ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΜΡΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Πραγματικά Δικαιώματα (Real Options): τα βασικά υποδείγματα και βιβλιογραφική ανασκόπηση

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συντάκτης: ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΜΠΟΤΣΗΣ*
Αριθμός Μητρώου: 09312021

Επιβλέπων: Βασίλης Παπανικολάου
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

Αθήνα, Μάρτιος 2015

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη

Με την παρούσα εργασία αποπειρώμαι μία κάπως μαθηματική εισαγωγή στα βασικά υποδείγματα των πραγματικών δικαιωμάτων καθώς και μια βιβλιογραφική επισκόπηση της θεωρίας τους. Παραθέτω την ιστορική εξέλιξη που ακολούθησε η δημιουργία τους ξεκινώντας από την αντιμετώπιση των μειονεκτημάτων της Καθαρής Παρούσας Αξίας και τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχουν οι εξεταζόμενες επενδύσεις για να είναι εφικτή η εφαρμογή της θεωρίας των πραγματικών δικαιωμάτων. Παραθέτω το στοχαστικό περιβάλλον μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η αβεβαιότητα την οποία προϋποθέτουν τα πραγματικά δικαιώματα και ακολουθώντας τους Dixit & Pindyck (1994) παραθέτω τα υποδείγματα για την αποτίμησης και την απόφαση πραγματοποίησης μίας επένδυσης καθώς και για την ενδοκλαδική ισορροπία υπό το καθεστώς της αβεβαιότητας. Κατόπιν, εξετάζω βιβλιογραφικά την ιδιαιτερότητα που έχει η κατοχή ενός χαρτοφυλακίου με πραγματικά δικαιώματα στην αποτίμηση και αξιολόγηση μιας επένδυσης και την εμπειρική εφαρμογή των πραγματικών δικαιωμάτων σε ένα πολύ ευρύ φάσμα επιστημών που φτάνει μέχρι την νομική επιστήμη. Τέλος, αν και τα πραγματικά δικαιώματα αποτελούν πολύ χρήσιμο εργαλείο για την ενσωμάτωση της αβεβαιότητας και τη ευελιξίας στην αποτίμηση και αξιολόγηση των επενδύσεων χρήζει ιδιαίτερης προσοχής η εφαρμογή τους καθώς ελλοχεύουν σημαντικοί κίνδυνοι.

Λέξεις κλειδιά: πραγματικά δικαιώματα (real options), αξιολόγηση επενδύσεων, αποτίμηση, αβεβαιότητα, ευελιξία

*Επικοινωνία: botsis.alex@gmail.com

Abstract

With this dissertation I attempt a somewhat mathematical introduction to the elementary models of real options, and a literature review of this theory. Additionally, I refer to the historical development that the creation of real options followed in order to address the drawbacks of the Net Present Value, and to the features an investment should have to make the application of the theory of real options possible. I develop the stochastic environment in which the uncertainty occurs, that is required by the real options theory, and following Dixit & Pindyck (1994) I quote the models for the valuation of and for the decision to make an investment and for intra-sectorial equilibrium under conditions of uncertainty. Then, I examine with bibliographic reference the peculiarity of the possession of a portfolio of real options in the evaluation of an investment, and the empirical implementation of real options, that extends in a very wide range of disciplines that reaches the legal science. Finally, although the real options constitute a very useful tool that incorporates uncertainty and flexibility in measuring and evaluating investments, particular attention is needed for the implementation bears non-negligible risks.

Ι. Εισαγωγή

Η επένδυση είναι σημαντική τόσο σε επίπεδο οικονομίας αθροιστικά όσο και σε επίπεδο επιχείρησης. Δημιουργεί νέες θέσεις εργασίας και κινεί την μηχανή της μεγέθυνσης μίας οικονομίας, ενώ στο Μίκρο επίπεδο μεγεθύνει την αξία της επιχείρησης και άρα αποφέρει αποδόσεις στην επένδυση των μετόχων της. Η επιτυχία, όμως, της επένδυσης να εκπληρώσει τον σκοπό της εξαρτάται από την επιτυχία της διοίκησης να την αξιολογήσει σωστά (Schoene, 2015)· για να αυξηθεί η αξία της επιχείρησης πρέπει η απόδοση της επένδυσης να υπερκαλύπτει το κόστος της (Brealey & Myers, 1996).

Όμως, τα βασικά εργαλεία για την αξιολόγηση και ανάλυση των επενδύσεων είναι η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας (ΚΠΑ) η οποία αγνοεί τον κίνδυνο και την δυνατότητα αναβολής της επένδυσης (Trigeorgis, 1996). Επίσης, οι Copeland & Antikarov (2003) αναφέρουν ότι η μέθοδος της ΚΠΑ υποεκτιμά την απόδοση των επενδύσεων γιατί αποτυγχάνει να συμπεριλάβει την δυνατότητα της ευελιξίας στην ανάληψη οποιουδήποτε επενδυτικού σχεδίου. Η έννοια και η ανάλυση των «πραγματικών δικαιωμάτων» (real options) που εισήχθηκε από τον Stewart Myers (1977) διεύρυνε τους ορίζοντες της αξιολόγησης των επενδυτικών αποφάσεων.

Γιατί όμως ο όρος "real options" αποδίδεται ως «πραγματικά δικαιώματα»; Στην πρώτη ανάλυσή τους, ο Myers (1977) τα ορίζει ως τις «ευκαιρίες να αποκτηθούν πραγματικά κεφάλαια» ("opportunities to purchase real assets", σελ. 164). Τα «πραγματικά κεφάλαια» μπορούμε να τα αντιληφθούμε ως τον αντίποδα των «χρηματοοικονομικών», αν και ο Myers (1977) τα ορίζει ως τα κεφάλαια η τιμή των οποίων είναι «ανεξάρτητη από την επενδυτική στρατηγική της επιχείρησης» (σελ. 164)· δηλαδή η αξία της επενδυτικής ευκαιρίας. Αν σκεφτούμε ότι τα χρηματοοικονομικά κεφάλαια ουσιαστικά έχουν ενσωματώσει όλη την διαθέσιμη πληροφορία που αφορά την επιχείρηση, τότε αυτά διαφέρουν τελείως από τα «πραγματικά» που είναι «ανεξάρτητα από την επενδυτική της στρατηγική». Γιατί «δικαιώματα»; Γιατί δεν είναι ακριβώς αναλύονται ως ένα δικαίωμα και όχι υποχρέωση για την πραγματοποίηση κάποιου επενδυτικού σχεδίου.

Έτσι, η θεωρία των πραγματικών δικαιωμάτων ενσωματώνει ταυτόχρονα και την δυνατότητα αναβολής ή παύσης μίας επενδυτικής ευκαιρίας αλλά και την αβεβαιότητα που ενέχουν οι χρηματοροές της επένδυσης (Yeo & Qiu, 2003). Μία επενδυτική ευκαιρία χωρίς την ευελιξία της αναμονής ή της προσωρινής διακοπής είναι μη ρεαλιστική καθώς αυτή είναι που μπορεί να μετριάσει σε μεγάλο βαθμό τον κίνδυνο απωλειών χωρίς να περιορίσει και την δυνατότητα για κερδοφορία (Yeo & Qiu, 2003· Wang & Yang, 2012).

Πότε όμως είναι χρήσιμο η ανάλυση μιας επενδυτικής απόφασης να γίνεται με την εφαρμογή των πραγματικών δικαιωμάτων; Οι Amran & Kulatilaka (1999) αναδεικνύουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει η υπό εξέταση επιλογή ώστε να έχει νόημα η ανάλυσή της με πραγματικά δικαιώματα (επίσης Schulmerich, 2010):

[1] Όταν η επένδυση προϋποθέτει την ανάληψη άλλων επενδύσεων[1] ("contingent investment", Amran & Kulatilaka, 1999: σελ. 24),

[2] όταν αβεβαιότητα είναι μεγάλη και επιτάσσει την αναμονή πριν την ανάληψη οποιασδήποτε δράσης,

[3] όταν η αξία της επένδυσης εξαρτάται όχι από άμεσες χρηματοροές αλλά από μελλοντικές προοπτικές μεγέθυνσης· π.χ. η χρηματοδότηση της καινοτομίας έχει άμεσες απώλειες, αλλά η ανάπτυξη ενός καινούργιου προϊόντος συνεπάγεται την ραγδαία μεγέθυνση στο μέλλον.

[4] Όταν η αβεβαιότητα είναι τόσο μεγάλη που επιτάσσει το επενδυτικό σχέδιο να έχει μεγάλη ευελιξία, δηλαδή μπορεί να αναπτυχθεί ή να εγκαταλειφθεί (επίσης, και στον Kamrad, 2012)

[5] όταν η επένδυση ή η στρατηγική μπορεί να επανασχεδιαστεί οποιαδήποτε στιγμή της ζωής της.

Όταν ένα ή περισσότερα από τα 1 έως 5 ισχύουν τότε οι συμβατικές μέθοδοι δε μπορούν να εκτιμήσουν σωστά την αξία της επενδυτικής επιλογής (Brealey, Myers & Allen, 2011· Amram & Kulatilaka, 1999). Σε συμφωνία με αυτά τα απαραίτητα χαρακτηριστικά ο Trigeorgis (1996) διαχωρίζει τις επενδυτικές επιλογές ως εξής (όπως συνοψίζονται στον Schulmerich, 2010):

[I] «Μη αναστρέψιμες επενδύσεις», δηλαδή όταν το κόστος πραγματοποίησής τους δεν μπορεί να ανακτηθεί.

[II] «Ευέλικτες επενδύσεις», όταν μπορούν να ανακληθούν ή να αναπτυχθούν

[III] «Επενδύσεις ασφάλισης», όταν περιλαμβάνουν την ασφάλιση έναντι του κινδύνου, π.χ. δικαίωμα πώλησης

[IV] «Σπονδυλωτές επενδύσεις» ("modular investments", Schulmerich, 2010: σελ. 24), δηλαδή επενδύσεις σε ένα προϊόν του οποίου τα χαρακτηριστικά μπορούν να αλλάξουν και, άρα, διακρατάται ένα δικαίωμα στον επανασχεδιασμό κάποιου χαρακτηριστικού του προϊόντος.

[1] "Contingent project" είναι το επενδυτικό σχέδιο το οποίο δεν μπορεί να αναληφθεί χωρίς την προηγούμενη πραγματοποίηση άλλης επένδυσης (Brealey, Myers & Allen, 2011).

[V] «Επενδύσεις ικριώματα» (“platform investments”, Schulmerich, 2010: σελ. 25), δηλαδή οι επενδύσεις πάνω στις οποίες δημιουργούνται επενδυτικές ευκαιρίες· κατ’ εξοχήν επενδύσεις σε Έρευνα και Ανάπτυξη (Ε&Α, R&D).

[VI] «Επενδύσεις για απόκτηση πληροφορίας»· π.χ. η χρηματοδότηση κάποιου ελέγχου μίας επιχείρησης η οποία είναι υποψήφια για εξαγορά.

Συνεπώς, κατά αντιστοιχία με τα [1] έως [5] και [I] έως [VI] ο Trigeorgis (1996) διακρίνει τα πραγματικά δικαιώματα ως εξής (όπως αναφέρονται στον Schulmerich, 2010):

- «Δικαίωμα αναβολής»: η επιχείρηση κατέχει αυτό το δικαίωμα όταν μπορεί να αναβάλλει την ανάληψη της επένδυσης σε μία άλλη στιγμή στο μέλλον.
- «Δικαίωμα σταδιακής ανοικοδόμησης», δηλαδή το επιχειρηματικό σχέδιο πραγματοποιείται βήμα-βήμα και υπάρχει η δυνατότητα να παύσει η επένδυση οποιαδήποτε στιγμή (επίσης, Majd & Pindyck, 1985).
- «Δικαίωμα αλλαγής της κλίμακας», όταν υπάρχει η δυνατότητα η επένδυση να αναπτυχθεί ή να περιοριστεί ανάλογα με τις συνθήκες της αγοράς.
- «Δικαίωμα εγκατάλειψης», δηλαδή να εγκαταλειφθεί η επένδυση και είναι ένα δικαίωμα πώλησης καθώς είναι ως εάν να *πωλείται* η επένδυση προς την αξία την οποία μπορεί να ανακτηθεί από αυτήν.
- «Δικαίωμα αλλαγής», δηλαδή το δικαίωμα να επανακαθοριστούν τόσο οι εισροές της επένδυσης όσο και, κατ’ επέκταση, οι εκροές αυτής.
- «Δικαίωμα μεγέθυνσης» τα οποία είναι αποτέλεσμα της πραγματοποίησης κάποιας επένδυσης η οποία δεν έχει άμεσα οφέλη· π.χ. η επένδυση στην ανάπτυξη κινητών νέας γενιάς δεν έχει άμεσα οφέλη, αλλά όταν η αγορά κινητών νέας γενιάς αναπτυχθεί τότε οι εταιρίες που δεν έχουν αναπτύξει αντίστοιχα προϊόντα θα εκτοπιστούν πλήρως από τον ανταγωνισμό.
- «Πολλαπλά δικαιώματα» όταν η επιχείρηση έχει στην κατοχή της περισσότερες από μία από της παραπάνω επιλογές – περισσότερα από ένα από τα παραπάνω δικαιώματα.

Ιστορική Εξέλιξη

Η υποδειγματοποίηση των πραγματικών δικαιωμάτων που είδαμε επιγραμματικά και η ανάλυση που θα δούμε παρακάτω αποτέλεσαν μία μέθοδο αντιμετώπισης της ανεπάρκειας της ανάλυσης της ΚΠΑ. Το κυριότερο πρόβλημα της μεθόδου της ΚΠΑ ήταν ότι αγνοούσε στην αποτίμηση την δυνατότητα της διοίκησης να σχεδιάσει εκ νέου την πορεία μιας επένδυσης ή να αναβάλλει την πραγματοποίησή της

(Schulmerich, 2010). Με λίγα λόγια, αν έχουμε δύο σχεδόν ταυτόσημα επενδυτικά σχέδια των οποίων η μοναδική διαφορά είναι η ευελιξία του ενός έναντι της μη ευελιξίας του άλλου, τότε οι ΚΠΑ αυτών θα ήταν ίσες. Προφανώς, όμως, αφού το ένα αφήνει περιθώρια ευελιξίας τότε αυτό θα προτιμηθεί από την διοίκηση. Η ΚΠΑ αδυνατεί όμως να ενσωματώσει αυτή την προτίμηση της διοίκησης.

Πριν όμως φτάσουμε στα πραγματικά δικαιώματα όπως τα ξέρουμε σήμερα έγιναν προσπάθειες ενσωμάτωσης της αβεβαιότητας και των διαδοχικών και εναλλακτικών σταδίων στην αποτίμηση της επένδυσης (Schulmerich, 2010). Μία τέτοια μέθοδος είναι και τα «δένδρα αποφάσεων» (“decision-trees”). Σύμφωνα με την μέθοδο αυτήν αντιστοιχίζονται διάφορες εναλλακτικές σε κάθε πιθανό γεγονός κι έτσι κάθε μονοπάτι αποτελείται από πολλούς διαδοχικούς κλάδους. Έτσι, για κάθε πιθανό γεγονός εκτός του ελέγχου της επιχείρησης αντιστοιχίζεται κάποια δράση της επιχείρησης. Υπολογίζεται, έτσι, η ΚΠΑ σταθμίζοντας τις δράσεις της επιχείρησης με την πιθανότητα του τυχαίου γεγονότος από το οποίο αυτές προκύπτουν.

Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι η αξιολόγηση του στρατηγικού σχεδιασμού μίας επιχείρησης μπορεί να γίνει με τα «δένδρα αποφάσεων» υπό ορισμένες προϋποθέσεις. Όταν η επένδυση πραγματοποιείται σε διαδοχικά στάδια, οπότε και οι επιλογές της επιχείρησης λαμβάνουν χώρα σε διακριτό χρόνο, και όταν υπάρχει αβεβαιότητα μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του δένδρου αποφάσεων. Όμως, όταν αυξάνεται η πολυπλοκότητα λόγω πολλών πιθανών γεγονότων, λόγω μεγάλου χρονικού ορίζοντα ή πολλών εναλλακτικών δράσεων από την πλευρά της επιχείρησης, τότε η μέθοδος γίνεται αρκετά δύσχρηστη. Επίσης σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι υποθέτει ένα σταθερό επιτόκιο προεξόφλησης σε όλη την διάρκεια της επένδυσης, κάτι το οποίο είναι μη ρεαλιστικό. (Schulmerich, 2010)

Για την αντιμετώπιση της εξωπραγματικής υπόθεσης ότι το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι σταθερό, η ανάλυση των «δένδρων αποφάσεων» επεκτείνεται στην ανάλυση «ενδεχόμενων απαιτήσεων»[2] (“contingent claims”). Έτσι, όπως θα δούμε και στο μέρος ΙΙ, στην ανάλυση χρησιμοποιείται ένα προσαρμοσμένο στον κίνδυνο επιτόκιο. Επιπλέον, υπό την προϋπόθεση της απουσίας της δυνατότητας «εξισορροπητικής κερδοσκοπίας» (arbitrage) θα εξισώσουμε την απόδοση υπό το προεξοφλητικό επιτόκιο με την απόδοση υπό του προσαρμοσμένου στον κίνδυνο επιτοκίου. Με αυτό το *τέχνασμα* αντικαθίσταται – κατά

[2] Με βάση την επίσημη απόδοση του «contingent claims» στην Επίσημη Εφημερίδα της Ευρωπαϊκής Ένωσης, από το αγγλικό κείμενο στο ελληνικό· eur-lex.europa.gr, οδηγία 2006/48/ΕΚ (directive 2006/48/EC), έγγραφο (document) 32006L0048

κάποιον τρόπο – το σταθερό διαχρονικά προεξοφλητικό επιτόκιο με το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο επιτόκιο που ισχύει *τώρα* την στιγμή της ανάλυσης. (Schulmerich, 2010)

Ουσιαστικά, λόγω της ευελιξίας στην διαχείριση της εξέλιξης του επενδυτικού σχεδίου ο κίνδυνος δεν είναι σταθερός αλλά μεταβάλλεται σε κάθε βήμα, οπότε ανάλογα πρέπει να κινείται και το επιτόκιο. Καθώς ο κίνδυνός αυξάνει ο επιχειρηματίας θα θελήσει μεγαλύτερες αποδόσεις και το αντίθετο όταν ο κίνδυνος μειωθεί, κάτι το οποίο η υπόθεση του σταθερού προεξοφλητικού επιτοκίου παραβιάζει. Με την ανάλυση των ενδεχόμενων απαιτήσεων, όμως, κατασκευάζονται ουδέτερα και ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας για τις διάφορες μελλοντικές εξελίξεις εκτός του πεδίου χειρισμού της επιχείρησης. Επιπλέον, το προεξοφλητικό επιτόκιο αντικαθίσταται με αντίστοιχο που είναι ουδέτερο κινδύνου. (Schulmerich, 2010)

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το παραπάνω *τέχνασμα* σε καμία περίπτωση δεν αλλοιώνει την πραγματικότητα. Το καινούργιο μέτρο πιθανότητας είναι ισοδύναμο με το αρχικό, κι έτσι καμία εξέλιξη δεν γίνεται πιο πιθανή από μία άλλη. Ταυτόχρονα, το ουδέτερο κινδύνου επιτόκιο μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο του οποίου την απόδοση θα εξισώσουμε τε το ακίνδυνο επιτόκιο. Είναι ως εάν να εξετάζουμε την επένδυση όχι κατευθείαν με γυμνό μάτι, αλλά μέσα από μία φωτογραφία και η φωτογραφία αυτή έχει *μεταφέρει* όλες τις πιθανές μελλοντικές εξελίξεις σε όρους το παρόντος.

Εντούτοις, παρά την καταλληλότητα των πραγματικών δικαιωμάτων στην αποτίμηση επενδύσεων με τα χαρακτηριστικά που είδαμε, [1] έως [5], υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί όσον αφορά την αναλογία μεταξύ των πραγματικών και των χρηματοοικονομικών (συμβατικών) δικαιωμάτων. Πρώτον, η κατοχή ενός δικαιώματος στην επένδυση δεν είναι κατ’ αποκλειστικότητα καθώς την ίδια επένδυση μπορεί να ενδιαφέρονται να την αναλάβουν και άλλες επιχειρήσεις. Δεύτερον, υπάρχουν δικαιώματα προτίμησης πάνω στην πραγματοποίηση της επένδυσης, δηλαδή, μία επιχείρηση η οποία εξετάζει την αύξηση της παραγωγής της εκείνη κατέχει αυτό το δικαίωμα χωρίς να έχει ανταγωνιστές – έχει δικαίωμα προτίμησης. Ενώ, υπό κάποιες προϋποθέσεις, θα μπορούσε να αναθέσει (να μεταβιβάσει το δικαίωμα) την αύξησης της παραγωγής σε άλλη επιχείρηση – να αρνηθεί το δικαίωμα προτίμησης. Η ανάδοχος επιχείρηση, όμως, δεν θα μπορούσε να έχει από πριν το δικαίωμα παρά μόνο αν της παραχωρηθεί. Τρίτον, αν πρόκειται για σύνθεση πολλών δικαιωμάτων τότε υπάρχουν αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των επιμέρους. (Schulmerich, 2010)

Η πιο σημαντική όμως δυσαναλογία μεταξύ πραγματικών και συμβατικών διακιωμάτων είναι ότι τα τελευταία δεν είναι διαπραγματεύσιμα (Schulmerich, 2010), κι ακόμα κι αν ήταν, οι αγορές τους δεν θα μπορούσαν να έχουν επαρκή ρευστότητα – πόσοι επιχειρηματίες ή κερδοσκόποι θα ενδιαφέρονταν να προσφέρουν ή να αγοράσουν ένα δικαίωμα για ένα μερίδιο σε μία επένδυση; Συνεπώς, υπάρχουν σοβαροί περιορισμοί στην αναλογία μεταξύ των πραγματικών δικαιωμάτων και των χρηματοοικονομικών αντιστοίχων τους. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να δίδεται ιδιαίτερη προσοχή στην χρήση τους και να εφαρμόζονται εκεί που χρειάζονται· χαρακτηριστικά [1] έως [5] και [I] έως [VI].

Μέθοδοι αποτίμησης

Συνοπτικά, πριν κλείσουμε την εισαγωγή, θα αναφέρουμε τις κυριότερες μεθόδους με τις οποίες μπορούν να αποτιμηθούν τα πραγματικά δικαιώματα και άρα οι επενδύσεις τις οποίες εξετάζουν. Αυτές συνοψίζονται σε λύσεις αναλυτικές ή «κλειστής μορφής» και, όταν η αναλυτική λύση είναι αδύνατη, σε αριθμητικές λύσεις. (Schulmerich, 2010)

Όσον αφορά την επίλυση των υποδειγμάτων αποτίμησης με αναλυτική μορφή αξίζει να δούμε σε ποια δικαιώματα αυτές εφαρμόστηκαν. Οι McDonald & Siegel (1986), Paddock, Siegel & Smith (1988) και Majd & Pindyck (1987) ανέλυσαν την κατοχή του δικαιώματος αναβολής της ανάληψης της επένδυσης. Οι McDonald & Siegel (1985) και Myers & Majd (1990) ανέλυσαν το δικαίωμα τερματισμού της επένδυσης και του τερματισμού λειτουργίας μιας παραγωγικής μονάδας. Οι Margrabe (1978) και Stulz (1982) ανέλυσαν δικαίωμα για την αντικατάσταση της επένδυσης, π.χ. την αντικατάσταση του παραγόμενου προϊόντος με κάποιο άλλο. Οι Geske (1979), Carr (1988 και 1995) ανέλυσαν σύνθετα επενδυτικά δικαιώματα, δηλαδή την αποτίμηση επενδυτικών επιλογών που αποτελούνται από περισσότερα από ένα από τα πραγματικά δικαιώματα που έχουμε δει μέχρι τώρα.

Όλες αυτές οι εφαρμογές της θεωρίας των πραγματικών δικαιωμάτων μπόρεσαν να λυθούν αναλυτικά γιατί ήταν σχετικά απλουστευτικές. Η απλούστευση με την οποία ανέλυσαν τις επιχειρηματικές επιλογές είναι, όμως, μη ρεαλιστική αλλά αποτελεί την μόνη οδό για να λάβουμε κλειστού τύπου λύση. Βέβαια, κάποιες επενδυτικές επιλογές είναι πράγματι απλές και στην πραγματικότητα, αλλά αυτό δεν είναι συνηθισμένο. Αν αυξήσουμε την *ευκρίνεια* για να προσεγγίσουμε καλύτερα την πολυπλοκότερη πραγματικότητα τότε δεν μπορούμε να πάρουμε λύση από τα πραγματικά δικαιώματα με αναλυτικές μεθόδους. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται οι αριθμητικές μέθοδοι για την προσέγγιση της λύσης. (Schulmerich, 2010)

Οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην αποτίμηση των πραγματικών δικαιωμάτων αφορούν είτε την επίλυση μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης στην οποία καταλήγουμε από τα πρώτα βήματα της αποτίμησης, ή με την προσέγγιση της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την τυχαιότητα. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις λύνονται είτε με αριθμητική ολοκλήρωση είτε με τις μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών. Στον (Schulmerich, 2010) αναλύονται διεξοδικά κάποιες από αυτές τις μεθόδους. Με την αριθμητική επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης για τα συμβατικά δικαιώματα ασχολούνται διεξοδικά και οι Parkinson (1977), Brennan & Schwartz (1977 και 1978), Brennan (1979), Majd & Pindyck (1987), Johnson (1983), Geske & Johnson (1984), MacMillan (1986), Blomeyer (1986), Barone-Adesi & Whaley (1987) και Ho, Stapleton & Subrahmanyam (1997). Δεδομένου ότι και τα πραγματικά τυποποιούνται ακριβώς σαν τα συμβατικά αυτές οι προσεγγιστικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα στην αξιολόγηση των επενδύσεων.

Επιπλέον, σε ότι αφορά στην προσέγγιση της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την τυχαιότητα αυτή μπορεί να γίνει είτε με προσομοίωση Monte Carlo είτε με μεθόδους «πλεγμάτων» (lattice). Αυτές τις προσεγγίσεις έχουν αναπτύξει διεξοδικά για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων οι Boyle (1977 και 1988), Cox, Ross & Rubinstein (1979) και Hull & White(1988). Ταυτόχρονα, ο Trigeorgis (1991) αναπτύσσει μία μέθοδο πλεγμάτων με λογαριθμικό μετασχηματισμό συγκεκριμένα για επενδυτικά σχέδια που υποδειγματοποιούνται ως σύνθεση πολλών πραγματικών δικαιωμάτων. Ο Schulmerich (2010) αναπτύσσει και συγκρίνει κάποιες από αυτές τις μεθόδους λαμβάνοντας υπ’ όψιν του ότι και τα επιτόκια κινούνται στοχαστικά και ότι το βασικό ακίνδυνο επιτόκιο εξαρτάται από τον ορίζοντα της επένδυσης (“term structure of the interest rate”), δηλαδή, τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι σαφώς μικρότερα από τα μακροχρόνια.

Συγκριτικά με την προσέγγιση Monte Carlo, οι μέθοδοι των «πλεγμάτων» είναι καταλληλότεροι για σύνθετα πραγματικά δικαιώματα, όταν υπάρχουν πληρωμές μερισμάτων ή/ και αλληλεξαρτήσεις μεταξύ πολλών πραγματικών δικαιωμάτων. Εντούτοις, έχουν το μειονέκτημα ότι για διαφορετικές τιμές εκκίνησης των στοχαστικών ανελίξεων πρέπει οι προσεγγίσεις να γίνουν από την αρχή. (Schulmerich, 2010)

Στο μέρος ΙΙ που ακολουθεί θα εξετάσουμε τα βασικά υποδείγματα των πραγματικών δικαιωμάτων για τα οποία μπορούμε να πάρουμε λύση αναλυτικά, είτε με αποτίμηση αυτών είναι τε δυναμικό προγραμματισμό, αφού πρώτα κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση της μεθόδου της ΚΠΑ και του διωνυμικού υποδείγματος. Κατόπιν, πάλι με την χρήση των πραγματικών δικαιωμάτων θα εξετάσουμε την ενδοκλαδική ισορροπία. Στη συνέχεια, στο μέρος ΙΙΙ, θα αναφέρουμε κάποιες εφαρμογές και επεκτάσεις των πραγματικών δικαιωμάτων καθώς και τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης τους. Στο τελευταίο μέρος θα συνοψίσουμε το τι έχουμε δει και θα προτείνουμε πιθανές άλλες εφαρμογές των πραγματικών δικαιωμάτων.

ΙΙ. Ανάλυση Επιχειρηματικών Αποφάσεων σε Καθεστώς Αβεβαιότητας και Ευελιξίας

1. Καθαρή Παρούσα Αξία Χωρίς Αβεβαιότητα

Ξεκινώντας την ανάλυση θα αναπτύξω σύντομα τον τύπο για την αποτίμηση και των επενδυτικών επιλογών χωρίς αβεβαιότητα – όταν, δηλαδή, οι μελλοντικές απολαβές που απορρέουν από μία επένδυση είναι σίγουρες – χάριν εισαγωγής στις βασικές έννοιες της ανάλυσης επενδύσεων. Στη συνέχεια κάθε επιχειρηματικό σχέδιο ή επένδυση θα εξετάζονται μόνο υπό το πρίσμα της αβεβαιότητας, εκτός κάποιων εξαιρέσεων που θα αναφέρονται ρητά και θα χρησιμεύουν μόνο στην καλύτερη παρουσίαση των υποδειγμάτων και την σύγκριση μεταξύ αβεβαιότητας και μη. Όσο κι αν αυτό φαίνεται μη ρεαλιστικό ή μέθοδος αυτή αποτελεί το βασικό τρόπο αξιολόγησης επενδύσεων στα περισσότερα, αν όχι σε όλα, προπτυχιακά εγχειρίδια οικονομικών και χρηματοοικονομικών. Κάθε επένδυση, έχει ένα αρχικό κόστος που χρειάζεται για να καταβληθεί ώστε αυτή να πραγματοποιηθεί – μία εκροή C_0. Το αρχικό αυτό κόστος μπορεί να περιλαμβάνει το κόστος αγοράς και εγκατάστασης κάποιου εξοπλισμού ή το κόστος για την έρευνα αξιολόγησης της επένδυσης.

Κατόπιν, μόλις η επένδυση πραγματοποιηθεί και καταβληθεί το αρχικό της κόστος, αρχίζουν οι εισροές που απορρέουν από αυτήν. Οι μελλοντικές περιοδικές εισροές μείον τα μελλοντικά περιοδικά κόστη, τα οποία συνεπάγεται η επένδυση μας δίνουν τις καθαρές περιοδικές χρηματοροές $\{C_t, t \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Η περιοδικότητα, μπορεί να είναι ετήσια, εξαμηνιαία, μηνιαία, ημερήσια κ.α. ή ακόμα και συνεχής όπως θα δούμε στο τέλος αυτής της ενότητας. Οι ροές C_t ενέχουν αβεβαιότητα καθώς αφορούν, την στιγμή που αναλύεται ή επένδυση, κάτι μελλοντικό. Αν θεωρήσουμε τις C_t ως τις προσδοκώμενες μελλοντικές ροές, τότε έχουμε θεωρήσει την μέση τιμή αυτών των χρηματοροών και αυτή η χρήση της μέσης τιμής είναι βεβιασμένη, καθώς ο υπολογισμός της, τεχνικά, σημαίνει την κατανόηση του νόμου πιθανότητας που ακολουθεί η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$, $\omega \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $C_t \triangleq \mathbb{E}[X_t]$, $t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Παραμένοντας, όμως, σε συνθήκες βεβαιότητας, σε διακριτές περιόδους, ορίζουμε την Καθαρή Παρούσα Αξία (ΚΠΑ) ως εξής:

Ορισμός 1.1: Έστω ακολουθία $\{C_t, t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$ ή ακολουθία καθαρών χρηματοροών και έστω σταθερά $r \in \mathbb{R}$ ή το περιοδικό επιτόκιο – δηλαδή, για κάθε χρηματική μονάδα που αποταμιεύεται για $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ περιόδους, στο τέλος αυτών εκταμιεύονται $(1+r)^k$ χρηματικές μονάδες. Τότε ορίζουμε την καθαρή παρούσα αξία ως το συναρτησιακό $ΚΠΑ\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^{\geq 0}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$КПА\ (\{C_t, t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}, r) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i}{(1+r)^i}, \qquad (1.1)$$

και με $t \leq M$:

$$КПА\ (\{C_t, t = 0, 1, \dots, M\}, r) \triangleq \sum_{i=0}^{M} \frac{C_i}{(1+r)^i}, \qquad (1.1')$$

Το επιτόκιο r θεωρείται σταθερό σε κάθε περίοδο και ο συντελεστής $\frac{1}{(1+r)^i}$ καλείται συντελεστής προεξόφλησης i. Η επένδυση γίνεται αποδεκτή όταν $КПА > 0$. Ως επιτόκιο r μπορεί να θεωρηθεί και η απόδοση που θέλουν να έχουν οι μέτοχοι της επιχείρησης από το κεφάλαιο που επενδύουν.

Παραμένοντας σε συνθήκες βεβαιότητας, ας επεκτείνουμε λίγο την ΚΠΑ και σε συνεχή χρόνο. Θεωρούμε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[0, T] \subseteq \mathbb{R}^+$, $T < \infty$, και διαμέριση αυτού $\mathfrak{D} \triangleq \{t_0, t_1, \dots, t_n: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T\}$. Κατόπιν θεωρούμε πραγματικές συναρτήσεις συναρτήσεις $c_i \in C^{1,2}([t_i, t_j])$, $i < j$, $i, j = 0,1, \dots, n$ και $[t_i, t_j] \cap [t_{i'}, t_{j'}] = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $i' \neq j'$. Θεωρούμε λοιπόν την c_i ως την συνάρτηση καθαρών χρηματοροών που λαμβάνουν χώρα στο διάστημα $[t_i, t_j]$ – αυτή μπορεί να είναι είτε σταθερή είτε συνάρτηση του t. Θεωρούμε τώρα διαμέριση $\mathfrak{D}_i \triangleq \{s_0^i, s_1^i, \dots, s_k^i: t_i = s_0^i < s_1^i < \dots < s_k^i = t_j\}$, οπότε και ισχύει $\mathfrak{D}_i \cap \mathfrak{D}_{i'} = \emptyset, \forall i \neq i'$. Τότε

$$КПА_i = \sum_{l=0}^{k} c_i e^{-rs_l^i}(s_{l+1}^i - s_l^i), \qquad (1.2)$$

και αφού η c_i είναι συνεχής, άρα και ολοκληρώσιμη (Παντελίδης, 1992: Πρόταση 3.3 και Πρόταση 4.2), στο $[t_i, t_j]$, καθώς $|\mathfrak{D}_i| \to 0$,δηλαδή η $\mathfrak{D}_i$ θα γίνεται λεπτότερη

$$\sum_{l=0}^{k} c_i(s_l^i) e^{-rs_l^i}(s_{l+1}^i - s_l^i) \overset{|\mathfrak{D}_i| \to 0}{\rightrightarrows} \int_{t_i}^{t_j} c_i(t) e^{-rt} dt \implies$$

$$\implies КПА_i = \int_{t_i}^{t_j} c_i(t) e^{-rt} dt\ , \qquad (1.3)$$

κι αυτό ισχύει για κάθε διάστημα $[t_i, t_j] \subseteq [0, T]$ το οποίο πληροί τα παραπάνω. Προφανώς για $c_i(t) = c(t), \forall i = 0, 1, \dots, n$, τότε:

$$КПА\ (c(t), r) = \int_{0}^{T} c(t) e^{-rt} dt, \qquad (1.4)$$

με $КПА: \mathbb{R}^{[0,T]} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Λήμμα 1.1: Έστω επιτόκιο $r \geq 0$ σταθερό για μία περίοδο T η οποία χωρίζεται σε n υποπεριόδους και έστω συντελεστής προεξόφλησης $\frac{1}{(1+r)}$ για την περίοδο αυτή. Τότε ο συνεχής συντελεστής προεξόφλησης είναι e^{-r}.

Απόδειξη:

Για το $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Καθώς το επιτόκιο για κάθε υποπερίοδο $\frac{T}{N}$ είναι, εξ' ορισμού $\frac{r}{n}$, στο συνεχές έχουμε:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\uparrow+\infty} e^{-r}$$

■

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ΚΠΑ σε κάποια χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}$ για χρηματοροές που πραγματοποιούνται στο διάστημα $[t, T]$, τότε η 1.2 θα γίνει αντίστοιχα

$$ΚΠΑ_i\ (t; c_i(t), r) = \sum_{l=0}^{k} c_i e^{-r\left(s_l^i - t\right)}(\,s_{l+1}^i - s_l^i)$$

και, βέβαια, οι διαμερίσεις $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_i$ θα αφορούν το διάστημα $[t, T]$. Κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, καταλήγουμε ότι:

$$ΚΠΑ\ (t; c(t), r) = \int_t^T c(s)e^{-r(s-t)}ds\,, \qquad (1.5)$$

και με $c(s) \in C\big([t, +\infty)\big)$ ολοκληρώσιμη στο $[t, +\infty)$, για τυχόν $t \in \mathbb{R}$, για $T \to +\infty$:

$$ΚΠΑ\ (t; c(t), r) = \int_t^{+\infty} c(s)e^{-r(s-t)}ds\,, \qquad (1.6)$$

Σε κάθε περίπτωση από τις παραπάνω, είτε σε διακριτό είτε σε συνεχή χρόνο, η καθαρή παρούσα αξία αποτελεί την αξία της επένδυσης σε όρους τωρινού χρήματος. Δηλαδή, αν επενδύσουμε – χωρίς κίνδυνο, εφόσον, ακόμα παραμένουμε σε συνθήκες απόλυτης σιγουριάς – το ποσό ΚΠΑ €, με περιοδικό επιτόκιο r, τότε σε n περιόδους θα έχουμε $ΚΠΑ(1+r)^n$. Εφεξής θα εξετάσουμε τις επιχειρηματικές αποφάσεις και την αποτίμηση και αξιολόγηση των επενδύσεων υπό το καθεστώς της αβεβαιότητας.

2. Το Διωνυμικό Υπόδειγμα

Προχωράμε τώρα σε καθεστώς αβεβαιότητας όσον αφορά τις μελλοντικές απολαβές. Υποθέτουμε την παρούσα περίοδο συν ακόμα n περιόδους, $t \in \mathbb{T} \triangleq \{0, 1, 2, \dots, n\}$

και ένα αρχικό κόστος επένδυσης I. Θεωρούμε χώρο πιθανότητας (χπ) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$, διύλιση $\mathbb{F} \triangleq \{\mathcal{F}_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ με τις *συνήθεις ιδιότητες* (βλ. Γλωσσάρι Ορολογιών) και την χρηματοροή $\{C(t,\omega)\}_{t\in\mathbb{T}}$, με δύο δυνατές τιμές: $C_2^t, C_1^t \in \mathcal{F}_t$ με $C_2^t < 0 < C_1^t$ – άρα η $\{C(t,\omega)\}_{t\in\mathbb{T}}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη (σα). Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν η κάθε μία από τις C_2^t, C_1^t, την περίοδο $t = 1$, είναι $\mathbb{P}(C_1^1) = q$ και $\mathbb{P}(C_2^1) = (1-q)$, ενώ για $t \geq 2$ $(C_1^t, C_2^t) = (C_1^1, C_2^1) = (c_1, c_2)$. Οπότε, $\mathbb{E}[C(t)] = qc_1 + (1-q)c_2$. Για αρχικό κόστος επένδυσης $I < 0$, έχουμε:

$$K\Pi A(\{C(t,\omega)\}_{t\in\mathbb{T}}, I, r) = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[C(t)]}{(1+r)^i}$$

που κατά τα γνωστά αποδεχόμαστε την επένδυση αν $K\Pi A > 0$. (Dixit & Pindyck, 1994)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μπορούμε να περιμένουμε μία περίοδο. Δηλαδή, να δούμε την $t = 1$ αν θα πραγματοποιηθεί το ευνοϊκό σενάριο c_1 και αν αυτό συμβεί τότε ο επιχειρηματίας να πραγματοποιήσει την επένδυση με κόστος I, αλλιώς θα την απορρίψει οριστικά χωρίς κανένα κόστος (χάριν ευκολίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας[3]). Ποια θα είναι τότε η παρούσα αξία της επένδυσης αυτής την στιγμή $t = 0$; Η $t = 0$ είναι αυτή που μας ενδιαφέρει αφού ο επιχειρηματία τότε καλεί να αποφασίσει αν θα επενδύσει τώρα ($t = 0$) ή αν θα περιμένει να δει αν θα πραγματοποιηθεί το ευνοϊκό σενάριο. Σε αυτή την περίπτωση, η ΚΠΑ ουσιαστικά *τιμολογεί* την επένδυση λαμβάνοντας υπ' όψιν τόσο την δυνατότητα αναμονής όσο τα χαρακτηριστικά της επένδυσης, και όχι την ίδια την επένδυση όπως στην παραπάνω περίπτωση. Άρα, με την αναμονή έχουμε:

$$K\Pi A^*(c_1, I, r) = 0 + q\left[\frac{I}{1+r} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_1}{(1+r)^i}\right], \qquad (2.1)$$

αν $K\Pi A^* > K\Pi A$ τότε αξίζει η αναμονή για μία περίοδο, αλλιώς πραγματοποιείται τώρα η επένδυση αν $K\Pi A > 0$. Το ότι θα τηρηθεί στάση αναμονής, δεν συνεπάγεται ότι την $t = 1$ η επένδυση θα πραγματοποιηθεί – αν πραγματοποιηθεί το $\{c_1\}$ τότε και μόνο τότε θα πραγματοποιηθεί, γιατί αλλιώς η ΚΠΑ της επένδυσης, αυτής καθαυτής, την $t = 1$ θα είναι αρνητική. (Dixit & Pindyck, 1994)

Ορισμός 2.1: Αξία δικαιώματος αναμονής, ΔΑ, καλείται η διαφορά:

$$\Delta A = K\Pi A(\{C(t,\omega)\}_{t\in\mathbb{T}}, I, r) - K\Pi A^*(c_1, I, r)$$

Με αλλά λόγια, ένας επιχειρηματίας είναι διατεθειμένος να πληρώσει επιπλέον το ποσό ΔΑ ώστε να αποκτήσει ένα δικαίωμα – και όχι υποχρέωση - να κάνει μία επένδυση στο μέλλον, αντί για τώρα ή ποτέ (Dixit & Pindyck, 1994). Εναλλακτικά,

[3]Ακόμα και με μη μηδενικό κόστος απόρριψης της επένδυσης, αυτό θα είχε πιθανότητα $(1-q)$ και συντελεστή προεξόφλησης $\frac{1}{(1+r)}$, οπότε εύκολα προστίθεται στην σχέση της ΚΠΑ.

πρόκειται για την αξία της αναβολής της λήψης της απόφασης για το αν θα πραγματοποιήσει την επένδυση ή όχι.

Εφόσον μόλις μιλήσαμε για ένα δικαίωμα για επένδυση, ας δούμε την σχέση που έχει μία επενδυτική ευκαιρία με ένα δικαίωμα αγοράς τίτλων. Μία επενδυτική ευκαιρία με δυνατότητα επένδυσης στο μέλλον παρέχει το δικαίωμα στην επένδυση και όχι την υποχρέωση αυτή να αναληφθεί. Σε αντιστοιχία με την τιμή εξάσκησης ενός διαπραγματευόμενου δικαιώματος αγοράς, η επένδυση μπορεί να πραγματοποιηθεί αν και μόνο αν καταβληθεί το αρχικό κόστος αυτής. Με την καταβολή αυτού του κόστους τότε αποκτάται ένα επενδυτικό σχέδιο, ενώ στο δικαίωμα αγοράς αποκτώνται τίτλοι. Το σημαντικότερο, τόσο για τους τίτλους που αποκτώνται όσο και για το επενδυτικό σχέδιο, είναι ότι η αξία τους είναι αβέβαιη και κινείται στοχαστικά – αποτελεί, δηλαδή, μία στοχαστική ανέλιξη.

Παραμένοντας στην ίδια επενδυτική ευκαιρία, με την ίδια δομή, χαρακτηριστικά και νόμο πιθανότητας, ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για το πώς τιμολογείται ένα επενδυτικό δικαίωμα. Έστω F_t, V_t η αξία της επενδυτικής αυτής ευκαιρίας και η προεξοφλημένη αξία των χρηματοροών τις χρονικές στιγμές $t \in \mathbb{T} \triangleq \{0,1,\dots\}$ και έστω $r = 0.1$, $I = -1600€$, $c_1 = 100€$, $c_2 = 300€$. Οπότε, τα δύο ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν την $t = 1$ είναι:

$$F_1 = (V_1 - I)^+ = \begin{cases} \left(-600 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{100}{1.1^i}\right) \mathbb{1}_{\{V_1 - I > 0\}} = -500\, \mathbb{1}_{\{V_1 - I > 0\}} = 0 \\ \left(-1600 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{300}{1.1^i}\right) \mathbb{1}_{\{V_1 - I > 0\}} = 1700 \end{cases}$$

ο όρος $(V_1 - I)^+$ κάνει πλέον ξεκάθαρη την αναλογία με τα δικαιώματα αγοράς. Οπότε ας λέμε ότι F_0 είναι η αξία του δικαιώματος στην επένδυση. Προφανώς, αν προεξοφλημένες χρηματοροές δεν υπερβαίνουν το κόστος της επένδυσης τότε αυτή είναι ασύμφορη και, άρα, το δικαίωμα να πραγματοποιηθεί η επένδυση δεν έχει αξία. Το ζητούμενο, όμως, όπως και στην ανάλυση των δικαιωμάτων είναι ο υπολογισμός της τωρινής τους αξίας, F_0.

3. Αποτίμηση με Δυναμικό Προγραμματισμό – Γενική και Εισαγωγική Ανάλυση

Η ανάλυση σε αυτό το κομμάτι της εργασία είναι ουσιαστικά ένας «βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος» (Oksendal, 2010) και μέσω αυτής θα εξάγουμε την εξίσωση των Hamilton-Jacobi-Bellman (Μπέλλμαν) που υπονοείται στην ανάλυση των Dixit & Pindyck (1994). Ξεκινώντας θα ορίζουμε την συνάρτηση κατάστασης της επιχείρησης, την συνάρτηση ελέγχου, και κάποια συναρτησιακά που θα χρειαστούν στην ανάλυση, ενώ μετά από κάθε μαθηματικό ορισμό θα διευκρινίζεται με οικονομική έννοια το μαθηματικό αντικείμενο που ορίστηκε.

Ορισμός 3.1: Έστω χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, χώρος $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ ή $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \triangleq \{z \in \mathbb{Z}: z \geq 0\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, και σ.α. $X: \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, συμβολικά, εφεξής, $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ και $\{X_t\}$. Έστω τώρα διύλιση $\mathbb{F} \triangleq \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ όπου $\mathcal{F}_t \triangleq \sigma(\{X_s^{-1}(A): s \leq t, A \in \mathfrak{B}^m\} \cup \mathcal{N}) \triangleq \sigma(\{X_s, s \leq t\} \cup \mathcal{N})$ με τις συνήθεις ιδιότητες, όπου $\sigma(\{\cdot\})$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\{\cdot\}$, $\mathfrak{B}^m$ η άλγεβρα Borel του $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{N} = \{\Lambda \subset \Omega: \exists N \in \mathcal{F}\ \mu\varepsilon\ \Lambda \subset N\ \kappa\alpha\iota\ \mathbb{P}(N) = 0\}$. Αν η $\{X_t\}$ ικανοποιεί την Μαρκοβιανή Ιδιότητα, ήτοι $\mathbb{P}(X_{s+t} \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_{s+t} \in A | X_s), \mathbb{P} - \sigma.\beta.$, για $A \in \mathfrak{B}^m$, $s, t \in \mathbb{T}$, τότε ή $\{X_t\}$ καλείται κατάσταση ή ανέλιξη κατάστασης της επιχείρησης.

Σύμφωνα με τους Dixit & Pindyck (1994) η ανέλιξη κατάστασης περιλαμβάνει τις μεταβλητές που επηρεάζουν τις επενδυτικές ευκαιρίες και την λειτουργία της επιχείρησης. Αυτές οι μεταβλητές μπορεί να είναι κάποιοι δείκτες που περιγράφουν την πρόσβαση κε κεφάλαια, την κερδοφορία, ή άλλες μεταβλητές για το ανθρώπινο κεφάλαιο που αυτή διαθέτει, για την αξία του ονόματος, για την φήμη ή το διαθέσιμο κεφάλαιο κίνησης. Γενικά, δηλαδή, περιλαμβάνει οτιδήποτε επηρεάζει ή επηρεάζεται κάθε φορά στην ανάλυση που γίνεται – π.χ. το αυξημένο κόστος δανεισμού έχει σχέση επενδυτική σε νεώτερο εξοπλισμό όταν αυτή προϋποθέτει χρηματοδότηση με δανεισμό, ενώ, αντίθετα, η δαπάνη για γραφική ύλη διοίκησης δεν σχετίζεται καθόλου με την επένδυση αυτή, οπότε το κόστος δανεισμού περιλαμβάνεται στην ανέλιξη κατάστασης.

Ορισμός 3.2: Μία δεξιά συνεχής συνάρτηση $u: \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, u_t, που περιγράφει μεταβλητές τις οποίες έχει στον έλεγχό της η επιχείρηση καλείται συνάρτηση ελέγχου.

Η συνάρτηση ελέγχου μπορεί να έχει και άλλες μορφές, αλλά στην παρούσα ανάλυση δεν βρίσκουν κάποια εφαρμογή. Σημειώνεται ότι ο αναγνώστης μπορεί να βρει τις εναλλακτικές στοχαστικές μορφές της συνάρτησης ελέγχου στον Oksendal (2010, p. 245). Στη συνέχεια, μέχρις ότου αναφερθεί κάτι διαφορετικό, η συνάρτηση ελέγχου είναι διμεταβλητή και παίρνει τιμές 0 ή 1, για αναμονή ή επένδυση αμέσως, αντίστοιχα. Οι Dixit & Pindyck (1994) αναφέρουν ότι θα μπορούσε, επιπλέον, να περιλαμβάνει την επένδυση σε έρευνα και ανάπτυξη ή τον τερματισμό λειτουργίας της επιχείρησης. Ουσιαστικά, μπορεί να περιγράφει οτιδήποτε έχει η επιχείρηση στον άμεσο έλεγχό της με τια αποφάσεις τις – π.χ. σε περιβάλλον τέλειου ανταγωνισμού, η συνάρτηση ελέγχου θα περιλαμβάνει το προσωπικό που απασχολείται, αλλά όχι και την τιμή του αγαθού που πουλάει καθώς στο τελευταίο δεν έχει καμία επιρροή.

Έστω τώρα συνάρτηση $\pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\pi(X_t, u_t, t)$, που περιγράφει την άμεση κερδοφορία της επιχείρησης για κάθε κατάσταση X_t και επιλογή u_t αυτής, και ορίζουμε ρ το προεξοφλητικό επιτόκιο ε.ω. η επένδυση α € σε χρόνο $t \in \mathbb{T}$ επιστρέφει $\alpha e^{\rho t}$. Ορίζουμε, επίσης, την αποπληρωμή τερματισμού ως $\Omega_T(X_T) = \Omega(X_T, T)$, όπου $T \in \mathbb{T}$ και $\Omega: \mathbb{R}^m \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, και εκφράζει την θετική ή αρνητική χρηματοροή που συνεπάγεται τον τερματισμό κάποιας διαδικασίας και εξαρτάται από την κατάσταση της επιχείρησης εκείνη τη στιγμή. Για την καθαρή παρούσα αξία όλων των χρηματοροών ορίζουμε την $C^{1,2}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{T})$ συνάρτηση $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{T} \to M$, $M \subset \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο, $F(X_t, t)$ με $F(0,t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{T}$, και υποθέτει ότι οι χρηματοροές αυτές έχουν προκύψει από βελτιστοποίηση – δηλαδή, οι βέλτιστες (μέγιστες) δυνατές χρηματοροές δεδομένων κάποιων περιορισμών όπως οι πόροι και η κατάσταση της επιχείρησης – και η βελτιστοποίηση αυτή γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή $s > t$, $s \in \mathbb{T}$.

Θεώρημα 3.3: Έστω ανέλιξη X_t, για τυχόν $t \in \mathbb{T}$, και διύλιση $\mathbb{F}$ όπως στον ορισμό 3.1. Έστω συνάρτηση για τυχόν $t \in \mathbb{T}$, $\Phi_t(H, \omega)$, ορισμένη για $H \in \mathfrak{B}^1$, $\omega \in \Omega$, τ.ω.:

i. σημειακά στο Ω, η $\Phi_t(\cdot, \omega)$ είναι μέτρο πιθανότητας στο $\mathfrak{B}^1$ του $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$
ii. για κάθε $H \in \mathfrak{B}^1$, ισχύει $\Phi_t(H, \cdot) = \mathbb{P}[X_s \in H | \mathcal{F}_t]$, για τυχόν $s \in \mathbb{T}$, $s \geq t$, $\mathcal{F}_t \in \mathbb{F}$

τότε το μέτρο πιθανότητας $\Phi_t(\cdot, \omega)$ είναι η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομή της X_s δεδομένης της $\mathcal{F}_t$, και λόγω του $\mathcal{F}_t \in \mathbb{F}$, η $\Phi_t(\cdot, \omega)$ είναι η κατανομή της X_s δεδομένης της X_t.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλέπε Billinsley (1995), Θεώρημα 33.3, σελίδα (σελ.) 439. ■

Ορισμός 3.4: Υποθέτοντας ότι πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 3.4, μπορούμε να ορίσουμε την δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατάστασης X_t της επιχείρησης $\Phi_t(X_s | X_t, u_t)$. Οπότε για τυχόν $s \in \mathbb{T}$, $s \geq t$, $\mathcal{F}_t \in \mathbb{F}$, και για δοσμένο $H \in \mathfrak{B}^1$, ισχύει $\Phi_t(X_s \in H | X_t, u_t) = \mathbb{P}\big[X_s \in H \mid \sigma\big((X_t, u_t)\big)\big] \ \mathbb{P} - \sigma.\beta.$

Ο δείκτης t στην Φ_t, συμβάλει απλά ως προς την υπενθύμιση της χρονικής στιγμής της πληροφορίας ή την χρονική συντεταγμένη των X_t, u_t

. **Θεώρημα 3.5:** Έστω $\Phi_t(X_s | X_t, u_t)$ όπως στο θεώρημα 3.3. Έστω Borel συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τ.ω. η $\varphi(X_s)$ να είναι ολοκληρώσιμη. Τότε:

$$\mathbb{E}\big[\varphi(X_s)\big|\sigma\big((X_t, u_t)\big)\big] = \int \varphi(X_s) d\Phi_t(X_s | X_t, u_t) \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλέπε Billinsley (1995), Θεώρημα 34.5, σελ. 449 και Shiryaev & Boas (1995), Θεώρημα 3, σελ. 226.

■

Ορισμός 3.6: Ορίζουμε ως την αξία συνέχισης, την υπό συνθήκη προσδοκία των προεξοφλημένων βέλτιστων χρηματοροών δεδομένων των πληροφοριών την στιγμή t ως εξής:

$$\mathbb{E}_t[F(X_s,s)] \triangleq \int F(X_s,s)d\Phi_t(X_s|X_t,u_t) \quad \mathbb{P}-\sigma.\beta., \qquad (3.1)$$

για $t \leq s$, και ο δείκτης $t \in \mathbb{T}$ απλά χρησιμεύει ως υπενθύμιση της χρονικής συντεταγμένης της πληροφορίας. (Dixit & Pindyck, 1994)

Θεώρημα 3.5: Έστω $\mathbb{E}_t[F(X_s,s)]$ όπως στον ορισμό 3.6. Τότε:

$$\mathbb{E}_t[F(X_s,s)] = \mathbb{E}[F(X_s,s)|X_t,u_t] \quad \mathbb{P}-\sigma.\beta., \qquad (3.2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεδομένου ότι για κάθε $s \in \mathbb{T}$ η F είναι συνεχής, άρα Borel, και φραγμένη, άρα ολοκληρώσιμη, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 3.5

$$\mathbb{E}_t[F(X_s,s)] \triangleq \int F(X_s,s)d\Phi_t(X_s|X_t,u_t) = \mathbb{E}\big[F(X_s,s)\big|\sigma\big((X_t,u_t)\big)\big] \quad \mathbb{P}-\sigma.\beta.$$

και λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας της X_s, και του ότι η F_s είναι συνεχής (άρα Borel) και φραγμένη εξ' ορισμού, τότε (Shiryaev & Boas, 1995: σελ. 564):

$$\mathbb{E}\big[F(X_s,s)\big|\sigma\big((X_t,u_t)\big)\big] = \mathbb{E}[F(X_s,s)|X_t,u_t] \quad \mathbb{P}-\sigma.\beta. \qquad \blacksquare$$

Ουσιαστικά, με το Θεώρημα 3.5 δόθηκε μαθηματικό νόημα και ορίστηκε επαρκώς η προσδοκία $\mathbb{E}[F(X_s,s)|X_t,u_t]$ η οποία περιγράφει τις επιχειρηματικές προσδοκίες για τις προεξοφλημένες μελλοντικές και βέλτιστες μελλοντικές χρηματοροές, δηλαδή, την αξία της επιχείρησης! Όλα τα βήματα αυτά ήταν απαραίτητα καθώς από εδώ και πέρα η δεσμευμένη μέση τιμή της (3.1) θα εμφανίζεται συνέχεια με την μορφή (3.2). Οι Dixit & Pindyck (1994) όρισαν την (3.1), ενώ με την παραπάνω διαδικασία εγώ προσπάθησα να παρουσιάσω και το – κατά το δυνατόν – πλήρες μαθηματικό υπόβαθρο που τεκμηριώνει τον ορισμό αυτό.

Ερχόμαστε, λοιπόν, στο παρόν, t, και η επιχείρηση καλείτε να επιλέξει u_t^* τ.ω. να μεγιστοποιήσει την αξία της τώρα, ήτοι:

$$\begin{aligned}\pi(X_t,u_t^*,t) &+ e^{\rho(t-s)}\mathbb{E}^*[F(X_s,s)|X_t,u_t^*] \\ &= \max_{u_t}\big\{\pi(X_t,u_t,t) + e^{\rho(t-s)}\mathbb{E}[F(X_s,s)|X_t,u_t]\big\} \quad \mathbb{P}-\sigma.\beta.\end{aligned}$$

για $t < s,\ t,s \in \mathbb{T}$.

Προφανώς, αφού η $F(X_t,t)$ δίνει την παρούσα αξία της επένδυσης δεδομένων βέλτιστων επιλογών στο μέλλον ισχύει:

$$F(X_t,t) = \max_{u_t}\big\{\pi(X_t,u_t,t) + e^{\rho(t-s)}\mathbb{E}[F(X_s,s)|X_t,u_t]\big\} \quad \mathbb{P}-\sigma.\beta., \qquad (3.3)$$

η οποία δηλώνει ότι η αξία της επιχείρησης είναι ίση με το κέρδος της τώρα και την προεξοφλημένη προσδοκόμενη μελλοντική της αξία, όλα σε ένα περιβάλλον διαχρονικής βελτιστοποίησης. Μέσω της 3.3 εκφράζεται η «αρχή βελτιστοποίσης του Bellman» (Dixit & Pindyck, 1994: σελ. 100) η οποία δηλώνει ότι:

> *«Μία βέλτιστη πολιτική έχει την ιδιότητα ότι, για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες, οι εναπομείναντες επιλογές αποτελούν βέλτιστη πολιτική στο υποπρόβλημα που αρχίζει στην κατάσταση που συνεπάγονται οι αρχικές συνθήκες»* (Bellman, 1962: σελ.)

Τώρα αν θέσουμε $s = t + \Delta t$ και αν θεωρήσουμε ότι $\pi(X_t, u_t, t)$ είναι η στιγμιαία ροή κέρδους, θα έχουμε $\pi(X_t, u_t, t)\Delta t$ το κέρδος του συσσωρεύτηκε το διάστημα Δt. Με $\Delta t \to 0$, θα λέμε ότι $s = t + dt$ και το συσσωρευμένο κέρδος θα είναι $\pi(X_t, u_t, t)dt$, $|dt| > 0$ αλλά κοντά στο 0. Αντικαθιστώντας στην 3.3 έχουμε $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$:

$$F(X_t, t) = \max_{u_t}\left\{\pi(X_t, u_t, t)dt + e^{\rho(-dt)}\mathbb{E}[F(X_{t+dt}, t + dt)|X_t, u_t]\right\}$$

$$e^{\rho dt}F(X_t, t) = \max_{u_t}\{\pi(X_t, u_t, t)dte^{\rho dt} + \mathbb{E}_t[F(X_{t+dt}, t + dt)]\}, \qquad (3.4)$$

όπου από τον ορισμό του e^{ν}: $e^{\rho dt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho dt)^n}{n!} = 1 + \rho dt + \frac{(\rho dt)^2}{2} + \cdots \approx 1 + \rho dt$, αφού $dt^n \approx 0$ για $n > 1$ γιατί dt πολύ μικρό. Άρα η 3.4 γίνεται – $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$:

$$(1 + \rho dt)F(X_t, t) = \max_{u_t}\{\pi(X_t, u_t, t)dt(1 + \rho dt) + \mathbb{E}_t[F(X_{t+dt}, t + dt)]\}$$

$$\rho dtF(X_t, t) = \max_{u_t}\{\pi(X_t, u_t, t)dt + \mathbb{E}_t[F(X_{t+dt}, t + dt) - F(X_t, t)]\}$$

γιατί η $F(X_t, t)$ είναι $\sigma\big((X_t, u_t)\big)$ – προσαρμοσμένη ως Borel συνάρτηση $\sigma\big((X_t, u_t)\big)$ – προσαρμοσμένων. Συμβολίζοντας $F(X_{t+dt}, t + dt) - F(X_t, t) \triangleq dF$ και διαιρώντας κατά μέλη με dt, έχουμε $\mathbb{P} - \sigma.\beta$:

$$\rho F(X_t, t) = \max_{u_t}\left\{\pi(X_t, u_t, t) + \frac{1}{dt}\mathbb{E}_t[dF]\right\}, \qquad (3.5)$$

Η ισότητα 3.5 είναι μία συνθήκη για μη ύπαρξη εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (arbitrage). Για να δούμε γιατί, πρώτα πρέπει δούμε τι εκφράζεται στο κάθε μέλος της ισότητας της 3.5. Το αριστερό μέλος είναι η απόδοση από την ιδιοκτησία (ή την κατοχή μεριδίων ή μετοχών) της επιχείρησης – δηλαδή, οι επενδυτές επιθυμούν[4] απόδοση $\rho F(X_t, t)$ από την ιδιοκτησία της επιχείρησης. Στο δεξί μέλος, το πρώτο σκέλος είναι η ροή του κέρδους, η κερδοφορία, δηλαδή, τη χρονικής στιγμής t, και το δεύτερο είναι η μεταβολή

[4] Το προεξοφλητικό επιτόκιο δεν είναι τίποτα παραπάνω από την επιθυμητή απόδοση που θέλει να έχει αυτός που προεξοφλεί! Εναλλακτικά μπορούμε να δούμε το προεξοφλητικό επιτόκιο ως το κόστος ευκαιρίας του επενδυτή, ήτοι την απόδοση που θα μπορούσε να καρπωθεί επενδύοντας σε ένα άλλο σχέδιο με ίδια (ταυτόσημα) χαρακτηριστικά κινδύνου. Οι δύο έννοιες είναι απολύτως ισοδύναμες. Πράγματι, έστω δύο επενδυτικές ευκαιρίες ταυτόσημες ως προς τον κίνδυνο και (χάριν ευκολίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας) με ίδιες χρηματοροές την μία ο επιχειρηματίας την προεξοφλεί με αυτό που θέλει, ρ_1, και την άλλη με το αντίστοιχο της αγοράς, ρ_2, $\rho_1 > \rho_2$, η ΚΠΑ του δεύτερου σχεδίου θα είναι μεγαλύτερη γιατί έχει μικρότερο επιτόκιο, οπότε θα την προτιμήσει. Από την άλλη, αν $\rho_1 < \rho_2$, τότε θα προτιμήσει τελικά το ρ_2 γιατί για τον ίδιο κίνδυνο έχει μεγαλύτερη απόδοση.

της κεφαλαιακής αξίας της επιχείρησης ή της αξίας των μετοχών της. Όλα αυτά, όμως, στο δεύτερο μέλος, υπό την επιλογή του βέλτιστου δυνατού u_t που θα μεγιστοποιήσει το άθροισμα $(X_t, u_t, t) + \frac{1}{dt}\mathbb{E}_t[dF]$. (Dixit & Pindyck, 1994)

Ας δούμε τώρα γιατί η 3.3 είναι η συνθήκη απουσίας εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Αν $\rho F(X_t, t) < \max_{u_t}\left\{\pi(X_t, u_t, t) + \frac{1}{dt}\mathbb{E}_t[dF]\right\}$ τότε ο επιχειρηματίας έχει υποεκτιμήσει την απόδοση της επένδυσής του την οποία θα την αγοράσει κάποιος άλλος ο οποίος ξέρει ότι είναι υποτιμημένη (υποεκτιμημένη) η απόδοση της επιχείρησης και θα περιμένει να καρπωθεί τα κεφαλαιακά και επιχειρηματικά κέρδη που αναλογούν και τα οποία πλήρωσε λιγότερα από όσο αξίζουν – αρά θα βγάλει ακίνδυνο[5] κέρδος. Από την άλλη, αν ισχύει το ανάποδο, τότε δεν θα θέλει να συνεχίσει να συμμετέχει στην επιχείρηση και θα πουλήσει το μερίδιό του σε άλλους κι αυτοί μετά σε άλλους μέχρις ότου να βρεθεί επενδυτής με ρ που να πληροί την ισότητα – εδώ θα πραγματοποιείται ακίνδυνο κέρδος γιατί όσο ισχύει η ανισότητα οι μετοχές θα πωλούνται υπερτιμημένες αλλά σε κάθε στάδιο λίγο φθηνότερα για να γίνουν ελκυστικές. Τελικά, κάθε ανισορροπία θα αποκαθίσταται μέσα από τον μηχανισμό της αγοράς και η ισότητα αυτή ισχύει πάντα $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$.

Η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις (X_t, u_t) είναι ως εξής:

$$\mathbb{F}(X_t, u_t) = \left\{\mathcal{F}_t^{(X_t,u_t)}, t \in \mathbb{T}\right\}$$

όπου $\mathcal{F}_t^{(X_t,u_t)} \triangleq \sigma\left(\left\{\left(X_s^{-1}(A), u_s^{-1}(A)\right): s \leq t, A \in \mathfrak{B}^m\right\} \cup \mathcal{N}\right) \triangleq \sigma(\{(X_t, u_t), s \leq t\} \cup \mathcal{N})$, με τις συνήθεις ιδιότητες και με $\mathcal{N}$ όπως στον ορισμός 3.1. Άρα $\left\{\mathcal{F}_t^{(X_t,u_t)}, t \in \mathbb{T}\right\}$ είναι αριστερά συνεχής, ενώ η συνάρτηση ελέγχου δεξιά συνεχής. Αυτό είναι απαραίτητο για να μην υπάρξει περίπτωση όπου ο επιχείρηση να έχει στρατηγική u_t με πληροφορία $\mathcal{F}_{t'}^{(X_t,u_t)}$ και με $t' > t$ – δηλαδή με ύστερη γνώση γιατί τότε θα μπορούσε να πραγματοποιήσει άπειρα κέρδη καθώς θα γνωρίζει το μέλλον. Έτσι, με τον περιορισμό της αριστερά συνεχούς διύλισης και της δεξιά συνεχούς u_t δεν θα επιτρέψει ποτέ την ύπαρξη γνώσης με βεβαιότητα για το μέλλον. (Dixit & Pindyck, 1994)

Σε συνέχεια του ορισμού 3.1 θα ορίσουμε (θεωρήσουμε) τη συνάρτηση κατάστασης ως μια μονοδιάστατη διαδικασία Itō (Itō diffusion), ήτοι:

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(X_s, u_s, s)\, ds + \int_0^t b(X_s, u_s, s) dB_s \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (3.6)$$

---

[5] Ακίνδυνο γιατί υποθέτουμε ότι για το $max_{u_t}\left\{\pi(X_t, u_t, t) + \frac{1}{dt}\mathbb{E}_t[dF]\right\}$ η μεγιστοποίηση ισχύει και είναι ορθή νομοτελειακά, ενώ η πιθανότητα αυτή να πραγματοποιηθεί είναι 1.

για $t, s \in \mathbb{T}$, όπου a, b συνεχείς συναρτήσεις, x_0 τυχαία μεταβλητή $\mathcal{F}_0$ −μετρήσιμη, και $\{B_t, t \in \mathbb{T}\}$ μια μονοδιάστατη τυπική $\mathbb{F}^{(X_t,u_t)}$ − κίνηση Brown· αναλυτικές λεπτομέρειες για τον ορισμό και τις ιδιότητες της κίνησης Brown υπάρχουν στον Σπηλιώτη (2004), Κεφάλαιο ΙΙ. Φορμαλιστικά η (3.5) μπορεί να γραφεί και ως:

$$\begin{cases} X_t = a(X_t, u_t, t)dt + b(X_t, u_t, t)dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (3.6')$$

για $t \in \mathbb{T}$. Η X_t, ως ανέλιξη Itō, ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα (Oksendal, 2010), άρα και τον ορισμό 3.1 για $m = 1$.

Όπως υποθέσαμε η F είναι $C^{1,2}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^m)$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Φόρμουλα του Itō στην X_t για να βρούμε την $F(X_t, t)$. Επίσης, θα θεωρήσουμε $\mathbb{T} = [0, T] \subset \mathbb{R}$. Έτσι, για $t \in \mathbb{T}$ έχουμε:

$$F(X_t, t) = F^0 + \int_0^t [F_2(X_s, s) + a(X_s, u_s, s)F_1(X_s, s) + \frac{1}{2}b^2(X_s, u_s, s)F_{11}(X_s, s)ds$$
$$+ \int_0^t b(X_s, u_s, s)F_1(X_s, s)dB_s \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (3.7)$$

όπου για $F(x_1, x_1)$, $F_i(x_1, x_1) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_i}F(x_1, x_1)$ και $F_{ij}(x_1, x_1) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}F(x_1, x_1)$ με $i, j = 1,2$.

Θεώρημα 3.6: Αν η X_t είναι όπως στην (3.6), τότε, για $t \in \mathbb{T}$, ισχύει η παρακάτω ισότητα $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$:

$$\rho F(X_t, t) = \max_{u_t} \Big\{ \pi(X_t, u_t, t) + F_2(X_t, t) + a(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t)$$
$$+ \frac{1}{2}b^2(X_t, u_t, t)F_{11}(X_t, t) \Big\}, \qquad (3.8)$$

με F, π, a, b όπως παραπάνω, $\rho \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν γράψουμε την 3.7 σε διαφορική μορφή, έχουμε $\mathbb{P} - \sigma.\beta$:

$$dF = \left[F_2(X_t, t) + a(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t) + \frac{1}{2}b^2(X_t, u_t, t)F_{11}(X_t, t) \right] dt$$
$$+ b(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t)dB_t$$

τότε η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}_t[dF]$ της 3.5 γίνεται:

$$\mathbb{E}_t[dF] = \mathbb{E}_t \left[\left[F_2(X_t, t) + a(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t) + \frac{1}{2}b^2(X_t, u_t, t)F_{11}(X_t, t) \right] dt \right.$$
$$\left. + b(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t)dB_t \right] \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta$$

$$\mathbb{E}_t[dF] = \mathbb{E}_t \left[\left(F_2(X_t, t) + a(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t) + \frac{1}{2}b^2(X_t, u_t, t)F_{11}(X_t, t) \right) dt \right] +$$

$$+ \mathbb{E}_t[b(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t)dB_t] \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta$$

$$\mathbb{E}_t[dF] = \left(F_2(X_t, t) + a(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t) + \frac{1}{2}b^2(X_t, u_t, t)F_{11}(X_t, t)\right)dt \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta$$

αφού $F \in C^{1,2}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^m)$, $a, b \in C(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{T})$ και X_t, u_t είναι $\mathcal{F}_t^{(X_t,u_t)}$ –προσρμοσμένες, άρα και οι $F_2(X_t, t)$, $a(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t)$, $\frac{1}{2}b^2(X_t, u_t, t)F_{11}(X_t, t)$. Επίσης, ισχύει $\mathbb{P} - \sigma.\beta$:

$$\mathbb{E}_t[b(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t)dB_t] = (X_t, u_t, t)F_1(X_t, t)\mathbb{E}_t[dB_t] = (X_t, u_t, t)F_1(X_t, t)\mathbb{E}[dB_t] = 0$$

γιατί αν θεωρήσουμε $dB_t = B_{t+dt} - B_t$, τότε οι προσαυξήσεις $B_{t+dt} - B_t$ είναι ανεξάρτητες της $\mathcal{F}_t^{(X_t,u_t)}$ και άρα $\mathbb{E}[dB_t] = 0$.

Τελικά, έχουμε:

$$\frac{1}{dt}\mathbb{E}_t[dF] = \left(F_2(X_t, t) + a(X_t, u_t, t)F_1(X_t, t) + \frac{1}{2}b^2(X_t, u_t, t)F_{11}(X_t, t)\right) \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta$$

το οποίο αντικαθιστούμε στην 3.5 για να πάρουμε τη ζητούμενη 3.8. ■

Στην ανάλυση και τις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν παρακάτω, όταν $\mathbb{T} = [0, T] \subset \mathbb{R}$ θα χρησιμοποιήσουμε την πληρωμή τερματισμού $\Omega(T, X_T)$ ως οριακή συνθήκη, ήτοι

$$F(X_T, T) = \Omega(X_T, T) \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta$$

Από την άλλη όταν η συνάρτηση ελέγχουν είναι 0 ή 1 για αναμονή ή επένδυση (τερματισμός αναμονής) για κάθε χρονική στιγμή, $\forall t \in \mathbb{T}$, και το πρόβλημα ανάγεται σε βέλτιστο τερματισμό (optimal stopping), οπότε και η «εξίσωση Bellman» γίνεται:

$$F(X_t, t) = \max\{\Omega(X_t), \pi(X_t, t) + e^{\rho dt}\mathbb{E}_t(dF)\}, s \geq t, \mathbb{P} - \sigma.\beta \quad (3.9)$$

και η εξίσωση της κίνησης της κατάστασης γίνεται:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dB_t, X_0 = x_0, \forall t \in \mathbb{T}, \mathbb{P} - \sigma.\beta \quad (3.10)$$

και αναζητείται η κατάσταση X_t^* στην οποία ισχύει :

$$F(X_t^*, t) = \Omega(X_t^*, t) = \max\{\Omega(X_t^*, t), \pi(X_t^*, t) + e^{\rho dt}\mathbb{E}_t(dF)\} \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta, \qquad (3.11)$$

οπότε ο τερματισμός είναι η βέλτιστη επιλογή που δίνει την μέγιστη χρηματοροή $\Omega(X_t^*)$, ενώ δεν έχουμε οριακές συνθήκες (free boundary problem). Αν $X_t > X_t^*$ επιλέγεται η αναμονή καθώς τότε θα ισχύει $\Omega(X_t, t) < \pi(X_t, t) + e^{\rho dt}\mathbb{E}_t(dF)$, ενώ για $X_t < X_t^*$ τερματίζεται η αναμονή καθώς $\Omega(X_t, t) > \pi(X_t, t) + e^{\rho dt}\mathbb{E}_t(dF)$. Η X_t^* είναι η άγνωστη τιμή της X_t που αναζητούμε μέσω της μεθόδου του δυναμικού προγραμματισμού. (Dixit & Pindyck, 1994)

Στην περιοχή συνέχισης συνεπώς ισχύει $\Omega(X_t, t) < \pi(X_t, t) + e^{\rho dt}\mathbb{E}_t(dF)$, άρα από την 3.9 έχουμε $F(X_t, t) = \pi(X_t, t) + e^{\rho dt}\mathbb{E}_t(dF)$ και ακολουθώντας διαδικασία του θεωρήματος 3.6, για $X_t > X_t^*$ έχουμε $\mathbb{P} - \sigma.\beta$:

$$-\rho F(X_t,t)+\pi(X_t,t)+F_2(X_t,t)+a(X_t,t)F_1(X_t,t)+\frac{1}{2}b^2(X_t,t)F_{11}(X_t,t)=0,$$
(3.12)

που λόγω της απουσίας οριακών συνθηκών χρειαζόμαστε δυο άλλες συνθήκες. (Dixit & Pindyck, 1994)

Θεώρημα 3.7: Η λύση της εξίσωσης μερικών παραγώγων (3.12) πρέπει να ικανοποιεί τις εξής δύο συνθήκες: η πρώτη είναι η ισότητα $F(X_t^*,t)=\Omega(X_t^*,t), \mathbb{P}-\sigma.\beta$, και η δεύτερη είναι η *λεία συγκόλληση* (“smooth pasting”), ήτοι $F_1(X_t^*,t)=\Omega_1(X_t^*,t)$, $\mathbb{P}-\sigma.\beta$, όπου ο δείκτης 1 δηλώνει την μερική παράγωγο ως προς το πρώτο όρισμα των συναρτήσεων.

ΑΝΤΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ. Διαισθητικά η ισότητα $F(X_t^*,t)=\Omega(X_t^*,t), \mathbb{P}-\sigma.\beta$, ισχύει λόγω της 3.11 – εξ’ ορισμού της X_t^* – και λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων F και Ω. Όσον αφορά την ισότητα των μερικών παραγώγων θα εργαστούμε πάλι διαισθητικά· έστω ότι ισχύει $F_1(X_t^*,t)<\Omega_1(X_t^*,t)$ τότε κοντά στο X_t^*, και για $X_t>X_t^*$, λόγω συνέχειας, θα ισχύει $\Omega(X_t,t)>F(X_t,t)$ οπότε πρέπει ο τερματισμός δίνει την μέγιστη πληρωμή – άτοπο, γιατί βρισκόμαστε στο $X_t>X_t^*$ που είναι περιοχή αναμονής. Έστω τώρα $F_1(X_t^*,t)>\Omega_1(X_t^*,t)$, τότε αν τερματιστεί η αναμονή θα έχουμε πληρωμή $\Omega(X_t^*,t)$, ενώ κατόπιν αναμονής μετά από χρόνο Δt με $\Delta h\triangleq|X_{t+\Delta t}-X_t^*|$ θα ισχύει ή $X_{t+\Delta t}=X_t^*-\Delta h$ πιθανότητα p· ή $X_{t+\Delta t}=X_t^*+\Delta h$ με πιθανότητα $(1-p)$ – ανάλογες θα είναι οι πληρωμές. Έτσι, η συνολική προσδοκώμενη πληρωμή κατόπιν αναμονής θα είναι:

$$\pi(X_t^*,t)\Delta t+e^{\rho\Delta t}[p\Omega(X_t^*-\Delta h,t+\Delta t)+(1-p)F(X_t^*+\Delta h,t+\Delta t)]$$

και παίρνοντας ανάπτυγμα Taylor στις Ω και F γύρω από το X_t^* και τον ορισμό του e^n κρατώντας μόνο τους μικρότερης τάξης όρους:

$$\pi(X_t^*,t)\Delta t+(1-\rho\Delta t)[-p\Omega_1(X_t^*,t)\Delta h+(1-p)F_1(X_t^*,t)\Delta h+p\Omega(X_t^*)+(1-p)F(X_t^*)]$$

και λόγω της ισότητας $F(X_t^*,t)=\Omega(X_t^*,t)$:

$$\pi(X_t^*,t)\Delta t+F(X_t^*)-\rho\Delta tF(X_t^*)+[-p\Omega_1(X_t^*,t)+F_1(X_t^*,t)\ -pF_1(X_t^*,t)]\Delta h$$
$$-\rho[p\Omega_1(X_t^*,t)+(1-p)F_1(X_t^*,t)]\overbrace{\Delta h\Delta t}^{\downarrow 0}$$

όπου, οι Dixit & Pindyck (1994) θέτουν $p=\frac{1}{2}\left[1-\frac{a(X_t,t)}{b^2(X_t,t)}\Delta h\right]$ και $\Delta h=b(X_t,t)\sqrt{\Delta t}$ όταν η X_t ακολουθεί τυχαίο περίπατο. Οπότε:

$$\pi(X_t^*,t)\Delta t+F(X_t^*)-\rho\Delta tF(X_t^*)+\frac{1}{2}[-\Omega_1(X_t^*,t)-2F_1(X_t^*,t)+F_1(X_t^*,t)]\Delta h$$
$$+\frac{a(X_t,t)}{b^2(X_t,t)}[\Omega_1(X_t^*,t)+F_1(X_t^*,t)]\overbrace{(\Delta h)^2}^{\downarrow 0}$$

και καθώς $\Delta t\downarrow 0$ πιο γρήγορα από το Δh, έχουμε:

$$F(X_t^*) + \frac{1}{2}[-\Omega_1(X_t^*, t) + F_1(X_t^*, t)]\Delta h = \Omega(X_t^*, t) + \frac{1}{2}[-\Omega_1(X_t^*, t) + F_1(X_t^*, t)]\Delta h$$
$$> \Omega(X_t^*, t)$$

άρα η βέλτιστη επιλογή είναι η αναμονή – άτοπο. (Dixit & Pindyck, 1994) ■

4. Αποτίμηση με Δικαιώματα – Γενική και Εισαγωγική Ανάλυση

Συνεχίζοντας μέσα στο ίδιο πλαίσιο θα δούμε πως υποδειγματοποιείται η συμπεριφορά της επιχείρησης μέσα από την ανάλυση των δικαιωμάτων προαίρεσης (contingent claim). Η X_t και το πιθανοθεωρητικό πλαίσιο ακολουθούν τον ορισμό 3.1 και καθώς δεν θα έχουμε συνάρτηση ελέγχου στην παρούσα ανάλυση η σ-άλγεβρα $\mathbb{F}$ είναι αυτή του ίδιου ορισμού, $\pi(X_t, t)$ η κερδοφορία και η $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{T} \to M$, $M \subset \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο, είναι $C^{1,2}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{T})$ συνάρτηση όπως πριν. Η εξίσωση κίνησης της κατάστασης της επιχείρησης είναι πλέον γεωμετρική κίνηση Brown, ήτοι (φορμαλιστικά):

$$dX_t = aX_t dt + \sigma X_t dB_t, X_0 = x_0, \qquad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (4.1)$$

$\forall t \in \mathbb{T}$, όπου $x_0 > 0$, $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$, ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, $a \in \mathbb{R}$ ο «συντελεστής μεγέθυνσης», $\sigma \in \mathbb{R}$ ο «συντελεστής διάχυσης» και B_t μία τυπική $\mathcal{F}_t$ −κίνηση Brown. Διαισθητικά, για παράδειγμα, αν εξετάζουμε την επένδυση σε ένα νέο μηχάνημα που θα παράγει κάποιο προϊόν, η X_t θα περιγράφει την τιμή αυτού του προϊόντος. Επίσης, θα θεωρήσουμε – χωρίς βλάβη της γενικότητας – ότι η μεταβλητή X_t είναι η τιμή κάποιου προϊόντος που διαπραγματεύεται σε μία αγορά. (Dixit & Pindyck, 1994)

Θεώρημα 4.1: Η (4.1) έχει μοναδική ισχυρή λύση την:

$$X_t = x_0 \exp\left\{\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\} \ \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από την 4.1 για $x \mapsto b(x) \triangleq ax$ και $x \mapsto s(x) \triangleq \sigma x$, για τυχόντα $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$|b(x)|^2 + |s(x)|^2 = (a^2 + s^2)x^2$$
$$|b(x) - b(y)| = a|x - y| = b(|x - y|)$$
$$|s(x) - s(y)| = \sigma|x - y| = s(|x - y|)$$

και αφού οι συναρτήσεις b, s είναι γραμμικές τότε πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Yamada-Watanabe (Σπηλιώτης, 2004: Πρόταση 2.4, Κεφ. V, σελ. 174) και άρα η 4.1 έχει ισχυρή μοναδική λύση. Από τον Σπηλιώτη (2004: σχέσεις 3.4 και 3.4', Κεφ. V, σελ. 176) η λύση της 4.1 είναι:

$$X_t = x_0 \exp\left\{\int_0^t a - \frac{\sigma^2}{2} ds + \int_0^t \sigma dB_s\right\} = x_0 \exp\left\{\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\} \ \mathbb{P} - \sigma.\beta. \ ■$$

Πόρισμα 4.2.: $X_t > 0$, $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$, $\forall t \in \mathbb{T}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από θεώρημα 4.1 και $x_0 > 0$, $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$ ■

Θεώρημα 4.3: Η η σταθερά $a \in \mathbb{R}$ είναι η προσδοκώμενη κεφαλαιακή υπερτίμηση ή μεγέθυνση της αξίας X_t. (Dixit & Pindyck, 1994)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $\mathbb{E}[dX_t] = a\mathbb{E}[X_t]dt + b\mathbb{E}[X_t dB_t]$, όπου η προσαύξηση dB_t είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_t$ άρα και την X_t, αλλά $\mathbb{E}[dB_t] = 0$. Επίσης από πόρισμα 4.2 $\mathbb{E}[X_t] > 0, \forall t \in \mathbb{T}$, άρα:

$$\frac{\mathbb{E}[dX_t]}{\mathbb{E}[X_t]} = \mathbb{E}\left[\frac{dX_t}{X_t}\right] = adt \qquad \blacksquare$$

Ορισμός 4.4: Η συνολική προσδοκώμενη απόδοση, μ, είναι:

$$\mu \triangleq a + \delta$$

όπου $\delta \in \mathbb{R}$ η προσδοκώμενη μερισματική απόδοση, ήτοι το ποσό του μερίσματος προς την αξία X_t. Επιπλέον, ορίζουμε ως $r \in \mathbb{R}$ απόδοση χωρίς κίνδυνο. (Dixit & Pindyck, 1994)

Ως απόδοση χωρίς κίνδυνο μπορούμε να θεωρήσουμε τα κρατικά ομόλογα (Dixit & Pindyck, 1994) που όμως έχουν αξιολογηθεί ως ακίνδυνα με βαθμολογία ΑΑΑ. Επιπλέον, με βάση το υπόδειγμα CAPM (Capital Asset Pricing Model) ισχύει (Brealey & Myers, 1996) ότι:

$$\mu = r + \frac{\sigma_{X_t m}}{\sigma_m^2}(r_m - r) = r + \frac{\sigma_{X_t m}}{\sigma_m \sigma}\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)(r_m - r)$$

$$\mu = r + \varphi\sigma\rho_{X_t m}$$

όπου $\varphi \triangleq \frac{(r_m - r)}{\sigma_m}$ η «αγοραία τιμή κινδύνου» και $\sigma_{X_t m}$ η συνδιακύμανση της αξίας του X_t με την αξία της αγοράς (πρακτικά κάποιο δείκτη της αγοράς, συνήθως κλαδικό).

Στην προσπάθειά μας να υπολογίσουμε την αξία $F(X_t, t)$ μιας επιχείρησης με ροή κέρδους $\pi(X_t, t)$, εργαζόμαστε (όπως και στην αποτίμηση των δικαιωμάτων) βρίσκοντας ένα χαρτοφυλάκιο $\varphi \triangleq (\varphi_0(t), \varphi_1(t))$ με $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ $\mathcal{F}_t$ −προσαρμοσμένες σ.α. με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε η «ανέλιξη αξίας του χαρτοφυλακίου» (Σπηλιώτης, 2004) να είναι:

$$Y_t^{\varphi} = \varphi_0(t)(1 + rt) + \varphi_1(t)X_t, t \in \mathbb{T}, \qquad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

και να μιμείται τις αποδόσεις και τα χαρακτηριστικά κινδύνου της ζητούμενης $F(X_t, t)$[6]. Εμείς θέτουμε $\varphi \triangleq (1, n), n \in \mathbb{N}$, και έχουμε:

$$Y_t^{\varphi} = (1 + rt) + nX_t$$

[6] Ο όρος $(1 + rt)$ απλά είναι οι κατώτεροι όροι του ορισμού του εκθετικού $e^{rt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(rt)^n}{n!}$, γιατί μετά που θα προχωρήσουμε με στιγμιαίες μεταβολές οι όροι $\sigma(dt^2)$ πλησιάζουν πολύ γρήγορα στο 0 και γιατί ο γραμμικός όρος $(1 + rt)$ είναι βολικός για τις πράξεις.

όπου λαμβάνοντας και την μερισματική απόδοση η 4.1 γίνεται $dX_t = (a+\delta)X_t dt + \sigma X_t dB_t$, $\mathbb{P}-\sigma.\beta.$, κι η (στιγμιαία) μεταβολή στην ανέλιξη αξίας είναι:

$$dY_t^{\varphi} = rdt + ndX_t = [r + n(\delta + a)X_t]dt + n\sigma X_t dB_t \ \ \mathbb{P}-\sigma.\beta.$$

Για να υπολογίσουμε την απόδοση διαιρούμε την μεταβολή της ανέλιξης αξίας με το αρχικό κόστος της αγοράς του χαρτοφυλακίου αυτού $1+nX_t$ και έχουμε:

$$\frac{dY_t^{\varphi}}{1+nX_t} = \frac{[r+n(\delta+a)X_t]}{1+nX_t}dt + \frac{n\sigma X_t}{1+nX_t}dB_t \ \ \mathbb{P}-\sigma.\beta., \qquad (4.2)$$

Και τώρα ας περάσουμε στην $F(X_t, t)$, εφαρμόζοντας φόρμουλα Itō στην X_t, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το μέρισμα δεν είναι παρά το κέρδος, ήτοι $\delta = \pi(X_t, t)dt$, οπότε για τα κεφαλαιακά κέρδη έχουμε, $\mathbb{P}-\sigma.\beta.$:

$$dF = \left[F_2(X_t,t) + (\alpha + \pi(X_t,t)dt)F_1(X_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 F_{11}(X_t,t)\right]dt + \sigma X_t F_1(X_t,t)dB_t$$

$$dF = \left[F_2(X_t,t) + aF_1(X_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 F_{11}(X_t,t)\right]dt + \sigma X_t F_1(X_t,t)dB_t$$

αφού ο όρος $\pi(X_t,t)F_2(X_t,t)(dt)^2$ μηδενίζεται γρηγορότερα από τους άλλους όλους της ισότητας. Λαμβάνοντας, υπόψιν, αθροίζοντας τα κεφαλαιακά κέρδη με τα λειτουργικά κέρδη $\pi(X_t,t)$ και διαιρώντας με την αρχική αξία, παίρνουμε την απόδοση από την συμμετοχή στην επιχείρηση, δηλαδή, για $\mathbb{P}-\sigma.\beta.$:

$$\frac{dF}{F(X_t,t)} = \frac{\pi(X_t,t) + \left[F_2(X_t,t) + aF_1(X_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 F_{11}(X_t,t)\right]}{F(X_t,t)}dt + \frac{\sigma X_t F_1(X_t,t)}{F(X_t,t)}dB_t \quad (4.3)$$

Τώρα, εφ' όσον η ανέλιξη Y_t^{φ} πρέπει να μιμείται την ζητούμενη $F(X_t,t)$ και τον κίνδυνο της τελευταίας, θα πρέπει: $\frac{dF}{F(X_t,t)} = \frac{dY_t^{\varphi}}{1+nX_t}$ $\mathbb{P}-\sigma.\beta.$. Επιπλέον, αφού η Y_t^{φ} μιμείται και τον κίνδυνο τότε για τα δύο χαρτοφυλάκια θα ισχύει:

$$\frac{X_t F_1(X_t,t)}{F(X_t,t)} = \frac{nX_t}{1+nX_t} \ \ \mathbb{P}-\sigma.\beta., \qquad (4.4\alpha)$$

και αφού έχουν τον ίδιο κίνδυνο θα πρέπει να έχουν και την ίδια προσδοκώμενη απόδοση, άρα για $\mathbb{P}-\sigma.\beta.$:

$$\frac{\pi(X_t,t) + \left[F_2(X_t,t) + aF_1(X_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 F_{11}(X_t,t)\right]}{F(X_t,t)} = \frac{[r+n(\delta+a)X_t]}{1+nX_t}, \qquad (4.4\beta)$$

όπου αντικαθιστώντας $\frac{nX_t}{1+nX_t}$ από την 4.4α, παίρνουμε για $\mathbb{P}-\sigma.\beta.$:

$$\frac{\pi(X_t,t) + \left[F_2(X_t,t) + aF_1(X_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 F_{11}(X_t,t)\right]}{F(X_t,t)} = \frac{r}{1+nX_t} + \frac{[(\delta+a)X_t F_1(X_t,t)]}{F(X_t,t)}$$

και για $nX_t = \frac{X_t F_1(X_t,t)}{F(X_t,t) - X_t F_1(X_t,t)}$, επίσης από την 4.4α, και απλοποιώντας έχουμε τελικά:

$$\pi(X_t,t) + F_2(X_t,t) + (r-\delta)X_t F_1(X_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 F_{11}(X_t,t) - rF(X_t,t) = 0 \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., (4.5)$$

Τώρα η (4.5) είναι μία μερική διαφορική εξίσωση η οποία μπορεί να λυθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με το πλαίσιο μέσα στο οποίο κινείται η επιχείρηση. Όταν $\mathbb{T} = [0,T] \subset \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν οριακές συνθήκες: $F(X_T,T) = \Omega(X_T,T)$ στην λήξη της επενδυτικής ευκαιρίας και $F(X_0,0) = F(x_0,0)$ που αν δεν μπορεί να υπολογιστεί απευθείας, λόγω άγνωστης F, μπορεί να υπολογιστεί ως αγοραία αξία της επιχείρησης. Όταν ο χρονικός ορίζοντας είναι άπειρος, $\mathbb{T} = [0,+\infty)$, τότε δεν μπορούμε να έχουμε οριακές συνθήκες (free boundary problem) και απαιτούμαι τις συνθήκες του θεωρήματος 3.7 του δυναμικού προγραμματισμού, $\forall t \in \mathbb{T}$: $F(X_t^*,t) = \Omega(X_t^*,t)$, $\mathbb{P} - \sigma.\beta$, και τη *λεία συγκόλληση* ("smooth pasting"), ήτοι $F_1(X_t^*,t) = \Omega_1(X_t^*,t)$, $\mathbb{P} - \sigma.\beta$. (Dixit & Pindyck, 1994)

5. Επενδυτικές Ευκαιρίες και Συγχρονισμός

Βρισκόμαστε τώρα σε ένα σημείο όπου καλούμαστε ως επιχειρηματίες να αποφασίσουμε για την πραγματοποίηση μίας συγκεκριμένης επένδυσης. Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή της επένδυσης θα δώσουμε κάποιους ορισμούς τους οποίος θα εξηγήσουμε κατόπιν.

Ορισμός 5.1: Έστω χ.π. $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, χώρος $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ και η σ.α. $V: \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\{V_t, t \in \mathbb{T}\}$ η οποία ικανοποιεί την:

$$V_t = V_0 + \int_0^t aV_s ds + \int_0^t \sigma V_s dB_s \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (5.1)$$

$\forall t \in \mathbb{T}$, με $a,\sigma > 0$, V_0 τ.μ. $\mathcal{F}_0^V$ μετρήσιμη και B_t μονοδιάστατη $\mathcal{F}_t^V$ −κίνηση Brown, όπου $\mathcal{F}_t^V \in \mathbb{F}^V \triangleq \{\mathcal{F}_t^V, t \in \mathbb{T}\}$ διύλιση με $\mathcal{F}_t^V \triangleq \sigma(\{V_s, s \leq t\} \cup \mathcal{N})$, $\forall t \in \mathbb{T}$, $\mathcal{N}$ όπως στον ορισμό 3.1, και με τις συνήθεις ιδιότητες. Η $\{V_t, t \in \mathbb{T}\}$, από οικονομική σκοπιά, καλείται αξία του επενδυτικού σχεδίου και, μαθηματικά, καλείται γεωμετρική κίνηση Brown.

Θεώρημα 5.2: Έστω Borel συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Για την σ.α. $\{V_t, t \in \mathbb{T}\}$ που ικανοποιεί την (5.1) ισχύει η ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα, ή:

$$\mathbb{E}[g(V_{t+s})|\mathcal{F}_t^V] = \mathbb{E}[g(V_{t+s})|V_t] \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

$$\mathbb{P}[X_{t+s} \in A|\mathcal{F}_t^V] = \mathbb{P}[X_{t+s} \in A|V_t] \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

για τυχόν $A \in \mathfrak{B}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Σπηλιώτη (2004: Κεφ. V, Πόρισμα, σελ. 194). ■

Η V_t είναι καλώς ορισμένη, καθώς η λύση της (5.1) είναι μοναδική, με την έννοια ότι αν V_t' επίσης είναι λύση της (5.1) τότε οι V_t και V_t' είναι μη διακρινόμενες. Αυτό αποδεικνύεται ακολουθώντας ίδια διαδικασία με το θεώρημα 4.1 που αφορά επίσης μια γεωμετρική κίνηση Brown. Διαισθητικά, η V_t είναι η ΚΠΑ όλων των μελλοντικών καθαρών χρηματοροών που συνεπάγονται του συγκεκριμένου επενδυτικού σχεδίου. Τέλος ορίζουμε το εφάπαξ κόστος της επένδυσης ως $I > 0$. Σύμφωνα με τον κανόνα της ΚΠΑ, για τυχόν $t \in \mathbb{T}$ η επένδυση συμφέρει, και άρα πραγματοποιείται, αν και μόνο αν $V_t > I$, αλλά αυτό είναι λάθος καθώς οι μελλοντικές τιμές της V_t είναι άγνωστες κι έτσι υπάρχει όφελος από την επένδυση τώρα ή την αναμονή, όπως δείξαμε και στο απλό διωνυμικό υπόδειγμα στο μέρος ΙΙ.3. Έτσι, υπάρχει κάποια τιμή $V^* > I$ έτσι ώστε η επένδυση να πρέπει να πραγματοποιηθεί μόνο όταν για τυχόν $t \in \mathbb{T}$ έχουμε $V_t > V^*$. Προφανώς, στην περίπτωση τη ΚΠΑ η επένδυση γίνεται αποδεκτή κι όταν $V^* > V_t > I$, ενώ όπως θα δούμε, όταν δεν υπάρχει αβεβαιότητα ισχύει ότι $V^* = I$ και άρα μόνο τότε είναι επαρκής η ανάλυση της ΚΠΑ. (Dixit & Pindyck, 1994)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η επενδυτική αυτή ευκαιρία που εξετάζουμε είναι μια ξεχωριστή ανεξάρτητη επιχείρηση με μοναδικό αντικείμενο αυτή την επένδυση. Για παράδειγμα, αν εξετάζουμε την επένδυση σε ένα νέο μηχάνημα που κατασκευάσει γρανάζια, υποθέτουμε ότι φτιάχνουμε μία οντότητα – πρακτικά, μια εταιρία – η οποία αυτή μόνη θα έχει στην κατοχή της αυτό το μηχάνημα, θα εμπορεύεται τα γρανάζια αυτά, θα επωμίζεται τα κόστη και θα καρπώνεται τα έσοδα και τα κέρδη από αυτή τη δραστηριότητα. Η αξία, λοιπόν, της επιχείρησης έχει να κάνει με την κερδοφορία της από αυτή τη δραστηριότητα. Υποθέτουμε, χάριν διαισθητικής απλούστευσης και μόνο, ότι η εταιρία αυτή υπάρχει ανενεργή σε ένα μαύρο κουτί κι εμείς σε κάθε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{T}$ μπορούμε την αποκτήσουμε ή όχι έναντι τιμήματος $I > 0$ που είναι γνωστό και προκαθορισμένο. Έτσι, μπορούμε να αποκτήσουμε αυτήν την επιχείρηση έναντι ενός εφάπαξ κόστους I το οποίο χρειάζεται για αρχίσει αυτή να λειτουργεί – δηλαδή, απόκτηση της επιχείρησης σημαίνει και πραγματοποίηση της επένδυσης. Οπότε, μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα να αγοράσουμε ή όχι το σύνολο των μετοχών της επιχείρησης έναντι ενός προσυμφωνημένου τιμήματος I· έχουμε, δηλαδή, ένα δικαίωμα προαίρεσης! Τέλος, αφού δεν μιλάμε για επένδυση που μπορεί να εξασκηθεί μόνο σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή T, έχουμε δικαίωμα που θα εξασκηθεί την βέλτιστη στιγμή T, αλλά τώρα T είναι $\mathcal{F}_t^V$ –χρόνος διακοπής· έχουμε δικαίωμα αμερικάνικου τύπου. Στον παρακάτω ορισμό παρατίθενται κάποιες έννοιες από την ανάλυση των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων, που θα μας χρησιμεύσουν στη συνέχεια.

Ορισμός 5.3: Έστω $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{T}}}$ η οικογένεια $\mathcal{F}_t^V$ −χρόνων διακοπής που παίρνουν τιμές στο κλειστό και φραγμένο $\overline{\mathbb{T}} \triangleq [0, T]$ και $\{S_t, t \in \overline{\mathbb{T}}\}$ η σ.α. που δείχνει την τρέχουσα αγοραία τιμή (spot price) ενός χρηματοοικονομικού τίτλου (π.χ. μετοχής) που ικανοποιεί την

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \;\; \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

με B_t μια μονοδιάστατη κίνηση Brown.

Δικαίωμα αμερικάνικου τύπου με αμοιβή ψ καλείται το χρεόγραφο που πληρώνει το ποσό $\psi(S_t, t)$ αν εξασκηθεί την χρονική στιγμή $t \in \overline{\mathbb{T}}$. Για το **Δικαίωμα αγοράς αμερικάνικου τύπου** ισχύει $\psi(S_t, t) \triangleq (S_t - K)\mathbb{1}_{\{S_t - K > 0\}}$, με $K \in \mathbb{R}^+$ γνωστή σταθερά που καλείται τιμή εξάσκησης του δικαιώματος και είναι η προσυμφωνημένη τιμή στην οποία θα αγοραστεί ο υποκείμενος τίτλος και $\mathbb{1}_{\{x\}}$τη δείκτρια συνάρτηση που παίρνει την τιμή 1 όταν $\{x\}$ αληθές. Για $t \in \overline{\mathbb{T}}$, $x \in \mathbb{R}^+$ ορίζουμε:

$$P(x, t) \triangleq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{T}}}} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(\tau - t)} (S_\tau - K) \mathbb{1}_{\{S_\tau - K > 0\}} \middle| S_t = x \right] \right\}, \qquad (5.2)$$

όπου $\mathbb{Q}$ είναι το martingale μέτρο πιθανότητας (ουδέτερο κινδύνου) που ορίζεται από:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} |_{\mathcal{F}_t^V} = \exp\left\{ \frac{r - \mu}{\sigma} B_t - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right)^2 t \right\}$$

και $\mathbb{E}^Q$ η μέση τιμή που ολοκληρώνει ως προς αυτό το μέτρο Q. Η συνάρτηση αξίας $P(x, t)$ καλείται **δίκαιη και χωρίς ακίνδυνη κερδοσκοπία τιμή του αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς** την χρονική στιγμή t. (Elliott & Kopp, 2000)

Ορισμός 5.4: Στο δικό μας πλαίσιο, με $\mathbb{T} = [0, +\infty)$, ορίζουμε την αξία του πραγματικού δικαιώματος (του δικαιώματος επένδυσης) ως ένα διηνεκές δικαίωμα αγοράς:

$$F(V_0) \triangleq \sup_{T \in \mathcal{T}_{\mathbb{T}}} \{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-\rho T} (V_T - I)] \}, \qquad (5.3)$$

για V_t, I, ρ όπως παραπάνω, $\mathcal{T}_{\mathbb{T}}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{E}^Q$ όπως στον ορισμό 5.3. και υποθέτοντας ότι $V_T - I \geq 0 \;\; \mathbb{Q} - \sigma.\beta.$ και ότι την αποτίμηση (αξιολόγηση) της επένδυσης την κάνουμε στην $t = 0$. Προφανώς, ως πληρωμή τερματισμού ορίζουμε: $\Omega(V_T) \triangleq V_T - I$.

Η μετάβαση από την 5.2 στην 5.3 λόγω του διηνεκούς $\mathbb{T}$ αποδεικνύεται στους Karatzas & Shreve (1998: Theorem 6.7, pp. 64-65). Για να έχει νόημα η 5.3 θα πρέπει $\alpha < \rho$ αλλιώς η V_t θα αυξάνεται γρηγορότερα από τον όρο $e^{\rho t}$ και άρα ή $e^{-\rho T}(V_T - I)$ θα πηγαίνει στο άπειρο καθώς το T μεγαλώνει (Dixit & Pindyck, 1994) – αυτό αποδεικνύεται από την λύση της 5.1. Άρα η βέλτιστη επιλογή είναι πάντα η αναμονή ή η αναβολή της επένδυσης. Ουσιαστικά, με $a > \rho$ ο επιχειρηματίας κατά μέσο όρο καρπώνεται αποδόσεις $a > \rho$ (βλ. Θεώρημα II.4.3) απλά και μόνο διακρατώντας το δικαίωμα αυτό και μη εξασκώντας το. Αυτή τη διαφορά ανάμεσα στο a και ρ θα την ορίσουμε ως $\delta \triangleq \rho - a > 0$.

Α. Λύση χωρίς αβεβαιότητα

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της επενδυτικής ευκαιρίας υπό αβεβαιότητα με την μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού και την ανάλυση των δικαιωμάτων θα την εξετάσουμε υπό καθεστώς πλήρους βεβαιότητας, ήτοι $\sigma = 0,\ V_0 \in \mathbb{R}$ στην 5.1. Άρα λύση της απλής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης 5.1 (για $\sigma = 0,\ V_0 \in \mathbb{R}$) είναι $V_t = V_0 e^{at}$ και η 5.3 γίνεται:

$$F(V_0) = (V_0 e^{at} - I)e^{-\rho t}, \qquad (5.4)$$

Για να δούμε τι θα αποφασίσει ο επιχειρηματία θα διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν υποθέσουμε $a \leq 0$ – για παράδειγμα, επειδή η απόσβεση είναι πολύ μεγάλη – τότε η $F(V_0)$ είτε φθίνει είτε παραμένει σταθερή, άρα αν $V_0 - I > 0$ η επένδυση πραγματοποιείται χωρίς καμία αναμονή· οποιαδήποτε αναμονή θα μείωνε την αξία της επιχείρησης $F(V_t) < F(V_0)$. Αλλιώς, για $V_0 - I \leq 0,\ F(V_0) = 0$ και δεν πραγματοποιείται η επένδυση. (Dixit & Pindyck, 1994)

Έστω τώρα $0 < a < \rho$. Σε αυτή την περίπτωση, για να μεγιστοποιήσουμε την$F(V)$ παίρνουμε τη συνθήκη πρώτης τάξης ως προς T και την συνθήκη δεύτερη τάξης. Έτσι. Για την συνθήκη πρώτης τάξης έχουμε:

$$\frac{dF(V_0)}{dT} = -(\rho - a)V_0 e^{-(\rho - a)T} + \rho I e^{-\rho T} = 0, \qquad (5.5)$$

και λύνοντας ως προς T βρίσκουμε ότι:

$$T^* = \max\left\{\frac{1}{a} log\left[\frac{\rho I}{(\rho - a)V_0}\right], 0\right\}$$

γιατί πρέπει πάντα $T, T^* > 0$.

Για να βρούμε ποια είναι η V^* για την οποία εξασκούμε τώρα το δικαίωμα αρκεί να αντικαταστήσω στην 5.5 $T = T^* = 0$ ή

$$-(\rho - a)V_0 + \rho I = 0$$

$$V_0 = V^* \triangleq \frac{\rho I}{\rho - a} > I$$

άρα αν $V_0 = \frac{\rho I}{\rho - a}$ τότε εξασκώ το δικαίωμα τώρα, $t = 0$, και πραγματοποιώ την επένδυση με $F(V_0) = V_0 - I$. Επιπλέον, λύνοντας $log\left[\frac{\rho I}{(\rho - a)V_0}\right] < 0$ παίρνουμε $V_0 > V^*$. Επομένως, για $V_0 \geq V^*$ η επένδυση πραγματοποιείται τώρα. Αντίστοιχα, για $T^* = \frac{1}{a} log\left[\frac{\rho I}{(\rho - a)V_0}\right]$>0, και αντικαθιστώντας το στην 5.4 παίρνουμε:

$$F(V_0) = \frac{aI}{\rho - a}\left[\frac{(\rho - a)V_0}{\rho I}\right]^{\frac{\rho}{a}}$$

Συνοψίζοντας:

$$F(V_0) = \begin{cases} \dfrac{aI}{\rho - a}\left[\dfrac{(\rho - a)V_0}{\rho I}\right]^{\frac{\rho}{a}}, & V_0 < V^*, T^* > 0 \\ V_0 - I, & V_0 \leq V^*, T^* = 0 \end{cases}$$

Πριν κλείσουμε το κομμάτι που δεν υπάρχει αβεβαιότητα αξίζει να δούμε ότι με βάση την $V^* \triangleq \frac{\rho I}{\rho - a}$, το κρίσιμο σημείο V^* αυξάνει καθώς αυξάνει το αρχικό κόστος της επένδυσης I και, μάλιστα, περισσότερο από 1 προς 1 αφού $\frac{\rho}{\rho - a} > 0$.

B. Λύση με Δυναμικό Προγραμματισμό

Ξεκινάμε πλέον την ανάλυση της επενδυτικής ευκαιρίας σε καθεστώς αβεβαιότητας, όταν, δηλαδή, οι μελλοντικές χρηματοροές είναι στοχαστικές και άρα άγνωστες. Υπενθυμίζουμε ότι πρόκειται για πρόβλημα βέλτιστης διακοπής (optimal stopping) γιατί οι επιλογές είναι δύο: : ή η συνέχιση της αναμονής ή ο τερματισμός αυτής και η πραγματοποίηση της επένδυσης. Από το μέρος II.3 έχουμε εξάγει την σχέση 3.5 για βελτιστοποίηση με δυναμικό προγραμματισμό σε ένα περιβάλλον με τυχαιότητα και καθώς στην επιχειρηματική απόφαση που εξετάζουμε τώρα ισχύει $\pi(V_t, u_t, t) = 0$ και $F(V_t, t) = F(V_t)$, έχουμε:

$$\rho F(V_t) = \max\left[\frac{1}{dt}\mathbb{E}_t[dF]\right] \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (5.6)$$

και από την 3.12 δεδομένου του ορισμού της V_t σε αυτό το πρόβλημα, έχουμε:

$$-\rho F(V_t) + aV_t F'(V_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t^2 F''(V_t) = 0 \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (5.7)$$

η οποία πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες (Βλ. θεώρημα 3.7):

$$F(0) = 0, \qquad (5.8)$$

$$F(V^*) = V^* - I, \qquad (5.9)$$

$$F'(V^*) = 1, \qquad (5.10)$$

Καθώς η πληρωμή τερματισμού $\Omega(V_T) = \Omega(V^*)$ είναι η πληρωμή που θα ληφθεί όταν εξασκηθεί το δικαίωμα στο βέλτιστο σημείο για $t = T$, ήτοι $\Omega(V_T) = \Omega(V^*) = V^* - I$. Η 5.9 μπορεί να έχει και μια άλλη ανάγνωση αν την αναδιατάξουμε ως $I = V^* - F(V^*)$· πραγματοποιώντας την επένδυση ο επιχειρηματίας καρπώνεται τις προεξοφλημένες χρηματοροές της V_t, αλλά εγκαταλείπει την αξία του δικαιώματος που κατείχε και, άρα, έχει κάποιο κόστος ευκαιρία ίσο με $F(V_t)$. Σε αυτή την ανάγνωση, το καθαρό *κέρδος* μείον το κόστος ευκαιρίας είναι $V_t - F(V_t)$ και η επένδυση γίνεται αποδεκτή για V^* όταν το κόστος της I εξισώνεται με το κέρδος της ή όταν $I = V^* - F(V^*)$. (Dixit & Pindyck, 1994)

Σημειακά στο Ω, για τυχόν $\omega \in \Omega$, η 5.7 παίρνει την μορφή μιας ομογενούς (διαφορικής) εξίσωσης Euler – Cauchy (Kreyszig, 2011): $-\rho y(x) + axy'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 y''(x) = 0$ ή

$$-\frac{2\rho}{\sigma^2}y(x) + \frac{2a}{\sigma^2}xy'(x) + x^2 y''(x) = 0, \qquad (5.7')$$

$x \in \mathbb{R}$, με αρχικές συνθήκες τις 5.8, 5.9 και 5.10 όπου $y \triangleq F$, $x \triangleq V_t$, $t \in \mathbb{T}$. Στο Παράρτημα Α υπολογίζεται αναλυτικά η λύση της 5.7' και, κατ' αντιστοιχία της 5.7:

$$F(V_t) = \frac{\left(I\frac{m_1}{m_1 - 1}\right)^{1-m_1}}{m_1}{V_t}^{m_1}, \qquad (5.11)$$

με

$$I = V^*\left(\frac{m_1 - 1}{m_1}\right), \qquad (5.12)$$

$$V^* = I\frac{m_1}{m_1 - 1}, \qquad (5.13)$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} > 1, \qquad (5.14)$$

ή αφού $\delta \triangleq \rho - a$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2(\rho - \delta)}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2(\rho - \delta)}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}, \qquad (5.14')$$

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω, αξίζει να σταθούμε λίγο στην συμπεριφορά της περιοχής συνέχειας ($V_t \leq V^*$) και της διαφοράς $V^* - I$. Έτσι, από την 5.13 έχουμε:

$$V^* - I = I\frac{m_1}{m_1 - 1} - I = I\left(\frac{1}{m_1 - 1}\right), \qquad (5.15)$$

Αρχικά:

$$\lim_{\sigma \uparrow +\infty} m_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\lim_{\sigma \uparrow +\infty} V^* - I = \lim_{m_1 \downarrow 1} I\left(\frac{1}{m_1 - 1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\sigma \uparrow +\infty} V^* = +\infty$$

Οπότε, παρατηρούμε ότι καθώς ο κίνδυνος αυξάνεται η τιμή διακοπής πάνω από την οποία πραγματοποιείται η επένδυση πάει στο $+\infty$, άρα η επένδυση δεν πρόκειται να πραγματοποιηθεί ποτέ (Dixit & Pindyck, 1994). Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται και στην πραγματικότητα φαίνεται ότι σε περιόδους έντονης μεταβλητότητας και υψηλού κινδύνου υποχωρούν οι επενδύσεις.

Γ. Εφαρμογή στην Νεοκλασσική Θεωρία Επένδυσης και στο q του Tobin

Για να δούμε τη σχέση με την Νεοκλασσική Θεωρία θα εξετάσουμε την επένδυση σε μία παραγωγική μονάδα η οποία συνεπάγεται συνεχή ροή κέρδους π_t.

Ορισμός 5.5: Η εξίσωση κίνησης του κέρδους, με αβεβαιότητα, ορίζουμε (υποθέτουμε) ότι είναι της μορφής:

$$d\pi_t \triangleq a\pi_t dt + \sigma\pi_t dB_t, \pi_0, \qquad t \in \mathbb{T}$$

a, $\sigma \in \mathbb{R}$, η π_0 είναι $\mathcal{F}_0$ −μετρήσιμη, $\mathbb{T} = [0, +\infty)$ και η B_t είναι μια μονοδιάστατη $\mathcal{F}_t^\pi$ − κίνηση Brown. Επίσης, $\pi_s \in C^1\big([0, +\infty)\big)$ και ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 5.6: Στην υπό εξέταση επένδυση ισχύει:

$$V_t = \frac{\pi_t}{\rho - a} \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall t \in \mathbb{T}$$

V_t όπως στον ορισμό 5.1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από τους Brealey & Myers (1996) ξέρουμε ότι για ένα διηνεκές χρεόγραφο με χρηματοροές που παρουσιάζουν περιοδικό ρυθμό μεγέθυνσης g – $c_i = c_0 e^{gi}$ – και προεξοφλητικό επιτόκιο ρ τότε η παρούσα αξία του είναι:

$$\frac{c_0}{\rho - a}$$

Στην περίπτωσή μας, το κέρδος έχει σταθερό μέσο ρυθμό μεγέθυνσης (Θεώρημα 4.3) a και για τυχόν $t \in \mathbb{T}$ η παρούσα αξία V_t της επένδυσης είναι $\frac{\pi_t}{\rho - a}$, άρα:

$$V_t = \frac{\pi_t}{\rho - a} \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall t \in \mathbb{T}$$

$$V_t = \frac{\pi_0}{\rho - a} + \int_0^t \frac{a}{\rho - a}\pi_s ds + \int_0^t \frac{\sigma}{\rho - a}\pi_s \, dB_s \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall t \in \mathbb{T}$$

$$V_t = V_0 + \int_0^t aV_s ds + \int_0^t \sigma V_s \, dB_s \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall t \in \mathbb{T}$$

■

Από την 5.10

$$V^* = \frac{\pi^*}{\rho - a} = I\frac{m_1}{m_1 - 1}$$

$$\pi^* = I(\rho - a)\frac{m_1}{m_1 - 1}, \qquad (5.16)$$

κι από την Α.1:

$$m^2 + \left(\frac{2a}{\sigma^2} - 1\right)m - \frac{2\rho}{\sigma^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\sigma^2 + \rho = \frac{m_1}{m_1 - 1}(\rho - a)$$

άρα η 5.16 γίνεται:

$$\pi^* = I\left(\frac{1}{2}m_1\sigma^2 + \rho\right), \qquad (5.17)$$

αλλά στην περίπτωση που εξετάζουμε την επένδυση σε μία επιχείρηση με ροή κέρδους $\{\pi_t, \backslash t \in \mathbb{T}\}$, το I, διαισθητικά, συμβολίζει το κόστος απόκτησης της επιχείρησης.

Παρατηρούμε, επομένως ότι η ανάλυση του Νεοκλασσικού πλαισίου με βελτιστοποίηση από δυναμικό προγραμματισμό δίνει διαφορετικά αποτελέσματα από την συμβατική ΚΠΑ, ακόμα και στην περίπτωση χωρίς κίνδυνο, $\sigma = 0$. Πράγματι, σύμφωνα με την ΚΠΑ η επένδυση πραγματοποιείται όταν $V_t \geq I$ ή $\pi_t > I(\rho - \alpha)$. Η 5.17, όμως, για $\sigma = 0$, μας δίνει $\pi^* = I\rho > I(\rho - \alpha)$. Άρα η επιχείρηση θα περιμένει παραπάνω για να πραγματοποιήσει την επένδυση, και αυτό γιατί έτσι προεξοφλείται και το κόστος της επένδυσης, το οποίο σε παρούσα αξία γίνεται $Ie^{-\rho T} < I$. (Dixit & Pindyck, 1994)

Μια τελευταία προέκταση της ανάλυσης αυτής είναι το q του Tobin. Το q του Tobin είναι ένας δείκτης τον οποίο εισήγαγε ο Tobin (1969) και είναι ο λόγος της αγοραίας αξίας της επιχείρησης (στο χρηματιστήριο) προς το κόστος αντικατάστασής του εξοπλισμού της (της λογιστικής της αξίας)[7] . Ο κανόνας του q λέει ότι μία επιχείρηση πρέπει να επενδύσει – δηλαδή, να αναπτύξει τις δραστηριότητές της – όταν $q > 1$, το οποίο εξηγείται γιατί τότε η επιχείρηση είναι υπερτιμημένη και άρα μπορεί να χρηματοδοτήσεις την επένδυση με χαμηλότερο κόστος από αυτό που ορίζει η λογιστικής της αξία. Αυτό γιατί καθώς αυξάνεται η αξία ενός χρηματιστηριακού τίτλου τόσο πέφτει το επιτόκιο που αυτός υπονοεί από την σχέση της ΚΠΑ. Με βάση, λοιπόν, την παρούσα εκδοχή του q και τους ορισμούς των V_t και I στο 5.Γ, έχουμε ότι:

$$q_t = \frac{V_t}{I} \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall t \in \mathbb{T}$$

δεδομένου ότι η χρηματιστηριακή αξία της επιχείρησης είναι η προεξοφλημένη παρούσα αξία όλης της κερδοφορίας της, δεδομένης της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών. Για το κρίσιμο σημείο q^* έχουμε:

$$q^* = \frac{V^*}{I} = \frac{I\frac{m_1}{m_1 - 1}}{I} = \frac{m_1}{m_1 - 1} \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

$$q^* > 1$$

όπως και στην θεώρηση του Tobin (1969). Συνεπώς, η θεωρία των πραγματικών δικαιωμάτων δείχνει να συμφωνεί και με αυτήν την εκδοχή της θεωρίας του q Tobin.

Δ. Λύση με Αποτίμηση του Δικαιώματος Επένδυσης

[7] Μία από τις ισοδύναμες εκδοχές του q είναι αυτή που αναφέρουμε εδώ.

Στην περίπτωση της ανάλυσης της επενδυτικής ευκαιρίας με την αποτίμηση των δικαιωμάτων, θα φτιάξουμε το υπόδειγμα ακριβώς στα πλαίσια των υποθέσεων που κάναμε στην αρχή του Κεφαλαίου 5. Δηλαδή, ισχύουν οι ορισμοί 5.1, 5.3 και 5.4. Επιπλέον, θα πρέπει να ορίσουμε ένα χρεόγραφο $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ το οποίο θέλουμε να μιμείται ακριβώς την αξία της επένδυσης V_t. Αυτό γιατί είναι αδύνατο να κατασκευαστεί ένα δικαίωμα πάνω σε ένα ανύπαρκτο χρεόγραφο – η επένδυση βρίσκεται σε ένα μαύρο κουτί – και άρα θέλουμε ένα χρεόγραφο ή χαρτοφυλάκιο από την αγορά το οποίο πρέπει να μιμείται ακριβώς την αξία της επενδυτικής ευκαιρίας και πάνω στο οποίο θα μπορούσαμε να διαπραγματευτούμε ένα δικαίωμα προαίρεσης. Αυτό υποθέτει ότι η αγορά είναι πλήρης, δηλαδή υπάρχουν ήδη τα χρεόγραφα που είναι απαραίτητα για να μπορεί να κατασκευαστεί η $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ που ορίζεται στον 5.7.

Ορισμός 5.7: Έστω σ.α. $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ με $Corr(X_t, V_t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{T} = [0, +\infty)$, και διύλιση $\mathbb{F}^V$ που παράγεται από την σ.α. $V = \{V_t, t \in \mathbb{T}\}$. Τότε καλούμε την $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ χαρτοφυλάκιο που μιμείται την αξία της επένδυσης και η εξίσωση κίνησης που το περιγράφει είναι:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, X_0 = x_0, \qquad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

με $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, x_0 $\mathcal{F}_0^V -$ μετρήσιμη και B_t μονοδιάστατη τυπική $\mathcal{F}_t^V -$ κίνηση Brown.

Λόγω της τέλειας συσχέτισης μεταξύ των δύο σ.α. μπορούμε να μπούμε ότι υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των δύο σ.α. και άρα και η $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ είναι $\mathcal{F}_t^V -$ προσαρμοσμένη. Επιπλέον, για τον ίδιο λόγο αν ρ_{Xm}η συσχέτιση της X με όλη την αγορά, τότε $\rho_{Xm} = \rho_{Vm}$, όπου $\rho_{ij} = Corr(i, j)$ και ρ_{Vm} η συσχέτιση της V με την αγορά – οι συσχετίσεις ρ_{Xm} και ρ_{Vm} ισχύουν για κάθε $t \in \mathbb{T}$ και απλά παραλείπεται η γραφή του t, δηλαδή εννοείται $\rho_{Xm}(t) = \rho_{Xm}$ και $\rho_{Vm}(t) = \rho_{Vm}$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$. Επίσης, από τον ορισμό 5.7 έχουμε ότι η προσδοκώμενη απόδοση του X είναι μ και από το CAPM ισχύει:

$$\mu = r + \frac{\sigma_{Xm}}{\sigma_m^2}(r_m - r) = r + \frac{\sigma_{Xm}}{\sigma_m \sigma_X}\left(\frac{\sigma_X}{\sigma_m}\right)(r_m - r)$$

$$\mu = r + \varphi \sigma_X \rho_{Xm}\,, \qquad (5.18)$$

όπου $\varphi \triangleq \frac{(r_m - r)}{\sigma_m}$ η «αγοραία τιμή κινδύνου» και r το ακίνδυνο επιτόκιο, $\sigma_\xi = \sqrt{V[\xi_t]}$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$. (Dixit & Pindyck, 1994)

Επιπλέον, για a την προσδοκώμενη απόδοση της V_t πρέπει να ισχύει $\mu = a + \delta,\ \delta > 0$, δηλαδή η απόδοση του συσχετισμένου χαρτοφυλακίου (δικαίωμα πάνω στο V_t) είναι ίση με την απόδοση της επένδυσης συν την μερισματική απόδοση δ. Διαφορετικά, για $\delta = 0$ τότε τα κεφαλαιακά κέρδη θα αντικατοπτρίζονταν πλήρως στην τιμή του δικαιώματος της επένδυσης και δεν θα υπήρχε κίνητρο αυτό να εξασκηθεί. Η μερισματική απόδοση του χρεογράφου είναι ένα κόστος ευκαιρίας της μη διακράτησης αυτού του χρεογράφου αλλά της διακράτησης μόνο του δικαιώματος. Έτσι, με $\delta = 0$ δεν υπάρχει χαμένη απόδοση από την μη κατοχή του τίτλου και άρα δεν υπάρχει κόστος από την διακράτηση του δικαιώματος αντί του τίτλου, οπότε το δικαίωμα δεν εξασκείται μέχρι να λήξει. (Dixit & Pindyck, 1994)

Ξεκινώντας την αποτίμηση πρέπει να βρούμε $\mathcal{F}_t^V$ −προσαρμοσμένο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης, όπως και στα χρηματοοικονομικά δικαιώματα. Έστω, λοιπόν, Φ_t το εν λόγω χαρτοφυλάκιο το οποίο θα έχει θετική θέση στο δικαίωμα αγοράς $F(V_t)$[8] καθώς αυτό έχουμε στην κατοχή μας, και για αντιστάθμιση θα πάρουμε αρνητική θέση σε n επενδυτικά σχέδια V_t· τα $F(V_t)$ και nV_t κινούνται τέλεια αντίθετα αντίθετα. Έτσι, για το πλήρως αντισταθμισμένο χαρτοφυλάκιο, $\forall \zeta \in C^1\big([0,+\infty)\big)$, θα ισχύει: $\Phi_{t+dt} - \Phi_t = 0$ ή $F(\zeta_{t+dt}) - F(\zeta_t) - n(\zeta_{t+dt} - \zeta_t) = 0$ ή $\frac{F(\zeta_{t+dt})-F(\zeta_t)}{\zeta_{t+dt}-\zeta_t} = n$, όπου $dt \cong \Delta t_{\to 0}$, οπότε, τελικά έχουμε[9]:

$$n = F'(V_t)$$

έτσι:

$$\Phi_t = F(V_t) - F'(V_t)V_t \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (5.19)$$

και συμπεριλαμβάνοντας και την μερισματική απόδοση, η συνολική απόδοση του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$d\Phi_t = dF(V_t) - F'(V_t)dV_t - \delta V_t F'(V_t)dt \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., t \in \mathbb{T}, \qquad (5.20)$$

$F'(V_t) = n$ σταθερή και η V_t όπως στην 5.1. Από την Φόρμουλα του Itō και την V_t (σε διαφορική μορφή):

$$dF(V_t) = aV_tF'(V_t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2V_t^2F''(V_t)dt + \sigma V_tF'(V_t)dB_t, F(V_0) \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta, t \in \mathbb{T}$$

$$dV_t = aV_tdt + \sigma V_tdB_t \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., t \in \mathbb{T}$$

και αντικαθιστώντας στην 5.20:

$$d\Phi_t = \frac{1}{2}\sigma^2V_t^2F''(V_t)dt - \delta V_tF'(V_t)dt \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., t \in \mathbb{T}, \qquad (5.21)$$

Για να μην υπάρχει δυνατότητα εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (ακίνδυνης κερδοσκοπίας) από την κατοχή του χαρτοφυλακίου Φ_t θα πρέπει για $\Phi_t > 0$, $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$, $\forall\, t \in \mathbb{T}$, (με αρνητική ή μηδενική αξία δεν μπορεί να πραγματοποιήσει θετικές αποδόσεις) η απόδοση του χαρτοφυλακίου το διάστημα dt θα πρέπει να ισούται με το αγοραίο ακίνδυνο επιτόκιο r για αυτό το διάστημα. Δηλαδή, διαδοχικά και $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$ έχουμε:

---

[8] Εναλλακτικά, μπορούμε να πάρουμε θετική θέση (να αγοράσουμε) στο χαρτοφυλάκιο X_t το οποίο επίσης μιμείται τέλεια την αξία της επένδυσης V_t.

[9] Αφού ισχύει $\left|\frac{F(\zeta_{t+dt})-F(\zeta_t)}{\zeta_{t+dt}-\zeta_t}\right| < M$ γιατί $\zeta \in C^1\big([0,+\infty)\big)$, $F \in C^{1,2}\big([0,+\infty)\big)$ και $0 < |\zeta_{t+dt} - \zeta_t| \leq m, m > 0$

$$\frac{d\Phi_t}{\Phi_t} = rdt, \forall\, t \in \mathbb{T}$$

$$d\Phi_t = \Phi_t rdt$$

και από τις 5.19 και 5.21, ισχύει, $\mathbb{P} - \sigma.\beta$:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_t^2 F''(V_t)dt - \delta V_t F'(V_t)dt = F(V_t)rdt - F'(V_t)V_t rdt$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_t^2 F''(V_t) + (r-\delta)V_t F'(V_t) - rF(V_t) = 0, \qquad (5.22)$$

για $t \in \mathbb{T}$. (Dixit & Pindyck, 1994)

Πριν προχωρήσουμε στην λύση της 5.22, πρέπει δούμε γιατί ισχύει η ισότητα $\frac{d\Phi_t}{\Phi_t} = rdt$. Έστω, $\frac{d\Phi_t}{\Phi_t} < rdt$ τότε οι κάτοχοι του Φ_t θα το πουλήσουν και θα αγοράσουν το ακίνδυνο χρεόγραφο (π.χ. ομόλογο) για να καρπωθούν την απόδοση r. Τότε η αυξημένη στη ζήτηση των ομολόγων θα αυξήσει το αγοραίο ακίνδυνο επιτόκιο έως ότου ισχύσει η ισότητα. Ομοίως, για $\frac{d\Phi_t}{\Phi_t} > rdt$ θα πουληθούν ομόλογα και έτσι θα αυξηθεί η απόδοσή του. Έτσι, ισχύει η ισότητα $\mathbb{P} - \sigma.\beta$.

Η 5.22 είναι ίδια με την 5.7', ισχύουν οι συνθήκες 5.8-5.10 και η λύση (βλ. και παράρτημα Α) είναι:

$$F(V_t) = \frac{\left(I\frac{m_1}{m_1-1}\right)^{1-m_1}}{m_1} {V_t}^{m_1}, \qquad (5.23)$$

με

$$I = V^*\left(\frac{m_1-1}{m_1}\right), \qquad (5.24)$$

$$V^* = I\frac{m_1}{m_1-1}, \qquad (5.25)$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1, \qquad (5.26)$$

ή αφού $\delta \triangleq r - a$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}, \qquad (5.26')$$

Όπως βλέπουμε από τις 5.23-5.26 και 5.26', αν υποθέσουμε ουδετερότητα κινδύνου τότε η επιθυμητή απόδοση ρ που έχουν οι επιχειρηματίες θα είναι ίση με r (Dixit & Pindyck, 1994). Γιατί; Γιατί, διαισθητικά, για δεδομένο κίνδυνο αυτή είναι η απόδοση που προσφέρεται κι ο επιχειρηματίας λόγω της ουδετερότητας κινδύνου δεν επιθυμεί μεγαλύτερη ή μικρότερη απόδοση από αυτήν. Οπότε, με $\rho = r$ η λύση της 5.22 είναι ακριβώς ταυτόσημη με αυτή που λάβαμε με την μέθοδο του Δυναμικού προγραμματισμού.

Πριν κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό πρέπει να σταθούμε στην συμπεριφορά του βέλτιστου σημείου. Ισχύει, φυσικά, και εδώ ότι $\lim_{\sigma\uparrow+\infty} V^* = +\infty$. Επίσης, το κρίσιμο σημείο V^*, όπως περιγράφεται από τις σχέσεις 5.25 και 5.26', δε εξαρτάται από κάποια υποκειμενική προτίμηση της διοίκησης της επιχείρησης ή των επενδυτών, αλλά ούτε και από την συσχέτιση ρ_{Xm} ή από το μέγεθος $\frac{(r_m - r)}{\sigma_m}$ ή μ. Το κρίσιμο σημείο, εξαρτάται μόνο από το κόστος της επένδυσης I και από τις εξωγενείς μεταβλητές σ, δ και r. (Dixit & Pindyck, 1994)

Τέλος, από το υπόδειγμα επιτοκίων CAPM έχουμε ότι $\mu = r + \varphi\sigma\rho_{X_t m}$ και δεδομένου ότι $\delta \triangleq \mu - a$ έχουμε ότι:

$$\delta = r + \varphi\sigma\rho_{X_t m} - a, \qquad (5.27)$$

οπότε μία αύξηση στον κίνδυνο $\Delta\sigma$ θα αυξήσει τη μερισματική απόδοση κατά $\varphi\rho_{X_t m}(\Delta\sigma)$.

6. Αξία του Επενδυτικού Σχεδίου κι η Απόφαση για Επένδυση

Στην ανάλυση του κεφαλαίου 5 που προηγήθηκε ορίσαμε ως αξία του επενδυτικού σχεδίου την σ.α. $\{V_t, t \in \mathbb{T}\}$ η οποία είναι εξωγενής και, ειδικότερα, ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown. Αυτή η απλούστευση αγνοεί τα μεταβλητά κόστη, την στοχαστικότητα της τιμής του προϊόντος (ή υπηρεσίας) που θα παράξει η επένδυση που εξετάζεται, καθώς και την στοχαστικότητα του κόστους των εισροών που χρειάζονται για το επενδυτικό σχέδιο. Επομένως, η τυχαιότητα της αξίας της επένδυσης μπορεί να αναχθεί στην τυχαιότητα που παρουσιάζουν αυτές οι μεταβλητές που πριν θεωρήθηκαν εξωγενείς. Ανάλογα με το επίπεδο της ανάλυσης χρειάζεται και περισσότερη εξειδίκευση. Δηλαδή, σε επίπεδο επιχείρησης μπορούμε να δουλέψουμε με μία στοχαστική διαδικασία – εξωγενώς καθορισμένη – για τις τιμές των εισροών και των παραγόμενων αγαθών. Από την άλλη, σε επίπεδο κλάδου θα πρέπει να ενδογενοποιήσουμε την κίνηση της τιμής του προϊόντος και ανάγουμε τον καθορισμό της σε επιμέρους στοχαστικές διαδικασίες. Σε ακόμα υψηλότερο επίπεδο, οικονομίας, θα πρέπει να ομογενοποιήσουμε την τυχαιότητα και των τιμών των εισροών. (Dixit & Pindyck, 1994)

Όπως και στο κεφάλαιο 5, η επιχείρηση λειτουργεί σε ένα χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με συνεχή χρονικό ορίζοντα $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$, η εξίσωση κίνησης της τιμής είναι:

$$dP_t = aP_t dt + \sigma P_t dB_t, P_0, \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.1)$$

$t \in \mathbb{T}$, a, σ $\in \mathbb{R}$, με διύλιση $\mathbb{F}^P \triangleq \{\mathcal{F}_t^P, t \in \mathbb{T}\}$ παραγόμενη από την $\{P_t, t \in \mathbb{T}\}$ και με τις συνήθεις ιδιότητες.

A. Το υπόδειγμα χωρίς Λειτουργικά Κόστη

Υποθέτουμε ότι η τιμή κινείται κατά την 6.1, ότι δεν υπάρχουν κόστη και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος ισούται με 1, οπότε το κέρδος π_t ισούται με P_t[10], $\forall t \in \mathbb{T}, \mathbb{P}-\sigma.\beta.$ και κινείται σύμφωνα με την 6.1. Ας υποθέσουμε ότι η αξία της επένδυσης θα είναι το προεξοφλημένο κέρδος με συντελεστή $\mu - a$, ήτοι:

$$V_t = \frac{P_t}{\mu - a} = \frac{aP_t}{\mu - a}dt + \frac{\sigma P_t}{\mu - a}dB_t, P_0, \mathbb{P}-\sigma.\beta., \qquad (6.2)$$

με μ το προεξοφλητικό επιτόκιο το οποίο θα είναι προσαρμοσμένο στον κίνδυνο της τιμής και θα δίδεται από την:

$$\mu = r + \varphi\sigma_P\rho_{Pm}\,, \qquad (6.3)$$

όπου $\varphi \triangleq \frac{(r_m - r)}{\sigma_m}$ η «αγοραία τιμή κινδύνου» και r το ακίνδυνο επιτόκιο. Τότε το πρόβλημα υπό την 6.2 θα είναι ίδιο με αυτό του κεφαλαίου 5, για αυτό εμείς για αν γενικεύσουμε θα θεωρήσουμε $V_t \triangleq V(P_t), V \in C^{1,2}\big([0, +\infty)\big)$. (Dixit & Pindyck, 1994)

Για να έχει νόημα η προεξόφληση θα πρέπει $\mu > a$ και την διαφορά $\mu - a$ θα την συμβολίζουμε με $\delta > 0$, όπως πριν. Όπως αναλύσαμε και πιο πάνω, αν $\mu \leq a$ τότε οι επενδυτές δεν θα θέλουν να διακρατήσουν ένα χρεόγραφο πλήρως συσχετισμένο με την $\{P_t, t \in \mathbb{T}\}$, αλλά θα κρατούσαν αυτό με την μεγαλύτερη προσδοκώμενη απόδοση a. Αλλιώς, η ύπαρξη του $\delta = \mu - a$ ενέχει ένα επιπλέον όφελος από την μη κατοχή της παραγωγικής διαδικασίας. Έτσι, για παράδειγμα αν το αγαθό είναι αποθηκεύσιμο τότε το δ μπορεί να θεωρηθεί το όφελος από την κατοχή του χρηματοοικονομικού τίτλου γιατί αυτός δεν συνεπάγεται το κόστος αποθήκευσης του αγαθού.

Ακολουθώντας ίδια διαδικασία με την παράγραφο 5.Δ, πρέπει να βρούμε χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης Φ_t τέτοιο ώστε, λόγω του μηδενικού κινδύνου που αυτό θα έχει να ισχύει: $\frac{d\Phi_t}{\Phi_t} = rdt, \forall\, t \in \mathbb{T}, \Phi_t > 0\ \ \mathbb{P}-\sigma.\beta.$. Επίσης, θέλουμε να είναι ακίνδυνο, δηλαδή, $d\Phi_t = 0, \forall\, t \in \mathbb{T}, \mathbb{P}-\sigma.\beta.$ Έστω, λοιπόν, το εξής χαρτοφυλάκιο:

$$\Phi_t = V(P_t) - nP_t$$

και αφού $V(P_t)$ και P_t τέλεια συσχετισμένα υπάρχει $n > 0$ τ.ω. $d\Phi_t = 0$ που όπως είδαμε στην 5.Δ, $n = V'(P_t)$ σταθερό στο χρονικό διάστημα dt. Άρα $\Phi_t = V(P_t) - V'(P_t)P_t$ και *κεφαλαιακή* απόδοση

$$(P_t) - V'(P_t)dP_t$$

[10] Έστω ποσότητα $Q > 0$ τότε $\pi_t = QP_t, \mathbb{P}-\sigma.\beta.$, και $d\pi_t = QdP_t = a\pi_t dt + \sigma\pi_t dB_t, \pi_t, \mathbb{P}-\sigma.\beta.$, που είναι όμοια με την 6.1.

όπου για να πάρουμε την απόδοση από την κατοχή του Φ_t πρέπει να αφαιρέσουμε την χαμένη «απόδοση ευκολίας» (convenience yield) $\delta P_t V'(P_t)dt$ και την *απόδοση* από το κέρδος της επιχειρηματικής δραστηριότητας Pdt οπότε θα έχουμε:

$$d\Phi_t = dVdV(P_t) + P_t dt - V'(P_t)dP_t - \delta P_t V'(P_t)dt \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

για την οποία αν υπολογίσουμε την $dV(P_t)$ από την Φόρμουλα του Itō, την dP_t από την 6.1 και αντικαταστήσουμε (όπως εργαστήκαμε για την εξαγωγή της 5.22) έχουμε συνολική απόδοση:

$$d\Phi_t = \frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 V''(P_t)dt - \delta P_t V'(P_t)dt \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

την οποία αν εξισώσουμε με $r\Phi_t dt$ λόγω της συνθήκης μη ύπαρξης ακίνδυνης κερδοσκοπίας (arbitrage free), λαμβάνουμε την:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 V''(P_t) + (r-\delta)P_t V'(P_t) - rV(P_t) + P_t = 0 \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall\, t \in \mathbb{T}, \qquad (6.4)$$

Τώρα στην λύση του ομογενούς κομματιού $V_{HOM}(P_t) = B_1 P_t^{b1} + B_2 P_t^{b_2}$, σημειακά στο Ω, θα προσθέσουμε και την ειδική λύση $V_s(P_t) = \psi P_t$ με $\psi \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί την 6.4, οπότε:

$$0 + rP_t\psi - \delta P_t \psi - r\psi P_t + P_t = 0 \implies \psi = \frac{1}{\delta}$$

και άρα η γενική λύση της 6.3 είναι:

$$V(P_t) = B_1 P_t^{b1} + B_2 P_t^{b_2} + \frac{P_t}{\delta}, t \in \mathbb{T}, \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.5)$$

με $B_1 > 0$ και $B_2 < 0$. Όμως η 6.5 μορφή επιτρέπει «κερδοσκοπικές φούσκες» (speculative bubbles) - θα δούμε γιατί!

Πρόταση 6.1: Η λύση της 6.5 επιτρέπει κερδοσκοπικές φούσκες, ενώ η αναγκαία συνθήκη για την μη ύπαρξη φούσκας είναι $V(P_t) = \frac{P_t}{\delta}, t \in \mathbb{T}, \mathbb{P} - \sigma.\beta.$.

ΑΝΤΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ. Αρχικά ξέρουμε ότι ο προσδοκώμενος (μέσος) ρυθμός μεγέθυνσης της P_t είναι adt, από την 6.1. Επιπλέον, η P_t είναι συνεχής και ο τελεστής $\mathbb{E}$ είναι, επίσης, συνεχής και άρα μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση $f \in C^1\big([0,+\infty)\big)$ ως εξής: $f(t) \triangleq \mathbb{E}[P_t]$, οπότε θα έχουμε $\frac{f'(t)}{f(t)} = adt$ και η λύση της τελευταίας θα είναι $f(t) = P_0 e^{at}$ άρα $\mathbb{E}[P_t] = P_0 e^{at}$. Η συνολική προσδοκώμενη ΚΠΑ από την τιμή (κέρδος) στο διηνεκές είναι:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{E}[P_t]e^{-\mu t}dt = \int_0^{+\infty} P_0 e^{at}e^{-\mu t}dt = \frac{P_0}{\mu - a} = \frac{P_0}{\delta}\,, \qquad (6.6)$$

όπου $\mu > 0$ υπενθυμίζεται ότι είναι ο συντελεστής προεξόφλησης, ενώ έχουμε $\delta \triangleq \mu - a$. Την 6.6 την ονομάζουμε «δομική λύση» (fundamental) και όπως θα δούμε οι άλλοι δύο όροι της 6.5 είναι κερδοσκοπικοί και θα τους απαλείψουμε με βάση την οικονομική θεωρία.

Αρχικά, είναι λογικό να θέλουμε $V(0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{T} \ \mathbb{P} - \sigma.\beta.$ Γιατί αν $P_t = 0, \ \mathbb{P} - \sigma.\beta. \forall t \in \mathbb{T}$ τότε είναι λογικό το επενδυτικό σχέδιο ν μην έχει καμία αξία. Όμως με $B_2 < 0$, καθώς η συνάρτηση της τιμής $P(\omega;\cdot)$, σημειακά στο Ω, πηγαίνει (ομοιόμορφα) στο 0 $\forall t \in \mathbb{T}$ η αξία του επενδυτικού σχεδίου εκρήγνυται. Συνεπώς για να αποφύγουμε το πρόβλημα αυτό απαιτούμε αρχικά $B_2 = 0$ και η 6.4 γίνεται: $V(P_t) = B_1 P_t^{b1} + \frac{P_t}{\delta}, t \in \mathbb{T}, \mathbb{P} - \sigma.\beta.$

Τώρα μένει να δειχθεί ότι και ο όρος $B_1 P_t^{b1}$ είναι κερδοσκοπικός. Για να δούμε αυτό πρέπει να πάρουμε την ποσοστιαία απόδοση του όρου αυτού που είναι $dP_t^{b_1}/P_t^{b_1}$ για $g \in \backslash C^{1,2}\big([0, +\infty)\big)$ με $g(x) = x^{b_1}$ εφαρμόζουμε Φόρμουλα του Itō στην $P_t^{b_1}$ και διαιρούμε με $P_t^{b_1}$. Έτσι έχουμε, διαδοχικά και $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$:

$$\frac{dP_t^{b_1}}{P_t^{b_1}} = \frac{1}{P_t^{b_1}}\left[b_1 a + \frac{1}{2} b_1 (b_1 - 1)\sigma^2\right] dt + b_1 \sigma dB_t$$

$$\frac{dP_t^{b_1}}{P_t^{b_1}} = [r + (\mu - r) b_1] dt + b_1 \sigma dB_t$$

το τελευταίο επειδή η b_1 ικανοποιεί την Α.1 από το Παράρτημα Α, και από την 6.3:
άρτημα Α, και:

$$\frac{dP_t^{b_1}}{P_t^{b_1}} = [r + b_1 \varphi \sigma \rho_{Pm}] dt + b_1 \sigma dB_t$$

$$dP_t^{b_1} = [r + b_1 \varphi \sigma \rho_{Pm}] P_t^{b_1} dt + b_1 \sigma P_t^{b_1} dB_t, \qquad (6.7)$$

από όπου βλέπουμε ότι η τυπική απόκλιση του της $P_t^{b_1}$ είναι $b_1 \sigma$, άρα η προσαρμοσμένη στον κίνδυνο απόδοση της $P_t^{b_1}$ είναι

$$\varphi \sigma \left(\frac{dP_t^{b_1}}{P_t^{b_1}}\right) \rho \left(\frac{dP_t^{b_1}}{P_t^{b_1}}, m\right) = \varphi b_1 \sigma \frac{b_1}{b_1} \rho_{Pm} = [r + b_1 \varphi \sigma \rho_{Pm}], \qquad (6.8)$$

Με την τελευταία να δείχνει ότι η προσαρμοσμένη στον κίνδυνο απόδοση της $P_t^{b_1}$ ισούται με την προσδοκώμενη *κεφαλαιακή* απόδοση αυτής, $\frac{dP_t^{b_1}}{P_t^{b_1}}$, χωρίς καμία άλλη απόδοση. Άρα, οι κάτοχοι μίας επένδυσης που τιμολογείται με $P_t^{b_1}$ μπορούν να την διακρατήσουν απλά για να καρπωθούν τα κεφαλαιακά κέρδη κι όχι τις χρηματοροές της ίδιας της επένδυσης, κι αυτό είναι κερδοσκοπία. Στις 6.1 και 6.3 είχαμε απαιτήσει να ισχύει $a < \mu$ ενώ εδώ ισχύουν με ισότητα· κανονικά έπρεπε.

$$\mathbb{E}\left[\frac{dP_t^{b_1}}{P_t^{b_1}}\right] < r + b_1\varphi\sigma\rho_{Pm}$$

Άρα, για να αποφύγουμε τις κερδοσκοπικές φούσκες πρέπει να απαιτήσουμε $B_1 = B_2 = 0$:

$V(P_t) = \frac{P_t}{\delta}, t \in \mathbb{T}, \mathbb{P} - \sigma.\beta.,$ (6.5′) ■

B. Αποτίμηση του υποδείγματος χωρίς Λειτουργικά Κόστη

Για να βρούμε την τιμή V^* πρέπει να εργαστούμε όπως στο κεφάλαιο 5 και να υπολογίσουμε το $F(V_t) \triangleq F\big(V(P_t)\big)$ κάτι που είναι αρκετά πολύπλοκο. Αντί αυτού θα θεωρήσουμε την αξία του δικαιώματος ως: $F(V_t) \triangleq F(P_t)$ και θα εργαστούμε ακριβώς όπως στο κεφάλαιο 5.

Θα θεωρήσουμε ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο $\Phi_t = F(V_t) - F'(V_t)V_t \;\; \mathbb{P} - \sigma.\beta.$ του οποίου την απόδοση, $\frac{dF(V_t) - F'(V_t)dV_t - \delta V_t F'(V_t)dt}{\Phi_t}$, θα εξισώσουμε με αυτήν του αγοραίου ακίνδυνου επιτοκίου rdt. Κατά τα γνωστά, θα εφαρμόσουμε Φόρμουλα του Itō και θα καταλήξουμε σε μία ομογενή διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_t^2 F''(V_t) + (r - \delta)V_t F'(V_t) - rF(V_t) = 0, \qquad (6.9)$$

για την οποία απαιτούμε τις εξής συνθήκες:

$$F(0) = 0 \;\; \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.10)$$

$$F(P^*) = V(P^*) - I = \frac{P^*}{\delta} - I \;\; \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.11)$$

$$F'(P^*) = V'(P^*) \;\; \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.12)$$

και ακολουθώντας το παράρτημα Α, λαμβάνουμε τα εξής, για $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$:

$$F(V_t) = \frac{\left(I\frac{m_1}{m_1 - 1}\right)^{1-m_1}}{m_1}\left(\frac{P^*}{\delta}\right)^{m_1}, \qquad (6.13)$$

με

$$I = \frac{P^*}{\delta}\left(\frac{m_1 - 1}{m_1}\right)$$

$$P^* = I\delta\frac{m_1}{m_1 - 1}, \qquad (6.14)$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1, \qquad (6.15)$$

ή αφού $\delta \triangleq r - a$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}, \qquad (6.15')$$

Τα αποτελέσματα είναι ίδια με αυτά που πήραμε από την παράγραφο 5.Δ με τη διαφορά ότι έχουμε συγκεκριμενοποιήσει την μεταβλητή της αξίας της επένδυσης V_t η οποία περιγράφεται από την 6.5'.

Αντίστοιχα, υπό αυτή την θεώρηση – χωρίς λειτουργικά κόστη – η ευαισθησία της κρίσιμης V^* σε μία μεταβολή του δ είναι ακόμα μεγαλύτερη καθώς αυτός ο όρος υπάρχει πλέον άμεσα στην σχέση 6.14. Επιπλέον, το q του Tobin είναι:

$$q^* = \frac{V^*}{I} = \frac{P^*}{\delta I} = \frac{m_1}{m_1 - 1} \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

το οποίο είναι ταυτόσημο με αυτό της ανάλυσης στην παράγραφο 5.Γ.

Πριν προχωρήσουμε στην γενίκευση όπου θα συμπεριλάβουμε και τα κόστη από την λειτουργία της επένδυσης θα επαναλάβουμε – επιγραμματικά – τα βήματα για την αποτίμηση και με την μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, όταν ο επιχειρηματίας δεν βασίζεται στις αποδόσεις της αγοράς αλλά εξετάζει την επένδυση με την δική του υποκειμενική επιθυμητή επένδυση το επιτόκιο προεξόφλησης ρ. Έτσι, από την 3.6 με συνάρτηση ελέγχου την $u: \mathbb{T} \to \{0,1\}$ για επένδυση (διακοπή αναμονής) ή αναμονή και συνάρτηση (ροής) κέρδους P_t που περιγράφεται στην διαφορική της 6.1. Έχουμε ένα επιχειρηματία που έχει στα χέρια του ένα επενδυτικό σχέδιο με ανέλιξη αξίας $V = \{V_t, t \in \mathbb{T}\}$ σύμφωνα με τον ορισμό 5.1 και $V_t \triangleq V(P_t)$.

Για να θέλει να επενδύσει σε αυτό το σχέδιο ο επιχειρηματίας επιθυμεί απόδοση $\rho V(P_t)dt$ στο τυχόν μικρό διάστημα dt για το οποίο θα *έχει στην κατοχή του* την επένδυση. Από την άλλη, το επενδυτικό αυτό σχέδιο σε διάστημα dt αποφέρει στον κάτοχό του κέρδος $\pi_t dt = P_t dt$ – αφού δεν έχουμε λειτουργικά κόστη – συν την προεξοφλημένη και προσδοκώμενη κεφαλαιακή απόδοση με βάση την μέχρι τώρα πληροφορία:

$$e^{-\rho dt}\mathbb{E}[dV_t | \mathcal{F}_t^V] = e^{-\rho dt}\mathbb{E}_t[dV(P_t) | P_t]$$[11]

Έτσι, για να θέλει ο επιχειρηματίας να επενδύσει πρέπει να έχουμε:

$$\rho V(P_t)dt = P_t dt + (1 - \rho dt)\mathbb{E}_t[dV(P_t) | P_t] \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.16)$$

Εφαρμόζοντας Φόρμουλα του Itō για την $dV(P_t)$ και, κατόπιν, δεδομένου ότι οι προσαυξήσεις $B_{t+dt} - B_t$ της $\mathcal{F}_t^P -$ κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες από την $\mathcal{F}_t^P$ από την 6.16 παίρνουν πάλι την 6.4

[11] $\mathcal{F}_t^V = \mathcal{F}_t^P$ αφού V συνεχής. Επίσης, η V έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα ως σύνθεση Borel συνάρτησης με Μαρκοβιανή σ.α.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 V''(P_t) + \alpha P_t V'(P_t) - \rho V(P_t) + P_t = 0 \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall\, t \in \mathbb{T}, \qquad (6.17)$$

Η λύση του ομογενούς κομματιού είναι $V_{HOM}(P_t) = B_1 P_t^{b1} + B_2 P_t^{b_2}$, σημειακά στο Ω, και θα προσθέσουμε και την ειδική λύση $V_S(P_t) = \psi P_t$ με $\psi \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί την 6.17, οπότε:

$$0 + \alpha P_t \psi - \rho \psi P_t + P_t = 0 \implies \psi = \frac{1}{\rho - \alpha}$$

και άρα η γενική λύση της 6.17 είναι:

$$V(P_t) = B_1 P_t^{b1} + B_2 P_t^{b_2} + \frac{P_t}{\rho - \alpha}, t \in \mathbb{T}, \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.18)$$

με $B_1 > 0$ και $B_2 < 0$ αλλά αποκλείοντας τις κερδοσκοπικές φούσκες (Πρόταση 6.1) μπορούμε πάλι να υπολογίσουμε την αξία της επένδυσης ως:

$$V(P_t) = \frac{P_t}{\rho - \alpha}, t \in \mathbb{T}, \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.19)$$

Με βάση αυτά προχωράμε στην αξιολόγηση του δικαιώματος κατοχής της επενδυτικής ευκαιρίας η αξία του οποίου είναι $F(V_t) \triangleq F(P_t)\ \forall\, t \in \mathbb{T}, \mathbb{P} - \sigma.\beta.$ Για να συμφέρει τον επιχειρηματία η κατοχή αυτού του δικαιώματος πρέπει:

$$\rho F(P_t) dt = (1 - \rho dt)\mathbb{E}_t[dF(P_t)|P_t] \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.20)$$

Οπότε επαναλαμβάνοντας τα γνωστά βήματα παίρνουμε την λύση 6.21 και την κρίσιμη τιμή 6.22 και επιπλέο:

$$F(V_t) = \frac{\left(I \frac{m_1}{m_1 - 1}\right)^{1 - m_1}}{m_1} \left(\frac{P^*}{\rho - \alpha}\right)^{m_1}, \qquad (6.21)$$

με

$$I = \frac{P^*}{\rho - \alpha}\left(\frac{m_1 - 1}{m_1}\right)$$

$$P^* = I(\rho - \alpha)\frac{m_1}{m_1 - 1}, \qquad (6.22)$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1,$$

ή αφού $\delta \triangleq r - a$

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2(\rho - \delta)}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2(\rho - \delta)}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

Τέλος, βλέπουμε ότι για να μας δώσουν οι δύο μέθοδοι ανάλυσης – με δυναμικό προγραμματισμό και αποτίμηση – τα ίδια αποτελέσματα, πρέπει η υποκειμενική επιθυμητή απόδοση του επιχειρηματία να ισούται με το ακίνδυνο επιτόκιο της αγοράς, δηλαδή $\rho = r$.

Γ. Το υπόδειγμα με Λειτουργικά Κόστη

Προχωρώντας τώρα την ανάλυσή μας σε μία επιχείρηση η οποία έχει ροή λειτουργικού κόστους $C > 0$ σταθερή και τα έσοδά της P_t, με $Q = 1$, περιγράφονται από την 6.1. Επίσης, σε περίπτωση που τα έσοδα P_t υποχωρήσουν κάτω από C, τότε χωρίς κανένα κόστος η επιχείρηση τερματίζει την λειτουργία της έως ότου η τιμή επιστρέψει σε επίπεδο μεγαλύτερο από C. Άρα το κέρδος της επιχείρησης είναι:

$$\pi(P_t) \triangleq \max\{P_t - C, 0\}, t \in \mathbb{T}, \qquad (**)$$

Εργαζόμενοι όπως συνήθως θεωρούμε αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο με θετική θέση στην επένδυση $V(P_t)$ και $n = V_P(P_t) \triangleq \frac{\partial V}{\partial P_t}(P_t)$ μονάδες αρνητικής θέσης στο παραγόμενο προϊόν P_t και στιγμιαία ροή κέρδους ίση με $\pi(P_t)$ όπως στην $(**)$. Η ποσοστιαία απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτού στο μικρό διάστημα dt πρέπει να ισούται με rdt, οπότε ακολουθώντας τα ίδια βήματα με προηγουμένως θα βρούμε:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 V''(P_t) + (r - \delta)P_t V'(P_t) - rV(P_t) + \pi(P_t) = 0, t \in \mathbb{T},\ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta. \ (6.23)$$

της οποίας η ομογενής λύση είναι $V_{HOM}(P_t) = B_1 P_t^{b1} + B_2 P_t^{b_2}$. Και διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Για $\pi(P_t) = P_t - C > 0 \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., t \in \mathbb{T}$:

Θα υπάρχει η ειδική λύση $V_S(P_t) \triangleq \psi P_t - kC$ που σημειακά στο Ω θα ικανοποιεί την 6.23. Προχωρώντας, λοιπόν, σε αντικατάσταση βρίσκουμε ότι $\psi = \frac{1}{\delta}$ και $k = \frac{1}{r}$ και προσθέτοντας την ομογενή και την ειδική λύση έχουμε:

$$V(P_t) = B_1 P_t^{b1} + B_2 P_t^{b_2} + \frac{P_t}{\delta} - \frac{C}{r}, t \in \mathbb{T},\ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta. \ (6.24)$$

$b_1 > 0$, $b_2 < 0$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$. Διαισθητικά, στην 6.24 ο όρος $\frac{P_t}{\delta}$ εξηγείται από την σχέση 6.6 – είναι η προεξοφλημένη προσδοκώμενη μελλοντική απόδοση η οποία έχει κίνδυνο – ενώ ο όρος C επειδή είναι σταθερός και χωρίς αβεβαιότητα προεξοφλείται με το ακίνδυνο επιτόκιο r. Ταυτόχρονα, αν η τιμή P_t αυξάνεται κατά μέσο όρο με a τότε η 6.24 εκρήγνυται λόγω του $b_1 > 0$ καθώς η P_t μεγαλώνει παρά τις διακυμάνσεις. Για να εξαλείψουμε αυτή την δυσανάλογη αύξηση, όταν $P_t - C > 0 \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall t \in \mathbb{T}$ πρέπει να θεωρήσουμε $B_1 = 0$. Έτσι, μακροχρόνια $(t \uparrow +\infty)$ η παρούσα αξία της επένδυσης θα είναι $\frac{P_t}{\delta} - \frac{C}{r}$, ενώ για πεπερασμένο χρόνο $V(P_t) = B_2 P_t^{b_2} + \frac{P_t}{\delta} - \frac{C}{r}$, $t \in \mathbb{T}_{P_t - C > 0}$, $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$. Όπου για τυχόν ισχυρισμό Λ, $\mathbb{T}_{\Lambda} \triangleq \{s \in \mathbb{T}: \iota\sigma\chi\upsilon\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma\ \Lambda\ \alpha\lambda\eta\theta\acute{\eta}\varsigma\ \mathbb{P} - \sigma.\beta.\}$. (Dixit & Pindyck, 1994)

❖ Για $\pi(P_t) = P_t - C \leq 0 \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., t \in \mathbb{T}$:

Εδώ, καθώς η σ.α. της τιμής είναι μικρή και μπορεί να μείνει μικρή για ικανό διάστημα οπότε δεν έχουμε καθόλου κερδοφορία, $\pi(P_t) = 0$, άρα $V(P_t) = K_1 P_t^{b1} + K_2 P_t^{b_2}$, $K_1,\ K_2 \in \mathbb{R}$. Επίσης, πρέπει να αποκλείσουμε την περίπτωση η αξία της επένδυσης να κινείται δυσανάλογα με την χαμηλή τιμή. Έτσι, καθώς η τιμή θα μικραίνει ο όρος $K_2 P_t^{b_2}$ θα μεγαλώνει αφού b_2 κάτι που είναι αδύνατο. Έτσι θα θεωρήσουμε $K_2 = 0$ κι επειδή βρισκόμαστε στην περιοχή $P_t - C \leq 0$ η συνάρτηση της αξίας θα είναι: $V(P_t) = K_1 P_t^{b1}$, $t \in \mathbb{T}_{P_t - C<0},\ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta.$

Άρα από τα παραπάνω (Dixit & Pindyck, 1994) έχουμε $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$

$$V(P_t) = \begin{cases} K_1 P_t^{b1}, & P_t - C \leq 0 \\ B_2 P_t^{b_2} + \dfrac{P_t}{\delta} - \dfrac{C}{r}, & P_t - C > 0 \end{cases}, \qquad (6.25)$$

Επιπλέον, λόγω της τυχαιότητας της κίνησης Brown στην τιμή από την 6.25 υπάρχει πιθανότητα να περνάει η $V(P_t)$ από το σύνορο $P_t - C = 0$ οσεσδήποτε φορές κι οποτεδήποτε πράγμα που σημαίνει ότι η υπόθεση της συνέχειάς και της παραγωγισιμότητάς της δεν πληρείται. Οι Karatzas & Shreve (1988: Theorem 4.4.9) αποδεικνύουν ότι πρέπει να είναι συνεχής και συνεχώς παραγωγίσιμη στο $P_t = C$. Για να ισχύει αυτό θα εξισώσουμε τις δύο τιμές και των δύο κλάδων της 6.25 στο $P_t = C$ αλλά και τις πρώτες παραγώγους τους ως προς P_t στο ίδιο σημείο. Οπότε:

$$K_1 C^{b_1} = B_2 C^{b_2} + \frac{C}{\delta} - \frac{C}{r}$$

$$b_1 K_1 C^{b_1 - 1} = b_2 B_2 C^{b_2 - 1} + \frac{1}{\delta}$$

και από την λύση αυτού του συστήματος με αγνώστους τα K_1, B_2 παίρνουμε:

$$K_1 = \frac{C^{1-b_1}}{b_1 - b_2}\left(\frac{b_2}{r} - \frac{b_2 - 1}{\delta}\right), \qquad (6.26)$$

$$B_2 = \frac{C^{1-b_2}}{b_1 - b_2}\left(\frac{b_1}{r} - \frac{b_1 - 1}{\delta}\right), \qquad (6.27)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις 6.26 και 6.27 στην 6.25 και κατόπιν αντικαταστήσουμε στην 6.23 – ξεχωριστά για κάθε κλάδο – θα δούμε ότι αυτή δεν μηδενίζεται για $b_1,\ b_2 = \frac{r}{r-\delta}$. Άρα θα πρέπει να είναι είτε $b_1,\ b_2 < \frac{r}{r-\delta}$ είτε $b_1,\ b_2 > \frac{r}{r-\delta}$. Αρχικά για $r > \delta$ έχουμε:

$$\frac{r}{r - \delta} > b_2 > b_1$$

Ενώ για $r < \delta$ έχουμε:

$$\frac{r}{r-\delta} < b_2 < b_1$$
$$r > b_2 > b_1$$

γιατί $r - \delta < 0$. Οπότε $\frac{r}{r-\delta} > b_2 > b_1$

Δ. Αποτίμηση επενδυτικής ευκαιρίας με Λειτουργικά Κόστη

Για να εκτιμήσουμε την κρίσιμη τιμή P^* εργαζόμαστε όπως συνήθως. Θα θεωρήσουμε ένα δικαίωμα $F(\pi_t) = F(P_t)$, ένα ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο Φ_t και θα καταλήξουμε σε μία ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού, της οποίας η γενικής λύση και οι συνήθεις περιορισμοί είναι:

$$F(P_t) = A_1 P_t^{b1} + A_2 P_t^{b_2} \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \forall t \in \mathbb{T}, \qquad (6.27)$$
$$F(0) = 0, \qquad (6.27a)$$
$$F(P^*) = V(P^*) \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.27\beta)$$
$$F'(P^*) = V'(P^*) \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.27\gamma)$$

με $b^2 < 0,\ b_1 > 0$. Για να ικανοποιεί η 6.27 την $F(0) = 0$ πρέπει $A_2 = 0$. Αρχικά θα ελέγξουμε για $V_t = K_1 P_t^{b1},\ P_t - C \leq 0$ και κατόπιν για $P_t - C > 0$.

- Για $V_t = K_1 P_t^{b1}, P_t - C \leq 0 \ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., t \in \mathbb{T}$:

Για τις 6.24 β και γ και από την 6.27 έχουμε:

$$A_1 P^{*b_1} = K_1 P^{*b_1} - I \Rightarrow P^{*b_1} = \frac{I}{K_1 - A_1}$$
$$b_1 A_1 P^{*b_1 - 1} = b_1 K_1 P^{*b_1 - 1} \Rightarrow K_1 = A_1$$

που είναι αδύνατο και άρα για $P_t - C \leq 0$ δεν υπάρχει λύση που να ικανοποιεί τις 6.24(β, γ). Διαισθητικά, αν η τιμή είναι κάτω από το κόστος τότε ο επενδυτής δεν έχει κίνητρο να εξασκήσει το δικαίωμα – δεν θα αναλάβει ένα κόστος επένδυσης I για να κρατήσει την παραγωγική μονάδα ανενεργή έως ότου ανακάμψει η τιμή. Άρα για $V_t = K_1 P_t^{b1}$ δεν έχουμε λύση.

- Για $V_t = B_2 P_t^{b_2} + \frac{P_t}{\delta} - \frac{C}{r},\ P_t - C > 0,\ \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., t \in \mathbb{T}$:

$$A_1 P^{*b_1} = B_2 P^{*b_2} + \frac{P^*}{\delta} - \frac{C}{r} - I, \qquad (6.28a)$$
$$b_1 A_1 P^{*b_1 - 1} = b_1 B_2 P^{*b_2 - 1} + \frac{1^*}{\delta}, \qquad (6.28\beta)$$

τις οποίες αν τις απλοποιήσουμε λαμβάνουμε την:

$$(b_1 - b_2) B_2 P^{*b_2} + \frac{(b_1 - 1)P^*}{\delta} - b_1\left(\frac{C}{r} + I\right) = 0, \qquad (6.29)$$

όπου (από Παράρτημα Α):

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \\ b_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \end{cases}, \qquad (6.30)$$

$$A_1 = \frac{P^* - I}{P^{*b_1}}$$

$a \triangleq r - \delta$ και το πολυώνυμο (6.9) για συγκεκριμένα $\delta,\ \sigma,\ r,\ C,\ I$ λύνεται εύκολα αριθμητικά (για παράδειγμα με την εντολή `NSolve[]` ή με την `FindRoot[]` στη Mathematica) . Το αποτέλεσμα που παραμένει ίδιο όπως και στα προηγούμενα είναι ότι η αύξηση της τυπικής απόκλισης σ αυξάνει την κρίσιμη τιμή P^*. Όμως σε αυτό το υπόδειγμα, καθώς αυξάνεται το δ αυξάνεται η κρίσιμη P^*, αλλά η αξία της επένδυσης $V[P^*]$ μειώνεται

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι καθώς αυξάνει η πολυπλοκότητα των υποδειγμάτων η επίλυση τους επιτυγχάνεται μόνο αριθμητικές μεθόδους καθώς δεν υπάρχουν άλλες συνθήκες να απαιτήσουμε βάσει της οικονομικής θεωρίας. Το ίδιο συμβαίνει κι αν απομακρυνθούμε από την γεωμετρική κίνηση Brown την οποία ακολουθεί η σ.α. της τιμής σε αυτό το κεφάλαιο. (Dixit & Pindyck, 1994)

Ε. Επενδυτικό σχέδιο με μεταβλητό κόστος

Μέχρι τώρα, εξετάσαμε την επενδυτική επιλογή του επιχειρηματία σε κάποιο σχήμα παραγωγής αγαθών ή υπηρεσιών, αρχικά χωρίς κόστος – δηλαδή, η τιμή ήταν το κέρδος, με ποσότητα $Q = 1$ – και, κατόπιν, με σταθερό κόστος και με δυνατότητα να παύσει η παραγωγική διαδικασία όταν γινόταν ασύμφορη. Στη μεν πρώτη απλούστερη περίπτωση, τα αποτελέσματα μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, στην μεν δεύτερη αυξήθηκε η πολυπλοκότητα και χρειάζεται η αριθμητική επίλυση.

Αντίθετα με το προηγούμενο, στο κομμάτι αυτό δεν θα θεωρούμε, πλέον, ως συνάρτηση ελέγχου u_t την δυωνυμική με πεδίο τιμών το $\{0,1\}$, αλλά ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^k$ το οποίο θα αντιπροσωπεύει τις εισροές της επιχείρησης, άρα $u: [0, +\infty) \supset \mathbb{T} \to \mathbb{R}^k$. Ταυτόχρονα θα έχουμε μία συνάρτηση κόστους των εισροών αυτών και μία συνάρτηση παραγωγής που ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 6.2: Για $k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε ως συνάρτηση παραγωγής την $h: \mathbb{R}^k - \mathbb{R}$, με $h(0_{\mathbb{R}^k}) = 0$ για την οποία ισχύουν τα εξής, για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{T}$:

i. Έστω $u_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt}) \in \mathbb{R}^k, t \in \mathbb{T}$. Τότε $h_i(u_t) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_{it}} h(u_t) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$

ii. $\quad h_{ii}\frac{\partial^2}{(\partial x_{it})^2}h(u_t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k$

Ορισμός 6.3: Για $k \in \mathbb{N}$, θα ορίσουμε ως συνάρτηση κόστους την $c: \mathbb{R}^k - \mathbb{R}$, με $h(0_{\mathbb{R}^k}) \geq 0$ και για την οποία, για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{T}$, ισχύουν τα εξής:

i. Έστω $u_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt}) \in \mathbb{R}^k, t \in \mathbb{T}$. Τότε $c_i(u_t) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_{it}}c(u_t) < 0$, $i = 1, 2, \dots, k$

ii. Αν είναι γραμμική, τότε θα υπάρχει διάνυσμα αμοιβών $w = (w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{R}^k$ και η συνάρτηση κόστους θα γράφεται: $c(u_t) = wu_t'$, όπου u_t' ο ανάστροφος του διανύσματος εισροών.

Οπότε, πλέον μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση κέρδους:

$$\pi(P_t) = \max_{u_t}[P_t h(u_t) - c(u_t)], \qquad (6.31)$$

Όπου εξίσωση κίνησης της $\{P_t, t \in \mathbb{T}\}$ δίνεται από την 2.1 την οποία επαναλαμβάνουμε χάριν ευκολίας:

$$dP_t = aP_t dt + \sigma P_t dB_t, P_0, \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.1)$$

$t \in \mathbb{T}$, a, $\sigma \in \mathbb{R}$, με διύλιση $\mathbb{F}^P \triangleq \{\mathcal{F}_t^P, t \in \mathbb{T}\}$ παραγόμενη από την $\{P_t, t \in \mathbb{T}\}$ και με τις συνήθεις ιδιότητες.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για $u: [0, +\infty) \supset \mathbb{T} \rightarrow \{0,1\}$, $h(u_t) \triangleq u_t, t \in \mathbb{T}$, και

$$C(u_t) = \begin{cases} C, & u_t = 1 \\ 0, & u_t = 0 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{T}$$

η 6.31 γίνεται $\pi(P_t) = \max_{u_t}[P_t - C, 0]$ όπως στις παραγράφους 5.Γ και 5.Δ.

Υποθέτουμε συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas της μορφής:

$$h(u_t) = \prod_{i=1}^{k} x_{ti}^{\theta_i}$$

$t \in \mathbb{T}$, με $\theta_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, k$, τ.ω. $\Theta \triangleq \left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i\right) < 1$ και συνάρτηση κόστους γραμμική: $c(u_t) = wu_t'$. Οπότε το κέρδος θα ισούται με:

$$\pi(P_t) = \max_{u_t}\left[P_t \prod_{i=1}^{k} x_{ti}^{\theta_i} - wu_t'\right] = \max_{u_t}\left[\underbrace{P_t \prod_{i=1}^{k} x_{ti}^{\theta_i} - \sum_{i=1}^{k} w_i x_i}_{\triangleq G(u_t, w, P_t)}\right] \ \mathbb{P} - \sigma.\beta, \qquad (6.32)$$

οι συνθήκες πρώτης τάξης, σημειακά στο Ω, για μεγιστοποίηση είναι $\nabla[G(u_t, w, P_t)] = 0_{\mathbb{R}^K}, t \in \mathbb{T}$ ή $\forall i = 1, \dots, k$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}G(u_t, w, P_t) = P_t \theta_i x_{it}^{\theta_i - 1} - w_i = 0 \Leftrightarrow x_{it}^* = \left(\frac{P_t \theta_i}{w_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta_i}}, t \in \mathbb{T}$$

και η συνθήκη δεύτερης τάξης, επίσης, σημειακά στο Ω, $\forall i = 1, \dots, k$:

$$\frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} G(u_t, w, P_t) = P_t(\theta_i - 1)\theta_i x_i^{\theta_i - 1} < 0$$

που σημαίνει ότι στα $u_t^* = (x_{1t}^*, \dots, x_{kt}^*)$ έχουμε μεγιστοποίηση της $G(u_t, w, P_t)$, $t \in \mathbb{T}$, $\omega \in \Omega$. Άρα, για την συνάρτηση κέρδους, αντικαθιστώντας από τα παραπάνω στην 6.32 για τυχόντα $t \in \mathbb{T}$, $\omega \in \Omega$ έχουμε:

$$\pi(P_t) = P_t \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{P_t \theta_i}{w_i}\right)^{\frac{\theta_i}{1-\theta_i}} - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{P_t \theta_i}{w_i^{\theta_i}}\right)^{\frac{1}{1-\theta_i}}$$

Από όπου για λόγους ευκολίας θα θεωρήσουμε $k = 1$ και άρα για $t \in \mathbb{T}$, $\omega \in \Omega$ έχουμε:

$$\pi(P_t) = P_t \left(\frac{P_t \theta}{c}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} - \left(\frac{P_t \theta}{c}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} = P_t^{\frac{1}{1-\theta}} \left(\left(\frac{\theta}{c}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} - \left(\frac{P_t \theta}{c}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right) = P_t^{\gamma} K, \qquad (6.33)$$

όπου $\gamma \triangleq \frac{1}{1-\theta} > 1$, $K \triangleq \left(\left(\frac{\theta}{c}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} - \left(\frac{P_t \theta}{c}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right)$. Με $\gamma > 1$ η συνάρτηση (σ.α.) του κέρδους είναι κυρτή· όπως θα δούμε αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις όταν στην ανάλυσή μας εξετάσουμε και τον κίνδυνο.

Κατά τα γνωστά, λοιπόν, από την 6.23, με συνάρτηση κέρδους την 6.33, και για $V(P_t)$ την προς αναζήτηση συνάρτηση αξίας της επένδυσης έχουμε μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 V''(P_t) + (r - \delta)P_t V'(P_t) - rV(P_t) + P_t^{\gamma} K = 0, t \in \mathbb{T}, \ \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (6.34)$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε λύση $V_S(P_t) = \psi K P_t^{\gamma}$ παίρνουμε – σε κάποιο $\omega \in \Omega$ – την:

$$V(P_t) = \frac{K P_t^{\gamma}}{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 \gamma(\gamma - 1) - \gamma(r - \delta) + r\right]}, t \in \mathbb{T}, \qquad (6.35)$$

Για να δούμε τι σημαίνει η σχέση 6.35 θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.4: Η στοχαστική ανέλιξη 6.35 είναι ουδέτερη κινδύνου παρούσα αξία της κερδοφορίας $\pi(P_t) = P_t^{\gamma} K$ στο διηνεκές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε αρχικά συνάρτηση $g \in C^{1,2}\big((0, +\infty)\big)$, $g(x) = x^{\gamma}$, $\gamma > 1$. Εφαρμόζουμε την Φόρμουλα του Itō στην P_t όπως δίνεται από την 6.1 και υπολογίζουμε την $K P_t^{\gamma}$ η οποία σε ολοκληρωτική μορφή είναι:

$$P_t^\gamma = P_0^\gamma + \int_0^t P_s^\gamma \left(\gamma a + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)\right) ds + \int_0^t \sigma P_s^\gamma dB_s \quad \mathbb{P}-\sigma.\beta., \qquad (6.36)$$

και την προεξοφλούμε με $\beta^{-1}(t) = 1 + \int_0^t -re^{-rs}ds + \int_0^t 0dB_s$, τότε επίσης από Φόρμουλα του Itō (*πολλαπλασιασμός Itō*) έχουμε $\mathbb{P}-\sigma.\beta.$:

$$e^{-rt}P_t^\gamma = P_0^\gamma + \int_0^t \left(e^{-rs}P_s^\gamma\left(\gamma a + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) - r\right)\right) ds + \int_0^t e^{-rs}\sigma P_s^\gamma dB_s$$

Τώρα, ορίζουμε $\theta \triangleq \frac{\gamma a + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) - r}{\sigma}$ και την διαδικασία:

$$H_t \triangleq \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 t - \theta B_t\right) \quad \mathbb{P}-\sigma.\beta.$$

η οποία είναι $(\mathcal{F}_t^P, \mathbb{P})$ $-$martingale. Ορίζουμε, μέτρο $\mathbb{Q}$ ως εξής:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A H_T \, d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{F}_T^P$$

το οποίο είναι ισοδύναμο το αρχικού $\mathbb{P}$ (Σπηλιώτης, 2004). Πλέον, από Σπηλιώτη (2004: Κεφ. IV, Πόρισμα, σελ. 236) έχουμε ότι η $\{e^{-rt}P_t^\gamma, t \in \mathbb{T}\}$ είναι $(\mathcal{F}_t^P, \mathbb{Q})$ $-$ martingale και το μέτρο $\mathbb{Q}$ είναι *ουδέτερο κινδύνου*. Επομένως, η προσδοκώμενη – μέση τιμή υπό του μέτρου $\mathbb{Q}$, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ – απόδοση της $\{e^{-rt}P_t^\gamma, t \in \mathbb{T}\}$ μας δίνει την ουδέτερη κινδύνου απόδοση. Έτσι κατά τα γνωστά:

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[d\left(e^{-rt}P_t^\gamma\right)\right] = \left(e^{-rt}P_t^\gamma\left(\gamma a + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) - r\right)\right) dt$$

$$\frac{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[d\left(e^{-rt}P_t^\gamma\right)\right]}{e^{-rt}P_t^\gamma} = \left[\underbrace{\gamma a + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) - r}_{\triangleq \delta'}\right] dt, \qquad t \in \mathbb{T}$$

Κι αν τώρα προεξοφλήσουμε, σε άπειρο ορίζοντα, με

$$e^{-\delta' t} \equiv \exp\left\{\left(-\gamma a - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) + r\right)t\right\}$$

έχουμε, για τις καθαρές παρούσες αξίες την χρονική στιγμή $t = 0$ και με άπειρο ορίζοντα:

$$e^{-\delta' t}\int_t^{+\infty} KP_t^\gamma e^{-\delta'(s-t)} ds = \frac{KP_0^\gamma}{\delta'}$$

$$\int_t^{+\infty} KP_t^\gamma e^{-\delta'(s-t)} ds = \frac{Ke^{-r0}P_0^\gamma e^{-\delta' t}}{\delta'}, \qquad (6.37)$$

και επειδή η $\{e^{-rt}P_t^{\gamma}, t \in \mathbb{T}\}$ είναι $(\mathcal{F}_t^P, \mathbb{Q}) -$ martingale έχουμε και $\frac{Ke^{-r0}P_0^{\gamma}e^{-\delta' t}}{\delta'} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{KP_t^{\gamma}}{\delta'}\right]$.

Αλλά, το αριστερό μέλος της 6.37 είναι η παρούσα αξία της κερδοφορίας, στο διηνεκές, την χρονική στιγμή t. Οπότε η 6.35 είναι η παρούσα αξία της κερδοφορίας σε άπειρο ορίζοντα σε όρους της χρονικής στιγμής t. ■

Οπότε, πλέον, εργαζόμαστε κατά τα γνωστά. Θα θεωρήσουμε ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο $\Phi_t = F(P_t) - F'(P_t)P_t$ $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$ του οποίου την απόδοση, $\frac{dF(P_t) - F'(P_t)dP_t - \delta P_t F'(P_t)dt}{\Phi_t}$, θα εξισώσουμε με αυτήν του αγοραίου ακίνδυνου επιτοκίου rdt. Κατά τα γνωστά, θα εφαρμόσουμε Φόρμουλα του Itō και θα καταλήξουμε σε μία ομογενή διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 F''(P_t) + (r - \delta)P_t F'(P_t) - rF(P_t) = 0, \mathbb{P} - \sigma.\beta. (6.38)$$

για την οποία απαιτούμε τις εξής συνθήκες $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$:

$$\begin{cases} F(0) = 0, \qquad (6.38a) \\ F(P^*) = V(P^*) - I = \dfrac{KP^{*\gamma}}{\delta'} - I, \qquad (6.38\beta) \\ F'(P^*) = V'(P^*) = \dfrac{\gamma K P^{*\gamma-1}}{\delta'}, \qquad (6.38\gamma) \end{cases}$$

Τελικά, όπως βρήκαμε και στο Παράρτημα Α, η 6.38 έχει λύση $F(P_t) = A_1 P_t^{b_1}$, $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$ και η κρίσιμη τιμή είναι:

$$P^* = \left(\frac{\delta' b_1 I}{K(b_1 - \gamma)}\right)^{\gamma}, \qquad (6.39)$$

Στη σχέση 6.39 και με βάση τις υποθέσεις που έχουμε κάνει – τις απαιτήσεις που έχουμε διατυπώσει – ισχύει ότι $b_1 > 1 > \gamma > 0$ οπότε η 6.39 έχει νόημα. Επιπλέον, έχουμε βρει ότι η αύξηση της τυπικής απόκλισης – δηλαδή, του κινδύνου – σ μειώνει την b_1, αλλά λόγω της:

$$\frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{b_1}{b_1 - \gamma}\right) = \frac{(b_1 - \gamma) - b_1}{(b_1 - \gamma)^2} < 0$$

αυξάνεται ο όρος $\frac{b_1}{b_1 - \gamma}$. Τα I, K, γ τα έχουμε θεωρήσει εξωγενή οπότε μένει να δούμε την ανταπόκριση του δ' στον κίνδυνο και, τελικά και της κρίσιμης τιμής. Έχουμε ορίσει $\delta' \triangleq \gamma a + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) - r$, οπότε η αύξηση του σ μειώνει το δ'. Τελικά, η κρίσιμη τιμή μειώνεται ως αποτέλεσμα της αύξησης του κινδύνου που σημαίνει ότι η επένδυση είναι ενισχύεται!

Αυτό οφείλεται αποτέλεσμα της ανισότητας Jensen. Δηλαδή, αφού $\pi(P_t)$ κυρτή, τότε:

$$\pi(\mathbb{E}[P_t]) = K\mathbb{E}[P_t]^\gamma \leq \mathbb{E}[\pi(P_t)] = K\mathbb{E}[P_t^\gamma]$$

κι αυτό φαίνεται κι από την 6.36 η οποία στο ολοκλήρωμα προς ds έχει έναν επιπλέον όρο: $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)$. (Dixit & Pindyck, 1994)

Κλείνοντας αυτή την ανάλυση, θα ήθελα να σταθώ λίγο στην αρχική υπόθεση του ενός μόνο παραγωγικού συντελεστή. Αν και μπορεί να φαίνεται αυθαίρετο, για την οικονομική θεωρία στη βραχυχρόνια περίοδο δεν μπορούν να μεταβληθούν όλοι οι παραγωγικοί συντελεστές. Οπότε υποθέτοντας ότι σε ένα διάστημα ενός εξαμήνου ή ενός έτους ο επιχειρηματίας μπορεί να μεταβάλλει μόνο ένα συντελεστή τότε οι αρχικές συναρτήσεις παραγωγής και κόστους γίνονται αντίστοιχα:

$$h(x_{t1}) = x_{t1}^{\theta_1}\prod_{i=2}^{k} x_{ti}^{\theta_i} = x_{t1}^{\theta_1}A$$

$$c(x_{t1}) = w_1 x_{t_1} + c$$

όπου $c,\ A > 0$. Η συνθήκη μεγιστοποίησης α’ τάξης της συνάρτησης κέρδους: $\pi(P_t) = P_t x_{t1}^{\theta_1}A - w_1 x_{t_1} - c$, μας επιστρέφει βέλτιστο $x_{t1}^* = \left(\frac{AP_t\theta_1}{w_1}\right)^{\frac{1}{1-\theta_1}}$ ο οποίο είναι παρόμοιο με το παραπάνω – η σταθερά A θα ενσωματωθεί στην συνάρτηση κέρδους, ως εξής:

$$\pi(P_t) = P_t^\gamma \bar{K} - c$$

με $\bar{K} \triangleq KA^\gamma$, οπότε και γίνεται μετά δύσκολη η επίλυση της Euler- Cauchy για την $V(P_t)$ λόγω της σταθεράς στην συνάρτηση κέρδους. Το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι στην περίπτωση που εξετάζεται μια επένδυση που χρειάζεται αύξηση μόνο ενός παραγωγικού συντελεστή (παραδείγματος χάρη πρόσληψη επιπλέον εργαζομένων) και στον βαθμό που αυτό είναι εφικτό (για παράδειγμα υπάρχουν διαθέσιμα γραφεία για να εργαστεί το επιπλέον προσωπικό) τότε οι όροι A και c εξαλείφονται. Αυτό γιατί αφορούν κόστη από την μέχρι τώρα λειτουργία της επιχείρησης και δεν απορρέουν καθόλου από εξεταζόμενη επένδυση. Τελικά, η απλούστευση του παρόντος κομματιού δεν ήταν τόσο παράλογο!

Ανακεφαλαιώνοντας, είδαμε πως διαμορφώνεται η απόφαση για την επένδυση σε επίπεδο επιχείρησης όταν υπάρχει αβεβαιότητα. Η αρχική προσέγγιση ήταν χωρίς να υπολογιστεί το λειτουργικό κόστος μιας επιχείρησης ως απόρροια της επένδυσής της. Κατόπιν προσθέσαμε και έναν όρο σταθερού κόστους και στην συνέχεια ένα κόστος μεταβλητό, αλλά μη στοχαστικό. Σε όλες τις περιπτώσεις βρήκαμε την τιμή P^* πάνω από την οποία πρέπει να φτάσει η τιμή του αγαθού (ή της υπηρεσίας) που θα παραχθεί με την υπό εξέταση επένδυση.

7. Αβεβαιότητα και Επένδυση σε Κλαδικό επίπεδο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε την ισορροπία σε κλαδικό επίπεδο υπό το καθεστώς της αβεβαιότητας τόσο σε επίπεδο κλάδου όσο και σε κάθε επιχείρηση. Η ανάλυση αυτού του κεφαλαίου θα βασιστεί εξ' ολοκλήρου στο υπόδειγμα των Caballero & Pindyck (1996) εκτός κι αν αναφερθεί ρητά κάτι διαφορετικό.

Θεωρούμε μία πλήρως ανταγωνιστική αγορά με πάρα πολύ μεγάλο αριθμό επιχειρήσεων, όλες ταυτόσημες μεταξύ τους και με ελεύθερη είσοδο νέων επιχειρήσεων – αλλά με θετικό εφάπαξ κόστος εγκατάστασης. Η αύξηση των επιχειρήσεων του κλάδου συμβαίνει με δύο τρόπους: νέες επιχειρήσεις ξεκίνησαν να δραστηριοποιούνται ή οι ήδη υπάρχουσες επένδυσαν σε αύξηση της παραγωγής τους ή και τα δύο. Αν και οι επιχειρήσεις είναι ίδιες η παραγωγικότητα της κάθε μίας ξεχωριστά διαταράσσεται με τυχαίο τρόπο και οι διαταραχές στην παραγωγή δεν είναι ίδιες για όλες τις επιχειρήσεις.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι κάθε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{T}$ ο συνολικός αριθμός των επιχειρήσεων του κλάδου είναι $N(t)$ και εφ' όσον κάθε μία από αυτές είναι αρκετά μικρή και το πλήθος τους αρκετά μεγάλο θα υποθέσουμε ότι εκτείνονται σε ένα συνεχές· στο διάστημα $\mathbb{V} \triangleq [0, N(t)] \subset \mathbb{R}^+$. Θα θεωρήσουμε την συνεχή σ.α. $a_i(t)$, $t \in \mathbb{T}$, η οποία εκφράζει την σχετική παραγωγικότητα της επιχείρησης, $a_i: \Omega_i \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$. Θεωρούμε, επίσης, $A \in C^1(\mathbb{T})$, $A: \mathbb{T} \to [0, M] \subset \mathbb{R}$ που εκφράζει την μέση παραγωγικότητα του κλάδου έ.ω. $Q(t) = A(t)N(t)$ το προϊόν του κλάδου· και φραγμένη και συνεχή $A_i(t) > 0, \forall t \in \mathbb{T}$, $\forall i \in \mathbb{V}$ ως την απόλυτη παραγωγικότητα της επιχείρησης. Έτσι η σχετική παραγωγικότητα κάθε επιχείρησης είναι $A(t)a_i(t) = A_i(t)$, $i \in \mathbb{V}$, $t \in \mathbb{T}$ και ισχύει:

$$Q(t) = \int_0^{N(t)} A_i(t)di\,, \qquad \int_0^{N(t)} a_i(t)di = 1\,, \qquad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{V}$$

Με βάση αυτά, οι στοχαστικές διαταραχές στα $a_i(t)$ και $A(t)$, αντικατοπτρίζουν την τυχαιότητα σε επίπεδο επιχείρησης και σε επίπεδο κλάδου, αντίστοιχα, $\forall i \in \mathbb{V}$. Επιπλέον, θεωρούμε ισοελαστική συνάρτηση ζήτησης για όλο τον κλάδο, δηλαδή ενιαία ανταγωνιστική τιμή, ως εξής:

$$P(t) \triangleq M(t)Q(t)^{-\frac{1}{\eta}}, \qquad (7.1)$$

όπου $M: \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ στοχαστική διαδικασία που περιλαμβάνει (εξωγενείς) διαταραχές της ζήτησης του προϊόντος του κλάδου στον χ.π $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ενώ .

Καθώς ο κλάδος και δέχεται νέες επιχειρήσεις αλλά και κάποιες άλλες αναγκάζονται να κλείσουν, το τελευταίο υποθέτουμε ότι συμβαίνει με εξωγενή ρυθμό γ. Οπότε, για κάθε επιχείρηση ξεχωριστά η πιθανότητα να κλείσει μέσα σε ένα μελλοντικό χρονικό διάστημα ακολουθεί μία διαδικασία Poisson (εκθετική κατανομή) με παράμετρο γ. Θα θεωρήσουμε ότι και οι δύο παράγοντες τυχαιότητας της επιχείρησης (Poisson και $a_i(t)$) περιλαμβάνονται σε ένα χ.π. $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ με $\mathbb{P}_i$ το από κοινού μέτρο πιθανότητας των δύο κατανομών οι οποίες είναι και ανεξάρτητες μεταξύ τους καθώς υποθέτουμε ότι οι διαταραχές στην παραγωγικότητα δεν εξαρτώνται από την κατανομή της πιθανότητας να σταματήσει την λειτουργία της η επιχείρηση.

Για να περιορίσουμε την είσοδο νέων επιχειρήσεων υποθέτουμε ότι το σταθερό κόστος εγκατάστασης είναι I και ικανοποιεί την εξής ανισότητα:

$$I \geq \mathbb{E}_i\left[\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} P(t)A_i(t)e^{-\rho t}dt\right]\right], \quad i \in \mathbb{v}, \qquad (7.2)$$

όπου εφεξής θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{E}_i$ για την μέση τιμή που ολοκληρώνει στον χ.π. $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ και $\mathbb{E}$ την μέση τιμή που ολοκληρώνει στον χ.π $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Οι $P(t)$ και $A_i(t)$ είναι στοχαστικές ανελίξεις ως σύνθεση Borel με σ.α. και επίσης είναι φραγμένες, οπότε το ολοκλήρωμα είναι φραγμένοι και, άρα, οι μέσες τιμές $\mathbb{E}_i$ και $\mathbb{E}$ έχουν νόημα. Η 7.2 ουσιαστικά εκφράζει ότι όταν θα εισέρχονται επιχειρήσεις στον κλάδο θα πρέπει τα προσδοκώμενα έσοδα, λόγω της αθροιστικής αλλά και επιχειρησιακής αβεβαιότητας, να είναι τουλάχιστον ίσα με το κόστος εγκατάστασης της επιχείρησης – δηλαδή η 7.2 να ισχύει με ισότητα.

Οι όροι μέσα στο ολοκήρωμα είναι συνεχείς και φραγμένοι αρα και ολοκληρώσιμοι, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Fubini και αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης στην 7.2 και έχουμε διαδοχικά:

$$I \geq \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} P(t)\mathbb{E}_i[A_i(t)]e^{-\rho t}dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} P(t)A(t)e^{-\gamma t}e^{-\rho t}dt\right], \qquad (7.3)$$

Θα ορίσουμε τη μέση αξία της παραγωγής $B(t) \triangleq P(t)A(t)$ και από την 7.1 και την $Q(t) = A(t)N(t)$, έχουμε $\mathbb{P} - \sigma.\beta.$:

$$B(t) = M(t)A(t)^{\frac{\eta-1}{\eta}}N(t)^{-\frac{1}{\eta}} \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (7.4)$$

και αφού όλα τα ορίσματα της $B(t)$ τα έχουμε απαιτήσει να είναι θετικά και μπορούμε να πάρουμε λογαρίθμους για να μετατρέψουμε την 7.4 σε γραμμική. Τους λογαρίθμους των ορισμάτων στην 7.4 θα τους συμβολίζουμε με πεζά, για παράδειγμα $\log(B_t) = \log b_t$. Οπότε έχουμε:

$$b_t = m_t + \frac{\eta - 1}{\eta}a_t - -\frac{1}{\eta}n_t \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

την οποία, αν την αδιαφορήσουμε με $db_t \triangleq b_{t+dt} - b_t$, έχουμε:

$$db_t = dm_t + \frac{\eta - 1}{\eta} da_t - \frac{1}{\eta} dn_t \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (7.5)$$

και οι εξισώσεις κίνησης των m_t, a_t είναι:

$$dm_t = \left(a_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2\right) dt + \sigma_m dB_t^1 \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (7.6a)$$

$$da_t = \left(a_a - \frac{1}{2}\sigma_a^2\right) dt + \sigma_a dB_t^2 \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (7.6b)$$

όπου B_t^1 και B_t^2 τυπικές και μονοδιάστατες κινήσεις Brown ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης, θα συμβολίσουμε ως $\mathbb{F}^1$ και $\mathbb{F}^2$ τις διυλίσεις που παράγονται από τις B_t^1 και B_t^2 αντίστοιχα. Ενώ, επίσης έχουμε υποθέσει κι ότι $dn_t = -\gamma dt$. Για να προσθέσουμε τις 7.6α και 7.6b στην 7.5, θα εφαρμόσουμε Φόρμουλα του Itō με την $f(x, y) \triangleq x + y$ έτσι ώστε να πάρουμε το άθροισμα $m_t + \frac{\eta-1}{\eta} a_t$ και να έχουμε μία μονοδιάστατη κίνηση Brown. Έτσι:

$$db_t = \beta d_t + \sigma_b dB_t \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta., \qquad (7.7)$$

όπου

$$\beta = a_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2 + \frac{\gamma + (\eta - 1)a_a}{\eta} - \frac{(\eta - 1)\sigma_a^2}{2\eta}, \qquad \sigma_b = \sqrt{\sigma_m^2 + \left(\frac{\eta - 1}{\eta}\right)^2 \sigma_a^2}, \qquad (7.8)$$

Ο υπολογισμός εδώ της κρίσιμης τιμής είναι αρκετά πολύπλοκος καθώς εμφανίζεται ένας εκθετικός όρο όταν πάμε να υπολογίζουμε την αξία $V(b_t)$ κι όταν προχωρήσουμε να εκτιμήσουμε το χαρτοφυλάκιο με το $F(b_t)$ ο υπολογισμός τους χρειάζεται αριθμητικές μεθόδους. Οι Caballero & Pindyck (1996), ακολουθούν μία σειρά από αρχικές συνθήκες τις οποίες θα δούμε ώστε να υπολογίσουν την κρίσιμη τιμή. Φαίνεται, λοιπόν, ότι και σε λίγο πιο πολύπλοκα προβλήματα, η εκτίμηση της κρίσιμης τιμής χωρίς την επιβολή συνθηκών βασισμένων στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι πολύ δύσκολη έως αδύνατη να γίνει αναλυτικά. Δεν θα αναφέρουμε τα βήματα επίλυσης γιατί ξεφεύγουν από το πλαίσιο των πραγματικών δικαιωμάτων, αλλά δώσουμε λίγη προσοχή στις συνθήκες και το τελικό αποτέλεσμα όπως διατυπώθηκαν στους Caballero & Pindyck (1996).

Ας ξεκινήσουμε με την βασική συνθήκη: ότι χωρίς προσδοκώμενα έσοδα η αξία της επένδυσης μηδενίζεται, έτσι $V(0)$. Επιπλέον, καθώς η τιμή, και τα έσοδα, αυξηθούν πάνω από το κόστος I δημιουργούνται κέρδη κι αυτά προσελκύουν ακόμα περισσότερες επιχειρήσεις, έως ότου η ζήτηση αυξηθεί τόσο ώστε να αρχίσει η τιμή να μειώνεται, άρα υπάρχει ένα ανώτατο όριο που μπορεί να φτάσει – θα ονομάζουμε $u = \log U$. Καθώς λοιπόν εκεί παρουσιάζει ένα μέγιστο η καμπύλη της αξίας της επένδυσης είναι λογικό να περιμένουμε η παράγωγος της εκεί να είναι 0, έτσι $V'(u) = 0$. Επιπλέον, θα θεωρήσουμε ότι στο ανώτατο σημείο ισχύει $V(u) = I$ – κι αυτό είναι το κριτήριο ελεύθερης εισόδου.

Ουσιαστικά το σημείο στο οποίο ξεκινούν νέες επενδύσεις κι ο κλάδος διευρύνεται αυτό είναι και το άνω φράγμα της ανέλιξης της τιμής. Διαισθητικά, μόλις δοθεί η ευκαιρία για είσοδο νέων επιχειρήσεων (η επέκταση των ήδη υπαρχόντων) η προσφορά θα αυξηθεί κι οποιαδήποτε μεγαλύτερη αύξηση θα συγκρατηθεί ενώ η τιμή θα υποχωρήσει πάλι κάτω από το βέλτιστο σημείο. Οι Caballero & Pindyck (1996) υπολόγισαν το ανώτατο σημείο ως εξής:

$$\frac{U}{I} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\left(\rho + \gamma - \beta - \frac{1}{2}\sigma_b^2\right), \qquad (7.9)$$

με

$$\lambda = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 2(\gamma + \rho)\sigma_b^2}}{\sigma_m^2} > 0, \qquad (7.10)$$

Από τα παραπάνω, αξίζει προσοχής ότι $\frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial \sigma_b^2} > 0$, δηλαδή η επένδυση ή η επέκταση του κλάδου μειώνεται ως αποτέλεσμα της αύξησης της κλαδικής μεταβλητότητας – ταυτόχρονα, όμως, το επίπεδο $\frac{U}{I}$ δεν εξαρτάται απευθείας από τον κίνδυνο που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις. Επιπλέον, $\frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial \eta} > 0$ κι αυτό μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι μια αύξηση στην ελαστικότητα σημαίνει ότι καθώς κάποιες επιχειρήσεις σταματούν την λειτουργία τους αυτό δεν θα έχει μεγάλη επίδραση στην τιμή – η μείωση της προσφοράς απορροφάται περισσότερο από την μείωση της ποσότητας παρά από αύξηση της τιμής. Έτσι, για τους υποψήφιους επιχειρηματίες που προεξοφλούν, η παρούσα αξία των εσόδων δεν μειώνεται με αποτέλεσμα να αυξάνεται ο κρίσιμο σημείο. Για τον ίδιο λόγο έχουμε και $\frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial \rho} > 0$: η παρούσες αξίες μειώνονται με αύξηση του επιτοκίου.

III. Πραγματικά δικαιώματα: Επεκτάσεις, εφαρμογές, κίνδυνοι και πλεονεκτήματα

8. Επεκτάσεις και Εφαρμογές των Πραγματικών Δικαιωμάτων

Ένα από τα σημαντικότερα θέματα – το αναλύει ο Brosch (2008) – είναι ότι πολλές επιχειρήσεις διακρατούν περισσότερα από ένα πραγματικά δικαιώματα με τον ίδιο υποκείμενο τίτλο, ήτοι την ίδια υποκείμενη δραστηριότητα ή επιλογή. Σύμφωνα με τον Trigeorgis (1993) απέδειξε ότι η αποτίμηση πραγματικών δικαιωμάτων που κατέχονται από μια επιχείρηση, όταν αυτά αναφέρονται στην ίδια δραστηριότητα (υποκείμενο τίτλο), δεν μπορεί να γίνεται ξεχωριστά για το καθένα. Υπάρχουν άρρηκτες αλληλεξαρτήσεις όταν π.χ. μία επιχείρηση ταυτόχρονα κατέχει το δικαίωμα να παύσει την παραγωγή ενός προϊόντος και το δικαίωμα να την αυξήσει. Ασφαλώς, θα μπορεί να εξασκήσει μόνο ένα από τα δύο. Εναλλακτικά, μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα της παύσης και μπορεί όμως να κρατήσει ένα δικαίωμα επανέναρξης. Όλες αυτές οι εναλλακτικές επιλογές συνθέτουν ένα χαρτοφυλάκιο με πραγματικά δικαιώματα, τα οποία δεν μπορούν τα αποτιμηθούν απομονωμένα το ένα από τα άλλα.

Αυτό το χαρτοφυλάκιο αναλύει διεξοδικά και αποτιμά με αριθμητική προσέγγιση ο Brosch (2008: Κεφάλαια 4 και 5). Επιπλέον, σημειώνει ότι η αλληλεξάρτηση σε αυτά τα χαρτοφυλάκια πραγματικών δικαιωμάτων λαμβάνει χώρα σε δύο επίπεδα. Είτε η κατοχή ενός πραγματικού δικαιώματος επηρρεάζει την αξία των υπολοίπων, είτε οι υποκείμενοι «πραγματικοί τίτλοι» αλληλοεπηρεάζονται. Όσον αφορά την αλληλεξάρτηση σε επίπεδο δικαιωμάτων, ένα παράδειγμα είναι η άμβλυνση του κινδύνου απωλειών όταν υπάρχει και το δικαίωμα προσωρινής παύσης της παραγωγικής διαδικασίας. Από την άλλη, για την αλληλεξάρτηση μεταξύ των υποκείμενων «πραγματικών τίτλων», ένα παράδειγμα είναι μία συμπληρωματική επένδυση για επέκταση σε άλλη αγορά του εξωτερικού. Έτσι, ο κίνδυνος από την μείωση της τιμής εγχώρια αμβλύνεται. Και στα δύο αυτά ειδικά παραδείγματα η μείωση του κινδύνου ασφαλώς και θα έχει αντίκτυπο στην αξία των δικαιωμάτων. Ουσιαστικά, η προσέγγιση με χαρτοφυλάκιο πραγματικών δικαιωμάτων είναι πιο ρεαλιστική και πιο κοντά σε μία ενεργή διοίκηση (Brosch, 2008) με κόστος, βέβαια, τους πολυπλοκότερους υπολογισμούς.

Προχωρώντας παρακάτω, η θεωρία των πραγματικών δικαιωμάτων δεν χρησιμεύει μόνο στην αποτίμηση των επενδύσεων αυτών καθαυτών, αλλά και στην αποτίμηση της αξίας μίας επιχείρησης (Chance & Peterson, 2002). Κάθε επιχείρηση, εκτός από τις τρέχουσες επενδύσεις που έχει ήδη πραγματοποιήσει, έχει στη διάθεσή της και επιλογές να τις επεκτείνει, να τις περιορίσει σε περίπτωση δυσάρεστων εξελίξεων ή ακόμα και επιλογές για επενδύσεις σε άλλες αγορές. Οι επιλογές αυτές μπορούν να υποδειγματοποιηθούν υπό την μορφή πραγματικών δικαιωμάτων η κατοχή των οποίων έχει επίδραση στην αξία των επιχειρήσεων τόσο άμεσα – κατοχή αυτών των δικαιωμάτων – όσο και έμμεσα λόγω της μείωσης του κινδύνου. Οι Chance & Peterson (2002) παραθέτουν, αρκετά αναλυτικά, μερικές μελέτες περιπτώσεων κατά τις οποίες εταιρίες αποτιμήθηκαν με την χρήση των πραγματικών δικαιωμάτων. Τέλος, οι Larrabee & Voss (2013) επιμελούνται μίας έκδοσης που παραθέτει αναλυτικά τις κραταιές μεθόδους αποτίμησης μιας επιχείρησης στις οποίες συμπεριλαμβάνονται και τα πραγματικά δικαιώματα.

Προχωρώντας στις επιμέρους εμπειρικές εφαρμογές των πραγματικών δικαιωμάτων, μία αρκετά γνωστή είναι αυτή των Paddock, Siegel, and Smith (1988). Οι ερευνητές αυτοί προσπάθησαν να εξηγήσουν την δημοπράτηση κάποιων οικοπέδων στις ΗΠΑ τα οποία μπορούσαν να δώσουν πρόσβαση είτε σε φυσικό αέριο είτε σε πετρέλαιο. Βέβαια, η αποτίμηση αυτών των οικοπέδων διέφερε πολύ από τις απαιτήσεις της Γεωλογικής υπηρεσίας (δημοπράτης) και από τις προσφορές των ενδιαφερόμενων. Για τους Chance & Peterson (2002) αυτές οι αποκλίσεις των πραγματικών δικαιωμάτων από την πραγματικότητα θα μπορούσαν να αποδοθούν είτε στο ότι το 1988 η θεωρία των πραγματικών δικαιωμάτων δεν ήταν ακόμα πλήρως ανεπτυγμένη, ή στο ότι λόγω της δημοπρασίας πάντα ο πλειοδότης έχει την τάση να δίνει προφορές υπέρ του άρτιου για να αυξήσει τις πιθανότητές του να κερδίσει.

Πιο ενθαρρυντικά ήταν τα αποτελέσματα της εμπειρικής εφαρμογής της Quigg (1993) η οποία εξέτασε τις αγοραπωλησίες γης στο Σηάτλ από το 1976 έως το 1979 υπό το πρίσμα της απόκτησης δικαιώματος για αστική εκμετάλλευση, π.χ. πολυκατοικίες, εμπορικά κέντρα κλπ. Η Quigg (1993) βρήκε ότι οι αγοραπωλησίες γης ήταν σύμφωνες με τις εκτιμήσεις των πραγματικών δικαιωμάτων, οπότε είτε οι επενδυτές χρησιμοποιούσαν τα πραγματικά δικαιώματα σε αυτές τις συναλλαγές τους ή συμπεριφέρονταν όπως τα δικαιώματα αυτά ορίζουν.

Μεταγενέστερα, οι Moel and Tufano (2002) χρησιμοποιούν τα πραγματικά δικαιώματα για να εξηγήσουν την λειτουργία κάποιων ορυχείων χρυσού τα οποία έκλειναν πολλές φορές προσωρινά. Βρήκαν ότι η θεωρία των πραγματικών δικαιωμάτων μπορεί να εξηγήσει αυτή την περιοδική παύση στη λειτουργία τους και την επανέναρξη των εργασιών. Όμως, σημειώνουν ότι υπάρχουν κι άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν αυτήν την απόφαση της επιχείρησης οι οποίοι δεν μπορούν να συμπεριληφθούν σε μία ανάλυση στα πλαίσια της θεωρίας των πραγματικών δικαιωμάτων.

Οι Groullon, Lyandres & Zhdanov (2012) χρησιμοποιούν τα πραγματικά δικαιώματα για να εξηγήσουν την θετική σχέση μεταξύ μεταβλητότητας και αποδόσεων σε επίπεδο επιχείρησης. Βρίσκουν, λοιπόν ότι η αξία των επιχειρήσεων που κατέχουν πραγματικά δικαιώματα είναι κυρτή ως προς την μεταβλητότητα και η αξία των δικαιωμάτων αυξάνεται όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα των υποκείμενων επενδύσεων (πραγματικών *τίτλων*). Έτσι οι επιχειρήσεις οι οποίες έχουν περισσότερες επενδυτικές ευκαιρίες στην διάθεσή τους – περισσότερα πραγματικά δικαιώματα στην κατοχή τους – απολαμβάνουν μεγαλύτερες αποδόσεις λόγω αύξησης της μεταβλητότητας.

Μια άλλη εφαρμογή των πραγματικών δικαιωμάτων η οποία ξεφεύγει από το άμεσο πεδίο της χρηματοοικονομικής είναι και αυτή των Frey, Mercer, Cubbage & Abt (2013) πάνω στην αναδάσωση μιας περιοχής και την βιωσιμότητα της αγροτικής παραγωγής[12]. Για την εφαρμογή και αξιολόγηση των μέτρων της αναδάσωσης οι αρχές

[12] Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουν γιατί η παρακινούμενη από τις αρχές αναδάσωση της περιοχής δεν απέφερε τα προβλεπόμενα αποτελέσματα σε «υπηρεσίες οικοσυστήματος» (“ecosystem services”). Σύμφωνα με τον Οργανισμό για την Τροφή και την Γεωργία ων των Ηνωμένων Εθνών «Οι υπηρεσίες

χρησιμοποίησαν τα τυπικά υποδείγματα αποτίμησης, όπως η ΚΠΑ, ενώ οι συγγραφείς συμπεριέλαβαν και την αξία της ευελιξίας στη χρήση της γης αυτής από τους ιδιώτες ιδιοκτήτες της. Έτσι, οι κάτοχοι της γης, υπό το πλαίσιο των πραγματικών δικαιωμάτων, θα προτιμήσουν την αγροτική εκμετάλλευση της γης τους παρά την αναδάσωση ώστε να εκμεταλλευτούν την γη για ξυλεία. Όπως αναφέρουν οι ίδιοι, η ανάλυσή τους έχει «κάποιους περιορισμούς», αλλά εδώ την αναφέρουμε για να δείξουμε ενδεικτικά το εύρος της χρήσης των πραγματικών δικαιωμάτων. Ενδεικτική της ευρείας εφαρμογής των πραγματικών δικαιωμάτων είναι και η ανάλυση των Spitzer & Talley (2014), οι οποίοι εξετάζουν την εφαρμογή των χρηματοοικονομικών κανονισμών ("financial regulation") σε πειραματικό/ προκαταρκτικό στάδιο από κάποιες επιχειρήσεις πριν την απόλυτη νομοθέτησή τους.

9. Πραγματικά Δικαιώματα: Παγίδες και πλεονεκτήματα

Ως προς τα πλεονεκτήματα της μεθόδου των πραγματικών δικαιωμάτων είδα κάποια και στο μέρος Ι της παρούσης εργασίας, τα οποία μπορούμε να τα συνοψίσουμε και εδώ. Αρχικά, η ανάλυση των πραγματικών δικαιωμάτων περιλαμβάνει και τον κίνδυνο και την στοχαστικότητα που έχουν κάποιες μεταβλητές, αλλά και την ευελιξία στις διοικητικές επιλογές που αφορούν την εξεταζόμενη επένδυση ή επιχειρηματική μονάδα. Επιπλέον, τα πραγματικά δικαιώματα αναδεικνύουν την δυνατότητα για πλήρη περιορισμό των απωλειών χωρίς να θυσιαστούν οι προοπτικές κερδοφορίας, καθώς και τον στρατηγικό σχεδιασμό. Ο τελευταίος αφορά στην πραγματοποίηση επενδύσεων με αρνητική ΚΠΑ καθώς αυτές συνεπάγονται την απόκτηση πρόσβασης σε μελλοντικές κερδοφόρες ευκαιρίες. (επίσης και Kamrad, 2012· Driouchi & Bennett, 2012)

Ένα άλλο πλεονέκτημα από την χρήση των πραγματικών δικαιωμάτων έχει να κάνει με την αποτίμηση των επιχειρήσεων. Οι Da, Guo, & Jagannathan (2012) αποδεικνύουν ότι η χρήση του υποδείγματος CAPM είναι ανεπαρκής στην αποτίμηση των επιχειρήσεων που έχουν πραγματικά δικαιώματα στην κατοχή τους – ήτοι, ευελιξία στις επιλογές και επενδυτικές ευκαιρίες. Από την άλλη βρίσκουν ότι η με την χρήση των πραγματικών δικαιωμάτων οι αποδόσεις των μετοχών μπορούν να εξηγηθούν καλύτερα. Σε συμφωνία με αυτά τα ευρήματα είναι και η έρευνα των Groullon, Lyandres & Zhdanov (2012).

Οι Driouchi & Bennett (2012) αναφέρουν ότι η κατοχή πραγματικών δικαιωμάτων από την επιχείρηση συμβάλλει θετικά στις επιδόσεις της και στην μείωσή της

οικοσυστήματος, ορίζονται ως τα οφέλη που παρέχουν τα οικοσυστήματα στον άνθρωπο. Πολλές βασικές υπηρεσίες οικοσυστήματος που η βιοποικιλότητα παρέχει – όπως η κυκλοφορία των θρεπτικών συστατικών, η δέσμευση του άνθρακα, η ρύθμιση των επιβλαβών οργανισμών και την επικονίαση – διατηρούν την γεωργική παραγωγικότητα». (Πηγή: http://www.fao.org/agriculture/crops/thematic-sitemap/theme/biodiversity/en/, πρόσβαση την 10η Μαρτίου 2015) έκθεσής της σε δυσμενείς εξελίξεις. Άρα η αξιολόγηση και αποτίμηση μιας επιχείρησης μέσα από την χρήση των πραγματικών δικαιωμάτων συμπεριλαμβάνει αυτή την θετική επίδραση από των ύπαρξη πολλών εναλλακτικών επιλογών.

Τα πραγματικά δικαιώματα, εντούτοις, δεν είναι απολύτως ενάρετα, ούτε τέλεια· υπόκεινται σε περιορισμούς και έχουν και μειονεκτήματα για τα οποία πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Μια δομικά βασική υπόθεση στην ανάλυση των πραγματικών δικαιωμάτων είναι και ότι ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να διαπραγματευτεί σε μία πλήρη και ρευστή αγορά. Όμως, η αξία του υποκείμενου πραγματικού τίτλου, σε αντίθεση με τα συμβατικά, δεν είναι διαπραγματεύσιμη. Το πρόβλημα με την παραβίαση αυτής της υπόθεσης δεν συνίσταται μόνο την μη αποτελεσματικότητα της αγοράς του υποκείμενου τίτλου (η επένδυση που εξετάζεται) αλλά στο σύνολο της αποτίμησης (Chance & Peterson, 2002). Ουσιαστικά δεν μπορούμε να μιλάμε για εξισορροπητική κερδοσκοπία όταν η αγορά δεν είναι *βαθειά*[13]· πώς μία ανισορροπία θα αποκατασταθεί όταν δεν υπάρχει επαρκής αριθμός συναλλασσομένων και με επαρκή ρευστότητα;

Το πρόβλημα από την μη διαπραγματευσιμότητα του πραγματικού τίτλου πάνω στον οποίο βασίζεται το πραγματικό δικαίωμα μπορεί να εντοπιστεί στην αδυναμία ύπαρξης του μιμούμενου χαρτοφυλακίου, στην αδυναμία αντιστάθμισης και στην ουδέτερη κινδύνου αποτίμηση. Όταν δεν υπάρχει αγορά για την επενδυτική ευκαιρία της επιχείρησης τότε δεν είναι πειστικό ότι μπορούμε να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο αγοράς που να μιμείται την αξία της επενδυτικής αυτής ευκαιρίας τόσο σε αποδόσεις όσο και σε κίνδυνο. Αντίστοιχα, όταν δεν υπάρχει η αγορά για την επενδυτική ευκαιρία δεν μπορούν να υπάρχουν και χαρτοφυλάκια που θα αντισταθμίζουν τον κίνδυνό της και θα αποφέρουν αποδόσεις ίσες με το ακίνδυνο επιτόκιο. (Chance & Peterson, 2002· Kamrad, 2012)

Όσον αφορά την αποτίμηση των επιχειρήσεων με την χρήση της θεωρίας των πραγματικών δικαιωμάτων οι Chance & Peterson (2002) αναλύουν κάποια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Πρώτον, στα συμβατικά δικαιώματα ο επενδυτής δεν μπορεί να επηρεάσει την απόδοση της επιχείρησης – εφόσον, δεν είναι ο ιδιοκτήτης της ή κάποιο μέλος της διοίκησης – ενώ στα πραγματικά δικαιώματα η επιχείρηση που τα κατέχει εκείνη μπορεί να επηρεάσει και την ίδια την αξία της. Έτσι, μια επιχείρηση μπορεί να αναλάβει ένα επενδυτικό σχέδιο με μεγάλη μεταβλητότητα με σκοπό να αυξήσει την αξία του δικαιώματος που συνδέεται με αυτήν την επένδυση και άρα η επιχείρηση μπορεί να αυξήσει τεχνικά και όχι ουσιαστικά την αξία της. Οι Groullon, Lyandres & Zhdanov (2012) βρίσκουν εμπειρικά

[13] Με τον όρο *βαθειά αγορά* εννοούμε την αγορά που έχει αρκούντως μεγάλη ρευστότητα και αρκούντως πολλούς συναλλασσομένους. Δηλαδή, η *βαθειά αγορά* δεν μπορεί να χειραγωγηθεί (εκούσια ή ακούσια) και οποιαδήποτε ανισορροπία αποκαθίσταται στιγμιαία.

ότι, λόγω των πραγματικών δικαιωμάτων που οι επιχειρήσεις κατέχουν, η ευαισθησία της αξίας της επιχείρησης ως προς την μεταβλητότητα των υποκείμενων πραγματικών τίτλων αυξάνει καθώς αυξάνει κι η ευελιξία της διοίκησης στις αποφάσεις – αυξάνουν δηλαδή τα δικαιώματα που έχει στην κατοχή της. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι η κατοχή δικαιωμάτων μειώνει τον κίνδυνο των απωλειών χωρίς να περιορίζει τα κέρδη τα οποία μπορεί να είναι και μεγάλα ως αποτέλεσμα της υψηλής μεταβλητότητας.

Επιπλέον, η εξάσκηση ενός πραγματικού δικαιώματος από την επιχείρηση μπορεί να επηρεάσει την αξία της, κάτι που παραβιάζει την υπόθεση ότι η εξάσκηση ενός δικαιώματος (συμβατικού) δεν επηρεάζει την αξία του υποκείμενου τίτλου και της επιχείρησης. Για παράδειγμα, η εξάσκηση ενός πραγματικού δικαιώματος για παύση κάποιας ζημιογόνου δραστηριότητας μπορεί να δώσει έναυσμα σε ανταγωνιστές να αναλάβουν την δραστηριότητα αυτή. Έτσι, οι ανταγωνιστές μπορούν τα προσελκύσουν και πελάτες της επιχείρησης αυτής από άλλες δραστηριότητες. Με αυτόν τον τρόπο, η παύση κάποιας δραστηριότητας μπορεί να επιφέρει έμμεσα μεγαλύτερη ζημία στην επιχείρηση από ότι η συνέχιση αυτής. (Chance & Peterson, 2002)

Οι επιχειρήσεις, όμως, δεν περιορίζονται στην κατοχή ενός μόνο δικαιώματος αλλά σε περισσότερα από ένα καθώς για τις δραστηριότητές τους έχουν περισσότερες από μία επιλογές. Αυτό ενδεχομένως να επιφέρει στρεβλώσεις στην αξία της επιχείρησης και η αποτίμησή της με τα πραγματικά δικαιώματα να είναι πολύ μεγαλύτερη από την πραγματική της αξία. Βέβαια, είναι γεγονός ότι μεταξύ των δικαιωμάτων που έχουν τον ίδιο υποκείμενο «πραγματικό τίτλο» υπάρχουν αλληλεξαρτήσεις, που σημαίνει ότι η αξία τους δεν είναι ακριβώς το άθροισμα των επιμέρους δικαιωμάτων. Έτσι, περιορίζονται κατά κάποιον τρόπο οι στρεβλώσεις στην αποτίμηση αλλά ο αναλυτής πρέπει πάντα να είναι προσεκτικός. (Chance & Peterson, 2002)

Οι Chance & Peterson (2002) επίσης σημειώνουν και τον «κίνδυνο υποδείγματος» (“model risk”). Ο κίνδυνος αυτός συνίσταται είτε στην επιλογή λάθος υποδείγματος είτε στην εσφαλμένη εφαρμογή του ορθού υποδείγματος. Στην περίπτωση και αυτού του πιθανού προβλήματος η αποτιμημένη αξία της επιχείρησης δεν θα είναι η πραγματική της. Επιπλέον, τονίζουν και την σημασία των υποθέσεων πάνω στις οποίες βασίζουμε την επιλογή των πραγματικών δικαιωμάτων, ειδικά ως προς την στοχαστικότητα των μεταβλητών. Δηλαδή, να υποτεθεί ότι ένας τυχαίος/ διαταρακτικός παράγοντας είναι μία κίνηση Brown ενώ στην πραγματικότητα ακολουθεί κατανομή Poisson. Ανάλογα, στην πραγματικότητα μπορεί αυτή η διαταραχή να μην είναι τυχαία ενώ εμείς έχουμε υποθέσει ότι είναι. (Chance & Peterson, 2002)

Ένα άλλο μειονέκτημα της μεθόδου των πραγματικών δικαιωμάτων, τόσο στην αποτίμηση ενός επενδυτικού σχεδίου όσο και στην αποτίμηση ολόκληρης της επιχείρησης, είναι η δυσκολία της εκτίμησης πολλών παραμέτρων που απαιτούνται για την εκτίμηση. Έτσι, πρέπει να εκτιμήσουμε την αγοραία αξία του υποκείμενου πραγματικού τίτλου, καθώς δεν μπορούμε να την λάβουμε από την αγορά όπως στα συμβατικά δικαιώματα· την τιμή εξάσκησης, δηλαδή το κόστος πραγματοποίησης της επένδυσης ή εξάσκησης του πραγματικού δικαιώματος· το ακίνδυνο επιτόκιο· την διάρκεια ζωής του δικαιώματος καθώς κάποια στιγμή η ευκαιρία που έχει η επιχείρηση και αποτυπώνεται πάνω σε ένα δικαίωμα μπορεί να χαθεί. Επίσης, πρέπει να εκτιμήσουμε και την μεταβλητότητα του υποκείμενου πραγματικού τίτλου, για την οποία, βέβαια, δεν έχουμε ιστορικά δεδομένα όπως στα συμβατικά δικαιώματα. Όμως, πρέπει να σημειώσουμε ότι και η άλλη εναλλακτική και απλή μέθοδος της ΚΠΑ έχει τις ίδιες ακριβώς απαιτήσεις, οπότε, δεν μπορούμε λόγω αυτών να απορρίψουμε την ανάλυση των πραγματικών δικαιωμάτων. Οι Chance & Peterson (2002) αναλύουν πιο διεξοδικά αυτές τις απαιτήσεις καθώς και γιατί δεν αποτελούν λόγο απόρριψης της θεωρίας των πραγματικών δικαιωμάτων έναντι της απλούστερης ΚΠΑ.

Γενικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η χρήση των πραγματικών δικαιωμάτων δεν είναι πανάκια και έχει αρκετά πλεονεκτήματα. Πρέπει να είμαστε όμως προσεκτικοί γιατί εκτός από πλεονεκτήματα έχει και μειονεκτήματα και έχει και πολλές παγίδες. Στο Μέρος Ι είδαμε τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των επενδύσεων που πρέπει να πληρούνται για να εφαρμοστεί η μέθοδος των πραγματικών δικαιωμάτων. Αντίστοιχα, για την επιχείρηση που κατέχει μεγάλο πλήθος τέτοιων επενδύσεων είναι καταλληλότερη η αποτίμηση και με τη χρήση πραγματικών δικαιωμάτων επιπλέον της παρούσας αξίας των μελλοντικών χρηματοροών από τις ήδη πραγματοποιηθείσες επενδύσεις.

IV. Συμπεράσματα και προβληματισμοί

Η αβεβαιότητα παίζει πολύ σημαντικό ρόλο και άρα οι επιχειρηματικές αποφάσεις πρέπει να την λαμβάνουν υπ’ όψιν τους. Εξίσου σημαντική, όμως, είναι και η ευελιξία της διοίκησης στην λήψη κάποιων επιχειρηματικών αποφάσεων οι οποίες μπορεί να αναβληθούν, κάποιες επενδύσεις μπορεί να παύσουν προσωρινά, μπορούν να επεκταθούν σε ξένες αγορές ή σε άλλα προϊόντα. Η ευελιξία αυτή προφυλάσσει την επιχείρηση από τον κίνδυνο δυσμενών εξελίξεων ενώ της επιτρέπει να μην περιορίσει έτσι τα πιθανά κέρδη της – αυτό κάνουν και κάποια χρηματοοικονομικά δικαιώματα. Είδαμε, όμως, ότι η μέθοδος της ΚΠΑ δεν μπορεί να ενσωματώσει αυτή την άμβλυνση του κινδύνου λόγω της ευελιξίας κι ούτε τον ίδιο τον κίνδυνο.

Ως απάντηση σε αυτή την ανεπάρκεια της ΚΠΑ εισήχθηκε το διωνυμικό υπόδειγμα το οποίο μπορούσε να ενσωματώσει την αβεβαιότητα και την ευελιξία. Όμως, και το διωνυμικό υπόδειγμα είδαμε ότι υποπίπτει σε υπεραπλουστεύσεις, όπως η σταθερότητα του προεξοφλητικού επιτοκίου διαχρονικά κι ανεξάρτητα από τον κίνδυνο. Έτσι, η ανάλυση που ξεπερνάει όλα αυτά τα προβλήματα είναι τα πραγματικά δικαιώματα. Είδαμε ότι ονομάστηκαν έτσι γιατί είναι όντως δικαιώματα, και όχι υποχρεώσεις, για απόκτηση ενός πραγματικού τίτλου (πραγματοποίηση μίας επένδυσης) σε αντίθεση με τον χρηματοοικονομικό τίτλο που αφορά τα αντίστοιχα συμβατικά (χρηματοοικονομικά δικαιώματα).

Επιπλέον, ανέφερα και τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχουν οι επενδύσεις για να είναι ορθή η ανάλυσή τους με πραγματικά δικαιώματα αλλά και, αντίστοιχα, ποια δικαιώματα είναι αυτά. Έτσι έχουμε τα επιμέρους δικαιώματα αναβολής, σταδιακής ανοικοδόμησης, αλλαγής κλίμακας, εγκατάλειψης, αλλαγής, μεγέθυνσης καθώς και σύνθετα πραγματικά δικαιώματα που περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα από αυτά τα επιμέρους.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αποπειράθηκα, επιπλέον, μια εισαγωγική αναφορά στα βασικά υποδείγματα των πραγματικών δικαιωμάτων ακολουθώντας τους Dixit & Pindyck (1994). Έτσι, παράθεσα την γενική του μορφή και το πιθανοθεωρητικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύσσονται, αφού πρώτα ανέπτυξα και την μέθοδο της ΚΠΑ και το διωνυμικό υπόδειγμα. Εκτός από την αποτίμηση των πραγματικών δικαιωμάτων ανέπτυξα και την αξιολόγηση με δυναμικό προγραμματισμό ο οποίος, όμως, είναι πάλι στα πλαίσια των πραγματικών δικαιωμάτων.

Ειδικότερα είδαμε πως αξιολογείται αναλυτικά μία ευέλικτη επένδυση υπό καθεστώς αβεβαιότητας με την χρήση των πραγματικών δικαιωμάτων και πότε είναι η καταλληλότερη στιγμή αυτή η επένδυση να πραγματοποιηθεί. Εξετάσαμε, επίσης, και την αποτίμηση μίας επένδυσης με σταθερά και μεταβλητά κόστη, αλλά και την ενδοκλαδική ισορροπία – και την συνθήκη για επέκταση ή συρρίκνωση του κλάδου – υπό το καθεστώς αβεβαιότητας όχι μόνο ως προς το επίπεδο της επιχείρησης αλλά και στο επίπεδο του κλάδου. Ακολουθώντας αυτή την ανάλυση είδαμε ότι τα πραγματικά δικαιώματα συμφωνούν και με την θεωρία του q του Tobin για την επένδυση αλλά και μπορούν να εφαρμοστούν και στο νεοκλασικό επίπεδο αξιολόγησης μιας επένδυσης.

Προχωρώντας στο 3^{o} μέρος της διπλωματικής, είδαμε ότι πολλές φορές οι επιχειρήσεις δεν κατέχουν ένα μόνο δικαίωμα αλλά ένα χαρτοφυλάκιο από αυτά και τα οποία αλληλεξαρτώνται μεταξύ τους. Αυτή η μεταξύ τους αλληλεξάρτηση κάνει την μεμονωμένη εκτίμηση αυτών των δικαιωμάτων να μην εκτιμά σωστά την αξία της εξεταζόμενης επένδυσης γιατί αυτή επηρεάζεται και από τα άλλα δικαιώματα που η επιχείρηση κατέχει για αυτή την επένδυση. Επιπλέον τα πραγματικά δικαιώματα είναι χρήσιμα και στην αποτίμηση των ίδιων των επιχειρήσεων και όχι μόνο των επενδύσεών τους. Η αξία της επιχείρησης επηρεάζεται από την κατοχή των δικαιωμάτων τόσο άμεσα λόγω της κατοχής τους, όσο και έμμεσα λόγω εξασφάλισης έναντι δυσμενών εξελίξεων.

Όσον αφορά τις εμπειρικές εφαρμογές των πραγματικών δικαιωμάτων αυτές καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών πεδίων. Έτσι, χρησιμοποιήθηκαν για να εξηγήσουν τις τιμές στις δημοπρατήσεις και τις αγοραπωλησίες γης, την παροδικά διακοπτόμενη λειτουργία κάποιων χρυσορυχείων και την θετικής σχέση μεταξύ της κεφαλαιακής απόδοσης της επιχείρησης και της μεταβλητότητας των αποδόσεων αυτών. Επίσης, εφαρμόστηκαν και στο πεδίο των αγροτικών οικονομικών για να εξηγήσουν την αποτυχία κάποιων πολιτικών που στόχευαν στην προώθηση της αναδάσωσης από τους κατόχους της γης, αλλά εφαρμόστηκαν και στην δικαστική και νομική επιστήμη.

Ο κυριότερος λόγος της ευρείας εφαρμογής των πραγματικών δικαιωμάτων είναι ότι αυτά ενσωματώνουν όχι μόνο την ευελιξία που έχει αυτός που καλείται να πάρει μια απόφαση, αλλά και τον κίνδυνο λόγω τυχαίων παραγόντων. Αποτελούν την πιο ακριβή προσέγγιση της επιχειρηματικής πραγματικότητας η οποία, τις περισσότερες φορές, έχει μεγάλο πλήθος εναλλακτικών επιλογών και, άρα, ευελιξίας. Από αυτήν της ευελιξίας, όμως, όπως είδαμε, δεν επηρεάζεται μόνο η αξία των επενδύσεων που έχει υπ' όψιν της μία επιχείρηση αλλά και η ίδια η αξία της.

Παρά την ευρεία εφαρμογή τους και τα σημαντικά πλεονεκτήματά τους, τα πραγματικά δικαιώματα είδαμε ότι έχουν και μειονεκτήματα. Το βασικότερο είναι ότι η αγορά του υποκείμενου τίτλου τους (επένδυση) δεν είναι πλήρης κι ούτε έχει επαρκή ρευστότητα, κι αυτό έχει σημαντικό αντίκτυπο στις υποθέσεις με τις οποίες αυτά αποτιμούνται. Επιπλέον, η εξάσκηση ενός δικαιώματος μπορεί να επηρεάσει την αξία του υποκείμενου τίτλου όπως στην περίπτωση ανάληψης μιας συμπληρωματικής επένδυσης, κι αυτό το γεγονός επίσης παραβιάζεις τις υποθέσεις των πραγματικών δικαιωμάτων.

Ένα άλλο μειονέκτημα που σχετίζεται περισσότερο με την αποτίμηση μίας επιχείρησης με βάση τα πραγματικά δικαιώματα είναι και ότι η επιχείρηση μπορεί να αναλάβει να αποκτήσει δικαίωμα να επενδύσει σε σχέδια που έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα στην αξία τους. Με αυτόν τον τρόπο αυξάνεται η αξία του δικαιώματος της επένδυσης και άρα η αξία της ίδιας της επιχείρησης. Ταυτόχρονα, η μη σωστή τιμολόγηση των αλληλεξαρτώμενων πραγματικών δικαιωμάτων που κατέχει η επιχείρηση μπορεί να οδηγήσει στην εκτίμηση μιας αξίας πολύ μεγαλύτερης από την πραγματική. Επίσης μειονέκτημα είδαμε ότι είναι ο κίνδυνο επιλογής λάθος τύπου πραγματικού δικαιώματος ή στοχαστικής διαδικασίας για την τυχαιότητα. Όμως και στην περίπτωση που το πραγματικό δικαίωμα επιλεγεί σωστά, μπορεί, τελικά, να εφαρμοστεί λάθος. Ταυτόχρονα, η αποτίμηση των πραγματικών δικαιωμάτων και την εκτίμηση πολλών άλλων παραμέτρων, που είναι δύσκολη. Βέβαια, η ίσως απλούστερη εναλλακτική της ΚΠΑ, είδαμε ότι έχει τις ίδιες απαιτήσεις και άρα δεν είναι προτιμότερη για κάποιο τέτοιο λόγο.

Ουσιαστικά, η μέθοδος των πραγματικών δικαιωμάτων έχει κινδύνους που, όμως, δεν την ακυρώνουν, αλλά χρειάζονται μεγαλύτερη προσοχή και σύνεση όταν εφαρμόζουν τα ιδιότυπα αυτά δικαιώματα.

Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθούν και κάποια ακόμα περιθώρια για μελλοντική εφαρμογή των πραγματικών δικαιωμάτων. Ψάχνοντας στις βάσεις των επιστημονικών περιοδικών, εκδοτών και βιβλιοθηκών, δεν βρήκα εφαρμογή της ανάλυσης των πραγματικών δικαιωμάτων στην υποδειγματοποίηση των επιτοκίων του διατραπεζικού δανεισμού. Στον διατραπεζικό δανεισμό, μία τράπεζα έχει το δικαίωμα να δανείσει μία άλλη τράπεζα αλλά όχι την υποχρέωση. Επιπλέον, υπάρχουν ιστορικά δεδομένα για την διατραπεζική αγορά ώστε να εκτιμηθούν οι απαιτούμενες παράμετροι και η διατραπεζική αγορά είναι αρκούντως μεγάλη και με επαρκή ρευστότητα. Επιπλέον, η ευελιξία συνίσταται στην δυνατότητα αύξησης ή μείωσης ή εκμηδενισμού των δανείων προς τα άλλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Τέλος, θα πρέπει να τεκμηριωθεί και αν μία τέτοια προσέγγιση της διατραπεζικής αγοράς είναι καλύτερη από άλλες εναλλακτικές.

Αν, όμως, καταφέρουν τα πραγματικά δικαιώματα να εξηγήσουν την διατραπεζική αγορά αυτό θα είναι πολύ σημαντικό για την μετάδοση της νομισματικής πολιτικής και τις μεταβλητές που επηρεάζουν αυτή τη μετάδοση. Συγκεκριμένα, από την κρίση του 2007-2008 και ύστερα έχει παρατηρηθεί στην ζώνη του ευρώ να κατακερματίζεται ο διατραπεζικός δανεισμός παρά τα μέτρα νομισματικής χαλάρωσης που ακολουθήθηκαν· κάποιες περιοχές απέκτησαν γρήγορα πρόσβαση σε διατραπεζικά κεφάλαια με χαμηλό κόστος, ενώ άλλες παραμένουν αποκλεισμένες από τον διατραπεζικό δανεισμό ή καταβάλλουν μεγάλο επιτόκιο.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Κο. Παπανικολάου Βασίλη που ανέλαβε την επίβλεψή μου και για την βοήθειά του, αλλά και για την υπομονή του. Θέλω επίσης να αναγνωρίσω και να ευχαριστήσω για την συμβολή της την Ακαδημία Αθηνών η οποία με την υποτροφία από τα έσοδα των Γενικών Κληροδοτημάτων υπέρ της Εκπαιδεύσεως χρηματοδότησε την επιτυχή αποπεράτωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών

χωρίς τις οποίες δεν θα μπορούσα ούτε να εκπονήσω την παρούσα εργασία ούτε να αποκτήσω τις γνώσεις που απέκτησα. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω και τον καθηγητή Κο Αθανασούλη Γεράσιμο γιατί μου συνέστησε κάποια πολύ βασική και απολύτως χρήσιμη βιβλιογραφία και η οποία με βοήθησε να ολοκληρώσω επιτυχώς το μεταπτυχιακό μου αυτό. Εννοείται ότι οποιαδήποτε λάθη είναι μόνο δικά μου.

Γλωσσάρι Ορολογιών

Ανέλιξη Κατάστασης της Επιχείρησης: βλ. Ορισμό 3.1.

Αξία συνέχισης: Βλ. Ορισμό 3.6.

Αποτελεσματική αγορά, υπόθεση της (Efficient market hypothesis): Η υπόθεση που δηλώνει ότι όλη η διαθέσιμη πληροφορία που αφορά τα διαπραγματευόμενα χρεόγραφα της αγοράς είναι άμεσα και χωρίς κόστος διαθέσιμη σε όλους του συναλλασσόμενους (Brealey & Myers, 1996). Ταυτόχρονα, όλη η διαθέσιμη πληροφορία έχει ήδη ενσωματωθεί στην αγοραία τιμή όλων των χρεογράφων (Brealey & Myers, 1996). Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε παρελθούσες τιμές της αγοράς για να εκτιμήσουμε ή να προσεγγίσουμε την κατανομή τους δεν θα μπορέσουμε να επιτύχουμε κατά μέσο όσο μεγαλύτερες αποδόσεις από αυτήν την αγοράς – αν υπάρχει ευρέως διαδεδομένη πληροφορία ότι η τιμή θα ανέβει η τιμή θα πρέπει να έχει ήδη ανέβει, και ομοίως αν υπάρχει η πληροφορία ότι η τιμή θα πέσει (Karatzas & Shreve. 1998). Τέλος, η υπόθεση των αποτελεσματικών δεν υποθέτει καμία συγκεκριμένη κατανομή για τις αποδόσεις και τις τιμές των τίτλων που διαπραγματεύονται (Karatzas & Shreve. 1998).

Αρνητική θέση (short position): είναι η θέση που παίρνει κάποιος σε κάποιον τίτλο ή αγαθό και κερδίζει όταν η τιμή του τίτλου/αγαθού αυτού πέφτει, ενώ χάνει όταν η τιμή αυτού ανεβαίνει· π.χ. ένας αρτοποιός έχει αρνητική θέση στην αγορά άλευρων.

Διύλιση (filtration): Διαισθητικά, η συνολική διαθέσιμη πληροφορία που έχουν οι δρώντες των αγορών μέχρι και την στιγμή t περιλαμβάνεται στην $\mathcal{F}_t$ η οποία είναι σ-άλγεβρα υποσύνολο της $\mathcal{F}$ σε έναν χπ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Διύλιση είναι ολόκληρη η αύξουσα ακολουθία των σ-αλγεβρών $\mathbb{F} \triangleq \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\} \subseteq \mathcal{F}$ όπου $\mathbb{T}$ είναι ο χρονικός ορίζοντας, π.χ. $\mathbb{T} = [0, T]$ ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^+$ στο συνεχές, $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$ σε διακριτό χρόνο). Στην $\mathcal{F}_0$ περιλαμβάνονται μόνο τα ενδεχόμενα με μέτρο $\mathbb{P}$, 0 ή 1, ενώ υποθέτουμε πληρότητα του $(\Omega, \mathcal{F}_0)$ έτσι ώστε αυτός να περιλαμβάνει κάθε ενδεχόμενο Λ τ.ω. $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$ και $\forall N \in \Lambda$, $\mathbb{P}(N) = 0$. Τέλος, ισχύει ότι $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_{sup\mathbb{T}} = \mathcal{F}$. (Elliott & Kopp, 2000)

—ς , συνήθεις συνθήκες (usual conditions): Κάθε διύλιση $\mathbb{F}$: (α) είναι αύξουσα, δηλαδή $\forall t \leq s,\ t, s \in \mathbb{T} \Longrightarrow \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$, (β) είναι πλήρης, βλ. «διύλιση», (γ) είναι δεξιά συνεχής, ήτοι $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. (Elliott & Kopp, 2000)

Δικαίωμα (προαίρεσης) (αγγλική: contingent claim, option): Χρηματοοικονομικός παράγωγος τίτλος που δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα και όχι η υποχρέωση να αγοράσει (δικαίωμα αγοράς, call option) ή να πουλήσει (δικαίωμα πώλησης, put option) τον υποκείμενο τίτλο σε προσυμφωνημένη τιμή.

— αγοράς (call option): βλ. *Δικαίωμα (προαίρεσης)*.

— πώλησης (put option): βλ. *Δικαίωμα (προαίρεσης)*.

Ελέγχου, συνάρτηση: Οι μεταβλητές στις οποίες η επιχείρηση έχει στον άμεσο έλεγχό της. Βλ. ορισμό 3.2

Θετική θέση (long position): είναι η θέση που παίρνει κάποιος σε κάποιον τίτλο ή αγαθό και κερδίζει όταν η τιμή του τίτλου/αγαθού αυτού ανέβει, ενώ χάνει όταν η τιμή αυτού πέσει· π.χ. ένας σιτοπαραγωγός έχει θετική θέση στην αγορά σιτηρών.

Ισότητα στοχαστικών ανελίξεων: Δεν είναι μία· υπάρχουν τρεις έννοιες ισότητας στοχαστικών ανελίξεων. Παραθέτω τον Ορισμό 2.2 του Σπηλιώτη (2004: σελ. 5). *Έστω σ.α.* $X \triangleq \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ *και* $Y \triangleq \{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ *ορισμένες σε χ.π.* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *με τιμές στον* $\mathbb{R}^m$. *Οι ανελίξεις* X, Y *ονομάζονται:*

i. ***ισοδύναμες*** *όταν* $\mathbb{P}_J^X = \mathbb{P}_J^Y$ *για όλα τα* $J = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{T}$, *με* $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. *Όπου* $\mathbb{P}_J^X(B) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \colon \left(X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega)\right) \in B\right\}\right)$, $B \in \mathfrak{B}^{m|J|}$, $|J| \triangleq cardJ$, *δηλαδή η από κοινού κατανομή του τυχαίου διανύσματος* $\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right)$. *Ομοίως και για* $\mathbb{P}_J^Y$.

ii. ***εκδοχή ή τροποποίηση*** *η μία της άλλης όταν για έκαστο* $t \in \mathbb{T}$ *[ξεχωριστά] ισχύει:* $X_t = Y_t, \mathbb{P} - \sigma.\beta.$. *Όταν, δηλαδή, για έκαστο* $t \in \mathbb{T}$ *[ξεχωριστά] υπάρχει* $N_t \in \mathcal{F}$ *με* $\mathbb{P}(N_t) = 0$ *εις τρόπον ώστε* $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ *για κάθε* $\omega \in \Omega \backslash N_t$.

iii. ***μη διακρινόμενες*** *όταν υπάρχει* $N \in \mathcal{F}$ *με* $\mathbb{P}(N) = 0$ *εις τρόπον ώστε* $X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall \omega \in \Omega \backslash N, \forall t \in \mathbb{T}$.

Καθαρή παρούσα αξία (Net Present Value): Οι προεξοφλημένες στο παρόν καθαρές χρηματοροές που προκύπτουν από μία επενδυτική ή επιχειρηματική επιλογή.

Κατάσταση: βλ. *Ανέλιξη Κατάστασης της Επιχείρησης.*

Μπέλλμαν, εξίσωση: Η εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman (Oksendal, 2010)

Προεξοφλητικό επιτόκιο (Discount rate): Η επιθυμητή απόδοση που θέλει να έχει αυτός που προεξοφλεί. Αλλιώς, το κόστος ευκαιρίας του κεφαλαίου· η απόδοση που δίνουν άλλα επενδυτικά σχέδια με ταυτόσημα χαρακτηριστικά κινδύνου.

Παράγωγο ή παράγωγος τίτλος (financial derivative): Χρηματοοικονομικός τίτλος η αξία του οποίου βασίζεται (παράγεται) από έναν ή περισσότερους χρηματοοικονομικούς τίτλους – τον υποκείμενο τίτλο – ή από έναν δείκτη.

Στοχαστικές ανελίξεις (stochastic processes)

— ισοδύναμες: *βλ. Ισότητα στοχαστικών ανελίξεων*.
— εκδοχή (ή τροποποίηση) η μία της άλλης: *βλ. Ισότητα στοχαστικών ανελίξεων*.
— μη-διακρινόμενες: *βλ. Ισότητα στοχαστικών ανελίξεων*.

Συντελεστής Παρούσας Αξίας (Discount Factor): Ο συντελεστής με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε χρηματοροές για να τις ανάγουμε στο παρόν. Η παρούσα αξία είναι το αντίστροφο του ανατοκισμού· με τον ανατοκισμό αποταμιεύουμε τώρα κάποιο ποσό και βλέπουμε μετά από ν περιόδους πόσα χρήματα θα πάρουμε. Στην παρούσα αξία (προεξόφληση) κάποιας χρηματοροής V, βλέπουμε πόσα χρήματα πρέπει να αποταμιεύσουμε τώρα ώστε μετά από ν περιόδους να έχουμε στα χέρια μας V νομισματικές μονάδες. Ο ΣΠΑ είναι $\frac{1}{(1+\rho)^{\iota}}$ όπου ρ το επιτόκιο προεξόφλησης και ι το πλήθος των χρονικών περιόδων.

Συνήθεις συνθήκες διύλισης: Βλ. *Διύλισης, συνήθεις συνθήκες (usual conditions)*

Υποκείμενος τίτλος (underlying asset): βλ. *Παράγωγο*.

Αρκτικόλεξα

ΔΑ: Δικαίωμα Αναμονής

ΚΠΑ: Καθαρή Παρούσα Αξία

ΣΠΑ: Συντελεστής Παρούσας Αξίας

τ.ω.: τέτοιος/α/ο ώστε

χ.π.: Χώρος πιθανότητας

Παράρτημα Α

Θα ακολουθήσουμε τον Kreyszig (2011) για την επίλυσης της

$$-\frac{2\rho}{\sigma^2}y(x)+\frac{2a}{\sigma^2}xy'(x)+x^2y''(x)=0, \qquad (5.7')$$

με αρχικές συνθήκες, για $V^* \in \mathbb{R}$:

$$y(0)=0, \qquad (5.8')$$

$$y(V^*)=V^*-I, \qquad (5.9')$$

$$y'(V^*)=1, \qquad (5.10')$$

Θέτουμε

$$y(x)=x^m, \qquad y'(x)=mx^{m-1}, \qquad y''(x)=m(m-1)x^{m-2}$$

και αντικαθιστώντας στην 5.7' έχουμε διαδοχικά:

$$-\frac{2\rho}{\sigma^2}x^m+\frac{2a}{\sigma^2}xmx^{m-1}+x^2m(m-1)x^{m-2}=0$$

$$\left[-\frac{2\rho}{\sigma^2}+\frac{2a}{\sigma^2}m+m(m-1)\right]x^m=0$$

$$m^2+\left(\frac{2a}{\sigma^2}-1\right)m-\frac{2\rho}{\sigma^2}=0, \qquad (A.1)$$

Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς την ή τις λύσεις της Α.1. Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρουν μόνο πραγματικές λύσεις, αυτές θα είναι ή μία ή δύο ή καμία. Η διακρίνουσα της Α.1 είναι:

$$\Delta_m=\left(\frac{2a}{\sigma^2}-1\right)^2+4\frac{2\rho}{\sigma^2}>0$$

αφού $\rho>0$. Οπότε υπάρχουν δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις m_1, m_2 της Α.1 με:

$$m_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}, m_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}$$

και η γενική λύση της 5.12' είναι της μορφής:

$$y(x)=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}, \qquad (A.2)$$

όμως έχουμε διαδοχικά:

$$m_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} < 0$$

$$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}$$

$$0 < \frac{2\rho}{\sigma^2}$$

που ισχύει, άρα $m_1 < 0$, και η Α.2 δεν ορίζεται για $x = 0$ της 5.8', παρά μόνο αν μόνο αν $c_2 = 0$. Ομοίως, αποδεικνύεται κι ότι $m_1 > 0$. Άρα:

$$y(x) = c_1 x^{m_1}, \qquad y(0) = 0$$

και από την συνθήκη 5.9' διαδοχικά:

$$y(V^*) = c_1 V^{*m_1} = V^* - I$$

$$c_1 = \frac{V^* - I}{V^{*m_1}}$$

$$c_1 V^{*m_1} = V^* - I$$

και από την 5.10' διαδοχικά:

$$y'(V^*) = c_1 m_1 V^{*m_1 - 1} = 1$$

$$c_1 V^{*m_1} = \frac{V^*}{m_1} = V^* - I$$

$$I = V^*\left(\frac{m_1 - 1}{m_1}\right), \qquad (A.3)$$

$$V^* = I\frac{m_1}{m_1 - 1}, \qquad (A.4)$$

$m_1 > 1$, και τελικά:

$$y(x) = \frac{V^{*1-m_1}}{m_1} x^{m_1}$$

και

$$y(x) = \frac{\left(I\frac{m_1}{m_1 - 1}\right)^{1-m_1}}{m_1} x^{m_1}$$

Αντίστοιχα, λοιπόν για $y \triangleq F$, $x = V_t$ η λύση τηε 5.7 είναι:

$$F(V_t) = \frac{\left(I\frac{m_1}{m_1 - 1}\right)^{1-m_1}}{m_1} V_t^{m_1}, \qquad (A.5)$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι $m_1 > 1$ για να είναι δόκιμη κι η Α.4

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} > 1, \qquad (5.11)$$

$$1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)<\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)\right)^2<\frac{1}{4}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}$$

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)^2-\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)+1<\frac{1}{4}\left(1-\frac{2a}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}$$

$$\frac{2a}{\sigma^2}<\frac{2\rho}{\sigma^2}$$

$$\alpha<\rho$$

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

ΠΑΝΤΕΛΙΔΗΣ, Γ. Ν. (1992) *Μαθηματική Ανάλυση: τόμος Ι & ΙΙ*. Αθήνα: Εκδόσεις Ζήτη.

ΣΠΗΛΙΩΤΗΣ, Ι. (2004) *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

AMRAM, M. & KULATILAKA, N. (1999) *Real options: managing strategic investment in an uncertain world*. Cambridge: Harvard Business School Press.

BELLMAN, R. E. & DREYFUS, S. E. (1962) *Applied Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press.

BARONE-ADESI, G. & WHALEY, R.E. (1987) Efficient Analytic Approximation of American Option Values. *The Journal of Finance*. 42 (2). pp. 301-320.

BILLINGSLEY, P. (1995) *Probability and Measure*. 3rd. New York: John Wiley & Sons.

BLOMEYER, E.C. (1986) An Analytic Approximation for the American Put Price for Options on Stocks with Dividends. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 21 (2). pp. 229-233.

BOYLE, P.P. (1977) Options: A Monte Carlo Approach. *Journal of Financial Economics*. 4 . pp. 323 – 338.

BOYLE, P.P. (1988) A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 23 (1). pp. 1 – 26.

BREALEY, R. A. & MYERS, S. C. (1996) *Principles of Corporate Finance*. 5th. New York: McGraw-Hill.

BREALEY, R. A.; MYERS, S. C. & ALLEN, F. (2011) *Principles of Corporate Finance*. 10th. New York: McGraw-Hill.

BRENNAN, M.J. (1979) The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models. *The Journal of Finance*. 34 (1). pp. 53 – 68.

BRENNAN, M.J. & SCHWARTZ, E.S. (1977) The Valuation of American Put Options. *The Journal of Finance*. 32 (2). pp. 449 – 462.

BRENNAN, M.J. & SCHWARTZ, E.S. (1978) Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 13 (3). pp. 461 – 475.

BROSCH, R. (2008) *Portfolios of Real Options*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems – Vol. 611. Berlin: Springer – Verlag.

CABALLERO, R. J. & PINDYCK, R. S. (1996) Uncertainty, Investment, and Industry Evolution. International Economic Review. 37 (3). pp. 641-662.

CARR, P. (1988) The Valuation of Sequential Exchange Opportunities. *The Journal of Finance*. 43 (5). pp. 1235 – 1256.

CARR, P. (1995) The Valuation of American Exchange Options with Application to Real Options. In: Trigeorgis, L. (Ed.). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies, and Applications*. Westport: Praeger.

CHANCE, D. M. & PETERSON, P. P. (2002) *Real Options and Investment Valuation*. Charlottesville: The Research Foundation of The Association for Investment Management and Research.

COPELAND, T. E. & ANTIKAROV, V. (2003) *Real options: A practitioner's guide*. Cengage Learning.

COX, J.C.; ROSS, S.A. & RUBINSTEIN, M. (1979) Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*. 7. pp. 229 – 263.

DA, Z.; GUO, R.-J. & JAGANNATHAN, R. (2012) CAPM for estimating the cost of equity capital: Interpreting the empirical evidence. *Journal of Financial Economics*. 103 (1). pp. 204 – 220.

DIXIT, A. (1993) *The Art of Smooth Pasting*. Fundamentals of Pure and Applied Economics. Poststrasse: Harwood Academic Publishers.

DIXIT, A. K. & PINDYCK, R. S. (1994) *Investment under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.

DRIOUCHI, T. & BENNETT D. J. (2012) Real Options in Management and Organizational Strategy: A Review of Decision-making and Performance Implications. *International Journal of Management Reviews*. 14. pp. 39 – 62.

ELLIOTT , R. J. & KOPP, P. E. (2000) *Mathematics of Financial Markets*. 2nd. New York: Springer-Verlag.

FREY, G. E.; MERCER, D. E.; CUBBAGE, F. W. & ABT, R. C. (2013) A real options model to assess the role of flexibility in forestry and agroforestry adoption and disadoption in the Lower Mississippi Alluvial Valley. *Agricultural Economics*. 44. pp. 73 – 91.

GESKE, R. (1979) The Valuation of Compound Options. *Journal of Financial Economics*. 7 (1). pp. 63 – 81.

GESKE, R. & JOHNSON, H.E. (1984) The American Put Option Valued Analytically. *The Journal of Finance*. 39 (5). pp. 1511 – 1524.

GROULLON, G.; LYANDRES, E. & ZHDANOV, A. (2012) Real Options, Volatility, and Stock Returns. The Journal of Finance. 47 (4). pp. 1499 – 1537.

HO, T. S. Y.; STAPLETON, R. & SUBRAHMANYAM, M. (1997) The Valuation of American Options With Stochastic Interest Rates: A Generalization of the Geske-Johnson Technique. *The Journal of Finance*. 52 (2). pp. 827 – 840.

HULL, J. & WHITE, A. (1988) The use of the Control Variate Technique in Option Pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 23 (3). pp. 237-251

JOHNSON, H.E. (1983) An Analytic Approximation for the American Put Price. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 18 (1). pp. 141 – 148.

KAMRAD, B. (2012) Capacity Expansion As A Contingent Claim: Flexibility And Real Options In Operations. In: Kouvelis, P.; Dong, L.; Boyabatli, O & Li, R. (Eds.). *Handbook of Integrated Risk Management in Global Supply Chains*. Hoboken: John Wiley & Sons.

KARATZAS, I. & SHREVE, S. E. (1988) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics – Vol. 113. New York: Springer-Verlag.

KARATZAS, I. & SHREVE, S. E. (1998) *Methods for Mathematical Finance*. Applications of Mathematics – Vol. 39. New York: Springer-Verlag

KREYSZIG, E. (2011) *Advanced engineering mathematics*. 10th. Hoboken: Wiley.

LARRABEE, D. T. & VOSS, J. A. (2013) *Valuation techniques : discounted cash flow, earnings quality, measures of value added, and real options*. Hoboken: John Wiley & Sons.

MACMILLAN, L.W. (1986) Analytic Approximation for the American Put Option. *Advances in Futures and Options Research*. 1 (A). pp. 119 – 139.

MAJD, S. & PINDYCK, R. S. (1987) Time to Build, Option Value, and Investment Decisions. *NBER Working Paper No. 1654*.

MARGRABE, W. (1978) The Value of an Option to Exchange one Asset for Another. *The Journal of Finance*. 33 (1). pp. 177 – 186.

MCDONALD, R.L. & SIEGEL, D.R. (1985) Investment and the Valuation of Firms when there is an Option to Shut Down. *International Economic Review*. 26 (2). pp. 331-349.

MCDONALD, R.L. & SIEGEL, D.R. (1986) The Value of Waiting to Invest. *The Quarterly Journal of Economics*. 101 (4). pp. 707 – 727.

MOEL, A. & TUFANO, P. (2002) When Are Real Options Exercised? An Empirical Study of Mine Closings. *Review of Financial Studies*. 15 (1). pp. 35 – 64.

MYERS, S. C. (1977) Determinants of Corporate Borrowing. *Journal of Financial Economics*. 5 (2). pp.147–176.

MYERS, S.C. & MAJD, S. (2001) Abandonment Value and Project Life. In: Schwartz, E. S. & Trigeorgis, L. (Eds.). *Real Options and Investment under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*. Boston: MIT Press.

ØKSENDAL (OKSENDAL), B. (2010) *Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications*. Universitext. 6th. Berlin: Springer-Verlag.

PADDOCK, J.L.; SIEGEL, D.R. & SMITH, J.L. (1988) Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. *The Quarterly Journal of Economics*. 103 (3). pp. 479-508.

PARKINSON, M. (1977) Option Pricing: The American Put. *Journal of Business*. 50 (1). pp. 21 – 36.

QUIGG, L. (1993) Empirical Testing of Real Option-Pricing Models. *Journal of Finance*. 48 (2). pp. 621 – 640.

SCHULMERICH, M. (2010) *Real Options Valuation: The Importance of Interest Rate Modelling in Theory and Practic*e. 2nd. Heidelberg: Springer.

SHIRYAEV, A. N. & BOAS, R. P. (1995) Probability. Graduate Texts in Mathematics – Book 95. 2nd. New York: Springer.

SHOENE, M. (2015) *Real Options Valuation: The Importance of Stochastic Process Choice in Commodity Price Modelling*. Best Masters. Springer Gabler.

STULZ, R.M. (1982) Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Application. *Journal of Financial Economics*. 10 (2). pp. 161 – 185.

TOBIN, J. (1969) A General Equilibrium Approach To Monetary Theory. *Journal of Money, Credit and Banking*. 1 (1). pp. 15-29.

TRIGEORGIS, L. (1991) A Log-Transformed Binomial Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 26 (3). pp. 309-326.

TRIGEORGIS, L. (1993) The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options. *Journal of Financial & Quantitative Analysis*. 28 (1). pp. 1 – 20.

TRIGEORGIS, L. (1996) *Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation*. Cambridge: MIT Press.

WANG, J. & YANG C.-Y. (2012) Flexibility planning for managing R&D projects under risk. *International Journal of Production Economics*. 135 (2). pp. 823 – 831.

YEO, K. T. & QIU, F. (2003) The value of management flexibility—a real option approach to investment evaluation. *International Journal of Project Management*. 21 (4). pp. 243 – 250.