



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

Εύρωστος Σχεδιασμός - Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με Χρήση Μοντέλων Μειωμένης Τάξης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΟΥΣΧΟΥΡΟΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ

Επιβλέπων: Βησσαρίων Παπαδόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2020

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στο Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικής Τεχνολογίας του Τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, υπό την επίβλεψη του Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Βησσαρίων Παπαδόπουλου.

Τον ευχαριστώ θερμά για την καθοδήγησή του στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος, συνολικά για την επίβλεψή του, τις υποδείξεις και τις ιδέες του καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας, καθώς ήταν η αφορμή να έρθω σε επαφή και βαθύτερη τριβή με το αντικείμενο της Υπολογιστικής Μηχανικής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης, τον υποψήφιο διδάκτορα Γιάννη Καλογερά για τη μεγάλη βοήθειά του, την μεγάλη επιμονή και διάθεση να με βοηθήσει τόσο σε θεωρητικό υπόβαθρο, όσο και στο κομμάτι προγραμματισμού του κώδικα, συνολικά για τη συνεργασία μαζί του.

Ακόμα, θέλω να ευχαριστήσω το Εργαστήριο Ναυπηγικής Τεχνολογίας και τον υποψήφιο διδάκτορα Ηλία Μπιλάλη, για την παραχώρηση της υπολογιστικής του υποδομής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου. Τους είμαι ευγνώμων για τη στήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και τους τελευταίους αυτούς μήνες της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, διερευνάται η υλοποίηση του Εύρωστου Σχεδιασμού – Robust Design στην Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με τη χρήση Μοντέλων Μειωμένης Τάξης. Σε πρώτο στάδιο, μελετάται η χρήση τεχνικών μειωμένων μοντέλων στο πρόβλημα της Βελτιστοποίησης Τοπολογίας, πριν συνεχίσουμε στο στοχαστικό πρόβλημα του Robust Design.

Για την επίλυση των φορέων σε Ηλεκτρονικό Υπολογιστή, χρησιμοποιείται η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων στο πρόγραμμα Matlab, λόγω και της ικανότητας του προγράμματος για οπτική απεικόνιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Το πρόβλημα της Βελτιστοποίησης Τοπολογίας, συναντάται σε πολλά προβλήματα σχεδιασμού για τον μηχανικό, σε πολλούς τομείς της παραγωγής, στις κατασκευές και την βιομηχανία και σε κατασκευές ή φορείς κάθε κλίμακας. Τα ιδιαίτερα πλεονεκτήματα του σχεδιασμού αυτού αφορούν την μόνωση του φορέα εξ' ολοκλήρου με βάση τα μεγέθη της αντικειμενικής συνάρτησης και τους περιορισμούς και όχι απλά την επιλογή των κατάλληλων μεγεθών σε υφιστάμενες γεωμετρίες.

Εδώ, κάνουμε χρήση της μεθόδου SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Η βελτιστοποίηση υλοποιείται με διαδοχικές επιλύσεις του φορέα, ενώ σε κάθε βήμα υπολογίζονται οι νέες παράμετροι της μεταβλητής σχεδιασμού, εδώ είναι η σχετική πυκνότητα κάθε στοιχείου. Η εύρεση του νέου σχεδιασμού σε κάθε βήμα, γίνεται με την μέθοδο Optimality Criteria και όχι με μεθόδους μαθηματικού προγραμματισμού.

Στο παραπάνω πρόβλημα, λόγω των συνεχών επιλύσεων του φορέα, εκμεταλλευόμαστε τις τεχνικές των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης (Reduced Order Modelling). Ουσιαστικά, προβάλλοντας το σύστημα εξισώσεων του πλήρους φορέα σε μία μειωμένη βάση προσεγγίζουμε με ακρίβεια την πραγματική επίλυση – πλήρη λύση του μοντέλου κερδίζοντας ωστόσο σε υπολογιστικό κόστος, το οποίο είναι μεγάλο ακόμα και για τους συνηθισμένους φορείς.

Μελετάμε τις μεθόδους κατασκευής της μειωμένης βάσης, είτε πριν την επίλυση του προβλήματος με τις μεθόδους POD – SVD, είτε με την κατασκευή της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση, ενώ με τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt προσεγγίζουμε την ανάγκη εμπλουτισμού - ενημέρωσης της μειωμένης βάσης, όταν πλέον η λύση του μειωμένου μοντέλου δεν είναι ακριβής.

Ακριβώς αυτήν την ταχύτητα στην επίλυση των μειωμένων μοντέλων εκμεταλλευόμαστε για τον Εύρωστο Σχεδιασμό – Robust Design, στον οποίο εκτός από τις διαδοχικές επιλύσεις στα βήματα της βελτιστοποίησης, επιλύουμε και δοκιμές Monte Carlo για να προσεγγίσουμε τις αβεβαιότητες στο σχεδιασμό. Στο πρόβλημα Βελτιστοποίησης Τοπολογίας, η έννοια του Εύρωστου Σχεδιασμού αφορά την εύρεση εκείνου του σχεδιασμού, ώστε για μια ορισμένη μεταβολή των παραμέτρων του προβλήματος να μην υπάρξει σημαντική απόκλιση στη συμπεριφορά του φορέα.

Ύστερα από την ανάπτυξη του θεωρητικού μέρους για κάθε ένα από τα παραπάνω αντικείμενα, παρουσιάζεται η υλοποίηση των μεθόδων σε κώδικα Matlab και η

ανάπτυξη εφαρμογών, ενός προβόλου και μίας αμφιέριστης δοκού τύπου γέφυρας, προτού καταλήξουμε στα συμπεράσματα της εργασίας.

ABSTRACT

In the present thesis, the implementation of Robust Design in Topology Optimization using Reduced Order Models is investigated. Firstly, we study the use of Reduced Order Modelling techniques in Topology Optimization, before we approach the Robust Design stochastic problem.

For the static analysis of the structures on the computer, the Finite Element Method is used in Matlab, also due to the program's capability to visualize the numerical results.

The problem of Topology Optimization is found in many engineering design problems, in many areas of production, in construction and industry, in structures of any scale. The particular advantages of this design, relate to the fact that the whole formation of the structure is based on the contents of the objective function and the problem limitations and not just on the choice of the appropriate shape and size in existing geometries.

In this thesis, we use the SIMP method (Solid Isotropic Material with Penalization). The optimization is implemented by sequential FEM analysis, while in each step the new parameters of the design variable, here the relative density of each element, are calculated. The update of the design at every step, is calculated by the Optimality Criteria method and not by mathematical programming methods.

To the above problem, due to the repeated structure analysis, we can take advantage of the Reduced Order Modelling techniques. Essentially, by projecting the structure's full equation system on a reduced basis, we precisely approach the real - complete solution of the full model and at the same time we are saving on computational cost, which is great even for usual structures.

We study the methods of constructing the reduced basis, either before the problem's solution, POD-SVD methods, or *on the fly*, during the optimization process, while with the Gram-Schmidt orthonormalization, we approach the need of enrichment - update of the reduced base, if the reduced model solution isn't accurate enough.

This reduction in computational cost due to the reduced models, is a strong advantage for implementing these techniques to the Robust Design problem, where except for the sequential optimization steps, we run a Monte Carlo simulation, as to approach the uncertainties. In Topology Optimization, the concept of Robust Design, is about finding that structure's design, so that for a certain change in the problem's parameters (uncertainty), there is no important variation in the structure's behaviour.

After developing the theoretical part for each one of the above objects, we present the methods' implementation in Matlab code and also develop two case studies, one of a cantilever beam and one of a bridge type structure (MBB beam) , before we arrive at the conclusions of the study.

Περιεχόμενα

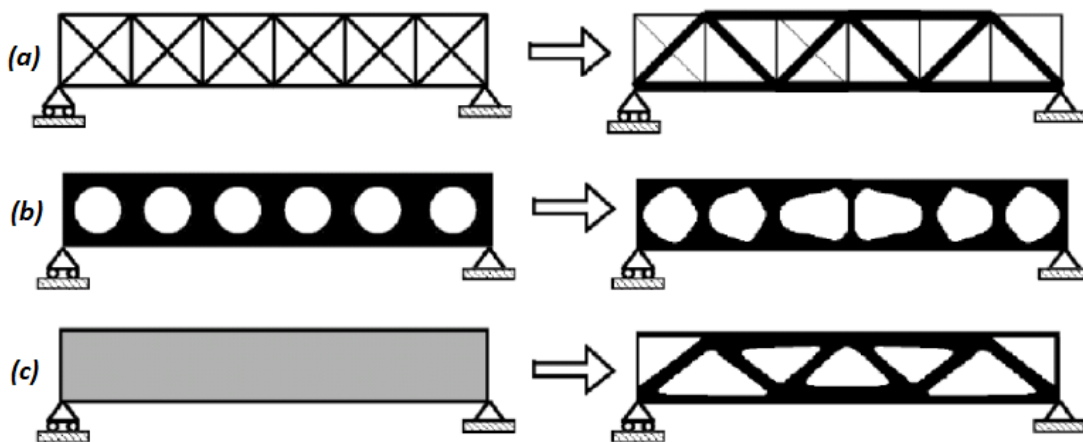
| | |
|--|----|
| ΠΕΡΙΛΗΨΗ..... | 5 |
| ABSTRACT..... | 7 |
| 1. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ..... | 10 |
| 1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ SIMP ΣΤΗΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ..... | 12 |
| 2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ..... | 18 |
| 2.1 REDUCED ORDER MODELLING ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ..... | 19 |
| 2.1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ POD – SVD - ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΤΙΜΕΣ..... | 19 |
| 2.1.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ..... | 23 |
| 2.2 ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ - ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ..... | 26 |
| 3. ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ - ROBUST DESIGN..... | 29 |
| 4. ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ – ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ..... | 33 |
| 5. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΣΕ MATLAB..... | 35 |
| 5.1 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ SIMP..... | 35 |
| 5.2 REDUCED ORDER MODELLING – ΜΕΘΟΔΟΣ POD – SVD..... | 40 |
| 5.3 REDUCED ORDER MODELLING – ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΚΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ Η ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ..... | 43 |
| 5.4 REDUCED ORDER MODELLING – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ..... | 45 |
| 5.5 REDUCED ORDER MODELLING – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ Η ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ..... | 46 |
| 5.6 ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ – ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ..... | 47 |
| 5.7 ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ – ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ..... | 50 |
| 6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – CASE STUDIES..... | 51 |
| 6.1 ΠΡΟΒΟΛΟΣ..... | 51 |
| 6.1.1. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ – SIMP..... | 52 |
| 6.1.2. ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD..... | 53 |
| 6.1.3. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ...53 | |
| 6.1.4. ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ Η ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟ ΒΑΣΗΣ 54 | |

| | | |
|--------|---|----|
| 6.1.5. | ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ Ή ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ | 58 |
| 6.2 | ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ | 60 |
| 6.2.1. | ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ – SIMP | 61 |
| 6.2.2. | ΜΕΘΟΔΟΣ POD – SVD..... | 61 |
| 6.2.3. | ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ | 62 |
| 6.2.4. | ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟ ΒΑΣΗΣ | 63 |
| 6.2.5. | ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ..... | 64 |
| 6.2.6. | ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ – ROBUST DESIGN..... | 66 |
| 6.2.7. | ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ – ROBUST DESIGN ΜΕ ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ | 67 |
| 7. | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ | 69 |
| | ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ | 72 |

1. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ορίζεται ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης μίας ή πολλών μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία υπόκειται σε συγκεκριμένους περιορισμούς.

Στα προβλήματα μηχανικής και στη Μελέτη στα έργα Πολιτικού Μηχανικού την έννοια της βελτιστοποίησης την συναντάμε συνήθως ως βελτιστοποίηση μεγέθους-(a) ή σχήματος-(b). Όσον αφορά, για παράδειγμα, την εξοικονόμηση των δομικών υλικών, διαστασιολόγηση οπλισμού ή διατομών σε μεταλλικές κατασκευές (βελτιστοποίηση μεγέθους – size optimization), τη διάταξη και την τυπική διατομή των μελών ενός δικτύωματος (βελτιστοποίηση σχήματος – shape optimization) κ.ά.

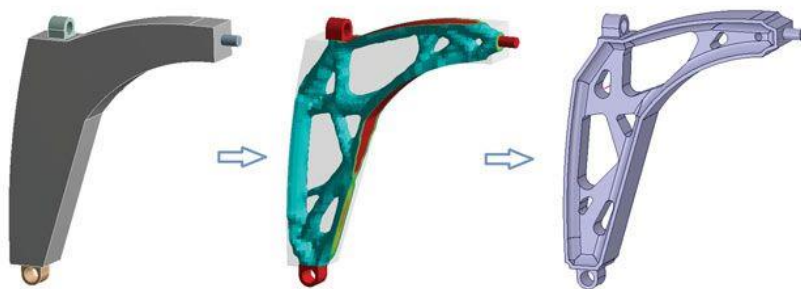


Αμφιέρειστη δοκός: (a) Βελτιστοποίηση Μεγέθους - (b) Βελτιστοποίηση Σχήματος - (c) Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

Η βελτιστοποίηση τοπολογίας-(c) (topology optimization) είναι μία μαθηματική μέθοδος που βελτιστοποιεί τη διάταξη του υλικού σε δεδομένο χώρο σχεδιασμού (design domain). Τα φορτία και οι οριακές συνθήκες είναι δεδομένα, ενώ ο στόχος είναι η μεγιστοποίηση της απόδοσης της κατασκευής, ελαχιστοποίηση της ενδοσιμότητας του φορέα, σε ένα δεδομένο ποσοστό του χώρου σχεδιασμού, για συγκεκριμένο, δηλαδή, όγκο της κατασκευής. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας είναι ένα ισχυρό εργαλείο σχεδιασμού πολλών προβλημάτων μηχανικής και συνδέει την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία με τον μαθηματικό προγραμματισμό. Οι βασικές διαφορές μεταξύ της βελτιστοποίησης τοπολογίας και της βελτιστοποίησης σχήματος ή μεγέθους, οφείλονται στην διαφορετική αρχική διαμόρφωση αλλά και στην επιλογή των μεταβλητών. Οι διαφορές αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε σημαντικές βελτιώσεις της δομικής απόδοσης του μοντέλου, αφού η βελτιστοποίηση τοπολογίας μορφώνει εξολοκλήρου τον φορέα, δεν βελτιστοποιεί απλά διατομές ή γενικότερα μεγέθη σε δεδομένη διάταξη.

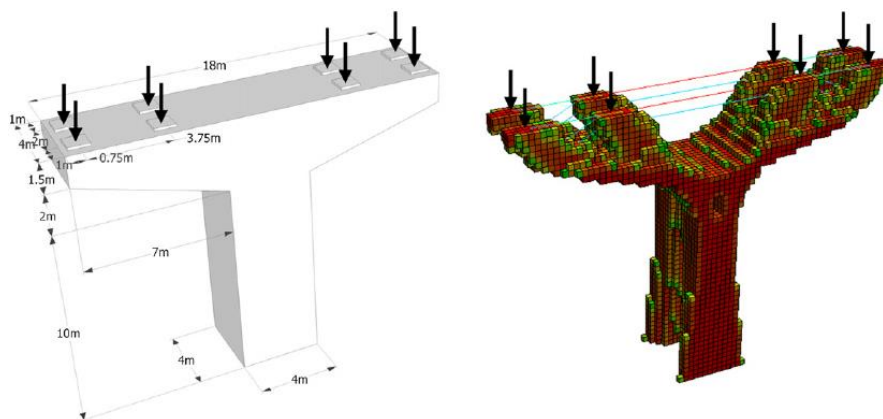
Χρησιμοποιώντας την βελτιστοποίηση τοπολογίας, ο μηχανικός μπορεί να συλλάβει τον ιδανικό σχεδιασμό για τις δεδομένες απαιτήσεις και τους περιορισμούς. Έτσι, στην αρχή της διαδικασίας σχεδιασμού, αποφεύγουμε αστοχίες ως προς τη σύλληψη του γενικού σχεδιασμού, μειώνουμε το χρόνο ανάπτυξής του, ενώ βελτιώνεται η απόδοση της διάταξής μας. Συχνά, τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης μπορεί να είναι αρκετά σύνθετα για να υλοποιηθούν με συμβατικές μεθόδους, γι' αυτό και ο προτεινόμενος σχεδιασμός μπορεί να προσαρμοσθεί για μεγαλύτερη ευκολία στην κατασκευή.

Η είσοδος νέων τεχνολογιών στην παραγωγή, μαζί και με τις υψηλές απαιτήσεις για τα σύγχρονα προϊόντα, καθιστούν την βελτιστοποίηση τοπολογίας ένα σύγχρονο και αποδοτικό εργαλείο σχεδιασμού σε πολλούς κλάδους, στη Βιομηχανία, στις Κατασκευές. Είτε δηλαδή μιλάμε για μεγαλύτερες κατασκευές σε εργοτάξια, οικοδομικά έργα και μεταλλικούς σκελετούς, είτε για βιομηχανικά προϊόντα, εξαρτήματα μικρότερου μεγέθους, για μεγαλύτερες μηχανές, αεροσκάφη κ.ά. Αντίστοιχα, το ερευνητικό έργο δεν είναι τυχαίο που έχει καταλήξει σε πολλά εμπορικά προγράμματα σχεδιασμού, ή ότι τροφοδοτεί λύσεις για υφιστάμενα προβλήματα στην παραγωγή.



Βελτιστοποίηση Τοπολογίας και τελικός σχεδιασμός μηχανολογικού εξαρτήματος

Το πεδίο της Υπολογιστικής Μηχανικής, η επίλυση δηλαδή προβλημάτων μηχανικής χρησιμοποιώντας υπολογιστικές τεχνικές, εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες του υπολογιστή, δίνει την απάντηση στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης τοπολογίας, συνολικά σχεδόν στα προβλήματα ανάλυσης και σχεδιασμού/βελτιστοποίησης που αφορούν τον μηχανικό.



Βελτιστοποίηση Τοπολογίας σε βάθρο γέφυρας

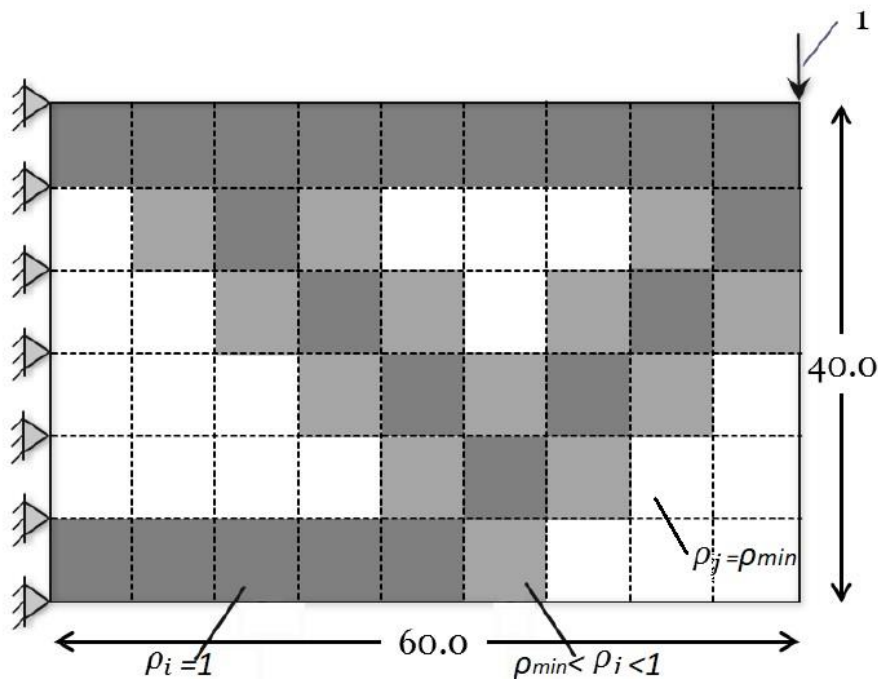
1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ SIMP ΣΤΗΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

Μία συνήθης προσέγγιση στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης τοπολογίας, είναι η μέθοδος SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Η μέθοδος προβλέπει τη βέλτιστη κατανομή του υλικού στο δεδομένο χώρο σχεδιασμού, για δοσμένες φορτίσεις, κατασκευαστικούς περιορισμούς και απαιτήσεις στη συμπεριφορά του φορέα.

Η προσέγγιση γίνεται με διακριτοποίηση του χώρου σχεδιασμού σε πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων, σε ιστροπικές στερεές μικροδομές (isotropic solid microstructures). Η βελτιστοποίηση σχήματος στην πιο γενική της μορφή, θα ήταν ο προσδιορισμός του: αν σε κάθε σημείο του χώρου σχεδιασμού υπάρχει υλικό ή όχι, σύμφωνα με τον Bendsoe (1989).

Κάθε στοιχείο είναι είτε «γεμάτο» υλικό, για τις περιοχές εκείνες που απαιτούν υλικό, είτε «άδειο», για τις περιοχές που αφαιρούμε υλικό, αντιπροσωπεύοντας το κενό. Για κάθε στοιχείο, δηλαδή, εκχωρείται η τιμή $x_e = 1$, όπου απαιτείται υλικό και η τιμή $x_e = 0$, όπου το υλικό αφαιρείται.

Η εισαγωγή, ωστόσο, μιας συνεχούς συνάρτησης κατανομής της σχετικής πυκνότητας, αποφεύγει τη δυαδική, on-off, φύση του προβλήματος. Για κάθε στοιχείο, η τιμή της σχετικής πυκνότητας κυμαίνεται μεταξύ μια ελάχιστης τιμής x_{min} και της μονάδας, που επιτρέπει την ύπαρξη ενδιάμεσων τιμών στα στοιχεία (πορώδες στοιχεία). Αυτή η ελάχιστη τιμή x_{min} , προσδίδει αριθμητική σταθερότητα στην επίλυση της μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων.

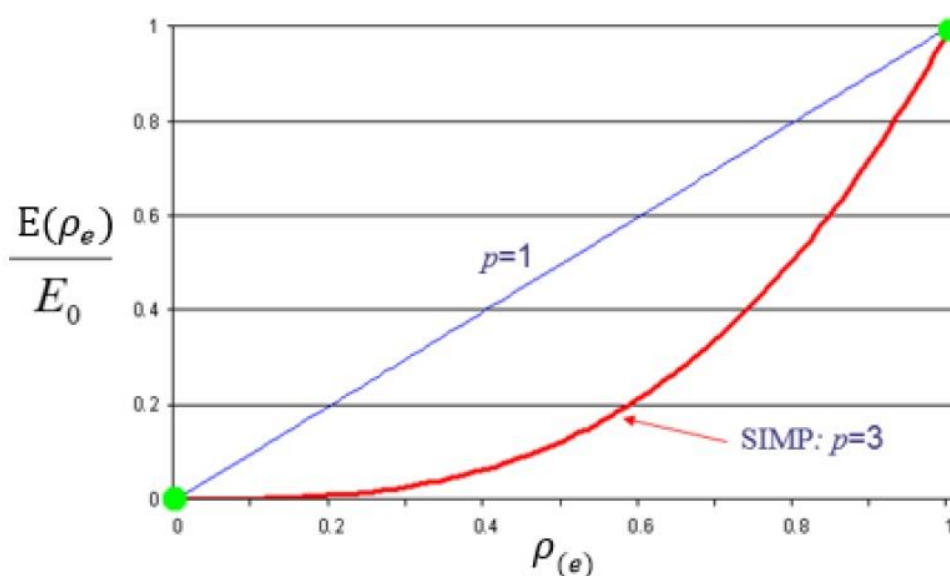


Βελτιστοποίηση Τοπολογίας φορέα προβόλου - Μέθοδος SIMP

Οι ιδιότητες του κάθε στοιχείου του χώρου σχεδιασμού θεωρούνται σταθερές, ενώ η σχετική πυκνότητα του κάθε στοιχείου είναι μεταβλητή. Το μητρώο-διάνυσμα x των σχετικών πυκνοτήτων των στοιχείων του φορέα είναι διακριτό, και αποτελεί τη μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος.

Όπως η σχετική πυκνότητα του στοιχείου κυμαίνεται με συνέχεια στο υλικό, έτσι κυμαίνεται και το Μέτρο Ελαστικότητας. Για κάθε στοιχείο e , η σχέση μεταξύ της σχετικής πυκνότητας του υλικού του στοιχείου και του μέτρου ελαστικότητας του ισότροπου υλικού E_0 , δίνεται από τον νόμο της δύναμης:

$$E(x_e) = x_e^p E_0 \quad (1)$$



Ο παράγοντας της ποινής p απομειώνει την συνεισφορά των στοιχείων με τις ενδιάμεσες τιμές σχετικής πυκνότητας, στην συνολική δυσκαμψία του φορέα. Κατευθύνει, έτσι, την βελτιστοποίηση σε λύσεις με στοιχεία είτε συμπαγή, $x_e = 1$, είτε «κενά» στοιχεία, $x_e = x_{min}$. Αριθμητικά πειράματα υποδεικνύουν ως κατάλληλη τιμή, την τιμή $p = 3$.

Η μείωση του μέτρου ελαστικότητας του στοιχείου οδηγεί στη μείωση της δυσκαμψίας του στοιχείου. Στη μέθοδο SIMP, το ολικό μητρώο δυσκαμψίας μεταβάλλεται ως:

$$K_{SIMP(x)} = \sum_{e=1}^N [x_{min} + (1 - x_{min})x_e^p] K_e \quad (2)$$

Όπου K_e , το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου, x_{min} η ελάχιστη τιμή της σχετικής πυκνότητας, p ο παράγοντας της ποινής, N ο αριθμός των στοιχείων του χώρου σχεδισμού.

Η αντικειμενική συνάρτηση συνήθως αφορά, τη μεγιστοποίηση της συνολικής δυσκαμψίας του φορέα ή την ελαχιστοποίηση της ενδοσιμότητας για δεδομένο ποσό αφαίρεσης υλικού.

Η ενδοσιμότητα (compliance) είναι μέτρο της συνολικής ευλγισίας ή ελαστικότητας της κατασκευής, το αντίστροφο της δυσκαμψίας. Η συνολική ενδοσιμότητα είναι το άθροισμα της ελαστικής-δυναμικής ενέργειας για κάθε στοιχείο. Ελαχιστοποίηση της ενδοσιμότητας, c , ισοδυναμεί με μεγιστοποίηση της συνολικής δυσκαμψίας.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας με τη μέθοδο SIMP, για την ελαχιστοποίηση της ενδοσιμότητας του φορέα, μπορεί επομένως να διατυπωθεί μαθηματικά, ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x : c(x) = U^T K U = \sum_{e=1}^N (x_e)^p u_e^T k_0 u_e \\ \\ \text{subject to:} \\ \\ \frac{V(x)}{V_0} = f \\ \\ K U = F \\ \\ 0 < x_{min} \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (3)$$

Όπου U και F είναι τα καθολικά διανύσματα μετακινήσεων και δυνάμεων αντίστοιχα, K το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα, u_e και k_e το διάνυσμα μετακινήσεων και το μητρώο δυσκαμψίας του κάθε στοιχείου αντίστοιχα. Το x είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδισμού, x_{min} ένα μη μηδενικό μητρώο ελάχιστων σχετικών πυκνοτήτων, N είναι ο αριθμός των στοιχείων που διακριτοποιούν το χώρο σχεδισμού, p είναι η δύναμη της ποινής (συνήθως $p = 3$), $V(x)$ και V_0 είναι ο όγκος του υλικού του φορέα και ο όγκος του χώρου σχεδισμού αντίστοιχα και f είναι το απαιτούμενο κλάσμα του όγκου.

Κατά τη διάρκεια κάθε επανάληψης, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης διεξάγει ανάλυση ευαισθησίας για την αξιολόγηση της μεταβολής της κατανομής του υλικού, ως προς το ζητούμενο της αντικειμενικής συνάρτησης. Μαθηματικά, η ανάλυση ευαισθησίας εκφράζεται ως η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης προς τις σχετικές πυκνότητες στο υλικό:

$$\frac{dc}{dx_e} = -p(x_e)^{p-1} u_e^T k_0 u_e \quad (4)$$

Στην ανάλυση ευαισθησίας, στοιχεία σταθμισμένα με μικρή τιμή πυκνότητας, χάνουν τη δομική σημασία τους και αποκλείονται σε περαιτέρω επαναλήψεις. Εάν υπολογίσουμε την ευαισθησία ανεξάρτητα για κάθε στοιχείο και δεν πάρουμε υπόψιν τη σύνδεση μεταξύ τους, μπορεί να οδηγηθούμε σε ασυνέχειες του υλικού και όγκους αποκομμένους από την κύρια γεωμετρία. Φαινόμενο γνωστό και ως «σκακιέρα». Για να μειώσουμε το φαινόμενο και για να επιβεβαιώσουμε την ύπαρξη λύσης, εισάγουμε μια τεχνική φιλτραρίσματος, η οποία τροποποιεί το μητρώο ευαισθησίας. Αυτή η τεχνική εφαρμόζει μια ακτίνα επιρροής για κάθε στοιχείο και συνυπολογίζει τις ευαισθησίες κάθε σημείου εντός της ακτίνας επιρροής.

Το μητρώο ευαισθησίας $\frac{dc}{dx_e}$, μεταβάλλεται ως εξής:

$$\frac{\widehat{dc}}{dx_e} = \frac{1}{x_e \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f} \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f x_f \frac{dc}{dx_f} \quad (5)$$

Ο συντελεστής συνέλιξης (convolution operator) \widehat{H}_f εκφράζεται ως:

$$\widehat{H}_f = r_{min} - dist(e, f), \{f \in N \mid dist(e, f) \leq r_{min}\}, e = 1, \dots, N \quad (6)$$

όπου ο όρος $dist(e, f)$ ορίζεται η απόσταση μεταξύ του κέντρου του στοιχείου e και του κέντρου του στοιχείου f . Ο συντελεστής συνέλιξης \widehat{H}_f είναι μηδενικός εκτός της περιοχής του φίλτρου και φθίνει γραμμικά σε σχέση με την απόσταση από το στοιχείο f .

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μπορεί να λυθεί με διάφορες προσεγγίσεις, όπως τις μεθόδους Optimality Criteria (OC) ή τη μέθοδο κινούμενων ασυμπτωτών.

Στην βελτιστοποίηση τοπολογίας στα προβλήματα μηχανικού, βασισμένη στην ιδέα της ομογενοποίησης, ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού είναι ανάλογος του αριθμού των στοιχείων της διακριτοποίησης, εφόσον απαιτούνται πολλοί υπολογισμοί για την αντικειμενική συνάρτηση, τους περιορισμούς και τα παράγωγά τους. Συνεπώς, η χρήση μεθόδων μαθηματικού προγραμματισμού είναι δύσκολη όταν συνήθως απαιτούνται εκατοντάδες πεπερασμένα στοιχεία για την επίλυση των μοντέλων, επομένως και πολύ μεγάλος αριθμός μεταβλητών σχεδιασμού, κάνοντας εκείνες τις μεθόδους πλέον χρονοβόρες και υπολογιστικά κοστοβόρες.

Γι' αυτό το λόγο αναπτύχθηκαν οι Optimality Criteria (OC) μέθοδοι, ως εναλλακτική στις μεθόδους μαθηματικού προγραμματισμού. Είναι έμμεσες μέθοδοι βελτιστοποίησης, σε αντίθεση με τις μεθόδους μαθηματικού προγραμματισμού που ευθέως βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση, οι οποίες στοχεύουν, διαισθητικά ή και πιο αυστηρά, να ικανοποιήσουν ένα σύνολο κριτηρίων σχετικά με τη συμπεριφορά του φορέα.

Εδώ χρησιμοποιούμε μέθοδο OC, στην οποία και εισάγουμε τελικά το τροποποιημένο μητρώο ευαισθησίας.

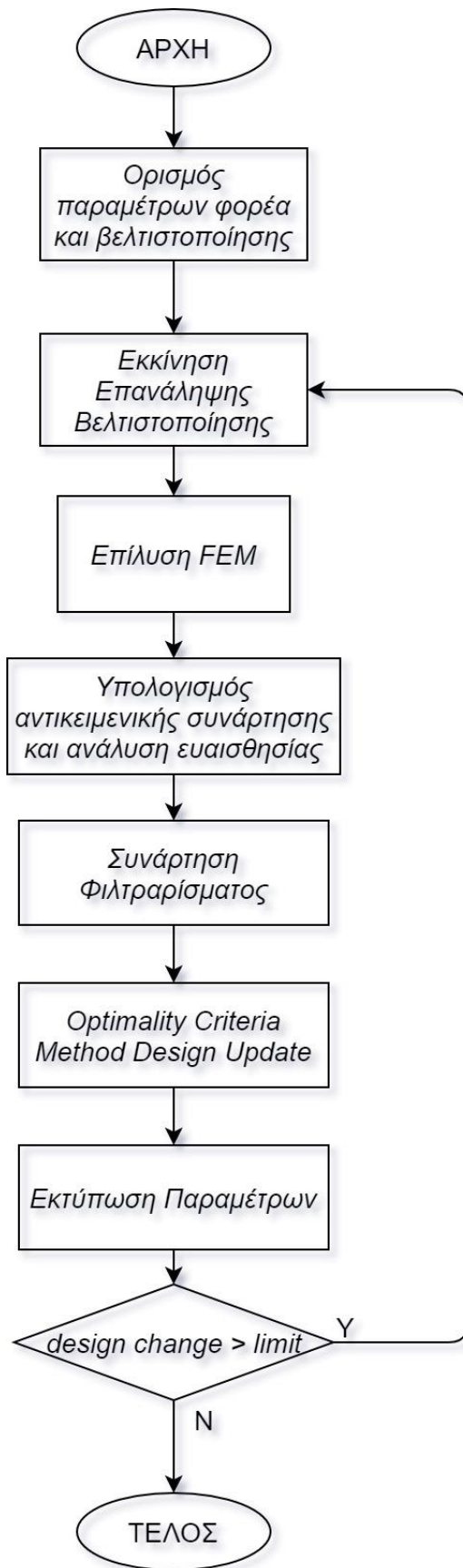
Ένα σχήμα εύρεσης της νέας μεταβλητής σχεδιασμού x που χρησιμοποιούμε εδώ, είναι το εξής:

$$x_e^{new} = \begin{cases} \max(x_{min}, x_e - m) & \text{if } x_e B_e^n \leq \max(x_{min}, x_e - m) \\ x_e B_e^n & \text{if } \max(x_{min}, x_e - m) < x_e B_e^n \leq \min(1, x_e + m) \\ \min(1, x_e + m) & \text{if } \min(1, x_e + m) > x_e B_e^n \end{cases} \quad (7)$$

Όπου, m είναι ένα θετικό οριακό βήμα (εδώ $m = 0.2$), $n = 1/2$. Το B_e υπολογίζεται ως:

$$B_e = \frac{-\frac{dc}{dx_e}}{\lambda \frac{dV}{dx_e}} \quad (8)$$

όπου λ πολλαπλασιαστής Lagrange, που υπολογίζεται με αλγόριθμο διχοτόμησης.



Διάγραμμα Ροής 1 – Απλή Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με τη μέθοδο SIMP

2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ

Μια από τις προκλήσεις των τελευταίων χρόνων στην βελτιστοποίηση τοπολογίας είναι η αντιμετώπιση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας, τα οποία ίσως περιλαμβάνουν ακόμα και εκατομμύρια βαθμούς ελευθερίας. Μάλιστα, μιλάμε για τις εξισώσεις ισορροπίας που χαρακτηρίζουν την κάθε κατασκευή, που επιλύονται σε κάθε βήμα της επανάλυσης της βελτιστοποίησης. Η επίλυση αυτών των εξισώσεων, αποτελεί επί της ουσίας, το μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος στην διαδικασία της βελτιστοποίησης. Για παράδειγμα, με τη μέθοδο SIMP, με βάση τις σχετικές πυκνότητες των στοιχείων και μεθόδους Optimality Criteria (OC), για ένα μεσαίας κλίμακας πρόβλημα 100.000 παραμέτρων σχεδιασμού, ήδη αυτό το υπολογιστικό κόστος φτάνει το 90% του συνολικού, και το ποσοστό αυξάνει περαιτέρω ανάλογα με το μέγεθος του προβλήματος.

Ένας τρόπος μείωσης του υπολογιστικού κόστους του προβλήματος, ο οποίος αποτελεί αντικείμενο έρευνας τα τελευταία χρόνια, είναι η χρήση μοντέλων μειωμένης τάξης (Reduced Order Models – ROMs). Τα μοντέλα μειωμένης τάξης παρέχουν μια προσέγγιση της λύσης της ακριβούς εξίσωσης ισορροπίας με δραματικά μειωμένο υπολογιστικό κόστος και μπορούν να αντικαταστήσουν την ακριβή λύση στις επαναλήψεις των βημάτων της βελτιστοποίησης.

Αυτοί οι μέθοδοι έχουν κερδίσει ήδη το ενδιαφέρον σε διάφορους τομείς, είτε στην ανάλυση, είτε στην βελτιστοποίηση. Συγκεκριμένο είδος μοντέλων μειωμένης τάξης, αποτελούν τα μοντέλα μειωμένης τάξης μέσω προβολής (reduced order model by projection), ή αλλιώς μοντέλα μειωμένης βάσης (reduced basis model). Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι εξισώσεις ισορροπίας επιλύονται αλγεβρικά με προβολή σε συγκεκριμένη βάση, την οποία κατασκευάζουμε από λύσεις – στιγμιότυπα του πλήρους φορέα, και η οποία είναι συνήθως πολύ μικρότερων διαστάσεων σε σχέση με το μέγεθος του συστήματος των αρχικών εξισώσεων.

Προκύπτει έτσι, το ερώτημα σχετικά με την κατασκευή της κατάλληλης βάσης, η οποία πρέπει να περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία, ώστε με μικρές διαστάσεις να δίνει όσο το δυνατόν μικρότερα σφάλματα. Να μας επιτρέπει, δηλαδή, να εκμεταλλευτούμε το πλεονέκτημα των κατά πολύ λιγότερων υπολογισμών και της ταχύτητας, χωρίς να χάνουμε από την ακρίβεια της συμπεριφοράς του φορέα.

Οι μέθοδοι κατασκευής της κατάλληλης βάσης αφορούν ουσιαστικά την παραγοντοποίηση και ανάλυση πινάκων με βάση τις μεθόδους POD (Proper Orthogonal Decomposition) και SVD (Singular Value Decomposition). Πώς δηλαδή, έχοντας επιλέξει την βάση στην οποία θα προβάσουμε την λύση-μητρώο, επιλύουμε ένα κατά πολύ μικρότερο σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε την προβολή της λύσης-μητρώο. Καταλήγουμε έτσι, με αντιστροφή της προβολής στην πλήρη λύση, η οποία είναι μια προσέγγιση της πραγματικής λύσης που προκύπτει από την επίλυση του πλήρους συστήματος εξισώσεων.

2.1 REDUCED ORDER MODELLING ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

Στα προβλήματα μηχανικού, στις επιλύσεις των μοντέλων Πεπερασμένων Στοιχείων, άγνωστο προς επίλυση είναι το διάνυσμα των μετακινήσεων $[u]$, μεγέθους ίσου με το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος. Καταλαβαίνουμε δηλαδή, πόσο αυξάνει το υπολογιστικό κόστος, όσο αυξάνει το πλήθος των στοιχείων και των βαθμών ελευθερίας.

Στην βελτιστοποίηση τοπολογίας, έχουμε επίλυση του προβλήματος για κάθε βήμα της βελτιστοποίησης. Μιλάμε για τις εξισώσεις ισορροπίας της μορφής:

$$[K][u] = [F] \quad (9)$$

όπου ο μεγάλος υπολογιστικός φόρτος αφορά την αντιστροφή του συστήματος εξισώσεων.

2.1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ POD – SVD - ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

Στην POD - SVD μέθοδο, επιλέγουμε έναν αριθμό μοντέλων, για τα οποία καθορίζονται οι τυχαίες παράμετροι και επιλύονται τα πλήρη συστήματα των εξισώσεων, d βαθμών ελευθερίας. Οι λύσεις - στιγμιότυπα u_i των επιλύσεων αυτών, μετά και την ανάλυση ιδιοτιμών, μπορούν να συνθέσουν τη βάση $[\Phi]$ του διανυσματικού χώρου των λύσεων.

Θέλουμε να επιλέξουμε ωστόσο, διανύσματα που σχηματίζουν μια, όσο το δυνατόν, ορθογωνική βάση, που μας επιτρέπει μια αξιόπιστη προσέγγιση της λύσης.

Εάν δηλαδή, $[V]_{d \times N} = [v_1, v_2, \dots, v_M]$ η βάση που υλοποιούμε από τις επιλύσεις του πλήρους μοντέλου, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της πράξης $[V][V]^T$. Με ταξινόμηση με φθίνουσα σειρά, μπορούμε να διακρίνουμε τα ιδιοδιανύσματα εκείνα, τα οποία είναι κρίσιμα για την ακρίβεια της λύσης και να κρατήσουμε τα πρώτα N κατά φθίνουσα σειρά, όπου N το μέγεθος της μειωμένης βάσης που καθορίζεται από τον μελετητή.

Η νέα βάση θα αποτελείται από τα κρίσιμα αυτά ιδιοδιανύσματα:

$$[\Phi]_{d \times N} = [u_1, u_2, \dots, u_N]$$

Μπορούμε έτσι, με αυτή, ή και όποια άλλη βάση κατασκευάσουμε, να υποθέσουμε, πως όλες οι λύσεις θα βρίσκονται στο διανυσματικό χώρο με τη βάση $[\Phi]$ που συνθέτουν τα u_N ιδιοδιανύσματα:

$$[u]_{d \times 1} = [\Phi]_{d \times N} [u_{POD}]_{N \times 1} \quad (10)$$

Δηλαδή, κάθε λύση του πλήρους προβλήματος είναι γραμμικός συνδυασμός των N πρώτων αυτών επιλύσεων.

Άρα, από το πλήρες σύστημα μπορεί να προκύψει αντικαθιστώντας:

$$[K][\Phi][u_{POD}] = [F] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\Phi]^T[K][\Phi][u_{POD}] = [\Phi]^T[F] \Leftrightarrow \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow [K_{POD}]_{N \times N}[u_{POD}]_{N \times 1} = [F_{POD}]_{N \times 1} \quad (12)$$

Καταλήγοντας στις εξισώσεις ισορροπίας του μοντέλου μειωμένης τάξης, όπου $[K_{POD}]$ το μητρώο δυσκαμψίας του, $[F_{POD}]$ το διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων και $[u_{POD}]$ το διάνυσμα των λύσεων για το μοντέλο μειωμένης τάξης.

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε, γιατί η εξίσωση (12), αποτελεί το μοντέλο μειωμένης τάξης του αρχικού προβλήματος. Η επίλυση της εξίσωσης (9), απαιτεί την αντιστροφή ενός μεγάλου συστήματος εξισώσεων μεγέθους d , το μέγεθος του μητρώου δυσκαμψίας $[K]$, το οποίο για μοντέλα μεγάλης κλίμακας μπορεί με ευκολία να φτάσει εκατομμύρια. Από την άλλη, η επίλυση του μοντέλου μειωμένης τάξης της εξίσωσης (12), απαιτεί την αντιστροφή ενός πολύ μικρότερου συστήματος εξισώσεων, μεγέθους N , το μέγεθος του μητρώου δυσκαμψίας που έχουμε προβάλλει στη βάση $[\Phi]^T[K][\Phi]$, που ισούται με το μέγεθος N της μειωμένης βάσης. Τυπικά $N \ll d$, εφόσον για κάποια λογική ακρίβεια, το N δεν ξεπερνά τις μερικές δεκάδες, ή μπορεί να περιοριστεί και σε πολύ μικρότερα μεγέθη.

Το πρόβλημα που έχουμε προβάλλει στη μειωμένη βάση, παρέχει την προσέγγιση της πραγματικής λύσης:

$$u_{RB} = [\Phi][u_{POD}] \quad (13)$$

Η ακρίβεια της λύσης μπορεί να μετρηθεί με το σφάλμα:

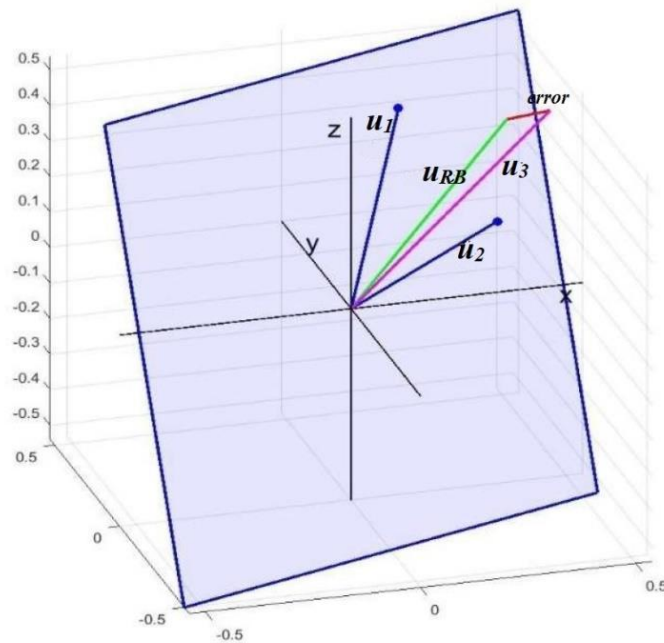
$$e_{RB}^2 = \frac{\|[K][\Phi][u_{POD}] - [F]\|^2}{\|[F]\|^2} \quad (14)$$

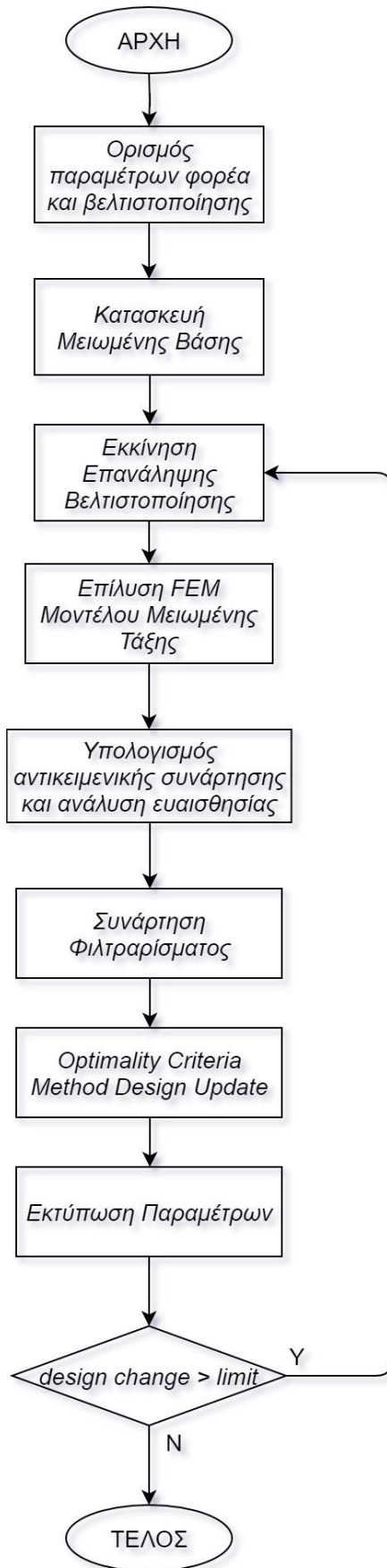
Το σφάλμα εκφράζεται σε σχετικούς όρους, με το σφάλμα των δυνάμεων στον αριθμητή προς το μητρώο των εξωτερικών δυνάμεων. Το σφάλμα των δυνάμεων στον αριθμητή, είναι η διαφορά μεταξύ των εξωτερικών φορτίων του μοντέλου μειωμένης τάξης και του πραγματικού μητρώου των εξωτερικών δυνάμεων. Εάν η προσέγγιση $u_{RB} = [\Phi][u_{POD}]$ ήταν ακριβής, το σφάλμα θα προέκυπτε μηδενικό, εφόσον η ακριβής λύση ικανοποιεί την εξίσωση $[K][u] = [F]$.

Παρατηρούμε, πως εφόσον εκφράζουμε το σφάλμα σε όρους νόρμας, διαφορετικοί συνδυασμοί του $[u_{POD}]$, θα μπορούσαν θεωρητικά να οδηγήσουν στην ίδια τιμή σφάλματος. Παρόλ'αυτα, πρακτικά δεν προκύπτει ζήτημα, καθώς η παράμετρος $[u_{POD}]$ έχει ισχυρή φυσική σημασία, προκύπτει από την επίλυση φυσικών εξισώσεων

που έχουν προβληθεί. Έτσι, αποφεύγονται αριθμητικές αστάθειες και αοριστίες που θα μπορούσαν να εμφανιστούν στη χρήση και τον ορισμό του σφάλματος.

Στο παρακάτω σχήμα, αναπαρίσταται η μέθοδος POD - SVD για μέγεθος βάσης προβολής $N = 2$. Τα διανύσματα - λύσεις u_1 και u_2 αποτελούν τη βάση του διανυσματικού χώρου, στον οποίο ανήκει η προσέγγιση u_{RB} της λύσης u_3 .





Διάγραμμα Ροής 2 – Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με χρήση Μοντέλων Μειωμένης Τάξης – Μέθοδος POD/SVD

2.1.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ

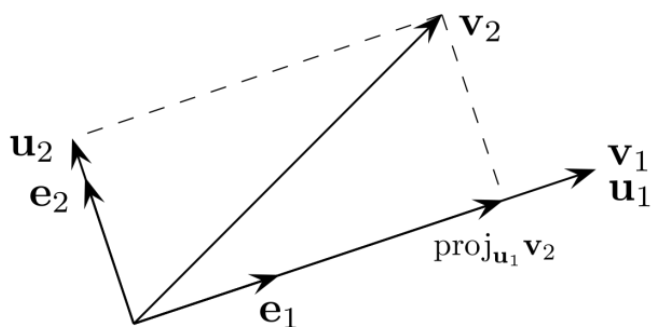
Στην προηγούμενη μέθοδο, αντιμετωπίσαμε την κατασκευή μοντέλων μειωμένης τάξης, με on-line/off-line προσέγγιση. Δηλαδή, στην πρώτη, off-line, φάση, επιλύουμε το πλήρες μοντέλο για να αποκτήσουμε τις πρώτες λύσεις ώστε να κατασκευαστεί η βάση της προβολής και στην δεύτερη, on-line, φάση, χρησιμοποιούμε τη βάση για την επίλυση του μοντέλου μειωμένης τάξης.

Στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης τοπολογίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο κατασκευής της βάσης κατά την επίλυση του προβλήματος, δηλαδή από βήμα σε βήμα, μετά από κάθε επανάληψη.

Θεωρούμε i το βήμα της βελτιστοποίησης τοπολογίας, όπου έχουν ήδη υπολογιστεί i διανύσματα μετατοπίσεων, ένα διάνυσμα σε κάθε επανάληψη, αντιστρέφοντας τις πλήρεις εξισώσεις ισορροπίας (9). Τα προηγούμενα i διανύσματα, μπορούν να σχηματίσουν μια μειωμένη βάση, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις παραπάνω μεθόδους για τον υπολογισμό του διανύσματος μετατοπίσεων στην επόμενη επανάληψη της βελτιστοποίησης. Έτσι, στο βήμα $i + 1$, η προσέγγιση του διανύσματος μετατοπίσεων, θα υπολογιστεί επιλύοντας το μοντέλο μειωμένης τάξης, προβάλλοντας το σύστημα εξισώσεων στη βάση που έχουμε σχηματίσει. Η ίδια βάση, το ίδιο μοντέλο μειωμένης τάξης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τα υπόλοιπα βήματα-επαναλήψεις της βελτιστοποίησης.

Η μέθοδος, χρησιμοποιείται με καθορισμένο από τον μελετητή μέγεθος της μειωμένης βάσης, εδώ το συμβολίζουμε N_b . Η μειωμένη βάση σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τις πρώτες N_b πλήρεις επιλύσεις των βημάτων-επαναλήψεων της βελτιστοποίησης. Δηλαδή, σε κάθε βήμα επιλύεται το σύστημα εξισώσεων (12), και αποκτούμε το αντίστοιχο διάνυσμα μετατοπίσεων. Αυτά τα N_b διανύσματα-λύσεις, σχηματίζουν τον αρχικό υπόχωρο της μειωμένης βάσης.

Για να σχηματίσουμε τα διανύσματα της βάσης, τα N_b διανύσματα-λύσεις πρέπει να γίνουν ορθοκανονικά. Χρησιμοποιούμε την Gram-Schmidt διαδικασία ορθοκανονικοποίησης. Στο σχήμα που ακολουθεί, σχηματίζουμε την ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου που ορίζουν τα διανύσματα v_1 και v_2 . Η βάση ορίζεται από τα μοναδιαία διανύσματα e_1 και e_2 .



$$u_1 = \text{proj}_{u_1} v_2 = (v_2 \cdot v_1)$$

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1} v_2 = v_2 - (v_2 \cdot v_1)$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

Με βάση τα παραπάνω, ορθοκανονικοποιούμε τα N_b διανύσματα - λύσεις. Έτσι, κανονικοποιούμε την πρώτη λύση U_1 :

$$\Phi_1 = \frac{U_1}{\|U_1\|} \quad (15)$$

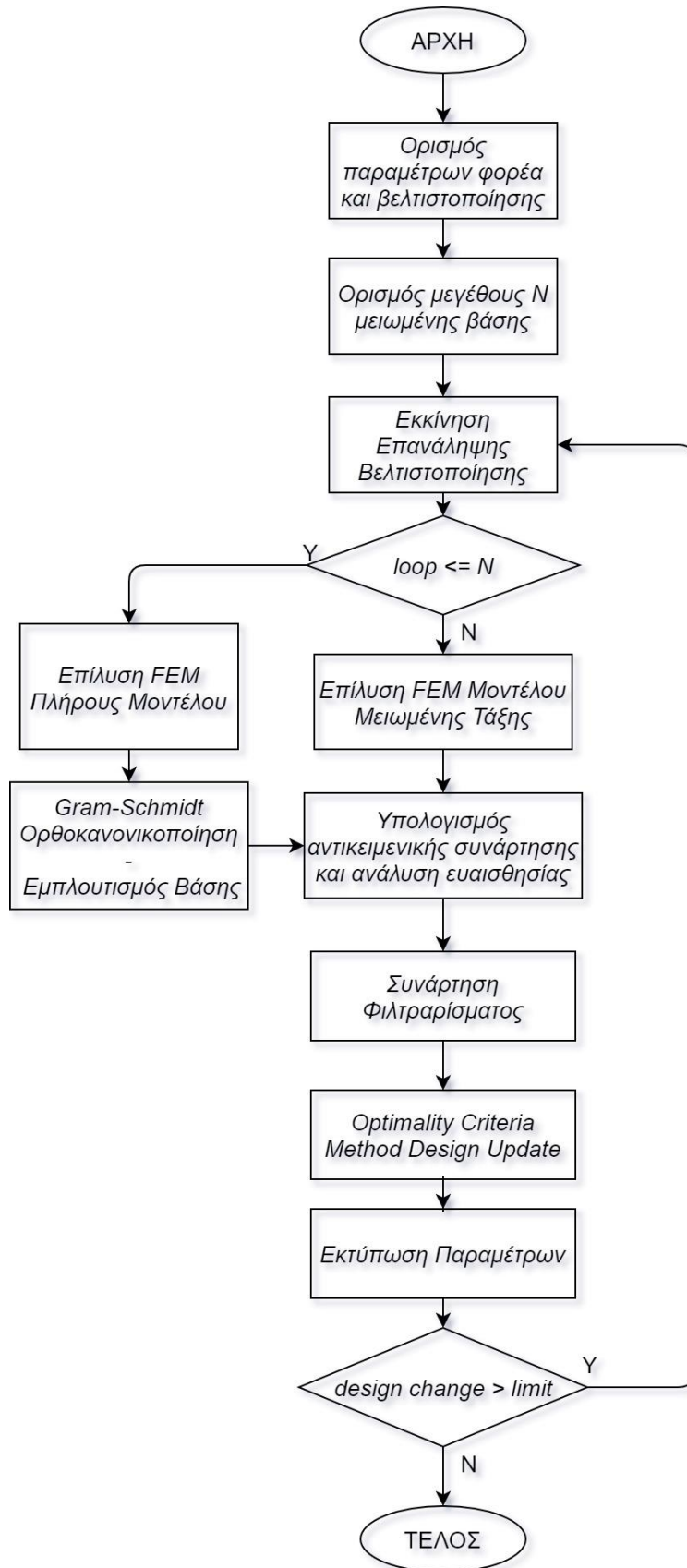
Τα υπόλοιπα διανύσματα βάσης, τα αποκτούμε κάνοντας Gram-Schmidt ορθογωνοποίηση και έπειτα κανονικοποίηση όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\tilde{\Phi}_{i+1} = U_{i+1} - \sum_{j=1}^i (U_{i+1} \cdot \Phi_j) \Phi_j, \text{ για } i = 1, \dots, N_{b-1} \quad (16)$$

$$\Phi_{i+1} = \frac{\tilde{\Phi}_{i+1}}{\|\tilde{\Phi}_{i+1}\|}, \text{ για } i = 1, \dots, N_{b-1} \quad (17)$$

Έτσι, εφόσον έχουμε σχηματίσει την μειωμένη βάση, θα τη χρησιμοποιήσουμε από εδώ και πέρα σε κάθε επόμενο βήμα της βελτιστοποίησης, αντικαθιστώντας την επίλυση των εξισώσεων του πλήρους μοντέλου.

Να επισημάνουμε πως η κατασκευή της μειωμένης βάσης με τη χρήση των προηγούμενων υπολογισμένων λύσεων προσδίδει εγκυρότητα και γρήγορη σύγκλιση στην προσέγγιση της λύσης.



Διάγραμμα Ροής 3 – Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με χρήση Μοντέλων Μειωμένης Τάξης – Κατασκευή Μειωμένης Βάσης κατά την επίλυση

2.2 ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ - ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

Οι παραπάνω μέθοδοι κατασκευής της βάσης, είτε πριν, είτε κατά την επίλυση, μπορούν να εφαρμόζονται, μέχρι η ακρίβεια προσέγγισης της λύσης με τη χρήση μοντέλου μειωμένης τάξης να μην επαρκεί, με βάση κάποιο όριο στην τιμή του σφάλματος.

Εάν η τιμή του σφάλματος e_{RB} είναι χαμηλότερη από το όριο ε που ορίζει ο χρήστης, η βάση θεωρείται επαρκώς ακριβής. Εάν πληρείται δηλαδή το κριτήριο, η προσέγγιση της μειωμένης βάσης χρησιμοποιείται στη διαδικασία της βελτιστοποίησης σαν να ήταν η ακριβής λύση.

Από τη στιγμή που η επίλυση μειωμένης τάξης δεν ικανοποιεί το κριτήριο του σφάλματος, $e_{RB} > \varepsilon$, η μειωμένη βάση δεν θεωρείται πλέον ακριβής. Πραγματοποιούμε μία νέα επίλυση του πλήρους μοντέλου, με την λύση που προκύπτει να χρησιμοποιείται και για τον εμπλουτισμό-ενημέρωση της μειωμένης βάσης.

Για να εμπλουτίσουμε την μειωμένη βάση $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_i\}$, η καινούρια λύση U_{new} ορθοκανονικοποιείται με τη διαδικασία Gram-Schmidt, όπως παραπάνω:

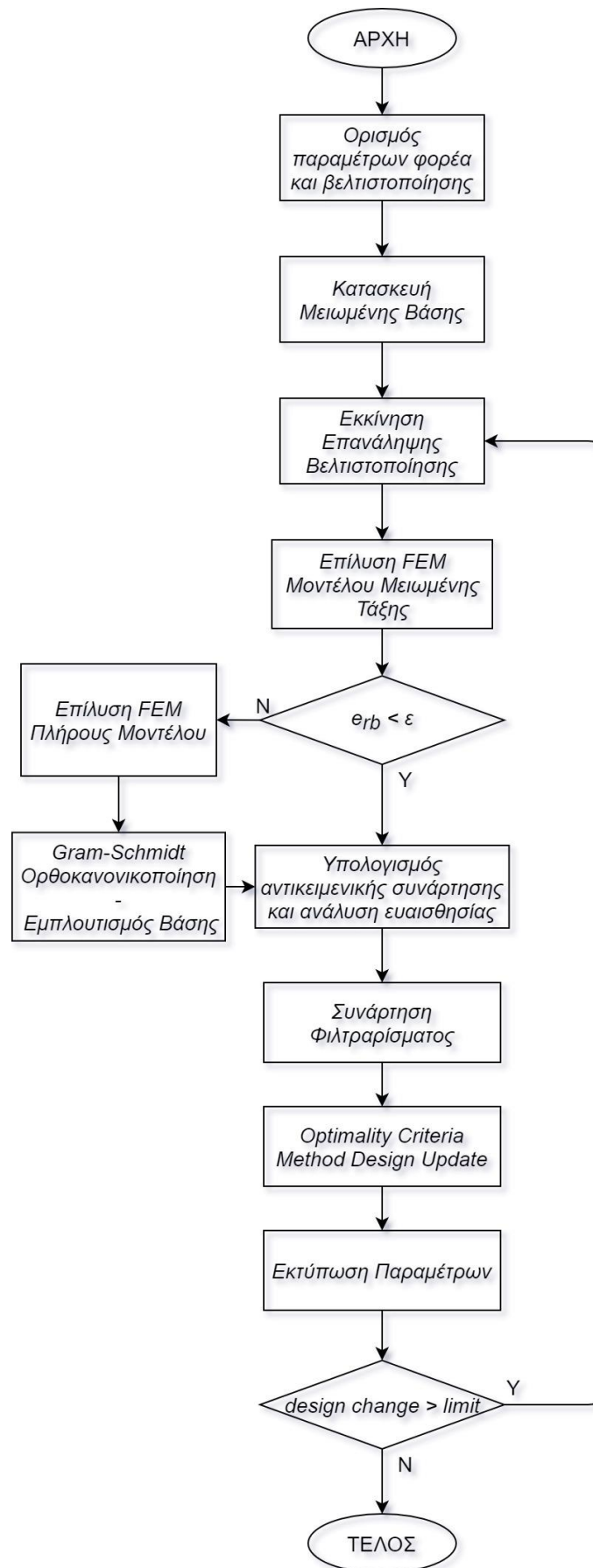
$$\tilde{\Phi}_{i+1} = U_{new} - \sum_{j=1}^i (U_{new} \cdot \Phi_j) \Phi_j \quad (18)$$

$$\Phi_{i+1} = \frac{\tilde{\Phi}_{i+1}}{\|\tilde{\Phi}_{i+1}\|} \quad (19)$$

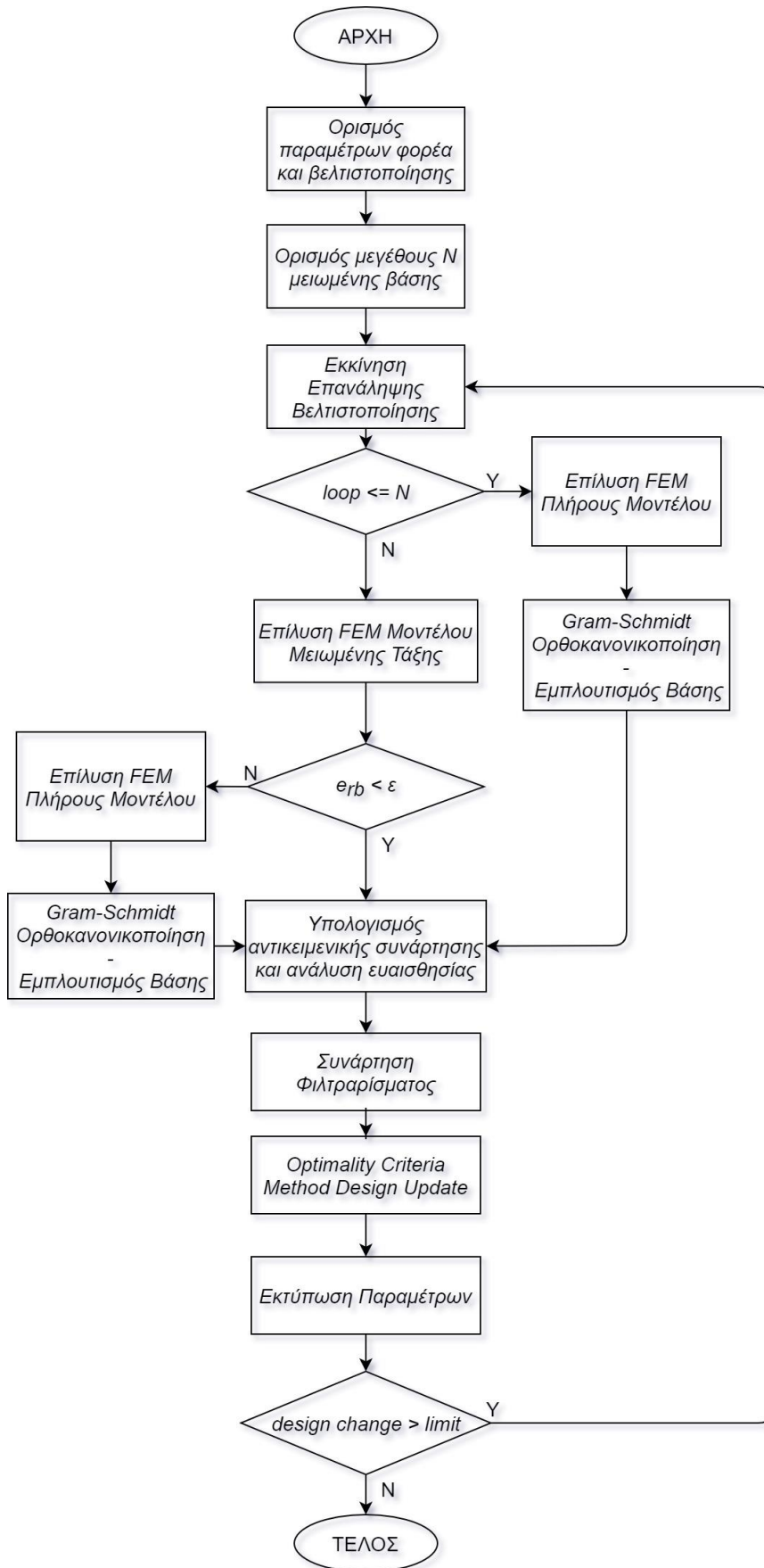
Να σημειώσουμε πως ενώ η μειωμένη βάση χρησιμοποιεί λύσεις από προηγούμενες επαναλήψεις, οι νέες λύσεις εμπλουτίζουν τη βάση μόνο αν η προσέγγιση δεν είναι πλέον ικανοποιητική. Επίσης, η κάθε νέα λύση, προστίθεται μόνο μετά από ορθοκανονικοποίηση μέσω της διαδικασίας Gram-Schmidt. Που σημαίνει, πως μόνο το μέρος της λύσης που είναι ορθογώνιο στα υφιστάμενα διανύσματα της βάσης, ενημερώνει - εμπλουτίζει πραγματικά τη βάση.

Εάν επιλέξουμε να εμπλουτίσουμε τη μειωμένη βάση μεγαλώνοντας τις διαστάσεις της, κάθε νέα επίλυση προσθέτει μία επιπλέον στήλη στη μειωμένη βάση.

Εάν επιλέξουμε να ενημερώσουμε τη μειωμένη βάση κρατώντας σταθερές τις διαστάσεις, με κάθε νέα επίλυση αφαιρούμε την πρώτη - παλαιότερη στήλη της μειωμένης βάσης.



Διάγραμμα Ροής 4 – Ενημέρωση - Εμπλουτισμός Μειωμένης Βάσης – Μέθοδος POD/SVD



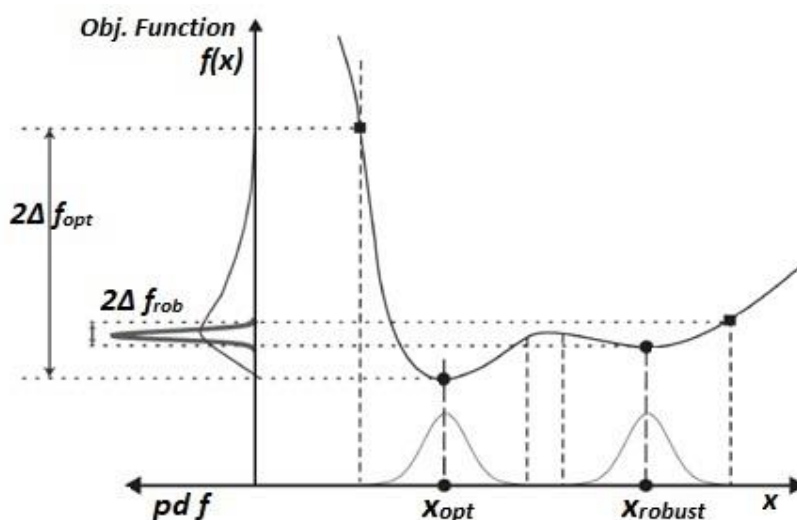
Διάγραμμα Ροής 5 – Ενημέρωση - Εμπλουτισμός Μειωμένης Βάσης – Κατασκευή κατά την επίλυση

3. ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ - ROBUST DESIGN

Ο σχεδιασμός κατασκευών από τον μηχανικό-μελετητή θα πρέπει σαφώς να λαμβάνει υπόψιν την επιρροή του παράγοντα της αβεβαιότητας. Ο σχεδιασμός θα πρέπει να είναι αποδοτικός, αλλά και αξιόπιστος όταν μιλάμε για περιβάλλον με αβεβαιότητες και τυχαίες μεταβολές. Οι δύο προσεγγίσεις σχετικά με την τυχειότητα στη μεταβολή παραμέτρων του προβλήματος, σχηματικά χωρίζονται στην Βελτιστοποίηση με βάση την αξιοπιστία (Reliability-based optimization) και στον Εύρωστο Σχεδιασμό (Robust Design).

Οι Reliability-based μέθοδοι βελτιστοποίησης υλοποιούν τις αβεβαιότητες ως πιθανότητες αστοχίας, οι οποίες εφαρμόζονται ως επιπλέον περιορισμοί στο πρόβλημα. Στην βελτιστοποίηση τοπολογίας, οι περιορισμοί λόγω αβεβαιοτήτων, κυρίως μπορεί να αφορούν τη δυσκαμψία του φορέα, τις κύριες ιδιοσυχνότητες και κρίσιμες μετατοπίσεις.

Η έννοια του Robust Design, υλοποιεί την βελτιστοποίηση υπό τυχόν αβεβαιότητες του φυσικού προβλήματος, είτε αυτές αφορούν τις ιδιότητες και την ομοιομορφία του υλικού ή των υλικών, είτε αφορούν τα εξωτερικά εντατικά μεγέθη. Ο σχεδιασμός εδώ, σε αντίθεση με τις Reliability-based μεθόδους, δεν βρίσκει μια λύση που δεν αστοχεί με βάση τους περιορισμούς για τις πιθανές τιμές των στοχαστικών μεγεθών, αλλά μία λύση που δεν επηρεάζεται από τις τυχαίες μεταβολές και αβεβαιότητες. Δηλαδή, το μέτρο, την φορά, την διεύθυνση, το σημείο εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων.



Η έννοια του Εύρωστου Σχεδιασμού – Robust Design

Το Robust Design πρόβλημα στην βελτιστοποίηση τοπολογίας είναι μία προσέγγιση ώστε να αντιμετωπίζονται οι παραπάνω αβεβαιότητες του φυσικού προβλήματος, εκφράζοντας την ευαισθησία της στατικής απόκρισης στις διακυμάνσεις των μεγεθών σε σχέση με τη μέση συμπεριφορά του φορέα. Εδώ, η βελτιστοποίηση λαμβάνει

υπόψη τα στατιστικά μεγέθη, εφόσον η βέλτιστη τοπολογία, η βέλτιστη κατανομή του υλικού, μπορεί ουσιαστικά να καταλήγει στην ελάχιστη τιμή της ενδοσιμότητας του φορέα, η οποία ωστόσο σαν μέγεθος λόγω των τυχαίων παραμέτρων να χαρακτηρίζεται από μεγάλη τυπική απόκλιση.

Η αντικειμενική συνάρτηση, εδώ, εκφράζεται με βάση τη μέση τιμή και τη διακύμανση της ενδοσιμότητας. Με αυτή την έννοια, θέλω να καταλήξω σε έναν σχεδιασμό με μικρή μέση τιμή, η οποία μπορεί να είναι μεγαλύτερη από ένα ντετερμινιστικό πρόβλημα, ωστόσο και με μικρή διακύμανση. Θέλω δηλαδή, να καταλήξω στη μορφή ενός φορέα, που για μια μικρή μεταβολή των μεταβλητών μεγεθών, δεν θα έχω σημαντική απόκλιση στη συμπεριφορά, στην ενδοσιμότητα του φορέα, στα εντατικά μεγέθη που θα αναπτυχθούν.

Γι' αυτό το λόγο, η αντικειμενική συνάρτηση στο πρόβλημα σχεδιασμού, μετατρέπεται από την ελαχιστοποίηση της ενδοσιμότητας, σε συνάρτηση με στατιστικά μεγέθη, εκφράσεις μέσης τιμής και διακύμανσης της ενδοσιμότητας του φορέα, για τα δεδομένα μεταβλητά μεγέθη.

Το Robust Design πρόβλημα, με τη μέθοδο SIMP, διατυπώνεται ως εξής:

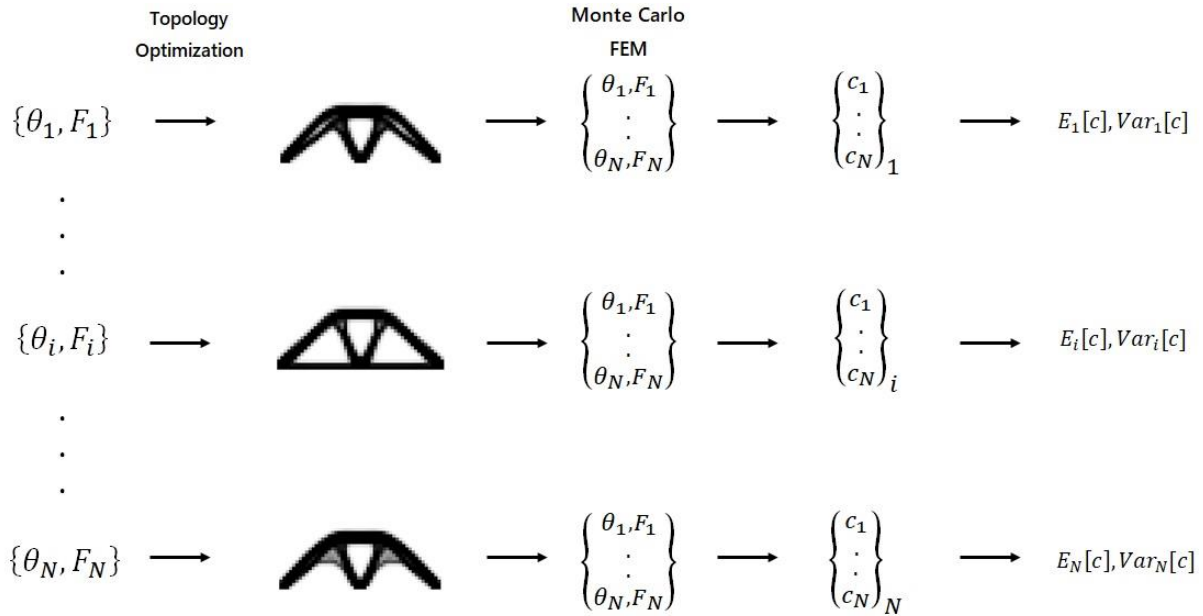
$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x : f(x) = E[c] + k * \sqrt{Var[c]} \\ \\ \text{subject to:} \\ c(x) = U^T K U = \sum_{e=1}^N (x_e)^p u_e^T k_0 u_e \\ \\ \frac{V(x)}{V_0} = f \\ \\ K U = F \\ \\ 0 < x_{min} \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (20)$$

Για την υλοποίηση του Εύρωστου Σχεδιασμού – Robust Design και τον στατιστικών μεγεθών για την αντικειμενική συνάρτηση, θα επιλέξουμε μια πιο brute-force και υπολογιστικά κοστοβόρα προσέγγιση.

Με βάση αυτή την εξαιρετικά κοστοβόρα προσέγγιση θα εξετάσουμε και τη συνεισφορά των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης, σε μία προσέγγιση του προβλήματος που θα ήταν δύσκολο να επιτευχθεί με πλήρη μοντέλα.

Αρχικά, επιλύουμε το πρόβλημα της απλής Βελτιστοποίησης Τοπολογίας για έναν αριθμό N διαφορετικών συνδυασμών τυχαίων παραμέτρων, όπως η φορά, το μέγεθος και το σημείο εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων. Και στους N σχεδιασμούς που προκύπτουν, κάνουμε στατική επίλυση με N διαφορετικούς συνδυασμούς τυχαίων παραμέτρων και για κάθε επίλυση κρατάμε το μέγεθος της αντικειμενικής συνάρτησης που μας ενδιαφέρει.

Εδώ, εφόσον μελετάμε την ενδοσιμότητα του φορέα, για κάθε επίλυση Πεπερασμένων Στοιχείων σε κάθε έναν από τους N σχεδιασμούς, υπολογίζουμε την ενδοσιμότητα για τον κάθε συνδυασμό παραμέτρων από τους οποίους προκύπτουν τα στατιστικά μεγέθη της μέσης τιμή και της διακύμανσης. Για κάθε σχεδιασμό, δηλαδή, έχω τα μεγέθη της μέσης τιμής και της διακύμανσης της ενδοσιμότητας του φορέα.



Διάγραμμα για τον Robust Design σχεδιασμό

Από εδώ προκύπτει και ο υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης όπως την ορίζουμε στο Robust Design πρόβλημα (20), με βάση την οποία προκύπτει και ο Εύρωστος Σχεδιασμός του προβλήματος. Για κάθε έναν από τους φορείς δηλαδή, υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με βάση τα στατιστικά μεγέθη της ενδοσιμότητας και για την μικρότερη τιμή, προκύπτει ο αντίστοιχος φορέας ως λύση στο πρόβλημα του Robust Design – Εύρωστου Σχεδιασμού.

Για τη στατιστική επεξεργασία, υλοποιώ με τη μέθοδο Monte Carlo τα παρακάτω μεγέθη:

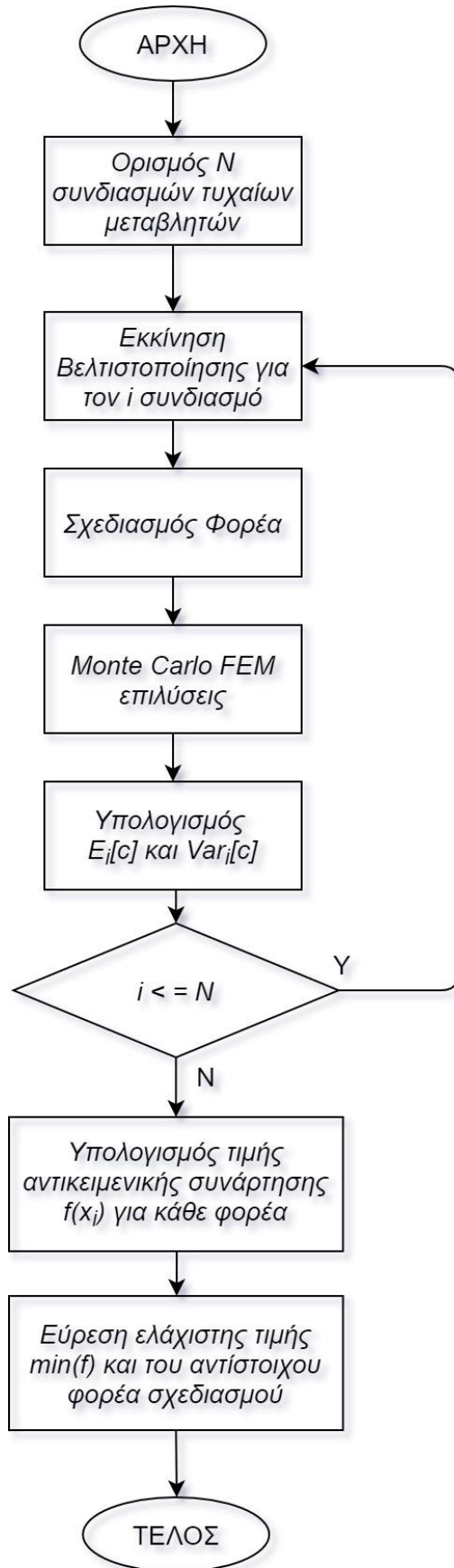
Μέση Τιμή:

$$E[c] = \mu = \bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^N c_i}{N} \quad (21)$$

όπου c_i η ενδοσιμότητα του φορέα για κάθε μία από τις N επιλύσεις, για κάθε φορέα που προκύπτει για κάθε συνδυασμό παραμέτρων.

Διακύμανση:

$$Var[c] = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (c_i - \bar{c})^2}{N - 1} \quad (22)$$



Διάγραμμα Ροής 6 – Robust Design Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

4. ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ – ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ

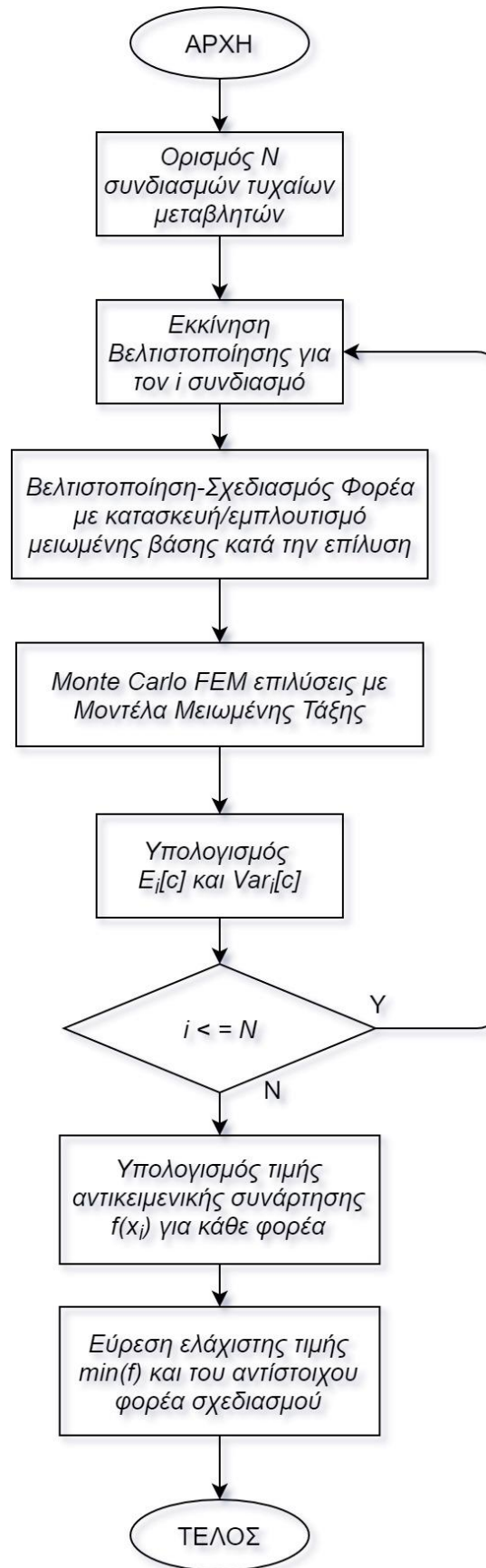
Στα παραπάνω κεφάλαια, αναπτύχθηκαν σε ένα βαθμό τα αντικείμενα της Βελτιστοποίησης Τοπολογίας (*Κεφάλαιο 1*), η χρήση των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης σε αυτού του είδους την Βελτιστοποίηση (*Κεφάλαιο 1*) και η έννοια – υλοποίηση του Εύρωστου Σχεδιασμού – Robust Design (*Κεφάλαιο 1*).

Από την προηγούμενη μελέτη, γίνεται αντιληπτό το μεγάλο υπολογιστικό κόστος των επιλύσεων των εξισώσεων ισορροπίας (9), ιδιαίτερα όταν υλοποιούμε μεθόδους βελτιστοποίησης αλλά και σχεδιασμό που λαμβάνει υπόψιν τις αβεβαιότητες, μέθοδοι που περιλαμβάνουν δηλαδή πολλές επαναληπτικές διαδικασίες επίλυσης του κάθε φορά διαφορετικού φορέα, ειδικά όσον αφορά την προσέγγιση του Robust Design, με πολλές επαναλήψεις της μεθόδου Monte Carlo.

Απάντηση στις υπολογιστικά απαιτητικές μεθόδους σχεδιασμού, μπορούν να δώσουν όπως είδαμε τα Μοντέλα Μειωμένης Τάξης, χωρίς να υστερούν σε ακρίβεια. Παρόλα αυτά, στην βιβλιογραφία δεν υπάρχει εκτενής έρευνα ή διερεύνηση για τη χρήση αυτών των Μειωμένων Μοντέλων σε εφαρμογές Robust Design στην Βελτιστοποίηση Τοπολογίας. Αυτή την δυνατότητα των Reduced Order Modelling τεχνικών θα επιχειρήσει να προσεγγίσει το τελευταίο μέρος της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, χωρίς φυσικά να αποτελεί ολοκληρωμένη θεωρητική-πειραματική έρευνα.

Η εισαγωγή των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης θα γίνει στο κομμάτι, φυσικά, της διαδικασίας που αφορά την επίλυση της μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων. Αυτό σημαίνει, πως σε κάθε επίλυση στα βήματα της βελτιστοποίησης, χρησιμοποιούμε τις μεθόδους που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 1.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα αναπτύξουμε τον κώδικα με τον οποίο υλοποιούμε την επίλυση με μειωμένα μοντέλα σε περιβάλλον Matlab. Στην παρούσα εργασία, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο κατασκευής και ενημέρωσης της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση, λόγω της ευκολίας κατασκευής αλλά και επειδή η βάση κατασκευάζεται εντός της βελτιστοποίησης, χωρίς να απαιτείται εκ των προτέρων υπολογισμός.



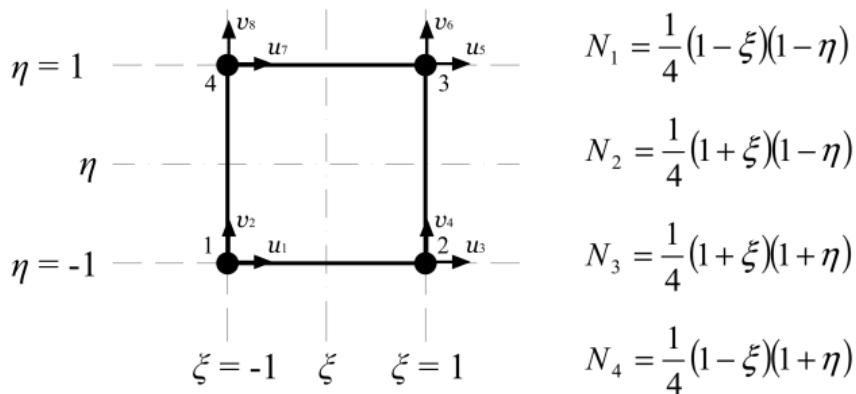
Διάγραμμα Ροής 7 – Robust Design Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με χρήση Μοντέλων Μειωμένης Τάξης

5. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΣΕ MATLAB

Η επίλυση των προβλημάτων, γίνεται με τη χρήση του λογισμικού Matlab (έκδοση R2018a), με χρήση της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων.

Το σώμα του κύριου κώδικα της μεθόδου SIMP, πάνω στον οποίο βασίζεται και η υλοποίηση των μεθόδων κατασκευής μοντέλων μειωμένης τάξης, αλλά και η υλοποίηση του Roust Design, έχει στηριχτεί στον κώδικα της βελτιστοποίησης τοπολογίας που αναπτύσσεται από τον O. Sigmund (*A 99 line topology optimization code written in Matlab*).

Η διακριτοποίηση του ορθογωνικού χώρου σχεδιασμού γίνεται με πλέγμα 4-κομβικών επίπεδων τετραγωνικών πεπερασμένων στοιχείων, των οποίων καθορίζουμε τον αριθμό κατά οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση.



Τετρακομβικό Στοιχείο με 2 βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο, με τις αντίστοιχες συναρτήσεις σχήματος

Η προσέγγιση αυτή, μας επιτρέπει να καθορίζουμε γρήγορα την ακρίβεια της διακριτοποίησης, αν και το υπολογιστικό κόστος, οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος, αυξάνεται γρήγορα σε σχέση με τον αριθμό των στοιχείων.

5.1 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ SIMP

Το κύριο πρόγραμμα, καλείται από τη συνάρτηση:

```
[x]=top(nelx,nely,volfrac,penal,rmin)
```

Η συνάρτηση επιστρέφει το μητρώο $[x]$, διαστάσεων $nely \times nelx$, με την τιμή του κάθε κελιού να αντιστοιχεί στην τιμή της σχετικής πυκνότητας του κάθε στοιχείου του χώρου σχεδιασμού. Στα ορίσματα, έχουμε τις μεταβλητές $nelx$ και $nely$, που είναι ο αριθμός των στοιχείων στην οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση αντίστοιχα, $volfrac$ είναι το κλάσμα του όγκου, $penal$ είναι η δύναμη της ποινής και $rmin$ το μέγεθος του φίλτρου (διαιρεμένο με το μέγεθος του στοιχείου). Οι υπόλοιπες μεταβλητές αλλά και οι συνοριακές συνθήκες προσδιορίζονται και μπορούν να αλλάξουν στον κώδικα του κύριου προγράμματος. Για κάθε επανάληψη της διαδικασίας βελτιστοποίησης, ο κώδικας δημιουργεί μια εικόνα της κατανομής των πυκνοτήτων.

Ακολουθεί το σώμα του κύριου κώδικα:

```
function [x]=top(nelx,nely,volfrac,penal,rmin);
% INITIALIZE
x(1:nely,1:nelx) = volfrac;
loop = 0;
change = 1.;
% START ITERATION
while change > 0.01
    loop = loop + 1;
    xold = x;
% FE-ANALYSIS
    [U]=FE(nelx,nely,x,penal);
% OBJECTIVE FUNCTION AND SENSITIVITY ANALYSIS
    [KE] = lk;
    c = 0.;
    for ely = 1:nely
        for elx = 1:nelx
            n1 = (nely+1)*(elx-1)+ely;
            n2 = (nely+1)* elx +ely;
            Ue = U([2*n1-1;2*n1; 2*n2-1;2*n2; 2*n2+1;2*n2+2;
2*n1+1;2*n1+2],1);
            c = c + x(ely,elx)^penal*Ue'*KE*Ue;
            dc(ely,elx) = -penal*x(ely,elx)^(penal-1)*Ue'*KE*Ue;
        end
    end
% FILTERING OF SENSITIVITIES
    [dc] = check(nelx,nely,rmin,x,dc);
% DESIGN UPDATE BY THE OPTIMALITY CRITERIA METHOD
    [x] = OC(nelx,nely,x,volfrac,dc);
% PRINT RESULTS
    change = max(max(abs(x-xold)));
    disp([' It.: ' sprintf('%4i',loop) ' Obj.: ' sprintf('%10.4f',c)
...
        ' Vol.: ' sprintf('%6.3f',sum(sum(x))/(nelx*nely)) ...
        ' ch.: ' sprintf('%6.3f',change )])
% PLOT DENSITIES
    colormap(gray); imagesc(-x); axis equal; axis tight; axis
off;pause(1e-6);
end
```

Το κύριο πρόγραμμα ξεκινά διανέμοντας ομοιόμορφα το υλικό στο χώρο σχεδιασμού:

```
x(1:nely,1:nelx) = volfrac
```

Αρχικοποιώντας κάποιες απαραίτητες μεταβλητές, ο κώδικας ξεκινά καλώντας την υπορουτίνα της επίλυσης των Πεπερασμένων Στοιχείων, η οποία επιστρέφει το διάνυμα μετακινήσεων U :

```
% FE-ANALYSIS
[U]=FE(nelx,nely,x,penal);
```

Εφόσον το μητρώο δυσκαμψίας είναι ίδιο για όλα τα συμπαγή στοιχεία, η υπορουτίνα υπολογισμού του καλείται μόνο μία φορά. Στη συνέχεια, με βρόγχο επανάληψης περνώντας όλα τα στοιχεία καθορίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και το μητρώο ευαισθησίας dc :

```

% OBJECTIVE FUNCTION AND SENSITIVITY ANALYSIS
[KE] = lk;
c = 0.;
for ely = 1:nely
    for elx = 1:nelx
        n1 = (nely+1)*(elx-1)+ely;
        n2 = (nely+1)* elx +ely;
        Ue = U([2*n1-1;2*n1; 2*n2-1;2*n2; 2*n2+1;2*n2+2;
2*n1+1;2*n1+2],1);
        c = c + x(ely,elx)^penal*Ue'*KE*Ue;
        dc(ely,elx) = -penal*x(ely,elx)^(penal-1)*Ue'*KE*Ue;
    end
end

```

Οι μεταβλητές $n1$ και $n2$ αντιστοιχούν στους επάνω αριστερά και δεξιά κόμβους του κάθε στοιχείου αντίστοιχα, στους καθολικούς αριθμούς κόμβων και χρησιμοποιούνται για να εξάγουμε το διάνυσμα μετακινήσεων U_e του στοιχείου, από το καθολικό διάνυσμα μετακινήσεων U .

Ακολουθεί η ανάλυση ευαισθησίας, με κλήση της συνάρτησης φίλτρου και της μεθόδου Optimality Criteria:

```

% FILTERING OF SENSITIVITIES
[dc] = check(nelx,nely,rmin,x,dc);
% DESIGN UPDATE BY THE OPTIMALITY CRITERIA METHOD
[x] = OC(nelx,nely,x,volfrac,dc);

```

Η τιμή της ενδοσιμότητας και οι υπόλοιπες παράμετροι τυπώνονται, ενώ και η κατανομή της πυκνότητας εμφανίζεται σε γράφημα:

```

% PRINT RESULTS
change = max(max(abs(x-xold)));
disp([' It.: ' sprintf('%4i',loop) ' Obj.: ' sprintf('%10.4f',c)
...
' Vol.: ' sprintf('%6.3f',sum(sum(x))/(nelx*nely)) ...
' ch.: ' sprintf('%6.3f',change )])
% PLOT DENSITIES
colormap(gray); imagesc(-x); axis equal; axis tight; axis
off;pause(1e-6);

```

Οι επαναλήψεις της βελτιστοποίησης σταματούν, εάν η μεταβολή της παραμέτρου σχεδιασμού, $change$, είναι μικρότερη ενός ορίου που καθορίζει ο μελετητής, εδώ του 1% :

```
change = max(max(abs(x-xold)));
```

Η νέα μεταβλητή σχεδιασμού υπολογίζεται από την υπορουτίνα της Optimality Criteria μεθόδου. Ξέροντας πως ο όγκος του υλικού $sum(sum(xnew))$ είναι μια μονότονα φθίνουσα συνάρτηση του πολλαπλασιαστή Lagrange, η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange που ικανοποιεί τον περιορισμό για τον όγκο, μπορεί να βρεθεί με αλγόριθμο διχοτόμησης. Ο αλγόριθμος διχοτόμησης ξεκινά με μία εκτίμηση για το κάτω όριο $l1$ και το άνω όριο $l2$ του πολλαπλασιαστή. Το διάστημα μεταξύ των ορίων συνεχώς διχοτομείται έως ότου να πληροί το κριτήριο σύγκλισης:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [xnew]=OC(nelx,nely,x,volfrac,dc)
l1 = 0; l2 = 100000; move = 0.2;
while (l2-l1 > 1e-4)
    lmid = 0.5*(l2+l1);
    xnew = max(0.001,max(x-move,min(1.,min(x+move,x.*sqrt(-dc./lmid)))));
    if sum(sum(xnew)) - volfrac*nelx*nely > 0;
        l1 = lmid;
    else
        l2 = lmid;
    end
end
end

```

Ο παρακάτω κώδικας υλοποιεί την εξίσωση (5):

$$\frac{\widehat{dc}}{dx_e} = \frac{1}{x_e \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f} \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f x_f \frac{dc}{dx_f}$$

Παρατηρούμε, πως δεν αναζητούμε τα στοιχεία ολόκληρου του χώρου σχεδιασμού, ώστε να βρούμε τα στοιχεία εντός της ακτίνας r_{min} , αλλά μόνο εκείνα εντός ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς δύο φορές $\text{floor}(r_{min})$, γύρω από το στοιχείο που εξετάζουμε. Επιλέγοντας r_{min} μικρότερο της μονάδας, το μητρώο ευαισθησίας προκύπτει ίδιο με το αρχικό μητρώο, καθιστώντας την τεχνική φιλτραρίσματος ανενεργή:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [dcn]=check(nelx,nely,rmin,x,dc)
dcn=zeros(nely,nelx);
for i = 1:nelx
    for j = 1:nely
        sum=0.0;
        for k = max(i-floor(rmin),1):min(i+floor(rmin),nelx)
            for l = max(j-floor(rmin),1):min(j+floor(rmin),nely)
                fac = rmin-sqrt((i-k)^2+(j-l)^2);
                sum = sum+max(0,fac);
                dcn(j,i) = dcn(j,i) + max(0,fac)*x(l,k)*dc(l,k);
            end
        end
        dcn(j,i) = dcn(j,i)/(x(j,i)*sum);
    end
end
end
end

```

Στις επόμενες γραμμές, εντός της συνάρτησης FE , αναπτύσσεται ο κώδικας της επίλυσης των Πεπερασμένων Στοιχείων. Εδώ κάνουμε χρήση της εντολής *sparse* του Matlab.

Το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας σχηματίζεται με βρόγχο επανάληψης για όλα τα στοιχεία, ανάλογα και με την τιμή της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου, που στο πρόβλημά μας αποτελεί την τιμή σχεδιασμού. Όπως και στο κύριο πρόγραμμα, οι μεταβλητές $n1$ και $n2$ αντιστοιχίζουν τους επάνω αριστερά και δεξιά κόμβους του κάθε στοιχείου αντίστοιχα, στους καθολικούς αριθμούς κόμβων.

Τα στοιχεία και οι κόμβοι, αριθμούνται κατά στήλη, από τα αριστερά στα δεξιά. Κάθε κόμβος έχει δύο βαθμούς ελευθερίας (οριζόντια και κατακόρυφα).

Το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων εισάγεται στη μεταβλητή F , για τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας. Οι στηρίξεις του φορέα εισάγονται, αποκλείοντας τους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας από το σύστημα των εξισώσεων. Η υλοποίηση στο Matlab γίνεται πολύ απλά με τις εντολές:

```
U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
U(fixeddofs,:)= 0;
```

Όπου η μεταβλητή *freedofs* υποδηλώνει τους μη δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας. Κυρίως, μας είναι αρκετά απλό να προσδιορίσουμε εξ' αρχής τους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας (*fixeddofs*) και στη συνέχεια, αυτόματα χρησιμοποιώντας την εντολή *setdiff* του Matlab, να βρούμε τους μη δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας. Η εντολή προσδιορίζει τους μη δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας, ως τη διαφορά μεταξύ των συνολικών βαθμών ελευθερίας του συστήματος και των δεσμευμένων.

```
%%%%%%%%%% FE-ANALYSIS %%%%%%%%%%%
function [U]=FE(nelx,nely,x,penal)
[KE] = lk;
K = sparse(2*(nelx+1)*(nely+1), 2*(nelx+1)*(nely+1));
F = sparse(2*(nely+1)*(nelx+1),1); U = zeros(2*(nely+1)*(nelx+1),1);
for elx = 1:nelx
    for ely = 1:nely
        n1 = (nely+1)*(elx-1)+ely;
        n2 = (nely+1)* elx +ely;
        edof = [2*n1-1; 2*n1; 2*n2-1; 2*n2; 2*n2+1; 2*n2+2; 2*n1+1;
                2*n1+2];
        K(edof,edof) = K(edof,edof) + x(ely,elx)^penal*KE;
    end
end
% DEFINE LOADS AND SUPPORTS (CANTILEVER)
F(2*(nelx+1)*(nely+1),1)=-1;
fixeddofs = [1:2*(nely+1)];
alldofs = [1:2*(nely+1)*(nelx+1)];
freedofs = setdiff(alldofs,fixeddofs);
% SOLVING
U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
U(fixeddofs,:)= 0;
```

Το 8×8 μητρώο δυσκαμψίας του 4-κομβικού στοιχείου έχει υπολογιστεί αναλυτικά. Το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson, ορίζεται εντός της συνάρτησης:

```
%%%%%%%%%% ELEMENT STIFFNESS MATRIX %%%%%%%%%%%
function [KE]=lk
E = 1.;
nu = 0.3;
k=[ 1/2-nu/6    1/8+nu/8 -1/4-nu/12 -1/8+3*nu/8 ...
    -1/4+nu/12 -1/8-nu/8    nu/6         1/8-3*nu/8];
KE = E/(1-nu^2)*[ k(1) k(2) k(3) k(4) k(5) k(6) k(7) k(8)
                 k(2) k(1) k(8) k(7) k(6) k(5) k(4) k(3)
                 k(3) k(8) k(1) k(6) k(7) k(4) k(5) k(2)
                 k(4) k(7) k(6) k(1) k(8) k(3) k(2) k(5)
                 k(5) k(6) k(7) k(8) k(1) k(2) k(3) k(4)
                 k(6) k(5) k(4) k(3) k(2) k(1) k(8) k(7)
                 k(7) k(4) k(5) k(2) k(3) k(8) k(1) k(6)
                 k(8) k(3) k(2) k(5) k(4) k(7) k(6) k(1)];
```

5.2 REDUCED ORDER MODELLING – ΜΕΘΟΔΟΣ POD – SVD

Για την μέθοδο POD - SVD, αρχικά, κατασκευάζουμε τη μειωμένη βάση, στην οποία θα προβάλλουμε το σύστημα εξισώσεων.

Επιλέγουμε, για τη βάση, τα διανύσματα μετακινήσεων που προκύπτουν από την επίλυση του απλού προβλήματος βελτιστοποίησης που είδαμε πιο πάνω, για διαδοχικά ποσοστά του όγκου του χώρου σχεδιασμού, και έως ένα ορισμένο βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης κάθε φορά. Δηλαδή, η βάση αποτελείται από τα διανύσματα μετατοπίσεων που προκύπτει από την επίλυση του πλήρους προβλήματος, για κάθε βήμα στην βελτιστοποίηση και για κάθε ποσοστό του όγκου.

Αρχικά, καλούμε την συνάρτηση `top_PODBASE`, η οποία υλοποιεί την αρχική βάση με τις λύσεις - στιγμιότυπα για την μέθοδο POD – SVD, στην οποία σε επόμενο βήμα θα πραγματοποιήσουμε ανάλυση ιδιοτιμών. Η κλήση της συνάρτησης γίνεται τόσες φορές όσα και τα διαφορετικά ποσοστά του όγκου του φορέα. Σε κάθε κλήση, πραγματοποιείται η διαδικασία βελτιστοποίησης μέχρι το βήμα εκείνο που έχει ορίσει ο χρήστης, με τη βάση να έχει αυξηθεί με τόσα διανύσματα μετατοπίσεων, όσα και τα βήματα που επιλύονται.

```
for volfrac=0.1:0.05:0.8  
[V,s]=top_PODBASE(nelx,nely,volfrac,penal,rmin,N,V,s);  
end
```

Η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα τις μεταβλητές `nelx` και `nely`, που όπως και προηγουμένως είναι ο αριθμός των στοιχείων στην οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση αντίστοιχα, `volfrac` είναι το κλάσμα του όγκου, `penal` είναι η δύναμη της ποινής και `rmin` το μέγεθος του φίλτρου. Ακόμα, καθορίζουμε στη μεταβλητή `N` το βήμα μέχρι το οποίο θα επιλύεται η βελτιστοποίηση, `V` είναι η μειωμένη βάση την οποία κατασκευάζει η συνάρτηση και `s` ο δείκτης για την προσθήκη των λύσεων στη βάση.

Ο κώδικας της συνάρτησης που κατασκευάζει τη βάση, στηρίζεται στον μεγαλύτερο βαθμό στον κώδικα της απλής βελτιστοποίησης τοπολογίας που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Έχουμε αλλάξει το κριτήριο που τερματίζει τη διαδικασία, πού πλέον δεν είναι η μεταβολή της μεταβλητής σχεδιασμού, αλλά το βήμα που ορίζει ο χρήστης:


```

function [V,s]=top_POD(nelx,nely,volfrac,penal,rmin,N,V,s)
% INITIALIZE
x(1:nely,1:nelx) = volfrac;
loop = 0;
change = 1.;
% START ITERATION
while loop < N
    loop = loop + 1;
    xold = x;
% FE-ANALYSIS
    [U,V,s]=FE(nelx,nely,x,penal,V,s);

    .
    .
    .

end

```

Ακόμα, η υπορουτίνα επίλυσης της μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων για τον φορέα επιστρέφει και δέχεται εκτός από το υφιστάμενο ορίσματα και την μειωμένη βάση μαζί με τον δείκτη:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [U,V,s]=FE(nelx,nely,x,penal,V,s)

.
.
.

% SOLVING
U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
U(fixeddofs,:)= 0;
s=s+1; V(:,s)=U(freedofs,:);
end

```

Η συνάρτηση επιστρέφει στο τέλος κάθε κλήσης την ενημερωμένη βάση, αλλά και τον δείκτη, ώστε να προχωρήσει στις επόμενες επιλύσεις. Μόλις ολοκληρωθεί αυτό το πρώτο βήμα προχωράμε στην ανάλυση ιδιοτιμών.

Η ανάλυση στις ιδιάζουσες τιμές, πραγματοποιείται καλώντας τη συνάρτηση:

```
[V]=SVD(V,N)
```

Η συνάρτηση δέχεται ως όρισμα τη μειωμένη βάση από την προηγούμενη διαδικασία και το επιθυμητό μέγεθος της μειωμένης βάσης, και την επιστρέφει με μικρότερο μέγεθος, αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα (eigenvectors).

Η συνάρτηση υπολογίζει τις ιδιοτιμές (eigenvalues) και τα ιδιοδιανύσματα του πολλαπλασιασμού μητρώων $V*V'$, τα οποία και ταξινομεί σε φθίνουσα σειρά με βάση τις ιδιοτιμές. Στο Matlab, χρησιμοποιούμε την εντολή `eig(V*V')`. Τελικά, η μειωμένη βάση περιέχει τα πρώτα N ιδιοδιανύσματα, ανάλογα με το μέγεθος της βάσης που ορίζει ο χρήστης.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [V]=SVD(V,N)
[eigVec,EigVal]=eig(V*V');
[d,ind] = sort(diag(EigVal),'descend');
V = eigVec(:,ind);
V = V(:,1:N);
end

```

Μετά και από την κλήση της συνάρτησης, έχουμε υλοποιήσει τη βάση στην οποία θα προβάλλουμε το πλήρες μοντέλο.

Προχωράμε στην υλοποίηση της μεθόδου POD - SVD στην βελτιστοποίηση τοπολογίας, καλώντας την συνάρτηση *top_POD*. Όπως παρατηρούμε, εκτός από τον ορισμό των στοιχείων του φορέα και των παραμέτρων της βελτιστοποίησης, που είναι ίδια με παραπάνω, η συνάρτηση δέχεται και τη μειωμένη βάση *V* που έχουμε κατασκευάσει.

```
[x]=top_POD(nelx,nely,volfrac,penal,rmin,V);
```

Και εδώ, ο κώδικας της συνάρτησης στηρίζεται στον μεγαλύτερο βαθμό στον κώδικα της απλής βελτιστοποίησης τοπολογίας, εκτός φυσικά από το κομμάτι της επίλυσης της ανάλυσης:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [U]=FE(nelx,nely,x,penal,V)

```

```

.
.
.

```

```

%SOLVING POD
Kpod=V'*K(freedofs,freedofs)*V;
Fpod=V'*F(freedofs,:);
Upod = Kpod \ Fpod;
U(freedofs,:)=V*Upod;
U(fixeddofs,:)= 0;
e=norm((K(freedofs,freedofs)*V*Upod-
F(freedofs,:)),2)^2/norm(F(freedofs,:),2)^2
end

```

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3, εδώ επιλύουμε το μοντέλο μειωμένης τάξης, με μητρώο δυσκαμψίας $K_{pod}=V'*K(freedofs,freedofs)*V$, το διάνυσμα εξωτερικών φορτίων $F_{pod}=V'*F(freedofs,:)$, υπολογίζοντας μια αξιόπιστη προσέγγιση $V*U_{pod}$, της πλήρους λύσης, μειώνοντας σημαντικά το υπολογιστικό κόστος. Ακόμα, εντός της υπορουτίνας υπολογίζουμε και το σφάλμα της προσέγγισης e , όπως το είχαμε ορίσει στο Κεφάλαιο 2.

Παρατηρούμε, πως το μέγεθος της βάσης, ανάλογα και με το όριο που επιλέγουμε, είναι αρκετά μειωμένο. Παρόλα αυτά, η επιλογή της μας δίνει μια αρκετά αξιόπιστη προσέγγιση, αφού τα ιδιοδιανύσματα σχηματίζουν βάση σχεδόν ορθογωνική.

5.3 REDUCED ORDER MODELLING – ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΚΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ Η ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 2.2, όταν πλέον κρίνουμε πως λόγω της αλλαγής της μεταβλητής σχεδιασμού, άρα και της μορφής του φορέα, η προσέγγισή του μοντέλου μειωμένης τάξης δεν είναι αρκετά ακριβής, πρέπει να προχωρήσουμε σε ενημέρωση ή εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης, χρησιμοποιώντας τη λύση του πλήρους μοντέλου.

Η προσέγγιση της μεθόδου γίνεται με βάση το σφάλμα του μοντέλου μειωμένης τάξης που υπολογίζουμε σε κάθε επανάληψη. Εάν το σφάλμα ξεπεράσει το όριο που έχει θέσει ο χρήστης, προχωράμε σε ενημέρωση ή εμπλουτισμό της βάσης.

Όσον αφορά τον κώδικα, οι αλλαγές σε σχέση με την αρχική POD - SVD μέθοδο αφορούν την υπορουτίνα επίλυσης των Πεπερασμένων Στοιχείων, συγκεκριμένα το κομμάτι που γίνεται η επίλυση του μοντέλου μειωμένης τάξης.

Δηλαδή, όπως και στην συνάρτηση *top_POD*, έτσι και στη νέα συνάρτηση όπου θα γίνεται ο έλεγχος του σφάλματος και ο εμπλουτισμός, δίνουμε ως ορίσματα μαζί με τις παραμέτρους του προβλήματος και τη μειωμένη βάση που έχουμε κατασκευάσει:

```
[x]=top_POD_UPDATE(nelx,nely,volfrac,penal,rmin,V)
```

Η διαδικασία της ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt, υλοποιείται με την παρακάτω σειρά εντολών, εφόσον το σφάλμα ξεπερνά την επιτρεπόμενη τιμή:

```
Uorth=U(freedofs,:)-V*(V'*U(freedofs,:));  
Uupdate=Uorth/norm(Uorth);
```

Η επίλυση του πλήρους μοντέλου γίνεται όπως ακριβώς σε κάθε βήμα της απλής βελτιστοποίησης τοπολογίας.

Εάν επιλέξουμε να εμπλουτίσουμε τη μειωμένη βάση μεγαλώνοντας τις διαστάσεις της, κάθε νέα επίλυση προσθέτει μία επιπλέον στήλη στη μειωμένη βάση:

```
V(:,size(V,2)+1)=Uupdate;
```

Εάν επιλέξουμε να ενημερώσουμε τη μειωμένη βάση κρατώντας σταθερές τις διαστάσεις, με κάθε νέα επίλυση αφαιρούμε την πρώτη - παλαιότερη στήλη της μειωμένης βάσης:

```
V(:,N+1)=Uupdate; V=V(:,2:(N+1));
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FE-ANALYSIS %%%%%%%%%
function [U,V,s]=FE(nelx,nely,x,penal,V,s,loop)

.
.
.

%SOLVING POD
Kpod=V'*K(freedofs,freedofs)*V;
Fpod=V'*F(freedofs,:);
Upod = Kpod \ Fpod;
U(freedofs,:)=V*Upod;
U(fixeddofs,:)= 0;
e=norm((K(freedofs,freedofs)*V*Upod-
F(freedofs,:)),2)^2/norm(F(freedofs,:),2)^2
%ERROR CHECK AND BASIS UPDATE
if e > 0.05
    U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
    U(fixeddofs,:)= 0;
    Uorth=U(freedofs,:)-V*(V'*U(freedofs,:));
    Uupdate=Uorth/norm(Uorth);
    V(:,size(V,2)+1)=Uupdate;
end
end

```

5.4 REDUCED ORDER MODELLING – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ

Η κατασκευή της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση είναι αρκετά αποδοτική σαν μέθοδος, αφού δεν αναλωνόμαστε σε υπολογισμούς πριν την επίλυση του προβλήματος της βελτιστοποίησης, ενώ και η μειωμένη βάση κατασκευάζεται εξ' αρχής από διανύσματα μετατοπίσεων που αποτελούν πραγματικές λύσεις του πλήρους μοντέλου, δίνοντάς μας μία σχετικά ακριβής προσέγγιση της λύσης.

Η μέθοδος υλοποιείται από την συνάρτηση `onthefly`, ενώ ως ορίσματα μαζί με τις παραμέτρους του προβλήματος, δίνουμε και τον αριθμό των πλήρων επιλύσεων N , με τις οποίες θα σχηματίσουμε τη μειωμένη βάση:

```
[x]=onthefly(nelx,nely,volfrac_target,penal,rmin,N)
```

Ο κώδικας σε κάθε επίλυση Πεπερασμένων Στοιχείων ελέγχει τον αριθμό της επανάληψης. Για τις πρώτες N επαναλήψεις με ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt δημιουργούμε τη μειωμένη βάση, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στις υπόλοιπες επαναλήψεις με χρήση μειωμένων μοντέλων:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [U,V,s]=FE(nelx,nely,x,penal,loop,V,s,N)
.
.
.

%SOLVING
if loop == 1
    U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
    U(fixeddofs,:)= 0;
    Unew=U(freedofs,:)/norm(U(freedofs,:));
    V(:,loop)=Unew;
elseif loop <= N
    U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
    U(fixeddofs,:)= 0;
    Uorth=U(freedofs,:)-V*(V'*U(freedofs,:));
    Unew=Uorth/norm(Uorth);
    V(:,loop)=Unew;
else
    %SOLVING POD
    Kpod=V'*K(freedofs,freedofs)*V;
    Fpod=V'*F(freedofs,:);
    Upod = Kpod \ Fpod;
    U(freedofs,:)=V*Upod;
    U(fixeddofs,:)= 0;
    e=norm((K(freedofs,freedofs)*V*Upod-
    F(freedofs,:)),2)^2/norm(F(freedofs,:),2)^2;
end
end
```

5.5 REDUCED ORDER MODELLING – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ Ή ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ

Η υλοποίηση της μεθόδου βασίζεται στην προηγούμενη διαδικασία με κατασκευή της βάσης κατά την επίλυση με επιπλέον έλεγχο του σφάλματος και ενημέρωση ή εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης.

Καλούμε τη συνάρτηση `otf_UPDATE`, η οποία διαφέρει με την απλή κατασκευή της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση, μόνο στην υπορουτίνα της επίλυσης των Πεπερασμένων Στοιχείων. Εκεί προστίθεται ο έλεγχος και η ενημέρωση ή ο εμπλουτισμός της βάσης, εφόσον το βήμα της βελτιστοποίησης έχει ξεπεράσει τον αριθμό των πλήρων επιλύσεων που έχει ορίσει ο χρήστης:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FE-ANALYSIS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [U,V,s]=FE(nelx,nely,x,penal,loop,V,s,N)

.
.
.

%SOLVING
if loop == 1
    U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
    U(fixeddofs,:)= 0;
    Unew=U(freedofs,:)/norm(U(freedofs,:));
    V(:,loop)=Unew;
elseif loop <= N
    U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
    U(fixeddofs,:)= 0;
    Uorth=U(freedofs,:)-V*(V'*U(freedofs,:));
    Unew=Uorth/norm(Uorth);
    V(:,loop)=Unew;
else
    %SOLVING POD
    Kpod=V'*K(freedofs,freedofs)*V;
    Fpod=V'*F(freedofs,:);
    Upod = Kpod \ Fpod;
    U(freedofs,:)=V*Upod;
    U(fixeddofs,:)= 0;
    e=norm((K(freedofs,freedofs)*V*Upod-
F(freedofs,:)),2)^2/norm(F(freedofs,:),2)^2;
    %ERROR CHECK AND BASIS UPDATE
    if e > 0.05
        U(freedofs,:) = K(freedofs,freedofs) \ F(freedofs,:);
        U(fixeddofs,:)= 0;
        Uorth=U(freedofs,:)-V*(V'*U(freedofs,:));
        Uupdate=Uorth/norm(Uorth);
        V(:,size(V,2)+1)=Uupdate;
    end
end
end
end

```

5.6 ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ – ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

Ο Εύρωστος Σχεδιασμός στην Βελτιστοποίηση Τοπολογίας, όπως αναπτύσσεται παρακάτω, υλοποιείται καλώντας μόνο μία συνάρτηση, έχοντας καθορίσει από πριν τα τυχαία μεταβλητά μεγέθη:

```
clc; clear;
%GENERATE RANDOM VARIABLES
N=1000;
%ANGLE UNIFORM BETWEEN +/- pi/4
r = (-pi/4)+(2*pi/4).*rand(N,1);
%MAGNITUDE UNIFORM BETWEEN 0.5-1.5
f = 0.5+(1.5-0.5).*rand(N,1);

th(:,1)=r;
th(:,2)=f;

%ROBUST DESIGN START
for i=1:N
    [x(:,:,i),mean(i),var(i)]=robust(th,N,i);
end

%OBJECTIVE MINIMIZATION
k=[1,3,5];
for i=1:3
    c(:,i)=mean+k(i)*sqrt(var);
    [cmin(i),ind(i)]=min(c(:,i));
    xrob(:,:,i)=x(:,:,ind(i));
end

% PRINT RESULTS
disp([' Obj.: ' sprintf('%10.4f',cmin)])
% PLOT DENSITIES
for i=1:3
    colormap(gray); imagesc(-xrob(:,:,i)); axis equal; axis tight; axis
off;pause(1e-6);
end
```

Η συνάρτηση *robust* δέχεται τους συνδυασμούς των τυχαίων παραμέτρων *th*, εκτελείται *N* φορές και επιστρέφει τον βέλτιστο κάθε φορά σχεδιασμό [*x*], μαζί με την μέση τιμή και τη διακύμανση της ενδοσιμότητας του φορέα σχεδιασμού, *mean* και *var* αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του *k* υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με βάση τα στατιστικά μεγέθη της ενδοσιμότητας, Εξ.(20), και για την μικρότερη τιμή προκύπτει ο αντίστοιχος φορέας που έχει προηγουμένως σχεδιαστεί.

Τέλος, τυπώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και ο φορέας σχεδιάζεται σε γράφημα.

Εντός της συνάρτησης *robust*, αρχικά, ορίζονται οι διαστάσεις του χώρου σχεδιασμού. Προχωράμε στην απλή βελτιστοποίηση τοπολογίας (συνάρτηση *top*) για τον *i* συνδυασμό τυχαίων παραμέτρων, με τον φορέα που προκύπτει να χρησιμοποιείται για τις *N* Monte Carlo επιλύσεις με συνδυασμούς τυχαίων

παραμέτρων, καλώντας τη συνάρτηση *MonteCarloFEM* και επιστρέφοντας τις τιμές της μέσης τιμής και τη διακύμανση της ενδοσιμότητας για τον παραπάνω φορέα:

```
function [x,mean,var]=robust(th,N,i)
% i OPT WITH th(i)
[x]=top(nelx,nely,0.3,3,1.2,th(i,:));

%MONTE CARLO FEM SOLUTION
[mean,var]=MonteCarloFEM(nelx,nely,3,th,N,x);
end
```

Στην συνάρτηση της απλής βελτιστοποίησης τοπολογίας, έχουμε προσαρμόσει τις εξωτερικές δυνάμεις για την επιβολή των μεγεθών:

```
% INITIALIZE
.
.
F=th(2); r=th(1);
Fx=F*sin(r); Fy=F*cos(r);
```

Για τη συμμετρικότητα του φορέα, χρησιμοποιούμε τον κώδικα με δύο loadcases για συμμετρικά φορτία στην ίδια επίλυση. Αρκεί να αλλάξουμε το μέγεθος στα διανύσματα εξωτερικών φορτίσεων και το διάνυσμα μετατοπίσεων σε δύο στήλες:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FE-ANALYSIS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
.
.
F = sparse(2*(nely+1)*(nelx+1),2);
U = zeros(2*(nely+1)*(nelx+1),2);
```

Ακόμα, αλλάζουμε και τις παρακάτω σειρές:

```
% OBJECTIVE FUNCTION AND SENSITIVITY ANALYSIS
.
.

dc(ely,elx)=0.;
for i=1:2
Ue = U([2*n1-1;2*n1; 2*n2-1;2*n2; 2*n2+1;2*n2+2; 2*n1+1;2*n1+2],i);
c = c + x(ely,elx)^penal*Ue'*KE*Ue;
dc(ely,elx) = dc(ely,elx) -penal*x(ely,elx)^(penal-1)*Ue'*KE*Ue;
end
```

Τέλος, ορίζουμε και τα διανύσματα των εξωτερικών δυνάμεων δύο στηλών για τις δύο loadcases:

```
% DEFINE LOADS AND SUPPORTS (MBB BEAM)
F(2*((nelx/2+1)*(nely+1)),1) = -Fy;
F(2*((nelx/2+1)*(nely+1)),2) = -Fy;
F(2*((nelx/2+1)*(nely+1))-1,1) = Fx;
F(2*((nelx/2+1)*(nely+1))-1,2) = -Fx;
```

Εντός της συνάρτησης γίνεται η επίλυση του φορέα για τους τυχαίους συνδυασμούς φόρτισης και ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της διακύμανσης. Καλείται ως υπορουτίνα η επίλυση Πεπερασμένων Στοιχείων και ο υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας του κάθε στοιχείου:


```

function [M,V] = MonteCarloFEM(nelx,nely,penal,th,N,x)
for i=1:N
% FE-ANALYSIS
F=th(i,2); r=th(i,1);
Fx=F*sin(r); Fy=F*cos(r);
[U]=FE(nelx,nely,x,penal,Fx,Fy);
% OBJECTIVE FUNCTION AND SENSITIVITY ANALYSIS
[KE] = 1k;
c(i) = 0.;
for ely = 1:nely
for elx = 1:nelx
n1 = (nely+1)*(elx-1)+ely;
n2 = (nely+1)* elx +ely;
Ue = U([2*n1-1;2*n1; 2*n2-1;2*n2; 2*n2+1;2*n2+2; 2*n1+1;2*n1+2],1);
c(i) = c(i) + x(ely,elx)^penal*Ue'*KE*Ue;
end
end
end
M=mean(c);
V=var(c);
end

```

5.7 ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ – ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η υλοποίηση του Εύρωστου Σχεδιασμού με χρήση Μοντέλων Μειωμένης Τάξης βασίζεται στον κώδικα που αναπτύχθηκε στην Παράγραφο 5.6, με προσθήκη των τεχνικών της μειωμένης βάσης. Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4, κατασκευάζουμε και ενημερώνουμε ή εμπλουτίζουμε τη μειωμένη βάση των μοντέλων κατά την επίλυση των βημάτων της διαδικασίας επίλυσης, ενώ και στην Monte Carlo επίλυση των φορέων επιλύουμε τα μειωμένα μοντέλα.

Οι αλλαγές αφορούν αρχικά τη συνάρτηση με την οποία πραγματοποιούμε τη βελτιστοποίηση τοπολογίας, η οποία είναι αυτή που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 5.5, ενώ οι Monte Carlo επιλύσεις, χρησιμοποιούν τη μειωμένη βάση όπως κατασκευάστηκε από την παραπάνω συνάρτηση:

```
function [x,mean,var]=robust(th,N,i)
% i OPT WITH th(i)
[x,V]=otf_UPDATE(nelx,nely,0.3,3,1.2,Nb,residual,th(i,:));

%2nd MONTE CARLO FEM SOLUTION
[mean,var]=MonteCarloFEM(nelx,nely,3,th,N,x,V);
end
```

Έτσι, αντί της συνάρτησης *top* που καλούμε στα πλήρη μοντέλα του Εύρωστου Σχεδιασμού, εδώ καλούμε την *otf_UPDATE* που επιστρέφει μαζί με τον σχεδιασμό του φορέα και την μειωμένη βάση που κατασκευάζεται και ενημερώνεται ή εμπλουτίζεται κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης.

Αντίστοιχα, στην συνάρτηση των Monte Carlo επιλύσεων, χρησιμοποιούμε τα Μοντέλα Μειωμένης τάξης στο κομμάτι της επίλυσης. Το υπόλοιπο κομμάτι του κώδικα παραμένει ως έχει:

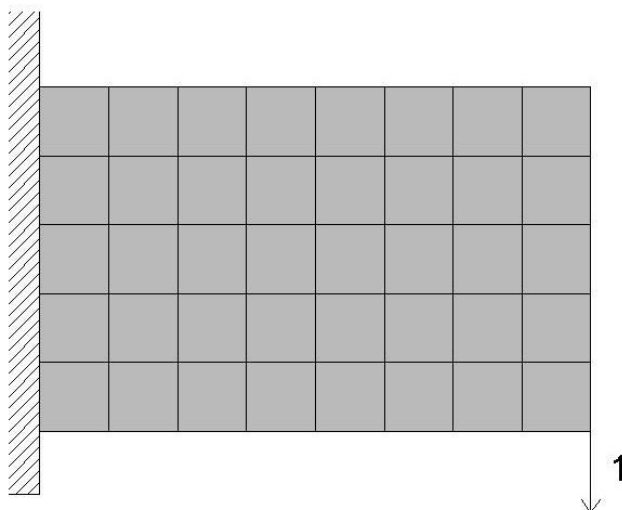
```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [U]=FE(nelx,nely,x,penal,Fx,Fy,V)
.
.
.
% SOLVING
Kpod=V'*K(freedofs,freedofs)*V;
Fpod=V'*F(freedofs,:);
Upod = Kpod \ Fpod;
U(freedofs,:)=V*Upod;
U(fixeddofs,:)= 0;
e=norm((K(freedofs,freedofs)*V*Upod-
F(freedofs,:)),2)^2/norm(F(freedofs,:),2)^2;
end
```

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – CASE STUDIES

Θα παρουσιάσουμε 2 εφαρμογές των μεθόδων που αναλύθηκαν στα παραπάνω κεφάλαια, τόσο θεωρητικά όσο και στην υλοποίησή τους σε κώδικα, βάση των οποίων θα καταλήξουμε στα βασικά συμπεράσματα. Στην πρώτη εφαρμογή, κάνουμε χρήση των τεχνικών των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης. Στο δεύτερο, μαζί με τα Μοντέλα Μειωμένης Τάξης, υλοποιούμε τον Robust Design - Εύρωστο Σχεδιασμό, αρχικά επιλύοντας τα πλήρη μοντέλα και στη συνέχεια με τεχνικές μειωμένης βάσης.

6.1 ΠΡΟΒΟΛΟΣ

Στην πρώτη εφαρμογή, ο χώρος σχεδιασμού είναι ένας πακτωμένος πρόβολος, πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων διαστάσεων 64×40 και 5330 βαθμών ελευθερίας, με μοναδιαία φόρτιση στον κάτω δεξιά κόμβο.



Θα επιλύσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας με τη μέθοδο SIMP, για όγκο 40% του χώρου σχεδιασμού. Η τιμή του συντελεστή της ποινής, όπως αναφέραμε στη θεωρία είναι $p = 3$, ενώ επιλέγουμε την ακτίνα του φίλτρου $r_{min} = 1.2$.

Για κάθε μέθοδο, μελετάμε την ταχύτητα επίλυσης, τα βήματα της βελτιστοποίησης και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο τέλος της βελτιστοποίησης. Για να συγκρίνουμε τις τεχνικές των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης, επιλέγουμε ως εφαρμογή αναφοράς την απλή επίλυση της βελτιστοποίησης με την μέθοδο SIMP και καταλήγουμε σε ποσοστό επιτάχυνσης της ανάλυσης του φορέα, σημειώνουμε τον αριθμό των πλήρων επιλύσεων, εφόσον θα γίνεται ενημέρωση – εμπλουτισμός της βάσης, και το σφάλμα στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Μελετάμε κάθε μέθοδο για διαφορετικά όρια επιτρεπόμενου σφάλματος στην επίλυση του μειωμένου μοντέλου, για διαφορετικό μέγεθος της μειωμένης βάσης αλλά και για διαφορετική αρχική βάση στην POD – SVD μέθοδο.

Για την επιτάχυνση της ανάλυσης των Πεπερασμένων Στοιχείων, παίρνουμε υπόψιν το χρόνο της επίλυσης του κάθε φορά συστήματος εξισώσεων ισορροπίας, είτε αφορά τα μειωμένα μοντέλα, είτε τα πλήρη μοντέλα όταν γίνεται ενημέρωση της βάσης. Δεν εξετάζουμε, δηλαδή, τον συνολικό χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Για την απόκλιση από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης παίρνουμε τον τύπο:

$$err(\%) = \frac{c_{approx} - c_{exact}}{c_{exact}} \times 100 \quad (23)$$

6.1.1. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ – SIMP

Το πρόγραμμα καλεί τη συνάρτηση *top* με ορίσματα:

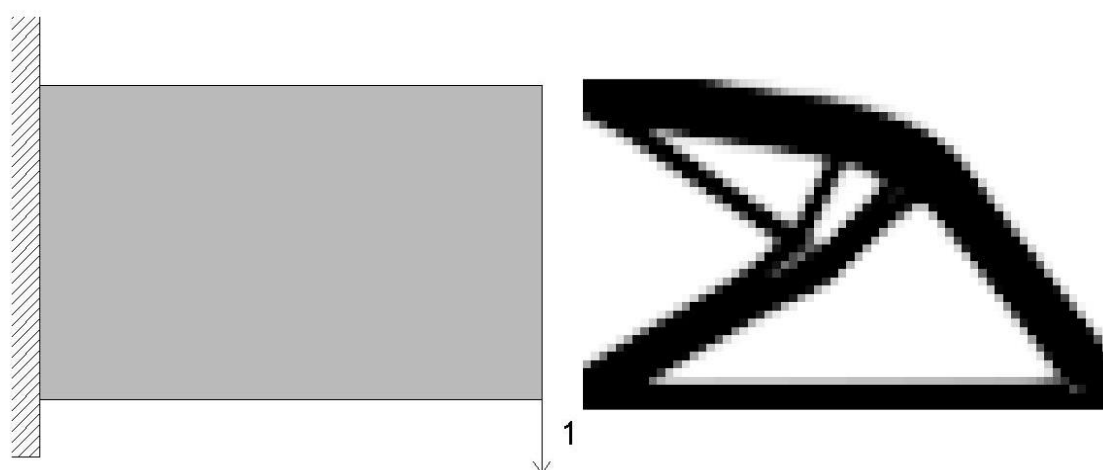
```
[x]=top(64,40,0.4,3,1.2)
```

Εντός της υπορουτίνας επίλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων, έχουμε ορίσει τους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας και το διάνυσμα των δυνάμεων:

```
% DEFINE LOADS AND SUPPORTS (CANTILEVER)
F(2*(nelx+1)*(nely+1),1)=-1;
fixeddofs = [1:2*(nely+1)];
```

Η βελτιστοποίηση ολοκληρώνεται στην 63^η επανάληψη με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, της ενδοσιμότητας, να είναι $c = 56.0930$.

Παίρνουμε και τον τελικό βέλτιστο σχεδιασμό:



Ο αρχικός χώρος σχεδιασμού και η λύση της βελτιστοποίησης

6.1.2. ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD

Από την επίλυση με τη μέθοδο POD – SVD, παρατηρούμε πως η μόρφωση του φορέα αποκλίνει σημαντικά, ενώ η λύση δεν ανταποκρίνεται σε κατασκευάσιμο φορέα. Εδώ, η χρήση μειωμένων μοντέλων εκφυλίζει τη διαδικασία βελτιστοποίησης.



Αριστερά ο εκφυλισμένος φορέας για $N = 4$ και $N = 10$, δεξιά για $N = 20$ και $N = 40$

Συμπεραίνουμε, από τα αποτελέσματα, πως η ενημέρωση – εμπλουτισμός της μειωμένης βάσης είναι απαραίτητα για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα με τη χρήση μειωμένων μοντέλων.

6.1.3. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε κατασκευάζοντας τη μειωμένη βάση κατά την επίλυση χωρίς την ενημέρωση ή τον εμπλουτισμό της με επόμενες πλήρεις επιλύσεις του συστήματος.



Αριστερά ο εκφυλισμένος φορέας για $N = 4$, δεξιά για $N = 10$



Αριστερά ο εκφυλισμένος φορέας για $N = 20$, δεξιά για $N = 40$

6.1.4. ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ Ή ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟ ΒΑΣΗΣ

Σε μορφή πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης με τη μέθοδο POD – SVD με ενημέρωση και με εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης.

Εξετάσαμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη, το ορθοκανονικοποιημένο διάνυσμα της πλήρους λύσης προστίθεται ως στήλη και εμπλουτίζει τη βάση και η ανάλυση συνεχίζει με αυξημένο το μέγεθος της μειωμένης βάσης. Στη δεύτερη, η μειωμένη βάση ενημερώνεται με το μέγεθος της να παραμένει σταθερό. Προσθέτουμε τη νέα πλήρη λύση αλλά η παλιότερη στήλη – διάνυσμα διαγράφεται από τη μειωμένη βάση.

Ακόμα, εξετάζουμε την επιρροή του τρόπου κατασκευής της μειωμένης βάσης. Η βάση εδώ κατασκευάζεται εκτός των βημάτων της βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιούμε τα N πρώτα διανύσματα – λύσεις από τα N πρώτα βήματα της βελτιστοποίησης για διαφορετικά ποσοστά όγκου του χώρου σχεδιασμού. Αυτά τα διανύσματα συνθέτουν ένα μητρώο στο οποίο πραγματοποιούμε ανάλυση με βάση τις ιδιοτιμές. Από τη βάση που προκύπτει, κρατάμε για το μειωμένο μοντέλο τις πρώτες N στήλες.

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, για τις διάφορες τιμές του μεγέθους της βάσης N , επιλέγουμε ποσοστά του όγκου από 10% έως 90% και ανά 10% και ανά 5% . Για το επιτρεπόμενο σφάλμα, επιλέγουμε δύο τιμές, $\varepsilon = 0.1$ και $\varepsilon = 0.05$.

Στον Πίνακα 1, έχουμε τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης. Ενώ στον Πίνακα 2, τα αποτελέσματα για ενημέρωση της μειωμένης βάσης, με το μέγεθός της να παραμένει σταθερό.

Παρατηρούμε πως για μειωμένη βάση που αυξάνεται και για $\varepsilon = 0.1$, η βελτιστοποίηση καταλήγει σε φορέα διαφορετικής μορφής από το σχεδιασμό αναφοράς για τις τιμές $N = 4$ και $N = 10$ για κατασκευή βάσης με κλάσματα όγκου από 0.1 έως 0.9 ανά 0.1 . Το ίδιο συμβαίνει και για $\varepsilon = 0.1$ με $N = 4$, σε μειωμένη βάση με σταθερό μέγεθος για κλάσματα από 0.1 έως 0.9 ανά 0.05 , ενώ και για αυτήν την περίπτωση ο σχεδιασμός του φορέα ομοιάζει στην πρώτη παραπάνω επίλυση.



Αριστερά ο σχεδιασμός του φορέα για $\varepsilon = 0.1$ και $N = 4$, δεξιά για $\varepsilon = 0.1$ και $N = 10$

| ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟ ΒΑΣΗΣ | | | | | | | | |
|---|---------------|-----|--------|------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Κατασκευή αρχικής βάσης με κλάσμα όγκου 0.1 έως 0.9 ανά 0.1 | | | | | | | | |
| | ε | N | $t(s)$ | Επιτάχυνση | Επαναλήψεις | Πλήρεις Επιλύσεις | Αντικειμενική Συν. | Σφάλμα Αντικ. Συν. |
| SIMP | - | - | 1,0551 | - | 63 | 63 | 56,0930 | - |
| | 0,1 | 4 | 0,5461 | -48,24% | 63 | 33 | 56,3632 | 0,4817% |
| | 0,1 | 10 | 0,5192 | -50,79% | 63 | 32 | 55,7730 | 0,5705% |
| | 0,1 | 20 | 0,5485 | -48,01% | 63 | 32 | 56,1581 | 0,1161% |
| | 0,1 | 40 | 0,4778 | -54,72% | 63 | 30 | 56,1061 | 0,0234% |
| | 0,05 | 4 | 0,5754 | -45,46% | 63 | 33 | 56,1419 | 0,0872% |
| | 0,05 | 10 | 0,5656 | -46,39% | 63 | 33 | 56,1336 | 0,0724% |
| | 0,05 | 20 | 0,5927 | -43,83% | 63 | 33 | 56,1360 | 0,0767% |
| | 0,05 | 40 | 0,5649 | -46,46% | 63 | 32 | 56,0830 | 0,0178% |

| ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟ ΒΑΣΗΣ | | | | | | | | |
|--|---------------|-----|--------|------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Κατασκευή αρχικής βάσης με κλάσμα όγκου 0.1 έως 0.9 ανά 0.05 | | | | | | | | |
| | ε | N | $t(s)$ | Επιτάχυνση | Επαναλήψεις | Πλήρεις Επιλύσεις | Αντικειμενική Συν. | Σφάλμα Αντικ. Συν. |
| SIMP | - | - | 1,0551 | - | 63 | 63 | 56,0930 | - |
| | 0,1 | 4 | 0,5706 | -45,92% | 63 | 33 | 56,3900 | 0,5295% |
| | 0,1 | 10 | 0,5028 | -52,35% | 63 | 31 | 56,0573 | 0,0636% |
| | 0,1 | 20 | 0,6006 | -43,08% | 63 | 32 | 56,0739 | 0,0341% |
| | 0,1 | 40 | 0,5662 | -46,34% | 63 | 31 | 56,0648 | 0,0503% |
| | 0,05 | 4 | 0,5630 | -46,64% | 63 | 33 | 56,1323 | 0,0701% |
| | 0,05 | 10 | 0,5907 | -44,01% | 63 | 33 | 56,1317 | 0,0690% |
| | 0,05 | 20 | 0,5604 | -46,89% | 63 | 33 | 56,1289 | 0,0640% |
| | 0,05 | 40 | 0,5015 | -52,47% | 63 | 32 | 56,0728 | 0,0360% |

Πίνακας 1- Αποτελέσματα για εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης, με το μέγεθός της να αυξάνεται.

| ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ ΒΑΣΗΣ | | | | | | | | |
|---|---------------|-----|--------|------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Κατασκευή αρχικής βάσης με κλάσμα όγκου 0.1 έως 0.9 ανά 0.1 | | | | | | | | |
| | ε | N | $t(s)$ | Επιτάχυνση | Επαναλήψεις | Πλήρεις Επιλύσεις | Αντικειμενική Συν. | Σφάλμα Αντικ. Συν. |
| SIMP | - | - | 1,0551 | - | 63 | 63 | 56,0930 | - |
| | 0,1 | 4 | 0,9977 | -5,44% | 63 | 61 | 56,0668 | 0,0467% |
| | 0,1 | 10 | 0,9996 | -5,26% | 63 | 59 | 55,8010 | 0,5206% |
| | 0,1 | 20 | 0,8400 | -20,39% | 63 | 50 | 56,0968 | 0,0068% |
| | 0,1 | 40 | 0,5873 | -44,34% | 63 | 37 | 56,1727 | 0,1421% |
| | 0,05 | 4 | 1,0333 | -2,07% | 63 | 62 | 56,0815 | 0,0205% |
| | 0,05 | 10 | 1,0098 | -4,29% | 63 | 61 | 56,0826 | 0,0185% |
| | 0,05 | 20 | 0,8644 | -18,07% | 63 | 53 | 56,0571 | 0,0640% |
| | 0,05 | 40 | 0,6713 | -36,38% | 63 | 41 | 56,0830 | 0,0178% |

| ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ ΒΑΣΗΣ | | | | | | | | |
|--|---------------|-----|--------|------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Κατασκευή αρχικής βάσης με κλάσμα όγκου 0.1 έως 0.9 ανά 0.05 | | | | | | | | |
| | ε | N | $t(s)$ | Επιτάχυνση | Επαναλήψεις | Πλήρεις Επιλύσεις | Αντικειμενική Συν. | Σφάλμα Αντικ. Συν. |
| SIMP | - | - | 1,0551 | - | 63 | 63 | 56,0930 | - |
| | 0,1 | 4 | 1,0436 | -1,09% | 63 | 61 | 56,0909 | 0,0037% |
| | 0,1 | 10 | 1,0317 | -2,22% | 63 | 58 | 56,0981 | 0,0091% |
| | 0,1 | 20 | 0,8382 | -20,56% | 63 | 48 | 56,1045 | 0,0205% |
| | 0,1 | 40 | 0,6541 | -38,01% | 63 | 38 | 56,0496 | 0,0774% |
| | 0,05 | 4 | 1,0530 | -0,20% | 63 | 62 | 56,0912 | 0,0032% |
| | 0,05 | 10 | 0,9947 | -5,72% | 63 | 61 | 56,0828 | 0,0182% |
| | 0,05 | 20 | 0,9185 | -12,95% | 63 | 54 | 56,0950 | 0,0036% |
| | 0,05 | 40 | 0,6710 | -36,40% | 63 | 41 | 56,0778 | 0,0271% |

Πίνακας 2 - Αποτελέσματα για ενημέρωση της μειωμένης βάση, με το μέγεθός της να παραμένει σταθερό.

6.1.5. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ Ή ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ

Σε μορφή πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης με τη μέθοδο κατασκευής και εμπλουτισμού της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση.

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις όπως και προηγουμένως. Στην πρώτη, το ορθοκανονικοποιημένο διάλυμα της πλήρους λύσης προστίθεται ως στήλη και εμπλουτίζει τη βάση και η ανάλυση συνεχίζει με αυξημένο το μέγεθος της μειωμένης βάσης. Στη δεύτερη, η μειωμένη βάση ενημερώνεται με το μέγεθος της να παραμένει σταθερό. Προσθέτουμε τη νέα πλήρη λύση αλλά η παλιότερη στήλη – διάλυμα διαγράφεται από τη μειωμένη βάση.

Στον Πίνακα 3, έχουμε τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης. Ενώ στον Πίνακα 4, τα αποτελέσματα για ενημέρωση της μειωμένης βάσης, με το μέγεθός της να παραμένει σταθερό.

| ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ | | | | | | | | |
|---|---------------|-----|--------|------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| | ε | N | $t(s)$ | Επιτάχυνση | Επαναλήψεις | Πλήρεις Επιλύσεις | Αντικειμενική Συν. | Σφάλμα Αντικ. Συν. |
| SIMP | - | - | 1,0551 | - | 63 | 63 | 56,0930 | - |
| | 0,1 | 4 | 0,5156 | -51,13% | 63 | 32 | 56,0417 | 0,0915% |
| | 0,1 | 10 | 0,5156 | -51,13% | 63 | 32 | 56,0417 | 0,0915% |
| | 0,1 | 20 | 0,5338 | -49,41% | 63 | 33 | 56,0809 | 0,0216% |
| | 0,1 | 40 | 0,7906 | -25,07% | 63 | 45 | 56,0959 | 0,0052% |
| | 0,05 | 4 | 0,5259 | -50,16% | 63 | 34 | 56,1294 | 0,0649% |
| | 0,05 | 10 | 0,5259 | -50,16% | 63 | 34 | 56,1294 | 0,0649% |
| | 0,05 | 20 | 0,5259 | -50,16% | 63 | 34 | 56,1294 | 0,0649% |
| | 0,05 | 40 | 0,7713 | -26,90% | 63 | 45 | 56,0959 | 0,0052% |

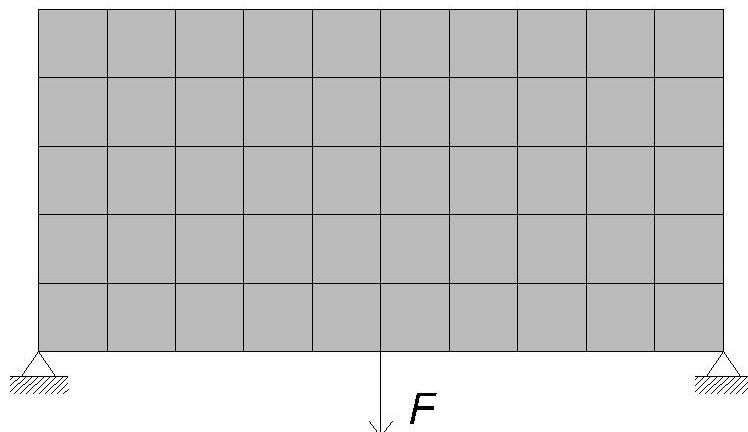
Πίνακας 3 – Κατασκευή και εμπλουτισμός μειωμένης βάσης κατά την επίλυση, το μέγεθος της μειωμένης βάσης αυξάνεται.

| ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ | | | | | | | | |
|--|---------------|-----|--------|------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| | ε | N | $t(s)$ | Επιτάχυνση | Επαναλήψεις | Πλήρεις Επιλύσεις | Αντικειμενική Συν. | Σφάλμα Αντικ. Συν. |
| SIMP | - | - | 1,0551 | - | 63 | 63 | 56,0930 | - |
| | 0,1 | 4 | 1,0551 | 0,00% | 63 | 63 | 56,0930 | 0,0000% |
| | 0,1 | 10 | 1,0551 | 0,00% | 63 | 63 | 56,0930 | 0,0000% |
| | 0,1 | 20 | 0,8933 | -15,34% | 63 | 53 | 56,0259 | 0,1196% |
| | 0,1 | 40 | 0,8351 | -20,85% | 63 | 51 | 56,0443 | 0,0868% |
| | 0,05 | 4 | 1,0551 | 0,00% | 63 | 63 | 56,0930 | 0,0000% |
| | 0,05 | 10 | 1,0551 | 0,00% | 63 | 63 | 56,0930 | 0,0000% |
| | 0,05 | 20 | 0,9853 | -6,62% | 63 | 58 | 56,0952 | 0,0039% |
| | 0,05 | 40 | 0,9244 | -12,39% | 63 | 52 | 56,0927 | 0,0005% |

Πίνακας 4 - Κατασκευή και ενημέρωση μειωμένης βάσης κατά την επίλυση, μέγεθος μειωμένης βάσης σταθερό.

6.2 ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ

Στην δεύτερη εφαρμογή, ο χώρος σχεδιασμού είναι μία αμφιέρειστη - αμφιαρθρωτή δοκός, πλέγματος τετραγωνικών πεπερασμένων στοιχείων διαστάσεων 100×50 και 10302 βαθμών ελευθερίας για το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας και διαστάσεων 76×38 και 6006 βαθμών ελευθερίας για το Robust Design πρόβλημα, με μοναδιαία φόρτιση στον μεσαίο κόμβο της κάτω πλευράς.



Θα επιλύσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας με τη μέθοδο SIMP για όγκο 30% του χώρου σχεδιασμού. Η τιμή του συντελεστή της ποινής, όπως αναφέραμε στη θεωρία, είναι $p = 3$ ενώ επιλέγουμε την ακτίνα του φίλτρου $r_{min} = 1.2$, όπως και στην Εφαρμογή 1.

Και εδώ, για κάθε μέθοδο, μελετάμε την ταχύτητα επίλυσης, τα βήματα της βελτιστοποίησης και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο τέλος της βελτιστοποίησης. Επιλέγουμε ως εφαρμογή αναφοράς την απλή επίλυση της βελτιστοποίησης με την μέθοδο SIMP και καταλήγουμε στα αντίστοιχα συγκριτικά μεγέθη.

Μελετάμε κάθε μέθοδο για διαφορετικά όρια επιτρεπόμενου σφάλματος στην επίλυση του μειωμένου μοντέλου, για διαφορετικό μέγεθος της μειωμένης βάσης, αλλά και για διαφορετική αρχική βάση στην POD – SVD μέθοδο.

Ειδικά για το Robust Design πρόβλημα, συγκρίνουμε τη μέθοδο που περιγράψαμε στην Παράγραφο 1.1 και τα αντίστοιχα μεγέθη του σχεδιασμού, με τα αντίστοιχα που προκύπτουν με τη χρήση μειωμένων μοντέλων.

Και εδώ, για την επιτάχυνση των επιλύσεων, δεν εξετάζουμε τον συνολικό χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας βελτιστοποίησης, αλλά το χρόνο της επίλυσης του κάθε φορά συστήματος εξισώσεων ισορροπίας.

Η απόκλιση από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δίνεται από την εξίσωση (23).

6.2.1. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ – SIMP

Το πρόγραμμα καλεί τη συνάρτηση *top* με ορίσματα:

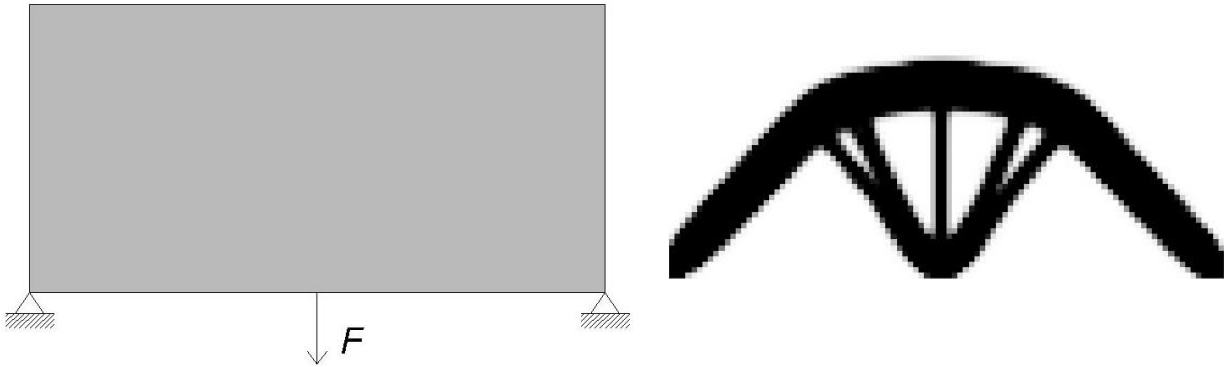
```
[x]=top(100,50,0.3,3,1.2)
```

Εντός της υπορουτίνας επίλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων, έχουμε ορίσει τους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας και το διάνυσμα των δυνάμεων:

```
% DEFINE LOADS AND SUPPORTS (FULL MBB BEAM)
F(2*((nelx/2)*(nely+1)),1) = -1;
fixeddofs = [(2*nely-1), (2*nely), 2*(nelx+1)*(nely+1)-1,
2*(nelx+1)*(nely+1)];
```

Η βελτιστοποίηση ολοκληρώνεται στην 40^η επανάληψη με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, της ενδοσιμότητας, να είναι $c = 14.5496$.

Παίρνουμε και τον τελικό βέλτιστο σχεδιασμό:



Ο αρχικός χώρος σχεδιασμού και η λύση της βελτιστοποίησης

6.2.2. ΜΕΘΟΔΟΣ POD – SVD

Από τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε, όπως και παραπάνω, πως η ενημέρωση – εμπλουτισμός της μειωμένης βάσης είναι αναγκαία για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα με τη χρήση μειωμένων μοντέλων.



Αριστερά ο εκφυλισμένος φορέας για $N = 4$, δεξιά για $N = 10$



Αριστερά ο εκφυλισμένος φορέας για $N = 20$, δεξιά για $N = 30$

6.2.3. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε κατασκευάζοντας τη μειωμένη βάση κατά την επίλυση χωρίς την ενημέρωση - εμπλουτισμό της με επόμενες πλήρεις επιλύσεις του συστήματος.



Αριστερά ο εκφυλισμένος φορέας για $N = 4$, δεξιά για $N = 10$



Αριστερά ο εκφυλισμένος φορέας για $N = 20$, δεξιά για $N = 30$

Παρατηρούμε πως για $N = 30$ ο φορέας που προκύπτει δεν είναι ακριβώς εκφυλισμένος, αλλά διαφέρει από τον σχεδιασμό αναφοράς. Για την ακρίβεια, το κατακόρυφο μέλος του φορέα αναφοράς έχει αντικατασταθεί από δύο κεκλιμένα μέλη που καταλήγουν στο σημείο εφαρμογής της κατακόρυφης φόρτισης. Αυτό το φαινόμενο το παρατηρούμε και παρακάτω, σε αρκετές περιπτώσεις στις επιλύσεις με μειωμένη βάση που ενημερώνεται - εμπλουτίζεται.

6.2.4. ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟ ΒΑΣΗΣ

Σε μορφή πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης με τη μέθοδο POD-SVD με εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης.

Εδώ, το ορθοκανονικοποιημένο διάνυσμα της πλήρους λύσης προστίθεται ως στήλη και εμπλουτίζει τη βάση και η ανάλυση συνεχίζει με αυξημένο το μέγεθος της μειωμένης βάσης.

Ακόμα, δεν εξετάζουμε την επιρροή του τρόπου κατασκευής της μειωμένης βάσης, εφόσον από την πρώτη εφαρμογή προκύπτει πως ακόμα και αν κατασκευάσουμε τη μειωμένη βάση ανά 5%, οι επιλύσεις σχεδόν ταυτίζονται. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, για τις διάφορες τιμές του μεγέθους της βάσης N , επιλέγουμε ποσοστά του όγκου από 10% έως 90% και ανά 10%. Για το επιτρεπόμενο σφάλμα, επιλέγουμε και εδώ τις τιμές, $\varepsilon = 0.1$ και $\varepsilon = 0.05$.

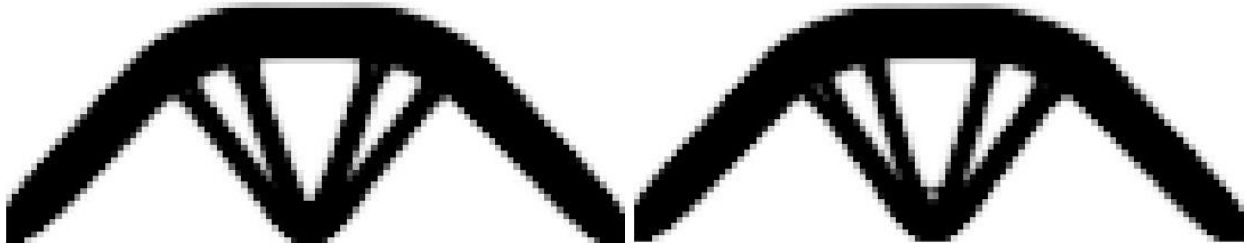
Στον Πίνακα 5, έχουμε τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για μειωμένη βάση που εμπλουτίζεται. Εδώ, δεν εξετάζουμε πάλι την ενημέρωση της μειωμένης βάσης με σταθερό μέγεθος, καθώς όπως είδαμε στην πρώτη εφαρμογή δεν πετυχαίνουμε σαφή μείωση του υπολογιστικού κόστους, ειδικά για βάσεις μικρού μεγέθους

Παρατηρούμε πως το συγκεκριμένο πρόβλημα τοπολογίας είναι αρκετά ευαίσθητο στη μόρφωση-σχεδιασμό του τελικού φορέα, ιδιαίτερα όσον αφορά το κατακόρυφο μέλος στη διεύθυνση του φορτίου. Με τη μέθοδο POD – SVD και με εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης, δεν καταφέρνουμε να πάρουμε το υπολογισμένο σχεδιασμό αναφοράς της βελτιστοποίησης των πλήρων μοντέλων. Οι φορείς που προκύπτουν μοιάζουν στην περίπτωση που παρατηρήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο για κατασκευή της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση χωρίς την ενημέρωσή της για $N = 30$, όπου το κατακόρυφο μέλος αντικαθίσταται από δύο κεκλιμένα μέλη. Εδώ, παρατηρούμε σε όλες τις επιλύσεις, συνολικά τέσσερα κεκλιμένα μέλη, ανά δύο συμμετρικά ως προς τον άξονα εφαρμογής της δύναμης στο μέσον της αμφιέριστης δοκού.

Παρόλα αυτά, ο φορέας είναι κατασκευάσιμος και αν και η απόκλιση με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι σχετικά μεγάλη εφόσον δεν καταλήγουμε στον ίδιο σχεδιασμό (παρατηρούμε απόκλιση ακόμα και μεγαλύτερη του 0,65%), δεν αποκλείεται ως λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης.



Για $\varepsilon = 0.05$, ο φορέας αριστερά για $N = 4$, δεξιά για $N = 10$



Για $\varepsilon = 0.05$, ο φορέας αριστερά για $N = 20$, δεξιά για $N = 30$

6.2.5. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ

Σε μορφή πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης με τη μέθοδο κατασκευής και εμπλουτισμού της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση.

Και εδώ, όπως στην παράγραφο 6.2.4 , εξετάζουμε μόνο την περίπτωση εμπλουτισμού της μειωμένης βάσης.

Στον Πίνακα 6, έχουμε τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για κατασκευή και εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση.

Παρατηρούμε πως, σε αντίθεση με την POD – SVD μέθοδο, ο σχεδιασμός που προκύπτει ταυτίζεται με τον σχεδιασμό αναφοράς, αν εξαιρέσουμε το μειωμένο μοντέλο που επιλύουμε για $\varepsilon = 0.1$ και $N = 4$, όπου συναντάμε το φαινόμενο που αναφέρθηκε στις πιο πάνω παραγράφους.

| ΜΕΘΟΔΟΣ POD - SVD ΜΕ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟ ΒΑΣΗΣ | | | | | | | | |
|---|------------|-----|--------|------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Κατασκευή αρχικής βάσης με κλάσμα όγκου 0.1 έως 0.9 ανά 0.1 | | | | | | | | |
| | ϵ | N | $t(s)$ | Επιτάχυνση | Επαναλήψεις | Πλήρεις Επιλύσεις | Αντικειμενική Συν. | Σφάλμα Αντικ. Συν. |
| SIMP | - | - | 1,6194 | - | 40 | 40 | 14,5496 | - |
| | 0,1 | 4 | 0,6602 | -59,23% | 40 | 16 | 14,6047 | 0,3787% |
| | 0,1 | 10 | 0,6569 | -59,44% | 40 | 15 | 14,5854 | 0,2461% |
| | 0,1 | 20 | 0,5164 | -68,11% | 40 | 13 | 14,5641 | 0,0997% |
| | 0,1 | 30 | 0,5643 | -65,15% | 40 | 13 | 14,6244 | 0,5141% |
| | 0,05 | 4 | 0,9380 | -42,08% | 40 | 18 | 14,6450 | 0,6557% |
| | 0,05 | 10 | 0,8407 | -48,09% | 40 | 18 | 14,5722 | 0,1553% |
| | 0,05 | 20 | 0,6570 | -59,43% | 40 | 16 | 14,6250 | 0,5182% |
| | 0,05 | 30 | 0,6447 | -60,19% | 40 | 16 | 14,5911 | 0,2852% |

Πίνακας 5 - Αποτελέσματα για τη μέθοδο POD –SVD με εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης.

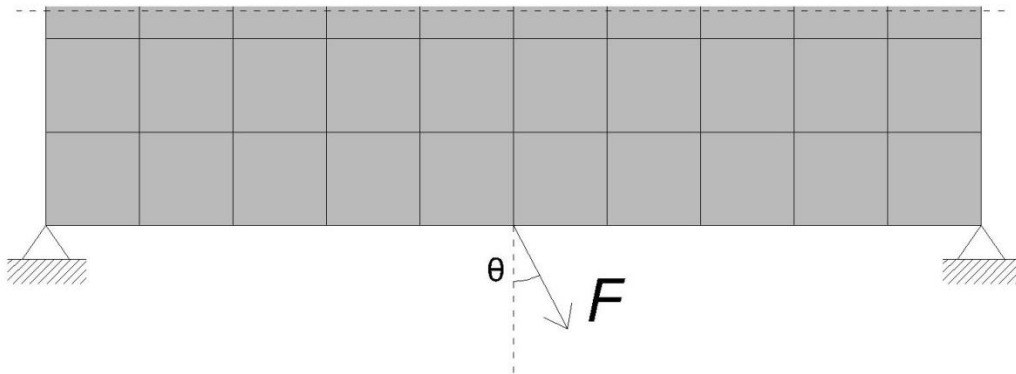
| ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ | | | | | | | | |
|---|------------|-----|--------|------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| | ϵ | N | $t(s)$ | Επιτάχυνση | Επαναλήψεις | Πλήρεις Επιλύσεις | Αντικειμενική Συν. | Σφάλμα Αντικ. Συν. |
| SIMP | - | - | 1,6194 | - | 40 | 40 | 14,5496 | - |
| | 0,1 | 4 | 0,6684 | -58,73% | 40 | 17 | 14,6837 | 0,9217% |
| | 0,1 | 10 | 0,8215 | -49,27% | 40 | 20 | 14,5112 | -0,2639% |
| | 0,1 | 20 | 1,0597 | -34,56% | 40 | 25 | 14,5281 | -0,1478% |
| | 0,1 | 30 | 1,3444 | -16,98% | 40 | 31 | 14,5368 | -0,0880% |
| | 0,05 | 4 | 0,8676 | -46,42% | 40 | 20 | 14,5636 | 0,0962% |
| | 0,05 | 10 | 0,9572 | -40,89% | 40 | 23 | 14,5557 | 0,0419% |
| | 0,05 | 20 | 1,1099 | -31,46% | 40 | 26 | 14,557 | 0,0509% |
| | 0,05 | 30 | 1,1099 | -31,46% | 40 | 26 | 14,557 | 0,0509% |

Πίνακας 6 - Κατασκευή και εμπλουτισμός μειωμένης βάσης κατά την επίλυση, το μέγεθος μειωμένης βάσης αυξάνεται

6.2.6. ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ - ROBUST DESIGN

Όπως αναφέραμε και εισαγωγικά, ως εφαρμογή στο πρόβλημα του Έυρωστου Σχεδιασμού – Robust Design στην βελτιστοποίηση τοπολογίας, θα εξετάσουμε τον σχεδιασμό μίας αμφιέριστης δοκού διαστάσεων 76×38 , με στοχαστικά-τυχαία μεγέθη τη γωνία διεύθυνσης θ και το μέτρο F του συγκεντρωμένου φορτίου που ασκείται στο μέσον του φορέα.

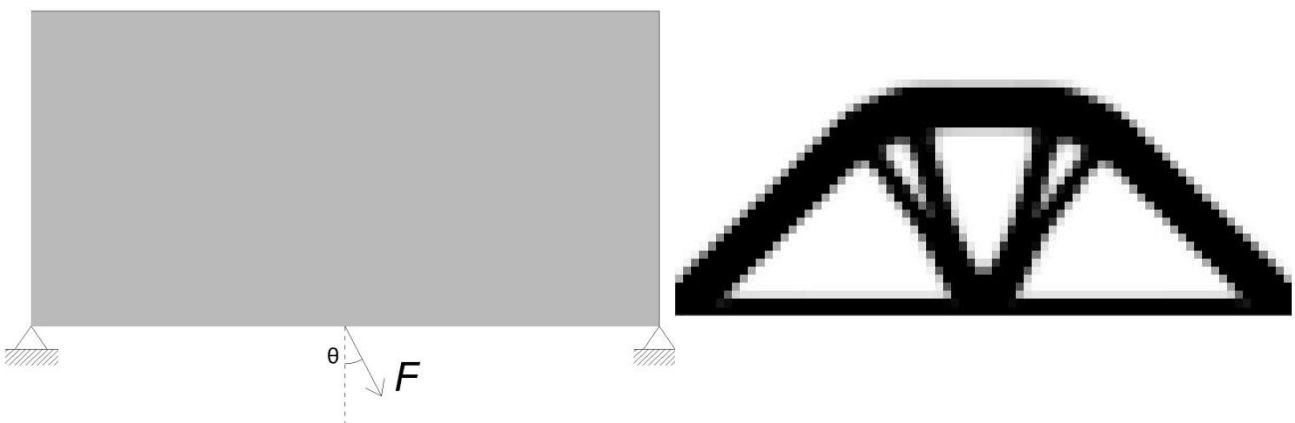
Και τα δύο στοχαστικά μεγέθη ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή, η γωνία θ εντός του $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ και η δύναμη F εντός του $(0.5, 1.5)$.



Παρόμοια εφαρμογή έχουμε εντοπίσει και στη βιβλιογραφία, με την οποία συγκρίνουμε-διασταυρώνουμε τη λύση του σχεδιασμού.

Η επίλυση γίνεται όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3 και στην Παράγραφο 5.6. Το μέγεθος των Monte Carlo επιλύσεων επιλέγουμε να είναι $N = 1000$ δοκιμές.

Μετά τις N επιλύσεις, προκύπτει και ο σχεδιασμός του φορέα και ο Εύρωστος Σχεδιασμός ολοκληρώνεται. Η αντικειμενική συνάρτηση έχει τιμές: $f = 26.3254$ για $k = 1$, $f = 44.6696$ για $k = 2$ και $f = 63.0139$ για $k = 3$.



Και για τις τρεις τιμές του k , ο σχεδιασμός του φορέα είναι ο ίδιος. Ως απαιτούμενο χρόνο για την ολοκλήρωση του σχεδιασμού υπολογίζουμε, όπως και στις παραπάνω

εφαρμογές, το χρόνο επίλυσης των εξισώσεων από τα πλήρη μοντέλα και όχι συνολικά το χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας της βελτιστοποίησης. Έτσι, ο χρόνος εκτέλεσης προκύπτει $t = 1.6430 \times 10^4 s$, πάνω από 4.5 ώρες. Εδώ εντοπίζεται και το εξαιρετικά μεγάλο υπολογιστικό κόστος του Εύρωστου Σχεδιασμού, λόγω των πολλών διαδοχικών επαναλήψεων, τόσο στην κατασκευή των μεμονωμένων φορέων, στις Monte Carlo επιλύσεις, αλλά εντός της βελτιστοποίησης τοπολογίας.

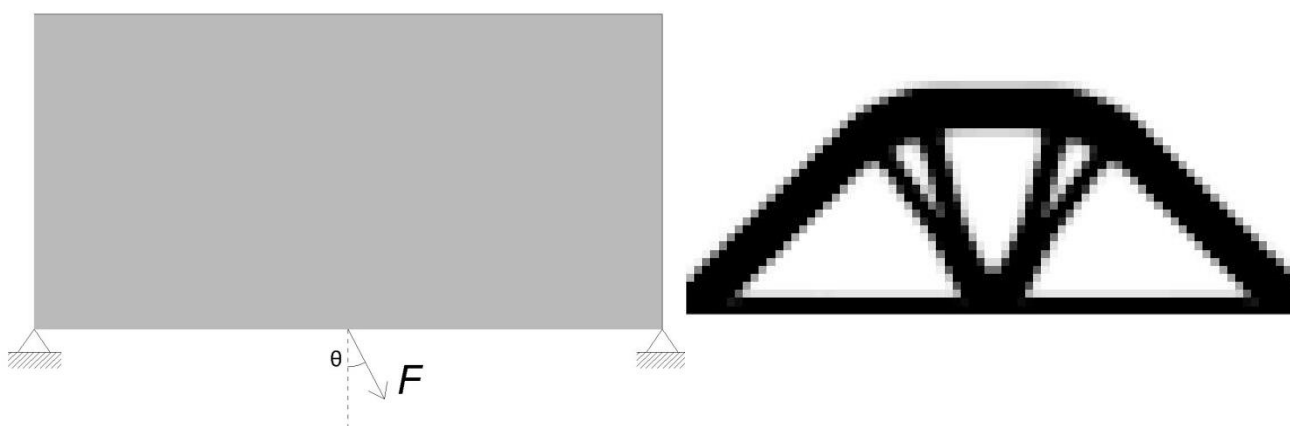
Παρατηρούμε πως στο ντετερμινιστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης το κατακόρυφο μέλος προσέδιδε μεγαλύτερη δυσκαμψία στην κατακόρυφη διεύθυνση, τη διεύθυνση του φορτίου. Εδώ, το κατακόρυφο μέλος μετατρέπεται σε δύο κεκλιμένα σε κάθε πλευρά. Επιπλέον, στον Εύρωστο Σχεδιασμό, το τυχαίο φορτίο μπορεί να έχει και οριζόντια συνιστώσα, γεγονός που εξηγεί την εμφάνιση του οριζόντιου μέλους στο κάτω μέρος του φορέα.

6.2.7. ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ - ROBUST DESIGN ME MONTELLA ΜΕΙΩΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η χρήση των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης στο παραπάνω πρόβλημα υλοποιείται όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4 και την Παράγραφο 5.7.

Κρίνοντας και από τα αποτελέσματα των προηγούμενων εφαρμογών που παρουσιάζονται στις παραγράφους 6.1 έως και 6.2.5, που αφορούν τη χρήση μειωμένων μοντέλων σε ντετερμινιστικά προβλήματα, από άποψη εξοικονόμησης και ακρίβειας σε σχέση με τα πλήρη μοντέλα, επιλέγουμε να εισάγουμε την τεχνική κατασκευής και εμπλουτισμού της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση. Για τις παραμέτρους του μειωμένου μοντέλου, επιλέγουμε μέγεθος βάσης $N = 20$, επιτρεπόμενη τιμή σφάλματος $\varepsilon = 0.1$, με το μέγεθος της βάσης αυξάνεται όσο προχωράει ο εμπλουτισμός της κατά τη διάρκεια της επίλυσης.

Καταλήγουμε στον ίδιο σχεδιασμό με τον σχεδιασμό αναφοράς, με τον απαιτούμενο χρόνο για την ολοκλήρωση του σχεδιασμού να προκύπτει $t = 2.3085 \times 10^3 s$, και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι: $f = 27.0222$ για $k = 1$, $f = 45.6595$ για $k = 2$ και $f = 64.2968$ για $k = 3$.



Ο σχεδιασμός ταυτίζεται σχεδόν με την επίλυση του προβλήματος με πλήρη μοντέλα, με μία μικρή αλλαγή κλίσης στα εσωτερικά κεκλιμένα μέλη, η οποία εξηγεί και την απόκλιση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως θα δούμε παρακάτω της τάξης του 2%.

Από τα αποτελέσματα, παρατηρούμε ακόμα το ποσοστό των πλήρων επιλύσεων στο σύνολο των βημάτων τις βελτιστοποιήσεις και για τους φορείς που προκύπτουν από τη βελτιστοποίηση τοπολογίας πριν τις Monte Carlo επιλύσεις. Στις Monte Carlo επιλύσεις όπως αναφέραμε και παραπάνω γίνονται μόνο επιλύσεις με χρήση μειωμένων μοντέλων:

| $\frac{\text{Πλήρεις Επιλύσεις}}{\text{Βήματα Βελτιστοποίησης}}$ (%) | Πλήθος Διαδικασιών Σχεδιασμού | Ποσοστό | Αθροιστικό Ποσοστό |
|--|-------------------------------|---------|--------------------|
| 0-25 % | 0 | 0,00% | 0,00% |
| 25-50% | 110 | 11,00% | 11,00% |
| 50-60% | 181 | 18,10% | 29,10% |
| 60-70% | 364 | 36,40% | 65,50% |
| 70-75% | 196 | 19,60% | 85,10% |
| >75% | 149 | 14,90% | 100,00% |
| Σύνολο | 1000 | 100,00% | - |

Παρατηρούμε πως πάνω από το 85% των διαδικασιών βελτιστοποίησης επιλύει με τη χρήση μειωμένων μοντέλων έως και το 75% των βημάτων του κάθε σχεδιασμού. Ενώ, στο ποσοστό των πλήρων επιλύσεων μεταξύ 60-70%, συγκεντρώνεται πάνω από το 1/3 των διαδικασιών της βελτιστοποίησης. Μία τέτοια κατανομή θα περιμέναμε με βάση και τις αναλύσεις στις παραγράφους 6.1.5 και 6.2.5.

Ακόμα, παρατηρούμε την απόκλιση από την τιμή της Αντικειμενικής Συνάρτησης για τις διαφορετικές τιμές του k και την εξοικονόμηση εκτελέσιμου χρόνου και υπολογιστικού κόστους:

| ROBUST DESIGN | | | |
|------------------------|---------|---------|---------|
| $k =$ | 1 | 3 | 5 |
| c_{\min} | 26,3253 | 44,6696 | 63,0139 |
| $t_{\text{total}} (s)$ | 32264 | | |

| ROBUST DESIGN ME ΧΡΗΣΗ ΜΕΙΩΜΕΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ | | | |
|--|---------|---------|---------|
| $k =$ | 1 | 3 | 5 |
| c_{\min} | 27,0222 | 45,6595 | 64,2968 |
| $t_{\text{total}} (s)$ | 2308,5 | | |

| | | | |
|-------------------|----------|--------|-------|
| Δc_{\min} | 2,647% | 2,216% | 2,04% |
| Δt | -92,845% | | |

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αρχικά, μπορούμε να πούμε πως καταλήγουμε σε κάποιες διαπιστώσεις, οι οποίες ωστόσο θα πρέπει να περιοριστούν με βάση και τα συγκεκριμένα δεδομένα στα οποία πραγματοποιήσαμε τη διερεύνηση. Δηλαδή, τα παρακάτω συμπεράσματα από την ανάπτυξη των εφαρμογών ισχύουν για τον ορθογώνιο χώρο σχεδιασμού που ορίζουμε καθώς και για τη συγκεκριμένη διακριτοποίηση με πλέγμα τετρακομβικών στοιχείων με δύο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο έχοντας παράλληλα υπόψιν πως τα στατικά γραμμικά μοντέλα που επιλύσαμε δεν ξεπερνούν τους 11.000 βαθμούς ελευθερίας.

Όσον αφορά τη χρήση Μοντέλων Μειωμένης Τάξης στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας, μπορούμε να καταλήξουμε πως:

- Σε γενικές γραμμές, η εξοικονόμηση του υπολογιστικού κόστους, εάν χρησιμοποιήσουμε την κατάλληλη μέθοδο, είναι σημαντική και αγγίζει ακόμα και το 50% μείωση του εκτελέσιμου χρόνου, με αρκετά καλή ακρίβεια, με απόκλιση από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της τάξης του 0.01 – 0.1%.
- Σε αυτού του είδους και μεγέθους φορείς, η χρήση μειωμένων μοντέλων χωρίς ενημέρωση της βάσης εκφυλίζει τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, οπότε και ο εμπλουτισμός της βάσης με νέες πλήρεις λύσεις καθίσταται απαραίτητος.
- Σε αυτού του είδους και μεγέθους φορείς αντίστοιχα, η μέθοδος με κατασκευή και εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης κατά την επίλυση, είναι η πιο ικανοποιητική – αξιόπιστη. Παρατηρούμε πως ακόμα και με πολύ μικρό μέγεθος μειωμένης βάσης, $N = 4$ ή $N = 10$, η προσέγγιση είναι πολύ ακριβής, $err < 0.1\%$, ενώ το υπολογιστικό κόστος υποδιπλασιάζεται (-51.13%).
- Για την παραπάνω μέθοδο παρατηρούμε πως ακόμα και μειώνοντας την τιμή του επιτρεπόμενου σφάλματος, από 0.1 σε 0.05, πετυχαίνουμε ακόμα μεγαλύτερη ακρίβεια, $err < 0.065\%$, χωρίς να χάνουμε σημαντικά σε εξοικονόμηση χρόνου (-50.16%).
- Η POD-SVD μέθοδος, με εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης, υπερτερεί σε μείωση του υπολογιστικού κόστους έναντι της κατασκευής κατά την επίλυση μόνο στην περίπτωση για μεγαλύτερα μεγέθη βάσεων, π.χ. $N = 40$, υστερώντας σε ακρίβεια, $err = 0.0234\%$ αντί $err = 0.0052\%$ της κατασκευής κατά την επίλυση, προφανώς χωρίς αυτό να κάνει απαγορευτική τη χρήση της.
- Για την POD-SVD μέθοδο, με εμπλουτισμό της μειωμένης βάσης, παρατηρούμε ακόμα ότι ο τρόπος κατασκευής της μειωμένης βάσης, ακόμα και όταν διπλασιάζουμε τις πλήρεις επιλύσεις αλλάζοντας το κλάσμα του όγκου, δεν συνεισφέρει ουσιαστικά στην ακρίβεια της βάσης του μειωμένου μοντέλου.
- Για την παραπάνω μέθοδο, παρατηρούμε επίσης την πιθανότητα ο σχεδιασμός να διαφέρει από τον σχεδιασμό των πλήρων μοντέλων, χωρίς όμως να προκύπτουν εκφυλισμένοι – μη κατασκευάσιμοι φορείς.

- Τέλος, για την περίπτωση που ενημερώνουμε την μειωμένη βάση διατηρώντας σταθερό το μέγεθός της, δεν επιτυγχάνεται σημαντική υπολογιστική εξοικονόμηση, παρά μόνο για μεγάλο μέγεθος της βάσης, $N = 40$, έως και (-44.34%).

Όσον αφορά το πρόβλημα του Robust Design στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας με χρήση Μοντέλων Μειωμένης Τάξης, μπορούμε να καταλήξουμε πως:

- Με την κατάλληλη μέθοδο που επιλέγουμε με βάση τις εφαρμογές των μειωμένων μοντέλων στο ντετερμινιστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, εξοικονομούμε σημαντικά σε υπολογιστικό κόστος (-92.845 %), με την προσέγγιση να είναι αρκετά ακριβής, με απόκλιση από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της τάξης του 2.0 – 2.5%.
- Παρατηρούμε ακόμα, το σημαντικό υπολογιστικό κόστος του Robust Design με τα πλήρη μοντέλα, που κάνει την επίλυση σε συμβατικά υπολογιστικά συστήματα σχεδόν απαγορευτική.
- Ο φορέας του Robust Design, έχει ποιοτικά διαφορετικό σχεδιασμό σε σχέση με τα ντετερμινιστικά μοντέλα ανάλογα και με τα μεταβλητά μεγέθη του προβλήματος.
- Από τις διαδοχικές βελτιστοποιήσεις για τους διαφορετικούς συνδυασμούς φορτίσεων, βλέπουμε πως οι επιλύσεις συμπεριφέρονται όπως στα ντετερμινιστικά μοντέλα, με πάνω από το 1/3 των διαδικασιών της βελτιστοποίησης να συγκεντρώνεται σε ποσοστό μεταξύ 60-70% για τις πλήρεις επιλύσεις.

Προτάσεις προς βαθύτερη διερεύνηση:

- Για το πρόβλημα της Βελτιστοποίησης Τοπολογίας με χρήση μειωμένων μοντέλων, θα μπορούσε να γίνει περαιτέρω έρευνα σχετικά με multi-scale προβλήματα ή και ταυτόχρονη χρήση δύο ή και περισσότερων υλικών στον ίδιο φορέα.
- Σχετικά με το Robust Design πρόβλημα και τον τρόπο προσέγγισης της επίλυσής του, θα μπορούσαμε να προτείνουμε τη χρήση Στοχαστικών Πεπερασμένων Στοιχείων στο επίπεδο της ανάλυσης και σε ότι αφορά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, την διερεύνηση της κατασκευής σε κάθε βήμα της βελτιστοποίησης του μητρώου ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης, λαμβάνοντας υπόψιν τα στατιστικά μεγέθη που προκύπτουν μετά από τις N επαναλήψεις της μεθόδου Monte Carlo, μέθοδος που εμπεριέχει απαιτητική μαθηματική ανάλυση.
- Ακόμα, και στα δύο προβλήματα με χρήση ή χωρίς χρήση μειωμένων μοντέλων, θα μπορούσαν να διερευνηθούν λύσεις με μεθόδους ανελαστικής – πλαστικής ανάλυσης ή και δυναμικής ανάλυσης. Εδώ, προκύπτουν ενδιαφέροντα ερωτήματα, όπως τι είδους μεταβλητά – στοχαστικά μεγέθη θα μπορούσαμε να

επιλέξουμε στο Robust Design πρόβλημα. Η αντίστοιχα για την Βελτιστοποίηση Τοπολογίας στην περίπτωση της δυναμικής ανάλυσης, εάν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε λύσεις – στιγμιότυπα για διαφορετικές χρονικές στιγμές για την κατασκευή της μειωμένης βάσης.

- Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε και η επίλυση του Robust Design προβλήματος με τα μεταβλητά μεγέθη να ανήκουν σε κάποια συγκεκριμένη στατιστική κατανομή ή έχοντας ως μεταβλητή τα σημεία εφαρμογής των εξωτερικών δυνάμεων.
- Επιτακτική, σε κάθε περίπτωση, είναι η ανάγκη βελτιστοποίησης του κώδικα, ώστε να αξιοποιούνται πλήρως οι δυνατότητες των μειωμένων μοντέλων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- M. Παπαδρακάκης (2001) *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Σύγγραμμα Εκδόσεις Παπασωτηρίου
- O. Sigmund (2001) *A 99 line topology optimization code written in Matlab*
- Bendsøe, M.P. (1995) *Optimization of structural topology, shape and material* Σύγγραμμα Εκδόσεις Springer
- Christian Gogu (2014) *Improving the efficiency of large scale topology optimization through on-the-fly reduced order model construction*
- N. Ferro, S. Micheletti and S. Perotto (2019) *POD-assisted strategies for structural topology optimization*, Computers and Mathematics with Applications, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.01.010>.
- L. Siva Rama Krishnaa, Natrajan Mahesh and N.Sateesh (2016) *Topology optimization using solid isotropic material with penalization technique for additive manufacturing*
- Ιστοσελίδα λογισμικού Solidworks *SIMP Method for Topology Optimization* http://help.solidworks.com/2019/english/SolidWorks/cworks/c_simp_method_topology.htm
- B. Hassani and E.Hinton (1999) *Homogenization and Structural Topology Optimization, Part II: Topology Optimization Chapter 4.Structural Topology Optimization using Optimality Criteria Methods*, Σύγγραμμα Εκδόσεις Springer
- S. Ananiev (2003) *On Equivalence between Optimality Criteria and Projected Gradient Methods with Application to Topology Optimization Problem*
- G. Chiandussi, I. Gaviglio and A. Ibba *Topology optimisation with optimality criteria and a given volume Lagrange multiplier*
- Rostami, S. A. L., Ghoddosian, A. (2019) "*Topology Optimization Under Uncertainty by Using the New Collocation Method*", Periodica Polytechnica Civil Engineering, 63(1), pp. 278–287, 2019. <https://doi.org/10.3311/PPci.13068>
- Xiang Peng, Jiquan Li, Shaofei Jiang & Zhenyu Liu (2017): *Robust topology optimization of continuum structures with loading uncertainty using a perturbation method*, Engineering Optimization, DOI: 10.1080/0305215X.2017.1337754
- Junpeng Zhao and Chunjie Wang (2014) *Robust Topology Optimization of Structures Under Loading Uncertainty* DOI: 10.2514/1.J052544
- Peter D. Dunning and H. Alicia Kim (2013) *Robust Topology Optimization: Minimization of Expected and Variance of Compliance* DOI: 10.2514/1.J052183