



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# Αλγόριθμοι για Ειδικές Κατηγορίες Επίπεδων Απεικονίσεων Γραφημάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΛΕΩΝΙΔΑ ΘΕΟΧΑΡΟΥΣ

Επιβλέπων: Αντώνιος Συμβώνης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2020

---





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

# Αλγόριθμοι για Ειδικές Κατηγορίες Επίπεδων Απεικονίσεων Γραφημάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΛΕΩΝΙΔΑ ΘΕΟΧΑΡΟΥΣ

Επιβλέπων: Αντώνιος Συμβώνης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 6η Ιουλίου 2020.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....  
Αντώνιος Συμβώνης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Δημήτρης Φωτάκης  
Αναπληρωτής Καθηγητής

.....  
Πέτρος Στεφανέας  
Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2020





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Λεωνίδας Θεοχάρους, 2020.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

## **ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ**

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

.....  
Λεωνίδας Θεοχάρους

6 Ιουλίου 2020



# Περίληψη

---

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, ασχολούμαστε με δύο ειδικές κατηγορίες επίπεδων απεικονίσεων γραφημάτων: τις μονότονες απεικονίσεις και τις disk-link απεικονίσεις.

Μια απεικόνιση  $\Gamma$  ενός γραφήματος  $G$  λέγεται μονότονη, όταν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ κάθε δύο κόμβων του  $G$  που είναι μονότονο ως προς κάποια κατεύθυνση. Σε πρόσφατο άρθρο τους οι He και He [1] έδειξαν την ύπαρξη δέντρου με  $n$  κόμβους που απαιτεί πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{n}{9} \times \frac{n}{9}$  για να απεικονιστεί μονότονα σε αυτό. Στο Κεφάλαιο 2 δείχνουμε πώς αυτό το κάτω φράγμα μπορεί να βελτιωθεί, αρχικά σε  $\frac{n}{5} \times \frac{n}{10}$  και έπειτα σε  $\frac{n^2}{32}$ .

Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με τις disk-link απεικονίσεις. Πρόκειται για απεικονίσεις στις οποίες οι κόμβοι του γραφήματος αναπαριστώνται ως δίσκοι σταθερής ακτίνας  $\rho$ . Σε αυτό το μοντέλο επιθυμούμε να μην υπάρχουν τομές μεταξύ δίσκων και ακμών, καθώς κάτι τέτοιο θα έκανε το γράφημα μας δυσανάγνωστο. Αρχικά δείχνουμε πώς μπορούμε να παράξουμε μονότονες και disk-link απεικονίσεις δέντρων με  $n$  κόμβους σε πλέγμα μεγέθους το πολύ  $3n \times 3n$ . Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος, δοθέντος ενός μέγιστου επίπεδου γραφήματος  $G$  μεγέθους  $n$ , παράγει μια ευθύγραμμη disk-link απεικόνιση του σε πλέγμα μεγέθους  $(3n - 7) \times \frac{3n-7}{2}$ .

## Λέξεις Κλειδιά

Απεικόνιση Γραφημάτων, Υπολογιστική Γεωμετρία, Θεωρία Γραφημάτων, Μονότονες Απεικονίσεις, Disk-link Απεικονίσεις





# Abstract

---

In this diploma thesis, we study two categories of planar drawings of graphs: monotone drawings and disk-link drawings.

A drawing  $\Gamma$  of a graph  $G$  is called monotone, if there exists a path between every pair of vertices of  $G$  which is monotone with respect to some direction. In a recent article He and He [1] showed the existence of a tree with  $n$  vertices for which a grid of size of at least  $\frac{n}{9} \times \frac{n}{9}$  is required for its monotone drawing. In Chapter 2 we demonstrate how this lower bound can be improved, initially to  $\frac{n}{5} \times \frac{n}{10}$  and then to  $\frac{n^2}{32}$ .

In Chapter 3 we study disk-link drawings. These are drawings in which the vertices of the graph are drawn as disks of a constant radius  $\rho$ . In this model, we want our drawings to not contain any intersections between edges and vertices, since this would not allow our drawing to be easily readable. In the first part we show how to produce monotone and disk-link drawings of trees of size  $n$  in a grid of size of at most  $3n \times 3n$ . In the second part we present an algorithm which, given a maximal planar graph  $G$  of size  $n$ , produces a straight-line disk-link drawing of  $G$  in a grid of size  $(3n - 7) \times \frac{3n-7}{2}$ .

## Keywords

Graph Drawing, Computational Geometry, Graph Theory, Monotone Drawings, Disk-link Drawings



*στους γονείς μου*



## Ευχαριστίες

---

Θα ήθελα πρώτα απ'όλα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την στοργή και την συμπαράσταση που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια, καθώς και για το γεγονός ότι με στηρίζουν σε κάθε μου απόφαση. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους με τους οποίους έχω περάσει όμορφες στιγμές όλα αυτά τα χρόνια. Ιδιαίτερα θα ήθελα να αναφερθώ (σε τυχαία σειρά) στους Λευτέρη, Νικήτα, Νίκο, Κωνσταντίνα, Μιχάλη, Βαγγέλη με τους οποίους ελπίζω να συνεχίσω να περνάω όμορφες στιγμές.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Αντώνιο Συμβώνη για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας και για τις πολύτιμες συμβουλές και καθοδήγησή του. Μέσω των μαθημάτων του με μύησε στην θεωρητική πληροφορική και με δίδαξε την σπουδαιότητα της. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ζάχο για τα πολύτιμα μαθήματα του, την στήριξή του και τις ωραίες ιστορίες τις οποίες μοιράζεται με όλους τους φοιτητές του.

Αθήνα, Ιούνιος 2020

Λεωνίδας Θεοχάρους



# Περιεχόμενα

---

<b>Περίληψη</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Ευχαριστίες</b>	<b>7</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>11</b>
1.1 Ιστορικά Στοιχεία . . . . .	11
1.2 Βασικοί Ορισμοί . . . . .	16
1.2.1 Στοιχεία από τη Θεωρία Γραφημάτων . . . . .	16
1.2.2 Βασικά Στοιχεία από την Απεικόνιση Γραφημάτων . . . . .	16
1.3 Κίνητρα και Αποτελέσματα . . . . .	17
1.3.1 Disk-link Απεικονίσεις . . . . .	17
1.3.2 Κάτω Φράγματα για Μονότονες Απεικονίσεις . . . . .	19
1.4 Οργάνωση Διπλωματικής . . . . .	19
<b>2 Κάτω Φράγματα για Μονότονες Απεικονίσεις</b>	<b>21</b>
2.1 Εισαγωγικές Έννοιες . . . . .	21
2.2 Το Πρώτο Κάτω Φράγμα . . . . .	22
2.3 Νέα Κάτω Φράγματα . . . . .	24
<b>3 Disk-link Απεικονίσεις</b>	<b>31</b>
3.1 Εισαγωγικά . . . . .	31
3.2 Ορισμός και Ιδιότητες . . . . .	32
3.3 Ελαστικά Ξένες Κατά Κλίση Απεικονίσεις Δένδρων . . . . .	33
3.4 Στρατηγική κατανομής εύρους γωνιών . . . . .	34
3.5 Τοποθέτηση σημείων στο πλέγμα . . . . .	34
3.6 Το μέγεθος του απαιτούμενου πλέγματος . . . . .	37
3.7 Κανονική Διάταξη . . . . .	44
3.8 Βασικές Ιδέες του Αλγορίθμου . . . . .	45
3.9 Επέκταση σε disk-link απεικονίσεις . . . . .	48
3.10 Ορθότητα . . . . .	51
3.11 Το μέγεθος του πλέγματος . . . . .	60

3.12 Κάτω Φράγμα Disk-Link Απεικονίσεων για το Γράφημα Αστέρι . . . . .	62
<b>Παραρτήματα</b>	<b>65</b>
Α' Παράρτημα Α	67
Βιβλιογραφία	72



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

---

### 1.1 Ιστορικά Στοιχεία

Παρά το γεγονός ότι η θεωρία γραφημάτων θεμελιώθηκε από τον Euler (1707-1783) το 1736, ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός ότι ο ίδιος δεν έκανε χρήση απεικονίσεων γραφημάτων (τουλάχιστον με τον τρόπο που γίνεται στη μοντέρνα θεωρία γράφημάτων). Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 1.1 φαίνεται το σχέδιο που ο ίδιος χρησιμοποίησε ώστε να αναπαραστήσει το διάσημο πρόβλημα με τις *Επτά Γέφυρες του Königsberg*[2]. Επιπλέον, στο Σχήμα 1.2 βλέπουμε το σχέδιο που έκανε ώστε να αναπαραστήσει τη λύση του προβλήματος της *Διαδρομής του Ιππου* σε σκακιέρα (1759)[3]. Ωστόσο λίγα χρόνια αργότερα, το 1771, ο Vandermonde σχεδίασε τη διαδρομή του ίππου αναπαριστώντας τα τετράγωνα της σκακιέρας ως σημεία και τις κινήσεις του ίππου ως ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των σημείων (βλ. Σχήμα 1.3) [4]. Ο ίδιος περιγράφει με γλαφυρό τρόπο την ιδέα για αυτήν την απεικόνιση: «αν κανείς θεωρήσει ότι μια πινέζα είναι καρφωμένη στο κέντρο κάθε τετραγώνου, τότε το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ενός μονοπατιού για ένα νήμα που περνάει ακριβώς μια φορά γύρω από κάθε πινέζα και ακολουθεί έναν κανόνα τον οποίο αναζητούμε».

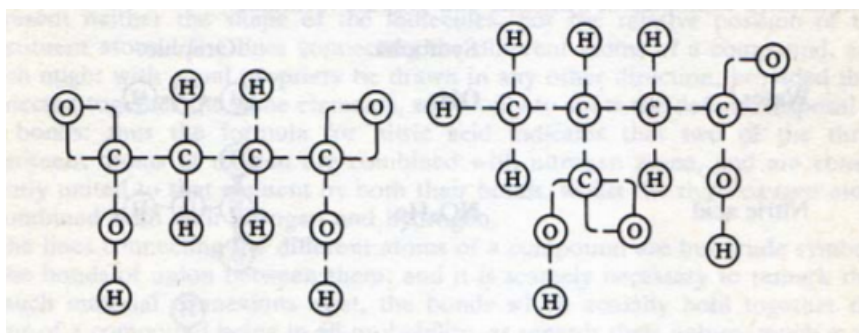
Από τα τέλη του 18ου αιώνα, απεικονίσεις γραφημάτων άρχισαν να εμφανίζονται όλο και συχνότερα σε ερευνητικές εργασίες. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η δουλειά του Arthur Cayley πάνω στα δέντρα και ο τρόπος που επέλεξε να τα αποτυπώσει (βλ. Σχήμα 1.4) [5]. Πέραν των μαθηματικών, η οπτικοποίηση γραφημάτων άρχισε να εμφανίζεται συστηματικά και σε άλλους κλάδους, όπως η κρυσταλλογραφία και η χημεία. Μέχρι και σήμερα, συνηθίζεται τα μόρια των χημικών ενώσεων να αποτυπώνονται ως γραφήματα (βλ. Σχήμα 1.5), μια ιδέα που συνέλαβε ο χημικός Alexander Crum Brown (1838-1922) [6].

Η ανάγκη για αλγόριθμους απεικόνισης γραφημάτων προέκυψε στα τέλη της δεκαετίας του 1960 και αφορούσε τον σχεδιασμό κυκλωμάτων. Περίπλοκα κυκλώματα με πολλά στοιχεία ήταν αδύνατο να σχεδιαστούν με το χέρι και έτσι αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι που βοηθούσαν στην οπτικοποίηση τους με σκοπό η απεικόνιση να επιτρέπει την εύκολη εξαγωγή πληροφορίας. Έπειτα, κατά τη δεκαετία του 1980, εμφανίστηκαν





Σχήμα 1.4: Η απεικόνιση δέντρων από τον Arthur Cayley.

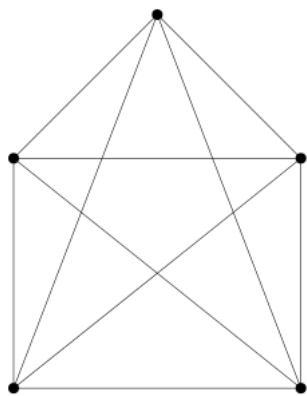


Σχήμα 1.5: Ο τρόπος που πρότεινε ο Brown να απεικονίζονται τα μόρια χημικών ενώσεων.

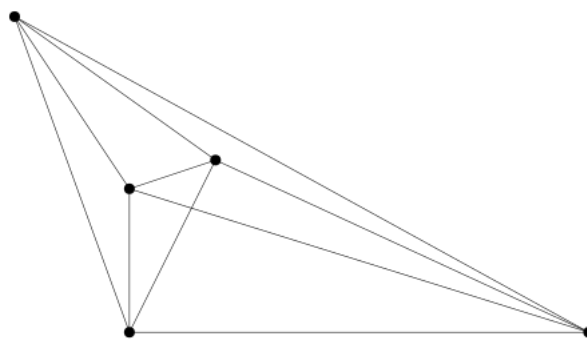
για πρώτη φορά ερευνητικές εργασίες που ανέδειξαν τη σημασία του να είναι μια απεικόνιση όμορφη αισθητικά και το ρόλο που αυτό παίζει στην παρουσίαση πληροφοριών σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους [7].

Η διαισθητική παρατήρηση, ότι απεικονίσεις γραφημάτων με όσο το δυνατόν λιγότερες τομές προσφέρουν στον αναγνώστη καλύτερη εποπτεία, οδήγησε αρχικά στη δημιουργία αλγορίθμων που υπέθεταν ότι το υπό εξέταση γράφημα είναι επίπεδο. Στη συνέχεια, η έρευνα επεκτάθηκε και σε μη επίπεδα γραφήματα, όπου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της επιπεδοποίησης. Σε αυτή τη μέθοδο, εισάγονται νέοι κόμβοι που αντιστοιχούν στα σημεία τομών του υπο εξέταση γραφήματος, με αποτέλεσμα το γράφημα να γίνεται επίπεδο (εξ ου και ο όρος επιπεδοποίηση). Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται κάποιος από τους γνωστούς αλγορίθμους για επίπεδα γραφήματα, ώστε να λάβουμε μια επίπεδη απεικόνιση της επιπεδοποίησης. Τέλος, αφαιρούνται οι κόμβοι που εισήχθησαν στην αρχή.

Η μέθοδος της επιπεδοποίησης λειτουργεί ικανοποιητικά για γραφήματα σχετικά μικρού μεγέθους, που έχουν μερικούς εκατοντάδες κόμβους. Τα τελευταία χρόνια ωστόσο, με την «έκρηξη» που υπάρχει στο μέγεθος των διαθέσιμων δεδομένων, είναι συχνά απαραίτητη η απεικόνιση μεγάλων γραφημάτων που έχουν ακόμη και χιλιάδες κόμβους. Σε τέτοιες περιπτώσεις έχει παρατηρηθεί, ότι η ελαχιστοποίηση των τομών μεταξύ των ακμών δεν επαρκεί προκειμένου να έχουμε μια ευανάγνωστη απεικόνιση [8]. Θεωρήθηκε έτσι απαραίτητη και η μελέτη αλγορίθμων για οικογένειες γραφημάτων που δεν είναι επίπεδα, αλλά ικανοποιούν άλλου είδους τοπολογικά χαρακτηριστικά.

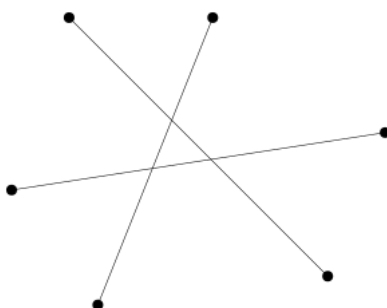


(α') Το γράφημα  $K_5$  που, ως γνωστόν, δεν είναι  $\epsilon$ -πίπεδο.



(β') Μια απεικόνιση του  $K_5$  που αποδεικνύει ότι είναι  $1$ -επίπεδο.

Σχήμα 1.6



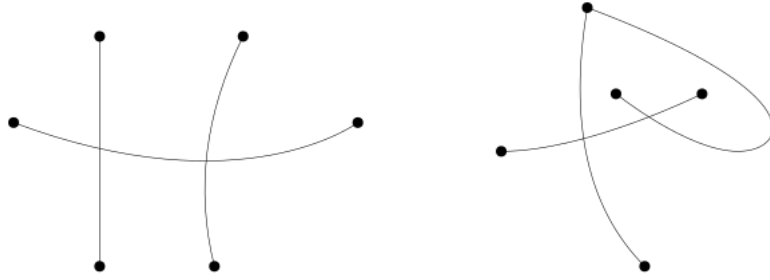
Σχήμα 1.7: Απαγορευμένες τομές μεταξύ ακμών σε ένα 3-οιονεί επίπεδο γράφημα.

Παραδείγματα τέτοιων οικογενειών είναι:

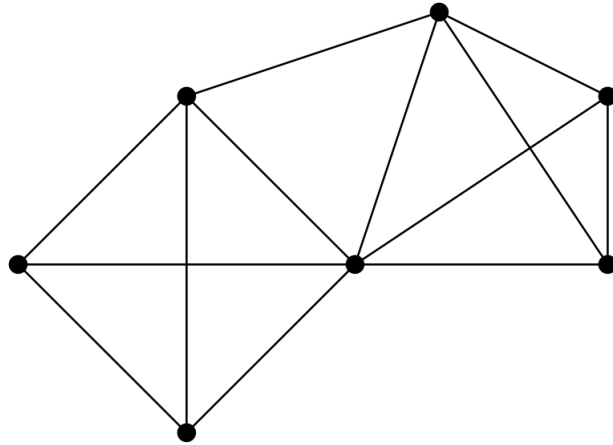
- τα  $k$ -επίπεδα γραφήματα ( $k \geq 1$ ), που είναι τα γραφήματα τα οποία έχουν απεικόνιση στην οποία κάθε ακμή έχει το πολύ  $k$  τομές (βλ. Σχήμα 1.6),
- τα  $k$ -οιονεί επίπεδα γραφήματα ( $k$ -quasi planar,  $k \geq 3$ ), που είναι τα γραφήματα για τα οποία υπάρχει απεικόνιση στην οποία δεν υπάρχουν  $k$  ακμές που τέμνονται ανά δύο (βλ. Σχήμα 1.7),
- τα fan-planar γραφήματα, που έχουν απεικόνιση στην οποία κάθε ακμή μπορεί να τέμνεται μόνο από ακμές με κοινό άκρο και από την ίδια «πλευρά» (βλ. Σχήμα 1.8),
- τα ευθύγραμμα RAC-απεικονίσιμα γραφήματα, τα οποία έχουν μια ευθύγραμμη απεικόνιση στην οποία δύο ακμές που τέμνονται, είναι κάθετες μεταξύ τους (βλ. Σχήμα 1.9).

Η έρευνα σχετικά με τις παραπάνω αλλά και άλλες οικογενείες μη επίπεδων γραφημάτων, έχει επικεντρωθεί στους παρακάτω τύπους προβλημάτων:

- Προβλήματα αναγνώρισης: δεδομένου ενός γραφήματος  $G$  και μιας οικογένειας μη επίπεδων γραφημάτων  $F$ , πόσο γρήγορα μπορούμε να ελέγξουμε αν  $G \in F$  ;



Σχήμα 1.8: Απαγορευμένες διατάξεις ακμών σε ένα fan-planar γράφημα.



Σχήμα 1.9: Ένα ευθύγραμμο RAC-απεικονίσιμο γράφημα.

- Προβλήματα πυκνότητας ακμών: για μια οικογένεια μη επίπεδων γραφημάτων  $F$ , ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών που μπορεί να έχει ένα γράφημα  $G \in F$ ;
- Προβλήματα συσχέτισης μεταξύ οικογενειών γραφημάτων: Δεδομένων δύο οικογενειών μη επίπεδων γραφημάτων  $F_1$  και  $F_2$ , τί μπορούμε να πούμε για τη σχέση της  $F_1$  με την  $F_2$ ;

Τα περισσότερα από τα γνωστά αποτελέσματα σχετικά με τις δύο πρώτες κατηγορίες προβλημάτων, για τις οικογένειες που περιγράψαμε προηγουμένως, φαίνονται στον Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1

Οικογένεια Γραφημάτων	Μέγιστο Πλήθος Ακμών	Πολυπλ. Αναγν.
1-επίπεδα	$4n - 8$	NP-πλήρες
2-επίπεδα	$5n - 10$	ανοιχτό
$k$ -επίπεδα ( $k \geq 5$ )	$3.81\sqrt{kn}$	ανοιχτό
3-οιονεί επίπεδα	$6.5n - 20$	ανοιχτό
4-οιονεί επίπεδα	$72(n - 2)$	ανοιχτό
$k$ -οιονεί επίπεδα ( $k \geq 5$ )	$c_k n \log n$	ανοιχτό
fan-planar	$5n - 10$	NP-πλήρες
ευθύγραμμο RAC	$4n - 10$	NP-δύσκολο

## 1.2 Βασικοί Ορισμοί

Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε κάποιους από τους βασικούς ορισμούς που θα χρειαστούμε στα επόμενα κεφάλαια.

### 1.2.1 Στοιχεία από τη Θεωρία Γραφημάτων

Ένα *γράφημα*  $G$  είναι μια δυάδα  $(V, E)$ , που αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο *κόμβων*  $V$  και ένα πεπερασμένο σύνολο *ακμών*  $E$ . Συμβολίζουμε το σύνολο των κόμβων του  $G$  με  $V(G)$  και το σύνολο των ακμών του  $G$  με  $E(G)$ . Το  $G$  λέγεται *απλό γράφημα* αν το  $E(G)$  αποτελείται από δισύνολα του  $V(G)$ . Στην συνέχεια, όπου χρησιμοποιούμε την λέξη *γράφημα*, θα εννοούμε *απλό γράφημα*. Συμβολίζουμε μια ακμή μεταξύ των κόμβων  $u$  και  $v$  του  $G$  με  $(u, v)$ . Αν  $(u, v) \in E$ , τότε οι κόμβοι  $u, v$  λέγονται *γειτονικοί* και ο  $u$  λέγεται *γείτονας* του  $v$ . Ο *βαθμός* ενός κόμβου  $u$  είναι το πλήθος των γειτόνων του  $u$ .

Μια ακολουθία  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  κόμβων του  $G$ , με  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ , λέγεται *περίπατος* στο  $G$ . Ένα *μονοπάτι* είναι ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενους κόμβους. *Περιήγηση* λέγεται ένας περίπατος στον οποίο  $v_1 = v_k$ . *Κύκλος* λέγεται μια περιήγηση χωρίς επαναλαμβανόμενους κόμβους (με εξαίρεση τον  $v_1$ ).

Ένα γράφημα  $G$  λέγεται *συνεκτικό*, αν για κάθε ζευγάρι κόμβων  $u, v \in V(G)$  υπάρχει μονοπάτι από τον  $u$  στον  $v$ . *Δέντρο* λέγεται ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους.

### 1.2.2 Βασικά Στοιχεία από την Απεικόνιση Γραφημάτων

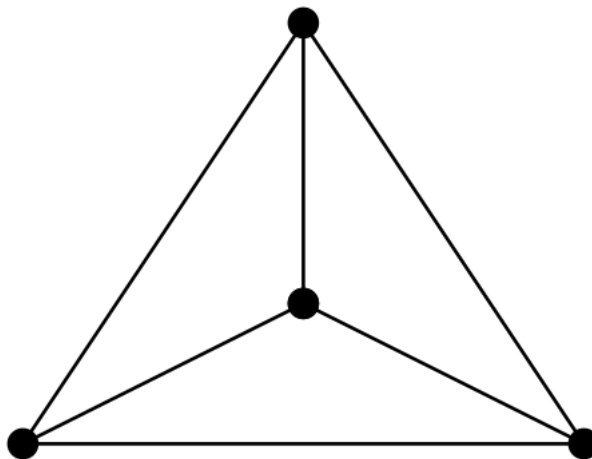
Μια *απλή καμπύλη*  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  είναι μια καμπύλη του επιπέδου, ώστε ο περιορισμός  $f|_{[a,b]}$  να είναι μια 1 – 1 απεικόνιση. Μια απλή καμπύλη του επιπέδου λέγεται και *καμπύλη Jordan*.

Μια *απεικόνιση*  $\Gamma$  ενός γραφήματος  $G$  είναι μια αντιστοίχιση κάθε κόμβου  $v \in V(G)$  σε ένα (διαφορετικό κάθε φορά) σημείο  $p_v$  του επιπέδου και κάθε ακμής  $(u, v) \in E(G)$  σε μια καμπύλη Jordan με άκρα τα  $p_u, p_v$ . Δύο ακμές στη  $\Gamma$  *τέμνονται*, αν έχουν κάποιο κοινό σημείο πέραν των άκρων τους. Τότε, το κοινό αυτό σημείο λέγεται *τομή*.

Θα ορίσουμε τώρα μερικές κατηγορίες απεικονίσεων, τις οποίες θα χρειαστούμε στα επόμενα κεφάλαια.

Μια *ευθύγραμμη απεικόνιση*  $\Gamma$  ενός γραφήματος  $G$ , είναι μια απεικόνιση κάθε κόμβου του  $G$  σε ένα σημείο του επιπέδου και κάθε ακμής του  $G$  σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των άκρων της.

Μια απεικόνιση  $\Gamma$  ενός γραφήματος  $G$ , λέγεται *επίπεδη* αν δεν περιέχει ακμές που τέμνονται (βλ. Σχήμα 1.10).



Σχήμα 1.10: Μια επίπεδη απεικόνιση του  $K_4$ .

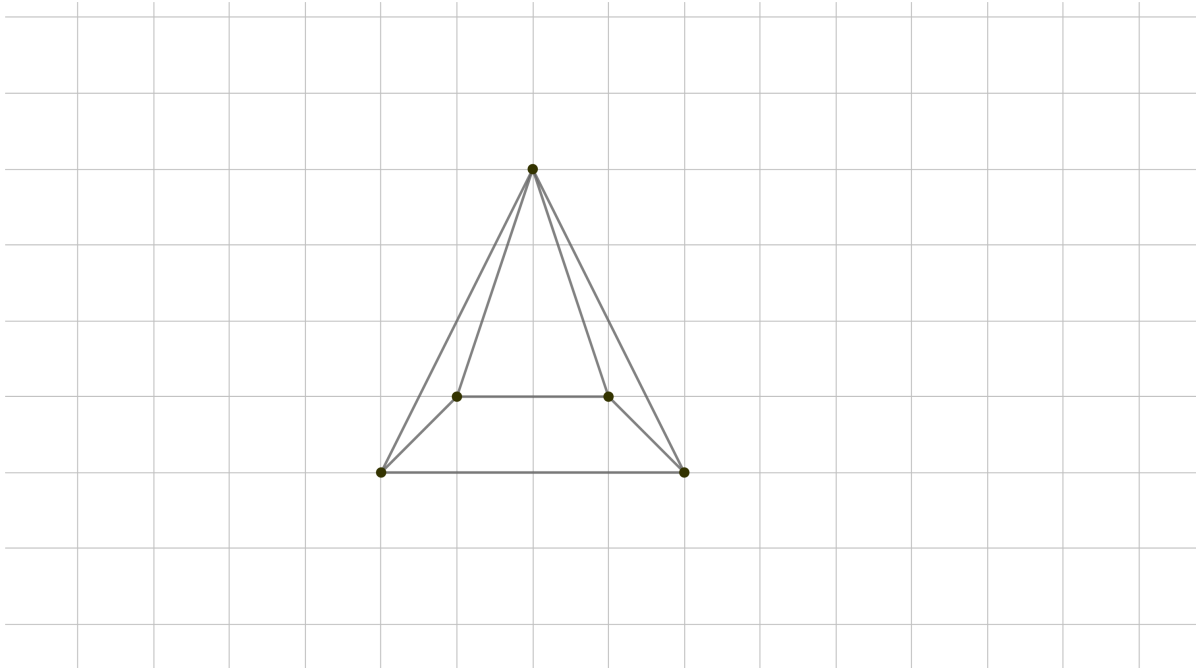
Μια απεικόνιση σε πλέγμα  $\Gamma$  ενός γραφήματος  $G$ , είναι μια απεικόνιση των κόμβων του  $G$  στις κορυφές ενός πλέγματος ακεραίων (βλ. Σχήμα 1.11). Το μέγεθος του πλέγματος που απαιτείται για μια απεικόνιση σε πλέγμα ορίζεται ως το εμβαδόν του μικρότερου ορθογωνίου που περιέχει την απεικόνιση. Το πλάτος  $W$  του πλέγματος, είναι το πλάτος του ορθογωνίου και το ύψος  $H$  του πλέγματος, είναι το ύψος του ορθογωνίου. Έτσι το μέγεθος του πλέγματος συχνά γράφεται ως  $W \times H$ .

Ένα μονοπάτι  $P = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  στην απεικόνιση  $\Gamma$  ενός γραφήματος  $G$  λέγεται *μονότονο*, αν υπάρχει ευθεία  $l$ , ώστε οι προβολές των κόμβων του  $P$  στην  $l$ , να εμφανίζονται σε αυτήν με την ίδια σειρά όπως στο  $P$  (βλ. Σχήμα 1.12). Μια *μονότονη απεικόνιση* είναι μια απεικόνιση στην οποία υπάρχει μονότονο μονοπάτι μεταξύ κάθε δύο κόμβων  $u, v$  του  $G$ .

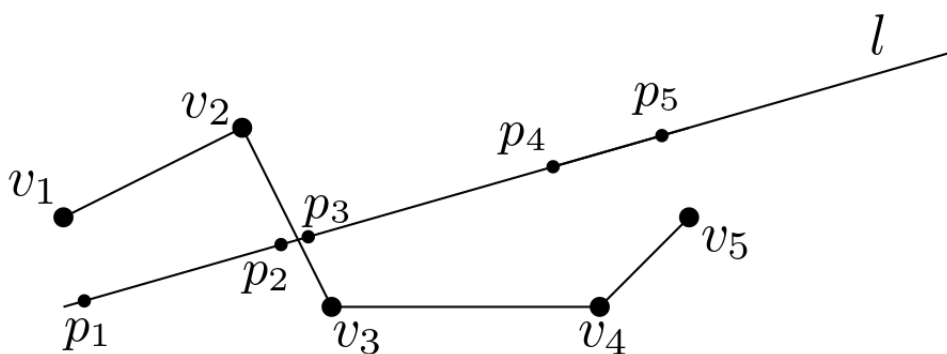
## 1.3 Κίνητρα και Αποτελέσματα

### 1.3.1 Disk-link Απεικονίσεις

Πρόσφατα οι Bekos et al. μελέτησαν το αλγοριθμικό πρόβλημα υπολογισμού ευθύγραμμων απεικονίσεων σε πλέγμα, στις οποίες κάθε κόμβος αναπαριστάται ως δίσκος σταθερής ακτίνας. Η ανάγκη για ένα τέτοιο είδος απεικονίσεων, προκύπτει από το ότι λογισμικά που επιτρέπουν την επεξεργασία γραφημάτων, απεικονίζουν τους κόμβους ως γεωμετρικά σχήματα. Το πρόβλημα που μπορεί να προκύψει τότε, είναι να υπάρχουν τομές είτε μεταξύ των σχημάτων, είτε μεταξύ των ακμών και των σχημάτων. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε απεικονίσεις που δεν είναι ευανάγνωστες και έτσι δεν διευκολύνουν την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων από το γράφημα. Ως εκ τούτου, έχει νόημα η διερεύνηση αλγορίθμων που παράγουν disk-link απεικονίσεις για διάφορες οικογένειες γραφημάτων, χρησιμοποιώντας το μικρότερο δυνατόν εμβαδόν.



Σχήμα 1.11: Μια απεικόνιση σε πλέγμα. Εδώ  $W = 4$  και  $H = 4$ .



Σχήμα 1.12: Το μονοπάτι  $P = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  είναι μονότονο ως προς την  $l$ . Με  $p_i$  συμβολίζουμε την προβολή του  $v_i$  στην  $l$ .



### 1.3.2 Κάτω Φράγματα για Μονότονες Απεικονίσεις

Οι Angelini et al. εισήγαγαν και μελέτησαν στο [9] τις μονότονες απεικονίσεις. Με σκοπό να παρουσιάσουν την χρησιμότητα αυτών των απεικονίσεων, αναφέρουν το παράδειγμα ενός ταξιδιώτη, ο οποίος προσπαθεί να βρει στο χάρτη του μια διαδρομή μεταξύ δύο σημείων  $u$  και  $v$ , η οποία να μην περιέχει κομμάτια που να απομακρύνονται από τον  $v$ .

Μεγάλο μέρος της έρευνας για τις μονότονες απεικονίσεις έχει επικεντρωθεί στις μονότονες απεικονίσεις δέντρων. Οι Oikonomou, Symvonis παρουσίασαν έναν αλγόριθμο, ο οποίος κατασκευάζει μονότονες απεικονίσεις δέντρων σε πλέγμα μεγέθους  $n \times n$  [10]. Επιπλέον οι Dayu He, Xin He έδειξαν την ύπαρξη δέντρου που χρειάζεται πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{n}{9} \times \frac{n}{9}$  για να απεικονιστεί μονότονα [1]. Έχει νόημα έτσι, να μειωθεί το κενό που υπάρχει ανάμεσα στο πάνω και το κάτω φράγμα για το μέγεθος του πλέγματος που απαιτείται.

## 1.4 Οργάνωση Διπλωματικής

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζουμε κάποια βελτιωμένα κάτω φράγματα για τις μονότονες απεικονίσεις δέντρων, επεκτείνοντας την μέθοδο των Dayu He, Xin He. Στο Κεφάλαιο 3, ασχολούμαστε με τις disk-link απεικονίσεις. Παρουσιάζουμε μια μέθοδο για μονότονη disk-link απεικόνιση δέντρων σε πλέγμα μεγέθους  $3n \times 3n$ . Στη συνέχεια, επεκτείνουμε έναν, κλασικό πλέον, αλγόριθμο των de Fraysseix, Pach και Pollack προκειμένου να δείξουμε ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει μια disk-link απεικόνιση χωρίς τομές σε πλέγμα μεγέθους  $3n - 7 \times \lceil \frac{3n-7}{2} \rceil$



## Κεφάλαιο 2

# Κάτω Φράγματα για Μονότονες Απεικονίσεις

---

### 2.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Έστω  $p$  ένα σημείο στο καρτεσιανό επίπεδο και  $l$  μια ημιευθεία που ξεκινάει από το  $p$ . Ως γωνία της  $l$ , που τη συμβολίζουμε με  $angle(l)$ , ορίζουμε τη γωνία που καλύπτεται από μια αντισωρολογιακή περιστροφή του θετικού  $x$ -ημιάξονα μέχρι να συμπέσει με την  $l$ .

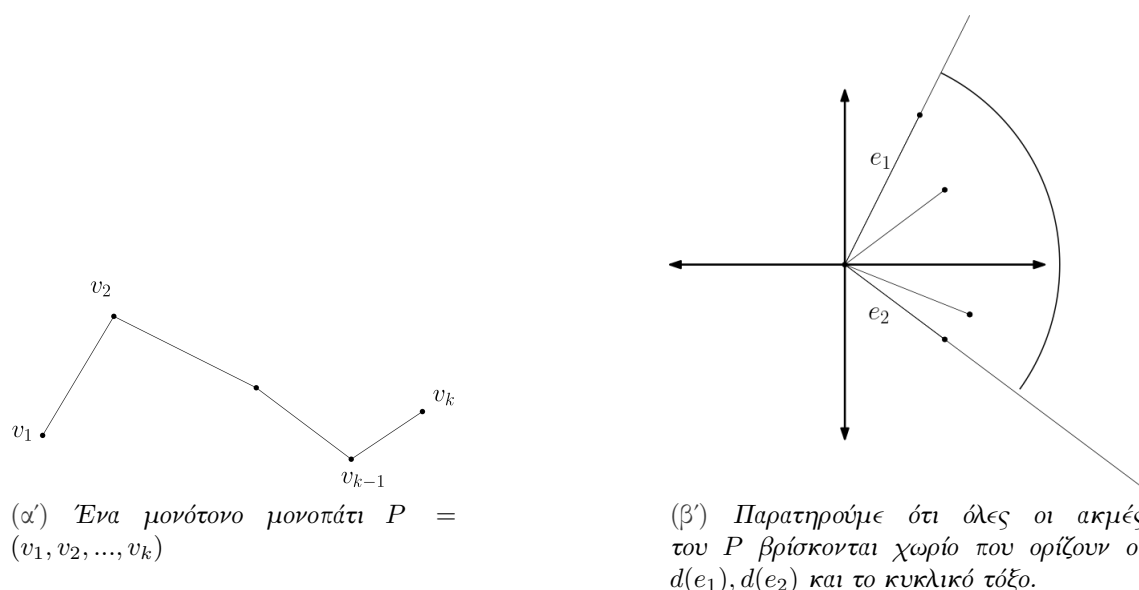
Έστω  $\Gamma$  μια ευθύγραμμη απεικόνιση ενός γραφήματος  $G$  και  $e = (u, v)$  μια ακμή του  $G$ . Η κατεύθυνση της  $e$ , που συμβολίζεται με  $d(e)$ , είναι η ημιευθεία που ξεκινάει από το  $u$  και διέρχεται από τον  $v$ . Η γωνία μιας ακμής  $(u, v)$ , που συμβολίζεται με  $angle(u, v)$ , είναι η γωνία της  $d(u, v)$ . Παρατηρούμε ότι  $angle(u, v) = angle(v, u) - 180^\circ$ . Θα συμβολίζουμε την απεικόνιση ενός μονοπατιού  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  στην  $\Gamma$  με  $P(u_1, u_k)$ .

Έστω ένα πλέγμα και μια απεικόνιση ενός δέντρου  $T$  σε αυτό, με τη ρίζα του τοποθετημένη στο σημείο  $(0, 0)$ . Δεδομένου ενός μονοπατιού  $P$  στο  $T$  θα συμβολίζουμε την μέγιστη και την μικρότερη γωνία των ακμών του  $P$  με  $max_P$  και  $min_P$  αντίστοιχα. Θα συμβολίζουμε τις συντεταγμένες ενός κόμβου  $u$  στο πλέγμα με  $(x_u, y_u)$ . Δεδομένης μιας ακμής  $(u, v)$  στο  $T$  θα αναφερόμαστε στην ποσότητα  $x_v - x_u$  ως το  $x$ -βήμα της  $(u, v)$  και στην ποσότητα  $y_v - y_u$  ως το  $y$ -βήμα της  $(u, v)$ . Δεδομένου ενός μονοπατιού  $P$  στο  $T$  θα αναφερόμαστε στο μέγιστο  $x$ -βήμα των ακμών του ως το μέγιστο  $x$ -βήμα του  $T$  και στο μέγιστο  $y$ -βήμα των ακμών του ως το μέγιστο  $y$ -βήμα του  $T$ .

Για τα μονότονα μονοπάτια ισχύει η παρακάτω βασική ιδιότητα:

**Ιδιότητα 1.** Έστω ένα μονοπάτι  $P(u_1, u_k)$ . Μεταφέρουμε τις  $d(u_i, u_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, k-1$  στην αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Τότε το  $P(u_1, u_k)$  είναι μονότονο αν και μόνο αν περιέχει δύο ακμές  $e_1$  και  $e_2$  ώστε το χωρίο που ορίζεται από τις  $d(e_1), d(e_2)$  και έχει γωνία αυστηρά μικρότερη από  $180^\circ$ , περιέχει όλες τις ημιευθείες  $d(u_i, u_{i+1})$ , για  $i = 1, \dots, k-1$ .

Οι δύο ακμές  $e_1, e_2$  στην παραπάνω ιδιότητα ονομάζονται οι ακραίες ακμές του



Σχήμα 2.1: Παρουσίαση Ιδιότητας 1

$P(u_1, u_k)$ , ενώ το χωρίο στο οποίο αναφερθήκαμε ονομάζεται το εύρος του  $P(u_1, u_k)$ . Τις  $e_1, e_2$  θα τις συμβολίζουμε με  $e_{min}$  και  $e_{max}$ . Τότε το εύρος του  $P(u_1, u_k)$  θα είναι απλώς το εμβαδόν που καλύπτει μια αντιωρολογιακή περιστροφή της  $d(e_{min})$  μέχρι αυτή να ταυτιστεί με την  $d(e_{max})$ . Έτσι συμπεραίνουμε ότι  $angle(e_{min}) < angle(e_{max})$ .

Το διάστημα  $[angle(e_{min}), angle(e_{max})]$  ονομάζεται η εμβέλεια του  $P(u_1, u_k)$  και θα το συμβολίζουμε με  $scope(P(u_1, u_k))$ . Με βάση τα παραπάνω η Ιδιότητα 1 μπορεί να γραφεί και ως εξής:

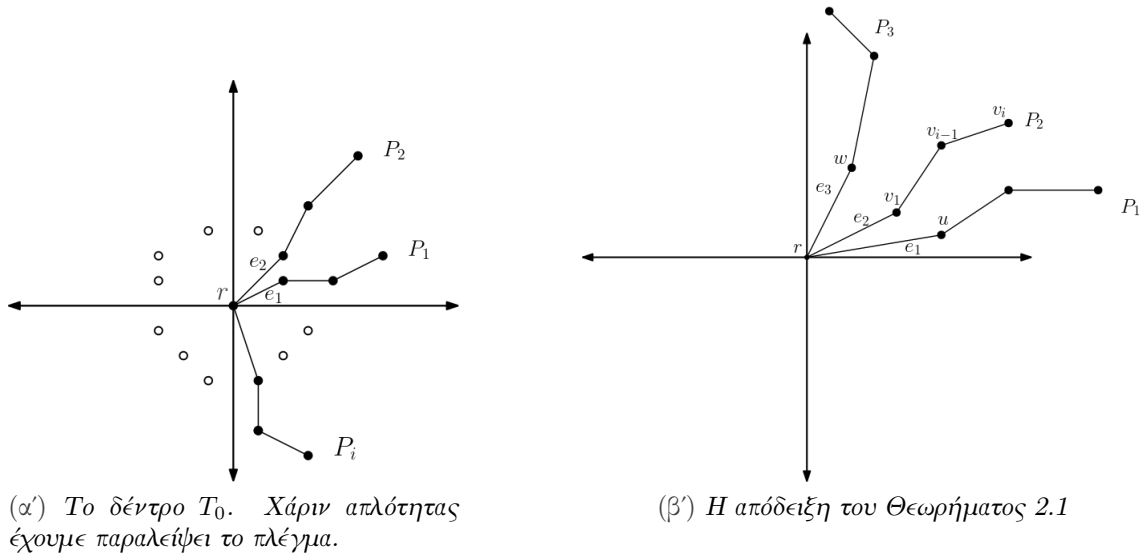
**Ιδιότητα 2.** Ένα μονοπάτι  $P(u_1, u_k)$  με εμβέλεια  $[angle(e_{min}), angle(e_{max})]$  είναι μονότονο αν και μόνο αν  $angle(e_{max}) - angle(e_{min}) < 180^\circ$ .

## 2.2 Το Πρώτο Κάτω Φράγμα

Οι Dayu He, Xin He στο [1] ήταν οι πρώτοι που απέδειξαν ένα κάτω φράγμα της μορφής  $\Omega(n) \times \Omega(n)$  για τις ευθύγραμμες μονότονες απεικονίσεις δέντρων σε πλέγμα. Συγκεκριμένα, θεώρησαν το δέντρο  $T_0$  με  $n$  κόμβους το οποίο έχει 12 ξένα μονοπάτια  $P_0, P_1, \dots, P_{12}$  που ξεκινούν από την ρίζα του και κάθε μονοπάτι  $P_i$  έχει  $\frac{n}{12}$  κόμβους. Με βάση αυτό έδειξαν το ακόλουθο:

**Θεώρημα 2.1.** Υπάρχει δέντρο  $T_0$  με  $n$  κόμβους, τέτοιο ώστε κάθε μονότονη απεικόνιση του  $T_0$  να απαιτεί πλέγμα μεγέθους  $\frac{n}{12} \times \frac{n}{12}$ .

Απόδειξη. Έστω  $e_i$  η πρώτη ακμή του  $P_i (1 \leq i \leq 12)$  και  $\Gamma$  μια μονότονη απεικόνιση του  $T_0$  σε πλέγμα. Χωρίς βλάβη θεωρούμε ότι η ρίζα  $r$  του  $T_0$  απεικονίζεται στο  $(0, 0)$ . Λόγω της αρχής της περιστροφικότητας, τουλάχιστον τρεις ακμές από τις  $e_i$  θα βρίσκονται στο ίδιο τεταρτημόριο. Χωρίς βλάβη θεωρούμε ότι αυτό είναι το πρώτο



Σχήμα 2.2: Θεώρημα 2.1

τεταρτημόριο. Επιπλέον, έστω ότι αυτές είναι οι  $e_1, e_2, e_3$  και απεικονίζονται όπως στο Σχήμα 2.2(β). Έστω ακόμη  $e_1 = (r, u), e_3 = (r, w)$  και  $r, v_1, v_2, \dots, v_k$  οι κόμβοι του  $P_2$ . Προφανώς έχουμε ότι:

$$0^\circ \leq \text{angle}(r, u) \leq \text{angle}(r, v_1) \leq \text{angle}(r, w) \leq 90^\circ$$

Θεωρούμε τώρα το μονοπάτι  $Q_1$  από το  $u$  στο  $v_i$ , για κάποιο  $1 \leq i \leq k$ . Έστω  $d_1, d_2$  οι δύο ακραίες ακμές του  $Q_1$  με  $\text{angle}(d_1) < \text{angle}(d_2)$ . Εξαιτίας της Ιδιότητας 2 θα έχουμε  $\text{angle}(d_2) - \text{angle}(d_1) < 180^\circ$ . Επιπλέον  $\text{angle}(d_2) \geq \text{angle}(u, r) \geq 180^\circ$ . Επομένως έχουμε ότι:

$$\text{angle}(v_{i-1}, v_i) \geq \text{angle}(d_1) > \text{angle}(d_2) - 180^\circ \geq 0$$

Θεωρούμε τώρα το μονοπάτι  $Q_2$  από το  $v_i$  στο  $w$  και έστω  $g_1, g_2$  οι δύο ακραίες ακμές του με  $\text{angle}(g_1) < \text{angle}(g_2)$ . Πάλι από την Ιδιότητα 2 έχουμε ότι  $\text{angle}(g_2) - \text{angle}(g_1) < 180^\circ$ . Επίσης ισχύει ότι  $\text{angle}(g_1) \leq \text{angle}(r, w) \leq 90^\circ$ . Επομένως:

$$\text{angle}(v_i, v_{i-1}) \leq \text{angle}(g_2) < \text{angle}(g_1) + 180^\circ \leq 270^\circ \Rightarrow \text{angle}(v_{i-1}, v_i) < 90^\circ$$

Έτσι έχουμε δείξει πως  $0^\circ < \text{angle}(v_{i-1}, v_i) < 90^\circ \forall$  ακμή  $(v_{i-1}, v_i) \in P_2$ . Επομένως, κάθε ακμή του  $P_2$  έχει  $x$ -βήμα  $\geq 1$  και  $y$ -βήμα  $\geq 1$ . Συνεπώς η απεικόνιση του  $P_2$  απαιτεί πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{n}{12} \times \frac{n}{12}$ .  $\square$

## 2.3 Νέα Κάτω Φράγματα

Επεκτείνοντας την παραπάνω ιδέα από τους  $H_e$  και  $H_e$  θέλουμε να αναλύσουμε την περίπτωση όπου προσθέτουμε περισσότερα μονοπάτια στο δέντρο τους. Είναι χρήσιμο να ορίσουμε τα ακόλουθα:

Θα αποδείξουμε τώρα την παρακάτω σημαντική ιδιότητα:

**Λήμμα 2.1.** Έστω μια μονότονη απεικόνιση  $\Gamma$  ενός δέντρου  $T$ , με την ρίζα του να έχει απεικονιστεί στο σημείο  $(0, 0)$ . Έστω ότι το  $T$  έχει  $k$  μονοπάτια  $P_1, P_2, \dots, P_k$  που ξεκινάνε από την ρίζα του και επιπλέον όλα ξεκινάνε από το πρώτο τεταρτημόριο (όπως στο Σχήμα 2.3). Τότε πρέπει να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$0^\circ \leq \text{angle}(r, u) < \min_{P_2} \leq \max_{P_2} < \min_{P_3} \leq \max_{P_3} < \dots < \min_{P_{k-1}} \leq \max_{P_{k-1}} < \text{angle}(r, v) < 90^\circ$$

.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε τις ανισότητες

$$\max_{P_j} < \min_{P_{j+1}}$$

για  $j = 1, \dots, k - 1$ .

Έστω ότι υπάρχει ακμή  $(x_1, y_1)$  στο  $P_j$  και ακμή  $(x_2, y_2)$  στο  $P_{j+1}$  έτσι ώστε  $\text{angle}(x_1, y_1) \geq \text{angle}(x_2, y_2)$ . Θεωρούμε τώρα το μονοπάτι  $P$  από τον κόμβο  $y_1$  στον κόμβο  $y_2$ . Έχουμε τότε ότι  $\text{angle}(y_1, x_1) \geq 180^\circ$  και  $\text{angle}(y_1, x_1) = \text{angle}(x_1, y_1) + 180^\circ$ . Επομένως:

$$\begin{aligned} \text{angle}(x_2, y_2) &\leq \text{angle}(y_1, x_1) - 180^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{angle}(y_1, x_1) - \text{angle}(x_2, y_2) &\geq 180^\circ \quad (1) \end{aligned}$$

Έστω  $e_{\min}, e_{\max}$  οι ακμές με τη μικρότερη και μεγαλύτερη γωνία στο  $P$  αντίστοιχα. Τότε  $\text{angle}(e_{\max}) \geq \text{angle}(y_1, x_1)$  και  $\text{angle}(e_{\min}) \leq \text{angle}(x_2, y_2)$ . Επομένως:

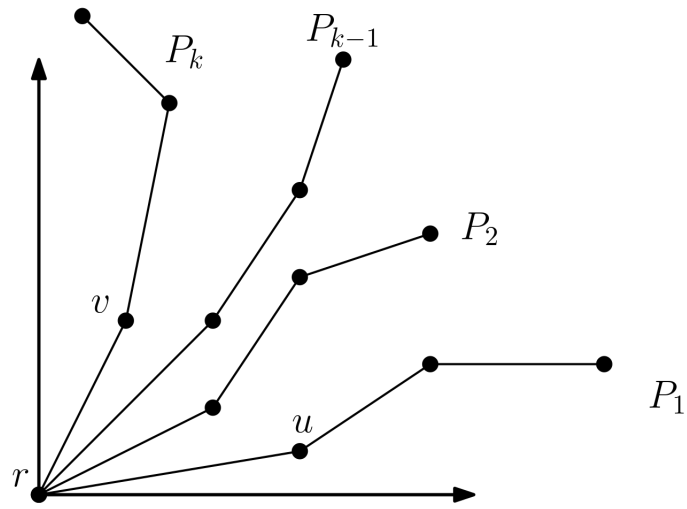
$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{angle}(e_{\max}) - \text{angle}(e_{\min}) &\geq \text{angle}(y_1, x_1) - \text{angle}(x_2, y_2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \text{angle}(e_{\max}) - \text{angle}(e_{\min}) &\geq 180^\circ \end{aligned}$$

Επομένως το μονοπάτι  $P$  δεν είναι μονότονο από την Ιδιότητα 2 από  $H_e$  και  $H_e$ . Αυτό είναι αντίφαση και ως αποτέλεσμα:

$$\text{angle}(x_1, y_1) < \text{angle}(x_2, y_2)$$

$\forall (x_1, y_1) \in P_j$  και  $\forall (x_2, y_2) \in P_{j+1} \Rightarrow$

$$\max_{P_j} < \min_{P_{j+1}}$$



Σχήμα 2.3: Το δέντρο  $T$  του Λήμματος 2.1

για  $j = 1, \dots, k - 1$ .

□

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 2.2.** Υπάρχει δέντρο  $T$  με  $n$  κόμβους, έτσι ώστε κάθε μονότονη απεικόνιση του  $T$  να απαιτεί πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{n^2}{50}$ .

Απόδειξη. Έστω  $T$  δέντρο με ρίζα  $r$  και 10 ξένα ως προς τις ακμές μονοπάτια  $P_1, P_2, \dots, P_{10}$  (όπως στο Σχήμα 2.4). Κάθε μονοπάτι έχει  $\frac{n}{10}$  κόμβους. Έστω  $\Gamma$  μια μονότονη απεικόνιση του  $T$  και χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι η ρίζα  $r$  απεικονίζεται στο  $(0, 0)$ . Έστω ακόμη  $e_i$  ( $1 \leq i \leq 10$ ) η πρώτη ακμή του  $P_i$ . Θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

i. Τουλάχιστον τέσσερις ακμές από τις  $e_i$  βρίσκονται στο ίδιο τεταρτημόριο:

Έστω χωρίς βλάβη ότι αυτές είναι οι  $e_1, e_2, e_3, e_4$  με  $\text{angle}(e_1) < \text{angle}(e_2) < \text{angle}(e_3) < \text{angle}(e_4)$ . Αν  $\max_{P_2} \geq 45^\circ$  τότε από το Λήμμα 1 έχουμε ότι:

$$90^\circ > \min_{P_3} > 45^\circ \Rightarrow x_v - x_u \geq 1$$

και

$$y_v - y_u \geq 2$$

$\forall (u, v) \in P_3$ .

Επομένως ένα πλέγμα μεγέθους  $\frac{2n}{10} \times \frac{n}{10} = \frac{n^2}{50}$  χρειάζεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Αν  $\max_{P_2} < 45^\circ$  τότε  $x_v - x_u \geq 2$  και  $y_v - y_u \geq 1 \quad \forall (u, v) \in P_2$ . Επομένως ένα πλέγμα μεγέθους  $\frac{n}{10} \times \frac{2n}{10} = \frac{n^2}{50}$  χρειάζεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

ii. Υπάρχουν δύο τεταρτημόρια που το καθένα περιέχει τουλάχιστον τρεις από τις  $e_i$ :

Τότε ακολουθώντας την ίδια απόδειξη με τους Ηε όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως, δείχνουμε ότι καθένα από αυτά τα τεταρτημόρια πρέπει να χρησιμοποιεί πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{n}{10} \times \frac{n}{10}$ . Επομένως η απεικόνιση  $\Gamma$  χρησιμοποιεί πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{2n}{10} \times \frac{n}{10} = \frac{n^2}{50}$ .

Εφόσον οι περιπτώσεις i. και ii. είναι συμπληρωματικές, έχουμε το τελικό αποτέλεσμα. □

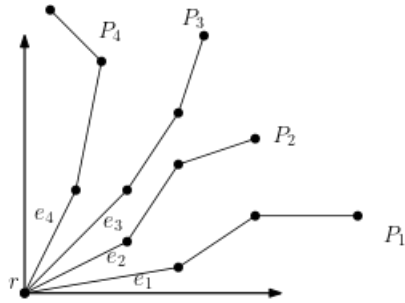
Τώρα θα θέλαμε να δούμε για ποιον αριθμό μονοπατιών αυτή η μέθοδος πετυχαίνει το καλύτερο αποτέλεσμα. Θα δείξουμε ότι αυτό συμβαίνει για 16 μονοπάτια, οπότε πετυχαίνουμε το παρακάτω φράγμα:

**Θεώρημα 2.3.** Υπάρχει δέντρο  $T$  με  $n$  κόμβους, έτσι ώστε κάθε μονότονη απεικόνιση του  $T$  να απαιτεί πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{n^2}{32}$ .

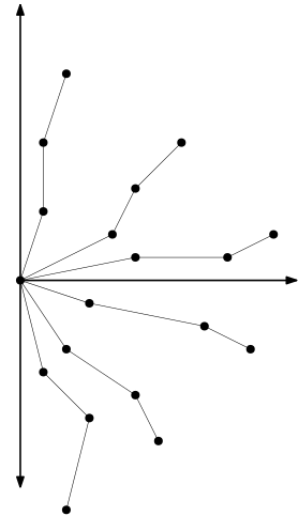
Για να δείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 2.2.** Θεωρούμε δέντρο  $T$  και μια μονότονη απεικόνιση σε πλέγμα, με την ρίζα του  $r$  στο  $(0, 0)$ . Έστω ότι το  $T$  έχει  $l$  ξένα κατά ακμές μονοπάτια που ξεκινάνε





(α') Η περίπτωση *i*. στο Θεώρημα 2.2



(β') Η περίπτωση *ii*. στο Θεώρημα 2.2

Σχήμα 2.4: Θεώρημα 2.2

από την ρίζα του,  $k$  από τα οποία, τα  $P_1, P_2, \dots, P_k$  ξεκινούν στο πρώτο τεταρτημόριο, με  $3 \leq k \leq 8$ . Έστω ότι  $0 < \text{angle}(u, v) < 90^\circ \forall (u, v) \in P_i, 1 \leq i \leq k$ . Τότε η απεικόνιση του  $T$  χρησιμοποιεί πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{kn^2}{12}$  στο πρώτο τεταρτημόριο.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα

$$S_d = \left\{ \frac{a}{b} : a \geq b, (a, b) = 1 \text{ και } a \leq d \right\}$$

$$R_d = \left\{ \frac{a}{b} : a < b, (a, b) = 1 \text{ και } b \leq d \right\}$$

Για αυτή την απόδειξη θα χρειαστούμε τα σύνολα  $S_5$  και  $R_5$ :

$$S_5 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4} \right\}$$

$$R_5 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$$

Έστω  $e_i$  η πρώτη ακμή του  $P_i$ . Χωρίζουμε τα μονοπάτια  $P_i$  στα δύο ακόλουθα σύνολα:

$$A = \{P_i : \max P_i \geq 45^\circ\} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{|A|}\}$$

$$B = \{P_i : \max P_i < 45^\circ\} = \{T_1, T_2, \dots, T_{|B|}\}$$

Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι  $\text{angle}(e_1) < \text{angle}(e_2) < \dots < \text{angle}(e_{|A|})$ , όπου  $e_i (1 \leq i \leq |A|)$  είναι η πρώτη ακμή του  $Q_i$  και  $\text{angle}(d_{|B|}) < \text{angle}(d_{|B|-1}) < \dots <$

$\text{angle}(d_1)$ , όπου  $d_i (1 \leq i \leq |B|)$  είναι η πρώτη ακμή του  $T_i$ .

Αρχικά αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση που  $|A| = k$  ή  $|B| = k$ . Έστω χωρίς βλάβη ότι  $|A| = k$ :

Αν το μέγιστο  $x$ -βήμα όλων των μονοπατιών στο  $A$  είναι 1 τότε  $\forall i (1 \leq i \leq k) \exists (u, v) \in Q_i$  έτσι ώστε  $x_v - x_u = 1$  και  $y_v - y_u \geq i$ . Αλλά τότε για  $i = k - 1$ :

$$\begin{aligned} \max_{Q_{k-1}} &\geq \arctan(k-1) \Rightarrow \min_{Q_k} > \arctan(k-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y_v - y_u}{x_v - x_u} &> k-1 \quad \forall (u, v) \in Q_k \Rightarrow y_v - y_u \geq k \quad \forall (u, v) \in Q_k \end{aligned}$$

Αν υπάρχει μονοπάτι με ελάχιστο  $x$ -βήμα τουλάχιστον 2, τότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μονοπάτι με ελάχιστο  $y$ -βήμα τουλάχιστον  $\frac{k}{2}$ . Για τον σκοπό αυτό παρατηρούμε αρχικά ότι  $|S_m| \leq 2m$  για  $m = 1, 2, 3, 4$ . Αυτό σημαίνει ότι  $|S_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}| \leq 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  για  $3 \leq k \leq 8$ .

Αν το  $k$  είναι άρτιο, έχουμε ότι  $|S_{\frac{k}{2}}| \leq k$  που σημαίνει ότι αν έχουμε  $k$  μονοπάτια στο  $A$ , θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι με ελάχιστο  $y$ -βήμα  $\frac{k}{2}$ . Τώρα αν το  $k$  είναι περιττό έχουμε ότι  $|S_{\frac{k-1}{2}}| \leq k-1$ , που σημαίνει ότι αν έχουμε  $k$  μονοπάτια, τότε από την αρχή της περιστροφωλιάς θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι με ελάχιστο  $y$ -βήμα  $\frac{k-1}{2} + 1 = \frac{k+1}{2}$ . Έτσι έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση.

Η περίπτωση που  $|A| = k - 1$  ή  $|B| = k - 1$  αντιμετωπίζεται ομοίως: Αν  $|A| = k - 1 \Rightarrow |B| = 1$  και το μονοπάτι του  $B$  πρέπει να έχει  $x$ -βήμα τουλάχιστον 2. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μονοπάτι στο  $A$  με ελάχιστο  $y$ -βήμα τουλάχιστον  $\frac{k}{2}$ . Παρατηρούμε τώρα ότι

$$|S_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}| \leq k - 2$$

για  $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Όμοια με πριν και χρησιμοποιώντας την αρχή της περιστροφωλιάς έχουμε το ζητούμενο. Όμοια αντιμετωπίζουμε την περίπτωση  $|B| = k - 1$ .

Αλλιώς έχουμε ότι  $|A| \geq 2$  και  $|B| \geq 2$  που σημαίνει ότι το  $A$  θα πρέπει να περιέχει μονοπάτι με ελάχιστο  $y$ -βήμα τουλάχιστον 2 και το  $B$  πρέπει να περιέχει μονοπάτι με ελάχιστο  $x$ -βήμα τουλάχιστον 3. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μονότονη απεικόνιση του  $T$  χρησιμοποιεί πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{6n^2}{7^2}$  στο πρώτο τεταρτημόριο. Έτσι έχουν δειχθεί οι περιπτώσεις  $k = 3, 4, 5, 6$ . Επομένως απομένουν οι περιπτώσεις  $k = 7$  και  $k = 8$ . Αφού  $k \geq 7$ , είτε το  $A$  ή το  $B$  πρέπει να περιέχει 4 μονοπάτια. Αν το  $A$  περιέχει 4 μονοπάτια, τότε θα υπάρχει μονοπάτι στο  $A$  με ελάχιστο  $y$ -βήμα τουλάχιστον 3. Έτσι εφόσον υπάρχει μονοπάτι στο  $B$  με ελάχιστο  $x$ -βήμα τουλάχιστον 3, κάθε μονότονη απεικόνιση του  $T$  χρειάζεται πλέγμα μεγέθους  $\frac{9n^2}{7^2}$ . Από την άλλη αν το  $B$  περιέχει 4 μονοπάτια, τότε θα υπάρχει μονοπάτι στο  $B$  με ελάχιστο  $x$ -βήμα τουλάχιστον 4  $\Rightarrow$  κάθε μονότονη απεικόνιση του  $T$  χρειάζεται πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον  $\frac{8n^2}{7^2}$  στο πρώτο τεταρτημόριο.

Έτσι έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη σε όλες τις περιπτώσεις.  $\square$

Τώρα αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3:

*Απόδειξη.* Θεωρούμε δέντρο  $T$  και μια μονότονη απεικόνιση του όπως στο Λήμμα 2, με  $l = 16$ . Ορίζουμε την παράμετρο  $j$  ως το πλήθος των τεταρτημορίων που έχουν τουλάχιστον 3 μονοπάτια και έστω  $k_1, k_2, \dots, k_j$  ο αριθμός των μονοπατιών αντίστοιχα σε αυτά τα τεταρτημόρια. Θεωρούμε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις:

i.  $j = 1$ : Αυτό σημαίνει ότι κάποιο τεταρτημόριο θα περιέχει  $k$  μονοπάτια, με  $10 \leq k \leq 16$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι αυτό είναι το πρώτο τεταρτημόριο. Στην περίπτωση που  $k = 10$  θα υπάρχουν 8 μονοπάτια  $P_1, P_2, \dots, P_8$  για τα οποία  $0^\circ < \text{angle}(u, v) < 90^\circ \forall (u, v) \in P_i (1 \leq i \leq 8)$ . Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2, λαμβάνουμε ότι απαιτείται πλέγμα μεγέθους  $\frac{8n^2}{16^2} = \frac{n^2}{32}$  στο πρώτο τεταρτημόριο. Για  $k > 10$  χρειάζεται πλέγμα μεγαλύτερου ή ίσου μεγέθους: Αν όχι μπορούμε απλώς να διαγράψουμε  $k - 10$  μονοπάτια και να λάβουμε μια απεικόνιση με 10 μονοπάτια σε πλέγμα μεγέθους μικρότερου από  $\frac{n^2}{32}$ . Αυτό όμως είναι αντίφαση.

ii.  $j = 2$ : Αν τα τεταρτημόρια με λιγότερα από 3 μονοπάτια περιέχουν ακριβώς δύο μονοπάτια τότε  $k_1 + k_2 = 12$ . Τότε από το Λήμμα 2, στα δύο τεταρτημόρια χρειάζεται πλέγμα μεγέθους:

$$\frac{(k_1 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_2 - 2)n^2}{16^2} = \frac{8n^2}{16^2} = \frac{n^2}{32}$$

. Αλλιώς υπάρχει τεταρτημόριο με το πολύ 1 μονοπάτι. Τότε  $k_1 + k_2 \geq 13$ . Αν  $k_1 \geq 11$  ή  $k_2 \geq 11$  τότε χρειάζεται πλέγμα μεγέθους  $\frac{n^2}{32}$  στο αντίστοιχο τεταρτημόριο. Έτσι υποθέτουμε ότι  $k_1, k_2 \leq 10$ . Τότε χρειάζεται πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον

$$\frac{(k_1 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_2 - 2)n^2}{16^2} = \frac{(k_1 + k_2 - 4)n^2}{16^2} \geq \frac{9n^2}{16^2}$$

iii.  $j = 3$ : Αν το τεταρτημόριο με λιγότερα από 3 μονοπάτια, περιέχει ακριβώς 2 τότε  $k_1 + k_2 + k_3 = 14$ . Από το Λήμμα 2 το συνολικό πλέγμα που απαιτείται έχει μέγεθος τουλάχιστον:

$$\frac{(k_1 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_2 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_3 - 2)n^2}{16^2} = \frac{8n^2}{16^2} = \frac{n^2}{32}$$

Αλλιώς θα έχουμε ότι  $k_1 + k_2 + k_3 \geq 15$  και αφού  $k_i < 10$   $i = 1, 2, 3$  εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα 2 παίρνουμε ότι απαιτείται πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον:

$$\frac{(k_1 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_2 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_3 - 2)n^2}{16^2} \geq \frac{9n^2}{16^2}$$

iv.  $j = 4$ : Προφανώς  $k_i \leq 10, i = 1, 2, 3, 4$  συνεπώς με εφαρμογή του Λήμματος 2,

το συνολικό πλέγμα που απαιτείται έχει μέγεθος τουλάχιστον:

$$\frac{(k_1 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_2 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_3 - 2)n^2}{16^2} + \frac{(k_4 - 2)n^2}{16^2} = \frac{n^2}{32}$$

□

# Κεφάλαιο 3

## Disk-link Απεικονίσεις

---

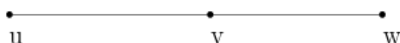
Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εισάγουμε αρχικά την έννοια των disk-link απεικονίσεων. Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς μπορούμε να τροποποιήσουμε έναν αλγόριθμο των Οικονομου, Symvonis, ο οποίος δοθέντος ενός δέντρου με  $n$  κόμβους, παράγει μια μονότονη απεικόνιση του σε πλέγμα μεγέθους  $n \times n$ . Ο αλγόριθμος αυτός θα τροποποιηθεί, ώστε η απεικόνιση που παράγει να είναι επιπλέον disk-link και αυτό θα γίνεται σε πλέγμα μεγέθους  $3n \times 3n$ . Έπειτα θα επεκτείνουμε έναν αλγόριθμο των de Fraysseix, Pach και Pollack, ώστε να δείξουμε ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει μια disk-link απεικόνιση χωρίς τομές σε πλέγμα μεγέθους  $3n - 7 \times \lceil \frac{3n-7}{2} \rceil$ .

### 3.1 Εισαγωγικά

Όταν οπτικοποιούμε ένα γράφημα, είναι λογικό ότι μια από τις πρώτες προϋποθέσεις που πρέπει να θέσουμε, είναι να μπορούμε να αναγνωρίσουμε για ποιο γράφημα πρόκειται χωρίς να υπάρχουν ασάφειες ή αμφισημίες. Δύο περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να δημιουργηθεί αμφισημία είναι όταν κάποια ακμή τέμνει κόμβους εκτός των άκρων της ή όταν μια ακμή περνάει ακριβώς πάνω από κάποια άλλη (βλ. Σχήμα 3.1). Έτσι προκειμένου να αποτραπεί η εμφάνιση των ανωτέρω ασαφειών, σχεδόν σε όλα τα είδη απεικονίσεων θέτονται αντίστοιχοι περιορισμοί.

Τυπικά απαιτούμε το ευθύγραμμο τμήμα  $\overline{p(u)p(v)}$  που αντιστοιχεί σε μια ακμή  $(u, v) \in E(G)$  να μην περιέχει κανένα σημείο  $p(w)$ , για  $w \in V(G)$ . Όμως, όπως είναι φυσικό θέλουμε σε μια απεικόνιση να μπορούμε να ξεχωρίζουμε εύκολα «με το μάτι» τους κόμβους. Ως αποτέλεσμα οι κόμβοι δεν αναπαριστώνται ποτέ σημειακά, αλλά ως σχήματα (συνήθως δίσκοι ή ορθογώνια) κάποιου μεγέθους. Το γεγονός αυτό θέτει τον επιπλέον περιορισμό ότι θα πρέπει κάθε ακμή να μην διέρχεται από το εμβαδόν που καταλαμβάνει το σχήμα που αναπαριστά τον κάθε κόμβο. Ο λόγος που τίθεται αυτός ο περιορισμός είναι ώστε η απεικόνιση να είναι πιο ευανάγνωστη και επομένως πιο χρήσιμη για την μετάδοση των πληροφοριών του γραφήματος. Ο τελευταίος περιορισμός μας οδηγεί στο ακόλουθο πρόβλημα:

**Πρόβλημα 1.** Δεδομένου ενός γραφήματος  $G$ , βρες μια απεικόνιση σε πλέγμα  $\Gamma$  του



Σχήμα 3.1: Αν δεν τεθούν περιορισμοί, πώς μπορούμε να ξέρουμε ποιες ακμές έχει αυτό το γράφημα; Περιέχει μόνο την  $(u, w)$ ; Περιέχει τις  $(u, v)$ ,  $(u, w)$ ; Φυσικά με βάση τους περιορισμούς περιέχει τις  $(u, v)$ ,  $(v, w)$ .

$G$  όπου οι κόμβοι αναπαριστώνται ως δίσκοι σταθερής ακτίνας, οι ακμές ως ευθύγραμμα τμήματα μηδενικού πάχους και δεν υπάρχουν τομές μεταξύ ακμών και δίσκων.

Στο πρόβλημα αυτό, επικεντρωνόμαστε σε δίσκους σταθερής ακτίνας, διότι αυτή είναι και η πιο συνηθισμένη απεικόνιση κόμβων στα πιο γνωστά λογισμικά επεξεργασίας γραφημάτων.

## 3.2 Ορισμός και Ιδιότητες

Τις απεικονίσεις που λύνουν το Πρόβλημα 1, τις ονομάζουμε disk-link απεικονίσεις. Πιο τυπικά, αυτές ορίζονται ως εξής: Ορισμός

**Ορισμός 3.1.** Μια *disk-link* απεικόνιση  $\Gamma$  ενός γραφήματος  $G$ , απεικονίζει κάθε κόμβο του  $G$  ως έναν ανοικτό δίσκο ακτίνας  $\rho$  και κάθε ακμή ως ένα μηδενικού πάχους ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα κέντρα των δίσκων που αντιστοιχούν στα άκρα της, έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

- i. το κέντρο κάθε δίσκου βρίσκεται σε ακέραιες συντεταγμένες,
- ii. δεν υπάρχουν δύο δίσκοι που τέμνονται και
- iii. δεν υπάρχουν τομές ανάμεσα σε ακμές και δίσκους (εκτός από τα άκρα των ακμών).

Για απλότητα υποθέτουμε ότι  $\rho = \frac{1}{2}$ , αν και τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε ισχύουν για κάθε ακτίνα (έως μια πολλαπλασιαστική σταθερά). Τώρα παρουσιάζουμε μια ιδιότητα, μέσω της οποίας μπορούμε να μετασχηματίσουμε μια απεικόνιση σε πλέγμα σε μια disk-link απεικόνιση. Για μια ακμή  $(u, v) \in E(G)$ , με άκρα τα  $(x_u, y_u)$ ,  $(x_v, y_v)$  θα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:  $\sigma_x(u, v) = |x_u - x_v|$  και  $\sigma_y(u, v) = |y_u - y_v|$ .

**Λήμμα 3.3.** Έστω  $\Gamma$  μια απεικόνιση σε πλέγμα ενός γραφήματος  $G$  και  $(u, v)$  μια ακμή της  $\Gamma$  με  $\sigma_x(u, v) = X$  και  $\sigma_y(u, v) = Y$ . Έστω  $\Gamma'$  η απεικόνιση που προκύπτει αν μεταφέρουμε κάθε κόμβο  $v$  με συντεταγμένες  $(x_v, y_v)$  στην  $\Gamma$ , στο σημείο  $(x_v \cdot \phi_X, y_v \cdot \phi_Y)$ , όπου  $\phi_X$  και  $\phi_Y$  είναι ακέραιοι με  $\phi_X \geq 2Y$  και  $\phi_Y \geq 2X$ . Τότε, στη  $\Gamma'$  η μικρότερη απόσταση μεταξύ ενός κόμβου και της ακμής που αναπαριστά την  $(u, v)$  είναι τουλάχιστον  $\rho = \frac{1}{2}$ .

Η απόδειξη αυτού του λήμματος μπορεί να βρεθεί στο [11]. Άμεσα από το Λήμμα 3.3 προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 3.4.** Ένα γράφημα που έχει μια απεικόνιση σε πλέγμα μεγέθους  $W \times H$ , έχει μια *disk-link* απεικόνιση σε πλέγμα μεγέθους  $2WH \times 2WH$ .

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι κάθε επίπεδο γράφημα  $n$  κόμβων έχει μια απεικόνιση σε πλέγμα μεγέθους  $O(n) \times O(n)$ , το ακόλουθο αποτελεί άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 3.4:

**Πρόταση 3.1.** Κάθε επίπεδο γράφημα με  $n$  κόμβους, έχει μια *disk-link* απεικόνιση σε πλέγμα μεγέθους  $O(n^2) \times O(n^2)$ .

Σε επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να βελτιωθεί δραστικά σε  $O(n) \times O(n)$ .

Προς το παρόν στρέφουμε την προσοχή μας στην τροποποίηση ενός αλγορίθμου των Οικονόμου, Συμβώνη ώστε να παράξουμε *disk-link* και μονότονες απεικονίσεις δένδρων με  $n$  κόμβους, σε πλέγμα μεγέθους  $3n \times 3n$ .

### 3.3 Ελαστικά Ξένες Κατά Κλίση Απεικονίσεις Δένδρων

Μια βασική ιδέα στην οποία βασίζεται ο αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί, είναι αυτή των ελαστικά ξένων κατά κλίση απεικονίσεων δένδρων. Οι απεικονίσεις αυτές ορίζονται τυπικά ως εξής:

**Ορισμός 3.2.** Έστω  $T$  ένα ριζωμένο δέντρο και  $\Gamma$  μια απεικόνιση του. Η  $\Gamma$  λέγεται ελαστικά ξένη κατά κλίση αν ισχύουν τα εξής:

1. Για κάθε κόμβο  $u \in T$ , υπάρχουν δύο γωνίες  $a_1(u)$  και  $a_2(u)$ , με  $0 \leq a_1(u) < a_2(u) \leq \pi$  έτσι ώστε για κάθε ακμή  $e$  η οποία ανήκει είτε ανήκει στο  $T_u$  είτε εισέρχεται στο  $u$  από τον πατέρα του, ισχύει πως  $a_1(u) < \text{angle}(e) < a_2(u)$ .
2. Για κάθε ζευγάρι κόμβων  $u, v \in T$  όπου ο  $v$  είναι παιδί του  $u$ , ισχύει πως  $a_1(u) \leq a_1(v) < a_2(v) \leq a_2(u)$ .
3. Για κάθε ζευγάρι κόμβων  $v_1, v_2$  οι οποίοι έχουν ίδιο πατέρα, ισχύει πως  $a_1(v_1) < a_2(v_1) \leq a_1(v_2) < a_2(v_2)$  ή  $a_1(v_2) < a_2(v_2) \leq a_1(v_1) < a_2(v_1)$ .

Ο παραπάνω ορισμός αντιστοιχίζει σε κάθε κόμβο  $u \in T$  ένα εύρος γωνίας, το οποίο θα συμβολίζουμε με  $\langle a_1(u), a_2(u) \rangle$ . Ο λόγος που αυτός ο ορισμός είναι σημαντικός είναι ότι μας δίνει ένα σχετικά απλό εργαλείο, ώστε να δείξουμε ότι μια απεικόνιση είναι μονότονη. Διαισθητικά, η συνθήκη 1. περιορίζει τις κλίσεις των ακμών που ακουμπούν

στον  $u$  εντός ενός συγκεκριμένου εύρους, ενώ οι συνθήκες 2. και 3. εξασφαλίζουν ότι καθώς απομακρυνόμαστε από την ρίζα τα εύρη γωνιών γενικά μικραίνουν και ότι κόμβοι με τον ίδιο πατέρα έχουν εύρη γωνιών τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους. Τα παραπάνω «εξαναγκάζουν» μια τέτοια απεικόνιση να είναι μονότονη και επίπεδη. Έτσι έχουμε το παρακάτω:

**Θεώρημα 3.5.** *Κάθε ελαστικά ξένη κατά κλίση απεικόνιση ενός δένδρου είναι μονότονη και επίπεδη.*

### 3.4 Στρατηγική κατανομής εύρους γωνιών

Έχοντας κατά νου τώρα ότι θέλουμε η απεικόνιση μας να είναι ελαστικά ξένη κατά κλίση, θα πρέπει με κάποιον τρόπο να κατανεύουμε στους κόμβους του δέντρου τα εύρη γωνιών. Η κεντρική ιδέα είναι για κάθε κόμβο  $u$  του δέντρου, να κατανεύουμε στα παιδιά του το εύρος γωνίας του  $u$  αναλογικά με το μέγεθος του υποδένδρου που έχει ως ρίζα το κάθε παιδί. Ο λόγος για αυτό είναι απλός: ένα υποδένδρο με «πολλούς» κόμβους χρειάζεται μεγαλύτερο εύρος γωνίας ώστε να «χωρέσουν» όλες οι ακμές. Έτσι λοιπόν η στρατηγική που ακολουθούμε είναι η εξής:

**Στρατηγική 1.** Έστω  $u$  ένας κόμβος του  $T$  που δεν είναι φύλλο και στον οποίο έχουμε ήδη αναθέσει τις γωνίες  $a_1(u), a_2(u)$  με  $a_1(u) < a_2(u)$ . Έστω  $v_1, v_2, \dots, v_m, m \geq 1$  τα παιδιά του  $u$ . Αναθέτουμε εύρη γωνιών στα παιδιά του  $u$  ως εξής:

$$a_1(v_i) = \begin{cases} a_1(v_i) & \text{αν } i = 1 \\ a_2(v_i) & \text{αν } 1 < i \leq m \end{cases}$$

$$a_2(v_i) = a_1(v_i) + (a_2(u) - a_1(u)) \cdot \frac{|T_{v_i}|}{|T_u| - 1}, 1 \leq i \leq m$$

Η παραπάνω ανάθεση γωνιών στους κόμβους του  $T$ , αποδεικνύεται ότι πράγματι ικανοποιεί τις συνθήκες 1,2,3 για τις ελαστικά ξένες κατα κλίση απεικονίσεις.

### 3.5 Τοποθέτηση σημείων στο πλέγμα

Στη συνέχεια, πρέπει φυσικά να μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα σημεία στο πλέγμα στα οποία θα απεικονιστούν οι κόμβοι του δέντρου. Σε αυτό το σημείο θα αποκλίνουμε από την επιλογή που έγινε στο [10] και η επιλογή θα γίνει έτσι ώστε κάθε κόμβος να έχει απόσταση τουλάχιστον 1 από κάθε ακμή του γραφήματος.

Το παρακάτω λήμμα υποδεικνύει πώς να επιλέξουμε ένα σημείο του πλέγματος ανάμεσα σε δύο ημιευθείες, ώστε αυτό να έχει απόσταση τουλάχιστον 1 από αυτές.



**Λήμμα 3.4.** Έστω δύο γωνίες  $\theta_1, \theta_2$  με  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ . Έστω ακόμη  $P$  το ακόλουθο σημείο του πλέγματος:

$$P = (x, y)$$

όπου

$$y = \left\lceil \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} \right\rceil$$

και

$$x = \left\lceil \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \right\rceil$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Αν  $e$  είναι η ακμή που συνδέει το  $(0,0)$  με το  $P$ , η  $e$  ικανοποιεί τη σχέση  $\theta_1 < \text{slope}(e) < \theta_2$ .

ii. Η απόσταση του  $P$  από τις δύο ημιευθείες που ξεκινάνε από το  $(0,0)$  σε γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$  με τον άξονα  $x$  αντίστοιχα, είναι τουλάχιστον 1.

---

### Αλγόριθμος 1: Μονότονη disk-link Απεικόνιση Δέντρου

---

**Είσοδος:** Ένα δένδρο  $T$  με  $n$  κόμβους με ρίζα την κορυφή  $r$ .

**Έξοδος:** Μια μονότονη και disk-link απεικόνιση του  $T$  σε πλέγμα μεγέθους το πολύ  $3n \times 3n$ .

```

1 Αλγόριθμος ΜονότονηDiskLinkΑπεικόνιση( $T, r$ )
2    $a_1(r) \leftarrow 0, a_2(r) \leftarrow \frac{\pi}{2}$ 
3   ΑνάθεσηΓωνίας( $r, a_1(r), a_2(r)$ )
4   Απεικόνισε το  $r$  στο  $(0, 0)$ 
5   ΑπεικόνισηΚόμβων( $r$ )
1 Διαδικασία ΑνάθεσηΓωνίας( $u, a_1(u), a_2(u)$ )
2   για κάθε παιδί  $v_i$  του  $u$ :
3     Ανάθεσε  $a_1(v_i), a_2(v_i)$  όπως περιγράφηκε στην Στρατηγική 1
4     ΑνάθεσηΓωνίας( $v_i, a_1(v_i), a_2(v_i)$ )
1 Διαδικασία ΑπεικόνισηΚόμβων( $u$ )
2   για κάθε παιδί  $v_i$  του  $u$ :
3     Υπολογισμός ζεύγους  $(x, y)$  όπως στο Λήμμα 3.4 όπου  $\theta_1 \leftarrow a_1(u)$ ,
        $\theta_2 \leftarrow a_2(u)$ 
4     Αν ο  $u$  έχει απεικονιστεί στο  $(u_x, u_y)$  απεικόνισε τον  $v_i$  στο
        $(u_x + x, u_y + y)$ 
5     ΑπεικόνισηΚόμβων( $v_i$ )

```

---

Για να αποδείξουμε το Λήμμα 3.4 θα δείξουμε ότι τα  $x, y$  ικανοποιούν τις ακόλουθες ανισότητες:

**Λήμμα 3.5.** Για τα  $x, y$  όπως αυτά ορίστηκαν στο Λήμμα 3.4, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 \geq 1 \quad (1)$$

$$x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2 \geq 1 \quad (2)$$

Απόδειξη. Για την (1) έχουμε:

$$y \geq \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} \Rightarrow y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 \geq 1$$

Για την (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} y &\leq \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} + 1 \\ \Rightarrow y \cos \theta_2 + 1 &\leq \cos \theta_2 \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} + \cos \theta_2 + 1 \end{aligned}$$

Έτσι είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

$$\cos \theta_2 \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} + \cos \theta_2 + 1 \leq x \sin \theta_2 \iff$$

$$\iff x \cos \theta_1 \sin \theta_2 - x \sin \theta_1 \cos \theta_2 \geq \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

αλλά φυσικά έχουμε:

$$\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 = \sin (\theta_2 - \theta_1)$$

Έτσι η προηγούμενη γίνεται:

$$x \geq \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin (\theta_2 - \theta_1)}$$

που είναι αληθής. □

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Λήμματος 3.4:

Απόδειξη. Για το i. αρκεί ναδειχθεί ότι:

$$\tan \theta_1 < \frac{y}{x} < \tan \theta_2$$

Όμως η παραπάνω μετασχηματίζεται στις εξής:

$$y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 > 0$$

$$x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2 > 0$$

που προφανώς ισχύουν από το Λήμμα 3.5.

Για το ii., θα αποδείξουμε ότι οι ανισότητες του Λήμματος 3.5, είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε το  $P$  να έχει απόσταση τουλάχιστον 1 από τις δύο ημιευθείες. Στην ακόλουθη ανάλυση θα χρησιμοποιήσουμε το Σχήμα 3.2.

Έστω  $P = (x, y)$ . Έχουμε ότι  $\angle LAK = \angle KPF = \theta_1$  και  $\angle LAJ = \angle EPJ = \theta_2$  ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών. Επομένως

$$\cos \theta_2 = \frac{|EP|}{|JP|}$$

και άρα

$$|EP| \geq 1 \Leftrightarrow |JP| \cos \theta_2 \geq 1 \Leftrightarrow |JP| \geq \frac{1}{\cos \theta_2}$$

Επίσης

$$\cos \theta_1 = \frac{|PF|}{|PK|}$$

και άρα

$$|PF| \geq 1 \Leftrightarrow |PK| \cos \theta_1 \geq 1 \Leftrightarrow |PK| \geq \frac{1}{\cos \theta_1}$$

Από το σχήμα είναι φανερό ότι:

$$|JL| = |JP| + y \geq \frac{1}{\cos \theta_2} + y \Leftrightarrow x \tan \theta_2 \geq \frac{1}{\cos \theta_2} + y \Leftrightarrow x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2 \geq 1$$

Έτσι έχουμε δείξει ότι:

$$|PE| \geq 1 \Leftrightarrow |JL| \geq \frac{1}{\cos \theta_2} \Leftrightarrow x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2 \geq 1$$

Όμοια έχουμε ότι:

$$y = |PK| + |KL| \geq \frac{1}{\cos \theta_1} + |KL| = \frac{1}{\cos \theta_1} + x \tan \theta_1 \Leftrightarrow y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 \geq 1$$

Έτσι έχουμε επίσης δείξει ότι:

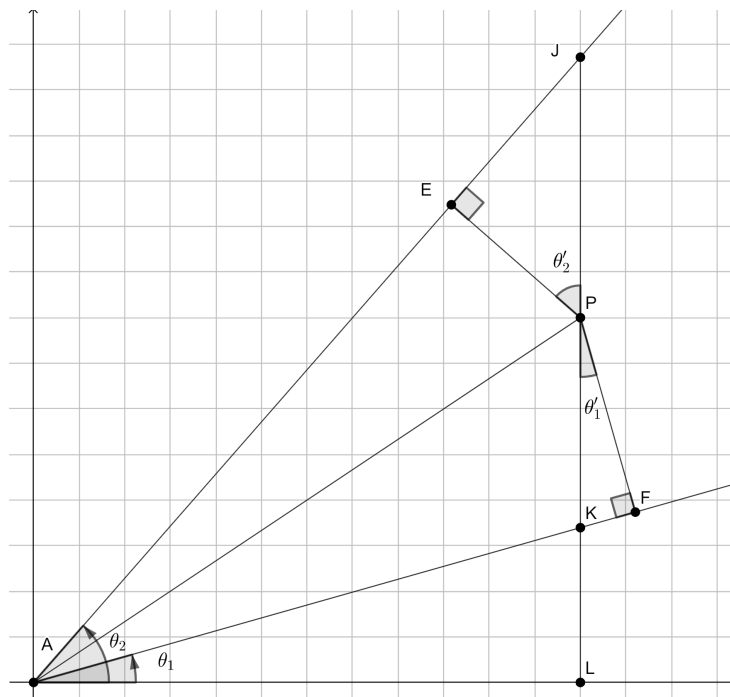
$$|PF| \geq 1 \Leftrightarrow |PK| \geq \frac{1}{\cos \theta_1} \Leftrightarrow y \cos \theta_1 - x \sin \theta_1 \geq 1$$

και η απόδειξη για το Λήμμα 3.4 έχει ολοκληρωθεί.  $\square$

### 3.6 Το μέγεθος του απαιτούμενου πλέγματος

Θα θέλαμε τώρα να αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα της μορφής  $\max(x, y) \leq \frac{c\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$  για κάποια σταθερά  $c \in \mathbb{R}$ , ώστε να βγάλουμε συμπεράσματα για το μέγεθος του απαιτούμενου πλέγματος.

Πράγματι, ισχύει το ακόλουθο:



Σχήμα 3.2: Λήμμα 3.4 ii.

**Λήμμα 3.6.**

$$\max(x, y) \leq \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι:

$$x \leq \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Αρκεί να δειχθεί ότι:

$$\frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} + 1 \leq \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \Leftrightarrow$$

$$(\theta_2 - \theta_1) \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq \frac{3\pi}{2} - (\theta_2 - \theta_1)$$

Τώρα, επειδή

$$\frac{3\pi}{2} - (\theta_2 - \theta_1) \geq \pi$$

αρκεί να δειχθεί ότι:

$$(\theta_2 - \theta_1) \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq \pi \quad (1)$$

Για την απόδειξη της (1) θα χρειαστούμε τις ακόλουθες δύο ανισότητες:

$$(\theta_2 - \theta_1) \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq 2 \quad (2)$$

$$(\theta_2 - \theta_1) \frac{\cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq 1 \quad (3)$$

Αυτές αποδεικνύονται ως εξής:

Από το γράφημα της συνάρτησης  $f(x) = \cos x$  στο  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (η  $f(x)$  είναι κοίλη), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sin u &= \int_0^u \cos u \geq \frac{u(1 + \cos u)}{2}, \quad \forall u \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \\ \sin(\theta_2 - \theta_1) &\geq \frac{(\theta_2 - \theta_1)(1 + \cos(\theta_2 - \theta_1))}{2} \end{aligned}$$

Έτσι για την (2) έχουμε:

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) \geq \frac{(\theta_2 - \theta_1)(1 + \cos(\theta_2 - \theta_1))}{2} \geq \frac{(\theta_2 - \theta_1)(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)}{2}$$

ενώ για την (3):

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) \geq \frac{(\theta_2 - \theta_1)(1 + \cos(\theta_2 - \theta_1))}{2} \geq \frac{(\theta_2 - \theta_1)(\cos \theta_2 + \cos \theta_2)}{2} = (\theta_2 - \theta_1) \cos \theta_2$$

Ως αποτέλεσμα, για την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (\theta_2 - \theta_1) \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} &\leq (\theta_2 - \theta_1) \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq \\ &\leq (\theta_2 - \theta_1) \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} + (\theta_2 - \theta_1) \frac{\cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq 3 < \pi \end{aligned}$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι:

$$y \leq \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Για την παραπάνω, έχουμε βρει μια σχετικά περίπλοκη απόδειξη, η οποία αποτελείται από τα εξής 4 βήματα:

Βήμα 1. Αποδεικνύουμε ότι αρκεί να δείξουμε την:

$$\frac{y-x}{\cos x} \left( 2 + \sin x \frac{\cos x + \cos y + \cos x \cos y}{\sin(y-x)} \right) \leq \pi$$

Βήμα 2. Δείχνουμε την εξής ανισότητα:

$$u \leq \frac{\pi \sin u}{2 + \cos u} \quad \forall u \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Βήμα 3. Για  $u = y - x$ , η παραπάνω δίνει:

$$y - x \leq \frac{\pi \sin(y - x)}{2 + \cos(y - x)}$$

οπότε σε συνδυασμό με την ανισότητα του Βήματος 1. είναι φανερό ότι αρκεί να δείξουμε την:

$$\frac{\sin(y - x)}{2 + \cos(y - x)} \frac{1}{\cos x} \left( 2 + \sin x \frac{\cos x + \cos y + \cos x \cos y}{\sin(y - x)} \right) \leq 1$$

Βήμα 4. Δείχνουμε ότι η παραπάνω μετασχηματίζεται στην:

$$[\cos^2 x + (1 - \cos x) \sin x] \cos y + (2 - \sin x)(1 - \sin y) \cos x \geq 0$$

που προφανώς είναι αληθής.

Οι αποδείξεις των παραπάνω βημάτων παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα Α. □

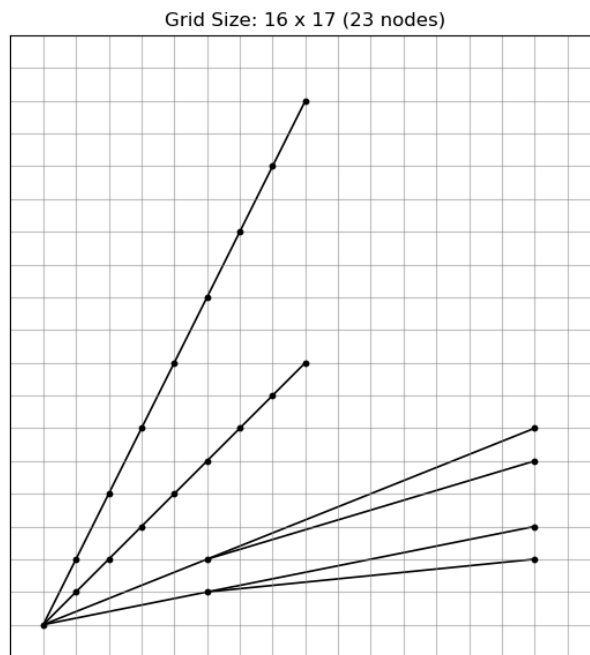
Αφού τώρα έχουμε τροποποιήσει τις επιλογές των σημείων στο πλέγμα και έχουμε αποδείξει το Λήμμα 3.6, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη για το μέγεθος του πλέγματος. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που ακολουθούν και οι Συμβώνης, Οικονόμου, δηλαδή με τα ακόλουθα:

**Λήμμα 3.7.** Έστω ριζωμένο δέντρο  $T$  και  $u$  ένας κόμβος στο  $T$ . Έστω  $\phi_u = a_2(u) - a_1(u)$  το εύρος γωνίας όπως αναθέεται με βάση την Στρατηγική 1. Τότε το μήκος του πλέγματος που παράγεται από τον Αλγόριθμο 1 για την απεικόνιση του  $T_u$  φράσσεται από την ποσότητα:

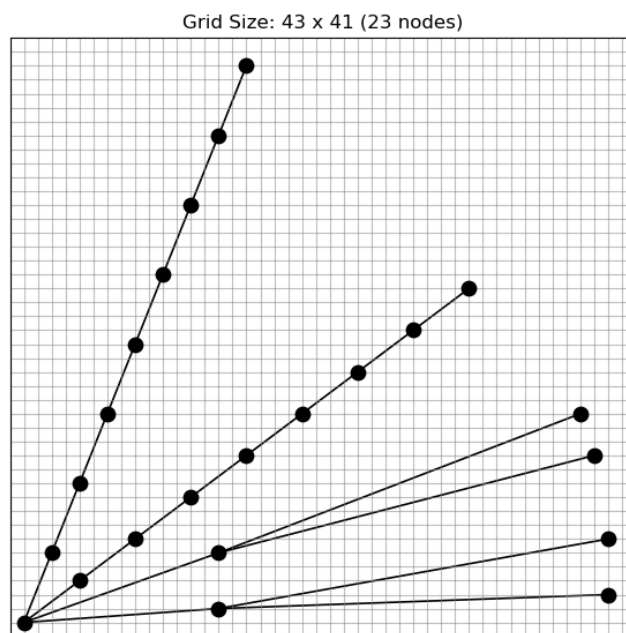
$$(|T_u| - 1) \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_u}$$

**Θεώρημα 3.6.** Δεδομένου ενός ριζωμένου δένδρου  $T$  με  $n$  κόμβους, ο Αλγόριθμος 1 παράγει μια μονότονη disk-link απεικόνιση χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα μεγέθους το πολύ  $3n \times 3n$ .

Στα σχήματα που ακολουθούν, συγκρίνουμε τις απεικονίσεις που παράγει ο αλγόριθμος των Οικονόμου, Συμβώνη με τις απεικονίσεις που παράγει ο Αλγόριθμος 1 για ίδιες εισόδους. Παρατηρήστε ότι στο Σχήμα 3.4 (α') είναι εμφανές ότι η απεικόνιση που παράγεται δεν είναι disk-link, ενώ στο Σχήμα 3.4 (β') είναι.

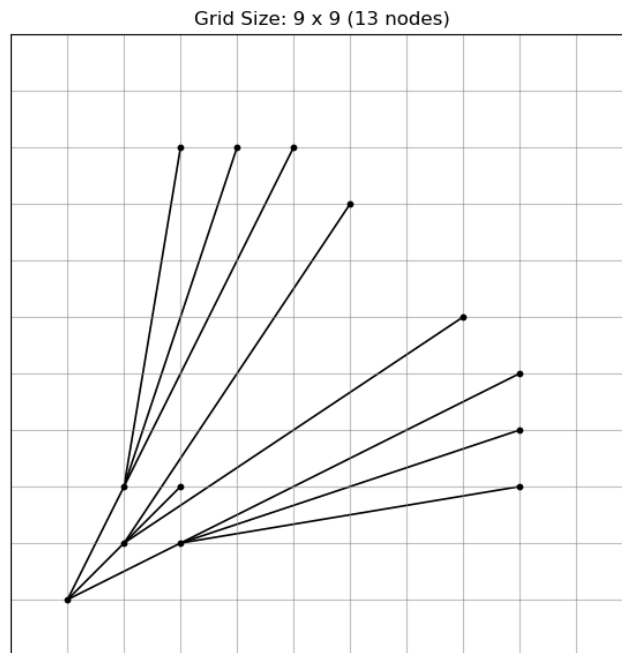


(α')

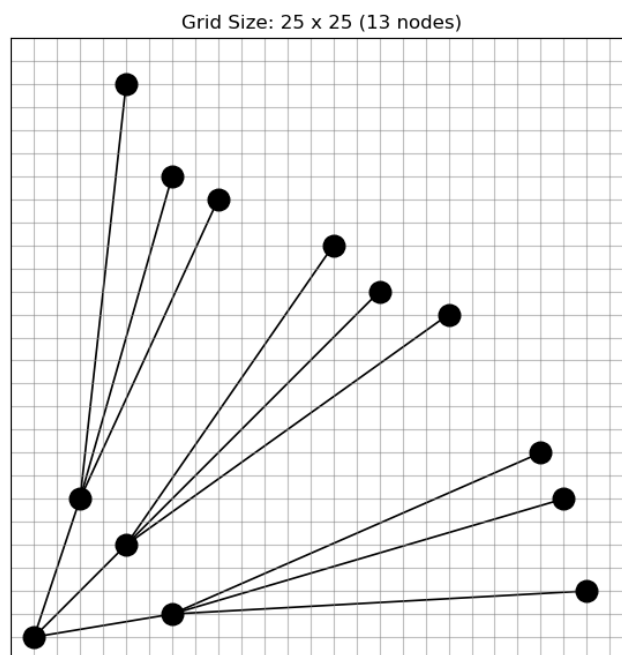


(β')

Σχήμα 3.3: Σύγκριση των εξόδων των δύο αλγορίθμων για το πλήρες δυαδικό δένδρο δύο επιπέδων και δύο μονοπάτια (σύνολο 23 κόμβοι).



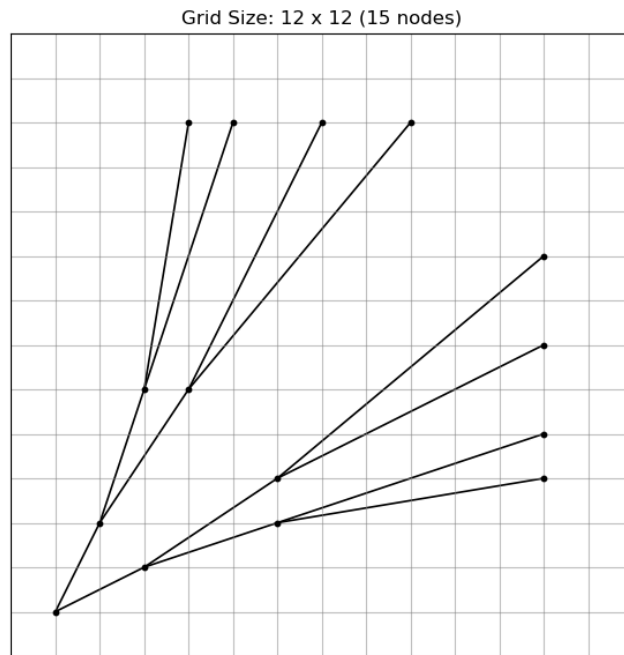
(α')



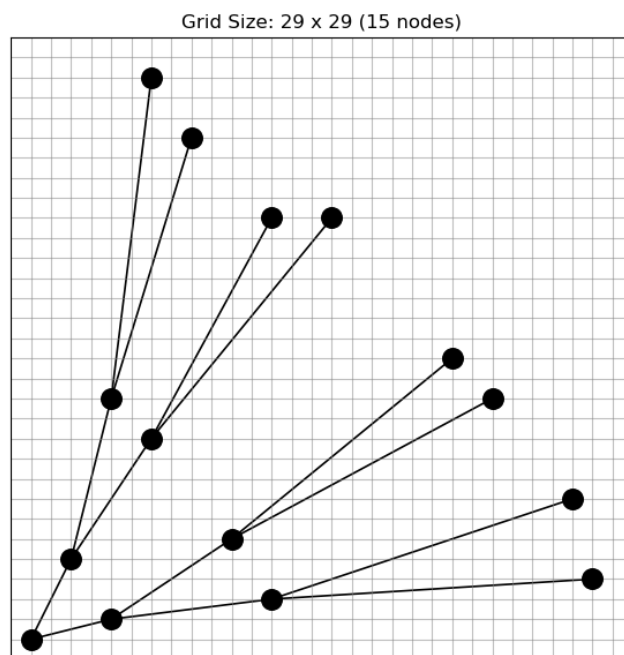
(β')

Σχήμα 3.4: Σύγκριση των εξόδων των δύο αλγορίθμων για το πλήρες τριαδικό δένδρο τριών επιπέδων (σύνολο 13 κόμβοι).





(α')



(β')

Σχήμα 3.5: Σύγκριση των εξόδων των δύο αλγορίθμων για το πλήρες δυαδικό δένδρο τριών επιπέδων (σύνολο 15 κόμβοι).

Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στην παρουσίαση του αλγορίθμου των de Fraysseix, Pach, και Pollack ο οποίος δοθέντος ενός μέγιστου επίπεδου γραφήματος με  $n$  κόμβους και μιας κανονικής διάταξης για αυτό, παράγει μια απεικόνιση του σε πλέγμα μεγέθους  $O(n) \times O(n)$  [12].

### 3.7 Κανονική Διάταξη

Η ιδέα της κανονικής διάταξης εισήχθη από τους de Fraysseix et al. και αποτελεί κρίσιμης σημασίας κομμάτι του αλγορίθμου τους. Δοθέντος ενός μέγιστου επίπεδου γραφήματος  $G = (V, E)$  με  $n$  κόμβους, η κανονική διάταξη αποτελεί μια διάταξη των κόμβων του  $G$ , η οποία ουσιαστικά μας επιτρέπει να «χτίσουμε» το γράφημα μας εισάγοντας σταδιακά τους κόμβους του έτσι ώστε σε κάθε στάδιο του «χτισίματος» οι εσωτερικές όψεις του γραφήματος να είναι τρίγωνα και επιπλέον ο επόμενος κόμβος που θα εισαχθεί να γειτνιάζει μόνο με κόμβους που ακουμπούν στην εξωτερική όψη του γραφήματος.

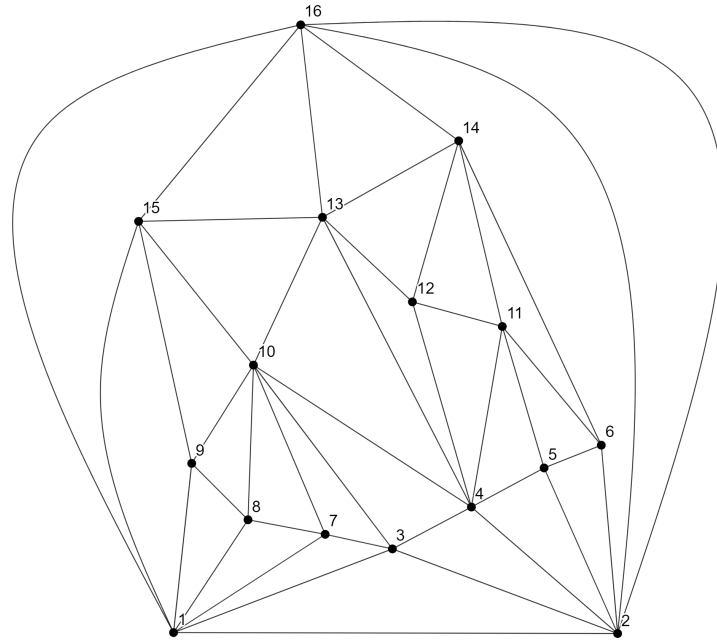
Για να δώσουμε έναν πιο τυπικό ορισμό θα χρειαστούμε τα ακόλουθα. Για έναν κύκλο  $C$  σε ένα γράφημα, μια ακμή μεταξύ δύο μη διαδοχικών κόμβων του  $C$  ονομάζεται *χορδή* του  $C$ . Για ένα 2–συνεκτικό επίπεδο γράφημα  $G$ , συμβολίζουμε με  $C_0(G)$  τον εξωτερικό κύκλο του  $G$ , δηλαδή τον κύκλο που σχηματίζεται από τους κόμβους στην εξωτερική όψη του  $G$ . Ένας κόμβος στο  $C_0(G)$  θα λέγεται *εξωτερικός κόμβος* και μια ακμή στο  $C_0(G)$  θα λέγεται *εξωτερική ακμή*. Ένα επίπεδο γράφημα θα το λέμε *εσωτερικά τριγωνοποιημένο* αν κάθε εσωτερική του όψη είναι τρίγωνο.

Έστω τώρα  $G$  ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα με  $n \geq 3$  κόμβους. Το  $G$  είναι μέγιστο επίπεδο άρα υπάρχουν ακριβώς 3 κόμβοι στο  $C_0(G)$ . Συμβολίζουμε αυτούς τους κόμβους με  $v_1, v_2, v_3$  και υποθέτουμε ότι εμφανίζονται δεξιόστροφα με αυτή τη σειρά. Έστω  $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  μια διάταξη των κόμβων του  $G$ . Για  $k \in \mathbb{N}, 3 \leq k \leq n$ , θα συμβολίζουμε με  $G_k$  το επίπεδο υπογράφημα του  $G$ , επαγόμενο από τους κόμβους  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Τότε  $G_n = G$ . Θα λέμε την  $\pi$  *κανονική διάταξη* του  $G$  αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες για κάθε  $k, 3 \leq k \leq n$ :

1. το  $G_k$  είναι 2–συνεκτικό και εσωτερικώς τριγωνοποιημένο,
2. η  $(v_1, v_2)$  είναι εξωτερική ακμή του  $G_k$  και
3. αν  $k+1 \leq n$ , τότε ο κόμβος  $v_{k+1}$  βρίσκεται στην εξωτερική όψη του  $G_k$  και όλοι οι γείτονες του  $v_{k+1}$  εμφανίζονται στον κύκλο  $C_0(G_k)$  διαδοχικά.

Μπορούμε πάντα να βρούμε μια διάταξη ώστε να ικανοποιούνται τα παραπάνω για το  $G$ . Έτσι έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 3.8.** *Κάθε μέγιστο επίπεδο γράφημα  $G$  έχει μια κανονική διάταξη.*



Σχήμα 3.6: Κανονική διάταξη ενός μέγιστου επίπεδου γραφήματος με 16 κόμβους.

## 3.8 Βασικές Ιδέες του Αλγορίθμου

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο το πρόβλημα που έλυσε ο αλγόριθμος των de Fraysseix et al.:

**Πρόβλημα 2.** Δεδομένου ενός μέγιστου επίπεδου γραφήματος  $G$  και μιας κανονικής διάταξης για αυτό, να βρεθεί επίπεδη απεικόνιση  $\Gamma$  του  $G$  σε πλέγμα μεγέθους  $O(n) \times O(n)$ .

Ο αλγόριθμος που λύνει αυτό το πρόβλημα βασίζεται στην διαδοχική εισαγωγή των κόμβων του  $G$  σε κανονική διάταξη στο πλέγμα, μαζί με μια μέθοδο μετατόπισης των κόμβων που έχουν εισαχθεί σε κάθε βήμα.

Ορίζουμε τώρα την απόσταση Manhattan ανάμεσα σε δύο σημεία του πλέγματος:

**Ορισμός 3.3.** Για δύο σημεία του πλέγματος  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  ορίζουμε την απόσταση Manhattan ανάμεσα στα  $P_1, P_2$  ως την ποσότητα:

$$\text{manhattan}(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Όταν η απόσταση Manhattan μεταξύ δύο σημείων είναι άρτια τότε αποδεικνύεται το ακόλουθο:

**Λήμμα 3.9.** Έστω  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  (με  $x_1 < x_2$ ) δύο σημεία με άρτια απόσταση Manhattan. Τότε η ευθεία με κλίση  $+1$  που διέρχεται από το  $P_1$  και η ευθεία με κλίση  $-1$  που διέρχεται από το  $P_2$  τέμνονται στο ακόλουθο σημείο του πλέγματος

(θα το συμβολίζουμε με  $\mu(P_1, P_2)$ ):

$$\mu(P_1, P_2) = \left( \frac{1}{2}(x_1 - y_1 + x_2 + y_2), \frac{1}{2}(-x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \right)$$

Στην περιγραφή που ακολουθεί θα συμβολίζουμε με  $P(v) = (x(v), y(v))$  την τωρινή θέση του κόμβου  $v$  στο πλέγμα. Επιπλέον, όπως έχουμε πει οι κόμβοι θα εισαχθούν σε μια κανονική διάταξη  $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Για κάποιο  $v_k$ , θα συμβολίζουμε με  $w_p, w_{p+1}, \dots, w_q$  τους γείτονες του  $v_k$  στον κύκλο  $C_0(G_{k-1})$  και θα λέμε ότι ο  $v_k$  καλύπτει τους κόμβους  $w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{q-1}$ . Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τα βήματα του αλγορίθμου.

---

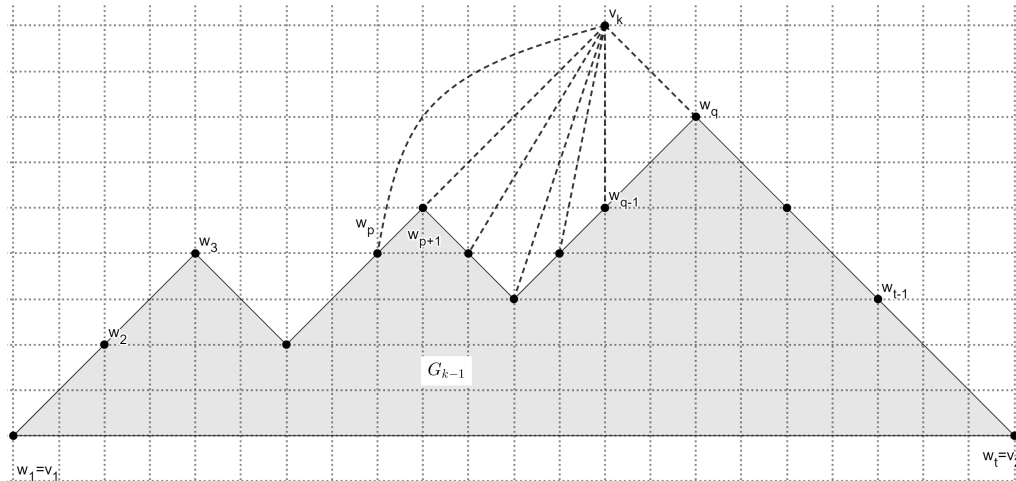
### Αλγόριθμος 2: Επίπεδη Απεικόνιση

---

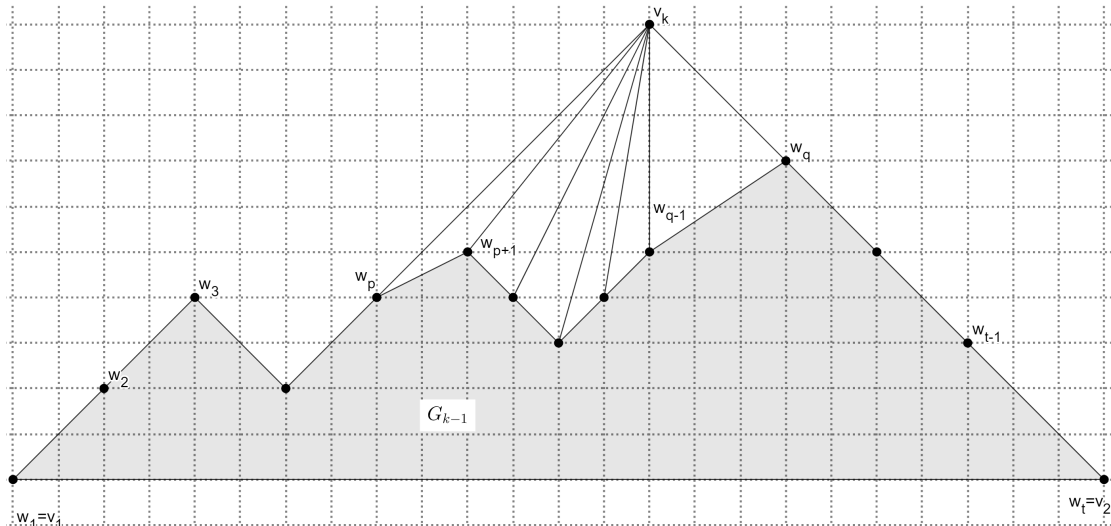
**Είσοδος:** Ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα  $G$  και μια κανονική του διάταξη  $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

**Έξοδος:** Μια ευθύγραμμη και επίπεδη απεικόνιση του  $G$  σε πλέγμα μεγέθους  $(2n - 4) \times (n - 2)$ .

- 1  $P(v_1) = (0, 0), P(v_2) = (2, 0), P(v_3) = (1, 1)$  και  $L(v_i) = \{v_i\}, i = 1, 2, 3$
  - 2 για  $k = 4$  έως  $n$  κάνε:
  - 3     θέσε  $C_0(G_{k-1}) = w_1, w_2, \dots, w_t$ , όπου  $w_1 = v_1, w_t = v_2$
  - 4     θέσε  $N(v_k) = \{w_p, w_{p+1}, \dots, w_q\}$  (με σειρά εμφάνισης από αριστερά προς δεξιά στο  $C_0(G_{k-1})$ )
  - 5     για κάθε  $v \in \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$  θέσε  $x(v) = x(v) + 1$
  - 6     για κάθε  $v \in \bigcup_{i=q}^t L(w_i)$  θέσε  $x(v) = x(v) + 2$
  - 7     θέσε  $P(v_k) = \mu(w_p, w_q)$
  - 8     θέσε  $L(v_k) = \{v_k\} \cup \left( \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i) \right)$
-



Σχήμα 3.7: Η απεικόνιση του  $G_{k-1}$  και ο κόμβος  $v_k$  που πρόκειται να εισαχθεί. Παρατηρήστε ότι είναι απαραίτητη η μετακίνηση των γειτόνων του ώστε να μπορεί να εισαχθεί στο σημείο  $\mu(w_p, w_q)$ .



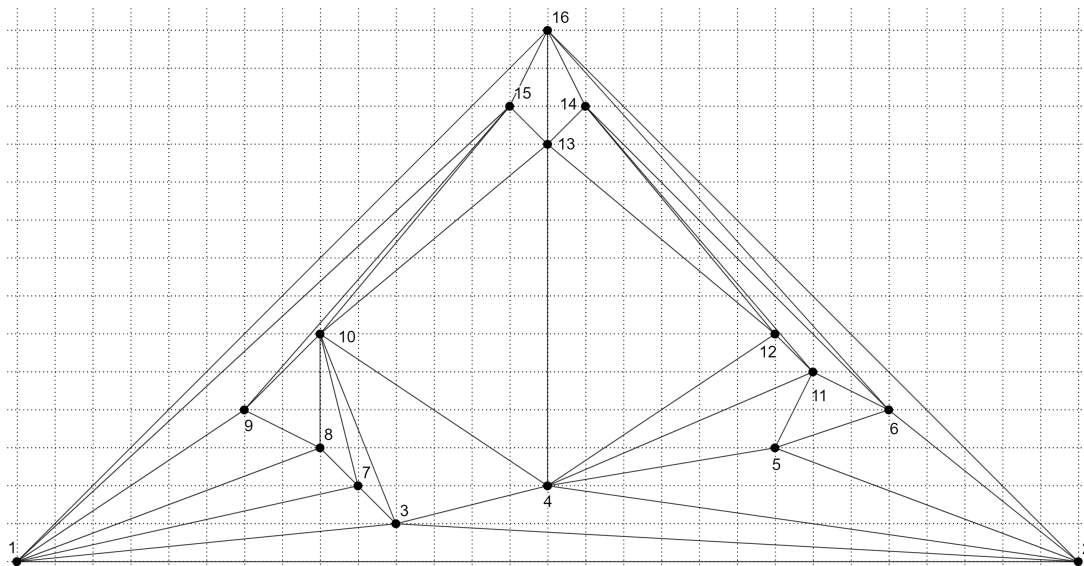
Σχήμα 3.8: Η απεικόνιση μετά την εισαγωγή του  $v_k$ .

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για κάθε  $k, 3 \leq k \leq n$  η απεικόνιση του  $G_k$  από τον παραπάνω αλγόριθμο ικανοποιεί τα εξής:

1.  $P(v_1) = (0, 0)$  και  $P(v_2) = (2k - 4, 0)$ ,
2.  $x(w_1) < x(w_2) < \dots < x(w_t)$ , όπου  $C_0(G_{k-1}) = w_1, w_2, \dots, w_t$ ,  $w_1 = v_1, w_2 = v_2$  και
3. κάθε ακμή  $(w_i, w_{i+1})$  στον  $C_0(G_{k-1})$  απεικονίζεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση  $+1$  ή  $-1$ .

Τα παραπάνω παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.7 και στο Σχήμα 3.8.

Από την 1. έχουμε ότι στο  $G_n = G$  ισχύει  $P(v_2) = (2n - 4, 0)$  και επίσης από τον αλγόριθμο βλέπουμε ότι  $P(v_n) = \mu(v_1, v_2) = (n - 2, n - 2)$ . Έτσι η απεικόνιση του  $G$  γίνεται σε πλέγμα μεγέθους  $(n - 2) \times (n - 2)$ .



Σχήμα 3.9: Η έξοδος του Αλγορίθμου 2 για το γράφημα στο Σχήμα 3.6

### 3.9 Επέκταση σε disk-link απεικονίσεις

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πώς να τροποποιήσουμε τον προηγούμενο αλγόριθμο ώστε να λάβουμε disk-link απεικόνιση για οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα σε πλέγμα μεγέθους  $O(n) \times O(n)$ .

Ο σκελετός του αλγορίθμου δεν θα αλλάξει. Πάλι θεωρούμε ότι έχουμε ως είσοδο ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα  $G$  και μια κανονική διάταξη  $\pi$  για αυτό. Θα θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι του  $G$  απεικονίζονται ως δίσκοι ακτίνας  $\rho = 0.5$ . Το σημείο στο οποίο θα τροποποιηθεί ο αλγόριθμος είναι στο κατά πόσο θα μετατοπίζονται η κόμβοι του  $G_{k-1}$  κατά την εισαγωγή του κόμβου  $v_k$ . Διαισθητικά θέλουμε να αυξήσουμε τις αποστάσεις μεταξύ των γειτόνων του  $v_k$  ώστε τα νέα τρίγωνα που θα σχηματιστούν να έχουν μέγεθος αρκετό ώστε να χωράνε και οι δίσκοι γύρω από τους κόμβους. Αυτό το επιτυγχάνουμε με τον αλγόριθμο που ακολουθεί:

**Αλγόριθμος 3:** Επίπεδη Disk-Link Απεικόνιση

**Είσοδος:** Ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα  $G$  και μια κανονική του διάταξη  $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

**Έξοδος:** Μια ευθύγραμμη disk-link και επίπεδη απεικόνιση του  $G$  σε πλέγμα μεγέθους  $(2n - 4) \times (n - 2)$ .

- 1  $P(v_1) = (0, 0), P(v_2) = (2, 0), P(v_3) = (1, 1)$  και  $L(v_i) = \{v_i\}, i = 1, 2, 3$
- 2 για  $k = 4$  έως  $n$  κάνε:
- 3     θέσε  $C_0(G_{k-1}) = w_1, w_2, \dots, w_t$ , όπου  $w_1 = v_1, w_t = v_2$
- 4     θέσε  $N(v_k) = \{w_p, w_{p+1}, \dots, w_q\}$  (με σειρά εμφάνισης από αριστερά προς δεξιά στο  $C_0(G_{k-1})$ )
- 5     για κάθε  $v \in \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$  θέσε  $x(v) = x(v) + i - p$
- 6     για κάθε  $v \in \bigcup_{i=q}^t L(w_i)$  θέσε  $x(v) = x(v) + F(q - 1 - p)$
- 7     θέσε  $P(v_k) = \mu(w_p, w_q)$
- 8     θέσε  $L(v_k) = \{v_k\} \cup \left( \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i) \right)$

Η συνάρτηση  $F(u)$  στον Αλγόριθμο 3 ορίζεται ως:

$$F(u) = \begin{cases} u + 1, & \text{αν } u \text{ περιττός} \\ u + 2, & \text{αν } u \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Με απλά λόγια η  $F(u)$  επιστρέφει τον αμέσως μεγαλύτερο άρτιο αριθμό από τον  $u$ . Σημειώνουμε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος συμπίπτει με τον κλασσικό όταν  $q = p + 1$  ή  $q = p + 2$ .

Σημειώνουμε ότι κατά την εισαγωγή του  $v_k, 3 \leq k \leq n$  η απόσταση Manhattan των  $w_p, w_q$  είναι άρτια. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι άρτια και πριν την εκτέλεση των βημάτων 5,6 στον Αλγόριθμο 3, αφού κατά την εκτέλεση αυτών των βημάτων, ο  $w_p$  δεν μετακινείται, ενώ ο  $w_q$  μετακινείται κατά άρτιο μέγεθος. Πριν την εκτέλεση των βημάτων 5,6 έχουμε εκ κατασκευής ότι η απόσταση Manhattan των  $w_i, w_{i+1}$  ( $i = p, p + 1, \dots, q - 1$ ) είναι άρτια. Αυτό σημαίνει ότι οι ποσότητες  $x(w_{i+1}) - x(w_i), y(w_{i+1}) - y(w_i)$  έχουν την ίδια αριτιότητα για  $p \leq i \leq q - 1$ . Έστω χωρίς βλάβη, ότι  $y(w_q) \geq y(w_p)$ . Τότε η απόσταση Manhattan των  $w_p, w_q$  μπορεί να γραφτεί ως:

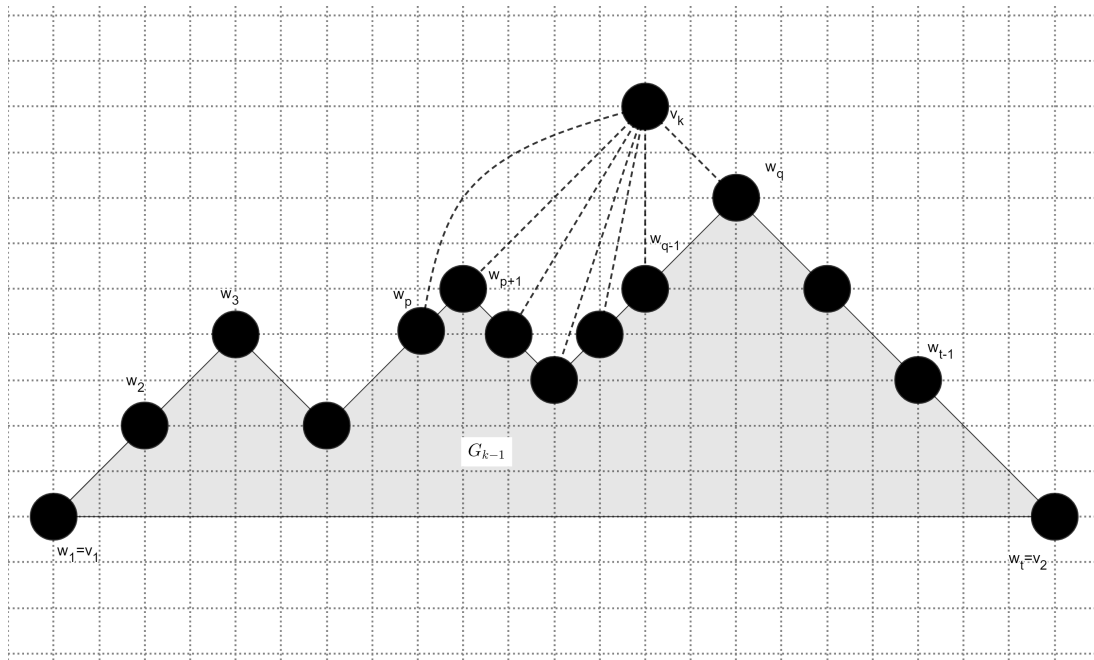
$$\begin{aligned} |x(w_q) - x(w_p)| + |y(w_q) - y(w_p)| &= \sum_{i=p}^{q-1} (x(w_{i+1}) - x(w_i)) + \sum_{i=p}^{q-1} (y(w_{i+1}) - y(w_i)) = \\ &= \sum_{i=p}^{q-1} [(x(w_{i+1}) - x(w_i)) + (y(w_{i+1}) - y(w_i))] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η ποσότητα:

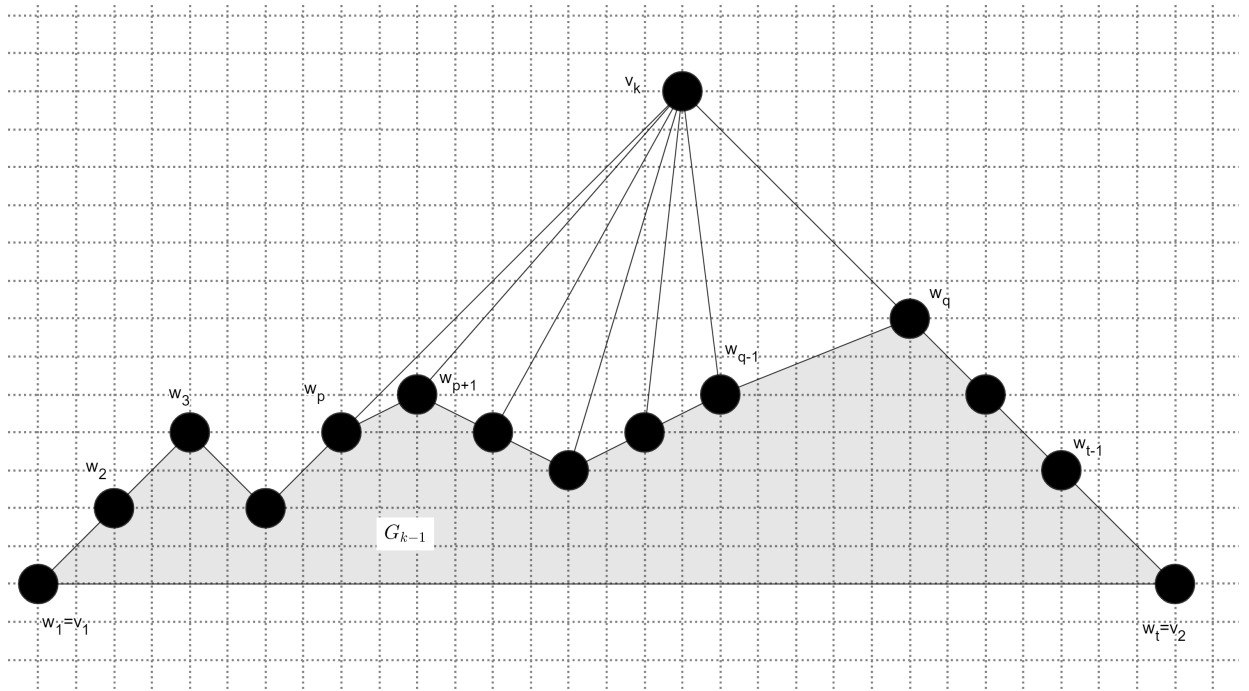
$$(x(w_{i+1}) - x(w_i)) + (y(w_{i+1}) - y(w_i))$$

είναι πάντα άρτια και έτσι έχουμε το αποτέλεσμα.





(α') Η απεικόνιση του  $G_{k-1}$  και ο κόμβος  $v_k$  που πρόκειται να εισαχθεί.

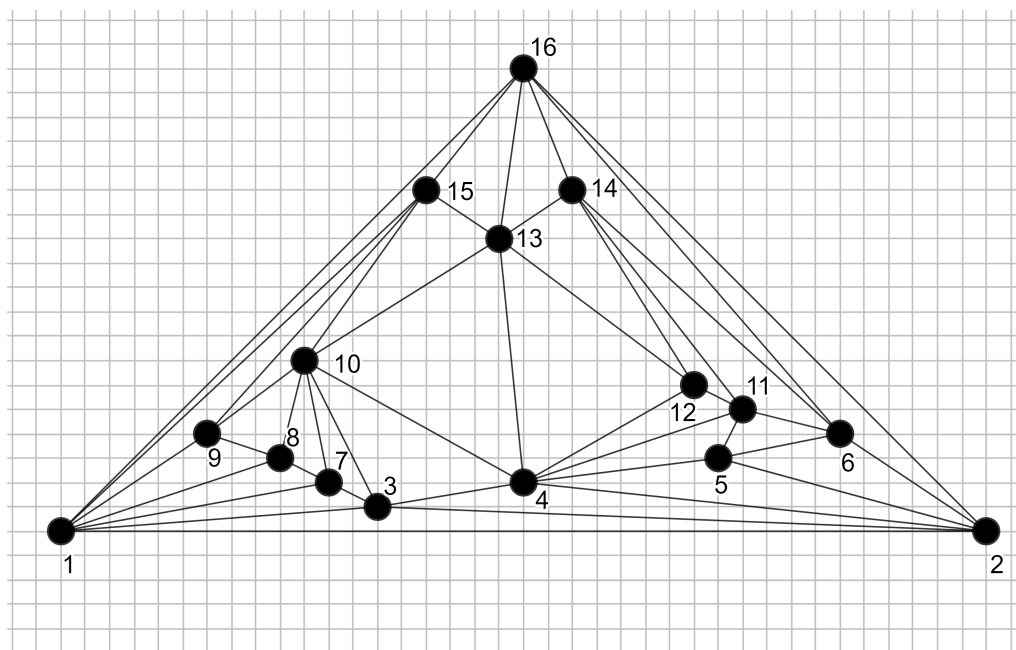


(β') Η απεικόνιση μετά την εισαγωγή του  $v_k$ . Παρατηρήστε ότι έχουμε αφήσει τον χώρο που απαιτείται μεταξύ των κόμβων ώστε να μην υπάρχουν τομές στα νέα τρίγωνα.

Σχήμα 3.10: Παρουσίαση Αλγορίθμου 3.

### 3.10 Ορθότητα

Για να δείξουμε ότι ο Αλγόριθμος 3 παράγει μια επίπεδη disk-link απεικόνιση, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι τα νέα τρίγωνα που σχηματίζονται μετά την προσθήκη κάθε νέου κόμβου δεν έχουν τομές. Κάθε νέο τρίγωνο που σχηματίζεται μετά την προσθήκη



Σχήμα 3.11: Η έξοδος που δίνει ο Αλγόριθμος 3 για το γράφημα στο Σχήμα 3.6

του  $v_k$ , έχει μια τριάδα  $(v_k, w_i, w_{i+1})$ ,  $i = p, p + 1, \dots, q - 1$  σαν κορυφές του. Έστω  $P(v_k) = (x, y)$  και  $P(w_j) = (x_j, y_j)$ . Θα αναφέρουμε τώρα κάποιες χρήσιμες ιδιότητες που έχει κάθε νέο τέτοιο τρίγωνο.

**Ιδιότητα 3.** Σε κάθε τρίγωνο  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$ ,  $p \leq i \leq q - 1$  ισχύει ότι:

$$y > y_i > y_{i+1}$$

ή

$$y > y_{i+1} > y_i$$

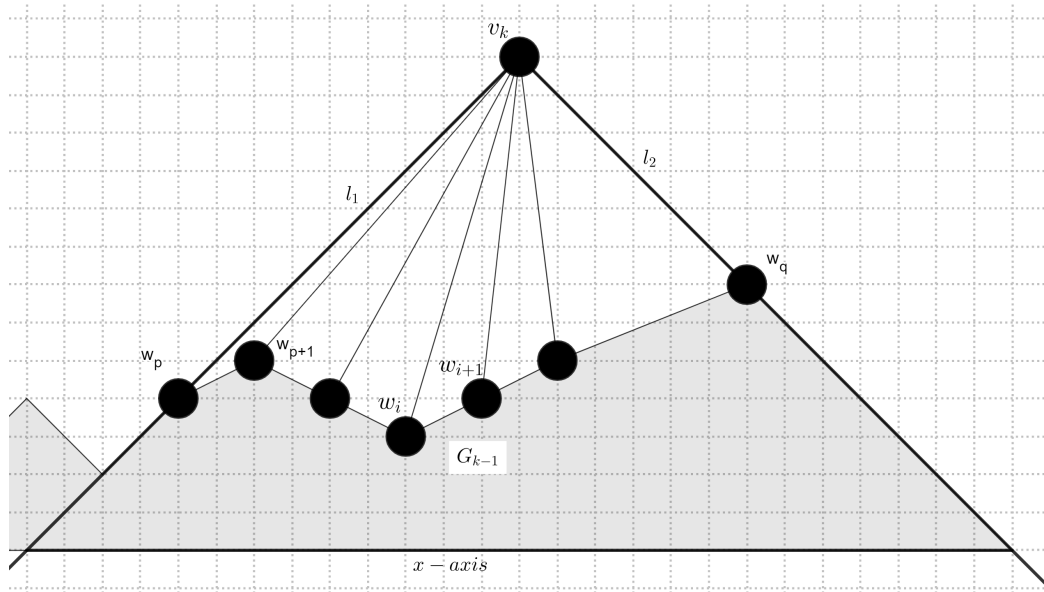
.

*Απόδειξη.* Προφανές αφού εκ κατασκευής κάθε νέος κόμβος που εισάγεται έχει μεγαλύτερη τεταγμένη από τους γείτονες του που είχαν εισαχθεί πριν από αυτόν.  $\square$

**Ιδιότητα 4.** Κάθε νέο τρίγωνο περιέχεται στο χωρίο που ορίζεται από τις ακόλουθες τρεις ευθείες: τον άξονα των  $x$ , την ευθεία  $l_1$  που διέρχεται από τα σημεία  $P(w_p), P(v_k)$  και την ευθεία  $l_2$  που διέρχεται από τα σημεία  $P(w_q), P(v_k)$ . Φυσικά η  $l_1$  έχει κλίση  $+1$  και η  $l_2$  έχει κλίση  $-1$ .

*Απόδειξη.* Προκύπτει επίσης εκ κατασκευής (βλ. Σχήμα 3.12).  $\square$

**Ιδιότητα 5.** Μετά την εκτέλεση των βημάτων 5 και 6, κάθε ακμή  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$ ,  $i = p, p + 1, \dots, q - 1$  έχει κλίση  $a$  με  $-1 < a < 1$ .



Σχήμα 3.12: Παρουσίαση Ιδιότητας 4.

Απόδειξη. Κατα την εκτέλεση των βημάτων 5 και 6, ο κόμβος  $w_{i+1}$  μετακινείται πιο πολύ στα δεξιά από ότι ο κόμβος  $w_i$  και ως αποτέλεσμα, αν η  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$  είχε κλίση  $+1$ , αυτή η κλίση θα μειωθεί (παραμένοντας θετική), ενώ αν η  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$  είχε κλίση  $-1$ , αυτή η κλίση θα αυξηθεί (παραμένοντας αρνητική). Αυτό δείχνει ότι ισχύει η Ιδιότητα 5.  $\square$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες, θα δείξουμε ότι τα νέα τρίγωνα που σχηματίζονται από τον αλγόριθμο δεν έχουν τομές. Αρχικά θα δείξουμε το παρακάτω απλό λήμμα:

**Λήμμα 3.10.** Ο δίσκος γύρω από τον  $v_k$  δεν τέμνει κάποια από τις ακμές  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$ ,  $i = p, p + 1, \dots, q - 1$ .

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το χαμηλότερο σημείο του δίσκου γύρω από τον κόμβο  $v_k$  έχει τεταγμένη  $y - 0.5$ , ενώ το ψηλότερο σημείο της ακμής  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$  έχει τεταγμένη  $\max(y_i, y_{i+1})$  και  $\max(y_i, y_{i+1}) < y - 0.5$  λόγω της Ιδιότητας 3.  $\square$

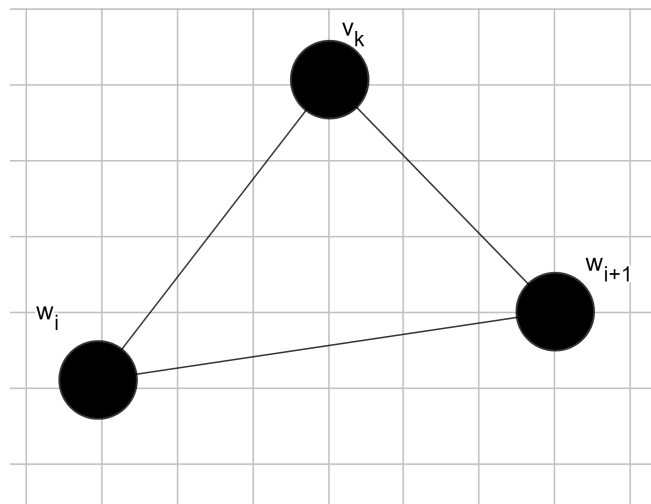
Το Λήμμα 3.10, μας εξασφαλίζει ότι αρκεί να δείξουμε ότι ο δίσκος γύρω από το  $P(w_i)$  δεν τέμνει την ακμή  $(P(v_k), P(w_{i+1}))$  και ότι ο δίσκος γύρω από το  $P(w_{i+1})$  δεν τέμνει την  $(P(v_k), P(w_i))$ . Για τον σκοπό αυτό θα ορίσουμε τώρα τρεις διαφορετικές κατηγορίες τριγώνων που σχηματίζονται από την διαδικασία που περιγράφεται στα βήματα 5,6,7 του Αλγορίθμου 3.

Έστω  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$ ,  $i = p, p + 1, \dots, q - 1$  τα νέα τρίγωνα. Καθένα από αυτά τα τρίγωνα ανήκει ακριβώς σε μία από τις ακόλουθες κατηγορίες:

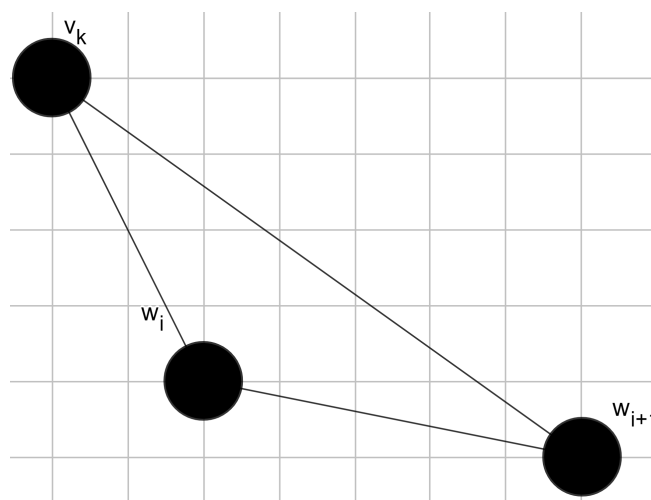
Κατηγορία 1: Τρίγωνα όπου  $x_i < x < x_{i+1}$ .

Κατηγορία 2: Τρίγωνα όπου  $x \leq x_i < x_{i+1}$

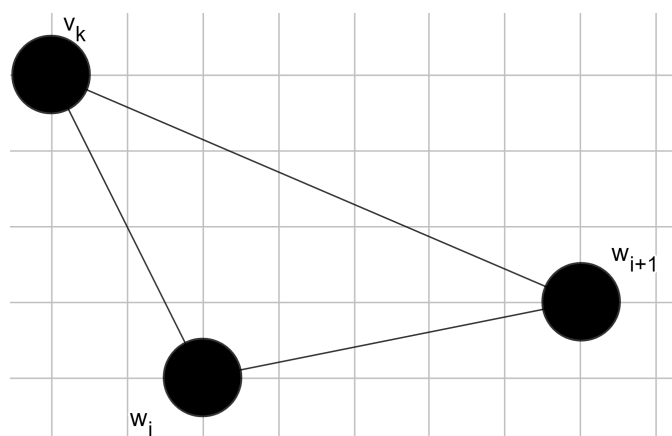
Κατηγορία 3: Τρίγωνα όπου  $x_i < x_{i+1} \leq x$



Σχήμα 3.13: Ένα αντιπροσωπευτικό τρίγωνο στην Κατηγορία 1.



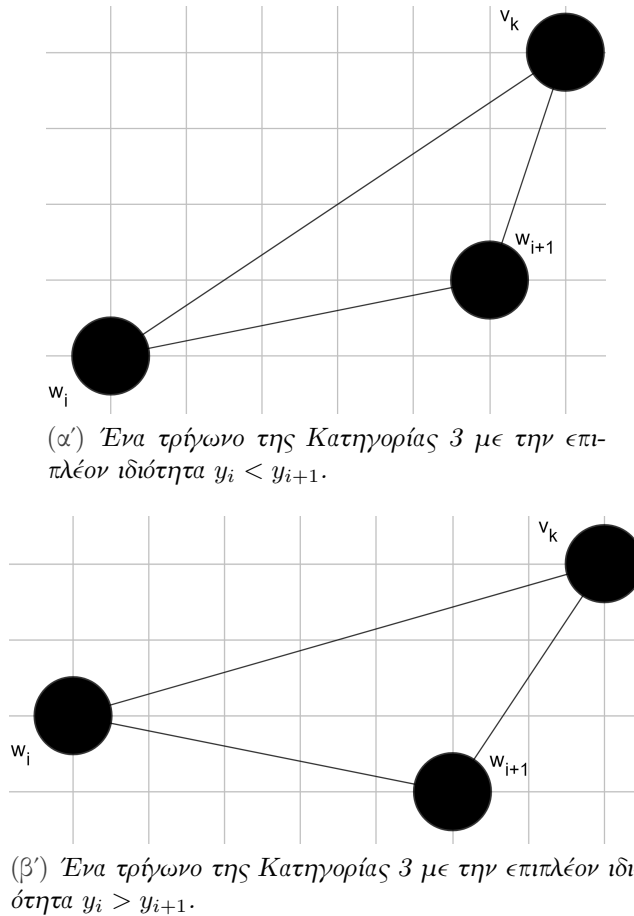
(α) Ένα τρίγωνο της Κατηγορίας 2 με την επιπλέον ιδιότητα  $y_i > y_{i+1}$ .



(β) Ένα τρίγωνο της Κατηγορίας 2 με την επιπλέον ιδιότητα  $y_i < y_{i+1}$ .

Σχήμα 3.14: Πιθανές περιπτώσεις τριγώνων στην Κατηγορία 2.

Για μια απεικόνιση των τριών κατηγοριών, απευθυνθείτε στα Σχήματα 3.10,3.11,3.12.



Σχήμα 3.15: Πιθανές περιπτώσεις τριγώνων στην Κατηγορία 3.

Είναι χρήσιμο τώρα να δώσουμε τον εξής ορισμό.

**Ορισμός 3.4.** Έστω  $(u, v, w)$  ένα τρίγωνο απεικονισμένο σε πλέγμα με δίσκους ακτίνας 0.5 γύρω από τις κορυφές του. Έστω  $z_1 \in \{u, v, w\}$  ο κόμβος με την αυστηρά μικρότερη τετμημένη,  $z_2 \in \{u, v, w\}$  ο κόμβος με την αυστηρά μεγαλύτερη τετμημένη,  $z_3 \in \{u, v, w\}$  ο κόμβος με την αυστηρά μικρότερη τεταγμένη και  $z_4 \in \{u, v, w\}$  ο κόμβος με την αυστηρά μεγαλύτερη τεταγμένη. Σημειώνουμε ότι αν για κάποιο  $z_i$  δεν υπάρχει αυστηρά μικρότερη ή μεγαλύτερη συντεταγμένη, τότε θέτουμε  $z_i = \emptyset$  (αυτό συμβαίνει όταν υπάρχουν ίσες τετμημένες ή τεταγμένες μεταξύ των κόμβων).

Ορίζουμε το σύνολο:

$$S(u, v, w) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι αν  $\{u, v, w\} \subset S(u, v, w)$  τότε το  $(u, v, w)$  δεν περιέχει τομές:

Χωρίς βλάβη έστω  $z_1 = u, z_2 = v, z_3 = w$ . Αφού  $x(u) < x(v)$  και  $x(u) < x(w)$  γνωρίζουμε ότι το δεξιότερο σημείο του δίσκου γύρω από τον  $u$  έχει τετμημένη  $x(u) + 0.5$ , ενώ το αριστερότερο σημείο της ακμής  $(P(v), P(w))$  έχει τετμημένη  $\min(x(v), x(w))$  και  $x(u) + 0.5 < \min(x(v), x(w))$ . Όμοια επιχειρήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τις άλλες κορυφές.

Τώρα θα δείξουμε για κάθε κατηγορία τριγώνων ξεχωριστά, ότι η αντίστοιχη απεικόνιση τους δεν περιέχει τομές.

**Λήμμα 3.11.** Ένα τρίγωνο  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$ ,  $p \leq i \leq q-1$  που ανήκει στην Κατηγορία 1 δεν περιέχει τομές.

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι σε ένα τέτοιο τρίγωνο, ο  $w_i$  έχει την αυστηρά μικρότερη τετμημένη και ο  $w_{i+1}$  έχει την αυστηρά μεγαλύτερη τετμημένη. Επιπλέον ο  $v_k$  έχει την αυστηρά μεγαλύτερη τεταγμένη και επομένως  $S(v_k, w_i, w_{i+1}) = (v_k, w_i, w_{i+1})$ . Συνεπώς το τρίγωνο δεν περιέχει τομές.  $\square$

Παρατηρούμε τώρα ότι στα τρίγωνα της Κατηγορίας 2, ο κόμβος  $w_{i+1}$  έχει την αυστηρά μεγαλύτερη τετμημένη. Συνεπώς ο δίσκος γύρω από το σημείο  $P(w_{i+1})$  δεν τέμνει την ακμή  $(P(v_k), P(w_i))$ . Όμοια έχουμε ότι στα τρίγωνα Κατηγορίας 3 ο κόμβος  $w_i$  έχει την αυστηρά μικρότερη τετμημένη και άρα ο δίσκος γύρω από το  $P(w_i)$  δεν τέμνει την ακμή  $(P(v_k), P(w_{i+1}))$ .

Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι για την Κατηγορία 2, ο δίσκος γύρω από το  $P(w_i)$  δεν τέμνει την ακμή  $(P(v_k), P(w_{i+1}))$  και για την Κατηγορία 3, ο δίσκος γύρω από το  $P(w_{i+1})$  δεν τέμνει την ακμή  $(P(v_k), P(w_i))$ . Η απόδειξη αυτή θα ολοκληρωθεί με τα επόμενα δύο λήμματα.

**Λήμμα 3.12.** Θεωρούμε ένα τρίγωνο  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$  που έχει τις Ιδιότητες 3,4 και 5. Ανάλογα με την κλίση  $a$  της ακμής  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$  εκτελούμε την ακόλουθη διαδικασία:

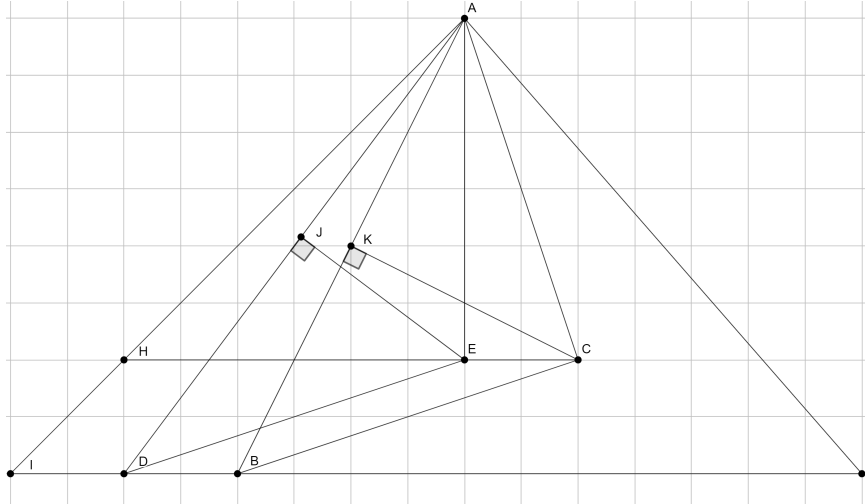
Αν  $a > 0$  ( $a < 0$ ), μετέφερε τα σημεία  $P(w_i), P(w_{i+1})$  προς τα αριστερά κατά 1 (προς τα δεξιά κατά 1).

Τότε αυτή η διαδικασία μειώνει την απόσταση του σημείου  $P(w_{i+1})$  από την ακμή  $(P(v_k), P(w_i))$  (μειώνει την απόσταση του σημείου  $P(w_i)$  από την ακμή  $(P(v_k), P(w_{i+1}))$ )

*Απόδειξη.* Θεωρούμε μόνο την περίπτωση  $a > 0$ , αφού η περίπτωση  $a < 0$  αντιμετωπίζεται όμοια. Στο Σχήμα 3.16 το σημείο  $A$  αντιστοιχεί στον κόμβο  $v_k$ , το σημείο  $B$  αντιστοιχεί στον  $w_i$  και το  $C$  στον  $w_{i+1}$ . Επίσης σημειώνουμε ότι οι  $AI$  και  $AL$  έχουν κλίσεις  $+1$  και  $-1$  αντίστοιχα.

Στο Σχήμα, οι κορυφές  $B, C$  του τριγώνου  $ABC$  μετακινούνται στα αριστερά κατά 1 και το  $ADE$  αντιστοιχεί στο «μετατοπισμένο» τρίγωνο. Θέλουμε να δείξουμε ότι  $|EJ| < |KC|$ . Παρατηρούμε αρχικά ότι  $\angle IDA > \angle DBA$  (αφού η  $\angle IDA$  είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου  $DBA$ ). Επομένως  $\angle ADB < \angle ABL \Rightarrow \angle ADE < \angle ABC$ . Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο  $DJE$  έχουμε:

$$|JE| = \sin(\angle JDE)|DE| < \sin(\angle ABC)|BC| = |KC|$$



Σχήμα 3.16: Λήμμα 3.12

□

**Λήμμα 3.13.** Ένα τρίγωνο  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$ ,  $p \leq i \leq q-1$  που ανήκει στην Κατηγορία 2 δεν περιέχει τομές.

*Απόδειξη.* Έχουμε ήδη εξασφαλίσει ότι αρκεί να δείξουμε πως ο δίσκος γύρω από το  $P(w_i)$  δεν τέμνει την ακμή  $(P(v_k), P(w_{i+1}))$ . Επιπροσθέτως, αρκεί μόνο να θεωρήσουμε την περίπτωση που  $y > y_i > y_{i+1}$ , αφού αλλιώς το  $P(w_i)$  θα είχε την αυστηρά μικρότερη τεταγμένη στο τρίγωνο και άρα  $S(v_k, w_i, w_{i+1}) = (v_k, w_i, w_{i+1})$ .

Λόγω του ότι τώρα  $y_i > y_{i+1}$ ,  $x_i < x_{i+1}$  και ισχύει η Ιδιότητα 5, η ακμή  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$  έχει κλίση  $a$  με  $-1 < a < 0$ . Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.12 στο τρίγωνο  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$ , μετακινώντας τα  $P(w_i)$ ,  $P(w_{i+1})$  προς τα δεξιά κατά 1. Γνωρίζουμε ότι αυτή η μετακίνηση μπορεί μόνο να μειώσει την απόσταση του  $P(w_i)$  από την ακμή  $(P(v_k), P(w_{i+1}))$ . Η σημαντική παρατήρηση είναι η ακόλουθη: θα εφαρμόσουμε επανειλημμένα αυτήν την μετακίνηση έως ότου ο κόμβος  $P(w_{i+1})$  να φτάσει στην ευθεία με κλίση  $-1$  που διέρχεται από το  $P(v_k)$ . Όταν αυτό συμβεί, γνωρίζουμε (επειδή  $-1 < a < 0$ ) ότι το  $P(w_i)$  δεν θα έχει ακόμα φτάσει στην ευθεία με κλίση  $-1$  που διέρχεται από το  $P(v_k)$ . Επιπλέον, το πλησιέστερο που μπορεί να βρίσκεται σε αυτήν την ευθεία, είναι να χρειάζεται ακόμα μία δεξιά μετακίνηση κατά 1 για να την φτάσει. Αλλά ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση, η απόσταση του από την ακμή  $(P(v_k), P(w_{i+1}))$  θα είναι  $\sqrt{2} > 0.5$ . Έτσι, η αρχική απόσταση του  $P(w_i)$  από την ακμή  $(P(v_k), P(w_{i+1}))$  θα πρέπει να ήταν μεγαλύτερη από 0.5, αφού η παραπάνω διαδικασία μπορεί μόνο να μειώσει αυτήν την απόσταση. □

**Λήμμα 3.14.** Ένα τρίγωνο  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$ ,  $p \leq i \leq q-1$  που ανήκει στην Κατηγορία 3 δεν περιέχει τομές.

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν στο Λήμμα 3.13 με την διαφορά ότι τώρα χρησιμοποιούμε αριστερές μετακινήσεις. □

Όταν εκτελούνται τα βήματα 5 και 6, μετακινούνται και κόμβοι οι οποίοι δεν ανήκουν στο  $C_0(G_{k-1})$ . Επομένως πρέπει να εξασφαλίσουμε, ότι αυτές οι μετακινήσεις δεν επηρεάζουν τα εσωτερικά τρίγωνα (δηλαδή τα τρίγωνα με κόμβους που δεν βρίσκονται στον εξωτερικό κύκλο) που έχουν σχηματιστεί προηγουμένως. Για να το δείξουμε αυτό, είναι απαραίτητη η επόμενη παρατήρηση:

**Παρατήρηση 1.** Όταν σχηματίζεται ένα νέο τρίγωνο  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$ , αν αυτό είναι τρίγωνο Κατηγορίας 2, τότε  $w_i \in L(v_k)$  (αντίστοιχα αν αυτό είναι τρίγωνο Κατηγορίας 3, τότε  $w_{i+1} \in L(v_k)$ ). Ο λόγος είναι ότι σε αντίθετη περίπτωση, ο κόμβος  $w_i$  δεν καλύπτεται από τον  $v_k$  το οποίο σημαίνει ότι  $w_i = w_p$ . Αλλά γνωρίζουμε ότι  $x > x_p$  και άρα το τρίγωνο δεν μπορεί να ανήκει στην Κατηγορία 2 (αντίστοιχα, σε αντίθετη περίπτωση ο κόμβος  $w_{i+1}$  δεν καλύπτεται από τον  $v_k$  που σημαίνει ότι  $w_{i+1} = w_q$ , αλλά γνωρίζουμε ότι  $x < x_q$  και έτσι το τρίγωνο δεν μπορεί να ανήκει στην Κατηγορία 3).

Είναι επίσης απαραίτητο να δείξουμε το ακόλουθο:

**Λήμμα 3.15.** Έστω  $C_0(G_k) = w_1, w_2, \dots, w_t$ , για κάποιο  $3 \leq k \leq n$ . Τότε για κάθε ζευγάρι κόμβων  $u, v$  με  $u \in L(w_i)$ ,  $v \in L(w_j)$  και  $i \neq j$  έχουμε:

$$i < j \Leftrightarrow x_u < x_v$$

όπου  $x_u, x_v$  είναι οι τετμημένες των  $u, v$  αντίστοιχα.

*Απόδειξη.* Και οι δύο κατευθύνσεις αποδεικνύονται με επαγωγή: Η πρόταση προφανώς ισχύει για  $k = 3$ . Έστω ότι ισχύει για το  $G_{k-1}$ . Εκτελούμε έπειτα τα βήματα 5,6,7,8 του αλγορίθμου για να εισάγουμε το  $v_k$ . Έστω  $C_0(G_k) = w_1, w_2, \dots, w_p, v_k, w_q, \dots, w_{q+1}, \dots, w_t = w'_1, w'_2, \dots, w'_r$  για ευκολία. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι αν  $1 \leq i < j \leq r$  και  $u \in L(w'_i)$  και  $v \in L(w'_j)$  τότε  $x_u < x_v$  αφού ο  $v$  θα μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά την ίδια ή μεγαλύτερη απόσταση από τον  $u$ . Για το αντίστροφο, έστω ότι  $x_u < x_v$ ,  $u \in L(w'_i)$  και  $v \in L(w'_m)$  με  $i \neq m$ . Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι στο προηγούμενο βήμα,  $u \in L(w_i)$ ,  $v \in L(w_j)$  με  $i < j$ . Εύκολα βλέπουμε τότε ότι είτε  $w'_i = w_i$  και  $w'_m = w_j$  με  $i, j \in \{1, 2, \dots, p\} \cup \{q, q+1, \dots, t\}$ , είτε  $w'_i = v_k$  και  $w'_m = w_j$  με  $q \leq j \leq t$ , είτε  $w'_i = w_i$ ,  $w'_m = v_k$  με  $1 \leq i \leq p$ . Σε κάθε μια από τις προηγούμενες περιπτώσεις είναι φανερό ότι  $i < m$ . Έτσι η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί.  $\square$

Το επόμενο είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.15:

**Πρόταση 3.2.** Έστω  $C_0(G_k) = w_1, w_2, \dots, w_t$ , για κάποιο  $3 \leq k \leq n$ . Τότε για κάθε ζευγάρι κόμβων  $u, v$  με  $u \in L(w_i)$  και  $v \in L(w_j)$  έχουμε ότι

$$x_u < x_v \Rightarrow i \leq j$$

όπου  $x_u, x_v$  είναι οι τετμημένες των  $u, v$  αντίστοιχα.



Περνάμε τώρα στο τελικό λήμμα που είναι απαραίτητο για να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση μας είναι μια *disk-link* απεικόνιση.

**Λήμμα 3.16.** Ένα τρίγωνο χωρίς τομές, παραμένει έτσι αφού όλα τα επόμενα βήματα του αλγορίθμου έχουν εκτελεστεί.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ένα τρίγωνο  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$  που σχηματίζεται μετά την εισαγωγή του  $v_k$  στο γράφημα. Έχουμε αποδείξει ότι αυτό το τρίγωνο δεν θα περιέχει τομές. Θα πρέπει να δείξουμε ότι αυτό θα εξακολουθήσει να ισχύει και στα επόμενα βήματα του αλγορίθμου. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν το  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$  ανήκει στην Κατηγορία 1 τότε γνωρίζουμε ότι  $x_i < x < x_{i+1}$ . Έστω  $C_0(G_k) = w'_1, w'_2, \dots, w'_l$ . Από την Πρόταση 3.2 έχουμε ότι

$$x_i \in L(w'_{i_1}), x \in L(w'_{i_2}), x_{i+1} \in L(w'_{i_3})$$

με  $i_1 \leq i_2 \leq i_3$ . Αυτό σημαίνει πως όταν εισαχθεί ο  $v_{k+1}$ , ο  $v_k$  θα μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά το ίδιο ή μεγαλύτερο μέγεθος από τον  $w_i$  και όμοια ο  $w_{i+1}$  θα μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά το ίδιο ή μεγαλύτερο μέγεθος από τον  $v_k$ . Αυτό σημαίνει ότι η διάταξη των τετμημένων των  $v_k, w_i, w_{i+1}$  διατηρείται. Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί επαγωγικά και να μας εξασφαλίσει ότι σε κάθε επόμενο βήμα του αλγορίθμου θα διατηρηθεί η διάταξη των τετμημένων των  $v_k, w_i, w_{i+1}$ . Αλλά αυτό σημαίνει ότι η ιδιότητα  $S(v_k, w_i, w_{i+1}) = \{v_k, w_i, w_{i+1}\}$  επίσης θα διατηρηθεί καθόλη την εκτέλεση του αλγορίθμου. Ως αποτέλεσμα το τρίγωνο θα παραμείνει χωρίς τομές.

- Αν το  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$  είναι τρίγωνο Κατηγορίας 2 τότε λόγω της Παρατήρησης 1, γνωρίζουμε ότι  $w_i \in L(v_k)$ . Τώρα αν επιπλέον  $w_{i+1} \in L(v_k)$  τότε το αποτέλεσμα είναι τετριμένο αφού οι κόμβοι του τριγώνου θα μετακινούνται πάντα κατά το ίδιο μέγεθος. Ας υποθέσουμε έτσι ότι  $w_{i+1} \notin L(v_k)$ . Τότε ξέρουμε πως οι κόμβοι  $w_i, v_k$  θα μετακινούνται πάντα κατά το ίδιο μέγεθος και από την Πρόταση 3.2, ο  $w_{i+1}$  θα μετακινείται πάντα κατά το ίδιο ή μεγαλύτερο μέγεθος από τους  $w_i, v_k$ . Αυτή η διαδικασία όμως δεν μπορεί να μειώσει την απόσταση του  $w_i$  από την ακμή  $(v_k, w_{i+1})$ . Έτσι το τρίγωνο θα παραμείνει χωρίς τομές.

- Αν το  $(P(v_k), P(w_i), P(w_{i+1}))$  είναι τρίγωνο Κατηγορίας 3 τότε λόγω της Παρατήρησης που έγινε προηγουμένως γνωρίζουμε ότι  $w_{i+1} \in L(v_k)$ . Τώρα αν επιπλέον  $w_i \in L(v_k)$  τότε το αποτέλεσμα είναι τετριμένο αφού οι κόμβοι του τριγώνου θα μετακινούνται πάντα κατά το ίδιο μέγεθος. Ας υποθέσουμε έτσι ότι  $w_i \notin L(v_k)$ . Τότε ξέρουμε πως οι κόμβοι  $w_{i+1}, v_k$  θα μετακινούνται πάντα κατά το ίδιο μέγεθος και από την Πρόταση 3.2, ο  $w_i$  θα μετακινείται πάντα κατά το ίδιο ή μεγαλύτερο μέγεθος από τους  $w_{i+1}, v_k$ . Αυτή η διαδικασία όμως δεν μπορεί να μειώσει την απόσταση του  $w_{i+1}$  από την ακμή  $(v_k, w_i)$ . Έτσι το τρίγωνο θα παραμείνει χωρίς τομές.  $\square$

Το Λήμμα 3.16 ολοκληρώνει την απόδειξη ότι η απεικόνιση μας θα είναι επίπεδη και *disk-link* απεικόνιση σε πλέγμα. Απομένει τώρα να αποδείξουμε ένα άνω φράγμα για

το μέγεθος του απαιτούμενου πλέγματος.

### 3.11 Το μέγεθος του πλέγματος

Για να μελετήσουμε το μέγεθος της τελικής απεικόνισης, αρκεί να μελετήσουμε την ακολουθία των μηκών των εξωτερικών κύκλων  $C_0(G_k)$ ,  $3 \leq k \leq n$ . Αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι το πλήθος των γειτόνων του  $v_k$  καθορίζει τόσο το μήκος του  $C_0(G_k)$ , όσο και το κατά πόσο θα μετακινηθεί ο  $v_2$  κατά την εισαγωγή του  $v_k$ .

Έστω  $a_k$ ,  $3 \leq k \leq n$ , αυτή η ακολουθία. Παρατηρούμε για αυτήν την ακολουθία τα εξής:

1.  $a_3 = a_n = 3$ ,
2.  $3 \leq a_k \leq n - 1$  και
3.  $3 - a_k \leq a_{k+1} - a_k \leq 1$

Το 3. προκύπτει από το γεγονός ότι οι όροι της ακολουθίας μπορούν να αυξάνονται μόνο κατά 1 σε κάθε βήμα, αλλά μπορούν να μειώνονται όσο χρειάζεται για να φτάσουν στο 3 (το πολύ).

Για παράδειγμα η ακολουθία 3, 4, 5, 5, 6, 4, 3, 3 είναι μια έγκυρη τέτοια ακολουθία, ενώ η 3, 3, 4, 5, 7, 3 όχι, διότι αυξάνεται κατά 2 (από 5 σε 7). Θα αναφερόμαστε σε μια τέτοια έγκυρη ακολουθία ως μια *εξωκυκλική ακολουθία*. Θα εξηγήσουμε τώρα με ποιον τρόπο μπορούμε δεδομένης μιας εξωκυκλικής ακολουθίας να υπολογίσουμε την τελική θέση του  $v_2$ .

Όποτε στην ακολουθία βλέπουμε μια αύξηση κατά 1 ή η ακολουθία παραμένει σταθερή, αυτό σημαίνει ότι ο τελευταίος κόμβος που προστέθηκε είχε 2 ή 3 γείτονες. Επομένως από τον αλγόριθμο έχουμε ότι ο  $v_2$  μετακινείται στα δεξιά κατά 2. Όποτε βλέπουμε μια μείωση από το  $a_k$  στο  $a_{k+1}$ , αυτό σημαίνει ότι ο τελευταίος κόμβος που προστέθηκε είχε  $a_k - a_{k+1} + 3$  γείτονες που σημαίνει ότι ο  $v_2$  θα μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά  $F(a_k - a_{k+1} + 1)$ .

Ως παράδειγμα για την ακολουθία 3, 4, 5, 5, 6, 4, 3, 3 έχουμε ότι η τελική τετμημένη του  $v_2$  θα είναι  $x(v_2) = 2+2+2+2+2+F(6-4+1)+F(4-3+1)+2 = 10+4+4+2 = 20$ .

Για ευκολία, με  $X(v_2, \{a_k\}_{k=3}^n)$  θα συμβολίζουμε τη τελική τετμημένη του  $v_2$  όπως υπολογίστηκε με την παραπάνω διαδικασία, που αντιστοιχεί στην ακολουθία  $\{a_k\}_{k=3}^n$ .

Το ακόλουθο λήμμα θα μας επιτρέψει να βρούμε τελικά την εξωκυκλική ακολουθία που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο δυνατό πλέγμα για ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα  $n$  κόμβων. Έτσι θα μπορούσαμε να βρούμε ένα άνω φράγμα για το μέγεθος της απεικόνισης που παράγει ο Αλγόριθμος 3.

**Λήμμα 3.17.** Έστω  $\{a_k\}_{k=3}^n$  μια εξωκυκλική ακολουθία και έστω  $i$ ,  $3 \leq i \leq n - 2$ , ο πρώτος δείκτης για τον οποίο  $a_i \geq a_{i+1}$ . Έστω  $\{b_k\}_{k=3}^n$  η εξωκυκλική ακολουθία

που ορίζεται ως  $b_{i+1} = a_i + 1$  και  $b_j = a_j$  για  $j \neq i + 1$ . Τότε  $X(v_2, \{a_k\}_{k=3}^n) \leq X(v_2, \{b_k\}_{k=3}^n)$ .

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε αρχικά ότι η  $b_k$  είναι εξωκυκλική, αφού  $b_{i+1} = b_i + 1$  και  $b_{i+1} \geq b_{i+2}$ . Αρκεί να συγκρίνουμε τις μετακινήσεις του  $v_2$  που αντιστοιχούν στους όρους  $(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$  και  $(b_i, b_{i+1}, b_{i+2})$  αφού όλες οι υπόλοιπες μετακινήσεις είναι ίδιες.

Θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

-  $a_{i+2} = a_{i+1} + 1$ : Τότε η μετακίνηση του  $v_2$  που αντιστοιχεί στους όρους  $(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$  είναι  $F(a_i - a_{i+1} + 1) + 2$ , ενώ η μετακίνηση του  $v_2$  που αντιστοιχεί στους όρους  $(b_i, b_{i+1}, b_{i+2})$  είναι  $2 + F(b_{i+1} - b_{i+2} + 1)$ . Εύκολα βλέπουμε ότι  $F(b_{i+1} - b_{i+2} + 1) = F(a_i - a_{i+1} + 1)$  και επομένως  $X(v_2, \{a_k\}_{k=3}^n) = X(v_2, \{b_k\}_{k=3}^n)$ .

-  $a_{i+2} \leq a_{i+1}$ : Τότε η μετακίνηση του  $v_2$  που αντιστοιχεί στους όρους  $(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$  είναι  $F(a_i - a_{i+1} + 1) + F(a_{i+1} - a_{i+2} + 1)$ , ενώ η μετακίνηση του  $v_2$  που αντιστοιχεί στους όρους  $(b_i, b_{i+1}, b_{i+2})$  είναι  $2 + F(b_{i+1} - b_{i+2} + 1)$ . Για ευκολία θέτουμε  $x = a_i - a_{i+1} + 1$  και  $y = a_{i+1} - a_{i+2} + 1$ . Τότε έχουμε ότι:

$$F(a_i - a_{i+1} + 1) + F(a_{i+1} - a_{i+2} + 1) = F(x) + F(y)$$

και

$$2 + F(b_{i+1} - b_{i+2} + 1) = 2 + F(x + y)$$

Έτσι αν τα  $x, y$  είναι και τα δύο άρτια τότε

$$F(x) + F(y) = x + y + 4$$

και

$$2 + F(x + y) = x + y + 4$$

και επομένως σε αυτή την περίπτωση έχουμε το ζητούμενο. Αλλιώς θα έχουμε ότι

$$F(x) + F(y) \leq x + y + 3$$

και

$$2 + F(x + y) \geq 2 + (x + y + 1) = x + y + 3 \geq F(x) + F(y)$$

οπότε και πάλι έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

Το παραπάνω λήμμα μας επιτρέπει να μεταβάλλουμε επανειλημμένα την αρχική μας εξωκυκλική ακολουθία χωρίς να μειώνουμε την τετμημένη της τελικής θέσης του  $v_2$ .

Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα την ακολουθία  $a_k = (3, 4, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 3)$ . Εφαρμόζουμε επανειλημμένα το Λήμμα 3.17 για τον πρώτο δείκτη  $i$  που είναι τέτοιος ώστε  $a_i \geq a_{i+1}$ :

$$3, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 5, 3$$

3, 4, 5, 6, 4, 3, 4, 5, 3

3, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 3

3, 4, 5, 6, 7, 8, 4, 5, 3

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 5, 3

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 3

Εφαρμόζοντας επανειλημμένα το Λήμμα 3.17 πάντα καταλήγουμε στην ακολουθία  $3, 4, 5, \dots, n-1, 3$ . Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι αυτή είναι η ακολουθία για την οποία παράγεται η μεγαλύτερη δυνατή απεικόνιση. Αυτό προκύπτει από την απλή παρατήρηση πως κάθε εξωκυκλική ακολουθία που δεν είναι η  $3, 4, 5, \dots, n-1, 3$ , θα έχει πάντα δύο όρους  $a_i, a_{i+1}$ , με  $a_i \geq a_{i+1}$  και  $3 \leq i \leq n-2$ . Έτσι η ακολουθία  $3, 4, 5, \dots, n-1, 3$  παράγει μια ίδια ή μεγαλύτερο σε μέγεθος απεικόνιση από οποιαδήποτε άλλη εξωκυκλική ακολουθία. Αλλά η ακολουθία αυτή παράγει μια απεικόνιση όπου το  $v_2$  έχει τετμημένη:

$$2 + 2(n-4) + F(n-3) \leq 2n-6 + n-1 = 3n-7$$

Ως αποτέλεσμα η απεικόνιση απαιτεί πλέγμα μεγέθους το πολύ  $(3n-7) \times \frac{3n-7}{2}$ .

### 3.12 Κάτω Φράγμα Disk-Link Απεικονίσεων για το Γράφημα Αστέρι

Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε ένα κάτω φράγμα για το μέγεθος του πλέγματος που απαιτεί μια disk-link απεικόνιση του γραφήματος αστέρι με  $n$  κόμβους (δηλαδή ένας κόμβος με  $n$  γείτονες και οι υπόλοιποι κόμβοι έχουν βαθμό 1). Θα συμβολίζουμε αυτό το γράφημα με  $S_n$  και τον κόμβο βαθμού  $n-1$  με  $r$ . Παρατηρήστε ότι προφανώς αν δεν θέσουμε τον disk-link περιορισμό, μας αρκεί πλέγμα γραμμικού μεγέθους ως προς  $n$ , αφού μπορούμε να απεικονίσουμε το  $r$  στο  $(0, 0)$  και τους υπόλοιπους κόμβους στα σημεία  $(i, 0), i = 1, 2, \dots, n$ . Το φράγμα που θα αποδείξουμε εδώ είναι τετραγωνικό ως προς  $n$ , πράγμα που δείχνει ότι οι disk-link απεικονίσεις για τα γραφήματα αστέρια απαιτούν ασυμπτωτικά παραπάνω εμβαδόν. Ακολουθεί το αντίστοιχο θεώρημα και η απόδειξή του:

**Θεώρημα 3.7.** Κάθε disk-link απεικόνιση του γραφήματος  $S_n$  απαιτεί πλέγμα μεγέθους  $\Omega(n^2)$ .

*Απόδειξη.* Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το Σχήμα 3.17, όπου συμβολίζουμε τον κόμβο βαθμού  $n$  με  $r$  και τους υπόλοιπους με  $v_i, i = 1, \dots, n$ . Επίσης με  $A_i, i =$

$1, \dots, n$  συμβολίζουμε τα τρίγωνα που σχηματίζει ο  $r$  με κάθε δύο διαδοχικούς γείτονες του και με  $\theta_i$  την γωνία του  $A_i$  που βρίσκεται ανάμεσα στις ακμές του  $S_n$  (όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.17 (β')).

Τότε το εμβαδόν του πλέγματος φράσσεται από κάτω από την ποσότητα:

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

όπου  $|A_i|$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου  $A_i$ . Όμως εφόσον η απεικόνιση είναι disk-link ξέρουμε ότι τα ύψη αυτών των τριγώνων έχουν μήκος  $\geq \frac{1}{2}$ , άρα:

$$|A_i| \geq \frac{|(r, v_i)|}{4}$$

όπου με  $|(r, v_i)|$  συμβολίζουμε το μήκος της ακμής  $(r, v_i)$ . Αθροίζοντας, το μέγεθος του πλέγματος φράσσεται από την ποσότητα:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|(r, v_i)|}{4}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από τους κόμβους  $(r, v_i, w)$  έχουμε ότι:

$$\sin(\theta_i) = \frac{|(v_i, w)|}{|(r, v_i)|} \Rightarrow \frac{1}{|(r, v_i)|} \leq 2 \sin(\theta_i)$$

Αθροίζοντας και πάλι έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{|(r, v_i)|} \leq 2 \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i) \quad (1)$$

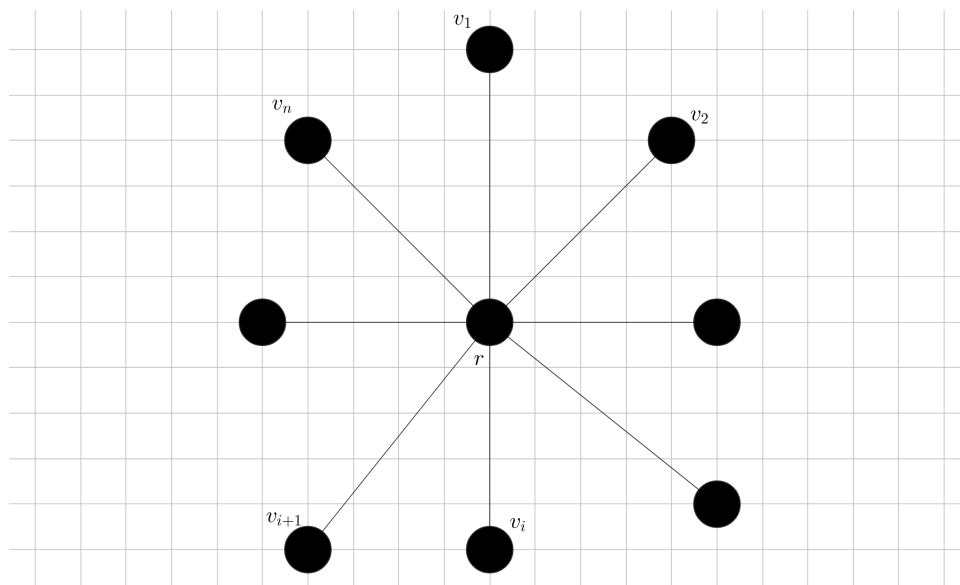
Η συνάρτηση  $\sin x$  είναι κοίλη στο  $[0, \pi]$ . Χωρίς βλάβη μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\theta_i \leq \pi$ , αφού αλλιώς μπορούμε απλώς να προσθέσουμε ένα επιπλέον φύλλο στο γράφημα ώστε να εξασφαλίσουμε αυτήν την ιδιότητα. Επομένως από την ανισότητα Jensen έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \theta_i}{n} &\leq \sin \left( \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i}{n} \right) = \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \leq n \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) < 2\pi \end{aligned}$$

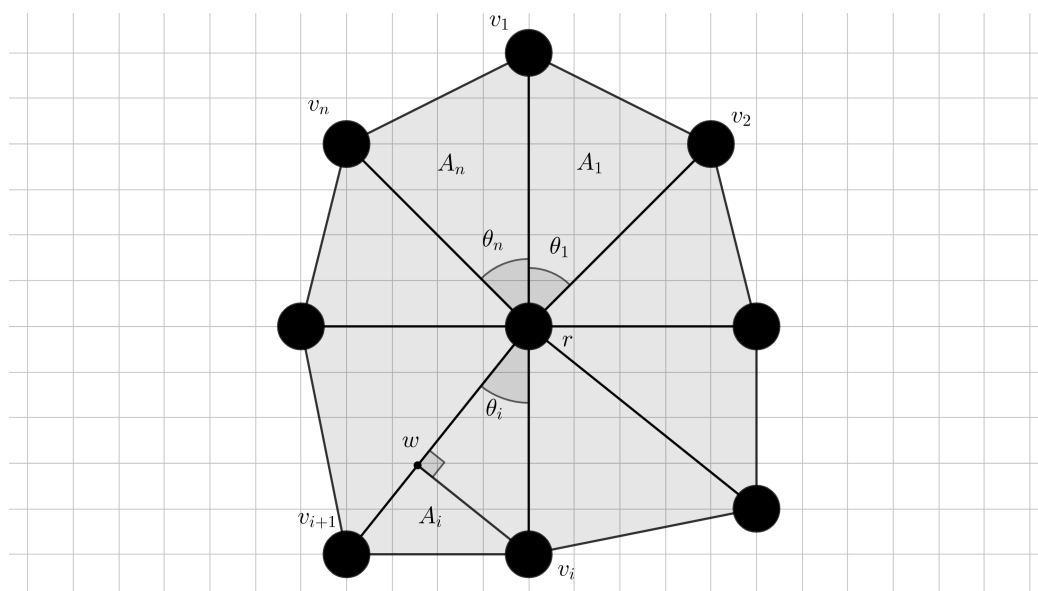
λόγω της ανισότητας  $\sin x < x$ .

Έτσι η (1) γίνεται:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{|(r, v_i)|} \leq 4\pi$$



(α') Το γράφημα  $S_n$ .



(β')

Σχήμα 3.17: Παρουσίαση απόδειξης του Θεωρήματος 3.7

Τέλος από την ανισότητα αριθμητικού-αρμονικού μέσου έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|(r, v_i)|}{n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|(r, v_i)|}} \geq \frac{n}{4\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{|(r, v_i)|}{4} \geq \frac{n^2}{16\pi}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

# Παραρτήματα

---





# Παράρτημα **A'**

## Παράρτημα A

---

Σε αυτό το Παράρτημα, θα αποδείξουμε αναλυτικά την παρακάτω ανισότητα του Κεφαλαίου 3:

$$y \leq \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

$$\text{όπου } y = \left\lceil \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} \right\rceil, \quad 0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

*Απόδειξη.* Όπως περιγράψαμε και στο Κεφάλαιο 3, η απόδειξη θα γίνει σε 4 βήματα:

Βήμα 1. Έχουμε:

$$y(\theta_2 - \theta_1) \leq \frac{3\pi}{2}$$

Επειδή

$$y \leq \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} + 1$$

αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\left( \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} + 1 \right) (\theta_2 - \theta_1) \leq \frac{3\pi}{2}$$

Επειδή  $\theta_2 - \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ , αρκεί να δείξουμε:

$$\left( \frac{x \sin \theta_1 + 1}{\cos \theta_1} \right) (\theta_2 - \theta_1) \leq \pi$$

Ακόμη:

$$x \leq \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} + 1$$

επομένως αρκεί να δειχθεί:

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\cos \theta_1} \left( \sin \theta_1 + 1 + \sin \theta_1 \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \right) \leq \pi$$

και αφού  $\sin \theta_1 \leq 1$  αρκεί:

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\cos \theta_1} \left( 2 + \sin \theta_1 \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin (\theta_2 - \theta_1)} \right) \leq \pi$$

Βήμα 2. Δείχνουμε την εξής ανισότητα:

$$u \leq \frac{\pi \sin u}{2 + \cos u} \quad \forall u \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Προφανώς αρκεί:

$$\pi \sin u - u \cos u - 2u \geq 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση  $f(u) = \pi \sin u - u \cos u - 2u$ . Έχουμε:

$$f'(u) = \pi \cos u + u \sin u - \cos u - 2$$

$$f''(u) = -\pi \sin u + \sin u + u \cos u + \sin u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(u) = (2 - \pi) \sin u + u \cos u,$$

$$f'''(u) = (2 - \pi) \cos u + \cos u - u \sin u = (3 - \pi) \cos u - u \sin u$$

Είναι εμφανές ότι  $f'''(u) < 0 \quad \forall u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , επομένως η  $f''(u)$  είναι φθίνουσα. Όμως  $f''(0) = 0$ , άρα  $f''(u) \leq 0$  και συνεπώς η  $f$  είναι κοίλη στο  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Από γνωστή ιδιότητα των κοίλων συναρτήσεων έχουμε:

$$f(u) = f\left(\left(1 - \frac{u}{\pi/2}\right) \cdot 0 + \frac{u}{\pi/2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \geq \left(1 - \frac{u}{\pi/2}\right) \cdot f(0) + \frac{u}{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

, αφού  $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ .

Βήμα 3. Για  $u = y - x$ , η παραπάνω δίνει:

$$y - x \leq \frac{\pi \sin (y - x)}{2 + \cos (y - x)}$$

οπότε σε συνδυασμό με την ανισότητα του Βήματος 1. είναι φανερό ότι αρκεί να δείξουμε την:

$$\frac{\sin (y - x)}{2 + \cos (y - x)} \frac{1}{\cos x} \left( 2 + \sin x \frac{\cos x + \cos y + \cos x \cos y}{\sin (y - x)} \right) \leq 1 \quad (*)$$

Βήμα 4. Η (\*) γίνεται:

$$\frac{2 \sin (y - x) + \sin x \cos x + \sin x \cos y + \sin x \cos x \cos y}{2 \cos x + \cos (y - x) \cos x} \leq 1$$

---

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $\sin(y - x) = \sin y \cos x - \sin x \cos y$ ,  $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$  η προηγούμενη γίνεται:

$$\frac{2 \sin y \cos x - 2 \sin x \cos y + \sin x \cos x + \sin x \cos y + \sin x \cos x \cos y}{2 \cos x + \cos y \cos^2 x + \sin y \sin x \cos x} \leq 1$$

, η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι μετασχηματίζεται στην

$$[\cos^2 x + (1 - \cos x) \sin x] \cos y + (2 - \sin x)(1 - \sin y) \cos x \geq 0$$

που προφανώς ισχύει.

□



## Βιβλιογραφία

---

- [1] D. He και X. He. *Optimal monotone drawings of trees*. *SIAM J. Discrete Math.*, 31:1867–1877, 2017.
- [2] Euler Leonhard. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741.
- [3] Euler Leonhard. *Solution d’une question curieuse que ne paroît soumise à aucune analyse*. *Euler Archive - All Works*. 309, 1766.
- [4] Vandermonde Alexandre-Théophile. *Remarques sur les problèmes de situation*. *Mémoires de l’Académie royale des sciences*, σελίδα 566, 1771.
- [5] A. Cayley. *On the Theory of the Analytical Forms Called Trees*. *Philosophical Magazine*, σελίδες 172–176, 1857.
- [6] Blair A. Waters R. Kruja E., Marks J. *A Short Note on the History of Graph Drawing*. Mutzel P., Jünger M., Leipert S. (eds) *Graph Drawing. GD 2001. Lecture Notes in Computer Science*, vol 2265. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [7] Md. Saidur Rahman. *Efficient Algorithms for Drawing Planar Graphs*. Διδακτορική Διατριβή, Graduate School of Information Sciences Tohoku University, Japan, 1999.
- [8] Petra Mutzel. *An alternative method to crossing minimization on hierarchical graphs*. *SIAM J. Optimization*, 11(4):1065–1080, 2001.
- [9] G. Di Battista F. Frati P. Angelini, E. Colasante και M. Patrignani. *Monotone drawings of graphs*. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 16:5–35, 2012.
- [10] A. Oikonomou and A. Symvonis. *Simple compact monotone tree drawings*. *Graph Drawing and Network Visualization 25th International Symposium, GD 2017, Boston, MA, USA, September 25-27, 2017, Revised Selected Papers*, F. Frati and K. Ma, eds., vol. 10692 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2017, pp. 326-333.

- [11] Fabrizio Montecchiani Antonios Symvonis Leonidas Theocharous Michael A. Bekos, Martin Gronemann. *Grid Drawings of Graphs with Constant Edge-Vertex Resolution*. *Arxiv*, 2020.
- [12] Pach J. Pollack R. De Fraysseix, H. *How to draw a planar graph on a grid*. *Combinatorica*, 10:41–51, 1990.
- [13] Editor Roberto Tamassia. *Handbook of Graph Drawing and Visualization*. CRC Press, Rhode Island, USA, 2013.
- [14] S. Rahman T. Nishizeki. *Planar Graph Drawing*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, Singapore, 2004.
- [15] R. Tamassia, G. Di Battista και C. Batini. *Automatic graph drawing and readability of diagrams*. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):61–79, 1988.
- [16] W. Didimo F. Montecchiani M. Patrignani A. Symvonis C. Binucci, E. Di Giacomo και I. G. Tollis. *Fan-planarity: Properties and complexity*. *Theor. Comput. Sci.*, 589:76–86, 2015.
- [17] Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia και Ioannis G. Tollis. *Algorithms for Drawing Graphs: An Annotated Bibliography*. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 4(5), 1994.
- [18] Walter Didimo, Giuseppe Liotta και Fabrizio Montecchiani. *A Survey on Graph Drawing Beyond Planarity*. *ACM Comput. Surv.*, 52(1), 2019.
- [19] C. Batini, E. Nardelli και R. Tamassia. *A layout algorithm for data flow diagrams*. *IEEE Transactions on Software Engineering*, ΣΕ-12(4):538–546, 1986.
- [20] Α. Οικονόμου. *Απεικόνιση Γραφημάτων με Έμφαση στις Ιδιότητες Μονοπατιών*. Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, 2018.
- [21] Goossen Kant. *Algorithms for Drawing Planar Graphs*. Διδακτορική Διατριβή, Universiteit Utrecht, Faculteit Wiskunde en Informatica, 1999.