



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων
από τυρβώδεις σχηματισμούς σε θερμοπυρηνικό πλάσμα

Βάλβης
Σπυριδων-Ιάσων
Α.Μ.: 03002260

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων:
Καθηγητής Κυριάκος Χιτζανίδης, ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

Τριμελής επιτροπή:
Κυριάκος Χιτζανίδης (Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ)
Ιωάννης Ξανθάκης (Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ)
Ιωάννης Βομβορίδης (Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ)

Αθήνα 2019

Στη γυναίκα μου Βασιλική, που δίνει όμορφο χρώμα και πραγματικό νόημα στη ζωή μου
Στον αδερφό μου Μιχάλη, που σε χαρές και λύπες βρίσκεται πάντοτε κοντά μου
Στον πατέρα μου Μανώλη, που με δίδαξε ηθική και μαθηματική λογική, κάνοντας εφικτή την
επιστημονική πορεία που ακολούθησα
Στη μητέρα μου Φλώρα, που με δίδαξε επίσης ηθική και μέσα από τους αγώνες της με
προέκτισε με ατέρμονο πείσμα
Στη μνήμη της γιαγιάς μου Παρασκευής και των άλλων προγόνων μου που αγάπησα και με
αγάπησαν, αλλά δεν βρίσκονται πλέον εδώ
Στους απογόνους μου, που ελπίζω να έρθουν και να τα βρουν ακόμα καλύτερα από ό,τι εγώ

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στη Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών (ΣΗΜΜΥ) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (ΕΜΠ), υπό την καθοδήγηση (κύριος επιβλέπων) του κ. Κυριάκου Χιτζανίδη (Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ) και των άλλων δύο μελών της συμβουλευτικής επιτροπής, κ. Ιωάννη Ξανθάκη (Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ) και κ. Ιωάννη Βομβορίδη (Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ). Ευχαριστώ θερμά τον κ. Χιτζανίδη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε προκειμένου να μελετήσω σε βάθος τα σχετικά αντικείμενα και τον χρόνο που αφιέρωσε για να με διδάξει, για τις εμπειρίες που απέκτησα από τα διεθνή συνέδρια που συμμετείχαμε, αλλά και για το φιλικό περιβάλλον που χαρακτηρίζει την συνεργασία μας. Ευχαριστώ τον κ. Ιωάννη Κομίνη (Επίκουρος Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ) και τα υπόλοιπα μέλη της ερευνητικής ομάδας του Εργαστηρίου Πλάσματος και Μη Γραμμικής Οπτικής του ΕΜΠ για την διαρκή συνεισφορά τους στην ανταλλαγή επιστημονικών και άλλων γνώσεων και απόψεων στο περιβάλλον εργασίας μας.

Ακόμα, ευχαριστώ και τα υπόλοιπα δύο μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής κ. Ξανθάκη και κ. Βομβορίδη για την παρακολούθηση και τις χρήσιμες συμβουλές τους στην προσέγγιση των αντικειμένων που μελετήθηκαν. Ευχαριστώ τα επιπλέον των μελών ΔΕΠ της τριμελούς, μέλη ΔΕΠ της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής της παρούσας διατριβής κ. Ιωάννη Κομίνη (Επίκουρος Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ), κ. Ιωάννη Τίγκελη (Καθηγητής Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ), κ. Ηλία Γλύτση (Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ), κ. Γεώργιο Φικιώρη (Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ) και κ. Κώστα Πολιτόπουλο (Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ) για την συμμετοχή τους στην διαδικασία εξέτασης. Ευχαριστώ τα μέλη ΔΕΠ του ΕΜΠ που ανέλαβαν τη διδασκαλία των προαπαιτούμενων για τη λήψη διδακτορικού μαθημάτων που παρακολούθησα. Ευχαριστώ τον κ. Τίγκελη και τα μέλη της

ερευνητικής του ομάδας στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ για την συνεργασία που έχουμε. Ευχαριστώ τον Δρ. Abhay K. Ram, Ερευνητή στο Plasma Science and Fusion Center (PSFC) του Massachusetts Institute of Technology (MIT) για την συνεισφορά και την βοήθειά του στην επιστημονική έρευνα των αντικειμένων που μελετώ (I thank Dr. Abhay K. Ram, Senior Scientist at the Massachusetts Institute of Technology (MIT) in the Plasma Science and Fusion Center (PSFC) for his contribution and help in the scientific research of the objects I study).

Εκτενής Περίληψη

Πυρηνική Σύντηξη καλείται η διαδικασία κατά την οποία δύο ή περισσότεροι πυρήνες ελαφριών ατόμων ενώνονται σχηματίζοντας έναν μεγαλύτερο, δηλαδή η αντίστροφη διαδικασία από την Πυρηνική Σχάση κατά την οποία ένας μεγάλος ατομικός πυρήνας διασπάται σε δύο ή περισσότερους ελαφρύτερους. Και στις δύο περιπτώσεις, απελευθερώνονται τεράστια ποσά ενέργειας. Η Τεχνολογία της Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης, έχει στόχο μέρος της προκύπτουσας ενέργειας από Πυρηνική Σύντηξη να αξιοποιείται για εποικοδομητικούς σκοπούς, όπως η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας με σκοπό την μελλοντική ρευματοδότηση κατοικημένων περιοχών.

Η Ελεγχόμενη Θερμοπυρηνική Σύντηξη λαμβάνει χώρα στο θερμοπυρηνικό πλάσμα ενός αντιδραστήρα, ο οποίος συνήθως έχει τοροειδές σχήμα κυλινδρικού δακτυλίου. Οι αντιδραστήρες αυτού του τύπου λέγονται tokamak. Η λειτουργία ενός tokamak είναι περίπλοκη και για την επίτευξή της χρησιμοποιούνται πολλά βοηθητικά μέσα. Εξωτερικά επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο συγκρατεί το πλάσμα που περιέχεται στον αντιδραστήρα μακριά από τα τοιχώματά του, δημιουργώντας υψηλή βαθμίδωση της πίεσης και της θερμοκρασίας. Κοντά στον "πυρήνα" του πλάσματος (γύρω από τον άξονα του κυλινδρικού δακτυλίου) η θερμοκρασία του πλάσματος είναι πολύ υψηλότερη από ότι στις παρυφές (κοντά στα τοιχώματα). Έτσι, προστατεύονται και τα τοιχώματα του αντιδραστήρα. Επίσης, ηλεκτρομαγνητικά ραδιοκύματα εκπέμπονται σκόπιμα από τον εξωτερικό χώρο και οδεύουν προς τον πυρήνα του πλάσματος, προκειμένου να δημιουργήσουν ρεύμα, να θερμάνουν τον πυρήνα του τόρου και να καταπολεμήσουν φαινόμενα σχηματισμού μαγνητικών νησίδων.

Η υψηλή βαθμίδωση όμως των μεγεθών της θερμοκρασίας και της πίεσης, έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ροών θερμού πλάσματος από τον πυρήνα προς τις παρυφές και τον σχηματισμό συνεκτικών τυρβώδων δομών κοντά στις παρυφές του

πλάσματος. Οι συνεκτικές αυτές δομές αποτελούνται από πλάσμα διαφορετικής ηλεκτρονικής πυκνότητας από τον περιβάλλοντα χώρο τους και είναι γνωστές στην διεθνή βιβλιογραφία ως blobs σφαιρικού/ελλειπτικού σχήματος και filaments κυλινδρικού/νηματοειδούς σχήματος. Αυτοί οι σχηματισμοί βρίσκονται στις παρυφές του πλάσματος κοντά στα τοιχώματα του αντιδραστήρα, σε ένα στρώμα που αποκαλείται Scrape-Off Layer (SOL).

Η διδακτορική διατριβή εστιάζει σε φαινόμενα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από τις τυρβώδεις ανομοιογένειες που βρίσκονται στις παρυφές του πλάσματος. Τα κύματα συναντούν αυτές τις δομές κατά την διάδοσή τους, πριν φτάσουν στους στόχους τους που βρίσκονται πιο κοντά στον πυρήνα. Τα φαινόμενα σκέδασης είναι ανεπιθύμητα και πρέπει να καταπολεμηθούν. Για αυτόν τον σκοπό, είναι απαραίτητη η μελέτη σε βάθος της συμπεριφοράς των σκεδαστών.

Η παρούσα διατριβή περιλαμβάνει μελέτη των φαινομένων σκέδασης επίπεδων ραδιοκυμάτων και δεσμών που αποτελούνται από επαλληλία επίπεδων ραδιοκυμάτων, από απλές συνεκτικές τυρβώδεις δομές σε θερμοπυρηνικό πλάσμα. Η μελέτη αφορά τόσο τα κύματα Electron Cyclotron (EC) με συχνότητες στην περιοχή των 170 GHz, όσο και τα κύματα Lower Hybrid (LH) με συχνότητες στην περιοχή των 4.5 GHz. Οι ανομοιογένειες έχουν θεωρηθεί αρχικά παράλληλα επίπεδα στρώματα και ύστερα επιμήκεις κυλινδρικές με ακτίνα που ποικίλλει. Το εξωτερικά επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο θεωρείται είτε ευθυγραμμισμένο με τον άξονα του κυλίνδρου, είτε σε τυχαία διεύθυνση ως προς αυτόν. Η αντίθεση πυκνότητας μεταξύ του εσωτερικού των ανομοιογενειών και του περιβάλλοντος χώρου λαμβάνει πολλές διαφορετικές τιμές. Επίσης, η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος ή της προσπίπτουσας δέσμης είναι είτε τύπου O-mode είτε τύπου X-mode.

Για τον σκοπό της μελέτης αυτής, ακολουθείται κατάλληλη μαθηματική πορεία και στην συνέχεια εφαρμογή των αναλυτικών αποτελεσμάτων σε υπολογιστικό κώδικα, από τον οποίο λαμβάνονται αριθμητικά αποτελέσματα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα

σχολιάζονται και συγκρίνονται μεταξύ τους. Τέλος, τα βασικά συμπεράσματα της διατριβής συνοψίζονται.

Extensive Summary

Nuclear fusion is called the process in which two or more light atomic nucleus are joined to form a larger, that is the reverse process from the Nuclear Fission in which a large atomic nucleus breaks into two or more lighter ones. In both cases, huge amounts of energy are released. The Technology of Controlled Thermonuclear Fusion aims to make use of some of the resulting Nuclear Fusion energy for constructive purposes, such as the generation of electricity for future sourcing of residential areas.

Controlled Thermonuclear Fusion takes place in the thermonuclear plasma of a reactor, which usually has the form of a toroidal cylindrical ring. Reactors of this type are called tokamaks. The operation of a tokamak is complicated and many aids are used to achieve it. An externally applied magnetic field holds the plasma contained in the reversing device away from its walls, generating a high pressure and temperature gradient. Near the "core" of the plasma (around the axis of the cylindrical ring) the plasma temperature is much higher than at the edges (near the walls), thus protecting the walls of the reactor. Electromagnetic waves are also emitted from the outside space and propagate to the plasma nucleus in order to generate current, heat the plasma core and face the phenomena of magnetic islands.

However, the high gradients of temperature and pressure result in hot plasma flows from the core to the edges and the formation of coherent turbulent structures near the edges of the plasma. These coherent structures consist of plasma of different electron density from their surrounding space and are known in the international literature as blobs of spherical/elliptical shape and filaments of elongated cylindrical shape. These formations are located at the edges of the plasma near the walls of the reactor, in a layer called Scrape-Off Layer (SOL).

The doctoral dissertation focuses on electromagnetic wave scattering phenomena from the turbulent inhomogeneities found on the edges of the

plasma. Waves encounter these structures when they propagate before they reach their targets closer to the core. Scattering phenomena are undesirable and must be faced. For this purpose, it is necessary to study the scattering process in depth.

This dissertation includes study of the phenomena of scattering of plane waves and beams consisting of a number of plane waves by simple coherent turbulent structures in thermonuclear plasma. The study concerns both Electron Cyclotron (EC) waves with frequencies in the 170 GHz range and Lower Hybrid (LH) waves with frequencies in the 4.5 GHz range. The inhomogeneities have been considered initially parallel flat layers and then elongated cylindrical with varying radius. The externally imposed magnetic field is considered either aligned with the cylinder axis or in a random direction relative to it. The density contrast between the interior of the heterogeneities and the surrounding space takes many different values. Also, the polarization of the incident wave or the incident beam is either O-mode or X-mode.

For the purpose of this study, an appropriate mathematical course followed by applying the analytical results to a computational code from which numerical results are obtained. The numerical results are commented and compared. Finally, the main conclusions of the dissertation are summarized.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Γενικά	1
1.2	Πλεονεκτήματα Σύντηξης και οι βασικές πυρηνικές αντιδράσεις . .	2
1.3	Τρία πειραματικά κέντρα Θερμοπυρηνικής Σύντηξης	3
1.3.1	Το JET	3
1.3.2	Το ITER και το μελλοντικό DEMO	5
1.3.3	Το Alcator C-Mod	7
1.4	Φαινόμενα ανομοιογένειας πλάσματος που επηρεάζουν την απόδοση	8
1.4.1	Blobs και filaments	9
1.4.2	Προβλήματα που δημιουργούν οι τυρβώδεις δομές	10
1.5	Γεωμετρικές παραδοχές για τη μελέτη της σκέδασης από τυρβώδεις δομές	11
2	Σκέδαση ραδιοκυμάτων κατά τη διάδοσή τους μέσα από ένα ή περισσότερα διαδοχικά στρώματα, με διαφορετικές διηλεκτρικές ιδιότητες το καθένα	13
2.1	Εισαγωγή	13
2.2	Διηλεκτρικοί ταχυστές και συστήματα αναφοράς	13
2.2.1	Εφαρμογή: Ενεργός ταχυστής σύνθετου επίπεδου στρώματος	17
2.3	Διάδοση κυμάτων σε ενιαίο ομοιογενή χώρο (στο εσωτερικό ενός επίπεδου στρώματος)	22
2.3.1	Η κανονικοποιημένη μορφή των εξισώσεων Faraday και Ampere	22
2.3.2	Το πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων και η μέθοδος 4×4	24
2.3.3	Το θεώρημα του διανύσματος Poynting	25

2.4	Διάδοση ραδιοκυμάτων μέσω διαδοχικών εφαπτόμενων επιπέδων στρωμάτων	27
2.4.1	Η διαμέριση του άξονα των x και η μορφή της 4×4 εξίσωσης για καθμία από τις διαχωριστικές επιφάνειες . .	27
2.4.2	Ο αλγόριθμος επίλυσης	29
2.4.3	Εφαρμογή: Ένα επίπεδο στρώμα παρεμβλλόμενο μεταξύ δύο άλλων άπειρων στρωμάτων	32
2.4.4	Γενίκευση: Στοιβά στρωμάτων	37
2.4.5	Εφαρμογή: Δύο άπειρα στρώματα	42
2.5	Διαδοχικά στρώματα με συνεχή μεταβολή διηλεκτρικών ιδιοτήτων	48
2.5.1	Το συνεχές μοντέλο - Εντοπισμένες ομαλές (συνεχείς) διακυμάνσεις πυκνότητας κατά τον άξονα x	48
2.6	Σκέδαση από τυρβώδεις δομές αυξημένης γεωμετρικής πολυπλοκότητας: Πρόσπτωση σε περιοχή με περιοδικό ανάγλυφο .	55
2.7	Σύνοψη	62
3	Σκέδαση επιπέδων ραδιοκυμάτων Electron Cyclotron από απλή κυλινδρική συνεκτική δομή του τυρβώδους στρώματος	63
3.1	Εισαγωγή	63
3.2	Βασικές παραδοχές και γεωμετρία	68
3.3	Διάδοση RF κυμάτων στο πλάσμα και η σχέση διασποράς	72
3.3.1	Το ηλεκτρικό πεδίο γενικά	72
3.3.2	Η εξαγωγή της σχέσης διασποράς	74
3.4	Πολώσεις κυμάτων	82
3.4.1	Ειδική περίπτωση: Πρόσπτωση στο επίπεδο $(z - z')$. . .	85
3.5	Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο εκφρασμένα συναρτήσει των κυλινδρικών διανυσματικών συναρτήσεων	88
3.6	Οριακές συνθήκες και υπολογισμός συντελεστών	91

3.7	Υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου, του μαγνητικού πεδίου και του διανύσματος Poynting σε τυχαίο z	94
3.7.1	Σύνθεση των πεδίων σε αυθαίρετο z	94
3.7.2	Υπολογίζοντας το χρονικά ανεξάρτητο διάνυσμα Poynting και το φάσμα Fourier	97
3.8	Αριθμητικά αποτελέσματα	99
3.8.1	Η σημασία της ακτίνας του κυλίνδρου στη σκέδαση του ραδιοκύματος	99
3.8.2	Η σημασία της αντίθεσης της ηλεκτρονικής πυκνότητας στη σκέδαση του ραδιοκύματος	102
3.8.3	Σκέδαση RF κύματος με μη μηδενική κλίση του διανύσματος του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου, για προσπίπτον κύμα πόλωσης O-mode . .	104
3.8.4	Σκέδαση RF κύματος με μη μηδενική κλίση του διανύσματος του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου, για προσπίπτον κύμα πόλωσης X-mode . .	108
3.9	Συμπεράσματα και σύνοψη	111
3.10	Πίνακες μετασχηματισμών (Παράρτημα Α Κεφαλαίου 3)	115
3.10.1	Μετασχηματισμός από το σύστημα συντεταγμένων του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα συντεταγμένων του κυλίνδρου απείρου μήκους και αντίστροφα	115
3.10.2	Μετασχηματισμός από Καρτεσιανές σε Κυλινδρικές συντεταγμένες και αντίστροφα	116
3.11	Κυλινδρικές διανυσματικές συναρτήσεις (Παράρτημα Β Κεφαλαίου 3)	117
4	Σκέδαση γκαουσιανών δεσμών ραδιοκυμάτων Electron Cyclotron από απλή κυλινδρική συνεκτική δομή του τυρβώδους στρώματος	119
4.1	Εισαγωγή	119

4.2	Σύνοψη μαθηματικών προσεγγίσεων για την μελέτη γκαουσιανών δεσμών	119
4.3	Αριθμητικά αποτελέσματα σκέδασης γκαουσιανών δεσμών και συμπεράσματα	120
4.3.1	Διάδοση γκαουσιανών δεσμών σε πυκνότητα μικρότερη της αποκοπής	120
4.3.2	Διάδοση έικεντρων γκαουσιανών δεσμών	121
4.3.3	Μελέτη σκέδασης στην περιοχή της πυκνότητας αποκοπής	122
4.4	Σύνοψη	124
5	Σκέδαση επίπεδων κυμάτων και γκαουσιανών δεσμών ραδιοκυμάτων LH από απλή κυλινδρική συνεκτική δομή του τυρβώδους στρώματος	125
5.1	Εισαγωγή	125
5.2	Σκέδαση επίπεδων ραδιοκυμάτων LH από κύλινδρο	126
5.3	Σκέδαση γκαουσιανών δεσμών ραδιοκυμάτων LH από κύλινδρο	130
5.4	Σύνοψη	131
6	Σύνοψη διδακτορικής διατριβής και μελλοντικοί στόχοι	133
7	Γλωσσάριο τεχνικών όρων	137
8	Βιβλιογραφία	138
8.1	Αναφορές	138
8.2	Δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά	143
8.3	Συμμετοχές σε διεθνή συνέδρια	144

1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά

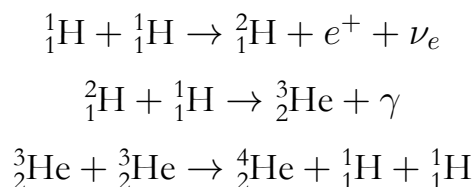
Πυρηνική Σύντηξη καλείται η διαδικασία κατά την οποία δύο ή περισσότεροι πυρήνες ελαφριών ατόμων ενώνονται σχηματίζοντας έναν μεγαλύτερο, δηλαδή η αντίστροφη διαδικασία από την Πυρηνική Σχάση κατά την οποία ένας μεγάλος ατομικός πυρήνας διασπάται σε δύο ή περισσότερους ελαφρύτερους. Και στις δύο περιπτώσεις απελευθερώνονται τεράστια ποσά ενέργειας.

Η Θερμοπυρηνική Σύντηξη είναι μία μέθοδος επίτευξης Πυρηνικής Σύντηξης σε περιβάλλον εξαιρετικά υψηλών θερμοκρασιών. Υπάρχουν δύο τύποι Θερμοπυρηνικής Σύντηξης: η μη ελεγχόμενη και η ελεγχόμενη. Στην πρώτη περίπτωση, η προκύπτουσα ενέργεια απελευθερώνεται με ανεξέλεγκτο τρόπο, όπως γίνεται στα θερμοπυρηνικά όπλα (για παράδειγμα στην βόμβα υδρογόνου), ωστόσο η μη ελεγχόμενη Θερμοπυρηνική Σύντηξη δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Κατά την ελεγχόμενη Θερμοπυρηνική Σύντηξη, οι αντιδράσεις σύντηξης λαμβάνουν χώρα σε ένα περιβάλλον που επιτρέπει μέρος της προκύπτουσας ενέργειας να αξιοποιείται για εποικοδομητικούς σκοπούς, όπως η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας με σκοπό τη ρευματοδότηση κατοικημένων περιοχών.

Είναι πολλοί οι λόγοι για τους οποίους γίνονται παγκοσμίως σε μεγάλη κλίμακα μελέτες σχετικές με την Σύντηξη και επενδύονται σε αυτές πολύ μεγάλα χρηματικά ποσά. Η μελλοντική επιδίωξη είναι η παραγωγή και η εκμετάλλευση ηλεκτρικής ενέργειας από τη Σύντηξη και η σταδιακή αντικατάσταση των κέντρων παραγωγής μέσω Σχάσης από αυτήν.

1.2 Πλεονεκτήματα Σύντηξης και οι βασικές πυρηνικές αντιδράσεις

Τα ραδιενεργά απόβλητα της Σύντηξης είναι πολύ πιο ακίνδυνα, καθώς εμφανίζουν πολύ μικρότερο χρόνο ημιζωής από εκείνα της Σχάσης. Δηλαδή, τα απόβλητα της Σύντηξης έχουν χρόνο ημιζωής της τάξης των εκατοντάδων ετών, σε αντίθεση με εκείνα της Σχάσης που έχουν χρόνο ημιζωής της τάξης των εκατομμυρίων ετών. Επίσης, η ενέργεια που απελευθερώνεται από τη Σύντηξη είναι τρεις με τέσσερις φορές μεγαλύτερη από εκείνη της Σχάσης. Επιπλέον, η πρώτη ύλη για την παραγωγή ρεύματος δεν είναι το ουράνιο που είναι στη Σχάση, αλλά ισότοπα υδρογόνου (δευτέριο και τρίτιο). Αναλυτικότερα, το δευτέριο (${}^2_1\text{D}$ ή ${}^2_1\text{H}$) μπορεί να εξαχθεί εύκολα από το (θαλασσινό) νερό, όπου υπάρχει σε αναλογία περίπου 30 γραμμαρίων ανά κυβικό μέτρο. Το τρίτιο (${}^3_1\text{T}$ ή ${}^3_1\text{H}$), μπορεί να παραχθεί από το λίθιο (ελαφρύ μέταλλο το οποίο επίσης υπάρχει σε αφθονία). Αυτό σημαίνει, ότι σαν πρώτη ύλη στη Σύντηξη μπορεί να χρησιμοποιηθούν υλικά που υπάρχουν σε αφθονία σε παγκόσμιο επίπεδο. Σε αντίθεση, το ραδιενεργό ουράνιο, που χρησιμοποιείται στους αντιδραστήρες πυρηνικής Σχάσης, είναι ακριβό και δυσεύρετο και μπορεί να αποτελέσει αίτιο πολέμου μεταξύ χωρών, αφού εμφανίζεται σε συγκεκριμένες γεωγραφικές περιοχές. Οι βασικές πυρηνικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα κατά τη Σύντηξη, είναι οι ακόλουθες:



Ωστόσο, οι δυσκολίες είναι πολλές και η Θερμοπυρηνική Σύντηξη βρίσκεται ακόμα δυστυχώς μόνο σε πειραματικό στάδιο. Απαιτείται εξαιρετικά υψηλή ενέργεια, προκειμένου δύο πυρήνες να έρθουν τόσο κοντά ώστε οι πυρηνικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών να υπερνικούν τις ηλεκτροστατικές

απωστικές δυνάμεις. Οι συνθήκες υψηλής θερμοκρασίας και πυκνότητας που μπορούν να λειτουργήσουν ως καταλύτες (μεταξύ άλλων) για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία της πυρηνικής Σύντηξης, είναι δύσκολο να διατηρηθούν σταθερές για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Η διαδικασία αποσταθεροποιείται και παύει όταν οι συνθήκες αποκλίνουν από τις απαιτούμενες (ευτυχώς βέβαια, δεν είναι δυνατόν να προκαλέσει πυρηνικό ατύχημα και απλώς σβήνει - σε αντίθεση με την περίπτωση της πυρηνικής Σχάσης).

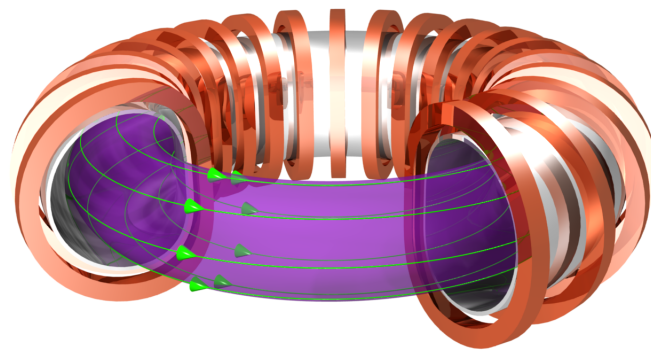
1.3 Τρία πειραματικά κέντρα Θερμοπυρηνικής Σύντηξης

Χωρίς να αποτελεί αντικείμενο της διατριβής, χρήσιμο είναι να υπάρχει και μία εικόνα για την κατάσταση της πειραματικής έρευνας σχετικά με τη Σύντηξη. Για αυτόν τον σκοπό, περιγράφονται συνοπτικά στην τρέχουσα παράγραφο, ενδεικτικά, τρία από τα σημερινά πειραματικά κέντρα Θερμοπυρηνικής Σύντηξης. Αυτά είναι τα Joint European Torus (JET), International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER) και ALto CAmpo TORo, High Field Torus (Alcator C-Mod). Η έρευνα για τη Σύντηξη ωστόσο, δεν περιορίζεται σε αυτά, καθώς υπάρχουν και πολλά άλλα (π.χ. το TCV, το W7-X, το WEST, το NSTX κ.α.)

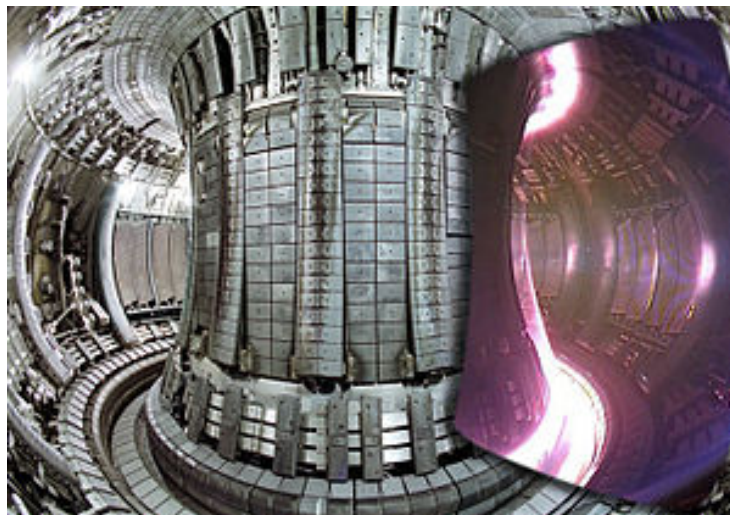
1.3.1 Το JET

Το JET λοιπόν (Εικόνα 1.3.1.β), είναι εγκατεστημένο στο Κέντρο Επιστημών για την Ενέργεια Σύντηξης (ίδρυση 1965) του Culham, στο Oxfordshire του Ηνωμένου Βασιλείου. Ο σχεδιασμός του ξεκίνησε το 1973, ενώ η λειτουργία του το 1984 και συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Η αρχή λειτουργίας του είναι βασισμένη στον σχεδιασμό tokamak, δηλαδή υπάρχει συσκευή η οποία χρησιμοποιεί εξωτερικό μαγνητικό πεδίο προκειμένου να συγκρατήσει το πλάσμα ώστε να κινείται κυκλικά εντός ενός τόρου (δηλαδή ενός κυλινδρικού δακτυλίου, όπως σχηματικά απεικονίζεται στην Εικόνα 1.3.1.α). Με την βοήθεια του επιβαλλόμενου αυτού

μαγνητικού πεδίου, η κλίση της θερμοκρασίας είναι μεγάλη, με τις μέγιστες τιμές να λαμβάνουν χώρα στον πυρήνα του πλάσματος (δηλαδή το κέντρο του κυλινδρικού δακτυλίου). Έτσι, τα τοιχώματα του αντιδραστήρα στις παρυφές του πλάσματος βρίσκονται σε σημαντικά μικρότερη θερμοκρασία και προστατεύονται από την καταστροφή τους.



Εικόνα 1.3.1.α - Σχηματική απεικόνιση ενός τόρου tokamak



Εικόνα 1.3.1.β - Το εσωτερικό του αντιδραστήρα του JET



Εικόνα 1.3.1.γ - Το εξωτερικό του αντιδραστήρα του JET

1.3.2 Το ITER και το μελλοντικό DEMO

Το ITER είναι ο μεγαλύτερος αντιδραστήρας Θερμοπυρηνικής Σύντηξης στον κόσμο και βρίσκεται στο επιστημονικό κέντρο ερευνών πυρηνικής ενέργειας Cadarache στη Νότια Γαλλία, περίπου 60 χιλιόμετρα βορειοανατολικά της πόλης Marseille. Κύριος χρηματοδότης του είναι η Ευρωπαϊκή Ένωση με συνεισφορά περίπου 45% επί του συνόλου των δαπανών, ενώ υπάρχουν και άλλα έξι μέρη που συνχρηματοδοτούν και συνεισφέρουν περίπου κατά 9% έκαστο (Ινδία, Ιαπωνία, Κίνα, Ρωσία, Νότια Κορέα και Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής). Όπως και στην περίπτωση του JET, έτσι και στο ITER, η αρχή λειτουργίας είναι βασισμένη στον σχεδιασμό tokamak.

Στόχος του ITER είναι να κάνει την πολυαναμενόμενη μετάβαση από το στάδιο των πειραματικών μελετών της Φυσικής του Πλάσματος στην πλήρη κλίμακα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.

Ο αντιδραστήρας ITER έχει σχεδιαστεί για να παράγει 500 MW ισχύος εξόδου, με 50 MW απαιτούμενη ισχύ λειτουργίας εισόδου. Έτσι, αν γίνει αυτό θα είναι η πρώτη διάταξη που θα παράγει μέσω της διαδικασίας Σύντηξης περισσότερη ενέργεια από αυτήν που απαιτείται για να λειτουργήσει. Η κατασκευή του ITER

ξεκίνησε το 2013 και τα έξοδα οικοδόμησης ανερχόντουσαν μέχρι τον Ιούνιο του 2015 σε περισσότερα από 14 δισεκατομμύρια δολάρια Αμερικής, δηλαδή περίπου 3 φορές ο αρχικός προϋπολογισμός. Η κατασκευή του αναμένεται να ολοκληρωθεί το 2019 και τα πειράματα πλάσματος να ξεκινήσουν το 2020, ενώ πλήρη πειράματα σύντηξης δευτέρου-τρίτιου εκτιμάται ότι θα ξεκινήσουν να πραγματοποιούνται από το 2027. Η πρώτη εμπορική μονάδα παραγωγής ενέργειας από σύντηξη θα ονομάζεται DEMOnstration Power Plant (DEMO) και σχεδιάζεται να διαδεχθεί το ITER.

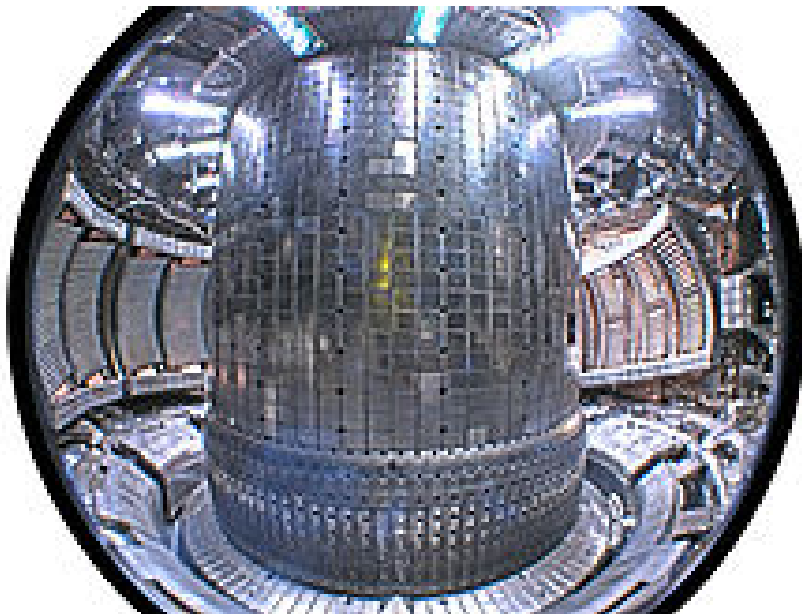


Εικόνα 1.3.2 - Απεικόνιση τομής του τόρου του ITER

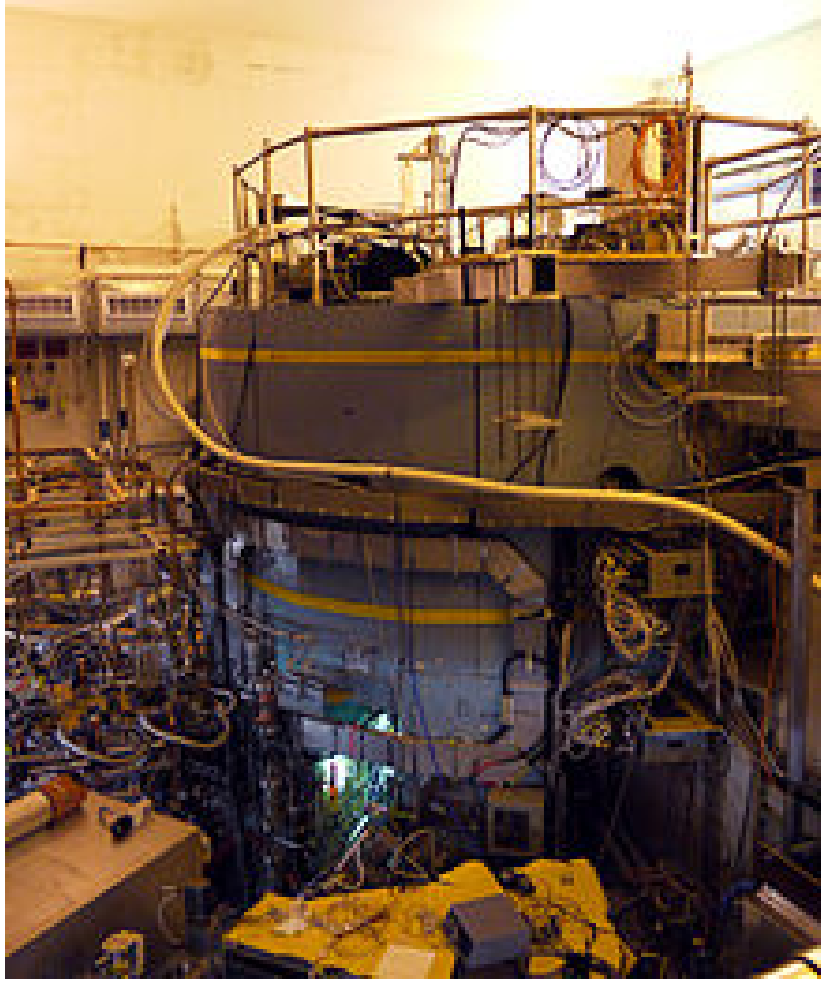
Το DEMO θα πρέπει να παράγει τουλάχιστον 2 GW ηλεκτρικής ενέργειας από σύντηξη σε συνεχή βάση και θα πρέπει να αποδίδει 25 φορές περισσότερη ενέργεια από αυτήν που καταναλώνει. Για τον σκοπό αυτό, ο αντιδραστήρας του DEMO υπολογίζεται ότι θα πρέπει να έχει διαστάσεις περίπου κατά 15% μεγαλύτερες από εκείνες του ITER, ενώ η πυκνότητα του πλάσματος μέσα στον αντιδραστήρα του DEMO εκτιμάται ότι θα πρέπει να είναι κατά 30% μεγαλύτερη από εκείνη του ITER. Τέλος, σημειώνεται ότι ακόμα δεν έχουν οριστικοποιηθεί συναινέσεις σε διεθνές επίπεδο σχετικά με τις ακριβείς παραμέτρους του DEMO.

1.3.3 Το Alcator C-Mod

Το Alcator C-Mod είναι εγκατεστημένο στο Κέντρο Επιστημών Πλάσματος και Σύντηξης (Plasma Science and Fusion Center - PSFC) του MIT (Massachusetts Institute of Technology) στην πόλη Cambridge της πολιτείας Massachusetts των ΗΠΑ. Η αρχή λειτουργίας του είναι επίσης βασισμένη στον σχεδιασμό tokamak και μάλιστα, είναι ανάμεσα στα tokamak αυτό με το ισχυρότερο μαγνητικό πεδίο και την υψηλότερη πίεση πλάσματος στον κόσμο. Είναι ο τρίτος από την σειρά Alcator και συγκεκριμένα, είναι ο διάδοχος των Alcator A (1973–1979) και Alcator C (1978–1987).



Εικόνα 1.3.3.α - Το εσωτερικό του αντιδραστήρα του Alcator C-Mod



Εικόνα 1.3.3.β - Το εξωτερικό του αντιδραστήρα του Alcator C-Mod

1.4 Φαινόμενα ανομοιογένειας πλάσματος που επηρεάζουν την απόδοση

Το πλάσμα της Σύντηξης πρέπει να θερμαίνεται [1, 2] σε θερμοκρασίες που στον πυρήνα του τόρου (δηλαδή, τον άξονα του κυλινδρικού δακτυλίου) υπερβαίνουν τα 100 εκατομμύρια βαθμών Κέλβιν, αλλά παράλληλα όπως προαναφέρθηκε, να μεταβαίνει σε σημαντικά ψυχρότερες κοντά στα τοιχώματα του τόρου για να μην προκαλεί βλάβες στο υλικό. Αυτή η απότομη αλλαγή της θερμοκρασίας (και συνεπώς και της πίεσης) στα σύνορα της περιοχής του πλάσματος γίνεται εφικτή με την παρουσία εξωτερικά επιβαλλόμενου ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Όμως, καθώς το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο βοηθάει στη

συγκράτηση του πλάσματος, η παρουσία μεγάλης κλίσης των παραμέτρων προκαλεί αναταράξεις, οι οποίες οδηγούν σε αργή διαρροή του εσωτερικού θερμού πλάσματος προς τα τοιχώματα.

Η κατανόηση και ο έλεγχος των αναταραχών αυτών και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ του πλάσματος και των τοιχωμάτων έχουν μεγάλη πρακτική σημασία στη διαδικασία της Σύντηξης. Ισχυρές αναταράξεις στον πυρήνα του τόρου, εκτός από την αποσταθεροποίηση της απαραίτητης συγκράτησης του πλάσματος, έχουν ως συνέπεια σημαντικές διαβρώσεις των τοιχωμάτων των διατάξεων.

Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στη μελέτη τυρβώδων στοιχείων που σχηματίζονται κατά τη διαδικασία της Θερμοπυρηνικής Σύντηξης και χαρακτηρίζουν τις παρυφές του πλάσματος στις συσκευές Σύντηξης με μαγνητική συγκράτηση πλάσματος. Η σημασία αυτού του αντικειμένου είναι πράγματι μεγάλη, καθώς οι συνεκτικές δομές που δημιουργούνται επιδρούν αρνητικά στη μεταφορά σωματιδίων και ενέργειας μέσα στο πλάσμα, οπότε τελικά στην απόδοση των διατάξεων. Η παρούσα μελέτη ασχολείται με τέτοιου είδους δομές, οι οποίες είτε είναι σφαιρικού ή ελλειψοειδούς εκ περιστροφής σχήματος και καλούνται blobs, είτε είναι επιμήκεις κυλινδρικού ή νηματοειδούς σχήματος και καλούνται filaments.

1.4.1 Blobs και filaments

Τα blobs και τα filaments, είναι άμορφες μάζες πλάσματος μέσα στο πλάσμα των αντιδραστήρων, οι οποίες βρίσκονται κοντά στις παρυφές του πλάσματος, δηλαδή κοντά στα σύνορα του εσωτερικού του τόρου με τα τοιχώματά του, σε μία περιοχή (στρώμα) του πλάσματος που ονομάζεται Scrape-Off Layer (SOL). Διαφοροποιούνται από το περιβάλλον τους ως προς την πυκνότητα πλάσματος και έχουν παρατηρηθεί σε όλες τις διατάξεις μαγνητικής συγκράτησης. Η πυκνότητα των τυρβώδων αυτών δομών είναι συνήθως μεγαλύτερη από αυτήν του περιβάλλοντός τους, αλλά υπό συνθήκες μπορεί να είναι και μικρότερη. Αυτές

κινούνται τοροειδώς μέσα στο πλάσμα (δηλαδή περιστρέφονται κατά μήκος του τόρου).

1.4.2 Προβλήματα που δημιουργούν οι τυρβώδεις δομές

Τα προβλήματα, που δημιουργούν τα blobs στη διαδικασία της Σύντηξης, συνοψίζονται στο ότι ευρισκόμενα κοντά στα τοιχώματα του tokamak σκεδάζουν και εξασθενούν ακτινοβολία, η οποία προέρχεται από το εξωτερικό του τόρου και οδηγείται σκιασίμως προς το εσωτερικό και τον πυρήνα του.

Η ακτινοβολία αυτή είναι διαφόρων ειδών και έχει δύο βασικούς στόχους [1]:

α) Καταπολέμηση του φαινομένου σχηματισμού Μαγνητικών Νησίδων (Magnetic Islands). Οι μαγνητικές νησίδες είναι κλειστές σωληνοειδείς μαγνητικές ροές με σπειροειδή τοπολογία και εμφανίζονται μέσα στο πλάσμα παρεμβαλλόμενες ενδιάμεσα στην περιοχή των blobs και τον πυρήνα του τόρου. Αυτές κινούνται και τοροειδώς μέσα στο πλάσμα (δηλαδή περιστρέφονται κατά μήκος του τόρου) αλλά και γύρω από τους εαυτούς τους. Είναι ανεπιθύμητες, διότι σκεδάζουν και εξασθενούν ακτινοβολία, η οποία προορίζεται προς τον πυρήνα του τόρου. Για να εξαλειφθεί το φαινόμενο αυτό, χρησιμοποιείται Electron Cyclotron (EC) ακτινοβολία (η οποία για παράδειγμα στον Alcator C-Mod είναι συχνότητας 170 GHz) εκπεμπόμενη από διατάξεις που ονομάζονται γυροτρόνια. Η ακρίβεια που απαιτείται σε αυτήν την περίπτωση είναι πολύ μεγάλη και μάλιστα, σε περιπτώσεις που υπάρχει απόκλιση μεγαλύτερη από 1-2 cm από τον στόχο, μπορεί να προκληθούν τα αντίθετα από τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα και να υπάρξει ενίσχυση του φαινομένου των μαγνητικών νησίδων.

β) Θέρμανση του πυρήνα του τόρου, για την οποία χρησιμοποιείται κυρίως Lower Hybrid (LH) ακτινοβολία (η οποία για παράδειγμα στον Alcator C-Mod είναι συχνότητας 4.6 GHz). Σε αυτήν την περίπτωση, η απαιτούμενη ακρίβεια είναι σχετικά μικρότερη, αλλά εξακολουθεί να είναι σημαντική. Επίσης, πρέπει και η

εξασθένιση, που υφίσταται η ακτινοβολία που διέρχεται μέσα από το στρώμα των τυρβώδων δομών, να είναι κατά το δυνατόν μικρότερη. Σημειώνεται ότι, αν δεν έχουν καταπολεμηθεί τα φαινόμενα σχηματισμού μαγνητικών νησίδων, οι οποίες βρίσκονται σε ενδιάμεση περιοχή μεταξύ των παρυφών και του πυρήνα του πλάσματος, ο τελικός στόχος, που είναι η LH ακτινοβολία να θερμάνει τον πυρήνα του πλάσματος, δεν μπορεί να επιτευχθεί.

1.5 Γεωμετρικές παραδοχές για τη μελέτη της σκέδασης από τυρβώδεις δομές

Από τα παραπάνω γίνεται άμεσα έντονα αντιληπτή η ανάγκη της κατά το δυνατόν πληρέστερης και πιο εμπειριστατωμένης κατανόησης της συμπεριφοράς των ανομοιογενειών, που καλούνται blobs και filaments. Είναι πολύ σημαντικό να αναπτυχθεί γνώση σχετική με τη σκέδαση και την εξασθένιση, που υφίσταται η ακτινοβολία ραδιοσυχνότητας LH και EC, όταν διέρχεται μέσα από το στρώμα όπου εμφανίζονται αυτά.

Για τον σκοπό αυτό, οι ανομοιογένειες θεωρούνται στην παρούσα μελέτη σε μία σχετικά απλοποιημένη προσέγγιση σφαίρες (blobs) ή επιμήκεις κύλινδροι (filaments) και μελετάται η συνολική διηλεκτρική συμπεριφορά του στρώματος που περιέχει τις τυρβώδεις δομές αλλά και η συμπεριφορά μίας τέτοιας μεμονωμένης δομής.

2 Σκέδαση ραδιοκυμάτων κατά τη διάδοσή τους μέσα από ένα ή περισσότερα διαδοχικά στρώματα, με διαφορετικές διηλεκτρικές ιδιότητες το καθένα

2.1 Εισαγωγή

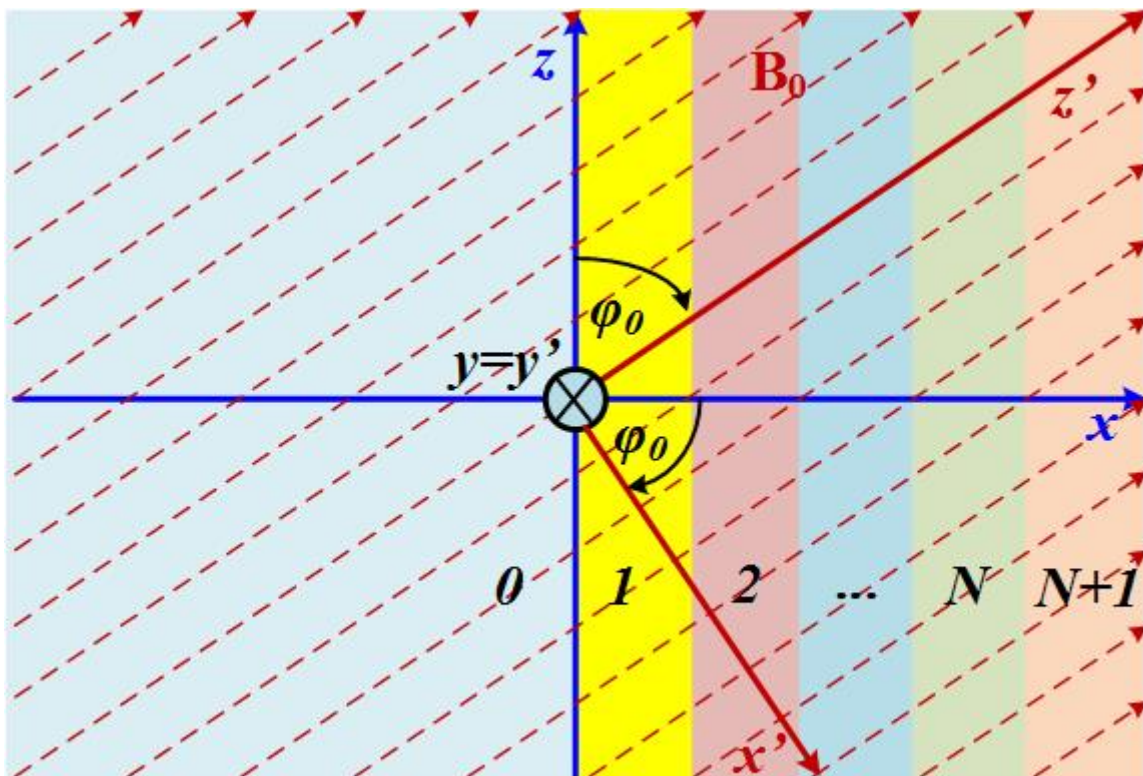
Όπως προαναφέρθηκε στην Εισαγωγή της διδακτορικής διατριβής, κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της σκέδασης των RF κυμάτων (που οδεύουν προς τον πυρήνα του τόρου) από τυρβώδεις δομές που βρίσκονται στις παρυφές του πλάσματος. Σημειώνεται ότι η διαδικασία αυτής της σκέδασης εξετάζεται πάντοτε παρουσία ενός εξωτερικά επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου. Αυτό υπάρχει πάντοτε στο πλάσμα της Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης για συγκράτηση του πλάσματος ώστε να κινείται κυκλικά εντός του τόρου του tokamak και κατά το δυνατόν μακριά από τα τοιχώματα, ώστε να μην τα φθείρει λόγω των υψηλών θερμοκρασιών που χαρακτηρίζουν το πλάσμα.

Έτσι λοιπόν, σε μία πρώτη -και ίσως λίγο πιο γενική και αφηρημένη- προσέγγιση, θα εξεταστεί η διάδοση και η σκέδαση RF κυμάτων από επίπεδα παράλληλα στρώματα, τα οποία έχουν διαφορετικές διηλεκτρικές ιδιότητες το καθένα. Σε αυτό το περιβάλλον διάδοσης, υπάρχει η παρουσία ενός ομογενούς, εξωτερικά επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου, που έχει τυχαίο προσανατολισμό ως προς τα παράλληλα αυτά επίπεδα στρώματα (Εικόνα 2.1).

2.2 Διηλεκτρικοί τανυστές και συστήματα αναφοράς

Έστω ότι ο συμβολισμός (I) αναφέρεται στο μη τονούμενο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο ο θετικός ημιάξονας x δείχνει να διαπερνάει κάθετα τα στρώματα κατά αύξοντα αριθμό, ενώ ο άξονας z εφάπτεται στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των στρωμάτων 0 και 1, όπως απεικονίζεται στην

Εικόνα 2.1. Επίσης, έστω ότι ο συμβολισμός (B) αναφέρεται στο τονούμενο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του ίδιου σχήματος, το οποίο είναι στραμμένο διατηρώντας σταθερό τον άξονα y , έτσι ώστε ο άξονας z' να είναι παράλληλος και ομόρροπος με το διάνυσμα του εξωτερικά επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου \mathbf{B}_0 . Η γωνία στροφής γύρω από τον άξονα y , η οποία φέρνει τον άξονα z στον άξονα z' είναι σύμφωνα με τη θεώρηση του σχήματος θετική και συμβολίζεται με φ_0 .



Εικόνα 2.1 - Η στρόφη του συστήματος συντεταγμένων στο σύστημα αναφοράς του μαγνητικού πεδίου

Για τα μοναδιαία διανύσματα εύκολα προκύπτει ότι:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^{(B)} \\ \hat{\mathbf{y}}^{(B)} \\ \hat{\mathbf{z}}^{(B)} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^{(I)} \\ \hat{\mathbf{y}}^{(I)} \\ \hat{\mathbf{z}}^{(I)} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

όπου

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0) \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & 0 & -\sin \varphi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_0 & 0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

είναι ο πίνακας στροφής με

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y^{-1}(\varphi_0) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y^T(\varphi_0) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(-\varphi_0) \quad (2.3)$$

Έτσι, για οποιοδήποτε διάνυσμα στήλη $\boldsymbol{\alpha}$ ισχύει:

$$\begin{pmatrix} a_x^{(B)} \\ a_y^{(B)} \\ a_z^{(B)} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0) \cdot \begin{pmatrix} a_x^{(I)} \\ a_y^{(I)} \\ a_z^{(I)} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ενώ επειδή σύμφωνα με τις ιδιότητες ανάστροφων πινάκων ισχύει $(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0)\boldsymbol{\alpha})^T = \boldsymbol{\alpha}^T \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y^T(\varphi_0)$, αν αναστραφούν και τα δύο μέλη της τελευταίας, για το αντίστοιχο διάνυσμα γραμμή προκύπτει:

$$\left(a_x^{(B)} \quad a_y^{(B)} \quad a_z^{(B)} \right) = \left(a_x^{(I)} \quad a_y^{(I)} \quad a_z^{(I)} \right) \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(-\varphi_0) \quad (2.5)$$

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (B) του μαγνητικού πεδίου ο διηλεκτρικός τανυστής [18] για ψυχρό πλάσμα (δηλαδή, για θερμοική ταχύτητα ιόντων και ηλεκτρονίων αμελητέα σχετικά με την ταχύτητα του φωτός, κάτι το οποίο συμβαίνει στις παρυφές του πλάσματος) γράφεται ως εξής:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^{(B)} = \begin{pmatrix} K_{\perp}^{(B)} & -iK_{\times}^{(B)} & 0 \\ iK_{\times}^{(B)} & K_{\perp}^{(B)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel}^{(B)} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Στη συνέχεια, με δεδομένο τον πίνακα στροφής $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0)$ θα υπολογιστεί ο τρόπος με τον οποίο τροποποιείται ο διηλεκτρικός τανυστής $\overset{\leftrightarrow(B)}{\mathbf{K}}$, από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (B) του μαγνητικού πεδίου στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (I) της διαχωριστικής επιφάνειας. Αυτό, γίνεται με σκοπό να μπορούν στην συνέχεια να εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες.

Σε κάθε αλλαγή συστήματος συντεταγμένων πρέπει το εσωτερικό γινόμενο δύο τυχαίων διανυσμάτων να παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι, αν θεωρηθούν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}\mathbf{b}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}$ και \mathbf{b} τυχαία διανύσματα και $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}$ ο διηλεκτρικός τανυστής στο σύστημα αναφοράς τους, θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο στο σύστημα (B) να ισούται με το εσωτερικό τους γινόμενο στο σύστημα (I), δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha}^{(B)} \cdot (\overset{\leftrightarrow(B)}{\mathbf{K}} \mathbf{b}^{(B)}) = \boldsymbol{\alpha}^{(I)} \cdot (\overset{\leftrightarrow(I)}{\mathbf{K}} \mathbf{b}^{(I)}) \quad (2.7)$$

Για το εσωτερικό γινόμενο όμως, εξ'ορισμού ισχύει: $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}\mathbf{b}) \equiv \boldsymbol{\alpha}^T \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}\mathbf{b}$, οπότε η σχέση (2.7) γίνεται

$$(\boldsymbol{\alpha}^{(B)})^T \overset{\leftrightarrow(B)}{\mathbf{K}} \mathbf{b}^{(B)} = (\boldsymbol{\alpha}^{(I)})^T \overset{\leftrightarrow(I)}{\mathbf{K}} \mathbf{b}^{(I)} \quad (2.8)$$

Επίσης, από τον ορισμό του πίνακα στροφής, ισχύουν οι $\boldsymbol{\alpha}^{(B)} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0)\boldsymbol{\alpha}^{(I)}$ και $\mathbf{b}^{(B)} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0)\mathbf{b}^{(I)}$, επομένως η (2.8) με τη σειρά της γίνεται:

$$(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0)\boldsymbol{\alpha}^{(I)})^T \overset{\leftrightarrow(B)}{\mathbf{K}} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0)\mathbf{b}^{(I)} = (\boldsymbol{\alpha}^{(I)})^T \overset{\leftrightarrow(I)}{\mathbf{K}} \mathbf{b}^{(I)} \quad (2.9)$$

και επειδή σύμφωνα με τις ιδιότητες ανάστροφων πινάκων ισχύει:

$$(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0)\boldsymbol{\alpha}^{(I)})^T = (\boldsymbol{\alpha}^{(I)})^T \overset{\leftrightarrow T}{\mathbf{R}}_y(\varphi_0) \quad (2.10)$$

τελικά η απαίτηση (2.7) παίρνει τη μορφή:

$$(\boldsymbol{\alpha}^{(I)})^T \mathbf{R}_y^{\leftrightarrow T}(\varphi_0) \mathbf{K}^{\leftrightarrow(B)\leftrightarrow} \mathbf{R}_y(\varphi_0) \mathbf{b}^{(I)} = (\boldsymbol{\alpha}^{(I)})^T \mathbf{K}^{\leftrightarrow(I)} \mathbf{b}^{(I)} \quad (2.11)$$

ενώ είναι προφανές ότι η τελευταία σχέση επιβάλλει την

$$\mathbf{K}^{(I)} = \mathbf{R}_y^{\leftrightarrow T}(\varphi_0) \mathbf{K}^{\leftrightarrow(B)\leftrightarrow} \mathbf{R}_y(\varphi_0) \quad (2.12)$$

Έτσι, λόγω της προαναφερθείσας

$$\mathbf{R}_y^{\leftrightarrow T}(\varphi_0) = \mathbf{R}_y^{\leftrightarrow}(-\varphi_0) \quad (2.13)$$

προκύπτει

$$\mathbf{K}^{\leftrightarrow(I)} = \mathbf{R}_y^{\leftrightarrow}(-\varphi_0) \mathbf{K}^{\leftrightarrow(B)\leftrightarrow} \mathbf{R}_y(\varphi_0) \quad (2.14)$$

το οποίο με την σειρά του δίνει

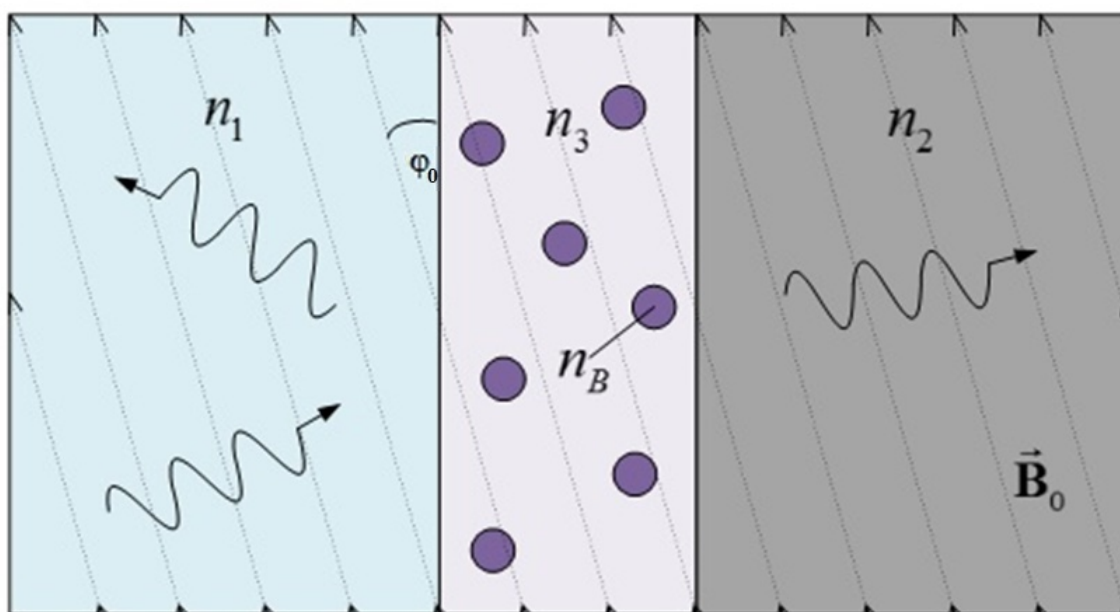
$$\mathbf{K}^{\leftrightarrow(I)} = \begin{pmatrix} c_0^2 K_{\perp} + s_0^2 K_{\parallel} & -iK_{\times} c_0 & c_0 s_0 (K_{\parallel} - K_{\perp}) \\ iK_{\times} c_0 & K_{\perp} & -iK_{\times} s_0 \\ c_0 s_0 (K_{\parallel} - K_{\perp}) & iK_{\times} s_0 & s_0^2 K_{\perp} + c_0^2 K_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

όπου $s_0 \equiv \sin \varphi_0$, $c_0 \equiv \cos \varphi_0$, $K_{\perp} \equiv K_{\perp}^{(B)}$, $K_{\parallel} \equiv K_{\parallel}^{(B)}$ και $K_{\times} \equiv K_{\times}^{(B)}$. Επίσης, από εδώ και πέρα το σύμβολο (I) στη θέση του εκθέτη θα παραλείπεται.

2.2.1 Εφαρμογή: Ενεργός ταχυστής σύνθετου επίπεδου στρώματος

Στο παράδειγμα που εξετάζεται, τα κύματα διαδίδονται σε τρεις περιοχές: Η πρώτη είναι ομοιογενής και ανισοτροπική και αποτελείται από ιόντα με χωρική

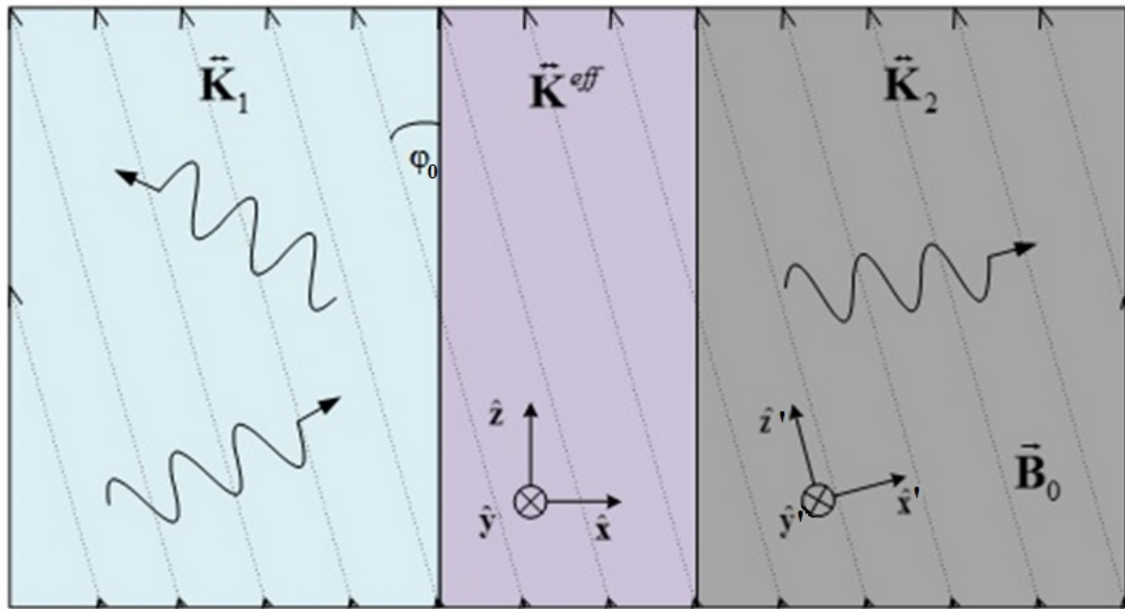
αριθμητική πυκνότητα n_1 . Μετά, το ποσοστό της ισχύος του προσπίπτοντος κύματος που δεν έχει ανακλαστεί στη διαχωριστική επιφάνεια διαδίδεται σε μία ενδιάμεση περιοχή διηλεκτρικής ανάμιξης που αποτελείται με τη σειρά της από ομοιογενές ανισοτροπικό περιβάλλον, μέσα στο οποίο τα ιόντα έχουν χωρική αριθμητική πυκνότητα n_3 και ανισοτροπικές σφαιρικές ανομοιογένειες (blobs) μέσα στις οποίες τα ιόντα έχουν χωρική αριθμητική πυκνότητα n_B . Ύστερα από τη διέλευση του κύματος από αυτήν την ενδιάμεση περιοχή, το ποσοστό της ισχύος του κύματος, που δεν ανακλάται στη δεύτερη διαχωριστική επιφάνεια, διαδίδεται σε μία τρίτη περιοχή, η οποία είναι ανισοτροπική και ομοιογενής και αποτελείται από ιόντα με χωρική αριθμητική πυκνότητα n_2 . Επιπλέον, οι διαχωριστικές επιφάνειες ανάμεσα στα διαφορετικά στρώματα είναι παράλληλες μεταξύ τους, αλλά όχι και με το επιβαλλόμενο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, με το οποίο σχηματίζουν γωνία φ_0 (Εικόνα 2.1.1.α) [3].



Εικόνα 2.1.1.α - Απεικόνιση του προβλήματος - Οι τρεις περιοχές διάδοσης

Στην ενδιάμεση περιοχή διάδοσης υπάρχουν ανισοτροπικές ανομοιογένειες (blobs) με αυθαίρετο διηλεκτρικό τανυστή $\overset{\leftrightarrow B}{\mathbf{K}}$ τοποθετημένες σε ομοιογενές ανισοτροπικό περιβάλλον, που έχει διηλεκτρικό τανυστή $\overset{\leftrightarrow P}{\mathbf{K}}$. Αυτό το πρόβλημα

αποδεικνύεται ότι μπορεί να απλοποιηθεί αντικαθιστώντας την περιοχή του πλάσματος με τα σφαιρικά blob με μία υποθετικά ομοιογενή διηλεκτρική περιοχή, που εμφανίζει ενεργό διηλεκτρικό τανυστή $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^{eff}$ (Εικόνα 2.1.1.β).



Εικόνα 2.1.1.β - Απλοποίηση του προβλήματος με αντικατάσταση της ενδιάμεσης περιοχής από υποθετικά ομοιογενή περιοχή με ενεργό διηλεκτρικό τανυστή $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^{eff}$

Αποδεικνύεται ότι για αυτήν την ενδιάμεση περιοχή λοιπόν, ο ενεργός διηλεκτρικός τανυστής δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^{eff} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} \quad (2.16)$$

όπου

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \equiv \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + f \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^B - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^P \right) \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^P + (1-f) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{N}} \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^B - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^P \right) \right]^{-1} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^P \quad (2.17)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^{eff,B,P} = \begin{pmatrix} K_{\perp}^{eff,B,P} & -iK_{\times}^{eff,B,P} & 0 \\ iK_{\times}^{eff,B,P} & K_{\perp}^{eff,B,P} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel}^{eff,B,P} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

και προκύπτει έτσι πίνακας $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$ της μορφής:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_{\perp} & -i\tilde{I}_{\times} & 0 \\ i\tilde{I}_{\times} & \tilde{I}_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

ενώ f είναι ο παράγοντας πλήρωσης, δηλαδή το ποσοστό του όγκου που καταλαμβάνουν τα blob και

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} N_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

είναι ο πίνακας αποπόλωσης, καθώς επίσης $N_{\perp} = \frac{1 - N_{\parallel}}{2}$ και για το N_{\parallel} υπάρχουν οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

$$N_{\parallel} = \begin{cases} \frac{K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P}{\sqrt{K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P - 1}^3} \left(\sqrt{K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P - 1} - \arctan \sqrt{K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P - 1} \right) \\ \gamma\alpha \quad K_{\parallel}^P > K_{\perp}^P \\ \\ \frac{K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P}{2\sqrt{1 - K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P}^3} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P}}{1 - \sqrt{1 - K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P}} - 2\sqrt{1 - K_{\parallel}^P/K_{\perp}^P} \right) \\ \gamma\alpha \quad K_{\parallel}^P < K_{\perp}^P \end{cases} \quad (2.21)$$

και τέλος

$$\tilde{I}_{\perp} = 1 + f \frac{K_{\perp}^P (K_{\perp}^B - K_{\perp}^P) - K_{\times}^P (K_{\times}^B - K_{\times}^P) + (1-f)N_{\perp} [(K_{\perp}^B - K_{\perp}^P)^2 - (K_{\times}^B - K_{\times}^P)^2]}{[K_{\perp}^P + (1-f)N_{\perp} (K_{\perp}^B - K_{\perp}^P)]^2 - [K_{\times}^P + (1-f)N_{\perp} (K_{\times}^B - K_{\times}^P)]^2} \quad (2.22)$$

$$\tilde{I}_{\parallel} = 1 + f \frac{K_{\parallel}^B - K_{\parallel}^P}{K_{\parallel}^P + (1-f)N_{\parallel} (K_{\parallel}^B - K_{\parallel}^P)} \quad (2.23)$$

και

$$\tilde{I}_{\perp} = 1 + f \frac{K_{\perp}^P K_{\times}^B - K_{\times}^P K_{\perp}^B}{[K_{\perp}^P + (1-f)N_{\perp} (K_{\perp}^B - K_{\perp}^P)]^2 - [K_{\times}^P + (1-f)N_{\perp} (K_{\times}^B - K_{\times}^P)]^2} \quad (2.24)$$

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι σε μία πιο ρεαλιστική προσέγγιση το σφαιρικό σχήμα των blob παραμορφώνεται σε ελλειψοειδές εκ περιστροφής κατά τον απαραίτητο μετασχηματισμό που γίνεται προκειμένου να εξακολουθήσει το δυναμικό στο εξωτερικό της σφαίρας να υπακούει στην εξίσωση Laplace. Στην περίπτωση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής λοιπόν, τα στοιχεία του πίνακα

αποπόλωσης προκύπτουν από το ολοκλήρωμα

$$N_x = \frac{a_x a_y a_z}{2} \int_0^\infty (s + a_x^2)^{-1} [(s + a_x^2)(s + a_y^2)(s + a_z^2)]^{-\frac{1}{2}} ds \quad (2.25)$$

όπου a_x , a_y και a_z είναι οι ημιάξονες της ελλειψοειδούς ανομοιογένειας. Το υπερελλiptικό αυτό ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση γνωστών ελλiptικών ολοκληρωμάτων και να υπολογιστεί με την βοήθειά τους [4].

Τέλος, το τονούμενο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο έχουν εκφραστεί οι διηλεκτρικοί ταχυστές και έχει υπολογιστεί ο ενεργός διηλεκτρικός ταχυστής της ενδιάμεσης περιοχής διάδοσης, είναι ευθυγραμμισμένο με το εξωτερικά επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο \mathbf{B}_0 και πρέπει να στραφεί γύρω από τον άξονα y προκειμένου να ευθυγραμμιστεί με τις διαχωριστικές επιφάνειες ανάμεσα στα στρώματα, δηλαδή το μη τονούμενο σύστημα στις Εικόνες 2.1.1.α και 2.1.1.β. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον πίνακα στροφής $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^{\leftrightarrow B,P,eff} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}(\varphi_0) \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}^{\leftrightarrow B,P,eff} \right)' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}(-\varphi_0) \quad (2.26)$$

2.3 Διάδοση κυμάτων σε ενιαίο ομοιογενή χώρο (στο εσωτερικό ενός επίπεδου στρώματος)

2.3.1 Η κανονικοποιημένη μορφή των εξισώσεων Faraday και Ampere

Ο νόμος του Faraday σε διαφορική μορφή είναι ως γνωστόν

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.27)$$

και αν θεωρηθεί $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t}$, όπου $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ο φάσoρας του ηλεκτρικού πεδίου και E_0 το πλάτος του, ενώ αντίστοιχα για το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}e^{-i\omega t}$, όπου $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ο φάσoρας του μαγνητικού πεδίου και H_0 το πλάτος του, ύστερα από

μετασχηματισμό Fourier και απαλλαγή από την χρονική εξάρτηση μέσω των $\nabla \times \leftrightarrow \mathbf{k} \times$ και $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega$ τελικά δίνει:

$$\eta_y \hat{e}_z - \eta_z \hat{e}_y = \hat{h}_x \quad (2.28)$$

$$\eta_z \hat{e}_x - \eta_x \hat{e}_z = \hat{h}_y \quad (2.29)$$

$$\eta_x \hat{e}_y - \eta_y \hat{e}_x = \hat{h}_z \quad (2.30)$$

όπου $\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{c}{\omega} \mathbf{k}$ είναι το κανονικοποιημένο αδιάστατο κυματάνυσμα, με $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό, $\hat{e}_i \equiv \frac{\tilde{E}_i}{E_0}$ και $\hat{h}_i \equiv \frac{\tilde{H}_i}{H_0}$ με $H_0 \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$ για $i = x, y, z$.

Επίσης, ο νόμος του Ampere απουσία ρεύματος σε διαφορική μορφή είναι:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.31)$$

όπου \mathbf{D} είναι το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης. Με την ίδια μέθοδο και τον ίδιο συμβολισμό με πριν, ο νόμος του Ampere παράγει τις ακόλουθες:

$$\eta_y \hat{h}_z - \eta_z \hat{h}_y = -(K_{xx} \hat{e}_x + K_{xy} \hat{e}_y + K_{xz} \hat{e}_z) \quad (2.32)$$

$$\eta_z \hat{h}_x - \eta_x \hat{h}_z = -(K_{yx} \hat{e}_x + K_{yy} \hat{e}_y + K_{yz} \hat{e}_z) \quad (2.33)$$

$$\eta_x \hat{h}_y - \eta_y \hat{h}_x = -(K_{zx} \hat{e}_x + K_{zy} \hat{e}_y + K_{zz} \hat{e}_z) \quad (2.34)$$

2.3.2 Το πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων και η μέθοδος 4×4

Εξαιρείοντας τις κάθετες και διατηρώντας μόνο τις εφαπτομενικές στη διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσες με αντικατάσταση των

$$\hat{e}_x = \frac{\eta_z}{K_{xx}} \hat{h}_y - \frac{\eta_y}{K_{xx}} \hat{h}_z - \frac{K_{xy}}{K_{xx}} \hat{e}_y - \frac{K_{xz}}{K_{xx}} \hat{e}_z \quad (2.35)$$

και

$$\hat{h}_x = \eta_y \hat{e}_z - \eta_z \hat{e}_y \quad (2.36)$$

οι εξισώσεις Faraday και Ampere μπορούν τελικά να συνοψισθούν στο ακόλουθο 4×4 σύστημα [5]:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{V} = \eta_x \mathbf{V} \quad (2.37)$$

όπου

$$\mathbf{V} \equiv \begin{pmatrix} \hat{e}_y \\ \hat{h}_z \\ \hat{e}_z \\ \hat{h}_y \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

και

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{K_{xy}}{K_{xx}}\eta_y & 1 - \frac{\eta_y^2}{K_{xx}} & -\frac{K_{xz}}{K_{xx}}\eta_y & \frac{\eta_y\eta_z}{K_{xx}} \\ \left(-\eta_z^2 + K_{yy} - \frac{K_{xy}K_{yx}}{K_{xx}}\right) & -\frac{K_{yx}}{K_{xx}}\eta_y & \left(\eta_z\eta_y + K_{yz} - \frac{K_{yx}K_{xz}}{K_{xx}}\right) & \frac{K_{yx}}{K_{xx}}\eta_z \\ -\frac{K_{xy}}{K_{xx}}\eta_z & -\frac{\eta_z\eta_y}{K_{xx}} & -\frac{K_{xz}}{K_{xx}}\eta_z & \frac{\eta_z^2}{K_{xx}} - 1 \\ \left(-\eta_y\eta_z - K_{zy} + \frac{K_{zx}K_{xy}}{K_{xx}}\right) & \frac{K_{zx}}{K_{xx}}\eta_y & \left(\eta_y^2 - K_{zz} + \frac{K_{zx}K_{xz}}{K_{xx}}\right) & -\frac{K_{zx}}{K_{xx}}\eta_z \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Το σχετικό πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων παρέχει τα χαρακτηριστικά των γυροτροπικών περιοχών και τις συνιστώσες του προσπίπτοντος κυματανύσματος, οι οποίες καθορίζουν τις συνιστώσες του κανονικοποιημένου διανύσματος διάδοσης η_y και η_z . Γενικά, υπάρχουν δύο λύσεις για το διάνυσμα διάδοσης, οι οποίες περιγράφουν κύματα που οδεύουν προς τα εμπρός (κατά $+\hat{\mathbf{x}}$) και άλλες δύο λύσεις οι οποίες περιγράφουν κύματα που οδεύουν προς τα πίσω (κατά $-\hat{\mathbf{x}}$).

2.3.3 Το θεώρημα του διανύσματος Poynting

Προκειμένου να καθοριστούν αυτές οι λύσεις, πρέπει να γίνει χρήση του θεωρήματος Poynting με την βοήθεια του σχετικού μιγαδικού διανύσματος Poynting. Σύμφωνα με το θεώρημα του διανύσματος Poynting, όταν το πραγματικό μέρος της x -συνιστώσας του διανύσματος Poynting είναι θετικό το κύμα που διαδίδεται προς τα εμπρός, ενώ όταν είναι αρνητικό οδεύει προς τα πίσω. Η φανταστική συνιστώσα φανερώνει ύπαρξη απωλειών κατά τη διάδοση και όταν το πραγματικό μέρος είναι μηδενικό, το κύμα που περιγράφεται είναι αποσβενύμενο. Η

x -συνιστώσα του διανύσματος Poynting είναι:

$$\frac{\hat{e}_y \hat{h}_z^* - \hat{e}_z \hat{h}_y^*}{2} \quad (2.40)$$

Από την άλλη, καθεμία από τις συνιστώσες \hat{e}_y , \hat{e}_z , \hat{h}_y και \hat{h}_z γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι θα πρέπει να περιγράφεται από το γινόμενο κάποιας πόλωσης μέτρου p επί κάποιο πλάτος A επί το εκθετικό του γινομένου του διανύσματος διάδοσης επί το διάνυσμα θέσης.

Επίσης, τα διανύσματα διάδοσης και θέσης μπορούν να αναλυθούν σε κάθετες στην διεύθυνση x συνιστώσες μέτρων η_\perp και ρ_\perp , αντίστοιχα, και παράλληλες στη διεύθυνση x συνιστώσες μέτρων η_x και $\chi \equiv \frac{\omega}{c}x$, αντίστοιχα. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη και τις τέσσερις προαναφερθείσες λύσεις διάδοσης (δύο προς τα θετικά x και δύο προς τα αρνητικά), η γενική λύση για τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{V} του προβλήματος ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{V} = \eta_x \mathbf{V}$ στον χώρο θα πρέπει να έχει τη μορφή:

$$\mathbf{V}(\chi, \boldsymbol{\rho}_\perp) \equiv \begin{pmatrix} \hat{e}_y(\chi, \boldsymbol{\rho}_\perp) \\ \hat{h}_z(\chi, \boldsymbol{\rho}_\perp) \\ \hat{e}_z(\chi, \boldsymbol{\rho}_\perp) \\ \hat{h}_y(\chi, \boldsymbol{\rho}_\perp) \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{p}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}(\chi) \cdot \boldsymbol{\alpha} e^{i\eta_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_\perp} \quad (2.41)$$

όπου

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{(+)} \\ A_2^{(+)} \\ A_1^{(-)} \\ A_2^{(-)} \end{pmatrix}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{p}} \equiv \left(\mathbf{p}_1^{(+)} \mathbf{p}_2^{(+)} \mathbf{p}_1^{(-)} \mathbf{p}_2^{(-)} \right), \quad (2.42)$$

$$\mathbf{p}_{1,2}^{(\pm)} \equiv \begin{pmatrix} p_{e_y;1,2}^{(\pm)} \\ p_{h_z;1,2}^{(\pm)} \\ p_{e_z;1,2}^{(\pm)} \\ p_{h_y;1,2}^{(\pm)} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{\tilde{E}} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\eta_{x_1}^{(+)}\chi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_{x_2}^{(+)}\chi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_{x_1}^{(-)}\chi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\eta_{x_2}^{(-)}\chi} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Σημειώνεται ότι οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι βεβαίως οι $\eta_{x_{1,2}}^{(\pm)}$ και τα διανύσματα πόλωσης επιλέγεται να είναι κανονικοποιημένα στη μονάδα, έτσι ώστε:

$$\left(\mathbf{p}_{1,2}^{(\pm)}\right) \cdot \left(\mathbf{p}_{1,2}^{(\pm)}\right)^* = 1 \quad (2.44)$$

Οι σταθερές $A_{1,2}^{(\pm)}$, που περιγράφουν τα πλάτη, είναι γενικά μιγαδικές και υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Επίσης, οι x συνιστώσες των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου μπορούν σε καθεμία από τις τέσσερις περιπτώσεις να υπολογιστούν εύκολα από τις σχέσεις του με τις y και z συνιστώσες.

Το θεώρημα του διανύσματος Poynting θα εφαρμοστεί πλέον στην ποσότητα

$$\frac{p_{e_y;1,2}^{(\pm)} \left(p_{h_z;1,2}^{(\pm)}\right)^* - p_{e_z;1,2}^{(\pm)} \left(p_{h_y;1,2}^{(\pm)}\right)^*}{2} \quad (2.45)$$

και θα καθορίζεται η επιλογή της λύσης '+' ή '-' και '1' ή '2'.

2.4 Διάδοση ραδιοκυμάτων μέσω διαδοχικών επαπτόμενων επίπεδων στρωμάτων

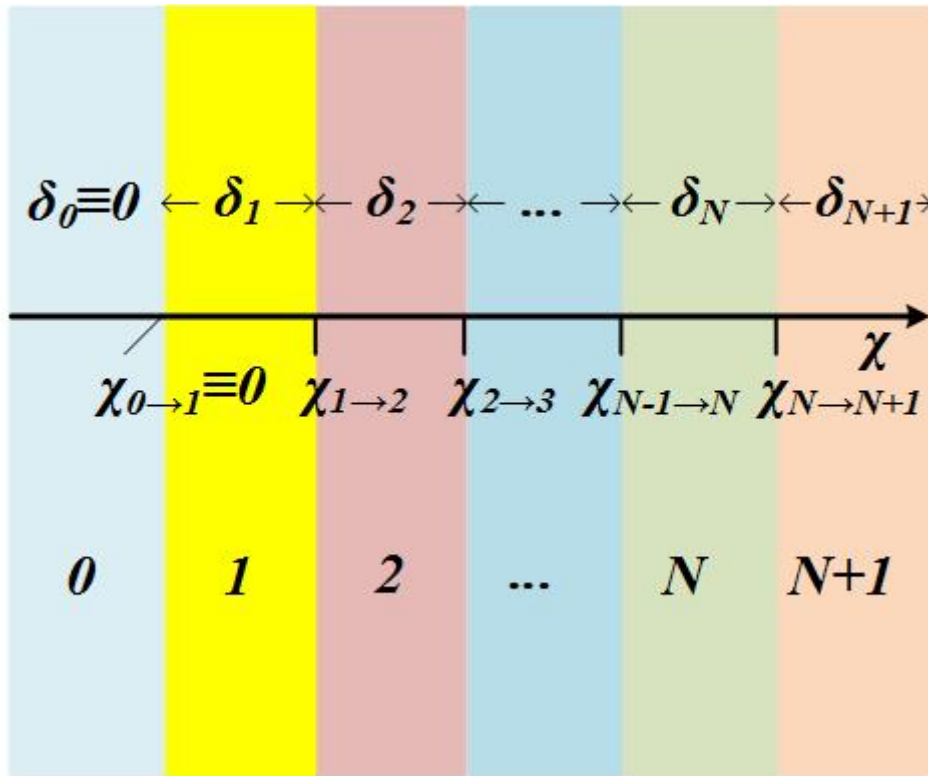
2.4.1 Η διαμέριση του άξονα των x και η μορφή της 4×4 εξίσωσης για καθεμία από τις διαχωριστικές επιφάνειες

Οι συνοριακές συνθήκες σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των στρωμάτων i και $i + 1$ επιβάλλουν να είναι συνεχείς οι παράλληλες στη διαχωριστική επιφάνεια

συνιστώσες των πεδίων, δηλαδή:

$$\mathbf{V}^{(i)}(\chi = \chi_{i \rightarrow i+1}, \psi, \zeta) = \mathbf{V}^{(i+1)}(\chi = \chi_{i+1 \rightarrow i}, \psi, \zeta), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.46)$$

όπου βεβαίως $\chi \equiv \frac{\omega}{c}x$, $\psi \equiv \frac{\omega}{c}y$ και $\zeta \equiv \frac{\omega}{c}z$ είναι οι κανονικοποιημένες αδιάστατες μεταβλητές θέσης. Η σχέση (2.46) αναφέρεται δηλαδή στις N σε αριθμό διαχωριστικές επιφάνειες, οι οποίες απομονώνουν $N + 2$ περιοχές, εκ των οποίων η πρώτη είναι η περιοχή πρόσπτωσης και η τελευταία η περιοχή εξόδου από το σύστημα. Η εξάρτηση από το χ στα εκθετικά των εκφράσεων των πεδίων επιλέγεται εκ νέου έτσι ώστε μέσα στο $i + 1$ στρώμα να είναι $\chi - \chi_{i \rightarrow i+1}$. Αυτό συνεπάγεται ότι στο αριστερό σύνορο κάθε στρώματος από τα ενδιάμεσα N επιλέγεται 0, ενώ στο δεξιό σύνορο ισούται με το πάχος του στρώματος, το οποίο για το $i + 1$ στρώμα συμβολίζεται με δ_{i+1} και για το οποίο ισχύει $\delta_{i+1} \equiv \chi_{i+1 \rightarrow i+2} - \chi_{i \rightarrow i+1}$ (Εικόνα 2.3.1).



Εικόνα 2.3.1 - Η νέα διαμέριση του άξονα των χ

Συνεπώς ισχύει:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(i)}(\chi = \chi_{i \rightarrow i+1}) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(i)}(\delta_i), \quad \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(i+1)}(\chi = \chi_{i \rightarrow i+1}) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}; \quad (2.47)$$

όπου βεβαίως $i = 0, 1, \dots, N$ με $\delta_0 = 0$. Η τελευταία με τη σειρά της καταλήγει στην ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} t_1^{(i+1)} \\ t_2^{(i+1)} \\ r_1^{(i+1)} \\ r_2^{(i+1)} \end{pmatrix} = \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(i+1)} \right)^{-1} \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(i)} \right) \left(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(i)}(\delta_i) \right) \begin{pmatrix} t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \\ r_1^{(i)} \\ r_2^{(i)} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Τώρα, οι σταθερές $A_{1,2}^{(+)}$ του i -οστού στρώματος με $i = 0, 1, \dots, N$ αναφέρονται πλέον ως $t_{1,2}^{(i)}$, ενώ οι σταθερές $A_{1,2}^{(-)}$ αναφέρονται πλέον ως $r_{1,2}^{(i)}$. Υπογραμμίζεται ότι όποια αλλαγή προκλήθηκε στη φάση των εκθετικών από τη νέα διαμέριση του άξονα των χ έχει ενσωματωθεί πλέον στις εν λόγω σταθερές $A_{1,2}^{(\pm)}$ και συνεπώς βεβαίως και στις νέες $t_{1,2}^{(i)}$ και $r_{1,2}^{(i)}$.

2.4.2 Ο αλγόριθμος επίλυσης

Έστω θ_0 η γωνία που σχηματίζει το κυματόνυσμα \mathbf{k} με τον άξονα $x^{(B)}$, θ_k η γωνία που σχηματίζει το κυματόνυσμα με τον άξονα $x^{(I)}$, φ_0 η γωνία που σχηματίζει το επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο (δηλαδή ο άξονας $x^{(B)}$) με τον άξονα $x^{(I)}$ και φ_k η γωνία που σχηματίζει η προβολή του κυματόνυσματος \mathbf{k} στο επίπεδο $y - z^{(I)}$ με τον θετικό ημιάξονα $z^{(I)}$ (Εικόνα 2.3.2).

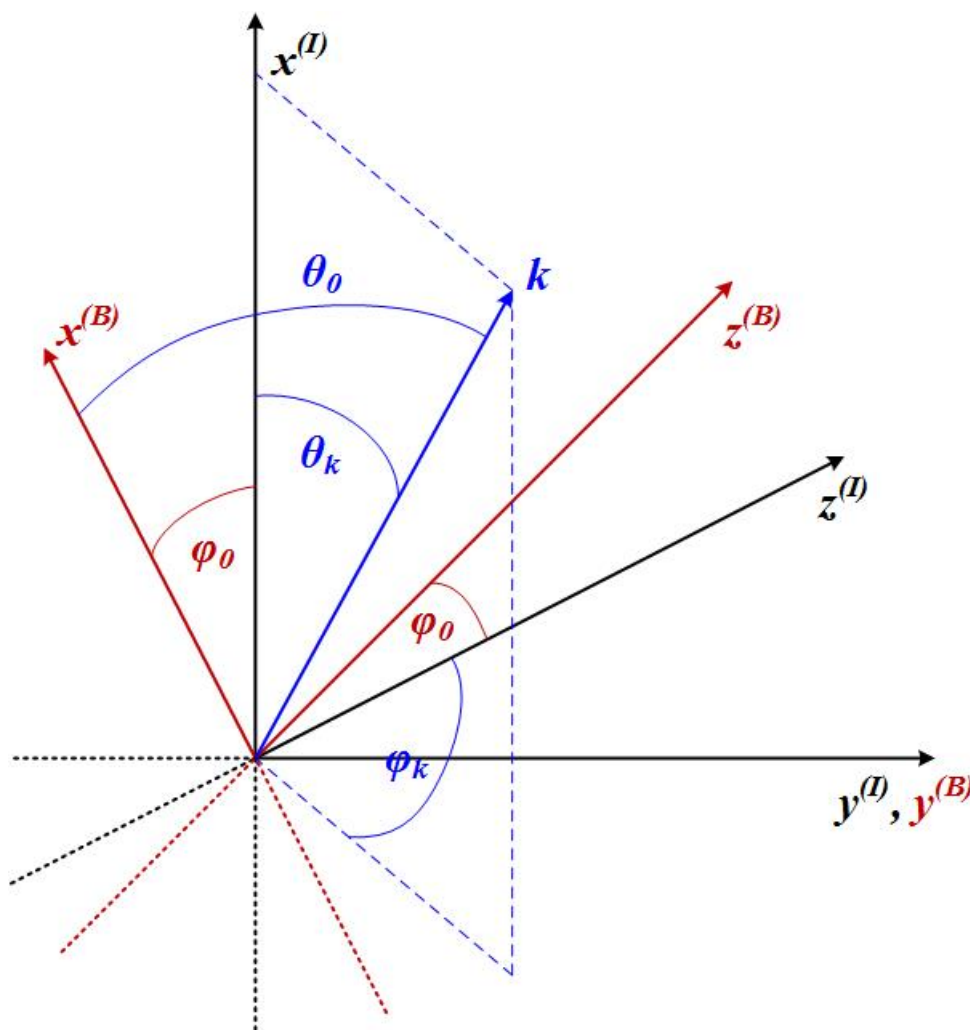
Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την θεώρηση ισχύει:

$$\cos \theta_0 \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{(B)} \quad (2.49)$$

ενώ με την βοήθεια της Εικόνας 2.6 προκύπτουν οι ακόλουθες:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(B)} = \hat{\mathbf{x}}^{(I)} \cos \varphi_0 - \hat{\mathbf{z}}^{(I)} \sin \varphi_0 \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}^{(I)} \cos \theta_k + \hat{\mathbf{y}}^{(I)} \sin \theta_k \sin \varphi_k + \hat{\mathbf{z}}^{(I)} \sin \theta_k \cos \varphi_k \quad (2.51)$$



Εικόνα 2.3.2 - Τρισδιάστατη απεικόνιση του γεωμετρικού προβλήματος

Έτσι, από τις τελευταίες δύο, λόγω της εξορισμού $\cos \theta_0 \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{(B)}$, προκύπτει:

$$\cos \theta_0 = \cos \varphi_0 \cos \theta_k - \sin \varphi_0 \cos \varphi_k \sin \theta_k \quad (2.52)$$

Εφόσον η προσπίπτουσα ακτίνα φθάνει στη διαχωριστική επιφάνεια στο $x = 0$

ερχόμενη από την περιοχή $x < 0$, για τη γωνία θ_k προφανώς ισχύει $\theta_k \in [0, \pi/2]$. Τότε, η γωνία φ_k θα πρέπει να βρίσκεται εντός συγκεκριμένου πεδίου τιμών, προκειμένου να παρέχει την προκαθορισμένη τιμή για τη γωνία θ_0 . Έτσι, για μία αρχική τιμή της φ_k υπολογίζεται η κατάλληλη θ_k . Οι συνιστώσες του κανονικοποιημένου διανύσματος διάδοσης η στο κάθετο στην ανομοιογένεια επίπεδο $y - z^{(I)}$ είναι τώρα

$$\eta_y = \eta^{(I)}(\theta_0) \sin \theta_k \sin \varphi_k \quad \text{και} \quad \eta_z = \eta^{(I)}(\theta_0) \sin \theta_k \cos \varphi_k$$

ενώ για την x -συνιστώσα του ισχύει

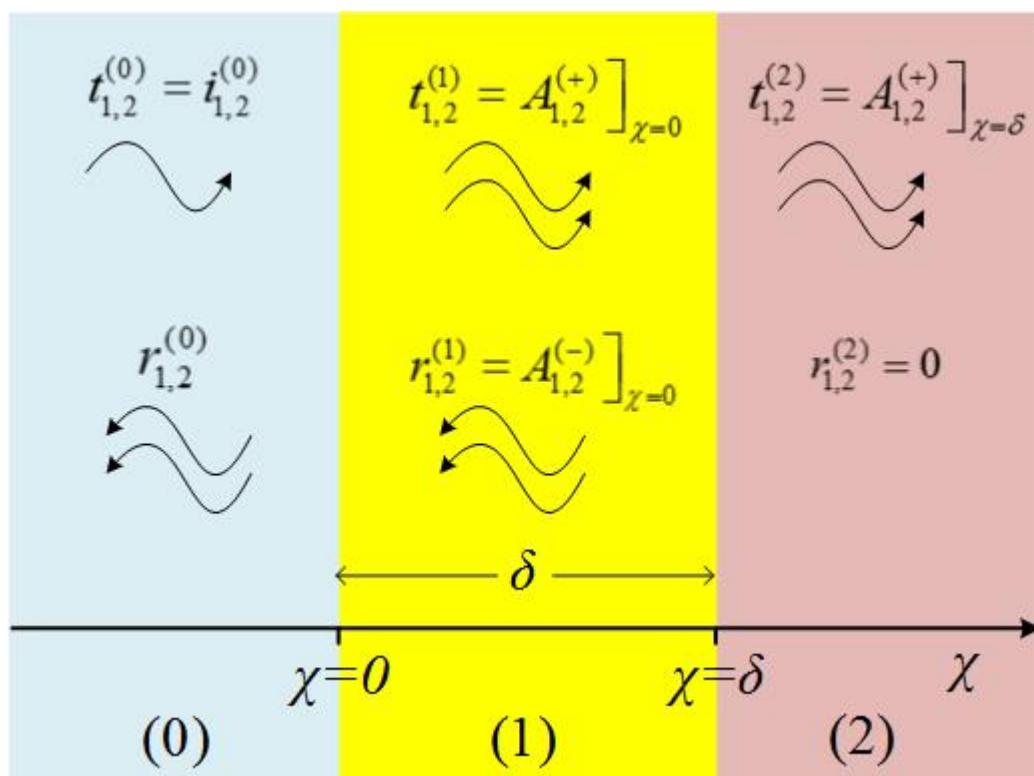
$$\eta_x = \eta^{(I)}(\theta_0) \cos \theta_k \quad (2.53)$$

Με χρήση των τιμών αυτών επιλύεται το πρώτο πρόβλημα ιδιοτιμών και καθορίζεται τόσο η πόλωση στην περιοχή πρόσπτωσης, όσο και οι τέσσερις ιδιοτιμές για την x συνιστώσα. Για το προσπίπτον κύμα (O - ή X - τύπου), η μία ιδιοτιμή συμπίπτει να είναι μία από τις παραπάνω, η οποία φανερώνει και την πόλωση του προσπίπτοντος πεδίου. Επίσης, σημειώνεται ότι οι ίδιες τιμές για τα $\eta_y^{(I)}$ και $\eta_z^{(I)}$ (διατηρούνται) χρησιμοποιούνται στο επόμενο πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο θα καθορίσει τις πολώσεις και τις σχετικές ιδιοτιμές για την x συνιστώσα του διανύσματος διάδοσης. Αυτή η διαδικασία βεβαίως επαναλαμβάνεται και στα επόμενα στρώματα. Το αρχικό διάνυσμα \mathbf{V} στο επίπεδο $x^{(I)} - z^{(I)}$ ($\psi = 0$) τώρα θα είναι:

$$\mathbf{V}^{(I)}(\chi, \zeta, \psi = 0) = \begin{pmatrix} \hat{e}_y^{(I)}(\chi, \zeta, \psi = 0) \\ \hat{h}_z^{(I)}(\chi, \zeta, \psi = 0) \\ \hat{e}_z^{(I)}(\chi, \zeta, \psi = 0) \\ \hat{h}_y^{(I)}(\chi, \zeta, \psi = 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{e_y}^{(I)} \\ p_{h_z}^{(I)} \\ p_{e_z}^{(I)} \\ p_{h_y}^{(I)} \end{pmatrix} \exp \left[i \left(\eta_x^{(I)} \chi + \eta_z^{(I)} \zeta \right) \right] \quad (2.54)$$

2.4.3 Εφαρμογή: Ένα επίπεδο στρώμα παρεμβαλλόμενο μεταξύ δύο άλλων άπειρων στρωμάτων

Το πρόβλημα του επιπέδου στρώματος που περιβάλλεται από δύο άπειρα στρώματα (ένα από το οποίο φθάνει η προσπίπτουσα δέσμη και άλλο ένα στο οποίο συνεχίζει να διαδίδεται αφού διασχίσει το εν λόγω στρώμα), μπορεί να απεικονιστεί σχηματικά όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.3.3.



Εικόνα 2.3.3 - Ένα πεπερασμένο στρώμα μεταξύ δύο άπειρων στρωμάτων

Οι μεταβλητές r και t δεν συμβολίζουν τίποτε άλλο παρά τους σταθερούς συντελεστές για το ανακλώμενο (reflected) και το μεταδιδόμενο (transmitted) κύμα, καθένα από τα οποία έχει γενικά δύο λύσεις, οι οποίες συμβολίζονται με δείκτη 1 ή 2, ενώ οι παρενθέσεις που εμφανίζονται σαν εκθέτες στις μεταβλητές αυτές προσδιορίζουν το στρώμα στο οποίο αναφέρονται (Εικόνα 2.3.3). Όταν η αναφορά γίνεται στο στρώμα (0), το μεταδιδόμενο κύμα είναι το προσπίπτον και γι'αυτό συμβολίζεται με i (incident) και έχει μία μόνο λύση (αυτήν που αρχικά μεταδόθηκε), οπότε η άλλη λαμβάνει μηδενικό συντελεστή. Επίσης στον άπειρο

χώρο (2) δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα, οπότε ο αντίστοιχος συντελεστής r είναι μηδέν. Τα πλάτη $A_{1,2}^{(\pm)}$ ορίζεται να υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες ως εξής:

$$\begin{pmatrix} t_1^{(0)} \\ t_2^{(0)} \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{(+)} \\ A_2^{(+)} \\ A_1^{(-)} \\ A_2^{(-)} \end{pmatrix}_{\chi=0} \quad \mu\epsilon \quad \begin{pmatrix} t_1^{(0)} \\ t_2^{(0)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\eta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{(+)} \\ A_2^{(+)} \\ A_1^{(-)} \\ A_2^{(-)} \end{pmatrix}_{\chi=0} \quad \kappa\alpha\iota \quad \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{(+)} \\ A_2^{(+)} \\ A_1^{(-)} \\ A_2^{(-)} \end{pmatrix}_{\chi=\delta} \quad \mu\epsilon \quad \begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Έτσι, στον χώρο $\chi < 0$ το διάνυσμα \mathbf{V} μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{V}^{(0)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(0)} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(0)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}(\chi) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.55)$$

Επίσης, στον χώρο του ενδιάμεσου στρώματος $0 \leq \chi \leq \delta$ το διάνυσμα \mathbf{V} μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{V}^{(1)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}(\chi) \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.56)$$

Τέλος, στον χώρο μετά από το ενδιάμεσο στρώμα $\chi > \delta$ στην έκφραση του διανύσματος \mathbf{V} είναι βολικό να γίνει χρήση της διαμέρισης του χ που περιγράφεται

στην παράγραφο 2.5 και η αλλαγή στην φάση των εκθετικών του $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}$ να ενσωματώνεται στις σταθερές t . Συνεπώς, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{V}^{(2)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(2)} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(2)}(\chi - \delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.57)$$

Οι συνοριακές συνθήκες λοιπόν επιβάλλουν στο αριστερό και το δεξιό άκρο αντίστοιχα τις

$$\begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(0)} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(1)} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

και

$$\begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(1)} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(1)}(\delta) \\ \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(2)} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για τους πίνακες $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(i)}$ (με $i = 0, 1, 2$) ισχύει προφανώς

$$\begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(0)} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(0)} \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(1)} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(1)} \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(2)} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(2)} \end{bmatrix} (0) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \quad (2.60)$$

επιλύοντας τις τελευταίες δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{S}} \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

όπου

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} \equiv \left\{ \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(2)} \right]^{-1} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(1)} \right] \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(1)}(\delta) \right] \right\} \cdot \left\{ \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(1)} \right]^{-1} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(0)} \right] \right\} \quad (2.61)$$

είναι ο **ολικός πίνακας μεταφοράς** (4×4) από την περιοχή της πρόσπτωσης στην περιοχή μετά το στρώμα και

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{S}} \equiv \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(2)} \right]^{-1} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(1)} \right] \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(1)}(\delta) \right] \quad (2.62)$$

είναι ο **πίνακας μεταφοράς του στρώματος** (4×4) από το εσωτερικό της σε περιοχή πέρα από αυτήν.

Από τις τελευταίες εξισώσεις προκύπτουν οι ακόλουθες:

$$\begin{pmatrix} r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$\begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

και

$$\begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$\begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα αποτελέσματα αυτά, μπορούν να συνοψιστούν τα αποτελέσματα για όλα τα κύματα (μεταδιδόμενα και ανακλώμενα) σε καθεμία από τις τρεις περιοχές, εκφρασμένα ως προς το προσπίπτον:

$$\begin{pmatrix} r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$\begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

ενώ

$$\mathbf{V}^{(k)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\chi - \sigma_k) \begin{pmatrix} t_1^{(k)} \\ t_2^{(k)} \\ r_1^{(k)} \\ r_2^{(k)} \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.68)$$

με $k = 0, 1, 2, \sigma_0 = \sigma_1 = 0, \sigma_2 = \delta, t_{1,2}^{(0)} \equiv i_{1,2}$ και $t_{1,2}^{(0)} = 0$.

2.4.4 Γενίκευση: Στοιβα στρωμάτων

Η λογική αυτή μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση *στοίβας* στρωμάτων αποτελούμενης από N στρώματα (ή $N + 2$ περιοχές, συμπεριλαμβανομένων και των περιοχών πρόσπτωσης και εξόδου), όπως έχει διατυπωθεί στην παράγραφο 2.3 και την Εικόνα 2.3.1.

Η γενική περίπτωση αυτή θα μελετηθεί λοιπόν θέτοντας

$$\begin{pmatrix} t_1^{(k)} \\ t_2^{(k)} \\ r_1^{(k)} \\ r_2^{(k)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{(+)} \\ A_2^{(+)} \\ A_1^{(-)} \\ A_2^{(-)} \end{pmatrix}_{\chi=\sigma_k} \quad (2.69)$$

με $\sigma_k \equiv 0$ για $k = 0, 1, \sigma_k \equiv \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i$ για $k = 2, 3, \dots, N + 1$, ενώ για τις περιοχές πρόσπτωσης και εξόδου ισχύει αντίστοιχα $\begin{pmatrix} t_1^{(0)} \\ t_2^{(0)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και

$\begin{pmatrix} r_1^{(N+1)} \\ r_2^{(N+1)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, όπου τα πεδία εκφράζονται για ευκολία ως ακολούθως:

$$\mathbf{V}^{(k)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\chi - \sigma_k) \begin{pmatrix} t_1^{(k)} \\ t_2^{(k)} \\ r_1^{(k)} \\ r_2^{(k)} \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.70)$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η παραπάνω έκφραση χρειάζεται προσεκτικό χειρισμό στις περιοχές πρόσπτωσης και εξόδου, δηλαδή τις

$$\mathbf{V}^{(0)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(0)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(0)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\chi) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.71)$$

και

$$\mathbf{V}^{(N+1)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(N+1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(N+1)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \left(\chi - \sum_{i=1}^N \delta_i \right) \begin{pmatrix} t_1^{(N+1)} \\ t_2^{(N+1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.72)$$

, όπου προκειμένου να εξαιρεθούν οι περιπτώσεις στις οποίες ο μεταδιδόμενος ή ο ανακλώμενος ρυθμός αυξάνει το μέτρο του εκθετικά και συνεπώς αποκλίνει για $\chi \rightarrow +\infty$ ή $\chi \rightarrow -\infty$ αντίστοιχα, πρέπει να τηρούνται οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} t_{1,2}^{(N+1)} = 0 & \quad \text{αν} \quad \text{Im} \left(\eta_{x;1,2}^{(+)} \right)_{N+1} < 0 \\ r_{1,2}^{(0)} = 0 & \quad \text{αν} \quad \text{Im} \left(\eta_{x;1,2}^{(-)} \right)_0 > 0 \end{aligned}$$

Από τη μεριά τους, οι συνοριακές συνθήκες στις $N + 1$ σε αριθμό διαχωριστικές επιφάνειες μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(0)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

$$\begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\delta_1) \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(2)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$\begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\delta_k) \begin{pmatrix} t_1^{(k)} \\ t_2^{(k)} \\ r_1^{(k)} \\ r_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k+1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(k+1)} \\ t_2^{(k+1)} \\ r_1^{(k+1)} \\ r_2^{(k+1)} \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$\begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(N)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(N)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\delta_N) \begin{pmatrix} t_1^{(N)} \\ t_2^{(N)} \\ r_1^{(N)} \\ r_2^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(N+1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(N+1)} \\ t_2^{(N+1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

Οι τελευταίες μπορούν να γραφτούν και ως:

$$\begin{pmatrix} t_1^{(N+1)} \\ t_2^{(N+1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(N+1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(N)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(N)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\delta_N) \begin{pmatrix} t_1^{(N)} \\ t_2^{(N)} \\ r_1^{(N)} \\ r_2^{(N)} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$\begin{pmatrix} t_1^{(k+1)} \\ t_2^{(k+1)} \\ r_1^{(k+1)} \\ r_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k+1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\delta_k) \begin{pmatrix} t_1^{(k)} \\ t_2^{(k)} \\ r_1^{(k)} \\ r_2^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$\begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(2)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\delta_1) \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

$$\begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(0)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

και έτσι τελικά οι σταθερές κάθε στρώματος k με $k = 1, 2, \dots, N + 1$ μπορούν να

γραφτούν συναρτήσει των σταθερών του προσπίπτοντος ως εξής:

$$\begin{pmatrix} t_1^{(k)} \\ t_2^{(k)} \\ r_1^{(k)} \\ r_2^{(k)} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{S}}_k \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

όπου

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{S}}_k \equiv \prod_{i=k}^1 \left\{ \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(i)} \right]^{-1} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(i-1)} \right] \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(i-1)} (\delta_{i-1}) \right] \right\} \quad (2.82)$$

Σημειώνεται ότι ο πίνακας αυτός διαφέρει από τον αντίστοιχο πίνακα $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{S}}$ της προηγούμενης υποπαραγράφου, αφού εκείνος αφορούσε την περίπτωση ενός μόνο ενδιάμεσου στρώματος. Ο **συνολικός πίνακας μεταφοράς** για τη στοιβία, η οποία αποτελείται από N στρώματα, που συμβολίζεται με $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}$ στον οποίο, αφού εισαχθούν οι σταθερές στην περιοχή του προσπίπτοντος (στρώμα 0, στην είσοδο πριν από τη στοιβία), δίνει το αποτέλεσμα στο $N + 1$ στρώμα (δηλαδή στην έξοδο μετά από τη στοιβία) είναι ο ακόλουθος:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} \equiv \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{S}}_{N+1} = \prod_{i=N+1}^1 \left\{ \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(i)} \right]^{-1} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}^{(i-1)} \right] \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}^{(i-1)} (\delta_{i-1}) \right] \right\} \quad (2.83)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τον συνολικό πίνακα μεταφοράς $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}$, τόσο οι σταθερές των ανακλώμενων ρυθμών στην περιοχή πρόσπτωσης όσο και οι σταθερές των μεταδιδόμενων στην περιοχή εξόδου μπορούν να υπολογιστούν αντιστοίχως ως συναρτήσεις των σταθερών του προσπίπτοντος κύματος (όπως δηλαδή και την

προηγούμενη παράγραφο) ως εξής:

$$\begin{pmatrix} r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

και

$$\begin{pmatrix} t_1^{(N+1)} \\ t_2^{(N+1)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Υστερα, υπολογίζονται οι σταθερές για το πρώτο στρώμα της στοίβας από την

$$\begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(0)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ r_1^{(0)} \\ r_2^{(0)} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

και τέλος, για κάθε στρώμα k , από την

$$\begin{pmatrix} t_1^{(k)} \\ t_2^{(k)} \\ r_1^{(k)} \\ r_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k-1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(k-1)} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} (\delta_{k-1}) \begin{pmatrix} t_1^{(k-1)} \\ t_2^{(k-1)} \\ r_1^{(k-1)} \\ r_2^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

2.4.5 Εφαρμογή: Δύο άπειρα στρώματα

Θεωρούνται δύο άπειρα στρώματα, το στρώμα 1 από το οποίο προέρχεται η προσπίπτουσα δέσμη και το στρώμα 2 στο οποίο συνεχίζει την πορεία μετά από τη διαχωριστική επιφάνεια. Οι συμβολισμοί επιλέγονται ως

$$\begin{pmatrix} A_1^{(+)} \\ A_2^{(+)} \\ A_1^{(-)} \\ A_2^{(-)} \end{pmatrix}_{\chi>0} = \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} A_1^{(+)} \\ A_2^{(+)} \\ A_1^{(-)} \\ A_2^{(-)} \end{pmatrix}_{\chi<0} = \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

με την ελευθερία επιλογής των πλατών προσπιπτόντων ρυθμών (1 ή 2 ή και οι δύο) ανάμεσα στα ακόλουθα:

$$\begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \text{με } i_{1,2} \in \{0, 1\}$$

Επιπλέον, αφού δεν υπάρχουν ρυθμοί που να ανακλώνται και να έρχονται από το $\chi = \infty$, ισχύει:

$$\begin{pmatrix} A_1^{(+)} \\ A_2^{(+)} \\ A_1^{(-)} \\ A_2^{(-)} \end{pmatrix}_{\chi<0} = \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Στο σύνορο ($\chi = 0$) ο διαγώνιος πίνακας $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}$ των εκθετικών γίνεται ο μοναδιαίος και επομένως, η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών απαιτεί:

$$\begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \text{με } \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} \equiv \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{p}}^{(2)} \right]^{-1} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{p}}^{(1)}$$

όπου $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}$ είναι ο πίνακας μεταφοράς σε αυτήν την περίπτωση. Αυτή η έκφραση μπορεί να επαναδιατυπωθεί και ως το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

και

$$\begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

το οποίο λύνει το πρόβλημα των δύο περιοχών.

Ισοζύγιο ισχύος

Στο πρόβλημα αυτό των δύο περιοχών με τη διαχωριστική επιφάνεια να είναι στο επίπεδο $\chi = 0$, μπορεί να θεωρηθεί χωρίς απώλεια της γενικότητας $i_1 = 1$ και $i_2 = 0$. Τότε πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια ισχύει:

$$\mathbf{V}^{(1)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(1)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.91)$$

$$\mathbf{V}^{(2)}(\chi, \psi, \zeta) = \begin{bmatrix} \leftrightarrow^{(2)} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp [i(\eta_y \psi + \eta_z \zeta)] \quad (2.92)$$

Για χάρη απλότητας, καθώς τα ειθετικά των παραπάνω σχέσεων θα αλληλοαναιρεθούν κατά τον πολλαπλασιασμό με τα συζυγή τους στον υπολογισμό του διανύσματος Poynting, στις ακόλουθες πράξεις θα παραλειφθούν από την αρχή

και δεν θα αναγράφονται. Έτσι λοιπόν από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_y^{(1)} \\ \hat{h}_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{13}^{(1)} & p_{14}^{(1)} \\ p_{23}^{(1)} & p_{24}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_z^{(1)} \\ \hat{h}_y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{31}^{(1)} \\ p_{41}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{33}^{(1)} & p_{34}^{(1)} \\ p_{43}^{(1)} & p_{44}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_y^{(2)} \\ \hat{h}_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_z^{(2)} \\ \hat{h}_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{31}^{(2)} & p_{32}^{(2)} \\ p_{41}^{(2)} & p_{42}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

Με χρήση του πίνακα μεταφοράς $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}$ της τελευταίας παραγράφου προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_y^{(1)} \\ \hat{h}_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{13}^{(1)} & p_{14}^{(1)} \\ p_{23}^{(1)} & p_{24}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_z^{(1)} \\ \hat{h}_y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{31}^{(1)} \\ p_{41}^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{33}^{(1)} & p_{34}^{(1)} \\ p_{43}^{(1)} & p_{44}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_y^{(2)} \\ \hat{h}_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_z^{(2)} \\ \hat{h}_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{31}^{(2)} & p_{32}^{(2)} \\ p_{41}^{(2)} & p_{42}^{(2)} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Για περαιτέρω απλότητα συμβολισμού εισάγονται οι ακόλουθοι ορισμοί:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}} \equiv \begin{pmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_1 \equiv \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_2 \equiv \begin{pmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{pmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_3 \equiv \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_1 - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}$$

Έτσι λοιπόν οι τελευταίες γράφονται:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_y^{(1)} \\ \hat{h}_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{13}^{(1)} & p_{14}^{(1)} \\ p_{23}^{(1)} & p_{24}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_z^{(1)} \\ \hat{h}_y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{31}^{(1)} \\ p_{41}^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{33}^{(1)} & p_{34}^{(1)} \\ p_{43}^{(1)} & p_{44}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_y^{(2)} \\ \hat{h}_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{3;11} \\ T_{3;21} \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_z^{(2)} \\ \hat{h}_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{31}^{(2)} & p_{32}^{(2)} \\ p_{41}^{(2)} & p_{42}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{3;11} \\ T_{3;21} \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

Σχετικά με το διάνυσμα Poynting σημειώνεται ότι είναι πάνω στη διεύθυνση του x -άξονα και με φορά που δείχνει προς τα θετικά του - ενώ βεβαίως αν προκύψει για το μέτρο αποτέλεσμα αρνητικό θα δείχνει προς τα αρνητικά του. Η κανονικοποιημένη συνιστώσα λοιπόν του χρονικά ανεξάρτητου διανύσματος Poynting έχει μέτρο ίσο με την ποσότητα $\hat{s}_x = \frac{1}{2} \text{Real}\{\hat{e}_y \hat{h}_z^* - \hat{e}_z \hat{h}_y^*\}$, το οποίο δίνει την οδεύουσα μέση ισχύ. Στην περιοχή (1) ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{e}_y^{(1)} \hat{h}_z^{(1)*} - \hat{e}_z^{(1)} \hat{h}_y^{(1)*} &= p_{11}^{(1)} p_{21}^{(1)*} - p_{31}^{(1)} p_{41}^{(1)*} \\ &+ \left(p_{33}^{(1)} p_{41}^{(1)*} - p_{13}^{(1)} p_{21}^{(1)*} \right) R_{11} + \left(p_{34}^{(1)} p_{41}^{(1)*} - p_{14}^{(1)} p_{21}^{(1)*} \right) R_{21} \\ &+ \left(p_{31}^{(1)} p_{44}^{(1)*} - p_{11}^{(1)} p_{24}^{(1)*} \right) R_{21}^* + \left(p_{31}^{(1)} p_{43}^{(1)*} - p_{11}^{(1)} p_{23}^{(1)*} \right) R_{11}^* \\ &+ \left\{ p_{23}^{(1)*} \left(p_{13}^{(1)} R_{11} + p_{14}^{(1)} R_{21} \right) - p_{43}^{(1)*} \left(p_{33}^{(1)} R_{11} + p_{34}^{(1)} R_{21} \right) \right\} R_{11}^* \\ &+ \left\{ p_{24}^{(1)*} \left(p_{14}^{(1)} R_{21} + p_{13}^{(1)} R_{11} \right) - p_{44}^{(1)*} \left(p_{33}^{(1)} R_{11} + p_{34}^{(1)} R_{21} \right) \right\} R_{21}^* \end{aligned}$$

Στην τελευταία σχέση έχουν σημειωθεί με μπλε χρώμα οι όροι, οι οποίοι αντιστοιχούν αποκλειστικά στην προσπίπτουσα ισχύ, ενώ οι υπόλοιποι όροι είναι σταυρωτοί. Αντίστοιχα, στην περιοχή (2) ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{e}_y^{(2)} \hat{h}_z^{(2)*} - \hat{e}_z^{(2)} \hat{h}_y^{(2)*} &= \left(p_{11}^{(2)} p_{21}^{(2)*} - p_{31}^{(2)} p_{41}^{(2)*} \right) |T_{3;11}|^2 \\ &+ \left(p_{12}^{(2)} p_{22}^{(2)*} - p_{32}^{(2)} p_{42}^{(2)*} \right) |T_{3;21}|^2 + \left(p_{12}^{(2)} p_{21}^{(2)*} - p_{32}^{(2)} p_{41}^{(2)*} \right) T_{3;11}^* T_{3;21} \\ &+ \left(p_{11}^{(2)} p_{22}^{(2)*} - p_{31}^{(2)} p_{42}^{(2)*} \right) T_{3;11} T_{3;21}^* \end{aligned}$$

Τέλος, σημειώνεται ότι όταν απουσιάζει η ασυνέχεια (δηλαδή ειατέρωθεν του επιπέδου $\chi = 0$ το μέσο διάδοσης να είναι το ίδιο), ο πίνακας μεταφοράς $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}$ γίνεται μοναδιαίος - όπως εξάλλου ήταν αναμενόμενο. Τότε, εξ'ορισμού ο $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}$ γίνεται

μηδενικός και ο πίνακας $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_3$ γίνεται επίσης μοναδιαίος. Αυτά έχουν σαν συνέπεια στους τελευταίους τύπους που αφορούν τις συνιστώσες \hat{s}_z του διανύσματος Poynting στις δύο περιοχές, να επιβιώνουν μόνο οι πρώτοι όροι των δεξιών μελών και ταυτίζονται, όπως εξάλλου θα έπρεπε να συμβαίνει.

2.5 Διαδοχικά στρώματα με συνεχή μεταβολή διηλεκτρικών ιδιοτήτων

Σε μία πιο ρεαλιστική προσέγγιση, οι διηλεκτρικές ιδιότητες του μέσου διάδοσης δεν αλλάζουν απότομα (ασυνεχώς) από ένα στρώμα συγκεκριμένης πυκνότητας μέσα στο πλάσμα του αντιδραστήρα σε ένα άλλο διαφορετικής πυκνότητας ηλεκτρονίων, αλλά σταδιακά με συνεχή τρόπο. Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζονται κάποιες βασικές αρχές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μία τέτοιου είδους προσέγγιση.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται ξανά οι απλές εφαρμογές των υποπαραγράφων 2.3.3 (μελέτη σκέδασης από στρώμα που παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο άπειρα στρώματα) και 2.3.5 (μελέτη διάδοσης σε χώρο που αποτελείται από δύο άπειρα στρώματα). Στην παράγραφο 2.4 όμως που ακολουθεί, η μεταβολή των διηλεκτρικών ιδιοτήτων δεν συμβαίνει ακαριαία, αλλά με συνεχή τρόπο κατά τη μετάβαση από το ένα στρώμα στο επόμενο. Επίσης, η μελέτη της παραγράφου που ακολουθεί, γενικεύεται και στην περίπτωση πολλών διαδοχικών στρωμάτων με διαφορετικές διηλεκτρικές ιδιότητες το καθένα.

2.5.1 Το συνεχές μοντέλο - Εντοπισμένες ομαλές (συνεχείς) διακυμάνσεις πυκνότητας κατά τον άξονα x

Οι εξισώσεις των Faraday και Ampere

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{και} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{R}}\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \quad (2.103)$$

όπου τα

$$\mathbf{G} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

είναι 6×1 διανύσματα με τα ηλεκτρομαγνητικά διανύσματα να εκφράζονται στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ενώ ο

$$\overleftrightarrow{\mathbf{R}} \equiv \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{0}} & [\nabla \times] \\ -[\nabla \times] & \overleftrightarrow{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

είναι 6×6 πίνακας με

$$[\nabla \times] \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

Στην συνέχεια, προκειμένου τα διανύσματα \mathbf{G} και \mathbf{C} να περιέχουν στοιχεία τα οποία να εκφράζονται σε ίδιες μονάδες μεταξύ τους, εισάγεται ένας νέος ορισμός τους:

$$\mathbf{G} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Ακόμα, εισάγοντας τον 6×6 πίνακα $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} & \mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

όπου $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}$ είναι ο 3×3 αδιάστατος διηλεκτρικός ταυσιτής αν αγνοηθούν τα μη γραμμικά οπτικά φαινόμενα, η σχέση $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}$ μπορεί να γραφτεί με την βοήθεια της γραμμικής σχέσης $\mathbf{C} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}\mathbf{G}$ που συνδέει τα διανύσματα \mathbf{G} και \mathbf{C} [5] ως εξής:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}\mathbf{G} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \end{pmatrix} \mathbf{G} \quad (2.107)$$

Ακόμα, θέτοντας $\tilde{\mathbf{G}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}} \\ \hat{\mathbf{h}} \end{pmatrix}$ το 6×1 διάνυσμα με τους φάσορες έτσι δηλαδή ώστε να είναι $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}} \exp(-i\omega t)$, η τελευταία διαφορική εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{G}} = \frac{-i\omega}{c} \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{G}} \quad (2.108)$$

Σε αυτήν, αν πολλαπλασιαστούν και τα δύο μέλη με τον παράγοντα $\frac{c}{\omega}$ και ο παράγοντας αυτός ενσωματωθεί μέσα στον πίνακα $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}$, η μορφή του πίνακα παραμένει η ίδια, μόνο που οι χωρικές παραγωγίσεις γίνονται πλέον ως προς τις αδιάστατες μεταβλητές $\chi \equiv x \frac{\omega}{c}$, $\psi \equiv y \frac{\omega}{c}$ και $\zeta \equiv z \frac{\omega}{c}$. Μετά από αυτά, η εξίσωση (2.108) πλέον παίρνει τη μορφή:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{G}} = -i \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} \\ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{G}} \quad (2.109)$$

Στην περίπτωση που μελετάται, υπάρχουν επίπεδα κύματα τα οποία προσπίπτουν πλάγια στο επίπεδο $y - z$ σε μία περιοχή, όπου ο διηλεκτρικός τανυστής είναι συνάρτηση αποκλειστικά της μεταβλητής x . Οι λύσεις συνεπώς επιλέγονται να έχουν τη μορφή:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\chi) \equiv \boldsymbol{\alpha}(\chi) \exp[i\eta_y(\chi)\psi + i\eta_z(\chi)\zeta] \quad (2.110)$$

όπου οι

$$\eta_{y,z} \equiv \frac{k_{y,z}c}{\omega} \quad (2.111)$$

είναι αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χ . Τότε, ο τελεστής στροβιλισμού αλλάζει και ο πίνακας $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}$ παίρνει συνεπώς τη μορφή:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_1 \\ \overset{\leftrightarrow}{-\mathbf{R}}_1 & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i\eta_z & i\eta_y \\ i\eta_z & 0 & -\frac{\partial}{\partial\chi} \\ -i\eta_y & \frac{\partial}{\partial\chi} & 0 \end{pmatrix}$$

Έτσι, ύστερα από πράξεις εξαλείφοντας τις κάθετες και διατηρώντας μόνο τις εφαπτομενικές στην διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσες, τελικά το πρόβλημα παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial\chi} \begin{pmatrix} \hat{e}_y \\ \hat{h}_z \\ \hat{e}_z \\ \hat{h}_y \end{pmatrix} = i\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \hat{e}_y \\ \hat{h}_z \\ \hat{e}_z \\ \hat{h}_y \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

ή πιο απλά

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\chi} = i\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}\mathbf{V} \quad (2.113)$$

όπου

$$\mathbf{V} \equiv \begin{pmatrix} \hat{e}_y \\ \hat{h}_z \\ \hat{e}_z \\ \hat{h}_y \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_i \equiv \frac{\tilde{E}_i}{E_0} \quad \text{και} \quad \hat{h}_i \equiv \frac{\tilde{H}_i}{H_0} \quad \mu\epsilon \quad H_0 \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \quad \gamma\iota\alpha$$

$$i = y, z$$

και

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{K_{xy}\eta_y}{K_{xx}} & 1 - \frac{\eta_y^2}{K_{xx}} & -\frac{K_{xz}\eta_y}{K_{xx}} & \frac{\eta_y\eta_z}{K_{xx}} \\ \left(-\eta_z^2 + K_{yy} - \frac{K_{xy}K_{yx}}{K_{xx}}\right) & -\frac{K_{yx}\eta_y}{K_{xx}} & \left(\eta_z\eta_y + K_{yz} - \frac{K_{yx}K_{xz}}{K_{xx}}\right) & \frac{K_{yx}\eta_z}{K_{xx}} \\ -\frac{K_{xy}\eta_z}{K_{xx}} & -\frac{\eta_z\eta_y}{K_{xx}} & -\frac{K_{xz}\eta_z}{K_{xx}} & \frac{\eta_z^2}{K_{xx}} - 1 \\ \left(-\eta_y\eta_z - K_{zy} + \frac{K_{zx}K_{xy}}{K_{xx}}\right) & \frac{K_{zx}\eta_y}{K_{xx}} & \left(\eta_y^2 - K_{zz} + \frac{K_{zx}K_{xz}}{K_{xx}}\right) & -\frac{K_{zx}\eta_z}{K_{xx}} \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

όπως και στα προηγούμενα.

Επιπλέον, επειδή (όπως εξάλλου προαναφέρθηκε) οποιοδήποτε άπειρο επίπεδο, το οποίο αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη τιμή του x , δεν διαφοροποιείται στο συγκεκριμένο πρόβλημα καθόλου ως προς τις y και z συντεταγμένες του, μπορεί να μελετηθεί χωριστά η εξάρτηση από την x συνιστώσα. Για τον σκοπό αυτό μπορεί να τεθεί:

$$\mathbf{V}(x) \equiv \hat{\mathbf{V}}(x) \exp[i\eta_y(x)\psi + i\eta_z(x)\zeta] \quad (2.115)$$

οπότε η τελευταία εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\frac{d\hat{\mathbf{V}}}{d\chi} = i\overleftrightarrow{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{V}} \quad (2.116)$$

η οποία για έναν ρυθμό που ξεκίνησε από σημείο $\chi \rightarrow -\infty$ έχει λύση της μορφής:

$$\hat{\mathbf{V}}(\chi) = \exp\left[i\int_{-\infty}^{\chi} d\chi' \overleftrightarrow{\mathbf{M}}(\chi')\right] \hat{\mathbf{V}}(\chi \rightarrow -\infty) \quad (2.117)$$

αποτέλεσμα το οποίο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πλήρους λύσης, δηλαδή του διανύσματος $\mathbf{V}(\chi, \psi, \zeta, t)$ ως εξής:

$$\mathbf{V}(\chi, \psi, \zeta, t) = \hat{\mathbf{V}}(\chi) \exp[i\eta_y(\chi)\psi + i\eta_z(\chi)\zeta] \exp[-i\omega t] \quad (2.118)$$

Ο πίνακας $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$ γενικά εξαρτάται από την πυκνότητα ιόντων $n(\chi; d, p)$.

Στο αντίστοιχο παράδειγμα της υποπαραγράφου 2.3.3 (μελέτη σιέδασης από στρώμα που παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο άπειρα στρώματα) μπορεί να θεωρηθεί για την πυκνότητα ιόντων ότι μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο και ισχύει:

$$n(\chi; d, p) = n_0 \left\{ 1 + \nu \exp\left[-\left(\frac{\chi}{d}\right)^{2p}\right] \right\} \quad (2.119)$$

έτσι ώστε να μεγιστοποιείται στον πυρήνα (κέντρο, $\chi = 0$) του παρεμβαλλόμενου στρώματος, ενώ στα δύο άπειρα στρώματα εκατέρωθεν αυτού είναι η ίδια.

Από την άλλη, στο αντίστοιχο παράδειγμα της υποπαραγράφου 2.3.5 (μελέτη διάδοσης σε χώρο που αποτελείται από δύο άπειρα στρώματα), η πυκνότητα ιόντων μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφεται από συνεχή συνάρτηση της μορφής:

$$n(\chi; d, p) = n_0 \left\{ 1 + \nu \frac{1 + \tanh\left(\frac{\chi}{d}\right)}{2} \right\} \quad (2.120)$$

έτσι ώστε σταδιακά να μεταβαίνει από μία χαμηλότερη τιμή σε μία υψηλότερη, με τη μετάβαση αυτή να συμβαίνει γύρω από το σημείο $\chi = 0$.

Η παράμετρος p καθορίζει και στις δύο περιπτώσεις την αιχμηρότητα της μετάβασης από την τιμή της πυκνότητας του ενός στρώματος στην επόμενη της, ενώ η παράμετρος d καθορίζει στην πρώτη περίπτωση το πάχος της παρεμβαλλόμενης δομής σχήματος επίπεδου στρώματος. Η παράμετρος $\nu > 0$, έχει τιμή που όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο μεγαλύτερη είναι και η διαφορά πυκνότητας ανάμεσα στις διαδοχικές περιοχές των δύο περιπτώσεων. Η τιμή της πυκνότητας n_0 αντιστοιχεί στην πρώτη περίπτωση στην τιμή που λαμβάνει η πυκνότητα ιόντων μακριά από το παρεμβαλλόμενο στρώμα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση αντιστοιχεί μακριά από την περιοχή μετάβασης μόνο προς τα αρνητικά χ .

Η μελέτη αυτής της παραγράφου ωστόσο δεν αφορά μόνο αυτές τις δύο απλές εφαρμογές, αλλά γενικεύεται και στην περίπτωση πολλών διαδοχικών στρωμάτων με διαφορετικές διηλεκτρικές ιδιότητες το καθένα. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι ο άξονας των χ να διαμερίζεται σε μικρά $\Delta\chi$, ώστε να προσεγγίζεται το συνεχές μοντέλο, με τη θεώρηση ότι ο πίνακας $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}$ είναι σταθερός σε κάθε μικρό τέτοιο στρώμα. Το ολοκλήρωμα της (2.117) μπορεί με διακριτοποίηση του προβλήματος να εκφραστεί σαν άθροισμα ως εξής:

$$\mathbf{V}_{\chi_n} = \exp \left[i\Delta\chi \sum_{m=0}^n \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}(\chi_m) \right] \mathbf{V}(\chi_0) = \left(\prod_{m=0}^n \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_m \right) \mathbf{V}(\chi_0) \quad (2.121)$$

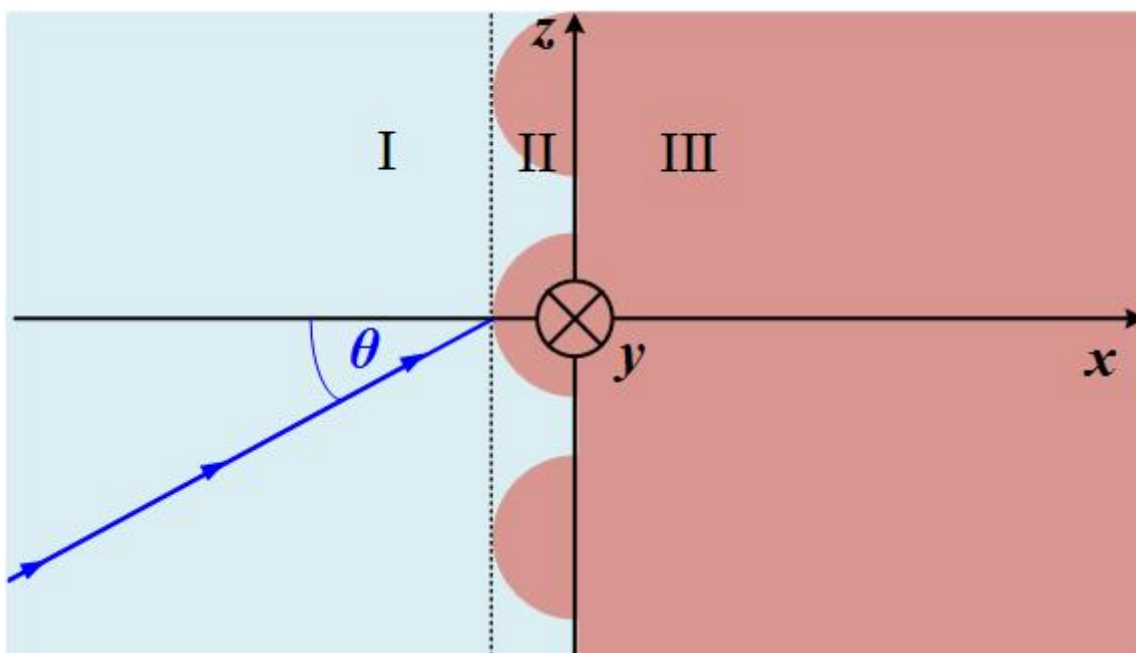
όπου n ο αύξων αριθμός του στρώματος, M το πλήθος των στρωμάτων που προηγούνται του στρώματος n και $\Delta\chi$ το πάχος των στρωμάτων (θεωρείται το ίδιο για όλα τα στρώματα και επαρκώς μικρό, ώστε η διακριτοποίηση να μην εισάγει σημαντικό σφάλμα).

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{E}}_m \equiv \exp \left[i\Delta\chi \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{M}}(\chi_m) \right] \quad (2.122)$$

Η μέθοδος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.121) και (2.122), ουσιαστικά παρέχει αριθμητικό αλγόριθμο για επίλυση του προβλήματος προγραμματιστικά.

2.6 Σκέδαση από τυρβώδεις δομές αυξημένης γεωμετρικής πολυπλοκότητας: Πρόσπτωση σε περιοχή με περιοδικό ανάγλυφο

Στην πραγματικότητα, εκτός από το γεγονός ότι δεν παρατηρούνται απότομες ασυνεχείς μεταβολές της πυκνότητας ηλεκτρονίων στους τυρβώδεις σχηματισμούς στο θερμοπυρηνικό πλάσμα, υπάρχουν και επιπλέον χαρακτηριστικά που αυξάνουν τη γεωμετρική πολυπλοκότητα του προβλήματος. Ένα από αυτά αποτελεί η τραχύτητα των επιφανειών αυτών: Στα σύνορα των τυρβώδων δομών παρατηρούνται ανάγλυφα με όρη και κοιλάδες.

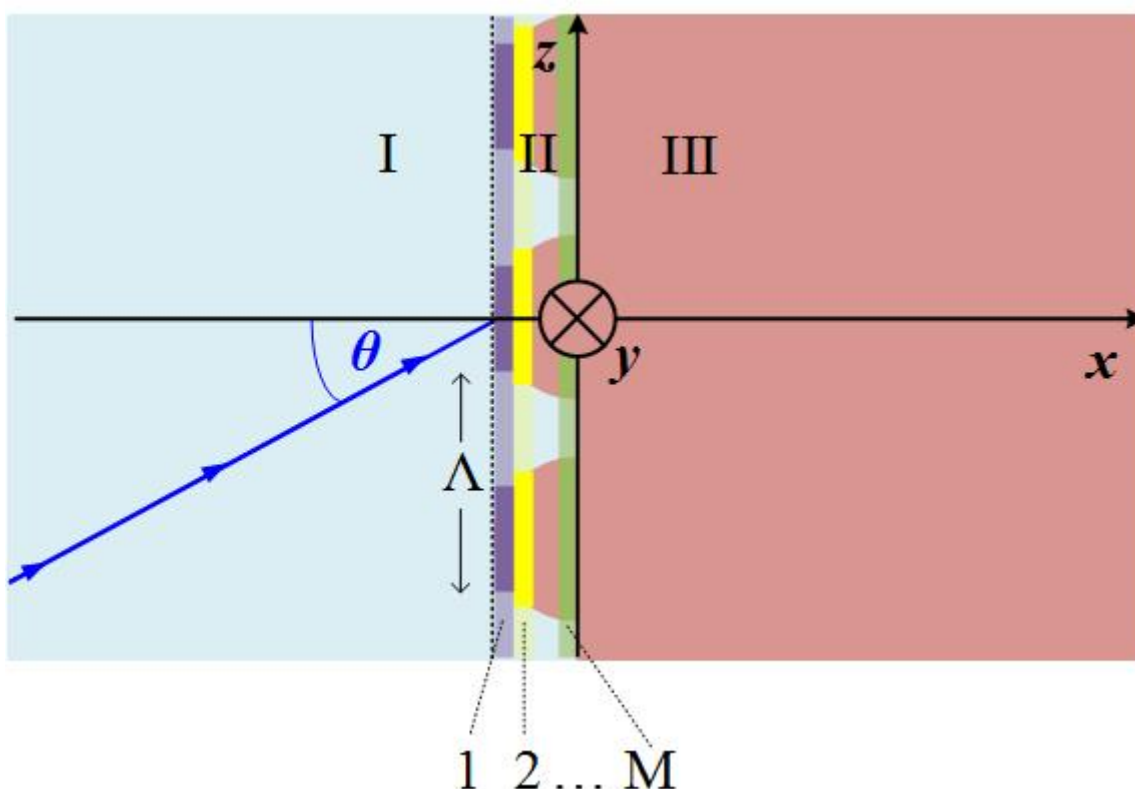


Εικόνα 2.5.α - Πρόσπτωση σε περιοχή με περιοδικό ανάγλυφο

Έτσι, το πρόβλημα που μελετάται στη συνέχεια είναι η πρόσπτωση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε υλικό, του οποίου η επιφάνεια έχει ανάγλυφο με κάποιας (οποιασδήποτε) μορφής περιοδικότητα (Εικόνα 2.5.α). Για τη μελέτη

αυτού του προβλήματος, ο χώρος μπορεί να χωριστεί σε τρεις περιοχές: Την περιοχή I η οποία αποτελείται εξ'ολοκλήρου από το μέσο διάδοσης του προσπίπτοντος και από την οποία το κύμα προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ αυτής και της επόμενης περιοχής με γωνία θ , την περιοχή II η οποία περικλείει ολόκληρο το περιοδικό ανισόπεδο ως προς τον άξονα x ανάγλυφο και την περιοχή III, η οποία αποτελείται εξ'ολοκλήρου από το δεύτερο μέσο διάδοσης (Εικόνα 2.5.α).

Η περιοχή II στη συνέχεια μπορεί να χωριστεί σε M πλήθος παράλληλων επιπέδων στρωμάτων, τα οποία έχουν το καθένα εντός του χαρακτηριστικά αμετάβλητα ως προς τον άξονα x , έτσι ώστε όλα μαζί να προσεγγίζουν το συνολικό ανάγλυφο της περιοχής II, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.5.β.



Εικόνα 2.5.β - Διαμέριση της περιοχής II σε παράλληλα στρώματα

Το κάθε στρώμα από αυτά εμφανίζει δηλαδή περιοδικότητα ως προς τον άξονα z , ενώ εκτείνεται σε ολόκληρο τον άξονα y και είναι πεπερασμένου πάχους στον άξονα x , κατά το οποίο πάχος όμως έχει σταθερή σύσταση και αμετάβλητες ιδιότητες.

Ο διηλεκτρικός ταυνοστής καθενός από αυτά τα στρώματα μπορεί λοιπόν στην περίπτωση του πλάσματος που εξετάζεται να γραφτεί ως:

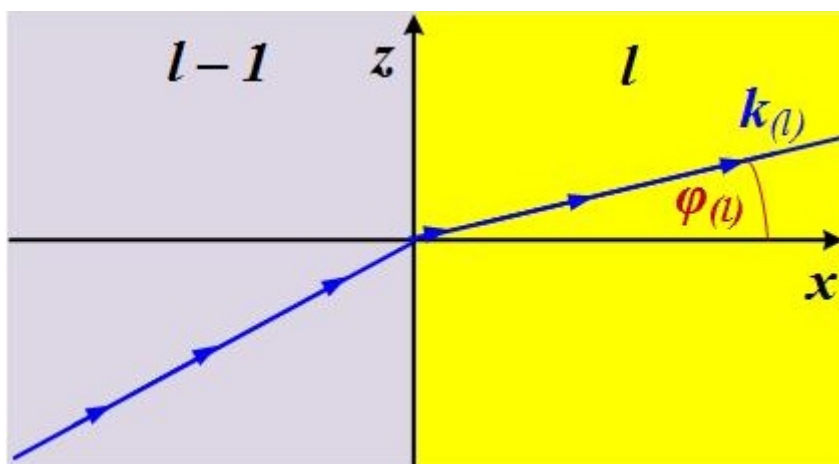
$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^{(l)} = \begin{pmatrix} K_{\perp,(l)} & -iK_{\times,(l)} & 0 \\ iK_{\times,(l)} & K_{\perp,(l)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel,(l)} \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

όπου βεβαίως $l = 1, 2, \dots, M$.

Επίσης, λόγω της περιοδικότητας κατά τη διεύθυνση z , κάθε στοιχείο του πίνακα αυτού μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier ως:

$$K_{i,(l)} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} K_{hi,(l)} e^{ih\mathbf{k}^{(l)} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.124)$$

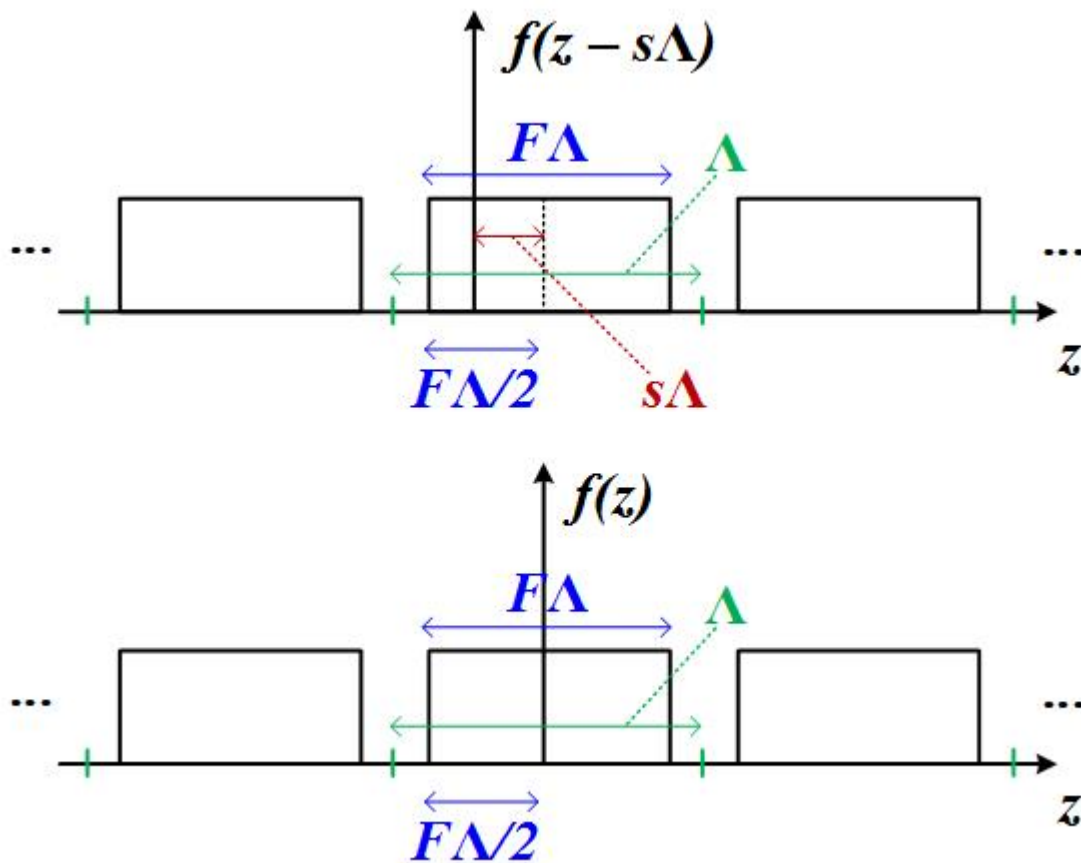
όπου $i = \perp, \times$ ή \parallel , $\mathbf{k}^{(l)} = \frac{2\pi}{\Lambda^{(l)}} (\cos \varphi^{(l)} \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi^{(l)} \hat{\mathbf{z}})$ με $\Lambda^{(l)} = \Lambda$ το μήκος μίας περιόδου του αναγλύφου που φυσικά είναι ίδιο για όλα τα στρώματα (Εικόνα 2.5.β) και $\varphi^{(l)}$ η γωνία που σχηματίζει το κυματόνισμα διάδοσης στο στρώμα l με τον κάθετο σε κάθε στρώμα θετικό ημιάξονα x , όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.5.γ:



Εικόνα 2.5.γ - Γωνία διάδοσης του κύματος στο στρώμα l

Οι σταθερές $K_{hi,(l)}$ μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας ανάλυση Fourier. Για παράδειγμα, έστω $f(z) \equiv K_{i,(l)}(z)$ για το στρώμα l . Είναι φανερό ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι δίτιμη περιοδική συνάρτηση του z , η οποία εκτείνεται από

$z \rightarrow -\infty$ μέχρι $z \rightarrow \infty$. Αν συμβολιστεί με Λ μία πλήρης περίοδος της $f(z)$, με $s\Lambda$ η μετατόπιση της συμμετρίας της ως προς την ευθεία $x = 0$ από την αρχή των αξόνων με ολισθήση πάνω στον άξονα z κατά τη θετική του φορά και με $F\Lambda$ το μήκος κατά z στο οποίο για κάθε περίοδο παίρνει τη μία από τις δύο τιμές -οπότε για διάστημα ίσο με $(1 - F)\Lambda$ θα παίρνει την άλλη τιμή-, όπως περιγράφεται στην Εικόνα 2.5.δ, μπορεί να γίνει η ακόλουθη ανάλυση:



Εικόνα 2.5.δ - Η διτιμη περιοδική συνάρτηση $f(z)$

$$f(z) = \sum_{h=-\infty}^{h=\infty} a_h e^{ihk_z z} = a_0 + \sum_{h \neq 0} a_h e^{ihk_z z} \quad (2.125)$$

$$\acute{\omicron}\pi\upsilon \ k_z = \frac{2\pi}{\Lambda} \sin \varphi(l)$$

$$\Rightarrow f(z)e^{-ih'k_z z} = a_0 e^{-ih'k_z z} + \sum_{h \neq 0} a_h e^{i(h-h')k_z z} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\frac{\Lambda}{2}} f(z)e^{-ih'k_z z} dz &= \int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\frac{\Lambda}{2}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_h e^{i(h-h')k_z z} dz \\ &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_h \int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\frac{\Lambda}{2}} e^{i(h-h')k_z z} dz = \begin{cases} 0 & , \gamma\iota\alpha \ h \neq h' \\ \Lambda a_{h'} & , \gamma\iota\alpha \ h = h' \end{cases} \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\Rightarrow a_h = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\frac{\Lambda}{2}} f(z)e^{-ihk_z z} dz \quad (2.128)$$

και

$$f(z - s\Lambda) = \sum_{h=-\infty}^{h=\infty} \hat{a}_h e^{ihk_z z} = \hat{a}_0 + \sum_{h \neq 0} \hat{a}_h e^{ihk_z z} \quad (2.129)$$

\acute{\omicron}\pi\upsilon \ \mu\epsilon \ \omicron\rho\iota\sigma\mu\acute{o} \ \tau\eta\varsigma \ \nu\acute{\epsilon}\alpha\varsigma \ \mu\epsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}\varsigma \ z' \equiv z - s\Lambda \ \mu\pi\omicron\rho\epsilon\iota \ \nu\alpha \ \gamma\rho\alpha\phi\tau\epsilon\iota

$$\hat{a}_h = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\frac{\Lambda}{2}-s\Lambda}^{\frac{\Lambda}{2}-s\Lambda} f(z')e^{-ihk_z(z'+s\Lambda)} dz' = e^{-ihk_z s\Lambda} a_h = e^{-i2\pi h s \sin \varphi(l)} a_h \quad (2.130)$$

κ\alpha\tau\iota \ \tau\omicron \ \omicron\pi\omicron\iota\omicron \ \beta\acute{\epsilon}\beta\alpha\iota\alpha \ \delta\iota\upsilon\epsilon\iota \ \hat{a}_h = \hat{a}, \ \acute{\epsilon}\nu\omega \ \gamma\iota\alpha \ \tau\iota\varsigma \ \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{\epsilon}\varsigma \ a_h \ \alpha\upsilon \ \eta \ \chi\alpha\mu\eta\lambda\acute{\eta} \ \tau\iota\mu\acute{\eta} \ \tau\eta\varsigma \ \delta\iota\tau\iota\mu\eta\varsigma \ f(z) \ \sigma\upsilon\mu\beta\omicron\lambda\iota\sigma\tau\epsilon\iota \ \mu\epsilon \ K_g \ \kappa\alpha\iota \ \eta \ \upsilon\psi\eta\lambda\acute{\eta} \ K_r, \ \iota\sigma\chi\upsilon\epsilon\iota \ \sigma\acute{\upsilon}\mu\phi\omega\upsilon\alpha \ \mu\epsilon \ \tau\alpha

προαναφερθέντα:

$$a_h = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\frac{\Lambda}{2}} f(z) e^{-ikh_k z} dz \quad (2.131)$$

$$= \frac{1}{\Lambda} \left[K_g \left(\frac{e^{-ikh_k z}}{-ikh_k} \right)_{-\frac{\Lambda}{2}}^{-\frac{F\Lambda}{2}} + K_r \left(\frac{e^{-ikh_k z}}{-ikh_k} \right)_{-\frac{F\Lambda}{2}}^{\frac{F\Lambda}{2}} + K_g \left(\frac{e^{-ikh_k z}}{-ikh_k} \right)_{\frac{F\Lambda}{2}}^{\frac{\Lambda}{2}} \right] \quad (2.132)$$

$$= \frac{K_g}{\Lambda} \frac{1}{ikh_k} \left(e^{ikh_k \frac{\Lambda}{2}} - e^{ikh_k \frac{F\Lambda}{2}} \right) + \frac{K_r}{\Lambda} \frac{1}{ikh_k} \left(e^{ikh_k \frac{F\Lambda}{2}} - e^{-ikh_k \frac{F\Lambda}{2}} \right) \quad (2.133)$$

$$+ \frac{K_g}{\Lambda} \frac{1}{ikh_k} \left(e^{-ikh_k \frac{F\Lambda}{2}} - e^{-ikh_k \frac{\Lambda}{2}} \right) \quad (2.134)$$

Δεδομένου ότι ισχύει:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.135)$$

η τελευταία γράφεται:

$$a_h = \frac{2i}{ikh_k \Lambda} \left\{ K_g \left[\sin \left(hk_z \frac{\Lambda}{2} \right) - \sin \left(hk_z \frac{F\Lambda}{2} \right) \right] + K_r \sin \left(hk_z \frac{F\Lambda}{2} \right) \right\} \quad (2.136)$$

ενώ λαμβάνοντας υπόψη ότι $k_z = \frac{2\pi}{\Lambda}$ προκύπτει:

$$a_h = \frac{1}{\pi h} [(K_r - K_g) \sin(\pi h F) + K_g \sin(\pi h)] \quad \forall h \in \mathbb{Z} \quad (2.137)$$

και τελικά, με χρήση του θεωρήματος De L' Hospital για τον υπολογισμό στην

περίπτωση $h = 0$, η λύση παίρνει τη μορφή:

$$a_h = \begin{cases} (K_r - K_g) \frac{\sin(\pi h F)}{\pi h} & \text{για } h \in \mathbb{Z}^* \\ (1 - F)K_g + FK_r & \text{για } h = 0 \end{cases} \quad (2.138)$$

ενώ με βάση τα προηγούμενα είναι:

$$\hat{a}_h = e^{-i2\pi h s \sin \varphi(l)} a_h \quad h \in \mathbb{Z} \quad (2.139)$$

Συνοψίζοντας, για πρόπτωση παράλληλη στο ανάγλυφο, δηλαδή $k_x = 0$ και $\varphi(l) = \frac{\pi}{2}$, οπότε και $\sin \varphi(l) = 1$, για το στρώμα l προκύπτει:

$$K_{i,(l)}(z) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} K_{hi,(l)} e^{ihkz} \quad \text{όπου } k = k_z = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad \text{και } i = \perp, \times \text{ ή } \parallel \quad (2.140)$$

με

$$K_{hi,(l)}(z) = \begin{cases} (K_{ri(l)} - K_{gi(l)}) \frac{\sin(\pi h F(l))}{\pi h} e^{-i2\pi s(l)h} & \text{για } h \in \mathbb{Z}^* \\ (1 - F(l))K_{gi(l)} + F(l)K_{ri(l)} & \text{για } h = 0 \end{cases} \quad (2.141)$$

όπου $F(l)$ είναι ο παράγοντας πλήρωσης του στρώματος l και $s(l)\Lambda$ η ολίσθηση ($s(l)$ το κλάσμα ολίσθησης της περιόδου) του στρώματος l .

Με τις μεθόδους που περιγράφηκαν λοιπόν στην παράγραφο 2.5, η περιοχή II που περιλαμβάνει την τραχύτητα του αναγλύφου μεταξύ των δύο ενιαίων χώρων I και III (Εικόνες 2.5.α και 2.5.β), μπορεί να αντιμετωπισθεί ως στοίβα στρωμάτων, το καθένα με ομογενή διηλεκτρική συμπεριφορά σε όλον του τον όγκο, όπως στην παράγραφο 2.3.

2.7 Σύνοψη

Στο Κεφάλαιο 2 μελετήθηκε η διάδοση και η σκέδαση κυμάτων σε διαδοχικά παράλληλα στρώματα μαγνητισμένου πλάσματος διαφορετικής πυκνότητας. Ο διηλεκτρικός ταχυστής απαιτείται για μία τέτοια μελέτη, ενώ κυρίαρχη είναι και η σημασία που έχει η έκφρασή του στο κατάλληλο σύστημα αναφοράς, προκειμένου να αξιολογούνται οι συνοριακές συνθήκες.

Το Scrape-Off Layer (SOL) μπορεί να μελετηθεί σαν ένα σύνθετο στρώμα που παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο περιοχές πλάσματος διαφορετικής ηλεκτρονικής πυκνότητας (ένα αραιότερο προς τις παρυφές του πλάσματος και ένα πυκνότερο προς τον πυρήνα του). Σε αυτήν την περίπτωση το SOL έχει συγκεκριμένο ενεργό διηλεκτρικό ταχυστή, ο οποίος υπολογίζεται από τον διηλεκτρικό ταχυστή εντός των ανομοιογενειών, τον διηλεκτρικό ταχυστή του περιβάλλοντος χώρου τους και του ποσοστού όγκου του στρώματος SOL που καταλαμβάνουν οι ανομοιογένειες αυτές.

Η μελέτη διάδοσης και σκέδασης πολλαπλών στρωμάτων μπορεί επίσης να προσεγγίσει για μεγάλο πλήθος στρωμάτων τη συνεχή μεταβολή πυκνότητας. Μία τέτοια αντιμετώπιση είναι ρεαλιστικότερη, καθώς στην πραγματικότητα η μεταβολή της πυκνότητας δεν συμβαίνει ποτέ ακαριαία, αλλά με συνεχή τρόπο.

Ακόμα, στην πράξη υπάρχει συχνά αυξημένη γεωμετρική πολυπλοκότητα. Η διεπαφή ανάμεσα στο περιβάλλον πλάσμα και μία τυρβώδη ανομοιογένεια δεν είναι λεία, αλλά η επιφάνεια της ανομοιογένειας εμφανίζει ανάγλυφο με κάποια τραχύτητα. Όταν η τραχύτητα στο ανάγλυφο αυτό είναι περιοδική, η τραχειά διεπαφή ανάμεσα στα δύο μέσα διάδοσης μπορεί να διαμεριστεί σε ένα πλήθος παράλληλων στρωμάτων. Το κάθε στρώμα από αυτά έχει διαφορετική πυκνότητα και δικό του ενεργό διηλεκτρικό ταχυστή, ο οποίος υπολογίζεται με κατάλληλη ανάλυση Fourier.

3 Σκέδαση επίπεδων ραδιοκυμάτων Electron Cyclotron από απλή κυλινδρική συνεκτική δομή του τυρβώδους στρώματος

3.1 Εισαγωγή

Όπως προαναφέρθηκε, χρησιμοποιούνται κύματα ραδιοσυχνότητας εκπερόμενα από μια εξωτερική πηγή που βρίσκεται στις παρυφές της συσκευής tokamak, τα οποία έχουν στόχο τη θέρμανση του πλάσματος και τη δημιουργία ρεύματος στον πυρήνα του τόρου αλλά και την καταπολέμηση ανεπιθύμητων φαινομένων, όπως είναι οι μαγνητικές νησίδες. Αυτά τα κύματα διαδίδονται μέσω ενός τυρβώδους στρώματος, το οποίο συχνά αναφέρεται ως Scrape-Off Layer (SOL), πριν φθάσουν στον επιδιωκόμενο στόχο τους στον πυρήνα του πλάσματος [6, 10, 11, 12, 13, 14]. Αυτό το στρώμα αποτελείται από συνεκτικές δομές σφαιρικού, ελλειψοειδούς ή επιμήκους κυλινδρικού νηματοειδούς σχήματος, των οποίων η πυκνότητα ηλεκτρονίων διαφέρει από εκείνη του περιβάλλοντός τους, οπότε και ο διηλεκτρικός ταυιστής τους είναι διαφορετικός. Για τον λόγο αυτό, οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των προσπίπτοντων κυμάτων ραδιοσυχνότητας μπορούν να αλλάξουν κατά τη μετάβασή τους μέσω του τυρβώδους αυτού στρώματος και να τροποποιηθούν από αυτές τις συνεκτικές δομές.

Στο Κεφάλαιο 3 λοιπόν μελετάται η διαδικασία σκέδασης επιπέδων κυμάτων από μία κυλινδρική συνεκτική τυρβώδη δομή με την παραδοχή ότι ο άξονάς της έχει άπειρο μήκος [24]. Οι επιπτώσεις, που έχει η διάδοση μέσω ενός διαφορετικού διηλεκτρικού μέσου (όπως η κυλινδρική δομή που αναφέρεται) στις ιδιότητες του αρχικά προσπίπτοντος κύματος, θα μπορούσαν να μελετηθούν και με απλούστερη προσέγγιση Γεωμετρικής Οπτικής [20]. Ωστόσο, για να έχει ισχύ η αντιμετώπιση του προβλήματος με Γεωμετρική Οπτική θα πρέπει η πυκνότητα ηλεκτρονίων εντός

της κυλινδρικής ανομοιογένειας να είναι συγκρίσιμη της περιβάλλουσας ηλεκτρονικής πυκνότητας. Στην πραγματικότητα όμως δεν συμβαίνει αυτό [15, 19]: Ένα τυπικό εύρος τιμών της σχετικής αντίθεσης ηλεκτρονικής πυκνότητας είναι από 5% έως 100%. Έτσι, υπάρχει βάσει των φυσικών νόμων λόγος να εξαχθεί μία πιο γενική προσέγγιση με ισχύ σε ένα πολύ μεγαλύτερο εύρος τιμών.

Οι εξισώσεις του Maxwell χρησιμοποιούνται για να εξαχθεί ένα αναλυτικό μοντέλο πλήρους κύματος για τη διαδικασία σιέδασης RF κυμάτων από κυλινδρικές νηματοειδείς ανομοιογένειες πυκνότητας (filaments). Η περίπτωση των σφαιρικών ανομοιογενειών (blobs) έχει ήδη μελετηθεί [17]. Επίσης, έχουν μελετηθεί περιπτώσεις κυλινδρικών επιμηγών ανομοιογενειών [15], όπου όμως ο άξονας του κυλίνδρου είχε θεωρηθεί ευθυγραμμισμένος με το συνολικό μαγνητικό πεδίο. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να σημειωθεί ότι το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο πλάσμα των tokamak είναι η συνισταμένη της τοροειδούς συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου (η οποία επιβάλλεται εξωτερικά) και της πολοειδούς συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου (η οποία δημιουργείται από το ρεύμα στο πλάσμα). Ο λόγος της πολοειδούς συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου προς την τοροειδή συνιστώσα του, είναι γνωστός ως η εφαπτομένη της γωνίας κλίσης μαγνητικού πεδίου (magnetic field pitch angle) [7]. Αυτή η γωνία δεν είναι απαραίτητα μικρή, καθώς υπάρχουν καταγεγραμμένες πειραματικές τιμές μέχρι 40° (π.χ. στο National Spherical Torus Experiment - NTSX [8]). Ο συνδυασμός των τοροειδών και πολοειδών συνιστωσών τελικά δίνει δομή ελικοειδών γραμμών μαγνητικού πεδίου, οι οποίες μάλιστα είναι ανοικτές. Παρουσία αυτού του συνολικού μαγνητικού πεδίου, οι κυλινδρικές νηματοειδείς δομές που δημιουργούνται στο πλάσμα διαδίδονται ακτινικά (προς τις παρυφές του πλάσματος [6, 10]), χωρίς να έχουν κάποιον φυσικό λόγο να περιστρέφονται συνεχώς προκειμένου να διατηρούν τον προσανατολισμό τους παράλληλο στο συνολικό ελικοειδές μαγνητικό πεδίο. Επιπλέον, υπάρχουν πειραματικές μετρήσεις (όπως αναφέρεται και στο [9] για τον αντιδραστήρα Alcator

C-Mod) που δείχνουν ότι οι κυλινδρικές αυτές δομές είναι σχεδόν, αλλά όχι απόλυτα, ευθυγραμμισμένες με το συνολικό μαγνητικό πεδίο. Συνεπώς, υπάρχει η ανάγκη μελέτης των φαινομένων σκέδασης στη γενική περίπτωση, κατά την οποία ο άξονας του κυλίνδρου δεν είναι παράλληλος στο συνολικό μαγνητικό πεδίο.

Η μελέτη που περιγράφεται εδώ είναι μία γενίκευση προηγούμενης δουλειάς [15]: Η κύρια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου θεωρείται ότι είναι κατά μήκος του άξονα του κυλινδρικού νηματίου, ωστόσο λαμβάνεται υπόψη και η παρουσία μίας συνιστώσας μαγνητικού πεδίου με διαφορετικό προσανατολισμό προκειμένου να μελετηθεί η σκέδαση των RF κυμάτων, κάτι το οποίο αλλάζει την φυσική των φαινομένων σκέδασης. Όταν υπάρχει μόνο η κύρια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, η συνιστώσα του κυματανύσματος κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου k_{\parallel} διατηρείται, έτσι ώστε τα κύματα εντός και εκτός του κυλίνδρου να έχουν το ίδιο k_{\parallel} με το προσπίπτον επίπεδο κύμα. Ωστόσο, παρουσία επιπλέον συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου με διαφορετικό προσανατολισμό δεν ισχύει το ίδιο, καθώς μόνο η παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου συνιστώσα του κυματανύσματος k_z διατηρείται. Το σκεδαζόμενο κύμα, μπορεί να έχει ένα φάσμα από k_{\parallel} , το οποίο εξαρτάται από τη γωνία κλίσης μεταξύ του άξονα του κυλίνδρου και του διανύσματος του συνολικού μαγνητικού πεδίου. Η διαδικασία της σκέδασης λοιπόν διευρύνει το φάσμα των k_{\parallel} των κυμάτων που διαδίδονται προς τον πυρήνα του τόρου, γεγονός το οποίο αλλάζει και το προφίλ εναπόθεσης ισχύος στον πυρήνα του πλάσματος.

Έτσι, χωρίς να υπάρχει πλέον ο περιορισμός το διάνυσμα του συνολικού μαγνητικού πεδίου να είναι παράλληλο με τον άξονα του κυλίνδρου, θεωρείται ότι σχηματίζει γωνία ϕ_0 ως προς αυτόν. Σημειώνεται ότι για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης, ο τόρος του πλάσματος θεωρείται μεγάλων διαστάσεων, ώστε να προσεγγίζεται από ένα απείρως εκτεινόμενο επίπεδο στρώμα όπου υπάρχουν τα νημάτια και το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές. Επιπλέον, ο άξονας του κυλινδρικού

νηματίου θεωρείται ότι έχει άπειρο μήκος, έτσι ώστε τα φαινόμενα σκέδασης που λαμβάνουν χώρα στις παρυφές του να αγνοούνται. Τόσο το περιβάλλον πλάσμα όσο και το πλάσμα εντός του κυλίνδρου θεωρείται ψυχρό και ομογενές, με τους διηλεκτρικούς τανυστές να είναι εκείνοι που χαρακτηρίζουν το ψυχρό πλάσμα. Εκτός από τη διάθλαση, συμπεριλαμβάνονται επίσης τα φαινόμενα ανάκλασης, περίθλασης και σκίασης. Επίσης, οι ανομοιογένειες μπορούν να συζεύξουν ισχύ σε άλλα κύματα στο πλάσμα (για παράδειγμα, ένα O-mode προσπίπτον κύμα μπορεί να διεγείρει ένα X-mode και αντίστροφα). Ακόμα, τα σκεδαζόμενα κύματα οδεύουν σε όλες τις ακτινικές διευθύνσεις του κυλινδρικού νηματίου και όχι μόνο προς τον πυρήνα του πλάσματος, οπότε η ισχύς του προσπίπτοντος ανακατευθύνεται.

Μία άλλη απλούστευση, που έχει γίνει στην παρούσα μελέτη, είναι ότι οι ανομοιογένειες στο scrape-off στρώμα είναι στατικές: Στην πραγματικότητα όμως αυτές κινούνται. Ωστόσο, σύμφωνα με πειραματικά αποτελέσματα, το μέτρο της ταχύτητας με την οποία οι ανομοιογένειες κινούνται κατά την τοροειδή διεύθυνση στο tokamak είναι της τάξης των $5 \times 10^3 \text{ m/s}$, δηλαδή περίπου πέντε τάξεις μεγέθους μικρότερο από το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης των RF κυμάτων, καθώς αυτό είναι κοντά στην γνωστή τιμή της σταθεράς της ταχύτητας διάδοσης του φωτός στο κενό (περίπου $3 \times 10^8 \text{ m/s}$). Έτσι, η συγκεκριμένη απλούστευση καθίσταται μία έγκυρη υπόθεση.

Όσον αφορά τη δομή του Κεφαλαίου 3, προκειμένου να μην αποπροσανατολιστεί ο αναγνώστης από τις πολλές μαθηματικές πράξεις - οι οποίες όμως είναι απαραίτητες για την πλήρη κατανόηση της παρούσας μελέτης - ακολουθεί μία σύντομη περιγραφή του περιεχομένου του εν λόγω Κεφαλαίου.

Η παράγραφος 3.2 ξεκινάει παρουσιάζοντας τη γεωμετρική πτυχή του προβλήματος: Ορίζονται δύο συστήματα αναφοράς. Το πρώτο σύστημα αναφοράς ορίζεται ως προς το εξωτερικά επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, ενώ το δεύτερο ορίζεται ως προς τον άξονα της κυλινδρικής νηματοειδούς συνεκτικής δομής. Σε

προηγούμενη μελέτη [15] τα δύο συστήματα αναφοράς συνέπιπταν, καθώς ο άξονας του κυλίνδρου δεν σχημάτιζε γωνία με το διάνυσμα του συνολικού μαγνητικού πεδίου. Το προσπίπτον κύμα περιγράφεται καλύτερα στο πρώτο σύστημα αναφοράς, ενώ τα κύματα εντός του κυλίνδρου και τα σκεδαζόμενα περιγράφονται πιο βολικά στο δεύτερο σύστημα αναφοράς. Προκειμένου να υπάρχει μία συνολικά συμβατή περιγραφή, στην Παράγραφο 3.2 παρουσιάζονται επίσης και οι πίνακες μετασχηματισμού που συνδέουν μεταξύ τους τα εν λόγω συστήματα αναφοράς. Ακόμα, το προσπίπτον κύμα εκφράζεται σε όρους εκθετικού δυαδικού που περιλαμβάνουν τις κυλινδρικές διανυσματικές συναρτήσεις.

Ύστερα, στην Παράγραφο 3.3 οι εξισώσεις του Maxwell χρησιμοποιούνται και εξάγεται η τέταρτης τάξης εξίσωση διασποράς για ψυχρό πλάσμα, τόσο για το σύστημα αναφοράς του μαγνητικού πεδίου όσο και για το σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου. Οι δύο φυσικοί ρυθμοί, που ικανοποιούν την εξίσωση διασποράς, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Εντός και εκτός της κυλινδρικής δομής. Η Παράγραφος 3.4 περιγράφει τις πλώσεις του καθενός από τους δύο αυτούς φυσικούς ρυθμούς.

Δεδομένων των τύπων του προσπίπτοντος και των σκεδαζόμενων πεδίων που υπάρχουν στο περιβάλλον πλάσμα, αλλά και των περιορισμένων πεδίων εντός του κυλίνδρου, προκύπτει μία αυτοσυνεπής λύση που να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Γίνεται η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία και ρεύματα στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Μετά, οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες προκύπτουν από τις εξισώσεις Faraday και Ampere. Αυτά παρουσιάζονται στην Παράγραφο 3.5. Μία σημαντική συνέπεια των συνοριακών συνθηκών είναι ότι για όλα τα κύματα η συνιστώσα του κυματανύσματος, που είναι παράλληλη στο συνολικό μαγνητικό πεδίο (k_{\parallel}), δεν διατηρείται η ίδια όταν ο άξονας του κυλινδρικού νηματίου δεν είναι ευθυγραμμισμένος με το διάνυσμα του συνολικού μαγνητικού πεδίου. Συγκεκριμένα, διατηρείται μόνο η συνιστώσα του

κυματανύσματος που είναι παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου (k_z). Αυτό οδηγεί σε γενίκευση της προηγούμενης μελέτης [15] για τη σκέδαση κυμάτων από κυλινδρική δομή σε μαγνητισμένο πλάσμα. Η Παράγραφος 3.6 περιέχει τις λύσεις για τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία καθώς και το διάνυσμα Poynting κατά την εμπρόσθια (προς τον πυρήνα του πλάσματος) διεύθυνση. Αυτές οι λύσεις αποτελούν και την βάση για τους υπολογισμούς που ακολουθούν. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στην Παραγραφο 3.7 και καλύπτουν μία ποικιλία διαφορετικών περιπτώσεων σκεδάσεων Electron Cyclotron (EC) κυμάτων (δηλαδή συχνότητας $f_0=170 \text{ GHz}$). Η κλίση του διανύσματος του συνολικού μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλινδρικού νηματίου ποικίλλει, (πάντα για το ίδιο μέτρο της μαγνητικής επαγωγής $B=4.5 \text{ T}$), διαφορετικά μεγέθη ακτίνας του κυλινδρικού νηματίου προσομοιώνονται, η σχετική αντίθεση ηλεκτρονικής πυκνότητας μεταξύ του κυλίνδρου και του περιβάλλοντος πλάσματος ποικίλλει επίσης και η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος μπορεί να είναι είτε O-mode είτε X-mode. Τέλος, στην Παράγραφο 3.8 παρουσιάζονται τα κύρια συμπεράσματα της παρούσας μελέτης.

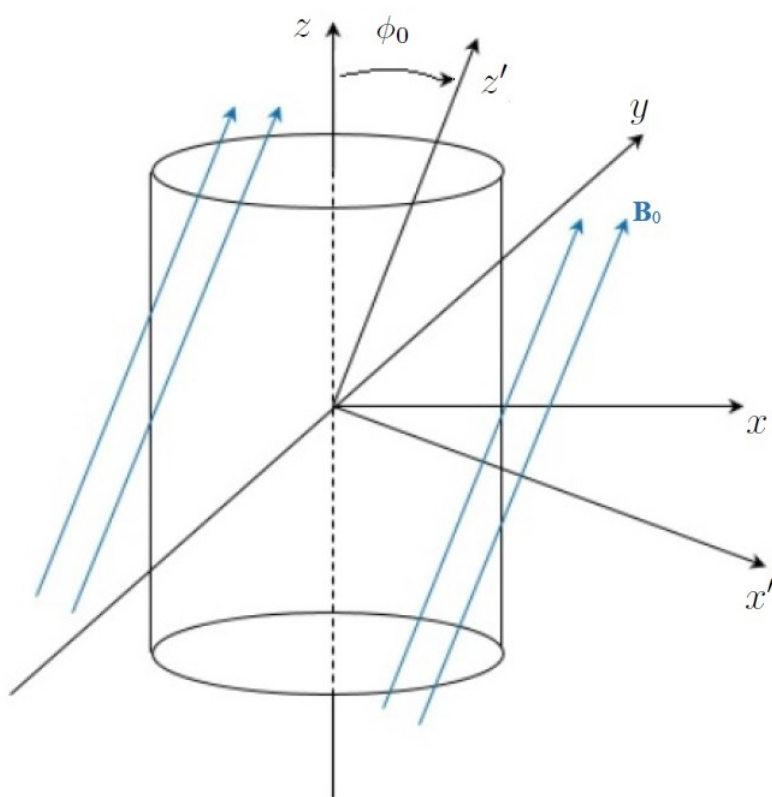
3.2 Βασικές παραδοχές και γεωμετρία

Οι γραμμές του συνολικού μαγνητικού πεδίου θεωρούνται παράλληλες στο ($z - x$)-επίπεδο με τον άξονα z να είναι ο άξονας του κυλινδρικού νηματίου και ϕ_0 να είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα του συνολικού μαγνητικού πεδίου (παράλληλο του άξονα z') ως προς το z (βλ. Εικόνα 3.2). Στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου με φ_k συμβολίζεται η αζιμουθιακή γωνία μίας συνιστώσας k του επιπέδου κύματος.

Ο κύλινδρος έχει ακτίνα a και το μήκος του, L , θεωρείται ότι είναι πολύ μεγαλύτερο του a ($\frac{a}{L} \ll 1$). Έτσι, γίνεται η υπόθεση ότι ο κύλινδρος έχει άπειρο μήκος προκειμένου να αγνοηθούν φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στις παρυφές του. Σημειώνεται ότι για την περίπτωση δέσμης πεπερασμένων διαστάσεων, η οποία προσπίπτει σε ενδιάμεσο σημείο ενός κυλίνδρου μεγάλου μήκους, αυτή η

προσέγγιση είναι επαρκής. Η ηλεκτρονική πυκνότητα τόσο εντός όσο και εκτός του κυλίνδρου θεωρούνται ομογενείς και το πλάσμα θεωρείται ψυχρό (δηλαδή, με θερμική ταχύτητα ιόντων και ηλεκτρονίων αμελητέα σχετικά με την ταχύτητα του φωτός, κάτι το οποίο συμβαίνει στις παρυφές του πλάσματος), ενώ περιορισμός για τον λόγο αυτών των δύο διαφορετικών πυκνοτήτων δεν υπάρχει.

Έστω $\overleftrightarrow{\mathbf{R}}_y(\phi_0)$ ο πίνακας στροφής (βλ. Παράρτημα Α 3.10.1) που μετασχηματίζει από το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του κυλίνδρου στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του μαγνητικού πεδίου που συμβολίζεται τονούμενο (άξονας z'). Η χρήση του συστήματος συντεταγμένων του κυλίνδρου, είναι χρήσιμη για την εκμετάλλευση των οριακών συνθηκών. Το μαγνητικό πεδίο θεωρείται ομογενές στην παρούσα εργασία. Από την άλλη, έστω $\overleftrightarrow{\mathbf{R}}_c(\varphi_k)$ ο πίνακας στροφής (βλ. Παράρτημα Α 3.10.2) που μετασχηματίζει από Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων σε Καρτεσιανό.



Εικόνα 3.2 - Μαγνητικό πεδίο και σύστημα συντεταγμένων του κυλίνδρου

Το κυματάναυσμα ενός μεμονωμένου επιπέδου κύματος (είτε προσπίπτον είτε

σχεδαζόμενο κλπ.) συμβολίζεται ως \mathbf{k} και το διάνυσμα θέσης στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου συμβολίζεται με \mathbf{r} . Κανονικοποιώντας αυτά τα δύο διανύσματα στα αδιάστατα $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k}c/\omega$ και $\boldsymbol{\rho} \equiv \mathbf{r}\omega/c$, αντίστοιχα, με c την ταχύτητα του φωτός στο κενό και $\omega = 2\pi f$ την γωνιακή συχνότητα (ενώ f είναι η συχνότητα). Το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}$ (το οποίο είναι το κανονικοποιημένο $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$) μπορεί να υπολογιστεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \chi & \psi & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

όπου χ, ψ και ζ είναι οι κανονικοποιημένες συντεταγμένες x, y και z του διανύσματος θέσης στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου, αντίστοιχα. Σύμφωνα με την εξίσωση

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi & \rho \sin \varphi & \zeta \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(\varphi_k) \begin{pmatrix} n_\rho \\ 0 \\ n_z \end{pmatrix} = n_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_k) + n_z \zeta \quad (3.2)$$

όπου φ και φ_k είναι οι αζιμουθιακές γωνίες μεταξύ του x -άξονα και των $\boldsymbol{\rho}$ και \mathbf{n} , αντίστοιχα. Από εδώ και εις το εξής, για το υπόλοιπο του Κεφαλαίου 3 ο δείκτης "0" χρησιμοποιείται όταν γίνεται αναφορά στο προσπίπτον κύμα (απλό επίπεδο κύμα), για το οποίο μπορεί να γραφτεί:

$$\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\rho} = n_{0\rho} \rho \cos(\varphi - \varphi_{0k}) + n_{0z} \zeta \quad (3.3)$$

Το αντίστοιχο προσπίπτον RF κύμα, που διαδίδεται στο περιβάλλον πλάσμα και προσπίπτει στον κύλινδρο, συνεπώς είναι:

$$\mathbf{E}_I(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{n}_0, \omega) \exp(i\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}) \quad (3.4)$$

Η κανονικοποιημένη ως προς το πλάτος (\mathcal{E}_0) ένταση του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\frac{\mathbf{E}_I(\boldsymbol{\rho})}{\mathcal{E}_0} = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{n}_0, \omega)}{\mathcal{E}_0} \exp(i\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{e}_0^P \exp \{i [n_{0\rho}\rho \cos(\varphi - \varphi_0 + n_{0z}\zeta)]\} \quad (3.5)$$

με

$$\mathbf{e}_0^P \equiv \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{n}_0, \omega)}{\mathcal{E}_0} \quad (3.6)$$

να είναι το διάνυσμα πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου του προσπίπτοντος κύματος. Ομοίως, μπορεί να οριστεί η αντίστοιχη πόλωση για τον ρυθμό k επίπεδου κύματος ως:

$$\mathbf{e}_k^P \equiv \frac{\mathbf{E}_k(\mathbf{n}_k, \omega)}{\mathcal{E}_0} \quad (3.7)$$

Σε όρους εκθετικού δυαδικού που συμπεριλαμβάνουν τις διανυσματικές κυλινδρικές συναρτήσεις \mathbf{m}_n , \mathbf{n}_n και \mathbf{l}_n (βλ. Παράρτημα 3.11) στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου, ισχύει:

$$\mathbf{e}_k^P \exp(i\mathbf{n}_{kr} \cdot \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{e}_k^P \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} [\mathbf{a}_{kn} \mathbf{m}_n(n_{kr}\rho, n_{kz}\zeta, \varphi) + \mathbf{b}_{kn} \mathbf{n}_n(n_{kr}\rho, n_{kz}\zeta, \varphi) + \mathbf{c}_{kn} \mathbf{l}_n(n_{kr}\rho, n_{kz}\zeta, \varphi)] \quad (3.8)$$

όπου οι διανυσματικές σταθερές \mathbf{a}_n , \mathbf{b}_n και \mathbf{c}_n στο δυαδικό του εκθετικού μπορούν να υπολογιστούν στην πλήρη βάση των διανυσματικών κυλινδρικών συναρτήσεων [21] και ο δείκτης k είναι γενικός (όταν είναι 0, αναφέρεται στο προσπίπτον πεδίο). Συνεπώς, στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του κυλίνδρου (η αντίστοιχη

συνιστώσα υποδεικνύεται με υπερκείμενο δείκτη):

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} e^{i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}_k} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\begin{pmatrix} a_{kn}^x \\ a_{kn}^y \\ a_{kn}^z \end{pmatrix} \mathbf{m}_n + \begin{pmatrix} b_{kn}^x \\ b_{kn}^y \\ b_{kn}^z \end{pmatrix} \mathbf{n}_n + \begin{pmatrix} c_{kn}^x \\ c_{kn}^y \\ c_{kn}^z \end{pmatrix} \mathbf{l}_n \right] \quad (3.9)$$

όπου ύστερα από υπολογισμούς οι σταθερές είναι:

$$\begin{pmatrix} a_{kn}^x \\ a_{kn}^y \\ a_{kn}^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_k \\ \cos \varphi_k \\ 0 \end{pmatrix} \frac{i^{n+1} e^{-in\varphi_k}}{n_{k\rho}} \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} b_{kn}^x \\ b_{kn}^y \\ b_{kn}^z \end{pmatrix} = -i^n \frac{n_{kz}}{n_k n_{k\rho}} e^{-in\varphi_k} \begin{pmatrix} \cos \varphi_k \\ \sin \varphi_k \\ -\frac{n_{k\rho}}{n_{kz}} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} c_{kn}^x \\ c_{kn}^y \\ c_{kn}^z \end{pmatrix} = -i^{n+1} \frac{e^{-in\varphi_k}}{n_k^2} \begin{pmatrix} n_{k\rho} \cos \varphi_k \\ n_{k\rho} \sin \varphi_k \\ n_{kz} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

3.3 Διάδοση RF κυμάτων στο πλάσμα και η σχέση διασποράς

3.3.1 Το ηλεκτρικό πεδίο γενικά

Για ψυχρό πλάσμα, ο συνδυασμός των εξισώσεων Faraday και Ampere [23] στο πεδίο Fourier δίνει [16]:

$$\varepsilon_0 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad (3.13)$$

Θεωρείται ότι η ισορροπία πλάσματος είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο και τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία έχουν χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{-i\omega t}$, όπου t ο χρόνος. Σε αναπαράσταση κανονικοποιημένου κυματανύσματος:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = \int \int \int d^3n \mathbf{E}(\mathbf{n}) \exp(i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}) \quad (3.14)$$

Ο συνδυασμός αυτών των δύο εξισώσεων οδηγεί στην:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}) = \int \int \int d^3n \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{n}) \exp(i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}) \quad (3.15)$$

όπου εμφανίζεται ο τανυστής διασποράς $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}(\mathbf{n})$. Για μη-τετριμμένες λύσεις της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, η οριζουσα του τανυστή διασποράς πρέπει να είναι μηδέν. Αυτή η απαίτηση, με άλλα λόγια, είναι η σχέση διασποράς:

$$\det \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}(\mathbf{n}) \right] = 0 \quad (3.16)$$

ή στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου για το κυματάνυσμα με τον z -άξονα ευθυγραμμισμένο με τον άξονα z του κυλίνδρου:

$$\det \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}(n_{k\rho}, n_{kz}, \varphi_k) \right] = 0 \quad (3.17)$$

το οποίο οδηγεί σε εξίσωση τέταρτης τάξης ως προς n_{kr} . Έτσι, η εξίσωση παίρνει τη γενική μορφή:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{M=1}^4 \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} dn_{kz} \mathbf{E}_k [n_{k\rho}(n_{kz}, \varphi_k), n_{kz}, \varphi_k] \exp(i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}) \quad (3.18)$$

ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τις λύσεις της εξίσωσης :

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, \zeta) = \sum_{M=1}^4 \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} dn_{kz} \mathbf{E}_k^M [n_{k\rho}^M(n_{kz}, \varphi_k), n_{kz}, \varphi_k] \exp \{i [\rho n_{k\rho}^M \cos(\varphi - \varphi_k) + n_{kz} \zeta]\} \quad (3.19)$$

με το γράμμα M να συμβολίζει την αναφερόμενη λύση από τις τέσσερις. Επίσης, μπορεί να εισαχθεί ένας παράγοντας $\frac{1}{2\pi}$ μπροστά από τις εκφράσεις αυτές, προκειμένου να φαίνεται εύκολα ο συσχετισμός με τις αντίστοιχες για την απλούστερη περίπτωση, όπου ο κύλινδρος είναι ευθυγραμμισμένος με το συνολικό δάνυσμα του μαγνητικού πεδίου.

3.3.2 Η εξαγωγή της σχέσης διασποράς

Στο σύστημα αναφοράς του μαγνητικού πεδίου σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, ο διηλεκτρικός ταυυστής έχει τη μορφή [18]:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}_{mag}^{cart} = \begin{pmatrix} K_{\perp} & -iK_{\times} & 0 \\ iK_{\times} & K_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Με την βοήθεια των μετασχηματισμών που αναλύονται στο Παράρτημα, ο διηλεκτρικός ταυυστής μπορεί να εκφραστεί στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (βλ. εξίσωση 3.21):

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}_{fila}^{cart} = \mathbf{R}_y^{-1}(\phi_0) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}_{mag}^{cart} \mathbf{R}_y(\phi_0) \quad (3.21)$$

το οποίο δίνει:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}_{fila}^{cart} = \begin{pmatrix} K_{\perp}c_0^2 + K_{\parallel}s_0^2 & -iK_{\times}c_0 & c_0s_0(K_{\parallel} - K_{\perp}) \\ iK_{\times}c_0 & K_{\perp} & -iK_{\times}s_0 \\ c_0s_0(K_{\parallel} - K_{\perp}) & iK_{\times}s_0 & K_{\perp}s_0^2 + K_{\parallel}c_0^2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

όπου

$$c_0 \equiv \cos \phi_0, \quad s_0 \equiv \sin \phi_0 \quad (3.23)$$

Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στον συμβολισμό, καθώς με ϕ_0 συμβολίζεται η γωνία μεταξύ του άξονα του κυλινδρικού νηματίου και του μαγνητικού πεδίου, ενώ με φ συμβολίζονται οι αζιμουθιακές γωνίες στα κυλινδρικά συστήματα συντεταγμένων. Ο τανυστής διασποράς μπορεί να υπολογιστεί από τον διηλεκτρικό τανυστή στο ίδιο Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου ως εξής:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}_{fila}^{cart} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}_{fila}^{cart} + (\mathbf{nn} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}n^2)_{fila}^{cart} \quad (3.24)$$

το οποίο οδηγεί στην:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}_{fila}^{cart} = \begin{pmatrix} K_{\perp}c_0^2 + K_{\parallel}s_0^2 - n_y^2 - n_z^2 & -iK_{\times}c_0 + n_xn_y & c_0s_0(K_{\parallel} - K_{\perp}) + n_xn_z \\ iK_{\times}c_0 + n_xn_y & K_{\perp} - n_x^2 - n_z^2 & -iK_{\times}s_0 + n_y n_z \\ c_0s_0(K_{\parallel} - K_{\perp}) + n_xn_z & iK_{\times}s_0 + n_y n_z & K_{\perp}s_0^2 + K_{\parallel}c_0^2 - n_x^2 - n_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου, είναι:

$$\begin{aligned}
\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}_{fila}^{cyl} &= \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c^{-1}(\varphi_k) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}_{fila}^{cart} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(\varphi_k) \\
&= \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c^{-1}(\varphi_k) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}_{fila} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(\varphi_k) + \mathbf{n}_{fila}^{cyl} (\mathbf{n}_{fila}^{cyl})^T - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} n^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Σημειώνεται ότι ο δείκτης στην αζιμουθιακή γωνία αναφέρεται σε συγκεκριμένο κυματόνυμα στον \mathbf{k} -χώρο συντεταγμένων, με την k_z συνιστώσα κατά μήκος του άξονα του κυλινδρικού νηματίου και την αζιμουθιακή γωνία της προβολής του \mathbf{k} στο $(x - y)$ επίπεδο ως προς τον x -άξονα του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου. Στις ακόλουθες πράξεις, η αζιμουθιακή συνιστώσα του \mathbf{k} έχει τεθεί ίση με μηδέν. Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς, προκύπτει:

$$(D_{fila}^{cyl})_{11} = c_k^2 (K_{\perp} c_0^2 + K_{\parallel} s_0^2) + K_{\perp} s_k^2 - n_{\varphi}^2 - n_z^2 \tag{3.27}$$

$$(D_{fila}^{cyl})_{12} = -s_k c_k (K_{\perp} c_0^2 + K_{\parallel} s_0^2) + K_{\perp} s_k c_k - iK_{\times} c_0 + n_{\rho} n_{\varphi} \tag{3.28}$$

$$(D_{fila}^{cyl})_{13} = c_k c_0 s_0 (K_{\parallel} - K_{\perp}) - iK_{\times} s_0 s_k + n_{\rho} n_z \tag{3.29}$$

$$(D_{fila}^{cyl})_{21} = -s_k c_k (K_{\perp} c_0^2 + K_{\parallel} s_0^2) + K_{\perp} s_k c_k + iK_{\times} c_0 + n_{\rho} n_{\varphi} \tag{3.30}$$

$$(D_{fila}^{cyl})_{22} = s_k^2 (K_{\perp} c_0^2 + K_{\parallel} s_0^2) + K_{\perp} c_k^2 - n_{\rho}^2 - n_z^2 \tag{3.31}$$

$$(D_{fila}^{cyl})_{23} = -s_k c_0 s_0 (K_{\parallel} - K_{\perp}) - iK_{\times} s_0 c_k + n_{\varphi} n_z \tag{3.32}$$

$$(D_{fila}^{cyl})_{31} = c_k c_0 s_0 (K_{\parallel} - K_{\perp}) + iK_{\times} s_0 s_k + n_{\rho} n_z \quad (3.33)$$

$$(D_{fila}^{cyl})_{32} = -s_k c_0 s_0 (K_{\parallel} - K_{\perp}) + iK_{\times} s_0 c_k + n_{\varphi} n_z \quad (3.34)$$

$$(D_{fila}^{cyl})_{33} = (K_{\perp} s_0^2 + K_{\parallel} c_0^2) - n_{\rho}^2 - n_{\varphi}^2 \quad (3.35)$$

όπου:

$$c_k \equiv \cos \varphi_k, \quad s_k \equiv \sin \varphi_k \quad (3.36)$$

και οι κυλινδρικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{D}_{fila}^{\leftrightarrow cyl} \begin{pmatrix} E_{\rho} \\ E_{\varphi} \\ E_z \end{pmatrix}_{fila}^{cyl} = 0 \quad (3.37)$$

Συνεπώς, η εξίσωση διασποράς που προαναφέρθηκε μπορεί να εκφραστεί απλοποιημένη στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως ακολούθως:

$$\det \left(\mathbf{D}_{fila}^{\leftrightarrow cyl} \right) = 0 \quad (3.38)$$

Αυτό, μπορεί να γραφεί επίσης ως:

$$\begin{vmatrix} Ac_k^2 + K_{\perp} s_k^2 - n_z^2 & (K_{\perp} - A)s_k c_k - iK_{\times} c_0 & Dc_k + n_{\rho} n_z - iK_{\times} s_0 s_k \\ (K_{\perp} - A)s_k c_k + iK_{\times} c_0 & As_k^2 + K_{\perp} c_k^2 - n_{\rho}^2 - n_z^2 & -Ds_k - iK_{\times} s_0 c_k \\ Dc_k + n_{\rho} n_z + iK_{\times} s_0 s_k & -Ds_k + iK_{\times} s_0 c_k & A' - n_{\rho}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

όπου

$$\begin{aligned} A &\equiv K_{\perp} c_0^2 + K_{\parallel} s_0^2, & A' &\equiv K_{\perp} s_0^2 + K_{\parallel} c_0^2, & D &\equiv (K_{\parallel} - K_{\perp}) s_0 c_0, \\ s_k &\equiv \sin \varphi_k, & c_k &\equiv \cos \varphi_k \end{aligned} \quad (3.40)$$

Χωρίς απώλεια της γενικότητας, το προσπίπτον κύμα έχει υποθεθεί ότι έχει το διάνυσμα διάδοσης στο $(x - z)$ -επίπεδο, έτσι ώστε $s_k = 0$ και $c_k = 1$. Η εξίσωση γίνεται:

$$\det \begin{pmatrix} A - n_z^2 & -iK_{\times} c_0 & D + n_{\rho} n_z \\ iK_{\times} c_0 & K_{\perp} - n_{\rho}^2 - n_z^2 & -iK_{\times} s_0 \\ D + n_{\rho} n_z & iK_{\times} s_0 & A' - n_{\rho}^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.41)$$

Είναι σημαντικό για τα ακόλουθα να τονιστεί ότι για κάθε ρυθμό η συνιστώσα n_{kz} διατηρείται η ίδια με του προσπίπτοντος κύματος:

$$n_{kz} = n_{0z} \quad (3.42)$$

Συνεπώς, αφαιρώντας τον δείκτη k χάριν απλότητας:

$$\begin{aligned}
& [K_{\perp} - (K_{\perp} - K_{\parallel})s_0^2c^2] n_{\rho}^4 \\
& - 2n_{0z}(K_{\perp} - K_{\parallel})s_0c_0cn_{\rho}^3 \\
& + \{(K_{\perp} + K_{\parallel})(n_{0z}^2 - K_{\perp}) + K_{\times}^2 + [(K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 - K_{\perp}K_{\parallel})c^2 \\
& + n_{0z}^2(K_{\perp} - K_{\parallel})s^2] s_0^2\} n_{\rho}^2 \\
& - 2n_{0z} [(K_{\perp} - K_{\parallel})(n_{0z}^2 - K_{\perp}) + K_{\times}^2] s_0c_0cn_{\rho} \\
& + K_{\parallel} [(n_{0z}^2 - K_{\perp})^2 - K_{\times}^2] + n_{0z}^2 [(K_{\perp} - K_{\parallel})(n_{0z}^2 - K_{\perp}) + K_{\times}^2] s_0^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Για τον ευθυγραμμισμένο κύλινδρο ($s_0 = 0$, $c_0 = 1$), όταν το διάνυσμα διάδοσης είναι πάνω στο $x - z$ επίπεδο (το οποίο είναι το ίδιο με το $z' - z$ επίπεδο, δηλαδή για $c = 1$ και $s = 0$), η αντίστοιχη εξίσωση είναι:

$$K_{\perp}n_{\rho}^4 + [(K_{\perp} + K_{\parallel})(n_{0z}^2 - K_{\perp}) + K_{\times}^2] n_{\rho}^2 + K_{\parallel} [(n_{0z}^2 - K_{\perp})^2 - K_{\times}^2] = 0 \tag{3.44}$$

ή ισοδύναμα εισάγοντας την πολική γωνία (δηλαδή την γωνία μεταξύ του μαγνητικού πεδίου και του \mathbf{k} διανύσματος) ϑ :

$$\begin{aligned}
& (K_{\perp} \sin^2 \vartheta + K_{\parallel} \cos^2 \vartheta)n_0^4 - [(K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) \sin^2 \vartheta + (1 + \cos^2 \vartheta)K_{\perp}K_{\parallel}] n_0^2 \\
& + (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2)K_{\parallel} = 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

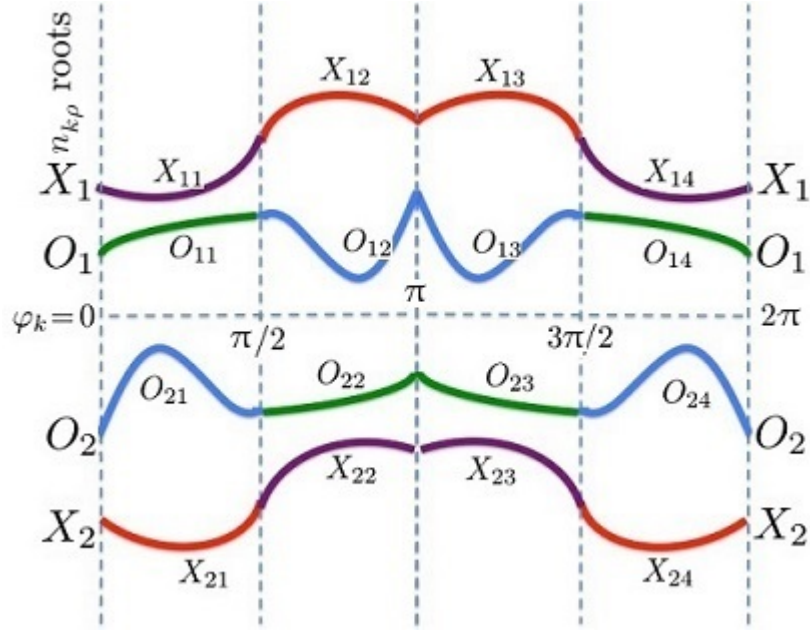
η οποία είναι η γνωστή τυπική μορφή.

Γυρίζοντας πίσω στη γενική μορφή της εξίσωσης, παρατηρείται ότι για συγκεκριμένο n_{0z} (το οποίο διατηρείται κατά τον z -άξονα του άπειρου κυλίνδρου) η εξίσωση παράγει τέσσερις διακριτές ρίζες n_{kr} για κάθε συγκεκριμένη επιλογή της γωνίας φ_k , οι οποίες συμβολίζονται ως $n_r^{(L)}$ όπου $L = 1, 2, 3, 4$. Όπως και να έχει,

λόγω της παρουσίας του συνημιτόνου της αζιμουθιακής γωνίας στις σταθερές περιττής τάξης, οι εν λόγω ρίζες, ως συναρτήσεις της αζιμουθιακής γωνίας φ_k , είναι συμμετρικές ως προς το μέσο σημείο $\varphi_k = \pi$ και αντι-συμμετρικές ως προς τα σημεία $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$ και $\varphi_k = \frac{3\pi}{2}$.

Στην Εικόνα 3.3.2, τα $(N_{11}, N_{14}), (N_{12}, N_{13}), (N_{21}, N_{24}), (N_{22}, N_{23})$ (όπου $N = O, X$) είναι τα συμμετρικά ζεύγη ως προς το $\varphi_k = \pi$, ενώ τα $(N_{11}, N_{22}), (N_{21}, N_{12})$ είναι αντι-συμμετρικά ζεύγη ως προς το $\pi/2$ και τα $(N_{23}, N_{14}), (N_{13}, N_{24})$ είναι αντι-συμμετρικά ζεύγη ως προς το $3\pi/2$.

Έτσι, από μία ρίζα η οποία είναι συνάρτηση του φ_k , μπορεί να παραχθεί μία δεύτερη, εφαρμόζοντας τις προαναφερθείσες συμμετρίες. Αυτό το ζεύγος λύσεων μπορεί να ονομαστεί ζεύγος βάσει συμμετρίας. Από τη στιγμή που υπάρχουν τέσσερις ρίζες, πρέπει να υπάρχουν και δύο ζεύγη βάσει συμμετρίας. Είναι λοιπόν πολύ πιο βολικό, τα δύο αυτά ζεύγη να μετονομαστούν σύμφωνα με το ποιό από αυτά συμπεριλαμβάνει μέλος που συμπίπτει με τον ακτινικό δείκτη του προσπίπτοντος κύματος (στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου). Αυτό σημαίνει ότι ένα ζεύγος για τον χώρο εκτός του κυλίνδρου θα ονομάζεται O-ζεύγος (X-ζεύγος) εφόσον περιέχει το $n_{0\rho}$ του προσπίπτοντος O-mode (X-mode). Το αντίστοιχο ζεύγος για τον χώρο εντός του κυλίνδρου θα διατηρήσει τον ίδιο χαρακτηρισμό, ώστε να διασταυρωθεί ότι αυτά τα κύματα συμπίπτουν στο όριο μηδενικής σχετικής αντίθεσης ηλεκτρονικής πυκνότητας εντός και εκτός του κυλίνδρου. Το ζεύγος που απομένει θα ονομάζεται αυτόματα X-ζεύγος (O-ζεύγος). Συνεπώς, μπορούν πλέον να εισαχθούν οι δείκτες O_1, O_2, X_1, X_2 , όπου τώρα O_1, O_2 και X_1, X_2 είναι τα δύο ζεύγη βάσει συμμετρίας. Οι συμμετρίες είναι οι ακόλουθες με $M = O, X$ και $i = 1, 2$:



Εικόνα 3.3.2 - Ζεύγη βάσει συμμετρίας (O και X)

$$n_{k\rho}^{M_i}(\varphi_k = 0 \rightarrow \pi) = -n_{k\rho}^{M_{3-i}}(\varphi_k = \pi \rightarrow 0) \quad (3.46)$$

και

$$n_{k\rho}^{M_i}(\varphi_k = 0 \rightarrow \pi) = -n_{k\rho}^{M_i}(\varphi_k = 2\pi \rightarrow \pi) \quad (3.47)$$

ή ισοδύναμα:

$$n_{k\rho}^{M_i}(\varphi_k) = n_{k\rho}^{M_i}(2\pi - \varphi_k) = -n_{k\rho}^{M_{3-i}}(\pi - \varphi_k) = -n_{k\rho}^{M_{3-i}}(\pi + \varphi_k) \quad (3.48)$$

Φυσικά, για $\varphi_k = \pi, \frac{3\pi}{2}$ τα μέλη κάθε ζεύγους είναι αντίθετα (υπό την γενική έννοια). Από εδώ και εις το εξής, αυθόρμητα μόνο ένα μέλος κάθε ζεύγους θα επιλέγεται και θα λαμβάνεται υπόψη για μελέτη: Σε περίπτωση που οι ρίζες είναι πραγματικές θα επιλέγονται μόνο οι θετικές (O και X). Στην περίπτωση που υπάρχουν φανταστικές ρίζες, θα επιλέγονται μόνο αυτές που έχουν θετικό το φανταστικό τους μέρος. Τέλος, όταν οι ρίζες είναι γενικά μιγαδικές (θα υπάρχουν δύο συζυγή μιγαδικά ζεύγη για

πραγματικό n_z), θα επιλέγονται αυτές που έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Αυτές οι δύο ρίζες θα χρησιμοποιούνται και στην παράγραφο των πολώσεων στη συνέχεια.

3.4 Πολώσεις κυμάτων

Το χρονο-εξαρτώμενο ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} στην εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{E}(\mathbf{n}, \omega) = \mathcal{E}_0 (E_{k\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}}_k + E_{k\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_k + E_{kz} \hat{\mathbf{z}}_k) \quad (3.49)$$

όπου το καπέλο συμβολίζει μοναδιαίες διανυσματικές συνιστώσες στο σύστημα αναφοράς του κυματανύσματος (\mathbf{k} -χώρος) και τα $(E_{k\rho}, E_{k\varphi}, E_{kz})$ ορίζονται ως:

$$(E_{k\rho}, E_{k\varphi}, E_{kz}) \equiv \frac{1}{\sqrt{|e_{k\rho}|^2 + |e_{k\varphi}|^2 + |e_{kz}|^2}} (e_{k\rho}, e_{k\varphi}, e_{kz}) \quad (3.50)$$

και επίσης $(e_{k\rho}, e_{k\varphi}, e_{kz})$ είναι οι συνιστώσες του κανονικοποιημένου στη μονάδα μιγαδικού διανύσματος πόλωσης \mathbf{e}_k^P , το οποίο έχει εισαχθεί επίσης στο σύστημα αναφοράς του κυματανύσματος.

Το προσπίπτον κύμα που διαδίδεται, αναλόγως με τις συνθήκες στο περιβάλλον μέσο, θεωρείται ότι είναι είτε O-mode είτε X-mode (ακολουθώς, οι συμβολισμοί O και X αναφέρονται στο προσπίπτον πεδίο). Σημειώνεται ότι η διανυσματική έκφραση για τον τύπο πολώσεων O-mode είναι:

$$\mathbf{e}_O^P \equiv \frac{E_{Oz}}{\mathcal{E}_0} (\hat{\boldsymbol{\rho}}_k r_{O\rho}^P + \hat{\boldsymbol{\varphi}}_k r_{O\varphi}^P + \hat{\mathbf{z}} r_{Oz}^P) \equiv e_{Oz}^P \mathbf{r}_O^P \quad (3.51)$$

και αντίστοιχα για τον X-mode τύπο πολώσεων:

$$\mathbf{e}_X^P \equiv \frac{E_{Xz}}{\mathcal{E}_0} (\hat{\boldsymbol{\rho}}_k r_{X\rho}^P + \hat{\boldsymbol{\varphi}}_k r_{X\varphi}^P + \hat{\mathbf{z}} r_{Xz}^P) \equiv e_{Xz}^P \mathbf{r}_X^P \quad (3.52)$$

Είναι χρήσιμο να κανονικοποιηθούν εκ νέου οι πολώσεις με τρόπο που να οδηγεί και

στις δύο περιπτώσεις σε μοναδιαίο μιγαδικό διάνυσμα πόλωσης:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_O^P &\equiv e_{Oz}^P \sqrt{\mathbf{r}_O^P \cdot (\mathbf{r}_O^P)^*} (\hat{\rho}_k \hat{E}_{O\rho}^P + \hat{\varphi}_k \hat{E}_{O\varphi}^P + \hat{z} \hat{E}_{Oz}^P) \\ &\equiv e_{Oz}^P \sqrt{\mathbf{r}_O^P \cdot (\mathbf{r}_O^P)^*} \hat{\mathbf{E}}_O^P \equiv c_O^P \hat{\mathbf{E}}_O^P(\mathbf{n}_0) \end{aligned} \quad (3.53)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_X^P &\equiv e_{X\varphi}^P \sqrt{\mathbf{r}_X^P \cdot (\mathbf{r}_X^P)^*} (\hat{\rho}_k \hat{E}_{X\rho}^P + \hat{\varphi}_k \hat{E}_{X\varphi}^P + \hat{z} \hat{E}_{Xz}^P) \\ &\equiv e_{X\varphi}^P \sqrt{\mathbf{r}_X^P \cdot (\mathbf{r}_X^P)^*} \hat{\mathbf{E}}_X^P \equiv c_X^P \hat{\mathbf{E}}_X^P(\mathbf{n}_0) \end{aligned} \quad (3.54)$$

όπου εξ'ορισμού τώρα:

$$\hat{\mathbf{E}}_M^P \cdot (\hat{\mathbf{E}}_M^P)^* = 1, \quad M = O, X \quad (3.55)$$

και οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες διανυσματικές εντάσεις ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{e}_O^P και \mathbf{e}_X^P είναι ανάλογες με τα αντίστοιχα μοναδιαία μιγαδικά διανυσματα πόλωσης μέσω των αυθαίρετων συντελεστών c_M^P (τα πλάτη πόλωσης), που είναι συναρτήσεις της αζιμουθιακής γωνίας και του κοινού για όλα n_{0z} . Λόγω των αζιμουθιακών συμμετριών που περιγράφηκαν πριν και την απαίτηση να υπάρχει αζιμουθιακή συνέχεια, οι \mathbf{e}_O^P και \mathbf{e}_X^P σχετίζονται με ζεύγη ρυθμών. Επίσης, είναι περιοδικές συναρτήσεις της αζιμουθιακής γωνίας, οπότε μπορούν να γραφτούν ως υπέρθεση αζιμουθιακών ρυθμών, οι οποίοι δημιουργούν μία πλήρη βάση που είναι:

$$c_{M_s}^P(\varphi_k, n_{kz}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n^{M_s}(n_{kz}) e^{in\varphi_k} \quad (3.56)$$

όπου $M_s = (O, FI), (O, SC), (X, FI), (X, SC)$ και οι σταθερές $\varepsilon_n^{M_s}(n_{kz})$ θα καθοριστούν στη συνέχεια. Σημειώνεται ότι ο συμβολισμός FI αναφέρεται στο εσωτερικό του κυλινδρικού νηματίου (Filament), ενώ ο συμβολισμός SC αναφέρεται στο εξωτερικό του, δηλαδή στα σκεδασμένα (SCattered) πεδία.

Για το προσπίπτον πεδίο είναι πάντα $c_k^P = 1$ είτε για O-mode είτε για X-mode. Από τις εκφράσεις 3.78 τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{e}_k^P \cdot \mathbf{a}_m$, $\mathbf{e}_k^P \cdot \mathbf{b}_m$ και $\mathbf{e}_k^P \cdot \mathbf{c}_m$ (όπου $k = O, X$) μπορούν να υπολογιστούν:

$$\mathbf{e}_k^P \cdot \mathbf{a}_m = c_k^P \hat{E}_{k\varphi_k}^P \frac{i^{m+1} \exp(-im\varphi_k)}{n_{k\rho}} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{e}_k^P \cdot \mathbf{b}_m = c_k^P (\hat{E}_{kz}^P n_{k\rho} - \hat{E}_{k\rho}^P n_{kz}) \frac{i^m \exp(-im\varphi_k)}{n_k n_{k\rho}} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{e}_k^P \cdot \mathbf{c}_m = -c_k^P (\hat{E}_{k\rho}^P n_{k\rho} + \hat{E}_{kz}^P n_{kz}) \frac{i^{m+1} \exp(-im\varphi_k)}{n_k^2} \quad (3.59)$$

Επισημαίνεται ότι για το προσπίπτον κύμα $c_k^P = 1$ και το k αντικαθίσταται από το k_0 . Επίσης, από εδώ και στο εξής ισχύει ο ορισμός:

$$n^2 \equiv n_\rho^2 + n_{0z}^2 \quad (3.60)$$

Από το ομογενές σύστημα της εξίσωσης προκύπτει:

$$\begin{aligned} r_{X\rho}^P &= 1 \\ r_{X\varphi}^P &= \frac{1}{d_X} (K_\perp - K_\parallel) n_\rho n_{0z} s_0 c_0 s + [K_\times^2 - (K_\perp - K_\parallel)(K_\perp - n_\rho^2)] c s s_0^2 \\ &\quad - iK_\times [(K_\parallel - n_\rho^2) c_0 + n_\rho n_{0z} s_0 c] \\ r_{Xz}^P &= \frac{1}{d_X} (K_\perp - K_\parallel) [n_\rho n_{0z} s_0 s^2 + (K_\perp - n^2) c_0 c] s_0 - (K_\perp - n^2) n_\rho n_{0z} \\ &\quad - K_\times^2 s_0 c_0 c - iK_\times (K_\parallel - n^2) s_0 s \end{aligned} \quad (3.61)$$

όπου

$$d_X \equiv -(K_{\perp} - n^2)n_{\rho}^2 - n^2K_{\parallel}c_0^2 + (s^2s_0^2 + c_0^2)K_{\perp}K_{\parallel} \\ + \{ [K_{\perp}(K_{\perp} - n_{\rho}^2) - K_{\times}^2] c^2 - K_{\parallel}n_{\rho}^2s^2 - K_{\perp}n_{0z}^2 \} s_0^2 \quad (3.62)$$

και

$$r_{O\rho}^P = \frac{1}{d_O} (K_{\perp} - K_{\parallel}) [n_{\rho}n_{0z}s_0s^2 + (K_{\perp} - n^2)c_0c] s_0 - (K_{\perp} - n^2)n_{\rho}n_{0z} \\ - K_{\times}^2c_0s_0c + iK_{\times}(K_{\parallel} - n^2)ss_0 \\ r_{O\varphi}^P = \frac{1}{d_O} \{ K_{\times}^2c_0 + [n_{\rho}n_{0z}cs_0 - (K_{\perp} - n_{0z}^2)c_0] (K_{\perp} - K_{\parallel}) \} ss_0 \\ + iK_{\times} [(K_{\parallel} - n_{0z}^2)s_0c + n_{\rho}n_{0z}c_0] \\ r_{Oz}^P = 1, \quad (3.63)$$

όπου

$$d_O \equiv (n^2 - n_{\rho}^2s^2)(K_{\perp} - K_{\parallel})s_0^2 + (K_{\perp}c_0^2 + K_{\parallel}s_0^2 - n^2)K_{\perp} \\ - (K_{\perp} - n^2)n_{0z}^2 - K_{\times}^2c_0^2 \quad (3.64)$$

3.4.1 Ειδική περίπτωση: Πρόσπτωση στο επίπεδο ($z - z'$)

Σε αυτήν την περίπτωση είναι $s = 0$ και $c = 1$. Συνεπώς,

$$r_{X\rho}^P = 1 \\ \begin{pmatrix} r_{X\varphi}^P \\ r_{Xz}^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-iK_{\times} [(K_{\parallel} - n_{\rho}^2)c_0 + n_{\rho}n_{0z}s_0]}{(K_{\perp} - n^2)(K_{\perp}s_0^2 + K_{\parallel}c_0^2 - n_{\rho}^2) - K_{\times}^2s_0^2} \\ \frac{[(K_{\perp} - K_{\parallel})(K_{\perp} - n^2) - K_{\times}^2] s_0c_0 - (K_{\perp} - n^2)n_{\rho}n_{0z}}{(K_{\perp} - n^2)(K_{\perp}s_0^2 + K_{\parallel}c_0^2 - n_{\rho}^2) - K_{\times}^2s_0^2} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

και

$$\begin{pmatrix} r_{O\rho}^P \\ r_{O\varphi}^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{[(K_{\perp} - K_{\parallel})c_0s_0 - n_{\rho}n_{0z}](K_{\perp} - n^2) - K_{\times}^2c_0s_0}{(K_{\perp}^2 - K_{\times}^2)c_0^2 - n^2(K_{\perp}c_0^2 + K_{\parallel}s_0^2) - n_{0z}^2(K_{\perp} - n^2) + K_{\parallel}K_{\perp}s_0^2} \\ \frac{iK_{\times}[(K_{\parallel} - n_{0z}^2)s_0 + n_{\rho}n_{0z}c_0]}{(K_{\perp}^2 - K_{\times}^2)c_0^2 - n^2(K_{\perp}c_0^2 + K_{\parallel}s_0^2) - n_{0z}^2(K_{\perp} - n^2) + K_{\parallel}K_{\perp}s_0^2} \end{pmatrix}$$

$$r_{Oz}^P = 1 \tag{3.66}$$

Για την περίπτωση του ευθυγραμμισμένου με το μαγνητικό πεδίο κύλινδρο, τα παραπάνω απλουστεύονται σε:

$$\begin{pmatrix} r_{X\rho}^P \\ r_{X\varphi}^P \\ r_{Xz}^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-iK_{\times}}{(K_{\perp} - n^2)} \\ \frac{-n_{\rho}n_{0z}}{K_{\parallel} - n_{\rho}^2} \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

και

$$\begin{pmatrix} r_{O\rho}^P \\ r_{O\varphi}^P \\ r_{Oz}^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-n_{\rho}n_{0z}(K_{\perp} - n^2)}{(K_{\perp} - n_{0z}^2)(K_{\perp} - n^2) - K_{\times}^2} \\ \frac{iK_{\times}n_{\rho}n_{0z}}{(K_{\perp} - n_{0z}^2)(K_{\perp} - n^2) - K_{\times}^2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

Σημειώνεται ότι για την περίπτωση του ευθυγραμμισμένου κυλίνδρου με το μαγνητικό πεδίο και με το διάνυσμα διάδοσης να βρίσκεται πάνω στο $x - z$ επίπεδο, οι τέσσερις

ρίζες είναι:

$$n_{\rho}^{(\pm O)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2K_{\perp}}} \left\{ (K_{\perp} + K_{\parallel})(K_{\perp} - n_{0z}^2) - K_{\times}^2 + \left\{ [(K_{\perp} - K_{\parallel})^2(K_{\perp} - n_{0z}^2) - 2K_{\times}^2(K_{\perp} + K_{\parallel})] (K_{\perp} - n_{0z}^2) + (4K_{\perp}K_{\parallel} + K_{\times}^2)K_{\times}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.69)$$

$$n_{\rho}^{(\pm X)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2K_{\perp}}} \left\{ (K_{\perp} + K_{\parallel})(K_{\perp} - n_{0z}^2) - K_{\times}^2 - \left\{ [(K_{\perp} - K_{\parallel})^2(K_{\perp} - n_{0z}^2) - 2K_{\times}^2(K_{\perp} + K_{\parallel})] (K_{\perp} - n_{0z}^2) + (4K_{\perp}K_{\parallel} + K_{\times}^2)K_{\times}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.70)$$

δηλαδή πρόκειται για δύο ρίζες τύπου O-mode και για δύο ρίζες τύπου X-mode. Σημειώνεται ότι το $+M(-M)$ αντιστοιχεί στην ρίζα $M_1(M_2)$ με $M = O, X$. Έτσι, κάθε ζεύγος αποτελείται γενικά από δύο διαφορετικές μιγαδικές ρίζες. Από αυτά τα ζεύγη προέρχονται οι τέσσερις ρίζες στην περίπτωση του κεκλιμένου ως προς το συνολικό μαγνητικό πεδίο κυλίνδρου, όμως παύουν να σχηματίζουν ζεύγη σαν αυτά, αλλά τείνουν να σχηματίσουν τέτοια ζεύγη καθώς η κλίση γίνεται μηδενική. Τελικά, οι τέσσερις ρίζες, ως συναρτήσεις της αζιμουθιακής γωνίας, σχηματίζουν ζεύγη βάσει συμμετρίας όπως έχει δειχθεί πριν. Στα ακόλουθα, οι ρίζες θα εξακολουθήσουν να ονομάζονται O-τύπου και X-τύπου, ανάλογα με τον τύπο στον οποίο τείνουν καθώς η κλίση τείνει στο μηδέν. Για την περίπτωση του ευθυγραμμισμένου με το μαγνητικό πεδίο κύλινδρο και το διάνυσμα διάδοσης στο

$x - z$ επίπεδο προκύπτει εύκολα ότι:

$$\begin{pmatrix} r_{X\varphi}^P(-n_\rho) \\ r_{Xz}^P(-n_\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{X\varphi}^P(n_\rho) \\ -r_{Xz}^P(n_\rho) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{Or}^P(-n_\rho) \\ r_{O\varphi}^P(-n_\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_{Or}^P(n_\rho) \\ -r_{O\varphi}^P(n_\rho) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Από την άλλη, στην γενική περίπτωση, έχει δειχθεί ότι:

$$n_{k\rho}^{M_i}(\varphi_k) = n_{k\rho}^{M_i}(2\pi - \varphi_k) = -n_{k\rho}^{M_{3-i}}(\pi - \varphi_k) \quad (3.72)$$

Ωστόσο, δεν μπορεί να διατυπωθεί γενικός κανόνας για τις συμμετρίες των πολώσεων ως συναρτήσεις της αζιμουθιακής γωνίας, εκτός βέβαια αν όλες οι ρίζες n_ρ είναι είτε καθαρά πραγματικές είτε καθαρά φανταστικές. Όπως έχει αναφερθεί και προηγούμενα, από εδώ και εις το εξής, αυθόρμητα μόνο ένα μέλος κάθε ζεύγους θα επιλέγεται και θα λαμβάνεται υπόψη για μελέτη: Σε περίπτωση που οι ρίζες είναι πραγματικές θα επιλέγονται μόνο οι θετικές (O και X). Στην περίπτωση που υπάρχουν φανταστικές ρίζες, θα επιλέγονται μόνο αυτές που έχουν θετικό το φανταστικό τους μέρος. Τέλος, όταν οι ρίζες είναι γενικά μιγαδικές (θα υπάρχουν δύο συζυγή μιγαδικά ζεύγη για πραγματικό n_z), θα επιλέγονται αυτές που έχουν θετικό φανταστικό μέρος.

3.5 Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο εκφρασμένα συναρτήσεις των κυλινδρικών διανυσματικών συναρτήσεων

Κανονικοποιώντας τη γενική έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο, που έχει βρεθεί προηγουμένως, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} dn_{kz} \sum_{M=O,X} \{ \mathbf{e}_k^M [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \\ + \mathbf{e}_k^M [-n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \} e^{in_{k\rho}^M \rho \cos(\varphi - \varphi_k) + in_{kz} \zeta} \end{aligned} \quad (3.73)$$

όπου \mathcal{E}_0 είναι το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και επίσης καθέννας από τους ιδιορυθμούς εντός του ολοκληρώματος είναι χωρικά αμετάβλητος. Για το προσπίπτον πεδίο από την άλλη ισχύει:

$$\mathbf{e}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})}{\mathcal{E}_0} = \mathbf{e}_0(\varphi_0, n_{0z}) e^{in_{0\rho}\rho \cos(\varphi-\varphi_0)+in_{0z}\zeta} \quad (3.74)$$

Σε όρους των κυλινδρικών διανυσματικών συναρτήσεων και του εκθετικού δυαδικού προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^M [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] e^{in_{k\rho}^M \rho \cos(\varphi-\varphi_k)+in_{kz}\zeta} &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \\ \{ \mathbf{e}_k^M [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \cdot \mathbf{a}_m [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \mathbf{m}_m [\rho n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi, \zeta n_{kz}] \\ + \mathbf{e}_k^M [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \cdot \mathbf{b}_m [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \mathbf{n}_m [\rho n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi, \zeta n_{kz}] \\ + \mathbf{e}_k^M [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \cdot \mathbf{c}_m [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \mathbf{l}_m [\rho n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi, \zeta n_{kz}] \} \end{aligned} \quad (3.75)$$

και αντίστοιχα για το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0(n_{0\rho}, n_{0z}, \varphi_0), e^{in_{0\rho}\rho \cos(\varphi-\varphi_0)+in_{0z}\zeta} &= \\ \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \{ \mathbf{e}_0(n_{0\rho}, n_{0z}, \varphi_0) \cdot \mathbf{a}_m(n_{0\rho}, n_{0z}, \varphi_0) \mathbf{m}_m(\rho n_{0\rho}, n_{0z}\zeta, \varphi_0) \\ + \mathbf{e}_0(n_{0\rho}, n_{0z}, \varphi_0) \cdot \mathbf{b}_m(n_{0\rho}, n_{0z}, \varphi_0) \mathbf{n}_m(\rho n_{0\rho}, n_{0z}\zeta, \varphi_0) \\ + \mathbf{e}_0(n_{0\rho}, n_{0z}, \varphi_0) \cdot \mathbf{c}_m(n_{0\rho}, n_{0z}, \varphi_0) \mathbf{l}_m(\rho n_{0\rho}, n_{0z}\zeta, \varphi_0) \} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ωστόσο,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^M [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] &= c_M^P(\varphi_k, n_{kz}) \hat{\mathbf{E}}_M^P [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n^M(n_{kz}) e^{in\varphi_k} \hat{\mathbf{E}}_M^P [n_{k\rho}^M(\varphi_k, n_{kz}), \varphi_k, n_{kz}] \end{aligned} \quad (3.77)$$

Σημειώνεται ότι για τον ευθυγραμμισμένο ως προς το μαγνητικό πεδίο κύλινδρο, οι πολώσεις και η ακτινική συνιστώσα του διανύσματος διάδοσης δεν εξαρτώνται ρητά από την αζιμουθιακή γωνία.

Από προηγούμενους υπολογισμούς έχουν βρεθεί τα εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m &= i^{m+1} \frac{e^{-im\varphi_k}}{n_{k\rho}} \begin{pmatrix} -\sin \varphi_k \\ \cos \varphi_k \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{b}_m &= -i^m \frac{n_{kz} e^{im\varphi_k}}{n_k n_{k\rho}} \begin{pmatrix} \cos \varphi_k \\ \sin \varphi_k \\ -\frac{n_{k\rho}}{n_{kz}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}_m &= -i^{m+1} \frac{e^{-im\varphi_k}}{n_{k\rho}^2} \begin{pmatrix} n_{k\rho} \cos \varphi_k \\ n_{k\rho} \sin \varphi_k \\ n_{kz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους για τα εσωτερικά γινόμενα και την αζιμουθιακή επέκταση των πλατών πόλωσης, σε κανονικοποιημένο τύπο λαμβάνεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} dn_{kz} \sum_{M=O,X} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n^M (n_{kz} e^{i(n-m)\varphi_k} \\ &\left\{ i \frac{\hat{E}_{k\varphi_k}^M}{n_{k\rho}^M} \mathbf{m}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi, \zeta n_{kz}) + \frac{\hat{E}_{kz}^M n_{k\rho}^M - \hat{E}_{k\rho}^M n_{kz}}{n_{k\rho}^M n_k^M} \mathbf{n}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi, \zeta n_{kz}) \right. \\ &\left. - i \frac{\hat{E}_{k\rho}^M n_{k\rho}^M + \hat{E}_{kz}^M n_{kz}}{(n_k^M)^2} \mathbf{l}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi, \zeta n_{kz}) \right\} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Για το προσπίπτον κύμα ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0(\mathbf{r}) &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m e^{-im\varphi_0} \left\{ i \frac{\hat{E}_{0\varphi_0}}{n_{0\rho}} \mathbf{m}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi, \zeta n_{0z}) \right. \\ &\left. + \frac{\hat{E}_{0z} n_{0\rho} - \hat{E}_{0\rho} n_{0z}}{n_{0\rho} n_0} \mathbf{n}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi, \zeta n_{0z}) - i \frac{\hat{E}_{0\rho} n_{0\rho} + \hat{E}_{0z} n_{0z}}{n_0^2} \mathbf{l}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi, \zeta n_{0z}) \right\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Πρέπει να αναφερθεί ότι για την περίπτωση ευθυγραμμισμένου με το μαγνητικό πεδίο κυλίνδρου, η επιλογή ρυθμού δεν εξαρτάται από την αζιμουθιακή γωνία και συνεπώς η ολοκλήρωση σε αυτήν τη γωνία θα διευκολύνει την εφαρμογή της συνθήκης ορθογωνιότητας για την αζιμουθιακή εξάρτηση.

Το μαγνητικό πεδίο μπορεί επίσης να υπολογιστεί εύκολα από τον νόμο του Faraday:

$$\mathbf{h} \equiv \frac{\mathbf{H}}{\mathcal{H}_0} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{i} \nabla \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{h}_0 \equiv \frac{\mathbf{H}_0}{\mathcal{H}_0} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{i} \nabla \times \mathbf{e}_0 \quad (3.81)$$

όπου \mathcal{H}_0 είναι το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Συνεπώς:

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-\infty}^{\infty} dn_{kz} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{M=O,X} \varepsilon_n^M(n_{kz}) e^{i(n-m)\varphi_k} \left\{ \frac{\hat{E}_{k\varphi_k}^M}{n_{k\rho}^M} n_k^M \mathbf{n}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi, \zeta n_{kz}) - i \frac{\hat{E}_{kz}^M n_{k\rho}^M - \hat{E}_{k\rho}^M n_{kz}}{n_{k\rho}^M} \mathbf{m}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi, \zeta n_{kz}) \right\} \quad (3.82)$$

και για το προσπίπτον μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{h}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m e^{-im\varphi_0} \left\{ \frac{\hat{E}_{0\varphi_0}}{n_{0\rho}} n_0 \mathbf{n}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi, \zeta n_{0z}) - i \frac{\hat{E}_{0z} n_{0\rho} - \hat{E}_{0\rho} n_{0z}}{n_{0\rho}} \mathbf{m}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi, \zeta n_{0z}) \right\} \quad (3.83)$$

3.6 Οριακές συνθήκες και υπολογισμός συντελεστών

Στην επιφάνεια του κυλίνδρου οι οριακές συνθήκες του Maxwell επιβάλλουν:

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{e}_{SC} + \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{FI}) = 0, \quad \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{h}_{SC} + \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_{FI}) = 0 \quad (3.84)$$

όπου οι συμβολισμοί SC και FI χρησιμοποιούνται για το εξωτερικό και εσωτερικό του κυλίνδρου, αντίστοιχα. Τα εξωτερικά γινόμενα, που εμπλέκονται στις οριακές συνθήκες, μπορούν εύκολα να εκφραστούν συναρτήσει των κυλινδρικών διανυσματικών συναρτήσεων και των εφαπτομενικών δυαδικών των μοναδιαίων διανυσμάτων: $\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\varphi}}\hat{\mathbf{z}}$:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{m}_m = i(\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{n}_m \frac{n_k}{n_{kz}} \quad (3.85)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}_m = i(\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{m}_m \frac{n_{kz}}{n_k} - (\hat{\boldsymbol{\varphi}}\hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{n}_m \quad (3.86)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}_m = (\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{m}_m - i(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{n}_m \frac{n_k n_{kz}}{n_{k\rho}^2} \quad (3.87)$$

Οι διανυσματικές συναρτήσεις υπολογίζονται στο a (δηλαδή, την κανονικοποιημένη ακτίνα του κυλίνδρου) και οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι ταιριασμένες. Η αντίστοιχη συνάρτηση Bessel στην έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου σε κυλινδρικές διανυσματικές συναρτήσεις, είναι J_m -τύπου καθώς το ηλεκτρικό πεδίο εκπέμπεται από το σημείο $\rho \rightarrow \infty$. Το όρισμα είναι $an_{k\rho}^M$. Περιόπτωντας το άθροισμα στα n ώστε να μην έχει άπειρους όρους και γράφοντας τις συνθήκες για τους αζιμουθιακούς ρυθμούς, δηλαδή για κάθε m από $m = -n_{max}$ σε $m = n_{max}$, εξάγεται το ακόλουθο γραμμικό σύστημα προς επίλυση:

$$\sum_{n=-n_{max}}^{n=n_{max}} \left(a_{j,mn}^{O,FI} \varepsilon_n^{O,FI} + a_{j,mn}^{X,FI} \varepsilon_n^{X,FI} - a_{j,mn}^{O,SC} \varepsilon_n^{O,SC} - a_{j,mn}^{X,SC} \varepsilon_n^{X,SC} \right) = a_{j,m}^0, \quad (3.88)$$

$j = 1, 2, 3, 4$

όπου

$$a_{1,mn}^{M,FI} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k} \left(i\hat{E}_{k\varphi_k}^M J_m^M - \hat{E}_{k\rho}^M \frac{m J_m^M}{n_{k\rho}^M a} \right) \quad (3.89)$$

$$a_{1,mn}^{M,SC} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k} \left(i\hat{E}_{k\varphi_k}^M H_m'^{(1)M} - \hat{E}_{k\rho}^M \frac{mH_m^{(1)M}}{n_{k\rho}^M a} \right) \quad (3.90)$$

$$a_{1,m}^0 = e^{-im\varphi_0} \left(i\hat{E}_{0\varphi_0} J_m^0 - \hat{E}_{0\rho} \frac{mJ_m^0}{n_{0\rho} a} \right) \quad (3.91)$$

$$a_{2,mn}^{M,FI} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k} \left(\hat{E}_{kz}^M J_m^M \right) \quad (3.92)$$

$$a_{2,mn}^{M,SC} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k} \left(\hat{E}_{kz}^M H_m^{(1)M} \right) \quad (3.93)$$

$$a_{2,m}^0 = e^{-im\varphi_0} \left(\hat{E}_{0z} J_m^0 \right) \quad (3.94)$$

$$a_{3,mn}^{M,FI} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k} \left[i \left(\hat{E}_{kz}^M n_{k\rho}^M - \hat{E}_{k\rho}^M n_{0z} \right) J_m^M - \hat{E}_{k\varphi_k}^M n_{0z} \frac{mJ_m^M}{n_{k\rho}^M a} \right] \quad (3.95)$$

$$a_{3,mn}^{M,SC} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k} \left[i \left(\hat{E}_{kz}^M n_{k\rho}^M - \hat{E}_{k\rho}^M n_{0z} \right) H_m'^{(1)M} - \hat{E}_{k\varphi_k}^M n_{0z} \frac{mH_m^{(1)M}}{n_{k\rho}^M a} \right] \quad (3.96)$$

$$a_{3,m}^0 = e^{-im\varphi_0} \left[i \left(\hat{E}_{0z} n_{0\rho} - \hat{E}_{0\rho} n_{0z} \right) J_m^0 - \hat{E}_{0\varphi_0} n_{0z} \frac{mJ_m^0}{n_{0\rho} a} \right] \quad (3.97)$$

$$a_{4,mn}^{M,FI} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k} \left(\hat{E}_{k\varphi_k}^M n_{k\rho}^M J_m^M \right) \quad (3.98)$$

$$a_{4,mn}^{M,SC} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k} \left(\hat{E}_{k\varphi_k}^M n_{k\rho}^M H_m^{(1)M} \right) \quad (3.99)$$

$$a_{4,m}^0 = e^{-im\varphi_0} \left(\hat{E}_{0\varphi_0} n_{0\rho} J_m^0 \right) \quad (3.100)$$

3.7 Υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου, του μαγνητικού πεδίου και του διανύσματος Poynting σε τυχαίο z

3.7.1 Σύνθεση των πεδίων σε αυθαίρετο z

Όπως προαναφέρθηκε, ο κύλινδρος έχει θεωρηθεί ότι έχει άπειρο μήκος κατά τη διεύθυνση z . Έτσι, η z -συνιστώσα δεν έχει επιπτώσεις στους υπολογισμούς αυτής της μελέτης και η εξάρτηση από το z μπορεί να απομακρυνθεί με ολοκλήρωση. Τα z -ανεξάρτητα διανυσματικά πεδία (τα οποία υποδηλώνονται με μία περισπωμένη πάνω από τις αντίστοιχες διανυσματικές συναρτήσεις) στο $x - y$ επίπεδο είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{e}(\rho, \varphi)_{(FI,SC)} = & \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m \int_0^{2\pi} d\varphi_k \sum_{M=O,X} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n^{M,(FI,SC)} e^{i(n-m)\varphi_k} \\ & \left[i \frac{\hat{E}_{k\varphi_k}^M}{n_{k\rho}^M} \tilde{\mathbf{m}}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi) + \frac{\hat{E}_{kz}^M n_{k\rho}^M - \hat{E}_{k\rho}^M n_{0z}}{n_{k\rho}^M n_k^M} \tilde{\mathbf{n}}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi) \right. \\ & \left. - i \frac{\hat{E}_{k\rho}^M n_{k\rho}^M + \hat{E}_{kz}^M n_{0z}}{(n_k^M)^2} \tilde{\mathbf{l}}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi) \right]_{(FI,SC)} \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(\rho, \varphi)_{(FI,SC)} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m \int_0^{2\pi} d\varphi_k \sum_{M=O,X} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon_n^{M,(FI,SC)} e^{i(n-m)\varphi_k}$$

$$\left[\frac{\hat{E}_{k\varphi_k}^M}{n_{k\rho}^M} n_k^M \tilde{\mathbf{n}}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi) - i \frac{\hat{E}_{kz}^M n_{k\rho}^M - \hat{E}_{k\rho}^M n_{0z}}{n_{k\rho}^M} \tilde{\mathbf{m}}_m(\rho n_{k\rho}^M, \varphi) \right]_{(FI,SC)} \quad (3.102)$$

Αντίστοιχα για το προσπίπτον πεδίο:

$$\tilde{\mathbf{e}}_0(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m e^{-im\varphi_0} \left[i \frac{\hat{E}_{0\varphi_0}}{n_{0\rho}} n_k^M \tilde{\mathbf{m}}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi) \right. \quad (3.103)$$

$$\left. + \frac{\hat{E}_{0z} n_{0\rho} - \hat{E}_{0\rho} n_{0z}}{n_{0\rho} n_0} \tilde{\mathbf{n}}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi) - i \frac{\hat{E}_{0\rho} n_{0\rho} + \hat{E}_{0z} n_{0z}}{n_0^2} \tilde{\mathbf{l}}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi) \right]$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_0(\rho, \varphi) = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m e^{-im\varphi_0}$$

$$\left[\frac{\hat{E}_{0\varphi_0}}{n_{0\rho}} n_0 \tilde{\mathbf{n}}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi) - i \frac{\hat{E}_{0z} n_{0\rho} - \hat{E}_{0\rho} n_{0z}}{n_{0\rho}} \tilde{\mathbf{m}}_m(\rho n_{0\rho}, \varphi) \right] \quad (3.104)$$

Εισάγοντας τις σχετικές εκφράσεις για τις διανυσματικές κυλινδρικές συναρτήσεις προκύπτει:

$$\tilde{\mathbf{e}}(\rho, \varphi)_{(FI,SC)} = \sum_{M=O,X} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m e^{im\varphi} \left[\mathcal{E}_{m\rho}^M(\rho) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \mathcal{E}_{m\varphi}^M(\rho) \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \mathcal{E}_{mz}^M(\rho) \hat{\boldsymbol{z}} \right]_{(FI,SC)} \quad (3.105)$$

όπου

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{m\rho}^M(\rho) \\ \mathcal{E}_{m\varphi}^M(\rho) \\ \mathcal{E}_{mz}^M(\rho) \end{pmatrix}_{(FI,SC)} = \sum_n \varepsilon_n^{M,(FI,SC)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k}$$

$$\begin{pmatrix} -iZ'_m{}^M \hat{E}_{k\rho}^M - \frac{mZ_m^M}{n_{k\rho}^M} \hat{E}_{k\varphi_k}^M \\ \frac{mZ_m^M}{n_{k\rho}^M} \hat{E}_{k\rho}^M - iZ'_m{}^M \hat{E}_{k\varphi_k}^M \\ Z_m^M \hat{E}_{kz}^M \end{pmatrix}_{(FI,SC)} \quad (3.106)$$

και

$$\tilde{\mathbf{h}}(\rho, \varphi)_{(FI,SC)} = \frac{E_0}{H_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{M=O,X} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \mathbf{i}^m e^{im\varphi}$$

$$[\mathcal{H}_{m\rho}^M(\rho) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \mathcal{H}_{m\varphi}^M(\rho) \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \mathcal{H}_{mz}^M(\rho) \hat{\boldsymbol{z}}]_{(FI,SC)} \quad (3.107)$$

όπου

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_{m\rho}^M(\rho) \\ \mathcal{H}_{m\varphi}^M(\rho) \\ \mathcal{H}_{mz}^M(\rho) \end{pmatrix}_{(FI,SC)} = \sum_n \varepsilon_n^{M,(FI,SC)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_k}{2\pi} e^{i(n-m)\varphi_k}$$

$$\begin{pmatrix} iZ'_m{}^M n_{0z} \hat{E}_{k\varphi_k}^M + \frac{mZ_m^M}{n_{k\rho}^M} (n_{k\rho}^M \hat{E}_{kz}^M - n_{0z} \hat{E}_{k\rho}^M) \\ iZ'_m{}^M (n_{k\rho}^M \hat{E}_{kz}^M - n_{0z} \hat{E}_{k\rho}^M) - \frac{mZ_m^M}{n_{k\rho}^M} n_{0z} \hat{E}_{k\varphi_k}^M \\ Z_m^M n_{k\rho}^M \hat{E}_{k\varphi_k}^M \end{pmatrix}_{(FI,SC)} \quad (3.108)$$

Σε αυτές τις εκφράσεις, τα Z_m (Z'_m) συμβολίζουν τη συνάρτηση Hankel πρώτου είδους (την παράγωγό της) [22] με όρισμα $an_{k\rho}^M$. Αντίστοιχα, για το προσπίπτον

πεδίο:

$$\tilde{\mathbf{e}}_0(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m e^{im\varphi} [\mathcal{E}_{m\rho}^0(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \mathcal{E}_{m\varphi}^0(\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \mathcal{E}_{mz}^0(\rho)\hat{\boldsymbol{z}}] \quad (3.109)$$

όπου

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{m\rho}^0(\rho) \\ \mathcal{E}_{m\varphi}^0(\rho) \\ \mathcal{E}_{mz}^0(\rho) \end{pmatrix} = e^{-im\varphi_0} \begin{pmatrix} -iJ_m^{\prime 0}\hat{E}_{0\rho} - \frac{mJ_m^0}{n_{0\rho}\rho}\hat{E}_{0\varphi_0} \\ \frac{mJ_m^0}{n_{0\rho}\rho}\hat{E}_{0\rho} - iJ_m^{\prime 0}\hat{E}_{0\varphi_0} \\ J_m^0\hat{E}_{0z} \end{pmatrix} \quad (3.110)$$

και

$$\tilde{\mathbf{h}}_0(\rho, \varphi) = \frac{E_0}{H_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m e^{im\varphi} [\mathcal{H}_{m\rho}^0(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \mathcal{H}_{m\varphi}^0(\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \mathcal{H}_{mz}^0(\rho)\hat{\boldsymbol{z}}] \quad (3.111)$$

όπου

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_{m\rho}^0(\rho) \\ \mathcal{H}_{m\varphi}^0(\rho) \\ \mathcal{H}_{mz}^0(\rho) \end{pmatrix} = e^{-im\varphi_0} \begin{pmatrix} iJ_m^{\prime 0}n_{0z}\hat{E}_{0\varphi_0} + \frac{mJ_m^0}{n_{0\rho}\rho} (n_{0\rho}\hat{E}_{0z} - n_{0z}\hat{E}_{0\rho}) \\ iJ_m^{\prime 0} (n_{0\rho}\hat{E}_{0z} - n_{0z}\hat{E}_{0\rho}) - \frac{mJ_m^0}{n_{0\rho}\rho}n_{0z}\hat{E}_{0\varphi_0} \\ J_m^0n_{0\rho}\hat{E}_{0\varphi_0} \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

με τον υπερκείμενο δείκτη 0 στη συνάρτηση Bessel να αναφέρεται στο είδος πόλωσης του προσπίπτοντος κύματος (O ή X).

3.7.2 Υπολογίζοντας το χρονικά ανεξάρτητο διάνυσμα Poynting και το φάσμα Fourier

Τώρα που όλες οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου έχουν υπολογιστεί για κάθε ρυθμό και κάθε περιοχή (προσπίπτοντα πεδία, σκεδαζόμενα

πεδία και πεδία εντός του κυλίνδρου), το κανονικοποιημένο και χρονικά ανεξάρτητο διάνυσμα Poynting μπορεί εύκολα να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον ευρέως γνωστό τύπο:

$$\tilde{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\tilde{\mathbf{e}} \times \tilde{\mathbf{h}}^*\} \quad (3.113)$$

Η εξίσωση χρησιμοποιείται για να υπολογιστούν όλες οι συνιστώσες του διανύσματος Poynting για όλα τα κύματα και όλες τις περιοχές. Στην παράγραφο των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται για την παραγωγή των αριθμητικών προσομοιώσεων.

Επίσης, ορίζοντας τις συναρτήσεις:

$$f_{AM}(\rho, \varphi) \equiv |\text{Re}\{\tilde{\mathbf{s}}_{AM}\}|, f_0(\rho, \varphi) \equiv |\text{Re}\{\tilde{\mathbf{s}}_0\}| \quad (3.114)$$

μπορεί να εφαρμοστεί μετασχηματισμός Fourier (ο οποίος συμβολίζεται με \mathcal{F}) ως προς το κανονικοποιημένο ρ στην περιοχή από ρ ίσο με την ακτίνα του κυλίνδρου μέχρι μία επαρκή τιμή του ρ η οποία καθορίζει τη μέγιστη ακτινική απόσταση (υπενθυμίζεται ότι ο συμβολισμός φ αναφέρεται στην αζιμουθιακή γωνία γύρω από τον κύλινδρο):

$$\hat{f}_{AM}(\varphi) \equiv \mathcal{F}\{f_{AM}(\rho, \varphi)\}, \hat{f}_0(\varphi) \equiv \mathcal{F}\{f_0(\rho, \varphi)\} \quad (3.115)$$

Στην παράγραφο των αριθμητικών αποτελεσμάτων που ακολουθεί, η ποσότητα $\log_{10}\{|\hat{f}_{AM}(n_\rho, \varphi)| / \max |\hat{f}_0(n_\rho, \varphi)|\}$ αναπαρίσταται γραφικά συναρτήσει των κανονικοποιημένων συνιστωσών n_x και n_y του κυματανύσματος.

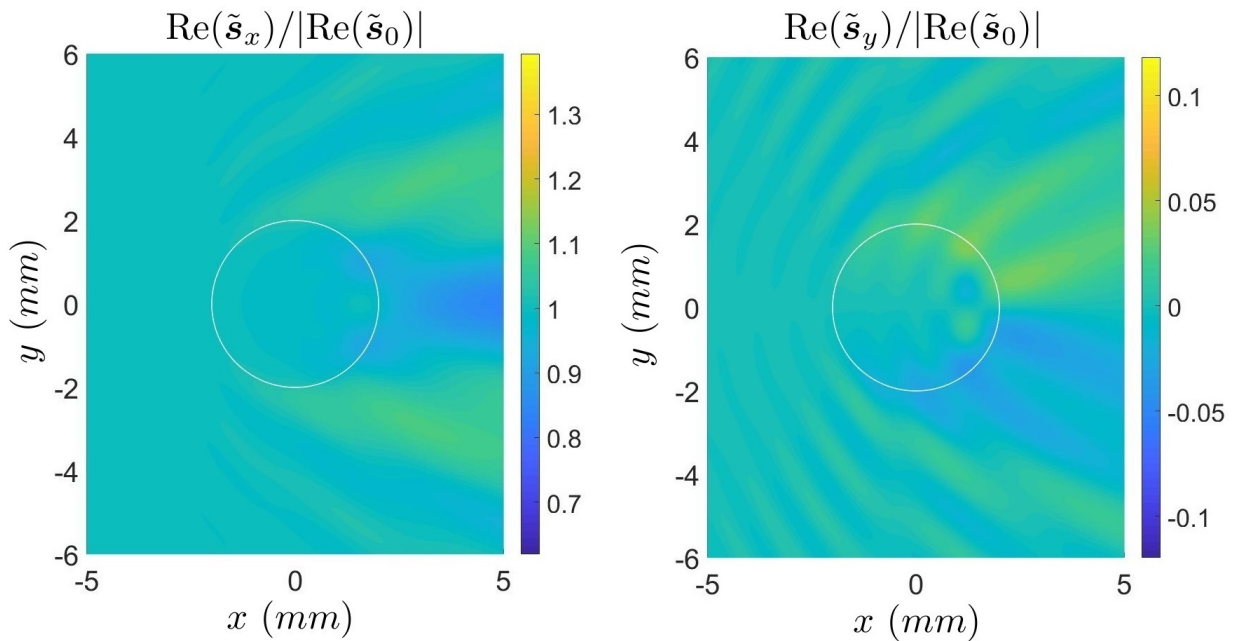
3.8 Αριθμητικά αποτελέσματα

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που έχουν εξαχθεί παραπάνω, μπορούν να ληφθούν αποτελέσματα για μία ποικιλία διαφορετικών διαδικασιών σιέδασης. Σε μερικές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να αλλάζουν οι τιμές μίας μόνο παραμέτρου και οι υπόλοιπες να διατηρούνται σταθερές, προκειμένου να είναι πιο εύκολα κατανοητή η επίδραση που έχει στη διαδικασία της σιέδασης η αντίστοιχη παράμετρος από μόνη της. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, με σκοπό η παρουσίαση των αποτελεσμάτων να είναι κατά το δυνατόν περιεκτική, το μέτρο της εξωτερικά επιβαλλόμενης μαγνητικής επαγωγής είναι σε όλες τις περιπτώσεις $B = 4.5 T$, η πυκνότητα του περιβάλλοντος πλάσματος είναι $10^{19} m^{-3}$, η συχνότητα του RF κύματος είναι $170 GHz$ και το διάνυσμα διάδοσης του προσπίπτοντος επιπέδου κύματος είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο.

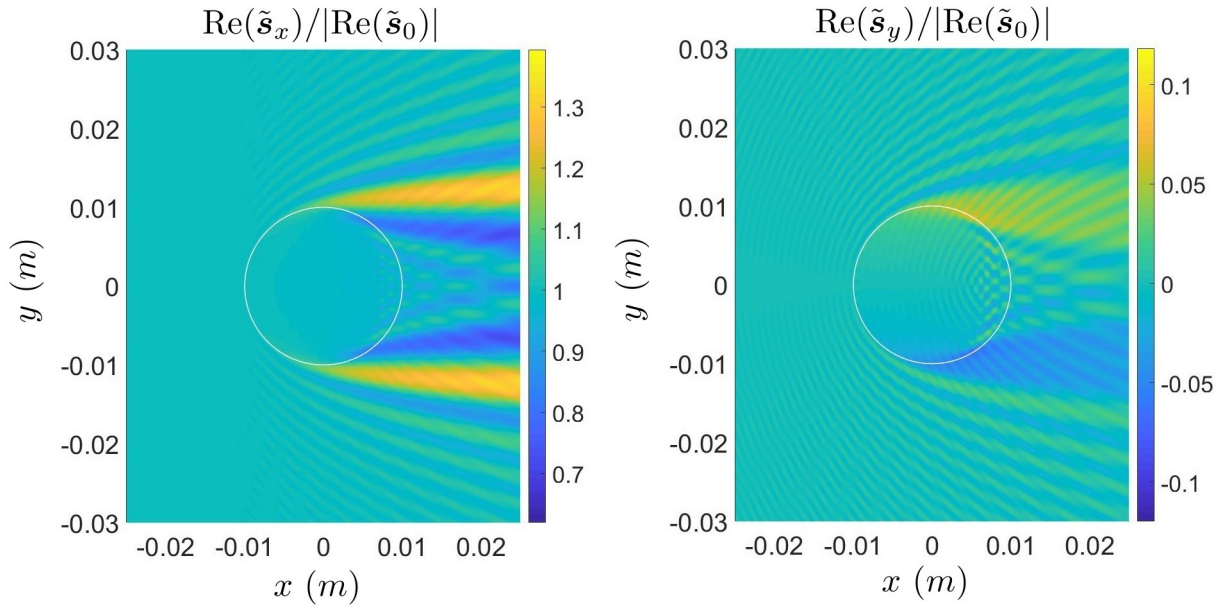
3.8.1 Η σημασία της ακτίνας του κυλίνδρου στη σιέδαση του ραδιοκύματος

Ξεκινώντας με την ακτίνα του κυλινδρικού νηματίου, ένας τρόπος να μελετηθεί η σημασία που έχει το μήκος του κυλίνδρου στη διαδικασία σιέδασης, είναι η δημιουργία γραφημάτων του χρονικά ανεξάρτητου διανύσματος Poynting, ειδικά της συνιστώσας που οδεύει κατά τη μπροστινή κατεύθυνση. Η Εικόνα 3.8.1.α αναφέρεται σε ένα προσπίπτον κύμα πόλωσης O-mode και παρουσιάζει τις x - (αριστερά) και y - (δεξιά) συνιστώσες του διανύσματος Poynting, για έναν κύλινδρο ακτίνας μήκους $2 mm$, πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος $10^{19} m^{-3}$, ηλεκτρονική πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19} m^{-3}$ και μηδενική κλίση του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ακτίνα του κυλίνδρου της Εικόνας 3.8.1.α είναι μεγέθους κοντινού με το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κύματος, αφού για τη συχνότητα των $170 GHz$ και τη δεδομένη ηλεκτρονική πυκνότητα, το μήκος κύματος είναι περίπου $1.8 mm$. Η συχνότητα των RF κυμάτων έχει κυρίαρχο ρόλο στα φαινόμενα σιέδασης, καθώς

αυτά διαφέρουν ανάλογα με το αν το μήκος κύματος είναι μεγαλύτερου, μικρότερου ή του ίδιου περίπου μεγέθους συγκρινόμενο με την ακτίνα της κυλινδρικής ανομοιογένειας. Η Εικόνα 3.8.1.β δείχνει την x -συνιστώσα (αριστερά) και την y -συνιστώσα (δεξιά) του διανύσματος Poynting για έναν μεγαλύτερο κύλινδρο ακτίνας μήκους 10 mm , επίσης στην ίδια (EC) συχνότητα των 170 GHz . Οι z -συνιστώσες του διανύσματος Poynting δεν παρουσιάζονται, καθώς είναι μηδενικές.

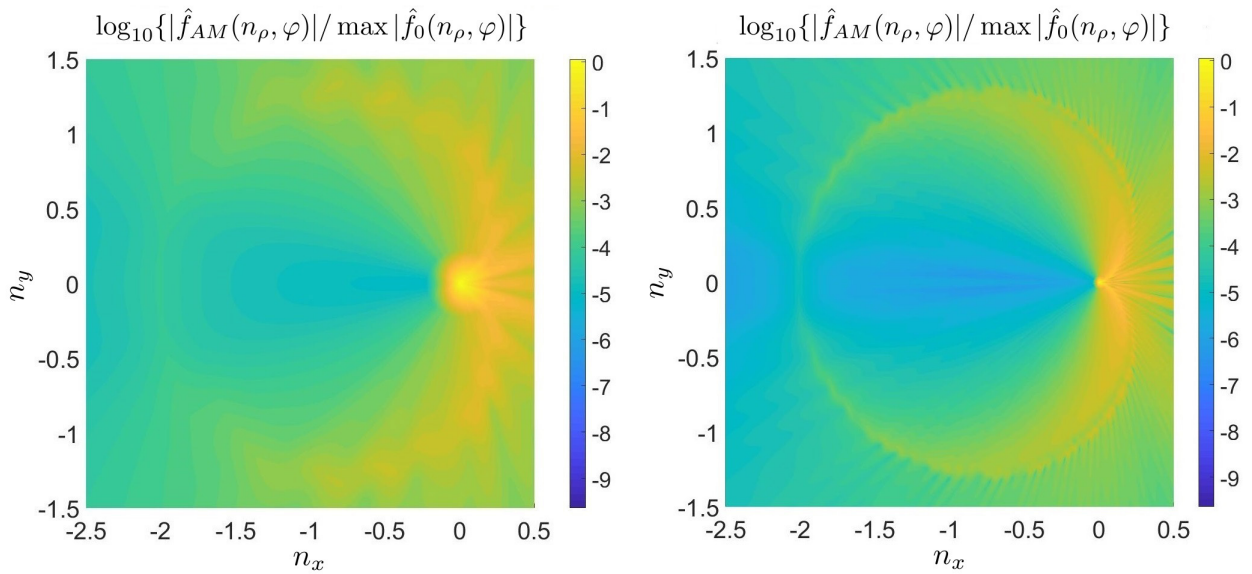


Εικόνα 3.8.1.α - Συνιστώσες x - (αριστερά) και y - (δεξιά) του διανύσματος Poynting, συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, ακτίνα κυλίνδρου 2 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$.



Εικόνα 3.8.1.β - Συνιστώσες x - (αριστερά) και y - (δεξιά) του διανύσματος Poynting, συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5 \text{ T}$.

Στην Εικόνα 3.8.1.γ, παρουσιάζεται το φάσμα Fourier (αριστερά εμφανίζεται η περίπτωση με ακτίνα κυλίνδρου 2 mm και δεξιά η περίπτωση με ακτίνα κυλίνδρου 10 mm). Πρόκειται για ένα πολικό διάγραμμα του φασματικού εύρους ισχύος ως συνάρτηση της οριζόντιας και της κάθετης προβολής της Fourier συνιστώσας, κανονικοποιημένο στον δείκτη διάθλασης του προσπίπτοντος. Το μέγιστο (δηλαδή η τελεία) στο κέντρο του διαγράμματος (σημείο $(0, 0)$) αντιστοιχεί στο φάσμα ισχύος του προσπίπτοντος κύματος. Χωρίς τη διαδικασία σιέδασης, η οποία συμβαίνει λόγω της παρουσίας της κυλινδρικής ανομοιογένειας, το φάσμα Fourier είναι απλά ένα μέγιστο που θα φαινόταν ως μία τελεία στο κέντρο του Fourier διαγράμματος (δηλαδή, στο σημείο $(0, 0)$). Λόγω του κυλίνδρου, το φασματικό εύρος κατανέμεται σε ένα καρδιοειδές. Σημειώνεται επίσης ότι το μέγιστο της φασματικής κατανομής ισχύος είναι στην κατεύθυνση προς τα εμπρός, ενώ υπάρχει παράλληλα και σημαντικό ποσοστό της ισχύος που σιεδάζεται σε άλλες ακτινικές κατευθύνσεις.

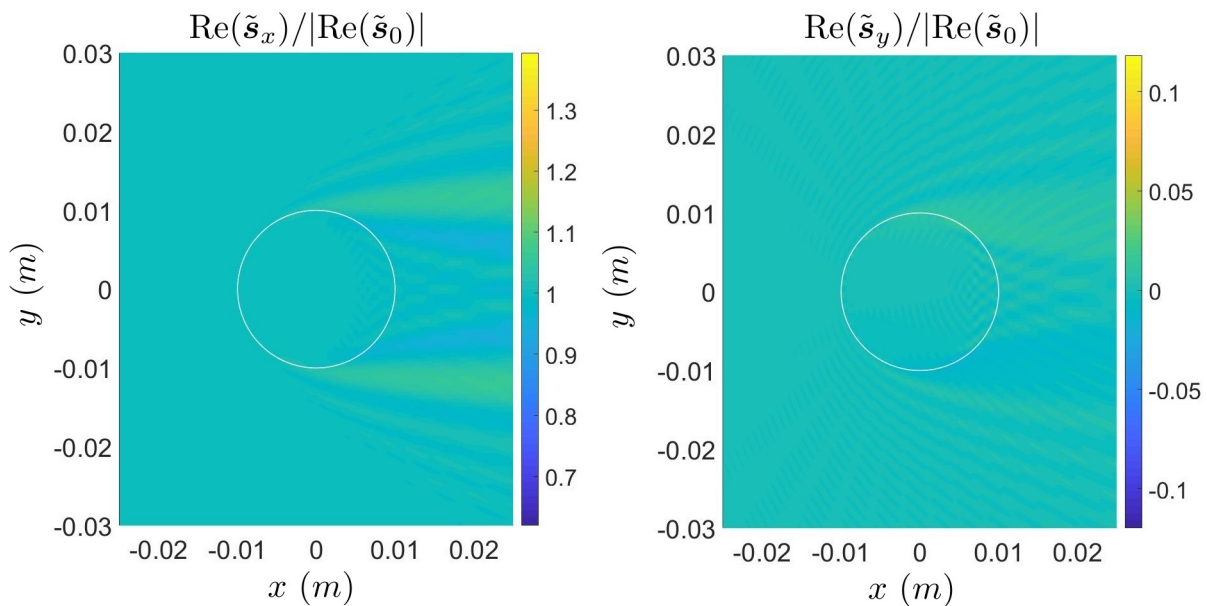


Εικόνα 3.8.1.γ - Φάσμα Fourier: Πολικό διάγραμμα του φασματικού εύρους ισχύος ως συνάρτηση της οριζόντιας και της κάθετης προβολής της Fourier συνιστώσας. Συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5 \text{ T}$. Το αριστερό τμήμα της Εικόνας αναφέρεται στην περίπτωση με ακτίνα κυλίνδρου 2 mm , ενώ το δεξί τμήμα αφορά την ακτίνα μήκους 10 mm .

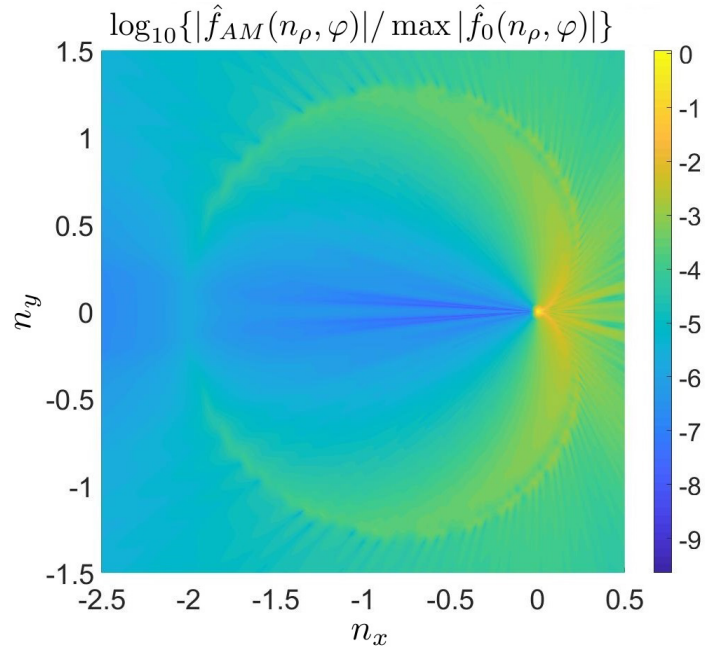
3.8.2 Η σημασία της αντίθεσης της ηλεκτρονικής πυκνότητας στη σκέδαση του ραδιοκύματος

Μία άλλη ενδιαφέρουσα παράμετρος για μελέτη είναι η σχετική αντίθεση της ηλεκτρονικής πυκνότητας του πλάσματος εντός του κυλίνδρου ως προς την ηλεκτρονική πυκνότητα του πλάσματος στο εξωτερικό του. Όπως προαναφέρθηκε και στην εισαγωγή, τα πειράματα έχουν δείξει ότι οι τιμές των δύο αυτών πυκνοτήτων μπορούν στην πράξη να είναι πολύ διαφορετικές μεταξύ τους, έτσι ώστε η απόλυτη τιμή της σχετικής αντίθεσής τους μπορεί να είναι από αρκετά χαμηλή, της τάξης του 5% έως και περίπου 100%, δηλαδή η διπλάσια. Στην Εικόνα 3.8.2.α, το προσπίπτον κύμα είναι πόλωσης O-mode. Παρουσιάζονται οι x - και y -συστώσες του διανύσματος Poynting για κύμα EC συχνότητας 170 GHz , ηλεκτρονικής πυκνότητας περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και ηλεκτρονικής

πυκνότητας στο εσωτερικό του κυλίνδρου $1.2 \times 10^{19} m^{-3}$, για ακτίνα κυλίνδρου μήκους $10 mm$. Αυτά τα αποτελέσματα, μπορούν να συγκριθούν με τα αντίστοιχα της Εικόνας 3.8.1.β, ώστε να φανούν οι διαφορές μεταξύ της σχετικής αντίθεσης πυκνότητας 20% και 100% αντίστοιχα. Η z -συνιστώσα είναι μηδενική και συνεπώς, δεν απεικονίζεται. Η κλίση του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου είναι επίσης μηδέν. Στην Εικόνα 3.8.2.β παρουσιάζεται το φάσμα Fourier και μπορεί να συγκριθεί με το αντίστοιχο στην Εικόνα 3.8.1.γ που είναι για το ίδιο μήκος ακτίνας κυλίνδρου, όμως διαφορετικής σχετικής αντίθεσης ηλεκτρονικής πυκνότητας. Είναι προφανές ότι η φασματική διεύρυνση, που οφείλεται στην παρουσία του κυλινδρικού νηματίου, παραμένει μη αμελητέα για μεγαλύτερες τιμές της αξιμουθιακής γωνίας, όταν η σχετική αντίθεση ηλεκτρονικής πυκνότητας είναι υψηλότερη.



Εικόνα 3.8.2.α - Συνιστώσες x - (αριστερά) και y - (δεξιά) του διανύσματος Poynting, συχνότητα $170 GHz$, πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, ακτίνα κυλίνδρου $10 mm$, πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος $10^{19} m^{-3}$ και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $1.2 \times 10^{19} m^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5 T$.

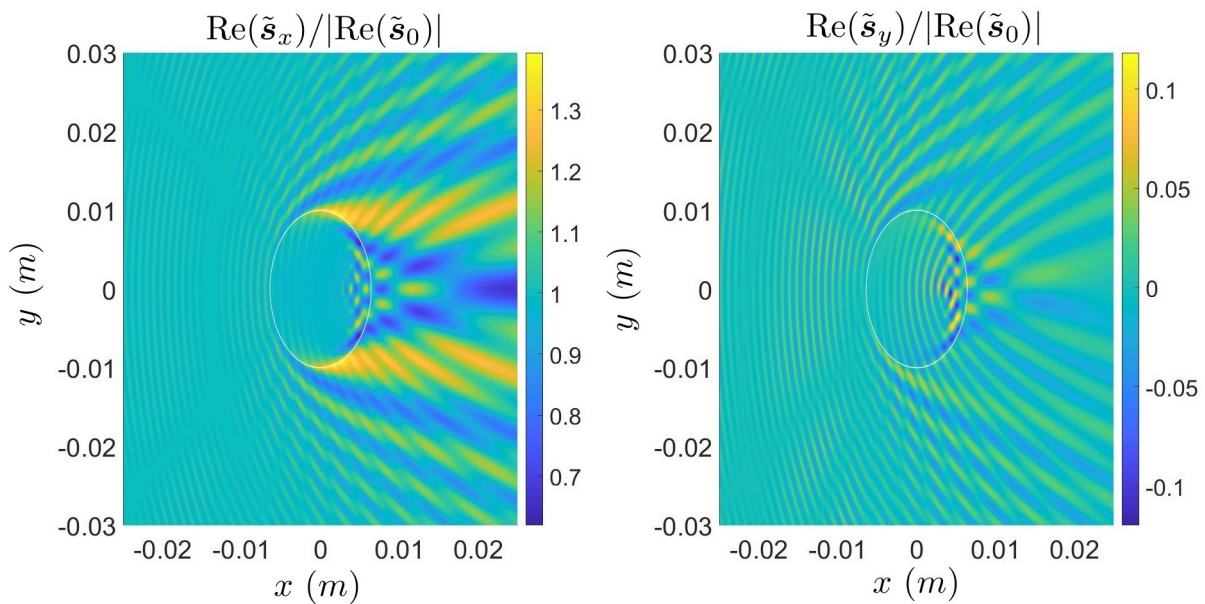


Εικόνα 3.8.2,β - Φάσμα Fourier: Πολικό διάγραμμα του φασματικού εύρους ισχύος ως συνάρτηση της οριζόντιας και της κάθετης προβολής της Fourier συνιστώσας. Συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $1.2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5 \text{ T}$.

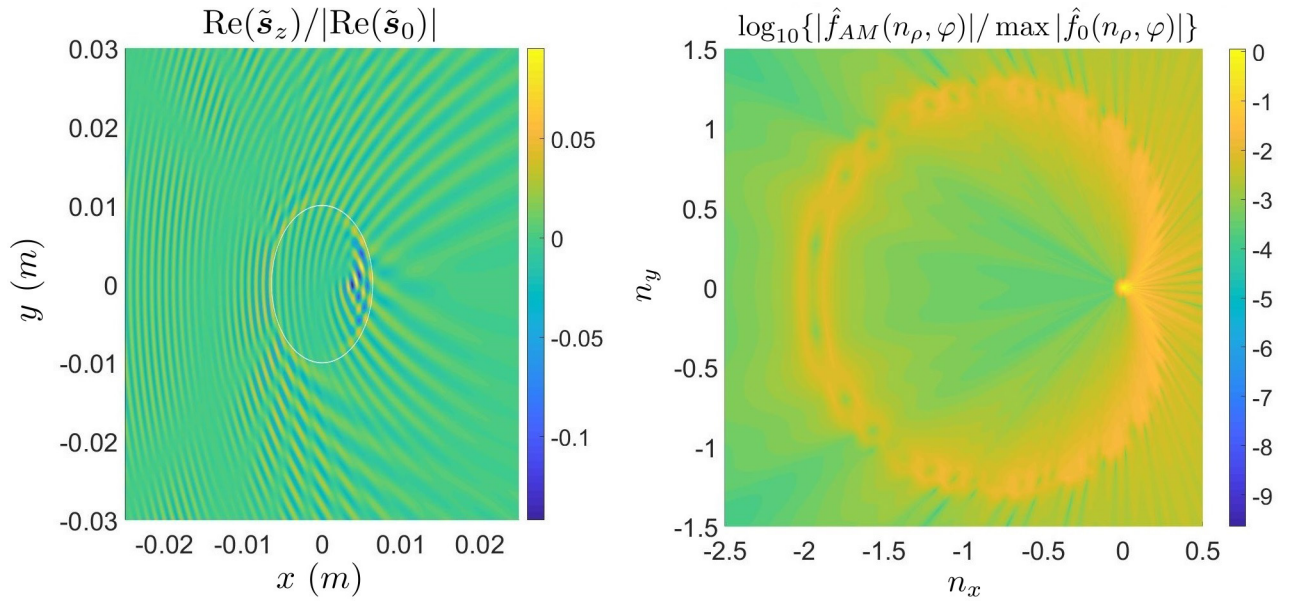
3.8.3 Σκέδαση RF κύματος με μη μηδενική κλίση του διανύσματος του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου, για προσπίπτον κύμα πόλωσης O-mode

Στις Εικόνες 3.8.3.α και 3.8.3.β φαίνεται η σημασία που έχει στη διαδικασία σκέδασης η κλίση του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου, ενώ το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής παραμένει $B = 4.5 \text{ T}$ και το προσπίπτον κύμα είναι πόλωσης O-mode. Για τους σκοπούς της παρουσίασης αυτής, το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου επιλέγεται να βρίσκεται σε γωνία 50° ως προς τον άξονα του κυλίνδρου (η οποία είναι μία μεγάλη τιμή), ενώ η επιλεγμένη συχνότητα των 170 GHz αναφέρεται και πάλι σε κύμα EC, η ακτίνα του κυλίνδρου είναι μήκους 10 mm , η ηλεκτρονική πυκνότητα του περιβάλλοντος πλάσματος είναι 10^{19} m^{-3} και του πλάσματος εντός του κυλίνδρου είναι $1.2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ (έτσι ώστε η σχετική

αντίθεση ηλεκτρονικής πυκνότητας είναι 20%). Τα αποτελέσματα αυτά, μπορούν να συγκριθούν με εκείνα των Εικόνων 3.8.2.α και 3.8.2.β. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σύστημα αναφοράς του μαγνητικού πεδίου, το οποίο τώρα είναι διαφορετικό από το σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου και ως εκ τούτου η περιφέρεια του κυλίνδρου φαίνεται σαν να είναι ελλειψοειδής. Είναι προφανές ότι τα φαινόμενα σκέδασης είναι πολύ εντονότερα παρουσία κλίσης. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στην διέγερση επιπλέον ρυθμών στο εσωτερικό του κυλίνδρου, λόγω του γεγονότος ότι τώρα υπάρχει ένα πλήθος παράλληλων στο μαγνητικό πεδίο κυματανυσμάτων που δεν συμπίπτουν με το αντίστοιχο του προσπίπτοντος (κάτι το οποίο συμβαίνει στην περίπτωση του ευθυγραμμισμένου κυλίνδρου).

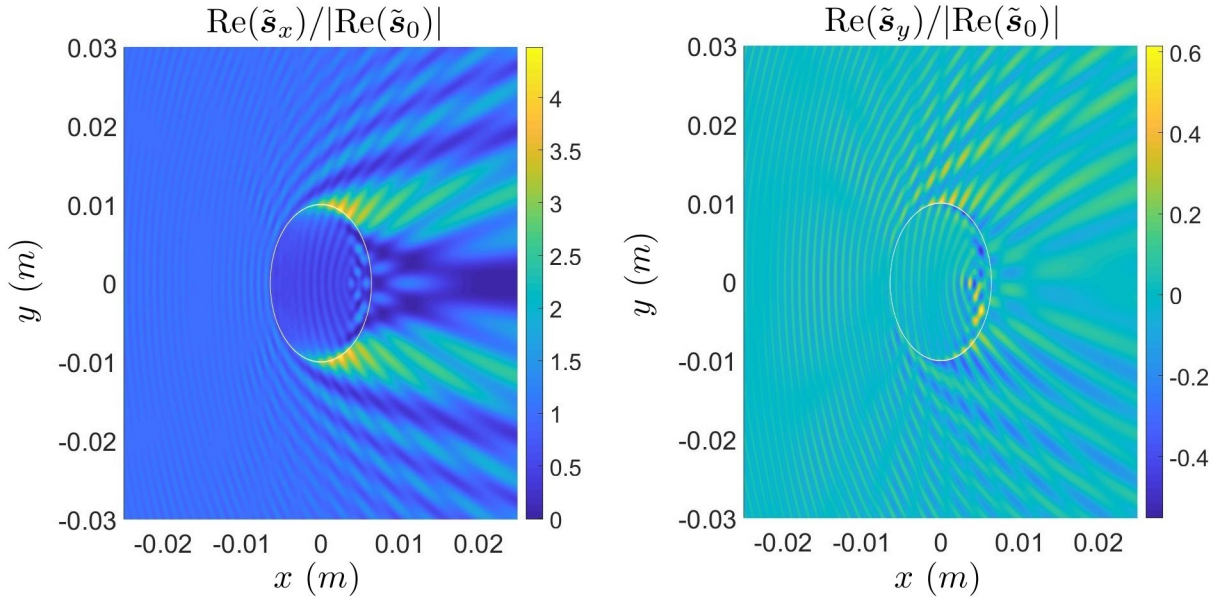


Εικόνα 3.8.3.α - Συνιστώσες x - (αριστερά) και y - (δεξιά) του διανύσματος Poynting, συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $1.2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 50° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$.

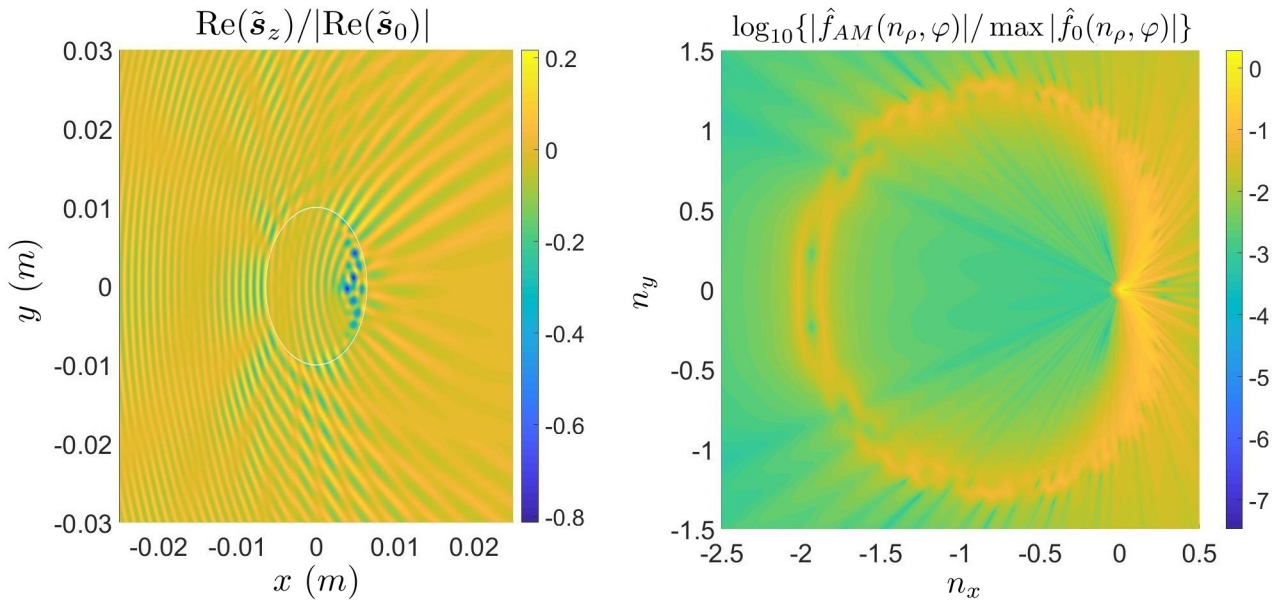


Εικόνα 3.8.3.β - z -συνιστώσα του διανύσματος Poynting (αριστερά), συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $1.2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 50° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$. Φάσμα Fourier (δεξιά): Πολικό διάγραμμα του φασματικού εύρους ισχύος ως συνάρτηση της οριζόντιας και της κάθετης προβολής της Fourier συνιστώσας.

Οι Εικόνες 3.8.3.γ και 3.8.3.δ αναφέρονται επίσης σε προσπίπτον κύμα πόλωσης O-mode και οι παράμετροι έχουν τις ίδιες τιμές με εκείνες των Εικόνων 3.8.3.α και 3.8.3.β, με τη διαφορά ότι τώρα η ηλεκτρονική πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος είναι 10^{19} m^{-3} και εντός του κυλίνδρου είναι $2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$ (οπότε η σχετική αντίθεση ηλεκτρονικής πυκνότητας είναι 100% αντί για 20%). Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε διαφορετικό χρωματισμό. Παρόλα αυτά, είναι προφανές ότι η σκέδαση είναι πολύ πιο έντονη στην περίπτωση υψηλότερης τιμής της σχετικής αντίθεσης ηλεκτρονικής πυκνότητας. Ως γενική παρατήρηση σημειώνεται ότι και στις δύο περιπτώσεις χαμηλής και υψηλής αντίθεσης, σημαντικό τμήμα της συνολικής ισχύος διοχετεύεται κατά μήκος των γραμμών του μαγνητικού πεδίου, όπως αναμενόταν.



Εικόνα 3.8.3.γ - Συνιστώσες x - (αριστερά) και y - (δεξιά) του διανύσματος Poynting, συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 50° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$.

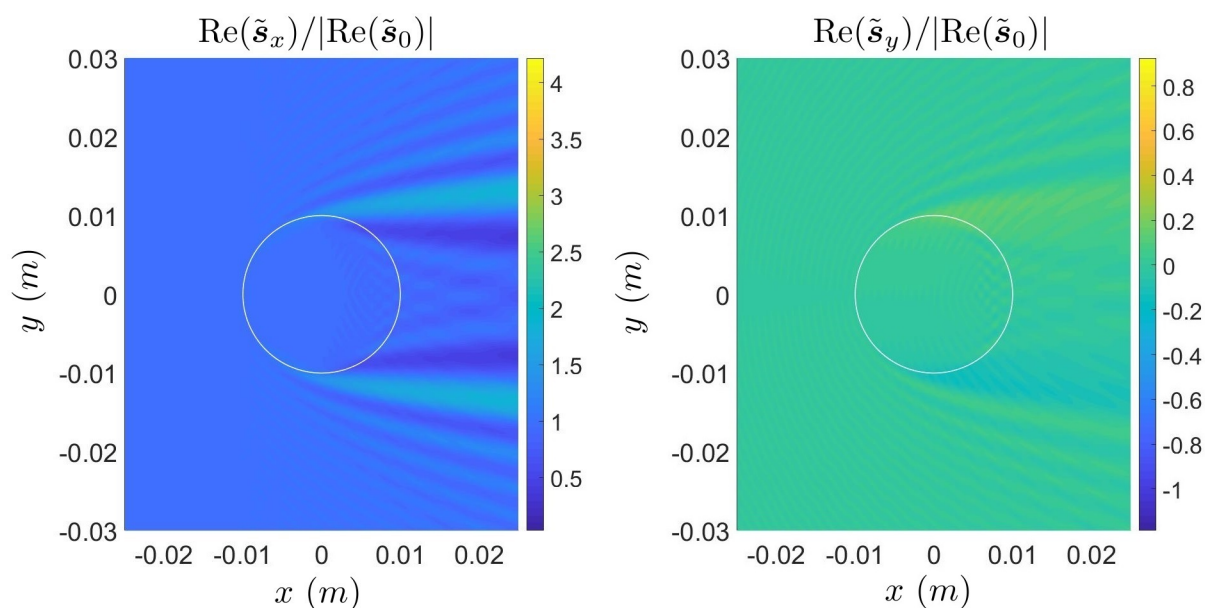


Εικόνα 3.8.3.δ - z -συνιστώσα του διανύσματος Poynting (αριστερά), συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 50° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$. Φάσμα Fourier (δεξιά): Πολικό διάγραμμα του φασματικού εύρους ισχύος ως συνάρτηση της οριζόντιας και της κάθετης προβολής της Fourier συνιστώσας.

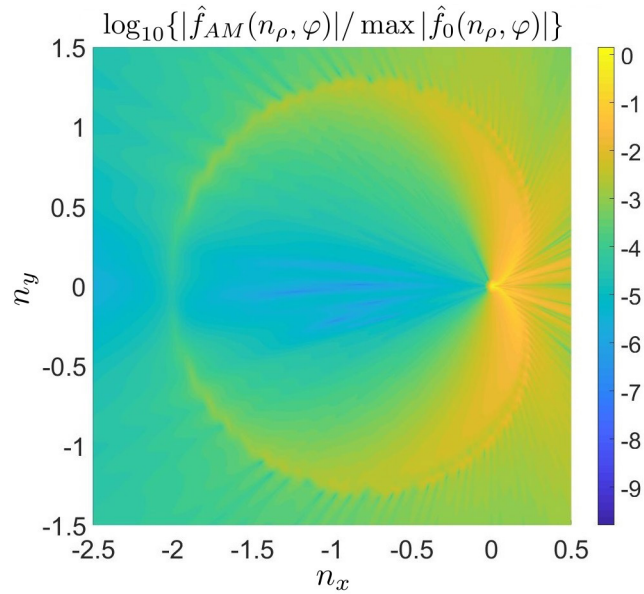
3.8.4 Σκέδαση RF κύματος με μη μηδενική κλίση του διανύσματος του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου, για προσπίπτον κύμα πόλωσης X-mode

Στις Εικόνες 3.8.4.α, 3.8.4.β, 3.8.4.γ και 3.8.4.δ φαίνεται η επίδραση που έχει η γωνία κλίσης του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου, για προσπίπτον κύμα πόλωσης X-mode.

Στην Εικόνα 3.8.4.α παρουσιάζονται οι x - (αριστερά) και y - (δεξιά) συνιστώσες του διανύσματος Poynting, για κύλινδρο ακτίνας μήκους 10 mm , ηλεκτρονική πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, και μηδενική κλίση μαγνητικού πεδίου. Η z -συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου δεν παρουσιάζεται, καθώς είναι μηδέν. Στην Εικόνα 3.8.4.β φαίνεται το φάσμα Fourier για την ίδια περίπτωση.

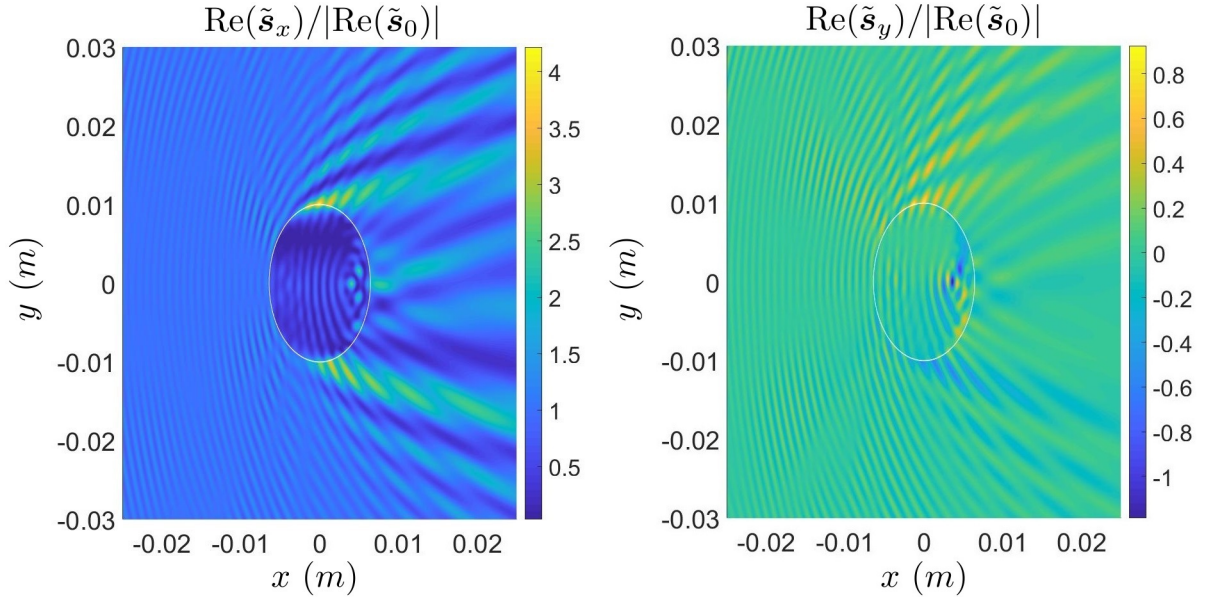


Εικόνα 3.8.4.α - Συνιστώσες x - (αριστερά) και y - (δεξιά) του διανύσματος Poynting, συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος X-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$.

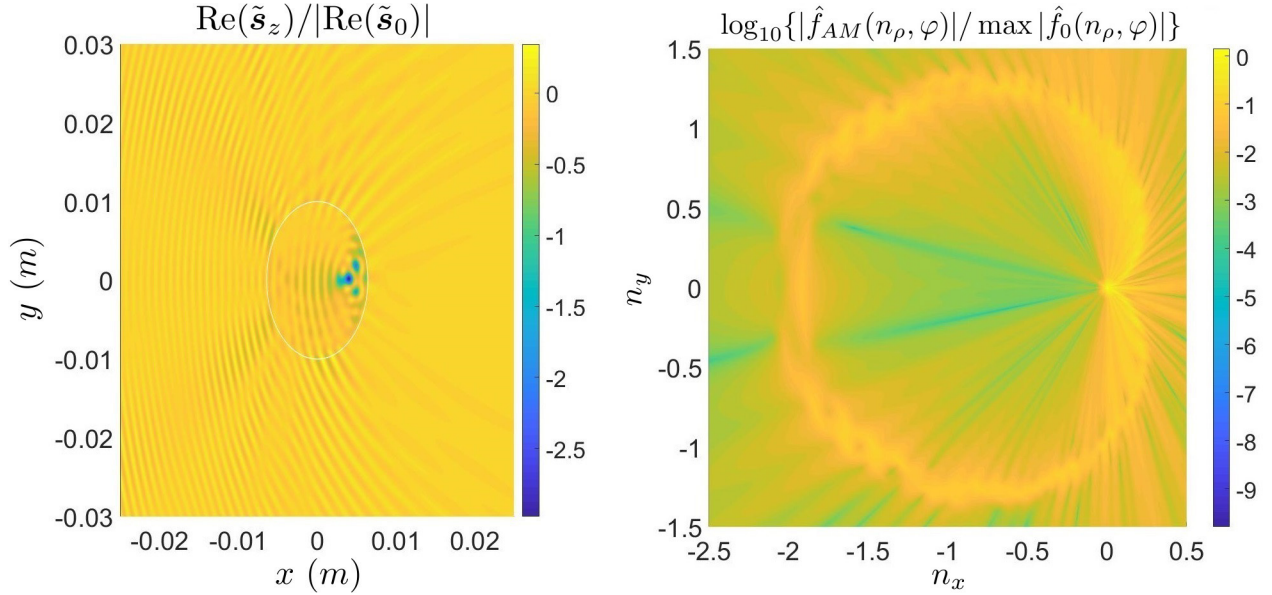


Εικόνα 3.8.4.β - Φάσμα Fourier: Πολικό διάγραμμα του φασματικού εύρους ισχύος ως συνάρτηση της οριζόντιας και της κάθετης προβολής της Fourier συνιστώσας. Συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος X-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5 \text{ T}$.

Στις Εικόνες 3.8.4.γ και 3.8.4.δ παρουσιάζεται η αντίστοιχη προσομοίωση για κλίση του μαγνητικού πεδίου ως προς τον άξονα του κυλίνδρου 50° αντί για μηδέν (οπότε και η z - συνιστώσα του διανύσματος Poynting είναι πλέον μη μηδενική), ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι έχουν τις ίδιες τιμές για να είναι εύκολη η σύγκριση.



Εικόνα 3.8.4.γ - Συνιστώσες x - (αριστερά) και y - (δεξιά) του διανύσματος Poynting, συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος X-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 50° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$.



Εικόνα 3.8.4.δ - z -συνιστώσα του διανύσματος Poynting (αριστερά), συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος X-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και πυκνότητα εντός του κυλίνδρου $2 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 50° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$. Φάσμα Fourier (δεξιά): Πολικό διάγραμμα του φασματικού εύρους ισχύος ως συνάρτηση της οριζόντιας και της κάθετης προβολής της Fourier συνιστώσας.

3.9 Συμπεράσματα και σύνοψη

Το θεωρητικό μοντέλο πλήρους κύματος, που παρουσιάστηκε σε αυτό το Κεφάλαιο, περιγράφει τη διαδικασία σκέδασης επίπεδων RF κυμάτων από κυλινδρικό νηματίο, που ενσωματώνεται σε περιβάλλον πλάσμα διαφορετικής ηλεκτρονικής πυκνότητας. Το πλάσμα είναι μαγνητισμένο από ένα εξωτερικά επιβαλλόμενο στατικό μαγνητικό πεδίο με την κύρια συνιστώσα του να είναι ευθυγραμμισμένη με τον άξονα του κυλινδρικού νηματίου, ενώ επίσης υπάρχει και μη αμελητέα συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου με διαφορετικό προσανατολισμό. Σε προηγούμενες μελέτες RF σκέδασης από κυλινδρικά νηματία, οι επιπτώσεις της μη ευθυγραμμισμένης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου είχαν αγνοηθεί. Το μοντέλο πλήρους κύματος, που παρουσιάστηκε, έχει ένα σημαντικό πλεονέκτημα έναντι της προσέγγισης του προβλήματος με γεωμετρική οπτική: Η ηλεκτρονική πυκνότητα του νηματίου δεν είναι απαραίτητο να είναι κοντινή με εκείνη του περιβάλλοντος πλάσματος, οπότε η προσέγγιση με μοντέλο πλήρους κύματος έχει πολύ ευρύτερη ισχύ.

Οι εξισώσεις του Maxwell έχουν χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή του αναλυτικού μοντέλου πλήρους κύματος. Σε αυτήν τη μελέτη, λόγω της παρουσίας της συνιστώσας μαγνητικού πεδίου με διαφορετικό προσανατολισμό, η φυσική των φαινομένων σκέδασης αλλάζει: Ενώ στην περίπτωση του πλήρως ευθυγραμμισμένου κυλινδρικού νηματίου με το συνολικό μαγνητικό πεδίο η συνιστώσα του κυματανύσματος k_{\parallel} κατά μήκος των γραμμών του μαγνητικού πεδίου διατηρείται, στην περίπτωση που υπάρχει και μη ευθυγραμμισμένη με τον άξονα του κυλίνδρου συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, διατηρείται μόνο η παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου συνιστώσα k_z του κυματανύσματος, η οποία είναι αυτή που έχει οριστεί από το προσπίπτον κύμα. Αυτό το απλό γεγονός εισάγει την εξάρτηση των πολώσεων από την αζιμουθιακή γωνία στο σύστημα αναφοράς του κυλινδρικού νηματίου. Έτσι, στην παρούσα ανάλυση, σε αντίθεση με την ευθυγραμμισμένη

περίπτωση, αυτή η εξάρτηση οδηγεί στην ολοκλήρωση πάνω στην αζιμουθιακή γωνία όλων των εμπλεκόμενων τρόπων καθώς και σε μία επιπλέον άθροιση στους αζιμουθιακούς αριθμούς στην έκφραση για τα πεδία (εξισώσεις). Στην ευθυγραμμισμένη περίπτωση, το αντίστοιχο εκθετικό, που περιέχει τη γωνία αζιμουθίου, τείνει σε μια συνάρτηση δέλτα του Kronecker, που απομονώνει έναν αζιμουθιακό αριθμό συγκεκριμένου τρόπου από την προαναφερθείσα άθροιση. Επομένως, στο γενικό μοντέλο στο επίπεδο της Φυσικής, αυτό οδηγεί σε ένα σκεδαζόμενο πεδίο για ένα φάσμα k_{\parallel} που εξαρτάται από τη γωνία κλίσης ϕ_0 μεταξύ του άξονα του κυλίνδρου και το διάνυσμα του συνολικού μαγνητικού πεδίου. Έτσι, η παρουσία ενός ευρέος φάσματος κυμάτων k_{\parallel} μεταβάλλει το προφίλ απόθεσης ισχύος των RF κυμάτων στον πυρήνα του πλάσματος σε σύγκριση με την ευθυγραμμισμένη περίπτωση.

Η σχέση διασποράς μπορεί να ικανοποιηθεί από δύο ανεξάρτητα κύματα στο πλάσμα, ένα εκ των οποίων είναι το προσπίπτον RF κύμα. Μέσα στον κύλινδρο, ένα σύνολο από ρυθμούς διεγείρεται από το προσπίπτον RF κύμα και ο καθένας από αυτούς είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο ανεξαρτήτων προαναφερθέντων κυμάτων. Αυτοί οι ρυθμοί διαδίδονται σε όλες τις κατευθύνσεις έξω από τον κύλινδρο και δημιουργούν ρυθμούς που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των κυμάτων του ψυχρού πλάσματος. Συνεπώς, υπάρχουν σκεδαζόμενα πεδία όχι μόνο στην κατεύθυνση προς τα εμπρός, αλλά και στην κατεύθυνση προς τα πίσω καθώς και σε όλες τις πλάγιες, όπως εξάλλου φαίνεται και στα διαγράμματα των αριθμητικών αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων του Κεφαλαίου 3. Ένα χρήσιμο εργαλείο που παρουσιάζεται σε αυτή την εργασία είναι το φασματικό διάγραμμα της ολικής ισχύος (δηλαδή το μέτρο του πραγματικού μέρους της ροής Poynting) που προέρχεται από το κυλινδρικό νημάτιο. Στο διάγραμμα αυτό, η γωνία αζιμουθίου αναφέρεται σε διαφορετικές αζιμουθιακές γωνίες γύρω από την περιφέρεια του κυλίνδρου και έτσι το αντίστοιχο εύρος φασματικής έντασης γύρω από τον κύλινδρο

παρέχει ένα μέτρο της διαδικασίας σιέδασης. Οι αντίστοιχες φασματικές Εικόνες του Κεφαλαίου 3 δείχνουν μια ευρεία και κατανεμημένη φασματική ένταση γύρω από τον κύλινδρο που έχει σχήμα καρδιοειδούς, αντί για μία απομονωμένη κουκκίδα που θα παρουσίαζε το φάσμα Fourier ενός επίπεδου μονοχρωματικού κύματος στην περίπτωση που ο κύλινδρος δεν θα ήταν παρών.

Η ακτίνα του κυλίνδρου μπορεί να είναι μικρότερη, μεγαλύτερη ή περίπου της ίδιας διάστασης συγκρινόμενη με το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κύματος. Σχετικά με αυτό, στην παράγραφο 3.8.1 παρουσιάστηκαν κύλινδροι με ακτίνες διαφορετικού μεγέθους. Όπως ήταν αναμενόμενο, τα φαινόμενα σιέδασης διαφέρουν. Συγκεκριμένα, η σιέδαση γίνεται εντονότερη όσο η ακτίνα του κυλίνδρου αυξάνει. Σε αυτό το σημείο, χρήσιμο είναι να αναφερθεί ότι για τη συχνότητα EC των 170 GHz και την ηλεκτρονική πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} , παράμετροι που λαμβάνουν τις ίδιες τιμές σε όλα τα παραδείγματα του Κεφαλαίου 3, το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κύματος είναι περίπου 1.8 mm . Όσον αφορά τη σχετική αντίθεση της ηλεκτρονικής πυκνότητας μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού του κυλίνδρου, όπως αναφέρεται στην Εισαγωγή του Κεφαλαίου 3, αυτή ποικίλλει και μπορεί να λαμβάνει τιμές εντός ενός ευρέος διαστήματος (0.05, 1). Οι αριθμητικές προσομοιώσεις της παραγράφου 3.8.2 έχουν γίνει για σχετική αντίθεση ηλεκτρονικής πυκνότητας 20% και τα αποτελέσματά τους (Εικόνες 3.8.2.α και 3.8.2.β) συγκρίνονται με εκείνα της παραγράφου 3.8.1 (Εικόνες 3.8.1.β και 3.8.1.γ) που αναφέρονται σε σχετική αντίθεση ηλεκτρονικής πυκνότητας 100%. Είναι προφανές από αυτά τα αποτελέσματα, ότι οι χωρικές διακυμάνσεις στη ροή της ισχύος αυξάνουν, καθώς η σχετική αντίθεση ηλεκτρονικής πυκνότητας μεταξύ του εσωτερικού του κυλίνδρου και του περιβάλλοντος πλάσματος αυξάνει. Όσο η πυκνότητα στο εσωτερικό του κυλίνδρου γίνεται μεγαλύτερη από του περιβάλλοντος πλάσματος, τα φαινόμενα σιέδασης γίνονται εντονότερα. Όταν από την άλλη, η σχετική αντίθεση μεταξύ των

δύο ηλεκτρονικών πυκνοτήτων τείνει στο μηδέν, τότε το κυλινδρικό νηματίο δεν μπορεί να διακριθεί από το περιβάλλον πλάσμα και όπως είναι αναμενόμενο, τα φαινόμενα σκέδασης τείνουν να εξαφανιστούν.

Στις Εικόνες των παραγράφων 3.8.3 και 3.8.4 απεικονίζονται διαγράμματα προσομοιώσεων, στις οποίες το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται υπό μη μηδενική κλίση γωνίας ϕ_0 ως προς τον άξονα του κυλινδρικού νηματίου. Σημειώνεται ότι οι επιλεγμένες τιμές για τη γωνία κλίσης των εν λόγω προσομοιώσεων είναι $\phi_0 = 0$ και $\phi_0 = 50^\circ$. Η τιμή $\phi_0 = 50^\circ$ είναι από πρόθεση μεγάλη, ώστε να είναι άμεσα αντιληπτές στην παρουσίαση οι διαφορές που έχει η γενική περίπτωση της παρούσας εργασίας με προηγούμενες, όπου ο κύλινδρος ήταν πλήρως ευθυγραμμισμένος με το συνολικό επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Στις Εικόνες των παραγράφων 3.8.3 και 3.8.4 παρατηρείται ότι η σκέδαση γίνεται πολύ εντονότερη παρουσία πολοειδούς συνιστώσας μαγνητικού πεδίου, όπου δηλαδή το συνολικό μαγνητικό πεδίο βρίσκεται σε μη μηδενική γωνία κλίσης ϕ_0 ως προς τον άξονα του κυλίνδρου. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στη διέγερση επιπλέον ρυθμών στο εσωτερικό του κυλινδροειδούς νηματίου, λόγω του γεγονότος ότι τώρα υπάρχει ένα πλήθος παράλληλων στο μαγνητικό πεδίο κυματανυσμάτων που δεν συμπίπτουν με εκείνο του προσπίπτοντος (το οποίο στην περίπτωση του ευθυγραμμισμένου κυλίνδρου, συμβαίνει). Επιπλέον, συγκρίνοντας τις Εικόνες της παραγράφου 3.8.3 με τις Εικόνες της παραγράφου 3.8.4, σημειώνεται ότι η διαδικασία σκέδασης έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά όταν το προσπίπτον κύμα είναι πόλωσης O-mode από όταν είναι πόλωσης X-mode.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι κάποια από τα αριθμητικά αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 που αφορούν περιπτώσεις στις οποίες το μαγνητικό πεδίο είναι ευθυγραμμισμένο με τον άξονα του κυλίνδρου, έχουν συγκριθεί με αποτελέσματα άλλων ερευνητικών ομάδων (όπως του Καθηγητή ΕΚΠΑ κ. Ιωάννη Τίγκιελι στο εσωτερικό και του Ερευνητή MIT Δρ. Abhay K. Ram στις Η.Π.Α.) και έρχονται σε

καλή συμφωνία με εκείνα.

3.10 Πίνακες μετασχηματισμών (Παράρτημα Α Κεφαλαίου 3)

3.10.1 Μετασχηματισμός από το σύστημα συντεταγμένων του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα συντεταγμένων του κυλίνδρου απείρου μήκους και αντίστροφα

Προκειμένου να γίνει ο μετασχηματισμός μεταξύ του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων του κυλίνδρου και του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων του μαγνητικού πεδίου, πρέπει να γίνει περιστροφή γύρω από τον άξονα y με την βοήθεια του πίνακα στροφής

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\phi_0) \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi_0 & 0 & -\sin \phi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_0 & 0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

έτσι ώστε:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\phi_0) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(-\phi_0) \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{pmatrix} \equiv \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y^{-1}(\phi_0) \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

όπου τα τονούμενα μοναδιαία διανύσματα αναφέρονται στο σύστημα αναφοράς του μαγνητικού πεδίου που έχει τον ίδιο y -άξονα με το σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου.

Ομοίως, για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{a} ισχύει:

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\phi_0) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(-\phi_0) \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} \equiv \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y^{-1}(\phi_0) \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

και

$$\begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(-\phi_0) \equiv \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y^{-1}(\phi_0) \quad (3.119)$$

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_y(\phi_0) \quad (3.120)$$

3.10.2 Μετασχηματισμός από Καρτεσιανές σε Κυλινδρικές συντεταγμένες και αντίστροφα

Παραμένοντας στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου μπορεί να γίνει μετασχηματισμός από Καρτεσιανές συντεταγμένες σε Κυλινδρικές στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Έτσι, χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετασχηματισμού

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(\varphi_k) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.121)$$

προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(\varphi_k) \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(-\varphi_k) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \equiv \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c^{-1}(\varphi_k) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \quad (3.122)$$

Εδώ, ο συμβολισμός φ_k αναφέρεται στην αζιμουθιακή γωνία στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου. Παρόμοια, για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{a} είναι:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(\varphi_k) \begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(-\varphi_k) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \equiv \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c^{-1}(\varphi_k) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

και

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r & a_\varphi & a_z \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(-\varphi_k) \equiv \begin{pmatrix} a_r & a_\varphi & a_z \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c^{-1}(\varphi_k) \quad (3.124)$$

$$\begin{pmatrix} a_r & a_\varphi & a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_c(\varphi_k) \quad (3.125)$$

3.11 Κυλινδρικές διανυσματικές συναρτήσεις (Παράρτημα Β Κεφαλαίου 3)

Οι κυλινδρικές διανυσματικές συναρτήσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι εξής:

$$\mathbf{m}_n(n_r\rho, n_z\zeta, \varphi) \equiv \left[in \frac{Z_n(n_r\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{r}} - \frac{dZ_n(n_r\rho)}{d\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \exp [i(n_z\zeta + n\varphi)] \quad (3.126)$$

$$\mathbf{n}_n(n_r\rho, n_z\zeta, \varphi) \equiv \left\{ \frac{n_z}{n} \left[i \frac{dZ_n(n_r\rho)}{d\rho} \hat{\mathbf{r}} - n \frac{Z_n(n_r\rho)}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] + \frac{n_r^2}{n} Z_n(n_r\rho) \hat{\mathbf{z}} \right\} \exp [i(n_z\zeta + n\varphi)] \quad (3.127)$$

και

$$\mathbf{l}_n(n_r\rho, n_z\zeta, \varphi) \equiv \left[\frac{dZ_n(n_r\rho)}{d\rho} \hat{\mathbf{r}} + in \frac{Z_n(n_r\rho)}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + in_z Z_n(n_r\rho) \hat{\mathbf{z}} \right] \exp[i(n_z\zeta + n\varphi)] \quad (3.128)$$

Σημειώνεται ότι αυτές οι διανυσματικές συναρτήσεις εκφράζονται ως προς τη θέση στον χώρο (σε κυλινδρικές συντεταγμένες), ενώ το κύμα εισαγάγεται μόνο μέσω του αξονικού και του ακτινικού δείκτη διάθλασης στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου. Για το προσπίπτον κύμα, οι συναρτήσεις Bessel που εμπλέκονται είναι οι J_n . Οι διανυσματικές συναρτήσεις υπακούουν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\nabla \cdot \mathbf{m}_n = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{n}_n = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{l}_n = -n^2 Z_n \exp[i(n_z\zeta + n\varphi)] \quad (3.129)$$

και επίσης τις εξισώσεις:

$$\nabla \times \mathbf{l}_n = 0, \quad \nabla \times \mathbf{m}_n = n\mathbf{n}_n, \quad \nabla \times \mathbf{n}_n = n\mathbf{m}_n \quad (3.130)$$

4 Σκέδαση γκαουσιανών δεσμών ραδιοκυμάτων Electron Cyclotron από απλή κυλινδρική συνεκτική δομή του τυρβώδους στρώματος

4.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 3 μελετήθηκε η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών επίπεδων κυμάτων από τυρβώδεις κυλινδρικές συνεκτικές δομές, που βρίσκονται στις παρυφές του θερμοπυρηνικού πλάσματος. Κάνοντας όμως την προσέγγιση πιο ρεαλιστική, τα κύματα, που διαδίδονται μέσα στο πλάσμα και οδεύουν προς τον πυρήνα του τόρου, δεν είναι επίπεδα κύματα, αλλά δέσμες. Έτσι, στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες περιπτώσεις σκέδασης που αφορούν γκαουσιανές κυματικές δέσμες, οι οποίες διαδίδονται μέσα στο μαγνητισμένο πλάσμα και σκεδάζονται από απλές κυλινδρικές δομές που υπάρχουν στο Scrape-Off Layer [25]. Οι συχνότητες, που μελετούνται σε αυτό το Κεφάλαιο, είναι και πάλι στην περιοχή Electron Cyclotron με κεντρική συχνότητα $f_0=170 \text{ GHz}$.

4.2 Σύνοψη μαθηματικών προσεγγίσεων για την μελέτη γκαουσιανών δεσμών

Η γενική μορφή της έντασης του ηλεκτρικού (και του μαγνητικού) πεδίου μίας κυλινδρικής γκαουσιανής δέσμης, η οποία διαδίδεται κατά τον άξονα x και περιορίζεται χωρικά στο επίπεδο $y - z$, είναι:

$$b(x, y, z, n_z) \propto \exp\left[-\frac{y^2 + z^2}{d^2}\right] \exp(in_x x) \quad (4.1)$$

Μία τέτοια δέσμη, στη συνέχεια, προσεγγίζεται από επαλληλία επίπεδων

κυμάτων. Το καθένα από αυτά, έχει τιμές συνιστώσας του κυματανύσματος παράλληλης στο μαγνητικό πεδίο n_{\parallel} γύρω από μία κεντρική $n_{0\parallel}$ και αζιμούθιο φ γύρω από μία κεντρική τιμή φ_0 . Για κάθε επίπεδο κύμα (συνιστώσα της δέσμης), ισχύει η μαθηματική ανάλυση που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3. Στη συνέχεια, η συνολική προσέγγιση για το ηλεκτρικό (και το μαγνητικό) πεδίο προκύπτει από διπλό άθροισμα. Δηλαδή, αθροίζονται τα πεδία από ένα σύνολο επίπεδων κυμάτων, το καθένα με δικές του τιμές n_{\parallel} και φ . Τέλος, αφού υπολογιστούν με τον τρόπο αυτόν τα συνολικά πεδία, το χρονικά ανεξάρτητο συνολικό διάνυσμα Poynting δίνεται και πάλι από την (3.113):

$$\tilde{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\tilde{\mathbf{e}} \times \tilde{\mathbf{h}}^*\} \quad (4.2)$$

4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα σκέδασης γκαουσιανών δεσμών και συμπεράσματα

Εφαρμόζοντας την προσέγγιση της παραγράφου 4.2, επιλέγονται να παρουσιαστούν ενδεικτικά κάποια παραδείγματα αριθμητικών αποτελεσμάτων, ενώ σημειώνεται ότι η μελέτη καλύπτει ένα πολύ μεγάλο φάσμα τιμών στις εμπλεκόμενες παραμέτρους.

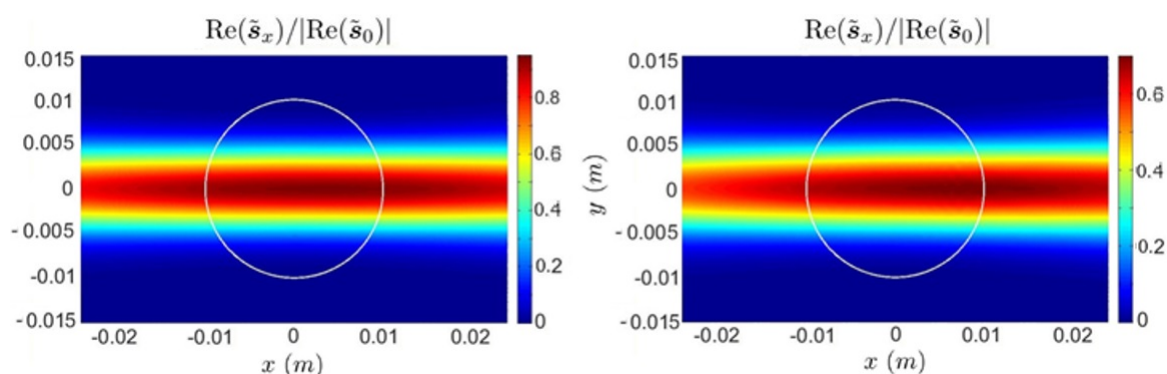
4.3.1 Διάδοση γκαουσιανών δεσμών σε πυκνότητα μικρότερη της αποκοπής

Είναι γνωστό ότι σε πλάσμα δεδομένης πυκνότητας, υπάρχει συγκεκριμένη συχνότητα αποκοπής. Τα κύματα, που έχουν συχνότητα μεγαλύτερη από την αποκοπή, μπορούν να διαδίδονται μέσα σε αυτό το μέσο, ενώ εκείνα που έχουν μικρότερη αποσβένονται ή ανακλώνται.

Από διαφορετική οπτική γωνία, κύμα συγκεκριμένης συχνότητας μπορεί να έχει ή να μην έχει τη δυνατότητα να διαδίδεται σε χώρο πλάσματος, ανάλογα με την

πυκνότητα του χώρου αυτού και την πόλωση του κύματος (αν είναι O-mode έχει διαφορετική αποκοπή από το X-mode).

Σαν πρώτο παράδειγμα της παραγράφου επιλέγεται η διάδοση γκαουσιανής δέσμης σε πλάσμα με πυκνότητα μικρότερη της αποκοπής.

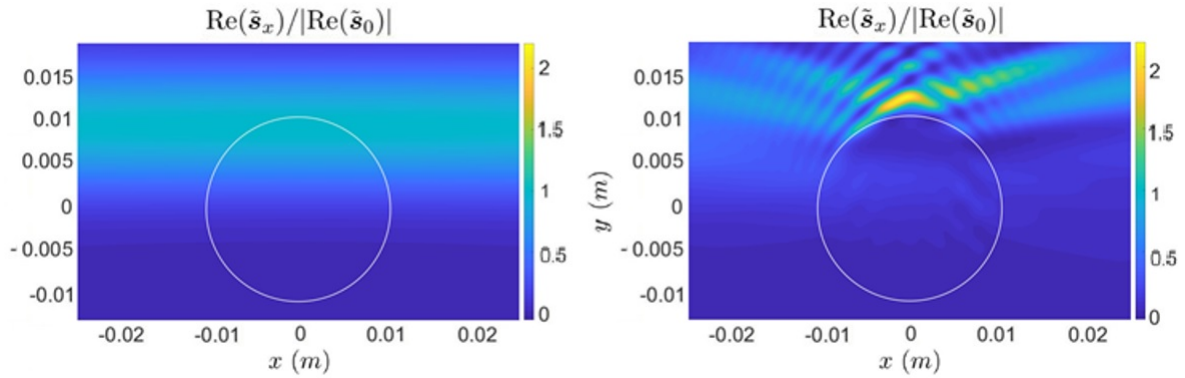


Εικόνα 4.3.1 - Συνιστώσες x - του διανύσματος Poynting κατά την εμπρόσθια διεύθυνση, συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode (αριστερά) και X-mode (δεξιά), ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , ηλεκτρονική πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος 10^{19} m^{-3} και εντός του κυλίνδρου $1.5 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$.

Τόσο στην περίπτωση του O-mode κύματος όσο και στην περίπτωση του X-mode κύματος, όταν η πυκνότητα είναι χαμηλή τα φαινόμενα σκέδασης διακρίνονται δύσκολα. Η δέσμη φαίνεται να διαπερνάει τον τυρβώδη κύλινδρο σαν αυτός να μην υπάρχει εκεί.

4.3.2 Διάδοση έικεντρων γκαουσιανών δεσμών

Στα δύο παραδείγματα της παραγράφου 4.3.1, η δέσμη προσπίπτει κεντρικά στον κύλινδρο. Στην γενική περίπτωση όμως, ο κύλινδρος βρίσκεται σε τυχαία θέση ως προς τη δέσμη. Έτσι, στην ακόλουθη προσομοίωση, υπάρχει μη μηδενική εκκεντρότητα της δέσμης, ενώ επίσης σημειώνεται ότι έχει αυξηθεί και η πυκνότητα πλάσματος σχετικά με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Για την καλύτερη κατανόηση της εικόνας, στο αριστερό μέρος απεικονίζεται η προσπίπτουσα δέσμη, ενώ το συνολικό διάνυσμα Poynting φαίνεται στο δεξιό μέρος.



Εικόνα 4.3.2 - Συνιστώσες x - του διανύσματος Poynting κατά την εμπρόσθια διεύθυνση του προσπίπτοντος (αριστερά) και του συνολικού κύματος (δεξιά), συχνότητα 170 GHz , πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , ηλεκτρονική πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος $2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ και εντός του κυλίνδρου $3 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5 \text{ T}$.

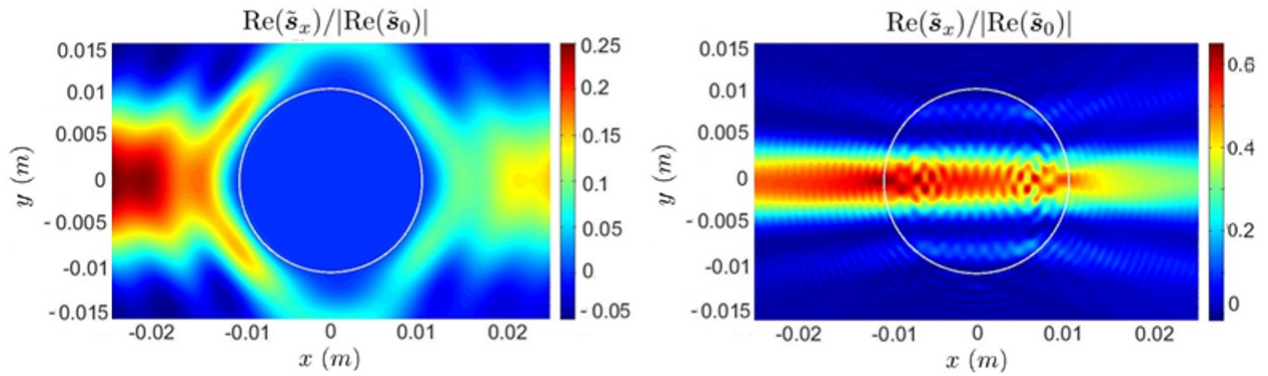
Από τα γραφήματα αυτά προκύπτει ότι τα φαινόμενα σκέδασης είναι ισχυρότερα σε περιπτώσεις μη μηδενικής εκκεντρότητας της προσπίπτουσας δέσμης ως προς τον κύλινδρο.

4.3.3 Μελέτη σκέδασης στην περιοχή της πυκνότητας αποκοπής

Όπως προαναφέρθηκε στην παράγραφο 4.3.1, υπάρχει πυκνότητα (ή συχνότητα) αποκοπής, η οποία μάλιστα διαφέρει για την περίπτωση προσπίπτοντων κυμάτων πόλωσης O-mode σε σχέση με την αντίστοιχη των κυμάτων X-mode.

Στην παρούσα παράγραφο υπάρχουν παραδείγματα που αφορούν τόσο την πόλωση προσπίπτοντος κύματος O-mode, όσο και την πόλωση X-mode, κοντά στην πυκνότητα αποκοπής. Προκειμένου να είναι πιο εύκολα κατανοητό το αποτέλεσμα, έχουν επιλεγεί μόνο περιπτώσεις κεντρικής πρόσπτωσης της δέσμης στον κύλινδρο.

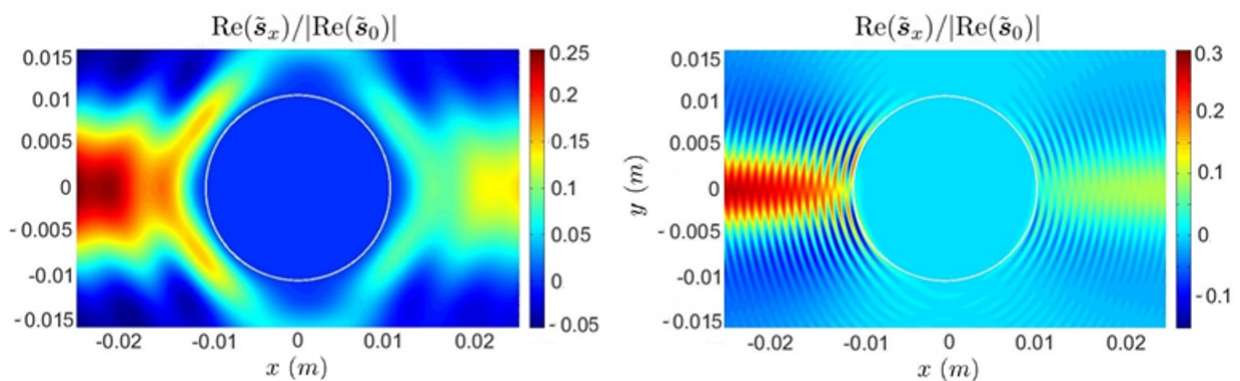
Στην Εικόνα 4.3.3.α παρουσιάζεται στο αριστερό μέρος ένα παράδειγμα σκέδασης προσπίπτοντος πολώσεως O-mode, ενώ το δεξιό μέρος αφορά πόλωση προσπίπτουσας δέσμης X-mode. Η πυκνότητα πλάσματος βρίσκεται κοντά στην περιοχή αποκοπής.



Εικόνα 4.3.3.α - Συνιστώσες x - του διανύσματος Poynting κατά την εμπρόσθια διεύθυνση για πόλωση προσπίπτουσας δέσμης O-mode (αριστερά) και X-mode (δεξιά), συχνότητα 170 GHz , ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , ηλεκτρονική πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος $3.5 \times 10^{20}\text{ m}^{-3}$ και εντός του κυλίνδρου $4.5 \times 10^{20}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$.

Στα γραφήματα αυτά φαίνεται ότι η πυκνότητα εντός του κυλίνδρου είναι τέτοια, ώστε η διάδοση ρυθμού O-mode δεν υποστηρίζεται, ενώ αντίθετα του ρυθμού X-mode είναι οριακά εφικτή.

Στην Εικόνα 4.3.3.β παρουσιάζονται και πάλι οι προηγούμενες περιπτώσεις, για αυξημένη όμως αντίθεση πυκνότητας. Η πυκνότητα πλάσματος στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι αυξημένη, ενώ στον περιβάλλοντα χώρο έχει διατηρηθεί η ίδια.



Εικόνα 4.3.3.β - Συνιστώσες x - του διανύσματος Poynting κατά την εμπρόσθια διεύθυνση για πόλωση προσπίπτουσας δέσμης O-mode (αριστερά) και X-mode (δεξιά), συχνότητα 170 GHz , ακτίνα κυλίνδρου 10 mm , ηλεκτρονική πυκνότητα περιβάλλοντος πλάσματος $3.5 \times 10^{20}\text{ m}^{-3}$ και εντός του κυλίνδρου $6.5 \times 10^{20}\text{ m}^{-3}$, κλίση μαγνητικού πεδίου 0° , μέτρο μαγνητικής επαγωγής $B = 4.5\text{ T}$.

Στα γραφήματα αυτά φαίνεται ότι η πυκνότητα εντός του κυλίνδρου είναι τέτοια, ώστε δεν επιτρέπει διάδοση ούτε ρυθμού O-mode ούτε ρυθμού X-mode.

4.4 Σύνοψη

Στο Κεφάλαιο 4 μελετήθηκε η σκέδαση γκαουσιανών δεσμών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων Electron Cyclotron (EC) $f_0 = 170 \text{ GHz}$, από μια απλή κυλινδρική συνεκτική δομή του τυρβώδους στρώματος. Για τον σκοπό αυτόν η δέσμη δημιουργήθηκε ως επαλληλία ενός πλήθους επίπεδων κυμάτων, τα οποία έχουν γειτονικές τιμές συνιστώσας του κυματανύσματος παράλληλης στο μαγνητικό πεδίο και γειτονικές τιμές στο αζιμούθιο. Το πλάτος του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε επίπεδο κύμα από αυτά πολλαπλασιάζεται με κατάλληλο συντελεστή προκειμένου να δημιουργηθεί μία γκαουσιανή δέσμη με πεπερασμένες διαστάσεις. Στη συνέχεια, έχοντας τα συνολικά πεδία της δέσμης υπολογίζεται το δiάνυσμα Poynting.

5 Σκέδαση επίπεδων κυμάτων και γκαουσιανών δεσμών ραδιοκυμάτων LH από απλή κυλινδρική συνεκτική δομή του τυρβώδους στρώματος

5.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 3 μελετήθηκε η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών επίπεδων κυμάτων συχνότητας EC (Electron Cyclotron) 170 GHz από τυρβώδεις κυλινδρικές συνεκτικές δομές που βρίσκονται στις παρυφές του θερμοπυρηνικού πλάσματος, ενώ στο Κεφάλαιο 4 η μελέτη αυτή επεκτάθηκε και σε περιπτώσεις γκαουσιανών δεσμών που προσεγγίζονται από ένα πλήθος τέτοιων επίπεδων κυμάτων. Όπως προαναφέρθηκε όμως, εκτός από τα κύματα EC χρησιμοποιούνται στην Τεχνολογία της Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης εξίσου και τα ραδιοκύματα μικρότερων συχνοτήτων LH (Lower Hybrid), της τάξης των 4.5 GHz . Παρόλο που η μαθηματική θεωρητική ανάλυση δεν αλλάζει με την αλλαγή της συχνότητας, τα φαινόμενα σκέδασης που λαμβάνουν χώρα διαφέρουν ποιοτικά. Αυτό είναι εύκολα κατανοητό, καθώς ένα συγκεκριμένο εμπόδιο (τυρβώδης σχηματισμός) δεδομένων διαστάσεων μπορεί να έχει καθοριστική σημασία στη διάδοση ενός ραδιοκύματος με μήκος κύματος της τάξης των διαστάσεων του εμποδίου, ενώ στη διάδοση ενός ραδιοκύματος χαμηλότερων συχνοτήτων (και επομένως μεγαλύτερου μήκους κύματος) αναμένεται να έχει μικρότερη σημασία. Έτσι, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται προσομοιώσεις που αφορούν την περιοχή συχνοτήτων των ραδιοκυμάτων LH, προκειμένου να καλυφθούν και τέτοιες περιπτώσεις. Επίσης, εισάγεται και η έννοια της απορρόφησης του κύματος κατά τη διάδοση στο μέσο, φαινόμενο το οποίο είχε αγνοηθεί στα προηγούμενα Κεφάλαια [26].

5.2 Σκέδαση επίπεδων ραδιοκυμάτων LH από κύλινδρο

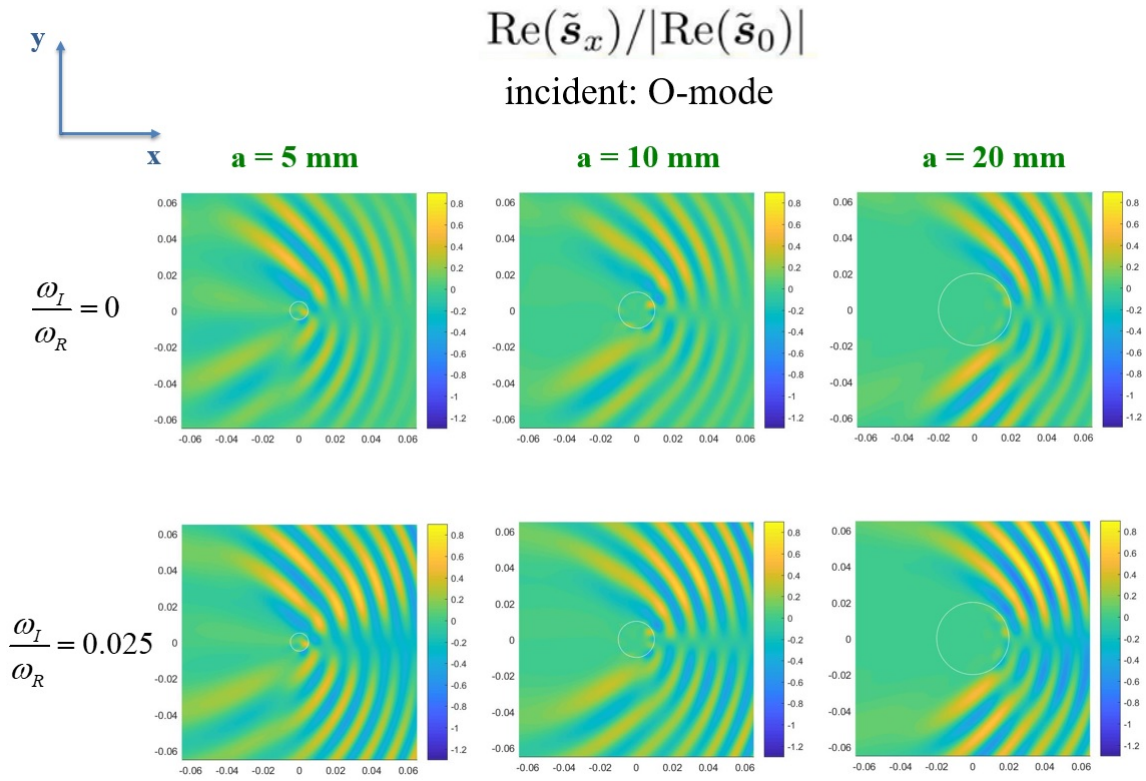
Όπως εξηγήθηκε στην εισαγωγή του παρόντος Κεφαλαίου, η μαθηματική πορεία για τη μελέτη σκέδασης επίπεδων ραδιοκυμάτων LH είναι η ίδια με εκείνη, που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3 της σκέδασης επίπεδων ραδιοκυμάτων EC. Ωστόσο, υπάρχουν ποιοτικές διαφορές στη σκέδαση ραδιοκυμάτων LH, καθώς αυτά έχουν πολύ μεγαλύτερο μήκος κύματος και έτσι επηρεάζονται με διαφορετικό τρόπο από εμπόδια διαστάσεων της ίδιας τάξης μεγέθους. Επιπλέον της ανάλυσης του Κεφαλαίου 3, στο παρόν κεφάλαιο λαμβάνεται υπόψη και η απορρόφηση του κύματος από το μέσο διάδοσης. Αυτό γίνεται προσθέτοντας στη συχνότητα και το κυματόνισμα και ένα φανταστικό μέρος [26], [27]:

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \quad (5.1)$$

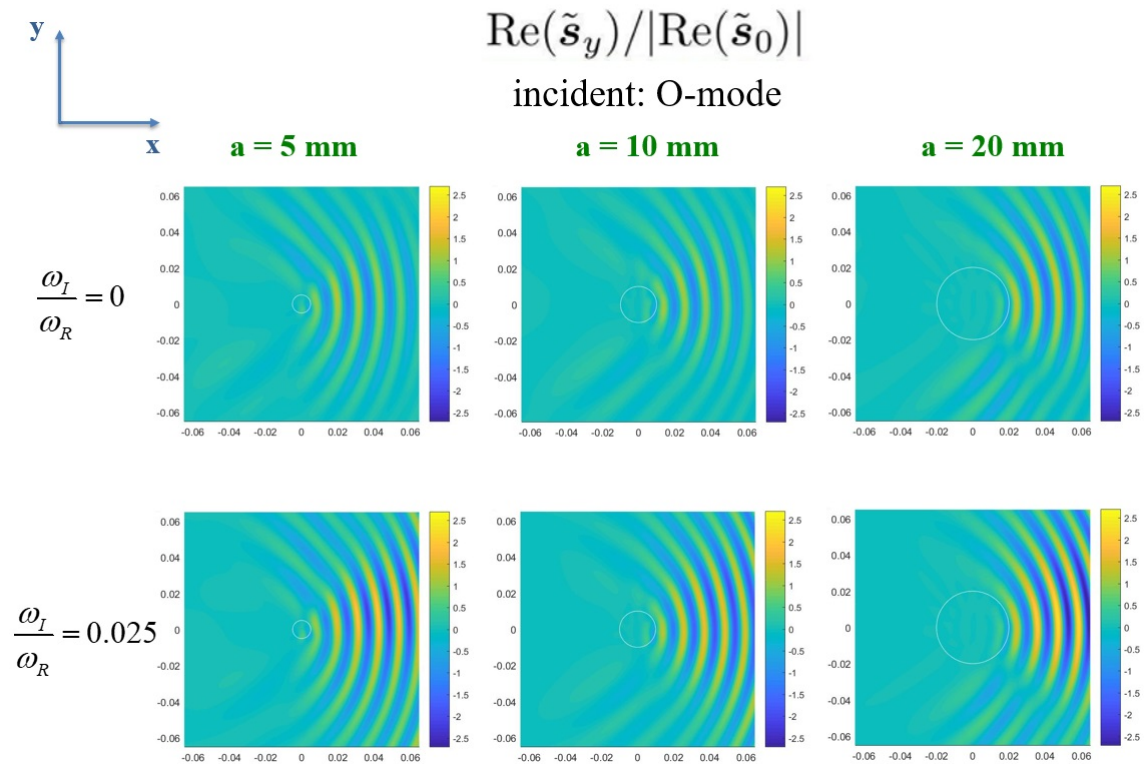
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I \quad (5.2)$$

Στις σχέσεις (5.1) και (5.2) οι δείκτες "R" και "I" χρησιμοποιούνται για να συμβολίσουν τα φανταστικά και τα πραγματικά, αντίστοιχα μέρη.

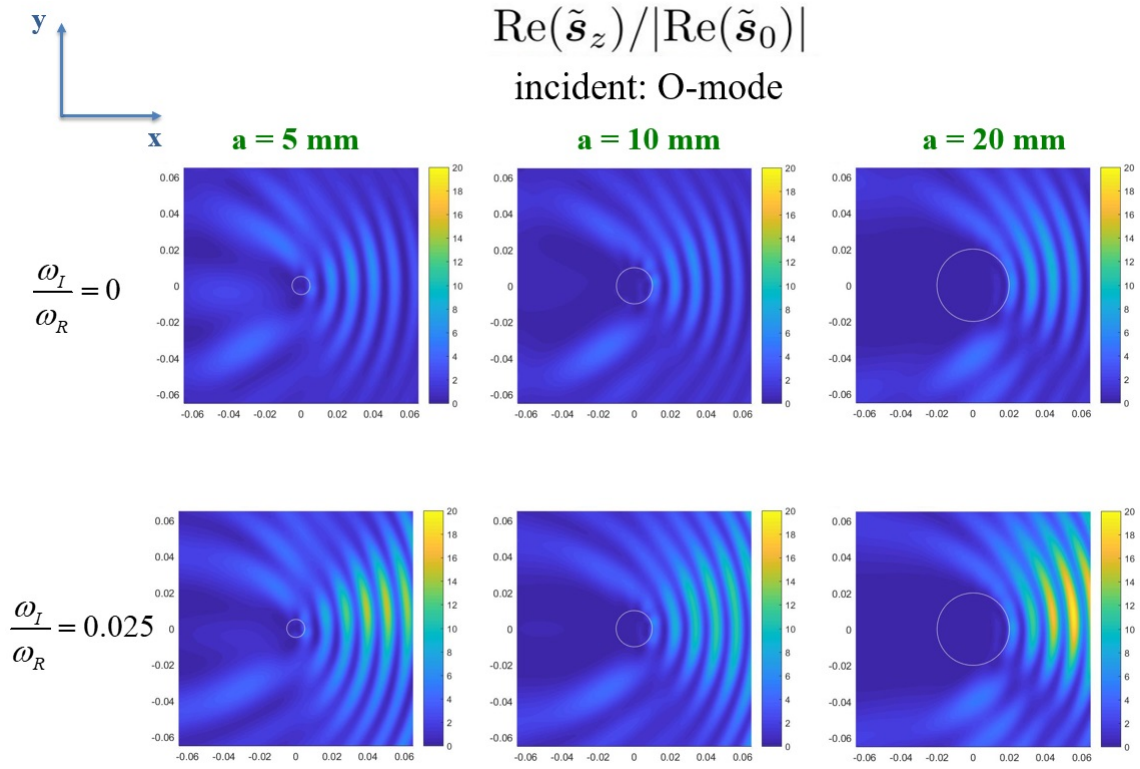
Ακολουθώντας την ανάλυση του Κεφαλαίου 3 και τις προσθήκες της παρούσας παραγράφου 5.2, προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα για τις συνιστώσες του διανύσματος Poynting για τρεις περιπτώσεις διαφορετικών διαστάσεων των τυρβώδων κυλίνδρων και δύο διαφορετικές τιμές της απορρόφησης, τόσο για πολώσεις προσπίπτοντος κύματος O-mode, όσο και για πολώσεις προσπίπτοντος κύματος X-mode:



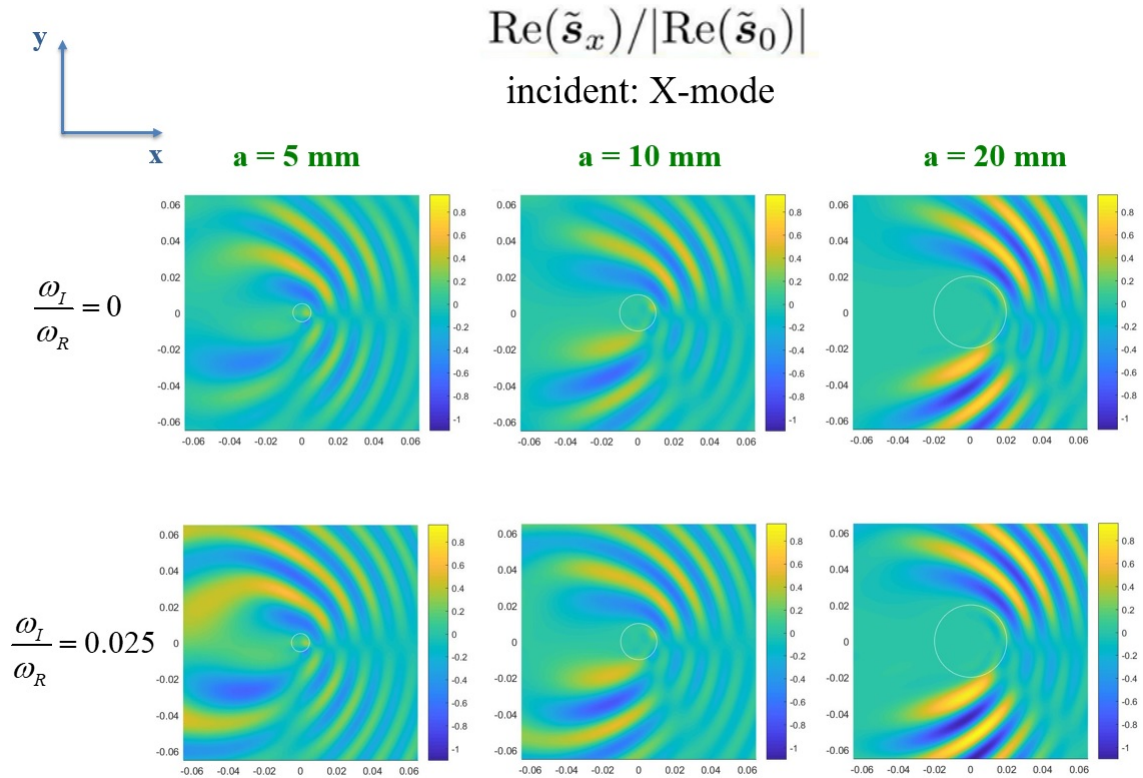
Εικόνα 5.2.1 - $\tilde{\mathbf{s}}_x$ για πόλωση O-mode, $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, $a = 10 \text{ mm}$ (αριστερά), 10 mm (κέντρο) και 20 mm (δεξιά), πυκνότητα 10^{19} m^{-3} εκτός και $1.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ εντός, $B = 5.5 \text{ T}$



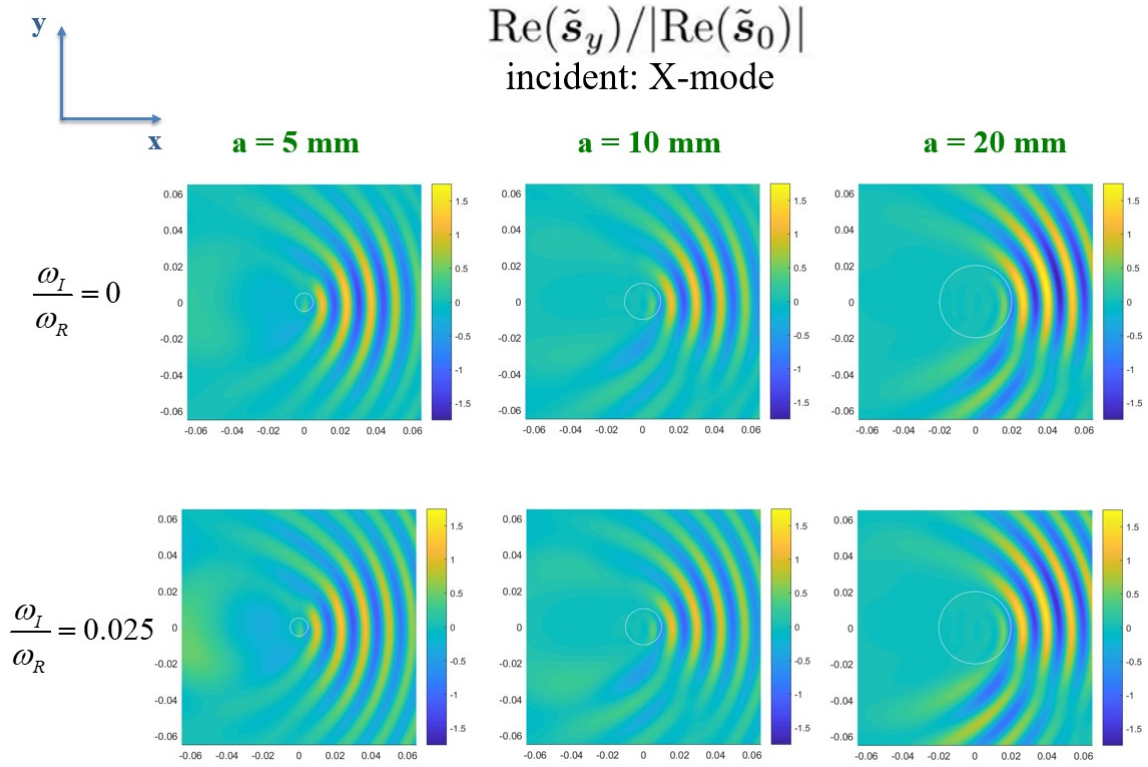
Εικόνα 5.2.2 - $\tilde{\mathbf{s}}_y$ για πόλωση O-mode, $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, $a = 10 \text{ mm}$ (αριστερά), 10 mm (κέντρο) και 20 mm (δεξιά), πυκνότητα 10^{19} m^{-3} εκτός και $1.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ εντός, $B = 5.5 \text{ T}$



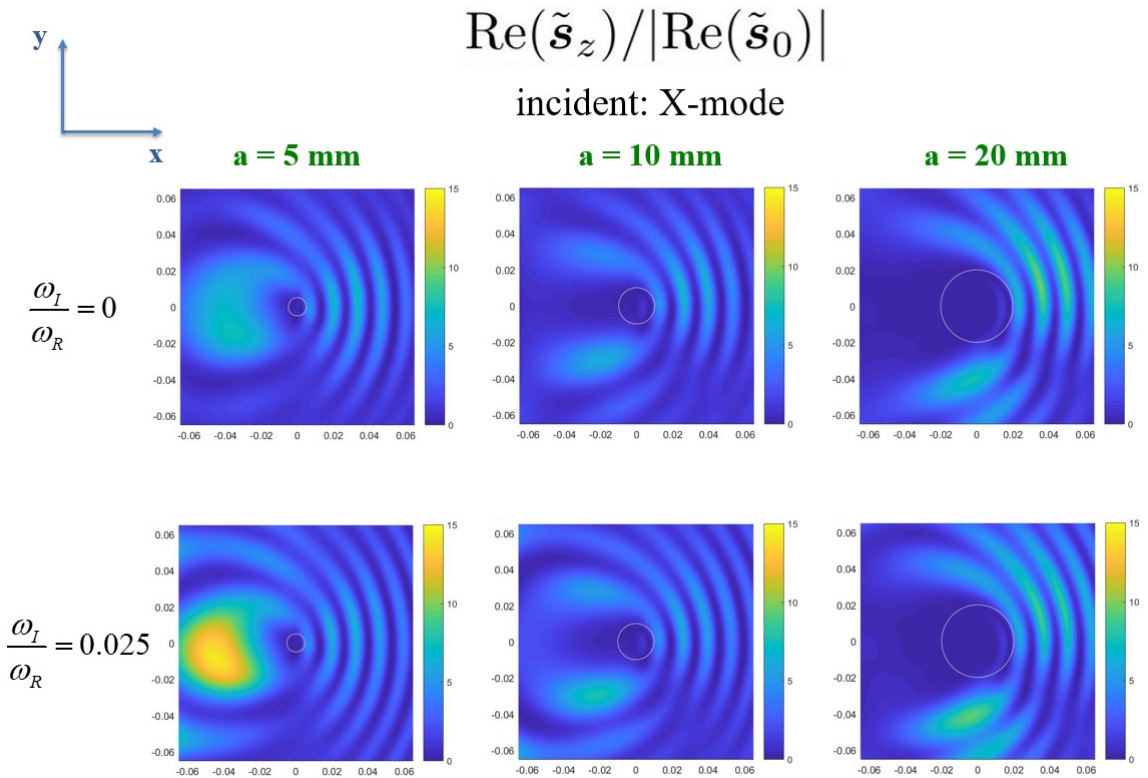
Εικόνα 5.2.3 - $\tilde{\mathbf{s}}_z$ για πόλωση O-mode, $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, $a = 10 \text{ mm}$ (αριστερά), 10 mm (κέντρο) και 20 mm (δεξιά), πυκνότητα 10^{19} m^{-3} εκτός και $1.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ εντός, $B = 5.5 \text{ T}$



Εικόνα 5.2.4 - $\tilde{\mathbf{s}}_x$ για πόλωση X-mode, $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, $a = 10 \text{ mm}$ (αριστερά), 10 mm (κέντρο) και 20 mm (δεξιά), πυκνότητα 10^{19} m^{-3} εκτός και $1.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ εντός, $B = 5.5 \text{ T}$



Εικόνα 5.2.5 - $\tilde{\mathbf{s}}_y$ για πόλωση X-mode, $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, $a = 10 \text{ mm}$ (αριστερά), 10 mm (κέντρο) και 20 mm (δεξιά), πυκνότητα 10^{19} m^{-3} εκτός και $1.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ εντός, $B = 5.5 \text{ T}$



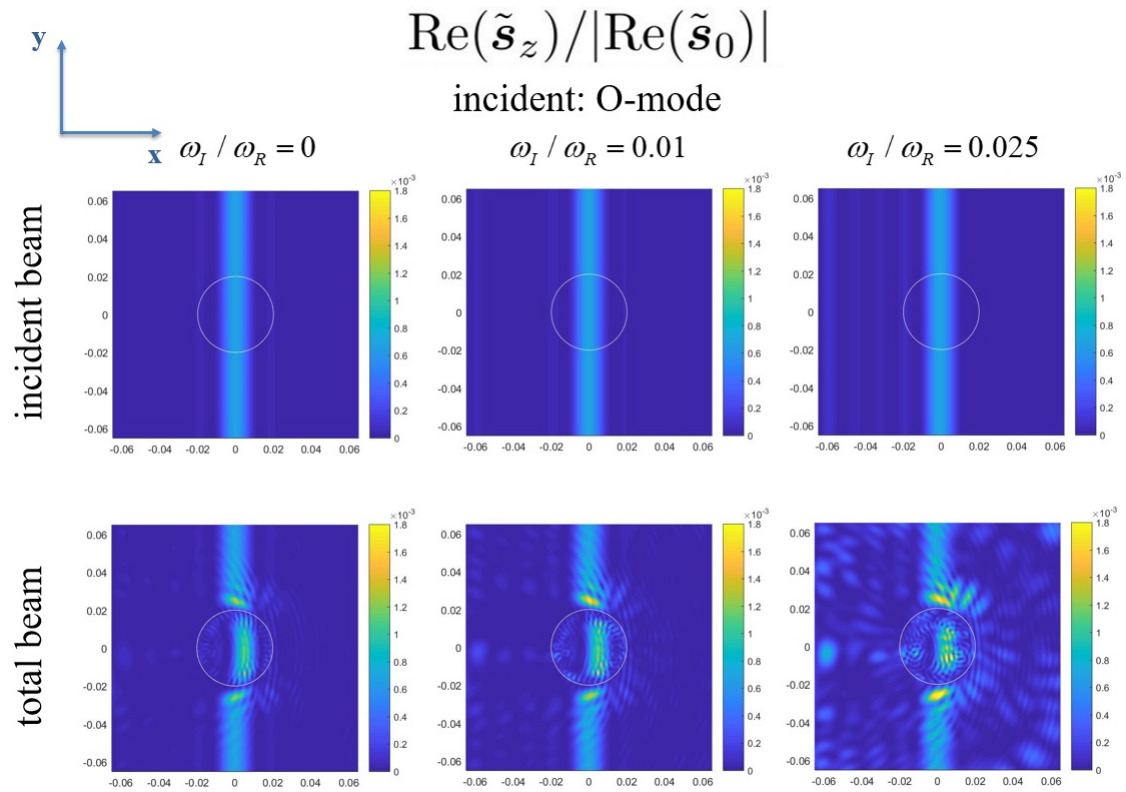
Εικόνα 5.2.6 - $\tilde{\mathbf{s}}_z$ για πόλωση X-mode, $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, $a = 10 \text{ mm}$ (αριστερά), 10 mm (κέντρο) και 20 mm (δεξιά), πυκνότητα 10^{19} m^{-3} εκτός και $1.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ εντός, $B = 5.5 \text{ T}$

Από τα γραφήματα αυτά προκύπτει ότι τα φαινόμενα σκέδασης γίνονται εντονότερα με την αύξηση της ακτίνας του κυλίνδρου, τόσο για τις περιπτώσεις πόλωσης ρυθμού O-mode όσο και για εκείνες ρυθμού X-mode. Επιπλέον, τα φαινόμενα αυτά φαίνονται να ενισχύονται από την παρουσία απορρόφησης.

5.3 Σκέδαση γκαουσιανών δεσμών ραδιοκυμάτων LH από κύλινδρο

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αντίστοιχη μαθηματική πορεία με αυτήν, που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη σκέδασης γκαουσιανών δεσμών ραδιοκυμάτων EC στο Κεφάλαιο 4, μελετούνται περιπτώσεις σκέδασης γκαουσιανών δεσμών ραδιοκυμάτων LH. Κάθε μία τέτοια δέσμη στην παρούσα παράγραφο έχει προσεγγιστεί από ένα πλήθος επτά διαφορετικών επίπεδων ραδιοκυμάτων με διαφορετική τιμή της παράλληλης στο μαγνητικό πεδίο συνιστώσας του κυματανύσματος n_{\parallel} , γύρω από μία κεντρική $n_{0\parallel}$. Η παρούσα μελέτη αφορά πόλωση προσπίπτουσας δέσμης O-mode και τρεις διαφορετικές τιμές απορρόφησης. Στα διαγράμματα, που ακολουθούν, απεικονίζεται η συνιστώσα x του διανύσματος Poynting τόσο της προσπίπτουσας δέσμης, όσο και οι συνολικές τιμές της σε κάθε περιοχή (εντός και εκτός του κυλίνδρου). Σημειώνεται ότι οι x και y συνιστώσες έχουν παρόμοια μορφή, αλλά λαμβάνουν πολύ μικρότερες τιμές και συνεπώς παραλείπονται.

Από την Εικόνα 5.2.7 προκύπτει και πάλι ότι τα φαινόμενα σκέδασης ενισχύονται από την παρουσία απορρόφησης. Μάλιστα, όσο σημαντικότερη είναι η απορρόφηση, τόσο υψηλότερη είναι και η ενίσχυση.



Εικόνα 5.2.7 - $\tilde{\mathbf{s}}_x$ για πόλωση O-mode, $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, $a = 20 \text{ mm}$, πυκνότητα 10^{19} m^{-3} εκτός και $1.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ εντός, $B = 5.5 \text{ T}$, προσπίπτουσα δέσμη (επάνω) και συνολική (κάτω), η απορρόφηση αυξάνει προς τα δεξιά

5.4 Σύνοψη

Στο Κεφάλαιο 5 μελετήθηκε η σκέδαση επίπεδων κυμάτων συχνοτήτων Lower Hybrid (LH) $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, αλλά και γκαουσιανών δεσμών τέτοιων κυμάτων από κύλινδρο του τυρβώδους στρώματος. Για αυτόν τον σκοπό η δέσμη δημιουργήθηκε ως επαλληλία ενός πλήθους επτά επίπεδων κυμάτων, τα οποία έχουν γειτονικές τιμές συνιστώσας του κυματανύσματος παράλληλης στο μαγνητικό πεδίο. Στη μελέτη αυτή λήφθηκαν υπόψη και φαινόμενα απορρόφησης του κύματος από το μέσο διάδοσης.

6 Σύνοψη διδακτορικής διατριβής και μελλοντικοί στόχοι

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετήθηκαν φαινόμενα σκέδασης στις παρυφές του πλάσματος σε συνθήκες αντιδραστήρα, όπου επιχειρείται Ελεγχόμενη Θερμοπυρηνική Σύντηξη. Η Τεχνολογία της Σύντηξης αυτής, έχει ως στόχο την εκμετάλλευση των τεράστιων ποσών ενέργειας που απελευθερώνονται κατά τη συνένωση δύο ελαφριών πυρήνων σε εποικοδομητικούς σκοπούς, όπως είναι η ηλεκτροδότηση. Επικουρικό έργο στη διαδικασία αυτήν έχουν ραδιοκύματα διάφορων συχνοτήτων, που έχουν συγκεκριμένους σκοπούς στο εσωτερικό του πλάσματος. Τα ραδιοκύματα αυτά όμως εμποδίζονται να επιτύχουν τους στόχους τους, καθώς σκεδάζονται σε εξωτερικά στρώματα στις παρυφές του πλάσματος από ανομοιογένειες που σχηματίζονται αυθόρμητα λόγω των συνθηκών που επικρατούν στο εσωτερικό του αντιδραστήρα (π.χ. υψηλή βαθμίδωση θερμοκρασίας και πίεσης). Για τον λόγο αυτόν, τα φαινόμενα σκέδασης είναι χρήσιμο να μελετηθούν σε βάθος προκειμένου και να αντιμετωπιστούν καταλλήλως.

Στο Κεφάλαιο 2 μελετήθηκε η διάδοση και η σκέδαση κυμάτων σε διαδοχικά παράλληλα στρώματα μαγνητισμένου πλάσματος διαφορετικής πυκνότητας. Ο διηλεκτρικός ταυυστής απαιτείται για μία τέτοια μελέτη, ενώ κυρίαρχη είναι και η σημασία που έχει η έκφρασή του στο κατάλληλο σύστημα αναφοράς, προκειμένου να αξιοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Το Scrape-Off Layer μπορεί να μελετηθεί σαν ένα σύνθετο στρώμα που παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο περιοχές πλάσματος διαφορετικής ηλεκτρονικής πυκνότητας (ένα αραιότερο προς τις παρυφές του πλάσματος και ένα πυκνότερο προς τον πυρήνα του). Σε αυτήν την περίπτωση το SOL έχει συγκεκριμένο ενεργό διηλεκτρικό ταυυστή, ο οποίος υπολογίζεται από τον διηλεκτρικό ταυυστή εντός των ανομοιογενειών, τον διηλεκτρικό ταυυστή του περιβάλλοντος χώρου τους και του ποσοστού όγκου του

στρώματος SOL που καταλαμβάνουν οι ανομοιογένειες αυτές. Η μελέτη διάδοσης και σκέδασης πολλαπλών στρωμάτων μπορεί επίσης να προσεγγίσει για μεγάλο πλήθος στρωμάτων τη συνεχή μεταβολή πυκνότητας. Μία τέτοια αντιμετώπιση είναι ρεαλιστικότερη, καθώς στην πραγματικότητα η μεταβολή της πυκνότητας δεν συμβαίνει ποτέ ακαριαία, αλλά με συνεχή τρόπο. Ακόμα, στην πράξη υπάρχει συχνά αυξημένη γεωμετρική πολυπλοκότητα. Η διεπαφή ανάμεσα στο περιβάλλον πλάσμα και μία τυρβώδη ανομοιογένεια δεν είναι λεία, αλλά η επιφάνεια της ανομοιογένειας εμφανίζει ανάγλυφο με κάποια τραχύτητα. Όταν η τραχύτητα στο ανάγλυφο αυτό είναι περιοδική, η τραχειά διεπαφή ανάμεσα στα δύο μέσα διάδοσης μπορεί να διαμεριστεί σε ένα πλήθος παράλληλων στρωμάτων. Το κάθε στρώμα από αυτά έχει διαφορετική πυκνότητα και δικό του ενεργό διηλεκτρικό τανυστή, ο οποίος υπολογίζεται με κατάλληλη ανάλυση Fourier.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετήθηκε θεωρητικό μοντέλο πλήρους κύματος, που περιγράφει τη διαδικασία σκέδασης επίπεδων RF κυμάτων από κυλινδρικό νηματίο, που ενσωματώνεται σε περιβάλλον πλάσμα διαφορετικής ηλεκτρονικής πυκνότητας, για την κυματική συχνότητα EC των 170 GHz . Το πλάσμα είναι μαγνητισμένο από ένα εξωτερικά επιβαλλόμενο στατικό μαγνητικό πεδίο με την κύρια συνιστώσα του να είναι ευθυγραμμισμένη με τον άξονα του κυλινδρικού νηματίου, ενώ επίσης υπάρχει και μη αμελητέα συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου με διαφορετικό προσανατολισμό. Ενώ στην περίπτωση του πλήρως ευθυγραμμισμένου κυλινδρικού νηματίου με το συνολικό μαγνητικό πεδίο η συνιστώσα του κυματανύσματος k_{\parallel} κατά μήκος των γραμμών του μαγνητικού πεδίου διατηρείται, στην περίπτωση που υπάρχει και μη ευθυγραμμισμένη με τον άξονα του κυλίνδρου συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, διατηρείται μόνο η παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου συνιστώσα k_z του κυματανύσματος, η οποία είναι αυτή που έχει οριστεί από το προσπίπτον κύμα. Η σκέδαση γίνεται πολύ εντονότερη παρουσία πολοειδούς συνιστώσας μαγνητικού πεδίου, όπου δηλαδή το συνολικό μαγνητικό πεδίο

βρίσκεται σε μη μηδενική γωνία κλίσης ϕ_0 ως προς τον άξονα του κυλίνδρου. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στη διέγερση επιπλέον ρυθμών στο εσωτερικό του κυλινδροειδούς νηματίου, λόγω του γεγονότος ότι τώρα υπάρχει ένα πλήθος παράλληλων στο μαγνητικό πεδίο κυματανυσμάτων που δεν συμπίπτουν με εκείνο του προσπίπτοντος (το οποίο στην περίπτωση του ευθυγραμμισμένου κυλίνδρου, συμβαίνει). Η ακτίνα του κυλίνδρου μπορεί να είναι μικρότερη, μεγαλύτερη ή περίπου ίδιας διάστασης συγκρινόμενη με το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κύματος. Όσο μεγαλύτερων διαστάσεων είναι η κυλινδρική ανομοιογένεια, η οποία αποτελεί και το εμπόδιο στην διάδοση του κύματος, τόσο εντονότερα είναι και τα φαινόμενα σκέδασης. Όσον αφορά τη σχετική αντίθεση της ηλεκτρονικής πυκνότητας μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού του κυλίνδρου, αυτή ποικίλλει και μπορεί να λαμβάνει τιμές εντός ενός ευρέος διαστήματος. Οι χωρικές διακυμάνσεις στη ροή της ισχύος αυξάνουν, καθώς η σχετική αντίθεση ηλεκτρονικής πυκνότητας μεταξύ του εσωτερικού του κυλίνδρου και του περιβάλλοντος πλάσματος αυξάνει. Όσο η πυκνότητα στο εσωτερικό του κυλίνδρου γίνεται μεγαλύτερη από του περιβάλλοντος πλάσματος, τα φαινόμενα σκέδασης γίνονται εντονότερα. Όταν από την άλλη, η σχετική αντίθεση μεταξύ των δύο ηλεκτρονικών πυκνοτήτων τείνει στο μηδέν, τότε το κυλινδρικό νημάτιο δεν μπορεί να διακριθεί από το περιβάλλον πλάσμα και, όπως είναι αναμενόμενο, τα φαινόμενα σκέδασης τείνουν να εξαφανιστούν. Επιπλέον, η διαδικασία σκέδασης έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά, όταν το προσπίπτον κύμα είναι πόλωσης O-mode από όταν είναι πόλωσης X-mode.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετήθηκε η σκέδαση γκαουσιανών δεσμών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων Electron Cyclotron (EC) $f_0 = 170 \text{ GHz}$ από μία απλή κυλινδρική συνεκτική δομή του τυρβώδους στρώματος. Για αυτόν τον σκοπό η δέσμη δημιουργήθηκε ως επαλληλία ενός πλήθους επίπεδων κυμάτων, τα οποία έχουν γειτονικές τιμές συνιστώσας του κυματανύσματος παράλληλης στο μαγνητικό

πεδίο και γειτονικές τιμές στο αζιμούθιο. Το πλάτος του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε επίπεδο κύμα από αυτά πολλαπλασιάζεται με κατάλληλο συντελεστή προκειμένου να δημιουργηθεί μία γκαουσιανή δέσμη με πεπερασμένες διαστάσεις. Στην συνέχεια, έχοντας τα συνολικά πεδία της δέσμης υπολογίζεται το διάνυσμα Poynting.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετήθηκε η σκέδαση επίπεδων κυμάτων συχνοτήτων Lower Hybrid (LH) $f_0 = 4.5 \text{ GHz}$, αλλά και γκαουσιανών δεσμών τέτοιων κυμάτων από κύλινδρο του τυρβώδους στρώματος. Για αυτόν τον σκοπό η δέσμη δημιουργήθηκε ως επαλληλία ενός πλήθους επτά επίπεδων κυμάτων, τα οποία έχουν γειτονικές τιμές συνιστώσας του κυματανύσματος παράλληλης στο μαγνητικό πεδίο. Στη μελέτη αυτή λήφθηκαν υπόψη και φαινόμενα απορρόφησης του κύματος από το μέσο διάδοσης.

Τέλος, σαν ερευνητικοί στόχοι για το μέλλον, αναφέρονται ενδεικτικά οι εξής: Μία πιο πλήρης μελέτη που να αφορά τη σκέδαση των επίπεδων LH ραδιοκυμάτων σε μαγνητισμένο πλάσμα, μία μελέτη που να επικεντρώνεται σε σκέδαση δεσμών ραδιοκυμάτων τόσο EC όσο και LH εντός του ίδιου μέσου διάδοσης και να συγκρίνει τις συμπεριφορές τους και μία εκτεταμένη μελέτη η οποία να αφορά τη διάδοση και τη σκέδαση κυμάτων σε μαγνητισμένο πλάσμα παρουσία απορρόφησης.

7 Γλωσσάριο τεχνικών όρων

Scrape-Off Layer (SOL): Τυρβώδες στρώμα στις παρυφές του πλάσματος

Lower Hybrid waves (LH): Ραδιοκύματα στην περιοχή συχνοτήτων 4.5 GHz

Electron Cyclotron waves (EC): Ραδιοκύματα στην περιοχή συχνοτήτων 170 GHz

blobs: Τυρβώδεις δομές σφαιρικού/ελλειψοειδούς εκ περιστροφής σχήματος

filaments: Τυρβώδεις δομές κυλινδρικού/νηματοειδούς σχήματος

O-mode: Κύματα με πόλωση ηλεκτρικού πεδίου παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο

X-mode: Κύματα με πόλωση ηλεκτρικού πεδίου όχι παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο

Tokamak: Θερμοπυρηνικός αντιδραστήρας σύντηξης κλειστού τοροειδούς σχήματος (κυλινδρικού δακτυλίου)

RF κύματα: Ηλεκτρομαγνητικά ραδιοκύματα

8 Βιβλιογραφία

8.1 Αναφορές

[1] Müller, H. W., Hirsch, M. 2005 Notes from IPP Summer University for Plasma Physics (September 26-30 2005), Greifswald, Germany.

[2] Wesson, J., 2004 Tokamaks (3rd edition). New York, USA, Clarendon Press - Oxford.

[3] Sihvola, A., 1996 Homogenization of a dielectric mixture with anisotropic spheres in anisotropic background, Sweden, Institute of Technology (Department of Electrosience, Electromagnetic Theory, Lund)

[4] Gradshteĭn, I. S., Ryžik, I. M., 1980 Table of Integrals, Series, and Products. New York, USA, Academic Press Inc.

[5] Berreman, D. W., 1972 Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4x4-Matrix Formulation, Journal of the Optical Society of America, 62:4, 502-510.

[6] Grulke, O., Terry, J. L., LaBombard, B., Zweben, S. J. 2006 Radially propagating fluctuation structures in the scrape-off layer of Alcator C-Mod. Physics of Plasmas 13, 012306-1-012306-7.

[7] Prisiazhniuk, D., Krämer-Flecken, A., Conway, G. D., Happel, T., Lebschy, A., Manz, P., Nikolaeva, V., Stroth, U. and the ASDEX Upgrade Team, 2017 Magnetic field pitch angle and perpendicular velocity measurements from

multi-point time-delay estimation of poloidal correlation reflectometry. *Plasma Physics and Controlled Fusion* 59, 025013-1–025013-15.

[8] Taylor, G., Efthimion, P. C., LeBlanc, B. P., Carter, M. D., Caughman, J. B., Wilgen, J. B., Preinhaelter, J., Harvey, R. W., Sabbagh, S. A., 2005 Efficient coupling of thermal electron Bernstein waves to the ordinary electromagnetic mode on the National Spherical Torus Experiment. *Physics of Plasmas* 12, 052511-1–052511-7.

[9] Grulke, O., Terry, J. L., Cziegler, I., LaBombard, B., Garcia, O. E., 2014 Experimental investigation of the parallel structure of fluctuations in the scrape-off layer of Alcator C-Mod. *Nuclear Fusion* 54, 043012-1–043012-12.

[10] Krasheninnikov, S. I. 2001 On scrape off layer plasma transport. *Physics Letters A* 283, 368-370.

[11] Myra, J. R., D' Ippolito, D. A., Stotler, D. P., Zweben, S. J., LeBlanc, B. P., Menard, J. E., Maqueda, R. J., Boedo, J. 2006 Blob birth and transport in the tokamak edge plasma: Analysis of imaging data. *Physics of Plasmas* 13, 092509-1-092509-10.

[12] Myra, J. R., Russell, D. A., D' Ippolito, D. A. 2006 Collisionality and magnetic geometry effects on tokamak edge turbulent transport. I. A two-region model with application to blobs. *Physics of Plasmas* 13, 112502-1-112502-9.

[13] Pigarov, A. Yu., Krasheninnikov, S. I., Rognlien, T. D. 2012 Time-dependent 2- D modeling of edge plasma transport with high intermittency

due to blobs. *Physics of Plasmas* 19, 072516-1-072516-13.

[14] Zweben, S. J., Boedo, J. A., Grulke, O., Hidalgo, C., LaBombard, B., Maqueda, R. J., Scarin, P., Terry, J. L. 2007 Edge turbulence measurements in toroidal fusion devices. *Plasma Physics and Controlled Fusion* 49, S1-S23.

[15] Ram, A. K., Hizanidis, K. 2016 Scattering of radio frequency waves by cylindrical density filaments in tokamak plasmas. *Physics of Plasmas* 23, 022504-1-022504-17.

[16] Ioannidis, Z. C., Ram, A. K., Hizanidis, K., Tigelis, I. G. 2017 Computational studies on scattering of radio frequency waves by density filaments in fusion plasmas. *Physics of Plasmas* 24, 102115-1-102115-13.

[17] Ram, A. K., Hizanidis, K., Kominis, Y. 2013 Scattering of radio frequency waves by blobs in tokamak plasmas. *Physics of Plasmas* 20, 056110-1-056110-10.

[18] Stix, T. H. 1992 *Waves in plasmas*. New York, USA, American Institute of Physics.

[19] Ram, A. K., Hizanidis, K. 2013 Scattering of electromagnetic waves by a plasma sphere embedded in a magnetized plasma. *Radiation Effects and Defects in Solids* 168, 759-775.

[20] Hizanidis, K., Ram, A. K., Kominis, Y., Tsironis, C. 2010 FokkerPlanck description of the scattering of radio frequency waves at the plasma edges.

[21] Stratton, J. A. 1941 Electromagnetic theory. New York, USA, McGraw Hill.

[22] Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1972 Handbook of mathematical functions. New York, USA, Dover.

[23] Griffiths, D. J. 1999 Introduction to Electrodynamics (3rd edition). New Jersey, USA, Pearson.

[24] S. I. Valvis, A. K. Ram, K. Hizanidis, P. Papagiannis, A. Papadopoulos, A. Zisis, I. G. Tigelis and E. Glytsis, “Scattering of radio frequency waves by cylindrical filaments with general orientation relative to the magnetic field”, Journal of Plasma Physics vol. 84, 745840604 (2018)

[25] 17th European Fusion Theory Conference (October 9-12, 2017, Athens, Greece) P2-16 – “Scattering of radio frequency waves by cylindrical blobs in the plasma edge in tokamaks” S. I. Valvis, P. Papagiannis, A. D. Papadopoulos, K. Hizanidis, E. N. Glytsis, A. Zisis, I. G. Tigelis, A. K. Ram

[26] 46th European Physical Society Conference on Plasma Physics (July 8-12, 2019, University of Milano- Bicocca, Milan, Italy) P5.4015 – “Scattering of lower hybrid radio frequency waves by cylindrical turbulent structures in the plasma edge in tokamaks” S. I. Valvis, K. Hizanidis, A. K. Ram, A. Papadopoulos, E. Glytsis

[27] Rémi Dumont. Waves in Plasmas: Lecture notes. Master. France. 2017, pp.117. <cel-01463091>

8.2 Δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά

[1] S. I. Valvis, A. K. Ram, K. Hizanidis, P. Papagiannis, A. Papadopoulos, A. Zisis, I. G. Tigelis and E. Glytsis, “Scattering of radio frequency waves by cylindrical filaments with general orientation relative to the magnetic field”, *Journal of Plasma Physics* vol. 84, 745840604 (2018)

[2] A. D. Papadopoulos, E. N. Glytsis, A. K. Ram, S. I. Valvis, P. Papagiannis, K. Hizanidis and A. Zisis, “Diffraction of radio frequency waves by spatially modulated interfaces in the plasma edge in tokamaks”, accepted in *Journal of Plasma Physics* for publication (02/2019)

8.3 Συμμετοχές σε διεθνή συνέδρια

[1] 46th European Physical Society Conference on Plasma Physics (July 8-12, 2019, University of Milano- Bicocca, Milan, Italy) P5.4015 – “Scattering of lower hybrid radio frequency waves by cylindrical turbulent structures in the plasma edge in tokamaks” S. I. Valvis, K. Hizanidis, A. K. Ram, A. Papadopoulos, E. Glytsis

[2] 46th European Physical Society Conference on Plasma Physics (July 8-12, 2019, University of Milano- Bicocca, Milan, Italy) P2.1087 – “Scattering of radio frequency waves by plasma turbulence” A. K. Ram, K. Hizanidis, A. Papadopoulos, S. I. Valvis, A. Zisis, I. G. Tigelis

[3] 27th IAEA Fusion Energy Conference (October 22-27, 2018, Mahatma Mandir Conference Centre, Gandhinagar, India) TH/P4-12 – “Theoretical and Computational Studies on the Scattering of Radio Frequency Waves by Fluctuations” A. Ram, Z. Ioannidis, K. Hizanidis, F. Bairaktaris, A. Papadopoulos, S.-I. Valvis, A. Zisis, I. Tigelis

[4] 45th European Physical Society Conference on Plasma Physics (July 2-6, 2018, Žofín Palace, Prague, Czech Republic) P5.4005 – “RF beam scattering by cylindrical filaments and interfacial density fluctuations” S. I. Valvis, A. Zisis, A. Papadopoulos, P. Papagiannis, A. K. Ram, K. Hizanidis, I. G. Tigelis, E. Glytsis

[5] 59th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Plasma Physics (October 23-27, 2017, Milwaukee, Wisconsin, U.S.A.) TP11.00056 – “Propagation of radio frequency waves through density fluctuations” S. I. Valvis, P. Papagiannis, A. D. Papadopoulos, K. Hizanidis, E. N. Glytsis, F. Bairaktaris,

A. Zisis, I. G. Tigelis, A. K. Ram

[6] 17th European Fusion Theory Conference (October 9-12, 2017, Athens, Greece) P2-16 – “Scattering of radio frequency waves by cylindrical blobs in the plasma edge in tokamaks” S. I. Valvis, P. Papagiannis, A. D. Papadopoulos, K. Hizanidis, E. N. Glytsis, A. Zisis, I. G. Tigelis, A. K. Ram

[7] 17th European Fusion Theory Conference (October 9-12, 2017, Athens, Greece) P1-12 – “Propagation of radio frequency waves through spatially modulated interfaces in the plasma edge in tokamaks” A. D. Papadopoulos, E. N. Glytsis, S. I. Valvis, P. Papagiannis, K. Hizanidis, A. Zisis, I. G. Tigelis, A. K. Ram

[8] 58th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Plasma Physics (October 31 - November 4, 2016, San Jose, California, U.S.A.) PP10.00028 – “Propagation of radio frequency waves through fluctuations in the scrape-off layer modeled by electromagnetic homogenization” Hizanidis K., Bairaktaris F., Valvis S.-I., Ram A.

[9] 43rd European Physical Society Conference on Plasma Physics (July 4-8, 2016, University of Leuven - KU Leuven, Leuven, Belgium) P5.066 - “Scattering by spherical blobs in plasma: a discrete eigenfunction approach” Zouros G., Kokkorakis G., Hizanidis K., Valvis S.-I., Roumeliotis J., Ram A.

[10] 43rd European Physical Society Conference on Plasma Physics (July 4-8, 2016, University of Leuven - KU Leuven, Leuven, Belgium) P5.065 - “Electromagnetic homogenization in a blob-populated scrap-off layer of magnetically confined plasmas” Bairaktaris F., Hizanidis K., Ram A., Valvis S.-I.

[11] 57th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Plasma Physics (November 16-20, 2015, Savannah, Georgia, U.S.A.) NP12.00062 – “Multiple scattering of radio frequency waves by blobs: homogenization of a mixture of blobs and the Waterman-Truell approach” Hizanidis K., Bairaktaris F., Valvis S.-I., Ram A.

[12] 42nd European Physical Society Conference on Plasma Physics (June 22-26, 2015, IPFN in IST of University of Lisbon, Lisbon, Portugal) P1.187 - “Multiple scattering of radio frequency waves by blobs: Homogenization of a mixture of blobs and the Waterman-Truell approach” Hizanidis K., Valvis S.-I., Bairaktaris F., Zouros G., Kokkorakis G., Roumeliotis J., Ram A.