ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΛΛΩΝ ΥΠΟ ΑΝΑΚΥΚΛΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΡΑΤΥΝΣΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΥΡΙΑΚΟΥ Η. ΚΟΥΡΟΥΣΗ
Πτυχιούχου Μηχανικού Σχολής Ικάρων (Σ.Μ.Α.)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Ιωάννης Φ. Δαφαλιάς
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Οκτώβριος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΛΛΩΝ ΥΠΟ ΑΝΑΚΥΚΛΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΡΑΤΥΝΣΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΥΡΙΑΚΟΥ Η. ΚΟΥΡΟΥΣΗ
Πτυχιούχου Μηχανικού Σχολής Ικάρων (Σ.Μ.Α.), 2000
Μ.Δ.Ε. Υπολογιστική Μηχανική Ε.Μ.Π., 2003

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

1. Καθηγητής Ι. Φ. Δαφαλιάς (Επιβλέπων)
2. Καθηγητής Δ. Παναγιωτουνάκος
3. Καθηγητής Ε. Ε. Θεοτόκογλου

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

1. Καθηγητής Ι. Φ. Δαφαλιάς
2. Καθηγητής Δ. Παναγιωτουνάκος
3. Καθηγητής Ε. Ε. Θεοτόκογλου
4. Καθηγητής Γ. Σπαθής
5. Καθηγητής Χ. Γεωργιάδης
6. Καθηγήτρια Ε. Κοντού
7. Καθηγητής Γ. Μπουκοβάλας

ΑΘΗΝΑ, Οκτώβριος 2011

…….
Κυριάκος Η. Κουρούσης

Copyright © Κυριάκος Η. Κουρούσης, Οκτώβριος 2011
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας διατριβής, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της διατριβής για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διατριβής από τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

Στην Μητέρα Μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή Ιωάννη Φ. Δαφαλιά για την έμπνευση, καθοδήγηση και υποστήριξη που μου προσέφερε κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών και διδακτορικών μου σπουδών στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Διαθέτοντας βαθειά εκτίμηση για το επιστημονικό έργο και την προσωπικότητα του Καθηγητή Ιωάννη Φ. Δαφαλιά αισθάνομαι εξαιρετικά τυχερός για την δυνατότητα που μου δόθηκε να επιβλέψει την παρούσα διατριβή.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους υπήρξαν αρωγοί στην πορεία των διδακτορικών σπουδών και της έρευνας μου, τα μέλη της Συμβουλευτικής μου Επιτροπής, τον Καθηγητή Δημήτριο Ε. Παναγιωτουνάκο και Καθηγητή Ευστάθιο Ε. Θεοτόκογλου, τον φίλο και συνάδελφο Γιώργο Σαρίδη, για την συνεργασία μας σε ποικίλα θέματα, όπως επίσης την Assistant Professor Heidi P. Feigenbaum του University of Northern Arizona, για την συμβολή της στην υπολογιστική εφαρμογή.

Τέλος, είμαι ευγνώμων για την πολύπλευρη υποστήριξη της οικογένειάς μου, την σύζυγό μου Άννα και τα παιδιά μου Ηλία και Έλλη-Κωνσταντίνα, δίχως την οποία δεν θα ήταν δυνατόν να ολοκληρωθεί η προσπάθειά μου αυτή.

Περίληψη

Κυριάκος Η. Κουρούσης, Πλαστικότητα Μετάλλων υπό Ανακυκλική Φόρτιση με Πολλαπλασιαστική Ανάλυση Κινηματικής Κράτυνσης, Διδακτορική Διατριβή, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Οκτώβριος 2011

Ο υπολογισμός της αντοχής των υλικών τα οποία καταπονούνται από φορτίσεις που επαναλαμβάνονται προϋποθέτει την γνώση της αναπτυσσόμενης εντατικής κατάστασης, ιδιαίτερα σε υλικά των οποίων η συμπεριφορά εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το ιστορικό των καταπονήσεων στο οποίο έχουν υποβληθεί. Το γεγονός αυτό επιβάλλει την μελέτη της πλαστικότητας υπό ανακυκλικές φορτίσεις, περίπτωση σαφώς πιο περίπλοκη από αυτή της μονοτονικής καταπόνησης. Η ανάγκη για την περιγραφή των σύνθετων φαινομένων που σχετίζονται με τις διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές έχει αποφέρει ένα πλήθος μοντέλων που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της πλαστικής συμπεριφοράς των υλικών. Μεταξύ των προτάσεων που προσέλκυσαν την προσοχή των ερευνητών και της βιομηχανίας συγκαταλέγεται και η διαφορική καταστατική εξίσωση των Armstrong και Frederick (AF), για την εσωτερική τάση κινηματικής κράτυνσης (back stress), η οποία αποτελεί την βάση στην οποία αναπτύχθηκε μία ολόκληρη κατηγορία μοντέλων, ιδιαίτερα δε σε σχέση με την περιγραφή ορισμένων κρίσιμων, για τις κατασκευές, φαινομένων, όπως η σταδιακή συσσώρευση πλαστικής παραμόρφωσης λόγω ανακυκλικών καταπονήσεων (κυκλικός ερπυσμός). Η επιτυχής προσομοίωση του υπόψη φαινομένου αποτελεί ένα από τα κύρια πεδία έρευνας στον τομέα ανάπτυξης νέων καταστατικών μοντέλων ανακυκλικής πλαστικότητας, με ένα σημαντικό τμήμα των προσπαθειών να εστιάζεται στην τροποποίηση – βελτίωση του μοντέλου AF [Multicomponent AF model (MAF), Multicomponent AF model with Threshold Term (MAFT), κλπ].

Η υπόψη διατριβή πραγματεύεται την ανάπτυξη ενός νέου μοντέλου πλαστικότητας, στην βάση του μοντέλου AF, με δυνατότητα να προβλέπει με επιτυχία την ελαστοπλαστική συμπεριφορά μεταλλικών υλικών υποβαλλόμενων σε σύνθετες μονοαξονικές και πολυαξονικές Ανακυκλικές καταπονήσεις. Η βασική

ιδέα του προτεινόμενου μοντέλου στηρίζεται στην μετατροπή της μίας από τις δύο σταθερές παραμέτρους του μοντέλου AF σε μεταβλητή παράμετρο (αδιάστατος τανυστής), εισάγοντας κατ' αυτό τον τρόπο ένα πολλαπλασιαστικό σχήμα διασύνδεσης των τανυστών (AF model with Multiplier, AFM), σε αντίθεση προς την αθροιστική υπέρθεση των τανυστών κινηματικής κράτυνσης (MAF). Το μοντέλο AFM στην απλή του μορφή, ενώ δεν δύναται να αξιοποιηθεί ως ένα πλήρες μοντέλο πλαστικότητας, με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που διαθέτει δύναται να βελτιώσει ορισμένες από τις αδυναμίες του μοντέλου MAF, σε συνδυασμό με τις υπόλοιπες αθροιζόμενες back stresses. Από τον συνδυασμό αυτό λαμβάνεται το μοντέλο MAFM (Multicomponent AF model with Multiplier), το οποίο αποδεικνύεται ότι για τις περιπτώσεις προσομοίωσης του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) διαθέτει δράση και απόδοση ανάλογη προς το μοντέλο MAFT, τόσο σε μονοαξονικές, όσο και σε πολυαξονικές περιπτώσεις καταπόνησης.

Το μοντέλο MAFM συνδυάζεται επίσης με άλλα μοντέλα που έχουν ενσωματωθεί στο μοντέλο MAF, ως τροποποιήσεις στο πλαίσιο βελτίωσης της πολυαξονικής συμπεριφοράς του [MAFT/MAFM with δ term (MAFTδ/MAFMδ) και MAFM with r term (MAFMr)]. Κατ' αντιστοιχία με τα μοντέλα MAFM και MAFT, τα μοντέλα MAFMδ και MAFTδ διαθέτουν ανάλογη απόδοση, λόγω της κοινής βάσης που διαθέτουν, ενώ το μοντέλο MAFMr στις περισσότερες των περιπτώσεων ανταποκρίνεται ικανοποιητικά, χωρίς ωστόσο σε γενικές γραμμές να επιτυγχάνει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με το μοντέλο MAFMδ (και MAFTδ). Τα υπολογιστικά αποτελέσματα εφαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου, και των σχετικών τροποποιήσεών του, κάλυψαν ιδιαίτερα ικανοποιητικά ένα ευρύ φάσμα πειραματικών δεδομένων μονοαξονικών και πολυαξονικών ιστορικών φόρτισης καταδεικνύοντας την ικανότητα τους να ανταποκρίνονται με επιτυχία στην προσομοίωση του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού. Περαιτέρω, το καταστατικό μοντέλο MAFM δύναται να αξιοποιηθεί ως πλατφόρμα για την ανάπτυξη νέων ερευνητικών προτάσεων, είτε με την προσθήκη επιπλέον παραμέτρων για την βελτίωση της περιγραφής του πολυαξονικού ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), είτε με την ενσωμάτωση τροποποιήσεων οι οποίες θα προσφέρουν δυνατότητες για περισσότερο ρεαλιστική περιγραφή της συμπεριφοράς των υλικών, με την δεύτερη λύση να θεωρείται καταλληλότερη λόγω γενικότητας.

Abstract

Kyriakos I. Kourousis, Plasticity of Metals Subjected to Cyclic Loadings: A Multiplicatively Decomposed Kinematic Hardening Rule, PhD Thesis, School of Applied Mathematical and Physical Sciences, National Technical University of Athens, Athens, Greece, October 2011

Strength analysis of materials submitted to cyclic loadings requires the knowledge of the stress state; particularly in those cases that the material behavior is greatly dependant to the history of the applied loads. This in turn necessitates the study of plasticity under cyclic loads (cyclic plasticity), a case significantly more complicated compared to plasticity imposed by monotonic loading. The need to describe the complex phenomena related to various engineering applications has driven the development of a large number of models used for the prediction of materials' inelastic behavior. A class of models that attracted the attention of the research community and the industry is that of the Armstrong and Frederick (AF) type kinematic hardening rule. This class of models has been extensively used to describe phenomena critical for structures, such as the progressive (cycle-by-cycle) accumulation of plastic deformation after cyclic loading (cyclic creep or ratcheting). The successful simulation of this phenomenon is one of the main goals set by researchers working on the development of plasticity models. A significant portion of these efforts has dealt with the modification – improvement of the AF model, leading to the formulation of the Multicomponent AF model (MAF), Multicomponent AF model with Threshold Term (MAFT) and many other models.

This dissertation introduces a new plasticity model, on the basis of the AF model, which is capable of predicting successfully the cyclic elastoplastic response of metallic materials under uniaxial and multiaxial loadings. The basic idea behind the proposed model is the transformation of one of the two constant parameters of the AF model to a variable parameter (non dimensional tensor). This alteration introduces a multiplicative scheme interconnecting the associated tensors (AF model with Multiplier, AFM), in contrast to the additive decomposition of the kinematic hardening back stresses (MAF). The AFM model in its simple form cannot be used

as a complete plasticity model; nevertheless its unique characteristics can be useful in improving some of the deficiencies of the MAF model by combining it with the rest of the added back stresses. This results in the MAFM model (Multicomponent AF model with Multiplier), that proves to be of similar response and performance to the MAFT model, for both uniaxial and multiaxial ratcheting simulation cases.

The MAFM model is also combined with other models incorporated to the MAF model, as modifications improving its multiaxial response [MAFT/MAFM with δ term (MAFTδ/MAFMδ) και MAFM with r term (MAFMr)]. In correspondence to the MAFM and MAFT models, the MAFMδ and MAFTδ models exhibit similar response, owing to their common basis. While the MAFMr model performs satisfactory in most cases, it is generally not capable to achieve better simulations compared to the MAFMδ (and MAFTδ) model. The numerical implementation of the proposed model, and its associated modifications, covered successfully a wide range of uniaxial and multiaxial experimental results, indicating the model's capability to simulate with success the ratcheting phenomenon. Furthermore, the MAFM model may be exploited as a research platform for the development of new cyclic plasticity models, either through the addition of parameters that would enhance the multiaxial ratcheting simulations, or by incorporating features offering the capability to describe more realistically the material behavior, though the second option is regarded more suitable due to its generality.

Κατάλογος Σχημάτων

2.1 Απεικόνιση του μονοαξονικού φαινομένου Bauschinger 10
2.2 Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης ανακυκλικής καταπόνησης [43] 11
2.3 Φαινόμενο ανακυκλική κράτυνσης (cyclic hardening) για επαναλαμβανόμενη καταπόνηση υπό ελεγχόμενη (α) παραμόρφωση, (β) τάση [43] 11
2.4 Φαινόμενο ανακυκλικής χαλάρωσης (cyclic softening) για επαναλαμβανόμενη καταπόνηση υπό ελεγχόμενη (α) παραμόρφωση, (β) τάση [43] 12
2.5 Φαινόμενα (α) πλαστικής σταθεροποίησης (plastic shakedown), (β) ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), (γ) ανακυκλικής μη-αποχαλάρωσης της μέσης τάσης και (δ) ανακυκλικής αποχαλάρωσης (relaxation) της μέσης τάσης [43] 13
2.6 Απεικόνιση της συμπεριφοράς των κανόνων κινηματικής κράτυνσης Armstrong & Frederick και Prager στον πολυαξονικό χώρο των τάσεων 20
2.7 Απεικόνιση της συμπεριφοράς του μοντέλου AF σε μονοαξονική ανακυκλική καταπόνηση [15] 22
2.8 Απεικόνιση της συμπεριφοράς του όρου δυναμικής ανάκτησης (dynamic recovery term) του μοντέλου AF και του όρου ακτινικής ανάκτησης (radial recovery term) του μοντέλου Burlet & Cailletaud στον πολυαξονικό χώρο των τάσεων 27

3.1 Σύγκριση μονοτονικών καμπύλων back stress (αδιαστατοποιημένη) - πλαστικής παραμόρφωσης διαφόρων μοντέλων AF με το μοντέλο AFM [17] 47

4.1 Διαγράμματα τάσης - παραμόρφωσης χάλυβα St 316L υποβεβλημένου σε μονοαξονική ανακυκλική καταπόνηση υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση: (α) πειραματικές δοκιμές [8], (β) υπολογιστικά αποτελέσματα εφαρμογής του μοντέλου MAF [17] 61
4.2 Ιστορικό φόρτισης μονοαξονικής εναλλασσόμενης (ανακυκλικής) καταπόνησης υπό ελεγχόμενη τάση [3] 64
4.3 Μονοαξονικά πειραματικά δεδομένα για δοκίμια υλικού CS1026 και υπολογιστικά αποτελέσματα εφαρμογής του μοντέλου MAFT (C-H4T model) και MAFM (Multiplicative model) [(γ) και (δ)]. Οι παράμετροι του μοντέλου MAFM δίδονται στον Πίνακα 4.2, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου MAFT έχουν ληφθεί από την έρευνα των Bari και Hassan [3] [17] 69

4.4 Μονοαξονικά πειραματικά δεδομένα για δοκίμια υλικού CS1026 και υπολογιστικά αποτελέσματα εφαρμογής του μοντέλου MAFT (C-H4T model) και MAFM (Multiplicative model) για ανακυκλικό ερπυσμό (ratcheting) υπό σταθερό πλάτος τάσης και μεταβαλλόμενη μέση τάση [(α) και (β)] και ανακυκλικό ερπυσμό υπό σταθερή μέση τάση και μεταβαλλόμενο πλάτος τάσης. Οι παράμετροι του μοντέλου MAFM δίδονται στον Πίνακα 4.2, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου MAFT έχουν ληφθεί από την έρευνα των Bari και Hassan [3] [17] 71

5.1 Απεικόνιση μικτής καταπόνησης (αξονική φόρτιση – εσωτερική πίεση) σε λεπτότοιχο σωληνοειδές δοκίμιο [5] 74
5.2 Φόρτιση τύπου I: Αξονική συμμετρική καταπόνηση υπό σταθερή εσωτερική πίεση (strain symmetric cycling under constant pressure) [13] 75
5.3 Φόρτιση τύπου II: Διαξονική καταπόνηση τύπου ‘κεκλιμένου επιπέδου’ θετικής κλίσης (inclined path positive slope) [13] 75
5.4 Φόρτιση τύπου III: Διαξονική καταπόνηση τύπου ‘κεκλιμένου επιπέδου’ αρνητικής κλίσης (inclined path positive slope) [13] 75
5.5 Φόρτιση τύπου IV: Διαξονική καταπόνηση τύπου ‘παπιγιόν’ (bowtie) [13] 75
5.6 Φόρτιση τύπου V: Διαξονική καταπόνηση τύπου ανάστροφου ‘παπιγιόν’ (reverse bowtie) [13] 75
5.7 Φόρτιση τύπου VI: Διαξονική καταπόνηση τύπου κλεψύδρας (hourglass) [13] 75
5.8 Σταθεροποιημένος βρόχος υστέρησης (αξονική τάση – παραμόρφωση) για το υλικό CS 1018 [13] 82
5.9 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ και $\varepsilon_{xc} = 0,40\%$ 84
5.10 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ και $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ 85
5.11 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ και $\varepsilon_{xc} = 0,65\%$ 85

5.12 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 4,88\,ksi$ 86

5.13 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 7,32\,ksi$ 86

5.14 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 87

5.15 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 14,54\,ksi$ 87

5.16 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για διάφορες τιμές του δ και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 4,88\,ksi$ 89

5.17 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για διάφορες τιμές του δ και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 7,32\,ksi$ 90

5.18 Μέγιστη αξονική τάση σ_x [πλάτος - μέση τάση (σ_{xa} - σ_{xm})] που συσσωρεύεται στον κάθε κύκλο φόρτισης, για τον τύπο φόρτισης τύπου I, συναρτήσει των κύκλων N. Αποτελέσματα προσομοίωσης μοντέλων για τα μοντέλα MAFT, MAFM, MAFTδ, MAFMδ και MAFMr 91

5.19 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου ΙΙ με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 92

5.20 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου ΙΙ με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 92

5.21 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου ΙΙΙ με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 94

5.22 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για διάφορες τιμές του δ και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου ΙΙ με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 94

5.23 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου IV με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 96

5.24 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου IV με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 14,54\,ksi$ 96

5.25 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου V με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 97

5.26 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου V με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 14,54\,ksi$ 96

5.27 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για $\delta = 0,18$ & $0,5$, και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου V με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$, και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ & $14,54\,ksi$ 99

5.28 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFTδ για $\delta = 0,18$ & $0,5$, και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου V με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$, και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ & $14,54\,ksi$ 99

5.29 Μέγιστη αξονική τάση σ_x [πλάτος - μέση τάση (σ_{xa} - σ_{xm})] που συσσωρεύεται στον κάθε κύκλο φόρτισης, για τον τύπο φόρτισης τύπου IV, συναρτήσει των κύκλων N. Αποτελέσματα προσομοίωσης μοντέλων για τα μοντέλα MAFT, MAFM, MAFTδ, MAFMδ και MAFMr 100

5.30 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου VI με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 102

5.31 Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFTδ για $\delta = 0,18$ και $\delta = 0,5$, και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου VI με $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$, και $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ 103

Κατάλογος Πινάκων

3.1 Συνοπτική παρουσίαση της κωδικοποίησης που χρησιμοποιείται για τα υπό μελέτη μοντέλα πλαστικότητας τύπου AF 51

4.1 Παράμετροι μοντέλου MAFM, με ισοτροπική κράτυνση, για την προσομοίωση της μονοαξονικής καταπόνησης δοκιμίων χάλυβα St 316L υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση (Σχήμα 4.1) [17] 62

4.2 Παράμετροι μοντέλου MAFT για την προσομοίωση μονοαξονικών συμμετρικών καταπονήσεων εντός δεδομένου εύρους παραμορφώσεων [Σχήματα 4.2(α) και 4.2(β)], μη συμμετρικών καταπονήσεων μερικής αποφόρτισης/επαναφόρτισης [Σχήμα 4.2(γ) και 4.2(δ)] και ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε δοκίμια χάλυβα CS1026 (Σχήμα 4.3) [3] 65

4.3 Παράμετροι μοντέλου MAFM για την προσομοίωση μονοαξονικών συμμετρικών καταπονήσεων εντός δεδομένου εύρους παραμορφώσεων [Σχήματα 4.2(α) και 4.2(β)], μη συμμετρικών καταπονήσεων μερικής αποφόρτισης/επαναφόρτισης [Σχήμα 4.2(γ) και 4.2(δ)] και ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε δοκίμια χάλυβα CS1026 (Σχήμα 4.3) [17] 67

4.4 Συνδυασμός τιμών σ_{xm} - σ_{xa} για την περίπτωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) και αντιστοίχιση με τα Σχήματα των πειραματικών δεδομένων και υπολογιστικών αποτελεσμάτων 68

5.1 Παράμετροι μοντέλου MAFT για την προσομοίωση διαξονικών πειραματικών δεδομένων (φορτίσεων τύπου III, V και VI) ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε δοκίμια χάλυβα CS 1018 80

5.2 Παράμετροι μοντέλου MAFM για την προσομοίωση διαξονικών πειραματικών δεδομένων (φορτίσεων τύπου III, V και VI) ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε δοκίμια χάλυβα CS 1018 80

5.3 Αντιστοιχία μεταξύ τύπων φόρτισης (I έως VI) - υλικών δοκιμίων (CS 1026, CS 1018) και των Πινάκων που περιέχουν τις παραμέτρους των μοντέλων MAFT, MAFM, MAFTδ, MAFMδ και MAFMr 81

5.4 Συνδυασμός τιμών ε_{xc} - $\sigma_{\theta m}$ για την περίπτωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) και αντιστοίχιση με τα Σχήματα των πειραματικών δεδομένων και υπολογιστικών αποτελεσμάτων 84

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων **v**

Κατάλογος Πινάκων **xi**

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή **1**

1.1 Γενικά 1

1.2 Στόχοι της Έρευνας 4

1.3 Δομή της Διατριβής 5

Κεφάλαιο 2: Πλαστικότητα Μετάλλων υπό Ανακυκλική Φόρτιση **9**

2.1 Φαινομενολογική Βάση 9

2.2 Μαθηματική Θεωρία της Πλαστικότητας 14

2.3 Καταστατικά Μοντέλα Πλαστικότητας 18

2.3.1 Κινηματική Κράτυνση 18

2.3.2 Ισοτροπική Κράτυνση 30

Κεφάλαιο 3: Ανάπτυξη του Προτεινόμενου Μοντέλου Πλαστικότητας **33**

3.1 Βασική Ιδέα 33

3.2 Μονοαξονική Διαμόρφωση του Μοντέλου 37

3.3 Πολυαξονική Διαμόρφωση του Μοντέλου 42

3.4 Χαρακτηριστικά του Μοντέλου 44

3.5 Τροποποιήσεις του Μοντέλου 48

Κεφάλαιο 4: Εφαρμογή του Μοντέλου σε Μοναξονικές Καταπονήσεις **53**

4.1 Διακρίβωση - Προσδιορισμός των Παραμέτρων του Μοντέλου 53

4.2 Περιπτώσεις Εφαρμογής του Μοντέλου 58

4.3 Αποτελέσματα Εφαρμογής 59

4.3.1 Ανακυκλικές Καταπονήσεις υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση. 60

4.3.2 Ανακυκλικές Καταπονήσεις υπό ελεγχόμενη τάση. 63

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογή του Μοντέλου σε Πολυαξονικές Καταπονήσεις **73**
5.1 Περιπτώσεις Εφαρμογής του Μοντέλου 73
5.2 Αποτελέσματα Εφαρμογής 78
5.2.1 Φόρτιση Τύπου I (Αξονική Καταπόνηση υπό Σταθερή Πίεση) . . . 83
5.2.2 Φόρτιση Τύπου II και III (‘Κεκλιμένο Επίπεδο’) 91
5.2.3 Φόρτιση Τύπου IV και V (‘Παπιγιόν’) 95
5.2.4 Φόρτιση Τύπου VI (‘Κλεψύδρα’) 101

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα **105**
6.1 Σύνοψη Αποτελεσμάτων Εφαρμογής του Μοντέλου 105
6.2 Επιστημονική Συνεισφορά της Διατριβής 108
6.3 Θέματα προς Περαιτέρω Διερεύνηση 109

Βιβλιογραφία **113**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Η μαθηματική θεωρία της πλαστικότητας, η οποία αποτελεί και το πεδίο ενδιαφέροντος και εφαρμογής της υπόψη έρευνας, είναι μία καταστατική θεωρία, η οποία μελετά από την οπτική της μηχανικής των συνεχών μέσων (μακροσκοπική θεώρηση), την πλαστική (μη αναστρέψιμη) συμπεριφορά των υλικών, η οποία και εξαρτάται από το ιστορικό των καταπονήσεων [34] [55] [45]. Τα εδάφη, τα μέταλλα και τα πολυμερή είναι ορισμένα από τα υλικά των οποίων η συμπεριφορά εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το ιστορικό των καταπονήσεων που έχουν υποστεί, τον ρυθμό επιβολής του φορτίου, την θερμοκρασία, κλπ. Η εν λόγω θεωρία παρέχει, για την κάθε κατηγορία υλικών, την δυνατότητα να προσδιορισθεί, με την χρήση κατάλληλα προσαρμοσμένων εξισώσεων, μία αναλυτική σχέση μεταξύ των αλλαγών της τάσης και της παραμόρφωσης (καταστατικές εξισώσεις). Οι καταστατικές εξισώσεις περιγραφής της πλαστικότητας των υλικών χρησιμοποιούνται σε διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές, όπως ο υπολογισμός των μόνιμων (πλαστικών) παραμορφώσεων των κατασκευών, η πρόβλεψη των φορτίων πλαστικής κατάρρευσης των κατασκευών, η διερεύνηση της πλαστικής ευστάθειας, ο υπολογισμός των δυνάμεων που απαιτούνται στην διαμόρφωση μετάλλων, κοκ. Επίσης ένα άλλο πεδίο της πλαστικότητας αφορά στην διασύνδεσή της με την συσσώρευση της εσωτερικής φθοράς (internal damage) στα υλικά, μέσω

συνδυασμένων καταστατικών εξισώσεων (μοντέλων) πλαστικότητας – φθοράς, το οποίο διαθέτει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την μελέτη και την ανάλυση της αντοχής των υλικών έναντι της ολιγοκυκλικής κόπωσης (low cycle fatigue), σε συνήθεις ή υψηλές θερμοκρασίες [43] [44] [60].

Στις περισσότερες από τις τεχνολογικές εφαρμογές είναι αντιληπτικό ότι καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει το γεγονός ότι οι φορτίσεις και αποφορτίσεις επαναλαμβάνονται, το οποίο επιβάλλει την μελέτη της πλαστικότητας υπό ανακυκλικές φορτίσεις (ανακυκλική πλαστικότητα), περίπτωση σαφώς πιο περίπλοκη από αυτή της μονοτονικής καταπόνησης. Αντικειμενικός στόχος της έρευνας που συντελείται στον τομέα αυτό είναι να περιγραφούν με επιτυχία όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που συνδέονται με την μονοαξονική και πολυαξονική ανακυκλική καταπόνηση των υλικών, διατηρώντας ταυτόχρονα την πολυπλοκότητα των μοντέλων σε χαμηλό επίπεδο, προκειμένου να είναι εύχρηστα ως εργαλεία σχεδίασης και ανάλυσης για τους μηχανικούς [21].

Η περιγραφή των σύνθετων φαινομένων που σχετίζονται με τις διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές έχει αποφέρει ένα πλήθος μοντέλων που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της πλαστικής συμπεριφοράς των υλικών (μοντέλα ανακυκλικής πλαστικότητας), η πλήρης ανασκόπηση των οποίων δεν εμπίπτει στους στόχους της μελέτης. Ενδεικτικά αναφέρονται οι αξιόλογες περιεκτικές εργασίες ανασκόπησης (review papers) των Chaboche [10] [12], Ohno [52], Kang [40] και του Krishna και των συνεργατών του [42], στις οποίες μπορεί κανείς να ανατρέξει για μία περισσότερο ενδελεχή καταγραφή και παρουσίαση των διαφόρων καταστατικών εξισώσεων και μοντέλων, όπως και των κυριότερων τροποποιήσεών τους.

Με βάση την διεθνή βιβλιογραφία, οι καταστατικές εξισώσεις στην ανακυκλική πλαστικότητα δύνανται να κατηγοριοποιηθούν βάσει των ακόλουθων βασικών θερμοδυναμικών εννοιών [10]:

α) Η τρέχουσα κατάσταση του υλικού εξαρτάται από τις τρέχουσες τιμές και το προηγηθέν ιστορικό των μεταβλητών που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν (συνολική παραμόρφωση, θερμοκρασία, κλπ).

β) Η τρέχουσα κατάσταση του υλικού εξαρτάται μόνο από τις τρέχουσες τιμές των μεταβλητών που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν και από μία ομάδα εσωτερικών μεταβλητών κατάστασης. Σε αυτή την περίπτωση θεωρείται ότι το ιστορικό προηγούμενης φόρτισης ενσωματώνεται στην τρέχουσα τιμή των εσωτερικών μεταβλητών.

Στην πρώτη κατηγορία εντάσσεται η ενδοχρονική θεωρία (endochronic theory) η οποία αναπτύχθηκε από τον Valanis [58] [59], όπως επίσης και διάφορα άλλα μοντέλα [41] [61]. Στην δεύτερη κατηγορία εντάχθηκε ένας μεγάλος αριθμός διαφορετικών προσεγγίσεων, με κύριο στόχο την γενίκευση της περιγραφής των προβλημάτων στο πλαίσιο της κλασσικής θεωρίας της πλαστικότητας [7] [47] [49] [14] [2] [46].

Μεταξύ των προτάσεων που προσέλκυσαν την προσοχή των ερευνητών και της βιομηχανίας συγκαταλέγεται και η διαφορική καταστατική εξίσωση των Armstrong και Frederick [2], για την εσωτερική τάση κινηματικής κράτυνσης (back stress), η οποία αποτελεί την βάση στην οποία αναπτύχθηκε μία ολόκληρη κατηγορία μοντέλων, ιδιαίτερα δε σε σχέση με την περιγραφή ορισμένων κρίσιμων, για τις τεχνολογικές εφαρμογές, φαινομένων, όπως η σταδιακή συσσώρευση πλαστικής παραμόρφωσης λόγω ανακυκλικών καταπονήσεων, [κυκλικός ερπυσμός

(ratcheting/cyclic creep)]. Η επιτυχής πρόβλεψη (προσομοίωση) του φαινομένου αυτού αποτελεί ένα από τα κύρια πεδία έρευνας στον τομέα ανάπτυξης νέων καταστατικών μοντέλων ανακυκλικής πλαστικότητας, με ένα μεγάλο τμήμα των προσπαθειών να εστιάζεται επίσης σε τροποποιήσεις του βασικού μοντέλου των Armstrong και Frederick [11] [29] [30] [27] [31] [32] [38] [3] [4] [17] [18] [40] [42] [19]. Για λόγους τυποποίησης, τα μοντέλα αυτά δύναται να ενταχθούν σε μία κατηγορία, καλούμενα ως μοντέλα τύπου Armstrong-Frederick (AF) για λόγους συντομίας. Οι πολλαπλές βελτιώσεις και τροποποιήσεις μοντέλων πλαστικότητας τύπου AF που έχουν κατά καιρούς προταθεί από διάφορους ερευνητές, καταδεικνύουν την εγγενή αδυναμία της κλάσης των μοντέλων να αποδώσουν αποτελεσματικά και με ενιαίο τρόπο τα εξαιρετικά σύνθετα χαρακτηριστικά του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting/cyclic creep).

1.2 Στόχοι της Έρευνας

Η υπόψη διατριβή εστιάζεται στην ανάπτυξη ενός νέου μοντέλου πλαστικότητας, στην βάση της διαφορικής καταστατικής εξίσωσης των Armstrong και Frederick, με δυνατότητα να προβλέπει με επιτυχία την ελαστοπλαστική συμπεριφορά μεταλλικών υλικών υποβαλλόμενων σε σύνθετες μονοαξονικές και πολυαξονικές Ανακυκλικές καταπονήσεις. Παράλληλα, δεδομένου ότι το τελικό αποτέλεσμα της έρευνας (μοντέλο) θα πρέπει να είναι εύχρηστο για να μπορεί να αξιοποιηθεί περαιτέρω (ερευνητικά και μη), η πολυπλοκότητα των καταστατικών εξισώσεων και ο αριθμός των παραμέτρων που υπεισέρχονται σε αυτές διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα. Κατ’ αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται κατά πρώτον υπολογιστική απλότητα (εύκολη ενσωμάτωση σε αριθμητικούς κώδικες και μικρό υπολογιστικό

κόστος) και κατά δεύτερον εύκολος προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου, αξιοποιώντας μονοαξονικά πειραματικά δεδομένα με χρήση απλών μεθόδων.

Πέραν τούτου, το προτεινόμενο μοντέλο προσδοκάται να αποτελέσει μία εναλλακτική πλατφόρμα δοκιμής – εφαρμογής των συντελούμενων ερευνητικών προσπαθειών στον τομέα της ανάπτυξης μεθόδων και τρόπων βελτίωσης της προσομοίωσης του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting). Κατά συνέπεια, ιδιαίτερη βαρύτητα κατά την ανάπτυξη, διακρίβωση και πιστοποίηση του μοντέλου δίδεται στις περιπτώσεις που αφορούν την προσομοίωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), λόγω της τεχνολογικής σπουδαιότητας και της περιπλοκότητας που διαθέτει ως φαινόμενο, πολύ δε περισσότερο όταν προκύπτει από πολυαξονικές καταπονήσεις. Επιπρόσθετα, το προτεινόμενο μοντέλο αντιπαραβάλλεται με άλλα γνωστά μοντέλα πλαστικότητας της ίδιας κατηγορίας (τύπου AF) και ανάλογων χαρακτηριστικών, στο πλαίσιο της συνολικής εξέτασης των δυνατοτήτων και των αδυναμιών που διαθέτει και των εναλλακτικών λύσεων που δύναται να προσφέρει για την εν γένει βελτίωση της δομής των καταστατικών μοντέλων αυτής της κατηγορίας.

1.3 Δομή της Διατριβής

Η παρούσα διατριβή αποτελείται από 6 Κεφάλαια, πρώτο εκ των οποίων είναι η παρούσα εισαγωγή. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται εν συντομία η φαινομενολογική βάση και τα κυριότερα στοιχεία της μαθηματικής θεωρία της πλαστικότητας των μετάλλων όταν αυτά υποβάλλονται σε ανακυκλικές φορτίσεις. Επίσης, περιγράφονται τα χαρακτηριστικά των καταστατικών μοντέλων πλαστικότητας που αποτελούν την βάση του προτεινόμενου μοντέλου, διακρινόμενα

ως προς τον τύπο κράτυνσης της επιφάνειας διαρροής (κινηματική και ισοτροπική κράτυνση).

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το προτεινόμενο μοντέλο, ξεκινώντας από την περιγραφή της βασικής ιδέας στην οποία στηρίχθηκε η ανάπτυξη του. Ακολούθως εκτελείται λεπτομερής ανάλυση της μαθηματικής διαμόρφωσής του μοντέλου στον μονοαξονικό και πολυαξονικό χώρο των τάσεων – παραμορφώσεων, όπως επίσης και περιγραφή των κύριων χαρακτηριστικών που διαθέτει. Η ανάλυση ολοκληρώνεται με την παρουσίαση τροποποιήσεων της πολυαξονικής μορφής του μοντέλου.

Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται η μέθοδος διακρίβωσης και προσδιορισμού των παραμέτρων του μοντέλου, η οποία στην συνέχεια χρησιμοποιείται για την εφαρμογή του μοντέλου σε μονοαξονικές περιπτώσεις ανακυκλικών καταπονήσεων. Τα αποτελέσματα της υπολογιστικής εφαρμογής, διακρινόμενα ως προς την παράμετρο ελέγχου (τάση ή παραμόρφωση) των καταπονήσεων (stress/strain controlled), αναλύονται και σχολιάζονται λεπτομερώς, συγκρινόμενα με πειραματικά δεδομένα και αποτελέσματα άλλων μοντέλων πλαστικότητας, για την περίπτωση της ανακυκλικής κράτυνσης (cyclic hardening) και ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting).

Στο Κεφάλαιο 5 αναλύονται λεπτομερώς τα αποτελέσματα υπολογιστικής εφαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου σε διάφορες περιπτώσεις ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) κατόπιν πολυαξονικών (διαξονικών) καταπονήσεων, σε σύγκριση τόσο με πειραματικά δεδομένα, όσο και με αποτελέσματα άλλων μοντέλων πλαστικότητας.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα αποτελέσματα εφαρμογής του μοντέλου στο σύνολο των μονοαξονικών και πολυαξονικών (διαξονικών) περιπτώσεων φόρτισης, επίσης παρουσιάζονται οι δυνατότητες και οι αδυναμίες που διαθέτει. Ακόμη, ειδική αναφορά εκτελείται στα θέματα τα οποία εκτιμάται ότι χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης και αξιολόγησης, τόσο ως προς τις δυνατότητες μετεξέλιξης του μοντέλου, όσο και στο ζήτημα της ενδεχόμενης αξιοποίησής του στο πλαίσιο επίλυσης τεχνολογικών προβλημάτων.

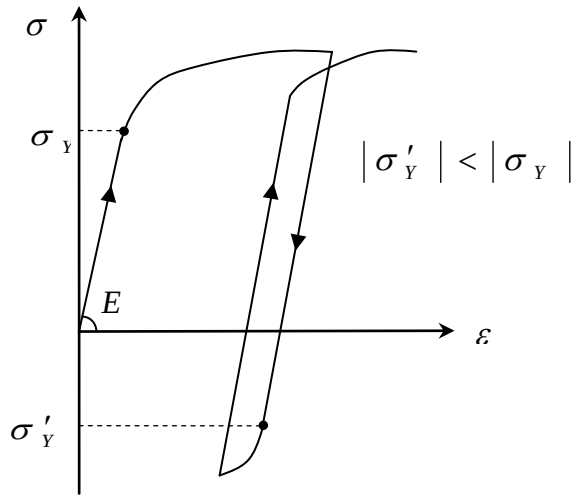
Κεφάλαιο 2

Πλαστικότητα Μετάλλων υπό Ανακυκλική Φόρτιση

2.1 Φαινομενολογική Βάση

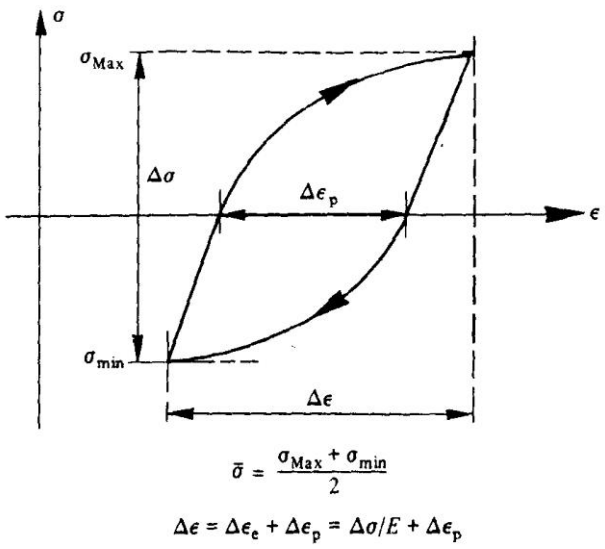
Φαινόμενα όπως η μονοτονική και ανακυκλική κράτυνση, η ανακυκλική χαλάρωση, ο κυκλικός ερπυσμός (ratcheting), κλπ αποτελούν τα αντικείμενα προς μελέτη και μοντελοποίηση μέσω εφαρμογής καταστατικών εξισώσεων. Η εξέταση των χαρακτηριστικών του καθενός από τα φαινόμενα αυτά είναι απαραίτητη τόσο για την πλήρη κατανόηση του φυσικού προβλήματος, όσο και για την επιλογή ή και διαμόρφωση της κατάλληλης θεωρητικής βάσης στην οποία θα στηριχθεί η προσπάθεια για επίλυσή του.

Τα συνήθη όλκιμα υλικά διαθέτουν ίσες (απόλυτες) τιμές για όριο διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη, εφόσον δεν έχει προηγηθεί καταπόνηση η οποία να έχει επιφέρει πλαστικές παραμορφώσεις. Ωστόσο, σε ένα πλήθος υλικών η υπέρβαση του αρχικού ορίου διαρροής επιφέρει όχι μόνο την κράτυνση του υλικού (νέο αυξημένο όριο διαρροής), αλλά και την μεταβολή του ορίου διαρροής στην αντίθετη φόρτιση. Όταν αυτή η μεταβολή, κατά την αντίθετη φόρτιση, επιφέρει μείωση της απόλυτης τιμής του ορίου διαρροής τότε έχουμε την εμφάνιση του φαινομένου Bauschinger (Σχήμα 2.1).

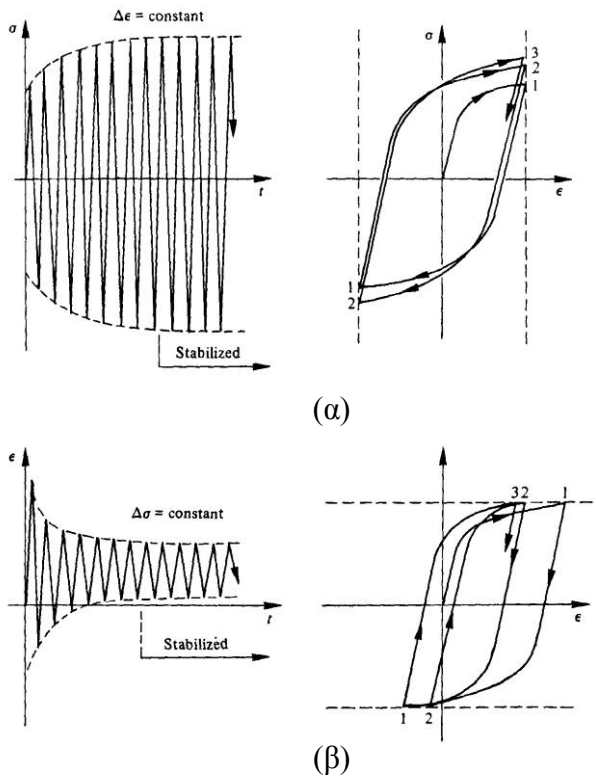


Σχήμα 2.1 *Απεικόνιση του μονοαξονικού φαινομένου Bauschinger.*

Τα περισσότερα μεταλλικά υλικά κατά την εφαρμογή επαναλαμβανόμενων (ανακυκλικών) καταπονήσεων σε εφελκυσμό – θλίψη παρουσιάζουν μία διαφοροποίηση των χαρακτηριστικών τους ιδιοτήτων ως προς το όριο διαρροής. Συγκεκριμένα ένα μέταλλο μπορεί να υποστεί είτε κράτυνση (hardening), είτε χαλάρωση (softening), ανάλογα προς το είδος του υλικού, την θερμοκρασία και την αρχική του κατάσταση (π.χ. προφόρτιση ή εφαρμογή καταπόνησης σταθεροποίησης της συμπεριφοράς του). Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της ανακυκλικής κράτυνσης (cyclic hardening) προκαλείται αύξηση του εύρους της τάσης (stress range, $\Delta\sigma$) κατά τους επαναλαμβανόμενους κύκλους καταπόνησης υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση, ή μείωση του εύρος της παραμόρφωσης (strain range, $\Delta\varepsilon$) σε ένα πείραμα υπό ελεγχόμενη τάση (Σχήματα 2.2 και 2.3).

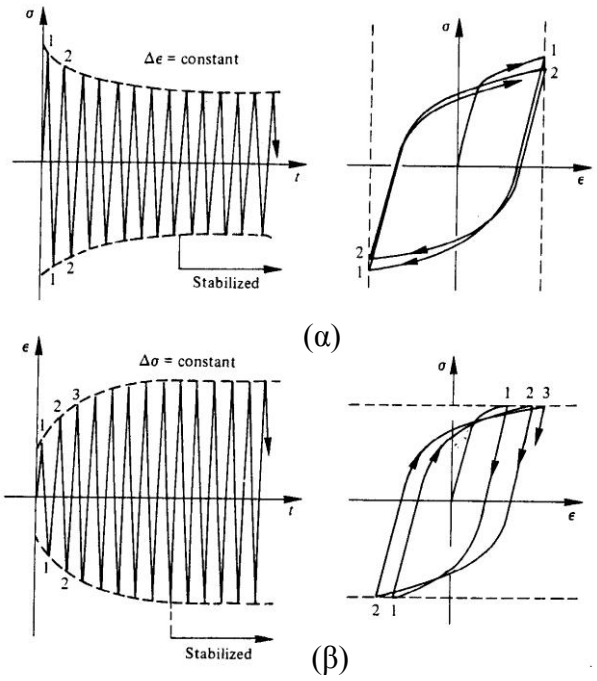


Σχήμα 2.2 *Καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης ανακυκλικής καταπόνησης [43].*



Σχήμα 2.3 *Φαινόμενο ανακυκλική κράτυνσης (cyclic hardening) για επαναλαμβανόμενη καταπόνηση υπό ελεγχόμενη (α) παραμόρφωση, (β) τάση [43].*

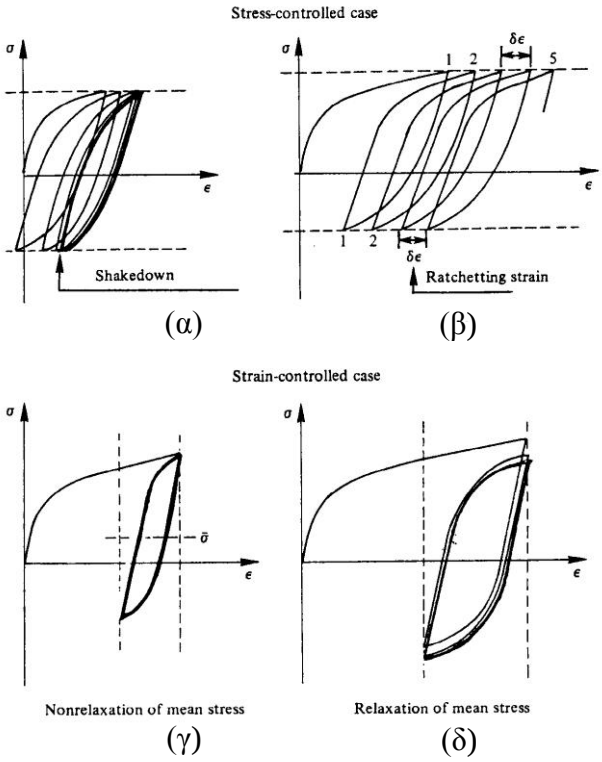
Αντίστροφα, η ανακυκλική χαλάρωση (cyclic softening) λαμβάνει χώρα όταν το εύρος της τάσης (stress range, $\Delta\sigma$) μειώνεται όταν η ανακυκλική καταπόνηση εκτελείται υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση, ή αυξάνεται το εύρος της παραμόρφωσης (strain range, $\Delta\varepsilon$) για την περίπτωση της καταπόνησης υπό ελεγχόμενη τάση (Σχήματα 2.2 και 2.4).



Σχήμα 2.4 *Φαινόμενο ανακυκλικής χαλάρωσης (cyclic softening) για επαναλαμβανόμενη καταπόνηση υπό ελεγχόμενη (α) παραμόρφωση, (β) τάση [43].*

Επιπλέον φαινόμενα παρουσιάζονται στην περίπτωση που η καταπόνηση εκτελείται ανακυκλικά μη συμμετρικά, υπό μη μηδενική μέση τάση ή παραμόρφωση. Ειδικότερα, για την καταπόνηση υπό ελεγχόμενη τάση (stress controlled) εμφανίζεται το φαινόμενο πλαστικής σταθεροποίησης (plastic shakedown) και το φαινόμενο του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), όπως αναπαρίστανται στο Σχήμα 2.5. Συγκεκριμένα, το φαινόμενο του ανακυκλικού

ερπυσμού (ratcheting) αναφέρεται στην βαθμιαία συσσώρευση της πλαστικής παραμόρφωσης ανά κύκλο καταπόνησης, ενώ στην πλαστική σταθεροποίηση (plastic shakedown) ο ρυθμός συσσώρευσης της πλαστικής παραμόρφωσης μειώνεται έως ότου σταθεροποιηθεί. Τα περισσότερα μεταλλικά υλικά υπόκεινται ανακυκλική κράτυνση ή χαλάρωση για έναν ορισμένο αριθμό κύκλων καταπόνησης και στην συνέχεια σταθεροποιούνται, παύοντας να μεταβάλλουν το μέγεθος της επιφάνειας διαρροής τους [48] [37] [57] [35]. Ωστόσο, η ιδιαιτερότητα του ανακυκλικού ερπυσμού είναι ότι το υπόψη φαινόμενο εξακολουθεί να εξελίσσεται ακόμη και έπειτα από την σταθεροποίηση (παύση μεταβολής του μεγέθους της επιφάνειας διαρροής) του καταπονούμενου μεταλλικού υλικού [29], [30], [31] [32].



Σχήμα 2.5 *Φαινόμενα (α) πλαστικής σταθεροποίησης (plastic shakedown),(β) ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), (γ) ανακυκλικής μη-αποχαλάρωσης της μέσης τάσης και (δ) ανακυκλικής αποχαλάρωσης (relaxation) της μέσης τάσης [43].*

Αντίστοιχα, όταν η καταπόνηση εκτελείται υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση (strain controlled) εμφανίζονται τα φαινόμενα της ανακυκλικής αποχαλάρωσης (relaxation) και μη-αποχαλάρωσης (non relaxation) της μέσης τάσης (Σχήμα 2.5). Συγκεκριμένα, στο φαινόμενο της ανακυκλικής αποχαλάρωσης παρατηρείται ότι υπό ανακυκλική καταπόνηση με ένα καθορισμένο εύρος παραμόρφωσης και με μη μηδενική μέση παραμόρφωση, οι βρόγχοι υστέρησης τείνουν να μετατοπίζονται σε κάθε κύκλο καταπόνησης έως την ελαχιστοποίηση και τον τελικό μηδενικό της απόλυτης τιμής της μέσης τάσης του κάθε κύκλου.

2.2 Μαθηματική Θεωρία της Πλαστικότητας

Η μαθηματική θεωρία της πλαστικότητας (plasticity theory) περιγράφει τα προβλήματα που σχετίζονται με τις χρονικά ανεξάρτητες (time independent), μη αναστρέψιμες (πλαστικές) παραμορφώσεις. Η ανάπτυξη και εφαρμογή της εν λόγω θεωρίας προκύπτει από την μακροσκοπική μελέτη και ανάλυση της συμπεριφοράς των υλικών, στηριζόμενη στις θεμελιώδεις αρχές της μηχανικής του συνεχούς μέσου. Σύμφωνα με τον ορισμό του Cauchy ελαστικό θεωρείται ένα σώμα στο οποίο η παραμόρφωση σε κάθε σημείο του προσδιορίζεται επακριβώς από την τάση και την θερμοκρασία στο σημείο αυτό και αντιστρόφως. Για ένα ανελαστικό σώμα όμως, ο προσδιορισμός της παραμόρφωσης απαιτεί, πέραν της τάσης και της θερμοκρασίας, ένα επιπλέον μέγεθος. Αυτό το επιπλέον μέγεθος είναι δυνατόν να υποτεθεί ότι είναι η προηγηθείσα ιστορία τάσης και θερμοκρασίας στο σημείο αυτό. Η αναγκαιότητα να εκφρασθεί μαθηματικά η έννοια και το μέγεθος της προηγηθείσας ιστορίας του υλικού οδήγησε στην εισαγωγή των καταστατικών εσωτερικών μεταβλητών ($\boldsymbol{q_n}$), εκ των οποίων εξαρτάται η παραμόρφωση, τάση και

η θερμοκρασία. Αυτές οι εσωτερικές μεταβλητές είναι βαθμωτά μεγέθη, διανύσματα ή τανυστές. Κατά συνέπεια η παραμορφωσιακή κατάσταση ενός υλικού καθορίζεται από τις εξωτερικές μεταβλητές (οι οποίοι αποτελούν ελέγξιμα μεγέθη, όπως η τάση και η θερμοκρασία) και τις διάφορες εσωτερικές μεταβλητές, οι οποίες ορίζονται προς το προς μελέτη πρόβλημα.

Σύμφωνα με την μαθηματική θεωρία της πλαστικότητας ένα πλήρες καταστατικό μοντέλο περιλαμβάνει την συνάρτηση διαρροής (yield function) (f), το νόμο ροής (flow rule), τους κανόνες κράτυνσης (hardening rules) και το κριτήριο φόρτισης/αποφόρτισης (loading/unloading criterion). Στον γενικευμένο - πολυαξονικό χώρο των τάσεων ως επιφάνεια διαρροής (yield surface) ορίζεται η επιφάνεια η οποία περικλείει τον ελαστικό χώρο των τάσεων, ενώ το όριο της παριστά την εντατική κατάσταση του υλικού κατά την πλαστική ροή. Ο χώρος εκτός της επιφάνειας διαρροής δεν αντιστοιχεί σε κάποια από τις δυνατές εντατικές καταστάσεις. Η συνάρτηση διαρροής περιγράφει τον τύπο της επιφάνειας διαρροής και εξαρτάται από το εντατικό πεδίο ($\boldsymbol{\sigma}$) και τις διάφορες καταστατικές εσωτερικές μεταβλητές ($\boldsymbol{q}_n$), οι οποίες είναι υπεύθυνες για την μεταβολή της επιφάνειας διαρροής. Ο νόμος ροής προσδιορίζει το μέγεθος και την κατεύθυνση της μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης, ενώ στην περίπτωση ενός συζευγμένου νόμου ροής (associative flow rule) έχουμε σύνδεσή του με την συνάρτηση διαρροής. Οι κανόνες κράτυνσης περιγράφουν τον τρόπο μεταβολής της συνάρτησης διαρροής κατά την διάρκεια της πλαστικής ροής. Το κριτήριο φόρτισης/αποφόρτισης προσδιορίζει την πλαστική ροή, διακρίνοντας την περίπτωση της πλαστικής φόρτισης από τις περιπτώσεις της φόρτισης και ελαστικής αποφόρτισης εντός του ελαστικού χώρου και της ουδέτερης φόρτισης επί της επιφάνειας διαρροής. Το κριτήριο αυτό

περιγράφεται μέσω του δείκτη φόρτισης (loading index) (λ). Τέλος προκειμένου να ικανοποιηθεί η απαίτηση η τάση κατά την πλαστική φόρτιση να βρίσκεται επί της επιφάνειας διαρροής εισάγεται η συνθήκη συνεπείας (consistency condition).

Συνοπτικά, από τα ανωτέρω προκύπτουν οι ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις που συνθέτουν ένα καταστατικό μοντέλο ελαστο-πλαστικότητας, λαμβάνοντας υπόψη την παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων ($\varepsilon \leq 10\%$):

- Αθροιστική ανάλυση ρυθμού μεταβολής παραμόρφωσης: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ (2.1)
- Γενικευμένος Νόμος του Hooke: $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{E} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right)$ (2.2)
- Συνάρτηση διαρροής: $f\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q_n}\right) = 0$ (2.3)
- Νόμος ροής (συζευγμένος): $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \langle \lambda \rangle \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ (2.4)
- Κανόνες κράτυνσης: $\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{n}} = \langle \lambda \rangle \hat{\boldsymbol{q}}_n$ (2.5)
- Συνθήκη συνεπείας:

$$\dot{f}\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q_n}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}_n} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} (i) \quad \lambda = \dfrac{1}{K_p} \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} & (2.6) \\ (ii) \quad K_p = -\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}_n} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}_n & (2.7) \end{cases}$$

Όπου λ ο δείκτης φόρτισης (loading index) και K_p το πλαστικό μέτρο και $\hat{\boldsymbol{q}}_n = \hat{\boldsymbol{q}}_n\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}_n\right)$ οι συναρτήσεις μεταβολής των εσωτερικών μεταβλητών $\boldsymbol{q}_n$.

Επιπρόσθετα, από τις ανωτέρω μαθηματικές εκφράσεις δύναται ληφθεί η σχέση για τον ρυθμό μεταβολής της τάσης συναρτήσει του ρυθμού τροπών ως ακολούθως:

Από τις σχέσεις (2.2) και (2.6) προκύπτει: $$\lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}}{K_p + \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{E} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (2.8)$$

Επίσης, από τις σχέσεις (2.2) και (2.4) προκύπτει : $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{E} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle \lambda \rangle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)$ (2.9)

Άρα, η σχέση (2.9) με βάση την (2.8) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Lambda} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\boldsymbol{E} - H(\lambda) \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{E} \right) \otimes \left(\boldsymbol{E} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)}{K_p + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{E} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.10}$$

Όπου $\boldsymbol{\Lambda}$ το ελαστο-πλαστικό μέτρο και $H(\lambda)$η συνάρτηση βάρους ($H(\lambda) = 1$ για $\lambda > 0$ και $H(\lambda) = 0$ για $\lambda \neq 0$).

Σύμφωνα με το κριτήριο διαρροής von Mises, το οποίο χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της ανελαστικής συμπεριφοράς ισότροπων μεταλλικών υλικών, η επιφάνεια διαρροής περιγράφεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$f = \frac{3}{2} \boldsymbol{s} : \boldsymbol{s} - k^2 = 0 \tag{2.11}$$

Όπου $\boldsymbol{s}$ ο αποκλίνον τανυστής των τάσεων (deviatoric stress tensor) ο οποίος δίδεται από την έκφραση: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(tr\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}$ και k μία εσωτερική μεταβλητή η οποία εκφράζει το μέγεθος της επιφάνειας διαρροής (ελαστική περιοχή).

Η ανάπτυξη ανισοτροπίας σε ένα αρχικώς ισότροπο μεταλλικό υλικό συνδυάζεται με την εμφάνιση εσωτερικών τάσεων και εκφράζεται μακροσκοπικά μέσω της μετατόπισης και παραμόρφωσης της επιφάνειας διαρροής. Ειδικότερα, για την περίπτωση της μετατόπισης μόνο, εισάγεται στην συνάρτηση διαρροής ένας τανυστής εσωτερικών τάσεων $\boldsymbol{a}$ (back stress), ο οποίος περιγράφει την κινηματική κράτυνση, ενώ η ισοτροπική κράτυνση δύναται να περιγραφεί μέσω της μεταβολής της εσωτερικής μεταβλητής k. Συνεπώς η σχέση (2.11) μετατρέπεται ως ακολούθως:

$$f = \frac{3}{2}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a}):(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})-k^2 = 0 \tag{2.12}$$

2.3 Καταστατικά Μοντέλα Πλαστικότητας

Από την ανάλυση που προηγήθηκε συνάγεται ότι ένα καταστατικό μοντέλο πλαστικότητας βασίζει την λειτουργία του πρωτίστως στον κανόνα κινηματικής κράτυνσης και δευτερευόντως στον κανόνα ισοτροπικής κράτυνσης, επιλογή η οποία προκύπτει έπειτα από την αξιολόγηση των απαιτήσεων που διαθέτει το προς μελέτη πρόβλημα. Στο πλαίσιο αυτό έχει προταθεί μία πληθώρα μοντέλων κινηματικής κράτυνσης μεταλλικών υλικών, διαφόρων τύπων και επιπέδου πολυπλοκότητας. Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά και η μαθηματική διατύπωση των κανόνων κινηματικής και ισοτροπικής κράτυνσης που αποτέλεσαν την βάση για την ανάπτυξη του προτεινόμενου μοντέλου ανακυκλικής πλαστικότητας.

2.3.1 Κινηματική Κράτυνση

Κατά βάση οι περισσότεροι από τους κανόνες κινηματικής κράτυνσης αποτελούν γενικεύσεις του γραμμικού κανόνα κράτυνση που προτάθηκε από τους Prager [53] και Ishlinskii [36]. Ειδικότερα, σύμφωνα με το μοντέλο του Prager ο τανυστής κινηματικής κράτυνσης $\boldsymbol{a}$ (back stress) προκύπτει από την ολοκλήρωση της ακόλουθης έκφρασης:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{2}{3} h \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{2.13}$$

Όπου h παράμετρος του υλικού η οποία προσδιορίζει την κλίση του διαγράμματος τάσης – πλαστικής παραμόρφωσης ($\sigma \sim \varepsilon^p$).

Επίσης, η μονοαξονική εξίσωση της (2.13) δίδεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\dot{a} = h\dot{\varepsilon}^p \tag{2.14}$$

Επίσης, από την ικανοποίηση της συνθήκης συνεπείας $\dot{f} = 0$ (2.7) προκύπτει ότι το πλαστικό μέτρο K_p διαθέτει σταθερή τιμή:

$$K_p = \frac{2}{3}h \tag{2.15}$$

Μία από τις κύριες κατηγορίες μοντέλων κινηματικής κράτυνσης αποτελεί η κλάση των μοντέλων τα οποία στηρίζονται στον κανόνα κράτυνσης των Armstrong και Frederick [2], ή εν συντομία μοντέλο AF (Armstrong & Frederick), στην οποία εντάσσεται και το προτεινόμενο καταστατικό μοντέλο. Ουσιαστικά το μοντέλο AF αποτελεί την μετεξέλιξη του γραμμικού κανόνα κράτυνσης του Prager [53], σε ένα μη γραμμικό μοντέλο εξαλειφόμενης μνήμης (evanescent memory) ικανό να προσομοιώνει ρεαλιστικότερα το φαινόμενο Bauschinger.

Σύμφωνα με το μοντέλο AF η σχέση (2.13) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{2}{3}h\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p\boldsymbol{a} = \langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{2}{3}}c\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{h}{c}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}\right) = \langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{2}{3}}c\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a^s\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}\right) \tag{2.16}$$

Όπου h , c παράμετροι του υλικού και $a^s = h/c$. Σημειώνεται ότι ο όρος $\sqrt{2/3}a^s$ αποτελεί την τιμή κορεσμού (saturation value) του μέτρου της back stress $\boldsymbol{a}$.

Επίσης, ο τανυστής $\boldsymbol{n}$ είναι ο μοναδιαίος κάθετος τανυστής στην επιφάνεια διαρροής και δίδεται από την έκφραση:

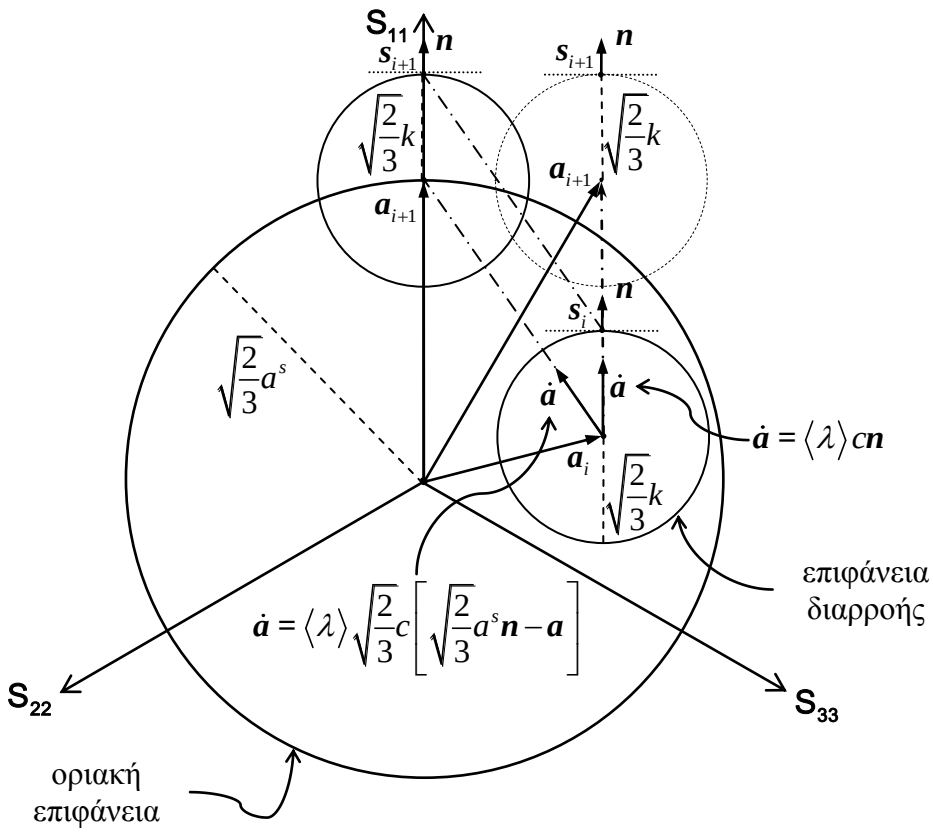
$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}}{|\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})}{k} \tag{2.17}$$

Η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^p$ προκύπτει από την έκφραση:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p = \sqrt{(2/3)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \tag{2.18}$$

Από την έκφραση (2.16) διαπιστώνει κανείς ότι η μη γραμμικότητα του εν λόγω κανόνα κράτυνσης προέρχεται από την δράση του όρου $-\langle\lambda\rangle\sqrt{2/3}c\boldsymbol{a}$ της υπόψη διαφορικής εξίσωσης, ο οποίος καλείται όρος δυναμικής ανάκτησης (dynamic recovery term).

Η διαφορετικού τύπου συμπεριφορά που διαθέτει στον πολυαξονικό χώρο των τάσεων ο γραμμικός κανόνας κινηματικής κράτυνσης του Prager σε σχέση με τον μη γραμμικό κανόνα AF παρίσταται γραφικά στο Σχήμα 2.6. Ειδικότερα, στο υπόψη σχήμα παρουσιάζεται η κίνηση που επιβάλλεται στην επιφάνεια διαρροής ($\dot{\boldsymbol{a}}$) από την εφαρμογή των δύο κανόνων κράτυνσης (γραμμικής και μη γραμμικής εξέλιξης), σε σχέση με την οριακή επιφάνεια (limiting surface) της back stress $\boldsymbol{a}$, η οποία προσδιορίζεται ως σφαίρα με ακτίνα ίση με την τιμή κορεσμού $\sqrt{2/3}a^s$.



Σχήμα 2.6 *Απεικόνιση της συμπεριφοράς των κανόνων κινηματικής κράτυνσης Armstrong & Frederick και Prager στον πολυαξονικό χώρο των τάσεων.*

Το πλαστικό μέτρο (plastic modulus) K_p για το μοντέλο AF, όπως προκύπτει επίσης μέσω εφαρμογής της συνθήκης συνεπείας (2.7), δίδεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$K_p = \sqrt{\frac{2}{3}}c\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a^s - \boldsymbol{a}:\boldsymbol{n}\right) \tag{2.19}$$

Από την πολυαξονική εξίσωση (2.16) δύναται να προκύψει, μέσω μετατροπής των τανυστών σε βαθμωτά μεγέθη, η μονοαξονική μορφή της:

$$\dot{a} = c\left(a^s \mp a\right)\dot{\varepsilon}^p \tag{2.20}$$

Σημειώνεται ότι από το πρόσημο $\mp$ στην σχέση (2.20) προκύπτει αντίστοιχα θετικός ή αρνητικός ρυθμός πλαστικής παραμόρφωσης (φόρτιση ή αποφόρτιση).

Αντίστοιχα, με βάση την σχέση (2.20), το μονοαξονικό πλαστικό μέτρο δίδεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$E^p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{da}{d\varepsilon^p} = c\left(a^s \mp a\right) \tag{2.21}$$

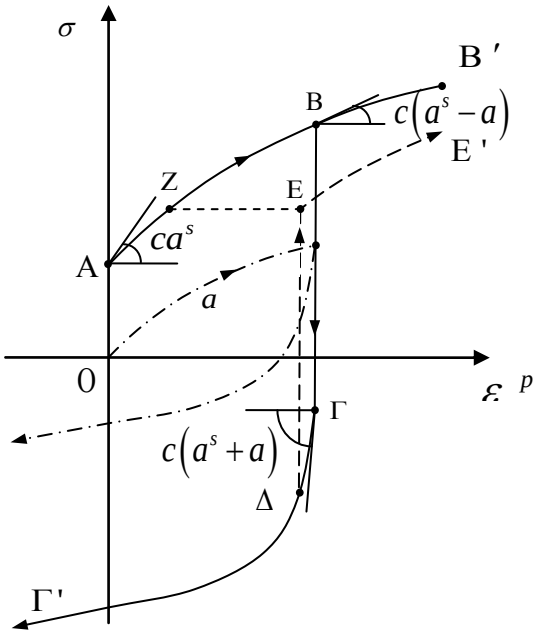
Ακόμη, από την επίλυση (ολοκλήρωση) της διαφορικής εξίσωσης (2.21) προκύπτει η αναλυτική έκφραση της μεταβολής της back stress a συναρτήσει της μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta\varepsilon^p$ ως ακολούθως:

$$a = \pm a^s\left(1 - me^{-c\Delta\varepsilon^p}\right) \tag{2.22}$$

Όπου $m = 1$ όταν $a = 0$ στο $\Delta\varepsilon^p = 0$ και $m = 2$ όταν $a = \mp a^s$ στο $\Delta\varepsilon^p = 0$. Το $\Delta\varepsilon^p$ είναι η μεταβολή της πλαστικής παραμόρφωσης κατά την εκκίνηση της φόρτισης από οποιαδήποτε αρχική τιμή a και διαθέτει πάντοτε θετική τιμή. Επίσης, από την σχέση αυτή προκύπτει ότι $a = \pm a^s$ όταν $\Delta\varepsilon^p \to \infty$ (ασυμπτωτικά).

Εξετάζοντας την μονοαξονική μορφή του μοντέλου AF εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για την λειτουργία του όρου δυναμικής ανάκτησης (dynamic

recovery term). Συγκεκριμένα, ο όρος αυτός προσδίδει τη δυνατότητα στην back stress a να μειώνεται με μεγαλύτερο ρυθμό κατά την αποφόρτιση, απ' όσο αυξάνεται κατά την φόρτιση, όπως χαρακτηριστικά διακρίνεται στο Σχήμα 2.7 για την περίπτωση μονοαξονικής ανακυκλικής καταπόνησης. Ειδικότερα, όταν $a = 0$ η κλίση (πλαστικό μέτρο) είναι $E^p = ca^s$ και όσο το a εξελίσσεται κατά την διαδρομή AZBB' το πλαστικό μέτρο γίνεται $E^p = c\left(a^s - a\right)$ έως ότου λάβει την τιμή κορεσμού (saturation) του για $a = a^s$, όπου $E^p = 0$ (δεν εμφανίζεται στο Σχήμα 2.7). Κατά την αποφόρτιση/επαναφόρτιση στην διαδρομή ΒΓΔΓ' το πλαστικό μέτρο λαμβάνει την τιμή $E^p = c\left(a^s + a\right)$. Εάν η αποφόρτιση λάβει χώρα όταν το a έχει ήδη κορεσθεί, δηλ. $a = a^s$, τότε κατά την εκκίνηση της επαναφόρτισης έχουμε $E^p = 2ca^s$. Αυτή ακριβώς η αυξημένη τιμή του πλαστικού μέτρου κατά την επαναφόρτιση επιτρέπει την ρεαλιστικότερη προσομοίωση του βρόγχου υστέρησης κατά την ελαστοπλαστική καταπόνηση, σε σχέση με το μοντέλο του Prager.



Σχήμα 2.7 *Απεικόνιση της συμπεριφοράς του μοντέλου AF σε μονοαξονική ανακυκλική καταπόνηση [15].*

Η κύρια αδυναμία του μοντέλου AF είναι η αποτυχία προσομοίωσης του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), η οποία σχετίζεται με την απόκριση που διαθέτει στην περίπτωση της μερικής αποφόρτισης/ επαναφόρτισης, όπως χαρακτηριστικά απεικονίζεται στην καμπύλη ΒΓΔΕΕ' του Σχήματος 2.7.

Οι αδυναμίες του μοντέλου AF οδήγησαν στη πρόταση από τον Chaboche, Dang-Van και Cordier [8] και τον Chaboche και Rousselier [9] για την αθροιστική ανάλυση του τανυστή κινηματικής κράτυνσης $\boldsymbol{a}$ σε επιμέρους τανυστές $\boldsymbol{a}_i$ οι οποίοι υπακούουν με την σειρά τους στον κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF, δηλαδή:

$$\boldsymbol{a} = \sum_i \boldsymbol{a}_i \tag{2.23}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} c_i \left(a_i^s \boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_i \right) \tag{2.24}$$

Όπου c_i και a_i^s οι παράμετροι των επιμέρους back stresses. Σημειώνεται ότι ο τανυστής $a_i^s \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_i^s$ πρακτικά είναι η τιμή κορεσμού (saturation) της back stress $\boldsymbol{a}_i$, ενώ αντίστοιχα η παράμετρος c_i ελέγχει τον ρυθμό εξέλιξης της back stress $\boldsymbol{a}_i$ έως ότου να λάβει την τιμή κορεσμού της.

Για λόγους τυποποίησης και συντομίας το εν λόγω μοντέλο καλείται εφεξής μοντέλο πολλαπλών αθροιζόμενων παραγόντων AF (Multi-component AF, MAF). Το βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου MAF έγκειται στην δυνατότητά να κατανέμονται διαφορετικοί 'ρόλοι' σε κάθε μία από τις back stresses (μέσω κατάλληλης επιλογής των παραμέτρων c_i και a_i^s) με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται ρεαλιστικότερη προσομοίωση των ανακυκλικών καμπύλων τάσης - παραμόρφωσης. Ωστόσο, το εν λόγω μοντέλο εξακολουθεί να επηρεάζεται από την κύρια αδυναμία του κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF (στην περίπτωση της μερικής

αποφόρτισης/επαναφόρτισης), με αποτέλεσμα να μην είναι ικανοποιητική η απόδοσή του στην προσομοίωση του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting).

Ακόμη, από τις πολυαξονικές εξισώσεις (2.23) και (2.24) προκύπτουν, οι αντίστοιχες μονοαξονικές σχέσεις για το μοντέλο MAF:

$$a = \sum_i a_i \tag{2.25}$$

$$\dot{a}_i = c_i \left(a_i^s \mp a_i \right) \dot{\varepsilon}^p \tag{2.26}$$

Ενώ το πλαστικό μέτρο στην περίπτωση αυτή δίδεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$E^p = \sum_i c_i \left(a_i^s \mp a_i \right) \tag{2.27}$$

Στο πλαίσιο βελτίωσης της απόδοσης του προαναφερθέντος μοντέλου (MAF) έχουν κατά καιρούς προταθεί διάφορες τροποποιήσεις του βασικού μοντέλου AF [33] [27] [11] [51]. Οι τροποποιήσεις αυτές του κανόνα κράτυνσης AF σχετίζονται κατά κύριο λόγο με την μη-γραμμική εξέλιξη της back stress, την εισαγωγή όρου κατωφλίου (threshold) στην εξίσωση εξέλιξης ή την εξάρτηση των παραμέτρων από την συσσωρευόμενη πλαστική παραμόρφωση (cumulative plastic strain). Προκειμένου να κατανοηθεί καλύτερα η σπουδαιότητα των διαφόρων τροποποιήσεων - βελτιώσεων που έχουν κατά καιρούς προταθεί για το μοντέλο MAF, όπως επίσης και ο στόχος της υπόψη έρευνας κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν ορισμένα στοιχεία τα οποία περιγράφουν τον ρόλο και την συνεισφορά της κινηματικής κράτυνσης στην απόδοση ενός πολυαξονικού μοντέλου πλαστικότητας. Η κινηματική κράτυνση, όπως συμβαίνει και για τα υπόλοιπα είδη κράτυνσης, επιδρά άμεσα στην τιμή του πλαστικού μέτρου. Σε μονοαξονικές Ανακυκλικές καταπονήσεις, ή όπως γενικά αναφέρονται, στις ακτινικές αναλογικές

φορτίσεις (radial proportional loadings), η τιμή του πλαστικού μέτρου είναι ο κύριος παράγοντας για την επιτυχή προσομοίωση του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting). Στην περίπτωση των φορτίσεων αυτών η "κατεύθυνση" της κίνησης της επιφάνειας διαρροής δεν διαδραματίζει κανέναν ρόλο καθόσον οι οποιεσδήποτε επιλογές πρέπει να καταλήγουν στην ίδια ακτινικού τύπου κίνηση. Ωστόσο, όταν η φόρτιση είναι μη-αναλογική (non-proportional loading), όπως συμβαίνει στην περίπτωση του διαξονικού ανακυκλικού ερπυσμού (biaxial ratcheting), η κατεύθυνση της κινηματικής κράτυνσης διαδραματίζει, κατά τα αναμενόμενα, ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην προσομοίωση των διαξονικών δεδομένων, σε συνδυασμό πάντα με την συνεισφορά του πλαστικού μέτρου, καθόσον επιδρά άμεσα στην κατεύθυνση του συναρτώμενου από την καθετότητα ($\boldsymbol{n}$) του ρυθμού της πλαστικής παραμόρφωσης ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$).

Μεταξύ των σημαντικών τροποποιήσεων δύναται να ενταχθεί η πρόταση από τον Chaboche [11] για εισαγωγή ενός επιπλέον κανόνα κινηματικής κράτυνσης ο οποίος διαθέτει έναν όρο δυναμικής ανάκτησης (dynamic recovery term) ελεγχόμενο από μία τιμή κατωφλίου (threshold). Ειδικότερα το μοντέλο MAF τροποποιείται ως εξής με την προσθήκη του υπόψη κανόνα κινηματική κράτυνσης:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i}^{m-1} \boldsymbol{a}_i \text{ , με } m > 1 \tag{2.28}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} c_i \left(a_i^s \boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_i \right) \quad (i = 1, 2, ..., m-1) \tag{2.29}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_m = \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} c_m \left(a_m^s \boldsymbol{n} - \left\langle 1 - \frac{\bar{a}_m}{f\left(\boldsymbol{a}_m\right)} \right\rangle \boldsymbol{a}_m \right) \tag{2.30}$$

Όπου: $f\left(\boldsymbol{a}_m\right) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{a}_m : \boldsymbol{a}_m}$ (2.31)

Ενώ $\bar{a}_m$ η παράμετρος του όρου κατωφλίου (threshold term) με διαστάσεις τάσης. Σημειώνεται επίσης ότι: $\langle x \rangle = x$, για $x > 0$ και $\langle x \rangle = 0$, για $x \leq 0$ (McCauley brackets).

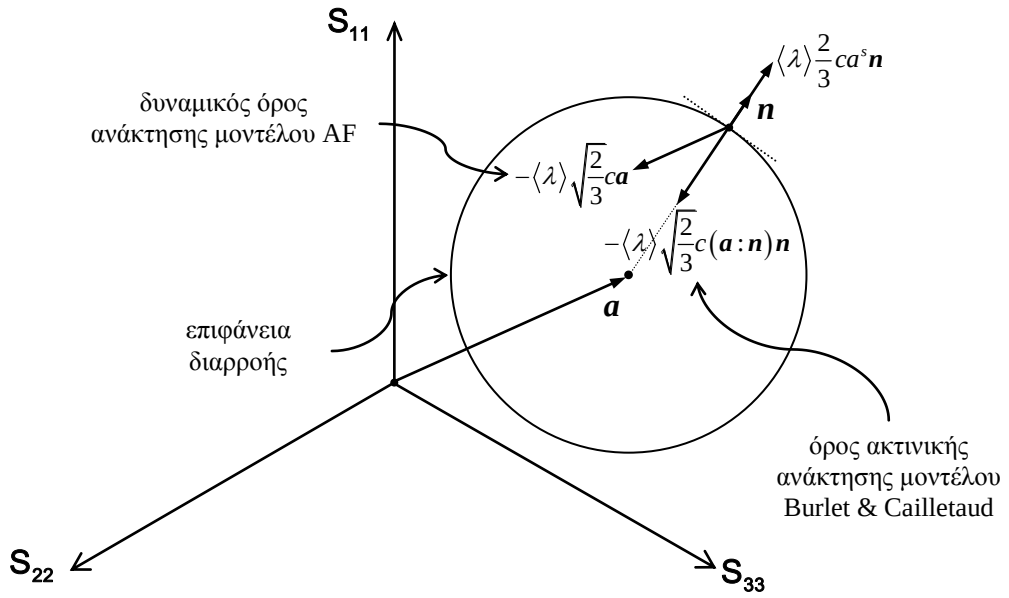
Το εν λόγω μοντέλο καλείται εφεξής μοντέλο MAFT (Multi-component AF with Threshold term). Με χρήση της επιπρόσθετης back stress επιτυγχάνεται βελτίωση της προσομοίωσης των μερικών αποφορτίσεων/επαναφορτίσεων και του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) συνακολούθως. Η ευεργετική δράση του όρου κατωφλίου (threshold term) έγκειται στην συνδυασμένη του δράση, αρχικά γραμμικού τύπου κανόνα κινηματικής κράτυνσης και κατόπιν ως μη γραμμικού κανόνα, επιτρέποντας κατ' αυτό τον τρόπο διαφοροποίηση της συμπεριφοράς του μοντέλου στις διάφορες φάσεις της ανακυκλικής καταπόνησης. Ειδικότερα η ανωτέρω συμπεριφορά εξηγείται αναλυτικότερα με βάση την μονοαξονική μορφή του εν λόγω μοντέλου, όπως αυτή προκύπτει από την σχέση (2.26):

$$\dot{a} = c\left(a^s \mp (\operatorname{sgn} a)\langle |a| - \bar{a} \rangle\right)\dot{\varepsilon}^p \tag{2.32}$$

Από την σχέση (2.32) παρατηρείται ότι όταν $|a| - \bar{a} \leq 0$ λαμβάνεται η γραμμική σχέση εξέλιξης της back stress $\dot{a} = ca^s\dot{\varepsilon}^p$, ενώ όταν $|a| - \bar{a} \geq 0$ η εξίσωση ακολουθεί την εξέλιξη του κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF για την 'υπερβάλλουσα' (πέραν του κατωφλίου) back stress $a - \bar{a}$, καθώς ο ρυθμός εξέλιξης της ισούται με τον ρυθμό εξέλιξης της back stress a. Στην δεύτερη περίπτωση προκύπτει ότι το a^s είναι η τιμή κορεσμού της 'υπερβάλλουσας' back stress $a - \bar{a}$, κατά συνέπεια η back stress a φθάνει στο σημείο κορεσμού $a^s + \bar{a}$ αφού φθάσει στο $\bar{a}$ εξελισσόμενη γραμμικά.

Μία παρόμοια έννοια προς αυτή του όρου κατωφλίου (threshold term) του Chaboche [11], προτάθηκε και από τους Ohno και Wang [51] – η οποία δεν παρουσιάζεται στην παρούσα μελέτη, με στόχο την απενεργοποίηση ή μείωση του όρου δυναμικής ανάκτησης (dynamic recovery term) για συγκεκριμένες τιμές (επίπεδα) τάσης και κατευθύνσεις φόρτισης.

Ένας εναλλακτικός τρόπος επέμβασης στον όρο δυναμικής ανάκτησης του μοντέλου AF προτάθηκε από τους Burlet και Cailletaud, με την εισαγωγή του όρου ακτινικής εξάλειψης (radial recovery term) [6]. Ο υπόψη κανόνας κινηματικής κράτυνσης αποτελεί προϊόν ανάλυσης πολυαξονικών πειραματικών αποτελεσμάτων ανακυκλικού ερπυσμού.



Σχήμα 2.8 *Απεικόνιση της συμπεριφοράς του όρου δυναμικής ανάκτησης (dynamic recovery term) του μοντέλου AF και του όρου ακτινικής ανάκτησης (radial recovery term) του μοντέλου Burlet & Cailletaud στον πολυαξονικό χώρο των τάσεων.*

Στο Σχήμα 2.8 αναπαρίσταται η δράση του κλασσικού όρου δυναμικής ανάκτησης (dynamic recovery term) του μοντέλου AF, $-\langle\lambda\rangle\sqrt{2/3}c\boldsymbol{a}$, όπως επίσης

και του όρου ακτινικής ανάκτησης (radial recovery term), $-\langle\lambda\rangle\sqrt{2/3}c(\boldsymbol{a}:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$, του μοντέλου Burlet & Cailletaud. Με την τροποποίηση αυτή επιβάλλεται η μεταβολή της κατεύθυνσης του τανυστή $\boldsymbol{a}$ που υπεισέρχεται στον όρο δυναμικής ανάκτησης του μοντέλου AF κατά την διεύθυνση του κάθετου μοναδιαίου τανυστή $\boldsymbol{n}$. Κατά συνέπεια, το τροποποιημένο μοντέλο μη γραμμικής κράτυνσης (AF) που προκύπτει δεν εμφανίζει το φαινόμενο του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), κατ' αναλογία με τον γραμμικό κανόνα κράτυνσης κατά Prager [6].

Στην βάση του κανόνα κινηματικής κράτυνσης των Burlet και Cailletaud προτάθηκε εν συνεχεία από τους Delobelle, Robinet και Bocher [20] ένα νέο μοντέλο, χάριν συντομίας μοντέλο BCD (Burlet, Cailletaud & Dellobelle), το οποίο εκφράζεται από τις ακόλουθες μαθηματικές σχέσεις:

$$\boldsymbol{a} = \sum_i \boldsymbol{a}_i \tag{2.33}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{2}{3}}c_i\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}a_i^s\boldsymbol{n} - \left[\delta\boldsymbol{a}_i + (1-\delta)(\boldsymbol{a}_i:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right]\right\} \tag{2.34}$$

Όπου δ μία αριθμητική παράμετρος ελέγχου των τιμών του όρου δυναμικής ανάκτησης. Ειδικότερα, για:

α) $\delta = 1$ προκύπτει ο συνήθης όρος δυναμικής ανάκτησης του μοντέλου AF.

β) $\delta = 0$ λαμβάνεται ο όρος ακτινικής εξάλειψης, σύμφωνα με τον κανόνα κινηματικής κράτυνσης των Burlet και Cailletaud.

γ) $0 < \delta < 1$ το μοντέλο κινηματικής κράτυνσης βρίσκεται μεταξύ των δύο κανόνων (AF και Burlet & Cailletaud), με την παράμετρο δ να δρα ως σταθμιστής. Παρατηρεί κανείς ότι ενώ ο κανόνας αυτός διαφοροποιεί την κατεύθυνση της κινηματικής κράτυνσης (εκτός της περίπτωσης που έχει επιλεγεί $\delta = 1$), δεν

μεταβάλει αντίστοιχα την τιμή του πλαστικού μέτρου σε σχέση με αυτό που προκύπτει από τον κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF. Το χαρακτηριστικό αυτό επιτρέπει στο μοντέλο BCD να αποδίδει βελτιωμένες, σε σχέση με τα προαναφερθέντα μοντέλα, προσομοιώσεις σε περιπτώσεις πολυαξονικών καταπονήσεων, δίχως αντίστοιχα να επιδρά αρνητικά στην προσομοίωση των μονοαξονικών περιπτώσεων.

Ωστόσο, όπως καταδείχθηκε από τον Dafalias και Feigenbaum [19], το συγκεκριμένο μοντέλο διαθέτει μία εγγενή αδυναμία η οποία δύναται θεωρητικά και υπό προϋποθέσεις να οδηγήσει ορισμένους ή όλους τους τανυστές κινηματικής κράτυνσης $\boldsymbol{a}_i$ να κινηθούν εκτός των επιτρεπόμενων ορίων τους, όπως αυτά προσδιορίζονται από τις τιμές κορεσμού τους, με συνέπεια το πλαστικό μέτρο να λαμβάνει αρνητικές τιμές και το υλικό να εμφανίζει ανεπιθύμητη συμπεριφορά χαλάρωσης (softening). Η αδυναμία αυτή επιβάλλει τον περιορισμό των τιμών της παραμέτρου δ εντός του διαστήματος $0,5 \le \delta \le 1,0$, γεγονός το οποίο πρακτικά μειώνει την απόδοση του μοντέλου καθόσον η βέλτιστη λειτουργία του επιτυγχάνεται για τιμές μικρότερες $\delta < 0,5$ [4].

Ως λύση για την άμβλυνση της θεωρητικής αδυναμίας που διαθέτει το μοντέλο BCD, προτάθηκε από τον Dafalias και Feigenbaum [19] η αντικατάσταση της σταθερής αριθμητικής παραμέτρου δ από την παράμετρο r_i η οποία δίδεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$r_i = \frac{\sqrt{(3/2)\boldsymbol{a}_i : \boldsymbol{a}_i}}{a_i^s} \tag{2.35}$$

Διατηρώντας ως έχει την σχέση (2.33), η σχέση (2.34) μετατρέπεται ως εξής:

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} c_i \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} a_i^s \boldsymbol{n} - \left[r_i \boldsymbol{a}_i + \left(1 - r_i\right)\left(\boldsymbol{a}_i : \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} \right] \right\} \tag{2.36}$$

Η παράμετρος r_i, η οποία μετρά την 'απόσταση' του τανυστή κινηματικής κράτυνσης $\boldsymbol{a}_i$ από την τιμή κορεσμού του $\sqrt{2/3} a_i^s \boldsymbol{n}$, κινείται εντός του διαστήματος $0 < r_i < 1$ χωρίς ωστόσο να δημιουργείται ασυνέπεια καθώς αυτή λαμβάνει την τιμή 1 όταν $\boldsymbol{a}_i = \sqrt{2/3} a_i^s \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_i^s$, με αποτέλεσμα το συγκεκριμένο μοντέλο να μετατρέπεται σε μοντέλο MAF, αποτρέποντας κατ' αυτό τον τρόπο την υπέρβαση των επιτρεπόμενων ορίων της περιβάλλουσας επιφάνειας (τιμή κορεσμού). Το εν λόγω μοντέλο εν συντομία κωδικοποιείται ως BCDr (BCD with r term), με το r να προσδιορίζει την παράμετρο r_i που εισάγεται στο εν λόγω μοντέλο.

2.3.2 Ισοτροπική Κράτυνση

Η συνδυασμένη χρήση κανόνων κινηματικής και ισοτροπικής κράτυνσης δίδει την δυνατότητα για ταυτόχρονη κίνηση και μεταβολή του μεγέθους της ελαστικής περιοχής (επιφάνεια διαρροής), επιτρέποντας την ρεαλιστική προσομοίωση του φαινομένου της ανακυκλικής κράτυνσης (hardening) ή χαλάρωσης (softening) υπό συμμετρικές καταπονήσεις [Σχήμα 2.3(α) και 2.4(α) αντίστοιχα], με εφαρμογή κυρίως στις περιπτώσεις ανακυκλικών καταπονήσεων που διενεργούνται με αργό ρυθμό επιβολής της τάσης ή της παραμόρφωσης.

Ο κανόνας κινηματικής κράτυνσης ο οποίος χρησιμοποιείται συνηθέστερα στα μοντέλα ανακυκλικής πλαστικότητας δίδεται από την ακόλουθη μαθηματική έκφραση [15]:

$$\dot{k} = c_k \left(k^s - k\right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p \tag{2.37}$$

Όπου k^s η παράμετρος κορεσμού (saturation) του k και c_k η παράμετρος ελέγχου του ρυθμού εξέλιξης του k. Επίσης, το μέγεθος $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p$ αναφέρεται στον ρυθμό της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης (rate of accumulated plastic strain) ο οποίος δίδεται από την έκφραση:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p = \sqrt{(2/3)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \tag{2.38}$$

Η τιμή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^p$ ευρίσκεται με ολοκλήρωση της σχέσης (2.38).

Για την περίπτωση μονοαξονικών καταπονήσεων η σχέση (2.37) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{k} = c_k \left(k^s - k\right)\left|\dot{\varepsilon}^p\right| \tag{2.39}$$

Σημειώνεται ότι η σχέση (2.37) αντιστοιχεί στην περίπτωση των υλικών που επιδεικνύουν ανακυκλική κράτυνση (εφόσον $k^s > k$), καθόσον η τιμή του k αυξάνεται έως ότου να λάβει την τιμή κορεσμού k^s. Με βάση την υπόψη έκφραση προκύπτει ότι η ομοιόμορφη διόγκωση της επιφάνειας διαρροής εκτελείται με εκθετικό τρόπο, ανάλογο προς την περίπτωση του κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF (κατόπιν ολοκλήρωσης της διαφορικής αυτής εξίσωσης). Επίσης διαπιστώνεται ότι όταν το k λάβει την τιμή κορεσμού του k^s τότε το υλικό παύει να υπακούει στο κανόνα ισοτροπικής κράτυνσης και υπόκειται μόνο κινηματική κράτυνση. Παρατηρείται ακόμη ότι εάν $k^s < k$, η σχέση (2.37) εκφράζει ισοτροπική αποχαλάρωση (softening) με το k να μειώνεται συνεχώς μέχρι να φθάσει την τιμή κορεσμού k^s (το $k^s - k < 0$, άρα $\dot{k} < 0$).

Εναλλακτικά, η ισοτροπική κράτυνση είναι δυνατόν να συνδυασθεί με τον κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF [σχέση (2.20)] μέσω μετασχηματισμού των παραμέτρων c και a^s σε συναρτήσεις εξαρτώμενες από την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{p}$. Στην περίπτωση αυτή η ανακυκλική κράτυνση προκύπτει είτε από μία αύξουσα συνάρτηση $a^s = a^s\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{p}\right)$, είτε από μία φθίνουσα συνάρτηση $c = c\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{p}\right)$. Δεδομένου ότι η εν λόγω μέθοδος δεν τυγχάνει εκτεταμένης χρήσης στα διάφορα μοντέλα ανακυκλικής πλαστικότητας δεν αναλύεται περαιτέρω στην υπόψη μελέτη.

Κεφάλαιο 3

Ανάπτυξη του Προτεινόμενου Μοντέλου Πλαστικότητας

3.1 Βασική Ιδέα

Η κινηματική κράτυνση έχει άμεση επίδραση στην τιμή του πλαστικού μέτρου, όπως συμβαίνει και για οποιαδήποτε από τις μορφές κράτυνσης. Στην περίπτωση των μονοαξονικών ανακυκλικών καταπονήσεων [ή γενικότερα των ακτινικών αναλογικών (proportional) φορτίσεων], η τιμή του πλαστικού μέτρου αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα για την επιτυχή προσομοίωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), δεδομένου ότι η κατεύθυνση της κίνησης της επιφάνειας διαρροής, παραμένει αμετάβλητη, ανεξάρτητα από τις όποιες επιλογές, υπακούοντας στην μονοαξονική (ακτινική) κίνηση που επιβάλλεται από την υπόψη φόρτιση. Ωστόσο, όταν οι φορτίσεις είναι μη αναλογικές (non proportional) (περίπτωση πολυαξονικής καταπόνησης), η κατεύθυνση της κινηματικής κράτυνσης διαδραματίζει, κατά τα αναμενόμενα, σημαντικό ρόλο στην προσομοίωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), σε συνδυασμό με την επιρροή του πλαστικού μέτρου, λόγω της άμεσης επίδρασης που διαθέτει στην κατεύθυνση του ρυθμού πλαστικής παραμόρφωσης, δηλαδή στην αναλογία μεταξύ των διαφόρων συνιστωσών του ρυθμού της ανηγμένης πλαστικής παραμόρφωσης. Συνεπώς, είναι αντιληπτό ότι κατά την διαμόρφωση ενός κανόνα κινηματικής κράτυνσης κατάλληλου να προσομοιώσει με επιτυχία τον ανακυκλικό ερπυσμό σε πολυαξονικές φορτίσεις (multiaxial ratcheting) θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην εκλογή ενός κατάλληλου τρόπου

μεταβολής τόσο της τιμής του πλαστικού μέτρου, όσο και της κατεύθυνσης μεταβολής της κινηματικής κράτυνσης (back stress).

Σύμφωνα με την σχέση (2.16), η οποία περιγράφει τον κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF, η παράμετρος c, η οποία ελέγχει τον ρυθμό προσέγγισης της back stress $\boldsymbol{a}$ στην τιμή κορεσμού της $\boldsymbol{a}^s = \sqrt{2/3}a^s\boldsymbol{n}$, διαθέτει σταθερή τιμή. Κατ' επέκταση, το πλαστικό μέτρο K_p, για το ίδιο μοντέλο, [σχέση (2.19)] διαθέτει ισχυρή εξάρτηση από την επιλεγόμενη τιμή της παραμέτρου c, γεγονός το οποίο δρα περιοριστικά στην ρεαλιστική απόδοση των μελετώμενων φαινομένων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το εν λόγω πρόβλημα αμβλύνεται με την αθροιστική υπέρθεση πολλαπλών back stresses $\boldsymbol{a}_i$ τύπου AF, λύση η οποία παρέχει ευελιξία στην επιλογή των επιμέρους παραμέτρων c_i (όπως και a_i^s), άρα και δυνατότητα για επίτευξη βελτιωμένων προσομοιώσεων. Εναλλακτικά, ανάλογο αποτέλεσμα θα ήταν δυνατόν να ληφθεί με κατάλληλη διαφοροποίηση της τιμής της παραμέτρου c ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της υπό μελέτη πλαστικής συμπεριφοράς (π.χ. επίτευξη πολύ υψηλού πλαστικού μέτρου κατά την ομαλή ελαστοπλαστική μετάβαση, με εν συνεχεία σταδιακή μείωση η οποία θα καταλήγει σε ασυμπτωτικού τύπου εξέλιξη).

Οι διάφοροι τρόποι που έχουν προταθεί για την διαφοροποίηση της τιμής των παραμέτρων του μοντέλου AF, στο πλαίσιο βελτίωσης των προσομοιώσεων του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), συνίστανται κατά κύριο λόγο στην ενίσχυση της μη-γραμμικότητας της ίδιας της back stress, την εφαρμογή ενός σχήματος κατωφλίου (threshold) ή την εξάρτηση των παραμέτρων από το μέτρο της συσσωρευόμενης πλαστικής παραμόρφωσης [11] [26] [27] [50]. Η βασική ιδέα του προτεινόμενου μοντέλου στηρίζεται επί της αρχής της μετατροπής της σταθερής

παραμέτρου c, του μοντέλου AF, σε μεταβλητή, η οποία ωστόσο δεν αποτελεί συνάρτηση της συσσωρευόμενης πλαστικής παραμόρφωσης, όπως έχει ήδη προταθεί από άλλους ερευνητές, λόγω της ανεπαρκούς απόδοσης της συμπεριφοράς του υλικού κατά την επαναφόρτιση (reverse loading), καθόσον τότε δεν αλλάζει άμεσα η ήδη αλλαχθείσα παράμετρος c. Για τον λόγο αυτό, η μεταβολή της παραμέτρου c επιλέχθηκε να εξαρτάται από την κατεύθυνση της φόρτισης, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση της back stress $\boldsymbol{a}$, η οποία εξελίσσεται με βάση την εξίσωση AF. Εισάγεται λοιπόν ένας αδιάστατος 'κατευθυντικός' τανυστής κράτυνσης (directional hardening tensor) $\boldsymbol{a}^*$ ο οποίος ακολουθεί την εξίσωση εξέλιξης τύπου AF κατ' αντιστοιχία με την πολυαξονική εξίσωση εξέλιξης της back stress $\boldsymbol{a}$ (2.16), δηλαδή:

$$\dot{\boldsymbol{a}}^* = \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} c^* \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a^{*s} \boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}^* \right) \tag{3.1}$$

Όπου c^* και a^{*s} παράμετροι του υλικού.

Εν συνεχεία, υποτίθεται ότι η παράμετρος c που υπεισέρχεται στην εξίσωση (2.16) της back stress $\boldsymbol{a}$ δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από την προβολή του 'κατευθυντικού' τανυστή κράτυνσης $\boldsymbol{a}^*$ ως προς τον κάθετο μοναδιαίο τανυστή $\boldsymbol{n}$, δηλαδή:

$$c = c\left(\boldsymbol{a}^* : \boldsymbol{n}\right) \tag{3.2}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέση (3.1) και (3.2) στην (2.16) προκύπτει η εξίσωση εξέλιξης του τροποποιημένου μοντέλου AF:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} c\left(\boldsymbol{a}^* : \boldsymbol{n}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}} a^s \boldsymbol{n} - \boldsymbol{a} \right) = \langle \lambda \rangle \left[\sqrt{\frac{2}{3}} c + c^* \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a^{*s} - \boldsymbol{a}^* : \boldsymbol{n} \right) \right] \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a^s \boldsymbol{n} - \boldsymbol{a} \right) \tag{3.3}$$

Ομοίως, η εξίσωση (2.19) του πλαστικού μέτρου K_p (μοντέλο AF) μετατρέπεται ως εξής για το τροποποιημένο μοντέλο AF:

$$K_p = \left[\sqrt{\frac{2}{3}} c + c^* \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a^{*s} - \boldsymbol{a}^* : \boldsymbol{n} \right) \right] \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a^s - \boldsymbol{a} : \boldsymbol{n} \right) \tag{3.4}$$

Παρατηρώντας κανείς την σχέση (3.4) συμπεραίνει ότι εν αντιθέσει προς την αθροιστική υπέρθεση των τανυστών κινηματικής κράτυνσης [8], στο εν λόγω μοντέλο η επίδραση της υπέρθεσης των ιδίων τανυστών εκτελείται με πολλαπλασιαστικό τρόπο (multiplicative decomposition). Η βασική συμπεριφορά της εξίσωσης εξέλιξης του πλαστικού μέτρου [σχέση (3.4)] εξετάζεται λαμβάνοντας τις εξής διακριτές περιπτώσεις για τους επιμέρους τανυστές:

- Όταν $\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} = 0$ και $\boldsymbol{a}^* = 0$, τότε: $K_p = \frac{2}{3}\left(c + c^* a^{*s}\right) a^s$

  Η τιμή αυτή του πλαστικού μέτρου είναι η μεγίστη τιμή που δύναται να λάβει.

- Όταν $\boldsymbol{a}^* \to \sqrt{\frac{2}{3}} a^{*s} \boldsymbol{n}$, τότε: $K_p = \sqrt{\frac{2}{3}} c \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a^s - \boldsymbol{a} : \boldsymbol{n} \right)$

  Έπειτα από τον κορεσμό (saturation) του τανυστή $\boldsymbol{a}^*$ το πλαστικό μέτρο εξελίσσεται πλέον με βάση την εξίσωση του τανυστή της back stress $\boldsymbol{a}$.

- Όταν $\boldsymbol{a}^* = \sqrt{\frac{2}{3}} a^{*s} \boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{a} \to \sqrt{\frac{2}{3}} a^s \boldsymbol{n}$, τότε: $K_p = 0$

  Μετά τον κορεσμό του τανυστή $\boldsymbol{a}^*$, ο τανυστής της back stress $\boldsymbol{a}$ προσεγγίζει το δικό του επίπεδο κορεσμού αντίστοιχα, επιφέροντας τελικώς τον μηδενισμό της τιμής του πλαστικού μέτρου.

Από την παραπάνω παρουσίαση προκύπτει ότι η εξίσωση (3.3) του ‘πολλαπλασιαστικού’ τύπου μοντέλου AF δύναται να υποκαταστήσει το μοντέλο

αθροιστικής υπέρθεσης με δύο όρους κινηματικής κράτυνσης AF. Ωστόσο, η χρήση δύο μόνο back stresses τύπου AF, αναφερόμενοι είτε στο μοντέλο αθροιστικής, είτε πολλαπλασιαστικής υπέρθεσης, έχει αποδειχθεί ότι δεν επαρκεί να προσομοιώσει επιτυχώς σύνθετα φαινόμενα ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς υπό Ανακυκλικές μονοαξονικές και πολυαξονικές καταπονήσεις, όπως το φαινόμενο του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) [3]. Συγκεκριμένα, στις περισσότερες περιπτώσεις εφαρμογής μοντέλων αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται τέσσερεις ή και περισσότεροι αθροιζόμενοι κανόνες AF (στην βασική τους μορφή ή τροποποιήσεις αυτών).

Συνεπώς, το προτεινόμενο 'πολλαπλασιαστικό' σχήμα, στην απλή του μορφή, δεν δύναται να αξιοποιηθεί ως ένα πλήρες μοντέλο πλαστικότητας, αλλά, όπως παρουσιάζεται και στην συνέχεια, καλείται, με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που διαθέτει, να βελτιώσει ορισμένες από τις αδυναμίες του μοντέλου αθροιστικής ανάλυσης, σε συνδυασμό με τις υπόλοιπες αθροιζόμενες back stresses. Σημειώνεται ότι ένα ακόμη πλεονέκτημα της αθροιστικής υπέρθεσης back stresses, σχετιζόμενο με την επιτυχή προσομοίωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), είναι η δυνατότητα εισαγωγής ενός γραμμικού, ή σχεδόν γραμμικού, κανόνα κινηματικής κράτυνσης (back stress), ο οποίος αμβλύνει σε σημαντικό βαθμό τον ρυθμό συσσώρευσης της πλαστικής παραμόρφωσης, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα την αισθητή βελτίωση των προβλέψεων του μοντέλου [10].

3.2 Μονοαξονική Διαμόρφωση του Μοντέλου

Όπως αναφέρθηκε, το προτεινόμενο καταστατικό μοντέλο πλαστικότητας βασίζεται στον κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF, με την εφαρμογή της αθροιστικής υπέρθεσης επιμέρους κανόνων κινηματικής κράτυνσης (back stresses)

[8] να αποτελεί επίσης ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του. Η διαφοροποίηση που προτείνεται αφορά σε ορισμένους από τους συνεργαζόμενους κανόνες κινηματικής κράτυνσης AF, οι οποίοι συμμετέχουν στο αθροιστικό σχήμα ανάλυσης, και την μετατροπή της μίας από τις σταθερές παραμέτρους σε μεταβλητή παράμετρο, η οποία με τη σειρά της προσδιορίζεται από μία εξίσωση εξέλιξης τύπου AF. Η εξέλιξη της μεταβλητής αυτής παραμέτρου εξαρτάται από αδιάστατες εσωτερικές μεταβλητές δεύτερης τάξης [σχέση (3.2)], οι οποίες καλούνται εφεξής, για λόγους απλότητας, πολλαπλασιαστές (multipliers). Η ανάλυση της διαμόρφωσης και της λειτουργίας του προτεινόμενου μοντέλου εκτελείται χάριν απλότητας επί της μονοαξονικής του μορφής, ενώ αντίστοιχα οι γενικευμένες - πολυαξονικές εκφράσεις αποτελούν αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

Στο προτεινόμενο μοντέλο, θεωρώντας την απλή περίπτωση μίας μόνο back stress a_1, εισάγεται ένας πρόσθετος όρος ο οποίος συνεπικουρεί την δράση της σταθερής παραμέτρου c_1, διαφοροποιώντας κατ' αυτό τον τρόπο και την εξέλιξη της back stress a_1. Η εξέλιξη του πρόσθετου αυτού όρου ρυθμίζεται από το μέγεθος που καλείται πολλαπλασιαστής (multiplier), ο συμβολισμός του οποίου ακολουθεί αυτόν της back stress a_1, με την προσθήκη ενός εκθέτη τύπου αστερίσκου (*). Ο ίδιος συμβολισμός εφαρμόζεται επίσης στις παραμέτρους της εξίσωσης εξέλιξης του πολλαπλασιαστή.

Εκ των ανωτέρω προκύπτει η πλήρης ομάδα των εξισώσεων του προτεινόμενου μοντέλου ως ακολούθως:

$$\dot{a} = \dot{a}_1 \tag{3.5}$$

$$\dot{a}_1 = \left[c_1 + c_1^* \left(a_1^{*s} \mp a_1^* \right) \right] \left(a_1^s \mp a_1 \right) \dot{\varepsilon}^p \tag{3.6}$$

$$\dot{a}_1^* = c_1^* \left(a_1^{*s} \mp a_1^* \right) \dot{\varepsilon}^p \tag{3.7}$$

Όπου $c_1^* \left(a_1^{*s} \mp a_1^* \right)$ είναι ο πρόσθετος όρος (c_1) ο οποίος συνεπικουρεί την παράμετρο c_1. Η τιμή του πρόσθετου όρου βασίζεται στην εξέλιξη, βάσει της εξίσωσης (3.7), του αδιάστατου μεγέθους a_1^* (πολλαπλασιαστής). Τα μεγέθη c_1^* και a_1^{*s} αποτελούν αντίστοιχα τις παραμέτρους του πολλαπλασιαστή a_1^*.

Δεδομένου ότι ο πολλαπλασιαστής ακολουθεί την εξίσωση του κινηματικού κανόνα κράτυνσης AF το προτεινόμενο μοντέλο αποδίδεται ως μοντέλο πολλαπλασιαστικής ανάλυσης κανόνα κινηματικής κράτυνσης AF, και καλείται εφεξής ως μοντέλο AF με πολλαπλασιαστή (AF with Multiplier, AFM).

Παρατηρεί κανείς ότι παρά την εισαγωγή του μεγέθους a_1^* στην σχέση (3.6) η τιμή κορεσμού (saturation) a_1^s του a_1 παραμένει η ίδια με αυτή της εξίσωσης προ της εισαγωγής του εν λόγω μεγέθους. Η μεταβολή λόγω του a_1^* αφορά αποκλειστικά τον ρυθμό εξέλιξης της back stress a_1 (έως την λήψη της τιμής κορεσμού της a_1^s), αφού η σταθερή παράμετρος c_1 μετατρέπεται στον μεταβλητό όρο $c_1 + c_1^* \left(a_1^{*s} \mp a_1^* \right)$, επιτρέποντας την μεταβολή μόνο της παραμέτρου c_1 της back stress a_1, ενώ η a_1^s παραμένει η ίδια.

Επίσης διαπιστώνεται ότι η ποσότητα που πολλαπλασιάζει τον ρυθμό της πλαστικής παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}^p$ είναι το πλαστικό μέτρο:

$$E^p = \left[c_1 + c_1^* \left(a_1^{*s} \mp a_1^* \right) \right] \left(a_1^s \mp a_1 \right) \tag{3.8}$$

, το οποίο είναι σαφώς διαφορετικό από το πλαστικό μέτρο που προκύπτει από το μοντέλο AF, όπως αυτό δίδεται από την σχέση (2.19).

Κατ' αντιστοιχία με την αναλυτική έκφραση της μεταβολής της back stress a συναρτήσει της μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta\varepsilon^p$ του μοντέλου AF [σχέση (2.22)] εξάγεται κατόπιν ολοκλήρωσης η ακόλουθη έκφραση για το μοντέλο AFM:

$$a_1 = \pm a_1^s \left\{ 1 - m e^{-\left[c_1 \Delta\varepsilon^p + m a_1^{*s} \left(1 - e^{-c_1^* \Delta\varepsilon^p} \right) \right]} \right\} \tag{3.9}$$

Όπου $m = 1$ όταν $a = 0$ στο $\Delta\varepsilon^p = 0$ και $m = 2$ όταν $a = \mp a^s$ στο $\Delta\varepsilon^p = 0$. Στην σχέση αυτή παρατηρείται επίσης ότι το a_1^* φθάνει σε κορεσμό (saturation) πριν το a_1.

Η αναλυτική αυτή έκφραση για την back stress δύναται να αξιοποιηθεί στο πλαίσιο προσδιορισμού των παραμέτρων ενός απλού ή περισσότερου σύνθετου μοντέλου (ένας ή περισσότεροι αθροιζόμενοι όροι), μέσω της εφαρμογής αριθμητικών μεθόδων επίλυσης εξισώσεων, όπως για παράδειγμα η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Το πολλαπλασιαστικό σχήμα είναι δυνατόν να επεκταθεί περαιτέρω σε έναν τριπλό ή ανώτερο μηχανισμό πολλαπλασιασμού της back stress. Σε αυτή την περίπτωση ο συμβολισμός ενός δεύτερου πολλαπλασιαστή θα ήταν ένας εκθέτης τύπου δύο αστερίσκων (**) κοκ. Για παράδειγμα, εάν προσθέσουμε έναν δεύτερο πολλαπλασιαστή a_1^{**} ο οποίος με την σειρά του ελέγχει την εξέλιξη του πρώτου πολλαπλασιαστή a_1^* τότε το μοντέλο που προκύπτει περιγράφεται από το την κατωτέρω ομάδα εξισώσεων:

$$\dot{a} = \dot{a}_1 \tag{3.10}$$

$$\dot{a}_1 = \left[c_1 + \left(c_1^{*} + c_1^{**} \left(a_1^{**s} \mp a_1^{**} \right) \right) \left(a_1^{*s} \mp a_1^{*} \right) \right] \left(a_1^{s} \mp a_1 \right) \dot{\varepsilon}^{p} \tag{3.11}$$

$$\dot{a}_1^{*} = \left[c_1^{*} + c_1^{**} \left(a_1^{**s} \mp a_1^{**} \right) \right] \left(a_1^{*s} \mp a_1^{*} \right) \dot{\varepsilon}^{p} \tag{3.12}$$

$$\dot{a}_1^{**} = c_1^{**} \left(a_1^{**s} \mp a_1^{**} \right) \dot{\varepsilon}^{p} \tag{3.13}$$

Όπου c_1^{**} και a_1^{**s} οι παράμετροι που υπεισέρχονται στην εξίσωση εξέλιξης του αδιάστατου (δεύτερου) πολλαπλασιαστή a_1^{**}.

Σημειώνεται ότι στις σχέσεις (3.10) - (3.13) περιέχεται μόνο μία back stress a_1 και δύο αδιάστατοι πολλαπλασιαστές a_1^{*} και a_1^{**}. Επίσης, σύμφωνα με την σχέση (3.11) η τιμή κορεσμού (saturation) της back stress a_1 είναι a_1^{s}, ανεξάρτητα από τις αντίστοιχες τιμές κορεσμού των a_1^{*} και a_1^{**}, όπως έχει ήδη αναφερθεί και ισχύει για την αρχική μορφή του μοντέλου με έναν μόνο πολλαπλασιαστή.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στόχος του προτεινόμενου μοντέλου AFM, ως τροποποίηση του βασικού μοντέλου AF είναι να βελτιώσει, χωρίς να υποκαταστήσει, το αθροιστικό σχήμα ανάλυσης των back stress. Στην πράξη, το πολλαπλασιαστικό σχήμα είναι δυνατόν να εισαχθεί σε μία μόνο από τις υπόψη back stresses, διατηρώντας κατ' αυτό τον τρόπο την πολυπλοκότητα του προκύπτοντος μοντέλου σε χαμηλό επίπεδο, περιορίζοντας παράλληλα και τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να προσδιορισθούν.

Τα μοντέλα της ανωτέρω κατηγορίας (συνδυασμένο μοντέλο αθροιστικής ανάλυσης MAF με μία back stress πολλαπλασιαστικού τύπου AFM) κωδικοποιούνται εφεξής ως μοντέλο πολλαπλών αθροιζόμενων παραγόντων AF (MAF) με προσθήκη πολλαπλασιαστή (AFM) ή για απλότητα μοντέλο MAFM (Multi-component AF model with Multiplier). Στην βάση αυτή, ένα τυπικό (πλήρες)

μονοαξονικό μοντέλο αποτελούμενο από τέσσερεις αθροιζόμενους όρους κινηματικής κράτυνσης (back stress), μεταξύ των οποίων ο ένας να ακολουθεί το πολλαπλασιαστικό μοντέλο κράτυνσης AFM, και μία εξίσωση για την ισοτροπική κράτυνση, περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$f = \left(\sigma - a\right)^2 - k^2 = 0 \tag{3.14}$$

$$\dot{a} = \sum_{i=1:4} \dot{a}_i = \left[\sum_{i=1:3} c_i \left(a_i^s \mp a_i\right) + \left[c_4 + c_4^* \left(a_4^{*s} \mp a_4^*\right)\right]\left(a_4^s \mp a_4\right)\right] \dot{\varepsilon}^p \tag{3.15}$$

$$\dot{a}_i = c_i \left(a_i^s \mp a_i\right) \dot{\varepsilon}^p \quad \left(i = 1, 2, 3\right) \tag{3.16}$$

$$\dot{a}_4 = \left[c_4 + c_4^* \left(a_4^{*s} \mp a_4^*\right)\right]\left(a_4^s \mp a_4\right) \dot{\varepsilon}^p \tag{3.17}$$

$$\dot{k} = c_k \left(k^s - k\right) \left|\dot{\varepsilon}^p\right| \tag{3.18}$$

$$E^p = \left[\sum_{i=1:3} c_i \left(a_i^s \mp a_i\right) + \left[c_4 + c_4^* \left(a_4^{*s} \mp a_4^*\right)\right]\left(a_4^s \mp a_4\right)\right] + c_k \left(k^s - k\right) \tag{3.19}$$

3.3 Πολυαξονική Διαμόρφωση του Μοντέλου

Η διαμόρφωση της πολυαξονικής μορφής του προτεινόμενου μοντέλου ακολουθεί την λογική της μονοαξονικής διαμόρφωσης, θεωρώντας καταρχάς την απλή περίπτωση μίας μόνο back stress $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1$ και ενός διασυνδεδεμένου πολλαπλασιαστή $\boldsymbol{a}_1^*$. Κατ' ουσία το πολλαπλασιαστικό σχήμα ενισχύει την παράμετρο c_1 της εξίσωσης εξέλιξης του $\boldsymbol{a}_1$ (στην βάση του μοντέλου AF), με την προσθήκη ενός όρου ο οποίος συναρτάται από τον ρυθμό εξέλιξης του $\boldsymbol{a}_1^*$ το οποίο μετρά στον πολυαξονικό χώρο την απόσταση του $\boldsymbol{a}_1^*$ από την τιμή κορεσμού του

$\sqrt{2/3}a_1^{*s}$, πολλαπλασιαζόμενο με $\sqrt{2/3}c_1$ και προβαλλόμενο στον τανυστή $\boldsymbol{n}$. Κατ' αντιστοιχία λοιπόν με τις εξισώσεις που περιγράφουν το μονοαξονικό μοντέλο [σχέσεις (3.5) – (3.7)], με χρήση των σχέσεων (3.1) και (3.3) λαμβάνεται η ακόλουθη ομάδα εξισώσεων για την πολυαξονική περίπτωση:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \dot{\boldsymbol{a}}_1 \tag{3.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_1 = \langle\lambda\rangle\left[\sqrt{\frac{2}{3}}c_1 + c_1^*\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^{*s} - \boldsymbol{a}_1^* : \boldsymbol{n}\right)\right]\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^s\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_1\right) \tag{3.21}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_1^* = \langle\lambda\rangle c_1^*\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^{*s}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_1^*\right) \tag{3.22}$$

Σημειώνεται ότι οι σχέσεις (3.5), (3.6) και (3.7) λαμβάνονται από τις σχέσεις (3.20), (3.21) και (3.22) όταν εφαρμοσθούν στις πρώτες οι συνθήκες του μονοαξονικού εντατικού χώρου, για τον λόγο αυτό εμφανίζεται ο αριθμητικός όρος $\sqrt{2/3}$ στις εξισώσεις.

Αντίστοιχα, η πολυαξονική γενίκευση των σχέσεων (3.10) – (3.13), οι οποίες αναφέρονται στην τριπλή επέκταση του πολλαπλασιαστικού σχήματος, δίδεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \dot{\boldsymbol{a}}_1 \tag{3.23}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_1 = \langle\lambda\rangle\left[\sqrt{\frac{2}{3}}c_1 + \left(c_1^* + \sqrt{\frac{3}{2}}c_1^{**}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^{**s} - \boldsymbol{a}_1^{**} : \boldsymbol{n}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^{*s} - \boldsymbol{a}_1^* : \boldsymbol{n}\right)\right]\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^s\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_1\right) \tag{3.24}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_1^* = \langle\lambda\rangle\left(\sqrt{\frac{2}{3}}c_1^* + c_1^{**}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^{**s} - \boldsymbol{a}_1^{**} : \boldsymbol{n}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^{*s}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_1^*\right) \tag{3.25}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_1^{**} = \langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{2}{3}}c_1^{**}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_1^{**s}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_1^{**}\right) \tag{3.26}$$

Παρατηρείται ότι η τιμή κορεσμού (saturation) του $\boldsymbol{a}$ εξαρτάται μόνο από την τιμή κορεσμού $\sqrt{2/3}a_1^s\boldsymbol{n}$ της μοναδικής back stress $\boldsymbol{a}_1$.

Επίσης, η ομάδα των πολυαξονικών εξισώσεων που αντιστοιχεί στο πλήρες μονοαξονικό μοντέλο που περιγράφεται από τις σχέσεις (3.14) - (3.19) δίδεται ως ακολούθως:

$$f = \frac{3}{2}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{a}):(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{a})-k^2 = 0 \tag{3.27}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \sum_{i=1:4}\dot{\boldsymbol{a}}_i \tag{3.28}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{2}{3}}c_i\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_i^s\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}_i\right) \quad (i=1,2,3) \tag{3.29}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_4 = \langle\lambda\rangle\left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}}c_4+c_4^*\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^{*s}-\boldsymbol{a}_4^*:\boldsymbol{n}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^s\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}_4\right)\right] \tag{3.30}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_4^* = \langle\lambda\rangle c_4^*\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^{*s}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}_4^*\right) \tag{3.31}$$

$$\dot{k} = c_k\left(k^s-k\right)\left|\dot{\varepsilon}^p\right| \tag{3.32}$$

$$K_p = \left[\sum_{i=1:3}\sqrt{\frac{2}{3}}c_i\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_i^s-\boldsymbol{a}_i:\boldsymbol{n}\right)+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}c_4+c_4^*\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^{*s}-\boldsymbol{a}_4^*:\boldsymbol{n}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^s-\boldsymbol{a}_4:\boldsymbol{n}\right)\right]+\frac{2}{3}c_k\left(k^s-k\right) \tag{3.33}$$

3.4 Χαρακτηριστικά του Μοντέλου

Για την ανάλυση της λειτουργίας του προτεινόμενου μοντέλου θα αξιοποιηθούν στη συνέχεια οι μονοαξονικές εξισώσεις που διαμορφώθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, προκειμένου να γίνει με απλό τρόπο κατανοητή η δομή και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που διαθέτει. Όπως αναφέρθηκε αρχικά, στόχος του πολλαπλασιαστικού σχήματος ή μοντέλου AFM είναι να προσομοιώσει

αποτελεσματικότερα, σε σχέση με το κλασσικό μοντέλο αθροιστικής ανάλυσης των back stress (MAF), την συμπεριφορά σε μερική αποφόρτιση/επαναφόρτιση και το φαινόμενο του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting). Ωστόσο θα πρέπει να σημειωθεί ότι το μοντέλο AFM με μία μόνο back stress και έναν πολλαπλασιαστή δεν δύναται να παράγει καλύτερα αποτελέσματα από το μοντέλο MAF με δύο αθροιζόμενες back stresses όταν η back stress έχει φθάσει ή είναι κοντά στην τιμή κορεσμού (saturation) της. Ο λόγος στον οποίο οφείλεται η αδυναμία αυτή εξηγείται από τη σύγκριση μεταξύ της σχέσης (2.27) για $i=2$ (πλαστικό μέτρο E^p μοντέλου MAF) με της σχέσης (3.8) (πλαστικό μέτρο E^p μοντέλου AFM). Καταρχάς θεωρείται ότι τόσο οι back stresses a_1 και a_2 της εξίσωσης (2.27), όσο και οι back stresses a_1 και a_1^* της εξίσωσης (3.8) έχουν κορεσθεί κατά την φόρτιση και στη συνέχεια πραγματοποιείται μία μερική αποφόρτιση η οποία ενεργοποιεί τις ταχέως μεταβαλλόμενες back stresses a_2 και a_1^*, οι οποίες με τη σειρά τους λαμβάνουν τη τιμή κορεσμού πριν ξεκινήσει η επαναφόρτιση. Στο σημείο έναρξη της επαναφόρτισης η αργά εξελισσόμενη back stress a_1 είναι σχεδόν κορεσμένη και η ποσότητα $a_1^s - a_1$ είναι της τάξεως $\mathrm{O}(\varepsilon) \ll 1$, συνεπώς το πλαστικό μέτρο E^p λαμβάνει τις εξής τιμές:

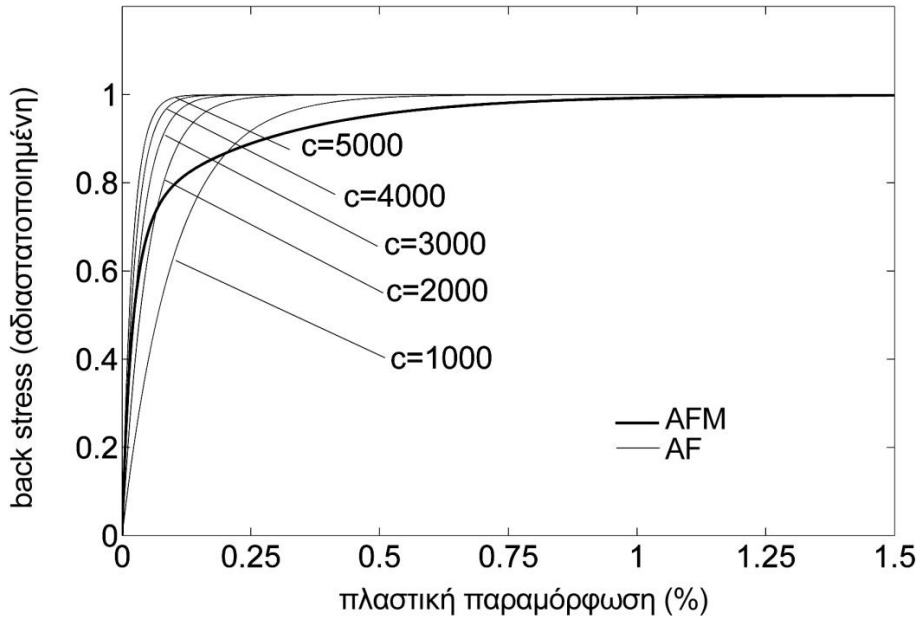
α) Για την περίπτωση του μοντέλου αθροιστικής ανάλυσης των back stresses (MAF) η εξίσωση (2.27) δίδει $E^p = c_1\mathrm{O}(\varepsilon) + 2c_2 a_2^s \cong 2c_2 a_2^s$ επειδή $a_1^s - a_1 \cong \mathrm{O}(\varepsilon)$ και $a_2 = -a_2^s$.

β) Για την περίπτωση του μοντέλου πολλαπλασιαστικής ανάλυσης των back stress (AFM) η εξίσωση (3.8) δίδει $E^p = \left[c_1 + 2c_1^* a_1^s\right] \mathrm{O}(\varepsilon) \cong \mathrm{O}(\varepsilon)$ επειδή $a_1^s - a_1 \cong \mathrm{O}(\varepsilon)$.

Από τα ανωτέρω είναι σαφές ότι ανεξάρτητα από το μέγεθος του πολλαπλασιαστή (εντός λογικών ορίων φυσικά) εάν ο πολλαπλασιαζόμενος όρος είναι της τάξεως $\mathrm{O}(\varepsilon)$ τότε της ίδιας τάξεως θα είναι και το γινόμενο. Κατά συνέπεια στην περίπτωση του μοντέλου AFM η κλίση του διαγράμματος τάσης – πλαστικής παραμόρφωσης κατά την επαναφόρτιση θα είναι πολύ μικρή, ενώ όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο MAF θα είναι επαρκής ώστε να κλείσει κατάλληλα τον βρόχο της μερικής αποφόρτισης/επαναφόρτισης.

Έχοντας αποκλείσει την χρησιμότητα του πολλαπλασιαστικού σχήματος, με βάση την ανωτέρω ανάλυση, θα πρέπει να εξετασθεί με ποιόν τρόπο είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί το υπόψη μοντέλο. Όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, και με βάση την εργασία των [17] [18], το πολλαπλασιαστικό σχήμα μπορεί να συνδυασθεί με το αθροιστικό μοντέλο ανάλυσης των back stress (MAF) συνθέτοντας το μοντέλο MAFM, το οποίο αποτελεί εναλλακτική λύση προς το μοντέλο MAFT, δηλαδή το μοντέλο MAF με την επιπρόσθετη back stress όρου κατωφλίου (threshold term) [11]. Η βασική λειτουργία του μοντέλου MAFT και ειδικότερα της προσθήκης του όρου κατωφλίου σε μίας από τις back stress τύπου AF, είναι η επίτευξη γραμμικής συμπεριφοράς (με υψηλή κλίση) στο αρχικό τμήμα της πλαστικής φόρτισης (προ της ενεργοποίησης της τιμής κατωφλίου), ακολουθούμενη από μη γραμμική συμπεριφορά της back stress έως τελικώς να φθάσει στο σημείο κορεσμού (saturation) της. Η συμπεριφορά αυτή επιτρέπει την βελτίωση των προσομοιώσεων

των βρόχων των μερικών αποφορτίσεων/επαναφορτίσεων και του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) κατ' επέκταση. Παρόμοια συμπεριφορά είναι δυνατόν να επιτευχθεί με την χρήση του πολλαπλασιαστικού σχήματος χωρίς την εισαγωγή ένας όρου ελεγχόμενου από μία τιμή κατωφλίου. Για την επεξήγηση της δράσης του πολλαπλασιαστικού σχήματος στο σχήμα 3.1 παρίσταται γραφικά η συμπεριφορά μίας οικογένειας μοντέλων AF με ίδια τιμή κορεσμού a^s και διαφορετικές παραμέτρους $c = 1000, 2000, 3000, 4000, 5000$, σε σύγκριση με ένα μοντέλο AFM με τιμή κορεσμού επίσης a^s. Οι καμπύλες για το μοντέλο AF (λεπτές γραμμές) λαμβάνονται από την σχέση (2.22) (αναλυτική εξίσωση της back stress) για $m = 1$ με την τιμή της back stress να είναι αδιαστατοποιημένη ως προς την τιμή κορεσμού a^s. Η καμπύλη του μοντέλου AFM (γραμμή αυξημένου πάχους) προκύπτει από την εξίσωση (3.9), με την back stress επίσης αδιαστατοποιημένη ως προς την τιμή κορεσμού a_1^s και $c_1 = 360, c_1^* = 2800$ και $a_1^{*s} = 1,3\, ksi$.



Σχήμα 3.1 *Σύγκριση μονοτονικών καμπύλων back stress (αδιαστατοποιημένη) - πλαστικής παραμόρφωσης διαφόρων μοντέλων AF με το μοντέλο AFM [17].*

Από το Σχήμα 3.1 προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα για την λειτουργία του μοντέλου AFM. Συγκριμένα, οι εκθετικής μορφής καμπύλες του μοντέλου AF διαθέτουν μία αρχική υψηλή κλίση συνοδευόμενη πάντα με έναν πολύ ταχύ κορεσμό της back stress. Αντίθετα, η καμπύλη που προκύπτει από το μοντέλο AFM διαθέτει μία αρχική υψηλή κλίση, διατηρώντας παράλληλα έναν ομαλό ρυθμό εξέλιξης έως την τιμή κορεσμού. Ανάλογη συμπεριφορά προς αυτή του μοντέλου AFM επιτυγχάνεται και με το μοντέλο MAFT, με την διαφορά ότι η συμπεριφορά αυτή προκύπτει από τον συνδυασμό μίας διακριτής γραμμικής συμπεριφοράς για την αρχική υψηλή κλίση της καμπύλης, και την εν συνεχεία μη-γραμμική ομαλή συμπεριφορά έως τον κορεσμό της back stress. Το συγκεκριμένο αυτό χαρακτηριστικό του μοντέλου AFM αποδεικνύεται ότι είναι χρήσιμο για την προσομοίωση των περιπτώσεων μερικής αποφόρτισης/επαναφόρτισης και του φαινομένου του ratcheting κατ' επέκταση, σε συνδυασμό με την δράση των υπόλοιπων συνεργαζόμενων όρων AF σε ένα μοντέλο MAFM (αθροιστική ανάλυση back stresses).

3.5 Τροποποιήσεις του Μοντέλου

Το μοντέλο MAFM είναι δυνατόν να συνδυασθεί με άλλα μοντέλα που έχουν ενσωματωθεί στο μοντέλο MAF, το οποίο αποτελεί ουσιαστικά την βάση του προτεινόμενου μοντέλου, ως τροποποιήσεις στο πλαίσιο βελτίωσης της πολυαξονικής συμπεριφοράς του. Συγκεκριμένα, οι Bari και Hassan [4] ενσωμάτωσαν το μοντέλο BCD σε ένα μοντέλο MAFT, όπως παρουσιάσθηκαν αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2, λαμβάνοντας το ακόλουθο τροποποιημένο μοντέλο:

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{2}{3}}c_i\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}a_i^s\boldsymbol{n} - \left[\delta\boldsymbol{a}_i + (1-\delta)(\boldsymbol{a}_i:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right]\right\} \quad (i=1,2,3) \tag{3.34}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_4 = \langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{2}{3}}c_4\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^s\boldsymbol{n} - \left[\delta\boldsymbol{a}_4 + (1-\delta)(\boldsymbol{a}_4:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right]\left\langle 1-\frac{\bar{a}_4}{f(\boldsymbol{a}_4)}\right\rangle\right\} \tag{3.35}$$

Όπου $\bar{a}_4$ ο όρος κατωφλίου (threshold term) του μοντέλου MAFT [σχέσεις (2.29) - (2.31)], ενώ το $f(\boldsymbol{a}_4)$ δίδεται από την έκφραση:

$$f(\boldsymbol{a}_4) = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_4:\boldsymbol{a}_4} \tag{3.36}$$

Το υπόψη μοντέλο κωδικοποιείται με την ονομασία MAFTδ (λόγω της παραμέτρου δ του μοντέλου BCD που εισάγεται στο μοντέλο MAFT). Κατ' αντιστοιχία, το μοντέλο MAFM, όπως αυτό περιγράφεται από τις σχέσεις (3.29) - (3.31), συνδυασμένο με το μοντέλο BCD, με τρόπο όμοιο προς την περίπτωση του MAFT, κωδικοποιείται ως MAFMδ και λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{2}{3}}c_i\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}a_i^s\boldsymbol{n} - \left[\delta\boldsymbol{a}_i + (1-\delta)(\boldsymbol{a}_i:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right]\right\} \quad (i=1,2,3) \tag{3.37}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_4 = \langle\lambda\rangle\left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}}c_4 + c_4^*\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^{*s} - \boldsymbol{a}_4^{*s}:\boldsymbol{n}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^s\boldsymbol{n} - \left[\delta\boldsymbol{a}_4 + (1-\delta)(\boldsymbol{a}_4:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right]\right)\right] \tag{3.38}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_4^* = \langle\lambda\rangle c_4^*\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a_4^{*s}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_4^*\right) \tag{3.39}$$

Παρατηρείται ότι η τροποποίηση συνίσταται στην εισαγωγή του μοντέλου BCD στην εξίσωση εξέλιξης των back stresses $\boldsymbol{a}_i$ (συμπεριλαμβανομένης της $\boldsymbol{a}_4$) [σχέσεις (3.37) και (3.38)] και όχι στην εξίσωση εξέλιξης του πολλαπλασιαστή $\boldsymbol{a}_4^*$ [σχέση (3.39)].

Μία ακόμη εναλλακτική διαμόρφωση που είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως τροποποίηση του μοντέλου MAFM αφορά στην ενσωμάτωση του μοντέλου BCDr (τροποποίηση BCD με προσθήκη της παραμέτρου r_i όπως προτάθηκε από τον Dafalias και Feigenbaum [19]). Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο που προκύπτει κωδικοποιείται ως MAFMr και περιγράφεται από την ακόλουθη ομάδα εξισώσεων:

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = \langle \lambda \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} c_i \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} a_i^s \boldsymbol{n} - \left[r_i \boldsymbol{a}_i + (1 - r_i)(\boldsymbol{a}_i : \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n} \right] \right\} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.40}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_4 = \langle \lambda \rangle \left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}} c_4 + c_4^* \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a_4^{*s} - \boldsymbol{a}_4^{*s} : \boldsymbol{n} \right) \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a_4^s \boldsymbol{n} - \left[r_4 \boldsymbol{a}_4 + (1 - r_4)(\boldsymbol{a}_4 : \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n} \right] \right) \right] \tag{3.41}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_4^* = \langle \lambda \rangle c_4^* \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a_4^{*s} \boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}_4^* \right) \tag{3.42}$$

Με την παράμετρο r_i να δίδεται από την σχέση (δεν υπονοείται άθροιση ως προς i):

$$r_i = \frac{\sqrt{(3/2)\boldsymbol{a}_i : \boldsymbol{a}_i}}{a_i^s} \tag{3.43}$$

Παρατηρείται ότι οι σχέσεις (3.37) και (3.38) είναι όμοιες προς τις (3.40) και (3.41) αντίστοιχα, με την διαφορά ότι η σταθερή παράμετρος δ έχει αντικατασταθεί από την μεταβλητή παράμετρο r_i. Από την εφαρμογή του ίδιου σχήματος (τροποποίηση BCDr) στο μοντέλο MAFT προκύπτει αντίστοιχα το μοντέλο MAFTr. Επίσης, όπως έχει ήδη αναφερθεί, δεδομένου ότι το μοντέλο BCD επιδρά στην κατεύθυνση της κινηματικής κράτυνσης δίχως να μεταβάλλει το πλαστικό μέτρο του μοντέλου AF, η τροποποίηση BCDr (όπως αυτή ενσωματώνεται στα μοντέλα MAFMr και MAFTr) δεν επηρεάζει αντίστοιχα τις προσομοιώσεις των μονοαξονικών πειραμάτων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting). Κατά συνέπεια, οι

παράμετροι των μοντέλων που χρησιμοποιούνται στις περιπτώσεις προσομοίωσης μονοαξονικών πειραματικών δεδομένων δύνανται να χρησιμοποιηθούν ως έχουν και στις περιπτώσεις προσομοίωσης πολυαξονικών πειραματικών δεδομένων. Ας σημειωθεί ότι το μοντέλο MAFTδ χρειάζεται μία ακόμη παράμετρο, την δ, ενώ το μοντέλο MAFTr χρησιμοποιεί το r από την σχέση (3.43) χωρίς την εισαγωγή νέας παραμέτρου.

Για συστηματοποίηση, στον κατωτέρω Πίνακα 3.1 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα μοντέλα και οι αντίστοιχες τροποποιήσεις τους, όπως περιγράφηκαν αναλυτικά στα Κεφάλαια 2 και 3, με τις αντίστοιχες συντμήσεις τους, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε όλη την έκταση της υπόψη μελέτης χάριν απλότητας και συντομίας στην παρουσίαση.

Μοντέλο	**Περιγραφή**		**Ανάλυση**
AF	Armstrong & Frederick model	Μοντέλο Armstrong & Frederick	---
MAF	Multi-component AF model	Μοντέλο πολλαπλών αθροιζόμενων παραγόντων AF	$AF_1 + AF_2 + AF_n$
MAFT	Multi-component AF model with Threshold	Μοντέλο πολλαπλών αθροιζόμενων παραγόντων AF με	$MAF + AF_{Threhold}$
AFM	AF model with Multiplier	Μοντέλο AF με πολλαπλασιαστή	$AF + AF_{Multiplier}$
MAFM	Multi-component AF model with Multiplier	Μοντέλο πολλαπλών αθροιζόμενων παραγόντων AF με	MAF + AFM
BCD	Burlet, Cailletaud & Dellobelle model	Μοντέλο Burlet, Cailletaud & Dellobelle	AF τροποποίηση δ
BCDr	Burlet, Cailletaud & Dellobelle model with r	Μοντέλο Burlet, Cailletaud & Dellobelle με παράμετρο r	BCD με r (αντί δ)
MAFTδ	MAFT model with δ term modification	Μοντέλο MAFT με παράμετρο δ Μοντέλου BCD	MAFT + BCD
MAFMδ	MAFT model with δ term modification	Μοντέλο MAFM με παράμετρο δ Μοντέλου BCD	MAFM + BCD
MAFTr	MAFT model with r term modification	Μοντέλο MAFT με παράμετρο r Μοντέλου BCDr	MAFT + BCDr
MAFMr	MAFT model with r term modification	Μοντέλο MAFT με παράμετρο r Μοντέλου BCD	MAFM + BCDr

Πίνακας 3.1 *Συνοπτική παρουσίαση της κωδικοποίησης που χρησιμοποιείται για τα υπό μελέτη μοντέλα πλαστικότητας τύπου AF.*

Τα μοντέλα στα οποία εστιάζεται η ανάλυση που ακολουθεί στα Κεφάλαια 4 και 5 (δηλαδή η εφαρμογή και αξιολόγησή τους σε μονοαξονικές και πολυαξονικές περιπτώσεις ανακυκλικής καταπόνησης αντίστοιχα) είναι τα: MAFT, MAFM, MAFMδ, MAFTδ και MAFMr, τα οποία όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3.1 αποτελούν κατ' ουσίαν παράγωγα άλλων βασικών μοντέλων, όπως το MAF και το BCD, των οποίων τα βασικά χαρακτηριστικά διατηρούν (κυρίως στην περισσότερο σύνθετη περίπτωση των πολυαξονικών προσομοιώσεων).

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή του Μοντέλου σε Μοναξονικές Καταπονήσεις

4.1 Διακρίβωση - Προσδιορισμός των Παραμέτρων του Μοντέλου

Η εφαρμογή του μοντέλου AFM που περιγράφεται από τις μονοαξονικές σχέσεις (3.5), (3.6) και (3.7), δηλαδή μία back stress a_1 και ο συσχετιζόμενος αδιάστατος πολλαπλασιαστής a_1^*, προϋποθέτει την διακρίβωση τεσσάρων παραμέτρων: c_1, a_1^s (για την back stress) και c_1^*, a_1^{*s} (για τον πολλαπλασιαστή). Η επιλογή της μεθόδου διακρίβωσης που θα χρησιμοποιηθεί σχετίζεται άμεσα με τον ρόλο τον οποίο προσδοκάται να αναλάβει το μοντέλο AFM, ο οποίος, με βάση την ανάλυση του Κεφαλαίου 2, είναι η υποκατάσταση της back stress με τον όρο κατωφλίου (threshold term). Για το μοντέλο της back stress με τον όρο κατωφλίου με βάση την σχέση (2.30) θα πρέπει να προσδιορισθούν τρία χαρακτηριστικά, η τιμή του κατωφλίου $\bar{a}$, η τελική τιμή κορεσμού a^s της 'υπερβάλλουσας' τάσης $|a|-\bar{a}$ και η κλίση του γραμμικού τμήματος ca^s ή ισοδύναμα τιμή της παραμέτρου c, καθόσον το a^s είναι γνωστό. Ως εκ τούτου, προκειμένου να συσχετισθεί η συμπεριφορά του πολλαπλασιαστικού σχήματος (AFM) με αυτή του κανόνα κράτυνσης AF με όρο κατωφλίου είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη τα τρία προαναφερθέντα χαρακτηριστικά του δεύτερου μοντέλου, ενώ παράλληλα απαιτείται μία ακόμη συνθήκη για τον πλήρη προσδιορισμό των τεσσάρων παραμέτρων του πρώτου μοντέλου. Όπως επεξηγείται στη συνέχεια, η τέταρτη συνθήκη συνδέεται με το εύρος της πλαστικής παραμόρφωσης εντός του οποίου

λαμβάνει χώρα ο κορεσμός του πολλαπλασιαστή a_1^*. Μία εύλογη συμβατική επιλογή για την αριθμητική προσέγγιση της τιμής κορεσμού είναι το a να είναι ίσο με το 99% του a^s. Κατά συνέπεια, αντικαθιστώντας στην σχέση (2.22) την τιμή αυτή λαμβάνεται για $m=1$ και $m=2$, $\Delta\varepsilon^p = \ln 100/c = 4,6/c$ και $\Delta\varepsilon^p = \ln 200/c = 5,3/c$, αντίστοιχα. Στρογγυλοποιώντας λοιπόν τις δύο αυτές τιμές προκύπτει $\Delta\varepsilon^p = 5/c$ (ως τιμή για την οποία η back stress ισούται με το 99% της τιμής κορεσμού της).

Τα χαρακτηριστικά του μοντέλου με τον όρο κατωφλίου θα συσχετισθούν με τις κάτωθι τέσσερεις συνθήκες [17] [18] για την διακρίβωση των τεσσάρων παραμέτρων του μοντέλου AFM, μέσω των σχέσεων (2.30), (3.5), (3.6), (3.7) και (3.8). Συγκεκριμένα:

α) Η τιμή κορεσμού a_1^s του a_1 θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα της τιμής κατωφλίου $\bar{a}$ με την τιμή κορεσμού a^s, ήτοι:

$$a_1^s = \bar{a} + a^s \tag{4.1}$$

β) Η τιμή της αρχικής κλίσης κατά την επαναφόρτιση του πολλαπλασιαστικού σχήματος θα πρέπει να ισούται με την αντίστοιχη τιμή της αρχικής κλίσης του μοντέλου με τον όρο κατωφλίου, ήτοι:

$$\left(c_1 + 2c_1^* a_1^{*s}\right) a_1^s = c a^{*s} \tag{4.2}$$

Παρατηρείται ότι η αρχική κλίση κατά την επαναφόρτιση λαμβάνεται έπειτα από τον κορεσμό τόσο του a_1 όσο και του a_1^s, καθόσον αυτή είναι η συνηθέστερη περίπτωση που συναντάται στις προσομοιώσεις. Συνεπώς, σύμφωνα με την σχέση (3.8), εμφανίζεται ένας όρος 2 τόσο εντός, όσο και εκτός της παρένθεσης του αριστερού

τμήματος της ανωτέρω εξίσωσης (4.2), όπως και στο δεξί τμήμα της καθόσον το μοντέλο AF με όρο κατωφλίου έχει φθάσει επίσης στο σημείο κορεσμού πριν την αντιστροφή κατά την οποία έχει μία κλίση ίση με $2ca^s$. Ως εκ τούτου, ο όρος 2 εκτός των παρενθέσεων στο δεξί και αριστερό τμήμα εξαλείφεται, ενώ ο όρος 2 εντός της παρένθεσης του αριστερού τμήματος διατηρείται.

γ) Όταν ο πολλαπλασιαστής a_1^* φθάνει στο (συμβατικά εκλεγμένη) τιμή κορεσμού του $0,99a_1^{*s}$, για $\Delta\varepsilon^p = 5/c$, θεωρείται ότι η πολλαπλασιαζόμενη back stress a_1, η οποία ξεκινά από την τιμή κορεσμού $\pm a_1^s$, έχει φθάσει περίπου την τιμή του κατωφλίου $\pm\bar{a}$ καθόσον η διατήρηση υψηλής τιμής στο a_1 είναι ακριβώς και ο ρόλος της πολλαπλασιαστικής επίδρασης του a_1^*. Συνεπώς, εκ της σχέσης (3.9) με $m = 2$ και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $1 - e^{-5} \approx 1$, προκύπτει:

$$\bar{a} = a_1^s \left[1 - 2e^{-\left(5\left(c_1/c_1^*\right) + 2a_1^{*s}\right)} \right] \tag{4.3}$$

δ) Το a_1^* θα πρέπει να φθάνει στην (συμβατικά εκλεγμένη) τιμή κορεσμού του $0,99a_1^{*s}$ έπειτα από $\Delta\varepsilon^p = 5/c_1^*$. Η τιμή αυτή του $\Delta\varepsilon^p$ θα πρέπει να παραμένει εντός του εύρους μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης που απαιτεί η εξελισσόμενη back stress a με όρο κατωφλίου, η οποία ξεκινά από την αρνητική τιμή κορεσμού της $-\left(a^s + \bar{a}\right)$, προκειμένου να φθάσει στην θετική τιμή κατωφλίου $\bar{a}$ (1η περίπτωση), αλλά να μην υπερβεί την θετική τιμή κορεσμού $a^s + \bar{a}$ (2η περίπτωση). Κατά συνέπεια, η back stress a μεταβάλλεται κατά $2\bar{a} + a^s$ και $2\left(\bar{a} + a^s\right)$ αντίστοιχα. Δεδομένου ότι το μοντέλο AF με όρο κατωφλίου εξαναγκάζει την back

stress a να μεταβάλλεται (σχεδόν) γραμμικά με κλίση ca^s (η αρχική κλίση $2ca^s$ κατά την επαναφόρτιση γίνεται πολύ γρήγορα ίση με την κλίση ca^s εντός της περιοχής του κατωφλίου), είναι δυνατόν να θεωρήσει κανείς ότι τα δύο προαναφερθέντα εύρη μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης μπορούν να ληφθούν κατά προσέγγιση από την διαίρεση των αντίστοιχων τιμών μεταβολής της back stress με όρο κατωφλίου, με το ca^s. Τοποθετώντας το $\Delta\varepsilon^p = 5/c_1^*$ μεταξύ των δύο αυτών τιμών μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης και αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει η ακόλουθη συνθήκη:

$$\frac{5ca^s}{2\left(\bar{a}+a^s\right)} < c_1^* < \frac{5ca^s}{2\bar{a}+a^s} \tag{4.4}$$

Οι σχέσεις (4.1) - (4.4) μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά κρίση για τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων c_1, a_1^s και c_1^*, a_1^{*s} του μοντέλου πολλαπλασιαστικής ανάλυσης κινηματικής κράτυνσης AF (AFM), όταν οι αντίστοιχες παράμετροι $\bar{a}$, a^s και c του μοντέλου AF με όρο κατωφλίου είναι γνωστές. Διαπιστώνεται επίσης ότι από την σχέση (4.1) προκύπτει η τιμή του a_1^s με βάση το άθροισμα $\bar{a}+a^s$, ενώ από την ανισότητα της σχέσης (4.4) μπορεί να προκύψει μία εκτίμηση για την τιμή του c_1^*. Από τον προσδιορισμό των δύο αυτών τιμών η διαδικασία επίλυσης του εν λόγω συστήματος εξισώσεων εστιάζεται πλέον στις εξισώσεις των σχέσεων (4.2) και (4.3) για τις δύο άγνωστες παραμέτρους c_1 και a_1^{*s} με βάση τις τιμές των $\bar{a}$, a^s, c και c_1^*. Κατόπιν τούτου, από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων αυτών προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$c_1 = \frac{1}{4}\left[c_1^* \ln\left[2\left(1+\frac{\bar{a}}{a^s}\right)\right] - \frac{c}{1+\frac{\bar{a}}{a^s}} \right] \tag{4.5}$$

$$a_1^{*s} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{c_1^*}\frac{5c}{1+\frac{\bar{a}}{a^s}} - \ln\left[2\left(1+\frac{\bar{a}}{a^s}\right)\right] \right] \tag{4.6}$$

Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι το σύστημα των εξισώσεων των σχέσεων (4.1) - (4.4) και οι προκύπτουσες από αυτό σχέσεις (4.5) και (4.6) βασίζονται σε παραδοχές και προσεγγίσεις, όπως για παράδειγμα η επιλογή του c_1^* και το γεγονός ότι η τιμή 5 που εμφανίζεται στις σχέσεις (4.3) και (4.6) συνδέεται με την επιλογή της προσεγγιστικής (συμβατικά εκλεγμένης) τιμής κορεσμού της back stress (99%). Η επίλυση του εν λόγω συστήματος εξισώσεων έχει ως κύριο στόχο να παρέξει μία πρώτη εκτίμηση των σχετικών παραμέτρων του μοντέλου AFM, προσδιορίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο το μέγεθος των υπόψη παραμέτρων. Επίσης θα πρέπει να σημειωθεί ότι η εφαρμογή οποιασδήποτε διαδικασίας διακρίβωσης του μοντέλου προφανώς απαιτεί, λόγω της προσεγγιστικής φύσης των σχέσεων (4.1) - (4.6), περαιτέρω μικροδιορθώσεις (fine tuning) με σκοπό την επίτευξη βελτιωμένων προσομοιώσεων.

Μία εναλλακτική, λιγότερο τυποποιημένη, διαδικασία διακρίβωσης του μοντέλου είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων με χρήση των διαφορικών [σχέσεις (3.5), (3.6) και (3.7)] και αναλυτικών [σχέση (3.9)] εκφράσεων του προτεινόμενου μοντέλου, μέσω διαδοχικών δοκιμών και διορθώσεων των τιμών (trial & error). Ωστόσο, η διαδικασία αυτή δεν προτείνεται να εκτελείται ανεξάρτητα αλλά σε συνδυασμό με την αναλυθείσα μέθοδο συσχέτισης των παραμέτρων του προτεινόμενου μοντέλου με τις παραμέτρους του μοντέλου AF με όρο κατωφλίου

λόγω των πλεονεκτημάτων που προσφέρει για ταχύτερη σύγκλιση στον προσδιορισμό των τιμών.

Όσον αφορά τον προσδιορισμό των παραμέτρων της εξίσωσης εξέλιξης της ισοτροπικής κράτυνσης [σχέση (2.39)] αυτό μπορεί να επιτευχθεί εύκολα μέσω ολοκλήρωσης της απλής αυτής διαφορικής εξίσωσης και την εν συνεχεία προσαρμογή των παραμέτρων της στις υπό μελέτη πειραματικές καμπύλες του υλικού (curve fitting). Ειδικότερα, για τις περιπτώσεις προσομοίωσης της συμπεριφοράς υλικών που κρατύνονται (hardening) ή χαλαρώνουν (softening) υπό την εφαρμογή ανακυκλικών συμμετρικών καταπονήσεων, η τιμή της παραμέτρου k^s (παράμετρος κορεσμού του k) προσδιορίζεται αφού προηγουμένως αφαιρεθεί η επίδραση της κινηματικής κράτυνσης (back stress), ενώ ο ρυθμός μέσω απλής επαναληπτικής προσέγγισης (trial and error).

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται σχετικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής σε μεταλλικό υλικό το οποίο υπόκειται ανακυκλική κράτυνση (cyclic hardening) υπό συμμετρική καταπόνηση ελεγχόμενη από παραμόρφωση (strain controlled loading), στην οποία και γίνεται χρήση του ανωτέρω κανόνα ισοτροπικής κράτυνσης.

4.2 Περιπτώσεις Εφαρμογής του Μοντέλου

Η εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου πλαστικότητας εστιάσθηκε στην προσομοίωση των περιπτώσεων της μονοαξονικής ανακυκλικής κράτυνσης (cyclic hardening) και ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) (Σχήμα 2.3 και 2.5 περίπτωση (β), αντίστοιχα), δίχως ωστόσο οι εν γένει δυνατότητές του να θέτουν περιορισμούς στην χρήση του υπόψη μοντέλου και σε ένα πλήθος άλλων περιπτώσεων, όπως, για

παράδειγμα, η ανακυκλική σταθεροποίηση (plastic shakedown) και ανακυκλική αποχαλάρωση της μέσης τάσης (relaxation of mean stress) [Σχήμα 2.5 περίπτωση (α) και (δ) αντίστοιχα] ή η ανακυκλική χαλάρωση (softening) (Σχήμα 2.4), σε συνδυασμό με την χρήση ενός κατάλληλα διαμορφωμένου κανόνα ισοτροπικής κράτυνσης. Επίσης, σημειώνεται ότι η μελέτη των δύο αυτών περιπτώσεων εκτιμάται ότι καλύπτει τα κυριότερα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς που εμφανίζουν μεταλλικά υλικά, όπως οι χάλυβες, όταν υποβάλλονται σε μονοαξονικές Ανακυκλικές καταπονήσεις εντός της πλαστικής περιοχής.

Στην ανάλυση που ακολουθεί ιδιαίτερη βαρύτητα δόθηκε στην περίπτωση του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), η επιτυχής προσομοίωση του οποίου αποτελεί και τον κατ' εξοχήν στόχο της κατηγορίας των μοντέλων πλαστικότητας στην οποία εντάσσεται το προτεινόμενο μοντέλο. Στο πλαίσιο αυτό, η απόδοση του προτεινόμενου μοντέλου στην προσομοίωση μονοαξονικών πειραματικών δεδομένων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), κρίθηκε σκόπιμο να αξιολογηθεί σε σύγκριση με το μοντέλο MAFT, λόγω των παραπλήσιων χαρακτηριστικών που διαθέτουν, όπως αναλύθηκε λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 3.

4.3 Αποτελέσματα Εφαρμογής

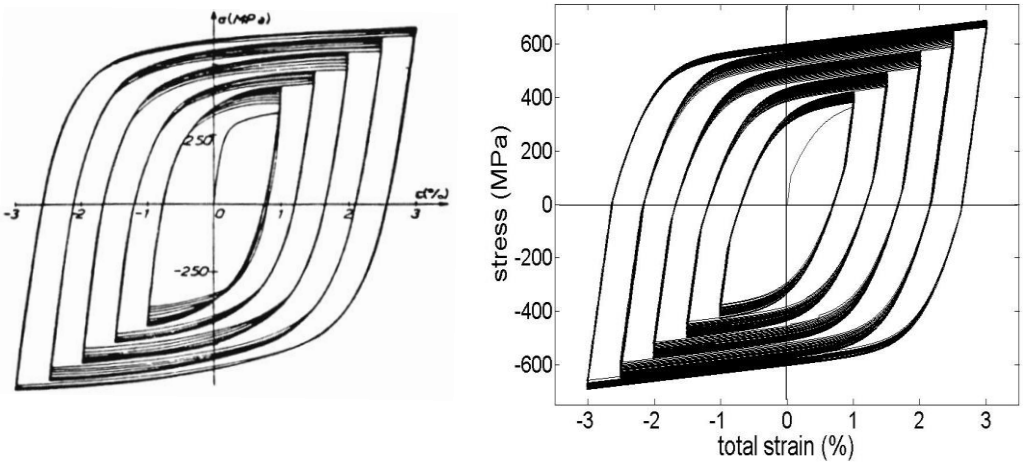
Τα αποτελέσματα προσομοιώσεων διακρίνονται ως προς τις προαναφερθείσες περιπτώσεις (ανακυκλική κράτυνση-κυκλικός ερπυσμός), οι οποίες αποτελούν απόρροια του είδους (παραμέτρου ελέγχου) του επιβαλλομένου φορτίου, ήτοι την ανηγμένη παραμόρφωση ή τάση. Τα πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν προς τούτο ελήφθησαν από δημοσιευμένες εργασίες διαφόρων ερευνητών έτσι ώστε

να είναι δυνατή η απευθείας σύγκριση της απόδοσης του προτεινόμενου μοντέλου με τα άλλα μοντέλα πλαστικότητας (βλέπε Κεφάλαιο 3 - Πίνακας 3.1).

Η υπολογιστική εφαρμογή του μοντέλου στις υπόψη περιπτώσεις καταπονήσεων, εκτελέσθηκε με την χρήση κώδικα σε Matlab [62] [63], ο οποίος δύναται να καλύψει αποκλειστικά περιπτώσεις μονοαξονικής ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς υλικών. Ο κώδικας χρησιμοποιεί ως αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης την μέθοδο Euler εμπρόσθιας διαφοράς (forward Euler method), λόγω απλότητας και χαμηλών απαιτήσεων για ακρίβεια στους υπολογισμούς, καθόσον η εφαρμογή αφορά κατ' ουσίαν την απλή περίπτωση ανακυκλικής καταπόνησης ενός μόνο στοιχείου (single element) υλικού, στην περίπτωση που εξετάζεται μέταλλο.

4.3.1 Ανακυκλικές Καταπονήσεις υπό Ελεγχόμενη Παραμόρφωση

Το Σχήμα 4.1(α) παρουσιάζει τα πειραματικά αποτελέσματα από βηματικές δοκιμές συμμετρικής ανακυκλικής καταπόνησης δοκιμίων χάλυβα St 316L υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση (strain controlled) [8]. Στο γράφημα αυτό παρατηρείται η ομαλή ελαστοπλαστική μετάβαση και το φαινόμενο Bauschinger. Η μέγιστη τάση (peak stress) αυξάνεται ανά κύκλο καταπόνησης, διαδοχικά για καθένα από τα εύρη της εφαρμοζόμενης παραμόρφωσης (strain amplitudes), έως την πλήρη σταθεροποίησή της. Η μεταβολή αυτή την είναι ενδεικτική της συντελούμενης αύξησης της ελαστικής περιοχής. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό που παρατηρείται είναι ότι η σταθεροποίηση της μέγιστης τάσης στο κάθε επίπεδο παραμόρφωσης είναι ανεξάρτητη από την προγενέστερη ιστορία καταπόνησης εφόσον έχει προηγηθεί σταθεροποίηση σε χαμηλότερα επίπεδα παραμόρφωσης [10].



(α) (β)

Σχήμα 4.1 *Διαγράμματα τάσης - παραμόρφωσης χάλυβα St 316L υποβεβλημένου σε μονοαξονική ανακυκλική καταπόνηση υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση: (α) πειραματικές δοκιμές [8], (β) υπολογιστικά αποτελέσματα εφαρμογής του μοντέλου MAF [17].*

Για την προσομοίωση των πειραματικών αυτών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο AFM [back stress a_1, σχέσεις (3.6) και (3.7)] με την προσθήκη ενός επιπλέον όρου γραμμικής κινηματικής κράτυνσης τύπου Prager [back stress a_2, σχέση (2.14)], σε συνδυασμό με την εφαρμογή μη γραμμικής ισοτροπικής κράτυνσης [k, σχέση (2.39)]. Οι παράμετροι του πλήρως ελαστοπλαστικού μοντέλου που προκύπτει παρατίθενται αναλυτικά στον Πίνακα 4.1, όπου k_{in} η αρχική τιμή του k (κανόνας ισοτροπικής κράτυνσης). Στον υπόψη Πίνακα αρατηρεί κανείς ότι για την ισοτροπική κράτυνση, η τιμή κορεσμού (saturation value) k_s εξαρτάται (αυξητικά) από το βηματικά μεταβαλλόμενο εύρος της παραμόρφωσης (διακριτές τιμές). Εναλλακτικά, θα ήταν εφικτό να προσδιορισθεί μία αναλυτική συνεχής συνάρτηση μεταβολής του k_s ως προς το εύρος μεταβολής της παραμόρφωσης, όμως στην προκειμένη περίπτωση αυτό δεν κρίθηκε σκόπιμο

καθόσον στόχος της ανάλυσης αποτέλεσε η μελέτη και πιστοποίηση του προτεινόμενου μοντέλου AFM.

Μέτρο Ελαστικότητας	$E = 180$ GPa			
Ισοτροπική Κράτυνση				
Εύρος Παραμορφώσεων		k_s (MPa)	k_{in} (MPa)	c_k
-1,0 έως 1,0		177,78	100	0,9
-1,5 έως 1,5		222,22		
-2,0 έως 2,0		277,78		
-2,5 έως 2,5		333,33		
-3,0 έως 3,0		355,56		
Κινηματική Κράτυνση				
AFM (a_1)	Back stress	$a_1^s = 250$ MPa		$c_1 = 300$
	Πολλαπλασιαστής	$a_1^{*s} = 3$		$c_1^* = 10$
Prager (a_2)		$h = 3000$ MPa		

Πίνακας 4.1 *Παράμετροι μοντέλου MAFM, με ισοτροπική κράτυνση, για την προσομοίωση της μονοαξονικής καταπόνησης δοκιμίων χάλυβα St 316L υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση (Σχήμα 4.1) [17].*

Τα υπό εξέταση μοντέλο (AFM-Prager και ισοτροπική κράτυνση) αποδίδει ικανοποιητικά στην προσομοίωση της συνολικής ανακυκλικής συμπεριφοράς του υλικού, ωστόσο εμφανίζει αδυναμία στην επιτυχή προσομοίωση των επιμέρους βρόχων υστέρησης ανά εύρος παραμόρφωσης. Είναι προφανές από τα πειραματικά δεδομένα ότι οι καμπύλες τάσης – παραμόρφωσης διαθέτουν ασυμμετρία ως προς τις απόλυτες τιμές της τάσης, παρόλο που η φόρτιση εκτελείται υπό συμμετρικούς κύκλους επιβαλλόμενης παραμόρφωσης. Παραδείγματος χάριν, στον εξωτερικό βρόχο, δηλαδή για εύρος παραμόρφωσης -3,0% έως 3,0%, η μέγιστη εφελκυστική τιμή που λαμβάνει η τάση είναι 642,38 MPa, ενώ η αντίστοιχη μέγιστη θλιπτική τάση λαμβάνει τιμή -675,61 MPa. Η συγκεκριμένη διαφοροποίηση της τιμής των τάσεων ανά βρόχο, για καθένα από τα εύρη μεταβολής της παραμόρφωσης,

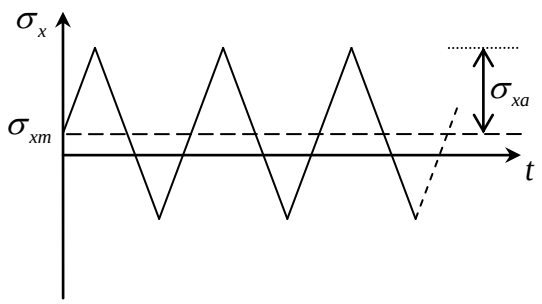
αλλοιώνει την συμμετρίας στην μορφή των καμπυλών (διαφορετική κλίση), φαινόμενο το οποίο δεν είναι δυνατόν να μοντελοποιηθεί με την χρήση μοντέλων τύπου AF.

4.3.2 Ανακυκλικές Καταπονήσεις υπό Ελεγχόμενη Τάση

Η περίπτωση των ανακυκλικών μονοαξονικών καταπονήσεων υπό ελεγχόμενη τάση (stress controlled) διαθέτει ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω του εμφανιζόμενου φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), η επιτυχής προσομοίωση του οποίου αποτελεί έναν από τους κύριους στόχους του προτεινόμενου μοντέλου. Για τον λόγο αυτό στην ανάλυση που ακολουθεί λαμβάνονται υπόψη και αναλύονται όλα τα σημαντικά χαρακτηριστικά των υπό μελέτη μονοαξονικών πειραμάτων, όπως η σταθεροποιημένη ανακυκλική συμμετρική συμπεριφορά του υλικού (για δεδομένο εύρος παραμόρφωσης), η περίπτωση της μερικής αποφόρτισης/επαναφόρτισης και ο κυκλικός ερπυσμός για διαφοροποιούμενες τιμές της μέσης τάσης (mean stress) και του πλάτους τάσης (stress amplitude). Η ανάπτυξη και η πιστοποίηση ενός μοντέλου πλαστικότητας ως προς την ικανότητα του να προσομοιώνει επιτυχώς ένα ευρύ φάσμα περιπτώσεων ανακυκλικού ερπυσμού, προϋποθέτει την μελέτη της συμπεριφοράς σταθεροποιημένων μεταλλικών υλικών, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2. Συνεπώς, οι παράμετροι εκείνοι που σχετίζονται με τον κανόνα ισοτροπικής κράτυνσης (μεταβολή της επιφάνειας διαρροής) δεν πρέπει να συμπεριληφθούν στο αναπτυσσόμενο – υπό μελέτη μοντέλο. Επιπρόσθετα, όλοι οι παράμετροι κινηματικής κράτυνσης (μετατόπιση της επιφάνειας διαρροής) θα πρέπει να προσδιορίζονται, με την χρήση είτε με αριθμητικών, είτε γραφικών μεθόδων, από μονοαξονικά πειραματικά δεδομένα υλικών που έχουν υποστεί σταθεροποίηση (δηλ.

σταθεροποιημένοι βρόχοι εφελκυσμού-θλίψης) [43]. Για τον λόγο αυτό, στην ανάλυση που ακολουθεί οι υπόψη προϋποθέσεις λαμβάνονται υπόψη τόσο για τη επιλογή των, όσο και για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του υλικού (ισοτροπική / κινηματική κράτυνση).

Τα πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στην υπόψη ανάλυση ελήφθησαν από την έρευνα που διεξήγαγαν οι Hassan, Corona και Kyriakides [30] και οι Bari και Hassan [3]. Ειδικότερα, στα εν λόγω πειράματα χρησιμοποιήθηκαν λεπτότοιχα σωληνοειδή δοκίμια από ανθρακοχάλυβα (Carbon Steel) CS 1026 τα οποία είχαν προηγουμένως υποστεί σταθεροποίηση (stabilization) μέσω συμμετρικής αξονικής καταπόνησης υπό ελεγχόμενη παραμόρφωση σε εύρος ±1% (εντός 12 κύκλων καταπόνησης). Στη συνέχεια, έπειτα από τον μηδενισμό της αξονικής τάσης και παραμόρφωσης, επιβλήθηκε τα δοκίμια υποβλήθηκαν σε μονοαξονική ανακυκλική φόρτιση, τα χαρακτηριστικά της οποίας αναπαρίστανται στο Σχήμα 4.2. Τα πειραματικά αποτελέσματα που προέκυψαν διακρίνονται σε δύο ομάδες αναλόγως με την παράμετρο ελέγχου που διατηρείται σταθερή ή διαφοροποιείται, δηλαδή για την περίπτωση που εξετάζεται το πλάτος τάσης (σ_{xa}) ή η μέση τιμή τάσης (σ_{xm}).



Σχήμα 4.2 *Ιστορικό φόρτισης μονοαξονικής εναλλασσόμενης (ανακυκλικής) καταπόνησης υπό ελεγχόμενη τάση [3].*

Παράλληλα, εκτός από τα πειραματικά αποτελέσματα από τις ίδιες ερευνητικές εργασίες αξιοποιήθηκαν και οι παράμετροι του μοντέλου MAFT, με σκοπό τον προσδιορισμό των παραμέτρων του προτεινόμενου μοντέλου σύμφωνα με την μεθοδολογία που αναλύθηκε στην ενότητα 4.1. Ειδικότερα, οι Bari και Hassan στην μελέτη τους [3] χρησιμοποίησαν ένα μοντέλο MAFT, το οποίο διαθέτει τρείς back stresses τύπου AF (εκ των οποίων η μία με συμπεριφορά παραπλήσια ενός γραμμικού κανόνα κράτυνσης τύπου Prager) και μία back stress τύπου AF με όρο κατωφλίου (threshold term). Ειδικότερα, το υπόψη μοντέλο περιγράφεται μαθηματικά από τις εξισώσεις (2.28)-(2.31), ενώ οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν για τις προσομοιώσεις της συμπεριφοράς του υλικού CS1026 σε ανακυκλικό ερπυσμό (ratcheting) ελήφθησαν από την δημοσιευμένη ερευνητική μελέτη των Bari και Hassan [3] (Πίνακας 4.2).

Μέτρο Ελαστικότητας	$E = 26.300\,\text{ksi}$	
Ισοτροπική Κράτυνση	$k_s = 18{,}8$ ksi, $c_k = 0$	
Κινηματική Κράτυνση		
$\text{AF}_1\ (a_1)$	$a_1^s = 3$ ksi	$c_1 = 20.000$
$\text{AF}_2\ (a_2)$	$a_2^s = 8{,}07$ ksi	$c_2 = 400$
$\text{AF}_3\ (a_3)$	$a_3^s = 41{,}4$ ksi	$c_3 = 11$
$\text{AF}_4\ (a_4)$	$a_4^s = 3$ ksi	$c_4 = 5.000$
	$\bar{a}_4 = 5$ ksi	(threshold)

Πίνακας 4.2 *Παράμετροι μοντέλου MAFT για την προσομοίωση μονοαξονικών συμμετρικών καταπονήσεων εντός δεδομένου εύρους παραμορφώσεων [Σχήματα 4.2(α) και 4.2(β)], μη συμμετρικών καταπονήσεων μερικής αποφόρτισης/επαναφόρτισης [Σχήμα 4.2(γ) και 4.2(δ)] και ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε δοκίμια χάλυβα CS1026 (Σχήμα 4.3) [3].*

Σημειώνεται ότι για την περίπτωση προσομοιώσεων πειραματικών δεδομένων ανακυκλικού ερπυσμού δεν λαμβάνεται υπόψη η ισοτροπική κράτυνση, ως εκ

τούτου οι αντίστοιχες εξισώσεις, και οι παράμετροί τους, δεν υπεισέρχονται στο ελαστοπλαστικό μοντέλο. Η μεθοδολογία προσδιορισμού των υπόλοιπων παραμέτρων του μοντέλου MAFT που εμφανίζονται στον Πίνακα 4.2 εκτίθεται αναλυτικά στις εργασίες του Chaboche [11] Bari και Hassan [3], ως εκ τούτου δεν κρίθηκε σκόπιμο να συμπεριληφθεί στην υπόψη ανάλυση.

Το υπό μελέτη μοντέλο MAFM διαθέτει επίσης τρείς back stresses τύπου AF και μία back stress τύπου AFM, και περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.15)-(3.18). Για τις δύο πρώτες back stresses AFM οι παράμετροι είναι ακριβώς ίδιες με αυτές του προαναφερθέντος μοντέλου MAFT ενώ για την τρίτη back stress AFM έχει γίνει μία μικρή τροποποίηση, δηλαδή: $a_3^s = 45,5$ ksi και $c_3 = 10$. Όσον αφορά τον προσδιορισμό των παραμέτρων της back stress AFM ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφεται από τις σχέσεις (4.1)-(4.6), ενώ ως προς τον χρησιμοποιούμενο συμβολισμό σημειώνεται ότι:

α) Ο εμφανιζόμενος δείκτη 1 στις σχέσεις (4.1)-(4.6) αντικαθίσταται με 4, καθόσον η τέταρτη back stress τύπου AFM, η εξέλιξη της οποία περιγράφεται από την σχέση (3.17), συμβολίζεται με a_4, ενώ ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστής (multiplier) με a_4^*.

β) Ο δείκτης 4 που χρησιμοποιείται για την back stress με τον όρο κατωφλίου (threshold term) του μοντέλου MAFT ενσωματώνεται ως δείκτης στις αντίστοιχες σχέσεις (4.1)-(4.6), εκ του οποίου προκύπτει ότι: $a^s = a_4^s = 3$ ksi, $c = c_4 = 5.000$ και $\bar{a} = \bar{a}_4 = 5$ ksi.

γ) Δεν θα πρέπει να γίνει σύγχυση μεταξύ παραμέτρων a_4^s και c_4 του μοντέλου MAFT, με τις προς προσδιορισμό παραμέτρους της back stress a_4 του μοντέλου AFM.

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (4.1)-(4.6) αποδίδει ένα εύρος δυνατών τιμών για τις προς προσδιορισμό παραμέτρους, το οποίο επιτρέπει την εν συνεχεία εκτίμηση και τελική επιλογή της τιμή τους [17]. Συγκεκριμένα, οι τιμές των παραμέτρων της τέταρτης back stress AFM που τελικώς ελήφθησαν από την εφαρμογή της διαδικασίας αυτής είναι: $c_4 = 1.800$, $a_4^s = \bar{a} + a^s = 8\,\text{ksi}$, $c_4^* = 5.000$ και $a_4^{*s} = 0{,}16$. Συγκεντρωτικά οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο MAFM εμφανίζονται στον Πίνακα 4.3. Οι τιμές αυτές των παραμέτρων χρησιμοποιούνται στις προσομοιώσεις των πειραματικών δεδομένων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) για υλικό χάλυβα CS 1026 και παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.3 και 4.4.

Μέτρο Ελαστικότητας	$E = 26.300\,\text{ksi}$		
Ισοτροπική Κράτυνση	$k_s = 18{,}8$ ksi, $c_k = 0$		
Κινηματική Κράτυνση			
$\text{AF}_1\,(a_1)$		$a_1^s = 3$ ksi	$c_1 = 20.000$
$\text{AF}_2\,(a_2)$		$a_2^s = 8{,}07$ ksi	$c_2 = 400$
$\text{AF}_3\,(a_3)$		$a_3^s = 45{,}5$ ksi	$c_3 = 10$
$\text{AFM}\,(a_4)$	Back stress	$a_4^s = 8$ ksi	$c_4 = 1.800$
	Πολλαπλασιαστής	$a_4^{*s} = 0{,}16$	$c_4^* = 5.000$

Πίνακας 4.3 *Παράμετροι μοντέλου MAFM για την προσομοίωση μονοαξονικών συμμετρικών καταπονήσεων εντός δεδομένου εύρους παραμορφώσεων [Σχήματα 4.2(α) και 4.2(β)], μη συμμετρικών καταπονήσεων μερικής αποφόρτισης/επαναφόρτισης [Σχήμα 4.2(γ) και 4.2(δ)] και ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε δοκίμια χάλυβα CS1026 (Σχήμα 4.3) [17].*

Επίσης, στον Πίνακα 4.4 συνοψίζονται οι συνδυασμοί (ζεύγη) τιμών σ_{xm} - σ_{xa} με τα αντίστοιχα Σχήματα που παρουσιάζουν τις πειραματικές και υπολογιστικές καμπύλες ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting).

Σταθερή Παράμετρος σ_{xa}	***Μεταβλητή Παράμετρος*** σ_{xm}	***Σχήμα***	***Σταθερή Παράμετρος*** σ_{xm}	***Μεταβλητή Παράμετρος*** σ_{xa}	***Σχήμα***
	4,18 ksi	4.4 (α),(β)		28,29 ksi	4.4 (γ),(δ)
32 ksi	6,52 ksi	4.4 (α),(β)	6,5 ksi	30,35 ksi	4.4 (γ),(δ)
	9,14 ksi	4.4 (α),(β)		32,12 ksi	4.4 (γ),(δ)
				33,28 ksi	4.4 (γ),(δ)

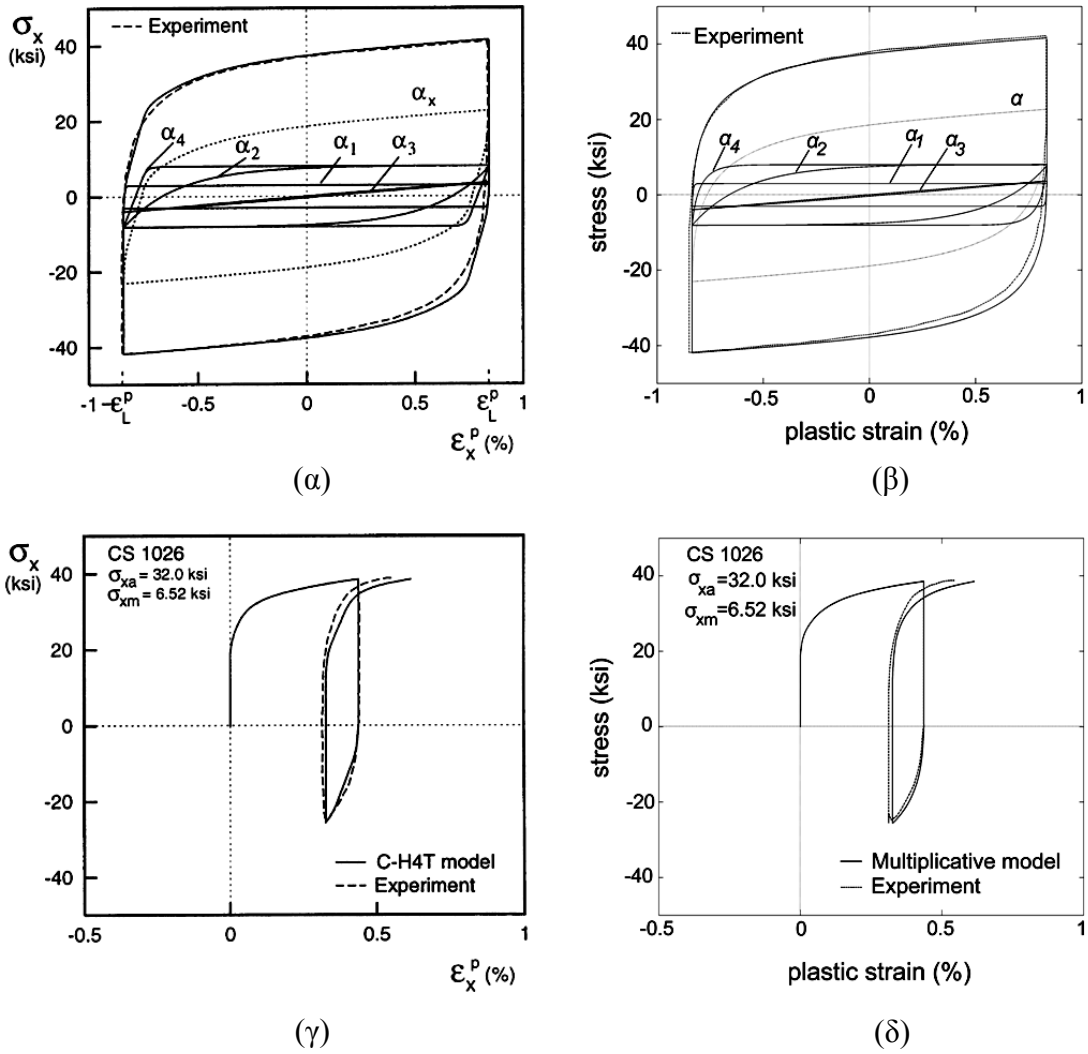
Πίνακας 4.4 *Συνδυασμός τιμών* σ_{xm} - σ_{xa} *για την περίπτωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) και αντιστοίχιση με τα Σχήματα των πειραματικών δεδομένων και υπολογιστικών αποτελεσμάτων.*

Στα Σχήματα 4.3(α), 4.3(γ), 4.4(α) και 4.4(γ) εμφανίζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων του μοντέλου MAFT, τα οποία έχουν ληφθεί από την ίδια έρευνα των Bari και Hassan [3], ενώ τα αποτελέσματα εφαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου MAFM εμφανίζονται δεξιά, για αντιπαραβολή, στα Σχήματα 4.3(β), 4.3(δ), 4.4(β) και 4.4(δ) αντίστοιχα.

Όσον αφορά το Σχήμα 4.3 παρατηρούνται τα ακόλουθα:

α) Η καμπύλη τάσης – παραμόρφωσης στο Σχήμα 4.3(α) (μοντέλο MAFT) εμφανίζει ένα έντονο γραμμικό τμήμα κατά την έναρξη της φόρτισης, το οποίο αποτελεί αποτέλεσμα της επίδρασης της back stress με τον όρο κατωφλίου (threshold), για τιμές έως και το όριο κατωφλίου. Αντίθετα, οι προσομοιώσεις του μοντέλου MAFM (multiplicative scheme) δεν εμφανίζουν γραμμική συμπεριφορά, όπως παρατηρείται στις καμπύλες τάσης – παραμόρφωσης στο Σχήμα 4.3(β) αντίστοιχα. Η διαφορά αυτή οφείλεται στην διαφορετική συνεισφορά που διαθέτει ο όρος (back stress) a_4 για την περίπτωση της AF με όρο κατωφλίου ($AF_{Threhold}$), όπου η συμπεριφορά είναι γραμμική, και της AFM (multiplicative), όπου η συμπεριφορά είναι μη γραμμική (ομαλή) με υψηλή κλίση.

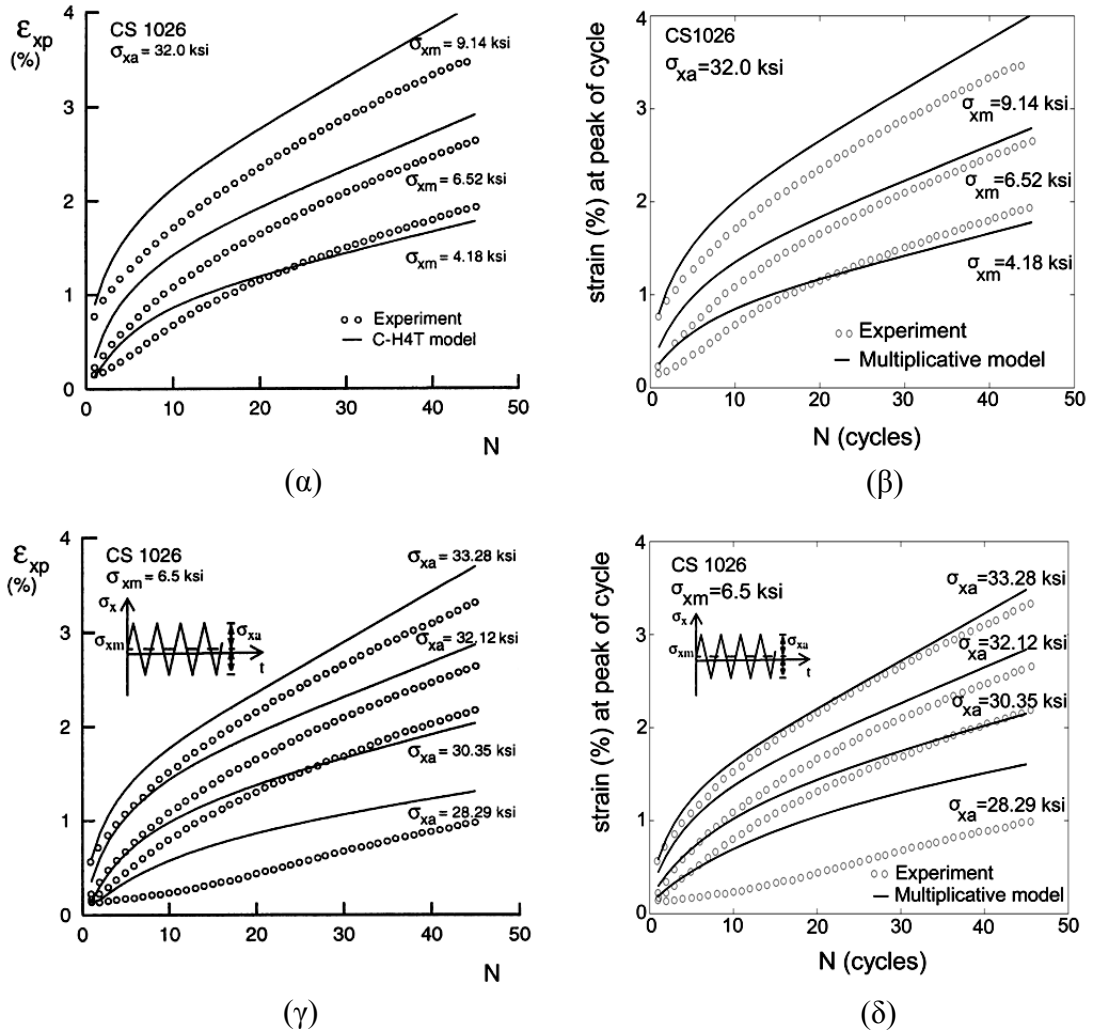
β) Από τα Σχήματα 4.3(γ) και 4.3(δ) διαπιστώνεται ότι και τα δύο υπό εξέταση μοντέλα (MAFT, MAFM) αποδίδουν πολύ ικανοποιητικά τον βρόχο υστέρησης για την περίπτωση της μερικής αποφόρτισης/επαναφόρτισης, το οποίο και αποτελεί έναν από τους κύριους στόχους των υπόψη μοντέλων, με το μοντέλο MAFM να επιτυγχάνεται μία ελαφρώς πιο ομαλή συμπεριφορά.



Σχήμα 4.3 *Μονοαξονικά πειραματικά δεδομένα για δοκίμια υλικού CS1026 και υπολογιστικά αποτελέσματα εφαρμογής του μοντέλου MAFT (C-H4T model) και MAFM (Multiplicative model) [(γ) και (δ)]. Οι παράμετροι του μοντέλου MAFM δίδονται στον Πίνακα 4.2, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου MAFT έχουν ληφθεί από την έρευνα των Bari και Hassan [3] [17].*

Τέλος, στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα εφαρμογής των δύο υπό εξέταση μοντέλων (MAFT, MAFM) σε περιπτώσεις μονοαξονικών πειραμάτων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting). Συγκεκριμένα, στα Σχήματα 4.4(α) και 4.4(β) παρουσιάζονται οι καμπύλες μεταβολής της παραμόρφωσης στο μέγιστο θετικό σημείο (stress peak) του κύκλου καταπόνησης [$\varepsilon_{xp}(\%)$], συναρτήσει του αριθμού των κύκλων καταπόνησης [N] για την περίπτωση όπου το πλάτος της επιβαλλόμενης τάσης είναι σταθερό (σ_{xa}) και η μέση τιμή της τάσης (σ_{xm}) λαμβάνει διάφορες μη μηδενικές τιμές, με το αντίστροφο να συμβαίνει για τις καμπύλες των Σχήματα 4.4(γ) και 4.4(δ) (σταθερό σ_{xm} - μεταβλητό σ_{xa}). Για συντομία, οι υπόψη καμπύλες εφεξής καλούνται (πειραματικές ή υπολογιστικές) καμπύλες ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting).

Σημειώνεται ότι τα δεδομένα που αντιστοιχούν στις ενδιάμεσες καμπύλες των Σχημάτων 4.4(α) και 4.4(β), π.χ. η καμπύλη για $\sigma_{xa} = 32,0$ ksi και $\sigma_{xm} = 6,52$ ksi, είναι αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων c_4 και a_4^{*s} του μοντέλου AFM. Επίσης, επισημαίνεται ότι όλες οι υπόλοιπες καμπύλες των Σχημάτων 4.4(γ) και 4.4(δ) αποτελούν προσομοιώσεις οι οποίες δεν χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του υπόψη μοντέλου. Παρατηρείται ακόμη ότι ορισμένες από τις υπολογιστικές καμπύλες ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) προσομοιώνουν τα πειραματικά δεδομένα με μεγαλύτερη επιτυχία, σε σχέση με τις υπολογιστικές καμπύλες που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του μοντέλου, όπως π.χ. η καμπύλη του Σχήματος 4.4(δ) για $\sigma_{xm} = 6,5$ ksi και $\sigma_{xa} = 33,28$ ksi.



Σχήμα 4.4 *Μονοαξονικά πειραματικά δεδομένα για δοκίμια υλικού CS1026 και υπολογιστικά αποτελέσματα εφαρμογής του μοντέλου MAFT (C-H4T model) και MAFM (Multiplicative model) για ανακυκλικό ερπυσμό (ratcheting) υπό σταθερό πλάτος τάσης και μεταβαλλόμενη μέση τάση [(α) και (β)] και ανακυκλικό ερπυσμό υπό σταθερή μέση τάση και μεταβαλλόμενο πλάτος τάσης. Οι παράμετροι του μοντέλου MAFM δίδονται στον Πίνακα 4.2, ενώ οι παράμετροι του μοντέλου MAFT έχουν ληφθεί από την έρευνα των Bari και Hassan [3] [17].*

Από την σύγκριση των δύο μοντέλων (MAFT, MAFM) προκύπτει ότι το μοντέλο MAFM διαθέτει ελαφρώς βελτιωμένη απόδοση στην προσομοίωση των πειραματικών καμπύλων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε σχέση με το μοντέλο MAFT, με εξαίρεση την περίπτωση της καμπύλης που αντιστοιχεί σε

$\sigma_{xm} = 6,5$ ksi και $\sigma_{xa} = 28,29$ ksi στα Σχήματα 4.4(γ) και 4.4(δ) αντίστοιχα. Το τίμημα της μικρής αυτής βελτίωσης που επιτυγχάνει το μοντέλο MAFM είναι η χρήση μίας επιπλέον παραμέτρου, καθόσον η back stress AF με τον όρο κατωφλίου (threshold term) απαιτεί τρεις παραμέτρους (δύο για το μοντέλο AF και μία για το κατώφλι), ενώ το μοντέλο AFM απαιτεί τέσσερεις παραμέτρους, δύο για το τμήμα της back stress και δύο για τον αδιάστατο πολλαπλασιαστή (multiplier). Εν τούτοις, το πλεονέκτημα του μοντέλου AFM είναι ότι δεν απαιτείται ο έλεγχος υπέρβασης ή μη της τιμής κατωφλίου, όπως απαιτείται για το μοντέλο MAFT, το οποίο προσφέρει υπολογιστική απλότητα και ταχύτητα, ιδιαίτερα δε σε εφαρμογές μεγάλης κλίμακας, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός τάσεων και παραμορφώσεων σε περίπλοκες κατασκευές με την χρήση κώδικα που χρησιμοποιεί την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (finite element method).

Κεφάλαιο 5

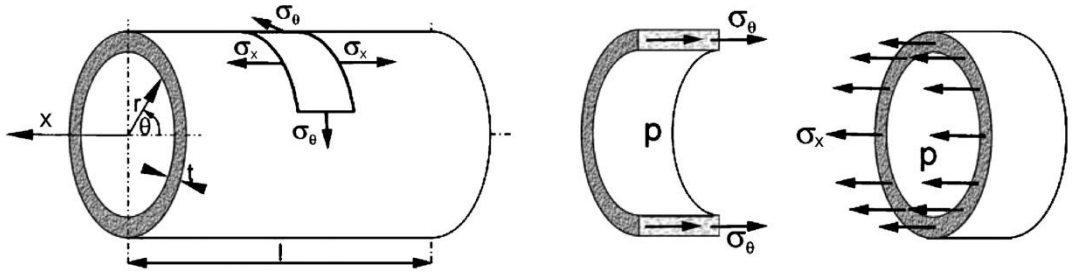
Εφαρμογή του Μοντέλου σε Πολυαξονικές Καταπονήσεις

5.1 Περιπτώσεις Εφαρμογής του Μοντέλου

Η ανάλυση των δυνατοτήτων του προτεινόμενου μοντέλου (MAFM) και των αντίστοιχων τροποποιήσεών του (MAFMδ, MAFMr), όπως αυτές παρουσιάσθηκαν στο Κεφάλαιο 3, προϋποθέτει την εφαρμογή του σε περιπτώσεις προσομοίωσης πολυαξονικών πειραματικών δεδομένων, παράλληλα με την αξιολόγησή της απόδοσής του στις μονοαξονικές περιπτώσεις καταπόνησης. Στην υπόψη μελέτη, η εφαρμογή, πιστοποίηση και διακρίβωση του μοντέλου στις περιπτώσεις μονοαξονικών καταπονήσεων [σταθεροποιημένος βρόχος, κυκλικός ερπυσμός (ratcheting)] αποτελεί την βάση για τον προσδιορισμό των παραμέτρων, σύμφωνα με την μέθοδο που παρουσιάσθηκε στο Κεφάλαιο 4, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν τόσο στις πολυαξονικές, όσο και στις μονοαξονικές προσομοιώσεις.

Όπως έχει αναφερθεί, το ενδιαφέρον της υπόψη ερευνητικής εργασίας, όπως και της ευρύτερης έρευνας που πραγματοποιείται σε μοντέλα πλαστικότητας αυτής της κατηγορίας, εστιάζεται κατά κύριο στην προσομοίωση του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), λόγω της σημασίας που διαθέτει σε διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές. Στην βάση αυτή, επιλέχθηκαν, από δημοσιευμένες ερευνητικές εργασίες [30] [13], διάφορες αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις πολυαξονικών (διαξονικών) ιστορικών φόρτισης σε λεπτότοιχα σωληνοειδή δοκίμια ανθρακοχάλυβα (βλέπε ενότητα 4.3), συνοδευόμενες από τα αντιστοίχως προκύπτοντα πειραματικά αποτελέσματα ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting). Τα

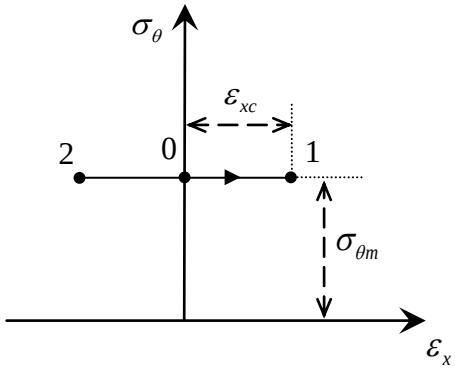
δοκίμια υποβάλλονται σε μικτή φόρτιση αξονικής καταπόνησης - εσωτερικής πίεσης (σταθερή ή μεταβαλλόμενη σε φάση με την αξονική καταπόνηση) (Σχήμα 5.1).



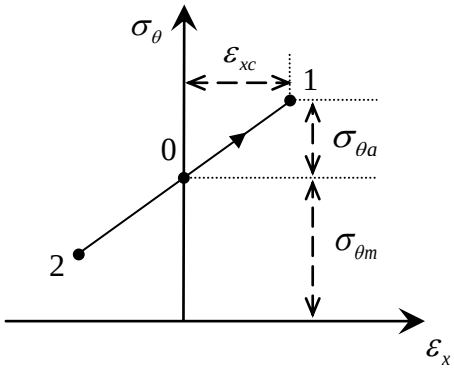
Σχήμα 5.1 *Απεικόνιση μικτής καταπόνησης (αξονική φόρτιση – εσωτερική πίεση) σε λεπτότοιχο σωληνοειδές δοκίμιο [5].*

Οι περιπτώσεις διαξονικών καταπονήσεων [αξονική παραμόρφωση (ε_x) - περιφερειακή τάση (σ_θ)] που χρησιμοποιήθηκαν παρίστανται γραφικά στα Σχήματα 5.2- 5.7 και συνοψίζονται ως ακολούθως:

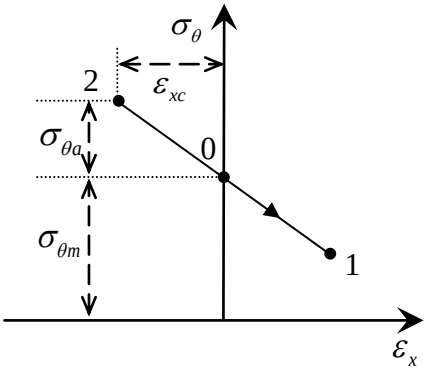
- Φόρτιση τύπου I: Αξονική συμμετρική καταπόνηση υπό σταθερή εσωτερική πίεση (strain symmetric cycling at constant pressure).
- Φόρτιση τύπου II: Διαξονική καταπόνηση τύπου ‘κεκλιμένου επιπέδου’ θετικής κλίσης (inclined path positive slope).
- Φόρτιση τύπου III: Διαξονική καταπόνηση τύπου ‘κεκλιμένου επιπέδου’ αρνητικής κλίσης (inclined path negative slope).
- Φόρτιση τύπου IV: Διαξονική καταπόνηση τύπο ‘παπιγιόν’ (bowtie).
- Φόρτιση τύπου V: Διαξονική καταπόνηση τύπου ανάστροφου ‘παπιγιόν’ (reverse bowtie).
- Φόρτιση τύπου VI: Διαξονική καταπόνηση τύπου ‘κλεψύδρας’ (hourglass).



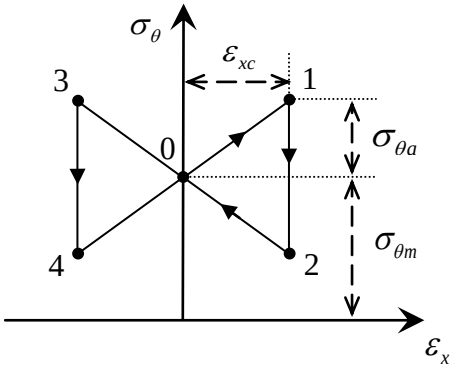
Σχήμα 5.2 *Φόρτιση τύπου I: Αξονική συμμετρική καταπόνηση υπό σταθερή εσωτερική πίεση (strain symmetric cycling under constant pressure) [13].*



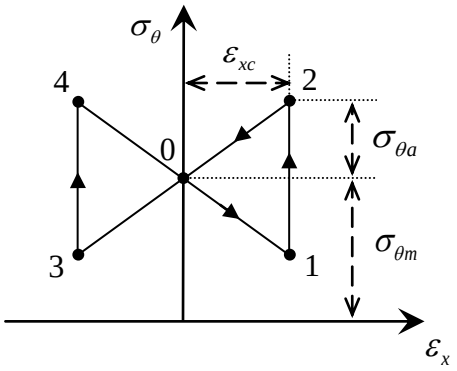
Σχήμα 5.3 *Φόρτιση τύπου II: Διαξονική καταπόνηση τύπου 'κεκλιμένου επιπέδου' θετικής κλίσης (inclined path positive slope) [13].*



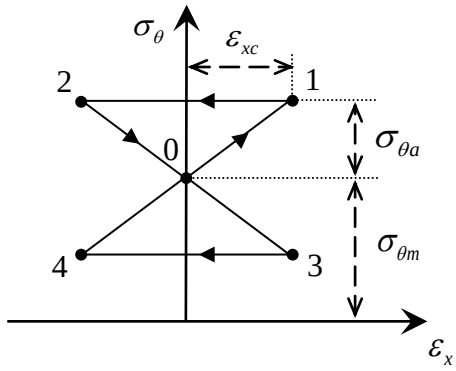
Σχήμα 5.4 *Φόρτιση τύπου III: Διαξονική καταπόνηση τύπου 'κεκλιμένου επιπέδου' αρνητικής κλίσης (inclined path positive slope) [13].*



Σχήμα 5.5 *Φόρτιση τύπου IV: Διαξονική καταπόνηση τύπου 'παπιγιόν' (bowtie) [13].*



Σχήμα 5.6 *Φόρτιση τύπου V: Διαξονική καταπόνηση τύπου ανάστροφου 'παπιγιόν' (reverse bowtie) [13].*



Σχήμα 5.7 *Φόρτιση τύπου VI: Διαξονική καταπόνηση τύπου κλεψύδρας (hourglass) [13].*

Συνοπτικά, τα ακριβή χαρακτηριστικά των ιστορικών φόρτισης (μεταβαλλόμενοι παράμετροι, αλληλουχία φορτίσεων) αναλύονται ως ακολούθως:

α) Στο ιστορικό φόρτισης τύπου Ι τα δοκίμια βρίσκονται υπό σταθερή εσωτερική πίεση, η οποία αντιστοιχεί σε μέση τάση $\sigma_{\theta m}$, ενώ ταυτόχρονα υπόκεινται σε ανακυκλική καταπόνηση υπό ελεγχόμενη αξονική παραμόρφωση (ε_x) με πλάτος ε_{xc} (Σχήμα 5.2).

β) Στις φορτίσεις τύπου ΙΙ και ΙΙΙ [κεκλιμένο επίπεδο θετικής / αρνητικής κλίσης (inclined path positive/negative slope)] η αξονική παραμόρφωση (ε_x) και περιφερειακή τάση (σ_θ) μεταβάλλονται ταυτόχρονα με γραμμικό τρόπο (σταθερός λόγος $\sigma_{\theta m}/\varepsilon_{xc}$) γύρω από μία μέση τάση $\sigma_{\theta m}$ και εντός προκαθορισμένων ορίων, όπως παρίσταται στα Σχήματα 5.3 και 5.4 (σημεία 0-1-2 κατά σειρά).

γ) Οι περιπτώσεις φόρτισης IV και V [‘παπιγιόν’ (bowtie) / ‘ανάστροφο παπιγιόν’ (reverse bowtie)] διαφοροποιούνται από τις φορτίσεις τύπο ΙΙ και ΙΙΙ ως προς γεγονός ότι οι βρόχοι μεταβαλλόμενης αξονικής παραμόρφωσης (ε_x) και περιφερειακής τάσης (σ_θ) διασταυρώνονται, ακολουθώντας την εξής αλληλουχία φορτίσεων (Σχήματα 5.5 και 5.6 αντίστοιχα):

- Σημείο 0: Εκκίνηση στις τιμές $(\varepsilon_x, \sigma_\theta) = (0, \sigma_{\theta m})$.
- Σημείο 1: Ταυτόχρονη αύξηση (bowtie) / μείωση (reverse bowtie) της αξονικής παραμόρφωσης και της περιφερειακής τάσης έως τις τιμές $(\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m} \pm \sigma_{\theta a})$.

- Σημείο 2: Μείωση (bowtie) / αύξηση (reverse bowtie) της περιφερειακής τάσης με διατήρηση σταθερής της αξονικής παραμόρφωσης, δηλαδή $\left(\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m} \mp \sigma_{\theta a}\right)$.
- Σημείο 3: Ταυτόχρονη αύξηση (bowtie) / μείωση (reverse bowtie) της αξονικής παραμόρφωσης και της περιφερειακής τάσης έως τις τιμές $\left(-\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m} \pm \sigma_{\theta a}\right)$.
- Σημείο 4: Αύξηση (bowtie) / μείωση (reverse bowtie) της περιφερειακής τάσης με διατήρηση σταθερής της αξονικής παραμόρφωσης, δηλαδή $\left(-\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m} \pm \sigma_{\theta a}\right)$.
- Σημείο 0: Επαναφορά στο σημείο εκκίνησης $\left(\varepsilon_x, \sigma_\theta\right) = \left(0, \sigma_{\theta m}\right)$.

Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό των ιστορικών φόρτισης τύπου ‘παπιγιόν’ (bowtie/reverse bowtie) είναι ότι προσομοιάζουν σε μεγάλο βαθμό τα πραγματικά ιστορικά φόρτισης που παρατηρούνται σε στοιχεία σωληνώσεων [13]. Κατά συνέπεια, η επιτυχής προσομοίωση της συμπεριφοράς που προκαλούν αυτά τα ιστορικά φόρτισης αποτελεί ένδειξη για την καταλληλότητα χρήσης ενός μοντέλου πλαστικότητας στην ανάλυση του φαινομένου του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε μεταλλικές σωληνώσεις.

δ) Τέλος, η φόρτιση τύπου VI [‘κλεψύδρα’ (hourglass)] δύναται να χαρακτηρισθεί ως συνδυασμός των φορτίσεων τύπου I, II και III ακολουθώντας της εξής αλληλουχία φορτίσεων (Σχήμα 5.7):

- Σημείο 0: Εκκίνηση στις τιμές $\left(\varepsilon_x, \sigma_\theta\right) = \left(0, \sigma_{\theta m}\right)$.
- Σημείο 1: Ταυτόχρονη αύξηση της αξονικής παραμόρφωσης και της περιφερειακής τάσης έως τις τιμές $\left(\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m} + \sigma_{\theta a}\right)$.

- Σημείο 2: Μείωση της αξονικής παραμόρφωσης με διατήρηση σταθερής της περιφερειακής τάσης, δηλαδή $\left(-\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m} + \sigma_{\theta a}\right)$.
- Σημείο 3: Ταυτόχρονη μείωση της αξονικής παραμόρφωσης και της περιφερειακής τάσης έως τις τιμές $\left(\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m} - \sigma_{\theta a}\right)$.
- Σημείο 4: Αύξηση της αξονικής παραμόρφωσης με διατήρηση σταθερής της περιφερειακής τάσης, δηλαδή $\left(-\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m} - \sigma_{\theta a}\right)$.
- Σημείο 0: Επαναφορά στο σημείο εκκίνησης $\left(\varepsilon_x, \sigma_\theta\right) = \left(0, \sigma_{\theta m}\right)$.

Επίσης, για την φόρτιση τύπου VI, με βάση την ανωτέρω αλληλουχία, παρατηρείται ότι για έναν πλήρη κύκλο φόρτισης η αξονική παραμόρφωση ε_x εκτελεί δύο κύκλους μεταξύ των τιμών $\pm\varepsilon_{xc}$, συνεπώς κατά την προσομοίωση της συμπεριφοράς του υλικού που προκύπτει από αυτό το ιστορικό φόρτισης αναμένεται η εμφάνιση δύο βρόχων τάσης – παραμόρφωσης για κάθε κύκλο φόρτισης.

5.2 Αποτελέσματα Εφαρμογής

Η εφαρμογή σε περιπτώσεις πολυαξονικών ανακυκλικών καταπονήσεων αφορά τόσο την βασική μορφή του προτεινόμενου μοντέλου MAFM, όσο και τις τροποποιήσεις του MAFMδ και MAFMr, οι οποίες, όπως αναλύθηκε λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 3, αποσκοπούν στην βελτίωση της απόδοσής του σε αυτές ακριβώς τις περιπτώσεις καταπόνησης. Εφαρμόζοντας την πρακτική που ακολουθήθηκε για την ανάλυση των αποτελεσμάτων εφαρμογής στις μονοαξονικές περιπτώσεις (Κεφάλαιο 4), τα μοντέλα αυτά, αντιπαραβάλλονται με τα μοντέλα MAFT και MAFTδ, επί των ίδιων ομάδων πειραματικών δεδομένων.

Οι παράμετροι των μοντέλων που χρησιμοποιούνται στις πολυαξονικές (διαξονικές) προσομοιώσεις είναι οι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στις μονοαξονικές προσομοιώσεις, υπό την προϋπόθεση ότι δεν αλλάζουν τα υπό μελέτη υλικά, το οποίο ισχύει και για τα μοντέλα MAFTδ και MAFMδ, καθόσον η παράμετρος δ που υπεισέρχεται σε αυτά προσδιορίζεται ανεξάρτητα προς τις υπόλοιπες παραμέτρους των μοντέλων χωρίς να τις επηρεάζει. Τα πειραματικά δεδομένα για τα υπό εξέταση ιστορικά φόρτισης (I έως VI) ελήφθησαν από δημοσιευμένες πειραματικές εργασίες των Bari και Hassan [3] [4] και των Corona, Hassan και Kyriakides [13], στις οποίες τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν κατασκευασμένα από υλικά CS 1026 και CS 1018. Τα δύο αυτά υλικά διαθέτουν παρόμοια χαρακτηριστικά και ελαστοπλαστική συμπεριφορά, ωστόσο προκειμένου να ληφθούν τα βέλτιστα δυνατά αποτελέσματα είναι απαραίτητο να προσδιορισθούν και να χρησιμοποιηθούν δύο (διαφορετικά) σετ παραμέτρων για τα ίδια μοντέλα. Συνεπώς, δεδομένου ότι για τα πειραματικά αποτελέσματα που αντιστοιχούν στα ιστορικά φόρτισης τύπου I, II και IV το υλικό των δοκιμίων είναι CS 1026, δύνανται να χρησιμοποιηθούν οι παράμετροι των μοντέλων MAFT και MAFM που δίδονται από τους Πίνακες 4.2 και 4.3 αντίστοιχα, ενώ για τα ιστορικά φόρτισης III, V και VI, όπου το υλικό των δοκιμίων είναι CS 1018, οι παράμετροι των μοντέλων δίδονται από τους Πίνακες 5.1 και 5.2 (κατ’ αντιστοιχία MAFT και MAFM).

Μέτρο Ελαστικότητας	$E = 26.300\,\text{ksi}$		
Ισοτροπική Κράτυνση	$k_s = 22,5$ ksi, $c_k = 0$		
Κινηματική Κράτυνση			
$\text{AF}_1\ (a_1)$		$a_1^s = 3$ ksi	$c_1 = 20.000$
$\text{AF}_2\,(a_2)$		$a_2^s = 8,07$ ksi	$c_2 = 400$
$\text{AF}_3\,(a_3)$		$a_3^s = 98$ ksi	$c_3 = 9$
$\text{AF}_4\,(a_4)$		$a_4^s = 3$ ksi	$c_4 = 5.000$
		$\bar{a}_4 = 5$ ksi	(threshold)

Πίνακας 5.1 *Παράμετροι μοντέλου MAFT για την προσομοίωση διαξονικών πειραματικών δεδομένων (φορτίσεων τύπου III, V και VI) ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε δοκίμια χάλυβα CS 1018.*

Μέτρο Ελαστικότητας	$E = 26.300\,\text{ksi}$		
Ισοτροπική Κράτυνση	$k_s = 22,5$ ksi, $c_k = 0$		
Κινηματική Κράτυνση			
$\text{AF}_1\ (a_1)$		$a_1^s = 3$ ksi	$c_1 = 20.000$
$\text{AF}_2\,(a_2)$		$a_2^s = 8,07$ ksi	$c_2 = 400$
$\text{AF}_3\,(a_3)$		$a_3^s = 98$ ksi	$c_3 = 9$
$\text{AFM}\,(a_4)$	Back stress	$a_4^s = 8$ ksi	$c_4 = 600$
	Πολλαπλασιαστής	$a_4^{*s} = 0,16$	$c_4^* = 5.000$

Πίνακας 5.2 *Παράμετροι μοντέλου MAFM για την προσομοίωση διαξονικών πειραματικών δεδομένων (φορτίσεων τύπου III, V και VI) ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε δοκίμια χάλυβα CS 1018.*

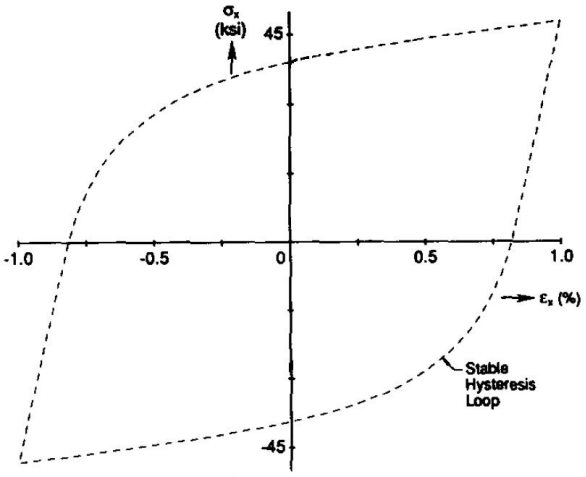
Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζεται η αντιστοιχία μεταξύ των τύπων φόρτισης I έως VI (πολυαξονικά πειραματικά δεδομένα), των υλικών των δοκιμίων (CS 1026 και CS 1018) και των Πινάκων που περιλαμβάνουν τις παραμέτρους των μοντέλων MAFT, MAFM, MAFTδ, MAFMδ και MAFMr.

Τύπος Φόρτισης	Υλικό Δοκιμίων	*Παράμετροι Μοντέλου (αριθμός Πίνακας)*	
		MAFT ***MAFTδ***[(1)]	***MAFM*** ***MAFMδ***[(1)] ***MAFMr***
I	CS 1026	4.2	4.3
II	CS 1026	4.2	4.3
III	CS 1018	5.1	5.2
IV	CS 1026	4.2	4.3
V	CS 1018	5.1	5.2
VI	CS 1018	5.1	5.2

(1) $\delta = 0{,}18\ \ 0{,}50\ \ 0{,}75\ \ 0{,}90\ \ 0{,}99$

Πίνακας 5.3 *Αντιστοιχία μεταξύ τύπων φόρτισης (I έως VI)-υλικών δοκιμίων (CS 1026, CS 1018)και των Πινάκων που περιέχουν τις παραμέτρους των μοντέλων MAFT, MAFM, MAFTδ, MAFMδ και MAFMr.*

Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των μοντέλων για το υλικό CS 1018 αξιοποιήθηκαν οι παράμετροι του υλικού CS 1026 (λόγω του γεγονότος ότι τα δύο αυτά υλικά διαθέτουν παρόμοια συμπεριφορά), σε συνδυασμό με τα δεδομένα που παρέχονται από τον πειραματικό βρόχο αξονικής τάσης - παραμόρφωσης που αντιστοιχεί στην σταθεροποιημένη κατάσταση του υπόψη υλικού, ακολουθώντας μία επαναληπτική διαδικασία μικροδιορθώσεων των τιμών τους (fine tuning), με σκοπό την επίτευξη των βέλτιστων δυνατών προσομοιώσεων. Τα χαρακτηριστικά του υπόψη βρόχου υστέρησης εμφανίζονται στον Σχήμα 5.8, το οποίο επίσης ελήφθη από την δημοσιευμένη πειραματική μελέτη των Corona, Hassan και Kyriakides [13].



Σχήμα 5.8 *Σταθεροποιημένος βρόχος υστέρησης (αξονική τάση – παραμόρφωση) για το υλικό CS 1018 [13].*

Στα γραφήματα των πειραματικών δεδομένων και των αντίστοιχων υπολογιστικών αποτελεσμάτων των μοντέλων που παρουσιάζονται στις ενότητες 5.2.1 έως 5.2.4, παρίσταται η μέγιστη τιμή της περιφερειακής παραμόρφωσης $\varepsilon_{\theta p}$ (peak circumferential strain) η οποία συσσωρεύεται στον κάθε κύκλο καταπόνησης, για τα διάφορα ιστορικά φόρτισης, συναρτήσει του αριθμού των κύκλων N. Στην καθεμία από τις περιπτώσεις των ιστορικών φόρτισης (I έως VI) οι παράμετροι ελέγχου της αξονικής παραμόρφωσης ε_x και της περιφερειακής τάσης σ_θ μεταβάλλονται εντός δεδομένου εύρους, το οποίο προσδιορίζεται από μία μέση τιμή και ένα πλάτος (δηλαδή: $\varepsilon_x = \pm\varepsilon_{xc}$ και $\sigma_{\theta m} = \sigma_{\theta m} \pm \sigma_{\theta a}$). Στην παρουσίαση που ακολουθεί, οι πειραματικές καμπύλες του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), όπως και οι υπολογιστικές καμπύλες των υπό μελέτη μοντέλων, αντιστοιχούν σε διάφορα ζεύγη τιμών $(\varepsilon_{xc}, \sigma_{\theta m})$.

Η ανάλυση συμπληρώνεται με υπολογιστικά αποτελέσματα των υπό εξέταση μοντέλων τα οποία παρουσιάζουν την μεταβολή της μέγιστης αξονικής τάσης σ_x (peak axial stress) που συσσωρεύεται στον κάθε κύκλο καταπόνησης, συναρτήσει

των κύκλων N. Συγκεκριμένα, στα αντίστοιχα διαγράμματα που παρουσιάζονται στις ενότητες 5.2.1 και 5.2.3 (ιστορικά φόρτισης τύπου I και IV) παρίσταται το πλάτος (amplitude) και η μέση (mean) αξονική τάση (σ_{xa} και σ_{xm}) για τον κάθε κύκλο φόρτισης, συναρτήσει των κύκλων N. Σημειώνεται ότι τα εν λόγω υπολογιστικά αποτελέσματα δεν αντιπαραβάλλονται με πειραματικά δεδομένα, ελλείψει αξιοποιήσιμων δημοσιευμένων στοιχείων. Επίσης, όπως παρουσιάζεται στην συνέχεια, τα μοντέλα εμφανίζουν ανάλογη συμπεριφορά (ελαφρά ανακυκλική κράτυνση), ως εκ τούτου δύναται να θεωρηθεί ότι αυτή είναι ενδεικτική και για το σύνολο των ιστορικών φόρτισης. Για τον λόγο αυτό η παρουσίαση - ανάλυση κρίθηκε σκόπιμο να περιορισθεί στις δύο αυτές περιπτώσεις ιστορικών φόρτισης (τύπου I και IV).

Για την εφαρμογή των μοντέλων στις πολυαξονικές περιπτώσεις καταπονήσεων χρησιμοποιήθηκε υπάρχον κώδικας σε Matlab [25], ο οποίος τροποποιήθηκε κατάλληλα προκειμένου να εισαχθούν τα υπό μελέτη μοντέλα και τα διάφορα ιστορικά διαξονικών φορτίσεων. Ο υπόψη κώδικας διαθέτει την δυνατότητα μικτού τύπων καταπονήσεων (stress/strain controlled), ενώ καλύπτει την απλή περίπτωση ανακυκλικής καταπόνησης ενός μόνο στοιχείου (single element) ενός υλικού, στην προκειμένη περίπτωση μετάλλου.

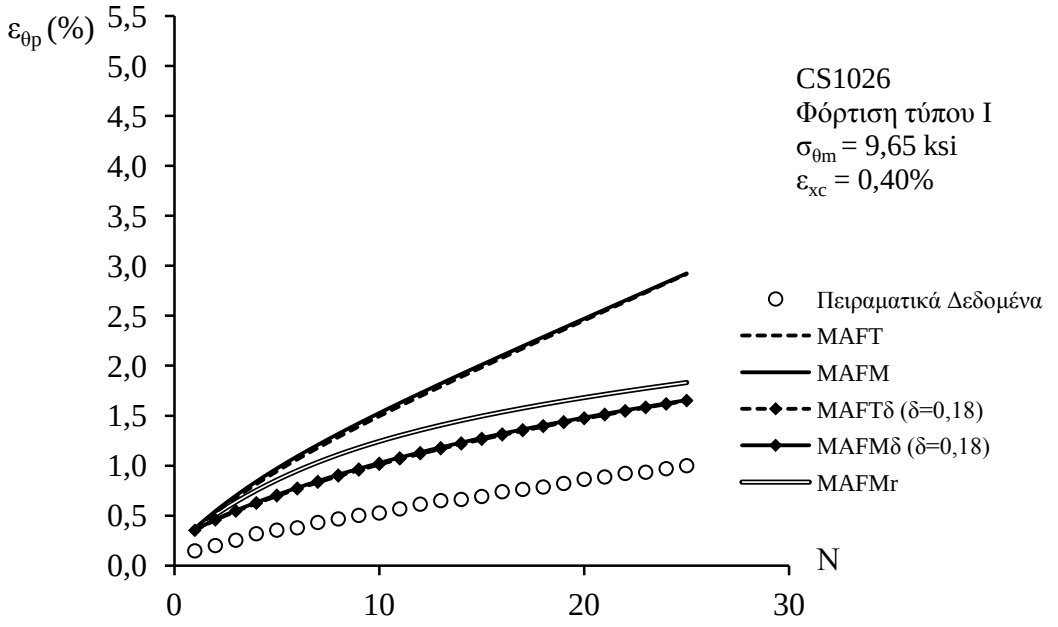
5.2.1 Φόρτιση Τύπου I (Αξονική Καταπόνηση υπό Σταθερή Πίεση)

Η παράμετρος που μεταβάλλεται στην υπόψη περίπτωση φόρτισης είναι η αξονική παραμόρφωση ε_x για διάφορα ζεύγη τιμών πλάτους παραμόρφωσης ε_{xc} και μέσης περιφερειακής τάσης $\sigma_{\theta m}$, η οποία κατ' ουσίαν είναι προϊόν της εσωτερικής

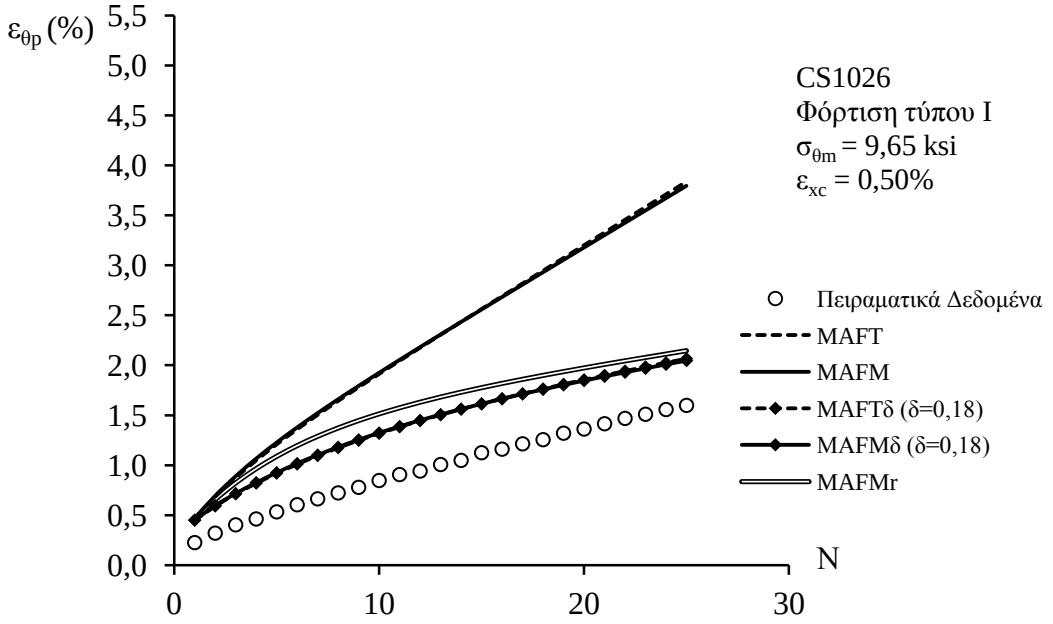
πίεσης που επιβάλλεται στα λεπτότοιχα σωληνοειδή δοκίμια ($\sigma_\theta = pr/t$, όπου η p εσωτερική πίεση, η r εξωτερική ακτίνα και το t πάχος). Στον Πίνακα 5.4 συνοψίζονται οι συνδυασμοί (ζεύγη) τιμών ε_{xc} - $\sigma_{\theta m}$ με τα αντίστοιχα Σχήματα στα οποία παρουσιάζονται οι πειραματικές και υπολογιστικές καμπύλες ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting).

Σταθερή Παράμετρος $\sigma_{\theta m}$	***Μεταβλητή Παράμετρος*** ε_{xc}	***Σχήμα***	***Σταθερή Παράμετρος*** ε_{xc}	***Μεταβλητή Παράμετρος*** $\sigma_{\theta m}$	***Σχήμα***
	0,4 %	5.9		4,88 ksi	5.12
2,65 ksi	0,5 %	5.10	0,5 %	7,32 ksi	5.13
	0,65 %	5.11		9,65 ksi	5.14
				14,54 ksi	5.15

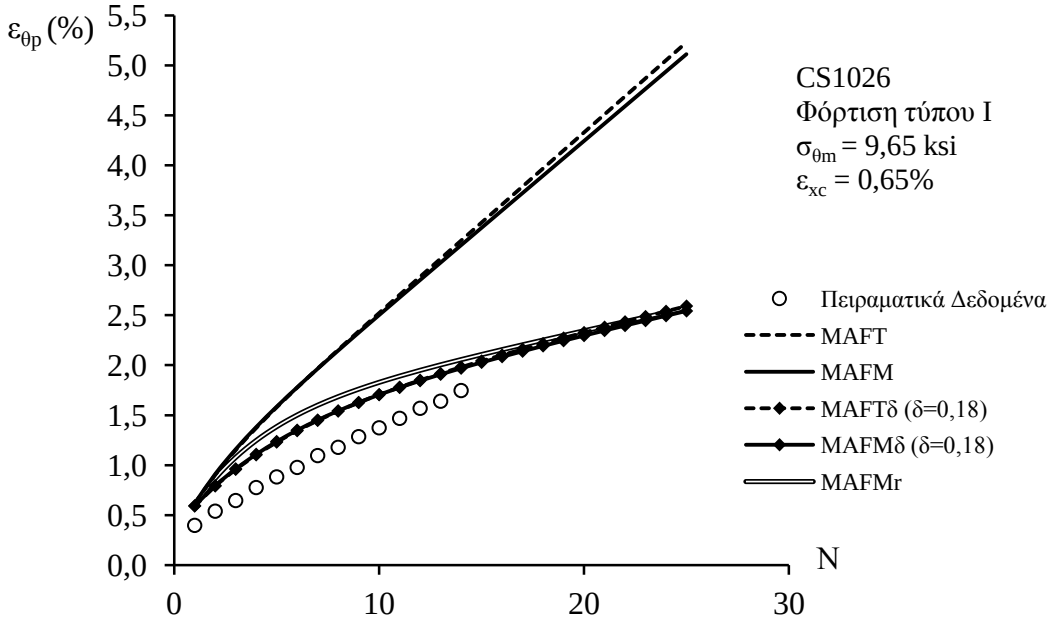
Πίνακας 5.4 *Συνδυασμός τιμών* ε_{xc} - $\sigma_{\theta m}$ *για την περίπτωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) και αντιστοίχιση με τα Σχήματα των πειραματικών δεδομένων και υπολογιστικών αποτελεσμάτων.*



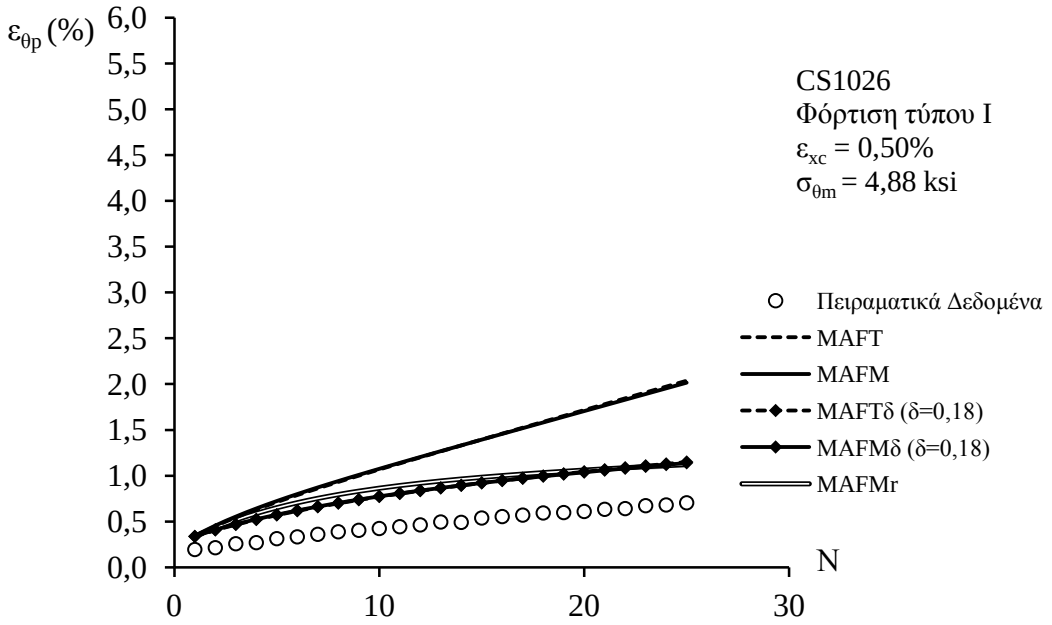
Σχήμα 5.9 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N. *Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ *και* $\varepsilon_{xc} = 0,40\%$.



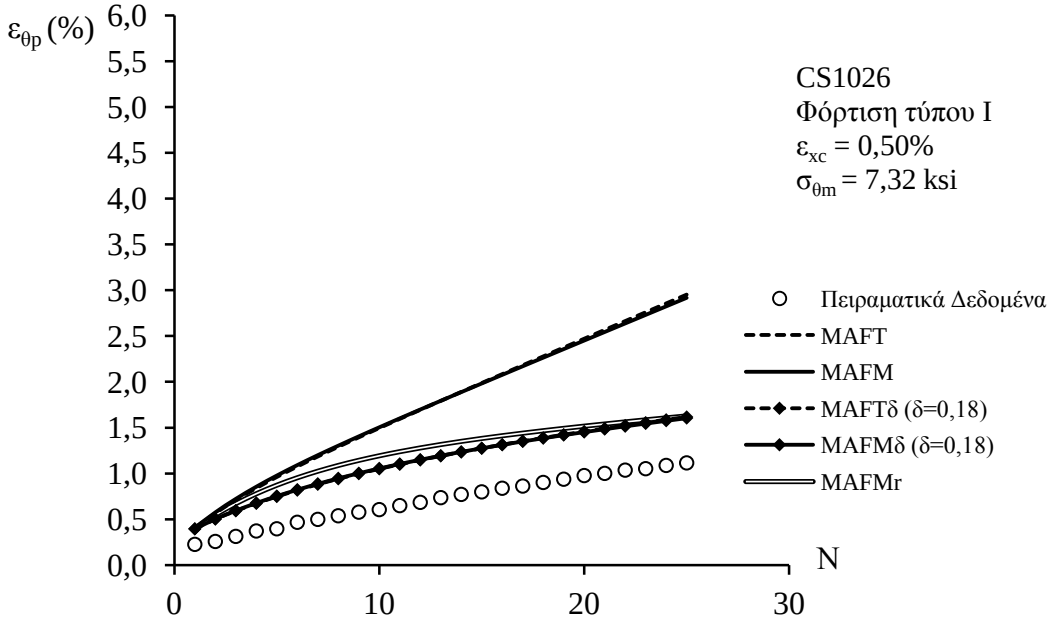
Σχήμα 5.10 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ *και* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$.



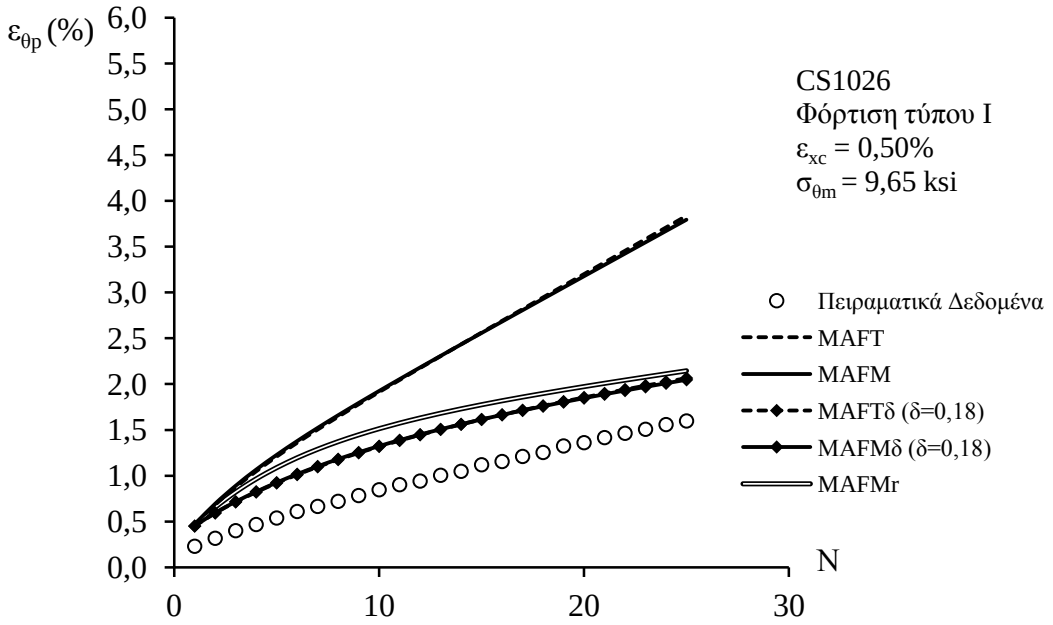
Σχήμα 5.11 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ *και* $\varepsilon_{xc} = 0,65\%$.



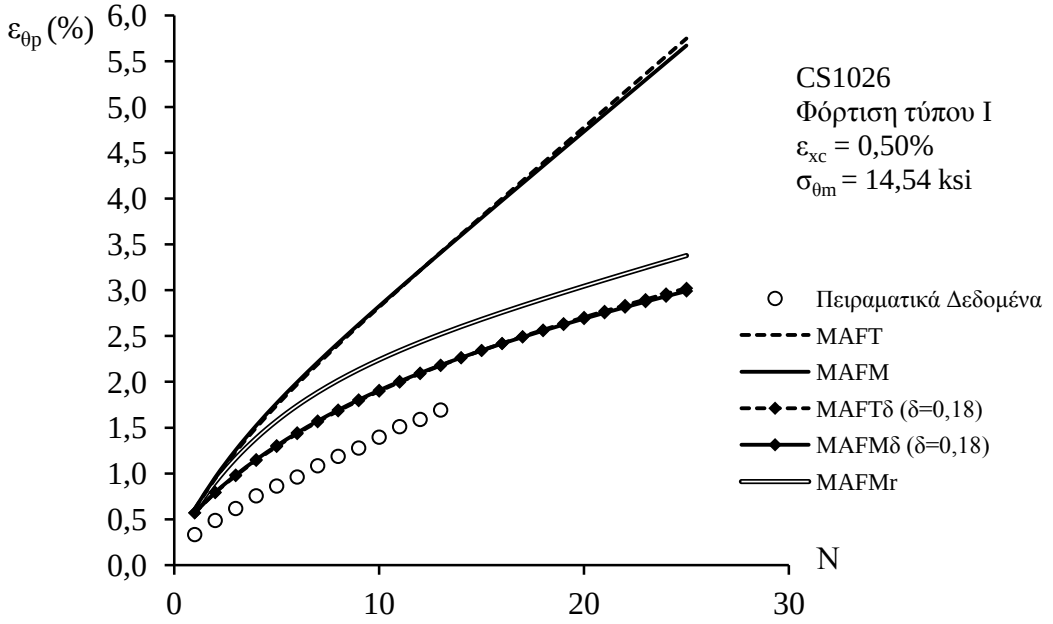
Σχήμα 5.12 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 4,88\, ksi$ *.*



Σχήμα 5.13 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 7,32\, ksi$ *.*



Σχήμα 5.14 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 9,65\, ksi$ *.*



Σχήμα 5.15 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 14,54\, ksi$ *.*

Από την εξέταση των διαγραμμάτων των Σχημάτων 5.9 έως 5.15 διαπιστώνονται τα ακόλουθα:

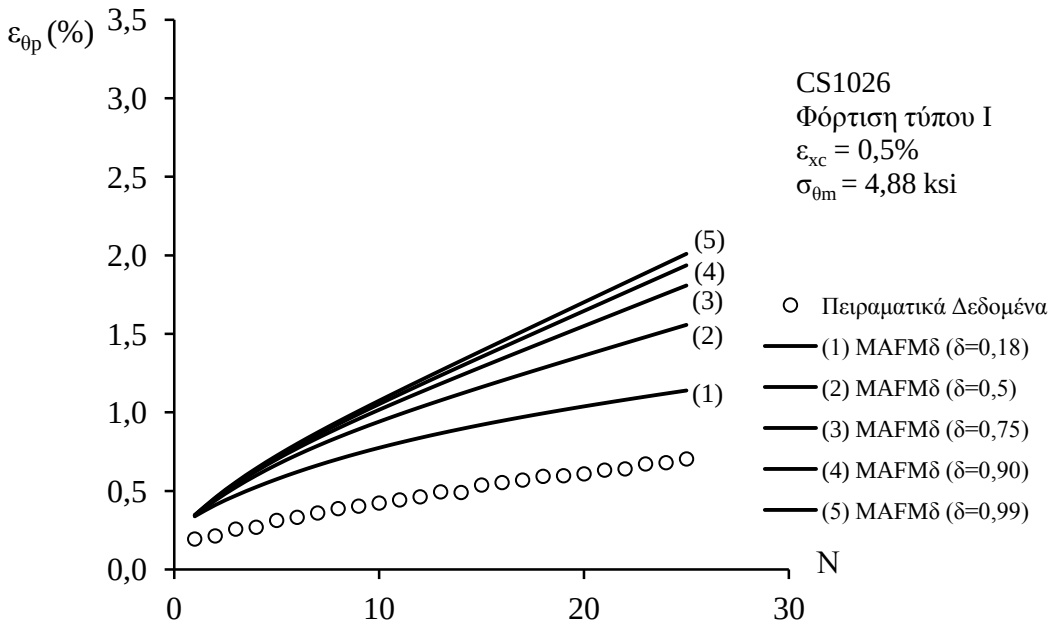
α) Τα μοντέλα MAFT και MAFM αποδίδουν όμοια αλλά όχι ικανοποιητικά αποτελέσματα προσομοίωσης των καμπύλων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μοντέλα που μελετώνται (MAFTδ, MAFMδ και MAFMr).

β) Τα μοντέλα MAFTδ και MAFMδ αποδίδουν και αυτά αποτελέσματα προσομοίωσης όμοια μεταξύ, προσεγγίζοντας με μεγαλύτερη επιτυχία, σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα, τα πειραματικά δεδομένα.

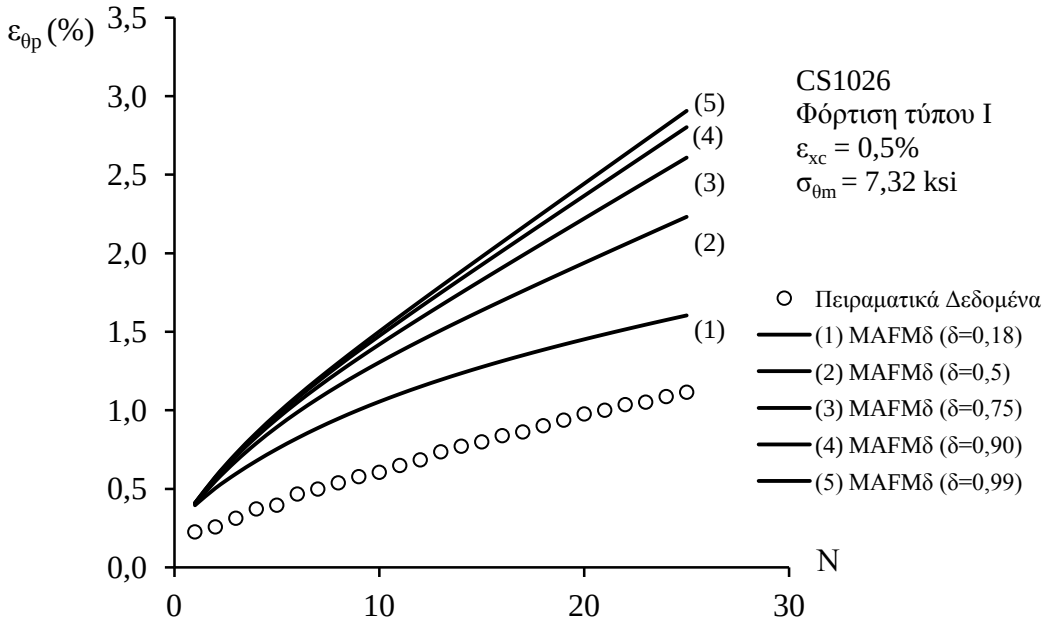
γ) Το μοντέλο MAFMr ανταποκρίνεται ικανοποιητικά, χωρίς όμως να αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα από αυτά των μοντέλων MAFTδ ή MAFMδ, για το σύνολο των εξεταζόμενων περιπτώσεων. Παρατηρείται ωστόσο ότι, υπάρχει ισχυρή εξάρτηση μεταξύ των τιμών των παραμέτρων ελέγχου της φόρτισης (ε_{xc} και $\sigma_{\theta m}$) και της 'απόστασης' (απόκλιση) μεταξύ των καμπύλων των μοντέλων MAFMr και MAFMδ (ή MAFTδ). Συγκεκριμένα, για ίδιες τιμές $\sigma_{\theta m}$ και αυξανόμενες τιμές ε_{xc} η 'απόσταση' αυτή εμφανίζεται να μειώνεται (Σχήματα 5.9 έως 5.11), ενώ αντίστροφα για ίδιες τιμές ε_{xc} και αυξανόμενες τιμές $\sigma_{\theta m}$ η 'απόσταση' αυξάνεται (Σχήματα 5.12 έως 5.14).

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να επισημανθεί ότι τα μοντέλα με την παράμετρο δ (MAFTδ και MAFMδ) επιτυγχάνουν τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα για $\delta = 0{,}18$, με βάση την έρευνα των Bari και Hassan [4]. Ωστόσο, Η τιμή αυτή παραβιάζει την συνθήκη $0{,}5 \le \delta \le 1{,}0$, η οποία ουσιαστικά αποτρέπει την εμφάνιση συμπεριφοράς χαλάρωσης (softening) στο υλικό (λόγω του αρνητικού πλαστικού

μέτρου, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2). Εναλλακτικά, επιλέγοντας τιμές δ λαμβάνοντας υπόψη τον συγκεκριμένο περιορισμό, τότε τα αποτελέσματα προσομοίωσης θα ήταν λιγότερο ικανοποιητικά. Η διαπίστωση αυτή επαληθεύεται στα Σχήματα 5.16 και 5.17 στα οποία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα προσομοίωσης που αποδίδονται από το μοντέλο MAFMδ για διάφορες τιμές του δ, με και χωρίς την εφαρμογή του υπόψη περιορισμού, δηλαδή για διακριτές τιμές του $\delta = 0,50 \sim 0,99$ και για $\delta = 0,18$ αντίστοιχα. Επίσης, για $\delta = 0,5$ λαμβάνονται οι καλύτερες δυνατές προσομοιώσεις με παράλληλη κάλυψη του υπόψη περιορισμού.

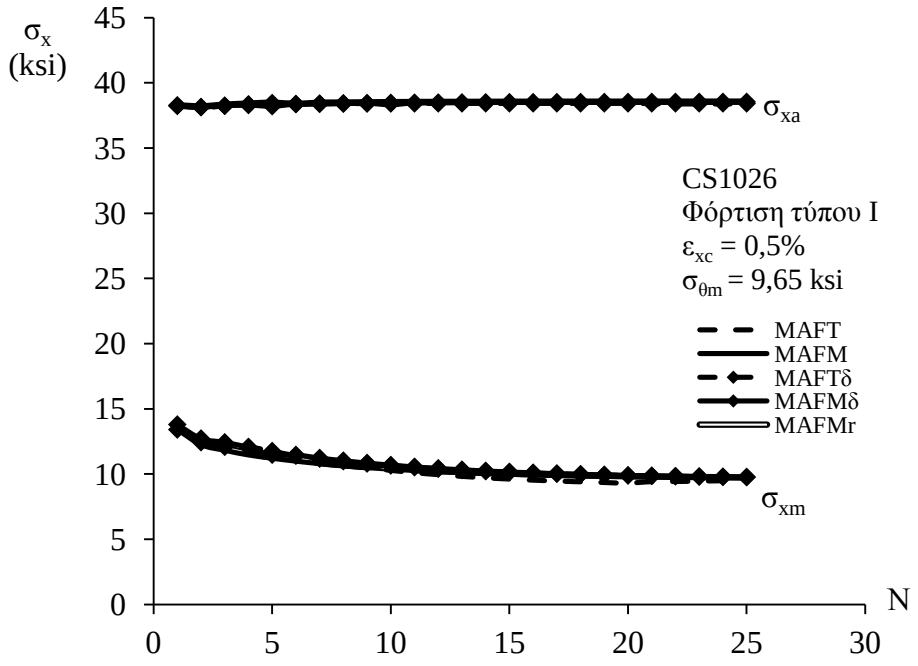


Σχήμα 5.16 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης N. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για διάφορες τιμές του δ και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ και $\sigma_{\theta m} = 4,88\,ksi$.*



Σχήμα 5.17 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N. *Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για διάφορες τιμές του* δ *και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου I με* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 7,32\ ksi$.

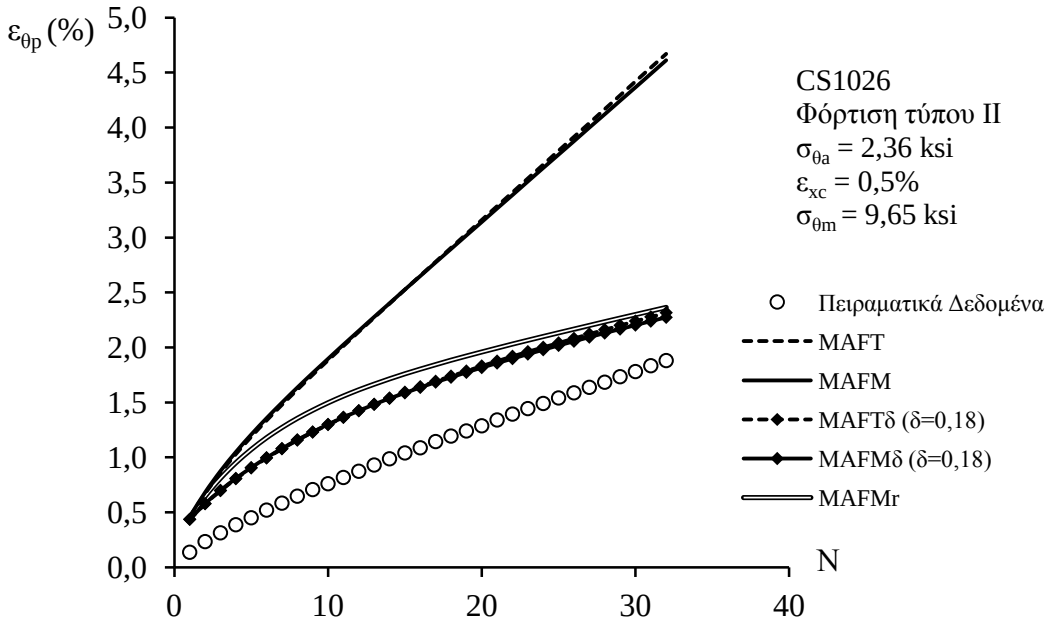
Από την εξέταση των υπολογιστικών αποτελεσμάτων της μεταβολής της μέγιστης αξονικής τάσης σ_x ανά κύκλο φόρτιση, για τα διάφορα μοντέλα, (Σχήμα 5.18) προκύπτει ότι το συγκεκριμένο μεταλλικό υλικό (CS 1026) εμφανίζει πολύ ελαφρά ανακυκλική κράτυνση (cyclic hardening). Ειδικότερα, παρατηρείται μία πολύ μικρή σταδιακή αύξηση του πλάτους τάσης (σ_{xa}), με την μέση τάση (σ_{xm}) να εμφανίζει αντίστοιχα μία σταδιακή μείωση, έως την σταθεροποίησή της. Τέλος, επισημαίνεται ότι το σύνολο των υπό εξέταση μοντέλων διαθέτει παρεμφερή συμπεριφορά, με αποτέλεσμα οι παραγόμενες καμπύλες να συμπίπτουν σε εξαιρετικά μεγάλο βαθμό.



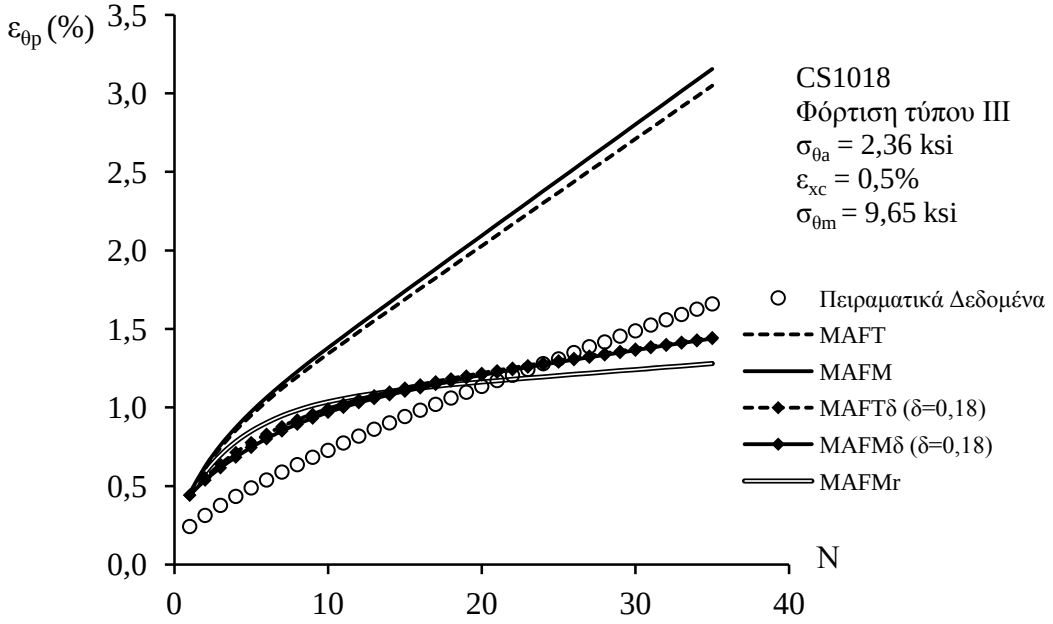
Σχήμα 5.18 *Μέγιστη αξονική τάση σ_x [πλάτος - μέση τάση (σ_{xa} - σ_{xm})] που συσσωρεύεται στον κάθε κύκλο φόρτισης, για τον τύπο φόρτισης τύπου I, συναρτήσει των κύκλων N. Αποτελέσματα προσομοίωσης μοντέλων για τα μοντέλα MAFT, MAFM, MAFTδ, MAFMδ και MAFMr.*

5.2.2 Φόρτιση Τύπου II και III ('Κεκλιμένο Επίπεδο')

Στις φορτίσεις τύπου II και III ('κεκλιμένο επίπεδο θετικής και αρνητικής κλίσης') οι παράμετροι ελέγχου ε_x και σ_θ μεταβάλλονται ταυτόχρονα ευρισκόμενες μεταξύ τους σε φάση (βλέπε Σχήματα 5.3 και 5.4). Στα Σχήματα 5.19 και 5.20 που ακολουθούν παρουσιάζονται οι πειραματικές και υπολογιστικές καμπύλες ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) για υλικό CS 1026 (φόρτιση τύπου II) και CS 1018 (φόρτιση τύπου III) αντίστοιχα, για τις ίδιες τιμές σ_{xa}, ε_{xc} και $\sigma_{\theta m}$. Παρατηρείται επίσης ότι τα πειραματικά δεδομένα για τον τύπο φόρτισης II είναι παρόμοια με αυτά του τύπου I, το οποίο όμως δεν ισχύει και για τον τύπο φόρτισης III καθόσον τα υλικά στα οποία εκτελέσθηκαν οι δοκιμές είναι διαφορετικά.



Σχήμα 5.19 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου II με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$ *,* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ *.*



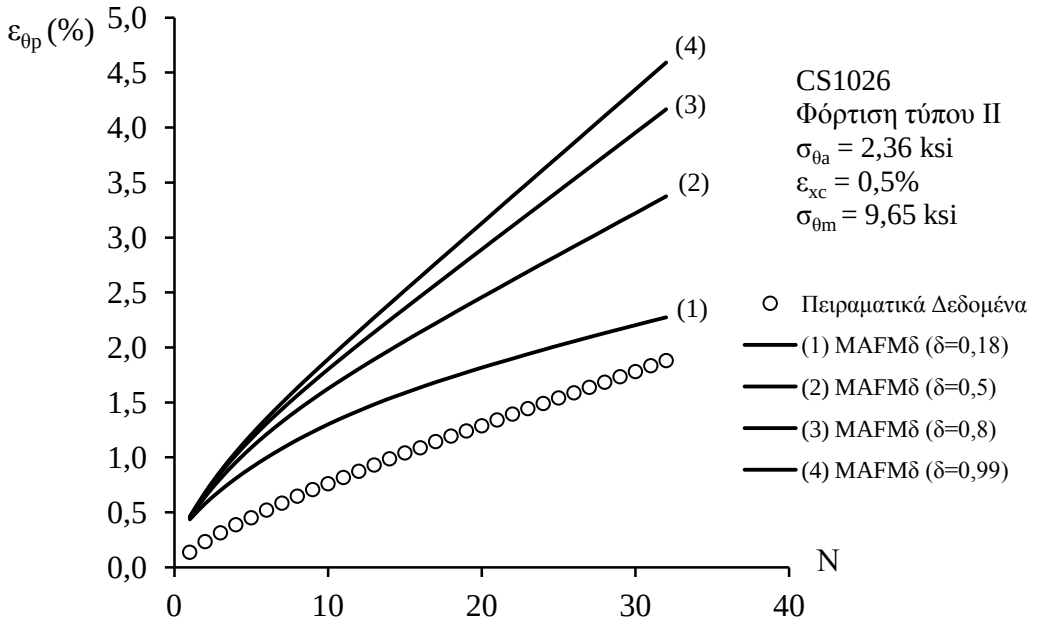
Σχήμα 5.20 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου III με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$ *,* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ *.*

Από την εξέταση των διαγραμμάτων των Σχημάτων 5.19 έως 5.20 διαπιστώνονται τα ακόλουθα:

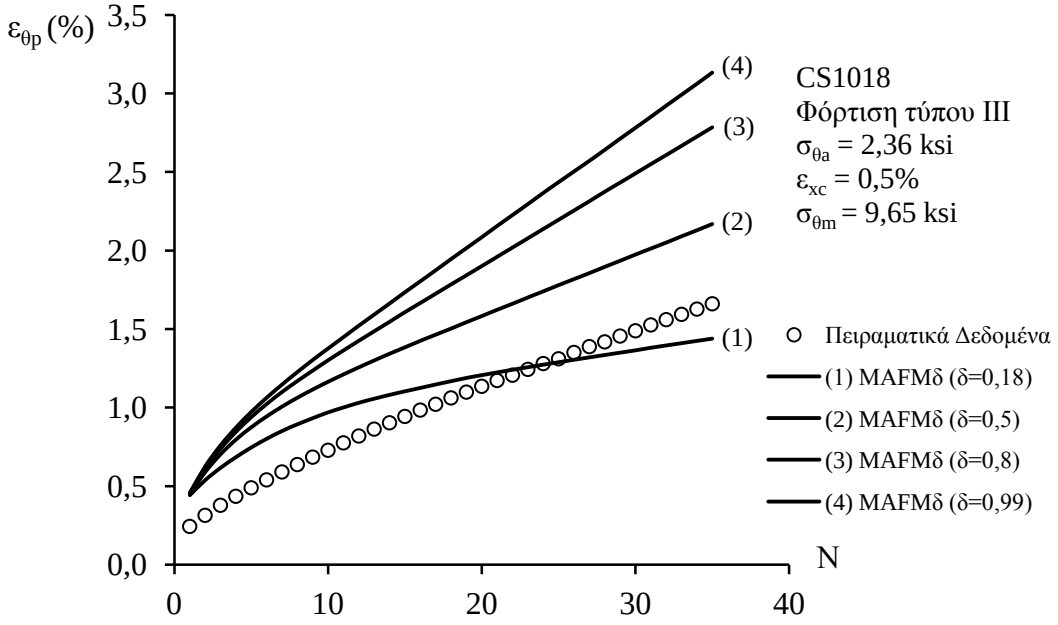
α) Τα μοντέλα MAFT και MAFM αποδίδουν σχεδόν όμοια αλλά όχι ικανοποιητικά αποτελέσματα προσομοίωσης των καμπύλων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), σε σύγκριση με τα υπόλοιπα υπό μελέτη μοντέλα.

β) Τα μοντέλα MAFTδ και MAFMδ αποδίδουν όμοια αποτελέσματα προσομοίωσης, προσεγγίζοντας με μεγαλύτερη επιτυχία, σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα, τα πειραματικά δεδομένα. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ στην φόρτιση τύπου ΙΙ (Σχήμα 5.19) τα αποτελέσματα των υπόψη μοντέλων υπερεκτιμούν την περιφερειακή πλαστική παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ [διατήρηση σταθερού του ρυθμού ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting rate)], στην φόρτιση τύπου ΙΙΙ (Σχήμα 5.20) παρατηρείται υποεκτίμηση της περιφερειακής πλαστικής παραμόρφωσης $\varepsilon_{\theta p}$ από ένα σημείο και έπειτα [λόγω ελάττωσης του ρυθμού ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting rate) για $N > 20$]. Η διαφορά αυτή δεν δύναται να αξιολογηθεί καθόσον τα υλικά είναι διαφορετικά (CS 1026 και CS 1018) για του δύο τύπους φόρτισης, συνεπώς έως έναν βαθμό είναι πιθανό να οφείλεται στην επιλογή των παραμέτρων του κάθε υλικού.

γ) Το μοντέλο MAFMr αποδίδει αποτελέσματα προσομοίωσης απολύτως συγκρίσιμα με αυτά των μοντέλων MAFTδ και MAFMδ και για τους δύο τύπους φόρτισης (ΙΙ και ΙΙΙ), σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της φόρτισης τύπου Ι (Σχήματα 5.9 – 5.12), όπου παρατηρήθηκε σημαντική απόκλιση στην απόδοση υπό σύγκριση μοντέλων.



Σχήμα 5.21 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N. *Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για διάφορες τιμές του* δ *και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου II με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$.

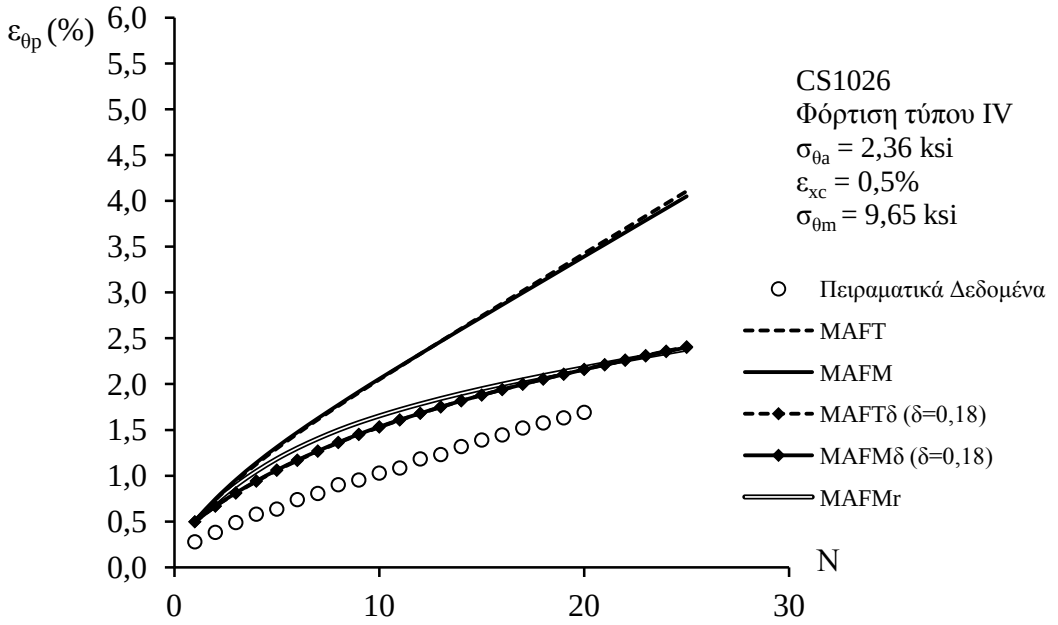


Σχήμα 5.22 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N. *Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για διάφορες τιμές του* δ *και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου III με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$.

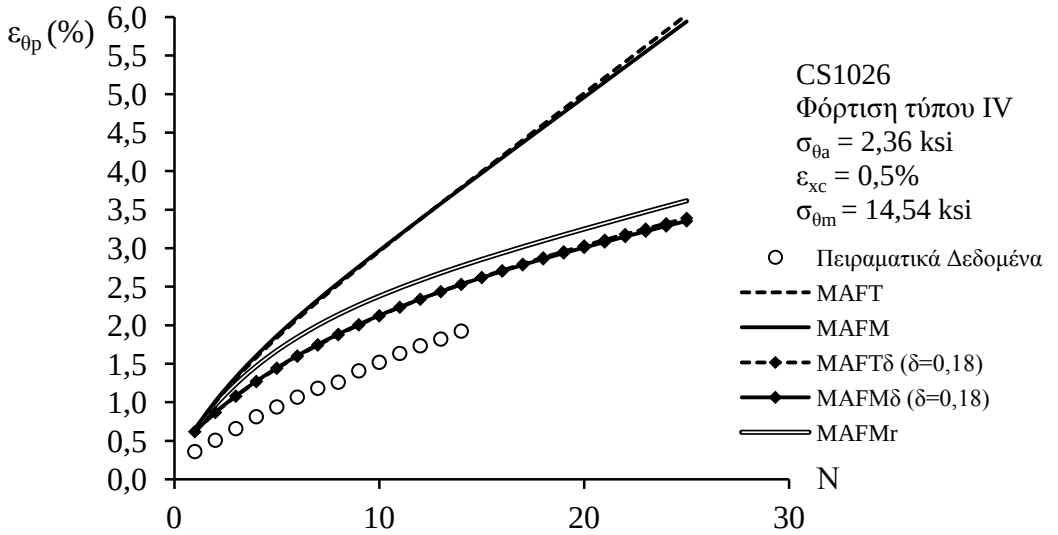
Τέλος, στα Σχήματα 5.21 και 5.22 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα προσομοίωσης που αποδίδονται από το μοντέλο MAFMδ για διάφορες τιμές του δ, με και χωρίς την εφαρμογή του περιορισμού $0,5 \leq \delta \leq 1,0$, δηλαδή για διακριτές τιμές του $\delta = 0,5 \sim 0,99$ και για $\delta = 0,18$ αντίστοιχα. Και σε αυτή την περίπτωση επαληθεύεται ότι οι βέλτιστες προσομοιώσεις για το μοντέλο αυτό εξακολουθούν να λαμβάνονται για την τιμή $\delta = 0,18$, ενώ ακολουθούν κατά σειρά οι προσομοιώσεις για $\delta = 0,5$, ενώ για τις υπόλοιπες τιμές του δ ($\delta > 0,5$) παρατηρείται μεγάλη απόκλιση από τα πειραματικά δεδομένα.

5.2.3 Φόρτιση Τύπου IV και V ('Παπιγιόν')

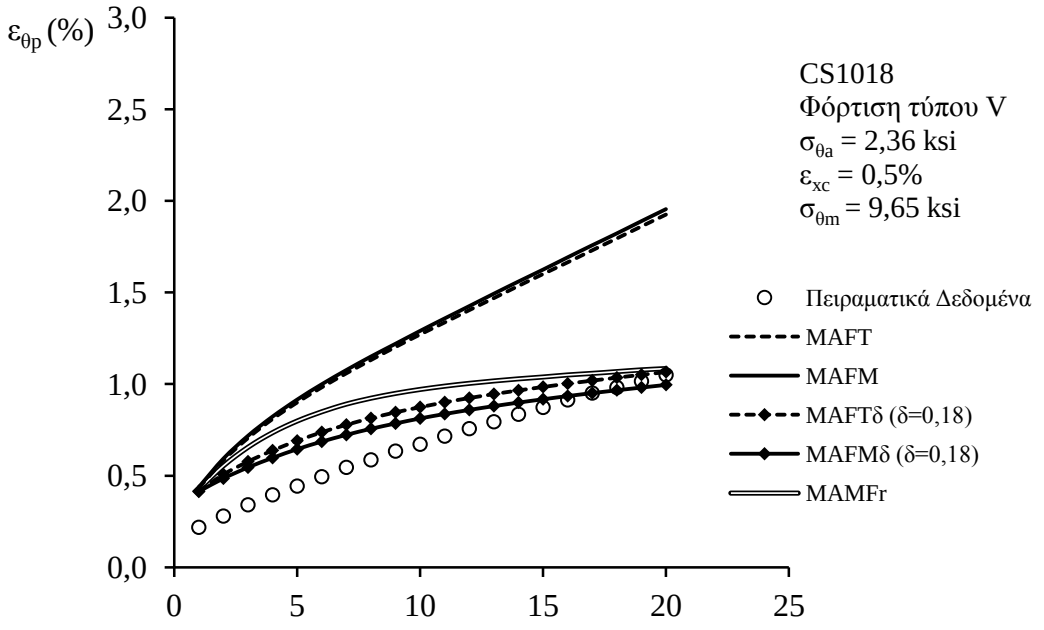
Στις φορτίσεις τύπου IV και V ('παπιγιόν / 'ανάστροφο παπιγιόν'), όπως και στις φορτίσεις τύπου II και III, οι παράμετροι ελέγχου ε_x και σ_θ μεταβάλλονται ταυτόχρονα ευρισκόμενες μεταξύ τους σε φάση (Σχήματα 5.5 και 5.6). Στα Σχήματα 5.23 και 5.24 που ακολουθούν παρουσιάζονται οι πειραματικές και υπολογιστικές καμπύλες ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) για υλικό CS 1026 (φόρτιση τύπου IV) και CS 1018 (φόρτιση τύπου V) αντίστοιχα, για τις ίδιες τιμές σ_{xa}, ε_{xc} και $\sigma_{\theta m}$. Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 5.1 τα υπόψη ιστορικά φόρτισης διαφοροποιούνται σημαντικά ως προς την αλληλουχία φορτίσεων, σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις (τύπου φόρτισης I, II και III).



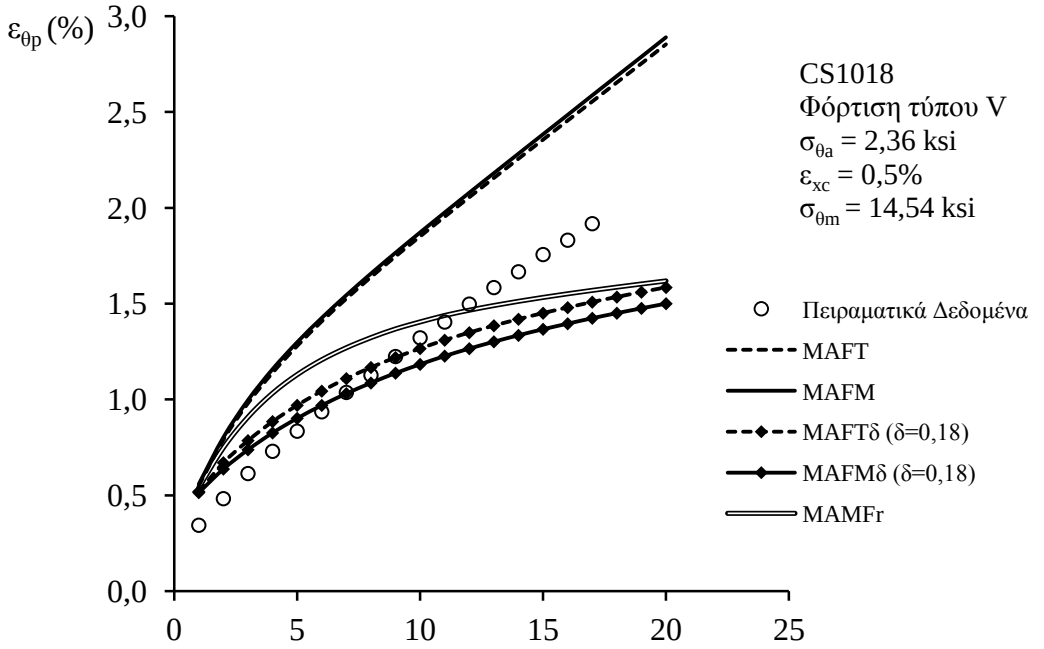
Σχήμα 5.23 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου IV με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$ *,* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ *.*



Σχήμα 5.24 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου IV με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$ *,* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 14,54\,ksi$ *.*



Σχήμα 5.25 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου V με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$ *,* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$ *.*



Σχήμα 5.26 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου V με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$ *,* $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 14,54\,ksi$ *.*

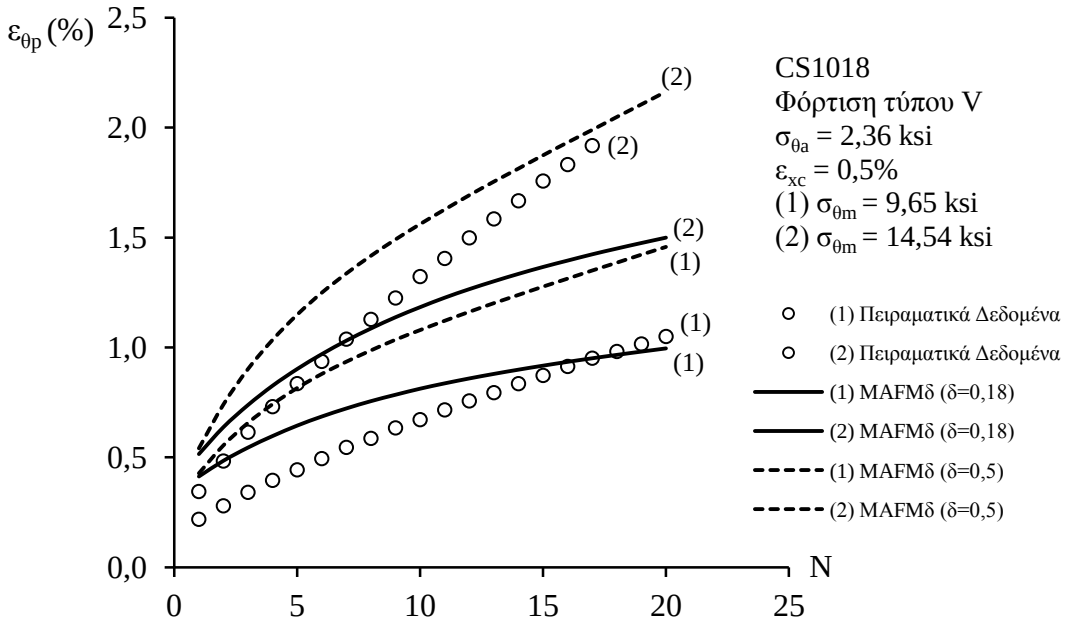
Από την εξέταση των διαγραμμάτων των Σχημάτων 5.23 έως 5.26 διαπιστώνονται τα ακόλουθα:

α) Τα μοντέλα MAFT και MAFM αποδίδουν σχεδόν όμοια αλλά όχι ικανοποιητικά αποτελέσματα προσομοίωσης των καμπύλων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), σε σύγκριση με τα υπόλοιπα υπό μελέτη μοντέλα.

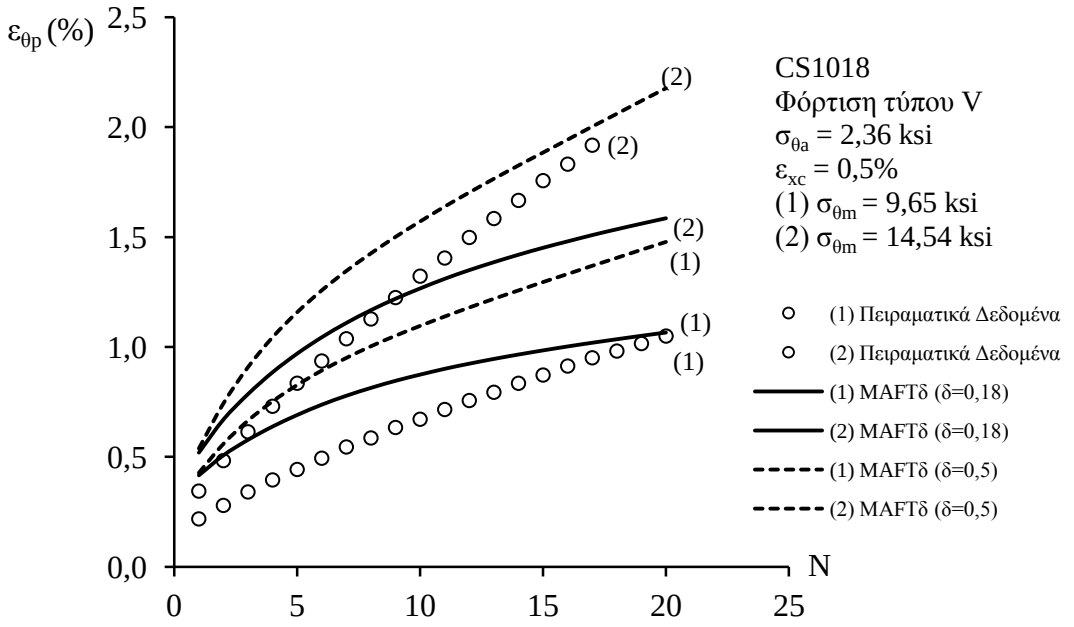
β) Τα μοντέλα MAFTδ και MAFMδ αποδίδουν παρόμοια αποτελέσματα προσομοίωσης, προσεγγίζοντας με μεγαλύτερη επιτυχία, σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα, τα πειραματικά δεδομένα.

γ) Το μοντέλο MAFMr αποδίδει αποτελέσματα προσομοίωσης σχεδόν όμοια με αυτά των μοντέλων MAFTδ και MAFMδ για τον τύπο φόρτισης IV (Σχήματα 5.23 και 5.24), ενώ για τον τύπο φόρτισης V (Σχήματα 5.25 και 5.26) είναι αρκετά συγκρίσιμα με σταδιακή σύγκλιση για $N > 15$. Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 5.2.2, η διαφορετική αυτή απόκριση των μοντέλων ενδέχεται να οφείλεται στο γεγονός ότι τα υλικά είναι διαφορετικά για το κάθε ιστορικό φόρτισης (διαφορετικές παράμετροι μοντέλων).

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις φόρτισης (ενότητες 5.2.1 και 5.2.2), στα Σχήματα 5.27 και 5.28 που ακολουθούν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα προσομοίωσης που αποδίδονται από τα μοντέλα MAFMδ και MAFTδ για $\delta = 0,5$, προς κάλυψη του περιορισμού $0,5 \le \delta \le 1,0$, και για $\delta = 0,18$.

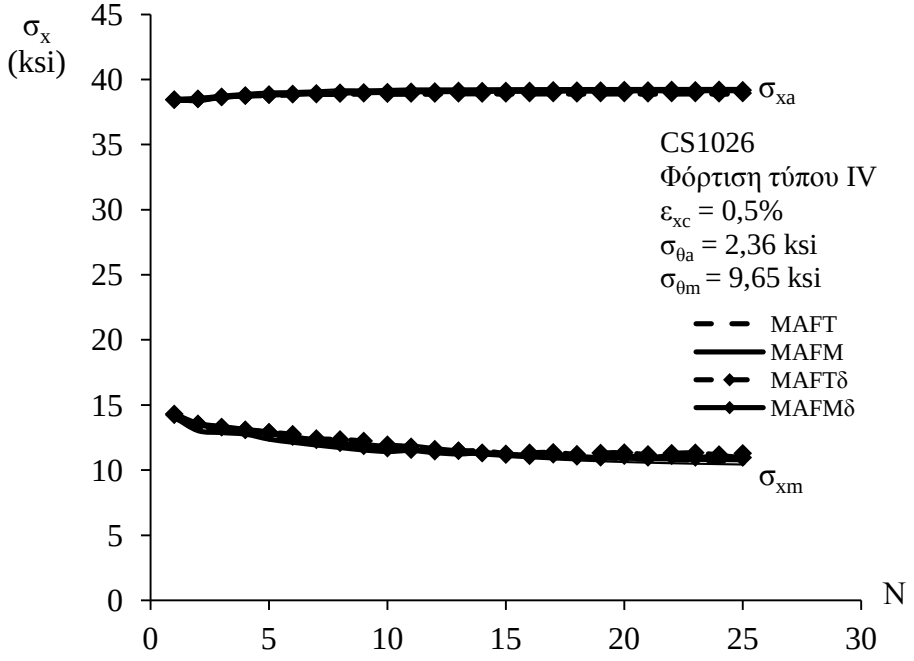


Σχήμα 5.27 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N. *Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFMδ για* $\delta = 0{,}18$ & $0{,}5$, *και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου V με* $\sigma_{\theta a} = 2{,}36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0{,}50\%$, *και* $\sigma_{\theta m} = 9{,}65\,ksi$ & $14{,}54\,ksi$.



Σχήμα 5.28 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N. *Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFTδ για* $\delta = 0{,}18$ & $0{,}5$, *και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου V με* $\sigma_{\theta a} = 2{,}36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0{,}50\%$, *και* $\sigma_{\theta m} = 9{,}65\,ksi$ &$14{,}54\,ksi$.

Για τον συγκεκριμένο τύπο φόρτισης δεν εκτελέσθηκε πολυπαραμετρική ανάλυση για την επίδραση των τιμών του δ στις προσομοιώσεις, καθώς, όπως προέκυψε από την μελέτη των προηγουμένων περιπτώσεων, οι αμέσως καλύτερες προσομοιώσεις μετά από αυτές που λαμβάνονται για την τιμή $\delta = 0{,}18$ είναι αυτές που προκύπτουν για τιμή $\delta = 0{,}5$.



Σχήμα 5.29 *Μέγιστη αξονική τάση σ_x [πλάτος - μέση τάση (σ_{xa} - σ_{xm})] που συσσωρεύεται στον κάθε κύκλο φόρτισης, για τον τύπο φόρτισης τύπου IV, συναρτήσει των κύκλων N. Αποτελέσματα προσομοίωσης μοντέλων για τα μοντέλα MAFT, MAFM, MAFTδ, MAFMδ και MAFMr.*

Επίσης, όπως και για την περίπτωση του ιστορικού φόρτισης I, εξετάσθηκαν τα υπολογιστικά αποτελέσματα της μεταβολής της μέγιστης αξονικής τάσης σ_x ανά κύκλο φόρτισης, για τα διάφορα μοντέλα (Σχήμα 5.29). Ομοίως, διαπιστώνεται ότι το υλικό (CS 1026) εμφανίζει πολύ ελαφρά ανακυκλική κράτυνση (cyclic hardening), ενώ είναι εμφανής και μία πολύ μικρή σταδιακή αύξηση του πλάτους τάσης (σ_{xa}), με την μέση τάση (σ_{xm}) να παρουσιάζει με την σειρά της σταδιακή

μείωση, έως την σταθεροποίησή της. Τα εξεταζόμενα μοντέλα διαθέτουν όμοια συμπεριφορά, ως εκ τούτου οι καμπύλες συμπίπτουν σε εξαιρετικά μεγάλο βαθμό.

5.2.4 Φόρτιση Τύπου VI ('Κλεψύδρα')

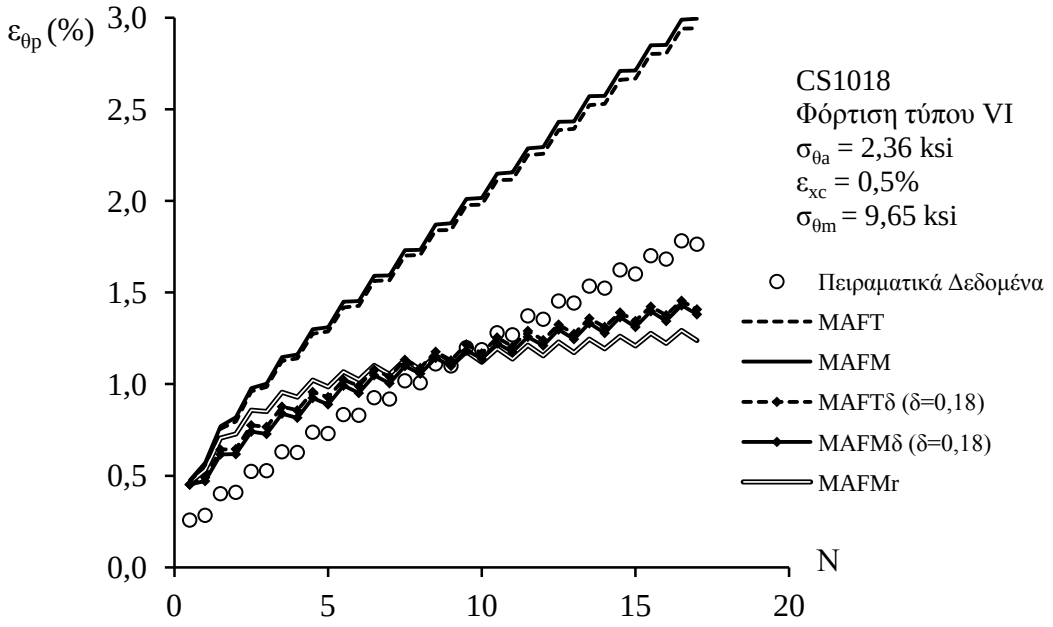
Στην φόρτιση τύπου VI ('κλεψύδρα'), όπως και στις φορτίσεις τύπου II - V, οι παράμετροι ελέγχου ε_x και σ_θ μεταβάλλονται ταυτόχρονα ευρισκόμενες μεταξύ τους σε φάση (Σχήμα 5.7). Το υπόψη ιστορικό φόρτισης συνδυάζει τα χαρακτηριστικά των φορτίσεων τύπου 'κεκλιμένου επιπέδου' (II και III) και 'παπιγιόν' (IV και V). Στο Σχήμα 5.30 παρουσιάζονται οι πειραματικές και υπολογιστικές καμπύλες ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) για υλικό CS 1018, με το σχήμα χαρακτηριστικό σχήμα τύπου 'ζιγκ-ζαγκ' στις καμπύλες να οφείλεται στα ζεύγη τιμών περιφερειακής πλαστικής παραμόρφωσης $\varepsilon_{\theta p}$ για καθέναν από τους κύκλους καταπόνησης N.

Από την εξέταση των διαγραμμάτων του Σχήματος 5.30 διαπιστώνονται τα ακόλουθα:

α) Τα μοντέλα MAFT και MAFM αποδίδουν σχεδόν όμοια, αλλά όχι ικανοποιητικά αποτελέσματα προσομοίωσης των καμπύλων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μοντέλα.

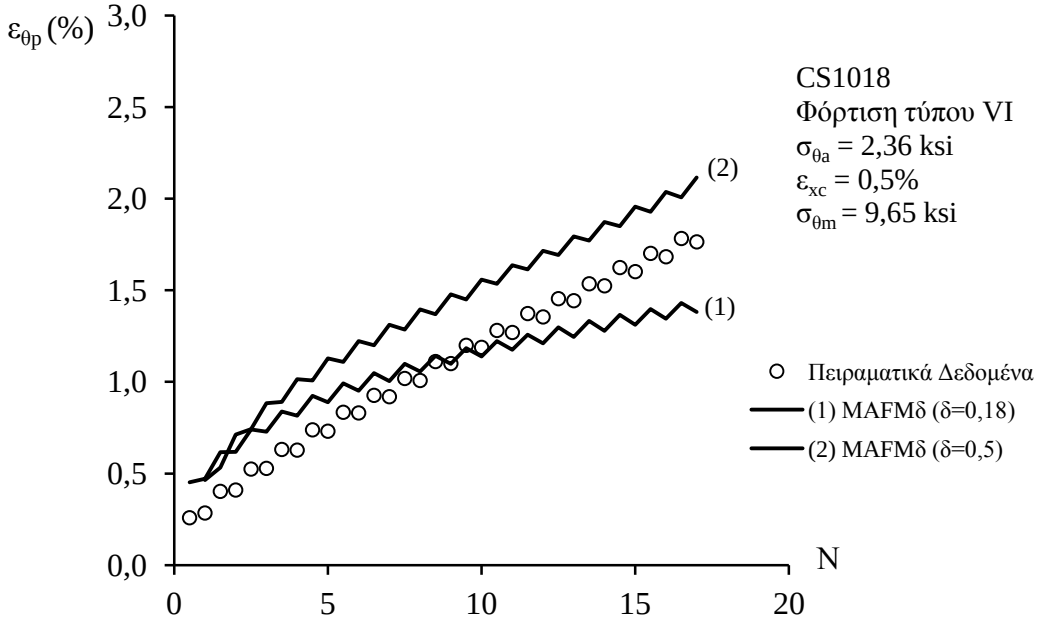
β) Τα μοντέλα MAFTδ, MAFMδ και MAFMr αποδίδουν παρόμοια αποτελέσματα προσομοίωσης, προσεγγίζοντας με μεγαλύτερη επιτυχία, σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα, τα πειραματικά δεδομένα. Επίσης, τα υπόψη μοντέλα υποεκτιμούν την περιφερειακή πλαστική παραμόρφωση $\varepsilon_{\theta p}$ από ένα σημείο και έπειτα [λόγω ελάττωσης του ρυθμού ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting rate) για

$N > 10$], με το μοντέλο MAFMr να διαθέτει μία ελαφρά μεγαλύτερη απόκλιση σε σχέση ως τις πειραματικές τιμές.



Σχήμα 5.30 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N *. Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης των διαφόρων μοντέλων πλαστικότητας και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου VI με* $\sigma_{\theta a} = 2,36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0,50\%$ *και* $\sigma_{\theta m} = 9,65\,ksi$.

Τέλος, στο Σχήμα 5.31 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα προσομοίωσης που αποδίδονται από το μοντέλο MAFMδ για $\delta = 0,5$ και για $\delta = 0,18$. Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται ότι και οι δύο αυτές τιμές του δ αποδίδουν ικανοποιητικά, με την τιμή $\delta = 0,5$ να εκτιμάται ως καταλληλότερη, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των προηγούμενων τύπων φόρτισης, καθόσον η προϊούσα καμπύλη, υπερεκτιμά μεν την περιφερειακή πλαστική παραμόρφωση, αλλά διαθέτει περισσότερο σταθερή κλίση σε σχέση με την καμπύλη που αντιστοιχεί στην τιμή $\delta = 0,18$.



Σχήμα 5.31 *Μέγιστη περιφερειακή παραμόρφωση* $\varepsilon_{\theta p}$ *συναρτήσει του αριθμού κύκλων καταπόνησης* N. *Σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης του μοντέλου MAFTδ για* $\delta = 0{,}18$ *και* $\delta = 0{,}5$, *και των πειραματικών δεδομένων [13] για το ιστορικό φόρτισης τύπου VI με* $\sigma_{\theta a} = 2{,}36\,ksi$, $\varepsilon_{xc} = 0{,}50\%$, *και* $\sigma_{\theta m} = 9{,}65\,ksi$.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

6.1 Σύνοψη Αποτελεσμάτων Εφαρμογής του Μοντέλου

Από τα αποτελέσματα υπολογιστικής εφαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου, και των τροποποιήσεών του, σε διάφορες περιπτώσεις μονοαξονικών και πολυαξονικών καταπονήσεων, τα οποία εκτέθηκαν αναλυτικά στα Κεφάλαια 4 και 5 αντίστοιχα, προέκυψαν χρήσιμα συμπεράσματα, τόσο για τα χαρακτηριστικά, όσο και για την απόδοση του μοντέλου, με την κύρια βαρύτητα να δίδεται στην προσομοίωση του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting).

Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 4 η προσομοίωση της συμπεριφοράς μεταλλικού υλικού το οποίο εμφανίζει ανακυκλική κράτυνση (cyclic hardening), υπό την επιβολή φόρτισης με ελεγχόμενη παραμόρφωση (strain controlled), κρίθηκε ως ιδιαίτερα ικανοποιητική, σε σύγκριση με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα (Σχήμα 4.1). Πέραν της σχετικά απλής περίπτωσης αυτής, εκτελέσθηκαν προσομοιώσεις πειραμάτων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), τα οποία αποτελούν απόρροια ανακυκλικής καταπόνησης μεταλλικών δοκιμίων υπό ελεγχόμενη τάση (stress controlled), με μη μηδενική μέση τάση (Σχήμα 4.2). Από τις διάφορες πειραματικές καμπύλες ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) που εξετάσθηκαν, προέκυψε, κατά τα αναμενόμενα, ότι το μοντέλο MAFM διαθέτει δράση και απόδοση ανάλογη προς το μοντέλο MAFT. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα των δύο αυτών μοντέλων, στο πλήθος των περιπτώσεων, ταυτίζονταν,

ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις διαπιστώθηκε ότι το μοντέλο MAFM αποδίδει ελαφρά βελτίωση των προσομοιώσεων, χωρίς ωστόσο η απόδοση και των δύο μοντέλων να κρίνεται ικανοποιητική, λόγω των μεγάλων αποκλίσεων από τα πειραματικά αποτελέσματα. Σημειώνεται επίσης ότι η υπολογιστική εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου εξαντλείται στην βασική του μορφή του (MAFM), δεδομένου ότι οι τροποποιημένες μορφές του (MAFMδ και MAFMr) στην μονοαξονική περίπτωση καταπόνησης εκφυλίζονται στο ίδιο μοντέλο (όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3).

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων εφαρμογής του μοντέλου σε πολυαξονικές (διαξονικές) περιπτώσεις καταπόνησης (Κεφάλαιο 5), θεωρείται πληρέστερη από αυτή που πραγματοποιήθηκε για τα μονοαξονικά αποτελέσματα, λόγω του εκτεταμένου αριθμού των ιστορικών φόρτισης και των τροποποιήσεων του μοντέλου που εξετάσθηκαν. Συγκεκριμένα, τα υπόψη πειραματικά αποτελέσματα [ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) σε χάλυβες], τα οποία αφορούσαν 6 διαξονικούς τύπους φόρτισης (Σχήματα 5.2 έως 5.7), αξιοποιήθηκαν για την συγκριτική ανάλυση της συμπεριφοράς των μοντέλων MAFM, MAFMδ και MAFMr, σε αντιπαραβολή με τα μοντέλα MAFT και MAFTδ. Επίσης, εξήχθησαν οι υπολογιστικές καμπύλες της μέγιστης αξονικής τάσης ανά κύκλο φόρτισης συναρτήσει των κύκλων φόρτισης, με σκοπό τόσο την συμπλήρωση των αποτελεσμάτων, όσο και την αξιολόγηση της συμπεριφοράς των μοντέλων (προσομοίωση ανακυκλικής κράτυνσης). Όπως και για την περίπτωση των μονοαξονικών αποτελεσμάτων, προέκυψε ότι τα μοντέλα MAFM και MAFT διαθέτουν ανάλογη απόδοση, ενώ το ίδιο παρατηρείται και για τα μοντέλα MAFMδ και MAFTδ, λόγω της κοινής βάσης που διαθέτουν (βλέπε Πίνακα 3.1), με την

διαφορά ότι οι για τα δεύτερα μοντέλα οι προσομοιώσεις να εμφανίζονται σαφώς βελτιωμένες. Επίσης, η παραμετρική ανάλυση που εκτελέσθηκε επί διαφόρων τιμών της παραμέτρου δ κατέδειξε την αδυναμία των μοντέλων MAFMδ και MAFTδ να επιτύχουν καλύτερα αποτελέσματα, σε σύγκριση με τα αποτελέσματα για την τιμή $\delta = 0{,}18$, όταν το $\delta \in [0{,}5\,,1{,}0]$, βάσει του αντίστοιχου περιορισμού για την αποφυγή ενδεχομένης εμφάνισης της ανεπιθύμητης συμπεριφοράς χαλάρωσης (softening) στο υλικό, λόγω της εγγενούς αδυναμίας του κανόνα κινηματικής κράτυνσης BCD (Κεφάλαιο 2). Αναφορικά με την απόδοση του μοντέλου MAFMr στις περισσότερες των περιπτώσεων ανταποκρίνεται ικανοποιητικά, χωρίς ωστόσο σε γενικές γραμμές να επιτυγχάνει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με το μοντέλο MAFMδ (και MAFTδ). Διαπιστώνεται επίσης ότι η απόδοση του εν λόγω μοντέλου επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από τις τιμές των παραμέτρων ελέγχου της φόρτισης (ε_{xc} και $\sigma_{\theta m}$), όπως προκύπτει από την χαρακτηριστική διαφοροποίηση που εμφανίζει η απόκλιση μεταξύ των υπολογιστικών και πειραματικών καμπύλων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) για τα διάφορα ζεύγη τιμών (βλέπε διαδοχικά αποτελέσματα στα Σχήματα 5.9-5.11, 5.12-5.15 και 5.21-5.22).

Θα πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι τα προαναφερθέντα αποτελέσματα δεν αποτελούν απόλυτα κριτήρια για την συγκριτική αξιολόγηση και κατάταξη των διαφόρων μοντέλων που μελετήθηκαν, καθώς αυτό θα απαιτούσε την συνεκτίμηση και άλλων παραμέτρων, όπως η πολυπλοκότητα των μοντέλων, το οποίο και δεν αποτέλεσε στόχο της έρευνας. Ωστόσο, εάν εξετασθεί ανεξάρτητα η παράμετρος της πολυπλοκότητας, προκύπτει ότι το υπόψη μοντέλο διαθέτει χαρακτηριστικά τα οποία εκτιμάται ότι συμβάλλουν θετικά στην διατήρησή της σε χαμηλά επίπεδα, λόγω του μικρού αριθμού των παραμέτρων που διαθέτει, του σχετικά απλού τρόπου

προσδιορισμού των και των πλεονεκτημάτων που προσφέρει στην αριθμητική εφαρμογή του (υπολογιστική απλότητα), έναντι άλλων μοντέλων της ίδιας κλάσης.

6.2 Επιστημονική Συνεισφορά της Διατριβής

Η υπόψη ερευνητική εργασία εκτιμάται ότι διαθέτει καινοτομικά στοιχεία, δεδομένης της πρωτοτυπίας που διαθέτει τόσο η βασική ιδέα, όσο και η εν συνεχεία αξιοποίησή της, μέσω της διαμόρφωσης και εφαρμογής ενός πλήρους νέου καταστατικού μοντέλου πρόβλεψης της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς μεταλλικών υλικών υπό ανακυκλικές φορτίσεις (μοντέλο ανακυκλικής πλαστικότητας). Παράλληλα, η συμβολή της διατριβής στο συναφές στο συναφές επιστημονικό και ερευνητικό πεδίο, θεωρείται ολοκληρωμένη, καθόσον τα υπολογιστικά αποτελέσματα εφαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου, και των σχετικών τροποποιήσεών του, κάλυψαν ιδιαίτερα ικανοποιητικά ένα ευρύ φάσμα πειραματικών δεδομένων μονοαξονικών και πολυαξονικών ιστορικών φόρτισης. Η εκτίμηση αυτή ενισχύεται από την επιτυχή σύγκριση της απόδοσης του υπόψη μοντέλου με διάφορα καταστατικά μοντέλα πλαστικότητας, τα οποία χρησιμοποιούνται επί μακρόν, σε διεθνές επίπεδο, σε ένα πλήθος τεχνολογικών και ερευνητικών εφαρμογών.

Σημειώνεται ακόμη ότι η υπόψη διατριβή, μέσω των αποτελεσμάτων και της ανάλυσης που περιλαμβάνει, επεκτείνει ουσιαστικά και ολοκληρώνει σε μεγάλο βαθμό την έρευνα των Dafalias και Feigenbaum [19]. Ειδικότερα, η αξιολόγηση και μελέτη των ιστορικών φόρτισης θεωρείται πληρέστερη, δεδομένου ότι περιλαμβάνει τις περιπτώσεις τύπου ‘ανάστροφου παπιγιόν’ (reverse bow-tie), ‘κεκλιμένου επιπέδου θετικής κλίσης’ (inclined path positive slope), ‘κεκλιμένου επιπέδου

αρνητικής κλίσης’ (inclined path negative slope) και ‘κλεψύδρας’ (hourglass). Για τις υπόψη περιπτώσεις πέραν της σύγκρισης υπολογιστικών αποτελεσμάτων και δημοσιευμένων πειραματικών δεδομένων ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), εξετάζονται και τα υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την μεταβολή της μέγιστης αξονικής τάσης ανά κύκλο φόρτισης, συναρτήσει των κύκλων, με σκοπό την εξακρίβωση της συμπεριφοράς (ανακυκλική κράτυνση) του υλικού στην συγκεκριμένη κατεύθυνση καταπόνησης. Επιπρόσθετα, με σκοπό την πληρέστερη εξακρίβωση των δυνατοτήτων του μοντέλου MAFMδ εκτελείται, επί του συνόλου των διαξονικών ιστορικών φόρτισης, παραμετρική ανάλυση της απόκρισής του για τις διάφορες διακριτές τιμές της παραμέτρου δ ($\delta = 0,5 \sim 0,99$), σε σύγκριση με τα αποτελέσματα που παράγονται για $\delta = 0,18$ (βέλτιστες προσομοιώσεις).

Η συνεισφορά της υπόψη ερευνητικής προσπάθειας στο αντίστοιχο επιστημονικό πεδίο, δύναται να αξιολογηθεί στην βάση του αντίκτυπου που και της δυναμικής που διαθέτει στον τομέα της δημιουργικής αλληλεπίδρασης των ιδεών και των αποτελεσμάτων της στην διεθνή ερευνητική κοινότητα. Στο πλαίσιο αυτό, σημειώνεται ότι το προτεινόμενο καταστατικό μοντέλο έχει αξιοποιηθεί, όπως καταδεικνύεται από αριθμό αναφορών [1] [39] [56] [28], από ερευνητές οι οποίοι δεν σχετίζονται με τους συγγραφείς της ερευνητικής εργασίας των Dafalias, Kourousis και Saridis [17] [18], τόσο ως πηγή εμπλουτισμού της πληροφορίας, όσο και ως βάση για την ανάπτυξη νέων μοντέλων.

6.3 Θέματα προς Περαιτέρω Διερεύνηση

Το καταστατικό μοντέλο MAFM δύναται να αξιοποιηθεί ως πλατφόρμα για την ανάπτυξη νέων ερευνητικών προτάσεων, είτε με την προσθήκη επιπλέον

παραμέτρων για την βελτίωση της περιγραφής του πολυαξονικού ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting), είτε με την ενσωμάτωση τροποποιήσεων οι οποίες θα προσφέρουν δυνατότητες για πιο ρεαλιστική περιγραφή της συμπεριφοράς των υλικών, με την δεύτερη λύση να θεωρείται καταλληλότερη λόγω γενικότητας. Ως εκ τούτου, και δεδομένου ότι η κινηματική κράτυνση δεν είναι ικανή να περιγράψει το σύνολο των σύνθετων μεταβολών που συντελούνται στην επιφάνεια διαρροής κατά την πλαστική φόρτιση, η περαιτέρω ερευνητική προσπάθεια εκτιμάται ότι δύναται να στραφεί στις επιλογές που προσφέρει η παραμορφωτική κράτυνση (distortional hardening), μέσω της ενσωμάτωσης του κανόνα κατευθυντικής κράτυνσης (directional distortional hardening) που προτάθηκε από τους Feigenbaum και Dafalias [23] [24]. Επίσης, μία επιλογή η οποία εκτιμάται ότι διαθέτει ερευνητικό ενδιαφέρον είναι η εξέταση της χρήσης του προτεινόμενου κανόνα κινηματικής κράτυνσης (AFM, MAFM) στο μοντέλο των Dafalias και Popov [14] [16], ως εναλλακτικός τρόπος περιγραφής της κίνησης της επιφάνειας διαρροής και της περιβάλλουσας επιφάνειας (bounding surface).

Τα πρακτικά προβλήματα που είναι δυνατόν να επιλυθούν αναλυτικά είναι ελάχιστα, καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις η γεωμετρία που μελετάται είναι ασυνήθης, ενώ οι συνοριακές συνθήκες και οι φορτίσεις είναι σύνθετες. Η υπολογιστική μηχανική και ειδικότερα η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων παρέχει την δυνατότητα προσεγγιστικής επίλυσης αυτού του τύπου των προβλημάτων. Ωστόσο, τα εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων, όπως το ANSYS και το ABAQUS, δεν χρησιμοποιούν καταστατικά μοντέλα ικανά να προσομοιώσουν με ακρίβεια το φαινόμενο του ανακυκλικού ερπυσμού (ratcheting) [22]. Συνεπώς, με σκοπό να αντιμετωπισθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια πρακτικά

προβλήματα ανάλυσης κατασκευών, εκτιμάται ότι θα ήταν δυνατόν να εξετασθεί η ενσωμάτωση του προτεινόμενου μοντέλου στα υπόψη λογισμικά, προκειμένου να πιστοποιηθεί ερευνητικά η καταλληλότητα χρήσης του.

Βιβλιογραφία

[1] Abdel-Karim M., Modified Kinematic Hardening Rules for Simulations of Ratchetting, International Journal of Plasticity 25, 1560-1587, 2009.

[2] Amstrong P. J., Frederick C. O., A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect, CEGB Report No. RD/B/N731, Berkeley Laboratories, CA, 1966.

[3] Bari S., Hassan T., Anatomy of Coupled Constitutive Models for Ratcheting Simulation, International Journal of Plasticity 16, 381-409, 2000.

[4] Bari S., Hassan T., An Advancement in Cyclic Plasticity Modeling for Multiaxial Ratcheting Simulation, International Journal of Plasticity 18, 873-894, 2002.

[5] Berli M., Eggers C.G., Accorsi M.L., Or D., Theoretical Analysis of Fluid Inclusions for In Situ Soil Stress and Deformation Measurements, Journal of Soil Science Society of America 70, 1441-1452, 2006.

[6] Burlet H., Cailleutad, Numerical Techniques for Cyclic Plasticity at Variable Temperature, Engineering Computations 3 (2), 143-153, 1986.

[7] Besseling J. F., A Theory of Elastic, Plastic and Creep Deformations of an Initially Isotropic Material Showing Anisotropic Strain-Hardening, Creep Recovery and Secondary Creep, Journal of Applied Mechanics 80, 529-536, 1958.

[8] Chaboche J. L., Dang-Van K., Cordier G., Modelization of Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel, In Transactions of the 5th International Conference on Structural Mechanics In Reactor Technology (SMiRT-5), no. Div L in 11/3, Berlin, 1979.

[9] Chaboche J.L., Rousselier G., On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations Based on the Internal Variables Concept, 3rd International Seminar, “Inelastic Analysis and Life Prediction in High Temperature Environment”, 6th International Conference on Structural Mechanics In Reactor Technology (SMiRT-6), Paris, T.P. ONERA no. 81-111, 1981.

[10] Chaboche J.L, Time-independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity, International Journal of Plasticity 2, 149-188, 1986.

[11] Chaboche J. L., On Some Modifications of Kinematic Hardening to Improve the Description of Ratchetting Effects, International Journal of Plasticity 7, 661-678, 1991.

[12] Chaboche J. L., A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories, International Journal of Plasticity 24, 1642–1693, 2008.

[13] Corona E., Hassan T., Kyriakides S., On the Performance of Kinematic Hardening Rules in Predicting a Class of Biaxial Ratcheting Histories, International Journal of Plasticity 12 (1), 117-145, 1996.

[14] Dafalias Y. F., Popov E. P., Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, Journal of Applied Mechanics 43 (4), 645-651, 1975.

[15] Dafalias Y. F., Modelling Cyclic Plasticity: Simplicity versus Sophistication, Mechanics of Engineering Materials, John Wiley & Sons, pp.153-178, 1984.

[16] Dafalias Y. F., Bounding surface plasticity. Part I: mathematical foundation and hypoplasticity, ASCE Journal of Engineering Mechanics 112, 966–987, 1986.

[17] Dafalias Y. F., Kourousis K. I., Saridis G. J., Multiplicative AF Kinematic Hardening in Plasticity, International Journal of Solids and Structures 45, 2861-2880, 2008.

[18] Dafalias Y. F., Kourousis K. I., Saridis G. J., Corrigendum to “Multiplicative AF Kinematic Hardening in Plasticity”, International Journal of Solids and Structures 45, 4878, 2008.

[19] Dafalias Y. F., Feigenbaum H. P., Biaxial Ratchetting with Novel Variations of Kinematic Hardening, International Journal of Plasticity 27, 479-491, 2011.

[20] Delobelle P., Robinet P., Bocher L., Experimental Study and Phenomenological Modelization of Ratchet Under Uniaxial and Biaxial Loading on an Austenitic Stainless Steel, International Journal of Plasticity 11 (4), 295-330, 1995.

[21] Drucker D.C., Palgen L., On Stress-Strain Relations for Cyclic and Other Loading, ASME Journal of Applied Mechanics 48, 479, 1981.

[22] Dunne F., Petrinic N., Introduction to Computational Plasticity, Oxford University Press, New York, 2005.

[23] Feigenbaum H. P., Dafalias Y. F., Directional distortional hardening in metal plasticity within thermodynamics, International Journal of Solids and Structures 44, 7526–7542, 2007.

[24] Feigenbaum H. P., Dafalias Y. F, Simple model for directional distortional hardening in metal plasticity within thermodynamics, ASCE Journal of Engineering Mechanics 134 (9), 730–738, 2008.

[25] Feigenbaum H. P., μη δημοσιευμένος κώδικας αριθμητικής προσομοίωσης μοντέλων ανακυκλικής πλαστικότητας σε Matlab.

[26] Guionnet C., Modelization of Ratcheting in Biaxial Experiments, Nuclear Engineering and Design 116, 223-230, 1989.

[27] Guionnet C., Modeling of Ratcheting in Biaxial Experiments, ASME Journal of Engineering Materials Technology 113, 56-62, 1992.

[28] Gustafsson D., Moverare J. J., Simonsson K., Sjostrom S., Modeling of the Constitutive Behavior of Inconel 718 at Intermediate Temperatures, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power 133, 2011.

[29] Hassan T., Kyriakides S., Ratcheting in Cyclic Plasticity, part I: Uniaxial Behavior, International Journal of Plasticity 8, 91-116, 1992.

[30] Hassan T., Corona E., Kyriakides S., Ratcheting in Cyclic Plasticity, part II : Multiaxial Behavior, International Journal of Plasticity 8, 117-146, 1992.

[31] Hassan T., Kyriakides S., Ratcheting of Cyclically Hardening and Softening Materials, Part I: Uniaxial Behavior, International Journal of Plasticity 10, 149-184, 1994.

[32] Hassan T., Kyriakides S., Ratcheting of Cyclically Hardening and Softening Materials, Part II: Multiaxial Behavior, International Journal of Plasticity 10, 185-212, 1994.

[33] Henshall G. A., Miller A. K., Tanaka J. G., Modeling Cyclic Deformation with the Matmod-bssol Unified Constitutive Equations, In 2nd International Conference On Low-cycle Fatigue and Elasto-plastic Behaviour of Materials, Munich, 1987.

[34] Hill R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, New York, 1998.

[35] Ishikawa H., Sasaki K., Yield Surfaces of SUS 304 Under Cyclic Loading, Journal of Engineering Materials and Technology 110, 365-371, 1988.

[36] Ishlinskii A. Iu., General Theory of Plasticity with Linear Strain Hardening, Ukr. Mat. Zh. 6, 314, 1954.

[37] Jhansale H. R., A New Parameter for the Hysteretic Stress-Strain Behaviour of Metals, Journal of Engineering Materials and Technology, 33-38, 1975.

[38] Jiang Y., Sehitoglu H., Modeling of Cyclic Ratcheting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations, Journal of Applied Mechanics 63, 720-725, 1996.

[39] Kabir H. S. M., Yeo T., Kim S., Characterization of Material Parameters, Proceedings of the World Congress on Engineering 2009 vol II, WCE 2009, July 1 – 3, London, UK, 2009.

[40] Kang G., Ratcheting: Recent Progress in Phenomenon Observation, Constitutive Modeling and Application, International Journal of Fatigue 30 (8), 1448-1472, 2008.

[41] Krempl E., On the Interaction of Rate and History Dependence in Structural Metals, Acta Mechnica 22, 53-90, 1975.

[42] Krishna S., Hassan T., Naceur I. B., Sai K., Cailletaud G., Macro Versus Micro-scale Constitutive Models in Simulating Proportional and Non-proportional Cyclic and Ratcheting Responses of Stainless Steel 304, International Journal of Plasticity 25, 1910-1949, 2009.

[43] Lemaitre J., Chaboche J. L., Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, 1990.

[44] Lemaitre J., A Short Course in Damage Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1992.

[45] Lubliner J., Plasticity Theory, MacMillan Publishing, New York, 1990.

[46] Malinin N. N., Khadjinsky G. M., Theory of Creep with Anisotropic Hardening , International Journal of Mechanical Sciences, Volume 14 (4), 235-246, 1972.

[47] Meijers P., Description of Multiaxial Creep Behaviour Using the Overlay Model. A Short Presentation, IUTAM Symposium on Creep in Structures, Leicester, Springer-Verlag, 1980.

[48] Morrow J., Cyclic Plastic Strain Energy in Fatigue of Metals, Proceedings of Symposium on Internal Friction Damping in Cyclic Plasticity, ASTM STP 378, pp.45-87, 1965.

[49] Mroz Z., On the Description of Anisotropic Work-hardening, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 15 (3), 163-175, 1967.

[50] Ohno N., Wang J. D., Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part I: Formulations and Basic Features for Ratcheting Behavior, International Journal of Plasticity 9, 375-390, 1993.

[51] Ohno N., Wang J. D., Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part II: Applications to Experiments of Ratcheting Behavior, International Journal of Plasticity 9, 391-403, 1993.

[52] Ohno N., Recent progress in constitutive modeling for ratcheting, Materials Science Research International, 3 (1), 1–10, 1997.

[53] Prager W., Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity, Journal of Applied Physics, 20, 235, 1949.

[54] Prager W., The Theory of Plasticity - A Survey of Recent Achievements, Proceedings Institute of Mechanical Engineers (London) 169, 235-241, 1955.

[55] Prager W., Hodge P. G., Theory of Perfectly Plastic Solids, Dover Publications, New York, 1968.

[56] Rezaiee-Pajand M., Sinaie S., On the Calibration of the Chaboche Hardening Model and a Modified Hardening Rule for Uniaxial Ratcheting Prediction, International Journal of Plasticity 46, 3009-3017, 2009.

[57] Tuegel E. J., Measurements of Kinematic and Isotropic Hardening in SS304 Stainless Steel During Cyclic Deformations, Res Mechanica 22, 65-78, 1987.

[58] Valanis K. C., A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface, Archum Mech. stosow 23, 517-551, 1971.

[59] Valanis K. C., Fundamental Consequences of a New Intrinsic Time Measure Plasticity as a Limit of the Endochronic Theory, Archum Mech 32, 171-191, 1980.

[60] Voyiadjis G. Z., Kattan P.I., Damage Mechanics, Taylor and Francis Group, New York, 2005.

[61] Yao D., Krempl E., Viscoplasticity Theory Based on Overstress. The Prediction of Monotonic and Cyclic Proportional and Nonproportional Loading Paths of an Aluminum Alloy, International Journal of Plasticity 1, 259–274, 1985.

[62] Κουρούσης Κ. Η., Μοντέλο Ανακυκλικής Πλαστικότητας με Πολλαπλασιαστική Διασύνδεση των Εσωτερικών Τάσεων, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Υπολογιστική Μηχανική, Ε.Μ.Π., 2003.

[63] Σαρίδης Γ. Ι., Μοντέλο Ανακυκλικής Πλαστικότητας Οριζόμενο από την Ιστορία Κατεύθυνσης Φόρτισης, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Υπολογιστική Μηχανική, Ε.Μ.Π., 2003.