



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Ανάπτυξη και Διερεύνηση Μεθόδου Αεροελαστικής  
Βελτιστοποίησης με Χρήση της Συζυγούς Μεθόδου

Διπλωματική Εργασία

Ανδρέας Χρυσολούρης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020



## Ευχαριστίες

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για το χρόνο που διέθεσε και την πολύτιμη βοήθειά που μου προσέφερε, προκειμένου να ολοκληρωθεί η εργασία αυτή.

Επίσης, ευχαριστώ τον Δρ. Κωνσταντίνο Τσιάκα για όλη τη βοήθεια που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας, καθώς και τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε, όποτε είχα ανάγκη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για τη στήριξη που μου προσέφεραν στα χρόνια της φοίτησής μου.





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Ανάπτυξη και Διερεύνηση Μεθόδου Αεροελαστικής Βελτιστοποίησης με Χρήση της Συζυγούς Μεθόδου

Διπλωματική Εργασία

Ανδρέας Χρυσολούρης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2020

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας αυτής είναι η ανάπτυξη, ο προγραμματισμός και η διερεύνηση μιας μεθόδου στατικής αεροελαστικής βελτιστοποίησης. Στο πλαίσιο αυτής, πραγματοποιείται η σύζευξη ενός αεροδυναμικού και ενός ελαστικού επιλύτη, ο έλεγχος της ορθής λειτουργίας, τόσο του αεροδυναμικού, όσο και του συζευγμένου επιλύτη, ο απεπλεγμένος υπολογισμός των ολικών παραγώγων του συζευγμένου συστήματος και η εφαρμογή των παραπάνω σε μια βελτιστοποίηση μορφής διδιάστατης αεροτομής. Ο υπολογισμός των παραγώγων είναι αναγκαίος, λόγω της χρήσης αιτιοκρατικής μεθόδου βελτιστοποίησης και συγκεκριμένα αυτής της απότομης καθόδου (*Steepest Descent*). Ωστόσο, η θεωρία που αναπτύσσεται είναι εφαρμόσιμη σε οποιαδήποτε άλλη αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης που βασίζεται στον υπολογισμό των παραγώγων (*Gradient – Based*). Στη βελτιστοποίηση που εκτελείται, ως συνάρτηση στόχος, τίθεται ο λόγος της άνωσης προς την οπισθέλκουσα, ενώ ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίζονται οι συντεταγμένες των καμπυλών *Bezier*, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την παραμετροποίηση της γεωμετρίας της αεροτομής. Ο υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης στόχου, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, πραγματοποιείται με απεπλεγμένο τρόπο, με χρήση της μεθόδου *MDF* (*Multidisciplinary Feasible*), απλοποιώντας έτσι τη διαδικασία και εξαλείφοντας την ανάγκη μετατροπής των επιμέρους επιλυτών σε ένα σύνθετο απεπλεγμένο επιλύτη. Η προαναφερθείσα μέθοδος όμως, απαιτεί τον υπολογισμό των ολικών παραγώγων των επιμέρους απομονωμένων συστημάτων. Από την πλευρά του προβλήματος ροής, οι παράγωγοι υπολογίζονται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, με υπολογιστικό κόστος ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ στην περίπτωση του ελαστικού προβλήματος, ο υπολογισμός αυτός γίνεται αναλυτικά. Για την αεροδυναμική επίλυση και την προσαρμογή του πλέγματος, διαδικασίες αναγκαίες σε μια αεροελαστική μελέτη, καθώς και τη συνεχή συζυγή μέθοδο υπολογισμού

των αεροδυναμικών παραγώγων, χρησιμοποιείται ο επιλύτης *PUMA*, ο οποίος έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ.



**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluids Department**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

## **Development and Investigation of an Aeroelastic Optimization Method Using the Continuous Adjoint Method**

Diploma Thesis

**Andreas Chrysolouris**

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2020

Abstract

The aim of the present thesis is the development, programming and investigation of a method of static aeroelastic optimization. In the context of this work, the following are implemented: the coupling of an aerodynamic and an elastic solver, the validation of the proper function for both the aerodynamic and the coupled solvers, the decoupled computation of the total derivatives of the coupled system and the implementation of all of the above in the problem of the optimization of the form of a two-dimensional airfoil. The computation of the total derivatives is necessary, due to the use of a Deterministic Gradient-Based optimization method and more specifically the Steepest Descent method. However, the developed theory is applicable to any other Deterministic Gradient-Based optimization method. In the implemented optimization process, the ratio of lift to drag is chosen as the objective function to be maximized, while the coordinates of the Bezier curves that are used to parametrize the geometry of the airfoil, are chosen as the design variables. The computation of the derivatives of the objective function with respect to the design variables is implemented in a decoupled way, as was previously mentioned, through the MDF method, thus simplifying the method and negating the need for converting the individual solvers to a composite coupled solver. The aforementioned method though, requires the calculation of the total derivatives of the individual insulated systems. Concerning the flow problem, the derivatives are calculated using the Continuous Adjoint Method, with computational cost independent of the number of design variables, while in the case of the elastic problem the same computation is done analytically. For the aerodynamic solution and the grid morphing, both processes necessary in an aeroelastic study, as well as for the Continuous Adjoint Method for the computation of the aerodynamic derivatives, the PUMA solver, which has been developed in PCOpt/NTUA, is used.





## Ακρωνύμια

EMΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
CFD	Computational Fluid Dynamics
CSM	Computational Structural Mechanics
FSI	Fluid Structure Interaction
MDF	Multidisciplinary Feasible
MPA	Mixed Precision Arithmetics
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
PUMA	Parallel Unstructured Multi-row Adjoint
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης . . . . .	1
1.1.1 Αιτιοκρατικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης . . . . .	1
1.1.2 Στοχαστικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης . . . . .	2
1.2 Συζευγμένα Συστήματα . . . . .	3
1.3 Αεροελαστικότητα . . . . .	4
1.4 Δομή Εργασίας . . . . .	5
<b>2 Αριθμητική Επίλυση της Ροής</b>	<b>7</b>
2.1 Μοντέλο Πρόλεξης Συνεκτικών Ροών . . . . .	7
2.1.1 Εξισώσεις <i>RANS</i> . . . . .	7
2.1.2 Οριακές Συνθήκες . . . . .	10
2.1.3 Διακριτοποίηση . . . . .	11
2.1.4 Χρήση Επεξεργαστών Καρτών Γραφικών . . . . .	13
2.2 Μοντέλο Πρόλεξης Ατριβών Ροών . . . . .	14
2.3 Έλεγχος Επιλύτη Συνεκτικής Ροής . . . . .	14
2.4 Επιλογή Αεροδυναμικού Μοντέλου . . . . .	16
<b>3 Αεροελαστικό Μοντέλο</b>	<b>23</b>
3.1 Αεροελαστική Επίλυση . . . . .	23
3.1.1 Μεταφορά Διακριτών Δεδομένων Μεταξύ Ανόμοιων Πλεγμάτων	26
3.1.2 Μεταφορά Διακριτών Δεδομένων σε Αεροελαστικό Πρόβλημα .	29

3.2	Μεταφορά Δεδομένων στην Εφαρμογή . . . . .	31
3.3	Μέθοδος επίλυσης . . . . .	33
3.4	Έλεγχοι Αποτελεσμάτων . . . . .	36
3.4.1	Έλεγχος Εγκυρότητας Λύσεως . . . . .	36
3.4.2	Ευστάθεια Σύγκλισης Μεθόδου . . . . .	38
3.4.3	Ανεξαρτησία Λύσης από τις Αρχικές Συνθήκες . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Μέθοδος Υπολογισμού Παραγώγων Συζευγμένου Συστήματος</b>	<b>41</b>
4.1	Υπολογισμός Παραγώγων Επιμέρους Συστημάτων . . . . .	42
4.1.1	Υπολογισμός Αεροδυναμικών Παραγώγων με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο . . . . .	42
4.1.2	Υπολογισμός Ελαστικών Παραγώγων . . . . .	45
4.2	Ανάλυση Μεθόδου <i>MDF</i> . . . . .	45
4.2.1	Παράδειγμα εφαρμογής <i>MDF</i> . . . . .	46
4.3	Σύγκριση Αποτελεσμάτων . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Αεροελαστική Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής</b>	<b>53</b>
5.1	Παραμετροποίηση . . . . .	53
5.2	Μαθηματικό υπόβαθρο . . . . .	55
5.3	Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης . . . . .	58
5.4	Αποτελέσματα Εφαρμογής . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα</b>	<b>67</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>69</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

Μια μέθοδος βελτιστοποίησης δεν αποτελεί παρά ένα εργαλείο, το οποίο δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να βρει τη βέλτιστη δυνατή λύση, σε δεδομένο χωρίο αναζήτησης ορισμένο στο χώρο των μεταβλητών σχεδιασμού, σύμφωνα με τους στόχους που ο ίδιος έχει θέσει. Αυτή χρησιμοποιεί ένα υποστηρικτικό λογισμικό, για την αξιολόγηση των πιθανών λύσεων, σε σχέση με τον προαναφερθέντα στόχο. Βεβαίως, λόγω του υψηλού υπολογιστικού κόστους των λογισμικών αξιολόγησης, είναι επιθυμητό η μέθοδος βελτιστοποίησης να μην εντοπίζει μόνο τη βέλτιστη λύση, αλλά και να το επιτυγχάνει στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Οι μέθοδοι αυτοί κατατάσσονται σε δύο μεγάλες υποκατηγορίες αναλόγως με τον τρόπο που χρησιμοποιούν για να 'κινούνται' στο χώρο των πιθανών λύσεων. Οι κατηγορίες αυτές είναι οι αιτιοκρατικές και οι στοχαστικές μέθοδοι. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούνται μόνο αιτιοκρατικές μέθοδοι, όμως γίνεται σύντομη αναφορά και στις δυο για λόγους πληρότητας (για περαιτέρω ανάλυση [1]).

#### 1.1.1 Αιτιοκρατικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

Ως αιτιοκρατικές χαρακτηρίζονται οι μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες βασίζονται σε μαθηματικά (ντετερμινιστικά) κριτήρια, για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Στο μεγαλύτερο ποσοστό τους, οι μέθοδοι αυτοί εστιάζουν στον υπολογισμό, αναλυτικό ή προσεγγιστικό, των παραγώγων της συνάρτησης στόχου, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Οι μέθοδοι αυτοί προτιμώνται κυρίως λόγω της ταχύτητας σύγκλισης τους και συνεπώς, του χαμηλότερου υπολογιστικού κόστους. Ωστόσο, η δημιουργία τέτοιων μεθόδων ενδέχεται να αποτελέσει επίπονη διαδικασία για τον προγραμματιστή, στην περίπτωση αδυναμίας αναλυτικού υπολογισμού της ζητούμενης παραγώγου. Επιπλέον,

πολλές φορές οι αλγόριθμοι αυτοί ενδέχεται να ‘παγιδευτούν’ σε τοπικά βέλτιστη λύση, ενώ η κατασκευή τους μπορεί (ανάλογα με την μέθοδο υπολογισμού των παραγώγων) να απαιτεί πρόσβαση στους πηγαίους κώδικες των λογισμικών αξιολόγησης.

Για τον υπολογισμό των παραγώγων, όταν αυτό δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί αναλυτικά, έχει αναπτυχθεί μεγάλο πλήθος αριθμητικών μεθόδων. Τέτοιες μέθοδοι είναι μεταξύ άλλων, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (*Finite Difference*), η μέθοδος των συζυγών μεταβλητών (*Complex Variable Method*) [2] [3] [4] καθώς και η μέθοδος της άμεσης διαφορίσης (*Direct Differentiation*) [5] [6] [7]. Κοινό χαρακτηριστικό των παραπάνω είναι η άμεση εξάρτηση του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού και αυτού των αναγκαίων αξιολογήσεων ανά κύκλο βελτιστοποίησης, αυξάνοντας δραματικά το κόστος αυτών των μεθόδων σε μεγάλο ποσοστό των πιθανών εφαρμογών τους. Για να αποφευχθεί το φαινόμενο αυτό αναπτύχθηκαν οι συζυγείς μέθοδοι (*Adjoint Method*), οι οποίες επιτυγχάνουν την ανεξαρτησία του αριθμού των αξιολογήσεων ανά κύκλο βελτιστοποίησης και αυτού των μεταβλητών σχεδιασμού. Αυτές οι μέθοδοι χωρίζονται σε διακριτές (*Discrete Adjoint*), όπου η διακριτοποίηση των εξισώσεων προηγείται της διαφορίσής τους και συνεχείς (*Continuous Adjoint*), όπου η διακριτοποίηση έπεται της διαφορίσης. Στην περίπτωση της διακριτής μεθόδου, ο υπολογισμός των παραγώγων της διακριτοποιημένης συνάρτησης γίνεται αναλυτικά με μεθόδους όπως η αλγοριθμική μέθοδος διαφορίσης (*Algorithmic Differentiation*) [8], η οποία δίνει εξαιρετική ακρίβεια, αλλά ταυτόχρονα καταναλώνει πολύ περισσότερη μνήμη σε σχέση με τις συνεχείς μεθόδους. Στην περίπτωση των συνεχών συζυγών μεθόδων, οι παράγωγοι υπολογίζονται με τη χρήση μεθόδων όπως η *SI* (*Surface Integral*) [9], η *FI* (*Field Integral*) [10] και η *E-SI* (*Enhanced Surface Integral*) [11]. Στη μέθοδο που θα αναπτυχθεί εδώ, χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος *FI* για τον υπολογισμό των παραγώγων και τη μέθοδο *MDF* (*Multidisciplinary Feasible*), η οποία υπολογίζει παραγώγους συζευγμένων συστημάτων με απεπλεγμένο τρόπο.

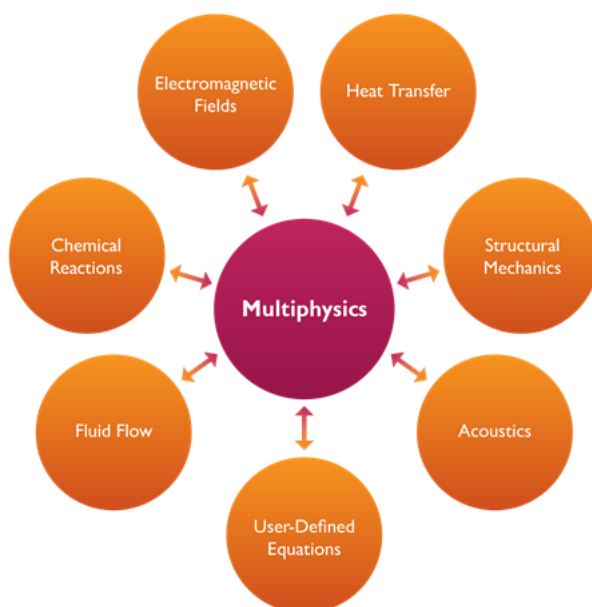
### 1.1.2 Στοχαστικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι μέθοδοι που αντί για μαθηματικά κριτήρια, βασίζονται σε στοχαστική αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Βέβαια, η στοχαστικότητα των μεθόδων αυτών μπορεί να περιορίζεται (για την ταχύτερη σύγκλισή τους) ή να εντείνεται (για την αναζήτηση σε μεγαλύτερο εύρος λύσεων και την αποφυγή παγίδευσής τους σε τοπικά ακρότατα), ανάλογα με τις επιλογές του χρήστη. Αυτές οι μέθοδοι χαρακτηρίζονται γενικότερα από δυνατότητα εύρεσης του καθολικού βέλτιστου, σε αντίθεση με τις αιτιοκρατικές, καθώς και από δυνατότητα ευκολότερης προσαρμογής τους για διαφορετικές χρήσεις. Το υπολογιστικό κόστος αυτών όμως, συνήθως είναι αρκετά υψηλότερο αυτού των αιτιοκρατικών. Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι γενετικοί αλγόριθμοι [12][13], οι εξελικτικές στρατηγικές [14], καθώς και οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, που αποτελούν συνδυασμό των δυο προηγούμενων[15]. Οι παραπάνω μέθοδοι, βασίζονται στην εξελικτική θεωρία των ειδών και μιμούνται διαδικασίες που πραγματοποιούνται σε αυτήν, όπως η επιλογή γονέων, οι διασταυρώσεις μεταξύ λύσε-

ων και οι μεταλλάξεις αυτών. Συνεπώς, οι μέθοδοι αυτοί χρειάζονται έναν αρχικό πληθυσμό λύσεων, ο οποίος αξιολογείται και στη συνέχεια υπόκειται στις προαναφερθείσες διαδικασίες, ώστε να ανανεωθεί. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται, προκειμένου να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό των αξιολογήσεων που εκτελούνται ανά επανάληψη, γίνεται αντιληπτό το υψηλό κόστος αυτών των μεθόδων, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ιδίως στην περίπτωση χρησιμοποίησης λογισμικού αξιολόγησης με μεγάλες απαιτήσεις. Για να περιοριστεί το παραπάνω, εφαρμόζονται μέθοδοι μεταπρωτύπων [16] [17] [18], τα οποία εκπαιδεύονται σε συγκεκριμένο πλήθος λύσεων, ώστε να προβλέπουν το αποτέλεσμα του λογισμικού αξιολόγησης με αρκετά μεγαλύτερη ταχύτητα, μειώνοντας έτσι το συνολικό κόστος της διαδικασίας.

## 1.2 Συζευγμένα Συστήματα

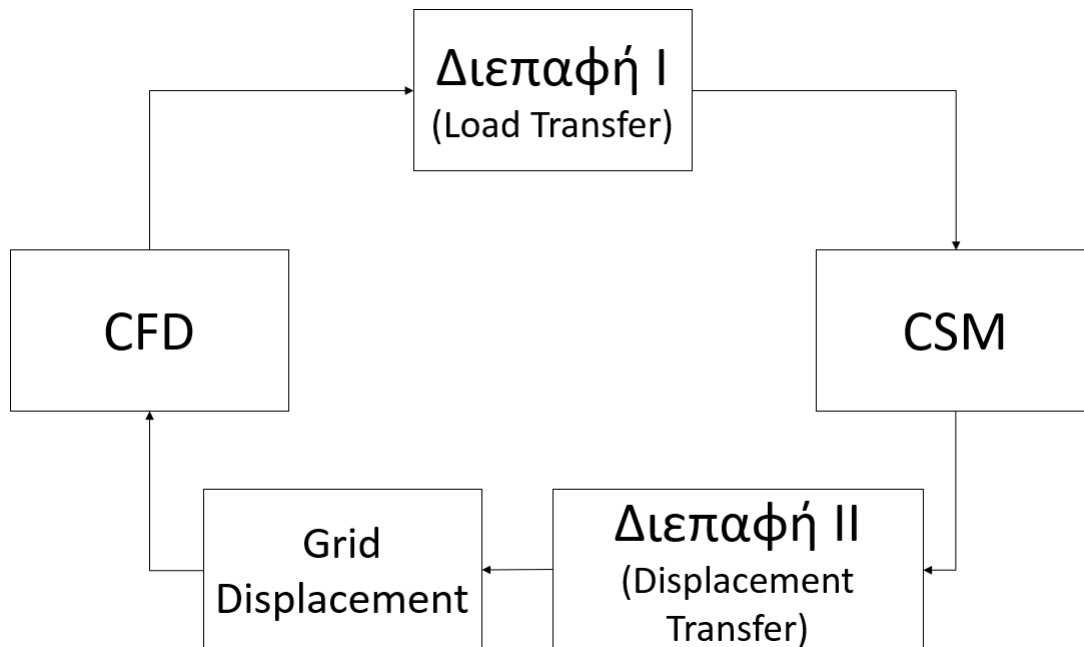
Συζευγμένο ονομάζεται ένα σύστημα, το οποίο περιγράφεται από δύο ή περισσότερα ταυτόχρονα εξελισσόμενα φυσικά φαινόμενα [19]. Συνεπώς, η προσομοίωση αυτών με τη χρήση υπολογιστικών εργαλείων χρήζει τακτικής επικοινωνίας μεταξύ των επιμέρους συστημάτων που το αποτελούν. Τα συστήματα αυτά δύνανται να προσομοιώσουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια πλήθος φυσικών φαινομένων, γεγονός που έχει αυξήσει ραγδαία τη χρήση τους σε πλήθος βιομηχανικών εφαρμογών. Αυτά ενδέχεται να περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων, φυσικούς τομείς όπως τη ρευστομηχανική, την ακουστική, τη μηχανική στερεού σώματος, τη μεταφορά θερμότητας, τον ηλεκτρομαγνητισμό κλπ.



Σχήμα 1.1: Τομείς των συζευγμένων προβλημάτων.

### 1.3 Αεροελαστικότητα

Η επίλυση ενός αεροελαστικού προβλήματος απαιτεί τη σύζευξη μεθόδων και λογισμικών ρευστομηχανικής και δομικής ανάλυσης. Η αεροελαστικότητα χωρίζεται σε δυναμική και στατική, αναλόγως με τον αν υπάρχει ή όχι εξάρτηση των φαινομένων που εξετάζονται από τον χρόνο. Σε μια τέτοια μελέτη, πραγματοποιείται αρχική επίλυση της ροής, δηλαδή του αεροδυναμικού μοντέλου με κατάλληλο επιλύτη, γύρω από την εξεταζόμενη γεωμετρία με ταυτόχρονο προσδιορισμό των ασκούμενων δυνάμεων. Έπειτα, το ελαστικό μοντέλο υπολογίζει τις προκύπτουσες παραμορφώσεις, προκειμένου να μεταβάλει την γεωμετρία. Τα προηγούμενα δυο βήματα εκτελούνται επαναληπτικά μέχρι σύγκλισης. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται σε απλή μορφή ένα τέτοιο σύστημα.



Σχήμα 1.2: Αλγόριθμος αλληλεπίδρασης ρευστού-στερεού.

Ακολουθεί μια σύντομη επεξήγηση των επιμέρους τμημάτων, όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα 1.2.

- *CFD (Computational Fluid Dynamics)*: Πραγματοποιεί την αεροδυναμική επίλυση της ροής, μέσω της επίλυσης των εξισώσεων *Navier – Stokes* ή *Euler* αναλόγως με τις ανάγκες της εφαρμογής.
- *CSM (Computational Structural Mechanics)*: Πραγματοποιεί την ελαστική ανάλυση του σώματος, υπολογίζοντας τις παραμορφώσεις που το στερεό δέχεται λόγω των αεροδυναμικών φορτίων.
- *Διεπαφές*: Αποτελούν το ενδιάμεσο λογισμικό, το οποίο μετατρέπει τις εξόδους του



ενός τμήματος σε κατάλληλη μορφή, ώστε να αποτελέσουν τις εισόδους του άλλου. Ένα τέτοιο λογισμικό είναι απαραίτητο για την επικοινωνία μεταξύ των υποσυστημάτων, η οποία συνήθως δυσχεραίνεται, λόγω τόσο των διαφορετικών βαθμών ελευθερίας αυτών, όσο και των διαφορετικών πλεγμάτων που χρησιμοποιούν.

- *Grid Morph*: Αποτελεί υποστηρικτικό λογισμικό, που προσαρμόζει το πλέγμα του αεροδυναμικού τμήματος σύμφωνα με τις παραμορφώσεις που δόθηκαν από το ελαστικό.

## 1.4 Δομή Εργασίας

Η διπλωματική εργασία έχει την ακόλουθη διάρθρωση:

- Κεφάλαιο 2: Παρουσίαση των αεροδυναμικών εξισώσεων *Euler* και *RANS* (*Reynolds Averaged Navier Stokes*) καθώς και επιλογή αεροδυναμικού επιλύτη, που θα χρησιμοποιηθεί για τις μελέτες που θα παρουσιαστούν. Τέλος, ελέγχεται η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων του επιλεγμένου αεροδυναμικού επιλύτη.

- Κεφάλαιο 3: Ανάλυση του αεροελαστικού μοντέλου και παρουσίαση του ελαστικού μοντέλου που χρησιμοποιείται στις εφαρμογές. Τέλος, πραγματοποιείται έλεγχος της αξιοπιστίας της αεροελαστικής επίλυσης.

- Κεφάλαιο 4: Ανάλυση της μεθόδου υπολογισμού παραγώγων και σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτής με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

- Κεφάλαιο 5: Ανάλυση εφαρμογής αεροελαστικής βελτιστοποίησης της γεωμετρίας αεροτομής, με στόχο την αύξηση του λόγου της άνωσης προς την οπισθέλκουσα ( $\frac{L}{D}$ ) αυτής.

- Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα.



# Κεφάλαιο 2

## Αριθμητική Επίλυση της Ροής

Στο κεφάλαιο αυτό, θα πραγματοποιηθεί σύντομη παρουσίαση τόσο των εξισώσεων *Euler*, όσο και των *RANS* (*Reynolds – Averaged Navier – Stokes*). Στην συνέχεια, θα πραγματοποιηθεί επικύρωση των αποτελεσμάτων της επίλυσης των εξισώσεων *RANS* και μετέπειτα σύγκριση αυτών με τα αποτελέσματα των εξισώσεων *Euler*, προκειμένου να κριθεί κατά πόσον είναι αποδεκτή η χρήση των εξισώσεων *Euler*, στο πλαίσιο μιας αεροελαστικής μελέτης. Συγκεκριμένα εξετάζεται, αν οι τελευταίες δύνανται να υπολογίσουν με επαρκή ακρίβεια τα αεροδυναμικά φορτία που ασκούνται στην υπό εξέταση αεροτομή.

### 2.1 Μοντέλο Πρόλεξης Συνεκτικών Ροών

Εδώ θα παρουσιαστούν τόσο οι εξισώσεις της συνεκτικής ροής, όσο και οι μέθοδοι που το λογισμικό Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ) χρησιμοποιεί για την επίλυσή τους. Το χρησιμοποιούμενο λογισμικό είναι ο κώδικας *PUMA* (*Parallel Unstructured Multi – row Adjoint*) της ΜΠΥΡ&Β (Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης) του ΕΜΠ, ο οποίος έχει αναπτυχθεί από μια σειρά διδακτορικών διατριβών [20],[21],[22],[23]. Η ανάλυση που θα ακολουθήσει για τη μέθοδο επίλυσης συνεκτικών και μη-συνεκτικών ροών βασίζεται στην [20].

#### 2.1.1 Εξισώσεις *RANS*

Η επίλυση των εξισώσεων *RANS* λαμβάνει υπόψη της τα συνεκτικά φαινόμενα και αποτελεί μια αρκετά αξιόπιστη μέθοδο για την επίλυση της ροής σε αεροδυναμικά προ-

βλήματα. Παρακάτω παρουσιάζονται οι εξισώσεις μέσης ροής σε μητρική γραφή

$$R_n^{MF} = \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} - \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.1)$$

όπου

$$\begin{aligned} f_{nk}^{inv} &= \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + p \delta_{1k} \\ \rho u_2 u_k + p \delta_{2k} \\ \rho u_3 u_k + p \delta_{3k} \\ \rho h_t u_k \end{bmatrix} \\ f_{nk}^{vis} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1k} \\ \tau_{2k} \\ \tau_{3k} \\ u_l \tau_{lk} + q_k \end{bmatrix} \\ U_n &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου

- $\rho$ : η πυκνότητα του ρευστού
- $u_n$ : οι καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος ταχύτητας της ροής (όπου  $n = 1, 2, 3$ )
- $p$ : η στατική πίεση
- $\tau_{nm}$ : ο τανυστής των τάσεων για Νευτώνειο ρευστό
- $q_k$ : η ροή θερμότητας
- $\delta_{mk}$ : το σύμβολο του *Kronecker*, για το οποίο ισχύει ότι  $\delta_{mk} = \begin{cases} 0, & \text{αν } m \neq k \\ 1, & \text{αν } m = k \end{cases}$

$$\tau_{km} = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{km} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \quad (2.3)$$

$$q_k = C_p \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (2.4)$$

όπου  $\mu$  η δυναμική συνεκτικότητα,  $\mu_t$  η τυρβώδης συνεκτικότητα,  $Pr$  ο αριθμός *Prandtl* και  $C_p$  η θερμοχωρητικότητα.

Για τη μοντελοποίηση της τύρβης είναι αναγκαία η χρήση μοντέλου για τον υπολογισμό της τυρβώδους συνεκτικότητας. Για αυτόν τον υπολογισμό, χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των *Spalart – Allmaras* [24], που δίνεται από τη Μ.Δ.Ε.

$$R^{SA} = \frac{\partial(\rho\tilde{\nu})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\tilde{\nu}u_k)}{\partial x_k} - \frac{\rho}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right\} - \rho c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} + \rho (c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2}) \left( \frac{\tilde{\nu}}{\Delta} \right)^2 = 0 \quad (2.5)$$

όπου  $\Delta$  η απόσταση από το κοντινότερο τοίχωμα. Το  $\mu_t$  υπολογίζεται από το  $\tilde{\nu}$  μέσω της σχέσης  $\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{u1}$ . Η εξίσωση 2.5 συμπληρώνεται από τις ακόλουθες σχέσεις [24]:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, f_{u1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{u1}^3}, f_{u2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{u1}}, S = \sqrt{\varepsilon_{klm} \varepsilon_{kgr} \frac{\partial u_m^A}{\partial x_l} \frac{\partial u_r^A}{\partial x_g}} \\ \tilde{S} &= S + \frac{\tilde{\nu} f_{u2}}{Re_0 \kappa^2 \Delta^2}, f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}, g = r + c_{w2} (r^6 - r) \\ r &= \min(10, \frac{\tilde{\nu}}{Re_0 \tilde{S} \kappa^2 \Delta^2}), \tilde{\mu} = \rho \tilde{\nu}, f_{t2} = c_{t3} e^{-c_{t4} \chi^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου

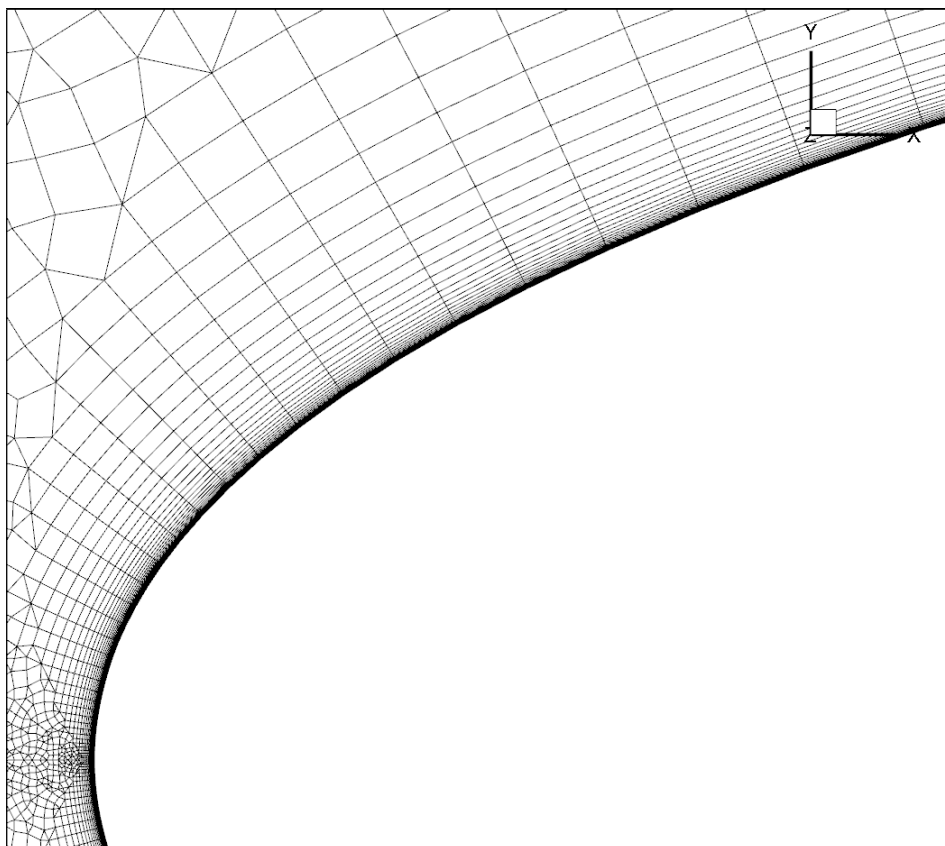
$$\begin{aligned} c_{v1} &= 7.1, c_{b1} = 0.1355, c_{b2} = 0.622 \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, c_{w2} = 0.3, c_{w3} = 2.0 \\ \sigma &= \frac{2}{3}, \kappa = 0.41, c_{t3} = 1.2, c_{t4} = 0.5 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Σημειώνεται ότι το μοντέλο αυτό δύναται να χρησιμοποιηθεί, είτε ως *Low – Reynolds*, είτε ως *High – Reynolds* μοντέλο τύρβης.

Γενικότερα στην περίπτωση χρήσης ενός *High – Reynolds* μοντέλου τύρβης, η ροή δεν ολοκληρώνεται κοντά στο τοίχωμα και τα μεγέθη αυτής προκύπτουν από συναρτήσεις τοίχου, συνεπώς δεν απαιτείται υψηλή πύκνωση του πλέγματος επί του στερεού ορίου. Αντιθέτως, στην περίπτωση χρησιμοποίησης ενός *Low – Reynolds* μοντέλου τύρβης, τα μεγέθη ολοκληρώνονται μέχρι και το στερεό όριο, όπου και απαιτείται υψηλή πύκνωση

του πλέγματος για την ορθή λειτουργία του μοντέλου.

Στην εργασία αυτή, το μοντέλο τύρβης *Spalart – Allmaras* θα χρησιμοποιηθεί ως *Low – Reynolds* μοντέλο, που αποτελεί και την αρχική του εκδοχή, δηλαδή με ολοκλήρωση της ροής μέχρι το στερεό όριο. Συνεπώς, για τη σωστή ανάλυση όλων των περιοχών του τυρβώδους οριακού στρώματος είναι αναγκαία η χρήση πλέγματος όπως αυτό που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1.



**Σχήμα 2.1:** Πλέγμα αεροτομής *NACA0012* με πυκνωση στα όρια του στερεού τοιχώματος.

### 2.1.2 Οριακές Συνθήκες

Στο επί άπειρον όριο (*far field*), δίνονται τα μεγέθη της αδιατάρακτης ροής. Συγκεκριμένα, αν η ροή εισέρχεται στο υπολογιστικό χωρίο, τότε ως οριακή συνθήκη τίθεται το διάλυσμα της ταχύτητας, η πυκνότητα και ο λόγος της τυρβώδους προς την κινηματική συνεκτικότητα, ενώ ανανεώνεται η στατική πίεση με πληροφορία από το εσωτερικό (για υποηχητική είσοδο της ροής). Στην περίπτωση όμως που η ροή εξέρχεται από το χωρίο, η πίεση αποτελεί την οριακή συνθήκη ενώ επαναληπτικά ανανεώνονται το διάλυσμα της ταχύτητας και η πυκνότητα.

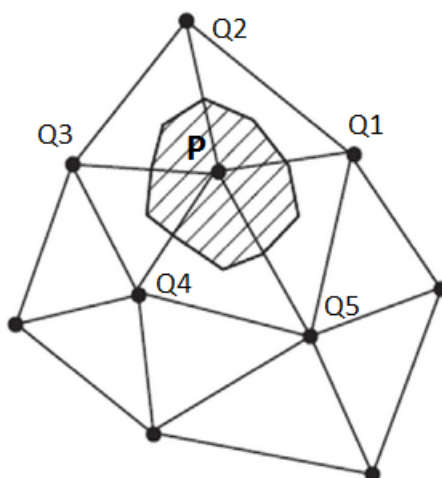
Τα στερεά τοιχώματα είναι αδιαβατικά και ισχύει η συνθήκη μη-ολίσθησης, συνεπώς:

$$\begin{aligned} u_k &= 0 \\ \tilde{\nu} &= 0 \\ q_k n_k &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Διακριτοποίηση

Για τη επίλυση του συστήματος των εξισώσεων 2.1 και 2.5 χρησιμοποιείται μια μέθοδος χρονοπροέλασης. Σύμφωνα με αυτήν, όταν επιλύεται ένα χρονικά μόνιμο πρόβλημα, οι χρονικές παράγωγοι αντικαθίστανται με ψευδο-χρονικές. Σε κάθε ψευδο-χρονικό βήμα, το σύστημα διακριτοποιείται, γραμμικοποιείται και επιλύεται.

Για την διακριτοποίηση του συστήματος, εφαρμόζεται η μέθοδος των κεντροκομβικών πεπερασμένων όγκων, οι οποίοι δημιουργούνται γύρω από κάθε κόμβο  $P$  του πλέγματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.



**Σχήμα 2.2:** Κεντροκομβικοί πεπερασμένοι όγκοι, όπου  $P$  ο εξεταζόμενος κόμβος και  $Q_i$  οι γειτονικοί του κόμβοι. Η γραμμοσκιασμένη περιοχή αποτελεί τον όγκο ελέγχου που σχηματίζεται γύρω από τον κόμβο  $P$ .

Για τους μη-συνεκτικούς όρους, εφαρμόζεται το θεώρημα *Green–Gauss* σε κάθε όγκο ελέγχου και τα διανύσματα μη-συνεκτικής ροής στη διεπιφάνεια των πεπερασμένων όγκων υπολογίζονται με το σχήμα του *Roe* [25]. Στην περίπτωση των συνεκτικών όρων, μετά την εφαρμογή του θεωρήματος *Green – Gauss*, χρησιμοποιείται το σχήμα που προτείνεται στην [26], το οποίο αντιστοιχεί σε σχήμα δεύτερης τάξης κεντρικών διαφορών.

Η αριθμητική επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων γίνεται για τη διόρθωση των μεταβλητών ( $\Delta$  *Formulation*), όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση,

$$\frac{V_P}{\Delta t_P} \Delta Q_n^P = -R_n^{GE,P} \quad (2.9)$$

όπου  $Q$  συμβολίζει είτε το  $U_n$  είτε το  $\tilde{\mu}$ ,  $GE$  η κυρίαρχη εξίσωση και  $\Delta t_P$  το ψευδο-χρονικό βήμα. Το τελευταίο, υπολογίζεται τοπικά για κάθε κόμβο του πλέγματος σύμφωνα με την [27]. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι

$$\Delta t_P = CFL \frac{V_P}{T^{inv,P} + T^{vis,P}} \quad (2.10)$$

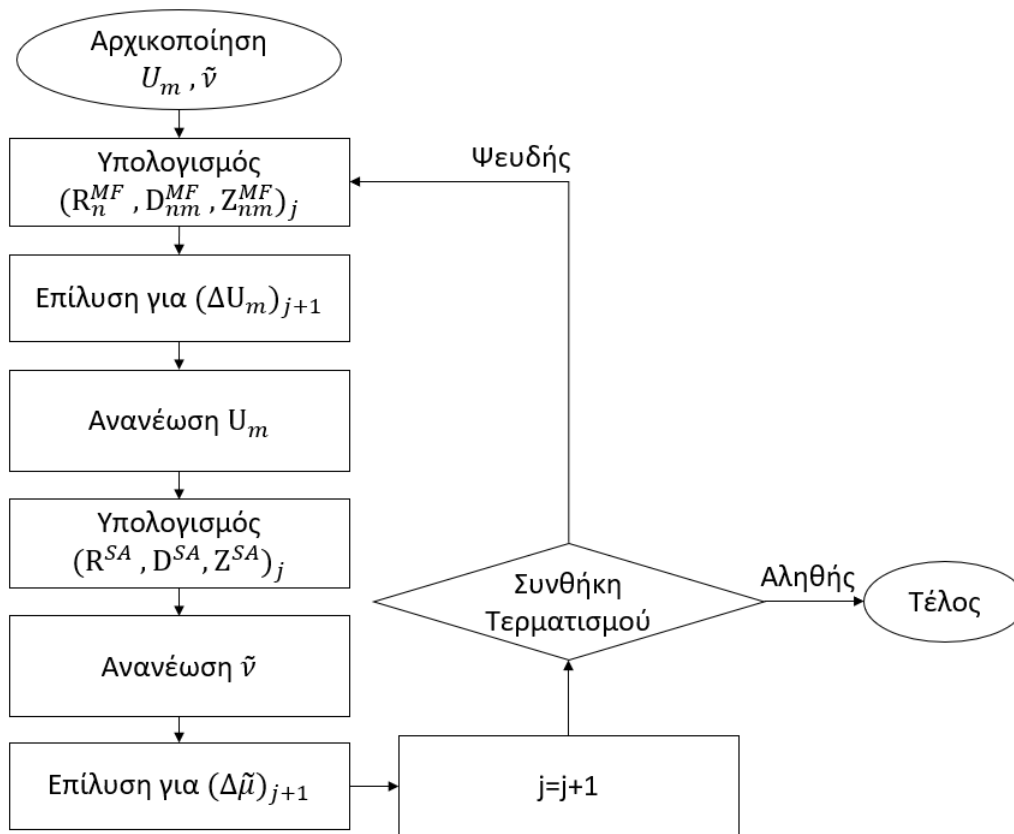
με

$$\begin{aligned} T^{inv,P} &= (|u_k^R| + c)^P S_k^P \\ T^{vis,P} &= \frac{2(\mu + \mu_t)V_P}{\rho^P(S_1^P + S_2^P + S_3^P)} \\ S_k^P &= \frac{1}{2} \sum_{\forall Q \in N(P)} |n_k^{PQ}| \end{aligned} \quad (2.11)$$

όπου  $Q$  οι γειτονικοί κόμβοι του εξεταζόμενου κόμβου  $P$ .

Στο σχήμα 2.3 παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής της διαδικασίας που εκτελείται για την επίλυση των εξισώσεων *RANS*. Σημειώνεται ότι στο σχήμα αυτό, ο δείκτης *MF* συμβολίζει τη μέση ροή, ενώ ο δείκτης *SA* το μοντέλο τύρβης (*Spalart – Allmaras*). Επιπλέον ο μετρητής  $j$  αναφέρεται στα ψευδο-χρονικά βήματα και όχι σε πραγματικά χρονικά βήματα.





Σχήμα 2.3: Διάγραμμα ροής επιλύτη τυρβωδών ροών.

#### 2.1.4 Χρήση Επεξεργαστών Καρτών Γραφικών

Για τη ραγδαία αύξηση της ταχύτητας επίλυσης της ροής, το λογισμικό εκτελείται από την κάρτα γραφικών (*GPU*), έναντι του κεντρικού επεξεργαστή (*CPU*) [20] [21]. Παρά τη μεγάλη υπολογιστική τους ισχύ όμως, οι κάρτες γραφικών διαθέτουν μικρότερη μνήμη σε σύγκριση με τους κεντρικούς επεξεργαστές, την οποία δεν χειρίζονται εξίσου αποδοτικά. Για να περιοριστούν οι αρνητικές επιδράσεις αυτών, απαιτείται η μείωση του όγκου πληροφοριών που χρειάζεται το λογισμικό. Το παραπάνω επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της μεθόδου *MPA* (*Mixed Precision Arithmetics*) [28]. Αυτή προτείνει την αποθήκευση των διαφορετικών μερών των προαναφερθεισών εξισώσεων με διαφορετική ακρίβεια, ελαχιστοποιώντας έτσι την απαιτούμενη μνήμη και τον αριθμό των προσπελάσεων σε αυτή. Συγκεκριμένα, τα υπόλοιπα των εξισώσεων  $R$ , τα οποία συνδέονται με την φυσική του προβλήματος, αποθηκεύονται με διπλή ακρίβεια (*double precision*). Αντιθέτως, τα  $D$  και  $Z$ , τα οποία σχετίζονται με τη σύγκλιση της αριθμητικής επίλυσης και δεν επηρεάζουν την ακρίβεια της λύσης, αποθηκεύονται με μονή ακρίβεια (*single precision*). Τέλος, σημειώνεται ότι, παρότι η μέθοδος αυτή έχει ως βασικό σκοπό τον αποδοτικότερο χειρισμό της μνήμης από την κάρτα γραφικών, πολλές φορές επιταχύνεται και η εκτέλεση των υπολογισμών.

## 2.2 Μοντέλο Πρόλεξης Ατριβών Ροών

Στην περίπτωση των εξισώσεων *Euler*, δηλαδή όταν η ροή θεωρείται μη συνεκτική, χρησιμοποιήθηκε το ίδιο λογισμικό με τις εξισώσεις *RANS*. Επιπλέον, η διαδικασία επίλυσης είναι πανομοιότυπη με αυτήν που αναφέρθηκε προηγουμένως, με μόνες διαφορές την αγνόηση των συνεκτικών όρων και τις διαφορετικές οριακές συνθήκες στα στερεά τοιχώματα. Συγκεκριμένα, η 2.1 γίνεται

$$R_n^{MF} = \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.12)$$

ενώ οι χρησιμοποιούμενη οριακή συνθήκη στο τοίχωμα, είναι αυτή της μη-εισχώρησης της ροής, συνεπώς ισχύει ότι

$$u_k n_k = 0 \quad (2.13)$$

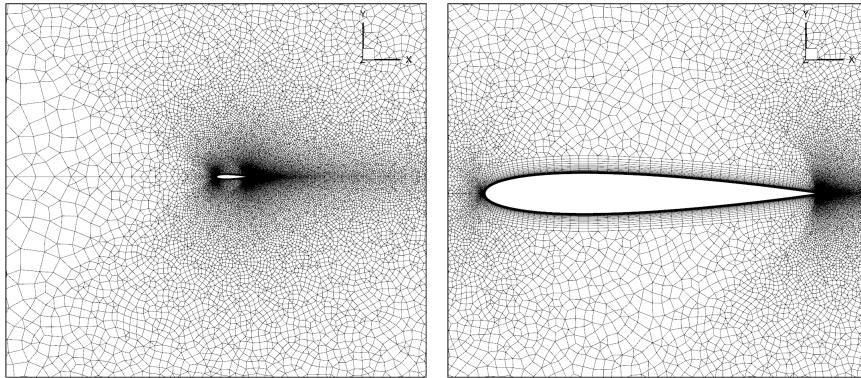
με  $n_k$  τις συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου στο τοίχωμα διανύσματος.

## 2.3 Έλεγχος Επιλύτη Συνεκτικής Ροής

Προκειμένου να διασφαλισθεί ότι η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που δίνονται από την επίλυση των εξισώσεων *RANS*, είναι αναγκαία η σύγκριση αυτών με επικυρωμένα αποτελέσματα άλλων λογισμικών Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, καθώς και με πειραματικά αποτελέσματα. Κατά τον έλεγχο αυτόν, θα χρησιμοποιηθούν δεδομένα από μελέτη για την αεροτομή *NACA0012*, του λογισμικού *CFL3D*, καθώς και δυο πειραματικών διατάξεων. Τα δεδομένα αυτά λήφθηκαν από τη μελέτη πιστοποίησης της *NASA* για την αεροτομή *NACA0012* [29]. Στον πίνακα 2.1 και το σχήμα 2.4 παρουσιάζονται οι συνθήκες της επί άπειρον ροής που χρησιμοποιούνται στη μελέτη, όπως αυτές περιγράφηκαν από τη μελέτη επικύρωσης, καθώς και το πλέγμα που δημιουργήθηκε και χρησιμοποιείται από τον επιλύτη *PUMA* κατά την επίλυση των εξισώσεων *RANS*.

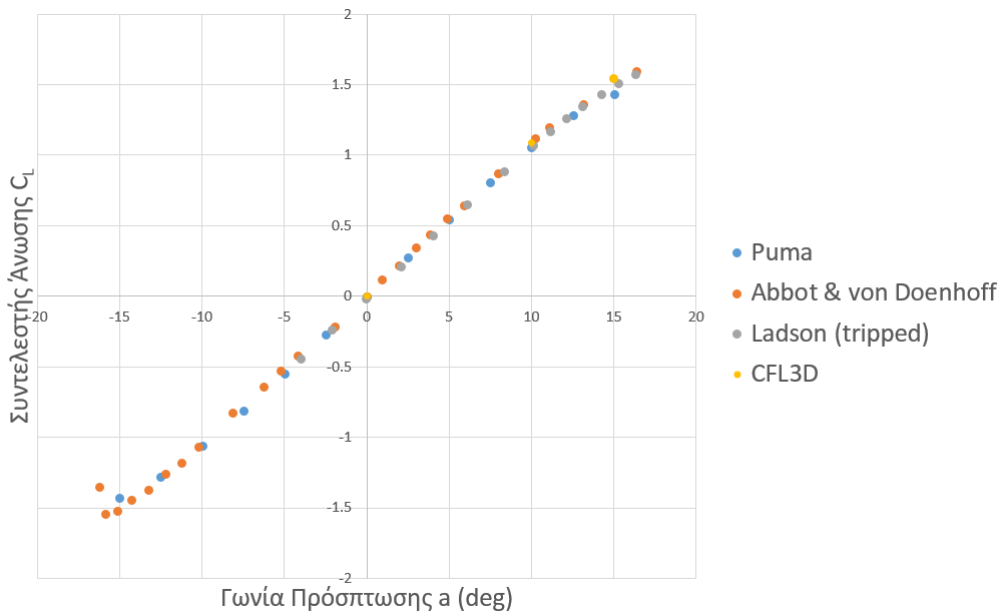
Επί άπειρον ολική θερμοκρασία ( <i>K</i> )	300
Επί άπειρον αριθμός <i>Mach</i>	0.15
<i>Reynolds Number</i>	6000000
Γωνία επί άπειρον ροής ( <i>deg</i> )	0

Πίνακας 2.1: Επί άπειρον συνθήκες ροής πειραματικής μελέτης της *NASA*.



**Σχήμα 2.4:** Πλέγμα αεροτομής NACA0012 που χρησιμοποιήθηκε από τον PUMA για την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων. Το σχήμα (β) αποτελεί μεγέθυνση του (α) για καλύτερη εοπτικότητα της γεωμετρίας της αεροτομής.

Για να πραγματοποιηθεί η σύγκριση, εκτελέστηκαν μελέτες στις συνθήκες που παρουσιάστηκαν στο σχήμα 2.1, με αντίστοιχη τοποθέτηση της αεροτομής σε γωνίες από  $-15$  έως  $15$  μοίρες με τον οριζόντιο άξονα, οι οποίες και παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα με τα δεδομένα που δόθηκαν από τη μελέτη πιστοποίησης της NASA στο σχήμα 2.5.



**Σχήμα 2.5:** Σύγκριση αποτελεσμάτων του λογισμικού PUMA, του λογισμικού CFL3D [29], καθώς και των πειραματικών δεδομένων δυο μελετών [30][31], για τον συντελεστή άνωσης αεροτομής NACA0012, σε επ' άπειρον συνθήκες ροής 2.1 και σε διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης αυτής. Σημειώνεται ότι τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν από τα λογισμικά PUMA και CFL3D δεν είναι ίδια.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5, τα αποτελέσματα του κώδικα PUMA είναι πανομοιότυπα

με αυτά που προέκυψαν από τις πειραματικές δοκιμές, καθώς και από το λογισμικό *CFL3D*, συνεπώς το παρόν αεροδυναμικό μοντέλο θεωρείται αξιόπιστο και κατάλληλο για τις μελέτες που θα ακολουθήσουν.

## 2.4 Επιλογή Αεροδυναμικού Μοντέλου

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, η επιλογή μεταξύ της χρήσης εξισώσεων *Euler* ή *RANS* βασίστηκε κυρίως στη δυνατότητα ή μη των πρώτων να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις μιας αεροελαστικής μελέτης, όσον αφορά τον ακριβή υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων, που είναι αναγκαίος για τη μετέπειτα σωστή επίλυση του συζευγμένου προβλήματος. Το δίλημμα αυτό οφείλεται στο ότι, η υψηλή ακρίβεια των εξισώσεων *RANS* συνεπάγεται και αύξηση του υπολογιστικού κόστους, ενώ αντίστοιχα η μείωση του υπολογιστικού κόστους, μέσω της χρήσης των εξισώσεων *Euler*, μειώνει και την αντίστοιχη ακρίβεια των υπολογισμών. Συνεπώς, η χρήση των εξισώσεων *Euler* είναι θεμιτή, εφόσον οι τιμές των φορτίων που παράγονται από αυτές δεν αποκλίνουν σημαντικά από τα αποτελέσματα που δίνει η επίλυση των εξισώσεων *RANS*.

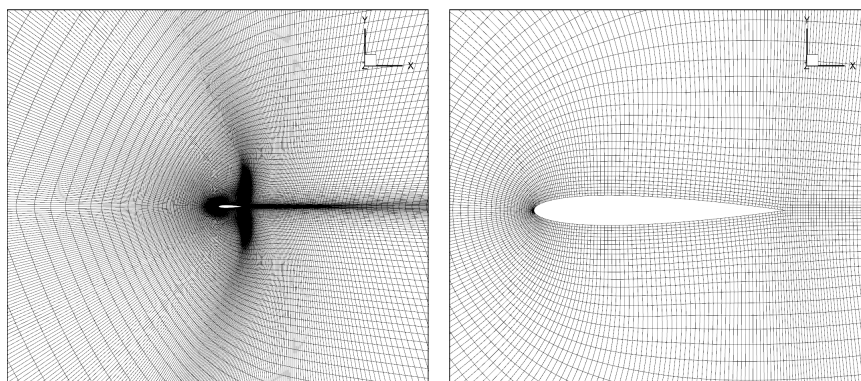
Για τον έλεγχο των εξισώσεων *Euler*, κατασκευάστηκαν δυο πανομοιότυπες αεροδυναμικές μελέτες και αντίστοιχα πλέγματα για την επίλυση αυτών και με τα δυο μοντέλα ροής. Οι μελέτες αυτές πραγματοποιούνται για την αεροτομή *NACA0012*, με τις επ' άπειρον συνθήκες ροής που παρουσιάζονται στον πίνακα 2.2.

Γωνία επ' άπειρον ροής ( <i>deg</i> )	2
Γωνία τοποθέτησης αεροτομής ( <i>deg</i> )	0
Ταχύτητα επ' άπειρον ροής ( $\frac{m}{s}$ )	150
Επ' άπειρον ολική πίεση ( <i>Pa</i> )	101325
Επ' άπειρον ολική πυκνότητα ( $\frac{kg}{m^3}$ )	1.2
*Επ' άπειρον δυναμική συνεκτικότητα ( <i>Pa * s</i> )	1.72E-05
*Επ' άπειρον λόγος τυρβώδους προς δυναμικής συνεκτικότητας	1

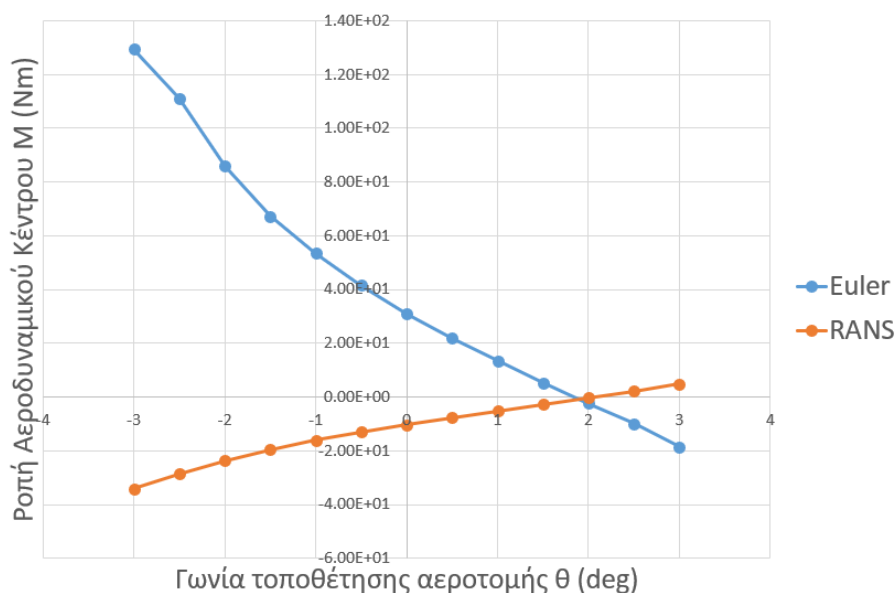
**Πίνακας 2.2:** Επ' άπειρον συνθήκες ροής αεροδυναμικών μελετών (Τα μεγέθη που ξεκινούν με (\*) χρησιμοποιούνται μόνο στην περίπτωση συνεκτικής ροής).

Προκειμένου λοιπόν να ελεχθεί η δυνατότητα χρήσης των εξισώσεων *Euler*, η εξεταζόμενη αεροτομή τοποθετείται σε διαφορετικές γωνίες με τον οριζόντιο άξονα (γωνία τοποθέτησης) και πραγματοποιείται επίλυση των εξισώσεων *Euler* και *RANS*. Έπειτα, κατασκευάζεται η πολική καμπύλη της ροπής, γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της αεροτομής ( $c/4$ ), σε συνάρτηση με τη γωνία τοποθέτησης αυτής και για τις δύο

προαναφερθείσες επιλύσεις. Αναφέρεται ότι, η εξέταση εστιάζει στην τιμή των ροπών, λόγω της σημασίας που αυτές έχουν στη συνέχεια της εργασίας. Οι προκύπτουσες καμπύλες συγκρίνονται μεταξύ τους, ώστε να κριθεί κατά πόσον τα δοθέντα από τις εξισώσεις *Euler* αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των εξισώσεων *RANS*, είναι αυτό που παρουσιάστηκε προηγουμένως στο σχήμα 2.4, ενώ για την επίλυση των εξισώσεων *Euler* χρησιμοποιήθηκε το πλέγμα του σχήματος 2.6.

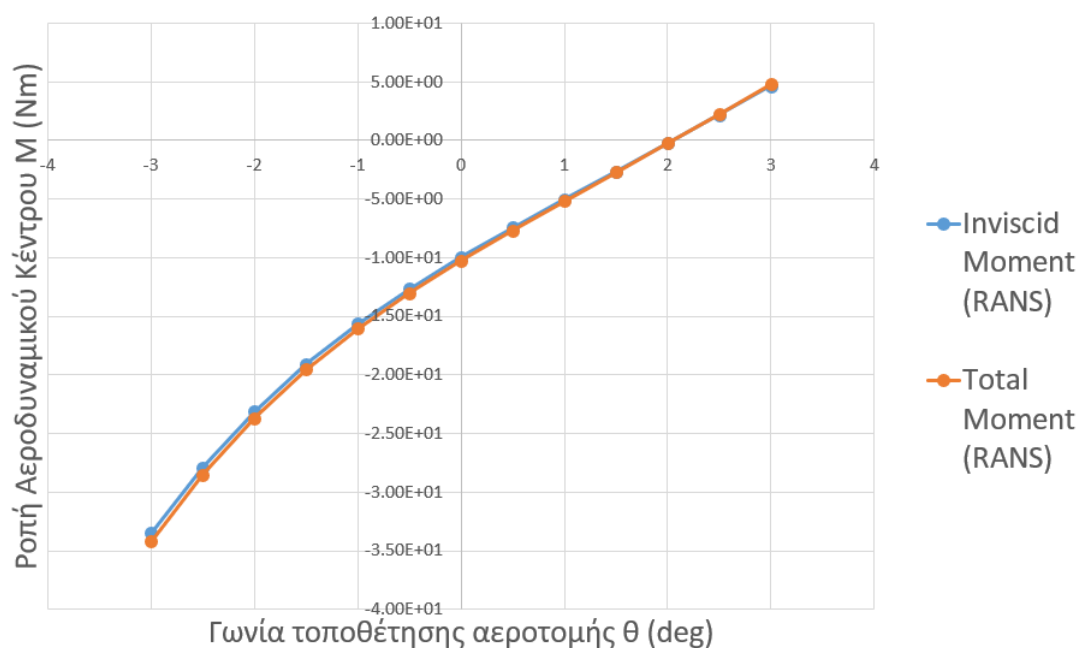


**Σχήμα 2.6:** Πλέγμα αεροτομής *NACA0012* σε οριζόντια θέση, που χρησιμοποιείται για την επίλυση μη-συνεκτικής ροής. Το δεξιό σχήμα αποτελεί μεγέθυνση του αριστερού για καλύτερη εποπτικότητα της γεωμετρίας της αεροτομής.



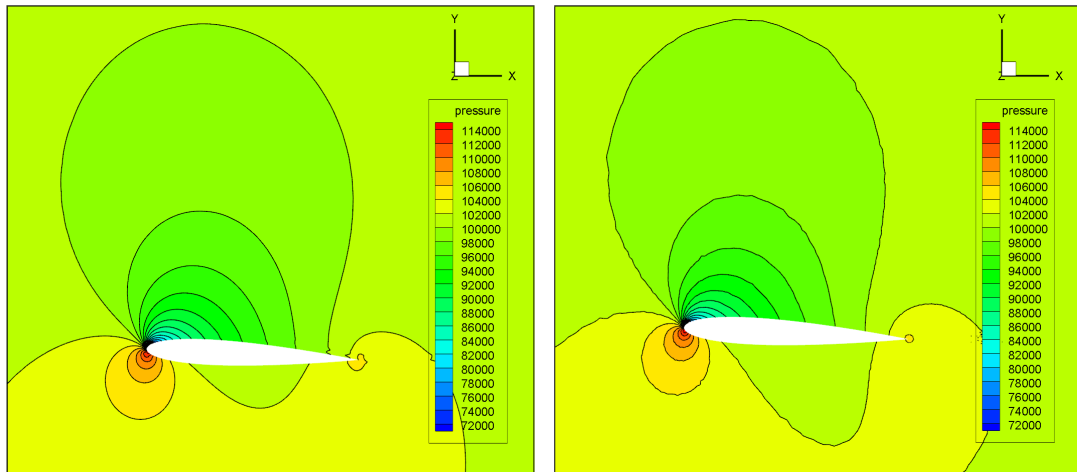
**Σχήμα 2.7:** Διάγραμμα πολικής καμπύλης ροπής αεροτομής *NACA0012*, ως προς τη γωνία τοποθέτησής της γύρω από το αεροδυναμικό της κέντρο, στις επί άπειρον συνθήκες ροής που παρουσιάστηκαν στον πίνακα 2.2, με χρήση των εξισώσεων *Euler* (μπλε) και *RANS* (πορτοκαλί).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.7, η θεώρηση μη-συνεκτικής ροής επηρεάζει πολύ έντονα τα αποτελέσματα των μελετών και συνεπώς δεν είναι δυνατή η χρήση της. Στη συνέχεια, εξετάστηκε το κατά πόσον οι όροι συνεκτικότητας είναι αυτοί στους οποίους οφείλεται η παρατηρούμενη διαφορά. Στο σχήμα 2.8, παρουσιάζονται τα συνολικά αποτελέσματα των *RANS*, καθώς και αυτά των μη-συνεκτικών τους όρων.

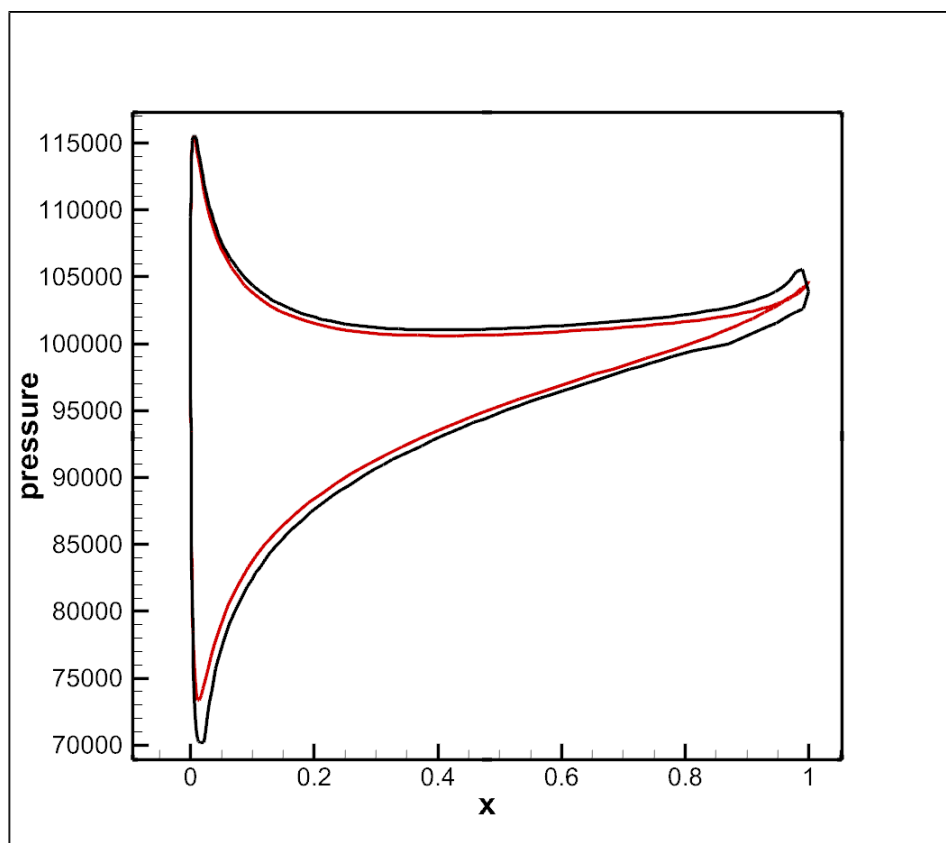


**Σχήμα 2.8:** Διάγραμμα πολικής καμπύλης ροπής της αεροτομής *NACA0012*, ως προς τη γωνία τοποθέτησής της γύρω από το αεροδυναμικό της κέντρο, στις επ' άπειρον συνθήκες ροής που παρουσιάστηκαν στον πίνακα 2.2, με χρήση των εξισώσεων *RANS*. Στο διάγραμμα παρουσιάζεται τόσο η συνολική λύση των *RANS* (πορτοκαλί), όσο και το μη-συνεκτικό τους μέρος (μπλε).

Από το σχήμα 2.8 φαίνεται ότι η διαφορά που παρατηρήθηκε μεταξύ των λύσεων των εξισώσεων *Euler* και *RANS* δεν οφείλεται στην συνεισφορά του όρου συνεκτικότητας. Σε επόμενο στάδιο, ελέγχθηκαν οι λύσεις του πεδίου που δίνουν οι δυο μελέτες και παρατηρήθηκε έντονη ομοιότητα μεταξύ αυτών, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9, όμως παράλληλα εντοπίστηκε μη-αμελητέα απόκλιση μεταξύ των δυο, στις πιέσεις της ακμής εκφυγής (σχήμα 2.10), η οποία και έχει τον μεγαλύτερο μοχλοβραχίονα κατά τον υπολογισμό της ροπής και, κατά συνέπεια, επηρεάζει έντονα το τελικό αποτέλεσμα.

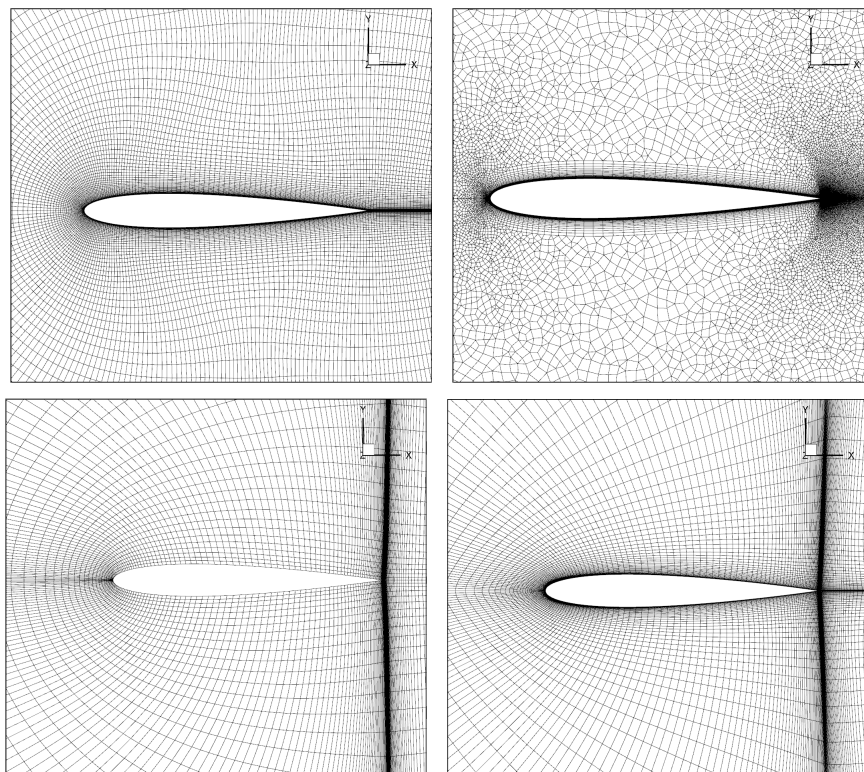


**Σχήμα 2.9:** Πεδίο πιέσεων αεροτομής *NACA0012* τοποθετημένη στις  $-3$  μοίρες από τον οριζόντιο άξονα, με επ' άπειρον συνθήκες ροής αυτές του 2.2, επιλυμένη ως (α) μη-συνεκτική ροή, (β) συνεκτική ροή.



**Σχήμα 2.10:** Πιέσεις στην περιφέρεια αεροτομής *NACA0012* τοποθετημένη στις  $-3$  μοίρες από τον οριζόντιο άξονα, με επ' άπειρον συνθήκες ροής αυτές του 2.2, επιλυμένη ως (α) μη-συνεκτική ροή (μαύρο), (β) συνεκτική ροή (κόκκινο).

Τέλος, προκειμένου να ελεγχθεί αν η διαφορά που εντοπίστηκε οφείλεται στο χρησιμοποιούμενο πλέγμα για τις εξισώσεις *Euler*, χρησιμοποιήθηκαν τρία νέα δομημένα πλέγματα, καθώς και το πλέγμα που χρησιμοποιούταν μέχρι τώρα για την επίλυση των *RANS* (σχήμα 2.11).

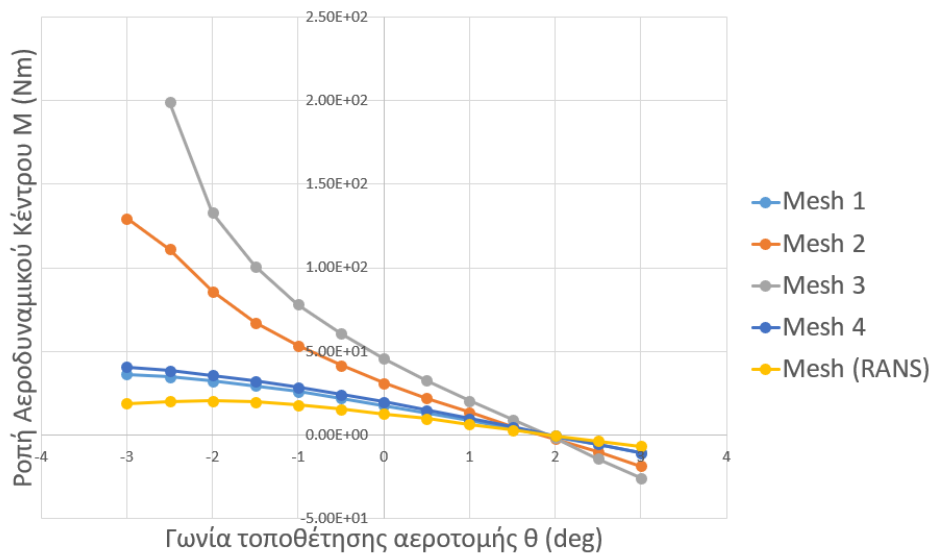


Σχήμα 2.11: Πλέγματα αεροτομών *NACA0012* σε οριζόντια θέση.

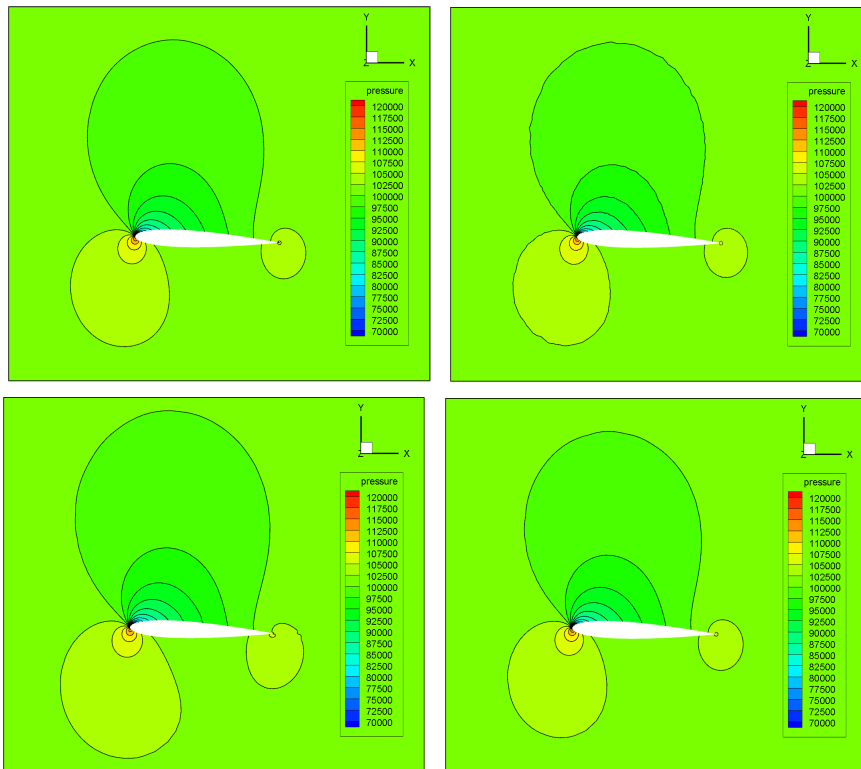
Στο σχήμα 2.12 παρουσιάζονται αποτελέσματα των ροπών για τα διαφορετικά πλέγματα, όπου και παρατηρείται πολύ έντονη εξάρτηση μεταξύ του χρησιμοποιούμενου πλέγματος και των αποτελεσμάτων της ροπής. Η εξάρτηση αυτή φαίνεται να εντείνεται με την αύξηση της γωνίας πρόσπτωσης του ρευστού στην αεροτομή, ενώ αντίστοιχα όσο η γωνία της αεροτομής πλησιάζει αυτήν της επί άπειρον ροής, τόσο οι διαφορές μεταξύ των ροπών μειώνονται. Συνεπώς, για μικρές γωνίες πρόσπτωσης η αποκλίσεις περιορίζονται σημαντικά, ενώ για μηδενική τιμή της τελευταίας όλες οι μελέτες καταλήγουν σε μηδενική λύση, γεγονός αναμενόμενο εφόσον η εξεταζόμενη αεροτομή είναι συμμετρική.

Όπως και προηγουμένως βέβαια, σε περίπτωση που εξεταστεί η λύση που δίνεται για το πεδίο, φαίνεται ότι και τα τέσσερα πλέγματα δίνουν παρόμοια αποτελέσματα 2.13, ενώ πάλι το μοναδικό θέμα που παρουσιάζεται, εντοπίζεται στην ακμή εκφυγής της αεροτομής, όπου οι διαφορές των πιέσεων φαίνεται να διαφέρουν σημαντικά 2.14.

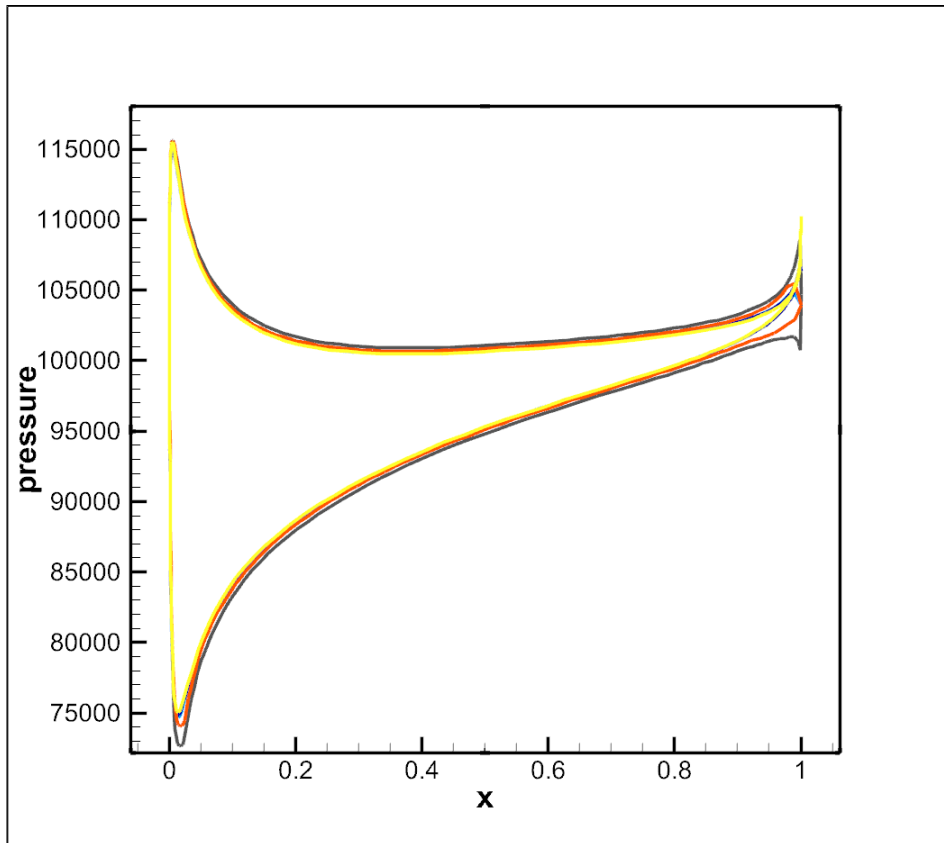




**Σχήμα 2.12:** Διάγραμμα πολικής καμπύλης ροπής ως προς τη γωνία τοποθέτησης γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο αεροτομής *NACA0012* με χρήση των εξισώσεων *Euler* για τέσσερα διαφορετικά πλέγματα.



**Σχήμα 2.13:** Πεδίο πιέσεων αεροτομής *NACA0012* τοποθετημένη στις  $-2.5$  μοίρες από τον οριζόντιο άξονα, με επ' άπειρον συνθήκες ροής αυτές του 2.2, επιλυμένη ως μη-συνεκτική στα διαφορετικά πλέγματα.



**Σχήμα 2.14:** Πιέσεις στην περιφέρεια αεροτομής *NACA0012* τοποθετημένη στις  $-2.5$  μοίρες από τον οριζόντιο άξονα, με επ' άπειρον συνθήκες ροής αυτές του 2.2, για τα τέσσερα νέα πλέγματα που εξετάζονται, καθώς και το αρχικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε 2.6. Οι πιέσεις που παρουσιάζονται αντιστοιχούν στα πλέγματα του σχήματος 2.11 ως εξής: (α) γαλάζια, (β) κίτρινο, (γ) γκρι, (δ) μπλε, ενώ το αρχικό πλέγμα αντιστοιχεί στην πορτοκαλί.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, η πιθανότερη αιτία για τις παρατηρούμενες διαφορές στις τιμές των ροπών είναι η συμπεριφορά της ροής στην ακμή εκφυγής της αεροτομής.

Λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο των μελετών που πραγματοποιήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται εμφανής η ανάγκη χρησιμοποίησης των εξισώσεων *RANS* για την επίλυση του αεροελαστικού προβλήματος.

# Κεφάλαιο 3

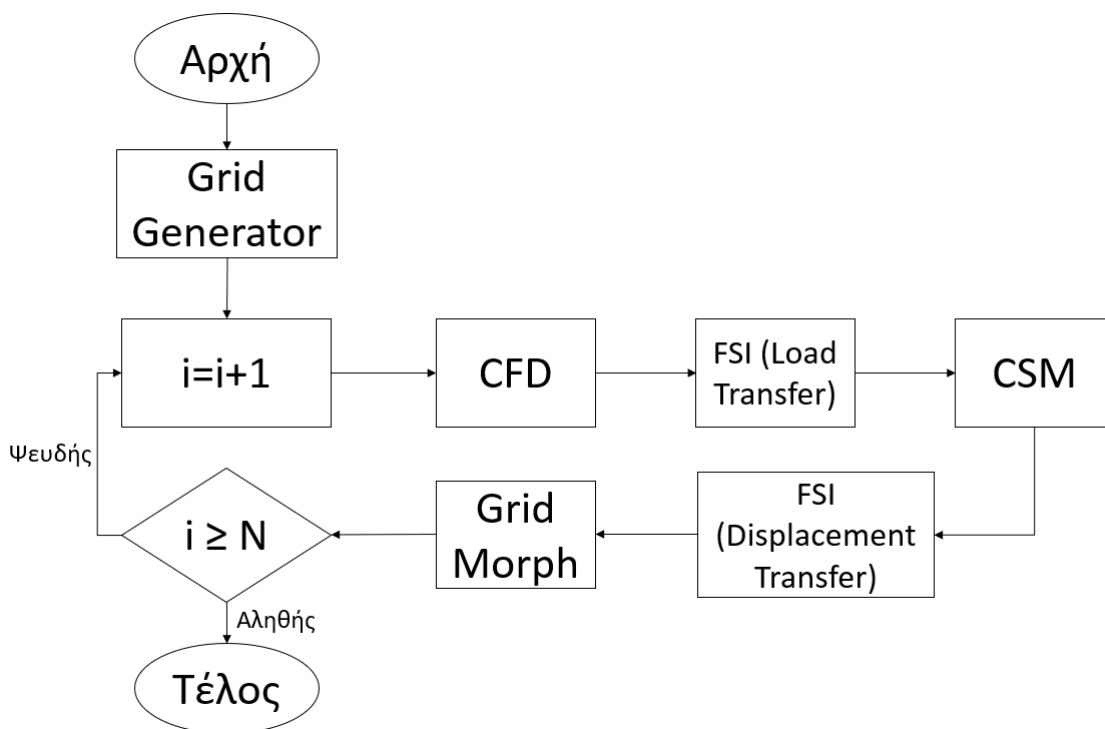
## Αεροελαστικό Μοντέλο

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστεί το μαθηματικό υπόβαθρο μιας αεροελαστικής μελέτης, καθώς και το ελαστικό μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται μετέπειτα στην εφαρμογή. Επιπλέον θα υλοποιηθούν έλεγχοι των αποτελεσμάτων του αεροελαστικού επιλύτη, ώστε να διασφαλισθεί η ορθή λειτουργία αυτού. Οι έλεγχοι αυτοί, αποσκοπούν στη διερεύνηση της συμπεριφοράς του συστήματος σε διαφορετικά δεδομένα εισόδου (σταθερά ελατηρίου, διαφορετική αρχική γωνία τοποθέτησης της αεροτομής) και της ευστάθειας σύγκλισης συναρτήσει τόσο της σταθεράς του ελατηρίου, όσο και της ταχύτητας της επί άπειρον ροής.

### 3.1 Αεροελαστική Επίλυση

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, για την αεροελαστική επίλυση απαιτείται η σύζευξη των δυο επιλυτών, του αεροδυναμικού και του ελαστικού. Συνεπώς, για την αντιμετώπιση ενός τέτοιου προβλήματος, είναι αναγκαία η συχνή επικοινωνία μεταξύ των μερών του, η οποία πραγματοποιείται μέσω της μετατροπής των εξόδων του ενός μέρους σε εισόδους του άλλου.

Η αλληλεπίδραση των συστημάτων υλοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο [32]. Αρχικά επιλύεται το αεροδυναμικό πρόβλημα, για επιλεγμένο αριθμό επαναλήψεων και υπολογίζονται τα ασκούμενα στο στερεό σώμα φορτία. Έπειτα, αυτά, πολλαπλασιαζόμενα με κατάλληλο μητρώο μετασχηματισμού, μετατρέπονται σε ελαστικά φορτία, τα οποία πολλαπλασιάζονται εκ νέου με το αντίστροφο του μητρώου δυσκαμψίας, ώστε να δώσουν τις ελαστικές παραμορφώσεις του σώματος. Τέλος, οι παραμορφώσεις αυτές μετατρέπονται σε αεροδυναμικές, προκειμένου να προσαρμοσθεί κατάλληλα το αεροδυναμικό πλέγμα και επαναλαμβάνεται η διαδικασία μέχρι σύγκλισης αυτής.



**Σχήμα 3.1:** Διάγραμμα ροής αεροελαστικού μοντέλου, το οποίο εκτελεί  $N$  αεροελαστικούς κύκλους, όπου  $i$  ο αριθμός του εκάστοτε κύκλου

Σύμφωνα με την [32], η μεταφορά δεδομένων μεταξύ δυο μη-όμοιων πλεγμάτων σε μητρική μορφή δύναται να εκφραστεί ως:

$$[\vec{F}_2] = [T_{21}][\vec{F}_1] \quad (3.1)$$

όπου  $[\vec{F}_1]$  είναι ο πίνακας των δεδομένων εισόδου από το πρώτο πλέγμα (στο οποίο είναι γνωστές οι τιμές των  $[\vec{F}_1]$ ),  $[\vec{F}_2]$  είναι ο πίνακας των δεδομένων εξόδου για το δεύτερο πλέγμα (στο οποίο οι τιμές των  $[\vec{F}_2]$  δεν είναι γνωστές και θα προκύψουν από τον μετασχηματισμό των προηγούμενων) και  $[T_{21}]$  ο πίνακας μετασχηματισμού. Σε περίπτωση που ο τελευταίος είναι ανεξάρτητος των μεταβολών μορφής, τότε ο υπολογισμός του είναι αναγκαίος μόνο μια φορά, ενώ η χρήση του είναι δυνατή όσο δεν υπάρχει κάποια μεταβολή στη σύνδεση των πλεγμάτων.

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, η αεροελαστική επίλυση συνίσταται από τέσσερα διακριτά βήματα: (α) τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων, (β) τον μετασχηματισμό των αεροδυναμικών φορτίων στο πλέγμα επίλυσης του ελαστικού προβλήματος, (γ) τον υπολογισμό των αεροελαστικών παραμορφώσεων στο ελαστικό πλέγμα και (δ) τον μετασχηματισμό των αεροελαστικών παραμορφώσεων στο αεροδυναμικό πλέγμα και επαναυπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι εξισώσεις που περιγράφουν τη διαδικασία αυτή.

Παρακάτω, τα προαναφερθέντα μεγέθη συμβολίζονται ως:

- $[\vec{F}_F]$ : αεροδυναμικό φορτίο επί του αεροδυναμικού πλέγματος
- $[\vec{\delta}_F]$ : αεροελαστική παραμόρφωση επί του αεροδυναμικού πλέγματος
- $[\vec{F}_S]$ : αεροδυναμικό φορτίο επί του ελαστικού πλέγματος
- $[\vec{\delta}_S]$ : αεροελαστική παραμόρφωση επί του ελαστικού πλέγματος

και ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 [\vec{F}_F] &= [\vec{F}_F([\vec{r}_F] + [\vec{\delta}_F])] \\
 [\vec{F}_S] &= [T_{SF}][\vec{F}_F] \\
 [K][\vec{\delta}_S] &= [\vec{F}_S] \\
 [\vec{\delta}_F] &= [T_{FS}][\vec{\delta}_S]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

όπου

- $[\vec{r}_F]$ : συντεταγμένες αεροδυναμικού πλέγματος
- $[T]$ : μητρώο μετασχηματισμού, όπου το μητρώο  $[T_{SF}]$  μετασχηματίζει τα μεγέθη του αεροδυναμικού υποσυστήματος σε αυτά του ελαστικού, ενώ το μητρώο  $[T_{FS}]$  μετασχηματίζει τα μεγέθη του ελαστικού υποσυστήματος σε αυτά του αεροδυναμικού
- $[K]$ : μητρώο δυσκαμψίας

Η επίλυση του συστήματος 3.2 δίνει τις παρακάτω εξισώσεις, που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή των δεδομένων από το ένα σύστημα στο άλλο

$$\begin{aligned}
 [\vec{F}_F] &= [\vec{F}_F([\vec{r}_F] + [T_{FS}][\vec{\delta}_S])] \\
 [K][\vec{\delta}_S] &= [T_{SF}][\vec{F}_F]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Εφόσον το μητρώο δυσκαμψίας  $[K]$  είναι αντιστρέψιμο (το ελαστικό πρόβλημα δεν περιλαμβάνει βαθμούς ελευθερίας απολύτως στερεού σώματος) οι εξισώσεις 3.3 απλοποιούνται στην:

$$[\vec{F}_F] = [\vec{F}_F([\vec{r}_F] + [T_{FS}][K]^{-1}[T_{SF}][\vec{F}_F])] \tag{3.4}$$

Επιπλέον σε περίπτωση που ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ανεξάρτητος των μεταβολών της μορφής, τότε είναι δυνατή η μεταφορά των αεροδυναμικών παραγώγων στο

ελαστικό σύστημα ως:

$$\frac{\partial \vec{F}_S}{\partial V} = [T_{SF}] \frac{\partial \vec{F}_F}{\partial V} \quad (3.5)$$

όπου  $V$  το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού.

### 3.1.1 Μεταφορά Διακριτών Δεδομένων Μεταξύ Ανόμοιων Πλεγμάτων

Η διαδικασία μεταφοράς διακριτών δεδομένων συνίσταται από τρία βήματα: (1) την εύρεση του πλησιέστερου στοιχείου του πηγαίου πλέγματος για κάθε σημείο του δεύτερου πλέγματος, (2) τον υπολογισμό των συντελεστών απεικόνισης για κάθε σημείο του δεύτερου πλέγματος και του αντίστοιχου (πλησιέστερου) στοιχείου του πηγαίου πλέγματος και (3) τη παρεμβολή/εισαγωγή από το στοιχείο πηγαίου πλέγματος στο αντίστοιχο σημείο δεύτερου πλέγματος. Τα αποτελέσματα των δυο πρώτων βημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πολλές εφαρμογές μεταφοράς δεδομένων αρκεί οι τοπολογίες του πηγαίου πλέγματος και του δεύτερου πλέγματος παραμένουν αμετάβλητες.

Το πρώτο βήμα απαιτεί τη χωρική αναζήτηση για την εύρεση των πλησιέστερων σημείων, η οποία αποτελεί και την πιο χρονοβόρο διαδικασία της μεθόδου. Πρέπει πρώτα να ευρεθεί ένα πλησιέστερο στοιχείο πηγαίου πλέγματος σε ένα σημείο δεύτερου πλέγματος. Ο πιο απλός τρόπος να επιτευχθεί το παραπάνω, είναι η προβολή κάθε σημείου του δεύτερου πλέγματος σε κάθε πηγαίο στοιχείο, όμως αυτό έχει κόστος ανάλογο του τετραγώνου του αριθμού των σημείων  $O(N^2)$  και συνεπώς δεν εφαρμόζεται. Αντί αυτής χρησιμοποιείται η μέθοδος *ADT* (*Alternative Digital Tree*) [33], η οποία μειώνει την πολυπλοκότητα της διαδικασίας σε  $NO(\log(N))$ .

Για κάθε σημείο του δεύτερου πλέγματος και το πηγαίο στοιχείο που αντιστοιχεί σε αυτό, είναι αναγκαία η εύρεση του πηγαίου σημείου επί του στοιχείου που βρίσκεται πλησιέστερα στο σημείο του δεύτερου. Έπειτα επιλέγεται το πλησιέστερο υποψήφιο σημείο και το αντίστοιχό του στοιχείο. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό πρέπει να είναι διαθέσιμος ένας πλήρης ορισμός της μορφής του στοιχείου πηγαίου πλέγματος. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται συναρτήσεις βάσης πεπερασμένων στοιχείων. Μέσω αυτών η μορφή του στοιχείου ορίζεται ως:

$$\vec{R}_J^S(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \vec{r}_{i,j}^S B_i(\xi_1, \xi_2) \quad (3.6)$$

όπου

$$\sum_i B_i(\xi_1, \xi_2) = 1 \quad (3.7)$$

όπου  $\vec{R}_j^S$  το σχήμα του στοιχείου του πηγαίου πλέγματος,  $\vec{r}_{i,j}^S$  οι κόμβοι στοιχείου πηγαίου πλέγματος,  $\xi_1, \xi_2$  οι παραμετρικές συντεταγμένες του στοιχείου και  $B_i$  οι συναρτήσεις βάσης των στοιχείων.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι συναρτήσεις βάσεις που χρησιμοποιούνται για γραμμικά, τριγωνικά και τετραπλευρικά στοιχεία:

Για γραμμικά στοιχεία

$$\begin{aligned} B_1(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1 = \frac{x}{L} \\ B_2(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2 = 1 - \xi_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου  $L$  το μήκος του γραμμικού στοιχείου και  $x$  ποσοστό αυτού.

Για τριγωνικά στοιχεία

$$\begin{aligned} B_1(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1 = \frac{A_1}{A_T} \\ B_2(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2 = \frac{A_2}{A_T} \\ B_3(\xi_1, \xi_2) &= \xi_3 = 1 - (\xi_1 + \xi_2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

όπου  $A_i$  εμβαδά εντός του τριγωνικού στοιχείου.

Για τετραπλευρικά στοιχεία

$$\begin{aligned} B_1(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ B_2(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1(1 - \xi_2) \\ B_3(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1\xi_2 \\ B_4(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1)\xi_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Η εξίσωση 3.11 προσδιορίζει την απόσταση ενός σημείου του δεύτερου πλέγματος ( $\vec{R}_k$ )

από οποιοδήποτε σημείο επί του στοιχείου του πηγαίου πλέγματος ( $j$ ), συναρτήσει των παραμέτρων αυτού.

$$d^2(\xi_1^k, \xi_2^k) = |\vec{R}_k - \sum_i \vec{r}_{i,j}^S B_i(\xi_1^k, \xi_2^k)| \quad (3.11)$$

Η πλησιέστερη θέση του στοιχείου πηγαίου πλέγματος στο σημείο του δεύτερου μπορεί να προσδιορισθεί βρίσκοντας την ελάχιστη απόσταση, από τις σχέσεις:

$$\text{Min}_{\xi_1^k, \xi_2^k} (d^2(\xi_1^k, \xi_2^k)) \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d^2}{\partial \xi_1^k} = 0 &\Rightarrow [\vec{R}_k - \sum_i \vec{r}_{i,j}^S B_i(\xi_1^k, \xi_2^k)] [\vec{R}_k - \sum_i \vec{r}_{i,j}^S \frac{\partial B_i(\xi_1^k, \xi_2^k)}{\partial \xi_1^k}] \\ \frac{\partial d^2}{\partial \xi_2^k} = 0 &\Rightarrow [\vec{R}_k - \sum_i \vec{r}_{i,j}^S B_i(\xi_1^k, \xi_2^k)] [\vec{R}_k - \sum_i \vec{r}_{i,j}^S \frac{\partial B_i(\xi_1^k, \xi_2^k)}{\partial \xi_2^k}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Για γραμμικά και τριγωνικά στοιχεία οι εξισώσεις 3.13 καταλήγουν σε γραμμικό σύστημα εξισώσεων, ενώ στην περίπτωση των τετραπλευρικών το σύστημα είναι σχεδόν-γραμμικό και η επίλυσή του γίνεται με μεθόδους όπως η *Newton – Raphson*. Για παράδειγμα παρουσιάζεται το σύστημα ενός τριγωνικού στοιχείου:

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{1,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S)(\vec{r}_{1,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S)\xi_1^k + (\vec{r}_{2,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S)(\vec{r}_{1,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S)\xi_2^k &= (\vec{R}_k - \vec{r}_{3,j}^S)(\vec{r}_{1,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S) \\ (\vec{r}_{1,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S)(\vec{r}_{2,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S)\xi_1^k + (\vec{r}_{2,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S)(\vec{r}_{2,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S)\xi_2^k &= (\vec{R}_k - \vec{r}_{3,j}^S)(\vec{r}_{2,j}^S - \vec{r}_{3,j}^S) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα υπολογίζονται οι τιμές των  $\xi_1^k$  και  $\xi_2^k$ , τα οποία και αποτελούν τις παραμετρικές συντεταγμένες του κοντινότερου σημείου του στοιχείου πηγαίου πλέγματος  $j$  στο σημείο του δεύτερου πλέγματος  $k$ . Έτσι ολοκληρώνεται και το δεύτερο βήμα της διαδικασίας.

Είναι πλέον δυνατή η μεταφορά βαθμωτών και διανυσματικών δεδομένων ως:

$$f_k(\xi_1^k, \xi_2^k) = \sum_i f_i^S B_i(\xi_1^k, \xi_2^k) \quad (3.15)$$

όπου  $f_i^S$  τα δεδομένα επί του στοιχείου του πηγαίου πλέγματος,  $f_k$  τα παρεμβεβλημένα



δεδομένα για το σημείο  $k$  του δεύτερου πλέγματος. Η εξίσωση 3.15 σε μητρική μορφή γράφεται ως:

$$[F_T] = [T_{TS}][F_S] \quad (3.16)$$

όπου

$$T_{ki} = B_i(\xi_1^k, \xi_2^k), \sum_i T_{ki} = 1 \quad (3.17)$$

με  $[F_T]$  τιμές του δεύτερου πλέγματος και  $[F_S]$  του πηγαίου.

Η παραπάνω ανάλυση είναι δυνατό να εφαρμοσθεί σε πλήθος συζευγμένων προβλημάτων.

### 3.1.2 Μεταφορά Διακριτών Δεδομένων σε Αεροελαστικό Πρόβλημα

Στην περίπτωση ενός αεροελαστικού προβλήματος, όπου μεταφέρονται τα αεροδυναμικά φορτία από το αεροδυναμικό πλέγμα σε ανόμοιο ελαστικό πλέγμα και οι αεροελαστικές παραμορφώσεις από το ελαστικό πλέγμα στο αεροδυναμικό, η μεταφορά των τελευταίων πραγματοποιείται με τη σχέση:

$$[\vec{\delta}_F] = [T_{FS}][\vec{\delta}_S] \quad (3.18)$$

Για τη μεταφορά των φορτίων από το αεροδυναμικό στο ελαστικό πλέγμα χρησιμοποιείται η Αρχή Δυνατών Έργων ( $U$ ). Βάσει της παραπάνω αρχής, τα έργα που παράγονται από τα φορτία και τις αντίστοιχες παραμορφώσεις του κάθε πλέγματος πρέπει να είναι μεταξύ τους ίσα, δηλαδή

$$[U_S] = [U_F] \quad (3.19)$$

όπου

$$\begin{aligned} [U_S] &= [\vec{F}_S][\vec{\delta}_S] \\ [U_F] &= [\vec{F}_F][\vec{\delta}_F] \end{aligned} \quad (3.20)$$

συνεπώς, με χρήση της 3.18, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 [\vec{F}_F][\vec{\delta}_F] &= [\vec{F}_S][\vec{\delta}_S] \Rightarrow \\
 [\vec{F}_F][T_{FS}][\vec{\delta}_S] &= [\vec{F}_S][\vec{\delta}_F] \Rightarrow \\
 [\vec{F}_F][T_{FS}] &= [\vec{F}_S] \Rightarrow \\
 [T_{FS}]^T[\vec{F}_F] &= [\vec{F}_S]
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Από την 3.21, προκύπτει ότι για τη μεταφορά των δεδομένων από το ένα σύστημα στο άλλο, χρησιμοποιούνται οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 [\vec{\delta}_F] &= [T_{FS}][\vec{\delta}_S] \\
 [\vec{F}_S] &= [T_{FS}]^T[\vec{F}_F]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Επιπλέον, ικανοποιείται η απαίτηση διατήρησης των φορτίων, αφού

$$\begin{aligned}
 \sum_k \vec{F}_k^F &= \sum_i \vec{F}_i^S \\
 &= \sum_i [T_{FS}]^T[\vec{F}_F] \\
 &= \sum_i \sum_k T_{ik}^{FS} \vec{F}_k^F \\
 &= \sum_k \vec{F}_k^F \sum_i T_{ik}^{FS}, \sum_i T_{ik}^{FS} = 1 \\
 &= \sum_k \vec{F}_k^F
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

όπου  $k, i$  οι κόμβοι του αεροδυναμικού και ελαστικού πλέγματος αντίστοιχα.

Συνεπώς, έχει εξασφαλισθεί η διατήρηση δυνάμεων και δυνατών έργων. Τέλος, πρέπει να ισχύει και η διατήρηση των ροπών, όμως λόγω της διαφορετικής διακριτοποίησης των δυο πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται από τους επιλύτες των αεροδυναμικών εξισώσεων (*CFD*) και των ελαστικών (*CSM*), στην περίπτωση της ροπής συναντάται απόκλιση των μεγεθών. Για να αντιμετωπιστεί αυτό, κατά το μετασχηματισμό των ροπών, προστίθεται μια διόρθωση ροπής ( $\Delta M^S$ ) σε ένα εκ των δύο μελών της εξίσωσης

ισοζυγίου ροπών των δύο πλεγμάτων. Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
\sum_k \vec{r}_k^F \times \vec{F}_k^F &= \sum_i (\vec{r}_i^S \times \vec{F}_i^S + \Delta M_i^S) \Rightarrow \\
\sum_k \vec{r}_k^F \times \vec{F}_k^F &= \sum_i \vec{r}_i^S \times ([T_{FS}]^T [\vec{F}_F]) + \sum_i \Delta M_i^S \Rightarrow \\
\sum_k \vec{r}_k^F \times \vec{F}_k^F &= \sum_i \vec{r}_i^S [T_{FS}]^T \times [\vec{F}_F] + \sum_i \Delta M_i^S \Rightarrow \\
\sum_k \vec{r}_k^F \times \vec{F}_k^F &= \sum_i [\sum_k [T_{ik}^{FS}] \vec{r}_i^S \times \vec{F}_k^F] + \sum_i \Delta M_i^S \Rightarrow \\
\sum_k \vec{r}_k^F \times \vec{F}_k^F &= \sum_k [\sum_i [T_{ik}^{FS}] \vec{r}_i^S] \times \vec{F}_k^F + \sum_i \Delta M_i^S \Rightarrow \\
\sum_k \vec{r}_k^F \times \vec{F}_k^F &= \sum_k \vec{p}_k^F \times \vec{F}_k^F + \sum_i \Delta M_i^S
\end{aligned} \tag{3.24}$$

όπου  $\vec{r}$  το διάνυσμα θέσης ενός κόμβου του πλέγματος και  $\vec{p}^F$  η προβολή του κόμβου του αεροδυναμικού πλέγματος στο ελαστικό. Η διαφορά των δύο αυτών όρων αντιπροσωπεύει την απόσταση μεταξύ των δύο πλεγμάτων. Από την 3.24, προκύπτει για τη διόρθωση της ροπής ότι

$$\begin{aligned}
\sum_i \Delta M_i^S &= \sum_k (\vec{r}_k^F - \vec{p}_k^F) \vec{F}_k^F \\
&= \sum_k \Delta M_k^F
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Με τη διόρθωση αυτή της ροπής, η μέθοδος επιτυγχάνει τη διατήρηση της ροπής κατά τον μετασχηματισμό των μεγεθών από το ένα πλέγμα στο άλλο και συνεπώς, εξασφαλίζεται ο σωστός μετασχηματισμός όλων των δεδομένων.

## 3.2 Μεταφορά Δεδομένων στην Εφαρμογή

Στις εφαρμογές, η αεροτομή αντιμετωπίζεται ως απαραμόρφωτο απολύτως στερεό σώμα, το οποίο όμως είναι ελεύθερο να περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο του, ο οποίος διέρχεται από το αεροδυναμικό του κέντρο ( $c/4$ ). Θεωρείται ότι η στροφή του σώματος παρουσιάζει συμπεριφορά γραμμικού (στρεπτικού) ελατηρίου γύρω από

τον άξονα αυτό, με σταθερά ελατηρίου  $K = 5000 \frac{Nm}{rad}$ . Παρακάτω παρουσιάζεται η εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά του ελατηρίου

$$M = K\theta \quad (3.26)$$

όπου  $M$  η στρεπτική ροπή του ελατηρίου και  $\theta$  η γωνία της αεροτομής με τον οριζόντιο άξονα (γωνία στην οποία ισορροπεί η αεροτομή).

Λόγω του απλού ελαστικού μοντέλου που χρησιμοποιείται, το μητρώο μετασχηματισμού είναι  $[T] = [I]$ .

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, καθώς και θεωρώντας σύστημα συντεταγμένων με αρχή την ακμή προσβολής της αεροτομής, οι συντεταγμένες των σημείων του στερεού ορίου, δηλαδή των σημείων που ανήκουν στην περιφέρεια της αεροτομής, προκύπτουν ως:

$$\begin{aligned} x_F &= x_c + (x_{F0} - x_c) \cos(\theta_S) - (y_{F0} - y_c) \sin(\theta_S) \\ y_F &= y_c + (x_{F0} - x_c) \sin(\theta_S) + (y_{F0} - y_c) \cos(\theta_S) \end{aligned} \quad (3.27)$$

όπου,

- $x_c, y_c$ : συντεταγμένες αεροδυναμικού κέντρου αεροτομής
- $x_{F0}, y_{F0}$ : συντεταγμένες αεροτομής σε μηδενική γωνία τοποθέτησης
- $\theta_S$ : γωνία τοποθέτησης αεροτομής

Επιπλέον θεωρείται ότι η γωνία τοποθέτησης της αεροτομής  $\theta_S$  είναι επαρκώς μικρή ώστε να ισχύει ότι  $\sin(\theta_S) \simeq \theta_S$  και  $\cos(\theta_S) \simeq 1$ , άρα η εξίσωση 3.27 απλοποιείται στην:

$$\begin{aligned} x_F &= x_{F0} - (y_{F0} - y_c)\theta_S \\ y_F &= (x_{F0} - x_c)\theta_S + y_{F0} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Σημειώνεται ότι, για γωνίες μικρότερες των 10 μοιρών οι αποκλίσεις της παραπάνω θεώρησης είναι της τάξης του 0.5% για τη συνάρτηση του ημιτόνου και 1.5% για τη συνάρτηση του συνημίτονου.

Από την 3.28 εύκολα υπολογίζεται και η αναγκαία μεταβολή των συντεταγμένων του

αεροδυναμικού πλέγματος ως:

$$\begin{aligned}\delta x_F &= x_F - x_{F0} = -(y_{F0} - y_c)\theta_S \\ \delta y_F &= y_F - y_{F0} = (x_{F0} - x_c)\theta_S\end{aligned}\quad (3.29)$$

Σε αντιστοιχία με την εξίσωση 3.29, η ροπή στο ελαστικό υποσύστημα, δηλαδή η στρεπτική ροπή που θα δεχθεί το ελατήριο, λόγω των αεροδυναμικών φορτίων έπρεπε να δίνεται από τη σχέση:

$$M_S = -(y_{F0} - y_c)F_x^F + (x_{F0} - x_c)F_y^F \quad (3.30)$$

Όμως, για την μετατροπή των αεροδυναμικών φορτίων  $(F_x^F, F_y^F)$  σε ροπή στο ελαστικό σύστημα  $(M_S)$ , είναι αναγκαία η προσθήκη της διόρθωσης που περιγράφηκε προηγουμένως, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta M_S = \sum_i (\vec{r}_i^F - \vec{p}_i^F) \times \vec{F}_i^F \quad (3.31)$$

όπου τα  $\vec{r}_i^F, \vec{p}_i^F$  προκύπτουν ως:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i^F &= \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} \\ \vec{p}_i^F &= \begin{bmatrix} x_{F0} \\ y_{F0} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.32)$$

Συνεπώς, με την προσθήκη της διόρθωσης  $\Delta M_S$ , η σχέση 3.30 γίνεται:

$$M_S = -(y_F - y_c)F_x^F + (x_F - x_c)F_y^F \quad (3.33)$$

### 3.3 Μέθοδος επίλυσης

Εδώ θα παρουσιαστεί η διαδικασία επίλυσης, καθώς και οι συνθήκες που διέπουν την εξεταζόμενη εφαρμογή. Το σύνολο των μελετών που θα παρουσιαστούν γίνεται για αεροτομή *NACA0012*, με επίλυση τυρβώδους ροής και το χρησιμοποιούμενο πλέγμα είναι αυτό του σχήματος 2.6(β). Επιλέχθηκε η χρήση υβριδικού πλέγματος, το οποίο είναι μη-δομημένο στο εσωτερικό του πεδίου, καθώς και στο επ' άπειρον όριο και

δομημένο κοντά στα στερεά τοιχώματα, με επαρκή πύκνωση για να εξασφαλισθεί ο ακριβής υπολογισμός των μεγεθών ρου οριακού στρώματος. Στον πίνακα 3.1 φαίνονται οι τιμές των μεγεθών που χαρακτηρίζουν την κατάσταση της επ' άπειρον ροής του προβλήματος.

Γωνία επ' άπειρον ροής ( <i>deg</i> )	2
Γωνία τοποθέτησης αεροτομής ( <i>deg</i> )	0
Ταχύτητα επ' άπειρον ροής ( $\frac{m}{s}$ )	150
Επ' άπειρον ολική πίεση ( <i>Pa</i> )	101325
Επ' άπειρον ολική πυκνότητα ( $\frac{kg}{m^3}$ )	1.2
Επ' άπειρον δυναμική συνεκτικότητα ( <i>Pa * s</i> )	1.72E-05
Επ' άπειρον λόγος τυρβώδους προς δυναμικής συνεκτικότητας	1

**Πίνακας 3.1:** *Επ' άπειρον συνθήκες ροής αεροδυναμικών μελετών.*

Προκειμένου να επιλυθεί ένα αεροελαστικό πρόβλημα, αρχικά δημιουργείται το πλέγμα και στη συνέχεια, εκτελούνται εκ περιτροπής αεροδυναμικές και ελαστικές επιλύσεις. Σημειώνεται ότι ο αριθμός των αεροδυναμικών επαναλήψεων μεταξύ δυο ελαστικών δεν απαιτείται να είναι επαρκής για πλήρη σύγκλιση αυτών, αντιθέτως είναι αρκετά μικρός προκειμένου να επιτευχθεί στενή σύνδεση του αεροδυναμικού και του ελαστικού μέρους. Γενικότερα, στα συζευγμένα προβλήματα η επικοινωνία μεταξύ των επιμέρους τομέων είναι επιθυμητό να πραγματοποιείται συχνά. Πρέπει βέβαια να ληφθεί υπόψη ότι αυτή ενδέχεται να επιβραδύνει σημαντικά τον επιλύτη αφού για να επικοινωνήσουν μεταξύ τους τα δύο συστήματα εκτελούνται διαδικασίες, το υπολογιστικό κόστος των οποίων δεν είναι αμελητέο. Συγκεκριμένα, για την επικοινωνία αυτών, είναι αναγκαία η γραφή αρχείων αποτελεσμάτων, από τον επιλύτη του ενός συστήματος, ο μετασχηματισμός αυτών σε αρχεία εισόδου για αυτόν του άλλο, καθώς και οι συνεχείς παραμορφώσεις του αεροδυναμικού πλέγματος. Συνεπώς, είναι συνετό να επιλεγεί μια ενδιάμεση τιμή που εξυπηρετεί ικανοποιητικά την ανάγκη στενής σύνδεσης των υποσυστημάτων, χωρίς όμως να αυξάνει απαγορευτικά το υπολογιστικό κόστος. Τέλος, γίνεται στροφή του στερεού ορίου με ανάλογη παραμόρφωση του πλέγματος και ελέγχεται αν η διαδικασία θα επαναληφθεί ή αν το πρόγραμμα θα τερματίσει.

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη μορφοποίηση του πλέγματος κάνει χρήση αλγεβρικής συνάρτησης, η οποία συνδέει την απόσταση του εκάστοτε κόμβου από το στερεό όριο με την μετατόπιση που αυτός θα δεχθεί [21]. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται η συνάρτηση

$$\vec{\Delta r}_i = f(\hat{d}_i) \vec{\Delta r}_{wall}^i \quad (3.34)$$

όπου

-  $\vec{\Delta r}_i$ : το διάνυσμα της μετατόπισης του κόμβου  $i$

-  $\vec{\Delta r}_{wall}^i$ : το διάνυσμα της μετατόπισης του πλησιέστερου κόμβου του στερεού τοιχώματος στον κόμβο  $i$

-  $f$ : αλγεβρική συνάρτηση σύνδεσης της απόστασης των δυο κόμβων και της παραμόρφωσης που δέχεται ο κόμβος  $i$

-  $\hat{d}_i$ : ο λόγος της απόστασης των δυο κόμβων  $d_i$ , ως προς τη μέγιστη τιμή όλων των  $d_i$ , δηλαδή  $\hat{d}_i = \frac{d_i}{d_{max}}$

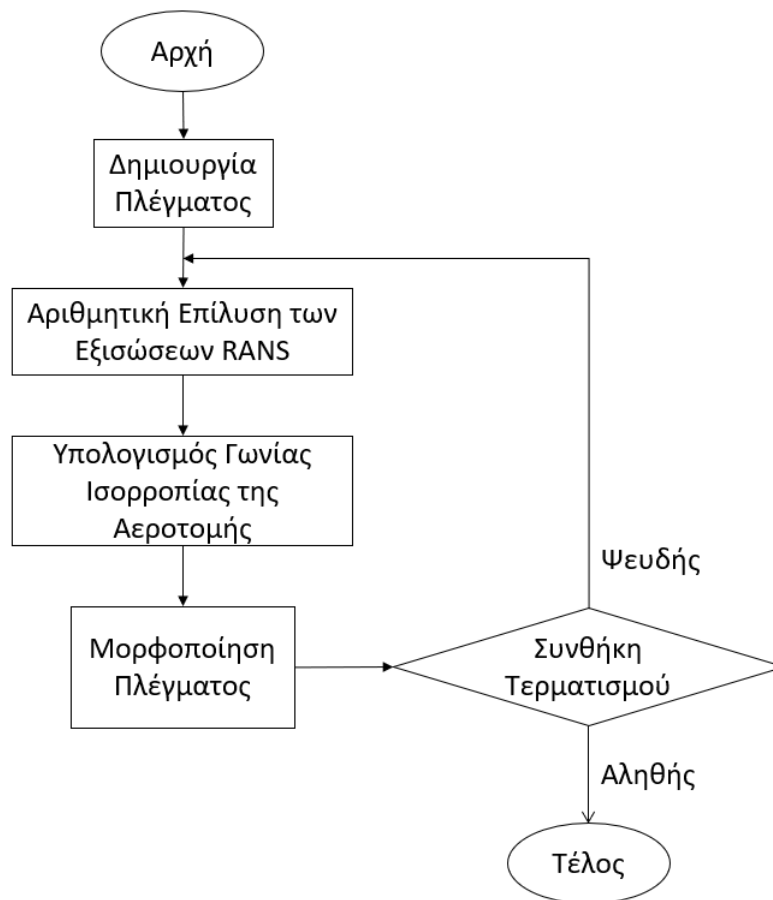
Για την τιμή της συνάρτησης  $f$  ισχύει ότι  $0 \leq f \leq 1$  και προκύπτει από τη σχέση

$$f(\hat{d}_i) = \frac{f_2^2}{f_1^2 + f_2^2} \quad (3.35)$$

όπου

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{e(1 - e^{-\hat{d}})}{-1 + e} \\ f_2 &= \frac{(1 - e^{1-\hat{d}})}{1 - e} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Στο σχήμα 3.2 παρουσιάζεται το δομικό διάγραμμα του αεροελαστικού προγράμματος για καλύτερη κατανόηση της εκτελούμενης διαδικασίας.



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα ροής αεροελαστικού επιλύτη εφαρμογής.

## 3.4 Έλεγχοι Αποτελεσμάτων

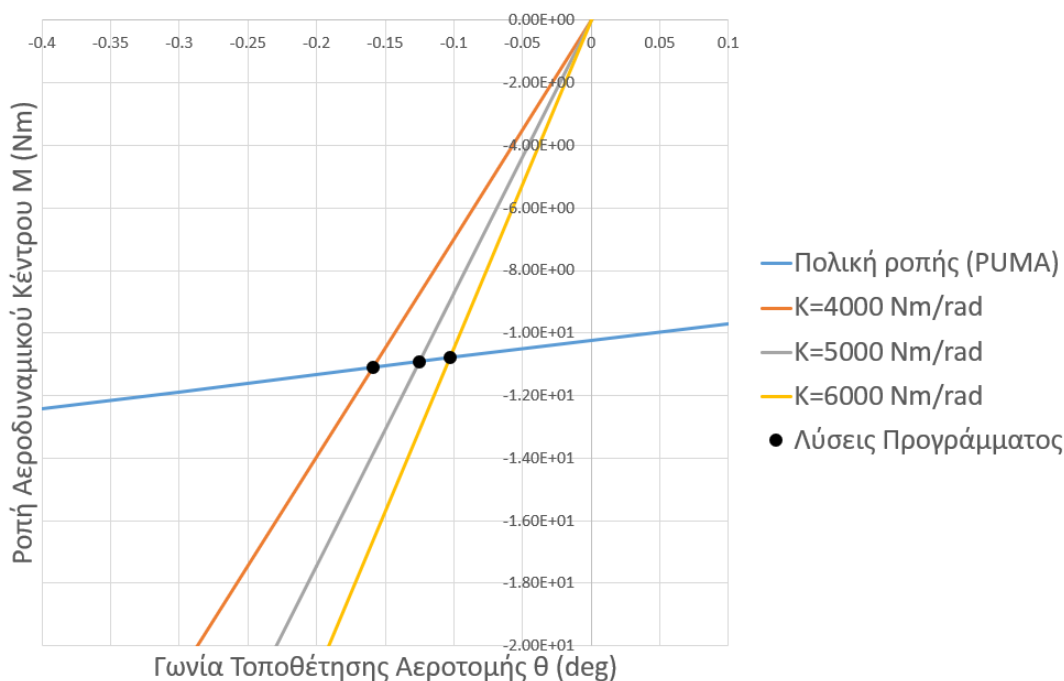
Αναφέρεται ότι, στο σύνολο των μελετών που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια του κεφαλαίου, η εξεταζόμενη αεροτομή είναι η *NACA0012*, ενώ οι συνθήκες της επί άπειρον ροής, είναι αυτές του σχήματος 3.1, εφόσον δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

### 3.4.1 Έλεγχος Εγκυρότητας Λύσεως

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας της λύσεως του αεροελαστικού προβλήματος πραγματοποιήθηκε γραφική επίλυση αυτού για τρία διαφορετικά ελατήρια (με σταθερές  $K = 4000 \frac{Nm}{rad}$ ,  $K = 5000 \frac{Nm}{rad}$ ,  $K = 6000 \frac{Nm}{rad}$ ) και μετέπειτα σύγκριση αυτής με τη δοθείσα εκ του προγράμματος λύση. Με τον όρο γραφική επίλυση νοείται η εύρεση της γωνίας, στην οποία η αεροτομή θα ισορροπήσει, μέσω της εύρεσης του σημείου τομής της πολικής καμπύλης ροπής αυτής με την καμπύλη που περιγράφει το ελατήριο.



Συνεπώς για τη γραφική επίλυση είναι αναγκαία η αρχική προσέγγιση της πολικής καμπύλης της ροπής, δηλαδή της καμπύλης που περιγράφει τη σχέση μεταξύ της αεροδυναμικής ροπής γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της αεροτομής και της γωνίας τοποθέτησης αυτής. Για τον προσδιορισμό της καμπύλης αυτής, πραγματοποιήθηκε πλήθος αεροδυναμικών μελετών για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης. Έπειτα εκτελέστηκε αεροελαστική επίλυση των προβλημάτων για τα τρία διαφορετικά  $K$  από το λογισμικό *PUMA*. Στο σχήμα 3.3 παρουσιάζεται η καμπύλη της ροπής που προέκυψε από το σύνολο των αεροδυναμικών μελετών που πραγματοποιήθηκαν, καθώς και οι ευθείες που περιγράφουν τη συμπεριφορά των τριών εξεταζόμενων ελατηρίων. Τέλος στο ίδιο σχήμα φαίνονται οι λύσεις που έδωσε ο αεροελαστικός επιλύτης για το καθένα από αυτά.



**Σχήμα 3.3:** Στο διάγραμμα παρουσιάζεται (α) η πολική καμπύλη της ροπής αεροτομής *NACA0012* γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο αυτής, σε συνάρτηση με την γωνία της με τον οριζόντιο άξονα, η οποία προέκυψε από πλήθος αεροδυναμικών μελετών του λογισμικού *PUMA* (μπλε), (β) ευθείες που περιγράφουν τα διαφορετικά ελατήρια, προκειμένου να βρεθούν τα σημεία τομής μεταξύ αυτών και της πολικής ( $K = 4000 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$  πορτοκαλί,  $K = 5000 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$  γκρι,  $K = 6000 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$  κίτρινο), (γ) οι τελικές τιμές γωνίας ισορροπίας και της αντίστοιχης ροπής που δόθηκαν από αεροελαστική μελέτη του λογισμικού *PUMA* για τα αντίστοιχα ελατήρια (μαύρο).

Επιπλέον, υπολογίστηκαν οι ποσοστιαίες αποκλίσεις μεταξύ των λύσεων που δόθηκαν από το λογισμικό *PUMA* και αυτών που προέκυψαν από την εύρεση του σημείου τομής των καμπυλών του σχήματος 3.3. Οι τιμές των διαφορών αυτών παρουσιάζονται στον πίνακα 3.2.

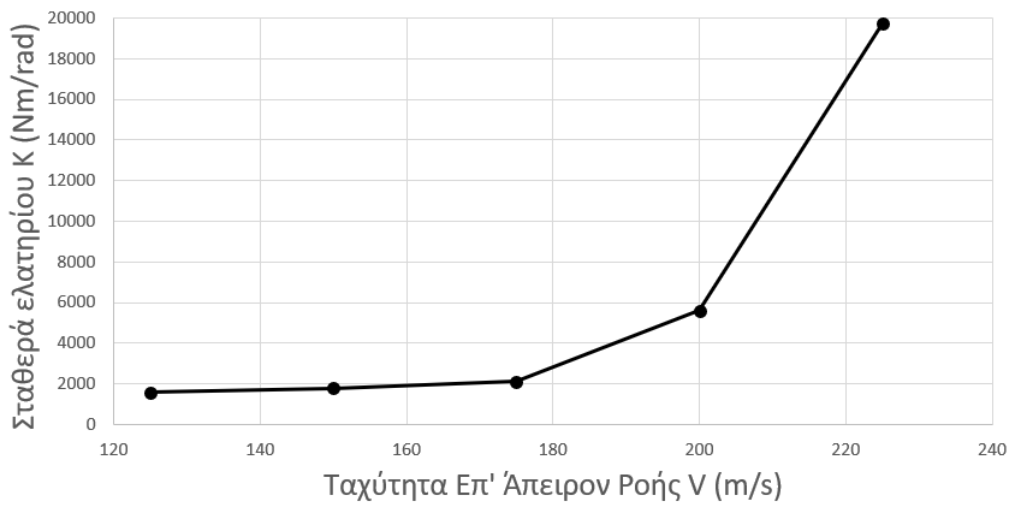
Γωνία (deg)	PUMA	Σημείο Τομής	Διαφορά (%)
$K = 4000 \frac{Nm}{rad}$	-1.59E-01	-1.5898953E-01	-6.5871E-03
$K = 5000 \frac{Nm}{rad}$	-1.25E-01	-1.2507676E-01	6.1369E-02
$K = 6000 \frac{Nm}{rad}$	-1.03E-01	-1.0308791E-01	8.5277E-02
Ροπή (Nm)	PUMA	Σημείο Τομής	Διαφορά (%)
$K = 4000 \frac{Nm}{rad}$	-1.1097E+01	-1.109956E+01	2.3090E-02
$K = 5000 \frac{Nm}{rad}$	-1.0913E+01	-1.091501E+01	1.8380E-02
$K = 6000 \frac{Nm}{rad}$	-1.0795E+01	-1.079534E+01	3.1561E-03

**Πίνακας 3.2:** Ποσοστιαίες διαφορές λύσεων του αεροελαστικού προβλήματος που προέκυψαν από το λογισμικό PUMA, με αυτές που υπολογίστηκαν μέσω εύρεσης του σημείου τομής από τη γραφική επίλυση του προβλήματος.

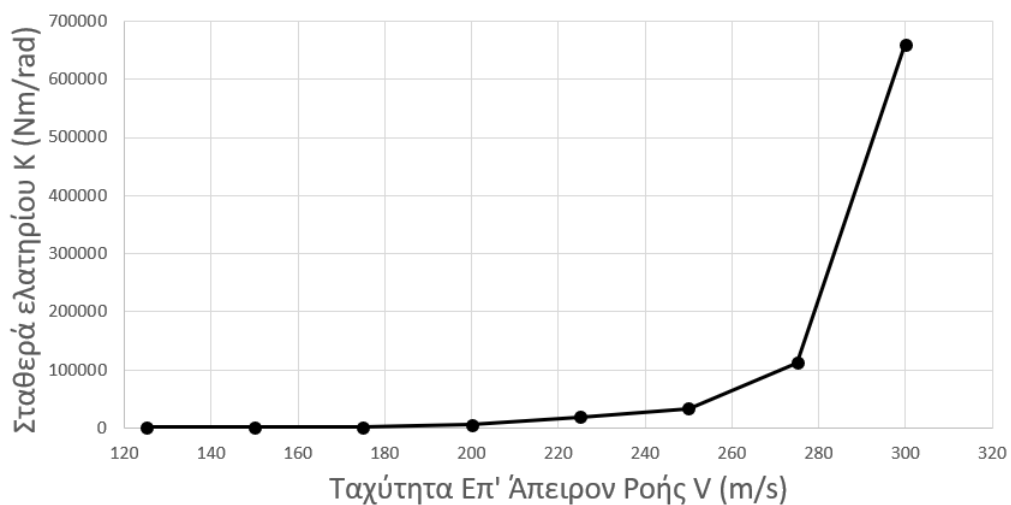
Όπως φαίνεται και στις τρεις περιπτώσεις, οι λύσεις του προγράμματος έχουν διαφορά μικρότερη του 0.1% με αυτές που προσδιορίστηκαν μέσω της γραφικής επίλυσης, συνεπώς το εξεταζόμενο λογισμικό κρίνεται αξιόπιστο για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας.

### 3.4.2 Ευστάθεια Σύγκλισης Μεθόδου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, εξετάστηκε η δυνατότητα σύγκλισης του επιλύτη ανάλογα με την τιμή της σταθεράς του ελατηρίου  $K$ . Η εξέταση αυτή, πραγματοποιήθηκε σειριακά για διαδοχικές τιμές της επί άπειρον ταχύτητας της ροής, σε κάθε μια εκ των οποίων έγινε διερεύνηση προκειμένου να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς του ελατηρίου  $K$ , για την οποία ο αεροελαστικός επιλύτης αδυνατεί να συγκλίνει. Συγκεκριμένα, σε κάθε τιμή της ταχύτητας της επί άπειρον ροής, εκτελούνται δυο επιλύσεις, μια με πολύ υψηλό  $K$ , δηλαδή για πολύ σκληρό ελατήριο, προκειμένου να διασφαλισθεί η σύγκλιση της και μια με πολύ χαμηλό (σχεδόν μηδέν), ώστε να είναι βέβαιη η αδυναμία σύγκλισης λόγω των πολύ μεγάλων γωνιών που αναπτύσσονται και την αδυναμία ισορροπίας της αεροτομής. Έπειτα, εκτελείται μελέτη για τον μέσο όρο των δύο προηγούμενων  $K$  και αν αυτή επιτύχει σύγκλιση, τότε αντικαθιστά την υψηλή τιμή, αλλιώς αντικαθιστά τη χαμηλή τιμή. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου η απόσταση μεταξύ των δύο τιμών είναι επαρκώς μικρή (εδώ η απόσταση αυτή ζητείται να είναι μικρότερη του  $1 \frac{Nm}{rad}$ ). Στα σχήματα 3.4 3.5 φαίνονται τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής.



**Σχήμα 3.4:** Καμπύλη της οριακής (ελάχιστης) τιμής που έλαβε η σταθερά του ελατηρίου  $K$  για την οποία επιτεύχθηκε σύγκλιση της αεροελαστικής επίλυσης, συναρτήσει των τιμών της ταχύτητας της επ' άπειρον ροής. Στο διάγραμμα αυτό εξαιρούνται οι υψηλές τιμές της τελευταίας.

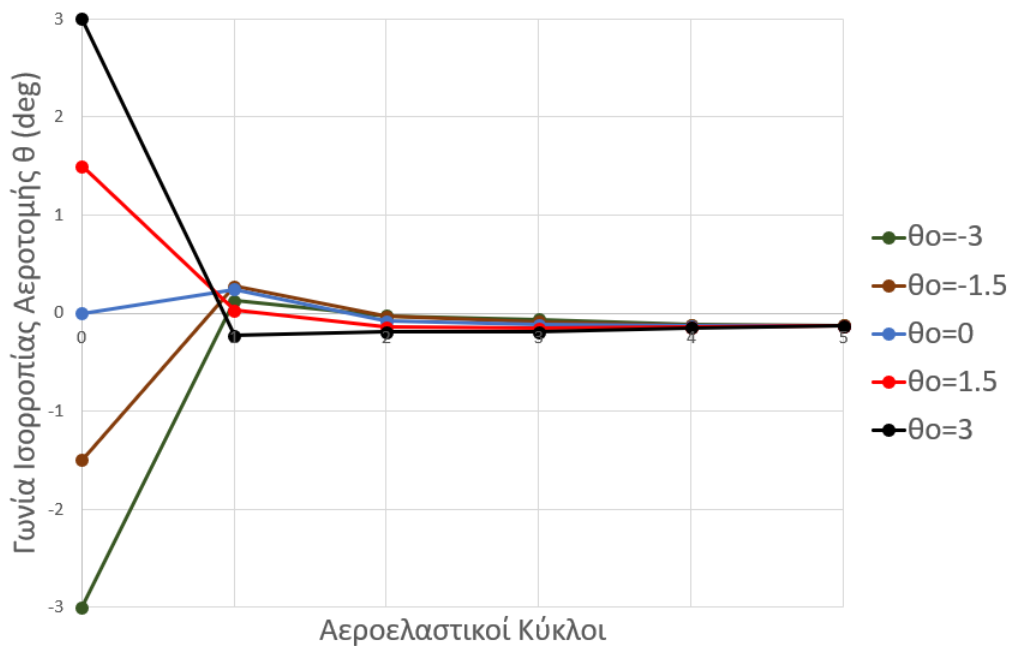


**Σχήμα 3.5:** Καμπύλη της οριακής (ελάχιστης) τιμής που έλαβε η σταθερά του ελατηρίου  $K$  για την οποία επιτεύχθηκε σύγκλιση της αεροελαστικής επίλυσης, συναρτήσει των τιμών της ταχύτητας της επ' άπειρον ροής.

Στο σχήμα 3.4 εξαιρούνται οι υψηλές τιμές ταχυτήτων προκειμένου να γίνει ευκολότερα διακριτή η μορφή της καμπύλης στις χαμηλότερες, οι οποίες είναι και αυτές που εξετάζονται στην εφαρμογή που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια. Στα διαγράμματα αυτά φαίνεται η ελάχιστη τιμή που το  $K$  δύναται να λάβει, δίχως να επηρεάσει τη σύγκλιση της αεροελαστικής επίλυσης, σε συνάρτηση με το χρόνο.

### 3.4.3 Ανεξαρτησία Λύσης από τις Αρχικές Συνθήκες

Ο έλεγχος αυτός έχει ως σκοπό την επιβεβαίωση του ότι το τελικό αποτέλεσμα που λαμβάνεται από το πρόγραμμα είναι απαλλαγμένο από οποιαδήποτε επιρροή από την αρχική γωνία στην οποία βρισκόταν η αεροτομή. Για το λόγο αυτό πραγματοποιήθηκαν πέντε πανομοιότυπες μελέτες με μοναδική διαφορά την εξεταζόμενη γωνία στην οποία τοποθετείται η αεροτομή κατά την εκκίνηση της επίλυσης του προβλήματος (στις -3, -1.5, 0, 1.5, 3 μοίρες). Η σύγκλιση της ροπής των μελετών αυτών, ως προς των αριθμό των εκτελούμενων αεροελαστικών κύκλων, παρουσιάζεται στο σχήμα 3.6.



**Σχήμα 3.6:** Διάγραμμα σύγκλισης της γωνίας ισορροπίας αεροελαστικών μελετών για διαφορετικές αρχικές γωνίες αεροτομής, σε συνάρτηση με τους αεροελαστικούς κύκλους (με  $\theta_0$  συμβολίζεται η γωνία στην οποία τοποθετείται η αεροτομή στην εκκίνηση της αεροελαστικής επίλυσης).

Όπως φαίνεται οι λύσεις του προγράμματος, δεν παρουσιάζουν καμία εξάρτηση από την αρχική γωνία. Συνεπώς επιβεβαιώνεται η δυνατότητα αυτού, να επιλύει το δοθέν πρόβλημα, δίχως τον επηρεασμό των αποτελεσμάτων από τις αρχικές συνθήκες που θα του δοθούν.

## Κεφάλαιο 4

# Μέθοδος Υπολογισμού Παραγώγων Συζευγμένου Συστήματος

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστεί η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των παραγώγων του αεροελαστικού συστήματος, οι οποίες είναι και αναγκαίες για την μετέπειτα βελτιστοποίηση. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται μαθηματική ανάλυση του υπολογισμού αυτού, με ακόλουθη εφαρμογή της σε μία μελέτη εικονικής βελτιστοποίησης, τα αποτελέσματα της οποίας θα συγκριθούν με αυτά που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών.

Για τον υπολογισμό των παραγώγων του συζευγμένου συστήματος, αρχικά προσδιορίζονται οι ολικόι παράγωγοι στα επιμέρους τμήματά του. Στην περίπτωση του ελαστικού μέρους, ο υπολογισμός γίνεται αναλυτικά, εφόσον αυτό είναι μια γραμμική συνάρτηση, ενώ για τον υπολογισμό των αεροδυναμικών παραγώγων χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος. Τέλος, για τον υπολογισμό των ολικών παραγώγων του συζευγμένου συστήματος χρησιμοποιείται η μέθοδος *MDF* (*Multidisciplinary Feasible*) [34].

## 4.1 Υπολογισμός Παραγώγων Επιμέρους Συστημάτων

### 4.1.1 Υπολογισμός Αεροδυναμικών Παραγώγων με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο

Αναφέρθηκε ότι οι παράγωγοι των μεγεθών στο αεροδυναμικό σύστημα προκύπτουν με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Εδώ θα πραγματοποιηθεί μια σύντομη ανάλυση αυτής, σύμφωνα με την [20].

Αρχικά, θεωρείται συνάρτηση στόχου  $F$  και μεταβλητές σχεδιασμού  $b_i$ . Για την  $F$  ισχύει:

$$F = \int_{S_{Obj}} F_S dS \quad (4.1)$$

Οποιαδήποτε ποσότητα της ροής  $\Phi$ , δύναται να εκφραστεί ως συνάρτηση των μεταβλητών αυτής  $Q_n$  και της θέσης στο χώρο  $x_k$ . Συνεπώς, η ολική (στο πλαίσιο του αεροδυναμικού μέρους) παράγωγος των ποσοτήτων αυτών, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta b_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial b_i} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_i} \quad (4.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την 4.2, η διαφορίση της 4.1, με εφαρμογή του κανόνα του *Leibniz*, γράφεται ως:

$$\frac{\delta F}{\delta b_i} = \int_{S_{Obj}} \frac{\partial(F_S dS)}{\partial Q_n} \frac{\delta Q_n}{\delta b_i} + \int_{S_{Obj}} \frac{\partial(F_S dS)}{\partial(n_k dS)} \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} + \int_{S_{Obj}} \frac{\partial(F_S dS)}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_i} \quad (4.3)$$

Για τη μείωση του κόστους υπολογισμού των παραγώγων, αντί της  $F$  ορίζεται η  $F_{aug}$ , για την οποία ισχύει ότι:

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_n R_n d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a R_{\tilde{\mu}} d\Omega \quad (4.4)$$

όπου  $\Psi_n$  οι συζυγείς μεταβλητές της ροής,  $\tilde{\nu}_a$  το συζυγές της τυρβώδους συνεκτικότητας, ενώ  $R_n$ ,  $R_{\tilde{\mu}}$  υπόλοιπα για τα οποία, όταν επιτευχθεί η σύγκλιση, ισχύει η σχέση

$R_{\bar{\mu}} = R_n = 0$ , συνεπώς εξασφαλίζεται ότι  $F_{aug} = F$ .

Για τη διαφορίση των ολοκληρωμάτων, πραγματοποιείται απευθείας διαφορίση των εσωτερικών όρων αυτών, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\frac{\delta}{\delta b_i}$ . Εντός των ολοκληρωμάτων αυτών υπάρχουν χωρικές παράγωγοι των μεγεθών της ροής, η διαφορίση των οποίων, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, δίνει τη σχέση:

$$\frac{\delta}{\delta b_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\delta \Phi}{\delta b_i} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_i} \right) \quad (4.5)$$

Επιπλέον, διαφορίζοντας την  $F_{aug}$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, προκύπτει το ακόλουθο:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\delta R_n}{\delta b_i} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\delta R_{\bar{\mu}}}{\delta b_i} d\Omega \quad (4.6)$$

Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης 4.6 (εξισώσεις μέσης ροής) γράφεται ως:

$$\int_{\Omega} \Psi_n \frac{\delta R_n}{\delta b_i} d\Omega = \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\delta}{\delta b_i} \left( \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial x_k} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\delta}{\delta b_i} \left( \frac{\partial f_{nk}^{vis}}{\partial x_k} \right) d\Omega \quad (4.7)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι το ολοκλήρωμα των μη-συνεκτικών όρων της μέσης ροής και ο δεύτερος είναι το ολοκλήρωμα των συνεκτικών όρων αυτής.

Ο τρίτος όρος της εξίσωσης 4.6 (εξισώσεις μοντέλου τύρβης) γράφεται ως:

$$\int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\delta R_{\bar{\mu}}}{\delta b_i} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\delta SA^c}{\delta b_i} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\delta SA^d}{\delta b_i} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_a \frac{\delta SA^s}{\delta b_i} d\Omega \quad (4.8)$$

όπου οι τρεις παραπάνω όροι αποτελούν τους όρους συναγωγής, διάχυσης και πηγής αντίστοιχα.

Με εκτέλεση πράξεων οι όροι των εξισώσεων 4.7 και 4.8 καταλήγουν σε όρους που έχουν μια από τις ακόλουθες μορφές:

α)  $\int_{\Omega} C_m^{\Omega} \frac{\delta \Phi}{\delta b_i} d\Omega$

β)  $\int_{\Omega} H^{\Omega} \frac{\delta \tilde{\nu}}{\delta b_i} d\Omega$

γ)  $\int_{\Omega} G_k^{\Omega} \frac{\delta x_k}{\delta b_i} d\Omega$

δ)  $\int_S C_m^S \frac{\delta \Phi}{\delta b_i} dS$

ε)  $\int_S H^S \frac{\delta \tilde{\nu}}{\delta b_i} dS$

στ)  $\int_S G_k^S \frac{\delta x_k}{\delta b_i} dS$

Απαλείφοντας τους όρους της μορφής (α), δηλαδή μέσω της σχέσης  $C_m^\Omega = 0$ , προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής, ενώ αντίστοιχα η απαλοιφή των όρων (β),  $H^\Omega = 0$ , δίνει τις συζυγείς εξισώσεις του συζυγείς εξισώσεις του μοντέλου τύρβης (*Spalart – Allmaras*). Όμοια με τα παραπάνω, απαλείφοντας τους όρους (δ) και (ε),  $C_m^S = 0$  και  $H^S = 0$ , δίνονται αντίστοιχα οι συζυγείς οριακές συνθήκες των εξισώσεων μέσης ροής και αυτών του μοντέλου τύρβης. Τέλος, από τους όρους (ε) και (στ), λαμβάνονται και οι παράγωγοι ευαισθησίας.

Έτσι οι συζυγείς εξισώσεις της μέσης ροής δίνονται από τη σχέση:

$$-A_{nmk} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} - K_m + K_m^{SA} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial U_m} = 0 \quad (4.9)$$

όπου:

-  $A_{nmk}$  το Ιακωβιανό μητρώο του μη-συνεκτικού όρου

$$-A_{nmk} = \frac{\partial f_{nk}^{inv}}{\partial U_m} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \\ \delta_{1k} & u_k + u_1 \delta_{1k} & u_1 \delta_{2k} & u_1 \delta_{3k} \\ \delta_{2k} & u_2 \delta_{1k} & u_k + u_2 \delta_{2k} & u_2 \delta_{3k} \\ \delta_{3k} & u_3 \delta_{1k} & u_3 \delta_{2k} & u_k + u_3 \delta_{3k} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

-  $K_m$  όρος που προκύπτει από τη διαφορίση του συνεκτικού μέρους των εξισώσεων μέσης ροής και υπολογίζεται από την σχέση:

$$K_m = \frac{\partial \tau_{kn}^{adj}}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial U_m} \quad (4.11)$$

με  $\tau_{kn}^{adj}$  τις συζυγείς τάσεις για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\tau_{kn}^{adj} = (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial x_n} \right) \quad (4.12)$$

-  $K_m^{SA}$  όρος που προκύπτει από τη διαφορίση των όρων συναγωγής και πηγής (λόγω στροβιλότητας) του μοντέλου τύρβης *Spalart – Allmaras* και υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$K_m^{SA} = -\frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_k} \tilde{\nu} \frac{\partial u_k}{\partial U_m} - \frac{\partial}{\partial x_l} [\tilde{\nu}_a C_6 \mathcal{P}(\tilde{S}, S) \frac{1}{S} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{kqr} \frac{\partial u_r}{\partial x_q}] \frac{\partial u_n}{\partial U_m} \quad (4.13)$$

-  $\frac{\partial F_\Omega}{\partial U_m}$  όρος που προκύπτει από την διαφορίση της συνάρτησης στόχου.

Οι οριακές συνθήκες που προκύπτουν από την συζυγή επίλυση, δεδομένου ότι η κα-



νονική επίλυση των εξισώσεων *RANS* είχε ως οριακή συνθήκη τη μη-ολίσθηση του ρευστού επί του στερεού ορίου, δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\Psi_{m+1}n_m &= -\frac{\partial F_S}{\partial p} \\
\Psi_{m+1}n_m &= \frac{\partial F_S}{\partial(\tau_{kl}n_kn_l)} \\
\tau_{kl}^{adj}n_kt_l + \tilde{\nu}_a\mathcal{C}_6\mathcal{P}(\tilde{S}, S)\frac{1}{S}\varepsilon_{klp}\varepsilon_{kqr}\frac{\partial u_r}{\partial x_q}n_l t_p &= -\frac{\partial(F_S dS)}{\partial(u_k t_k dS)} \\
\frac{\partial \tilde{\nu}_a}{\partial x_k}n_k &= -\frac{\sigma}{\nu + \nu_t}\frac{\partial F_S}{\partial \tilde{\nu}} \\
\Psi_{m+1}t_m &= \frac{\partial F_S}{\partial(\tau_{kl}n_k t_l)} \\
\tilde{\nu}_a &= \frac{\sigma}{\nu + (1 + c_{b2})}\frac{\partial(F_S dS)}{\partial(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k}n_k dS)}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

#### 4.1.2 Υπολογισμός Ελαστικών Παραγώγων

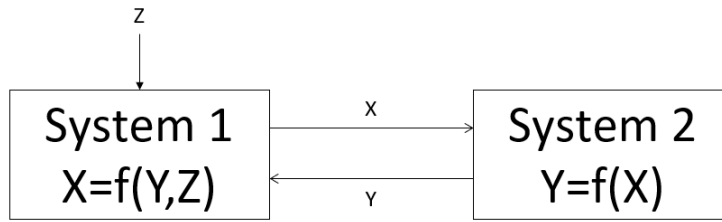
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το ελαστικό μοντέλο που χρησιμοποιείται περιγράφεται από μια γραμμική συνάρτηση 3.26, συνεπώς οι παράγωγοι των μεγεθών είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \theta}{\delta K} &= -\frac{M}{K^2} \\
\frac{\delta \theta}{\delta M} &= \frac{1}{K}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

## 4.2 Ανάλυση Μεθόδου *MDF*

Η μέθοδος *MDF* αποτελεί μια αριθμητική μέθοδο προσδιορισμού των παραγώγων, η οποία δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού των ολικών παραγώγων μεγεθών ενός συζευγμένου συστήματος, μέσω της επίλυσης συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων. Για την επίλυση όμως του παραπάνω συστήματος, είναι αναγκαίος ο υπολογισμός μόνο των παραγώγων στα απομονωμένα συστήματα, απλοποιώντας έτσι τη διαδικασία.

Εν συντομία η μέθοδος αυτή δύναται να υλοποιήσει τον υπολογισμό των παραγώγων ενός συζευγμένου μοντέλου, όπως αυτό του σχήματος 4.1 μέσω της επίλυσης του συστήματος εξισώσεων 4.16.



Σχήμα 4.1: Παράδειγμα συζευγμένου συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dZ} &= \frac{\partial X}{\partial Z} + \frac{\partial X}{\partial Y} \frac{dY}{dZ} \\ \frac{dY}{dZ} &= \frac{\partial Y}{\partial Z} + \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{dX}{dZ} \end{aligned} \quad (4.16)$$

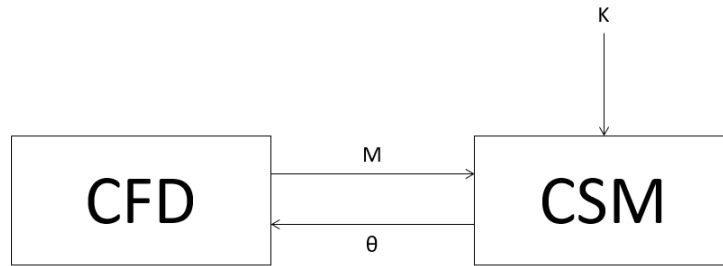
Το σύστημα 4.1 αποτελεί τη σύζευξη των συστημάτων *System 1* και *System 2*, όπου η έξοδος  $X$  του συστήματος 1 αποτελεί την είσοδο του 2, ενώ η έξοδος  $Y$  του 2 αποτελεί την είσοδο του 1. Επιπλέον, το σύστημα 1 δέχεται ως εξωτερική παράμετρο το μέγεθος  $Z$ . Το σύστημα των εξισώσεων 4.16 επιλύεται ως προς τα μεγέθη  $\frac{dX}{dZ}$ ,  $\frac{dY}{dZ}$ . Παρακάτω παρουσιάζεται σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\partial X}{\partial Y} \\ -\frac{\partial Y}{\partial X} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dX}{dZ} \\ \frac{dY}{dZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} \\ \frac{\partial Y}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Τονίζεται ότι στην εξίσωση 4.16, καθώς και στην υπόλοιπη ανάλυση της μεθόδου *MDF*, οι όροι της μορφής  $\frac{\partial X}{\partial Z}$  αναφέρονται στην ολική παράγωγο του μεγέθους  $X$  ως προς το μέγεθος  $Z$  στο απομονωμένο σύστημα, ενώ οι όροι της μορφής  $\frac{dY}{dZ}$  αναφέρονται στην ολική παράγωγο του συζευγμένου συστήματος.

#### 4.2.1 Παράδειγμα εφαρμογής *MDF*

Αναφέρεται ότι το σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί τόσο για το ακόλουθο παράδειγμα, όσο και έπειτα για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου με αυτά του αναλυτικού υπολογισμού των παραγώγων, είναι ένα απλοποιημένο συζευγμένο αεροελαστικό σύστημα. Στο σύστημα αυτό, το υποσύστημα της αεροδυναμικής δέχεται ως είσοδο τη γωνία ισορροπίας της αεροτομής  $\theta$  και υπολογίζει ως έξοδο τη ροπή  $M$  αυτής, γύρω από το αεροδυναμικό της κέντρο. Το ελαστικό υποσύστημα, λαμβάνει ως είσοδο την υπολογιζόμενη ροπή  $M$ , καθώς και τη σταθερά του ελατηρίου  $K$ , ως εξωτερική παράμετρο και υπολογίζει τη γωνία ισορροπίας της αεροτομής.



Σχήμα 4.2: Αεροελαστικό σύστημα

Στη συνέχεια, θα υπολογιστούν αναλυτικά οι παράγωγοι των μεταβλητών του συζευγμένου συστήματος ως προς τη σταθερά του ελατηρίου ( $K$ ), με ακόλουθο προσδιορισμό αυτών, με τη μέθοδο *MDF*, προκειμένου ναδειχθεί ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο. Στο πλαίσιο του παραδείγματος, γίνεται η παραδοχή ότι στο παραπάνω σύστημα 4.2, το ελαστικό σύστημα είναι το απλοποιημένο στρεπτικό ελατήριο του προηγούμενου κεφαλαίου 3.26, ενώ το αεροδυναμικό υποσύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$M = a\theta + b \quad (4.18)$$

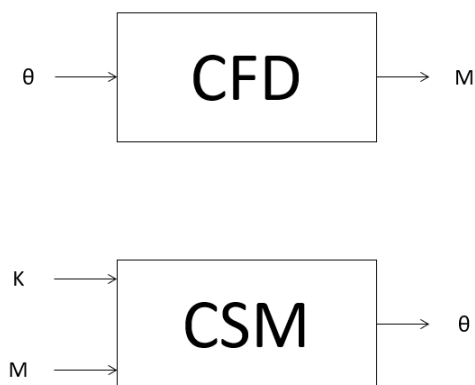
όπου  $a, b$  γνωστές σταθερές,  $M$  η ροπή γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της αεροτομής και  $\theta$  η γωνία τοποθέτησης αυτής.

Για τον υπολογισμό των παραγώγων του ολικού συστήματος, αρχικά επιλύεται το σύστημα των εξισώσεων 4.18, 3.26 προκειμένου να εκφραστούν και οι δυο μεταβλητές ως προς το  $K$  (εξισώσεις 4.19) και στη συνέχεια, γίνεται παραγωγή αυτών (εξισώσεις 4.20), όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} M &= \frac{bK}{K - a} \\ \theta &= \frac{b}{K - a} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dK} &= \frac{-ab}{(K - a)^2} \\ \frac{d\theta}{dK} &= \frac{-b}{(K - a)^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Για τη μέθοδο *MDF*, τα επιμέρους συστήματα του συζευγμένου προβλήματος λαμβάνονται μεμονωμένα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



**Σχήμα 4.3:** Μεμονωμένα υποσυστήματα του αεροελαστικού συστήματος

Έτσι, για το αεροδυναμικό κομμάτι (*CFD*) ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial K} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \theta} &= a \end{aligned} \tag{4.21}$$

ενώ, αντίστοιχα, για το ελαστικό (*CSM*), ισχύει η εξίσωση 4.15.

Συνεπώς, για τον προσδιορισμό των ολικών διαφορικών, μέσω των μερικών (εξισώσεις 4.21,4.15), προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dK} &= \frac{\partial \theta}{\partial K} + \frac{\partial \theta}{\partial M} \frac{dM}{dK} \\ \frac{dM}{dK} &= \frac{\partial M}{\partial K} + \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dK} \end{aligned} \tag{4.22}$$

η επίλυση του οποίου οδηγεί στις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dK} &= \frac{-M}{K(K-a)} \\ \frac{dM}{dK} &= \frac{-aM}{K(K-a)}\end{aligned}\quad (4.23)$$

Συμπερασματικά, προκειμένου ναδειχθεί ότι οι ολικές παράγωγοι που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο *MDF* είναι κοινές με αυτές που θα προέκυπταν μέσω αναλυτικού υπολογισμού, αρκεί ναδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω ισότητα

$$\frac{M}{K} = \frac{b}{K-a} \quad (4.24)$$

Με χρήση των εξισώσεων 4.18, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\frac{K\theta}{K} &= \frac{b}{K-a} \Leftrightarrow \\ \frac{M}{K} &= \frac{M-a\theta}{K-a} \Leftrightarrow \\ \theta &= \frac{M-a\theta}{K-a} \Leftrightarrow \\ (K-a)\theta &= M-a\theta \Leftrightarrow \\ K\theta &= M\end{aligned}\quad (4.25)$$

Η εξίσωση 4.25 καταλήγει σε μια ισότητα που είναι γνωστό ότι ισχύει, με συνέπεια η μέθοδος *MDF* να καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με τον αναλυτικό υπολογισμό της παραγωγού του συζευγμένου συστήματος.

### 4.3 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, προκειμένου να επιβεβαιωθεί η δυνατότητα της μεθόδου να υπολογίζει με ακρίβεια τις παραγωγούς εντός προγραμματιστικού περιβάλλοντος, αναπτύχθηκε μια εικονική βελτιστοποίηση, η οποία πραγματοποιείται με δυο διαφορετικούς τρόπους. Στην πρώτη περίπτωση, αυτή θα εκτελεστεί υπολογίζοντας τις παραγωγούς με (κεντρικές) πεπερασμένες διαφορές μεταξύ δυο αεροελαστικών μελετών, ενώ στη δεύτερη οι παράγωγοι θα προκύψουν όπως παρουμε

άστηκε παραπάνω.

Σημειώνεται ότι η μέθοδος βελτιστοποίησης και στις δυο περιπτώσεις είναι αυτή της απότομης καθόδου (*Steepest Descent*) με κοινό συντελεστή ( $\eta = 2 * 10^{11}$ ). Επιπλέον, και στις δυο περιπτώσεις, τόσο το πλέγμα, όσο και οι συνθήκες της επί άπειρον ροής είναι πανομοιότυπες, ώστε να έχει νόημα η μετέπειτα σύγκριση των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, το πλέγμα είναι αυτό που παρουσιάστηκε και σε προηγούμενα κεφάλαια για την επίλυση συνεκτικής ροής 2.6(β) και οι συνθήκες είναι επίσης όμοιες με τις προηγούμενες μελέτες 3.1.

Στη μελέτη αυτή, ως μεταβλητή σχεδιασμού τίθεται η σταθερά του ελατηρίου  $K$ , ενώ ως συνάρτηση στόχος τίθεται η ακόλουθη:

$$F_{Obj} = 0.5(\theta - \theta_{target})^2 \quad (4.26)$$

Σκοπός της βελτιστοποίησης αυτής, είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης στόχου, προκειμένου η γωνία στην οποία θα ισορροπήσει η αεροτομή μετά από την αεροελαστική μελέτη  $\theta$  να είναι η επιθυμητή  $\theta_{target}$ .

Η παραγωγή της συνάρτησης στόχου ως προς τη μεταβλητή σχεδιασμού δίνει τη σχέση:

$$\frac{dF_{Obj}}{dK} = (\theta - \theta_{target}) \frac{d\theta}{dK} \quad (4.27)$$

Συνεπώς, είναι αναγκαίος ο υπολογισμός της παραγώγου  $\frac{d\theta}{dK}$ , η οποία δύναται να υπολογιστεί με την εφαρμογή της μεθόδου *MDF*, από τη σχέση:

$$\frac{d\theta}{dK} = \frac{\frac{\partial\theta}{\partial K} + \frac{\partial\theta}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial K}}{1 - \frac{\partial\theta}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial\theta}} \quad (4.28)$$

όπου για τις μερικές παραγώγους του αεροδυναμικού συστήματος, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

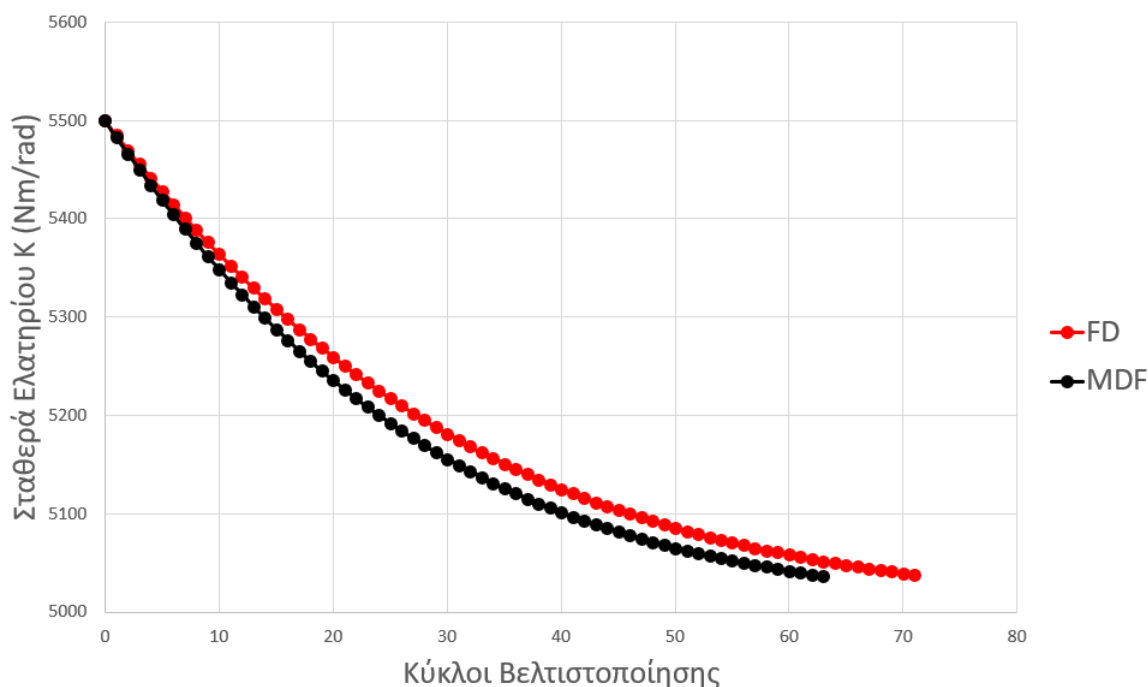
$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial K} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial\theta} &= \frac{dM}{dx} \frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{dM}{dy} \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Στις εξισώσεις 4.29 οι παράγωγοι ως προς τις συντεταγμένες των σημείων της περιφέρειας της αεροτομής ( $x,y$ ) δίνονται από τον *PUMA*, μέσω της συνεχούς συζυγούς

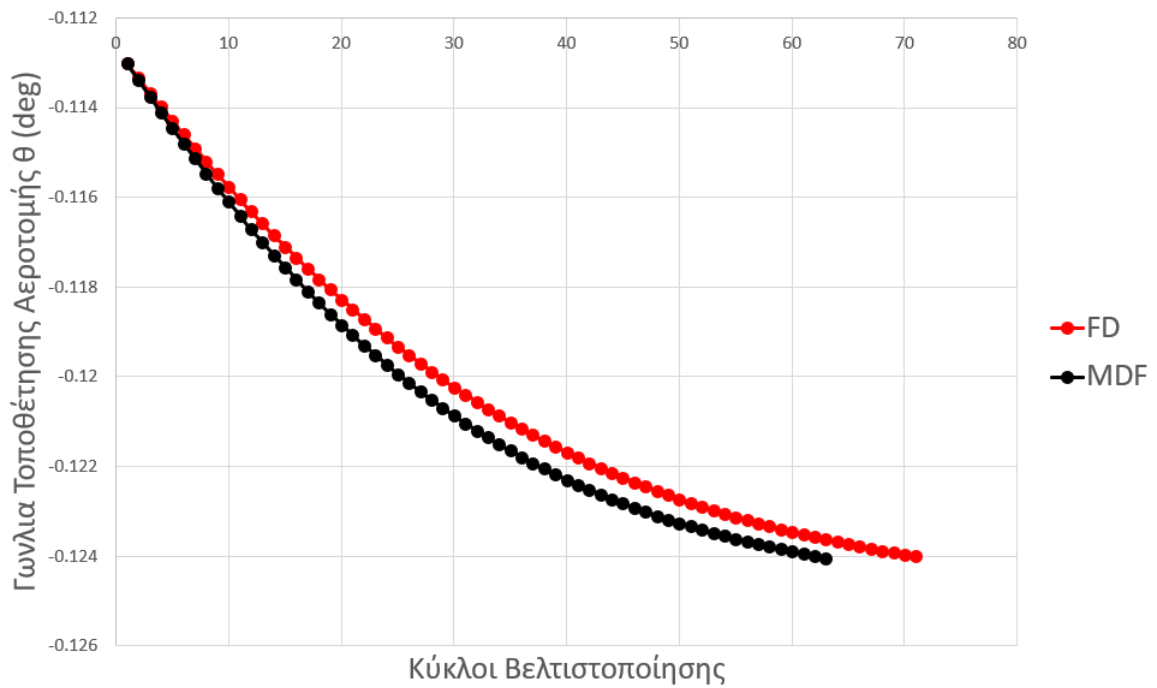
μεθόδου, ενώ οι παράγωγοι των συντεταγμένων αυτών ως προς τη γωνία τοποθέτησης, δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \theta} &= -y_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= x_0 - 0.25\end{aligned}\tag{4.30}$$

Παρακάτω θα παρουσιαστούν τα διαγράμματα σύγκλισης των δυο μελετών, τόσο της σταθεράς του ελατηρίου  $K$ , όσο και της γωνίας τοποθέτησης  $\theta$ , συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκαν. Σημειώνεται ότι και στις δυο περιπτώσεις, ως  $\theta_{target}$  τίθεται η  $\theta = -0.125$  μοίρες, ενώ η τιμή από την οποία εκκινεί το  $K$  είναι  $K = 5500 Nm$ .



**Σχήμα 4.4:** Διάγραμμα σύγκλισης της τιμής της σταθεράς ελατηρίου  $K$  για τις δυο μελέτες,  $MDF$  (πορτοκαλί) και  $\Pi$ επερασμένων διαφορών (μπλε) σε συνάρτηση με τον αριθμό των κύκλων βελτιστοποίησης



**Σχήμα 4.5:** Διάγραμμα σύγκλισης της τιμής της γωνίας ισορροπίας της αεροτομής  $\theta$  για τις δυο μελέτες, *MDF* (πορτοκαλί) και Πεπερασμένων διαφορών (μπλε) σε συνάρτηση με τον αριθμό των κύκλων βελτιστοποίησης

Στα διαγράμματα 4.4 και 4.5, παρατηρείται μια μικρή απόκλιση μεταξύ των δυο μεθόδων, η οποία όμως οφείλεται στη μερική σύγκλιση της συζυγούς επίλυσης του αεροδυναμικού φαινομένου, λόγω του επιλεγμένου αριθμού των επαναλήψεων (για τον περιορισμό του κόστους των μελετών) και όχι σε αστοχία της εξεταζόμενης μεθόδου, δίνοντας έτσι ελαφρώς μεγαλύτερη τιμή στις παραγώγους  $\frac{dM}{dx}$ ,  $\frac{dM}{dy}$ .



# Κεφάλαιο 5

## Αεροελαστική Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής

Στο κεφάλαιο αυτό, θα πραγματοποιηθεί μια μελέτη βελτιστοποίησης μορφής χρησιμοποιώντας τις μεθοδολογίες που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα. Η βελτιστοποίηση αυτή, έχει ως στόχο τη μεγιστοποίηση της τιμής του λόγου της άνωσης ως προς την οπισθέλκουσα (*Lift over Drag*), μέσω της μεταβολής του σχήματος αυτής. Για τη διαδικασία αυτή η αεροτομή θα περιγραφεί από δυο καμπύλες *Bezier*, μια για την πλευρά υποπίεσης και μια για την πλευρά υπερπίεσης, οι οποίες χρησιμοποιούν οκτώ σημεία ελέγχου (*ControlPoints*) εκάστη. Σημειώνεται εδώ ότι, τα δύο πρώτα καθώς και το τελευταίο σημείο των καμπυλών που αναφέρθηκαν παραπάνω δεν μετακινούνται, προκειμένου να μην μεταβάλλεται το μήκος της χορδής και να αποφευχθεί η δημιουργία γωνίας στην ακμή προσβολής της αεροτομής. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί το μαθηματικό υπόβαθρο που χρησιμοποιήθηκε, ο αλγόριθμος που κατασκευάστηκε και τέλος τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση αυτή.

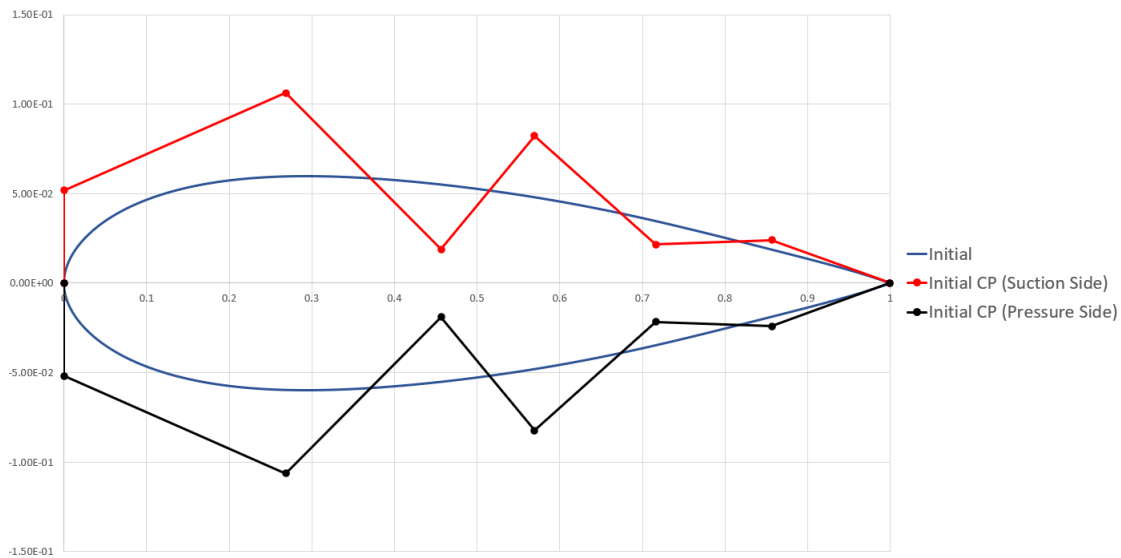
### 5.1 Παραμετροποίηση

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η παραμετροποίηση της γεωμετρίας της αεροτομής γίνεται με τη χρήση καμπυλών *Bezier* με οκτώ σημεία ελέγχου για την κάθε πλευρά. Παρακάτω παρουσιάζεται η σχέση, που δίνει την καμπύλη *Bezier* για οκτώ

σημεία ελέγχου:

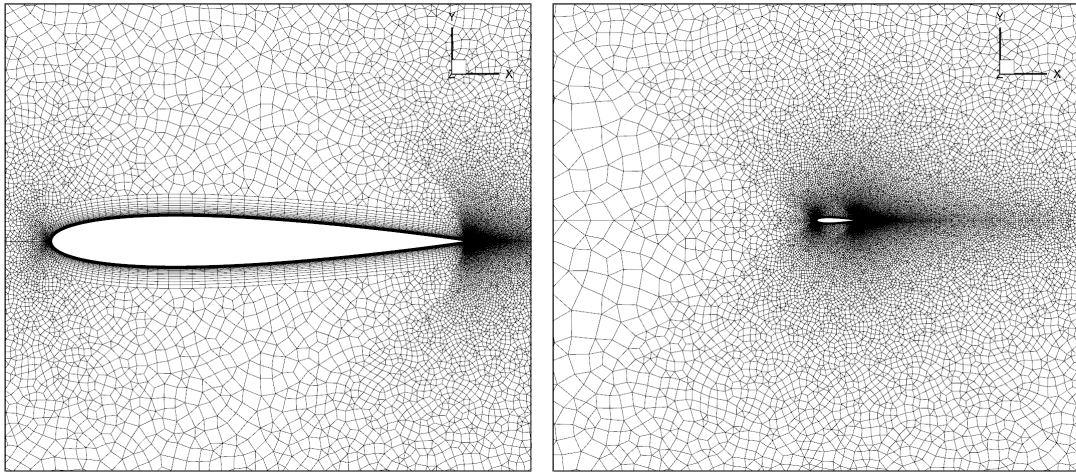
$$\begin{aligned}
 x(t) &= (1-t)^7 x_{CP1} + 7(1-t)^6 t x_{CP2} + 21(1-t)^5 t^2 x_{CP3} + 35(1-t)^4 t^3 x_{CP4} \\
 &\quad + 35(1-t)^3 t^4 x_{CP5} + 21(1-t)^2 t^5 x_{CP6} + 7(1-t)t^6 x_{CP7} + t^7 x_{CP8} \\
 y(t) &= (1-t)^7 y_{CP1} + 7(1-t)^6 t y_{CP2} + 21(1-t)^5 t^2 y_{CP3} + 35(1-t)^4 t^3 y_{CP4} \\
 &\quad + 35(1-t)^3 t^4 y_{CP5} + 21(1-t)^2 t^5 y_{CP6} + 7(1-t)t^6 y_{CP7} + t^7 y_{CP8}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

όπου  $t$  παράμετρος με  $0 \leq t \leq 1$  και  $x_{CPi}, y_{CPi}$  οι συντεταγμένες του σημείου ελέγχου  $i$ . Τα σημεία ελέγχου που χρησιμοποιούνται για την αρχική γεωμετρία προσεγγίζουν το σχήμα της αεροτομής *NACA0012* και παρουσιάζονται στο σχήμα 5.1, μαζί με την παραγόμενη γεωμετρία.



Σχήμα 5.1: Πολύγωνο Bezier και γεωμετρία της αεροτομής που θα βελτιστοποιηθεί.

Οι συνθήκες της επ' άπειρον ροής είναι αυτές που παρουσιάστηκαν και σε προηγούμενα κεφάλαια 3.1, ενώ το χρησιμοποιούμενο πλέγμα παρουσιάζεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Πλέγμα αρχικής μορφής της προς βελτιστοποίηση αεροτομής.

## 5.2 Μαθηματικό υπόβαθρο

Προκειμένου να μεγιστοποιηθεί ο λόγος της άνωσης προς την οπισθέλκουσα, ως συνάρτηση-στόχος τίθεται η εξίσωση 5.2, η οποία, σε αντίθετη περίπτωση με την εφαρμογή που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μεγιστοποιείται.

$$F_{Obj} = \frac{L}{D} \quad (5.2)$$

όπου:

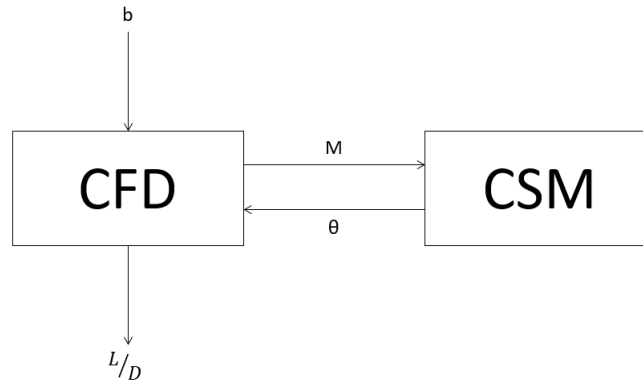
- $L$ : Άνωση
- $D$ : Οπισθέλκουσα

ενώ οι χρησιμοποιούμενες μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης *Bezier*. Συνεπώς, είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός της παραγώγου της εξίσωσης 5.2 ως προς αυτές. Η παραγωγή αυτή, οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{dF_{Obj}}{db_i} = \frac{d\frac{L}{D}}{db_i} \quad (5.3)$$

με  $b_i$  να συμβολίζει το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού.

Ο υπολογισμός των ζητούμενων παραγώγων θα γίνει με την μέθοδο *MDF*, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4. Το υπό μελέτη σύστημα φαίνεται στο σχήμα 5.3.



**Σχήμα 5.3:** Αεροελαστικό σύστημα με μεταβλητή γεωμετρία

Συμβολίζοντας με  $\theta$  τη γωνία τοποθέτησης της αεροτομής και  $M$  την ασκούμενη σε αυτή ροπή, το σύστημα εξισώσεων που περιγράφει το συζευγμένο μοντέλο του σχήματος 5.3 έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 \frac{L}{D} &= f(\vec{b}, \theta) \\
 M &= f(\vec{b}, \theta) \\
 \theta &= f(M)
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

όπου  $f(\dots)$  δηλώνει τη σύνδεση μεταξύ των μεγεθών, δηλαδή ότι ο λόγος  $\frac{L}{D}$  προκύπτει συναρτήσει των  $\vec{b}, \theta$ , χωρίς όμως να είναι απαραίτητα γνωστή η εξίσωση που περιγράφει την σύνδεση αυτή.

Για να βρεθεί η τιμή της ζητούμενης παραγώγου από την εξίσωση 5.3, γίνεται διαφύριση του συστήματος εξισώσεων 5.4, η οποία δίνει το παρακάτω προς επίλυση σύστημα.

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\frac{L}{D})}{db_i} &= \frac{\partial(\frac{L}{D})}{\partial b_i} + \frac{\partial(\frac{L}{D})}{\partial \theta} \frac{d\theta}{db_i} \\
 \frac{dM}{db_i} &= \frac{\partial M}{\partial b_i} + \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{d\theta}{db_i} \\
 \frac{d\theta}{db_i} &= \frac{\partial \theta}{\partial M} \frac{dM}{db_i}
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Ακολούθως, παρουσιάζεται η μητρική μορφή του συστήματος 5.5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial(\frac{L}{D})}{\frac{\partial\theta}{\partial M}} \\ 0 & 1 & -\frac{\partial M}{\partial\theta} \\ 0 & -\frac{\partial\theta}{\partial M} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d(\frac{L}{D})}{db_i} \\ \frac{dM}{db_i} \\ \frac{d\theta}{db_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\frac{L}{D})}{\partial b_i} \\ \frac{\partial M}{\partial b_i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Μέσω επίλυσης του 5.6, προκύπτει ότι:

$$\frac{d\frac{L}{D}}{db_i} = \frac{\partial\frac{L}{D}}{\partial b_i} + \frac{\partial\frac{L}{D}}{\partial\theta} \frac{\frac{\partial M}{\partial b_i} \frac{\partial\theta}{\partial M}}{1 - \frac{\partial M}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial M}} \quad (5.7)$$

Οι μερικές παράγωγοι που συναντώνται στην εξίσωση 5.7 υπολογίζονται ακολούθως με τη χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\frac{L}{D}}{\partial b_i} &= \frac{\partial\frac{L}{D}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b_i} + \frac{\partial\frac{L}{D}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b_i} \\ \frac{\partial\frac{L}{D}}{\partial\theta} &= \frac{\partial\frac{L}{D}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\frac{L}{D}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial M}{\partial b_i} &= \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b_i} + \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b_i} \\ \frac{\partial M}{\partial\theta} &= \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\theta}{\partial M} &= \frac{1}{K} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Σημειώνεται ότι οι τιμές  $x, y$  αποτελούν τις συντεταγμένες των σημείων του πλέγματος στην περιφέρεια της αεροτομής και οι παράγωγοι των μεγεθών ως προς αυτές, δίνονται από τη συζυγή επίλυση των αεροδυναμικών εξισώσεων στη θέση που η αεροτομή ισορρόπησε (προκύπτει από την αεροελαστική μελέτη). Οι παράγωγοι των μεγεθών ως προς τη γωνία τοποθέτησης  $\theta$  και τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών *Bezier*, υπολογίζονται ακολούθως.

Όσον αφορά τις παραγώγους ως προς τη γωνία, αυτές προκύπτουν από τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο στροφής της αεροτομής, όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - y_0\theta \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial\theta} = -y_0 \\ y &= (x_0 - 0.25)\theta + y_0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial\theta} = x_0 - 0.25 \end{aligned} \quad (5.9)$$

όπου  $x_0, y_0$  είναι οι συντεταγμένες της αεροτομής σε μηδενική γωνία τοποθέτησης.

Για τις καμπύλες *Bezier*, όπως είναι γνωστό από τη θεωρία [35], για μια καμπύλη που περιγράφεται από  $n+1$  σημεία ελέγχου, οι εξισώσεις προσδιορισμού των συντεταγμένων των σημείων αυτής είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i x_i \\ y &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i y_i \end{aligned} \quad (5.10)$$

όπου  $t$  παράμετρος για την οποία ισχύει ότι  $0 \leq t \leq 1$ .

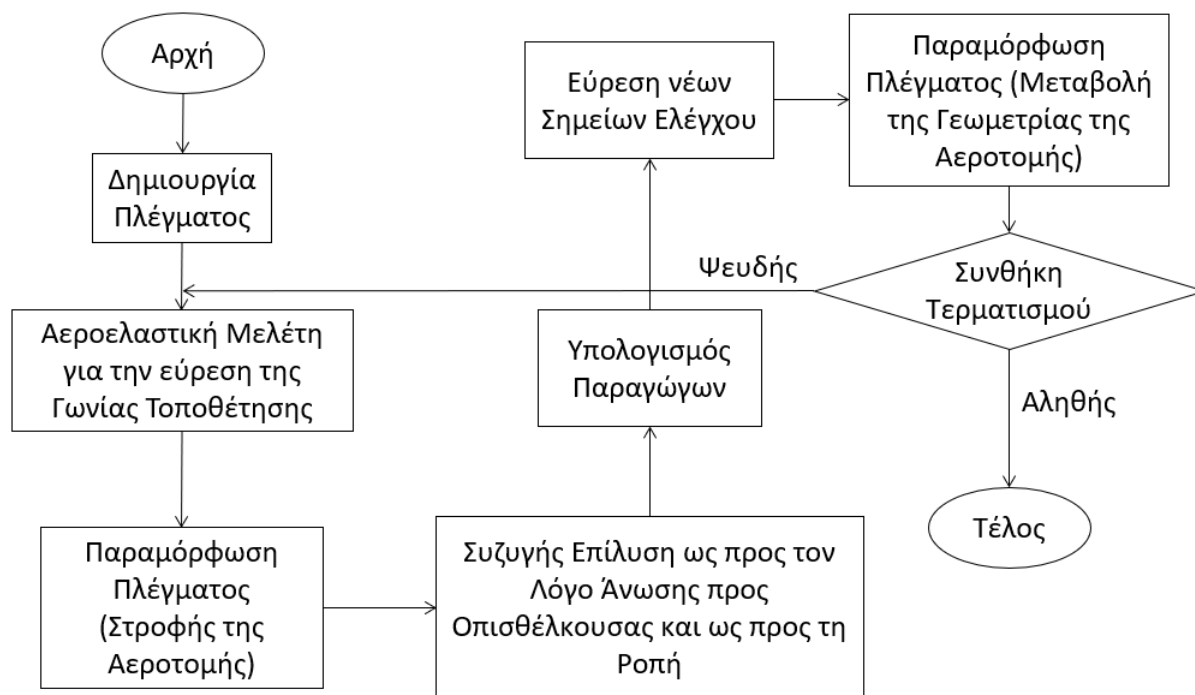
Συνεπώς, οι παράγωγοι αυτών ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου προσδιορίζονται με ευκολία, όπως φαίνεται ακολούθως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_i} &= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \\ \frac{\partial y}{\partial y_i} &= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \end{aligned} \quad (5.11)$$

### 5.3 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

Προκειμένου να επιτευχθεί η βελτιστοποίηση της μορφής της αεροτομής, αρχικά δημιουργείται πλέγμα με βάση τα σημεία ελέγχου που δίνονται από το χρήστη, ενώ στη συνέχεια εκτελείται αεροελαστική μελέτη, προκειμένου να προσδιοριστεί η θέση ισορροπίας της αεροτομής. Η αεροτομή στρέφεται στη γωνία αυτή με ταυτόχρονη μορφοποίηση του πλέγματος και πραγματοποιούνται δυο συζυγείς αεροδυναμικές μελέτες (ως προς τη ροπή και το λόγο της άνωσης προς την οπισθέλκουσα). Με τη χρήση των αποτελεσμάτων των δυο τελευταίων μελετών, σε συνδυασμό με τις σχέσεις που αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, επιτυγχάνεται ο υπολογισμός των απαραίτητων παραγώγων και η εύρεση νέων σημείων ελέγχου, τα οποία αποδίδουν μεγαλύτερο λόγο  $\frac{L}{D}$  με ταυτόχρονη παραμόρφωση του πλέγματος, ώστε να αντιστοιχιστεί σε αυτά. Ακολούθως εξετάζεται η συνθήκη τερματισμού του προγράμματος (εδώ ως συνθήκη τερματισμού τίθεται η εκτέλεση συγκεκριμένου αριθμού κύκλων βελτιστοποίησης). Σε περίπτωση που τα κριτήρια δεν πληρούνται, η διαδικασία επαναλαμβάνεται, όπως έχει ήδη περιγραφεί, ξεκινώντας από το αεροελαστικό τρέξιμο. Σε αντίθετη περίπτωση, το πρόγραμμα τερματίζει. Η διαδικασία αυτή γίνεται ευκολότερα αντιληπτή μέσω του

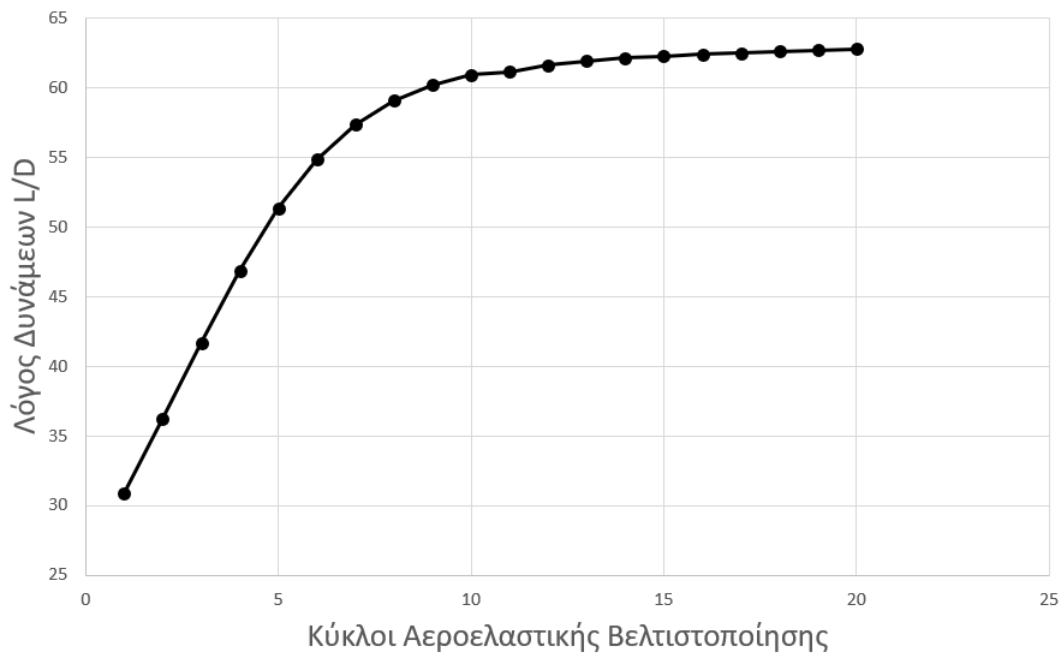
σχήματος 5.4 στο οποίο παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου.



Σχήμα 5.4: Δομικό διάγραμμα αλγορίθμου βελτιστοποίησης

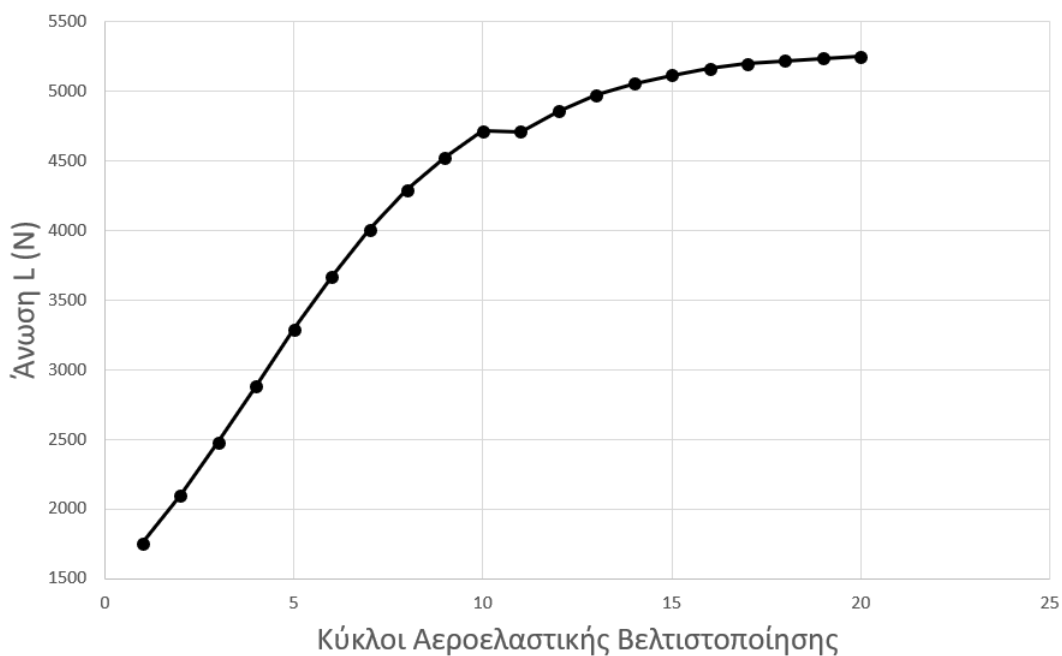
## 5.4 Αποτελέσματα Εφαρμογής

Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης που επιλέχθηκε και δημιουργήθηκε, είναι αυτός της απότομης καθόδου. Η διαδικασία εκτελέστηκε για τον αριθμό των επαναλήψεων που επιτράπηκε από το πλέγμα, πριν γίνει αδύνατη η περαιτέρω παραμόρφωσή του. Στο σχήμα 5.5 παρουσιάζεται το διάγραμμα εξέλιξης της τιμής του λόγου  $\frac{L}{D}$ , ως προς τους εκτελούμενους κύκλους βελτιστοποίησης.



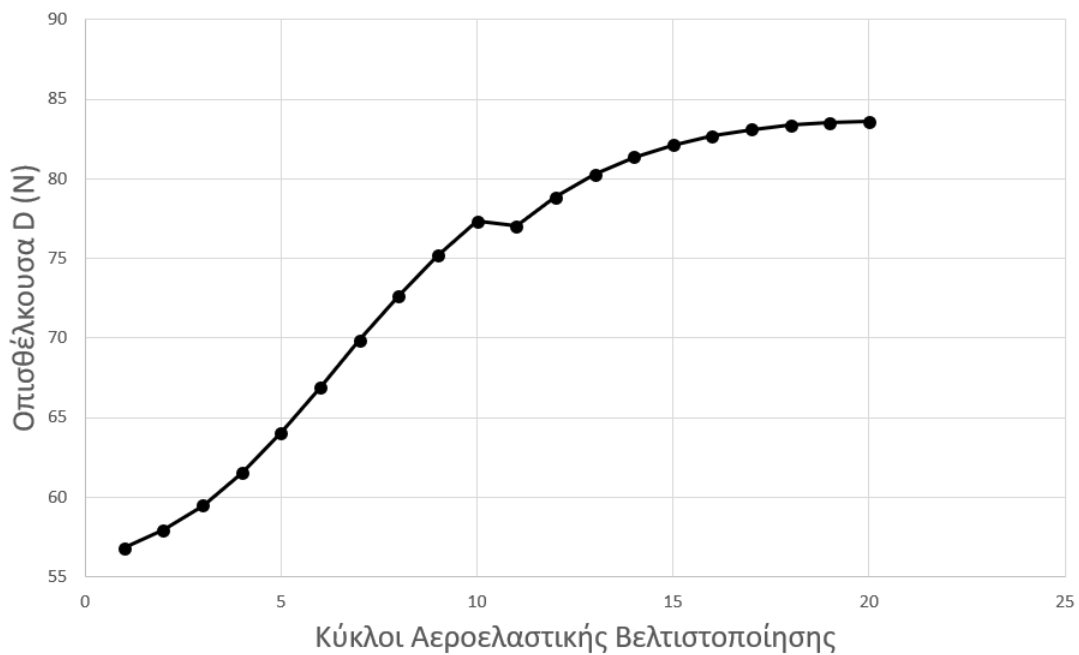
**Σχήμα 5.5:** Διάγραμμα εξέλιξης της τιμής του λόγου άωσης προς την οπισθέλκουσα σε συνάρτηση με τους εκτελούμενους κύκλους αεροελαστικής βελτιστοποίησης.

Εκτός όμως από το διάγραμμα εξέλιξης του λόγου των δύο δυνάμεων αξίζει να παρουσιασθούν και τα μεμονωμένα διαγράμματα της κάθε μίας από αυτές.



**Σχήμα 5.6:** Διάγραμμα εξέλιξης της τιμής της άωσης σε συνάρτηση με τους εκτελούμενους κύκλους βελτιστοποίησης.

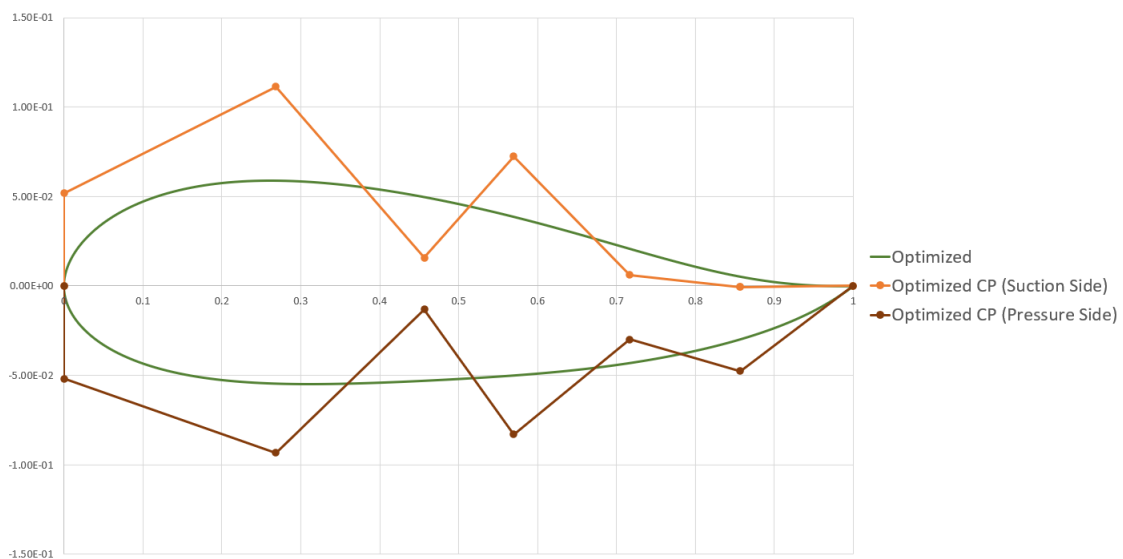




**Σχήμα 5.7:** Διάγραμμα εξέλιξης της τιμής της οπισθέλκουσας σε συνάρτηση με τους εκτελούμενους κύκλους βελτιστοποίησης.

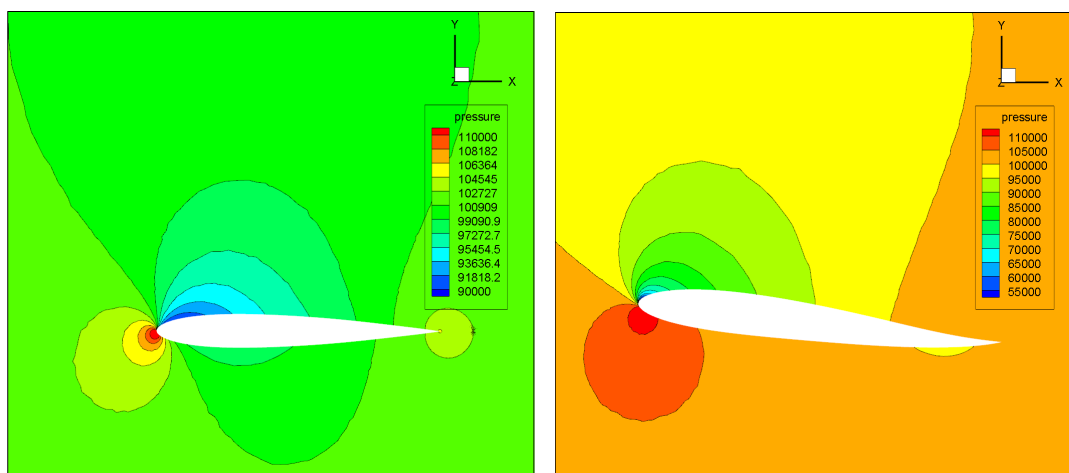
Στην περίπτωση της άνωσης 5.6, παρουσιάζεται συνεχής αύξηση αυτής κατά την αύξηση του λόγου  $\frac{L}{D}$ , όμως παρατηρείται επίσης ότι, το διάγραμμα της οπισθέλκουσας 5.7 παρουσιάζει πανομοιότυπη μορφή με αυτό της άνωσης.

Η γεωμετρία, καθώς και τα σημεία ελέγχου της βελτιστοποιημένης αεροτομής φαίνονται στο σχήμα 5.8.

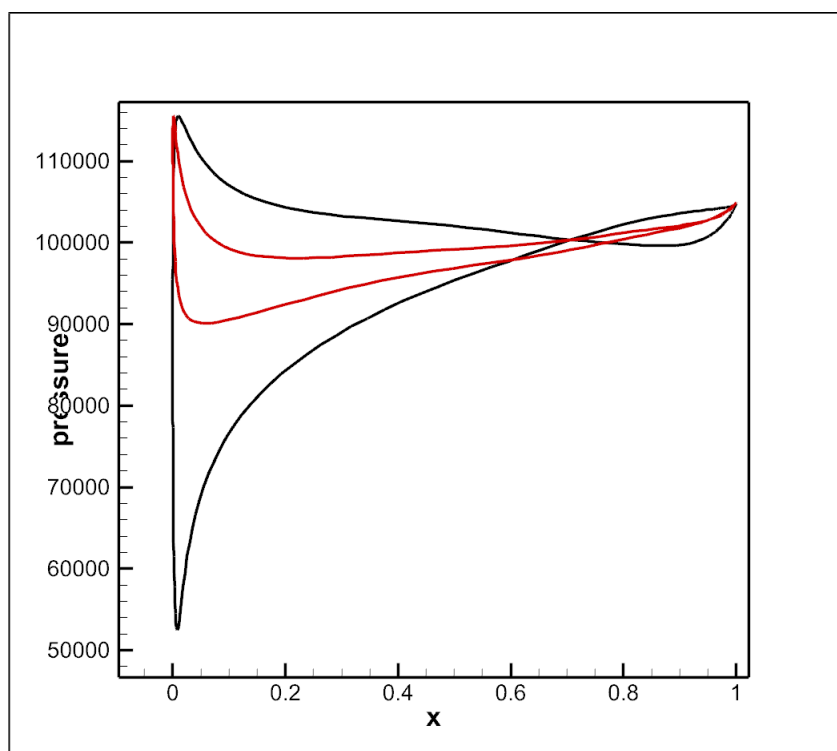


**Σχήμα 5.8:** Σημεία ελέγχου και γεωμετρία της βελτιστοποιημένης αεροτομής

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί η αεροελαστική επίλυση για την αρχική και τη βελτιστοποιημένη αεροτομή, προκειμένου να γίνει σύγκριση μεταξύ των δυο (σχήμα 5.9), καθώς και το διάγραμμα των πιέσεων περιμετρικά αυτών (σχήμα 5.10).



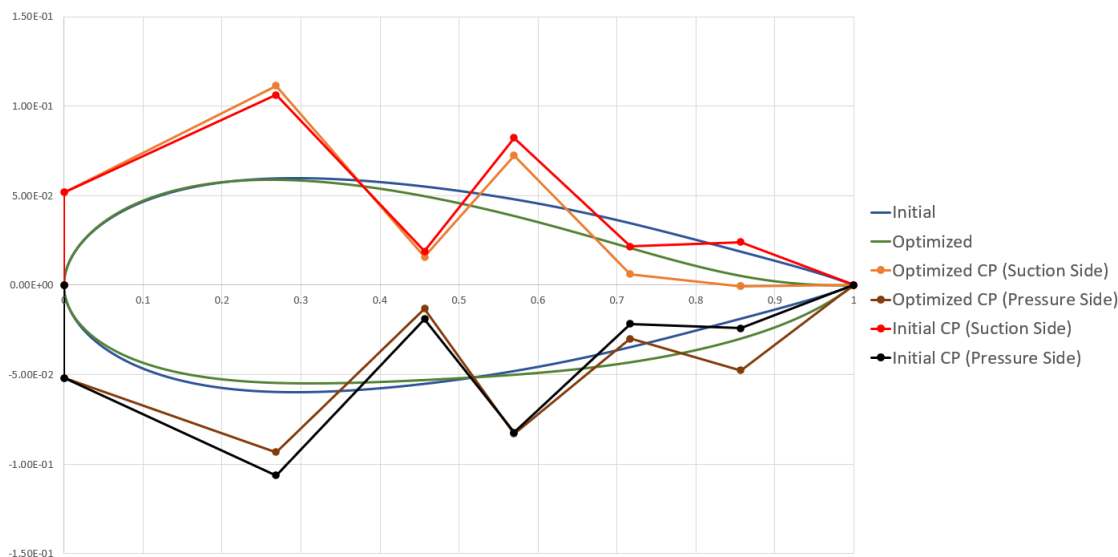
**Σχήμα 5.9:** Πεδίο πιέσεων αρχικής (α) και τελικής (β) γεωμετρίας της αεροτομής που βελτιστοποιήθηκε.



**Σχήμα 5.10:** Πιέσεις στην περιφέρεια της αρχικής (κόκκινο) και τελικής (μαύρο) γεωμετρίας της αεροτομής που βελτιστοποιήθηκε.

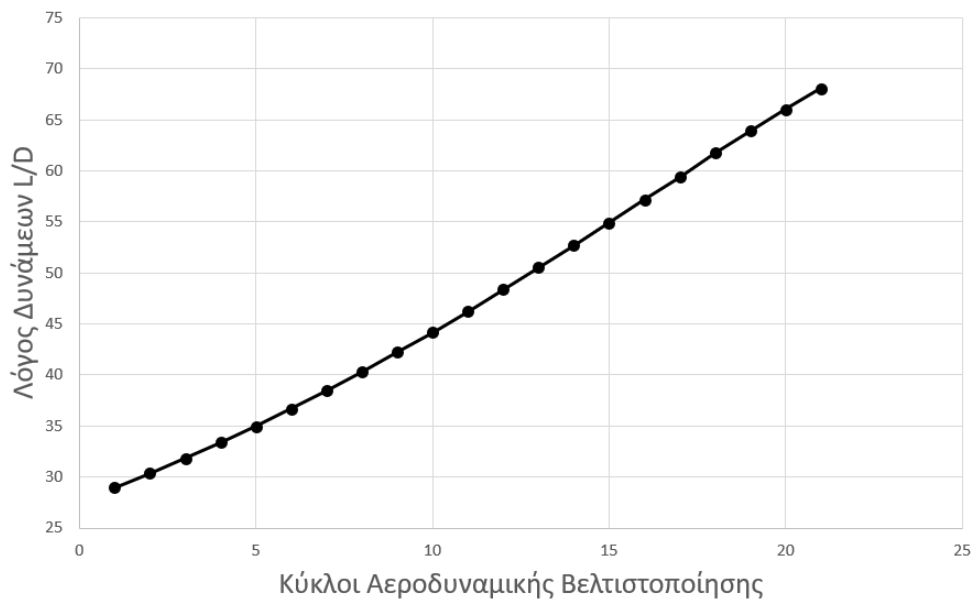
Στο σχήμα 5.9, παρατηρείται, τόσο η αύξηση της γωνίας στην οποία και ισορροπεί η αεροτομή (από τις  $-0.125$  μοίρες, στις οποίες ισορροπεί η αρχική γεωμετρία, στις  $-6.14$  μοίρες), όσο και η ραγδαία αύξηση της υποπίεσης στην πλευρά υποπίεσης αυτής. Η αύξηση αυτή οδηγεί και σε πολύ υψηλή διαφορά πιέσεων στο εμπρόσθιο μέρος της αεροτομής, χαρακτηριστικό που γίνεται ευκολότερα αντιληπτό παρατηρώντας το σχήμα 5.10. Επιπλέον στο σχήμα 5.10 διακρίνεται η ανάπτυξη αρνητικής διαφοράς πίεσης στο πίσω μέρος της βελτιστοποιημένης αεροτομής, η οποία και συντελεί στην αύξηση της ροπής γύρω από το αεροδυναμικό κέντρο της αεροτομής και μέσω αυτής στην αύξηση της γωνίας ισορροπίας της.

Ακολούθως, παρουσιάζονται οι δύο γεωμετρίες, μαζί με τα σημεία ελέγχου τους, σε κοινό διάγραμμα, για την καλύτερη εποπτικότητα του αποτελέσματος της βελτιστοποίησης (σχήμα 5.8).



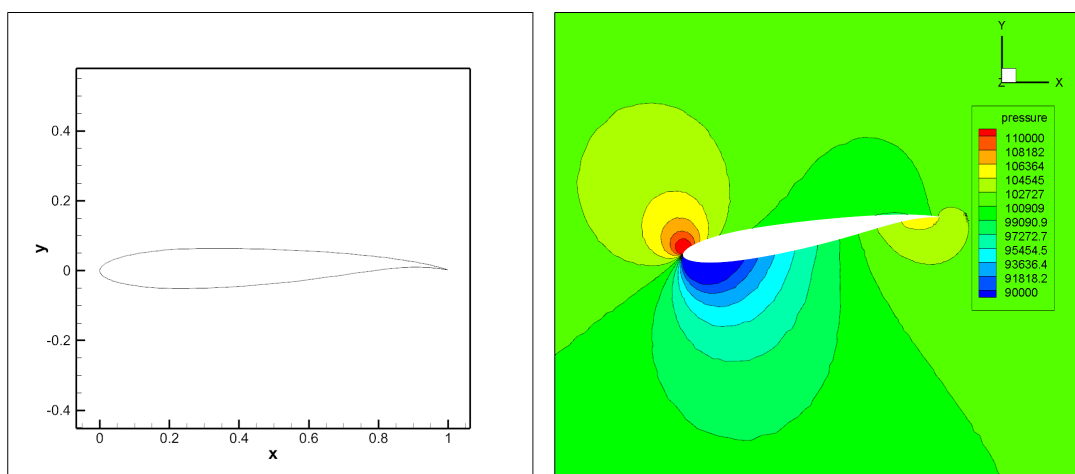
**Σχήμα 5.11:** Σημεία ελέγχου και γεωμετρία της αρχικής και τελικής αεροτομής.

Τέλος, προκειμένου να εξετασθούν οι διαφορές που το αποτέλεσμα της αεροελαστικής βελτιστοποίησης παρουσιάζει σε σύγκριση με αυτά αεροδυναμικής, πραγματοποιήθηκαν δυο αεροδυναμικές βελτιστοποιήσεις της ίδιας αεροτομής, μια σε μηδενική γωνία με τον οριζόντιο άξονα και μια σε γωνία  $-6.1$  μοιρών (γωνία στην οποία ισορροπεί η αεροελαστικά βελτιστοποιημένη αεροτομή), χρησιμοποιώντας το ίδιο πλέγμα και επ' άπειρον συνθήκες με την προηγούμενη. Στα σχήματα 5.12, 5.14 παρουσιάζονται τα διαγράμματα εξέλιξης του λόγου  $\frac{L}{D}$  (υπολογισμένο σε αεροδυναμική μελέτη), σε συνάρτηση με τον αριθμό των κύκλων βελτιστοποίησης.

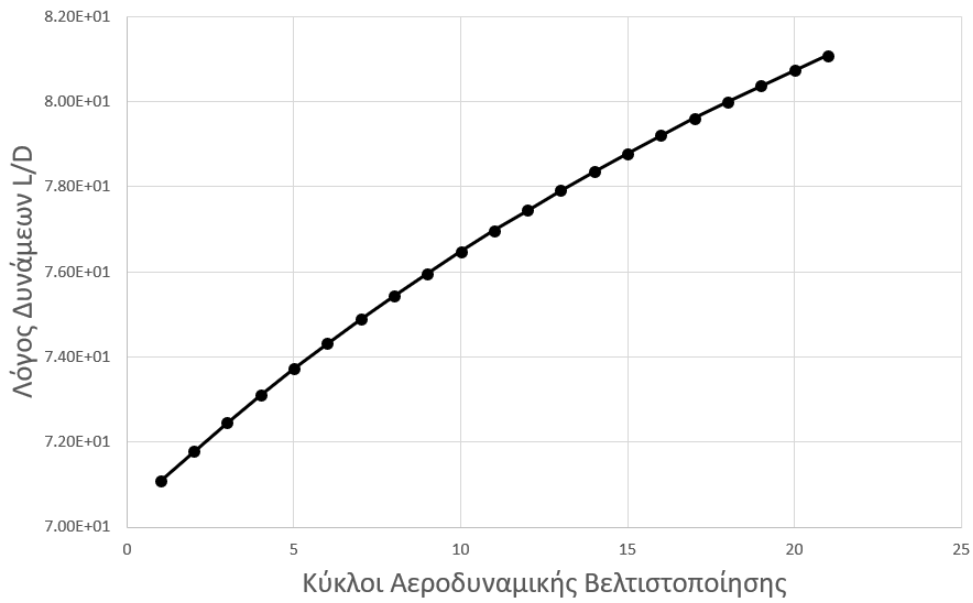


**Σχήμα 5.12:** Διάγραμμα εξέλιξης της τιμής του λόγου άνωσης προς την οπισθέλκουσα σε συνάρτηση με τους εκτελούμενους κύκλους αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις 0 μοίρες.

Αρχικά, η αεροδυναμική βελτιστοποίηση φαίνεται να έχει καλύτερο αποτέλεσμα στο ίδιο αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης. Όμως, αν γίνει αεροελαστική επίλυση της παραγόμενης αεροτομής, η απόδοσή της φαίνεται να μειώνεται δραματικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.13 και στον πίνακα 5.1.

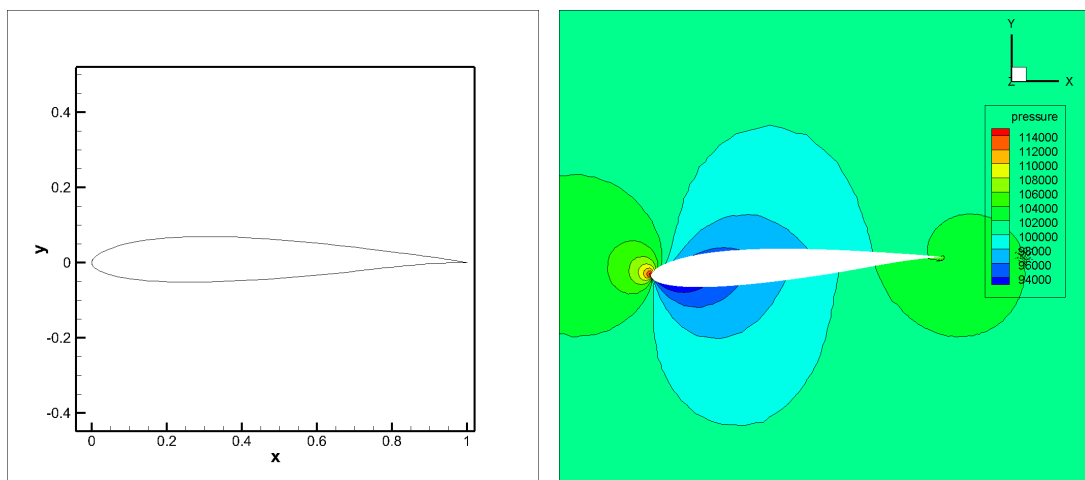


**Σχήμα 5.13:** Γεωμετρία (α) και πεδίο πιέσεων (β) της αεροτομής που βελτιστοποιήθηκε αεροδυναμικά στις 0 μοίρες.



**Σχήμα 5.14:** Διάγραμμα εξέλιξης της τιμής του λόγου άνωσης προς την οπισθέλκουσα σε συνάρτηση με τους εκτελούμενους κύκλους αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις -6.1 μοίρες.

Όπως και στην περίπτωση της αεροτομής σε γωνία 0 μοιρών με τον οριζόντιο άξονα, η αεροτομή που προέκυψε από αεροδυναμική βελτιστοποίηση στις -6.1 μοίρες αδυνατεί να λειτουργήσει στα πλαίσια του αεροελαστικού προβλήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.15 και στον πίνακα 5.1.



**Σχήμα 5.15:** Γεωμετρία (α) και πεδίο πιέσεων (β) της αεροτομής που βελτιστοποιήθηκε αεροδυναμικά στις -6.1 μοίρες.

	Αεροδυναμική (0/-6.1 μοίρες)	Αεροελαστική
Άνωση ( $N$ )	-2.9458E+03/-1.183E+02	5.2512E+03
Οπισθέλκουσα ( $N$ )	6.98E+01/5.52E+01	8.36E+01
Λόγος άνωσης προς οπισθέλκουσα	-4.22E+01/-2.1E+00	6.28E+01

**Πίνακας 5.1:** Αποτελέσματα των αεροτομών της αεροελαστικής και των αεροδυναμικών βελτιστοποιήσεων στην αεροελαστική μελέτη.

Συνεπώς, παρατηρείται ότι η αγνόηση του ελαστικού υποσυστήματος κατά τη βελτιστοποίηση μορφής αεροτομής δύναται να οδηγήσει σε φαινομενικά καλά αποτελέσματα, τα οποία όμως δεν αντιπροσωπεύουν πάντα την πραγματικότητα.

Στον πίνακα 5.2 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι ποσοστιαίες αυξήσεις της άνωσης, της αντίστασης, καθώς και του λόγου αυτών, που πέτυχαν οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις.

	Αεροδυναμική (0/-6.1 μοίρες)	Αεροελαστική
Άνωση	-267.8%/-103%	199.2%
Οπισθέλκουσα	22.8%/-40.1%	47.2%
Λόγος άνωσης προς οπισθέλκουσα	-236.6%/-101.8%	103.2%

**Πίνακας 5.2:** Ποσοστιαία αύξηση της άνωσης, της αντίστασης, καθώς και του λόγου αυτών, για τις αεροτομές της αεροελαστικής και των αεροδυναμικών βελτιστοποιήσεων στην αεροελαστική μελέτη.

## Κεφάλαιο 6

### Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάστηκε η μέθοδος αριθμητικής επίλυσης συνεκτικών και μη-συνεκτικών ροών και κρίθηκε απαραίτητη η επίλυση συνεκτικής ροής μέσω των εξισώσεων *RANS*, προκειμένου να διασφαλισθεί η ορθή επίλυση του αεροελαστικού προβλήματος, με μετέπειτα επικύρωση των αποτελεσμάτων που δόθηκαν για αυτές από το λογισμικό *PUMA*. Αντίστοιχα, στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύθηκε η μέθοδος μεταφοράς δεδομένων μεταξύ ανόμοιων πλεγμάτων και ελέγχθηκαν τα αποτελέσματα του συζευγμένου επιλύτη σε διαφορετικές συνθήκες, εντοπίζοντας τα σημεία στα οποία η λειτουργία του δεν είναι δυνατή. Μέσω αυτών, επιτεύχθηκε η αποτελεσματική επικοινωνία μεταξύ των υποσυστημάτων του προβλήματος και εξασφαλίστηκε η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων αυτού.

Έπειτα, στο τέταρτο κεφάλαιο, αναπτύχθηκε η θεωρία της συνεχούς συζυγούς μεθόδου του αεροδυναμικού μέρους, καθώς και η μέθοδος απεπλεγμένου υπολογισμού των παραγώγων του συζευγμένου συστήματος. Μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, επιτεύχθηκε ο υπολογισμός των παραγώγων του αεροδυναμικού υποσυστήματος δίχως την εξάρτηση του κόστους αυτού από τις μεταβλητές σχεδιασμού, γεγονός ιδιαίτερα σημαντικό σε μελέτες βελτιστοποίησης μορφής, όπου το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού συνήθως είναι υψηλό (στην περίπτωση της εφαρμογής που ακολούθησε υπήρξαν δέκα μεταβλητές σχεδιασμού). Ταυτόχρονα, η χρήση της μεθόδου *MDF*, δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού των ολικών παραγώγων του αεροελαστικού συστήματος, χωρίς να είναι αναγκαία η συζυγής αεροελαστική επίλυση, η οποία θα κατέληγε σε πιο πολύπλοκους υπολογισμούς και παράλληλα θα απαιτούσε την προσαρμογή του λογισμικού επίλυσης για την επίτευξή της. Συνεπώς, με την εφαρμογή των δύο αυτών μεθόδων επιτυγχάνεται ταυτόχρονα η δραματική μείωση του κόστους σε μελέτες που έχουν μεγάλο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού και η δυνατότητα χρησιμοποίησης διαφορετικών ελαστικών ή αεροδυναμικών επιλυτών, δίχως την ανάγκη τροποποίησης του αλγορίθμου.

Στο τελευταίο κεφάλαιο όπου και πραγματοποιήθηκε η εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε, επιτεύχθηκε αύξηση του λόγου  $\frac{L}{D}$ , ο οποίος αποτέλεσε και την συνάρτηση στόχο της διαδικασίας, κατά 103.2%. Επιπλέον, έγινε σύγκριση της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας με αεροτομές που προέκυψαν από αεροδυναμικές, έναντι αεροελαστικών, βελτιστοποιήσεις. Κατά την σύγκριση αυτή παρατηρήθηκε ότι, παρότι και στις δυο περιπτώσεις η αεροδυναμική βελτιστοποίηση φαινόταν να πετυχαίνει καλύτερα αποτελέσματα σε λιγότερο χρόνο όσο αυτή εξετάζεται ακίνητη στη γωνία στην οποία και βελτιστοποιήθηκε, όταν η τελευταία εξετάσθηκε στο αεροελαστικό πρόβλημα, η γωνία ισορροπίας της οδήγησε στην ανάπτυξη αρνητικής άνωσης, καθιστώντας την μη λειτουργική στο πλαίσιο της εφαρμογής. Συνεπώς, γίνεται αντιληπτή η σημασία της ενσωμάτωσης του ελαστικού μέρους σε μία τέτοια μελέτη και η αξία της αεροελαστικής έναντι της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης.



## Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. 2006.
- [2] Anderson, W. K., Newman, J. C., Whitfield, D. L., and Nielsen, E. J.: *Sensitivity analysis for navier-stokes equations on unstructured meshes using complex variables*. AIAA Journal, 39(1):56–63, 2001.
- [3] Martins, J. R. R. A., Sturdza, P., and Alonso, J. J.: *The complex-step derivative approximation*. ACM Trans. Math. Softw., 29(3):245–262, September 2003.
- [4] Kenway, G. and Martins, J.: *Aerostructural shape optimization of wind turbine blades considering sitespecific winds*. In 12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Victoria, British Columbia, Canada, September 10–September 12 2008.
- [5] Baysal, O. and Eleshaky., M.: *Aerodynamic sensitivity analysis methods for the compressible euler equations*. Journal of Fluids Engineering, 113(4):681–688, 1991.
- [6] Sharp, H. Thomas and Sirovich, L.: *Constructing a continuous parameter range of computational flows*. AIAA Journal, 27(10):1326–1331, 1989.
- [7] Elbanna, H. and Carlson, L.: *Determination of aerodynamic sensitivity coefficients in the transonic and supersonic regimes*.
- [8] Griewank, A. and Walther., A.: *Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, second edition, 2008.
- [9] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows*. Computers & Fluids, 36(2):325–341, 2007.
- [10] Papoutsis-Kiachagias, E. M., Asouti, V. G., Giannakoglou, K. C., Gkagkas, K., Shimokawa, S., and Itakura, E.: *Multi-point aerodynamic shape optimization of cars based on continuous adjoint*. Struct. Multidiscip. Optim., 59(2):675–694, February 2019.

- [11] Kavvadias, I.S.: *Continuous adjoint methods for steady and unsteady turbulent flows with emphasis on the accuracy of sensitivity derivatives*. PhD thesis, National Technical University of Athens, 2016.
- [12] Crosby, J.: *Computer Simulation in Genetics*. John Wiley & Sons, 1973.
- [13] Fraser, A. and Burnell, D.: *Computer Models in Genetics*. McGrawHill, 1970.
- [14] Beyer, HG. and Schwefel, HP: *Evolution strategies – A comprehensive introduction*. Springer, 2002.
- [15] Michalewicz, Z.: *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. SpringerVerlang, 1996.
- [16] Buche, D., Schraudolph, N. N., and Koumoutsakos, P.: *Accelerating evolutionary algorithms with gaussian process fitness function models*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews), 35(2):183–194, 2005.
- [17] Jin., Y.: *Surrogateassisted evolutionary computation: Recent advances and future challenges*. Swarm and Evolutionary Computation, 1:61–70, 2011.
- [18] Karakasis, M.K. and Giannakoglou, K.C.: *On the use of metamodelassisted, multiobjective evolutionary algorithms*. Engineering Optimization, 38(8):941–957, 2006.
- [19] Liu, Zhen (Leo): *Multiphysics in Porous Materials*. Springer, 2018.
- [20] Τσιάκας, Κ.: *Ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης με χρήση επεξεργαστών καρτών γραφικών και εφαρμογή στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2019.
- [21] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [22] Ασούτη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [23] Ζερβογιάννης, Θ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [24] Spalart, P. and Allmaras, S.: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA Paper 1992-439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, January 6–9 1992.
- [25] Roe, P.: *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. Journal of Computational Physics, 43(2):357–372, 1981.

- [26] Weiss J., Maruszewski J. and W., Smith: *Implicit solution of preconditioned navierstokes equations using algebraic multigrid*. AIAA Journal, 37(1), 1999.
- [27] Kallinderis, Y.: *A 3d Finite Volume Method for the navierstokes Equations with Adaptive Hybrid Grids*. 1996.
- [28] Kampolis, I., Trompoukis, X., Asouti, V., and Giannakoglou, K.: *CFD-based analysis and two-level aerodynamic optimization on Graphics Processing Units*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(9–12):712–722, 2010.
- [29] *2d NACA 0012 airfoil validation case*. [https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012\\_val.html](https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html).
- [30] Abbott, I. H. and Doenhoff, A. E. von: *Theory of Wing Sections*. Dover Publications, 1959.
- [31] Ladson, C. L.: *Effects of independent variation of mach and reynolds numbers on the low-speed aerodynamic characteristics of the naca 0012 airfoil section*. NASA TM 4074, October 1988.
- [32] Samareh, Jamshid A.: *Discrete data transfer technique for fluid-structure*. AIAA Journal, 2007.
- [33] Bonet, J. and Peraire, J.: *An alternating digital tree (adt) algorithm for 3d geometric searching and intersection problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31(1):1–17, 1991.
- [34] J. R. R. A. Martins, A. B. Lambe: *Multidisciplinary design optimization: Survey of architectures*. AIAA Journal, 2013.
- [35] Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανολόγους*. 2003.