

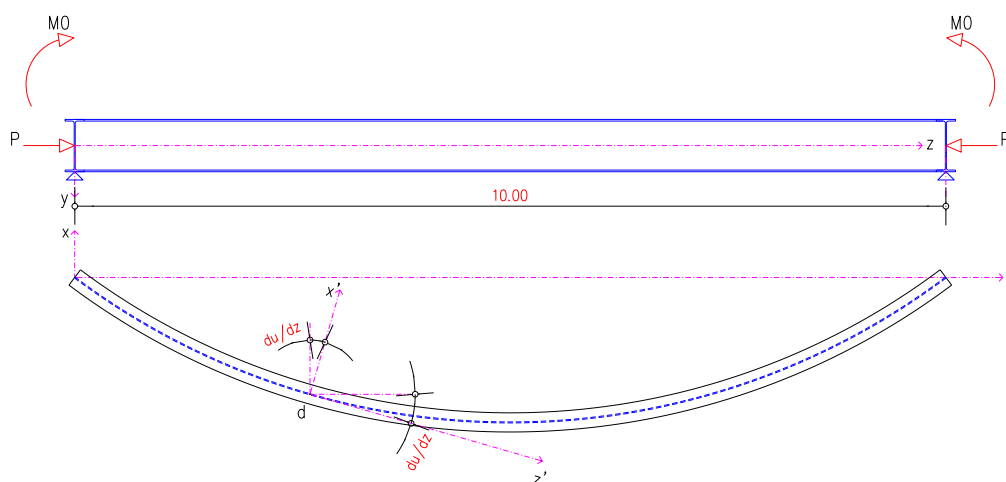


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Πλευρικός Λυγισμός Καμπτόμενων Δοκών υπό Σύγχρονο Αξονικό Φορτίο



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γιώργος Α. Κανδάκης

Επιβλέπων: Τάσος Αβραάμ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2020

ΕΜΚ ΜΕ 2020/03

Κανδάκης Γ. Α. (2020).
Πλευρικός λυγισμός καμπτόμενων δοκών υπό σύγχρονο αξονικό φορτίο
Μεταπτυχιακή Εργασία ΕΜΚ ΜΕ 2020/03
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Kandakis Y. A. (2020).
Lateral buckling of bending beams under simultaneous action of axial load
Master's Thesis ΕΜΚ ΜΕ 2020/03
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

Πίνακας περιεχομένων

| | |
|---|----|
| Περίληψη | 3 |
| Abstract | 4 |
| Ευχαριστίες | 5 |
| 1 Εισαγωγή | 6 |
| 1.1 Γενικά | 6 |
| 2 Μαθηματική Ανάλυση | 7 |
| 2.1 Εισαγωγή | 7 |
| 2.2 Αξονικό φορτίο και ομοιόμορφη κάμψη-συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα M0 | 8 |
| 2.3 Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο χωρίς αξονική δύναμη | 14 |
| 2.4 Συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσον της δοκού χωρίς αξονική δύναμη για $z \geq L/2$ | 18 |
| 2.5 Συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσον της δοκού χωρίς αξονική δύναμη για $0 \leq z \leq L/2$ | 20 |
| 2.6 Ομοιόμορφο φορτίο με αξονική δύναμη | 22 |
| 2.7 Συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσον της δοκού με αξονική δύναμη | 23 |
| 3 Αριθμητική Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του πλευρικού λυγισμού | 26 |
| 3.1 Εισαγωγή | 26 |
| 3.2 Περίπτωση του αξονικού φορτίου και ομοιόμορφης κάμψης με συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα της δοκού M0 | 26 |
| 3.3 1 ^η περίπτωση αμφιέριστη δοκός μήκους $L=6M$ και διατομής IPE 270 | 30 |
| 3.4 2 ^η περίπτωση αμφιέριστη δοκός μήκους $L=8M$ και διατομής IPE 400 | 36 |
| 3.5 3 ^η περίπτωση αμφιέριστη δοκός μήκους $L=10M$ και διατομής IPE 600 | 42 |
| 4 Περαιτέρω έρευνα | 49 |
| 4.1 Εισαγωγή | 49 |
| 4.2 Εξισώσεις ισορροπίας για εγκάρσιο συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον | 49 |
| 4.3 Εξισώσεις ισορροπίας για ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο | 50 |
| 5 Συμπεράσματα | 52 |
| 6 Βιβλιογραφία | 53 |
| Παράρτημα Α. Προγράμματα | 54 |
| L=6.0; | 54 |
| E=2.1*10 ⁽⁺⁰⁸⁾ ; | 54 |
| J=0.154*10 ⁽⁻⁶⁾ ; | 54 |
| Num(4)=double(u05); % Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy4 | 57 |
| Num(6)=double(u06); % Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy6 | 57 |
| Check=double(Start); | 57 |
| Numx=double(Check); | 57 |
| Numbers1=double(Numx)+double(step/2.0); | 57 |

| | |
|--|-----------|
| Numbers2=double (Numx)+double (stepp) ; | 58 |
| Check=double (Check+stepp) ; | 59 |
| F10=double ((Num (2)) -nums4end) ; % y1'=y2..... | 59 |
| % Υπολογισμός των s1,s2,s3..... | 60 |
| Uf (1,kj)=M; % Numerical calculation of M0..... | 62 |
| Παράρτημα Β. Προγράμματα | 64 |
| L=8.0; | 64 |
| E=2.1*10^(+08) ; | 64 |
| J=0.5108*10^(-6) ; | 64 |
| Num(4)=double (u05) ; % Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy4..... | 67 |
| Num(6)=double (u06) ;% Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy6..... | 67 |
| Check=double (Start) ; | 67 |
| Numx=double (Check) ; | 67 |
| Numbers1=double (Numx)+double (stepp/2.0) ; | 67 |
| Numbers2=double (Numx)+double (stepp) ; | 68 |
| Check=double (Check+stepp) ; | 69 |
| F10=double ((Num (2)) -nums4end) ; % y1'=y2..... | 69 |
| % Υπολογισμός των s1,s2,s3..... | 70 |
| Uf (1,kj)=M; % Numerical calculation of M0..... | 72 |

Πλευρικός λυγισμός καμπτόμενων δοκών υπό σύγχρονο αξονικό φορτίο

Κανδάκης Γ. Α. (Επιβλέπων: Αβραάμ Τ.)

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία παρουσιάζεται ο υπολογισμός των κρίσιμων ροπών πλευρικού λυγισμού τόσο με θεωρητικούς τύπους όσο και με αριθμητικές μεθόδους. Γίνεται συσχετισμός με κανονιστικό πλαίσιο EC3. Η επίλυση με μαθηματικά εργαλεία όπως ο διαφορικός λογισμός στα προβλήματα του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι εξαιρετικά δυσχερής, όπως επίσης δύσκολη είναι η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με χρήση συμβολικών γλωσσών όπως η Maple. Γιαυτό από τον μεταπτυχιακό φοιτητή δίδεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων μέσω της γλώσσας προγραμματισμού MATLAB για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του πλευρικού λυγισμού. Επιλύεται αριθμητικά το μοντέλο μιας καμπτόμενης αμφιέριστης δοκού υποβαλλόμενης σε κεντρικό αξονικό φορτίο με σταθερές ροπές στα άκρα, όπου υπολογίζονται με ακρίβεια 4ου δεκαδικού ψηφίου οι κρίσιμες ροπές πλευρικού λυγισμού για κάθε αξονικό φορτίο μέχρι να φθάσει την κρίσιμη τιμή του.

Γίνονται αναλύσεις για 3 περιπτώσεις δοκών με διαφορετικό μήκος και διαφορετική διατομή. Αξιολογούνται τα αποτελέσματα και γίνεται αναφορά σε μελλοντική έρευνα της ίδιας αμφιέριστης δοκού υποβαλλόμενης σε αξονικό φορτίο και α) με συγκεντρωμένο εγκάρσιο φορτίο στο μέσον της δοκού και β) με ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

MASTER'S THESIS
EMK ME 2020/03

Lateral buckling of bending beams under simultaneous action of axial load

Kandakis Y. A. (supervised by Avraam T.)

Abstract

In this master's thesis, critical lateral bending moments are calculated by both theoretical formulas and numerical methods. Correlation with EC3 regulations. It is extremely difficult to solve with mathematical tools such as differential calculation the problems of lateral buckling, and it is also difficult to solve differential equations using symbolic languages such as Maple. This is why the postgraduate student gives particular attention to the development and application of numerical methods through the MATLAB programming language to solve differential equations of lateral buckling. The model of a bending beam subjected to a central axial load with constant moments at the ends of span, is numerically solved, where the critical lateral bending moments for each axial load are calculated with fourth decimal digits, until the axial load reaches its critical value.

Analyzes are taken place for 3 cases of beams of different lengths and different cross-sections. The results are evaluated and a reference is became to the future research on the same beam loaded axially (a) and a simultaneous action of a transverse concentrated load in the middle of the beam and (b) and a simultaneous action of a uniformly distributed transverse load.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Τάσο Αβραάμ για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε , τη στήριξη και την καθοδήγηση που μου παρείχε για την εκπόνηση αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας. Ήταν πάντα πρόθυμος να με βοηθήσει , μεταφέροντας την εμπειρία και την γνώση του πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο έτσι ώστε να ξεπεράσω τις δυσκολίες που αρχικά μου φαίνονταν ως βουνό και ειδικά για την επίλυση των διαφορετικών εξισώσεων της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας.

1 Εισαγωγή

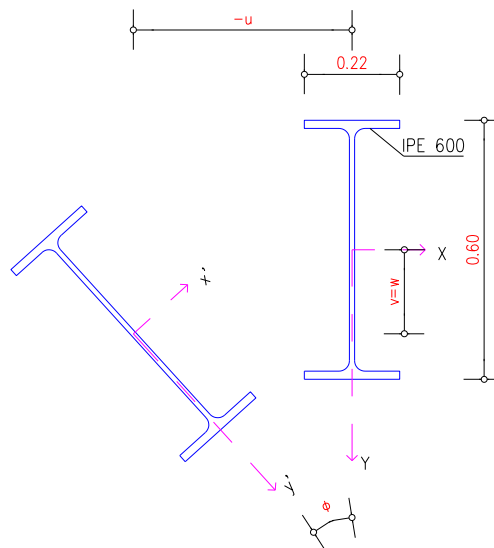
1.1 Γενικά

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εξετάζεται η περίπτωση μιας αμφιέριστης δοκού , διατομής διπλής συμμετρίας και ειδικά σε δοκό με πολύ μεγαλύτερη δυσκαμψία ως προς τον κύριο άξονα αδρανείας σχετικά με τον δευτερεύοντα άξονα. Για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης φτιάχνεται η μαθηματική ανάλυση με τις εξισώσεις ισορροπίας.

2 Μαθηματική Ανάλυση

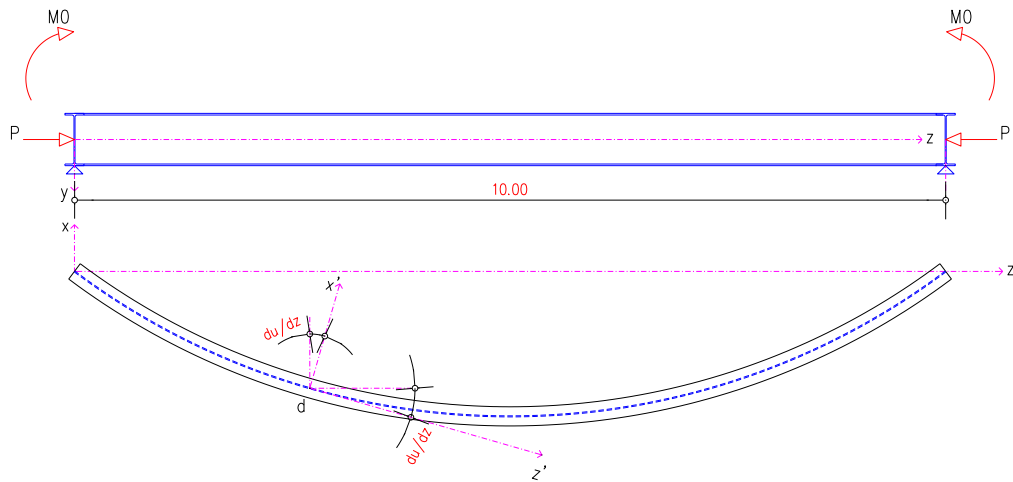
2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το μοντέλο της αμφιέριστης δοκού διατομής διπλής συμμετρίας. Εξετάζεται μόνο η περίπτωση του θλιπτικού αξονικού φορτίου. Στην περίπτωση μας εξετάζονται α) μία δοκός IPE 270 μήκους 6 μέτρων β) μία δοκός IPE 400 μήκους 8 μέτρων και γ) μία δοκός IPE 600 μήκους 10 μέτρων, όπου το εγκάρσιο φορτίο δρα στο επίπεδο της μεγαλύτερης δυσκαμψίας το οποίο ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα y και τον διαμήκη άξονα z και επίσης δρα στο κέντρο βάρους που ταυτίζεται με το κέντρο διάτμησης.



Σχήμα 2.1: Καμπυλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού

2.2 Αξονικό φορτίο και ομοιόμορφη κάμψη-συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα M0



Σχήμα 2.2: Καμπλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού σε κάτοψη και πλάγια όψη

Συνημίτονα διευθύνσεως μεταξύ των αξόνων στην κανονική και στην παραμορφωμένη κατάσταση όπως δείχνονται στον Πίνακα 2.1

Πίνακας 2.1: Συνημίτονα διευθύνσεως στην κανονική και στην παραμορφωμένη κατάσταση

| | | | |
|----|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| | x | y | z |
| x' | 1 | -φ | $-\frac{\partial u}{\partial z}$ |
| y' | φ | 1 | $-\frac{\partial v}{\partial z}$ |
| z' | $\frac{\partial u}{\partial z}$ | $\frac{\partial v}{\partial z}$ | 1 |

Οι εξισώσεις του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού γίνονται ως ακολούθως:

$$-E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv M_{y'}, \quad (2.1)$$

$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \equiv M_{x'} \quad (2.2)$$

$$G \cdot J \cdot \phi' - E \cdot C_w \cdot \phi''' \equiv M_{z'} \quad (2.3)$$

Όπου C_w η σταθερά στρέβλωσης της διατομής , J η σταθερά στρέψης , I_x, I_y ροπές αδρανείας περί τους άξονες x και y , και φ η γωνία στέψης , $P \equiv N$ η θλιπτική αξονική δύναμη.

Επομένως εάν ένα δοκάρι υποβάλλεται σε ένα ζεύγος ροπών M_0 στα άκρα του και μία αξονική θλιπτική δύναμη P , τότε οι ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση μπορούν να ληφθούν από τις ροπές στην κανονική κατάσταση με τον κατάλληλο συνδυασμό των συνημίτονων κατεύθυνσης που φαίνονται στον Πίνακα 2.1

Άρα

$$M_x \equiv (M_0 + P \cdot w) - P \cdot u \cdot \varphi$$

$$M_y \equiv (M_0 + P \cdot w) \cdot \varphi + P \cdot u$$

$$M_z = (M_0 + P \cdot w) \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

Από εξίσωση (2.1)

$$-E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv M_0 \cdot \varphi + P \cdot w \cdot \varphi + P \cdot u$$

Από εξίσωση (2.2)

$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \equiv M_0 + P \cdot w - P \cdot u \cdot \varphi$$

Από εξίσωση (2.3)

Τους όρους $u \cdot \varphi$, $w \cdot \varphi$ και $w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$ ως γινόμενα μικρών γωνιών και βελών , θεωρούμε ότι είναι πολύ μικροί και τείνουν στο μηδέν , οπότε η εξίσωση (2.1) γίνεται:

$$-E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv M_0 \cdot \varphi + (P \cdot w \cdot \varphi \rightarrow 0) + P \cdot u \Leftrightarrow E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + P \cdot u \equiv -M_0 \cdot \varphi$$

Παρομοίως η εξίσωση (2.2) γίνεται:

$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \equiv M_0 + P \cdot w - (P \cdot u \cdot \varphi \rightarrow 0) \Leftrightarrow E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + P \cdot w \equiv -M_0 \quad (\text{επειδή } w=v)$$

$$\Leftrightarrow E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + P \cdot w \equiv -M_0$$

Τέλος η εξίσωση (2.3) γίνεται:

$$\Leftrightarrow -E \cdot C_w \cdot \varphi''' + G \cdot J \cdot \varphi' \equiv -M_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.4)$$

Αδιαστατοποίηση μεγεθών:

$$\xi \equiv \frac{z}{L}, \quad v \equiv \frac{u}{L}, \quad \eta^2 \equiv \frac{P \cdot L^2}{E \cdot I_y}, \quad \overline{M0} = \frac{M0 \cdot L}{E \cdot I_y}, \quad \lambda^2 \equiv \frac{G \cdot J \cdot L^2}{E \cdot C_w}, \quad p^2 \equiv \frac{I_y \cdot L^2}{C_w}$$

$$u(z) = v(\xi) \cdot L \Rightarrow v'(\xi) \equiv \left[\frac{u(z)}{L} \right]'_{\xi} \equiv \frac{u'(z)}{L} \cdot (\xi \cdot L)'_{\xi} \equiv \frac{u'(z)}{L} \cdot L \equiv u'(z),$$

$$v''(\xi) \equiv [u''(z)]'_{\xi} \equiv u''(z) \cdot (\xi \cdot L)'_{\xi} \equiv u''(z) \cdot L$$

άρα αντικαθιστώντας στην εξίσωση

$$E \cdot I_y \cdot u''(z) + P \cdot u(z) \equiv -M0 \cdot \varphi(z) \Rightarrow E \cdot I_y \cdot \frac{v''(\xi)}{L} + P \cdot v(\xi) \cdot L \equiv -M0 \cdot \varphi(\xi) \Rightarrow$$

$$E \cdot I_y \cdot v''(\xi) + P \cdot v(\xi) \cdot L^2 \equiv -M0 \cdot \varphi(\xi) \cdot L \Rightarrow v''(\xi) + \frac{P \cdot L^2}{E \cdot I_y} \cdot v(\xi) \equiv -\frac{M0 \cdot L}{E \cdot I_y} \cdot \varphi(\xi)$$

$$v''(\xi) + \eta^2 \cdot v(\xi) \equiv -\overline{M0} \cdot \varphi(\xi) \quad (2.5)$$

$$z \equiv \xi \cdot L \Rightarrow \varphi'(\xi) \equiv [\varphi(z)]'_{\xi} \equiv \varphi'(z) \cdot (\xi \cdot L)'_{\xi} \equiv \varphi'(z) \cdot L \Rightarrow \varphi''(\xi) \equiv \varphi''(z) \cdot L^2 \Rightarrow$$

$$\varphi'''(\xi) \equiv \varphi'''(z) \cdot L^3 \Rightarrow$$

$$\varphi'''(z) \equiv \varphi'''(\xi) \cdot \left(\frac{1}{L^3} \right) \text{ και } \varphi'(z) \equiv \varphi'(\xi) \cdot \left(\frac{1}{L} \right).$$

Αντικαθιστώντας στην (2.3) προκύπτει η εξής σχέση:

$$-E \cdot C_w \cdot \varphi'''(\xi) \cdot \left(\frac{1}{L^3} \right) + G \cdot J \cdot \varphi'(\xi) \cdot \left(\frac{1}{L} \right) \equiv -M0 \cdot u' \Rightarrow$$

$$-\varphi'''(\xi) + \left[\frac{G \cdot J \cdot L^2}{E \cdot C_w} \right] \cdot \varphi'(\xi) \equiv -\frac{M0 \cdot L^3}{E \cdot C_w} \cdot u' \Rightarrow$$

$$-\varphi'''(\xi) + \left[\frac{G \cdot J \cdot L^2}{E \cdot C_w} \right] \cdot \varphi'(\xi) \equiv -\left(\frac{M0 \cdot L}{E \cdot I_y} \right) \cdot \left(\frac{I_y \cdot L^2}{C_w} \right) \cdot u' \Rightarrow$$

$$-\varphi'''(\xi) + \lambda^2 \cdot \varphi'(\xi) \equiv -\overline{M0} \cdot p^2 \cdot u \Rightarrow$$

$$\text{Επειδή } u'(z) \equiv v'(\xi) \Rightarrow$$

$$\varphi'''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi'(\xi) \equiv \overline{M0} \cdot p^2 \cdot v'(\xi) \quad (2.6)$$

Παραγωγίζουμε μία φορά ως προς ξ την (2.5) οπότε

$$v'''(\xi) + \eta^2 \cdot v'(\xi) \equiv -\overline{M0} \cdot \varphi'(\xi)$$

Από την (2.6) αν λύσουμε ως προς $v'(\xi)$

$$\rightarrow v'(\xi) \equiv \frac{(\varphi'''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi'(\xi))}{(\overline{M0} \cdot p^2)}$$

Κατόπιν αντικαθιστώντας την τιμή του $v'(\xi)$ στην εξίσωση:

$$v'''(\xi) + \eta^2 \cdot v'(\xi) \equiv -\overline{M0} \cdot \varphi'(\xi) \Rightarrow v'''(\xi) + \eta^2 \cdot \left[\frac{(\varphi'''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi'(\xi))}{(\overline{M0} \cdot p^2)} \right] \equiv -\overline{M0} \cdot \varphi'(\xi)$$

Οπότε:

$$v'''(\xi) \equiv \frac{-\eta^2 \cdot \varphi'''(\xi) + [\eta^2 \cdot \lambda^2 - \overline{M0}^2 \cdot p^2] \cdot \varphi'(\xi)}{\overline{M0} \cdot p^2} \quad (2.7)$$

Αν παραγωγίσουμε 2 φορές την εξίσωση (2.6)

$$\varphi''''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi'''(\xi) \equiv \overline{M0} \cdot p^2 \cdot v'''(\xi) \quad (2.8)$$

Αντικαθιστώντας την (2.12)
στην (2.8)

$$\Rightarrow \varphi''''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi'''(\xi) \equiv \overline{M0} \cdot p^2 \cdot \left[\frac{-\eta^2 \cdot \varphi'''(\xi) + [\eta^2 \cdot \lambda^2 - \overline{M0}^2 \cdot p^2] \cdot \varphi'(\xi)}{\overline{M0} \cdot p^2} \right]$$

η οποία σχέση κατόπιν εκτέλεσης λίγων πράξεων καταλήγει στη σχέση:

$$\varphi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \varphi'''(\xi) - (\eta^2 \cdot \lambda^2 - \overline{M0}^2 \cdot p^2) \cdot \varphi'(\xi) \equiv 0 \quad (2.9)$$

Η επίλυση με την γλώσσα προγραμματισμού Maple δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\phi(\xi) \equiv \overline{C1} + \overline{C2} \cdot \cos(k \cdot \xi) + \overline{C3} \cdot \sin(k \cdot \xi) + \overline{C4} \cdot \cosh(\bar{k} \cdot \xi) + \overline{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot \xi) \quad (2.10)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\xi=0 \Rightarrow \varphi(0)=0$$

$$\xi=1 \Rightarrow \varphi(1)=0$$

$$\xi=0 \Rightarrow \varphi''(0)=0$$

$$\xi=1 \Rightarrow \varphi''(1)=0$$

$$\text{Για } \xi=0 \Rightarrow$$

$$\varphi(0) \equiv \overline{C1} + \overline{C2} \cdot \cos(k \cdot 0) + \overline{C3} \cdot \sin(k \cdot 0) + \overline{C4} \cdot \cosh(\bar{k} \cdot 0) + \overline{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot 0) \Rightarrow \overline{C1} + \overline{C2} + \overline{C4} \equiv 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(0) &\equiv -k^2 \cdot \overline{C2} \cdot \cos(k \cdot \xi) - k^2 \cdot \overline{C3} \cdot \sin(k \cdot \xi) + \bar{k}^2 \cdot \overline{C4} \cdot \cosh(\bar{k} \cdot \xi) + \bar{k}^2 \cdot \overline{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot \xi) \Rightarrow \\ &-k^2 \cdot \overline{C2} \cdot \cos(k \cdot 0) - k^2 \cdot \overline{C3} \cdot \sin(k \cdot 0) + \bar{k}^2 \cdot \overline{C4} \cdot \cosh(\bar{k} \cdot 0) + \bar{k}^2 \cdot \overline{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot 0) \equiv 0 \Rightarrow \\ &-k^2 \cdot \overline{C2} + \bar{k}^2 \cdot \overline{C4} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Επίσης παραγωγίζοντας μία φορά την (2.12)

$$v'(0) \equiv 0, \varphi''(0) \equiv 0 \Rightarrow \varphi''''(0) \equiv 0$$

Παραγωγίζοντας 4 φορές την εξίσωση (2.10)

$$\begin{aligned} \varphi''''(\xi) &\equiv k^4 \cdot \bar{C2} \cdot \cos(k \cdot \xi) + k^4 \cdot \bar{C3} \cdot \sin(k \cdot \xi) + \bar{k}^4 \cdot \bar{C4} \cdot \cosh(\bar{k} \cdot \xi) + \bar{k}^4 \cdot \bar{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot \xi) \Rightarrow \\ \varphi''''(0) &\equiv k^4 \cdot \bar{C2} \cdot \cos(k \cdot 0) + k^4 \cdot \bar{C3} \cdot \sin(k \cdot 0) + \bar{k}^4 \cdot \bar{C4} \cdot \cosh(\bar{k} \cdot 0) + \bar{k}^4 \cdot \bar{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot 0) \equiv 0 \\ \Rightarrow k^4 \cdot \bar{C2} + \bar{k}^4 \cdot \bar{C4} &\equiv 0 \Rightarrow \bar{C4} = \frac{k^4 \cdot \bar{C2}}{\bar{k}^4} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (2.12)

$$\Rightarrow k^2 \cdot \bar{C2} \cdot \left(\frac{1}{\bar{k}^2} - 1 \right) \equiv 0 \Rightarrow \bar{C2} \equiv 0, \bar{C4} \equiv 0$$

και συνεπώς από την εξίσωση (2.11)

$$\Rightarrow \bar{C1} \equiv 0$$

Υπάρχουν και άλλες 2 συνοριακές συνθήκες:

$$\varphi(1) \equiv \bar{C3} \cdot \sin(k \cdot 1) + \bar{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot 1) \equiv 0 \Rightarrow \bar{C3} \cdot \sin(k \cdot 1) + \bar{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot 1) = 0 \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(1) &\equiv -k^2 \cdot \bar{C3} \cdot \sin(k \cdot 1) + \bar{k}^2 \cdot \bar{C5} \cdot \sinh(\bar{k} \cdot 1) \equiv 0 \Rightarrow \\ -k^2 \cdot \bar{C3} \cdot \sin(k) + \bar{k}^2 \cdot \bar{C5} \cdot \sinh(\bar{k}) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Άρα για να έχει λύση το σύστημα θα πρέπει:

$$\begin{aligned} D &\equiv \begin{vmatrix} \sin(k) & \sinh(\bar{k}) \\ -k^2 \cdot \sin(k) & \bar{k}^2 \cdot \sinh(\bar{k}) \end{vmatrix} \equiv 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(k) \cdot \bar{k}^2 \cdot \sinh(\bar{k}) + k^2 \cdot \sin(k) \cdot \sinh(\bar{k}) &\equiv 0 \Rightarrow \sin(k) \cdot \sinh(\bar{k}) \cdot (\bar{k}^2 + k^2) \equiv 0 \Rightarrow \\ \sin(k) \equiv 0 &\Rightarrow k \equiv \pi \end{aligned} \quad (2.15)$$

Από εξίσωση (2.13) \Rightarrow

$$\bar{C5} = \bar{C3} \cdot \frac{\sin(k)}{\sinh(\bar{k})}$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (2.14) \Rightarrow

$$-k^2 \cdot \bar{C3} \cdot \sin(k) + \bar{k}^2 \cdot \bar{C3} \cdot \frac{\sin(k)}{\sinh(\bar{k})} \cdot \sinh(\bar{k}) \equiv 0 \Rightarrow \bar{C3} \cdot \sin(k) \cdot (\bar{k}^2 - k^2) \equiv 0$$

Επειδή $\sin(k) = 0$ $\overline{C3} \neq 0$ Λόγω ότι $\overline{C5} = \overline{C3} \cdot \frac{\sin(k)}{\sinh(k)} \Rightarrow$ επειδή $\sin(k) = 0 \Rightarrow \overline{C5} \equiv 0$

Άρα η εξίσωση (2.10) λόγω ότι $(\overline{C1}, \overline{C2}, \overline{C4}, \overline{C5}) \equiv (0,0,0,0)$ γίνεται ως ακολούθως:

$$\varphi(\xi) \equiv \overline{C3} \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \quad (2.16)$$

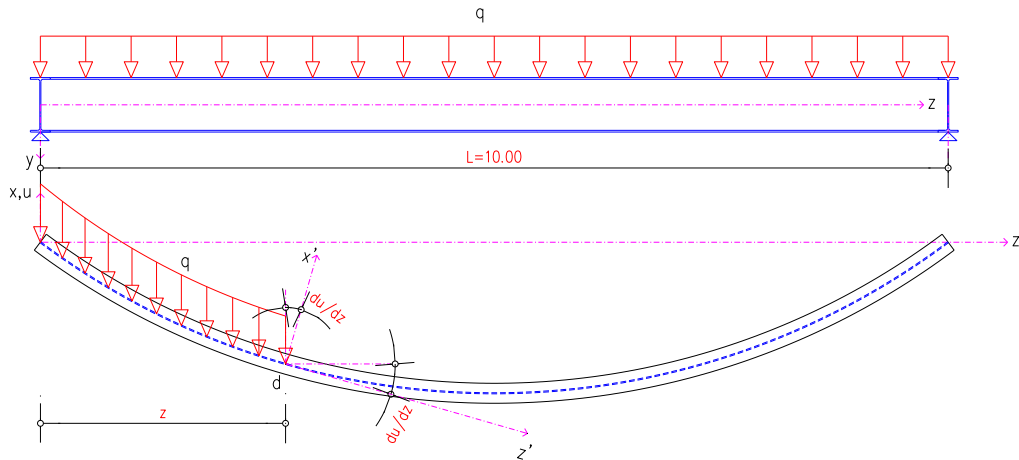
Η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού βρίσκεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} k = \pi &\equiv \sqrt{-\frac{\lambda^2 - \eta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\eta^2 \cdot \lambda^2}{4} - \overline{M0}^2 \cdot p^2}} \Rightarrow \\ \pi &\equiv \sqrt{-\frac{\lambda^2 - \eta^2}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{\eta^2}{2}\right) + \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2 - \overline{M0}^2 \cdot p^2}} \Rightarrow \\ \pi^2 &\equiv -\frac{\lambda^2 - \eta^2}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{\eta^2}{2}\right) + \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2 - \overline{M0}^2 \cdot p^2} \Rightarrow \\ \pi^2 + \frac{\lambda^2 - \eta^2}{2} &\equiv \sqrt{\left(\left(\frac{\eta^2}{2}\right) + \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2 - \overline{M0}^2 \cdot p^2} \Rightarrow \\ \left(\pi^2 + \frac{\lambda^2 - \eta^2}{2}\right)^2 &\equiv \left(\left(\frac{\eta^2}{2}\right) + \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2 - \overline{M0}^2 \cdot p^2 \Rightarrow \\ \pi^4 + \left(\frac{\lambda^2 - \eta^2}{2}\right)^2 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\lambda^2 - \eta^2}{2}\right) &\equiv \left(\left(\frac{\eta^2}{2}\right) + \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2 - \overline{M0}^2 \cdot p^2 \Rightarrow \\ \pi^4 + \frac{\lambda^4}{4} + \frac{\eta^4}{4} - 2 \cdot \frac{\lambda^2 \cdot \eta^2}{4} + \pi^2 \cdot \lambda^2 - \pi^2 \cdot \eta^2 &\equiv \frac{\lambda^4}{4} + \frac{\eta^4}{4} + 2 \cdot \frac{\lambda^2 \cdot \eta^2}{4} - \overline{M0}^2 \cdot p^2 \Rightarrow \\ -\overline{M0}^2 \cdot p^2 &\equiv \pi^4 - \lambda^2 \cdot \eta^2 + \pi^2 \cdot \lambda^2 - \pi^2 \cdot \eta^2 \Rightarrow -\overline{M0}^2 \cdot p^2 \equiv \pi^4 - \lambda^2 \cdot \eta^2 + \pi^2 \cdot \lambda^2 - \pi^2 \cdot \eta^2 \Rightarrow \\ -\overline{M0}^2 \cdot p^2 &\equiv \pi^2 \cdot (\lambda^2 + \pi^2) - \eta^2 \cdot (\pi^2 + \lambda^2) \Rightarrow \overline{M0} \equiv \sqrt{\frac{(\pi^2 + \lambda^2) \cdot (\pi^2 - \eta^2)}{p^2}} \Rightarrow \\ \overline{M0} &\equiv \left(\frac{1}{p}\right) \cdot \sqrt{(\pi^2 + \lambda^2) \cdot (\pi^2 - \eta^2)} \quad (2.17) \end{aligned}$$

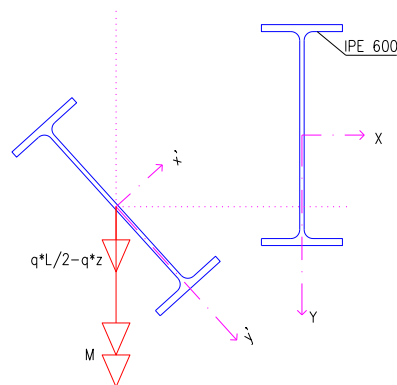
η οποία είναι η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή σε αμφιέριστη δοκό με θλιπτική αξονική δύναμη και συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα της δοκού. Χωρίς αξονικό φορτίο , δηλαδή για $N=0$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\overline{M0} = \left(\frac{\pi}{p}\right) \cdot \sqrt{(\pi^2 + \lambda^2)} \quad (2.18)$$

2.3 Ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο χωρίς αξονική δύναμη



Σχήμα 2.3: Καμπλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού σε κάτοψη και πλάγια όψη



Σχήμα 2.4: Καμπλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού

Δυνάμεις → Ροπές

$$M_x \equiv \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right) \equiv \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z)$$

$$M_y = 0$$

$$M_z \equiv - \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot u - q \cdot z \cdot u \right)$$

Χρησιμοποιούμε τα συνημίτονα διευθύνσεως μεταξύ των αξόνων στην κανονική και στην παραμορφωμένη κατάσταση όπως δείχνονται στον πίνακα 2.1

$$M_x' = \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) \cdot 1$$

$$M_y' = \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right) \cdot \varphi$$

$$M_z = \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot u - q \cdot z \cdot u \right) \cdot 1$$

Από ισορροπία εξωτερικών-εσωτερικών δυνάμεων έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$-E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right) \cdot \varphi \equiv \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) \cdot \varphi \quad (2.19)$$

$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \equiv \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) = \frac{q \cdot z \cdot L}{2} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \equiv \frac{4 \cdot q \cdot z \cdot L^2}{2 \cdot 4 \cdot L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \quad (2.20)$$

$$G \cdot J \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - E \cdot C_w \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \equiv \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot u - q \cdot z \cdot u \right) \quad (2.21)$$

Η εξίσωση (2.20) γίνεται:

$$\begin{aligned} -E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &\equiv 4 \cdot \left(\frac{q \cdot L^2}{8} \right) \cdot \frac{z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) = 4 \cdot \frac{M_{d,max} \cdot z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \Rightarrow \\ -E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &\equiv 4 \cdot \frac{M_{d,max} \cdot z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Η εξίσωση (2.19) γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} -E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &\equiv \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) \cdot \varphi \equiv \frac{q \cdot z \cdot L}{2} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \equiv \frac{4 \cdot q \cdot z \cdot L^2}{2 \cdot 4 \cdot L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cdot \varphi \Rightarrow \\ -E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &\equiv 4 \cdot \left(\frac{q \cdot L^2}{8} \right) \cdot \frac{z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cdot \varphi \equiv \frac{4 \cdot M_{d,max} \cdot z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cdot \varphi \Rightarrow \\ -E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &\equiv \frac{4 \cdot M_{d,max} \cdot z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cdot \varphi \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\text{Όπου } M_{d,max} = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

Η εξίσωση (2.21) γίνεται:

$$\begin{aligned} G \cdot J \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - E \cdot C_w \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} &\equiv \frac{q \cdot z \cdot L}{2} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot u - q \cdot z \cdot u \right) \Rightarrow \\ G \cdot J \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - E \cdot C_w \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} &\equiv \frac{4 \cdot q \cdot z \cdot L^2}{2 \cdot 4 \cdot L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot u - q \cdot z \cdot u \right) \equiv \frac{4 \cdot M_{d,max} \cdot z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \\ &- \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot u - q \cdot z \cdot u \right) \end{aligned}$$

$$G \cdot J \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - E \cdot C_w \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \equiv \frac{4 \cdot M_{d,max} \cdot z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{q \cdot L}{2} \cdot u + q \cdot z \cdot u \quad (2.24)$$

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (2.24) , οπότε με κάποια εκτέλεση πράξεων καταλήγουμε στο ακόλουθο:

$$G \cdot J \cdot \varphi''(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi''''(z) \equiv \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) \cdot u''(z) + q \cdot u(z) \quad (2.25)$$

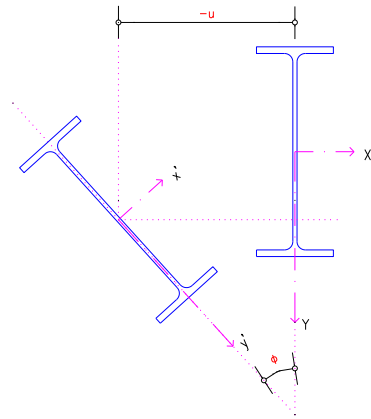
Από την εξίσωση (2.23) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) \cdot \varphi}{E \cdot I_y} \equiv \frac{q \cdot z}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot (L - z) \cdot \varphi(z)$$

Αντικαθιστώντας την $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ στην εξίσωση (2.25) θα έχουμε τα εξής:

$$G \cdot J \cdot \varphi''(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi''''(z) \equiv \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) \cdot \left[\frac{q \cdot z}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot (L - z) \cdot \varphi(z) \right] + q \cdot u(z) \Rightarrow$$

$$G \cdot J \cdot \varphi''(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi''''(z) \equiv \frac{q^2 \cdot z^2}{4 \cdot E \cdot I_y} \cdot (L - z)^2 \cdot \varphi(z) + q \cdot u(z) \quad (2.26)$$



Σχήμα 2.5: Καμπυλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού με βάση την ακτίνα και την μετατόπιση u

Με βάση την ακτίνα μιας περιοχής και την μετατόπιση u όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5

$$u(z) = c \cdot \varphi(z)$$

Άρα έχουμε το εξής σέτ εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &\equiv 4 \cdot \frac{M_{d,max} \cdot z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L}\right) \\
-E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &\equiv \frac{4 \cdot M_{d,max} \cdot z}{L} \cdot \left(1 - \frac{z}{L}\right) \cdot \varphi \\
G \cdot J \cdot \varphi''(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi''''(z) &\equiv \left(\frac{q^2 \cdot z^2}{4 \cdot E \cdot I_y} \cdot (L-z)^2 + q \cdot c \right) \cdot \varphi(z)
\end{aligned}$$

Γράφουμε τις εξισώσεις υπό αδιαστατοποιημένη μορφή:

$$z = \xi \cdot L, v = \frac{u}{L}, \overline{M}_d = \frac{M_{d,max} \cdot L}{E \cdot I_y}, p^2 \equiv I_y \cdot L^2 / C_w, \lambda^2 = G \cdot J \cdot L^2 / E \cdot C_w$$

Είναι

$$\begin{aligned}
u = v \cdot L, u' = v' \cdot \frac{1}{L} \cdot L, \rightarrow u' = v' \rightarrow u'' = v'' \cdot \frac{1}{L}, z = \xi \cdot L, \varphi'(\xi) = \varphi'(z) \cdot L, \\
\varphi''(\xi) \equiv \varphi''(z) \cdot L^2, \varphi'''(\xi) \equiv \varphi'''(z) \cdot L^3, \varphi''''(\xi) \equiv \varphi''''(z) \cdot L^4
\end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση του σετ:

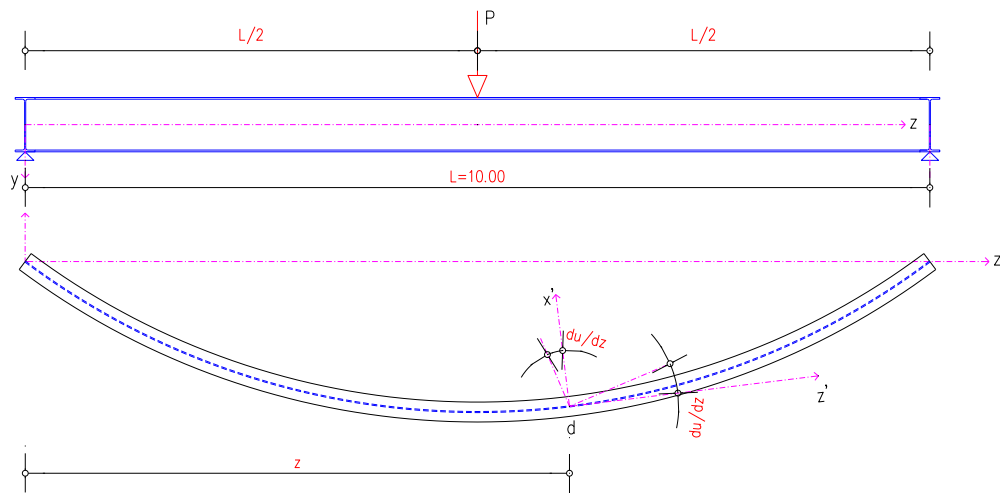
$$-E \cdot C_w \cdot \varphi''''(\xi) + G \cdot J \cdot L^2 \cdot \varphi''(\xi) \equiv \frac{q^2 \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot I_y} \cdot \xi^2 \cdot L^2 \cdot (1-\xi)^2 \cdot \varphi(\xi) + q \cdot c \cdot \varphi(\xi) \cdot L^4 \Rightarrow$$

Κατόπιν εκτέλεσης λίγων πράξεων καταλήγουμε στη σχέση:

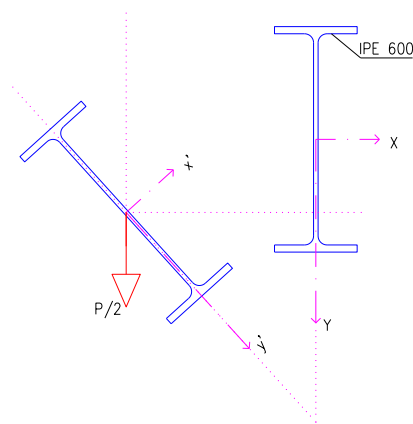
$$-\varphi''''(\xi) + \lambda^2 \cdot \varphi''(\xi) - \left[16 \cdot \overline{M}_{d,max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1-\xi)^2 + c1 \right] \cdot \varphi(\xi) \equiv 0 \quad (2.27)$$

Που είναι η σχέση που διέπει την περίπτωση μας.

2.4 Συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσον της δοκού χωρίς αξονική δύναμη για $z \geq L/2$



Σχήμα 2.6: Καμπυλωμένοι άξονας της παραμορφωμένης δοκού σε κάτοψη και πλάγια όψη



Σχήμα 2.7: Καμπυλωμένοι άξονας της παραμορφωμένης δοκού

Δυνάμεις-Ροπές

$$M_x = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right), \quad M_y \equiv 0, \quad M_z = -\frac{P}{2} \cdot u$$

Χρησιμοποιούμε τα συνημίτονα διευθύνσεως μεταξύ των αξόνων στην κανονική και στην παραμορφωμένη κατάσταση όπως δείχνονται στον Πίνακα 2.1.

$$M_{x'} \equiv \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right)$$

$$M_{y'} \equiv -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right) \cdot \varphi$$

$$M_z \equiv -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + 1 \cdot \left(-\frac{P}{2}\right) \cdot u$$

Από $M_{\text{εσωτ}} = M_{\text{εξωτ}} \Rightarrow$

$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right) \quad (2.28)$$

$$-E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right) \cdot \varphi \quad (2.29)$$

$$G \cdot J \cdot \varphi'(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi'''(z) = -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right) \cdot u' - \frac{P}{2} \cdot u \quad (2.30)$$

Από την (2.30) \Rightarrow Παραγωγίζοντας μία φορά καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$G \cdot J \cdot \varphi''(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi''''(z) = \left[-\frac{P \cdot L}{4} + \frac{P \cdot z}{2} \right] \cdot u''(z) \quad (2.31)$$

Από την (2.29) προκύπτει:

$$u''(z) = -\frac{\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right) \cdot \varphi}{E \cdot I_y}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.31) και κατόπιν εκτέλεσης κάποιων πράξεων καταλήγουμε στη σχέση:

$$E \cdot C_w \cdot \varphi''''(z) - G \cdot J \cdot \varphi''(z) + \frac{P^2}{4 \cdot E I_y} \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right)^2 \cdot \varphi(z) \equiv 0 \quad (2.32)$$

Γράφουμε τις εξισώσεις υπό αδιαστατοποιημένη μορφή:

$$z = \xi \cdot L, \quad v = \frac{u}{L}, \quad \overline{M_{c,\max}} = \frac{M_{c,\max} \cdot L}{E \cdot I_y}, \quad p^2 = I_y \cdot L^2 / C_w, \quad \lambda^2 = G \cdot J \cdot \frac{L^2}{E \cdot C_w}$$

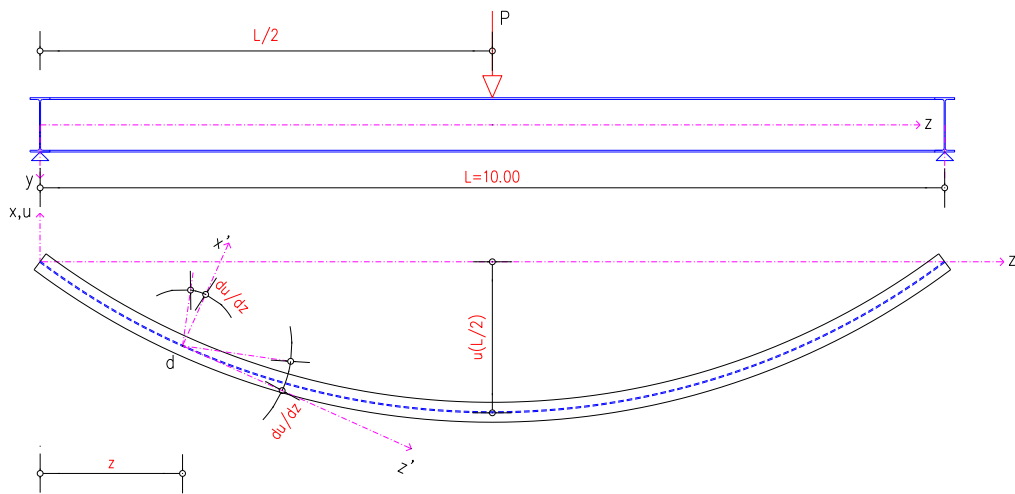
$$u' = v' \cdot \frac{1}{L} \cdot L = v', \quad u'' = v'' \cdot \frac{1}{L}, \quad \varphi'(\xi) = \varphi'(z) \cdot L \Rightarrow \varphi''(\xi) \equiv \varphi''(z) \cdot L^2,$$

$$\varphi'''(\xi) \equiv \varphi'''(z) \cdot L^3, \quad \varphi''''(\xi) = \varphi''''(z) \cdot L^4$$

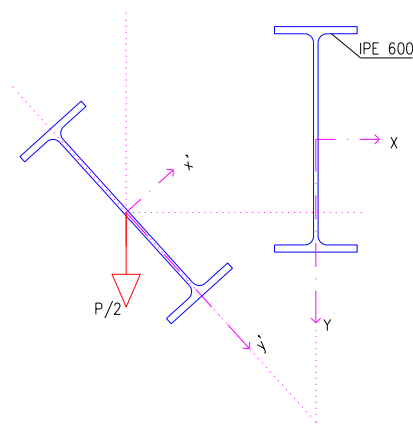
Άρα η εξίσωση (2.32) κατόπιν εκτέλεσης κάποιων πράξεων καταλήγει στην εξής σχέση που είναι και η εξίσωση ισορροπίας του συγκεκριμένου μοντέλου :

$$\varphi''''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi''(\xi) - 4 \cdot \overline{M_{c,\max}}^2 \cdot p^2 \cdot \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \varphi(\xi) \equiv 0 \quad (2.33)$$

2.5 Συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσον της δοκού χωρίς αξονική δύναμη για $0 \leq z \leq L/2$



Σχήμα 2.8: Καμπυλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού σε κάτοψη και πλάγια όψη



Σχήμα 2.9: Καμπυλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού

Δυνάμεις-Ροπές

$$Q \equiv \frac{P}{2} \Rightarrow M_x \equiv \frac{P}{2} \cdot z, \quad M_y \equiv 0, \quad M_z = \frac{P}{2} \cdot \left[u\left(\frac{L}{2}\right) - u(z) \right]$$

Χρησιμοποιούμε τα συνημίτονα διευθύνσεως μεταξύ των αξόνων στην κανονική και στην παραμορφωμένη κατάσταση όπως δείχνονται στον Πίνακα 2.1.

$$M_{x'} \equiv \frac{P}{2} \cdot z + \varphi \cdot 0 \equiv \frac{P}{2} \cdot z$$

$$M_{y'} \equiv \frac{P}{2} \cdot z \cdot \varphi(z) + 1 \cdot 0 \equiv \frac{P}{2} \cdot z \cdot \varphi(z)$$

$$M_z \equiv \frac{P}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + 0 + \frac{P}{2} \cdot \left[u\left(\frac{L}{2}\right) - u(z) \right]$$

$$\text{Από } M_{\text{εσωτ}} = M_{\text{εξωτερ}} \Rightarrow$$

$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \equiv \frac{P}{2} \cdot z \equiv 2 \cdot \frac{P \cdot L}{2 \cdot 2 \cdot L} \cdot z \equiv \frac{2}{L} \cdot \left(\frac{P \cdot L}{4} \right) \cdot z \equiv \frac{2}{L} \cdot M_{c,\max} \cdot z \quad (2.34)$$

$$-E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \frac{P}{2} \cdot z \cdot \varphi(z) \equiv \frac{2}{L} \cdot M_{c,\max} \cdot z \cdot \varphi(z) \quad (2.35)$$

$$G \cdot J \cdot \varphi'(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi'''(z) \equiv \frac{2}{L} \cdot M_{c,\max} \cdot z \cdot u'(z) + \frac{2}{L} \cdot M_{c,\max} \cdot \left[u\left(\frac{L}{2}\right) - u(z) \right] \quad (2.36)$$

$$\text{Όπου } M_{c,\max} = \frac{P \cdot L}{4}$$

Διαφορίζουμε μία φορά την σχέση (2.36) οπότε κάνοντας και κάποιες πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$G \cdot J \cdot \varphi''(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi''''(z) \equiv \frac{2}{L} \cdot M_{c,\max} \cdot z \cdot u''(z) \quad (2.37)$$

Από την εξίσωση (2.35) \Rightarrow

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv -\frac{2 \cdot M_{c,\max}}{E \cdot I_y \cdot L} \cdot z \cdot \varphi(z)$$

Αντικαθιστώντας τον όρο $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ στην εξίσωση (2.37) καταλήγουμε στην εξής εξίσωση:

$$-\varphi''''(z) + \frac{G \cdot J}{E \cdot C_w} \cdot \varphi''(z) + \frac{4}{L^2} \cdot \frac{M_{c,\max}^2 \cdot z^2}{E^2 \cdot C_w \cdot I_y} \cdot \varphi(z) \equiv 0 \quad (2.38)$$

Γράφουμε τις εξισώσεις υπό αδιαστατοποιημένη μορφή:

$$z = \xi \cdot L, \quad v = \frac{u}{L}, \quad \overline{M_{c,\max}} = \frac{M_{c,\max} \cdot L}{E \cdot I_y}, \quad p^2 = I_y \cdot L^2 / C_w, \quad \lambda^2 = G \cdot J \cdot \frac{L^2}{E \cdot C_w}$$

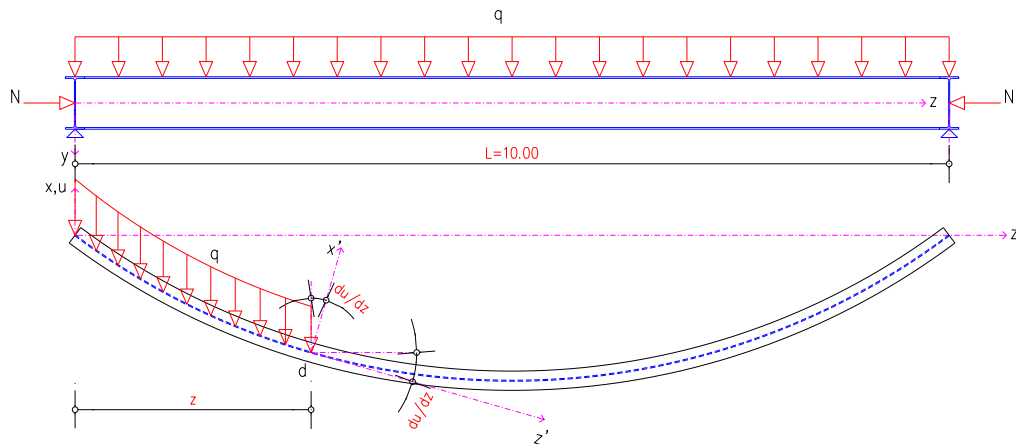
$$u' = v' \cdot \frac{1}{L} \cdot L = v', \quad u'' = v'' \cdot \frac{1}{L}, \quad \varphi'(\xi) = \varphi'(z) \cdot L \Rightarrow \varphi''(\xi) \equiv \varphi''(z) \cdot L^2$$

$$\varphi'''(\xi) \equiv \varphi'''(z) \cdot L^3, \quad \varphi''''(\xi) \equiv \varphi''''(z) \cdot L^4$$

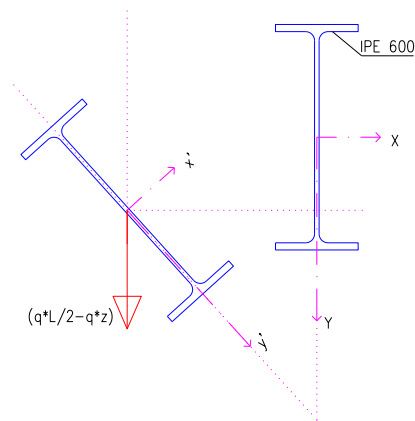
Άρα η εξίσωση (2.38) κατόπιν εκτέλεσης κάποιων πράξεων καταλήγει στην εξής σχέση που είναι και η εξίσωση ισορροπίας του συγκεκριμένου μοντέλου :

$$\varphi''''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi''(\xi) - 4 \cdot \overline{M_{c,\max}}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \varphi(\xi) \equiv 0 \quad (2.39)$$

2.6 Ομοιόμορφο φορτίο με αξονική δύναμη



Σχήμα 2.10: Καμπυλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού σε κάτοψη και πλάγια όψη



Σχήμα 2.11: Καμπυλωμένος άξονας της παραμορφωμένης δοκού

Λόγω τέμνουσας

$$M_x \equiv \left(\frac{q \cdot L}{2} \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right) , \quad M_y \equiv 0 , \quad M_z \equiv \left(q \cdot \frac{L}{2} - q \cdot z \right) \cdot u$$

Λόγω αξονικής

$$M_x = -N \cdot z , \quad M_y = -N \cdot u , \quad M_z \equiv 0$$

Χρησιμοποιούμε τα συνημίτονα διευθύνσεως μεταξύ των αξόνων στην κανονική και στην παραμορφωμένη κατάσταση όπως δείχνονται στον Πίνακα 2.1

Από $M_{\varepsilon\sigma\sigma\tau} = M_{\varepsilon\zeta\omega\tau\epsilon\rho} \Rightarrow$

$$E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \equiv \left(q \cdot \frac{L}{2} \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right) - N \cdot z + N \cdot u \cdot \varphi(z) \quad (2.40)$$

$$E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \left(q \cdot \frac{L}{2} \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right) \cdot \varphi(z) - N \cdot z \cdot \varphi(z) - N \cdot u(z) \quad (2.41)$$

$$G \cdot J \cdot \varphi'(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi'''(z) \equiv \frac{q \cdot z}{2} \cdot (L - z) \cdot u'(z) - q \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \cdot u \quad (2.42)$$

Γράφουμε τις εξισώσεις υπό αδιαστατοποιημένη μορφή:

$$z = \xi \cdot L, \quad v = \frac{u}{L}, \quad \overline{M_{d,max}} = \frac{M_{d,max} \cdot L}{E \cdot I_y}, \quad p^2 = I_y \cdot L^2 / C_w, \quad \lambda^2 = G \cdot J \cdot \frac{L^2}{E \cdot C_w}$$

$$u' = v' \cdot \frac{1}{L} \cdot L = v', \quad u'' = v'' \cdot \frac{1}{L}, \quad \varphi'(\xi) = \varphi'(z) \cdot L \Rightarrow \varphi''(\xi) \equiv \varphi''(z) \cdot L^2$$

$$\varphi'''(\xi) \equiv \varphi'''(z) \cdot L^3, \quad \varphi''''(\xi) \equiv \varphi''''(z) \cdot L^4$$

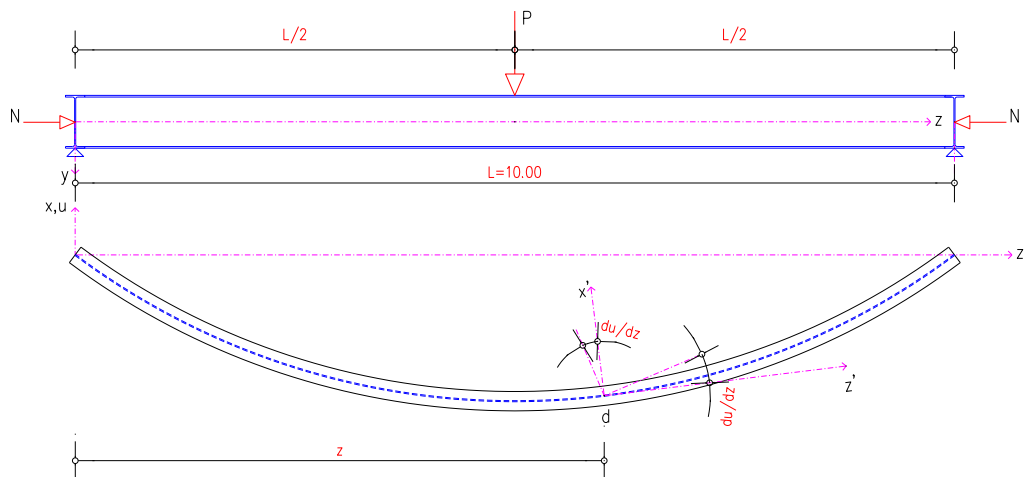
Η εξίσωση (2.41) γράφεται ως ακολούθως μετά και από εκτέλεση κάποιων πράξεων καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$v''(\xi) + \eta^2 \cdot v(\xi) \equiv 4 \cdot \overline{M_{d,max}} \cdot \frac{L}{E \cdot I_y} (1 - \xi) \cdot \varphi(\xi) \quad (2.43)$$

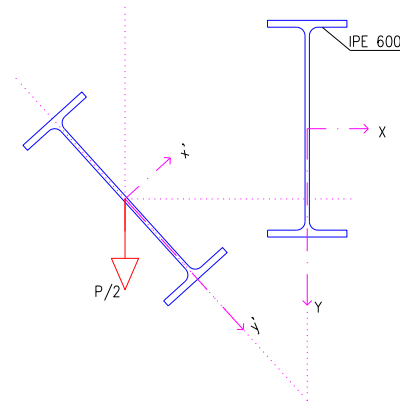
Από την εξίσωση (2.42) και μετά από εκτέλεση κάποιων παραγωγίσεων καταλήγουμε στη σχέση που είναι και η εξίσωση ισορροπίας του συγκεκριμένου μοντέλου :

$$\varphi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \varphi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \varphi(\xi) \equiv 16 \cdot \overline{M_{d,max}}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi^2)^2 \cdot \varphi(\xi) \quad (2.44)$$

2.7 Συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσον της δοκού με αξονική δύναμη



Σχήμα 2.12: Καμπυλωμένους άξονας της παραμορφωμένης δοκού σε κάτοψη και πλάγια όψη



Σχήμα 2.13: Καμπυλωμένους άξονας της παραμορφωμένης δοκού

Λόγω τέμνουσας

$$M_x \equiv \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right), M_y \equiv 0, M_z \equiv -\frac{P}{2}$$

Λόγω αξονικής

$$M_x \equiv -N \cdot z, M_y \equiv -N \cdot u, M_z \equiv 0$$

Χρησιμοποιούμε τα συνημίτονα διευθύνσεως μεταξύ των αξόνων στην κανονική και στην παραμορφωμένη κατάσταση όπως δείχνονται στον Πίνακα 2.1

$$M_{x'} \equiv \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \cdot 1 - N \cdot z + N \cdot u(z) \cdot \varphi(z)$$

$$M_{y'} \equiv \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \cdot \varphi(z) - N \cdot z \cdot \varphi(z) - N \cdot u(z)$$

$$M_{z'} \equiv -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \cdot u'(z) - N \cdot z \cdot u'(z) - N \cdot u(z) \cdot v'(z) - \frac{P}{2} \cdot u(z)$$

Από $M_{\text{εσωτ}} = M_{\text{εξωτ}} \Rightarrow$ και έπειτα από απαλοιφή κάποιων όρων οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται:

$$E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + N \cdot z \equiv \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \quad (2.45)$$

$$E \cdot I_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + N \cdot u(z) \equiv \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \cdot \varphi(z) \quad (2.46)$$

$$G \cdot J \cdot \varphi'(z) - E \cdot C_w \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} + \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \cdot u'(z) + \frac{P}{2} \cdot u(z) \equiv 0 \quad (2.47)$$

Παραγωγίζουμε μία φορά την (2.47) οπότε κατόπιν εκτέλεσης κάποιων πράξεων καταλήγουμε στη σχέση:

$$G \cdot J \cdot \varphi''(z) - E \cdot C_w \cdot \varphi''''(z) + \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \cdot u''(z) \equiv 0 \quad (2.48)$$

Από την εξίσωση (2.46) \Rightarrow

$$u'(z) \equiv -\frac{N}{E \cdot I_y} \cdot u(z) + \frac{P}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{L}{2} - z \right) \cdot \varphi(z)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση στην εξίσωση (2.48) και γράφοντας τις εξισώσεις υπό αδιαστατοποιημένη μορφή:

$$z = \xi \cdot L, \quad v = \frac{u}{L}, \quad \overline{M_{c,max}} = \frac{M_{c,max} \cdot L}{E \cdot I_y}, \quad p^2 = I_y \cdot L^2 / C_w, \quad \lambda^2 = G \cdot J \cdot \frac{L^2}{E \cdot C_w}$$

$$u' = v' \cdot \frac{1}{L} \cdot L = v', \quad u'' = v'' \cdot \frac{1}{L}, \quad \varphi'(\xi) = \varphi'(z) \cdot L \Rightarrow \varphi''(\xi) \equiv \varphi''(z) \cdot L^2$$

$$\varphi'''(\xi) \equiv \varphi'''(z) \cdot L^3, \quad \varphi''''(\xi) \equiv \varphi''''(z) \cdot L^4$$

Καταλήγουμε στη σχέση που είναι και η εξίσωση ισορροπίας του συγκεκριμένου μοντέλου :

$$\varphi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \varphi(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \varphi(\xi) \equiv 4 \cdot \overline{M_{c,max}}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \varphi(\xi) \quad (2.49)$$

3 Αριθμητική Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του πλευρικού λυγισμού

3.1 Εισαγωγή

Επειδή κατά κανόνα η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι εξαιρετικά δυσχερής, ακόμα και με το πρόγραμμα Maple δεν δίνονται ακριβείς λύσεις, επιλέχθηκε η επίλυση διαμέσου της αριθμητικής ολοκλήρωσης με βάση την μέθοδο Runge-Kutta και ειδικά με την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Η επίλυση έγινε μέσω προγραμματισμού σε γλώσσα Matlab του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης.

3.2 Περίπτωση του αξονικού φορτίου και ομοιόμορφης κάμψης με συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα της δοκού M0

Έτσι έχουμε το εξής γραμμικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned}v''(\xi) + \eta^2 \cdot v(\xi) &= \overline{M0}_{,cr} \cdot \varphi(\xi) \\ \varphi'''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi'(\xi) &= p^2 \cdot \overline{M0}_{,cr} \cdot v'(\xi)\end{aligned}$$

Γίνονται οι εξής παραδοχές:

$$\begin{aligned}y_1 &\equiv v, & y_2 &\equiv y_1' \equiv v', & y_2' &\equiv y_1'' \equiv v'' \\ y_3 &\equiv \varphi, & y_4 &\equiv y_3' \equiv \varphi', & y_5 &\equiv y_4' \equiv y_3'' \equiv \varphi'', & y_5' &\equiv y_4'' \equiv y_3''' \equiv \varphi'''\end{aligned}$$

Το σύστημα των 2 διαφορικών εξισώσεων 2ης και 3ης τάξης μετασχηματίζεται στο εξής σύστημα δ.ε. 1ης τάξης:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \overline{M0} \cdot y_3 - \eta^2 \cdot y_1 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= y_5 \\ y_5' &= p^2 \cdot \overline{M0} \cdot y_2 + \lambda^2 \cdot y_4 \\ y_6' &= (\lambda^2 - \eta^2) \cdot y_5 + (p^2 \cdot \overline{M0}^2 + \eta^2 \cdot \lambda^2) \cdot y_3\end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες:

Γνωστές
 $y_1(0) = 0$

$y_3(0) = 0$

$y_5(0) = 0$

Άγνωστες
 $y_2(0) = ?$

$y_4(0) = ?$

$\overline{M0} = ?$

Συνθήκες στο $\xi = \frac{1}{2}$

$$y_1' \left(\frac{1}{2} \right) \equiv 0$$

$$y_3' \left(\frac{1}{2} \right) \equiv 0$$

$$y_5' \left(\frac{1}{2} \right) \equiv 0$$

(2.50)

Μοντελοποίηση του συστήματος με 3 αγνώστους με εφαρμογή της μεθόδου Runge-Kutta και Newton-Raphson για σύγκλιση των αγνώστων τιμών

Είναι:

$$F_{10}(y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}, y_{60})$$

$$F_{20}(y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}, y_{60})$$

$$F_{30}(y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}, y_{60})$$

$$y_1' \equiv F_{10}$$

Έστω η αρχική τιμή : $y_3' \equiv F_{20}$

$$y_5' \equiv F_{30}$$

Η εύρεση των αγνώστων $y_1' = y_2, y_3' = y_4, y_6 = \overline{M0}_{cr}$ θα γίνει με την δημιουργία των μερικών παραγώγων αυτών των μεταβλητών και την εν συνεχεία με την επίλυσή του συστήματος με χρησιμοποίηση οριζουσών.

$$\left. \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} \right|_0 \equiv \frac{F_1(y_1, y_2 + h, y_3, y_4, y_5, y_6) - F_{10}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} \right|_0 \equiv \frac{F_1(y_1, y_2, y_3, y_4 + h, y_5, y_6) - F_{10}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \right|_0 \equiv \frac{F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 + h) - F_{10}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} \right|_0 \equiv \frac{F_2(y_1, y_2 + h, y_3, y_4, y_5, y_6) - F_{20}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} \right|_0 \equiv \frac{F_2(y_1, y_2, y_3, y_4 + h, y_5, y_6) - F_{20}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \right|_0 \equiv \frac{F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 + h) - F_{20}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} \right|_0 \equiv \frac{F_3(y_1, y_2 + h, y_3, y_4, y_5, y_6) - F_{30}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} \right|_0 \equiv \frac{F_3(y_1, y_2, y_3, y_4 + h, y_5, y_6) - F_{30}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \right|_0 \equiv \frac{F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 + h) - F_{30}}{h}$$

Αρα

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \\ \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \\ \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \\ y_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \\ F_{30} \end{bmatrix}$$

$$\text{DET} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \\ \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \\ \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)}{\partial y_6} \end{vmatrix}$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} F_{10} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_6} \\ F_{20} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_6} \\ F_{30} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_6} \end{vmatrix}}{\text{DET}}, \quad y_4 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & F_{10} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & F_{20} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_6} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \dots & F_{30} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_6} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

$$y_6 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} & \dots & F_{10} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} & \dots & F_{20} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} & \dots & F_{30} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

Θα πρέπει $y_2 < 1E-6, y_4 < 1E-6, y_6 < 1E-6$ και σε κάθε επανάληψη θα πρέπει να ισχύει:

$$y_2^{(m+1)} = y_2^{(m)} - \frac{\begin{vmatrix} F_{10} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_6} \\ F_{20} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_6} \\ F_{30} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_6} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

$$y_4^{(m+1)} = y_4^{(m)} - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & F_{10} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & F_{20} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_6} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \dots & F_{30} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_6} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

$$y_6^{(m+1)} = y_6^{(m)} - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} & \dots & F_{10} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} & \dots & F_{20} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} & \dots & F_{30} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

Για την περίπτωση του αξονικού φορτίου και ομοιόμορφης κάμψης με συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα της δοκού M0 , δίδονται οι αριθμητικές επιλύσεις των διαφορικών εξισώσεων για τρεις περιπτώσεις αμφιέριστων δοκών.

Για να συγκλίνει η μέθοδος γίνεται έλεγχος αν ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες στο μέσον της δοκού. Το πρόγραμμα κάνει έλεγχο των συνθηκών στο μέσον της δοκού και αν η διαφορά των τιμών που προκύπτουν από την επίλυση με Runge-Kutta με αυτές που υφίστανται από τις συνοριακές συνθήκες [σχέσεις (2.50)] είναι μικρότερες κατά απόλυτη τιμή από το $1E-6$ τότε εκτυπώνει τα αποτελέσματα της $\overline{M0}_{,cr}$, της y_2 και της y_4 . Διαφορετικά εκτελεί την μέθοδο Newton-Raphson μέχρις ότου ξαναβρεθεί σύγκλιση σε νέες τιμές , ελέγχονται ξανά οι σχέσεις (2.50) και όταν οι διαφορές είναι μικρότερες κατά απόλυτη τιμή του $1E-6$, τότε εκτυπώνονται τα νέα μεγέθη των $\overline{M0}_{,cr}$, της y_2 και της y_4 .

3.3 1^η περίπτωση αμφιέριστη δοκός μήκους L=6M και διατομής IPE 270

$$L = 6\text{m}$$

$$b = \frac{135}{1000}\text{m}$$

$$h = \frac{270}{1000}\text{m}$$

$$t_w = s = \frac{6.6}{1000}\text{m}$$

$$t_f = t = \frac{10.2}{1000}\text{m}$$

$$I_y = 419 \times 10^{-8}\text{m}^4$$

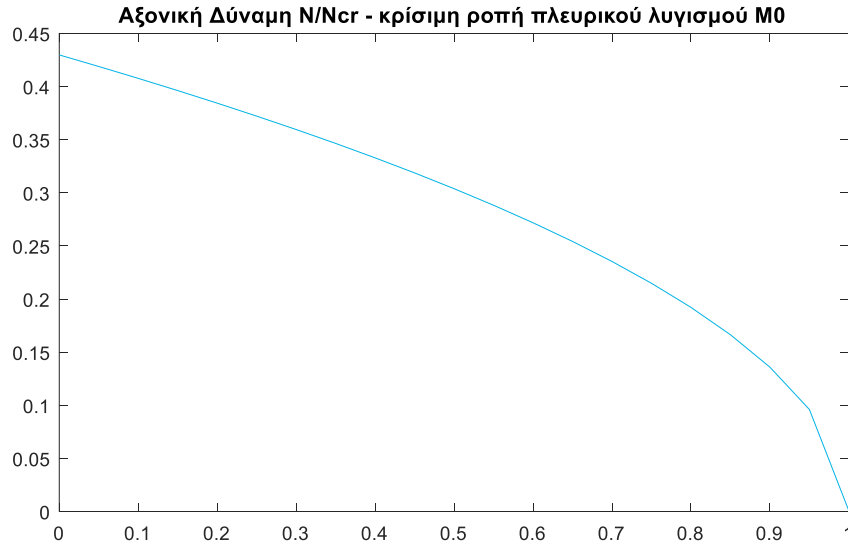
$$J = 0.154 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

$$C_w = 0.07058 \times 10^{-6}\text{m}^6$$

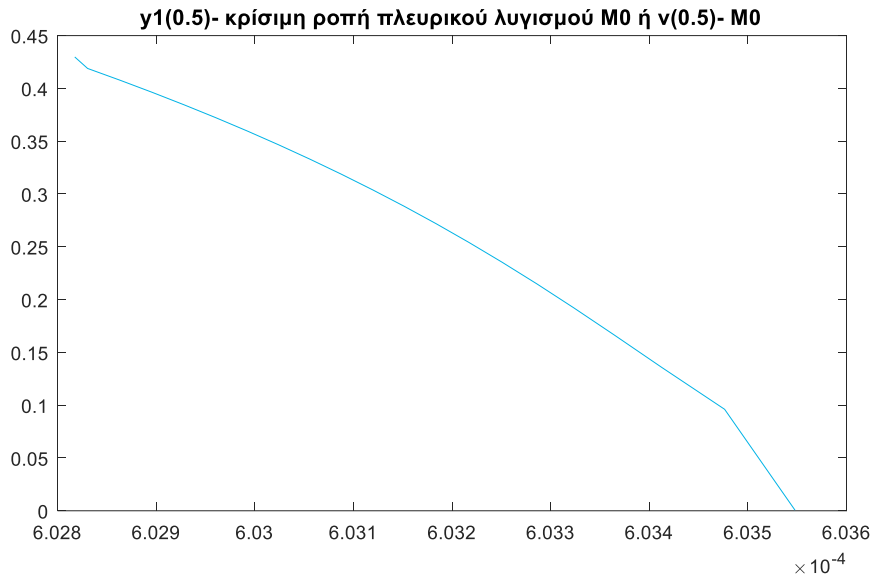
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2} \equiv 241.748\text{kN}$$

Τα προγράμματα δίδονται στο τέλος στο Παράρτημα , στο παρόν τεύχος δίδονται τα αποτελέσματα:

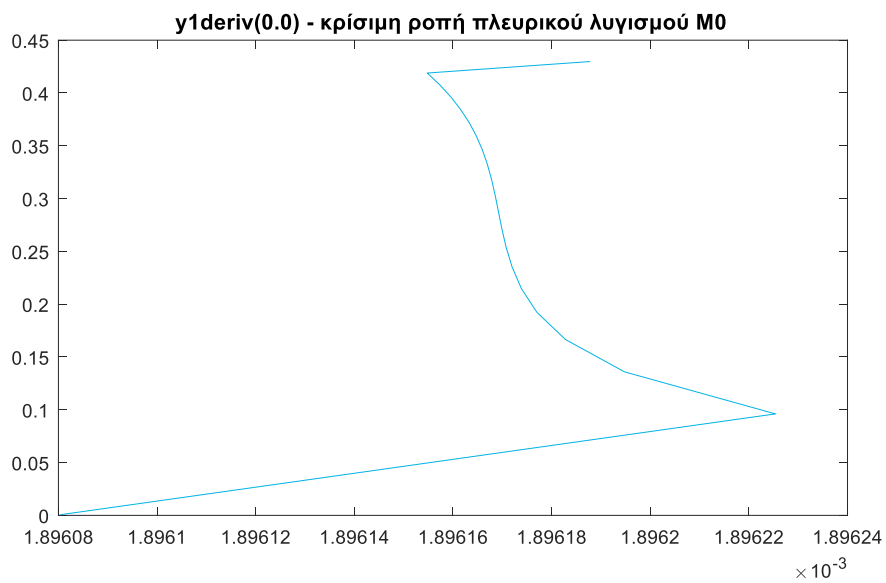
- Αποτελέσματα



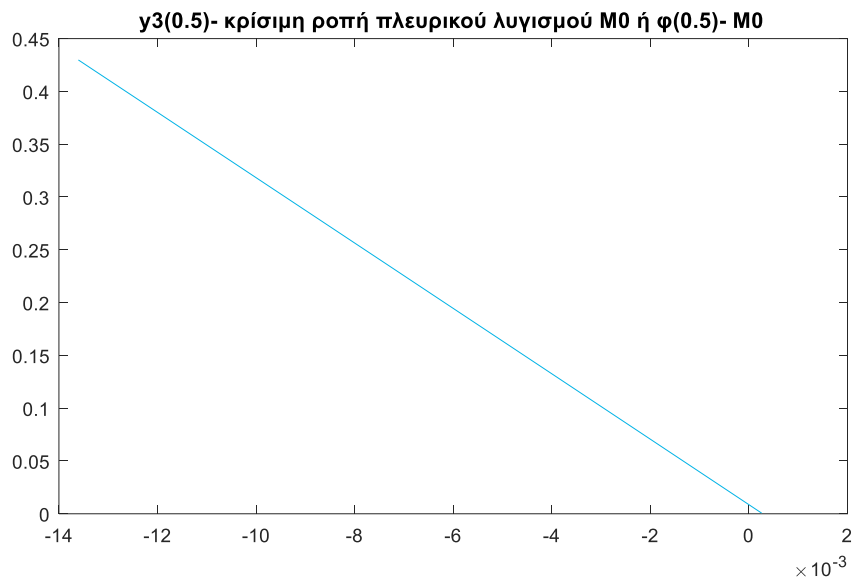
Σχήμα 3.1: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



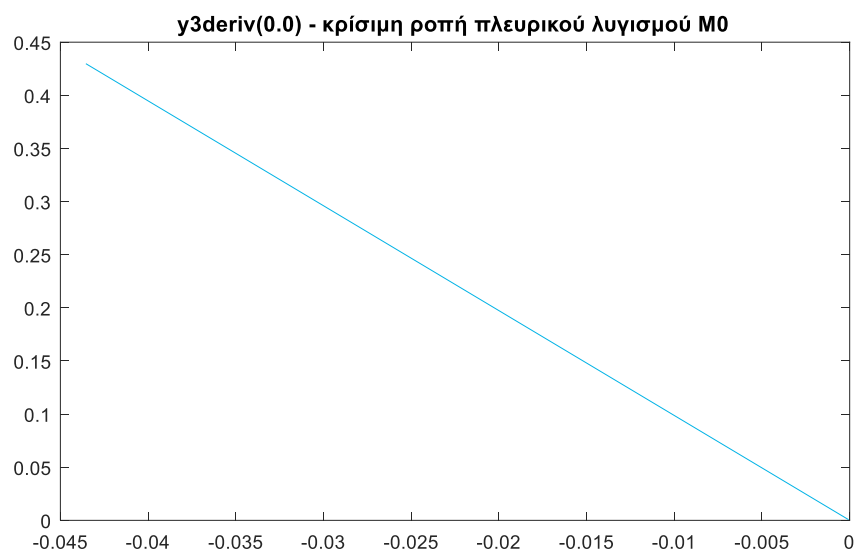
Σχήμα 3.2: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



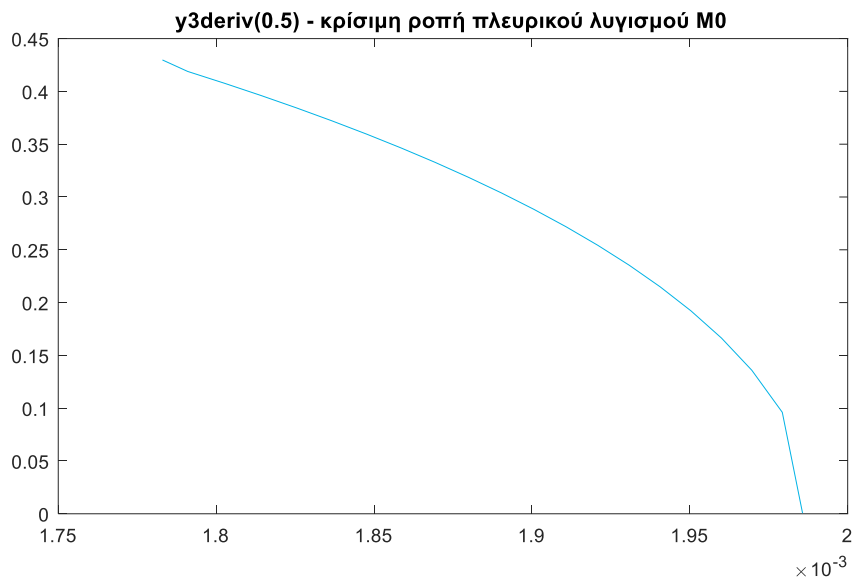
Σχήμα 3.3: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



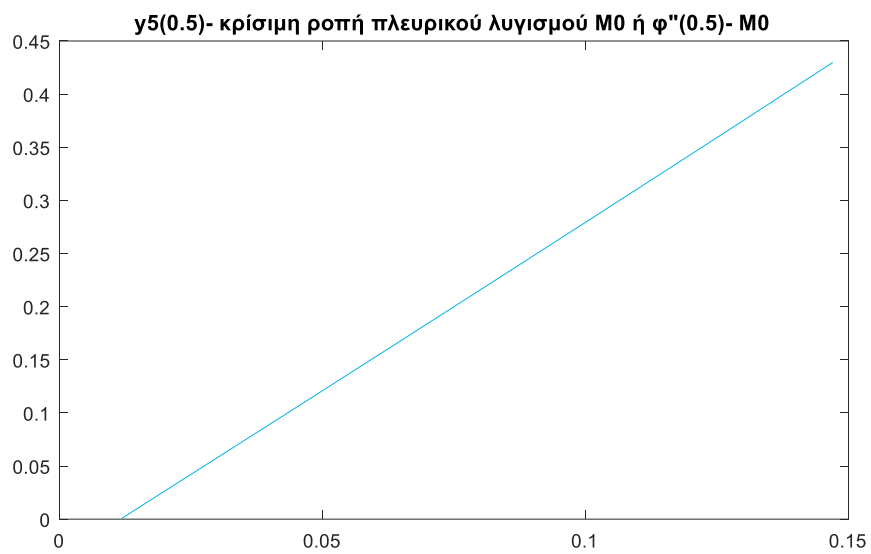
Σχήμα 3.4: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



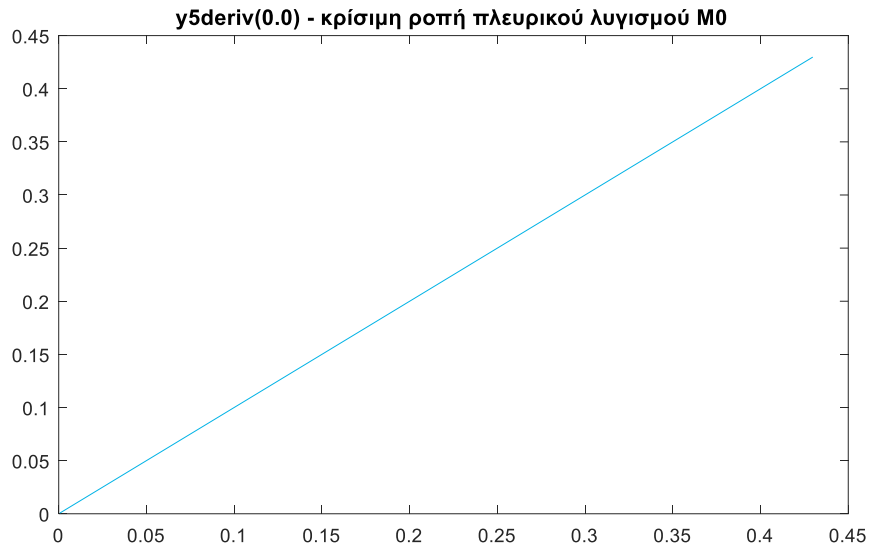
Σχήμα 3.5: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



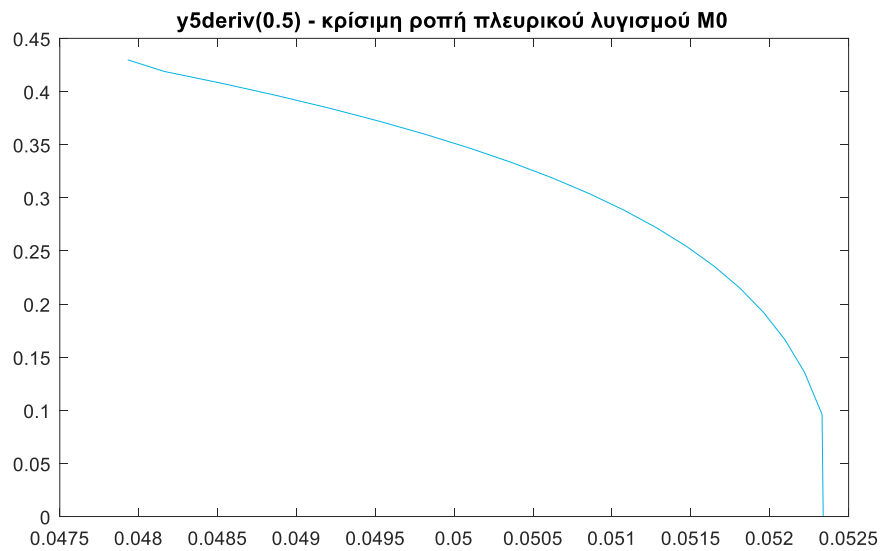
Σχήμα 3.6: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.7: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.8: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.9: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab

Σύγκριση τιμών μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής επίλυσης και του θεωρητικού τύπου που προέρχεται από «κλειστή» λύση [σχέση (2.17)].

Πίνακας 3.1: Σύγκριση τιμών μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής επίλυσης και του θεωρητικού τύπου που προέρχεται από κλειστή λύση

| Axial Force N | Numerical calculation IPE 270 | Theoretical calculation due to "closed" solution IPE 270 |
|---------------|-------------------------------|--|
| 0 | 0.429767003 | 0.429768735 |
| 12.08735 | 0.418887928 | 0.418886781 |
| 24.1747 | 0.407715718 | 0.40771449 |
| 36.26205 | 0.396228568 | 0.396227302 |
| 48.3494 | 0.384398247 | 0.384396989 |
| 60.43675 | 0.372192037 | 0.372190831 |
| 72.5241 | 0.359571665 | 0.359570556 |
| 84.61145 | 0.346491883 | 0.346490915 |
| 96.6988 | 0.33289855 | 0.332897768 |
| 108.78615 | 0.318725974 | 0.318725421 |
| 120.8735 | 0.303893131 | 0.303892849 |
| 132.96085 | 0.288298135 | 0.288298168 |
| 145.0482 | 0.27180984 | 0.271810234 |
| 157.13555 | 0.254254523 | 0.254255331 |
| 169.2229 | 0.23539358 | 0.235394866 |
| 181.31025 | 0.214883491 | 0.214885348 |
| 193.3976 | 0.192197016 | 0.19219959 |
| 205.48495 | 0.16644658 | 0.16645015 |
| 217.5723 | 0.135901445 | 0.135906667 |
| 229.65965 | 0.09609284 | 0.096101987 |
| 241.747 | 0.000600926 | 0.00074944 |

3.4 2^η περίπτωση αμφιέριστη δοκός μήκους $L=8\text{M}$ και διατομής IPE 400

$$L = 8\text{m}$$

$$b = \frac{180}{1000}\text{m}$$

$$h = \frac{400}{1000}\text{m}$$

$$t_w = s = \frac{8.6}{1000}\text{m}$$

$$t_f = t = \frac{13.5}{1000}\text{m}$$

$$I_y = 1318 \times 10^{-8}\text{m}^4$$

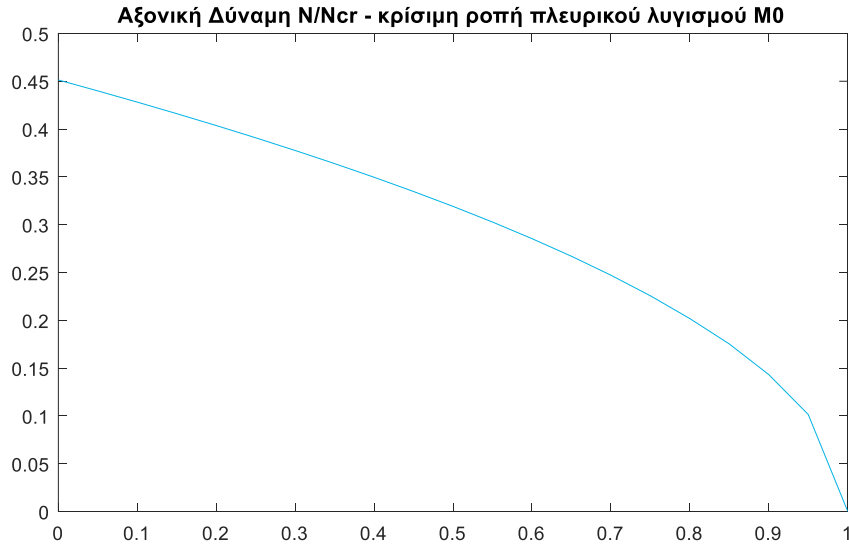
$$J = 0.5108 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

$$C_w = 0.490 \times 10^{-6}\text{m}^6$$

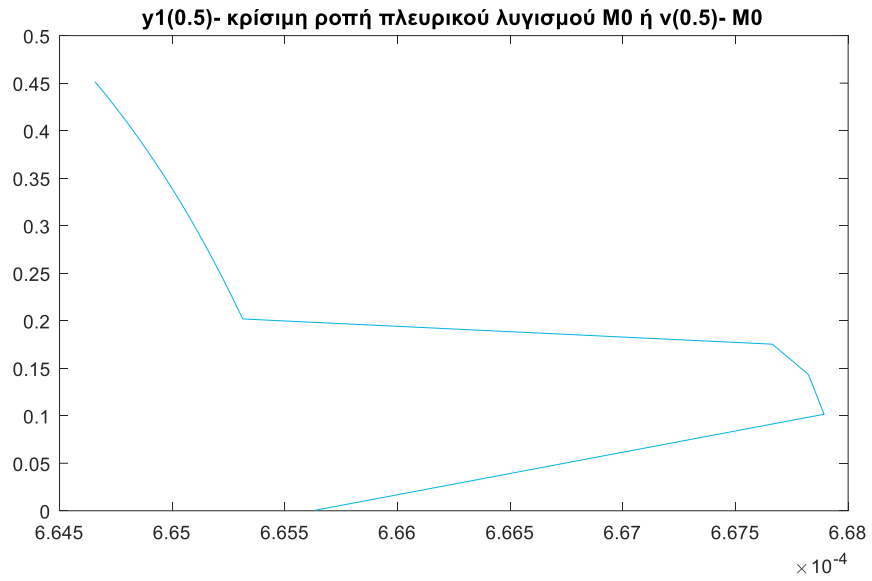
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2} \equiv 426.829\text{kN}$$

Τα προγράμματα δίδονται στο τέλος στο Παράρτημα , στο παρόν τεύχος δίδονται τα αποτελέσματα:

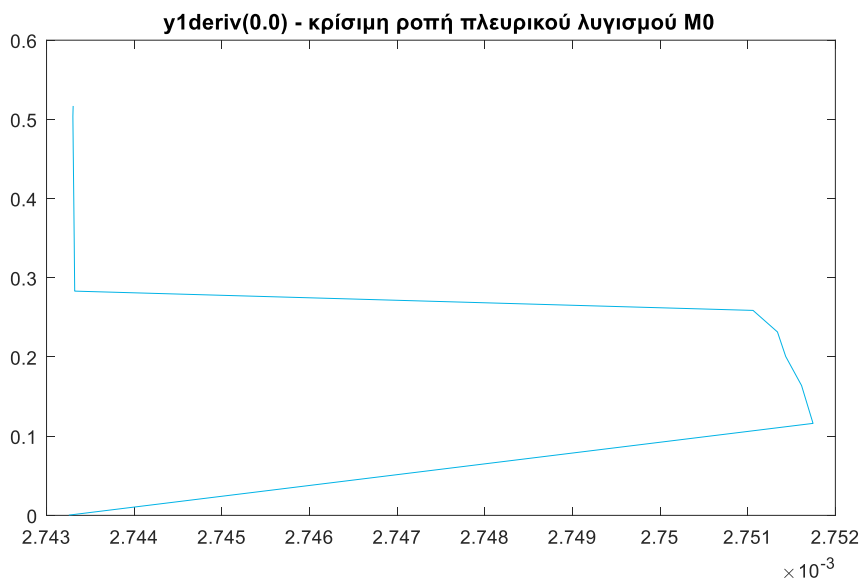
- Αποτελέσματα



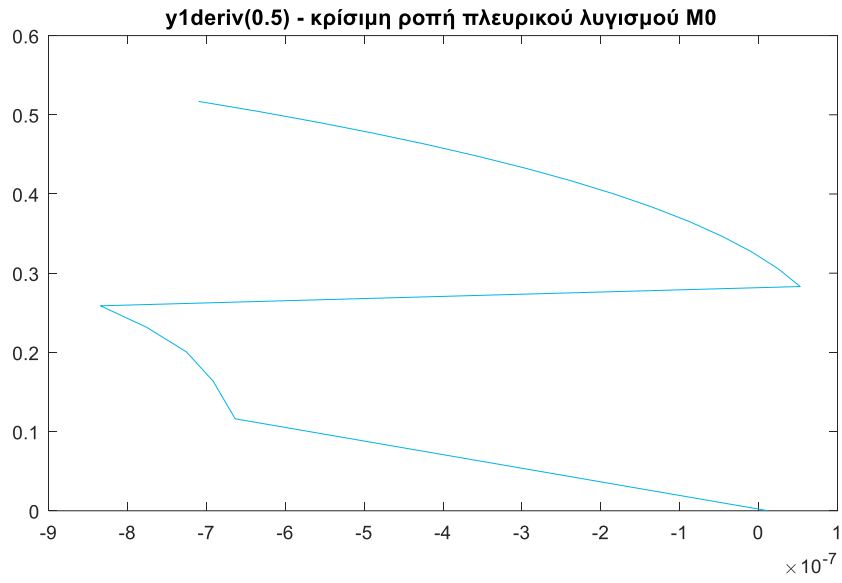
Σχήμα 3.10: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



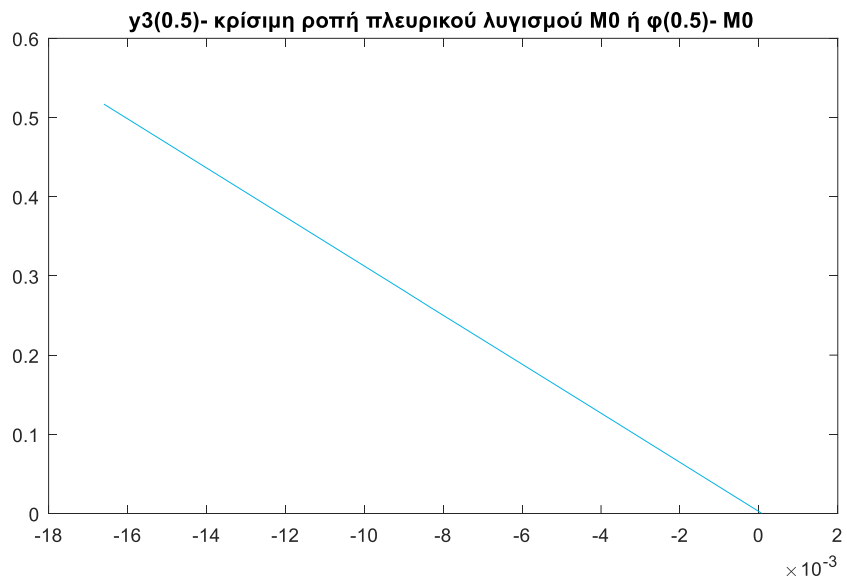
Σχήμα 3.11: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



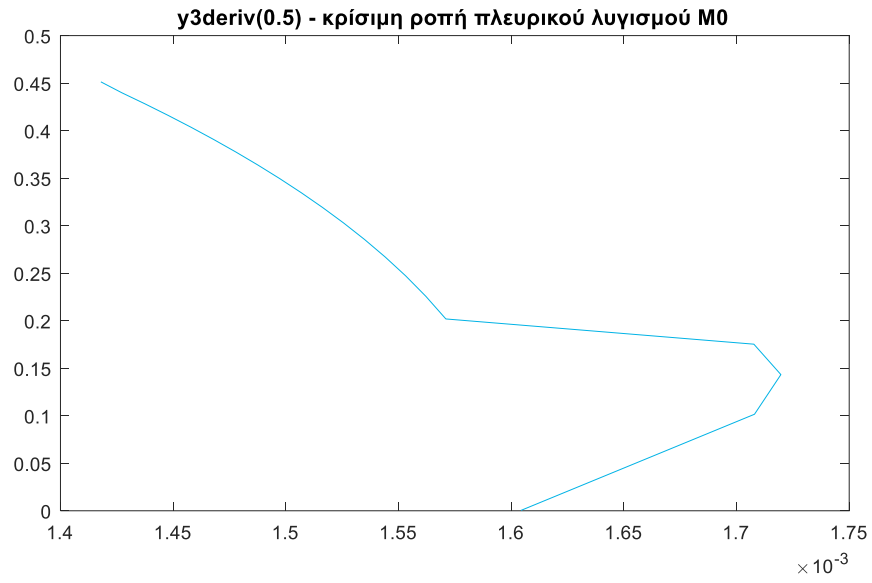
Σχήμα 3.12: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



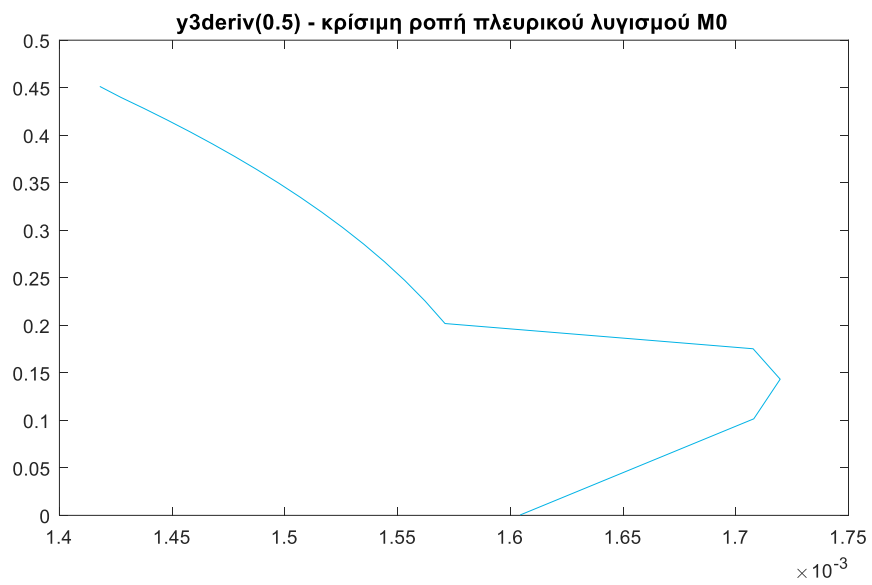
Σχήμα 3.13: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



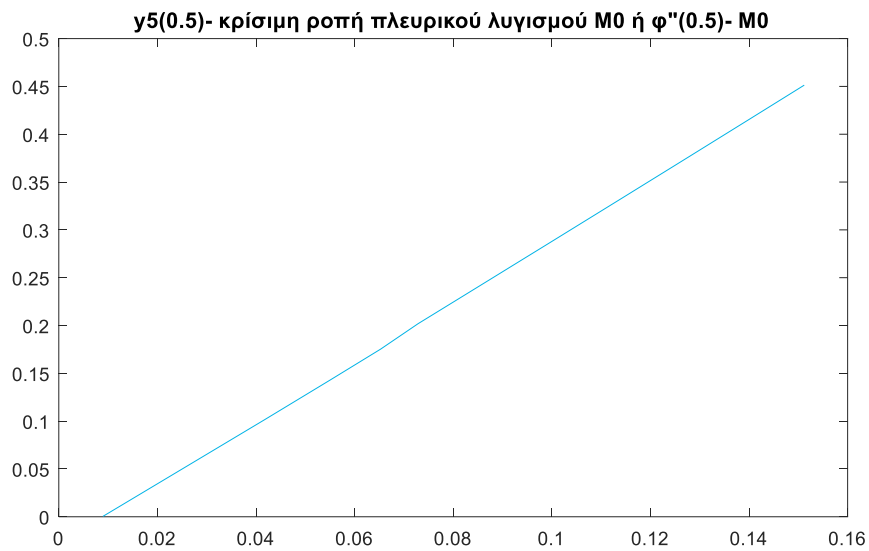
Σχήμα 3.14: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



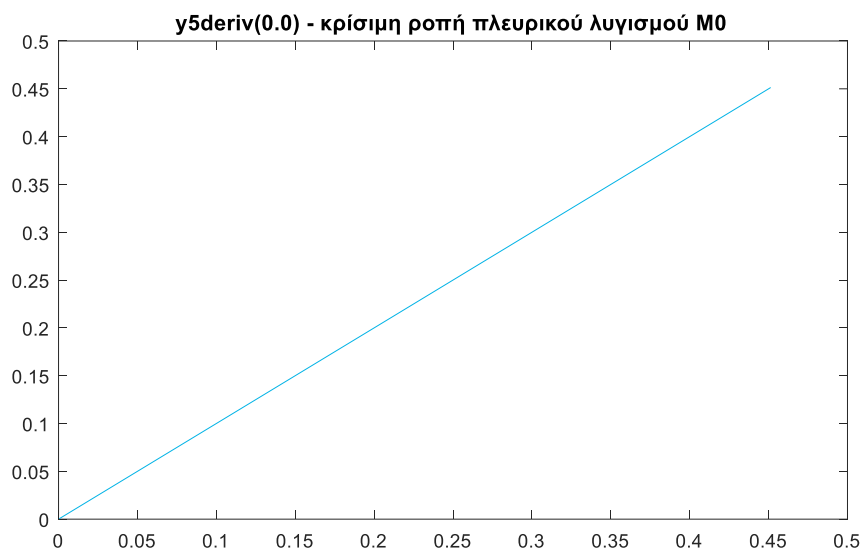
Σχήμα 3.15: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



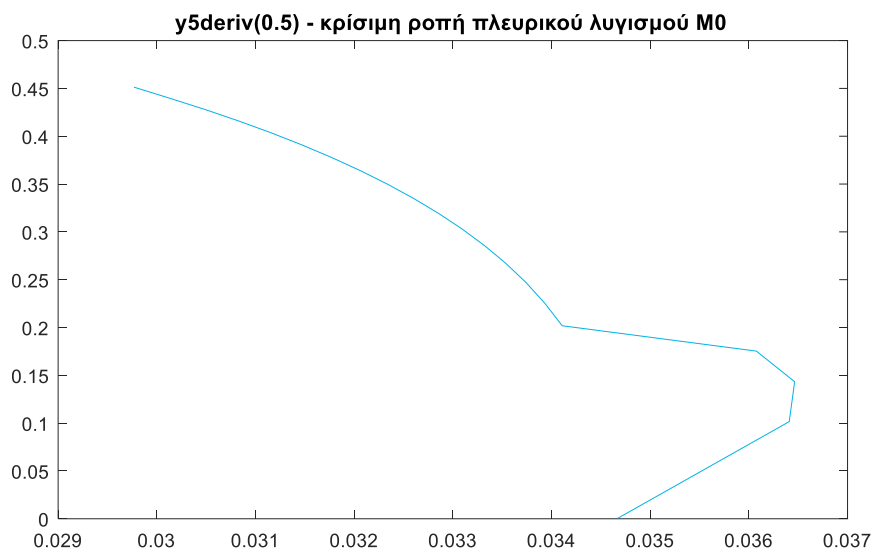
Σχήμα 3.16: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.17: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.18: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.19: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab

Σύγκριση τιμών μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής επίλυσης και του θεωρητικού τύπου που προέρχεται από «κλειστή» λύση [σχέση (2.17)].

Πίνακας 3.2: Σύγκριση τιμών μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής επίλυσης και του θεωρητικού τύπου που προέρχεται από κλειστή λύση

| Axial Force N | Numerical calculation IPE 270 | Theoretical calculation due to "closed" solution IPE 270 |
|---------------|-------------------------------|--|
| 0 | 0.451336704 | 0.451333046 |
| 21.34145 | 0.439905205 | 0.439905053 |
| 42.6829 | 0.428172343 | 0.428172154 |
| 64.02435 | 0.416108775 | 0.416108556 |
| 85.3658 | 0.40368485 | 0.403684614 |
| 106.70725 | 0.390866207 | 0.390865967 |
| 128.0487 | 0.377612648 | 0.377612422 |
| 149.39015 | 0.363876652 | 0.363876461 |
| 170.7316 | 0.349601358 | 0.349601224 |
| 192.07305 | 0.334717775 | 0.334717721 |
| 213.4145 | 0.319140809 | 0.319140863 |
| 234.75595 | 0.302763459 | 0.302763649 |
| 256.0974 | 0.285447997 | 0.285448357 |
| 277.43885 | 0.26701198 | 0.267012549 |
| 298.7803 | 0.247204833 | 0.247205661 |
| 320.12175 | 0.225665803 | 0.225666958 |

| | | |
|-----------|-------------|-------------|
| 341.4632 | 0.201841203 | 0.201842793 |
| 362.80465 | 0.175303633 | 0.174801173 |
| 384.1461 | 0.143286856 | 0.142724865 |
| 405.48755 | 0.101569811 | 0.100922368 |
| 426.829 | 0.000410049 | 0.000511322 |

3.5 3^η περίπτωση αμφιέριστη δοκός μήκους L=10M και διατομής ΙΡΕ 600

$$L = 10\text{m}$$

$$b = \frac{220}{1000}\text{m}$$

$$h = \frac{600}{1000}\text{m}$$

$$t_w = s = \frac{12}{1000}\text{m}$$

$$t_f = t = \frac{19}{1000}\text{m}$$

$$I_y = 3387 \times 10^{-8}\text{m}^4$$

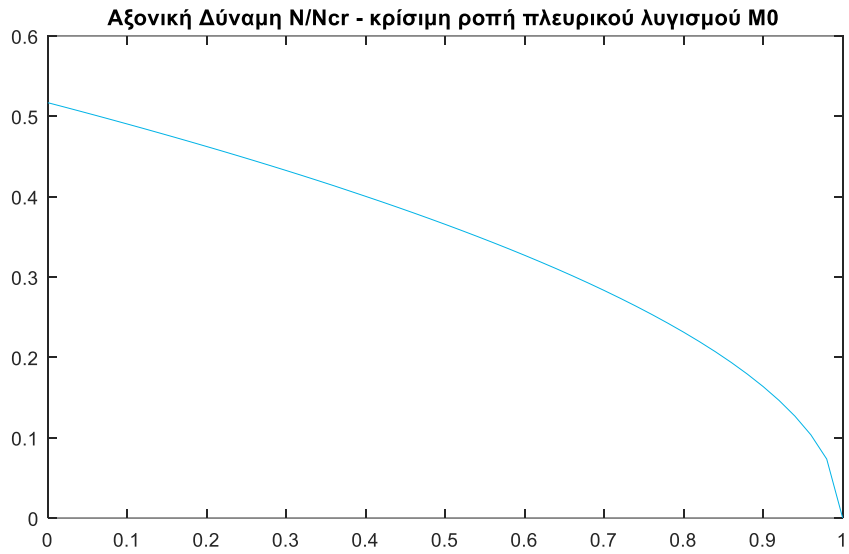
$$J = 1.654 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

$$C_w = 2.846 \times 10^{-6}\text{m}^6$$

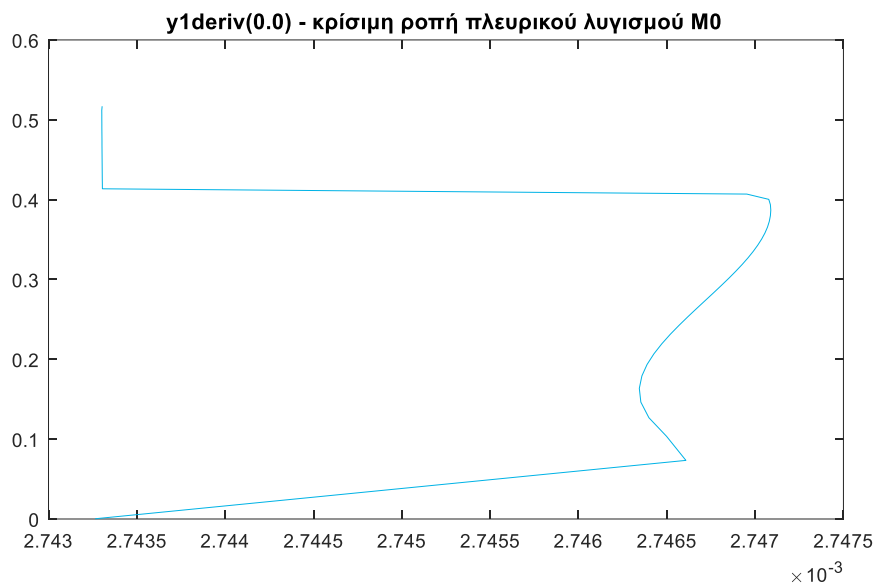
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2} \equiv 701.995\text{kN}$$

Τα προγράμματα δίδονται στο τέλος στο Παράρτημα , στο παρών τεύχος δίδονται τα αποτελέσματα:

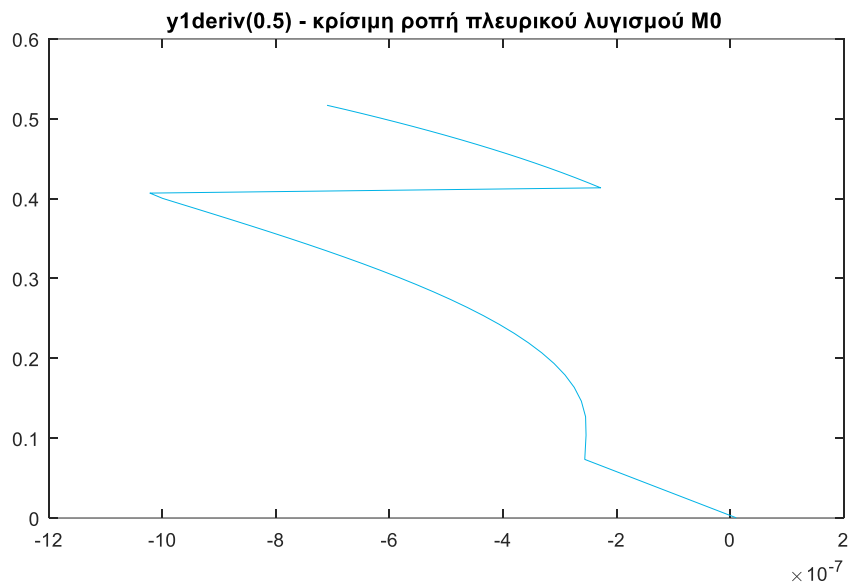
- Αποτελέσματα



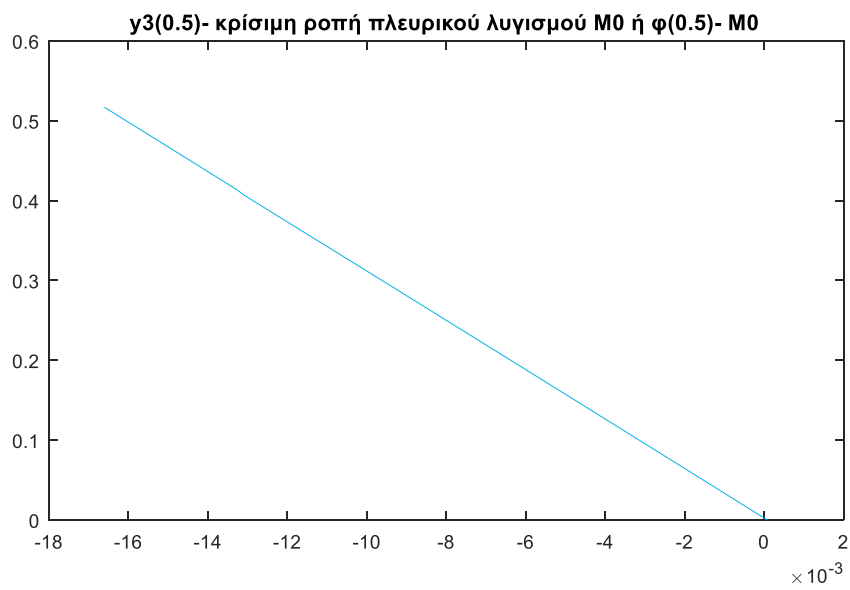
Σχήμα 3.20: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



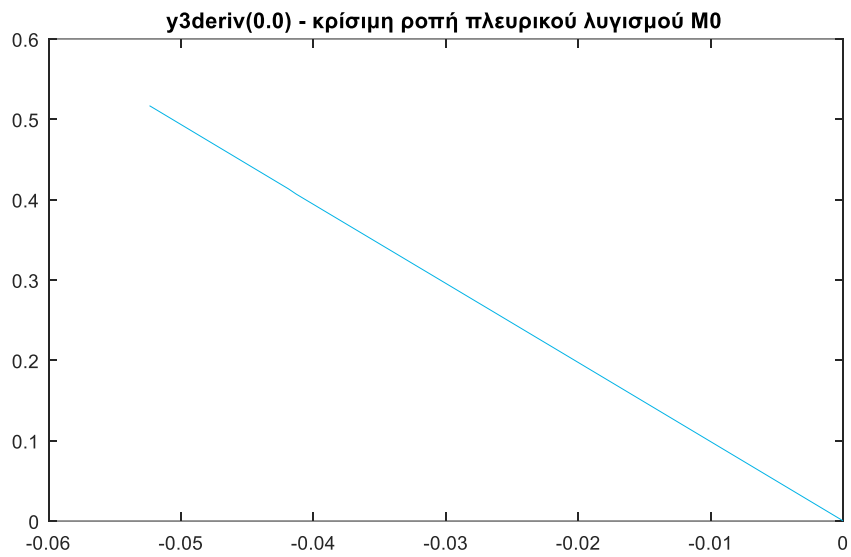
Σχήμα 3.21: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



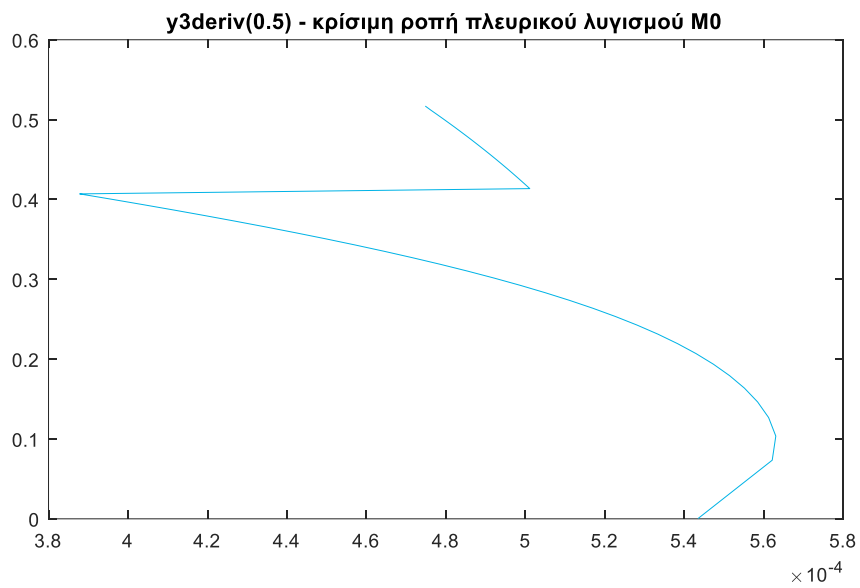
Σχήμα 3.22: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



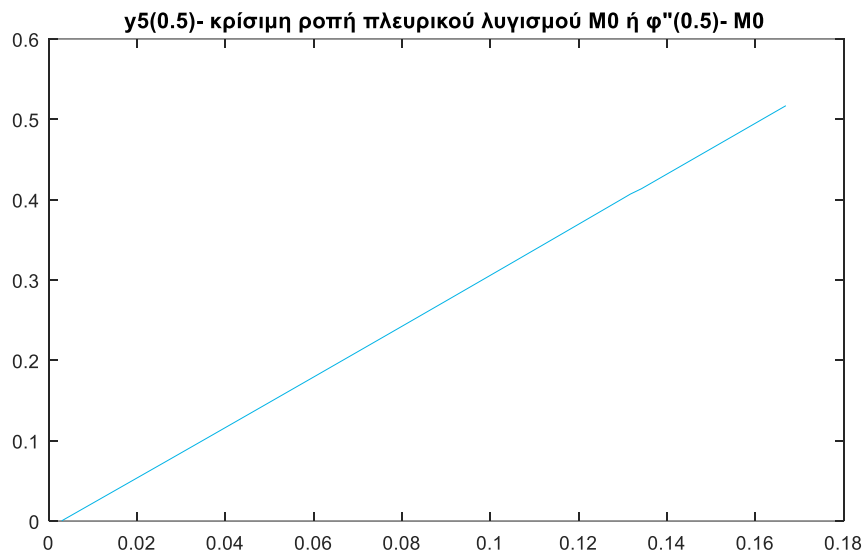
Σχήμα 3.23: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



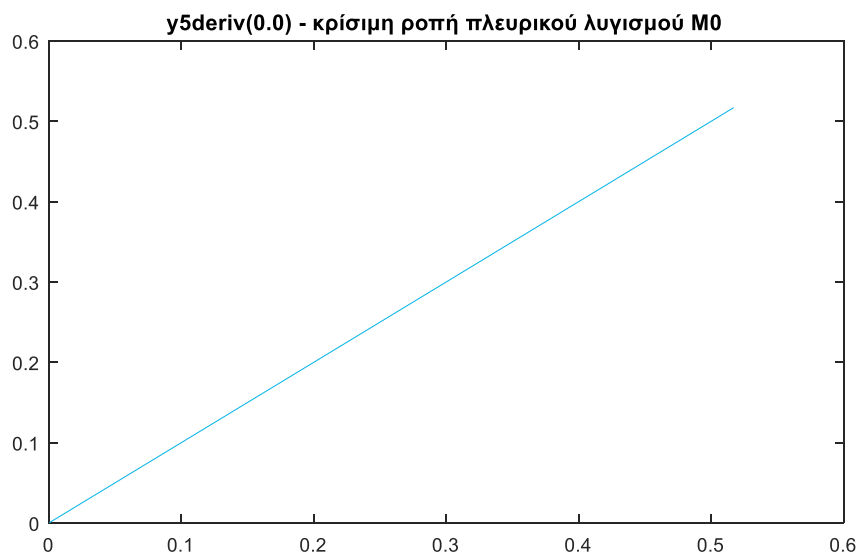
Σχήμα 3.24: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



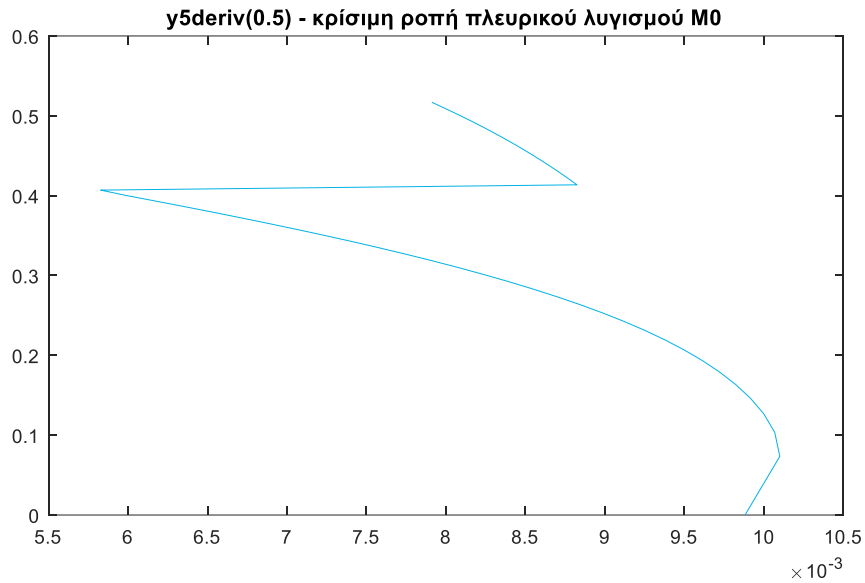
Σχήμα 3.25: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.26: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.27: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab



Σχήμα 3.28: Διαγράμματα ως φαίνονται από την εκτύπωση της Matlab

Σύγκριση τιμών μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής επίλυσης και του θεωρητικού τύπου που προέρχεται από «κλειστή» λύση [σχέση (2.17)].

Πίνακας 3.3: Σύγκριση τιμών μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής επίλυσης και του θεωρητικού τύπου που προέρχεται από κλειστή λύση

| Axial Force N | Numerical calculation IPE 270 | Theoretical calculation due to "closed" solution IPE 270 |
|---------------|-------------------------------|--|
| 0 | 0.51693666 | 0.516936352 |
| 14.0399 | 0.511740986 | 0.511740883 |
| 28.0798 | 0.506492225 | 0.506492123 |
| 42.1197 | 0.5011885 | 0.501188397 |
| 56.1596 | 0.495828046 | 0.495827942 |
| 70.1995 | 0.490409005 | 0.490408897 |
| 84.2394 | 0.484929411 | 0.484929299 |
| 98.2793 | 0.479387188 | 0.479387072 |
| 112.3192 | 0.473780138 | 0.473780016 |
| 126.3591 | 0.468105931 | 0.468105802 |
| 140.399 | 0.462362095 | 0.462361959 |
| 154.4389 | 0.456546001 | 0.456545857 |
| 168.4788 | 0.450654852 | 0.4506547 |
| 182.5187 | 0.444685665 | 0.444685504 |
| 196.5586 | 0.438635254 | 0.438635083 |

| | | |
|----------|-------------|-------------|
| 210.5985 | 0.432500209 | 0.432500029 |
| 224.6384 | 0.426276876 | 0.426276687 |
| 238.6783 | 0.419961331 | 0.419961132 |
| 252.7182 | 0.413549349 | 0.41354914 |
| 266.7581 | 0.406938235 | 0.407036154 |
| 280.798 | 0.400333678 | 0.400417244 |
| 294.8379 | 0.393616494 | 0.393687069 |
| 308.8778 | 0.386782072 | 0.386839821 |
| 322.9177 | 0.379824073 | 0.379869169 |
| 336.9576 | 0.372735555 | 0.372768191 |
| 350.9975 | 0.365508902 | 0.365529292 |
| 365.0374 | 0.358135732 | 0.358144108 |
| 379.0773 | 0.350606783 | 0.350603396 |
| 393.1172 | 0.34291178 | 0.342896894 |
| 407.1571 | 0.335039267 | 0.335013162 |
| 421.197 | 0.326976411 | 0.326939379 |
| 435.2369 | 0.318708757 | 0.318661099 |
| 449.2768 | 0.310219923 | 0.31016195 |
| 463.3167 | 0.301491222 | 0.301423247 |
| 477.3566 | 0.292501177 | 0.292423516 |
| 491.3965 | 0.283224901 | 0.283137867 |
| 505.4364 | 0.273633289 | 0.273537183 |
| 519.4763 | 0.263691936 | 0.263587043 |
| 533.5162 | 0.253359684 | 0.25324626 |
| 547.5561 | 0.242586601 | 0.242464857 |
| 561.596 | 0.231311118 | 0.231181197 |
| 575.6359 | 0.219455829 | 0.219317771 |
| 589.6758 | 0.20692113 | 0.206774813 |
| 603.7157 | 0.193575121 | 0.19342017 |
| 617.7556 | 0.179236711 | 0.179072335 |
| 631.7955 | 0.163645317 | 0.163469997 |
| 645.8354 | 0.146401244 | 0.146212102 |
| 659.8753 | 0.126832195 | 0.126623527 |
| 673.9152 | 0.103628642 | 0.103387893 |
| 687.9551 | 0.073413 | 0.073106739 |
| 701.995 | 0.000294364 | 0.000366174 |

4 Περαιτέρω έρευνα

4.1 Εισαγωγή

Σε περαιτέρω έρευνα θα προγραμματιστούν και θα επιλυθούν ακόμη 2 περιπτώσεις:

- Πλευρικός –στρεπτοκαμπτικός λυγισμός δοκού διπλής συμμετρίας με κεντρικό αξονικό φορτίο και εγκάρσιο συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον και
- Πλευρικός –στρεπτοκαμπτικός λυγισμός δοκού διπλής συμμετρίας με κεντρικό αξονικό φορτίο και ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο

4.2 Εξισώσεις ισορροπίας για εγκάρσιο συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον

Για την πρώτη περίπτωση οι εξισώσεις ισορροπίας του πλευρικού λυγισμού είναι οι ακόλουθες:

$$v'(\xi) + \eta^2 \cdot v(\xi) = 2 \cdot \overline{M_{c,max}} \cdot \xi \cdot \varphi(\xi)$$

$$\varphi''''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi''(\xi) = 2 \cdot \overline{M_{c,max}} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v'(\xi)$$

Γίνονται οι εξής παραδοχές:

$$v = y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$$v' = y_2$$

$$y_2' = y_3 \Rightarrow y_2' = 2 \cdot \overline{M_{c,max}} \cdot \xi \cdot y_4 - \eta^2 \cdot y_1$$

$$v'' = y_3$$

$$y_3' = 2 \cdot \overline{M_{c,max}} \cdot (y_5 + \xi \cdot y_6) - \eta^2 \cdot y_2$$

$$\varphi = y_4$$

$$y_4' = y_5$$

$$\varphi' = y_5$$

$$y_5' = y_6$$

$$\varphi'' = y_6$$

$$y_6' = y_7$$

$$\varphi''' = y_7$$

$$y_7' = y_8 \Rightarrow y_7' = 2 \cdot \overline{M_{c,max}} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot y_3 + \lambda^2 \cdot y_6$$

$$\varphi'''' = y_8$$

Αρχικές συνθήκες

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = ?$$

$$y_4(0) = 0$$

$$y_5(0) = ?$$

$$y_6(0) = 0$$

$$y_7(0) = ?$$

$$\overline{M_{c,max}} = ?$$

Τελικές συνθήκες

$$y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$y_5\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$y_7\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Άρα έχουμε ένα πιο σύνθετο πρόβλημα με 4 αγνώστους όπου το $\overline{M_{c,max}}$ δίδεται από τον εξής τύπο:

$$\overline{M_{c,max}} \equiv \frac{\varphi''(0) - \lambda^2 \cdot \varphi'(0)}{2 \cdot p^2 \cdot v\left(\frac{L}{2}\right)} \equiv \frac{y_7(0) - \lambda^2 \cdot y_5(0)}{2 \cdot p^2 \cdot y_1\left(\frac{1}{2}\right)}$$

από όπου το $\overline{M_{c,max}}$ δίδεται συναρτήσει του αδιάστατου βέλους στο μέσον της δοκού που επίσης είναι άγνωστο.

4.3 Εξισώσεις ισορροπίας για ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο

Για την δεύτερη περίπτωση οι εξισώσεις ισορροπίας του πλευρικού λυγισμού είναι οι ακόλουθες:

$$v'(\xi) + \eta^2 \cdot v(\xi) = 4 \cdot \overline{M_{d,max}} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot \varphi(\xi)$$

$$\varphi''''(\xi) - \lambda^2 \cdot \varphi''(\xi) = 4 \cdot \overline{M_{d,max}} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot v'(\xi)$$

Γίνονται οι εξής παραδοχές:

$$\begin{array}{ll} v = y_1 & y_1' = y_2 \\ v' = y_2 & y_2' = y_3 \Rightarrow y_2' = 4 \cdot \overline{M_{d,max}} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot y_4 - \eta^2 \cdot y_1 \\ v'' = y_3 & y_3' = y_2'' \Rightarrow y_3' = 4 \cdot \overline{M_{d,max}} \cdot (\xi \cdot (1 - \xi) \cdot y_5 + (1 - 2 \cdot \xi) \cdot y_4) - \eta^2 \cdot y_2 \\ \varphi = y_4 & y_4' = y_5 \\ \varphi' = y_5 & y_5' = y_6 \\ \varphi'' = y_6 & y_6' = y_7 \\ \varphi''' = y_7 & y_7' = y_8 \Rightarrow y_7' = 4 \cdot \overline{M_{d,max}} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot y_3 + \lambda^2 \cdot y_6 \\ \varphi'''' = y_8 & \end{array}$$

Αρχικές συνθήκες

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = ?$$

$$y_4(0) = 0$$

$$y_5(0) = ?$$

$$y_6(0) = 0$$

$$y_7(0) = ?$$

$$\overline{M_{d,\max}} = ?$$

Τελικές συνθήκες

$$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$y_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$y_6\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Άρα έχουμε ένα πιο σύνθετο πρόβλημα με 4 αγνώστους όπου το $\overline{M_{d,\max}}$ δίδεται από τον εξής τύπο:

$$\overline{M_{d,\max}} \equiv \frac{\varphi'''(0) - \lambda^2 \cdot \varphi'(0)}{4 \cdot p^2 \cdot \int_0^1 v \cdot d\xi} \equiv \frac{y_7(0) - \lambda^2 \cdot y_5(0)}{4 \cdot p^2 \cdot \int_0^1 y_1 \cdot d\xi}$$

από όπου το $\overline{M_{d,\max}}$ δίδεται συναρτήσει του αδιάστατου βέλους στο μέσον της δοκού που επίσης είναι άγνωστο.

5 Συμπεράσματα

Ο σχεδιασμός , η ανάλυση ενός φορέα και η εξέταση για προβλήματα πλευρικού λυγισμού βασίζεται σε μια μεθοδολογία βήμα προς βήμα. Κατά τον σχεδιασμό πρέπει να ορίζεται ο τύπος της διατομής , οι συνοριακές συνθήκες , τα φορτία , ο τρόπος σύνδεσης ώστε να γίνει σωστά η μοντελοποίηση του φορέα.

Στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας γίνονται δύο προσπάθειες εκ μέρους του μεταπτυχιακού φοιτητή:

Να επιλύσει με την χρήση θεωρητικών μαθηματικών εργαλείων όπως ο διαφορικός λογισμός και τα ολοκληρώματα τις βασικές εξισώσεις που διέπουν τον πλευρικό – στρεπτοκαμπτικό λυγισμό καμπόμενων δοκών διπλής συμμετρίας με και χωρίς θλιπτικό κεντρικό αξονικό φορτίο με α) σταθερές ροπές στα άκρα β) με ομοιόμορφα καταναμημένο εγκάρσιο φορτίο και γ) με εγκάρσιο φορτίο στο μέσον της δοκού. Ο υπολογισμός δεν ήταν σε όλες τις περιπτώσεις επιτυχής λόγω της δυσκολίας του αντικειμένου , ιδίως σε περιπτώσεις με παρουσία αξονικού φορτίου , όμως η επίλυση έφτασε κοντά στο σωστό αποτέλεσμα. Σε όλες τις περιπτώσεις έγινε και η χρήση του λογισμικού της εταιρίας Maple , όμως η επίλυση με το παραπάνω πρόγραμμα δεν έδωσε τα επιθυμούμενα αποτελέσματα.

Να επιλύσει με αριθμητικές μεθόδους , κυρίως με την χρήση του λογισμικού MATLAB , που έχει την δυνατότητα προγραμματισμού , κάτι που το καθιστά ένα χρησιμότερο εργαλείο για όσους ασχολούνται με τις θετικές επιστήμες. Η γλώσσα προγραμματισμού του MATLAB δίνει την ευχέρεια στο χρήστη να το επεκτείνει και σε δικά του προγράμματα. Γιαυτό όταν λέμε η MATLAB , εννοούμε την γλώσσα προγραμματισμού που επιλύουμε τα προβλήματα του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.

Έτσι , έγινε προσπάθεια αρχικά να προγραμματιστεί το μοντέλο της αμφιέριστης δοκού με διατομή διπλής συμμετρίας με ή χωρίς κεντρικό αξονικό φορτίο και με σταθερές ροπές στα άκρα.

Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης έγινε με προγραμματισμό σε γλώσσα MATLAB της αριθμητικής μεθόδου Runge-Kutta 4ης τάξης και η σύγκλιση των αγνώστων μέσω της μεθόδου Newton-Raphson , που επίσης προγραμματίστηκε σε γλώσσα MATLAB. Τα αποτελέσματα ήταν πολύ ικανοποιητικά , εφόσον έδωσαν ακρίβεια 4ου δεκαδικού ψηφίου στην κρίσιμη ροπή M_0 που έγινε με την αριθμητική επίλυση , σε σχέση με την τιμή της κρίσιμης ροπής M_0 όπως προκύπτει από θεωρητικό υπολογισμό με βάσει «κλειστούς» τύπους.

Έγιναν 3 επιλύσεις αμφιέριστων δοκών με διαφορετικά μήκη και διατομές α) IPE 270 , μήκος δοκού $L=6m$ β) IPE 400 , μήκος δοκού $L=8m$ γ) IPE 600 , μήκος δοκού $L=10m$. Οι γραφικές απεικονίσεις των κρίσιμων ροπών σε σχέση με τον λόγο της αξονικής δύναμης προς το κρίσιμο φορτίο λυγισμού φαίνονται στα αποτελέσματα των αναλύσεων πιο πάνω. Επίσης δίδονται και πίνακες όπου φαίνεται για κάθε φορτίο πιο είναι το αποτέλεσμα της κρίσιμης ροπής λυγισμού είτε με αριθμητική μέθοδο είτε με θεωρητικό, «κλειστό», τύπο.

6 Βιβλιογραφία

1. Τάσος Π. Αβραάμ , Ζαχαρίας Χ. Φασουλάκης , Γεώργιος Ι. Ιωαννίδης « Η επιρροή αξονικού εφελκυσμού στην κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού δοκών», Δημοσίευση
2. Samuel D.Conte/Carl de Boor “Elementary Numerical Analysis” An Algorithmic Approach, Third Edition , Mc GRAW-HILL INTERNATIONAL BOOK COMPANY ,6TH printing 1983
3. George I. Ioannidis , Tassos P. Avraam “Lateral –torsional buckling of simply supported beams under uniform bending and axial tensile force” , Δημοσίευση
4. A.N.Kounadis and G.I. Ioannidis “ Lateral Postbuckling Analysis of Beam Columns” , Δημοσίευση
5. Αντωνίου Ν. Κουνάδη «Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας» , Εκδόσεις Συμεών , Αθήνα 1997
6. Ιωάννης Κ. Βάγιας, Ιωάννης Χ. Ερμόπουλος, Γεώργιος Ι. Ιωαννίδης «Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα με Παραδείγματα Εφαρμογής» , Εκδόσεις Κλειδάριθμος , Αθήνα 2013
7. Αντωνίου Ν. Κουνάδη «Σιδηρές Κατασκευές Συμπεριφορά και Ανάλυσις» ΤΟΜΟΣ ΙΙ , Εκδόσεις Συμεών , Αθήνα 1991
8. Stephen P. Timoshenko , James M. Gere «Theory of Elastic Stability” , Second Edition , Mc GRAW-HILL INTERNATIONAL BOOK COMPANY, 19TH printing 1988

Παράρτημα Α. Προγράμματα

Κώδικας αλγορίθμου IPE 270 , L=6m

```
%-----
% - Στρεπτοκαμπτικός Λυγισμός IPE270- με 6 διαφορεικές εξισώσεις *
% με αλλαγή βήματος υπολογισμού της κρίσιμης ροπής M0 *
% από N=0kN και άνω ως Ncr=241.747kN (βήμα ανά 12.09 kN) *
%-----
clear all;kj=0;item=(241.747-0.0)/20.0;
% damping the values of s1,s2,s3,iflag
ims1=0;s1=0.0;s2=0.0;s3=0.0;g1=0;g2=0;g3=0;
% -----

for N=0:item:241.747
iflag=0;

pi=4.0*atan(1);
Number=6;
Start=0.0;
Endd=0.5;
Loops=20.0; % πλήθος προσεγγίσεων
stepp=double((Endd-Start)/Loops);
stepp1=double(0.1*stepp);

% πα γ ί δ α σ φ α λ μ ά τ ω ν
% -----
false=0; % παγίδα σφαλμάτων
true=not(false);
editt=false;

% -----
% Γνωστές σχέσεις ψψίκορμη δοκός IPE270
% -----
L=6.0;
E=2.1*10^(+08);
v=0.3;
b=135/1000;
h=270/1000;
tw=6.6/1000;
tf=10.2/1000;
Iy=419.9*10^(-8);
G=double(E/(2*(1+v)));
J=0.154*10^(-6);
% J=double(1/3*(2*b*tf^3+h*tw^3));
% Cw=double(tf*b^3*h^2/24);
Cw=0.07058*10^(-6);

% Αδιαστατοποίηση μεταβλητών Στρεπτοκαμπτικού λυγισμού
% =====
n=double(sqrt(N*L^2/(E*Iy)));
li=double(sqrt(G*J*L^2/(E*Cw)));
p=double(sqrt(Iy*L^2/Cw));
M0=double((1/p)*(sqrt((pi^2+li^2)*(pi^2-n^2))));
```

```

Ncr=double((pi^2)*E*Iy/(L^2)); % κρίσιμη αξονική δύναμη στρεπτοκαμπτικού
λυγισμού

formatSpec='M0=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,M0);

Point1=double(0.8*M0); % Initial value for critical moment M
Point2=double(M0); % Critical moment M

M=double(Point1);
Ps2=double(Point2);

% Αρχικές συνθήκες στο xi=0
% -----
u01=0.00; % ----->y1(0)=0
u02=0.00; % ----->y3(0)=0
u03=0.00; % ----->y'4(0)=y5(0)=0

% Υποθετικές αρχικές τιμές στο xi=0
% -----
if (ims1==0)
u04=double(0.00274314); % -----> y1'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το u04
u05=double(-0.05238188); % -----> y3'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το u05
u06=double(M); % -----> y6=y5'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το M
else
u04=double(u04); % -----> y1'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το u04
u05=double(u05); % -----> y3'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το u05
u06=double(M); % -----> y6=y5'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το M
end

% Τελικές συνθήκες στο xi=1/2
% -----
nums4end=0.00; % -----> y'1(1/2)=0
nums5end=0.00; % -----> y'3(1/2)=0
nums6end=0.00; % -----> y'5(1/2)=0

%*****
**
%
*
%
*
%
*
%
          P R O G R A M   D I F E Q U T 2
*
%
*
%Το υποπρόγραμμα DIFEQUT2 επιλύει αριθμητικά με τη μέθοδο RUNGE_KUTTA ένα
*
%σύστημα ν-διαφορικών εξισώσεων α' τάξης [y'(i)=f(i)(x,y1,y2,y3,...yn)]
*
%
*
%
          F I N A L   H E L E N   40
*
%
          ΓΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗ   Ι Π Ε   270
*

```

```

%          ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ Ν
*
%          ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΚΡΙΣΙΜΗΣ ΡΟΠΗΣ
*
%          N=(0kN~ Ncr=241.747kN) , L=6.0m
*
%          ΒΗΜΑ ΠΡΟΧΩΡΗΣΗΣ ΑΝΑ 12.09kN
*
%          approximate correct solution y5'(1/2)=0
*
% Assume:y1#-->y1 , y2#-->y2 , y3#-->y3 , y4#-->y3' , y5#-->y5 , y6#--
>y5'*
% Επίλυση για 3 μεταβλητές u04,u05,u06 y1'(1/2),y3'(1/2),y5'(1/2)
*
%
*
%
%*****
**

% Method Runge-Kutta for differential equations systems
%-----
% Δίδω τις συναρτήσεις, μαζί με τις πρώτες παραγώγους αυτών
% y1'=y2
% y2'=M0*y3-n^2*y1
% y3'=y4
% y4'=y5
% y5'=p^2*M0*y2+li^2*y3'
% y6'=(li^2-n^2)*y5+p^2*M0^2*y3+(n^2*li^2)*y3
%-----
% ορισμός της y1'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf1=symfun(y2,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y2'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf2=symfun(M1*y3-(n^2)*y1,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y3'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf3=symfun(y4,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y4'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf4=symfun(y5,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y5'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf5=symfun((p^2)*M1*y2+(li^2)*y4,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y6'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf6=symfun(((li^2)-
(n^2))*y5+((p^2)*(M1^2)+(n^2)*(li^2))*y3,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

while not(editt)

while abs(iflag)<4      % Νέο Πρόγραμμα με Διαφορετική Δομή με iflag

```

```

%-----
% Φτιάχνω τις τιμές του iflag ανάλογα με τις μερικές παραγώγους που έχω
if iflag==0
% Αρχικές τιμές
% -----
Num(1)=double(u01);Num(2)=double(u04);Num(3)=double(u02);
Num(4)=double(u05);Num(5)=double(u03);Num(6)=double(u06);

elseif iflag==1
Num(1)=double(u01);
Num(2)=double(u04); % Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy2
Num(3)=double(u02);Num(4)=double(u05);
Num(5)=double(u03);Num(6)=double(u06);

elseif iflag==2
Num(1)=double(u01);Num(2)=double(u04);Num(3)=double(u02);
Num(4)=double(u05); % Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy4
Num(5)=double(u03);Num(6)=double(u06);

elseif iflag==3
Num(1)=double(u01);Num(2)=double(u04);Num(3)=double(u02);
Num(4)=double(u05);Num(5)=double(u03);
Num(6)=double(u06);% Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy6
else;end

% -----

Check=double(Start);

while abs(Check)<abs(Endd)

% Υπολογισμός κλίσεων
%-----
Numx=double(Check);

k(1,1)=double(step)*double(fnf1(Numx,Num(1),Num(2),Num(3),Num(4),Num(5),
Num(6),M)); % y1
k(2,1)=double(step)*double(fnf2(Numx,Num(1),Num(2),Num(3),Num(4),Num(5),
Num(6),M)); % y2
k(3,1)=double(step)*double(fnf3(Numx,Num(1),Num(2),Num(3),Num(4),Num(5),
Num(6),M)); % y3
k(4,1)=double(step)*double(fnf4(Numx,Num(1),Num(2),Num(3),Num(4),Num(5),
Num(6),M)); % y4
k(5,1)=double(step)*double(fnf5(Numx,Num(1),Num(2),Num(3),Num(4),Num(5),
Num(6),M)); % y5
k(6,1)=double(step)*double(fnf6(Numx,Num(1),Num(2),Num(3),Num(4),Num(5),
Num(6),M)); % y6

Numbers1=double(Numx)+double(step)/2.0);

k1(1,1)=double(Num(1))+double(k(1,1)/2.0); % Num(1) αρχική συνθήκη y1(0)
k2(2,1)=double(Num(2))+double(k(2,1)/2.0); % Num(2) αρχική συνθήκη y2(0)
k3(3,1)=double(Num(3))+double(k(3,1)/2.0); % Num(3) αρχική συνθήκη y3(0)
k4(4,1)=double(Num(4))+double(k(4,1)/2.0); % Num(4) αρχική συνθήκη y4(0)
k5(5,1)=double(Num(5))+double(k(5,1)/2.0); % Num(5) αρχική συνθήκη y5(0)
k6(6,1)=double(Num(6))+double(k(6,1)/2.0); % Num(6) αρχική συνθήκη y6(0)

% 2nd ITERATION

```

```

k(1,2)=double(step)*double(fnf1(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y1
k(2,2)=double(step)*double(fnf2(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y2
k(3,2)=double(step)*double(fnf3(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y3
k(4,2)=double(step)*double(fnf4(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y4
k(5,2)=double(step)*double(fnf5(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y5
k(6,2)=double(step)*double(fnf6(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y6

```

```

k1(1,2)=double(Num(1))+double(k(1,2)/2.0); % Num(1) αρχική συνθήκη y1(0)
k2(2,2)=double(Num(2))+double(k(2,2)/2.0); % Num(2) αρχική συνθήκη y2(0)
k3(3,2)=double(Num(3))+double(k(3,2)/2.0); % Num(3) αρχική συνθήκη y3(0)
k4(4,2)=double(Num(4))+double(k(4,2)/2.0); % Num(4) αρχική συνθήκη y4(0)
k5(5,2)=double(Num(5))+double(k(5,2)/2.0); % Num(5) αρχική συνθήκη y5(0)
k6(6,2)=double(Num(6))+double(k(6,2)/2.0); % Num(6) αρχική συνθήκη y6(0)

```

```
% 3rd ITERATION
```

```

k(1,3)=double(step)*double(fnf1(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y1
k(2,3)=double(step)*double(fnf2(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y2
k(3,3)=double(step)*double(fnf3(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y3
k(4,3)=double(step)*double(fnf4(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y4
k(5,3)=double(step)*double(fnf5(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y5
k(6,3)=double(step)*double(fnf6(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y6

```

```

k1(1,3)=double(Num(1))+double(k(1,3)); % Num(1) αρχική συνθήκη y1(0)
k2(2,3)=double(Num(2))+double(k(2,3)); % Num(2) αρχική συνθήκη y2(0)
k3(3,3)=double(Num(3))+double(k(3,3)); % Num(3) αρχική συνθήκη y3(0)
k4(4,3)=double(Num(4))+double(k(4,3)); % Num(4) αρχική συνθήκη y4(0)
k5(5,3)=double(Num(5))+double(k(5,3)); % Num(5) αρχική συνθήκη y5(0)
k6(6,3)=double(Num(6))+double(k(6,3)); % Num(6) αρχική συνθήκη y6(0)

```

```
Numbers2=double(Numx)+double(step);
```

```
% 4th ITERATION
```

```

k(1,4)=double(step)*double(fnf1(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y1
k(2,4)=double(step)*double(fnf2(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y2
k(3,4)=double(step)*double(fnf3(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y3
k(4,4)=double(step)*double(fnf4(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y4
k(5,4)=double(step)*double(fnf5(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y5
k(6,4)=double(step)*double(fnf6(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y6

```

```

%***** R E S U L T S *****
Y(1)=double(Num(1))+(double(k(1,1))+2.0*double(k(1,2))+2.0*double(k(1,3))
+double(k(1,4)))/6.0;% y1
Y(2)=double(Num(2))+(double(k(2,1))+2.0*double(k(2,2))+2.0*double(k(2,3))
+double(k(2,4)))/6.0;% y2=y1'
Y(3)=double(Num(3))+(double(k(3,1))+2.0*double(k(3,2))+2.0*double(k(3,3))
+double(k(3,4)))/6.0;% y3
Y(4)=double(Num(4))+(double(k(4,1))+2.0*double(k(4,2))+2.0*double(k(4,3))
+double(k(4,4)))/6.0;% y4=y3'
Y(5)=double(Num(5))+(double(k(5,1))+2.0*double(k(5,2))+2.0*double(k(5,3))
+double(k(5,4)))/6.0;% y5
Y(6)=double(Num(6))+(double(k(6,1))+2.0*double(k(6,2))+2.0*double(k(6,3))
+double(k(6,4)))/6.0;% y6=y5'

for i=1:1:Number

Num(i)=Y(i);

end

    Check=double(Check+stepp);

end

if (iflag==0)

% Αρχικές τιμές F10 , F20 , F30
%-----
F10=double(Num(2)); % y1'=y2
F20=double(Num(4)); % y3'=y4
F30=double(Num(6)); % y5'=y6

g1=double((Num(2))-nums4end);
g2=double((Num(4))-nums5end);
g3=double((Num(6))-nums6end);

% Βήμα προχώρησης για υπολογισμό της παραγώγου dF/dy2
% -----
u04=double(u04)+double(stepp1);

elseif (iflag==1)

F11=double((Num(2)-F10)/stepp1);
F21=double((Num(4)-F20)/stepp1);
F31=double((Num(6)-F30)/stepp1);

u04=double(u04)-double(stepp1);
u05=double(u05)+double(stepp1);

elseif (iflag==2)

F12=double((Num(2)-F10)/stepp1);
F22=double((Num(4)-F20)/stepp1);
F32=double((Num(6)-F30)/stepp1);

```

```

u05=double(u05)-double(steppl);
M=double(M)+double(steppl);
u06=double(M);

elseif (iflag==3)

F13=double((Num(2)-F10)/steppl);
F23=double((Num(4)-F20)/steppl);
F33=double((Num(6)-F30)/steppl);

M=double(M)-double(steppl);
u06=double(M);

else;end

iflag=iflag+1;

end
% Υπολογισμός των DET , D1 , D2 , D3
% -----
DET=double(F11)*double(F22)*double(F33)+double(F12)*double(F23)*double(F31)+double(F13)*double(F21)*double(F32)-double(F31)*double(F22)*double(F13)-double(F32)*double(F23)*double(F11)-double(F33)*double(F21)*double(F12);

D1=double(F10)*double(F22)*double(F33)+double(F12)*double(F23)*double(F30)+double(F13)*double(F20)*double(F32)-double(F30)*double(F22)*double(F13)-double(F32)*double(F23)*double(F10)-double(F33)*double(F20)*double(F12);

D2=double(F11)*double(F20)*double(F33)+double(F10)*double(F23)*double(F31)+double(F13)*double(F21)*double(F30)-double(F31)*double(F20)*double(F13)-double(F30)*double(F23)*double(F11)-double(F33)*double(F21)*double(F10);

D3=double(F11)*double(F22)*double(F30)+double(F12)*double(F20)*double(F31)+double(F10)*double(F21)*double(F32)-double(F31)*double(F22)*double(F10)-double(F32)*double(F20)*double(F11)-double(F30)*double(F21)*double(F12);

% Μέθοδος Newton-Raphson για σύγκλιση της τιμής της κρίσιμης ροπής M0
% Υπολογισμός των s1,s2,s3
% -----
s1=-double(D1)/(double(DET));
s2=-double(D2)/(double(DET));
s3=-double(D3)/(double(DET));

formatSpec='s1=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,s1);

formatSpec='s2=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,s2);

formatSpec='s3=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,s3);

formatSpec='Mcrit=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,M);

```

```

formatSpec='N=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,N);

% Βάζω βήμα προχώρησης ώστε να συγκλίνει το μοντέλο
%-----
for ij=1:100

if abs(s1)<1.0
continue
else
s1=double(s1/2);
end
end

if abs(s1)<1.0

for ij=1:100
if abs(s2)<1.0
continue
else
s2=double(s2/2);
end
end

if abs(s2)<1.0

for ij=1:100
if abs(s3)<1.0
continue
else
s3=double(s3/2);
end
end

else;end
else;end

% Έλεγχος ακρίβειας αποτελεσμάτων
%-----
if abs(g1)<0.00001
if abs(g2)<0.00001
if abs(g3)<0.00001

editt=true;

kj=kj+1;

formatSpec='M=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,M);

formatSpec='y1(0.5)=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,Num(1));

formatSpec='u04=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,u04);

```



```

formatSpec='u05=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,u05);

Uf(1,kj)=M; % Numerical calculation of M0
Uj(1,kj)=Num(1); % y1(0.5)
Um(1,kj)=Num(3); % y3(0.5)
Un(1,kj)=Num(5); % y5(0.5)
Uk(1,kj)=N;
Ul(1,kj)=M0; % Theoretical calculation of M0 due to "closed" solution
Up(1,kj)=u04; % y1'(0.0)
Ur(1,kj)=u05; % y3'(0.0)
Us(1,kj)=u06; % y5'(0.0)
Ut(1,kj)=Num(2); % y1'(0.5)
Uv(1,kj)=Num(4); % y3'(0.5)
Uw(1,kj)=Num(6); % y5'(0.5)
break

else;end
else;end
else;end

u04=double(u04)+double(s1);
u05=double(u05)+double(s2);
M=double(M)+double(s3);
u06=double(M);

iflag=0;
end

% Δεικτης που μας δείχνει την πρώτη τιμή του u04,u05 , για imsl>0 τα
% u04,u05 λαμβάνουν τις τιμές από την προηγούμενη επίλυση του συστήματος
% των 6 δ.ε. για συγκεκριμένη τιμή της αξονικής δύναμης N. (Νέα τιμή
% αξονικής Δύναμης N).
% -----
imsl=imsl+1;
u04=double(u04);
u05=double(u05);
M=double(M);
u06=double(M);
end

% ----- P L O T S -----
--
figure
plot(Uj(1,:),Uf(1:,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y1(0.5)- κρίσιμη ροπή
πλευρικού λυγισμού M0 ή v(0.5)- M0');

figure
plot(Um(1,:),Uf(1:,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y3(0.5)- κρίσιμη ροπή
πλευρικού λυγισμού M0 ή φ(0.5)- M0');

figure
plot(Un(1,:),Uf(1:,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y5(0.5)- κρίσιμη ροπή
πλευρικού λυγισμού M0 ή φ"(0.5)- M0');

figure

```

```
plot(Uk(1,:)/Ncr,Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'Αξονική Δύναμη  
N/Ncr - κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
%-----  
--
```

```
figure  
plot(Uρ(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y1deriv(0.0) -  
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
figure  
plot(Ur(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y3deriv(0.0) -  
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
figure  
plot(Us(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y5deriv(0.0) -  
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
%-----  
--
```

```
figure  
plot(Ut(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y1deriv(0.5) -  
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
figure  
plot(Uv(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y3deriv(0.5) -  
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
figure  
plot(Uw(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y5deriv(0.5) -  
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

Παράρτημα Β. Προγράμματα

Κώδικας αλγορίθμου IPE 400 , L=8m

```
%-----  
% - Στρεπτοκαμπτικός Λυγισμός IPE400- με 6 διαφορεικές εξισώσεις *  
% με αλλαγή βήματος υπολογισμού της κρίσιμης ροπής M0 *  
% από N=0kN και άνω ως Ncr=426.829kN (βήμα ανά 21.34 kN) *  
%-----  
clear all;kj=0;item=(426.829-0.0)/20.0;  
% damping the values of s1,s2,s3,iflag  
ims1=0;s1=0.0;s2=0.0;s3=0.0;g1=0;g2=0;g3=0;  
% -----  
  
for N=0:item:426.829  
iflag=0;  
  
pi=4.0*atan(1);  
Number=6;  
Start=0.0;  
Endd=0.5;  
Loops=20.0; % πλήθος προσεγγίσεων  
stepp=double((Endd-Start)/Loops);  
stepp1=double(0.1*stepp);  
  
% πα γ ί δ α σ φ α λ μ ά τ ω ν  
% -----  
false=0; % παγίδα σφαλμάτων  
true=not(false);  
editt=false;  
  
% -----  
% Γνωστές σχέσεις ψψίκορμη δοκός IPE400  
% -----  
L=8.0;  
E=2.1*10^(+08);  
v=0.3;  
b=180/1000;  
h=400/1000;  
tw=8.6/1000;  
tf=13.5/1000;  
Iy=1318*10^(-8);  
G=double(E/(2*(1+v)));  
J=0.5108*10^(-6);  
% J=double(1/3*(2*b*tf^3+h*tw^3));  
% Cw=double(tf*b^3*h^2/24);  
Cw=0.490*10^(-6);  
  
% Αδιαστατοποίηση μεταβλητών Στρεπτοκαμπτικού λυγισμού  
% =====  
n=double(sqrt(N*L^2/(E*Iy)));  
li=double(sqrt(G*J*L^2/(E*Cw)));  
p=double(sqrt(Iy*L^2/Cw));  
M0=double((1/p)*(sqrt((pi^2+li^2)*(pi^2-n^2))));
```

```

Ncr=double((pi^2)*E*Iy/(L^2)); % κρίσιμη αξονική δύναμη στρεπτοκαμπτικού
λυγισμού

formatSpec='M0=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,M0);

Point1=double(0.8*M0); % Initial value for critical moment M
Point2=double(M0); % Critical moment M

M=double(Point1);
Ps2=double(Point2);

% Αρχικές συνθήκες στο  $\xi=0$ 
% -----
u01=0.00; % ----->y1(0)=0
u02=0.00; % ----->y3(0)=0
u03=0.00; % ----->y'4(0)=y5(0)=0

% Υποθετικές αρχικές τιμές στο  $\xi=0$ 
% -----
if (ims1==0)
u04=double(0.00274314); % -----> y1'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το u04
u05=double(-0.05238188); % -----> y3'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το u05
u06=double(M); % -----> y6=y5'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το M
else
u04=double(u04); % -----> y1'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το u04
u05=double(u05); % -----> y3'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το u05
u06=double(M); % -----> y6=y5'(0)---> θεωρώ ως άγνωστο το M
end

% Τελικές συνθήκες στο  $\xi=1/2$ 
% -----
num5end=0.00; % -----> y'1(1/2)=0
num5end=0.00; % -----> y'3(1/2)=0
num5end=0.00; % -----> y'5(1/2)=0

%*****
**
%
*
%
*
%
*
%
P R O G R A M   D I F E Q U T 2
*
%
*
%Το υποπρόγραμμα DIFEQUT2 επιλύει αριθμητικά με τη μέθοδο RUNGE_KUTTA ένα
*
%σύστημα ν-διαφορικών εξισώσεων α' τάξης [y'(i)=f(i)(x,y1,y2,y3,...yn)]
*
%
*
%
*
%
F I N A L   H E L E N   40
*

```

```

%          ΓΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗ   I P E   400
*
%          ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ Ν
*
%          ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΚΡΙΣΙΜΗΣ   ΡΟΠΗΣ
*
%          N=(0kN~ Ncr=426.829kN) , L=8.0m
*
%          ΒΗΜΑ ΠΡΟΧΩΡΗΣΗΣ ΑΝΑ 21.34kN
*
%          approximate correct solution y5'(1/2)=0
*
% Assume:y1#-->y1 , y2#-->y2 , y3#-->y3 , y4#-->y3' , y5#-->y5 , y6#--
>y5'*
% Επίλυση για 3 μεταβλητές u04,u05,u06 y1'(1/2),y3'(1/2),y5'(1/2)
*
%
*
%
%*****
**

% Method Runge-Kutta for differential equations systems
%-----
% Δίδω τις συναρτήσεις, μαζί με τις πρώτες παραγώγους αυτών
% y1'=y2
% y2'=M0*y3-n^2*y1
% y3'=y4
% y4'=y5
% y5'=p^2*M0*y2+li^2*y3'
% y6'=(li^2-n^2)*y5+p^2*M0^2*y3+(n^2*li^2)*y3
%-----
% ορισμός της y1'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf1=symfun(y2,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y2'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf2=symfun(M1*y3-(n^2)*y1,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y3'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf3=symfun(y4,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y4'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf4=symfun(y5,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y5'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf5=symfun((p^2)*M1*y2+(li^2)*y4,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

% ορισμός της y6'
syms x y1 y2 y3 y4 y5 y6 M1
fnf6=symfun(((li^2)-
(n^2))*y5+((p^2)*(M1^2)+(n^2)*(li^2))*y3,[x,y1,y2,y3,y4,y5,y6,M1]);

while not(editt)

```

```

while abs (iflag)<4      % Νέο Πρόγραμμα με Διαφορετική Δομή με iflag
%-----
% Φτιάχνω τις τιμές του iflag ανάλογα με τις μερικές παραγώγους που έχω
if iflag==0
% Αρχικές τιμές
% -----
Num (1)=double (u01);Num (2)=double (u04);Num (3)=double (u02);
Num (4)=double (u05);Num (5)=double (u03);Num (6)=double (u06);

elseif iflag==1
Num (1)=double (u01);
Num (2)=double (u04); % Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy2
Num (3)=double (u02);Num (4)=double (u05);
Num (5)=double (u03);Num (6)=double (u06);

elseif iflag==2
Num (1)=double (u01);Num (2)=double (u04);Num (3)=double (u02);
Num (4)=double (u05); % Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy4
Num (5)=double (u03);Num (6)=double (u06);

elseif iflag==3
Num (1)=double (u01);Num (2)=double (u04);Num (3)=double (u02);
Num (4)=double (u05);Num (5)=double (u03);
Num (6)=double (u06);% Νέα τιμή της μερικής παραγώγου dF/dy6
else;end

% -----

Check=double (Start);

while abs (Check)<abs (Endd)

% Υπολογισμός κλίσεων
%-----
Numx=double (Check);

k (1,1)=double (stepp)*double (fnf1 (Numx, Num (1), Num (2), Num (3), Num (4), Num (5),
Num (6), M)); % y1
k (2,1)=double (stepp)*double (fnf2 (Numx, Num (1), Num (2), Num (3), Num (4), Num (5),
Num (6), M)); % y2
k (3,1)=double (stepp)*double (fnf3 (Numx, Num (1), Num (2), Num (3), Num (4), Num (5),
Num (6), M)); % y3
k (4,1)=double (stepp)*double (fnf4 (Numx, Num (1), Num (2), Num (3), Num (4), Num (5),
Num (6), M)); % y4
k (5,1)=double (stepp)*double (fnf5 (Numx, Num (1), Num (2), Num (3), Num (4), Num (5),
Num (6), M)); % y5
k (6,1)=double (stepp)*double (fnf6 (Numx, Num (1), Num (2), Num (3), Num (4), Num (5),
Num (6), M)); % y6

Numbers1=double (Numx)+double (stepp/2.0);

k1 (1,1)=double (Num (1))+double (k (1,1)/2.0); % Num (1) αρχική συνθήκη y1 (0)
k2 (2,1)=double (Num (2))+double (k (2,1)/2.0); % Num (2) αρχική συνθήκη y2 (0)
k3 (3,1)=double (Num (3))+double (k (3,1)/2.0); % Num (3) αρχική συνθήκη y3 (0)
k4 (4,1)=double (Num (4))+double (k (4,1)/2.0); % Num (4) αρχική συνθήκη y4 (0)
k5 (5,1)=double (Num (5))+double (k (5,1)/2.0); % Num (5) αρχική συνθήκη y5 (0)
k6 (6,1)=double (Num (6))+double (k (6,1)/2.0); % Num (6) αρχική συνθήκη y6 (0)

```

```

% 2nd ITERATION
k(1,2)=double(step)*double(fnf1(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y1
k(2,2)=double(step)*double(fnf2(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y2
k(3,2)=double(step)*double(fnf3(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y3
k(4,2)=double(step)*double(fnf4(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y4
k(5,2)=double(step)*double(fnf5(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y5
k(6,2)=double(step)*double(fnf6(Numbers1,k1(1,1),k2(2,1),k3(3,1),k4(4,1),
,k5(5,1),k6(6,1),M));% y6

```

```

k1(1,2)=double(Num(1))+double(k(1,2)/2.0); % Num(1) αρχική συνθήκη y1(0)
k2(2,2)=double(Num(2))+double(k(2,2)/2.0); % Num(2) αρχική συνθήκη y2(0)
k3(3,2)=double(Num(3))+double(k(3,2)/2.0); % Num(3) αρχική συνθήκη y3(0)
k4(4,2)=double(Num(4))+double(k(4,2)/2.0); % Num(4) αρχική συνθήκη y4(0)
k5(5,2)=double(Num(5))+double(k(5,2)/2.0); % Num(5) αρχική συνθήκη y5(0)
k6(6,2)=double(Num(6))+double(k(6,2)/2.0); % Num(6) αρχική συνθήκη y6(0)

```

```

% 3rd ITERATION
k(1,3)=double(step)*double(fnf1(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y1
k(2,3)=double(step)*double(fnf2(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y2
k(3,3)=double(step)*double(fnf3(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y3
k(4,3)=double(step)*double(fnf4(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y4
k(5,3)=double(step)*double(fnf5(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y5
k(6,3)=double(step)*double(fnf6(Numbers1,k1(1,2),k2(2,2),k3(3,2),k4(4,2),
,k5(5,2),k6(6,2),M));% y6

```

```

k1(1,3)=double(Num(1))+double(k(1,3)); % Num(1) αρχική συνθήκη y1(0)
k2(2,3)=double(Num(2))+double(k(2,3)); % Num(2) αρχική συνθήκη y2(0)
k3(3,3)=double(Num(3))+double(k(3,3)); % Num(3) αρχική συνθήκη y3(0)
k4(4,3)=double(Num(4))+double(k(4,3)); % Num(4) αρχική συνθήκη y4(0)
k5(5,3)=double(Num(5))+double(k(5,3)); % Num(5) αρχική συνθήκη y5(0)
k6(6,3)=double(Num(6))+double(k(6,3)); % Num(6) αρχική συνθήκη y6(0)

```

```

Numbers2=double(Numx)+double(step);

```

```

% 4th ITERATION
k(1,4)=double(step)*double(fnf1(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y1
k(2,4)=double(step)*double(fnf2(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y2
k(3,4)=double(step)*double(fnf3(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y3
k(4,4)=double(step)*double(fnf4(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y4
k(5,4)=double(step)*double(fnf5(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y5
k(6,4)=double(step)*double(fnf6(Numbers2,k1(1,3),k2(2,3),k3(3,3),k4(4,3),
,k5(5,3),k6(6,3),M));% y6

```

```

%***** R E S U L T S *****
%*****
Y(1)=double(Num(1))+(double(k(1,1))+2.0*double(k(1,2))+2.0*double(k(1,3))
+double(k(1,4)))/6.0;% y1
Y(2)=double(Num(2))+(double(k(2,1))+2.0*double(k(2,2))+2.0*double(k(2,3))
+double(k(2,4)))/6.0;% y2=y1'
Y(3)=double(Num(3))+(double(k(3,1))+2.0*double(k(3,2))+2.0*double(k(3,3))
+double(k(3,4)))/6.0;% y3
Y(4)=double(Num(4))+(double(k(4,1))+2.0*double(k(4,2))+2.0*double(k(4,3))
+double(k(4,4)))/6.0;% y4=y3'
Y(5)=double(Num(5))+(double(k(5,1))+2.0*double(k(5,2))+2.0*double(k(5,3))
+double(k(5,4)))/6.0;% y5
Y(6)=double(Num(6))+(double(k(6,1))+2.0*double(k(6,2))+2.0*double(k(6,3))
+double(k(6,4)))/6.0;% y6=y5'

for i=1:1:Number

Num(i)=Y(i);

end

    Check=double(Check+stepp);

end

if (iflag==0)

% Αρχικές τιμές F10 , F20 , F30
%-----
F10=double(Num(2)); % y1'=y2
F20=double(Num(4)); % y3'=y4
F30=double(Num(6)); % y5'=y6

g1=double((Num(2))-nums4end); % y1'=y2
g2=double((Num(4))-nums5end); % y3'=y4
g3=double((Num(6))-nums6end); % y5'=y6

% Βήμα προχώρησης για υπολογισμό της παραγώγου dF/dy2
% -----
u04=double(u04)+double(stepp1);

elseif (iflag==1)

F11=double((Num(2)-F10)/stepp1);
F21=double((Num(4)-F20)/stepp1);
F31=double((Num(6)-F30)/stepp1);

u04=double(u04)-double(stepp1);
u05=double(u05)+double(stepp1);

elseif (iflag==2)

F12=double((Num(2)-F10)/stepp1);
F22=double((Num(4)-F20)/stepp1);
F32=double((Num(6)-F30)/stepp1);

```



```

u05=double(u05)-double(steppl);
M=double(M)+double(steppl);
u06=double(M);

elseif (iflag==3)

F13=double((Num(2)-F10)/steppl);
F23=double((Num(4)-F20)/steppl);
F33=double((Num(6)-F30)/steppl);

M=double(M)-double(steppl);
u06=double(M);

else;end

iflag=iflag+1;

end
% Υπολογισμός των DET , D1 , D2 , D3
% -----
DET=double(F11)*double(F22)*double(F33)+double(F12)*double(F23)*double(F31)+double(F13)*double(F21)*double(F32)-double(F31)*double(F22)*double(F13)-double(F32)*double(F23)*double(F11)-double(F33)*double(F21)*double(F12);

D1=double(F10)*double(F22)*double(F33)+double(F12)*double(F23)*double(F30)+double(F13)*double(F20)*double(F32)-double(F30)*double(F22)*double(F13)-double(F32)*double(F23)*double(F10)-double(F33)*double(F20)*double(F12);

D2=double(F11)*double(F20)*double(F33)+double(F10)*double(F23)*double(F31)+double(F13)*double(F21)*double(F30)-double(F31)*double(F20)*double(F13)-double(F30)*double(F23)*double(F11)-double(F33)*double(F21)*double(F10);

D3=double(F11)*double(F22)*double(F30)+double(F12)*double(F20)*double(F31)+double(F10)*double(F21)*double(F32)-double(F31)*double(F22)*double(F10)-double(F32)*double(F20)*double(F11)-double(F30)*double(F21)*double(F12);

% Μέθοδος Newton-Raphson για σύγκλιση της τιμής της κρίσιμης ροπής M0
% Υπολογισμός των s1,s2,s3
% -----
s1=-double(D1)/(double(DET));
s2=-double(D2)/(double(DET));
s3=-double(D3)/(double(DET));

formatSpec='s1=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,s1);

formatSpec='s2=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,s2);

formatSpec='s3=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,s3);

formatSpec='Mcrit=%10.8f\n ';

```

```

fprintf(formatSpec,M);

formatSpec='N=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,N);

% Βάζω βήμα προχώρησης ώστε να συγκλίνει το μοντέλο
%-----
for ij=1:100

if abs(s1)<1.0
continue
else
s1=double(s1/2);
end
end

if abs(s1)<1.0

for ij=1:100
if abs(s2)<1.0
continue
else
s2=double(s2/2);
end
end

if abs(s2)<1.0

for ij=1:100
if abs(s3)<1.0
continue
else
s3=double(s3/2);
end
end

else;end
else;end

% Έλεγχος ακρίβειας αποτελεσμάτων
%-----
if abs(g1)<0.00001
if abs(g2)<0.00001
if abs(g3)<0.00001

editt=true;

kj=kj+1;

formatSpec='M=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,M);

formatSpec='y1(0.5)=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,Num(1));

formatSpec='u04=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,u04);

```

```

formatSpec='u05=%10.8f\n ';
fprintf(formatSpec,u05);

Uf(1,kj)=M; % Numerical calculation of M0
Uj(1,kj)=Num(1); % y1(0.5)
Um(1,kj)=Num(3); % y3(0.5)
Un(1,kj)=Num(5); % y5(0.5)
Uk(1,kj)=N;
Ul(1,kj)=M0; % Theoretical calculation of M0 due to "closed" solution
Up(1,kj)=u04; % y1'(0.0)
Ur(1,kj)=u05; % y3'(0.0)
Us(1,kj)=u06; % y5'(0.0)
Ut(1,kj)=Num(2); % y1'(0.5)
Uv(1,kj)=Num(4); % y3'(0.5)
Uw(1,kj)=Num(6); % y5'(0.5)
break

else;end
else;end
else;end

u04=double(u04)+double(s1);
u05=double(u05)+double(s2);
M=double(M)+double(s3);
u06=double(M);

iflag=0;
end

% Δεικτης που μας δείχνει την πρώτη τιμή του u04,u05 , για imsl>0 τα
% u04,u05 λαμβάνουν τις τιμές από την προηγούμενη επίλυση του συστήματος
% των 6 δ.ε. για συγκεκριμένη τιμή της αξονικής δύναμης N. (Νέα τιμή
% αξονικής Δύναμης N).
% -----
imsl=imsl+1;
u04=double(u04);
u05=double(u05);
M=double(M);
u06=double(M);
end

% ----- P L O T S -----
--
figure
plot(Uj(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title('y1(0.5)- κρίσιμη ροπή
πλευρικού λυγισμού M0 ή ν(0.5)- M0');

figure
plot(Um(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title('y3(0.5)- κρίσιμη ροπή
πλευρικού λυγισμού M0 ή φ(0.5)- M0');

figure
plot(Un(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title('y5(0.5)- κρίσιμη ροπή
πλευρικού λυγισμού M0 ή φ"(0.5)- M0');

```

```
figure
plot(Uk(1,:)/Ncr,Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'Αξονική Δύναμη
N/Ncr - κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
%-----
--
```

```
figure
plot(Up(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y1deriv(0.0) -
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
figure
plot(Ur(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y3deriv(0.0) -
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
figure
plot(Us(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y5deriv(0.0) -
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
%-----
--
```

```
figure
plot(Ut(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y1deriv(0.5) -
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
figure
plot(Uv(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y3deriv(0.5) -
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```

```
figure
plot(Uw(1,:),Uf(1,:), 'Color',[0,0.7,0.9]); title( 'y5deriv(0.5) -
κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M0');
```