



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Φαινόμενα σύγκλισης, απόκλισης και ταλαντώσεων κατά την εφαρμογή της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών (MAS) σε απλό πρόβλημα κοιλότητας και σύγκριση με τη μέθοδο Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (EIE method)**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Μπάκας Οδυσσέας

**Επιβλέπων :** Γεώργιος Φικιώρης

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2011





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Φαινόμενα σύγκλισης, απόκλισης και ταλαντώσεων κατά την εφαρμογή της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών (MAS) σε απλό πρόβλημα κοιλότητας και σύγκριση με τη μέθοδο Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (EIE method)**

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μπάκας Οδυσσέας

**Επιβλέπων :** Γεώργιος Φικιώρης

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την 29<sup>η</sup> Σεπτεμβρίου 2011

.....  
Γεώργιος Φικιώρης

.....  
Κυριάκος Χιτζανίδης

.....  
Ιωάννης Σαραντόπουλος

.....  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2011

.....  
Μπάκας Οδυσσέας

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Μπάκας Οδυσσέας 2011

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάται ένα πρόβλημα σκέδασης από ιδανικό αγωγό, ο οποίος φωτοβολείται εσωτερικά. Ο αγωγός επιλέγεται να είναι ένας κυκλικός κύλινδρος απείρου μήκους (κατά  $z$ ) και η πηγή είναι ένα νηματοειδές ρεύμα παράλληλο στον άξονα  $z$ . Η προαναφερθείσα απλή γεωμετρία είναι τέτοια που να επιτρέπει την εύρεση ακριβούς λύσης. Η Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών, γνωστή ως MAS (Method of Auxiliary Sources), είναι μια συχνά χρησιμοποιούμενη αριθμητική μέθοδος σε προβλήματα σκέδασης. Η MAS, στην περίπτωσή μας, χρησιμοποιεί  $N$  βοηθητικές πηγές πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια εξωτερική του σκεδαστή. Τα ρεύματα καθεμίας είναι κατ' αρχήν άγνωστα. Αυτά προσδιορίζονται με επιβολή της συνοριακής συνθήκης σε  $N$  σημεία πάνω στο σκεδαστή, καθώς τότε προκύπτει ένα  $N \times N$  σύστημα με αγνώστους τα MAS ρεύματα. Η ακριβής επίλυση του συστήματος είναι δυνατή λόγω της απλής γεωμετρίας του προβλήματος κι επομένως το MAS πεδίο για πεπερασμένο  $N$  υπολογίζεται ακριβώς (γεγονός σπάνιο). Χάρη στη δυνατότητα αυτή και ύστερα από αναλυτική μελέτη, βρίσκουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση της βοηθητικής επιφάνειας. Αποδεικνύουμε επιπλέον ότι υπάρχει δυνατότητα, στο όριο  $N \rightarrow \infty$ , το MAS πεδίο να συγκλίνει στο πραγματικό, ενώ τα MAS ρεύματα να αποκλίνουν. Αν από την άλλη μεριά, χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης ή EIE (από το Extended Integral Equation) στο ίδιο πρόβλημα τέτοια φαινόμενα δε συμβαίνουν. Στη διπλωματική αυτή εργασία επιτυγχάνεται λοιπόν η εξαγωγή συμπερασμάτων ανάλογων με τις εργασίες [1], [2] και [3] για την περίπτωση που εξετάζουμε. Σημειώνουμε δε, ότι όλα τα θεωρητικά αποτελέσματα ενισχύονται από αριθμητική μελέτη, στην οποία δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στη διάκριση των φαινομένων απόκλισης και ταλαντώσεων, που θεωρητικά έχουν προβλεφθεί με τα φαινόμενα που εξαρτώνται από την αριθμητική υλοποίηση και προέρχονται από «round-off» ή «ill-conditioning». Έτσι, αν σε κάποιο «πραγματικό» πρόβλημα σκέδασης, με περίπλοκη γεωμετρία, εφαρμόσει κανείς μεθόδους του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού, παρόμοιες με τη MAS και διαπιστώσει αποκλίσεις ή αφύσικες ταλαντώσεις, θα πρέπει να εξετάσει με μεγάλη προσοχή την «πηγή» από την οποία προέρχονται.

### Λέξεις κλειδιά :

σκέδαση, ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm πρώτου είδους, επιλυσιμότητα



## ABSTRACT

This work examines a scattering problem from a perfect conductor illuminated internally. The conductor is chosen to be an infinitely long (along the  $z$ -axis) circular cylinder and the source a current filament parallel to the  $z$ -axis. The aforementioned simple geometry is simple enough for the exact solution to be determined. The Method of Auxiliary Sources (MAS) is a commonly used numerical method for scattering problems. In our case, MAS employs  $N$  auxiliary sources on a closed surface external to the scatterer. The source currents are initially unknown. They are determined by enforcing the boundary condition on  $N$  points on the scatterer, resulting a  $N \times N$  system with the MAS currents as the unknowns. The exact solution of the system is possible because of the simple problem geometry (this is a rare occurrence). Because of this and after an analytical study, we determine the allowable minimum distance of the auxiliary surface. We further demonstrate the possibility, in the limit  $N \rightarrow \infty$ , of the MAS field to converge to the true field, while the MAS currents diverge. If, on the other hand, we apply the Extended Integral Equation (EIE) method to the same problem, such phenomena do not occur. This diploma thesis thus draws conclusions analogous to the works [1], [2], and [3] for the case of interest. Let us note that all theoretical results are reinforced by a numerical study, in which we take great care to distinguish the divergence and oscillation phenomena predicted theoretically to those that depend on the numerical implementation and are due to “round-off” or “ill-conditioning”. Therefore, if in a “real” scattering problem, with a complicated geometry, one uses methods of Computational Electromagnetics similar to MAS and observes divergence or unphysical oscillations, one should take great care to examine their “source”.

### **Key words :**

scattering, Fredholm integral equations of the first kind, solvability

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας και συνακόλουθα, των σπουδών μου στη σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π. θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή κύριο Γεώργιο Φικιώρη για την ευκαιρία που μου παρείχε, μέσω της παρούσας εργασίας, να έρθω σε επαφή με ενδιαφέροντα επιστημονικά αντικείμενα όπως αυτό του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού, των Ασυμπτωτικών Μαθηματικών και πολλών άλλων, μέχρι πρότινος άγνωστα σε εμένα. Τον ευχαριστώ ακόμα για τη συνεχή βοήθεια και την εμπιστοσύνη του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Ευχαριστώ επίσης θερμά τον καθηγητή κύριο Κυριάκο Χιτζανίδη και τον καθηγητή κύριο Ιωάννη Σαραντόπουλο για τις πολλές και χρήσιμες γνώσεις που μου παρείχαν στα πλαίσια των μαθημάτων που διδάσκουν. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος την οικογένειά μου για τη στήριξη, που μου παρείχε όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b><u>Κεφάλαιο 1</u> : Γενική Εισαγωγή.....</b>	<b>17</b>
<b><u>Κεφάλαιο 2</u> : Βασικές Γνώσεις και Υπόβαθρο.....</b>	<b>19</b>
2.1 Στόχοι του Κεφαλαίου 2.....	19
2.2 Προβλήματα σκέδασης ως προβλήματα συνοριακών τιμών.....	19
2.2.1 Θεμελιώδεις λύσεις και συνάρτηση Green.....	19
2.2.2 Προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης.....	21
2.2.2.1 Εξισώσεις του Maxwell και διατύπωση του αντίστοιχου προβλήματος συνοριακών τιμών.....	22
2.2.2.2 Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz.....	24
2.2.2.3 Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών.....	25
2.3 Η Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών (MAS).....	26
2.3.1 Γενικά στοιχεία.....	27
2.3.2 Τρόπος εφαρμογής της μεθόδου.....	27
2.3.2.1 PEC σκεδαστής.....	28
2.3.2.2 Διηλεκτρικός σκεδαστής.....	30
2.4 Η Μέθοδος Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (EIE).....	31
2.4.1 Εισαγωγή.....	31
2.4.2 Εξαγωγή της Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης.....	31
2.4.3 Επιλυσιμότητα της EIE.....	31
2.4.4 Μέθοδοι επίλυσης της EIE.....	32
2.5 Χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία.....	32
2.5.1 Addition Theorem.....	33
2.5.2 Ασυμπτωτική συμπεριφορά συναρτήσεων Bessel και Hankel υψηλής τάξης.....	33
2.5.3 Σύγκλιση σειράς.....	33
2.5.4 Συναρτήσεις ως ολοκληρώματα αναλυτικών συναρτήσεων.....	34
<b><u>Κεφάλαιο 3</u> : Παρουσίαση του προβλήματος και Ακριβής λύση.....</b>	<b>35</b>
3.1 Εισαγωγή.....	35

3.2 Παρουσίαση του προβλήματος.....	35
3.3 Ακριβής Λύση.....	36
3.3.1 Επίλυση.....	36
3.3.2 Συμπεριφορά της λύσης-έλεγχος σύγκλισης.....	40
<b>Κεφάλαιο 4 : Εφαρμογή της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών (MAS).....</b>	<b>43</b>
4.1 Εισαγωγή του Κεφαλαίου 4.....	43
4.2 Εφαρμογή της «Συνεχούς» έκδοσης της (MAS).....	43
4.2.1 Ολοκληρωτική Εξίσωση : αναζήτηση λύσης.....	43
4.2.2 Μελέτη σύγκλισης του αθροίσματος (4. 21).....	46
4.2.3 Συμπεράσματα και σχολιασμός των θεωρητικών αποτελεσμάτων.....	47
4.2.3.1 Κάποιες ειδικές περιπτώσεις.....	47
4.2.3.2 Το όριο $\rho_{fil} \rightarrow 0$ .....	47
4.2.3.3 Επιπλέον παρατηρήσεις για την περίπτωση $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ .....	47
4.2.4 Ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης της μη επιλυσιμότητας.....	48
4.3 «Διακριτές» Βοηθητικές Πηγές.....	50
4.3.1 Διακριτές Βοηθητικές Πηγές και ακριβής λύση.....	50
4.3.2 Συμπεριφορά MAS ρευμάτων για μεγάλο αριθμό πηγών.....	55
4.3.2.1 Εξαγωγή ασυμπτωτικού τύπου για τα MAS ρεύματα όταν $\rho_{cri} < \rho_{aux}$ .....	57
4.4 Συμπεριφορά του MAS πεδίου για μεγάλο αριθμό πηγών.....	59
4.5 Αριθμητική μελέτη : αποτελέσματα και σχολιασμός.....	61
4.5.1 Η περίπτωση $\rho_{cyl} < \rho_{aux} < \rho_{cri}$ .....	61
4.5.2 Η περίπτωση $\rho_{cri} < \rho_{aux}$ .....	69
4.5.2.1 Στόχοι.....	69
4.5.2.2 Σύγκλιση στο εσωτερικό του σκεδαστή ( $\rho_{obs} < \rho_{cyl}$ ).....	69
4.5.2.3 Επιπλέον μελέτη του τύπου (4. 63).....	73
<b>Κεφάλαιο 5 : Εφαρμογή της Μεθόδου Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (EIE)</b> <b>στο «εσωτερικό» πρόβλημα.....</b>	<b>77</b>
5.1 Εισαγωγή.....	77

5.2 Επιλυσιμότητα της ΕΙΕ.....	77
5.3 Διακριτή έκδοση της ΕΙΕ.....	80
5.4 Αναλυτική επέκταση του σκεδαζόμενου πεδίου.....	82
5.5 Αριθμητική μελέτη.....	84
5.6 Συμπεράσματα.....	87
<b><u>Κεφάλαιο 6</u> : Απολογισμός και τελικά συμπεράσματα.....</b>	<b>89</b>
<b><u>Κεφάλαιο 7</u> : Παραρτήματα.....</b>	<b>91</b>
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : “Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz”.....	91
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β : “Στοιχεία ασυμπτωτικής ανάλυσης”.....	93
B.1 Βασικά εργαλεία.....	93
B.2 Εξαγωγή της σχέσης (2.46).....	93
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ : “Αναλυτική επέκταση μιγαδικής συνάρτησης” .....	96
Γ.1 Γενικά στοιχεία και παραδείγματα.....	96
Γ.2 Πλειότιμες συναρτήσεις και κλαδικά σημεία.....	99
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ : “ Ολοκληρωτικές Εξισώσεις ” .....	103
Δ.1 Σύντομη παρουσίαση του θεωρήματος του Picard.....	103
Δ.2 Η ολοκληρωτική εξίσωση κατά την εφαρμογή της MAS και της ΕΙΕ.....	104
<b><u>Κεφάλαιο 8</u>: Βιβλιογραφία.....</b>	<b>107</b>



## Πίνακας Συμβόλων :

$E$  : διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου  $[V/m]$

$D$  : διάνυσμα της διηλεκτρικής μετατόπισης  $[C/m^2]$

$B$  : διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής  $[Wb/m^2 = T]$

$H$  : διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου  $[A/m^2]$

$J$  : χωρική πυκνότητα ρεύματος  $[A/m^2]$

$i_k$  : μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα  $k \in \{x, y, z, \varphi, \theta, \rho\}$

-γενικά, τα διανύσματα στο χώρο σημειώνονται με παχιά γραφή

$\vec{a}$  : διάνυσμα ως πίνακας  $3 \times 1$

-γενικά, τα διανύσματα που παριστάνονται ως πίνακες  $3 \times 1$  συμβολίζονται με τη βοήθεια του βέλους

$\vec{G}$  : πίνακας  $3 \times 3$

$\mu_0$  : μαγνητική διαπερατότητα στο κενό  $[H/m]$

$\epsilon_0$  : διηλεκτρική σταθερά του κενού  $[F/m]$

$k$  : ο κυματικός αριθμός ή κυματάρημος του μέσου διάδοσης, στο κενό και σε κυκλική συχνότητα λειτουργίας  $\omega$  ισχύει :  $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$   $[m^{-1}]$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  : το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  : το εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή το  $\mathbb{R}$  με δύο επιπλέον στοιχεία, το  $-\infty$  και το  $+\infty$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ φορές}}$  : ο  $n$ -διάστατος χώρος

$\mathbb{N}$  : το σύνολο των φυσικών αριθμών  $\{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$  : το σύνολο των ακεραίων αριθμών  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$i$  : η φανταστική μονάδα,  $i^2 = -1$

$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  : ολοκλήρωμα της  $f$  στον  $\mathbb{R}^n$

$\delta(\mathbf{x})$  : το συναρτησιακό του Dirac. Μπορεί να οριστεί μέσω των δύο σχέσεων :

$$\delta(\mathbf{x}) = 0, \text{ αν } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\text{και } \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (2).$$

Μια σημαντική ιδιότητα είναι ότι αν  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , τότε

$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_n)$ , όπου με  $\delta(x)$  συμβολίζουμε το μονοδιάστατο συναρτησιακό του Dirac.

$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  : θεμελιώδης λύση του τελεστή  $L$ , όπου  $\mathbf{x}$  είναι η θέση παρατήρησης και  $\mathbf{x}'$ , η θέση της πηγής. Ορίζεται από τη σχέση :  $L(\mathbf{x})\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$

$\nabla$  : το ανάδελτα, π.χ. σε Καρτεσιανές συντεταγμένες είναι  $\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$

$\nabla^2$  : ο τελεστής του Laplace,  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$

$J_n(x)$  : συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης  $n$

$Y_n(x)$  : συνάρτηση Neumann πρώτου είδους τάξης  $n$

$H_n^{(1)}(x)$  : συνάρτηση Hankel πρώτου είδους τάξης  $n$ , ισχύει :  $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$

$\mathcal{L}^2[a, b]$  : Ο χώρος των συναρτήσεων που τα τετράγωνά τους είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα  $[a, b]$ , δηλαδή  $f \in \mathcal{L}^2[a, b] \Leftrightarrow \int_a^b f^2(x) dx < +\infty$ .

## Κατάλογος Σχημάτων

- Σχήμα 2.1 : “ Η γεωμετρία του προβλήματος : σε χώρο με ιδιότητες του κενού ( $\epsilon_0, \mu_0$ ) όπου διαδίδεται ηλεκτρομαγνητικό κύμα παρεμβάλλεται ένας PEC σκεδαστής ”.....28
- Σχήμα 2.2 : “ Εφαρμογή της MAS για την περίπτωση του σχήματος 2.1 : η φυσική επιφάνεια του σκεδαστή αφαιρείται και  $N$  βοηθητικές πηγές τοποθετούνται σε μια επιφάνεια, τη βοηθητική η οποία είναι εσωτερική της πραγματικής. Στο σχήμα  $N = 10$ . Τα σημεία εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών βρίσκονται πάνω στη μη-υπαρκτή πλέον αρχική επιφάνεια, τα όρια της οποίας ονομάζονται ως μαθηματική επιφάνεια. ”.....29
- Σχήμα 2.3 : “ Η γεωμετρία του προβλήματος. Παρουσίαση σε επίπεδο κάθετο ως προς τον άξονα  $z$  ”.....30
- Σχήμα 3.1 : “ Η γεωμετρία του προβλήματος. Παρουσίαση σε επίπεδο κάθετο ως προς τον άξονα  $z$  ”.....35
- Σχήμα 3.2 : “ Οι τρεις περιοχές σύγκλισης του «εσωτερικού» προβλήματος. Στην περιοχή για  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$ , δηλαδή στη περιοχή 3 του σχήματος, η σειρά που αναπαριστά το σκεδαζόμενο πεδίο αποκλίνει. Η περιοχή 2, που είναι χρωματισμένη, είναι εξωτερική του κυλίνδρου και αποτελεί την περιοχή αναλυτικής επέκτασης της ακριβούς λύσης. Σημειώνουμε ότι η κρίσιμη απόσταση  $\rho_{cri}$  είναι γνωστή και στη μαγνητοστατική: είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων, μετρούμενη πάνω στην ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τη θέση της πηγής, στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί μια πηγή έντασης  $-I$ .”.....41
- Σχήμα 4.1 : “ Όταν  $\rho_{aux} > \rho_{cri}$ , το αριστερό μέλος της (4.2) είναι αναλυτική συνάρτηση μέσα στη λωρίδα πλάτους  $2|Im\{\xi^{(n,\pm)}\}|$ . Οι ιδιομορφίες του δεξιού μέλους που σημειώνονται στο παραπάνω σχήμα με μαύρες κουκίδες, και όπως φαίνεται, βρίσκονται μέσα στην προαναφερθείσα λωρίδα”.....49
- Σχήμα 4.2 : “ Τα MAS ρεύματα είναι τοποθετημένα στις θέσεις  $(\rho_{aux}, \varphi_l)$ , όπου  $\varphi_l = 2\pi(l - 1)/N$ , όπου  $l = 0, 1, \dots, N - 1$ , ενώ τα σημεία εφαρμογής είναι στις θέσεις  $(\rho_{cyl}, \varphi_p)$ . Η απόσταση των MAS ρευμάτων  $\#l$  και των σημείων εφαρμογής  $\#p$  συμβολίζονται με  $b_{p,l}$  και η απόσταση της νηματοειδούς πηγής  $I$  και του σημείου εφαρμογής  $p$  σημειώνεται ως  $d_p$ . Στο παραπάνω σχήμα είναι  $N = 8$  και δείχνουμε τα  $b_{1,2}$  και  $d_7$ .”.....51
- Σχήμα 4.3 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους της επιφανειακής κατανομής ρεύματος στη βοηθητική επιφάνεια (, πάνω και κάτω αντίστοιχα,) για  $\rho_{cyl} = 2.1$ ,  $\rho_{obs} = 1.4$ ,  $\rho_{fil} = 1.8$  και  $\rho_{aux} = 2.2$  .”.....62
- Σχήμα 4.4 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους του ακριβούς σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου (, πάνω και κάτω αντίστοιχα,) για  $\rho_{cyl} = 2.1$ ,  $\rho_{obs} = 1.4$ ,  $\rho_{fil} = 1.8$  και  $\rho_{aux} = 2.2$  .”.....63

- Σχήμα 4.5 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους την ποσότητας  $\frac{NI_L}{2\pi\rho_{aux}}$  για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων  $\rho_{cyl}$ ,  $\rho_{obs}$ ,  $\rho_{fil}$  και  $\rho_{aux}$  για  $N = 70$  βοηθητικές πηγές ”.....64
- Σχήμα 4.6 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους του MAS ηλεκτρικού πεδίου για πλήθος βοηθητικών ίσο με  $N = 70$ .”.....65
- Σχήμα 4.7 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους της επιφανειακής κατανομής ρεύματος στη βοηθητική επιφάνεια για  $\rho_{cyl} = 1.5$  ,  $\rho_{obs} = 2.5$  ,  $\rho_{fil} = 1.1$  και  $\rho_{aux} = 1.9$  .”.....67
- Σχήμα 4.9 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους της επιφανειακής κατανομής ρεύματος στη βοηθητική επιφάνεια για  $\rho_{cyl} = 2$  ,  $\rho_{obs} = 1.3$  ,  $\rho_{fil} = 1.7$  και  $\rho_{aux} = 2.8$  .”.....70
- Σχήμα 4.10 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους του MAS πεδίου για  $N = 120$ . Παρατηρούμε ότι παρ’ όλη την απόκλιση της ισοδύναμης ρευματικής κατανομής, το MAS συγκλίνει στο πραγματικό .”.....71
- Σχήμα 4.11 : “ Απεικόνιση του πραγματικού μέρους της ισοδύναμης επιφανειακής ρεύματος, το οποίο είναι και ταλαντούμενο. για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων του τρίτου πειράματος. Το πάνω σχήμα είναι για πλήθος βοηθητικών πηγών ίσο με  $N = 40$  και φαίνεται πως δεν είναι αρκετές για να εκφράσουν ικανοποιητικά τη θεωρητικά προσδιορισμένη συμπεριφορά των ρευμάτων, όπως αυτή δίνεται μέσω των σχέσεων (4.63). Το δεύτερο σχήμα προκύπτει για  $N = 100$  και συγκρινόμενο με το αντίστοιχο του σχήματος 4.10, κάνει φανερό το φαινόμενο round-off λόγω των επιπλέον ταλαντώσεων που παρουσιάζονται. ”.....72
- Σχήμα 4.12 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους του MAS πεδίου για  $N = 75$ . Παρατηρούμε με τη βοήθεια των σχημάτων 4.9 και 4.10 ότι παρ’ όλη την απόκλιση της ισοδύναμης ρευματικής κατανομής, το MAS συγκλίνει στο πραγματικό .”.....72
- Σχήμα 4.13 : “ Το πάνω διάγραμμα δείχνει τα MAS ρεύματα για  $t = 1.19$  και  $N = 150$  , ενώ το κάτω τη θεωρητική ταλάντωση (4.63). Και πάλι, η προσέγγιση φαίνεται πολύ ικανοποιητική. ”.....73
- Σχήμα 4.14 : “ Στο δεύτερο γράφημα παρουσιάζεται η ταλάντωση που προτείνεται από τη σχέση (4.63). Θα περίμενε κανείς η θεωρητικά προβλεπόμενη συμπεριφορά να ταυτίζεται με αυτήν του πάνω διαγράμματος, το οποίο υποτίθεται ότι αναπαριστά την πραγματική συμπεριφορά των MAS ρευμάτων. Αυτό όμως δεν ισχύει, γιατί οι πρόσθετες ταλαντώσεις του πρώτου διαγράμματος εισάγονται λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης του υπολογιστή. ”.....74
- Σχήμα 4.15 : “ Όπως στο σχήμα 4.14 έτσι και σ’ αυτό, τα δύο διαγράμματα δεν ταυτίζονται, γιατί το πρώτο έχει επηρεαστεί από το «round-off». Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $t = 1.19$  και  $N = 200$ . ”.....75



Σχήμα 5.1 : “ Στο σχήμα αυτό φαίνεται ότι, αντίθετα με ότι συμβαίνει στη MAS, οι ιδιομορφίες του δεξιού μέλους που σημειώνονται στο παραπάνω σχήμα με μαύρες κουκίδες βρίσκονται εκτός από την «λωρίδα αναλυτικότητας» μήκους  $2|Im\{\xi^{(n,\pm)}\}|$ . ”.....80

Σχήμα 5.2 : “Απεικόνιση των κανονικοποιημένων ρευμάτων  $I_p/I$  για  $k\rho_{cyl} = 2, k\rho_{obs} = 1.3, k\rho_{fil} = 1.7$  και  $k\rho_{aux} = 2.8$  ( $k\rho_{cri} = 2.35$ ). Το πλήθος των ρευμάτων είναι  $N = 70$ .”.....84

Σχήμα 5.3 : “ Απεικόνιση των κανονικοποιημένων ρευμάτων  $I_p/I$  για  $k\rho_{cyl} = 2.2, k\rho_{obs} = 1.8, k\rho_{fil} = 1.6$  και  $k\rho_{aux} = 3.5$  ( $k\rho_{cri} = 3.03$ ). Το πλήθος των ρευμάτων είναι  $N = 70$ .”.....85

Σχήμα 5.4 : “ Οι τιμές των παραμέτρων είναι  $k\rho_{cyl} = 1.9, k\rho_{obs} = 1.5, k\rho_{fil} = 1.75$  και  $k\rho_{aux} = 4$  ( $k\rho_{cri} = 2.06$ ). Το πλήθος των ρευμάτων είναι  $N = 90$ . Οι εμφανιζόμενες ταλαντώσεις είναι απόρροια του round-off.”.....86

Σχήμα Γ.1 : “ Αλυσίδα αναλυτικών επεκτάσεων : από το συναρτησιακό στοιχείο  $(f_0(z), D_0)$  καταλήγουμε στο συναρτησιακό στοιχείο  $(f_n(z), D_n)$ . Στο σχήμα το σύνολο  $D_0$  είναι ο χρωματισμένος αριστερά κυκλικός δίσκος, ενώ το  $D_n$  είναι ο χρωματισμένος κυκλικός δίσκος στα δεξιά. Τα σύνολα  $D_k$  των ενδιάμεσων συναρτησιακών στοιχείων  $(f_k(z), D_k), 1 \leq k < n$  παριστάνονται με διακεκομμένες γραμμές. Σύμφωνα με τον ορισμό 4, το  $(f_0(z), D_0)$  επεκτείνεται αναλυτικά κατά μήκος της καμπύλης του σχήματος, η οποία σημειώνεται με έντονο χρώμα.”.....100

Σχήμα Γ.2: “ Συνηθισμένες περιπτώσεις. Δίπλα από τις πλειότιμες συναρτήσεις παρατίθενται και τα κλαδικά τους σημεία ”.....102

### **Σημείωση 1 :**

Στο κείμενο της διπλωματικής εργασίας (κεφάλαια 1 έως και 6) κάθε φορά που εμφανίζεται μια έννοια για πρώτη φορά, χρησιμοποιείται η πλάγια γραφή. Για παράδειγμα, όταν αναφερθεί για πρώτη φορά η έννοια της θεμελιώδους λύσης, γράφουμε *θεμελιώδης λύση*, ενώ οπουδήποτε κι αν η έννοια αυτή χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια, γράφεται συνηθισμένα. Έτσι, κάθε έννοια γράφεται ακριβώς μία φορά «πλάγια», την πρώτη. Ωστόσο, σε διάφορα σημεία του κειμένου χρησιμοποιείται πλάγια γραφή με σκοπό να δοθεί έμφαση. Με έντονο χρώμα γράφονται οι λέξεις όταν αποτελούν οριστέες έννοιες (σε μαθηματικούς κατά βάση ορισμούς), καθώς και οι παρατηρήσεις, οι τίτλοι των επτά κεφαλαίων της εργασίας, των παραγράφων κτλ. Σημειώνουμε επίσης ότι σε κάθε κεφάλαιο οι σχέσεις είναι της μορφής (αριθμός κεφαλαίου. αύξων αριθμός σχέσης), ξεκινώντας την αρίθμηση από κάθε κεφάλαιο. Για παράδειγμα, η πρώτη σχέση του κεφαλαίου 2 σημειώνεται ως (2.1), ενώ του κεφαλαίου 5 ως (5.1). Μόνη εξαίρεση αποτελούν οι σχέσεις των παραρτημάτων που είναι της μορφής (Τρέχον παράρτημα. αύξων αριθμός σχέσης). Τέλος, οι παραπομπές δίνονται μέσα σε αγκύλες, ενώ όταν γράφουμε  $[x,(5)]$  εννοούμε τη σχέση (5) της παραπομπής υπ' αριθμόν x.

### **Σημείωση 2 :**

Σημειώνεται επίσης ότι τα αποτελέσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχουν παρουσιαστεί ως ομιλία από τον κύριο Γεώργιο Φικιώρη με τίτλο : “Method-of-Auxiliary-Sources (MAS) and Extended-Integral-Equation (EIE) solutions to a simple cavity problem : comparison of convergence Properties” στο συνέδριο “International Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI National Radio Science Meeting”, που πραγματοποιήθηκε την περίοδο 3-8 Ιουλίου 2011 στην Washington.

## **Κεφάλαιο 1 : Γενική εισαγωγή**

Σε δύο πρόσφατες εργασίες [1], [2] έχει αποδειχθεί ότι, υπό ορισμένες συνθήκες, τα βοηθητικά ρεύματα της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών (Method of Auxiliary Sources - MAS) είναι δυνατόν να αποκλίνουν καθώς ο αριθμός των ρευμάτων τείνει στο άπειρο. Η απόκλιση εμφανίζεται με τη μορφή αφύσικων ταλαντώσεων στα βοηθητικά ρεύματα. Στις [1], [2], η ως άνω ιδιότητα δείχνεται μέσω λεπτομερούς αναλυτικής, αριθμητικής και ασυμπτωτικής μελέτης δισδιάστατου προβλήματος σκέδασης από άπειρο, τέλεια αγωγίμο κυκλικό κύλινδρο, με προσπίπτον πεδίο αυτό ενός άπειρου νηματοειδούς αγωγού ευρισκόμενου εκτός του κυλίνδρου. Το απλοποιημένο αυτό πρόβλημα είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικό διότι η MAS λύση μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά και κατόπιν να διερευνηθεί ασυμπτωτικά. Από την άλλη μεριά, στην εργασία [3] αποδεικνύεται ότι, για το ίδιο απλό πρόβλημα σκέδασης, παρόμοια φαινόμενα δε συμβαίνουν όταν αντί για MAS εφαρμόσει κανείς τη Μέθοδο Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (Extended Integral Equation – EIE method).

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η επέκταση των παραπάνω για την περίπτωση που ο άπειρος νηματοειδής αγωγός βρίσκεται εντός του κυλίνδρου. Στο εξής το πρόβλημα αυτό θα αναφέρεται ως «εσωτερικό», ενώ αυτό που πραγματεύονται οι εργασίες [1],[2] και [3] θα καλείται «εξωτερικό» πρόβλημα.

Προς αυτή λοιπόν την κατεύθυνση, στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το απαραίτητο υπόβαθρο για την παρακολούθηση της υπόλοιπης εργασίας. Συγκεκριμένα, το κεφάλαιο αυτό δομείται από τέσσερις *αυτοτελείς* υποενότητες (πλην της εισαγωγής), κυριότερες από τις οποίες είναι οι 2.3 και 2.4 όπου γίνεται μια σύντομη παρουσίαση των μεθόδων MAS και EIE αντίστοιχα. Η παράγραφος 2.2 συνδέεται με το Κεφάλαιο 3 και αποτελεί τη θεωρητική βάση για την εύρεση της *ακριβούς* λύσης του «εσωτερικού» προβλήματος. Το Κεφάλαιο 4 είναι το μεγαλύτερο σε έκταση κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Εκεί αφού εξαχθούν όλα τα αντίστοιχα με την [1] αποτελέσματα, στην παράγραφο 4.3.2 γίνεται η ασυμπτωτική μελέτη του προβλήματος, ενώ στην 4.5 παρουσιάζεται πληθώρα αριθμητικών πειραμάτων που δείχνουν καθαρά τα παραπάνω θεωρητικά αποτελέσματα. Το κεφάλαιο 5 είναι αντίστοιχο της εργασίας [3] και πραγματεύεται την εφαρμογή της EIE για την περίπτωση του «εσωτερικού» προβλήματος. Στο κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα σημαντικότερα αποτελέσματα και γίνεται μια συζήτηση για την εφαρμογή και τη σημασία τους στον Υπολογιστικό Ηλεκτρομαγνητισμό. Οι αναγκαίες γνώσεις του κεφαλαίου 2 συμπληρώνονται με επιπρόσθετες πληροφορίες που δίνονται στο Κεφάλαιο 7, το οποίο αποτελείται από τέσσερα παραρτήματα. Σε αυτά παρουσιάζονται κάποια επιπλέον θεωρητικά στοιχεία και δίνονται (με κάποια αυστηρότητα) αποδείξεις τύπων ή μεθόδων που εφαρμόστηκαν σε διάφορα σημεία της εργασίας. Στο τελευταίο κεφάλαιο, κατά τα καθιερωμένα, δίνεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την εκπόνηση της εργασίας.



## **Κεφάλαιο 2: Βασικές γνώσεις και υπόβαθρο**

### **2.1 Στόχοι του Κεφαλαίου 2**

Όπως αναφέρθηκε και στη Γενική Εισαγωγή, το κεφάλαιο αυτό ως κύριο στόχο έχει να δομήσει το απαραίτητο υπόβαθρο για την παρακολούθηση της υπόλοιπης εργασίας. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της οργάνωσής του σε αυτοτελείς ενότητες, καθεμία από τις οποίες πραγματεύεται αντικείμενα γνώσης ανεξάρτητα μεταξύ τους έτσι, ώστε αν κάποιος είναι, εκ των προτέρων, εξοικειωμένος με κάποια από αυτά, να τα προσπεράσει. Ταυτόχρονα όμως γίνεται προσπάθεια η θεωρητική ανάλυση να μη «ξεφεύγει» σε τίποτα περισσότερο από τα απολύτως απαραίτητα. Συγκεκριμένα λοιπόν, στην παράγραφο 2.2 παρουσιάζεται αρχικά η μέθοδος της συνάρτησης Green (ορολογία αντίστοιχη των [10] και [11]) και πώς αυτή εφαρμόζεται σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών. Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση των προβλημάτων Ηλεκτρομαγνητικής Σκέδασης και μέσω της βασικής ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας διατυπώνεται αναλυτικά πώς αυτά ανάγονται τελικά στην επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών. Σημειώνουμε ότι η παράγραφος αυτή αποτελεί εισαγωγή και απαραίτητη γνώση για το Κεφάλαιο 3. Στην παράγραφο 2.3 παρουσιάζεται η Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών (MAS) στη γενική περίπτωση αρχικά, ενώ στη συνέχεια δίνονται κάποια κατατοπιστικά παραδείγματα εφαρμογής, ακολουθώντας την [4]. Κατ' ανάλογο τρόπο, στην παράγραφο 2.4 παρέχονται εν συντομία οι βασικές αρχές της Μεθόδου Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (EIE method), ενώ το τελευταίο τμήμα του κεφαλαίου αυτού αφιερώνεται στην παρουσίαση κάποιων συγκεκριμένων μαθηματικών θεωρημάτων και τύπων, συχνά χρησιμοποιούμενων στην εργασία αυτή.

### **2.2 Προβλήματα σκέδασης ως προβλήματα συνοριακών τιμών**

#### **2.2.1 Θεμελιώδεις λύσεις και συνάρτηση Green**

Έστω ο γραμμικός διαφορικός τελεστής  $L$ , ο  $L$  δηλαδή περιλαμβάνει συνήθεις ή και μερικές παραγώγους των συναρτήσεων πάνω στις οποίες εφαρμόζεται. Αν  $f(\mathbf{x})$  είναι μια δεδομένη συνάρτηση ορισμένη στον  $\mathbb{R}^n$ , θεωρούμε την εξίσωση :

$$L(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (2.1).$$

Για τον τελεστή  $L$  ορίζουμε τη *θεμελιώδη λύση*  $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  ως τη συνάρτηση εκείνη που ικανοποιεί την εξίσωση :

$$L(\mathbf{x})\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.2),$$

όπου  $\delta$  είναι το γνωστό συναρτησιακό του Dirac. Από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) παρατηρούμε ότι η θεμελιώδης λύση  $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  αποτελεί λύση της (2.1) στην περίπτωση που η συνάρτηση  $f(\mathbf{x})$  είναι μη μηδενική μόνο στο σημείο  $\mathbf{x}'$  και η τιμή της στο σημείο αυτό είναι τέτοια, ώστε το ολοκλήρωμά της σε οποιαδήποτε περιοχή του  $\mathbf{x}'$  να ισούται με μονάδα. Επειδή ο τελεστής  $L$  έχει υποθεθεί γραμμικός, αν το ολοκλήρωμα της  $f$  στο σημείο  $\mathbf{x}'$  έχει την τιμή  $f(\mathbf{x}')$  (αντί για μονάδα), τότε η λύση θα είναι  $f(\mathbf{x}')\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . Σύμφωνα με τα

προηγούμενα, αν η συνάρτηση  $f$  είναι μη μηδενική και σε άλλα σημεία, τότε μπορούμε να συμπεριλάβουμε τη συνεισφορά από όλα τα σημεία αυτά μέσω του ολοκληρώματος  $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}')\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\nu(\mathbf{x}')$ , το οποίο αποτελεί και λύση της εξίσωσης (2.1). Αν θέλουμε να γράψουμε με σχέσεις τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε, έχουμε :

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) &= L(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}')\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\nu(\mathbf{x}') = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}')L(\mathbf{x})\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\nu(\mathbf{x}') = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\nu(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

και μπορούμε να πούμε ότι η λύση της (2.1) είναι :

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}')\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\nu(\mathbf{x}') \quad (2.3).$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι αν για τον τελεστή  $L$  γνωρίζουμε τη θεμελιώδη του λύση  $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , τότε για την επίλυση της εξίσωσης (2.1) αρκεί μία ολοκλήρωση, αυτή που υπαγορεύεται από τη σχέση (2.3). Επιπλέον, λόγω της ιδιότητας  $\delta(\mathbf{x}) = \delta(-\mathbf{x})$  από τη (2.2) έπεται ότι :

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathcal{E}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \quad (2.4).$$

Η σχέση (2.4) εκφράζει την *Αρχή της Αμοιβαιότητας*, σύμφωνα με την οποία το αποτέλεσμα που παράγεται στο σημείο  $\mathbf{x}$  από ένα μοναδιαίο αίτιο στο σημείο  $\mathbf{x}'$ , ισούται με το αποτέλεσμα που παράγεται στο σημείο  $\mathbf{x}'$  από ένα μοναδιαίο αίτιο τοποθετημένο στο σημείο  $\mathbf{x}$ . Όπως θα φανεί και στο Κεφάλαιο 3, τα παραπάνω εκφράζονται από το γεγονός ότι η  $\mathcal{E}$  είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ .

Αν και για πολλούς τελεστές είναι γνωστές οι θεμελιώδεις λύσεις τους, συχνά η σχέση (2.3) δεν είναι αρκετή. Αυτό συμβαίνει γιατί τις περισσότερες φορές εκτός των εξισώσεων της μορφής (2.1) έχουμε να ικανοποιήσουμε κάποιες συνοριακές συνθήκες. Έτσι, ένα *Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών* διατυπώνεται ως εξής :

$$\begin{cases} L(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & , \mathbf{x} \in \Omega & (2.5.1) \\ B(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & , \mathbf{x} \in \partial\Omega & (2.5.2) \end{cases}$$

όπου ο  $B$  είναι γραμμικός τελεστής και  $\partial\Omega$  είναι το σύνορο του τόπου  $\Omega$  στον οποίο αναζητούμε τη λύση  $u$ . Η συνθήκη (2.5.2) καλείται *συνοριακή*. Σε τέτοια προβλήματα αντί της θεμελιώδους λύσης χρησιμοποιούμε τη *συνάρτηση Green* του προβλήματος (2.5.1), συμβολικά  $G$ , η οποία ορίζεται από τον τύπο :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (2.6).$$

Στη (2.6) με  $\mathcal{E}$  συμβολίζουμε, όπως και προηγουμένως, τη θεμελιώδη λύση του τελεστή  $L$ , ενώ η  $U$  είναι μια λύση της εξίσωσης :

$$L(\mathbf{x})U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad (2.7),$$

που επιλέγεται έτσι, ώστε η  $G$  να ικανοποιεί εκτός από τη (2.2) και τη (2.5.2). Η συνάρτηση  $U$  διαφέρει από πρόβλημα σε πρόβλημα και εμπεριέχει τόσο τη φυσική του προβλήματος, μέσω των βοηθητικών συνθηκών, όσο και τη γεωμετρία, μέσω του σχήματος του τόπου  $\Omega$ , σε αντίθεση με την  $\mathcal{E}$  που για δεδομένο τελεστή  $L$  είναι ίδια και εκφράζει τη δομή του τελεστή αυτού. Σε αντιστοιχία με την εξίσωση (2.1), η λύση του προβλήματος (2.5) δίνεται από τη σχέση :

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\nu(\mathbf{x}') \quad (2.8).$$

Έτσι, η λύση θα αποτελείται από δύο μέρη, το  $u_1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}')\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\nu(\mathbf{x}')$  και το  $u_2(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}')U(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\nu(\mathbf{x}')$ , ώστε

$$u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) \quad (2.9),$$

$$\text{και} \quad \begin{cases} L(\mathbf{x})u_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & , \mathbf{x} \in \Omega & (2.10.1) \\ L(\mathbf{x})u_2(\mathbf{x}) = 0 & , \mathbf{x} \in \Omega & (2.10.2). \\ B(\mathbf{x})(u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x}) & , \mathbf{x} \in \partial\Omega & (2.10.3) \end{cases}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών μπορεί να αντιμετωπισθεί ως εξής :

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** : Για τον τελεστή  $L$  βρίσκουμε τη θεμελιώδη λύση, η οποία συνήθως είναι γνωστή και μέσω του ολοκληρώματος (2.3) υπολογίζουμε την  $u_1$ .

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** : Λύνουμε την εξίσωση (2.10.2). Η λύση της εξίσωσης αυτής για κλασικές γεωμετρίες είναι γνωστή και δίνεται συναρτήσει κάποιων σταθερών, οι οποίες όταν προσδιοριστούν καθιστούν την  $u_2$  πλήρως γνωστή κι επομένως και την  $u$  από τη σχέση (2.9).

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** : Ο προσδιορισμός των προαναφερθέντων σταθερών γίνεται μέσω της συνοριακής συνθήκης (2.10.3) ή μέσω κάποιων ειδικών απαιτήσεων που έχουν να κάνουν με τη φυσική του προβλήματος. Με την εκτέλεση του βήματος αυτού, όπως αναφέρεται και παραπάνω, το πρόβλημα έχει λυθεί.

## 2.2.2 Προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης

Όταν ένα σώμα «φωτίζεται» από ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το οποίο ονομάζεται *προσπίπτον* ή *απ' ευθείας*, επάγονται σ' αυτό ρεύματα (πόλωσης ή αγωγιμότητας ανάλογα αν αυτό είναι διηλεκτρικό ή αγωγίμο αντίστοιχα). Τα επαγόμενα ρεύματα, όντας με τη σειρά τους πηγές ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, προκαλούν μία δευτερογενή ακτινοβολία. Η άγνωστη αυτή ακτινοβολία αναφέρεται συνήθως ως *σκεδαζόμενο πεδίο* ή *πεδίο σκέδασης* και το φυσικό φαινόμενο που μόλις περιγράψαμε *ηλεκτρομαγνητική σκέδαση*.

Για τη μελέτη ενός προβλήματος σκέδασης, ή με άλλα λόγια για την εύρεση του σκεδαζόμενου πεδίου στο χώρο, το πρώτο βήμα είναι η διατύπωση του αντίστοιχου προβλήματος συνοριακών τιμών. Η κατάστρωση του εκάστοτε προβλήματος επιτυγχάνεται με χρήση των εξισώσεων Maxwell και της ιδιαίτερης φυσικής και γεωμετρίας του. Όλα αυτά περιγράφονται στην υποπαράγραφο 2.2.2.1 που ακολουθεί. Το επόμενο βήμα είναι φυσικά η επίλυση του παραπάνω προβλήματος και στο σημείο αυτό είναι που υπεισέρχονται οι

μέθοδοι που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υποπαράγραφο και συμπληρώνονται κατάλληλα στις αμέσως επόμενες (τις 2.2.2.2 και 2.2.2.3).

### 2.2.2.1 Εξισώσεις του Maxwell και διατύπωση του αντίστοιχου προβλήματος συνοριακών τιμών

Όπως ήδη αναφέρθηκε, σχεδόν σε κάθε πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης κύριος στόχος είναι ο υπολογισμός του συνολικού πεδίου στο χώρο. Επειδή όμως στις περισσότερες περιπτώσεις ξέρουμε το απ' ευθείας πεδίο αναγόμαστε τελικά στον προσδιορισμό του σκεδαζόμενου. Ως γνωστόν, τα πεδιακά μεγέθη συνδέονται μέσω των εξισώσεων του Maxwell, που σε σημειακή μορφή είναι :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.11.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.11.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.11.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.11.4).$$

Παρατηρούμε ότι αν βρούμε το ένα πεδίο (το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό), τότε μέσω των σχέσεων (2.11.3) και (2.11.4) είναι εύκολο να βρούμε και το άλλο (το μαγνητικό ή το ηλεκτρικό αντίστοιχα).

Σημειώνουμε ότι ο, συμπληρωματικός στις παραπάνω εξισώσεις, νόμος διατήρησης του φορτίου είναι :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.12).$$

Φυσικά, σε περίπτωση που στο πρόβλημα έχουμε περισσότερα του ενός μέσα μετάδοσης, περίπτωση που αποτελεί και τη συνηθισμένη, χρησιμοποιούμε τους νόμους του Maxwell για τις διαχωριστικές επιφάνειες, τους οποίους για λόγους συντομίας παραλείπουμε.

Η ανάλυση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων διευκολύνεται με την εισαγωγή συναρτήσεων που είναι γνωστές ως *συναρτήσεις δυναμικού*. Συγκεκριμένα, η εξίσωση (2.11.2) επιτρέπει την έκφραση της μαγνητικής επαγωγής  $\mathbf{B}$  ως περιστροφής μιας βοηθητικής διανυσματικής συνάρτησης  $\mathbf{A}$ , η οποία καλείται *διανυσματικό δυναμικό*, δηλαδή

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.13).$$

Επιπλέον, λόγω της (2.13), η σχέση (2.11.3) γράφεται :

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.11.3)$$

Επομένως, επειδή η συνάρτηση  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  έχει μηδενική περιστροφή για κάθε σημείο του χώρου, μπορεί να εκφραστεί ως κλίση μιας βοηθητικής βαθμωτής συνάρτησης  $\varphi$  που ονομάζεται *βαθμωτό δυναμικό*. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  εκφράζεται με τη βοήθεια των συναρτήσεων δυναμικού ως εξής :



$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.15).$$

Στην περίπτωση που ο χώρος έχει παντού τις ιδιότητες του κενού, δηλαδή διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_0$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$  ισχύουν οι συντακτικές σχέσεις :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} \quad (2.16)$$

και

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \quad (2.17).$$

Οι σχέσεις (2.15), (2.16) με τη βοήθεια της (2.11.1) δίνουν :

$$\nabla^2\varphi + \nabla \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.18).$$

Ενώ οι (2.13), (2.18) και (2.11.2) δίνουν :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \left( -\nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \quad (2.19).$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του τελεστή του Laplace για την περίπτωση των διανυσματικών συναρτήσεων, η τελευταία σχέση γράφεται :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \left( -\nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \quad (2.20).$$

Αν τώρα εισάγουμε τη συνθήκη Lorentz ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ ), τότε από τις εξισώσεις (2.18) και (2.20) προκύπτουν δύο ανεξάρτητες εξισώσεις για καθεμία από τις συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\mathbf{A}$ , οι εξής :

$$\nabla^2\varphi - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.21)$$

και

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J} \quad (2.22).$$

Δηλαδή το βαθμωτό δυναμικό ικανοποιεί τη βαθμωτή κυματική εξίσωση, ενώ το διανυσματικό δυναμικό τη διανυσματική κυματική εξίσωση. Σημειώνουμε ότι αν το  $\mathbf{A}$  είναι εκφρασμένο σε καρτεσιανές συνιστώσες, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι καθεμία από (τις συνιστώσες) αυτές ικανοποιεί την αντίστοιχη βαθμωτή κυματική εξίσωση. Επίσης, από τη (2.22) προκύπτει ότι το διανυσματικό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών ρεύματος, ενώ (από τη (2.21)) το βαθμωτό δυναμικό από την κατανομή των πηγών φορτίου. Φυσικά, οι δύο αυτές κατανομές συνδέονται μέσω του νόμου διατήρησης του φορτίου, γεγονός που επιβεβαιώνει την αλληλεξάρτηση των  $\mathbf{A}$  και  $\varphi$  μέσω της συνθήκης Lorentz.

Αν και τα μεγέθη στην παραπάνω ανάλυση έχουν αυθαίρετη χρονική εξάρτηση, στη συνέχεια θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε πηγές και πεδία που μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με το χρόνο. Ο περιορισμός αυτός διευκολύνει ιδιαίτερα την ανάλυση του

εκάστοτε προβλήματος με την εισαγωγή *φασιθετών*, δηλαδή σημειακών συναρτήσεων που είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Αν  $f(\mathbf{r}, t)$  είναι η στιγμιαία τιμή ενός μεγέθους στη θέση  $\mathbf{r}$ , τότε ο φασιθέτης του, που συνήθως συμβολίζεται με το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα, στη θέση  $\mathbf{r}$  συνδέεται με αυτήν μέσω της σχέσης :

$$f(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{e^{-i\omega t} F(\mathbf{r})\} \quad (2.23),$$

όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα του ημιτονοειδούς μεγέθους  $f$ . Όλες οι παραπάνω εξισώσεις, ( που χαρακτηρίζουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) για την περίπτωση ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής πηγών και πεδίων αλλάζουν μορφή. Συγκεκριμένα, η χρονική παραγωγή  $\partial/\partial t$  οποιουδήποτε μεγέθους υποκαθίσταται παντού από πολλαπλασιασμό του φασιθέτη του μεγέθους αυτού με την ποσότητα  $i\omega$ , ενώ όλες οι ποσότητες αντικαθίστανται από τους αντίστοιχους φασιθέτες τους.

Έτσι, στην περίπτωση αυτή η σχέση (2.15) γράφεται :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - i\omega\mathbf{A} \quad (2.24),$$

ενώ η συνθήκη Lorentz παίρνει τη μορφή :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -i\mu_0\varepsilon_0\omega\varphi \quad (2.25).$$

Μπορούμε επομένως εύκολα, από τη σχέση (2.25), να εκφράσουμε το  $\mathbf{E}$  συναρτήσει μόνο του  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - i\omega\mathbf{A} \quad (2.26).$$

Επιπλέον, η κυματική εξίσωση (2.22) μετατρέπεται στην αντίστοιχη *εξίσωση του Helmholtz* :

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \quad (2.27).$$

Στο σημείο αυτό είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Πράγματι, εξετάζοντας κατ' αρχήν τις σχέσεις (2.13) και (2.26), παρατηρούμε ότι αν ζητείται είτε το ηλεκτρικό είτε το μαγνητικό πεδίο, αρκεί να υπολογιστεί το διανυσματικό δυναμικό. Αν επιπλέον, χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες που υπαγορεύονται στο κεφάλαιο 5 του [12], τότε έχουμε κατασκευάσει ένα πρόβλημα της μορφής (2.5) στο οποίο η άγνωστη συνάρτηση είναι η  $\mathbf{A}$  και ικανοποιεί την εξίσωση (2.27).

### 2.2.2.2 Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz

Όπως φάνηκε στην προηγούμενη παράγραφο, για τον προσδιορισμό του ηλεκτρικού πεδίου, θα χρειαστεί να λύσουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών με τελεστή  $L$  αυτόν του Helmholtz, δηλαδή στο πρόβλημά μας,  $L = \nabla^2 + k^2$ . Σύμφωνα με την ανάλυση της παραγράφου 2.2.1 το πρώτο βήμα που θα πρέπει να κάνουμε είναι να προσδιορίσουμε τη θεμελιώδη λύση για τον τελεστή του Helmholtz. Όπως αναφέρεται στο [10] και στο [11] η θεμελιώδης λύση για την περίπτωση των δύο διαστάσεων, περίπτωση που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια (βλ. παράγραφο 3.2), είναι :

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \quad (2.28).$$

Όπου  $H_0^{(1)}$  είναι η συνάρτηση Hankel μηδενικής τάξης πρώτου είδους. Στο Παράρτημα Α παρουσιάζεται ένας από τους τρόπους απόδειξης της (2.28).

### 2.2.2.3 Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

Αφού λοιπόν προσδιορίσουμε τη θεμελιώδη λύση του προβλήματος, το επόμενο μας μέλημα είναι η λύση της εξίσωσης (2.10.2) στον τόπο  $\Omega$  (για τον τελεστή  $L = \nabla^2 + k^2$ ). Ο τόπος  $\Omega$  στο πρόβλημα που θα μελετήσουμε αμέσως μετά είναι το εσωτερικό ενός κυκλικού κυλίνδρου απείρου μήκους κατά  $z$  και ακτίνας  $\rho_{cyl}$ . Συνεπώς, μπορούμε να πούμε πως η προς επίλυση εξίσωση (2.10.2) είναι αυτή του Helmholtz σε πολικές συντεταγμένες τις οποίες θα συμβολίσουμε ως  $(\rho, \varphi)$ . Έτσι, θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση :

$$(\nabla^2 + k^2)u(\rho, \varphi) = 0, \text{ για } 0 < \rho < \rho_{cyl} \text{ και } -\pi \leq \varphi < \pi \quad (2.29).$$

Στις πολικές συντεταγμένες ο τελεστής του Laplace είναι :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.30).$$

Θα λύσουμε την (2.29) με τη μέθοδο *χωρισμού των μεταβλητών*. Δηλαδή υποθέτουμε ότι η λύση της εξίσωσης αυτής είναι της μορφής :

$$u(\rho, \varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi) \quad (2.31).$$

Αν και η υπόθεση που υπαγορεύεται από τη σχέση (2.31) δείχνει με μια πρώτη ματιά τουλάχιστο μαθηματικά αβάσιμη, η ορθότητά της αποδεικνύεται με αυστηρότητα και ο ενδιαφερόμενος για τον τρόπο «οικοδόμησης» της μεθόδου αυτής μπορεί να ανατρέξει στο σε κάποιο σχετικό βιβλίο Συναρτησιακής Ανάλυσης ή στο [35], όπου γίνεται μια συζήτηση επί του θέματος αυτού. Εδώ, δε θα επεκταθούμε σε μια τέτοια θεωρητική ανάλυση επικύρωσης της μεθόδου και των βημάτων που θα εκτελέσουμε, αλλά θα αρκεστούμε μόνο στην προκαταρκτική συμφωνία πως αν όντως βρεθεί μια λύση που είναι της μορφής (2.31) και ικανοποιεί τη (2.29), τότε θα γίνει δεκτή. Προς αυτή λοιπόν την κατεύθυνση, η εξίσωση (2.29) με την υπόθεση του χωρισμού των μεταβλητών γράφεται ισοδύναμα :

$$\rho^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k^2 = 0 \quad (2.32).$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή :

$$\rho^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} + k^2 = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (2.33)$$

και εύκολα φαίνεται ότι το δεξί μέλος είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $\varphi$ , ενώ το αριστερό της μέλος εξαρτάται μόνον από τη  $\rho$ . Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι καθένα από τα δύο αυτά μέλη είναι σταθεροί αριθμοί και μάλιστα ίσοι με τον αριθμό  $\lambda$ , ο οποίος ονομάζεται και *σταθερά χωρισμού*. Κατ' αυτό λοιπόν τον τρόπο, προκύπτουν δύο ανεξάρτητες συνήθειες διαφορικές εξισώσεις :

$$\rho^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - \lambda)P = 0 \quad (2.34)$$

και

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \lambda \Phi = 0 \quad (2.35).$$

Η δεύτερη εξίσωση μπορεί να λυθεί αν πρώτα γίνει η παρατήρηση ότι η λύση θα πρέπει να είναι  $2\pi$ -περιοδική. Σ' αυτήν την περίπτωση κατ' ανάγκη θα ισχύει :

$$\lambda = m^2, m \in \mathbb{Z} \quad (2.36).$$

Πράγματι, θα πρέπει κατ' αρχήν  $\lambda > 0$ , ώστε η (2.35) να δέχεται ως λύση οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων  $e^{i\sqrt{\lambda}\varphi}$  και  $e^{-i\sqrt{\lambda}\varphi}$ . Αν ήταν  $\lambda = 0$ , θα είχαμε ως λύση πολυώνυμα το πολύ δευτέρου βαθμού, ενώ αν  $\lambda > 0$ , η εξάρτηση της  $\Phi$  από τη  $\varphi$  θα ήταν εκθετική. Αφού έγινε δεκτό πλέον ότι  $\lambda > 0$ , η  $2\pi$ -περιοδικότητα επιτυγχάνεται όταν η ποσότητα  $\sqrt{\lambda}$  είναι φυσικός αριθμός, κάτι που οδηγεί στον περιορισμό που υπαγορεύεται στη σχέση (2.36). Έτσι, η γενική λύση της (2.35) είναι οι συναρτήσεις :

$$\Phi_m(\varphi) = C_{1,m} e^{im\varphi} + C_{2,m} e^{-im\varphi}, m \in \mathbb{Z} \quad (2.37),$$

όπου οι  $C_{1,m}, C_{2,m}$  είναι οποιεσδήποτε πραγματικές σταθερές που προσδιορίζονται από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (για κάθε  $m \in \mathbb{Z}$ ).

Αν τώρα στην πρώτη εξίσωση θέσουμε  $\lambda = m^2$  και θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής  $x = k\rho$  καταλήγουμε σε μια διαφορική εξίσωση, γνωστή και ως *εξίσωση του Bessel* :

$$x^2 P''(x) + xP'(x) + (x^2 - m^2)P = 0 \quad (2.38).$$

Το σύνολο των λύσεων της (2.38),  $\{P_m(x) : \text{ικανοποιείται η (2.38) για κάποιο } m \in \mathbb{Z}\}$  είναι γνωστές και προκύπτουν ως ο γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων Bessel και Neumann  $m$  τάξης, που συμβολίζονται ως  $J_m(x)$  και  $Y_m(x)$  αντίστοιχα.

Έτσι, η γενική λύση της (2.29) προκύπτει με πολλαπλασιασμό των λύσεων ως προς  $\varphi$  και ως προς  $\rho$  που ισχύουν για τον ίδιο κάθε φορά δείκτη  $m$  και στη συνέχεια άθροιση για όλα τα  $m \in \mathbb{Z}$ . Συνεπώς, η ζητούμενη λύση δίνεται από τον τύπο :

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m J_m(k\rho) + B_m Y_m(k\rho)] e^{im\varphi_{obs}} \quad (2.39).$$

Όπου οι συντελεστές  $A_m$  και  $B_m$  προσδιορίζονται από την φυσική του κάθε προβλήματος.

### 2.3 Η Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών (MAS)

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η παρουσίαση της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών (MAS) θα είναι κατ' αρχήν γενική ακολουθώντας κατά βάση την παρουσίαση που γίνεται στην [4].

### 2.3.1 Γενικά στοιχεία

Η Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών (Method of Auxiliary Sources - MAS) αποτελεί μια αρκετά δημοφιλή αριθμητική μέθοδο του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού για την επίλυση *ελλειπτικού* τύπου προβλημάτων συνοριακών τιμών, πολλά από τα οποία εμφανίζονται σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης, μοντελοποίησης κεραιών, σχεδιασμό κυματοδηγών, στην κατασκευή διατάξεων ραδιοεντοπισμού κτλ. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, (βλ. [4]) τα κύρια πλεονεκτήματά της είναι η ευκολία εφαρμογής, η *αριθμητική ευστάθεια* και η υπολογιστική *ακρίβεια* που παρέχει με αποτέλεσμα να αποτελεί μια καλή εναλλακτική μέθοδο σε σχέση με τις κλασικές τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων, όπως η Μέθοδος των Ροπών (Method of Moments ή εν συντομία, MoM). Η κεντρική της ιδέα, στοιχείο που τη διαφοροποιεί κατά κύριο λόγο από τις άλλες μεθόδους, είναι ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών *δε* διατυπώνεται σε σχέση με τη συνεχή ρευματική κατανομή που αναπτύσσεται στην επιφάνεια όπου ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες, αλλά αντιθέτως βάσει κάποιων διακριτών, βοηθητικών ρευμάτων (υπό την έννοια ότι στην πραγματικότητα δεν εμφανίζονται και αποτελούν τέχνασμα της MAS), τις λεγόμενες «βοηθητικές πηγές», οι οποίες τοποθετούνται σε κάποια απόσταση από την επιφάνεια πάνω στην οποία διατυπώνονται οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, που συνήθως καλείται φυσική. Έτσι, η MAS δεν ενδιαφέρεται για τα επιφανειακά ρεύματα που εκφράζουν τις ασυνέχειες στο σύνορο (οι οποίες προβλέπονται από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία). Στη μέθοδο αυτή τα σκεδαζόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία παντού στο χώρο «παράγονται» από τις βοηθητικές πηγές, απουσία της φυσικής επιφάνειας του σκεδαστή. Στην πραγματικότητα, η MAS αποτελεί μια μέθοδο επίλυσης ενός προβλήματος συνοριακών τιμών και η προτεινόμενη απ' αυτή λύση είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός θεμελιωδών λύσεων της σχετικής διαφορικής εξίσωσης. Σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα όπου υποτίθεται μία συχνότητα λειτουργίας, ή όπως αλλιώς λέμε σε προβλήματα όπου μελετάμε τη διάδοση *μονοχρωματικών* κυμάτων η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση είναι αυτή του Helmholtz και η θεμελιώδης λύση της για την περίπτωση των δύο διαστάσεων δίνεται από τη σχέση (2.28). Στον προαναφερθέντα γραμμικό συνδυασμό τα βάρη είναι ανάλογα προς τις εντάσεις των βοηθητικών ρευμάτων, οι οποίες αποτελούν τους πρωταρχικούς αγνώστους. Όταν αυτά υπολογιστούν, τότε τα MAS πεδία προσδιορίζονται απ' ευθείας.

### 2.3.2 Τρόπος εφαρμογής της μεθόδου

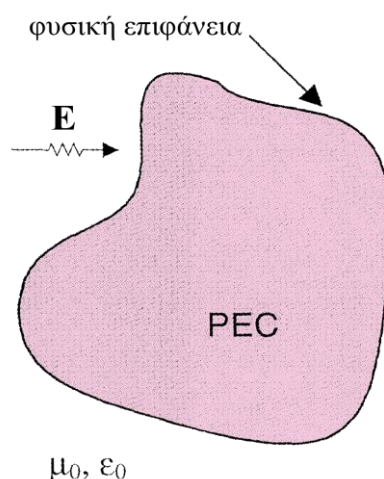
Όπως φάνηκε παραπάνω, κατά την εφαρμογή της MAS το πρώτο βήμα είναι η επιλογή των βοηθητικών πηγών. Αν το πρόβλημα είναι δισδιάστατο, τότε ως βοηθητικές πηγές επιλέγονται  $N$  νηματοειδή ρεύματα τα οποία (ως φωτοβολούσες ηλεκτρομαγνητικές πηγές) παράγουν πεδία ανάλογα της συνάρτησης Hankel μηδενικής τάξης πρώτου είδους (βλ. και σχέση (2.28)). Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων, οι βοηθητικές πηγές είναι ζεύγη στοιχειωδών δίπολων, τα οποία παράγουν πεδία ανάλογα της σφαιρικής συνάρτησης Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης (δηλαδή με άλλα λόγια, τα πεδία, εντελώς αντίστοιχα με το πρόβλημα των δύο διαστάσεων, είναι ανάλογα της θεμελιώδους λύσης του τρισδιάστατου τελεστή του Helmholtz). Τα στοιχεία σε κάθε δίπολο επιλέγονται κάθετα μεταξύ τους και ταυτόχρονα εφαπτομενικά στη βοηθητική επιφάνεια προκειμένου να ικανοποιείται η θεωρητική ασυνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου. Και στις δύο περιπτώσεις τα MAS ηλεκτρομαγνητικά πεδία προκύπτουν ως υπέρθεση των πεδίων που παράγονται από τις  $N$  βοηθητικές πηγές, δηλαδή πεδίων που προκύπτουν από τη θεμελιώδη λύση του τελεστή του Helmholtz πολλαπλασιασμένη επί μια ποσότητα ανάλογη με την

ένταση του αντίστοιχου MAS ρεύματος. Αυτός είναι ο λόγος που στην [5] η MAS αναφέρεται και ως MFS (Method of Fundamental Solutions). Οι  $N$  αυτές εντάσεις είναι προς υπολογισμό και όπως εύκολα φαίνεται από τα προηγούμενα, όταν αυτές προσδιοριστούν τα MAS πεδία, δηλαδή τα προσεγγιστικά πεδία που προτείνει η MAS, καθίστανται πλήρως γνωστά. Ο απαιτούμενος λοιπόν προσδιορισμός επιτυγχάνεται με ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης του προβλήματος σε (συνήθως)  $N$  σημεία της φυσικής επιφάνειας. Έτσι, προκύπτει ένα  $N \times N$  σύστημα του οποίου άγνωστοι είναι τα  $N$  MAS ρεύματα. Παρ' όλα αυτά, το γεγονός ότι η θέση της βοηθητικής επιφάνειας ή πιο τυπικά, της επιφάνειας πάνω στην οποία είναι τοποθετημένες οι βοηθητικές πηγές δεν είναι αυστηρά καθορισμένη έχει οδηγήσει σε πολλές σχετικές με το θέμα αυτό μελέτες. Όπως αποδεικνύεται στην [1] και στο κεφάλαιο 4 της εργασίας αυτής, για πολύ μεγάλο πλήθος βοηθητικών πηγών υπάρχει η δυνατότητα επιλογής βοηθητικής επιφάνειας τέτοιας, ώστε τα MAS ρεύματα να αποκλίνουν και μάλιστα εκθετικά εξαρτημένα ως προς  $N$ , ενώ το MAS πεδίο να συγκλίνει στο πραγματικό.

Η περίπτωση που θα μας απασχολήσει είναι η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου από ένα τέλεια αγωγίμο αντικείμενο (συντά αναφερόμενο ως PEC – Perfect Electric Conductor). Για την καλύτερη όμως κατανόηση της μεθόδου θα παρουσιάσουμε το πώς αυτή εφαρμόζεται και για την περίπτωση του διηλεκτρικού σκεδαστή, έστω και σύντομα.

### 2.3.2.1 PEC σκεδαστής

Στο σχήμα 2.1 παρουσιάζεται η γεωμετρία του προβλήματος. Υποθέτουμε δηλαδή έναν PEC σκεδαστή που περιβάλλεται από χώρο με ιδιότητες του κενού (για απλοποίηση). Η MAS στην περίπτωση αυτή εφαρμόζεται ως εξής : πρώτον, αφαιρείται η φυσική επιφάνεια και δεύτερον, αφού θεωρήσουμε μια βοηθητική επιφάνεια εσωτερική της φυσικής τοποθετούμε τις  $N$  βοηθητικές πηγές πάνω σ' αυτή. Η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 2.2 της επόμενης σελίδας.



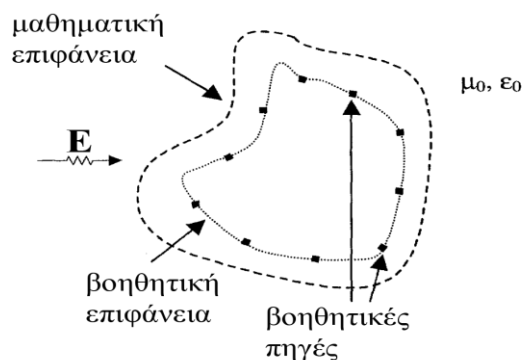
Σχήμα 2.1 : “ Η γεωμετρία του προβλήματος : σε χώρο με ιδιότητες του κενού ( $\epsilon_0, \mu_0$ ) όπου διαδίδεται ηλεκτρομαγνητικό κύμα παρεμβάλλεται ένας PEC σκεδαστής ”

Αξίζει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι αν και στο σχήμα, αλλά και στην παρούσα εργασία, όπως θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο, θεωρούμε χώρο με ιδιότητες αυτές του κενού, η MAS μπορεί να εφαρμοστεί σε περιοχές στις οποίες η διηλεκτρική σταθερά είναι οποιοσδήποτε αριθμός  $\epsilon$ .

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το άγνωστο σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο που προτείνει η MAS προκύπτει ως υπέρθεση των εντάσεων του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από κάθε βοηθητική πηγή :

$$\mathbf{E}_{MAS}^S = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_i = \sum_{j=1}^N \vec{G}_j \cdot \vec{a}_j \quad (2.40)$$

όπου, με  $\vec{G}_j$  συμβολίζουμε τη λύση που προκύπτει αν θεωρήσουμε ως μόνη φωτοβόλουσα πηγή, την  $j$ -οστή από τις βοηθητικές και με  $\vec{a}_j$  τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες (ανάλογους με τις εντάσεις των MAS ρευμάτων) που πρέπει να προσδιοριστούν. Σε περίπτωση που η γεωμετρία των προβλημάτων παρουσιάζουν συμμετρίες ως προς κάποιον ή κάποιους άξονες, τότε οι πίνακες  $\vec{G}_j$  μπορούν να καταλήξουν να είναι ένα τρισδιάστατο διάνυσμα, ενώ τα διανύσματα  $\vec{a}_j$  αριθμοί. Παρ' όλα αυτά η (2.40) όπως και οι (2.41) και (2.42) είναι γενικές. Οι άγνωστοι συντελεστές  $\vec{a}_j$  προσδιορίζονται από την επιβολή συνοριακών συνθηκών σε  $N$  σημεία πάνω στη μαθηματική επιφάνεια, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σημειώνουμε ότι όπως στη [4] έτσι και εδώ, ως μαθηματική επιφάνεια εννοούμε την επιφάνεια του σκεδαστή, ο οποίος στο ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα που προτείνει η MAS απουσιάζει. Με άλλα λόγια, η μαθηματική επιφάνεια συμπίπτει με τη φυσική που έχει αφαιρεθεί. Έτσι, προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα ως προς  $\vec{a}_j$  η λύση του οποίου ισοδυναμεί με εύρεση του πεδίου  $\mathbf{E}_{MAS}^S$ . Ένα πρόβλημα τέτοιας μορφής μελετάται στην [1].



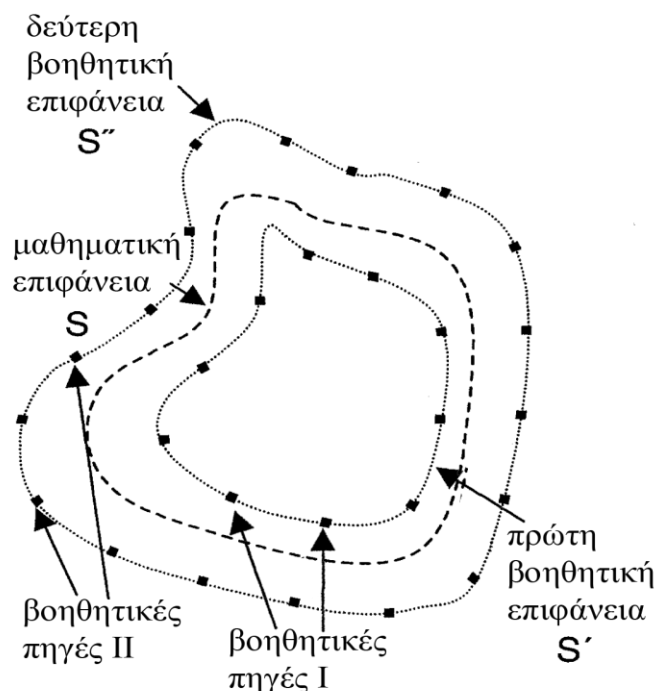
**Σχήμα 2.2** : “ Εφαρμογή της MAS για την περίπτωση του σχήματος 2.1 : η φυσική επιφάνεια του σκεδαστή αφαιρείται και  $N$  βοηθητικές πηγές τοποθετούνται σε μια επιφάνεια, τη βοηθητική, η οποία είναι εσωτερική της πραγματικής. Στο σχήμα  $N = 10$ . Τα σημεία εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών βρίσκονται πάνω στη μη-παρούσα πλέον αρχική επιφάνεια, τα όρια της οποίας ονομάζονται ως μαθηματική επιφάνεια. ”

Μια δεύτερη σειρά προβλημάτων κοιλότητας είναι αυτά στα οποία η φωτοβολούσα πραγματική πηγή περιβάλλεται από ένα σκεδαστή ( σε αντίθεση με το προηγούμενο όπου το απ' ευθείας πεδίο ερχόταν από την περιοχή στο εξωτερικό του). Ένα τέτοιο πρόβλημα πρόκειται να μελετήσουμε στη συνέχεια. Σε τέτοιες καταστάσεις, αφαιρούμε και πάλι τη φυσική επιφάνεια, αλλά τώρα οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται σε επιφάνεια εξωτερική της πραγματικής. Κατά τ' άλλα, η υπόλοιπη διαδικασία είναι ίδια. Το MAS σκεδαζόμενο πεδίο περιγράφεται από μία σχέση της μορφής (2.40) και οι άγνωστοι συντελεστές προκύπτουν με εντελώς παρόμοια διαδικασία.

### 2.3.2.2 Διηλεκτρικός σκεδαστής

Η περίπτωση αυτή μοιάζει πιο πολύπλοκη υπό την έννοια ότι τώρα χρειάζονται δύο βοηθητικές επιφάνειες (άρα και σύνολα βοηθητικών πηγών πάνω σ' αυτές), μια εσωτερική της φυσικής επιφάνειας και μία εξωτερική αυτής. Το σχήμα 2.3 είναι διαφωτιστικό. Για χάρη συντομίας, η εσωτερική επιφάνεια θα συμβολίζεται με  $S'$  και η εξωτερική με  $S''$ . Το σκεδαζόμενο πεδίο στο εξωτερικό του διηλεκτρικού υπολογίζεται με τη βοήθεια των πηγών που βρίσκονται στην  $S'$  και, σε πλήρη αντιστοιχία με τη (2.40), είναι :

$$E_{MAS}^{εξ} = \sum_{j=1}^N E_{MAS}^{εξ} = \sum_{j=1}^N \overrightarrow{G}_j^{εξ} \cdot \overrightarrow{a}_j^{εξ} \quad (2.41).$$



Σχήμα 2.3 : “ Η γεωμετρία του προβλήματος. Παρουσίαση σε επίπεδο κάθετο ως προς τον άξονα z ”

Παρόμοια, το πεδίο που αναπτύσσεται στο εσωτερικό του διηλεκτρικού σκεδαστή υπολογίζεται από τις βοηθητικές πηγές που βρίσκονται αυτήν τη φορά στην  $S''$  και είναι :



$$\mathbf{E}_{MAS}^{\varepsilon\sigma} = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_{MAS}^{\varepsilon\sigma} = \sum_{j=1}^N \overrightarrow{G}_j^{\varepsilon\sigma} \cdot \overrightarrow{a}_j^{\varepsilon\sigma} \quad (2.42).$$

Οι συμβολισμοί στις σχέσεις (2.41) και (2.42) είναι απλές επεκτάσεις αυτών στη (2.40). Οι άγνωστοι είναι τα διανύσματα  $\overrightarrow{a}_j^{\varepsilon\xi}$  και  $\overrightarrow{a}_j^{\varepsilon\sigma}$ . Ο προσδιορισμός τους επιτυγχάνεται με επιβολή της συνέχειας των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου σε  $N$  σημεία πάνω στη μαθηματική επιφάνεια, που όπως και πριν αναπαριστά τα όρια της πραγματικής. Έτσι, προκύπτει ένα σύστημα με αγνώστους τους  $\overrightarrow{a}_j^{\varepsilon\xi}$  και  $\overrightarrow{a}_j^{\varepsilon\sigma}$  του οποίου η λύση οδηγεί στην εύρεση του MAS πεδίου παντού στο χώρο.

## 2.4 Η Μέθοδος Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (EIE)

### 2.4.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο 2.4 θα παρουσιάσουμε αρχικά τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (EIE method), εστιάζοντας στην περίπτωση που θα απασχολήσει στο κυρίως μέρος της εργασίας και στη συνέχεια θα αναφέρουμε τις πιο γνωστές και αποτελεσματικές από τις μεθόδους επίλυσης της, οι οποίες είναι αριθμητικές.

### 2.4.2 Εξαγωγή της Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης

Όπως έχει ήδη ειπωθεί, ο σκεδαστής του προβλήματος θα είναι ένας τέλει αγωγίμος κυκλικός κύλινδρος, ο οποίος φωτοβολείται εσωτερικά. Σε προβλήματα σκέδασης από τέλει αγωγό, είτε εσωτερικά ή εξωτερικά, η συνήθης συνοριακή συνθήκη (που προκύπτει λόγω της απαίτησης για συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου) είναι ο μηδενισμός των εφαπτομενικών συνιστωσών πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή. Στην περίπτωση «εξωτερικού» προβλήματος η Εκτεταμένη Συνοριακή Συνθήκη ή, EBC (από τα αρχικά των λέξεων Extended Boundary Condition) προκύπτει από μηδενισμό των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του σκεδαστή, ενώ σε «εσωτερικά» προβλήματα, για την εξαγωγή της απαιτείται μηδενισμός στο εξωτερικό του αγωγού. Η Εκτεταμένη Ολοκληρωτική Εξίσωση είναι το αποτέλεσμα ικανοποίησης της EBC πάνω σε μια κατάλληλη επιφάνεια (βλ. υποπαράγραφο 2.4.3) στο εσωτερικό του σκεδαστή για «εξωτερικά» προβλήματα, ενώ για «εσωτερικά» στο εξωτερικό του. Η εξίσωση αυτή που, συχνά καλείται και NFM (Null Field Method), είναι το πρώτο βήμα πολλών αριθμητικών μεθόδων, μερικές από τις οποίες θα παρουσιαστούν στη συνέχεια και συγκεκριμένα στην υποπαράγραφο 2.4.4. Μπορούμε να παρατηρήσουμε τέλος ότι στην EIE ο ρόλος της βοηθητικής σε σχέση με τη φυσική επιφάνεια είναι κατά κάποιο τρόπο αντίστροφος συγκρινόμενος με τον ρόλο της βοηθητικής επιφάνειας που χρησιμοποιεί η MAS.

### 2.4.3 Επίλυσιμότητα της EIE

Στην [26] αποδεικνύεται ότι τα (καλά διατυπωμένα κατά Hadamard) προβλήματα συνοριακών τιμών, που αντιστοιχούν σε «εξωτερικά» είναι ισοδύναμα με την EIE οπουδήποτε και αν επιλεγεί η επιφάνεια στο εσωτερικό του σκεδαστή, ενώ το σχήμα της μπορεί να είναι οποιοδήποτε( αρκεί μόνο να είναι επαρκώς *λεία*). Σαν εφαρμογή του

αποτελέσματος αυτού παρουσιάστηκε η σκέδαση από σφαιρικό αγωγό, ενώ ένα άλλο παράδειγμα είναι η (ανεξάρτητη από την [26]) εργασία [3], όπου μελετάται η σκέδαση από κυκλικό κύλινδρο απείρων διαστάσεων κατά  $z$ . Συγκεκριμένα, στην [3] αποδεικνύεται ότι η ολοκληρωτική εξίσωση είναι επιλύσιμη ανεξάρτητα από το που θα τοποθετηθεί η βοηθητική επιφάνεια στο εσωτερικό του σκεδαστή. Στο κεφάλαιο 5 θα δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το «εσωτερικό» πρόβλημα : οπουδήποτε και αν τοποθετηθεί η βοηθητική επιφάνεια στο εξωτερικό του σκεδαστή, η προκύπτουσα ΕΙΕ είναι επιλύσιμη.

#### 2.4.4 Μέθοδοι επίλυσης της ΕΙΕ

Όπως αναφέρθηκε στη 2.4.2 η διατύπωση της ΕΙΕ είναι το πρώτο βήμα για την επίλυση του προβλήματος σκέδασης. Η προσεγγιστική επίλυσή της επιτυγχάνεται με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Μερικές από τις πιο σημαντικές είναι :

- η NFM, γνωστή και ως μέθοδος T-matrix (Transition matrix). Η μέθοδος αυτή μέσω της ΕΙΕ προσδιορίζει πρώτα την άγνωστη επιφανειακή κατανομή ρεύματος και στη συνέχεια υπολογίζει το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Στην πραγματικότητα, αφού αναπτύξει το απ' ευθείας πεδίο σε κατάλληλη βάση συναρτήσεων, εκφράζει το σκεδαζόμενο πεδίο στην ίδια βάση και συσχετίζει τους άγνωστους συντελεστές του με τους γνωστούς του απ' ευθείας πεδίου. Η συσχέτιση αυτή εκφράζεται μέσα από τον πίνακα μεταφοράς  $T$ . Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στις [7], [8] και [9].
- Η DSIEM (από τα αρχικά των λέξεων Dual Surface Integral Equations Method) υποθέτει την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης σε μια κατάλληλη επιφάνεια (εκτός ή εντός της πραγματικής αν πρόκειται για «εσωτερικό» ή «εξωτερικό» πρόβλημα αντίστοιχα). Η ολοκληρωτική εξίσωση που προκύπτει, αφού πολλαπλασιαστεί με κάποια σταθερά, προστίθεται σ' αυτήν που έχει προκύψει από την πραγματική συνοριακή συνθήκη κι έτσι παίρνουμε μια νέα, συνδυασμένη ολοκληρωτική εξίσωση.
- Η CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation). Η μέθοδος αυτή συνδυάζει δύο σύνολα ολοκληρωτικών εξισώσεων, εκ των οποίων το πρώτο προέρχεται από την ΕΙΕ. Το σύστημα που προκύπτει επιλύεται με διαδικασία ελαχίστων τετραγώνων.
- Τέλος, η NFMDs (NFM Discrete Sources) χρησιμοποιεί όπως και η MAS ένα σύνολο διακριτών, βοηθητικών πηγών εκτός ή εντός του σκεδαστή ανάλογα με το αν πρόκειται για «εσωτερικό» ή «εξωτερικό» πρόβλημα αντίστοιχα. Οι πηγές αυτές είναι τέτοιες, ώστε να ικανοποιείται η ΕΙΕ για το συνολικό πεδίο. Έτσι, προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα ως προς τις εντάσεις των πηγών και η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος που αναπτύσσεται πάνω στο σκεδαστή υπολογίζεται από τα δευτερογενή πεδία.

#### 2.5 Χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία

Στην τελευταία παράγραφο του δεύτερου κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε εν συντομία δύο μαθηματικούς τύπους και δύο θεωρήματα, η χρήση των οποίων είναι επιβεβλημένη σε πολλά σημεία της διπλωματικής.

### 2.5.1 Addition Theorem

Ένας πολύ χρήσιμος για την εργασία τύπος, που συνήθως αναφέρεται ως *Addition Theorem* είναι ο εξής :

$$H_0^{(1)}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos\theta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\min\{x_1,x_2\})H_n^{(1)}(\max\{x_1,x_2\})e^{in\theta} \quad (2.43)$$

και ισχύει όταν οι αριθμοί  $x_1$  και  $x_2$  είναι θετικοί πραγματικοί, ενώ ο  $\theta$  μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Αξίζει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε τα εξής :

1) η ποσότητα  $J_n(\min\{x_1,x_2\})H_n^{(1)}(\max\{x_1,x_2\})$  είναι ο  $n$ -οστός συντελεστής Fourier της περιοδικής ως προς  $\theta$  συνάρτησης  $H_0^{(1)}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos\theta}\right)$ , που αποτελεί το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης,

καθώς και

2) αν σχηματίσουμε ένα τρίγωνο τέτοιο, ώστε οι δύο του πλευρές να έχουν μήκη  $x_1$  και  $x_2$  και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία να είναι  $\theta$  rad τότε, το όρισμα της συνάρτησης Hankel του αριστερού μέλους της (2.29) θα είναι, σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων, το μήκος της τρίτης πλευράς του τριγώνου αυτού.

### 2.5.2 Ασυμπτωτική συμπεριφορά συναρτήσεων Bessel και Hankel υψηλής τάξης

Ιδιαίτερα χρήσιμες θα φανούν και οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Bessel και Hankel πρώτου είδους για μεγάλα  $n$  :

$$J_n(z)=(-1)^nJ_{-n}(z)\sim-\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{ez}{2n}\right)^n \quad (n\rightarrow+\infty) \quad (2.44)$$

$$H_n^{(1)}(z)=(-1)^nH_{-n}^{(1)}(z)\sim-i\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n} \quad (n\rightarrow+\infty) \quad (2.45).$$

Τέλος, είναι διαισθητικά αποδεκτό ότι αν παραγωγίσουμε τη σχέση (2.45) ως προς  $z$  κατά μέλη, θα εξάγουμε ότι :

$$\frac{d}{dz}H_n^{(1)}(z)=(-1)^n\frac{d}{dz}H_{-n}^{(1)}(z)\sim-i\sqrt{\frac{2n}{\pi z}}\left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n} \quad (n\rightarrow+\infty) \quad (2.46).$$

Παρ' όλα αυτά, μια τέτοια διαδικασία δεν είναι αυστηρά σωστή. Η σχέση όμως αυτή ισχύει και η αναλυτική της απόδειξη, για όποιον ενδιαφέρεται, παρέχεται στο παράρτημα Β του Κεφαλαίου 7. Οι σχέσεις (2.44),(2.45) και (2.46) είναι εξαιρετικά σημαντικές σε πολλά σημεία των Κεφαλαίων 3, 4 και 5.

### 2.5.3 Σύγκλιση σειράς

Στην εργασία αυτή το σκεδαζόμενο πεδίο (βλ. κεφάλαια 3, 4 και 5) εκφράζεται με τη βοήθεια σειρών κι επομένως, η μελέτη της σύγκλισης του εκάστοτε πεδίου ανάγεται στη μελέτη σύγκλισης της αντίστοιχης σειράς. Έτσι, κρίνεται σκόπιμο να υπενθυμίσουμε το πιο

κλασικό κριτήριο σύγκλισης μιας (αριθμητικής) σειράς, το Κριτήριο του Λόγου, διατυπώνοντάς το τυπικά, ως θεώρημα :

### **Θεώρημα (Κριτήριο του Λόγου)**

Έστω η ακολουθία πραγματικών αριθμών  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ . Θεωρούμε την αριθμητική σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Αν η ακολουθία  $\lambda_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  συγκλίνει, τότε ισχύουν τα παρακάτω :

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n < 1$ , η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό.
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 1$ , η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  αποκλίνει, δηλαδή  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ .
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1$ , τότε δε μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση της σειράς αυτής.

Η περίπτωση 3) του παραπάνω θεώρηματος μας λέει ότι σε κάποιες περιπτώσεις η μελέτη σύγκλισης μιας σειράς δε μπορεί να γίνει με το (πολύ απλό) Κριτήριο του λόγου. Σε τέτοιες καταστάσεις πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άλλα Κριτήρια Σύγκλισης ανάλογα με την προς εξέταση σειρά. Για περισσότερες λεπτομέρειες και κάποια κατατοπιστικά παραδείγματα μια καλή επιλογή είναι τα [21] και [22]. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για την περίπτωση των μιγαδικών σειρών με την προφανή τροποποίηση ότι στη θέση της απόλυτης τιμής χρησιμοποιούμε το γνωστό μέτρο μιγαδικού αριθμού. Σημειώνουμε τέλος ότι όλες οι σειρές που θα μας απασχολήσουν στην εργασία αυτή μπορούν να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση με το Κριτήριο του Λόγου σε συνδυασμό με τις ασυμπτωτικές σχέσεις που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη υποπαράγραφο.

### **2.5.4 Συναρτήσεις ως ολοκληρώματα αναλυτικών συναρτήσεων**

Στην τελευταία υποπαράγραφο της 2.5 παρουσιάζουμε χωρίς απόδειξη το θεώρημα [18, 5.31] (με παρεμφερείς συμβολισμούς και διατύπωση).

### **Θεώρημα**

Έστω η συνάρτηση  $f(t, z)$ . Αν αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες, με το  $t$  να διατρέχει κάποιο μονοπάτι ολοκλήρωσης  $(\alpha, b)$  και το  $z$  να είναι στοιχείο ενός τόπου  $S$  :

- 1) οι  $f$  και  $\frac{\partial f}{\partial z}$  είναι αναλυτικές συναρτήσεις ως προς τη μεταβλητή  $t$ ,
- 2) η  $f$  είναι αναλυτική συνάρτηση της μεταβλητής  $z$  και
- 3) η συνάρτηση  $\frac{\partial f}{\partial z}$  είναι ομοιόμορφα συνεχής ως προς τη μεταβλητή  $t$

τότε, η συνάρτηση  $\int_a^b f(t, z) dt$  είναι αναλυτική ως προς  $z$ , με παράγωγο (ως προς  $z$ ):

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b f(t, z) dt = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt.$$

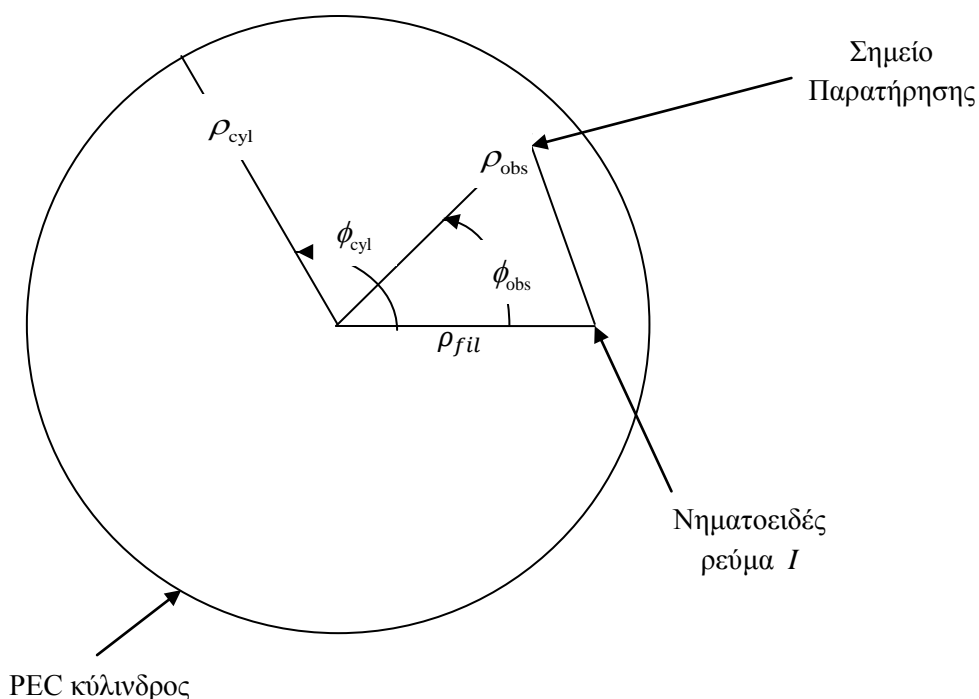
## Κεφάλαιο 3 : Παρουσίαση του προβλήματος και ακριβής λύση

### 3.1 Εισαγωγή

Στο σύντομο αυτό κεφάλαιο αφού αρχικά παρουσιάσουμε το πρόβλημα κοιλότητας που θα μελετήσουμε (παράγραφος 3.2), όσον αφορά τη γεωμετρία του, καθώς και τους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιηθούν για τα διάφορα εμπλεκόμενα μεγέθη (-συμβολισμοί που θα διατηρηθούν και στα επόμενα κεφάλαια, 4 και 5-), θα εξάγουμε με αναλυτικό τρόπο την ακριβή λύση του. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, η γεωμετρία του προβλήματος εξελέγη απλή σκοπίμως, έτσι ώστε αυτό να δέχεται αναλυτική λύση. Για τον ίδιο όμως λόγο, και οι «προτεινόμενες» λύσεις των MAS (κεφάλαιο 4) και EIE (κεφάλαιο 5) είναι αναλυτικές, με αποτέλεσμα να μπορούν άμεσα να συγκριθούν με την ακριβή και να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα.

### 3.2 Παρουσίαση του προβλήματος

Η γεωμετρία του παρόντος προβλήματος είναι αυτή που περιγράφεται στη Γενική εισαγωγή και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 : “ Η γεωμετρία του προβλήματος. Παρουσίαση σε επίπεδο κάθετο ως προς τον άξονα z ”

Θεωρούμε ότι ο σκεδαστής είναι κυκλικός κύλινδρος ακτίνας  $\rho_{cyl}$ , απείρου μήκους κατά z και τέλεια αγωγίμος. Έτσι, το σύστημα που βολεύει να χρησιμοποιήσουμε είναι το

κυλινδρικό. Επειδή όμως έχουμε ανεξαρτησία από το  $z$ , οι συντεταγμένες κάθε σημείου του χώρου θα σημειώνονται ως  $(\rho, \varphi)$ , δηλαδή στην ουσία μπορούμε για απλοποίηση να χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες. Υποθέτουμε επιπλέον ότι όλα τα μεγέθη έχουν χρονική εξάρτηση της μορφής  $e^{i\omega t}$  κι επομένως, είναι λογική, αλλά και αναμενόμενη η χρήση φασιθετών παντού στην εργασία αυτή.

Η πηγή είναι ένα νηματοειδές ρεύμα επί της ευθείας  $\{\rho_{fil}, \varphi = 0, z\}$  έντασης  $I$  και βρίσκεται μέσα στο σκεδαστή,  $\rho_{fil} < \rho_{cyl}$ . Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι η πηγή βρίσκεται στον άξονα  $x$  και μάλιστα στο σημείο  $(\rho_{fil}, 0)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Βέβαια, για να είμαστε ακριβέστεροι η πηγή είναι η ρευματική κατανομή  $\mathbf{J} = \mathbf{i}_z I e^{i\omega t} \delta(x - \rho_{fil})$ , ο φασιθέτης της οποίας είναι  $\mathbf{i}_z I \delta(x - \rho_{fil})$ .

Θεωρούμε ότι ο χώρος έχει παντού τις ιδιότητες του κενού, δηλαδή διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon_0$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ . Έτσι, ο *κυματάριθος*  $k$  για συχνότητα  $\omega$  θα είναι κατά τα γνωστά,  $k = \omega/c = 2\pi f/c = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ .

Σημειώνουμε τέλος, ότι το σημείο παρατήρησης θα δίνεται μέσω των πολικών του συντεταγμένων, οι οποίες συμβολικά θα είναι  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs})$  ενώ, όταν γράφουμε  $R_{A,B}$ , θα εννοούμε την απόσταση του σημείου  $(\rho_A, \varphi_A)$  από το σημείο  $(\rho_B, \varphi_B)$ , για την οποία ισχύει :

$$R_{A,B} = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A\rho_B \cos(\varphi_A - \varphi_B)} \quad (3.1).$$

### 3.3 Ακριβής λύση

#### 3.3.1 Επίλυση

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, η πηγή «φωτοβολεί» εσωτερικά τον κύλινδρο. Αν εισάγουμε το συμβολισμό (3.1) μπορούμε να γράψουμε ότι ο φασιθέτης της ρευματικής αυτής κατανομής είναι :

$$\mathbf{J} = \mathbf{i}_z I \delta(R_{obs,fil}) \quad (3.2).$$

Από τη σχέση (3.2) και τις συμμετρίες του προβλήματος συμπεραίνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει μόνο  $z$  συνιστώσα.

Αν τώρα κάνουμε χρήση των βοηθητικών συναρτήσεων δυναμικού, τότε το διανυσματικό δυναμικό και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συνδέονται μέσω της σχέσης (2.26), την οποία ξαναγράφουμε για ευκολία :

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega}{\mu_0\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - i\omega\mathbf{A} \quad (3.3).$$

Από τη γεωμετρία του προβλήματος προκύπτει ότι  $\mathbf{A} = \mathbf{i}_z A_z(\rho_{obs}, \varphi_{obs})$ , οπότε θα είναι  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Άμεση συνέπεια της παρατήρησης αυτής είναι η σημαντική απλοποίηση της τελευταίας σχέσης,

$$\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} \quad (3.4).$$

Σύμφωνα με την ανάλυση της παραγράφου 2.2, η  $z$  συνιστώσα του  $\mathbf{A}$ , δηλαδή η βαθμωτή συνάρτηση  $A_z(\rho_{obs}, \varphi_{obs})$ , θα ικανοποιεί τη δισδιάστατη, μη ομογενή βαθμωτή εξίσωση Helmholtz :

$$(\nabla^2 + k^2)A_z = -\mu_0 J_z \quad (3.5),$$

η οποία λόγω της εναρκτήριας υπόθεσης ( σχέση (3.2) ) γράφεται :

$$(\nabla^2 + k^2)A_z = -\mu_0 I \delta(R_{obs,fil}) \quad (3.6).$$

Συνεπώς, οι σχέσεις (3.4) και (3.6) μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν την εξίσωση :

$$(\nabla^2 + k^2)E_z = i\omega\mu_0 I \delta(R_{obs,fil}) \quad (3.7).$$

Επειδή όμως ο σκεδαστής είναι τέλειος αγωγός, η απαίτηση για *συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών* του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνειά του,  $\{\rho_{obs} = \rho_{cyl}\}$  οδηγεί στη συνοριακή συνθήκη :

$$E_z(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = 0 \quad \text{για} \quad \rho_{obs} = \rho_{cyl} \quad (3.8).$$

Οι σχέσεις (3.7) και (3.8) συνιστούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών για την περίπτωση μας. Αξίζει στο σημείο αυτό να σχολιάσουμε ότι θα μπορούσαμε, σε συμφωνία με τη γενική αντιμετώπιση που προτείνεται στην υποπαράγραφο 2.2.1, να καταλήξουμε σε πρόβλημα ως προς την  $A_z$ , η λύση του οποίου μέσω της σχέσης (3.4) θα έδινε τη ζητούμενη  $E_z$ .

Θα λύσουμε το πρόβλημα (3.7) – (3.8) με τη μέθοδο που υπαγορεύεται στο τέλος της υποπαράγραφου 2.2.1. Προς τούτο, γράφουμε αρχικά :

$$E_z = E_{z1} + E_{z2} \quad (3.9).$$

Το 1<sup>ο</sup> βήμα είναι είναι ο προσδιορισμός του  $E_{z1}$ , αφού πρώτα βρούμε τη θεμελιώδη λύση του τελεστή  $L = \nabla^2 + k^2$  για την περίπτωση των δύο διαστάσεων. Ανατρέχοντας στη 2.2.2.2 η θεμελιώδης αυτή λύση, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό (3.1), είναι :

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) \quad (3.10).$$

Όπου  $\mathbf{x} = (\rho_{obs}, \varphi_{obs})$  είναι η θέση του σημείου παρατήρησης και  $\mathbf{x}' = (\rho_{fil}, 0)$  είναι η θέση της νηματοειδούς πηγής.

Σύμφωνα με τη (2.3) η  $E_{z1}$  δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$E_{z1} = \int_{\rho_{obs}=0}^{\rho_{cyl}} \left[ -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) \right] i\omega\mu_0 I \delta(R_{obs,fil}) d\rho_{obs} \quad (3.11)$$

το οποίο υπολογίζεται απ' ευθείας και προκύπτει :

$$E_{z1} = -\frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) \quad (3.12).$$

Το επόμενο βήμα είναι η επίλυση της αντίστοιχης της (3.7) ομογενούς εξίσωσης στον τόπο  $\Omega = \{(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) : \rho_{obs} < \rho_{cyl}\}$ , η λύση της οποίας είναι η  $E_{z2}$  και έχει ήδη δοθεί στο εδάφιο 2.2.2.3 :

$$E_{z2}(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n J_n(k\rho_{obs}) + B_n Y_n(k\rho_{obs})] e^{in\varphi_{obs}} \quad (3.13).$$

Το 3<sup>ο</sup> και τελευταίο βήμα είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών  $A_n$  και  $B_n$ . Προς τούτο, γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις Neumann,  $Y_n$  απειρίζονται για μηδενικό όρισμα. Στο πρόβλημά μας όμως στην αρχή των αξόνων, δηλαδή στο σημείο για το οποίο ισχύει  $\rho_{obs} = 0$  δεν υπάρχει κανένας λόγος να έχουμε άπειρο ηλεκτρικό πεδίο. Πράγματι, επειδή τα πεδία μακριά από τις πηγές τους είναι πεπερασμένα και η μόνη πηγή βρίσκεται στο σημείο  $(\rho_{fil}, 0)$  με  $\rho_{fil} > 0$ , συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει  $B_n = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ . Οι συντελεστές  $A_n$  θα προκύψουν με εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (3.8) δεδομένης της συνάρτησης  $E_{z1}$  από τη σχέση (3.12). Έτσι, για  $\rho_{obs} = \rho_{cyl}$  έχουμε:

$$E_{z2} = -E_{z1} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(k\rho_{cyl}) e^{in\varphi_{obs}} = \frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) \quad (3.14).$$

Αν τώρα, εφαρμόσουμε το Addition Theorem στο δεξί μέλος της (3.14), χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι  $\rho_{fil} < \rho_{cyl}$ , παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(k\rho_{cyl}) e^{jn\varphi_{obs}} &= \frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{fil}) H_n^{(1)}(k\rho_{cyl}) e^{in\varphi_{obs}} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n J_n(k\rho_{cyl}) - \frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} J_n(k\rho_{fil}) H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})] e^{in\varphi_{obs}} &= 0, \end{aligned}$$

άρα, κατ' ανάγκη θα 'ναι :

$$A_n = \frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} \frac{J_n(k\rho_{fil}) H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_n(k\rho_{cyl})} \quad (3.15).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει τελικά το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή  $\rho_{obs} < \rho_{cyl}$  :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{i}_z \frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} [H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{fil}) H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_n(k\rho_{cyl})} J_n(k\rho_{obs}) e^{jn\varphi_{obs}}] \quad (3.16).$$

### Παρατήρηση 1 :

Στην παραπάνω ανάλυση δε λάβαμε υπ' όψιν την ειδική περίπτωση όπου  $J_n(k\rho_{cyl}) = 0$ , για κάποια  $n \in \mathbb{N}$ . Σε τέτοιες περιπτώσεις, δηλαδή για ηλεκτρικές ακτίνες  $k\rho_{cyl}$  που αντιστοιχούν σε (θετικά πραγματικά) μηδενικά των συναρτήσεων Bessel (κάποιας τάξης) η λύση που υπαγορεύεται από τη (3.16) δεν έχει νόημα. Λέμε τότε ότι οι ηλεκτρικές αυτές ακτίνες αντιστοιχούν σε *συχρότητες συντονισμού* της κοιλότητας. Σημειώνουμε ότι τέτοια φαινόμενα δε συναντώνται στο «εξωτερικό» πρόβλημα της [1].

### Παρατήρηση 2 :

Όταν  $\rho_{obs} < \rho_{cyl}$ , με τη βοήθεια του Addition Theorem η παραπάνω σχέση δίνει :

$$E_z = -\frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{fil}) \frac{H_n^{(1)}(k\rho_{obs}) J_n(k\rho_{cyl}) - H_n^{(1)}(k\rho_{cyl}) J_n(k\rho_{obs})}{J_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{obs}} \right] \quad (3.17)$$

και αποτελεί μια χρήσιμη εναλλακτική σχέση της (3.16) όπως θα φανεί παρακάτω.



### Παρατήρηση 3 :

Αν εξετάσουμε τη σχέση (6) της [1] που δίνει το συνολικό πεδίο για την περίπτωση του «εξωτερικού» προβλήματος, εκφράζεται κατ' ανάλογο με την περίπτωσή μας τρόπο ως άθροισμα ενός όρου και μιας σειράς. Ο όρος αυτός είναι ο  $\frac{-k^2 I}{4\omega\epsilon_0} H_0^{(1)}(kR_{obs,fil})$  και είναι ο ίδιος με τον αντίστοιχο της σχέσης (3.16). Το γεγονός αυτό είναι απολύτως αναμενόμενο, καθώς ο όρος αυτός και στις περιπτώσεις αναπαριστά το απ' ευθείας πεδίο, το οποίο είναι ανεξάρτητο της γεωμετρίας και της φυσικής του προβλήματος( βλ. και παράγραφο 2.2.1). Αντίθετα, ο δεύτερος όρος διαφέρει στις δύο σχέσεις και αντανακλά τη διαφορετική γεωμετρία των δύο αυτών προβλημάτων. Καθεμία από τις σειρές αυτές αναπαριστούν το σκεδαζόμενο πεδίο του εκάστοτε προβλήματος.

Από το νόμο του Faraday (-σχέση (2.11.3)-) η παράγωγος της  $E_z$  ως προς  $\rho_{obs}$  είναι ανάλογη της συνιστώσας  $H_\varphi$  του μαγνητικού πεδίου. Η μερική παράγωγος  $\frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}}$  μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την (3.16) :

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}} = -\frac{k^3 I}{4\omega\epsilon_0} \left[ \frac{\partial H_0^{(1)}(kR_{obs,fil})}{\partial \rho_{obs}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})J_n(k\rho_{fil})}{J_n(k\rho_{cyl})} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho_{obs}} J_n(k\rho_{obs})e^{in\varphi_{obs}} \right] \quad (3.18).$$

Η παραπάνω παράγωγος για  $\rho_{obs} = \rho_{cyl}$  είναι ανάλογη της ρευματικής κατανομής που αναπτύσσεται στην εσωτερική επιφάνεια του PEC κυλίνδρου. Για να υπολογίσουμε την τιμή  $\frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}}|_{\rho_{cyl}}$ , η πρώτη σκέψη θα ήταν να θέσουμε  $\rho_{obs} = \rho_{cyl}$  στη σχέση (3.18). Παρ' όλα αυτά, πιο εύκολο είναι να παραγωγίσουμε τη σχέση (3.17) και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε την κατάλληλη Wronskian, η οποία είναι η [10, 9.1.16], δηλαδή η σχέση :

$$W\{J_n(z), Y_n(z)\} = J_n(z)Y_n'(z) - J_n'(z)Y_n(z) = \frac{2}{\pi z} \quad (3.19).$$

Επομένως, ύστερα από πράξεις, η ζητούμενη ποσότητα είναι :

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}} = -\frac{ik^2 I}{2\pi\omega\epsilon_0\rho_{cyl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{fil})}{J_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{obs}} \quad \text{για } \rho_{obs} = \rho_{cyl} \quad (3.20)$$

και, όπως αναφέραμε παραπάνω, είναι ανάλογη της ρευματικής κατανομής που θα αναπτυχθεί. Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε επακριβώς την ρευματική κατανομή που αναπτύσσεται πάνω στο σκεδαστή, κάνουμε χρήση της ασυνέχειας των εφαπτομενικών συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου και της υπόθεσης ότι στο εσωτερικό και το εξωτερικό του PEC κυλίνδρου οι συνθήκες είναι αυτές του κενού :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^s &= \mathbf{i}_\rho \times \mathbf{H}(\rho_{obs} = \rho_{cyl}^-, \varphi_{obs} = \varphi_{cyl}) = \mathbf{i}_\rho \times \left[ -\frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}(\rho_{obs} = \rho_{cyl}^-, \varphi_{obs} = \varphi_{cyl}) \right] \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{i}_\rho \times \nabla \times [\mathbf{i}_z E_z(\rho_{obs} = \rho_{cyl}^-, \varphi_{obs} = \varphi_{cyl})] \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{i}_\rho \times \left( \mathbf{i}_\rho \frac{\partial E_z}{\partial \varphi_{obs}} - \mathbf{i}_\varphi \frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}} \right) |_{(\rho_{cyl}, \varphi_{cyl})} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{i}_z \frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}} \Big|_{(\rho_{cyl}, \varphi_{cyl})}$$

δηλαδή,

$$\mathbf{J}^s = -\mathbf{i}_z \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}} \quad \text{για } \rho_{obs} = \rho_{cyl} \quad (3.21).$$

Επομένως, λόγω των σχέσεων (3.20) και (3.21) προκύπτει τελικά :

$$\mathbf{J}^s = \mathbf{i}_z \frac{-I}{2\pi\rho_{cyl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{fil})}{J_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{cyl}} \quad (3.22).$$

### 3.3.2 Συμπεριφορά της λύσης - έλεγχοι σύγκλισης

Όπως αναφέρθηκε στην παρατήρηση 2, η σειρά στο δεξί μέλος της (3.16) αναπαριστά το σκεδαζόμενο πεδίο, κάθε όρος της οποίας ικανοποιεί την κυματική εξίσωση στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Όσον αφορά τη σύγκλιση της σειράς αυτής, με τη βοήθεια των εκφράσεων (2.44) και (2.45), παρατηρούμε ότι για μεγάλα  $|n|$  οι όροι της σειράς συμπεριφέρονται σαν  $\frac{1}{n} \left(\frac{\rho_{obs}}{\rho_{cri}}\right)^{|n|} e^{i|n|\varphi_{obs}}$ , όπου η κρίσιμη απόσταση  $\rho_{cri}$  ορίζεται όπως στην εργασία [1] ως εξής :

$$\rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}} \quad (3.23).$$

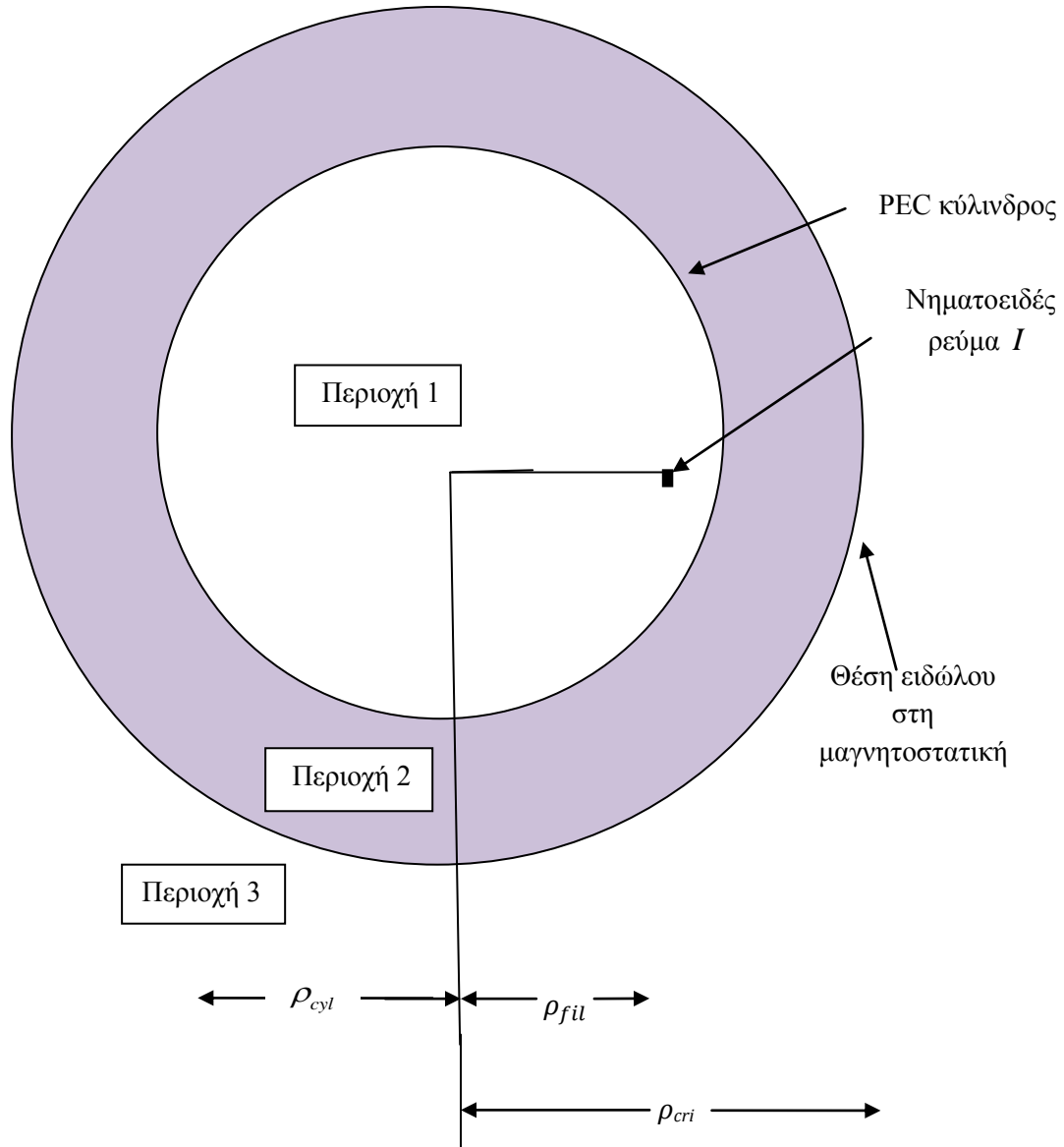
Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο  $n$ -οστός όρος της σειράς (3.16) συμπεριφέρεται όπως ο  $n$ -οστός όρος του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης  $\ln(x+1)$ , (γύρω από το  $x_0 = -1$ ) για  $x = \frac{\rho_{obs}}{\rho_{cri}}$ . Η σειρά αυτή συγκλίνει για  $|x| < 1$  και αποκλίνει για  $|x| > 1$ . Επομένως, η σειρά στην (3.16) συγκλίνει όταν  $\rho_{obs} < \rho_{cri}$  και αποκλίνει όταν  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$ .

Η επιφανειακή κατανομή ρεύματος που περιγράφεται κι αυτή με τη βοήθεια σειράς μέσω της σχέσης (3.22) συγκλίνει, αφού για  $|n| \rightarrow +\infty$  οι όροι της συμπεριφέρονται ανάλογα με την ποσότητα  $\left(\frac{\rho_{fil}}{\rho_{cyl}}\right)^{|n|} e^{i|n|\varphi_{cyl}}$ , ενώ ταυτόχρονα ισχύει  $\rho_{fil} < \rho_{cyl}$ . Ωστόσο, όπως η λύση για το ηλεκτρικό πεδίο ( που δίνεται στη σχέση (3.16)) έτσι και η λύση για την επιφανειακή κατανομή ρεύματος που φαίνεται στην (3.22) δεν έχει νόημα για εκείνα τα  $n \in \mathbb{N}$  και τις ηλεκτρικές ακτίνες  $k\rho_{cyl}$ , που είναι τέτοια ώστε  $J_n(k\rho_{cyl}) = 0$ .

#### Παρατήρηση 4 :

Η σχέση ορισμού (3.18) σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι  $\rho_{fil} < \rho_{cyl}$  μας δείχνει ότι  $\rho_{cri} > \rho_{cyl}$ . Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, το πεδίο, μαθηματικά τουλάχιστον, έχει νόημα και έξω από την επιφάνεια του σκεδαστή μέχρι την κρίσιμη απόσταση  $\rho_{cri}$ . Επεκτείναμε μ' αυτόν τον τρόπο τη λύση (3.16) στην περιοχή 2 του σχήματος 4.1. Σημειώνουμε τέλος, ότι και η παράγωγος ως προς  $\rho_{obs}$  έχει νόημα στην περιοχή 2 και έτσι, η λύση αυτή είναι ουσιαστικά η αναλυτική επέκταση της ακριβούς λύσης ως προς τη μεταβλητή  $\rho_{obs}$ . Για κάποια βασικά θεωρητικά στοιχεία που αφορούν την αναλυτική επέκταση μιγαδικής συνάρτησης, μια έννοια που θα εμφανιστεί σε διάφορα μέρη της εργασίας αυτής, ο

ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει στο παράρτημα Γ. Για περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα παραπέμπουμε στα [14], [15] και [20].



**Σχήμα 3.2 :** “ Οι τρεις περιοχές σύγκλισης του «εσωτερικού» προβλήματος. Στην περιοχή για  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$ , δηλαδή στη περιοχή 3 του σχήματος, η σειρά που αναπαριστά το σκεδαζόμενο πεδίο αποκλίνει. Η περιοχή 2, που είναι χρωματισμένη, είναι εξωτερική του κυλίνδρου και αποτελεί την περιοχή αναλυτικής επέκτασης της ακριβούς λύσης. Σημειώνουμε ότι η κρίσιμη απόσταση  $\rho_{cri}$  είναι γνωστή και στη μαγνητοστατική: είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων, μετρούμενη πάνω στην ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τη θέση της πηγής, στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί μια πηγή έντασης  $-I$ .”



## Κεφάλαιο 4 : Εφαρμογή της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών (MAS)

### 4.1 Εισαγωγή του Κεφαλαίου 4

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο είναι και το εκτενέστερο όλης της εργασίας, γίνεται εφαρμογή της MAS και στη συνέχεια μελέτη της συμπεριφοράς της προτεινόμενης λύσης για το πρόβλημα που περιγράψαμε στην παράγραφο 3.2.

### 4.2 Εφαρμογή της «Συνεχούς» έκδοσης της (MAS)

Η πρώτη κατά σειρά βοηθητική πηγή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι μια *συνεχής* επιφανειακή κατανομή ρεύματος πάνω σε κύλινδρο ακτίνας  $\rho_{aux}$ . Σύμφωνα με την παράγραφο 2.3 η επιφάνεια αυτή θα πρέπει να είναι εξωτερική του PEC κυλίνδρου, δηλαδή θα ισχύει ότι  $\rho_{aux} > \rho_{cyl}$ . Στη βοηθητική κυλινδρική επιφάνεια η αναπτυσσόμενη ρευματική κατανομή είναι της μορφής  $\mathbf{J}_{aux} = \mathbf{i}_z J^S(\varphi_{aux})$ . Η συνάρτηση  $J^S(\varphi_{aux})$  είναι η πρώτη που πρέπει να προσδιοριστεί κι αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της συνοριακής συνθήκης (3.8) για μηδενισμό της  $E_z$  στην επιφάνεια του σκεδαστή. Έπειτα, είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο αποτελεί και πρωταρχικό μας στόχο. Εντελώς ανάλογα με την [1,(11)] το συνολικό πεδίο είναι :

$$E_z = -\frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} [H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) + \rho_{aux} \int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(kR_{obs,aux}) J^S(\varphi_{aux}) d\varphi_{aux}] \quad (4.1).$$

Σημειώνουμε ότι στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας ο πρώτος όρος αναπαριστά όπως και στην (3.16) το απ' ευθείας πεδίο, ενώ ο δεύτερος αποτελεί το σκεδαζόμενο πεδίο, που τώρα δίνεται υπό τη μορφή ολοκληρώματος πάνω στη βοηθητική επιφάνεια και εξαρτάται από την άγνωστη, προς το παρόν, συνάρτηση  $J^S(\varphi_{aux})$ .

#### 4.2.1 Ολοκληρωτική Εξίσωση : αναζήτηση λύσης

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.8), δηλαδή ότι  $E_z(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = 0$  για  $\rho_{obs} = \rho_{cyl}$  στη σχέση (4.1), παίρνουμε για  $-\pi < \varphi_{cyl} < \pi$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux}) J^S(\varphi_{aux}) d\varphi_{aux} = -\frac{1}{\rho_{aux}} H_0^{(1)}(kR_{cyl,fil}) \quad (4.2).$$

Η (4.2) αποτελεί μια *ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm πρώτου είδους* με άγνωστη συνάρτηση τη  $J^S(\varphi_{aux})$  και πυρήνα,  $H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux})$ , ενώ (η εξίσωση αυτή) στην [3] αναφέρεται ως MASIE (απ' τα αρχικά του MAS Integral Equation) ή και CMASIE (Continuous MASIE). Επειδή ισχύει :

$$R_{cyl,aux} = \sqrt{\rho_{cyl}^2 + \rho_{aux}^2 - 2\rho_{aux}\rho_{cyl}\cos(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl})} \quad (4.3)$$

παρατηρούμε ότι ο πυρήνας, δηλαδή η συνάρτηση  $H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux})$ , εξαρτάται μόνον από τη διαφορά των μεταβλητών  $\varphi_{aux}$  και  $\varphi_{cyl}$  και όχι από καθεμία ξεχωριστά. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι ο πυρήνας της εξίσωσης (4.3) είναι ένας *πυρήνας διαφοράς* (ή, *difference kernel* όπως έχει καθιερωθεί διεθνώς στη θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων). Έτσι, μπορούμε να εισάγουμε το συμβολισμό :

$$K(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}) = H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux}) \quad (4.4).$$

Ομοίως, επειδή

$$R_{cyl,fil} = \sqrt{\rho_{fil}^2 + \rho_{cyl}^2 - 2\rho_{fil}\rho_{cyl}\cos(\varphi_{cyl})} \quad (4.5)$$

η συνάρτηση του δεξιού μέλους εξαρτάται μόνον από τη διαφορά  $\varphi_{cyl} - \varphi_{fil}$  και καθώς, εξ' υποθέσεως, ισχύει  $\varphi_{fil} = 0$ , η συνάρτηση εξαρτάται τελικά από τη μεταβλητή  $\varphi_{cyl}$ . Για την περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό :

$$g(\varphi_{cyl}) = -\frac{1}{\rho_{aux}} H_0^{(1)}(kR_{cyl,fil}) \quad (4.6).$$

Από τις σχέσεις (4.2) έως (4.6) γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι οι συναρτήσεις  $K$  και  $g$  είναι  $2\pi$ -περιοδικές ως προς  $\varphi_{cyl}$ . Έτσι, υπάρχουν τα αναπτύγματα σε σειρά Fourier για καθεμία από τις παραπάνω συναρτήσεις, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές  $K_n$  και  $g_n$  τέτοιοι, ώστε :

$$K(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{in(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl})} \quad (4.7)$$

και

$$g(\varphi_{cyl}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\varphi_{cyl}} \quad (4.8).$$

Φυσικά, οι παραπάνω συντελεστές υπολογίζονται από τις γνωστές σχέσεις :

$$K_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (4.9)$$

και

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (4.10)$$

Παρ' όλα αυτά, οι συντελεστές αυτοί προσδιορίζονται απ' ευθείας αν εφαρμόσουμε το Addition Theorem (βλ. 2.5.1) με τη βοήθεια του περιορισμού  $\rho_{obs} < \rho_{cyl} < \rho_{aux}$ . Το αποτέλεσμα είναι :

$$K(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{J_n(k\rho_{cyl}) H_n^{(1)}(k\rho_{aux})}_{K_n} e^{in(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl})} \quad (4.11)$$

και

$$g(\varphi_{cyl}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left\{ -\frac{1}{\rho_{aux}} J_n(k\rho_{fil}) H_n^{(1)}(k\rho_{cyl}) \right\}}_{g_n} e^{in\varphi_{cyl}} \quad (4.12).$$

Παρατηρώντας τώρα την εξίσωση (4.2), λόγω της προαναφερθείσας  $2\pi$ -περιοδικότητας ως προς  $\varphi_{cyl}$  των συναρτήσεων  $K$  και  $g$ , συμπεραίνουμε ότι και η λύση, εφ' όσον υπάρχει, θα είναι κι αυτή  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση ως προς τη (μοναδική της ανεξάρτητη) μεταβλητή  $\varphi_{aux}$ . Έτσι, η  $J^S(\varphi_{aux})$  μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$J^S(\varphi_{aux}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^S e^{in\varphi_{aux}} \quad (4.13).$$

Εδώ,

$$J_n^S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J^S(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (4.14).$$

Άρα, ουσιαστικά αναγόμαστε στην εύρεση των συντελεστών  $J_n^S$ . Προς τούτο λοιπόν, ξαναγράφουμε την (4.2) με τους συμβολισμούς (4.4) και (4.6) για ευκολία :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}) \cdot J^S(\varphi_{aux}) d\varphi_{aux} = g(\varphi_{cyl}) \quad (4.15).$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με  $e^{-in\varphi_{cyl}}$  και ολοκληρώνουμε από  $-\pi$  έως  $\pi$ , ως προς  $\varphi_{cyl}$ . Στο αριστερό μέλος, αφού χωρίσουμε τη διπλή ολοκλήρωση σε δύο ολοκληρώσεις (ως προς  $\varphi_{aux}$  και ως προς  $\varphi_{cyl}$ ), παίρνουμε :

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi_{cyl}=-\pi}^{\pi} K(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}) e^{-in\varphi_{cyl}} d\varphi_{cyl} \int_{\varphi_{aux}=-\pi}^{\pi} J^S(\varphi_{aux}) d\varphi_{aux} \\ &= \int_{\varphi_{cyl}=-\pi}^{\pi} g(\varphi_{cyl}) e^{-in\varphi_{cyl}} d\varphi_{cyl} \quad (4.16). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι :

$$1) \int_{\varphi_{cyl}=-\pi}^{\pi} K(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}) e^{-in\varphi_{cyl}} d\varphi_{cyl} = 2\pi e^{-in\varphi_{aux}} K_{-n} \quad (4.17.1)$$

$$2) \int_{\varphi_{cyl}=-\pi}^{\pi} g(\varphi_{cyl}) e^{-in\varphi_{cyl}} d\varphi_{cyl} = 2\pi g_n \quad (4.17.2).$$

Αν κάνουμε χρήση των σχέσεων (4.17) η εξίσωση (4.16) γράφεται :

$$e^{-in\varphi_{aux}} K_{-n} \int_{-\pi}^{\pi} J^S(\varphi_{aux}) d\varphi_{aux} = g_n \quad (4.18).$$

Είναι πλέον εύκολο να δούμε ότι αν εισάγουμε την ποσότητα  $e^{-in\varphi_{aux}}$  μέσα στο ολοκλήρωμα της (4.18) και λάβουμε υπ' όψιν τη σχέση (4.14), παίρνουμε τους συντελεστές  $J_n^S$  συναρτήσει των  $K_n$  και  $g_n$  :

$$J_n^S = \frac{1}{2\pi} \frac{g_n}{K_{-n}} \quad (4.19).$$

Όμως οι συντελεστές αυτοί έχουν προσδιοριστεί στις σχέσεις (4.11) και (4.12) κι επομένως η (4.19) δίνει :

$$J_n^S = -\frac{1}{2\pi\rho_{aux}} \frac{J_n(k\rho_{fil})H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_n(k\rho_{cyl})H_n^{(1)}(k\rho_{aux})} \quad (4.20).$$

Σημειώνουμε ότι για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης, εκτός των προαναφερθέντων, κάναμε χρήση της αρτιότητας της  $K_{-n}$  ως προς το όρισμα καθώς και των ιδιοτήτων, που δίνονται στο κεφάλαιο 2 :  $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$  και  $H_n^{(1)}(z) = (-1)^n H_{-n}^{(1)}(z)$ . Έτσι, η βοηθητική ρευματική κατανομή προσδιορίζεται πλήρως μέσω των σχέσεων (4.13) και (4.20) :

$$J^S(\varphi_{aux}) = -\frac{1}{2\pi\rho_{aux}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{J_n(k\rho_{fil})H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_n(k\rho_{cyl})H_n^{(1)}(k\rho_{aux})}}_{s_n} e^{in\varphi_{aux}} \quad (4.21).$$

#### 4.2.2 Μελέτη σύγκλισης του αθροίσματος (4.21)

Για τη μελέτη της σύγκλισης της σειράς που εμφανίζεται στην (4.21) θα κάνουμε χρήση των ασυμπτωτικών σχέσεων (2.44) και (2.45) για μεγάλα  $|n|$ . Έτσι, με απλή εφαρμογή τους, οι όροι του αθροίσματος συμπεριφέρονται ως εξής :

$$s_{|n|} \sim \left(\frac{\rho_{aux}}{\rho_{cri}}\right)^{|n|} e^{i|n|\varphi_{aux}} \quad (4.22)$$

όπου η κρίσιμη απόσταση,  $\rho_{cri}$  είναι αυτή ακριβώς που ορίστηκε στην (3.23). Σύμφωνα με τα παραπάνω, το άθροισμα στην (4.21) συμπεριφέρεται σαν τη γνωστή μας γεωμετρική σειρά. Η σύγκλιση επομένως επιτυγχάνεται όταν  $\rho_{cyl} < \rho_{aux} < \rho_{cri}$ . Σημειώνουμε ότι η πρώτη ανισότητα τέθηκε για καλύτερη και συνολική εποπτεία των εμπλεκόμενων χαρακτηριστικών αποστάσεων και αποτελεί εναρκτήριο υπόθεση κατά την εφαρμογή της MAS. Καταλήξαμε δηλαδή σε αντίστοιχο με την [1] συμπέρασμα, ότι δηλαδή αν το πεδίο που παράγεται από μια κυλινδρική ρευματική κατανομή είναι τέτοιο, ώστε το συνολικό πεδίο να μηδενίζεται στην επιφάνεια του σκευαστή, τότε θα πρέπει η κρίσιμη απόσταση  $\rho_{cri}$  να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα της βοηθητικής επιφάνειας.



### 4.2.3 Συμπεράσματα και σχολιασμός των θεωρητικών αποτελεσμάτων

#### 4.2.3.1 Κάποιες ειδικές περιπτώσεις

Η συνάρτηση Hankel δεν έχει πραγματικά μηδενικά. Συνεπώς, για οποιαδήποτε τιμή της ηλεκτρικής ακτίνας της βοηθητικής επιφάνειας  $k\rho_{aux}$  το άθροισμα στην (4.21) έχει νόημα. Και πάλι όμως το άθροισμα (4.21) δεν είναι καλά ορισμένο για εκείνα τα  $n \in \mathbb{N}$  και τις ηλεκτρικές ακτίνες  $k\rho_{cyl}$  που ικανοποιούν τη σχέση  $J_n(k\rho_{cyl}) = 0$ . Όπως είδαμε, (στην Παρατήρηση 1 της 3.3.1) η ίδια ακριβώς περίπτωση οδηγεί τη σειρά που περιγράφει το ακριβές ηλεκτρικό πεδίο σε απόκλιση. Ανεξάρτητα όμως από αυτά, όσον αφορά τη βοηθητική επιφάνεια ο μόνος περιορισμός στην τοποθέτησή της είναι  $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ . Έτσι, προκύπτει μια ακόμα διαφορά με το πρόβλημα στην [1]. Στο πρόβλημα αυτό, η βοηθητική ρευματική κατανομή δίνεται με τη βοήθεια σειράς, ο  $n$ -οστός όρος της οποίας εμφανίζει στον παρονομαστή του την ποσότητα  $J_n(k\rho_{aux})$  (-είναι η σχέση [1,(16)]-) κι επομένως υπάρχουν ηλεκτρικές ακτίνες της βοηθητικής επιφάνειας που οδηγούν σε απόκλιση.

#### 4.2.3.2 Το όριο $\rho_{fil} \rightarrow 0$

Στο σχήμα 3.2 η περιοχή 3, στην οποία το άθροισμα (4.21) αποκλίνει, μικραίνει καθώς η απόσταση της πηγής,  $\rho_{fil}$  μικραίνει ή ισοδύναμα, όταν η πηγή πλησιάζει το κέντρο του PEC κυλίνδρου. Πράγματι, αν συμβολίσουμε την περιοχή με  $P3$ , τότε αυτή μπορεί να περιγράψει τυπικά ως το εξής σύνολο σημείων του χώρου :  $P3 = \{(\rho, \varphi, z) : \rho > \rho_{cri}\}$  κι επειδή  $\rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$  όσο μικρότερη γίνεται η  $\rho_{fil}$  τόσο μεγαλύτερη γίνεται η  $\rho_{cri}$ , οπότε τα σημεία του χώρου που ανήκουν στην  $P3$  είναι λιγότερα. Μάλιστα,  $\rho_{cri} \rightarrow \infty$  όταν  $\rho_{fil} \rightarrow 0$ . Τότε, ισχύει ο περιορισμός  $\rho_{cyl} < \rho_{aux} (< \infty)$ .

#### 4.2.3.3 Επιπλέον παρατηρήσεις για την περίπτωση $\rho_{aux} < \rho_{cri}$

Ένα ερώτημα που μπορεί άμεσα να ανακύψει από τα παραπάνω για την περίπτωση που έχει νόημα να εφαρμοστεί η MAS, δηλαδή όταν  $\rho_{cyl} < \rho_{aux} < \rho_{cri}$ , είναι κατά πόσον το πεδίο που προτείνεται από τη συνεχή έκδοση της μεθόδου μέσω της σχέσης (4.1) δίνει το πραγματικό πεδίο της σχέσης (3.16). Πόσο μάλλον όταν η άγνωστη βοηθητική κατανομή  $J^S(\varphi_{aux})$  έχει προσδιοριστεί μόνον από τη συνοριακή συνθήκη (3.8). Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το πεδίο αυτό συγκλίνει στο πραγματικό. Προς τούτο, αν εφαρμόσουμε το Addition Theorem στην (4.1) και κάνουμε αλλαγή άθροισης και ολοκλήρωσης, προκύπτει :

$$E_z = -\frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} [H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) + \rho_{aux} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{obs})H_n^{(1)}(k\rho_{aux}) e^{in\varphi_{obs}} \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\varphi_{aux}} J^S(\varphi_{aux}) d\varphi_{aux} \quad (4.23).$$

Αν αναγνωρίσουμε ότι το ολοκλήρωμα αποτελεί το  $n$ -οστό συντελεστή Fourier της  $J^S(\varphi_{aux})$  πολλαπλασιασμένο επί  $2\pi$  και κάνουμε χρήση της (4.20), η (4.23) δίνει την (3.16). Μπορούμε επομένως να πούμε ότι όταν  $\rho_{cyl} < \rho_{aux} < \rho_{cri}$ , η βοηθητική επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος (4.21) παράγει το πραγματικό ηλεκτρικό πεδίο σε όλα τα σημεία στο εσωτερικό του PEC κυλίνδρου ( $\rho_{obs} < \rho_{cyl}$ ) και την αναλυτική του επέκταση σε όλα τα σημεία μεταξύ της βοηθητικής επιφάνειας και του PEC κυλίνδρου ( $\rho_{cyl} < \rho_{obs} < \rho_{aux}$ ).

Σε πλήρη αντιστοιχία με τα συμπεράσματα στην [1], η αναλυτική αυτή επέκταση ερμηνεύεται φυσικά ως το πεδίο που παράγεται από την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος,  $J^S(\varphi_{aux})$  που βρίσκεται σε απόσταση  $\rho_{aux}$  και ικανοποιεί τις εξισώσεις του Maxwell σε όλα τα σημεία για το οποία  $\rho_{obs} < \rho_{aux}$ .

Αξίζει τέλος να σημειώσουμε ότι, στη γενική περίπτωση, η  $J^S(\varphi_{aux})$  δεν ισούται με την κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου (βλ. σχέσεις (3.19) και (4.21)). Στο όριο όμως  $\rho_{aux} \rightarrow \rho_{cyl}$ , η (4.21) ταυτίζεται με την (3.22) κι έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι *καθώς η βοηθητική επιφάνεια πλησιάζει αυτήν του PEC κυλίνδρου, η βοηθητική κατανομή ρεύματος  $J^S(\varphi_{aux})$  προσεγγίζει την αληθινή επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος που αναπτύσσεται πάνω στο σκεδαστή.*

#### 4.2.2 Ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης

Στην προηγούμενη παράγραφο, εκτός των άλλων, δείξαμε ότι η εξίσωση (4.2) δεν είναι επιλύσιμη όταν  $\rho_{aux} > \rho_{cri}$ . Ένας άλλος τρόπος απόδειξης του ισχυρισμού αυτού, αντίστοιχος με αυτόν που δίνεται στην [1] θα παρουσιαστεί στο σημείο αυτό.

Υποθέτουμε ότι  $\rho_{aux} > \rho_{cri}$  καθώς κι ότι υπάρχει λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (4.2), έστω η  $J^S(\varphi_{aux})$ , συνεχής στο διάστημα  $-\pi < \varphi_{aux} < \pi$ . Θεωρούμε επίσης ότι η  $\varphi_{cyl}$  είναι μια μιγαδική μεταβλητή, η οποία δε βρίσκεται στον άξονα των πραγματικών αριθμών ( $\{-\pi < Re(\varphi_{cyl}) < \pi, Im(\varphi_{cyl}) = 0\}$ ). Με τη βοήθεια των σχέσεων (4.12) και (3.23), παρατηρούμε ότι οι *ιδιομορφίες* στο δεξί μέλος της (4.2) εμφανίζονται όταν

$$\cos(\varphi_{cyl}) = \frac{\rho_{cri}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{cri}\rho_{cyl}} \quad (4.24).$$

Η ποσότητα στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα, επομένως αν κάνουμε χρήση της ταυτότητας :

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (4.25),$$

συμπεραίνουμε ότι η (4.24) ισχύει για  $\varphi_{cyl} = \Psi^{(n,+)}$  και  $\varphi_{cyl} = \Psi^{(n,-)}$ , όπου

$$\Psi^{(n,\pm)} = 2n\pi \pm i \operatorname{arccosh} \left( \frac{\rho_{cri}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{cri}\rho_{cyl}} \right), n \in \mathbb{Z} \quad (4.26).$$

Τα σημεία αυτά είναι *κλαδικά* και αποτελούν ιδιομορφίες του δεξιού μέλους της ολοκληρωτικής εξίσωσης (4.2).

Λόγω της συνέχειας της  $J^S(\varphi_{aux})$  και του θεωρήματος στη 2.5.4, το αριστερό μέλος της (4.2) είναι αναλυτική συνάρτηση (ως προς τη μεταβλητή  $\varphi_{cyl}$ ) με πιθανή εξαίρεση τις ιδιομορφίες της ολοκληρωτέας παράστασης, καθώς η μεταβλητή  $\varphi_{aux}$  διατρέχει το διάστημα ολοκλήρωσης  $(-\pi, \pi)$ . Ομοίως με πριν, οι ιδιομορφίες βρίσκονται στα σημεία  $\varphi_{cyl} = \xi^{(n,+)}$  και  $\varphi_{cyl} = \xi^{(n,-)}$  όπου,

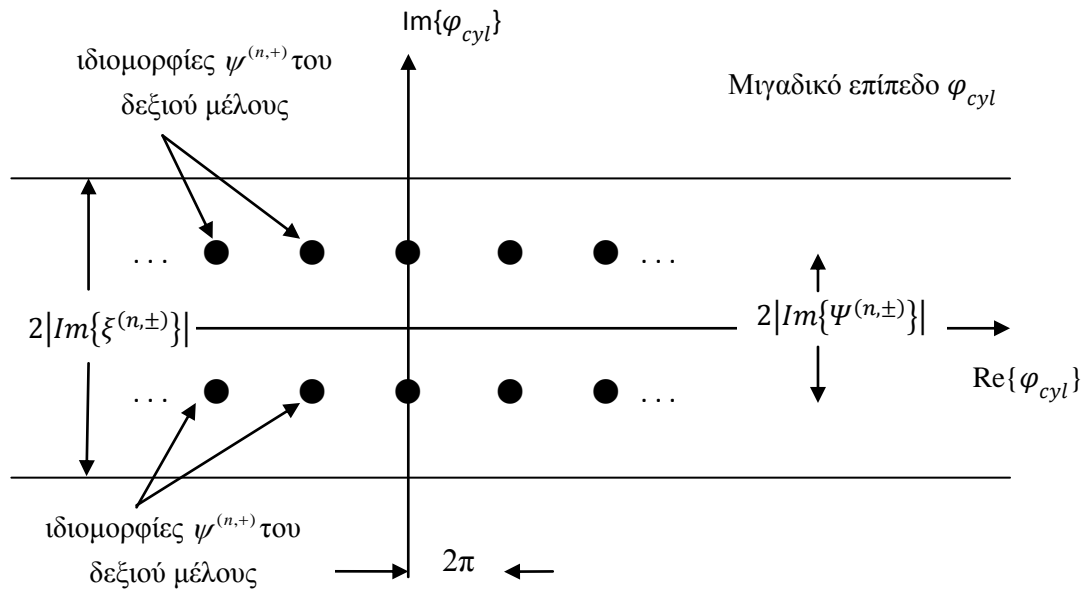
$$\xi^{(n,\pm)} = \varphi_{aux} + 2n\pi \pm i \operatorname{arccosh} \left( \frac{\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{aux}\rho_{cyl}} \right), n \in \mathbb{Z} \text{ και } -\pi < \varphi_{aux} < \pi \quad (4.27).$$

Τα σημεία που περιγράφονται από την (4.27) σχηματίζουν δύο παράλληλες ευθείες γραμμές, καθώς η  $\varphi_{aux}$  μεταβάλλεται από  $-\pi$  έως  $\pi$ . Επομένως, το αριστερό μέλος της (4.2) είναι αναλυτική συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή  $\varphi_{cyl}$  στη λωρίδα μεταξύ των δύο,

προαναφερθέντων ευθειών. Λόγω αναλυτικής επέκτασης και το δεξί μέλος της (4.2) θα πρέπει να διατηρεί την ιδιότητα αυτή, δηλαδή να είναι αναλυτική συνάρτηση στην ίδια περιοχή.

Θα δείξουμε ότι η αρχική υπόθεση  $\rho_{aux} > \rho_{cri} > \rho_{cyl} > 0$  συνεπάγεται ότι  $|Im\{\Psi^{(n,\pm)}\}| < |Im\{\xi^{(n,\pm)}\}|$ , οπότε οι ιδιομορφίες του δεξιού μέλους, όπως δίνονται στη σχέση (4.26) θα βρίσκονται μέσα στην προαναφερθείσα λωρίδα κι έτσι, θα καταλήξουμε σε άτοπο κι επομένως, στο συμπέρασμα ότι η (4.2) δεν έχει λύση στην περίπτωση αυτή. Όλα αυτά φαίνονται στο Σχήμα 4.1.

Για να δείξουμε ότι  $|Im\{\Psi^{(n,\pm)}\}| < |Im\{\xi^{(n,\pm)}\}|$ , κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  με τύπο  $f(x) = \cosh(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, αφού  $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$  όταν  $x > 0$ . Για να δείξουμε το ζητούμενο,



Σχήμα 4.1 : “ Όταν  $\rho_{aux} > \rho_{cri}$  , το αριστερό μέλος της (4.2) είναι αναλυτική συνάρτηση μέσα στη λωρίδα πλάτους  $2|Im\{\xi^{(n,\pm)}\}|$  . Οι ιδιομορφίες του δεξιού μέλους που σημειώνονται στο παραπάνω σχήμα με μαύρες κουκκίδες, και όπως φαίνεται, βρίσκονται μέσα στην προαναφερθείσα λωρίδα”

βάσει των σχέσεων (4.26) και (4.27), αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_{cri}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{cri}\rho_{cyl}}\right) < \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{aux}\rho_{cyl}}\right) \quad (4.28)$$

με τον περιορισμό ότι :  $\rho_{aux} > \rho_{cri} > \rho_{cyl} > 0$ . Όπως γνωρίζουμε, αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε ορίζεται η αντίστροφή της και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας. Έτσι, εφ' όσον η  $f(x) = \cosh(x)$  για  $x > 0$  είναι γνησίως αύξουσα, το ίδιο θα ισχύει και για την αντίστροφή της συνάρτηση,  $f^{-1}(x) = \operatorname{arccosh}(x)$ . Επομένως, η απόδειξη της (4.28) όταν ισχύει  $\rho_{aux} > \rho_{cri} > \rho_{cyl} > 0$  ισοδυναμεί με την απόδειξη της σχέσης :

$$\frac{\rho_{cri}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{cri}\rho_{cyl}} < \frac{\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{aux}\rho_{cyl}} \quad (4.29)$$

με τον ίδιο περιορισμό. Για την απόδειξή της έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned}
(4.29) &\Leftrightarrow \rho_{aux}(\rho_{cri}^2 + \rho_{cyl}^2) < \rho_{cri}(\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2) \\
&\Leftrightarrow \rho_{aux}\rho_{cri}^2 - \rho_{cri}\rho_{aux}^2 + \rho_{aux}\rho_{cyl}^2 - \rho_{cri}\rho_{cyl}^2 < 0 \\
&\Leftrightarrow -\rho_{aux}\rho_{cri}(\rho_{aux} - \rho_{cri}) + \rho_{cyl}^2(\rho_{aux} - \rho_{cri}) < 0 \\
&\Leftrightarrow (\rho_{aux} - \rho_{cri})(\rho_{cyl}^2 - \rho_{aux}\rho_{cri}) < 0,
\end{aligned}$$

που ισχύει αφού  $\rho_{aux} > \rho_{cri} > \rho_{cyl} > 0$ . Συνεπώς, αποδείχθηκε το ζητούμενο. ■

### 4.3 «Διακριτές» Βοηθητικές Πηγές

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη «διακριτή» έκδοση της MAS, η οποία αποτελεί και το συνήθη τρόπο εφαρμογής της μεθόδου.

#### 4.3.1 Διακριτές Βοηθητικές Πηγές και ακριβής λύση

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 2.3, αν εφαρμόσουμε τη MAS στο «εσωτερικό» πρόβλημα, θα πρέπει να θεωρήσουμε  $N$  βοηθητικές πηγές, δηλαδή  $N$  διακριτά νηματοειδή ρεύματα παράλληλα στον άξονα  $z$ , έξω από τον PEC κύλινδρο.

Τα MAS ρεύματα είναι αυτά που πρέπει να προσδιοριστούν. Θα προσδιορίσουμε δηλαδή τις  $N$  ποσότητες  $I_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, N - 1$  οι οποίες είναι τέτοιες, ώστε τα αντίστοιχα μεγέθη  $I_l$  να αντιπροσωπεύουν τις εντάσεις των βοηθητικών MAS ρευμάτων που βρίσκονται στις θέσεις  $\#l$ . Θυμίζουμε ότι  $I$  είναι η ένταση της πραγματικής πηγής που βρίσκεται στη θέση  $(\rho_{fil}, 0)$ . Οι θέσεις των νηματοειδών αυτών ρευμάτων ανήκουν σε κυκλικό κύλινδρο, ομόκεντρο με το σκεδαστή του προβλήματος, ακτίνας  $\rho_{aux} > \rho_{cyl}$  και ισαπέχουν ανά δύο. Η κυλινδρική επιφάνεια που μόλις περιγράψαμε είναι η βοηθητική επιφάνεια που απαιτεί η MAS και είναι εξωτερική του σκεδαστή. Επιπλέον, για διευκόλυνση της θεωρητικής μελέτης, μια θέση επιλέγεται να είναι η  $(\rho_{aux}, 0)$ , ενώ στη γενική περίπτωση ως θέση  $\#l$  συμβολίζουμε το  $(\rho_{aux}, \frac{2\pi(l-1)}{N})$ , όπου  $l = 0, 1, \dots, N - 1$ . Φυσικά, τα σημεία αυτά αναπαριστούν τις αντίστοιχες ευθείες-φορείς των νηματοειδών MAS ρευμάτων (συμβολικά οι ευθείες αυτές μπορούν να γραφούν ως  $\varepsilon_l = (\rho_{aux}, \frac{2\pi(l-1)}{N}, z)$ ,  $l = 0, 1, \dots, N - 1$ ), στο πνεύμα όμως της απλοποίησης, που εισήχθη ήδη από το κεφάλαιο 3, θα χρησιμοποιούμε και στην παράγραφο αυτή, μόνο πολικές συντεταγμένες, εκμεταλλευόμενοι και πάλι την κατά τον άξονα  $z$  συμμετρία. Ένα σημαντικό μέγεθος στη μελέτη που θα ακολουθήσει είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης και του  $l$ -οστού MAS ρεύματος, που βρίσκεται στη θέση  $\#l$ . Αυτή συμβολίζεται με  $R_{l,obs}$  και ισχύει :

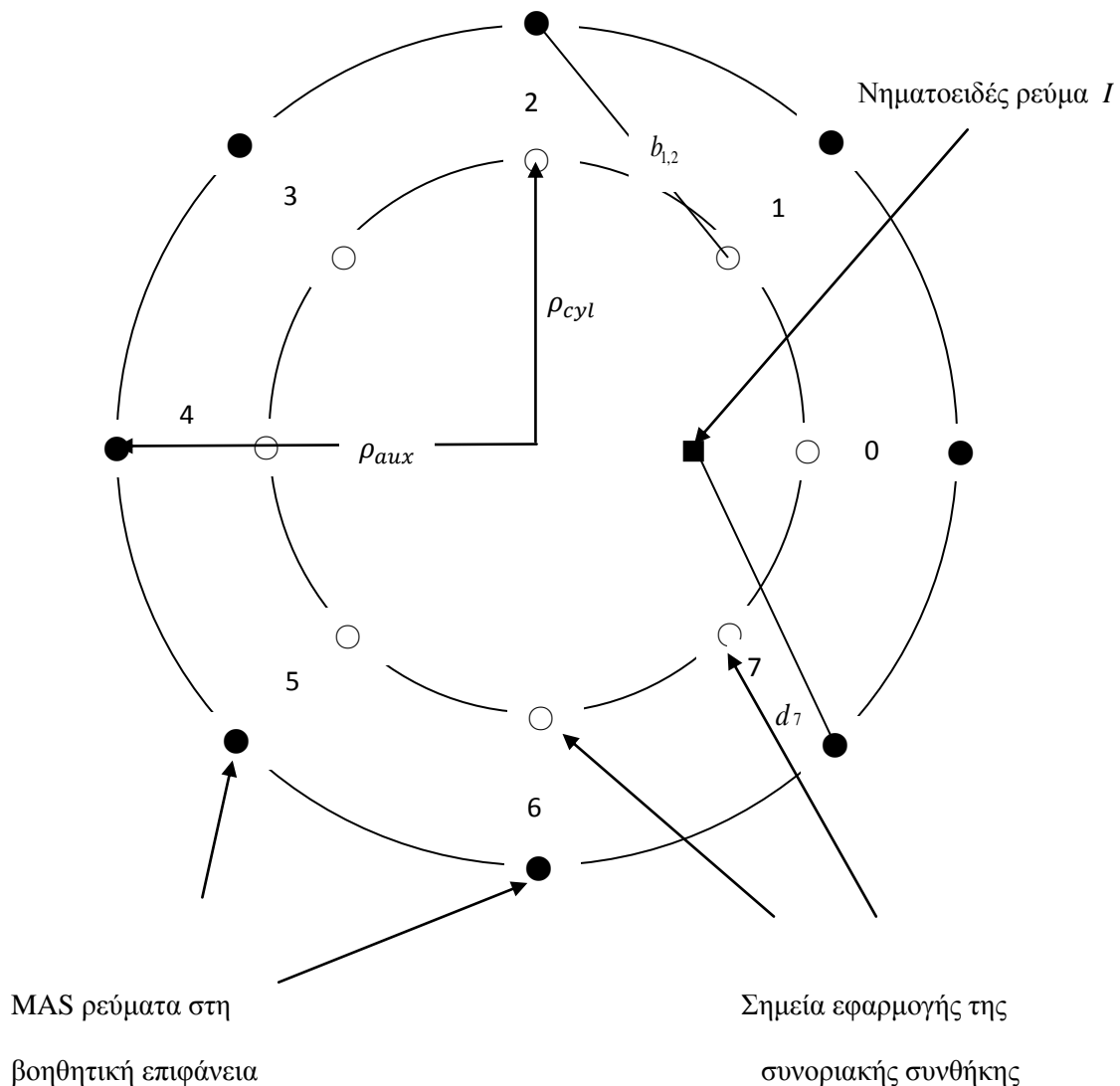
$$R_{l,obs} = \sqrt{\rho_{aux}^2 + \rho_{obs}^2 - 2\rho_{aux}\rho_{obs} \cos\left(\varphi_{obs} - \frac{2\pi l}{N}\right)} \quad l = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.30).$$

Για τον προσδιορισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην περίπτωση αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας. Έτσι, λύνουμε το πρόβλημα για καθεμία από τις  $l$  βοηθητικές πηγές έντασης  $I_l$  που βρίσκονται, όπως προαναφέρθηκε, στις θέσεις  $\#l$  και άλλη μια φορά για την πραγματική πηγή έντασης  $I$ , που βρίσκεται στη θέση  $(\rho_{fil}, 0)$ . Η συνολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει ως το άθροισμα όλων αυτών των  $N + 1$  λύσεων. Έτσι, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αποτελείται και πάλι από δύο όρους, όπου ο ένας

αντιπροσωπεύει το απ' ευθείας πεδίο και προφανώς είναι κοινός με αυτόν των εξισώσεων (3.16) και (4.1). Ο δεύτερος όρος αποτελείται από το άθροισμα των  $l$  λύσεων, που προέρχονται από τα MAS ρεύματα και αντιπροσωπεύει το σκεδαζόμενο πεδίο. Συγκεκριμένα,

$$E_z = -\frac{k^2}{4\omega\epsilon_0} [IH_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) + \sum_{l=0}^{N-1} I_l H_0^{(1)}(kR_{l,obs})] \quad (4.31).$$

Όπως αναφέρεται στη γενική εισαγωγή για τη MAS (παράγραφος 2.3), θα πρέπει να θεωρήσουμε  $N$  σημεία πάνω στο σκεδαστή. Οι θέσεις των σημείων αυτών θα συμβολίζονται με  $\#p$  και για ευκολία τίθενται σε θέσεις οι γωνίες των οποίων είναι κοινές με αυτές των βοηθητικών πηγών. Δηλαδή οι θέσεις τους είναι  $(\rho_{cyl}, 2\pi p/N)$ , με  $p = 0, 1, \dots, N-1$ . Στο σχήμα 4.2, που ακολουθεί φαίνεται ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου, που μόλις περιγράφηκε, για το πρόβλημά μας.



Σχήμα 4.2 : “ Τα MAS ρεύματα είναι τοποθετημένα στις θέσεις  $(\rho_{aux}, \varphi_l)$ , όπου  $\varphi_l = 2\pi(l-1)/N$ , όπου  $l = 0, 1, \dots, N-1$ , ενώ τα σημεία εφαρμογής είναι στις θέσεις  $(\rho_{cyl}, \varphi_p)$ . Η απόσταση των MAS ρευμάτων  $\#l$  και των σημείων εφαρμογής  $\#p$  συμβολίζονται με  $b_{p,l}$  και η απόσταση της νηματοειδούς πηγής  $I$  και του σημείου εφαρμογής  $p$  σημειώνεται ως  $d_p$ . Στο παραπάνω σχήμα είναι  $N = 8$  και δείχνουμε τα  $b_{1,2}$  και  $d_7$ .”

Υπενθυμίζουμε ότι για να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, από την (4.31) είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε τα  $N$  MAS ρεύματα. Αυτό επιτυγχάνεται με την επιβολή  $N$  συνοριακών συνθηκών παρόμοιων με τη συνοριακή συνθήκη (3.8). Οι συνοριακές συνθήκες που θα χρησιμοποιήσουμε είναι :

$$E_z(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = 0 \quad \text{για} \quad (\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{cyl}, 2\pi p/N), \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.32).$$

Οι συνθήκες αυτές αν εφαρμοστούν στην (4.31), δίνουν :

$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l H_0^{(1)}(k b_{l,p}) = -I H_0^{(1)}(k d_p), \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.33).$$

Στην παραπάνω σχέση εισάγαμε δύο συμβολισμούς,  $b_{l,p}$  και  $d_p$ , οι οποίοι συμβολίζουν την απόσταση των MAS ρευμάτων  $\#l$  με τα σημεία εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών (4.32),  $\#p$  και την απόσταση της νηματοειδούς πηγής  $I$  με τα σημεία εφαρμογής  $\#p$ , αντίστοιχα. Οι συμβολισμοί αυτοί φαίνονται και στο σχήμα 4.2. Σημειώνουμε επίσης ότι :

$$b_{p,l} = b_{l,p} = \sqrt{\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2 - 2\rho_{aux}\rho_{cyl}\cos\left(\frac{2\pi(p-l)}{N}\right)} \quad p, l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.34)$$

και

$$d_p = \sqrt{\rho_{fil}^2 + \rho_{cyl}^2 - 2\rho_{fil}\rho_{cyl}\cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right)} \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.35).$$

Η (4.33) είναι ουσιαστικά ένα  $N \times N$  αλγεβρικό σύστημα με άγνωστους τα  $N$  MAS ρεύματα  $I_l$ . Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο πίνακας του συστήματος αυτού,  $H_0^{(1)}(k b_{l,p})$ ,  $p, l = 0, 1, \dots, N-1$  είναι *κυκλικός* (ή *circulant*). Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας καλείται *κυκλικός* όταν κάθε σειρά του είναι *κυκλική μετάθεση* της πρώτης σειράς έτσι, ώστε το τελευταίο στοιχείο κάθε σειράς να είναι το πρώτο στοιχείο της επόμενης. Πράγματι, αυτά ισχύουν λόγω των ιδιοτήτων  $b_{p,l} = b_{0,l-p}$  και  $b_{0,l+qN} = b_{0,l}$ , για κάθε ακέραιο  $q$ , οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τη γεωμετρία του προβλήματος.

Όπως αναφέρεται και στην [1], τέτοια συστήματα μπορούν να λυθούν με χρήση του *διακριτού μετασχηματισμού Fourier*, εν συντομία, *DFT*. Τέτοια συστήματα έχουν τη γενική μορφή :

$$\sum_{l=0}^{N-1} B_{l-p} I_l = D_p, \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.36).$$

Όπου  $B_l$  είναι μια  $N$  περιοδική ακολουθία, δηλαδή μια ακολουθία με την ιδιότητα :

$$B_l = B_{l+N}, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (4.37).$$

Υπενθυμίζουμε ότι για το DFT μιας  $N$  περιοδικής ακολουθίας  $A_n$  ισχύει :

$$A^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} A_l e^{-i2\pi nml/N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.38).$$

Ενώ, η αντίστροφη της παραπάνω σχέσης είναι :

$$A_n = \sum_{l=0}^{N-1} A^{(m)} e^{-i2\pi nlm/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.39).$$

Έτσι, για το γενικό σύστημα (4.36) έχουμε :

$$I^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} I_l e^{-i2\pi nlm/N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.40.1)$$

$$B^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} B_p e^{-i2\pi nlm/N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.40.2)$$

και

$$D^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} D_p e^{-i2\pi nlm/N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.40.3).$$

Οι αντίστροφοι DFT των σχέσεων (4.40) σύμφωνα με την (4.39) είναι :

$$I_l = \sum_{m=0}^{N-1} I^{(m)} e^{i2\pi lm/N} \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.41.1)$$

$$B_p = \sum_{m=0}^{N-1} B^{(m)} e^{i2\pi pm/N} \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.41.2)$$

και

$$D_p = \sum_{m=0}^{N-1} D^{(m)} e^{i2\pi pm/N} \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.41.3).$$

Για την επίλυση του συστήματος (4.36), πολλαπλασιάζουμε καθεμία από τις αυτές  $N$  σχέσεις με  $e^{-i2\pi pm/N}$ , όπου  $0 \leq m \leq N-1$ . Στη συνέχεια, αθροίζουμε τις προκύπτουσες σχέσεις (ως προς  $p$ ). Έπειτα αλλάζουμε τη σειρά των δύο αθροίσεων στο αριστερό μέλος και εισάγουμε τους DFT (σχέσεις (4.40)). Με τη βοήθεια της σχέσης (4.37) καταλήγουμε στη σχέση :

$$NI^{(m)}B^{(N-m)} = D^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.42).$$

Έτσι, βρίσκοντας τα  $I^{(m)}$ , με τον αντίστροφο DFT (μέσω της σχέσης (4.41.1)) υπολογίζουμε τα άγνωστα MAS ρεύματα.

Στο πρόβλημά μας, είναι :

$$B^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H_0^{(1)}(kb_{0,l}) e^{-i2\pi lm/N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.43)$$

και

$$D^{(m)} = -\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} IH_0^{(1)}(kd_p) e^{-i2\pi lm/N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.44).$$

Όπως και στην [1], υπάρχει η δυνατότητα οι δύο τελευταίες σχέσεις να εκφραστούν διαφορετικά. Η δυνατότητα αυτή παρέχεται από το Addition Theorem σε συνδυασμό με την ταυτότητα :

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi p(n-m)/N} = \begin{cases} N, & \text{αν } n - m = \text{πολ } N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.45).$$

Εύκολα προκύπτουν οι ζητούμενες, εναλλακτικές σχέσεις :

$$B^{(m)} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{qN+m}(k\rho_{cyl}) H_{qN+m}^{(1)}(k\rho_{aux}) \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.46)$$

και

$$D^{(m)} = - \sum_{q=-\infty}^{\infty} IJ_{qN+m}(k\rho_{fil}) H_{qN+m}^{(1)}(k\rho_{cyl}) \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.47).$$

### Παρατήρηση 1 :

Οι σειρές που εμφανίζονται στις σχέσεις (4.46) και (4.47) συγκλίνουν. Πράγματι, οι όροι της  $m$ -οστής σειράς στην (4.46) για μεγάλα  $|q|$  συμπεριφέρονται ανάλογα με την ποσότητα :  $(\rho_{cyl}/\rho_{aux})^m ((\rho_{cyl}/\rho_{aux})^N)^{|q|}$ , και ταυτόχρονα,  $\rho_{cyl} < \rho_{aux}$ . Αντίστοιχα, οι όροι της  $m$ -οστής σειράς στην (4.47) έχουν ανάλογη συμπεριφορά με την ποσότητα :  $(\rho_{fil}/\rho_{cyl})^m ((\rho_{fil}/\rho_{cyl})^N)^{|q|}$  ενώ, εξ' υποθέσεως, ισχύει ότι  $\rho_{fil} < \rho_{cyl}$ .

### Παρατήρηση 2 :

Από τις σχέσεις (4.46) και (4.47) γίνεται επίσης φανερό ότι  $D^{(m)} = D^{(N-m)}$  και  $B^{(m)} = B^{(N-m)}$ , οπότε η (4.42) γράφεται :

$$I^{(m)} = I^{(N-m)} = \frac{1}{N} \frac{D^{(m)}}{B^{(m)}} \quad (4.48).$$

Γνωρίζοντας τα  $I^{(m)}$ , είμαστε πλέον σε θέση να προσδιορίσουμε τα MAS ρεύματα μέσω της σχέσης (4.41.1). Επειδή όμως,  $I^{(m)} = I^{(N-m)}$  μπορούμε να εξάγουμε κάτι ακόμα πιο απλό από μια σχέση της μορφής (4.41.1). Στην προσπάθειά μας αυτή κάποιο ρόλο θα παίξει το γεγονός αν το πλήθος των βοηθητικών πηγών,  $N$  είναι άρτιος ή περιττός φυσικός αριθμός. Διακρίνοντας λοιπόν τις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε :

$$I_l = \begin{cases} I^{(0)} + 2 \sum_{m=1}^{(N-1)/2} I^{(m)} \cos\left(\frac{2\pi lm}{N}\right), l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (N \text{ περιττός}) & (4.49.1) \\ I^{(0)} + (-1)^l I^{(N/2)} + 2 \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} I^{(m)} \cos\left(\frac{2\pi lm}{N}\right), l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (N \text{ άρτιος}) & (4.49.2) \end{cases} .$$



### 4.3.2 Συμπεριφορά MAS ρευμάτων για μεγάλο αριθμό πηγών

Αφού υπολογίσαμε τα  $N$  MAS ρεύματα, (σχέσεις (4.49) με τη βοήθεια των (4.46), (4.47) και (4.48)) θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά στο όριο  $N \rightarrow \infty$ . Στην περίπτωση αυτή, τα MAS ρεύματα θα πρέπει να αντιμετωπίζονται πλέον σα μια ισοδύναμη επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος πάνω στη βοηθητική επιφάνεια, έστω την  $J_{limit}^S$ . Στο πρώτο κεφάλαιο του [12] μπορούμε να βρούμε πολλά τέτοια παραδείγματα, ενώ η [1] εξετάζει την αντίστοιχη περίπτωση για το «εξωτερικό» πρόβλημα.

Συγκεκριμένα, η κατανομή αυτή θα είναι παράλληλη ως προς τον άξονα  $z$  και θα παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία, δηλαδή είναι της μορφής  $J_{limit}^S = \mathbf{i}_z J_{limit}^S(\varphi_{aux})$ . Αν ορίσουμε ως  $\varphi_{aux,l} = 2\pi l/N$  με  $l = 0, 1, \dots, N-1$ , η διαφορά δύο διαδοχικών γωνιών είναι  $\varphi_{aux,l+1} - \varphi_{aux,l} = 2\pi/N$  κι επομένως, όταν  $N \rightarrow \infty$  το όριο των παραπάνω γωνιών, η  $\varphi_{aux}$  γίνεται συνεχής μεταβλητή. Η ισοδύναμη  $J_{limit}^S(\varphi_{aux})$  ισούται με όριο (για  $N \rightarrow \infty$ ) του λόγου του MAS ρεύματος στην τυχούσα θέση  $l$  προς το μήκος του τόξου της απόστασης δύο διαδοχικών ρευμάτων. Επειδή τα MAS ρεύματα είναι όλα επί της βοηθητικής επιφάνειας, το μήκος αυτό είναι  $2\pi\rho_{aux}/N$  και συνεπώς,

$$J_{limit}^S(\varphi_{aux}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{NI_l}{2\pi\rho_{aux}} \right) \quad \left( \varphi_{aux} = \frac{2\pi l}{N} \right) \quad (4.50).$$

Σημειώνουμε τέλος ότι από εδώ και στο εξής οι ποσότητες  $NI_l/2\pi\rho_{aux}$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$  θα αναφέρονται ως *κανονικοποιημένα MAS ρεύματα*, μια ορολογία αντίστοιχη με αυτή των εργασιών [1] και [2].

Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη του ορίου της (4.50), σημειώνουμε ότι είναι λογικό να περιμένουμε ότι :

1) όταν οι βοηθητικές πηγές είναι στην περιοχή 2 του σχήματος 3.2 (με άλλα λόγια, όταν ισχύει  $\rho_{cyl} < \rho_{aux} < \rho_{cri}$ ) το όριο υπάρχει και μάλιστα ισούται με  $J^S(\varphi_{aux})$ ,

ενώ αντίθετα,

2) το όριο αποκλίνει στην περίπτωση που οι βοηθητικές πηγές βρίσκονται εντός της περιοχής 1 (, όταν δηλαδή  $\rho_{cri} < \rho_{aux}$ ).

Για τη διερεύνηση του ορίου (4.50), είναι φανερό ότι αρκεί να βρούμε το πώς συμπεριφέρονται τα  $I_l$  σα συνάρτηση του  $N$  καθώς αυτό τείνει στο άπειρο. Αυτή λοιπόν, μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια των σχέσεων (4.49) και γι' αυτόν το λόγο, θα πρέπει να μελετήσουμε χωριστά τις περιπτώσεις όπου το πλήθος των βοηθητικών πηγών,  $N$  είναι άρτιος ή περιττός φυσικός αριθμός.

#### ι. περιττό πλήθος βοηθητικών πηγών

Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.49.1). Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι στο δεξί της μέλος η εξάρτηση ως προς  $N$  εισάγεται από το πλήθος των προσθετέων, το οποίο είναι  $\frac{N-1}{2} + 1$  και από την εξάρτηση του  $I^{(m)}$  μέσω των σχέσεων (4.46), (4.47) και της (4.48). Σύμφωνα με την παρατήρηση 1 της προηγούμενης υποπαραγράφου έχουμε για  $m = 0, 1, \dots, N-1$  :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B^{(m)} = J_m(k\rho_{cyl})H_m^{(1)}(k\rho_{aux}) \quad (4.51).$$

Κι αυτό διότι  $\frac{\rho_{cyl}}{\rho_{aux}} < 1$  κι επομένως,  $(\rho_{cyl}/\rho_{aux})^m (\rho_{cyl}/\rho_{aux})^N \rightarrow 0$  για  $N \rightarrow \infty$  και  $q \neq 0$ . Αν όμως,  $q = 0$ , τότε το όριο  $N \rightarrow \infty$  δεν παίζει κανένα ρόλο. Όπως δηλαδή αναφέρεται στην [1] μόνο ο όρος για  $q = 0$  πρέπει να κρατηθεί. Με την ίδια ακριβώς συλλογιστική για  $m = 0, 1, \dots, N - 1$  προκύπτει :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D^{(m)} = -I \cdot J_m(k\rho_{fil})H_m^{(1)}(k\rho_{cyl}) \quad (4.52).$$

Επομένως, από την (4.48) για μεγάλα  $|N|$  παίρνουμε :

$$I^{(m)} \sim \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{J_m(k\rho_{fil})H_m^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_m(k\rho_{cyl})H_m^{(1)}(k\rho_{aux})} & m = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (N \text{ περιττός}) \\ -\frac{1}{N} \frac{J_m(k\rho_{fil})H_m^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_m(k\rho_{cyl})H_m^{(1)}(k\rho_{aux})} & m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (N \text{ άρτιος}) \end{cases} \quad (4.53).$$

Έτσι, από την παραπάνω ασυμπτωτική σχέση και την (4.49.1) υπολογίζουμε απ' ευθείας το όριο στη (4.50) :

$$J_{limit}^S(\varphi_{aux}) = -\frac{1}{2\pi\rho_{aux}} \left[ \frac{J_0(k\rho_{fil})H_0^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_0(k\rho_{cyl})H_0^{(1)}(k\rho_{aux})} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(k\rho_{fil})H_m^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_m(k\rho_{cyl})H_m^{(1)}(k\rho_{aux})} \cos(m\varphi_{aux}) \right] \quad (4.54).$$

Αν τώρα παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση  $\cos x$  είναι άρτια συνάρτηση του  $x$ , καθώς και ότι η παράσταση  $\Pi_m = \frac{J_m(k\rho_{fil})H_m^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_m(k\rho_{cyl})H_m^{(1)}(k\rho_{aux})}$  είναι άρτια ως προς  $m$  (αφού για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει :  $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$  και  $H_n^{(1)}(z) = (-1)^n H_{-n}^{(1)}(z)$ ), συμπεραίνουμε ότι η (4.54) είναι ισοδύναμη με την (4.21). Δείξαμε επομένως ότι :  $J_{limit}^S(\varphi_{aux}) = J^S(\varphi_{aux})$ . Έτσι, ισχύουν αυτά που υποθέσαμε όσον αφορά τη σύγκλιση και την απόκλιση για την περιοχή τοποθέτησης των βοηθητικών πηγών στην περίπτωση που το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός.

## ii. άρτιο πλήθος βοηθητικών πηγών

Η περίπτωση αυτή στην [1] χαρακτηρίζεται ως πιο περίπλοκη. Ο χαρακτηρισμός αυτός οφείλεται στην παρατήρηση ότι θα πρέπει τώρα, εκτός του όρου για  $q = 0$ , να μην αμεληθεί η συνεισφορά του όρου για  $q = -1$  όταν  $m = N/2$ , οι οποίοι είναι μάλιστα ίσοι. Έτσι, ομοίως με πριν, καταλήγουμε στην ίδια σχέση :

$$J_{limit}^s(\varphi_{aux}) = -\frac{1}{2\pi\rho_{aux}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{fil})H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_n(k\rho_{cyl})H_n^{(1)}(k\rho_{aux})} e^{in\varphi_{aux}} \quad (4.55).$$

και επομένως στο συμπέρασμα ότι :  $J_{limit}^s(\varphi_{aux}) = J^s(\varphi_{aux})$ . Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις οι απαιτήσεις 1) και 2) που αντιστοιχούν στη συνεχή έκδοση της μεθόδου, ισχύουν και εδώ.

#### 4.3.2.1 Εξαγωγή ασυμπτωτικού τύπου για τα MAS ρεύματα όταν $\rho_{cri} < \rho_{aux}$

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση όπου  $\rho_{cri} < \rho_{aux}$  για μεγάλο αριθμό πηγών, δηλαδή όταν  $N \gg 1$ . Θα καταλήξουμε σε συμπεράσματα ανάλογα μ' αυτά της [2] και η πορεία που θα ακολουθήσουμε είναι αντίστοιχη. Προς αυτήν την κατεύθυνση, υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι :

$$\begin{cases} k\rho_{cyl} = O(1) & (4.56.1) \\ k\rho_{fil} = O(1) & (4.56.2) \\ k\rho_{aux} = O(1) & (4.56.3) \\ \rho_{aux} \gg \rho_{cri} & (4.56.4). \end{cases}$$

Υποθέτουμε δηλαδή ότι η ακτίνα του PEC κυλίνδρου,  $\rho_{cyl}$ , η θέση της πραγματικής πηγής,  $\rho_{fil}$  καθώς και η θέση των βοηθητικών πηγών,  $\rho_{aux}$  λειτουργούν ως σταθερές ποσότητες.

Η (4.53) με τη βοήθεια της (2.32) δίνει :

$$I^{(m)} \sim -\frac{1}{N} t^m \quad (m \rightarrow \infty) \quad (4.57),$$

όπου, όπως και στη [2] ορίσαμε,

$$t = \frac{\rho_{aux}}{\rho_{cri}} > 1 \quad (4.58).$$

Παρατηρούμε ότι όταν το  $t$  δεν είναι πολύ «κοντά» στο 1, οι συντελεστές  $I^{(m)}$  είναι μεγάλοι για μεγάλα  $m$ , ενώ φθίνουν γρήγορα καθώς το  $m$  μειώνεται.

Θεωρούμε το  $t$  όχι πολύ «κοντά» στο 1 και θετικό ακέραιο  $n$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $m \geq n$  να ισχύει η ασυμπτωτική σχέση (4.57). Έτσι, οι όροι  $I^{(m)}$  για  $m < n$  θα καλούνται «μικροί», συγκρινόμενοι με τους υπόλοιπους (αυτούς δηλαδή για τους οποίους  $m \geq n$  και) που αυξάνονται εκθετικά για αυξανόμενο  $m$ . Αμελώντας επομένως τους «μικρούς» όρους, παίρνουμε :

$$-NI_l/I \sim \begin{cases} 2 \sum_{m=n}^{(N-1)/2} t^m \cos\left(\frac{2\pi lm}{N}\right) & (N \text{ περιττός}) & (4.59.1) \\ (-1)^l t^{N/2} + 2 \sum_{m=n}^{\frac{N}{2}-1} t^m \cos\left(\frac{2\pi lm}{N}\right) & (N \text{ άρτιος}) & (4.59.2) \end{cases}.$$

Θα δείξουμε ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του  $n$  κι έτσι δεν έχει σημασία η ακριβής επιλογή του, η οποία στην παραπάνω ανάλυση δείχνει αυθαίρετη.

Ξαναγράφουμε την πολύ χρήσιμη σχέση [2, (D8)] για διευκόλυνση :

$$\sum_{m=n}^Q t^m \cos(mu) = \frac{t^{Q+2} \cos(Qu) - t^{n+1} \cos[(n-1)u] - t^{Q+1} \cos[(Q+1)u] + t^n \cos(nu)}{t^2 - 2t \cos u + 1} \quad (4.60).$$

Όταν  $Q+1 > n$  και επειδή  $t > 1$ , στον αριθμητή του δεξιού μέλους της (4.60) ο δεύτερος όρος γίνεται πολύ μικρότερος σε σχέση με τον πρώτο και έτσι μπορεί να αμεληθεί. Ομοίως και ο τέταρτος σε σχέση με τον τρίτο. Σημειώνουμε ότι οι απλοποιήσεις αυτές δεν είναι δεκτές όταν το  $t$  είναι πολύ «κοντά» στο 1, με αποτέλεσμα οι όροι  $t^{Q+1}$  και  $t^n$  να μη διαφέρουν αρκετά, ή όταν το  $u$  είναι «μεγάλο» και μάλιστα τέτοιο ώστε τα  $\cos(Qu)$  και  $\cos[(Q+1)u]$  να γίνονται πολύ «μικρά». Λόγω της υπόθεσης (4.56.4) είναι  $t \gg 1$ . Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι, για την περίπτωση που εξετάζουμε, οι παραπάνω περιορισμοί ικανοποιούνται, τότε ο τύπος (4.60) δίνει την ασυμπτωτική σχέση :

$$\sum_{m=n}^Q t^m \cos(mu) \sim \frac{t^{Q+2} \cos(Qu) - t^{Q+1} \cos[(Q+1)u]}{t^2 - 2t \cos u + 1} \quad (4.61)$$

όταν  $t \gg 1$  και  $u < M$  με  $Q+1 > n$ , για κατάλληλη θετική σταθερά (σύμφωνα πάντα με τα προηγούμενα),  $M$ . Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπό τέτοιες συνθήκες το άθροισμα  $\sum_{m=n}^Q t^m \cos(mu)$  συμπεριφέρεται ανάλογα με την ποσότητα του δεξιού μέλους της (4.61), η οποία είναι ανεξάρτητη του  $n$ .

Κάνουμε χρήση της (4.61) για  $u = 2\pi l/N$  και για  $Q = (N-1)/2$  αν το  $N$  είναι περιττός αριθμός, ενώ αν το  $N$  είναι άρτιος θέτουμε  $Q = N/2 - 1$  και παίρνουμε :

$$\frac{-NI_l}{I} \sim \begin{cases} 2 \frac{(-1)^l t^{\frac{N+1}{2}} \cos\left(\frac{\pi l}{N}\right) (t-1)}{t^2 - 2t \cos(2\pi l/N) + 1} & (N \text{ περιττός}) \quad (4.62.1) \\ \frac{(-1)^l t^{\frac{N}{2}} (t^2 - 1)}{t^2 - 2t \cos(2\pi l/N) + 1} & (N \text{ άρτιος}) \quad (4.62.2) \end{cases}$$

Επομένως, για μεγάλα  $N$  τα MAS ρεύματα ικανοποιούν την ασυμπτωτική σχέση :

$$I_l \sim \begin{cases} 2 \frac{I}{N} \frac{(-1)^{l+1} t^{\frac{N+1}{2}} \cos\left(\frac{\pi l}{N}\right) (t-1)}{t^2 - 2t \cos(2\pi l/N) + 1} & (N \text{ περιττός}) \quad (4.63.1) \\ \frac{I}{N} \frac{(-1)^{l+1} t^{\frac{N}{2}} (t^2 - 1)}{t^2 - 2t \cos(2\pi l/N) + 1} & (N \text{ άρτιος}) \quad (4.63.2) \end{cases}$$

Η παραπάνω σχέση είναι και η ζητούμενη και δείχνει με ποιον τρόπο ταλαντώνονται τα ρεύματα για την περίπτωση της απόκλισης.

### Παρατήρηση 3 :

Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε συμβολισμούς για τις σχέσεις (4.63) αντίστοιχους με αυτούς της [2], έχουμε :

1) σε περίπτωση που ο  $N$  είναι περιττός είναι :

$$I_l \sim 2 \frac{I}{N} (-1)^{l+1} t^{\frac{N+1}{2}} \frac{1}{t-1} D_l \quad (4.64)$$

με

$$D_l = \frac{\cos\left(\frac{\pi l}{N}\right)}{t^2 - 2t \cos(2\pi l/N) + 1} (t-1)^2 \quad (4.65)$$

ενώ,

2) όταν ο  $N$  είναι άρτιος ισχύει :

$$I_l \sim \frac{I}{N} (-1)^{l+1} t^{\frac{N}{2}} \frac{t+1}{t-1} D_l \quad (4.66)$$

όπου τώρα,

$$D_l = \frac{(t-1)^2}{t^2 - 2t \cos(2\pi l/N) + 1} \quad (4.67)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι σχέσεις που προέκυψαν δείχνουν ότι στη διακριτή εκδοχή της MAS, η μη επιλυσιμότητα εμφανίζεται με τη μορφή αφύσικων ταλαντώσεων, οι οποίες μάλιστα ταυτίζονται με αυτές του «εξωτερικού» προβλήματος. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο λόγος  $t$  όπως ορίζεται στην περίπτωση μας, είναι αντίστροφος με αυτόν της [2].

#### 4.4 Συμπεριφορά του MAS πεδίου για μεγάλο αριθμό πηγών

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση του MAS πεδίου για αυθαίρετα μεγάλο αριθμό πηγών, δηλαδή στο όριο  $N \rightarrow \infty$ . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αφού πρώτα προσδιορίσουμε το MAS πεδίο για πεπερασμένο  $N$ . Προς τούτο, εφαρμόζουμε το Addition Theorem στην (4.31) και δεδομένου ότι  $\rho_{obs} < \rho_{aux}$  παίρνουμε :

$$E_z = -\frac{k^2 I}{4\omega \epsilon_0} [H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) + \sum_{l=0}^{N-1} I_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{obs}) H_n^{(1)}(k\rho_{aux}) e^{i2\pi n(\varphi_{obs}-l)/N}] \quad (4.68).$$

Αν τώρα αλλάξουμε τη σειρά άθροισης στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης και στη συνέχεια εισάγουμε τον DFT των MAS ρευμάτων μέσω της σχέσης (4.40.1), προκύπτει :

$$E_z = -\frac{k^2 I}{4\omega \epsilon_0} [H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) + N \sum_{n=-\infty}^{\infty} I^{(n)} J_n(k\rho_{obs}) H_n^{(1)}(k\rho_{aux}) e^{i\frac{2\pi n \varphi_{obs}}{N}}] \quad (4.69).$$

Σημειώνουμε ότι, όπως και στην [1], στην (4.57) ως  $I^{(n)}$  συμβολίζουμε την *περιοδική επέκταση* του DFT των MAS ρευμάτων. Στη σχέση (4.40.1) οι συντελεστές  $I^{(m)}$  ορίζονται μόνο για  $m = 0, \dots, N-1$ . Η προαναφερθείσα λοιπόν επέκταση για οποιονδήποτε ακέραιο  $m$  επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της ιδιότητας  $I^{(m)} = I^{(N-m)}$ ,

Είμαστε πλέον έτοιμοι να εξάγουμε ασυμπτωτικό τύπο για την  $E_z$  καθώς  $N \rightarrow \infty$ .

Πράγματι, από την ακριβή σχέση (4.69) παίρνουμε το όριο  $N \rightarrow \infty$  και κάνουμε χρήση της (4.53), δηλαδή αντικαθιστούμε κάθε  $I^{(n)}$  με την ποσότητα  $-\frac{1}{N} \frac{J_n(k\rho_{fil})H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_n(k\rho_{cyl})H_n^{(1)}(k\rho_{aux})}$ . Έτσι, εύκολα καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα :

$$E_z \sim -\frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} [H_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{fil})H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_n(k\rho_{cyl})} J_n(k\rho_{obs}) e^{jn\varphi_{obs}}] \quad (4.70)$$

δηλαδή το MAS πεδίο συμπεριφέρεται ανάλογα με το ακριβές πεδίο για οποδήποτε μεγάλο αριθμό βοηθητικών πηγών.

### Παρατήρηση 1 :

Όταν χρησιμοποιήσαμε την ασυμπτωτική σχέση (4.53) για να καταλήξουμε στην (4.70) διαγράψαμε τους όρους  $H_n^{(1)}(k\rho_{aux})$ , καθώς, όπως έχουμε ήδη τονίσει, δε μηδενίζονται σε καμία περίπτωση.

### Παρατήρηση 2 :

Όπως φάνηκε από την ανάλυση που προηγήθηκε, για την εξαγωγή της (4.70) δεν έγινε καμία υπόθεση για τη θέση των βοηθητικών πηγών. Με άλλα λόγια, το MAS πεδίο συμπεριφέρεται ανάλογα με το ακριβές πεδίο καθώς  $N \rightarrow \infty$  είτε ισχύει  $\rho_{cri} < \rho_{aux}$  είτε  $\rho_{cri} > \rho_{aux}$ . Επιπλέον, εξ' αιτίας της ταύτισής του με το ακριβές πεδίο δε χρειάζεται να μελετήσουμε εκ νέου το πότε αυτό συγκλίνει. Αυτό έχει ήδη γίνει στην 3.3.2 και το αποτέλεσμα είναι ότι το MAS πεδίο συγκλίνει όταν  $\rho_{obs} < \rho_{cri}$ , ενώ αποκλίνει όταν  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$ . Μπορούμε επομένως να παρουσιάσουμε τα ως τώρα αποτελέσματα, διακρίνοντας τις εξής περιπτώσεις :

1) όταν  $\rho_{cyl} < \rho_{aux} < \rho_{cri}$ , για μεγάλα  $N$  το MAS πεδίο συγκλίνει στο πραγματικό πεδίο στο εσωτερικό του PEC κυλίνδρου και στην αναλυτική του επέκταση στην περιοχή για την οποία ισχύει  $\rho_{cyl} < \rho_{obs} < \rho_{aux}$  και βρίσκεται στο εξωτερικό του.

2) Όταν  $\rho_{cri} < \rho_{aux}$  τότε το MAS πεδίο για  $N \rightarrow \infty$  :

2.1 συγκλίνει και μάλιστα δίνει το πραγματικό πεδίο αν  $\rho_{obs} < \rho_{cyl}$ .

2.2 συγκλίνει και μάλιστα ισούται με την αναλυτική επέκταση του πραγματικού πεδίου στην περιοχή μεταξύ του σκεδαστή και των βοηθητικών πηγών στην περίπτωση όπου  $\rho_{cyl} < \rho_{obs} < \rho_{cri}$ .

2.3 αποκλίνει όταν  $\rho_{cri} < \rho_{obs} < \rho_{aux}$ .

Επομένως, τα συμπεράσματα της [1] ισχύουν και στο «εσωτερικό» πρόβλημα. Δηλαδή, στο όριο  $N \rightarrow \infty$  το MAS πεδίο συγκλίνει σε ένα «πεδίο» το οποίο αποτελεί ένα μαθηματικό όριο και δεν ικανοποιεί κατ' ανάγκη τις εξισώσεις του Maxwell. Όταν όμως, το  $N$  λαμβάνεται ως πεπερασμένος ακέραιος, τότε το MAS πεδίο είναι πραγματικό και δε συμπεριφέρεται απότομα, όπως για παράδειγμα όταν από την περιοχή που περιγράφεται στην περίπτωση 2.2 μεταβαίνουμε σ' αυτήν της 2.3.

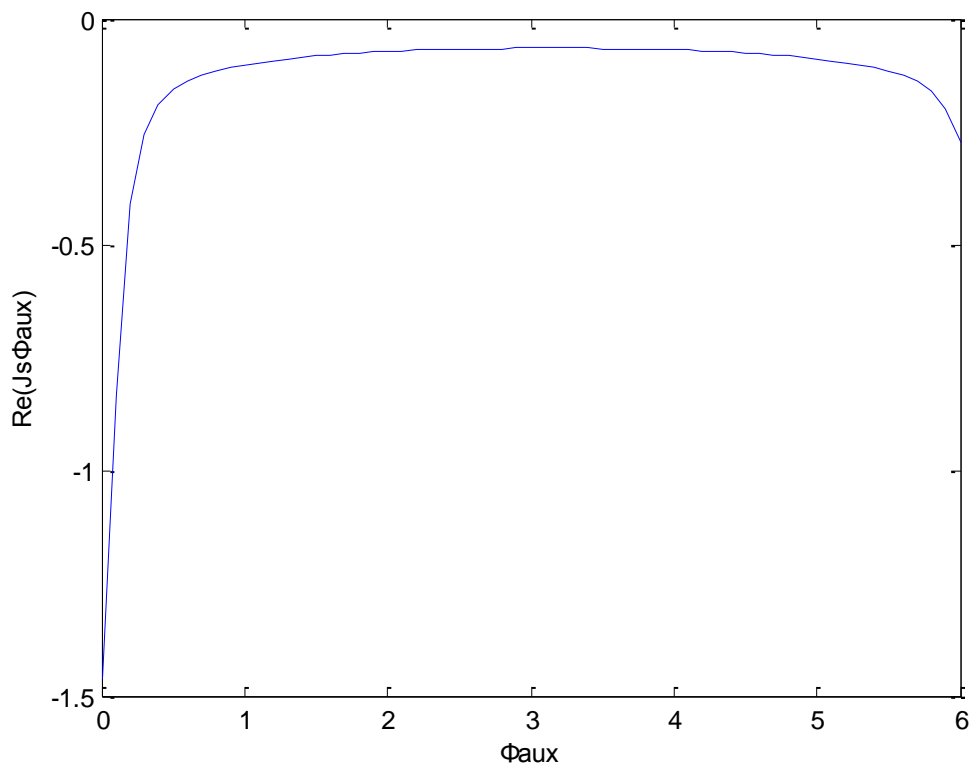
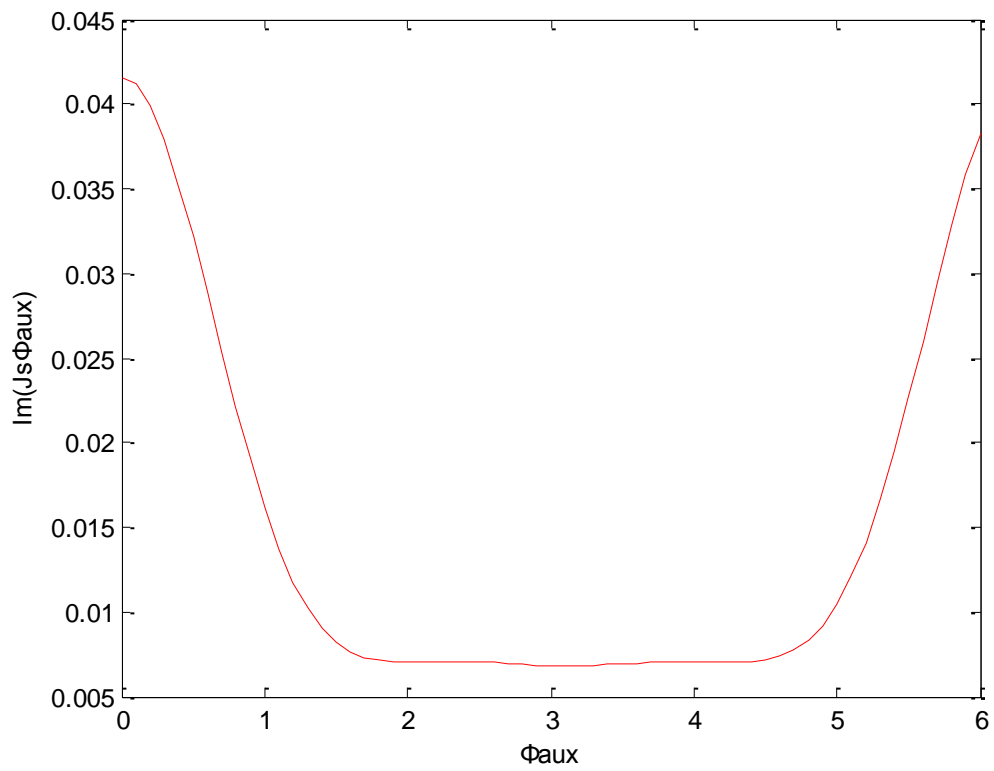
#### 4.5 Αριθμητική μελέτη : αποτελέσματα και σχολιασμός

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε πληθώρα αποτελεσμάτων, προερχόμενα από MATLAB αριθμητικά πειράματα, τα οποία καταδεικνύουν όλα τα συμπεράσματα που προηγήθηκαν. Τα πειράματα είναι πολλά και επιλεγμένα κατάλληλα κι αυτό, για να είμαστε βέβαιοι ότι αποφεύγουμε διάφορα σφάλματα ή τουλάχιστον να μειώνουμε κατά πολύ την επίδρασή τους στα εξαγόμενα αποτελέσματα. Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφέρουμε ότι, κατά κύριο λόγο, τα σφάλματα προέρχονται από στρογγυλοποιήσεις ή αλλιώς, φαινόμενα «round-off» που εισάγονται εξ' αιτίας του πεπερασμένου μήκους λέξης του εκάστοτε υπολογιστή, από την προσεγγιστική επίλυση των αλγεβρικών συστημάτων, ο πίνακας των οποίων είναι «κακής κατάστασης» (ή, “ill conditioned”) με αποτέλεσμα τη μη ευρωστία των λύσεων, καθώς και από την αδυναμία ακριβούς υπολογισμού των συναρτήσεων Bessel και Hankel. Η απλή γεωμετρία του προβλήματος που μελετάμε είναι τέτοια, ώστε η MAS να επιδέχεται ακριβή λύση η οποία φυσικά μπορεί να προσομοιωθεί απ' ευθείας στο MATLAB. Έτσι, μπορεί να συγκριθεί με τη λύση του συστήματος (4.33) που θα προκύψει με χρήση της οποιασδήποτε έτοιμης ρουτίνας επίλυσης του MATLAB. Ο «έλεγχος» αυτός δείχνει να περιορίζει την επίδραση της δεύτερης πηγής σφαλμάτων. Η τρίτη πηγή δε μπορεί να αποφευχθεί και η μόνη μέριμνα που λάβαμε ήταν η χρήση μιας από τις νέες σχετικά εκδόσεις του MATLAB, της 2010a. Έτσι, το μεγαλύτερο μέρος της προσοχής μας, όπως θα φανεί και παρακάτω, στρέφεται στον περιορισμό της επίδρασης του «round-off». Η παρουσίαση θα γίνει σε ενότητες, αντίστοιχες των περιπτώσεων της παρατήρησης 2 της προηγούμενης παραγράφου. Σημειώνουμε επιπλέον ότι με  $N$  θα συμβολίζουμε το πλήθος των βοηθητικών πηγών που χρησιμοποιούμε κάθε φορά, ενώ με  $M$  το πλήθος των αθροιζόμενων όρων για την προσέγγιση της εκάστοτε σειράς, ο υπολογισμός των οποίων είναι αναγκαίος, όπως φάνηκε παραπάνω, στα διάφορα πεδιακά μεγέθη. Τα μεγέθη αυτά είναι το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο (ακριβές και κατά MAS προτεινόμενο) και η επιφανειακή κατανομή ρεύματος πάνω στη βοηθητική επιφάνεια (από τη συνεχή έκδοση της MAS και αυτή που προκύπτει από τα διακριτά MAS ρεύματα).

##### 4.5.1 Η περίπτωση $\rho_{cyl} < \rho_{aux} < \rho_{cri}$

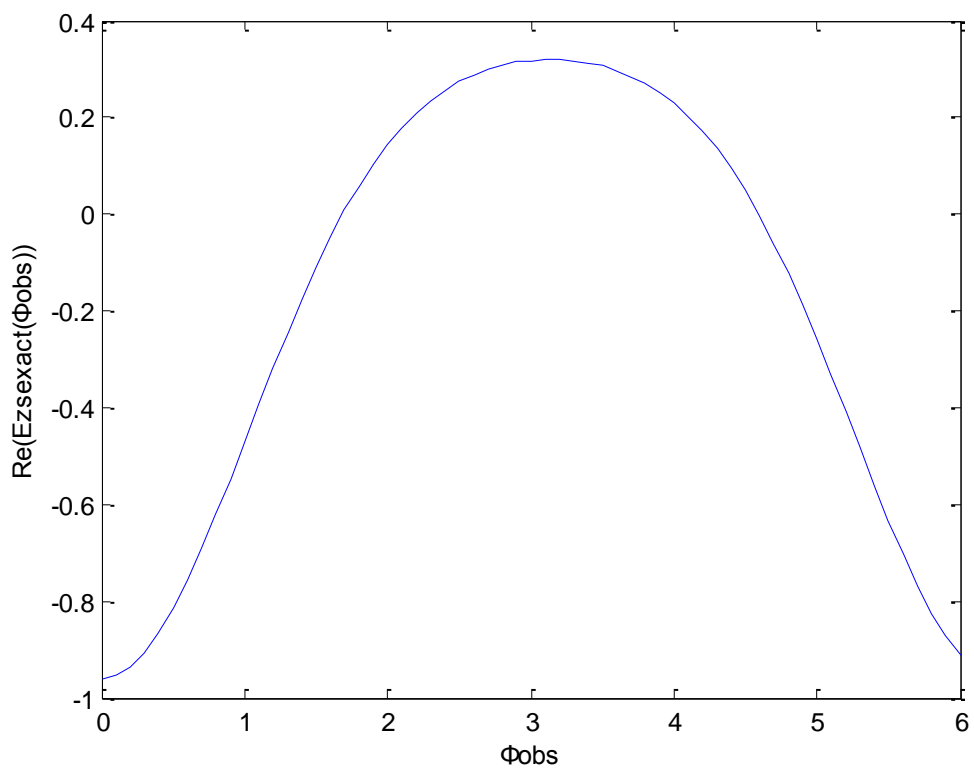
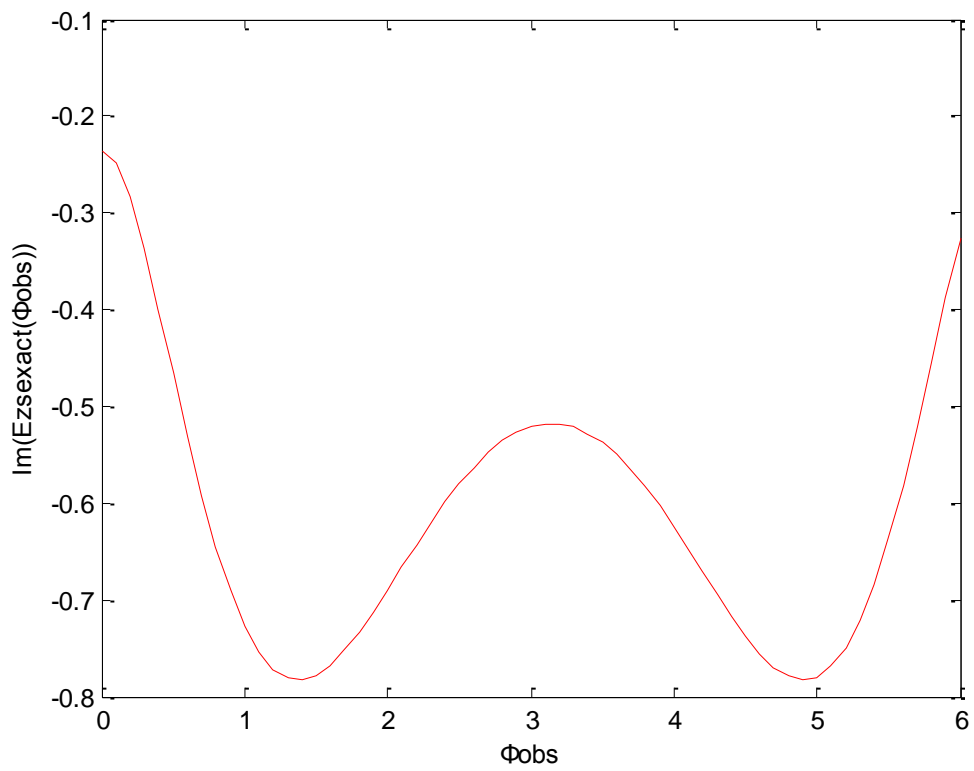
Αρχικά, θα παρουσιάσουμε τα ακριβή μεγέθη τα οποία υπολογίζονται από τις σειρές στα δεξιά μέλη των σχέσεων (3.16) και (4.21). Οι σειρές αυτές συγκλίνουν γρήγορα και επομένως, ο αριθμός των όρων που χρειάζεται να αθροιστούν είναι μικρός. Θα εκτελέσουμε δύο MATLAB πειράματα. Στο πρώτο πείραμα θα είναι  $\rho_{obs} < \rho_{cri}$  ενώ στο δεύτερο  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$  με ταυτόχρονη φυσικά ισχύ της ανισότητας :  $\rho_{cyl} < \rho_{aux} < \rho_{cri}$ .

1<sup>ο</sup> πείραμα : οι τιμές των παραμέτρων που επιλέγονται για το πείραμα αυτό είναι  $k\rho_{cyl} = 2.1$  ,  $k\rho_{obs} = 1.4$  ,  $k\rho_{fil} = 1.8$  και  $k\rho_{aux} = 2.2$  (έτσι, θα είναι και  $k\rho_{cri} = 2.45$  ). Ύστερα από δοκιμές, παρατηρούμε ότι ο αριθμός των προσθετέων  $M = 50$  είναι αρκετός για τη σύγκλιση των σειρών είναι ικανοποιητικός. Πράγματι, είτε χρησιμοποιούμε  $M = 50$  είτε  $M = 90$  τα αποτελέσματα δε διαφέρουν, πόσο μάλλον τα γραφήματα, τα οποία παρατίθενται στη συνέχεια. Στο πείραμα αυτό ενδεικτικά χρησιμοποιήσαμε  $M = 70$  όρους.



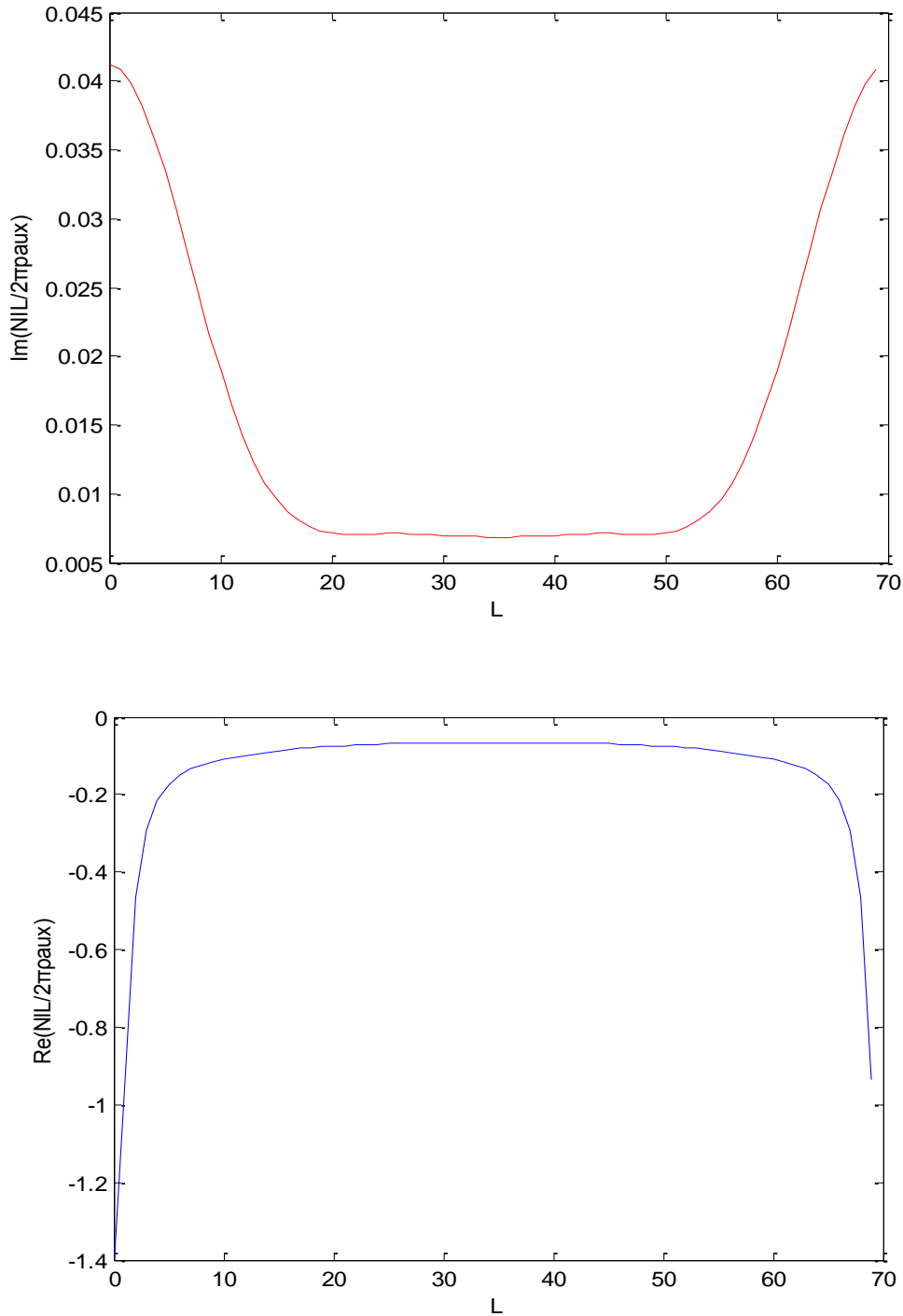
**Σχήμα 4.3 :** “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους της επιφανειακής κατανομής ρεύματος στη βοηθητική επιφάνεια (, πάνω και κάτω αντίστοιχα,) για  $k\rho_{cyl} = 2.1$  ,  $k\rho_{obs} = 1.4$  ,  $k\rho_{fil} = 1.8$  και  $k\rho_{aux} = 2.2$ . Η κατανομή αυτή είναι η λύση της MASIE, η οποία προκύπτει με εφαρμογή της συνεχούς έκδοσης της MAS. ”



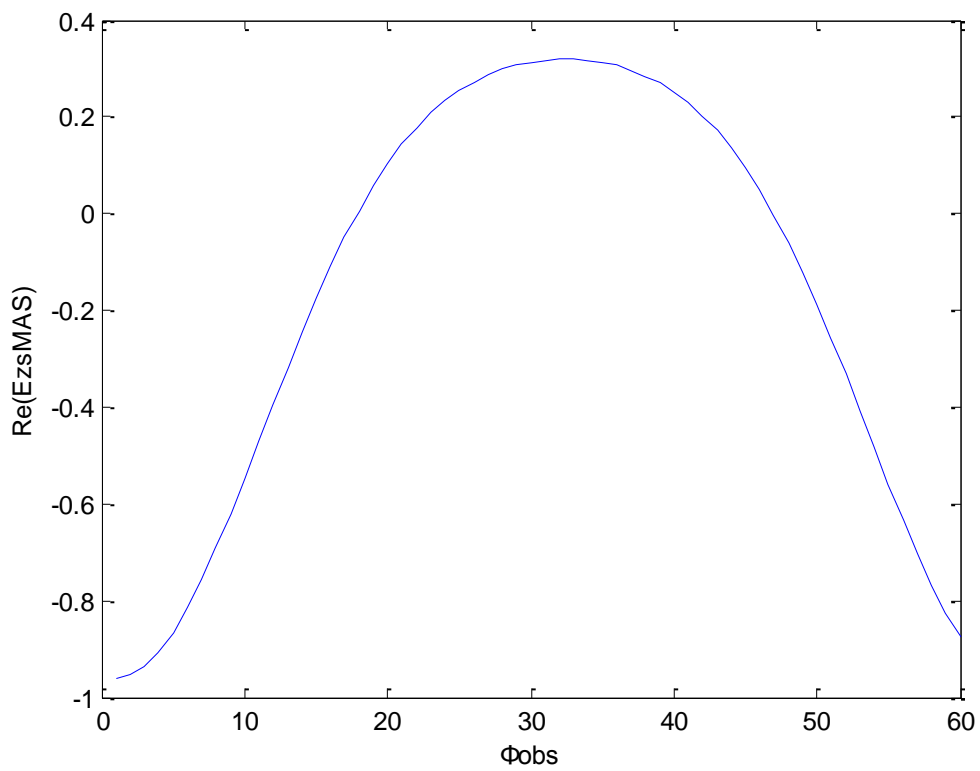
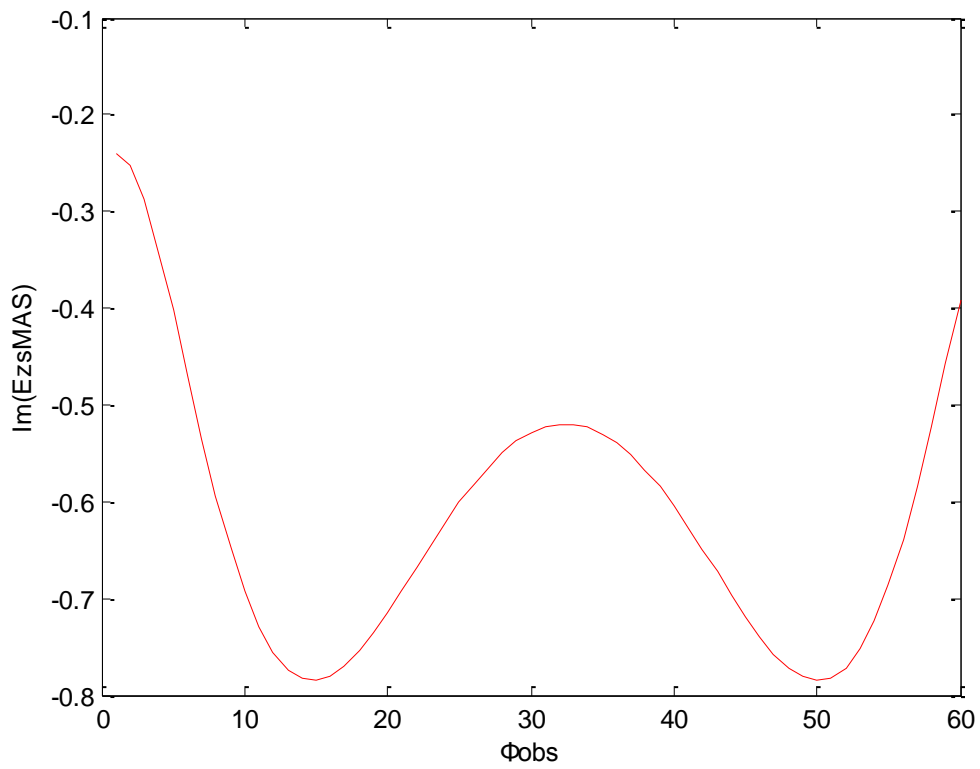


Σχήμα 4.4 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους του ακριβούς σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου (, πάνω και κάτω αντίστοιχα,) για  $k_{\rho_{\text{cyl}}} = 2.1$  ,  $k_{\rho_{\text{obs}}} = 1.4$  ,  $k_{\rho_{\text{fil}}} = 1.8$  και  $k_{\rho_{\text{aux}}} = 2.2$  .”

Στα επόμενα τέσσερα γραφήματα δίνονται τα προσεγγιστικά μεγέθη, δηλαδή η «ισοδύναμη» κατανομή που προκύπτει από την ποσότητα  $\frac{NI_l}{2\pi\rho_{aux}}$  στο όριο  $N \rightarrow \infty$ , καθώς και η κατά MAS προτεινόμενη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα 4.5 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους της ποσότητας  $\frac{NI_l}{2\pi\rho_{aux}}$  για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων  $\rho_{cyl}$ ,  $\rho_{obs}$ ,  $\rho_{fil}$  και  $\rho_{aux}$  για  $N = 70$  βοηθητικές πηγές ”. Με τη βοήθεια του σχήματος 4.3 παρατηρούμε ότι η ποσότητα  $\frac{NI_l}{2\pi\rho_{aux}}$  συγκλίνει στην ρευματική κατανομή που αναπτύσσεται στη βοηθητική επιφάνεια κατά την εφαρμογή της συνεχούς έκδοσης της MAS.

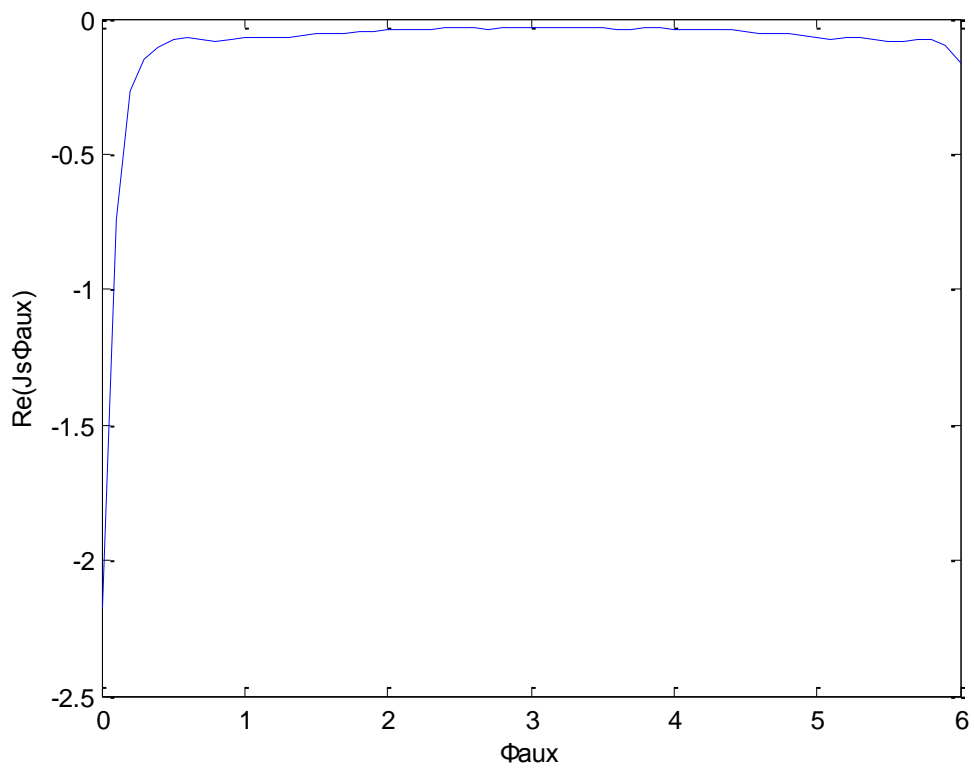
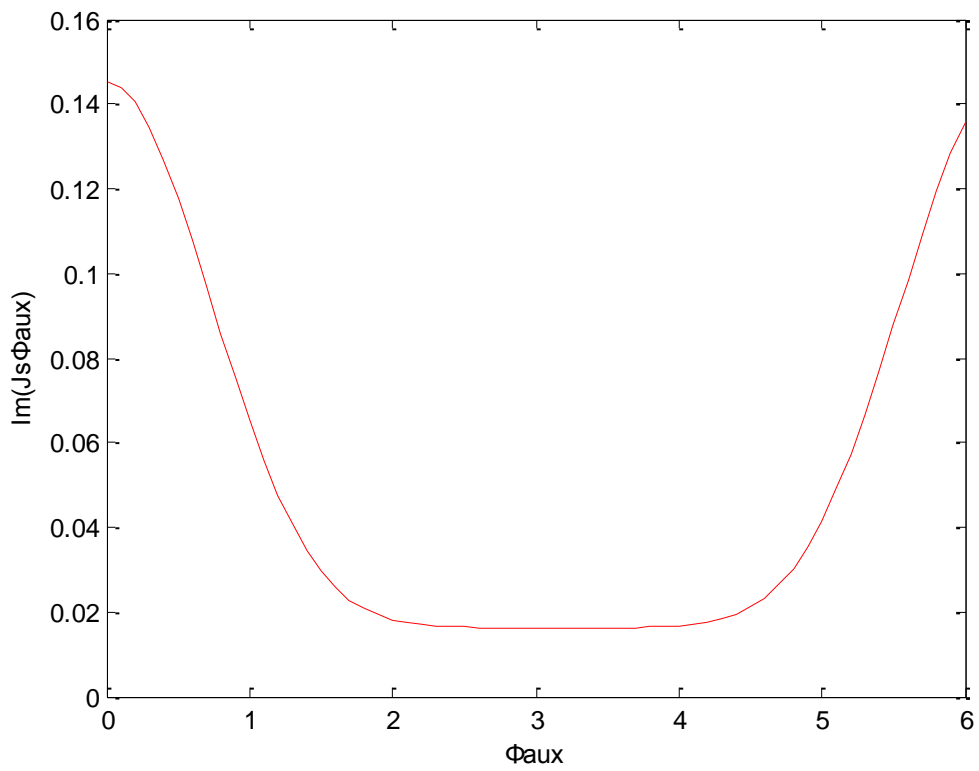


Σχήμα 4.6 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους του MAS ηλεκτρικού πεδίου για πλήθος βοηθητικών ίσο με  $N = 70$ . Όπως θεωρητικά αναμενόταν, το MAS πεδίο συγκλίνει στο πραγματικό.”

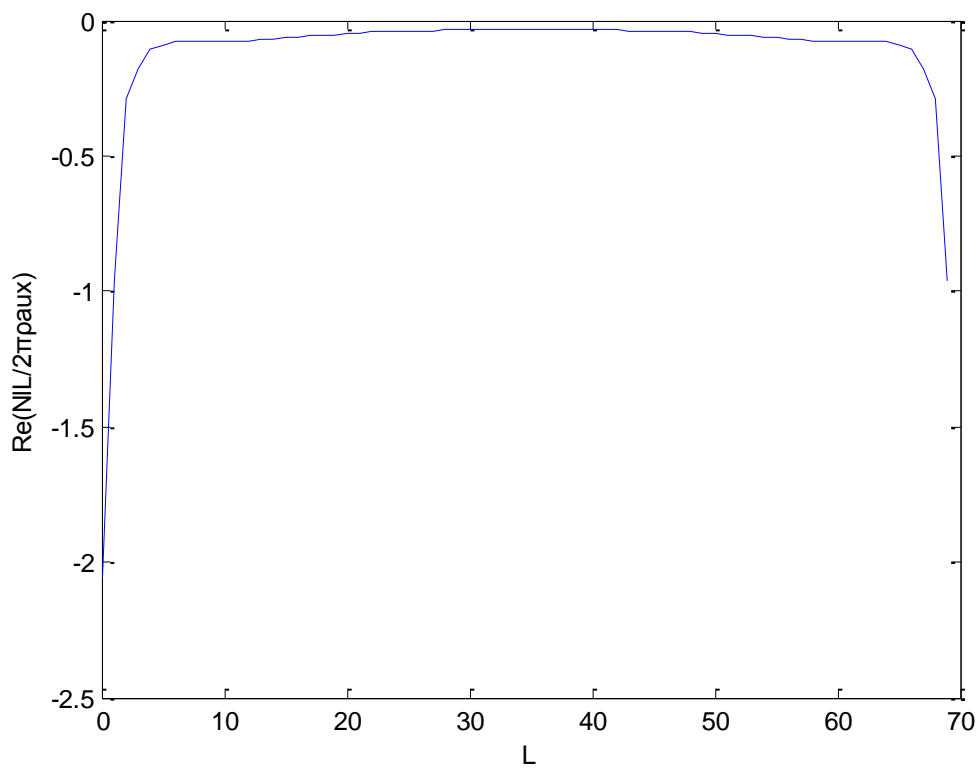
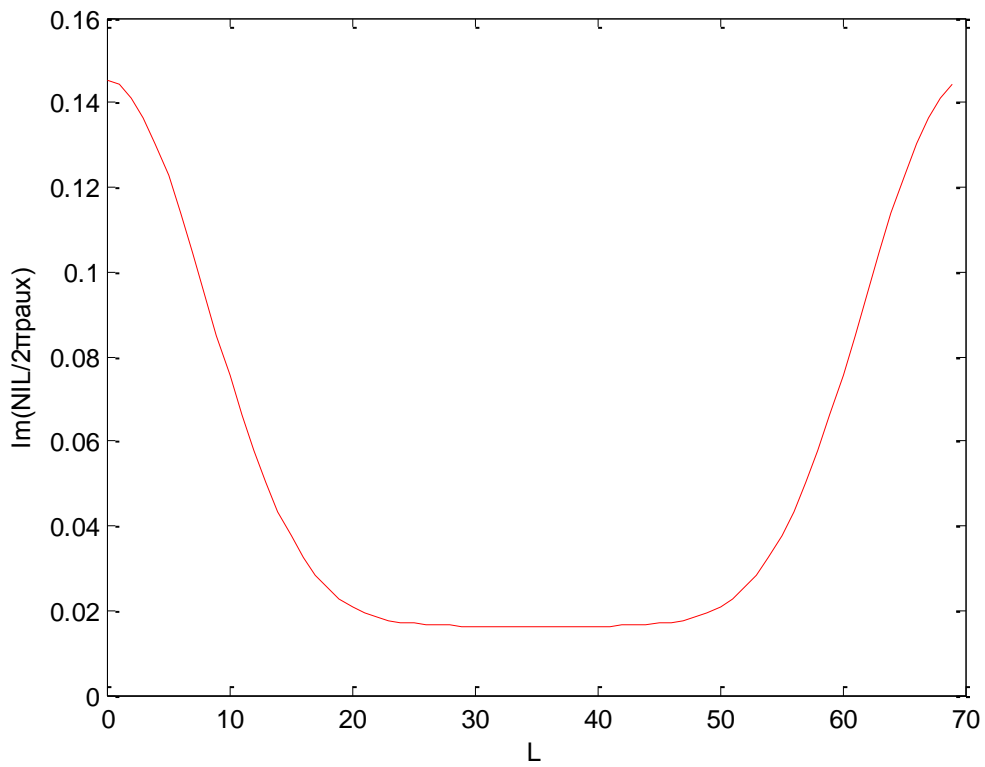
Σημειώνουμε ότι με τα παραπάνω αποτελέσματα γίνεται φανερό αυτό το οποίο θεωρητικά αναμέναμε, ότι δηλαδή οι σειρές συγκλίνουν καθώς και ότι το MAS πεδίο συγκλίνει στο πραγματικό καθώς το  $N$  αυξάνεται απεριόριστα. Εδώ, για  $N = 70$  τα ζεύγη σχημάτων 4.3 - 4.5 και 4.4 - 4.6 συμπίπτουν σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό. Ο αριθμός των προσθετών στο πείραμα αυτό, όπως ήδη αναφέρθηκε, δεν είναι πολύ κρίσιμος υπό την έννοια ότι οι σειρές που προκύπτουν συγκλίνουν και μάλιστα γρήγορα. Από την άλλη, για πλήθος βοηθητικών πηγών ίσων με 70 το προσεγγιστικό πεδίο σχεδόν ταυτίζεται με το πραγματικό, ενώ ταυτόχρονα τα φαινόμενα τύπου «round-off» δε φαίνεται να επηρεάζουν το τελικό αποτέλεσμα. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για το πείραμα που ακολουθεί.

Τέλος, αν και κάποια μεγέθη, από τα εικονιζόμενα στα προηγούμενα σχήματα, δείχνουν «ασύμμετρα» στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει. Με προσεκτική παρατήρηση βλέπουμε ότι για παράδειγμα στο σχήμα 4.4 τα διαγράμματα τόσο του φανταστικού όσο και του πραγματικού μέρος του ακριβούς σκεδαζόμενου πεδίου είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας που είναι κάθετος στον άξονα  $\varphi_{obs}$  και διέρχεται από το  $\pi$ . Παρ' όλα αυτά, επειδή στην προσομοίωση που παρουσιάστηκε η μεταβλητή  $\varphi_{obs}$  διατρέχει το διάστημα  $[0,6)$  και όχι το  $[0,2\pi)$ , δεν παρουσιάζονται οι τιμές των μεγεθών για τα οποία  $\varphi_{obs} \in [6,2\pi)$  κι έτσι, δημιουργείται η εσφαλμένη εντύπωση ότι τα μεγέθη αυτά δεν είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $\varphi_{obs} = \pi$ . Αντίστοιχες παρατηρήσεις μπορούν να διατυπωθούν και για τα υπόλοιπα μεγέθη. Τέτοια σχήματα θα παρουσιαστούν και στα υπόλοιπα πειράματα, που ακολουθούν και η φαινομενική «ασυμμετρία» δε θα σχολιαστεί ξανά.

2<sup>ο</sup> πείραμα : οι τιμές των ηλεκτρικών παραμέτρων που διαλέγουμε τώρα είναι  $k\rho_{cyl} = 1.5$ ,  $k\rho_{obs} = 2.5$ ,  $k\rho_{fil} = 1.1$  και  $k\rho_{aux} = 1.9$  (εδώ,  $k\rho_{cri} = 2.04$ ). Και πάλι ο αριθμός των προσθετών που δείχνει αρκετός είναι  $M = 50$ . Σημειώνουμε ότι δεν έχει νόημα η απεικόνιση του ακριβούς σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου καθώς, όπως δείξαμε στο κεφάλαιο 3, η σειρά που το αναπαριστά αποκλίνει όταν  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$ . Ομοίως δε θα παρουσιάσουμε ούτε και το MAS πεδίο. Έτσι, ο στόχος του πειράματος αυτού είναι να παρουσιαστεί, για μία ακόμα φορά, ότι καθώς μεγαλώνει το πλήθος των διακριτών MAS ρευμάτων, η ισοδύναμη ρευματική κατανομή που προκύπτει «πλησιάζει» τη συνεχή επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος που αναπτύσσεται στη βοηθητική επιφάνεια όταν κανείς εφαρμόζει τη συνεχή έκδοση της MAS. Σημειώνουμε επιπλέον ότι το πλήθος των βοηθητικών πηγών που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή των γραφημάτων που ακολουθούν είναι  $N = 70$ . Η τιμή αυτή του  $N$  δείχνει κατάλληλη, σύμφωνα με το στόχο του πειράματος αυτού, αλλά και τα όσα αναφέρθηκαν στο σχολιασμό του πρώτου πειράματος. Πράγματι, αφ' ενός τα ζεύγη καμπυλών στα σχήματα 4.7 και 4.8 της επόμενης σελίδας συμπίπτουν και αφ' ετέρου, είναι όπως θεωρητικά αναμένεται ομαλές συναρτήσεις. Για τις συγκεκριμένες δηλαδή τιμές των παραμέτρων στα εικονιζόμενα μεγέθη δεν παρουσιάζονται ακανόνιστες ταλαντώσεις ή ασυνέχειες, περιπτώσεις που μόνο από round-off θα μπορούσαν να έχουν προκύψει.



Σχήμα 4.7 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους της επιφανειακής κατανομής ρεύματος στη βοηθητική επιφάνεια για  $k\rho_{cyl} = 1.5$  ,  $k\rho_{obs} = 2.5$  ,  $k\rho_{fil} = 1.1$  και  $k\rho_{aux} = 1.9$  .”



Σχήμα 4.8 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους την ποσότητας  $\frac{Nl_l}{2\pi\rho_{αυχ}}$  για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων  $\rho_{cyl}$ ,  $\rho_{obs}$ ,  $\rho_{fil}$  και  $\rho_{αυχ}$  για  $N = 70$  βοηθητικές πηγές.”

## 4.5.2 Η περίπτωση $\rho_{cri} < \rho_{aux}$

### 4.5.2.1 Στόχοι

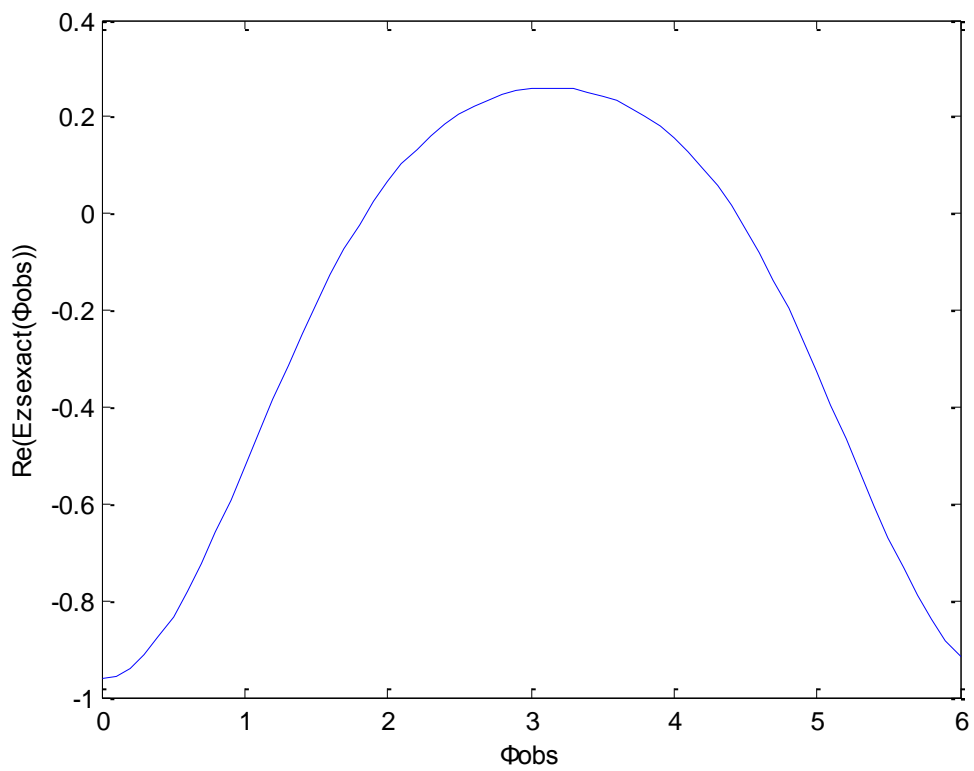
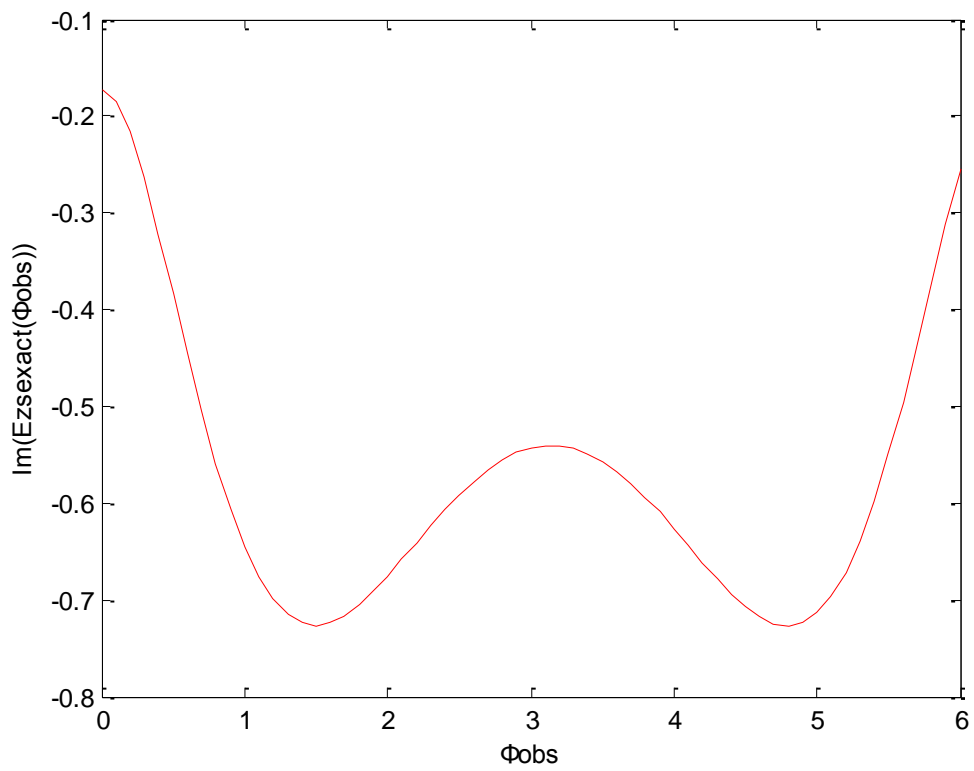
Στην υποπαράγραφο αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα τα οποία συμφωνούν με τα πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα των 4.3.2 και 4.4. Όπως είδαμε στην 4.2.2, όταν ισχύει ότι  $\rho_{cri} < \rho_{aux}$  η σειρά στο δεξί μέλος της (4.21) αποκλίνει. Έτσι η ρευματική κατανομή που υπαγορεύεται από την (4.21), κατά την εφαρμογή της συνεχούς έκδοσης της MAS, δε θα παρουσιαστεί στο παρακάτω πείραμα. Επίσης, στην περίπτωση αυτή τα MAS ρεύματα ταλαντεύονται. Η ταλάντωσή τους αυτή ερμηνεύεται ως αποτέλεσμα της διακριτοποίησης της μη επιλύσιμης ολοκληρωτικής εξίσωσης (MASIE). Οι ασυμπτωτικές σχέσεις (4.63) δείχνουν με ποιον τρόπο ταλαντεύονται τα MAS ρεύματα.

Ο στόχος μας τώρα είναι διπλός. Από τη μία θέλουμε να δείξουμε ότι το MAS πεδίο προσεγγίζει το πραγματικό, αν και τα MAS ρεύματα που το «παράγουν», αποκλίνουν και από την άλλη, ότι η απόκλιση τους συμφωνεί με αυτήν που προβλέπει ο ασυμπτωτικός τύπος (4.63). Προς αυτήν την κατεύθυνση, τα πρώτα τέσσερα από τα γραφήματα που θα παρουσιάσουμε είναι το ακριβές και το MAS πεδίο. Στα επόμενα δύο διαγράμματα φαίνεται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των MAS ρευμάτων. Το πραγματικό τους μέρος, όπως θεωρητικά αναμενόταν, παρουσιάζει έντονες ταλαντώσεις. Έτσι, στο επόμενο σχήμα δίνονται τα ρεύματα που προκύπτουν από το θεωρητικό τύπο (4.63).

Όπως όμως σχολιάζεται στην 4.3.2.1, ο τύπος αυτός, που ισχύει για την περίπτωση όπου  $N \rightarrow \infty$ , γίνεται πιο ακριβής όταν ο λόγος  $t$  είναι αρκετά μεγαλύτερος του 1. Βασίζομενοι λοιπόν σ' αυτές τις παρατηρήσεις, θα δώσουμε επιπλέον γραφήματα όπου θα μελετάται η ισχύ των (4.63). Έτσι, προσδοκούμε ότι όσο το  $N$  και ο λόγος  $t$  θα μεγαλώνουν, τόσο πιο καλά θα δείχνουν τα αποτελέσματα. Παρ' όλα αυτά, από ένα σημείο και τα φαινόμενα «ground-off» θα αποτρέπουν οποιαδήποτε, επιπλέον μελέτη καθώς το πεπερασμένο μήκος λέξης ενός οποιουδήποτε υπολογιστή δε μπορεί να ακολουθήσει και να αναπαραστήσει με ικανοποιητική ακρίβεια την απόκλιση που υπαγορεύεται από τις (4.63).

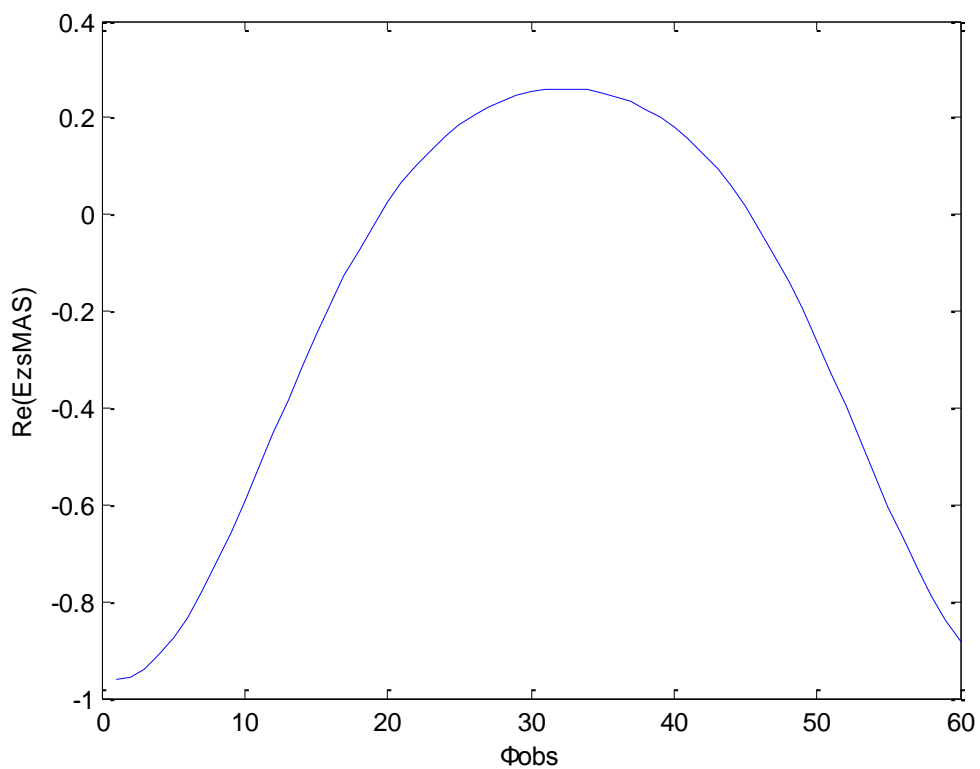
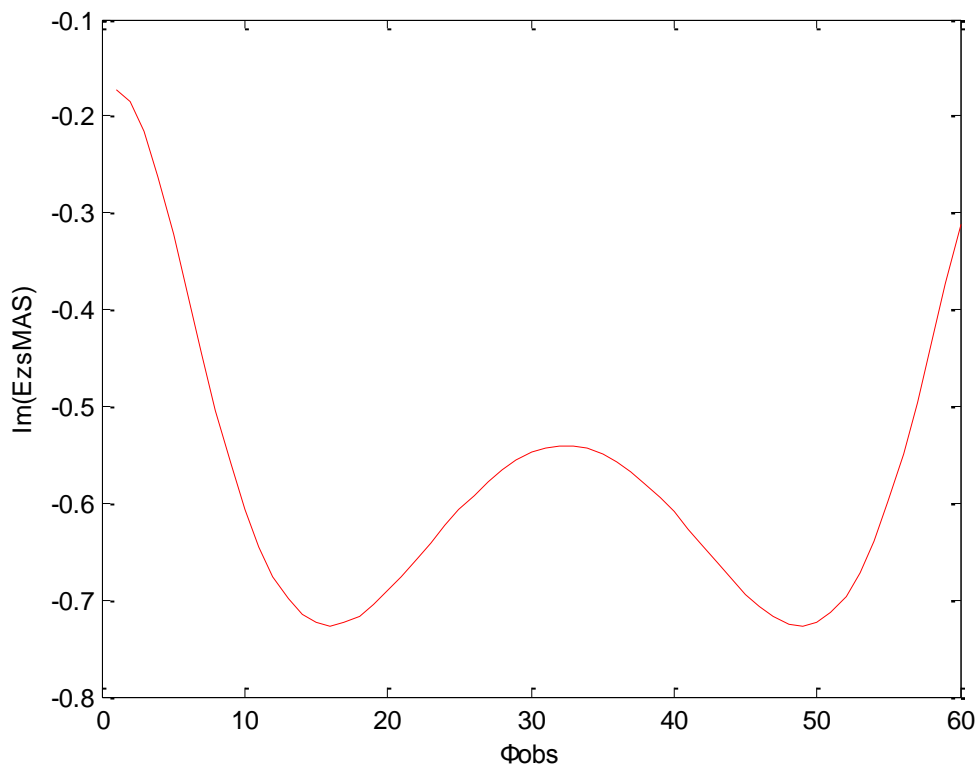
### 4.5.2.2 Σύγκλιση στο εσωτερικό του σκεδαστή ( $\rho_{obs} < \rho_{cyl}$ )

3<sup>ο</sup> πείραμα : οι τιμές των παραμέτρων που διαλέγουμε τώρα είναι  $k\rho_{cyl} = 2$  ,  $k\rho_{obs} = 1.3$  ,  $k\rho_{fil} = 1.7$  και  $k\rho_{aux} = 2.8$  ( $k\rho_{cri} = 2.35$ ) και  $M = 50$ . Πειραματιζόμενοι με διάφορες τιμές του  $N$  παρατηρούμε ότι ακόμα και για μικρές τιμές του το MAS πεδίο συγκλίνει στο πραγματικό. Παρ' όλα αυτά, οι μικρές τιμές, δηλαδή τιμές μικρότερες από 50, δεν αποδίδουν κατάλληλα την ταλάντωση που προβλέπεται θεωρητικά. Έτσι, παίρνουμε πλήθος βοηθητικών πηγών  $N = 120$ . Όπως αναφέρθηκε και στην 4.2.5.1, εκτός των μεγεθών που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα πειράματα, θα δοθεί και ο θεωρητικός τύπος (4.63) και θα συγκριθεί με την πραγματική συμπεριφορά των MAS ρευμάτων.

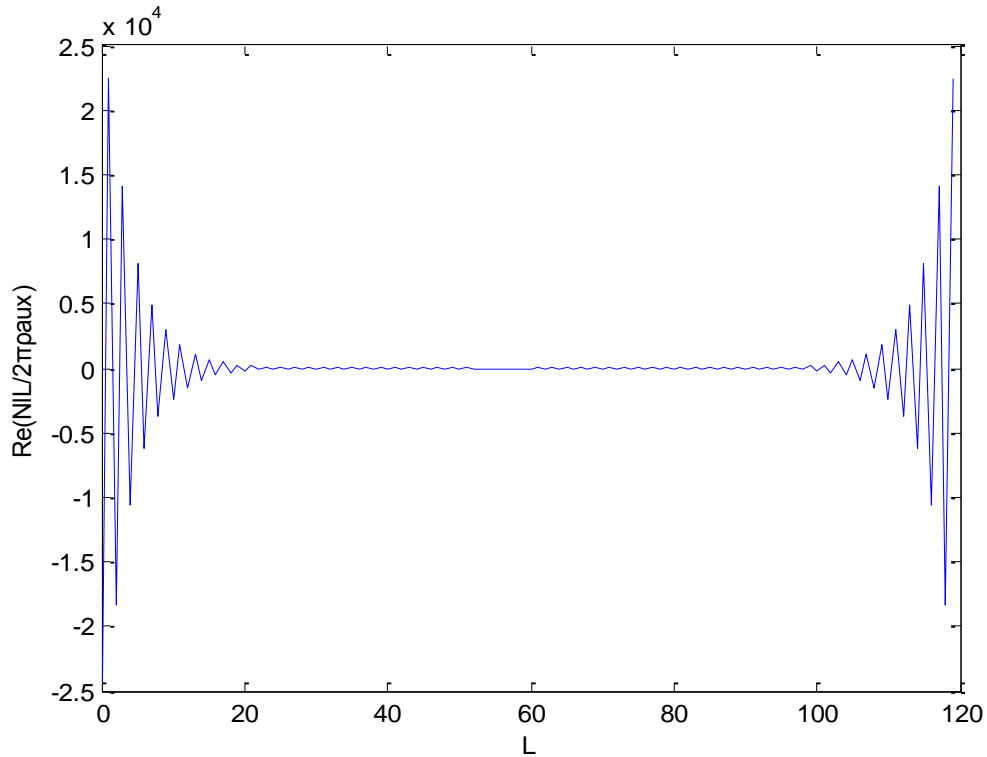


Σχήμα 4.9 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους της επιφανειακής κατανομής ρεύματος στη βοηθητική επιφάνεια για  $\rho_{\text{cyl}} = 2$  ,  $\rho_{\text{obs}} = 1.3$  ,  $\rho_{\text{fil}} = 1.7$  και  $\rho_{\text{aux}} = 2.8$  .”

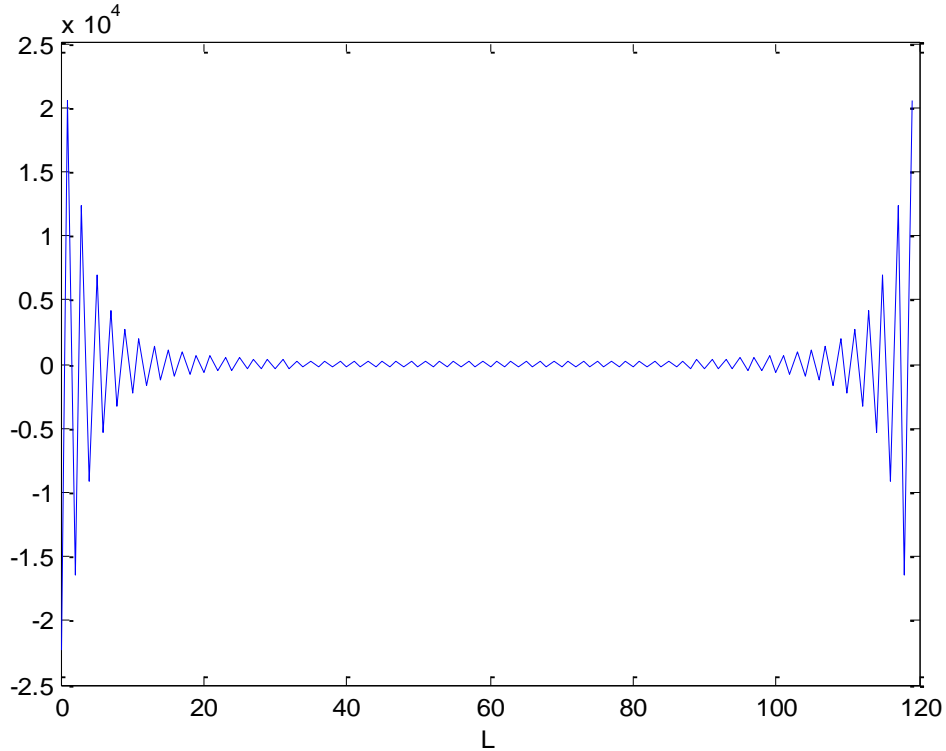




Σχήμα 4.10 : “ Απεικόνιση του φανταστικού και πραγματικού μέρους του MAS πεδίου για  $N = 120$ . Παρατηρούμε ότι παρ’ όλη την απόκλιση της ισοδύναμης ρευματικής κατανομής, το MAS συγκλίνει στο πραγματικό .”



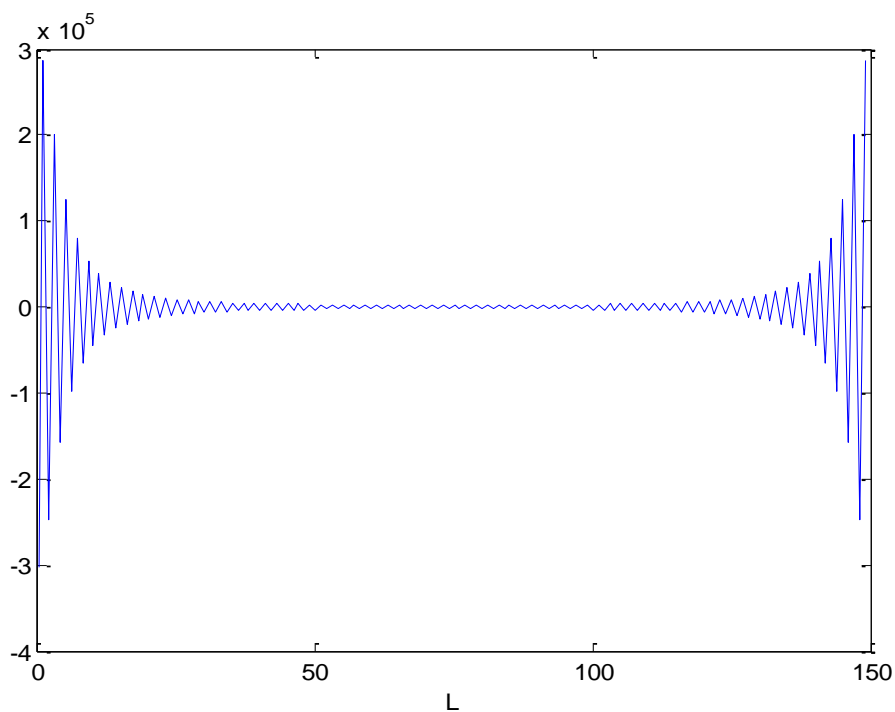
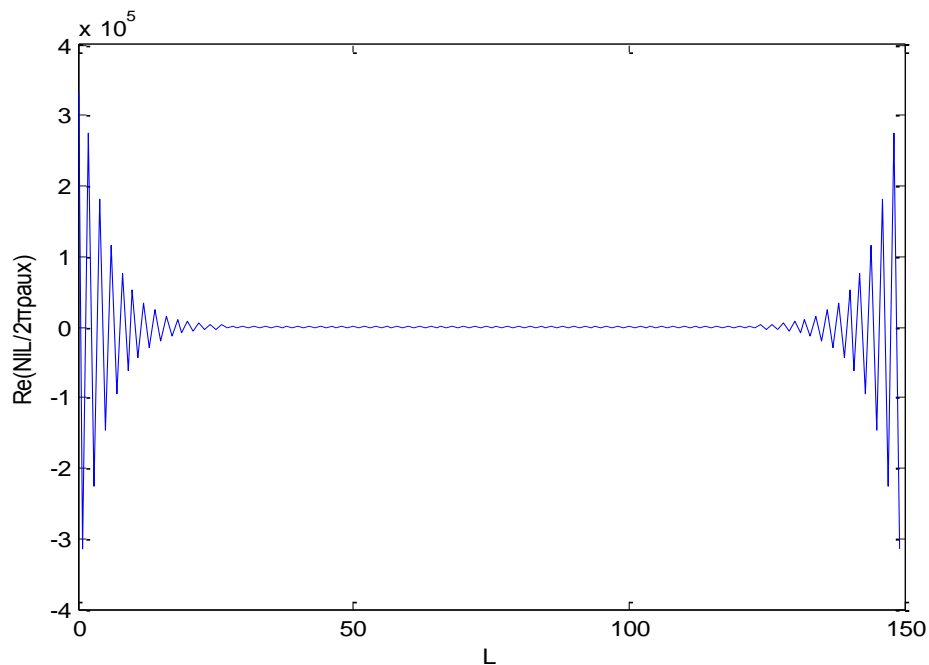
Σχήμα 4.11 : “ Απεικόνιση του πραγματικού μέρους του MAS πεδίου για  $N = 120$ . Παρατηρούμε ότι παρ’ όλη την απόκλιση της ισοδύναμης ρευματικής κατανομής, το προσεγγιστικό πεδίο συγκλίνει στο πραγματικό .”



Σχήμα 4.12 : “ Η ταλάντωση των MAS ρευμάτων όπως περιγράφεται από τον ασυμπτωτικό τύπο (4.63). Το  $N$  είναι και εδώ, 120. Παρατηρούμε με τη βοήθεια του σχήματος 4.11, η συμπεριφορά των MAS ρευμάτων είναι πράγματι αυτή που προβλέπεται από τον (4.63) για  $N \rightarrow \infty$ . Αξίζει να σχολιάσουμε ότι παρόλο που  $t = 1.19$  και  $N = 120$ , το αποτέλεσμα είναι ικανοποιητικό. ”

### 4.5.2.3 Επιπλέον μελέτη του τύπου (4.63)

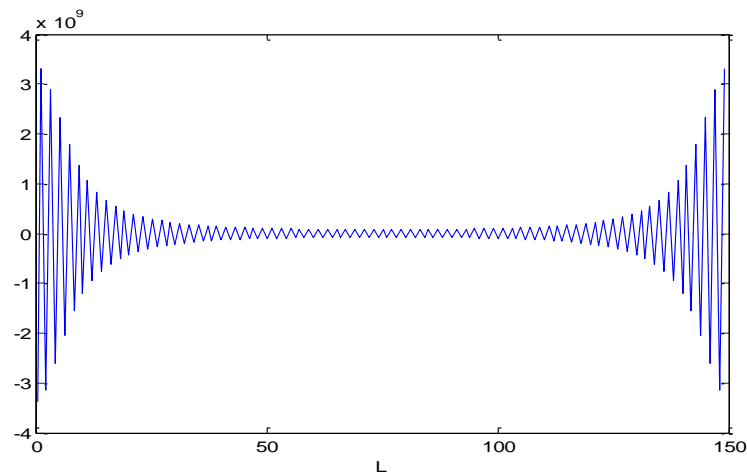
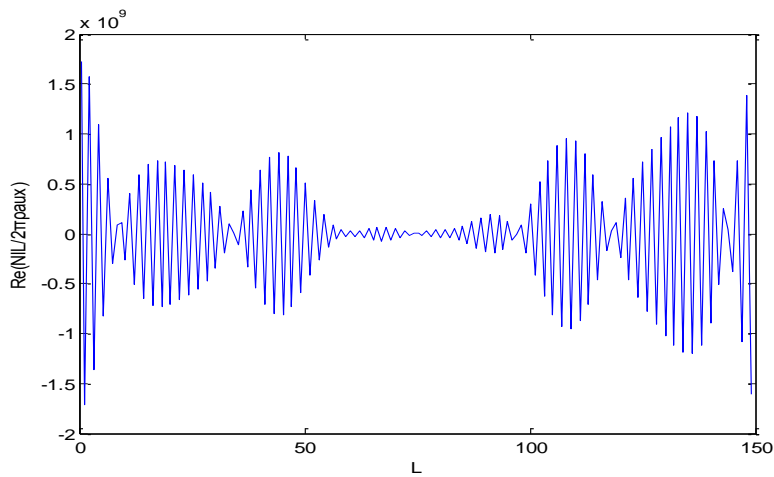
Θα δώσουμε στη συνέχεια κάποια ακόμα διαγράμματα, με σκοπό την περαιτέρω μελέτη πάνω στην ισχύ του ασυμπτωτικού τύπου (4.63), καθώς και για ποιες τιμές των παραμέτρων  $t$  και  $N$  αρχίζει να κάνει αισθητή την παρουσία του το φαινόμενο «round-off».



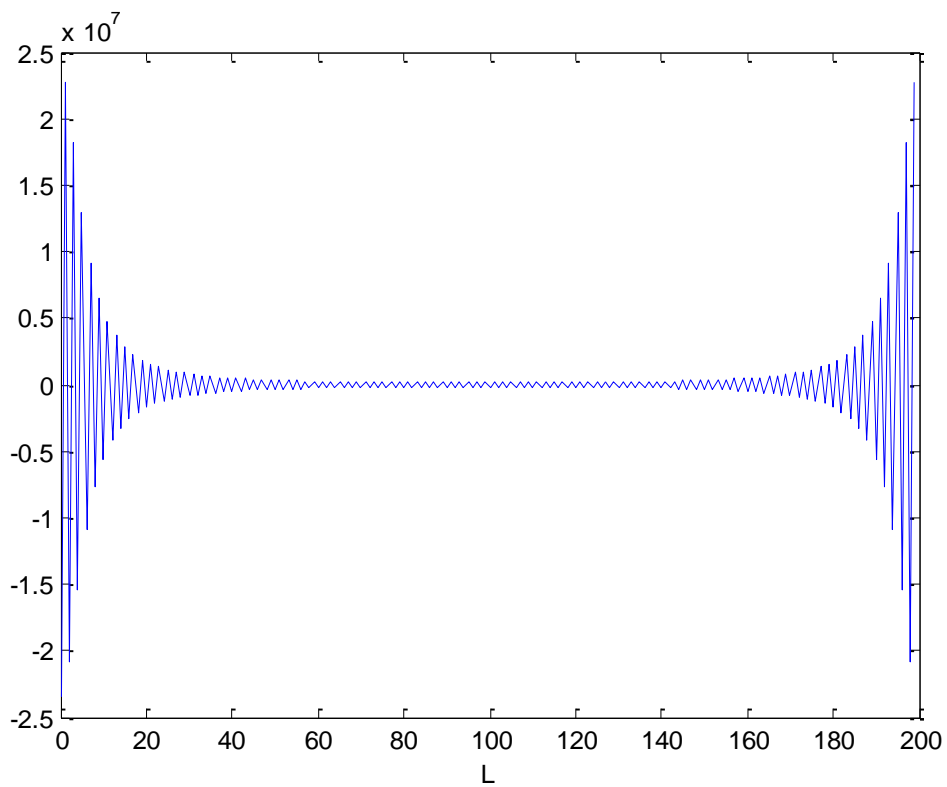
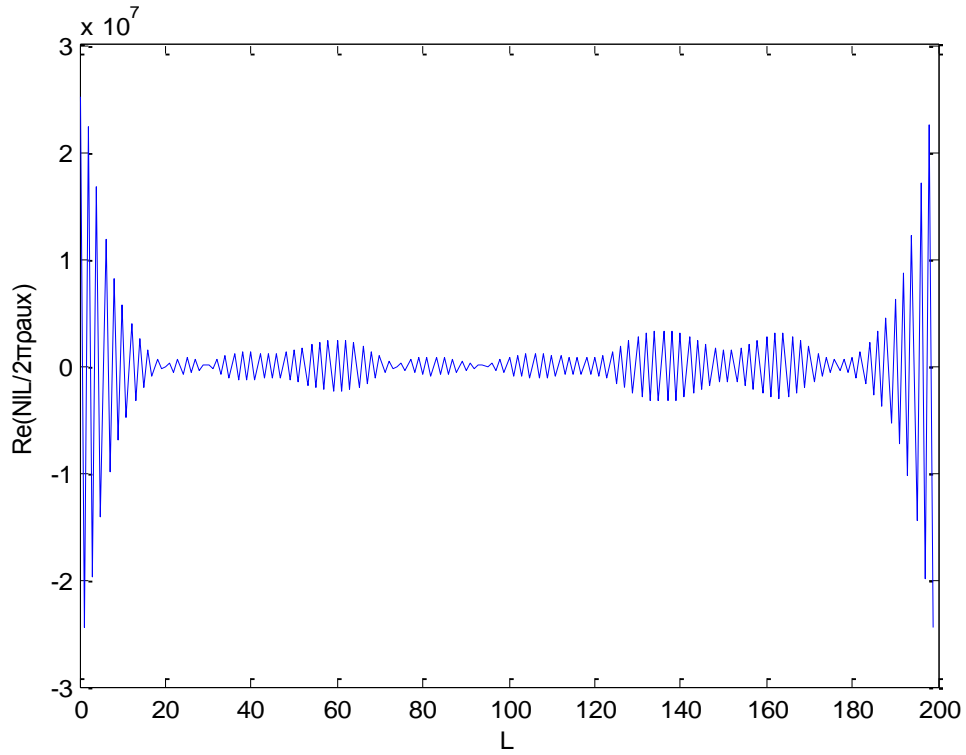
**Σχήμα 4.13** : “ Το πάνω διάγραμμα δείχνει τα MAS ρεύματα για  $t = 1.19$  και  $N = 150$  , ενώ το κάτω τη θεωρητική ταλάντωση (4.63). Και πάλι, η προσέγγιση φαίνεται πολύ ικανοποιητική. ”

Στο σχήμα 4.13 γίνεται φανερό ότι ο ασυμπτωτικός τύπος προσεγγίζει σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό την πραγματική συμπεριφορά των MAS ρευμάτων. Τα γραφήματα προέκυψαν για τιμές των ηλεκτρικών μηκών ίδιες με αυτές του πειράματος 3. Αυτό που άλλαξε είναι το πλήθος των βοηθητικών πηγών. Εδώ, χρησιμοποιήθηκαν 150 βοηθητικές πηγές.

Στα σχήματα 4.14 και 4.15 παρουσιάζεται πως μεγάλες τιμές του  $N$  ή του  $t$  οδηγούν τα εικονιζόμενα ως πραγματικά MAS ρεύματα να παρουσιάζουν επιπλέον, ακαθόριστες ταλαντώσεις, οι οποίες δεν εμφανίζονται όταν προσομοιώνεται ο τύπος (4.63). Όπως σημειώθηκε στην 4.3.2.1, θα περίμενε κανείς ότι όσο μεγαλώνει το  $t$  και το πλήθος των βοηθητικών πηγών, τόσο πιο «κοντά» θα ήταν το ένα γράφημα στο άλλο. Αυτό όμως δε συμβαίνει, καθώς το διάγραμμα που δείχνει τα πραγματικά MAS ρεύματα αλλοιώνεται από την επίδραση φαινομένων τύπου round-off. Είναι απολύτως λογικό οι μεγάλες τιμές των παραμέτρων να κάνουν την επίδραση των φαινομένων αυτών ισχυρότερη.



Σχήμα 4.14 : “ Στο δεύτερο γράφημα παρουσιάζεται η ταλάντωση που προτείνεται από τη σχέση (4.63). Θα περίμενε κανείς η θεωρητικά προβλεπόμενη συμπεριφορά να ταυτίζεται με αυτήν του πάνω διαγράμματος, το οποίο υποτίθεται ότι αναπαριστά την πραγματική συμπεριφορά των MAS ρευμάτων. Αυτό όμως δεν ισχύει, γιατί οι πρόσθετες ταλαντώσεις του πρώτου διαγράμματος εισάγονται λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης του υπολογιστή. ”



Σχήμα 4.15 : “ Όπως στο σχήμα 4.14 έτσι και σ’ αυτό, τα δύο διαγράμματα δεν ταυτίζονται, γιατί το πρώτο έχει επηρεαστεί από το «round-off». Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $t = 1.19$  και  $N = 200$ . ”



## **Κεφάλαιο 5 : Εφαρμογή της Μεθόδου Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (ΕΙΕ)**

### **5.1 Εισαγωγή**

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο ΕΙΕ στο «εσωτερικό» πρόβλημα, όπως αυτό διατυπώθηκε στο κεφάλαιο 3. Στόχος είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων αντίστοιχων με την εργασία [3]. Χαρακτηριστικά της ΕΙΕ μπορεί κανείς να βρει στην παράγραφο 2.4, ενώ για ακόμα περισσότερες λεπτομέρειες προτείνονται οι εργασίες [6], [7] και [8]. Σημειώνουμε τέλος ότι η δομή της παρουσίασης που ακολουθεί είναι ανάλογη με αυτήν της [3].

### **5.2 Επιλυσιμότητα της ΕΙΕ**

Στο κεφάλαιο 3 προσδιορίσαμε την ακριβή επιφανειακή κατανομή ρεύματος που αναπτύσσεται πάνω στον PEC κύλινδρο, της οποίας ξαναγράφουμε για ευκολία τη μοναδική συνιστώσα, αυτήν κατά  $z$  :

$$J_z^s(\varphi_{cyl}) = -\frac{I}{2\pi\rho_{cyl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{fil})}{J_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{obs}} \quad (5.1).$$

Η σειρά στο δεξί μέλος της (5.1) συγκλίνει κι αυτό, γιατί λόγω της (2.44) για μεγάλα  $|n|$  οι όροι συμπεριφέρονται ανάλογα με την ποσότητα  $(\frac{\rho_{fil}}{\rho_{cyl}})^{|n|}$  ενώ εξ' υποθέσεως ισχύει ότι  $\rho_{fil} < \rho_{cyl}$  (με αποτέλεσμα να συμπεριφέρεται σαν τη γνωστή γεωμετρική σειρά).

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι η μέθοδος ΕΙΕ έχει πάντα λύση, η οποία μάλιστα θα συγκλίνει στο πραγματικό πεδίο. Έτσι, σύμφωνα με την παρουσίαση της παραγράφου 2.4, θεωρούμε κατ' αρχήν ότι στην επιφάνεια του σκεδαστή έχει αναπτυχθεί μια άγνωστη προς το παρόν ρευματική κατανομή της μορφής  $\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_s(\varphi_{cyl})$ . Κατά τα γνωστά, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που μετράται στο σημείο παρατήρησης  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs})$  είναι :

$$E_z(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = -\frac{k^2}{4\omega\epsilon_0} \left[ IH_0^{(1)}(kR_{obs,fil}) + \rho_{cyl} \int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(kR_{cyl,obs}) J_s(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl} \right] \quad (5.2).$$

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγική παράγραφο 2.4, η ζητούμενη ολοκληρωτική εξίσωση προκύπτει άμεσα από το μηδενισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου πάνω σε κάποια βοηθητική επιφάνεια στο εξωτερικό του σκεδαστή. Αν διαλέξουμε ως βοηθητική επιφάνεια έναν κυκλικό κύλινδρο, ομόκεντρο του PEC κυλίνδρου και με ακτίνα  $\rho_{aux}$ , τότε παίρνοντας  $E_z(\rho_{aux}, \varphi_{aux}) = 0$ , καταλήγουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση :

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux}) J_s(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl} = -\frac{I}{\rho_{cyl}} H_0^{(1)}(kR_{fil,aux}) \quad , \quad -\pi < \varphi_{aux} < \pi \quad (5.3).$$

Η εξίσωση (5.3) είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους. Επειδή η βοηθητική επιφάνεια επιλέγεται να είναι εξωτερική του σκεδαστή, δηλαδή  $\rho_{aux} > \rho_{cyl}$ , έπεται ότι  $R_{cyl,aux} \neq 0$  κι επομένως ο πυρήνας της (5.3),  $H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux})$  είναι μια αναλυτική συνάρτηση, με αποτέλεσμα να ορίζει ένα *συμπαγή ολοκληρωτικό τελεστή*. Επιπλέον, ο πυρήνας αυτός είναι ένας πυρήνας διαφοράς, υπό την έννοια ότι εξαρτάται μόνον από τη διαφορά  $\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}$  και όχι από καθεμία μεταβλητή ξεχωριστά, ενώ ταυτόχρονα είναι και  $2\pi$ -περιοδικός. Έτσι, όπως και στο κεφάλαιο 4, η εξίσωση λύνεται επακριβώς. Η διαδικασία είναι απλή και ταυτόσημη (ως προς τα βήματα) με αυτήν που περιγράφεται στην 4.2.1, απαιτεί δε την ανάπτυξη σε σειρά Fourier των συναρτήσεων  $H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux})$  και  $H_0^{(1)}(kR_{fil,aux})$ . Αυτό βέβαια είναι εύκολο καθώς αποτελεί άμεση εφαρμογή του Addition Theorem :

$$H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{cyl}) H_n^{(1)}(k\rho_{aux}) e^{in(\varphi_{cyl} - \varphi_{aux})} \quad (5.4)$$

και

$$H_0^{(1)}(kR_{fil,aux}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{fil}) H_n^{(1)}(k\rho_{aux}) e^{in\varphi_{aux}} \quad (5.5).$$

Αν και δε θα επαναλάβουμε τη διαδικασία, μπορούμε, πριν καταγράψουμε τη λύση, να πούμε ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης,  $J_s(\varphi_{cyl})$  είναι μια  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση και επομένως αναπτύσσεται σε σειρά Fourier, οι συντελεστές της οποίας είναι ανάλογοι του λόγου των συντελεστών Fourier των σειρών της (5.5) διά των συντελεστών Fourier των σειρών της (5.4). Έτσι, οι μη μηδενικοί όροι  $H_n^{(1)}(k\rho_{aux})$  διαγράφονται και το αποτέλεσμα είναι :

$$J_s(\varphi_{cyl}) = -\frac{I}{2\pi\rho_{cyl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{fil})}{J_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{cyl}} \quad (5.6).$$

Δείξαμε δηλαδή ότι η ΕΙΕ έχει λύση *ανεξάρτητα από τη θέση της βοηθητικής επιφάνειας*, ενώ η επιφανειακή κατανομή ρεύματος  $J_s(\varphi_{cyl})$  ταυτίζεται με την πραγματική( βλ. σχέσεις (5.1) και (5.6)). Ισχύουν επομένως ακριβώς τα αντίστοιχα συμπεράσματα με την [3] για το πρόβλημα που μελετάμε. Αυτό συμβαίνει, γιατί, όπως και στην [3], ικανοποιείται το Κριτήριο του Picard, το οποίο είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την  $\mathcal{L}^2$ -επιλυσιμότητα της ΕΙΕ. Αυτό δεν ισχύει στη γενική περίπτωση για τη MAS επειδή, όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ολοκληρωτική εξίσωση είναι επιλύσιμη μόνον όταν  $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ . Για περισσότερες σχετικές λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο παράρτημα Δ. Σημειώνουμε ότι και η ολοκληρωτική εξίσωση (5.3) καθίσταται μη επιλύσιμη στις ειδικές περιπτώσεις όπου  $J_n(k\rho_{cyl})$ , σ' αυτές δηλαδή που αντιστοιχούν σε συχνότητες συντονισμού της κοιλότητας. Παρ' όλα αυτά, για οποιαδήποτε εκλογή της ηλεκτρικής ακτίνας της βοηθητικής επιφάνειας η (5.3) έχει πάντα λύση.



### Παρατήρηση 1 :

Αν κανείς ήθελε να εφαρμόσει τη μέθοδο που παρουσιάστηκε στην 4.2.2, για να αποδείξει την ενδεχόμενη μη επιλυσιμότητα της (5.3), δε θα κατέληγε στο ζητούμενο αποτέλεσμα, καθώς δε θα μπορούσε να φτάσει σε άτοπο παρόμοιο μ' αυτό της 4.2.2. Συγκεκριμένα λοιπόν, στην (5.3) ιδιόμορφα σημεία του δεξιού μέλους εμφανίζονται όταν  $R_{fil,aux} = 0$ , ή ισοδύναμα όταν,

$$\cos(\varphi_{aux}) = \frac{\rho_{aux}^2 + \rho_{fil}^2}{2\rho_{aux}\rho_{fil}} \quad (5.7)$$

απ' όπου και πάλι με τη βοήθεια της ταυτότητας (4.25) βρίσκουμε ότι η (5.7) ισχύει για  $\varphi_{aux} = \Psi^{(n,+)}$  και  $\varphi_{aux} = \Psi^{(n,-)}$ , με

$$\Psi^{(n,\pm)} = 2n\pi \pm i \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_{aux}^2 + \rho_{fil}^2}{2\rho_{aux}\rho_{fil}}\right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.8).$$

Τα σημεία αυτά σημειώνονται με μαύρες κουκκίδες στο Σχήμα 5.1 στην επόμενη σελίδα.

Θεωρώντας ότι η λύση,  $J(\varphi_{aux})$  είναι συνεχής τότε λόγω του θεωρήματος της 2.5.4 οι πιθανές ιδιομορφίες του αριστερού μέλους της (5.3), αντίστοιχα με την περίπτωση του κεφαλαίου 4, βρίσκονται στα σημεία  $\varphi_{aux} = \xi^{(n,+)}$  και  $\varphi_{aux} = \xi^{(n,-)}$  όπου,

$$\xi^{(n,\pm)} = \varphi_{cyl} + 2n\pi \pm i \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{aux}\rho_{cyl}}\right), n \in \mathbb{Z} \text{ και } -\pi < \varphi_{cyl} < \pi \quad (5.9).$$

Καθώς λοιπόν η μεταβλητή  $\varphi_{cyl}$  διατρέχει το διάστημα  $(-\pi, \pi)$  κι έτσι τα σημεία που περιγράφονται από την (5.9) σχηματίζουν δύο παράλληλες ευθείες γραμμές και συνακόλουθα, το αριστερό μέλος της (5.3) είναι αναλυτική συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή  $\varphi_{aux}$  στη λωρίδα μεταξύ των δύο αυτών ευθειών, δηλαδή, ισοδύναμα, όταν  $\operatorname{Im}\{\varphi_{aux}\} < |\operatorname{Im}\{\xi^{(n,\pm)}\}|$ . Και πάλι, λόγω αναλυτικής επέκτασης, θα πρέπει η συνάρτηση στο δεξί μέλος της (5.3) να είναι κι αυτή αναλυτική στην ίδια περιοχή, ενώ ισχύει ο περιορισμός :  $\rho_{fil} < \rho_{cyl} < \rho_{aux}$ .

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι απαιτήσεις αυτές ικανοποιούνται ταυτόχρονα, σε αντίθεση με ό,τι τελικά συνέβη στο κεφάλαιο 4, με αποτέλεσμα να μη φτάνουμε σε κάποια αντίφαση. Θα δείξουμε δηλαδή ότι  $|\operatorname{Im}\{\xi^{(n,\pm)}\}| < |\operatorname{Im}\{\Psi^{(n,\pm)}\}|$  με την υπόθεση ότι :  $\rho_{fil} < \rho_{cyl} < \rho_{aux}$ .

Πράγματι, για να ισχύει η παραπάνω ανισότητα λόγω των σχέσεων (5.8) και (5.9) αρκεί να ισχύει η ανίσωση :

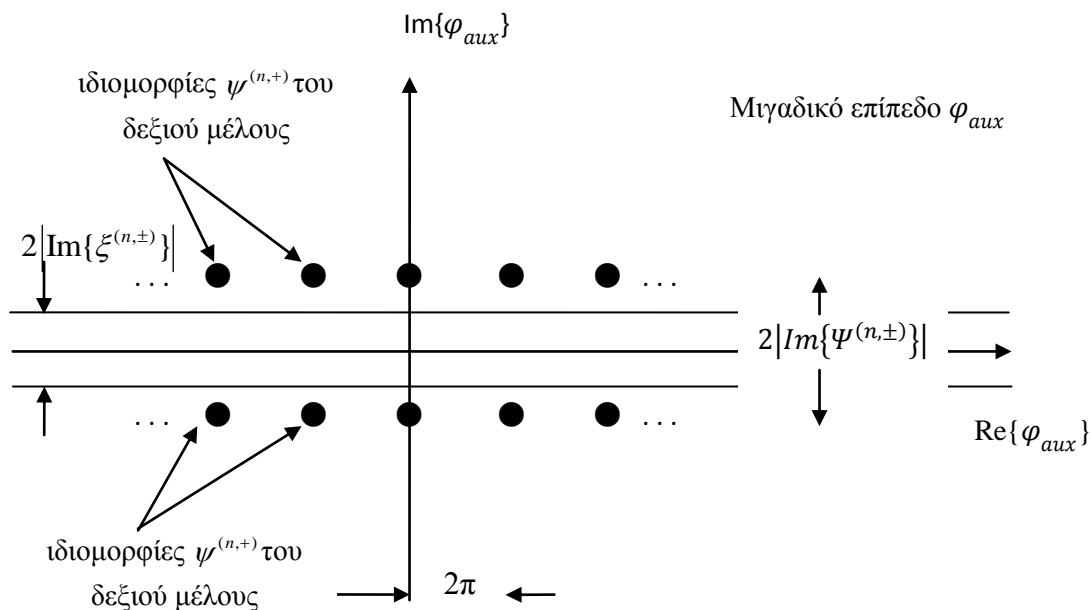
$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2}{2\rho_{aux}\rho_{cyl}}\right) < \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_{aux}^2 + \rho_{fil}^2}{2\rho_{aux}\rho_{fil}}\right) \quad (5.10)$$

κι επειδή, όπως ήδη έχουμε εξηγήσει, η συνάρτηση  $f^{-1}(x) = \operatorname{arccosh}(x)$  είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε :

$$\begin{aligned} (5.10) &\Leftrightarrow \rho_{aux}\rho_{fil}(\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2) < \rho_{aux}\rho_{cyl}(\rho_{aux}^2 + \rho_{fil}^2) \\ &\Leftrightarrow (\rho_{aux}^2 - \rho_{cyl}\rho_{fil})(\rho_{fil} - \rho_{cyl}) < 0, \end{aligned}$$

που ισχύει λόγω του περιορισμού :  $0 < \rho_{fil} < \rho_{cyl} < \rho_{aux}$  .

Δείξαμε επομένως ότι τα ιδιόμορφα σημεία του δεξιού μέλους της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.3) βρίσκονται εκτός της λωρίδας αναλυτικότητας του αριστερού της μέλους. Παρ' όλα αυτά, η αδυναμία απόδειξης περί μη επιλυσιμότητας της εξίσωσης (5.3) με τη συγκεκριμένη μέθοδο, σε καμία περίπτωση δε θα πρέπει να εκληφθεί ως απόδειξη γενικής επιλυσιμότητας, κάτι άλλωστε λογικά αβάσιμο. Το μόνο συμπέρασμα που θα πρέπει να εξαχθεί, αν φυσικά δεν έχει προηγηθεί η μελέτη της παραγράφου 5.2, είναι ότι δεν υπάρχει κάποιος εκ των προτέρων λόγος που να μας υποδεικνύει πως η ΕΙΕ δεν είναι επιλύσιμη.



**Σχήμα 5.1 :** “ Στο σχήμα αυτό φαίνεται ότι, αντίθετα με ότι συμβαίνει στη MAS, οι ιδιομορφίες του δεξιού μέλους που σημειώνονται στο παραπάνω σχήμα με μαύρες κουκίδες βρίσκονται εκτός από την «λωρίδα αναλυτικότητας» μήκους  $2|Im\{\xi^{(n,\pm)}\}|$ . ”

### 5.3 Διακριτή έκδοση της ΕΙΕ

Στην παράγραφο αυτή, αφού πρώτα διακριτοποιήσουμε την ΕΙΕ, θα μελετήσουμε αν αυτή επιδέχεται πάντα λύση, καθώς και αν αυτή η λύση συγκλίνει κατά κάποιο τρόπο ( που θα καθορίσουμε παρακάτω,) στην πραγματική.

Το πρώτο βήμα, όπως είπαμε, είναι η διακριτοποίηση της (5.3). Όπως και στην [3] έτσι και εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Nyström, η οποία χρησιμοποιεί τον κανόνα τετραγωνισμού, γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως *rectangular rule*. Θεωρούμε δηλαδή  $N$  ισαπέχοντα σημεία πάνω στον κύλινδρο κι έτσι το ολοκλήρωμα στην (5.3) καταλήγει στο γραμμικό σύστημα :

$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l H_0^{(1)}(kb_{l,p}) = -IH_0^{(1)}(kd_p), \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.11).$$

Όπου,

$$b_{p,l} = b_{l,p} = \sqrt{\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2 - 2\rho_{aux}\rho_{cyl}\cos\left(\frac{2\pi(p-l)}{N}\right)} \quad p, l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.12)$$

ενώ, σε αντίθεση με την περίπτωση της MAS, είναι :

$$d_p = \sqrt{\rho_{aux}^2 + \rho_{fil}^2 - 2\rho_{aux}\rho_{fil}\cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right)} \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.13).$$

Σημειώνουμε ότι τα άγνωστα ρεύματα  $I_l$  είναι τέτοια, ώστε :

$$I_l = \frac{2\pi\rho_{cyl}}{N} J_s\left(\frac{2\pi l}{N}\right), \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.14)$$

όπου  $J_s(\varphi_{cyl})$  είναι, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, η πυκνότητα ρεύματος που αναπτύσσεται στην επιφάνεια του σκεδαστή. Θα μπορούσαμε βέβαια να καταλήξουμε στην (5.11) και με έναν άλλο, πιο άμεσο τρόπο : να ορίσουμε τα άγνωστα  $N$  διακριτά (νηματοειδή) ρεύματα  $I_l$  πάνω στον PEC κύλινδρο έτσι, ώστε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου να μηδενίζεται σε  $N$  αντίστοιχα σημεία πάνω στη βοηθητική επιφάνεια, ενώ η ρευματική κατανομή  $J_s(\varphi_{cyl})$  θα προκύπτει με τρόπο ανάλογο της (4.50), με την προφανή διαφοροποίηση ότι όπου  $\varphi_{aux}$  θέτουμε  $\varphi_{cyl}$  και  $\rho_{cyl}$  στη θέση της  $\rho_{aux}$ .

Επειδή ο πίνακας του συστήματος (5.11),  $H_0^{(1)}(kb_{l,p})$  είναι κυκλικός αυτό λύνεται αναλυτικά (βλ. παράγραφο 4.3) :

$$\frac{I_l}{I} = \begin{cases} I^{(0)} + 2 \sum_{m=1}^{(N-1)/2} I^{(m)} \cos\left(\frac{2\pi lm}{N}\right), l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (N \text{ περιττός}) & (5.15.1) \\ I^{(0)} + (-1)^l I^{(N/2)} + 2 \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} I^{(m)} \cos\left(\frac{2\pi lm}{N}\right), l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (N \text{ άρτιος}) & (5.15.2) \end{cases}$$

Όπου, σε πλήρη αντιστοιχία με το σύστημα που προέκυψε με την εφαρμογή της διακριτής έκδοσης της MAS, ισχύει :

$$I^{(m)} = \frac{1}{N} \frac{D^{(m)}}{B^{(m)}} \quad (5.16)$$

με

$$B^{(m)} = J_m(k\rho_{cyl})H_m^{(1)}(k\rho_{aux}) + \left( \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \right) J_{nN+m}(k\rho_{cyl})H_{nN+m}^{(1)}(k\rho_{aux}) \quad (5.17)$$

και

$$D^{(m)} = -[J_m(k\rho_{fil})H_m^{(1)}(k\rho_{aux}) + \left( \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \right) J_{nN+m}(k\rho_{fil})H_{nN+m}^{(1)}(k\rho_{aux})] \quad (5.18).$$

Οι ποσότητες  $B^{(m)}$  και  $D^{(m)}$  για μεγάλα  $N$  συμπεριφέρονται ανάλογα με τους όρους  $J_m(k\rho_{cyl})H_m^{(1)}(k\rho_{aux})$  και  $-J_m(k\rho_{fil})H_m^{(1)}(k\rho_{aux})$  αντίστοιχα, καθώς οι σειρές στα δεξιά μέλη των (5.17) και (5.18) τείνουν στο μηδέν καθώς  $N \rightarrow \infty$ . Πράγματι στο όριο αυτό, κάθε όρος της πρώτης σειράς συμπεριφέρεται, εφαρμόζοντας τους γνωστούς ασυμπτωτικούς τύπους του κεφαλαίου 2, ανάλογα με την ποσότητα  $(\rho_{cyl}/\rho_{aux})^m((\rho_{cyl}/\rho_{aux})^N)^{|n|}$ , ενώ αυτοί της δεύτερης σειράς ανάλογα με την  $(\rho_{fil}/\rho_{cyl})^m((\rho_{fil}/\rho_{cyl})^N)^{|n|}$ . Επομένως,

$$I^{(m)} \sim -\frac{1}{N} \frac{J_m(k\rho_{fil})}{J_m(k\rho_{cyl})} \quad (N \rightarrow \infty) \quad (5.19).$$

Οπότε το όριο :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{NI_l}{2\pi\rho_{cyl}} \right) \quad \left( \varphi_{cyl} = \frac{2\pi l}{N} \right) \quad (5.20)$$

υπάρχει, είναι ανεξάρτητο της τιμής της  $\rho_{aux}$  και μάλιστα ισούται με :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{NI_l}{2\pi\rho_{cyl}} \right) = J_s(\varphi_{cyl}) \quad (5.21).$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου ισχύουν και στην περίπτωση αυτή. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι είτε η συνεχής είτε η διακριτή έκδοση της ΕΙΕ είναι πάντα επιλύσιμη, ανεξάρτητα δηλαδή από το πόσο μακριά ή κοντά στο σκεδαστή θα επιλεγεί η βοηθητική επιφάνεια, δηλαδή για οποιοδήποτε  $\rho_{aux}$  ικανοποιεί απλά τον περιορισμό  $\rho_{aux} > \rho_{cyl}$ .

#### 5.4 Αναλυτική επέκταση του σκεδαζόμενου πεδίου

Έστω  $E_z^S$  το θεωρητικά υπολογισμένο σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του σκεδαστή, το οποίο σύμφωνα με τη σχέση (3.16) είναι :

$$E_z^S = \frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{fil})H_n^{(1)}(k\rho_{cyl})}{J_n(k\rho_{cyl})} J_n(k\rho_{obs}) e^{jn\varphi_{obs}} \quad (5.22).$$

Όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όταν η βοηθητική επιφάνεια περιλαμβάνει την ιδιομορφία της αναλυτικής συνέχισης του  $E_z^S$  ως προς τη μεταβλητή  $\rho_{obs}$ , η οποία βρίσκεται στη θέση  $(\rho_{cri}, 0)$  προκύπτει μη επιλύσιμη ολοκληρωτική εξίσωση κατά την εφαρμογή της συνεχούς έκδοσης της MAS και αφύσικες ταλαντώσεις κατά την εφαρμογή της διακριτής της εκδοχής. Στις παραγράφους 5.2 και 5.3 δείξαμε ότι τέτοια φαινόμενα δεν παρατηρούνται στην ΕΙΕ (συνεχή ή διακριτή). Αυτό, όπως θα δειχθεί παρακάτω, μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι η αναλυτική επέκταση του συνολικού πεδίου  $E_z$  δε μηδενίζεται στο εξωτερικό του κυλίνδρου( σε αντίθετη περίπτωση θα μηδενιζόταν παντού). Με μια άλλη διατύπωση, το απ' ευθείας πεδίο, το οποίο είναι καλά ορισμένο παντού, εκτός βέβαια από τη θέση της νηματοειδούς πηγής  $(\rho_{fil}, 0)$ , άρα και σε όλη την περιοχή εξωτερικά του σκεδαστή, δεν αναιρείται από την αναλυτική επέκταση του σκεδαζόμενου πεδίου.

Το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του PEC κυλίνδρου, σύμφωνα με την (5.2) είναι:

$$B = -\frac{k^2 \rho_{cyl}}{4\omega \varepsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(kR_{cyl,obs}) J_s(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl} \quad (\rho_{obs} < \rho_{cyl}) \quad (5.23)$$

ενώ στο εξωτερικό του,

$$A = -\frac{k^2 \rho_{cyl}}{4\omega \varepsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(kR_{cyl,obs}) J_s(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl} \quad (\rho_{obs} > \rho_{cyl}) \quad (5.24).$$

Όπως και στην [3], θα υπολογίσουμε αναλυτικά τα  $A$  και  $B$  και θα δείξουμε ότι είναι διαφορετικά. Πράγματι, εφαρμόζοντας το Addition Theorem για την πρώτη περίπτωση έχουμε :

$$H_0^{(1)}(kR_{cyl,obs}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{obs}) H_n^{(1)}(k\rho_{cyl}) e^{in(\varphi_{cyl}-\varphi_{obs})} \quad (\rho_{obs} < \rho_{cyl}) \quad (5.25)$$

οπότε η (5.23) γίνεται :

$$B = -\frac{k^2 \rho_{cyl}}{4\omega \varepsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{obs}) H_n^{(1)}(k\rho_{cyl}) e^{in(\varphi_{cyl}-\varphi_{obs})} J_s(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl} \quad (\rho_{obs} < \rho_{cyl}) \quad (5.26).$$

Αν στην τελευταία σχέση αλλάξουμε τη σειρά άθροισης και ολοκλήρωσης και στη συνέχεια παρατηρήσουμε πως η ποσότητα  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\varphi_{cyl}} J_s(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl}$  ισούται με τον  $n$ -οστό συντελεστή Fourier, ο οποίος προκύπτει άμεσα από την (5.6) πολλαπλασιασμένο με  $2\pi$ , προκύπτει :

$$B = \frac{k^2 I}{4\omega \varepsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{obs}) H_n^{(1)}(k\rho_{cyl}) \frac{J_n(k\rho_{fil})}{J_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{obs}} \quad (\rho_{obs} < \rho_{cyl}) \quad (5.27).$$

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη περίπτωση έχουμε :

$$H_0^{(1)}(kR_{cyl,obs}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k\rho_{obs}) J_n(k\rho_{cyl}) e^{in(\varphi_{cyl}-\varphi_{obs})} \quad (\rho_{obs} > \rho_{cyl}) \quad (5.28)$$

και με διαδικασία, ανάλογη με την προηγούμενη, παίρνουμε :

$$A = \frac{k^2 I}{4\omega \varepsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{fil}) H_n^{(1)}(k\rho_{obs}) e^{in\varphi_{obs}} \quad (\rho_{obs} > \rho_{cyl}) \quad (5.29).$$

Οι σχέσεις (5.27) και (5.29) αποδεικνύουν το ζητούμενο, ότι δηλαδή οι  $A$  και  $B$  διαφέρουν. Μάλιστα, αν εφαρμόσουμε το Addition Theorem στο απ' ευθείας πεδίο, τότε συγκρινόμενο με το σκεδαζόμενο πεδίο, όπως περιγράφεται μέσω της ποσότητας  $A$  στη σχέση (5.29) είναι μεγέθη αντίθετα.

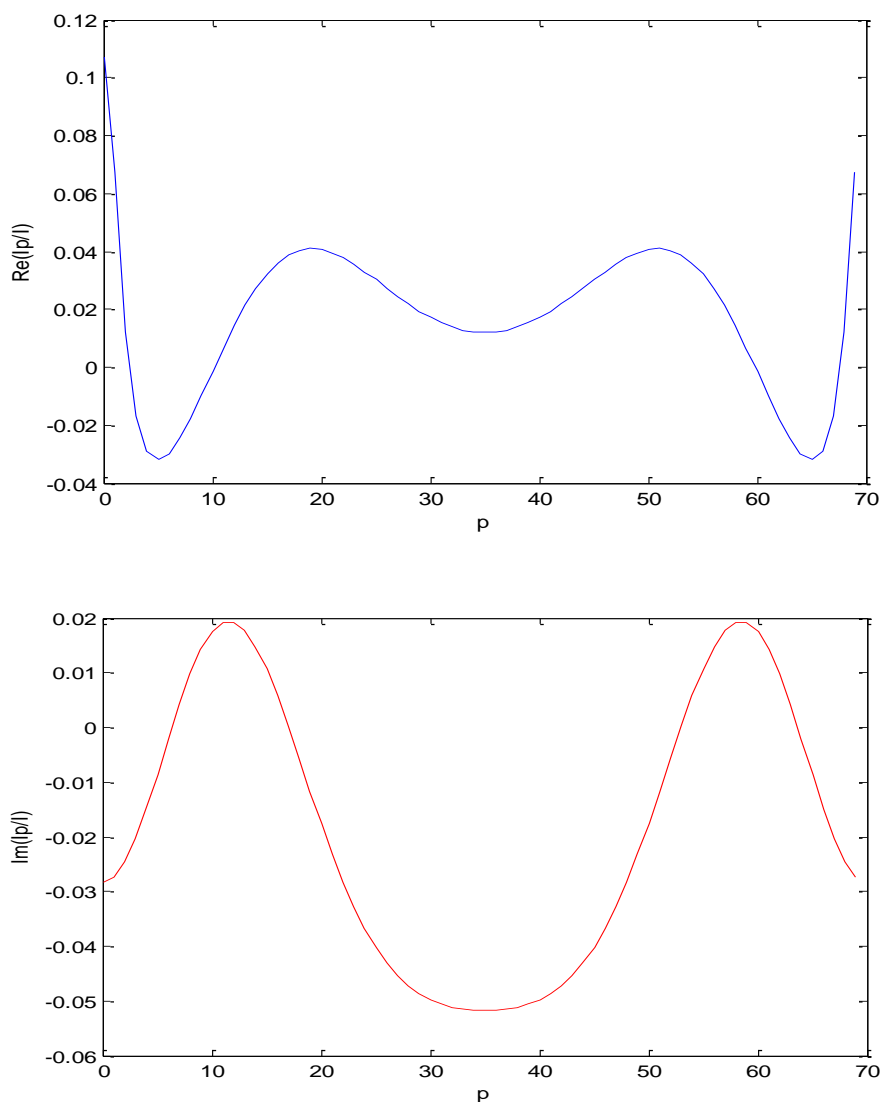
### Παρατήρηση 1 :

Η αλλαγή στη σειρά άθροισης και ολοκλήρωσης που πραγματοποιήθηκε στις παραπάνω δύο περιπτώσεις είναι δεκτή καθώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος

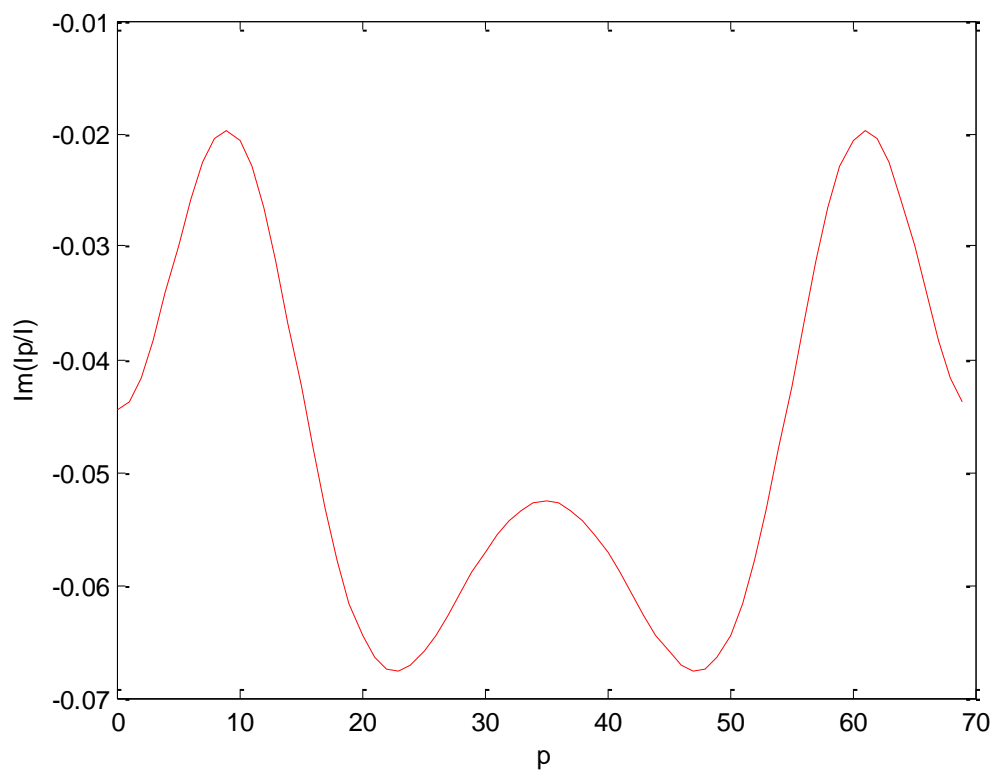
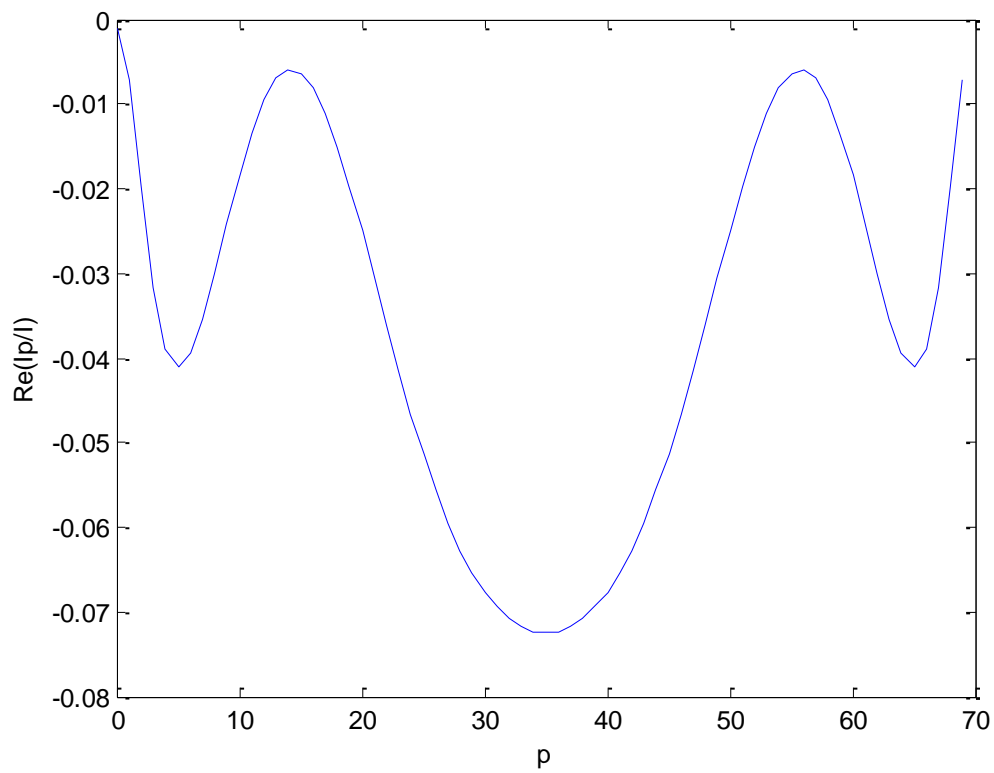
του *Berro Levi*, κάτι το οποίο εύκολα μπορεί να αποδειχθεί με χρήση των ασυμπτωτικών σχέσεων (2.44) και (2.45).

## 5.5 Αριθμητική μελέτη

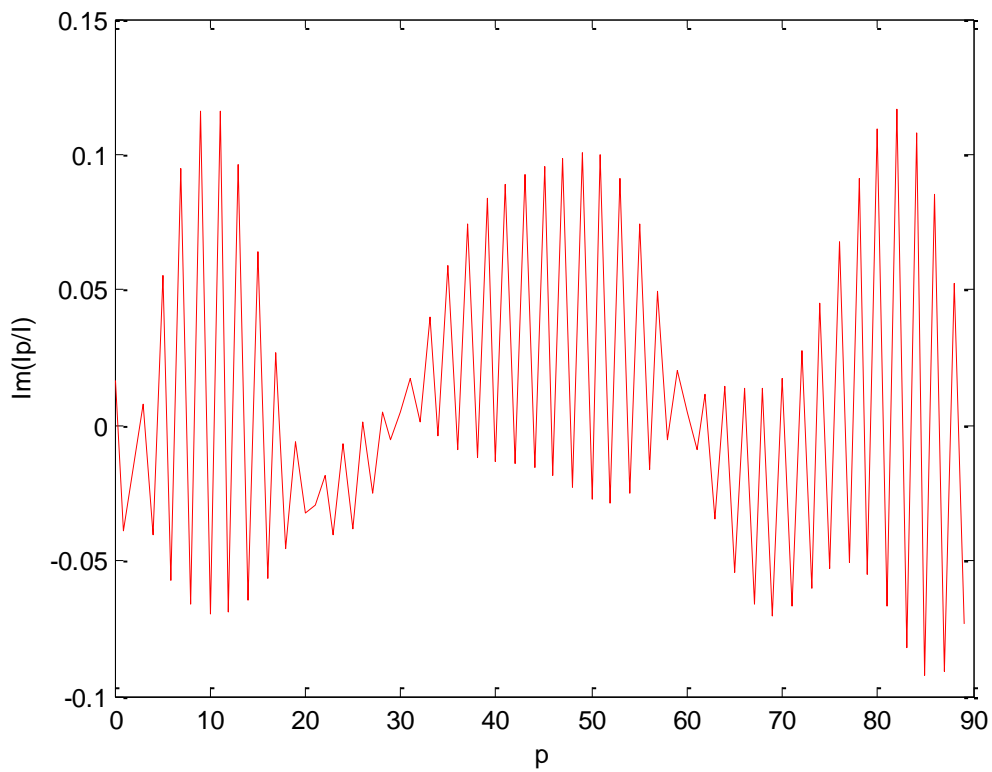
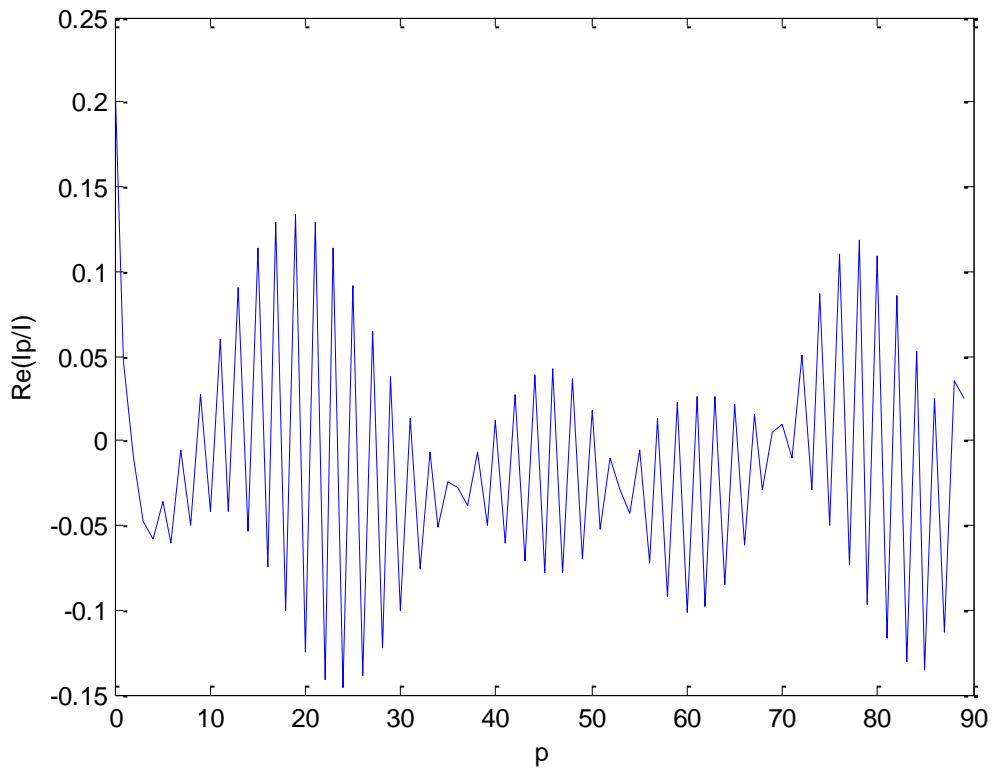
Στην παράγραφο 5.3 δείξαμε ότι η διακριτή έκδοση της ΕΙΕ είναι πάντα επιλύσιμη. Μάλιστα η ισοδύναμη ρευματική κατανομή συγκλίνει στην πραγματική που αναπτύσσεται πάνω στην επιφάνεια του PEC κυλίνδρου, ανεξάρτητα δηλαδή από το πόσο μακριά θα επιλεγεί η βοηθητική επιφάνεια, δηλαδή για οποιοδήποτε  $\rho_{aux}$  είναι τέτοιο, ώστε να ικανοποιεί τον περιορισμό  $\rho_{aux} > \rho_{cyl}$ . Θα επιβεβαιώσουμε το θεωρητικό αυτό αποτέλεσμα δείχνοντας στα σχήματα 5.2 και 5.3 ότι για περιπτώσεις όπου  $\rho_{cri} < \rho_{aux}$  η ισοδύναμη ρευματική κατανομή παρουσιάζει ομαλή συμπεριφορά. Στο Σχήμα 5.4 η κατανομή που προκύπτει από τα ρεύματα  $I_p$  παρουσιάζει ταλαντώσεις, οι οποίες ερμηνεύονται ως αποτελέσματα του φαινομένου «ground-off».



**Σχήμα 5.2** : “ Απεικόνιση των κανονικοποιημένων ρευμάτων  $I_p/I$  για  $k\rho_{cyl} = 2$  ,  $k\rho_{obs} = 1.3$  ,  $k\rho_{fil} = 1.7$  και  $k\rho_{aux} = 2.8$  ( $k\rho_{cri} = 2.35$ ). Το πλήθος των ρευμάτων είναι  $N = 70$ .”



Σχήμα 5.3 : “ Απεικόνιση των κανονικοποιημένων ρευμάτων  $I_p/I$  για  $k\rho_{cyl} = 2.2$  ,  $k\rho_{obs} = 1.8$  ,  $k\rho_{fil} = 1.6$  και  $k\rho_{aux} = 3.5$  ( $k\rho_{cri} = 3.03$ ). Το πλήθος των ρευμάτων είναι  $N = 70$ .”



Σχήμα 5.4 : “ Οι τιμές των παραμέτρων είναι  $k\rho_{cyl} = 1.9$  ,  $k\rho_{obs} = 1.5$  ,  $k\rho_{fil} = 1.75$  και  $k\rho_{aux} = 4$  ( $k\rho_{cri} = 2.06$ ). Το πλήθος των ρευμάτων είναι  $N = 90$ . Οι εμφανιζόμενες ταλαντώσεις είναι απόρροια του round-off.”



## 5.6 Συμπεράσματα

Στα κεφάλαια 4 και 5, τα οποία αποτελούν και την «καρδιά» κατά κάποιο τρόπο της διπλωματικής αυτής εργασίας, είδαμε πως τόσο η MAS όσο και η EIE όταν εφαρμόζονται στο ίδιο «εσωτερικό» πρόβλημα σκέδασης από τέλεια αγώγιμο κυκλικό κύλινδρο απείρων διαστάσεων κατά  $z$  χρησιμοποιούν μια βοηθητική επιφάνεια εξωτερική της πραγματικής επιφάνειας του σκεδαστή. Παρ' όλα αυτά, οι ρόλοι των δύο βοηθητικών επιφανειών υπό μία έννοια εναλλάσσονται : στη MAS η υποθετική ρευματική κατανομή αναπτύσσεται πάνω στη βοηθητική επιφάνεια και η MASIE διατυπώνεται με την επιβολή της συνοριακής συνθήκης πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή, ενώ αντίθετα στην EIE υποθέτουμε ανάπτυξη ρευματικής κατανομής πάνω στον PEC και ικανοποίηση της συνέχειας των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στη βοηθητική επιφάνεια( δηλαδή μιας συνοριακής συνθήκης αντίστοιχης με την πραγματική διατυπωμένη για  $\rho_{aux}$  αντί για  $\rho_{cyl}$ ). Μέσα από αναλυτική μελέτη, δείξαμε ότι όταν η βοηθητική επιφάνεια τοποθετείται πέρα από κάποια θέση (την κρίσιμη απόσταση) η MASIE καθίσταται μη επιλύσιμη και στη διακριτή της έκδοση, την κλασική MAS, τα MAS ρεύματα αποκλίνουν με εκθετική εξάρτηση ως προς το πλήθος τους. Η συμπεριφορά τους αυτή εκλαμβάνεται ως αποτέλεσμα της διακριτοποίησης της MASIE. Αντίθετα, η EIE έχει πάντα λύση και το ίδιο ισχύει και όταν αυτή διακριτοποιηθεί. Τα προσεγγιστικά πεδία που προτείνουν και οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν στο πραγματικό καθώς  $N \rightarrow +\infty$ . Σημειώνουμε ότι οι προαναφερθείσες παρατηρήσεις επαληθεύτηκαν με μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων με χρήση του MATLAB.



## **Κεφάλαιο 6 : Απολογισμός και τελικά συμπεράσματα**

Στην εργασία αυτή μελετώντας ένα απλό κυλινδρικό πρόβλημα κοιλότητας, φτάσαμε σε μια σειρά συμπερασμάτων, που παρουσιάζουν έντονο ενδιαφέρον. Διαπιστώσαμε ότι παρ' όλη την ομοιότητα των μεθόδων MAS και EIE, αυτές έχουν μια σημαντικά διαφορετική συμπεριφορά. Όπως δείξαμε στο κεφάλαιο 4, ύστερα από αναλυτική μελέτη, όταν η βοηθητική επιφάνεια τοποθετείται πέρα από την κρίσιμη απόσταση η ολοκληρωτική εξίσωση MASIE καθίσταται μη επιλύσιμη. Ομοίως, εφαρμόζοντας την κλασική, διακριτή έκδοση της MAS για  $\rho_{aux} > \rho_{crit}$  δείξαμε ότι τα MAS ρεύματα αποκλίνουν και μάλιστα με εκθετική εξάρτηση ως προς το πλήθος τους, όπως υποδεικνύεται και από τις σχέσεις (4.63). Η συμπεριφορά τους αυτή εκλαμβάνεται ως αποτέλεσμα της διακριτοποίησης της MASIE. Έτσι, οι ταλαντώσεις που εμφανίστηκαν στα αριθμητικά πειράματα για την περίπτωση αυτή ήταν αυτές που θεωρητικά είχαν προβλεφθεί και θα παρουσιάζονταν ακόμα και σ' έναν υποθετικό υπολογιστή με άπειρο μήκος λέξης. Εντούτοις, τα αποκλίνοντα αυτά MAS ρεύματα παράγουν το MAS πεδίο, το οποίο συγκλίνει στο πραγματικό. Αντίθετα, η EIE έχει πάντα λύση και το ίδιο ισχύει και για το  $N \times N$  σύστημα που προκύπτει όταν αυτή διακριτοποιηθεί. Επομένως, για την περίπτωση της EIE, οι αποκλίσεις και οι ταλαντώσεις που πιθανόν να εμφανιστούν κατά την αριθμητική προσομοίωση, οφείλονται ξεκάθαρα από φαινόμενα τύπου «ground-off». Τέλος, θεωρούμε ότι τα συμπεράσματα αυτά συνεχίζουν, με τις κατάλληλες βέβαια τροποποιήσεις, να ισχύουν και σε άλλες, περισσότερο πολύπλοκες γεωμετρίες. Έτσι, σ' ένα «πραγματικό» πρόβλημα σκέδασης με τέτοια γεωμετρία που να μην επιτρέπει την εκ των προτέρων γνώση της λύσης, αν κάποιος εφαρμόσει μεθόδους παρεμφερείς με τη MAS και διαπιστώσει ταλαντώσεις ή αποκλίσεις, θα πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα την προέλευσή τους. Θα πρέπει δηλαδή να καταφύγει σε μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων προκειμένου να διαπιστώσει αν η «αφύσικη» αυτή συμπεριφορά είναι προϊόν «ground-off» ή όχι.



## **Κεφάλαιο 7 : Παραρτήματα**

Το κεφάλαιο αυτό, όπως αναφέρθηκε και στη γενική εισαγωγή, στοχεύει να δώσει κάποια συμπληρωματικά γενικά στοιχεία της θεωρίας πάνω στην οποία βασίστηκαν πολλές από τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν και παρατηρήσεις που έγιναν. Η επιπλέον πληροφορία συνίσταται από ορισμούς, διατύπωση θεωρημάτων(-και σε κάποιες περιπτώσεις-αποδείξεις αυτών) και ομαδοποιείται σε τέσσερα ανεξάρτητα παραρτήματα.

### **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : “Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz”**

Στο παράρτημα αυτό θα αποδείξουμε τη σχέση (2.28) με τρόπο που υπαγορεύεται στο [11], δηλαδή με χρήση του μετασχηματισμού Fourier( και όχι με τη μέθοδο που προτείνεται στην παράγραφο 5.8 του [10]). Θα δείξουμε δηλαδή το παρακάτω θεώρημα :

#### **Θεώρημα**

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης του Helmholtz στον  $\mathbb{R}^2$  είναι η

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \quad (*).$$

#### **Απόδειξη**

Σύμφωνα με τον ορισμό (2.2) αναζητούμε μια λύση της εξίσωσης :

$$(\nabla^2 + k^2)\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (A.1),$$

όπου  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Αν μετασχηματίσουμε κατά Fourier ως προς τη μεταβλητή  $x_1$  και τα δύο μέλη της (A.1) και λάβουμε υπ' όψιν ότι  $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)$ , προκύπτει η εξίσωση :

$$\frac{d^2 \varepsilon(x_2; \xi_1)}{dx_2^2} + (k^2 - \xi_1^2) \varepsilon(x_2; \xi_1) = \frac{1}{2\pi} \delta(x_2 - x_2') \quad (A.2)$$

όπου οι συναρτήσεις  $\mathcal{E}(x_1, x_2)$  και  $\varepsilon(x_2; \xi_1)$  αποτελούν ζεύγος μετασχηματισμού Fourier ως προς τη μεταβλητή  $x_1$ .

Η λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (A.2) ως προς  $x_2$  εύκολα βρίσκουμε ότι είναι :

$$\varepsilon(x_2; \xi_1) = \frac{e^{j|x_2 - x_2'| \sqrt{k^2 - \xi_1^2}}}{2\pi \sqrt{k^2 - \xi_1^2}} \quad (A.3).$$

Παίρνουμε στη συνέχεια τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της (A.3) :

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j|x_2-x_2'|\sqrt{k^2-\xi_1^2}}}{2\pi\sqrt{k^2-\xi_1^2}} d\xi_1 \quad (A.4).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ταυτότητα :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(b\sqrt{r^2+u^2}) e^{iau} du = -2i \frac{e^{-i|r|\sqrt{b^2-a^2}}}{\sqrt{b^2-a^2}}, \quad b^2 - a^2 > 0 \quad (A.5)$$

(υπό την έννοια ότι αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση  $-2i \frac{e^{-i|r|\sqrt{b^2-a^2}}}{\sqrt{b^2-a^2}}$  ως μετασχηματισμό Fourier της  $H_0^{(1)}(b\sqrt{r^2+u^2})$ ), για  $a = \xi_1$  και  $b = k$ , η σχέση (A.4) δίνει το ζητούμενο :

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|). \blacksquare$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β : “Στοιχεία Ασυμπτωτικής Ανάλυσης”

### Β.1 Βασικά εργαλεία

Ένας γνωστός και πολύ σημαντικός ορισμός για την παρούσα διπλωματική εργασία είναι αυτός της *ασυμπτωτικής ισοδυναμίας* και δίνεται παρακάτω :

#### Ορισμός 1

Έστω  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  και οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $h(x)$  ορισμένες σε μια περιοχή του  $x_0$ . Θα λέμε ότι οι  $f(x)$  και  $h(x)$  είναι **ασυμπτωτικά ισοδύναμες** και θα γράφουμε  $f(x) \sim h(x)$  ( $x \rightarrow x_0$ ) όταν  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα λήμμα, το οποίο χρησιμοποιείται σχεδόν ως «αυτονόητο» σε πολλά σημεία της εργασίας.

#### Λήμμα 1

Αν ισχύει ότι :  $f(x) \sim h(x)$  και  $g(x) \sim p(x)$ , καθώς  $x \rightarrow x_0$ , τότε

$$fg \sim hp \text{ καθώς } x \rightarrow x_0.$$

#### Απόδειξη

$$f(x) \sim h(x) \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 1 \quad (*)$$

$$g(x) \sim p(x) \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{p(x)} = 1 \quad (**)$$

$$\begin{aligned} (*), (**) &\Rightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{p(x)} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{g(x)}{p(x)} \right) = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)g(x)}{h(x)p(x)} \right) = 1 \end{aligned}$$

Άρα,  $fg \sim hp$  καθώς  $x \rightarrow x_0$ . ■

### Β.2 Εξαγωγή της σχέσης (2.46)

Στο κεφάλαιο 9.3 του [8] δίνονται οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Bessel και Neumann για μεγάλα  $n$  :

$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z) \sim -\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^n \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (B.1)$$

$$Y_n(z) = (-1)^n Y_{-n}(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n} \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (B.2).$$

Επειδή όμως για  $n \rightarrow +\infty$  και σταθερό  $z$  είναι :

$$1) \left(\frac{ez}{2n}\right)^n \ll \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n} \text{ (αφού } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{ez}{2n}\right)^n}{\left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{2n} = 0 \text{ ) και}$$

$$2) H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z)$$

προκύπτει ότι :

$$H_n^{(1)}(z) = (-1)^n H_{-n}^{(1)}(z) \sim -i \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n}}_{Y_n(z)} \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (B.3)$$

Επομένως, για να αποδείξουμε τη σχέση (2.32) αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\frac{d}{dz} Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \frac{1}{z} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n} \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (B.4),$$

δεδομένης της ασυμπτωτικής σχέσης (B. 2).

Προς αυτήν την κατεύθυνση θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 1 που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Έτσι, η πρώτη από τις 3 σχέσεις της 10.6(ii) του [8] για  $k = 1$  γράφεται :

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z^n Y_n(z)) = z^{n-1} Y_{n-1}(z) \quad (B.5).$$

Από τη σχέση λοιπόν αυτή προκύπτει :

$$nz^{n-2} Y_n(z) + z^{n-1} \frac{d}{dz} Y_n(z) = z^{n-1} Y_{n-1}(z)$$

δηλαδή,

$$\frac{d}{dz} Y_n(z) = Y_{n-1}(z) - \frac{n}{z} Y_n(z) \quad (B.6).$$

Από την (B. 2) συμπεραίνουμε ότι :

$$Y_{n-1}(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n+1} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (B.7).$$

Αφού  $\sqrt{\frac{1}{n}} \sim \sqrt{\frac{1}{n-1}}$  και  $\frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2(n-1)}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) κάνοντας εκ νέου χρήση του παραπάνω λήμματος, παίρνουμε :

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi(n-1)}} \left(\frac{ez}{2(n-1)}\right)^{-n+1} \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n+1}, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (B.8).$$

Από τη (B. 6) λόγω των (B. 7) και (B. 8) έχουμε :



$$\frac{d}{dz} Y_n(z) \sim - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n+1} + \frac{n}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

άρα,

$$\frac{d}{dz} Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{e}{2}\right)^{-n} \left[ \left(\frac{z}{n}\right)^{-n-1} - \frac{e}{2} \left(\frac{z}{n}\right)^{-n+1} \right] \quad (n \rightarrow \infty) \quad (B.9).$$

Παρατηρούμε ότι :

$$\left(\frac{z}{n}\right)^{-n-1} - \frac{e}{2} \left(\frac{z}{n}\right)^{-n+1} \sim \left(\frac{z}{n}\right)^{-n-1} \quad (n \rightarrow \infty)$$

άρα, λόγω του λήμματος 1 η (B.9) συνεπάγεται ότι :

$$\frac{d}{dz} Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{e}{2}\right)^{-n} \left(\frac{z}{n}\right)^{-n-1} \quad (n \rightarrow \infty)$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα η προς απόδειξη σχέση :

$$\frac{d}{dz} Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \frac{1}{z} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n} \quad (n \rightarrow \infty). \blacksquare$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ : “Αναλυτική Επέκταση μιγαδικής συνάρτησης”

Στο τρίτο κατά σειρά παράρτημα δίνουμε κάποια βασικά σημεία της θεωρίας της αναλυτικής συνέχισης μιγαδικών συναρτήσεων, θεωρία που αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον και χρήσιμο, όσον αφορά τις εφαρμογές, μέρος του ευρύτερου μαθηματικού κλάδου που αναφέρεται συνήθως ως Μιγαδική Ανάλυση.

### Γ.1 Γενικά στοιχεία και παραδείγματα

Αν και η θεωρία της αναλυτικής συνέχισης διδάσκεται κατά βάση σε προχωρημένα μαθήματα Μιγαδικής Ανάλυσης αφού δηλαδή έχει προηγηθεί ένα τουλάχιστον μάθημα βασικής Μιγαδικής Ανάλυσης, εντούτοις, όσο κι αν αυτό ακούγεται περίεργο, με την έννοια αυτή έχουμε μια κάποια εξοικείωση ήδη από το λύκειο, χωρίς καν να το έχουμε αντιληφθεί! Για παράδειγμα, κάλλιστα μια άσκηση της α' λυκείου θα μπορούσε να είναι η εξής : “ Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο :  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  . Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$  .” Οι μαθητές που θα απαντούσαν ότι το πεδίο ορισμού της είναι το  $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$  θα έδιναν σύμφωνα με τα όσα αναφέρονται στο επίσημο σχολικό βιβλίο σωστή απάντηση, ενώ όσοι παρατηρούσαν ότι επειδή  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ , ο τύπος της  $f$  γράφεται  $f(x) = x + 2$  και γι' αυτό απαντούσαν ότι  $D_f = \mathbb{R}$ , θα έκαναν λάθος. Με άλλα λόγια, στο λύκειο διδάσκεται ότι πρώτα πρέπει να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης με δοθέντα τύπο και έπειτα να κάνουμε οποιαδήποτε απλοποίηση του αρχικού τύπου, διατηρώντας το αρχικά υπολογισμένο πεδίο ορισμού. Η αναλυτική επέκταση λοιπόν κάνει ακριβώς το αντίθετο! Έτσι, οι μαθητές που έδωσαν τη λανθασμένη απάντηση, χωρίς (μάλλον) να το ήξεραν, έκαναν μια (πολύ απλή) αναλυτική συνέχιση της  $f$  από το  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$  σ' όλο το  $\mathbb{R}$ . Ένα δεύτερο, σχετικό παράδειγμα, ( το οποίο συναντάται σε πρώτα εξάμηνα θετικών σχολών) είναι η συνάρτηση  $\varphi$  που ορίζεται μέσω δυναμοσειράς, με τον παρακάτω τρόπο :

$$\varphi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\Gamma.1).$$

Η δυναμοσειρά αυτή έχει ακτίνα σύγκλισης  $\rho = 1$  και είναι αναλυτική όταν  $|z| < 1$ . Γνωρίζουμε όμως ότι  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$  για  $|z| < 1$ , άρα :

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-z} \quad (\Gamma.2).$$

Η συνάρτηση όμως του δεξιού μέλους της (Γ.2) είναι αναλυτική για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  εκτός από το  $z = 1$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, επεκτείναμε αναλυτικά τη  $\varphi(z)$  απ' το σύνολο  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  στο  $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Κάποια επιπλέον παραδείγματα στο ίδιο κλίμα μπορεί κανείς να βρει στα σχετικά κεφάλαια των [14] και [15] ή στο [20].

Με κάποια μαθηματική χαλαρότητα μπορούμε να πούμε ότι δοθέντος του τύπου μιας συνάρτησης, έστω  $f(z)$  και του πεδίου ορισμού της,  $D_f$  έτσι, ώστε η  $f$  να είναι αναλυτική στο  $D_f$  επιχειρούμε, προκειμένου να πετύχουμε αναλυτική συνέχιση της  $f$ , να βρούμε μια αναλυτική συνάρτηση  $h$  στο  $D \supseteq D_f$  με τον περιορισμό ότι  $h(z) = f(z)$  όταν  $z \in D_f$ . Το ερώτημα όμως που άμεσα προκύπτει είναι κατά πόσο η επέκταση αυτή είναι μοναδική. Η απάντηση δίνεται από το θεώρημα που παρατίθεται στην επόμενη σελίδα. Προτού το

παραθέσουμε, υπενθυμίζουμε ότι κάθε ανοικτό και συνεκτικό σύνολο του  $\mathbb{C}$  καλείται *τόπος*, μια κλασική ορολογία, χρήσιμη για τη διατύπωση και απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

**Θεώρημα 1 (Μοναδικότητα αναλυτικής επέκτασης)**

Έστω οι συναρτήσεις  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  και  $g: B \rightarrow \mathbb{C}$  οι οποίες είναι αναλυτικές στους τόπους  $A$  και  $B$ , οι οποίοι είναι τέτοιοι, ώστε  $A \cap B \neq \emptyset$ .

Αν ισχύει ότι  $f(z) = g(z)$  για κάθε  $z \in A \cap B$ , τότε η συνάρτηση  $h: A \cup B \rightarrow \mathbb{C}$  με τύπο :

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{για } z \in A \\ g(z) & \text{για } z \in B \end{cases}$$

είναι αναλυτική στον τόπο  $A \cup B$  και είναι η *μοναδική* αναλυτική συνάρτηση που ορίζεται στο  $A \cup B$ . Έτσι, λέμε ότι η  $h$  είναι μια αναλυτική συνέχιση της  $f$  (ή της  $g$ ).

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται στο θεώρημα που συχνά αναφέρεται και ως η *αρχή του ταυτοτισμού*. Η απόδειξη της αρχής αυτής μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια άλλων προκαταρκτικών θεωρημάτων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια ως λήμματα και μπορούν όλα, να βρεθούν στο [14].

**Λήμμα 1**

Έστω η αναλυτική συνάρτηση  $f$  στο δίσκο  $D(z_0, \rho) = \{z - z_0\} < \rho$  με  $f(z_0) = 0$ . Αν υπάρχει 1-1 ακολουθία σημείων του δίσκου αυτού,  $(z_n)_{n=1}^\infty$  που να συγκλίνει στο σημείο  $z_0$  και να ισχύει ότι :  $f(z_n) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ , τότε η  $f$  μηδενίζεται παντού στο δίσκο  $D(z_0, \rho)$ .

**Απόδειξη**

Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι αναλυτική στο δίσκο  $D(z_0, \rho)$  υπάρχει ακολουθία  $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$  τέτοια, ώστε :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \rho) \quad (\Gamma.3).$$

Επειδή όμως η  $f$  είναι συνεχής ως αναλυτική από το *θεώρημα μεταφοράς* ισχύει ότι :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = f(z_0) = 0.$$

Επομένως,

$$\alpha_0 = 0 \quad (\Gamma.4)$$

κι έτσι, η  $(\Gamma.3)$  γράφεται :  $f(z) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n (z - z_0)^n$ . Προκύπτει λοιπόν η σχέση :

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \alpha_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^{n-1} \quad (\Gamma.5).$$

Η ακολουθία  $(z_n)_{n=0}^\infty$  έχει υποτεθεί 1-1, άρα αν στη  $(\Gamma.5)$  θέσουμε  $z = z_n \neq z_0$  και πάρουμε το όριο για  $n \rightarrow \infty$  και στα δύο μέλη της, προκύπτει :

$$\alpha_1 = 0 \quad (\Gamma. 6).$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε επαγωγικά να δείξουμε ότι για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  ισχύει ότι :

$$f(z) = (z - z_0)^k \left[ \alpha_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^{n-k} \right] \quad (\Gamma. 7)$$

σχέση που, με παρόμοιο με πριν τρόπο, δίνει  $\alpha_k = 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και συνεπώς λόγω της (Γ. 3) ότι :

$$f(z) = 0 \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \rho). \blacksquare$$

Μια γενίκευση του λήμματος 1 είναι το παρακάτω θεώρημα, που και αυτό δίνεται ως λήμμα :

### Λήμμα 2

Έστω η αναλυτική συνάρτηση  $f$  στον τόπο  $A$ . Αν υπάρχει 1-1 ακολουθία σημείων του  $A$ ,  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  τέτοια, ώστε να συγκλίνει στο σημείο  $z_0$  και να ισχύει ότι :  $f(z_n) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε η  $f$  μηδενίζεται παντού στον τόπο  $A$ .

Αν και η απόδειξη του παραπάνω λήμματος δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη δε θα δοθεί καθώς χρησιμοποιεί κάποιες έστω και στοιχειώδεις τοπολογικές ιδιότητες του  $\mathbb{C}$  κι έτσι θεωρείται πως ξεφεύγει από τους στόχους του παραρτήματος, το οποίο έχει πιο πολύ ρόλο εισαγωγικής παρουσίασης, παρά μαθηματικής εμβάθυνσης. Αυτό όμως που αξίζει να σημειώσουμε είναι ότι, όπως φαίνεται από το λήμμα 2 (καθώς φυσικά και το λήμμα 1), η αναλυτικότητα μιας μιγαδικής συνάρτησης είναι μια *πολύ ισχυρή απαίτηση*.

Με τη βοήθεια του λήμματος 2 μπορούμε να αποδείξουμε πολύ εύκολα την αρχή του ταυτοτισμού, την οποία παρουσιάζουμε αμέσως παρακάτω διατυπωμένη ως λήμμα.

### Λήμμα 3 (Αρχή του ταυτοτισμού)

Δίνονται οι αναλυτικές στον τόπο  $A$  συναρτήσεις  $f$  και  $g$ . Αν υπάρχει ακολουθία σημείων του  $A$ ,  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  που συγκλίνει στον αριθμό  $z_0 \in A$  και για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$  να ισχύει ότι :  $f(z_n) = g(z_n)$ , τότε  $f(z) = g(z)$  παντού στον  $A$ .

### **Απόδειξη**

Θεωρούμε την αναλυτική συνάρτηση στον τόπο  $A$  με τύπο :

$$\varphi(z) = f(z) - g(z), \quad z \in A \quad (\Gamma. 8).$$

Οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $\varphi$  είναι συνεχείς ως αναλυτικές στον  $A$ , οπότε αν σχηματίσουμε την ακολουθία  $\alpha_n := \varphi(z_n)$  αυτή συγκλίνει στο 0. Πράγματι, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε διαδοχικά :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(z_n) - g(z_n)) = 0$$

αφού εξ' υποθέσεως ισχύει ότι  $f(z_n) = g(z_n)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ . Λόγω συνέχειας της  $\varphi$  έπεται ότι :

$$\varphi(z_0) = 0 \quad (\Gamma.9)$$

ενώ ταυτόχρονα,

$$\varphi(z_n) = 0 \quad (\Gamma.10).$$

Από τις σχέσεις  $(\Gamma.9)$ ,  $(\Gamma.10)$  και το λήμμα 2 συμπεραίνουμε ότι  $\varphi(z) = 0$  παντού στον  $A$  κι επομένως,  $f(z) = g(z)$  για κάθε  $z \in A$ . ■

Η απόδειξη πλέον του θεωρήματος 1 είναι προφανής συνέπεια του λήμματος 3, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν τα σύνολα  $A$  και  $B$  είναι τόποι, το ίδιο ισχύει και για τα σύνολα  $A \cap B$  και  $A \cup B$ . Παρ' όλη την ευκολία της την παραθέτουμε για λόγους πληρότητας :

### Απόδειξη (του θεωρήματος 1)

Αφού οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι αναλυτικές και η  $h$  θα είναι αναλυτική στον τόπο  $A \cup B$ . Έστω ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση  $\varphi$  που επεκτείνει κι αυτή αναλυτικά την  $f$  στον τόπο  $A \cup B$ . Τότε, εξ' ορισμού, ισχύει :

$$\varphi(z) = h(z), \quad z \in A \quad (\Gamma.11).$$

Επειδή λοιπόν αυτές ταυτίζονται στον τόπο  $A \subset A \cup B$  σύμφωνα με το λήμμα 3 θα ταυτίζονται παντού στον  $A \cup B$  κι επομένως η  $h$  είναι μοναδική. ■

## Γ.2 και κλαδικά σημεία

Έχοντας πλέον διατυπώσει και αποδείξει το θεώρημα 1, το επόμενο βήμα είναι να αναρωτηθούμε αν έχοντας μια αναλυτική συνάρτηση  $f$  σε κάποιον τόπο  $A$  και έναν τόπο  $B$ , τέτοιον ώστε  $A \cap B = \emptyset$ , υπάρχει *μονότιμη*, αναλυτική συνάρτηση που να επεκτείνει αναλυτικά την  $f$  μέσω κάποιου κατάλληλου δρόμου που να «συνδέει» τα  $A$  και  $B$ ;

Πριν όμως απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα θα δώσουμε τέσσερεις ορισμούς, η εισαγωγή των οποίων κύριο στόχο έχει τη συντομία στη γραφή καθώς και τη διευκόλυνση στη διατύπωση των αναγκαίων θεωρημάτων που ακολουθούν.

### Ορισμός 1

Έστω η αναλυτική συνάρτηση  $f_0$  στο δίσκο  $D_0$ . Ονομάζουμε **συναρτησιακό στοιχείο** το ζεύγος  $(f_0(z), D_0)$ .

### Ορισμός 2

Έστω τα συναρτησιακά στοιχεία  $(f_0(z), D_0)$  και  $(f_1(z), D_1)$ , όπου οι δίσκοι  $D_0$  και  $D_1$  είναι τεμνόμενοι. Λέμε ότι η  $f_1$  αποτελεί **άμεση αναλυτική συνέχιση** της  $f_0$  από το δίσκο  $D_0$  στον  $D_0 \cup D_1$  όταν για κάθε  $z \in D_0 \cap D_1$  ισχύει ότι :  $f_0(z) = f_1(z)$ .

### Παρατήρηση 1:

Σύμφωνα με το θεώρημα 1, αν η συνάρτηση  $f_1$  είναι άμεση αναλυτική συνέχιση της  $f_0$  από τον  $D_0$  στον  $D_0 \cup D_1$ , τότε είναι και η μοναδική συνάρτηση που επεκτείνει αναλυτικά

την  $f_0$  στον τόπο  $D_0 \cup D_1$ . Από την άλλη μεριά, η  $f_0$  είναι η μοναδική αναλυτική συνάρτηση που επεκτείνει αναλυτικά την  $f_1$  στον τόπο  $D_0 \cup D_1$  και αποτελεί την άμεση αναλυτικής της συνέχιση στον τόπο αυτό.

### Ορισμός 3

Θεωρούμε το σύνολο  $\Sigma = \{(f_0(z), D_0), (f_1(z), D_1), \dots, (f_n(z), D_n)\}$  το οποίο είναι μια πεπερασμένη συλλογή συναρτησιακών στοιχείων. Το  $\Sigma$  καλείται **αλυσίδα** όταν για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  με  $0 \leq k < n$  τα συναρτησιακά στοιχεία  $(f_k(z), D_k)$  και  $(f_{k+1}(z), D_{k+1})$  είναι άμεσες αναλυτικές συνεχίσεις το ένα του άλλου.

### Ορισμός 4

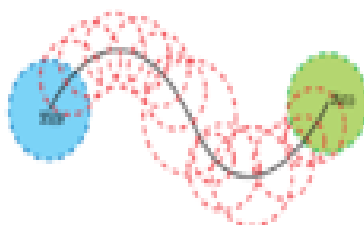
Έστω το συναρτησιακό στοιχείο  $(f, D)$  και η καμπύλη  $\gamma$ . Λέμε ότι το  $(f, D)$  μπορεί να **επεκταθεί κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma$** , όταν υπάρχει αλυσίδα τέτοια, ώστε :

1) το συναρτησιακό στοιχείο  $(f, D)$  να ανήκει σ' αυτήν

και

2) οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης  $\gamma$  να ανήκουν στο δίσκο κάποιου συναρτησιακού στοιχείου της αλυσίδας αυτής.

Στο σχήμα Γ.1 δίνεται ένα εποπτικό παράδειγμα, στο οποίο περιλαμβάνονται οι έννοιες που ορίστηκαν προηγουμένως με στόχο την ευκολότερη κατανόησή τους.



Σχήμα Γ.1 : “ Αλυσίδα αναλυτικών επεκτάσεων : από το συναρτησιακό στοιχείο  $(f_0(z), D_0)$  καταλήγουμε στο συναρτησιακό στοιχείο  $(f_n(z), D_n)$ . Στο σχήμα το σύνολο  $D_0$  είναι ο χρωματισμένος αριστερά κυκλικός δίσκος, ενώ το  $D_n$  είναι ο χρωματισμένος κυκλικός δίσκος στα δεξιά. Τα σύνολα  $D_k$  των ενδιάμεσων συναρτησιακών στοιχείων  $(f_k(z), D_k)$  ,  $1 \leq k < n$  παριστάνονται με διακεκομμένες γραμμές. Σύμφωνα με τον ορισμό 4, το  $(f_0(z), D_0)$  επεκτείνεται αναλυτικά κατά μήκος της καμπύλης του σχήματος, η οποία σημειώνεται με έντονο χρώμα.”

Με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε (πιο τυπικά, αλλά το ίδιο ουσιαστικά) το ερώτημα που τέθηκε στην αρχή της παραγράφου ως εξής: “ Δοθείσας μιας αλυσίδας  $\Sigma = \{(f_0(z), D_0), (f_1(z), D_1), \dots, (f_n(z), D_n)\}$  μπορούμε να ορίσουμε πάντα μια μονότιμη συνάρτηση  $f$  η οποία να είναι αναλυτική στον τόπο  $\bigcup_{k=0}^n D_k$ ; ” Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι : “όχι πάντα!” και ο πιο κατάλληλος τρόπος για να πειστεί κανείς είναι κάποιο αντιπαράδειγμα. Επιλέχθηκε ένα από τα πιο κλασικά

αντιπαραδείγματα, το οποίο είναι επίσης αυτό που χρησιμοποιείται στα [14] και [15] για να τεκμηριωθεί η παραπάνω απάντηση.

### Αντιπαράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση  $f(z) = \sqrt{z}$  με  $z \geq 0$  και θέλουμε να κάνουμε αναλυτική επέκταση της  $f$  στους μιγαδικούς αριθμούς. Αν θεωρήσουμε την *πολική μορφή* ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ , δηλαδή  $z = \rho e^{i\theta}$  για  $\rho \geq 0$  και  $\theta \in [0, 2\pi]$ , τότε ένας τρόπος είναι μέσω της σχέσης :

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2} \quad (\Gamma. 12),$$

όπου υποθέτουμε ότι η μεταβλητή  $\theta$  είναι συνεχής πάνω στο δρόμο που ακολουθούμε. Θεωρούμε λοιπόν την αναλυτική συνέχιση της  $f$  κατά μήκος της καμπύλης  $\gamma = \gamma(\theta) = e^{i\theta}$ , όπου  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Αν πάρουμε το μιγαδικό αριθμό  $z = 1 = e^{i0/2}$  το πρώτο συναρτησιακό στοιχείο είναι για  $\theta = 0$  και έχει  $f_0(1) = 1$ , ενώ το τελευταίο, έστω ότι είναι το  $(f_n(z), D_n)$  έχει  $f_n(1) = e^{i2\pi/2} = e^{i\pi} = -1$ . Δηλαδή ξεκινώντας από το σημείο  $(1, 0)$  στο μιγαδικό επίπεδο μέσω της καμπύλης  $\gamma = \gamma(\theta) = e^{i\theta}$  (για  $\theta \in [0, 2\pi]$ , συνεχές) με  $f(e^{i0}) = f(1) = 0$  και επιστρέψαμε με  $f(1) = f(e^{i2\pi}) = -1$  κι έτσι συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει μονότιμη αναλυτική συνάρτηση ικανή να επεκτείνει αναλυτικά την  $f(z) = \sqrt{z}$  για  $z \in \mathbb{C}$ . Επομένως, δε μπορούμε να βρούμε πάντα μια μονότιμη συνάρτηση  $f$  η οποία να είναι αναλυτική στον τόπο  $\bigcup_{k=0}^n D_k$  δεδομένης μιας αλυσίδας  $\Sigma = \{(f_0(z), D_0), (f_1(z), D_1), \dots, (f_n(z), D_n)\}$ .

Το παραπάνω φαινόμενο παρατηρείται αν πάρουμε μια οποιαδήποτε και οσοδήποτε μικρή καμπύλη γύρω από το σημείο  $(0, 0)$ . Το σημείο αυτό λέμε ότι είναι *κλαδικό σημείο* της συνάρτησης  $f(z) = \sqrt{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Κλείνουμε το παράρτημα αυτό με τη διατύπωση ενός θεωρήματος, γνωστό και ως *Θεώρημα Μονοδρομίας*, το οποίο αν και δύσκολο να αποδειχθεί δίνει μια απάντηση για το πότε μπορούμε ότι η αναλυτική συνέχιση ενός συναρτησιακού στοιχείου είναι μονότιμη συνάρτηση.

### Θεώρημα 2 ( Μονοδρομίας)

Αν ένα συναρτησιακό στοιχείο μπορεί να επεκταθεί κατά μήκος κάθε απλής καμπύλης μέσα σε ένα απλό συνεκτικό χωρίο, τότε η αναλυτική συνέχιση οδηγεί σε μια μονότιμη αναλυτική συνάρτηση.

### Παρατήρηση 2 :

Το παραπάνω θεώρημα αν και σημαντικό δε μας περιγράφει ένα σύντομο τρόπο για να συμπεράνουμε αν η αναλυτική επέκταση κάποιου δοσμένου συναρτησιακού στοιχείου οδηγεί σε μονότιμη αναλυτική συνάρτηση. Εντούτοις, μας σκιαγραφεί με ποιον τρόπο μπορούμε να εξακριβώσουμε ότι ένα συναρτησιακό στοιχείο που επεκτείνεται αναλυτικά καταλήγει κατ' ανάγκη σε *πλειότιμη* συνάρτηση. Πράγματι, αν βρούμε έστω και μία απλή καμπύλη (, όπως ο μοναδιαίος κύκλος του αντιπαραδείγματος,) και διαπιστώσουμε ότι η υπόθεση του θεωρήματος δεν ικανοποιείται, τότε ξέρουμε ότι η αναλυτική επέκταση του αρχικού συναρτησιακού στοιχείου θα δώσει σίγουρα πλειότιμη συνάρτηση. Πολλές φορές στην πράξη όταν εξετάζουμε κατά πόσο μια συνάρτηση είναι πλειότιμη και σε καταφατική περίπτωση

ποια είναι τα κλαδικά της σημεία, βασίζομαστε στην εμπειρία και σε γνωστά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, ο πίνακας που ακολουθεί δίνει κάποιες κλασικές τέτοιες περιπτώσεις.

<b>Συνάρτηση</b>	<b>Κλαδικά σημεία</b>
$\sqrt{z}$	0
$\sqrt{z^2 - 1}$	-1, 1
$\cos(\sqrt{z})$	κανένα
$\ln z = \int_1^z \frac{dt}{t}$	0

Σχήμα Γ.2: “Συνηθισμένες περιπτώσεις. Δίπλα από τις πλειότεμες συναρτήσεις παρατίθενται και τα κλαδικά τους σημεία”



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ : “Ολοκληρωτικές Εξισώσεις”

Στο τελευταίο παράρτημα θα δοθούν τα στοιχεία εκείνα της θεωρίας Ολοκληρωτικών Εξισώσεων που είναι απαραίτητα για την πλήρη κατανόηση των σχετικών με την εργασία θεμάτων. Σε καμία περίπτωση ο γενικός τίτλος δεν πρέπει να παραπλανεί για το πλήθος των ζητημάτων που θα πραγματευτούμε στην πορεία ή το βάθος στο οποίο θα φτάσουμε, καθώς οι “Ολοκληρωτικές Εξισώσεις” αποτελούν ένα πλούσιο κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Στην πραγματικότητα, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά το Θεώρημα του Picard ή αλλιώς Κριτήριο του Picard και πως αυτό βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση που εξετάζουμε, δηλαδή σε μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους.

### Δ.1 Σύντομη παρουσίαση του θεωρήματος του Picard

Όπως αναφέρεται και στην [30] το θεώρημα του Picard δίνει τις *ικανές και αναγκαίες* συνθήκες, για τις οποίες η εξίσωση  $A\varphi = f$  είναι επιλύσιμη (με άγνωστο τη συνάρτηση  $\varphi$ ), όπου  $A$  είναι ένας *συμπαγής και γραμμικός τελεστής* στο χώρο  $\mathcal{L}^2[a, b]$ , με  $a, b \in \mathbb{R}$ , δηλαδή στο χώρο των συναρτήσεων που τα τετράγωνά τους είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε κάποιο πεπερασμένο διάστημα  $[a, b]$ . Προτού καταφύγουμε στη διατύπωση του θεωρήματος, θα παρουσιάσουμε κάποια μεγέθη και ορολογίες που κρίνονται απαραίτητα για την κατανόησή του.

#### Ορισμός 1

Η τριάδα  $(\mu_n, \varphi_n, g_n)$  λέγεται **ιδιόμορφο σύστημα** του τελεστή  $A$  όταν :

1) οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί είναι  $\mu_n$  είναι οι *ιδιόμορφες τιμές* του  $A$

και

2) οι συναρτήσεις  $\varphi_n$  και  $g_n$  είναι οι *ιδιόμορφες συναρτήσεις* του  $A$  και είναι τέτοιες, ώστε

- είναι ορθοκανονικές (ανά δύο)

- και ικανοποιούν τις σχέσεις  $\begin{cases} A\varphi_n = \mu_n g_n & (\Delta.1) \\ A^*g_n = \mu_n \varphi_n & (\Delta.2) \end{cases}$ , όπου με  $A^*$  συμβολίζουμε το *συμπληρωματικό* πίνακα του  $A$ .

#### **Παρατήρηση 1 :**

Οι αριθμοί  $\mu_n$  είναι θετικοί πραγματικοί κι αυτό γιατί οι *ιδιοτιμές* του τελεστή  $A^*A$  είναι οι αριθμοί  $\mu_n^2$  (βλ. [27]).

#### **Παρατήρηση 2 :**

Αν ο πίνακας  $A$  είναι *κανονικός* (-στην [30] παρουσιάζεται η διεθνώς καθιερωμένη ορολογία *normal*-) δηλαδή αν ισχύει ότι  $A^*A = AA^*$ , τότε το ιδιόμορφο σύστημα  $(\mu_n, \varphi_n, g_n)$  μπορεί να προσδιορισθεί από το *χαρακτηριστικό* σύστημα  $(\lambda_n, \psi_n)$ , όπου με  $\lambda_n$  σημειώνουμε τις *ιδιοτιμές* που αντιστοιχούν στις ορθοκανονικές *ιδιοσυναρτήσεις*  $\psi_n$ , ή ισοδύναμα,  $A\psi_n = \lambda_n\psi_n$ .

Η έννοια της ορθοκανονικότητας στο χώρο  $\mathcal{L}^2[a, b]$  δίνεται μέσω του ορισμού του

εσωτερικού γινομένου δύο συναρτήσεων. Εδώ, το εσωτερικό γινόμενο των συναρτήσεων  $v$  και  $w$  του  $\mathcal{L}^2[a, b]$  συμβολίζεται με  $(v, w)$  και ορίζεται ως εξής :

$$(v, w) = \int_a^b v(x) \bar{w}(x) dx \quad (\Delta.3)$$

με  $\bar{w}(x)$  να συμβολίζει το μιγαδικό συζυγή του  $w(x)$ . Έτσι, το σύνολο συναρτήσεων  $(\psi_n)$  του  $\mathcal{L}^2[a, b]$  είναι ορθοκανονικό όταν για κάθε του  $n, m \in \mathbb{N}$  ισχύει :

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n \neq m \end{cases} \quad (\Delta.4).$$

Έχοντας παρουσιάσει τους απαραίτητους ορισμούς μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε τυπικά το Κριτήριο του Picard.

### **Θεώρημα 1 (Κριτήριο του Picard)**

Έστω η εξίσωση :

$$A\varphi = f \quad (\Delta.5),$$

όπου  $A$  είναι ένας συμπαγής και γραμμικός τελεστής στο χώρο  $\mathcal{L}^2[a, b]$ , με  $a, b \in \mathbb{R}$  και η  $f$  είναι μια συνάρτηση του  $\mathcal{L}^2[a, b]$ .

Αν η τριάδα  $(\mu_n, \varphi_n, g_n)$  είναι το ιδιόμορφο σύστημα του  $A$ , τότε η εξίσωση  $(\Delta.5)$  έχει λύση στον  $\mathcal{L}^2[a, b]$ , αν και μόνον αν,

$$(I) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, g_n)^2}{\mu_n^2} < +\infty$$

και

$$(II) \quad (f, u) = 0 \text{ για κάθε συνάρτηση } u \in \mathcal{L}^2[a, b], \text{ που ικανοποιεί τη σχέση } A^*u = 0.$$

Όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες (I) και (II), η λύση της  $(\Delta.5)$  είναι η συνάρτηση :

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, g_n) \varphi_n \quad (\Delta.6).$$

## **Δ.2 Η ολοκληρωτική εξίσωση κατά την εφαρμογή της MAS και της EIE**

Στη γενική περίπτωση μια ολοκληρωτική εξίσωση λέμε ότι είναι τύπου Fredholm πρώτου είδους, με πυρήνα  $K(x, t)$  και άγνωστο τη συνάρτηση  $u(t)$ , όταν είναι της μορφής :

$$\int_a^b K(x, t)u(t) dt = f(x) \text{ , } x \in [a, b] \quad (\Delta.7).$$

Έτσι, οι δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις, ( η (4.2) για τη MAS και η (5.3) για την EIE,) που εμφανίζονται στην εργασία αυτή είναι τύπου Fredholm πρώτου είδους, ο πυρήνας των

οποίων είναι ο ίδιος, η συνάρτηση  $H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux})$ .

Ο πυρήνας αυτός εξαρτάται μόνο από τη διαφορά  $\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}$  και είναι  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση του  $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ , ως προς τη μεταβλητή  $\varphi = \varphi_{aux} - \varphi_{cyl}$  (βλ. κεφάλαιο 4) κι έτσι χρησιμοποιήσαμε τον εξής συμβολισμό :

$$K(\varphi_{aux} - \varphi_{cyl}) = H_0^{(1)}(kR_{cyl,aux}) \quad (\Delta.8).$$

Σημειώνουμε ότι ο  $K$  είναι άρτια συνάρτηση της μεταβλητής  $\varphi$  κι έτσι, ο τελεστής  $A$  και στις δύο περιπτώσεις δίνεται από τη σχέση :

$$Au(t) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)u(t)dt, \quad u \in \mathcal{L}^2[-\pi, \pi] \quad (\Delta.9).$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο  $A$  είναι κανονικός. Παρ' όλα αυτά, η σχετική απόδειξη δε βρίσκεται στη βιβλιογραφία. Έτσι, κρίνουμε σκόπιμο να τη συμπεριλάβουμε στο παράρτημα αυτό, ως απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος :

## **Θεώρημα 2**

Ο ολοκληρωτικός τελεστής που ορίζεται στη (Δ.9) είναι κανονικός, δηλαδή ισχύει :

$$A^*A = AA^* \quad (\Delta.10).$$

### **Απόδειξη**

Στην [36] αποδεικνύεται ότι αν ο ολοκληρωτικός τελεστής  $A(x, t)$  έχει πυρήνα τη συνάρτηση  $K(x, t)$  τότε ο  $A^*$  θα έχει πυρήνα τη συνάρτηση  $\overline{K(t, x)}$ . Επομένως, για να δείξουμε τη (Δ.10) αρκεί να δείξουμε τη σχέση :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x, s)\overline{K(s, t)}ds = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{K(t, s)}K(s, x)ds \quad (\Delta.11).$$

Επειδή όμως για τον πυρήνα που μελετάμε ισχύει :

$$K(x, t) = K(x-t) = K(t-x) = K(t, x) \quad (\Delta.12)$$

το δεξί μέλος της (Δ.11) γίνεται :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{K(t, s)}K(s, x)ds = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{K(s, t)}K(x, s)ds = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, s)\overline{K(s, t)}ds$$

δηλαδή αποδείχθηκε το ζητούμενο. ■

Παρατηρούμε τέλος ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του συγκεκριμένου ολοκληρωτικού τελεστή είναι οι συναρτήσεις  $\psi_n(\varphi) = e^{-in\varphi}/\sqrt{2\pi}$ . Συνεπώς, οι σειρές Fourier (4.21) και (5.6) που αποτελούν λύσεις των (4.2) και (5.3) είναι στην πραγματικότητα αυτές που δίνονται από το Θεώρημα του Picard μέσω της σχέσης (Δ.6) για καθεμία περίπτωση. Έτσι, ενώ η δεύτερη συγκλίνει πάντα και ικανοποιεί τη συνθήκη (I) η πρώτη την ικανοποιεί μόνον όταν ισχύει η ανισότητα  $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ .



## **Κεφάλαιο 8 : Βιβλιογραφία**

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο δίνεται, κατά τα καθιερωμένα, η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για τη συγγραφή της διπλωματικής αυτής εργασίας.

- [1] G. Fikioris and I. Psarros, “On the phenomenon of oscillations in the Method of Auxiliary Sources”, *IEEE Transactions Antennas Propagat.*, vol. 55, no. 5, pp. 1293-1304, May 2007.
- [2] G. Fikioris, “On two types of convergence in the Method of Auxiliary Sources”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 54, no. 7, pp. 2022—2033, July 2006.
- [3] G. Fikioris, N. Tsitsas, and I. Psarros, “On the nature of oscillations in discretizations of the extended integral equation”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 59, No. 4, April 2011.
- [4] Dimitra I. Kaklamani and Hristos T. Anastassiou, “Aspects of the Method of Auxiliary Sources (MAS) in Computational Electromagnetics”, *IEEE Antenna’s and Propagation Magazine*, Vol. 44, No. 3, June 2002.
- [5] A. H. Barnett and T. Betcke, “Stability and convergence of the method of fundamental solutions for Helmholtz problems on analytic domains,” *Journal of Computational Physics*, vol. 227 (2008), pp. 7003-7026.
- [6] P.C. Waterman, “New Formulation of Acoustic Scattering”, *MITRE Corporation, Bedford, Massachusetts 01730*.
- [7] P.C. Waterman, “Matrix Formulation of Electromagnetic Scattering”, *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 805–812, 1965.
- [8] Allan G. Dallas, “On the convergence and numerical stability of the second Waterman scheme for approximation of the acoustic field scattered by a hard object”, Department of Mathematical Sciences, University of Delaware Newark, DE 19716, U.S.A., Technical Report No. 2000-7.
- [9] Milton Ahramowitz and Irene A. Stegun, “Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables”, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, Issued June 1964 Tenth Printing, December 1972, with corrections.
- [10] Γ. Δάσιος και Κ. Κυριάκη, “Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις”, Φεβρουάριος 1994.
- [11] Γ. Δάσιος, “Δέκα Διαλέξεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ιανουάριος 2001.
- [12] Ι.Α. Βομβορίδης, “Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία, Μέρος Α”, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2009.
- [13] Ι.Α. Βομβορίδης, “Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία, Μέρος Β”, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2009.

- [14] Ε.Γ. Γαλανής, “Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές”, Εκδόσεις Διήνεκες, Αθήνα 2006.
- [15] Κ. Knopp, “Theory of Functions”, Part I, Dover, NY, 1996.
- [16] Joseph Bak and Donald J. Newman, “Complex Analysis”, Third Edition, Springer, April 2010.
- [17] Παναγιώτης Ε. Ανδριανέσης, “Κοντινό Πεδίο Υπερκατευθυντικού Τύπου στη Μέθοδο Βοηθητικών Πηγών και Ζητήματα Ηλεκτρομαγνητικής Συμβατότητας σε Αεροσκάφη - Ελικόπτερα”, Διπλωματική εργασία, Σ.Η.Μ.Μ.Υ. , Ε.Μ.Π. , Αθήνα, Οκτώβριος 2010.
- [18] E. T. Whittaker and G. N. Watson, “ *A Course of Modern Analysis*”, 4th ed. New York: Cambridge Univ. Press, 1927, sec. 5.31, 5.5, (reprinted, 1992).
- [19] Χ. Καψάλης και Π. Κωττής, “Κεραίες Ασύρματες Ζεύξεις”, εκδόσεις Τζιόλα, 2008.
- [20] Γ. Φικιώρης, “Παράρτημα : Αναλυτική συνέχιση, κλαδικά σημεία, κλαδικές τομές, φύλλα Riemann, Ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς”, σημειώσεις του μεταπτυχιακού μαθήματος “Μέθοδοι εφαρμοσμένων μαθηματικών για ηλεκτρομαγνητικά πεδία”, Αθήνα 2011.
- [21] Michael Spivak, “Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ιανουάριος 1993.
- [22] Ε.Γ. Γαλανής, “Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση”, Εκδόσεις Διήνεκες, Αθήνα 2006.
- [23] [dlmf.nist.gov](http://dlmf.nist.gov) (NIST Digital Library of Mathematical Functions).
- [24] Ν.Κ. Ουζούνου, “Συστήματα Ραντάρ (Σημειώσεις του μαθήματος : “Συστήματα Ραντάρ και Τηλεπισκόπηση ”)”, Αθήνα 2006.
- [25] Χρυσόστομος Β. Νανάκος, “Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από τυπωμένες μικροταινιακές διατάξεις με κυλινδρικό διηλεκτρικό υπόστρωμα”, Διπλωματική εργασία, Σ.Η.Μ.Μ.Υ. , Ε.Μ.Π., Αθήνα, Σεπτέμβριος 2011,
- [26] Yu. Eremin, A.G. Sveshnikov, and S.P. Skobelev, “Null Field Method in Wave Diffraction Problems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, No. 8, pp. 1391–1399, January 19, 2001.
- [27] R. Kress, *Linear Integral Equations*, 2nd ed. New York: Springer, 1999
- [28] Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης, “Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών εξισώσεων (Πεπερασμένα Στοιχεία και Διαφορές)”, εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2003.
- [29] Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης, “Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση”, εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2003.
- [30] Panagiotis J. Papakanellos, George Fikioris, and Asimina Michalopoulou, “On the Oscillations Appearing in Numerical Solutions of Solvable and Nonsolvable Integral Equations for Thin-Wire Antennas”, *IEEE Transactions Antennas Propagat*, vol. 58, no. 5, May 2010.

- [31] W.Boyce and R.Diprima,“ Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις Και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1999, Αθήνα.
- [32] Ν.Καδιανάκης και Σ.Καρανάσιος, “Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και εφαρμογές”, Αθήνα 2003.
- [33] N.L. TSITSAS, E.G. ALIVIZATOS, H.T. ANASTASSIU and D.I. KAKLAMANI, “ON THE ANALYTIC INVERSION OF THE METHOD OF AUXILIARY SOURCES (MAS) MATRIX IN CASE OF OBLIQUE INCIDENCE SCATTERING BY A DIELECTRIC CYLINDER”, 10<sup>ο</sup> Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, 1 Δεκεμβρίου 2004.
- [34] Παναγιώτης Ι. Παπακανελλός, “Ανάπτυξη της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών για την Ανάλυση Σύνθετων Διατάξεων Ακτινοβολήσης ”, Διδακτορική διατριβή, Σ.Η.Μ.Μ.Υ., Ε.Μ.Π., Αθήνα, Ιούνιος 2004.
- [35] Στέφανος Τραχανάς, “Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις – Σειρές Fourier και προβλήματα συνοριακών τιμών”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2008.
- [36] F. Smithies, *Integral Equations*. New York: Cambridge Univ. Press, 1958.







