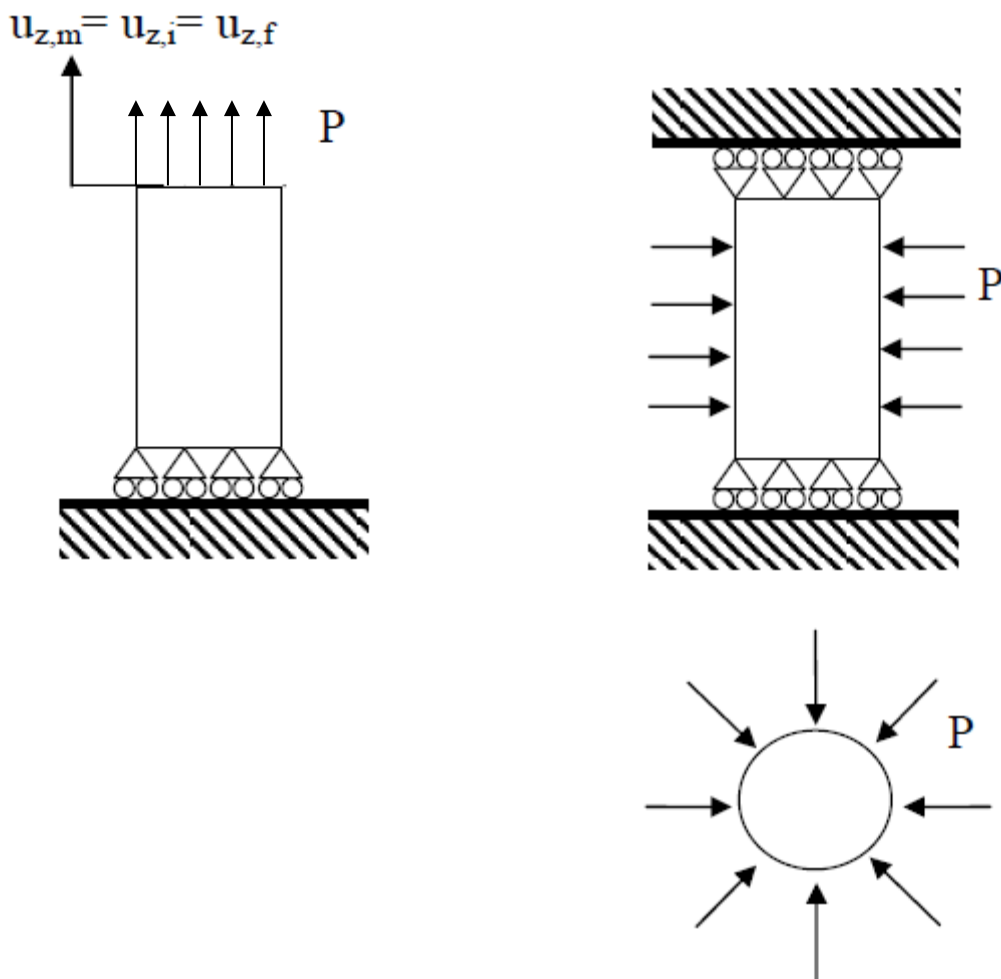
$R_{m,2} = R_7$ το «7» συμβολίζει την 7^η φάση (2^η περιοχή με μήτρα)

Επαναλαμβάνουμε ότι οι παραπάνω δείκτες των περιοχών έχουν ως εξής:

- Ο δείκτης «m» είναι συντομογραφία του «m = matrix» και ορίζει τη μήτρα.
- Ο δείκτης «f» είναι συντομογραφία του «f = fiber» και ορίζει το έγκλεισμα (ίνα γυαλιού).
- Ο δείκτης «i» είναι συντομογραφία «i = interphase region» και ορίζει την ενδιάμεση φάση.

Στην εικόνα 8.2 όπου φαίνονται οι παραπάνω επτά φάσεις, με πράσινο είναι οι δύο περιοχές του εγκλείσματος, με κόκκινο οι δύο περιοχές της μήτρας και με κίτρινο οι τρεις περιοχές της ενδιάμεσου φάσεως. Ως ελαστικές ιδιότητες για των ενδιάμεσων φάσεων θεωρούμε τις μέσες τιμές που έχουμε υπολογίσει θεωρητικά στο κεφάλαιο 4 και αναγράφονται στους πίνακες στ.1,στ.2,στ.3,ζ.1,ζ.2,ζ.3,η.1,η.2 και η.3.

Στην μελέτη που θα κάνουμε με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων, θεωρούμε ότι ισχύουν οι κάτωθι συνοριακές συνθήκες της εικόνας 8.3 θεωρώντας το μοντέλο μακροσκοπικά ως ομογενές σώμα.



α. Συνοριακές συνθήκες για την διερεύνηση των E_L και ν_{LT}

β. Συνοριακές συνθήκες για την διερεύνηση του E_T

Εικόνα 8.3

Με u συμβολίζουμε την μετατόπιση στο άνω σύνορο, ειδικότερα με u_f , u_i , u_m , ορίζουμε τις μετατοπίσεις στο άνω σύνορο, της ίνας, της ενδιάμεσου φάσεως και μήτρας αντίστοιχα.

Στην εικόνα 8.2.α παρουσιάζονται οι συνοριακές συνθήκες και η φόρτιση που επιλέξαμε για να υπολογίσουμε το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας (E_L , longitudinal modulus of elasticity) και τον διάμηκες λόγο Poisson ν_{LT} . Στο άνω ελεύθερο άκρο του μοντέλου θεωρούμε ότι η μετατόπιση θα είναι η ίδια και για τα τρία υλικά και κατ' επέκταση και για τις επτά φάσεις. Στο κάτω άκρο του κυλινδρικού μοντέλου έχουμε πάκτωση που δεν επιτρέπει την μετακίνηση του κάτω συνόρου σε καμία από τις διευθύνσεις x , y , z . Επιλέξαμε αυτές τις συνοριακές συνθήκες γιατί προσπαθούμε να προσομοιάσουμε το πείραμα που περιγράφεται στην παραπομπή [55] για την εξαγωγή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας (E_L) και του λόγου Poisson (ν_{LT}).

Στην εικόνα 8.2.β παρουσιάζονται οι συνοριακές συνθήκες και η φόρτιση που επιλέξαμε για να υπολογίσουμε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας (E_T , transverse

modulus of elasticity) του συνθέτου υλικού. Στην περίπτωση αυτή οι συνοριακές συνθήκες τόσο του άνω όσο και του κάτω άκρου του μοντέλου, δεν επιτρέπουν την μετατόπιση και των δύο συνόρων προς κάποια από τις διευθύνσεις x, y και z. Ουσιαστικά είναι σαν να έχουμε πακτώσει το μοντέλο στα δύο του άκρα.

8.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

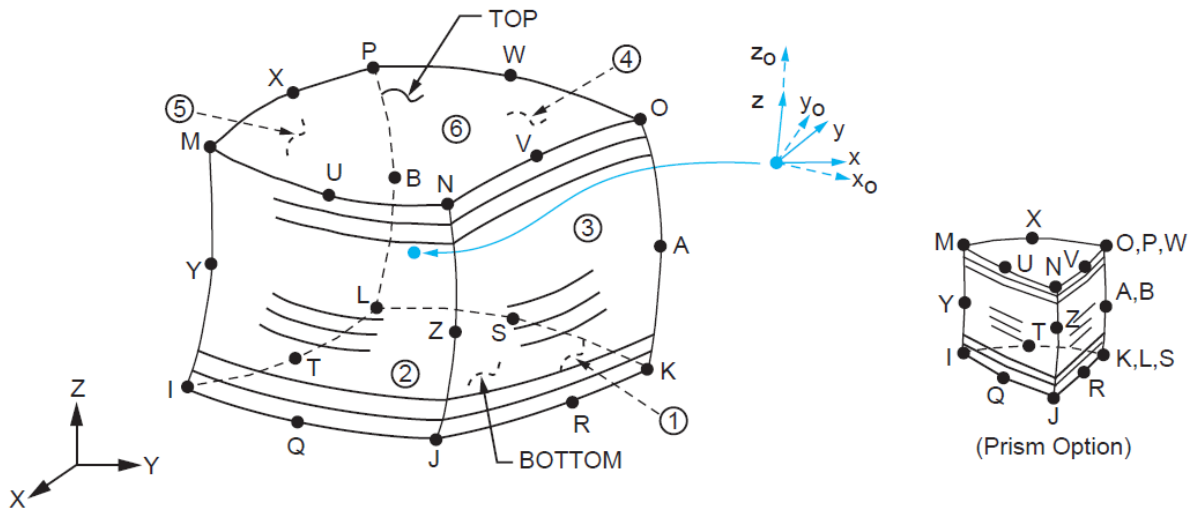
Η μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία έλαβε χώρα χρησιμοποιώντας το εμπορικό πρόγραμμα “ANSYS 2019 R3 ”[56]. Για την εφαρμογή των πεπερασμένων στοιχείων όπως ήδη αναφέραμε στα προηγούμενα, δημιουργήσαμε δύο αριθμητικά μοντέλα για την υπολογιστική εύρεση των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson. **Στην πρώτη περίπτωση έχουμε εφελκυσμό του κυλινδρικού μοντέλου, ενώ στη δεύτερη περίπτωση εφαρμόζουμε υδροστατική πίεση γύρω από αυτό.**

Λόγω της κυλινδρικής γεωμετρίας του μοντέλου, αλλά και λόγω του γεγονότος ότι προσομοιάζουμε ένα δομικό υλικό στο οποίο αναπτύσσονται τρισδιάστατα τασικά πεδία, είμαστε αναγκασμένοι να δημιουργήσουμε ένα τρισδιάστατο μοντέλο. Για την ανάπτυξη του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε η λειτουργία του εμπορικού προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ANSYS WORKBENCH 2019 R3 [56].

Για την διακριτοποίηση του σύνθετου υλικού, που λόγω της κυλινδρικής γεωμετρίας είναι αρκετά δύσκολη, χρησιμοποιήθηκε το 3D εικοσακομβικό στοιχείο του ANSYS SOLID186, του οποίου η γραφική απεικόνιση φαίνεται στην Εικόνα 8.4. Το στοιχείο αυτό έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Είναι υψηλότερης τάξης στοιχείο άρα μεγαλύτερης ακρίβειας από το 3D ANSYS SOLID185.

- Έχει 20 κόμβους
- Έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας μετατόπισης ανά κόμβο.
- Παρουσιάζει συμπεριφορά τετραγωνικής μετατόπισης.
- Παρουσιάζει ορθότροπες μηχανικές ιδιότητες
- Υποστηρίζει πλαστική, υπερελαστική συμπεριφορά, ερπυσμό, μεγάλες παραμορφώσεις και γενικότερα πολύπλοκες συνθέσεις σχεδόν ασυμπίεστων ελαστοπλαστικών υλικών και πλήρως ασυμπιεσμένων υπερελαστικών υλικών
- Δέχεται ως παραμέτρους εισόδου τον αριθμό, το πάχος και τον προσανατολισμό των στρώσεων.



x_o = Element x-axis if ESYS is not supplied.

x = Element x-axis if ESYS is supplied.

Εικόνα 8.4 Γραφική αναπαράσταση του 3D SOLID186 element of ANSYS.

Για την μοντελοποίηση με τα πεπερασμένα στοιχεία ακολουθούμε ορισμένους κανόνες και μερικές πρακτικές, που μας βοηθούν ώστε να προσεγγίσουμε τα προβλήματα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι καλά ορισμένα και να δίνουν λύση καθώς και τα αποτελέσματα που θα προκύψουν να έχουν ικανοποιητική ακρίβεια.

α. Για να πετύχουμε όσο το δυνατόν καλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα προσπαθούμε να χρησιμοποιούμε όσο πιο μικρά μοντέλα μπορούμε, ώστε κατά την διακριτοποίηση να έχουμε πιο λίγα στοιχεία με όσο πιο απλές συναρτήσεις σχήματος γίνεται. Σε παλαιότερες εκδόσεις του προγράμματος ANSYS (Apdl) έπρεπε να επιλέξουμε εμείς τα κατάλληλα στοιχεία ανάλογα με το είδος του προβλήματος (δοκός, κέλυφος, 1D, 2D, 3D κ.τ.λ.) το οποίο απαιτούσε πολύ προσοχή και εμπειρία ώστε να προκύψουν σωστά αποτελέσματα. Στην έκδοση του ANSYS που χρησιμοποιήσαμε το ίδιο το πρόγραμμα επιλέγει αυτόματα τα καταλληλότερα στοιχεία ανάλογα την γεωμετρία του μοντέλου μας. Επιπρόσθετα δεν είναι εφικτό να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το κατάλληλο μέγεθος του στοιχείου για την ικανοποιητική προσέγγιση του πεδίου μετατοπίσεων του προβλήματός μας. Στο κομμάτι αυτό βοηθάει πολύ η προηγούμενη αποκτηθείσα εμπειρία του χρήστη ή με την εκτέλεση επαναληπτικών δοκιμών επί του μοντέλου. Επίσης γενικός κανόνας είναι ότι όσο μικρότερα είναι τα στοιχεία άρα πυκνότερος και ο κάναβος που θα χρησιμοποιήσουμε, τόσο αυξάνεται η πιθανότητα το πρόβλημα να έχει λύση και οδηγηθούμε σε καλή σύγκλιση. Όμως αυτό έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος, οπότε με βάση την εμπειρία και τον διαθέσιμο χρόνο που έχουμε, θα πρέπει να χρησιμοποιούνται στοιχεία που δίνουν λύση με ικανοποιητική ακρίβεια και σε εύλογο υπολογιστικό χρόνο [57].

β. Σε συμμετρικά προβλήματα, μπορούμε να περιορίσουμε το χωρίο επίλυσης, θέτοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα επίπεδα συμμετρίας.

γ. Σε αξονοσυμμετρικά προβλήματα, αντίστοιχα με την παραπάνω σημείωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τομέα μόνο του χωρίου μας ή ακόμα και να σχεδιάσουμε το πρόβλημα σε δύο διαστάσεις ενώ η λύση θα δοθεί κανονικά και στις τρεις διαστάσεις. Με τον τρόπο αυτό κερδίζουμε σε ευκολία σχεδίασης της γεωμετρίας καθώς και σε υπολογιστικό χρόνο. Εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ειδικά επίπεδα «αξονοσυμμετρικά» στοιχεία. Τα προβλήματα αυτά πρέπει να επιδεικνύουν συμμετρία και ως προς την γεωμετρία αλλά και ως προς την φόρτιση και τις συνοριακές συνθήκες.

8.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Με την ανάλυση που κάναμε έχουμε σαν σκοπό να εξάγουμε ως αποτελέσματα τις ελαστικές σταθερές του κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου δηλαδή τα ακόλουθα:

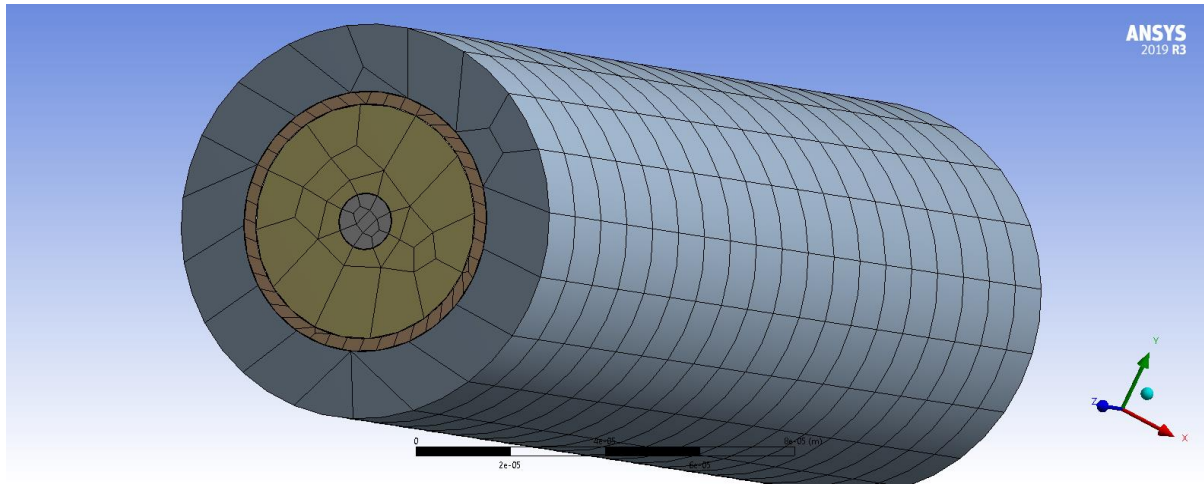
- Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L
- Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T
- Το λόγο Poisson ν_{LT}
- Το λόγο Poisson ν_{TT} (Τον θεωρήσουμε δεδομένο από τα θεωρητικά αποτελέσματα που προέκυψαν στο κεφάλαιο 6, ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας.)

Όπως ήδη προαναφέραμε η προσομοίωση στην γεωμετρία θα γίνει με την χρήση επτά κυλίνδρων, με τον ένα μέσα στον άλλο, έτσι ώστε να δημιουργηθούν επτά κυλινδρικά σώματα όπως ακριβώς φαίνεται στην εικόνα 8.2. Το 1^ο σώμα έχει συμπαγή κυλινδρική γεωμετρία ενώ τα υπόλοιπα σώματα είναι έξι κοίλοι κύλινδροι. Κάθε σώμα προσομοιάζει μία από τις επτά φάσεις του μοντέλου μας.

8.3.1 ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΕ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ U_f

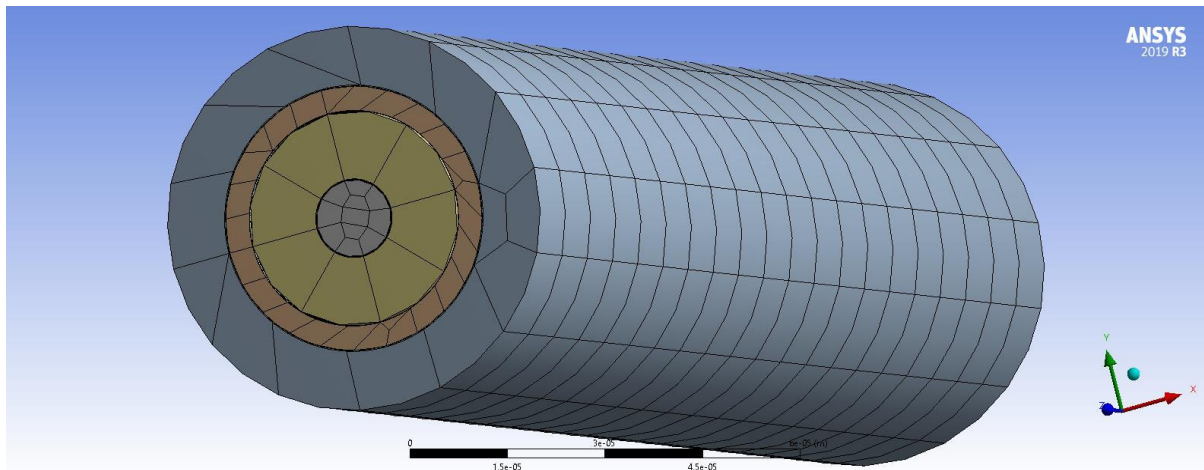
Στις παρακάτω εικόνες αποτυπώνονται έξι κυλινδρικά μοντέλα (υπολογιστικά χωρία) με επτά ομόκεντρους κυλίνδρους το καθένα. Κάθε μοντέλο διαφέρει στην περιεκτικότητα σε εγκλείσμα, μήτρα και ενδιάμεση φάση. Η γεωμετρία των μοντέλων αυτών προήρθε από τα αποτελέσματα των ακτίνων (r) για κάθε φάση και σε κάθε περιεκτικότητα εγκλείσματος όπως αναγράφονται στον πίνακα γ του κεφαλαίου 3. Το μήκος των κυλινδρικών μοντέλων είναι 260μm. Τα υπολογιστικά μοντέλα θα υποβληθούν σε φορτίσεις και τα αποτελέσματα που θα εξαχθούν, θα τα συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα των θεωρητικών λύσεων που αναγράφονται στο κεφάλαιο 5.

1^η περίπτωση $U_f=10\%$, $U_i=0.31644\%$, $U_m=89.68356\%$



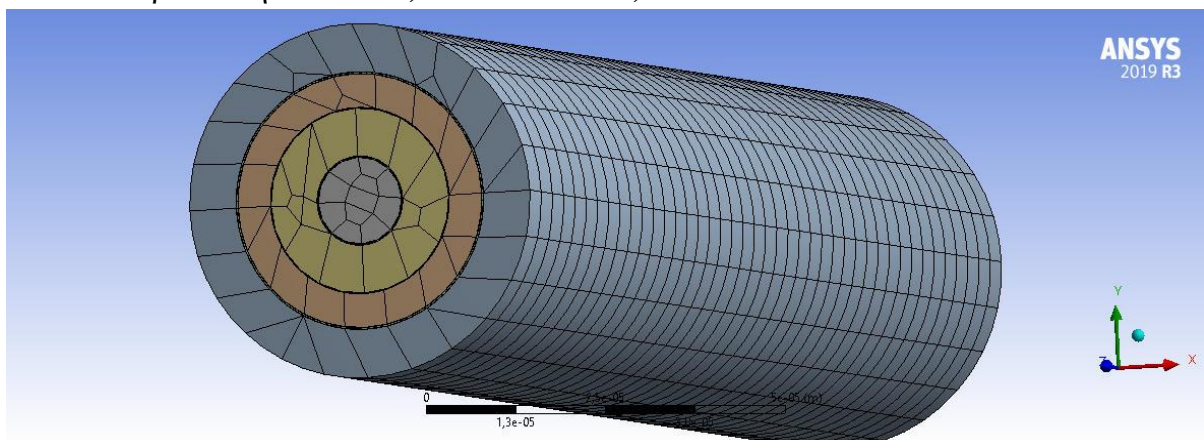
Εικόνα 8.5 Διακριτοποίηση μοντέλου $U_f=10\%$

2^η περίπτωση $U_f=20\%$, $U_i=1,12512\%$, $U_m=78,87488\%$



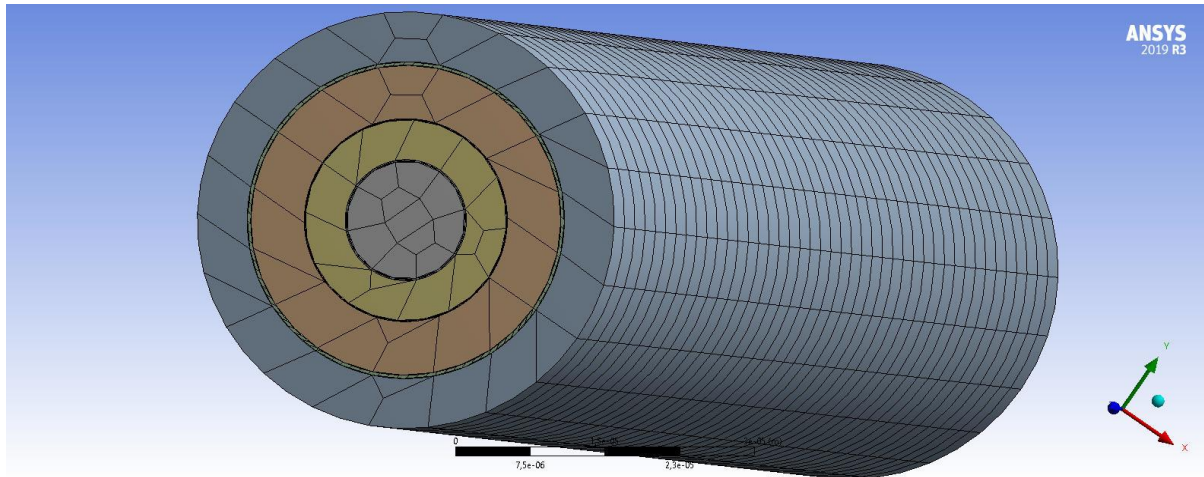
Εικόνα 8.6 Διακριτοποίηση μοντέλου $U_f=20\%$

3^η περίπτωση $U_f=30\%$, $U_i=2.21508\%$, $U_m=67.78492\%$



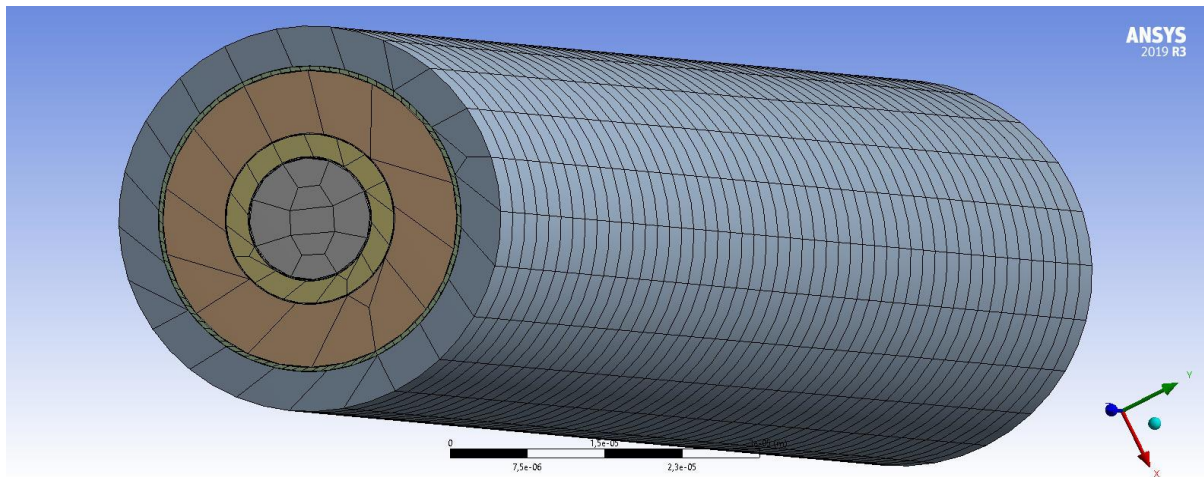
Εικόνα 8.7 Διακριτοποίηση μοντέλου $U_f=30\%$

4^η περίπτωση $U_f = 40\%$, $U_i = 3.37536\%$, $U_m = 56.62464\%$



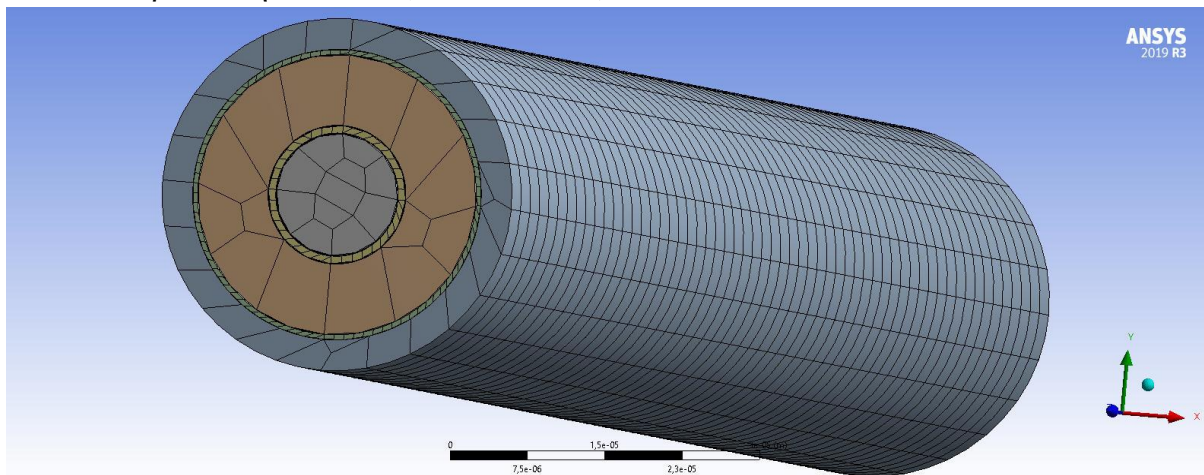
Εικόνα 8.8 Διακριτοποίηση μοντέλου $U_f = 40\%$

5^η περίπτωση $U_f = 50\%$, $U_i = 4.395\%$, $U_m = 45.605\%$



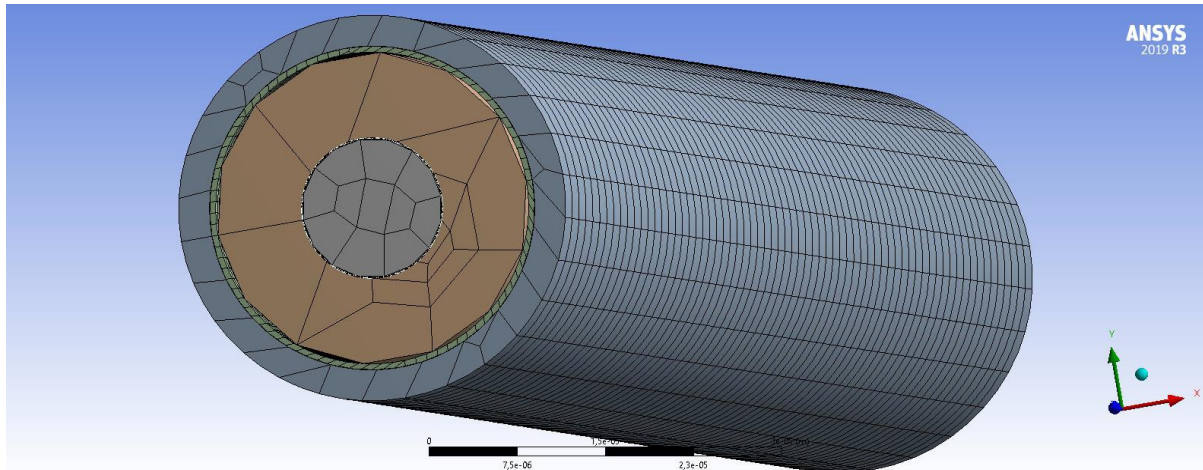
Εικόνα 8.9 Διακριτοποίηση μοντέλου $U_f = 50\%$

6^η περίπτωση $U_f = 60\%$, $U_i = 5.063\%$, $U_m = 34.937\%$



Εικόνα 8.10 Διακριτοποίηση μοντέλου $U_f = 60\%$

7^η περίπτωση $U_f = 65\%$, $U_i = 5.199\%$, $U_m = 29.80071\%$



Εικόνα 8.11 Διακριτοποίηση μοντέλου $U_f = 65\%$

Ιδιότητες Ίνας, $E_f = 70 \text{ GPa}$, $\nu_f = 0.2$
Ιδιότητες Μήτρας, $E_m = 3.5 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.35$

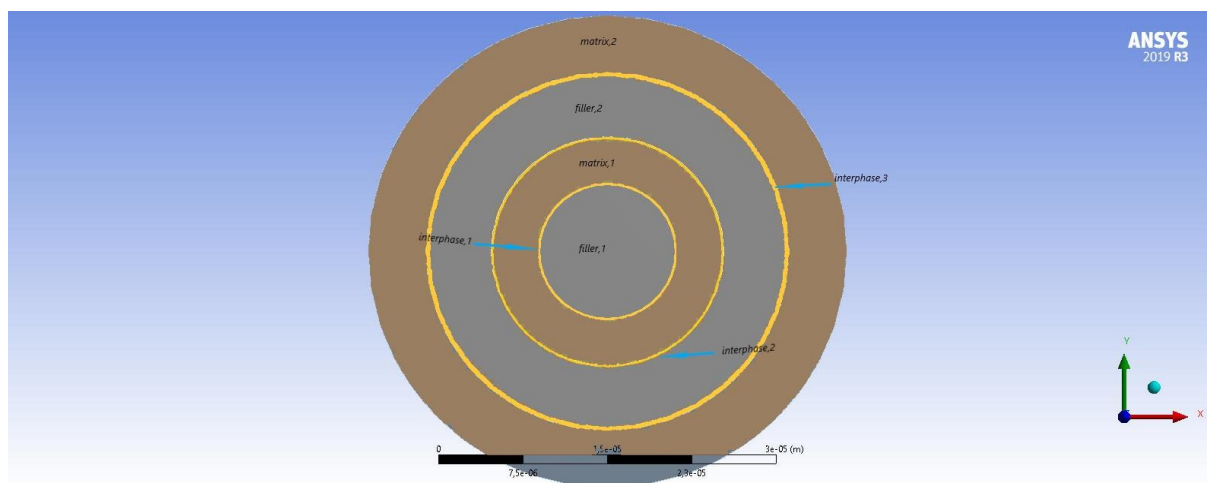
Εικόνα 8.12 Τιμές ελαστικών σταθερών

8.3.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Όπως έχουμε προαναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια η ενδιάμεση φάση είναι το κυλινδρικό χωρίο που σχηματίζεται μεταξύ των φάσεων μήτρας και εγκλείσματος. Οι ελαστικές σταθερές της εκάστοτε περιοχής ενδιάμεσου φάσεως (τρεις περιοχές στο επταφασικό μοντέλο), όπως έχουμε ήδη παρουσιάσει δεν είναι σταθερά αλλά μεταβάλλονται αναλόγως της ακτίνας (r) ακολουθώντας παραβολική μεταβολή. Έχουμε υποθέσει ότι το τμήμα της ενδιάμεσου φάσεως που βρίσκεται πιο κοντά στην ίνα έχει ελαστικές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές του εγκλείσματος, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτό το σύνορο και πλησιάζουμε την μήτρα, τότε οι μηχανικές ιδιότητες ταυτίζονται με αυτές της μήτρας. Στην μοντελοποίηση που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα αναλόγως της μεταβολής της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα μεταβάλλονται και οι τιμές για τα $E_{i(1,2,3)}$, $G_{i(1,2,3)}$ και $\nu_{i(1,2,3)}$. Παρακάτω παρουσιάζουμε τον πίνακα με τις εξαχθείσες μέσες τιμές των ελαστικών σταθερών και του λόγου Poisson των τριών ενδιάμεσων φάσεων, αναλόγως της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του συνθέτου υλικού. Θεωρήσαμε την περίπτωση της μέγιστης επίδρασης του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. (Αναλυτικότερη περιγραφή στους πίνακες στ(1,2,3), ζ(1,2,3) και η(1,2,3) του κεφαλαίου 4).

U_f	1 ^η ενδιάμεση φάση			2η ενδιάμεση φάση			3η ενδιάμεση φάση		
	E_i (Gpa)	G_i (Gpa)	ν_i	E_i (Gpa)	G_i (Gpa)	ν_i	E_i (Gpa)	G_i (Gpa)	ν_i
0,10	25.5867	10.8255	0.3002	25.6713	10.8620	0.3000	25.6539	10.8545	0.3000
0,20	25.5360	10.8036	0.3003	25.6837	10.8674	0.3000	25.6235	10.8414	0.3001
0,30	25.5131	10.7937	0.3003	25.7012	10.8749	0.2999	25.5846	10.8246	0.3002
0,40	25.5177	10.7957	0.3003	25.7188	10.8825	0.2999	25.5433	10.8067	0.3003
0,50	25.5510	10.8101	0.3003	25.7273	10.8862	0.2999	25.5042	10.7898	0.3004
0,60	25.6161	10.8382	0.3001	25.7065	10.8772	0.2999	25.4702	10.7752	0.3004
0,65	25.6621	10.8580	0.3000	25.6712	10.8619	0.3000	25.4559	10.7690	0.3005

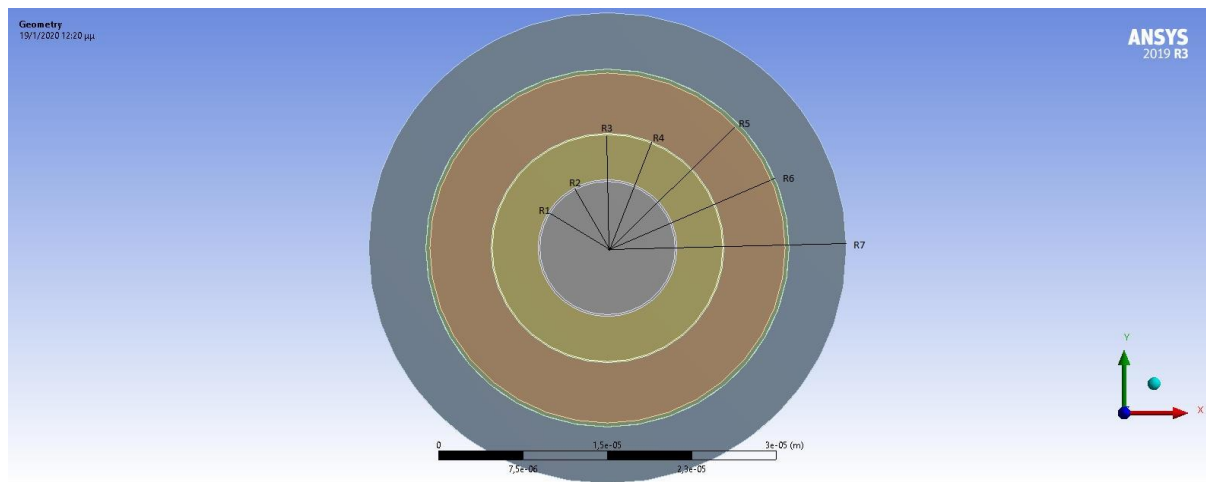
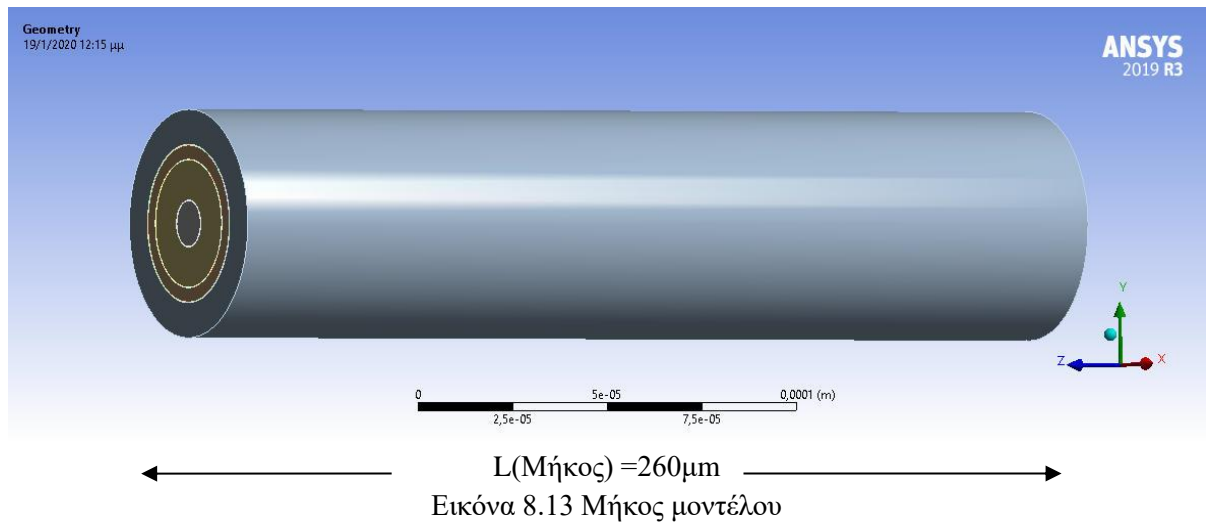
Πίνακας μθ



Εικόνα 8.12 Μοντελοποίηση ενδιάμεσου φάσεως

8.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L

Για τον υπολογισμό του διάμηκες μέτρου ελαστικότητας E_L ακολουθήσαμε εξής:
Με το εμπορικό πρόγραμμα ANSYS WORKBENCH 2019 R3 κατασκευάσαμε το κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο με τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:



Εικόνα 8.14 Ακτίνες των επτά φάσεων του μοντέλου

Οι ακτίνες $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6,$ και r_7 παίρνουν τιμές αναλόγως της περιεκτικότητας του εγκλείσματος που έχουμε επιλέξει στην κάθε περίπτωση. Οι τιμές των ακτίνων που έχουν προκύψει αναφέρονται στον πίνακα γ του κεφαλαίου 3.

Το μήκος του μοντέλου επιλέχθηκε ώστε να προσομοιάσει όσο το δυνατόν περισσότερο τα δοκίμια του εργαστηρίου σε αναλογία μήκους / εξωτερικής διαμέτρου. Στο ένα άκρο όπως είπαμε θα ασκηθεί εφελκυστική τάση. Στην ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, το στοιχείο χρησιμοποιήθηκε είναι το 3D εικοσακομβικό στοιχείο του ANSYS, 3D SOLID ELEMENT 186 όπως περιγράψαμε παραπάνω και

το οποίο επιλέχθηκε αυτόματα, ως καταλληλότερο από το πρόγραμμα, ώστε να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε καλύτερα την πολύπλοκη γεωμετρία που έχουμε σχεδιάσει. Το μοντέλο προς επίλυση κατά την διακριτοποίηση και αναλόγως την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα έχει:

- Συνολικό αριθμό κόμβων στην υπολογιστική κάρναβο:

1454041 ($U_f=10\%$)

610841 ($U_f=20\%$)

481019 ($U_f=30\%$)

427299 ($U_f=40\%$)

378825 ($U_f=50\%$)

676956 ($U_f=60\%$)

- ($U_f=65\%$)

- Συνολικό αριθμό των πεπερασμένων στοιχείων:

1095130 ($U_f=10\%$)

432221 ($U_f=20\%$)

353044 ($U_f=30\%$)

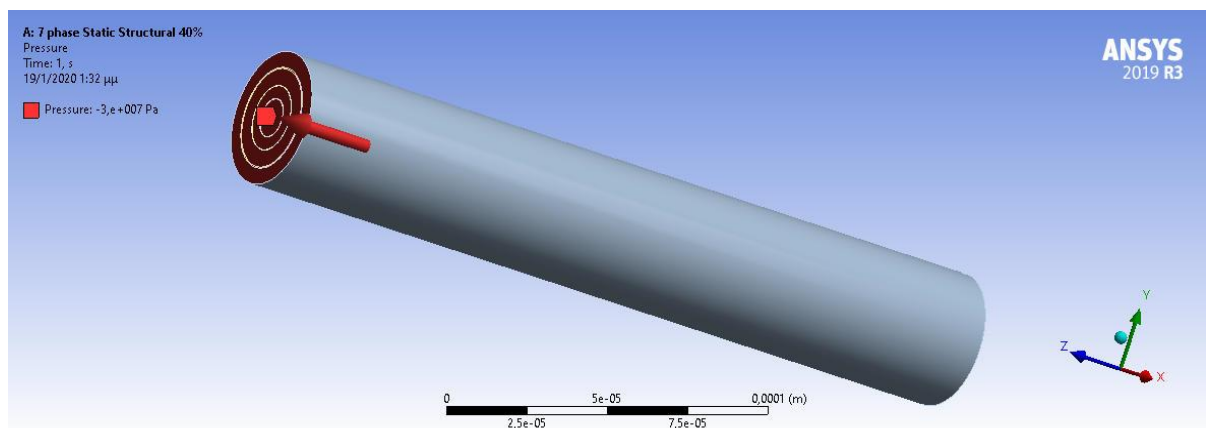
77666 ($U_f=40\%$)

276254 ($U_f=50\%$)

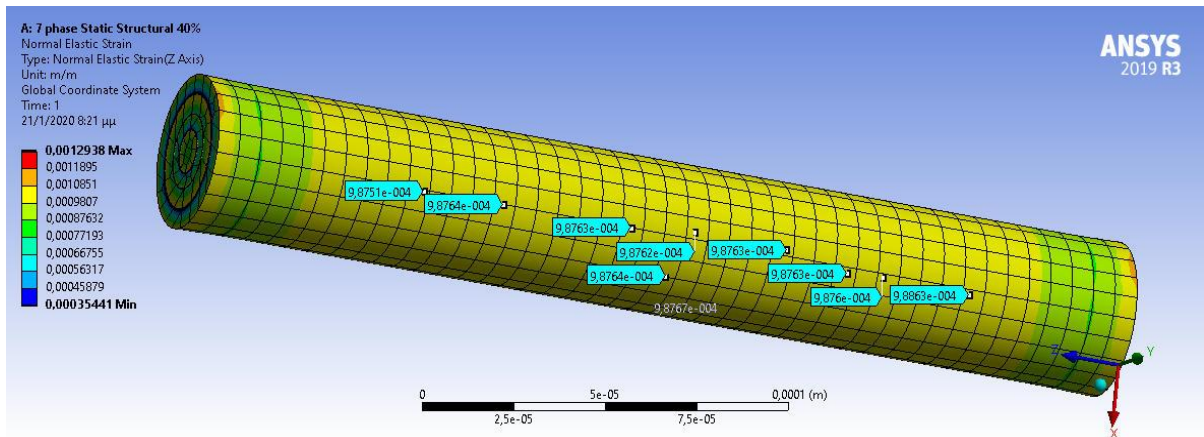
576539 ($U_f=60\%$)

- ($U_f=65\%$)

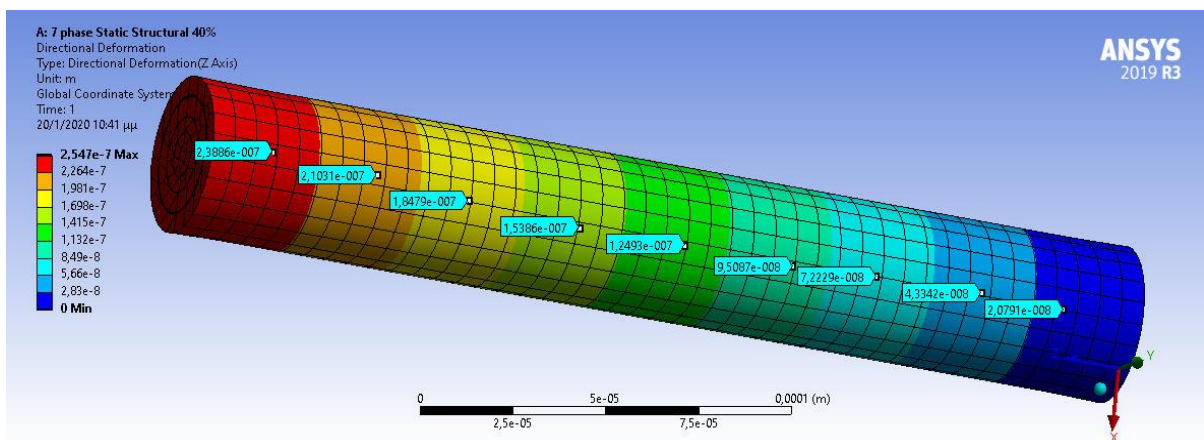
Στην συνέχεια εφαρμόσαμε στο μοντέλο στο ένα άκρο εφελκυστική φόρτιση $P=-30\text{Mpa}$ ενώ στο άλλο άκρο υπάρχει πάκτωση:



Εικόνα 8.15 Εφελκυστική φόρτιση του μοντέλου για $U_f=40\%$



Εικόνα 8.16 Διαμήκεις τροπές του επαφασικού υπολογιστικού μοντέλου κατά τον z άξονα με $U_f=40\%$.



Εικόνα 8.17 Διαμήκης παραμόρφωση του επαφασικού υπολογιστικού μοντέλου κατά τον z άξονα με $U_f=40\%$.

Από το παραμορφωμένο μοντέλο που φαίνεται στην εικόνα 8.16 λάβαμε εννέα τυχαίες μετρήσεις για την τιμή των τροπών κατά το άξονα των z. Η μέση τιμή των τροπών κατά τον z άξονα με $U_f=20\%$ είναι $\epsilon_{zz}=9.8763 \times 10^{-4}$.

Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke στις τρεις διαστάσεις, διατυπωμένος ως προς τις τάσεις [58] (σελ. 81, σχέση (4.2.7):

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$\mu \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{8.1}$$

$$\text{καί} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Οπότε η σχέση (8.1) γίνεται

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right) \tag{8.2}$$

Επειδή το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό κατά τον z άξονα τόσο ως προς την γεωμετρία όσο και ως την φόρτιση, έχουμε ότι:

$$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} = 0, \text{ για } i \neq j \text{ (} i, j = r, z, \theta \text{)} \quad (8.3)$$

Δηλαδή όλες οι διατμητικές τάσεις άρα και τροπές είναι 0. Εφόσον στο ελεύθερο άκτρο του κυλίνδρου έχουμε πίεση P τότε:

$$\sigma_{zz} = P = -30\text{MPa} \quad (8.4)$$

Στην ελεύθερη κυλινδρική επιφάνεια, δεν ασκείται καμία δύναμη ή πίεση οπότε:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (8.5)$$

Από την σχέση (8.2) για $\sigma_{rr} = 0$, συνάγεται ότι:

$$\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) = 0 \quad (8.6)$$

Από την (8.2) για $\sigma_{\theta\theta} = 0$, συνάγεται ότι:

$$\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) = 0 \quad (8.7)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (8.6) & (8.7) έχουμε:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} \quad (8.8)$$

Από το συνδυασμό των (8.6) & (8.8) προκύπτει:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = -\nu \varepsilon_{zz} \quad (8.9)$$

Αντίστοιχα από τον συνδυασμό των (8.2) & (8.9) έχουμε :

$$\sigma_{zz} = P = E \varepsilon_{zz} \quad (8.10)$$

Έτσι από τη σχέση (8.10) υπολογίζουμε το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού, αφού έχουμε υπολογίσει με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τον μέσο όρο της τροπής του μοντέλου κατά τον z άξονα:

$E_L = 30.376 \text{ Gpa}$
--

Εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία για όλες τις περιπτώσεις περιεκτικότητας σε έγκλεισμα οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αποτελεσμάτων, όπου για λόγους σύγκρισης έχουμε συμπεριλάβει τα αποτελέσματα από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο, καθώς και τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα όπου αυτά υφίστανται.

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L (Gpa)					
Uf	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤ. ΕΠΤΑΦ. ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	Experiment Data I	Experiment Data II	Experiment Data II
0%	-	3.500	3.50	3.45	-
10%	-	10.1812	10.36	10.41	-
20%	17.011	16.9210	17.22	17.38	-
30%	23.811	23.7143	26.07	-	-
40%	30.376	30.5563	30.92	-	-
50%	37.588	37.4431	37.77	38.11	-
60%	44.558	44.3724	44.62	45.12	48.14
65%	-	47.8529	48.13	48.62	52.15

Πίνακας ν

Ενώ παρακάτω είναι ο πίνακας των μέσων όρων των τροπών κατά τον z άξονα για κάθε περιεκτικότητα

Uf	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΡΟΠΩΝ 7 PHASE ANSYS
0%	-
10%	-
20%	17.635×10^{-4}
30%	12.599×10^{-4}
40%	9.8763×10^{-4}
50%	7.9812×10^{-4}
60%	6.7328×10^{-4}
65%	-

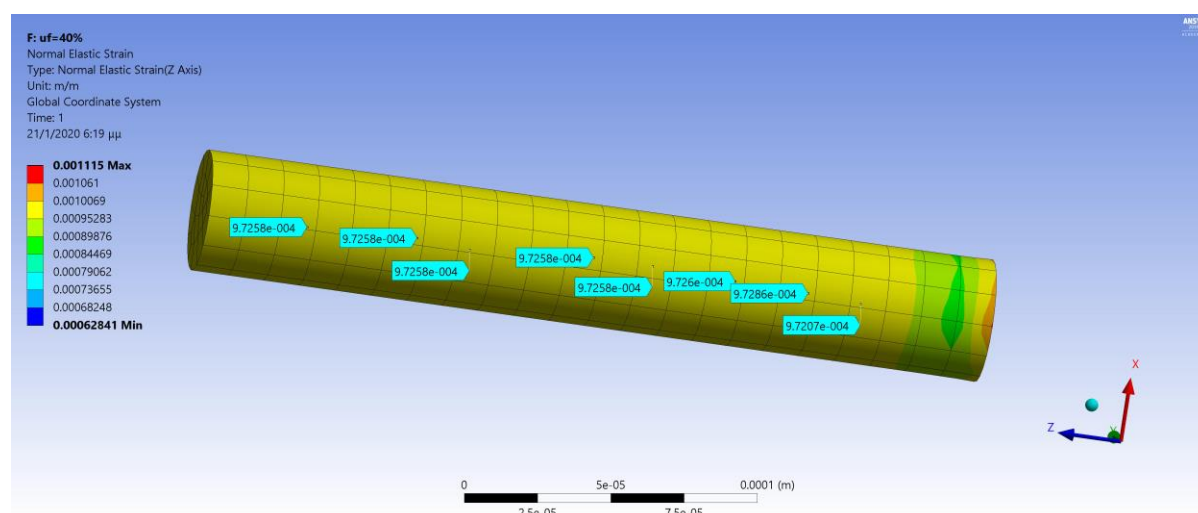
Πίνακας να

Όπως παρατηρούμε από τον παραπάνω πίνακα δεν καταφέραμε να εξάγουμε αποτέλεσμα για την περίπτωση που η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα είναι 10% και 65%. Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο και απόλυτα λογικό διότι αν παρατηρήσει κανείς τον πίνακα γ του κεφαλαίου 3 με τις ακτίνες όλων των φάσεων, θα προσέξει ότι για τις συγκεκριμένες περιεκτικότητες οι ακτίνες που σχηματίζουν τις ενδιάμεσες φάσεις είναι πάρα πολύ κοντά η μία στην άλλη, με αποτέλεσμα να δυσκολευτούμε πολύ, τόσο στον γεωμετρικό σχεδιασμό του μοντέλου όσο και στην διακριτοποίηση του από το πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων. Τα παραπάνω είχαν σαν συνέπεια να μην μπορεί να επιλυθεί το μοντέλο από το ANSYS για τις συγκεκριμένες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα.

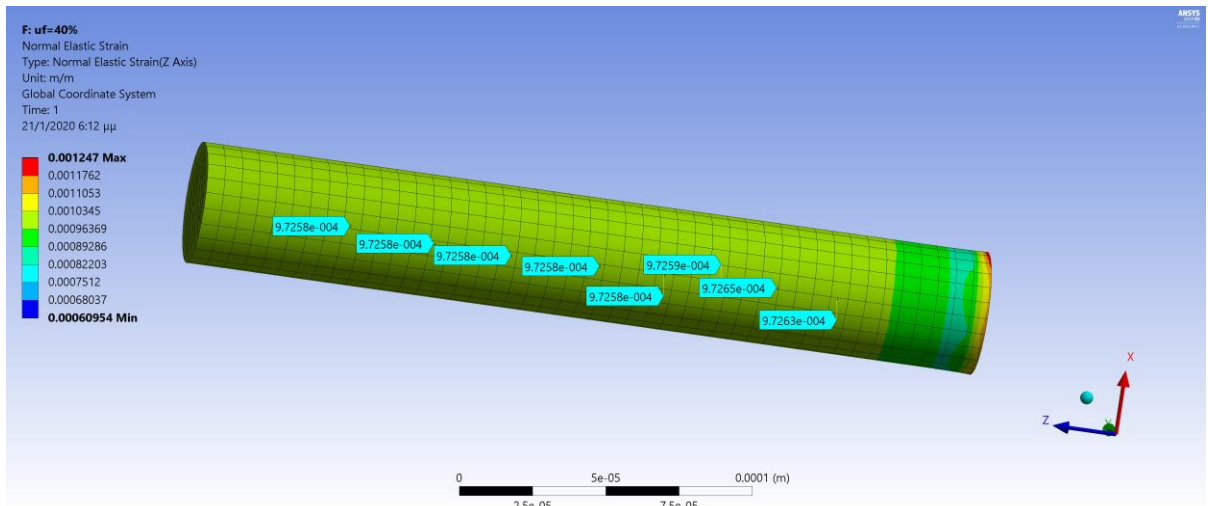
Λόγω των παραπάνω αποφασίσαμε να εκμεταλλευτούμε την δυνατότητα της έκδοσης του ANSYS που χρησιμοποιήσαμε και να φτιάξουμε ένα ισοδύναμο μοντέλο για την κάθε περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Το μοντέλο αυτό θα προσομοιώνεται με

έναν κύλινδρο μόνο, με ακτίνα την εξωτερική ακτίνα r_7 που χρησιμοποιήσαμε στον προηγούμενο τρόπο μοντελοποίησης, για την κάθε περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Το νέο μοντέλο θα αποτελείται από ένα μόνο υλικό που θα δημιουργείται αυτόματα από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων απλά δίνοντας τα ποσοστά συμμετοχής των συστατικών που θα πρέπει αυτό να αποτελείται. Δηλαδή χρησιμοποιώντας την επιλογή του προγράμματος “**Material Combination**” και δίνοντας το ποσοστό συμμετοχής της κάθε φάσης π.χ. για $U_f = 65\%$ τότε σύμφωνα με την θεωρητική μελέτη του κεφαλαίου 2 θα έχουμε $U_i = 5.199\%$ και $U_m = 29.80071\%$ θα πάρουμε ένα ισοδύναμο υλικό με ελαστικές σταθερές που προκύπτουν από το ποσοστό συμμετοχής των αρχικών υλικών, που στην προκειμένη περίπτωση είναι το έγκλεισμα, η μήτρα και η ενδιάμεση φάση. Το πλεονέκτημα που έχουμε με αυτή την επιλογή, εκτός του γεγονότος ότι αποτελεί μονόδρομο στην μελέτη των δυναμικών ελαστικών σταθερών όπως θα εξηγήσουμε και στην συνέχεια, είναι ότι απαλείφονται σφάλματα που προκύπτουν κατά την ενοποίηση της γεωμετρίας των 7 κυλινδρικών σωμάτων και κατ’ επέκταση σφάλματα κατά την διακριτοποίηση του μοντέλου, που οδηγούν σε δυσκολίες κατά την επίλυση ή όπως είδαμε παραπάνω για τις δύο συγκεκριμένες περιεκτικότητες ακόμα και στη μη λύση του. Επίσης χρειάζεται πολύ λιγότερος αριθμός στοιχείων και κόμβων άρα κατ’ επέκταση μειώνεται δραματικά ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος. Τέλος μπορεί να επιλυθεί και με την Academic freeware έκδοση του ANSYS που έχει περιορισμό στον αριθμό των κόμβων και των στοιχείων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα να είναι αδύνατο να επιλυθεί το πλήρες επταφασικό αρχικό μοντέλο με αυτή την έκδοση.

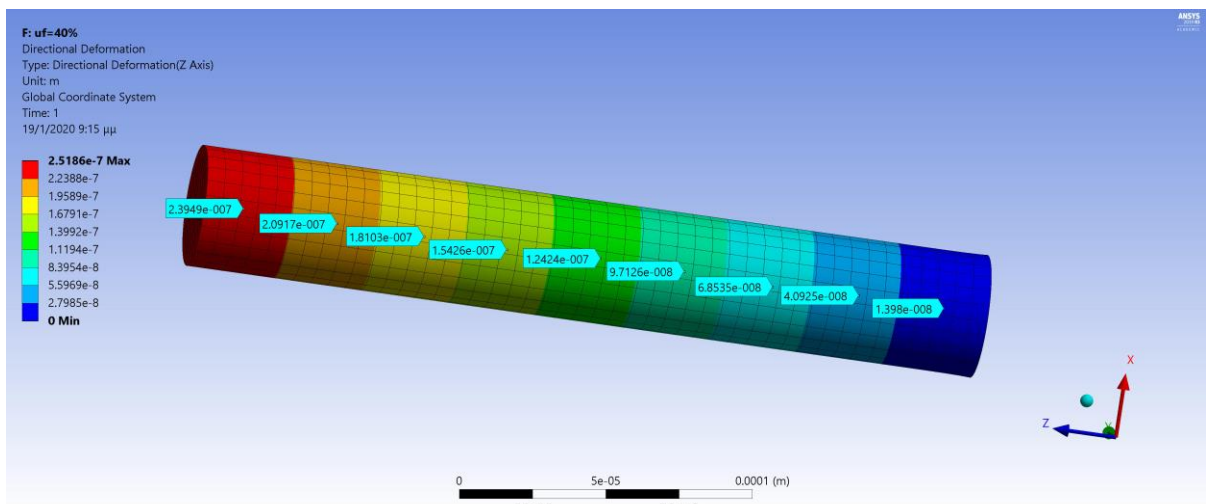
Κατόπιν των ανωτέρω παρακάτω θα αναφέρουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν με το ισοδύναμο μοντέλο και θα τα συγκρίνουμε με αυτά από το πλήρες υπολογιστικό μοντέλο που φτιάξαμε αρχικά.



Εικόνα 8.18 Διαμήκειες τροπές του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον z άξονα με $U_f=40\%$ με αραιό πλέγμα.



Εικόνα 8.19 Διαμήκεις τροπές του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον z άξονα με $U_f=40\%$ με πυκνό πλέγμα.



Εικόνα 8.20 Διαμήκης παραμόρφωση του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον z άξονα με $U_f=40\%$.

Τα αποτελέσματα της επίλυσης του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου για περιεκτικότητα $U_f=40\%$ που παρουσιάζονται στις εικόνες 8.18 και 8.19, είναι παρόμοια με αυτά του πλήρους υπολογιστικού επαφασικού μοντέλου. Αυτό συμβαίνει τόσο για πυκνό, όσο και για αραιό πλέγμα κατά την διακριτοποίηση.

Παρακάτω είναι ο πίνακας των μέσων όρων των τροπών κατά τον Z άξονα για κάθε περιεκτικότητα όπως προκύπτει από την επίλυση του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου.

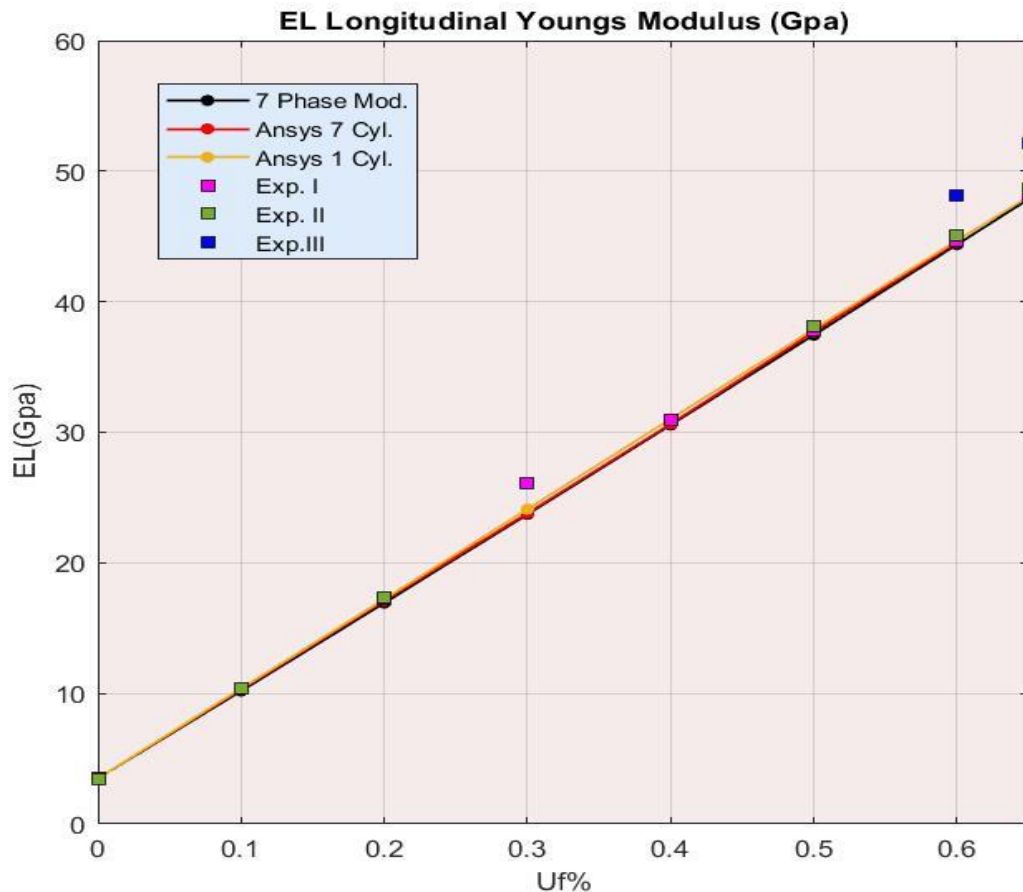
Uf	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΡΟΠΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ANSYS
0%	-
10%	29.358 x10 ⁻⁴
20%	17.597x10 ⁻⁴
30%	12.532x10 ⁻⁴
40%	9.7258x10 ⁻⁴
50%	7.9531x10 ⁻⁴
60%	6.7387x10 ⁻⁴
65%	6.2655x10 ⁻⁴

Πίνακας νβ

Οπότε παρακάτω παρουσιάζουμε τον **πίνακα νγ** με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το ισοδύναμο μοντέλο για το διαμήκης μέτρο ελαστικότητας, καθώς επίσης και αντίστοιχο διάγραμμα σε σχέση με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L (Gpa)						
Uf	ΥΠΟΛ. 7 PHASE ANSYS	ΥΠΟΛ. ΙΣΟΔΥΝ. ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	Experiment Data I	Experiment Data II	Experiment Data II
0%	-	-	3.500	3.50	3.45	-
10%	-	10.219	10.1812	10.36	10.41	-
20%	17.011	17.048	16.9210	17.22	17.38	-
30%	23.811	23.939	23.7143	26.07	-	-
40%	30.376	30.846	30.5563	30.92	-	-
50%	37.588	37.721	37.4431	37.77	38.11	-
60%	44.558	44.519	44.3724	44.62	45.12	48.14
65%	-	47.8813	47.8529	48.13	48.62	52.15

Πίνακας νγ

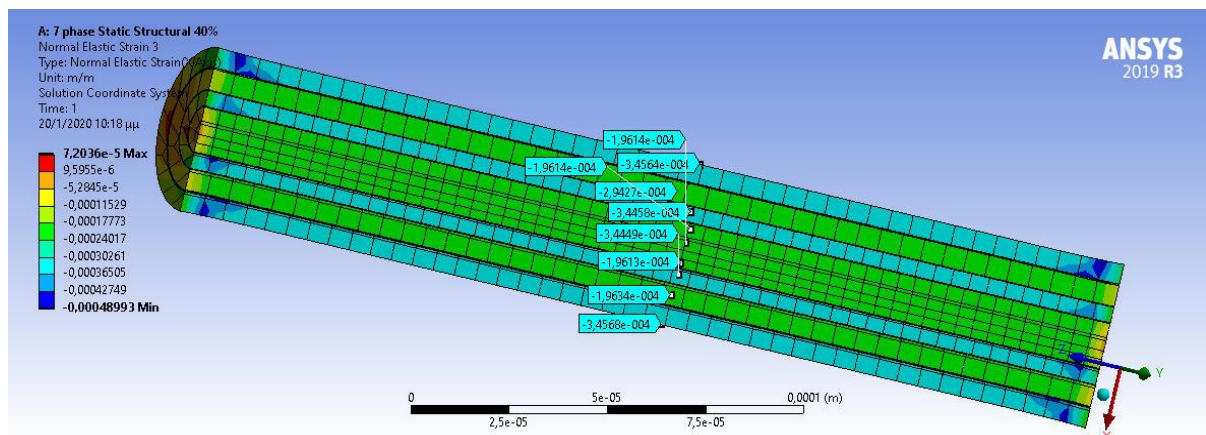


Εικόνα 8.21 Διάγραμμα διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L

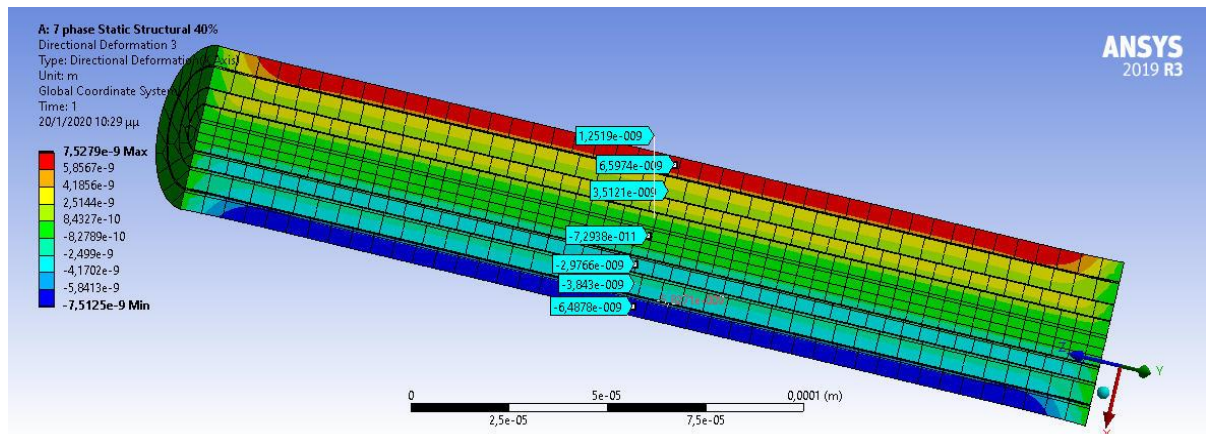
Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ξεκάθαρα ότι τόσο οι τιμές του θεωρητικού μοντέλου όσο και των πειραματικών δεδομένων, είναι πολύ κοντά με αυτές που προκύπτουν κατά την επίλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Εκτός αυτού παρατηρούμε ότι είναι εξαιρετικά κοντά τα αποτελέσματά από την επίλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία τόσο στην περίπτωση της πολύπλοκης γεωμετρίας με την προσομοίωση των επτά φάσεων, όσο και με την περίπτωση του απλού ισοδύναμου μοντέλου. Οπότε μπορούμε να δεχτούμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το ισοδύναμο μοντέλο ως πλήρως ρεαλιστικά λαμβάνοντας υπόψιν τα πλεονεκτήματα που αναφέραμε παραπάνω και το γεγονός ότι δίνει λύση σε όλες τις περιεκτικότητες. Οπότε θα συνεχίσουμε την μελέτη με τα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιώντας το ισοδύναμο υπολογιστικό μοντέλο, όπου το πλήρες επαφασικό υπολογιστικό μοντέλο δεν δύναται να δώσει λύση.

8.3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}

Παρακάτω παρουσιάζουμε την υπολογιστική προσέγγιση του διαμήκους λόγου Poisson ν_{LT} δηλαδή τον αρνητικό λόγο των εγκάρσιων προς της διαμήκεις τροπές ($\nu_{LT} = -\epsilon_T / \epsilon_{LT}$). Η ϵ_T είναι η εγκάρσια ή ακτινική τροπή $\epsilon_r = \epsilon_x = \epsilon_y$ και ϵ_{LT} είναι η διαμήκης τροπή κατά τον διαμήκη άξονα z του κυλινδρικού δοκιμίου που υπολογίσαμε παραπάνω. Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη παράγραφο παίρνουμε από την επίλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία για το πλήρες υπολογιστικό επταφασικό μοντέλο, τα αποτελέσματα για τις εγκάρσιες τροπές ως προς τον x άξονα, όπως ακριβώς φαίνεται στις παρακάτω εικόνες.



Εικόνα 8.22 Εγκάρσιες τροπές του επταφασικού υπολογιστικού μοντέλου κατά τον x άξονα με $U_f=40\%$



Εικόνα 8.23 Εγκάρσια παραμόρφωση του επταφασικού υπολογιστικού μοντέλου κατά τον x άξονα με $U_f=40\%$

Από το παραμορφωμένο μοντέλο λάβαμε εννέα μετρήσεις για την τιμή των τροπών κατά τον x άξονα. Στις εγκάρσιες τροπές αυτή η διαδικασία λόγω της δραματικής αλλαγής των ελαστικών ιδιοτήτων των στρώσεων του συνθέτου υλικού κατά μήκος της ακτινικής κατεύθυνσης, εγκυμονεί μεγάλο κίνδυνο για σφάλματα στην

ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Παρόλα αυτά η μέση τιμή των τιμών για τις τροπές κατά τον x άξονα είναι $\epsilon_{rr} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{xx} = -2.8510 \times 10^{-4}$ για περιεκτικότητα σε έγκλεισμα $U_f=40\%$.

Άρα ο λόγος Poisson είναι :

$$\nu_{LT}=0.289$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία για όλες τις περιπτώσεις περιεκτικότητας σε έγκλεισμα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας νε όπου για λόγους σύγκρισης έχουμε συμπεριλάβει τα αποτελέσματα από το θεωρητικό επταφασικό μοντέλο, καθώς και τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα όπου αυτά υφίστανται.

Παρακάτω είναι ο πίνακας νδ των μέσων όρων των εγκάρσιων τροπών κατά τον x άξονα για κάθε περιεκτικότητα:

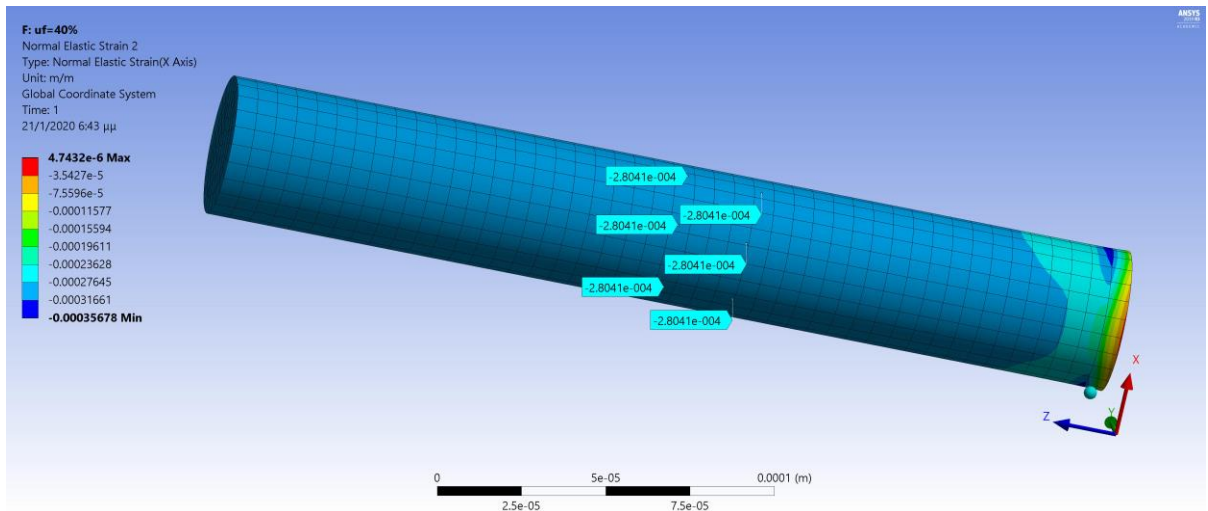
Uf	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΕΓΚΛΕΙΣΙΩΝ ΤΡΟΠΩΝ 7 PHASE ANSYS
0%	-
10%	-
20%	-5.6123×10^{-4}
30%	-3.8175×10^{-4}
40%	-2.8510×10^{-4}
50%	-2.2097×10^{-4}
60%	-1.8040×10^{-4}
65%	-

Πίνακας νδ

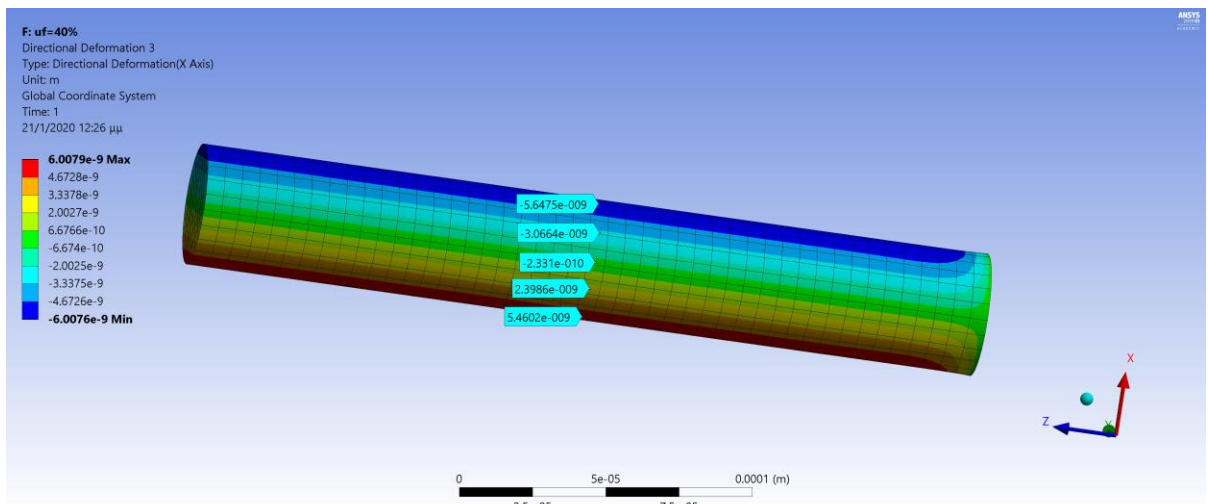
Οπότε έχουμε:

<u>ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{LT}</u>				
Uf	ΥΠΟΛ. 7 PHASE ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	Experiment Data I	Experiment Data II
0%	-	0.350	0.350	0.350
10%	-	0.331	0.332	0.330
20%	0.318	0.314	0.315	0.320
30%	0.303	0.297	0.300	-
40%	0.289	0.281	0.286	-
50%	0.277	0.266	0.273	0.280
60%	0.268	0.252	0.262	0.260
65%	-	0.245	0.252	-

Πίνακας νε



Εικόνα 8.24 Εγκάρσιες τροπές του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον x άξονα με $U_f=40\%$



Εικόνα 8.25 Εγκάρσια παραμόρφωση του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον x άξονα με $U_f=40\%$

Στις εικόνες 8.23 και 8.24 φαίνεται η επίλυση με το ισοδύναμο υπολογιστικό μοντέλο για περιεκτικότητα $U_f=40\%$. Έτσι αντίστοιχα με την προηγούμενη ενότητα παρακάτω θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της επίλυσης του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου. Όπως θα δούμε είναι παρόμοια αν όχι ακριβέστερα με αυτά του πλήρους υπολογιστικού επαφασικού μοντέλου, σε σχέση πάντα με τα θεωρητικά αποτελέσματα και τα πειραματικά δεδομένα.

Παρακάτω είναι ο **πίνακας νστ** των μέσων όρων των εγκάρσιων τροπών κατά τον x άξονα , που προκύπτουν από το ισοδύναμο υπολογιστικό μοντέλο.

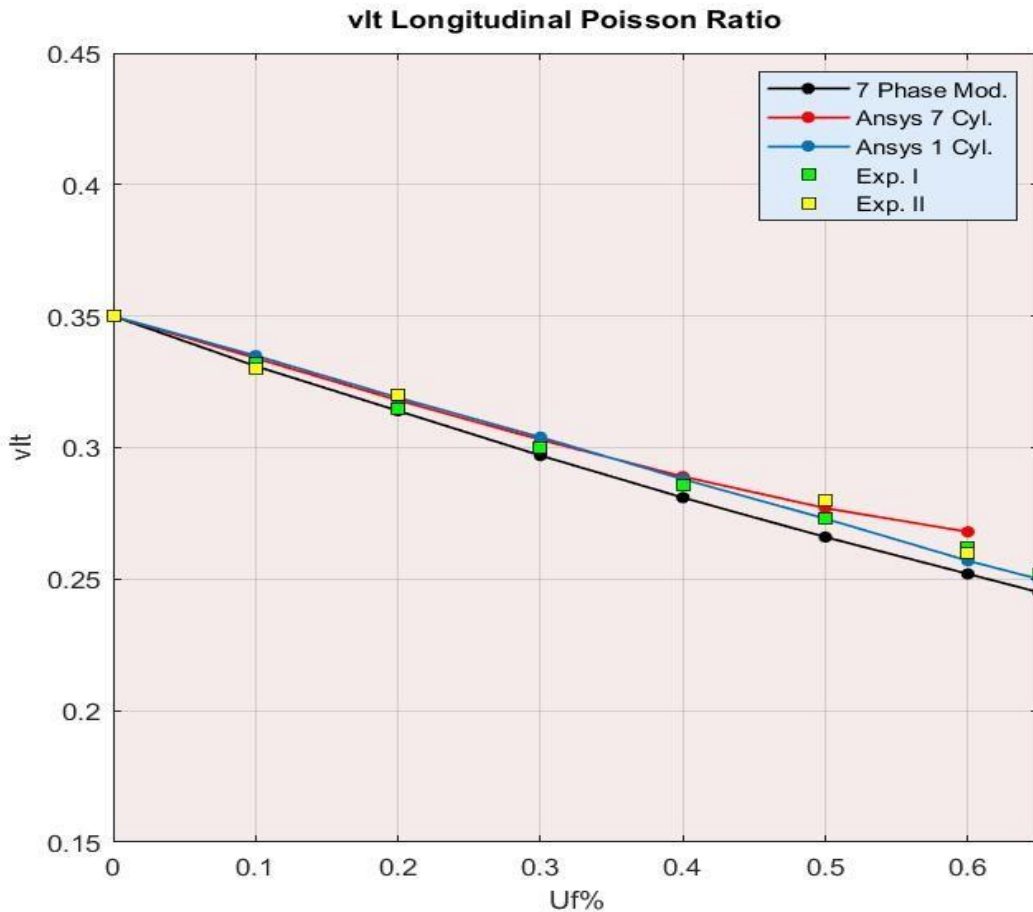
Uf	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΕΓΚΑΡΣΙΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΙΣΟΔ. ANSYS
0%	-
10%	-9.8307 x10 ⁻⁴
20%	-5.6213x10 ⁻⁴
30%	-3.8083x10 ⁻⁴
40%	-2.8041x10 ⁻⁴
50%	-2.1697x10 ⁻⁴
60%	-1.7351x10 ⁻⁴
65%	-1.5662x10 ⁻⁴

Πίνακας νστ

Και αντίστοιχα ο πίνακας με τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα:

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{LT}					
Uf	ΥΠΟΛ. 7 PHASE ANSYS	ΥΠΟΛ. ΙΣΟΔΥΝ. ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	Experiment Data I	Experiment Data II
0%	-	-	0.350	0.350	0.350
10%	-	0.335	0.331	0.332	0.330
20%	0.318	0.319	0.314	0.315	0.320
30%	0.303	0.304	0.297	0.300	-
40%	0.289	0.288	0.281	0.286	-
50%	0.277	0.273	0.266	0.273	0.280
60%	0.268	0.257	0.252	0.262	0.260
65%	-	0.250	0.245	0.252	-

Πίνακας νζ



Εικόνα 8.26 Διάγραμμα διαμήκους λόγου Poisson v_{LT}

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι τόσο οι τιμές του θεωρητικού μοντέλου όσο και των πειραματικών δεδομένων είναι πολύ κοντά με αυτές που προκύπτουν κατά την επίλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης πολύ κοντά είναι τα αποτελέσματά από την επίλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία τόσο στην περίπτωση της πολύπλοκης γεωμετρίας με την προσομοίωση των επτά φάσεων όσο και με την περίπτωση του απλού ισοδύναμου μοντέλου. Οπότε μπορούμε να δεχτούμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το ισοδύναμο μοντέλο ως πλήρως ρεαλιστικά λαμβάνοντας υπόψιν τα πλεονεκτήματα που αναφέραμε παραπάνω και το γεγονός ότι δίνει λύση σε όλες τις περιεκτικότητες. Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι στο επταφασικό υπολογιστικό μοντέλο υπήρχε μεγάλη δυσκολία στον υπολογισμό της μέσης τιμής των εγκάρσιων τροπών, διότι όπως προαναφέραμε υφίσταται δραματική αλλαγή των ελαστικών ιδιοτήτων των στρώσεων του συνθέτου υλικού κατά μήκος της ακτινικής κατεύθυνσης.

8.3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{TT}

Στο επταφασικό μοντέλο που προσομοιώνουμε με τα πεπερασμένα στοιχεία στο ANSYS, η κάθε φάση αποτελείται από ένα ομογενές και ισότροπο υλικό. Επομένως το μοντέλο που έχουμε δημιουργήσει είναι αντιληπτό, ότι μικροσκοπικά δεν είναι ένα ομογενές υλικό αφού κάθε φάση του έχει διαφορετικές ελαστικές σταθερές. **Παρόλα αυτά στον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, θεωρούμε το επταφασικό υπολογιστικό μοντέλο, λόγω της αξονοσυμμετρίας που παρουσιάζει, μακροσκοπικά σαν ένα εγκάρσιως ισότροπο κυλινδρικό σώμα από ένα ισοδύναμο υλικό, ώστε να ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις του νόμου του Hooke που αναφέρονται στην παραπομπή [23] (εξισώσεις (48), (49) & (50) σελ. 249). Οι εξισώσεις αναφέρονται ως προς την διαμήκη και την εγκάρσια κατεύθυνση, σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r η ακτινική συντεταγμένη, θ η περιμετρική συντεταγμένη, z η συντεταγμένη κατά τον άξονα συμμετρίας) κατ' αντιστοιχία με το καρτεσιανό σύστημα (x,y,z) που έχουμε δει μέχρι τώρα στα παραπάνω σχήματα.**

$$\epsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E_T} - \nu_{TT} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_{zz}}{E_L} \quad (8.10)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_T} - \nu_{TT} \frac{\sigma_{rr}}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_{zz}}{E_L} \quad (8.11)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E_L} \left[\sigma_{zz} - \nu_{LT} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \right] \quad (8.12)$$

Με την παραπάνω θεώρηση και από την εξίσωση (8.12), για μηδενικές τροπές $\epsilon_{zz}=0$ κατά την διεύθυνση z , προκύπτει το μέτρο των τάσεων που θα αναπτυχθούν στην ίδια διεύθυνση. Παρατηρούμε ότι αυτό εξαρτάται από τις άλλες δύο τάσεις και τον διαμήκη λόγο Poisson ν_{LT} . Για να βρούμε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T , θα φορτίσουμε το μοντέλο κατά την εγκάρσια διεύθυνση με μία εξωτερική υδροστατική πίεση P . Έτσι λόγω της συμμετρίας του μοντέλου προκύπτει ότι :

$$\mathbf{P} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} \quad (8.13)$$

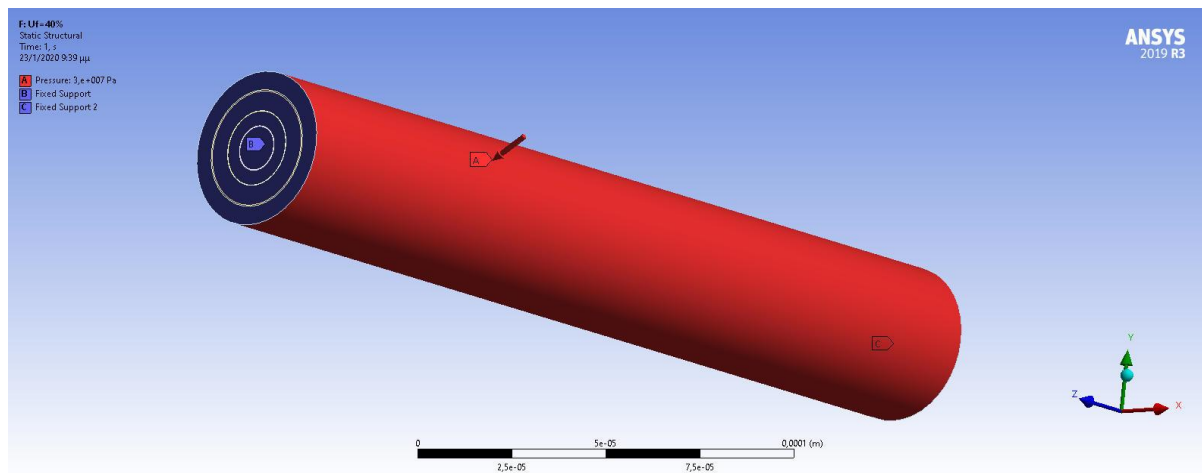
Εφαρμόζοντας την (8.13) στις εξισώσεις (8.10) & (8.11) αυτές γίνονται ταυτόσημες. Επομένως το πρόβλημά έχει τελικά δύο αγνώστους, το E_T και το ν_{TT} , αλλά μία εξίσωση προς λύση οπότε δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Για αυτό τον λόγο θα θεωρήσουμε δεδομένες τις τιμές του λόγου του Poisson ν_{TT} σε σχέση με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Παρακάτω δίνονται οι τιμές του εγκάρσιου λόγου του Poisson ν_{TT} , που υπολογίστηκαν από την σχέση (5.4.4) του Κεφαλαίου '5'.

ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{TT}								
U_f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%
ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤΕΛΟ	0.3500	0.3349	0.3197	0.3044	0.2890	0.2734	0.2578	0.2500

Πίνακας νη

8.3.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

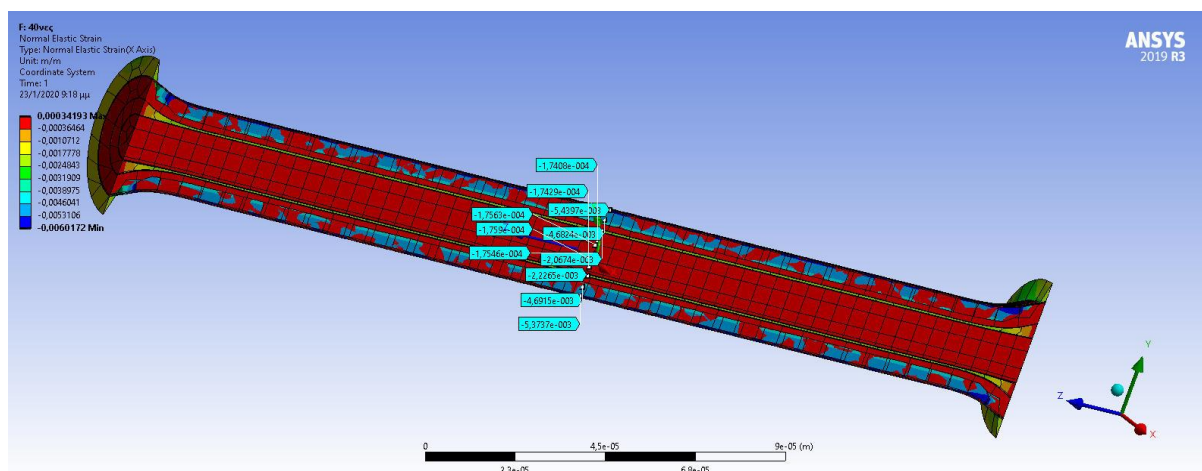
Για να υπολογίσουμε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T του συνθέτου υλικού εφαρμόσαμε στα προαναφερόμενα πλήρη επαφασικά υπολογιστικά μοντέλα (σε σχέση με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα), τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες και φορτίσεις όπως φαίνονται και στην εικόνα που ακολουθεί:



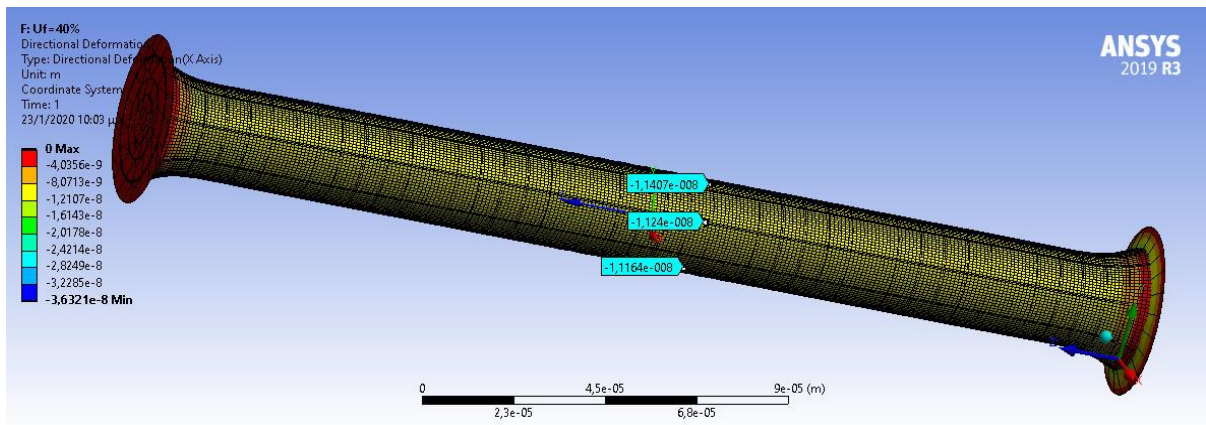
Εικόνα 8.27 Εγκάρσια φόρτιση του μοντέλου για $U_T=40\%$

- Στα δύο άκρα του δοκιμίου εφαρμόσαμε πάκτωση δηλαδή ($U_x=U_y=U_z=0$).
- Φορτίσαμε το δοκίμιο με μία εγκάρσια κατανεμημένη τάση $P=30\text{Mpa}$

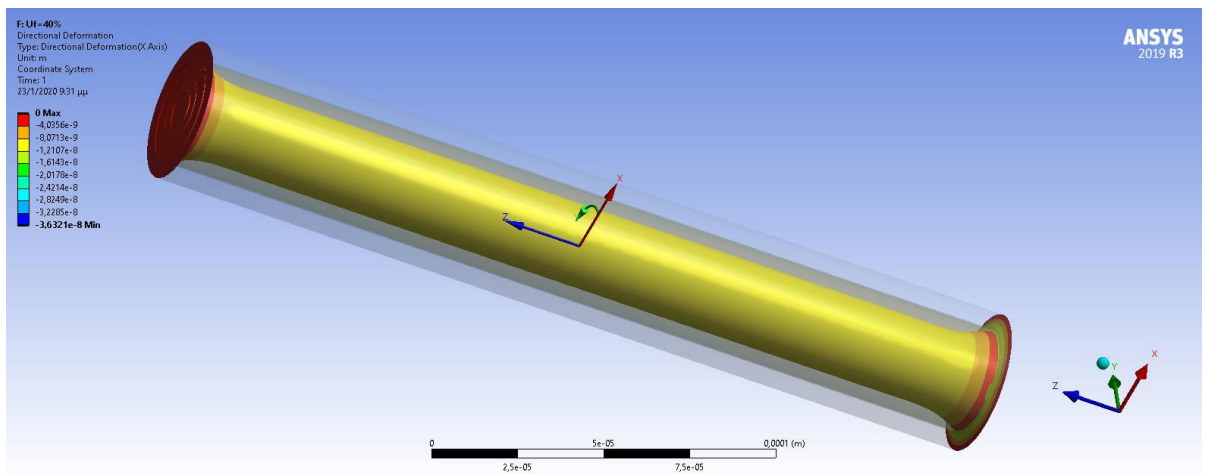
Με αυτό το τρόπο θέλουμε να υπολογίσουμε τις εγκάρσιες τροπές του κυλίνδρου $\epsilon_{rr} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{xx}$ για μία κατανεμημένη εγκάρσια φόρτιση.



Εικόνα 8.28 Εγκάρσιες τροπές του επαφασικού υπολογιστικού μοντέλου κατά την ακτινική κατεύθυνση με $U_T=40\%$



Εικόνα 8.29 Εγκάρσια παραμόρφωση του επαφασικού υπολογιστικού μοντέλου με $U_f=40\%$



Εικόνα 8.30 Απεικόνιση παραμορφωμένου και απαραμόρφωτου επαφασικού υπολογιστικού μοντέλου κατά την εγκάρσια φόρτιση με $U_f=40\%$

Από το παραμορφωμένο μοντέλο Εικ. 8.28 λάβαμε εννέα μετρήσεις για την τιμή των τροπών κατά ακτινική διεύθυνση, για περιεκτικότητα σε έγκλεισμα $U_f=40\%$.

Η μέση τιμή των τιμών για τις τροπές κατά τον x άξονα είναι $\epsilon_{xx}=\epsilon_{rr} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\theta\theta} = -2.3051 \times 10^{-3}$. Οπότε θέτοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στις σχέσεις (8.10) έως (8.12) βρίσκουμε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού:

$$E_T=8.65\text{Gpa}$$

Παρακάτω είναι ο πίνακας των μέσων όρων των τροπών κατά την ακτινική κατεύθυνση για κάθε περιεκτικότητα όπως προκύπτει από την επίλυση του επταφασικού υπολογιστικού μοντέλου.

Uf	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΕΓΚΑΡΣΙΩΝ ΤΡΟΠΩΝ 7 PHASE ANSYS
0%	-
10%	-
20%	-2.9789x10 ⁻³
30%	-2.6358x10 ⁻³
40%	-2.3051x10 ⁻³
50%	-1.8937x10 ⁻³
60%	-1.5346x10 ⁻³
65%	-

Πίνακας νθ

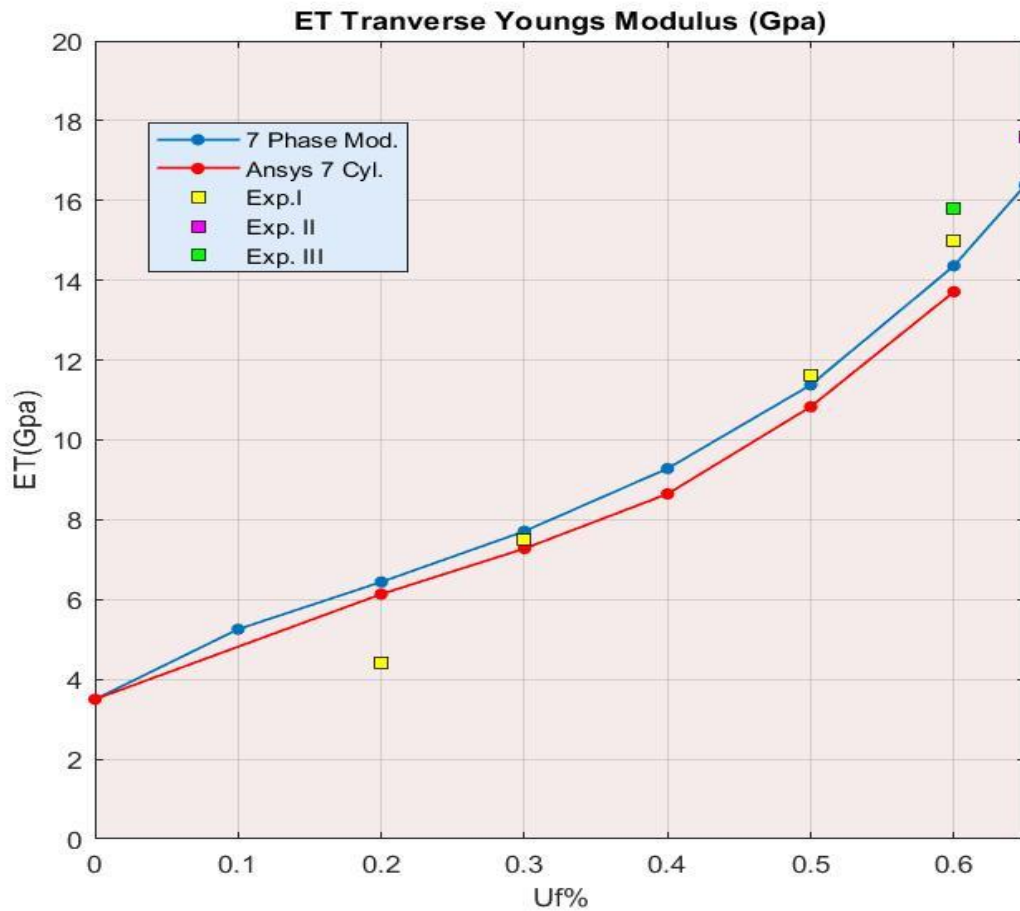
Οπότε έχουμε:

ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T (Gpa)					
Uf	ΥΠΟΛ. 7 PHASE ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	Experiment Data I	Experiment Data II	Experiment Data II
0%	-	3.500	-	-	-
10%	-	5.2571	-	-	-
20%	6.1364	6.4408	4.40	-	-
30%	7.2776	7.7129	7.52	-	-
40%	8.6481	9.2841	-	-	-
50%	10.8327	11.3800	11.60	-	-
60%	13.7138	14.3632	15.00	-	15.80
65%	-	16.3913	-	17.60	-

Πίνακας ξ

Στην περίπτωση του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας δεν ήτο δυνατόν να υπολογιστεί από το ισοδύναμο υπολογιστικό μοντέλο, διότι όπως έχουμε αναφέρει αυτό αποτελείται από ένα μόνο υλικό που θα δημιουργείται αυτόματα από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, απλά δίνοντας τα ποσοστά συμμετοχής των συστατικών του. Οπότε το νέο υλικό θα είναι ομογενές και ισότροπο όπως και τα υλικά που αποτελείται κάτι που κατά την διαμήκη φόρτιση δεν δημιουργούσε κάποιο πρόβλημα. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί κατά την εγκάρσια φόρτιση αφού το πραγματικό σύνθετο υλικό έχει άλλο μέτρο ελαστικότητας που είναι και το ζητούμενο. Δηλαδή από το ισοδύναμο υπολογιστικό μοντέλο για την περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να έχουμε σωστά αποτελέσματα. Οπότε θα αρκεστούμε μόνο στα

αποτελέσματα του πίνακα ξ , που φαίνονται γραφικά στο παρακάτω συγκριτικό διάγραμμα.



Εικόνα 8.31 Διάγραμμα εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι τόσο οι τιμές του θεωρητικού μοντέλου όσο και των πειραματικών δεδομένων είναι πολύ κοντά με αυτές που προκύπτουν κατά την επίλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ιδιαίτερα για περιεκτικότητες σε έγκλεισμα μεγαλύτερες από 30%.

8.4 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ-ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ - ΦΟΡΤΙΣΗ

Στο τελευταίο μέρος της ανάλυσης με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε για περιεκτικότητες σε έγκλεισμα 40% και 65%, τις δυναμικές ελαστικές σταθερές του σύνθετου υλικού. Τα αποτελέσματα θα τα συγκρίνουμε με αυτά που υπολογίσαμε στο κεφάλαιο 7 για τις συγκεκριμένες περιεκτικότητες, στις οποίες έχουμε τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Δηλαδή για αυτές τις περιεκτικότητες έχουμε ως σκοπό να υπολογίσουμε τα ακόλουθα:

- Το διάμηκες μέτρο αποθηκεύσεως E'_L
- Δυναμικός Διαμήκης Λόγος Poisson ν'_{LT}
- Τον εγκάρσιο δυναμικό λόγο Poisson ν'_{TT} θα τον θεωρήσουμε δεδομένο από τα θεωρητικά αποτελέσματα όπως και στην στατική μελέτη για τον υπολογισμό του E'_T .
- Εγκάρσιο Μέτρο Αποθηκεύσεως E'_T

Η αρχική σκέψη ήταν να προσπαθήσουμε να πάρουμε τα παραπάνω αποτελέσματα προσομοιάζοντας τις συνθήκες φόρτισης των προηγούμενων παραγράφων, ώστε να εξάγουμε τις δυναμικές ελαστικές σταθερές. Οπότε επιλέξαμε να υποβάλουμε το μοντέλο μας εκτός από την εφελκυστική ή εγκάρσια φόρτιση, ταυτόχρονα και σε μία βηματική θερμική καταπόνηση, ώστε οι τροπές που θα προκύψουν στο κάθε βήμα θα είναι και λόγω της θερμικής διαστολής του μοντέλου. Με τον τρόπο αυτό θα δούμε, πώς το αποτέλεσμα της δυναμικής καταπόνησης, που είναι τελικά η αύξηση της θερμοκρασίας του υλικού, επηρεάζει τις δυναμικές ελαστικές σταθερές που αναφέραμε παραπάνω. Δηλαδή θα υπολογίσουμε μόνο τα μέτρα αποθηκεύσεως των ελαστικών σταθερών καθώς αυτά είναι που τελικά καθορίζουν την αντοχή του υλικού και μπορούν να προσομοιωθούν στην ανάλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία. Επίσης θα πρέπει να αναφέρουμε ότι σε κάθε βήμα θα αλλάζουμε τις τιμές για το μέτρο αποθηκεύσεως της μήτρας όπως ακριβώς είχαμε κάνει στο κεφάλαιο 7, σύμφωνα με τον πίνακα $i\theta$ ($U_f=40\%$) και le ($U_f=65\%$) που αναγράφουν τα πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε στην θεωρητική μελέτη. Εξάλλου στο εύρος θερμοκρασιών που μελετάμε πρακτικά η μήτρα είναι αυτή που κυρίως επηρεάζεται από την θερμοκρασία καθώς έχει πολύ μεγαλύτερο συντελεστή διαστολής σε σχέση με το έγκλεισμα

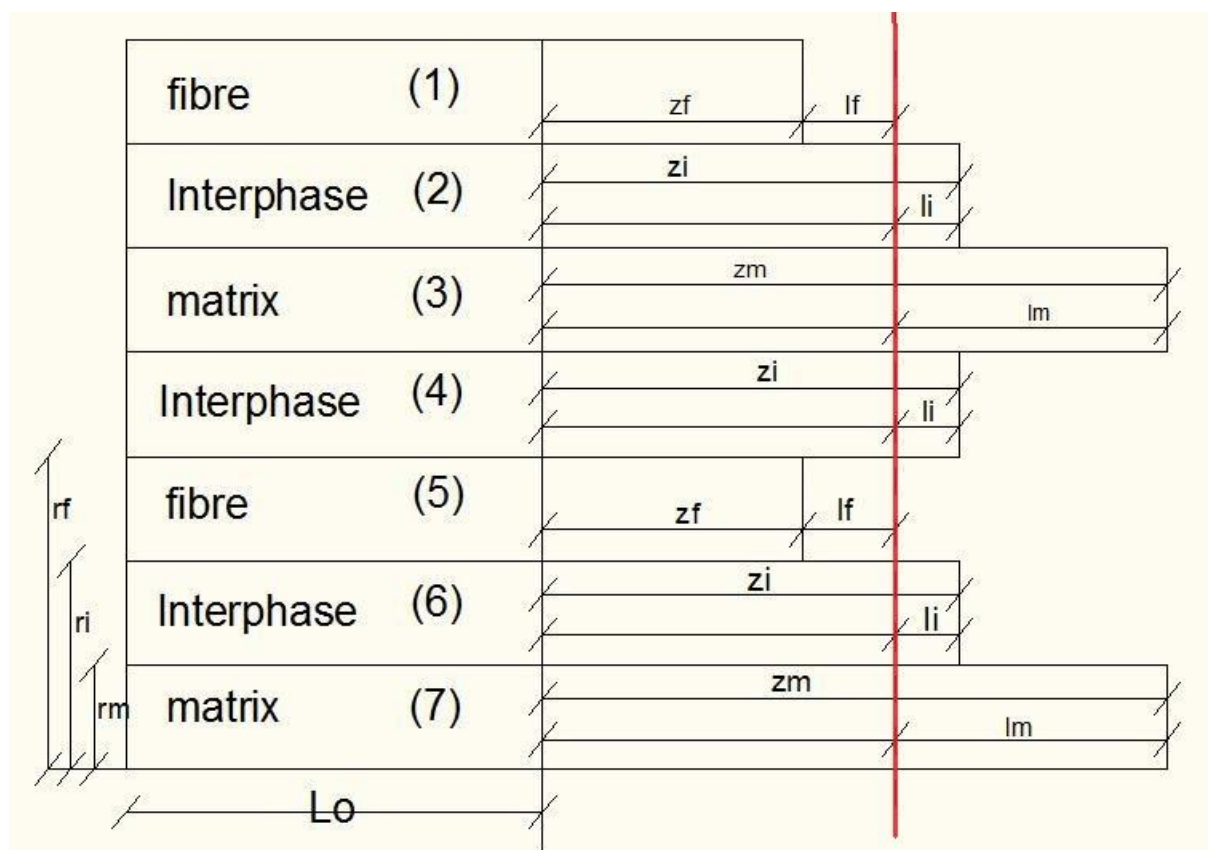
Τα μέτρα απωλειών ενώ στην μελέτη φαίνεται ότι δεν τα λαμβάνουμε υπόψη, πρακτικά όμως υπεισέρχονται αφού από εκεί προέρχεται η μείωση των τιμών των μέτρων αποθηκεύσεως σε σχέση με την θερμοκρασία.

Επίσης θα πρέπει να αναφέρουμε ότι για την θερμική ανάλυση χρησιμοποιήσαμε μόνο το ισοδύναμο υπολογιστικό μοντέλο, καθώς λόγω του διαφορετικού θερμικού συντελεστή της κάθε φάσης δεν μπορούσαμε να εξάγουμε σαφή αποτελέσματα για τις

τελικές εγκάρσιες και διαμήκειες τροπές με το πλήρες επταφασικό υπολογιστικό μοντέλο.

Η εξήγηση σε αυτό μπορεί να δοθεί παρατηρώντας την παρακάτω εικόνα. Λόγω της συγκόλλησης των διαφορετικών υλικών που απαρτίζουν το σύνθετο, αυτά τείνουν να διαστέλλονται διαφορετικά από ότι αν ήταν αυτόνομα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι φάσεις της μήτρας και των ενδιάμεσων φάσεων να διαστέλλονται λιγότερο από ότι αν ήταν ανεξάρτητες, ενώ αντίθετα οι φάσεις του εγκλείσματος να διαστέλλονται περισσότερο. Στην παρακάτω εικόνα με κόκκινη γραμμή συμβολίζουμε την τελική διαστολή του σύνθετου υλικού και με l_f, l_m και l_i αντίστοιχα την διαφορά που υπάρχει από την διαστολή του κάθε υλικού αν αυτό ήταν ανεξάρτητο.

Εξαιτίας των παραπάνω δεν μπόρεσαν να βγουν σαφή αποτελέσματα από το υπολογιστικό επταφασικό μοντέλο, οπότε αρκεστήκαμε στην προσομοίωση μόνο με το ισοδύναμο υπολογιστικό μοντέλο για τις δύο περιεκτικότητες σε έγκλεισμα που αναφέραμε. Αυτό αυτομάτως μας οδηγεί, για τους λόγους που είχαμε αναφέρει στην παράγραφο 8.3.6 στον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, να περιορίσουμε την μελέτη μας μόνο για τα δυναμικά διαμήκη μέτρα αποθηκεύσεως και λόγους Poisson των δύο περιπτώσεων σε έγκλεισμα.



Εικόνα 8.32 Θερμική διαστολή κάθε φάσης του συνθέτου υλικού

Στην παρακάτω εικόνα αναφέρουμε τις τιμές των συντελεστών θερμικής διαστολής και θερμικής αγωγιμότητας των υλικών που μας ενδιαφέρουν όπως

αναφέρονται στην σελ. 80 της παραπομπής [29]. Για τις τιμές της ενδιάμεσου φάσεως χρησιμοποιήσαμε τον νόμο των φάσεων και για τις δύο περιπτώσεις περιεκτικότητας που μελετάμε.

Υλικό	E glass	Epoxy resin	Interphase
Thermal expansion coefficient $\alpha \times 10^{-6} (^{\circ}\text{C}^{-1})$	5.0	52.5	52.5
Thermal Conductivity W/m.K	1.275	0.35	0.35

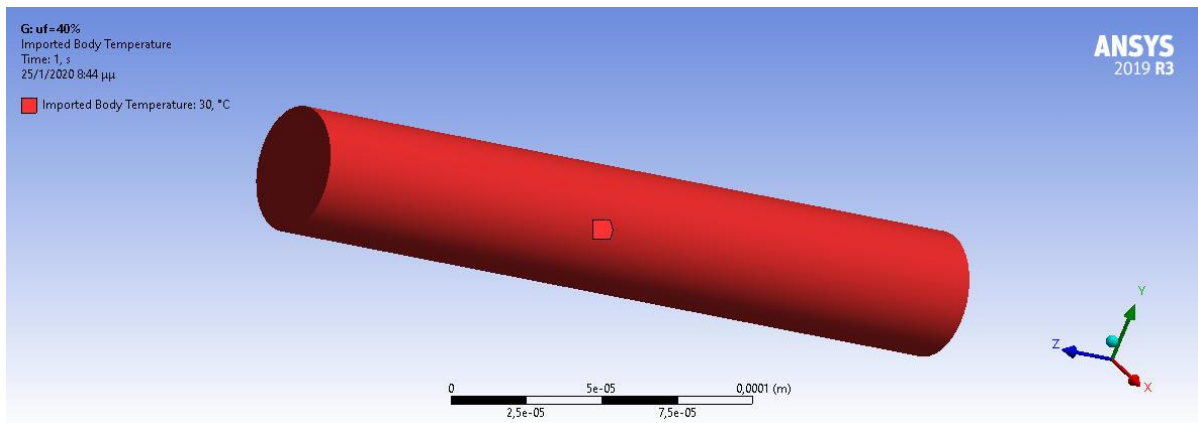
Εικόνα 8.33 Θερμικές ιδιότητες υλικών

8.4.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΔΙΑΜΗΚΗ ΛΟΓΟΥ POISSON ΓΙΑ $U_f=40\%$ - $f=100\text{Hz}$ & $U_f=65\%$ - $f=110\text{Hz}$

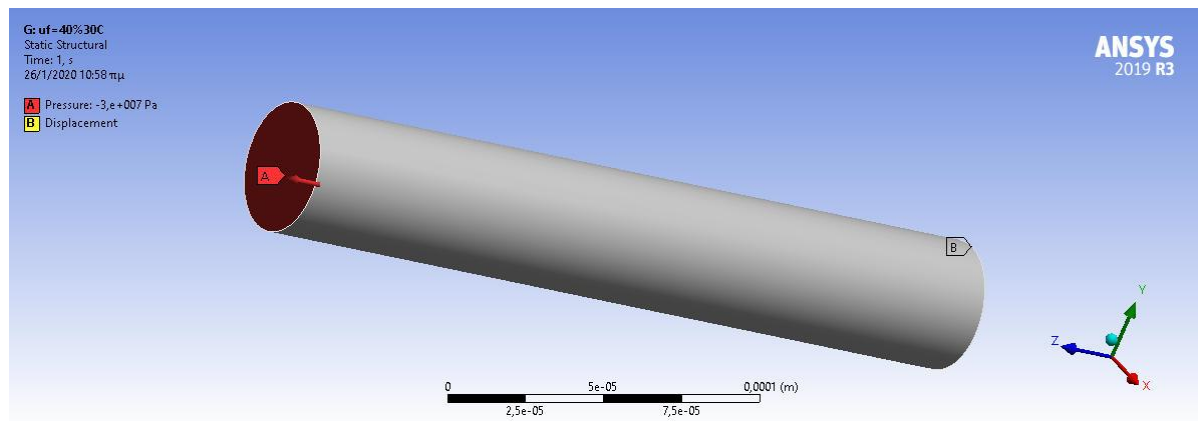
Για την υπολογιστική προσέγγιση των δυναμικών ελαστικών σταθερών χρησιμοποιήσαμε την γεωμετρία του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου για περιεκτικότητες σε έγκλεισμα $U_f=40\%$ και $U_f=65\%$. Χρησιμοποιώντας την στο πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων προσπαθήσαμε να βρούμε τις τροπές που δημιουργούνται λόγω θερμικής διαστολής καθώς αυξάνουμε σταδιακά σε βήματα των 10°C , την θερμοκρασιακή κατάσταση του μοντέλου από τους 30°C μέχρι τους 100°C για την πρώτη περιεκτικότητα και αντίστοιχα από τους 20°C μέχρι τους 110°C για την δεύτερη.

Επιπρόσθετα σε κάθε βήμα όπως προαναφέραμε πήραμε ως δεδομένο την τιμή για το μέτρο αποθηκεύσεως της μήτρας που μεταβάλλεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.

Στην παρακάτω εικόνας απεικονίζεται η φόρτιση του μοντέλου με $U_f=40\%$ για θερμοκρασιακή μεταβολή από τους 20°C στους 30°C με ταυτόχρονη εφελκυστική φόρτιση $P=-30\text{Mpa}$ στο ένα άκρο και πάκτωση στο άλλο. Δηλαδή είναι σαν να προσθέτουμε τις δύο φορτίσεις.

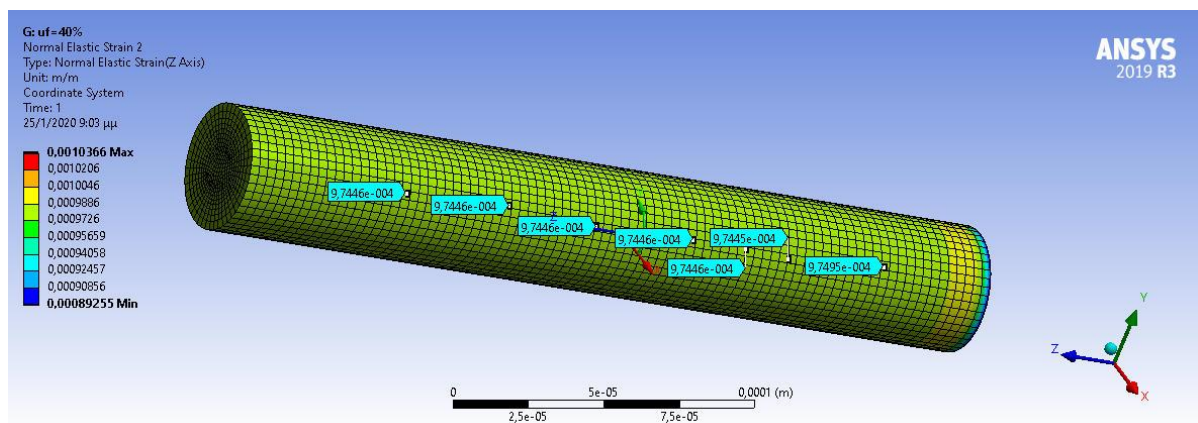


Εικόνα 8.33 Θερμική φόρτιση του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου για $U_f=40\%$

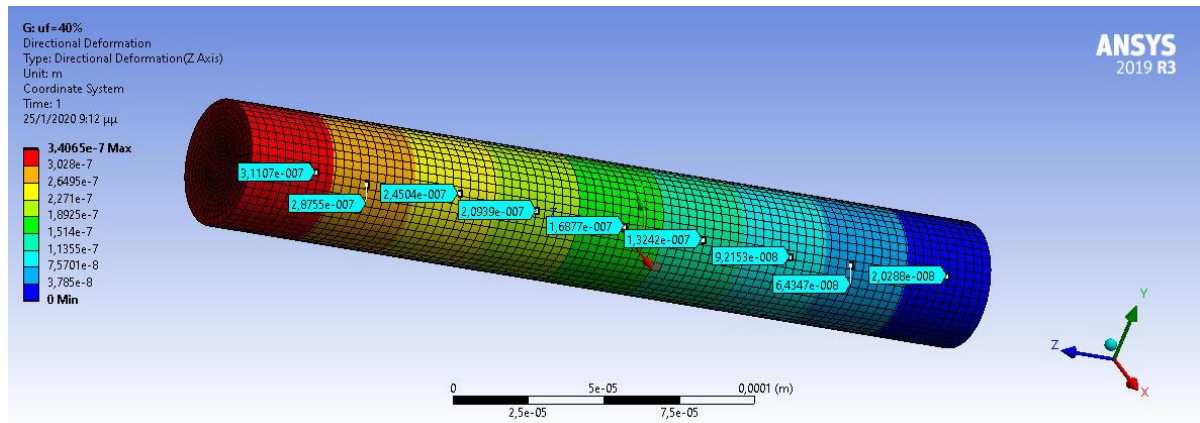


Εικόνα 8.34 Εφελκυστική φόρτιση του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλο για $U_f=40\%$

Στις παρακάτω εικόνες δείχνεται η επίλυση του μοντέλου που είχε σαν αποτέλεσμα, μέσο όρο για την διαμήκη τροπή $\epsilon_{zz}=9.7446 \times 10^{-4}$.

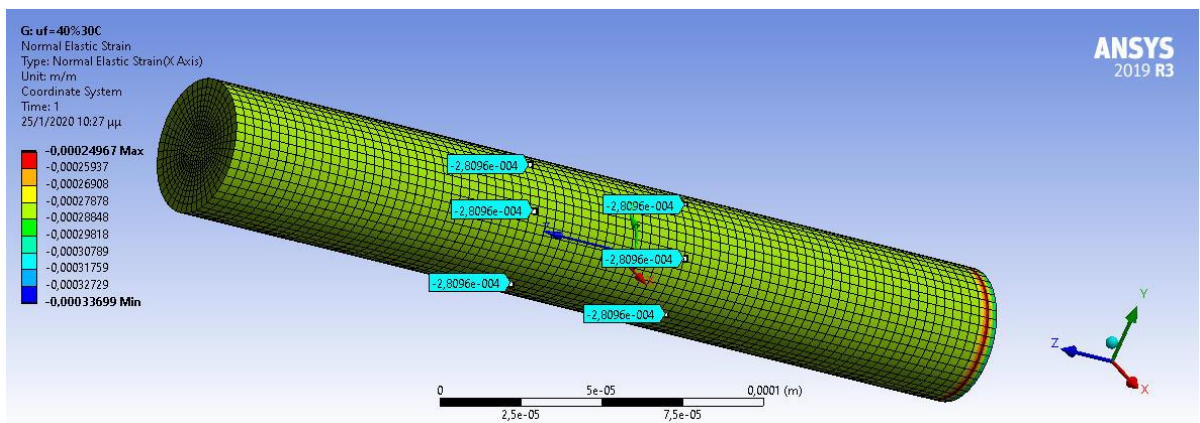


Εικόνα 8.34 Διαμήκεις τροπές του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον Z άξονα με $U_f=40\%$

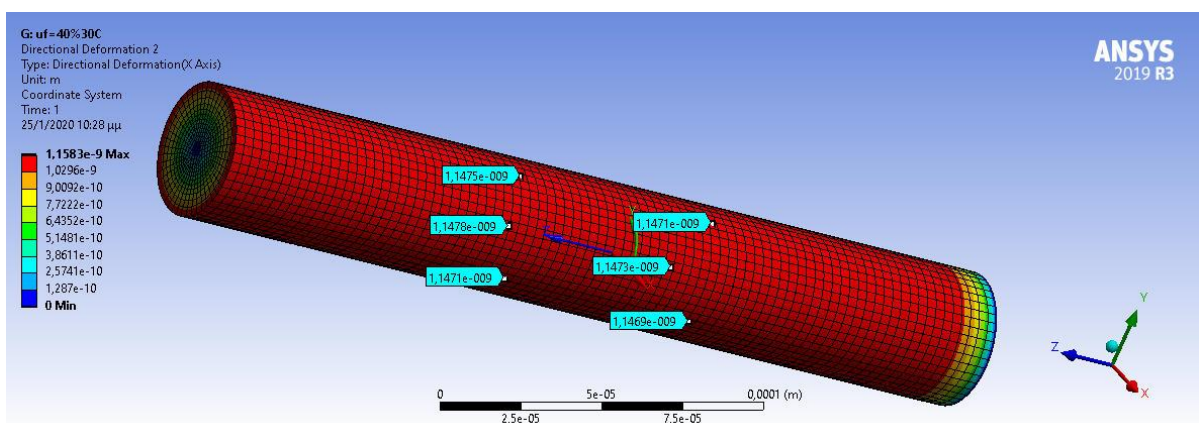


Εικόνα 8.35 Παραμορφώσεις του μοντέλου κατά τον Z άξονα με $U_f=40\%$

Αντίστοιχα στις παρακάτω εικόνες δείχνεται η επίλυση του μοντέλου που είχε σαν αποτέλεσμα, μέσο όρο για την ακτινική τροπή $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{rr} = -2.8096 \times 10^{-4}$.



Εικόνα 8.36 Διαμήκειες τροπές του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον x άξονα με $U_f=40\%$



Εικόνα 8.37 Παραμορφώσεις του μοντέλου κατά τον x άξονα με $U_f=40\%$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τον πίνακα των μέσων όρων των τροπών κατά τον x και κατά τον z άξονα σε σχέση με την θερμοκρασία, που προκύπτουν από την επίλυση του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου για περιεκτικότητα $U_f=40\%$.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΡΟΠΩΝ ΙΣΟΔ. ΜΟΝ. ANSYS		
T(°C)	Διαμήκης ϵ_{zz}	Ακτινική ϵ_{rr}
30	9.7446×10^{-4}	-2.8096×10^{-4}
40	9.7891×10^{-4}	-2.8224×10^{-4}
50	9.8342×10^{-4}	-2.8353×10^{-4}
60	9.8678×10^{-4}	-2.8451×10^{-4}
70	9.9134×10^{-4}	-2.8582×10^{-4}
80	9.9479×10^{-4}	-2.8682×10^{-4}
90	9.9942×10^{-4}	-2.8815×10^{-4}
100	10.0901×10^{-4}	-2.9091×10^{-4}

Πίνακας ξα

Ο πίνακας ξβ παρουσιάζει τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το ισοδύναμο μοντέλο για το δυναμικό διαμήκης μέτρο αποθηκεύσεως και κατόπιν στον επόμενο πίνακα ξγ τα αποτελέσματα για τον δυναμικό διαμήκη λόγο Poisson. Στους πίνακες έχουμε συμπεριλάβει τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα από το κεφάλαιο 7 καθώς και τα υφιστάμενα πειραματικά δεδομένα.

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΕΩΣ				
E'_L (Gpa) $U_f=40\%$, $f=100\text{Hz}$				
T(°C)	ΥΠΟΛ. ΙΣΟΔΥΝ. ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	Experiment Data I	Experiment Data II
30	30.7863	30.4940	29.8765	30.392
40	30.6463	30.3475	29.7778	30.196
50	30.5058	30.2010	29.6914	30.000
60	30.4019	30.0913	29.6296	30.000
70	30.2621	29.9448	29.5062	29.902
80	30.1571	29.8350	29.4444	29.804
90	30.0174	29.6885	29.3827	29.706
100	29.7321	29.3902	28.9506	29.118

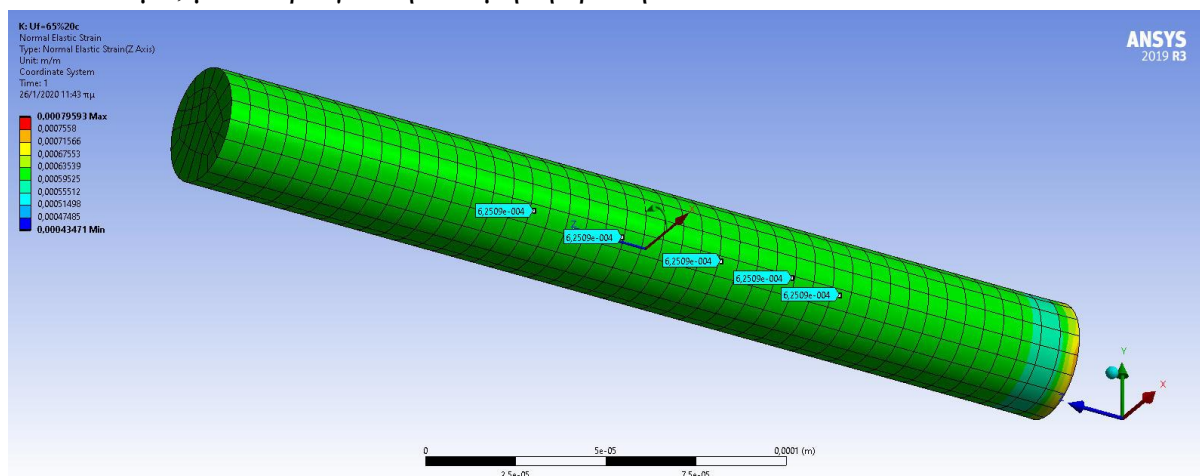
Πίνακας ξβ

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΛΟΓΟΣ			
POISSON ν'_{LT} $U_f=40\%$, $f=100\text{Hz}$			
T(°C)	ΥΠΟΛ. ΙΣΟΔΥΝ. ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	WHITNEY RILEY
30	0.2883	0.281	0.281309
40	0.2883	0.281	0.281241
50	0.2883	0.281	0.281172
60	0.2883	0.281	0.281121
70	0.2883	0.281	0.281052
80	0.2883	0.281	0.281000
90	0.2883	0.281	0.280932
100	0.2883	0.281	0.280790

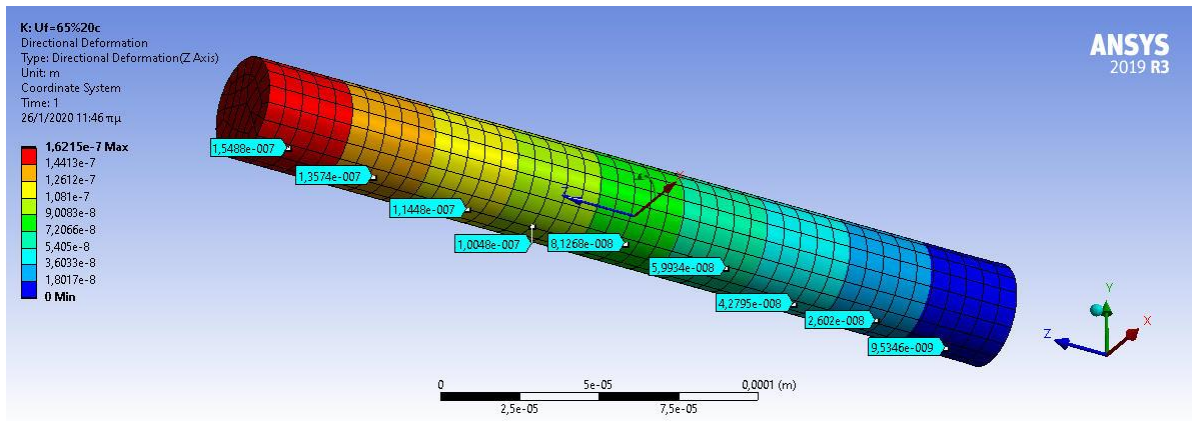
Πίνακας $\xi\gamma$

Στην συνέχεια ακριβώς με την ίδια διαδικασία που αναφέραμε παραπάνω, παρουσιάζουμε την επίλυση που προέκυψε από το ισοδύναμο υπολογιστικό μοντέλο για περιεκτικότητα $U_f=65\%$ και θερμοκρασία 20°C .

Στις παρακάτω εικόνες δείχνεται η επίλυση του μοντέλου που είχε σαν αποτέλεσμα, μέσο όρο για την διαμήκη τροπή $\epsilon_{zz}=6.2509 \times 10^{-4}$.

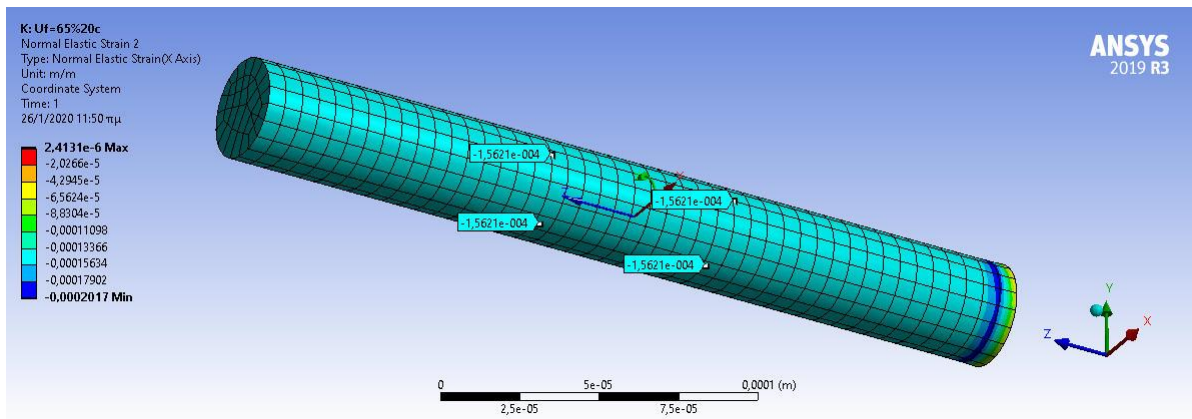


Εικόνα 8.38 Διαμήκειες τροπές του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον Z άξονα με $U_f=65\%$

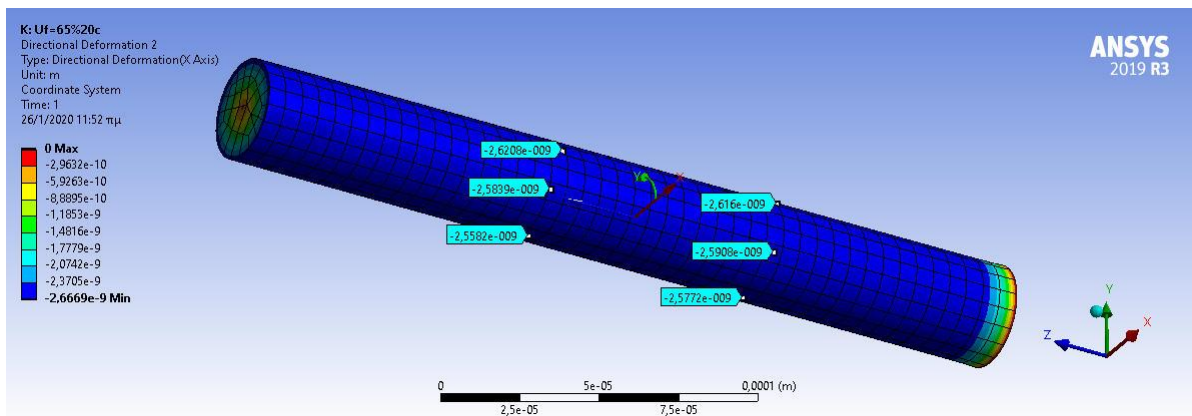


Εικόνα 8.39 Παραμορφώσεις του μοντέλου κατά τον Z άξονα με $U_f=65\%$

Αντίστοιχα στις παρακάτω εικόνες δείχνεται η επίλυση του μοντέλου που είχε σαν αποτέλεσμα, μέσο όρο για την ακτινική τροπή $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{rr} = -1.5621 \times 10^{-4}$.



Εικόνα 8.40 Διαμήκεις τροπές του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου κατά τον x άξονα με $U_f=65\%$



Εικόνα 8.41 Παραμορφώσεις του μοντέλου κατά τον x άξονα με $U_f=65\%$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τον πίνακα των μέσων όρων των τροπών κατά τον x και κατά τον z άξονα σε σχέση με την θερμοκρασία, που προκύπτουν από την επίλυση του ισοδύναμου υπολογιστικού μοντέλου για περιεκτικότητα $U_f=65\%$.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΡΟΠΩΝ ΙΣΟΔ. ΜΟΝ. ANSYS		
T(°C)	Διαμήκης ϵ_{zz}	Ακτινική ϵ_{rr}
20	6.2509×10^{-4}	-1.5621×10^{-4}
30	6.2567×10^{-4}	-1.5636×10^{-4}
40	6.2645×10^{-4}	-1.5655×10^{-4}
50	6.2704×10^{-4}	-1.5671×10^{-4}
60	6.2763×10^{-4}	-1.5685×10^{-4}
70	6.2821×10^{-4}	-1.5699×10^{-4}
80	6.2872×10^{-4}	-1.5712×10^{-4}
90	6.2919×10^{-4}	-1.5724×10^{-4}
100	6.2978×10^{-4}	-1.5739×10^{-4}
110	6.3038×10^{-4}	-1.5753×10^{-4}

Πίνακας ξδ

Οπότε παρακάτω παρουσιάζουμε τον πίνακα ξε με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το ισοδύναμο μοντέλο για το διαμήκης μέτρο αποθηκεύσεως και κατόπιν στον επόμενο πίνακα ξστ τα αποτελέσματα για τον δυναμικό διαμήκη λόγο Poisson. Στους πίνακες έχουμε συμπεριλάβει τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα από το κεφάλαιο 7 καθώς και τα υφιστάμενα πειραματικά δεδομένα.

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΕΩΣ			
E'_l (Gpa) $U_f=65\%$, $f=110\text{Hz}$			
T(°C)	ΥΠΟΛ. ΙΣΟΔΥΝ. ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	Experiment Data I
20	47.9931	49.3201	53.6
30	47.9486	49.2701	
40	47.8889	49.2035	52.6
50	47.8438	49.1536	
60	47.7989	49.1036	52.1
70	47.7547	49.0537	
80	47.7160	49.0104	51.6
90	47.6804	48.9704	
100	47.6357	48.9204	51
110	47.5903	48.8705	

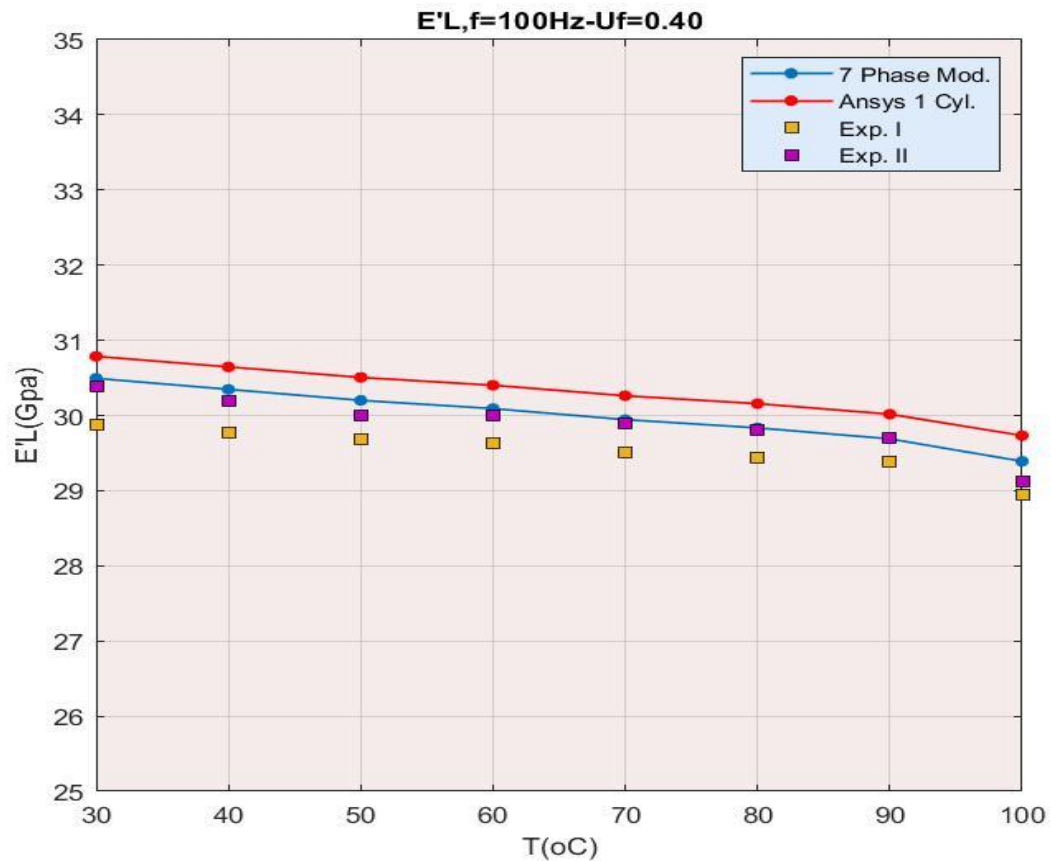
Πίνακας ξε

<u>ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΛΟΓΟΣ</u>			
<u>POISSON ν'_{LT} $U_f=65\%$, $f=110\text{Hz}$</u>			
T(°C)	ΥΠΟΛ. ΙΣΟΔΥΝ. ANSYS	ΘΕΩΡ. ΕΠΤΑΦ. ΜΟΝΤ.	WHITNEY RILEY
20	0.2499	0.245	0.244848
30	0.2499	0.245	0.244813
40	0.2499	0.245	0.244767
50	0.2499	0.245	0.244732
60	0.2499	0.245	0.244697
70	0.2499	0.245	0.244662
80	0.2499	0.245	0.244631
90	0.2499	0.245	0.244603
100	0.2499	0.245	0.244568
110	0.2499	0.245	0.244533

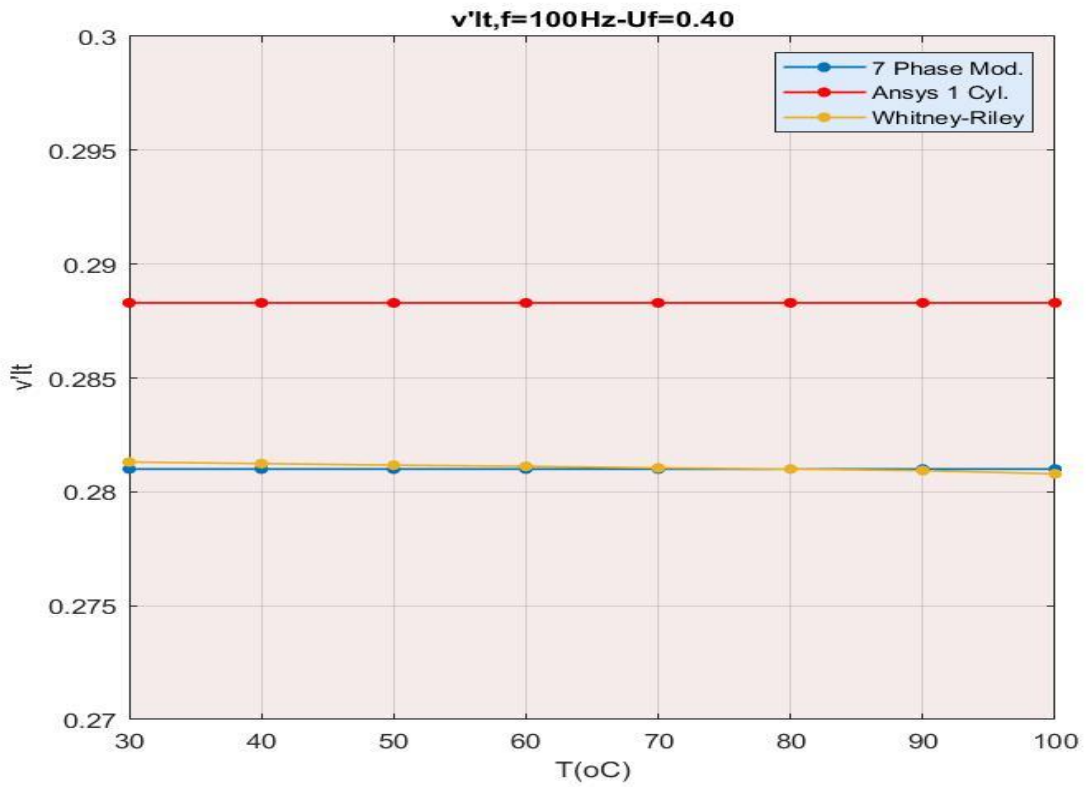
Πίνακας ξστ

8.4.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΥ POISSON ΓΙΑ $U_f=40\%$ - $f=100\text{Hz}$ & $U_f=65\%$ - $f=110\text{Hz}$

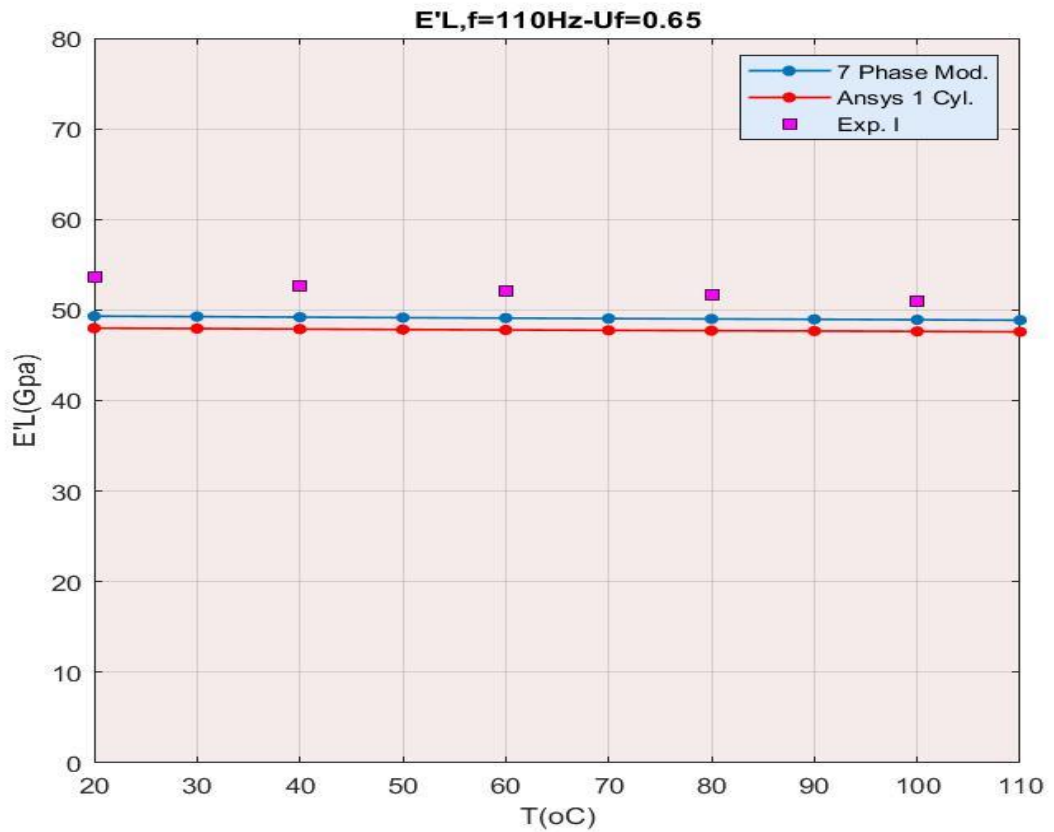
Παρακάτω παρουσιάζουμε τα διαγράμματα που προέκυψαν από την ανάλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία για το δυναμικό διάμηκες μέτρο αποθηκεύσεως και λόγο Poisson για τις δύο περιεκτικότητες.



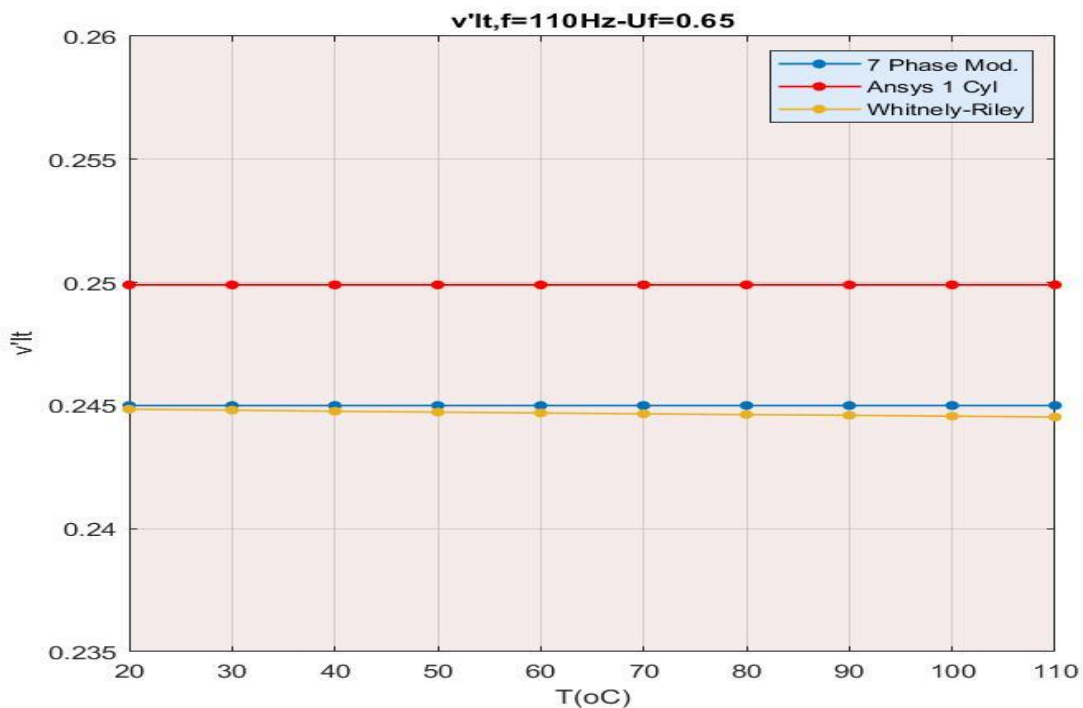
Εικόνα 8.42 Διάγραμμα E'_L για $U_f=40\%$ - $f=100\text{Hz}$



Εικόνα 8.43 Διάγραμμα ν'_{LT} για $U_f=40\%$ - $f=100\text{Hz}$



Εικόνα 8.44 Διάγραμμα E'_L για $U_f=65\%$ - $f=110\text{Hz}$



Εικόνα 8.45 Διάγραμμα v'_{LT} για $U_f=65\%$ - $f=110\text{Hz}$

Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα που αφορούν τα αποτελέσματα που μπορέσαμε να υπολογίσουμε με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το δυναμικό διαμήκη μέτρο αποθηκεύσεως και δυναμικό διαμήκη λόγο Poisson μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

- **Περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 40%**

- Τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τον διάμηκες μέτρο αποθηκεύσεως παρατηρούμε ότι είναι πολύ κοντά τόσο με αυτά του θεωρητικού επαφασικου μοντέλου όσο και με τα πειραματικά δεδομένα. Μάλιστα οι τιμές που προκύπτουν είναι ελαφρώς αυξημένες σε σχέση με των άλλων δύο μελετών.

- Ο δυναμικός διαμήκης λόγο Poisson διαπιστώνουμε ότι είναι ανεξάρτητος από την θερμοκρασία όπως ακριβώς συμβαίνει τόσο με το θεωρητικό επαφασικό μοντέλο όσο και πρακτικά με το μοντέλο των Whitney-Riley αλλά εμφανίζεται αρκετά αυξημένος σε σχέση με αυτά.

- **Περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 65%**

- Τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τον διάμηκες μέτρο αποθηκεύσεως παρατηρούμε ότι είναι πολύ κοντά, τόσο με αυτά του θεωρητικού επαφασικου μοντέλου όσο και με τα πειραματικά δεδομένα. Μάλιστα οι τιμές που προκύπτουν είναι ελαφρώς μειωμένες σε σχέση με των άλλων δύο μελετών.

- Ο δυναμικός διαμήκης λόγο Poisson διαπιστώνουμε ότι είναι ανεξάρτητος από την θερμοκρασία όπως ακριβώς συμβαίνει, τόσο με το θεωρητικό

επταφασικό μοντέλο όσο και πρακτικά με το μοντέλο των Whitney-Riley, αλλά εμφανίζεται αρκετά αυξημένος σε σχέση με αυτά.

Στο τελευταίο κεφάλαιο συγκρίναμε τα θεωρητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του θεωρητικού κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου, με τα αποτελέσματα από τις πειραματικές διατάξεις και τις λύσεις που προέκυψαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η διαδικασία αυτή έγινε τόσο για τα αποτελέσματα της μελέτης των στατικών ελαστικών σταθερών όσο και για αυτής των δυναμικών. Προσπαθήσαμε δηλαδή να προσεγγίσουμε τις πειραματικές διαδικασίες, από τις οποίες προέκυψαν τα πειραματικά δεδομένα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Παρόλες τις παραδοχές και τα σφάλματα που εμπεριέχει αυτή η προσέγγιση μπορούμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν αρκετά ικανοποιητικά. Αυτό το είδαμε και στην περίπτωση του υπολογισμού του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T . Παρά το γεγονός ότι για τον υπολογισμό του, χρησιμοποιήσαμε τα θεωρητικά αποτελέσματα του λόγου Poisson ν_{TT} , διότι το πρόβλημα όπως είπαμε δεν είχε μονοσήμαντη λύση, θα περιμέναμε τα αποτελέσματα να μην είναι ικανοποιητικά. Παρόλα αυτά είδαμε ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έδωσε ικανοποιητική λύση και σε αυτή την περίπτωση.

Τέλος να αναφέρουμε πως η επιλογή της μέσης τιμής των παραβολικών συναρτήσεων $E_i(r)$, $G_i(r)$ και $\nu_i(r)$ που υπολογίσαμε στο κεφαλαίο 4, ως ελαστικών σταθερών της ενδιάμεσου φάσεως στα υπολογιστικά μοντέλα, αποδείχθηκε ορθή.

8.5 ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η απόκλιση των τιμών των ελαστικών σταθερών που εξήχθησαν από το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο, σε σύγκριση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα, αν και γενικά μπορεί να θεωρηθεί αρκετά μικρή είναι αναμενόμενη. Αυτό συμβαίνει λόγω των ατελειών στην κατασκευή των σύνθετων υλικών που αναφέραμε στα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων των στατικών σχέσεων στην παράγραφο 5.10.

Πέρα των ανωτέρω **συμπερασματικά** σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι το **θεωρητικό κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο ανταποκρίνεται αρκετά καλά** σε σχέση με τα πραγματικά δοκίμια, αφού οι τιμές που εξάγονται από αυτό προσεγγίζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό τα υφιστάμενα πειραματικά δεδομένα. Αυτό είδαμε ότι συμβαίνει τόσο για την στατική μελέτη του κεφαλαίου 5 όσο και για την δυναμική μελέτη του κεφαλαίου 7.

Ακόμα είδαμε στην ανάλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρινόμενα με τα θεωρητικά αποτελέσματα και τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα είναι πολύ κοντά. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα να πούμε ότι με την μέθοδο αυτή μπορούμε να έχουμε γρήγορα και αξιόπιστα αποτελέσματα,

ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που οι θεωρητικές σχέσεις που προκύπτουν από την μελέτη μας δεν έχουν αναλυτική λύση. Επίσης μπορούμε εύκολα να παραμετροποιήσουμε δεδομένα όπως είναι η φόρτιση ή η στατική στήριξη του μοντέλου και να καταλάβουμε άμεσα πώς αυτό συμπεριφέρεται στις διάφορες μεταβολές.

Ως μελλοντική εργασία προτείνεται να γίνει αντίστοιχη μελέτη κυλινδρικού μοντέλου για σύνθετα υλικά με ίνες άνθρακα ή υβριδικά σύνθετα υλικά όπως το Glare, καθώς αυτά αποτελούν τα υλικά δημιουργίας νέων καινοτόμων κατασκευών ιδιαίτερα σε εφαρμογές ακριβείας όπως στην αεροναυπηγική και την μικρο-ιατρική και έχουν εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες που μπορούν να προσαρμοστούν καταλλήλως ανάλογα με τις εκάστοτε απαιτήσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σ. Καϊμαξής, «Θεωρητική και Υπολογιστική Μελέτη των Θερμομηχανικών Ελαστικών Σταθερών Ινώδους Σύνθετου Υλικού με χρήση του Επταφασικού Μοντέλου με Ενδιάμεση Φάση », Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, σελ. α(6-44), β(46-53), γ(53-58), δ(63-72), ε(73-99), στ(100-150), (2017)
2. Ε. Κουρουτζόγλου, «Μελέτη των ελαστικών σταθερών ινώδους σύνθετου υλικού με χρήση του Επταφασικού Μοντέλου με Ενδιάμεση Φάση» », Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, σελ. α(9-49), β(52-59), γ(60-67), δ(68-79), ε(80-134), στ(135-191) (2014)
3. Γ. Μπικάκης, «Συμβολή στη μελέτη της αντοχής μηχανολογικών κατασκευών από σύγχρονα πολύστρωτα υλικά», Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, σελ. 1-42 (2010)
4. Yu.S. Lipatov, V.F.Babich and V.F.Rosovizky, J. Appl. Polym. Sci., 18, p. 1213 (1974)
5. Yu.S. Lipatov and L.M.Sergeeva, Adsorption of Polymer, New York (1974)
6. Yu.S. Lipatov, Plaste Kautschuk, 10, p. 738 (1973)
7. Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, Vysokomol, Soedin, B10, p. 848 (1968)
8. Yu.S. Lipatov and T.E Geller, Vysokomol, Soedin, 8, p. 592, (1966)
9. Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, J. Appl. Polym. Sci., 16, p. 2131 (1972)
10. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F.Rosovozky, J. Appl. Polymer Sci., 20, p. 1787 (1976)
11. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, Colloid and Polymer Sci., 257, 3, p. 239 (1979)
12. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, Colloid and Polymer Sci., 258, 9, p. 1044-1051 (1980)
13. R.F. Landel and T.L. Smith, American Rocket Society Jnl., p. 599 (1961)
14. S. Turner, Appl. Mat. Res., p. 10 (1965)
15. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, J. Appl. Pol. Sci., 9, p. 2143 (1965)
16. C.A. Kumins and J.Roteman, J. Pol. Sci., 1-A, p. 527 (1963)
17. G.C. Papanicolaou, S.A.Paipetis and P.S. Theocaris, J. Appl. Pol. Sci., 21, p. 689 (1977)
18. S. Strella and P.F.Erhardt, J. Appl. Pol. Sci., 13, p. 1373 (1969)
19. S.Strella, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 569 (1963)
20. S.Strella, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 1281 (1963)
21. P.S. Theocaris and G. C.Papanikolaou, Fibre Science and Technology, Vol.12, 6, p.421 (1979)
22. P.S. Theocaris, "The Interphase and its Influence on the Mechanical Properties of Composites," New developments in the Characterization of Polymers in the Solid State, Advances in Polymer Science, H.H.Kausch & H.C.Zachmann Editors, Springer Verlag Publ.(1984); see also P.S.Theocaris, "On the Evaluation of Adhesion Between Phases in Fiber Composites," Colloid and Polymer Journal (1984).
23. E. Sideridis, "The Transverse Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase" Journal of Applied Polymer Science, Vol. 48, p.243-255 (1993)
24. E. Sideridis, "The In-Plane Shear Modulus of Fiber Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase" Composites Science and Technology 31, p.35-53 (1988)
25. E. Sideridis, "The Off-Axis Elastic Constants of Unidirectional Glass Fiber Composites Defined by the Concept of Interphase"
26. P.S. Theocharis, "The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites", Proc. Nat. Acad. Athens, Vol.59, No. II, p.87-100 (1984)

27. P.S. Theocaris, E.P.Sideridis, G.C.Papanicolaou, “The Elastic Longitudinal Modulus and Poisson’s Ratio of Fiber Composites” Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 4, (October 1985)
28. I.M. Daniel-O.Ishai “Engineering mechanics of composite materials”, Oxford university press, New York, p. $\alpha(99)$, $\beta(85)$ (2006)
29. P.S. Theocharis “The mesophase concept in composites”, Springer Verlag, Berlin, p. 82 (1987)
30. S.W. Tsai and H.T. Hahn, “Introduction to composite materials”, Technomic , Lancaster, Pa (1985)
31. G.A. Papadopoulos, E. Sideridis, Study of Orthotropic materials: The Interphase Model and the Crack Initiation., Archive of Applied Mechanics 66, p.111-125 (1995)
32. J.C. Ekvall, “ASME” (1961)
33. B.W. Rosen, “Composites” (1974)
34. Paul, Trans. Metallurgical Soc. AIME, 21. p.8, 36 (1960)
35. J.M. Whitney and M.B. Riley, AIAA J. , p.1537 (1966)
36. J.C. Ekvall, “Structural Behaviour of Monofilament Composites”, Proc. AIAA 6th Structures and Materials Conf. , AIAA, New York (1965)
37. Z. Hashin and B.W. Rosen, J. Appl. Mech. , Trans. Asme, 86 p.223 (1964)
38. Z. Hashin, J. Mech. Phys. Solids, 12, p.119 (1965)
39. J.C. Ekvall, ASME Paper No.63-WA-223 (1963)
40. L.B. Greszczuk, “Membrane Analysis Methods for Composites Structures”, Douglas Aircraft Co. Inc. , SM-41543 (1962)
41. P.S. Theocharis, “The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites”, Proc. Nat. Acad. Athens, Vol.59, No. II, p.87-100 (1984)
42. G.C. Sih, P.D. Hilton, R. Badaliane , P.S. Schenberger and G. Villareal , “Fractured Mechanics for Fibrous Composites, ASTM STP 521 , p. 98-132 (1973)
43. L.L. Clements and Moore R.L. , Composites, 1, p.93 (1978)
44. J.M. Whitney and M.B.Riley, AIAA Journal, 4(9), p.1537-1542 (1966).
45. L.B. Gteszczuk, “Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behaviour of Filamentary Composites”, SPI 21st Conference, Chicago, IL, Sect. 5-B (1966)
46. S.W.Tsai, NASA CR-71 (1964)
47. R.M. Orgrkiewicz and A.A.M. Sayigh, J. Strain Analysis 6,p.226 (1971)
48. Z. Hashin, Int. J. Solids Structures, 6, p.797(1970)
49. Α. Καμπούρογλου, «Μελέτη των Δυναμικών Ελαστικών Σταθερών Σύνθετων Ινωδών Υλικών διά της θεωρήσεως της Αρχής της Αντιστοιχίας», Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, σελ.53-59 (2017),
50. Z. Hashin, (1972b). Vibrations of Viscoelastic Bodies with Small Loss Tangents: Correspondence Principle and Application to Composites. MED Rep. 37.
51. P.S. Theocharis, Coll. Polym. Sci. 235, p.1182 (1969)
52. S.L. Quimby, Phys. Rev.,p.25,558 (1925)
53. J.H. C.Thomson, Trans. R. Soc. London, p.231,339 (1933)
54. N.P. Cheremisinoff. “Handbook of ceramics and composites”Vol.1.Marcel Dekker, New York, p.155-164 (1990)

55. Αιμ. Σιδερίδης, “Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιαμέσου φάσεως”, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ σελ.169 (1998)
56. ANSYS WORKBENCH Version 19.3
- 57.Γ.Ι. Τσαμασφύρος-Ε.Ε.Θεοτόκογλου, «Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων», Συμμετρία, Αθίνα σελ. 72-77 (2005)
- 58.M.H. Sadd, “Elasticity, Theory, Applications, and Numerics”, Academic Press, Burlington p. 81 (2009)
59. Yu.S. Lipatov, Physical Chemistry of Filled Polymers, Originally published “Khimiya” (Moscow 1977). Translated from the Russian by R.J. Moseley, International Polymer Science and Technology Monograph No. 2
60. Π. Α. Βουθούνης, «Τεχνική Μηχανική», Αθήνα (1993)
61. www.epotec.gr (Tg-Glass Transition Temperature for Epoxies)
- 62.E. Sideridis , “Thermal expansion coefficients of fiber composites defined by the concept of the interphase” (1993)
63. P.S. Theocaris, G.D. Spathis., E.P. Sideridis, Fibre Sci and Technology, Vol.17, p.169 (1982)
64. P.S. Theocaris, G.C.Papanicolaou and G.D.Spathis Fibre Sci. and Technology, Vol. 15, p.187 (1981)
65. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris and G.D. Spathis Colloid and Polymer Science, Vol. 258, 11, p. 1231 (1980)
66. G.C. Papanikolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, Colloid and Polymer Science, Vol. 256, 7, p. 625(1978)