National Technical University of Athens

Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

Θεωρία Αναπαραστάσεων Συμπαγών Ομάδων *Lie* και Εφαρμογές

Διπλωματική Εργασία
του
Σωτήριου Κοτίτσα

Επιβλέπων: Σοφία Λαμπροπούλου
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

19 Ιουλίου 2020

Περίληψη

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία παρουσιάζονται μερικές βασικές εφαρμογές της μη μεταθετικής αρμονικής ανάλυσης στην θεωρία πιθανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα το βασικό κομμάτι της εργασίας αυτής είναι η περιγραφή της (βασικής) θεωρίας αναπαραστάσεων των συμπαγών ομάδων και η περιγραφή των βασικών ιδιοτήτων των ομάδων *Lie*. Ο κεντρικός στόχος είναι μελετήσουμε το θεώρημα *Peter-Weyl* το οποίο θα μας δώσει ένα ακριβή τρόπο ορίσουμε το τον μετασχηματισμό *Fourier*. Σχετικά με τις ομάδες *Lie* θα δούμε τις βασικές τους ιδιότητες και την σχέση τους με τις άλγεβρες *Lie* με σκοπό να αποδείξουμε την ολοκληρωτική φόρμουλα του *Weyl*. Αφού δούμε μερικές ιδιότητες των ημιαπλών άλγεβρων *Lie* και την σχέση τους με την θεωρία αναπαραστάσεων των ομάδων *Lie* θα κοιτάξουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού *Fourier* πάνω σε ομάδες *Lie* με σκοπό να δείξουμε μια γενίκευση του θεωρήματος του *Levy*.

Θεωρία Αναπαραστάσεων Συμπαγών Ομάδων *Lie* και Εφαρμογές

Σωτήρης Κοτίτσας
sotiriskotitsas@hotmail.gr

19 Ιουλίου 2020

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία παρουσιάζονται μερικές βασικές εφαρμογές της μη μεταθετικής αρμονικής ανάλυσης στην θεωρία πιθανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα το βασικό κομμάτι της εργασίας αυτής είναι η περιγραφή της (βασικής) θεωρίας αναπαραστάσεων των συμπαγών ομάδων *Lie* και η περιγραφή των συνεπειών της θεωρίας αυτής στην ανάλυση πάνω σε ομάδες *Lie*. Ο κεντρικός στόχος είναι να αποδείξουμε την ολοκληρωτική φόρμουλα του *Weyl* και μετά να την εφαρμόσουμε στην θεωρία τυχαίων πινάκων. Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε μια μη μεταθετική εκδοχή του μετασχηματισμού *Fourier* για την μελέτη τυχαιών περιπάτων πάνω στις ομάδες *Lie*.

Πιο συγκεκριμένα στο **Κεφάλαιο 1** παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία της θεωρίας αναπαραστάσεων συμπαγών τοπολογικών ομάδων. Η θεωρία αναπαραστάσεων ουσιαστικά ασχολείται με 'γραμμικές' δράσεις ομάδων πάνω σε διανυσματικούς χώρους. Αυτό σημαίνει οτι ασχολείται με όλους τους 'τρόπους' που μπορούμε να δούμε μια ομάδα ως μια ομάδα γραμμικών τελεστών. Όταν έχουμε μια 'συνεχή' ομάδα τότε αυτές οι αναπαραστάσεις θα πρέπει να είναι συμβατές με την τοπολογία, θα πρέπει δηλαδή να ικανοποιούν μια συνθήκη συνέχειας. Οι αναπαραστάσεις που θα μελατήσουμε λέγονατι μοναδιαίες αναπαραστάσεις. Μια τέτοια αναπαράσταση είναι ένας ομομορφισμός από την τοπολογική ομάδα στην ομάδα μοναδιαίων τελεστών πάνω σε ένα χώρο *Hilbert*. Αυτή η κλάση αναπαραστάσεων συμπεριφέρεται ιδιαίτερα καλά και στην περίπτωση των συμπαγών ομάδων (που θα επικεντωθούμε σε αυτήν την εργασία) θα δούμε οτι δεν χάνουμε τίποτα αν επικετρωθούμε μόνο σε αυτές τις αναπαραστάσεις. Επιπλέον θα δούμε οτι υπάρχουν κάποιες αναπαραστάεις οι οποίες υπο μια έννοια είναι οι πιο απλές. Αυτές οι αναπαραστάσεις λέγονται ανάγωγες αναπαραστάσεις και θα δούμε επιπλέον οτι με αυτές στην περιπτωση των συμπαγών ομάδων μπορούμε να κατασκευάσουμε όλες τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις της ομάδας. Αυτές οι αναπαραστάσεις μαζί με την λεγόμενη κανονική αναπαράσταση βρίσκονται στο κέντρο της θεωρίας και αποτελούν τις πιο σημαντικές αναπαραστάσεις μιας ομάδας.

Ένα από τα πιο βασικά προβλήματα στην θεωρία των αναπαραστάσεων είναι η ανάλυση του χώρου $L^2(G, m_G)$ (πάνω στον οποίο η ομάδα G δρα μέσω της κανονικής αναπαράστασης) σε απλούς αναλλοίωτους υπόχωρους. Εδώ το m_G είναι ένα πολύ συγκεκριμένο μέτρο το μέτρο *Haar*. Θα δούμε πως αυτό το πρόβλημα έχει εμπνευστεί από και είναι μια γενίκευση της κλασσικής ανάλυσης *Fourier* συναρτήσεων πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Η λύση αυτού του προβλήματος έχει πάρα πολλές εφαρμογές αφού κατά μια έννοια μπορεί να μας δώσει μια (πιθανώς μη μεταθετική) εκδοχή του κλασσικού μετασχηματισμού *Fourier* συναρτήσεων που είναι ορισμένες πάνω στην ομάδα που μελετάμε. Θα δούμε επίσης οτι στην περίπτωση των συμπαγών ομάδων το πρόβλημα αυτό έχει λυθεί. Αυτό είναι ουσιαστικά το περιεχόμενο του θεωρήματος $Peter-Weyl$.Το θεώρημα αυτό μας περιγράφει με ακριβή τρόπο την άνάλυση' του χώρου $L^2(G, m_G)$ σε αναλλοίωτους υπόχωρους που καθορίζονται από τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της G. Το θεώρημα $Peter - Weyl$ λοιπόν μας δίνει ένα τρόπο να ορίσουμε τον μετασχηματισμό *Fourier* σε συμπαγείς ομάδες αλλά για να τον χρησιμοποιήσουμε στην πράξη θα πρέπει πρώτα να βρούμε όλες τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας. Δεν υπάρχει όμως ένας γενικός τρόπος εύρεσης αυτών των αναπραστάσεων που να δουλεύει για κάθε συμπαγή ομάδα. Συνήθως για να τις βρούμε δουλεύουμε κατά περίπτωση ή περιοριζόμαστε σε κλάσεις ομάδων που έχουν επιπλέον δομή που μπορεί να μας βοηθήσει.

Οι ομάδες στις οποίες θα επικεντρωθούμε σε αυτήν την διπλωματική εργασία είναι οι συμπάγεις ομάδες *Lie*. Η μελέτη των ιδιοτήτων τους είναι το κεντρίκο κομμάτι του δεύτερου κεφαλαίου. Οι ομάδες *Lie* είναι ομάδες οι οποίες εχούν και μία συμβατή ομαλή δομη. Πιο συγκεκριμένα μια ομαδα *Lie* είναι μια ομάλη πολλαπλότητα έτσι ώστε οι πράξεις της ομαδας να είναι ομάλες συνάρτησεις. Οπότε υπάρχει μια αλληλεπίδραση μετάξυ της αλγεβρικής δομής της ομάδας και της αναλυτικής δομής της πολλαπλότητας και θα εκμεταλλευτούμε αυτήν την αλληλεπίδραση για να βγάλουμε συμπεράσματα σχετικά με την δομή των ομάδων *Lie*. Θα δούμε οτι σε κάθε ομάδα *Lie* G μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μια αλγεβρική δομή που λέγεται άλγεβρα *Lie* της G. Θα δούμε οτι υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ ομομορφισμών ομάδων *Lie* και ομομορφισμών μεταξύ των αντίστοιχων αλγεβρών *Lie*. Πιο συγκεκριμένα ένας ομομορφισμός ανάμεσα σε δυο ομάδες *Lie* επάγει έναν ομομορφισμό ανάμεσα στις αντίστοιχες άλγεβρες *Lie*. Αντιστρόφως όταν οι ομάδες μας έχουν κάποιες καλές τοπολογικές ιδιότητες κάθε ομομορφισμός ανάμεσα στις άλγεβρες *Lie* επάγει ένα ομομορφισμό ανάμεσα στις ομάδες *Lie*. Χρησιμοποιώντας την γλώσσα της θεωρίας κατηγοριών και το θεώρημα του *Ado* αυτό σημαίνει οτι η κατηγορία των αλγεβρών *Lie* και η κατηγορία των 'καλών ομάδων *Lie* είναι ισοδύναμες. Διαισθητική αυτό σημαίνει οτι η θεωρία των (πραγματικών ή μιγαδικών) αλγεβρών *Lie* είναι 'ίδια'με την θεωρία των καλών ομάδων *Lie*. Αυτό είναι ένα εξαιρετικά σημαντικό αποτέλεσμα γιατί μπορούμε να μελετήσουμε την θεωρία αναπαραστάσεων των (συμπαγών) ομάδων *Lie* μελετώντας την θεωρία αναπαραστάσεων των αντίστοιχων αλγεβρών *Lie*. Επιπλέον θα μελετήσουμε τις ιδιότητες μερικών εξαιρετικά σημαντικών απεικονίσεων όπως την *adjoint* αναπαράσταση, την απεικόνιση *adjoint* και την εκθετική απεικόνιση. Τέλος σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε μερικές ιδιότητες των δράσεων ομάδων *Lie* πάνω σε πολλαπλότητες. Τέλος με όλη αυτή την πληροφορία στα χέρια μας θα δείξουμε την ολοκληρωτική φόρμουλα του *Weyl*. Αυτή η φόρμουλα μας δίνει μια ακριβή σχέση ανάμεσα στο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πάνω σε μια συμπαγή, συνεκτική ομάδα *Lie* και σε ένα αντίστοιχο ολοκλήρωμα πάνω από τον μεγιστικό τόρο της ομάδας. Όταν η συνάρτηση είναι συνάρτηση κλάσης αυτή η φόρμουλα πέρνει μια ιδιαίτερα χρήσιμη μορφή.

Στο τρίτο κεφάλαιο έχει να κάνει με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα την ομάδα $SU(2)$. Πιο συγκεκριμένα θα βρούμε όλες τις αντίστοιχες μοναδιαίες αναπαραστάσεις με την βοήθεια της θεωρίας του κεφαλάιου 2 και θα δείξουμε πως

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την δομή των αλγεβρών *Lie*. Αυτά τα αντικείμενα μπορούν να οριστούν χωρίς καμία αναφορά σε ομάδες *Lie* και έχουν μια πολύ 'περιοριστική' αλγεβρική δομή. Ο κεντρικός σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δώσουμε μια ιδέα πως η δομή της άλγεβρας *Lie* μπορεί να ταξινομήσει όλες τις αναπαραστάσεις μιας ομάδας *Lie*. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε στην αρχή τους βασικούς τύπους αλγεβρών *Lie* τις επιλύσιμες, τις μηδενοδύναμες και τις ημιαπλές. Σε αυτή την εργασία θα επικεντωθούμε στις ημιαπλές άλγεβρες *Lie*. Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε οτι κάθε ημιαπλή άλγεβρα *Lie* έχει μια μεγιστική αβελιανή/μεταθετική υποάλγεβρα. Με αυτή την υποάλγεβρα θα μπορέσουμε να ορίσουμε την ανάλυση ριζών (*root decomposition*) της άλγεβρας. Μετά θα δούμε εν συντομία πως αυτή η ανάλυση μπορεί να χαρακτηρήσει απόλυτατην αντίστοιχη άλγεβρα και μετά θα δούμε πως θα μπορούσε να εφαρμοστεί στην θεωρία αναπαραστάσεων παρουσιάζοντας το θεώρημα του μεγιστικού βάρους. Τέλος θα δούμε μια διαφορετική μορφή της ολοκληρωτικής φόρμουλας *Weyl* και δυο πορίματά της. Το δεύτερο, η λεγόμενη *Weyl's dimension formula* θα μας δώσει μια πολύ σημαντική εκτίμηση για την διάσταση μιας ανάγωγης αναπαράστασης μιας συμπαγούς, συνεκτικής ομάδας *Lie* και αυτή η εκτίμηση θα είναι πάρα πολύ χρήσιμη στο τελευταίο κεφάλαιο.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο επικεντωνόμαστε στις εφαρμογές της θεωρίας που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε μερικές εφαρμογές του μη μεταθετικού μετασχηματισμού *Fourier* στην θεωρία πιθανοτήτων. Θα δούμε μια γενίκευση του θεωρήματος του *Levy* σχετικό με την ασθενή σύγκλιση μέτρων ορισμένων πάνω σε ομάδες *Lie*. Ακόμα θα δούμε και μερικές γενικές ιδιότητες του μετασχηματισμού *Fourier* συναρτήσεων. Τέλος θα μελετήσουμε πως η ¨ομαλή¨ συμπεριφορά μιας συνάρτησης επιρεάζει την συμπεριφορά του αντίστοιχου μετασχηματισμού/σειράς *Fourier*.

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Αναπαραστάσεων

Η θεωρία αναπαραστάσεων ξεκίνησε κατά τα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα και κατά την διάρκεια του εικοστού έπαιξε ένα σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη ορισμένων τομέων των μαθηματικών μέσω των εφαρμογών της (στην φυσική, στην μη αβελιανή αρμονική ανάλυση, στην γεωμετρία (ταξινόμηση συμμετρικών χώρων), στην θεωρία αριθμών κ.α.). Η βασική ιδέα της θεωρίας αυτής είναι να προσπαθήσουμε να βρούμε όλους τους τρόπους που μπορούμε να δούμε μια ομάδα σαν μια ομάδα τελεστών. Ισοδύναμα η βασική ιδέα είναι να μελετήσουμε όλες τις γραμμικες δράσεις μιας ομάδας πάνω σε ένα διανυσματικό χώρο με σκοπό να λάβουμε πληροφορία για την ομάδα ή για κάποια αντικείμενα σχετικά με την ομάδα.

Θεωρείται ότι 'δημιουργήθηκε' από τον *Frobenius* στην προσπάθειά του να λύσει ένα πρόβλημα που του έθεσε ο δάσκαλος του ο *Dedekind*. Η μελέτη τότε επικεντρωνόταν σε πεπερασμένες ομάδες. Αργότερα καθώς η δομή των τοπολογικών ομάδων γινόταν όλο και πιο κατανοητή η μελέτη της θεωρίας αναπαραστάσεων επεκτάθηκε και στις συμπαγείς τοπολογικες ομάδες. Οι μαθηματικοί που είχαν κάνει μεγάλες προόδους στο τομέα αυτό ήταν οι *Weyl*, *Peter*, *Haar*, κ.α. Πιο συγκεκριμένα οι *Haar* και *von Newman* απέδειξαν ανεξάρτητα μεταξύ τους την ύπαρξη ενός αναλλοίωτου μέτρου πάνω σε μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Το μετρό αυτό που πλέον λέγεται μέτρο *Haar* είναι εξαιρετικά χρήσιμο και τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας δεν θα μπορούσαν καν να διατυπωθουν χωρίς αυτό. Στην συνεχεία κατά τα μέσα του εικοστού αιώνα εφόσον τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας αναπαραστάσεων συμπαγων ομάδων (θ. *Peter – Weyl*) είχαν αποδειχθεί η προσοχή της έρευνας στράφηκε προς τις μη συμπαγείς ομάδες. Η θεωρία εδώ είναι αρκετά πιο πολύπλοκη και για να έχουμε ικανοποιητικες απαντήσεις σε βασικά ερωτήματα θα πρέπει να περιοριστούμε σε ειδικές κατηγορίες ομάδων. Η θεωρία αναπτύχθηκε στην αρχή κυρίως από τους *Gelfand*, *Neimark* κ.α. Ιδιαίτερα στην περίπτωση των ημι-απλών ομάδων *Lie* αναπτύχθηκε κατά το δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα μια πολύ ικανοποιητική θεωρία από τον *Harish – Chandra*. Εμείς δεν θα παρουσιάσουμε στοιχεία αυτών των θεωριών. Το σχέδιο αυτού του καφαλαίου είναι το εξής:

Αρχικά αναφέρουμε βασικά χαρακτηριστικά των τοπολογικών ομάδων και πιο συγκεκριμένα των τοπικά συμπαγών ομάδων και τις ιδιότητες του μέτρου *Haar*. Στην συνεχεία ορίζουμε τι είναι μια αναπαράσταση μιας τέτοιας ομάδας και αναπτύσσουμε λίγα βασικά αποτελέσματα. Μετά θα περιοριστούμε στην περίπτωση των συμπαγων ομάδων όπου υπάρχει μια αρκετά διαχειρισιμη θεωρία για τις αναπαραστάσεις τους και τέλος εξηγούμε γιατί αυτή η θεωρία αποτυγχάνει όταν η ομάδα είναι μη συμπαγής και αναφέρουμε τι θα μπορούσαμε να κάνουμε σε αυτή την περίπτωση.

1.1 Τοπολογικές Ομάδες και μέτρο *Haar*

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή η θεωρία αναπαραστάσεων αρχικά μελετούσε πεπερασμένες ομάδες. Όμως πολλές γνωστές και χρήσιμες ομάδες όχι μόνο δεν είναι πεπερασμένες αλλά έχουν μια 'συνεχή' δομή. Σε αυστηρούς μαθηματικούς όρους αυτό σημαίνει ότι η ομάδα διαθέτει μια τοπολογία συμβατή με την αλγεβρική της δομή. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ορισμό:

Ορισμός. *Μια **τοπολογική ομάδα** G είναι ένας τοπολογικός χώρος που έχει δομή ομάδας έτσι ώστε η πράξη $(g, h) \to gh^{-1}$ είναι συνεχής.*

Στον παραπάνω ορισμό προφανώς η πράξη $(g, h) \to gh^{-1}$ πέρνει στοιχεία του $G \times G$ και τα στέλνει στον G. Εδώ ο χώρος $G \times G$ εννοείται πως έχει την τοπολογία γινόμενο που επάγει η τοπολογία της G. Αυτή η συνθήκη 'συμβατότητας' ανάμεσα στην αλγεβρική δομή και στην τοπολογική δομή της ομάδας μας δίνει αρκετή πληροφορία για τα ανοικτά σύνολα της ομάδας. Για παράδειγμα έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση. *Έστω G τοπολογική ομάδα, $g \in G$ και $U \subseteq G$ ανοικτό σύνολο. Τότε τα σύνολα gU, Ug και $U^{-1} = \{h^{-1} : h \in U\}$ είναι ανοικτά. Σαν συνέπεια κάθε βάση περιοχών του μοναδιαίου στοιχείου της G επάγει με φυσιολογικό τρόπο μια βάση περιοχών σε κάθε $g \in G$.*

Η απόδειξη είναι πολύ απλή αφού οι απεικονίσεις $R_g : h \to h \cdot g$, $L_g : h \to g \cdot h$ ($g \in G$) και $Inv : h \to h^{-1}$ είναι ομοιομορφισμοί. Υπάρχουν και άλλα παρόμοια αποτελέσματα που μας δίνουν επιπλέον πληροφορία για την τοπολογία μιας τοπολογικής ομάδας αλλά θα τα ανφλερουμε όταν τα χρειαστούμε.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με ομάδες που έχουν μια πολύ καλή τοπολογική ιδιότητα. Πιο συγκεκριμένα ανακαλούμε πως ένας τοπολογικός χώρος λέγεται τοπικα συμπαγής αν είναι *Hausdorff* και αν κάθε σημείο του έχει μια συμπαγή περιοχή. (Η υπόθεση του να είναι *Hausdorff* ο χώρος πολλές φορές δεν γίνεται αλλά είναι μια αρκετά βολική υπόθεση γιατι μας δίνει αρκετούς διαφορετικούς χαρακτηρισμούς των τοπικά συμπαγών χώρων). Έχουμε λοιπόν τον εξής ορισμό:

Ορισμός. *Μια τοπολογική ομάδα λέγεται **τοπικά συμπαγής** ομάδα αν είναι τοπικά συμπαγής ως τοπολογικός χώρος. Ανάλογα ορίζουμε την έννοια της συμπαγούς ομάδας.*

Επείδη θα ασχοληθούμε μόνο με τοπικά συμπαγείς ομάδες πάντα θα εννοείται οτι μιλάμε για τοπικά συμπαγείς ομάδες ακόμα και αν δεν το αναφέρουμε.

Παραδείγματα. Σχεδόν κάθε ομάδα που εμφανίζεται στις εφαρμογές ή σε άλλους τομείς των μαθηματικών είναι τοπικά συμπαγής. Για παράδειγμα όλες οι ακόλουθες ομάδες είναι τοπικά συμπαγείς:

Οι $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C}^{\times},\cdot)$, $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$, οποιαδήποτε ομάδα πινάκων, κάθε πεπερασμένη ομάδα κ.α. είναι τοπικά συμπαγής όπου κάθε ομάδα έχει την προφανή τοπολογία. Μερικά πιο έξωτικά' παραδείγματα τοπικά συμπαγών ομάδων είναι οι ομάδες $Gal(\bar{\mathbb{Q}})$, η προσθετική ομάδα των p-αδικών αριθμών $\mathbb{Q}_p$ και η ομάδα $GL_n(\mathbb{Q}_p)$.

Φυσικά υπάρχουν τοπολογικές ομάδες που δεν είναι τοπικά συμπαγείς. Για παράδειγμα έστω V διανυσματικός χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης. Τότε η $(V,+)$ δεν μπορεί να είναι τοπικά συμπαγής.

Οι τοπικά συμπαγείς ομάδες έχουν πολλές καλές ιδιότητες όπως για παράδειγμα κάθε τοπικά συμπαγής υπο-ομάδα (με την τοπολογία υποχώρου) είναι επιπλέον κλειστή. Με διαφορά όμως η πιο σημαντική ιδιότητα που έχουν οι τοπικά συμπαγείς ομάδες είναι ότι διαθέτουν ένα αναλλοίωτο μέτρο. Πιο συγκεκριμένα αν $\mathcal{B}(G)$ είναι η *Borel* σ-άλγεβρα της τοπικά συμπαγούς ομάδας G τότε ένα μέτρο μ θα λέγεται **από δεξιά αναλλοίωτο** αν: $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{B}(G)$ και $\forall g \in G$ έχουμε $\mu(\mathcal{A} \cdot g) = \mu(\mathcal{A})$. Ανάλογα φυσικά μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του από αριστερά ανλλοίωτου μέτρου. Επιπλέον υπενθυμίζουμε οτι ένα μέτρο *Radon* μ είναι ένα μέτρο *Borel* που πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- Είναι πεπερασμένο σε συμπαγή σύνολα.
- Για κάθε ανοικτό σύνολο $E \subseteq G$ ανοικτό έχουμε: $\mu(E) = sup\{\mu(K) : K \subseteq E\}$.
- Για κάθε σύνολο *Borel* E έχουμε: $\mu(E) = inf\{\mu(U) : U \supseteq E, U \text{ανοικτό}\}$.

Το εντυπωσιακό θεώρημα που έχουμε είναι το εξής:

Θεώρημα. *Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Τότε υπάρχει ένα από δεξιά αναλλοίωτο, μη μηδενκό Radon μέτρο μ το οποίο είναι μοναδικό modulo μια πολλαπλασιαστική σταθερά. Δηλαδή αν έχουμε ένα άλλο μέτρο Radon μ_1 το οποίο είναι από δεξιά αναλλοίωτο τότε θα υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε $\mu = c \cdot \mu_1$.*

Αντίστοιχα υπάρχει ένα ανάλογο θεώρημα για από αριστερά αναλλοίωτα μέτρα. Το μέτρο του θεωρήματος ονομάζεται μέτρο *Haar* και συνήθως θα είναι κατανοητό από τα περιεχόμενα αν το μέτρο αυτό είναι από δεξία ή από αριστερά αναλλοίωτο. Το μέτρο *Haar* είναι πολύ βασικό στην θεωρία αναπαραστάσεων και έχει αρκετές σημαντικές ιδιότητες όπου μερικές από αυτές συνοψίζονται στην παρακάρω πρόταση:

Πρόταση. *Αν G είναι τοπικά συμπαγής ομάδα και μ είναι ένα μέτρο Haar που είναι από δεξιά αναλλοίωτο τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν $f \in L^1(\mu)$ και $f \geq 0$ τότε για κάθε $g \in G$ έχουμε:*

$$\int_G f(x \cdot g) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$$

2. *Η G είναι συμπαγής αν και μόνο αν $\mu(G) < +\infty$.*

3. *Πιο συγκεκριμένα αν η G είναι συμπαγής τότε το μ είναι και από αριστερά αναλλοίωτο και επιπλέον για κάθε $f \in L^1(\mu)$ έχουμε τις εξισώσεις:*

$$\int_G f(g \cdot x) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$$

για κάθε $g \in G$ και

$$\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$$

Απόδειξη. Για τον πρώτο ισχυρισμό πρώτα παρατηρούμε οτι ισχύει για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Στην γενική περίπτωση πέρνουμε μια αύξουσα ακολουθία ϕ_n απλών συναρτήσων που συγκλίνει στην f και $\phi_n \leq f$. Επειδή λοιπόν ο ισχυρισμός ισχύει για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη μια εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει την γενική περίπτωση.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό αν η G είναι συμπαγής αφού το μέτρο μ είναι πεπερασμένο σε συμπαγή σύνολα έχουμε το αποτέλεσμα. Το αντίστροοφο είναι πιο δύσκολο να αποδειχθεί και γι αυτό η απόδειξη παραλείπεται.

Για τον τρίτο ισχυρισμό πρώτα παρατηρούμε οτι για κάθε $g \in G$ το μέτρο μ_g που ορίζεται ως $\mu_g(\mathcal{A}) = \mu(g \cdot \mathcal{A})$ είναι επίσης από δεξιά αναλλοίωτο. Άρα από την μοναδικότητα του μέτρου *Haar* θα υπάρχει ένας πραγαματικός αριθμός $\Delta(g)$ τέτοιο ώστε $\mu_g = \Delta(g)\mu$. Συνεπώς για $\mathcal{A} = G$ και αφού η G είναι συμπαγής θα έχουμε $\mu_g(G) = \Delta(g)\mu(G)$ και ισοδύναμα $\Delta(g) = 1$. Αυτό προφανώς συνεπάγεται οτι το μ είναι και από αριστερά αναλλοίωτο.

Έχοντας δείξει αυτό μπορούμε να δείξουμε τον τελευταίο μας ισχυρισμό. Αν $Inv : h \to h^{-1}$ τότε το *push-forward* μέτρο $Inv_*\mu$ (που ορίζεται ως $Inv_*\mu(\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}^{-1})$) είναι από δεξιά αναλλοίωτο (εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι το μ είναι και από αριστερά αναλλοίωτο). Άρα θα υπάρχει ένας θετικός αριθμός c με $Inv_*\mu = c \cdot \mu$. Όμως εφόσον $Inv \circ Inv = Id_G$ και $(f \circ k)_*\mu = f_*(k_*\mu)$ θα έχουμε οτι $c^2 = 1 \Rightarrow c = 1$. Άρα έχουμε $\mu(\mathcal{A}^{-1}) = \mu(\mathcal{A})$. Τώρα με την ίδια μέθοδο που ακολουθήσαμε στο 1 μπορούμε να δείξουμε οτι:

$$\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$$

για $f \in L^1(\mu)$ και $f \geq 0$. □

Φυσικά τα αποτελέσματα 1) και 3) του θεωρήματος ισχύουν για όλες τις $f \in L^1(\mu)$.

Τώρα για κάθε $p \in [1, +\infty)$ ορίζουμε κατά τα γνωστά τους χώρους $L^p(G, \mu) = L^p(G)$. Ο λόγος για τον τελευταίο συμβολισμό όπου παραλείπουμε να σημειώσουμε το μέτρο *Haar* είναι οτι πολύ απλά αν αλλάξουμε το μέτρο *Haar* τότε θα το αλλάξουμε κατά μια πολλαπλασιαστική σταθερά και άρα οι αντίστοιχοι L^p χώροι θα είναι ισομετρικοί.

Μια πολυ βασική παρατήρηση που πρέπει να κάνουμε εδώ είναι οτι ο χώρος $C_c(G)$ που αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις πάνω στην G με συμπαγή φορέα εμφυτεύεται ως υπόχωρος σε κάθε $L^p(G)$. Πιο συγκεκριμένα ο $C_c(G)$ είναι πυκνός υπόχωρος κάθε $L^p(G)$. Φυσικά όταν η ομάδα είναι συμπαγής τα ίδια ισχύουν για τον $C(G)$ αφού οι δυο χώροι είναι ίσοι σε αυτή την περίπτωση.

1.2 Βασικές έννοιες της Θεωρίας Αναπαραστάσεων

Σε αυτή την υπο-ενότητα θα αναπτύξουμε μερικά βασικά στοιχεία της θεωρίας αναπαραστάσεων τοπολογικών ομάδων με σκοπό να καταλήξουμε στην απόδειξη του λήμματος του *Schur*. Θα αρχίσουμε με μια συνοπτική παρουσίαση των βασικών ορισμών και μετά θα αποδείξουμε μερικές βασικές ιδιότητες αυτών των νέων αντικειμένων. Πρώτα ορίζουμε το τι είναι αναράσταση μιας ομάδας:

Ορισμός. *Έστω τοπικά συμπαγής ομάδα G και χώρος Banach V. Ένας ομομορφισμός $\rho : G \to GL(V)$*[1] *τέτοιος ώστε η απεικόνιση $(g, v) \to \rho(g)v$ να είναι συνεχής λέγεται* ***αναπαράσταση*** *της G. Αν ο V έχει πεπερασμένη διάσταση τότε λέμε οτι η ρ είναι πεπερασμένης διάστασης και γράφουμε $dimV = dim\rho$.*

Οπότε διαισθητικά μια αναπαράσταση είναι ένας τρόπος να δούμε την ομάδα G σαν μια ομάδα αυτομορφισμών ενός χώρου *Banach*. Ισοδύναμα μια αναπαράσταση είναι μια γραμμική δράση της G πάνω στον χώρο V και αυτή η δράση λαμβάνει υπ' όψιν της και την τοπολογία της G (γιατί η 'κίνηση' κάθε σημείου πρέπει να είναι συνεχής). Γι αυτό τον λόγο λοιπον συνήθως λέμε οτι η αναπαράσταση ρ είναι πάνω στον V ή οτι δρα πάνω στον V. Μερικές φορές όταν θα θέλουμε να επισυμάνουμε τον χώρο στον οποίο δρα η αναπαράσταση θα γράφουμε (ρ, V).

Επείδη η κλάση των χώρων *Banach* είναι πολυ μεγάλη, γενική και δύσκολη στην διαχείριση θα θέλαμε να περιοριστούμε σε μια πιο καλή κατηγορία χώρων. Η κατηγορία αυτή είναι η κλάση των χώρων *Hilbert* και σε αυτούς τους χώρους ορίζεται η παρακάτω κατηγορία αναπαραστάσεων:

Ορισμός. *Έστω τοπικά συμπαγής ομάδα G και (ρ, V) όπου V είναι χώρος Hilbert. Αν $(\pi(g)v|\pi(g)w) = (v|w)$ για κάθε $v, w \in V$ τότε η π λέγεται* ***μοναδιαία αναπαράσταση****.*

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε ουσιαστικά μόνο με μοναδιαίες αναπαραστάσεις. Οι αναπαραστάσεις αυτές είναι οι πιο σημαντικές γιατί έχουν καλές ιδιότητες (μερικές από τις οποίες θα τις δούμε σε λίγο) και εμφανίζονται πάρα πολύ συχνά στις εφαρμογές.

Τώρα που έχουμε το βασικό μας μαθηματικό αντικείμενο εισαγάγουμε ένα τρόπο σύγκρισης δυο αναπαραστάσεων:

Ορισμός. *Αν $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ είναι δυο αναπαραστάσεις της G και $\Phi : V_1 \to V_2$ είναι γραμμικός συνεχής τελεστής με $\Phi(\pi_1(g)v) = \pi_2(g)\Phi(v)$ τότε ο Φ λέγεται* ***μορφισμός αναπαραστάσεων*** *(intertwiner). Το σύνολο όλων των μορφισμών μεταξύ δυο αναπαραστάσεων συμβολίζεται ως $Hom_G(V_1, V_2)$ ή ως $Hom_G(\pi_1, \pi_2)$.*

Όταν $\Phi(\pi_1(g)v) = \pi_2(g)\Phi(v)$ τότε λέμε οτι ο Φ σέβεται τις αντίστοιχες δράσεις. Είναι φανερό οτι $\Phi \in Hom_G(\pi, \pi)$ αν και μόνο αν ο τελεστής Φ αντιμετατίθεται με όλους τους τελεστές $\pi(g)$, $g \in G$. Επίσης αν ο Φ^{-1} υπάρχει και είναι συνεχής και ανήκει στον $Hom_G(\pi_2, \pi_1)$ τότε γράφουμε $\pi_1 \simeq \pi_2$ και λέμε οτι οι αναπαραστάσεις είναι **ισόμορφες**. Η σχέση $\simeq$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας και άρα θέτουμε:

$$\hat{G} = \text{όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας της} \simeq$$

[1] $T \in GL(V)$ αν και μόνο αν είναι γραμμικός, συνεχής, 1-1 και επί με συνεχή αντίστροφο.

και $\hat{G}_f \subseteq \hat{G}$ να είναι όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\simeq$ που περιέχουν μόνο αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συλλογή όλων των αναπαραστάσεων μιας ομάδας μαζί με τους μορφισμούς μεταξύ τους σχηματίζουν μια κατηγορία. Αυτή η παρατήρηση αν και δεν θα αναλυθεί περισσότερο σε αυτή την εργασία αξίζει να αναφερθεί γιατί σε πιο προχωρημένες/αλγεβρικές μελέτες της θεωρίας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο (π.χ. στην λεγόμενη *Tannaka-Krein* δυϊκότητα για συμπαγείς ομάδες).

Τώρα που έχουμε ένα τρόπο σύγκρισης θα θέλαμε να ορίσουμε τις απλούστερες αναπαραστάσεις που θα μπορούσαμε να έχουμε. Πρώτα λέμε οτι ένας κλειστός χώρος W είναι **αναλλοίωτος υπόχωρος** της αναπαράστασης π αν $\pi(g)W \subseteq W$ για κάθε $g \in G$. Συνήθως όταν αυτός ο χώρος δεν περιέχει άλλους αναλλοίωτους υποχώρους θα τον λέμε **ανάγωγο**. Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός. *Μια αναπαράσταση π λέγεται **ανάγωγη** αν οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι οι $\{0\}$ και V.*

Είναι φανερό ότι αν η αναπαράσταση π δεν είναι ανάγωγη και W είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος τότε ο περιορισμός της π σε αυτόν τον χώρο[2] θα μας δώσει μια καινούρια αναπαράσταση της G. Αν ονομάσουμε αυτήν την καινούργια αναπαράσταση $\pi\restriction_W$ τότε η $\pi\restriction_W$ θα λέγεται **υπο-αναπαράσταση** της π. Οπότε αν η π δεν είναι ανάγωγη τότε δεν θα είναι η απλή αναπαράσταση γιατί θα περιέχει μια άλλη, πιο 'μικρή', αναπαράσταση. Αντιθέτως οι ανάγωγες αναπαραστάσεις δεν 'περιέχουν' καμεία άλλη αναπαράσταση και κατά μια έννοια θα δούμε οτι αποτελούν τους θεμέλειους λίθους των αναπαραστάσεων της ομάδας γιατί υπό κατάλληλες συνθήκες κάθε άλλη αναπαράσταση κατασκευάζεται από ανάγωγες.

Γενικότερα αν π_1 και π_2 είναι δύο αναπαραστάσεις και $\Phi \in Hom_G(\pi_1, \pi_2)$ ένας 1-1 μορφισμός ο οποίος δεν είναι κατ ανάγκη επί αλλά με συνεχή αντίστροφο τότε πάλι θα λέμε ότι η π_1 είναι υπο-αναπαράσταση της π_2. Παρατηρούμε ότι η κλειστότητα της εικόνας του Φ θα είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της π_2. Αν επιπλέον περιορίσουμε την π_2 στον υπόχωρο αυτό τότε η αναπαράσταση που θα πάρουμε θα είναι ισόμορφη με την π_1. Άρα μπορούμε να πούμε οτι π_1 είναι υπο-αναπαράσταση της π_2 αν η π_2 'περιέχει' ένα ισομορφικό αντίγραφο της π_1. Συνήθως σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $\pi_1 \hookrightarrow \pi_2$.

Παρατήρηση. Η $\pi\restriction_W$ είναι ανάγωγη αναπαράσταση αν και μόνο αν ο W είναι ανάγωγος αναλλοίωτος υπόχωρος.

Τώρα πριν αρχίσουμε αποδείξεις βασικών αποτελεσμάτων ορίζουμε τις πιο βασικές αναπαραστάσεις οι οποίες έχουν ένα κεντρικό ρόλο στην θεωρία:

Ορισμός. *Η **δεξιά κανονική αναπαράσταση** της G είναι η π_G που δρα πάνω στον $L^2(G)$ και που ορίζεται ως $\rho_G(g)f(x) = f(x \cdot g)$ για κάθε $g \in G$ και $f \in L^2(G)$. Ανάλογα ορίζεται η **αριστερή κανονική αναπαράσταση** της G και συμβολίζεται ως λ_G (έχουμε $\lambda_G(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$).*

[2] Δηλαδή ο περιορισμός κάθε τελεστή $\pi(g)$ στον χώρο W

Παρατηρούμε οτι ο εκθέτης -1 στην αριστερή κανονική αναπαράσταση εμφανίζεται έτσι ώστε η λ_G να είναι ομομορφιμός ανάμεσα στην G και στην $GL(L^2(G))$.

Οι κανονικές αναπαραστάσεις είναι εξαιρετικά βασικές. Ο λόγος είναι γιατί όπως θα δούμε και πιο μέτα στην περίπτωση των συμπαγών ομάδων οι αναπαραστάσεις αυτές είναι πολύ 'μεγάλες'. Πιο συγκεκριμένα η από δεξιά κανονική αναπαράσταση[3], για παράδειγμα, περιέχει όλες τις ανάγωγες, μοναδιαίες αναπαραστάσεις της G. Αυτό είναι το θεώρημα *Peter-Weyl* που θα δούμε πιο μέτα.

Με αυτούς τις έννοιες μπορούμε να διατυπώσουμε τον βασικό/αρχικό σκοπό της θεωρίας αναπαραστάσεων για μια συγκεκριμένη τοπικά συμπαγή ομάδα G:

1. Θέλουμε να βρούμε όλες τις ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της G.
2. Θέλουμε να βρούμε πως η κανονική αναπαράσταση της G σπάει σαν 'σύνθεση' ανάγωγων μοναδιαίων αναπαραστάσεων ή ισοδύναμα θέλουμε να αναλύσουμε τον χώρο $L^2(G)$ ως ένα άθροισμα ανάγωγων υποχώρων.

Ο λόγος για να θέσουμε αυτά τα ερωτήματα έρχονται από διάφορους τομείς των μαθηματικών. Για το 2) αυτό που έχουμε στο νου μας είναι το εξής:

Όταν έχουμε μια ομάδα G που δρα σε ένα ομοιογενή χώρο $\mathcal{X}$ τότε μπορούμε να 'σηκώσουμε' ,κατά μία έννοια, την δράση σε μια αναπαράσταση της G πάνω σε ένα κατάλληλο χώρο συναρτήσεων του $\mathcal{X}$. Όταν ο $\mathcal{X}$ έχει και ένα βολικό αναλλοίωτο μέτρο m τότε αυτός ο χώρος είναι ο $L^2(\mathcal{X}, m)$ και η αντίστοιχη αναπαράσταση της G ορίζεται όπως η κανονική αναπαράσταση. Αυτό που θέλουμε να κάνουμε τώρα είναι να 'σπάσουμε' τον χώρο $L^2(\mathcal{X}, m)$ σε απλά κομμάτια εκμεταλευόμενοι την δράση της G πάνω σε αυτόν τον χώρο, εκμεταλευόμενοι δηλαδή την συμμετρία του $\mathcal{X}$.

Το κλασσικό παράδειγμα είναι όταν η ομάδα είναι η $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και ο ομοιογενής χώρος είναι πάλι η $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Θα δούμε στην συνέχεια πως η λύση του 2) σε αυτή την περίπρωση δίνει την κλασσική ανάλυση σε σειρά *Fourier* συναρτήσεων περιόδου 1[4]. Επίσης θα σκιαγραφήσουμε την λύση του 2) όταν η ομάδα θα είναι η ομάδα στροφών στον τρισδιάστατο χώρο (η $SO(3)$) και ο ομοιογενής χώρος η σφαίρα ακτίνας 1.

1.3 Μερικά βασικά αποτελέσματα

Κατ' αρχιν ας κάνουμε ένα σχόλιο για την συνθήκη συνέχειας που ικανοποιεί μια αναπαράσταση. Θα μπορούσε κάποιος να ρώτησει γιατί απλά δεν απαιτήσαμε η απεικόνιση $\rho : G \to GL(V)$ να είναι συνεχής. Η απάντηση είναι απλή: Αν είχαμε υιοθετήσει αυτό τον ορισμό τότε ομομορφισμοί που θα περιμέναμε να είναι αναπαραστάσεις δεν είναι. Πράγματι ένα απλό παράδειγμα που αναφέρεται στο [5] είναι το ακόλουθο:

Έστω η συμπαγής και αβελιανή ομάδα $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και ο χώρος $V = C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ με την *supremum* νόρμα. Προφανώς ο V είναι χώρος *Banach* και αν π είναι ο ομομορφισμός $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to$

[3]Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με την από δεξιά κανονική αναπαράσταση (αν και όλη η θεωρία που θα αναπτυχθεί γι' αυτήν μπορεί να αναπτυχθεί με σχεδόν ίδιο τρόπο και για την λ_G). Γι' αυτό τον λόγο όποτε θα λέμε κανονική αναπαράσταση θα εννοούμε την ρ_G

[4]Οι συναρτήσεις πάνω στην $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με περιοδικές συναρτήσεις πάνω στον $\mathbb{R}$ περιόδου 1

$GL(V)$ που ορίζεται όπως η από δεξιά κανονική αναπαράσταση τότε ο π δεν είναι συνεχής (ενώ φυσικά θα περιμέναμε να είναι αναπαράσταση αφού δρα σε ένα πυκνό υπόχωρο του $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ακριβώς όπως η κανονική).

Πράγματι ας πάρουμε μια $f_t \in V$ που είναι μηδέν έξω από το $[0, t]$[5] θετική, ≤ 1 εκτός από το σημείο $t/2$ όπου είναι =1 (έχουμε υποθέσει εδώ οτι $0 < t < 1/2$). Προφανώς η συνάρτηση αυτη έχει νόρμα 1. Τότε εφόσον οι $\pi(t)f_t$ και f_t έχουν ξένους φορείς μπορούμε να δούμε οτι:

$$\|\pi(t) - id_V\| \geq sup_{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}}\{f_t(x+t) - f_t(x)\} = 1$$

και άρα $\|\pi(t) - id_V\| \geq 1$ για $t \in (0, 1/2)$.

Γενικότερα όμως αν δώσουμε στο $GL(V)$ την ισχυρή τοπολογιά (*strong operator topology*) τότε μια αναπαράσταση π είναι συνεχής ως προς αυτές τις τοπολογίες. Ισχύει και το αντίστροφο μάλιστα δηλαδή αν ο ομομορφισμός $\rho : G \to GL(V)$ είναι συνεχής όπου ο $GL(V)$ έχει την ισχυρή τοπολογιά τότε η ρ είναι αναπαράσταση.

Μια κάλη ιδιότητα που έχουν οι αναπαραστάσεις και η συνέπειά της θα μας φανεί χρήσιμη αργότερα είναι η ακόλουθη:

Πρόταση. *Έστω $(\rho, \mathcal{H})$ μια αναπαράσταση της G. Τότε η ρ είναι τοπικά φραγμένη δηλαδή στέλνει συμπαγή υποσύνολα της G σε φραγμένα σύνολα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή. Παρατηρούμε πρώτα οτι για κάθε $v \in \mathcal{H}$ η απεικόνιση $g \to \rho(g)v$ από την G στον $\mathcal{H}$ είναι συνεχής. Όταν λοιπόν K είναι ένα συμπαγές υπο-σύνολο της G η οικογένεια τελεστών $\{\rho(g)\}_{g \in K}$ θα είναι κατά σημείο φραγμένη δηλαδή $sup\{\|\rho(g)v\| : g \in K\} < +\infty$ για κάθε $v \in \mathcal{H}$. Άρα από το θεώρημα *Banach-Steinhaus* θα έχουμε $sup\{\|\rho(g)\| : g \in K\} < +\infty$ ή ισοδύναμα το σύνολο $\rho(K)$ είναι φραγμένο. □

Ένα προφανές πόρισμα αυτής της πρότασης είναι οτι όταν η G είναι συμπαγής τότε το $\rho(G)$ είναι φραγμένο σύνολο. Συνεπώς θα υπάρχει M τέτοιο ώστε $\|\rho(g)\| \leq M$ και συνεπώς εύκολα δείχνουμε οτι για κάθε $g \in G$:

$$\frac{1}{M} \leq \|\rho(g)\| \leq M$$

Τώρα δείχνουμε μια ισοδυναμία για την συνθήκη συνέχειας μιας αναπαράστασης που θα μας φανεί χρήσιμη στο αμέσως επόμενο θεώρημα:

Πρόταση. *Έστω G μια τοπολογική ομάδα και $\rho : G \to U(\mathcal{H})$[6] ένας ομομορφισμός όπου $\mathcal{H}$ είναι ένας χώρος Hilbert. Τότε η απεικόνιση $(g, v) \mapsto \rho(g)v$ είναι συνεχής αν και μόνο αν $\|\rho(g)v - v\| \to 0$ καθώς $g \to 1$.*

---

[5] Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε στοιχείο της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ με ένα μοναδικό στοιχείο του $[0, 1)$

[6] Το $U(\mathcal{H})$ είναι το σύνολο όλων των μοναδιαίων τελεστών του $\mathcal{H}$

Απόδειξη. Προφανώς αν η απεικόνιση $(g, v) \mapsto \rho(g)v$ είναι συνεχής τότε $\|\rho(g)v - v\| \to 0$ καθώς $g \to 1$. Αντιστρόφως τώρα έστω $\varepsilon > 0$ και $h \in G$. Τότε θα υπάρχει περιοχή του μοναδιαίου στοιχείου $e \in G$ έστω η V τέτοια ώστε:

$$\|\rho(g)v - v\| < \frac{\varepsilon}{2\|\rho(h)\|}$$

Ακόμα αν $w \in \mathcal{H}$ τότε θα έχουμε:

$$\|\rho(g)v - \rho(h)w\| \leq \|\rho(h)\| \cdot \|\rho(h^{-1}g)w - w\| + \|\rho(g)v - \rho(g)w\|$$

Όμως αφού για κάθε $g \in G$ έχουμε $\rho(g) \in U(\mathcal{H})$ έχουμε:

$$\|\rho(g)v - \rho(h)w\| \leq \|\rho(h)\| \cdot \|\rho(h^{-1}g)w - w\| + \|v - w\| < \varepsilon$$

για $(g, v) \in V \times \mathcal{B}_{\|\cdot\|}(w, \varepsilon/2)$. Άρα η $(g, v) \mapsto \rho(g)v$ είναι συνεχής. □

Είναι εύκολο να δούμε οτι αν, πιο γενικά, ο ομομορφισμός ρ είναι φραγμένος (δηλαδή αν το $\rho(G)$ είναι φραγμένο σύνολο) τότε η παραπάνω πρόταση πάλι ισχύει.

Ανακαλούμε οτι οι αναπαραστάσεις αυτές ορίστηκαν από την δράση τους σε στοιχεία του $L^2(G)$ κατά σημείο οπότε θα πρέπει να εξετάσουμε οτι αν αλλάξουμε την συνάρτηση σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν δεν θα πάρουμε διαφορετικό αποτέλεσμα. Θα απόδείξουμε λοιπόν οτι οι κανονικές αναπαραστάσεις είναι καλά ορισμένες:

Θεώρημα. *Οι δεξιά και αριστερά κανονικές αναπαραστάσεις της G είναι καλά ορισμένες μοναδιαίες αναπαραστάσεις.*

Απόδειξη. Θα δουλέψουμε μόνο με την δεξιά κανονική αναπαράσταση ρ_G. Η απόδειξη για την αριστερή κανονική αναπαράσταση είναι όμοια. Αρχικά παρατηρούμε οτι η ρ_G είναι καλά ορισμένη γιατί αν $f = k$ σχεδόν παντού τότε $\rho_G(g)f = \rho_G(g)k$ σχεδόν παντού από τις ιδιότητες του μέτρου *Haar*. Επιπλέον πάλι από τις ιδιότητες του μέτρου *Haar* θα έχουμε

$$\|\rho_G(g)f\|_{L^2}^2 = \int_G |f(x \cdot g)|^2 d\mu(x) = \int_G |f(x)|^2 d\mu(x) = \|f\|_{L^2}^2$$

και άρα ο $\rho_G(g)$ είναι μοναδιαίος τελεστής για κάθε $g \in G$. Είναι αρκετά εύκολο να επαληθεύσουμε οτι η $\rho : G \to GL(\mathcal{H})$ είναι ομομορφισμός. Άρα το μόνο που μας μένει να εξετάσουμε είναι η συνέχεια της απεικόνισης $(g, v) \mapsto \rho_G(g)v$ ή ισοδύναμα να αποδείξουμε οτι $\|\rho_G(g)v - v\| \to 0$ καθώς $g \to 1$. Έστω $\phi \in C_c(G) \subseteq L^2(G)$. Αν $K = supp(F)$ (όπου $F(x) = \phi(x \cdot g) - \phi(x)$) τότε βλέπουμε τα παρακάτω: $\rho_G(g)\phi(x) \to \phi(x)$ για $g \to 1$ και για κάθε $x \in G$ (από την συνέχεια της ϕ), $|\phi(x \cdot g) - \phi(x)|^2 \leq 4\|\phi\|_\infty^2$ και τέλος αφού το K είναι συμπαγές έχουμε $\|\phi\|_\infty \in L^2(K, \mu)$. Άρα το θεώρημα της κυριαρχιμένης σύγκλισης μπορεί να εφαρμοστεί και θα έχουμε $\rho_G(g)\phi \to \phi$ στον L^2. Τώρα αφού ο χώρος $C_c(G)$ είναι πυκνός στον $L^2(G)$ για κάθε $\phi \in L^2(G)$ υπάρχει $\phi_\varepsilon \in C_c(G)$ τέτοιο ώστε $\|\phi - \phi_\varepsilon\|_{L^2} < \varepsilon/4$. Συνεπώς θα έχουμε:

$$\|\rho_G(g)\phi - \phi\|_{L^2} \leq \|\rho_G(g)\phi - \rho_G(g)\phi_\varepsilon\|_{L^2} + \|\rho_G(g)\phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L^2} + \|\phi - \phi_\varepsilon\|_{L^2} \Rightarrow$$

$$\|\rho_G(g)\phi - \phi\|_{L^2} \leq \|\rho_G(g)\phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L^2} + 2\|\phi - \phi_\varepsilon\|_{L^2}$$

Πέρνοντας το g αρκετά κοντά στο 1 έτσι ώστε να έχουμε:

$$\|\rho_G(g)\phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L^2} < \varepsilon/2$$

καταλήγουμε στο

$$\|\rho_G(g)\phi - \phi\|_{L^2} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Άρα η ρ_G είναι αναπαράσταση της G. $\square$

Το θεώρημα αυτό μπορεί να γενικευτεί. Αν $\mathcal{X}$ είναι ομοιογενής χώρος της G με ένα αναλλοίωτο (*Radon*) μέτρο m τότε ο μπορεί να δεχθεί οτι ο χώρος $C_c(\mathcal{X})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(\mathcal{X})$ και τότε έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας ομοιογενής χώρος της G. Οι δεξιά και αριστερά κανονικές αναπαραστάσεις της G ως πρός τον $\mathcal{X}$ που ορίζονται ως*

$$\pi_{G,\mathcal{X}}(g)f(x) = f(x \cdot g)$$

και

$$\lambda_{G,\mathcal{X}}(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

για κάθε $g \in G$ και $f \in L^2(G)$ είναι καλά ορισμένες μοναδιαίες αναπαραστάσεις.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι ουσιαστικά η ίδια με αυτήν του προηγούμενου.

Θα αναφέρουμε τώρα δυο βασικούς τρόπους κατασκευής νέων αναπαραστάσεων από παλιές. Για αρχή θα περιοριστούμε στις αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης αλλά ο πρώτος τρόπος κατασκευής θα επεκταθεί σε απειροδιάστατες αναπαραστάσεις και σε αυτή την περίπτωση θα φανεί πολυ χρήσιμος:

Έστω λοιπόν π_1 και π_2 δύο αναπαραστάσεις της G πεπερασμένης διάστασης που δρουν πάνω στους χώρους V_1 και V_2 αντίστοιχα. Κατά τα γνωστά σχηματίζουμε το ευθύ άθροισμα $V_1 \oplus V_2$ και το τανυστικό γινόμενο $V_1 \otimes V_2$. Τότε οι π_1 και π_2 μπορούν να 'συδυαστούν' και να επεκταθούν με φυσιολογικό τρόπο σε αυτούς τους χώρους. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τις αναπαραστάσεις $\pi_1 \oplus \pi_2$ που δρά πάνω στον $V_1 \oplus V_2$ και ορίζεται ως:

$$\pi_1 \oplus \pi_2(g)(v + w) = \pi_1(g)v + \pi_2(g)w$$

όπου $v + w \in V_1 \oplus V_2$. Όμοια ορίζουμε την αναπαράσταση $\pi_1 \otimes \pi_2$ πάνω στον $V_1 \otimes V_2$. Πιο συγκεκριμένα η $\pi_1 \otimes \pi_2$ καθορίζεται από την δράση της στα μονώνυμα του $V_1 \otimes V_2$:

$$\pi_1 \otimes \pi_2(g)(v \otimes w) = \pi_1(g)v \otimes \pi_1(g)w$$

όπου $v \otimes w \in V_1 \otimes V_2$.

Είναι εύκολο να αποδείξουμε οτι οι $\pi_1 \oplus \pi_2$ και $\pi_1 \otimes \pi_2$ είναι όντως αναπαραστάσεις της G. Άλλα απλά παραδείγματα τέτοιων κατασκευών περιλαμβάνουν την κατασκευή της δυϊκής αναπαράστασης όπου βρίσκουμε με φυσιολογικό τρόπο μια αναπαράσταση πάνω στον δυϊκό χώρο του αρχικού χώρου, την κατασκευή πεπερασμένων συμμετρικών δυνάμεων μιας αναπαράστασης όπου βρίσκουμε μια αναπαράσταση πάνω σε μια συμμετρική δύναμη του αρχικού χώρου κ.α. Γενικότερα αξίζει να αναφέρουμε οτι μια καλή ιδιότητα που έχουν οι αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης είναι η ακόλουθη:

Διαισθητικά μιλώντας αν έχουμε μια κατασκευή από την θεωρία της γραμμικής άλγεβρας (όπως η κατασκευή του δυϊκού χώρου ή του τανυστικού γινομένου δύο γραμμικών χώρων) τότε αυτή η κατασκευή μπορεί να επεκταθεί κατά μια έννοια στις αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης. Η ιδέα αυτή μπορεί να γίνει απόλυτα αυστηρή με την χρήση του φορμαλισμού της θεωρίας κατηγοριών.

Χρησιμοποιήσαμε εδώ αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης γιατί ορισμένες φορές οι κατασκευές της γραμμικής άλγεβρας δεν γενικεύονται εύκολα για χώρους *Banach*. Για παράδειγμα το τανυστικό γινόμενο δυο χώρων *Banach* μπορεί να κατασκευαστεί με δυο διαφορετικούς αλλά μη ισοδύναμους τρόπους. Όμως ακόμα και όταν η κατασκευή ορίζεται εύκολα και για χώρους *Banach* για να μπορέσουμε να την επεκτείνουμε εν γένει θα πρέπει να προσθέσουμε μερικούς περιορισμούς στην αρχική αναπαράσταση. Για παράδειγμα την κατασκευή της δυϊκής αναπαράστασης μπορούμε να την κάνουμε μόνο όταν η αρχική αναπαράσταση είναι φραγμένη (δηλαδή η εικόνα της είναι φραγμένη)[7]. Όταν όμως ο χώρος είναι *Hilbert* τα πράγματα γίνονται πιο εύκολα και ιδίως αν περιοριστούμε στις μοναδιαίες αναπαραστάσεις. Για παραδειγμα η κατασκευή της δυϊκής αναπαράστασης δουλεύει πάντα για μοναδιαίες αναπαραστάσεις γιατί προφανώς είναι φραγμένες. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι το ακόλουθο:

Αν έχουμε μια οικογένεια μοναδιαίων αναπαραστάσεων $(\pi_i, \mathcal{H}_i)_{i\in I}$ τότε κατά τα γνωστά κατασκευάζουμε τον χώρο $\hat{\oplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$. Τότε υπάρχει μια φυσιολογική επέκταση των $(\pi_i)_{i\in I}$ και θα έχουμε μια αναπαράσταση Π πάνω στον $\hat{\oplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ που ορίζεται ως:

$$\Pi(g)v = \sum_{i\in I} \pi_i(g)v_i$$

για κάθε $v = \sum_{i\in I} v_i \in \hat{\oplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$. Είναι σχετικά εύκολο να δείξουμε οτι η Π είναι όντως μια μοναδιαία αναπαράσταση. Συνήθως γράφουμε $\Pi = \hat{\oplus}_{i\in I}\pi_i$.

Άρα για μια οικογένεια μοναδιαίων αναπαραστάσεων $(\pi_i)_{i\in I}$ μπορέσαμε να τις αθροίσουμε και να φτιάξουμε μια καινούργια αναπαράσταση που, όπως είναι εύκολο να δούμε, περιέχει κάθε μία από τις π_i ως υπο-αναπαραστάσεις. Επίσης είναι φανερό ότι κάθε άλλη αναπαράσταση που περιέχει τις $(\pi_i)_{i\in I}$ θα περιέχει και την $\hat{\oplus}_{i\in I}\pi_i$.

Με αυτές τις έννοιες ένα εύλογο ερώτημα γεννιέται. Πως συνδέονται οι έννοιες της αναγωγιμότητας μιας αναπαράστασης και η έννοια του αθροίσματος αναπαραστάσεων;

Προφανώς όταν η αναπαράσταση π είναι το ευθύ άθροισμα $\hat{\oplus}_{i\in I}\pi_i$ τότε δεν θα είναι ανάγωγη. Αντιστρόφως τώρα ας υποθέσουμε ότι η π είναι μοναδιαία. Τότε θα έχει ένα μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο έστω τον V. Επειδή η π είναι μοναδιαία εύκολα βλέπουμε ότι και το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^{\perp}$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος. Άρα θα έχουμε $\mathcal{H}_\pi = V \oplus V^{\perp}$ και συνεπώς η π είναι το ευθύ άθροισμα $\pi\restriction_V \oplus \pi\restriction_{V^{\perp}}$ όπου οι $\pi\restriction_V$ και $\pi\restriction_{V^{\perp}}$ είναι ο περιορισμός της π στους χώρους V και $V^{\perp}$ αντίστοιχα. Άρα μια μοναδιαία αναπαράσταση δεν είναι ανάγωγη αν και μόνο γράφεται σαν άθροισμα δυο αναπαραστάσεων.

Είναι φανερό ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί. Αν η $\pi\restriction_V$ δεν είναι ανάγωγη τότε θα υπάρχει μη τετριμμένος αναλλοίωτος υπόχωρος του V έστω ο W και προφανώς αυτός ο χώρος θα είναι αναλλοίωτος κάτω από την π και άρα θα έχουμε $\pi = \pi\restriction_W \oplus \pi\restriction_{W^{\perp}} \oplus \pi\restriction_{V^{\perp}}$ κ.ο.κ. Όταν ο αρχικός χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση

[7] Δεν δείχνουμε αυτό το αποτέλεσμα γιατί δεν αναφέραμε καν τον ορισμό της δυϊκής αναπαράστασης. Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στα [1],[5]

η διαδικασία αυτή πρέπει να σταματά σε κάποιο βήμα και συνεπώς θα έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω μια αναπαράσταση π πεπερασμένης διάστασης. Τότε*

$$\pi = \oplus_{i=1}^{m} \rho_i$$

για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και για κάποιες ανάγωγες (υπο-) αναπαραστάσεις ρ_i.

Στην γενική περίπτωση το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει ακόμα και αν επιτρέψουμε το άθροισμα να είναι άπειρο. Θα δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα αναπαράστασης όταν θα μιλήσουμε για την θεωρία αναπαραστάσεων σε μη συμπαγείς ομάδες. Παρόλα αυτά όταν επιτρέψουμε στο άθροισμα να είναι άπειρο (δηλαδή αν πάρουμε το ευθύ άθροισμα *Hilbert*) το θεώρημα ισχύει για συμπαγείς ομάδες και αυτό είναι ένα πόρισμα του θεωρήματος *Peter-Weyl*.

Παρατήρηση. Είπαμε πριν ότι ένα από τα βασικά προβλήματα της θεωρίας αναπαραστάσεων είναι η διάσπαση του χώρου $L^2(G)$ σε απλά κομμάτια. Έχοντας τώρα ορίσει τις κατάλληλες κατασκευές μπορούμε να δώσουμε μια πιθανή ερμηνεία του τι μπορεί να σημαίνει αυτό με αυστηρούς μαθηματικούς όρους.

Μια αρχική προσπάθεια διάσπασης του $L^2(G)$ σε απλά κομμάτια θα ήταν να προσπαθήσουμε να τον εκφράσουμε ως $L^2(G) = \hat{\oplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ όπου οι $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια αναλλοίωτων ανάγωγων υποχώρων της ρ_G. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να γράψουμε την αναπαράσταση ρ_G ως $\rho_G \simeq \hat{\oplus}_{i\in I}\pi_i$ όπου οι π είναι ανάγωγες αναπαραστάσεις ή ισοδύναμα $\rho_G = \hat{\oplus}_{i\in I}\rho_i$ όπου οι ρ_i είναι ανάγωγες υποαναπαραστάσεις της ρ_G.

Δείχνουμε τώρα ένα πάρα πολύ σημαντικό λήμμα το οποίο οφείλεται στον *Schur*:

Λήμμα του *Schur*. *Αν η G είναι τοπολογική ομάδα και π_1, π_2 δυο ανάγωγες μοναδιαίες μη-ισόμορφες αναπαραστάσεις της G τότε $Hom_G(\pi_1, \pi_2) = 0$. Ακόμα έχουμε $Hom_G(\pi_1, \pi_1) = \mathbb{C} \cdot id_{\mathcal{H}_1}$.*

Πριν την απόδειξη αξίζει να αναφέρουμε οτι αν οι αναπαραστάσεις π_1 και π_2 είναι πεπερασμένης διάστασης τότε το λήμμα αυτό θα ήταν τετριμμένο γιατί ο πυρήνας και η εικόνα ενός τελεστή $\Phi \in Hom_G(\pi_1, \pi_2)$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι των π_1 και π_2 αντίστοιχα. Για το δεύτερο μέρος αν j είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή $\Phi \in Hom_G(\pi_1, \pi_1)$ τότε $\Phi - j \cdot id_{\mathcal{H}_1} = 0$ [8] γιατί $\Phi - j \cdot id_{\mathcal{H}_1} \in Hom_G(\pi_1, \pi_1)$ και όπως είπαμε ο πυρήνας είναι αναλλοίωτος υπόχωρος.

Η απόδειξη στην γενική περίπτωση δεν είναι τόσο απλή αλλά η φιλοσοφία μένει ίδια για τον δεύτερο ισχυρισμό: θα χρησιμοποιήσουμε κάποια εκδοχή του φασματικού θεωρήματος για να βρούμε ένα αναλλοίωτο υπόχωρο και να καταλήξουμε με αυτόν σε άτοπο.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος. Έστω λοιπόν $\Phi \in Hom_G(\pi_1, \pi_1)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι ο Φ είναι αυτοσυζυγής (γιατί μπορούμε να γράψουμε $\Phi = A + i \cdot B$ όπου οι A και B είναι αυτοσυζυγείς και στοιχεία του $Hom_G(\pi_1, \pi_1)$). Θέτουμε ως $\mathcal{A}_\Phi$ την κλειστή υπο-άλγεβρα της $End(\mathcal{H}_1)$ που παράγεται από τα Φ και Φ^*. Τότε από το θεώρημα αναπαράστασης

[8] Φυσικά ο $\mathcal{H}_1$ είναι ο χώρος που δρα η π_1

Gelfand η άλγεβρα αυτή είναι ισομορφική με την $C(\sigma(\Phi))$ όπου $\sigma(\Phi)$ είναι το φάσμα του τελεστή Φ. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει ένας ισομορφισμός *-αλγεβρών $T : C(\sigma(\Phi)) \to \mathcal{A}_\Phi$ που είναι επιπλέον και ισομετρία.

Αν λοιπόν ο Φ δεν είναι πολλαπλάσιο του $id_{\mathcal{H}_1}$ τότε το $\sigma(\Phi)$ θα περιέχει τουλάχιστον δυο στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(\Phi)$. Υπενθυμίζουμε ακόμα οτι το σύνολο $\sigma(\Phi) \subseteq \mathbb{C}$ είναι συμπαγές. Άρα αν U_1 είναι μια ανοικτή περιοχή του λ_1 που δεν περιέχει το λ_2 τότε θα υπάρχει μια $f \in C(\sigma(\Phi))$ που είναι μηδέν στο U_1 αλλά όχι ταυτοτικά μηδέν. Μέσω του ισομορφισμού T ορίζεται ένας τελεστής $T(f) \in \mathcal{A}_\Phi$. Η βασική παρατήρηση είναι ότι ο χώρος $T(f)\mathcal{H}_1$ είναι αναλλοίωτος και το ίδιο ισχύει και για την κλειστότητά του. Πράγματι ο τελεστής $T(f)$ είναι το όριο τελεστών της μορφής $P(\Phi, \Phi^*)$ όπου το P είναι πολυώνυμο δυο μεταβλητών με συντελεστές στον $\mathbb{C}$. Είναι φανερό οτι κάθε τελεστής $P(\Phi, \Phi^*)$ αντιμετατίθεται με όλους τους τελεστές $\pi_1(g)$ και άρα και ο τελεστής $T(f)$ θα αντιμετατίθεται με τους τελεστές $\pi_1(g)$. Αυτό έχει σαν συνέπεια οτι ο χώρος $T(f)\mathcal{H}_1$ και συνεπώς ο χώρος $W = cl_{\mathcal{H}_1}(T(f)\mathcal{H}_1)$ είναι αναλλοίωτος. Αφού λοιπόν η π_1 είναι ανάγωγη θα πρέπει να έχουμε οτι $W = \mathcal{H}_1$. Όμως αν πάρουμε τώρα μια $h \in C(\sigma(\Phi))$ με h με τον φορέα να είναι υποσύνολο του U_1 τότε είναι φανερό οτι θα έχουμε $T(h)T(f)\mathcal{H}_1 = T(hf)\mathcal{H}_1 = \{0\}$ (γιατί $h \cdot f = 0$). Άρα $T(h)\mathcal{H}_1 = \{0\}$ ενώ $h \not\equiv 0$ κάτι που δεν μπορεί να ισχύει. Φτάσαμε σε παράδοξο γιατί υποθέσαμε οτι το $\sigma(\Phi)$ είχε τουλάχιστον δυο στοιχεία. Συνεπώς θα πρέπει να υπάρχει ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\Phi = \lambda \cdot id_{\mathcal{H}_1}$ και άρα $Hom_G(\pi_1, \pi_1) = \mathbb{C} \cdot id_{\mathcal{H}_1}$.

Τώρα ο δεύτερος ισχυρισμός αποδεικνύεται πολύ εύκολα. Έστω $\Phi \in Hom_G(\pi_1, \pi_2)$ με $\Phi \neq 0$ και $\Phi^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ ο συζυγής του Φ. Εύκολα μπορούμε να δούμε οτι και ο Φ^* σέβεται την δράση της G και συνεπώς $\Phi^* \in Hom_G(\pi_2, \pi_1)$. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στον τελεστή $\Phi^*\Phi \in Hom_G(\pi_1, \pi_1)$. Άρα θα υπάρχει ένας $c \in \mathbb{C}$ με $\Phi^*\Phi = c \cdot id_{\mathcal{H}_1}$. Αυτό συνεπάγεται οτι

$$\|\Phi v\|^2 = c \cdot \|v\|^2$$

και άρα ο $\frac{1}{c}\Phi$ είναι ισομετρία $\Rightarrow$ ο Φ^{-1} υπάρχει και εύκολα βλέπουμε οτι ανήκει στον $Hom_G(\pi_2, \pi_1)$. Άρα $\pi_1 \simeq \pi_2$, άτοπο και συνεπώς $Hom_G(\pi_1, \pi_2) = 0$.

□

Το λήμμα του *Schur* ουσιαστικά μας λέει ότι αν έχουμε δύο διαφορετικές (μη ισόμορφες δηλαδή) ανάγωγες αναπαραστάσεις τότε αυτές δεν 'συγκρίνονται'. Επιπλέον μας λέει ότι οι αυτομορφισμοί μιας ανάγωγης αναπαράστασης έχουν μια απλή μορφή.

Αυτό το αποτέλεσμα έχει πολλά χρήσιμα πορίσματα. Για παράδειγμα μπορούμε εύκολα να δούμε οτι:

Πόρισμα. *Έστω π μια αναπαράσταση και V,W δυο αναλλοίωτοι και ανάγωγοι υπόχωροί της. Αν $\pi \downharpoonright_V$ και $\pi \downharpoonright_W$ οι περιορισμοί της π στους αντίστοιχους χώρους τότε είτε $\pi \downharpoonright_V = \pi \downharpoonright_W$ ή $V \perp W$*

Η απόδειξη είναι απλή αν παρατηρήσουμε οτι η προβολή από τον V στον W είναι στοιχείο του $Hom_G(\pi \downharpoonright_V, \pi \downharpoonright_W)$. Οπότε κατά μια έννοια οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της π είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Το πιο σημαντικό πόρισμα του λήμματος του *Schur* είναι το ακόλουθο:

Πόρισμα. *Κάθε ανάγωγη μοναδιαία αναπαράσταση μιας αβελιανής ομάδας είναι μονοδιάστατη.*

Αναφέρουμε πρώτα οτι αν μια αναπαράσταση $(\pi, \mathcal{H})$ είναι μονοδιάστατη τότε είναι προφανές ότι $\pi(g) = \mathcal{J}(g) id_H$ όπου $\mathcal{J}$ είναι ένας ομομορφισμός από την G στο $\mathbb{C}^{\times}$. Είναι εύκολο να δούμε πως η π είναι μοναδιαία αν το $\mathcal{J}(g)$ έχει μέτρο 1 για κάθε $g \in G$.

Απόδειξη. Έστω π αναπαράσταση της G και $h \in G$. Τότε ο τελεστής $\pi(h)$ αντιμετατίθεται με όλους τους τελεστές $\pi(g)$ με $g \in G$ γιατί η ομάδα είναι αβελιανή. Συνεπώς θα έχουμε $\pi(h) \in Hom_G(\pi, \pi)$. Άρα από το λήμμα του *Schur* θα υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ με $\pi(h) = c \cdot id_H$ όπου φυσικά ο $\mathcal{H}$ είναι ο χώρος που δρά η π. Αυτό μας δείχνει οτι η π είναι μονοδιάστατη.

□

Με αυτό το πόρισμα μπορούμε να βρούμε όλες τις μοναδιαίες ανάγωγες αναπαραστάσεις του $\mathbb{R}$:

Πρόταση. *Όλες οι ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις του $\mathbb{R}$ είναι οι εξείς:*

$$\chi_{\xi}(t) = e^{i\xi t} \tag{1.1}$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω χ μια μοναδιαία ανάγωγη αναπαράσταση του $\mathbb{R}$. Από το παραπάνω πόρισμα μπορούμε να δούμε αυτήν την αναπαράσταση ως ένα συνεχή ομομορφισμό $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{\times}$. Θέτουμε:

$$\Psi(x) = \int_0^x \chi(t) dt$$

Η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς καλά ορισμένη και παραγωγίσιμη. Παρατηρούμε ακόμα οτι η Ψ δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδέν (γιατί το ίδιο θα ίσχυε και για την παράγωγό της). Έστω λοιπόν ένα t_0 με $\Psi(t_0) \neq 0$. Τότε εύκολα επαληθεύεται οτι:

$$\chi(x) = \frac{\Psi(x + t_0) - \Psi(x)}{\Psi(t_0)}$$

Άρα η χ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας τώρα τον ορίσμο της παραγώγου βρίσκουμε οτι το χ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\chi'(x) = \chi'(0)\chi(x)$$

με $\chi(0) = 1$. Άρα $\chi_{\xi}(t) = e^{At}$ για $A = \chi'(0)$. Αφού πρέπει $|\chi(t)| = 1$ για κάθε t θα έχουμε $A = i\xi$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$. Τέλος αντιστρόφως βλέπουμε οτι κάθε συνάρτηση της μορφής (1) είναι μια μοναδιαία αναπαράσταση του $\mathbb{R}$. □

Επειδή για $\xi = 2\pi m$ όπου $m \in \mathbb{Z}$ η αντίστοιχη αναπαράσταση είναι συνάρτηση περιόδου 1 θα έχουμε μια επαγώμενη συνάρτηση στην συμπαγή ομάδα $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Αυτή η επαγώμενη συνάρτηση θα είναι μια μοναδιαία αναπαράσταση της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Οπότε παίρνουμε μια οικογένεια από ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και όταν αναπαραστήσουμε κάθε σημείο της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ από ένα $t \in [0, 1)$ αυτές έχουν την μορφή:

$$\chi_m(t) = e^{2\pi i m t}$$

όπου $t + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{Z}$. Μάλιστα είναι εύκολο να δούμε οτι αυτές είναι και οι μόνες ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1.4 Συμπαγείς ομάδες

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε το πιο βασικό θεώρημα της θεωρίας αναπαραστάσεων συμπαγών ομάδων, το θεώρημα *Peter-Weyl*. Αν και δεν θα το αποδείξουμε εδώ θα αποδείξουμε μερικά θεωρήματα που χρησιμοποιούνται με πολύ ουσιαστικό τρόπο στην απόδειξη του θεωρήματος *Peter-Weyl*.

Πρώτα αποδεικνύουμε ένα θεώρημα που δείχνει πόσο καλά συμπεριφέρονται οι αναπαραστάσεις μιας συμπαγούς ομάδας:

Πρόταση. *Όταν η G είναι συμπαγής και η $(\pi, \mathcal{H})$ είναι μια αναπαράσταση σε ένα χώρο Hilbert τότε η π είναι μοναδιαία αναπαράσταση ως προς ένα άλλο ισοδύναμο εσωτερικό γινόμενο.*

Απόδειξη. Αφού η ομάδα είναι συμπαγής πέρνουμε ένα μέτρο *Haar* μ ολικής μάζας 1 ($\mu(G) = 1$)). Ακόμα ξέρουμε οτι θα υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε $1/M \leq \|\pi(g)\| \leq M$. Τώρα θέτουμε:

$$(v|w)_\pi = \int_G (\pi(g)v|\pi(g)w) d\mu(g)$$

Είναι αρκέτα εύκολο να ελέγξουμε οτι το $(-|-)_\pi$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Μάλιστα οτι οι τελεστές $\pi(g)$ διατηρούν το $(-|-)_\pi$ (εδώ το γεγονός οτι το μέτρο είναι από δεξιά αναλλοίωτο παίζει σημαντικό ρόλο) και συνεπώς οι τελεστές $\pi(g)$ είναι μοναδιαίοι ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο.

Θα δείξουμε τώρα οτι η νόρμα που επάγει το νέο εσωτερικό γινόμενο είναι ισοδύναμη με την νόρμα που επάγει το ¨παλιό¨ εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε πρώτα οτι

$$\frac{1}{M}\|v\| = \frac{1}{M}\|\pi(g^{-1})\pi(g)v\| \leq \frac{1}{M} M\|\pi(g)v\| = \|\pi(g)v\|$$

Άρα για κάθε $g \in G$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{M}\|v\| \leq \|\pi(g)v\| \leq M\|v\| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{M^2}\|v\|^2 \leq (\pi(g)v, \pi(g)v) \leq M^2\|v\|^2$$

και ολοκληρώνοντας αυτήν την ανίσωση πέρνουμε:

$$\frac{1}{M^2}\|v\|^2 \leq (v, v)_\pi \leq M^2\|v\|^2$$

Άρα η νόρμα $\|v\|_\pi = \sqrt{(v, v)_\pi}$ είναι ισοδύναμη με την αρχική νόρμα.

□

Η τεχνική που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη (δηλαδή όταν πήραμε τον 'μέσο όρο' του εσωτερικού γινομένου για να φτιάξουμε ένα αναλλοίωτο) είναι αρκετά σημαντική. Η βασική ιδέα της είναι η εξής: Όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα αντικείμενο ενός συγκεκριμένου τύπου (π.χ. ένα εσωτερικό γινόμενο ή μια μετρική) το οποίο είναι άναλλοίωτο' κάτω από την δράση μιας συμπαγούς ομάδας (με ολικό όγκο=1) τότε μπορούμε να πάρουμε το ολοκληρώσουμε ως προς το μέτρο *Haar*. Μετά δείχνουμε οτι το καίνουργιο αντικείμενο είναι του ίδιου τύπου (π.χ. είναι πάλι εσωτερικό γινόμενο ή μετρική) και τότε το αντικείμενο αυτό θα είναι αναλλοίωτο κάτω από την δράση της ομάδας.

Παρατήρηση. Από το λήμμα του *Schur* το εσωτερικό γινόμενο που μας δίνει το παραπάνω θεώρημα είναι μοναδικό *modulo* μια πολλαπλασιαστική σταθερά.

Τώρα ορίζουμε μια βασίκη κατηγορία συναρτήσεων που η χρήση τους στην απόδειξη του θεωρήματος *Peter-Weyl* είναι πάρα πολύ σημαντική:

Ορισμός. *Έστω $(\pi, \mathcal{H})$ μια αναπαράσταση της G και $\lambda \in \mathcal{H}^*$, $w \in \mathcal{H}$. Τότε ορίζουμε την συνάρτηση:*

$$f_{v,\lambda}(g) = \lambda(\pi(g)v)$$

Συναρτήσεις πάνω στην G αυτής της μορφής λέγονται matrix coefficients της π.

Προφανώς αν ο $\mathcal{H}$ είναι χώρος *Hilbert* τότε $\exists w \in \mathcal{H}$ με $f_{v,\lambda}(g) = (\pi(g)v|w)$. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $f_{v,w}$ αντί για $f_{v,\lambda}$.

Παρατήρηση. Ο λόγος γι αυτό το όνομα αυτών των συναρτήσεων είναι ο εξής:

Αν η π είναι πεπερασμένης διάστασης μοναδιαία αναπαράσταση τότε επιλέγοντας μια βάση του χώρου που δρα έστω την $(e_j)_{j=1}^m$ μπορούμε κατά τα γνωστά να απεικονίσουμε κάθε τελεστή $\pi(g)$ ως ένα πίνακα $m \times m$. Τα αντίστοιχα *matrix coefficients* f_{e_i,e_j} θα είναι ακριβώς οι συντελεστές (*coefficients*) του πίνακα αυτού.

Είναι προφανές οτι τα *matrix coefficients* μιας αναπαράστασης είναι συνεχείς συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα όταν η ομάδα είναι συμπαγής τότε είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αυτή η παρατήρηση ουσιαστικά μας δίνει το παρακάρω θεώρημα:

Θεώρημα. *Αν π είναι μοναδιαία αναπαράσταση της G, ανάγωγη και πεπερασμένης διάστασης τότε είναι ύπο-αναπαράσταση της κανονικής.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{H}$ ο χώρος που δρα η π και έστω $w \in \mathcal{H}, w \neq 0$. Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\Phi_w : v \mapsto f_{v,w}$$

Τότε είναι φανερό οτι ο Φ_w είναι ένας γραμμικός συνεχής τελεστής από τον χώρο $\mathcal{H}$ στον χώρο $L^2(G)$. Μάλιστα ισχύει $\Phi_w \in Hom_G(\pi, \rho_G)$. Πράγματι έχουμε:

$$\rho_G(h)f_{v,w}(g) = f_{v,w}(g \cdot h) = (\pi(g)\pi(h)v|w) = \Phi_w(\pi(h)v)$$

Τώρα από το λήμμα του *Schur* εφόσον ο Φ_w δεν είναι ταυτοτικά μηδέν (γιατί $\Phi_w(w)(1) = f_{w,w}(1) = \|w\|^2 \neq 0$) θα πρέπει να είναι ένα προς ένα. Επιπλέον αφού $dim(\mathcal{H}) < +\infty$ η εικόνα $\Phi_w(\mathcal{H})$ είναι κλειστή στον $L^2(G)$ και προφανώς είναι αναλλοίωτη υπό την ρ_G. Άρα θα έχουμε $\pi \hookrightarrow \rho_G$. □

Από αυτό το θεώρημα αυτό βλέπουμε οτι η κανονική αναπαράσταση της G είναι όντως μια αρκετά μεγάλη αναπαράσταση μιας και περιέχει όλες τις ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις.

Επιπλέον το παραπάνω θεώρημα δείχνει οτι κάθε *matrix coefficient* περιέχεται σε ένα αναλλοίωτο υπόχωρο της κανονικής αναπαράστασης. Πιο συγκεκριμένα έστω π μια μοναδιαία ανάγωγη αναπαράσταση. Τότε ο η κλειστότητα του χώρου που παράγουν τα *matrix coefficients* της π θα είναι αναλλοίωτος χώρος της ρ_G. Ακόμα πιο συγκεκριμένα για σταθερό $w \in \mathcal{H}$ ο χώρος που παράγεται από τις $(f_{v,w})_{v\in\mathcal{H}}$ θα είναι πεπερασμένης διάστασης, αναλλοίωτος και η ρ_G δρά σε αυτόν τον χώρο 'όπως' η π. Αυτό δείχνει οτι από την ορθογωνιότητα των ανάγωγων υπόαναπαραστάσεων οτι τα *matrix coefficients* που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της G είναι ορθογώνια μεταξύ τους (ως στοιχεία του $L^2(G)$).

Τώρα αν θέσουμε ως $V_{\pi,w}$ τον χώρο που παράγεται από τις $(f_{v,w})_{v\in\mathcal{H}}$ τότε μπορεί να δειχθεί οτι ο μέγιστος αριθμός των ' ουσιαστικά διαφορετικών' χώρων (δηλαδή γραμμικά ανεξάρτητων μεταξύ τους) που μπορούμε να πάρουμε κάθως αφήνουμε το w να αλλάζει είναι ακριβώς $dim\pi$. Συνεπώς ο χώρος που παράγεται από *matrix coefficients* της π θα έχει διάσταση $(dim\pi)^2$. Συμβολίζουμε αυτόν τον χώρο με $M([\pi])$.[9].

Οπότε έχουμε μια οικογένεια χώρων $(M([\pi])_{[\pi]\in\hat{G}_f}$ όπου είναι κάθετοι μεταξύ τους και συνεπώς μπορούμε να σχηματίσουμε το $\hat{\bigoplus}_{[\pi]\in\hat{G}_f} M([\pi])$. Δεν ξέρουμε φυσικά αν ο χώρος αυτός μας δίνει όλο τον $L^2(G)$ ούτε και την έσωτερική δομή' των $M([\pi])$ (με ποιό τρόπο δηλαδή σπάει σε άθροισμα *Hilbert* πιο μικρών ανάγωγων υπόχωρων). Την απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα μας την δίνει το θεώρημα *Peter-Weyl*:

Θεώρημα Peter-Weyl. Εστω G μια συμπαγής τοπολογική ομάδα με ολικό μέτρο *Haar* $m(G) = 1$. Τοτε

$$L^2(G) = \hat{\bigoplus}_{[\pi]\in\hat{G}_f} M([\pi])$$

όπου $M([\pi])$ είναι αναλλοίωτος χώρος υπό την κανονική αναπαράσταση και ισομορφικός με το άθροισμα *Hilbert* $dim(\pi)$ χώρων με την ιδιότητα οτι η ρ δρά σε κάθε ένα από αυτούς οπώς η π (δηλαδή η ρ όταν περιόριστεί σε οποιονδήποτε από αυτούς τους χώρους θα είναι ισομορφική με την π).

Το θεώρημα *Peter-Weyl* δηλαδή λύνει το δεύτερο βασικό πρόβλημα της θεωρίας αναπαραστάσεων: την ανάλυση του $L^2(G)$ σε απλά κομμάτια.

Το θεώρημα αυτό έχει πάρα πολλές εφαρμογές και ακόμα πιο σημαντικά πορίσματα. Για παράδειγμα όταν η ομάδα είναι η $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ η εφαρμογή του θεωρήματος *Peter-Weyl* θα μας δώσει την κλασσική ανάλυση σε σείρα *Fourier* περιοδικών συναρτήσεων:

---

[9] Βάλαμε την κλάση ισομορφίας της π στον συμβολισμό γιατί κάθε άλλη αναπαράσταση ισομορφική με την π θα 'παράγει' τον ίδιο χώρο

Στην προηγούμενη ενότητα βρήκαμε όλες τις ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Υπενθυμίζουμε οτι αυτές ήταν οι:

$$\chi_m(t) = e^{2\pi imt}$$

όπου $t + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{Z}$. Τότε θα έχουμε:

$$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \hat{\bigoplus}_{m\in\mathbb{Z}}\mathbb{C} \cdot \chi_m$$

Άρα αν $F \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ τότε θα υπάρχουν αριθμοί a_m έστι ώστε:

$$F = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m\chi_m \Rightarrow$$

$$F(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{2\pi imt}$$

στον L^2. Αν και η ανάλυση *Fourier* ασχολείται και με πιο προχωρημένα θέματα τουλάχιστον ένα βασικό της κομμάτι όπως η ανάλυση σε σειρά *Fourier* και η ανάλυση του $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα αντικείμενο της θεωρίας αναπαραστάσεων.

Θα κοιτάξουμε τώρα μερικά βασικά πορίσματα του θεωρήματος *Peter-Weyl*. Με διαφορά το πιο σημαντικό είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Κάθε μοναδιαία αναπαράσταση της G είναι το Hilbert ευθύ άθροισμα μοναδιαίων ανάγωγων αναπαραστάσεων.*

Άρα κάθε αναπαράσταση αναλύεται σε πιο απλές. Το θεώρημα δείχνει με αυστηρούς όρους αυτό που είχαμε πει στην πρώτη ενότητα οτι δηλαδή οι ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις είναι τα βασικοί λίθοι με τις οποίες χτίζουμε όλες τις υπόλοιπες μοναδιαίες αναπαραστάσεις.

Επιπλέον έχουμε:

Θεώρημα. *Κάθε μοναδιαία ανάγωγη αναπαράσταση της G είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Αυτό το θεώρημα μας δίνει μια άλλη σημαντική συνέπεια του θεωρήματος *Peter-Weyl*:

Γενικά αν μια αναπαράσταση π της G είναι πεπερασμένης διάστασης τότε μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $\chi_\pi(g) = Tr(\pi(g))$. Η απεικόνιση αυτή λέγεται χαρακτήρας της π. Οι χαρακτήρες είναι πάρα πολύ χρήσιμοι στην ανάλυση των αναπαραστάσεων πεπερασμένης διάστασης και εφόσον από το θεώρημα *Peter-Weyl* όλες οι ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις μιας συμπαγούς ομάδας έχουν πεπερασμένη διάσταση μπορούμε να ορίσουμε χαρακτήρες για κάθε τέτοια αναπαράσταση. Ενδεικτικά αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα, χωρίς απόδειξη, για να αναδείξουμε την δύναμή των χαρακτήρων:

Πρόταση. *Έστω π αναπαράσταση της G πεπερασμένης διάστασης. Τότε*

$$\int_G |\chi_\pi(g)|^2 dm(g) = 1$$

αν και μόνο αν η π είναι ανάγωγη.

Τέλος αναφέρουμε μια πιο αναλυτική μορφή του θεωρήματος *Peter-Weyl*:

Θεώρημα. *Για κάθε $\pi \in \hat{G}$ και $(e_i)_{i=1}^{dim(\pi)}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ ορίζουμε τις απεικονίσεις $\phi_{\pi,i,j} = (\pi(g)e_i|e_j)$. Τότε οι $(\phi_{\pi,i,j})_{\pi\in\hat{G}}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $L^2(G)$. Ακόμα αν ορίσουμε τον τελεστή $\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dm(g)$ για κάθε $f \in L^2(G)$ τότε έχουμε την ταυτότητα Parseval-Plancerel:*

$$\|f\|^2_{L^2(G)} = \sum_{\pi\in\hat{G}} dim(\pi)\|\pi(f)\|_{HS}$$

.

Η νόρμα $\| - \|_{HS}$ είναι η νόρμα *Hilbert-Schmidt* του τελεστή $\pi(f)$. Ο τελεστής $T = \int_G f(g)\pi(g)dm(g)$ ορίζεται με το λεγόμενο ασθενές ολοκλήρωμα. Πιο συγκεκριμένα ο τελεστής αυτός είναι ο μοναδικός τελεστής για τον οποίο ισχύει:

$$(Tv|w) = \int_G f(g)(\pi(g)v|w)dm(g)$$

Μπορεί να δειχθεί οτι ο T υπάρχει αν $f \in L^1(G)$. Με λίγο διαφορετικό συμβολισμό θα δούμε στο τελευταίο κεφάλαιο οτι η $\pi(f)$ καθώς το π διατρέχει το $\hat{G}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός *Fourier* της f.

Αφού λοιπόν λύσαμε το πρόβλημα ανάλυσης του $L^2(G)$ σε απλά κομμάτια για να έχουμε πλήρη εικόνα για μια ομάδα θα πρέπει να βρούμε όλες τις μοναδιαίες ανάγωγες αναπαραστάσεις της. Αυτό είναι πολύ πιο δύσκολο και δεν υπάρχει μια γενική διαδιακασία που να μας βρίσκει όλες αυτές τις αναπαραστάσεις. Για συγκεκριμένες κατηγορίες ομάδων όμως, όπως για συμπαγείς ομάδες *Lie*, η γενική λύση αυτού του προβλήματος είναι δυνατή.

Κλείνουμε τώρα την ενότητα αυτή με μία εφαρμογή που δείχνει το πόσο μη τετριμμένη είναι η διαδικασία εύρεσης των ανάγωγων μοναδιαίων αναπαραστάσεων:

Εφαρμογή: Η ομάδα $SO(3)$ και η δράση του στην S^2.

Σκιαγραφούμε εδω την ανάλυση της δράσης της $SO(3)$ πάνω στην σφαίρα και δείχνουμε πως η εφαρμογή του θεωρήματος *Peter-Weyl* και λίγη θεωρία ομάδων *Lie* μπορούν να μας δώσουν με φυσιολογικό τρόπο τις επιφανειακές αρμονικές Y_n^m και να δειξουν οτι αυτές οι συναρτήσεις αποτελούν μια ορθοκανονική βάση για τον $L^2(S^2)$. Επειδή γενικά υπάρχουν πολλές τεχνικές δυσκολίες σε αυτή την ανάλυση (και γενικότερα στην θεωρία αναπαραστάσεων ομάδων *Lie*) θα παραλείψουμε αρκετές μη-τετριμμένες λεπτομέρειες μερικές από τις οποίες θα λυθούν στο επόμενο κεφάλαιο (πλήρεις αναλύσεις την ομάδας υπάρχουν στα [1],[5],[7]. Εδώ ακολουθήσαμε την παρουσίαση του [7]). Κατά τα γνώστα η ομάδα $SO(3)$ είναι το σύνολο όλων των περιστροφών γύρω από ένα συγκεκριμένο άξονα στο $\mathbb{R}^3$. Προφανώς η σφαίρα είναι ένα $SO(3)$-αναλλοίωτο υποσύνολο. Για την ακρίβεια η σφαίρα S^2 είναι ομοιογενής χώρος του $SO(3)$. Μάλιστα η σφαίρα έχει και ένα μέτρο *Radon* το οποίο είναι $SO(3)$-αναλλοίωτο. Το μέτρο αυτό είναι το γνωστό επιφανειακό μέτρο και σε ¨τοπικές συντεταγμένες¨ έχει την μορφή $sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. Επίσης όπως έχουμε αναφέρει και πιο πριν μπορούμε να ¨σηκώσουμε¨ την δράση αυτή από την σφαίρα S^2 στο χώρο συναρτήσεων $C(S^2)$ και κατά επέκταση στον $L^2(S^2)$ (όπου το μέτρο εδώ είναι το επιφανειακό μέτρο). Τώρα θέλουμε να αναλύσουμε την κανονική αναπαράσταση της $SO(3)$ πάνω στον $L^2(S^2)$ και θα το κάνουμε χρησιμοποιώντας τους λεγόμενους απειροστούς τελεστές (*infinitesimal operators*). Έστω τα στοιχεία του $SO(3)$:

$$g_{\omega,0,0} = \text{Περιστροφή με άξονα συμμετρίας τον άξονα } x \text{ και κατά γωνία } \omega$$

$$g_{0,\omega,0} = \text{Περιστροφή με άξονα συμμετρίας τον άξονα } y \text{ και κατά γωνία } \omega$$

$$g_{0,0,\omega} = \text{Περιστροφή με άξονα συμμετρίας τον άξονα } z \text{ και κατά γωνία } \omega$$

Κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία δρούνε πάνω στο $L^2(S^2)$. Γενικότερα αν έχουμε $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τότε:

$$f(g_{\omega,0,0}^{-1} \cdot (x, y, z)) = f(x, ycos\omega + zsin\omega, -ysin\omega + zcos\omega)$$

Ομοίως έχουμε παρόμοιους τύπους και για τα άλλα δυο στοιχεία. Όταν περιοριστούμε στον χώρο $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ μπορούμε να ορίσουμε τον λεγόμενο απειροστό τελεστή που αντιστοιχεί στο $g_{\omega,0,0}$:

$$L_1 = \frac{d}{d\omega}(\rho_{SO(3)}(g_{\omega,0,0}))|_{\omega=0} = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$$

Παρόμοια έχουμε οτι:

$$L_2 = \frac{d}{d\omega}(\rho_{SO(3)}(g_{0,\omega,0}))|_{\omega=0} = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_3 = \frac{d}{d\omega}(\rho_{SO(3)}(g_{0,0,\omega}))|_{\omega=0} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

Αυτοί οι τελεστές δρούνε με τον προφανή τρόπο πάνω στον $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ όμως αφού θέλουμε να περιοριστούμε στην σφαίρα τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες. Τότε οι τελεστές μας έχουν την μορφή:

$$L_1 = sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + cot\vartheta cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L_2 = -cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + cot\vartheta sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L_3 = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

Για να πετύχουμε απλούστερους υπολογισμούς ορίζουμε:

$$L^+ = L_1 + i \cdot L_2 = e^{i\varphi}(-i\frac{\partial}{\partial\vartheta} + cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi})$$

$$L^+- = L_1 - i \cdot L_2 = e^{-i\varphi}(i\frac{\partial}{\partial\vartheta} + cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi})$$

Με μερικούς υπολογισμούς παίρνουμε και οτι $[L^+, L^-] = -2i \cdot L_3$. Αναφέρουμε ξανά οτι οι τέλεστες δρουν στον $C^\infty(S^2)$ (ο οποίος είναι κι αυτός πυκνός στον $L^2(S^2)$) με τον προφανή τρόπο. Τέλος είναι φανερό οτι κάθε αναλλοίωτος χώρος της $\rho_{SO(3)}$ πρέπει να είναι αναλλοίωτος χώρος και των τελεστών L^+, L^- και L_3 .

Τώρα χρησιμοποιούμε αυτούς τους τελεστές για να προσδιορίσουμε τους ελάχιστους αναλλοίωτους υποχώρους του $L^2(S^2)$. Έστω οτι $f \in C^\infty(S^2)$. Αυτές οι συναρτήσεις μπορούν να γραφούν ως $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(\vartheta)e^{in\phi}$ και αν $f \not\equiv 0$ τότε για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε $g_m \not\equiv 0$. Τότε αποδεικνύεται οτι ο ελάχιστος αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει την f τότε πρέπει να περιέχει και κάποια $g_m(\vartheta)e^{im\phi}$ (φυσικά με $g_m \not\equiv 0$). Πιο απλά λοιπόν θα υποθέσουμε οτι $f = g_m(\vartheta)e^{im\phi}$. Ακόμα μπορεί να δειχθεί οτι οι τελεστές L^+, L^- μετασχηματίζουν μια συνάρτηση της μορφής $k(\vartheta)e^{im\phi}$ σε μια συνάρτηση της μορφής $k_1(\vartheta)e^{i(m+1)\phi}$ και $k_2(\vartheta)e^{i(m-1)\phi}$ αντίστοιχα. Άρα αν X_f είναι ο ελάχιστος αναλλοίωτος χώρος που περιέχει την f τότε αναγκαστικά θα περιέχει και τις συναρτήσεις:

$$\psi_n(\vartheta, \phi) = g_n(\vartheta)e^{in\phi}$$

όπου $n \in \{\dots, m-1, m, m+1 \dots\}$. Από το θεώρημα *Peter-Weyl* ξέρουμε οτι ο χώρος X_f πρέπει να είναι πεπερασμένης διάστασης και εφόσον οι συναρτήσεις $(e^{in\phi})_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες βλέπουμε οτι πρέπει να υπάρχει ένα $\hbar_+$ και ένα $\hbar_-$ τέτοια ώστε $L^+\psi_{\hbar_+} = 0$ και $L^-\psi_{\hbar_-} = 0$. Πρωτά παρατηρούμε οτι $\psi_{\hbar_+}(\vartheta, \phi) = C(e^{i\phi}sin\vartheta)^{\hbar_+}$ για κάποιο $C \in \mathbb{R}$. Μετά κατασκευάζουμε με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του τελεστή L^- μια ακολούθια $\psi_{\hbar_+-1}, \psi_{\hbar_+-2}, \cdots$. Από την εξίσωση $[L^+, L^-] = -2i \cdot L_3$ και με μια επαγωγή μπορούμε να δούμε οτι:

$$L^-\psi_{\hbar_+-k-1} \propto \psi_{\hbar_+-k}$$

Έστω λοιπόν (ψ_n) η ακολουθία που κατασκευάζουμε. Τότε για κάθε n θα υπάρχουν αριθμοί a_n, b_n τέτοιοι ώστε:

$$L^+\psi_n = -ia_n\psi_{n+1}$$

$$L^-\psi_{n+1} = -ib_n\psi_n$$

Όμως χρησιμοποιώντας την σχέση $L^-L^+\psi_n = -ia_nb_n\psi_n$ μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να πάρουμε $a_n = b_n$. Συνεπώς για όλα τα $n < \hbar_+$ θα έχουμε από την σχέση $[L^+, L^-] = -2i \cdot L_3$:

$$-a_{n-1}^2 + a_n^2 = -2n$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει και για $n = \hbar_+$ ($a_{\hbar_+} = 0$). Τώρα μπορούμε να δούμε οτι

$$a_n = \sqrt{(\hbar_+ - n + 1)(\hbar_+ - n)}$$

για κάθε $n \in \{-\hbar_+, \dots, \hbar_+\}$. Οπότε $L^-\psi_{-\hbar_+} = 0 \Rightarrow \hbar_- = -\hbar_+$. Άρα θα έχουμε για κάθε $\hbar \in \mathbb{N}$ μια συλλογή από συναρτήσεις $(Y_\hbar^n)_{n=-\hbar}^{\hbar}$. Για να έχουμε ένα καλύτερο συμβολισμό γράφουμε

$$\psi_n(\vartheta, \phi) = Y_\hbar^n(\vartheta, \phi)$$

Μπορεί να δειχθεί οτι αυτές οι συναρτήσεις είναι οι γνωστές επιφανειακές αρμονικές. Επίσης εύκολα από τις ιδιότητες των απειροστών τελεστών μπορούμε να αποδείξουμε οτι οι συναρτήσεις αυτές είναι κάθετες στον $L^2(S^2)$. Πιο συγκεκριμένα οι $(\psi_n)_{n=-\hbar}^{\hbar}$ παράγουν για κάθε $\hbar$ ένα χώρο $X_{2\hbar+1}$ διάστασης $2\hbar + 1$ και για διαφορετικά $\hbar$ οι αντίστοιχοι χώροι είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Συνεπώς βρήκαμε χώρους ελάχιστης διάστασης που είναι αναλλοίωτοι κλειστοί υπόχωροι των τελεστών L^+, L^- και L_3 και άρα κλειστοί αναλλοίωτοι υπόχωροι των L_1, L_2 και

L_3. Από την θεωρία ομάδων *Lie* θα δούμε οτι αναγκαστικά οι χώροι αυτοί θα είναι και αναλλοίωτοι υπόχωροι της αρχικής αναπαράστασης $\rho_{SO(3)}$. Αυτό γιατί η ομάδα $SO(3)$ είναι μια (συνεκτική) συμπαγής ομάδα *Lie* και κάθε αναπαράσταση μιας ομάδας *Lie* μας δίνει, παίρνοντας την παράγωγο στο μοναδιαίο στοιχείο, μια αναπαράσταση της αντίστοιχης άλγεβρας *Lie* πιθανότατα σε ένα μικρότερο χώρο. Μπορεί να αποδειχθεί οτι οι κλειστοί αναλλοίωτοι υπόχωροι της επαγώμενης αναπαράστασης της άλγεβρας *Lie* είναι και αναλλοίωτοι υπόχωροι της αρχικής αναπαράστασης. Εδώ οι τελεστές L_1, L_2 και L_3 καθορίζουν την αντίστοιχη αναπαράσταση της άλγεβρας *Lie* της $SO(3)$ και συνεπώς οι χώροι $X_{2\hbar+1}$ είναι κλειστοί αναλλοίωτοι υπόχωροι της επαγώμενης αναπαράστασης άλγεβρας *Lie* της $SO(3)$. Άρα οι $X_{2\hbar+1}$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι της $\rho_{SO(3)}$.

Οπότε βρήκαμε μια οικογένεια αναλλοίωτων και ανάγωγων υποχώρων $(X_{2\hbar+1})_{\hbar\in\mathbb{N}}$ και μάλιστα οποιοσδήποτε άλλος αναλλοίωτος ανάγωγος υπόχωρος θα είναι της μορφής X_{2m+1} για κάποιο m. Αυτό είναι πιο δύσκολο να δεχθεί και έχει να κάνει με την γενική θεωρία αναπαραστάσεων των ομάδων *Lie* και πιο συγκεκριμένα με την θεωρία αναπαραστάσεων της $SU(2)$. Θα την δούμε αυτή στην συνέχεια. Συνεπώς θα έχουμε από το θεώρημα *Peter-Weyl*:

$$L^2(S^2) = \hat{\bigoplus}_{\hbar\in\mathbb{N}} X_{2\hbar+1}$$

Αυτό το παράδειγμα δείχνει έστω και με λίγη μαθηματική ακρίβεια πως μπορούμε να χρησιμποιήσουμε την δομή των ομάδων *Lie* (οι οποίες θα οριστούν στο επόμενο κεφάλαιο) για να κατασκευάσουμε/ταξινομήσουμε τις αναπαραστάσεις τους. Η ιδέα είναι να ¨παραγωγίσουμε¨ την αναπαράσταση έτσι ώστε να πάρουμε μια αναπαράσταση μιας άλλης αλγεβρικής δομής η οποία είναι πιο περιοριστική από την αρχική ομάδα. Στην ορολογία της θεωρίας λέμε οτι περνάμε στην αντίστοιχη άλγεβρα *Lie* και μελετάμε τις αναπαραστάσεις της αντίστοιχης άλγεβρας. Μετά το ζήτημα είναι κατά ποσο όλες οι αναπαραστάσεις της άλγεβρας καθορίζουν τις αναπαραστάσεις της ομάδας. Αυτό είναι λίγο πιο λεπτό ζήτημα και θα δούμε οτι εξαρτάται από τις τοπολογικές ιδιότητες της ομάδας.

1.5 Μη-συμπαγείς ομάδες

Παρουσιάζουμε σε αυτήν την ενότητα ορίσμενους λόγους γιατί η θεωριά σε μη συμπαγείς ομάδες έχει μεγάλες διαφορές από την θεωρία για συμπαγείς ομάδες καθώς και ορισμένες ιδέες τις θεωρίας αυτης.

Για μη συμπαγείς ομάδες η θεωρία είναι αρκετά πιο πολύπλοκη. Για παράδειγμα όταν η ομάδα είναι μη συμπαγής τότε μπορεί να έχει μια μοναδιαία αναπαράσταση που δεν είναι αναγωγή άλλα δεν περιέχει καμιά ανάγωγη μοναδιαία αναπαράσταση. Ακόμα χειρότερα αυτή η αναπαράσταση μπορεί να είναι η κανονική αναπαράσταση.

Πράγματι αν πάρουμε τον $\mathbb{R}$ τότε ξέρουμε ότι οι μοναδιαίες ανάγωγες αναπαραστάσεις είναι οι

$$\chi_\xi(t) = e^{i\xi t}$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}$. Τότε αν η κανονική αναπαράσταση περιείχε μια από αυτές θα έπρεπε να περιέχει και όλα τα *matrix coefficients* τους που αναγκαστικά σημαίνει ότι η απεικόνιση $e^{i\xi t}$ είναι ολοκληρώσιμη, άτοπο.

Οπότε το θεώρημα *Peter-Weyl* δεν ισχύει στην περίπτωση των μη συμπαγών ομάδων. Ακόμα μια συνέπεια της μη-συμπάγειας είναι οτι μπορεί να έχουμε ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις με άπειρη διάσταση (π.χ. η ομάδα $SL_2(\mathbb{R})$ έχει τέτοιες αναπαραστάσεις). Επιπλέον ούτε τα *matrix coefficients* μιας αναπαράστασης είναι αναγκαία στον $L^2(G)$. Για την ακρίβεια θα ανήκουν στον $L^2(G)$ αν και μόνο αν η αναπαράσταση περιέχεται στην κανονική.

Συνεπώς σχεδόν τίποτα από την περίπτωση των συμπαγών ομάδων δεν μεταφέρεται στην περίπτωση των μη-συμπαγών. Εντούτοις ο μετασχηματισμός *Fourier* μπορεί να μας δώσει μια ιδέα για το τι μπορεί να ισχύει σε αυτή την περίπτωση.

Πράγματι αγνοόντας τις τεχνικές συνθήκες βλέπουμε οτι για κάθε στοιχείο του $L^2(\mathbb{R})$ έχουμε:

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

Μπορούμε να σκεφτόμαστε οτι με αυτό τον τύπο εκφράζουμε την f σε ένα 'συνεχές' άθροισμα και οτι αυτή η σχέση εκφράζει μια πιο γενική ανάλυση του χώρου $L^2(\mathbb{R})$. Πιο συγκεκριμένα η ιδέα τώρα είναι οτι μπορούμε να εκφράσουμε τον $L^2(\mathbb{R})$ σαν ένα συνεχές άθροισμα *Hilbert* απλών χώρων:

$$L^2(G) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_\xi d\xi$$

Ο τεχνικός ορισμός του συνεχούς αθροίσματος *Hlbert* δεν θα δωθεί εδώ αλλά η βασική του ιδέα είναι:

Όταν έχουμε μια οικογένεια χώρων *Hilbert* που παραμετρικοποιείται από ένα χώρο μέρου τότε μπορούμε να συνδυάσουμε όλους τους χώρους αυτούς σε έναν νέο χώρο *Hilbert* έτσι το εσωτερικό του γινόμενο να είναι ένα ολοκλήρωμα πάνω από τα εσωτερικά γινόμενα ων αρχικών χώρων (φυσικά θα χρειαστεί να κάνουμε κάποιες επιπρόσθετες συμβάσεις). Η κατασκευή αυτή όπως και με το διακριτό άθροισμα μπορεί να οριστεί και για μοναδιαίες αναπαραστάσεις. Δηλαδή κάτω από κατάλληλες συνθήκες θα μπορούμε να έχουμε ένα συνεχές άθροισμα *Hilbert* μοναδιαίων αναπαραστάσεων πάνω σε ένα συνεχές άθροισμα χώρων.

Το γενικό μας πρόβλημα λοιπόν είναι να γράψουμε για μια μη-συμπαγή ομάδα τον χώρο $L^2(G)$ σαν ένα συνεχές άθροισμα *Hilbert* χώρων που δρούν ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις. Θέλουμε δηλαδή μια 'συνεχή' εκδοχή του θεωρήματος *Peter-Weyl* και αν το κάνουμε αυτό η περίπτωση του μετασχηματισμού *Fourier* θα είναι μια ειδική εφαρμογή αυτού του θεωρήματος.

Αν η ομάδα πληρεί κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες ένα τέτοιο θεώρημα υπάρχει:

Θεώρημα. *Έστω μια τοπικά συμπαγής ομάδα G με αριθμήσιμη βάση και T μια μοναδιαία αναπαράσταση πάνω σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert. Τότε η T μπορεί να γραφτεί ως* $\int_X T_x dm(x)$ *όπου οι* T_x *είναι ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις που παραμετρικοποιούνται από ένα χώρο μέτρου.*

Η μελέτη όμως δεν τελειώνει εδώ. Πρώτον αναφέρουμε οτι για αβελιανές ομάδες η υπάρχει μια πολύ πιο άμεση γενίκευση του μετασχηματισμού *Fourier* που πάλι μας δίνει μια 'συνεχής' ανάλυση της κανονικής αναπαράστασης. Αυτή η θεωρία λέγεται δυϊκότητα *Pontryagin*.

Από την άλλη ακόμα και αν καταφέρουμε να αναλύσουμε την κανονική αναπαράσταση σε ένα συνεχές άθροισμα ανάγωγων για μερικές ομάδες σε αυτήν την ανάλυση δεν εμφανίζονται όλες οι ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις. Η μελέτη αυτών των αναπαραστάσεων καθώς και άλλων σχετικών εννοιών έγινε με συστηματικό τρόπο κατά το δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα στην περίπτωση των ημι-απλών ομάδων *Lie*.

Κεφάλαιο 2

Ομάδες *Lie*

2.1 Βασικοί Ορισμοί και Έννοιες

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή οι ομάδες *Lie* συνδυάζουν την ομαλή δομή μιας πολλαπλότητας με την αλγεβρική δομή μιας ομάδας. Πιο αυστηρά:

Ορισμός. *Μια ομάδα Lie G είναι μια ομάδα η οποία είναι ομαλή πολλαπλότητα τέτοια ώστε η απεικόνιση $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ από την πολλαπλότητα $G \times G$ στην G είναι ομαλή. Σε αυτή την περίπτωση συνήθως λέμε οτι η ομαλή δομή είναι συμβατή με την δομή της ομάδας.*

Ακόμα όταν η πολλαπλότητα είναι μιγαδική πολλαπλότητα και η παραπάνω απεικόνιση είναι αναλυτική τότε μπορούμε να μιλάμε για μιγαδικές ομάδες *Lie*.

Σε αυτή την εργασία όποτε λέμε ομαλή πολλαπλότητα/απεικόνιση εννοούμε οτι η πολλαπλότητα/απεικόνιση είναι κλάσης C^∞. Εδώ δημιουργείται ένα λεπτό ζήτημα. Φαίνεται οτι κάλιστα θα μπορούσαμε να ορίσουμε ομάδες *Lie* οι οποίες σαν πολλαπλότητες να είναι κλάσης C^k και ίδιας κλάσης να είναι και η αντίστοιχη απεικόνιση $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$. Παρ' όλα αυτά μπορεί να δειχθεί οτι αυτό δεν χρειάζεται να το κάνουμε. Πράγματι υπάρχει το λεγόμενο θεώρημα *Gleason-Montgomery-Zippin* που μας λέει οτι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μοναδική C^∞ δομή σε μια ομάδα *Lie* κλάσης C^0 η οποία είναι 'συμβατή' με την αλγεβρική δομή της ομάδας. Πιο ισχυρά υπάρχει μοναδική αναλυτική δομή που κάνει την C^1 ομάδα *Lie* μια αναλυτική πολλαπλότητα έτσι ώστε η αλγεβρική δομή να είναι συμβατή με την αναλυτική. Αυτό το θεώρημα έιναι πολύ δύσκολο να δειχθεί και δεν θα ασχοληθούμε με αυτό σε αυτή την διπλωματική εργασία.

Ουσιαστικά κάθε 'καλή' τοπολογική ομάδα που είναι χρήσιμη στα μαθηματικά και στις εφαρμογές είναι ομάδα *Lie*. Για παράδειγμα οι ομάδες $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $SL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$ είναι όλες ομάδες *Lie*.

Οι ομάδες *Lie* είναι προφανώς τοπικά συμπαγείς τοπολογικές ομάδες και συνεπώς κληρονομούν όλες τις 'καλές' ιδιότητες αυτών των ομάδων. Για παράδειγμα όλες οι ομάδες *Lie* έχουν ένα μέτρο *Haar* και συνεπώς όλη η γενική θεωρία του κεφαλαίου 1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Μάλιστα οι ομάδες *Lie* έχουν πιο εύχριστη τοπολογία και μπορούμε να δείξουμε πιο πολύπλοκα θεωρήματα (για παράδειγμα μπορούμε να δείξουμε ένα ανάλογο του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης).

Θα δείξουμε οτι σε κάθε ομάδα *Lie* μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μια άλγεβρα *Lie*. Πριν το δείξουμε αυτό έχουμε πρώτα μερικούς ορισμούς.

Ορισμός. *Μια* ***άλγεβρα*** *Lie είναι ένα ζεύγος* $(V, [\,,\,])$ *όπου* V *είναι ένας διανυσματικός χώρος και* $[\,,\,] : V \times V \to V$ *είναι μια διγραμμική αντισυμμετρική απεικόνιση που ικανοποιεί την ταυτότητα του Jacobi:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \forall X, Y, Z \in V \tag{2.1}$$

Η απεικόνιση $[\,,\,]$ *λέγεται Lie braket.*

Συνήθως ο διανυσματικόςς χώρος V είναι πάνω από το $\mathbb{R}$. Όταν είναι μιγαδικός διανυσματικός χώρος τότε θα λέμε οτι η αντίστοιχη άλγβρα είναι μια μιγαδική άλγεβρα *Lie*. Προφανώς μπορούμε να ορίσουμε άλγεβρες *Lie* πάνω από οποιοδήποτε σώμα αλλά δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις. Το πιο προφανές παράδειγμα μιας άλγεβρας *Lie* είναι το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ η οποία συμβολίζεται ως $gl_n(\mathbb{K})$. Το *Lie braket* αυτής της άλγεβρας δίνεται από τον μεταθέτη των πινάκων:

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A \tag{2.2}$$

Είναι ζήτημα απλών αλγεβρικών πράξεων να επαληθεύσουμε την ταυτότητα του *Jacobi*. Γενικότερα αν $\mathcal{A}$ είναι μια προσετερεστική άλγεβρα τότε μαζί με το *Lie braket* που ορίζεται στην (2.2) θα είναι μια άλγεβρα *Lie*.

Συνεχίζουμε τώρα με την εισαγωγή ορολογίας:

Ορισμός. *Έστω* G *μια ομάδα Lie και* $\mathcal{X}$ *μια πολλαπλότητα πάνω στην οποία η ομάδα* G *δρα. Θα λέμε οτι αυτή η δράση είναι ομαλή αν η απεικόνιση* $(g, x) \to g \cdot x$ *από την* $G \times \mathcal{X}$ *στην* $\mathcal{X}$ *είναι ομαλή.*

Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε οτι ο ομομορφισμός $a : G \to Diff(\mathcal{X})$ είναι μια δράση ομάδας *Lie* αν η απεικόνιση $(g, x) \to a(g)(x)$ είναι ομαλή.

Ορισμός. *Έστω* G*,* H *δυο ομάδες Lie. Μια συνάρτηση* $\phi : G \to H$ *θα λέγεται οτι είναι ομομορφισμός ομάδων Lie αν είναι ομομορφισμός ομάδων και αν είναι ομαλή απεικόνιση.*

Για παράδειγμα η απεικόνιση $x \to e^{2\pi i x}$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων *Lie* ανάμεσα στις ομάδες $\mathbb{R}$ και S^1. Όταν έχουμε $H = GL_n(\mathbb{R})$ τότε λέμε οτι η ϕ είναι μια αναπαράσταση της G. Ακόμα όταν $H = U(n)$ θα λέμε οτι η ϕ είναι μια μοναδιαία αναπαράσταση της G. Ουσιαστικά οτι είπαμε για τις αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης ισχύουν κι εδώ αρκεί να απαιτήσουμε και ο αντίστοιχος ομομορφισμός να είναι ομαλός. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με αναπαραστάσεις ομάδων *Lie* πεπερασμένης διάστασης γιατί η ομαλότητα ενός ομομορφισμού όταν η H είναι ¨απειροδιάστατη¨ είναι ένα λεπτό ζήτημα. Υπάρχει και η ανάλογη έννοια και στις άλγεβρες *Lie*:

Ορισμός. *Έστω $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{h}$ δυο άλγεβρες Lie. Τότε μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie αν $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ έχουμε:*

$$[Tx, Ty] = T[x, y]$$

Είναι φανερό οτι ο πυρήνας και η εικόνα της T είναι υποάλγερβες *Lie* των $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{h}$ αντίστοιχα. Όταν $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ τότε λέμε οτι η T είναι μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$. Είναι φανερό οτι όλες οι σχετικές έννοιες από την θεωρία αναπαραστάσεων ομάδων μπορούν να οριστούν ανάλογα και για αναπαραστάσεις αλγεβρών *Lie*. Άρα μπορούμε να μιλάμε για αναλλοίωτους υπόχωρους μιας αναπαράστασης μιας άλγβερας *Lie*, για ανάγωγες αναπαραστάσεις, για ύποαναπαραστάσεις κτλ.

2.1.1 Ομάδες *Lie* και η σχέση με τις Άλγεβρες *Lie*

Τώρα επιστρέφουμε στην θεωρία. Θα δείξουμε πως μπορούμε να πάρουμε μια άλγεβρα *Lie* από μια ομάδα *Lie*. Παρατηρούμε πρώτα οτι οι απεικονίσεις L_g, R_g που ορίστηκαν στο κεφάλαιο 1 είναι διαφορομορφισμοί. Συνεπώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σπρώξουν (*push forward*) οποιοδήποτε τανυστικό πεδίο. Πιο γενικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις απεικονίσεις για να ορίσουμε μια δράση της ομάδας G πάνω στο $\Gamma(E)$ οποιασδήποτε διανυσματικής δεσμίδας (*vector bundle*) $E \to G$ αλλά για λόγους απλότητας ας υποθέσουμε οτι $E = TG$. Τότε για κάθε $g \in G$ και για $\xi \in TG$ μπορούμε να ορίσουμε:

$$g \cdot \xi = d(L_g)_*(\xi)$$

και τελείως ανάλογα:

$$\xi \cdot g = d(R_g)_*(\xi)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε οτι η πρώτη εξίσωση ορίζει μια ομαλή (από αριστερά) δράση της ομάδας G πάνω στην εφαπτομενική δεσμίδα (*tangent bundle*) TG. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για την δράση που ορίζεται και από την δεύτερη εξίσωση. Ορίζουμε τώρα για κάθε διανυσματικό πεδίο $X \in \Gamma(TG)$ και για κάθε $p \in G$:

$$(g \cdot X)_p = g \cdot X_p$$

Θα λέμε οτι το πεδίο είναι αναλλοίωτο αν έχουμε $g{\cdot}X = X$ για κάθε $g \in G$. Με άλλα λόγια το X είναι από αριστερά αναλλοίωτο αν και μόνο αν $(g \cdot X)_h = X_{g \cdot h}$. Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε από δεξιά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία. Γενικότερα όταν έχουμε μια δράση μιας ομάδας *Lie* τότε, εν γένει, μπρούμε να μιλάμε για αντικείμενα τα οποία είναι αναλλοίωτα κάτω από αυτή την δράση. Η μελέτη αυτών των αντικειμένων μπορεί να μας δώσει πληροφορία για την ίδια την δράση ή μπορεί και να είναι αντικείμενα που αξίζουν να αναλυθούν από μόνα τους. Υπάρχουν στην θεωρία δυο τρόποι να κατακευάζουμε αναλλοίωτα αντικείμενα. Τον πρώτο τον είδαμε στο κεφάλαιο 1 και δουλεύει όταν η ομάδα είναι συμπαγής. Η βασική ιδέα της είναι να ¨ολοκληρώσουμε¨ ένα ¨γενικό¨ αντικείμενο καθώς κινείται υπό την δράση της ομάδας. Η δεύτερη είναι λίγο πιο περιορισμένη αλλά χρησιμοποίει την ομαλή δομή της ομάδας *Lie*.

Έστω G μια ομάδα *Lie* και ένας τανυστής Α τύπου (r, s) ορισμένος πάνω στον διανυσματικό χώρο T_eG όπου e είναι το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας. Τότε μπορούμε να ¨σπρώξουμε¨ χρησιμοποίωντας την δράση της ομάδας στην αντίστοιχη διανυσματική δεσμίδα και να κατασκευάσουμε ένα τανυστικό πεδίο τύπου (r, s). Σχεδόν εξ' ορισμού το πεδίο αυτό θα είναι αναλλοίωτο υπό την δράση της ομάδας.

Το πιο σημαντικό παράδειγμα αυτής της κατασκευής το έχουμε όταν πάρουμε ένα τανυστή τύπου $(0, 1)$ δηλαδή ένα διάνυσμα του χώρου T_eG:

Έχουμε δηλαδή το θεώρημα:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια ομάδα Lie τότε ο χώρος T_eG είναι ισομορφικός με τον χώρο των από αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της G. Ο χώρος αυτός είναι μια άλγεβρα Lie και μάλιστα υποάλγεβρα της $\Gamma(TG)$. Ανάλογα T_eG είναι ισομορφικός με τον χώρο όλων των δεξιά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων.*

Το δεύτερο κομμάτι αυτού του θεωρήματος είναι μια απλή εφαρμογή γνωστών θεωρημάτων από την διαφορική γεωμετρία. Το *Lie braket* της $\Gamma(TG)$ δίνεται από τον ¨μεταθέτη¨ δυο διανυσματικών πεδίων:

$$[X, Y]f(p) = X(Yf)(p) - Y(Xf)(p)$$

Από εδώ και πέρα θα ταυτοποιούμε τον χώρο T_eG με τον χώρο των από αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων (ή με τον χώρο των από δεξιά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων. Αυτό θα γίνει σε ένα συγκεκριμένο σημείο για να έχουμε απλούστερο συμβολισμό και θα δούμε πως αυτές οι δυο ταυτοποιήσεις είναι κατά μια έννοια ισοδύναμες) Χρησιμοποιώντας αυτή την ταυτοποίηση μπορούμε να δώσουμε στον εφαπρόμενο χώρο την δομή μιας άλγεβρας *Lie*. Άρα σε κάθε ομάδα *Lie* μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μια άλγεβρα *Lie*. Συνήθως όταν η ομάδα συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ. $G, H, K\dots$) η αντίστοιχη άλγεβρα θα συμβολίζεται με το αντίστοιχο πεζό γράμμα ($\mathfrak{g}$,$\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}\dots$).

Αυτός ο ορισμός της άλγεβρας *Lie* μιας αντίστοιχης ομάδας *Lie* χρησιμοποιεί αρκετά πράγματα από την διαφορική γεωμετρία και δεν είναι και τόσο προφανές γιατί η άλγεβρα είναι χρήσιμη για την ανάλυση της δομής της ομάδας. Γι' αυτό τον λόγο θα δώσουμε και μια δεύτερη κατασκευή της άλγεβρας *Lie* μιας ομάδας *Lie*. Η δεύτερη κατασκευή δεν χρησιμοποιεί τόσο πολύ την θεωρία της διαφορικής γεωμστρίας και είναι πιο δύσκολο να δειχθεί οτι η κατασκευή είναι ισοδύναμη με τον πρώτο ορισμό της άλεβρας. Αυτά τα δυο θέματα θα λυθούν αργότερα όταν θα μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση. Στα θετικά της δεύτερης κατασκευής συγκαταλέγεται το γεγονός οτι χρησιμοποιεί την δομή της ομάδας λίγο πιο ουσιαστικά:

Έστω G μια ομάδα *Lie* και (U, ϕ) μια περιοχή συντεταγμένων γύρω από το μοναδιαίο στοιχείο $e \in G$ και $V \subseteq U$. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $V \cdot V \subseteq U$ και $V^{-1} \subseteq U$. Θα συμβολίζουμε με $\bar{x}$ την απεικόνιση του $x \in V$ σε τοπικές συντεταγμένες (δηλαδή το στοιχείο $\phi(x)$). Τότε για κάθε $x, y \in V$ χρησιμοποιόντας το ανάπτυγμα *Taylor* και υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $\phi(e) = 0$ έχουμε:

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y} + a(\bar{x}, \bar{y}) + \dots$$

όπου a είναι μια διγραμμική μορφή από τον $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$ (όπου φυσικά n είναι η διάσταση της ομάδας) και οι τελείες υποδηλώνουν όρους μεγαλύτερης τάξης (≥ 3). Στην περίτωση που η ομάδα δεν είναι μεταθετική αυτό το ανάπτυγμα μας λέει οτι η μη-μεταθετικότητα της ομάδας εμφανίζεατι στους μη γραμμικούς όρους (τάξης ≥ 2). Στο επίπεδο της ομάδας ένα από τα αντικείμενα που υπολογίζει την μη-μεταθετικότητα της ομάδας είναι ο μεταθέτης δυο στοιχείων. Αν $(x, y) = x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}$ τότε παρατηρούμε οτι θα έχουμε $y \cdot x = (y, x) \cdot x \cdot y$ και άρα:

$$\overline{(x, y)} = \gamma(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots$$

όπου $\gamma(\bar{x}, \bar{y}) = a(\bar{x}, \bar{y}) - a(\bar{y}, \bar{x})$. Τώρα στο εφαπτόμενο χώρο ορίζουμε:

$$\overline{[\xi, \eta]} = \gamma(\bar{\xi}, \bar{\eta})$$

όπου $\xi, \eta \in T_e G$ και όπου συμβολίζουμε με $\bar{\xi}$ τις συντεταγμένες του εφαπτόμενου διανύσματος ξ που επάγονται από τις συντεταγμένες (U, ϕ).

Προφανώς πριν πούμε οτιδήποτε σχετικά με αυτό το αντικείμενο πρέπει να δείξουμε οτι είναι ανεξάρτητο από την επιλογή συντεταγμένων. Έστω (V, ψ) μια δεύτερη περιοχή συντεταγμένων γύρω από το e με $\psi(e) = 0$ τέτοιο ώστε $U \cap V \neq \emptyset$. Τότε συμβολίζουμε με $\bar{\bar{\xi}}$ τις συντεταγμένες του εφαπτόμενου διανύσματος ξ που επάγονται από τις συντεταγμένες (V, ψ) (αντίστοιχα και για τις συντεταγμένες σημείων της G. Τότε οι δυο αναπαραστάσεις σε τοπικές συντεταγμένες συνδέονται από την σχέση:

$$\bar{\xi} = C \cdot \bar{\bar{\xi}}$$

όπου C είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης $\phi \circ \psi^{-1}$. Επιπλέον για x αρκετά κοντά στο e θα έχουμε:

$$\bar{x} = C \cdot \bar{\bar{x}} + \ldots$$

Από αυτές τις δυο παρατηρήσεις είναι εύκολο να δούμε οτι:

$$\overline{\overline{(x, y)}} = C^{-1} \cdot \gamma(C \cdot \bar{\bar{x}}, C \cdot \bar{\bar{y}}) + \ldots$$

και οτι:

$$\overline{\overline{[\xi, \eta]}} = C^{-1} \cdot \gamma(C \cdot \bar{\bar{\xi}}, C \cdot \bar{\bar{\eta}})$$

όπου εδώ το $[\xi, \eta]$ συμβολίζει το *bracket* όπως ορίστηκε στο παλιό σύστημα συντεταγμένων. Αυτές οι δυο εξισώσεις δείχνουν οτι το *bracket* έτσι όπως ορίζεται από το πρώτο σύστημα συντεταγμένων και από το δεύτερο είναι ίσα και συνεπώς το *bracket* είναι καλά ορισμένο.

Είναι προφανές οτι το *bracket* που ορίσαμε είναι διγραμμικό και αντί-συμμετρικό. Θα δούμε οτι ικανοποιεί και την ταυτότητα του *Jacobi* και άρα δίνει στον χώρο $T_e G = \mathfrak{g}$ την δομή μιας άλγεβρας *Lie*. Παρατηρούμε οτι από την προσεταιριστικότητα του πολλαπλασισμού στην G θα πρέπει να έχουμε οτι:

$$a(x, a(y, z)) = a(a(x, y), z) \tag{2.3}$$

Αφού $[x, y] = a(x, y) - a(y, x)$ (όπου έχουμε παραλήψει τις παύλες που υποδηλώνουν αναπαράσταση σε τοπικές συντεταγμένες για χάρη της απλότητας του συβολισμού) βλέπουμε οτι:

$$[[x, y], z] = a([x, y], z) - a(z, [x, y]) \Rightarrow$$

$$[[x, y], z] = a(a(x, y) - a(y, x), z) - a(z, a(x, y) - a(y, x) \Rightarrow$$

$$[[x,y],z] = a(x,a(y,z)) - a(z,a(x,y)) + a(z,a(y,x)) - a(y,a(x,z))$$

όπου για την τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση 4). Εκτελώντας την ίδια διαδικασία και για τους όρους $[[y,z],x]$ και $[[z,x],y]$ και προσθέτοντας τις αντίστοιχες εκφράσεις καταλήγουμε στο:

$$[[x,y],z] + [[y,z,x]] + [[z,x],y] = 0$$

που είναι η ταυτότητα του *Jacobi*.

Θα δούμε επίσης οτι αυτή η άλγεβρα είναι ίδια με την άλγεβρα που πέρνουμε όταν την βλέπουμε ως τον χώρο όλων των από δεξιά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων. Αυτό το αποτέλεσμα είναι λίγο πιο δύσκολο και θα το δείξουμε όταν μιλήσουμε για την εκθετική συνάρτηση.

Άρα όπως είδαμε σε κάθε ομάδα *Lie* μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μια άλγεβρα *Lie*. Αυτός ο τρόπος αντιστοίχησης είναι ¨φυσιολογικός¨ με την έννοια οτι διάφορες κατασκευές και διάφορα αντικείμενα πάνω στην ομάδα *Lie* μπορούν να μεταφραστούν σε κατασκευές και αντικείμενα πάνω στην αντίστοιχη ομάδα *Lie*. Το πιο τυπικό (και μαθηματικά αυστηρό) παράδειγμα αυτής της φιλοσοφίας παρουσιάζεται από το παρακάτω, εξεραιτικά σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα. *Έστω G, H δυο ομάδες Lie και $\phi : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομαδών Lie. Τότε η παράγωγος στο e, $d\phi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie.*

Απόδειξη. Το μόνο που χρειάζεται να δείξουμε είναι οτι η $d\phi_e$ διατηρεί το *Lie bracket*. Αν (x,y) συμβολίζει το μεταθέτη των στοιχείων $x.y$ τότε αφού το ϕ είναι ομομορφισμός θα έχουμε:

$$\phi((x,y)) = (\phi(x), \phi(y))$$

Αν πάρουμε περιοχές συντεταγμένων γύρω από τα e_G και e_H, εκφράσουμε την παραπάνω εξίσωση σε τοπικές συντεταγμένες και αναπτύξουμε και τις δυο πλευρές σε σειρά *Taylor* θα έχουμε:

$$\overline{\phi((x,y))} = C \cdot \gamma_G(\bar{x}, \bar{y}) + \dots$$

όπου C είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του ϕ στις τοπικές συντεταγμένες και το γ_G έχει την ίδια έννοια όπως και πιο πάνω. Την έκφραση αυτή την πήραμε από την αριστερή πλευρά της παραπάνω εξίσωσης χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας. Από την δεξιά πλευρά έχουμε:

$$\overline{(\phi(x), \phi(y))} = \gamma_H(C \cdot \bar{x}, C \cdot \bar{y}) + \dots$$

και συνεπώς θα έχουμε οτι για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\overline{[C \cdot X, C \cdot Y]} = C\overline{[X,Y]}$$

Που δείχνει οτι η $d\phi_e$ είναι ομοορφισμός αλγεβρών *Lie*.

□

Μάλιστα μπορεί να δειχθεί οτι αν η ομάδα G είναι συνεκτική (και άρα και δρόμοσυνεκτική) τότε η παράγωγος ενός ομομορφισμού ομαδών *Lie* $\phi : G \to H$ στο e καθορίζει πλήρως τον ομομορφισμό. Πράγματι έχουμε το θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω G μια ομάδα συνεκτική ομάδα Lie και $\phi : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομαδών Lie. Τότε η ϕ καθορίζεται πλήρως από τον αντίστοιχο ομομορφισμό των αλγεβρών Lie.*

Απόδειξη. Έστω $f = d\phi_e$. Θα δείξουμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την f για να ανακατασκευάσουμε τη ϕ.

Έστω $g \in G$. Ενώνουμε το μοναδιαίο στοιχείο e με το g μέσω ενός ομαλού μονοπατιού έστω το $g(t)$. Τότε θα ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:[1]

$$\frac{d}{dt}g(t) = X(t) \cdot g(t)$$

όπου $X(t)$ είναι ένα ομαλό μονοπάτι στην άλγεβρα *Lie* $\mathfrak{g}$. Τότε θα έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{d}{dt}h(t) = \phi(X(t)) \cdot h(t)$$

όπου $h(t) = \phi(g(t))$. Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση για το $h(t)$ και μαζί με την αρχική συνθήκη $h(0) = e$ καθορίζει με μοναδικό τρόπο το $h(t)$ και κατά συνέπεια και το $\phi(g) = h(1)$.

□

Υπάρχει και μια πιο ισχυρή εκδοχή αυτού του θεωρήματος δεδομένου οτι η ομάδα G είναι απλά συνεκτική. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω G, H δυο ομάδες Lie με την G να είναι απλά συνεκτική. Ακόμα έστω $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ένας ομομορφισμός των αντίστοιχων αλγεβρών Lie. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομρφισμός ομαδών Lie $\phi : G \to H$ τέτοιος ώστε $d\phi_e = \psi$*

Θα αποδείξουμε αυτό το θεώρημα στην επόμενη ενότητα όπου θα μιλήσουμε για την εκθετική συνάρτηση.

2.2 Η εκθετική συνάρτηση

Τώρα θα ασχοληθούμε με την ροή που ορίζεται από ένα από αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Αυτό το αντικείμενο θα μας οδηγήσει σε ένα από τα πιο σημαντικά αντικείμενα στην θεωρία των ομάδων *Lie* την εκθετική συνάρτηση.

Έστω X ένα στοιχείο της άλγεβρας *Lie* της ομάδας G, όπου το βλέπουμε ως ένα από αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο και έστω $\Phi(-,-)$ η ροή που ορίζει. Ανακαλούμε ότι η $\Phi(-, g)$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t)) = X_{\gamma(t)}$$

με $\gamma(0) = g$. Για ένα από αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο είναι εύκολο να δούμε οτι η ροή του ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα να δούμε οτι κάθε από αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο είναι πλήρες. Πράγματι αρκεί να δείξουμε

[1] Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης μπορούν να οριστούν όσο ορίζεται και το $g(t)$

οτι κάθε λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών ορίζεται σε ένα διάστημα συγκεκριμένου μήκους. Αυτό δείχνει οτι το διανυσματικό πεδίο είναι πλήρες.

Ας θέσουμε $g = e$ και έστω I_o το διάστημα στο οποίο ορίζεται η αντίστοιχη λύση. Αν $\Phi(-, g) = G(-)$ είναι η λύση που ξεκινάει από το g τότε η $g^{-1}\Phi(-, g)$ είναι μια λύση του προβλήματος που ξεκινάει από το e. Πράγματι:

$$\frac{d}{dt}(G(t)) = \frac{d}{dt}(g^{-1}\Phi(t, g)) = d(L_{g^{-1}})_{\Phi(t,g)}(X_{\Phi(t,g)}) = X_{g^{-1}\Phi(t,g)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσίδας και το γεγονός οτι το διανυσματικό πεδίο είναι αναλλοίωτο από δεξιά. Αφού έχουμε $G(0) = e$ η $G(t)$ λύνει όντως το πρόβλημα με αρχική τιμή το $g = e$. Αυτό συνεπάγεται οτι η $\Phi(-, g)$ ορίζεται σε ένα διάστημα που περίεχει το I_o και άρα κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του X μπορεί να οριστεί σε ένα *fixed* διάστημα. Με τυπικά επιχειρήματα που χρησιμοποιούν την μοναδικότητα/ύπαρξη λύσης και το αποτέλεσμα που μόλις δείξαμε μπορεί να δειχθεί οτι αυτό συνεπάγεται οτι το X είναι ένα πλήρες διανυσματικό πεδίο.

Μάλιστα η απόδειξη αυτή μας δείνει κάτι παραπάνω. Αν $\Phi(-, e)$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη που ξεκινάει από το e τότε θα έχουμε για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$:

$$\Phi(t, g) = g\Phi(t, e)$$

Τώρα έχουμε όλα τα συστατικά για να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση:

Ορισμός. *Αν G είναι μια ομάδα Lie τότε ορίζουμε την απεικόνιση $exp : \mathfrak{g} \to G$ ως $exp(X) = \Phi_X(1, e)$*

Είναι εύκολο να δούμε οτι κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του X είναι της μορφής $g \cdot exp(t \cdot X)$ [2]. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε οτι αν ορίζαμε την exp ως $\Phi_{X'}(1, e)$ όπου τώρα βλέπουμε το X ως ένα από δεξιά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο τότε θα καταλήγαμε στην ίδια συνάρτηση (γενικά οι ολοκληρωτικές καμπύλες που ξεκινάνε από το e και είναι εφαπτόμενες στα αναλλοίωτα πεδία X και X' είναι ίδιες) Ακόμα έχουμε το θεώρημα:

Θεώρημα. *Η εκθετική συνάρτηση έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. *$\forall g \in G$ η ολοκληρωτική καμπύλη του X που ξεκινάει από το g είναι της μορφής $g \cdot exp(t \cdot X)$.*
2. *$\forall X \in \mathfrak{g}$ και $\forall t, s \in \mathbb{R}$ έχουμε $exp((t + s)X) = exp(tX)exp(sX)$.*
3. *Η εκθετική απεικόνιση είναι ομαλή. Πιο συγκεκριμένα έχουμε $d(exp)_e = id_{\mathfrak{g}}$*
4. *Αν $\phi : G \to H$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων Lie τότε $\phi(exp(X)) = exp(d\phi_e(X))$.*

Απόδειξη. Το 1 είναι μια απλή εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας. Το 2 επάγεται από τις γενικές ιδιότητες των ροών διανυσματικών πεδίων. Για το 3 έχουμε:

[2] Αυτό ισχύει γενικά. Αν X είναι ένα πλήρες διανυσματικό πεδίο τότε με μια εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας έχουμε $\Phi_X(t, p) = \Phi_{tX}(1, p)$

Θεωρούμε την πολλαπλότητα $G \times \mathfrak{g}$ και ορίζουμε το (ομαλό) διανυσματικό πεδίο $Z_g = (X_g, 0)$. Προφανώς οι ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου που αρχίζουν στο (e, X) είναι της μορφής $t \to (exp(tX), X)$. Επειδή οι ολοκληρωτικές καμπύλες εξαρτόνται ομαλά από τα αρχικά δεδομένα καταλήγουμε οτι η εκθετική συνάρτηση $X \to exp(X)$ πρέπει να είναι ομαλή. Τέλος έχουμε οτι εξ' ορισμού:

$$d(exp)_e(X) = \frac{d}{dt}(exp(tX))|_{t=0}$$

Που συνεπάγεται οτι $d(exp)_e = id_{\mathfrak{g}}$.

Για το 4 παρατηρούμε οτι αν ψ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $X \in \mathfrak{g}$ που ξεκινάει από το e τότε το $\phi \circ \psi$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του $d\phi_e(X) \in \mathfrak{h}$ που ξεκινάει από το $e_1 \in H$. Πράγματι εαν έχουμε οτι $\frac{d}{dt}\psi(t_0) = X_{\psi(t_0)}$ τότε από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \psi)(t_0) = d\phi_{\psi(t_0)}(\frac{d}{dt}\psi(t_0)) = d\phi_{\psi(t_0)}(\psi(t_0) \cdot X)$$

και άρα:

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \psi)(t_0) = d\phi_{\psi(t_0)}(d(L_{\phi(t_0)})_e(X)) = d(\phi \circ L_{\psi(t_0)})_e(X) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \psi)(t_0) = d(L_{\phi \circ \psi(t_0)} \circ \phi)_e(X) = d(L_{\phi \circ \psi(t_0)})_e(d\phi_e(X)) = (\phi \circ \psi)(t_0) \cdot d\phi_e(X)$$

Όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι $\phi(e) = \phi(\psi(0)) = e_1$. Άρα αφού η $\phi \circ \psi(t) = \phi(exp(tX))$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $d\phi_e(X)$ θα έχουμε ότι $\phi(exp(tX)) = exp(td\phi_e(X))$ και για $t = 1$ καταλήγουμε στο 4.

□

Γιατί όμως αυτή η απεικόνιση λέγεται εκθετική; Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που μπορούν να εξηγήσουν αυτή την ορολογία. Ο πιο κλασσικός είναι ο ακόλουθος:

Ως γνωστόν η ομάδα προσθετική ομάδα του $\mathbb{R}$ είναι μια ομάδα *Lie*. Σε αυτή την περίπτωση η εκθετική συνάρτηση όπως την ορίσαμε εδώ είναι η γνωστή εκθετική συνάρτηση $x \to e^x$ όπου έχουμε κατά τα γνωστά ταυτοποιήσει τον εφαπτόμενο χώρο $T_1\mathbb{R}$ με τον ίδιο τον $\mathbb{R}$. Πιο γενικά αν πάρουμε την ομάδα $GL_n(\mathbb{R})$ τότε η αντίστοιχη απεικόνιση ταυτίζεται με το γνωστό εκθετικό ενός πίνακα.

Η δεύτερη δικαιολόγηση έχει να κάνει με την δράση της G πάνω στην εφαπτόμενη δέσμη TG. Πιο συγκεκριμένα ας θυμηθούμε οτι μπορούμε να δούμε ένα στοιχείο της άλγεβρας *Lie* $\mathfrak{g}$ σαν ένα από δεξία αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο (μέχρι τώρα το βλέπαμε ως ένα από αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο). Αν λοιπόν $\phi(t)$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη αυτού του πεδίου που ξεκινάει από το $e \in G$ τότε θα έχουμε την διαφοτική εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)) = X_{\phi(t)} = X \cdot \phi(t)$$

όπου στην πρώτη ισότητα βλέπουμε το Χ ως ένα αναλλοίωτο από τα δεξιά διανυσματικό πεδίο και στην δεύτερη ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει τον ορίσμο αυτού του πεδίου και βλέπουμε το Χ ως ένα στοιχείο της $\mathfrak{g}$. Παρατηρούμε οτι αυτή η διαφορική εξίσωση είναι τυπικά ίδια με την εξίσωση που ικανοποεί μια εκθετική συνάρτηση. Επειδή η λύση της παραπάνω εξίσωσης με την αρχική συνθήκη $\phi(0) = e$ είναι επίσης και μια ολοκληρωτική καμπύλη του Χ όταν το βλέπουμε ως ένα από *αριστερά* αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο βλέπουμε οτι η *exp* ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση όμοια με μια που ικανοποιεί και μια συνήθης εκθετική συνάρτηση.

Από το 3) του παραπάνω θεωρήματος και από το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης βλέπουμε οτι υπάρχουν ανοικτές περιοχές U και V των $0 \in \mathfrak{g}$ και $e \in G$ αντίστοιχα όπου η απεικόνιση $exp : U \to V$ είναι διαφορομορφισμός. Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση για να επάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων γύρω από τπ e που είναι συμβατό με την διαφορική δομή της ομάδας G. Αυτό το σύστημα συντεταγμένων λέγεται κανονικό και οι αντίστοιχες συντεατγμένες κανονικές συντεταγμένες. Θα τις χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε μια τοπική έκφραση του $exp(x)exp(y)$: Επιλέγουμε τις περιοχές U, V όπως και πριν. Τότε το ζεύγος (V, exp^{-1}) είναι μια περιοχή συντεταγμένων γύρω από το e. Θεωρούμε επίσης και μια περιοχή του 0 έστω την V_1 τέτοια ώστε $exp(V_1) \cdot exp(V_1) \subseteq V$. Τότε για κάθε $x, y \in V_1$ θα έχουμε:

$$exp(x)exp(y) = exp(\upsilon(x, y))$$

όπου $\upsilon : V_1 \times V_1 \to U$ είναι μια ομαλή συνάρτηση. Είναι προφανές οτι αυτή η συνάρτηση είναι η αναπαράσταση του γινομένου $exp(x)exp(y)$ σε κανονικές συντεταγμένες. Με άλλα λόγια:

$$\overline{exp(x)exp(y)} = \upsilon(x, y)$$

Παρατηρούμε οτι έχουμε $\upsilon(t_1 x, t_2 y) = (t_1 + t_2)\upsilon(x, x)$ και $\upsilon(0, x) = \upsilon(x, 0) = x$. Με ένα ανάπτυγμα *Taylor* θα έχουμε:

$$\upsilon(x, y) = x + y + \upsilon_2(x, y) + \dots$$

όπου υ_2 είναι μια διγραμμική μορφή με τιμές στο $\mathfrak{g}$ και οι τελείες είναι για όρους τάξης ≥ 3. Επειδή $\upsilon(x, y) = 2x$ συγκρίνοντας τους όρους δεύτερης τάξης καταλήγουμε οτι $\upsilon_2(x, x) = 0$ και άρα η υ_2 είναι αντισυμμετρική. Επειδή έχουμε:

$$\overline{exp(x)exp(y)} = x + y + \upsilon_2(x, y) + \dots$$

καταλήγουμε οτι $\upsilon_2(x, y) = 2 \cdot [x, y]$ και άρα:

$$exp(x)exp(y) = exp(x + y + \frac{1}{2}[x, y] + R(x, y))$$

όπου το $R(x, y)$ είναι το υπόλοιπο στο ανάπτυγμα *Taylor* της υ και είναι βαθμού 3. Μια άλλη μορφή αυτής της ταυτότητας είναι:

$$exp(tX)exp(tY) = exp(tX + tY + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3))$$

Αυτή η ταυτότητα είναι πολύ χρήσιμη και θα την χρειαστούμε αργότερα. Για παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε οτι:

$$(exp(\frac{t}{n}X)exp(\frac{t}{n}Y))^n \to exp(t(X + Y))$$

καθώς $n \to +\infty$. Η απόδειξη αυτού του ορίου είναι μια απλή εφαρμογή της παραπάνω ταυτότητας.

Ακόμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια δεύτερη απόδειξη του γεγονότος οτι ένας ομομορφισμός ομάδων *Lie* επάγει ένα ομομορφισμό στις αντίστοιχες άλγβερες *Lie*. Πράγματι έστω $\phi : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομαδών *Lie*. Τότε θα έχουμε:

$$\phi(exp(x)exp(y)) = \phi(exp(x))\phi(exp(y)) = exp(d\phi_e(x))exp(d\phi_e(y))$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω ταυτότητα και στα δυο μέλη της ισότητας. Τότε θα έχουμε:

$$\phi(exp(x + y + \frac{1}{2}[x, y] + ...)) = exp(d\phi_e(x) + d\phi_e(y) + \frac{1}{2}[d\phi_e(x), d\phi_e(y)] + ...)$$

και άρα:

$$exp(d\phi_e(x) + d\phi_e(y) + \frac{1}{2}d\phi_e([x, y]) + ...) = exp(d\phi_e(x) + d\phi_e(y) + \frac{1}{2}[d\phi_e(x), d\phi_e(y)] + ...)$$

Τώρα επιλέγοντας τα x, y αρκετά κοντά στο $0 \in \mathfrak{g}$ έτσι ώστε η εκθετική συνάρτηση να είναι 1-1 και συκρίνοντας τους όρους όμοιας τάξης θα έχουμε ότι:

$$d\phi_e([x, y]) = [d\phi_e(x), d\phi_e(y)]$$

για κάθε x, y αρκετά κοντά στο 0. Οι συναρτήσεις και στα δυο μέλη της ισότητας είναι διγραμμικές και ταυτίζονται σε μια ανοικτή περιοχή του 0. Αυτό συνεπάγεται οτι ταυτίζονται σε όλο τον χώρο και άρα:

$$d\phi_e([x, y]) = [d\phi_e(x), d\phi_e(y)]$$

για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$ και συνεπώς η απεικόνιση $d\phi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών *Lie*.

Ακόμα αυτή η ταυτότητα μπορεί να εφαρμοστεί για να δείξει την ακόλουθη ισότητα:

$$exp(-tX)exp(-tY)exp(tX)exp(tY) = exp(t^2[X, Y] + O(t^3))$$

Αυτή η εξίσωση μας δίνει ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα:

Αν X, Y είναι δυο αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία τότε η καμπύλη:

$$t \to exp(-\sqrt{t}X)exp(-\sqrt{t}Y)exp(\sqrt{t}X)exp(\sqrt{t}Y)$$

έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο e το $[X, Y]$.

Με αυτή την παρατήρηση μπορούμε επιτέλους να δείξουμε οτι ο ορισμός του *Lie bracket* χρησιμοποιώντας τοπικές συντεταγμένες και ο ορισμός του χρησιμοποιώντας το φυσιολογικό *Lie bracket* των από αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων είναι ισοδύναμοι. Για το επόμενο θεώρημα το *Lie bracket* [-,-] θα το καταλαβαίνουμε με τον τοπικό ορισμό. Ακόμα για να αποφύγουμε πιθανόν μπερδέματα θα συμβολίζουμε το από αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο που αντιστοιχεί στο X ως F_X:

Θεώρημα. *Για κάθε* $X, Y \in \mathfrak{g}$ *έχουμε* $[F_X, F_Y] = F_{[X,Y]}$

Απόδειξη. Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε οτι για κάθε $f \in C^\infty(G)$ και για κάθε $p \in G$:

$$[F_X, F_Y]f(p) = lim_{t\to 0}\frac{f(p \cdot exp(-\sqrt{t}X)exp(-\sqrt{t}Y)exp(\sqrt{t}X)exp(\sqrt{t}Y)) - f(p)}{t} \Rightarrow$$

$$[F_X, F_Y]f(p) = lim_{t\to 0}\frac{f(p\cdot exp(t\cdot [X,Y] + ...)) - f(p)}{t}$$

όπου οι τελείες υποδηλώνουν όρους μεγαλύτερης τάξης. Άρα το όριο στο δεξί μέλος πρέπει να είναι ίσο με το όριο $lim_{t\to 0}\frac{f(p\cdot exp(t\cdot [X,Y])) - f(p)}{t} = F_{[X,Y]}$ και άρα $[F_X, F_Y] = F_{[X,Y]}$.

□

Το παραπάνω θεώρημα μας λέει το ακόλουθο: Αν $(\bar{\mathfrak{g}}, [,])$ είναι η άλγεβρα *Lie* όλων των από αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων με το φυσιολογικό *Lie bracket* και αν $(\mathfrak{g}, [,]_1)$ είναι η άλγεβρα *Lie* όπου $\mathfrak{g} = T_eG$ και το *Lie bracket* είναι αυτό που ορίσαμε χρησιμοποιώντας τοπικές συντεταγμένες τότε η απεικόνιση $X \to F_X$ από την $\mathfrak{g}$ στην $\bar{\mathfrak{g}}$ είναι ένας ισομορφισμός αλγεβρών *Lie*. (είχαμε δείξει στην προηγούμενη ενότητα οτι αυτή η απεικόνιση είναι ισομορφισμός διανυσμτικών χώρων. Το θεώρημα δείχνει οτι διατηρεί και το *Lie bracket*).

Τέλος είμαστε έτοιμοι να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα που διατυπώθηκε στην προηγούμενη ενότητα:

Θεώρημα. *Έστω G, H δυο ομάδες Lie με την G να είναι συνεκτική και απλά συνεκτική. Ακόμα έστω $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ένας ομομορφισμός των αντίστοιχων αλγεβρών Lie. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομρφισμός ομαδών Lie $\phi : G \to H$ τέτοιος ώστε $d\phi_e = \psi$*

Απόδειξη. Η ιδέα είναι ίδια με την ιδέα της απόδειξης της πιο ειδικής εκδοχής αυτού του θεωρήματος. Αρχικά παρατηρούμε οτι αφού ένας ομομορφιμός ομαδών *Lie* καθορίζεται απόλυτα από την παράγωγο στο e όταν το πεδίο τιμών είναι συνεκτικό. Άρα αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει ένας ομομορφισμός με την ιδιότητα που θέλουμε.

Έστω λοιόν $g \in G$. Ενώνουμε το e_G με το g μέσω ενός ομαλού μονοπατιού $g(t)$, $t \in [0, 1]$. Κατά τα γνωστά θα έχουμε ένα αντίστοιχο μονοπάτι στην $\mathfrak{g}$ έστω το $\xi(t)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{dg}{dt}(t) = \xi(t)\cdot g(t)$$

Θεωρούμε ακόλουθη διαφορική εξίσωση στην ομάδα H:

$$\frac{dh}{dt}(t) = \psi(\xi(t))\cdot h(t)$$

με $h(0) = e$. Τότε θα θέσουμε $\phi(g) = h(1)$ και αυτός θα είναι ο ομομορφισμός που ψάχνουμε.

Πρώτα απ' όλα πρέπει να δείξουμε οτι η ϕ είναι καλά ορισμένη. Για να το δείξουμε αυτό έχουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Έστω $I^2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2/0 \le s, t \le 1\}$ και μια ομαλή απεικόνιση $g : I^2 \to G$. Αν έχουμε τα $\xi : I^2 \to \mathfrak{g}$ και $\eta : I^2 \to \mathfrak{g}$ που ορίζονται από τις εξισώσεις:*

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,s) = \xi(t,s)\cdot g(t,s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(t,s) = \eta(t,s)\cdot g(t,s)$$

τότε έχουμε:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial \xi}{\partial s}(t,s) = [\xi(t,s), \eta(t,s)]$$

.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι η $g(t,s)$ αρχίζει από το e δηλαδή οτι $g(t_0, s_0) = e$. Τότε μπορούμε να πάρουμε μια περιοχή συντεταγμένων γύρω από το e που να στέλνει το e στο 0 και θα έχουμε:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t}(t,s) = \bar{\xi}(t,s) + a(\bar{\xi}(t,s), \bar{g}(t,s)) + \ldots$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial s}(t,s) = \bar{\eta}(t,s) + a(\bar{\eta}(t,s), \bar{g}(t,s)) + \ldots$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση ως προς s και την δεύτερη ως προς t θα έχουμε οτι:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial s \partial t}(t_0, s_0) = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial s}(t_0, s_0) + a(\bar{\xi}(t_0, s_0), \bar{\eta}(t_0, s_0)) + \ldots$$
$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t \partial s}(t_0, s_0) = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t}(t_0, s_0) + a(\bar{\eta}(t_0, s_0), \bar{\xi}(t_0, s_0)) + \ldots$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχουμε:

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t}(t_0, s_0) - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial s}(t_0, s_0) = \gamma(\bar{\xi}(t_0, s_0), \bar{\eta}(t_0, s_0)) = \overline{[\xi(t_0, s_0), \eta(t_0, s_0)]}$$

□

Επιστέφουμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος. Έστω g_0, g_1 δύο ομαλά μονοπάτια που ενώνουν το e με το g. Επίσης έστω h_0 και h_1 τα αντίστοιχα μονοπάτια στην H. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε οτι $h_0(1) = h_1(1)$. Αφού η G είναι απλά συνεκτική η g_0 μπορεί να παραμορφωθεί ομαλά έτσι ώστε να ταυτίζεται με την g_1. Πιο συγκεκριμένα αν $g(t,s)$ είναι μια ομαλή ομοτοπία ανάμεσα σε αυτά τα μονοπάτια τότε θα έχουμε τα ακόλουθα:

1. $g(0,s) = e$ και $g(1,s) = g$.
2. $g(t,0) = g_0(t)$ και $g(t,1) = g_1(t)$.
3. Αν έχουμε $\frac{\partial g}{\partial t}(t,s) = \xi(t,s) \cdot g(t,s)$ και $\frac{\partial g}{\partial s}(t,s) = \eta(t,s) \cdot g(t,s)$ τότε θα έχουμε $\eta(0,s) = \eta(1,s) = 0$.

Τώρα ας δούμε την διαφορική εξίσωση πάνω στην ομάδα H ως προς t (με το s ως μια παράμετρο):

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,s) = \psi(\xi(t,s)) \cdot h(t,s)$$

με αρχική τιμή $h(0,s) = e$. Είναι προφανές οτι θα έχουμε $h_0(t) = h(t,0)$ και $h_1(t) = h(t,1)$. Επίσης θεωρούμε και την εξίσωση:

$$\frac{\partial h}{\partial s}(t,s) = \zeta(t,s) \cdot h(t,s)$$

Θέλουμε να δείξουμε οτι $\zeta(t,s) = \psi(\eta(t,s))$ το οποίο συνεπάγεται οτι $\zeta(1,s) = 0$ που συνεπάγεται οτι η απεικόνιση $h(1,s)$ είναι σταθερή και άρα οτι $h_0(1) = h_1(1)$.

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(t,s) = \frac{\partial(\psi \circ \xi)}{\partial s}(t,s) + [\psi(\xi(t,s)), \zeta(t,s)]$$

με $\zeta(0,s) = 0$. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ως προς t ορίζει το $\zeta(t,s)$ απολύτως. Όμως παρατηρούμε οτι:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial \xi}{\partial s}(t,s) = [\xi(t,s), \eta(t,s)]$$

Εφαρμόζοντας την ψ και στις δυο πλευρές αυτής της εξίσωσης βλέπουμε οτι η $\psi(\eta(t,s))$ ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση με την $\zeta(t,s)$ και την ίδια αρχική συνθήκη. Άρα πρέπει να είναι ίσα και άρα η $\phi(g) = h(1)$ είναι καλά ορισμένη.

Τώρα θα δείξουμε οτι η απεικόνιση $\phi : G \to H$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Έστω $g_1(t)$ και $g_2(t)$ δυο ομαλά μονοπάτια που ενώνουν το e με τα g_1, g_2 αντίστοιχα. Τότε για μια κατάλληλη επιλογή των g_1, g_2 το μονοπάτι που ορίζεται ώς:

$$g(t) = g_2(2t)$$

για $0 \leq t \leq 1/2$ και

$$g(t) = g_1(2t-1)g_2$$

για $1/2 \leq t \leq 1$ είναι ένα ομαλό μονοπάτι που συνδέει το e με το $g_1 g_2$. Τα αντίστοιχα μονοπάτια στην άλγεβρα $\mathfrak{g}$ $\xi_1(t)$ (για το $g_1(t)$), $\xi_2(t)$ (για το $g_2(t)$) και $\xi(t)$ (για το $g(t)$) συνδέονται από την σχέση:

$$\xi(t) = 2\xi_2(t)$$

για $0 \leq t \leq 1/2$ και

$$\xi(t) = 2\xi_1(2t-1)$$

για $1/2 \leq t \leq 1$. Τότε τα αντίστοιχα μονοπάτια στην H θα συνδέονται μέσω της σχέσης

$$h(t) = h_2(2t)$$

για $0 \leq t \leq 1/2$ και

$$h(t) = h_1(2t-1)h_2(t)$$

για $1/2 \leq t \leq 1$. Αυτό συνεπάγεται οτι $\phi(g_1 g_2) = h(1) = h_1(1)h_2(1) = \phi(g_1)\phi(g_2)$

Τέλος η απεικόνιση $\phi : G \to H$ είναι ομαλή. Παρατηρούμε οτι από τον τρόπο κατασκευής έχουμε οτι:

$$\phi(exp(x)) = exp(\psi(x))$$

Αυτό δείχνει οτι η ϕ είναι ομαλή σε μια περιοχή του e και άρα είναι ομαλή συνάρτηση[3]. Τώρα αφού είναι ομομορφισμός ομάδων *Lie* πρέπει να έχουμε:

$$exp(d\phi_e(x)) = exp(\psi(x))$$

Αυτό δείχνει οτι $d\phi_e = \psi$ □

[3]Αυτό είναι μια ειδική ιδιότητα των ομομορφισμών: Αν ένας ομομορφισμός είναι ομαλός σε μια περιοχή ενός σημείου τότε είναι ομαλός σε κάθε σημείο.

2.3 Η αναπαράσταση *adjoint* και η *adjoint* απεικόνιση

Σε αυτή την ενότητα θα μιλήσουμε εν συντομία για άλλες δυο πολύ βασικές απεικονίσεις πάνω σε μία ομάδα *Lie*:

Ορισμός. *Έστω G μια ομάδα Lie. Τότε η adjoint αναπαράσταση της G ορίζεται ως $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$, $Ad(g)X = g \cdot X \cdot g^{-1}$. Η απεικόνιση adjoint ορίζεται ως $ad : \mathfrak{g} \to gl()$ ως $ad(X)(Y) = [X, Y]$.*

Τα δυο αυτά αντικείμενα είναι στενά συνδεδεμένα. Πρώτα παρατηρουμε οτι η Ad είναι μια αναπαράσταση της ομάδας G. Είναι απλά ζήτημα υπολογισμών να επαληθεύσει όλες τις αναγκαίες συνθήκες για να το δούμε αυτό. Αν η G είναι και συμπαγής τότε με το τρικ που συζητήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο μπορούμε να βρούμε ένα εσωτερικό γινόμενο στην $\mathfrak{g}$ το οποίο είναι $Ad-$αναλλοίωτο και η αντίστοιχη αναπαράσταση μοναδιαία. Αυτό θα μας φανεί χρήσιμο αργότερα. Όσον αφορά την ad από την ταυτότητα του *Jacobi* είναι φανερό οτι είναι μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$. Όμως αφού η άλγεβρα *Lie* της $GL(\mathfrak{g})$ είναι η $gl(\mathfrak{g})$ έχουμε και ένα άλλο τρόπο να δούμε οτι η ad είναι αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$:

Θεώρημα. *Η απεικόνιση Ad είναι μια αναπαράσταση της ομάδας G στον χώρο $\mathfrak{g}$ και μάλιστα έχουμε $d(Ad)_e = ad$.*

Απόδειξη. Αν $C_g(h) = ghg^{-1}$ τότε έχουμε $Ad(g) = d(C_g)_e$. Άρα από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$Ad(gh) = d(C_{gh})_e = d(C_g \circ C_h)_e = d(C_g)_e \circ d(C_h)_e$$

και άρα η (προφανώς) ομαλή συνάρτηση Ad είναι ομομορφισμός ανάμεσα στις ομάδες *Lie* G και $GL(\mathfrak{g})$ και συνεπώς μια αναπαράσταση της G.

Τώρα έχουμε οτι για κάθε $X \in \mathfrak{g}$:

$$Ad(g)(X) = \frac{d}{dt}(gexp(tX)g^{-1})|_{t=0}$$

Για να υπολογίσουμε το $d(Ad)_e$ μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε οτι $g = exp(Y)$ για κάποιο $Y \in \mathfrak{g}$. Τότε θα έχουμε οτι:

$$Ad(exp(Y)) = \frac{d}{dt}(exp(Y)exp(tX)exp(Y)^{-1})|_{t=0} \Rightarrow$$

$$Ad(exp(Y)) = b'(0)$$

όπου $b(t) = exp^{-1}(expYexp(tX)exp(-Y))$ (το t εδώ είναι αρκετά μικρό) όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $exp(Y)^{-1} = exp(-Y)$ και το γεγονός οτι η exp είναι διαφορομορφισμός σε μια γειτονιά του $0 \in \mathfrak{g}$. Για μικρά $|t|$ θα έχουμε οτι:

$$b(t) = exp^{-1}(exp(Y + tX + \frac{1}{2}[Y, tX] + ...)exp(-Y)) \Rightarrow$$

$$b(t) = exp^{-1}(exp(Y + tX + \frac{1}{2}[Y, tX] - Y - \frac{1}{2}[Y + tX, -Y] + \ldots)) \Rightarrow$$
$$b(t) = tX + t[X, Y] + \ldots$$

Άρα έχουμε οτι:

$$Ad(exp(Y))X = b'(0) = X + [Y, X] + \ldots$$

και συνεπώς $d(Ad)_e(X) = ad(X)$.

□

2.4 Υποομάδες *Lie* και Βασικά Θεωρήματα

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των υποομάδων *Lie*. Η παρουσίαση μας θα βασίζεται γύρω από την απόδειξη των παρακάτω θεωρημάτων που αποτελούν την ουσία της θεωρίας των υποομάδων *Lie*:

1. Θα δείξουμε οτι μια υποομάδα *Lie* είναι ομάδα *Lie* και η αντίστοιχη άλγεβρα *Lie* είναι υποάλγεβρα της άλγεβρας *Lie* της 'μεγαλύτερης' ομάδας
2. Θα δείξουμε οτι για κάθε υποάλγεβρα *Lie* υπάρχει μια συνεκτική υποομάδα *Lie* που αντιστοίχει σε αυτήν την άλγεβρα.
3. Θα δείξουμε οτι η εικόνα μιας ομάδας *Lie* μέσω ενός ομομορφισμού ομάδων *Lie* είναι υποομάδα *Lie*. Ακόμα θα δείξουμε οτι η αντίστροφη εικόνα μιας υποομάδας *Lie* είναι υποομάδα *Lie*.

Πρώτα ξεκινάμε με τον ορισμό της υποομάδας *Lie*:

Ορισμός. *Έστω μια ομάδα Lie G και H μια υποομάδα της G (όπου την βλέπουμε ως μια αφηρημένη ομάδα). Τότε η H είναι υποομάδα Lie της G αν είναι υποπολλαπλότητα της G και αν είναι τοπολογική ομάδα με τις πράξεις που κληρονομούνται από την G.*

Αυτός είναι ένας λεπτός ορισμός. Προφανώς θέλουμε μια υπομάδα *Lie* να είναι υποπολλαπλότητα της G και να είναι και υποομάδα της G. Το πρόβλημα είναι ότι μια υποπολλαπλότητα δεν έχει πάντα την τοπολογία που επάγεται από την μεγαλύτερη πολλαπλότητα[4]. Σαν συνέπεια μιας και θέλουμε μια υπομάδα *Lie* να είναι ομάδα *Lie* με τις πράξεις της G πρέπει να απαιτήσουμε η H να είναι μια τοπολογική ομάδα ως προς την δικιά της τοπολογίας.

Αυτό το ζήτημα δεν θα εμφανιζόταν αν κοιτούσαμε μόνο εμβυθισμένες υποπολλαπλότητες. Οπότε γιατί δεν το κάνουμε αυτό; Υπάρχουν διάφοροι (τεχνικοί) λόγοι αλλά ο πιο απλός είναι οτι έτσι αποκλείουμε πολλές υποομάδες που θα θέλαμε να είναι υποομάδες *Lie* αλλά δεν είναι εμβυθισμένες υποπολλαπλότητες. Για παράδειγμα έστω η απεικόνιση $\phi : t \to (e^{2\pi ait}, e^{2\pi\beta it})$ από την προσθετική ομάδα *Lie* $\mathbb{R}$ στην ομάδα *Lie* $S^1 \times S^1$. Αυτή η απεικόνιση είναι ένας ομομορφιμός ομάδων *Lie* και σαν συνέπεια θα θέλαμε να πούμε οτι η $A = \phi(\mathbb{R})$ είναι μια υποομάδα *Lie* της $S^1 \times S^1$. Όμως εκτός της περίπτωσης όπου $\frac{a}{\beta} \in \mathbb{Q}$ το σύνολο A δεν είναι μια εμβυθισμένη υποπολλαπλότητα. Μάλιστα μπορεί να δειχθεί οτι αν $\frac{a}{\beta} \notin \mathbb{Q}$ το A είναι πυκνό στο $S^1 \times S^1$.

[4] Το κλασσικό παράδειγμα είναι μια ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ που τέμνεται μια φορά με τον εαυτό της. Ο χώρος αυτός είναι υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2$ αλλά δεν έχει την τοπολογία που επάγεται από τον $\mathbb{R}^2$

Τώρα θα δείξουμε οτι μια υπομάδα *Lie* είναι όντως μια ομάδα *Lie*. Πρέπει πρώτα να δείξουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Έστω $f : V \to M$ μια ομαλή απεικόνιση και S μια υποπολλαπλότητα της M τέτοια ώστε $f(V) \subseteq S$. Τότε αν η απεικόνιση $f : V \to S$ είναι συνεχής τότε είναι και ομαλή.*

Απόδειξη. Έστω $p \in V$. Τότε αφού $f(p) \in S$ υπάρχει μια περιοχή συντεταγμένων (U, y) στην M γύρω από το $f(p)$ έτσι ώστε το σύνολο:

$$N = \{n \in U / y^j(n) = 0, j = m+1, \dots, dim(M)\}$$

όπου $m = dim(S)$ μαζί με τον περιοσμό των y^j $(j = 1, \dots, dim(S))$ στο N να αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων της S γύρω από το $f(p)$.

Αλλά αφού η f είναι συνεχής από το V στο S θα υπάρχει μια περιοχή του p έστω η W τέτοια ώστε $f(W) \subseteq N$. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε οτι η W είναι μια περιοχή συντεταγμένων και $h : W \to \mathbb{R}^{dim(V)}$ να είναι οι τοπικές συντεταγμένες στο W. Επειδή οι απεικονίσεις $y^j \circ f$ είναι ομαλές (από υπόθεση) και αφού έχουμε $y^j \circ f(a) = 0$ για $j = 1, \dots, dim(S)$ και για $a \in W$ έχουμε οτι σε τοπικές συντεταγμένες η $f : V \to S$ έχει την μορφή:

$$(y \circ f \circ h^{-1})(a) = (y^1(f(h^{-1}(a))), y^2(f(h^{-1}(a))), \dots, y^m(f(h^{-1}(a))), 0, \dots, 0)$$

Αυτό συνεπάγεται οτι η $f : V \to S$ είναι ομαλή.

□

Με αυτό το θεώρημα μπορούμε να δείξουμε οτι μια υποομάδα *Lie* όπως τις ορίσαμε είναι όντως ομάδες *Lie*. Πράγματι η απεικόνιση $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ είναι ομαλή από την $G \times G$ στην G. Επειδή μια υποομάδα *Lie* H είναι υποπολλαπλότητα της G η απεικόνιση $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ είναι ομαλή από την $H \times H$ στην H και η εικόνα της περιέχεται στην H (γιατί η H είναι υποομάδα της G). Ακόμα αφού η H είναι και τοπολογική ομάδα ως προς την τοπολογία της η απεικόνιση $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ είναι συνεχής από την $H \times H$ στην H. Άρα από το προηγούμενο λήμμα είναι και ομαλή και άρα η H είναι ομάδα *Lie*.

Αφού λοιπόν μια υποομάδα *Lie* H της G είναι και ομάδα *Lie* η απεικόνιση $i_H : H \to G$, $h \in H \to i_H(h) = h \in G$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων *Lie*. Κατά συνέπεια η απεικόνιση $d(i_H)_e : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών *Lie* και επειδή η H είναι υποπολλαπλότητα είναι και 1-1. Άρα η $\mathfrak{h}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}$ και έχουμε δείξει το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια ομάδα Lie και H είναι μια υποομάδα Lie της G τότε η άλγεβρα Lie $\mathfrak{h}$ της H είναι υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}$. Μάλιστα θα έχουμε:*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} / \text{η απεικόνιση } t \mapsto exp(tX) \text{ είναι ένα συνεχές μονοπάτι στην } H\}$$

Απόδειξη. Έχουμε οτι $i_H(exp_H(X)) = exp(d(i_H)_e(X))$ για κάθε $X \in \mathfrak{h}$ όπου exp_H, exp_G υποδηώνουν τις εκθετικές συναρτήσεις στις ομάδες H και G αντίστοιχα. Αυτή η εξίσωση μας δείχνει οτι:

$$exp_H(X) = exp_G(X)$$

Άρα για όλα τα $X \in \mathfrak{h}$ θα έχουμε $exp(tX) \in H$ και η απεικόνιση $t \mapsto exp(tX)$ είναι ένα συνεχές μονοπάτι στην H (για την ακρίβεια είναι και ομαλό). Αντιστρόφως τώρα αν η απεικόνιση $t \mapsto exp(tX)$ είναι ένα συνεχές μονοπάτι στην H τότε από το παραπάνω λήμμα θα είναι και ομαλό. Άρα θα έχουμε $X = \frac{d}{dt}(exp(tX))|_{t=0} \in \mathfrak{h}$ και άρα:

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} / \text{η απεικόνιση } t \mapsto exp(tX) \text{ είναι ένα συνεχές μονοπάτι στην } H\}$$

□

Στην συνέχεια θα δείξουμε μια πιο ακριβή περιγραφή της άλγεβρας *Lie* μιας υποομάδας *Lie*. Επίσης θα δείξουμε το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δηλαδή οτι σε κάθε υποάλγεβρα *Lie* αντιστοιχεί μια μοναδική συνεκτική υποομάδα *Lie*. Προς το παρόν θα αποδείξουμε ένα πολυ ισχυρό θεώρημα που μας λέει οτι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για μια υποομάδα H της ομάδας *Lie* G:

1. Η ομάδα H είναι κλειστό υποσύνολο της G.
2. Η ομάδα H είναι μια εμβυθισμένη υποπολλαπλότητα της G.
3. Η H είναι μια κλειστή υποομάδα *Lie* της G.

Η ισοδυναμία αυτών των προτάσων συνήθως αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως το θεώρημα της κλειστής ομάδας. Πριν αρχίσουμε την απόδειξη έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Έστω G μια ομάδα Lie και h_1, h_2 δυο υπόχωροι της $\mathfrak{g}$ τέτοιοι ώστε $\mathfrak{g} = h_1 \oplus h_2$. Τότε υπάρχουν ανοικτές περιοχές $U_1 \subseteq h_1$, $U_2 \subseteq h_2$ του 0 τέτοιες ώστε η απεικόνιση $F : U_1 \times U_2 \to G$, $(X, Y) \mapsto exp(X)exp(Y)$ να είναι ένας διαφορομορφιμός στην εικόνα του.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $(X_i)_{i=1,\ldots,r}$ μια βάση του h_1 και $(X_i)_{i=r+1,\ldots,n}$ μια βάση του h_2 όπου φυσικά $n = dim(\mathfrak{g}) = dim(G)$. Τότε προφανώς η $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ είναι μια βάση της $\mathfrak{g}$. Με αυτή την βάση μπορούμε να ορίσουμε μια κανονική περιοχή συντεταγμένων γύρω από το e. Έστω λοιπόν $(t_i)_{i=1,\ldots,n}$ οι κανονικές συντεταγμένες του στοιχείου $exp(x_1X_1 + \ldots x_rX_r)exp(x_{r+1}X_{r+1} + \ldots + x_nX_n)$. Τότε θα υπάρχουν ομαλές συναρτήσεις ϕ_i τέτοιες ώστε:

$$t_i = \phi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Είναι εύκολο να δούμε οτι ο πίνακας $\frac{\partial(\phi_1,\ldots,\phi_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ είναι ο ταυτοτικός στο σημείο $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Παρατηρούμε ακόμα οτι η απεικόνιση $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi(x_1, \ldots, x_n))$ είναι η έκφραση του F σε τοπικές συντεταγμένες. Η παραπάνω παρατήρηση δείχνει οτι το $dF_{(0,0)}$ είναι αντιστρέψιμο και άρα από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έχουμε το λήμμα.

□

Με αυτό το λήμμα θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω G μια ομάδα Lie και H μια κλειστή υποομάδα Lie της G. Τότε η H είναι εμβυθισμένη υποπολλαπλότητα της G.*

Απόδειξη. Έστω μια ανοικτή περιοχή U του $0 \in \mathfrak{g}$ τέτοια ώστε η $exp|_U$ να είναι διαφορομορφισμός. Θα δείξουμε οτι μπορούμε να επιλέξουμε αυτή την περιοχή έτσι ώστε:

$$exp(U \cap \mathfrak{h}) = exp(U) \cap H$$

Αυτό θα μας δώσει τοπικές συντεταγμένες στην H που λέγονται *slice coordinates* που θα δείχνουν οτι η H είναι μια εμβυθισμένη πολλαπλότητα.

Από τον χαρακτηρισμό της $\mathfrak{h}$ που δώσαμε πιο πάνω βλέπουμε οτι πρέπει να έχουμε:

$$exp(U \cap \mathfrak{h}) \subseteq exp(U) \cap H$$

Θα επιλέξουμε το U τέτοιο ώστε $exp(U) \cap H \subseteq exp(U \cap \mathfrak{h})$. Ας υποθέσουμε οτι αυτό δεν είναι δυνατόν.

Έστω h_2 διανυσματικός υπόχωρος της $\mathfrak{g}$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus h_2$. Τότε από το λήμμα που δείξαμε πιο πριν θα έχουμε οτι η απεικόνιση $F : \mathfrak{h} \oplus h_2 \to G\ (X, Y) \mapsto exp(X)exp(Y)$ είναι ένας διαφορομορφισμός από μια ανοικτή περιοχή γινόμενο του $(0, 0)$ σε μια ανοικτή περιοχή του $e \in G$. Επιλέγουμε λοιπόν μια περιοχή U_0 του $0 \in \mathfrak{g}$ και μια περιοχή $\bar{U}_0$ του $(0, 0) \in \mathfrak{h} \oplus h_2$ τέτοιες ώστε οι $exp|_{U_0}$ και $F|_{\bar{U}_0}$ να είναι διαφορομορφισμοί.

Τώρα επιλέγουμε μια αριθμήσιμη βάση περιοχών (U_i) του $0 \in \mathfrak{g}$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $U_i \subseteq U_0$. Τότε θέτουμε $V_i = exp(V_i)$ και $\bar{U}_i = F^{-1}(V_i)$. Με μια κατάλληλη επιλογή των U_i μπορούμε να δουμε οτι τα V_i και $\bar{U}_i$ αποτελούν βάσεις περιοχών των $e \in G$ και $(0, 0) \in \mathfrak{h} \oplus h_2$ αντίστοιχα.

Επειδή έχουμε υποθέσει οτι δεν ισχύει οτι $exp(U) \cap H \subseteq exp(U \cap \mathfrak{h})$ για οποιοδήποτε U θα πρέπει να υπάρχει ένα $h_i \in exp(U_i) \cap H$ τέτοιο ώστε $h_i \notin exp(U_i \cap \mathfrak{h})$. Τότε όμως θα υπάρχει ένα $Z_i \in exp(U_i)$ τέτοι ώστε:

$$h_i = exp(Z_i)$$

και εφόσον $exp(U_i) = F(\bar{U}_i)$ (από τον ορισμό των $\bar{U}_i$) θα έχουμε:

$$h_i = exp(X_i)exp(Y_i)$$

για κάποια $(X_i, Y_i) \in F(\bar{U}_i)$. Παρατηρούμε οτι πρέπει να έχουμε οτι $Y_i \neq 0$. Αυτό γιατί αν ήταν τότε $exp(Z_i) = exp(X_i)$ και αφού η $exp|_{U_0}$ είναι διαφορομορφισμός έχουμε $X_i = Z_i \Rightarrow Z_i \in \mathfrak{h} \Rightarrow h_i \in exp(U_i \cap \mathfrak{h})$ που είναι άτοπο.

Παρόλα αυτά παρατηρούμε οτι αφού τα $\bar{U}_i$ είναι μια βάση περιοχών του $(0, 0)$ έχουμε οτι $Y_i \to 0$ καθώς $i \to \infty$. Ακόμα παρατηρούμε:

$$exp(Y_i) = exp(X_i)^{-1} h_i \in H$$

Τώρα θα δείξουμε οτι με μια κατάλληλη κανονικοποίηση των Y_i θα έχουμε $Y_i \to Y \neq 0$. Γι αυτό το συγκεκριμένο Y θα δείξουμε οτι $exp(tY) \in H$ το οποίο συνεπάγεται οτι $Y \in \mathfrak{h} \Rightarrow Y \in \mathfrak{h} \cap h_2$ άτοπο και άρα θα υπάρχει μια περιοχή του 0 αρκετά μικρή τέτοια ώστε $exp(U) \cap H \subseteq exp(U \cap \mathfrak{h})$.

Ας επιλέξουμε μια νόρμα $\|-\|$ για τον h_2 και ας θέσουμε $c_i = \|Y_i\|$. Τότε $c_i \to 0$ και $c_i^{-1} Y_i$ ανήκουν στην μοναδιαία μπάλα που ορίζεται από την αντίστοιχη νόρμα. Το σύνολο ατυό είναι συμπαγές και άρα περνώντας σε μια υποακολουθία θα έχουμε $c^{-1} Y_i \to Y \neq 0$.

Τώρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ επιλέγουμε $n_i \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε:

$$|n_i - \frac{t}{c_i}| \leq 1 \Rightarrow$$

$$|n_i c_i - t| \leq c_i$$

και άρα $n_i c_i \to t$. Τώρα έχουμε οτι:

$$n_i Y_i = n_i c_i (c_i^{-1} Y_i) \to tY$$

και άρα $exp(n_i Y_i) \to exp(tY)$. Όμως αφού $exp(Y_i)^{n_i} = exp(n_i Y_i)$ και αφού η H είναι κλειστή θα έχουμε οτι $exp(tY) \in H$ $\forall t \in \mathbb{R}$ και από τις παρατηρήσεις πιο πάνω αυτό είναι άτοπο. Άρα δείξαμε οτι υπάρχει μια ανοικτή περιοχή του 0 τέτοια ώστε:

$$exp(U \cap \mathfrak{h}) = exp(U) \cap H$$

Τέλος ας επιλέξουμε ένα γραμμικό ισομορφισμό $T : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^n$ όπου φυσικά $n = dim(G) = dim(\mathfrak{g})$. Το T μπορούμε να το επιλέξουμε να είναι τέτοιο ώστε $T(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}^k$ όπου $k = dim(H) = dim(\mathfrak{h})$. Τότε η απεικόνιση $f = T \circ exp^{-1} : exp(U) \to \mathbb{R}^n$ είναι ομαλή και ορίζει τοπικές συντεταγμένες γύρω από το e. Ακόμα έχουμε:

$$f(exp(U) \cap H) = T(U \cap \mathfrak{h})$$

και συνεπώς έχουμε οτι το ζεύγος $(exp(U) \cap H, f)$ είναι ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στο H το οποίο το πέρνουμε θέτοντας τις τελευταίες $n - k$ συντεταγμένες ίσες με το 0. Άρα είναι *slice coordinates*. Τώρα μεταφέροντας αυτό το σύστημα συντεταγμένων σε κάθε άλλο σημείο του H χρησιμοποιώντας τις απεικονίσεις L_g, $g \in H$ οι οποίες είναι διαφορομορφισμοί θα έχουμε οτι $f \circ L_{g^{-1}}$ είναι *slice coordinates* γύρω από το σημείο $g \in H$[5] και συνεπώς η H είναι εμβυθισμένη πολλαπλότητα.

□

Ευτυχώς το αντίστροφο αυτού του θεωρήματος είναι πιο απλό να το δείξουμε:

Θεώρημα. *Έστω G μια ομάδα Lie και H μια υποομάδα η οποία είναι και εμβυθισμένη πολλαπλότητα. Τότε η H είναι μια κλειστή υποομάδα Lie της G.*

Απόδειξη. Εφόσον η H είναι εμβυθισμένη πολλαπλότητα η απεικόνιση $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ είναι ομαλή όταν περιοριστεί στο υποσύνολο $H \times H$. Ακόμα, πάλι αφού η H είναι εμβυθισμένη πολλαπλότητα βλέπουμε οτι η παραπάνω απεικόνιση ως απεικόνιση από το $H \times H$ στην H είναι ομαλή και άρα η H είναι υποομάδα *Lie*.

Θα δείξουμε τώρα οτι η H είναι κλειστή. Έστω $(h_i) \subseteq H$ μια ακολουθία στην H που συγκλίνει στο $g \in G$. Θα δείξουμε οτι $g \in H$. Έστω λοιπόν U μια περιοχή συντεταγμένων γύρω από το e τέτοια ώστε το $H \cap U$ να είναι μια περιοχή *slice coordinates*. Ακόμα επιλέγουμε μια περιοχή τέτοια ώστε $\overline{W} \subseteq U$.

[5] Αυτό μπορεί να γίνει γιατί $L_g(exp(U) \cap H) = L_g(exp(U)) \cap H$

Τότε θα υπάρχει μια τρίτη περιοχή τέτοια ώστε $\mu(V \times V) \subsetneq W$ όπου $\mu(g_1, g_2) = g_1^{-1}g_2 \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in W$ όταν $g_1, g_2 \in V$. Τώρα παρατηρούμε οτι για όλα εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος όρων θα έχουμε $g^{-1}h_i \in V$ και άρα:

$$h_j^{-1}h_i = (g^{-1}h_j)^{-1}(g^{-1}h_i) \in W \subsetneq U \Rightarrow$$

$$h_j^{-1}h_i \in H \cap U$$

και άρα για j σταθερό και για $i \to \infty$ έχουμε οτι $h_j^{-1}g \in \overline{W} \subsetneq U$ και άρα $h_j^{-1}g \in H \cap U$. Εφόσον το $H \cap U$ είναι ένα *slice set* είναι κλειστό στο U και άρα έχουμε $h_j^{-1}g \in H \Rightarrow g \in H$.

□

Τέλος έχουμε το τελευταίο κομμάτι:

Θεώρημα. *Αν H είναι μια εμβυθισμένη ομάδα Lie τότε είναι κλειστό υποσύνολο της G.*

Απόδειξη. Είναι προφανές οτι η κλειστότητα $\overline{H}$ είναι υποομάδα της G και η H είναι υποομάδα της $\overline{H}$. Πιο συγκεκριμένα η $\overline{H}$ είναι αναλλοίωτη κάτω από την δράση της H (πολλαπλασιασμός από αριστερά με στοιχεία της H). Αφού η H είναι εμβυθισμένη πολλαπλότητα της G βλέπουμε οτι είναι ανοικτό σύνολο του $\overline{H}$. Επειδή ο πολλαπλασιασμός από αριστερά είναι συνεχής βλέπουμε οτι το σύνολο xH είναι επίσης ανοικτό στο $\overline{H}$. Ακόμα αφού έχουμε

$$\overline{H}H = \sqcup_{x \neq e} xH$$

Άρα το H πρέπει να είναι και κλειστό στο $\overline{H}$ που συνεπάγεται φυσικά οτι είναι κλειστό σύνολο.

□

Τέλος το τελευταίο μεγάλο θεώρημα που έχουμε είναι το ακόλουθο. Ας σημειωθεί οτι έχουμε αποδείξει οτι αν G είναι μια ομάδα *Lie* και H είναι μια υποομάδα *Lie* τότε η $\mathfrak{h}$ είναι υποάλγεβρα της άλγεβρας *Lie* $\mathfrak{g}$. Το ακόλουθο θεώρημα μας είναι το αντίστροφο αυτού του αποτελέσματος:

Θεώρημα. *Έστω G μια ομάδα Lie και $\mathfrak{h}$ μια υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{g}$. Τότε υπάρχει μια μοναδική συνεκτική υποομάδα Lie H με άλγεβρα Lie την $\mathfrak{h}$.*

Με αυτό το θεώρημα σχεδόν ολοκληρώνεται η μελέτη της αντιστοιχίας ομάδων *Lie* με άλγεβρες *Lie*. Έχουμε δείξει οτι σε μια ομάδα *Lie* μπορούμε να αντισοιχήσουμε μια άλγεβρα *Lie*. Σχεδόν αντιστρόφως έχουμε οτι για μια υποάλγεβρα *Lie* μπορούμε να βρούμε μια υποομάδα *Lie* που να έχει ως άλγεβρα *Lie* την αρχική μας άλγεβρα.

Γενικότερα είναι γνωστό οτι μια άγεβρα *Lie* (ως αφηρημένο αλγεβρικό αντικείμενο) είναι μια άλγεβρα *Lie* μιας ομάδας *Lie* και μάλιστα όταν η ομάδα αυτή είναι συνεκτική και απλά συνεκτική τότε είναι και μοναδική (αυτό είναι εύκολο να το δούμε γιάτι, όπως έχουμε δείξει ένας ομομορφισμός ομάδων *Lie* που με πεδίο τιμών μια συνεκτική, απλά συνεκτική ομάδα προέρχεται από ένα ομομορφισμό των αντίστοιχων αλγεβρών *Lie* και αντίστροφα). Από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε πως μια καλή ιδέα για να το δείξουμε αυτό είναι να εμφυτεύσουμε μια άλγεβρα *Lie* $\mathfrak{g}$ ως μια υποάλγεβρα *Lie* μιας άλγεβρας *Lie* που ξέρουμε οτι αντιστοιχεί σε μια ομάδα *Lie* και τότε από το παραπάνω θεώρημα θα πάρουμε μια ομάδα *Lie* που να αντιστοιχεί στην $\mathfrak{g}$. Για να το κάνουμε αυτό όμως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του *Ado* που μας λέει οτι κάθε άλγεβρα *Lie* είναι ισομορφική με μια υποάλγεβρα της $gl(V)$ για κάποιο διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης (η οποία φυσικά αντιστοιχεί στην ομάδα *Lie* $GL(V)$). Το θεώρημα αυτό είναι όμως πάρα πολύ δύσκολο να δειχθεί και δεν θα το καλύψουμε εδώ.

2.4.1 Δράσεις Ομάδων *Lie* και βασικά θεωρήματα

Τώρα θα πουμε μερικά πράγματα για τις βασικές ιδιότητες των δράσεων ομάδων *Lie*. Πρώτα πρέπει να παρατηρήσουμε οτι δεν μας ενδιαφέρουν οι γενικές δράσεις μιας ομάδας *Lie* πάνω σε αυθαίρετους χώρους. Αντιθέτως θα κοιτάξουμε εκείνες τις δράσεις όπου συνδυάζουν την αναλυτική δομή της ομάδας:

Ορισμός. *Έστω M μια ομαλή πολλαπλότητα και G μια ομάδα Lie. Τότε θα λέμε οτι η G δρά ομαλά πάνω στην πολλαπλότητα M αν δρα πάνω στην M ως ομάδα και αν η απεικόνιση $(g, x) \to g \cdot x$ είναι μια ομαλή απεικόνιση.*

Εφόσον στην διπλωματική αυτή δεν θα ασχοληθούμε με άλλα είδη δράσεων όταν λέμε οτι μια ομάδα *Lie* δρά πάνω σε μια πολλαπλότητα θα εννοείεται οτι η δράση είναι ομαλή. Εφόσον εξακολουθούμε να μιλάμε για δράσεις ομάδων όλες οι αντίστοιχες έννοιες από την θεωρία των δράσων ομάδων έχουν νόημα σε αυτό το πλαίσιο. Το κεντρικό αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι να δειχθεί οτι πολλά από τα βασικά αντικείμενα της θεωρίας των δράσεων ομάδων είναι πολλαπλότητες όταν έχουμε μια δράση μιας ομάδας *Lie*.

Για παράδειγμα έστω οτι η ομάδα *Lie* G δρα πάνω σε μια πολλαπλότητα M και έστω η ομάδα G_m που σταθεροποιεί ένα σημείο της M δηλαδή:

$$G_m = \{g \in G/g \cdot m = m\}$$

Είναι προφανές οτι η G_m είναι όντως ομάδα. Παρατηρούμε ακόμα οτι είναι και ένα κλειστό σύνολο. Πράγματι αν $\phi_m : G \to M$, $g \mapsto g \cdot m$ τότε βλέπουμε οτι $G_m = \phi_m^{-1}(m)$. Επείδη η ϕ_m είναι ομαλή βλέπουμε οτι η G_m είναι όντως κλειστή και άρα από το θεώρημα της κλειστής υποομάδας που αποδείχθηκε στην προηγούμενη ενότητα η G_m είναι μια κλειστή υποομάδα *Lie* της G. Μάλιστα είναι και εμβυθισμένη πολλαπλότητα.

Αυτό που είναι πιο δύσκολο να δειχθεί είναι οτι η τροχιά ενός σημείου m καθώς κινείται υπό την δράση της ομάδας είναι μια υποπολλαπλότητα της M και μάλιστα διαφορομορφική με το σύνολο όλων των συμπλόκων της G_m, G/G_m[6]. Για αρχή έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα. *Έστω G μια ομάδα Lie που δρά πάνω σε μια πολλαπλότητα M. Τότε για κάθε $m \in M$ η τροχία $G \cdot m$ είναι μια υποπολλαπλότητα της M.*

[6]Αυτό το σύνολο δεν είναι καθόλου προφανές οτι είναι ομαλή πολλπλότητα. Θα το δείξουμε αυτό παρακάτω

Το παραπάνω θεωρήμα βασίζεται στο παρακάτω, πιο γενικό θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω G μια ομάδα Lie και H μια κλειστή υποομάδα Lie της G. Τότε το σύνολο G/H με την τοπολογία γινόμενο που επάγεται από την φυσιολογική προβολή $\pi_H : g \mapsto gH$ είναι μια ομαλή πολλαπλότητα τέτοια ώστε η π_H είναι ομαλή και η $g(hH) = (gh)H$ είναι μια ομαλή δράση της ομάδας G πάνω στην G/H.*

Το κεντρικό μέλος της απόδειξης περιέχεται στο παρακάτω λήμμα:

Λήμμα. *Αν G, H είναι όπως στο παραπάνω θεώρημα ορίζουμε τον χώρο $\mathfrak{m}$ ως $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Τότε υπάρχει μια περιοχή U του $0 \in \mathfrak{m}$ τέτοια ώστε $exp|_U$ είναι ομοιομορφιμός με ανοικτή εικόνα. Ακόμα η $\pi_H : G \to G/H$ απεικονίζει το $exp(U)$ σε μια ανοικτή περιοχή του $H \in G/H$.*

Απόδειξη. Ξέρουμε οτι θα υπάρχει μια περιοχή του $(0, 0) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ έστω η $U_1 \times U_2$ τέτοια ώστε να απεικονίζεται ¨διαφορομορφικά¨ μέσω της απεικόνισης $F : (A, B) \mapsto exp(A)exp(B)$. Εφόσον το H είναι κλειστό και άρα εμβυθισμένη πολλαπλότητα έχει την τοπολογία που επάγεται από το G και άρα υπάρχει μια $V \subseteq G$ ανοικτή περιοχή του e τέτοια ώστε $V \cap H = exp(U_1)$. Επιλέγουμε τώρα μια περιοχή του $0 \in \mathfrak{m}$, $V \subseteq U_2$ έτσι ώστε $exp(U)exp(-U) \subseteq V$. Σε αυτή την περιοχή η $exp|_U : U \to exp(U)$ είναι ομοιομορφιμός.

Τώρα παρατηρούμε οτι στο σύνολο $exp(U)$ η απεικόνιση $\phi_H : G \to G/H$ είναι 1-1. Πράγματι αν $\pi_H(expX) = \pi_H(expX_1)$ τότε πρέπει να έχουμε οτι $exp(-X_1)exp(X) \in H \cap V = exp(U_1)$ και άρα $\exists Z \in U_1$ τέτοιο ώστε $exp(X) = exp(X_1)exp(Z)$. Αλλά αφού η απεικόνιση F είναι διαφορομορφισμός όταν περιοριστεί στο $U_1 \times U_2$ θα έχουμε $Z = 0$ και άρα $X_1 = X$, άτοπο. Άρα η $\pi_H|_{exp(U)}$ είναι 1-1 και αφού το G/H έχει την τοπολογία πηλίκο θα είναι και ομοιομορφισμός. Ακόμα έχουμε

$$\pi_H(exp(U)exp(U_1)) = \pi_H(exp(U))$$

και αφού το $exp(U)exp(U_1)$ είναι ανοικτό και αφού η π_H είναι μια ανοικτή απεικόνιση βλέπουμε οτι η $\pi_H|_{exp(U)}$ έχει ανοικτή εικόνα που περιέχει το $H \in G/H$.

□

Με αυτό το λήμμα η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται αρκετά απλή. Πράγματι μπορούμε να χρησιμποιήσουμε την περιοχή U που μας δίνει το θέωρημα και την φυσιολογική προβολή π_H για να δώσουμε τοπικές συντεταγμένες σε μια περιοχή του $H \in G/H$ και μετά να μεταφέρουμε αυτή την περιοχή συντεταγμένων σε οποιοδήποτε άλλο σημείο. Πιο αυστηρά θα έχουμε: Έστω $X_1, \ldots, X_r$ μια βάση της $\mathfrak{m}$. Τότε για κάθε $g \in G$ η απεικόνιση:

$$\pi_H(gexp(x_1X_1 + \ldots + x_rX_r)) \mapsto (x_1, \ldots, x_r)$$

είναι ένας ομοιομορφισμός από το $g \cdot \pi_H(expU)$ σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^r$. Είναι εύκολο να δούμε οτι αυτές οι απεικονίσεις ορίζουν ένα άτλαντα που ορίζει μια ομαλή δομή στην G/H.

Επιπλέον είναι γνώστο οτι η G δρά πάνω G/H ως $g(hH) = (gh)H$. Θα δείξουμε αυτή η δράση είναι και ομαλή. Αν $A : G \times G \to G$, $(g, x) \to gx = A(g, x)$ και $B : (g, hH) \mapsto$

$(gh)H$ τότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση: $B|_{G\times\pi(expU)} = \pi_H \circ A \circ (id_G \circ \pi_H)^{-1}$ που δείχνει οτι η B είναι ομαλή και άρα η δράση της G πάνω στην G/H είναι ομαλή.

Αυτό το θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιήθει για να δώσει μια γρήγορη απόδειξη οτι η τροχιά ενός σημείου είναι πολλαπλότητα. Πράγματι έχουμε δείξει οτι η ομάδα που σταθεροποιεί το m, G_m είναι κλειστή υποομάδα και άρα η G/G_m είναι μια ομαλή πολλαπλότητα και η απεικόνιση $\bar{\phi_m} : G/G_m \to G\cdot m$ είναι 1-1 και συνεχής από την G/G_m στην M. Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την απεικόνιση για να δώσουμε στην $G \cdot m$ μια τοπολογία η οποία θα κάνει την τροχιά ομοιομορφική με την G/G_m και θα κληρονομεί και την ομαλή δομή της G/G_m η οποία θα είναι και ¨μικρότερη¨ η οποία θα κάνει την $\bar{\phi_m}$ ομαλή. Η κατασκευή αυτή είναι απολύτως όμοια με την κατασκευή της τοπολογίας πηλίκου.

Αν η υποομάδα *Lie* H είναι κανονική υποομάδα τότε η G/H έχει την δομή ομάδας. Από τον ορισμό της δράσης της G πάνω στην G/H και από το προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε οτι η G/H είναι ομάδα *Lie*. Μάλιστα η αντίστοιχη προβολή π_H γίνεται ένας ομομορφισμός ομάδων *Lie*. Αν εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα και αυτή την περίπτωση στην περίπτωση που $H = Ker(\phi)$ όπου $\phi : G \to K$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων *Lie* θα καταλήξουμε στο λεγόμενο πρώτο θεώρημα ισομορφισμών. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το αποτέλεσμα:

Θεώρημα. *Έστω G, H δυο ομάδες Lie και $\phi : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομάδων Lie. Τότε το σύνολο $G/Ker(\phi)$ είναι ομάδα Lie και η απεικόνιση $\bar{\phi} : G/Ker(\phi) \to H$, $gKer(\phi) \mapsto \phi(g)$ είναι ομομορφισμός ομάδων Lie και μάλιστα είναι ισομορφισμός των ομάδων Lie $G/Ker(\phi)$ και $\phi(G)$.*

Τέλος ίσως θα αναρωτιώμασταν αν ο χώρος όλων των τροχιών μιας δράσης μιας ομάδας *Lie* είναι μια ομαλή πολλαπλότητα. Αυτό δεν ισχύει γενικά γιατί μπορεί για παράδειγμα μια τροχιά να είναι πυκνή στον χώρο και έτσι ο χώρος των τροχιών με την φυσιολογική τοπολογία πηλίκο να μην είναι καν *Hausdorff*. Παρόλα αυτά υπάρχει μια ειδική κατηγορία δράσεων στην οποία τέτοιες παθογένειες δεν συμβαίνουν:

Ορισμός. *Μια δράση μιας ομάδας G σε ένα σύνολο M λέγεται κανονική δράση αν η απεικόνιση $A : G \times M \to M \times M$, $(g, x) \to (x, gx)$ είναι κανονική απεικόνιση, δηλαδή η αντίστροφη εικόνα κάθε συμπαγούς συνόλου του $M \times M$ είναι συμπαγής.*

Επειδή δεν θα τα χρειαστούμε στη υπόλοιπη εργασία απλά αναφέρουμε οτι όταν η δράση είναι κανονική τότε οι τροχιές είναι εμβυθισμένες πολλαπλότητες. Αυτό μπορεί να το δει κανείς χρησιμοποιώντας το θεώρημα σταθερού βαθμού (όπου είναι φανερό οτι η απεικόνιση $\phi_m : g \mapsto g \cdot m$ είναι σε αυτή την περίπτωση κανονική και γενικά συνάρτηση σταθερού βαθμού). Τέλος αναφέρουμε οτι για κανονικές δράσεις ο χώρος των τροχιών είναι μια ομαλή πολλαπλότητα. Πιο συγκεκριμένα διατυπώνουμε τα ακόλουθα θεωρήματα χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια ομάδα Lie που δρά κανονικά πάνω στην πολλαπλότητα M τότε για κάθε $m \in M$ η τροχιά $G \cdot m$ είναι εμβυθισμένη πολλαπλότητα της M.*

Θεώρημα. *Αν G είναι μια ομάδα Lie που δρά κανονικά πάνω σε μια πολλαπλότητα M έτσι ώστε $G_m = \{1\}$ για κάθε $m \in M$*[7] *τότε ο χώρος όλων των τροχιών:*

$$M/G = \{G \cdot m / m \in M\}$$

με την τοπολογία πηλίκο είναι μια ομαλή πολλαπλότητα.

2.5 Μεγιστικοί Τόροι και η Ολοκληρωτική Φόρμουλα του *Weyl*

Ο σκοπός αυτής της υποενότητας είναι να εξηγήσει μερικά χαρακτηριστικά της γεωμετρίας μιας συμπαγούς ομάδας *Lie* και να δούμε τι συνέπειες έχει για την άλγεβρα των ομάδων *Lie*. Πιο συγκεκριμένα αφού σκιαγραφήσουμε μερικές ιδιότητες της γεωμετρίας *Riemann* σε μια συμπαγή ομάδα *Lie* και θα την χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε μερικά πολύ βασικά θεωρήματα σχετικά με την εκθετική συνάρτηση και για να δείξουμε μερικές βασικές ιδιότητες για την μεγιστική αβελιανή υπομάδα μιας ομάδας *Lie*. Αυτές τις ιδιότητες θα τις χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε την ομάδα *Weyl* μιας ομάδας *Lie* και μιας και έχουμε όλα τα αναγκαία συστατικά θα αποδείξουμε την ολοκληρωτική φόρμουλα του *Weyl* και θα δούμε μερικές συγκεκριμένες εφαρμογές της.

Πρώτα θέλουμε να μιλήσουμε για αβελιανές ομάδες *Lie*. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός. *Μια συμπαγής αβελιανή, συνεκτική ομάδα Lie λέγεται τόρος.*

Ακόμα μια άλγεβρα *Lie* λέγεται αβελιανή αν $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ έχουμε $[X, Y] = 0$. Είναι προφανές οτι κάθε αβελιανή άλγεβρα *Lie* είναι ισομορφική με την τετριμμένη άλγεβρα *Lie* $\mathbb{R}^n$ για κάποιο n. Ακόμα υπάρχει μια άμεση σχέση ανάμεσα στις αβελιανές ομάδες *Lie* και στις αβελιανές άλγεβρες *Lie*:

Πρόταση. *Μια ομάδα Lie, G είναι αβελιανή τότε και η αντίστοιχη άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ είναι αβελιανή.*

Απόδειξη. Πράγματι βλέπουμε οτι η απεικόνιση $C_g : h \mapsto ghg^{-1}$ είναι ταυτοτική όταν η ομάδα είναι αβελιανή και άρα η *adjoint* αναπαράσταση της G είναι η τετριμμένη. Αυτό συνεπάγεται οτι $d(Ad)_e(X)(Y) = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ καο άρα $[X, Y] = ad(X)(Y) = 0$. □

Μάλιστα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα που είναι κάτι σαν ένα μερικό αντίστροφο της παραπάνω πρότασης:

Πρόταση. *Έστω G μια ομάδα Lie και $X, Y \in \mathfrak{g}$ τέτοια ώστε $[X, Y] = 0$. Τότε $exp(X + Y) = exp(X)exp(Y) = exp(Y)exp(X)$.*

[7] Σε αυτή την περίπτωση λέμε οτι η δράση είναι ελεύθερη.

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε οτι $Ad(exp(tX))Y = Y$. Πράγματι έχουμε οτι:

$$Ad(exp(tX))Y = \frac{d}{ds}(exp(tX)exp(sY)exp(-tX))|_{s=0} \Rightarrow$$

$$Ad(exp(tX))Y = \frac{d}{ds}(exp(tX + sY + 0 + O(s^2))exp(-tX))|_{s=0} \Rightarrow$$

$$Ad(exp(tX))Y = \frac{d}{ds}(exp(tX + sY - tX + 0 + O(s^2)))|_{s=0} = \frac{d}{ds}(exp(sY + O(s^2)))|_{s=0} = Y$$

όπου σε κάθε βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι $[X, Y] = 0$. Είναι φανερό οτι αυτό συνεπάγεται οτι $exp(tX)exp(sY)exp(-tX) = exp(sY)$ και άρα όντως έχουμε $exp(X)exp(Y) = exp(Y)exp(X)$. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να το δούμε αυτό παρατηρώντας οτι $Ad(exp(tX)) = exp(t \cdot ad(X))$. Το εκθετικό στο δεξί μέλος της εξίσωσσης είναι το κανονικό εκθετικό ενός γραμμικού τελεστή: $exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} ad(X)^n$. Αν εφρμόσουμε τον τελεστή αυτό στο Y μόνο ο πρώτος όρος της σειράς θα επιβιώσει και άρα θα έχουμε $Ad(exptX)(Y) = Y$

Για το άλλο σκέλος του θεωρήματος θα θεωρήσουμε την ¨επιφάνεια¨ $q(t, s) = exp(tX)exp(sY)$. Είναι εύκολο να δούμε οτι:

$$\frac{d}{dt}(q(t, t))|_{t=t_0} = exp(t_0X)Y_{exp(t_0Y)} + exp(t_0Y)X_{exp(t_0X)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι τα $exp(tX)$, $exp(sY)$ αντιμετατίθενται και τον κανόνα του γινομένου για ομάδες *Lie* που μπορεί να δειχθεί με απλές πράξεις. Η παραπάνω εξίσωση μας λέει οτι:

$$\frac{d}{dt}(q(t, t))|_{t=t_0} = (X + Y)_{exp(t_0X)exp(t_0Y)}$$

και άρα η $q(t, t)$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $X + Y$ που ξεκινάει από το e. Αυτό συνεπάγεται οτι $exp(X + Y) = exp(X)exp(Y)$.

□

Σχετικά με τους τόρους τώρα παρατηρούμε οτι η ομάδα $S^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ είναι μια τέτοια ομάδα. Η ομάδα αυτή είναι ισομορφική με την $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει οτι ουσιαστικά αυτή είναι και το μοναδικό είδος τόρου που μπορούμε να έχουμε:

Πρόταση. *Έστω T ένας τόρος και $\mathfrak{t}$ η αντίστοιχη άλγεβρα Lie. Τότε η εκθετική απεικόνιση $exp : \mathfrak{t} \to T$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων και μάλιστα $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{dim(T)}$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές από την προηγούμενη πρόταση οτι η εκθετική απεικόνιση είναι ένας ομομορφισμός ομάδων από την προσθετική ομάδα της $\mathfrak{t}$ στην T. Μάλιστα είναι ομομορφισμός ομάδων *Lie*. Για να δείξουμε το δεύτερο σκέλος θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Αν μια ομάδα Lie G είναι συνεκτική τότε η $exp(\mathfrak{g})$ παράγει την ομάδα G.*

Για να δείξουμε αυτό το λήμμα αρκεί να παρατηρήσουμε οτι το σύνολο $exp(\mathfrak{g})$ περιέχει μια ανοικτή περιοχή του e. Ακόμα αν U είναι αυτή η περιοχή τότε θα έχουμε $G = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$. Πράγματι το σύνολο $V = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$ είναι ανοικτό και $V \subseteq G$. Ας υποθέσουμε οτι $\exists g \in G$ έτσι ώστε $g \notin V$. Έστω $\gamma(t)$ μια συνεχής καμπύλη που ενώνει το e με το g. Επειδή η γ είναι συνεχής και το V είναι ανοικτό θα υπάρχει $t_0 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $\gamma(t) \in V$, $\forall t < t_0$. Αλλά επειδή η γ είναι συνεχής θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $|t - t_0| < \delta$ θα έχουμε $\gamma(t_0) \in \gamma(t)V \Rightarrow \gamma(t) \in \gamma(t_0)V^{-1}$ όπου $t < t_0$. Όμως τότε θα έχουμε οτι $\gamma(t) \in U^k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Αυτό συνεπάγεται οτι $\gamma(t_0) \in U^{k+1}$, άτοπο. Αυτό δέιχνει ότι $G = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$ και σαν συνέπεια και το λήμμα

Τώρα αν η ομάδα είναι αβελιανή από αυτό το λήμμα βλέπουμε οτι η $exp(\mathfrak{t})$ είναι μια υποομάδα της T που παράγει την T και άρα η εκθετική συνάρτηση είναι επί. Τώρα αφού η exp είναι τοπικός διαφορομορφισμός θα έχουμε οτι θα υπάρχει ένα διακριτό σύνολο τέτοιο ώστε $\Lambda = Ker(exp)$. Αυτό συνεπάγεται οτι $\mathfrak{t}/\Lambda \simeq T$. Αφού η Λ είναι μια διακριτή υποομάδα της $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{R}^n$ και αφού η $\mathfrak{t}/\Lambda$ πρέπει να είναι συμπαγής βλέπουμε οτι $\mathfrak{t}/\Lambda \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$.

□

Όπως έχουμε δείξει σε προηγούμενο κεφάλαιο όλες οι ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ έχουν την μορφή $t \mapsto e^{2\pi ikt}$ όπου $k \in \mathbb{Z}$. Πιο γενικά είναι εύκολο να δούμε οτι όλες οι μοναδιαίες, ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$ έχουν την μορφή:

$$(x_1, \dots x_r) \mapsto e^{2\pi i(\sum_{j=1}^{r} k_j x_j)}$$

όπου $(k_1, \dots k_r) \in \mathbb{Z}^r$

Εδώ θα θέλαμε να αναλύσουμε μια παρατήρηση η οποία δεν έχει αναφερθεί μέχρι στιγμής. Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί μόνο με αναπαραστάσεις μιας ομάδας πάνω σε μιγαδικούς χώρους. Ο λόγος που θεωρούμε μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους είναι οτι η θεωρία των πραγματικών αναπαραστάσεων παρουσιάζει αρχικά μερικές δυσκολίες για τον απλό λόγο οτι δεν μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε ένα τελεστή αν ο χώρος είναι πραγματικός. Για παράδειγμα θα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$ και ϕ μια πραγματική ανάγωγη αναπαράσταση της T. Τότε αν η ϕ δεν είναι τετριμμένη τότε έχει διάσταση 2 και έχει την ακόλουθη μορφή:*

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto \begin{pmatrix} cos(2\pi \sum k_i x_i) & sin(2\pi \sum k_i x_i) \\ -sin(2\pi \sum k_i x_i) & cos(2\pi \sum k_i x_i) \end{pmatrix}$$

Απόδειξη. Είναι φανερό οτι αυτή η αναπαράσταση είναι ανάγωγη. Πράγματι αν δεν ήταν θα ¨έσπαγε¨ ως άθροισμα μονοδιάστατων αναπαραστάσεων που αναγκαστικά θα είχαν την μορφή $(x_1, \dots x_r) \mapsto e^{2\pi i(\sum_{j=1}^{r} k_j x_j)}$ που είναι μιγαδικές αναπαραστάσεις που είναι άτοπο. Άρα οι αναπαραστάσεις της παραπάνω μορφής είναι ανάγωγες, πραγματικές αναπαραστάσεις της T. Αντιστρόφως παρατηρούμε οτι κάθε αναπαράσταση της μορφής $(x_1, \dots x_r) \mapsto e^{2\pi i(\sum_{j=1}^{r} k_j x_j)}$ μπορεί να γραφτεί ως μια πραγματική αναπαράσταση 2 διαστάσεων ως:

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto \begin{pmatrix} cos(2\pi \sum k_i x_i) & sin(2\pi \sum k_i x_i) \\ -sin(2\pi \sum k_i x_i) & cos(2\pi \sum k_i x_i) \end{pmatrix}$$

Αυτό συνεπάγεται οτι μια πραγματική ανάγωγη αναπαράσταση αναγκαστικά πρέπει να έχει διάσταση 2 και ως συνέπεια να έχει αυτή την μορφή.

□

Με άλλα λόγια αν θεωρήσουμε "πραγματικές" αναπαραστάσεις τότε το θεώρημα του *Schur* δεν ισχύει. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με ένα απλό τρόπο: απλά μιγαδικοποιούμε τον χώρο στον οποίο δρά η ομάδα και αναλύουμε την αντίστοιχη αναπαράσταση. Μετά προσπαθούμε να δούμε πως η πληροφορία που έχουμε πάρει μπορεί να "αντιστραφεί" και να αναλύσουμε την αρχική μας αναπαράσταση. Ένα παρόμοιο κόλπο μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση τωη άλγεβρών *Lie* όπως θα δούμε και στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Θεώρημα. *Έστω G μια συμπαγής ομάδα Lie και H μια κλειστή αβελιανή υποομάδα της G. Τότε το συνεκτικό μέλος (connected component) του e στην H είναι ένας τόρος.*

Απόδειξη. Έστω U μια περιοχή του e τέτοια ώστε η $exp : U \to exp(U)$ να είναι διαφορομορφισμός. Θα δείξουμε πρώτα το λήμμα:

Λήμμα. *Αν $X \in \mathfrak{h}$ και $Y \in U$ και αν $exp(Y) \in H$ τότε $[X, Y] = 0$*

Η απόδειξη του λήμματος είναι απλή αν παρατηρήσουμε οτι τα $exp(tX)$ και $exp(Y)$ αντιμετατίθενται και άρα θα έχουμε $exp(Y) = exp(Ad(exp(tX)Y))$ [8]. Αυτό συνεπάγεται οτι $Ad(exp(tX))Y = Y$ και άρα $ad(X)(Y) = [X, Y] = 0$.

Επιστρέφοντας τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος παρατηρούμε πρώτα οτι η H είναι μια εμβυθισμένη ομάδα *Lie* και η άλγεβρα *Lie* που της αντιστοιχεί περιγράφεται ως:

$$\mathfrak{h} = \{Y \in \mathfrak{g} / exp(tY) \in H \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Με το παραπάνω λήμμα είναι εύκολο να δούμε οτι η $\mathfrak{h}$ είναι αβελιανή. Τότε αφού η G είναι συμπαγής η H είναι επίσης συμπαγής και άρα το *connected component* του e στην H είναι μια συμπαγής, συνεκτική αβελιανή ομάδα *Lie* και άρα ένας τόρος.

□

Τώρα παρατηρούμε οτι κάθε συμπαγής ομάδα *Lie*, G περιέχει ένα μεγιστικό τόρο. Πράγματι περιέχει μια συμπαγής, συνεκτική υποομάδα την $\{e\}$. Αν δεν είναι μεγιστική τότε θα υπάρχει μια αλυσίδα τόρων $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \ldots\ T_i \neq T_j$. Όμως αφού οι ομάδες είναι συνεκτικές και η exp επί σε αυτές τις ομάδες παρατηρούμε οτι $dim(T_i) < dim(T_j)$ για $i < j$. Αυτό δείχνει οτι η παραπάνω αλυσίδα έχει πεπερασμένο μήκος και άρα θα πρέπει να υπάρχει ένας μεγιστικός τόρος. Συνεπώς δείξαμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα. *Μια συμπαγής ομάδα Lie περιέχει ένα μεγιστικό τόρο. Αυτό δεν ισχύει αναγκαία αν η ομάδα δεν είναι συμπαγής.*

Για την δεύτερη παρατήρηση του θεωρήματος αρκεί να παρατηρήσουμε οτι η προσθετική ομάδα *Lie*, $\mathbb{R}^n$ δεν περιέχει συμπαγείς υποομάδες.

[8] Γενικά έχουμε $exp(tX)expYexp(-tX) = exp(Ad(exp(tX))Y)$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε την ομάδα του *Weyl* που αντιστοιχεί σε ένα μεγιστικό τόρο. Υπενθυμίζουμε οτι:

$$N_G(T) = \{g \in G | g \cdot T \cdot g^{-1} = T\}$$

Παρατηρούμε οτι η $N_G(T)$ είναι μια κλειστή υποομάδα *Lie* της G που περιέχει την T ως υποομάδα *Lie*. Μάλιστα από τον ορισμό του $N_G(T)$ έχουμε οτι η T είναι μια κανονική υποομάδα του $N_G(T)$.

Ορισμός. *Έστω G μια συμπαγής ομάδα Lie και T ένας μεγιστικός τόρος. Η ομάδα $W(T) = N_G(T)/T$ ονομάζεται ομάδα Weyl της G ως πρός την T.*

Θέλουμε να δούμε μερικές βασικές ιδιότητες της ομάδας *Weyl* αλλά πρώτα θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα. *Αν $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ τότε έχουμε $Aut(T) =\simeq GL_n(\mathbb{Z})$ (ως ομάδες). Ακόμα αν μια συνεκτική ομάδα δρα με συνεχή τρόπο πάνω στην T τότε η δράση είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε οτι αν $\phi \in Aut(T)$ τότε η ϕ επάγει ένα ομομορφιμό αλγεβρών *Lie* πάνω στην $\mathfrak{t}$ έστω τον M ο οποίος είναι αντιστρέψιμος και $\phi(expX) = exp(M \cdot X)$. Κατά συνέπεια η M αφήνει το $ker(exp)$ αναλλοίωτο και ταυτίζοντας το $\mathfrak{t}$ με το $\mathbb{R}$ με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το $ker(exp)$ να ταυτίζεται με το $\mathbb{Z}^n$ βλέπουμε οτι η M διατηρεί το $\mathbb{Z}^n$ που σημαίνει οτι $M \in GL_n(\mathbb{Z})$. Αντιστρόφως αν $M \in GL_n(\mathbb{Z}^n)$ τότε η απεικόνιση $tmod\mathbb{Z}^n \in T \mapsto M \cdot tmod\mathbb{Z}^n$ ανήκει στο $Aut(T)$.

Για το δεύτερο κομμάτι παρατηρούμε οτι μια συνεχής δράση μιας ομάδας H πάνω στην T αποτελείται από έναν ομομορφισμό $\phi : H \to Aut(T)$ έτσι ώστε η απεικόνιση $(h, t) \mapsto \phi(h)t$ είναι συνεχής. Επειδή η $Aut(T)$ πρέπει να έχει την διακριτή τοπολογία που επάγεται από την $GL_n(\mathbb{Z})$ και επειδή η H είναι συνεκτική βλέπουμε οτι η ϕ πρέπει να είναι σταθερή.

□

Τώρα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω G μια συμπαγής ομάδα Lie και T ένας μεγιστικός τόρος. Τότε η ομάδα Weyl $W_G(T)$ ως προς την T είναι μια πεπερασμένη ομάδα. Ακόμα το connected component του $\bar{e} \in N_G(T)$ ταυτίζεται με το T.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $N_G(T)$ είναι προφανές οτι η $N_G(T)$ δρα στην T μέσω της απεικόνισης $t \mapsto gtg^{-1}$ όπου $g \in N_G(T)$. Αφού η $Aut(T)$ είναι διακριτή το *connected component*, V του e στο $N_G(T)$ (που είναι υποομάδα του $N_G(T)$) δρα με με τετριμμένο τρόπο στο T και άρα κάθε $n \in V$ μετατίθεται με το T. Τώρα έστω $Y \in$ στην άλγεβρα *Lie* του V (που είναι ομάδα *Lie* γιατί είναι κλειστό στο $N_G(T)$). Τότε $exp(tY) \in V$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας θα έχουμε οτι η $exp(\mathbb{R} \cdot Y) \cdot T$ θα είναι μια αβελιανή ομάδα και η κλειστότητά της θα είναι ένας τόρος που θα περιέχει την T και άρα θα ισούται με την T γιατι είναι μεγιστική. Αυτό συνεπάγεται οτι $exp(\mathbb{R}Y) \subseteq T$. Αυτό ισχύει για κάθε Y στην άλγεβρα *Lie* του V. Αφού η εκθετική συνάρτηση είναι τοπικός διαφορομορφισμός η T θα περιέχει μια ανοικτή περιοχή του e στο V. Αυτό συνεπάγεται οτι $T = V$. Τώρα η ομάδα $W(T) = N_G(T)/T$ είναι συμπαγής γιατί η $N_G(T)$ είναι συμπαγής και διακριτή γιατί έχουμε ¨διαιρέσει¨ με το *connected component* του e. Άρα η ομάδα πρέπει να είναι πεπερασμένη.

□

Έχουμε ακόμα και το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο θα μας είναι χρήσιμο για την διατύπωση της φόρμουλας του *Weyl*:

Πρόταση. *Έστω G μια συνεκτική, συμπαγής ομάδα Lie και T ένας μεγιστικός τόρος. Τότε η ομάδα $Ad(T)$ δρα πάνω στη $\mathfrak{g}$ (δηλαδή είναι μια αναπαράσταση της T). Μάλιστα κάθε στοιχείο της $\mathfrak{g}$ που μένει αναλλοίωτο κάτω από την δράση της $Ad(T)$ ανήκει στην $\mathfrak{t}$. Ακόμα θα έχουμε $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$ όπου $\mathfrak{p}$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της $Ad(T)$. Τέλος κάτω από τη δράση της $Ad(T)$ ο χώρος αναλύεται ως το ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναλλοίωτων υπόχωρων διαστάσεως 2.*

Παρατηρούμε οτι η πρόταση αυτή συνεπάγεται οτι ο αριθμός $dim(G) - dim(T)$ είναι άρτιος αριθμός.

Απόδειξη. Αν για ένα διάνυσμα $X \in \mathfrak{g}$ έχουμε $Ad(t)X = X$, $\forall t \in T$ τότε βλέπουμε οτι το $exp(sX)$ μετατίθεται με κάθε $t \in T$. Άρα η κλειστότητα της ομάδας που παράγεται από τα $exp(sX)$, $s \in \mathbb{R}$ και την T είναι συμπαγής και περιέχει την T. Αυτό συνεπάγεται οτι $exp(sX) \in T$, $\forall s \in \mathbb{R}$ και άρα $X \in \mathfrak{t}$.

Για το δεύτερο σκέλος παρατηρούμε οτι αφού η ομάδα G είναι συμπαγής η άλγεβρα *Lie* έχει ένα εσωτερικό γινόμενο έστω το $(-,|-)$ που είναι αναλλοίωτο υπο το $Ad(G)$ (ουσιαστικά κάνουμε την *adjoint* αναπαράσταση μοναδιαία όπως έχουμε περιγράψει στο πρώτο κεφάλαιο). Με αυτό το εσωτερικό γινόμενο έχουμε το ευθύ άθροισμα $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$ όπου ο $\mathfrak{p}$ είναι κάθετος στον χώρο $\mathfrak{t}$. Παρατηρούμε οτι για κάθε $t \in T$ ο τελεστής $Ad(t)$ δρα ως ο ταυτοτικός τελεστής στον $\mathfrak{t}$. Άρα θα έχουμε για κάθε $\xi_0 \in \mathfrak{t}$ και $\xi_1 \in \mathfrak{p}$:

$$(\xi_0|Ad(t)\xi_1) = (Ad(t)\xi_0|Ad(t)\xi_1) = (\xi_0, \xi_1) = 0$$

και άρα $Ad(t)\xi_1 \in \mathfrak{p}$ που σημαίνει οτι ο χώρος $\mathfrak{p}$ είναι αναλλοίωτος κάτω από την δράση της $Ad(T)$. Τώρα αφού ο $\mathfrak{p}$ περιέχει κανένα διάνυσμα που να διατηρήται από την δράση της $Ad(T)$ η αντίστοιχη, πραγματική αναπαράσταση της T πάνω στον $\mathfrak{p}$ είναι μη τετριμμένη. Άρα [9] σπάει ως το άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων της T που όπως έχουμε εξηγήσει είναι διαστάσεως 2. Κατά συνέπεια και ο χώρος $\mathfrak{p}$ σπάει ως το άθροισμα αναλλοίωτων υπόχωρων διάστασης 2.

□

Ο βασικός μας σκοπός για να δείξουμε την φόρμουλα του *Weyl* είναι να δείξουμε οτι ένας μεγιστικός τόρος μιας συμπαγούς, συνεκτικής ομαδας *Lie* είναι ουσιαστικά μοναδικός με την έννοια οτι μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε άλλο τόρο με συζηγία με ένα στοιχείο της ομάδας. Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να μιλήσουμε, συνοπτικά,

[9] Αφού η αναπαράσταση είναι μοναδιαία είναι και ημιαπλή. Το θεώρημα που έχουμε δείξει που λέει οτι κάθε ημιαπλή αναπαράσταση σπάει ως άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων ισχύει και για πραγματικές αναπαραστάσεις

για την γεωμετρία μιας συμπαγούς ομάδας *Lie*. Ουσιαστικά οι παρατηρήσεις μας και κυρίως η ¨γεωμετρία¨ που θα δώσουμε σε μια ομάδα *Lie* αναλύουν το εσώτερικό γινόμενο που ορίστηκε στην παραπάνω απόδειξη και το ¨σπρώχνουν¨ σε οποιοδήποτε άλλο εφαπτόμενο χώρο για να πάρουμε μια καλή Ριμαννεια μετρική. Υπενθυμίζουμε εν συντομία την γενική ιδέα αυτής της διαδικασίας:

Όπως έχουμε αναφέρει η G δρα στον εαυτό της με πολλαπλασιασμό από αριστερά. Όταν πάρουμε την παράγωγο του μετασχηματισμού ¨πολλαπλασιασμός από αριστερά¨ πέρνουμε μια δράση της ομάδας G πάνω στην εφαπτόμενη δέσμη TG. Έχουμε χρησιμοποιήσει αυτή την δράση πολλές φορές. Γενικότερα η δράση αυτή μπορεί να επεκταθεί σε οποιαδήποτε διανυσματική δέσμη που μπορεί να κατασκευαστεί από την TG. Για παράδειγμα έχουμε μια δράση της G πάνω στο δυϊκή εφαπτόμενη δέσμη T^*G. Αυτή η δράση μπορεί να μεταφερθεί στα αντίστοιχα πεδία της διανυσματικής δέσμης. Για παράδειγμα αν ω είναι μια γραμμική διαφορική μορφή τότε ορίζουμε $g{\cdot}\omega(X)(p) = \omega(g{\cdot}X_p)$ όπου $X \in \Gamma(TG)$. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε αναλλοίωτα από αριστερά πεδία. Αν κοιτάμε τανυστικά πεδία τότε μπορούμε, για παράδειγμα να επιλέξουμε ένα τανυστή στο $\mathfrak{g}$ και να τον σπρώξουμε μέσω πολλαπλασιασμού από αριστερά σε κάθε άλλο εφαπτόμενο χώρο. Αυτή η διαδικασία θα μας δώσει ένα τανυστικό πεδίο ίδιου τύπου με τον αρχικό τανυστή το οποίο θα είναι αναλλοίωτο από αριστερά.

Μια σημαντική περίπτωση της παραπάνω ιδέας είναι όταν πάρουμε ένα εσωτερικό γινόμενο πάνω στην $\mathfrak{g}$. Τότε σπρώχνουμε αυτή την μετρική σε κάθε άλλο εφαπτόμενο χώρο και φτιάχνουμε μια μετρική *Riemann* που είναι αναλλοίωτο υπό τον πολλαπλασιασμό από αριστερά. Τώρα αν η ομάδα είναι συμπαγής μπορούμε να επιλέξουμε το εσωτερικό γινόμενο έτσι ώστε να είναι και $Ad-$αναλλοίωτο. Ο πολλαπλασιασμός από δεξιά με g σπρώχνει το εσωτερικό γινόμενο της $\mathfrak{g}$ στον ίδιο χώρο T_gG αλλά είναι εύκολο να δούμε οτι τα δυο αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα διαφέρουν κατά ένα $Ad(g)$ εφόσον λοιπόν επιλέξουμε ένα $Ad-$αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο στην $\mathfrak{g}$ θα πάρουμε μια μετρική *Riemann* που είναι αναλλοίωτη και από πολλαπλασιασμό από δεξιά. Πρέπει να παρατηρήσουμε οτι με αυτή την μετρική *Riemann* οι απεικονίσεις L_g, R_g είναι ισομετρίες.

Επειδή δεν θα αναπτύξουμε αναλυτικά σε αυτή την εργασία την θεωρία της γεωμετρίας *Riemann* απλά αναφέρουμε δυο αποτελέσματα τα οποία χρειαζόμαστε. Για αποδείξεις ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να κοιτάξει το [10]:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα Lie τότε οι γεωδισιακές της Ad-αναλλοίωτης μετρικής Riemann που περιγράφτηκε πιο πάνω είναι της μορφής $t \mapsto g \cdot exp(tX)$ για κάποιο $X \in \mathfrak{g}$.*

Ακόμα θα χρησιμοποιήσουμε μια ειδική περίπτωση του λεγόμενου θεωρήματος *Hopf-Rinow*:

Θεώρημα. *Αν M είναι μια συμπαγής, συνεκτική πολλαπλότητα Riemann τότε για κάθε $x, y \in M$ υπάρχει γεωδιασιακή $\gamma : [0, 1] \to M$ τέτοια ώστε $\gamma(0) = x$ και $\gamma(1) = y$.*

Αυτό έχει σαν μια προφανή συνέπεια το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής, συνεκτική ομάδα Lie τότε η εκθετική απεικόνιση $exp : \mathfrak{g} \to G$ είναι επί.*

Για την απόδειξη απλά χρησιμοποιούμε το παραπάνω θεώρημα για να ενώσουμε το e με το g με μια γεωδισιακή και μετά παρατηρούμε οτι αυτή η καμπύλη έχει την μορφή $t \mapsto exp(tX)$ και άρα $exp(X) = g$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε τα βασικά μας θεωρήματα:

Θεώρημα. *Έστω G μια συνεκτική, συμπαγής ομάδα Lie και T ένας μεγιστικός τόρος της G. Τότε για κάθε $g \in G$ υπάρχει $k \in G$ τέτοιο ώστε $g \in kTk^{-1}$. Με άλλα λόγια το g είναι συζηγές με ένα στοιχείο της T.*

Απόδειξη. Έστω $t_0 \in T$ ένα στοιχείο που η κλειστότητα της ομάδας που παράγει στην T είναι η ίδια η T. Λέμε τότε οτι το t_0 είναι ένας τοπολογικός γεννήτορας της T[10]. Τώρα επιλέγουμε ένα $X \in \mathfrak{g}$ και $H_0 \in \mathfrak{t}$ έτσι ώστε να έχουμε $exp(X) = g$ και $exp(H_0) = t_0$. Επιλέγουμε ξανά ένα Ad-αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο στην $\mathfrak{g}$. Τότε θα έχουμε:

$$(Ad(exptY))X|Ad(exp(tY)Z) = (X, Z)$$

για κάθε t. Παραγωγίζοντας θα έχουμε οτι:

$$(ad(Y)(X)|Z) = -(X|ad(Y)(Z)) \Rightarrow$$

$$([Y, X]|Z) = -(X|[Y, Z])$$

Τώρα αφού η G είναι συνεχής ας επιλέξουμε ένα $k \in G$ έτσι ώστε η ποσότητα $(X|Ad(k)H_0)$ να είναι μέγιστη. Είναι προφανές οτι αν $H = Ad(k)H_0$ τότε το $exp(H)$ είναι ένας τοπολογικός γεννήτορας της ομάδας kTk^{-1} η οποία είναι μεγιστικός τόρος. Τώρα παρατηρούμε οτι για κάθε $Y \in \mathfrak{g}$ η απεικόνιση $t \mapsto (X|Ad(exp(tY)H))$ μεγιστοποιήται στο $t = 0$. Άρα θα έχουμε:

$$\frac{d}{dt}(X|Ad(exp(tY)H))|_{t=0} = 0 \Rightarrow$$

$$(X|[Y, H]) = 0 \Rightarrow (X|[H, Y]) = 0 \Rightarrow$$

$$([H, X]|Y) = 0$$

Αυτό ισχύει για κάθε $Y \in \mathfrak{g}$ και άρα θα έχουμε οτι $[H, X] = 0$. Κατά τα γνωστά αυτό συνεπάγεται οτι το $exp(H)$ μετατίθεται με το $exp(tX)$ και αφού το $exp(H)$ είναι τοπολογικός γεννήτορας της KTk^{-1} το $exp(tX)$ μετατίθεται με την kTk^{-1}. Όμως όπως έχουμε δείξει και σε προηγούμενες αποδείξεις αυτόσυνεπάγεται οτι $exp(tX) \in kTk^{-1}$ για κάθε t και άρα $g \in kTk^{-1}$.

□

Ένα σημαντικό πόρισμα αυτού του θεωρήματος είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα:

[10]Τέτοια στοιχεία πάντα υπάρχουν. Για παράδειγμα αν $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ τότε μπορούμε να πάρουμε ένα $t = (t_1, ..., t_n) mod \mathbb{Z}^n$ τέτοιο ώστε τα $1, t_1, ...t_n$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$.0

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής, συννεκτική ομάδα Lie και T_0, T_1 δυο μεγιστικοί τόροι. Τότε υπάρχει $k \in G$ τέτοιο ώστε $T_1 = kT_0k^{-1}$.*

Για την απόδειξη εφαρμόζουμε απλά το παραπάνω θεώρημα στον τοπολογικό γεννήτορα της T_1.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε την φόρουλα του *Weyl*. Η ιδέα αυτής της φόρμουλας είναι πολύ απλή. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πάνω από μια συνεκτική, συμπαγή ομάδα *Lie*. Ας υποθέσουμε ακόμα οτι αυτή η συνάρτηση είναι αναλλοίωτη κάτω από την απεικόνιση $g \mapsto kgk^{-1}$, δηλαδή είναι συνάρτηση κλάσεως. Τότε διαισθητικά υποψιαζόμαστε οτι ίσως θα μπορούσαμε να στείλουμε κάθε g σε ένα μεγιστικό τόρο μέσω αυτής της απεικόνισης. Αυτό γίνεται για κάθε g όπως μόλις δείξαμε. Τώρα θα θέλαμε να δείξουμε οτι αυτή η διαδιακσία ορίζει μια ¨καλή¨ αλλαγή μεταβλητών στο ολοκήρωμα και άρα ίσως θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε το αρχικό ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε με ένα άλλο το οποίο έιναι πάνω από ένα μεγιστικό τόρο το οποίο είναι ένα προφανώς πιο απλό ολοκλήρωμα. Αυτή είναι η διαισθητική ιδέα της φόρμουλας του *Weyl*. Πιο αυστηρά θα γράψουμε το $\int_G f(g)dg$ ως ένα ολοκλήρωμα πάνω από το $G/T \times T$ όπου ο όρος μέσα στο ολοκλήρωμα δεν θα έχει καμία $G/T \times T$ εξάρτηση. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα. *Έστω G μια συνεκτική, συμπαγής ομάδα Lie και T ένας μεγιστικός τόρος. Έστω οτι έχουμε $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$ όπως είχε δειχθεί σε προηγούμενο θεώρημα. Ακόμα έστω f μια συνάρτηση κλάσης και dg, dt τα μέτρα πιθανότητας Haar των G και T αντίστοιχα. Τέλος έστω $W(T)$ η ομάδα Weyl της G ως προς την T. Τότε έχουμε:*

$$\int_G f(g)dg = \frac{1}{|W(T)|}\int_T f(t)det((Ad(t^{-1}) - id_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}})dt$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ταυτότητα που ισχύει για γενικές τοπικά συμπαγείς ομάδες:

$$\int_G f(g)dg = \int_{G/H}\int_H f(gh)d\mu_H(h)d\mu_{G/H}(gH)$$

Ακόμα θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα:

$$\int_M f^* a = deg(f)\int_N a$$

όπου $f : M \to N$ είναι μια απεικόνιση πεπερασμένη κάλυψης (*covering map*) μεταξύ δυο κατευθυνόμενων (*orientable*) πολλαπλοτήτων, a είναι ένα στοιχείο όγκου (*volume form*) στην N και $deg(f) \in \mathbb{N}$. Αν η απεικόνιση είναι βαθμού n ($n-$*fold covering map*) και διατηρεί τον προσανατολισμό τότε θα έχουμε $deg(f) = n$.

Θεωρούμε τον χώρο $X = G/T$. Τότε από θεώρημα που δείξαμε στην πρώτη ενότητα σχετικό με τα μέτρα σε χώρους μας λέει οτι ο χώρος X έχει ένα από αριστερά αναλλοίωτο μέτρο d_X ολικού όγκου 1. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση:

$$\Phi : X \times T \to G, (xT, t) \mapsto xtx^{-1}$$

Τώρα επιλέγουμε μια βάση της $\mathfrak{g}$ έστω την $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ έτσι ώστε η $(X_i)_{i=1,\ldots r}$ να είναι μια βάση της $\mathfrak{t}$ και $(X_i)_{i=r+1,\ldots,n}$ να είναι μια βάση της $\mathfrak{p}$. Με αυτή την βάση κατά τα γνωστά ορίζουμε τις κανονικές συντεταγμένες σε μια περιοχή του e. Είναι εύκολο να δούμε οτι ως προς αυτές τις συντεταγμένες οι εκθετικές απεικονίσεις $exp : \mathfrak{g} \to G$ και $exp : \mathfrak{t} \to T$ έχουν ως Ιακωβιανό πίνακα στο 0 τον ταυτοτικό πίνακα.

Για την απόδειξη θα πρέπει να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή της απεικόνισης Φ και το $deg(\Phi)$. Υπενθυμίζουμε οτι η Ιακωβιανή $det(\Phi)$ δίνεται από την εξίσωση $\Phi^*(dg) = |det(\Phi)|da$ όπου da είναι η κανονική μορφή όγκου που επάγεται από τα G/T, T. Επιλέγουμε τώρα μια περιοχή U του 0 στο $\mathfrak{p}$ έτσι ώστε η περιοχή $xexp(U)T$ να είναι μια περιοχή συντεταγμένων γύρω από το xT όπως περιγράφτηκε στην προηγούμενη ενότητα. Αν ακόμα V είναι μια περιοχή του 0 στη $\mathfrak{t}$ έτσι ώστε η $texp(V)$ να είναι μια περιοχή συντεταγμένων στο T γύρω από το $t \in T$. Τότε το σύνολο $xexp(U) \times texp(V) \subseteq X \times T$ είναι μια περιοχή συντεταγμένων γύρω από το $(xT, t) \in X$. Οι συντεταγμένες σε αυτό το σύνολο δίνονται από την αντίστροφη της απεικόνισης $(\xi_1, \xi_2) \in U \times V \mapsto (xexp(\xi_1)T, texp(\xi_2)) \in X \times T$. Είναι φενερό οτι σε αυτές τις συντεταγμένες η Φ έχει την ακόλοθη μορφή:

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto xexp(\xi_1)texp(\xi_2)exp(-\xi_1)x^{-1}$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την Φ από αριστερά με $t^{-1}x^{-1}$ και από δεξιά με x. Η απεικόνιση που θα πάρουμε θα έχει ίδια Ιακωβιανή με την Φ γιατί αυτοί οι πολλαπλασιασμοί διατηρούν το μέτρο *Haar* της G (που φυσικά επάγεται από την $Ad-$αναλλοίωτη μετρική *Riemann* ως ένας όγκος *Riemann*). Οπότε θα πρέπει να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή της απεικόνισης:

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto t^{-1}exp(\xi_1)texp(\xi_2)exp(\xi_1) = exp(Ad(t^{-1})\xi_1)exp(\xi_2)exp(\xi_1)$$

Τώρα ταυτίζοντας τον χώρο $\mathfrak{p} \times \mathfrak{t}$ με τον $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{t} = \mathfrak{g}$ βλέπουμε οτι η παράγωγος/διαφορικό αυτής της απεικόνισης είναι η:

$$\xi_1 + \xi_2 \mapsto Ad(t^{-1})\xi_1 - \xi_1 + \xi_2$$

Άρα η Ιακωβιανή που ψάχνουμε που είναι η ορίζουσα της παραπάνω γραμμικής απεικόνισης είναι ίση με $det((Ad(t^{-1}) - id_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}})$. Τέλος θα υπολογίσουμε το $deg(\Phi)$. Έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Έστω $t \in T$ ένας τοπολογικός γεννήτορας της T. Τότε το $\Phi^{-1}(t)$ αποτελείται από ακριβώς $|W(T)|$ στοιχεία. Ακόμα η ποσότητα $det((Ad(t^{-1}) - id_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}})$ είναι θετική.*

Για να δείξουμε το πρώτο μέλος αυτού του λήμματος παρατηρούμε οτι:

$$\Phi(xT, s) = t \Rightarrow xsx^{-1} = t \Rightarrow xTx^{-1} \subseteq T \Rightarrow x \in N(T)$$

Άρα έχουμε οτι $\Phi^{-1}(t) = \{(xT, x^{-1}tx)/x \in N(T)\}$. Με αυτή την αναπαράσταση θα μετρίσουμε τα στοιχεία αυτού του συνόλου. Έχουμε οτι αν $g_1 \in g_2T$ τότε θα υπάρχει ένα $s \in T$ με $g_2 = sg_1$ και αυτό συνεπάγεται οτι:

$$g_1^{-1}tg_1 = g_2^{-1}tg_2$$

Άρα δυο στοιχεία στο $\Phi^{-1}(t)$ είναι διαφορετικά αν και μόνο αν οι πρώτες ¨συντεταγμένες¨ τους είναι ίδιες. Αυτό συνεπάγεται οτι το σύνολο αυτό έχει $[N(T) : T] = |W(T)|$ στοιχεία.

Για το δεύτερο σκέλος του λήμματος παρατηρούμε οτι η $(Ad(t^{-1}) - id_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}}$ δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Πράγματι αν είχε επειδή έχουμε επιλέξει ένα $Ad-$αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο στην $\mathfrak{g}$ η $Ad(t^{-1}$ είναι μια ορθογώνια απεικόνιση και άρα αν έχει πραγματικές ιδιοτιμές θα ήταν οι $1, -1$. Αυτό θα συνεπάγεται οτι θα υπάρχει κάποιο $X \in \mathfrak{p}$ διάφορο του 0 για το οποίο θα ίσχυε οτι $Ad(t)X = X$ και αφού το t είναι τοπολογικός γεννήτορας της T καταλήγουμε σε άτοπο.

Τώρα μπορούμε από τις δυο πρώτες ολοκληρωτικές ταυτότητες και από τις παρατηρήσεις μας βλέπουμε οτι με μια αλλαγή μεταβλητών (θέτοντας $g = \Phi(xT, s)$) θα έχουμε την ολοκληρωτική ταυτότητα του *Weyl*

□

Θα δούμε μια παρόμοια φόρμουλα στο επόμενο κεφάλαιο όταν θα έχουμε μιλήσει για την θεωρία των ριζών μιας άλγεβρας *Lie*. Εκεί η φόρμουλα του *Weyl* πέρνει μια ελαφρώς διαφορετική μορφή όπου ουσιαστικά εκφράζουμε την ποσότητα $det((Ad(t^{-1}) - id_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}})$ με ένα διαφορετικό τρόπο χρησιμοποιώντας την θεωρία των ριζών της αντίστοιχης άλγεβρας *Lie*. Αυτή η μορφή θα μπορέσει πιο εύκολα να οδηγήσει σε δυο άλλες σημαντικές φόρμουλες τις οποίες θα τις δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

2.6 Η *Universal Enveloping Algebra* μιας άλγεβρας *Lie*

Σε αυτή την ενότητα πριν αρχίσουμε να βλέπουμε τις άλγεβρες *Lie* με περισσότερη λεπτομέρεια θα δούμε μερικές πολυ βασικές ιδιότητες ενός πολύ σημαντικού αντικειμένου που μπορεί να κατασκευαστεί από μια άλγεβρα *Lie*. Το αντικείμενο αυτό είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα που περιέχει σαν υπόχωρο την αρχική άλγεβρα *Lie* και κατά μια έννοια είναι και η μικρότερη προσεταιριστική άλγεβρα που την περιέχει ως υπόχωρο. Πριν δούμε την ακριβή κατασκευή πρέπει πρώτα να δούμε την έννοια της τανυστικής άλγεβρας ενός διανυσματικού χώρου:

Ορισμός. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από κάποιο σώμα F. Η τανυστική άλγεβρα του V είναι το σύνολο $\mathcal{T}(V) = \oplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes k}$ όπου $V^{\otimes k} = V \otimes \ldots \otimes V$ (k φορές)[11]. Το σύνολο αυτό είναι μια άλγεβρα πάνω από το σώμα F με την πράξη πολλαπλασιασμού που ορίζεται στους απλούς τανυστές ως εξής:*

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \cdot w_1 \otimes \ldots \otimes w_n = v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_n$$

Είναι εύκολο να δούμε οτι η $\mathcal{T}(V)$ είναι όντως μια άλγεβρα. Μάλιστα η $\mathcal{T}(V)$ περιέχει τον αρχικό διανυσματικό χώρο. Τώρα ας υποθέσουμε οτι κατασασκευάζουμε την τανυστική άλγεβρα μιας άλγεβρας *Lie* $\mathfrak{g}$. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε μια προσεταισιστική άλγεβρα που θα περιέχει με κάποια έννοια την $\mathfrak{g}$ ως μια υποάλγεβρα *Lie* (υπενθυμίζουμε οτι μια προσεταιτιριστική άλγεβρα είναι και άλγεβρα *Lie* πέρνοντας τον μεταθέτη ως το *Lie braket*). Έχουμε ήδη μια προσεταιριστική άλγεβρα που περιέχει την $\mathfrak{g}$ αλλά μπορεί να μην έχουμε: $[X, Y] = X \otimes Y - Y \otimes X$ όπου $X, Y \in \mathfrak{g}$. Μπορούμε όμως να εξαναγκάσουμε αυτή την ταυτότητα να ισχύει πέρνοντας το ιδεώδες $I(\mathfrak{g})$ που

[11]Ακόμα έχουμε την σύμβαση οτι $V^{\otimes k} = F$ όταν $k = 0$

παράγεται από τα 'σφάλματα' $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ και 'διαιρώντας' με αυτό το ιδεώδες να πάρουμε την άλγεβρα $\mathcal{T}(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Η προσεταιριστική άλγεβρα αυτή λέγεται *universal enveloping algebra* της $\mathfrak{g}$.

Η άλγεβρα αυτή 'περιέχει' την $\mathfrak{g}$ ως υποάλγεβρα *Lie*. Πράγματι αν π είναι η φυσιολογική προβολή της $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ στην $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ τότε εξ' ορισμού η απεικόνιση $\pi|_{\mathfrak{g}}$ θα είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών *Lie* όπου βλεπουμε την $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ κατά τα γνωστά ως μια άλγεβρα *Lie*. Θα συμβολίζουμε αυτό τον ομομορφισμό ως p. Αξίζει να αναφερθεί οτι η p δεν είναι κατ' ανάγκη 1-1.

Η $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ έχει την ακόλουθη οικουμενική ιδιότητα που μας λέει οτι είναι και η μικρότερη προσεταριστική άλγεβρα που περιέχει την $\mathfrak{g}$ ως υποάλγεβρα *Lie*:

Πρόταση. *Έστω A μια προσεταιριστική άλγεβρα και $\phi : \mathfrak{g} \to A$ ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός προσεταιριστικών αλγεβρών $\bar{\phi} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to A$ τέτοιος ώστε $\phi = \bar{\phi} \circ p$.*

Αυτή η οικουμενική ιδιότητα έχει την σημαντική συνέπεια οτι η θεωρία/δομή των αναπαραστάσεων της άλγεβρας *Lie* $\mathfrak{g}$ είναι ισοδύναμη με αυτή της άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Πιο συγκεκριμένα αν (V, ρ) είναι μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ τόυε μπορούμε να έπεκτείνουμε' την αναπαράσταση αυτή σε μια αναπαράσταση $\bar{\rho}$ της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να έχουμε $\rho(X) = \bar{\rho}(p(X))$. Μάλιστα ένας υπόχωρος του V θα είναι $\mathfrak{g}$-αναλλοίωτος αν και μόνο αν είναι $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-αναλλοίωτος. Αυτό μας λέει οτι η ρ είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ αν και μόνο αν για κάθε $u \in V$ έχουμε $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot u = V$ αν $u \neq 0$.

Τώρα αν θέλουμε να βρούμε μια βάση της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Επιλέγουμε μια βάση της $\mathfrak{g}$ έστω την $X_1, \ldots, X_n$. Αν $M = (m_1, \ldots, m_n)$ όπου $m_j \in \mathbb{N}$ τότε ορίζουμε το στοιχείο $X^M \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ως $X^M = X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$. Έχουμε τώρα το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση. *Το σύνολο όλων των στοιχείων της μορφής X^M αποτελεί μια βάση της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

Αυτό το θεώρημα αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως το θεώρημα *Poincare-Birkhoff-Witt*. Αυτό το θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνουμε ένα αυτομορφισμό της $\mathfrak{g}$ σε ένα αυτομορφισμό της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Αυτό γίνεται βλέποντας πως πρέπει ένας αυτομορφισμός να δρα στα στοιχεία της μορφής X^M.

Η *universal enveloping algebra* μιας άλγεβρας *Lie* $\mathfrak{g}$ έχει και μια αναλυτική ερμηνεία αν κοιτάξουμε μια ομάδα *Lie* G η οποία αντιστοιχεί στην $\mathfrak{g}$. Πράγματι έστω ο ακόλουθος χώρος $C^\infty(G, K)$ όπου $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Σε αναλογία με την περίπτωση των ομαλών συναρτήσεων πάνω σε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης μπορούμε να ορίσουμε διαφορικούς τελεστές πάνω σε στοιχεία του παραπάνω χώρου. Εμείς ενδιαφερόμαστε στην περίπτωση των από αριστερά αναλλοίωτων διαφορικών τελεστών:

Ορισμός. *Αν G μια ομάδα Lie τότε ένας από αριστερά αναλλοίωτος διαφορικός τελεστής στην G είναι ένας γραμμικός τελεστής $D : C^\infty(G, K) \to C^\infty(G, K)$ έτσι ώστε:*

- *Αν $g \in G$ και U είναι μια περιοχή συντεταγμένων γύρω από το g με $\{x^1, \ldots x^n\}$ το* *αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων τότε για κάθε $f \in C^\infty(G, K)$ θα έχουμε:*

$$Df|_U = \sum a_{i_1,\ldots i_n} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} f$$

όπου $a_{i_1,\ldots i_n} \in C^\infty(U, K)$.

- *Για κάθε $g \in G$ θα έχουμε οτι $D \circ L_g = L_g \circ D$.*

Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των από αριστερά αναλλοίωτων διαφορικών τελεστών πάνω στην G ως $D(G)$.

Αναφέρουμε οτι ο ορισμός αυτός χωρίς την συνθήκη 2 βγάζει νόημα και στην περίπτωση όπου η G είναι απλά μια ομαλή πολλαλότητα και άρα η έννοια του διαφορικού τελεστή μπορεί να τεθεί πιο γενικά. Αν όμως θέλουμε να μιλήσουμε για από αριστερά αναλλοίωτους διαφορικούς τελεστές τότε αναγκαστικά πρέπει να έχουμε και μια δράση μιας ομάδας *Lie*.

Είναι προφανές οτι τα διανυσματικά πεδία είναι διαφορικοί τελεστές και συνεπώς τα από αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικα ανήκουν στην $D(G)$. Μάλιστα μπορεί να δειχθεί οτι η άλγεβραπου παράγεται από όλα τα από αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία είναι η άλγεβρα $D(G)$. Αν θυμηθούμε οτι το σύνολο όλων των από αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων πάνω στην G μπορεί να ταυτιστεί με την αντίστοιχη άλγεβρα *Lie* $\mathfrak{g}$ βλέπουμε οτι $\mathfrak{g} \subset D(G)$. Ακόμα είναι εύκολο να δούμε οτι η $D(G)$ είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα και άρα θα έχουμε ένα ομομορφισμό αλγεβρών $s : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to D(G)$. Για την ακρίβεια έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα. *Η universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ της $\mathfrak{g}$ είναι φυσιολογικά ισομορφική με την $D(G)$.*

Το θεώρημα αυτό μπορεί να δειχθεί με την χρήση της λεγόμενης φόρμουλας του *Taylor* για συναρτήσεις πάνω στην G. Έστω για αρχή μια ομαλή συνάρτηση $f \in C^\infty(G)$ και ένα $X \in \mathfrak{g}$. Τότε θα έχουμε οτι $Xf(g) = \frac{d}{dt} f(gexp(tX))|_{t=0}$ όπου εδώ βλέπουμε το X ως ένα από αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Άρα θα έχουμε οτι:

$$Xf(gexp(uX)) = \frac{d}{dt} f(gexp(uX)exp(tX))|_{t=0} = \frac{d}{du} f(gexp(uX))|_{u=0}$$

Η συνάρτηση Xf είναι ομαλή και μπορούμε να θεωρήσουμε το $X^2 f$. Γενικά μπορούμε (με επαγωγή) να δείξουμε οτι:

$$X^n f(gexp(uX)) = \frac{d^n}{du^n} f(gexp(uX))|_{u=0}$$

Τώρα ας υποθέσουμε οτι η f είναι αναλυτική σε μια περιοχή κανονικών συντεταγμένων γύρω από το g. Αυτό σημαίνει οτι θα υπάρχει μια περιοχή του $0 \in \mathfrak{g}$ έστω η V έτσι ώστε για κάθε $X \in V$ θα έχουμε:

$$f(gexpX) = P(x^1, \ldots, x^n)$$

όπου η $P : V \to K$ είναι αναλυτική συνάρτηση και οι $x^1, \ldots, x^n$ είναι οι συντεταγμένες του X ως προς μια βάση της $\mathfrak{g}$. Μπορούμε να επιλέξουμε την περιοχή V έτσι ώστε να είναι κυρτή και άρα για $t \in [0,1]$ θα έχουμε:

$$f(gexp(tX)) = P(tx^1, ..., tx^n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} a_m t^m$$

Από αυτή την εξίσωση μπορούμε να δούμε οτι $a_m = X^m f(g)$ και αυτό δείχνει οτι:

$$f(gexpX) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} X^n f(g)$$

Αυτή η ταυτότητα είναι ένα ανάλογο της φόρμουλας του *Taylor* για άναλυτικές' συναρτήσεις πάνω στην ομάδα G. Αξίζει να αναφερθεί οτι για κατάλληλες επιλογές της συνάρτησης f η φόρμουλα *Taylor* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε με διαφορετικό τρόπο τις ταυτότητες:

$$exp(tX)exp(tY) = exp(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3))$$

$$exp(tX)exp(tY)exp(-tX) = exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3))$$

όπου το $O(t^3)$ υποδηλώνει μια συνάρτηση έτσι ώστε η $\frac{1}{t^3}O(t^3)$ είναι αναλυτική και φραγμένη κοντά στο 0. Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο [].

Τώρα μπορούμε να δείξουμε οτι οι άλγεβρες $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ και $D(G)$ είναι ισομορφικές. Αν $X_1, ..., X_n$ είναι μια βάση της $\mathfrak{g}$ τότε ορίζουμε το στοιχείο $X(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i X_i$ όπου $t = (t_1, ..., t_n)$. Αν δούμε τώρα το $X(t)$ ως ένα στοιχείο της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ τότε για κάθε $M = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$ μπορούμε να σχηματίσουμε το στοιχείο $X(t)^{|M|}/|(|M|)!$ όπου φυσικά $|M| = m_1 + ... m_n$. Αφού το $X(t)$ γράφεται ως ένα άθροισμα μπορούμε να αναπτύξουμε το $X(t)^{|M|}/(|M|)!$ και να ομαδοποιήσουμε τους όρους του $t^N = t_1^{k_1} ... t_n^{k_n}$ όπου $N = (k_1, ... k_n)$. Θέτουμε λοιπόν $X(M)$ τον συντελεστή του t^M. Είναι φανερό οτι $X(M) \in D(G)$.

Είναι εύκολο να δούμε οτι από την φόρμουλα *Taylor* θα έχουμε οτι για αρκετά μικρά t:

$$f(gexp(X(t))) = \sum \frac{1}{m!} X(t)^n f(g) \Rightarrow$$

$$f(gexp(X(t))) = \sum_M t^M X(M) f(g)$$

όπου αναπτύξαμε την δύναμη $X(t)^n$ και ομαδοποιήσαμε τους όρους t^M. Αν συκρίνουμε τώρα αυτή την ισότηταμε το κλασσικό ανάπτυγμα *Taylor* της συνάρτησης $F(t_1, ... t_n) = f(gexp(X(t)))$ βλέπουμε οτι:

$$X(M)f(g) = \frac{1}{m_1! ... m_n!} \frac{\partial^{|M|}}{\partial t_1^{m_1} ... \partial t_n^{m_n}} f(gexp(X(t)))|_{t_1 = ... t_n = 0} \Rightarrow$$

Από αυτή την ισότητα βλέπουμε άμεσα οτι τα $X(M)$ παράγουν το $D(G)$ και είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Ακόμα είναι εύκολο να δούμε οτι μέσω του ομομορφιμού $s : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to D(G)$ που ορίστηκε πιο πάνω τα X^M απεικονίζονται στα $X(M)$. Αυτό σημαίνει οτι οι $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ και $D(G)$ είναι ισομορφικές. Τέλος αναφέρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα που μας χαρακτηρίζει την ομαλότητα χαμηλότερης τάξης συναρτήσεων πάνω στην G ανάλογα με το πως ''απλά'' στοιχεία της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συνεκτική ομάδα Lie και $p \in \mathbb{N}$ τότε $f \in C^p(G)$ αν και μόνο αν για κάθε $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{g}$ η συνάρτηση $g \mapsto X_1 X_2 \ldots X_p f(g)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.*

Σαν ένα χρήσιμο πόρισμα της πρότασης αυτής έχουμε οτι τα *matrix – coefficients* μιας αναπαράστασης είναι ομαλές συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα:

Πόρισμα. *Αν G είναι μια συνεκτική ομάδα Lie και π είναι μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης πάνω σε ένα χώρο V_π τότε οι συναρτήσεις της μορφής $g \mapsto (\pi(g)v|w)$ όπου $v, w \in V_\pi$ είναι ομαλή για κάθε $v, w \in V$.*

Απόδειξη. Αν $f(g) = (\pi(g)v, w)$ τότε για κάθε $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ θα έχουμε οτι:

$$X_1, \ldots, X_n f(g) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \ldots \partial u_n}(\pi(gexp(u_1 X_1)) \ldots \pi(gexp(u_n X_n))v|w)|_{u_1 = \ldots u_n = 0} \Rightarrow$$

$$X_1, \ldots, X_n f(g) = (\pi(g) d\pi(X_1) \ldots d\pi(X_n) v|w)$$

που δείχνει φυσικά οτι η $g \mapsto X_1 \ldots X_n f(g)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Αυτό ισχύει για κάθε n και άρα από την παραπάνω πρόταση θα έχουμε οτι η f είναι ομαλή. □

Παρατηρούμε ακόμα οτι από το θεώρημα *Peter – Weyl* όταν η ομάδα G είναι και συμπαγής θα έχουμε οτι κάθε *matrix – coefficient* μιας ανάγωγης αναπαράστασης της G είναι ομαλή συνάρτηση.

2.6.1 Ο τελεστής *Laplace – Beltrami*

Τώρα θέλουμε να μελετήσουμε ένα αντικείμενο της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ το οποίο θα μας είναι χρήσιμο στην μελέτη του μετασχηματισμού *Fourier* σε ομάδες *Lie*. Γενικά όπως δείξαμε πιο πάνω βοηθά να σκεφτόμαστε τα στοιχεία της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ως γραμμικούς τελεστές ορισμένους πάνω στο $C^\infty(G)$. Ο πιο κλασσικός/γνωστός τέτοιος τελεστής στη γεωμετρία είναι ο λεγόμενος *Laplace – Beltrami* τελεστής. Εδώ θα δώσουμε μια κατασκευή του τελεστή αυτού για ομάδες *Lie*:

Έστω λοιπόν μια μετρική *Riemann* ρ πάνω σε μια ομάδα *Lie* G. Ας θεωρήσουμε οτι αυτή η μετρική είναι και από αριστερά αναλλοίωτη. Όπως έχουμε περιγράψει πολλές φορές μέχρι τώρα μπορούμε να πάρουμε μια τέτοια μετρική επιλέγοντας ένα εσωτερικό γινόμενο στη $\mathfrak{g}$ και μεαταφέροντάς το στους υπόλοιπους εφαπτόμενους χώρους μέσω των απεικονίσεων L_g. Αν τώρα $X_1, \ldots, X_n$ είναι μια βάση της $\mathfrak{g}$ τότε μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα R με στοιχεία $\rho_{i,j} = \rho(X_i, X_j)$. Είναι έυκολο να δούμε οτι ο R είναι θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος. Άρα θα έχουμε τον πίνακα $R^{-1} = (\rho^{i,j})_{i,j}$. Τώρα ορίζουμε την ποσότητα:

$$\Delta_L = \sum_{i,j=1}^{n} \rho^{i,j} X_i X_j$$

Προφανώς $\Delta_L \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ακόμα αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{g}^n$ τότε μπορούμε να γράχουμε τον παραπάνω ορισμό ως $\Delta_L = X^T R^{-1} X$. Επιπλέον παρατηρούμε οτι αν η βάση της $\mathfrak{g}$ είναι ορθοκανονική τότε θα έχουμε $\Delta_L = \sum_{i=1}^n X_i^2$.

Ο ορισμός που δώσαμε είναι κατά μια έννοια "τοπικός" και δεν είναι απόλυτα προφανές οτι μια άλλη επιλογή βάσης θα μας δώσει τον ίδιο τελεστή. Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα, όμως, που μας λέει ακριβώς αυτό:

Πρόταση. *Ο τελεστής Laplace – Beltrami είναι ανεξάρτητος από την αρχική επιλογή βάσης της* $\mathfrak{g}$.

Απόδειξη. Έστω $X_1, \dots, X_n$ και $Y_1, \dots, Y_n$ δυο διαφορετικές βάσεις της $\mathfrak{g}$ και Δ_L, Δ'_L οι αντίστοιχοι τελεστές που ορίζουν. Στον χώρο $\mathfrak{g}^n$ θα υπάρχει ένας αντιτρέψιμος μετασσχηματισμός $A = (a_{i,j})_{i,j}$ έτσι ώστε $Y = A \cdot X$ όπου φυσικά $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, $X = (X_1, \dots, X_n)$. Ακόμα ας θεωρήσουμε τα στοιχεία του πίνακα S $s_{i,j} = \rho(Y_i, Y_j)$. Τότε θα έχουμε:

$$s_{i,j} = \sum_{m,k=1}^{n} \rho(a_{i,m}X_m, a_{j,k}X_k) = \sum_{m,k} a_{i,m}\rho_{m,k}a_{j,k}$$

και άρα βλέπουμε οτι $S = ARA^T$. Συνεπώς:

$$\Delta'_L = Y^T S^{-1} Y = X^T A^T (A^T)^{-1} R^{-1} A^{-1} A X = X^T R^{-1} X = \Delta_L$$

□

Τώρα θα δούμε μερικές βασικές "άλγεβρικές" ιδιότητες που έχει ο τελεστής *Laplace – Beltrami* ως στοιχείο της άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα Lie με μια Ad-αναλλοίωτη μετρική ρ, και Δ_L είναι ο αντίστοιχος τελεστής Laplace – Beltrami τότε θα έχουμε τα ακόλουθα:*

- *Για κάθε $g \in G$ έχουμε $Ad(g)\Delta_L = \Delta_L$.*
- *$\Delta_L \in Z(\mathfrak{g})$ όπου $Z(\mathfrak{g})$ είναι το κέντρο της άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*
- *Ο τελεστής Δ_L είναι από δεξία και απο αριστερά αναλλοίωτος δηλαδή $L_g\Delta_L = \Delta_L L_g$ και $R_g\Delta_L = \Delta_L R_g$ για κάθε $g \in G$.*

Απόδειξη. Για το πρώτο παρατηρούμε οτι η $Ad(g)$ είναι ένας γραμμικός τελεστής πάνω στην $\mathfrak{g}$ και άρα επεκτείνεται στην $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Αν λοιπόν έχουμε μια βάση $X_1, \dots, X_n$ επειδή ο $Ad(g)$ είναι αντιστρέψιμος τα $Y_i = Ad(g)X_i$ θα αποτελούν μια βάση της $\mathfrak{g}$. Άρα θα έχουμε:

$$Ad(g)\Delta_L = \sum_{i,j} \rho^{i,j}(X_i, X_j)(Ad(g)X_i)(Ad(g)X_j)$$

όπου έχουμε γράψει $\rho^{i,j}(X_i, X_j)$ αντί για $rho^{i,j}$ για να επισημάνουμε την εξάρτηση από τα X_i. Επειδή όμως το εσωτερικό γινόμενο είναι $Ad-$αναλλοίωτο θα έχουμε $\rho^{i,j}(X_i, X_j) = rho^{i,j}(Ad(g)X_i, Ad(g)X_j) = \rho^{i,j}(Y_i, Y_j)$ και συνεπώς:

$$Ad(g)\Delta_L = \sum_{i,j} \rho^{i,j}(Y_i, Y_j)(Ad(g)X_i)(Ad(g)X_j) = \sum_{i,j} \rho^{i,j}(Y_i, Y_j) Y_i Y_j = \Delta_L$$

Για το δεύτερο τώρα αν έχουμε $t \in \mathbb{R}$ και $X \in \mathfrak{g}$ τότε:

$$\Delta_L = Ad(exp(tX))\Delta_L = e^{tad(X)}\Delta_L$$

Παραγωγίζοντας αυτή τη ισότητα θα έχουμε $ad(X)\Delta_L = 0$ που μας δίνει οτι $\Delta_L \in Z(\mathfrak{g})$. Για το τρίτο αποτέλεσμα επειδή $\Delta_L \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ είναι φανερό οτι το Δ_L είναι από αριστερά αναλλοίωτο. Τώρα επειδή η ρ είναι $Ad-$αναλλοίωτη θα έχουμε οτι:

$$\rho_e(X_e, Y_e) = \rho_e(Ad(g^{-1})X_e, Ad(g^{-1})Y_e) = \rho_e(g^{-1} \cdot X_e \cdot g, g^{-1} \cdot Y_e \cdot g) = \rho_e(X_{g^{-1}} \cdot g, Y_{g^{-1}} \cdot g)$$

Αυτό συνεπάγεται από οτι ο τελεστής Δ_L είναι και από δεξιά αναλλοίωτος.

□

Αν έχουμε τώρα μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της συμπαγούς ομάδας G (με την $Ad-$αναλλοίωτη μετρική ρ), έστω την π τότε μπορούμε να μεταφέρουμε τον τελεστή *Laplace – Beltrami* στον καινούργιο χώρο ως εξής:

Αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $X_1, \ldots, X_n$ της $\mathfrak{g}$ τότε ορίζουμε τον λεγόμενο τελεστή *Casimir*:

$$\Omega_\pi = \sum_{i=1}^{n} d\pi(X_i)^2$$

Είναι φανερό οτι ο Ω_π είναι ένας $dim(\pi) \times dim(\pi)$ πίνακας. Μάλιστα μιας και η $d\pi$ είναι μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ τότε ο Ω_π είναι η εικόνα του Δ_L μέσω της μοναδικής επέκτασης της $d\pi$ στην άλγεβρα $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ο τελεστής *Casimir* έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Θεώρημα. *Αν π είναι μια μη τετριμμένη μοναδιαία αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της συμπαγούς και συνεκτικής ομάδας G τότε ο πίνακας Ω_π είναι ερμιτιανός και ο πίνακας $-\Omega_\pi$ αυστηρά θετικά ορισμένος. Ακόμα αν η π είναι ανάγωγη τότε θα υπάρχει ένα $k_\pi \geq 0$ έτσι ώστε $\Omega_\pi = -k_\pi id_{V_\pi}$ όπου V_π είναι ο χώρος πάνω στον οποίο η π δρά.*

Απόδειξη. Επειδή η π είναι μια μοναδιαία αναπαράστασης ο πίνακας $d\pi(X)$ θα είναι αντι-ερμιτιανός για κάθε $X \in \mathfrak{g}$. Άρα ο πίνακας $d\pi(X)^2$ θα είναι ερμιτιανός και το ίδιο θα ισχύει και για τον Ω_π. Ακόμα με αυτές τις παρατηρήσεις μπορούμε να δούμε οτι:

$$(\Omega_\pi v|v) = -\sum_{i=1}^{n} \|d\pi(X_i)v\|^2 < 0$$

και άρα ο $-\Omega_\pi$ είναι αυστηρά θετικά ορισμένος.

Για το τελευταίο κομμάτο τώρα μιας και ο Δ_L είναι στο κέντρο της άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ βλέπουμε οτι για κάθε $X \in \mathfrak{g}$:

$$d\pi(X)\Omega_\pi = \Omega_\pi d\pi(X)$$

και άρα προφανώς $d\pi(X)^n\Omega_\pi = \Omega_\pi d\pi(X)^n$. Αυτό συνεπάγεται οτι:

$$e^{d\pi(X)}\Omega_\pi = \Omega_\pi e^{d\pi(X)} \Rightarrow$$

$$\pi(exp(X))\Omega_\pi = \Omega_\pi \pi(exp(X))$$

Αυτό συνεπάγεται οτι:

$$\pi(g)\Omega_\pi = \Omega_\pi \pi(g)$$

για κάθε $g \in G$ μιας και η G είναι συμπαγής και συνεκτική και άρα η εκθετική συνάρτηση *exp* είναι επί. Αυτό όμως δείχνει οτι ο πίνακας Ω_π είναι ένας αυτομορφισμός της ανάγωγης αναπαράστασης π και άρα από το λήμμα του *Schur* θα έχουμε οτι ο Ω_π θα είναι ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα. Επειδή όμως ο $-\Omega_\pi$ είναι θετικά ορισμένος η πολλαπλασιαστική σταθερά θα είναι αρνητική.

□

Το σύνολο $\{k_\pi | \pi \in \hat{G}\}$[12] λέγεται φάσμα *Casimir* και είναι αρκετά χρήσιμο στη μελέτη των αναλυτικών ιδιοτήτων του Δ_L τις οποίες θα δούμε εν συντομία πριν προχωρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο και θα μας φανούν χρήσιμες αργότερα. Επειδή είμαστε, λοιπόν, σε μια συμπαγή ομάδα *Lie* μπορεί να δειχθεί οτι ο χώρος $C(G)$ είναι πυκνός στον χώρο $L^2(G)$ (με την συνήθη τοπολογία). Οπότε μιας και ο Δ_L είναι ένας διαφορικός τελεστής μπορούμε να τον δούμε ως ένα πυκνά ορισμένο, μη φραγμένο τελεστή πάνω στον χώρο $L^2(G)$. Αυτός ο τελεστής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής, συνεκτική ομάδα Lie τότε ο τελεστής Laplace − Beltrami Δ_L έχει είναι συμμετρικός στο χώρο $L^2(G)$ και ο τελεστής $-\Delta_L$ είναι θετικά ορισμένος στον $L^2(G)$. Ακόμα αν $\pi_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq dim(\pi)$ είναι τα matrix − coefficients μιας ανάγωγης αναπαράστασης τότε θα έχουμε:*

$$\Delta_L \pi_{i,j} = -k_\pi \pi_{i,j}$$

Απόδειξη. Το πρώτο σκέλος του θεωρήματος βγαίνει εύκολα αν παρατηρήσουμε οτι αν $X \in \mathfrak{g}$ τότε μπορούμε να δούμε το Q ως ένα διαφορικό τελεστή και κατά συνέπεια ως ένα πυκνά ορισμένο, μη φραγμένο γραμμικό τελεστή πάνω στον $L^2(G)$. Αυτός ο τελεστής είναι αντισυμμετρικός. Πράγματι θα έχουμε οτι:

$$\int_G Xf(g)dg = \frac{d}{dt}\int_G f(gexp(tX))dg = \frac{d}{dt}\int_G f(g)dg = 0$$

και από τον κανόνα του γινομένου βλέπουμε οτι:

$$(Xf|g) = -(f|Xg)$$

όπου $(-|-)$ είναι το γνωστό εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(G)$. Από τον ορισμό τώρα του Δ_L είναι προφανές οτι ο Δ_L είναι συμμετρικός. Ακόμα για να δούμε οτι ο Δ_L είναι θετικά ορισμένος στον $L^2(G)$ αρκεί να παρατηρήσουμε οτι:

$$(\Delta_L f, f) = -\sum_{i=1}^{n} \|X_i f\|_{L^2}^2 \leq 0$$

Τέλος θέλουμε να δείξουμε οτι τα *matrix − coefficients* μιας ανάγωγης, μοναδιαίας αναπαράστασης είναι ιδιοσυναρτήσεις του Δ_L. Ξέρουμε οτι τα *matrix − coefficients* είναι ομαλές συναρτήσεις οπότε το $\Delta_L \pi_{i,j}$ βγάζει νόημα. Θα έχουμε:

$$\Delta_L \pi_{i,j}(g) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} \pi_{i,j}(gexp(tX_K))|_{t=0}$$

[12] Είναι προφανές οτι το k_π εξαρτάται μόνο από την κλάσση ισοδυναμίας του π και όχι από τον αντιπρόσωπο.

Όμως όπως έχουμε πει τα *matrix − coefficients* είναι οι συντελεστές του πίνακα $\pi(-)$ ως προς μια βάση του V_π. Επειδή ο π είναι ομομορφισμός ομάδων θα έχουμε σαν συνέπεια:

$$\Delta_L \pi_{i,j}(g) = \sum_{m=1}^{dim(\pi)} \pi_{i,m}(g) \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} \pi_{m,j}(exp(tX_k))|_{t=0} \Rightarrow$$

$$\Delta_L \pi_{i,j}(g) = \sum_{m=1}^{dim(\pi)} \pi_{i,m}(g) \sum_{k=1}^{n} d\pi(X_k)^2 = \sum_{m=1}^{dim(\pi)} \pi_{i,m}(g)(\Omega_\pi)_{m,j}$$

Επειδή όμως η π είναι ανάγωγη από την προηγούμενη πρόταση θα έχουμε:

$$\Delta_L \pi_{i,j}(g) = -k_\pi \sum_{m=1}^{dim(\pi)} \pi_{i,m}(g)\delta_{m,j} = -k_\pi \pi_{i,j}(g)$$

□

Τέλος θα θέλαμε να πούμε λίγα λόγια για την φασματική θεωρία του Δ_L. Επειδή όπως είπαμε ο τελεστής αυτός είναι μη φραγμένος πάνω στον $L^2(G)$ η θεωρία είναι λίγο πιο πολύπλοκη και οπότε δεν θα μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες. Απλά αναφέρουμε οτι αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τότε μπορούμε να ορίσουμε τον εν γένει μη φραγμένο τελεστή $F(\Delta_L)$ ως εξής:

$$F(\Delta_L) = \sum_{\pi \in \hat{G}} F(-k_\pi) Pr_\pi$$

όπου Pr_π είναι η προβολή στο χώρο που παράγουν τα *matrix−coefficients* της π (δηλαδή στον χώρο $M([\pi])$ που αναφέρεται στο θεώρημα *Peter − Weyl*. Το πεδίο του τελεστή αυτού θα είναι ο χώρος:

$$Dom(F(\Delta_L)) = \{f \in L^2(G) | \sum_{\pi \in \hat{G}} |F(-k_\pi)|^2 \|Pr_\pi f\|_{L^2}^2 < \infty\}$$

Παρτηρούμε οτι ο τελεστής αυτός είναι φραγμένος αν η F είναι φραγμένη στο $(-\infty, 0)$. Ακόμα μπορούμε να δούμε οτι ο $F(\Delta_L)$ αντιμετατίθεται με κάθε $X \in \mathfrak{g}$ εφόσον φυσικά $C(G) \subset Dom(F(\Delta_L))$. Θα χρησιμοποιήσουμε στο τελευαίο κεφάλαιο μια ειδική περίτωση τελεστές που ορίζονται με τον τρόπο που μόλις περιγράψαμε για να μελετήσουμε την σχέση μεταξύ την ομαλότητα μιας συνάρτησης με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των αντίστοιχων συντελεστών *Fourier*.

Κεφάλαιο 3

Παράδειγμα: $SU(2)$

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε συστηματικά την ομάδα $SU(2)$ και θα μιλήσουμε συνοπτικά για την σχέση της με την ομάδα $SO(3)$. Για την ακρίβεια θα ταξινομήσουμε όλες τις αναπαραστάσεις της ομάδας $SU(2)$. Πιο συγκεκριμένα η $SU(2)$ είναι η οικουμενική κάλυψη (*universal cover*) της $SO(3)$ και κατά συνέπεια οι αναπαραστάσεις της $SO(3)$ μπορούν να βρεθούν αφού βρούμε πρώτα όλες τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $SU(2)$. Επειδή η $SU(2)$ είναι μια απλά συνεκτική ομάδα *Lie* η θεωρία των αναπαραστάσεών της είναι ισοδύναμη με αυτή της αντίστοιχης άλγεβρας *Lie*.

Υπενθυμίζουμε οτι:

$$SU(2) = \{A \in SL_2(\mathbb{C}) | A^*A = I_2\}$$

Από αυτόν τον ορισμό είναι εύκολο να δούμε οτι $SU(2)$ είναι μια κλειστή υποομάδα της ομάδας *Lie* $GL_2(\mathbb{C})$ και άρα είναι μια ομάδα *Lie* με μια άλγεβρα *Lie* που περιέχεται στην $gl_2(\mathbb{C})$. Αξίζει να αναφέρουμε οτι η $SU(2)$ και κατά συνέπεια η αντίστοιχη άλγεβρα *Lie* $su(2)$ είναι μια πραγματική ομάδα *Lie* (αντίστοιχα είναι μια πραγματική άλγεβρα *Lie*). Αυτό γιατί η $SU(2)$ δεν είναι μιγαδική πολλαπλότητα αφού όπως θα δούμε έχει διάσταση 3. Αυτό μπορούμε να το δούμε από τον ακριβή υπολογισμό της $su(2)$:

$$su(2) = \{A \in gl_2(\mathbb{C}) | A = -A^* \kappa\alpha\iota\ tr(A) = 0\}$$

Άρα η $su(2)$ αποτελείται από όλους τους 2×2 αντιερμιτιανούς πίνακες με ίχνος 0 και άρα έχει διάσταση 3. Άρα και η $SU(n)$ έχει διάσταση 3 και συνεπώς δεν μπορεί να είναι μιγαδική πολλαπλότητα.

Την παραπάνω έκφραση για την άλγεβρα *Lie* μπορούμε να την βρούμε ως εξής:

Αν $A \in su(2)$ τότε $exp(tA)(exp(tA))^* = exp(tA)exp(tA^*) = I_2$ για κάθε t. Παραγωγίζοντας αυτή την ισότητα στο $t = 0$ βλέπουμε οτι $A = -A^*$. Ακόμα αφού πρέπει να έχουμε $det(exp(tA)) = 1$ και αφού $det(exp(tA)) = e^{tr(A)}$ [1] βλέπουμε οτι πρέπει να έχουμε $tr(A) = 0$. Αντιστρόφως τώρα αν A είναι ένας αντιερμιτιανός πίνακας με ίχνος 0 τότε θα έχουμε οτι $det(exp(tA)) = 1$ και ακόμα $exp(tA) \in SU(2)$. Άρα θα έχουμε οτι $A \in su(2)$.

[1] Η εκθετική συνάρτηση σε ομάδες *Lie* που περιέχονται στην GL_n είναι η συνήθης εκθετική συνάρτηση πινάκων.

Αναφέρουμε ακόμα οτι αυτός ο υπολογισμός είναι γενικός. Αν $su(n)$ είναι η άλγεβρα *Lie* της ομάδας $SU(n)$ τότε έχουμε:

$$su(n) = \{A \in gl_n(\mathbb{C}) | A = -A^* \kappa\alpha\iota\ tr(A) = 0\}$$

Αν τώρα $sl(2, \mathbb{C})$ είναι η άλγεβρα *Lie* της μιγαδικής ομάδας $SL_2(\mathbb{C})$ τότε μπορούμε να δούμε οτι η $sl(2, \mathbb{C})$ είναι η μιγαδικοποίηση της $su(2)$. Αυτή η παρατήρηση θα μας είναι πολύ χρήσιμη στη συνέχεια και θα δούμε αργότερα την πολύ στενή σχέση των αναπαραστάσεων αυτών των δυο αλγεβρών.

Ας δούμε τώρα μια βάση της $su(2)$. Μπορούμε να δούμε με ένα απλό υπολογισμό οτι ένα γενικό στοιχείο της $su(2)$ είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} ia & x + iy \\ -x + iy & -ia \end{pmatrix}$$

Από αυτό μπορούμε εύκολα να δούμε οτι μια βάση της $su(2)$ αποτελείται από τα στοιχεία:

$$L_0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ L_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Ακόμα είναι εύκολο να επαληθεύσουμε τις ακόλουθες ταυτότητες:

$$[L_0, L_1] = L_2,\ [L_2, L_0] = L_1,\ [L_1, L_2] = L_0$$

Εναλλακτικά ορίζουμε τους ακόλουθους πίνακες που στην βιβλιογραφία φυσικής αναφέρονται ως *raising* και *lowering operators*:

$$L^+ = -L_2 - iL_1,\ L^- = L_2 - iL_1$$

Παρατηρούμε οτι αυτά τα δυο στοιχεία δεν είναι πλέον στοιχεία του $su(2)$ αλλά του $sl_2(\mathbb{C})$. Μαζί με το στοιχείο $L_3 = iL_0$ αποτελούν μια βάση της $sl_2(\mathbb{C})$. Σε αυτή τη περίπτωση θα έχουμε τα ακόλουθα *Lie brakets*:

$$[L^+, L_3] = L^+,\ [L_3, L^-] = L^-\ \kappa\alpha\iota\ [L^-, L^+] = 2L_3$$

Με την βάση της $sl_2(\mathbb{C})$ που μόλις κατασκευάσαμε είναι φανερό οτι ότι πληροφορία πάρουμε για την $sl_2(\mathbb{C}$ μπορούμε άμεσα να την μεταφέρουμε στην $su(2)$ μιας και, για παράδειγμα $L_1 = \frac{1}{-2i}(L^+ + L^-)$. Οπότε θα επικεντρωθούμε στην θεωρία των αναπαραστάσεων της $sl_2(\mathbb{C})$.

Έστω λοιπόν ξ μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης στον χώρο V της $sl_2(\mathbb{C})$ και ας θέσουμε $E_3 = \xi(L_3),\ E_+ = \xi(L^+)\ \kappa\alpha\iota\ E_- = \xi(L^-)$. Έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Αν $u \in V$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της E_3 με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε θα έχουμε:*

$$E_3E_+u = (\lambda - 1)E_+u,\ E_3E_-u = (\lambda + 1)E_-u$$

Για την απόδειξη αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$[E_+, E_3] = E_+,\ [E_3, E_-] = E_-\ [E_-, E_+] = 2E_3$$

που ισχύουν γιατί η ξ είναι ομομορφιμός αλγεβρών *Lie*. Τώρα έχουμε το ακόλουθο βασικό θεώρημα:

Θεώρημα. *Κάθε μη τετριμμένη ανάγωγη αναπαράσταση της άλγεβρας* $sl_2(\mathbb{C})$ *δρά πάνω σε ένα χώρο* V_m *διάστασης* $m+1$. *Ακόμα αν* E_3, E_+, E_- *είναι όπως και πριν τότε μπορούμε να επιλέξουμε μια βάση του* V_m, *την* $\{u_0, ..., u_m\}$ *έτσι ώστε να έχουμε:*

$$E_3 = \frac{1}{2}(m-2k)u_k, \; E_+u_k = u_{k+1}, \; E_- = k(m-k+1)u_{k-1}$$

Αυτό το θεώρημα μας δίνει μια πλήρη ταξινόμηση των ανάγωγων αναπαραστάσεων της $sl_2(\mathbb{C})$ και μάλιστα μας λέει αυτές απαριθμούνται από τους αριθμούς $2l+1$ όπου $l \in \mathbb{N}$ ή $l = \frac{m}{2}$ όπου $m \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω ξ μια ανάγωγη μη τετριμμένη αναπαράσταση της $sl_2(\mathbb{C})$ πάνω στον χώρο V. Ξέρουμε οτι η E_3 έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Επιλέγουμε λοιπόν την ιδιοτιμή j με μέγιστο πραγματικό μέρος και u_0 ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Από το προηγούμενο λήμμα παρατηρούμε οτι πρέπει να έχουμε $E_-u_0 = 0$. Ακόμα ας θέσουμε $u_k = E_+^k u_0$. Τότε τα u_k είναι ιδιοδιανύσματα του E_3 με αντίστοιχη ιδιοτιμή $j-k$. Επειδή ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης βλέπουμε οτι θα πρέπει να υπάρχει ένα $m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $u_{m+1} = 0$. Οπότε καταλήγουμε με μια συλλογή γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\{u_0, ..., u_m\}$. Έστω τώρα W ο χώρος που παράγουν αυτά τα διανύσματα. Είναι προφανές οτι ο W είναι αναλλοίωτος υπό τα E_3, E_+. Θα δείξουμε οτι είναι και αναλλοίωτος και υπό το E_-. Έστω λοιπόν ο πίνακας:

$$C = E_3^2 + \frac{1}{2}(E_+E_- + E_-E_+)$$

Είναι εύκολο να δούμε χρησιμοποιωντας τις 'μεταθετικές' σχέσεις ανάμεσα στα E_3, E_+, E_- οτι:

$$C = E_+E_- + E_3(E_3+1) = E_-E_+ + E_3(E_3-1)$$

Με αυτές τις σχέσεις βλέπουμε οτι $Cu_0 = j(j+1)u_0$ και οτι η C μετατίθεται με την E_+. Αυτό με την σειρά του δείχνει οτι $C|_W = j(j+1)id$.

Τώρα αφού $E_-E_+ = C - E_3(E_3-1)$ βλέπουμε οτι στο u_{k-1} θα έχουμε:

$$E_-u_k = j(j+1)u_{k-1} - (j-k)(j-k-1)u_{k-1}$$

Αυτό δείχνει οτι ο W είναι και E_--αναλλοίωτος και άρα είναι και $sl_2(\mathbb{C})$-αναλλοίωτος. Επειδή η ξ είναι ανάγωγη βλέπουμε οτι $W = V$.

Παρατηρούμε τώρα οτι η $\{u_0, ...u_m\}$ είναι μια βάση του V. Έχουμε ήδη δείξει οτι $E_3u_k = (j-k)u_k$, $E_+u_k = u_{k+1}$ και $E_-u_k = k(2j-k+1)u_{k-1}$ και άρα αρκεί να δείξουμε οτι $2j = m$. Παρατηρούμε οτι $Cu_m = E_3(E_3-1)u_m$ και άρα:

$$j(j+1) = (j-m)(j-m-1)$$

Η μοναδική θετική λυση αυτής της εξίσωσης ως προς m είναι $m = 2j$ και άρα τα E_3, E_-, E_+ δρούν πάνω στη βάση με τον τρόπο που θέλουμε.

□

Οπότε αν έχουμε μια ανάγωγη αναπαράσταση της $sl_2(\mathbb{C})$ από αυτό το θεώρημα ξέρουμε ακριβώς πως συμπεριφέρεται. Παρόλα αυτά θα θέλαμε να έχουμε και ένα τρόπο κατασκευής των αναπαραστάσεων αυτών και ακριβώς αυτός είναι ο σκοπός μας τώρα. Για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τις αναπαραστάσεις αυτές θα στραφούμε στην μη συμπαγή ομάδα $SL_2(\mathbb{C})$. Όπως έχουμε αναφέρει η άλγεβρα *Lie* αυτής της ομάδας είναι η $sl_2(\mathbb{C})$. Επιπλέον αυτή η ομάδα είναι και απλά συνεκτική και συνεπώς οι θεωρίες αναπαραστάσεων αυτών των δυο αντικειμένων είναι σχεδόν ίδιες. Λέμε σχεδόν γιατί η $SL_2(\mathbb{C})$ δεν είναι συμπαγής και άρα θα έχει και απειροδιάστατες ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις και δεν έχουμε μιλήσει (και ούτε θα πούμε) για αντίστοιχες απειροδιάστατες αναπαραστάσεις αλγεβρών *Lie*. Στις πεπερασμένες διαστάσεις όμως έχουμε μια αντιστοιχία μεταξύ ανάγωγων αναπαραστάσεων αυτών των δυο αντικειμένων και όπως θα δούμε μεταξύ των ανάγωγων αναπαραστάσεων της $SU(2)$.

Θα κατασκευάσουμε λοιπόν μια συλλογή $SL_2(\mathbb{C})$-αναπαραστάσεων π_m για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Έστω ο χώρος $\mathcal{P}_m$ ο χώρος όλων των ομογενών πολυωνύμων σε δυο μεταβλητές x, y βαθμού m [2]. Είναι εύκολο να δούμε οτι τα στοιχεία $x^j y^{m-j}$ με $j = 0, 1, \ldots, m$ είναι μια βάση του $\mathcal{P}_m$ και άρα έχουμε $dim(\mathcal{P}_m) = m + 1$. Τώρα για $f \in \mathcal{P}_m$ και για $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ ορίζουμε:

$$(\pi_m(g)f)(x, y) = f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = f(ax + cy, bx + dy)$$

και κατά σύμβαση θέτουμε π_0 να είναι η τετριμμένη αναπαράσταση. Γενικά είναι θέμα απλών πράξεων να επαληθεύσουμε οτι η π είναι μια αναπαράσταση της $SL_2(\mathbb{C})$. Μιας και $SU(2) \subset SL_2(\mathbb{C})$ η π_m όταν περιοριστεί στο $SU(2)$ θα είναι μια αναπαράσταση της $SU(2)$. Ακόμα από την συμπάγεια αυτής της ομάδας μπορούμε να βρούμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{P}_m$ έτσι ώστε η π_m να είναι μοναδιαία όταν περιοριστεί στην $SU(2)$.

Θα υπολογίσουμε τώρα την αντίστοιχη αναπαράσταση της $sl_2(C)$. Υπενθυμίζουμε οτι αυτή ορίζεται με τον παρακάτω τύπο:

$$d\pi_m(\xi)F = \frac{d}{dt}\pi(exp(t\xi))F$$

Είναι προφανές οτι αρκεί να υπολογίσουμε τα $d\pi_m(L_3)$, $d\pi_m(L^+)$, $d\pi_m(L^-)$. Παρατηρούμε οτι:

$$g_+(t) = exp(tL^+) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_-(t) = exp(tL^-) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_3(t) = exp(tL^3) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

Από αυτό και τον κανόνα της αλυσίδας βλέπουμε οτι για κάθε $f \in \mathcal{P}_m$ θα έχουμε:

$$d\pi_m(L_3)f = \frac{1}{2}(y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x})$$

$$d\pi_m(L^-)f = y\frac{\partial f}{\partial x}$$

[2] Κατά σύμβαση θέτουμε $\mathcal{P}_0 = \mathbb{C}$

$$d\pi_m(L^+)f = x\frac{\partial f}{\partial y}$$

Τώρα αν εφαρμόσουμε αυτές τις ταυτότητες στα στοιχεία της βάσης $f_j = x^j y^{m-j}$ θα δούμε οτι:

$$d\pi_m(L_3)f_j = \frac{1}{2}(m-2j)f_j,\ d\pi_m(L_-)f_j = jf_{j-1},\ d\pi_m(L_+)f_j = (m-j)f_{j+1}$$

Θεώρημα. *Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της $sl_s(\mathbb{C})$ είναι ισοδύναμη με κάποια από τις $d\pi_m$.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα αν ξ είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση πεπεραασμένης διάστασης της $sl_2(\mathbb{C})$ δρα σε ένα χώρο V_m διάστασης $m+1$ και υπάρχει μια βάση όπου οι σχέσεις που περιγράφονται πιο πάνω ισχύουν. Για $m = 0$ η πρόταση είναι προφανής. Θα κατασκευάσουμε έναν αντιστρέψιμο τελεστή $A_m : V_m \to \mathcal{P}_m$ τέτοιο ώστε $A_m\xi_m(X) = d\pi_m(X)A_m$. Αν $\{u_0, ..., u_m\}$ είναι η προαναφερθείσα κατάλληλη βάση του V_m και αν ορίσουμε τους αριθμούς $\gamma_k^m = m(m-1)...(m-k+1)$ με $\gamma_0^m = 1$ τότε μπορούμε να ορίσουμε τον αντιστρέψιμο τελεστή A_m μέσω της δράσης του πάνω στην $\{u_0, ..., u_m\}$ ως $A_m u_k = \gamma_k^m f_k$. Είναι εύκολο να δούμε οτι $A_m\xi_m(X) = d\pi_m(X)A_m$ (ακόμα πιο απλά αρκεί να το επαληθεύσουμε στην περίπτωση $X = L_3, L^+, L^+$) και άρα η ξ είναι ισομορφική ως αναπαράσταση με την $d\pi_m$.

□

Τώρα που βρήκαμε όλες τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $sl_2(\mathbb{C})$ θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός οτι η $sl_2(\mathbb{C})$ είναι η μιγαδικοποίηση της $su(2)$ για να πάρουμε όλες τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας $SU(2)$.

Θεώρημα. *Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της $SU(2)$ είναι ισομορφική με την π_m για κάποιο $m \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω λοιπόν μια ανάγωγη αναπαράσταση ρ της $SU(2)$ πάνω σε κάποιον χώρο V. Ξέρουμε οτι η $d\rho$ είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση της $su(2)$ γιατί όπως αποδείξαμε σε προηγούμενη ενότητα αν ένας G-αναλλοίωτος χώρος είναι και $\mathfrak{g}$-αναλλοίωτος χώρος και αντίστροφα. Πιο γενικά επειδή:

$$sl_2(\mathbb{C}) = su(2) \oplus i \cdot su(2)$$

έχουμε οτι η $d\rho$ μπορεί να επεκταθεί με μοναδικό τρόπο σε μια αναπαράσταση της $sl_2(\mathbb{C})$ και μάλιστα είναι εύκολο να δούμε οτι αυτή η επέκταση πρέπει να είναι και ανάγωγη (αυτό γιατί $sl_2(\mathbb{C})$-αναλλοίωτοι χώροι θα είναι και $su(2)$-αναλλοίωτοι χώροι). Άρα θα υπάρχει ένας $T_m : V \to \mathcal{P}_m$ γραμμικός και αντιστρέψιμος τελεστής με $T_m d\rho(X)T_m^{-1} = d\pi_m(X)$ για κάθε $X \in sl_2(\mathbb{C})$. Περιορίζοντας το X στο $su(2)$ βλέπουμε οτι θα έχουμε $T_m\rho(exp(X)) = \pi_m(exp(X))T_m$. Επειδή η exp είναι επί (ή επειδή η exp είναι ένας τοπικός ισομορφισμός και μια συνεκτική ομάδα *Lie* παράγεται από μια περιοχή του e) αυτό δείχνει οτι $T_m\rho(g) = \pi_m(g)T_m$ για κάθε $g \in SU(2)$ και άρα οι δυο αναπαραστάσεις είναι ισομορφικές.

□

Τώρα πριν δούμε την σχέση αυτού του θεωρήματος με την θεωρία αναπαραστάσεων της $SO(3)$ ας υπολογίσουμε όλους τους χαρακτήρες και τα *matrix coefficients* των αναπαραστάσεων αυτών.

Ξεκινάμε με τους χαρακτήρες. Επειδή η $SU(2)$ είναι συμπαγής ομάδα *Lie* από τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας θα έχει ένα μεγιστικό τόρο και μάλιστα αν επιλέξουμε ένα τόρο κάθε στοιχείο της $SU(2)$ θα είναι συζυγές με ένα στοιχείο του τόρου. Αυτό έχει σαν συνέπεια οτι αρκεί να υπολογίσουμε τους χαρακτήρες πάνω από ένα μεγιστικό τόρο της $SU(2)$ μιας και οι χαρακτήρες είναι αναλλοίωτοι υπο την απεικόνιση $g \mapsto hgh^{-1}$. Είναι εύκολο να δούμε οτι ένας μεγιστικός τόρος της $SU(2)$ είναι ο:

$$T = \{g \in SU(2) | g = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}, z \in S^1\}$$

ή ισοδύναμα:

$$T = \{g \in SU(2) | g = t(\vartheta) = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix}, \vartheta \in [0, 2\pi)\}$$

Είναι φανερό οτι για $j = 0, 1, \ldots, m$:

$$\pi_m(t(\vartheta))f_j = e^{i(2j-m)\vartheta} f_j$$

Άρα θα έχουμε $x_m(g) = tr(\pi_m(g)) = tr(\pi_m(t(\vartheta))) = \sum_{j=0}^{m} e^{i(2j-m)\vartheta}$ και άρα:

$$x_m(g) = \frac{sin((m+1)\vartheta)}{sin\vartheta}, \ \vartheta \in [0, \pi]$$

Τώρα θα βρούμε τα *matrix coefficients* των π_m. Αν $f \in \mathcal{P}_m$ τότε θα υπάρχει μια F τέτοιο ώστε $f(x, y) = y^m F(\frac{x}{y})$. Είναι φανερό οτι $f(z, 1) = F(z)$ και οτι:

$$\pi_m(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})F(z) = (bz + d)^m F(\frac{az + c}{bz + d})$$

για κάθε $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$. Τώρα αν $z_j = x^{l-j}$ όπου $l = \frac{m}{2}$ και $j = -l, -l+1, , \ldots, l-1, l$. Τα *matrix coefficients* $\pi_m(g)_{j,k}$ ορίζονται από την εξίσωση:

$$\pi_m(g)z_k = \sum_{j=-l}^{l} \pi_m(g)_{j,k} z_j$$

Από την φόρμουλα *Taylor* μπορούμε να δούμε οτι:

$$\pi_m(g)_{j,k} = \frac{1}{(l-j)!} \frac{d^{l-j}}{dz^{l-j}} (bz + d)^{l+k} (az + c)^{l-k}|_{z=0}$$

όπου $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$. Θα κάνουμε τώρα μια αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $u = bz + d$ και $v = az + c$. Αφού $au - bv = 1$ θέτοντας $t = au$ και αλλάζοντας την παράγωγο στην παραπάνω εξίσωση να είναι ως προς την μεταβλητή t μετά από κάποιες πράξεις βλέπουμε οτι:

$$\pi_m(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})_{j,k} = \frac{(-1)^{l-k}}{(l-j)!} a^{-(j+k)} b^{k-j} \frac{d^{l-j}}{dt^{l-j}} t^{l+k} (1-t)^{l-k}|_{t=ab} \Rightarrow$$

$$\pi_m(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})_{j,k} = \frac{(-1)^{l-k}}{(l-j)!} a^{-(j+k)} b^{k-j} P^l_{j.k}(ab)$$

όπου $P^l_{j.k}$ είναι τα λεγόμενα πολυώνυμα *Jacobi*. Ακόμα παρατηρούμε οτι οι χαρακτήρες των αναπαραστάσεων αυτών είναι ουσιαστικά τα πολυώνυμα *Chebyshev*. Πιο συγκεκριμένα $x_m(t(\vartheta)) = G_m(cos\vartheta)$ όπου G_m είναι το $m-$οστό πολυώνυμο *Chebyshev*. Άρα δυο πολύ σημαντικές κατηγορίες ειδικών συναρτήσεων από την κλασσική ανάλυση εμφανίζονται εδώ ως οι χαρακτήρες ή τα *matrix coefficients* ανάγωγων αναπαραστάσεων μιας πολύ συγκεκριμένης ομάδας *Lie*. Αυτό είναι γενικό φαινόμενο. Μπορεί να δειχθεί οτι οι περισσότερες ειδικές συναρτήσεις/πολυώνυμα μπορούν να ερμηνευτούν ως οι χαρακτήρες ή τα *matrix coefficients* ανάγωγων αναπαραστάσεων των κλασσικών ομάδων *Lie*. Μάλιστα πολλές γνωστές ταυτότητες μπορούν να δειχθούν με πιο 'φυσιολογικό τρόπο' με αυτή την ερμηνεία χρημοποιώντας την δομή της θεωρίας των αναπαραστάσεων. Για περισσότερες πληροφορίες αναφέρουμε το [].

Τώρα γυρνάμε στην θεωρία των αναπαραστάεων της $SU(2)$. Κάποιος θα μπορούσε να αναρωτηθεί πως θα υποψιαζόμασταν να χρησιμοποιήσουμε την ομάδα $SL_2(\mathbb{C})$ και την αντίστοιχη άλγεβρα $sl_2(\mathbb{C})$ για να μελετήσουμε την (πραγματική) ομάδα $SU(2)$. Η απάντηση έρχεται με το ακόλουθο απλό θεώρημα που μερικές φορές αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως *Weyl's unitary trick*:

Θεώρημα. *Οι ακόλουθες "θεωρίες" αναπαραστάσεων είναι ισοδύναμες με την έννοια οτι κάθε αναπαράσταση ενός είδους οδηγεί σε μια αναπαράσταση ενός άλλου με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις να έχουν τους ίδιους αναλλοίωτους υπόχωρους και έτσι ώστε ισοδύναμες αναπαραστάσεις να οδηγούν σε ισοδύναμες αναπαραστάσεις:*

1. *Η θεωρία των ομαλών αναπαραστάσεων πεπερασμένης διάστασης της* $SL_2(\mathbb{R})$.
2. *Η θεωρία των ομαλών αναπαραστάσεων πεπερασμένης διάστασης της* SU_2.
3. *Η θεωρία των ολόμορφων αναπαραστάσεων της* $SL_2(\mathbb{C})$.
4. *Η θεωρία των αναπαραστάσεων της* $sl_2(\mathbb{R})$.
5. *Η θεωρία των αναπαραστάσεων της* $\mathfrak{su}(2)$.
6. *Η θεωρία των μιγαδικών (με την έννοια οτι η αναπαράσταση είναι ως* $\mathbb{C}-$*γραμμική ως γραμμική συνάρτηση) αναπαραστάσεων της* $sl_2(\mathbb{C})$.

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί και πιο αυστηρά με την γλώσσα της θεωρίας των κατηγοριών. Συνοπτικά μιλώντας για κάθε ομάδα μπορούμε να φτιάξουμε μια κατηγορία με αντικείμενα τις αναπαραστάσεις της ομάδας και μορφισμούς μεταξύ των αντικειμένων τους μορφιμούς που σέβονται τις αντίστοιχες δράσεις. Προφανώς το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για αναπαστάσεις αλγεβρών. Τότε το παραπάνω θεώρημα μας λέει ουσιαστικά οτι οι κατηγορίες που κατασκευάζονται από τις ομάδες/άλγεβρες που αναφέρονται στα 1)-6) είναι ισοδύναμες κατηγορίες.

Τώρα κοιτάμε την θεωρία αναπαραστάσεων της ομάδας $SO(3)$. Ουσιαστικά έχουμε βρεί ήδη όλες τις ανάγωγες αναπαραστάσεις τις απλά πρέπει να δικαιολογήσουμε με λίγα λόγια οτι όντως αυτές είναι όλες. Η ομάδα αυτή δεν είναι απλά συνεκτική και σαν συνέπεια δεν αρκεί να κοιτάξουμε μόνο τις αναπαραστάσεις της άλγεβρας $so(3) = su(2)$. Μπορεί να δειχθεί όμως οτι υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων *Lie* από την $SU(2)$ στην

$SO(3)$ ο οποίος είναι τοπικός διαφορομορφιμός. Μάλιστα μπορεί να δειχθεί οτι ο ομομορφιμός είναι επί και η αντίστροφη εικόνα κάθε στοιχείου του $SO(3)$ περιέχει ακριβώς δυο στοιχεία. Με άλλα λόγια η $SU(2)$ είναι μια διπλή κάλυψη της $SO(3)$. Με αυτό το γεγονός μπορεί να δειχθεί οτι η $SO(3)$ σχεδόν τις ίδιες ανάγωγες αναπαραστάσεις με την $SU(2)$. Πιο συγκεκριμένα οι π_m με m άρτιο αποτελούν όλες τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $SO(3)$. Αυτές οι αναπαραστάσεις μπορούν να κατασκευαστούν και ως οι δράσεις της $SO(3)$ πάνω στο χώρο των ομογενών πολυωνύμων σε τρείς μεταβλητές.

Κεφάλαιο 4

Άλγεβρες *Lie*

4.1 Άλγεβρες *Lie*

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εμβαθύνουμε στην μελέτη των αλγεβρών *Lie*. Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δειχθεί οτι κάθε άγεβρα *Lie* έχει μια μεγιστική αβελιανή υποάλγεβρα. Αυτή η υποάλγεβρα θα μας βοηθήσει για να δείξουμε της ολοκληρωτική φόρμουλα του *Weyl*. Ακόμα βοηθάει στην ανάλυση της δομής μιας άλγεβρας *Lie*. Πιο συγκεκριμένα θα επικεντρωθούμε στις ημιαπλές άλγεβρες *Lie*. Αυτές είναι οι άλγεβρες που υπόκεινται σε τεχνικές όπου τις ταξινομούν πλήρως. Πιο συγκεκριμένα υπάρχουν τρια είδη αλγεβρών *Lie* οι μηδενοδήναμες, οι επιλύσιμες και οι ημιαπλές. Οι ημιαπλές άλγεβρες *Lie* είναι και οι μόνες για τις οποίες υπάρχει και μια ταξινόμηση. Για τις μηδενοδύναμες μπορεί να ¨δειχθεί¨ οτι δεν μπορούν να ταξινομηθούν. Οπότε ουσιαστικά οι ημιαπλές άλγεβρες *Lie* είναι οι καλά συμπεριφερόμενες άλγεβρες *Lie*.

Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε πολύ σε αυτό το κεφάλαιο είναι η κανονική μορφή *Jordan* όπου θα την διατυπώσουμε σε βολική μορφή πιο κάτω. Επειδή αυτή η μορφή δουλεύει όταν είμαστε σε ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα στην αρχή θα επικεντωθούμε στις μιγαδικές άλγεβρες *Lie*. Αυτό δεν αποτελεί πολύ μεγάλο πρόβλημα ακόμα και αν πολλές άλγεβρες *Lie* (που αντιστοιχούν σε ομάδες *Lie*) είναι πραγματικές. Για να εφαρμόσουμε την θεωρία που θα αναπτυχθεί για μιγαδικές άλγεβρες *Lie* σε μια πραγματική άλγεβρα *Lie* μπορούμε να την μιγαδικοποιήσουμε (*complexify*) και να αναλύσουμε την αντίστοιχη μιγαδική άλγεβρα *Lie*. Μετά θα πρέπει να αντιστρέψουμε την διαδικασία και να δούμε τι πληροφορία μπορούμε να πάρουμε για την αρχική άλγεβρα. Θα δούμε αυτή την διαδιακασία για συμπαγείς άλγβερες *Lie* (που μπορούμε να σκεφ'τομαστε οτι είναι οι άλγεβρες *Lie* που αντιστοιχούν σε συμπαγείς ομάδες *Lie*). Επειδή ετσι κι αλλιώς οι άλγεβρες *Lie* που μας ενδιαφέρουν είναι πραγματικές όταν θέλουμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα που ισχύει συγκεκριμένα για μιγαδικές άλγεβρες *Lie* θα αναφέρουμε πάντα οτι ασχολούμαστε με μιγαδικές άλγεβρες *Lie*. 'Οταν το αναφέρουμε (και λέμε απλά ¨άλγεβρες *Lie*) θα εννοούμε οτι δεν έχουμε περιορισμούς πάνω στο σώμα (θα μπορούμε να είμαστε πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$)

Πρόταση. *'Εστω Z ένας $n \times n$ με μιγαδικά στοιχεία. Τότε υπάρχουν μοναδικοί πίνακες S, N με S ημιαπλό και N μηδενοδήναμο όπου $SN = NS$ και $Z = S + N$. Επιπλέον $p(Z) = S$ για κάποιο πολυώνυμο με $p(0) = 0$.*

Υπενθυμίζουμε οτι ένας ημιαπλός πίνακας είναι απλά ένας διαγωνοποιήσιμος πίνκας και ένας μηδενοδήναμος πίνακας M είναι τέτοιος ώστε $M^k = 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ένα κλασσικό αποτέλεσμα της γραμμικής άλγεβρας και γι' αυτό η απόδειξή του παραλείπεται.

Ακόμα έχουμε την ακόλουθη ορολογία:

Ορισμός. *Έστω $\mathfrak{g}$ μια άλεβρα Lie και $\mathfrak{h}$ μια υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{g}$. Τότε η $\mathfrak{h}$ είναι ένα ιδεώδες της $\mathfrak{g}$ αν $\forall Y \in \mathfrak{g}$ και $\forall X \in \mathfrak{h}$ έχουμε $[Y, X] \in \mathfrak{h}$. Μια άλγεβρα Lie λέγεται απλή αν δεν είναι Αβελιανή και αν δεν περιέχει μη τετριμμένα ιδεώδη. Τέλος μια άλγεβρα Lie λέγεται ημιαπλή αν είναι το ευθύ άθροισμα απλών αλγεβρών Lie.*

Ακόμα ένα δεύτερο σημαντικό είδος αλγεβρών *Lie* είναι οι μηδενοδύναμες άλγεβρες *Lie*. Αυτές είναι οι άλγεβρες *Lie* για τις οποίες για κάθε στοιχείο τους X έχουμε $ad(X)^k = 0$ για κάποιο k. Με άλλα λόγια μια άλγεβρα *Lie* είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν τα $ad(X)$ είναι μηδενοδύναμα για κάθε X στην άλγεβρα.

Είναι εύκολο να δούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα. *Αν $\mathfrak{g}$ είναι μια ημιαπλή άλγεβρα Lie τότε η ανάλυσή της σε απλές άλγεβρες Lie είναι μοναδική modulo μια μετάθεση των όρων του αθροίσματος.*

Ακόμα έχουμε ένα αρκετά χρήσιμο κριτήριο που μας λέει πότε μια άλγεβρα *Lie* είναι ημιαπλή. Πρώτα ορίζουμε την ακόλουθη διγραμμική μορφή:

$$B(X, Y) = tr(ad(X)ad(Y))$$

Αυτή η διγραμμική μορφή είναι συμμετρική και λέγεται μορφή *Killing*. Είναι εξαιρετικά σημαντική στην θεωρία αλγεβρών *Lie* όπως θα δούμε και στην συνέχεια. Τέλος υπενθυμίζουμε οτι μια διγραμμική μορφή λέγεται μη εκφυλισμένη αν το $B(X, Y) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$ συνεπάγεται οτι $Y = 0$.

Θεώρημα. *Μια άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ είναι ημιαπλή αν και μόνο αν η μορφή Killing είναι μη εκφυλισμένη.*

Μια σημαντική ιδιότητα της μορφής *Killing* είναι οτι είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτομορφισμούς της $\mathfrak{g}$. Πράγματι αν A είναι ένας αυτομορφισμός της $\mathfrak{g}$ τότε θα έχουμε οτι $B(A \cdot X, A \cdot Y) = B(X, Y)$. Αυτό φαίνεται εύκολα αν παρατηρήσουμε οτι $ad(A \cdot X) = Aad(X)A^{-1}$. Με αυτή την παρατήρηση μπορούμε να δούμε οτι $B(Y, [X, Z]) = -B([X, Y], Z)$. Γενικότερα αν $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση πάνω στην $\mathfrak{g}$ τότε θα λέμε οτι είναι μια παραγώγιση αν ισχύει οτι $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Τότε θα έχουμε οτι

$$B(DX, Y) = -B(X, DY)$$

Προφανώς για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ η $ad(X)$ είναι μια παραγώγιση στην $\mathfrak{g}$. Το επόμενο λήμμα μας λέει οτι όλες οι παραγωγίσεις πάνω στην $\mathfrak{g}$ είναι αυτής της μορφής:

Λήμμα. *Αν D είναι μια παραγώγιση πάνω στην $\mathfrak{g}$ τότε $D = ad(X)$ για κάποιο $X \in \mathfrak{g}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $f(Z) = tr(D \circ ad(Z))$. Η f είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό πάνω στην $\mathfrak{g}$. Αφού η μορφή *Killing*, B είναι μη εκφυλισμένη θα υπάρχει ένα $X \in \mathfrak{g}$ τέτοιο ώστε $f(Z) = B(X, Z)$. Με απλές αλγεβρικές πράξεις μπορούμε να δούμε οτι για κάθε $Z \in \mathfrak{g}$: $B(DY, Z) = f([Y, Z]) = B(X, [Y, Z]) = -B([Y, X], Z) = B([X, Y], Z)$ και άρα θα έχουμε $DY = [X, Y] \Rightarrow D = ad(X)$.

□

Ακόμα έχουμε την ακόλουθη χρήσιμη πρόταση:

Πρόταση. *Έστω $\mathfrak{g}$ μια ημιαπλή, μιγαδική άλγεβρα Lie και έστω $X \in \mathfrak{g}$. Ακόμα έστω $ad(X) = S + N$ η ανάλυση του πίνακα $ad(X)$ σε ημιαπλά και μηδενοδήναμα κομμάτια. Τότε υπάρχουν $X_s, X_n \in \mathfrak{g}$ τέτοια ώστε $ad(X_s) = S$ και $ad(X_n) = N$.*

Απόδειξη. Για $c \in \mathbb{C}$ ορίζουμε τον χώρο

$$\mathfrak{g}_c = \{Z \in \mathfrak{g} | (ad(X) - c \cdot id_{\mathfrak{g}})^k Z = 0, \text{για κάποιο } n \in \mathbb{N}\}$$

Από γενική γραμμική άλγεβρα οι χώροι αυτοί (όσοι δεν είναι οι μηδενικοί) είναι ¨ορθογώνιοι¨ ανά δυο και παράγουν όλο τον χώρο. Ακόμα από την κατασκευή του S παρατηρούμε οτι στον $\mathfrak{g}_c \neq 0$ έχουμε $S = c \cdot id_{\mathfrak{g}}$. Ακόμα παρατηρούμε οτι $[\mathfrak{g}_d, \mathfrak{g}_c] \subseteq \mathfrak{g}_{d+c}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε από την ταυτότητα:

$$(ad(X) - (c + d) \cdot id_{\mathfrak{g}})^k [Z, W] = \sum \binom{k}{r} [(ad(X) - c \cdot id_{\mathfrak{g}})^r Z, (ad(X) - d \cdot id_{\mathfrak{g}})^{k-r} W]$$

Αυτό δείχνει οτι η S είναι μια παραγώγιση στην $\mathfrak{g}$ και άρα από το παραπάνω λήμμα έχουμε οτι $S = ad(X_s)$. Αυτό συνεπάγεται οτι $N = ad(X_n)$ για κάποιο X_n.

□

Τώρα έχουμε όλα τα απαραίτητα αποτελέσματα για να μιλησουμε για τις υποάλγεβρες *Cartan*. Πρώτα όμως θέλουμε να εξηγήσουμε μια ακολουθία συλλογισμών για το πως κάποιος θα κατέληγε να μελετήσει υποάλγεβρες *Cartan*. Έστω λοιπόν $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα *Lie* και έστω $X_1, \ldots, X_n$ μια βάση αυτής της άλγεβρας. Τότε θα υπάρχουν σταθερές c_{ij}^k οι οποίες λέγονται σταθερές δομής έτσι ώστε να έχουμε:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k$$

Ουσιαστικά έχουμε εκφράσει το $[X_i, X_j]$ στην αρχική μας βάση. Είναι εύκολο να πειστούμε οτι κάθε ερώτηση που μπορούμε να διατυπώσουμε για τις άλγεβρες *Lie* μπορεί να διατυπωθεί χρησιμοποιώντας τις σταθερές δομής ως προς μια βάση. Για παράδειγμα δυο άλγεβρες *Lie* είναι ισομορφικές αν και μόνο αν δέχονται βάσεις που ορίζουν ίδιες σταθερές δομής. Άρα αν θέλουμε να μελετήσουμε συστηματικά την δομή μιας άλγεβρας *Lie* μπορούμε να κάνουμε μια έξυπνη επιλογή βάσης που να μας απλοποιεί πολύ τις ποσότητες $[X_i, X_j]$. Πως μπορούμε να το κάνουμε αυτό όμως. Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε μερικά X_i, X_j έτσι ώστε να έχουμε $[X_i, X_j] = 0$. Ακόμα για να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο την ζωή μας θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τέτοια X_i έτσι ώστε η $ad(X_i) = [X_i, -]$ να είναι μια ημιαπλά απεικόνιση. Αυτά τα στοιχεία με αυτές τις ιδιότητες θα παράγουν μια υποάλγεβρα *Lie*. Τότε για να είμαστε και πιο αποδοτικοί μπορούμε να επιλέξουμε μια μεγιστική υποάλγεβρα με αυτές τις ιδιότητες. Αυτές οι άλγεβρες είναι οι άλγεβρες *Cartan*:

Ορισμός. *Έστω μια ημιαπλή μιγαδική άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Μια υποάλγεβρα $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ λέγεται υποάλγεβρα Cartan αν είναι μια μεγιστική αβελιανή υποάλγεβρα έτσι ώστε η $ad(X)$ να είναι ημιαπλή για κάθε $X \in \mathfrak{h}$.*

Ο σκοπός μας είναι φυσικά να δείξουμε οτι οι υποάλγεβρες *Cartan* υπάρχουν. Κατά την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε με ουσιαστικό τρόπο το γεγονός οτι η $\mathfrak{g}$ είναι ημιαπλή και αυτός είναι και ο λόγος που επικεντωνόμαστε σε αυτού του είδους άλγεβρες.

Πρώτα θα χρειαστούμε λίγη ορολογία. Παρατηρούμε οτι υπάρχουν ¨πολυωνιμικές¨ συναρτήσεις πάνω στην $\mathfrak{g}$, D_k τέτοιες ώστε να έχουμε:

$$det(ad(X) - t \cdot id_{\mathfrak{g}}) = \sum t^k D_k(X)$$

Προφανώς δεν θα είναι όλες οι D_k ταυτοτικά ίσες με το μηδέν. Έστω λοιπόν m ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε D_m να μην είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν. Τώρα για ένα $X \in \mathfrak{g}$ λέμε οτι το X είναι ένα κανονικό στοιχείο της $\mathfrak{g}$ αν και μόνο αν $D(X)_m \neq 0$.

Ακόμα για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ ορίζουμε τον χώρο:

$$\mathfrak{g}^X = \{Y \in \mathfrak{g} | ad(X)^k Y = 0 \textit{για κάποιο } k \in \mathbb{N}\}$$

Με αυτό τον χώρο μπορούμε να δούμε την έννοια του κανονικού στοιχείου λίγο διαφορετικά. Αν $X \in \mathfrak{g}$ τότε κατά τα γνωστά θα έχουμε:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^X \oplus_i \mathfrak{g}(X, a_i)$$

όπου φυσικά θα έχουμε $\mathfrak{g}(X, a_i) = \{Z | (ad(X) - a_i \cdot id_{\mathfrak{g}})^k = 0 \textit{για κάποιο } k \in \mathbb{N}\}$ με $a_i \in \mathbb{C}$. Τότε ένα στοιχείο X είναι κανονικό αν και μόνο αν

$$dim\mathfrak{g}^X = min\{dim\mathfrak{g}^Y | Y \in \mathfrak{g}\}$$

Έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Έστω $\mathfrak{g}$ μια ημιαπλή, μιγαδική άλεβρα Lie και έστω X ένα κανονικό στοιχείο της $\mathfrak{g}$. Τότε η άλγεβρα $\mathfrak{g}^X$ είναι μηδενοδύναμη άλγεβρα Lie.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ανάλυση $ad(X) = ad(X_s) + ad(X_n)$ όπως στο παραπάνω λήμμα. Τότε θα έχουμε $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus_i \mathfrak{g}_{a_i}$ όπου φυσικά g_0 είναι ο ιδιόχωρος της μηδενικής ιδιοτιμής του $ad(X_s)$ και $\mathfrak{g}_{a_i}$ είναι ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής a_i του $ad(X_s)$. Είναι εύκολο να δούμε οτι θα έχουμε $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^X$. Έστω τώρα οτι $\mathfrak{g}' = \oplus_i \mathfrak{g}_{a_i}$. Τότε είναι προφανές οτι η $ad(X_s)$ είναι αντιστρέψιμη στο $\mathfrak{g}'$. Αν τώρα $Z \in \mathfrak{g}^X$ τότε η $ad(Z)$ αντιμετατίθεται με την $ad(X_s)$ και άρα θα έχουμε $ad(Z)(\mathfrak{g}') \subseteq \mathfrak{g}'$. Τώρα το σύνολο των $Z \in \mathfrak{g}^X$ για τα οποία η $ad(Z)|_{\mathfrak{g}'}$ είναι 1-1 είναι διάφορο του κενού και πιο συγκεκριμένα είναι πυκνό στην $\mathfrak{g}^X$. Επειδή τώρα το X είναι κανονικό γι αυτό το πυκνό σύνολο θα πρέπει να έχουμε οτι $ad(Z)^m U = 0$ για κάθε $U \in \mathfrak{g}^X$ και για Z σε αυτό το πυκνό σύνολο. Από αυτό πέρνουμε οτι η $\mathfrak{g}^X$ είναι μηδενοδύναμη.

□

Τώρα μπορούμε να δείξουμε το βασικό μας θεώρημα:

Θεώρημα. *Αν X είναι ένα κανονικό στοιχείο της ημιαπλής, μιγαδικής άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ τότε η $\mathfrak{g}^X$ είναι μια υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{g}$.*

Απόδειξη. Όπως και στο προηγούμενο λήμμα έστω οτι $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus_i \mathfrak{g}_{a_i}$ όπου φυσικά $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^X$. Θα δείξουμε οτι αν $a_i \neq -a_j$ τότε $B(\mathfrak{g}_{a_i}, \mathfrak{g}_{a_j}) = (0)$. Πράγματι αν $Z \in \mathfrak{g}_{a_i}$ και $U \in \mathfrak{g}_{a_j}$ τότε από τα προηγούμενα έχουμε οτι $ad(Z)ad(U)(\mathfrak{g}_{a_k}) \subseteq \mathfrak{g}_{a_i+a_j+a_k}$. Αυτό συνεπάγεται οτι $tr(ad(Z)ad(U)) = 0$ και άρα οι χώροι $\mathfrak{g}_{a_i}$ και $\mathfrak{g}_{a_j}$ είναι όντως $B-$ορθογώνιοι. Αυτό δείχνει πιο συγκεκριμένα οτι η μορφή *Killing* B είναι μη εκφυλισμένη στον χώρο $\mathfrak{g}^X$. Ακόμα αφού η $\mathfrak{g}^X$ είναι μηδενοδύναμη από το θεώρημα του *Engels* θα έχουμε οτι θα υπάρχει μια βάση της $\mathfrak{g}^X$ τέτοια ώστε κάθε $ad(Z)$ με $Z \in \mathfrak{g}^X$ να είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Άρα αν έχουμε οτι $Z \in [\mathfrak{g}^X, \mathfrak{g}^X]$ τότε η $ad(Z)$ θα είναι άνω τριγωνικός πίνακας με μηδέν πάνω στην διαγώνιο. Αυτό συνεπάγεται οτι για κάθε $W \in \mathfrak{g}^X$ θα έχουμε οτι $B(Z, W) = 0$ και αφού η B είναι μη εκφυλισμένη θα έχουμε οτι $Z = 0$. Αυτό φυσικά δείχνει οτι η $\mathfrak{g}^X$ είναι αβελιανή. Από τον ορισμό αυτής της άλγεβρας είναι προφανές οτι είναι και μεγιστική.

Θα δείξουμε τώρα οτι το $ad(Z)$ είναι ημιαπλό. Αν έχουμε $ad(Z) = ad(Z_s) + ad(Z_n)$ όπως σε προηγούμενο λήμμα τότε αρκεί να δείξουμε οτι $ad(Z_n) = 0$. Παρατηρούμε οτι $[Z, X_s] = 0$. Αυτό συνεπάγεταται οτι $Z_s, Z_n \in \mathfrak{g}^X$. Μάλιστα θα έχουμε οτι το $ad(Z_n)$ θα είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μηδέν στη διαγώνιο και άρα $ad(Z_n) = 0$.

□

Τώρα αν $\mathfrak{g}$ είναι μια ημιαπλή, μιγαδική άλγεβρα *Lie* και $\mathfrak{h}$ μια υποάλγεβρα *Cartan* τότε οι τελεστές $ad(X)$ με $X \in \mathfrak{h}$ έχουν μια από κοινού διαγωνοποίηση. Αυτό σημαίνει οτι έχουν ακριβώς τα ίδια ιδιοδιανύσματα. Άρα αν X είναι ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα τότε θα υπάρχει ένα $\mathcal{A} \in \mathfrak{h}^*$ τέτοιο ώστε:

$$ad(H)X = \mathcal{A}(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}$$

Πιο γενικά μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους:

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{A}} = \{X \in \mathfrak{g} | ad(H)X = \mathcal{A}(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Και θέτουμε ακόμα:

$$\Delta = \{\mathcal{A} \in \mathfrak{h}^* | \mathcal{A} \neq 0 \; \textit{και} \; \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} \neq (0)\}$$

Ο χώρος αυτός αυτός λέγεται χώρος ριζών (*root space*) της $\mathfrak{g}$ ως προς την $\mathfrak{h}$. Θέλουμε να αναλύσουμε τις ιδιότητες αυτών των αντικειμένων. Πρώτα έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Για κάθε* $\beta \in \Delta$ *έχουμε* $B(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\beta) = (0)$. *Πιο γενικά όταν* $a \neq -\beta$ *έχουμε* $B(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_\beta) = (0)$. *Ακόμα αν* $a \in \Delta$ *τότε* $-a \in \Delta$.

Απόδειξη. Αν $X \in \mathfrak{g}_a$ και $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ τότε για κάθε $H \in \mathfrak{h}$ έχουμε $B(ad(H)X, Y) = a(H)B(X, Y)$ και $B(X, ad(H)Y) = \beta(H)B(X, Y)$. Επειδή η μορφή *Killing* είναι $ad-$αναλλοίωτη για την παραγώγιση ad πάνω στην $\mathfrak{g}$ θα έχουμε οτι $a(H)B(X, Y) = -\beta(H)B(X, Y)$. Άρα αν $a \neq -\beta$ έχουμε $B(X, Y) = 0$. Το δεύτερο σκέλος είναι προφανές.

□

Παρατηρούμε οτι αφού η $\mathfrak{g}$ είναι ημιαπλή θα έχουμε οτι η μορφή *Killing* B θα είναι μη εκφυλισμένη. Πιο συγκεκριμένα έχουμε δείξει οτι η μορφή *Killing* είναι μη εκφυλισμένη στην $\mathfrak{h}$ και άρα για κάθε $a \in \Delta$ θα υπάρχει ένα $H_a \in \mathfrak{h}$ τέτοιο ώστε $a(H) = B(H, H_a)$. Έχουμε τώρα το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα. *Αν* $X \in \mathfrak{g}_a$ *και* $Y \in \mathfrak{g}_{-a}$ *τότε θα έχουμε* $[X, Y] = B(X, Y)H_a$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε οτι έχουμε $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{a+\beta}$. Άρα έχουμε οτι $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Για $H \in \mathfrak{h}$ θα έχουμε $B([X, Y], H) = a(H)B(X, Y)$ και άρα έχουμε $[X, Y] = B(X, Y)H_a$.

□

Το παραπάνω λήμμα μας λέει οτι η μορφή *Killing* επάγει μια μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή πάνω στην $\mathfrak{g}_a \times \mathfrak{g}_{-a}$. Θα δούμε την σημαντική εφαρμογή αυτής της παρατήρησης μετά το παρακάτω, βασικό, θεώρημα:

Θεώρημα. *Αν* $\mathfrak{g}$ *είναι μια ημιαπλή άλγεβρα Lie και* $\mathfrak{h}$ *μια υποάλγεβρα Cartan. Τότε έχουμε:*

1. *Αν* $a \in \Delta$ *τότε* $dim\mathfrak{g}_a = 1$.
2. *Έστω ο χώρος* $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \oplus_{a\in\Delta}\mathbb{R}H_a$. *Τότε ο* $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *παράγει τον (μιγαδικό) διανυσματικό χώρο* $\mathfrak{h}$. *Ακόμα η μορφή Killing είναι πραγματική και θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή στην* $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *και* $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus i \cdot \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ *(*$i = \sqrt{-1}$*).*
3. *Αν* $a, \beta \in \Delta$ *τότε* $2\frac{\beta(H_a)}{a(H_a)} = -s - r$ *όπου* $s, r \in \mathbb{Z}$ *είναι τέτοια ώστε* $\beta + (r-1)a, \beta + (s+1)a \notin \Delta$ *αλλά* $\beta + ta \in \Delta$ *για κάθε ακέραιο* $r \leq t \leq s$.
4. *Αν έχουμε οτι* $X_a \in \mathfrak{g}_a, X_{-a} \in \mathfrak{g}_{-a}$ *και* $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ *τότε έχουμε*
$$[X_{-a}, [X_a, X_\beta]] = \frac{s(1-r)}{2}a(H_a)B(X_a, X_{-a})X_\beta$$
5. *Αν* $a + \beta \neq 0$, *με* $a, \beta \in \Delta$ *τότε* $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{a+\beta}$.
6. *Αν* $a \in \Delta$ *τότε οι μόνες ρίζες που είναι παράλληλες ως προς το* a *είναι τα* $a, 0, -a$.

Για την απόδειξη ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να κοιτάξει το [] ή το []. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή αλλά μακροσκελής και ο σκοπός είναι να δώσουμε μια γενική ιδέα των ιδιοτήτων και της χρησιμότητας των συστημάτων ριζών.

Μπορούμε να επιλέξουμε μια βάση για κάθε $\mathfrak{g}_\alpha$. Από το παραπάνω θεώρημα αρκεί να επιλέξουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Όπως αναφέραμε το όλο σκεπτικό είναι να κάνουμε μια έξυπνη επιλογή βάσης. Μπορούμε να επιλέξουμε $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ και $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ τέτοιο ώστε να έχουμε $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Με αυτή την επιλογή θα έχουμε οτι $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$. Πιο γενικά θα έχουμε οτι $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$ όταν $\alpha + \beta \in \Delta$ και $[E_\alpha, E_\beta] = 0$ αν $\alpha + \beta \neq 0$ και $\alpha + \beta \notin \Delta$. Τώρα αν πάρουμε ένα υποσύνολο $S \subseteq \Delta$ και πάρουμε το σύνολο $\bar{S} \subseteq \Delta$ το οποίο αποτελείται από τις ρίζες της μορφής $\pm\alpha$ και $\pm(\alpha + \beta)$ όπου $\alpha, \beta \in S$ τότε θα πάρουμε με ανάλογο τρόπο σταθερές $N_{\alpha,\beta}$ με $\alpha + \beta \in \bar{S}$. Έτσι θα πάρουμε μια βάση η οποία από την κατασκευή της θα έχει αρκετά απλές σταθερές δομής δεδομένου οτι γνωρίζουμε το σύστημα ριζών Δ. Για την ακρίβεια έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα. *Έστω $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{g}_1$ δυο ημιαπλές, μιγαδικές άλγεβερες Lie και $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_1$ οι υποάλγεβρες Cartan των $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{g}_1$. Ακόμα ας θεωρήσουμε τα αντίστοιχα συστήματα ριζών Δ, Δ_1 και τους χώρους $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \oplus_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}H_\alpha$ και $(\mathfrak{h}_1)_\mathbb{R} = \oplus_{\alpha\in\Delta_1}\mathbb{R}H^1_\alpha$. Τότε τα Δ, Δ_1 μπορούν να θεωρηθούν ως υποσύνολα των $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ και $(\mathfrak{h}_1)^*_\mathbb{R}$ (οι δυϊκοί χώροι αυτών των πραγματικών διανυσματικών χώρων). Αν τώρα ϕ είναι μια $\mathbb{R}-$γραμμική, 1-1 απεικόνιση από το $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ στην $(\mathfrak{h}_1)_\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η συζυγής απεικόνιση να στέλνει το Δ στο Δ_1 τότε υπάρχει μοναδική επέκταση $\bar{\phi}$ της ϕ έτσι ώστε η $\bar{\phi} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ να είναι ένας ισομορφιμός αλγεβρών Lie.*

Οπότε ουσιαστικά το σύστημα των ριζών καθορίζει μονοσήμαντα την άλγεβρα *Lie*. Αν λοιπόν θέλουμε να ταξινομήσουμε τις (απλές) άλγεβρες *Lie* τότε ένα τρόπος είναι να μελετήσουμε και να ταξινομήσουμε τα συστήματα ριζών τους. Η μελέτη των συτημάτων ριζών είναι αρκετά πολύπλοκη και αναπτυγμένη και απλά αναφέρουμε οτι αυτή η δουλειά/ταξινόμηση έχει γίνει.

4.2 Εφαρμοφή στη θεωρία αναπαραστάσεων

Τώρα θα δούμε την σχέση της θεωρίας που αναπτύχθηκε πιο πάνω με την θεωρία αναπαραστάσεων των ομάδων *Lie*. Θα υποθέσουμε οτι έχουμε μια συμπαγή ομάδα *Lie* G με αντίστοιχη άλγεβρα *Lie* $\mathfrak{g}$ η οποία είναι εφοδιασμένη με ένα *Ad*-αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο. Από δυϊκότητα θα έχουμε και ένα εσωετρικό γινόμενο στο $\mathfrak{g}^*$ και θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο γι αυτά. Αν θέλουμε να βρούμε όλες τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της G τότε από το θεώρημα *Peter-Weyl* μπορούμε να επικεντρωθούμε στην περίπτωση αναπαραστάσεων πεπερασμένης διάστασης. Έστω λοιπόν μια ομαλή αναπαράσταση π της G πάνω στον χώρο V με $dim(V) \geq 0$. Υπευθυμίζουμε οτι αυτό σημαίνει οτι η απεικόνιση $(g, v) \to \pi(g)v$ είναι ομαλή. Ακόμα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδιαία ως προς κάποιο κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο. Αφού $\pi : G \to GL(V)$ και αφού η $GL(V)$ είναι ομάδα *Lie* θα έχουμε κατά τα γνωστά μια αντίστοιχη αναπαράσταση $d\pi : \mathfrak{g} \to gl(V)$. Αυτή η αναπαράσταση ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$d\pi(\xi)v = \frac{d}{dt}\pi(exp(t\xi))v|_{t=0}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε οτι αν η π είναι μοναδιαία τότε για κάθε $\xi \in \mathfrak{g}$ ο πίνακας $d\pi(\xi)$ είναι αντισυμμετρικός. Άρα θα έχουμε οτι οι ιδιοτιμές του πίνακα θα είναι γνησίως φανταστικές. Αν τώρα πάρουμε μια μεγιστική αβελιανή άλγεβρα της $\mathfrak{g}$ έστω την

$\mathfrak{h}$ τότε κατά τα γνωστά οι πίνακες $d\pi(\xi)$ με $\xi \in \mathfrak{h}$ θα διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα και άρα θα υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας Q τέτοιος ώστε:

$$Qd\pi(\xi)Q^{-1} = diag(i\lambda_1(\xi), i\lambda_2(\xi), ..., i\lambda_n(\xi))$$

όπου $n = dim\pi$ και όπου τα $\lambda_j \in \mathfrak{h}^*$ είναι (πραγματικά) συναρτησιακά. Τα διαφορετικά λ όνομάζονται βάρη (*weights*) της αντίστοιχης αναπαράστασης. Ανάλογα με την περίπτωση των ριζών όταν λ είναι ένα βάρος τότε ορίζουμε τον χώρο:

$$V_\lambda = \{X \in V | d\pi(\xi)X = i\lambda(\xi)X \forall \xi \in \mathfrak{h}\}$$

Μπορούμε να δούμε οτι $V = \oplus V_\lambda$. Παρατηρούμε ακόμα οτι το σύστημα ριζών μιας ομάδας *Lie* είναι ουσιαστικά τα βάρη που αντιστοιχούν στην *adjoint* αναπαράσταση. Πιο ειδικά υπάρχει μια στενή σχέση ανάμεσα στα βάρη μιας αναπαράστασης και στο σύστημα ριζών:

Θεώρημα. *Αν π είναι μια αναπαράσταση της ομάδας Lie G, λ είναι ένα βάρος της αναπαράστασης και α είναι μια ρίζα της $\mathfrak{g}$ τότε είτε $\lambda + \alpha = 0$ ή το $\lambda + \alpha$ είναι ένα βάρος της π.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή. Αν $v \in V_\lambda$ και $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ τοτε για κάθε $\xi \in \mathfrak{h}$ θα έχουμε οτι:

$$d\pi(\xi)d\pi(Y)v = d\pi(Y)d\pi(H)v + d\pi([\xi, Y])v \rightarrow$$

$$d\pi(\xi)d\pi(Y)v = i(\lambda(\xi) + \alpha(\xi))d\pi(Y)v$$

Άρα είτε $\lambda + \alpha = 0$ ή $\lambda + \alpha$ είναι ένα βάρος της π.

□

Τώρα αν έχουμε μια αναπαράσταση ρ τότε μπορούμε να πάρουμε μια διαφορετική περιγραφή για τα αντίστοιχα βάρη. Έστω το σύνολο:

$$\mathbb{I} = \{X \in \mathfrak{h} | \; exp(2\pi X) = e\}$$

Μπορεί να δειχθεί οτι αυτό το σύνολο είναι ένα δικτυωτό (*lattice*) της $\mathfrak{h}$. Αυτό σημαίνει οτι είναι μια προσθετική υποομάδα της $\mathfrak{h}$, παράγει την $\mathfrak{h}$ ως διανυσματικό χώρο και υπάρχει μια περιοχή $V \subset \mathfrak{h}$ του 0 έτσι ώστε να έχουμε $V \cap \mathbb{I} = \{0\}$. Η σημαντική ιδιότητα των δικτυωτών είναι οτι μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο $\{v_1, ..., v_d\} \subset \mathfrak{t}$ τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του δικτυώτου να εκφράζεται ως $l = \sum_{i=1}^{d} n_i v_i$ όπου $n_i \in \mathbb{Z}$. Κάθε στοιχείο δηλαδή του δικτυωτού μπορεί να αναπαρασταθεί από μια πεπερασμένη ακολουθία ακεραίων. Αν ορίσουμε τώρα το δυϊκό δικτυωτό:

$$\mathbb{I}^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \; \lambda(X) \in \mathbb{Z} \; \forall X \in \mathbb{I}\}$$

θα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής, συνεκτική, ομάδα Lie, ρ είναι μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της G και λ είναι ένα βάρος της ρ τότε $\lambda \in \mathbb{I}^*$.*

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathbb{I}$. Τότε θα έχουμε $\rho(exp(2\pi X)) = id$. Αυτό συνεπάγεται οτι $exp(2\pi d\rho(X)) = id$. Άρα θα έχουμε:

$$exp(2\pi Q d\rho(X) Q^{-1}) = Q exp(2\pi d\rho(X)) Q^{-1} = id \Rightarrow$$

$$exp(2\pi i \cdot diag(\lambda_1(X), ..., \lambda_{\dim(\rho)}(X))) = id$$

Αυτό συνεπάγεται οτι $\lambda_i(X) \in \mathbb{Z}$ και άρα $\lambda_i \in \mathbb{I}^*$.

□

Τώρα γυρνάμε στο σύστημα ριζών μιας ομάδας *Lie* και θα δούμε πως μπορούμε να δούμε την ομάδα *Weyl* και την ολοκληρωτική φόρμουλα του *Weyl* με ένα λίγο διαφορετικό τρόπο. Έστω Δ ένα σύστημα ριζών μιας ημιαπλής άλγεβρας *Lie* $\mathfrak{g}$. Τότε μπορούμε να πάρουμε ένα στοιχείο $v \in \mathfrak{h}$ έτσι ώστε:

$$\Delta \cap \{a \in \mathfrak{h}^* | \ a(v) = 0\} = \emptyset$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει οτι πέρνουμε ένα υπερεπίπεδο στο $\mathfrak{h}^*$ έτσι ώστε να μην περιέχει καμία από τις ρίζες. Κατά συνέπεια κάποιες ρίζες θα βρίκονταο "πάνω" από το υπερεπίπεδο και κάποιες κάτω από αυτό. Πιο συγκεκριμένα το επίπεδο αυτό διαχωρίζει το Δ στα σύνολα:

$$\Delta_+ = \{a \in \Delta | \ a(v) > 0\} \ \textit{και}$$

$$\Delta_- = \{a \in \Delta | \ a(v) < 0\}$$

Θα έχουμε $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$. Τα στοιχεία του συνόλου Δ_+ λέγονται θετικές ρίζες και αντίστοιχα στοιχεία του Δ_- λέγονται αρνητικές ρίζες. Μπορούμε τώρα να βρούμε ένα σύνολο $\Delta_0 \subset \Delta_+$ το θα αποτελεί μια βάση του $\mathfrak{h}^*$ και έτσι ώστε κάθε άλλη ρίζα να εκφράζεται ώς γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Δ_0 με ακέραιους συντελεστές. Τα στοιχεία του Δ_0 λέγονται απλές/θεμελειώδεις ρίζες. Αυτό το σύνολο έχει βασικό ρόλο στην απόδειξη στην παρακάτω σημαντική πρόταση που αναφέρεατι στην βιβλιογραφία ως το θεώρημα του μεγιστικού βάρους.

Θεώρημα. *Έστω π μια ανάγωγη αναπαράσταση της ομάδας Lie G. Τότε υπάρχει ένα βάρος λ τέτοιο ώστε κάθε άλλο βάρος της π είναι της μορφής:*

$$\mu = \lambda - \sum_{a \in \Delta_0} n_a a$$

όπου n_a είναι ένας θετικός ακέραιος. Επιπλέον υπάρχει τουλάχιστον ένα n_a διάφορο του μηδενός.

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε τα [] και []. Επιλέγουμε το βάρος λ με την μεγαλύτερη νόρμα (που επάγεται από ένα συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο) με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε $(\lambda | a) \geq 0$ για κάθε $a \in \Delta_0$. Έστω τώρα $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Ας υποθέσουμε οτι το μ έχει την μορφή $\lambda + \sum_{a\in\Delta_0} n_a a$ με $n_a \geq 0$ και ακόμα οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα $n_a > 0$. Τότε έχουμε:

$$||\mu||^2 = ||\lambda||^2 + 2 \sum_{a\in\Delta_0} n_a (\lambda | a) + || \sum_{a\in\Delta_0} n_a a||^2 > ||\lambda||^2$$

που συνεπάγεται οτι το μ δεν είναι βάρος της π.

Τώρα έστω $v \in V_{\mathcal{A}}$. Τώρα μπορούμε να επεκτείνουμε την αναπαράσταση $d\pi$ σε μια ανάγωγη αναπαράσταση της άλγεβρας $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ο υπόχωρος $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ είναι προφανώς $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-αναλλοίωτος και άρα θα έχουμε $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ όπου ο V είναι ο χώρος στον οποίο η G δρά. Από το θεώρημα *Poincare-Birkhoff-Witt* μπορεί να δειχθεί οτι η βάση της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής $E_{-a_1}^{m_1}E_{-a_2}^{m_2}...E_{-a_k}^{m_k}H_1^{n_1}H_2^{n_2}...H_r^{n_r}E_{a_1}^{p_1}E_{a_2}^{p_2}...E_{a_k}^{p_k}$ όπου $H_1, \dots, H_r$ είναι μια βάση της $\mathfrak{h}$. Τότε η δράση του $E_{a_1}^{p_1}E_{a_2}^{p_2}...E_{a_k}^{p_k}$ πάνω στο $v \in V_{\mathcal{A}}$(= ο ιδιόχωρος του $\mathcal{A}$) θα μας μας δώσει την ιδιοτιμή $\mathcal{A} + \sum_{j=1}^{k} p_j a_j$. Πιο αυστηρά θα έχουμε για κάθε $H \in \mathfrak{h}$:

$$d\pi(H)d\pi(E_{a_1}^{p_1}E_{a_2}^{p_2}...E_{a_k}^{p_k})v = i(\mathcal{A}(H) + \sum_{j=1}^{k} p_j a_j(H))v$$

άλλα όπως είδαμε το $\mathcal{A} + \sum_{j=1}^{k} p_j a_j$ δεν μπορεί να είναι βάρος της π. Επειδή τώρα η δράση του $H_1^{n_1}H_2^{n_2}...H_r^{n_r}$ αφήνει το $V_{\mathcal{A}}$ αναλλοίωτο βλέπουμε τελίκα οτι το ”τελευταίο” κομμάτι της βάσης θα μας δίνει:

$$d\pi(H)d\pi(E_{-a_1}^{m_1}E_{-a_2}^{m_2}...E_{-a_k}^{m_k})v = i(\mathcal{A}(H) - \sum_{j=1}^{k} m_j a_j(H))v$$

Αφού όπως είπαμε $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ αυτό συνεπάγεται οτι τα βάρη της π πρέπει να έχουν την μορφή που είπαμε.

□

Τώρα σχετικά με το $\mathcal{A}$ που ορίσαμε στην παραπάνω πρόταση. Αυτό το βάρος λέγεται μεγιστικό βάρος της αναπαράστασης και μπορεί να δειχθεί οτι $dim(V_{\mathcal{A}}) = 1$. Είναι έυκολο να δούμε οτι τα βάρη είναι αναλλοίωτα υπό μορφισμούς αναπαραστάσεων και ως συνέπεια μπορούμε να ταυτίσουμε το $\hat{G}$ με τον χώρο όλων των μεγιστικών βαρών όλων των ανάγωγων αναπαραστάσεων της G. Αν και αυτό δεν φαίνεται να λεέι πολλά το σηματνικό είναι οτι από τη δομή των βαρών μιας αναπαράστασης (σχηματίζουν μια *lattice*) μπορούμε να αναπραστίσουμε κάθε στοιχείο του $\hat{G}$ με μια πεπεαραμένη ακολουθία ακεράιων.

Με αυτά τα νέα αντικείμενα μπορούμε να δούμε και την ομάδα *Weyl* με ένα διαφορετικό τρόπο. Ας θεωρήσουμε ένα τόρο T της ημιαπλής ομάδας G και την αντίστοιχη ομάδα *Weyl* $W = N(T)/T$. Τότε μπορούμε να δούμε οτι η W δρά πάνω στο σύστημα ριζών της G. Πράγματι όπως είχαμε πει και στο κεφάλαιο [] για κάθε $w \in W$ της μορφής $w = nT$ για κάποιο $n \in N(T)$ τότε το στοιχείο ntn^{-1} εξαρτάται μόνο από το w και άρα η απεικόνιση $t \mapsto w \cdot t := ntn^{-1}$ είναι καλά ορισμένη. Συνήθως απεικονίζουμε την απεικόνιση αυτή ως $w(t) = wtw^{-1} := ntn^{-1}$. Μπορούμε τώρα να σηκώσουμε την δράση αυτή στην άλγεβρα $\mathfrak{h}$ μέσω της απεικόνισης exp η οποία είναι επί του T. Με άλλα λόγια ορίζουμε το $w(X)$ από την εξίσωση $w(exp(X)) = exp(w(X))$. Μπορεί να δειχθεί οτι αυτή η δράση είναι καλά ορισμένη. Μάλιστα μπορούμε να μεταφέρουμε αυτή την δράση στο $\mathfrak{h}^*$ με τον προφανή τόπο: $w(a)(X) = a(w(X))$. Κατά συνέπεια η ομάδα *Weyl* δρά πάνω σύστημα ριζών της G. Μπορεί να δειχθεί οτι η δράση αυτή στέλνει ρίζες σε ρίζες. Για την ακρίβεια αν θεωρήσουμε την ομάδα που παράγεται από τις απεικονίσεις:

$$s_a(\beta) = \beta - 2\frac{(a, \beta)}{(a, a)}a$$

τότε αυτή η ομάδα θα είναι ισομορφική με την W. Για την ακρίβεια η δράση της W πάνω στις ρίζες θα είναι η ίδια με την δράση αυτής της ομάδας.

Μια άλλη σημαντική έννοια είναι αυτή των *Weyl chambers*. Αυτά τα αντικείμενα έχουν ένα πολύ απλό γεωμετρικό ορισμό: Αν θεωρήσουμε τα υπερεπίπεδα:

$$Y_a = \{\beta \in \mathfrak{h}^* | \ (a, \beta) = 0\}$$

τότε θα έχουμε το σύνολο $\mathfrak{h} - \cup_{a \in \Delta} Y_a$. Αυτό το σύνολο είναι η ξένη ένωση κυρτών ανοικτών συνόλων και τα συνεκτικά του κομμάτια λέγονται *Weyl chambers* και μπορεί να δειχθεί οτι η ομάδα *Weyl* μεταθέτει αυτά τα κομμάτια. Αν πάρουμε τώρα την κλειστότητα ενός συγκεκριμένου *Weyl chamber* τότε θα λέμε κάθε βάρος που ανήκει σε αυτό το σύνολο κυρίαρχο βάρος και τον αντίστοιχο *Weyl chamber* κυρίαρχο *Weyl chamber*. Η επιλογή αυτή δεν είναι και τόσο αυθαίρετη όπως φαίνεται μιας και όπως είπαμε η ομάδα *Weyl* μεταθέτει τους *Weyl chambers*. Μπορεί να δειχθεί οτι για κάθε κυρίαρχο βάρος $\mathcal{A}$ υπάρχει μια μοναδική αναπαράσταση της G με μεγιστικό βάρος το $\mathcal{A}$. Υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των μεγιστικών βαρών και των κυρίαρχων βαρών και άρα θα μπορούμε να ταυτίσουμε τα σύνολα $\hat{G}$, D, $C \cap \mathbb{I}^*$.

Με όλη αυτή την ορολογία μπορούμε να δούμε μια διαφορετική εκδοχή της ολοκληρωτικής φόρμουλας του *Weyl* η οποία θα μας οδηγήσει στην φόρμουλα του *Weyl* για τους χαρακτήρες και την λεγόμενη *Weyl dimension formula*.

Για κάθε $a \in \mathfrak{h}^*$ ορίζουμε την απεικόνιση:

$$A_a(X) = \sum_{w \in W} (-1)^w e^{2\pi i w(a(X))}$$

όπου έχουμε θέσει $(-1)^w = 1$ αν το w είναι το γινόμενο, άρτιο στο πλήθος, των s_a και $(-1)^w = -1$ διαφορετικά. Όταν έχουμε $a = \frac{1}{2}\sum_{\beta \in \Delta} \beta := \rho$ τότε A_ρ^2 μπορεί να οριστεί πάνω στον αντίστοιχο τόρο T μέσω της εξίσωσης $A_\rho^2(exp(X)) = (A_\rho(X))^2$. Αυτή η "επέκταση" θα μας δώσει ένα ομομορφισμό από την T στο $\mathbb{C}$. Τώρα η ολοκληρωτική φόρμουλα του *Weyl* θα έχει την παρακάτω μορφή:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής, συνεκτική, ομάδα Lie και T είναι ένας μεγιστικός τόρος της G τότε έχουμε:*

$$\int_G f(g)dg = \frac{1}{|W|}\int_T f(t)A_\rho^2(t)dt$$

για κάθε μετρήσιμη κεντρική συνάρτηση.

Με αυτή την νέα μορφή της ολοκληρωτικής φόρμουλας μπορούμε να την εφαρμόσουμε σε χαρακτήρες μιας ανάγωγης αναπαράστασης της G. Επειδή όως είπαμε ταυτίζουμε τις ανάγωγες αναπαραστάσεις με τα μεγιστικά τους βάρη θα γράφουμε $\chi_{\mathcal{A}}$ αντί για χ_π. Ακόμα παρατηρούμε οτιι από το θεώρημα του μεγιστικού τόρου που αποδείξαμε σε προηγούμενη ενότητα οτι ένας χαρακτήρας καθορίζεται απολύτως από τις τιμές του πάνω σε ένα μεγιστικό τόρο. Πιο συγκεκριμένα ο χαρακτήρας καθορίζεται από τις τιμές του πάνω στα σημεία που ανήκουν σε ένα μοναδικό τόρο (τα λεγόμενα κανονικά στοιχεία). Θα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Αν χ_{λ} είναι ένας χαρακτήρας μιας ανάγωγης αναπαράστασης της G με μεγιστικό βάρος λ τότε θα έχουμε:*

$$\chi_{\lambda}(g) = \frac{A_{\lambda+\rho}(g)}{A_{\rho}(g)}$$

για κάθε κανονικό στοιχείο $g \in G$.

Επειδή τώρα $\chi_{\pi}(e) = dim(\pi)$ πέρνοντας το όριο $g \to e$ στην παραπάνω φόρμουλα και υπολογίζοντας την έκφραση στην δεξιά πλευρά βλέπουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα που στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *Weyl's dimension formula*:

Θεώρημα. *Αν π είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση της G με μεγιστικό βάρος λ τότε θα έχουμε:*

$$d_{\lambda} := dim(\pi) = \frac{\prod_{a\in\Delta_+}(a, \lambda + \rho)}{\prod_{a\in\Delta_+}(a, \rho)}$$

Με αυτό το θεώρημα μπορούμε να δούμε μια πολύ σημαντική εκτίμηση της διάστασης μιας ανάγωγης αναπαράστασης. Αυτή η εκτίμηση θα είναι το βασικό μας εργαλείο όταν θα αρχίσουμε να μιλάμε για την σύγκλιση σειρών *Fourier* συναρτήσεων:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια ομάδα Lie και π_{λ} είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση της G με μεγιστικό βάρος λ τότε θα έχουμε:*

$$d_{\lambda} \leq C|\lambda|^{|\Delta_+|}$$

Απόδειξη. Έχουμε από την *dimension formula*:

$$d_{\lambda} := dim(\pi) = \frac{\prod_{a\in\Delta_+}(a, \lambda + \rho)}{\prod_{a\in\Delta_+}(a, \rho)}$$

Επειδή το $\lambda_1 + a$ είναι βάρος της π για κάθε βάρος λ_1 της π και a ρίζα της G (όπως έχουμε δείξει) και επειδή $|\lambda + 2\rho| \geq |\lambda + \rho|$ (γιατί $(\lambda, \rho) > 0$) θα έχουμε οτι:

$$|\lambda + \rho| \leq |\lambda|$$

Άρα από την ανισότητα *Cauchy – Schwarz* την οποία την εφαρμόζουμε στον αριθμητή της παραπάνω έκφρασης θα έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Τέλος θα πούμε λίγα λόγια για τον τελεστή *Laplace – Beltrami* και πως η θεωρία των ριζών μας βοηθάει σε αυτή την περίπτωση. Αν επιλέξουμε λοιπόν μια ορθοκανονική βάση $T_1, \ldots, T_r$ στο $\mathfrak{h}$ και τότε ο τελεστής *Laplace – Beltrami* μπορεί να δειχθεί οτι θα γράφεται ως εξής:

$$\Delta_L = \sum_{j=1}^{r} T_j^2 + \sum_{a\in\Delta_+} E_a E_{-a} + E_{-a} E_a \Rightarrow$$

$$\Delta_L = \sum_{j=1}^{r} T_j^2 + \sum_{a\in\Delta_+} 2E_{-a} E_a + iH_a$$

Το σημαντικό αποτέλεσμα εδώ θα είναι μια εκτίμηση της νόρμας $|k_\lambda|$ όπου φυσικά k_λ θα είναι το στοιχείο του φάσματος *Casimir* που αντιστοιχεί στην ανάγωγη αναπαράσταση π_λ με μεγιστικό βάρος λ. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. *Για κάθε μεγιστικό βάρος $\lambda \in D$ θα έχουμε:*

$$k_\lambda = |\lambda + \rho|^2 - |\rho|^2$$

όπου $\rho = \frac{1}{2}\sum_{a\in\Delta_+} a$. Θα έχουμε ακόμα και την εκτίμηση:

$$|\lambda|^2 \leq k_\lambda \leq C(1 + |\lambda|^2)$$

για κάποια σταθερά C.

Απόδειξη. Ο τελεστής *Casimir* που θα αντιστοιχεί στην αναπαράσταση π_λ θα είναι:

$$\Omega_\lambda = \sum_{j=1}^{r} d\pi_\lambda(T_j)^2 + \sum_{a\in\Delta_+}(2d\pi_\lambda(E_{-a})d\pi_\lambda(E_a) + id\pi_\lambda(H_a))$$

Τώρα επιλέγοντας ένα $v \in V_\lambda$ μη μηδενικό και παρατηρόντας οτι $\lambda + a = 0$ για κάθε $a \in \Delta_+$ και οτι $\Omega_\lambda v = -k_\lambda v$ θα καταλήξουμε στην εξίσωση:

$$-k_\lambda v = \sum_{j=1}^{r} \lambda^2(T_j)v + \sum_{a\in\Delta_+} \lambda(H_a)v$$

Όμως επειδή η βάση $T_1, \ldots, T_r$ είναι ορθοκανονική θα έχουμε $\sum_{j=1}^{r} \lambda^2(T_j) = |\lambda|^2$ και για κάθε a θα έχουμε $\lambda(H_a) = (\lambda, a)$ από δυϊκότητα και συνεπώς:

$$k_\lambda = |\lambda|^2 + 2(\lambda, \rho) \Rightarrow$$

$$k_\lambda = |\lambda + \rho|^2 - |\rho|^2$$

Η εκτίμηση τώρα είναι βγαίνει εύκολα από την ανισότητα *Cauchy – Schwarz* και από το γεγονός οτι $(\lambda, \rho) \geq 0$.

□

Κεφάλαιο 5

Βασικά στοιχεία της Ανάλυσης σε ομάδες *Lie*

5.1 Βασικά στοιχεία του μετασχηματισμού *Fourier*

Σε αυτή το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα *Peter-Weyl* και την θεωρία των ριζών/βαρών που (επιγραμματικά αναπτύχθηκε) σε προηγούμενα κεφάλαια για να μελετήσουμε μερικά στοιχεία της ανάλυσης σε συμπαγείς ομάδες *Lie*. Πολλά από αυτά που θα πούμε ισχύουν και στην περίπτωση των γενικών συμπαγών ομάδων αλλά δεν θα μιλήσουμε σε τέτοια γενικότητα. Θα μελετήσουμε κυρίως τον μη μεταθετικό μετασχηματισμό *Fourier*, τις ιδιότητές του και πως μπορεί να μας βοηθήσει να μελετήσουμε άλλα αντικείμενα πάνω σε ομάδες *Lie*. Το βασικό αποτελέσμα που θέλουμε να δείξουμε σε αυτή την ενότητα είναι μια γενίκευση του θεωρήματος του *Levy* καθώς και ένα θεώρημα που μας δίνει πληροφορία για την ασυμπτωτική συμπεριφορά τυχαίων περιπάτων σε μια συμπαγή ομάδα *Lie*. Η παρουσίασή μας βασίζεται κυρίως στο [9]. Σε όλο αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε οτι η G είναι μια συμπαγής, συνεκτική ομάδα *Lie* εφοδιασμένη με μια " *Ad*-αναλλοίωτη " μετρική *Riemann*.

Υπενθυμίζουμε οτι στον χώρο $M_n(\mathbb{C})$ μπορούμε να ορίσουμε την λεγόμενη νόρμα *Hilbert-Schmidt* ως εξής:

$$||A||_{HS} = \sqrt{tr(AA^*)}$$

Αυτή η νόρμα προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο $(A, B)_{HS} = tr(AB^*)$. Τώρα αν G είναι μια συμπαγής ομάδα *Lie* τότε ορίζουμε την $\hat{G}$ ακριβώς όπως και στο πρώτο κεφάλαιο και θέτουμε:

$$\mathcal{M}(\hat{G}) = \cup_{\pi\in\hat{G}} M_{dim(\pi)}(\mathbb{C})$$

και λέμε οτι μια απεικόνιση $F : \hat{G} \to \mathcal{M}(\hat{G})$ είναι συμβιβαστή αν και μόνο αν $F(\pi) \in M_{dim(\pi)}(\mathbb{C})$ για κάθε $\pi \in \hat{G}$. Με τις προφανείς πράξεις είναι φανερό οτι ο χώρος $\mathcal{L}(\hat{G})$ όλων των συμβιβαστών απεικονίσεων είναι ένας διανυσματικός χώρος. Πάνω σε αυτό τον χώρο μπορούμε να ορίσουμε:

$$|||F|||_2^2 = \sum_{\pi\in\hat{G}} dim(\pi)||F(\pi)||_{HS}^2$$

Θα θέλαμε η $||| - |||_2$ να είναι μια νόρμα στον $\mathcal{L}(\hat{G})$ αλλά υπάρχουν συμβιβαστές απεικονίσεις για τις οποίες το παραπάνω άθροισμα αποκλείνει. Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε το υπόχωρο:

$$H_2(\hat{G}) = \{F \in \mathcal{L}(\hat{G}) / |||F|||_2 < \infty\}$$

Ο χώρος αυτός είναι ένας χώρος *Banach* με την νόρμα $||| - |||_2$. Ακόμα καλύτερα είναι ένας χώρος *Hilbert* και η νόρμα αυτή επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$((F, G)) = \sum_{\pi \in \hat{G}} dim(\pi)(F(\pi), G(\pi))_{HS}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτούς τους χώρους με τον "κλασσικό" τρόπο:

$$H_p(\hat{G}) = \{F \in \mathcal{L}(\hat{G}) / |||F|||_p < \infty\}$$

όπου $p \in [1, \infty)$ και:

$$|||F|||_p = (\sum_{\pi \in \hat{G}} dim(\pi) tr(F(\pi)^* F(\pi))^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$$

Πάλι ο $H_p(\hat{G})$ είναι ένας χώρος *Banach* με την νόρμα $|||-|||_p$. Οι χώροι αυτοι εισαγάγονται έτσι ώστε να μπορέσουμε να γενικέυσουμε κλασσικά θεωρήματα της ανάλυσης *Fourier*. Ορίζουμε τώρα τον μεταχηματισμό *Fourier* μιας συνάρτησης $f \in L^1(G)$:

$$\hat{f}(\pi) = \int_G \pi(g^{-1}) f(g) dg$$

όπου $\pi \in \hat{G}$. Είναι φανερό οτι η απεικόνιση $\hat{f} : \hat{G} \to \mathcal{M}(\hat{G})$ είναι συμβιβαστή. Ακόμα αν επιλέξουμε μια βάση του χώρου στον οποίο δρά η π θα έχουμε οτι η $\hat{f}(\pi)$ είναι ένας $dim(\pi) \times dim(\pi)$ πίνακας με στοιχεία:

$$\hat{f}(\pi)_{i,j} = \int_G \pi(g^{-1})_{i,j} f(g) dg$$

Αυτή η ισότητα δείχνει κιόλας οτι η $\hat{f}$ είναι καλά ορισμένη. Είναι εύκολο να δούμε οτι έχουμε $\|\hat{f}(\pi)\| \leq \|f\|_1$ όπου $\| - \|$ είναι η γνωστή νόρμα τελεστή. Ακόμα έχουμε τις ισότητες $\hat{R_g f}(\pi) = \pi(g)\hat{f}(\pi)$ και $\hat{L_g f}(\pi) = \hat{f}(\pi)\pi(g)^*$. Αυτές οι δυο ισότητες είναι η γενίκευση των ανάλογων ταυτοτήτων για τον κλασσικό μετασχηματισμό *Fourier*.

Για την ακρίβεια όπως είχαμε αναφέρει και στο πρώτο κεφάλαιο το πλαίσιο αυτό είναι μια απευθείας γενίκευση του κλασσικού μετασχηματισμού *Fourier*. Αν πάρουμε την ομάδα $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1$ τότε αυτή είναι μια συμπαγής ομάδα *Lie*. Είδαμε οτι όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας αυτής είναι οι $\pi_n(t) = e^{int}$ για $t \in S^1$ και τότε ο μετασχηματισμός *Fourier* μιας συνάρτησης θα είναι $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} f(t) e^{int} \frac{dt}{2\pi}$$

Τώρα είναι εύκολο να δούμε οτι η αεπικόνιση $\mathcal{F} : L^1(G) \to \mathcal{L}(\hat{G})$, $F(f) = \hat{f}$ είναι γραμμική. Αφού η G είναι συμπαγής $L^2(G) \subseteq L^1(G)$ και συνεπώς μπορούμε να περιορίσουμε την $\mathcal{F}$ στον $L^2(G)$. Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει πως μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την $f \in L^2(G)$ από την $\hat{f}$:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα Lie και* $f \in L^2(G)$ *τότε θα έχουμε:*

$$f = \sum_{\pi \in \hat{G}} dim(\pi) tr(\hat{f}(\pi)\pi)$$

στον $L^2(G)$[1]. *Ακόμα η απεικόνιση* $\mathcal{F} : L^2(G) \to H_2(\hat{G})$ *είναι μια ισομετρία και μάλιστα ισχύει η ταυτότητα του Parseval – Plancherel:*

$$\int_G f_1(g) f_2(g) dg = \sum_{\pi \in \hat{G}} dim(\pi)(\hat{f}_1(\pi), \hat{f}_2(\pi))_{HS}$$

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι μια απλή εφαρμογή των αποτελεσμάτων μας από την θεωρία *Peter-Weyl* και από την θεωρία χώρων *Hilbert*. Μάλιστα το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος υπάρχει στην πρώτη ενότητα απλά τώρα με διαφοτετικό συμβολισμό.

Πολλά από τα θεωρήματα της ανάλυσης *Fourier* μπορούν να επεκταθούν με κατάλληλες τροποποιήσεις σε αυτό το πιο γενικό πλαίσιο. Για παράδειγμα έχουμε την ακόλουθη ανισότητα που γενικέυει την ανισότητα *Hausdorff-Young*:

Πρόταση. *Αν* $f \in L^p(G)$ *με* $p \in [1, 2]$ *τότε* $\hat{f} \in H_q(\hat{G})$ *όπου* q *ο συζυγής του* p[2] *και μάλιστα*

$$|||\hat{f}|||_q \leq ||f||_p$$

5.2 Μετασχηματισμοί *Fourier* μέτρων πιθανότητας

Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε μετασχηματισμούς *Fourier* μέτρων πιθανότητας πάνω στην ομάδα *Lie*. Πρώτα ας ορίσουμε την συνέληξη δυο μέτρων *Borel* πάνω σε μια συμπαγή ομάδα *Lie*:

Ορισμός. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα Lie και* μ_1, μ_2 *δυο μέτρα πιθανότητας πάνω στην άλγεβρα Borel της G τότε ορίζουμε την αριστερή συνέληξη* $\mu_1 *_L \mu_2$ *ως το μοναδικό μέτρο πιθανότητας για το οποίο ισχύει:*

$$\int_G f(g) d(\mu_1 *_L \mu_2)(g) = \int_G \int_G f(gh) d\mu_1(g) d\mu_2(h), \ \forall f \in C_c(G)$$

Ανάλογα ορίζουμε και την από δεξιά συνέληξη $\mu_1 *_R \mu_2$.

Είναι εύκολο να δούμε οτι αν X_1, X_2 είναι δυο τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο G και με κατανομή μ_1 και μ_2 αντίστοιχα τότε το $X_1 X_2$ θα είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή την $\mu_1 *_L \mu_2$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε την ταυτότητα:

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \int_G \int_G \mathbf{1}_B(gh) d\mu_1(g) d\mu_2(h) = \int_G \mu_1(Bh^{-1}) d\mu_2(h)$$

[1] Δηλαδή σχεδόν παντού ως προς το μέτρο *Haar*

[2] Δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Αυτή η ερμηνεία μας δείχνει οτι $\mu_1 *_L \mu_2 = \mu_2 *_R \mu_1$. Επειδή εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με από αριστερά συνελήξεις μέτρων θα γράφουμε απλά $\mu_1 * \mu_2$.

Θα θεωρήσουμε ακόμα και το σύνολο όλων των κανονικών *Borel* μέτρων πιθανότητας πάνω στην ομάδα G, $\mathcal{P}(G)$. Επειδή η συνέληξη έχει την προσεταιριστική ιδιότητα η $(\mathcal{P}(G), *)$ είναι μια (γενικά μη μεταθετική) ημιομάδα. Κατά τα γνωστά μπορούμε να δώσουμε στο χώρο αυτό την ασθενή τοπολογία και όταν η G είναι συμπαγής από το θεώρημα *Banach – Alaoglu* η $\mathcal{P}(G)$ θα είναι επίσης συμπαγής. Ακόμα μπορούμε να ορίσουμε τους ακόλουθους σημαντικούς υπόχωρους:

$$\mathcal{P}_s(G) = \{\mu \in \mathcal{P}(G)/\mu(A) = \mu(A^{-1})\forall A \in \mathcal{B}(G)\}$$

$$\mathcal{P}_c(G) = \{\mu \in \mathcal{P}(G)/\mu(A) = \mu(gAg^{-1}), \forall g \in G \; \text{και} \; A \in \mathcal{B}(G)\}$$

Τα στοιχεία του $\mathcal{P}_s(G)$ λέγονται συμμετρικά μέτρα πιθανότητας και τα στοιχεία του $\mathcal{P}_c(G)$ λέγονται κεντρικά μέτρα πιθανότητας. Θα δούμε οτι οι ιδιότητες αυτές αντικατοπτρίζονται στον μετασχηματισμό *Fourier* αυτών των μέτρων.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να μιλήσουμε για το μετασχηματισμό *Fourier* μέτρων πιθανότητας ή για να χρησιμοποιήσουμε και την γλώσσα της θεωρίας των πιθανοτήτων για την χαρακτηριστική συνάρτηση ένος μέτρου πιθανότητας:

Ορισμός. *Αν G είναι μια ομάδα Lie και $\mu \in \mathcal{P}(G)$ τότε ορίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της μ να είναι η $\hat{\mu} : \hat{G} \to \mathcal{M}(\hat{G})$ ως:*

$$\hat{\mu}(\pi) = \int_G \pi(g^{-1}) d\mu(g)$$

Ο ορισμός που δίνουμε εδώ είναι λίγο διαφορετικός από αυτόν που χρησιμοποιείται στην θεωρία πιθανοτήτων αλλά είναι σε συμφωνία με αυτόν που είναι διαδεδομένος στην ανάλυση και είναι και μια "ακριβής" γενίκευση του μετασχηματισμού *Fourier* συναρτήσεων με την έννοια οτι αν το μέτρο μ έχει πυκνότητα ως προς ένα μέτρο *Haar* τότε θα έχουμε οτι $\hat{\mu}(\pi) = \hat{f}(\pi)$ όπου f είναι η πυκνότητα της μ.

Επειδή υποθέτουμε οτι η ομάδα είναι συμπαγής για κάθε $\pi \in \hat{G}$ η $\hat{\mu}(\pi)$ θα είναι κατά τα γνωστά ένας $dim(\pi) \times dim(\pi)$ πίνακας με στοιχεία:

$$\hat{\mu}(\pi)_{i,j} = \int_G \pi(g^{-1})_{i,j} d\mu(g)$$

όπου $\pi(-)_{i,j}$ τα *matrix coefficients* της π.

Ο μετασχηματισμός *Fourier* ενός μέτρου πιθανότητας έχει σχεδόν τις ίδιες ιδιότητες με τον "κανονικό" μετασχηματισμό *Fourier*:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα Lie και $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(G)$ τότε θα έχουμε:*

1. *Αν π_0 είναι η τετριμμένη αναπαράσταση τότε $\hat{\mu}_1(\pi_0) = 1$.*
2. *Για κάθε $\pi \in \hat{G}$ θα έχουμε $\widehat{\mu_1 * \mu_2}(\pi) = \hat{\mu}_2(\pi)\hat{\mu}_1(\pi)$.*
3. *Αν $\|-\|$ δηλώνει την νόρμα τελεστή που επάγεται από τον χώρο στον οποίο δρά η $\pi \in \hat{G}$ τότε $\|\mu_1(\pi)\| \leq 1$.*

4. *Αν μ^* είναι το μέτρο που ορίζεται από την ισότητα $\mu^*(A) = \mu(A^{-1})$ τότε θα έχουμε οτι $\widehat{\mu_1^*}(\pi) = \hat{\mu}_1(\pi)^*$.*

Απόδειξη. Το 1) είναι προφανές. Για το 2) θα έχουμε:

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2}(\pi)_{i,j} = \int_G \int_G \pi(g)_{i,j}(h^{-1}g^{-1})d\mu_1(g)d\mu_2(h) \Rightarrow$$

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2}(\pi)_{i,j} = \sum_{k=1}^{\dim(\pi)} \int_G \pi(h^{-1})_{i,k}d\mu_2(h) \int_G \pi(g^{-1})_{k,j}d\mu_1(g) \Rightarrow$$

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2}(\pi)_{i,j} = (\hat{\mu}_2(\pi)\hat{\mu}_1(\pi))_{i,j}$$

που φυσικά σημαίνει οτι $\widehat{\mu_1 * \mu_2}(\pi) = \hat{\mu}_2(\pi)\hat{\mu}_1(\pi)$.

Το 3) είναι μια απλή εφαρμογή της ανισότητας $\| \int_G A(x)fd\mu(x)\| \leq \int_G \|A(x)f\|d\mu(x)$ όπου $x \mapsto A(x)$ είναι μια μετρήσιμη απεικονιση σε ένα χώρο τελεστών που δρούν πάνω σε ένα χώρο *Banach* και f είναι ένα στοιχείο του χώρου αυτού.

Για το 4) θα έχουμε:

$$\widehat{\mu_1^*}(\pi) = \int_G \pi(g^{-1})d\widehat{\mu_1}(g) = \int_G \pi(g)d\mu_1(g) \Rightarrow$$

$$\widehat{\mu_1^*}(\pi) = \int_G \pi(g^{-1})^*d\mu_1(g) = (\int_G \pi(g^{-1})d\mu_1(g))^* \Rightarrow$$

$$\widehat{\mu_1^*}(\pi) = \hat{\mu}_1(\pi)^*$$

□

Από αυτό το θεώρημα και από το λήμμα του *Schur* μπορούμε να δούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα. *Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο G τότε είναι συμμετρικό αν και μόνο αν η $\hat{\mu}(\pi)$ είναι αυτοσυζυγής για κάθε $\pi \in \hat{G}$. Ακόμα η μ είναι κεντρικό αν και μόνο αν $\hat{\mu}(\pi) = c_\pi id_{V_\pi}$ για κάθε $\pi \in \hat{G}$, όπου V_π είναι ο χώρος στον οποίο δρα η π και $c_{pi} \in \mathbb{C}$.*

Από το αποτέλεσμα αυτό βλέπουμε οτι ένα μέτρο πιθανότητας είναι συμμετρικό και κεντρικό αν τα c_π είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τώρα θα δείξουμε οτι ο μετασχηματισμός *Fourier* στα μέτρα πιθανότητας είναι 1-1:

Θεώρημα. *Αν $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(G)$ με $\hat{\mu}_1(\pi) = \hat{\mu}_2(\pi)$ για κάθε $\pi \in \hat{G}$ τότε $\mu_1 = \mu_2$.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα *Peter-Weyl* ξέρουμε οτι τα *matrix-coefficients* όλων των των ανάγωγων αναπαραστάσεων της G είναι ένας πυκνός υπόχωρος του $C(G)$ με την *sup* νόρμα. Άρα για $f \in C(G)$ και για $\epsilon > 0$ θα έχουμε οτι:

$$sup_{g\in G}|f(g) - \sum_{\pi\in\hat{G}_0} \sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} a_{i,j}^{(\pi)}\pi(g)_{i,j}| < \epsilon$$

για κάποια $a_{i,j}^{(\pi)} \in \mathbb{C}$ και για κάποιο $\hat{G}_0 \subset \hat{G}$, πεπερασμένο. Από αυτή την ανισότητα θα έχουμε:

$$|\int_G f(g)d\mu_1(g) - \sum_{\pi\in\hat{G}_0}\sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} a_{i,j}^{(\pi)}\hat{\mu}(\pi)_{i,j}| < \epsilon$$

Θα έχουμε μια ίδια ανισότητα και για το μ_2. Όμως επειδή $\hat{\mu_1} = \hat{\mu_2}$ θα έχουμε οτι:

$$|\int_G f(g)d\mu_1(g) - \int_G f(g)d\mu_2(g)| < 2\epsilon, \forall\epsilon > 0$$

και άρα $\int_G f(g)d\mu_1(g) = \int_G f(g)d\mu_2(g)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $f \in C(G)$ από το θεώρημα αναπαράστασης του *Riesz* έχουμε οτι $\mu_1 = \mu_2$.

□

Μια άμεση συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι οτι $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ αν και μόνο αν $\hat{\mu_1}(\pi)\hat{\mu_2}(\pi) = \hat{\mu_2}(\pi)\hat{\mu_1}(\pi)$ για κάθε $\pi \in \hat{G}$.

Τώρα θα δείξουμε το λεγόμενο θεώρημα σύγκλισης του *Levy* για μέτρα πιθανότητας σε μια ομάδα *Lie*. Ξεκινάμε με μια απλή εκδοχή του:

Θεώρημα. *Αν $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathcal{P}(G)$ τότε τα μ_n συγκλίνουν ασθενώς σε ένα μέτρο πιθνότητας μ αν και μόνο αν $\hat{\mu_n}(\pi)_{i,j} \to \hat{\mu}(\pi)_{i,j}$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε $\pi \in \hat{G}$ και $1 \le i,j \le dim(\pi)$.*

Απόδειξη. Είναι αρκετά εύκολο να δούμε οτι αν $\mu_n \to_w \mu$ τότε $\hat{\mu_n}(\pi)_{i,j} \to \hat{\mu}(\pi)_{i,j}$, μιας και οι $\pi(g)_{i,j}$ είναι συνεχής συναρτήσεις και η G συμπαγής.

Αντιστρόφως τώρα ας υποθέσουμε οτι $\hat{\mu_n}(\pi)_{i,j} \to \hat{\mu}(\pi)_{i,j}$. Τότε όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος θα έχουμε:

$$|\int_G f(g)d\mu_n(g) - \sum_{\pi\in\hat{G}_0}\sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} a_{i,j}^{(\pi)}\hat{\mu_n}(\pi)_{i,j}| < \epsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ακόμα:

$$|\int_G f(g)d\mu(g) - \sum_{\pi\in\hat{G}_0}\sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} a_{i,j}^{(\pi)}\hat{\mu}(\pi)_{i,j}| < \epsilon$$

Αν θέσουμε τώρα $C = \sum_{\pi\in\hat{G}_0}\sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} |a_{i,j}^{(\pi)}|$ τότε θα υπάρχει ένα N_0 έτσι ώστε να έχουμε:

$$|\hat{\mu_n}(\pi) - \hat{\mu}(\pi)| < \frac{\epsilon}{C}, \forall n \ge N_0$$

Συνδυάζοντας αυτές τις εκτιμήσεις θα έχουμε:

$$|\int_G f(g)d\mu_n(g) - \int_G f(g)d\mu(g)| < 3\epsilon$$

για κάθε $n \ge N_0$. Άρα τα μ_n συγκλίνουν ασθενώς στο μ.

□

Ουσιαστικά αυτό το θεώρημα στην γλώσσα της θεωρίας πιθανοτήτων μας λέει οτι αν θέλουμε να δείξουμε οτι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n με τιμές στην G τείνει κατά κατανομή σε στην X τότε αρκεί να δείξουμε οτι οι "χαρακτηριστικές" συναρτήσεις των X_n τείνουν στην χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

Υπάρχει και μια πιο ισχυρή εκδοχή αυτού του θεωρήματος η οποία κατα μια έννοια είναι και πιο κατσκευαστική:

Θεώρημα. *Αν μ_n είναι μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathcal{P}(G)$ και $Y : \hat{G} \to \mathcal{M}(\hat{G})$ είναι μια συμβιβαστή απεικόνιση τέτοια ώστε $\hat{\mu}_n(\pi) \to Y(\pi)$ καθώς $n \to \infty$ και για κάθε $\pi \in \hat{G}$ τότε θα υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mu \in \mathcal{P}(G)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mu}(\pi) = Y(\pi)$ και $\mu_n \to_w \mu$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι σχεδόν ίδια με την προηγούμενη μόνο που πρέπει να κάνουμε μερικές αλλαγές. Με τον συμβολισμό λοιπόν της προηγούμενης απόδειξης θα έχουμε μια ανισότητα της μορφής:

$$sup_{g\in G}|f(g) - \sum_{\pi\in\hat{G}_0}\sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} a_{i,j}^{(\pi,m)}(f)\pi(g)_{i,j}| < \frac{1}{2^m}$$

Αν και δεν το έχουμε γράψει και το $\hat{G}_0$ εξαρτάται από το $m \in \mathbb{N}$. Κατά τα γνωστά θα έχουμε οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$|\int_G f(g)d\mu_n(g) - \sum_{\pi\in\hat{G}_0}\sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} a_{i,j}^{(\pi,m)}(f)\hat{\mu}_n(\pi)_{i,j}| < \frac{1}{2^m}$$

Για κάθε $\epsilon > 0$ και για αρκετά μεγάλο n είναι εύκολο να δούμε οτι για κάθε m:

$$|\int_G f(g)d\mu_n(g) - \sum_{\pi\in\hat{G}_0}\sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} a_{i,j}^{(\pi,m)}(f)Y(\pi)_{i,j}| < \frac{1}{2^m} + \epsilon$$

Αυτή η ανισότητα μας δείχνει οτι η ακολουθία $\Gamma_m(f) = \sum_{\pi\in\hat{G}_0}\sum_{i,j=1}^{dim(\pi)} a_{i,j}^{(\pi,m)}(f)Y(\pi)_{i,j}$ είναι *Cauchy* και άρα συγκλίνει σε ένα μιγαδικό αριθμό $\Gamma(f)$. Πάλι από την παραπάνω ανισότητα βλέπουμε οτι:

$$\Gamma(f) = \lim_{n\to\infty}\int_G f(g)d\mu_n(g)$$

Αυτή η ισότητα δείχνει οτι η απεικόνιση $f \mapsto \Gamma(f)$ είναι γραμμική, θετική[3] και $\Gamma(1) = 1$. Άρα απο το θεώρημα αναπαράστασης του *Riesz* θα υπάρχει ένα $\mu \in \mathcal{P}(G)$ τέτοιο ώστε:

$$\Gamma(f) = \int_G f(g)d\mu(g)$$

για κάθε $f \in C(G)$. Αυτό δείχνει οτι τα μ_n συγκλίνουν ασθενώς στο μ. Ακόμα επειδή $\hat{\mu}_n(\pi) \to Y(\pi)$ και επειδή ο μετασχηματισμός *Fourier* είναι 1-1 έχουμε $\hat{\mu}(\pi) = Y(\pi)$ για κάθε $\pi \in \hat{G}$.

□

[3]Δηλαδή $\Gamma(f) \geq 0$ όταν $f \geq 0$.

Πριν επιστρέψουμε στην μελέτη των μετασχηματισμών *Fourier* συναρτήσεων πάνω στην G θα δούμε μερικές πολύ βασικές ιδιότητες των τυχαίων περιπάτων πάνω σε συμπαγείς ομάδες *Lie*. Το αρχικό μας ζήτημα είναι πως ορίζουμε τους τυχαίους περιπάτους πάνω σε ομάδες *Lie*. Μπορούμε για αρχή να επιλέξουμε ένα $X_1 \in G$ που θα έχει μια κατανομή μ και το πρώτο μας βήμα πάνω στην G θα είναι $S_1 = X_2$. Μετά μπορούμε να επιλέξουμε ένα $X_2 \in G$ που ακολουθεί την κατανομή μ και να είναι ανεξάρτητο του X_1. Σαν δεύτερο βήμα θα έχουμε το $S_2 = X_1 X_2$. Γενικά συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο ορίζουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πάνω στο G η οποία είναι ο τυχαίος περίπατος που παράγεται από την αρχική κατανομή μ.

Το κεντρικό θέμα στην θεωρία των τυχαίων περιπάτων είναι η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της κατανομής της ακολουθίας S_n. Είναι εύκολο να δούμε οτι η κατανομή της S_n είναι η $\mu * \mu * \ldots * \mu$ (n φορές). Την κατανομή αυτή θα την συμβολίζουμε ως $\mu^{*(n)}$. Ο σκοπός λοιπον της θεωρίας είναι να κατανοηθεί το όριο (ως προς την ασθενή τοπολογία) $\lim_{n\to\infty} \mu^{*(n)}$. Αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με το $\mu_1 \in \mathcal{P}(G)$ τότε είναι εύκολο να δούμε οτι $\mu_1 * \mu_1 = \mu_1$. Μπορεί να δειχθεί οτι η ιδιότητα αυτή αναγκάζει το μ_1 να έχει μια ειδική μορφή, πιο συγκεκριμένα $\mu_1 = m_H$ όπου m_H είναι το μέτρο μιας κλειστής υποομάδας της G. Άρα πρέπει να δούμε πότε το όριο αυτό υπάρχει. Πριν δούμε δυο σχετικά θεωρήματα ας δούμε λίγη ορολογία:

Ορισμός. *Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}(G)$ λέγεται απεριοδικό αν και μόνο αν το supp(μ) δεν περιέχεται σε κανένα σύμπλοκο καμίας κλειστής, κανονικής υποομάδας της G.*

Ο λόγος που εισάγουμε αυτή την έννοια προέρχεται από το ακόλουθο θεώρημα που δεν το δείχνουμε εδώ αλλά μια απόδειξη υπάρχει στο []:

Θεώρημα. *Αν $\mu \in \mathcal{P}(G)$ τότε το $\lim_{n\to\infty} \mu^{*(n)}$ υπάρχει αν και μόνο αν το supp(μ) δεν περιέχεται σε κανένα σύμπλοκο καμίας γνήσιας κανονικής, κλεστής υποομάδας της K όπου K είναι η κλειστή ομάδα που παράγεται από το supp(μ).*

Το βασικό θεώρημα που θέλουμε να δείξουμε είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Αν $\mu \in \mathcal{P}(G)$ είναι απεριοδικό τότε η ακολουθία $\mu^{*(n)}$ συγκλίνει ασθενώς στο Haar μέτρο πιθανότητας.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι $lim_{n\to\infty}\hat{\mu}^n(\pi) = 0$ για κάθε μη τετριμμένη αναπαράσταση $\pi \in \hat{G}$. Αυτό ισοδυναμεί με το να δείξουμε οτι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\hat{\mu}(\pi)$ έχουν μέτρο αυστηρά μικρότερο από 1 για κάθα μητετριμμένο $\pi \in \hat{G}$. Ξέρουμε οτι όλες οι ιδιοτιμές του $\hat{\mu}(\pi)$ είναι ≤ 1. Τώρα έστω λ μια ιδιοτιμή της $\hat{\mu}(\pi)$. Τότε θα υπάρχει ένας μοναδιαίος πίνακας U_π πάνω στον χώρο V_π έτσι ώστε:

$$U_\pi\hat{\mu}(\pi)U_\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & D_\pi & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

όπου D_π είναι ένας $(dim(\pi) - 1) \times (dim(\pi) - 1)$ πίνακας. Ακόμα θα έχουμε:

$$\lambda = (U_\pi\hat{\mu}(\pi)U_\pi^{-1})_{1,1} = \int_G (U_\pi\pi(g^{-1})U_\pi^{-1})_{1,1}dg$$

και αν $|\lambda| = 1$ τότε $(U_\pi\pi(g^{-1})U_\pi^{-1})_{1,1} = \lambda$ για κάθε $g \in G$ τέτοιο ώστε $g^{-1} \in supp(\mu)$. Ας υποθέσουμε τώρα οτι $\lambda = 1$. Τότε το $supp(\mu)$ θα περιέχεται στο σύνολο:

$$H = \{g \in G|\ U_\pi\pi(g^{-1})U_\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & E_\pi(g) & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}\}$$

όπου $E_\pi(g)$ είναι ένας $(dim(\pi) - 1) \times (dim(\pi) - 1)$ πίνακας. Είναι εύκολο να δούμε οτι το H είναι μια κλειστή υποομάδα της G και $H \neq G$. Αφού το μ είναι απεριοδικό καταλήγουμε σε άτοπο.

Πιο γενικά ας υποθέσουμε οτι $\lambda = e^{i\vartheta}$ για κάποιο $\vartheta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Όπως και πριν θα έχουμε $e^{i\vartheta} = (U_\pi\hat{\mu}(\pi)U_\pi^{-1})_{1,1} = \int_G (U_\pi\pi(g^{-1})U_\pi^{-1})_{1,1}dg$ για κάποιο μοναδιαίο πίνακα U_π και ακόμα:

$$supp(\mu) \subseteq H_1 = \{g \in G|\ U_\pi\pi(g^{-1})U_\pi^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & F_\pi(g) & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}\}$$

Τώρα έστω ένα g_0 έτσι ώστε να έχουμε $(U'_\pi\pi(g_0^{-1})U'^{-1}_\pi)_{1,1} = e^{i\vartheta}$. Εύκολα μπορούμε να δούμε οτι $H_1 = g_0H$ και καταλήγουμε σε άτοπο μιας και το μ είναι απεριοδικό.

□

5.3 Σύγκλιση σειρών *Fourier* και ομαλότητα

Τώρα θα γυρίσουμε στην μελέτη των μετασχηματισμών *Fourier* συναρτήσεων πάνω σε μια ομάδα *Lie* και θα δούμε πως η αναλυτική δομή της ομάδας θα μας βοηθήσει στη μελέτη αυτού του αντικειμένου. Ο βασικός μας στόχος θα είναι να δούμε περιεκτικά πως η "ομαλότητα" της συνάρτησης αντανακλάται στον μετασχηματισμό *Fourier*. Ένα από τα αποτελέσματά αυτής της μορφής είναι το ακόλουθο:

Πρόταση. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα Lie και $f \in C(G)$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 3 ο τελεστής *Laplace – Beltrami* θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος εδώ. Το βασικό θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια είναι το εξής:

Θεώρημα. *Αν F είναι μια συνεχής συνάρτηση πάνω στο $\mathbb{R}$ και $f \in Dom(F(\Delta_L))$ τότε για κάθε $\pi \in \hat{G}$ θα έχουμε:*

$$(\widehat{F(\Delta_L)f})(\pi) = F(-k_\pi)\hat{f}(\pi)$$

Απόδειξη. Για κάθε $\pi \in \hat{G}$ θα έχουμε:

$$\widehat{F(\Delta_L)}f(\pi)_{i,j} = \int_G \sum_{\rho\in\hat{G}} F(-k_\rho)Pr_\rho f(g)\pi_{i,j}(g^{-1})dg$$

Από το θεώρημα του *Fubini* θα έχουμε οτι:

$$\widehat{F(\Delta_L)}f(\pi)_{i,j} = \sum_{\rho\in\hat{G}} F(-k_\rho) \int_G Pr_\rho f(g)\pi_{i,j}(g^{-1})dg \Rightarrow$$

$$\widehat{F(\Delta_L)}f(\pi)_{i,j} = \sum_{\rho\in\hat{G}} F(-k_\rho(Pr_\rho f|\pi_{j,i}) \Rightarrow$$

$$\widehat{F(\Delta_L)}f(\pi)_{i,j} = \sum_{\rho\in\hat{G}} F(-k_\rho(f|Pr_\rho \pi_{j,i}) \Rightarrow$$

$$\widehat{F(\Delta_L)}f(\pi)_{i,j} = F(-k_\pi)(f|\pi_{j,i}) = F(-k_\pi)\hat{f}(\pi)_{i,j}$$

□

Το σημαντικό αποτέλεσμα εδώ έρχεται όταν εφαρμόσουμε το θεώρημα αυτό στην περίπτωση $F(x) = x^p$ για κάποιο $p \in \mathbb{N}$. Σε αυτή τη περίπτωση είναι εύκολο να δούμε οτι $C^{2p}(G) \subseteq Dom(\Delta_L^p)$ και άρα το παραπάνω θεώρημα εφαρμόζεται στη περίπτωση μιας $f \in C^{2p}$ και θα έχουμε την ακόλουθη ισότητα:

$$\hat{f}(\pi) = (-1)^p k_\pi^{-p}\widehat{\Delta_L^p f}(\pi)$$

όπου η π είναι μη τετριμμένη (που συνεπάγεται οτι $k_\pi \neq 0$).

Τώρα στην περίπτωση μιας συμπαγούς ομάδας *Lie* μπορούμε να παραμετρικοποιήσουμε το $\hat{G}$ με τα κυρίαρχα βάρη της G. Έστω D αυτό το σύνολο (όλων των κυρίαρχων βαρών). Τότε μπορούμε να γράψουμε τον μετασχηματισμό *Fourier* μιας συνάρτησης ως μια συνάρτηση πάνω στο D. Τότε θα έχουμε την ταυτότητα:

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} dim(\pi)tr(\hat{f}(\pi)\pi) = \sum_{\lambda\in D} d_\lambda tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda)$$

Ακόμα από την εκτίμηση που πήραμε για το φάσμα *Casimir* στο προηγούμενο κεφάλαιο θα έχουμε και την ακόλουθη σημαντική ανισότητα:

$$\|\hat{f}(\lambda)\|_{HS} \leq |\lambda|^{-2p}\|\widehat{\Delta_L^p f}(\lambda)\|_{HS}$$

Το βασικό θεώρημα που θέλουμε να δείξουμε είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Έστω $f \in C(G)$, r ο βαθμός της G και $m = |\Delta_+|$ όπου Δ είναι ένα συστημα ριζών της G. Τότε η αντίστοιχη σειρά Fourier $\sum_{\lambda \in D} d_\lambda |\lambda|^a tr(M(\lambda)\pi_\lambda)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα αν μια από τις ακόλουθες συνθήκες ισχύουν:*

- $\|\hat{f}(\lambda)\|_{HS} = O(|\lambda|^{-s})$ *καθώς* $|\lambda| \to \infty$ *όπου* $s > r + \frac{3m}{2}$.
- $f \in C^{2p}(G, \mathbb{C})$ *όπου* $p \in \mathbb{N}$ *με* $4p > d$.

Το πρώτο σκέλος αυτού του θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση. *Αν $(M(\lambda), \lambda \in D)$ είναι μια οικογένεια συμβατών πινάκων τέτοια ώστε $\|M(\lambda)\|_{HS} = O(|\lambda|^{-s})$ καθώς $|\lambda| \to \infty$ όπου $s > 0$. Αν τώρα $s > a + r + \frac{3m}{2}$ για $a > 0$ τότε οι σειρά $\sum_{\lambda \in D} d_\lambda |\lambda|^a tr(M(\lambda)\pi_\lambda)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα.*

Για να δείξουμε αυτή την πρόταση καθώς και το παραπάνω θεώρημα θα πρέπει να μελετήσουμε ένα άλλο αντικείμενο το οποίο μιμείται την κλασσική συνάρτηση ζήτα από την θεωρία αριθμών. Πρώτα λίγα προκαταρτικά αποτελέσματα:

Πρόταση. *Έστω η σειρά Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ με $s \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{N}$. Αν $\sum_{k \leq n} a_k = O(n^a)$ με $a > 0$ τότε η $D(s)$ συγκλίνει απόλυτα για $Re(s) > a$.*

Ακόμα έχουμε το ακόλουθο "πολυδιάστατο" αποτέλεσμα σχετικά:

Πρόταση. *Η σειρά $\sum_{n \in \mathbb{N}^r - \{0\}} \frac{1}{(n_1^2 + \ldots + n_r^2)^s}$ συγκλίνει απόλυτα για $Re(s) > \frac{r}{2}$.*

Τώρα θα ορίσουμε την λεγόμενη συνάρτηση ζήτα *Sugiura*. Αυτή όπως είπαμε εμπνέεται από την συνάρτηση ζήτα. Για την ακρίβεια είναι ακριβώς η ίδια συνάρτηση μόνο που αντί να αθροίζουμε πάνω από το $\mathbb{N}$ αθροίζουμε πάνω από όλα τα μη μηδενικά κυρίαρχα βάρη μιας συμπαγούς ομάδας *Lie*:

$$\zeta_G(s) = \sum_{\lambda \in D_0} \frac{1}{|\lambda|^{2s}}$$

όπου $s \in \mathbb{C}$ και D_0 είναι το σύνολο όλων των μη μηδενικών κυρίαρχων βαρών της G. Από τις παραπάνω προτάσεις το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι άμεσο:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα Lie και r είναι ο βαθμός της τότε η αντίστοιχη συνάρτηση ζήτα Sugiura συγκλίνει απόλυτα για $Re(s) > \frac{r}{2}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε οτι αρκεί να δείξουμε οτι η σειρά $\sum_{\lambda \in \mathbb{I}_0^*} |\lambda|^{-2s}$ συγκλίνει για $Re(s) > \frac{r}{2}$ όπου $\mathbb{I}^*$ είναι το δίκτυο των βαρών της G και $\mathbb{I}_0^* = \mathbb{I}^* - \{0\}$. Έστω λοιπόν $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ μια "βάση" του $\mathbb{I}^*$. Όπως έχουμε πει αυτό σημαίνει οτι τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathfrak{h}^*$ και οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{I}^*$ θα έχουμε οτι $\lambda = \sum_{j=1}^{r} n_i \lambda_i$ όπου $n_i \in \mathbb{Z}$. Τότε με αυτή τη βάση μπορούμε να ορίσουμ ένα νέο εσωτερικό γινόμενο ως:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{r} x_i y_i$$

όπου x_i, y_i είναι οι συντεταγμένες των x, y ως προς την βάση $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$. Αυτό το εσωτερικό γινόμενο θα ορίζει μια νέα νόρμα πάνω στο $\mathfrak{h}^*$ η οποία θα είναι αναγκαστικά ισοδύναμη με την αρχική $Ad-$αναλλοίωτη νόρμα. Τότε θα υπάρχουν σταθερές c, C έτσι ώστε να έχουμε:

$$c\sum_{i=1}^{r} n_i^2 \leq |\lambda|^2 \leq C\sum_{i=1}^{r} n_i^2$$

όπου $\lambda \in \mathbb{I}_0^*$. Αυτό σημαίνει οτι:

$$C\sum_{N\in\mathbb{Z}^r-\{0\}} \frac{1}{(n_1^2+...+n_r^2)^s} \leq \sum_{\lambda\in\mathbb{I}_0^*} |\lambda|^{-2s} \leq c\sum_{N\in\mathbb{Z}^r-\{0\}} \frac{1}{(n_1^2+...+n_r^2)^s}$$

Συνεπώς η σειρά $\sum_{\lambda\in\mathbb{I}_0^*}|\lambda|^{-2s}$ θα συγκλίνει για $Re(s) > \frac{r}{2}$.

□

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση. Παρατηρούμε πρώτα οτι αν U είναι μια μοναδιαία αναπαράσταση και X είναι ένας $n \times n$ πίνακας τότε θα έχουμε την ανισότητα:

$$|tr(UX)| < \sqrt{n}||X||_{HS}$$

Τώρα αν έχουμε την "σειρά *Fourier* " $\sum_{\lambda\in D} d_\lambda|\lambda|^a|tr(M(\lambda)\pi_\lambda(g)|$ τότε με αυτή την εκτιμήση και από την εκτίμηση που πήραμε στο κεφάλαιο 4 για την $d_{\lambda|}$ θα έχουμε την παρακάτω ανισότητα:

$$\sum_{\lambda\in D} d_\lambda|\lambda|^a|tr(M(\lambda)\pi_\lambda(g)| \leq C^{\frac{3}{2}}\sum_{\lambda\in D}|\lambda|^{a+\frac{3m}{2}}||M(\lambda)||_{HS}$$

Επειδή τώρα έχουμε $||M(\lambda)||_{HS} = O(|\lambda|^{-s})$ όταν $|\lambda| \to \infty$ θα έχουμε:

$$\sum_{\lambda\in D} d_\lambda|\lambda|^a|tr(M(\lambda)\pi_\lambda(g)| \leq K\sum_{|\lambda|>|\lambda_0|}|\lambda|^{a-s+\frac{3m}{2}}$$

όπου $m = |\Delta_+|$. Τώρα επειδή $s > a + \frac{3m}{2} + r$ από την παραπάνω πρόταση η σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει και άρα η σειρά *Fourier* συγκλίνει απόλυτα.

Τώρα η πρόταση μας δίνει αυτόματα το αποτέλεσμα οτι η σειρά *Fourier* μιας συνάρτησης $f \in C(G)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα αν αντίστοιχοι "συντελεστές" *Fourier* της f πέφτουν ως $O(|\lambda|^{-s})$ (με άλλα λόγια $||\hat{f}(\lambda)||_{HS} = O(|\lambda|^{-s})$) με $s > r + \frac{3m}{2}$.

Τώρα σχετικά με το δεύτερο σκέλος της πρότασης θα έχουμε:

$$\sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda|tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(g))| \leq \sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda^{\frac{3}{2}}||\hat{f}(\lambda)||_{HS} \Rightarrow$$

$$\sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda|tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(g))| \leq \sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda^{\frac{3}{2}}|\lambda|^{-2p}||\widehat{\Delta_L f}(\lambda)||_{HS}$$

Από την ανισότητα *Cauchy – Schwarz* θα έχουμε οτι:

$$\sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda|tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(g))| \leq (\sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda^2|\lambda|^{-4p})^{\frac{1}{2}}(\sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda||\widehat{\Delta_L f}(\lambda)||_{HS}^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda|tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(g))| \leq (\sum_{\lambda\in D_0} d_\lambda^2|\lambda|^{-4p})^{\frac{1}{2}}||\Delta_L^p f||_{L^2}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι την εκτίμηση για την διάσταση μιας ανάγωγης αναπαράστασης θα έχουμε οτι το άθροισμα στο δεξί μέλος της παραπάνω ανίσωσης φράσεται από το:

$$M \sum_{\lambda \in D_0} |\lambda|^{2m-4p}$$

όπου όπως και πρίν $m = |\Delta_+|$ και Μ είναι μια θετική σταθερά. Όμως για $4p > 2m + r$ η σειρά αυτή συγκλίνει και το ίδιο θα ισχεύει και για την σειρά $\sum_{\lambda \in D_0} d_\lambda |tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(g))|$. Άρα η σειρά *Fourier* μιας συνάρτησης $f \in C^{2p}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα ως προς το g. Σαν συνέπεια έχουμε οτι μια σειρά *Fourier* μιας ομαλής συνάρτησης συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι ένα φανερό ανάλογο του αποτελέσματος για σειρές *Fourier* περιοδικών συναρτήσεων. Γενικότερα όπως ξέρουμε υπάρχει μια άμεσση σχέση ανάμεσα στην ομαλότητα μιας περιοδικής συνάρτησης και στην ασυμπτωτική συμπεριφορά των συντελεστών *Fourier*. Αυτό το αποτέλεσμα θέλουμε τώρα να γενικεύσουμε στην περίπτωση των σειρών *Fourier* συναρτήσεων πάνω σε μια συμπαγή ομάδα *Lie*. Πρώτα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα Lie, Δ_0 το σύνολο των μη μηδενικών μεγιστικών βαρών της G και π_λ μια μοναδιαία ανάγωγη αναπαράσταση της G με μεγιστικό βάρος $\lambda \in \Delta_0$ τότε θα έχουμε για κάθε $X \in \mathfrak{g}$:*

$$||d\pi_\lambda(X)||_{HS}^2 \leq C|\lambda|^{|\Delta_+|+2}||X||^2$$

Απόδειξη. Αν έχουμε ένα μεγιστικό τόρο T της G με αντίστοιχη άλγεβρα *Lie* $\mathfrak{h}$. Αν $X \in \mathfrak{g}$ τότε υπάρχει $Y \in \mathfrak{h}$ και $g \in G$ τέτοια ώστε $gexp(X)g^{-1} = exp(Y)$. Αυτό συνεπάγεται οτι $Ad(g)X = Y$ και επειδή έχουμε επιλέξει ένα Ad-αναλλοιωτο εσωτερτικό γινόμενο στη $\mathfrak{g}$ βλέπουμε οτι $||Y|| = ||X||$. Ακόμα μπορούμε να δούμε οτι $||d\pi_\lambda(X)||_{HS} = ||d\pi_\lambda(Y)||_{HS}$ για κάθε $\lambda \in D$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την ανισότητα μόνο για $X \in \mathfrak{h}$.

Αν λοιπόν $\{\lambda_1, ..., \lambda_{dim(\pi_\lambda)}\}$ είναι τα βάρη της π τότε θα έχουμε οτι $\max_{1 \leq i \leq dim(\pi)} |\lambda_i| = |\lambda|$. Από το γεγονός οτι τα $\sqrt{-1}\lambda_i(X)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $d\pi_\lambda(X)$ θα έχουμε οτι:

$$||d\pi_\lambda(X)||_{HS}^2 = \sum_{i=1}^{dim(\pi_\lambda)} \lambda_i^2(X) \leq \sum_{i=1}^{dim(\pi_\lambda)} |\lambda_i|^2||X||^2 \leq dim(\pi_\lambda)|\lambda|^2|||X||^2$$

Η ανισότητα που θέλουμε βγαίνει από την εκτίμηση $dim(\pi_\lambda) = O(|\lambda|^{|\Delta_+|})$ που δείξαμε στο κεφάλαιο 4.

□

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε την βασική πρόταση που θέλουμε:

Θεώρημα. *Αν $f \in C(G)$ τότε η f είναι ομαλή συνάρτηση αν και μόνο αν $||\hat{f}(\lambda)||_{HS} = o(|\lambda|^{-p})$ για κάθε $p \in \mathbb{N}$.*

Με άλλα λόγια η συνάρτηση f είναι ομαλή αν οι συντελεστές *Fourier* φθίνουν γρήγορα προς το 0 για $\lambda \to \infty$.

Απόδειξη. Αν $f \in C(G)$ και $X \in \mathfrak{g}$. Θα δείξουμε οτι αν $||\hat{f}(\lambda)||_{HS} = o(|\lambda|^{-p})$ τότε το Xf υπάρχει και είναι συνεσής συνάρτηση. Επειδή η f είναι συνεχής η σειρά *Fourier* συγκλίνει κατά σημείο απόλυτα και ισούται με την f. Άρα θα έχουμε:

$$f(gexp(tX)) = \sum_{\lambda \in D} d_\lambda tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(gexp(tX)))$$

Τώρα αν πάρουμε την παράγωγο στο δεξί μέλος αυτής της εξίσωσης θα καταλήξουμε στη σειρά $\sum_{\lambda \in D} d_\lambda tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(gexp(t_0X))d\pi_\lambda(X))$. Από τις εκτιμήσεις που έχουμε δείξει μέχρι τώρα βλέπουμε οτι η απόλυτη τιμή αυτής της σειράς φράσεται από την ποσότητα:

$$M||X|| \sum_{\lambda \in D} d_\lambda |\lambda|^{\frac{m+2}{2}} ||\hat{f}(\lambda)||_{HS}$$

όπου $m = |\Delta_+|$ για κάποια σταθερά M. Αφού τώρα $||\hat{f}(\lambda)||_{HS} = o(|\lambda|^{-p})$ για κάθε $p \in \mathbb{N}$ όταν πάρουμε το p αρκετά μεγάλο θα δούμε οτι αυτό το άνω φράγμα συγλίνει και άρα η αρχική σειρά $\sum_{\lambda \in D} d_\lambda tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(gexp(t_0X))d\pi_\lambda(X))$ θα συκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα ως πρός τις μεταβλητές g και t_0. Τώρα από το θεώρημα μέσης τιμής μπορούμε να βρούμε ένα $\vartheta \in (0, t)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(gexp(tX)) - f(g)}{t} = \sum_{\lambda \in D} d_\lambda tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(gexp(\vartheta X))d\pi_\lambda(X))$$

Τώρα για $t \to 0$ θα έχουμε $\vartheta \to 0$ και από το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης θα έχουμε το οτι η Xf υπάρχει και είναι μια συνεχής συνάρτηση και πιο συγκεκριμένα:

$$Xf(g) = \sum_{\lambda \in D} d_\lambda tr(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(X)d\pi_\lambda(X))$$

Επαγωγικά τώρα μπορούμε να δείξουμε οτι αν $||\hat{f}(\lambda)||_{HS} = o(|\lambda|^{-p})$ για κάθε $p \in \mathbb{N}$ τότε για κάθε $X_1, \ldots X_n \in \mathfrak{g}$ η συνάρτηση $X_1X_2 \ldots X_nf$ είναι συνεχής πάνω στην G. Αυτό δείχνει οτι η f είναι ομαλή.

Αντιστρόφως τώρα αν έχουμε $f \in C^{2p}(G)$ τότε επειδή όπως έχουμε δείξει $C^{2p}(G) \subset Dom(\Delta_L^p)$ θα έχουμε:

$$||\Delta_L^p f||^2 = \sum_{\lambda \in D} d_\lambda ||\widehat{\Delta_L^p f}(\lambda)||_{HS}^2$$

Όμως επειδή $d_\lambda \to \infty$ καθώς $|\lambda| \to \infty$ θα πρέπει να έχουμε οτι $||\widehat{\Delta_L^p f}(\lambda)||_{HS} \to 0$ για $|\lambda| \to \infty$. Επειδή όμως: $||\hat{f}(\lambda)||_{HS} \leq |\lambda|^{-2p} ||\widehat{\Delta_L^p f}(\lambda)||_{HS}$ θα έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε.

□

Τώρα ακριβώς όπως και στην περίπτωση του κλασσικού μετασχηματισμού *Fourier* μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο των συμβατών συναρτήσεων πάνω στο D οι οποίες φθίνουν γρήγορα στο 0 ως το σύνολο όλων των συμβατών συναρτήσεων $F : D \to \mathcal{M}(\hat{G})$ έτσι ώστε για κάθε $p \in \mathbb{N}$:

$$lim_{|\lambda| \to \infty} |\lambda|^p ||F(\lambda)||_{HS} = 0$$

Συμβολίζουμε τον χώρο αυτό ως $\mathcal{S}(G)$. Με αυτά που έχουμε δείξει είναι σχετικά εύκολο να δούμε οτι ο μετασχηματισμός *Fourier* $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός από τον $C^\infty(G)$ στον $\mathcal{S}(G)$. Εδώ βλέπουμε τους χώρους απλά σαςν αλγεβρικά αντικείμενα χωρίς καμία τοπολογία. Παρόλα αυτά υπάρχει και ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα. Μπορούμε να εφοδιάσουμε τον χώρο $C^\infty(G)$ με την τοπολογία που επάγεται από τις ημι-νόρμες $\|f\|_U = sup_{g\in G}|Uf(g)|$ όπου $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ και τον χώρο $\mathcal{S}(G)$ με την τοπολογία που επάγεται από τις ημι-νόρμες $sup_{\hbar\in D}|\hbar|^s\|F(\hbar)\|_{HS}$ για $s \geq 0$. Με αύτες τις τοπολογίες οι χώροι $C^\infty(G)$ και $\mathcal{S}(G)$ γίνονται τοπικά κυρτοί τοπολογικοί χώροι και μπορεί να δειχθεί οτι ο μετασχηματισμός *Fourier* $\mathcal{F}$ είναι ένας ισομορφισμός τοπολογικών χώρων.

Βιβλιογραφία

1. *Elements of the Theory of Representations*, *A.A.Krillov*
2. *Fourier Analysis on Number Fields*, *Dinakar Ramakrishnan*, *Robert J.Valenza*
3. *Representation Theory of Semisimple Lie Groups* : *An overview based on examples*, *A.Knapp*
4. $SL_2(\mathbb{R})$, *S.Lang*
5. *Representation theory*, *E.Kowalski*
6. *Real Analysis*: *Modern Techniques and their applications*, *G.B.Folland*
7. *Principles of advanced Mathematical Physics*: *Volume* 2, *Robert D.Richtmyer*
8. *Lectures on Lie groups and Representations of locally compact groups*, *F.Bruhat*
9. *Probability on Compact Lie Groups*, *David Applebaum*
10. *Lie Groups*, *Daniel Bump*