ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Η έννοια του εξωτερικού γινομένου: Μία έρευνα για την αντίληψη και την κατανόησή του από τους πρωτοετείς φοιτητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Διπλωματική εργασία

Επιμέλεια: **Ουρανία Κουτσούκου-Πρελορέντζου**
Αριθμός Μητρώου: **0912062**
Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: **Καλλιόπη Παυλοπούλου**

Εξεταστικη Επιτροπη:

Καλλιόπη Παυλοπούλου (Ε.ΔΙ.Π, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.)
Ανάργυρος Φελλούρης (Ομότιμος Καθηγητής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.)
Παναγιώτης Ψαρράκος (Καθηγητής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.)

Περίληψη

Το εξωτερικό γινόμενο ως έννοια αποτελεί ένα μαθηματικό εργαλείο που έχει εφαρμογή τόσο στα Μαθηματικά όσο και στις επιστήμες της Μηχανικής και της Φυσικής. Η κατανόησή του, από τους πρωτοετείς φοιτητές των σχολών θετικών επιστημών, χαρακτηρίζει την εισαγωγή τους στον τρισδιάστατο χώρο. Η παρούσα έρευνα ξεκινάει με την ιστορική αναδρομή του διανυσματικού λογισμού, από τον Αριστοτέλη και τον κανόνα του παραλληλογράμμου μέχρι τη μορφή που έχει σήμερα. Το ερευνητικό κομμάτι της διπλωματικής αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος της, πραγματοποιήθηκε μέσω συνεντεύξεων σε ορισμένους καθηγητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Σκοπός των συνεντεύξεων ήταν να προσδιοριστεί ο τρόπος διδασκαλίας του εξωτερικού γινομένου καθώς επίσης και πως θεωρούν ότι αντιλαμβάνονται οι φοιτητές την έννοια αυτή. Στο δεύτερο μέρος έγινε έρευνα μέσω ερωτηματολογίου στους πρωτοετείς φοιτητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Η έρευνα αυτή έχει ως στόχο να εξετάσει την αντίληψη των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο και το πως αυτή επηρεάζεται ανάλογα με το σύστημα αναπαράστασης το οποίο τους δίνεται. Επίσης εξετάζει πως οι φοιτητές εφαρμόζουν το εξωτερικό γινόμενο σε ασκήσεις διαφόρων επιστημονικών πεδίων. Η διαδικασία ερμηνείας των αποτελεσμάτων στηρίχτηκε στη θεωρία των τριών κόσμων του $D. Tall$, καθώς και στη θεωρία της έννοιας ως ορισμός και της έννοιας ως εικόνας των $D. Tall$ και $Sh. Vinner$. Τελικά, από την ολοκλήρωση της έρευνας προέκυψαν τέσσερα επίπεδα κατανόησης της έννοιας του εξωτερικού γινομένου καθώς και προτάσεις για μελλοντική επέκταση του ερευνητικού μέρους.

Λέξεις κλειδιά:

Εξωτερικό γινόμενο, Διανυσματικός λογισμός, Κατανόηση και αντίληψη φοιτητών, Κανόνας του δεξιού χεριού, Νόμος ημιτόνων, Ροπή

Thesis title

The concept of the cross product: an investigation about its conception and understanding by first year students of the School of Applied Mathematical akd Physical Sciences at the National Technical University of Athens

Abstract

The cross product as a concept is a mathematical tool, that can be applied not only in Mathematics, but also in the field of Engineering and Physics. Its understanding by the first-year students of faculties related to sciences, is crucial for their introduction in the three-dimensional world. This thesis begins with the history of vector analysis, which starts from Aristotle and the parallelogram law and results in the meaning it has nowadays. The main part of the research is composed of two sections. Firstly, several professors of the School of Applied Mathematical and Physical Sciences were interviewed. In this way, we gained insight about the process they follow while teaching the cross product and also we got their feedback about the depth of understanding of this concept by the students. Secondly, a well-aimed questionnaire was given to a sufficient number of first-year students of the School of Applied Mathematical and Physical Sciences. The purpose of the questionaire was to investigate students' perception about the cross product and how it is affected by the graphical representation that is given to them. Furthermore, we observed their ability to use the cross product in different scientific fields and applications. During the process of explaining the results of the research, the theory of the three worlds by D. Tall and the theory of concept image and concept definition by D. Tall and Sh. Vinner played a significant role. Finally, the outcome of the research, combined with the theoretical framework, brought out four levels of understanding concerning the concept of the cross product. Last but not least, proposals were made so as to extend further the research part of this thesis.

Keywords:

Cross Product, Vector Analysis, Students' understanding, Right hand rule, Torque

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Η ολοκλήρωσή της δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την άμεση ή έμμεση συμβολή κάποιων ανθρώπων, που βοήθησαν ο καθένας με το δικό του τρόπο και έχω την ανάγκη να αναφέρω.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά, την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κυρία Καλλιόπη Παυλοπούλου για τη άρτια συνεργασία, την ουσιαστική καθοδήγηση, την προθυμία και την αμέριστη συμπαράσταση της σε όλη τη διάρκεια της φοιτητικής μου πορείας. Υπήρξε για εμένα μέντορας στην σχολή ενισχύοντας την αγάπη μου για τη διδασκαλία ακόμα πιο πολύ.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κύριο Ανάργυρο Φελλούρη, κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, κύριο Σταύρο Κουρκουλή και κύριο Κωνσταντίνο Κουσουρή, καθηγητές της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, που διέθεσαν τον πολύτιμο χρόνο τους από τα καθήκοντά τους προκειμένου να βοηθήσουν στη διεξαγωγή των συνεντεύξεων, καθώς επίσης, και τον κύριο Αριστείδη Δούμα που μου παραχώρησε μία διδακτική ώρα από το μάθημά του, έτσι ώστε να μοιραστούν τα ερωτηματολόγια στους πρωτοετείς φοιτητές. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους αυτούς τους φοιτητές, οι οποίοι συνεργάστηκαν πρόθυμα και συμπλήρωσαν ευσυνείδητα το ερωτηματολόγιο.

Τέλος, θα ήθελα ολόψυχα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Παύλο και Μαίρη και τον αδερφό μου, Νίκο, για την υποστήριξη τους με κάθε τρόπο όλα αυτά τα χρόνια. Καθώς και τους φίλους μου των οποίων η ψυχολογική ενθάρρυνση κατά τη διάρκεια των σπουδών μου ήταν καθοριστικής σημασίας. Ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ, τέλος, σε όλους τους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου σε αυτό το ταξίδι και πάντα με ενθάρρυναν και με στήριζαν σε κάθε μου βήμα.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η έννοια του εξωτερικού γινομένου κατέχει σημαντικό ρόλο τόσο στην Αναλυτική Γεωμετρία, όσο και στις επιστήμες της Φυσικής και της Μηχανικής. Είναι κοινώς αποδεκτό πως οι μαθητές αλλά και οι φοιτητές έχουν δυσκολίες στη γεωμετρία του χώρου των τριών διαστάσεων. Για τη μελέτη της κατανόησης του διανυσματικού λογισμού έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες. Η συγκεκριμένη έρευνα έχει ως στόχο την δημιουργία επιπέδων κατανόησης του εξωτερικού γινομένου από φοιτητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Όσον αφορά την Ελλάδα ο διανυσματικός λογισμός εισάγεται στο σχολείο στη Β΄ Γυμνασίου, που είναι εκτός ύλης και στη Β΄ Λυκείου, που η ύλη σταματάει μετά την περάτωση του εσωτερικού γινομένου. Επομένως, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με το εξωτερικό γινόμενο στο πρώτο εξάμηνο του πρώτου έτους, στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ως φοιτητές πλέον. Η έννοια διδάσκεται σε τρία διαφορετικά μαθήματα του κορμού, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Φυσική 1 (Μηχανική) και Μηχανική 1 (Στατική).

Ένας σημαντικός λόγος που με οδήγησε στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος είναι η αδυναμία που παρατήρησα σε αρκετούς συμφοιτητές μου, στα πρώτα έτη της σχολής, να επεξεργάζονται σχήματα στον τρισδιάστατο χώρο. Στην προσπάθειά μου να κατανοήσω τα αίτια αυτής της δυσκολίας ξεκίνησα μελετώντας την εισαγωγή στον διανυσματικό λογισμό. Το πέρασμα από τις δύο στις τρεις διαστάσεις γίνεται μέσω του εξωτερικού γινομένου, αυτό αποτελεί την αφετηρία των τριών μαθημάτων που αναφέραμε, στο πρώτο έτος της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Συνεπώς, αφορμή για την συγκεκριμένη έρευνα αποτέλεσε η διαπίστωση ότι οι φοιτητές παρουσιάζουν παρανοήσεις ως προς το εξωτερικό γινόμενο, παρά το γεγονός ότι το διδάσκονται αρκετά στην αρχή της φοιτητικής τους πορείας.

Στόχοι της παρούσας διπλωματικής είναι να εντοπιστούν οι πιο συχνές παρανοήσεις των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο, να μελετηθεί ο βαθμός κατανόησης των συστημάτων αναπαράστασής του και να ελεγχθεί η ικανότητά τους να χρησιμοποιούν το εξωτερικό γινόμενο σε εφαρμογές των μαθημάτων Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Φυσική 1 (Μηχανική) και Μηχανική 1 (Στατική). Για την επίτευξη αυτών των στόχων, αρχικά, τον Ιανουάριο του 2020, τέσσερις καθηγητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, οι οποίοι δίδαξαν κάποιο από τα παραπάνω μαθήματα στο πρώτο έτος της Σχολής μας παραχώρησαν συνεντεύξεις, οι οποίες ήταν ημιδομημένες. Έπειτα, μοιράστηκε ερωτηματολόγιο στους πρωτοετείς φοιτητές, τον Μάρτιο του 2020, στην αρχή του δεύτερου εξαμήνου.

Στο 1^o Κεφάλαιο της παρούσας έρευνας παρουσιάζεται μια εισαγωγή στο θέμα με το οποίο ασχοληθήκαμε. Στο 2^o Κεφάλαιο αναφέρεται η ιστορική αναδρομή του διανυσματικού λογισμού. Μελετώντας τις ρίζες μαθηματικών εννοιών καταλήγουμε στην βαθύτερη κατανόηση τους. Με την ιστορική γνώση που κατακτήσαμε καταφέραμε να προσεγγίσουμε καλύτερα την πολύπλευρη έννοια του εξωτερικού γινομένου. Μεταξύ άλλων στο κεφάλαιο αυτό βλέπουμε την συλλογιστική πορεία των $W.\ R.\ Hamilton$ και $H.\ Grassmann$ που θεωρούνται πατέρες του διανυσματικού λογισμού, αλλά και του $J.\ W.\ Gibbs$ και του $O.\ Heaviside$ που ουσιαστικά του έδωσαν την σημερινή μορφή του.

Στο 3^o Κεφάλαιο αρχικά γίνεται μια σύντομη αναφορά σε έρευνες που έχουν γίνει και μελετούν το διανυσματικό λογισμό από διδακτική σκοπιά. Στη συνέχεια, παρουσιάσαμε το θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής τις τρεις αρχές διδασκαλίας της Γραμμικής Άλγεβρας του $G.\ Harel$, τη θεωρία των $D.\ Tall$ και $Sh.\ Vinner$ για έννοια ως ορισμό και την έννοιας ως εικόνα και τέλος τη θεωρία των τριών κόσμων των Μαθηματικών του $D.\ Tall$.

Το 4^o Κεφάλαιο περιέχει τα κεφάλαια που παρουσιάζουν το εξωτερικό γινόμενο σε βιβλία των μαθημάτων, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Φυσική 1 (Μηχανική) και Μηχανική 1 (Στατική). Τα βιβλία αποτελούν κλασσικά συγγράμματα αυτών των μαθημάτων και τα προτιμάει η πλειοψηφία των φοιτητών στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.

Στο 5^o Κεφάλαιο διευκρινίζεται η διαδικασία που ακολουθήσαμε στο ερευνητικό κομμάτι της διπλωματικής. Αναφέρονται δηλαδή τα ερευνητικά ερωτήματα που προσπαθήσαμε να απαντήσουμε, ο στόχος κάθε ερώτησης των ερωτηματολογίων καθώς και ο τρόπος με τον οποίο έγινε η επεξεργασία και η ερμηνεία των δεδομένων που συλλέχθηκαν. Στο 6^o Κεφάλαιο παρουσιάζονται οι απαντήσεις από τις συνεντεύξεις που μας παραχώρησαν οι καθηγητές, ανά ερώτηση. Στο τέλος του αναφέρονται και τα συμπεράσματα που προέκυψαν. Το 7^o Κεφάλαιο αφορά τα αποτελέσματα των απαντήσεων που έδωσαν οι φοιτητές στο ερωτηματολόγιο που τους μοιράστηκε. Το κεφάλαιο αυτό χωρίστηκε σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά την περιγραφική στατιστική του ερωτηματολογίου, περιέχει δηλαδή την ποσοτική και ποιοτική ανάλυση του κάθε ερωτήματος. Στο δεύτερο μέρος μελετάται μέσω της επαγωγικής στατιστικής, παρουσιάζονται δηλαδή συσχετίσεις ανάμεσα σε κάποιες ερωτήσεις που απάντησαν οι φοιτητές. Τέλος, στο τρίτο μέρος παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα που προέκυψαν από τη στατιστική ανάλυση.

Στο 8^o και τελευταίο Κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής γίνεται η προσπάθεια να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα που έχουμε θέσει. Επομένως, παρουσιάζονται αναλυτικά τα συμπεράσματα που προέκυψαν μέσα από την έρευνα που διεξήχθη. Έπειτα, γίνεται μια προσπάθεια κατηγοριοποίησης των επιπέδων κατανόησης των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο. Τέλος, παρουσιάζονται κάποιες προτάσεις για περαιτέρω επέκταση της έρευνας.

Κεφάλαιο 2

Ιστορικά στοιχεία

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των πρώτων βημάτων του διανυσματικού λογισμού και πιο συγκεκριμένα του εξωτερικού γινομένου. Η ιστορική πορεία μιας έννοιας ενδέχεται να μας προμηθεύσει ιδέες για το ποιο θα μπορούσε να είναι το πλέον κατάλληλο τυπικό παράδειγμα που θα αποτελέσει πυρήνα γύρω από τον οποίο θα δομηθεί μια δραστηριότητα μέσω της οποίας ο φοιτητής ή ο μαθητής θα εμπλακεί με την έννοια, σύμφωνα με μελέτη των Κεΐσογλου και Σπύρου, 2003 [1]. Δηλαδή, η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να υποστηρίξει πιθανούς τρόπους εισαγωγής ενός μαθηματικού αντικειμένου κατά ένα φυσικό τρόπο.

2.1 Οι πρώτες αναφορές του διανύσματος

Προσπαθώντας κάποιος να ξεδιπλώσει την ιστορία του διανύσματος είναι εύκολο να μπερδευτεί κυρίως λόγω της διπλής υπόστασης των διανυσμάτων. Το κάθε διάνυσμα μπορεί να μελετηθεί από δύο πλευρές, σύμφωνα με τους *Moon* και *Spencer* [2], τη γεωμετρική και την αλγεβρική.

Ξεκινώντας από τη γεωμετρική φύση του διανύσματος θα μπορούσαμε να πούμε ότι ήδη από την εποχή του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ) χρησιμοποιούσαν κάποιες από τις βασικότερες ιδέες του διανυσματικού λογισμού, όπως ο κανόνας του παραλληλογράμμου. Είναι γνωστό ότι ο Αριστοτέλης τον χρησιμοποίησε για τον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης, δύο δυνάμεων. Έπειτα τον συναντάμε στη Μηχανική του Ήρωνα της Αλεξάνδρειας (100 μ.Χ.). Καθώς επίσης εμφανίζεται και στο *Principia Mathematica* (1687) του *Isaac Newton*. Σε αυτό ο Νεύτωνας ασχολήθηκε εκτενώς με αυτά που πλέον θεωρούνται διανυσματικές οντότητες, όπως για παράδειγμα η ταχύτητα και η δύναμη, ωστόσο δεν ασχολήθηκε με την έννοια του διανύσματος. Το 16ο και 17ο αιώνα υπάρχουν ακόμα αναφορές στον κανόνα του παραλληλογράμμου σε διάφορα έργα των *Simon Stevin of Bruges*, *Galileo Galilei*, αλλά και αργότερα τον 18ο αιώνα σε έργα των *Gauss*, *Argand*, *Ampere* και *Faraday*. Παρόλα αυτά η συστηματική μελέτη και χρήση των διανυσμάτων είναι ένα φαινόμενο του 19ου και του 20ου αιώνα. Μέχρι τότε όλοι όσοι προαναφέρθηκαν χρησιμοποιούσαν μόνο τον κανόνα του παραλληλογράμμου ως ένα εργαλείο, χωρίς να έχουν ασχοληθεί καθόλου με την έννοια του διανύσματος.

2.2 Η αρχή του διανυσματικού λογισμού

2.2.1 Η συμβολή της νομιμοποίησης των μιγαδικών αριθμών

Η αρχή του διανυσματικού λογισμού τελικά ξεκίνησε της δύο πρώτες δεκαετίες του 19ο αιώνα με τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Ο *Caspar Wessel* (1745-1818), ο *Jean Robert Argand* (1768-1822), ο *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) και μερικοί ακόμα αντιλήφθηκαν τους μιγαδικούς αριθμούς ως σημεία στο δισδιάστατο επίπεδο, δηλαδή, ως δισδιάστατα διανύσματα. Μαθηματικοί και Φυσικοί συνεργάστηκαν τότε και εφάρμοσαν αυτούς τους νέους αριθμούς με διάφορους τρόπους. Ο *John Wallis* (1616-1703) ήταν ο πρώτος που επιχείρησε να τους κατασκευάσει γεωμετρικά. Αν και απέτυχε, αξίζει να σημειωθεί ότι είναι δική του η ιδέα της αναπαράστασης των μιγαδικών με σημεία στο επίπεδο. Το επόμενο βήμα θα γίνει από τον *Caspar Wessel* (1745-1818), του οποίου ο βασικός στόχος ήταν να εκφράσει την κατεύθυνση οποιασδήποτε ευθείας γραμμής με αναλυτικό τρόπο. Σημαντικά σημεία του έργου του ήταν η εισαγωγή του άξονα των φανταστικών αριθμών, ο ορισμός πράξεων μεταξύ γεωμετρικών οντοτήτων και ο συνυπολογισμός της κατεύθυνσης των ευθειών γραμμών. Ο *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) έκανε χρήση των μιγαδικών αριθμών για να αποδείξει το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας [3]. Αρκετοί πριν από τον *Gauss* προσπάθησαν, όμως λόγω της φήμης του επικράτησαν οι δικές του ιδέες.

Με τη νομιμοποίηση των μιγαδικών αριθμών και τον ορισμό των πράξεων, οι μιγαδικοί αντιμετωπίζονται σαν προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα. Επιπλέον μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να οριστούν πράξεις μεταξύ αυτών των τμημάτων. Έτσι δημιουργείται ένας διανυσματικός λογισμός του επιπέδου. Πώς όμως θα περάσουν από τις δύο στις τρεις διαστάσεις; Η μαθηματική κοινότητα βρίσκεται αντιμέτωπη με αυτό το κρίσιμο ερώτημα. Το 1837, ο *William Rowan Hamilton* (1805-1865) έδειξε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί θα μπορούσαν αφηρημένα να θεωρηθούν διατεταγμένα ζεύγη (α,β) πραγματικών αριθμών. Ουσιαστικά αναζητούσε έναν τρόπο οι δισδιάστατοι μιγαδικοί να επεκταθούν στις τρεις διαστάσεις. Την ιδέα του αυτή υποστήριξαν αρκετοί μαθηματικοί όμως κανείς δεν μπόρεσε να την αποδείξει διατηρώντας παράλληλα τις βασικές αλγεβρικές ιδιότητες τόσο των πραγματικών όσο και των μιγαδικών αριθμών.

2.2.2 Möbius

Το 1827, ο *August Ferdinand* Möbius (1790-1868) δημοσίευσε ένα βιβλίο, το *The Barycentric Calculus* [4] στο οποίο εισήγαγε προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα δηλώνοντας τα με γράμματα της αλφάβητου, ουσιαστικά ήταν διανύσματα απλά δεν τα ονόμασε έτσι. Ο Möbius ανέπτυξε μια αριθμητική αυτών των τμημάτων μέσα από τη μελέτη του για τα κέντρα βαρύτητας και την προβολική γεωμετρία. Τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα αυτά, που είχαν κατεύθυνση, τα πρόσθεσε και έδειξε τρόπο για να τα πολλαπλασιάζεις με έναν πραγματικό αριθμό. Ουσιαστικά ήθελε να παρουσιάσει ένα εργαλείο για την επίλυση γεωμετρικών και φυσικών προβλημάτων. Ο Möbius είχε την αναγνώριση πολλών μαθηματικών όπως ο *Gauss*, *Cauchy*, *Jacobi* και ο *Dirichlet*. Όμως κάνεις άλλος, ούτε και ο ίδιος, δεν ασχολήθηκε περαιτέρω ώστε να παρατηρήσει τη σημασία αυτών των υπολογισμών.

2.2.3 Hamilton

Στις αρχές του 19ου αιώνα ήταν πλέον επιτακτική η ανάγκη ενός διανυσματικού λογισμού, ικανού να βοηθήσει στην έκφραση των φυσικών νόμων αλλά και στον έλεγχο της καθολικότητας τους. Πολλοί προσπάθησαν, θεωρείται ότι ήταν ο *William Rowan Hamilton* (1805-1865) και ο *Hermann Grassmann* (1809-1877) που έκαναν την αρχή για κάτι τέτοιο.

Ο *Hamilton* έκανε για δεκατρία χρόνια έρευνα για να καταφέρει να βρει ένα σύστημα για την ανάλυση του τρισδιάστατου χώρου[5]. Μετά από μια μεγάλη απογοήτευση, ο *Hamilton* τελικά αποφάσισε να σταματήσει την αναζήτηση ενός τέτοιου τρισδιάστατου συστήματος ¨αριθμών' και έτσι το 1843 αναζήτησε τετράδες οι οποίες θα τον οδηγούσαν στον επιθυμητό αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα λοιπόν ήταν η δημιουργία των *quaternions*, όπως τα ονόμασε [6], (τετράνια) τα οποία ήταν τετράδες της μορφής:

$$Q = w + ix + jy + kz$$

όπου τα w, x, y, k είναι πραγματικοί αριθμοί ενώ τα i, j, k τα μοναδιαία διανύσματα που βρίσκονται πάνω στους άξονες x, y, z αντίστοιχα.

Για τα μοναδιαία i, j, k ισχύουν οι εξής συνθήκες:

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j \\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j \end{gathered}$$

Έπειτα όρισε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό δύο *quaternions*. Έστω $Q = w + ix + jy + kz$ και $Q' = w' + ix' + jy' + kz'$ τότε

$$Q + Q' = (w + w') + i(x + x') + j(y + y') + k(z + z')$$

Ομοίως και για την αφαίρεση. Επομένως η πρόσθεση ή η αφαίρεση δύο *quaternions* ορίζεται ως τα αθροίσματα ή οι διαφορές των συντελεστών τους. [7]

Όσο για τον πολλαπλασιασμό δύο *quaternions*, ο *Hamilton* χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συνθήκες αρχικά όρισε [6]

$$QQ' = Q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz''$$

Με

$$\begin{gathered} w'' = ww = -xx' - yy' - zz', \\ x'' = wx' + xw' + yz' - zy', \\ y'' = wy' + yw' + zx' - xz', \\ z'' = wz' + zw' + xy' - yx'. \end{gathered}$$

Ο *Hamilton* παρατήρησε όπως αναφέρει στο βιβλίο του *Lectures on Quaternions*[8] ότι αν αναπαραστήσει μια τριάδα της μορφής $x+iy+jz$ με αυτή την τριωνυμική μορφή $ix+jy+kz$, τότε ο πολλαπλασιασμός δύο τέτοιων τριάδων ή αλλιώς διανυσμάτων στον χώρο δίνει ένα *quaternion*. Δηλαδή:

$$(ix + jy + kz)(ix' + jy' + kz') = w'' + ix'' + jy'' + kz''$$

όπου

$$\begin{aligned} w'' &= -xx' - yy' - zz', \\ x'' &= yz' - zy', \\ y'' &= zx' - xz', \\ z'' &= xy' - yx'. \end{aligned}$$

Άρα για δύο *quaternions* με μηδενικό πραγματικό μέλος ,δηλαδή με $w = w' = 0$ έχουμε:

$$\begin{gathered} QQ' = w'' + ix'' + jy'' + kz'' \\ = -(xx' + yy' + zz') + i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx') \end{gathered}$$

Συνεπώς, παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος του γινομένου είναι ίσο με το αντίθετο του σημερινού εσωτερικού γινομένου και το διανυσματικό μέρος ίσο με το σημερινό εξωτερικό γινόμενο.

Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι ο *Hamilton* ήταν ο πρώτος που δημοσίευσε ένα άρθρο [8] χρησιμοποιώντας τους όρους ***βαθμωτό (scalar)*** για το πραγματικό μέρος ενός *quaternion* και ***διανυσματικό (vector)*** για το φανταστικό μέρος του.
Έστω δηλαδή ένα *quaternion* $Q = w + ix + jy + kz$ τότε:

$$\begin{gathered} Q_S = w \ \boldsymbol{\beta\alpha\vartheta\mu\omega\tau\acute{o}} \ (scalar) \text{ μέρος}, \\ Q_V = ix + jy + kz \ \boldsymbol{\delta\iota\alpha\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}} \ (vector) \text{ μέρος}. \end{gathered}$$

Ο *Hamilton* τα τελευταία είκοσι δυο χρόνια της ζωής του τα αφιέρωσε σχεδόν αποκλειστικά στη μελέτη των *quaternions*, καθώς και σε εφαρμογές τους στον τομέα της δυναμικής, της αστρονομίας και της κυματικής θεωρία του φωτός. Σήμερα, είναι σαφές ότι δεν ήταν αυτή η συγκεκριμένη μορφή άλγεβρας που ήταν σημαντική, αλλά η ανακάλυψη της τεράστιας ελευθερίας των μαθηματικών να κατασκευάσουν άλγεβρες που δεν χρειάζεται να ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέτουν οι νόμοι της συνήθης αριθμητικής.

2.2.4 Grassmann

Ωστόσο ο *Hamilton* δεν ήταν ο μόνος που καταπιάστηκε με την πρωταρχική ιδέα του διανυσματικού λογισμού. Την ίδια περίοδο με αυτόν και άλλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τη δημιουργία διανυσματικών συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα έξι ακόμα μαθηματικοί αναπτύσσουν συστήματα με διανυσματικό χαρακτήρα, αυτοί ήταν οι εξής: *August Ferdinand* Möbius, *Giusto Bellavitis*, $Comte\ de\ Sain - Vanant$, *Augustin Cauchy*, $Matthew\ O'Brien$ και ο *Hermann Gnther Grassmann*. Τον πιο καθοριστικό ρόλο την περίοδο εκείνη είχε το έργο του *Grassmann* $(1809 - 1877)$.

Το 1832, *Grassmann* άρχισε να αναπτύσσει ένα ¨νέο γεωμετρικό λογισμό' σαν κομμάτι της μελέτης του στη Θεωρία των Παλιρροιών. Έπειτα άρχισε να χρησιμοποιεί αυτά τα νέα μαθηματικά εργαλεία για να απλοποιήσει δύο σπουδαία έργα, το *Analytical Mechanics* του *Joseph Louis Lagrange* $(1736 - 1813)$ και το *Celestial Mechanics* του *Pierre Simon Laplace* $(1749 - 1827)$. Το 1940 ο *Grassmann* τελειώνει αυτό το έργο του με σκοπό να βελτιώσει τη θέση του ως καθηγητής στο γυμνάσιο που δίδασκε από το 1836, όμως αυτό μένει αδημοσίευτο μέχρι και το 1894.

Το σπουδαιότερο έργο του *Grassmann* και αυτό που τον έκανε ευρέως γνωστό μέχρι σήμερα ήταν το *The Calculus of Extension* (Λογισμός της επέκτασης)[11], ευρέως γνωστό με τον γερμανικό του τίτλο *Die Lineale Ausdehnungslehre*, το οποίο εξέδωσε το 1844 έναν χρόνο αργότερα από τον *Hamilton* και την ανακάλυψη των *quaternions*. Το σπουδαίο αυτό έργο του παρέμεινε όμως άγνωστο στους περισσότερους μέχρι το 1862 και τη δεύτερη εμπλουτισμένη επανέκδοσή του.

Η πρώτη έκδοση του *Ausdehnungslehre* [11] ο *Grassmann* επέκτεινε την θεωρία των διανυσμάτων δύο ή τριών διαστάσεων σε τυχαίους αριθμούς n-διαστάσεων. Για εκείνη την εποχή η αναφορά σε n-χώρους έδινε χώρο για μια άλλη οπτική του χώρου όπως τον ήξεραν. Στο έργο του επίσης περιλάμβανε δεκαέξι διαφορετικά γινόμενα μεταξύ άλλων και του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, τα οποία ήταν παραπλήσια με αυτά που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα. Παρά την σπουδαιότητα του έργο του δεν αναγνωρίστηκε από την μαθηματική κοινότητα. Αυτό συνέβη διότι αρχικά ο *Grassmann* ήταν καθηγητής σε γυμνάσιο χωρίς μεγάλη επιστημονική φήμη συγκριτικά με τον *Hamilton*. Επίσης ο πολύπλοκος και αφηρημένος τρόπος παρουσίασης του έργου του και το γεγονός εξηγούσε κάθε νέα ιδέα του μέσω μιας φιλοσοφικής βάσης συντέλεσε στο να μην έχει άμεσο αντίκτυπο στην εξέλιξη του διανυσματικού λογισμού. Κάποιοι από τους οποίους γνώριζαν για το πρώτο *Ausdehnungslehre* ήταν ο Möbius , ο *Gauss*, ο *Kummer* και ο *Cauchy*. Συγκεκριμένα, ο *Kummer* όταν ρωτήθηκε για την άποψή του είπε [9]:

"Όσον αφορά τη μορφή ή την αναπαράσταση της πραγματείας, πρέπει να παραδεχτούμε σε γενικές γραμμές ότι είναι μια αποτυχία. Γιατί αν καλό και πλήρους έμπνευσης, στερείται παντού από μια κατάλληλη οργάνωση του περιεχομένου του στο οποίο τα ουσιώδη σημεία θα μπορούσαν να είναι ευδιάκριτα από τα λιγότερα σημαντικά πράγματα."

Ωστόσο, ο *Grassmann*, το 1862 δημοσίευσε το σύστημά του με μια καινούρια μορφή το

Die Ausdehnungslehre [10], στην οποία έχει αφαιρέσει όλες τις φιλοσοφικές συζητήσεις που είχε η πρώτη έκδοση του έργου του και παρουσιάζει το σύστημα σε Ευκλείδεια μορφή.

Η βασική του ιδέα ήταν ένας τύπος *hypernumber* (υπεραριθμού) με n όρους που ονόμασε *"εκτεταμένο μέγεθος"* (*extensive magnitude*)[10] της μορφής:

$$a = \Sigma a_n e_n = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n$$

όπου τα $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ τα $e_1, e_2, ..., e_n$ είναι μονάδες οι οποίες δεν έχουν καμία αριθμητική σχέση μεταξύ τους, το οποίο αποκαλεί ως ένα σύστημα μονάδων.

Έπειτα ο *Grassmann* όρισε πράξεις όπως η πρόσθεση μεταξύ εκτεταμένων μεγεθών και ο πολλαπλασιασμός μεταξύ ενός εκτεταμένου μεγέθους και ενός πραγματικού αριθμού και τυπικά απέδειξε και τις θεμελιώδεις ιδιότητες για αυτές τις δύο πράξεις[11]. Σύμφωνα με το έργο του [11] έστω ότι $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$ και $\beta = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$ όπου τα α_i, β_i είναι πραγματικοί αριθμοί τότε:

Γενική μορφή:

$$\alpha + \beta = \Sigma\alpha_i e_i + \Sigma\beta_i e_i = \Sigma(\alpha_i + \beta_i)e_i$$
$$\alpha \cdot b = (\Sigma\alpha_i e_i) \cdot b = b \cdot (\Sigma(\alpha_i + \beta_i) = \Sigma(\alpha_i b)e_i$$

και για $n = 3$ δημιουργείται μια άλγεβρα διανυσμάτων του χώρου, δηλαδή αν $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ και $\beta = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ τότε:

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + (\alpha_3 + \beta_3)e_3$$

Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι μια κεντρική ιδέα της θεωρίας του *Grassmann* είναι η έννοια της ανεξαρτησίας. Ο τρόπος που την παρουσιάζει είναι όμοιος με τον σύγχρονο τρόπο παρουσίασης που μπορεί να βρει κανείς σήμερα σε εγχειρίδια γραμμικής άλγεβρας. Συγκεκριμένα αποδεικνύει ότι κάποια μεγέθη $\alpha_1, ..., \alpha_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν μπορεί να βρεθεί μια εξίσωση της μορφής[11]:

$$\alpha_1 \alpha_1 + ... + \alpha_n \alpha_n = 0$$

με όλους τους αριθμούς $\alpha_1, ..., \alpha_n$ να μην είναι συγχρόνως μηδενικοί.

Όπως αναφέρθηκε ο *Grassmann* ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τα γινόμενα των εκτεταμένων μεγεθών που είχε ορίσει. Οι δύο κύριοι κανόνες πολλαπλασιασμού που πρότεινε είναι το γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο, το οποίο αποτελεί μια πιο γενική μορφή του σημερινού εσωτερικού γινομένου και το εξωτερικό γινόμενο το οποίο είναι επίσης μια γενική δομή γινομένου του γνωστού σε εμάς εξωτερικού γινομένου. Μάλιστα ήταν και ο πρώτος που χρησιμοποίησε τους όρους *interior product* για το εσωτερικό γινόμενο, *exterior product* (äusserlich) για το εξωτερικό γινόμενο και όρισε και το ένα μεικτό ή συνδυαστικό γινόμενο *combinatorial* (*kombinatorischen*).

Ορίζει το γενικό γινόμενο δύο εκτεταμένων μεγεθών ενός χωρίου $\alpha = \Sigma\alpha_r e_r, \beta = \Sigma\beta_s e_s$ ως εξής:

$$[\alpha\beta] = [\Sigma\alpha_r e_r \cdot \Sigma\beta_s e_s] = \Sigma\alpha_r\beta_s[e_r e_s].$$

όπου $e_r e_s$ είναι οι μονάδες από τις οποίες προκύπτουν αριθμητικά τα μεγέθη και $\alpha_r\beta_s$ είναι βαθμωτά μεγέθη που δηλώνουν τους παράγωγους αριθμούς που ανήκουν σε αυτές τις μονάδες και το άθροισμα αναφέρεται στις διαφορετικές τιμές των δεικτών r και s[11] .

Η τρίτη έκδοση του *Ausdehnungslehre* ήρθε το 1878 ένα χρόνο πριν πεθαίνει, ήταν τότε που το έργο του *Grassmann* είχε αρχίσει να αναγνωρίζεται από τη μαθηματική κοινότητα. Η μεγαλοφυΐα του *Grassmann* άργησε να αναγνωριστεί και ακόμα και τότε μόνο εν μέρει. Αρκετό καιρό μετά τον θάνατο του, οι μαθηματικοί και οι φυσικοί άρχισαν να καταλαβαίνουν το βάθος της θεωρίας του.

2.3 Η δημιουργία του σύγχρονου διανυσματικού λογισμού

Όπως αναφέρθηκε, τα έργα των *Hamilton* και *Grassmann* είχαν τη μεγαλύτερη επιρροή στην εξέλιξη του διανυσματικού λογισμού. Όμως κατά γενική ομολογία ήταν ο *Hamilton* με τα *quaternions* που βοήθησαν περισσότερο στην εξέλιξη του διανυσματικού λογισμού και στη δημιουργία της σύγχρονης διανυσματικής ανάλυσης.

Ανάμεσα στους πιο ένθερμους υποστηρικτές του *Hamilton* ήταν ο *Peter Guthrie Tait* (1831 − 1901). Στα μέσα του 19ου αιώνα έγραψε πολλά βιβλία και άρθρα εφαρμόζοντας τα *quaternions* σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού και άλλων προβλημάτων φυσικής. Ο *Tait* το 1867 δημοσίευσε το έργο του *Elementary Treatise on Quaternions* το οποίο έχει πολλές ομοιότητες με τον σύγχρονο διανυσματικό λογισμό.

Ένας ακόμη μαθηματικός που ασχολήθηκε με τα *quaternions* του *Hamilton* ήταν ο *Benjamin Peirce* (1809 − 1880). Ο οποίος έκανε πολύ μεγάλη προσπάθεια να προωθήσει την θεωρία του *Hamilton* στην Αμερική. Μάλιστα το 1870 δημοσιεύει από το *Harvard* το *Linear Associative Algebra*, το οποίο χαρακτηρίστηκε από τον *Dirk Struik* ως "*Η πρώτη τεράστια αυθεντική συνεισφορά στα μαθηματικά που παρήχθη στις Ηνωμένες Πολιτείες*"[5].

Η ιστορική αναδρομή του διανυσματικού λογισμού σε αυτό το σημείο οδηγεί στην επιστήμη της Φυσικής και στο βιβλίο του *James Clerk Maxwell* (1831 − 1879) με τίτλο: *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873), το οποίο θεωρείται η πιο σημαντική μελέτη της Φυσικής του 19ου αιώνα. Αρχικά στις δημοσιεύσεις του δεν χρησιμοποιούσε τα *quaternions* παρά μόνο καρτεσιανές μορφές, αργότερα επηρεασμένος και από τον *Tait*, στενό του φίλο και συμφοιτητή όταν σπούδαζαν στο Εδιμβούργο, δημοσιεύει κομμάτια από τις πραγματείες του χρησιμοποιώντας και τη μέθοδο των *quaternions*. Όμως η αλήθεια είναι ότι ο *Maxwell* δεν ήταν υποστηρικτής των *quaternions*. Συγκεκριμένα έχει δηλώσει ότι[5]:

"Η εφεύρεση του λογισμού των quaternions είναι ένα βήμα προς τη γνώση των μεγεθών που σχετίζονται με τον χώρο τα οποία μπορούν μόνο να συγκριθούν για τη σπουδαιότητά τους,με την εφεύρεση των τριάδων από τον Καρτέσιο. Οι ιδέες αυτού του λογισμού, ενώ διακρίνονται από τις διαδικασίες και τα σύμβολά τους, εγκαθίστανται για να είναι μέγιστης χρήσης σε όλους τους τομείς της επιστήμης."

Ουσιαστικά αυτό που είπε ο *Maxwell* ήταν ότι οι διανυσματικές μέθοδοι παρέχουν έναν ανεκτίμητο τρόπο σκέψης, όμως στην πράξη η μέθοδος των *quaternions* δεν εφαρμόζονται ικανοποιητικά.

Την ίδια περίοδο, συγκεκριμένα το 1877, ο μαθηματικός *William Kingdon Clifford* (1845–1879) δημοσιεύει το έργο του *Elements of Dynamic*, το οποίο αφορούσε τον τομέα της μηχανικής. Ο *Clifford* ήταν από τους λίγους που γνώριζε εξίσου καλά και το έργο του *Hamilton* και το έργο του *Grassmann*. Στο *Elements of Dynamic* , χωρίζει το γινόμενο δύο *quaternions* σε δύο διαφορετικά διανυσματικά γινόμενα. Ονομάζει το πρώτο βαθμωτό γινόμενο *scalar product*, γνωστό σήμερα και ως εσωτερικό γινόμενο, ενώ το δεύτερο το ονομάζει διανυσματικό γινόμενο *vector product*, γνωστό σήμερα και ως εξωτερικό γινόμενο. Τα δύο διαφορετικά γινόμενα είναι και το κλειδί για την σύγχρονη διανυσματική ανάλυση. Το έργο του *Clifford* όμως δεν συνεχίστηκε διότι πέθανε αρκετά νέος.

Από το 1880 και μετά οι θεωρίες των *Hamilton* και *Grassmann* μετά από μεγάλο αγώνα αρχίζουν να είναι στο περιθώριο και το σύγχρονο σύστημα διανυσματικής ανάλυσης επικρατεί. Οι υπαίτιοι για αυτό ήταν δυο φυσικοί, που παρόλο που εργάζονταν ανεξάρτητα επηρεάστηκαν και οι δύο πολύ από τον *Maxwell*, ο *Josiah Willard Gibbs* (1839 – 1903) και ο *Oliver Heaviside* (1850 – 1925).

Ο *Gibbs* καθηγητής στο *Yale*, όπως ο πατέρας του, θέλοντας να δώσει σημειώσεις σε ένα μάθημα του γράφει το πρώτο μέρος του έργου του, *Elements of Vector Analysis* [12], το οποίο παρουσιάζει τη θεωρία του σύγχρονου διανυσματικού λογισμού. Αρχικά επηρεασμένος από το *Treatise on Electricity and Magnetism* του *Maxwell* αρχίζει να μελετά την θεωρία των *quaternions*, πεπεισμένος ότι είναι απαραίτητη προϋπόθεση για κάνει κτήμα του τις μεθόδους αυτές. Μέσα από αυτήν την μελέτη παρατηρεί ότι ουσιαστικά υπάρχουν δύο ειδών γινόμενα το *βαθμωτό (scalar)* και το *διανυσματικό (vector)*, ο συνδυασμός τους όμως ως ένα ενιαίο γινόμενο δεν εξελίσσει καθόλου τη θεωρία από γεωμετρική σκοπιά. Έτσι ο *Gibbs* παίρνει την απόφαση να μελετήσει μια νέας μορφής διανυσματική ανάλυση με δύο ευδιάκριτα γινόμενα. Έπειτα από αυτό μαθαίνει για το έργο του *Grassmann*, μελετάει το *Ausdehnungslehre* και καταλήγει ότι μάλλον δεν επηρεάστηκε η δική του διανυσματική ανάλυση από αυτό. Τελικά το 1886 ο *Gibbs* δημοσιεύει ένα από τα πιο σημαντικά και δημιουργικά άρθρα στην ιστορία των μαθηματικών, με τίτλο *On Multiple Algebra* [13], στο οποίο αρχικά επαινεί το έργο του

$Grassmann$ και καταλήγει χαρακτηριστικά με τη φράση:[13]:

"Ξεκινήσαμε μελετώντας πολλαπλές άλγεβρες και στο τέλος, πιστεύω, καταλήξαμε να μελετάμε ΠΟΛΛΑΠΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ."

Επισημαίνεται ότι ο $Gibbs$ είναι ο πρώτος που χρησιμοποιεί τους συμβολισμούς $\alpha \cdot \beta$ και $\alpha \times \beta$. Επιπλέον είναι αυτός που μετέτρεψε το σύστημα αξόνων σε ορθοκανονικό σύστημα και πρότεινε για τη γεωμετρική αναπαράσταση του διανύσματος το γνωστό "βέλος".

Φτάνοντας στις αρχές του 20ου αιώνα ελάχιστοι επιστήμονες, όπως ο $Tait$, υποστηρίζουν ακόμα τα $quaternions$, ενώ οι περισσότεροι προσπαθούν να δημιουργήσουν δικές τους διανυσματικές μεθόδους. Ήταν ο $Oliver\ Heaviside$ $(1850-1925)$, ένας αυτοδίδαχτος φυσικός από την Αγγλία, αυτός που τελευταίος επηρεάζει τον διανυσματικό λογισμό ώστε να πάρει τη μορφή που έχει σήμερα. Ο $Heaviside$ είχε θεωρηθεί ως ο κύριος διάδοχος του $Maxwell$ στον ηλεκτρομαγνητισμό. Στα διάφορα άρθρα που έγραφε για τον ηλεκτρισμό άρχισε να εισάγει τις διανυσματικές του μεθόδους. Σε ένα από αυτά δίνει την παρουσίαση του συστήματος του στη διανυσματική ανάλυση, το οποίο είναι σχεδόν ίδιο με αυτό του $Gibbs$ και του σύγχρονου συστήματος. Ο $Heaviside$ διάβασε την πραγματεία του $Tait$ για τα $quaternions$ όμως προσπαθώντας να τα εφαρμόσει στη θεωρία του ηλεκτρισμού, τα χαρακτήρισε άβολα. Έτσι ανεξάρτητα από τον $Gibbs$ καταλήγει στο ίδιο σύστημα. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να υπάρξει μια διαμάχη για το σύστημα που θα επικρατήσει, ωστόσο από εκεί και έπειτα τα βιβλία άρχισαν να χρησιμοποιούν την προσέγγιση $Gibbs-Heaviside$ και να εμβαθύνουν περισσότερο σε αυτή. Το σημαντικότερο που κατάφερε ο $Heaviside$ ήταν η ένωση της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού με τον διανυσματικό λογισμό.

Το 1894 η διανυσματική ανάλυση εμπεριέχεται σε βιβλία της Γερμανίας, το 1887-1897 παρουσιάζεται στην Ιταλία και το 1903 στην Ολλανδία. Ο διανυσματικός λογισμός από τότε και μέχρι σήμερα αποτελεί επίκεντρο και συνδετικός κρίκος των Φυσικών Επιστημών και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Κεφάλαιο 3

Θεωρητικό πλαίσιο

3.1 Έρευνες για τις παρανοήσεις στον διανυσματικό λογισμό

Στις επιστήμες των Μαθηματικών, της Φυσικής, και της Μηχανικής, τα διανύσματα έχουν καθοριστικό ρόλο. Οι βασικές αρχές του διανυσματικού λογισμού διδάσκονται τόσο στο σχολείο όσο και στα πρώτα έτη των σχολών θετικών επιστημών. Ωστόσο παρατηρούνται αρκετές παρανοήσεις όσον αφορά την κατανόηση των φοιτητών ή των μαθητών.

Ανά τα χρόνια έχουν υπάρξει πολλοί επιστήμονες που έχουν ασχοληθεί με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές/μαθητές στα διανύσματα. Κάποιοι έχουν εστιάσει τις έρευνές τους στις παρανοήσεις προβλημάτων που σχετίζονται με τη δύναμη και την ταχύτητα, όταν αυτές αναπαριστώνται ως διανύσματα (*Aguirre* & *Rankin* (1989)[14], *Barniol*, *Zavala* & *Hinojosa* (2013) [15], *Flores*, *Kanim*, & *Kautz* (2004) [16], *Hestenes* & *Wells* (1992) [17], *Hestenes*, *Wells*, & *Swackhamer* (1992) [18], *Miller* − *Young* (2013) [19]). Στο κομμάτι της Μηχανικής είναι γνωστό ότι και η δύναμη και η ταχύτητα χρησιμοποιούνται ως διανύσματα, όμως στις έρευνες που προαναφέρθηκαν, οι παρανοήσεις ως προς τον αλγεβρικό, τον γεωμετρικό χαρακτήρα του διανύσματος και τις ιδιότητές του, δεν μελετώνται απευθείας. Για παράδειγμα, σε έρευνα των *Hestenes*, *Wells*, *and Swackhamer* (1992) χρησιμοποίησαν το *Force Concept Inventory* [18] , ένα τεστ που έχει σκοπό να διερευνήσει την κατανόηση των πρωτοετών φοιτητών στις βασικές έννοιες της Νευτώνειας Φυσικής χρησιμοποιώντας καθημερινή γλώσσα. Ωστόσο τελικά δεν καταφέρνει να εξετάσει την κατανόηση των φοιτητών στα διανύσματα.

Άλλες έρευνες όπως των *Barniol* & *Zavala* (2014) [20], *Knight* (1995) [22], *Nguyen* & *Metzler* (2003) [23], *Van Deventer* & *Wittmann* (2007) [24], *Wang* & *Sayre* (2010) [25], *Zavala* & *Barniol* (2010) [21] εστιάζουν περισσότερο στην κατανόηση των φοιτητών στις έννοιες του φορέα ενός διανύσματος, στις αναπαραστάσεις του και στις ιδιότητές του εκτός του πλαισίου κινηματικής ή μηχανικής. Το 1995 ο *Knight* μέσα από την έρευνά του, διαπίστωσε ότι περίπου το 40% των φοιτητών σε ένα εισαγωγικό μάθημα Φυσικής με βάση το διανυσματικό λογισμό δεν ήξεραν τι είναι διάνυσμα. Το 50% μπορούσε να προσθέσει σωστά τα διανύσματα, όμως κανένας από τους φοιτητές δεν κατάφερε να υπολογίσει σωστά το εξωτερικό γινόμενο. Σε μία άλλη έρευνα των *Zavala* και *Barniol* (2014) [20], χρησιμοποίησαν το *Test of Understanding of Vectors* (*TUV*) *(εξέταση κατανόησης διανυσμάτων)*, ώστε να εξετάσουν τις γνώσεις των φοιτητών που έχουν ολοκληρώσει το εισαγωγικό μάθημα της Φυσικής που αναφέρεται στα διανύσματα. Η εξέταση αυτή περιέχει ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που αφορούν την έννοια του διανύσματος και των ιδιοτήτων του. Από τις ερωτήσεις αυτές οι τρεις είναι στο εξωτερικό γινόμενο, οι δύο είναι υπολογιστικές και η τρίτη ζητά από τους φοιτητές να επιλέξουν τη σωστή γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου, από τις επιλογές που τους δόθηκαν. Το ποσοστό που κατάφερε να απαντήσει σωστά σε αυτά ήταν το 57% [20].

Οι περισσότερες έρευνες που έχουν γίνει σε πανεπιστημιακό επίπεδο για την κατανόηση των διανυσμάτων στον τομέα των Μαθηματικών εστιάζουν στις γεωμετρικές και αλγεβρικές αποδείξεις του διανυσματικού λογισμού. Για παράδειγμα, οι *Stewart* και *Thomas* (2009) [26] συνδύασαν τη θεωρία πράξη-επεξεργασία-αντικείμενο-σχήμα (*action − process − object − shema*) του *Dubinsky* (*APOS Theory*) [27] με τη θεωρία των Τριών Κόσμων των Μαθηματικών του *Tall* (2004) [28] (*embodied world*, *proceptual world*, *formal world*) , ώστε να εξετάσουν τα επίπεδα κατανόησης των μαθητών στη γραμμική ανεξαρτησία και γενικά στην αποδόμηση εννοιών του διανυσματικού λογισμού. Ενώ ο *Kwon* (2013) [29] παρουσίασε ένα νέο πλαίσιο ανάπτυξης των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στα διανύσματα. Σύμφωνα με αυτό, αναγνωρίζει τρεις τρόπους παρουσίασης των διανυσμάτων, ο πρώτος είναι το διάνυσμα ως μετάφραση, ο δεύτερος το διάνυσμα ως σημείο και το σημείο ως διάνυσμα και ο τρίτος το γεωμετρικό άθροισμα διανυσμάτων.

3.2 Η έννοια ως ορισμός και η έννοια ως εικόνα

Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από διαδικασίες υψηλής ακρίβειας, όπου οι έννοιες μπορούν να οριστούν ώστε να παρέχουν μια αυστηρά θεμελιωμένη θεωρία. Πολλές φορές στα μαθηματικά συναντάμε έννοιες τις οποίες ήδη τις γνωρίζουμε από την καθημερινή μας ζωή. Έτσι όταν οριστούν και τυπικά δημιουργείται στο μυαλό του κάθε ατόμου μια σύνθετη γνωστική δομή που χαρακτηρίζει την κάθε μία από αυτές τις έννοιες.

Ο ανθρώπινος νους δεν είναι μια καθαρά λογική οντότητα. Ο σύνθετος τρόπος με τον οποίο λειτουργεί έρχεται συχνά σε αντίθεση με τη λογική των μαθηματικών. Δεν είναι πάντα η λογική που μας δίνει πληροφορίες, αλλά ούτε και η τύχη είναι πάντα υπεύθυνη για τα λάθη μας. Για την καλύτερη αντίληψη της λειτουργίας αυτών των διαδικασιών του μυαλού μας, είτε είναι σωστές είτε λανθασμένες, πρέπει να διατυπώσουμε μια διάκριση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών που ορίζονται τυπικά και των γνωστικών διαδικασιών μέσω των οποίων συλλαμβάνονται, όπως τόνισαν, το 1981, ο *David Tall* και ο *Shlomo Vinner* στην έρευνά τους [30].

Οι ορισμοί των εννοιών είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών και αποτελεί εξαιρετική σημασία στους κλάδους των επιστημών. Ωστόσο, στην καθημερινότητα ακόμα και αν ακούσουμε κάποιον ορισμό σπάνια καλούμαστε να τον αξιοποιήσουμε αργότερα. Στο μαθηματικό πλαίσιο οι ορισμοί αξιοποιούνται συνεχώς και είναι αυτοί που εν τέλη βοηθούν και στο σχηματισμό της εικόνας που δημιουργούμε για μια έννοια. Αυτό είναι λογικό αν σκεφτεί κανείς ότι οι μαθηματικές προτάσεις και τα θεωρήματα αποτελούνται από αξιώματα και ορισμούς.

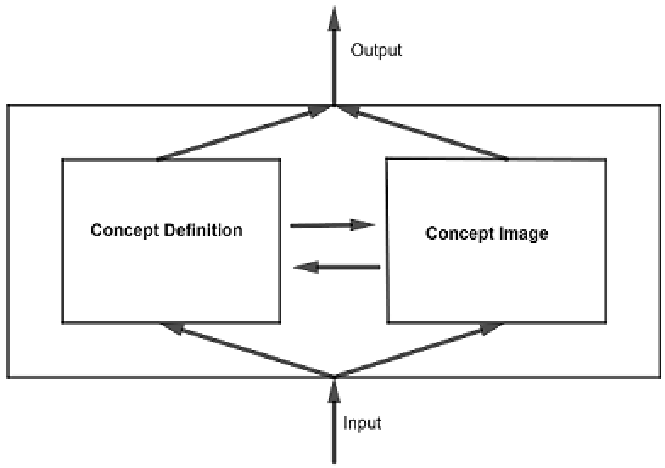
Σύμφωνα με την έρευνα των $Tall$ και $Vinner$ ο **η έννοια ως ορισμός** ($concept\ definition$) [30] είναι μια σειρά λέξεων που περιγράφουν αυτήν την έννοια με αυστηρά ακριβή τρόπο. Ο ορισμός της έννοιας μπορεί να διδαχθεί από ένα άτομο σε ένα άλλο ή μπορεί επίσης να είναι μια προσωπική ανασυγκρότηση ενός ορισμού του ατόμου. Όμως, είτε ο ορισμός αυτός δίνεται είτε κατασκευάζεται μπορεί να διαφέρει κατά τη διάρκεια της ζωής του καθενός. Καθώς επίσης μπορεί να διαφέρει και ο 'προσωπικός ορισμός της έννοιας' με τον 'τυπικό ορισμό' της, ως τυπικός χαρακτηρίζεται ο ορισμός που είναι αποδεκτός από την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα.

Ωστόσο, πολλές έννοιες που χρησιμοποιούμε δεν είναι τυπικά ορισμένες, τις μαθαίνουμε μέσω της εμπειρίας και της χρήσης σε κατάλληλα πλαίσια. Έτσι, διαμορφώνεται μια εικόνα για κάθε έννοια η οποία με τη πάροδο του χρόνου μεταβάλλεται. Κάθε άτομο ωριμάζει μαθηματικά και συναντά νέα ερεθίσματα που συνδέονται με αυτήν την έννοια, με αποτέλεσμα να υπάρχει συνεχής βελτίωση του νοήματος της. Συνήθως, σε αυτή τη διαδικασία δίνεται στην έννοια ένα σύμβολο ή όνομα ώστε να μπορεί να γίνεται ευκολότερη η επικοινωνία και να συμβάλλει στο νοητικό χειρισμό.

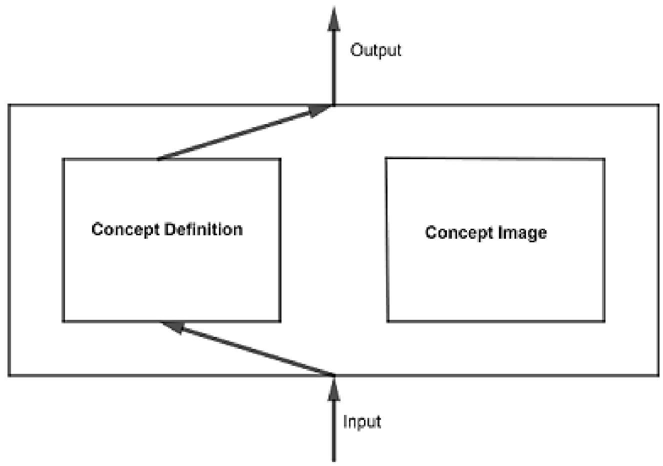
Η **η έννοια ως εικόνα** ($concept\ image$) [30] αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τους $Tall$ και $Vinner$. Σύμφωνα με την έρευνά τους, ο όρος αυτός περιγράφει μια γνωστική δομή η οποία σχετίζεται με μια έννοια και περιλαμβάνει όλες τις διαδικασίες και τις ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια αυτή. Όπως αναφέρθηκε η εικόνα της έννοιας δομείται με την πάροδο του χρόνου και αλλάζει όταν το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα και ωριμάζει. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει το σχηματισμό μιας εικόνας για αυτήν. Με τη σειρά της η εικόνα μιας έννοιας περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας που γνωρίζει το κάθε άτομο (αν γνωρίζει), αλλά είναι κάτι ευρύτερο. Η αποστήθιση, όμως, του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μία σωστή εικόνα για αυτήν [31].

Αν υποθέσουμε ότι ο ανθρώπινος νους χωρίζεται σε δύο μέρη όταν εισέρχεται μία μαθηματική πληροφορία σε αυτόν. Το ένα μέρος θα είναι ο ορισμός μια έννοιας και το δεύτερο η εικόνα μιας έννοιας. Ένα από τα δύο μέρη ή και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας θεωρείται κενό όταν δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί σε περιπτώσεις που η απομνημόνευση του ορισμού γίνεται με έναν άνευ νοήματος τρόπο. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι διάφορες πορείες που μπορεί να ακολουθήσει μια μαθηματική πληροφορία από όταν το άτομο την αναγνωρίσει ή την κατασκευάσει μέχρι τη στιγμή που θα εξέλθει από τον νου του στην μορφή απάντησης. Ο διανοητικός δρόμος που μπορεί να ακολουθήσει μπορεί να περνάει μόνο από τον ορισμό έννοιας, όταν έχει γίνει αποστήθιση, μόνο από την εικόνα της, όταν δεν έχει υπάρξει επαφή με τον ορισμό ή και από της δύο όταν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

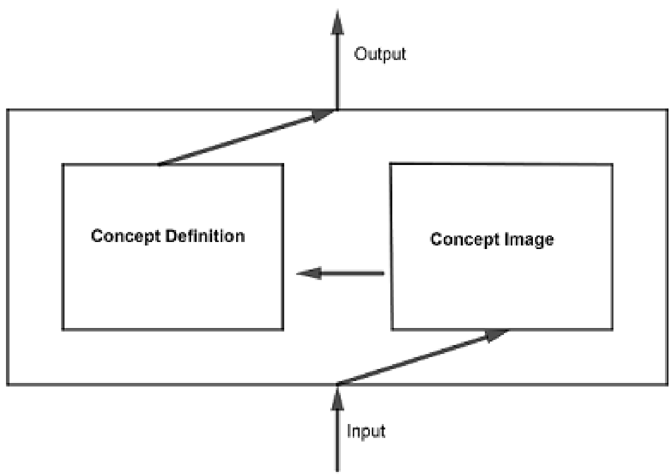
Όσον αφορά τους μαθητές θεωρείται ότι όταν ένας μαθητής δέχεται μια ερώτηση αναμένεται να ενεργοποιήσει κάποιο από τα δύο ή και τα δύο μέρη. Οι εκπαιδευτικοί αναμένουν ο μαθητής να λειτουργήσει με κάποιον από τους τρεις τρόπους:



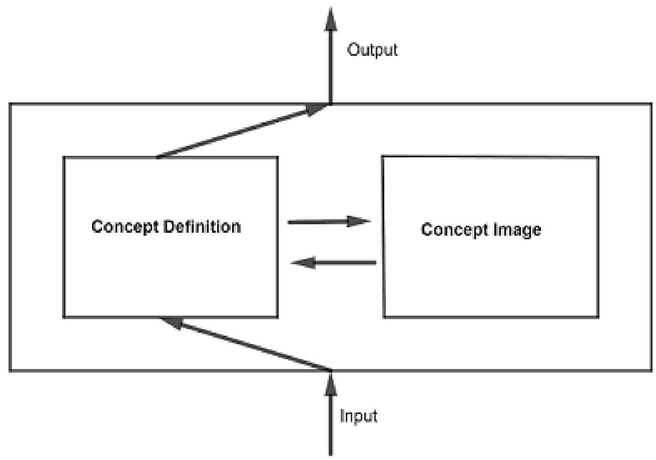
Σχήμα 3.1: Η διανοητική πορεία μιας μαθηματικής έννοιας μέσω του ορισμού και της εικόνας της, σύμφωνα με τον $Vinner$.



Σχήμα 3.2: Καθαρά τυπική σκέψη και απάντηση μόνο μέσω του ορισμού.



Σχήμα 3.3: Τυπική προσέγγιση έπειτα από διαισθητική σκέψη.



Σχήμα 3.4: Αλληλεπίδραση σκέψης μεταξύ ορισμού και εικόνας

Σύμφωνα με τα παραπάνω σχήματα, η επίλυση ενός προβλήματος περιλαμβάνει οπωσδήποτε και τον ορισμό της έννοιας. Αυτή βέβαια είναι η ιδανική διαδικασία, η βαθιά κατανόηση των ορισμών μιας έννοιας από τους μαθητές είναι και ένας από τους στόχους του μαθήματος που θέτει κάθε εκπαιδευτικός. Στην πράξη όμως αυτό συμβαίνει σπάνια, οι περισσότεροι μαθητές δίνουν διαισθητικές απαντήσεις. Δηλαδή η κυψέλη του ορισμού μιας έννοιας, αν και μη κενή δεν ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Ο τρόπος σκέψης που είναι συνηθισμένος ο μαθητής από την καθημερινή του ζωή κυριαρχεί, με αποτέλεσμα να αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό. Φαίνεται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η εικόνα μιας έννοιας είναι αρκετή για να οδηγήσει τον μαθητή στην επιτυχία [31]. Επομένως, σύμφωνα με τον $Vinner$, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να προσπαθούν μέσα από ασκήσεις να αγγίζουν πολλές πτυχές της κάθε έννοιας, γιατί αν η εικόνα έννοιας οδηγήσει σε μία σωστή λύση ο μαθητής θα κρατήσει αυτή την στρατηγική που του είναι πιο απλή.

3.3 Οι τρεις κόσμοι του $Tall$

Ο $Tall$, το 2004 [28], στην προσπάθεια του να κατηγοριοποιήσει όλα τα είδη των αναπαραστάσεων και των λειτουργιών στα μαθηματικά ανέπτυξε μια θεωρία σύμφωνα με την οποία ορίζει τρεις κόσμους που αφορούν τον τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών: τον **ενσαρκωμένο κόσμο** (*embodied world*), τον **διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο** ($symbolic - proceptual\ world$) και τον **αξιωματικό κόσμο** ($formal - axiomatic\ world$).

Ο **ενσαρκωμένος κόσμος** αναπτύσσεται από τις αντιλήψεις και τις γνώσεις του ατόμου για τον κόσμο. Οι γνώσεις αυτές εδώ θεωρούνται έμφυτες. Κεντρικό ρόλο έχουν οι αισθήσεις και οι δράσεις του ατόμου, όχι μόνο στον φυσικό κόσμο αλλά και σε νοητικές καταστάσεις. Σύμφωνα με τον $Tall$, όλες οι έννοιες που αντιλαμβανόμαστε είτε σε πραγματικό είτε σε νοητικό επίπεδο συνθέτουν αυτόν τον κόσμο. Το άτομο τις αναμορφώνει και τις ενσαρκώνει για να μπορεί να τις διαχειριστεί. Για παράδειγμα, τα μικρά παιδιά όταν μαθαίνουν τους αριθμούς έχουν έμφυτη ανάγκη να ταυτίσουν τους αριθμούς αυτούς με ισάριθμα αντικείμενα που μπορούν να πιάσουν ή να δουν. Μεγαλώνοντας, ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να επικεντρώνεται σε εικόνες, είτε πραγματικές είτε νοητές. Για να αντιληφθεί και να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες δεν χρειάζεται πλέον τα φυσικά αντικείμενα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ευθεία, αρχικά γίνεται αντιληπτή στο χώρο που κινείται το παιδί από τις γραμμές που ζωγραφίζει, ενώ αργότερα αυτές οι γραμμές δεν έχουν πάχος, αρχή ή τέλος και ουσιαστικά είναι ένα νοητικό κατασκεύασμα. Ο ενσαρκωμένος κόσμος αποτελεί το πρώτο στάδιο για τον μαθητή ώστε να αρχίσει να μαθαίνει και να σκέφτεται μαθηματικά. Είναι όλες οι ενέργειες που μπορεί να αντιληφθεί με τις αισθήσεις του, όπως η μελέτη σχημάτων ή η αρίθμηση αντικειμένων. Τέλος, τονίζεται ότι ο ενσαρκωμένος κόσμος εκτός από την εννοιολογική εξέλιξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας χρησιμοποιεί και άλλες γεωμετρίες που μπορούν να ενσαρκωθούν εννοιολογικά [28].

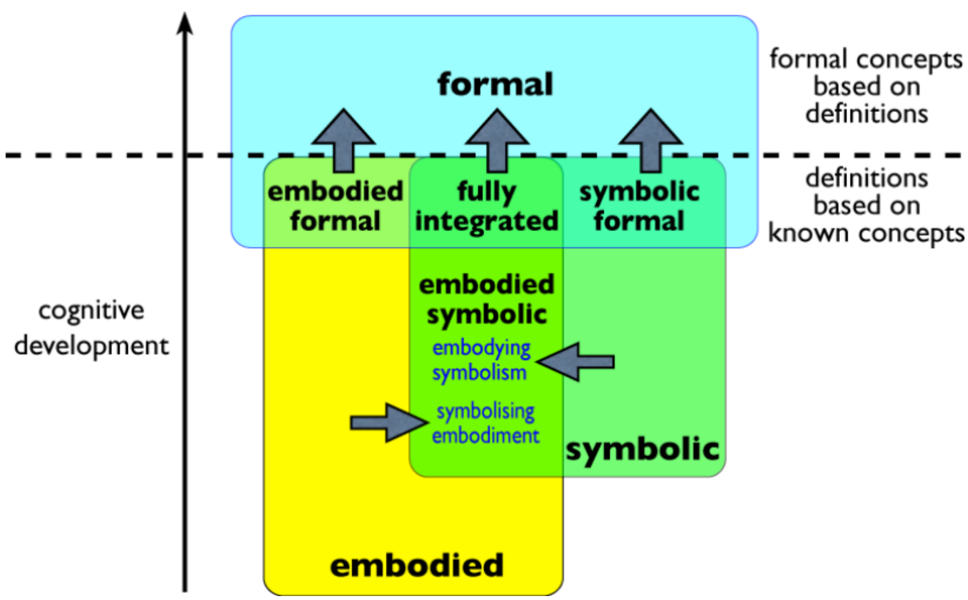
Ο **διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος** ή αλλιώς συμβολικός είναι ο κόσμος των συμβόλων και των διαδικασιών, που χρησιμοποιεί κανείς στην αριθμητική , την άλγεβρα και την ανάλυση. Ο $Tall$ εδώ αναφέρεται στην διπλή υπόσταση των συμβόλων. Το κάθε σύμβολο αντιπροσωπεύει μια διαδικασία ($process$) η οποία οδηγεί σε μια έννοια ($concept$), εξού και το όνομα διαδικασιοέννοια ($procept$).Στο πλαίσιο αυτού του κόσμου ο μαθητής κατανοεί τις έννοιες μέσα από διαδικασίες που κάνει με τη χρήση μαθηματικών συμβόλων, αυτό είναι το δεύτερο στάδιο εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Πρόκειται για τον κόσμο της επεξεργασίας και της διαχείρισης συμβόλων. Για παράδειγμα, η έκφραση $y = 2x - 3$ μπορεί να θεωρηθεί ένας υπολογισμός, δηλαδή μια διαδικασία, αλλά ταυτόχρονα μπορεί να θεωρηθεί και μια ευθεία παράλληλη στην $y = 2x$. Είναι φανερό ότι ο μαθητής πρέπει να αντιμετωπίζει τα μαθηματικά σύμβολα ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος , άλλοτε ως διαδικασία και άλλοτε ως έννοια. Αυτό απαιτεί ιδιαίτερες δεξιότητες και πολλοί είναι οι μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες, ιδίως όταν προχωράνε στα μαθηματικά επίπεδα [28].

Τέλος, ο **αξιωματικός κόσμος** είναι εκείνος που προσεγγίζει τα μαθηματικά με τυπικό, φορμαλιστικό τρόπο. Πρωταρχικό ρόλο παίζουν οι ορισμοί των εννοιών και τα αξιώματα. Ξεκινώντας από τα αξιώματα και με λογικές ενέργειες οδηγείται κανείς στην απόδειξη των προτάσεων. Ο $Tall$ τονίζει ότι το πως αντιλαμβάνεται κάποιος τον αξιωματικό κόσμο εξαρτάται από τις συνδέσεις που έχει δημιουργήσει με τον ενσαρκωμένο και τον συμβολικό κόσμο. Εδώ η γλώσσα είναι πολύ πιο ακριβής από τους άλλους δύο κόσμους, οι όροι είναι συγκεκριμένοι ώστε να χρησιμοποιούνται στην ακριβή λογική διαδικασία της απόδειξης των θεωρημάτων. Οι μαθητές λειτουργούν με αξιώματα τα οποία μπορούν να ορίσουν μαθηματικές δομές. Ο τρίτος αυτός κόσμος συναντάται κυρίως στα ανώτερα μαθηματικά [28].

Είναι ξεκάθαρο ότι ο κάθε κόσμος έχει διαφορετικό βαθμό αυστηρότητας. Στον ενσαρκωμένο κόσμο οι αποδείξεις παρουσιάζουν μία χαλαρότητα, στο διαδικασιοεννοιολογικό οι αποδείξεις στηρίζονται στα σύμβολα στις διαδικασίες και τις έννοιες που αντιπροσωπεύουν, ενώ στον αξιωματικό κυριαρχεί η αυστηρότητα και όλα αποδεικνύονται μέσα από αξιώματα, θεωρήματα και προτάσεις. Ένα καλό παράδειγμα για την κατανόηση του διαφορετικού τρόπου με τον οποίο αντιλαμβάνεται κανείς μια έννοια σε καθέναν από τους τρεις κόσμους, είναι η έννοια του διανύσματος. Στον ενσαρκωμένο κόσμο, το διάνυσμα έχει μέγεθος, διεύθυνση και φορά, ενώ όταν προσθέτουμε δυο διανύσματα χρησιμοποιούμε την οπτική γεωμετρία και τοποθετούμε στην αρχή του πρώτου διανύσματος την άκρη του δεύτερου. Στο διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο, το διάνυσμα εκφράζετε μέσα από τις συντεταγμένες και οι πρόσθεση γίνεται μέσα από την πρόσθεση των συντεταγμένων. Τέλος, στον αξιωματικό κόσμο τα διανύσματα είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου και δεν έχουν συγκεκριμένη μορφή. Η πρόσθεση εδώ θεωρείται μέρος του ορισμού του διανυσματικού χώρου.

3.4 Αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών κόσμων του *Tall*

Σύμφωνα με το έργο του *Tall* [28], οι τρεις κόσμοι της σκέψης των μαθηματικών, αν και είναι διακριτοί, αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και σε ένα βαθμό είναι αλληλοεξαρτώμενοι. Οι δύο πρώτοι κόσμοι κυριαρχούν στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στο δημοτικό χρησιμοποιείται κυρίως ο ενσαρκωμένος κόσμος για την εισαγωγή ορισμένων εννοιών, ενώ στο γυμνάσιο χρησιμοποιείται για τη μελέτη γραφικών παραστάσεων. Ο διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος κυριαρχεί στο γυμνάσιο και στο λύκειο, με αποτέλεσμα πολλές φορές οι μαθητές να αποκόπτονται από τον ενσαρκωμένο τρόπο σκέψης. Ο τελευταίος κόσμος συναντάται κυρίως σε πανεπιστημιακό επίπεδο όπου οι αποδείξεις προκύπτουν από αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα.



Σχήμα 3.5: Αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών κόσμων του *Tall*

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών κόσμων των μαθηματικών του *Tall*. Ένα καλό παράδειγμα μελέτης του παραπάνω μοντέλου είναι ο διανυσματικός χώρος. Αρχικά, ο R^2 ορίζεται μέσα από μια εικόνα, αργότερα ορίζονται οι n-διάστατοι χώροι με το R^n και τέλος αν θέλουμε κάποια στοιχείο του R^n χρησιμοποιούμε το διάνυσμα. Κάθε ένας από αυτούς τους κόσμους επηρεάζει και επηρεάζεται από τους υπόλοιπους.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί το βιβλίο Διδακτική-Μέθοδοι και Εφαρμογές[32], των Δαγδιλέση, Παυλοπούλου και Τρίγγα, το οποίο στο τρίτο μέρος του εστιάζει στα επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης στη διδασκαλία των μαθηματικών και στη σημασία τους στη διαδικασία μάθησης. Είναι γνωστό ότι στα μαθηματικά ένα αντικείμενο μπορεί να εκφραστεί με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα ο διανυσματικός χώρος που αναφέρθηκε παραπάνω. Σύμφωνα μάλιστα με τον *Duval* [33], κάθε σύγχυση ανάμεσα στο αντικείμενο και στην αναπαράσταση του οδηγεί σε μια έλλειψη κατανόησης. Συνδυάζοντας την έρευνα του *Duval* [33] και τις έρευνες της Παυλοπούλου [34], [35] παρατηρούμε ότι διαφοροποιούν το αντικείμενο από τις αναπαραστάσεις του[32]. Συγκεκριμένα, μελετούν την έννοια του διανύσματος και τα επίπεδα αναπαράστασης του. Το πρώτο επίπεδο θεωρείται το γραφικό επίπεδο, όπου το διάνυσμα αναπαριστάται ως ένα βέλος στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις, το δεύτερο είναι το επίπεδο των πινάκων, όπου αναπαριστάται στη μορφή πίνακα και το τελευταίο είναι το επίπεδο συμβολικής γραφής, όπου χρησιμοποιούνται γράμματα για την αναπαράστασή του. Στην έρευνα της Παυλοπούλου[35] μοιράστηκαν ερωτηματολόγια στους πρωτοετείς φοιτητές που αφορούσαν την έννοια του διανύσματος και το πέρασμα από το ένα επίπεδο αναπαράστασης στο άλλο. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το ποσοστό επιτυχίας κυμαίνετε από 6% έως 80%, άρα αυτή η μεταφορά στα τρία επίπεδα δεν είναι προφανής για τους φοιτητές.

Η παραπάνω έρευνα, παρόλο που έλαβε χώρα πριν την θεωρία του *Tall* για τους τρεις κόσμους των μαθηματικών, αποτελεί ένα πολύ καλό παράδειγμα, πρώτον της αλληλεπίδρασης των τριών κόσμων και δεύτερον της ευελιξίας των φοιτητών να μεταβαίνουν από τον έναν κόσμο στον άλλον. Αυτό φαίνεται εύκολα, θεωρώντας ότι το γραφικό επίπεδο ανήκει και στον ενσαρκωμένο κόσμο και διαδικασιοεννοιολογικό και ότι το επίπεδο συμβολικής γραφής ανήκει και στον διαδικασιοεννοιολογικό και στον αξιωματικό κόσμο. Στην παρούσα έρευνα συνδυάζεται η θεωρία του *Tall* με τα τρία επίπεδα αναπαράστασης του διανύσματος, τόσο στην διεξαγωγή του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους φοιτητές όσο και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 4

Το εξωτερικό γινόμενο ως αντικείμενο διδασκαλίας στο ΕΜΠ

Στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου το εξωτερικό γινόμενο διδάσκεται στο πρώτο εξάμηνο στα μαθήματα Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Μηχανική 1(Στατική) και Φυσική 1(Μηχανική). Στην συνέχεια, παραθέτουμε τα κεφάλαια που ορίζεται το εξωτερικό γινόμενο σε κάποια κλασσικά συγγράμματα τα οποία χρησιμοποιούνται από τους περισσότερους φοιτητές του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Παρουσιάζεται ένα κεφάλαιο για το καθένα από τα τρία μαθήματα που αναφέρθηκαν.

4.1 Η έννοια του εξωτερικού γινομένου στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας

Ένα από τα βιβλία που χρησιμοποιείται στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας είναι το ονώμυνο βιβλίο του κ. Ανάργυρου Γ. Φελλούρη[36]. Στο συγκεκριμένο βιβλίο το εξωτερικό γινόμενο παρουσιάζεται στο 4ο κεφάλαιο.

Ορισμός 4.1.1. *Στο σύνολο* $\mathbf{\Delta^3}$ *θεωρούμε μια εσωτερική πράξη που ονομάζεται* ***εξωτερικό γινόμενο*** *και είναι της μορφής*

$$\times : \mathbf{\Delta^3} \times \mathbf{\Delta^3} \to \mathbf{\Delta^3}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *έχει:*

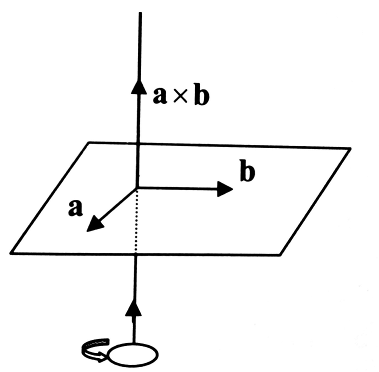
- *μέτρο*

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{αν } \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \boldsymbol{0} \\ 0, & \text{αν } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ ή } \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases}$$

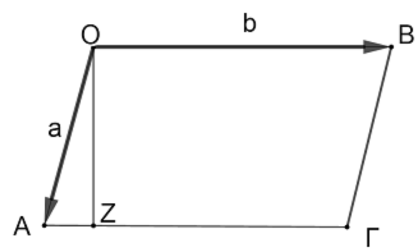
- *διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$,
- *φορά τέτοια ώστε το σύστημα των διανυσμάτων* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *να είναι δεξιόστροφο.*

Το διάνυσμα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *ονομάζεται* ***εξωτερικό γινόμενο*** *των διανυσμάτων* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$.

Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, εύκολα προκύπτει η γεωμετρική του σημασία, αφού έχουμε(βλ.Σχ. 4.2)



Σχήμα 4.1: Ορισμός



Σχήμα 4.2: Εμβαδόν παραλληλογράμμου

$$\text{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := (\text{OA}\Delta\text{B}) = (\text{A}\Delta)(\text{OZ}) = |\mathbf{b}||\mathbf{a}|sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει ότι:

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο μηδενικών διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *ισούται με το εμβαδόν παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα αυτά,δηλαδή*

$$\text{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \exists \boldsymbol{\Delta^3}$

(ii) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \exists \boldsymbol{\Delta^3}, \lambda \exists \mathbb{R}$

(iii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{a} || \mathbf{b}$

(iv) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$

(v) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \exists \boldsymbol{\Delta^3}$ **(επιμεριστική ιδιότητα).**

Η αλγεβρική έκφραση του εξωτερικού γινομένου

Η αλγεβρική έκφραση του εξωτερικού γινομένου των διανυσμάτων $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ δίνεται μέσω μιας συμβολικής ορίζουσας ως εξής:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Πράγματι, έχουμε: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$
$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_1b_2)\mathbf{k}$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 1. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

Απόδειξη.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

Παράδειγμα 2.Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με α=$|\mathbf{B\Gamma}|$, β=$|\mathbf{\Gamma A}|$, $\gamma = |\mathbf{AB}|$ να αποδείξετε ότι

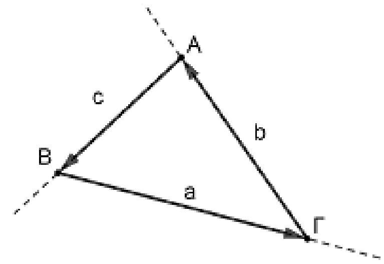
$$\frac{\alpha}{sinA} = \frac{\beta}{sinB} = \frac{\gamma}{sin\Gamma},$$ **(νόμος των ημιτόνων).**

Απόδειξη.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και θέτουμε **ΒΓ**=**a**,**ΓΑ**=**b**,**ΑΒ**=**c**, οπότε θα έχουμε
Α=$\pi - (\mathbf{b}, \mathbf{c})$,Β=$\pi - (\mathbf{c}, \mathbf{a})$,Γ=$\pi - (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ και
$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$
Επομένως μπορούμε να έχουμε

$$\begin{cases} \mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0 \\ \mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$
$\Rightarrow |\mathbf{a}||\mathbf{b}|sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|sin(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{c}||\mathbf{a}|sin(\mathbf{c}, \mathbf{a})$
$\Rightarrow \alpha\beta sin\Gamma = \beta\gamma sinA = \gamma\alpha sinB \Rightarrow \dfrac{\alpha}{sinA} = \dfrac{\beta}{sinB} = \dfrac{\gamma}{sin\Gamma}$



Σχήμα 4.3: Νόμος ημιτόνων

Παράδειγμα 3. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq 0$ και υπάρχει $\lambda \exists \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \mathbf{e}$, όπου $\mathbf{e}$ μοναδιαίο διάνυσμα, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι μικρότερο ή ίσο με $|\mathbf{b}|$.

Απόδειξη (1ος τρόπος).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq |b|$.

Πράγματι, έχουμε
$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |(\mathbf{e} - \lambda\mathbf{b}) \times \mathbf{b}| = |\mathbf{e} \times \mathbf{b} - \lambda\mathbf{b} \times \mathbf{b})| = |\mathbf{e} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{e}||\mathbf{b}|sin(\mathbf{e}, \mathbf{b}) \leq |\mathbf{b}|$,
αφού είναι $|\mathbf{e}| = 1$ και $sin(\mathbf{e}, \mathbf{b}) \leq 1$.

(2ος τρόπος).

Από την ισότητα $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \mathbf{e}$ προκύπτει ότι:

$(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}^2 = (\mathbf{e})^2 = e^2 \Leftrightarrow |\mathbf{b}|^2\lambda^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\lambda + (|\mathbf{a}|^2 - 1) = 0$, για κάποιο $\lambda \exists \mathbb{R}$.
Επομένως θα είναι
Δ=$4[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - |\mathbf{b}|^2(|\mathbf{a}|^2 - 1)] \geq 0$
$\Leftrightarrow |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - |\mathbf{b}|^2|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq |\mathbf{b}|^2$
$\Leftrightarrow |\mathbf{a}||\mathbf{b}|sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq |\mathbf{b}|$
$\Leftrightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq |\mathbf{b}|$.

4.2 Η έννοια του εξωτερικού γινομένου στο μάθημα της Μηχανικής 1(Στατική)

Ένα από τα βιβλία που χρησιμοποιείται στο μάθημα της Μηχανική 1(Στατική) είναι το βιβλίο "Τεχνική Μηχανική 1" των Ιωάννη Βαρδουλάκη και Αντώνιο Γιαννακόπουλο από τις "Εκδόσεις Συμμετρία"[37]. Στο συγκεκριμένο βιβλίο το εξωτερικό γινόμενο παρουσιάζεται στο παράρτημα του βιβλίου σελ.248-249.

$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

Σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων βάσης ορίζεται ως εξής:

$\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_1} = 0$

$\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2} = \mathbf{e_3}, \mathbf{e_1} \times \mathbf{e_3} = -\mathbf{e_2}$ κ.ο.κ

Γενικώς

$\mathbf{e_i} \times \mathbf{e_j} = \varepsilon_{\mathbf{ijk}}\mathbf{e_k}, \varepsilon_{\mathbf{ijk}}$ έψιλον του $\mathbf{Levi-Civita}$:

$$\varepsilon_{\mathbf{ijk}} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) \text{κυκλική εναλλαγή του } (1,2,3) \\ -1, & \text{αν } (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) \text{κυκλική εναλλαγή του } (2,1,3) \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Άρα:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3$$

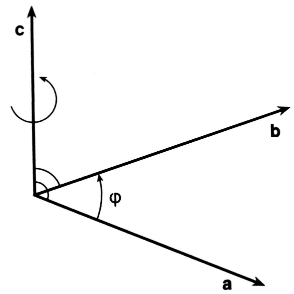
Εφαρμογή: Ο νόμος του ημιτόνου

$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{c} =$

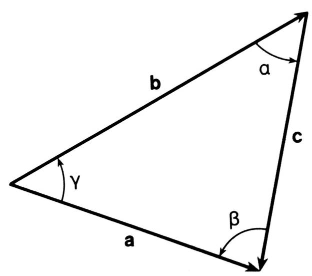
$$(\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$



Σχήμα 4.4:

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|sin\gamma = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|sin\alpha = |\mathbf{c}||\mathbf{a}|sin\beta \Rightarrow \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}.$$

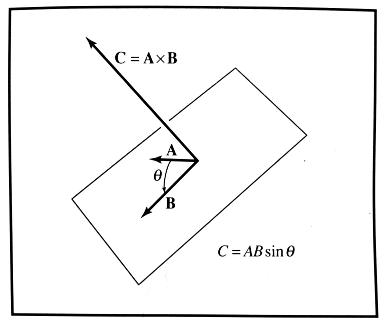


Σχήμα 4.5: Ο νόμος του ημιτόνου

4.3 Η έννοια του εξωτερικού γινομένου στο μάθημα της Φυσικής 1(Μηχανική)

Τέλος, ένα από τα βιβλία που χρησιμοποιείται στο μάθημα της Φυσικής 1(Μηχανική) είναι το ονώμυνο βιβλίο των **C.KittelW.D.KnightM.A.RubermanA.C.HelmholzB.J.Moyer** από τις "Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π."[38]. Στο συγκεκριμένο βιβλίο το εξωτερικό γινόμενο παρουσιάζεται στο 2ο κεφάλαιο.

Υπάρχει κι ένα άλλο είδος γινομένου δυο διανυσμάτων, που χρησιμοποιείται ευρύτατα στη Φυσική. Ως μέγεθος, το γινόμενο αυτό είναι διανυσματικό και όχι βαθμωτό. Πάντως,ο διανυσματικός του χαρακτήρας είναι κάπως περιορισμένος. Το εξωτερικό $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (ή διανυσματικό) γινόμενο (γράφεται και $\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$) είναι εξ ορισμού ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.6, όταν αυτά τοποθετηθούν έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή. Το μέτρο του είναι $AB|sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|$. Γράφουμε:



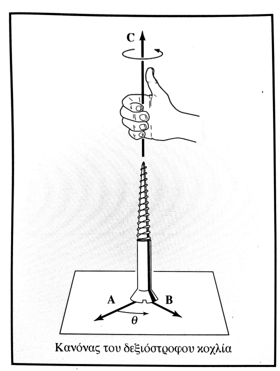
Σχήμα 4.6: Εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \widehat{C}AB|sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|$$

και διαβάζουμε "Α εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο Β".

Η φορά του $\mathbf{C}$ ορίζεται συμβατικά από τον λεγόμενο κανόνα του "δεξιόστροφου κοχλία": Το πρώτο από τα δύο διανύσματα ($\mathbf{A}$) στρέφεται προς το δεύτερο ($\mathbf{B}$), ακολουθώντας την συντομότερη γωνιακή διαδρομή, η φορά του $\mathbf{C}$ ορίζεται τότε από τη διεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί ένας δεξιόστροφος κοχλίας, που υποθέτουμε ότι στρέφεται όπως ακριβώς το διάνυσμα $\mathbf{A}$. (βλ.Σχ. 4.7)

Μπορούμε να διατυπώσουμε τον κανόνα για την κατεύθυνση του $\mathbf{C}$ με διαφορετικό τρόπο: Μεταφέρουμε πρώτα τα δύο διανύσματα, $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, ώστε να έχουν κοινή αρχή, ορίζοντας έτσι ένα επίπεδο. Το διάνυσμα $\mathbf{C}$



Σχήμα 4.7: Τρόποι προσδιορισμού της φοράς του διανύσματος $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

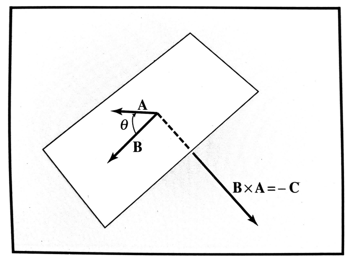
είναι κάθετο στο επίπεδο αυτό. Κατά συνέπεια, το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ είναι κάθετο και στο $\mathbf{A}$ και στο $\mathbf{B}$. Υποθέτουμε κατόπιν ότι στρέφουμε το $\mathbf{A}$ προς το $\mathbf{B}$ κατά τη συντομότερη γωνιακή διαδρομή. Διπλώνουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού (εκτός από τον αντίχειρα) έτσι, ώστε να δείχνουν τη φορά περιστροφής του $\mathbf{A}$ προς το $\mathbf{B}$. Ο αντίχειρας δείχνει τότε τη φορά του $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Ας σημειωθεί ότι με αυτή τη σύμβαση για τη φορά του $\mathbf{C}$, το γινόμενο $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ είναι ένα διάνυσμα αντίθετο του $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$(βλ.Σχ. 4.8):

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = - \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Επομένως, η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει για το εξωτερικό γινόμενο. Η σειρά με την οποία γράφουμε τα δύο διανύσματα στο εξωτερικό γινόμενο έχει σημασία. Από την εξίσωση προκύπτει ότι $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$. Ώστε, το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος επί το ίδιο το διάνυσμα είναι μηδέν. Το εξωτερικό γινόμενο ακολουθεί τον επιμεριστικό νόμο:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

Η απόδειξη είναι λίγο μακροσκελής και μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε βιβλίο διανυσματικής ανάλυσης. Σημειώνουμε ότι, όταν αναπτύσσουμε ένα τέτοιο γινόμενο, φροντίζουμε να διατηρούμε τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα διανύσματα, σε κάθε βήμα.



Σχήμα 4.8: Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ είναι αντίθετο του $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

Καρτεσιανές συνιστώσες εξωτερικού γινομένου. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που προσδιορίσαμε τα διευθύνοντα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το $\mathbf{A}$ με τους άξονες των συντεταγμάνων. Ο τρόπος όμως αυτός δεν είναι και πολύ εξυπηρετικός, γι΄ αυτό προτιμάμε να βρίσκουμε τα ημίτονα αυτά από τα αντίστοιχα συνημίτονα. Συχνά είναι επίσης ωφέλιμο να εκφράσουμε το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων χρησιμοποιώντας τις καρτεσιανές συνιστώσες αυτών των διανυσμάτων. Γράφουμε γι΄ αυτό το σκοπό :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\widehat{x} + A_y\widehat{y} + A_z\widehat{z}) \times (B_x\widehat{x} + B_y\widehat{y} + B_z\widehat{z})$$
$$= A_xB_y(\widehat{x} \times \widehat{y}) + A_xB_z(\widehat{x} \times \widehat{z}) + A_yB_x(\widehat{y} \times \widehat{x}) + A_yB_z(\widehat{y} \times \widehat{z}) + A_zB_x(\widehat{z} \times \widehat{x}) + A_zB_y(\widehat{z} \times \widehat{y})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$\widehat{x} \times \widehat{x} = \widehat{y} \times \widehat{y} = \widehat{z} \times \widehat{z} = 0$$

Τίθεται τώρα το ερώτημα: Με τι είναι ίσο το γινόμενο $\widehat{x} \times \widehat{y}$· με $\widehat{z}$ ή -$\widehat{z}$· Αυθαίρετα διαλέγουμε το $\widehat{z}$, οπότε αυτομάτως έχουμε ορίσει και τον προσανατολισμό των τριών καρτεσιανών αξόνων, έχουμε δηλαδή διαλέξει *δεξιόστροφο σύστημα αξόνων*, όπως λέγεται. Συμφωνούμε να χρησιμοποιούμε πάντοτε στη Φυσική το δεξιόστροφο σύστημα αξόνων.

Έχουμε ότι $\widehat{x} \times \widehat{z} = -\widehat{y}, \widehat{y} \times \widehat{z} = \widehat{x}$ κ.ο.κ οπότε:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \widehat{x}(A_y B_z - A_z B_y) + \widehat{y}(A_z B_x - A_x B_z) + \widehat{z}(A_x B_y - A_y B_x)$$

Σημειώνουμε ότι οι τρεις όροι $A_x B_y, A_y B_z$ και $A_z B_x$, που εμφανίζονται με θετικό πρόσημο, αντιστοιχούν σε κυκλική εναλλαγή των δεικτών x, y, z κατά τη φορά $x \to y \to z$. Διαφορετικά το πρόσημο είναι αρνητικό. Την έκφραση μπορούμε να τη δούμε και σαν ορίζουσα:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

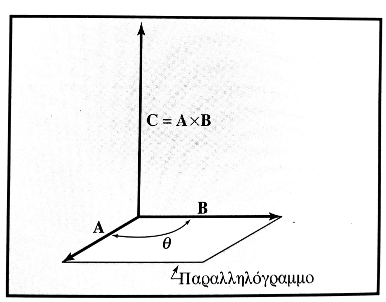
Αυτή η μορφή είναι ευκολότερη για απομνημόνευση. Στην πρώτη σειρά της ορίζουσας γράφουμε τα τρία μοναδιαία διανύσματα. Στη δεύτερη σειρά γράφουμε τις συνιστώσες του πρώτου διανύσματος και στην τρίτη τις συνιστώσες του δεύτερου διανύσματος.

Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου. Στις αμέσως επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με μερικές εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου.

1.*Εμβαδόν παραλληλογράμμου.*
Το μέτρο

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB|sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})|$$

είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ (ή το διπλάσιο του εμβαδού τριγώνου με πλευρές $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$)(βλ.Σχ. 4.9). Η διεύθυνση του $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ είναι κάθετη στο επίπεδο του παραλληλογράμμου. Έτσι μπορούμε να δούμε το $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ σαν τη διανυσματική απεικόνιση του εμβαδού του παραλληλογράμμου. Επειδή εξάλλου οι πλευρές $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ διακρίνονται και από το στοιχείο της φοράς, έπεται ότι η διανυσματική απεικόνιση του εμβαδού έχει κι αυτή τη φορά της. Υπάρχουν πολλά φυσικά προβλήματα όπου η έννοια της "κατευθυνόμενης επιφάνειας" διευκολύνει πολύ τη λύση.



Σχήμα 4.9: Η διανυσματική απεικόνιση του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB|sin\theta|\widehat{C}$

2.*Όγκος παραλληλεπιπέδου.*

$$|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}| = \mathbf{V}$$

είναι όγκος ενός παραλληλεπιπέδου με εμβαδόν βάσης $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ και πλάγιο ύψος $\mathbf{C}$(Σχ. 4.10). Αν τα τρία διανύσματα $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι συνεπίπεδα, ο όγκος είναι μηδέν. Και αντιστρόφως, αν ισχύει $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot C = 0$, τότε τα τρία διανύσματα $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι συνεπίπεδα.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

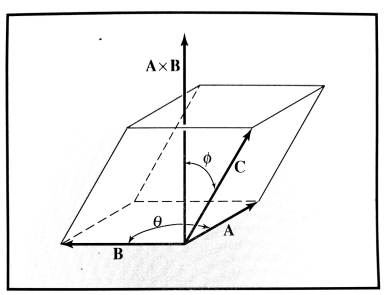
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

Συμπεραίνουμε ότι τα σύμβολα $\cdot$ και $\times$ στο παραπάνω *μεικτό γινόμενο μπορούν να εναλλαγούν, χωρίς να μεταβληθεί το αποτέλεσμα.* Υπενθυμίζουμε όμως ότι:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$$

Το μεικτό γινόμενο δεν μεταβάλλεται αν μεταθέσουμε κυκλικά τα τρία διανύσματα (κυκλικές μεταθέσεις του ABC είναι η BCA και η CAB). Όμως το γινόμενο αλλάζει πρόσημο, αν η μετάθεση δεν είναι κυκλική (μη κυκλικές μεταθέσεις του ABC είναι οι BAC, ACB και CBA). Το μεικτό γινόμενο εκφράζεται και ως:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



Σχήμα 4.10: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ = εμβαδόν βάσης $\times$ ύψος = όγκος του παραλληλεπιπέδου. $\mathbf{V} = |ABCsin\theta cos\phi|$

3.*Νόμος των ημιτόνων.*

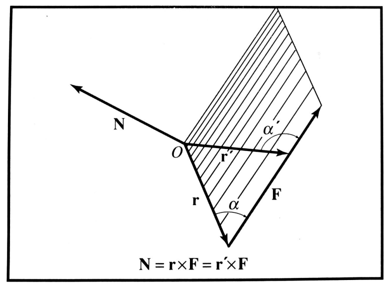
Θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ όπου $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$(Σχ. 4.11). Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη, εξωτερικά, με το $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Αλλά $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$, ενώ τα μέτρα των δύο μελών πρέπει να είναι ίσα. Άρα

$$AC sin(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = AB sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$
$$\frac{sin(\mathbf{A}, \mathbf{C})}{B} = \frac{sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{C}$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως *νόμος των ημιτόνων για ένα τρίγωνο.*

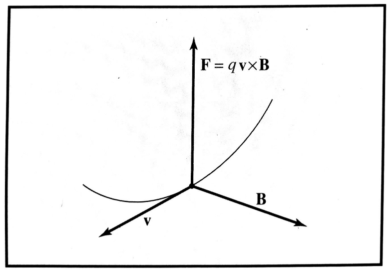


Σχήμα 4.11: Ο Νόμος των ημιτόνων για το τρίγωνο. Ας σημειωθεί ότι $sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = sin[\pi - (\mathbf{A}, \mathbf{B})]$

4.*Ροπή.*
Η έννοια της ροπής έχει ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη της κίνησης των στερεών σωμάτων. Η ροπή μιας δύναμης (ή γενικότερα ενός διανύσματος) $\mathbf{F}$ ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο, ορίζεται από τη διανυσματική σχέση:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

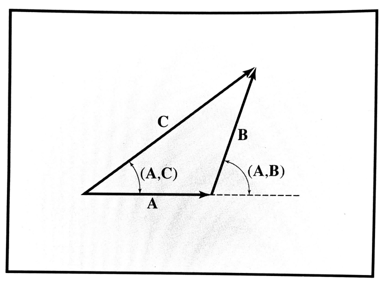
όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα με αρχή το σημείο αναφοράς και τέλος το σημείο εφαρμογής της δύναμης $\mathbf{F}$. Όπως φαίνεται και στο Σχ. 4.12, η ροπή είναι κάθετη στα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{F}$. Το μέτρο του $\mathbf{N}$ είναι $\mathbf{rFsin}\alpha$. Αλλά $\mathbf{rFsin}\alpha$ είναι η κάθετη απόσταση του σημείου αναφοράς (Ο στο σχήμα) από την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το $\mathbf{F}$. Επίσης, κατά το σχήμα: $\mathbf{rFsin}\alpha$=$\mathbf{r'Fsin}\alpha'$. Επομένως, η ροπή είναι ανεξάρτητη, σε μέτρο και κατεύθυνση, από το σημείο της ευθείας εφαρμογής του $\mathbf{F}$ στο οποίο καταλήγει το $\mathbf{r}$.



Σχήμα 4.12: Η ροπή ως εξωτερικό γινόμενο.

5.*Μαγνητική δύναμη πάνω σε κινούμενο φορτίο.*
Σε ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σημειακό σωματίδιο, που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ στην περιοχή ενός μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$, ασκείται μια δύναμη. Το μέτρο της είναι ανάλογο του γινομένου uB_1, όπου B_1 η συνιστώσα του $\mathbf{B}$ η κάθετη στο διάνυσμα $\mathbf{v}$. Χρησιμοποιώντας την έκφραση του εξωτερικού γινομένου, έχουμε(βλ.Σχ. 4.13):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



Σχήμα 4.13: Η δύναμη που ασκεί ένα μαγνητικό πεδίο πάνω σε ένα κινούμενο θετικό φορτίο.

όπου **q** είναι το ηλεκτρικό φορτίο του σωματιδίου.

4.4 Παρατηρήσεις από τη μελέτη των συγγραμμάτων

Έπειτα από προσεκτική μελέτη των προηγούμενων κεφαλαίων, διαπιστώθηκε ότι η έννοια του εξωτερικού γινομένου προσεγγίζεται ανάλογα με τις ανάγκες του συγγράμματος στο οποίο περιέχεται. Παρατηρήθηκε ότι και στα τρία κεφάλαια η μορφή εισαγωγής του εξωτερικού γινομένου είναι ίδια, δηλαδή αναφέρεται ο ορισμός και η γεωμετρική του αναπαράσταση. Ωστόσο, οι διαφορές ανάμεσα στα κεφάλαια παρατηρήθηκαν στη συνέχεια. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο που παρουσιάζεται η έννοια του εξωτερικού γινομένου σε σύγγραμμα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας γίνεται εκτενή αναφορά στις ιδιότητές του αλλά και σε αλγεβρικές εφαρμογές. Αντίθετα, στο κεφάλαιο που παρουσιάζεται η έννοια του εξωτερικού γινομένου σε σύγγραμμα της Φυσικής δίνεται έμφαση στις γεωμετρικές αναπαραστάσεις κάποιων ιδιοτήτων του, όπως η αντιμεταθετική και κάποιων εφαρμογών του, όπως ο όγκος του παραλληλογράμμου, η ροπή και η μαγνητική δύναμη πάνω σε κινούμενο φορέα. Στο σύγγραμμα της Φυσικής, παρουσιάζεται επίσης ο κανόνας του δεξιού χεριού αναλυτικά, μέσα από σχήματα. Στο σύγγραμμα της Μηχανικής ο ορισμός του εξωτερικού γινομένου βρίσκεται στο παράρτημα, μαζί με τον τρόπο υπολογισμού του μέσω της ορίζουσας και μια εφαρμογή του. Παρατηρώντας τις εφαρμογές που περιέχουν τα τρία συγγράμματα βλέπουμε ότι ο νόμος των ημιτόνων χρησιμοποιείται και στα τρία. Καταλήγουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορα επιστημονικά πεδία ανάλογα με τις ανάγκες του εκάστοτε μαθήματος.

Κεφάλαιο 5

Μεθοδολογία

5.1 Συλλογή Δεδομένων

Η διαδικασία συλλογής δεδομένων που ακολουθήθηκε για τη συγκεκριμένη έρευνα χωρίστηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη, τον Ιανουάριο του 2020, πραγματοποιήθηκαν 4 συνεντεύξεις με καθηγητές οι οποίοι δίδαξαν το εξωτερικό γινόμενο στους φοιτητές του πρώτου εξαμήνου της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών το ακαδημαϊκό έτος 2019-2020. Οι συνεντεύξεις αυτές καταγράφηκαν και έπειτα απομαγνητοφωνήθηκαν. Οι συνεντευξιαζόμενοι καθηγητές ήταν από τρία διαφορετικά ερευνητικά πεδία (Μαθηματικά, Φυσική, Μηχανική), αλλά κλήθηκαν να απαντήσουν στις ίδιες ερωτήσεις. Στη δεύτερη φάση τον Μάρτιο του 2020 μοιράστηκαν ερωτηματολόγια σε 114 πρωτοετείς φοιτητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Προαιρετικά ζητήθηκε η συμπλήρωση του ονοματεπώνυμου των φοιτητών.

5.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας είναι:

1) Ποιες είναι οι πιο συχνές παρανοήσεις των πρωτοετών φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο.

2) Πως επηρεάζεται η αντίληψη των φοιτητών από το σύστημα αναπαράστασης του εξωτερικού γινομένου που τους δίνεται.

3) Σε ποιο βαθμό οι φοιτητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν το εξωτερικό γινόμενο, που είναι ένα μαθηματικό εργαλείο, σε εφαρμογές άλλων μαθημάτων όπως η Φυσική και η Μηχανική.

Στη συγκεκριμένη έρευνα ζητήθηκε από κάποιους καθηγητές της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών να δώσουν μια συνέντευξη πάνω στο θέμα της διπλωματικής. Οι πρωτοετείς φοιτητές την χρονιά 2019-2020 διδάχθηκαν το εξωτερικό γινόμενο από αυτούς τους καθηγητές στα μαθήματα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας, της Φυσικής 1 και της Μηχανικής 1. Οι συνεντεύξεις αποτέλεσαν καθοριστικό παράγοντα για την κατασκευή του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους φοιτητές. Η πολυετής εμπειρία τους βοήθησε επίσης σε όλη τη διεκπεραίωση της διπλωματικής.

Οι ερωτήσεις των συνεντεύξεων ακολουθούν παρακάτω. Το ερωτηματολόγιο στη μορφή που δόθηκε στους καθηγητές βρίσκεται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας.

1. Όταν δίνετε για πρώτη φορά τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, τι είδους γεωμετρική αναπαράσταση χρησιμοποιείτε και ποιες είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στην κατανόηση αυτής της αναπαράστασης;

2. Χρησιμοποιείτε διαφορετικές εφαρμογές για να εξηγήσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου και διαφορετικές για την αλγεβρική του έκφραση;

3. Τί σκοπό έχει η κάθε εφαρμογή που χρησιμοποιείτε;

4. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να εξηγήσετε την κατεύθυνσή του;

5. Ποιές πιστεύετε είναι οι παρανοήσεις των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο;

6. Στο Λύκειο δεν διδάσκετε το εξωτερικό γινόμενο. Πιστεύετε ότι αν το είχαν ήδη διδαχθεί στο Λύκειο θα τους βοηθούσε στην αρχή των σπουδών τους;

Η πρώτη ερώτηση συνδέεται με το πρώτο και το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και έχει ως στόχο να διασαφηνίσει τι αναπαράσταση χρησιμοποιεί ο κάθε καθηγητής ανάλογα με το μάθημα του αλλά και ποιες παρανοήσεις έχει παρατηρήσει. Μέσω της δεύτερης και της τρίτης ερώτησης επισημάνθηκαν οι εφαρμογές που χρησιμοποιούν στην παράδοση του μαθήματος καθώς και ο σκοπός της κάθε μίας. Η τέταρτη ερώτηση απαντάει στο ερώτημα αν έχουν διδαχθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού στο πανεπιστήμιο. Η πέμπτη ερώτηση σχεδιάστηκε για να καταγράψει τις παρανοήσεις που έχουν παρατηρήσει οι καθηγητές σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας τους. Τέλος η τελευταία ερώτηση που τους δόθηκε είχε σκοπό την κατανόηση της άποψή τους για το αν θα έπρεπε το εξωτερικό γινόμενο να διδάσκεται από το σχολείο.

Στην συνέχεια, ακολουθούν οι ερωτήσεις που δόθηκαν στους φοιτητές. Το ερωτηματολόγιο στη μορφή που δόθηκε στους φοιτητές βρίσκεται επίσης στο παράρτημα της παρούσας εργασίας.

1. Τι σας έρχεται στο νου με τον όρο εξωτερικό γινόμενο;

2. Να δώσετε τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου και τη γεωμετρική του αναπαράσταση.

3. Σε ποια μαθήματα έχετε συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο κατά τη διάρκεια των μέχρι τώρα σπουδών σας; Να αναφέρετε επιγραμματικά εφαρμογές που έχετε κάνει σε αυτά τα μαθήματα.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}$ και $\vec{B} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$ σε ένα χώρο τριών διαστάσεων, όπου $\vec{i} =< 1, 0, 0 >, \vec{j} =< 0, 1, 0 >, \vec{k} =< 0, 0, 1 >$ τα θετικά μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y, z . Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{C}$ που να είναι κάθετο στα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$

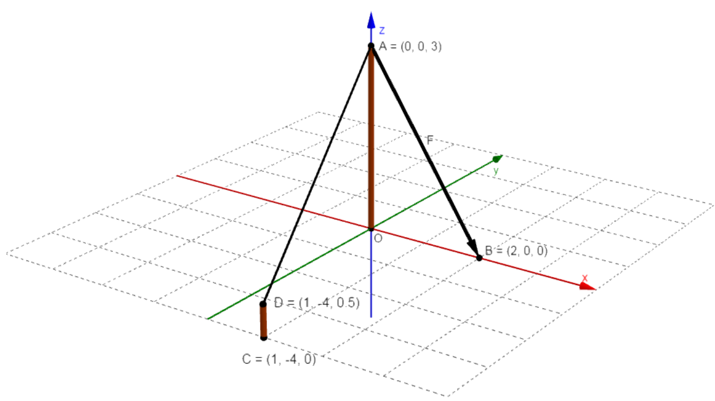
   α) γεωμετρικά

   β) με αλγεβρικό τρόπο

5. Έστω ξύλινοι πάσσαλοι OA και CD και συρματόσχοινο AB και AD. Μέσω του συρματόσχοινου AB ασκείται στο σημείο A δύναμη $\vec{F} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$. Να βρείτε:

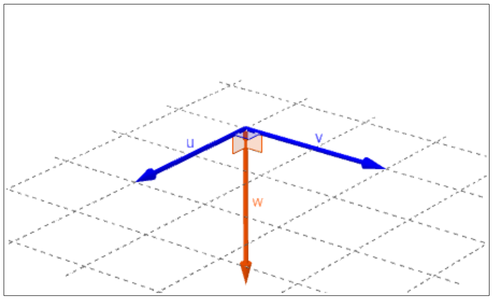
   α) τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο O

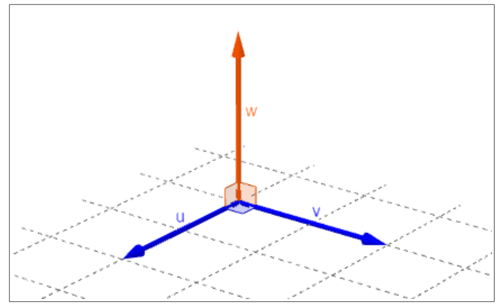
   β) τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο D

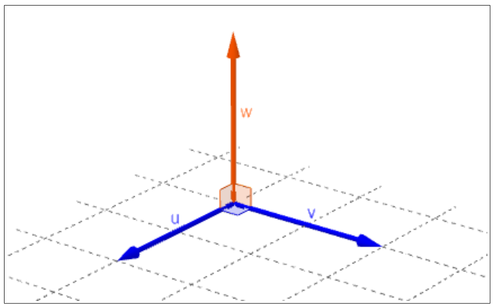


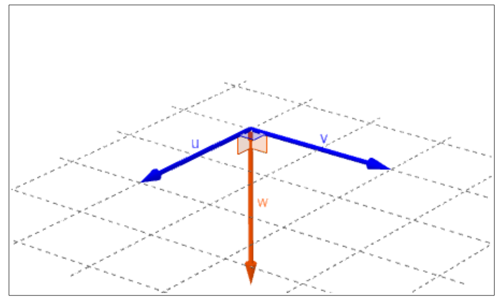
6. Έστω δυο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ σε έναν χώρο τριών διαστάσεων με $\vec{u} \perp \vec{v}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις επιλογές (1,2,3,4) με μία από τις παρακάτω εικόνες (α,β,γ,δ):

   1. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ 2. $\vec{w} = \vec{-u} \times \vec{-v}$ 3. $\vec{w} = \vec{-u} \times \vec{v}$ 4. $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$

α. 

β. 

γ. 

δ. 

7. Χρησιμοποιήσατε τον κανόνα του δεξιού χεριού στην προηγούμενη άσκηση;

Η πρώτη ερώτηση έχει ως στόχο να ελεγχθεί η διαίσθηση των φοιτητών και οι αυθόρμητες αντιλήψεις για το εξωτερικό γινόμενο. Η δεύτερη σχεδιάστηκε με σκοπό να ελέγξει κατά πόσο μπορούν οι φοιτητές να διαχωρίσουν τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου από την γεωμετρική του αναπαράσταση. Η τρίτη έχει ως στόχο την καταγραφή των διαφόρων εφαρμογών του εξωτερικού γινομένου στο επίπεδο του πανεπιστημίου. Μέσω της τέταρτης ερώτησης ελέγχεται αν οι φοιτητές είναι σε θέση να επιλύσουν την ίδια άσκηση τόσο με την αλγεβρική έκφραση του εξωτερικού γινομένου, δηλαδή την ορίζουσα, όσο και γραφικά. Η πέμπτη ερώτηση σχεδιάστηκε ώστε να ελέγξει τη δυνατότητα των φοιτητών να εφαρμόζουν το εξωτερικό γινόμενο σε μια εφαρμογή της Μηχανικής. Τέλος οι δυο τελευταίες ερωτήσεις αλληλοεπηρεάζονται. Η έκτη είναι μια άσκηση αντιστοίχησης, περιέχει γεωμετρικές αναπαραστάσεις των ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου ώστε να ελεγχθεί η αντίληψη των φοιτητών στον τρισδιάστατο χώρο. Ενώ στην τελευταία εξετάζεται κατά πόσο έκαναν χρήση του κανόνα του δεξιού χεριού στην προηγούμενη αντιστοίχηση.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα ελέγχεται σε όλες τις ερωτήσεις, καθώς οι πιθανές παρανοήσεις των φοιτητών για το εξωτερικό γινόμενο μπορούν να παρατηρηθούν σε όλο το ερωτηματολόγιο. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα μελετάται μέσα από το δεύτερο, το τέταρτο και το έκτο ερώτημα του ερωτηματολογίου. Επιπλέον το συγκεκριμένο ερευνητικό ερώτημα εξετάζεται και στην πέμπτη ερώτηση μέσα από την επεξεργασία του σχήματος που είναι απαραίτητη για την επίλυσή της. Τέλος το τρίτο ερευνητικό ερώτημα ελέγχεται μέσα από την τρίτη και την πέμπτη ερώτηση διότι συνδέουν το εξωτερικό με τις επιστήμες της Φυσικής και της Μηχανικής.

5.3 Ανάλυση Δεδομένων

Για την παρούσα έρευνα το θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε ήταν οι τρεις αρχές διδασκαλία της Γραμμική Άλγεβρας του Harel, η θεωρία των Tall και Vinner για τον ορισμό έννοιας και την εικόνα έννοιας και τέλος η θεωρία των τριών κόσμων των Μαθηματικών του Tall. Σημαντικό ρόλο στην ανάλυση είχαν οι συνεντεύξεις που μας παραχώρησαν οι καθηγητές. Στο επόμενο κεφάλαιο οι απαντήσεις τους εμφανίζονται ανά ερώτηση και στο τέλος παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτές. Η ανάλυση των δεδομένων του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους φοιτητές, έγινε μέσω περιγραφικής και επαγωγικής στατιστικής. Για την ποσοτική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα $SPSS$, μέσα από το οποίο παράχθηκαν οι πίνακες συσχετίσεων και τα αντίστοιχα ραβδογράμματα για κάθε ερώτηση. Έπειτα έγινε ποιοτική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Μέσω του προγράμματος $SPSS$ έγιναν επιπλέον οι συσχετίσεις μεταξύ κάποιων ερωτήσεων. Για αυτές χρησιμοποιήθηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας X^2 και όπου αυτό δεν ήταν εφικτό, λόγω μη πληρότητας των προϋποθέσεων, έγινε χρήση της μεθόδου $Monte\ Carlo$.

Κεφάλαιο 6

Συνεντεύξεις

Στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών το εξωτερικό γινόμενο διδάσκεται στο πρώτο εξάμηνο. Οι φοιτητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή μαζί του σε τρία μαθήματα, συγκεκριμένα στη Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, στη Φυσική 1 και στη Μηχανική 1. Επομένως, κρίθηκε σκόπιμη, για την έκβαση της έρευνας αλλά και για την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων, μια συζήτηση-συνέντευξη με καθηγητές που έχουν διδάξει τα παραπάνω μαθήματα, στο πρώτο εξάμηνο της σχολής. Πραγματοποιήθηκαν 4 συνεντεύξεις από διδάσκοντες του Πολυτεχνείου. Η κάθε συνέντευξη ήταν ημιδομημένη. Αρχικά, έγινε μια αναφορά στο θέμα της διπλωματικής σε συνδυασμό με το μάθημα το οποίο διδάσκει ο καθένας και στη συνέχεια κλήθηκαν να απαντήσουν σε έξι ερωτήσεις. Το ερωτηματολόγιο που απευθύνθηκε στους καθηγητές βρίσκεται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας. Τέλος, συζητήθηκε το ερωτηματολόγιο που θα δίνονταν στους φοιτητές. Η πολυετή εμπειρία τους βοήθησε ώστε να διορθωθούν μικρές λεπτομέρειες για ένα πιο άρτιο τελικό αποτέλεσμα.

6.1 Παράθεση συνεντεύξεων

Στη συνέχεια παραθέτονται μια προς μια οι ερωτήσεις προς τους καθηγητές καθώς και οι απόψεις τους για το εκάστοτε ζήτημα. Οι συνεντευξιαζόμενοι καθηγητές ανήκουν στους τομείς των Μαθηματικών, της Φυσικής και της Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Στις συνεντεύξεις τα ονόματα τους αντικαταστάθηκαν και στη θέση τους βάλαμε τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, τα οποία δόθηκαν τυχαία.

<u>Ερώτηση 1</u>

Όταν δίνετε για πρώτη φορά τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, τι είδους γεωμετρική αναπαράσταση χρησιμοποιείτε και ποιες είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στην κατανόηση αυτής της αναπαράστασης;

Ο καθηγητής Α όταν ορίζει για πρώτη φορά το εξωτερικό γινόμενο, όπως ανέφερε, κάνει στον πίνακα το σχήμα με τα δύο διανύσματα και το κάθετο διάνυσμα. Επίσης χρησιμοποιεί και τα χέρια του, για να φανεί ακριβώς στις τρεις διαστάσεις πως είναι. Εξηγεί δηλαδή πώς από δύο διανύσματα μπορείς να δεις το εξωτερικό τους γινόμενο και πώς αυτό είναι το κάθετο σε αυτά.

Ο καθηγητής Β, με τη σειρά του ανέφερε ότι, αρχικά σχεδιάζει στον πίνακα ένα επίπεδο με δύο διανύσματα και έπειτα σχεδιάζει ένα τρίτο διάνυσμα κάθετο στα προηγούμενα δύο παραθέτοντας τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Ως αυτό το σημείο έχει παρατηρήσει ότι η πλειοψηφία των φοιτητών κατανοούν τόσο τον ορισμό όσο και την γεωμετρική του αναπαράσταση. Ωστόσο, όταν στο ίδιο σχήμα τους σχεδιάζει και ένα άλλο διάνυσμα και τους ζητάει να βρουν το εξωτερικό γινόμενο αυτού με το διάνυσμα που έχει προκύψει από το εξωτερικό γινόμενο των δυο αρχικών διανυσμάτων, μπερδεύονται αρκετά. Στη συνέχεια του μαθήματος έχει παρατηρήσει ότι κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου τους είναι πιο εύκολο να βρουν το αποτέλεσμα αυτής της πράξης αλγεβρικά.

Ο καθηγητής Γ επισήμανε αρχικά ότι, σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο που μπορεί να ορισθεί σε έναν οποιοδήποτε χώρο οσοδήποτε διαστάσεων, το εξωτερικό γινόμενο είναι κάτι ιδιαίτερο στον τρισδιάστατο χώρο. Για αυτόν τον λόγο, ξεκινάει τη διδασκαλία του λέγοντας στους φοιτητές ότι το εξωτερικό γινόμενο είναι μια ειδική περίπτωση και τους εξηγεί ποιες είναι οι φυσικές αναγκαιότητες για να οριστεί μια τέτοια διαδικασία μεταξύ δύο διανυσμάτων. Επομένως, προτού δώσει την γεωμετρική αναπαράσταση τους παραθέτει ένα παράδειγμα από τον Ηλεκτρομαγνητισμό, τη μαγνητική δύναμη και ένα από τη Μηχανική, τη ροπή, προκειμένου να καταλάβουν ότι πρέπει να συνδυάσουν 2 διανύσματα για να πάρουν ένα τρίτο διάνυσμα. Τα παραδείγματα αυτά δίνονται προφορικά χωρίς ανάλυση. Έπειτα λέει στους φοιτητές ότι αυτά είναι δύο κλασσικά παραδείγματα της φυσικής, όπου χρειάζονται μια πιο περίπλοκη διαδικασία με την οποία από δύο διανύσματα φτιάχνεται ένα τρίτο διάνυσμα στον τρισδιάστατο χώρο. Το σχήμα που τους δίνει είναι το κλασσικό, δηλαδή δύο μη παράλληλα διανύσματα και ένα άλλο διάνυσμα κάθετο και στα δύο, το οποίο αντιπροσωπεύει το εξωτερικό γινόμενο. Πάνω σε αυτή την ιδέα, η πράξη που ονομάζετε εξωτερικό γινόμενο δίνει μια απεικόνιση στον τρισδιάστατο χώρο που είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τα δύο διανύσματα. Ο καθηγητής Γ χρησιμοποιεί το χέρι του για να δείξει το επίπεδο ενώ για να δείξει το κάθετο διάνυσμα χρησιμοποιεί την κιμωλία. Συγκεκριμένα, τόνισε ότι περιστρέφοντας το χέρι του και αλλάζει και η κιμωλία, αναλόγως δηλαδή πως θα στραφεί το επίπεδο θα στραφεί και το κάθετο διάνυσμα. Άρα το εξωτερικό γινόμενο είναι δεμένο από το επίπεδο στο οποίο άγεται.

Ο καθηγητής Δ απαντώντας σε αυτή την ερώτηση τόνισε ότι το βασικό πρόβλημα στη διδασκαλία στο πρώτο εξάμηνο είναι ότι το εξωτερικό γινόμενο δεν διδάσκεται αν δεν ξέρεις στοιχειώδη στερεομετρία. Είναι η πρώτη έννοια που εξ ορισμού πρέπει να φύγεις από το επίπεδο, γιατί το εξωτερικό γινόμενο είναι κάθετο στο επίπεδο. Εξέφρασε επίσης τους προβληματισμούς τους για τους φοιτητές που έρχονται από το λύκειο, διότι ακόμα και οι καλοί φοιτητές, δεν έχουν καλή σχέση με τη στερεομετρία. Στη ουσία δεν έχουν διδαχθεί ποτέ, άρα δυσκολεύονται να έχουν μια οπτικοποίηση της έννοιας του εξωτερικού γινομένου. Τέλος, επισήμανε αρκετές φορές κατά τη διάρκεια της συνάντησης μας ότι τα καλά σχήματα σίγουρα βοηθάνε στην κατανόηση των φοιτητών.

Ερώτηση 2

Χρησιμοποιείτε διαφορετικές εφαρμογές για να εξηγήσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου και διαφορετικές για την αλγεβρική του έκφραση;

Ο καθηγητής Α ανέφερε ότι δεν χρησιμοποιεί για δύο βασικούς λόγους, αρχικά γιατί είναι περιορισμένος ο χρόνος και κατά δεύτερον γιατί στο Πολυτεχνείο συμβαίνει το εξής, στα Μαθηματικά οι φοιτητές συναντάνε το εξωτερικό γινόμενο μετά τις δύο πρώτες βδομάδες, όμως ήδη τους το έχουν διδάξει στα μαθήματα Φυσικής και Μηχανικής. Δεδομένου λοιπόν ότι το έχουν διδαχθεί, ο καθηγητής Α έχει ως στόχο στο μάθημά του να δώσει τον μαθηματικό ορισμό και τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου, όπως αυτές απορρέουν από την ορίζουσα. Για παράδειγμα, όταν αλλάξεις πρόσημο στο ένα διάνυσμα θα αλλάξει πρόσημο και το εξωτερικό γινόμενο ή όταν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, άρα εξαρτημένα και τότε θα είναι 0 το εξωτερικό γινόμενο. Τέλος, κατέληξε ότι τις ιδιότητες δεν τις καταλαβαίνουν καλά οι φοιτητές από την αρχή γιατί πλέον δεν διδάσκονται τις ορίζουσες στο σχολείο. Ενώ μόλις δουν την ορίζουσα με τις βασικές της ιδιότητες, τότε πράγματι αρχίζουν να καταλαβαίνουν και τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου. Με αυτόν τον τρόπο εμβαθύνουν στο εξωτερικό γινόμενο.

Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας και ο καθηγητής Β εστιάζει περισσότερο στις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου παρά σε εφαρμογές γνωρίζοντας ότι αυτές θα τις διδαχθούν καλά και σε άλλα μαθήματα.

Με την άποψη αυτή ταυτίστηκε και ο καθηγητής Γ. Επισήμανε ότι δεν είναι σκοπός του οι φοιτητές να καταλάβουν ότι εφαρμόζεται διαφορετικά σε διαφορετικές καταστάσεις. Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας δίνει βάση στην γεωμετρική ερμηνεία και κατανόηση. Κατά βάση δηλαδή, όπως είπε, αναφέρεται στο μέτρο και βέβαια στο τέλος προσθέτει ότι για τον υπολογισμό του εξωτερικού γινομένου χρησιμοποιούμε την ορίζουσα. Επίσης στην αλγεβρική έκφραση αναφέρει και την έκφραση που δίνει το μέτρο συναρτήσει του ημιτόνου.

Από τη σκοπιά της Μηχανικής επειδή το εξωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται κυρίως για την έννοια της ροπής,ο καθηγητής Δ θεωρεί ότι η αναφορά στο παραλληλεπίπεδο περισσότερο θα μπερδέψει τους φοιτητές παρά θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν τη γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου. Όμως έτσι ,όπως συμπεραίνει, χάνεται η έννοια του διανύσματος της ροπής που είναι ελεύθερο και δεν είναι ολισθαίνον ή με σημείο εφαρμογής συγκεκριμένο. Άρα καταλήγει να χρησιμοποιεί δύο διανύσματα σε ένα επίπεδο με ένα πολύ καλό σχήμα και προσπαθεί να δείξει ότι το εξωτερικό γινόμενο είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν.

Ερώτηση 3

Τί σκοπό έχει η κάθε εφαρμογή που χρησιμοποιείτε;

Τόσο ο καθηγητής Α όσο και ο καθηγητής Β ανέφεραν ότι δεν συνηθίζουν να χρησιμοποιούν εφαρμογές αλλά τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου. Ο σκοπός τους είναι η καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων που οδηγεί στην καλύτερη αντίληψη του τρισδιάστατου χώρου γενικότερα.

Κατά τον καθηγητή Γ ο σκοπός έχει τρία σκέλη. Αρχικά να καταλάβουν οι φοιτητές ότι μαθηματικά εργαλεία όπως τα διανύσματα και το ανάπτυγμα $Taylor$ είναι εργαλεία που χρειαζόμαστε στη Φυσική για να ποσοτικοποιήσουμε τα φαινόμενα. Οι εφαρμογές λοιπόν αποσκοπούν στο ότι όντως υπάρχει η ανάγκη χρήσης αυτών των εννοιών. Ο δεύτερος σκοπός είναι να εμβαθύνουν στην γεωμετρία, να μπορούν δηλαδή να φανταστούν το σχήμα με κλειστά τα μάτια. Τέλος, ο τρίτος και όπως είπε αστειευόμενος πιο κουραστικός, για τον ίδιο, είναι να μπορέσουν να κάνουν σωστά την ορίζουσα. Για την επίτευξη των τριών στόχων χρησιμοποιεί παραδείγματα Φυσικής αλλά και καθαρά αλγεβρικά.

Από την άλλη μεριά ο καθηγητής Δ αναγνωρίζοντας ότι οι φοιτητές θα διδαχθούν το εξωτερικό γινόμενο στην Άλγεβρα εστιάζει στον ορισμό του και στις πολύ βασικές του ιδιότητες χωρίς να μπει σε βάθος ανάλυσης και μεικτά γινόμενα. Πέρα από τον ορισμό, όπως ανέφερε στο κομμάτι της Μηχανικής χρειάζονται πολύ λίγα πράγματα μέχρι τον υπολογισμό του με την ορίζουσα τρία επί τρία. Τέλος, υπογραμμίζει ότι το να διδάξει αναλυτικά το εξωτερικό γινόμενο όπως θα το έκανε ένας μαθηματικός ήταν κάτι που συνέβαινε παλαιότερα και δεν είναι πια απαραίτητο γιατί αφενός έχει μειωθεί ο χρόνος διδασκαλίας, αλλά έχει παραμείνει ίδια η ύλη και αφετέρου είναι επικάλυψη ύλης άλλων μαθημάτων που δημιουργεί μια καθυστέρηση στη συνέχεια της ύλης.

Ερώτηση 4

Χρησιμοποιείτε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να εξηγήσετε την κατεύθυνσή του;

Σε αυτήν την ερώτηση και οι τέσσερις διδάσκοντες απάντησαν ότι προφανώς και χρησιμοποιούν τον κανόνα του δεξιού χεριού για να εξηγήσουν την κατεύθυνση του εξωτερικού γινομένου. Ο καθηγητής Α μάλιστα ανέφερε ότι τελικά είναι ένα από τα πράγματα που οι φοιτητές θυμούνται μετά, για να βρίσκουν τη φορά του διανύσματος που είναι το εξωτερικό γινόμενο.

Από τη μεριά του ο καθηγητής Γ χρησιμοποιεί τον κανόνα του δεξιού χεριού με δύο τρόπους. Ο ένας είναι με τα τρία δάχτυλα μιλώντας για το τρισορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα. Όμως, πρώτα χρησιμοποιεί τον κανόνα με την παλάμη. Εξηγεί δηλαδή ότι βάζουμε την παλάμη μας στο πρώτο διάνυσμα που εμφανίζεται στο εξωτερικό γινόμενο, έπειτα στρίβουμε την παλάμη μας προς την κατεύθυνση που είναι το δεύτερο διάνυσμα και ο αντίχειρας θα σου δώσει την κατεύθυνση του εξωτερικού γινομένου. Με αυτόν τον τρόπο έχει διαπιστώσει ότι οι φοιτητές αντιλαμβάνονται πλήρως την κατεύθυνση του εξωτερικού γινομένου.

Με τις παραπάνω απόψεις φαίνεται σύμφωνος και ο καθηγητής Δ, ο οποίος τονίζει με τη σειρά του ότι οι φοιτητές, αν έχει γίνει μια καλή εισαγωγή είτε με τον κοχλία είτε με τον κανόνα του δεξιού χεριού, δεν έχουν κάποιο πρόβλημα στην κατανόηση του κανόνα και ξέρουν πως να τον χρησιμοποιήσουν.

Ερώτηση 5

Ποιές πιστεύετε είναι οι παρανοήσεις των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο;

Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας ο καθηγητής Α δεν έχει παρατηρήσει σημαντικές παρανοήσεις. 'Ομως αναγνωρίζει ότι οι φοιτητές δεν έχουν άνεση να χρησιμοποιήσουν το εξωτερικό γινόμενο όταν λύνουν προβλήματα της Αναλυτικής Γεωμετρίας με επίπεδα ή με ευθείες, ειδικά στα επίπεδα, που για τον ορισμό ενός επιπέδου χρειάζεται ένα κάθετο διάνυσμα το οποίο μπορεί να είναι το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων παραλλήλων του επιπέδου. Σε αυτή την περίπτωση δυσκολεύονται να το εφαρμόσουν, δηλαδή έχουν καταλάβει τον ορισμό, οι περισσότεροι, όμως δεν ξέρουν πως να το χρησιμοποιήσουν σε ένα πρόβλημα που δεν το αναφέρει αρχικά. Το τελικό του συμπέρασμα είναι ότι αυτό συμβαίνει γιατί οι φοιτητές και οι μαθητές δεν έχουν μάθει να αυτενεργούν.

Έπειτα από συζήτηση ο καθηγητής Β κατέληξε ότι δεν έχει διαπιστώσει σημαντικές παρανοήσεις των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο. Ωστόσο έχοντας τόσο μεγάλα κενά στη στερεομετρία από το σχολείο αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στο να φανταστούν και να καταλάβουν τις διάφορες αναπαραστάσεις. Άρα αφού το εξωτερικό γινόμενο αποτελεί μια γεωμετρική αναπαράσταση στον τρισδιάστατο χώρο συχνά δυσκολεύονται όταν δεν χρειάζεται να υπολογίσουν αλγεβρικά.

Ο καθηγητής Γ έχει διαπιστώσει ότι οι φοιτητές δεν δυσκολεύονται στον υπολογισμό της ορίζουσας και στις πράξεις, ωστόσο εξέφρασε τις αμφιβολίες του ως προς την αντίληψη των φοιτητών όσον αφορά την διανυσματική έννοια του εξωτερικού γινομένου. Επιχειρηματολογώντας είπε ότι παρά το γεγονός ότι κάνουν την ορίζουσα σωστά και το σχεδιάζουν σωστά δεν είναι σίγουρος ότι καταλαβαίνουν ότι είναι μια απεικόνιση που παίρνει δύο διανύσματα και δίνει ένα τρίτο διάνυσμα, που ακόμα και να βγει μηδέν το αποτέλεσμα της ορίζουσας είναι ένα διάνυσμα, είναι το '0,0,0', δεν είναι το 0 το νούμερο. Κατά τη γνώμη του, αυτή είναι και η σημαντικότερη παρανόηση των φοιτητών.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η σκοπιά του καθηγητή Δ που και αυτός αρχικά έχει συμπεράνει ότι οι φοιτητές δεν αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στον απλό ορισμό. Παρατηρεί όμως ότι δυσκολεύονται να συλλάβουν την έννοια του ελεύθερου διανύσματος, επειδή έχουν συνδέσει από το Λύκειο το διάνυσμα με ένα σημείο δηλαδή δεν έχουν την έννοια του ελεύθερου και του ολισθαίνοντος διανύσματος. Όπως αναφέρει σε όλη τη Μηχανική 1 η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές είναι ότι έχουν έλλειψη γνώσεων στο κομμάτι της στερεομετρίας, άρα και στο εξωτερικό γινόμενο. Αυτή τους η δυσκολία κατά τον καθηγητή Δ δεν αντιμετωπίζεται εύκολα πρέπει πρώτα να γίνουν τα απαραίτητα μαθήματα στα μαθηματικά, όχι μόνο να διδαχθεί το εξωτερικό γινόμενο, αλλά και όλη η ισορροπία στο χώρο.

Επιπλέον παρατηρεί ότι στη Μηχανική 1 πολλοί φοιτητές δυσκολεύονται να καταλάβουν ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Το διάνυσμα της ροπής το βρίσκουν κατά κανόνα ανάποδα. Είναι το διάνυσμα θέσεως εξωτερικό γινόμενο δύναμη, αλλά επηρεασμένοι από το Γυμνάσιο και το Λύκειο που λέμε δύναμη επί απόσταση το κάνουν ανάποδα, οπότε μπλέκουν με τα πρόσημα. Τέλος καταλήγει ότι στη Μηχανική δεν υπάρχει άλλη δυσκολία, αρκεί να καταλάβουν τον ορισμό και τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Ερώτηση 6

Στο Λύκειο δεν διδάσκετε το εξωτερικό γινόμενο. Πιστεύετε ότι αν το είχαν ήδη διδαχθεί στο Λύκειο θα τους βοηθούσε στην αρχή των σπουδών τους;

Ο καθηγητής Β στη συγκεκριμένη ερώτηση τόνισε αρχικά την έλλειψη γνώσεων στερεομετρίας σε όλες τις τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επομένως θεωρεί μια αλλαγή στην σχολική ύλη είναι αναγκαία κυρίως στο κομμάτι της γεωμετρίας σε όλα τα σχολικά έτη. Μια τέτοια αλλαγή θα βοηθούσε σίγουρα τους φοιτητές των θετικών επιστημών στην αρχή των σπουδών τους. Η άποψη αυτή βρίσκει σύμφωνο και τον καθηγητή Α οποίος όμως επέμεινε ότι μια ακόμη αλλαγή που θα ήταν ωφέλιμη για όλους τους φοιτητές θα ήταν να είχαν διδαχθεί την εισαγωγή στους πίνακες και στις ορίζουσες στο Λύκειο.

Ο καθηγητής Γ από τη μεριά του πιστεύει ότι από τη στιγμή που οι μαθητές διδάσκονται το εσωτερικό γινόμενο στο Λύκειο θα μπορούσαν να διδάσκονται και το εξωτερικό. Προτείνει μάλιστα, ότι επειδή δεν διδάσκονται την ορίζουσα στο σχολείο θα μπορούσαν να μαθαίνουν μόνο το μέτρο και την κατεύθυνση του εξωτερικού γινομένου από τον τύπο με το ημίτονο. Τονίζει όμως ότι όσον αφορά το μάθημα του δεν θα άλλαζε τον τρόπο διδασκαλίας του, δηλαδή και πάλι θα ξεκινούσε κάνοντας εισαγωγή στον διανυσματικό λογισμό ανεξάρτητα από το αν υπήρχε στην ύλη του Λυκείου το εξωτερικό γινόμενο ή όχι. Αυτό γιατί αν οι φοιτητές πάρουν οποιοδήποτε βιβλίο γενικής Φυσικής ξεκινάει με ένα κεφάλαιο διανυσματικού λογισμού, επομένως πρέπει να γίνει η διασύνδεση Φυσικής-Μαθηματικών. Αυτό είναι το μεγαλύτερο πρόβλημα από όλα, τα Μαθηματικά στο σχολείο είναι ξεκομμένα από τη Φυσική. Άρα λοιπόν, αυτή η διασύνδεση των αυστηρών Μαθηματικών με τη Φυσική δεν γίνεται στο σχολείο και αφού πρέπει να γίνει στο πρώτο εξάμηνο θα πρέπει να ξεκινήσει εισάγοντας τους φοιτητές στα διανύσματα, στον ολοκληρωτικό και διαφορικό λογισμό, στις διαφορικές εξισώσεις και μιγαδικούς αριθμούς, εντός δύο εβδομάδων. Επομένως συμπεραίνει πως ό,τι και να έχουν κάνει τα παιδιά, αφού δεν το έχουν κάνει στη Φυσική, δεν διευκολύνει καθόλου το έργο των Φυσικών.

Η άποψη του καθηγητή Δ για το συγκεκριμένο ζήτημα είναι ότι δεν χρειάζεται να διδάσκεται το εξωτερικό γινόμενο στο σχολείο και μάλιστα όπως είπε ούτε το εσωτερικό. Θα προτιμούσε οι διδακτικές ώρες για το εσωτερικό γινόμενο και γενικά για τα διανύσματα να διατίθενται στην Ευκλείδεια γεωμετρία στις τρεις διαστάσεις. Το θεωρεί πιο σημαντικό γιατί διανυσματικό λογισμό θα κάνουν πολύ στα μαθηματικά στην σχολή. Επομένως αυτό που λείπει από τα παιδιά είναι Ευκλείδεια Γεωμετρία στις τρεις διαστάσεις, τονίζει ότι είναι μεγάλο λάθος που έχει απαλειφθεί τελείως από την ύλη. Τέλος καταλήγει, ότι καλώς ή κακώς είναι καλύτερο να αφαιρεθούν κάποια πράγματα που θα τα ξαναδιδαχθούν έπειτα στη σχολή έτσι ώστε να αποκτήσουν την αίσθηση του χώρου, που θεωρείται προαπαιτούμενο στο πανεπιστήμιο.

6.2 Συμπεράσματα συνεντεύξεων

Εν κατακλείδι οι απόψεις των τεσσάρων καθηγητών συγκλίνουν στα περισσότερα ζητήματα. Οι διαφορές που παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις τους έγκεινται κυρίως στη διαφορετική φύση του μαθήματος που διδάσκουν.

Ξεκινώντας το μάθημα για το εξωτερικού γινόμενο και οι τέσσερις δίνουν τον κλασσικό ορισμό του, ενώ για την γεωμετρική του αναπαράστασή χρησιμοποιούν εκτός από ένα πολύ καλό σχήμα και τα χέρια τους ή κάποια κιμωλία. Επίσης, απαραίτητο κρίνουν μετά το μάθημα όλοι οι φοιτητές να είναι σε θέση να μπορούν να εφαρμόσουν τον κανόνα του δεξιού χεριού, γι΄ αυτό και δίνουν ιδιαίτερη σημασία όταν τον εξηγούν στους φοιτητές. Συγκεκριμένα, όπως είπε ο καθηγητής Α , ο κανόνας του δεξιού χεριού είναι από τα πράγματα που οι φοιτητές θυμούνται καθ΄ όλη τη διάρκεια των σπουδών τους.

Γνωρίζοντας ότι το εξωτερικό γινόμενο αποτελεί εργαλείο της Φυσικής και της Μηχανικής κρίθηκε σκόπιμο να εξεταστεί τι είδους εφαρμογές χρησιμοποιούν σε κάθε μάθημα, καθώς επίσης και αν διαχωρίζουν εφαρμογές γεωμετρίας του εξωτερικού γινομένου με αλγεβρικές εφαρμογές. Έπειτα από τις συνεντεύξεις συμπεραίνουμε ότι στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας ως εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου διδάσκονται κυρίως οι ιδιότητες του, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση του τρισδιάστατου χώρου. Στο μάθημα της Φυσικής στόχος είναι οι φοιτητές να μην διαχωρίζουν στο μυαλό τους τη γεωμετρική ερμηνεία από τον ορισμό. Ο καθηγητής Γ αρχικά επιδιώκει να καταλάβουν ότι τα μαθηματικά εργαλεία είναι απαραίτητο στοιχείο της Φυσικής γι΄ αυτό και σαν παράδειγμα τους αναφέρει την ροπή και παραδείγματα από τον Ηλεκτρομαγνητισμό. Δεύτερον στοχεύει στην καλύτερη αντίληψη της γεωμετρίας και τρίτον να μάθουν να κάνουν την ορίζουσα και τις πράξεις. Επομένως, χρησιμοποιεί και παραδείγματα Φυσικής και καθαρά αλγεβρικά. Τέλος στο μάθημα της Μηχανικής το εξωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται κυρίως για την εύρεση της ροπής, οπότε ο καθηγητής Δ δεν αναφέρει κάτι άλλο εκτός από τον ορισμό, τη γεωμετρική του αναπαράσταση και τις ιδιότητες του, τα υπόλοιπα όπως ανέφερε καλύπτονται από άλλα μαθήματα και δεν είναι απαραίτητα για την Μηχανική.

Στις ερωτήσεις προς τους καθηγητές ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στο κομμάτι που αφορά τις παρανοήσεις που έχουν οι φοιτητές ως προς το εξωτερικό γινόμενο. Οι απόψεις των διδασκόντων στο θέμα αυτό αποτελούν καθοριστικό ρόλο στη διεκπεραίωση τις παρούσας έρευνας. Οι παρανοήσεις που έχουν παρατηρήσει ποικίλουν ανάλογα με το μάθημα το οποίο διδάσκουν. Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας φαίνεται, σύμφωνα με τα λεγόμενα των καθηγητών, να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου. Συγκεκριμένα ο καθηγητής Β ανέφερε ότι δυσκολεύονται στις πράξεις με το εξωτερικό γινόμενο καθώς και στη γεωμετρική ερμηνεία αυτών, όπως το διπλό εξωτερικό. Ο καθηγητής Α είπε ότι οι περισσότεροι δεν καταφέρνουν να βρουν το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων που δεν τους δίνονται από την αρχή. Στη Φυσική και στη Μηχανική οι καθηγητές έχουν παρόμοιες παρατηρήσεις, έχουν συμπεράνει ότι οι φοιτητές δεν αντιλαμβάνονται ότι το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα διάνυσμα, αλλά και γενικά την έννοια του διανύσματος είτε είναι ελεύθερο είτε ολισθαίνον. Ο καθηγητής Δ συμπλήρωσε επίσης ότι συχνά μπλέκουν τα πρόσημα και τον τύπο της ροπής.

Το τελευταίο ερώτημα του ερωτηματολογίου είχε ως στόχο την καταγραφή των απόψεων των καθηγητών σε μια μελλοντική πρόταση, να ενταχθεί το εξωτερικό γινόμενο στην ύλη του Λυκείου. Οι γνώμες διχάστηκαν. Αρχικά όλοι οι καθηγητές επισήμαναν την έλλειψη γεωμετρικών γνώσεων που έχουν οι φοιτητές από το σχολείο. Επίσης, πρότειναν και κάποιες αλλαγές στην ύλη κάποιων σχολικών τάξεων, ώστε να μην είναι τόσο έντονο το παραπάνω πρόβλημα που παρατηρούν στους πρωτοετείς. Ως προς την ένταξη του εξωτερικού γινομένου στο Λύκειο ο καθηγητής Δ είναι κάθετα αντίθετος και μάλιστα αντιπρότεινε ο διανυσματικός λογισμός να διδάσκεται εξ ολοκλήρου στις σχολές ώστε στο σχολείο να δοθεί έμφαση στη γεωμετρία. Από την άλλη, ο καθηγητής Γ πιστεύει ότι οι μαθητές δεν έχουν κανένα πρόβλημα μετά το εσωτερικό γινόμενο να διδάσκονται και το εξωτερικό στη Β΄ Λυκείου.

Οι συνεντεύξεις με τους καθηγητές αποτέλεσαν βασικό κομμάτι της συγκεκριμένης έρευνας. Μέσα αυτές εντοπίστηκαν ήδη κάποιες από τις παρανοήσεις των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο. Η εμπειρία των καθηγητών και το γεγονός ότι ήταν αυτοί που δίδαξαν το διανυσματικό λογισμό στους πρωτοετείς το ακαδημαϊκό έτος 2019-2020, μας βοήθησε αρχικά στο να διευκρινίσουμε το μαθηματικό τους υπόβαθρο των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο και κατ΄ επέκταση στη δημιουργία ενός αντιπροσωπευτικού ερωτηματολογίου για τους φοιτητές. Στο επόμενο κεφάλαιο πραγματοποιείται η επεξεργασία και η ανάλυση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις απαντήσεις των φοιτητών.

Κεφάλαιο 7

Επεξεργασία και ανάλυση δεδομένων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των απαντήσεων του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους φοιτητές. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έγινε με το πρόγραμμα *SPSS*. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου η στατιστική ανάλυση γίνεται ανά ερώτηση και περιέχει την κωδικοποίηση των απαντήσεων των φοιτητών, τους στατιστικούς πίνακες που προέκυψαν από το *SPSS* και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων τους. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται οι συσχετίσεις μεταξύ κάποιων ερωτήσεων καθώς και η ποιοτική τους ανάλυση. Το ερωτηματολόγιο παραθέτεται στο παράρτημα της παρούσας διπλωματικής στη μορφή που δόθηκε στους φοιτητές.

7.1 Περιγραφική στατιστική

Στη συγκεκριμένη ενότητα γίνεται στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας, μέσω της περιγραφικής στατιστικής. Σκοπός της περιγραφικής στατιστικής είναι να δώσει μια συνοπτική παρουσίαση του δείγματος, καθώς επίσης και να ελέγξει την ορθότητα των τιμών του [39]. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους φοιτητές ανά ερώτηση. Οι απαντήσεις της κάθε ερώτησης κωδικοποιήθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν ώστε να μπορούμε να τις επεξεργαστούμε. Οι κατηγορίες που προέκυψαν θεωρούνται κατηγορικές μεταβλητές και η ανάλυσή τους έγινε μέσω του προγράμματος *SPSS*. Για την κάθε ερώτηση κατασκευάστηκαν οι πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων , αλλά και τα αντίστοιχα ραβδογράμματα.

7.1.1 Ερώτηση 1

"Τι σας έρχεται στο νου με τον όρο εξωτερικό γινόμενο;"

Η πρώτη ερώτηση είχε ως στόχο να μελετήσει τι έχει διατηρηθεί στη μνήμη των φοιτητών σχετικά με το εξωτερικό γινόμενο, γι΄ αυτό ήταν και ανοιχτού τύπου. Μέσα από τη μελέτη των αποτελεσμάτων φάνηκε να δημιουργούνται κάποιες κατηγορίες απαντήσεων, οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια.

1. **VEC (vector)** - Διάνυσμα
   Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται οι απαντήσεις που χαρακτηρίζουν το εξωτερικό γινόμενο ως ένα διάνυσμα ή που έχουν σχεδιάσει το εξωτερικό γινόμενο ως ένα διάνυσμα. Κάποιες από αυτές ήταν εξής:

   "**Διάνυσμα**"[No35].
   "**Διανύσματα**"[No59].
   "**Δύο διανύσματα παράγουν ένα νέο**"[No7].
   "**Μια εσωτερική πράξη διανυσμάτων, όπου έχει ως αποτέλεσμα ένα διάνυσμα, κάθετο στο επίπεδο όπου ορίζουν τα δύο διανύσματα**"[No3].
   "**Ένα διάνυσμα κάθετο στα δύο διανύσματα των οποίων υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο**"[No21].
   "**Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο άλλων δύο**"[No69].
   "**Μια πράξη από την οποία προκύπτει ένα διάνυσμα**"[No50].
   "$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$"[No62].

2. **DET (determinant)** - Ορίζουσα
   Χαρακτηρίστηκαν με τον συμβολισμό αυτό οι απαντήσεις όπως:

   "**Ορίζουσα**"[No72].
   "$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$"[No24].

3. **APP (applications)** - Εφαρμογές
   Στη συγκεκριμένη κατηγορία ανήκουν οι απαντήσεις που αναφέρθηκαν σε εφαρμογές ή σε μαθήματα, όπου οι φοιτητές έχουν χρησιμοποιήσει το εξωτερικό γινόμενο. Κάποια παραδείγματα απαντήσεων ήταν τα εξής:
   "**Ροπή**"[No14].
   "**Στροφορμή**"[No12].
   "**Γωνιακή ταχύτητα**"[No53].
   "**Μηχανική 1**"[No113].

4. **B/UNCLEAR (blank – unclear)** - Κενή ή Ασαφής απάντηση
   Έτσι χαρακτηρίστηκαν οι ερωτήσεις χωρίς απάντηση ή οι ερωτήσεις που η απάντηση τους δεν ήταν σαφής ή δεν είχε σχέση με το νόημα της ερώτησης.

Στο παρακάτω Σχήμα 7.1, στην δεύτερη στήλη παρατηρούμε τη συχνότητα της κάθε κατηγορίας απαντήσεων. Στην τρίτη και την τέταρτη στήλη είναι οι σχετικές συχνότητες, δηλαδή το ποσοστό της κάθε κατηγορίας ανά το σύνολο των απαντήσεων.

Πίνακας 7.1: Ερώτηση 1

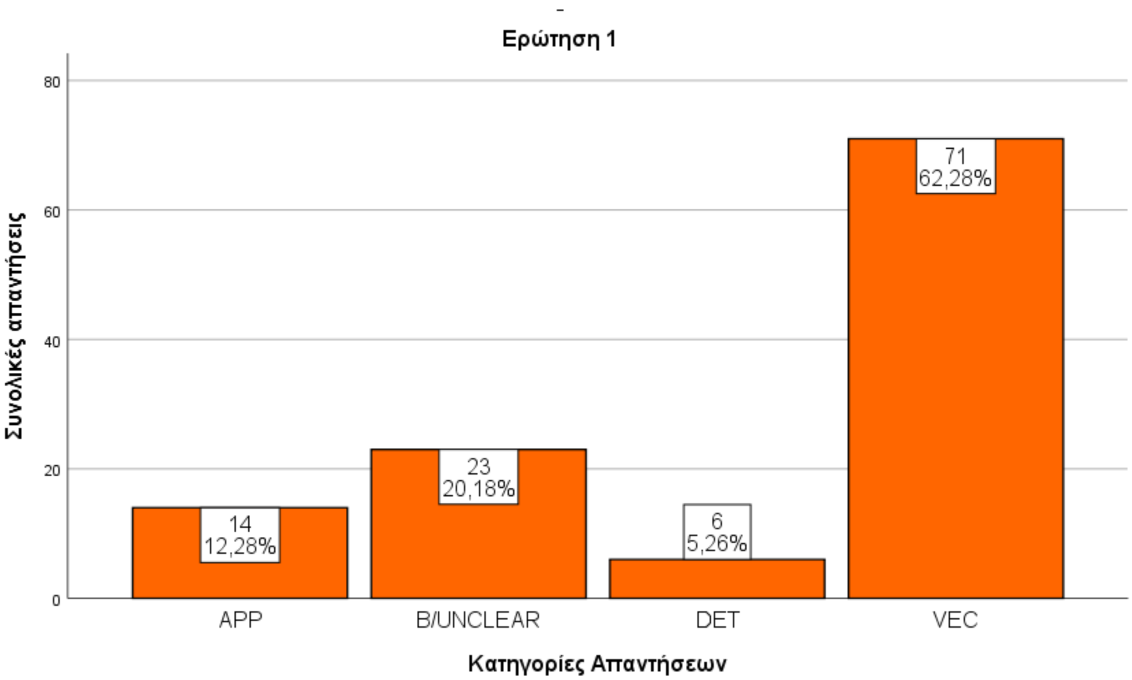
	Κατηγορίες και Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**
1	VEC $(vector)$	Διάνυσμα
2	DET $(determinant)$	Ορίζουσα
3	APP $(applications)$	Εφαρμογές
4	$B/UNCLEAR$ $(blank - unclear)$	Κενή ή Ασαφής απάντηση

Ερώτηση 1

		Frequency	Percent	Valid Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	APP	14	12,3	12,3
	B/UNCLEAR	23	20,2	20,2
	DET	6	5,3	5,3
	VEC	71	62,3	62,3
	Total	114	100,0	100,0

Σχήμα 7.1: Πίνακας συχνοτήτων απαντήσεων της Ερώτησης 1

Έπειτα ακολουθεί το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων των απαντήσεων (Σχ. 7.2), στο οποίο φαίνονται και οι σχετικές συχνότητες.



Σχήμα 7.2: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων απαντήσεων της Ερώτησης 1

Από τα παραπάνω σχήματα, παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των φοιτητών, με ποσοστό 62,28%, απάντησε "Διάνυσμα" ή έδωσε μια απάντηση στην οποία συμπεριέλαβε τον όρο "Διάνυσμα". Επομένως, αντιλαμβανόμαστε ότι οι φοιτητές έχουν δημιουργήσει μια συνεπαγωγή στο μυαλό τους (εξωτερικό γινόμενο $\Longrightarrow$ διάνυσμα). Συμπεραίνουμε ότι δίνουν έμφαση στο "Τι είναι" και όχι στο "Πως υπολογίζω" μια μαθηματική οντότητα, όπως αυτή του εξωτερικού γινομένου. Σύμφωνα με αυτό, εξηγείται και το γεγονός ότι μόνο 6 φοιτητές έδωσαν ως απάντηση την ορίζουσα. Θα περίμενε κανείς ότι οι πρωτοετείς φοιτητές, που στα σχολικά τους χρόνια είχαν συνηθίσει να δουλεύουν με αλγεβρικό τρόπο σκέψης, να είχαν σαν αυτόματη απάντηση την αλγεβρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου, δηλαδή την ορίζουσα. Ωστόσο, όπως φαίνεται και από τα Σχήματα 7.1, 7.2 οι απαντήσεις της κατηγορίας **DET** είναι οι λιγότερες (5,26%). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το 12,28% έδωσε ως απάντηση κάποια εφαρμογή του εξωτερικού γινομένου, το οποίο θεωρείται αναμενόμενο για τους πρωτοετείς φοιτητές, διότι το έχουν συναντήσει και σε μαθήματα όπως η Φυσική 1 και η Μηχανική 1. Τέλος, αρκετοί ήταν αυτοί που άφησαν κενή την ερώτηση ή που η απάντησή τους δεν ήταν σχετική με το νόημα της ερώτησης.

7.1.2 Ερώτηση 2

"Να δώσετε τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου και τη γεωμετρική του αναπαράσταση."

Η δεύτερη ερώτηση σχεδιάστηκε με σκοπό να ελέγξει κατά πόσο οι φοιτητές μπορούν να διαχωρίσουν τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου από την γεωμετρική του αναπαράσταση. Οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε δύο επιμέρους κομμάτια, τα οποία αντιστοιχούν στα δύο σκέλη της ερώτησης. Αρχικά ζητείται ο ορισμός του εξωτερικού γινομένου και έπειτα η γεωμετρική του αναπαράσταση.

Ερώτηση 2α - Ορισμός εξωτερικού γινομένου

Παρακάτω παραθέτονται οι κατηγορίες των απαντήσεων καθώς και ο τρόπος που κωδικοποιήθηκαν για την ανάλυση των δεδομένων.

1. **FDEF** (**formal definition**) - Τυπικός ορισμός
   Σε αυτή την κατηγορία βρίσκονται οι απαντήσεις που είχαν τον καθαρά τυπικό μαθηματικό ορισμό. Για παράδειγμα, η ακόλουθη απάντηση περιέχει τον αυστηρά μαθηματικό ορισμό: "**Έστω δύο διανύσματα** a, b. **Το εξωτερικό γινόμενο συμβολίζεται με** $a \times b$ **και ορίζεται ως το διάνυσμα με μέτρο** $|a \times b| = a \cdot b \cdot \sin\phi$**, όπου η γωνία** ϕ **είναι η γωνία μεταξύ τους με κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τα** a, b **και φορά που ορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού**"[No 16].

2. **IDEF** (**informal definition**) - Μη τυπικός ορισμός
   Αρκετοί φοιτητές προσπάθησαν να γράψουν με λόγια τον ορισμό, αλλά ουσιαστικά η απάντησή τους δεν ήταν ο καθαρά τυπικός ορισμός. Επομένως, σε αυτές τις απαντήσεις παρουσιάστηκε ένας πιο αφηρημένος, μη τυπικός ορισμός. Στη συνέχεια αναφέρονται κάποια παραδείγματα απαντήσεων: "**Το εξωτερικό γινόμενο** $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ **είναι το διάνυσμα που είναι κάθετο στα δύο διανύσματα** $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$**. Ορίζεται το μέτρο του** $|\overrightarrow{a}|$ **επί το μέτρο** $|\overrightarrow{b}|$ **επί το ημίτονο της μεταξύ τους γωνίας**"[No54]. "$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ **κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα** $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ **με** $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{a, b})$ **το μέτρο**"[No87].

3. **DET** (**determinant**) - Με ορίζουσα
   Μερικοί φοιτητές έδωσαν σαν απάντηση, αντί του ορισμού του εξωτερικού γινομένου, την αλγεβρική του ερμηνεία, δηλαδή την ορίζουσα.

4. **WM** (**wrong magnitude**) - Λάθος μέτρο εξωτερικού γινομένου
   Παρατηρήθηκε ότι αρκετοί έγραψαν τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, ορίζοντας όμως λάθος το μέτρο του, δηλαδή έγραψαν "$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$".

5. **MM** (**missing magnitude**) - Παράλειψη μέτρου εξωτερικού γινομένου
   Σε αυτή την κατηγορία ήταν οι απαντήσεις, που ενώ όριζαν σωστά το εξωτερικό γινόμενο, δεν ανέφεραν το μέτρο του. Για παράδειγμα, ένας φοιτητής απάντησε:

"**Ορισμός: το κάθετο διάνυσμα** $\overrightarrow{n}$ **στο επίπεδο που ορίζουν τα** $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ **με** $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{n}$"[No 30].

6. **B/UNCLEAR** (**blank – unclear**) - Κενή ή Ασαφής απάντηση
   Έτσι χαρακτηρίστηκαν οι ερωτήσεις χωρίς απάντηση ή οι ερωτήσεις που η απάντηση τους δεν ήταν σαφής ή δεν είχε σχέση με το νόημα της ερώτησης.

Πίνακας 7.2: Ερώτηση 2α - Ορισμός εξωτερικού γινομένου

	Κατηγορίες και Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**
1	$FDEF$ $(formal\ definition)$	Τυπικός ορισμός
2	$IDEF$ $(informal\ definition)$	Μη τυπικός ορισμός
3	DET $(determinant)$	Με ορίζουσα
4	WM $(wrong\ magnitude)$	Λάθος μέτρο εξωτερικού γινομένου
5	MM $(missing\ magnitude)$	Παράλειψη μέτρου εξωτερικού γινομένου
6	$B/UNCLEAR$ $(blank - unclear)$	Κενή ή Ασαφής απάντηση

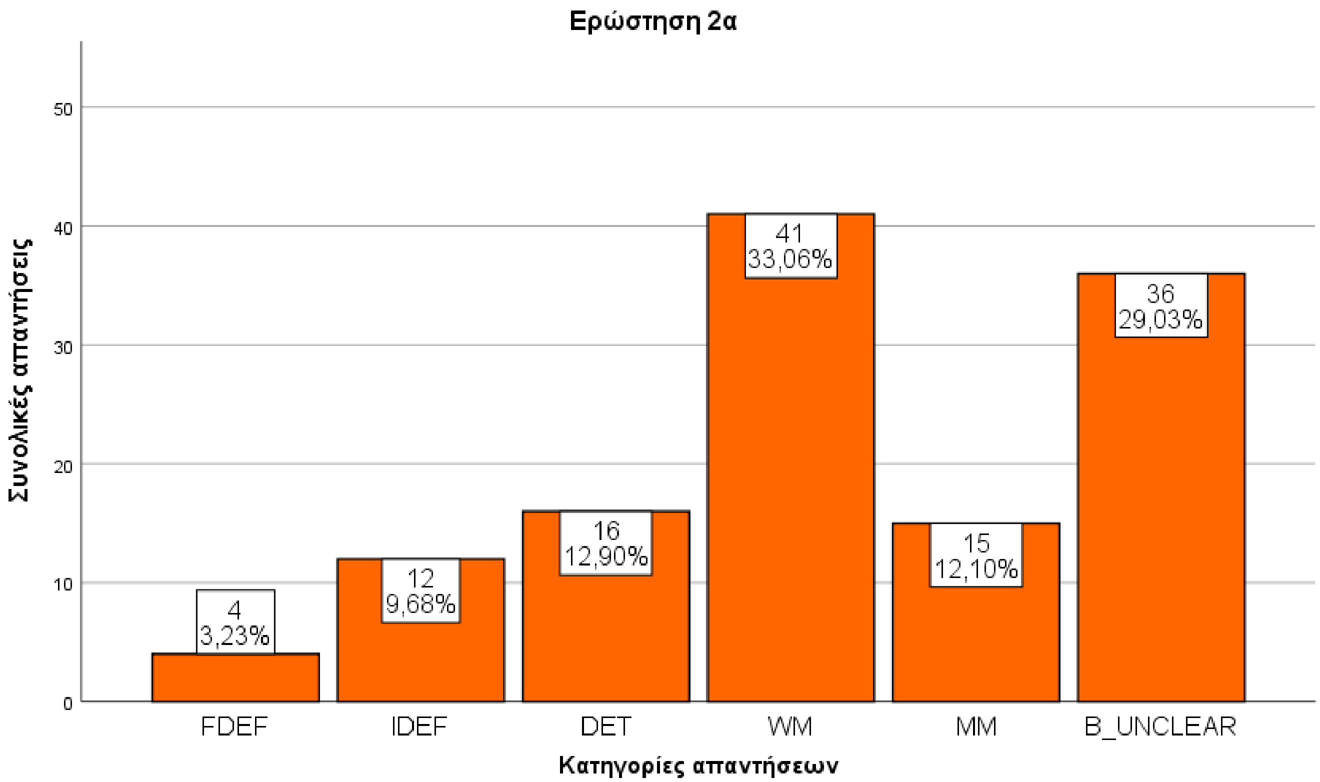
Στη συνέχεια ακολουθούν τα στατιστικά στοιχεία από την ανάλυση των δεδομένων. Αρχικά, στο Σχήμα 7.3 στην πρώτη στήλη του πίνακα απεικονίζονται κωδικοποιημένες οι κατηγορίες των απαντήσεων. Στη δεύτερη στήλη βρίσκονται οι συχνότητες των απαντήσεων, δηλαδή πόσες φορές βρέθηκε η κάθε απάντηση στο δείγμα και στην τρίτη στήλη είναι οι σχετικές συχνότητες, δηλαδή το ποσοστό επί τοις εκατό της κάθε απάντησης στο δείγμα. Στο συγκεκριμένο ερώτημα, παρατηρήθηκε ότι κάποιες από τις απαντήσεις των φοιτητών ανήκουν σε πάνω από μία κατηγορίες. Για αυτό το λόγο, στην τέταρτη στήλη, παρουσιάζονται οι απαντήσεις της συγκεκριμένης κατηγορίας ανά φοιτητή. Για παράδειγμα, η απάντηση του φοιτητή 1 ανήκει και στην κατηγορία DET, γιατί έγραψε την ορίζουσα δύο διανυσμάτων, αλλά και στην κατηγορία MM,γιατί δεν έγραψε το μέτρο του εξωτερικού γινομένου. Επομένως παρόλο που έχουμε 114 φοιτητές, έχουμε 123 απαντήσεις. Αυτός είναι και ο λόγος που διαφέρουν τα ποσοστά μεταξύ της τρίτης και της τέταρτης στήλης.

Ερώτηση 2α

		Responses		Percent of Cases
		N	Percent	
Κατηγορίες απαντήσεων	FDEF	4	3,2%	3,5%
	IDEF	12	9,7%	10,5%
	DET	16	12,9%	14,0%
	WM	41	33,1%	36,0%
	MM	15	12,1%	13,2%
	B_UNCLEAR	36	29,0%	31,6%
Total		124	100,0%	108,8%

Σχήμα 7.3: Πίνακας συχνοτήτων των απαντήσεων της Ερώτησης 2α - Ορισμός του εξωτερικού γινομένου

Έπειτα παραθέτεται στο Σχήμα 7.4, το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων των απαντήσεων, στο οποίο φαίνονται και οι σχετικές συχνότητες.



Σχήμα 7.4: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων απαντήσεων της Ερώτησης 2α - Ορισμός του εξωτερικού γινομένου

Από το ραβδόγραμμα 7.4 προκύπτει ότι το 33,06% των απαντήσεων είχαν λάθος το μέτρο του εξωτερικού γινομένου. Συγκεκριμένα, οι φοιτητές ταύτισαν το συμβολισμό $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, που παράγει ένα διάνυσμα, με το $|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{a, b})$, δηλαδή έναν σταθερό αριθμό. Αυτό, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της πρώτης ερώτησης, μας προβληματίζει ιδιαίτερα. Από την προηγούμενη ερώτηση προέκυψε ότι το 62,28% των φοιτητών όταν σκέφτονται το εξωτερικό γινόμενο τους έρχεται στο νου το διάνυσμα, ενώ σε αυτήν την ερώτηση το 36% των φοιτητών που ήταν και η πλειοψηφία ταύτισε τον συμβολισμό του εξωτερικού γινομένου με έναν αριθμό, το μέτρο του. Δηλαδή από την πρώτη ερώτηση προκύπτει:

$$\textbf{Εξωτερικό γινόμενο} \Longrightarrow \textbf{Διάνυσμα}, \text{ το οποίο είναι σωστό,}$$

ενώ από τη δεύτερη:

$$\begin{gathered}\textbf{Εξωτερικό γινόμενο} \Longrightarrow \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \Longrightarrow |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \textbf{Μέτρο} \Longrightarrow \textbf{Αριθμός}, \text{ το οποίο είναι λάθος.}\end{gathered}$$

Από το Σχήμα 7.4 παρατηρούμε επίσης, ότι το 3,23% των απαντήσεων ήταν ο τυπικός ορισμός, ενώ το 9,68% έγραψε μια εικόνα που είχε για τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι 36 απαντήσεις, δηλαδή το 29,03% των απαντήσεων ήταν είτε ασαφείς ή κενές.

Ερώτηση 2β - Γεωμετρική αναπαράσταση εξωτερικού γινομένου

1. **C** (**correct**) - Σωστό σχήμα
   Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι απαντήσεις όπου οι φοιτητές έχουν σχεδιάσει δύο συνεπίπεδα, μη συνευθειακά διανύσματα και ένα κάθετο σε αυτά διάνυσμα, το οποίο το έχουν ορίσει ως το εξωτερικό γινόμενο των δύο προηγούμενων.

2. **AREA/VOL** (**area – volume**) - Εμβαδόν ή Όγκος
   Κάποιοι από τους φοιτητές απάντησαν ότι η γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου είναι το εμβαδόν που ορίζεται από δύο συνεπίπεδα διανύσματα και ισούται με το μέτρο του εξωτερικού γινομένου. Κάποιοι άλλοι έγραψαν ότι η γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου είναι ο όγκος του παραλληλογράμμου.

3. **VERBAL** (**verbal**) - Λεκτική περιγραφή σχήματος
   Με αυτόν τον τρόπο κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις που έδωσαν τη γεωμετρική ερμηνεία με περιφραστικό τρόπο, δηλαδή με λόγια. Για παράδειγμα, ένας φοιτητής έγραψε: " **Το εξωτερικό γινόμενο αναπαριστά ένα κάθετο διάνυσμα σε δύο άλλα διανύσματα**"[No 24].

4. **B/UNCLEAR** (**blank – unclear**) - Κενή ή Ασαφής απάντηση
   Σε αυτή την κατηγορία βρίσκονται οι απαντήσεις οι οποίες ήταν ή κενές ή ασαφείς. Ασαφή χαρακτηρίστηκε μια απάντηση που παρόλο που δεν ήταν κενή δεν μπορεί να θεωρηθεί σωστή. Τέτοια παραδείγματα είναι τα εξής:
   Ο φοιτητής 66 **έχει σχεδιάσει και ονομάσει τρία διανύσματα ένα $\overrightarrow{a}$, ένα $\overrightarrow{b}$ και ένα $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, όμως δεν έχει δείξει ότι το τρίτο διάνυσμα είναι κάθετο στο δύο αρχικά.**, επομένως δεν μπορεί να θεωρηθεί σωστή η απάντησή του.
   Ο φοιτητής 13 από την άλλη έχει γράψει "**Γεωμετρική ερμηνεία: Εμβαδόν**", το οποίο επίσης δεν μπορεί να θεωρηθεί ολοκληρωμένη απάντηση.

Πίνακας 7.3: Ερώτηση 2β - Γεωμετρική Αναπαράσταση εξωτερικού γινομένου

	Κατηγορίες και Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**
1	C (*correct*)	Σωστό Σχήμα
2	$AREA/VOL(area - volume)$	Εμβαδόν ή Όγκος
3	$VERBAL$ (*verbal*)	Λεκτική περιγραφή σχήματος
4	$B/UNCLEAR$ $(blank - unclear)$	Κενή ή Ασαφής απάντηση

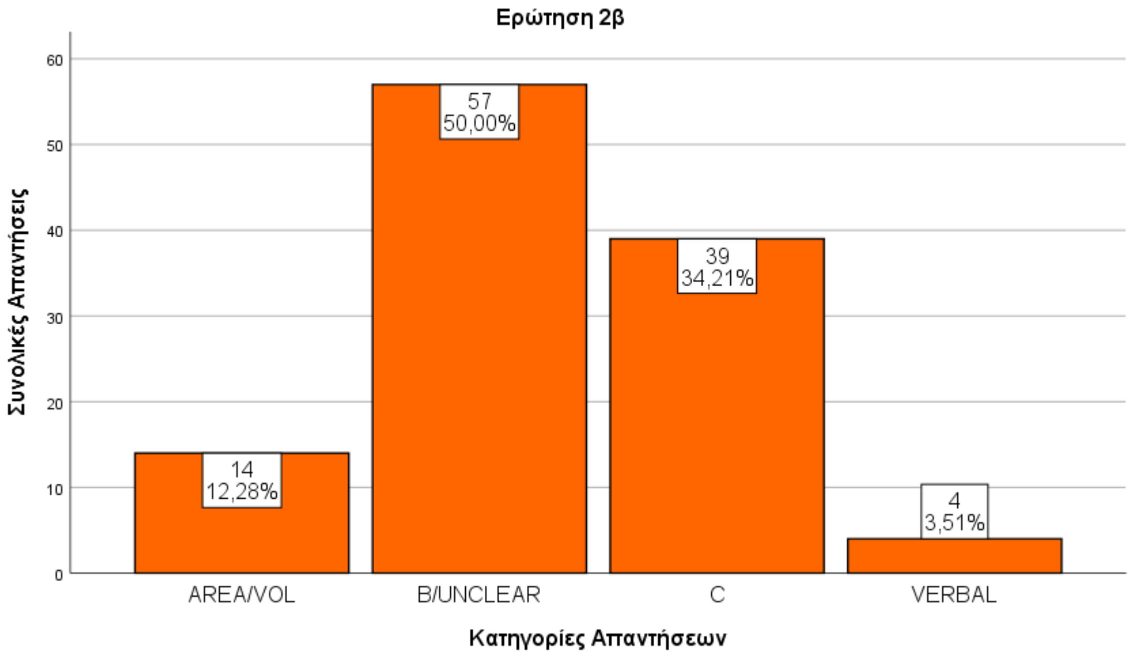
Στο Σχήμα 7.5 στην πρώτη στήλη φαίνονται οι κατηγορίες των απαντήσεων, σύμφωνα με την παραπάνω κωδικοποίηση και στην δεύτερη στήλη είναι οι συχνότητες. Η τρίτη και η τέταρτη στήλη είναι το ποσοστό εμφάνισης της κάθε απάντησης στο δείγμα των φοιτητών. Οι δύο αυτές στήλες είναι ίδιες γιατί δεν υπάρχουν δεδομένα χωρίς τιμή στο δείγμα.

Ερώτηση 2β

		Frequency	Percent	Valid Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	C	39	34,2	34,2
	VERBAL	4	3,5	3,5
	AREA/VOL	14	12,3	12,3
	B/UNCLEAR	57	50,0	50,0
	Total	114	100,0	100,0

Σχήμα 7.5: Πίνακας συχνοτήτων των απαντήσεων της Ερώτησης 2β - Γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου

Στη συνέχεια ακολουθεί στο Σχήμα 7.6, το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων των απαντήσεων, στο οποίο φαίνονται και οι σχετικές συχνότητες.



Σχήμα 7.6: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων απαντήσεων της Ερώτησης 2β - Γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου

Από το παραπάνω ραβρόγραμμα 7.6 προκύπτει ότι οι μισοί από τους πρωτοετείς φοιτητές άφησαν κενή τη συγκεκριμένη ερώτηση, γεγονός που μας γεννάει προβληματισμούς για την αντίληψη των φοιτητών ως προς τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις μαθηματικών εργαλείων. Παρόλα αυτά δεν μπορούμε να αγνοήσουμε ότι το 34,21% απέδωσε σωστά την γεωμετρική αναπαράστασή του. Ενώ το 12,28% απάντησε εμβαδόν παραλληλογράμμου ή όγκος παραλληλεπιπέδου. Στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας μαζί με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, όπως μας ενημέρωσαν οι αρμόδιοι καθηγητές, γίνεται αναφορά και στο εμβαδόν παραλληλογράμμου και στον όγκο παραλληλεπιπέδου. Ωστόσο, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου σχετίζεται με το μέτρο του εξωτερικού γινομένου και ο όγκος παραλληλεπιπέδου με το μεικτό γινόμενο, δηλαδή το συνδυασμό του εσωτερικού γινομένου με το εξωτερικό. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι, πρώτον, οι φοιτητές που έδωσαν αυτές τις απαντήσεις στο άκουσμα της φράσης, "Γεωμετρική αναπαράσταση εξωτερικού γινομένου", τους έρχεται στο μυαλό κάτι που είναι σχήμα και πιθανώς το θυμούνται από το μάθημα που όρισαν το εξωτερικό γινόμενο, επομένως ο συνδυασμός τους τους οδήγησε σε αυτήν την λάθος απάντηση. Δεύτερον παρατηρούμε ότι αυτοί οι φοιτητές συγχέουν ένα μέγεθος, όπως ο όγκος και το εμβαδόν, με ένα διάνυσμα, επειδή και τα δύο έχουν γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Τέλος, όπως φαίνεται από το ραβδόγραμμα 7.6, 4 από τους φοιτητές θεώρησαν ότι μπορούν να απαντήσουν λεκτικά στο συγκεκριμένο ερώτημα και αντί να σχεδιάσουν τη γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου, προτίμησαν να περιγράψουν το σχήμα με τη χρήση γραπτού λόγου.

7.1.3 Ερώτηση 3

"Σε ποια μαθήματα έχετε συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο κατά τη διάρκεια των μέχρι τώρα σπουδών σας; Να αναφέρετε επιγραμματικά εφαρμογές που έχετε κάνει σε αυτά τα μαθήματα."

Η συγκεκριμένη ερώτηση έχει ως στόχο την καταγραφή των διαφόρων εφαρμογών του εξωτερικού γινομένου που έχουν συναντήσει οι φοιτητές στην μέχρι τώρα ακαδημαϊκή τους πορεία. Με βάση τις απαντήσεις τους η ερώτηση αυτή χωρίστηκε σε δύο μέρη, το πρώτο με τα μαθήματα που έχουν συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο και το δεύτερο με εφαρμογές που έχουν κάνει σε αυτά τα μαθήματα. Παρακάτω ακολουθούν οι κατηγορίες οι οποίες σχηματίστηκαν έπειτα από την επεξεργασία των απαντήσεων.

Ερώτηση 3α - Μαθήματα που έχουν συναντήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο

Στον πίνακα 7.4 είναι οι κατηγορίες των μαθημάτων, στις οποιές ανέφεραν οι φοιτητές ότι έχουν συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο.

Πίνακας 7.4: Ερώτηση 3α - Μαθήματα που έχουν συναντήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο

	Κατηγορίες και Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**
1	*PH (Physics)*	Φυσική
2	*AL (LinearAlgebra)*	Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία
3	*M (Mechanics)*	Μηχανική
4	*AN (Analysis)*	Ανάλυση
5	*J (Java)*	*Java*
6	*G (Geometry)*	Γεωμετρία
7	*Lykeio*	Λύκειο
8	*B (blank)*	Κενή

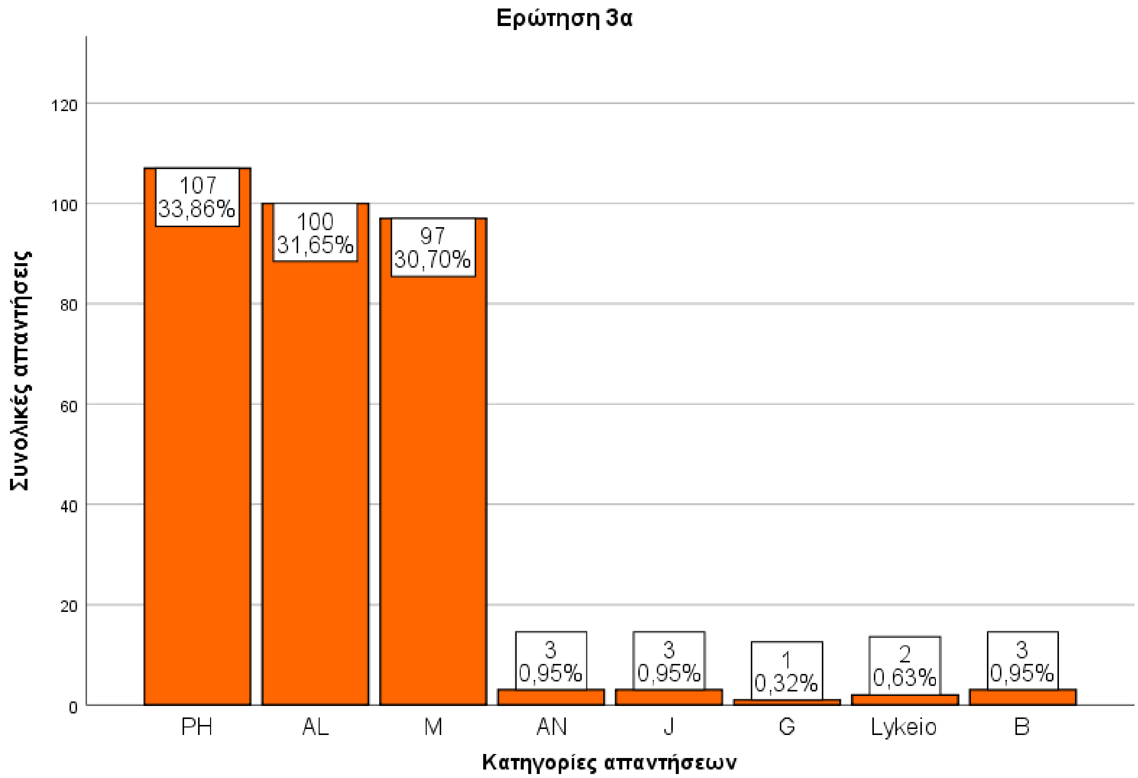
Στο σχήμα 7.7 παρατηρούμε στην πρώτη στήλη τις κατηγορίες των μαθημάτων που έχουν συναντήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο. Στη δεύτερη, είναι η συχνότητα που παρατηρείται το κάθε μάθημα στις απαντήσεις που έδωσαν και στην τρίτη είναι το ποσοστό της κάθε απάντησης προς τη συνολικές απαντήσεις. Τέλος, η τέταρτη στήλη είναι το ποσοστό των απαντήσεων ως προς τον αριθμό των φοιτητών, μιας και κάθε φοιτητής έδωσε παραπάνω από μια απάντηση.

Ερώτηση 3α

		Responses N	Responses Percent	Percent of Cases
Κατηγορίες απαντήσεων	PH	107	33,9%	93,9%
	AL	100	31,6%	87,7%
	M	97	30,7%	85,1%
	AN	3	0,9%	2,6%
	J	3	0,9%	2,6%
	G	1	0,3%	0,9%
	B	3	0,9%	2,6%
	Lykeio	2	0,6%	1,8%
Total		316	100,0%	277,2%

Σχήμα 7.7: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 3α - Μαθήματα που έχουν συναντήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο

Από τον παραπάνω πίνακα 7.7 φαίνεται από την τρίτη στήλη ότι σχεδόν όλοι οι φοιτητές απάντησαν ότι τα μαθήματα που έχουν συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο είναι η **Φυσική** με 93,9%, η **Άλγεβρα** με 87,7% και η **Μηχανική** με 85,1%. Αξιοσημείωτο επίσης είναι ότι 2 φοιτητές ανέφεραν ότι είχαν συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο στο Λύκειο, το οποίο ενδεχομένως σημαίνει ότι κάποιοι καθηγητές θεώρησαν ότι τη στιγμή που έχουν την εισαγωγή στον διανυσματικό λογισμό της Β΄ Λυκείου μπορούν μετά το εσωτερικό γινόμενο να τους δείξουν και το εξωτερικό. Παρακάτω φαίνεται και το ραβδόγραμμα με τις αντίστοιχες συχνότητες και σχετικές συχνότητες.



Σχήμα 7.8: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 3α - Μαθήματα που έχουν συναντήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο

Ερώτηση 3β - Εφαρμογές που έχουν συναντήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο

Στον παρακάτω πίνακα (7.5) είναι οι κατηγορίες των εφαρμογών που ανέφεραν οι φοιτητές ότι έχουν συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο και στο Σχήμα 7.9 είναι τα στατιστικά στοιχεία που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων.

Πίνακας 7.5: Ερώτηση 3β - Εφαρμογές που έχουν συναντήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο

	Κατηγορίες και Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**
1	$AngularMomentum$ ($Angular\ Momentum$)	Στροφορμή
2	$CoriolisF$ ($Coriolis\ Force$)	Δύναμη *Coriolis*
3	$Curl$	Στροβιλισμός
4	$Gradient$	Ανάδελτα σε συντηρητικές δυνάμεις
5	$Level$	Εύρεση επιπέδου ή ευθείας
6	$Area$	Εμβαδόν
7	$Torque$	Ροπή
8	$Work$	Έργο - Ενέργεια
9	$Projection$	Προβολή διανυσμάτων
10	APP ($applications$)	Εφαρμογές Γραμμικής Άλγεβρας
11	$MixedPr$ ($Mixed\ Product$)	Μικτό γινόμενο διανυσμάτων
12	$CentrForce$ ($Centrifugal\ Force$)	Φυγόκεντρος Δύναμη
13	$SinRule$ ($Sine\ Rule$)	Νόμος Ημιτόνων
14	$Distance$	Απόσταση ευθειών
15	$Incompatible$	Ασύμβατες
16	B ($blank$)	Κενή

Από το παρακάτω Σχήμα 7.9, προκύπτει από την τρίτη στήλη ότι το 48,2% των φοιτητών απάντησε ότι μια εφαρμογή του εξωτερικού γινομένου είναι η **Ροπή**, το οποίο θεωρείται αναμενόμενο γιατί την έχουν ήδη από το πρώτο εξάμηνο στο μάθημα της Μηχανικής 1. Παρατηρείται ότι το 10,1% των απαντήσεων ανέφεραν την **Στροφορμή** και το **Επίπεδο**. Από τον στατιστικό πίνακα συμπεραίνουμε ότι οι απαντήσεις των φοιτητών παρουσιάζουν ποικιλομορφία στη συγκεκριμένη ερώτηση. Μάλιστα οι περισσότεροι φοιτητές που δεν την άφησαν κενή ανέφεραν πάνω από δύο εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου. Γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ενώ το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα καινούριο εργαλείο που οι φοιτητές δεν είχαν συναντήσει στα μαθητικά τους χρόνια, ήδη από το πρώτο εξάμηνο έχει εντυπωθεί στο νου τους ότι χρησιμοποιείται σε διάφορες εφαρμογές. Το συμπέρασμα αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι το εξωτερικό γινόμενο αποτελεί ουσιαστικά το πρώτο μαθηματικό εργαλείο που μαθαίνουν οι φοιτητές και μπορούν να το εφαρμόσουν σε άλλες επιστήμες, όπως η Φυσική και η Μηχανική. Μέχρι την εισαγωγή τους στο πανεπιστήμιο οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, ήταν αρκετές για να υπολογίσουν ό,τι χρειάζονταν, σε ασκήσεις Φυσικής ή Χημείας για παράδειγμα.

Ερώτηση 3β

		Responses		Percent of Cases
		N	Percent	
Κατηγορίες απαντήσεων	AngularMomentum	19	10,1%	16,7%
	CoriolisF	6	3,2%	5,3%
	Curl	2	1,1%	1,8%
	Gradient	8	4,3%	7,0%
	Level	19	10,1%	16,7%
	Area	6	3,2%	5,3%
	Torque	55	29,3%	48,2%
	Work	2	1,1%	1,8%
	Projection	1	0,5%	0,9%
	APP	9	4,8%	7,9%
	MixedPr	1	0,5%	0,9%
	CentrForce	2	1,1%	1,8%
	SinRule	1	0,5%	0,9%
	Distance	1	0,5%	0,9%
	Incompatible	1	0,5%	0,9%
	B	55	29,3%	48,2%
Total		188	100,0%	164,9%

Σχήμα 7.9: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 3β - Εφαρμογές που έχουν συναντήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο

7.1.4 Ερώτηση 4

"Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 0\vec{i}+0\vec{j}+5\vec{k}$ και $\vec{B} = 0\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}$ σε ένα χώρο τριών διαστάσεων, όπου $\vec{i} =< 1,0,0 >, \vec{j} =< 0,1,0 >, \vec{k} =< 0,0,1 >$ τα θετικά μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y, z . Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{C}$ που να είναι κάθετο στα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$, α) γεωμετρικά και β) με αλγεβρικό τρόπο"

Η ερώτηση αυτή σχεδιάστηκε με σκοπό να ελέγξει κατά πόσο μπορούν οι φοιτητές να διαχωρίσουν την αλγεβρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου από την γεωμετρική του αναπαράσταση. Για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός έχει δοθεί σε μορφή άσκησης και το εξωτερικό γινόμενο ζητείται έμμεσα στα δύο ερωτήματα. Η καταγραφή των απαντήσεων και η μελέτη του θεωρητικού πλαισίου της παρούσας έρευνας οδήγησε στην κατηγοριοποίηση των απαντήσεων. Συγκεκριμένα, καταγράφηκαν οι σωστές απαντήσεις, είτε η επίλυση τους έγινε γεωμετρικά, είτε λεκτικά, καθώς και τα λάθη στα οποία υποκύπτουν οι φοιτητές. Ο τρόπος κατηγοριοποίησης φαίνεται παρακάτω.

Ερώτημα 4α - γεωμετρική επίλυση

1. **CG** (**correct graphical**) - Σωστό γεωμετρικά
   Με αυτόν τον χαρακτηρισμό κατηγοριοποιήθηκαν οι σωστές απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα. Δηλαδή όταν η απάντηση είχε σωστή λύση γεωμετρικά.

2. **CNS** (**correct no schema**) - Σωστό χωρίς σχήμα
   Κάποιοι φοιτητές σε αυτό το ερώτημα παρόλο που ζητούσε να λυθεί γεωμετρικά έδωσαν τη σωστή απάντηση αλλά με λόγια, χρησιμοποιώντας μερικές φορές και τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Κάποιες από τις απαντήσεις ήταν οι εξής:
   "**Οποιοδήποτε διάνυσμα** $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{i}$"[No32].
   "**Το διάνυσμα** $\overrightarrow{A}$ **είναι ένα διάνυσμα παράλληλο στον άξονα** $z'z$, **ενώ το διάνυσμα** $\overrightarrow{B}$ **είναι παράλληλο στον άξονα** $y'y$. **Άρα το ζητούμενο διάνυσμα είναι κάθετο στο επίπεδο** yz, **δηλαδή παράλληλο στον άξονα** $x'x$. **π.χ.** $\overrightarrow{c} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$[No79].
   Αρκετοί ήταν επίσης οι φοιτητές που έλυσαν το πρώτο ερώτημα αλγεβρικά χρησιμοποιώντας την ορίζουσα, παρόλο που η άσκηση ζητούσε γεωμετρική επίλυση.

3. **B/UNCLEAR** (**blank – unclear**) - Κενή ή Ασαφής απάντηση
   Έτσι χαρακτηρίστηκαν οι ερωτήσεις χωρίς απάντηση ή που δεν σχετίζονταν με το ζητούμενο. Κάποιες από αυτές είναι οι εξής:
   "**Γεωμετρικά είναι το κάθετο διάνυσμα που ορίζουν τα διανύσματα** $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$"[No4].
   Κάποιος άλλος φοιτητής τοποθέτησε σωστά στους άξονες τα διανύσματα $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$, αλλά δεν σχεδίασε το ζητούμενο διάνυσμα $\overrightarrow{C}$[No71].
   Ενώ ένας άλλος σχεδίασε τα διανύσματα $\overrightarrow{A}$ και $\overrightarrow{B}$ και έπειτα φαίνεται να σχεδίασε ένα

αντίθετο του διάνυσματος $\overrightarrow{A}$, το οποίο ονόμασε $\overrightarrow{C}$[No110], το οποίο είναι λάθος.

Πίνακας 7.6: Ερώτηση 4α

	Κατηγορίες και Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**
1	CG (*correct graphical*)	Σωστό γεωμετρικά
2	CNS (*correct no schema*)	Σωστό χωρίς σχήμα
3	$B/UNCLEAR$ (*blank – unclear*)	Κενή ή Ασαφής απάντηση

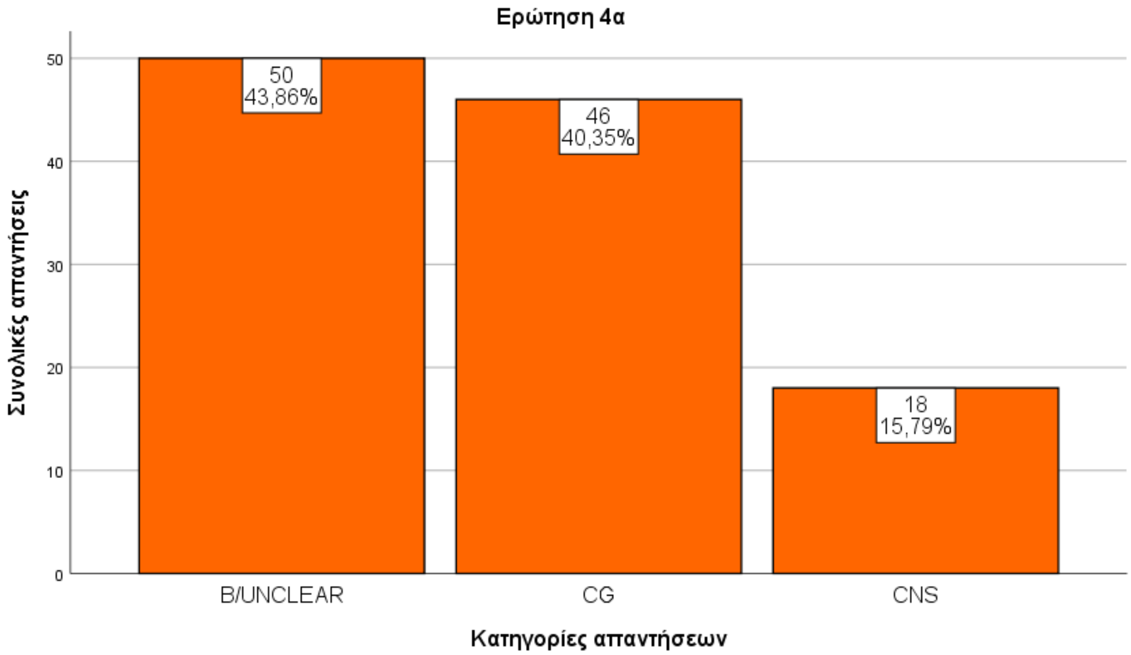
Στη συνέχεια ακολουθεί ο πίνακας συχνοτήτων των απαντήσεων 7.10, ο οποίος στη τρίτη και την τέταρτη στήλη περιέχει τις σχετικές συχνότητες.

Ερώτηση 4α

		Frequency	Percent	Valid Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	CG	46	40,4	40,4
	CNS	18	15,8	15,8
	B/UNCLEAR	50	43,9	43,9
	Total	114	100,0	100,0

Σχήμα 7.10: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 4α - Γεωμετρική επίλυση

Έπειτα παραθέτεται το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων των απαντήσεων (Σχ. 7.11) της ερώτησης 4α, συμπεριλαμβάνοντας και τις σχετικές συχνότητες.



Σχήμα 7.11: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 4α - Γεωμετρική επίλυση

Από τα προηγούμενα σχήματα παρατηρούμε ότι 50 από τους 114 φοιτητές είτε άφησαν κενό το πρώτο ερώτημα είτε δεν έδωσαν σαφή απάντηση. Οι υπόλοιποι 64 έλυσαν το ερώτημα. Από αυτούς οι 46, δηλαδή το 40,35%, ανταποκρίθηκαν σωστά στο ερώτημα. Οι υπόλοιποι 18, δηλαδή το 15,79% υπολόγισε σωστά το ζητούμενο αλλά με λάθος τρόπο, δηλαδή αλγεβρικά. Το γεγονός ότι το 43,86% δεν ανταποκρίθηκε στην άσκηση, η οποία ουσιαστικά ζητούσε να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα σε άλλα δύο, μας δημιουργεί διάφορους προβληματισμούς. Αρχικά, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σύνδεση αυτής της ερώτησης με την ερώτηση 2β, που ζητούσε από τους φοιτητές τη γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου. Από τα ραβδογράμματα 7.11 και 7.6 προκύπτει ότι οι συχνότητες των απαντήσεις που χαρακτηρίσαμε **B/UNCLEAR** ήταν σχεδόν ίσες. Ενισχύεται, λοιπόν, το συμπέρασμά μας ως προς τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές με τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις.

Ερώτημα 4β - αλγεβρική επίλυση

1. **C** (**correct**) - Σωστό
   Με αυτόν τον συμβολισμό χαρακτηρίστηκαν οι απαντήσεις που ήταν σωστές, δηλαδή που η εύρεση του διανύσματος $\overrightarrow{C}$ έγινε χρησιμοποιώντας την ορίζουσα και κάνοντας σωστούς υπολογισμούς.

2. **WD** (**wrong determinant**) - Λάθος στην ορίζουσα
   Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν οι απαντήσεις οι οποίες έχουν λάθος στην ορίζουσα ή στο αποτέλεσμα της ορίζουσας. Συχνές ήταν οι απαντήσεις που είχαν σωστό τον τύπο

της ορίζουσας, αλλά στο αποτέλεσμα ήταν λάθος είτε το πρόσημο είτε ο αριθμός, είτε υπήρχε λάθος στις πράξεις.

3. **B/UNCLEAR** (**blank – unclear**) - Κενή ή Ασαφής απάντηση
   Με αυτόν τον τρόπο χαρακτηρίστηκαν οι απαντήσεις χωρίς απάντηση ή αυτές που δεν μπορούσαν να θεωρηθούν σωστές. Για παράδειγμα:
   “**Αφού $\overrightarrow{C}$ κάθετο στο $\overrightarrow{A}$ και $\overrightarrow{C}$ κάθετο στο $\overrightarrow{B}$, τότε με το $\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}=0$ και $\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{B}=0$ και έτσι βρίσκω τους συντελεστές του διανύσματος $\overrightarrow{C}$**[No81].
   “**Οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{a}\|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}$**”[No32].

Πίνακας 7.7: Ερώτηση 4β

	Κατηγορίες και Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**
1	*C (correct)*	Σωστό
2	*WD (wrong determinant)*	Λάθος στην ορίζουσα
3	*B/UNCLEAR (blank – unclear)*	Κενή ή Ασαφής απάντηση

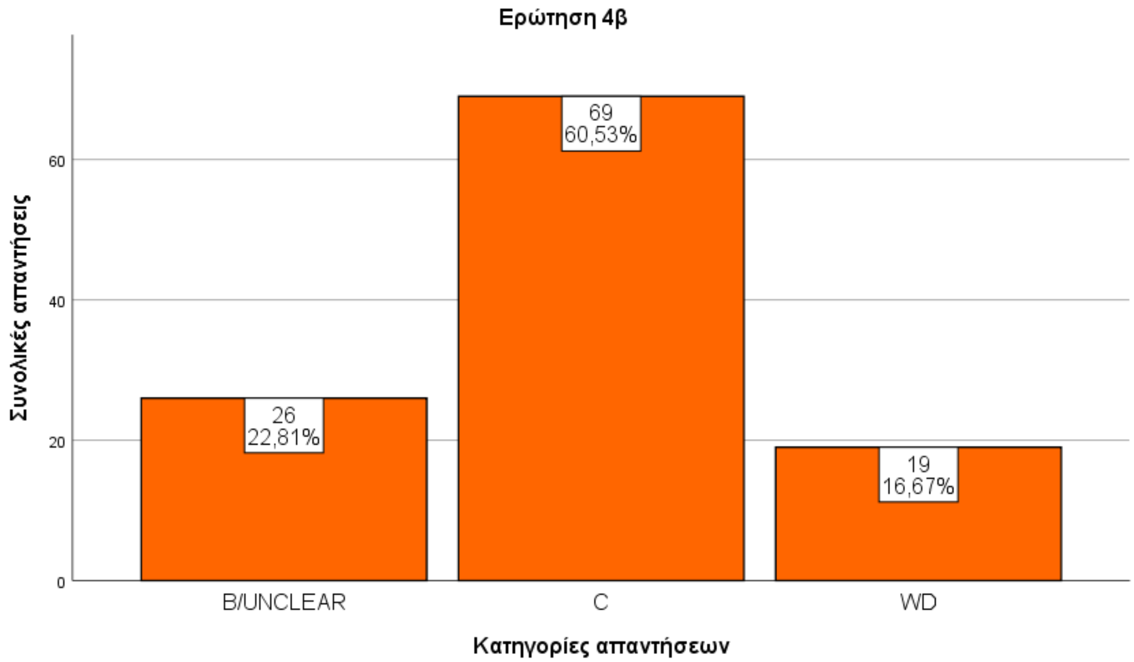
Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο πίνακας συχνοτήτων, Σχήμα 7.12. Στη δεύτερη στήλη είναι οι συχνότητες των απαντήσεων και στην τρίτη οι σχετικές συχνότητες, δηλαδή το ποσοστό εμφάνισης της κάθε κατηγορίας απαντήσεων στο δείγμα. Η τέταρτη στήλη είναι ίδια με την τρίτη διότι δεν έχουμε ελλιπείς παρατηρήσεις.

Ερώτηση 4β

		Frequency	Percent	Valid Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	C	69	60,5	60,5
	WD	19	16,7	16,7
	B/UNCLEAR	26	22,8	22,8
	Total	114	100,0	100,0

Σχήμα 7.12: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 4β - Αλγεβρική επίλυση

Παρακάτω παρουσιάζεται και το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων (Σχήμα 7.13), στο οποίο φαίνονται και οι σχετικές συχνότητες.



Σχήμα 7.13: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 4β - Αλγεβρική επίλυση

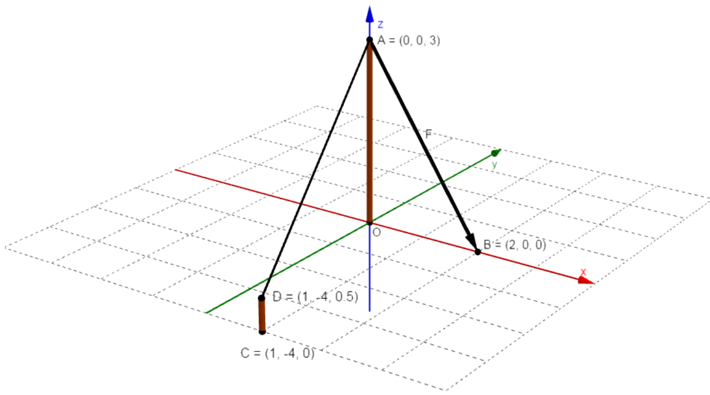
Από το παραπάνω ραβδόγραμμα 7.13 παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των φοιτητών έλυσε σωστά το ερώτημα. Όπως περιμέναμε, οι φοιτητές οι οποίοι έχουν κατακτήσει το κομμάτι της άλγεβρας από το σχολείο, κατάφεραν να υπολογίσουν με επιτυχία το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μέσω της ορίζουσας. Αυτό φάνηκε και από τις μη σωστές απαντήσεις, όπως προκύπτει και από τον στατιστικό έλεγχο. Τα λάθη που έκαναν στην ορίζουσα το 16,67% των φοιτητών ήταν κυρίως αριθμητικά. Τέλος, ένα μικρό σχετικά ποσοστό 22,81% άφησαν κενή την ερώτηση.

7.1.5 Ερώτηση 5

Έστω ξύλινοι πάσσαλοι OA και CD και συρματόσχοινο AB και AD. Μέσω του συρματόσχοινου AB ασκείται στο σημείο A δύναμη $\vec{F} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$. Να βρείτε:

α) τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο O

β) τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο D



Η πέμπτη ερώτηση σχεδιάστηκε ώστε να ελέγξει τη δυνατότητα των φοιτητών να εφαρμόζουν το εξωτερικό γινόμενο σε μια εφαρμογή της Μηχανικής. Ελέγχεται αν οι φοιτητές είναι σε θέση να βρουν τα σωστά διανύσματα που πρέπει να χρησιμοποιήσουν για να υπολογίσουν τη ροπή στο κάθε ερώτημα. Επίσης, ελέγχεται αν αντιλαμβάνονται ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν το εξωτερικό γινόμενο, παρόλο που δεν ζητείται στην άσκηση. Συγκεκριμένα, και στα δύο ερωτήματα έπρεπε αρχικά να βρουν το εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων, που θα τους έδιναν τη ζητούμενη ροπή. Τα διανύσματα αυτά έπρεπε να τα υπολογίσουν από το σχήμα. Κατά την ανάλυση των δεδομένων, καταγράφηκαν οι σωστές απαντήσεις, αλλά και τα λάθη στα οποία υποκύπτουν οι φοιτητές. Ο τρόπος κατηγοριοποίησης φαίνεται παρακάτω. Οι κατηγορίες είναι κοινές και για τα δύο ερωτήματα.

1. **C** (**correct**) - Σωστό
   Με αυτόν τον συμβολισμό χαρακτηρίστηκαν οι σωστές απαντήσεις, δηλαδή, όσες είχαν υπολογίσει σωστά τη ροπή.

2. **WD** (**wrong determinant**) - Λάθος ορίζουσα
   Με αυτόν τον συμβολισμό χαρακτηρίστηκαν οι απαντήσεις που είχαν λάθος στην ορίζουσα, κυρίως αριθμητικό. Για παράδειγμα, ένας από τους φοιτητές, παρόλο που έγραψε σωστά τον τύπο και την ορίζουσα, βρήκε λάθος το τελικό αποτέλεσμα[No14].

3. **F** (**formula**) - Λάθος τύπος
   Σε αυτή την κατηγορία, ανήκουν οι απαντήσεις των φοιτητών που έκαναν λάθος στον τύπο της ροπής. Θα έπρεπε να υπολογίζουν το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος της απόστασης με την δύναμη, όμως έκαναν "**Δύναμη**×**Απόσταση**".

4 **V** (**vector**) - Μη σωστά διανύσματα
   Ένα ακόμη λάθος που παρατηρήθηκε αρκετά ήταν ότι οι φοιτητές δεν έβρισκαν σωστά το διάνυσμα με το οποίο έπρεπε να πολλαπλασιάσουν το διάνυσμα της δύναμης. Χαρακτηριστικό ήταν το παράδειγμα του φοιτητή που στο ερώτημα α) έγραψε "$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{F}$", ενώ το σωστό ήταν $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F}$ και στο ερώτημα β) έγραψε "$\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{F}$"[No43], ενώ το σωστό

ήταν $\overrightarrow{DA} \times \vec{F}$.

5. **B/UNCLEAR (blank – unclear)** - Κενή ή Ασαφής απάντηση
   Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν οι κενές απαντήσεις και οι απαντήσεις που δεν είχαν σχέση με το ζητούμενο της άσκησης ή που δεν ήταν ολοκληρωμένες. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα εξής:
   Ένας φοιτητής έγραψε σωστά τον τύπο της ροπής, όμως δεν έγραψε ούτε την ορίζουσα ούτε το τελικό αποτέλεσμα[No97].
   Ενώ κάποιος άλλος έγραψε σωστά τον τύπο της ροπής, αλλά δεν έγραψε ούτε την ορίζουσα ούτε το τελικό αποτέλεσμα[No110].

Πίνακας 7.8: Ερώτηση 5

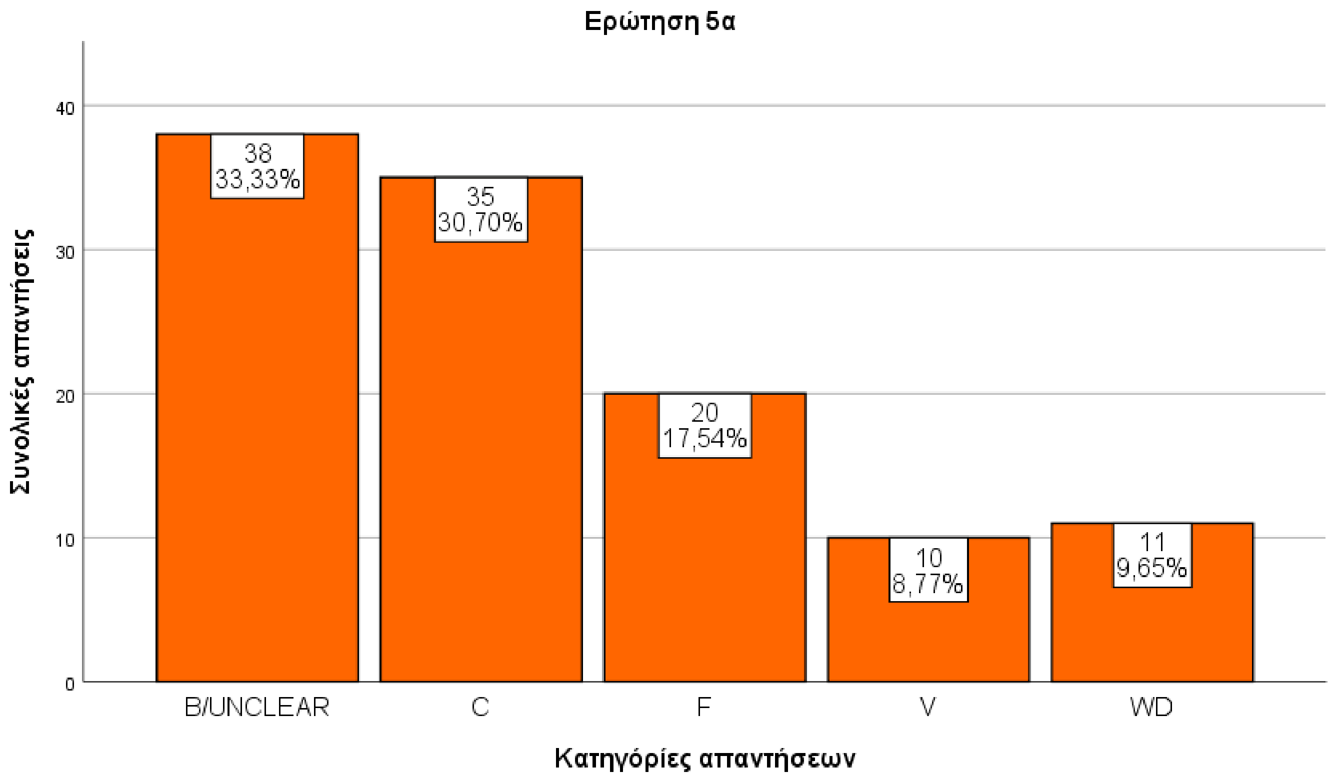
	Κατηγορίες και Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**
1	C (*correct*)	Σωστό
2	WD (*wrong determinant*)	Λάθος ορίζουσα
3	F (*formula*)	Λάθος τύπος
4	V (*vector*)	Μη σωστά διανύσματα
5	$B/UNCLEAR$ (*blank – unclear*)	Κενή ή Ασαφής απάντηση

Στη συνέχεια παραθέτονται οι πίνακες συχνοτήτων και τα ραβδογράμματα ανά ερώτημα.

Ερώτηση 5α

		Frequency	Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	C	35	30,7
	F	20	17,5
	V	10	8,8
	WD	11	9,6
	B/UNCLEAR	38	33,3
	Total	114	100,0

Σχήμα 7.14: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 5α - Εύρεση ροπής δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο O



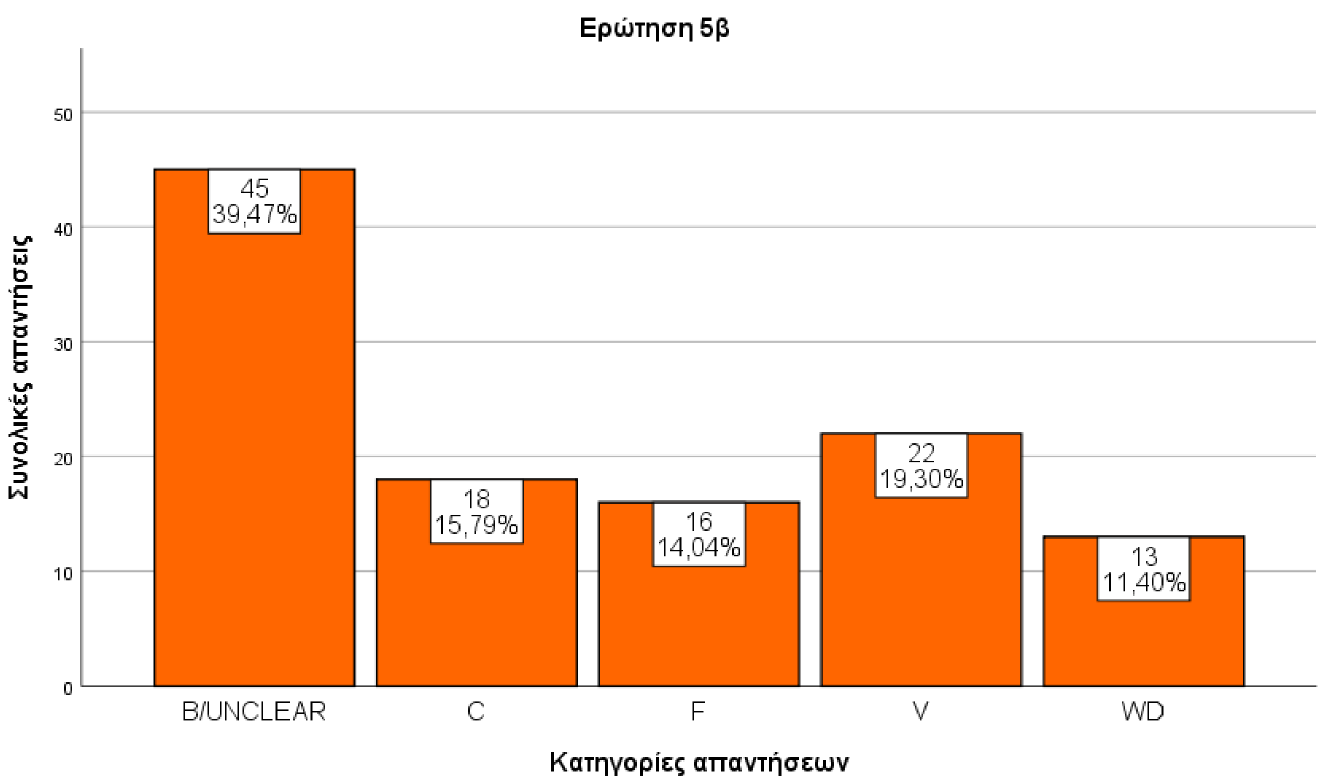
Σχήμα 7.15: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 5α - Εύρεση ροπής δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο D

Από τα παραπάνω Σχήματα 7.14 7.15 παρατηρούμε ότι 35 από τους 114 έλυσαν σωστά την άσκηση και 38 από τους 114 έδωσαν κενή ή ασαφής απάντηση. Πρέπει εδώ να επισημάνουμε ότι το ερώτημα αυτό ήταν παρόμοιας δυσκολίας με το ερώτημα β της ερώτησης 4, διότι και αμφότερα ζητάνε έμμεσα το εξωτερικό γινόμενο δύο εύκολα αντιληπτών διανυσμάτων. Ωστόσο, η ερώτηση 5 περιέχει ένα σχήμα, το οποίο θα τους βοηθούσε να τη λύσουν. Άρα, θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί ενώ στην ερώτηση 4β που ήταν αλγεβρική το 60,53% απάντησε σωστά, ενώ στην 5α το 30,70%. Για να απαντήσουμε με σαφήνεια σε αυτό το ερώτημα θα ήταν προτιμότερο να συσχετίσουμε τις δύο μεταβλητές και να ελέγξουμε την ανεξαρτησίας τους. Τέλος, από τα σχήματα προκύπτει ακόμα ότι το 35,96% που αποτελούν τις υπόλοιπες κατηγορίες απαντήσεων είχε είτε λάθος πράξεις είτε λάθος τύπος είτε λάθος εύρεση διανύσματος.

Ερώτηση 5β

		Frequency	Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	C	18	15,8
	F	16	14,0
	V	22	19,3
	WD	13	11,4
	B/UNCLEAR	45	39,5
	Total	114	100,0

Σχήμα 7.16: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 5β - Εύρεση ροπής δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο D



Σχήμα 7.17: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 5β - Εύρεση ροπής δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο O

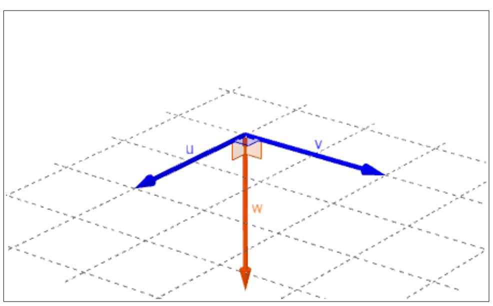
Από τα παραπάνω προκύπτει τελικά ότι περισσότεροι ήταν εκείνοι που άφησαν κενά και τα δύο ερωτήματα ή έδωσαν ασαφή απάντηση. Συγκεκριμένα, στο δεύτερο ερώτημα, το οποίο είναι και μεγαλύτερης δυσκολίας, μόνο το 15,79% απάντησε σωστά, ενώ στην κατηγορία $B/UNCLEAR$ ήταν το 39,41%. Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν ως έναν βαθμό να δικαιολογηθούν αν αναλογιστεί κανείς τη δυσκολία του ερωτήματος αν κάποιος δεν έχει παρακολουθήσει Μηχανική 1. Ωστόσο, ιδιαίτερη σημασία παρουσιάζουν οι άλλες 2 κατηγορίες, F και V, που δείχνουν τις παρανοήσεις των φοιτητών ως προς την εφαρμογή ενός μαθηματικού εργαλείου, όπως το εξωτερικό γινόμενο, σε μία άσκηση εκτός Μαθηματικών. Το 14,04% έκανε λάθος τον τύπο στο εξωτερικό γινόμενο. Εικάζουμε ότι αυτοί οι φοιτητές μπορεί να ήταν επηρεασμένοι από το Λύκειο, που έλεγαν την φράση "Ροπή ίσον Δύναμη επί Απόσταση", ενώ στο εξωτερικό γινόμενο αυτή η πράξη δίνει το αντίθετο διάνυσμα από το ζητούμενο. Τέλος, παρατηρούμε ότι το 19,30% έβαλε λάθος διάνυσμα στον τύπο, γεγονός που σημαίνει ότι πιθανώς να μην έχουν αντιληφθεί την άσκηση και να μην μπορούν να ερμηνεύσουν σωστά το σχήμα που τους δίνετε.

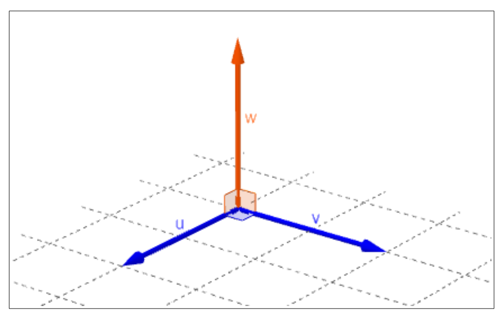
Τέλος πρέπει να επισημάνουμε ότι το ποσοστό επιτυχίας από το ερώτημα 5α στο ερώτημα 5β μειώθηκε σε μεγάλο βαθμό. Αυτό οφείλετε στο γεγονός ότι το δεύτερο ερώτημα έχει μεγαλύτερη δυσκολία και απαιτεί μεγαλύτερη εξοικείωση στην εύρεση διανυσμάτων στα τρισδιάστατα σχήματα.

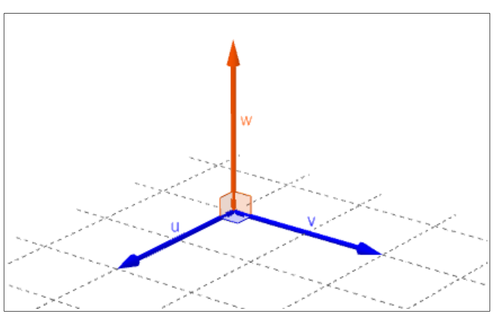
7.1.6 Ερώτηση 6

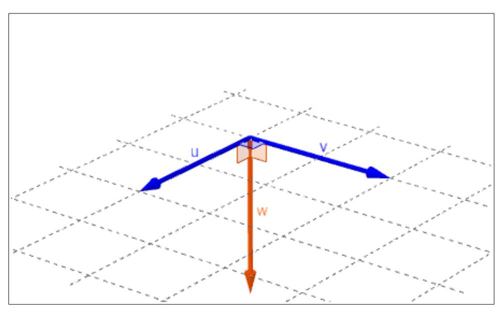
"Έστω δυο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ σε έναν χώρο τριών διαστάσεων με $\vec{u} \perp \vec{v}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις επιλογές (1,2,3,4) με μία από τις παρακάτω εικόνες (α,β,γ,δ):"

1. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ 2. $\vec{w} = \vec{-u} \times \vec{-v}$ 3. $\vec{w} = \vec{-u} \times \vec{v}$ 4. $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$

α. 

β. 

γ. 

δ. 

Η έκτη ερώτηση είναι μια άσκηση αντιστοίχησης. Περιέχει γεωμετρικές αναπαραστάσεις των ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου ώστε να ελεγχθεί η αντίληψη των φοιτητών στον τρισδιάστατο χώρο. Οι φοιτητές έπρεπε να αντιστοιχίσουν κάθε μια από τις επιλογές (1,2,3,4) με μια από τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις (α,β,γ,δ). Είναι απαραίτητο να διευκρινιστεί ότι οι εικόνες β και γ είναι μεταξύ τους ίδιες και οι εικόνες α και δ είναι μεταξύ τους ίδιες. Επομένως, οι επιλογές 1 και 2 αντιστοιχίζονται με τις εικόνες β και γ ενώ οι επιλογές 3 και 4 αντιστοιχίζονται με τις εικόνες α και δ. Με βάση τα παραπάνω, οι απαντήσεις χωρίστηκαν στις εξής τρεις κατηγορίες:

1. **Correct** - Σωστό
   Για τους φοιτητές που απάντησαν σωστά.

2. **False** - Λάθος
   Για τους φοιτητές που απάντησαν λάθος.

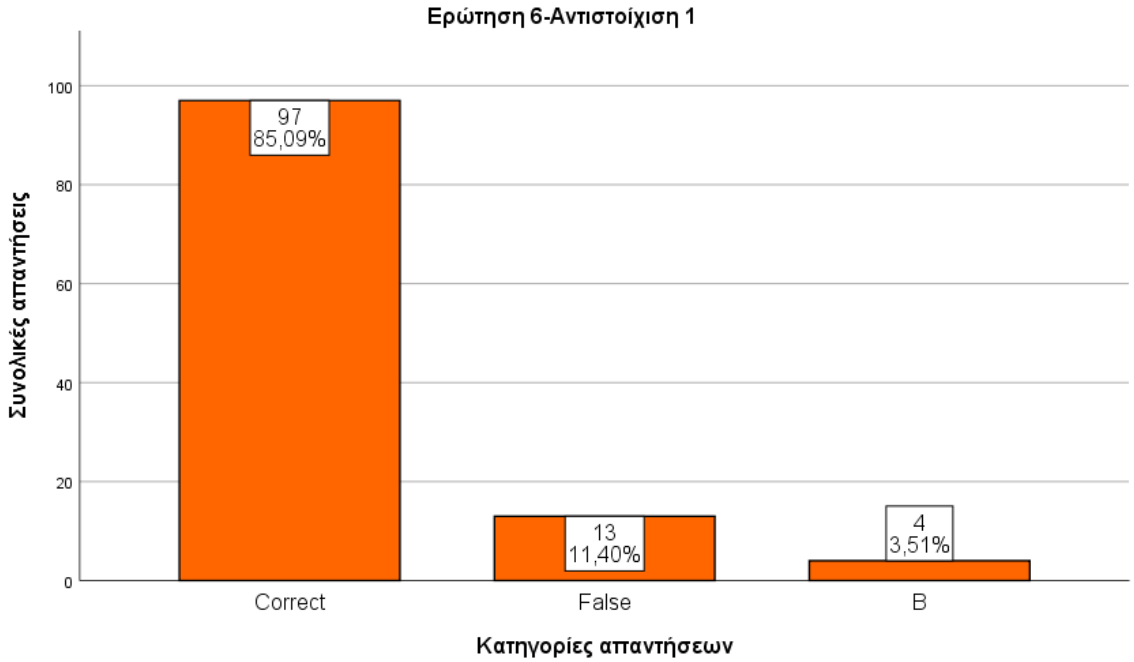
3. **B** (**blank**) - Κενό
   Για τους φοιτητές που δεν έδωσαν απάντηση.

Ακολουθούν οι πίνακες συχνοτήτων και τα ραβδογράμματα ανά επιλογή αντιστοίχησης (1,2,3,4):

Ερώτηση 6 - Αντιστοίχιση 1

		Frequency	Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	False	13	11,4
	Correct	97	85,1
	B	4	3,5
	Total	114	100,0

Σχήμα 7.18: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση 1($\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$) με εικόνα β

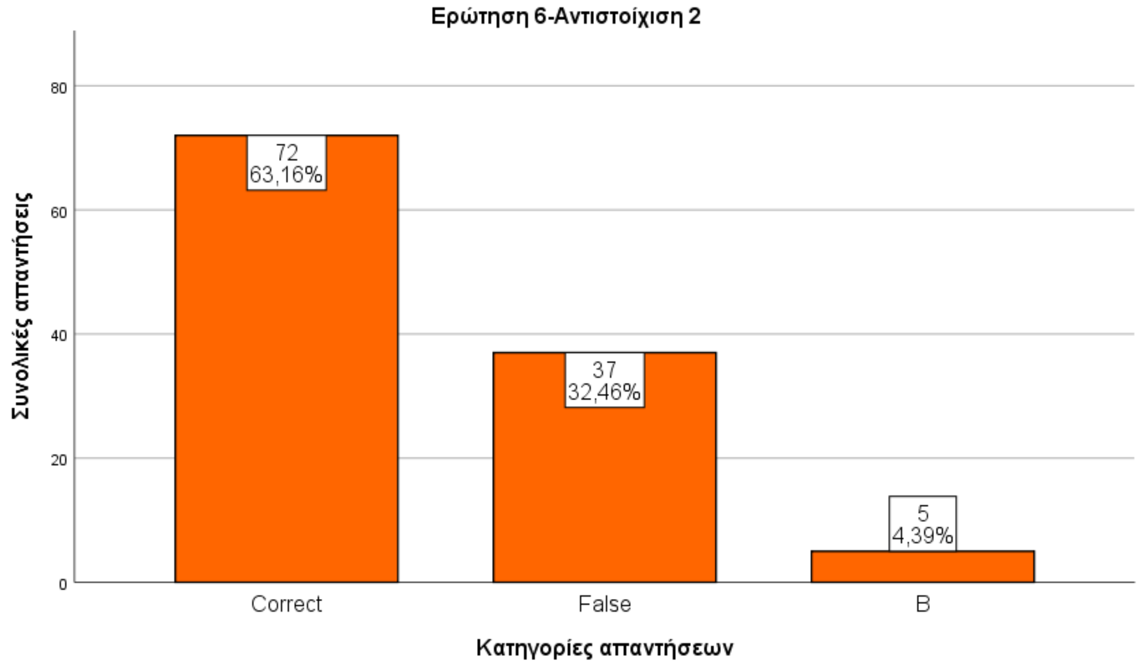


Σχήμα 7.19: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση $1(\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v})$ με εικόνα β

Ερώτηση 6 - Αντιστοίχιση 2

		Frequency	Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	False	37	32,5
	Correct	72	63,2
	B	5	4,4
	Total	114	100,0

Σχήμα 7.20: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση $2(\vec{w} = \vec{-u} \times \vec{-v})$ με εικόνα γ

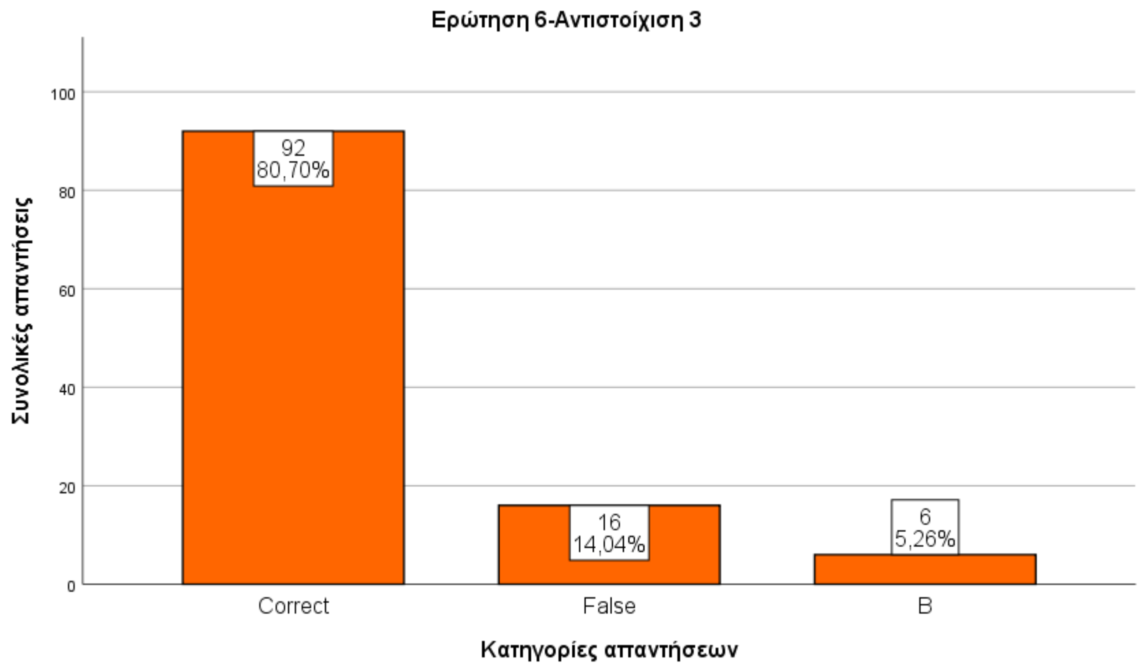


Σχήμα 7.21: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση $2(\vec{w} = -\vec{u} \times -\vec{v})$ με εικόνα γ

Ερώτηση 6 - Αντιστοίχιση 3

		Frequency	Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	False	16	14,0
	Correct	92	80,7
	B	6	5,3
	Total	114	100,0

Σχήμα 7.22: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση $3(\vec{w} = -\vec{u} \times \vec{v})$ με εικόνα α

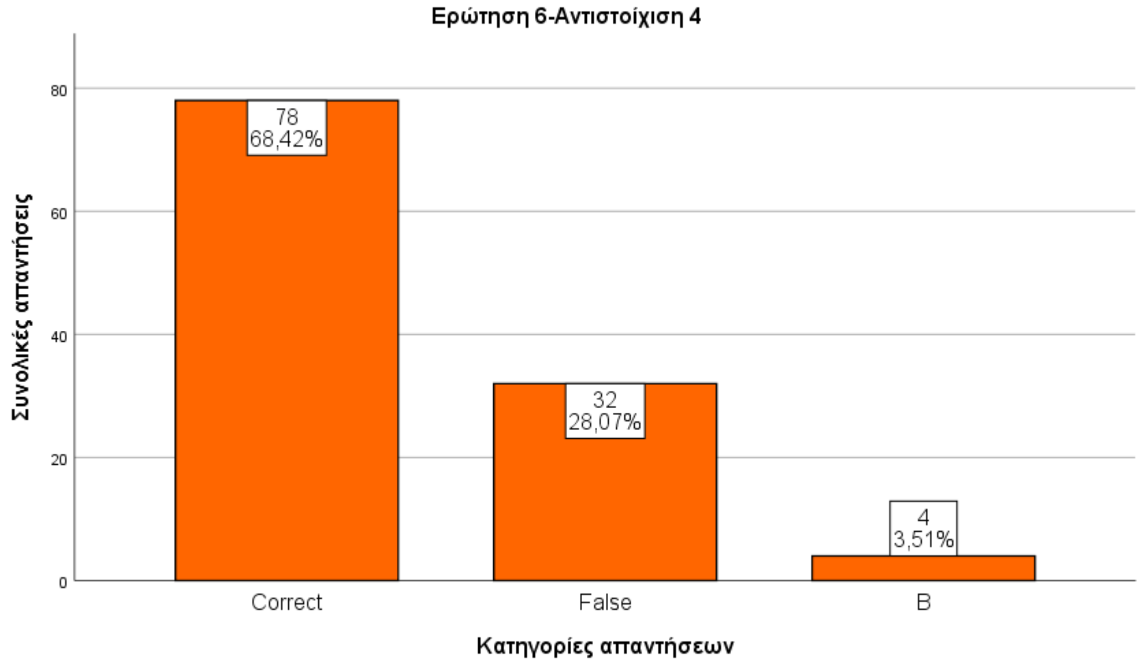


Σχήμα 7.23: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση $3(\vec{w} = -\vec{u} \times \vec{v})$ με εικόνα α

Ερώτηση 6 - Αντιστοίχιση 4

		Frequency	Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	False	32	28,1
	Correct	78	68,4
	B	4	3,5
	Total	114	100,0

Σχήμα 7.24: Πίνακας συχνοτήτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση $4(\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u})$ με εικόνα δ



Σχήμα 7.25: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση $4(\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u})$ με εικόνα δ

Μελετώντας τους παραπάνω πίνακες συχνοτήτων και τα ραβδογράμματα της ερώτησης 6, παρατηρούμε ότι τα ποσοστά επιτυχίας είναι με διαφορά μεγαλύτερα από τις προηγούμενες ερωτήσεις, ενώ οι κενές απαντήσεις είναι ελάχιστες. Σίγουρα, παράγοντας γι΄ αυτό αποτελεί το γεγονός ότι η ερώτηση 6 είναι μια αντιστοίχηση και δεν απαιτεί υπολογισμούς. Συνεχίζοντας, φαίνεται από τη στατιστική μελέτη ότι στις αντιστοιχίσεις 1 και 3 οι σωστές απαντήσεις είναι το 85,09% και το 80,70%, αντίστοιχα, ενώ στις 2 και 4 είναι 63,16% και 68,42%, αντίστοιχα. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι εικόνες α και δ δημιούργησαν δυσκολίες σε κάποιους φοιτητές σε σχέση με τις εικόνες β και γ. Ενδεχομένως αυτό συνέβη γιατί μπερδεύτηκαν με τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου και με τη χρήση του κανόνα του δεξιού χεριού. Στην επόμενη ερώτηση θα εξετάσουμε αν χρησιμοποίησαν αυτόν τον κανόνα.

7.1.7 Ερώτηση 7

"Χρησιμοποιήσατε τον κανόνα του δεξιού χεριού στην προηγούμενη άσκηση;"

Η τελευταία ερώτηση συνδέεται με την ερώτηση 6 και ουσιαστικά εξετάζει αν οι φοιτητές έκαναν χρήση του κανόνα του δεξιού χεριού στην προηγούμενη άσκηση. Οι απαντήσεις χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες:

1. **YES – ΝΑΙ**
   Για τους φοιτητές που απάντησαν θετικά.

2. **NO – ΟΧΙ**
   Για τους φοιτητές που απάντησαν αρνητικά.

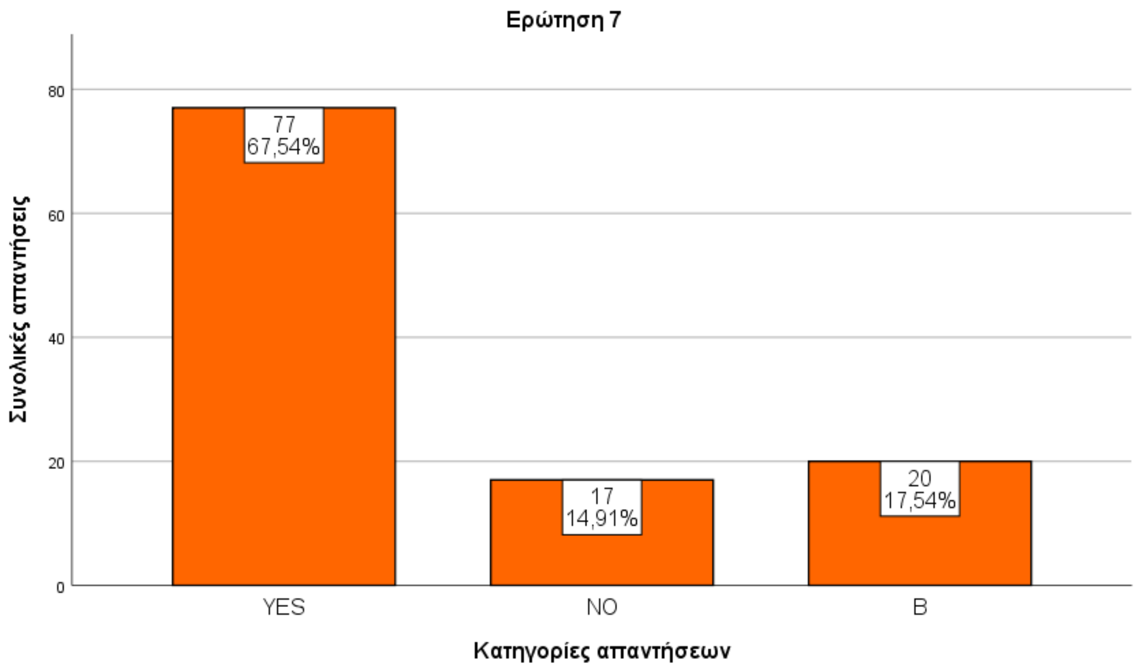
3. **B (blank)**
   Για τους φοιτητές που δεν έδωσαν απάντηση.

Στη συνέχεια, ακολουθούν ο πίνακας συχνοτήτων (Σχ. 7.26) και το ραβδόγραμμα (Σχ. 7.27) για την ερώτηση 7.

Ερώτηση 7

		Frequency	Percent
Κατηγορίες απαντήσεων	B	20	17,5
	NO	17	14,9
	YES	77	67,5
	Total	114	100,0

Σχήμα 7.26: Πίνακας συχνοτήτων ερώτησης 7 - Χρήση κανόνα δεξιού χεριού



Σχήμα 7.27: Ραβδόγραμμα συχνοτήτων ερώτησης 7 - Χρήση κανόνα δεξιού χεριού

Από την στατιστική ανάλυση της ερώτησης 7 προκύπτει ότι το 67,5% των φοιτητών χρησιμοποίησε τον κανόνα του δεξιού χεριού στην ερώτηση 6. Αυτό φαίνεται λογικό αν σκεφτεί κανείς τα αποτελέσματα της ερώτησης 6. Επομένως, μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι οι δύο ερωτήσεις σχετίζονται.

Εν κατακλείδι, παρατηρήθηκε ότι πολλές από τις ερωτήσεις φαίνονται να εμφανίζουν μια σχέση εξάρτησης. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη συσχέτιση τους. Με τον τρόπο αυτόν θα εκτιμήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος την ερμηνεία των αποτελεσμάτων μας και θα προσδιορίσουμε τον βαθμό συσχέτισης των ερωτήσεων.

7.2 Επαγωγική στατιστική - Συσχετίσεις μεταξύ ερωτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με το μέρος της επαγωγικής στατιστικής. Κύριος στόχος μιας στατιστικής μελέτης είναι να διερευνήσουμε ένα φαινόμενο με βάση τα δεδομένα του δείγματος και από το δείγμα να εξάγουμε συμπεράσματα για τον υπό μελέτη πληθυσμό. Η διερεύνηση αυτή καλείται επαγωγική στατιστική ή στατιστική συμπερασματολογία [39]. Με βάση αυτό, στη συγκεκριμένη έρευνα θα πραγματοποιήσουμε μια ανάλυση συσχέτισης ώστε να μελετήσουμε το βαθμό εξάρτησης μεταξύ κάποιων από τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους φοιτητές. Για να εξάγουμε τα αποτελέσματά μας χρησιμοποιήσαμε και εδώ το πρόγραμμα $SPSS$ και επιλέξαμε τη μέθοδο του X^2-ελέγχου ανεξαρτησίας για τις κατηγορικές μεταβλητές. Ο X^2-έλεγχος ανεξαρτησίας χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι δύο κατηγορικές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στις περιπτώσεις που υπήρχε εξάρτηση χρησιμοποιήσαμε το Cramer's V chi square derived test για να διαπιστώσουμε το βαθμό συσχέτισης.

Για τον συγκεκριμένο έλεγχο ανεξαρτησίας έχουμε τις εξής υποθέσεις:
H_0: Υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των μεταβλητών.
H_1: Δεν υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των μεταβλητών.

Ο X^2-έλεγχος ανεξαρτησίας για να θεωρηθεί αξιόπιστος έχει τις εξής προϋποθέσεις:

1. Καμία αναμενόμενη συχνότητα δεν πρέπει να είναι μικρότερη του 1.
2. Το ποσοστό των αναμενόμενων συχνοτήτων που είναι μικρότερες από το 5, δεν πρέπει να υπερβαίνει το 20%.

Αν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις, τότε δεν εμπιστευόμαστε τον X^2-έλεγχο και χρησιμοποιούμε επιπλέον τον έλεγχο $Fisher$ αν έχουμε πίνακες συσχέτισης $2x2$ ή την μέθοδο $Monte\ Carlo$ για περιπτώσεις με πίνακες μεγαλύτερων διαστάσεων.

Στην παρούσα διπλωματική απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση εάν η σημαντικότητα είναι μικρότερη από 0.05. Για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το Cramer's V test θα βασιστούμε στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 7.9: Ερμηνεία των τιμών του συντελεστή συσχέτισης Cramer's V

Τιμή	Ερμηνεία
0.00-0.10	Αμελητέα συσχέτιση
0.10-0.20	Αδύναμη συσχέτιση
0.20-0.40	Μέτρια συσχέτιση
0.40-0.60	Σχετικά ισχυρή συσχέτιση
0.60-0.80	Ισχυρή συσχέτιση
0.80-1.00	Πολύ ισχυρή συσχέτιση

Έλεγχος ύπαρξης συσχέτισης μεταξύ των ερωτήσεων 1 και 2α

Στην ενότητα 7.1, κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις των φοιτητών ανά ερώτηση και πραγματοποιήθηκε στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων. Τώρα, θα εξετάσουμε τον βαθμό συσχέτισης μεταξύ δύο κατηγοριών ερωτήσεων. Συγκεκριμένα, θα επικεντρωθούμε στην κατηγορία VEC(Διάνυσμα) της ερώτησης 1 και στην κατηγορία "Ορισμός", που είναι ο συνδυασμός των $FDEF$ και $IDEF$, της ερώτησης 2α. Σκοπός μας, επομένως, είναι να ελέγξουμε αν η γνώση ή μη του ορισμού του εξωτερικού γινομένου συνδέεται με την άποψη ότι το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα διάνυσμα. Στη συνέχεια ακολουθούν τα αποτελέσματα από τον έλεγχο που πραγματοποιήσαμε.

Ερώτηση1_Διάνυσμα * Ερώτηση2α_Ορισμός Crosstabulation

Count

		Ερώτηση2α_Ορισμός NO	YES	Total
Ερώτηση1_Διάνυσμα	NO	37	6	43
	YES	61	10	71
Total		98	16	114

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	,000[a]	1	,984		
Continuity Correction[b]	,000	1	1,000		
Likelihood Ratio	,000	1	,984		
Fisher's Exact Test				1,000	,608
Linear-by-Linear Association	,000	1	,984		
N of Valid Cases	114				

a. 0 cells (0,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6,04.

b. Computed only for a 2x2 table

Σχήμα 7.28: Πίνακας(1) διπλής εισόδου και Πίνακας(2) ελέγχου συσχέτισης X^2 των Ερωτήσεων 1-2α

Από τους παραπάνω πίνακες (Σχ. 7.28) προκύπτει ότι μόνο 10 από τους φοιτητές έδωσαν τον ορισμό στην ερώτηση 2α και ανέφεραν ότι στο άκουσμα του εξωτερικού γινομένου τους έρχεται στο νου το διάνυσμα, στην ερώτηση 1. Ακόμα μεγαλύτερη εντύπωση μας προκαλεί το γεγονός ότι 61 φοιτητές δεν έγραψαν τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου αλλά στην ερώτηση 1 ανέφεραν το διάνυσμα.

Προσπαθώντας, λοιπόν, να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα, θεωρήσαμε ως μεταβλητές την Ερώτηση1_Διάνυσμα και την Ερώτηση2α_Ορισμός, με τιμές "YES" και "NO", αν ο φοιτητής απάντησε με τον συγκεκριμένο τρόπο την ερώτηση ή όχι. Κάνοντας τον έλεγχο ανεξαρτησίας X^2 δημιουργείται ο δεύτερος πίνακας του Σχήματος 7.28. Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε επαρκή στοιχεία για να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση (sig=0,984$\succ$a=0,05). Συνεπώς, το αν κάποιος από τους φοιτητές συνδέει το εξωτερικό γινόμενο με την έννοια του διανύσματος δεν εξαρτάται από το αν γνωρίζει τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου ή όχι, άρα οι μεταβλητές μας δεν έχουν στατιστικά σημαντική διαφορά και θεωρούνται **ανεξάρτητες**.

Έλεγχος ύπαρξης συσχέτισης μεταξύ των ερωτήσεων 2β και 4α

Στην προηγούμενη ενότητα, στην ερώτηση 2, εξετάστηκε ο διαχωρισμός του ορισμού του εξωτερικού γινομένου από τη γεωμετρική του αναπαράσταση. Εστιάζοντας στο δεύτερο κομμάτι της ερώτησης, δηλαδή στο 2β, παρατηρήσαμε ότι το 34,21% απέδωσε σωστά το ζητούμενο σχήμα, ενώ το 50% δεν απάντησε ή δεν έδωσε σαφή απάντηση. Έπειτα, μέσω της ερώτησης 4α ,εξετάστηκε πόσοι ήταν οι φοιτητές που κατάφεραν να λύσουν γεωμετρικά, μια άσκηση με ζητούμενο το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Με βάση τα εξαγόμενα αποτελέσματα προέκυψε ότι το το 40,35% έδωσε τη σωστή λύση, όμως και εδώ ένα υψηλό ποσοστό της τάξης του 43,86% την άφησε κενή ή με ασαφή απάντηση. Με βάση τα παραπάνω, δημιουργείται το εξής ερώτημα: Μπορεί κάποιος να λύσει μία άσκηση εξωτερικού γινομένου με γεωμετρικό τρόπο, δεδομένου ότι γνωρίζει την γεωμετρική του αναπαράσταση; Προσπαθώντας να δώσουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα ελέγξαμε τη συσχέτιση μεταξύ των ερωτήσεων 2β και 4α. Στη συνέχεια ακολουθούν τα αποτελέσματα από τον έλεγχο που πραγματοποιήσαμε.

Ερώτηση4α * Ερώτηση2β Crosstabulation

Count

		Ερώτηση2β				
		AREA/VOL	B/UNCLEAR	C	VERBAL	Total
Ερώτηση4α	B/UNCLEAR	4	25	18	3	50
	CG	7	22	16	1	46
	CNS	3	10	5	0	18
Total		14	57	39	4	114

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Monte Carlo Sig. (2-sided)		
				Significance	99% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Pearson Chi-Square	3,524[a]	6	,741	,759[b]	,748	,770
Likelihood Ratio	4,101	6	,663	,729[b]	,717	,740
Fisher's Exact Test	3,139			,799[b]	,788	,809
N of Valid Cases	114					

a. 4 cells (33,3%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,63.

b. Based on 10000 sampled tables with starting seed 624387341.

Σχήμα 7.29: Πίνακας(1) διπλής εισόδου και Πίνακας(2) ελέγχου συσχέτισης X^2 των Ερωτήσεων 4α-2β

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στον πρώτο πίνακα (Σχ. 7.29) παρατηρούμε τη συσχέτιση μεταξύ των ερωτήσεων 4α και 2β. Συγκεκριμένα βλέπουμε, ότι 16 φοιτητές απάντησαν και στις δύο ερωτήσεις κάνοντας το σωστό σχήμα, ενώ 18 φοιτητές παρόλο που έδωσαν σωστή γεωμετρική αναπαράσταση στην 2β, δεν απάντησαν ή έδωσαν λάθος απάντηση στην 4α. Παρατηρούμε επίσης, ότι 22 φοιτητές έλυσαν γεωμετρικά την άσκηση 4α αλλά άφησαν κενή ή με μη σωστή απάντηση την ερώτηση 2β.

Στη συνέχεια, θεωρώντας ως δύο μεταβλητές τις ερωτήσεις 2β και 4α ελέγχουμε την ανεξαρτησία μεταξύ τους. Ωστόσο κάνοντας τον έλεγχο, παρατηρούμε ότι το 33,3% των αναμενόμενων τιμών είναι μικρότερες από 5, άρα δεν ισχύει μία από τις προϋποθέσεις του X^2-ελέγχου και έτσι δεν θεωρείται αξιόπιστος. Για να ελέγξουμε, εν τέλη, την συσχέτιση χρησιμοποιήσαμε $Monte\ Carlo$ και ερμηνεύσαμε τα αποτελέσματα σύμφωνα με αυτό. Παρατηρούμε, λοιπόν, μέσω του δεύτερου πίνακα (Σχ. 7.29) ότι δεν έχουμε επαρκή στοιχεία για να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση (sig= 0,759$\succ$a=0,05). Συνεπώς, οι δύο αυτές μεταβλητές δεν έχουν στατιστικά σημαντική διαφορά, άρα είναι **ανεξάρτητες**.

Έλεγχος ύπαρξης συσχέτισης μεταξύ των ερωτήσεων 4β και 5α

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι οι ερωτήσεις 4β και 5 είναι ουσιαστικά ασκήσεις όπου το ζητούμενο και στις δύο είναι να βρεθεί με αλγεβρικό τρόπο ένα εξωτερικό γινόμενο. Συγκεκριμένα, στην 4β ζητείται ένα κάθετο διάνυσμα σε δύο άλλα γνωστά διανύσματα, χωρίς να δίνεται σχήμα ενώ στην άσκηση 5 ζητείται η ροπή μιας δύναμης ως προς ένα σημείο, σε αυτήν το σχετικό σχήμα δίνεται. Παρατηρούμε ότι οι δύο ασκήσεις έχουν το ίδιο ζητούμενο όμως έχουν διαφορετικά δεδομένα και το εξωτερικό γινόμενο ζητείται με άλλον τρόπο στην κάθε άσκηση. Η κύρια όμως διαφορά τους είναι ότι η ερώτηση 4β είναι μια αλγεβρική άσκηση ενώ η ερώτηση 5 είναι μια εφαρμογή της Μηχανικής. Εύλογα λοιπόν δημιουργείται μια σύγκριση ανάμεσα στις δύο ερωτήσεις. Σκοπός μας αρχικά είναι να ελέγξουμε πόσοι φοιτητές κατάφεραν να επιλύσουν σωστά και τις δύο. Έπειτα θέλουμε να εξετάσουμε αυτούς που έκαναν λάθος σε μια από τις δύο ερωτήσεις και να προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε το είδος του λάθους και τη συσχέτιση μεταξύ των δύο ερωτήσεων.

Η άσκηση 5 χωρίζεται σε δύο ερωτήματα, 5α και 5β, η σύγκριση της 4β έγινε με την 5α διότι θεωρούνται παρόμοιας δυσκολίας συγκριτικά με την ερώτηση 5β που είναι πιο απαιτητική. Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες συσχέτισης, παρατηρούμε ότι οι προϋποθέσεις του ελέγχου X^2 δεν ικανοποιούνται διότι οι αναμενόμενες τιμές που βρίσκονται πάνω από 5 είναι το 40%, επομένως χρησιμοποιήσαμε τον έλεγχο $Monte\ Carlo$ ώστε να είναι αξιόπιστα τα αποτελέσματά μας. Οι μεταβλητές που ορίσαμε είναι η Ερώτηση_4β και η Ερώτηση_5α και οι τιμές που παίρνουν είναι οι κατηγορίες απαντήσεων που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Ερώτηση5α * Ερώτηση4β Crosstabulation

Count

		Ερώτηση4β B/UNCLEAR	C	WD	Total
Ερώτηση5α	B/UNCLEAR	16	18	4	38
	C	4	28	3	35
	F	4	12	4	20
	V	0	5	5	10
	WD	2	6	3	11
Total		26	69	19	114

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Monte Carlo Sig. (2-sided) Significance	99% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Pearson Chi-Square	23,952[a]	8	,002	,003[b]	,001	,004
Likelihood Ratio	23,296	8	,003	,006[b]	,004	,008
Fisher's Exact Test	21,005			,004[b]	,002	,005
N of Valid Cases	114					

a. 6 cells (40,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 1,67.

b. Based on 10000 sampled tables with starting seed 957002199.

Σχήμα 7.30: Πίνακας(1) διπλής εισόδου και Πίνακας(2) ελέγχου συσχέτισης X^2 των Ερωτήσεων 4β-5α

Από το παραπάνω Σχήμα 7.30 και τον πρώτο πίνακα φαίνονται οι συσχετίσεις των δύο ερωτήσεων. Αρχικά παρατηρούμε ότι 28 από τους φοιτητές έλυσαν σωστά και τις δύο ερωτήσεις, δηλαδή ήταν αρκετοί αυτοί που μπόρεσαν να βρουν το εξωτερικό γινόμενο αλγεβρικά σε δύο διαφορετικές εφαρμογές του. Τα αποτελέσματα του πίνακα που μας δημιουργούν προβληματισμούς είναι κυρίως το γεγονός ότι 18 φοιτητές έλυσαν σωστά την 4β αλλά άφησαν κενή ή χωρίς σωστή απάντηση την 5α. Επίσης, 12 φοιτητές έλυσαν σωστά το ερώτημα 4β αλλά στην 5α έκαναν λάθος στον τύπο της ροπής, επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι παρόλο που αυτοί οι φοιτητές γνωρίζουν πως να βρίσκουν αλγεβρικά το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων όταν πρόκειται το εφαρμόσουν σε μία άσκηση μηχανικής που τους το ζητάει έμμεσα δυσκολεύονται.

Συνεχίζοντας ελέγξαμε την ανεξαρτησία των δύο ερωτήσεων, τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 7.30 και στο δεύτερο πίνακα. Συγκεκριμένα, προκύπτει ότι έχουμε αρκετά στοιχεία για να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση (sig=0,003$\prec$a=0,05). Επομένως, οι μεταβλητές έχουν στατιστικά σημαντική διαφορά, άρα θεωρούνται **εξαρτημένες**.

Έλεγχος ύπαρξης συσχέτισης μεταξύ των ερωτήσεων 3 και 5α

Παρατηρώντας την ενότητα της Περιγραφικής στατιστικής και συγκεκριμένα την ερώτηση 3, η οποία αναφέρεται στα μαθήματα και στις εφαρμογές που έχουν χρησιμοποιήσει οι φοιτητές το εξωτερικό γινόμενο, βλέπουμε ότι η πλειοψηφία έχει απαντήσει ότι μία από τις εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου είναι η ροπή στο μάθημα της Μηχανικής. Στη συνέχεια του ερωτηματολογίου, στην ερώτηση 5, δίνεται μία άσκηση και ζητείται η ροπή. Έχοντας αυτά τα δεδομένα αναρωτηθήκαμε τι είδους συσχέτιση μπορεί να έχουν αυτές οι δύο ερωτήσεις. Είναι ανεξάρτητο,δηλαδή, το αν κάποιος φοιτητής απάντησε ή όχι τη ροπή στο ερώτημα 3β με το αν ξέρει τον τρόπο επίλυσης μια άσκηση με ζητούμενο τη ροπή;

Στους παρακάτω πίνακες θεωρήσαμε δύο μεταβλητές την Ροπή και την Ερώτηση5α. Η Ερώτηση5α παίρνει ως τις τιμές της κατηγορίες απαντήσεων που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα (βλ. Πίνακα 7.8). Η Ροπή παίρνει ως τιμές "YES" αν ο φοιτητής την έγραψε ως εφαρμογή ή "NO" αν δεν την έγραψε. Σε αυτή την περίπτωση, όπως φαίνεται παρακάτω (Σχ. 7.31) ο έλεγχος ανεξαρτησίας έγινε με τον X^2-έλεγχο και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων με βάση το Cramer's V test (βλ. Πίνακα 7.9).

Ροπή * Ερώτηση5α Crosstabulation

Count

		Ερώτηση5α					Total
		B/UNCLEAR	C	F	V	WD	
Ροπή	NO	27	14	12	3	3	59
	YES	11	21	8	7	8	55
Total		38	35	20	10	11	114

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	12,685[a]	4	,013
Likelihood Ratio	13,030	4	,011
N of Valid Cases	114		

a. 1 cells (10,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4,82.

Symmetric Measures

		Value	Approximate Significance
Nominal by Nominal	Phi	,334	,013
	Cramer's V	,334	,013
N of Valid Cases		114	

Σχήμα 7.31: Πίνακας(1) διπλής εισόδου, Πίνακας(2) ελέγχου συσχέτισης X^2 και Πίνακας(3) βαθμός συσχέτισης των Ερωτήσεων 3β (Ροπή) - 5α

Από το παραπάνω σχήμα και τον πρώτο πίνακα φαίνονται οι συσχετίσεις των ερωτημάτων 3β (Ροπή) και 5α. Παρατηρούμε ότι 21 φοιτητές έχουν αναφέρει τη ροπή και έχουν λύσει σωστά την 5α, ενώ 27 δεν την ανέφεραν και δεν απάντησαν τη ερώτηση 5α. Σημαντική παρατήρηση αποτελεί επίσης το γεγονός ότι από τα 55 άτομα που ανέφεραν τη ροπή, οι 8 έκαναν λάθος τον τύπο της, οι 3 έκανα λάθος στη ορίζουσα και 7 δεν βρήκαν τα σωστά διανύσματα να πολλαπλασιάσουν. Επομένως ενισχύεται η άποψη μας ότι η εφαρμογή ενός μαθηματικού εργαλείου, όπως το εξωτερικό γινόμενο, σε μια άσκηση Μηχανικής και όχι Άλγεβρας δημιουργεί παρανοήσεις στους φοιτητές. Παρόλο αυτά παρατηρούμε ότι είναι λίγοι οι φοιτητές που ανέφεραν τη ροπή αλλά δεν έλυσαν την ερώτηση 5α. Από αυτά τα αποτελέσματα έχουμε σημαντικές ενδείξεις ότι οι δύο μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι στον δεύτερο πίνακα του Σχήματος 7.31 βρίσκονται τα αποτελέσματα από τον έλεγχο X^2. Από τον πίνακα προκύπτει ότι έχουμε αρκετά στοιχεία για να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση (sig=0,013$\prec$a=0,05). Συνεπώς, οι μεταβλητές έχουν στατιστικά σημαντική διαφορά, άρα είναι **εξαρτημένες**. Από τον έλεγχο το Cramer's V παρατηρείται ότι η σχέση μεταξύ της ερώτησης 3β (Ροπή) και 5α αξιολογείται σε **μέτρια συσχέτιση**(0,334).

Έλεγχος ύπαρξης συσχέτισης μεταξύ των ερωτήσεων 6 και 7

Στο τέλος της προηγούμενης ενότητας αναφέραμε σχέση μεταξύ της ερώτησης 6 και 7, σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε τον βαθμό συσχέτισής τους. Στην ερώτηση 6 δινόντουσαν τέσσερα παραδείγματα εξωτερικού γινομένου και οι φοιτητές έπρεπε να τα αντιστοιχίσουν με την κατάλληλη γεωμετρική τους αναπαράσταση. Στην ερώτηση 7 εξετάσαμε αν έγινε χρήση του κανόνα του δεξιού χεριού στην ερώτηση 6. Βάση των αποτελεσμάτων του στατιστικού ελέγχου έχουμε ήδη υποθέσει ότι οι ερωτήσεις συσχετίζονται, στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν ισχύει ή όχι η υπόθεση μας.

Στους παρακάτω πίνακες θεωρήσαμε δύο μεταβλητές την Ερώτηση6 και την Ερώτηση7. Η Ερώτηση6 παίρνει τις τιμές "$Correct$" αν ήταν και τα 4 παραδείγματα της αντιστοίχισης σωστά και "$False$" αν κάποιο αυτά ήταν λάθος. Η ερώτηση 7 παίρνει ως τιμές "YES" αν έγινε χρήση του κανόνα, "NO" αν δεν έγινε και "B" αν ήταν κενή η απάντηση. Σε αυτή την περίπτωση, όπως φαίνεται παρακάτω (Σχ. 7.32) ο έλεγχος ανεξαρτησίας έγινε με τον X^2-έλεγχο και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων με βάση το Cramer's V test (βλ. Πίνακα 7.9).

Ερώτηση6 * Ερώρηση7 Crosstabulation

Count

		Ερώρηση7 Blank	No	Yes	Total
Ερώτηση6	False	12	9	32	53
	Correct	8	8	45	61
Total		20	17	77	114

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	2,505[a]	2	,286
Likelihood Ratio	2,508	2	,285
N of Valid Cases	114		

a. 0 cells (0,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7,90.

Symmetric Measures

		Value	Approximate Significance
Nominal by Nominal	Phi	,148	,286
	Cramer's V	,148	,286
N of Valid Cases		114	

Σχήμα 7.32: Πίνακας(1) διπλής εισόδου, Πίνακας(2) ελέγχου συσχέτισης X^2 και Πίνακας(3) βαθμός συσχέτισης των Ερωτήσεων 6-7

Θέλοντας να ελέγχουμε τη συσχέτιση μεταξύ των δύο αυτών μεταβλητών, αρχικά παρατηρούμε τον πρώτο πίνακα του Σχήματος 7.32, όπως φαίνεται 45 φοιτητές έκαναν σωστή όλη την ερώτηση 6 χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού ενώ μόλις 8 την έκαναν σωστή χωρίς τη χρήση του κανόνα. Προκύπτει επίσης ότι 32 φοιτητές παρά το γεγονός ότι απάντησαν ΝΑΙ στην ερώτηση 7 είχαν κάποιο λάθος στην ερώτηση 6. Θα περίμενε κανείς κάνοντας χρήση του κανόνα του δεξιού χεριού θα ήταν πολύ λιγότερα τα λάθη στην ερώτηση 6. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ή δεν έχει κατανοηθεί πλήρως ο κανόνας ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί σωστά ή ότι λόγω της φύσης της ερώτησης 6, που ήταν κλειστού τύπου, κάποιες απαντήσεις ήταν τυχαίες.

Συνεχίζοντας παρατηρούμε ότι στον δεύτερο πίνακα του Σχήματος 7.32 βρίσκονται τα αποτελέσματα από τον έλεγχο X^2. Από τον πίνακα προκύπτει ότι έχουμε αρκετά στοιχεία για να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση (sig=0,286$\prec$a=0,05). Συνεπώς, οι μεταβλητές έχουν στατιστικά σημαντική διαφορά, άρα είναι **εξαρτημένες**. Από τον έλεγχο το Cramer's V παρατηρείται ότι η σχέση μεταξύ της ερώτησης 6 και 7 αξιολογείται σε **αδύναμη συσχέτιση**(0,148).

7.3 Συμπεράσματα ανάλυσης

Σε αυτήν την ενότητα στόχος μας είναι να επισημάνουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την επεξεργασία και την ανάλυση των ερωτηματολογίων που δόθηκαν στους φοιτητές. Συνοψίζοντας τα δύο προηγούμενα υποκεφάλαια καταλήξαμε σε σημαντικές παρατηρήσεις που αφορούν την αντίληψη και την κατανόηση των φοιτητών για το εξωτερικό γινόμενο.

Αρχικά, από την ερώτηση 1 προέκυψε ότι η πλειοψηφία των φοιτητών αναγνωρίζει ότι το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα διάνυσμα, ωστόσο επειδή από τη δεύτερη ερώτηση φάνηκε ότι συγχέουν τον συμβολισμό με το μέτρο του εξωτερικού γινομένου προβληματιζόμαστε ως προς την κατανόηση της διανυσματικής φύσης του εξωτερικού γινομένου από τους φοιτητές. Από την ερώτηση 2 φαίνεται επίσης ότι ήταν λίγοι εκείνοι που έγραψαν μια μορφή ορισμού, όμως κρίθηκε σκόπιμο να ερευνηθεί περαιτέρω αν αυτοί που έγραψαν τον ορισμό σχετίζονταν με αυτούς που απάντησαν στο πρώτο ερώτημα ότι το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα διάνυσμα. Τελικά δεν προέκυψε συσχέτιση μεταξύ αυτών των δύο. Ενδιαφέρον αποτελεί ακόμα ότι στο δεύτερο μέρος της ερώτησης 2 που ζητείται η γεωμετρική αναπαράσταση, οι μισοί την άφησαν κενή ή με μία μη σωστή απάντηση. Θέλοντας να εξετάσουμε περαιτέρω αυτήν την παρατήρηση κάναμε έλεγχο ανεξαρτησίας των ερωτήσεων 2β και 4α, που ζητούσε γεωμετρική επίλυση σε μια άσκηση. Από τον έλεγχο καταλήξαμε ότι δεν συσχετίζονται οι δύο ερωτήσεις, αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν πιο επιφυλακτικά μια ερώτηση που απαιτεί έναν γενικό ορισμό από μια άσκηση που περιέχει συγκεκριμένα παραδείγματα διανυσμάτων.

Στη συνέχεια, παρατηρήσαμε ότι σχεδόν όλοι οι φοιτητές ανέφεραν ότι έχουν διδαχθεί το εξωτερικό γινόμενο στα μαθήματα της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας, στην Φυσική 1 και στη Μηχανική 1. Όσον αφορά τις εφαρμογές που το έχουν συναντήσει υπήρχαν ποικίλες απαντήσεις όμως η πλειοψηφία απάντησε τη **Ροπή**. Αναρωτηθήκαμε λοιπόν αν αυτοί που έγραψαν ροπή γνωρίζουν πως να χρησιμοποιήσουν το εξωτερικό γινόμενο σε μία εφαρμογή της Μηχανικής. Από τη συσχέτιση των δύο αυτών μεταβλητών προέκυψε ότι είναι εξαρτημένες, άρα κατά βάση οι φοιτητές που γνώριζαν πως να λύσουν την άσκηση 5α απάντησαν ως εφαρμογή του εξωτερικού γινομένου τη ροπή.

Παρατηρώντας προσεκτικά τα αποτελέσματα, προκύπτει ότι οι φοιτητές δεν συγχέουν το εξωτερικό γινόμενο με την ορίζουσα και κατανοούν ότι μέσω της ορίζουσας απλά γίνεται ο αλγεβρικός υπολογισμός. Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν δυσκολίες που αφορούν τη γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου, όταν πρόκειται για αλγεβρική επίλυση η πλειοψηφία των φοιτητών μπορεί να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις μιας τέτοιας άσκησης αυτό φάνηκε από της ερωτήσεις 4β και 5, που αποδείχτηκαν εξαρτημένες.

Τέλος, παρατηρήθηκε ότι οι ερώτηση 6, που ήταν μια αντιστοίχιση, με δοσμένες γεωμετρικές αναπαραστάσεις εξωτερικών γινομένων, δεν δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους περισσότερους φοιτητές. Καθοριστικό ρόλο σε αυτό είχε η εξάρτηση της ερώτησης 6 με την ερώτηση 7, αφού η τελευταία εξέταζε αν οι φοιτητές χρησιμοποίησαν ή όχι των κανόνα του δεξιού χεριού.

Κεφάλαιο 8

Συζήτηση - Συμπεράσματα

Η παρουσίαση των συμπερασμάτων θα πραγματοποιηθεί με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που παρατίθενται στο 5^o κεφάλαιο, τις συνεντεύξεις από τους καθηγητές και την ανάλυση που προέκυψε από τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων.

8.1 Οι πιο συχνές παρανοήσεις σχετικά με το εξωτερικό γινόμενο

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα έχει ως στόχο να εξετάσει τις πιο συχνές παρανοήσεις των φοιτητών σχετικά με την έννοια του εξωτερικού γινομένου. Οι παρανοήσεις προέκυψαν από όλη την έρευνα, δηλαδή από τις συνεντεύξεις των καθηγητών και από το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους φοιτητές.

Αρχικά διαπιστώθηκε σύγχυση ανάμεσα στον συμβολισμό του εξωτερικού γινομένου και στο μέτρο του. Παρατηρήθηκε ότι στην πλειοψηφία των φοιτητών όταν σκέφτονται το εξωτερικό γινόμενο τους έρχεται στο νου το διάνυσμα. Όμως όσον αφορά το μέτρο του, το οποίο είναι ένας αριθμός, το συγχέουν με τη συμβολική γραφή του εξωτερικού γινομένου. Άρα οι φοιτητές ενώ γνωρίζουν ότι το εξωτερικό γινόμενο ανήκει σε μια γενικότερη κατηγορία, τα διανύσματα, το ταυτίζουν με έναν αριθμό. Αυτό πιθανώς οφείλεται σε μία αυθόρμητη αντίδραση ή μια συνεπαγωγή που έχει δημιουργηθεί στο μυαλό τους, χωρίς όμως να αντιλαμβάνονται πλήρως την έννοια του διανύσματος. Συμπεραίνουμε ότι μπορεί να ξέρουν πως το εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα, αλλά όταν γίνεται το πέρασμα από τη λεκτική στην συμβολική γραφή, οι έννοιες διάνυσμα και μέτρο ταυτίζονται, επομένως δημιουργούνται παρανοήσεις και λανθασμένες αντιλήψεις ως προς την φύση βασικών μαθηματικών εννοιών. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, την παρατήρηση αυτή την είχε επισημάνει και ο καθηγητής Γ στη συνέντευξη που μας παραχώρησε.

Μια από τις σημαντικότερες παρανοήσεις που προέκυψε από την παρούσα έρευνα ήταν η δυσκολία των φοιτητών ως προς τη γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου. Την παρατήρηση αυτή τόνισαν και οι 4 καθηγητές στην αντίστοιχη ερώτηση που τους έγινε. Στις ασκήσεις του ερωτηματολογίου που απαιτούσαν γεωμετρική επίλυση φάνηκε ότι οι περισσότεροι φοιτητές δεν ήταν πρόθυμοι να ασχοληθούν, διότι είτε τις άφηναν κενές είτε οι απαντήσεις τους ήταν γραμμένες βιαστικά και με προχειρότητα. Αντίθετα, σε ερωτήσεις κλειστού τύπου ή ερωτήσεις που το ζητούμενο ήταν το διάνυσμα, που προκύπτει από τον υπολογισμό μιας ορίζουσας, η συμμετοχή τους ήταν μεγαλύτερη και τα ποσοστά επιτυχίας καλύτερα. Στην επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε περαιτέρω τα αίτια της διαφοράς ανάμεσα στην γεωμετρική, τη συμβολική και τη λεκτική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου.

Γνωρίζουμε ότι σε πανεπιστημιακό επίπεδο στον τομέα των Μαθηματικών, πρωταρχικό ρόλο έχουν οι ορισμοί των εννοιών. Μέσω της στατιστικής ανάλυσης φάνηκε ότι οι πρωτοετείς φοιτητές δεν έχουν μάθει ακόμα τη σημασία των ορισμών. Πιθανώς επηρεασμένοι από τη σχολική τους πορεία, εστιάζουν στον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης των ασκήσεων απορρίπτοντας έτσι το θεωρητικό κομμάτι μαθηματικών εννοιών, όπως το εξωτερικό γινόμενο. Ενδεχομένως αυτό να είναι αποτέλεσμα της διανυσματικής φύσης του εξωτερικού γινομένου, που το καθιστά απαραίτητο εργαλείο και σε άλλες επιστήμες, όπως για παράδειγμα στη Φυσική και στη Μηχανική. Βεβαίως δεν έλειψαν οι φοιτητές οι οποίοι γνώριζαν τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, όμως αυτοί ήταν ελάχιστοι σε σχέση με το δείγμα μας.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να διευκρινιστεί ότι οι φοιτητές που έδωσαν τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν αυτοί που έδωσαν τον τυπικό ορισμό σύμφωνα με βιβλία του πανεπιστημίου, ενώ στη δεύτερη κατατάχθηκαν εκείνοι που έδωσαν ένα πιο άτυπο ορισμό και όχι τόσο αυστηρά μαθηματικό. Έχοντας ως αφετηρία την έρευνα των $Tall$ και $Vinner$[30] μπορούμε να πούμε ότι την έννοια ως ορισμό ($conceptdefinition$) χρησιμοποίησαν οι φοιτητές που όρισαν τυπικά φορμαλιστικά το εξωτερικό γινόμενο, ενώ την την έννοια ως εικόνα ($conceptimage$) αυτοί που έδωσαν μια πιο άτυπη μορφή ορισμού, συγκεντρώνοντας όλες τις πληροφορίες που μπορούσαν να θυμηθούν για το εξωτερικό γινόμενο. Δεδομένου λοιπόν ότι οι φοιτητές είχαν διδαχθεί το εξωτερικό γινόμενο στην αρχή του προηγούμενου εξαμήνου και σύμφωνα με τα παραπάνω προέκυψαν δύο παρατηρήσεις. Αρχικά, αυτοί που απάντησαν με τον ορισμό της έννοιας στη δεύτερη ερώτηση, στην πρώτη ερώτηση έδωσαν την εικόνα της έννοιας του εξωτερικού γινομένου, την οποία είχαν σχηματίσει σε όλη τη διάρκεια του εξαμήνου. Επομένως, προκύπτει αλληλεπίδραση των δύο εννοιών του $Vinner$ όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.2. Δεύτερον, όπως φάνηκε από την στατιστική ανάλυση ήταν περισσότεροι οι φοιτητές απάντησαν δίνοντας την εικόνα της έννοιας, το οποίο θεωρείται λογικό αν σκεφτεί κανείς ότι είχε προηγηθεί αρκετός καιρός από τότε που διδάχθηκαν τον τυπικό ορισμό και ότι τις περισσότερες φορές που χρειάστηκαν το εξωτερικό γινόμενο το υπολόγισαν με την ορίζουσα.

Πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι δεν ήταν λίγοι οι φοιτητές που δεν έχουν αφομοιώσει πλήρως τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε μεγάλη δυσκολία στην κατανόηση και την εφαρμογή της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Είναι γνωστό ότι η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει στο εξωτερικό γινόμενο, ωστόσο πολλοί ήταν αυτοί που την χρησιμοποίησαν στην άσκηση που ζητούσε τη ροπή. Το γεγονός αυτό, όπως μας ανέφερε και ο καθηγητής Δ, πιθανώς οφείλεται στη σχολική ανάμνηση ότι η ροπή είναι δύναμη επί απόσταση. Οι φοιτητές έχοντας αυτό στο μυαλό τους δεν αντιλήφθηκαν ότι η ροπή είναι το αποτέλεσμα του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων πλέον, που αν τους αλλάξεις θέση μεταβάλλεται η κατεύθυνση της ροπής και η λύση θεωρείται λάθος. Την παρατήρηση αυτή ενισχύουν τα αποτελέσματα της ερώτησης με την αντιστοίχιση, στην οποία οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις αφορούσαν την αντιμεταθετική ιδιότητα. Μερικοί φοιτητές δηλαδή θεώρησαν ότι με όποια σειρά και να τοποθετήσεις δύο διανύσματα στο εξωτερικό γινόμενο δημιουργείται το ίδιο σχήμα, ενώ αυτό δεν ισχύει.

Παρατηρώντας το ερωτηματολόγιο συγκεντρωτικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι πρωτοετείς φοιτητές παρουσίασαν ιδιαίτερη ευκολία στην αλγεβρική επίλυση των ασκήσεων σε αντίθεση με τις πιο θεωρητικές ερωτήσεις. Συγκεκριμένα, οι ασκήσεις, όπως η 4β και η 5α, που απαιτούσαν απλό υπολογισμό της ορίζουσας είχαν λιγότερες κενές απαντήσεις σε σχέση με ασκήσεις που χρειαζόντουσαν ένα θεωρητικό υπόβαθρο, όπως η 2 και η 5β. Τελικά, καταλήγουμε στο γεγονός ότι η πλειοψηφία των φοιτητών του πρώτου έτους, που συμπλήρωσε το ερωτηματολόγιο της παρούσας έρευνας, αντιμετωπίζει της μαθηματικές έννοιες ως εργαλεία για την επίλυση των ασκήσεων και αγνοεί την θεωρητική τους σημασία. Για την απόκτηση ολοκληρωμένης μαθηματικής σκέψης απαραίτητος κρίνεται ο συνδυασμός των παραπάνω.

8.2 Οι διαφορές που παρουσιάζονται στην αντίληψη των φοιτητών για το εξωτερικό γινόμενο ανάλογα με συστήματα αναπαράστασής του

Σε όλη την έκταση του ερωτηματολογίου γίνεται η προσπάθεια να εξεταστεί η αντίληψη των φοιτητών ως προς τη γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από ερωτήσεις που απαιτούν γεωμετρική επίλυση ή από ερωτήσεις που περιέχουν σχήμα και ο φοιτητής χρειάζεται να το επεξεργαστεί για να φτάσει στη λύση.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί στο 3^o κεφάλαιο, συνδυάζοντας την έρευνα της Παυλοπούλου [35] για τα επίπεδα αναπαράστασης του διανύσματος και τη μετάβαση από το ένα στο άλλο με τη θεωρία των τριών κόσμων του $Tall$ [28] καταφέρνουμε να κατανοήσουμε την αντίληψη των φοιτητών για το εξωτερικό γινόμενο. Συγκεκριμένα, θεωρήσαμε ότι το γραφικό επίπεδο, που αποτελεί την γεωμετρική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου, ανήκει κυρίως στον ενσαρκωμένο κόσμο, ενώ το επίπεδο συμβολικής γραφής του ανήκει στον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο και ο ορισμός του στον αξιωματικό. Φυσικά τα όρια μεταξύ των κόσμων του $Tall$ δεν είναι διακριτά και όπως έχουμε αναφέρει, υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους, ωστόσο αυτή η ενότητα έχει ως σκοπό τη μελέτη της μετάβασης από τον έναν κόσμο στον άλλον με κεντρικό άξονα την έννοια του εξωτερικού γινομένου.Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι και οι τέσσερις καθηγητές στις συνεντεύξεις που μας παραχώρησαν εξέφρασαν τις ανησυχίες τους για την ικανότητα των φοιτητών να μεταπηδούν από την αλγεβρική ερμηνεία ή την συμβολική αναπαράσταση μίας έννοιας στη γεωμετρική. Σύμφωνα με την έρευνα μας, αποδείχθηκε ότι υπάρχει δυσκολία μετάβασης από το ένα επίπεδο αναπαράστασης στο άλλο.

Έχοντας ως αντικείμενο μελέτης το εξωτερικό γινόμενο αρχικά εξετάσαμε αν οι φοιτητές είναι εξοικειωμένοι με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του εξωτερικού γινομένου. Παρατηρήσαμε ότι σχεδόν όλοι οι φοιτητές του δείγματός μας γνώριζαν πώς συμβολίζεται το εξωτερικό γινόμενο. Παρόλο δηλαδή που είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που ως μαθητές δεν το είχαν διδαχθεί ήξεραν τον συμβολισμό του, ανεξάρτητα από την επίδοσή τους στο ερωτηματολόγιο. Αξίζει επίσης να αναφέρουμε ότι εκτός από τον συμβολισμό, οι περισσότεροι είχαν και την ικανότητα να υπολογίσουν το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μέσω της αλγεβρικής του έκφρασης, δηλαδή της ορίζουσας, σε ένα ένα απλό παράδειγμα που τους δόθηκε. Αυτό συμβαίνει διότι το σύμβολο αποτελεί ένα είδος εικόνας που έχει συγκεκριμένη μετάφραση στη γλώσσα των Μαθηματικών και η αλγεβρική του επίλυση γίνεται με αλγοριθμικό τρόπο με πράξεις που ήδη ξέρουν. Διαπιστώνεται άρα ότι οι φοιτητές έχουν υποσυνείδητα κατατάξει το εξωτερικό γινόμενο στο νου τους στον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο.

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει για τους τρεις κόσμους του $Tall$ [28] η γεωμετρική αναπαράσταση θα λέγαμε ότι ανήκει στον ενσαρκωμένο κόσμο, όντας μια απεικόνιση. Είναι γνωστό επίσης, ότι μια εικόνα αποτυπώνεται καλύτερα στο νου των περισσότερων ανθρώπων. Θα περίμενε λοιπόν κανείς ότι με την ίδια ευκολία που οι φοιτητές χειρίζονται τον συμβολισμό και τον υπολογισμό του εξωτερικού γινομένου θα μπορούσαν να επεξεργαστούν και τη γεωμετρική του αναπαράσταση. Ωστόσο η παρούσα έρευνα έδειξε διαφορετικά αποτελέσματα. Αρχικά όταν ζητήθηκε από τους πρωτοετείς φοιτητές η γεωμετρική αναπαράστασή του, στη γενική της μορφή ή με συγκεκριμένα νούμερα, οι περισσότεροι ή άφησαν κενό το ερώτημα ή περιέγραψαν λεκτικά την απεικόνιση του εξωτερικού γινομένου που είχαν στο νου τους ή έγραψαν ότι ως γεωμετρική αναπαράσταση θεωρούν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ή τον όγκο του παραλληλεπιπέδου. Επομένως, η ίδια έννοια στη μετάβαση από τον διαδισιοεννοιολογικό κόσμο στον ενσαρκωμένο δημιουργεί δυσκολία στους πρωτοετείς φοιτητές. Στην προσπάθεια μας να ερμηνεύσουμε αυτήν την παρατήρηση, εξετάσαμε και τα αποτελέσματα των ασκήσεων που το σχήμα δίνονταν από την αρχή και απαιτούσαν την επεξεργασία του για την επίλυση της άσκησης. Ο στατιστικός έλεγχος έδειξε ότι τα ποσοστά επιτυχίας σε αυτού του είδους τις ασκήσεις ήταν καλύτερα, αλλά υπήρχαν μερικοί φοιτητές που δεν μπόρεσαν να ερμηνεύσουν και να επεξεργαστούν κατάλληλα το σχήμα. Έχοντας ελέγξει την αντίληψη των φοιτητών στον ενσαρκωμένο και στο διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο, θέλαμε ακόμα να εξετάσουμε την ανταπόκρισή τους και στον αξιωματικό κόσμο, ο οποίος κυριαρχεί στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Σχετικά με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, έχουμε ήδη αναφέρει, στις παρανοήσεις των φοιτητών στην προηγούμενη ενότητα, τις διαφορές ανάμεσα στον τυπικό ορισμό της έννοιας και στην εικόνα της έννοιας. Παρατηρήσαμε όμως επίσης ότι εκτός από τα λίγα άτομα που έδωσαν μια μορφή ορισμού οι περισσότεροι άφησαν κενή ή έγραψαν λάθος τη συγκεκριμένη απάντηση. Φάνηκε επίσης η αδυναμία των φοιτητών να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό μέσα σε ασκήσεις με συγκεκριμένα παραδείγματα. Αυτό συνεπάγεται ότι η γνώση του απλά δεν είναι αρκετή στο επίπεδο του πανεπιστημίου. Απαιτείται λοιπόν από τους φοιτητές η βαθύτερη κατανόηση του, ώστε να είναι σε θέση να τον εφαρμόσουν όταν τους ζητείται. Συνεπάγεται ότι η πλειοψηφία των πρωτοετών φοιτητών δεν έχει ακόμη κατακτήσει τον αξιωματικό κόσμο όσον αφορά την έννοια του εξωτερικού γινομένου.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο γεγονός ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες κυρίως όταν χρειάζεται από τη συμβολική ή λεκτική γραφή του εξωτερικού γινομένου να μεταβούν στην γεωμετρική του αναπαράσταση ή στον ορισμό του. Σε περιπτώσεις που περιέχουν σχήμα οι παρανοήσεις είναι λιγότερες. Στις περισσότερες φορές η μεταφορά από τη γεωμετρική αναπαράσταση στην συμβολική και έπειτα στην αλγεβρική επίλυση της άσκησης γίνεται με επιτυχία. Πιθανολογούμε ότι οι δυσκολίες αυτές των πρωτοετών φοιτητών οφείλονται σε σημαντικό βαθμό στο μαθηματικό υπόβαθρο που έχουν από το σχολείο. Είναι γνωστό ότι η ύλη των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν επικεντρώνεται στη γεωμετρία των τριών διαστάσεων. Εύλογα επομένως προκύπτει το ερώτημα αν θα έπρεπε να δίνεται περισσότερη προσοχή στην γεωμετρία στο σχολείο και πιο συγκεκριμένα για τη έρευνά μας αν θα έπρεπε το εξωτερικό γινόμενο να διδάσκεται στο σχολείο, στο κεφάλαιο της εισαγωγής στον διανυσματικό λογισμό. Όπως έχουμε αναφέρει, η ερώτηση αυτή τέθηκε και στις τέσσερις συνεντεύξεις των καθηγητών. Όλοι συμφώνησαν ότι οι γνώσεις των φοιτητών που εισάγονται στη σχολή είναι ελλιπείς και πρότειναν κάποιες λύσεις ανάλογα με το επιστημονικό πεδίο τους. Η διδακτική πρόταση που προέκυψε μέσα από την παρούσα διπλωματική είναι να δίνεται περισσότερη έμφαση στη γεωμετρία των τριών διαστάσεων από το σχολείο και να ενθαρρύνεται η διαδικασία μετάβασης μιας μαθηματικής έννοιας από το ένα επίπεδο αναπαράστασης στο άλλο. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα οι φοιτητές με την εισαγωγή τους στη σχολή να μπορούν να κατανοήσουν σε βάθος τη σημασία του εξωτερικού γινομένου και να μπορούν να επεξεργάζονται με την ίδια ευκολία όλες τις αναπαραστάσεις του.

8.3 Χρήση του εξωτερικού γινομένου σε εφαρμογή της Μηχανικής

Το εξωτερικό γινόμενο, όντας μαθηματικό εργαλείο, αποτελεί ένα αντικείμενο το οποίο έχει χρήση σε εφαρμογές διαφόρων επιστημών. Κύριος άξονας την παρούσας διπλωματικής αποτέλεσε η εφαρμογή του εξωτερικού γινομένου στα μαθήματα της Φυσικής και της Μηχανικής.

Μέσα από το ερωτηματολόγιο μας δόθηκε η ευκαιρία να συγκεντρώσουμε τις εφαρμογές που έχουν συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο οι πρωτοετείς φοιτητές. Στο προηγούμενο κεφάλαιο έχουν αναφερθεί αναλυτικά οι εφαρμογές αυτές, αξίζει όμως επισημάνουμε ότι η πλειοψηφία των φοιτητών έδωσε ως απάντηση, τη ροπή. Αυτό θεωρείται αναμενόμενο εφόσον ήταν στην ύλη του μαθήματος της Μηχανικής στο πρώτο εξάμηνο της σχολής.

Στη συνέχεια εξετάστηκε ο βαθμός στον οποίο οι φοιτητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν το εξωτερικό γινόμενο σε μια άσκηση με ζητούμενο τη ροπή. Η ερώτηση που κλήθηκαν να απαντήσουν ήταν μια εφαρμογή από το μάθημα της Μηχανικής 1. Μέσα από το στατιστικό έλεγχο προέκυψαν αρκετές δυσκολίες στην επίλυση της άσκησης από την μεριά των φοιτητών. Στην προσπάθεια τους να βρουν το εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων που θα τους οδηγούσε στην ζητούμενη ροπή υπέπεσαν σε διάφορα λάθη. Όπως έχουμε αναφέρει αρκετοί ήταν αυτοί που πολλαπλασίασαν τα δύο διανύσματα με λάθος σειρά, εφαρμόζοντας την αντιμεταθετική ιδιότητα στο εξωτερικό γινόμενο. Κάποιοι άλλοι δεν επεξεργάστηκαν σωστά το δοσμένο σχήμα και έτσι δεν κατάφεραν να βρουν σωστά το ένα από τα δύο διανύσματα που χρειαζόντουσαν. Τέλος η μειοψηφία των φοιτητών έκανε λάθος την ορίζουσα, δηλαδή είτε αριθμητικό είτε διέταξε με λάθος σειρά τους συντελεστές των μοναδιαίων μέσα στην ορίζουσα. Ωστόσο, ιδιαίτερη προσοχή απαιτεί το γεγονός ότι ο αριθμός των φοιτητών που έκαναν κάποιο λάθος ήταν μικρότερος από τον αριθμό των φοιτητών που άφησαν κενή ή χωρίς σαφή απάντηση την συγκεκριμένη ερώτηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπήρχαν και φοιτητές που απάντησαν σωστά αλλά δεν αποτελούν την πλειοψηφία.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι φοιτητές γνωρίζουν ότι το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα εργαλείο, το οποίο το διδάσκονται πρώτη φορά στη σχολή και έχει εφαρμογή σε αρκετά μαθήματα. Τα λάθη στα οποία υπόκεινται πιθανώς οφείλονται στο ότι, όπως αναφέραμε, δεν έχουν κατανοήσει σε ικανοποιητικό βαθμό τον ορισμό του καθώς και τη γεωμετρική του αναπαράσταση, επομένως δεν μπορούν να το εφαρμόσουν σωστά σε κάθε περίπτωση. Η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας σε βάθος συνεπάγεται και άνεση στην χρήση της, φάνηκε λοιπόν ότι η πλειοψηφία δεν το έχει καταφέρει ακόμα αυτό.

8.4 Επίπεδα κατανόησης της έννοιας του εξωτερικού γινομένου

Εφόσον πραγματοποιήθηκε προσεκτική μελέτη των αποτελεσμάτων και των συσχετίσεων τους με το θεωρητικό πλαίσιο προέκυψαν κάποια συγκεκριμένα επίπεδα κατανόησης της έννοιας.

Επίπεδο 0: Ο φοιτητής έχει ακουστά την έννοια του εξωτερικού γινομένου, πιθανόν από κάποιο μάθημα το οποίο έχει παρακολουθήσει, όμως η έλλειψη γνώσεων για αυτήν δεν του επιτρέπει να την επεξεργαστεί με οποιονδήποτε τρόπο.

Επίπεδο 1-2: Ο φοιτητής έχει ατελή εικόνα της έννοιας, βρίσκεται στον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο, ξέρει να συμβολίζει και να υπολογίζει το εξωτερικό γινόμενο, όχι όμως πάντα σωστά, ανάλογα με τη δυσκολία της άσκησης μπορεί να εμφανίσει αρκετές από τις παρανοήσεις. Έχει εισέλθει και στον ενσαρκωμένο κόσμο χωρίς ωστόσο να τον έχει κατακτήσει, αφού παρουσιάζει κενά στην αντίληψη της γεωμετρικής αναπαράστασης του εξωτερικού γινομένου.

Επίπεδο 3-4: Ο φοιτητής έχει κατακτήσει τόσο τον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο όσο και τον ενσαρκωμένο. Αντιλαμβάνεται σε μεγάλο βαθμό την γεωμετρική σημασία του εξωτερικού γινομένου και έχει την ικανότητα να ενσαρκώνει την έννοια στον τρισδιάστατο χώρο. Ταυτόχρονα, γνωρίζει και την συμβολική αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου και την αλγεβρική του ερμηνεία. Παρουσιάζει όμως δυσκολίες στην κατανόηση του τυπικού ορισμού της έννοιας, επηρεασμένος από τον τρόπο εκμάθησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Επίπεδο 5-6: Ο φοιτητής δεν εμφανίζει τις γνωστές παρανοήσεις, έχει κατακτήσει σε σημαντικό βαθμό και τον αξιωματικό κόσμο. Γνωρίζει τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου και είναι σε θέση να τον χρησιμοποιήσει όταν είναι απαραίτητο. Επίσης δεν παρουσιάζει δυσκολίες στη μετάβαση από το ένα επίπεδο αναπαράστασης στο άλλο και μπορεί να εφαρμόσει το εξωτερικό γινόμενο σε ασκήσεις διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, ακόμα και όταν ζητείται έμμεσα σε μια άσκηση.

Τα επίπεδα κατανόησης περιγράφουν τις γνώσεις και τις ικανότητες που έχει ένα άτομο σε κάθε επίπεδο αλλά και τον τρόπο προσέγγισης όταν προσπαθεί να αντιμετωπίσει κάποιο θέμα σχετικό με την έννοια του εξωτερικού γινομένου. Ανάλογα με την περίπτωση που αντιμετωπίζει το κάθε άτομο μπορεί να παρατηρηθεί η εμφάνιση παρανοήσεων από χαμηλότερο επίπεδο. Τα επίπεδα αποτελούν αποτέλεσμα μάθησης η οποία οδηγεί το άτομο σε ανάλογη εξέλιξη.

Τέλος, υπογραμμίζουμε ότι ο κάθε καθηγητής μέσα από την αναγνώριση του επιπέδου που βρίσκεται ο φοιτητής έχει την ικανότητα να του προσφέρει τα απαραίτητα εργαλεία γνώσης, δηλαδή τις κατάλληλες δραστηριότητες, ώστε να μεταβεί στο επόμενο επίπεδο κατανόησης της έννοιας του εξωτερικού γινομένου.

8.5 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Ο βασικός στόχος της παρούσας διπλωματικής ήταν να εξετάσει την αντίληψη των φοιτητών για την έννοια του εξωτερικού γινομένου και τον βαθμό κατανόησής τους ως προς αυτήν. Μέσα από τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώσαμε ότι επιτεύχθηκε ο αρχικός στόχος. Προέκυψε όμως, ότι υπήρχαν πολλές κενές και μη σαφείς απαντήσεις σε όλη την έκταση του ερωτηματολογίου, καθώς επίσης και ότι μέσω της επαγωγικής στατιστικής οι συσχετίσεις που ελέγχθηκαν ανάμεσα στα ερωτήματα δεν ήταν ισχυρές. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις προτείνονται οι ακόλουθες πιθανές επεκτάσεις της παρούσας έρευνας.

Πρόταση 1

Η πρότασή μας απευθύνεται στο ίδιο δείγμα φοιτητών που εξετάσαμε και στην παρούσα διπλωματική. Συγκεκριμένα, συνίσταται να μοιραστεί στο τέλος του δεύτερου εξαμήνου το ίδιο ερωτηματολόγιο με κάποιες αλλαγές. Οι φοιτητές στο δεύτερο εξάμηνο συναντάνε την έννοια του εξωτερικού γινομένου σε περισσότερες εφαρμογές, κυρίως στα μαθήματα της Μηχανικής και του Ηλεκτρομαγνητισμού. Επομένως, το αρχικό ερωτηματολόγιο μπορεί να εμπλουτιστεί με τέτοιες εφαρμογές. Με αυτόν τον τρόπο θα γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων στα δύο ερωτηματολόγια. Ο έλεγχος αυτός πιθανώς να οδηγήσει σε νέα δεδομένα που είτε θα ενισχύσουν τα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής είτε θα τα απορρίψουν. Προτείνεται επίσης, σαν δεύτερη φάση, να πραγματοποιηθούν συνεντεύξεις με κάποιους από τους φοιτητές ώστε να γίνει ποιοτικός έλεγχος των απαντήσεων ανάμεσα στα δύο ερωτηματολόγια.

Πρόταση 2

Θα θέλαμε επίσης να προτείνουμε τη διεξαγωγή μιας νέας έρευνας για την διδασκαλία του εξωτερικού γινομένου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο διανυσματικός λογισμός εισάγεται στο σχολείο στη Β΄ Γυμνασίου, που είναι εκτός ύλης και στη Β΄ Λυκείου, που η ύλη σταματάει μετά την περάτωση του εσωτερικού γινομένου. Επομένως, προτείνεται η μελέτη δύο ομάδων μαθητών, όπου στη μια θα διδαχθεί το εξωτερικό γινόμενο έπειτα από το εσωτερικό στη Β΄ Λυκείου, ενώ στην άλλη όχι. Επιπλέον, συνίσταται σε δεύτερο στάδιο να διδαχθεί στο ίδιο τμήμα το εξωτερικό γινόμενο στο μάθημα της Φυσικής της Γ΄ Λυκείου μαζί με εφαρμογές στον τομέα της Φυσικής. Αξίζει να αναφέρουμε ότι στο βιβλίο της Φυσικής της Γ′ Λυκείου υπάρχει ένθετο με τον ορισμό της έννοιας του εξωτερικού γινομένου. Η νέα αυτή έρευνα απαιτεί μεγάλο χρονικό διάστημα για να πραγματοποιηθεί, ωστόσο θεωρούμε ότι μελετώντας αυτή τη διαδικασία θα εξεταστεί αν τελικά η ένταξη του εξωτερικού γινομένου στο Λύκειο θα οδηγήσει σε καλύτερη κατανόησή του από τους φοιτητές και σε καλύτερη αντίληψη του χώρου των τριών διαστάσεων.

Βιβλιογραφία

[1] Κείσογλου, Σ. και Σπύρου, Π. *Η Μαθητικοποίηση της Μορφής. Το Παράδειγμα της Ομοιότητας των Ορθογωνίων Τριγώνων.* Μελέτη που παρουσιάστηκε στο 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, Αθήνα (2003).

[2] Demetriadou, H. and Gagatsis, A., *On the History of the Concept of Vector and its Introduction in Elementary Geometry Textbooks*, edited by Gagatsis, A. and Rogers, L., Didactics and history of mathematic (????).

[3] Fine, B. and Rosenber, G., *Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*, Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα, Αθήνα (2001).

[4] Allardice , R. E., M. A , *The Barycentric Calculus of Mobius* (1891).

[5] Crowe, M. J., *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Notre Dame University Press (1967).

[6] Hamilton, R. W., (1843) *On a New Species of Imaginary Quantities Connected with a Theory of Quaternions* edited for the Royal Irish Academy,2 pp.424-434 by Wilkins R. David (1999).

[7] Hamilton, R. W., *On Quaternions, or On a New System of Imaginaries in Algebra*, edited for Philosophical Magazine (1844-1850) by Wilkins R. David (2000).

[8] Hamilton, R. W., *Lectures On Quaternions*, edited for the Royal Irish Academy (1848), by Hodges and Smith, Dublin (1853).

[9] Dorier, J., *A General Outline of the Genesis of the Vector Space Theory*, Historia Mathematica 22, p.227-261 (1995).

[10] Grassmann, H., *Die Ausdehnungslehre, Vollstandig und in Strenger Form* , Berlin (1862).

[11] Grassmann, H., *Extension Theory*, American Mathematial Society (2000).

[12] Gibbs, J. W., *Elements of Vector Analysis*, printed by Tuttle, Morehouse and Taylor, New Haven, (1881-1884).

[13] Gibbs, J. W., *On Multiple Algebra*, printed at the Salem Press, Salem, (1886).

[14] Anquirre, J. M. and Rankin, G., *College Students' Conceptions about Vector Kinematics* , Physics Education, 24, 290-294, (1989).

[15] Bariniol, P., Zavala, G. and Hinojosa, C., *Students' in Interpreting the Torque Vector in a Physical Situation*,AIP Conference Proceedings, 1513,58-61 (2013).

[16] Flores, S., Kanim, S. E. and Kautz, C. H., *Student Use of Vectors in Intriductory Mechanics*, American Journal of Physics, 72(4), 460-468,(2004).

[17] Hestenes, D. and Wells, M., *A Mechanics Baseline Test*, The Physicq Teacher, 30, 159-166,(1992).

[18] Hestenes, D., Wells, M. and Swackhamer, G., *Force Concept Inventory*, The Physicq Teacher, 30, 141-158,(1992).

[19] Miller - Young, J. E., *Calculations and Expectations: How Engineering Students Describe Three-dimensional Forces*, Canadian Journal for the Scolarship of Teaching and Learning, 1-11, (2013).

[20] Barniol, P. and Zavala, G., *Test of Understanding of Vectors: A Reliable Multiple-Choice Vector Concept Test*, Physical Review Special Topics - Physics Education Research, (2014).

[21] Zavala, G. and Barniol, P., *Students' Understanding of the Concepts of Vector Components and Vector Products*, AIP Conference Proceedings, Vol. 1289, (pp. 341-344), (2013).

[22] Knight, R. D., *The Vector Knowledge of Beginning Physics Students*, The Physics Teacher, 33, 74-78, (1995).

[23] Nguyen, N. L. and Meltzer, D. E., *Initial Understanding of Physics*, 71(6), 630-638, (2003).

[24] Van Devnter, J. and Wittman, M. C., *Comparing Student Use of Mathematical and Physical Vector Representations*, edited by L. Hsu, C. Henderson and L. McCullough, 2007, Physics Education Research Conference, Vol. 951, (pp. 208-211), (2007).

[25] Wang, t. and Sayre, E. C., *Maximum Likelihood Estimation (MLE) of Students' Understanding of Vector Subtraction*, edited by C. Singh, M. Sabella and S. Rebello, AIP Conference Proceedins, Vol. 1289, (pp. 329-332), (2010).

[26] Stewart, S. and Thomas, M. O. J., *A Framework for Mathematical Thinking: The Case of Linear Algebra*, Intenational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(7), 951-961, (2009).

[27] Dubinsky, E., *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*, edited by D. O. Tall, Advanced Mathematical Thinking, (pp. 95-123), (1991).

[28] Tall, D. O.,*Building Theories: The Three Worlds of Mathematics*, for The Learning of Mathematics, 24(1), 29-32, (2004).

[29] Kwon, O. H., *Conceptualizing Vectors in College Geometry: A new Framework for Analysis of Student Approaches and Difficalties*, Proceedings of the 16th annual conference on research in undergraduate mathematics education, 2, (pp. 555-565), (2013).

[30] Tall, D. O. and Vinner, Sh., *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 12, 151-169, (1981).

[31] Vinner, Sh., *The Role of Definitins in the Teaching and Learning of Mathematics*, edited by D. Tall, Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, (pp. 65-81), (1991).

[32] Δαγδιλέλης, Β., Παυλοπούλου, Κ. και Τρίγγα, Π., *Διδακτική-Μέθοδοι και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Ε. Μπένου, (pp. 267-305) , (1998).

[33] Duval, R., *Sémiosis et la Pensée Humaine*, Peter Lang, (1996).

[34] Pavlopoulou, K., *Un Problème Décisif poul l' Apprentissage de l' Algèbre Linéaire: la Coordination des Registres de Représentation*, Annales de Didactique et des Sciences Cgnitives, vol5, (pp. 67-93), (1993).

[35] Pavlopoulou, K., *Propédeutique de l' Algèbre Linéaire: la Coordination des Registres de Représentation Sémiotique*, Thèse de Doctorat, University Louis Pasteur, Strasbourg, (1994).

[36] Φελλούρης, Α., *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Ιδιωτική έκδοση, 3η έκδοση, (σελ. 90-93), (2010).

[37] Βαδουλάκης, Ι. και Γιαννακόπουλος, Α., *Τεχνική Μηχανική 1*, 2η έκδοση, Αθήνα, (σελ. 248-249), (2008).

[38] Kittel, C., Knight, W. D., Ruderman, M. A., Helmholz, A. C. and Moyer, B. J., *Μηχανική*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2η Ελληνική Έκδοση, Αθήνα, (σελ. 31-35), (1998).

[39] Φουσκάκης, Δ., *Ανάλυση Δεδομένων με τη Χρήση της R*, Εκδόσεις Τσόπρας, Αθήνα, (2013).

Παράρτημα Α΄

Ερωτηματολόγιο για φοιτητές

ΌΝΟΜΑ............................
ΕΤΟΣ.............................

1. Τί σας έρχεται στο νου με τον όρο εξωτερικό γινόμενο;

2. Να δώσετε τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου και τη γεωμετρική του αναπαράσταση.

3. Σε ποια μαθήματα έχετε συναντήσει το εξωτερικό γινόμενο κατά τη διάρκεια των μέχρι τώρα σπουδών σας; Να αναφέρετε επιγραμματικά εφαρμογές που έχετε κάνει σε αυτά τα μαθήματα.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}$ και $\vec{B} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$ σε ένα χώρο τριών διαστάσεων, όπου $\vec{i} =< 1, 0, 0 >, \vec{j} =< 0, 1, 0 >, \vec{k} =< 0, 0, 1 >$ τα θετικά μοναδιαία

διανύσματα των αξόνων x, y, z . Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{C}$ που να είναι κάθετο στα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$

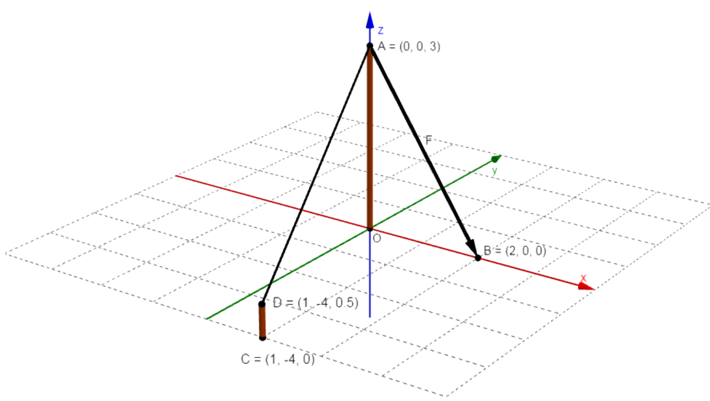
α) γεωμετρικά

β) με αλγεβρικό τρόπο

5. Έστω ξύλινοι πάσσαλοι OA και CD και συρματόσχοινο AB και AD. Μέσω του συρματόσχοινου AB ασκείται στο σημείο A δύναμη $\vec{F} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$. Να βρείτε:

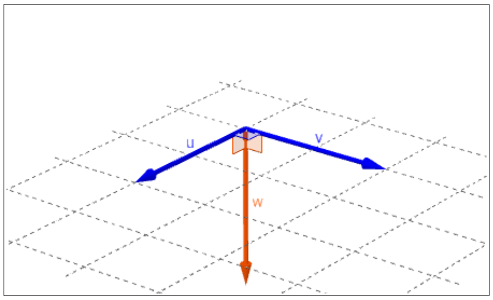
α) τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο O

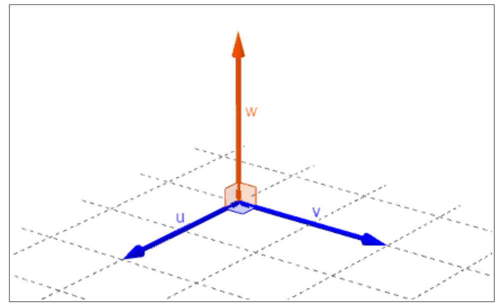
β) τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο D

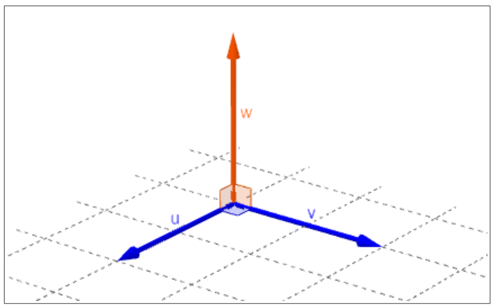


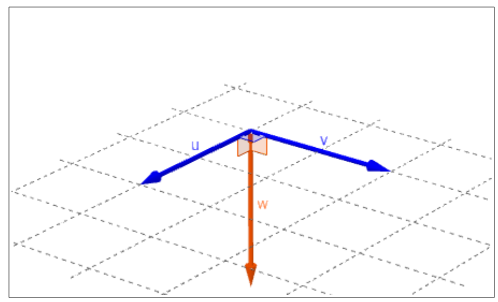
6. Έστω δυο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ σε έναν χώρο τριών διαστάσεων με $\vec{u} \perp \vec{v}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις επιλογές (1,2,3,4) με μία από τις παρακάτω εικόνες (α,β,γ,δ):

1. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ 2. $\vec{w} = -\vec{u} \times -\vec{v}$ 3. $\vec{w} = -\vec{u} \times \vec{v}$ 4. $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$

α. 

β. 

γ. 

δ. 

7. Χρησιμοποιήσατε τον κανόνα του δεξιού χεριού στην προηγούμενη άσκηση;

Παράρτημα Β΄

Ερωτηματολόγιο για καθηγητές

ΟΝΟΜΑΤΕΠΏΝΥΜΟ...
ΜΑΘΗΜΑ...

1. Όταν δίνετε για πρώτη φορά τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, τι είδους γεωμετρική αναπαράσταση χρησιμοποιείτε και ποιες είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στην κατανόηση αυτής της αναπαράστασης·

2. Χρησιμοποιείτε διαφορετικές εφαρμογές για να εξηγήσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου και διαφορετικές για την αλγεβρική του έκφραση;

3. Τί σκοπό έχει η κάθε εφαρμογή που χρησιμοποιείτε;

4. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να εξηγήσετε την κατεύθυνσή του;

5. Ποιές πιστεύετε είναι οι παρανοήσεις των φοιτητών ως προς το εξωτερικό γινόμενο;

6. Στο Λύκειο δεν διδάσκετε το εξωτερικό γινόμενο. Πιστεύετε ότι αν το είχαν ήδη διδαχθεί στο Λύκειο θα τους βοηθούσε στην αρχή των σπουδών τους;