



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Διάδοση ραδιοκυμάτων σε αντιδραστήρα θερμοπυρηνικής
σύντηξης (tokamak) παρουσία τυρβώδων ροών

Μπαϊρακτάρης Φώτιος- Α.Μ.: 03002428

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων Καθηγητής:

Κυριάκος Χιτζανίδης, Καθηγητής ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ

Τριμελής επιτροπή: Κυριάκος Χιτζανίδης, Ιωάννης
Ξανθάκης, Ιωάννης Ρουμελιώτης

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	9
1.1	Γενικά για την πυρηνική ενέργεια	9
1.2	Πυρηνική Σύντηξη	11
1.2.1	Πλεονεκτήματα σύντηξης-βασικές αντιδράσεις	13
1.3	Οι αντιδραστήρες tokamak	15
1.3.1	Σημαντικά πειραματικά κέντρα θερμοπυρηνικής σύντηξης	17
1.4	Φαινόμενα ανομοιογένειας πλάσματος που επηρεάζουν την απόδοση	23
2	Μέθοδος ομογενοποίησης για μαγνητισμένο πλάσμα	27
2.1	Εισαγωγή	27
2.1.1	Γενικά για τη διαδικασία	28
2.1.2	Προτεινόμενα όρια	30
2.1.3	Ηλεκτρομαγνητικός φορμαλισμός	32
2.2	Προγενέστερες μέθοδοι ομογενοποίησης	39
2.2.1	Μέθοδος Maxwell-Garnett(MG)	41
2.2.2	Μέθοδος Bruggeman	44
2.3	Η νέα μέθοδος	45
2.3.1	Διατύπωση του προβλήματος στον tokamak	46
2.3.2	Μαθηματική μέθοδος	47
2.3.3	Προσεγγιστική λύση	55
2.3.4	Αποτελέσματα για μαγνητισμένο πλάσμα σύντηξης . . .	57

2.3.5	Συμπεράσματα - Επόμενα βήματα	61
2.4	Ομογενοποίηση των εξισώσεων Maxwell σε περιοδικές και μη δομές	66
2.4.1	Διατύπωση του προβλήματος	67
2.4.2	Σύγκλιση δύο κλιμάκων	68
2.4.3	Διατύπωση προβλήματος στην μοναδιαία κυψελίδα . . .	69
2.4.4	Σύγκριση με κλασσικές μεθόδους	71
2.4.5	Περαιτέρω γενίκευση-Στοχαστική μέθοδος	72
2.5	Επίλογος Κεφαλαίου	72
3	Μέθοδος Case-Van Kampen για μαγνητισμένο πλάσμα	75
3.1	Εισαγωγή	75
3.2	Ανάλυση για ηλεκτροστατικά κύματα σε μη μαγνητισμένο πλάσμα	76
3.3	Ανάλυση για ηλεκτρομαγνητικά κύματα	78
3.3.1	Χρήση χώρου ορμών	78
3.3.2	Εξισώσεις για μαγνητισμένο πλάσμα	79
3.4	Συμπεράσματα	88
4	Επίλογος- Μελλοντικά Ερευνητικά Θέματα	91
4.1	Μέθοδος PCE	91
4.2	Μηχανική Μάθηση με εφαρμογές στην θερμοπυρηνική σύντηξη	92
4.3	Ανοιχτά ζητήματα	95

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιστημονικό μου επιβλέποντα καθηγητή Κ. Κυριάκο Χιτζανίδη, για την επιστημονική καθοδήγηση όλα αυτά τα χρόνια, καθώς και για την επαφή με συνεργάτες εκτός του εργαστηρίου προς διεύρυνση των οριζόντων μου και μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα της δουλειάς μου. Ευχαριστώ τον επιστημονικό μας συνεργάτη Dr. Abhay K. Ram, χωρίς τον οποίο δεν θα υπήρχε το έναυσμα για το κεφάλαιο 3 της παρούσας δουλειάς, καθώς και για την άμεση ανταπόκρισή του στο να παρέχει προτάσεις για τη δημοσιευμένη μου δουλειά, πριν την τελική υποβολή. Ευχαριστώ επίσης όλους τους συναδέλφους μου στο εργαστήριο για τις επιστημονικές συζητήσεις και τη συνεργασία, καθώς και τη γραμματέα του εργαστηρίου Μαρία Αγγελή για το ότι πήρε όλο το βάρος των διαδικαστικών υποχρεώσεων στην αλληλεπίδραση με τους διοικητικούς φορείς του ιδρύματος, παρά τις δυσκολίες.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου, που με δική τους στήριξη μπόρεσα να φτάσω μέχρι το διδακτορικό, τον φίλο μου Γιώργο, που εκείνος πρώτος μου είχε αναφέρει την ύπαρξη του εργαστηρίου όταν δεν ήξερα τι να κάνω μετά το μεταπτυχιακό, και τη σύντροφό μου Κατερίνα, για τη μεγάλη στήριξη κατά τα πιο δύσκολα τμήματα προς ολοκλήρωση αυτής της δουλειάς.

Acknowledgements

I want to thank my scientific supervisor professor Kyriakos Hizanidis, for his scientific guidance during the years it took to finish this work, as well as for bringing me into contact with associates outside our lab, to further expand my scientific horizons and achieve better results from my work. I also want to thank Dr. Abhay K. Ram, for inspiring me to work on the 3rd chapter of this thesis, as well as his help and prompt response whenever needed, especially during the deadline for submitting the (now published) work that is referred to in chapter 2. I also want to thank all of my colleagues in the lab for the scientific discussions and healthy work environment, as well as our secretary, Maria Angeli for bearing the burden of every bureaucratic work, despite the difficulties.

Last but not least, I want to thank my family, for their support until now, my friend George, for pointing me to the direction of fusion physics when I finished my Master's Degree, and my partner Katerina, for the great support during the hardest part of this work.

Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας διατριβής ήταν η μελέτη της διάδοσης ραδιοκυμάτων σε αντιδραστήρα θερμοπυρηνικής σύντηξης (tokamak). Στην εισαγωγή γίνεται αναφορά στις κύριες διεργασίες που λαμβάνουν διεργασία σε ένα τέτοιο αντιδραστήρα, και παρουσιάζεται συνοπτικά η λειτουργία του. Επίσης, γίνεται συνοπτική αναφορά σε κάποια από τα υπάρχοντα πειραματικά κέντρα θερμοπυρηνικής σύντηξης.

Στο κεφάλαιο 2, ο κύριος όγκος της δουλειάς ήταν η ανάπτυξη μίας βελτιωμένης μεθόδου ομογενοποίησης του πλάσματος ως ηλεκτρομαγνητικό υλικό. Πρόκειται για εύρεση ενός ισοδύναμου ομογενούς υλικού στο οποίο ο διηλεκτρικός τανυστής είναι ισοδύναμος με του πλάσματος, ως ανομοιογενές υλικό. Η μέθοδος που αναπτύχθηκε είχε λιγότερους περιορισμούς, ειδικά όσον αφορά το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας σε σχέση με το μέγεθος των ανομοιογενειών στο πλάσμα. Οι παλαιότερες μέθοδοι δεν επαρκούσαν για την μελέτη μαγνητισμένου πλάσματος σε tokamak, καθώς γινόταν η υπόθεση ότι ήταν πολύ μεγαλύτερο το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας από τη διάσταση της ανομοιογένειας. Επίσης, παρουσιάζεται μία διαφορετική μέθοδος ομογενοποίησης, η οποία έχει εφαρμογή σε περιοδικά μέσα. Χρησιμοποιεί το γεγονός ότι οι λύσεις των εξισώσεων Maxwell από μία στοιχειώδη δομή (που επαναλαμβανόμενη κατασκευάζει τη δομή του μέσου), συγκλίνουν στη λύση για όλο το υλικό, μέσω ενός διαφορετικού ορισμού σύγκλισης.

Στο κεφάλαιο 3, αναλύθηκε μικροσκοπικά η σχέση διασποράς

μαγνητισμένου πλάσματος για ηλεκτρομαγνητικά κύματα, κάτι που είχε γίνει σε παλαιότερες δουλειές μόνο στην ηλεκτροστατική περίπτωση. Καταλήξαμε σε ένα σύστημα ολοκληρωδιαφορικών εξισώσεων που μπορεί να παράξει χρήσιμες πληροφορίες για την σχέση διασποράς του πλάσματος και την συνάρτηση κατανομής, και σε χρήσιμα συμπεράσματα σε σχέση με τις διαφορές με την ηλεκτροστατική περίπτωση.

Στον επίλογο παρουσιάζονται μελλοντικά ερευνητικά θέματα (με μία αναφορά και στη χρήση της μηχανικής μάθησης προς περαιτέρω έλεγχο θεωρητικών μοντέλων), και ανοιχτά ζητήματα όσον αφορά την παρούσα δουλειά.

Summary

The present work is dedicated to the study of propagation of RF waves through a turbulent environment in a tokamak. Introductory, mention is being made to the main processes that take place in such a reactor, and its functions. Some important tokamaks that currently exist and provide experimental work are mentioned.

In chapter 2, the main volume of the work was dedicated to the development of an improved homogenization method for magnetized plasma. This extracts the equivalent dielectric tensor of a homogeneous medium which behaves in the same way as the inhomogeneous plasma. The method developed lifted the limitations regarding the ratio of wavelength of incoming beam to the size of plasma inhomogeneous structures. Older methods were insufficient for the study of magnetized plasma in a tokamak, as the assumption that the incoming beam wavelength was much larger than the size of the inhomogeneous structures was made. A different method of homogenization is also presented, which finds application in periodic media. It utilizes the fact that the solutions of Maxwell's equations in a unit cell (which can create the material if repeated a sufficient number of times), converge to the solution for the material as a whole, via a different definition of convergence.

In another chapter, the microscopic dispersion relation for a single charged particle in magnetized plasma was studied. This study had previously been made only for electrostatic waves in unmagnetized plasma. We reached a system of three integral-differential equations which can

produce valuable information about the dispersion relation, as well as the distribution function of the plasma, and the differences with the electrostatic case.

The epilogue is dedicated to presenting future scientific work (with mention to the usage of machine learning techniques to further validate and augment theoretical models), and open issues regarding the present work.

Κεφάλαιο 1

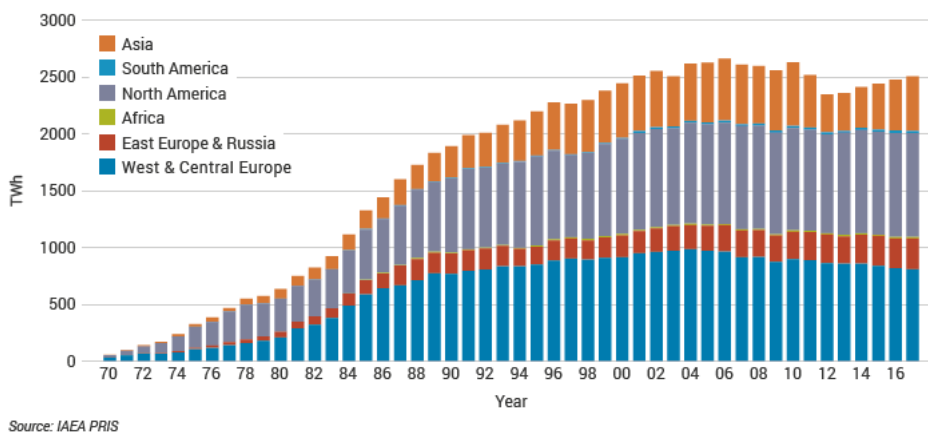
Εισαγωγή

1.1 Γενικά για την πυρηνική ενέργεια

Η εξαγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από πυρηνική ενέργεια είναι μία από τις νεότερες μεθόδους που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος για να καλύψει τις ολοένα και αυξανόμενες ενεργειακές ανάγκες του παγκόσμιου πληθυσμού. Ιστορικά, ο πρώτος αντιδραστήρας που δημιούργησε πυρηνική ενέργεια μέσω αλυσιδωτής αντίδρασης ήταν ο Chicago Pile-1 (CP-1) , που όμως δεν χρησιμοποιήθηκε για ειρηνικούς σκοπούς, αλλά ως μέρος του Manhattan Project, που είχε σκοπό την κατασκευή της πρώτης ατομικής βόμβας, λόγω του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου.

Έπειτα από αυτή την πρώτη ανακάλυψη αυτής της τεχνολογίας, τα επόμενα χρόνια η πυρηνική ενέργεια άρχισε να αποκτά όλο και περισσότερο έδαφος έναντι των ορυκτών καυσίμων ως τρόπος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας (εικόνα 1.1). Η διαδικασία παραγωγής ενέργειας μέσω πυρηνικής σχάσης είναι η εξής: Όταν ένα νετρόνιο συγκρουστεί με τον πυρήνα ενός ασταθούς βαρέως υλικού (Ουράνιο U_{235} ή Πλουτώνιο Pu) μπορεί να διαλύσει τον πυρήνα, παράγοντας νετρόνιο και ενέργεια.

Η πυρηνική σχάση έχει αρκετά πλεονεκτήματα έναντι της παραγωγής ενέργειας από ορυκτά καύσιμα. Τα πιο σημαντικά από αυτά είναι ότι δεν



Σχήμα 1.1: Χρήση πυρηνικής ενέργειας ανά ήπειρο από το 1970

παράγει ρύπους σε αέρια μορφή και ότι δεν συνεισφέρει στην ένταση του φαινομένου του θερμοκηπίου. Επίσης στηρίζεται σε στοιχεία που υπάρχουν σε αφθονία (άρα είναι και φθηνά) και παράγει πολύ πιο γρήγορα την ενέργεια σε σχέση με τα ορυκτά καύσιμα.

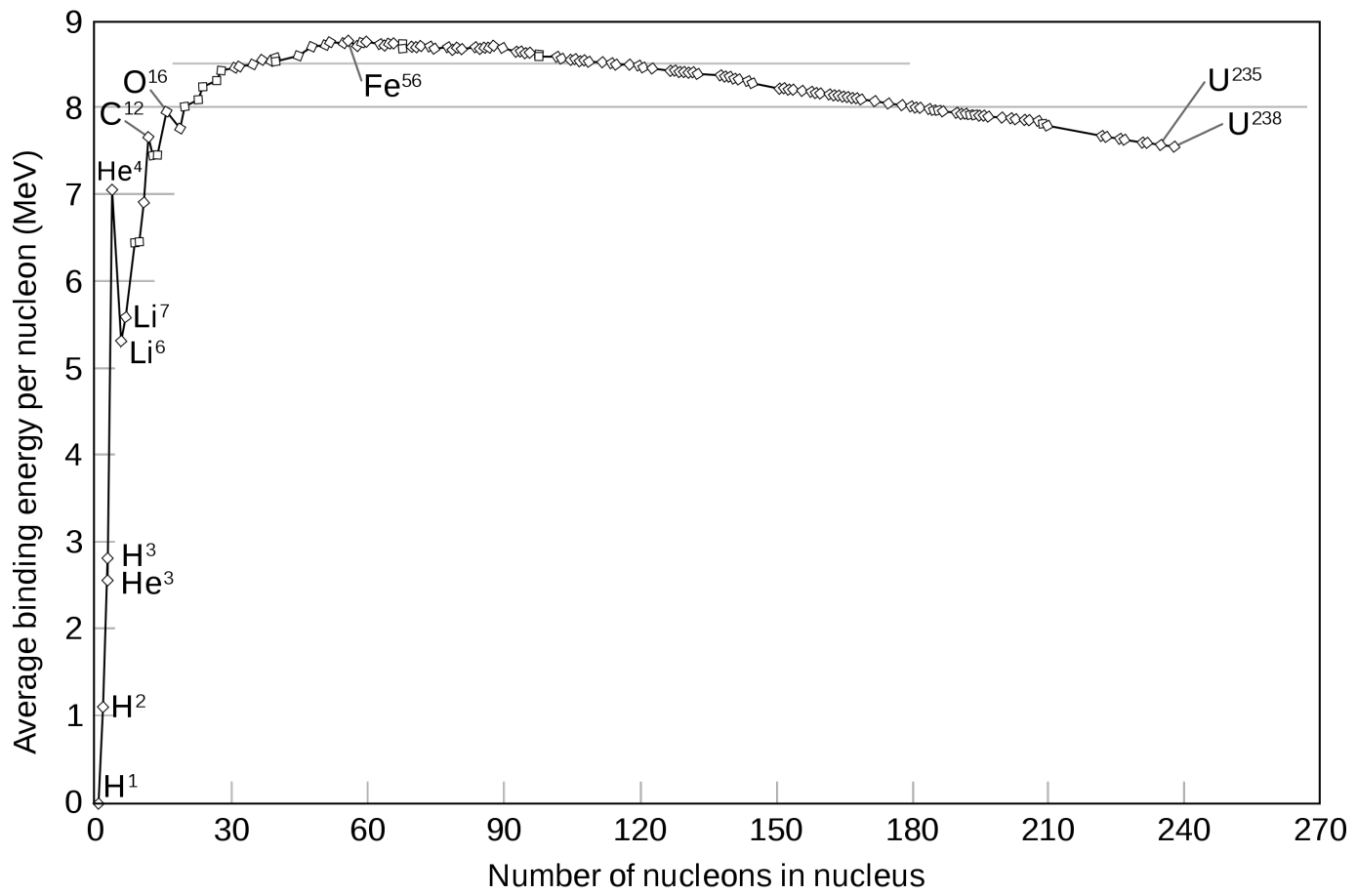
Ωστόσο υπάρχουν και σοβαρά μειονεκτήματα αυτής της μορφής ενέργειας. Καταρχήν είναι πολύ επικίνδυνη για όσους εργάζονται στις μονάδες παραγωγής πυρηνικής ενέργειας, για αυτό και χρειάζεται ειδικός εξοπλισμός. Επίσης τα απόβλητα που παράγει είναι καταστροφικά για το περιβάλλον γύρω από τις μονάδες, και υπάρχει και η τάση να ρίχνονται σε ποταμούς και θάλασσες, μολύνοντας σε τεράστιο βαθμό το οικοσύστημα πέρα από την περιοχή του εργοστασίου. Ωστόσο, το πιο μεγάλο μειονέκτημα είναι ότι σε περίπτωση ατυχήματος, οι επιπτώσεις για τον πληθυσμό και την περιοχή που θα γίνει είναι θανάσιμες. Είναι γνωστές οι τερατογενέσεις γύρω από την περιοχή του εργοστασίου του Τσέρνομπιλ, και το πόσοι άνθρωποι πέθαναν από καρκίνο τα χρόνια μετά το ατύχημα. Το πιο πρόσφατο παράδειγμα ατυχήματος είναι στη Φουκουσίμα της Ιαπωνίας. Παρόλα τα βήματα που γίνονται για την μείωση των κινδύνων πυρηνικών ατυχημάτων, πάντα υπάρχει ο κίνδυνος, λόγω του πιθανού ανθρώπινου λάθους και των φυσικών καταστροφών κοντά σε κέντρα παραγωγής πυρηνικής ενέργειας. Όλα αυτά μας οδηγούν στην αναζήτηση μίας πιο "καθαρής" μορφής ενέργειας, με τα πλεονεκτήματα της σχάσης.

Τυγχάνει να υπάρχει στη φύση τέτοια διεργασία, και ονομάζεται *Πυρηνική Σύντηξη*.

1.2 Πυρηνική Σύντηξη

Η πυρηνική σύντηξη είναι η διαδικασία με την οποία παράγεται ενέργεια μέσω της αντίστροφης διεργασίας σε σχέση με την πυρηνική σχάση, δηλαδή με την ένωση πυρήνων. Αυτή είναι η πηγή ενέργειας των άστρων κατά το μεγαλύτερο μέρος της ζωής τους. Η σύντηξη προκύπτει από πολλές διαφορετικές πυρηνικές αντιδράσεις, είτε ελαφρών πυρήνων (να ξεκινάει από υδρογόνο) είτε βαρύτερων (σιδήρου ή και πιο βαριά). Στην εικόνα 1.2 φαίνεται η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο διαφόρων στοιχείων συναρτήσει του αριθμού των νουκλεονίων ανά πυρήνα. Αυτή η ενέργεια σύνδεσης είναι που απελευθερώνεται κατά τη διαδικασία της σύντηξης, άρα η ωφέλιμη ενέργεια που παράγεται είναι συνάρτησή της. Η *θερμοπυρηνική σύντηξη* είναι μία μέθοδος επίτευξης πυρηνικής σύντηξης σε περιβάλλον εξαιρετικά υψηλών θερμοκρασιών. Αυτό που μας ενδιαφέρει για την παραγωγή ενέργειας είναι η ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη (μη ελεγχόμενη ονομάζεται η θερμοπυρηνική σύντηξη όπου δεν ελέγχεται/περιορίζεται με κάποιον τρόπο η ενέργεια που απελευθερώνεται. Αυτό χρησιμοποιείται καθαρά για πολεμικούς σκοπούς, με τα ποσά ενέργειας που απελευθερώνονται να είναι πολύ μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα που αφορούν τις βόμβες σχάσης). Κατά την ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη, οι αντιδράσεις σύντηξης λαμβάνουν χώρα σε ένα περιβάλλον που επιτρέπει μέρος της προκύπτουσας ενέργειας να αποθηκεύεται προς αξιοποίηση σε παραγωγικούς σκοπούς. Απαιτούμενο είναι να υπάρχει αρκετό μέρος της ενέργειας για τροφοδότηση του επόμενου κύκλου αντιδράσεων σύντηξης.

Στόχος των προγραμμάτων που χρηματοδοτούν την έρευνα που αφορά την



Σχήμα 1.2: Η καμπύλη της ενέργειας σύνδεσης για πραγματοποίηση σύντηξης

παραγωγή ενέργειας από θερμοπυρηνική σύντηξη είναι να δημιουργηθούν προϋποθέσεις για κατάργηση των επιβλαβών μορφών πυρηνικής ενέργειας και αντικατάστασή τους από τη νέα μορφή παραγωγής ενέργειας, ώστε να αποτελέσει σημαντικό μέρος της παγκόσμιας ενεργειακής παραγωγής. Αν γίνει αυτό, σε συνδυασμό με τις υπάρχουσες προϋποθέσεις αντικατάστασης των μονάδων λιγνίτη από άλλες ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, θα οδηγήσει σε πολύ μικρότερη ρύπανση του περιβάλλοντος, σε σχέση με τις αυξανόμενες ενεργειακές ανάγκες του ανθρωπίνου πληθυσμού.

1.2.1 Πλεονεκτήματα σύντηξης-βασικές αντιδράσεις

Τα απόβλητα της σχάσης έχουν χρόνο ημιζωής της τάξεως των εκατομμυρίων ετών, το οποίο τα καθιστά εξαιρετικά επιβλαβή για το περιβάλλον. Σε αντιδιαστολή, ο χρόνος ημιζωής των αποβλήτων της σύντηξης είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερος. Επίσης, η ενέργεια που απελευθερώνεται από την σύντηξη είναι τρεις με τέσσερις φορές μεγαλύτερη από εκείνη της σχάσης.

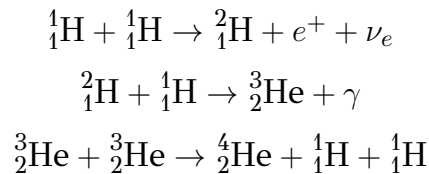
Φαίνεται από την εικόνα 1.2 ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλά διαφορετικά υλικά για πραγματοποίηση σύντηξης. Ωστόσο, είναι λογικό η προσοχή μας να εστιαστεί στα πιο "εύκολα" υλικά ώστε να γίνει αυτό. Δηλαδή εκείνα με τη χαμηλότερη ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο. Αυτά τυγχάνει να είναι και εκείνα που απαντώνται σε αφθονία στην φύση, όπως το Υδρογόνο και τα ισότοπά του (Δευτέριο και Τρίτιο). Ακριβώς αυτή η αφθονία των πρώτων υλών της σύντηξης είναι άλλο ένα μεγάλο πλεονέκτημά της. Φαίνεται ότι το να χρησιμοποιηθεί Ουράνιο, θα ήταν όχι μόνο ανώφελο από θέμα αποθεμάτων και αποβλήτων, αλλά θα έκανε και απείρως πιο δύσκολη την διαδικασία.

Ενώ το Υδρογόνο απαντάται σε αφθονία στη φύση, τα ισότοπά του χρειάζονται μία διαφορετική διαδικασία για να εξαχθούν. Το δευτέριο (${}^2_1\text{D}$

ή ${}^2_1\text{H}$) μπορεί να εξαχθεί εύκολα από το (θαλασσινό) νερό, όπου υπάρχει σε αναλογία περίπου 30 γραμμαρίων ανά κυβικό μέτρο. Το τρίτιο (${}^3_1\text{T}$ ή ${}^3_1\text{H}$), μπορεί να παραχθεί από το λίθιο (ελαφρύ μέταλλο το οποίο επίσης υπάρχει σε αφθονία). Οπότε, όλες οι πρώτες ύλες για την πραγματοποίηση κύκλου σύντηξης είναι είτε άμεσα διαθέσιμες σε αφθονία, είτε παράγονται από υλικά τα οποία απαντώνται εξίσου συχνά στη φύση. Σε αντίθεση, το ραδιενεργό Ουράνιο που χρησιμοποιείται στους αντιδραστήρες πυρηνικής σχάσης είναι ακριβό και εμφανίζεται σε συγκεκριμένες γεωγραφικές θέσεις, χωρίς να έχουν όλες οι χώρες πρόσβαση σε αυτό.

Βασικές αντιδράσεις σύντηξης

Οι βασικές πυρηνικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα κατά την σύντηξη είναι οι ακόλουθες:



Ωστόσο, οι δυσκολίες είναι πολλές και η θερμοπυρηνική σύντηξη βρίσκεται ακόμα μόνο σε πειραματικό στάδιο. Η ενέργεια που απαιτείται προκειμένου δύο πρωτόνια να έρθουν τόσο κοντά ώστε οι πυρηνικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών να υπερνικούν τις ηλεκτροστατικές απωστικές δυνάμεις είναι εξαιρετικά υψηλή. Οι συνθήκες υψηλής θερμοκρασίας και πυκνότητας που μπορούν να λειτουργήσουν ως καταλύτες (μεταξύ άλλων) για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία της σύντηξης, είναι δύσκολο να διατηρηθούν σταθερές για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Η διαδικασία αποσταθεροποιείται και παύει όταν οι συνθήκες αποκλίνουν από τις απαιτούμενες. Ακριβώς για αυτόν το λόγο βέβαια υπάρχει το εξής πλεονέκτημα της σύντηξης έναντι της σχάσης: η διαδικασία της ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης είναι αδύνατον να μετατραπεί από ελεγχόμενη σε μη ελεγχόμενη (και το αντίστροφο βέβαια), λόγω των

πολύ αυστηρών συνθηκών που απαιτούνται. Αυτό οδηγεί στο πρακτικά αδύνατο της πρόκλησης ατυχήματος σε αντιδραστήρα ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης. Εάν πάψουν να ισχύουν οι απαιτούμενες προϋποθέσεις, απλά θα σβήσει.

1.3 Οι αντιδραστήρες tokamak

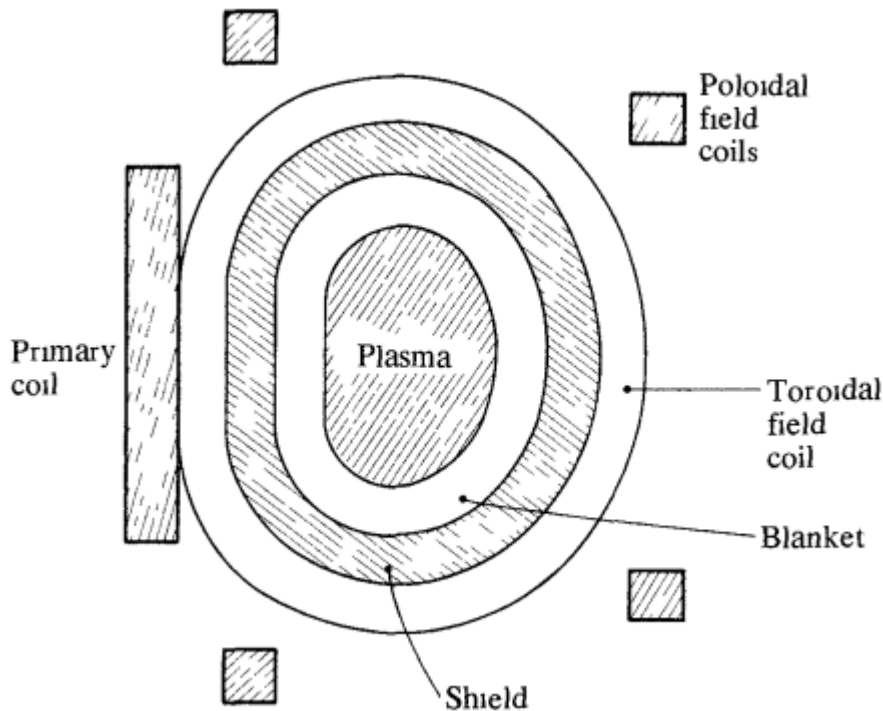
Οι πιο διαδεδομένες πειραματικές διατάξεις θερμοπυρηνικής σύντηξης ονομάζονται tokamak. Η αρχή λειτουργίας τους εξηγείται στην εικόνα 1.3. Το σχήμα του tokamak είναι τοροειδές. Κυκλοφορούν δύο μαγνητικά πεδία μέσα στον αντιδραστήρα. Το πολοειδές μαγνητικό πεδίο, λόγω της ύπαρξης ρεύματος στην τοροειδή κατεύθυνση, και το τοροειδές μαγνητικό πεδίο που προκαλείται από εξωτερικά πηνία. Τα δύο αυτά πεδία, οι μαγνητικές γραμμές των οποίων φαίνονται στην εικόνα 1.4, συντίθενται σε μαγνητικές γραμμές που "τυλίγονται" γύρω από το πλάσμα. Γύρω από το πλάσμα υπάρχει ένα στρώμα (blanket) το οποίο συμμετέχει σε σημαντικές διεργασίες για τη λειτουργία του αντιδραστήρα. Πρώτον, απορροφά τα νετρόνια ενέργειας 14MeV , μετατρέποντας την ενέργειά τους σε θερμότητα η οποία μεταφέρεται με κατάλληλο τρόπο στην έξοδο του tokamak. Δεύτερον, αυτή η απορρόφηση θωρακίζει τα υπεραγωγίμα πηνία και τα άλλα ευπαθή μέρη της διάταξης. Τρίτον, χρησιμεύει για την παραγωγή Τριτίου ώστε να είναι δυνατός ο κύκλος σύντηξης. Για αυτό και το στρώμα αυτό αποτελείται από ένα κράμα Λιθίου.

Limiter και divertor tokamaks

Η ροή ενέργειας από το πλάσμα που φτάνει μέχρι τα πηνία και τα εξωτερικά τοιχώματα του tokamak, πρέπει να μειώνεται κατά μεγάλους παράγοντες ($10^6 - 10^7$) ώστε να μην καταστραφούν τα πηνία και οι άλλες συσκευές της διάταξης του tokamak. Υπάρχουν δύο τρόποι να γίνει αυτό.

- Limiter: Έτσι ονομάζεται ένα παχύ ($\approx 1m$) στρώμα από βαρύ μέταλλο το οποίο αποσβάνει κατά μεγάλο βαθμό τη ροή νετρονίων.
- Divertor: Ουσιαστικά πρόκειται για μαγνητική θωράκιση. Εφαρμόζοντας κατάλληλα μαγνητικά πεδία ώστε τα σωματίδια να μην φθάνουν στα τοιχώματα του tokamak, υπάρχει ακόμη πιο αποτελεσματική παρεμπόδιση της ροής θερμότητας προς τα τοιχώματα.

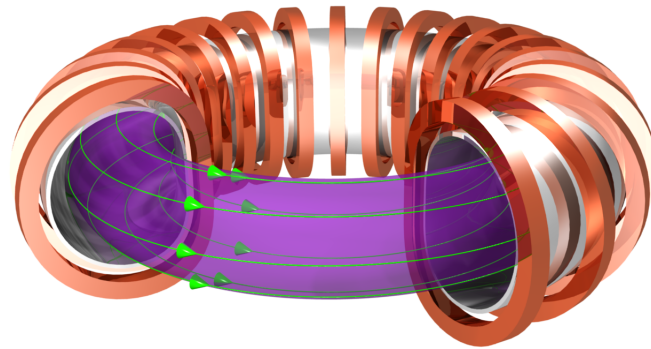
Ενώ σε πειραματικές διατάξεις χρησιμοποιούνται και οι δύο μέθοδοι, ο divertor γενικά προτιμάται όταν μιλάμε για αποδοτικούς tokamak, καθώς θα είναι πολύ μεγαλύτερη η ροή ενέργειας στις συνθήκες που απαιτούνται για να έχουμε αυτοτροφοδοτούμενο κύκλο σύντηξης.



Σχήμα 1.3: Σχηματική απεικόνιση ενός τόρου tokamak - Credits [Wes04, Wesson]

Scrape-off layer (SOL)

Αναφέρθηκε ήδη η λειτουργία του divertor στο πλάσμα σύντηξης. Όσο καλή και να είναι η μαγνητική θωράκιση όμως, υπάρχει πάντα ένα μέρος του πλάσματος που θα έχει επαφή με τα τοιχώματα. Αυτό το μέρος θα είναι πολύ



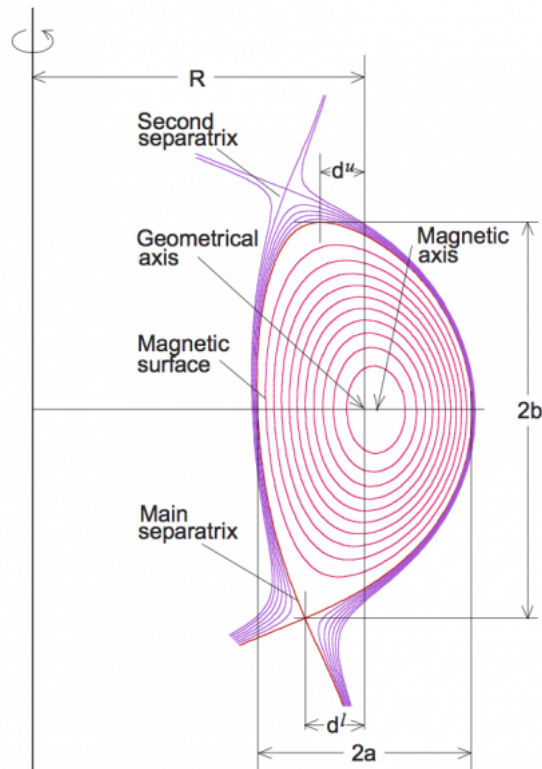
Σχήμα 1.4: Σχηματική απεικόνιση ενός τόρου tokamak

πιο ψυχρό από το υπόλοιπο, και ονομάζεται *Scrape-off layer* ή *SOL*. Το όριο που το διαχωρίζει από το υπόλοιπο υλικό είναι η περιοχή που "ανοίγουν" οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου στο σχήμα 1.5.

Το SOL παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, καθώς εάν δεν υπήρχε δεν θα υπήρχε και η μεταφορά ωφέλιμης ενέργειας στην έξοδο του tokamak. Το κεφάλαιο 2 της παρούσας διατριβής σχετίζεται με φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα εκεί.

1.3.1 Σημαντικά πειραματικά κέντρα θερμοπυρηνικής σύντηξης

Σήμερα, μέσα στα μεγαλύτερα πειραματικά κέντρα θερμοπυρηνικής σύντηξης συγκαταλέγονται τα *JET* (*Joint European Torus*), *ITER* (*International Thermonuclear Experimental Reactor*), *Alcator C-Mod* (*ALto CAMpo TORo*, *High Field Torus*) και *TCV* ("Tokamak à Configuration Variable", "tokamak μεταβαλλόμενης διάταξης"). Όλα τα παραπάνω ακολουθούν την αρχιτεκτονική tokamak.



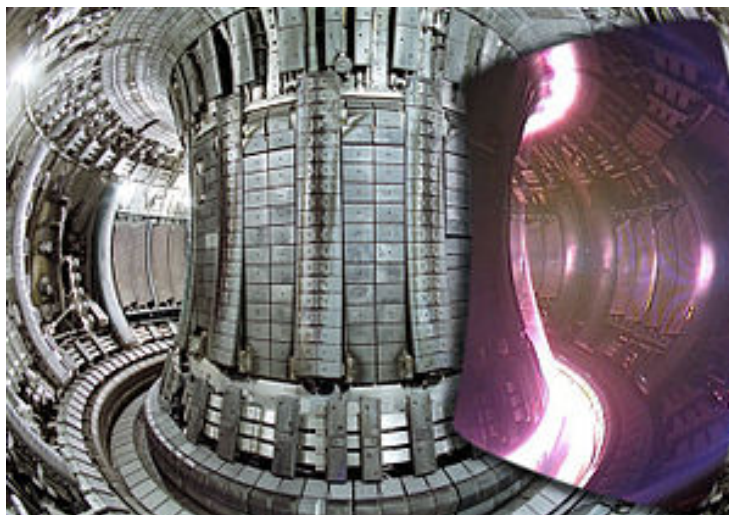
Σχήμα 1.5: Η γεωμετρία του πλάσματος στον tokamak

JET

Ο JET (Εικόνες 1.6 και 1.7), είναι εγκατεστημένος στο Κέντρο Επιστημών για την Ενέργεια Σύντηξης (ίδρυση 1965) του Culham, στο Oxfordshire του Ηνωμένου Βασιλείου. Ο σχεδιασμός του ξεκίνησε το 1973, ενώ η λειτουργία του ξεκίνησε το 1984 και συνεχίζεται μέχρι σήμερα.

Η μεγάλη ακτίνα του τόρου είναι 3 μέτρα, και το εσωτερικό έχει πλάτος 2.5 και ύψος 4.2 μέτρα. Χωράει συνολικά 100 κυβικά μέτρα πλάσμα, περίπου 100 φορές περισσότερο από τον μεγαλύτερο tokamak πριν κατασκευαστεί ο JET.

Ο JET ήταν ένας από τους δύο αντιδραστήρες που κατασκευάστηκαν εξαρχής ώστε να χρησιμοποιούν μίγμα Δευτέρου-Τρίτιου, και ο πρώτος αντιδραστήρας στον κόσμο που το 1991 λειτούργησε με τέτοιο μίγμα αναλογίας "50-50". Το 1997, ο JET πέτυχε το παγκόσμιο ρεκόρ παράγοντα Q (λόγος ενεργειακής απόδοσης/ενέργειας εισόδου). Με 24MW είσοδο



Σχήμα 1.6: Το εσωτερικό του αντιδραστήρα του JET

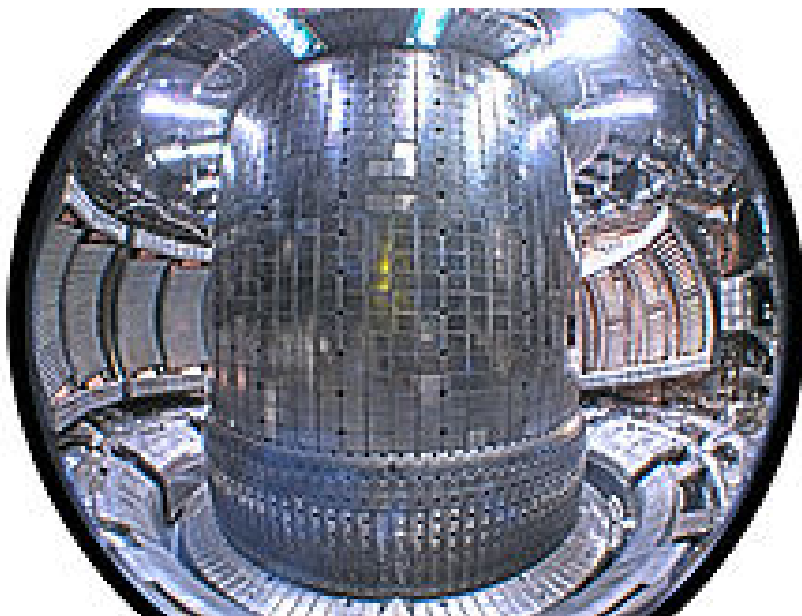


Σχήμα 1.7: Το εξωτερικό του αντιδραστήρα του JET

παρήγαγε 16MW έξοδο. Αυτός ο παράγοντας $Q_{JET} = 0.67$ ακόμα δεν έχει ξεπεραστεί από κανένα μηχάνημα.

Alcator C-Mod

Το Alcator (Alto Campo Toro, High Field Torus) C-Mod είναι εγκατεστημένο στο Κέντρο Επιστημών Πλάσματος και Σύντηξης (Plasma Science and Fusion Center - PSFC) του MIT (Massachusetts Institute of Technology) στην πόλη Cambridge της πολιτείας Massachusetts των ΗΠΑ.



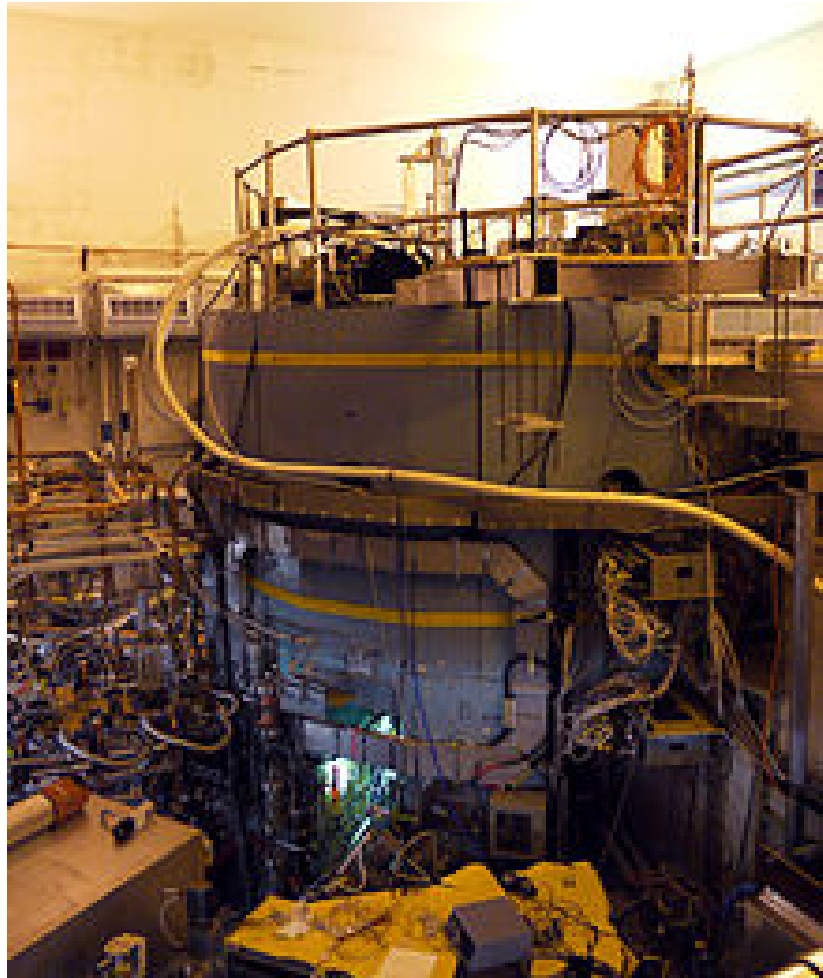
Σχήμα 1.8: Το εσωτερικό του αντιδραστήρα του Alcator C-Mod

Είναι ανάμεσα στα tokamak αυτό με το ισχυρότερο μαγνητικό πεδίο και την υψηλότερη πίεση πλάσματος στον κόσμο (2.05 atm, μόνο το ITER προβλέπεται να την ξεπεράσει, και αναμένεται να λειτουργήσει πλήρως το 2032). Είναι ο τρίτος από την σειρά Alcator και συγκεκριμένα, είναι ο διάδοχος των Alcator A (1973–1979) και Alcator B (1978–1987).

Το ITER και το μελλοντικό DEMO

Το ITER, είναι ο μεγαλύτερος αντιδραστήρας Θερμοπυρηνικής Σύντηξης στον κόσμο και βρίσκεται στο επιστημονικό κέντρο ερευνών πυρηνικής ενέργειας Cadarache στην Νότια Γαλλία, περίπου 60 χιλιόμετρα βορειοανατολικά της πόλης Marseille. Κύριος χρηματοδότης του είναι η Ευρωπαϊκή Ένωση με συνεισφορά περίπου 45% επί του συνόλου, ενώ υπάρχουν και άλλα 6 μέλη που συνχρηματοδοτούν και συνεισφέρουν περίπου κατά 9% έκαστο (Ινδία, Ιαπωνία, Κίνα, Ρωσία, Νότια Κορέα και Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής). Όπως και στην περίπτωση του JET, έτσι και στο ITER η αρχή λειτουργίας είναι βασισμένη στον σχεδιασμό tokamak.

Στόχος του ITER είναι να κάνει την πολυαναμενόμενη μετάβαση από το στάδιο των πειραματικών μελετών της Φυσικής του Πλάσματος στην πλήρη



Σχήμα 1.9: Το εξωτερικό του αντιδραστήρα του Alcator C-Mod



Σχήμα 1.10: Απεικόνιση τομής του τόρου του ITER

κλίμακα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.

Ο αντιδραστήρας ITER έχει σχεδιαστεί για να παράγει 500 megawatt ισχύος εξόδου, με 50 megawatt απαιτούμενη ισχύ λειτουργίας εισόδου. Έτσι, αν γίνει αυτό θα είναι η πρώτη διάταξη που θα παράγει μέσω της διαδικασίας Σύντηξης περισσότερη ενέργεια από αυτήν που απαιτείται για να λειτουργήσει. Η κατασκευή του συγκροτήματος ITER ξεκίνησε το 2013 και τα έξοδα οικοδόμησης ανερχόντουσαν μέχρι τον Ιούνιο του 2015 σε περισσότερα από 14 δισεκατομμύρια δολάρια Αμερικής, δηλαδή περίπου 3 φορές ο αρχικός προϋπολογισμός. Η κατασκευή του αναμένεται να ολοκληρωθεί το 2019 και τα πειράματα πλάσματος να ξεκινήσουν το 2020, ενώ πλήρη πειράματα σύντηξης δευτέρου-τρίτιου εκτιμάται ότι θα ξεκινήσουν να πραγματοποιούνται από το 2027. Η πρώτη μονάδα παραγωγής ενέργειας από σύντηξη θα ονομάζεται *DEMO (DEMOstration Power Plant)* και σχεδιάζεται να ακολουθήσει το ITER.

Το DEMO, θα πρέπει να παράγει τουλάχιστον 2 gigawatts ηλεκτρικής ενέργειας από σύντηξη σε συνεχή βάση, και θα πρέπει να αποδίδει 25 φορές περισσότερη ενέργεια από αυτήν που καταναλώνει. Για τον σκοπό αυτό, ο αντιδραστήρας του DEMO υπολογίζεται ότι θα πρέπει να έχει γραμμικές διαστάσεις περίπου κατά 15% μεγαλύτερες από εκείνες του ITER, ενώ η

1.4. ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΕΠΗΡΕΑΖΟΥΝ ΤΗΝ ΑΠΟ

πυκνότητα του πλάσματος μέσα στον αντιδραστήρα του DEMO εκτιμάται ότι θα πρέπει να είναι κατά 30% μεγαλύτερη από εκείνη του ITER. Τέλος, σημειώνεται ότι ακόμα δεν υπάρχουν σαφείς συναινέσεις σε διεθνές επίπεδο σχετικά με τις ακριβείς παραμέτρους του DEMO.

TCV

Το TCV βρίσκεται στο EPFL της Λωζάνης. Έχει μία μοναδική ιδιότητα ως προς τους υπόλοιπους tokamaks, τη δυνατότητα μελέτης διαφόρων σχηματισμών πλάσματος μέσα στον τόρο. Αυτό συμβαίνει επειδή το σχήμα της κάθετης τομής του τόρου είναι 3 φορές μεγαλύτερο σε ύψος από ότι σε πλάτος. Ως εκ τούτου, αποτελεί μία πολύ σημαντική πειραματική μονάδα. Αποτελεί τη διάταξη από την οποία αποδείχτηκε πειραματικά η ύπαρξη των blobs [Che+18].

1.4 Φαινόμενα ανομοιογένειας πλάσματος που επηρεάζουν την απόδοση

Το πλάσμα της σύντηξης, πρέπει να θερμαίνεται σε θερμοκρασίες που στον πυρήνα του τόρου υπερβαίνουν τα 100 εκατομμύρια βαθμών Κέλβιν αλλά παράλληλα, να μεταβαίνει σε σημαντικά ψυχρότερες κοντά στα τοιχώματα του τόρου για να μην προκαλεί βλάβες στο υλικό. Αυτή η απότομη αλλαγή στην θερμοκρασία (και συνεπώς και στην πίεση) στα σύνορα της περιοχής του πλάσματος, γίνεται εφικτή με την βοήθεια μαγνητικού πεδίου (divertor όπως γράφτηκε παραπάνω). Όμως, καθώς το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο βοηθάει στην συγκράτηση του πλάσματος, η απότομη μεταβολή των παραμέτρων προκαλεί διαταραχές οι οποίες οδηγούν σε αργή διαρροή του εσωτερικού θερμού πλάσματος προς τα τοιχώματα.

Η κατανόηση και ο έλεγχος των διαταραχών αυτών και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ του πλάσματος και των τοιχωμάτων έχουν μεγάλη πρακτική σημασία στην διαδικασία της σύντηξης. Ισχυρές διαταραχές στον πυρήνα του τόρου, εκτός από την αποσταθεροποίηση της απαραίτητης συγκράτησης του πλάσματος έχουν ως συνέπεια σημαντικές διαβρώσεις των τοιχωμάτων των διατάξεων.

Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στην μελέτη των τυρβώδων στοιχείων που χαρακτηρίζουν τις παρυφές του πλάσματος στις συσκευές σύντηξης με divertor. Η σημασία αυτού του αντικειμένου είναι πράγματι μεγάλη, καθώς δημιουργούνται συνεκτικές δομές που επιδρούν αρνητικά στην μεταφορά σωματιδίων και ενέργειας μέσα στο πλάσμα, οπότε τελικά στην απόδοση των διατάξεων. Ένα μέρος της παρούσας διατριβής αφορά και σε τέτοιου είδους δομές, οι οποίες είναι εν γένει ελλειψοειδούς εκ περιστροφής σχήματος και καλούνται *blobs*, είτε είναι επιμήκεις κυλινδρικού ή νηματοειδούς σχήματος και καλούνται *filaments*. Πρακτικά, και τα *filaments* μπορούν να θεωρηθούν ελλειψοειδούς σχήματος, χωρίς βλάβη της γενικότητας (η αναπαράσταση του σχήματος με ελλειψοειδές πολύ επιμηκυμένου άξονα είναι πιο φυσική από την κυλινδρική).

Blobs και filaments

Τα *blobs* και τα *filaments* λοιπόν, είναι άμορφες μάζες πλάσματος μέσα στο πλάσμα των αντιδραστήρων, οι οποίες βρίσκονται κοντά στις παρυφές του πλάσματος, δηλαδή στην περιοχή του SOL που αναφέρθηκε παραπάνω. Διαφοροποιούνται από το περιβάλλον τους ως προς την πυκνότητα πλάσματος και έχουν παρατηρηθεί σε όλες τις διατάξεις μαγνητικής συγκράτησης. Η πυκνότητα των τυρβώδων αυτών δομών είναι συνήθως μεγαλύτερη από αυτήν του περιβάλλοντος, αλλά υπό συνθήκες μπορεί να είναι και μικρότερη. Αυτές κινούνται τοροειδώς μέσα στο πλάσμα (δηλαδή περιστρέφονται κατά μήκος του τόρου).

Τα *blobs* δημιουργούν μία σειρά προβλήματα στην διαδικασία της

σύντηξης, καθώς, διότι βρίσκονται κοντά στα τοιχώματα του tokamak, σκεδάζουν και εξασθενούν ακτινοβολία η οποία προέρχεται από το εξωτερικό του τόρου και οδηγείται σκοπίμως προς το εσωτερικό και τον πυρήνα του. Δύο είδη ακτινοβολίας συγκεκριμένα δεν τα θέλουμε να σκεδάζονται, καθότι συνεισφέρουν με καίριο τρόπο στη λειτουργία του tokamak.

α) Την ακτινοβολία *EC* (*Electron Cyclotron*) (συχνότητας της τάξης των 170 GHz) η οποία καταπολεμά το φαινόμενο των μαγνητικών νησίδων (πρόκειται για κλειστές μαγνητικές ροές οι οποίες δημιουργούνται μέσα στο πλάσμα και σκεδάζουν ακτινοβολία που προορίζεται για θέρμανση του πυρήνα του τόρου). Το μεγάλο πρόβλημα είναι ότι μία μικρή σκέδαση της ακτινοβολίας *EC* μπορεί να παρεμποδίσει την εξασθένηση των μαγνητικών νησίδων, ή ακόμα και να τις ενισχύσει.

β) Την ακτινοβολία *LH* (*Low Hybrid*) (συχνότητας της τάξης των 4.6 GHz) η οποία θερμαίνει τον πυρήνα του τόρου. Δεν είναι τόσο εστιασμένη όσο η *EC*, κάτι που κάνει μικρότερης σημασίας την σκέδασή της από εκείνη, ωστόσο παραμένει ένα ανεπιθύμητο πρόβλημα. Σε συνδυασμό με τη μη καταπολέμηση σχηματισμού μαγνητικών νησίδων λόγω σκέδασης της *EC* ακτινοβολίας, εντείνεται η παρεμπόδιση θέρμανσης του πυρήνα του τόρου.

Αναφορές Κεφαλαίου 1

- [Wes04] John Wesson. *Tokamaks (The International Series of Monographs on Physics)*. Oxford University Press, 2004. ISBN: 0198509227. URL: <https://www.amazon.com/Tokamaks-International-Monographs-Physics-Wesson/dp/0198509227?SubscriptionId=AKIAIOBINVZYXZQZ2U3A&tag=chimbori05-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0198509227>.

- [Che+18] O Chellaï et al. “Millimeter-wave beam scattering by edge-plasma density fluctuations in TCV”. In: *Plasma Physics and Controlled Fusion* 61.1 (Nov. 2018), p. 014001. DOI: 10.1088/1361-6587/aae7bf.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδος ομογενοποίησης για μαγνητισμένο πλάσμα

2.1 Εισαγωγή

Όπως προαναφέρθηκε, ένα από τα κύρια στοιχεία που μας ενδιαφέρει να εξάγουμε από την μελέτη της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (οποιασδήποτε συχνότητας) σε ένα tokamak, είναι η ενέργεια η οποία δίνει στο πλάσμα σύντηξης. Οι μέθοδοι πολλαπλής σκέδασης [FW13] μπορούν να δώσουν τέτοια πληροφορία, αλλά έχει αρκετά προβλήματα η περιγραφή τους (πώς τελικά ορίζουμε πιθανότητα σκέδασης, τι θεωρείται αμελητέο κλπ) , και μεγάλη δυσκολία στο να φτιαχτεί κώδικας που θα τις περιγράψει, καθώς το υπολογιστικό κόστος θα ήταν απαγορευτικό. Ωστόσο υπάρχει τρόπος να προσεγγίσουμε αυτή την πληροφορία, αρκεί να θυμηθεί κανείς πόσο εύκολα εξάγονται τα χαρακτηριστικά που θέλουμε σε ένα ομογενές μέσο.

Προφανώς το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει δεν αφορά ένα ομογενές υλικό. Παρόλα αυτά, υπάρχουν μέθοδοι που μας επιτρέπουν να μελετήσουμε ένα υλικό με προσμίξεις, σαν να ήταν ομογενές. Αυτό επιτυγχάνεται

προσεγγίζοντας τον διηλεκτρικό ταυυστή τέτοιων υλικών, με τον ισοδύναμο ταυυστή ενός ομογενούς μέσου. Αυτή η διαδικασία λέγεται ομογενοποίηση του υλικού, και έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους της επιστήμης υλικών. Στα πλαίσια αυτής της διδακτορικής διατριβής αναπτύχθηκε νέα μέθοδος ομογενοποίησης - επέκταση των παλαιών με βελτίωση σε έναν καίριο τομέα, που θα αναλυθεί παρακάτω.

Το παρόν κεφάλαιο θα χωριστεί ως εξής: Πρώτα θα παρουσιαστούν οι παλιές μέθοδοι ομογενοποίησης, με τον μαθηματικό τους φορμαλισμό και την ανάλυση κάποιων αποτελεσμάτων. Έπειτα θα παρουσιαστεί η δική μας μέθοδος, αποσαφηνίζοντας τα σημεία στα οποία διαφοροποιείται από τις προηγούμενες, και το τι σημαίνει αυτό. Αφού παρουσιαστούν αποτελέσματα και εκεί, θα παρουσιαστούν τμήματα της μεθόδου που είναι προς βελτίωση, και το πώς μπορεί να γίνει αυτό. Ένα κομμάτι της δουλειάς αυτής δημοσιεύθηκε στο *Journal of Plasma Physics* [Bai+18].

2.1.1 Γενικά για τη διαδικασία

Η διαδικασία της ομογενοποίησης, εκ κατασκευής της εμπεριέχει μεγάλη πολυπλοκότητα. Καταρχήν, ένα σύνθετο υλικό "κληρονομεί" τις χωροχρονικές συμμετρίες που του υπαγορεύουν τα υλικά που το αποτελούν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχει μικρότερο βαθμό συμμετριών από τα επιμέρους υλικά του. Αυτό είναι εύκολο να κατανοηθεί ως εξής. Έστω ότι έχουμε την απλούστερη περίπτωση ανομοιογενούς υλικού που αποτελείται από 2 υλικά. Αν οι συμμετρίες του ενός υλικού δεν συμπίπτουν με τις συμμετρίες του δεύτερου, καταλήγει στο "σπάσιμο" όλων των συμμετριών του τελικού υλικού. Για παράδειγμα, μία συμμετρία στροφής ως προς τον άξονα z σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα έσπαγε αν το άλλο υλικό υποδείκνυε συμμετρία στροφής ως προς οποιονδήποτε άλλο άξονα (όπως θα φανεί στη συνέχεια, στο πλάσμα ενός tokamak η κύρια

συμμετρία ως προς τον άξονα z δεν σπάει, με μία συγκεκριμένη παραδοχή, η οποία αποτελεί την μοναδική παραδοχή για το μοντέλο ομογενοποίησης που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής). Ως επακόλουθο αυτού, για να περιγραφεί μαθηματικά ένα σύνθετο υλικό, χρειάζεται εν γένει μεγαλύτερος αριθμός παραμέτρων. Επίσης, τα σύνθετα υλικά παρουσιάζουν ένα μεγαλύτερο φάσμα ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων σε σχέση με τα υλικά που τα αποτελούν. Κατηγορίες σύνθετων υλικών που έχουν ενδιαφέρον είναι οι εξής:

- **Ανισοτροπικά υλικά:** Αυτό σημαίνει ότι είτε τα πεδία E και D έχουν διαφορετική διεύθυνση, είτε τα πεδία H και B έχουν διαφορετική διεύθυνση.
- **Διανισοτροπικά (bianisotropic) υλικά:** Σε αυτά τα υλικά τα D , H παρουσιάζουν ανισοτροπική σύζευξη και με τα δύο πεδία E και B .
- **Γυροτροπικά υλικά:** Ονομάζονται τα μαγνητοοπτικά υλικά τα οποία βρίσκονται υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου. Σε αυτά τα υλικά η διηλεκτρική σύζευξη μεταξύ D και E έχει την εξής μορφή (παρόμοια μορφή και για τα μαγνητικά πεδία):

$$\mathbf{D} = \epsilon' \mathbf{E} + i \mathbf{E} \times \mathbf{g} \quad (2.1.1)$$

Στην παραπάνω σχέση το διάνυσμα \mathbf{g} λέγεται **γυροτροπικό διάνυσμα**, και η διεύθυνσή του ονομάζεται **γυροτροπικός άξονας**. Σε πρώτη τάξη, το διάνυσμα αυτό είναι ανάλογο του μαγνητικού πεδίου, άρα και ο γυροτροπικός άξονας του υλικού συμπίπτει με τον άξονα του μαγνητικού πεδίου. Η κατηγορία των γυροτροπικών υλικών έχει μεγάλη σημασία όσον αφορά την παρούσα δουλειά, καθώς το πλάσμα ενός tokamak είναι γυροτροπικό υλικό, με άξονα που συμπίπτει με του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Ενδιαφέρον έχει επίσης το ότι ένα ανισοτροπικό σύνθετο υλικό μπορεί να προκύψει ακόμα και από ιστροπικά συστατικά, αν έχουν διαφορετικούς

άξονες συμμετρίας. Επίσης, αν η ηλεκτρομαγνητική απόκριση του ενός από τα συνιστώντα υλικά είναι μη γραμμική, θα είναι μη γραμμική και η απόκριση του σύνθετου υλικού. Τέλος, εάν το ένα υλικό προκαλεί ηλεκτρομαγνητικές απώλειες, είναι φυσικό να προκαλεί και το σύνθετο υλικό. Εξαίρεση μπορεί να αποτελέσει η περίπτωση κάποιο από τα υπόλοιπα συνιστώντα υλικά να είναι ενισχυτικό (να αυξάνει την ισχύ ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που προσπίπτει σε αυτό). Σε αυτή την περίπτωση, θα μπορούσε το σύνθετο υλικό όχι απλά να μην προκαλεί απώλειες, αλλά να είναι και το ίδιο ενισχυτικό.

2.1.2 Προτεινόμενα όρια

Κατά τη μελέτη ενός σύνθετου υλικού, έχουν προταθεί συγκεκριμένα όρια όσον αφορά τον ταυστή του σύνθετου μέσου, τα οποία είναι συνάρτηση των ταυστών των υλικών από τα οποία αποτελείται και του ποσοστού του όγκου που καταλαμβάνουν στον συνολικό όγκο του υλικού. Τα δύο όρια που θα παρουσιαστούν εδώ (στην περίπτωση δύο μόνο συστατικών υλικών) είναι τα όρια *Wiener* και όρια *Hashin-Shtrikman* [Tom15]. Οι παραδοχές που γίνονται στους παρακάτω τύπους είναι: (α) ισοτροπικός ταυστής και (β) δύο υλικά, οι ταυστές των οποίων συμβολίζονται με ϵ_a, ϵ_b και τα ποσοστά όγκου που καταλαμβάνουν με f_a, f_b .

- Όρια Wiener : Τα όρια Wiener δίνονται από τους εξής τύπους:

$$\begin{aligned} W_a &= f_a \epsilon_a + f_b \epsilon_b \\ W_b &= \left(\frac{f_a}{\epsilon_a} + \frac{f_b}{\epsilon_b} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Συμβολίζοντας με ϵ_C τον ταυστή του σύνθετου μέσου, καταλήγουμε στο ότι πρέπει $\epsilon_C \in [\min(W_a, W_b), \max(W_a, W_b)]$. Η προέλευσή τους έρχεται από την υπόθεση υλικού δύο φάσεων (δύο ομογενή υλικά με κάποια διαχωριστική

επιφάνεια). Θεωρώντας ότι μέγιστη επίδραση στο ηλεκτρικό πεδίο είναι όταν το κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια των υλικών διάνυσμα είναι παράλληλο στο ηλεκτρικό πεδίο, προκύπτει το άνω όριο. Αντίστοιχα, ελάχιστη επίδραση έχουμε όταν είναι παράλληλο το διάνυσμα με το ηλεκτρικό πεδίο.

• Όρια Hashin-Shtrikman : Τα όρια Hashin-Shtrikman δίνονται από τους εξής τύπους:

$$\begin{aligned} HS_a &= \epsilon_b + \frac{3f_a\epsilon_b(\epsilon_a - \epsilon_b)}{\epsilon_a + 2\epsilon_b - f_a(\epsilon_a - \epsilon_b)} \\ HS_b &= \epsilon_a + \frac{3f_b\epsilon_a(\epsilon_b - \epsilon_a)}{\epsilon_b + 2\epsilon_a - f_b(\epsilon_b - \epsilon_a)} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Και χρησιμοποιώντας ίδιους συμβολισμούς με παραπάνω καταλήγουμε ότι πρέπει $\epsilon_C \in [\min(HS_a, HS_b), \max(HS_a, HS_b)]$.

Τα όρια Hashin-Shtrikman επιβάλλουν εν γένει πιο αυστηρούς περιορισμούς σε σχέση με τα όρια Wiener, όσον αφορά τον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή των υλικών. Η αρχική δημοσίευση των Hashin & Shtrikman [HS62] αφορούσε τη μαγνητική διαπερατότητα υλικού. Τα όρια προκύπτουν μέσω θεωρίας μεταβολών του ολοκληρώματος που δίνει την πυκνότητα ενέργειας από το μαγνητικό πεδίο.

Ωστόσο, όσον αφορά τα παραπάνω όρια, υπάρχουν κάποια προβλήματα. Όλες οι αναλύσεις που έχουν γίνει αφορούν ισοτροπικά υλικά, όπου ο διηλεκτρικός τανυστής είναι στην ουσία μία σταθερά. Στην περίπτωσή μας, χρειάζεται να επεκταθεί μία τέτοια ανάλυση όταν είναι πίνακας. Γενικά τα όρια θα γίνουν ακόμη δυσκολότερα στην περίπτωση μέσω των τα οποία έχουν σύζευξη ηλεκτρικού-μαγνητικού πεδίου. Θα είχε αξία να επεκταθούν αυτά τα όρια σε γυροτροπικά υλικά, αλλά για την ώρα δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα δουλειά.

2.1.3 Ηλεκτρομαγνητικός φορμαλισμός

Για να παρουσιαστούν αρχικά οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν στην ομογενοποίηση, ξεκινάμε από τις εξισώσεις Maxwell στη γενική τους μορφή.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} \\
 \nabla \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) \\
 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \\
 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Η περισπωμένη χρησιμοποιείται για να ορίσει ποσότητες που είναι στο πεδίο του χρόνου, καθώς αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε ποσότητες από το πεδίο των συχνοτήτων, γιατί είναι πιο βολικές για τις μεθόδους ομογενοποίησης.

Χωρίζουμε τις πυκνότητες φορτίου και ρεύματος ως εσωτερικές (που προκύπτουν από την πόλωση και μαγνήτιση του υλικού) και εξωτερικές (υπάρχουν στον χώρο έξω από το υλικό).

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\rho}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\rho}_{int}(\mathbf{r}, t) \\
 \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{J}}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{J}}_{int}(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Οι εσωτερικές πυκνότητες περιγράφονται από τα γνωστά διανύσματα της πόλωσης $\tilde{\mathbf{P}}$ και της μαγνήτισης $\tilde{\mathbf{M}}$ με τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_{int}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \\
 \tilde{\mathbf{J}}_{int}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Τελικά λοιπόν, ορίζουμε τα πεδία που αναπτύσσονται στο υλικό υπό την επίδραση το ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ως εξής:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (2.1.7)$$

Τα $\tilde{\mathbf{D}}$ και $\tilde{\mathbf{H}}$ ονομάζονται *ηλεκτρικό πεδίο εξ'επαγωγής* και *μαγνητικό πεδίο εξ'επαγωγής* αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις σχέσεις Maxwell (2.1.4) προκύπτουν τελικά οι σχέσεις Maxwell για τα πεδία εξ'επαγωγής.

$$\begin{aligned}\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{J}}_{ext}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\rho}_{ext}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

Όπου εννοείται ότι ισχύει και η εξίσωση συνέχειας για τις εξωτερικές πηγές:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{ext}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.1.9)$$

Για την ομογενοποίηση μας ενδιαφέρει η σχέση μεταξύ των πεδίων εξ'επαγωγής $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{H}}$ με τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}}$. Οπότε, αρκούν οι δύο πρώτες εξισώσεις από τις (2.1.8) για την ανάπτυξη της θεωρίας της ομογενοποίησης, ειδικά μετά τον μετασχηματισμό Fourier των εξισώσεων. Ο γενικός 6×6 διηλεκτρικός ταυνοστής γράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\underline{\varepsilon}} & \tilde{\underline{\xi}} \\ \tilde{\underline{\zeta}} & \tilde{\underline{\mu}} \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

Όπου τα $\tilde{\underline{\varepsilon}}, \tilde{\underline{\xi}}, \tilde{\underline{\zeta}}, \tilde{\underline{\mu}}$ είναι ταυνοστές 3×3 . Με τη βοήθεια των παραπάνω ποσοτήτων γράφονται οι εξισώσεις που δίνουν τη σχέση μεταξύ των πεδίων

εξ' επαγωγής με τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) &= \int_{t'} \int_{\mathbf{r}'} [\underline{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}', t') \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') + \underline{\tilde{\xi}}(\mathbf{r}', t') \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')] d^3\mathbf{r}' dt' \\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) &= \int_{t'} \int_{\mathbf{r}'} [\underline{\tilde{\zeta}}(\mathbf{r}', t') \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') + \underline{\tilde{\mu}}(\mathbf{r}', t') \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')] d^3\mathbf{r}' dt'\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

Ενώ, αν θεωρηθεί ότι το μήκος κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας δεν είναι συγκρίσιμο με την χαρακτηριστική κλίμακα μήκους του εκάστοτε υλικού [Tom15] οι εξισώσεις γίνονται:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) &= \int_{t'} [\underline{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}, t') \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t - t') + \underline{\tilde{\xi}}(\mathbf{r}, t') \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t - t')] dt' \\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) &= \int_{t'} [\underline{\tilde{\zeta}}(\mathbf{r}, t') \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t - t') + \underline{\tilde{\mu}}(\mathbf{r}, t') \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t - t')] dt'\end{aligned}\tag{2.1.12}$$

Θα ακολουθήσει ανάλυση έπειτα από χρονικό μετασχηματισμό Fourier των παραπάνω εξισώσεων.

Μετασχηματισμός Fourier

Ο κύριος όγκος των μαθηματικών της μεθόδου πραγματοποιείται στο πεδίο των συχνοτήτων. Παρακάτω λοιπόν θα μετασχηματιστούν κατά Fourier όλες οι παραπάνω εξισώσεις που μας ενδιαφέρουν. Πλέον, όποια ποσότητα δεν έχει περισπωμένη, θα θεωρείται μετασχηματισμένη κατά Fourier.

Ξεκινώντας από τις εξισώσεις Maxwell (2.1.8) και μετασχηματίζοντας κατά Fourier έχουμε:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{J}_{ext}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \rho_{ext}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, μετασχηματίζοντας τις σχέσεις (2.1.12) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier, καταλήγουμε στις εξής δύο εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \underline{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \underline{\xi}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= \underline{\zeta}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \underline{\mu}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Ορίζοντας τα εξαδιάστατα διανύσματα $\mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega)$ και τον εξαδιάστατο τανυστή $\underline{K}(\mathbf{r}, \omega)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega) &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \end{bmatrix} \\ \underline{K} &= \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} & \underline{\xi} \\ \underline{\zeta} & \underline{\mu} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega) = \underline{K} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.1.16)$$

Από εδώ και πέρα θα αγνοήσουμε την εξάρτηση από το ω καθώς δεν υπάρχει εξάρτηση από αυτό στα μέσα που εξετάζουμε. Εν γένει, η εξάρτηση από τον χρόνο, που γίνεται εξάρτηση από συχνότητα υπό τον χρονικό μετασχηματισμό Fourier, υπάρχει μόνο για λόγους αιτιότητας (δεν μπορεί να υπάρχει το υλικό πριν την στιγμή $t = 0$, εάν έχει θεωρηθεί πως εισήχθη τότε στη μελέτη). Αρκεί να γίνει αυτή η αναφορά, και μπορούμε να προχωρήσουμε παρακάτω χωρίς να αναγράφεται πια η εξάρτηση αυτή.

Εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί το πεδίο

Η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί το εξαδιάστατο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι η ακόλουθη :

$$[\underline{L}(\nabla) + i\omega\underline{K}] \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \quad (2.1.17)$$

όπου ο διαφορικός τελεστής $\underline{L}(\nabla)$ και το φορτίο $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ ορίζονται ως εξής:

$$\underline{L}(\nabla) \equiv \begin{bmatrix} 0 & \nabla \times I \\ -\nabla \times I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.18)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ext}(\mathbf{r}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.19)$$

Γυροτροπικά Υλικά

Επανερχόμαστε στην έννοια του γυροτροπικού υλικού, λόγω του ότι το πλάσμα στον αντιδραστήρα tokamak συμπεριφέρεται ως τέτοιο (μόνο το τμήμα του ταχυστή που δρα στο ηλεκτρικό πεδίο είναι γυροτροπικό, αυτό που δρα στο μαγνητικό είναι ομογενές). Θα γίνει μία παρουσίαση του ορισμού και των ιδιοτήτων των ηλεκτρομαγνητικών ταχυστών τέτοιων υλικών.

Γυροτροπικό υλικό ονομάζεται ένα υλικό το οποίο έχει μεταβληθεί παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Όταν το άνω δεξιά τμήμα του διηλεκτρικού ταχυστή $\underline{\epsilon} = 0$ (αυτό συμβαίνει και στην περίπτωση του πλάσματος) η σχέση μεταξύ του $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ και του $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ είναι η εξής:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \underline{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \underline{\epsilon}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\mathbf{g} \times \mathbf{E} \quad (2.1.20)$$

όπου ο ταχυστής $\underline{\epsilon}'$ αναπαρίσταται από έναν 3×3 συμμετρικό πίνακα, ενώ το πραγματικό ψευδο-διάνυσμα \mathbf{g} ονομάζεται γυροτροπικό διάνυσμα, και η διεύθυνσή του ονομάζεται γυροτροπικός άξονας. Σε πρώτη τάξη, θεωρείται

ότι είναι ανάλογο του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, και ο γυροτροπικός άξονας συμπίπτει με τον άξονα του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου (αυτή η προσέγγιση εφαρμόζεται και στο πλάσμα του tokamak). Η πιο απλή περίπτωση είναι ο $\underline{\varepsilon}'$ να είναι διαγώνιος, και να θέσουμε τον άξονα z του συστήματος συντεταγμένων ως τον άξονα του μαγνητικού πεδίου. Έτσι ο διηλεκτρικός ταυυστής του μέσου γράφεται :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & ig_z & 0 \\ -ig_z & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.21)$$

Συγκεκριμένα για το πλάσμα, αν υιοθετήσουμε τον συμβολισμό $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 K_{\perp}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 K_{\parallel}$, $g_z = -\varepsilon_0 K_X$ ο πίνακας γράφεται

$$\underline{\varepsilon}_P = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} K_{\perp,P} & -iK_{X,P} & 0 \\ iK_{X,P} & K_{\perp,P} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel,P} \end{pmatrix} \quad (2.1.22)$$

Η παραπάνω είναι η έκφραση που χρησιμοποιείται ευρέως για τον διηλεκτρικό ταυυστή του πλάσματος σε tokamak.

Πριν ολοκληρωθεί αυτή η ενότητα, να τονιστεί κάτι σημαντικό. Σκοπός μας είναι να ομογενοποιήσουμε ένα πλάσμα που εμπεριέχει ελλειψοειδή blobs διαφορετικής πυκνότητας. Προφανώς το πλάσμα και τα blobs είναι γυροτροπικά υλικά. Εν γένει, δεν είναι ένα υλικό που αποτελείται από σύνθεση δύο ή παραπάνω συστατικών, να έχει τις ίδιες ιδιότητες με αυτά. Ωστόσο, θεωρούμε ότι ο γυροτροπικός άξονας του πλάσματος και των blobs συμπίπτουν. Αυτό οδηγεί προφανώς στο συμπέρασμα ότι και το ισοδύναμο ομογενές υλικό πρέπει να είναι γυροτροπικό. Συμβολίζουμε τους ταυυστές

των blob και του ισοδύναμου ομογενούς ως εξής:

$$\underline{\varepsilon}_B = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} K_{\perp,B} & -iK_{X,B} & 0 \\ iK_{X,B} & K_{\perp,B} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel,B} \end{pmatrix} \quad (2.1.23)$$

$$\underline{\varepsilon}_H = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} K_{\perp,H} & -iK_{X,H} & 0 \\ iK_{X,H} & K_{\perp,H} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel,H} \end{pmatrix} \quad (2.1.24)$$

Αυτές τις εκφράσεις θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια με τους δείκτες P, B, H να αντιστοιχούν πάντα σε πλάσμα, blobs, ισοδύναμο (homogenized) υλικό.

Διαδική συνάρτηση Green και λύση της εξίσωσης

Η εξίσωση 2.1.17 μπορεί να έχει ακριβή λύση, εάν πρώτα οριστεί η έννοια της δυαδικής συνάρτησης Green για το πρόβλημά μας. Η συνάρτηση αυτή αναπαρίσταται από έναν 6×6 πίνακα, και για το πρόβλημά μας δίνεται από την σχέση:

$$[\underline{L}(\nabla) + i\omega\underline{K}_P] \cdot \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.1.25)$$

Με αυτό τον συμβολισμό, η λύση της εξίσωσης 2.1.17 είναι η εξής:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_P(\mathbf{r}) + \int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{Q}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (2.1.26)$$

όπου το πεδίο $\mathbf{F}_P(\mathbf{r})$ αποτελεί τη λύση της ομογενούς εξίσωσης με υλικό μόνο το "P":

$$[\underline{L}(\nabla) + i\omega\underline{K}_P] \cdot \mathbf{F}_P(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.1.27)$$

Η λύση 2.1.26 είναι ακριβής λύση της εξίσωσης 2.1.17, και θα την χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον στη συνέχεια.

Μπορούμε πλέον να παρουσιάσουμε κάποιες από τις προγενέστερες μεθόδους ομογενοποίησης, που αποτέλεσαν έμπνευση για την παρούσα δουλειά.

2.2 Προγενέστερες μέθοδοι ομογενοποίησης

Σε αυτή την ενότητα θα επικεντρωθούμε σε κάποιες προγενέστερες μεθόδους, ώστε να υπάρχει μέτρο σύγκρισης με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Θα αναφερθούν κυρίως οι φορμαλισμοί των Maxwell-Garnett(MG) και Bruggeman. Για να διευκολυνθεί η ανάλυσή τους, θα χρησιμοποιηθούν οι έννοιες των δυαδικών συναρτήσεων εκπόλωσης και πυκνότητας πολωσιμότητας.

Δυαδική συνάρτηση εκπόλωσης

Η συνάρτηση αυτή (ο όρος στα αγγλικά είναι depolarization dyadic) προκύπτει από ολοκλήρωμα της δυαδικής συνάρτησης Green:

$$\mathbf{D}_P \equiv \int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_P(-\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (2.2.1)$$

Η φυσική σημασία του ολοκληρώματος αυτού δεν φαίνεται αμέσως. Κρατάμε ότι είναι κομμάτι του ολοκληρώματος που προκύπτει από την πλήρη λύση, υπολογισμένο στο $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Επειδή βέβαια δεν υπάρχει τρόπος να υπολογιστεί χωρίς να γνωρίζουμε την δυαδική συνάρτηση Green του μέσου, υπολογίζεται και αυτό με μετασχηματισμό Fourier. Θα γραφτεί ο τύπος από τον οποίο υπολογίζεται χωρίς να αποδειχθεί, καθώς θα γίνει μία παρόμοια μαθηματική

ανάλυση παρακάτω.

$$\mathbf{D}_P(\rho) \equiv \frac{\rho}{2\pi^2} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^2} \left[\frac{\sin(k\rho)}{k\rho} - \cos(k\rho) \right] \hat{\mathbf{G}}_P(\underline{U}^{-1}\hat{\mathbf{k}}') d^3\mathbf{k}' \quad (2.2.2)$$

Όπου με k, k συμβολίζεται το κυματάνυσμα και το μέτρο του αντίστοιχα, ρ είναι η "ακτίνα" του ελλειψοειδούς για το οποίο υπολογίζεται το ολοκλήρωμα, και \underline{U} είναι ο πίνακας που μετασχηματίζει ένα σφαιρικό χωρίο σε ελλειψοειδές. Συνηθίζεται, επειδή ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος είναι αρκετά απαιτητικός υπολογιστικά, να "σπάμε" το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη με τον εξής κανόνα:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_P(\rho) &= \mathbf{D}_{P,0} + \mathbf{D}_{P,+}(\rho) \\ \mathbf{D}_{P,0}(\rho) &\equiv \frac{\rho}{2\pi^2} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^2} \left[\frac{\sin(k\rho)}{k\rho} - \cos(k\rho) \right] \hat{\mathbf{G}}_{P,\infty}(\underline{U}^{-1}\hat{\mathbf{k}}') d^3\mathbf{k}' \\ \mathbf{D}_{P,+}(\rho) &\equiv \frac{\rho}{2\pi^2} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^2} \left[\frac{\sin(k\rho)}{k\rho} - \cos(k\rho) \right] \hat{\mathbf{G}}_{P,+}(\underline{U}^{-1}\hat{\mathbf{k}}') d^3\mathbf{k}' \\ \hat{\mathbf{G}}_{P,\infty} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{G}}_P \\ \hat{\mathbf{G}}_{P,+} &= \hat{\mathbf{G}}_P - \hat{\mathbf{G}}_{P,\infty} \end{aligned}$$

Το $\mathbf{D}_{P,0}$ χρησιμοποιείται αρκετά ως πρώτη προσέγγιση (αποδεικνύεται ότι ουσιαστικά αγνοεί τις διαστάσεις του ελλειψοειδούς, υπολογίζοντας μόνο τη συνεισφορά από το κέντρο του σχηματισμού). Για μεγαλύτερη ακρίβεια σε εφαρμογές που χρησιμοποιούν τέτοιες προσεγγίσεις, χρησιμοποιείται η πλήρης δυαδική συνάρτηση εκπόλωσης.

Συνάρτηση πυκνότητας πολωσιμότητας

Η πυκνότητα πολωσιμότητας για ένα ελλειψοειδές με διηλεκτρικό τανυστή \underline{K}_B εμφωλευμένου σε ένα υλικό με τανυστή \underline{K}_P δίνεται από τον τύπο [Sin00]

:

$$\underline{\alpha}_{B/P}(\rho) = (\underline{K}_B - \underline{K}_P) \cdot [\underline{I} + i\omega \mathbf{D}_P(\rho) \cdot (\underline{K}_B - \underline{K}_P)]^{-1} \quad (2.2.3)$$

Αυτή η ποσότητα μπορεί να ερμηνευθεί ως η ηλεκτρομαγνητική απόκριση ενός μικρού ελλειψοειδούς σωματιδίου υπό την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Να σημειωθεί ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η προσέγγιση $D_P = D_{P,0}$, όπως παραπάνω, και τότε $\underline{\alpha}_{B/P}(\rho) = \underline{\alpha}_{B/P}^0$. Εφόσον ορίσαμε αυτές τις ποσότητες μπορούμε τώρα να αναφερθούμε στους φορμαλισμούς που προαναφέρθηκαν.

2.2.1 Μέθοδος Maxwell-Garnett(MG)

Ο φορμαλισμός MG έχει ως βάση την εξής θεώρηση. Έστω μία πρόσμιξη δύο υλικών. Εξετάζουμε το υλικό που υπολείπεται (λιγότερο από 30% του όγκου) ως προσθήκη στο επικρατές υλικό (πάνω από 70% πλήρωση του χώρου). Η εξίσωση που ικανοποιεί το πεδίο \mathbf{F} , και ο ταυιστής \underline{K}_{HCM} που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι

$$(\underline{K}_{HCM} - \underline{K}_b) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{N}_{exc} \quad (2.2.4)$$

Εάν $f_a, f_b = 1 - f_a$ είναι οι λόγοι του όγκου που καταλαμβάνει κάθε υλικό προς τον συνολικό όγκο (έστω ότι το υλικό "a" είναι η πρόσμιξη) και συμβολίσουμε με \mathbf{F}_{loc} το τοπικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο από έναν ελλειψοειδή σχηματισμό, το τοπικό πλεόνασμα πόλωσης γύρω από τον σχηματισμό αυτό δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{N}_{exc} = f_a \underline{\alpha}_{a/b}^0 \cdot \mathbf{F}_{loc}(\mathbf{r}) \quad (2.2.5)$$

Όπως φαίνεται και από την παραπάνω εξίσωση, στο φορμαλισμό MG χρησιμοποιείται μόνο η προσέγγιση της δυαδικής συνάρτησης εκπόλωσης η οποία υπολογίζει τη συνεισφορά από το κέντρο του σχηματισμού.

Για την εκτίμηση του \mathbf{F}_{loc} ασχολούμαστε μόνο με έναν ελλειψοειδή σχηματισμό όγκου V_{Lor} . Η κοιλότητα την οποία καταλαμβάνει ονομάζεται κοιλότητα Lorentz, εξού και ο δείκτης "Lor" στον όγκο. Συμβολίζοντας τον

υπόλοιπο όγκο που καταλαμβάνει το υλικό με V_{out} , έχουμε ότι η λύση για τα πεδία $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\mathbf{F}_{loc}(\mathbf{r})$ δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}_b(\mathbf{r}) - i\omega \int_{V_{out}} \underline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{N}_{exc}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' - i\omega \mathbf{D}_{b,0} \cdot \mathbf{N}_{exc}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{F}_{loc}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}_b(\mathbf{r}) - i\omega \int_{V_{out}} \underline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{N}_{exc}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'\end{aligned}\quad (2.2.6)$$

Οι εξισώσεις διαφέρουν στα δεξιά μέλη τους κατά $i\omega \mathbf{D}_{b,0} \cdot \mathbf{N}_{exc}(\mathbf{r})$ καθώς εξ ορισμού δεν υπάρχει πλεόνασμα πόλωσης στο εσωτερικό της κοιλότητας Lorentz. Αφαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\mathbf{F}_{loc}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{D}_{b,0} \cdot \mathbf{N}_{exc}(\mathbf{r}) \quad (2.2.7)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7 προκύπτει ότι η εκτίμηση κατά Maxwell-Garnett \underline{K}_{MG} του ομογενοποιημένου διηλεκτρικού τανυστή είναι η εξής:

$$\underline{K}_{MG} = \underline{K}_b + f_a \underline{\alpha}_{a/b}^0 \cdot (\underline{I} - i\omega f_a \mathbf{D}_{b,0} \cdot \underline{\alpha}_{a/b}^0)^{-1} \quad (2.2.8)$$

Ενώ αν έχουμε n διαφορετικά είδη προσμίξεων, ο τύπος γενικεύεται άμεσα ως εξής:

$$\underline{K}_{MG} = \underline{K}_b + \sum_{i=1}^n f_{a_i} \underline{\alpha}_{a_i/b}^0 \cdot (\underline{I} - i\omega f_{a_i} \mathbf{D}_{b,0} \cdot \underline{\alpha}_{a_i/b}^0)^{-1}$$

Αυτή η εκδοχή του φορμαλισμού MG χρησιμεύει όταν το ένα υλικό καταλαμβάνει έως 30% του όγκου. Εάν το υλικό "b" καταλαμβάνει πάνω από 70%, τότε οι δείκτες αντιστρέφονται ($a \leftrightarrow b$) και η μέθοδος παράγει καλά αποτελέσματα. Ωστόσο, στις ενδιάμεσες τιμές $0.3 \leq f_a \leq 0.7$, πρέπει να στραφούμε σε μεθόδους βελτίωσης.

Επαναληπτικός και διαφορικός φορμαλισμός

Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα του περιορισμού του ποσοστιαίου όγκου της πρόσμιξης, προτάθηκε ο επαναληπτικός φορμαλισμός IMG, με βάση τον οποίο, αντί να εξεταστεί όλο το υλικό με την πρόσμιξη, θεωρούμε

ότι προστίθεται κατά βήματα. Για παράδειγμα, έστω ότι υπάρχουν N ελλειψοειδείς σχηματισμοί μέσα στο υλικό. Το "μηδενικό" βήμα της μεθόδου θα ήταν να εισαχθεί ο ταχυστής \underline{K}_b του μέσου. Έπειτα προσθέτουμε τη συμβολή του κάθε ελλειψοειδούς, ώστε το βήμα $n + 1$ να δίνεται συναρτήσει του n -οστού βήματος με την εξής επαναληπτική σχέση:

$$\underline{K}(n+1) = \underline{K}(n) + (1 - f_b^{1/N}) \underline{\alpha}_{a/n}^0 \cdot (\underline{I} - i\omega(1 - f_b^{1/N}) \underline{D}_{b,0/n} \cdot \underline{\alpha}_{a/n}^0)^{-1}$$

Όπου το $n \in [1, N - 1]$. Έτσι έχουμε για την εκτίμηση του επαναληπτικού φορμαλισμού $\underline{K}_{IMG} = \underline{K}(N)$. Αποδεικνύεται ότι στο όριο $N \rightarrow \infty$ έχουμε πλέον τον διαφορικό φορμαλισμό MG (DMG) όπου ο ταχυστής του μέσου είναι η λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών. Ο ποσοστιαίος όγκος συμβολίζεται με τη μεταβλητή s .

$$\frac{d}{ds} \underline{K}(s) = \frac{1}{1-s} \underline{\alpha}_{a/s}^0$$

$$\underline{K}(0) = \underline{K}_b$$

Προφανώς, ισχύει ότι για $s = f_a$ η λύση μας δίνει την εκτίμηση σύμφωνα με τον DMG: $\underline{K}_{DMG} = \underline{K}(s = f_a)$.

Αντίστροφη μέθοδος

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε μόνο με την υπόθεση ότι γνωρίζουμε τα συστατικά στοιχεία και θέλουμε εκτίμηση του ολικού. Ωστόσο, αυτές οι μέθοδοι μπορούν και να αντιστραφούν για να δώσουν τις ιδιότητες των συστατικών, γνωρίζοντας το ολικό. Μπορούμε να εκφράσουμε το \underline{K}_a ως συνάρτηση του \underline{K}_b με την εξής σχέση:

$$\underline{K}_a = \underline{K}_b + \frac{1}{f_a} (\underline{I} - i\omega \underline{\alpha}_{MG/b}^{0,\dagger} \cdot \underline{D}_{b,0})^{-1} \cdot \underline{\alpha}_{MG/b}^{0,\dagger}$$

$$\underline{\alpha}_{MG/b}^{0,\dagger} = [\underline{I} + i\omega (\underline{K}_{MG} - \underline{K}_b) \cdot \underline{D}_{b,0}]^{-1} \cdot (\underline{K}_{MG} - \underline{K}_b)$$

Και αντίστοιχα για το \underline{K}_b ως συνάρτηση του \underline{K}_a .

2.2.2 Μέθοδος Bruggeman

Ο φορμαλισμός Bruggeman διαφέρει από τον MG ως προς τη βασική αρχή του. Εδώ, όλα τα συστατικά στοιχεία αντιμετωπίζονται ως ισότιμα, και ως εκ τούτου οι μαθηματικές σχέσεις που παράγονται έχουν συμμετρία ως προς την αλλαγή των δεικτών $a \leftrightarrow b$. Έστω \underline{U}_i, f_i είναι, αντίστοιχα, ο ταυυστής σχήματος και διεύθυνσης των σχηματισμών "i", και ο ποσοστιαίος όγκος τους (για δύο στοιχεία $i = \{a, b\}$ όπως και προηγουμένως). Το πλεόνασμα πόλωσης εδώ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{N}_{exc}(\mathbf{r}) = f_a \underline{\alpha}_{a/Br}^0 \cdot \mathbf{F}_{loc}(\mathbf{r}) + f_b \underline{\alpha}_{b/Br}^0 \cdot \mathbf{F}_{loc}(\mathbf{r}) \quad (2.2.9)$$

Όμως, η υπόθεση της ισοτιμίας για τα υλικά παράγει την απαίτηση $\mathbf{N}_{exc}(\mathbf{r}) = 0$. Άρα η παραπάνω σχέση 2.2.9 οδηγεί στην

$$f_a \underline{\alpha}_{a/Br}^0 + f_b \underline{\alpha}_{b/Br}^0 = 0 \quad (2.2.10)$$

Η παραπάνω σχέση δίνει χρειάζεται μία επαναληπτική μέθοδο ώστε να δώσει το \underline{K}_{Br} . Συνήθως χρησιμοποιούνται τεχνικές Jacobi [MW00], και μία καλή αρχική τιμή έχει βρεθεί πως είναι η εκτίμηση \underline{K}_{MG} της προηγούμενης μεθόδου. Όπως και στη μέθοδο MG, υπάρχει και εδώ ο αντίστροφος φορμαλισμός, ο οποίος μάλιστα έχει μία αρκετά επιθυμητή ιδιότητα. Δίνεται από τον τύπο:

$$\underline{K}_a = \underline{K}_{Br} - \left(\frac{f_a}{f_b} \underline{I} + i\omega \underline{\alpha}_{b/Br}^0 \cdot \mathbf{D}_{Br,0} \right)^{-1} \cdot \underline{\alpha}_{b/Br}^0$$

Και φαίνεται ότι γνωρίζοντας την εκτίμηση κατά Bruggeman του διηλεκτρικού ταυυστή και τον ποσοστιαίο όγκο, δίνει αμέσως τον ταυυστή

του στοιχείου. Το δύσκολο μέρος λοιπόν της μεθόδου (η επαναληπτική διαδικασία) δεν χρειάζεται να γίνει στην περίπτωση του αντίστροφου φορμαλισμού. Αυτό κάνει τη μέθοδο Bruggeman προτιμητέα όταν θέλουμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, εάν φυσικά το υλικό μας υπόκειται στους φυσικούς περιορισμούς που χρειάζεται η μέθοδος για να είναι έγκυρη.

2.3 Η νέα μέθοδος

Οι μέθοδοι που περιγράφησαν παραπάνω έχουν δύο σοβαρούς περιορισμούς.

1. Περιορισμός στον ποσοστιαίο όγκο: Φαίνεται ότι χρειάζεται επαναληπτική μέθοδος όταν το πρόβλημά μας ξεφεύγει από τα όρια του "70-30" στα δύο υλικά. Οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι υπολογιστικά απαιτητικές εν γένει, χωρίς να υπάρχει εγγύηση σύγκλισης και επιτυχίας. Με τον όρο "σύγκλιση" εδώ εννοείται η υπολογιστική έννοια, καθώς ακόμα και εάν ένα πρόβλημα συγκλίνει μαθηματικά, μπορεί να αποκλίνει ο αλγόριθμος που θα το λύνει, και αυτό εισάγει περαιτέρω δυσκολία στην επίλυση.

2. Το πιο σοβαρό πρόβλημα είναι η παραδοχή που έγινε για να φτάσουμε στη χρήση της δυαδικής συνάρτησης εκπόλωσης. Η παραδοχή λοιπόν ήταν η εξής:

$$\int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \approx \int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_P(-\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{0}) \quad (2.3.1)$$

Δηλαδή με λίγα λόγια θεωρήθηκε ότι η συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι περίπου σταθερή σε όλο τον όγκο του ελλειψοειδούς. Αυτό λέγεται προσέγγιση *Rayleigh* και ισχύει μόνο εάν το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι πολύ μεγαλύτερο από το χαρακτηριστικό μέγεθος του

ελλειψοειδούς. Αυτό μπορεί να είναι επαρκές σε αρκετές ηλεκτρομαγνητικές εφαρμογές που αφορούν στερεά, όσον αφορά το "παράθυρο" μηκών κύματος προσπίπτουσας ακτινοβολίας που θέλουμε να μελετήσουμε. Ωστόσο, και πάλι είναι περιορισμένη η χρήση του, και σίγουρα δεν είναι αρκετό για την εφαρμογή στο μαγνητισμένο πλάσμα σύντηξης. Αυτό αποτέλεσε το έναυσμα για την παρούσα δουλειά.

2.3.1 Διατύπωση του προβλήματος στον tokamak

Στο scrape off layer (SOL) του πλάσματος έχουν παρατηρηθεί διακυμάνσεις της πυκνότητας, οι οποίες ονομάζονται νηματοειδείς δομές (*filamentary structures*) με ελλειψοειδές εν γένει σχήμα του "ορίου" τους (χωρίς αυτό να είναι πάντα αυστηρώς ορισμένο). Όπως έχουμε δει στην εισαγωγή, ο διηλεκτρικός τανυστής ενός μέσου έχει μία γραμμική εξάρτηση από την πυκνότητα. Επομένως, είναι εύλογο να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα ως πρόβλημα ομογενοποίησης, θεωρώντας τις δομές αυτές διαφορετικό υλικό. Αυτή η αντιμετώπιση μπορεί αρχικά να φαίνεται περίεργη, εφόσον είναι το ίδιο υλικό. Ωστόσο, εφόσον έχουν διαφορετικές ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες λόγω πυκνότητας, είναι ισοδύναμη η θεώρηση των διαφορετικών υλικών ως προς την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά.

Στην πράξη, έχει παρατηρηθεί [Tom15],[Sih96] πως είναι καλό ως πρώτη προσέγγιση να θεωρηθούν αυτές οι δομές ως ελλειψοειδείς σχηματισμοί, με ίδια πυκνότητα σε όλο τον όγκο τους. Αυτοί οι σχηματισμοί στο πλάσμα ονομάζονται blobs, και η μέθοδος που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής έχει εφαρμογή στην ομογενοποίηση του πλάσματος που τα εμπεριέχει.

2.3.2 Μαθηματική μέθοδος

Ξεκινάμε από την ίδια βάση με τις υπόλοιπες μεθόδους. Ξαναγράφουμε τη λύση της εξίσωσης 2.1.17:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_P(\mathbf{r}) + \int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{Q}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

Όπου το $\mathbf{F}_P(\mathbf{r})$ ορίζεται όπως και παραπάνω:

$$[\underline{\mathbf{L}}(\nabla) + i\omega \underline{\mathbf{K}}_P] \cdot \mathbf{F}_P(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.3.2)$$

Θα εισάγουμε και το πεδίο $\mathbf{F}_B(\mathbf{r})$ που θα λύνει την αντίστοιχη εξίσωση με το $\mathbf{F}_P(\mathbf{r})$ για τον ταχυστή του blob. Επίσης, για τον ταχυστή $\underline{\mathbf{K}}_H$ που φάχνουμε την ίδια εξίσωση πρέπει να ικανοποιεί το ολικό πεδίο $\mathbf{F}(\mathbf{r})$:

$$[\underline{\mathbf{L}}(\nabla) + i\omega \underline{\mathbf{K}}_B] \cdot \mathbf{F}_B(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.3.3)$$

$$[\underline{\mathbf{L}}(\nabla) + i\omega \underline{\mathbf{K}}_H] \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.3.4)$$

Μετασχηματίζουμε και τις τρεις αυτές εξισώσεις με χωρικό μετασχηματισμό Fourier:

$$[i\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) + i\omega \underline{\mathbf{K}}_P] \cdot \mathbf{F}_P(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.3.5)$$

$$[i\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) + i\omega \underline{\mathbf{K}}_B] \cdot \mathbf{F}_B(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.3.6)$$

$$[i\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) + i\omega \underline{\mathbf{K}}_H] \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.3.7)$$

Όπου ο πίνακας $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{k})$ έχει προκύψει από τον μετασχηματισμό του τελεστή $\underline{\mathbf{L}}(\nabla)$ και δίνεται από τον τύπο

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} \times I \\ -\mathbf{k} \times I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

(2.3.9)

Εάν στην παραπάνω λύση για το $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση 2.3.4 θα έχουμε:

$$[\underline{L}(\nabla) + i\omega\underline{K}_H] \cdot \mathbf{F}_P(\mathbf{r}) + [\underline{L}(\nabla) + i\omega\underline{K}_H] \int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{Q}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \mathbf{0} \quad (2.3.10)$$

Όμως

$$[\underline{L}(\nabla) + i\omega\underline{K}_H] \cdot \mathbf{F}_P(\mathbf{r}) = i\omega[\underline{K}_H - \underline{K}_P] \cdot \mathbf{F}_P(\mathbf{r})$$

και

$$[\underline{L}(\nabla) + i\omega\underline{K}_H] \cdot \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \underline{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\omega[\underline{K}_H - \underline{K}_P] \cdot \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην 2.3.10, συμβολίζοντας με V_B τον συνολικό όγκο που καταλαμβάνουν τα blob, παίρνουμε:

$$[\underline{K}_H - \underline{K}_P] \cdot \mathbf{F}_P(\mathbf{r}) + [\underline{K}_B - \underline{K}_P] \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})H(\mathbf{r} \in V_B) + i\omega[\underline{K}_H - \underline{K}_P] \cdot \int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot [\underline{K}_B - \underline{K}_P] \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')H(\mathbf{r}' \in V_B) d^3\mathbf{r}' = \mathbf{0} \quad (2.3.11)$$

Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος περιέχουν τη συνάρτηση βήματος Heaviside, που παίρνει την τιμή 1 εάν το \mathbf{r} που υπάρχει στο όρισμα είναι μέσα στον όγκο V_B που ορίζουν τα blobs, και 0 διαφορετικά. Αυτός ο όρος χρειάζεται, καθώς το ολοκλήρωμα είναι σε όλο τον χώρο, και πρέπει να υπάρχει διάκριση μεταξύ των περιπτώσεων που η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι μηδέν και εκείνων που δεν είναι.

Το επόμενο βήμα είναι να μετασχηματιστεί η 2.3.11 κατά Fourier:

$$[\underline{K}_H - \underline{K}_P] \cdot \hat{\mathbf{F}}_P(\mathbf{k}) + [\underline{K}_B - \underline{K}_P] \cdot \mathcal{F}[\mathbf{F}(\mathbf{r})H(\mathbf{r} \in V_B)] + i\omega[\underline{K}_H - \underline{K}_P] \cdot \hat{\underline{\mathbf{G}}}_P(\mathbf{k}) \cdot [\underline{K}_B - \underline{K}_P] \cdot \mathcal{F}[\mathbf{F}(\mathbf{r})H(\mathbf{r} \in V_B)] = \mathbf{0} \quad (2.3.12)$$

Για να συνεχίσουμε πρέπει να υπολογιστεί ο όρος $\mathcal{F}[\mathbf{F}(\mathbf{r})H(\mathbf{r} \in V_B)]$. Πρώτα θα οριστεί η έννοια του πίνακα μετασχηματισμού σχήματος \underline{U} του ελλειψοειδούς σε σφαίρα. Αυτός ο πίνακας ορίζεται απλά ως εξής:

$$\underline{U} = \frac{1}{\rho_0} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (2.3.13)$$

Όπου $\rho_0 = (abc)^{1/3}$ η ακτίνα του κάθε blob. Να σημειωθεί ότι, επειδή έχει μοναδιαία ορίζουσα, διατηρεί τον όγκο του χωρίου σταθερό. Επίσης $d^3\mathbf{r} = d^3\underline{U}\mathbf{r}$ λόγω της μοναδιαίας ορίζουσας (δηλαδή σε μία αλλαγή μεταβλητής θα αλλάξουν μόνο τα όρια ολοκλήρωσης). Έχοντας ορίσει αυτό έχουμε για τον παραπάνω όρο:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{F}(\mathbf{r})H(\mathbf{r} \in V_B)] &= \int_V \mathbf{F}(\mathbf{r}')H(\mathbf{r}' \in V_B)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}')d^3\mathbf{k}' \int_V e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} H(\mathbf{r}' \in V_B)d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με την αλλαγή μεταβλητής $\mathbf{r}' = \underline{U}\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} &\int_{V_S} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\underline{U}\mathbf{R}} H(\rho_0 - R)d^3\mathbf{R} = \\ &\int_0^{\rho_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\underline{U}\mathbf{R}} dR d\theta d\phi \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι οι άξονες z των διανυσμάτων $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, $\underline{U}\mathbf{R}$ συμπίπτουν, οπότε

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \underline{U}\mathbf{R} = R|\underline{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')|\cos\theta$$

Και επειδή

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta e^{R|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|\cos\theta} d\theta d\phi = \frac{4\pi}{R|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|} \sin(R|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|)$$

Παίρνουμε τελικά για το αρχικό ολοκλήρωμα:

$$\int_{V_S} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{U}\mathbf{R}} H(\rho_0 - R) d^3\mathbf{R} = 4\pi\rho_0 \frac{\text{sinc}(\rho_0|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|) - \cos(\rho_0|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|)}{|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2}$$

$$\text{sinc}(x) \equiv \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases} \quad (2.3.16)$$

Οπότε τελικά

$$\mathcal{F}[\mathbf{F}(\mathbf{r})H(\mathbf{r} \in V_B)] = \frac{\rho_0}{2\pi^2} \int_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}') \frac{\text{sinc}(\rho_0|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|) - \cos(\rho_0|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|)}{|\underline{U}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2} d^3\mathbf{k}' \quad (2.3.17)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα θα το συμβολίσουμε με $\mathbf{O}(\mathbf{k})$ για συντομία. Έτσι η σχέση 2.3.12 γίνεται:

$$[\underline{K}_H - \underline{K}_P] \cdot \hat{\mathbf{F}}_P(\mathbf{k}) + [\underline{K}_B - \underline{K}_P] \cdot \mathbf{O}(\mathbf{k}) + i\omega[\underline{K}_H - \underline{K}_P] \cdot \hat{\mathbf{G}}_P(\mathbf{k}) \cdot [\underline{K}_B - \underline{K}_P] \cdot \mathbf{O}(\mathbf{k}) = 0 \quad (2.3.18)$$

Εδώ είναι το κύριο μέρος στο οποίο θα στηριχτεί η μέθοδός μας. Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τη βάση υπό την οποία θα υπολογίσουμε το \underline{K}_H . Η δυαδική συνάρτηση Green είναι γνωστή, από την σχέση

$$\hat{\mathbf{G}}_P(\mathbf{k}) = [i\underline{A}(\mathbf{k}) + i\omega\underline{K}_P]^{-1} \quad (2.3.19)$$

Εάν λοιπόν έχουμε τρόπο να εκφράσουμε τα $\hat{\mathbf{F}}_P(\mathbf{k}), \mathbf{O}(\mathbf{k})$ ως συνάρτηση γνωστών ποσοτήτων ή/και στοιχείων του \underline{K}_H , η εξίσωση θα μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς τους κυματαριθμούς, και έπειτα να λυθεί για να βρεθεί ο ομογενοποιημένος ταυυστής.

Υπάρχουν δύο προβλήματα ως προς αυτό. Για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία $\hat{\mathbf{F}}_P(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k})$ δεν έχουμε έως τώρα κάποιον τρόπο υπολογισμού τους. Ωστόσο, υπάρχουν οι εξισώσεις 2.3.5, 2.3.7. Έχουν την ιδιαιτερότητα ότι είναι ομογενείς, άρα υπάρχουν δύο προβλήματα.

1. Πρέπει η ορίζουσα του πίνακα να είναι μηδέν. Αυτό ξέρουμε ότι ορίζει τη σχέση διασποράς στο πλάσμα, οπότε δεν είναι κάτι μη αναμενόμενο.

2. Επειδή είναι ομογενείς οι εξισώσεις, τελικά τα 5 στοιχεία του 6-διάστατου διανύσματος θα υπολογιστούν συναρτήσει του έκτου. Η επιλογή του στοιχείου αυτού είναι ελεύθερη, οπότε είναι μία παραπάνω παράμετρος του προβλήματος που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε.

Υπάρχει όμως ένας τρόπος να διευκολυνθεί η επίλυση, με χρήση μίας ταυτότητας από το 1ο κεφάλαιο του βιβλίου του Stix [Sti92]. Επειδή μας ενδιαφέρουν ουσιαστικά μόνο οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου (το κομμάτι του διηλεκτρικού τανυστή που αφορά το μαγνητικό πεδίο είναι γνωστό και ομογενές), χρησιμοποιούμε, αντί για τον πλήρη 6×6 τανυστή, τον αντίστοιχο 3×3 που δίνει την κυματική εξίσωση. Παράγει την ίδια σχέση διασποράς και ισχύει για τα ίδια πεδία, άρα είναι ισοδύναμη επιλογή. Η εξίσωση λοιπόν που πρέπει να λυθεί είναι τελικά η εξής:

$$\begin{pmatrix} K_{\perp} - q^2 \cos^2 \theta & -iK_X & q^2 \cos \theta \sin \theta \\ iK_X & K_{\perp} - q^2 & 0 \\ q^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & K_{\parallel} - q^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.3.20)$$

Όπου $q = \frac{kc}{\omega}$ είναι ο κανονικοποιημένος κυματάρριθμος. Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί ξεχωριστά για τις τρεις πρώτες συνιστώσες των πεδίων $\hat{F}_P(\mathbf{k})$, $\hat{F}_B(\mathbf{k})$, $\hat{F}(\mathbf{k})$. Η παραπάνω εξίσωση είναι σε μονάδες του συστήματος Gauss, οπότε μετατράπηκε κατάλληλα στις υπολογιστικές ρουτίνες που χρησιμοποιήσαμε. Επίσης, έχει τεθεί η μία συνιστώσα του κυματάρριθμου ίση με το μηδέν. Αυτό μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας, καθώς οι συνιστώσες του κυματανύσματος που μας ενδιαφέρουν είναι η μία παράλληλη και η άλλη κάθετη στο μαγνητικό πεδίο. Με κατάλληλη επιλογή αξόνων απλά μηδενίζουμε τη μία συνιστώσα.

Πλήρης λύση

Πριν συνεχιστεί περαιτέρω η ανάλυση της 2.3.18, θα γίνει μία σύντομη αναδρομή στη πλήρη λύση 2.1.26. Η συνάρτηση Heaviside που χρησιμοποιήθηκε περιέχει την έννοια του όγκου όλων των blobs. Σκόπιμα παραλήφθηκε μία λεπτομέρεια, που θα αναλυθεί τώρα. Η παραπάνω ανάλυση, όπως και το ολοκλήρωμα που ορίζεται από το $O(\mathbf{k})$, υποθέτει ένα blob, όπου μάλιστα έχουμε ορίσει το κέντρο του ως αρχή των αξόνων. Ωστόσο, η λύση γενικεύεται για αυθαίρετα πολλά blobs, με την εξής απλή αντικατάσταση. Έστω ότι έχουμε N blobs, και έχουν κέντρα $\rho_{0,i}$ και ακτίνες $\rho_{0,i}$. Το μόνο που θα αλλάξει στους μετασχηματισμούς Fourier είναι το εξής. Το ολοκλήρωμα που ορίζει το $O(\mathbf{k})$ θα μετασχηματιστεί με τον παρακάτω κανόνα. Έστω $O_{\Sigma}(\mathbf{k})$ το νέο ολοκλήρωμα και $O(\mathbf{k}, \rho_0)$ το ολοκλήρωμα για ακτίνα blob ρ_0 . Τότε

$$O_{\Sigma}(\mathbf{k}) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\mathbf{k} \cdot \rho_{0,j}} O(\mathbf{k}, \rho_{0,j}) \quad (2.3.21)$$

Είναι η μόνη αντικατάσταση που χρειάζεται να γίνει στην εξίσωση 2.3.18 για να συμπεριλάβει τέτοιες περιπτώσεις.

Ιδιαίτερα χρήσιμη για κάποια φυσικά συμπεράσματα μπορεί να φανεί η ιδιότητα του αθροίσματος εκθετικών

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{ijx} = \frac{\sin(\frac{1}{2}Nx)}{\sin(\frac{1}{2}x)} e^{ix(N-1)/2}$$

Στην περίπτωση που όλα τα blobs έχουν την ίδια ακτίνα και κάποια περιοδική δομή στον χώρο, τότε μπορεί να υπάρχει κάποιος κυματάριθμος τέτοιος ώστε το ημίτονο του αριθμητή να είναι ίσο με το μηδέν, για ένα κομμάτι των blobs, ή και για το σύνολό τους. Δηλαδή, θεωρητικά είναι δυνατή η ύπαρξη μηκών κύματος ακτινοβολίας τέτοιων ώστε να αγνοούν την ύπαρξη των blobs κατά την διάδοσή τους στο υλικό (αυτό είναι

συμπέρασμα που ισχύει για κάθε υλικό, και όχι μόνο για το πλάσμα). Ειδικά στο πλάσμα σύντηξης αυτός ο ισχυρισμός θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για πειράματα που αφορούν το σχηματισμό μαγνητικών νησιών. Σε περίπτωση που υπάρχει κάποιος συντονισμός που ευθύνεται για την δημιουργία τους, και υπάρχει τρόπος να διεγερθεί έτσι ώστε τα blobs να έχουν περιοδική κατανομή στο χώρο, είναι μία πιθανή απάντηση στα προβλήματα που παρουσιάζονται με την ύπαρξή τους.

Χωρία ολοκλήρωσης

Όταν μετασχηματίσαμε την 2.3.11 κατά Fourier για να καταλήξουμε στην 2.3.12 θεωρήσαμε άπειρο χωρίο ολοκλήρωσης, κάτι που προφανώς δεν είναι σωστό. Για να πάμε σε άπειρα χωρία θα πρέπει να ορίσουμε την συνάρτηση Green, καθώς και την λύση της ομογενούς εξίσωσης $F_P(r)$ με τη βοήθεια συναρτήσεων Heaviside, με κατάλληλο όρισμα που θα περιγράφει το όριο της περιοχής στην οποία αναφερόμαστε. Εκτός από αυτό, μέχρι τώρα η εξίσωση 2.3.12 δεν παρέχει κάποιο μέτρο σύγκρισης του όγκου των blob σε σχέση με τον όγκο της συνολικής περιοχής. Κάτι τέτοιο χρειάζεται στους υπολογισμούς μας, καθώς πρέπει να φαίνεται με κάποιον τρόπο όταν υπολογίζεται η συνεισφορά του όρου εκπόλωσης στο συνολικό πεδίο.

Η πλήρης λύση είναι κάτι που ακόμη δεν έχει εφαρμοστεί υπολογιστικά, λόγω της δυσκολίας στην αναπαράσταση του σχήματος του scrape off layer μέσω ορίσματος συνάρτησης βήματος. Ωστόσο, επειδή αυτό το όριο θα αφορούσε όλους τους όρους της εξίσωσης 2.3.11, εάν θεωρήσουμε ότι και οι δύο μετασχηματισμοί Fourier συμπεριφέρονται ως συνέλιξη, μπορούμε να κάνουμε μία απλή προσέγγιση. Να πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο του $O_\Sigma(\mathbf{k})$ με τον όρο $\frac{4\pi}{3}\rho_{0,i}^3/V_{tot}$. Με αυτό τον τρόπο, εισάγουμε μία αδιάστατη ποσότητα που δείχνει πόση "πρέπει" να είναι η συμβολή του κάθε blob. Κάτι παρόμοιο είναι αυτό που θα κάνουμε στην προσέγγιση που έγινε στο κομμάτι της δουλειάς που δημοσιεύτηκε.

Συνοριακές συνθήκες

Εφόσον η μέθοδός μας απαιτεί εξαγωγή λύσεων από ομογενείς εξισώσεις 2.3.20 θα υπάρχει πάντα μία ελεύθερη συνιστώσα, και αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα η επιλογή της μορφής της. Τη λύση μας τη δίνουν οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στην περιοχή που πρέπει να ομογενοποιηθεί. Υπάρχουν τρεις επιλογές.

1. Χρήση συνοριακών συνθηκών για τον ομογενοποιημένο ταχυστή \underline{K}_H , δηλαδή στην είσοδο και την έξοδο του κύματος από την περιοχή.
2. Χρήση συνοριακών συνθηκών στα όρια των blob. Εδώ μπορεί να ληφθεί η περίπτωση ενός blob για ευκολία, ή (αρκετά δυσκολότερο) να θεωρηθεί κάποια κατανομή και να συνδυαστεί με πιθανότητες σκέδασης που θα εξαρτώνται από γωνία που εισήλθε και ούτω καθεξής.
3. Θεώρηση της περιοχής ως μεγάλης, και χρήση μόνο συνθήκης ώστε τα πεδία να μηδενίζονται στο άπειρο με ρυθμό τουλάχιστον τόσο γρήγορου όσο το αντίστροφο τετράγωνο.

Όσον αφορά το "2", υπάρχει μία παρατήρηση στο ολοκλήρωμα $O(k)$ που μπορεί να διευκολύνει αυτή τη θεώρηση. Εάν αναλυθούν το ημίτονο και το συνημίτονο του ολοκληρώματος σε εκθετικά, με κατάλληλο μετασχηματισμό συντεταγμένων, μπορεί να αποδειχθεί ότι έχουν σχέση με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (δηλαδή, απλά το αρχικό ηλεκτρικό πεδίο) στην επιφάνεια του blob. Για την ακρίβεια, αποτελούν τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης του πεδίου με τις συναρτήσεις αντίστροφου τετραγώνου και αντίστροφου κύβου. Οπότε, χρειάζεται απλά η συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια του blob για να χρησιμοποιηθεί αυτή η θεώρηση.

Στην πράξη αυτό που χρησιμοποιήθηκε στα πρώτα αποτελέσματα ήταν η τρίτη περίπτωση, ως πιο απλή. Επόμενο βήμα είναι να δοκιμαστεί η πρώτη. Η δεύτερη είναι απλό να γίνει για ένα blob, αλλά πολύ δύσκολο να γίνει για παραπάνω, στην πλήρη της περίπτωση (για κάτι τέτοιο θα χρησιμοποιηθεί η

μέθοδος της στοχαστικής ομογενοποίησης, που θα παρουσιαστεί παρακάτω). Σε κάθε περίπτωση πάντως, χρειάζεται να γίνει μετασχηματισμός Fourier στις συνοριακές συνθήκες ώστε να βρεθεί η τελευταία συνιστώσα.

2.3.3 Προσεγγιστική λύση

Αφού αναλύθηκαν τα κύρια βήματα της μεθόδου, και οι προσεγγίσεις που μπορούν να γίνουν, είναι ώρα να περιγραφεί η κύρια προσέγγιση που έγινε, ώστε να καταλήξουμε σε αποτελέσματα. Θα προσεγγίσουμε τη λύση της 2.1.17 με μία εξίσωση, η οποία ζητάμε να έχει τα εξής χαρακτηριστικά.

1. Να περιέχει τους όρους ισοδύναμου "φορτίου" και συνάρτησης Green.
2. Να περιέχει αδιάστατες παραμέτρους που θα σχετίζονται με τον όγκο και θα περιγράφουν το ποσοστό συμμετοχής του κάθε όρου.
3. Να δίνουν τα σωστά αποτελέσματα στις οριακές περιπτώσεις (τανυστής πλάσματος όταν το πλάσμα καταλαμβάνει όλο τον χώρο και τανυστής blob όταν το blob καταλαμβάνει όλο τον χώρο).
4. Να έχει συμμετρία (όταν αλλάζουν οι δείκτες πλάσματος-blob $P \leftrightarrow B$ με τους αντίστοιχους συντελεστές τους, η εξίσωση να παραμένει αναλλοίωτη).

Η τέταρτη απαίτηση μοιάζει πιο πολύ με την ισοτιμία αντιμετώπισης των υλικών που επιδεικνύει ο φορμαλισμός Bruggeman. Χρησιμοποιήθηκε εδώ επειδή μιλάμε για υλικά με την ίδια σύσταση, αλλά διαφορετική πυκνότητα. Εάν ήταν σίγουρο ότι τα blob είναι πάντα ηλεκτρομαγνητικά "θωρακισμένα" ως προς την εισχώρηση του πεδίου του υπόλοιπου πλάσματος, δεν θα έμπαινε η τέταρτη συνθήκη, αλλά θα κατασκευαζόταν λύση που να ικανοποιεί μόνο τις πρώτες τρεις.

Μία απλή λύση που ικανοποιεί τα παραπάνω, είναι αυτή που τελικά χρησιμοποιήθηκε στο [Bai+18]. Έστω $V_{blob}, V_{out}, V_{tot} = V_{blob} \cap V_{out}$ οι όγκοι που καταλαμβάνουν αντίστοιχα τα blob, το υπόλοιπο πλάσμα, και ο συνολικός όγκος της περιοχής και $\sigma = \frac{V_{blob}}{V_{tot}}$ το κλάσμα του όγκου που καταλαμβάνουν

τα blobs. Τότε η εξίσωση που προτείνουμε είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = (1 - \sigma)[\mathbf{F}_P(\mathbf{r}) + \int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{Q}_P(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'] + \sigma[\mathbf{F}_B(\mathbf{r}) + \\ \int_{V_{tot}} \underline{\mathbf{G}}_B(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{Q}_B(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'] \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Οι ποσότητες με δείκτη B ορίζονται κατά ανάλογο τρόπο όπως αυτές με δείκτη P , με την εναλλαγή $P \leftrightarrow B$. Η μοναδική διαφορά είναι ότι τα χωρία που είναι μη μηδενικά τα $\mathbf{Q}_P, \mathbf{Q}_B$ είναι τα V_B, V_{out} αντίστοιχα.

Η εξίσωση 2.3.22 είναι μία καλή πρώτη προσέγγιση της λύσης του προβλήματος που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε. Επίσης, δεν υπάρχει σε κανένα σημείο η προσέγγιση Rayleigh που χρησιμοποιείται σε άλλες μεθόδους. Αυτό είναι σημαντικό, καθώς μέθοδοι που χρησιμοποιούσαν την προσέγγιση αυτή δεν θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για ομογενοποίηση σε αντιδραστήρα tokamak, όταν η προσπίπτουσα ακτινοβολία είναι στο εύρος μήκους κύματος των ραδιοκυμάτων.

Αντιστρεψιμότητα της μεθόδου

Η μέθοδος αυτή είναι το ίδιο εύκολο να αντιστραφεί όπως η μέθοδος MG, και λίγο δυσκολότερη από την Bruggeman. Ενώ εκ πρώτης όψεως φαίνεται πολύ δύσκολο να αντιστραφούν οι εξισώσεις όπως είναι δομημένες, ας αναλογιστούμε το εξής. Εάν στην εξίσωση 2.3.22 αντικατασταθούν όλοι οι δείκτες $B \leftrightarrow H$ και το πεδίο $\hat{\mathbf{F}} \leftrightarrow \hat{\mathbf{F}}_B$, τότε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7, εκφράζουμε πάλι τα πεδία ως συναρτήσεις των διηλεκτρικών τανυστών, και ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα χωρία ολοκλήρωσης για την συνάρτηση Green του υλικού θα είναι διαφορετικά από τα προηγούμενα. Για την ακρίβεια, θα ολοκληρώνεται σε όλο το μέσο, και δεν θα μηδενίζεται πουθενά μέσα στο υλικό.

2.3.4 Αποτελέσματα για μαγνητισμένο πλάσμα σύντηξης

Θα παρουσιαστούν τώρα αποτελέσματα με την μέθοδό μας για διάφορες περιπτώσεις πλάσματος σύντηξης. Η σύγκριση έγινε μεταξύ του μοντέλου μας και της μεθόδου MG, όπως εφαρμόστηκε σε διηλεκτρικό πλάσμα από τον A.Sihvola [Sih96]. Επίσης, παρατέθηκε για σύγκριση ένα πλήρως γραμμικό μοντέλο, στο οποίο οι ταχυστές δίνονταν από τον τύπο $\underline{K}_H = (1 - \sigma)\underline{K}_P + \sigma\underline{K}_B$. Θα φανεί στη μία από τις δύο περιπτώσεις που εξετάζουμε γιατί γίνεται αυτή η σύγκριση.

Περίπτωση 1: Electron-Cyclotron

Για συχνότητες στο εύρος συχνοτήτων Electron-Cyclotron ($\approx 170GHz$), πυκνότητα πλάσματος $n_P = 10^{19}cm^{-3}$ και blob $n_P = 1.5 \cdot 10^{19}cm^{-3}$, οι συνιστώσες των διηλεκτρικών ταχυστών παίρνουν τις εξής τιμές:

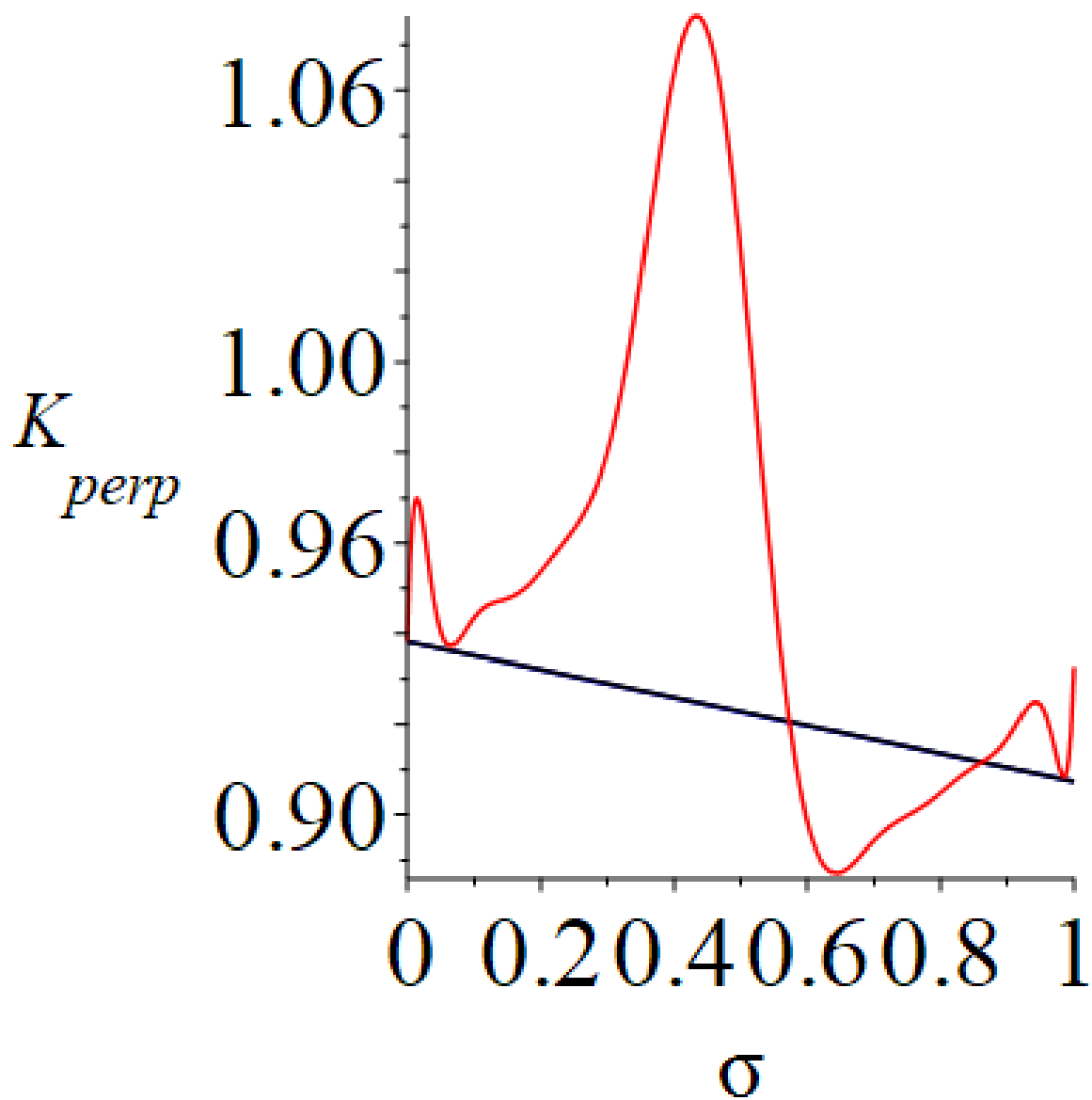
$$K_{\perp,P} = 0.9382, K_{X,P} = -0.0458, K_{\parallel,P} = 0.9721$$

$$K_{\perp,B} = 0.9073, K_{X,B} = -0.0687, K_{\parallel,P} = 0.9582$$

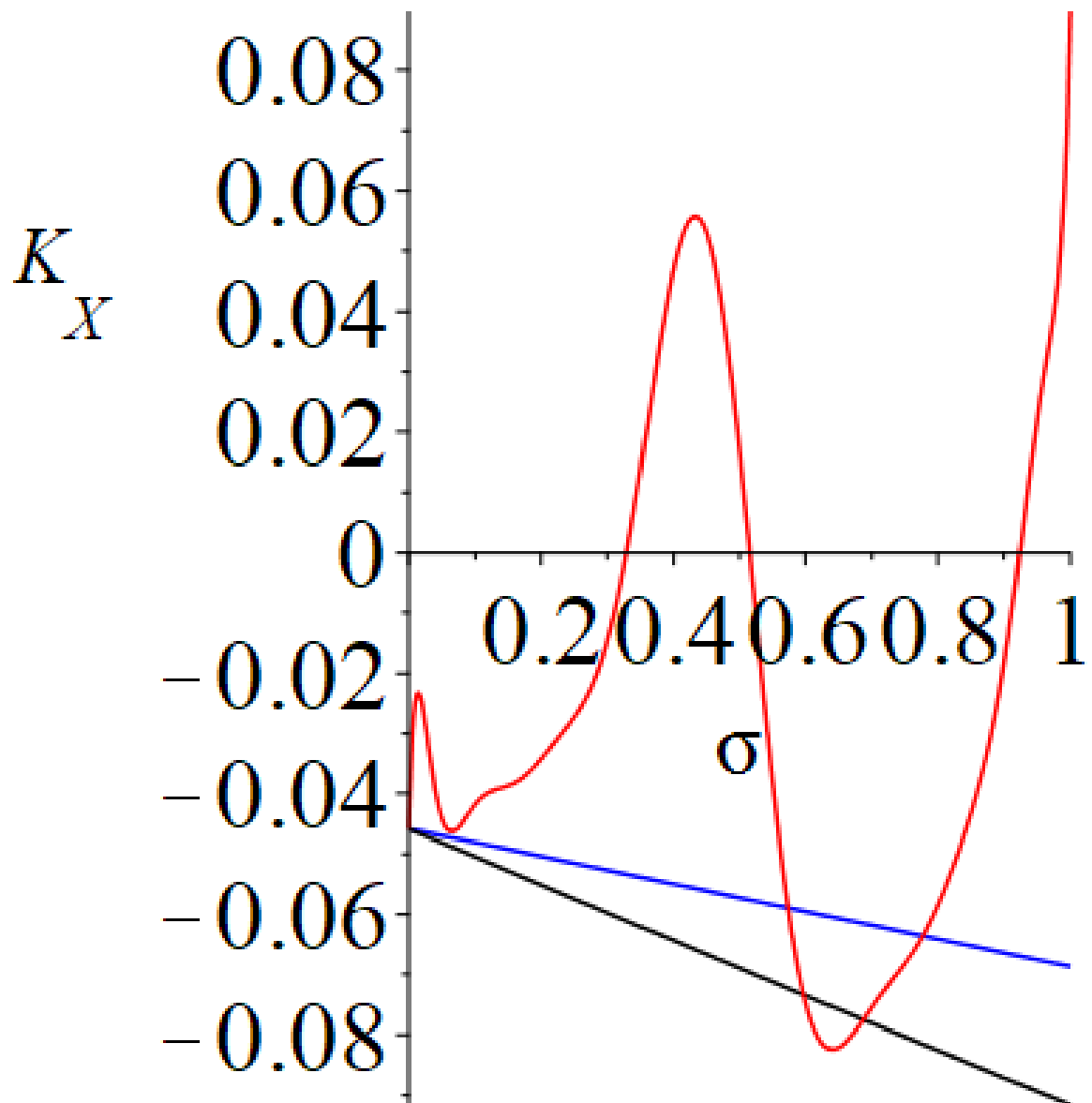
Όσον αφορά τις υπόλοιπες παραμέτρους, η ακτίνα του blob ήταν $\rho_0 = 2cm$, και οι ημιάξονες του ελλειψοειδούς έπαιρναν τις εξής τιμές:

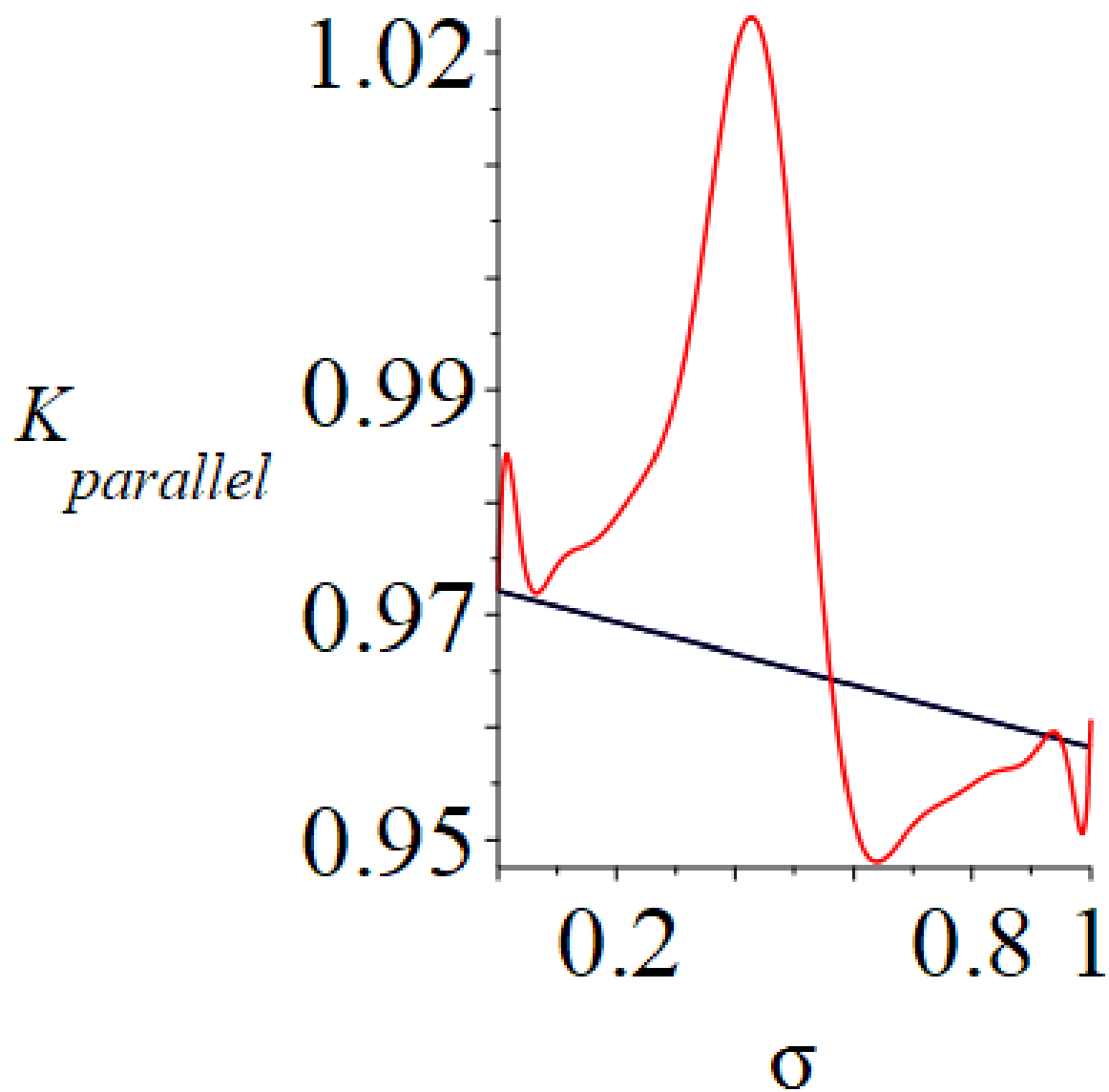
$$a = b = 0.5\rho_0, c = 4\rho_0$$

Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στις παρακάτω εικόνες (με μπλε χρώμα η MG, με μαύρο η γραμμική, με κόκκινο η δική μας): Παρατηρείται ότι σε δύο περιπτώσεις η μέθοδος MG συμπίπτει με την απλή ευθεία. Σε αντίθεση με αυτές τις δύο, η νέα μέθοδος έχει ταλαντωτική συμπεριφορά γύρω από τις άλλες. Φαίνεται μία τάση μεγαλύτερης απόκλισης όσο προσεγγίζουμε τον συντελεστή πλήρωσης 50%. Ωστόσο, κοντά σε αυτή την τιμή πρέπει να



Σχήμα 2.1: Η συνιστώσα K_{\perp}

Σχήμα 2.2: Η συνιστώσα K_X



Σχήμα 2.3: Η συνιστώσα K_{\parallel}

τονιστεί και πάλι ότι δεν πρέπει να εμπιστευόμαστε καμία από τις μεθόδους, καθώς δεν είναι αξιόπιστες στο εύρος 30-70%.

Περίπτωση 2

Σε αυτή την περίπτωση δοκιμάζουμε άλλες συνιστώσες γυροτροπικού μέσου. Αυτή τη φορά (με ίδια ακτίνα blob και ημιάξονες ελλειψοειδών) οι ανεξάρτητες συνιστώσες των τανυστών παίρνουν τις παρακάτω τιμές:

$$K_{\perp,P} = 1.0404, K_{X,P} = 1.3925, K_{\parallel,P} = -37.0892$$

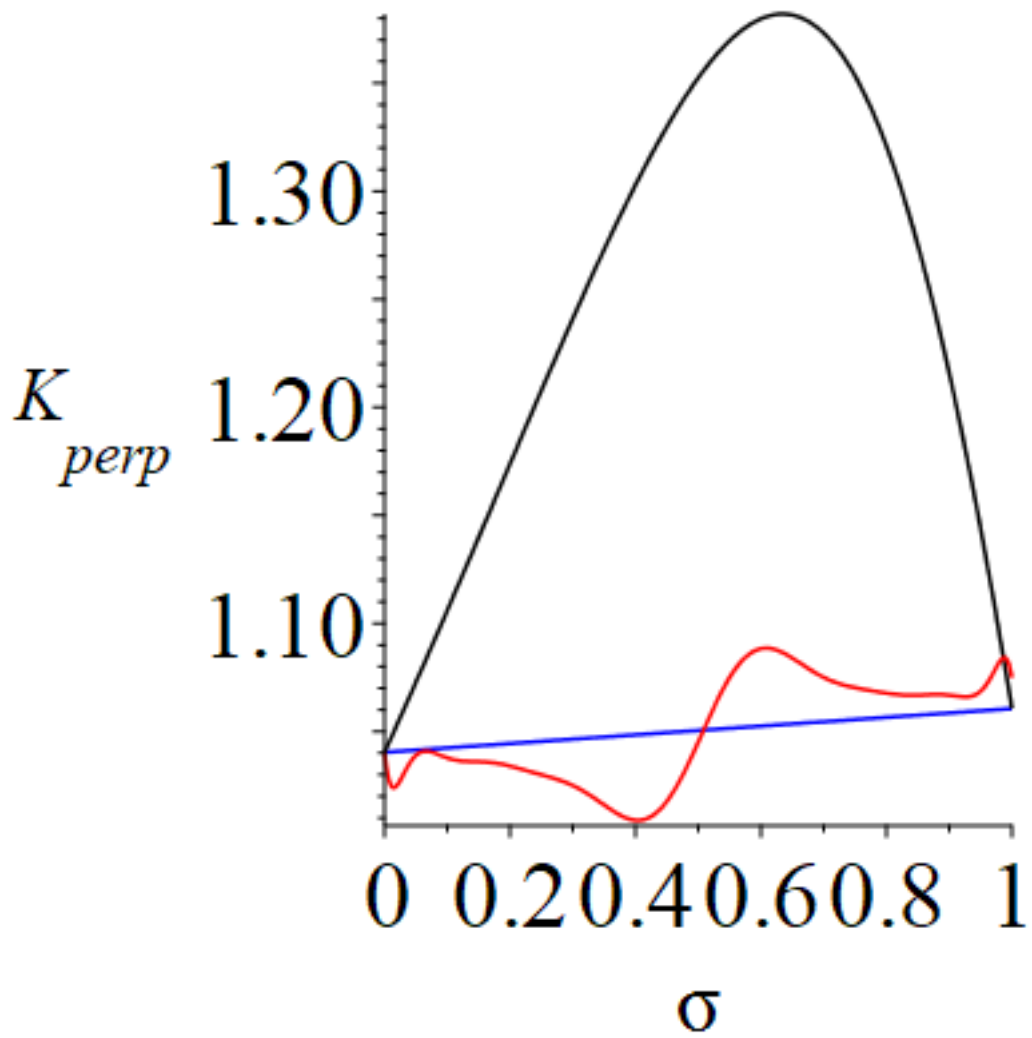
$$K_{\perp,B} = 1.0606, K_{X,B} = 2.0887, K_{\parallel,P} = -56.1338$$

Τα παρακάτω διαγράμματα περιγράφουν τη συμπεριφορά των προσεγγίσεων (ίδια αντιστοιχία χρωμάτων με πριν):

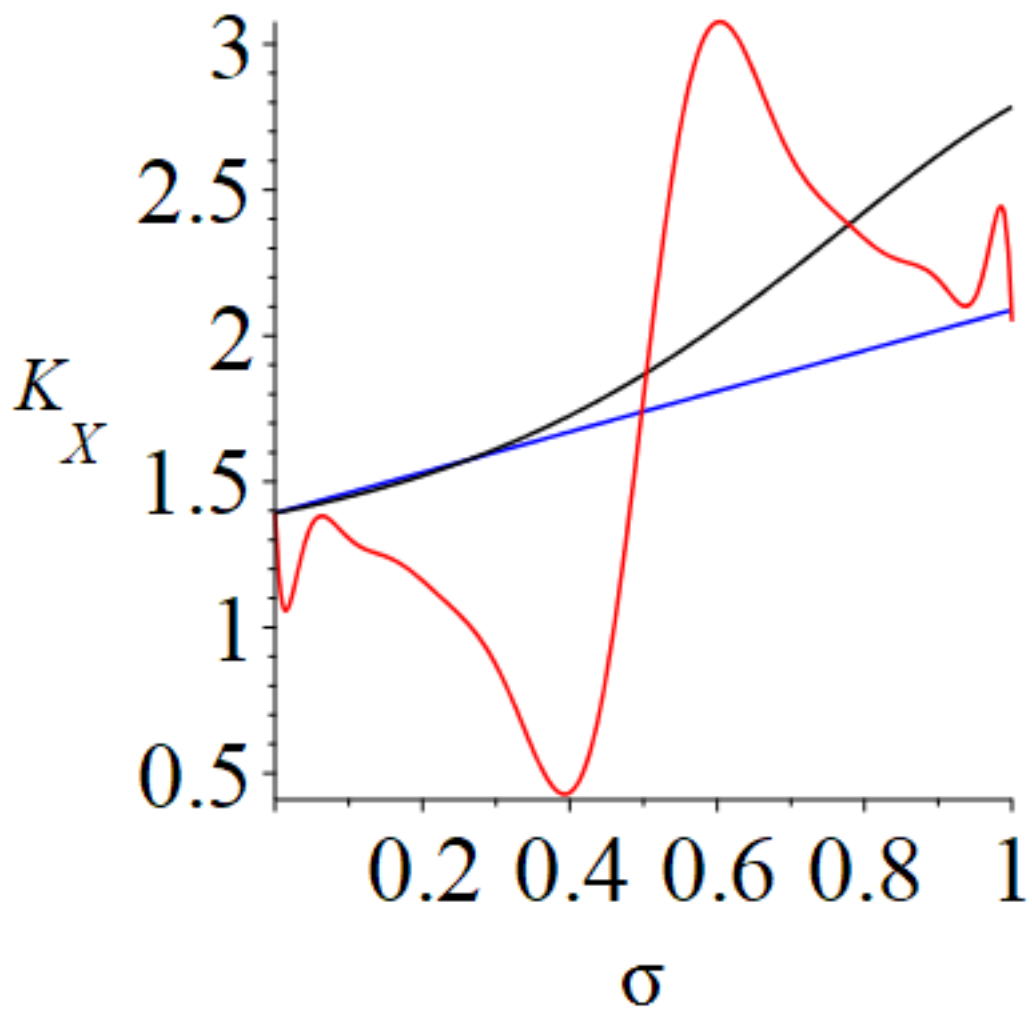
Εδώ είναι διαφορετική εικόνα όσον αφορά την MG με την ευθεία. Η μέθοδός μας παρόλα αυτά έχει παρόμοια συμπεριφορά.

2.3.5 Συμπεράσματα - Επόμενα βήματα

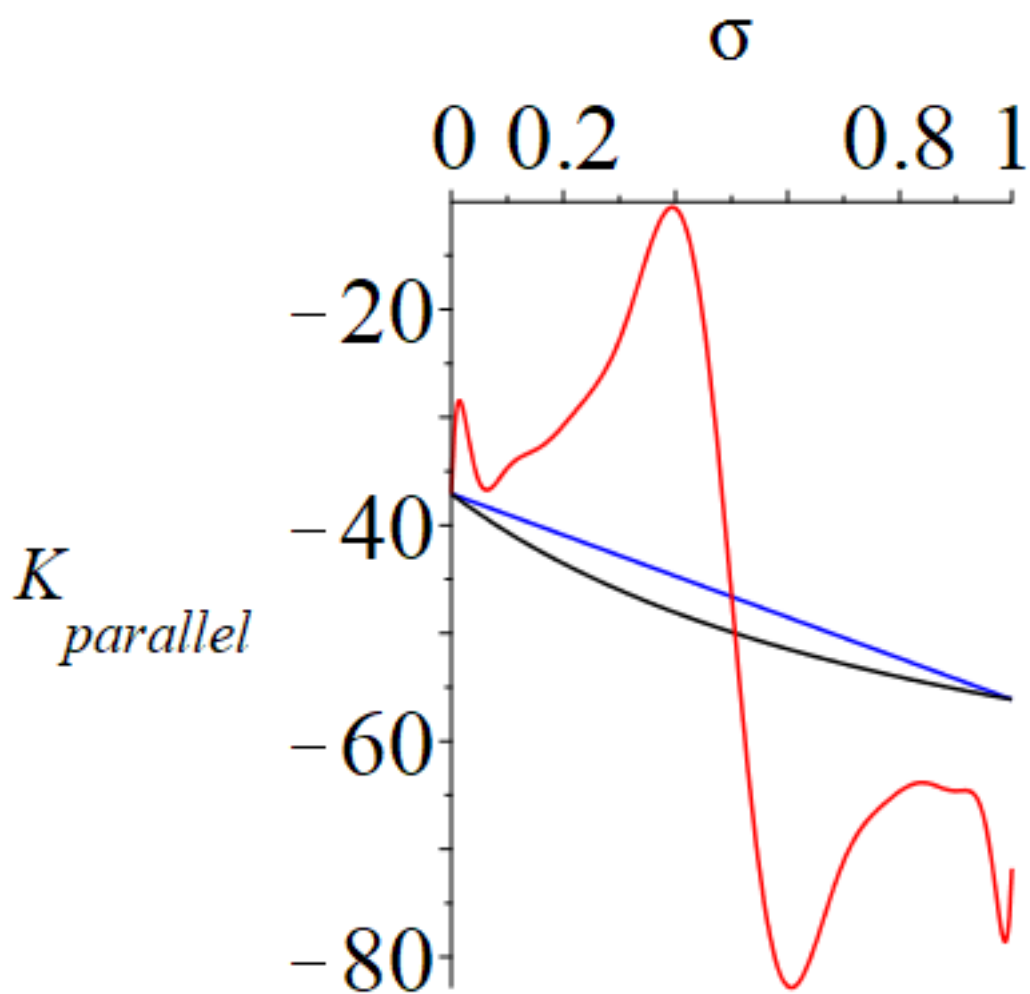
Δημιουργήθηκε μία μέθοδος η οποία έχει λιγότερους από τους περιορισμούς των παλιών, ειδικά σε σχέση με την προσέγγιση Rayleigh. Μία πρώτη προσέγγιση λύσης δόθηκε από την εξίσωση 2.3.22. Επόμενα βήματα θα ήταν να γίνει μία προσέγγιση της κατανομής των blobs μέσα στο πλάσμα και να χρησιμοποιηθεί η πλήρης λύση της εξίσωσης 2.1.17, μαζί με συνοριακές συνθήκες και πλήρη χωρία ολοκλήρωσης. Επίσης, θα ήταν χρήσιμο, αντί να θεωρηθεί απότομη μεταβολή της πυκνότητας από το πλάσμα στο blob, να γίνει μία θεώρηση με μία συνάρτηση μεταβολής της



Σχήμα 2.4: Η συνιστώσα K_{\perp}



Σχήμα 2.5: Η συνιστώσα K_X



Σχήμα 2.6: Η συνιστώσα K_{\parallel}

πυκνότητας με μέγιστο στο κέντρο του κάθε blob. Μία καλή πρώτη ιδέα για αυτό θα ήταν η γκαουσιανή. Δηλαδή, για ένα blob με κέντρο στο r_0 :

$$n_B = n_P + \Delta n e^{c_0(r-r_0)^2}$$

Όπου με c_0 συμβολίζεται απλά ένας συντελεστής για το όρισμα της γκαουσιανής. Αυτή η θεώρηση κάνει πιο εύκολη και τη μαθηματική αντιμετώπιση του προβλήματος, από πλευράς ολοκληρωμάτων. Έχει επίσης πιο πολύ νόημα για το μαγνητισμένο πλάσμα σύντηξης, καθώς οι απότομες μεταβολές που μοντελοποιούνται από τη συνάρτηση Heaviside μοντελοποιούν καλύτερα τα στερεά, και όχι τα ρευστά και αέρια όπως το πλάσμα.

Διάδοση κυμάτων με χρήση του πίνακα μεταφοράς

Ο πίνακας μεταφοράς (transfer matrix) W αποτελεί τον πίνακα που περιγράφει τη διάδοση μέσα σε ένα ομογενές υλικό. Εμπεριέχει τις συνοριακές συνθήκες του υλικού, ώστε να περιγράφει με ακρίβεια την επίδρασή του στο ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Η μέθοδος της ομογενοποίησης μπορεί να συνδυστεί με τον πίνακα μεταφοράς ώστε να δώσει την αναμενόμενη διάδοση του υλικού, ώστε να γίνει σύγκριση με τα πειράματα και να συγκριθούν τα θεωρητικά με τα πειραματικά αποτελέσματα. Αυτό είναι χρήσιμο ως έμμεσος τρόπος επιβεβαίωσης των αποτελεσμάτων της ομογενοποίησης, και είναι ένα από τα επόμενα βήματα στα οποία θα προχωρήσει η δουλειά αυτή.

2.4 Ομογενοποίηση των εξισώσεων Maxwell σε περιοδικές και μη δομές

Θα παρουσιαστεί μία πολλά υποσχόμενη θεώρηση της ομογενοποίησης, η οποία είναι διαφορετική ως προς την αρχή της από τις προηγούμενες, καθώς και από τη μέθοδο που αναπτύχθηκε στην παρούσα δουλειά.

Γενικά στις μεθόδους ομογενοποίησης κυριαρχεί η θεώρηση στην οποία γίνεται προσπάθεια εξαγωγής του διηλεκτρικού τανυστή του υλικού, καθώς είναι και χαρακτηριστικό του. Όμως, υπάρχει και η θεώρηση η οποία εξετάζει κατευθείαν τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, και εξάγει από εκεί τον τανυστή εάν χρειάζεται. Θα περιγραφεί συνοπτικά αυτή η μέθοδος από μαθηματική σκοπιά και θα παρουσιαστούν όπου χρειάζονται οι μαθηματικοί ορισμοί για την ανάλυση αυτή.

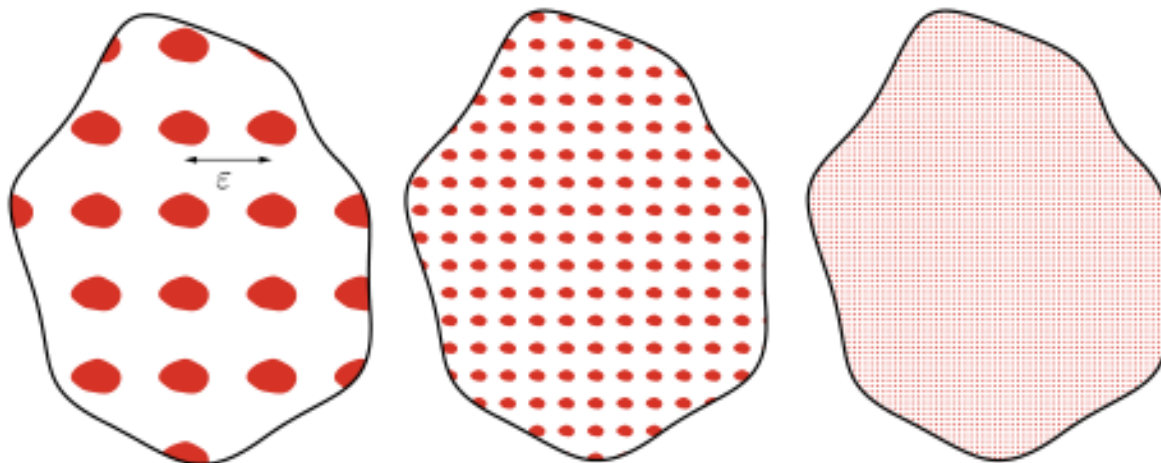
Προϋπόθεση για να γίνει ομογενοποίηση με αυτή τη θεώρηση είναι να υπάρχει κάποιου βαθμού περιοδικότητα στο εκάστοτε υλικό. Ένα υλικό ονομάζεται *ε-περιοδικό* εάν αποτελείται από μία δομή η οποία επαναλαμβάνεται κατά μήκος ϵ , και μπορεί να συνθέσει έτσι όλο το υλικό. Αυτή η δομή ονομάζεται *unit cell* ("μοναδιαία κυψελίδα").

Η μοναδιαία κυψελίδα

Μοναδιαία κυψελίδα λοιπόν ονομάζεται αυτή η δομή η οποία μπορεί αν επαναληφθεί να συνθέσει ολόκληρο το υλικό. Η ύπαρξή του είναι πιο συχνή στα στερεά, αλλά όχι μόνο. Η μέθοδος ομογενοποίησης που θα εξεταστεί εδώ έχει ως βασική αρχή τη λύση των εξισώσεων Maxwell μόνο στην μοναδιαία κυψελίδα, και έπειτα εύρεση της λύσης σε όλο τον χώρο μέσω θεωρημάτων σύγκλισης.

Ένα πολύ βασικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου, είναι ότι είναι αυθαίρετο το μέγεθος της μοναδιαίας κυψελίδας. Μπορεί η προφανής

2.4. ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ MAXWELL ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗ Δ



Σχήμα 2.7: ε -περιοδικά υλικά. Το ε μειώνεται από αριστερά προς τα δεξιά (credits [Kri03])

επιλογή να είναι τόσο ώστε να εμπεριέχει έναν σχηματισμό του δεύτερου υλικού, αλλά δεν μας περιορίζει κανείς να χρησιμοποιήσουμε δύο τέτοιους σχηματισμούς, ώστε να συμπεριλάβουμε και φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης.

2.4.1 Διατύπωση του προβλήματος

Έστω Ω ένα λείο και φραγμένο υποσύνολο του R^3 με σύνορο $\partial\Omega$ και το άνωσμα $\hat{\nu}$ είναι το κάθετο στην επιφάνεια του συνόρου αυτού. Έστω επίσης ότι το υλικό είναι Y^ε -περιοδικό στο Ω , δηλαδή αποτελείται από όμοιες κυβικές μοναδιαίες κυψελίδες. Αυτό σημαίνει ότι εάν Y είναι ο μοναδιαίος κύβος στο R^3 , το μέγεθος της μοναδιαίας κυψελίδας είναι εY .

Οι εξισώσεις Maxwell μέσα σε αυτούς τους κύβους παρουσία ρεύματος $J^\varepsilon(x)$ (μετά από χρονικό μετασχηματισμό Fourier) είναι, εάν $x \in \Omega$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^\varepsilon(x) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^\varepsilon(x) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^\varepsilon(x) = i\omega \mathbf{B}^\varepsilon(x)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^\varepsilon(\mathbf{x}) - i\omega \mathbf{D}^\varepsilon(\mathbf{x}) \quad (2.4.1)$$

Με συνοριακές συνθήκες στο $\partial\Omega$:

$$\hat{\nu} \times \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Θα ακολουθηθούν οι δύο υποθέσεις για το υλικό όπως περιγράφονται από τον Kristensson[Kri03]. Η πρώτη είναι ότι το υλικό δεν είναι ενεργό, δηλαδή δεν προσφέρει ενίσχυση στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα τα οποία διαδίδονται σε αυτό. Η δεύτερη είναι ότι οι συνιστώσες του διηλεκτρικού ταυυστή είναι άνω φραγμένες από κάποια τιμή.

Οι διηλεκτρικές σχέσεις σύζευξης στο υλικό θα γραφτούν, συναρτήσει και του ε , ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}/\varepsilon) \cdot \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \mu_0 \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}/\varepsilon) \cdot \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Όπου με ε, μ συμβολίζονται τα 3×3 τμήματα του διηλεκτρικού ταυυστή τα οποία αφορούν τις συζεύξεις $\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{H}$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις 2.4.2 εμπεριέχουν και την περιοδικότητα του μέσου.

2.4.2 Σύγκλιση δύο κλιμάκων

Οι κλασσικές έννοιες της σύγκλισης ακολουθιών χρειάζεται να επεκταθούν στην περίπτωσή μας, καθώς η μέθοδος εμπεριέχει συναρτήσεις οι οποίες εξαρτώνται από μία (μαθηματικά) αυθαίρετη παράμετρο ε . Υπάρχει η έννοια της σύγκλισης δύο κλιμάκων η οποία ορίζεται ως εξής.

Μία ακολουθία $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ στο $L^2(\Omega)^3$ θα λέγεται ότι συγκλίνει κατά δύο

2.4. ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ MAXWELL ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗ Δ

κλίμακες στο $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)^3$ όταν

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) dv_{\mathbf{x}} = \int \int_{\Omega} \int \int \int_Y \int |\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 dv_{\mathbf{x}} dv_{\mathbf{y}}$$

Για κάθε λείο διανυσματικό πεδίο $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ το οποίο είναι ε -περιοδικό στο \mathbf{y} . Αποδεικνύεται ότι τελικά δεν είναι απαραίτητο να είναι λεία τα διανυσματικά πεδία ϕ , αρκεί να ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\Omega} \int |\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)|^2 dv_{\mathbf{x}} = \int \int_{\Omega} \int \int \int_Y \int |\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 dv_{\mathbf{x}} dv_{\mathbf{y}}$$

Επίσης, εάν $u^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ συγκλίνει κατά δύο κλίμακες στο $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, αποδεικνύεται ότι συγκλίνει ασθενώς στη μέση τιμή του πεδίου στην μοναδιαία κυψελίδα Y .

Η ύπαρξη του ορίου μίας συνάρτησης κατά αυτό τον τρόπο προϋποθέτει μόνο την ύπαρξη άνω φράγματος της L_2 -νόρμας της συνάρτησης και του στροβιλισμού της. Αυτό ισχύει και για το ηλεκτρικό πεδίο και για τη μαγνητική πυκνότητα, οπότε θα υπάρχει σύγκλιση στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε υλικά.

Χρειάστηκε αυτός ο τύπος σύγκλισης, διότι η ισχυρή και ασθενής μαθηματική σύγκλιση ακολουθιών δεν διατηρούν πληροφορίες που αφορούν τη μικροσκοπική δομή του εκάστοτε υλικού. Η σύγκλιση δύο κλιμάκων τις διατηρεί μέσω της παραμέτρου ε .

2.4.3 Διατύπωση προβλήματος στην μοναδιαία κυψελίδα

Τα πεδία $E^{\varepsilon}, H^{\varepsilon}$ συγκλίνουν ως εξής:

$$E^{\varepsilon} \rightarrow E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$H^{\varepsilon} \rightarrow H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{y}} \Psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\nabla \times E^{\varepsilon} \rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} \times E_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^\varepsilon \rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.4.3)$$

Τα πεδία $\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x})$ είναι οι μέσες τιμές των $\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon$ στη μοναδιαία κυψελίδα, ενώ τα $\mathbf{E}_1(\mathbf{x}), \mathbf{H}_1(\mathbf{x})$ συμβολίζουν οριακές συναρτήσεις, οι οποίες αποτελούν διορθωτικούς παράγοντες ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) - \varepsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)\| = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) - \varepsilon \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)\| = 0$$

Οι συναρτήσεις Φ_1, Ψ_1 δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}} \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\nabla_{\mathbf{y}} \chi_e(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \sum_{i=1}^3 \chi_e^i \hat{\mathbf{e}}_i(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{y}} \Psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\nabla_{\mathbf{y}} \chi_h(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \sum_{i=1}^3 \chi_h^i \hat{\mathbf{e}}_i(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις χ_e^i, χ_h^i προσδιορίζονται από τη λύση του τοπικού προβλήματος στη μοναδιαία κυψελίδα:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \chi_e^i(\mathbf{y})) &= \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \chi_h^i(\mathbf{y})) &= \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{h}}_i) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Το πρόβλημα 2.4.4 λύνεται για κάθε έναν από τους τρεις άξονες στη μοναδιαία κυψελίδα, με περιοδικές συνοριακές συνθήκες στο σύνορό της. Έχοντας αυτές τις λύσεις μπορούμε να βρούμε τους ισοδύναμους ταυιστές του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^h &= \int \int_Y \int [\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \chi_e(\mathbf{y})] dv_{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\mu}^h &= \int \int_Y \int [\boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \chi_h(\mathbf{y})] dv_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

2.4. ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ MAXWELL ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗ Δ

Αποδεικνύεται ότι οι μέσες τιμές των πεδίων, $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ και $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell στο ισοδύναμο υλικό, απουσία εξωτερικών πηγών ρεύματος (όπως είναι λογικό μετά από ομογενοποίηση). Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = i\omega\mu_0\boldsymbol{\mu}^h \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = -i\omega\epsilon_0\boldsymbol{\epsilon}^h \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\mu}^h \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})) = 0$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^h \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})) = 0$$

Αυτό επιβεβαιώνει τη συνέπεια της μεθόδου.

Διαδικασία Επίλυσης

Η διαδικασία επίλυσης για την εύρεση των ισοδύναμων ταχυστών είναι η εξής:

- Επίλυση των εξισώσεων 2.4.4 προς εύρεση των χ .
- Έχοντας αυτές τις λύσεις, υπολογίζουμε τους ταχυστές μέσω των 2.4.5.

Έχει ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι στην μοναδιαία κυψελίδα, οι τοπικοί διηλεκτρικοί ταχυστές είναι ισοτροπικοί. Αν είναι ανισοτροπικός ο ταχυστής του μέσου, αυτό περιγράφεται από τους όρους κλίσης των χ . Η δυσκολία της μεθόδου δηλαδή έγκειται περισσότερο στην εύρεση και ολοκλήρωση αυτών των όρων.

2.4.4 Σύγκριση με κλασσικές μεθόδους

Έχει γίνει σύγκριση στο [Kri03] μεταξύ των αναλυτικών συμπερασμάτων αυτής της μεθόδου και των κλασσικών, στην περίπτωση των δύο υλικών, όπου το ένα αποτελείται από σφαιρικούς σχηματισμούς. Αφού εξήχθη ένα

ανάπτυγμα του διηλεκτρικού τανυστή ως προς το συντελεστή πλήρωσης, τα συμπεράσματα ήταν τα εξής:

- Ο πρώτος όρος του αναπτύγματος δίνει τον τύπο του Maxwell-Garnett. Δηλαδή είναι μεγαλύτερη η γενικότητα της παρούσας μεθόδου.
- Για μικρούς συντελεστές, ο τύπος του Rayleigh είναι σωστός μόνο εάν μπορούν να αγνοηθούν μεγάλοι όροι ως προς την ακτίνα. Δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση, όπως συζητήθηκε και στην παρούσα δουλειά, σε προηγούμενη ενότητα αυτού του κεφαλαίου.

2.4.5 Περαιτέρω γενίκευση-Στοχαστική μέθοδος

Κλείνοντας την παρουσίαση τέτοιου τύπου μεθόδων, έχει αξία η αναφορά στο τι μπορεί να γίνει ακόμα και στην περίπτωση που το υλικό προς ομογενοποίηση δεν έχει κάποια περιοδικότητα (τέτοιο είναι και το πλάσμα σύντηξης). Στην περίπτωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί το επιχειρήματα της εργοδικότητας, ώστε να μοντελοποιηθεί από μία προσεγγιστικά περιοδική δομή. Εκεί εισάγεται παραπάνω δυσκολία στο πρόβλημα, η οποία αντιμετωπίζεται με στοχαστικές μεθόδους όπως αναφέρεται στο [Roa12].

2.5 Επίλογος Κεφαλαίου

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μέθοδος ομογενοποίησης που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, τα αποτελέσματά της και η σύγκριση με παλαιότερες. Επίσης, παρουσιάστηκε σύντομα μία διαφορετική μέθοδος, που φαίνεται πιο έγκυρη από τις προηγούμενες, καθώς χρησιμοποιεί επιχειρήματα σύγκλισης σε συναρτήσεις που

εμπεριέχουν φυσική πληροφορία για τη δομή του εκάστοτε υλικού. Υπάρχουν πολλά ανοιχτά ζητήματα στις μεθόδους ομογενοποίησης για το πλάσμα σύντηξης (και γενικότερα για τα υλικά) και φαίνεται πως μπορούν να δώσουν απαντήσεις που σχετίζονται με τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, οπότε αξίζει η περαιτέρω ανάπτυξη και μελέτη τους.

Αναφορές Κεφαλαίου 2

- [FW13] J.G. Fikioris and P.C. Waterman. “Multiple scattering of waves. III. The electromagnetic case”. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 123 (July 2013), pp. 8–16. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.09.007.
- [HS62] Z. Hashin and S. Shtrikman. “A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials”. In: *Journal of Applied Physics* 33.10 (Oct. 1962), pp. 3125–3131. DOI: 10.1063/1.1728579.
- [Sih96] Ari Sihvola. *Homogenization of a dielectric mixture with anisotropic spheres in anisotropic background*. Vol. TEAT-7050. Technical Report LUTEDX/(TEAT-7050)/1-15/(1996). Published version: *Electromagnetics*, 17(3), 269-286, 1997. 1996.
- [Sti92] Thomas H. Stix. *Waves in Plasmas*. American Inst. of Physics, Dec. 1, 1992. 584 pp. ISBN: 0883188597. URL: https://www.ebook.de/de/product/5316354/thomas_h_stix_waves_in_plasmas.html.
- [Tom15] Akhlesh Lakhtakia Tom G Mackay. *Modern Analytical Electromagnetic Homogenization*. Morgan & Claypool Publishers, July 1, 2015. 130 pp. ISBN: 162705426X. URL: https://www.ebook.de/de/product/24779946/tom_g_mackay_

akhlesh_lakhtakia_modern_analytical_electromagnetic_homogenization.html.

- [Sin00] Onkar N. Singh Singh Lakhtakia. *Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons, Oct. 10, 2000. 520 pp. ISBN: 0471363561. URL: https://www.ebook.de/de/product/3601622/singh_lakhtakia_onkar_n_singh_electromagnetic_fields.html.
- [MW00] Tom G Mackay and Werner S Weiglhofer. “Homogenization of biaxial composite materials: bianisotropic properties”. In: *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 3.1 (Dec. 2000), pp. 45–52. DOI: 10.1088/1464-4258/3/1/308.
- [Bai+18] F. Bairaktaris et al. “Homogenization theory for the effective permittivity of a turbulent tokamak plasma in the scrape-off layer”. In: *Journal of Plasma Physics* 84.5 (Sept. 2018). DOI: 10.1017/s0022377818000922.
- [Kri03] Gerhard Kristensson. “Homogenization of the Maxwell equations in an anisotropic material”. In: *Radio Science* 38.2 (Apr. 2003), n/a–n/a. DOI: 10.1029/2001rs002573.
- [Roa12] G. F. Roach. *Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics*. Princeton University Press, Mar. 16, 2012. 400 pp. ISBN: 0691142173. URL: https://www.ebook.de/de/product/18352839/g_f_roach_mathematical_analysis_of_deterministic_and_stochastic_problems_in_complex_media_electromagnetics.html.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος Case-Van Kampen για μαγνητισμένο πλάσμα

3.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα των ταλαντώσεων φορτισμένων σωματιδίων σε πλάσμα έχει μελετηθεί από τον Case [Cas59], ώστε να εξεταστεί εάν οι λύσεις των Landau και Van Kampen για το πρόβλημα αρχικών συνθηκών που προκύπτει για τη συνάρτηση διασποράς ηλεκτροστατικών κυμάτων σε μη μαγνητισμένο πλάσμα ήταν ισοδύναμες. Ο Landau είχε χρησιμοποιήσει μετασχηματισμό Laplace, ενώ ο Van Kampen μέσω αναπτύγματος κανονικών τρόπων ταλάντωσης, και οι δύο λύσεις είχαν ενδιαφέρουσες μαθηματικές ιδιότητες. Τελικά προέκυψε ότι ήταν ισοδύναμες [Lan46], [Kam55].

Η δουλειά που έχει γίνει μέχρι τώρα στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αφορά στην επέκταση του πρώτου τμήματος της ανάλυσης που έκανε ο Case, στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Εξάγονται χρήσιμες πληροφορίες που αφορούν τη σχέση διασποράς που αφορά ένα συγκεκριμένο κύμα. Οι ιδιαιτερότητες και παραπάνω δυσκολίες που

αφορούν στην ηλεκτρομαγνητική περίπτωση θα συζητηθούν.

3.2 Ανάλυση για ηλεκτροστατικά κύματα σε μη μαγνητισμένο πλάσμα

Η αφετηρία της ανάλυσης είναι η εξίσωση του Vlasov:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} F = 0$$

Η επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο $\mathbf{a} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{m}$, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την πυκνότητα φορτίου από την εξίσωση Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \int F d^3u - \rho_0$$

Όπου ρ_0 είναι η ομοιόμορφη πυκνότητα λόγω των θετικών ιόντων. Εάν τώρα γράφει η κατανομή των σωματιδίων ως εξής:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = f_0(\mathbf{u}) + f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$$

Με $f \ll f_0$, μπορεί να "σπάσει" η εξίσωση σε μία μηδενικής και μία πρώτης τάξης ως προς την f . Η μηδενικής τάξης δεν έχει κάποιο ενδιαφέρον, οπότε γράφουμε την εξίσωση πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f_0 = 0$$

3.2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ ΜΗ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟ ΠΛΑΣΜΑ

Με τη χρήση του βαθμωτού δυναμικού $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, έχουμε από την εξίσωση που συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο με την πυκνότητα φορτίου:

$$\nabla^2\phi = -\frac{e}{\varepsilon_0} \int f d^3\mathbf{u} \quad (3.2.1)$$

Η αρχική ανάλυση του Case δεν θεωρεί εξαρχής τα κύματα ως χωροχρονικές διαταραχές, αλλά μόνο με χωρική ταλαντωτική μεταβολή. Εστιάζοντας μόνο σε έναν κυματάριθμο $\phi, \mathbf{E}, f \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, η διαταρακτική εξίσωση πρώτης τάξης γίνεται:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}f = i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f_0 \frac{e^2}{mk^2\varepsilon_0} \int f d^3\mathbf{u} \quad (3.2.2)$$

όπου

$$\phi = \frac{e}{k^2\varepsilon_0} \int f d^3\mathbf{u}$$

Για να προχωρήσουμε περαιτέρω, θα χωρίσουμε την ταχύτητα σε συνιστώσα παράλληλη στον κυματάριθμο u_{\parallel} , και κάθετη u_{\perp} . Έτσι προκύπτει ότι $\int f d^3\mathbf{u} = \int \int f du_{\parallel} du_{\perp}$. Ορίζουμε την ποσότητα:

$$g(u_{\parallel}) = \int f du_{\perp}$$

Αυτό γίνεται επειδή σε πολλές εφαρμογές μας ενδιαφέρει μόνο αυτή η ποσότητα. Ολοκληρώνοντας την 3.2.2 ως προς την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας μας δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}g(u, t) &= -ik\eta(u) \int g(u') du' \\ \eta(u) &\equiv -\frac{4\pi^2 e^2}{mk^2} \frac{\partial}{\partial u} \int \int f_0 du_{\perp} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Και το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από τον τύπο:

$$\phi = \frac{4\pi e}{k^2} \int g(u') du'$$

78ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΥ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

Αυτή η ανάλυση του Case είχε ως βασικό πρόβλημα τον υπολογισμό του $g(u, t)$ δοθείσας της αρχικής συνθήκης $g(u, 0)$. Έπειτα εξήχθησαν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης που αντιστοιχούσαν στην 3.2.3. Μέσα από αυτό αποδείχθηκε η ισοδυναμία των θεωρήσεων των Landau και Van Kampen.

Παρακάτω θα περιοριστούμε στην ανάλυση των εξισώσεων για μαγνητισμένο πλάσμα, οι οποίες απαιτούν αρκετά περισσότερη άλγεβρα. Πρώτα όμως θα δικαιολογηθεί η χρησιμοποίηση του χώρου των ορμών και όχι των ταχυτήτων για την ανάλυσή μας.

3.3 Ανάλυση για ηλεκτρομαγνητικά κύματα

3.3.1 Χρήση χώρου ορμών

Υπάρχει ένα σημαντικό πρόβλημα όταν χρησιμοποιούμε τον χώρο των ταχυτήτων ώστε να περιγράψουμε την συνάρτηση κατανομής σωματιδίων. Έστω μία κατανομή Maxwell $g(u) = e^{-au^2}$. Τι πιθανότητα δίνει να είναι μία ταχύτητα στο εύρος $(u, u + du)$, με $v > c$; Η απάντηση προφανώς και είναι κάτι πολύ μικρό, αλλά δεν είναι μηδέν. Με λίγα λόγια, είναι σφάλμα η περιγραφή από μία συνεχή κατανομή η οποία μηδενίζεται στο άπειρο, αλλά εξαρτάται από μία ποσότητα που φράσσεται άνω από μία τιμή. Αυτό δεν μας πειράζει σε περιπτώσεις όπου δεν εξετάζουμε καθόλου σχετικιστικές ταχύτητες, αλλά στο πλάσμα(ακόμα και στο ψυχρό) δεν είναι αμελητέα η πιθανότητα ύπαρξης σωματιδίων που θα έχουν επιταχυνθεί σε ταχύτητες συγκρίσιμες με του φωτός. Για αυτό πρέπει να αναζητηθούν λύσεις ως προς αυτό το πρόβλημα.

Μία λύση θα ήταν να πούμε ότι η κατανομή θα είναι:

$$g(u) = \begin{cases} e^{-au^2}, & u \leq c \\ 0, & u > c \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Ωστόσο, το να οριστεί μία κατανομή με τέτοιο τρόπο σημαίνει ανάγκη χρήσης της συνάρτησης βήματος Heaviside. Αυτό εισάγει παραπάνω δυσκολία στην περιγραφή. Ευτυχώς όμως δεν χρειάζεται. Γιατί μπορεί η ταχύτητα να φράσσεται προς τα πάνω από την ταχύτητα του φωτός, η ορμή όμως τείνει στο άπειρο σε τέτοια περίπτωση. Αυτό συμβαίνει λόγω του σχετικιστικού ορισμού της:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{u}$$

Για ευκολία, ο παράγοντας Lorentz θα γραφεί ως συνάρτηση των ορμών:

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathbf{p}}{mc}\right)^2}$$

Με αυτή την παρένθεση, προχωράμε στην περιγραφή της ανάλυσης για ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε μαγνητισμένο πλάσμα.

3.3.2 Εξισώσεις για μαγνητισμένο πλάσμα

Πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση του Vlasov για ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε μαγνητισμένο πλάσμα, και όλοι οι όροι της δύναμης Lorentz να απαρτίζονται από ολοκληρώματα της συνάρτησης κατανομής πυκνότητας των σωματιδίων. Με αυτή τη μέθοδο θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα των Case και Van Kampen, όπως παρουσιάζεται στο [Cas59]. Γράφοντας την κατανομή σαν μία ομογενή συνάρτηση (εξάρτηση μόνο από την ορμή) συν άλλη μία διαταραχή στο

80ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΥ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

χώρο και τον χρόνο: $n = f_0(\mathbf{p}) + f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, τότε η εξίσωση του Vlasov γίνεται:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \nabla f + e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla_{\mathbf{p}}(f + f_0) = 0 \quad (3.3.2)$$

Μας ενδιαφέρει η διαταρακτική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \nabla f + e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_0 + \frac{e}{\gamma m} \mathbf{p} \times \mathbf{B}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \quad (3.3.3)$$

Αντικαθιστούμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο με τις εξισώσεις των βαθμωτών και ανυσματικών πεδίων ϕ, \mathbf{A} .

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.3.4)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.3.5)$$

Και απαιτώντας οι λύσεις μας να είναι κυματικές, έχουμε

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.3.6)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.3.7)$$

Από τις εξισώσεις Maxwell και τις παραπάνω εξισώσεις των δυναμικών, φαίνεται ότι αφού τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία έχουν εξάρτηση $\sim e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, τότε προκύπτει $\rho, \mathbf{J}, \phi, \mathbf{A} \sim e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$. Χρησιμοποιώντας βαθμίδα Lorentz, εκφράζουμε τα ϕ, \mathbf{A} ως συναρτήσεις των ρ, \mathbf{J} με την παρακάτω μορφή

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \phi = \frac{1}{\epsilon_0(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} \rho \quad (3.3.8)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \mathbf{J} \quad (3.3.9)$$

Κάνοντας τις συνήθεις αντικαταστάσεις για κυματικές λύσεις

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k}, \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

Έχουμε

$$\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\phi + i\omega\mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}$$

Και εν κατακλείδι:

$$\mathbf{p} \times \mathbf{B} = i\mathbf{p} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{A}) = i[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})\mathbf{k} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})\mathbf{A}]$$

Καταλήγουμε στην τελική έκφραση για τους όρους που απαρτίζουν τη δύναμη Lorentz

$$-i\mathbf{k}\phi + i\omega\mathbf{A} + i\left[\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{\gamma m}\right)\mathbf{k} - \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{\gamma m}\right)\mathbf{A}\right] + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B}_0$$

Εκφράζοντας τις πυκνότητες φορτίου και ρεύματος ρ, \mathbf{J} ως συναρτήσεις της διαταραχής στη συνάρτηση κατανομής, έχουμε

$$\rho = e \int f(\mathbf{p}') d^3\mathbf{p}'$$

$$\mathbf{J} = e \int \frac{\mathbf{p}'}{\gamma m} f(\mathbf{p}') d^3\mathbf{p}'$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας $i\omega\rho = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}$, γράφουμε

$$\int \left(\omega - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}'}{\gamma m}\right) f(\mathbf{p}') d^3\mathbf{p}' = 0$$

Τέλος, εκφράζουμε και τη διαταραχή της συνάρτησης κατανομής ως κυματική $f = f_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$. Η τελική μορφή της εξίσωσης του Vlasov είναι:

$$i\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\gamma m} - \omega\right) f_{\mathbf{k}} + \frac{ie}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left[-\frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_0} \int f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3\mathbf{p}' + \mu_0\left(\omega - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\gamma m}\right) \int \frac{\mathbf{p}'}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3\mathbf{p}' + \right.$$

$$\left. \mu_0\mathbf{k}\left(\frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \int \frac{\mathbf{p}'}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3\mathbf{p}'\right)\right] \nabla_{\mathbf{p}} f_0 + \frac{e}{\gamma m} (\mathbf{p} \times \mathbf{B}_0) \nabla_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{k}} = 0$$

Οι διαφορές από το paper του Case [Cas59] είναι η προσθήκη του όρου B_0 και των ολοκληρωμάτων $\int \frac{\mathbf{p}'}{\gamma m} f(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}'$. Όλα αυτά καθιστούν το πρόβλημα πολύ δυσκολότερο από την ηλεκτροστατική περίπτωση.

Προχωράμε με την εξής διαδικασία: ονομάζοντας p_{\parallel} τη συνιστώσα της ορμής παράλληλη στο κυματόνισμα \mathbf{k} και τις κάθετες συνιστώσες p_1, p_2 . Το ίδιο πράττουμε για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου B_0 . Η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$i\left(\frac{kp_{\parallel}}{\gamma m} - \omega\right)f_{\mathbf{k}} + \frac{ie}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left[-\frac{k}{\epsilon_0} \int f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \mu_0 k \left(\frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \int \frac{\mathbf{p}'}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right) \right] \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}}$$

$$+ \frac{ie}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \mu_0 \left(\omega - \frac{kp_{\parallel}}{\gamma m} \right) \int \frac{\mathbf{p}'}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \nabla_{\mathbf{p}} f_0 + \frac{e}{\gamma m} (\mathbf{p} \times \mathbf{B}_0) \nabla_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{k}} = 0$$

Ο όρος $(\mathbf{p} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{k}}$ αναπτύσσεται ως εξής

$$(p_1 B_2 - p_2 B_1) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_{\parallel}} + (p_2 B_{\parallel} - p_{\parallel} B_2) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_1} + (p_{\parallel} B_1 - p_1 B_{\parallel}) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_2}$$

Προσθέτωντας τους όρους $\mu_0 k \left(\frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \int \frac{\mathbf{p}'}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}}$ και

$\mu_0 \left(\omega - \frac{kp_{\parallel}}{\gamma m} \right) \int \frac{\mathbf{p}'}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \nabla_{\mathbf{p}} f_0$ έχουμε

$$\mu_0 \omega \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \int \frac{p'_{\parallel}}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_1} \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_2} \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right) +$$

$$\frac{\mu_0 k}{\gamma m} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \left(p_{\parallel} \int \frac{p'_{\parallel}}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + p_1 \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + p_2 \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right) -$$

$$\frac{\mu_0 k p_{\parallel}}{\gamma m} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \int \frac{p'_{\parallel}}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_1} \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_2} \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right) =$$

$$\mu_0 \omega \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \int \frac{p'_{\parallel}}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_1} \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_2} \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right) +$$

$$\frac{\mu_0 k}{\gamma m} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \left(p_1 \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + p_2 \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right) -$$

$$\frac{\mu_0 k p_{\parallel}}{\gamma m} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_1} \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_2} \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right)$$

Αναπτύσσοντας την τελική μορφή της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{k p_{\parallel}}{\gamma m} - \omega \right) f_{\mathbf{k}} + \frac{ie}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left[-\frac{k}{\varepsilon_0} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \int f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \mu_0 \omega \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \int \frac{p'_{\parallel}}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \right. \right. \\ \left. \frac{\partial f_0}{\partial p_1} \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_2} \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\mu_0 k}{\gamma m} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} (p_1 \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right. \\ \left. + p_2 \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}') - \frac{\mu_0 k p_{\parallel}}{\gamma m} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_1} \int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' + \frac{\partial f_0}{\partial p_2} \int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \right) \right] \\ \left. + \frac{e}{\gamma m} [(p_1 B_2 - p_2 B_1) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_{\parallel}} + (p_2 B_{\parallel} - p_{\parallel} B_2) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_1} + (p_{\parallel} B_1 - p_1 B_{\parallel}) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_2}] = 0 \right. \end{aligned}$$

Και η εξίσωση συνέχειας

$$\int \left(\omega - \frac{k p_{\parallel}}{\gamma m} \right) f(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' = 0$$

Κανονικοποιούμε τη συνάρτηση κατανομής ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\int f_{\mathbf{k}} d^3 \mathbf{p}' = 1 \Rightarrow \int \frac{p'_{\parallel}}{\gamma m} f_{\mathbf{k}} d^3 \mathbf{p}' = \frac{\omega}{k}$$

Επίσης ορίζουμε

$$\int \frac{p'_1}{\gamma m} f_{\mathbf{k}} d^3 \mathbf{p}' = f_{c1}$$

$$\int \frac{p'_2}{\gamma m} f_{\mathbf{k}} d^3 \mathbf{p}' = f_{c2}$$

Έτσι, η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{k p_{\parallel}}{\gamma m} - \omega \right) f_{\mathbf{k}} + \frac{ie}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left[-\frac{k}{\varepsilon_0} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} + \mu_0 \omega \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \frac{\omega}{k} + \frac{\partial f_0}{\partial p_1} f_{c1} + \frac{\partial f_0}{\partial p_2} f_{c2} \right) + \frac{\mu_0 k}{\gamma m} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} (p_1 f_{c1} \right. \\ \left. + p_2 f_{c2}) - \frac{\mu_0 k p_{\parallel}}{\gamma m} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_1} f_{c1} + \frac{\partial f_0}{\partial p_2} f_{c2} \right) \right] + \frac{e}{\gamma m} [(p_1 B_2 - p_2 B_1) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_{\parallel}} + \end{aligned}$$

$$(p_2 B_{\parallel} - p_{\parallel} B_2) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_1} + (p_{\parallel} B_1 - p_1 B_{\parallel}) \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_2} = 0$$

Παρατηρώντας ότι

$$\frac{p_i}{\gamma m} = mc^2 \frac{\partial \gamma}{\partial p_i}$$

Γράφουμε την εξίσωση ως

$$\begin{aligned} i(kmc^2 \frac{\partial \gamma}{\partial p_{\parallel}} - \omega) f_{\mathbf{k}} + \frac{ie}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} [(-\frac{k}{\epsilon_0} + \frac{\mu_0 \omega^2}{k}) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} + f_{e1} (\mu_0 \omega \frac{\partial f_0}{\partial p_1} + \mu_0 k mc^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \frac{\partial \gamma}{\partial p_1} - \mu_0 k mc^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_1} \frac{\partial \gamma}{\partial p_{\parallel}}) + \\ + f_{e2} (\mu_0 \omega \frac{\partial f_0}{\partial p_2} + \mu_0 k mc^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \frac{\partial \gamma}{\partial p_2} - \mu_0 k mc^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_2} \frac{\partial \gamma}{\partial p_{\parallel}})] + emc^2 [B_{\parallel} (\frac{\partial \gamma}{\partial p_2} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial p_1} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_2}) + \\ B_1 (\frac{\partial \gamma}{\partial p_{\parallel}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial p_2} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_{\parallel}}) + B_2 (\frac{\partial \gamma}{\partial p_1} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_{\parallel}} - \frac{\partial \gamma}{\partial p_{\parallel}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial p_1})] = 0 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τρεις φορές την παραπάνω εξίσωση, ως προς όλα τα πιθανά ζεύγη συνιστωσών της ορμής, σε όλο τον χώρο, ώστε να λάβουμε τρεις διαφορετικές εξισώσεις. Οι ολοκληρώσεις δηλαδή θα είναι ως προς τα ζεύγη μεταβλητών:

$$i) \int dp_{\parallel} dp_1$$

$$ii) \int dp_{\parallel} dp_2$$

$$iii) \int dp_1 dp_2$$

Προς διευκόλυνση των υπολογισμών, παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \gamma}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} (f \frac{\partial \gamma}{\partial p_j}) - f \frac{\partial^2 \gamma}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j} (f \frac{\partial \gamma}{\partial p_i}) + f \frac{\partial^2 \gamma}{\partial p_j \partial p_i}$$

Και επειδή

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial p_i \partial p_j}$$

Προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \gamma}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} (f \frac{\partial \gamma}{\partial p_j}) - \frac{\partial}{\partial p_j} (f \frac{\partial \gamma}{\partial p_i})$$

Όπου η f μπορεί να είναι η διαταραχή είτε η αδιατάρακτη συνάρτηση κατανομής. Είναι απαραίτητο να απαιτήσουμε ότι $f \frac{\partial \gamma}{\partial p_i} \rightarrow 0, p_{i,j,k} \rightarrow \pm \infty$, κάτι που είναι λογικό, καθώς $f \rightarrow 0, \frac{\partial \gamma}{\partial p_i} \rightarrow (mc)^{-1}$. Οπότε, τα ολοκληρώματα των ποσοτήτων $R_{ij} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \gamma}{\partial p_i}$ μπορούν να δώσουν τρία διαφορετικά αποτελέσματα:

$$i) \int R_{ij} dp_j dp_k \rightarrow \frac{1}{mc^2} \frac{\partial}{\partial p_i} \int \frac{p_j}{\gamma m} f dp_j dp_k$$

$$ii) \int R_{ij} dp_i dp_k \rightarrow -\frac{1}{mc^2} \frac{\partial}{\partial p_j} \int \frac{p_i}{\gamma m} f dp_i dp_k$$

$$iii) \int R_{ij} dp_i dp_j \rightarrow 0$$

Ορίζουμε

$$\int f_k dp_1 dp_2 = g_{\parallel}(p_{\parallel}), \int \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} f_k dp_1 dp_2 = h_{\parallel}(p_{\parallel})$$

$$\int \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} f_k dp_1 dp_{\parallel} = h_{2\parallel}(p_2), \int \frac{p_1}{\gamma m} f_k dp_1 dp_{\parallel} = h_{21}(p_2)$$

$$\int \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} f_k dp_2 dp_{\parallel} = h_{1\parallel}(p_1), \int \frac{p_2}{\gamma m} f_k dp_2 dp_{\parallel} = h_{12}(p_1)$$

$$\int \frac{p_1}{\gamma m} f_k dp_1 dp_2 = h_{\parallel 1}(p_{\parallel}), \int \frac{p_2}{\gamma m} f_k dp_1 dp_2 = h_{\parallel 2}(p_{\parallel})$$

$$\int f_0 dp_1 dp_2 = \eta_{\parallel}(p_{\parallel}), \int f_0 dp_2 dp_{\parallel} = \eta_1(p_1), \int f_0 dp_{\parallel} dp_1 = \eta_2(p_2)$$

$$\int \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} f_0 dp_1 dp_{\parallel} = a_{2\parallel}(p_2), \int \frac{p_1}{\gamma m} f_0 dp_1 dp_{\parallel} = a_{21}(p_2)$$

$$\int \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} f_0 dp_2 dp_{\parallel} = a_{1\parallel}(p_1), \int \frac{p_2}{\gamma m} f_0 dp_2 dp_{\parallel} = a_{12}(p_1)$$

$$\int \frac{p_1}{\gamma m} f_0 dp_1 dp_2 = a_{\parallel 1}(p_{\parallel}), \int \frac{p_2}{\gamma m} f_0 dp_1 dp_2 = a_{\parallel 2}(p_{\parallel})$$

Και ολοκληρώνουμε την εξίσωση, παίρνοντας

$$i) \frac{i}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} f_{c2} \left(\mu_0 \omega \frac{\partial \eta_2}{\partial p_2} - \mu_0 k \frac{\partial a_{2\parallel}}{\partial p_2} \right) - B_{\parallel} \frac{\partial h_{21}}{\partial p_2} + B_1 \frac{\partial h_{2\parallel}}{\partial p_2} = 0$$

$$ii) \frac{i}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} f_{c1} (\mu_0 \omega \frac{\partial \eta_1}{\partial p_1} - \mu_0 k \frac{\partial a_{1\parallel}}{\partial p_1}) + B_{\parallel} \frac{\partial h_{12}}{\partial p_1} - B_2 \frac{\partial h_{1\parallel}}{\partial p_1} = 0$$

$$iii) i[kh_{\parallel}(p_{\parallel}) - \omega g_{\parallel}(p_{\parallel})] + \frac{ie}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} [(-\frac{k}{\varepsilon_0} + \frac{\mu_0 \omega^2}{k}) \frac{\partial \eta_{\parallel}}{\partial p_{\parallel}} + f_{c1} \mu_0 k \frac{\partial a_{\parallel 1}}{\partial p_{\parallel}} +$$

$$f_{c2} \mu_0 k \frac{\partial a_{\parallel 2}}{\partial p_{\parallel}}] + e(-B_1 \frac{\partial h_{\parallel 2}}{\partial p_{\parallel}} + B_2 \frac{\partial h_{\parallel 1}}{\partial p_{\parallel}}) = 0$$

Έχουμε φτάσει σε μία τριάδα ισχυρά μη γραμμικών ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων, η λύση των οποίων είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα. Ωστόσο, οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητάς τους μπορούν να μας δώσουν περαιτέρω πληροφορίες για τη σχέση διασποράς του πλάσματος.

Η πρώτη περίπτωση που θα εξεταστεί είναι για πραγματικά ω, k και πραγματική τη διαταραχή στη συνάρτηση κατανομής, οπότε

$$\int \frac{p_i}{\gamma m} f_k dp_i dp_j = A_k(p_k) B_i$$

και

$$\frac{\omega}{k} = \frac{a_{2\parallel}}{\eta_2} = \frac{a_{1\parallel}}{\eta_1}$$

Αν ολοκληρωθεί ξανά η πρώτη εξίσωση ως προς την τρίτη συνιστώσα της ορμής:

$$f_{c1} = \int A_{\parallel} dp_{\parallel} B_1 = \int A_2 dp_2 B_1$$

$$f_{c2} = \int A_{\parallel} dp_{\parallel} B_2 = \int A_1 dp_1 B_2$$

$$\frac{\omega}{k} = \int A_1 dp_1 B_{\parallel} = \int A_2 dp_2 B_{\parallel}$$

Και ορίζοντας

$$\frac{\omega}{k} = v_k$$

προκύπτει ότι

$$f_{c1} = \frac{B_1}{B_{\parallel}} v_k, f_{c2} = \frac{B_2}{B_{\parallel}} v_k$$

Η εξίσωση (iii) γράφεται ως εξής:

$$h_{\parallel}(p_{\parallel}) - v_k g_{\parallel}(p_{\parallel}) - \frac{e\mu_0 c^2}{k^2} \frac{\partial \eta_{\parallel}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{e\mu_0 c^2 v_k}{B_{\parallel} [k^2 (1 - \frac{v_k^2}{c^2})]} (B_1 \frac{\partial a_{\parallel 1}}{\partial p_{\parallel}} + B_2 \frac{\partial a_{\parallel 2}}{\partial p_{\parallel}}) = 0$$

Εάν θυμηθούμε ότι η v_k ορίζεται μόνο από την αρχική συνάρτηση κατανομής, οι μόνες άγνωστες συναρτήσεις είναι οι h_{\parallel} and g_{\parallel} , που συνδέονται μέσω της εξίσωσης συνέχειας. Πλέον γνωρίζουμε όλα τα σημαντικά ολοκληρώματα συναρτήσεων του κυματάριθμου, ώστε να διευκολυνθεί η ανάλυση της διάδοσης κυμάτων στο πλάσμα.

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται όταν η f_0 είναι τέτοια ώστε $v_k = c$. Τότε

$$f_{c1} = f_{c2} = 0$$

Και η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$h_{\parallel}(p_{\parallel}) - v_k g_{\parallel}(p_{\parallel}) - \frac{e\mu_0 c^2}{k^2} \frac{\partial \eta_{\parallel}}{\partial p_{\parallel}} = 0$$

Ωστόσο αυτή η περίπτωση δεν είναι φυσικά αποδεκτή, καθώς εάν ολοκληρωθούν οι εξισώσεις που δίνουν το v_k , προκύπτει $v_k = v_0$, δηλαδή η μέση ταχύτητα του αδιατάρακτου πλάσματος στην κατεύθυνση του κυματάριθμου. Μία ταχύτητα που δεν μπορεί να φτάσει την ταχύτητα του φωτός, άρα και απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αφού οι πόλοι των εξισώσεων είναι μη πραγματοποιήσιμοι, το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο. Περαιτέρω ανάλυση των εξισώσεων μπορεί να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για το πρόβλημα αρχικών τιμών εύρεσης της συνάρτησης κατανομής του πλάσματος.

3.4 Συμπεράσματα

Στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μαγνητισμένο πλάσμα, φαίνεται ότι κάθε κυματόνισμα συνδέεται με μοναδική συχνότητα, σε αντίθεση με την ηλεκτροστατική περίπτωση. Αυτό συμβαίνει γιατί οι εξισώσεις που προκύπτουν στην περίπτωσή μας απαιτούν η φασική ταχύτητα του κύματος να είναι ίση με τη μέση ταχύτητα του πλάσματος στην κατεύθυνση του κυματόνισματος. Στο paper του Case κάθε ω μπορούσε να διεγείρει άπειρα k , σε συγκεκριμένο εύρος τιμών. Φαίνεται πως πρόκειται για σφάλμα της (φυσικά μη πραγματοποιήσιμης) ηλεκτροστατικής περίπτωσης. Τα αποτελέσματά μας θα είναι σωστά εφόσον επιβεβαιωθεί πειραματικά ότι οι κυματάριθμοι που διαδίδονται περιορίζονται σε συγκεκριμένη περιοχή, το κέντρο της οποίας εξαρτάται από τη μέση ταχύτητα του πλάσματος.

Η παραπάνω δουλειά μπορεί να φανεί χρήσιμη σε περιπτώσεις όπως η παρακάτω: έστω ότι μετρούνται οι διαταραχές ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο πλάσμα. Αυτή η πληροφορία θα αφορά στο άθροισμα των πεδίων σε όλες τις κατευθύνσεις. Δουλεύοντας αντίστροφα, μπορούν να εξαχθούν ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής των σωματιδίων στο πλάσμα. Και αυτό να μην είναι απαραίτητο, με μέτρηση μίας από τις διαταραχές ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου, μπορούν να βρεθούν τα υπόλοιπα πεδία από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\int f_0 d^3 \mathbf{p} = 1, \int \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} f_0 d^3 \mathbf{p} = v_0$$

$$\int f_k d^3 \mathbf{p} = 1, \int \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} f_k d^3 \mathbf{p} = v_0$$

$$\int \frac{p_1}{\gamma m} f_k d^3 \mathbf{p} = \frac{B_1}{B_{\parallel}} v_0, \int \frac{p_2}{\gamma m} f_k d^3 \mathbf{p} = \frac{B_2}{B_{\parallel}} v_0$$

Επόμενα βήματα

Έχει φτάσει η ανάλυσή μας μέχρι το σημείο της ολοκλήρωσης των εξισώσεων, και των συμπερασμάτων για τη σχέση διασποράς ενός σωματιδίου. Να τονιστεί εδώ ότι δεν είναι τετριμμένο το πώς μεταβαίνουμε στη γνωστή μακροσκοπική σχέση διασποράς του πλάσματος από αυτή τη μέθοδο. Το επόμενο βήμα που θα ακολουθηθεί είναι να εξεταστεί το εάν θα οδηγούμασταν και σε αυτή την περίπτωση σε Landau damping, με τα αντίστοιχα Van Kampen modes, όπως παρουσιάστηκε στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου.

Αναφορές Κεφαλαίου 3

- [Cas59] K.M Case. “Plasma oscillations”. In: *Annals of Physics* 7.3 (July 1959), pp. 349–364. DOI: 10.1016/0003-4916(59)90029-6.
- [Lan46] L. D. Landau. “On the vibrations of the electronic plasma”. In: *J. Phys.(USSR)* 10 (1946). Zh. Eksp. Teor. Fiz.16,574(1946), pp. 25–34.
- [Kam55] N.G. Van Kampen. “On the theory of stationary waves in plasmas”. In: *Physica* 21.6-10 (Jan. 1955), pp. 949–963. DOI: 10.1016/s0031-8914(55)93068-8.

Κεφάλαιο 4

Επίλογος- Μελλοντικά Ερευνητικά Θέματα

Κλείνοντας την περιγραφή της παρούσας δουλειάς, θα γίνει αναφορά σε ζητήματα τα οποία μπορούν να συνδυαστούν περαιτέρω με θεωρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διατριβή, αλλά και γενικότερα στη φυσική πλάσματος. Θα περιγραφεί εν συντομία η μέθοδος PCE η οποία έχει συνδυαστεί σε poster και θα συνδυαστεί σε μελλοντική δημοσίευση με τη μέθοδο της ομογενοποίησης όπως αναπτύχθηκε στην παρούσα διατριβή. Επίσης, θα γίνει μία αναφορά στην τεχνική του machine learning, και της εφαρμογής του στη θερμοπυρηνική σύντηξη.

4.1 Μέθοδος PCE

Η μέθοδος PCE (Polynomial Chaos ή Wiener Chaos Expansion) είναι μία μη δειγματοληπτική μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της εξέλιξης της αβεβαιότητας σε δυναμικά συστήματα [Zyg17]. Έχει χρησιμοποιηθεί μαζί με τη μέθοδο της ομογενοποίησης που αναπτύχθηκε στην παρούσα δουλειά. Συνοπτικά, σε αυτή τη δουλειά βρισκόταν το

διάλυση Runyting με τη βοήθεια της ομογενοποίησης σε πλάσμα, και έπειτα έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων με PCE και προσομοίωση Monte Carlo, προς απόδειξη ότι η PCE έχει συγκρίσιμα αποτελέσματα, με πολύ πιο λίγα απαιτούμενα δεδομένα.

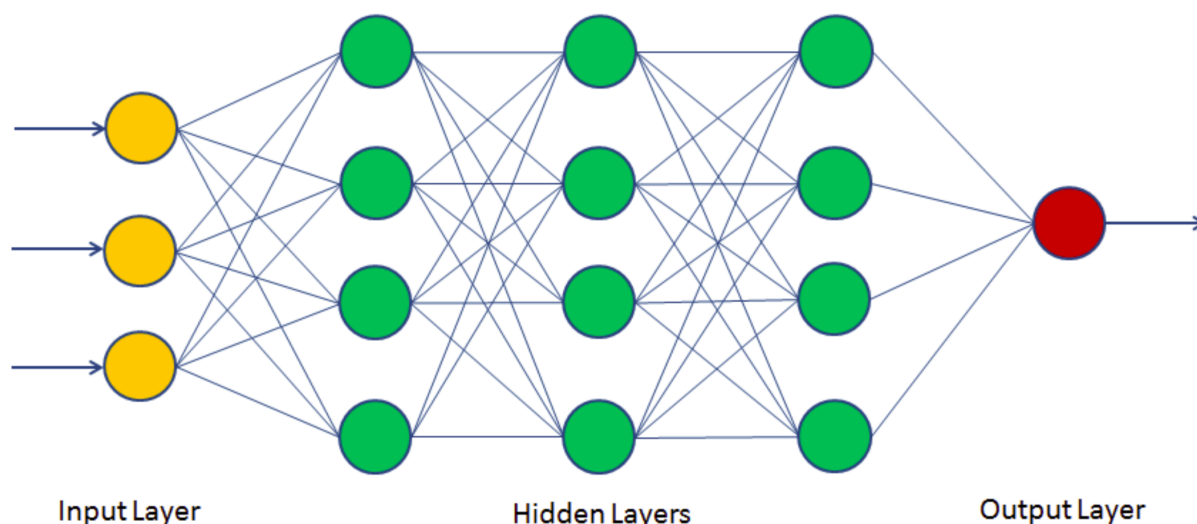
Συνοπτική περιγραφή της μεθόδου

Έστω μία μεταβλητή y η οποία εξαρτάται από d μεταβλητές ξ_1, \dots, ξ_d . Η συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί ως ένα άπειρο άθροισμα ορθοκανονικών συναρτήσεων που εξαρτώνται από τα ξ . Οι συναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν ως βάση εξαρτώνται άμεσα από τον τύπο της μεταβλητής που περιγράφουν. Για παράδειγμα, μεταβλητές που ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή οντελοποιούνται με βάση τα πολυώνυμα Hermite.

Υπάρχουν δύο τρόποι να εφαρμοστεί η μέθοδος PCE. Η επεμβατική και η μη επεμβατική. Η πρώτη χρησιμοποιεί έναν τροποποιημένο ντετερμινιστικό αλγόριθμο ώστε να υπολογίσει τους συντελεστές του πολυωνυμικού αναπτύγματος σε μία επανάληψη του αλγόριθμου. Οι μη επεμβατικές μέθοδοι δεν μεταβάλουν καθόλου τον αλγόριθμο, και χρησιμοποιούν ντετερμινιστικές μεθόδους ώστε να βρουν τους συντελεστές, μετά από πολλές επαναλήψεις του αλγόριθμου. Η εφαρμογή που έγινε χρησιμοποίησε μη επεμβατική μέθοδο, ως πιο απλή, για να παράξει τα συμπεράσματα που αναφέρθηκαν παραπάνω.

4.2 Μηχανική Μάθηση με εφαρμογές στην θερμοπυρηνική σύντηξη

Η έννοια της μηχανικής μάθησης (machine learning) δεν είναι καινούρια. Η ιδέα του να "μαθαίνει" ο υπολογιστής να αναγνωρίζει πρότυπα (πχ εικόνες) υπήρχε από το 1970, αλλά λόγω πολύ μικρής υπολογιστικής ισχύος τότε είχε



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση νευρωνικού δικτύου

θεωρηθεί μη βιώσιμο το να προχωρήσει μία τέτοια ιδέα. Κυρίως από το 2010 όμως, όταν και υπήρξε η "έκρηξη" υπολογιστικής ισχύος με τη χρήση των πολλών πυρήνων των καρτών γραφικών, αντιστράφηκε αυτή η κατάσταση, και πλέον η μηχανική μάθηση και τα *Νευρωνικά Δίκτυα* (Neural Networks-NN) έχουν ολοένα και αυξανόμενο αριθμό εφαρμογών.

Η ιδέα του νευρωνικού δικτύου είναι να προσομοιάσει όσο καλύτερα γίνεται τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου. Πρόκειται για ένα δίκτυο κόμβων οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους ανά επίπεδα (layers). Κάθε κόμβος ενός επιπέδου συνδέεται με όλους τους κόμβους του προηγούμενου και του επόμενού του. Δηλαδή υπάρχει το σχήμα "Είσοδος-Επεξεργασία-Έξοδος" όπως φαίνεται στην εικόνα 4.1. Στα επίπεδα εισόδου εισάγονται τα δεδομένα, μετά την απαραίτητη προεπεξεργασία που πρέπει να γίνει. Έπειτα, στα κρυφά επίπεδα, γίνεται επεξεργασία, βρίσκονται συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών και διαμορφώνονται οι παράμετροι του μοντέλου. Στο επίπεδο εξόδου δίνει το τελικό μοντέλο, με τις παραμέτρους όπως διαμορφώθηκαν στο τελευταίο κρυφό επίπεδο.

Πλεονεκτήματα νευρωνικών δικτύων

Το μεγάλο πλεονέκτημα των νευρωνικών δικτύων έγκειται στην υπολογιστική τους ισχύ, και στο ότι μπορούν να βρουν συσχετίσεις μεταξύ παραμέτρων που θα ήταν υπολογιστικά αδύνατο να βρεθούν διαφορετικά. Είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα στη διάγνωση κακοήθων όγκων στην ιατρική, πως είναι τουλάχιστον 10% μεγαλύτερη η προβλεπτική ικανότητα ενός καλά εκπαιδευμένου νευρωνικού δικτύου σε σχέση με ένα πολύ έμπειρο γιατρό.

Μειονεκτήματα νευρωνικών δικτύων

Παρόλα τα πλεονεκτήματά τους, τα νευρωνικά δίκτυα απέχουν πολύ από το να μπορούν να χαρακτηριστούν πανάκεια. Σημαντικό μειονέκτημά τους είναι η εξάρτηση από τα δεδομένα που εισάγονται. Εάν δεν έχει γίνει πρώτα καλή προεπεξεργασία από τους αναλυτές/επιστήμονες, δεν υπάρχει περίπτωση το δίκτυο να βγάλει ικανοποιητικό μοντέλο.

Άλλο πολύ σημαντικό πρόβλημα είναι αυτό της υπερεκπαίδευσης. Ένα νευρωνικό δίκτυο μπορεί να βρει πολύ καλά αποτελέσματα πάνω σε συγκεκριμένα δεδομένα. Όμως, το μοντέλο που θα προκύψει πιθανόν να είναι πολύ χειρότερο αν δοκιμαστεί σε άλλα δεδομένα, που αφορούν το ίδιο πρόβλημα (πχ ανίχνευση συγκεκριμένων μορφών καρκίνου). Αυτό ονομάζεται υπερεκπαίδευση (*overtraining*), δηλαδή ότι έχει προκύψει ένα μοντέλο με μη πραγματικές συσχετίσεις (προέκυψαν συγκυριακά), επομένως θα δώσει λάθος αποτελέσματα σε άλλο σύνολο δεδομένων. Είναι προτιμότερη μία πιο μικρή αλλά πραγματική ακρίβεια, παρά πιο μεγάλη και πλασματική.

Άλλο ένα πρόβλημα που αφορά πιο πολύ τις ιατρικές και θετικές επιστήμες είναι ότι είναι τύπου "μαύρο κουτί" (*black box*) το μοντέλο που προκύπτει. Δηλαδή, εάν χρειαζόμαστε τις αιτίες που συμβαίνει κάτι, και όχι το αν έχει συμβεί με βάση την εικόνα, τα νευρωνικά δίκτυα δε θα μας

δώσουν την απάντηση. Αυτό είναι σημαντικό μειονέκτημα όταν θέλουμε να μελετήσουμε φαινόμενα στον tokamak.

Εφαρμογή στο πλάσμα σύντηξης

Υπάρχει πολύ πρόσφατη δουλειά που εξετάζει δεδομένα από τους DIII-D και JET ώστε να εξάγει συμπεράσματα για την πρόβλεψη disruptions σε tokamak [KST19]. Τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά όταν εξετάζεται ο κάθε αντιδραστήρας με το δικό του dataset, αλλά η ακρίβεια πέφτει αρκετά όταν το μοντέλο που εκπαιδεύτηκε με βάση τον ένα, εφαρμόζεται στα δεδομένα του άλλου. Αυτό έχει σχέση με το πρόβλημα της υπερεκπαίδευσης που προαναφέρθηκε. Παρόλα αυτά, έχει αρκετά μεγάλη χρησιμότητα να υπάρχει ένα εργαλείο που να προβλέπει με καλή ακρίβεια το εάν θα υπάρξει disruption, δοθέντων των αρχικών παραμέτρων.

4.3 Ανοιχτά ζητήματα

Τα ζητήματα που αφορούν τη μελέτη του μαγνητισμένου πλάσματος σύντηξης σε tokamak είναι πάρα πολλά, οπότε θα περιοριστούμε εδώ σε αναφορά των επόμενων βημάτων σε σχέση με την παρούσα δουλειά.

Το πρώτο που θα εξεταστεί είναι η μέθοδος ομογενοποίησης ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που ασχολείται με περιοδικά μέσα, ως πιο υποσχόμενη από τις υπάρχουσες. Πιθανό να μπορούν να γίνουν και μικρά πειράματα σε δομές που υπάρχουν σε εγχώρια εργαστήρια (πχ μικροκύματα σε υλικά). Έπειτα θα μεταβούμε στη στοχαστική μέθοδο, για μη περιοδικά υλικά. Τελικός στόχος είναι η σύγκριση με μεθόδους ομογενοποίησης που δίνουν παρόμοια αποτελέσματα, ώστε να δουλέψουμε αντίστροφα για να εξάγουμε πληροφορίες που αφορούν τη στατιστική του πλάσματος.

Άλλο ζήτημα είναι η πιο ορθή χρήση της μηχανικής μάθησης προς όφελος της έρευνας σε θερμοπυρηνική σύντηξη. Θα αξιοποιηθεί αρχικά ως αντικείμενο μίας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας, με δεδομένα από εργαστήρια του εξωτερικού. Επίσης, θα εξεταστεί η εφαρμογή της σε σχέση με τη δουλειά που παρουσιάστηκε στην παρούσα διατριβή.

Τέλος, έχει αξία να εξαχθούν τα αντίστοιχα Van Kampen modes για μαγνητισμένο πλάσμα, συνεχίζοντας τη δουλειά του Κεφαλαίου 3.

Δημοσιεύσεις και συνέδρια

Εφόσον φτάσαμε στο τέλος της παρούσας διατριβής, θα παρουσιαστούν οι δημοσιεύσεις σε περιοδικά, συνέδρια και πρακτικά συνεδρίων που έγιναν στα πλαίσια της δουλειάς που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Επιστημονικά περιοδικά

- Bairaktaris, F & Hizanidis, Kyriakos & K. Ram, A & Papagiannis, P & Tsironis, Christos & Kominis, Yannis & Glytsis, Elias & Chellai, Oulfa & Alberti, Stefano & Furno, I. (2018). Homogenization theory for the effective permittivity of turbulent tokamak plasma in the scrape-off layer. *Journal of Plasma Physics*. 84. 10.1017/S0022377818000922.

Poster σε συνέδρια

- Multiple scattering of radio frequency waves by blobs: Homogenization of a mixture of blobs and the Waterman-Truell approach (Hizanidis K., Valvis S.-I., Bairaktaris F., Zouros G., Kokkorakis G., Roumeliotis J., Ram A., 42nd European Physical Society Conference on Plasma Physics P1.187,

June 22-26, 2015, IPFN in IST of Lisbon, Portugal

- Multiple scattering of radio frequency waves by blobs: homogenization of a mixture of blobs and the Waterman-Truell approach (Hizanidis K., Bairaktaris F., Valvis S.-I., Ram A., 57th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Plasma Physics NP12.00062, November 16-20, 2015, Savannah, Georgia, U.S.A.)
- Electromagnetic homogenization in a blob-populated scrap-off layer of magnetically confined plasmas (Bairaktaris F., Hizanidis K., Ram A., Valvis S.-I., 43rd European Physical Society Conference on Plasma Physics P5.065, July 4-8, 2016, University of Leuven - KU Leuven, Leuven, Belgium)
- Propagation of radio frequency waves through fluctuations in the scrape-off layer modeled by electromagnetic homogenization (Hizanidis K., Bairaktaris F., Valvis S.-I., Ram A. 58th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Plasma Physics PP10.00028, October 31 - November 4, 2016, San Jose, California, U.S.A.)
- Advanced homogenization approach for a plasma dielectric mixture: Case of a turbulent tokamak (F. Bairaktaris, P. Papagiannis, C. Tsironis, G. Kokkorakis, K. Hizanidis, O. Chellai, S. Alberti, I. Furno, A. K. Ram, and the TCV Team, European Fusion Theory Conference, 9-12 October 2017, Athens, Greece)
- Generalized Case Van Kampen theory for electromagnetic oscillations in a magnetized plasma (F. Bairaktaris, K. Hizanidis, A. K. Ram, 59th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, October 23-27, 2017; Milwaukee, Wisconsin)
- Propagation of radio frequency waves through density fluctuations (S. I. Valvis, P. Papagiannis, A. D. Papadopoulos, K. Hizanidis, E. N. Glytsis, F. Bairaktaris, A. Zisis, I. G. Tigelis, A. K. Ram, 59th Annual Meeting of

the American Physical Society Division of Plasma Physics TP11.00056, October 23-27, 2017, Milwaukee, Wisconsin, U.S.A.)

- Modeling the dielectric of turbulent edge plasmas – formalism for electromagnetic homogenization (F.Bairaktaris, K.Hizanidis, P.Papagiannis, A.K.Ram, 45th European Physical Society Conference on Plasma Physics P5.4005, July 2-6, 2018, ZŽofín Palace, Prague, Czech Republic)
- Theoretical and Computational Studies on the Scattering of Radio Frequency Waves by Fluctuations (A. Ram, Z. Ioannidis, K. Hizanidis, F. Bairaktaris, A. Papadopoulos, S.-I. Valvis, A. Zisis, I. Tigelis, 27th IAEA Fusion Energy Conference TH/P4-12, October 22-27, 2018, Mahatma Mandir Conference Centre, Gandhinagar, India)
- Homogenization and PCE method : Application in tokamak plasma (F.Bairaktaris, A.Papadopoulos, K.Hizanidis, A.K.Ram, 46th European Physical Society Conference on Plasma Physics P2.1011, July 8-12, 2019, Milan, Italy)

Πρακτικά συνεδρίων

- Multiple scattering of radio frequency waves by blobs: Homogenization of a mixture of blobs and the Waterman-Truell approach (Hizanidis K., Valvis S.-I., Bairaktaris F., Zouros G., Kokkorakis G., Roumeliotis J., Ram A., 42nd European Physical Society Conference on Plasma Physics P1.187, June 22-26, 2015, IPFN in IST of Lisbon, Portugal)
- Electromagnetic homogenization in a blob-populated scrap-off layer of magnetically confined plasmas (Bairaktaris F., Hizanidis K., Ram A., Valvis S.-I., 43rd European Physical Society Conference on Plasma

Physics P5.065, July 4-8, 2016, University of Leuven - KU Leuven, Leuven, Belgium)

- Advanced homogenization approach for a plasma dielectric mixture: Case of a turbulent tokamak (F. Bairaktaris , P. Papagiannis , C. Tsironis , G. Kokkorakis , K. Hizanidis , O. Chellai, S. Alberti, I. Furno, A. K.Ram,and the TCV Team, European Fusion Theory Conference ,9-12 October 2017, Athens,Greece)
- Generalized Case Van Kampen theory for electromagnetic oscillations in a magnetized plasma (F. Bairaktaris, K.Hizanidis, A. K. Ram, 59th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics , October 23–27, 2017; Milwaukee, Wisconsin)
- Modeling the dielectric of turbulent edge plasmas – formalism for electromagnetic homogenization (F.Bairaktaris, K.Hizanidis , P.Papagiannis ,A.K.Ram, 45th European Physical Society Conference on Plasma Physics P5.4005, July 2-6, 2018, ZŽofín Palace, Prague, Czech Republic)
- Theoretical and Computational Studies on the Scattering of Radio Frequency Waves by Fluctuations (A. Ram, Z. Ioannidis, K. Hizanidis, F. Bairaktaris, A. Papadopoulos, S.-I. Valvis, A. Zisis, I. Tigelis, 27th IAEA Fusion Energy Conference TH/P4-12, October 22-27, 2018, Mahatma Mandir Conference Centre, Gandhinagar, India)
- Homogenization and PCE method : Application in tokamak plasma(F.Bairaktaris,A.Papadopoulos, K.Hizanidis, A.K.Ram, 46th European Physical Society Conference on Plasma Physics P2.1011, July 8-12, 2019, Milan, Italy)

Γλωσσάριο

blob : Δομή διαφορετικής πυκνότητας μέσα στο πλάσμα που έχει προκύψει από τυρβώδεις ροές. 23, 38, 55

tokamak : Αντιδραστήρας πυρηνικής σύντηξης. 14

Πυρηνική Σύντηξη : Η διαδικασία με την οποία παράγεται πυρηνική ενέργεια μέσω της ένωσης ατομικών πυρήνων. 9

νουκλεόνιο : Σωματίδιο του ατομικού πυρήνα, πρωτόνιο ή νετρόνιο. 9

ομογενοποίηση : Η διαδικασία με την οποία μελετάμε ένα ανομοιογενές υλικό ως ομογενές, όσον αφορά τις ηλεκτρομαγνητικές του ιδιότητες. 28, 34

Βιβλιογραφία

- [Wes04] John Wesson. *Tokamaks (The International Series of Monographs on Physics)*. Oxford University Press, 2004. ISBN: 0198509227. URL: [https://www.amazon.com/Tokamaks-International-Monographs-Physics - Wesson / dp / 0198509227 ? SubscriptionId = AKIAI0BINVZYXZQZ2U3A&tag=chimbori05-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0198509227](https://www.amazon.com/Tokamaks-International-Monographs-Physics-Wesson/dp/0198509227?SubscriptionId=AKIAI0BINVZYXZQZ2U3A&tag=chimbori05-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0198509227).
- [Che+18] O Chellaï et al. “Millimeter-wave beam scattering by edge-plasma density fluctuations in TCV”. In: *Plasma Physics and Controlled Fusion* 61.1 (Nov. 2018), p. 014001. DOI: 10.1088/1361-6587/aae7bf.
- [FW13] J.G. Fikioris and P.C. Waterman. “Multiple scattering of waves. III. The electromagnetic case”. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 123 (July 2013), pp. 8–16. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.09.007.
- [Bai+18] F. Bairaktaris et al. “Homogenization theory for the effective permittivity of a turbulent tokamak plasma in the scrape-off layer”. In: *Journal of Plasma Physics* 84.5 (Sept. 2018). DOI: 10.1017/s0022377818000922.
- [Tom15] Akhlesh Lakhtakia Tom G Mackay. *Modern Analytical Electromagnetic Homogenization*. Morgan & Claypool Publishers, July 1, 2015. 130 pp. ISBN: 162705426X. URL: https://www.ebook.de/de/product/24779946/tom_g_mackay_

akhlesh_lakhtakia_modern_analytical_electromagnetic_homogenization.html.

- [HS62] Z. Hashin and S. Shtrikman. “A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials”. In: *Journal of Applied Physics* 33.10 (Oct. 1962), pp. 3125–3131. DOI: 10.1063/1.1728579.
- [Sin00] Onkar N. Singh Singh Lakhtakia. *Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons, Oct. 10, 2000. 520 pp. ISBN: 0471363561. URL: https://www.ebook.de/de/product/3601622/singh_lakhtakia_onkar_n_singh_electromagnetic_fields.html.
- [MW00] Tom G Mackay and Werner S Weiglhofer. “Homogenization of biaxial composite materials: bianisotropic properties”. In: *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 3.1 (Dec. 2000), pp. 45–52. DOI: 10.1088/1464-4258/3/1/308.
- [Sih96] Ari Sihvola. *Homogenization of a dielectric mixture with anisotropic spheres in anisotropic background*. Vol. TEAT-7050. Technical Report LUTEDX/(TEAT-7050)/1-15/(1996). Published version: *Electromagnetics*, 17(3), 269-286, 1997. 1996.
- [Sti92] Thomas H. Stix. *Waves in Plasmas*. American Inst. of Physics, Dec. 1, 1992. 584 pp. ISBN: 0883188597. URL: https://www.ebook.de/de/product/5316354/thomas_h_stix_waves_in_plasmas.html.
- [Kri03] Gerhard Kristensson. “Homogenization of the Maxwell equations in an anisotropic material”. In: *Radio Science* 38.2 (Apr. 2003), n/a–n/a. DOI: 10.1029/2001rs002573.
- [Roa12] G. F. Roach. *Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics*. Princeton University Press, Mar. 16, 2012. 400 pp. ISBN: 0691142173. URL: https://www.ebook.de/de/product/18352839/g_f_roach_

mathematical_analysis_of_deterministic_and_stochastic_problems_in_complex_media_electromagnetics.html.

- [Cas59] K.M Case. “Plasma oscillations”. In: *Annals of Physics* 7.3 (July 1959), pp. 349–364. DOI: 10.1016/0003-4916(59)90029-6.
- [Lan46] L. D. Landau. “On the vibrations of the electronic plasma”. In: *J. Phys.(USSR)* 10 (1946). Zh. Eksp. Teor. Fiz.16,574(1946), pp. 25–34.
- [Kam55] N.G. Van Kampen. “On the theory of stationary waves in plasmas”. In: *Physica* 21.6-10 (Jan. 1955), pp. 949–963. DOI: 10.1016/s0031-8914(55)93068-8.
- [Zyg17] Theodoros T. Zygiridis. “A Short Review of FDTD-Based Methods for Uncertainty Quantification in Computational Electromagnetics”. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2017 (2017), pp. 1–8. DOI: 10.1155/2017/9247978.
- [KST19] Julian Kates-Harbeck, Alexey Svyatkovskiy, and William Tang. “Predicting disruptive instabilities in controlled fusion plasmas through deep learning”. In: *Nature* 568.7753 (Apr. 2019), pp. 526–531. DOI: 10.1038/s41586-019-1116-4.