ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΕΙΚΟΝΑΣ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΠΑΝΩ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΜΑΤΣΟΥΚΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΝΙΚΟΣ ΓΙΑΝΝΑΚΑΚΗΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2019

Πρόλογος

Η διπλωματική αυτή εργασία έχει σκοπό να μελετήσει υπό ποιές συνθήκες μπορούν να είναι συμπληρωματικοί η εικόνα και ο πυρήνας ενός τελεστή ορισμένου πάνω σε ένα μιγαδικό χώρο Banach. Το συγκεκριμένο ζήτημα εντάσσεται στα θέματα της θεωρίας γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ χώρων με νόρμα. Κυρίως ασχοληθήκαμε με ορθογωνιότητες σε χώρους με νόρμα και ιδιοτιμές στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου. Ο λόγος που βρισκόμαστε αντιμέτωποι με αυτό το πρόβλημα σε ένα τέτοιο χώρο είναι διότι στους απειροδιάστατους χώρους το διαστατικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας καταρρέει και έχει σαν συνέπεια να στερούνται πολλοί από τους τελεστές αυτήν την ιδιότητα. Ωστόσο, ακόμα και σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert υπάρχουν περισσότερες δυνατότητες αυτή η ιδιότητα να εμφανιστεί στους τελεστές που ορίζονται πάνω σε αυτόν. Τέτοιου είδους φαινόμενα προκύπτουν επειδή η δομή των χώρων Banach διαφοροποιείται σε μεγάλο βαθμό, τόσο στο ότι τους χαρακτηρίζει το γεγονός ότι δεν έχουν όλους τους υπόχωρους τους συμπληρωματικούς όσο και στις ιδιότητες που έχουν οι σχέσεις ορθογωνιότητας που δημιουργούνται μεταξύ των διανυσμάτων τους. Γενικότερα μια σχέση ορθογωνιότητας σε έναν χώρο Banach έχει αλλοιωμένες πολλές ιδιότητες από τις οποίες θα είχε αν ήταν διατυπωμένη σε ένα χώρο Hilbert. Συγκεκριμένα, οι ορθογωνιότητες που θα ασχοληθούμε στερούνται πρώτα από όλα την ιδιότητα της συμμετρίας τους.

Ένα δεύτερο ζήτημα που μας απασχολεί και είναι σχετικό με τα όσα συμβαίνουν είναι κατά πόσο ένας τελεστής μπορεί να είναι ένα προς ένα αν και μόνον αν είναι επί. Αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τους μετασχηματισμούς της γραμμικής άλγεβρας και το πιο κοντινό σε αυτούς στην απειροδιάστατη περίπτωση είναι τα αποτελέσματα που παίρνουμε για τους τελεστές της θεωρίας Fredholm. Στην παρούσα διπλωματική εργασία δίνονται ικανές συνθήκες για το πως κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί σε έναν χώρο Banach. Για να το πετύχουμε αυτό χρείαζεται να μιλήσουμε για τιμές στο χωρικό αριθμητικό πεδίο και την ιδιότητα της συμπληρωματικότητας της εικόνας και του πυρήνα. Πιο συγκεκριμένα το περιεχόμενο της διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής.

Το κεντρικό κομμάτι της εργασίας αυτής είναι η δημοσίευση [24] του A. M. Sinclair που αφόρα ιδιοτιμές στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου και στην οποία βρίσκεται μια ποιοτική αντιμετώπιση του θέματος που μας απασχολεί. Επίσης, κατά κύριο λόγο μελετήθηκαν η περαιτέρω δουλεία που έγινε σε συνεργασία με τον M. J. Crabb [6] για την γενίκευση των αποτελεσμάτων για τιμές στο χωρικό αριθμητικό πεδίο και κάποια αποτελέσματα από δύο εργασίες του B. Bollobás όπου η μια αφενός αφορά την επέκεταση ενός θεμελειώδους θεωρήματος της συναρτησιακής ανάλυσης των E. Bishop και R. R. Phelps και την εφαρμογή του στα χωρικά αριθμητικά πεδία [1] και αφετέρου γενικότερα αποτελέσματα επί των αριθμητικών πεδίων [2] . Οι κύριες τεχνικές που αναπτύθηκαν ήταν να πετύχουμε το να είναι ορθογώνιος ο πυρήνας του τελεστή στην εικόνα του το οποίο και για το αλγεβρικό και για το χωρικό αριθμητικό πεδίο χρειάστηκε η εφαρμογή δύο διαφορετικών θεωρημάτων σταθερού σημείου σε κατάλληλες απεικονίσεις. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το θεώρημα κλειστής εικόνας του Banach και το θεώρημα Hahn-Banach μπορέσαμε να γράψουμε τον χώρο ως ευθύ άθροισμα της εικόνας και του πυρήνα.

Για το λόγο αυτό στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε την έννοια της δυϊκής απεικόνισης η οποία είναι κεντρικού ενδιαφέροντος όχι μόνο επειδή είναι συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach αλλά επειδή χάρη σε αυτό έχει πραγματικά ενδιαφέρουσες ιδιότητες συνδεδεμένες με την δομή του χώρου. Μπορεί κανείς μέσω της δυϊκής απεικόνισης να χαρακτηρίσει κλάσεις χώρων με νόρμα, να ορίσει τα αριθμητικά πεδία και να περιγράψει σχέσεις ορθογωνιότητας. Έτσι λοιπόν στην συνέχεια παρουσιάζουμε την ορθογωνιότητα Birkhoff-James και την ορθογωνιότητα κατά Giles η οποία ορίζεται σε χώρους ημιεσωτερικού γινομένου στους οποίους κάνουμε αναφορά. Επιπλέον, στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζουμε τα τρία αριθμητικά πεδία και παρουσιάζουμε πολλές ιδιότητες τους και στοιχεία της θεωρίας τους όπως περιγράφονται παραδοσιακά από τους F. F. Bonsall και J. Duncan [4] ώστε να μελετήσουμε ποιοτικά την συμπεριφορά και τις ιδιότητες των τελεστών. Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση στον χώρο των φραγμένων τελεστών ώστε να είναι δυνατόν να χαρακτηρίσουμε τους dissipative και τους ερμιτιανούς τελεστές σε χώρους Banach, οι οποίοι μας βοηθάνε στην ανάπτυξη της θεωρίας μας αξιοποιώντας τις χρήσιμες ιδιότητες τους. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύουμε τα αποτελέσματα από τις δημοσιεύσεις που προαναφέραμε, περιγράφουμε τα αντιπαραδείγματα που παρουσιάζονται και κάποιες εφαρμογές, όπως επίσης παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που σχετίζονται με την θεωρία που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Νίκο Γιαννακάκη, κυρίως για τον πολύτιμο χρόνο που μου προσέφερε αλλά και για το θέμα που μου πρότεινε. Η καθοδήγιση και η υποστήριξη του είχαν καθοριστικό ρόλο στην ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή κύριο Σπύρο Αργυρό και στον επίκουρο καθηγητή κύριο Δημοσθένη Δριβαλιάρη που δέχτηκαν να είναι στην εξεταστική επιτροπή και να τους παρουσιάσω το περιεχόμενο της εργασίας μου. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Διδάκτορα Γιάννη Καραγιώργο για την βοήθεια που μου προσέφερε σε τεχνικά θέματα που αφορούν την συγγραφή της διπλωματικής αλλά και για τις περαιτέρω συμβουλές σε θέματα που αφορούν τις σπουδές μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία γεωμετρίας χώρων με νόρμα.

1.1 Η δυϊκή απεικόνιση.

1.1.1 Ορισμός-Ιδιότητες.

Οι απειροδιάστατοι χώροι με νόρμα όπως γνωρίζουμε διαφέρουν αρκετά από αυτό που έχουμε στην διαίσθηση μας για τον $\mathbb{R}^n$. Η γεωμετρία τους δε και η δομή τους δεν είναι τόσο απλές στη μελέτη, αλλά ούτε και συμπεριφέρονται πάντα φυσιολογικά με βάση αυτά που έχουμε υπόψιν από την εμπειρία μας. Οι ενδιαφέρουσες ιδιότητες της νόρμας μπορούν να μας δώσουν αρκετή πληροφορία για το τι ακριβώς συμβαίνει. Για τον σκοπό αυτό μας εξυπηρετεί να εισάγουμε την έννοια της δυϊκής απεικόνισης η οποία είναι συνδεδεμένη με αρκετά από τα χαρακτηριστικά του χώρου στον οποίο εργαζόμαστε. Πέρα από όσα θα παρουσιάσουμε ο ενδιαφερόμενος μπορεί να βρει περισσότερα στο [8].

Ορισμός 1.1.1. Αν X χώρος με νόρμα και $x \in X$ τότε ορίζεται η δυϊκή απεικόνιση ως η συνολοσυνάρτηση $\mathcal{J} : X \to \mathcal{P}(X^*)$, όπου $\mathcal{P}(X^*)$ το δυναμοσύνολο του X^*, με

$$\mathcal{J}(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Μπορούμε να δούμε τώρα κάποιες από τις βασικές ιδιότητες της δυϊκής απεικόνισης.

Πρόταση 1.1.1. Έστω X χώρος με νόρμα και $\mathcal{J}(x)$ η δυϊκή απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

i) Το $\mathcal{J}(x)$ είναι μη κενό για κάθε $x \in X$.

ii) Το $\mathcal{J}(x)$ είναι w*-συμπαγές για κάθε $x \in X$.

iii) Το $\mathcal{J}(x)$ είναι κυρτό για κάθε $x \in X$.

iv) Για κάθε $x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{J}(\lambda x) = \overline{\lambda}\mathcal{J}(x).$$

Δηλαδή η δυϊκή απεικόνιση είναι αντιομογενής.

Απόδειξη. i) Για $x = 0 \Rightarrow \mathcal{J}(0) = \{0\}$. Έστω $x \in X, x \neq 0$, αν θεωρήσουμε τον μονοδιάστατο υπόχωρο

$$Y = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

τότε ορίζουμε το συναρτησοειδές $f : Y \to \mathbb{C}$,

$$\langle f, y\rangle = \lambda\|x\|^2, y \in Y, y = \lambda x.$$

Το f είναι γραμμικό συνεχές με $\|f\| = \|x\|$. Από συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε να επεκτείνει το f σε όλο τον X^* και

$$\|x^*\| = \|f\| = \|x\|.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\langle x^*, x\rangle = \langle f, x\rangle = \langle f, 1 \cdot x\rangle = \|x\|^2$$

δηλαδή $x^* \in \mathcal{J}(x)$ και έτσι έχει αποδειχθεί το i).

ii) Για την w*-συμπάγεια θεωρούμε την αλλαγή μεγέθους κατά $\|x^*\|^2$ της $B_{X^*}(0, \|x^*\|^2)$ το οποίο με την σειρά του είναι w*-συμπαγές από το θεώρημα του Alaoglu. Έστω

$$x_a^* \in \mathcal{J}(x), x_a^* \xrightarrow{w^*} x^* \in X^*.$$

Τότε επειδή $\mathcal{J}(x) \subset S_{X^*}(0, \|x^*\|^2)$ και το $B_{X^*}(0, \|x^*\|^2)$ είναι w*-κλειστό έχουμε ότι το $x^* \in B_{X^*}(0, \|x^*\|^2)$. Όμως

$$\langle x^*, x\rangle = \lim\langle x_a^*, x\rangle = \|x^*\|^2$$

δηλαδή $x^* \in S_{X^*}(0, \|x^*\|^2)$ το οποίο σημαίνει ότι $x^* \in \mathcal{J}(x)$ αφού, $\|x^*\|^2 = \|x\|^2$. Δηλαδή το $\mathcal{J}(x)$ είναι w*-κλειστό. Επειδή είναι υποσύνολο της $B_{X^*}(0, \|x^*\|^2)$ και ο (X^*, w^*) είναι Hausdorff το $\mathcal{J}(x)$ είναι w*-συμπαγές.

iii) Αν θεωρήσουμε ένα $x \in X$ και $x_1^*, x_2^* \in \mathcal{J}(x)$ τότε για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$\langle tx_1^* + (1-t)x_2^*, x\rangle = t\langle x_1^*, x\rangle + (1-t)\langle x_2^*, x\rangle = t\|x\|^2 + (1-t)\|x\|^2 = \|x\|^2.$$

Βλέπουμε επίσης ότι

$$\langle tx_1^* + (1-t)x_2^*, \frac{x}{\|x\|}\rangle = \|x\| > 0$$

Δηλαδή

$$|\langle tx_1^* + (1-t)x_2^*, \frac{x}{\|x\|}\rangle| \leq \sup\{|\langle tx_1^* + (1-t)x_2^*, \frac{y}{\|y\|}\rangle|, y \in X, y \neq 0\}$$
$$= \|tx_1^* + (1-t)x_2^*\|.$$

Επειδή τώρα $\|x_2^*\| = \|x_1^*\| = \|x\|$, έχουμε

$$\|tx_1^* + (1-t)x_2^*\| \leq t\|x_1^*\| + (1-t)\|x_2^*\| = \|x\|, \forall t \in [0,1].$$

Άρα

$$\|tx_1^* + (1-t)x_2^*\| = \|x\|, \forall t \in [0,1]$$

και συνεπώς, $tx_1^* + (1-t)x_2^* \in \mathcal{J}(x), \forall t \in [0,1]$ δηλαδή το $\mathcal{J}(x)$ είναι κυρτό υποσύνολο του X^*.

iv) Για να δείξουμε ότι είναι αντιομογενής, αν θεωρήσουμε $\lambda \in \mathbb{C}$ και

$$x^* \in \mathcal{J}(\lambda x)$$

έχουμε ότι

$$\langle x^*, \lambda x\rangle = \|x^*\|\|\lambda x\|, \|x^*\| = \|\lambda x\|.$$

Δηλαδή

$$\langle \frac{1}{\bar{\lambda}} x^*, x\rangle = \|\frac{1}{\bar{\lambda}} x^*\|\|x\|, \|\frac{1}{\bar{\lambda}} x^*\| = \|x\|.$$

Δηλαδή $\frac{1}{\bar{\lambda}} x^* \in \mathcal{J}(x)$ άρα $x^* \in \bar{\lambda}\mathcal{J}(x)$ και συνεπώς $\mathcal{J}(\lambda x) \subset \bar{\lambda}\mathcal{J}(x)$. Αντιστρόφως τώρα αν $x^* \in \bar{\lambda}\mathcal{J}(x) \Rightarrow \frac{1}{\bar{\lambda}} x^* \in \mathcal{J}(x)$ και επομένως,

$$\langle \frac{1}{\bar{\lambda}} x^*, x\rangle = \|\frac{1}{\bar{\lambda}} x^*\|\|x\|, \|\frac{1}{\bar{\lambda}} x^*\| = \|x\|$$
$$\Rightarrow \langle x^*, \lambda x\rangle = \|x^*\|\|\lambda x\|, \|x^*\| = \|\lambda x\|$$

Δηλαδή $x^* \in \mathcal{J}(\lambda x)$ και άρα $\bar{\lambda}\mathcal{J}(x) \subset \mathcal{J}(\lambda x)$. ■

1.1.2 Χαρακτηρισμός μερικών χώρων με νόρμα.

Θα αναφερθούμε σύντομα τώρα στη σχέση της δυϊκής απεικόνισης με τις ιδιότητες της νόρμας στον χώρο που έχουμε και την συμπεριφορά των στοιχείων του δυϊκού. Θα χρειαστούμε πρώτα όμως μερικές γνωστές έννοιες της συναρτησιακής ανάλυσης. Το περιεχόμενο αυτής της ενότητας βρίσκεται στο [8].

Ορισμός 1.1.2. Έστω X χώρος με νόρμα και $x^* \in X^*$. Λέμε ότι το x^* έχει μεγιστικό στοιχείο $x \in X$ (norm-attaining) αν

$$\exists x \in X : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|.$$

Θεώρημα 1.1.2. (R. C. James). Έστω X χώρος Banach. Τότε ο X είναι ανακλαστικός αν και μόνον αν κάθε $x^* \in X^*$ έχει μεγιστικό στοιχείο.

Πρόταση 1.1.3. Έστω X χώρος Banach, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

i) Ο X είναι ανακλαστικός.

ii) Η δυϊκή απεικόνιση είναι επί.

Απόδειξη. Αν $x^* \in X^*$ τότε υπάρχει $x \in S_X$ τέτοιο ώστε $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|$. Αν $y = \|x^*\|x$ τότε

$$\langle x^*, y\rangle = \|x^*\|\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|^2 = \|y\|^2, \|x^*\| = \|y\|.$$

Συνεπώς υπάρχει $y \in X$ τέτοιο ώστε $x^* \in \mathcal{J}(y)$. Για το αντίστροφο τώρα θα δείξουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\forall x^* \in X^*, \exists x \in S_X : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|.$$

Έστω $x^* \in X^*$ τότε υπάρχει $y \in X$ τέτοιο ώστε $x^* \in \mathcal{J}(y)$. Αν $x = \frac{y}{\|y\|}$ τότε

$$\langle x^*, x\rangle = \langle x^*, \frac{y}{\|y\|}\rangle = \frac{\|x^*\|\|y\|}{\|y\|} = \|x^*\|.$$

Επομένως από το χαρακτηρισμό του James για την ανακλαστικότητα έπεται το ζητούμενο. ∎

Σχόλιο: Ισχύει γενικότερα για χώρους με νόρμα ότι η δυϊκή απεικόνιση είναι επί αν και μόνον αν κάθε $x^* \in X^*$ έχει μεγιστικό στοιχείο.

Μερικές επιπλέον έννοιες που χαρακτηρίζουν ένα χώρο με νόρμα είναι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της νόρμας του, όπως η αυστηρή κυρτότητα ή το αν είναι λεία, ιδιότητες που παίζουν σημαντικό ρόλο στην μελέτη και τη συμπεριφορά του χώρου.

Ορισμός 1.1.3. Ένας χώρος με νόρμα X καλείται λείος (smooth) στο $x \neq 0$ αν υπάρχει μοναδικό γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές x^* τέτοιο ώστε

$$\langle x^*, x\rangle = \|x\|, \|x^*\| = 1.$$

Τα συναρτησοειδή με αυτή την ιδιότητα λέμε ότι στηρίζονται στο x (support functionals). Το σύνολο των συναρτησοειδών που στηρίζονται στο x ορίζεται ως

$$D(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|, \|x^*\| = 1.\}$$

και συνήθως καλείται spherical image map. Μέσα σε αυτό το σύνολο τα στοιχεία του έχουν την ιδιότητα $f \in D(x)$ να συνεπάγεται ότι

$$\langle f, y\rangle \leq \langle f, x\rangle, \forall y \in S_X$$

και γενικότερα ένα $f \in X^*$ στηρίζεται σε κάποιο $x \in C \subset X$ αν

$$\mathrm{Re}\langle f, x\rangle = \sup\{\mathrm{Re}\langle f, y\rangle : y \in C\}.$$

Επίσης, ορίζεται αντίστοιχα ένα υπερεπίπεδο H που στηρίζεται στο $x \in C$ ως

$$H = \{y \in X, \mathrm{Re}\langle f, y\rangle = \mathrm{Re}\langle f, x\rangle\}.$$

Δείτε ότι η δυϊκή απεικόνιση συμπίπτει με το σύνολο $D(x)$ για $\|x^*\| = 1$. Επομένως, μπορούμε να αναφερόμαστε σε αυτό το σύνολο πάλι με τον όρο δυϊκή απεικόνιση θεωρώντας την κανονικοποιημένη.

Η έννοια της λείας νόρμας είναι συνδεδεμένη με την παραγωγισιμότητα της νόρμας και πιο συγκεκρίμενα με την Gâteaux παράγωγο. Έτσι για $x \in S_X, y \in X$ ορίζονται η αριστερή και η δεξιά παράγωγος της νόρμας στο x κατά την κατεύθυνση y ως

$$G_-(x,y) = \lim_{t \to 0^-} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$$

και

$$G_+(x,y) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$$

αντίστοιχα. Τα δύο αυτά όρια υπάρχουν λόγω της κυρτότητας της

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(t) = \|x+ty\|$$

και όταν είναι ίσα σε κάθε κατεύθυνση τότε ο X είναι λείος στο x και για το όριο ισχύει

$$G(x,y) = \text{Re}\langle x^*, y\rangle,$$

σε κάθε κατεύθυνση (θεώρημα S. Banach). Επίσης, αν το όριο υπάρχει τότε ανήκει στο $\mathcal{J}(x)$. Για περισσότερα παραπέμπουμε στο [[20], σελ 486]. Εξίσου σημαντική πληροφορία για τα παραπάνω μας δίνει και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.1.4. Έστω X χώρος με νόρμα και $x \in S_X$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

i) Ο X είναι λείος στο x.

ii) Το $\mathcal{J}(x)$ είναι μονοσύνολο.

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι λείος στο $x \in S_X$ και $x_1^*, x_2^* \in \mathcal{J}(x), x_1^* \neq x_2^*$.Τότε

$$\langle x_1^*, x\rangle = \|x_1^*\|\|x\| = \|x\|^2 = 1$$

και

$$\langle x_2^*, x\rangle = \|x_2^*\|\|x\| = \|x\|^2 = 1,$$

το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι ο χώρος είναι λείος. Έστω τώρα ότι $x \in X$, με $\mathcal{J}(x)$ να είναι μονοσύνολο και ότι ο X δεν είναι λείος στο x. Έχουμε ότι υπάρχουν $x_1^*, x_2^* \in X^*$ με $x_1^* \neq x_2^*$, $\|x_1^*\| = \|x_2^*\| = 1$ και

$$\langle x_1^*, x\rangle = \|x\| = \langle x_2^*, x\rangle.$$

Τότε αν

$$y_1^* = x_1^*\|x\|,$$
$$y_2^* = x_2^*\|x\|,$$

έχουμε ότι $y_1^*, y_2^* \in \mathcal{J}(x)$, το οποίο είναι άτοπο. ■

Σχόλιο: Βέβαια τα παραπάνω είναι ισοδύναμα με την Gâteaux παραγωγισιμότητα της νόρμας. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [[8], σελ. 4].

Ορισμός 1.1.4. Αν X χώρος με νόρμα τότε ο X καλείται αυστηρά κυρτός αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $\|x\| = \|y\| = 1$ ισχύει ότι

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1, \forall \lambda \in (0,1).$$

Παρατήρηση 1. Μπορεί κανείς να δεί ότι το παραπάνω είναι ισοδύναμο με το ότι ο X είναι αυστηρά κυρτός αν και μόνο αν η σφαίρα του δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα.

Πρόταση 1.1.5. Έστω X χώρος με νόρμα, ο οποίος είναι αυστηρά κυρτός. Τότε για κάθε $x^* \in X^*$ που έχει μεγιστικό στοιχείο πάνω στην μπάλα του X, αυτό πρέπει να είναι μοναδικό. Κατά συνέπεια η δυϊκή απεικόνιση είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω ένα $x^* \in X^*$ που έχει μεγιστικό στοιχείο και x_1, x_2 δύο διαφορετικά μεγιστικά στοιχεία του, δηλαδή $\langle x^*, x_1\rangle = \langle x^*, x_2\rangle = \|x^*\|$ και $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Αν $\lambda \in (0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|x^*\| &= \lambda\|x^*\| + (1-\lambda)\|x^*\| \\
&= \lambda\langle x^*, x_1\rangle + (1-\lambda)\langle x^*, x_2\rangle \\
&= \langle x^*, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\rangle \\
&\leq \|x^*\|\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| \\
\Rightarrow 1 &\leq \|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| < 1.
\end{aligned}$$

Άτοπο. Επομένως, $\mathcal{J}(x_1) \neq \mathcal{J}(x_2)$ αν $x_1 \neq x_2$. Γενικά ισχύει και το αντίστροφο. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [[7], σελ. 41]. ∎

Ας δούμε στο παρακάτω θεώρημα την δυϊκότητα των εννοιών της αυστηρής κυρτότητας και της λείας νόρμας.

Θεώρημα 1.1.6. Αν ο X^* είναι αυστηρά κυρτός (αντ. λείος) τότε ο X είναι λείος (αντ. αυστηρά κυρτός).

Απόδειξη. Έστω ότι ο X^* είναι αυστηρά κυρτός και ο X δεν είναι λείος. Τότε υπάρχει $x \in X$ και $x_1^*, x_2^* \in X^*$ με $x_1^* \neq x_2^*$ και $\|x_1^*\| = \|x_2^*\| = 1$ τέτοια ώστε $\langle x_1^*, x\rangle = \langle x_2^*, x\rangle = \|x\|$, το οποίο είναι άτοπο από την προηγούμενη πρόταση.

Έστω τώρα ότι ο X^* είναι λείος και ότι ο X δεν είναι αυστηρά κυρτός. Τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ και $x_1 \neq x_2$, με $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ τέτοια ώστε

$$\langle x^*, x_1\rangle = \langle x^*, x_2\rangle = \|x^*\|.$$

Επειδή όμως λόγω της κανονικής εμφύτευσης τα $x_1, x_2 \in X^{**}$, ο X^* δεν μπορεί να είναι λείος γιατί το παραπάνω γεγονός αντιφάσκει με αυτήν την υπόθεση. ∎

Πόρισμα 1. Αν ο X είναι ανακλαστικός τότε ο X είναι αυστηρά κυρτός (αντ. λείος) αν και μόνον αν ο X^* είναι λείος (αντ. αυστηρά κυρτός).

Θεώρημα 1.1.7. Έστω X μιγαδικός χώρος Banach όπου η δυϊκή απεικόνιση είναι μονοσύνολο και 1-1. Τότε η $\mathcal{J}(x)$ είναι αντί-γραμμική αν και μόνον αν ο X είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.

Απόδειξη. Εάν ο X είναι χώρος Hilbert τότε από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι η $\mathcal{J}(x) : X \to X^*$ είναι αντί-γραμμικός τελεστής με

$$\mathcal{J}(x) = f_x = \langle \cdot, x \rangle \in X^*, x \in X,$$

σύμφωνα με τον οποίο ο X είναι αντί-γραμμικά ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του. Αντίστροφα τώρα αν η $\mathcal{J}(x)$ είναι αντί-γραμμική έχουμε

$$\|x + y\|^2 = \langle \mathcal{J}(x) + \mathcal{J}(y), x + y \rangle =$$

$$\langle \mathcal{J}(x), x \rangle + \langle \mathcal{J}(x), y \rangle + \langle \mathcal{J}(y), x \rangle + \langle \mathcal{J}(y), y \rangle$$

και

$$\|x - y\|^2 = \langle \mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(y), x - y \rangle =$$

$$\langle \mathcal{J}(x), x \rangle - \langle \mathcal{J}(x), y \rangle - \langle \mathcal{J}(y), x \rangle + \langle \mathcal{J}(y), y \rangle.$$

Επομένως φαίνεται ότι ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου και άρα από το θεώρημα von Neumann-Jordan ο X είναι χώρος εσωτερικού γινομένου. ∎

1.2 Η Birkhoff-James ορθογωνιότητα.

1.2.1 Ορισμός και βασικά στοιχεία.

Θα πέρασουμε τώρα σε ένα θέμα που αφορά την ορθογωνιότητα σε χώρους με νόρμα και πιο συγκεκριμένα την Birkhoff-James ορθογωνιότητα. Επειδή σε ένα χώρο Hilbert δύο διανύσματα x, y είναι ορθογώνια αν $\langle x, y \rangle = 0, x, y \in H$, καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να αναζητήσουμε άλλους ορισμούς για την ορθογωνιότητα μιάς και δεν είναι απαραίτητο ότι η νόρμα προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.

Αυτό που πετυχαίνουμε με την Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι μια πιο αφηρημένη μορφή καθετότητας η οποία όμως πρακτικά δεν είναι κάτι παράλογο το οποίο μπορεί να συμβαίνει μεταξύ δύο διανυσμάτων. Διαισθητικά όμως, θα δούμε ότι πολλές από τις ιδιότητες της δεν μας είναι και πολύ εύκολο να τις συλλάβουμε. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που δουλεύτηκαν από τον James [13].

Ορισμός 1.2.1. Έστω X μιγαδικός χώρος με νόρμα και $x, y \in X$. Λέμε ότι το x είναι ορθογώνιο κατά Birkhoff-James στο y αν

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ουσιαστικά αυτό που ισχυρίζεται αυτός ο ορισμός είναι ότι αν η πλευρά x έχει μήκος μικρότερο ή ίσο της υποτείνουσας $x + \lambda y, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ τότε το x είναι ορθογώνιο στο y. Κάτι το οποίο δεν μας φαίνεται περίεργο από την εποπτεία μας στους Ευκλείδειους χώρους.

Αυτό που αναφέραμε και νωρίτερα και έχει μεγάλη σημασία είναι το πως διαφοροποιείται αυτή η ορθογωνιότητα από την συνήθη ορθογωνιότητα και πότε συμπίπτει με αυτήν. Θα αναφέρουμε κάποιες βασικές ιδιότητες που όμως στα σχήματα δεν μπορούν να αποτυπωθούν όλες και είναι πολύ εύκολο κάποιος να ξεγελαστεί για αυτό το λόγο.

Παρατήρηση 2. Για την Birkhoff-James ορθογωνιότητα αν $x, y, z \in X$ έχουμε:

i) Αν $x \perp_{BJ} x$ τότε $x = 0$.

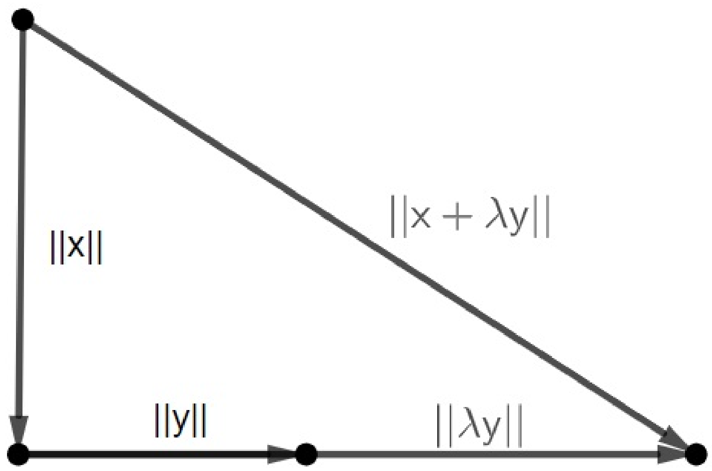
ii) Αν $x \perp_{BJ} y$ τότε $x \perp_{BJ} ay, \forall a \in \mathbb{C}$. (Ομογενής)

iii) Αν $x \perp_{BJ} y$ τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι $y \perp_{BJ} x$. (Μη συμμετρική)

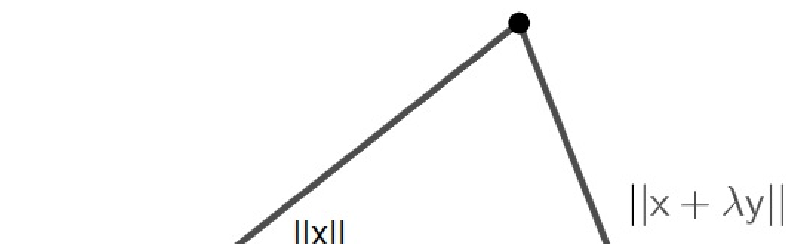
iv) Αν $x \perp_{BJ} y$ και $x \perp_{BJ} z$ τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι $x \perp_{BJ} y + z$. (Μη προσθετική)

v) Αν $y_n \in X$ με $y_n \to y$ και $x \perp_{BJ} y_n$ τότε $x \perp_{BJ} y$. Δηλαδή το σύνολο των στοιχείων στα οποία το x είναι ορθογώνιο είναι κλειστό.

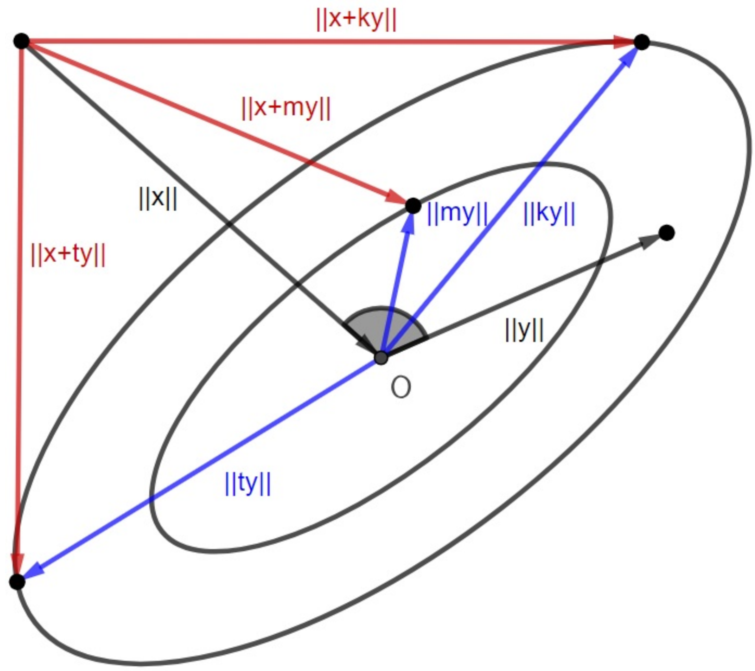
Δείτε ότι ικανοποιείται ο ορισμός της Birkhoff-James ορθογωνιότητας για πραγματικές τιμές του λ στο σχήμα 1.1 ενώ στο 1.2 αποτυγχάνει, ενώ για μιγαδικές τιμές αντίστοιχα στα 1.3 και 1.4.



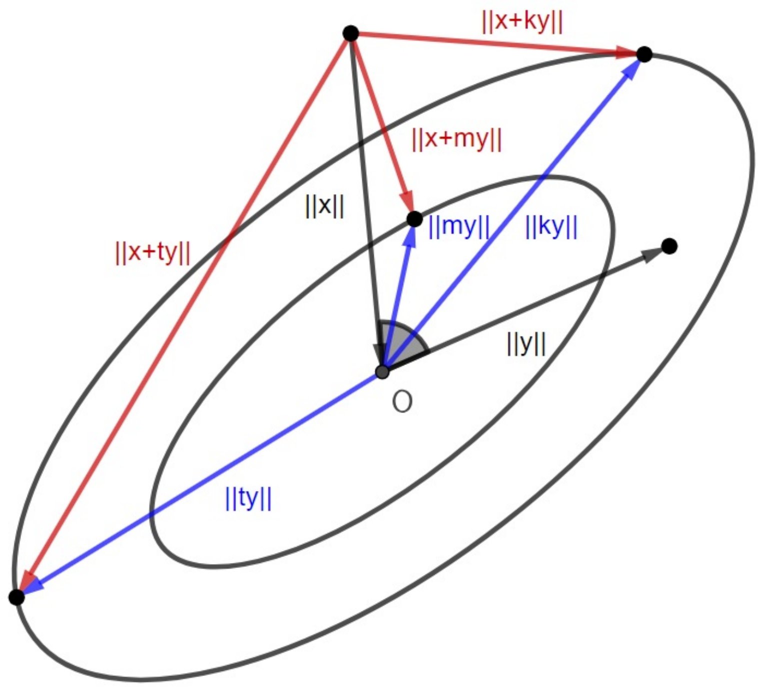
Σχήμα 1.1: Ορθή γωνία, $\lambda \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 1.2: Οξεία γωνία, $\lambda \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 1.3: Ορθή γωνία, $\lambda \in \mathbb{C}$.



Σχήμα 1.4: Αμβλεία γωνία, $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.2.2 Το θεώρημα ορθογωνιότητας του James.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την σχέση της Birkhoff-James ορθογωνιότητας με τα γραμμικά συναρτησοειδή. Πολλές από τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά αυτής της ορθογωνιότητας είναι συνέπειες της συμπεριφοράς του δυϊκού χώρου και της σφαίρας του X. Παρατηρείστε στο θεώρημα του James τη σύνδεση της ορθογωνιότητας με τα μεγιστικά στοιχεία. Θα δώσουμε όμως πρώτα έναν ορισμό.

Ορισμός 1.2.2. Έστω X χώρος με νόρμα, Y υποσύνολο του X και $x \notin Y$. Τότε το x είναι ορθογώνιο κατά Birkhoff-James στο Y αν είναι ορθογώνιο σε κάθε $y \in Y$.

Θεώρημα 1.2.1. (R. C. James). Έστω $f \neq 0$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές σε ένα χώρο με νόρμα X. Τότε έχουμε $x \perp_{BJ} Kerf$ αν και μόνον αν

$$|\langle f, x\rangle| = \|f\|\|x\|.$$

Επιπλέον αν το x είναι ορθογώνιο κατά Birkhoff-James σε έναν υπόχωρο N τότε υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησοσειδές f για το οποίο

$$\langle f, x\rangle = \|f\|\|x\|, \langle f, y\rangle = 0, \forall y \in N.$$

Κατά συνέπεια ο N περιέχεται στο υπερεπίπεδο του πυρήνα του f.

Απόδειξη. Έστω $x \perp_{BJ} Kerf$ και $|\langle f, x\rangle| = p\|x\|$. Τότε

$$\|x + y\| \geq \|x\|, \forall y \in Kerf$$

και συνεπώς

$$|\langle f, x + y\rangle| = |\langle f, x\rangle| = p\|x\| \leq p\|x + y\|.$$

Αφού ο $Kerf$ είναι υπόχωρος συνδιάστασης 1 έχουμε ότι $|\langle f, z\rangle| \leq p\|z\|, \forall z \in X$. Επομένως, $\|f\| = p$ και $|\langle f, x\rangle| = \|f\|\|x\|$.

Αντιστρόφως τώρα, αν $|\langle f, x\rangle| = \|f\|\|x\|$ έχουμε ότι

$$|\langle f, x + y\rangle| = |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x + y\|, \forall y \in Kerf.$$

Δηλαδή $\|x\| \leq \|x + y\|, \forall y \in Kerf$.

Για το δεύτερο έστω $x \notin N$ όπως στην διατύπωση. Ορίζουμε

$$Z =< x_0 \cup N >$$

και

$$f : X \to \mathbb{C}, \langle f, \lambda x_0 + y\rangle = \lambda\|x_0\|.$$

Η f είναι γραμμική, μηδενίζεται πάνω στον N και

$$|\langle f, z\rangle| = \|z\| \leq \|z + y\|, z \in< x_0 >, y \in N.$$

Από το θεώρημα Hahn-Banach η f επεκτείνεται γραμμικά σε μια $g : X \to \mathbb{C}$, ώστε $|\langle g, x\rangle| \leq \|x\|$ για όλα τα $x \in X$. Επιπλέον, $\langle g, x_0\rangle = \langle f, x_0\rangle = \|x_0\|$ άρα $\|\langle g, \frac{x_0}{\|x_0\|}\rangle\| = 1$. Επομένως, $\|g\| = 1$. Άρα υπάρχει συναρτησοειδές f (χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό) τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$, $\langle f, x\rangle = \|x\|, \|f\| = 1$. Επίσης, για κάθε $f \in X^*$ με $\|f\| \leq 1$ έχουμε ότι

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\|$$

δηλαδή $\langle f, x\rangle \leq \|x\|$ και άρα $\|x\| = \sup\{\langle f, x\rangle : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}$. Όμως αυτό το supremum πιάνεται από κάποιο f στον δυϊκό όπως είδαμε και άρα

$$\|x\| = \max\{\langle f, x\rangle : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}$$

ισοδύναμα

$$\|x\| = \max\{\langle f, \frac{x}{\|f\|}\rangle : f \in X^*\}$$

και άρα υπάρχει f τέτοιο ώστε $\langle f, x\rangle = \|f\|\|x\|, \langle f, y\rangle = 0, \forall y \in N$ επιλέγοντας αυτό που πιάνει το max. ■

Παρατήρηση 3. Το παραπάνω συνεπάγεται ότι κάθε $x \in X$ είναι ορθογώνιο κατά Birkhoff-James σε κάποιο $Kerf$ ή αλλιώς κάποιο υπερεπίπεδο που περνάει από το 0. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει, δηλαδή δεν υπάρχει $x \perp_{BJ} Kerf$ για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Αυτό το πρόβλημα είναι συνδεδεμένο με την εύρεση μεγιστικών στοιχείων.

Μια ακόμη συνέπεια των προηγούμενων είναι το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2. Έστω $x, y \in X$. Τότε $x \perp_{BJ} y$ αν και μόνον αν

$$\exists x^* \in \mathcal{J}(x) : \langle x^*, y\rangle = 0.$$

Απόδειξη. Αν $x \perp_{BJ} y$ τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει $f \in X^*$ με

$$\langle f, x\rangle = \|f\|\|x\|, \langle f, y\rangle = 0.$$

Άρα αν $x^* = \frac{\|x\|}{\|f\|} f$ έχουμε ότι

$$\langle x^*, x\rangle = \langle \frac{\|x\|}{\|f\|} f, x\rangle = \frac{\|x\|}{\|f\|}\|f\|\|x\| = \|x\|^2$$

όπως επίσης $\|x^*\| = \|x\| \Rightarrow x^* \in \mathcal{J}(x)$ και $\langle x^*, y\rangle = 0$.

Αντιστρόφως τώρα αν $x^* \in \mathcal{J}(x)$ και $\langle x^*, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x^*, \lambda y\rangle = 0, \lambda \in \mathbb{C}$. Επιπλέον,

$$\|x\|^2 = \langle x^*, x\rangle = \langle x^*, x + \lambda y\rangle \leq \|x^*\|\|x + \lambda y\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

αφού $x^* \in \mathcal{J}(x)$. ■

Θα δούμε τώρα ότι σε χώρους Hilbert και γενικότερα σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο αυτή η ορθογωνιότητα είναι ισοδύναμη με την συνήθη ορθογωνιότητα. Επομένως, σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο ανακτάει τις προαναφερθείσες ιδιότητες. Μπορούμε να συγκρίνουμε την επόμενη πρόταση με τα αποτελέσματα του προηγούμενου πορίσματος και του θεωρήματος 1.1.7.

Θεώρημα 1.2.2. Αν H χώρος Hilbert και $x, y \in H$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο του H, τότε έχουμε $\langle x, y \rangle = 0$ αν και μόνον αν

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \lambda^2 \|y\|^2. \tag{1.1}$$

Αν $\langle x, y \rangle = 0$ τότε

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2$$

το οποίο συνεπάγεται $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Αντιστρόφως τώρα αν για $x, y \in H$ ισχύει $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε από την **(1.1)** για $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$, ότι

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq 0.$$

Επομένως $\langle x, y \rangle = 0$. ■

1.2.3 Ορθογωνιότητα υπόχωρων.

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την ορθογωνιότητα υπόχωρων. Για έναν γραμμικό υπόχωρο M του X, ορίζουμε τον ορθογώνιο υπόχωρο στον M, που είναι υπόχωρος του δυϊκού με την εξής ιδιότητα

$$M^{\perp} = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = 0, \forall x \in M\}.$$

Το παραπάνω σύνολο περιέχει τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται πάνω στον M. Γενικότερα για δύο υπόχωρους M, N ο $M \perp_{BJ} N$ αν

$$\|x\| \leq \|x + y\|, \forall x \in M, y \in N.$$

Αυτό φαίνεται αμέσως αφού ο N είναι υπόχωρος απορροφάει τα πολλαπλάσια κάθε διανύσματος μέσα σε αυτόν. Μπορούμε να δούμε ότι το παραπάνω είναι ισοδύναμο με το ότι $M \cap N = \{0\}$ και η προβολή επί του M και κατά μήκος του N έχει νόρμα ίση με 1. Ας τα διατυπώσουμε αυτά για λόγους πληρότητας σε μια πρόταση και να δώσουμε αμέσως μετά ένα εξίσου χρήσιμο χαρακτηρισμό για την ορθογωνιότητα υπόχωρων.

Θεώρημα 1.2.3. Έστω X χώρος Banach και M, N υπόχωροι του X. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

i) Ο M είναι ορθογώνιος κατά Birkhoff-James στον N.

ii) Έχουμε $M \cap N = \{0\}$ και υπάρχει προβολή P επί του M κατά μήκος του N με $\|P\| = 1$.

Απόδειξη. i)$\Rightarrow$ ii) Αν $x \in M$ τότε ισχύει

$$\|x\| \leq \|x+y\|, \forall y \in N.$$

Αν $M \cap N \neq \{0\}$ τότε $\exists z \in M \cap N, z \neq 0$. Αφού $z \in M$

$$\Rightarrow \|z\| \leq \|z+y\|, \forall y \in N.$$

Αφού N υπόχωρος και $z \in N \Rightarrow -z \in N$ και άρα αν $y = -z$

$$\Rightarrow \|z\| \leq \|z-z\| = 0 \Rightarrow \|z\| = 0 \Rightarrow z = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Αφού $M \cap N = \{0\}$ ορίζουμε

$$Z = M + N$$

και

$$P : Z \to M$$

με

$$P(z) = x, x \in M, P(z) = 0, z \in N.$$

Τότε

$$\|P(z)\| = \|P(x+y)\| = \|x\| \leq \|x+y\| = \|z\| \Rightarrow \|P\| \leq 1.$$

Επιπλέον αν $x \in M$ τότε

$$\|P(x)\| = \|x\| \Rightarrow \|P\| \geq 1$$

δηλαδή $\|P\| = 1$.

ii)$\Rightarrow$ i) Αν $M \cap N = \{0\}$ και

$$P : M + N \to M$$

με $\|P\| = 1$, τότε για $z \in M + N, z = x + y, x \in M, y \in N$ έχουμε

$$\|x\| = \|P(z)\| = \|P(x+y)\| \leq \|P\|\|x+y\| = \|x+y\|.$$

■

Πρόταση 1.2.4. Έστω X χώρος με νόρμα και M, N γραμμικοί υπόχωροι του X. Τότε αν M^* γραμμικός υπόχωρος του $N^\perp$ έχουμε ότι $M \perp_{BJ} N$.

Απόδειξη. Παρατηρείστε απλά ότι αν $x \in M$ και $x^* \in \mathcal{J}(x)$ τότε $x^* \in M^*$. Επειδή $\langle x^*, y\rangle = 0, \forall y \in N$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Πρόταση 1.2.5. Έστω X χώρος Banach και M, N κλειστοί υπόχωροι με M κάθετος κατά Birkhoff-James στον N. Τότε, ο $M \oplus N$ είναι κλειστός στον X.

Απόδειξη. Έστω $x_n \in M \oplus N$ βασική ακολουθία. Άρα υπάρχουν $y_n \in M, z_n \in N$ τέτοιες ώστε: $x_n = y_n + z_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Όμως,

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \|(y_n - y_m) + (z_n - z_m)\| \geq \|P((y_n - y_m) + (z_n - z_m))\| \\ &= P(y_n - y_m) + P(z_n - z_m) = P(y_n - y_m) = \|y_n - y_m\|.\end{aligned}$$

Άρα η y_n είναι βασική ακολουθία αφού είναι και η x_n. Εφόσον ο M είναι κλειστός υπάρχει $y \in M$ τέτοιο ώστε $y_n \to y$. Αφού η x_n βασική και ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$. Όμως τότε

$$z_n = x_n - y_n \to x - y = z \in N,$$

αφού N κλειστός. Επομένως, $x_n \to x = y + z \in M \oplus N$. Δηλαδή, $M \oplus N$ κλειστός στον X. ■

Πρόταση 1.2.6. Έστω X χώρος Banach και M, N κλειστοί υπόχωροι τέτοιοι ώστε

$$M^* = N^\perp, N^* = M^\perp.$$

Τότε

$$X = M \oplus N.$$

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε πρώτα τα εξής: ο M^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $X^*/M^\perp$, ο $(X/M)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $M^\perp$ και ο M^{**} είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $M^{\perp\perp}$. Αντίστοιχα και για τον N. Για την απόδειξη των παραπάνω παραπέμπουμε στο [[20], σελ. 94, 95, 102].

Επειδή $M^* = N^\perp$ έχουμε ότι ο $M \perp_{BJ} N$. Επιπλέον επειδή ο M^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $X^*/M^\perp$ είναι και με τον X^*/N^* και άρα $(X^*/N^*)^* = M^{**}$. Όμως,

$$(X^*/N^*)^* = (N^*)^\perp \Rightarrow (N^*)^\perp = M^{**} \Rightarrow M^* \perp_{BJ} N^*$$

άρα ο $M^* \oplus N^*$ είναι κλειστός. Έστω τώρα ότι

$$X \neq M \oplus N.$$

Τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε να μηδενίζεται πάνω στον $M \oplus N$. Δηλαδή

$$x^* \in M^\perp, x^* \in N^\perp \Rightarrow x^* \in M^* \cap N^*.$$

Όμως ο $M^* \oplus N^*$ είναι κλειστός που σημαίνει ότι $M^* \cap N^* = \{0\}$ και άρα $x^* = 0$, το οποίο είναι άτοπο. ■

1.2.4 Ιδιότητες της Birkhoff-James ορθογωνιότητας.

Θα δούμε τώρα ένα θέμα που επιμείναμε εξ'αρχής όσον αφορά την ιδιότροπη συμπεριφορά αυτής της πιό αφηρημένης μορφής ορθογωνιότητας, δηλαδή τις ιδιότητες της. Αυτό που θα διαπιστώσουμε σύντομα είναι ότι η του χώρου και πιο συγκεκριμένα η δράση των συναρτησοειδών του δυϊκού είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ορθογωνιότητα Birkhoff-James. Ήδη από το θεώρημα του James [13] έγινε μια εισαγωγή σε αυτό, οπότε ότι θα ακολουθήσει θα μας έρθει πιο φυσιολογικά μιας και έχουμε μια πρώτη επαφή με την σχέση της ορθογωνιότητας και του υπερεπιπέδου.

Ορισμός 1.2.3. Σε ένα χώρο με νόρμα X η ορθογωνιότητα Birkhoff-James είναι από δεξία (αντ. αριστερά) μοναδική αν και μόνον αν για κανένα $x \in X, x \neq 0$ και $y \in X$ δεν υπάρχει παραπάνω από ένας αριθμός $a \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $x \perp_{BJ} ax+y$ (αντ. $ax + y \perp_{BJ} x$).

Δηλαδή αν η ορθογωνιότητα είναι συμμετρική τότε είναι από δεξιά μοναδική αν και μόνον αν είναι από αριστερά.

Παρατήρηση 4. Αν ο χώρος είναι Hilbert τότε έχουμε

$$\langle x, ax + y\rangle = a\|x\|^2 + \langle x, y\rangle$$

δηλαδή $x \perp_{BJ} ax + y$ αν και μόνον αν $a = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}$.

Πόρισμα 3. Σε χώρο με νόρμα X υπάρχει ένας αριθμός $a = -\frac{\langle x^*,y\rangle}{\langle x^*,x\rangle}$ τέτοιος ώστε $x \perp_{BJ} ax + y$.

Απόδειξη. Αυτό διότι η καθετότητα αυτή ισχύει αν και μόνον αν υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\langle x^*, x\rangle = \|x\|, \|x^*\| = 1$ και το a ίσο με την ποσότητα που ορίσαμε, μιας και από το θεώρημα του James κάθε x είναι κάθετο σε κάποιο υπερεπίπεδο που περνάει από το 0. ∎

Πρόταση 1.2.7. Σε ένα χώρο με νόρμα ορθογωνιότητα Birkhoff-James είναι από δεξιά (αντ.αριστερά) μοναδική αν και μόνο αν ο χώρος είναι λείος (αντ. αυστηρά κυρτός).

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [[13], σελ. 274-275, θεώρημα 4.1, 4.3] ∎

Πόρισμα 4. Σε ένα ανακλαστικό χώρο Banach X η ορθογωνιότητα είναι από δεξιά (αντ. αριστερά) μοναδική στον X^* αν και μόνον αν είναι από αριστερά (αντ. δεξιά) στον X.

Το παραπάνω είναι άμεσο από το πόρισμα 1 και την προηγούμενη πρόταση.

Θεώρημα 1.2.8. Σε ένα χώρο με νόρμα X ορθογωνιότητα είναι αθροιστική αν και μόνον αν ο χώρος είναι λείος.

Απόδειξη. Αφού ο X είναι λείος η ορθογωνιότητα είναι μοναδική από δεξιά. Αν $x, y, z \in X$ με $x \perp_{BJ} y, x \perp_{BJ} z$ τότε τα y, z περίεχονται σε κάποιο υπερεπίπεδο στο οποίο το x είναι κάθετο, από το θεώρημα του James. Το υπερεπίπεδο αυτό είναι μοναδικό αν για κάθε y υπάρχει μοναδικός αριθμός $a \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $x \perp_{BJ} ax + y$. Τότε το $y + z$ ανήκει στο μοναδικό αυτό υπερεπίπεδο και άρα $x \perp_{BJ} y + z$. Αντιστρόφως τώρα, αν η ορθογωνιότητα είναι αθροιστική και

$$x \perp_{BJ} ax + y, x \perp_{BJ} bx + y$$

έχουμε $x \perp_{BJ} -(bx + y)$ και από την αθροιστικότητα $x \perp_{BJ} (a - b)x$. Επομένως έχουμε $\|x + \lambda(a - b)x\| \geq \|x\|$ το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ αν και μόνον αν $a = b$. ∎

1.3 Χώροι με ημιεσωτερικό γινόμενο.

1.3.1 Ορισμός-Βασικές ιδιότητες.

Θα κάνουμε τώρα μια εισαγωγή στους χώρους με ημιεσωτερικό γινόμενο. Ο Lumer [18] εισήγαγε την έννοια του ημιεσωτερικού γινομένου ώστε να μελετήσει τις ιδιότητες των τελεστών σε ένα χώρο με νόρμα σε όσο δυνατόν περισσότερη αναλογία με τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο. Πολλές χρήσιμες ιδιότητες αποδείχθηκαν από τον Giles [10] και έτσι η χρησιμότητα τους φαίνεται ειδικά όταν κάποιος προσπαθεί να χρησιμοποιήσει επιχειρήματα παρόμοια με αυτά στους χώρους Hilbert. Πλέον, η θεωρία αυτών των χώρων έχει αναπτυχθεί σε μεγάλο βαθμό οπότε κάποιος μπορεί να βρει περισσότερα στο [8].

Ορισμός 1.3.1. (G. Lumer). Έστω X μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Καλούμε ημιεσωτερικό γινόμενο μια απεικόνιση $[\cdot, \cdot] : X \times X \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

i) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z], \forall x, y \in X$.

ii) $[\lambda x, y] = \lambda[x, y], \forall x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

iii) $[x, x] \geq 0$, $\forall x \in X$ και $[x, x] = 0 \Rightarrow x = 0$.

iv) $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y], \forall x, y \in X$.

v) $[x, \lambda y] = \bar{\lambda}[x, y], \forall x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παρατήρηση 5. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι το ημιεσωτερικό γινόμενο δεν είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή όπως επίσης δεν είναι αντισυμμετρικό. Δηλαδή δεν ισχύουν οι σχέσεις:

i) $[f, g + h] = [f, g] + [f, h]$.

ii) $[f, g] = \overline{[g, f]}$.

Πρόταση 1.3.1. Έστω X μιγαδικός διανυσματικός χώρος και $[\cdot, \cdot]$ ημιεσωτερικό γινόμενο στον X. Τότε ισχύουν τα εξής:

i) Η $\|x\| := [\cdot, \cdot]^{\frac{1}{2}}, \forall x \in X$ είναι μια νόρμα στον X.

ii) Έχουμε ότι $\forall y \in X$ το συναρτησοειδές $f_y \to [x, y] \in \mathbb{C}, x \in X$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον X συμβατό με την νόρμα που ορίσαμε. Ακόμη, $\|f_y\| = \|y\|$.

Απόδειξη. i) Έστω $x \in X$, τότε $\|x\| = [x,x]^{\frac{1}{2}} \geq 0$ και αν $\|x\| = 0$, τότε

$$[x,x] = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Αν $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $\|\lambda x\| = [\lambda x, \lambda x]^{\frac{1}{2}} = (\lambda\bar{\lambda})^{\frac{1}{2}}[x,x]^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|x\|$.

Τώρα αν $x, y \in X$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= [x+y, x+y] = |[x, x+y] + [y, x+y]| \\ &\leq |[x, x+y]| + |[y, x+y]| \\ &\leq \|x\|\|x+y\| + \|y\|\|x+y\| \\ \Rightarrow \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

ii) Από τις ιδιότητες i) και ii) του ορισμού του ημιεσωτερικού γινομένου φαίνεται η γραμμικότητα του συναρτησοειδούς. Από την Cauchy-Schwarz έχουμε $|f_y(x)| \leq \|x\|\|y\|, \forall x \in X$. Άρα το f είναι φραγμένο με $\|f_y(x)\| \leq \|y\|$. Όμως, ισχυεί ότι

$$\|f_y\| \geq \frac{f_y(y)}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|.$$

Επομένως, $\|f_y\| = \|y\|$.

■

1.3.2 Η σύνδεση με την δυϊκή απεικόνιση.

Αφού αποδείξαμε τις βασικές ιδιότητες του ημιεσωτερικού γινομένου ως προς τη νόρμα είμαστε σε θέση να εκφράσουμε το ημιεσωτερικό γινόμενο με βάση την δυϊκή απεικόνιση.

Θεώρημα 1.3.2. (I. Rosca). Αν X χώρος με νόρμα, τότε κάθε ημιεσωτερικό γινόμενο συμβατό με τη νόρμα είναι της μορφής:

$$[x,y] = \langle y^*, x\rangle \forall x, y \in X,$$

με $y^* \in J(y)$.

Απόδειξη. Έστω $y^* \in J(y)$. Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές

$$[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{C},$$

$$[x,y] = \langle y^*, x\rangle.$$

Θα δείξουμε ότι το συναρτησοειδές $[\cdot,\cdot]$ που δίνεται από την παραπάνω δράση πάνω στα στοιχεία του X είναι όντως ένα ημιεσωτερικό γινόμενο. Έχουμε

$$[ax+by, z] = \langle z^*, ax+by\rangle = a\langle z^*, x\rangle + b\langle z^*, y\rangle = a[x,z] + b[y,z],$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ και $x, y, z \in X$. Δηλαδή έχουμε τις ιδιότητες i), ii).

Αν $x^* \in J(x)$ τότε,

$$[x, x] = \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2 \geq 0, \forall x \in X.$$

Ακόμη,

$$[x, x] = \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Επομένως ισχύει και η τρίτη ιδιότητα. Για τις άλλες δύο έχουμε αν $x, y \in X$ και $a \in \mathbb{C}$.

$$|[x, y]|^2 = |\langle y^*, x\rangle|^2 \leq \|y^*\|^2\|x\|^2 = \|y\|^2\|x\|^2 = [y, y][x, x].$$

Επίσης, για $y^* \in J(ay)$ τότε

$$[x, ay] = \langle \bar{a}y^*, x\rangle = \bar{a}\langle y^*, x\rangle = \bar{a}[x, y],$$

αφού η δυϊκή απεικόνιση είναι αντιομογενής. Συνεπώς δείξαμε ότι το παραπάνω είναι όντως ένα ημιεσωτερικό γινόμενο συμβατό με τη νόρμα του X.

Αντιστρόφως τώρα, υποθέτουμε ότι το $[\cdot, \cdot]$ είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X συμβατό με την νόρμα. Ορίζουμε την απεικόνιση, $\tilde{J} : X \to X^*$ η οποία δίνει το συναρτησοειδές με την δράση

$$\langle f_y, x\rangle = [x, y], \forall x, y \in X.$$

Τότε

$$\langle f_x, x\rangle = [x, x] = \|x\|^2, \|f_x\| = \|x\|,$$

από το ii) της προηγούμενης πρότασης. Συνεπώς,

$$\langle f_x, x\rangle = \|x\|^2,$$

και

$$\|f_x\| = \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow f_x \in J(x)$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί αφού το f_x είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές στην δυϊκή απεικόνιση.

■

Πόρισμα 5. Από το θεώρημα I. Rosca το ημιεσωτερικό γινόμενο είναι μοναδικό αν και μόνον αν ο χώρος είναι λείος.

Ορισμός 1.3.2. (J. R. Giles). Αν $[\cdot, \cdot]$ είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο σε ένα γραμμικό χώρο X τότε το $[\cdot, \cdot]$ λέμε ότι είναι συνεχές αν ισχύει ότι

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{Re}[y, x + ty] = \mathrm{Re}[y, x], \forall x, y \in X.$$

Μια σημαντική γεωμετρική ιδιότητα των χώρων με νόρμα η οποία συνδέεται με την συνέχεια του ημιεσωτερικού γινομένου είναι η παρακάτω.

Θεώρημα 1.3.3. Έστω X χώρος με νόρμα και $[\cdot, \cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο συμβατό με τη νόρμα. Τότε το $[\cdot, \cdot]$ είναι συνεχές αν και μόνον αν ο X είναι λείος.

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [[8], σελ. 22]. ■

1.3.3 Ορθογωνιότητα σε χώρους ημιεσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 1.3.3. (J. R. Giles). Έστω X χώρος με νόρμα και $[\cdot,\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X συμβατό με αυτήν. Ένα $x \in X$ είναι ορθογώνιο, ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο, στο y αν

$$[y, x] = 0.$$

Παρατήρηση 6. Από τις ιδιότητες του ημιεσωτερικού γινομένου φαινέται ότι:

i) Αν x κάθετο στον εαυτό του τότε $x = 0$.

ii) Αν x κάθετο στο y και $a \in \mathbb{C}$ τότε ax κάθετο στο y και x κάθετο στο ay.

iii) Ισχύει η αθροιστικότητα. Δηλαδή αν x κάθετο στο y και x κάθετο στο z τότε x κάθετο στο $y + z$.

Θα δείξουμε τώρα ένα σημαντικό θεώρημα το οποίο είναι ανάλογο με το θεώρημα αναπαραστάσης του Riesz σε χώρους Hilbert. Αυτό όμως που μας επιτρέπει να κάνουμε παρόμοιους συλλογισμούς είναι η έννοια της ορθογωνιότητας σε τέτοιους χώρους. Είναι εύκολο να δει κανείς τις ομοιότητες του παρακάτω θεωρήματος με το θεώρημα του James.

Θεώρημα 1.3.4. Έστω X χώρος με νόρμα και $[\cdot,\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X συμβατό με αυτήν. Αν $f : X \to \mathbb{C}$ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f \neq 0$ και $z \in X, z \neq 0$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

i) Το $z \perp Kerf$ ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο.

ii) Ισχύει η παρακάτω αναπαράσταση

$$\langle f, x\rangle = [x, \frac{\overline{\langle f, z\rangle}}{\|z\|^2} z].$$

Επιπλέον, $\|f\| = \frac{|\langle f,z\rangle|}{\|z\|}$ αν ισχύουν τα παραπάνω.

Απόδειξη. i) $\Rightarrow$ ii) Έστω $z \perp Kerf$ ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο. Τότε $[y, z] = 0, \forall y \in Kerf$. Αν $x \in X$ και $y = \langle f, x\rangle z - \langle f, z\rangle x$. Τότε $y \in Kerf$ και επομένως,

$$[\langle f, x\rangle z - \langle f, z\rangle x, z] = 0, \forall x \in X.$$

Δηλαδή

$$\langle f, x\rangle = [x, \frac{\overline{\langle f, z\rangle}}{\|z\|^2} z], x \in X.$$

ii) $\Rightarrow$ i) Αν ισχύει η πάραπανω αναπαράσταση τότε επειδή $\langle f, z\rangle \neq 0$ έχουμε ότι

$$\langle f, x\rangle = [x, z] = 0, \forall x \in Kerf.$$

Δηλαδή $z \perp Kerf$.

Από το ii) της πρότασης 1.3.1. έχουμε την επιθυμητή εκτίμηση για την νόρμα του f.

■

Πρόταση 1.3.5. Έστω X χώρος με νόρμα και $[\cdot,\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X συμβατό με αυτήν. Αν $x, y \in X$ με $[x, y] = 0$ τότε το x είναι ορθογώνιο κατά Birkhoff-James στο y.

Απόδειξη. Άν $x, y \in X$ με $[x, y] = 0$ τότε

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = [x, x] = \mathrm{Re}[x, x + \lambda y] \leq \|x\|\|x + \lambda y\| \\ \Rightarrow \|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 7. Δείτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

Παράδειγμα 1.3.1. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τον $l^1(\mathbb{C})$ και το

$$[y, x] = \|x\| \sum_{x_k = 0} \frac{\overline{x_k} y_k}{|x_k|} x, y \in l^1(\mathbb{C}),$$

το οποίο είναι ένα σύνηθες ημιεσωτερικό γινόμενο στον $l^1(\mathbb{C})$. Έχουμε ότι αν

$$x = (i, 1, 0, ..., 0)$$

και

$$y = (2, i, 0, ..., 0),$$

τότε

$$\|x\| = 2, \|x + \lambda y\| = (1 + 4\lambda^2)^{\frac{1}{2}} + (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Όμως, $[y, x] = -2i \neq 0$.

Θεώρημα 1.3.6. (J. R. Giles). Σε ένα χώρο με συνεχές ημιεσωτερικό γινόμενο για $x, y \in X$ έχουμε $[y, x] = 0$ αν και μόνον αν $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, δηλαδή αν και μόνον αν το x είναι ορθογώνιο κατά Birkhoff-James στο y.

Απόδειξη. Την μια κατεύθυνση την έχουμε δείξει στην προηγούμενη πρόταση. Για το αντίστροφο τώρα αν

$$\|x + \lambda y\| - \|x\| \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

τότε

$$\|x + \lambda y\|^2 - \|x\|\|x + \lambda y\| \geq 0.$$

Επομένως,

$$\mathrm{Re}[x, x + \lambda y] + \mathrm{Re}\lambda[y, x + \lambda y] - |[x, x + \lambda y]| \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\lambda[y, x + \lambda y] \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Άρα για $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathrm{Re}[y, x + \lambda y] \geq 0, \lambda \geq 0$$

$$\mathrm{Re}[y, x + \lambda y] \leq 0, \lambda \leq 0.$$

Δηλαδή $\mathrm{Re}[y, x] = 0$ αφού $\mathrm{Re}[y, x + \lambda y] \to \mathrm{Re}[y, x]$ από την συνέχεια του ημιεσωτερικού γινομένου. Αν λ φανταστικός, δηλαδή $\lambda = i\mu, \mu \in \mathbb{R}$ τότε

$$\mathrm{Re}\lambda[y, x + \lambda y] = \mu \mathrm{Re}[iy, x + \mu i y] \geq 0.$$

Άρα $\mathrm{Im}[y, x] = \mathrm{Re}[iy, x] = 0$ από την συνέχεια του ημιεσωτερικού γινομένου και συνεπώς $[y, x] = 0$. ■

Κεφάλαιο 2

Αριθμητικά πεδία σε χώρους με νόρμα.

2.1 Αριθμητικό πεδίο στην Banach άλγεβρα των φραγμένων τελεστών.

2.1.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες.

Επειδή θα μας απασχολήσουν τα αριθμητικά πεδία των τελεστών ορισμένων σε ένα χώρο Banach X θα αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα που αφορούν την άλγεβρα των φραγμένων τελεστών $\mathcal{B}(X)$. Όσα θα αναφέρουμε βρίσκονται παραδοσιακά στο [4] εκτός αν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό. Θα συμβολίζουμε με κεφαλαία τα γραμμικά συναρτησοειδή που δρουν πάνω στον $\mathcal{B}(X)$ ελπίζοντας ότι δεν θα προκληθεί κάποιου είδους σύγχυση.

Ορισμός 2.1.1. Έστω η Banach άλγεβρα των φραγμένων τελεστών $\mathcal{B}(X)$. Έστω επίσης το μοναδιαίο στοιχείο της άλγεβρας I. Ακόμα θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα της άλγεβρας,

$$S_{\mathcal{B}(X)} = \{T \in \mathcal{B}(X) : \|T\| = 1\}.$$

Με βάση αυτά ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(T) = \{F \in S_{\mathcal{B}(X)^*} : F(T) = \|F\| = 1\},$$

η οποία είναι η δυϊκή απεικόνιση για την άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$, όπου $\mathcal{B}(X)^*$ είναι ο δυϊκός του $\mathcal{B}(X)$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$ και $S \in S_{\mathcal{B}(X)}$ ορίζουμε το σύνολο:

$$V(T, S, \mathcal{B}(X)) = \{F(T \circ S) : F \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(S)\}.$$

Με βάση αυτό φτιάχνουμε το αριθμητικό πεδίο ενός τελεστή ως προς την Banach άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ θεωρώντας:

$$V(T, \mathcal{B}(X)) = \bigcup\{V(T, S, \mathcal{B}(X)) : S \in S_{\mathcal{B}(X)}\}.$$

Δηλαδή συνθέτοντας τον T με όλες τις ισομετρίες.

Επιπλέον, το $v(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\}$ το καλούμε αριθμητική ακτίνα του T.

Πρόταση 2.1.1. Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$ και $V(T, \mathcal{B}(X))$ το αριθμητικό του πεδίο ως προς την Banach άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$. Ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.

i) $V(T + R, \mathcal{B}(X)) \subset V(T, \mathcal{B}(X)) + V(R, \mathcal{B}(X)), \forall R \in \mathcal{B}(X)$.

ii) $V(\lambda I + \mu T, \mathcal{B}(X)) = \lambda + \mu V(T, \mathcal{B}(X)), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

iii) $V(T, I, \mathcal{B}(X)) = \{F(T) : F \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(I)\}$, όπου I ο μοναδιαίος τελεστής.

Απόδειξη. Οι αποδείξεις των i), ii) προκύπτουν εύκολα από την γραμμικότητα των συναρτησοειδών ενώ της iii) από την δράση του τελεστή πάνω στον ταυτοτικό. ■

Πρόταση 2.1.2. Για το αριθμητικό πεδίο του $T \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε ότι: $V(T, \mathcal{B}(X)) = V(T, I, \mathcal{B}(X))$.

Απόδειξη. Αφού ο $I \in S_{\mathcal{B}(X)}$ έχουμε από την ιδιότητα iii) ότι $V(T, I, \mathcal{B}(X)) \subset V(T, \mathcal{B}(X))$. Έστω τώρα $\lambda \in V(T, ; B(X))$. Τότε υπάρχει $S \in \mathcal{B}(X)$, με $\|S\| = 1$ και $F \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(S)$ τέτοιο ώστε $\lambda = F(T \circ S)$. Ορίζουμε

$$G(R) = F(R \circ S), \forall R \in \mathcal{B}(X).$$

Όμως τότε $G \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(I)$ και επίσης

$$\lambda = F(T \circ S) = G(T) = G(T \circ I) \in V(T, I, \mathcal{B}(X)).$$

■

Πρόταση 2.1.3. Για κάθε $T \in \mathcal{B}(X)$ το $V(T, \mathcal{B}(X))$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Από την πρόταση 1.1.1. το

$$\mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(I) = \{F \in \mathcal{B}(X)^* : \|F\| = F(I) = 1\}$$

είναι w*-συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{B}(X)^*$. Η $j_T(F) = F(T)$ είναι w*-συνεχής αφού η w*-τοπολογία είναι η ασθενέστερη που κάνει την κανονική εμφύτευση συνεχή. Το $V(T, I.\mathcal{B}(X))$ είναι η εικόνα του $\mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(I)$ μέσω της j και άρα είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ ως συνεχής εικόνα συμπαγούς. Επίσης λόγω γραμμικότητας της j είναι και κυρτό. Τώρα από την πρόταση 2.2.2. έχουμε ότι και το $V(T, \mathcal{B}(X))$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. ■

2.1.2 Το κεντρικό θεώρημα του Lumer.

Κάποια πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά του αριθμητικού πεδίου μπορούν να φανούν μέσα από το θεώρημα που θα δώσουμε στη συνέχεια. Από την μια μπορούμε να δούμε πως καθορίζονται οι τιμές του αριθμητικού πεδίου με βάση τον γραμμικό υπόχωρο που παράγεται από τον T και τον I. Από την άλλη μεριά η σύνδεση της συμπεριφοράς του αριθμητικού πεδίου με την γεωμετρία της σφαίρας της Banach άλγεβρας των φραγμένων τελεστών γίνεται ορατή αφού εμφανίζεται η από δεξιά Gâteaux παράγωγος της νόρμας του $\mathcal{B}(X)$. Τα παρακάτω ισχύουν για μια οποιαδήποτε άλγεβρα με νόρμα θεωρώντας την πλήρη αφού το αριθμητικό πεδίο δεν αλλάζει όταν περνάμε στην πλήρωση του χώρου [[4], σελ. 16].

Θεώρημα 2.1.4. (G. Lumer). Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$, τότε ισχύει ότι:

$$\max\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\} = \inf\{\frac{\|I + aT\| - 1}{a}, a > 0\} = \lim_{a\to 0^+} \frac{\|I + aT\| - 1}{a}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\mu := \max\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\}$. Αν $a > 0$, και $F \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(I)$, τότε

$$F(T) = \frac{F(I + aT) - 1}{a}$$

και

$$\mathrm{Re}F(I) + a\mathrm{Re}F(T) = ReF(I + aT) \leq |F(I + aT)| \leq \|I + aT\|$$
$$\Rightarrow \mathrm{Re}F(T) \leq \frac{\|I + aT\| - 1}{a},$$

αφού $F \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(I) \Rightarrow F(I) = 1 \Rightarrow F \in V(T, I, \mathcal{B}(X)) = V(T, \mathcal{B}(X))$ και $F \in V(I + aT, \mathcal{B}(X))$. Επομένως, έχουμε ότι

$$\mu \leq \max\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\}. \tag{2.1}$$

Θεωρώντας τώρα $T \neq 0$ αφού για $T = 0$ ισχύει το θεώρημα. Αν $0 < a < \|T\|^{-1}$ τότε για $S \in S_{\mathcal{B}(X)}$ και $F \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(S)$ παίρνουμε ότι $1 - a\|T\| > 0$ και χρησιμοποιούμε ότι το πραγματικό μέρος οποιουδήποτε στοιχείου του αριθμητικού πεδίου έχει τιμή μικρότερη της νόρμας του T. Έτσι έχουμε ότι

$$0 < 1 - a\|T\| \leq 1 - a\mu \leq \mathrm{Re}F((I - aT) \circ S) \leq \|I - aT\|,$$

αφού $F((I - aT) \circ S) \in V(I - aT, \mathcal{B}(X))$. Δηλαδή αν γράψουμε τον S ως ένα στοιχείο $\frac{R}{\|R\|}$ έχουμε ότι

$$\|(I - aT) \circ R\| > (1 - a\mu)\|R\|, \forall R \in \mathcal{B}(X).$$

Παίρνοντας $R = I + aT$, έχουμε

$$\|I + aT\| \leq \frac{\|I - a^2T^2\|}{1 - a\mu} \leq \frac{1 + a^2\|T^2\|}{1 - a\mu}.$$

Επομένως, αφού $0 < a < \|T\|^{-1}$ έχουμε ότι

$$\frac{\|I + aT\| - 1}{a} \leq \frac{\mu + a\|T^2\|}{1 - a\mu}.$$

Αφού τώρα

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{\mu + a\|T^2\|}{1 - a\mu} = \inf\{\frac{\mu + a\|T^2\|}{1 - a\mu}, a > 0\} = \mu, (\mu \leq \|T\|)$$

έχουμε και από την **(2.1)** εξασφαλίσει την ισότητα των ποσοτήτων. ■

2.2 Το χωρικό αριθμητικό πεδίο.

2.2.1 Ορισμός και η σχέση του με το αλγεβρικό.

Στα επόμενα θα ορίσουμε το χωρικό αριθμητικό πεδίο (spatial numerical range) και θα δώσουμε κάποιες πολύ βασικές του ιδιότητες.

Ορισμός 2.2.1. (F. F. Bonsall). Έστω X χώρος με νόρμα και $\mathcal{J}(x)$ η δυϊκή απεικόνιση. Για κάθε $x \in S_X$ ορίζουμε το κατά σημείο χωρικό αριθμητικό πεδίο του T ως

$$V_x(T, x) = \{\langle f, Tx\rangle : f \in \mathcal{J}(x)\}.$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το χωρικό αριθμητικό πεδίο του T ως το σύνολο

$$V(T) = \bigcup_{x \in S_X} V_x(T, x).$$

Θα δείξουμε τώρα την πρώτη σημαντική ιδιότητα του χωρικού αριθμητικού πεδίου

Πρόταση 2.2.1. Έστω X χώρος με νόρμα και $T \in \mathcal{B}(X)$ τότε $V(T) \subset V(T, \mathcal{B}(X))$.

Απόδειξη. Έστω $x \in S_X$ και $f \in S_{X^*}$ τέτοιο ώστε $\langle f, x\rangle = 1$. Τότε ορίζουμε F στον $\mathcal{B}(X)$ με

$$F(S) = \langle f, Sx\rangle, \forall S \in \mathcal{B}(X).$$

Δηλαδή $F \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}(X)}(I)$ αφού $F(I) = \langle f, Ix\rangle = \langle f, x\rangle = 1$ και επομένως

$$\langle f, Tx\rangle = F(T) \in V(T, \mathcal{B}(X)).$$

■

Θα χρειαστούμε ένα κεντρικό λήμμα με του οποίου την βοήθεια θα απόδειξουμε πολλές ιδιότητες του χωρικού αριθμητικού πεδίου. Επειδή η απόδειξη έχει την ίδια νοοτροπία και χρησιμοποιεί παρόμοια επιχειρήματα με το θεώρημα του Lumer την παραλείπουμε παραπέμποντας στο [[4], σελ. 82].

Ας ορίσουμε πρώτα για διευκόλυνση τα

$$\mathcal{P} = \{(x, f) : x \in S_X, f \in \mathcal{J}(x)\}$$

και $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $P_1(\mathcal{G})$ πυκνό στην S_X, με P_1 την προβολή της πρώτης συντεταγμένης.

Λήμμα 2.2.2. (G. Lumer). Για κάθε $T \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε ότι

$$\inf\{\frac{\|I + aT\| - 1}{a} : a > 0\} = \sup\{\mathrm{Re}\langle f, Tx\rangle : (x, f) \in \mathcal{G}\}.$$

Λήμμα 2.2.3. Έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $L \subset K$ με $\sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in e^{i\theta}K\} = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in e^{i\theta}L\}, \forall \theta \in [0, 2\pi)$. Τότε $\overline{\mathrm{co}}L = K$.

Απόδειξη. Καταρχάς το $\sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in L\} = S$, διατηρείται όταν περνάμε στην κυρτή θήκη, αφού αν άλλαζε θα υπήρχαν $x, y \in \overline{co}L$ και $t \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $S = t\mathrm{Re}x + (t-1)\mathrm{Re}y$. Δηλαδή, το S θα ήταν κυρτός συνδυασμός στοιχείων της κυρτής θήκης του L και αφού $L \subset K$, έχουμε $\overline{\mathrm{co}}L \subset \overline{co}K$. Άρα το S θα ήταν κυρτός συνδυασμός στοιχείων του K. Άρα το S δεν θα ήταν ακραίο σημείο του K δηλαδή δεν θα ήταν το $\sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in K\}$. Από την άλλη μεριά το $\overline{\mathrm{co}}L$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$, άρα από το θεώρημα Heine-Borel είναι συμπαγές. Δηλαδή αν πολλαπλασιάσουμε με $e^{i\theta}$ τα $\overline{\mathrm{co}}L, K$ έχουμε $\sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in e^{i\theta}\overline{\mathrm{co}}L\} = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in e^{i\theta}K\}$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$. Συνεπώς, τα $\overline{\mathrm{co}}L, K$ έχουν τα ίδια ακραία σημεία αφού με αυτόν τον τρόπο ελέγχουμε όλο το σύνορο τους. Όμως αφού το K είναι κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, από το θεώρημα Krein-Milmann ισούται με την κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων του σημείων. Επομένως, $\overline{\mathrm{co}}L = K$ αν εξισώσουμε τις κλειστές κυρτές θήκες των ακραίων σημείων τους. ■

Θεώρημα 2.2.4. (F. F. Bonsall). Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$ τότε $\overline{\mathrm{co}}V(T) = V(T, \mathcal{B}(X))$.

Απόδειξη. Αφού $V(T) = \{\langle f, Tx\rangle : (x, f) \in \mathcal{P}\}$ και $P_1(\mathcal{P}) = S_X$ από το θεώρημα του Lumer και το λήμμα 2.3.2. εξισώνοντας τα infimum έχουμε ότι:

$$\sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\} = \sup\{\mathrm{Re}\langle f, Tx\rangle : (x, f) \in \mathcal{P}\} = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in V(T)\}.$$

Αξιοποιώντας το προηγούμενο λήμμα για $K = V(T, \mathcal{B}(X))$ και $L = V(T)$ έχουμε ότι $\overline{\mathrm{co}}V(T) = V(T, \mathcal{B}(X))$. ■

Παρατήρηση 8. Να σημειώσουμε ότι το προηγούμενο θεώρημα διατυπώνεται για $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ με πυκνή την προβολή της πρώτης συντεταγμένης στην σφαίρα του X δίνοντας ότι

$$\overline{\mathrm{co}}\{\langle f, Tx\rangle : (x, f) \in \mathcal{G}\} = V(T, \mathcal{B}(X)).$$

Ας το κρατήσουμε ως γενική διατύπωση του θεωρήματος για να το χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Η απόδειξη είναι η ίδια.

2.2.2 Το θεώρημα Bishop-Phelps-Bollobás και το αριθμητικό πεδίο στο συζυγή χώρο.

Η χρήση των γραμμικών συναρτησοειδών για τον προσδιορισμό των αριθμητικών πεδίων των τελεστών, ήδη όπως έχουμε δει μας έχει φέρει σε επαφή με θεμελειώδη θεωρήματα της συναρτησιακής ανάλυσης. Ως επακόλουθο λοιπόν θα είναι το θεώρημα Bishop-Phelps με βάση το οποίο θα χαρακτηρίσουμε το χωρικό αριθμητικό πεδίο του συζυγή ενός συνεχούς γραμμικού τελεστή ή και γενικότερα κάποιου $R \in \mathcal{B}(X^*)$.

Θεώρημα 2.2.5. (E. Bishop - R. R. Phelps). Έστω C_1, C_2 μη κενά υποσύνολα ενός χώρου Banach X τέτοια ώστε το C_1 να είναι κλειστό και κυρτό και το C_2 φραγμένο. Επιπλέον αν $\epsilon > 0$ και $x_1^* \in S_{X^*}$ τέτοια ώστε

$$\sup\{\mathrm{Re}\langle x_1^*, x\rangle : x \in C_1\} < \inf\{\mathrm{Re}\langle x_1^*, x\rangle : x \in C_2\}.$$

Τότε υπάρχει $x_2^* \in S_{X^*}$ και $x_0 \in C_1$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{Re}\langle x_2^*, x_0\rangle = \sup\{\mathrm{Re}\langle x_2^*, x\rangle : x \in C_1\} < \inf\{\mathrm{Re}\langle x_2^*, x\rangle : x \in C_2\},$$

και $\|x_1^* - x_2^*\| < \epsilon$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος εκτείνεται σε μεγέθος και για αυτό παραπέμπουμε στο [[20], σελ. 277]. ∎

Με βάση το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί το πολύ γνωστό θεώρημα των Bishop-Phelps που αφορά την πυκνότητα των συναρτησοειδών για τα οποία υπάρχει $x \in B_X$ τέτοιο ώστε $\langle f, x\rangle = \|f\|$, δηλαδή για τα συναρτησοειδή στον δυϊκό του X που έχουν μεγιστικό στοιχείο.

Θεώρημα 2.2.6. (E. Bishop - R. R. Phelps). Έστω X χώρος Banach, $X \neq \{0\}$ και B_X η μοναδιαία μπάλα του X. Τότε τα συναρτησοειδή που στηρίζονται στο B_X είναι πυκνά στον X^*.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\{x^* \in S_{X^*} : \exists x \in B_X, \langle x^*, y\rangle \leq \langle x^*, x\rangle, \forall y \in B_X\}$$

είναι πυκνό στην S_{X^*}. Έστω $x_1^* \in S_{X^*}$ και $z \in X$ τέτοιο ώστε

$$\sup\{\mathrm{Re}\langle x_1^*, x\rangle : x \in B_X\} < \mathrm{Re}\langle x_1^*, z\rangle.$$

Έστω επίσης $\epsilon > 0$. Τότε αν $C_2 = \{z\}$ από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει $x_2^* \in S_{X^*}$ με $\langle x_2^*, y\rangle \leq \langle x_2^*, x\rangle, \forall y \in B_X$ και $\|x_1^* - x_2^*\| < \epsilon$. ∎

Παρατήρηση 9. Από το παραπάνω έπεται ότι η δυϊκή απεικόνιση είναι πυκνή στον X^*.

Παρατήρηση 10. Να σημειωθεί ότι το θεώρημα 2.2.6 των Bishop και Phelps δεν ισχύει για οποιοδήποτε κυρτό κλειστό και φραγμένο σύνολο σε κάθε μιγαδικό χώρο Banach. Δείτε στο [17] την κατασκευή ενός συνόλου από τον Lomonosov, στο οποίο αποτυγχάνει το θεώρημα Bishop-Phelps.

Θεώρημα 2.2.7. Έστω X χώρος Banach τότε για κάθε $R \in \mathcal{B}(X^*)$ είναι

$$\overline{\mathrm{co}}\{\langle Rf, x\rangle : f \in \mathcal{P}\} = \overline{\mathrm{co}}V(R) = V(R, \mathcal{B}(X^*)).$$

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και η κανονική εμφύτευση $\langle j_x, f\rangle = \langle f, x\rangle, f \in X^*$. Αν θεωρήσουμε το $\mathcal{P}^* = \{(f, x^{**}) : f \in S_{X^*}, x^{**} \in \mathcal{J}(f)\}$ τότε για το $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{P}^*$ με

$$\mathcal{G}^* := \{(f, j_x) : (x, f) \in \mathcal{P}\}$$

έχουμε από το θεώρημα Bishop-Phelps ότι η $P_1(\mathcal{G}^*)$ είναι πυκνή στην S_{X^*}. Από την γενική διατύπωση του θεωρήματος 2.3.4. έχουμε ότι

$$\overline{\text{co}}\{\langle Rf, x\rangle : f \in \mathcal{P}\} = \overline{\text{co}}\{\langle j_x, Rf\rangle : (f, j_x) \in \mathcal{G}^*\} = V(R, B(X^*)).$$

Και από την ειδική διατύπωση ότι όλα τα παραπάνω ισούνται με το $\overline{\text{co}}V(R)$. ■

Πόρισμα 6. Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$ και T^* ο συζυγής του, τότε έχουμε ότι:

i) $V(T) \subset V(T^*)$

ii) $\overline{\text{co}}V(T) = \overline{\text{co}}V(T^*)$

iii) $v(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\} = v(T^*)$

Απόδειξη. i) Το $V(T^*)$ ορίζεται με βάση το

$$\mathcal{P}^* = \{(f, x^{**}) : f \in S_{X^*}, x^{**} \in \mathcal{J}(f)\},$$

αν θεωρήσουμε το

$$\mathcal{P} = \{(x, f) : x \in S_X, f \in \mathcal{J}(x)\}$$

από το οποίο ορίζεται το $V(T)$, τότε αν

$$\mathcal{G}^* = \{(f, j_x) : (x, f) \in \mathcal{P}\}$$

έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα μιας και $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{P}^*$.

ii) Από το θεώρημα 2.3.4. και το θεώρημα 2.3.7. έχουμε ότι

$$\overline{\text{co}}V(T) = V(T, \mathcal{B}(X)) = V(T^*, \mathcal{B}(X^*)) = \overline{\text{co}}V(T^*).$$

iii) Έστω

$$s_1 = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\} \neq \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\} = s_2.$$

Αφού $V(T) \subset V(T, \mathcal{B}(X))$ αρκεί να υποθέσουμε ότι $s_1 < s_2$. Τότε το s_1 θα ήταν κυρτός συνδυασμός στοιχείων του $V(T, \mathcal{B}(X))$. Δηλαδή το s_1 θα ήταν κυρτός συνδυασμός στοιχείων του $V(T)$. Δηλαδή δεν θα ήταν ακραίο σημείο του $V(T)$. Άτοπο. Από το ii) έχουμε ότι $v(T) = v(T^*)$. ■

Θα δώσουμε τώρα μια επέκταση του θεωρήματος των Bishop-Phelps που δόθηκε από τον Bollobás [1] η οποία θα μας βοηθήσει στο επόμενο θεώρημα. Προφανώς, όπως έχουμε δει, οι ιδιότητες του συνόλου $\mathcal{P}$ έχουν καθοριστικό ρόλο στην θεωρία των αριθμητικών πεδίων. Εκείνο που αποδείχθηκε στην επέκταση αυτού του θεωρήματος είναι ότι τα διατεταγμένα ζεύγη του $X \times X^*$ τα οποία σχεδόν ανήκουν στο $\mathcal{P}$ είναι προσεγγίσιμα μέσω της νόρμας του γινομένου των $X \times X^*$ από στοιχεία του $\mathcal{P}$. Αυτό είναι πλέον γνωστό ως θεώρημα Bishop-Phelps–Bollobás.

Θεώρημα 2.2.8. (B. Bollobás). Έστω X χώρος Banach και $x \in S(X)$, $f \in S(X^*)$ με $|\langle f, x\rangle - 1| \leq \frac{\epsilon^2}{2}$ για $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$.Τότε υπάρχει $y \in S(X)$ και $g \in S(X^*)$ τέτοια ώστε

$$\langle g, y\rangle = 1, \|f - g\| \leq \epsilon$$

και

$$\|x - y\| < \epsilon + \epsilon^2.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται σε ελαφρές τροποποιήσεις αποτελεσμάτων των Bishop-Phelps και για αυτό παραπέμπουμε στο [[2]] ■

Με βάση αυτό είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι τα $V(T), V(T^*)$ δεν διαφέρουν και πολύ μεταξύ τους.

Θεώρημα 2.2.9. (B. Bollobás)Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$, τότε $\overline{V(T)} = \overline{V(T^*)}$.

Απόδειξη. Έστω $m \in V(T^*)$, τότε υπάρχει $f \in S_{X^*}$ και $x^{**} \in S_{X^{**}}$ τέτοια ώστε $\langle x^{**}, f\rangle = 1$ και $\langle x^{**}, T^*f\rangle = m$. Έστω $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, επειδή από το θεώρημα του Goldstine το σύνολο

$$\{j_x : x \in B_X\}$$

είναι w*-πυκνό στην $B_{X^{**}}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x \in B_X$ τέτοιο ώστε

$$|\langle x^{**}, f\rangle - \langle j_x, f\rangle| < \frac{\epsilon^2}{2}$$

και

$$|\langle x^{**}, T^*f\rangle - \langle j_x, T^*f\rangle| < \epsilon$$

από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $y \in S(X), g \in S(X^*)$ τέτοιο ώστε

$$\langle g, y\rangle = 1, \|x - y\| < \epsilon + \epsilon^2$$

και $\|f - g\| \leq \epsilon$. Επομένως,

$$|\langle f, T(x - y)\rangle| < \|T\|(\epsilon + \epsilon^2)$$

και

$$|\langle f, Ty\rangle - \langle g, Ty\rangle| \leq \|T\|\epsilon.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
|\langle g, Ty\rangle - m| &= |\langle g, Ty\rangle - \langle x^{**}, T^*f\rangle + \langle f, Tx\rangle - \langle f, Tx\rangle| \\
&\leq |\langle g, Ty\rangle - \langle f, Tx\rangle| + |\langle f, Tx\rangle - \langle x^{**}, T^*f\rangle| \\
&< |\langle g, Ty\rangle - \langle f, Tx\rangle| + \epsilon \\
&= |\langle g, Ty\rangle - \langle f, Ty\rangle + \langle f, Ty\rangle - \langle f, Tx\rangle| + \epsilon \\
&\leq |\langle g, Ty\rangle - \langle f, Ty\rangle| + |\langle f, Ty\rangle - \langle f, Tx\rangle| + \epsilon \\
&< \|T\|\epsilon + \|T\|(\epsilon + \epsilon^2) + \epsilon \\
&= \|T\|(2\epsilon + \epsilon^2) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Αφού το $\langle g, Ty\rangle \in V(T)$ έχουμε ότι το m είναι οριακό σημείο του $V(T)$ δηλαδή $m \in \overline{V(T)}$. Επομένως,$\overline{V(T)} = \overline{V(T^*)}$. ■

2.2.3 Ο φασματικός εγκλεισμός.

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε την ιδιότητα του φασματικού εγκλεισμού (spectral inclusion), δηλαδή ότι για ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή το αριθμητικό πεδίο του, ως προς τη Banach άλγεβρα των φραγμένων τελεστών, περιέχει το φάσμα του. Η ιδιότητα αυτή είναι κεντρικού ενδιαφέροντος και μας επιτρέπει να χειριστούμε το φάσμα ενός γραμμικού τελεστή από άλλη σκοπιά. Θα αποδείξουμε την ακόμα πιο ισχυρή ιδιότητα ότι $\sigma(T) \subset \overline{V(T)}$, το οποίο αποδεικνύει και το παραπάνω αφού

$$\overline{V(T)} \subset V(T, \mathcal{B}(X)) \Rightarrow \sigma(T) \subset V(T, \mathcal{B}(X))$$

παραπέμποντας τον αναγνώστη στο [[4], σελ. 19] για την άμεση απόδειξη του προηγούμενου. Να αναφέρουμε ότι αυτές οι συνέπειες κάνουν ακόμα πιο ενδιαφέρουσα τη μελέτη των αριθμητικών πεδίων τα οποία με την σειρά τους δίνουν ακόμα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα στην θεωρία τελεστών όπως θα δούμε αργότερα.

Πρόταση 2.2.10. (J. P. Williams). Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$ τότε

$$\sigma(T) \subset \overline{V(T)}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\inf\{|\lambda - \mu| : \mu \in V(T)\} = \epsilon > 0$. Αν $x \in S_X$ και $f \in \mathcal{J}(x)$ τότε

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \|f\| \|(\lambda I - T)x\| \geq \|f(\lambda I - T)x\| = |\lambda - f(Tx)| \geq \epsilon.$$

Άρα $\|(\lambda I - T)x\| \geq \epsilon \|x\|, \forall x \in X$ αν αντικαταστήσουμε το x με ένα στοιχείο y δια τη νόρμα του. Συνεπώς αφού ο $\lambda I - T$ είναι κάτω φραγμένος έχουμε ότι είναι ένας 1-1 τελεστής με κλειστή εικόνα. Επειδή τώρα $\overline{V(T)} = \overline{V(T^*)}$, έχουμε ότι

$$\|(\lambda I - T)^* f\| \geq \epsilon \|f\|, \forall f \in X^*.$$

Επομένως, ο $\lambda I - T$ είναι πυκνός στον X. Άρα είναι και επί. Δηλαδή ο $\lambda I - T$ έχει φραγμένο αντίστροφο από το πόρισμα Φραγμένου Αντιστρόφου και άρα $\lambda \notin \sigma(T)$. ■

2.2.4 Τοπολογικές ιδιότητες του χωρικού αριθμητικού πεδίου.

Σε αυτή την υποενότητα θα αναλύσουμε κάποιες από τις τοπολογικές ιδιότητες του χωρικού αριθμητικού πεδίου όπως είναι η συνεκτικότητά του ή η άνω ημισυνέχεια της απεικόνισης $x \to V(T, x)$. Το κυρίως περιεχόμενο προέρχεται από το [3]. Γενικά μας απασχολούν απεικονίσεις από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιο τοπολογικό διανυσματικό χώρο. Ας υπενθυμίσουμε ότι όταν μιλάμε για έναν τοπολογικό διανυσματικό χώρο X εννοούμε έναν διανυσματικό χώρο εφοδιασμένο με μια τοπολογία ώστε αν $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε οι απεικονίσεις

$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

να είναι συνεχείς. Ακόμη, να θυμήσουμε ότι αν $x \in X$ τότε κάθε περιοχή $N_x \in \mathcal{N}_x$ του x γράφεται ως

$$N_x = x + U,$$

όπου U περιοχή του 0 και αυτό επειδή η

$$f(y) = x + y, \forall y \in X$$

είναι ομοιομορφισμός.

Ορισμός 2.2.2. Έστω $(X, \mathcal{T}_1)$ τοπολογικός χώρος και $(Y, \mathcal{T}_2)$ τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Η $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ καλείται άνω ημισυνεχής αν για κάθε x και U γειτονιά του 0 στον Y, υπάρχει γειτονιά $V \in \mathcal{N}_x$ τέτοια ώστε για κάθε $y \in V$ να έχουμε ότι $f(y) \subset f(x) + U$.

Πρόταση 2.2.11. Έστω $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ τοπολογικοί χώροι και $(Z, \mathcal{T}_3)$ τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Αν $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ συνεχής και $g : Y \to \mathcal{P}(Z)$, άνω ημισυνεχής. Τότε η $g \circ f : X \to \mathcal{P}(Z)$, είναι άνω ημισυνεχής.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Αφού f συνεχής στο x έχουμε ότι για κάθε $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ τέτοια ώστε $f(U) \subset V$. Άρα $\forall y \in U \in \mathcal{N}_x$ έχουμε ότι $f(y), f(x) \in V$. Αφού η g είναι άνω ημισυνεχής τότε $\forall f(x) \in Y$ και B περιοχή του 0 στον Z, υπάρχει γειτονιά $V_1 \in \mathcal{N}_{f(x)}$ τέτοια ώστε για κάθε $f(y) \in V_1$ έχουμε ότι

$$g(f(y)) \subset g(f(x)) + U.$$

Άρα $\forall x \in X, B \in \mathcal{N}_0$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ τέτοια ώστε $\forall y \in U$ ισχύει ότι

$$(g \circ f)(y) \subset (g \circ f)(x) + B.$$

■

Πρόταση 2.2.12. Έστω X χώρος με νόρμα, η S_X εφοδιασμένη με την τοπολογία της νόρμας και ο X^* με την w*-τοπολογία. Τότε η απεικόνιση $x \to \mathcal{J}(x)$ είναι άνω ημισυνεχής.

Απόδειξη. Έστω ότι δεν είναι τότε υπάρχει $x^* \in S_X$ και U μια w*-ανοικτή περιοχή του 0 στον X^* τέτοια ώστε για κάθε θετικό αριθμό n να υπάρχει $y_n \in S_X$ και

$f_n \in \mathcal{J}(y_n)$ τέτοια ώστε $\|y_n - x\| < \frac{1}{n}$ και $f_n \in \mathcal{J}(x) + U$. Αφού $\|f_n\| = 1$, υπάρχει ένα w*-σημείο συσσώρευσης g της f_n με $\|g\| \leq 1$. Τότε

$$\begin{aligned}|\langle g, x\rangle - 1| &\leq |\langle g, x\rangle - \langle f_n, x\rangle| + |\langle f_n, x\rangle - \langle f_n, y_n\rangle| \\ &\leq |\langle g, x\rangle - \langle f_n, x\rangle| + \|x - y_n\|.\end{aligned}$$

Αφού $\|x - y_n\| < \frac{1}{n}$ και το g είναι ένα w*-σημείο συσσώρευσης της f_n το δεξί μέρος μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε διαλέγοντας κατάλληλα n και άρα $\langle g, x\rangle = 1$. Δηλαδή το $g \in \mathcal{J}(x)$. Επιπλέον, αφού το g είναι w*-σημείο συσσώρευσης της f_n και η U είναι w*-περιοχή του 0, έχουμε $f_n \in g + U \subset \mathcal{J}(x) + U$, για κάποιο n, το οποίο αντιφάσκει με την άρνηση της άνω ημισυνέχειας της απεικόνισης. ■

Πρόταση 2.2.13. Έστω X χώρος με νόρμα, $T \in \mathcal{B}(X)$ και το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ με την συνήθη τοπολογία του. Τότε η απεικόνιση $x \to V(T, x)$ είναι άνω ημισυνεχής από την S_X με την τοπολογία της νόρμας μέσα στο $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, όπου $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ το δυναμοσύνολο του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Έστω $x \in S_X$, $\epsilon > 0$ και $U = \{g \in X^* : |\langle g, Tx\rangle| < \frac{\epsilon}{2}\}$ μια w*-ανοικτή περιοχή του 0. Τότε από την προηγούμενη πρόταση και τη συνέχεια του T, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in S_X$ με $\|x - y\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|Tx - Ty\| < \frac{\epsilon}{2}$ και $\mathcal{J}(y) \subset \mathcal{J}(x) + U$. Επομένως, αν $y \in S_X$, $\|x - y\| < \delta$ και $f \in \mathcal{J}(y)$ τότε $f = g + u$ για κάθε $g \in \mathcal{J}(x)$ και $u \in U$. Αφού $\langle g, Tx\rangle \in V(T, x)$ η απόσταση του $\langle f, Tx\rangle$ από το $V(T, x)$ είναι το πολύ $|\langle f, Ty\rangle - \langle g, Tx\rangle|$ και

$$|\langle f, Ty\rangle - \langle g, Tx\rangle| \leq |\langle f, Ty\rangle - \langle f, Tx\rangle| + |\langle u, Tx\rangle| < \|Ty - Tx\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Όμως, αφού το $f(T(y))$ ήταν τυχαίο σημείο του $V(T, y)$, έχουμε

$$V(T, y) \subset V(T, x) + \{t \in \mathbb{C} : |t| < \epsilon\}.$$

Δηλαδή η $x \to V(T, x)$ είναι άνω ημισυνεχής. ■

Πρόταση 2.2.14. Έστω X χώρος με νόρμα και $T \in \mathcal{B}(X)$. Αν $X \neq \mathbb{R}$ τότε το $V(T)$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω ότι είναι μη-συνεκτικό. Τότε $V(T) \subset O_1 \cup O_2$, με O_1, O_2 ανοικτά τέτοια ώστε να διασπάνε το $V(T)$ με $V(T) = G_1 \cup G_2$, όπου

$$G_1 = V(T) \cap O_1, G_2 = V(T) \cap O_2$$

μη κενά, σχετικά ανοικτά. Επειδή η $x \to V(T, x)$ είναι άνω ημισυνεχής η αντίστροφη εικόνα U_1, U_2 των ανοικτών (στην τοπολογία του $\mathbb{C}$ με το δυναμοσύνολο του) $\mathcal{P}(O_1), \mathcal{P}(O_2)$, είναι ανοικτά υποσύνολα της S_X. Όμως αν $x \in S_X$ το σύνολο $V(T, x)$ είναι συνεκτικό ως η εικόνα του $\mathcal{J}(x)$, που είναι συνεκτικό στην τοπολογία της νόρμας, μέσω της συνεχούς ως προς την νόρμα απεικόνισης $f \to f(T(x))$. Άρα $V(T, x) \subset G_1 \subset O_1$ ή $V(T, x) \subset G_2 \subset O_2$. Δηλαδή $x \in U_1$ ή $x \in U_2$ αλλά όχι και στα δύο.Έχουμε $S_X = U_1 \cup U_2$ με $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Άτοπο αφού η S_X είναι συνεκτικό σύνολο. ■

2.3 Αριθμητικό πεδίο σε χώρους ημιεσωτερικού γινομένου.

2.3.1 Ορισμός, βασικές ιδιότητες και η σχέση του με τα άλλα δύο.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου για ένα χώρο με ημιεσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 2.3.1. (G. Lumer). Έστω X χώρος με νόρμα και $[\cdot,\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο. Αν $T \in \mathcal{B}(X)$ τότε το αριθμητικό πεδίο του T ως προς το $[\cdot,\cdot]$ ορίζεται ως

$$W(T) = \{[Tx, x] : [x, x] = 1\}.$$

Θεώρημα 2.3.1. Έστω $[\cdot,\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζει την νόρμα του X. Αν $T \in \mathcal{B}(X)$ και $W(T)$ το αντίστοιχο αριθμητικό πεδίο, τότε
i) $W(T) \subset V(T)$
ii) $\overline{\text{co}}W(T) = V(T, \mathcal{B}(X))$
iii) $\sup\{\text{Re}\lambda : \lambda \in W(T)\} = \inf\{\frac{\|I+aT\|-1}{a} : a > 0\}$
iv) $\sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\} = v(T)$.

Απόδειξη. i) Έστω $y \in S_X$ και f στον X με

$$\langle f_y, x\rangle = [x, y].$$

Τότε από την γραμμικότητα του ημιεσωτερικού γινομένου ως προς την πρώτη μεταβλητή έχουμε ότι το f_y είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές ενώ από την Cauchy-Schwarz έχουμε ότι $\|f_y\| \leq 1$. Επίσης, $\langle f_y, y\rangle = [y, y] = \|y\|^2 = 1$, άρα $(y, f_y) \in \mathcal{P}$. Δηλαδή $W(T) \subset V(T)$. Για τα υπόλοιπα αρκεί να δούμε ότι αν $\mathcal{G} = \{(y, f_y) : y \in S_X\}$ έχουμε ότι $P_1(\mathcal{G}) = S_X$ και άρα από την γενική διατύπωση του θεωρήματος 2.3.4. και το λήμμα 2.3.4. έχουμε τις ιδιότητες ii), iii), iv). ■

Πρόταση 2.3.2. Αν $T \in \mathcal{B}(X)$ τότε

$$V(T) = \bigcup W(T)$$

όπου η ένωση των $W(T)$ είναι πάνω σε όλα τα ημιεσωτερικά γινόμενα τα οποία είναι συμβατά με τη νόρμα του X.

Απόδειξη. Έστω X χώρος με νόρμα και $y \in S_X$. Τότε αφού $\mathcal{J}(y) \subset S_{X^*}$ αν

$$g : S_X \to S_{X^*}$$

τέτοια ώστε

$$g(y) \in \mathcal{J}(y), \forall y \in S_X$$

ορίζουμε ότι το $[\cdot,\cdot] : X \to \mathbb{C}$ με

$$[x,y] = \begin{cases} 0, y = 0 \\ \|y\|\langle g(\frac{y}{\|y\|}), x\rangle, y \neq 0 \end{cases}$$

Εάν πάρουμε ένωση πάνω σε όλα αυτά τα ημιεσωτερικά γινόμενα έχουμε ότι

$$V(T) = \bigcup W(T).$$

Κεφάλαιο 3

Μονοπαραμετρικές ημιομάδες σε χώρους Banach.

3.1 Η ημιομάδα και ο γεννήτορας της.

3.1.1 Ορισμοί.

Ορισμός 3.1.1. Έστω X χώρος Banach και $(S(t))_{t\geq 0}$ μια μονοπαραμετρική οικογένεια τελεστών με $S(t) \in \mathcal{B}(X), \forall t \in [0, +\infty)$. Η $(S(t))_{t\geq 0}$ καλείται καλείται ημιομάδα στον X, αν ισχύουν

i) $S(0) = I$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής.

ii) $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$, για κάθε $t, s \geq 0$ (η ιδιότητα της ημιομάδας).

Αν επιπλέον $\|S(t)\| \leq 1$, για κάθε $t \geq 0$, θα λέμε ότι η $(S(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ημιομάδα συστολών.

Παρατήρηση 11. Αν το $(S(t))$ όπως παραπάνω ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και

$$\|S(t)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}, x \in X$$

ή ισοδύναμα

$$\|S(t)x\| = \|x\|, \forall t \in \mathbb{R}, x \in X$$

λέμε ότι το $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μία ομάδα ισομετριών.

Ορισμός 3.1.2. Μια ημιομάδα φραγμένων γραμμικών τελεστών $(S(t))_{t\geq 0}$ καλείται ομοιόμορφα συνεχής αν

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

Ορισμός 3.1.3. Έστω X χώρος Banach και $(S(t))_{t\geq 0}$ μια ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα τελεστών. Ορίζεται ο $T : X \to X$ ένας γραμμικός τελεστής ώστε το όριο

$$T = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

να υπάρχει. Ο T καλείται ως ο γεννήτορας της ημιομάδας. Αν η $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ομάδα τότε το όριο προσεγγίζεται και από τις δύο πλευρές.

Ο T μπορεί να είναι μη φραγμένος και το $D(T) \neq X$. Όμως αν ο T έχει κλειστό γράφημα λέμε ότι είναι κλειστός όταν δεν είναι παντού ορισμένος γιατί αλλίως θα ήταν αυτομάτως συνεχής από το θεώρημα Κλειστού Γραφήματος. Υπενθυμίζουμε ότι για ένα γραμμικό τελεστή ορίζεται το επιλύον σύνολο ένος γραμμικού τελεστή $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ το οποίο αποτελείται από όλους τους μιγαδικούς αριθμούς λ για τους οποίους ο $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ είναι φραγμένος.

3.1.2 Το θεώρημα σταθερού σημείου των Markov-Kakutani.

Θα δώσουμε σε αυτό το σημείο ένα πολύ γνωστό και χρήσιμο θεώρημα σταθερού σημείου. Θα χρειαστούμε πρώτα έναν ορισμό. Να θυμήσουμε ότι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος καλείται τοπικά κυρτός αν υπάρχει βασή περιοχών του 0 που αποτελείται από κυρτά σύνολα.

Ορισμός 3.1.4. Έστω X διανυσματικός χώρος και $K \subset X$ ένα κυρτό σύνολο. Μία απεικόνιση $T : K \to X$ καλείται αφφινική (affine) αν

$$T(\sum_i a_i x_i) = \sum_i a_i T(x_i), x_i \in K, a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1.$$

Προφανώς κάθε γραμμικός τελεστής είναι αφφινική απεικόνιση λόγω γραμμικότητας. Για να προετοιμάσουμε το έδαφος για έναν επιχείρημα που θα χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο θεώρημα να επισημάνουμε ότι σε ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο X αν U περιοχή του 0 τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in U$. Αυτό συμβαίνει γιατί η $f(\lambda, x) = \lambda x$ είναι συνεχής και επειδή η $(\frac{1}{n}, x)$ συγκλίνει στο $(0, x)$, τότε λόγω συνέχειας της f θα έχουμε ότι

$$f(\frac{1}{n}, x) \to f(0, x) = 0.$$

Επομένως, $\frac{1}{n}x \to 0$ και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n}x \in U$ για κάθε $n \geq n_0$. Για $\lambda = \frac{1}{n}$ έχουμε $\lambda x \in U$.

Θεώρημα 3.1.1. (A. Markov - S. Kakutani). Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος και K ένα μη κενό συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Αν $\mathcal{F}$ είναι μια μεταθετική (αβελιανή) οικογένεια συνεχών αφφινικών απεικονίσεων από το K μέσα στο K, τότε υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε

$$T(x_0) = x_0, \forall T \in \mathcal{F}.$$

Απόδειξη. Για $T \in \mathcal{F}$ και $n \geq 1$ ορίζουμε την απεικόνιση $T^{(n)} : K \to K$ με

$$T^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k.$$

Αν τώρα $T, S \in \mathcal{F}$ και $m, n \geq 1$ τότε $T^{(n)} \circ S^{(m)} = S^{(m)} \circ T^{(n)}$ λόγω της μεταθετικής ιδιότητας. Ορίζουμε

$$\mathcal{K} = \{T^{(n)}(K) : T \in \mathcal{F}, n \geq 1\}.$$

Κάθε υποσύνολο του $\mathcal{K}$ είναι συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς και κυρτό λόγω της αφφινικής ιδιότητας των απεικονίσεων. Αν $T_{n_1}, ..., T_{n_p} \in \mathcal{F}$ με $n_1, ..., n_p \geq 1$ τότε από την μεταθετική ιδιότητα της $\mathcal{F}$ έχουμε ότι

$$T_1^{(n_1)} \circ ... \circ T_p^{(n_p)}(K) \subset \bigcap_{j=1}^{p} T_j^{(n_j)}(K).$$

Δηλαδή το $\mathcal{K}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και επομένως αν δούμε το K σαν συμπαγή μετρικό χώρο έχουμε ότι υπάρχει

$$x_0 \in \bigcap \{B : B \in \mathcal{K}\}.$$

Θα δείξουμε ότι αυτό το x_0 είναι το σταθερό σημείο των απεικονίσεων. Αν $T \in \mathcal{F}$ και $n \geq 1$ έχουμε ότι $x_0 \in T^{(n)}(K)$ και άρα υπάρχει $x \in K$ τέτοιο ώστε

$$x_0 = T^{(n)}(x) = \frac{1}{n}[x + T(x) + ... + T^{n-1}(x)].$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} T(x_0) - x_0 &= \frac{1}{n}[T(x) + ... + T^n(x)] \\ &\quad - \frac{1}{n}[x + T(x) + ... + T^{n-1}(x)] \\ &= \frac{1}{n}[T^n(x) - x] \\ &\in \frac{1}{n}[K - K], \\ [K - K] &= \{u - v : u, v \in K\}. \end{aligned}$$

Επειδή το K είναι συμπαγές είναι και το $[K - K]$. Αν τώρα θεωρήσουμε μια ανοικτή περιοχή U του 0 τότε υπάρχει $n_0 \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{n_0}[K - K] \subset U$$

και κατά συνέπεια

$$T(x_0) - x_0 \in U,$$

για κάθε ανοικτή περιοχή U του 0. Επομένως, $T(x_0) - x_0 = 0$, δηλαδή το x_0 είναι το επιθυμητό σταθερό σημείο. ■

3.2 Η εκθετική συνάρτηση στον $\mathcal{B}$(X).

3.2.1 Η ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα.

Έστω $u(t)$ συνάρτηση με $u(0) = u_0$ δοθέν και T ένας αριθμός. Αν έχουμε την εξίσωση

$$\frac{du}{dt} = Tu(t), t \geq 0$$

τότε η λύση δίνεται ως

$$u(t) = u_0 e^{tT}.$$

Στα πλαίσια αυτής της σκέψης θέλουμε να αντικαταστίσουμε τον αριθμό T από κάποιον $T \in \mathcal{B}(X)$ διατυπώνοντας ανάλογους συλλογισμούς. Θα χρειαστεί να συζητηθούν μερικά πράγματα ώστε να γίνει αυτό.

Ας θυμηθούμε ότι από τον απειροστικό λογισμό η εκθετική αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά και πιο συγκεκριμένα την

$$e^{tT} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tT)^n}{n!}, t \geq 0.$$

η οποία δυναμοσειρά συγκλίνει σε αυτή την συνάρτηση για κάθε πεπερασμένο T. Μιας και είμαστε σε χώρο Banach εκείνο που αναζητάμε είναι η σύγκλιση της δυναμοσειράς σε νόρμα ώστε πλέον το παραπάνω να βγάζει νόημα. Επομένως αντικαθιστώντας τον πραγματικό αριθμό T με έναν $T \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε με τριγωνική

$$\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tT)^n}{n!} \| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \|T\|^n}{n!}$$

Δηλαδή η σειρά συγκλίνει κατά νόρμα. Επίσης για $m, n \in \mathbb{N}$

$$\| \sum_{k=0}^{n} \frac{(tT)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(tT)^k}{k!} \| = \| \sum_{k=m}^{n} \frac{(tT)^k}{k!} \| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{\|t\|^k \|T\|^k}{k!} \to 0, m, n \to +\infty$$

και συνεπώς η σείρα είναι συγκλίνουσα αφού η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι βασική και ο χώρος είναι πλήρης. Θα συμβολίζουμε με $exptT$ την οικογένεια τελεστών της εκθετικής και με $expT$ τον εκθετικό τελεστή.

Πρόταση 3.2.1. Έστω $T, S \in \mathcal{B}(X)$ με $TS = ST$ τότε

$$\exp(T + S) = \exp T \circ \exp S.$$

Απόδειξη. Αφού οι T, S μετατίθονται έχουμε

$$(T + S)^k = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} T^m S^{k-m}.$$

Επομένως,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(T+S)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{k} \frac{T^m S^{k-m}}{m!(k-m)!} = \sum_{m+n \leq N} \frac{T^m S^n}{m!n!}.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\sum_{m=0}^{N} \frac{T^m}{m!} \sum_{n=0}^{N} \frac{S^n}{n!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(T+S)^k}{k!} = \sum_{m+n \leq N, m+n > N} \frac{T^m S^n}{m!n!}.$$

Με την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να δούμε ότι η νόρμα της παραπάνω έκφρασης δεν μπορεί να ξεπεράσει την παρακάτω ποσότητα

$$\sum_{m+n \leq N, m+n > N} \frac{\|T\|^m \|S\|^n}{m!n!} = \sum_{m=0}^{N} \frac{\|T\|^m}{m!} \sum_{n=0}^{N} \frac{\|S\|^n}{n!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(\|T\| + \|S\|)^k}{k!}$$

και παίρνοντας το $N \to +\infty$ έχουμε

$$e^{\|T\|} e^{\|S\|} - e^{\|T\| + \|S\|} = 0.$$

Όμως

$$\lim_{N \to +\infty} \| \sum_{m=0}^{N} \frac{T^m}{m!} \sum_{n=0}^{N} \frac{S^n}{n!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(T+S)^k}{k!} \| = \| \exp T \circ \exp S - \exp(T+S) \|$$

δηλαδή έχουμε ότι

$$\exp(T+S) = \exp T \circ \exp S.$$

■

Πόρισμα 7. Για κάθε $T \in \mathcal{B}(X)$ ισχύουν ότι

$$\exp T \circ \exp(-T) = I$$

και

$$\exp T \in Inv\mathcal{B}(X).$$

Βλέπουμε ότι η εικόνα της εκθετικής είναι υποσύνολο του $Inv\mathcal{B}(X)$. Ως τώρα από τις ιδιότητες της εκθετικής μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι μια ημιομάδα θα δείξουμε ότι είναι μια ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα.

Πρόταση 3.2.2. Η εκθετική οικογένεια συνεχών γραμμικών τελεστών είναι μια ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα.

Απόδειξη. Αν

$$S(t) = \exp tT = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tT)^n}{n!}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|S(t) - I\| &= \|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tT)^n}{n!}\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n\|T\|^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n\|T\|^n}{n!} + \frac{(t\|T\|)^0}{0!} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n\|T\|^n}{n!} - 1 \\
&= e^{t\|T\|} - 1 \overset{t\to 0^+}{\to} 0.
\end{aligned}$$

■

3.2.2 Η παράγωγος της εκθετικής ημιομάδας και ο γεννήτορας της.

Όπως είδαμε η οικογένεια $\exp tT, t \geq 0$ αποτελεί όντως μια ομοιόμορφα συνεχή ημιομάδα στο χώρο Banach που εργαζόμαστε. Εδώ θα προσδιορίσουμε την παράγωγο της εκθετικής ημιομάδας μέσω του συναρτησιακού λογισμού αξιοποιώντας κάποια βασικά θεωρήματα του απειροστικού λογισμού και της μιγαδικής ανάλυσης. Ας υπενθυμίσουμε το θεώρημα του Weierstrass για την ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων ή M-test.

Θεώρημα 3.2.3. (K. Weierstrass). Έστω f_n μια ακολουθία συναρτήσεων που ορίζεται σε ένα υποσύνολο $D \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει θετικός αριθμός M_n τέτοιος, ώστε

$$|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in D.$$

Αν η αριθμητική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$$

στο $\mathbb{R}$, τότε η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο D.

Ας δείξουμε τώρα ότι το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της εκθετικής συνάρτησης συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω σε δίσκους στο μιγαδικό επίπεδο. Γενικότερα είναι λάθος να πιστεύουμε ότι μπορούμε να πετύχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της δυναμοσειράς σε όλο το μιγαδικό επίπεδο διότι τότε θα μπορούσαμε να βρούμε πραγματική ακολουθία $a_k, k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$$|e^z| = |\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\frac{z^n}{n!}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty,$$

δηλαδή η εκθετική συνάρτηση θα ήταν φραγμένη, το οποίο αντιφάσκει με το θεώρημα Liouville αφού η εκθετική συναρτηση θα ήταν σταθερή ως ακέραια.

Θεώρημα 3.2.4. Έστω $R > 0$ τότε η δυναμοσειρά της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < R$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R^n}{n!} < +\infty.$$

Επειδή

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{R^{n+1}}{n+1!}}{\frac{R^n}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{R}{n+1} = 0 < 1,$$

έχουμε ότι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση συγκλίνει ομοιόμορφα για το σταθερό $R > 0$ όσο μεγάλο και αν είναι από το θεώρημα Weierstrass.

∎

Ορισμός 3.2.1. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $\sigma(T) \subset U$. Καλούμε την

$$\phi_T : H(U) \to \mathcal{B}(X),$$

όπου $H(U)$ οι ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις στο U, έναν όλομορφο συναρτησιακό λογισμό αν:

i) ϕ_T είναι ένας αλγεβρικός ομομορφισμός:

$$\phi_T(af + bg) = a\phi_T(f) + b\phi_T(g).$$

$$\phi_T(fg) = \phi_T(f)\phi_T(g).$$

ii) $\phi_T(p) = p(T)$ όπου p πολυώνυμο.

iii) Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U, τότε

$$\phi_T(f_n) \to \phi_T(f) \in \mathcal{B}(X).$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας και το ότι η εκθετική συνάρτηση μπορεί να οριστεί πάνω σε ανοικτά σύνολα που περιέχουν το φάσμα του T και κατ'επέκταση και του tT μαζί με όσα αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα και τα προηγούμενα θεωρήματα μας επιτρέπουν να εφαρμόσουμε τον συναρτησιακό λογισμό ώστε να έχει νόημα μια τέτοια συνάρτηση. Αυτό που θα λάβουμε φυσικά σαν παράγωγο συνάρτηση θα είναι η

$$\frac{d(e^{tT})}{dt} = T \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tT)^n}{n!}$$

με έναν απλό υπολογισμό και μια αλλαγή δείκτη. Δηλαδή μπορούμε πλέον να λέμε ότι

$$\frac{d\text{exp}tT}{dt} = T \circ \text{exp}tT = \text{exp}tT \circ T, \forall T \in \mathcal{B}(X)$$

αφού ο T μετατίθεται με τις δυνάμεις του και η παράγωγος συνεχίζει να ορίζεται μια χαρά μέσω των προηγούμενων επιχειρημάτων.

Αυτό που θα δείξουμε τώρα εκμεταλλευόμενοι τα προηγούμενα είναι ότι ο T είναι ο γεννήτορας της ημιομάδας της εκθετικής.

Πρόταση 3.2.5. Αν $T \in \mathcal{B}(X)$ τότε

$$T = \lim_{t \to 0^+} \frac{\text{exp}tT - I}{t}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\frac{d\text{exp}tT}{dt} = T \circ \text{exp}tT = \text{exp}tT \circ T.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
\frac{d\text{exp}tT}{dt} &= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\text{exp}(t+\alpha)T - \text{exp}tT}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\text{exp}tT \circ (\text{exp}\alpha T - I)}{\alpha} \\
\Rightarrow T \circ \text{exp}tT &= (\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\text{exp}\alpha T - I}{\alpha}) \circ \text{exp}tT \\
\Rightarrow T &= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\text{exp}\alpha T - I}{\alpha}.
\end{aligned}$$

∎

Γενικά ο γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημιομάδας είναι φραγμένος τελεστής. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [[21],σελ.2]. Ας αποδείξουμε κιόλας ότι ο T δεν θα μπορούσε να είναι γεννήτορας σε παραπάνω από μια ομοιόμορφα συνεχή ημιομάδα.

Πρόταση 3.2.6. Έστω $T(t), S(t)$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς ημιομάδες φραγμένων τελεστών. Αν

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)-I}{t} = T = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)-I}{t} \tag{3.1}$$

τότε

$$T(t) = S(t), \forall t \geq 0.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για $M > 0$ έχουμε ότι $T(t) = S(t), 0 \leq t < M$. Έστω κάποιο $M > 0$ τότε επειδή οι απεικονίσεις $t \to \|T(t)\|$ και $t \to \|S(t)\|$ είναι συνεχείς υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $\|T(t)\|\|S(s)\| \leq C, 0 \leq t, s < M$. Για $\epsilon > 0$ έχουμε από την **3.1** ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\|T(h) - S(h)\|}{h} \leq \frac{\epsilon}{MC} \tag{3.2}$$

για $0 \leq h \leq \delta$. Για $0 \leq t \leq M$ διαλέγουμε $n \geq 1$ τέτοιο ώστε $\frac{t}{n} \leq \delta$. Από την ιδιότητα των ημιομάδων και την **3.2** έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|T(t) - S(t)\| &= \|T(n\frac{t}{n}) - S(n\frac{t}{n})\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|T((n-k)\frac{t}{n})S(\frac{kt}{n}) - T((n-k-1)\frac{t}{n})S(\frac{(k+1)t}{n})\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|T((n-k-1)\frac{t}{n})\|\|T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n})\|\|S(\frac{kt}{n})\| \\
&\leq Cn\frac{\epsilon}{MC}\frac{t}{n} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Εφόσον το ϵ ήταν τυχαίο έχουμε $T(t) = S(t)$ για $0 \leq t \leq M$. ∎

Μία σημαντική ιδιότητα της εκθετικής οικογένειας τελεστών είναι η παρακάτω.

Πρόταση 3.2.7. Έστω X χώρος Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$ και $\mathcal{F} = \{\text{exp}tT : \alpha \geq 0\}$ η οικογένεια συνεχών τελεστών που παράγεται από τον T με

$$\|\text{exp}tT\| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Τότε υπάρχει ισοδύναμη νόρμα της $\|\cdot\|$ για τον X που παράγεται από την $\mathcal{F}$.

Απόδειξη. Έχουμε $\text{exp}tT \in Inv\mathcal{B}(X), \forall t \geq 0$. Από το θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης και το πόρισμα Φραγμένου Αντιστρόφου έχουμε ότι η $\text{exp}tT$ είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής $\forall t \geq 0$. Επομένως, ο $\text{exp}tT$ είναι ισομορφισμός $\forall t \geq 0$. Συνεπώς, υπάρχουν $c_t, C_t \geq 0$ σταθερές τέτοιες ώστε

$$c_t\|x\| \leq \|\text{exp}tTx\| \leq C_t\|x\|, \forall t \geq 0.$$

Επίσης,

$$\sup\{\|\text{exp}tTx\|_X : \text{exp}tT \in \mathcal{F}\} < +\infty, \forall x \in X.$$

Από την Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος έχουμε ότι

$$\sup\{\|\text{exp}tTx\|_X : \text{exp}tT \in \mathcal{F}, \|x\| = 1\}$$

$$= \sup\{\|\text{exp}tT\|_{B(X)} : \text{exp}tT \in \mathcal{F}\} \leq 1,$$

αφού $\|\text{exp}tT\| \leq 1, \forall t \geq 0$.

Ορίζουμε

$$\|x\|_{\mathcal{F}} := \sup\{\|\text{exp}tTx\|_X : \text{exp}tT \in \mathcal{F}\}$$

και θέτουμε

$$c := \sup\{c_t : t \geq 0\}, C := 1.$$

Γενικά επειδή η οικογένεια τελεστών είναι συστολικές απεικονίσεις ισχύει

$$\|x\|_{\mathcal{F}} \leq \|x\|, \forall x \in X.$$

Επομένως, υπάρχουν $c, C \geq 0$ τέτοιες ώστε

$$c\|x\| \leq \|x\|_{\mathcal{F}} \leq C\|x\|, \forall x \in X.$$

Άρα η $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ είναι ισοδύναμη της $\|\cdot\|$.

■

3.3 Dissipative τελεστές σε χώρους Banach.

3.3.1 Ορισμός, ο ισοδύναμος χαρακτηρισμός και οι βασικές τους ιδιότητες.

Ορισμός 3.3.1. Ένας γραμμικός τελεστής T σε ένα χώρο με νόρμα καλείται dissipative αν για κάθε $x \in D(T)$ υπάρχει $x^* \in \mathcal{J}(x)$ τέτοιο ώστε

$$\text{Re}\langle x^*, Tx\rangle \leq 0.$$

Γενικά σε ένα χώρο ημιεσωτερικού γινομένου ο T καλείται dissipative αν

$$\text{Re}[Tx, x] \leq 0, \forall x \in D(T).$$

Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να θεωρούμε ότι ο T είναι dissipative αν το maximum του πραγματικού μέρους του αριθμητικού πεδίου είναι μικρότερο ή ίσο του 0 δηλ.

$$\text{maxRe}V(T) \leq 0$$

ή

$$\text{maxRe}W(T) \leq 0.$$

Εξίσου χρήσιμος όμως είναι ο παρακάτω ισοδύναμος χαρακτηρισμός.

Θεώρημα 3.3.1. Σε ένα χώρο με νόρμα ένας γραμμικός τελεστής T είναι dissipative αν και μόνον αν

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \lambda\|x\|, \forall x \in D(T), \lambda > 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο T είναι dissipative, $\lambda > 0$ και $x \in D(T)$. Αν $x^* \in \mathcal{J}(x)$ με $\mathrm{Re}\langle x^*, Tx\rangle \leq 0$ τότε

$$\begin{aligned}\lambda\|x\|^2 &\leq \mathrm{Re}\langle x^*, \lambda x - Tx\rangle \\ &\leq |\langle x^*, \lambda x - Tx\rangle| \\ &\leq \|x\|\|\lambda x - Tx\|\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε $\lambda\|x\| \leq \|(\lambda I - T)x\|$. Έστω $x \in D(T)$ και

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \lambda\|x\|, \forall\lambda > 0.$$

Αν $y_\lambda^* \in \mathcal{J}((\lambda I - T)x)$ και $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}$ τότε $\|z_\lambda^*\| = 1$ και

$$\begin{aligned}\lambda\|x\| &\leq \|(\lambda I - T)x\| \\ &= \langle z_\lambda^*, (\lambda I - T)x\rangle \\ &= \lambda\mathrm{Re}\langle z_\lambda^*, x\rangle - \mathrm{Re}\langle z_\lambda^*, Tx\rangle \\ &\leq \lambda\|x\| - \mathrm{Re}\langle z_\lambda^*, Tx\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $\lambda > 0$. Επομένως,

$$\mathrm{Re}\langle z_\lambda^*, Tx\rangle \leq 0 \tag{3.3}$$

και

$$\mathrm{Re}\langle z_\lambda^*, x\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Tx\|. \tag{3.4}$$

Αφού από το θεώρημα του Alaoglu η μπάλα του X^* είναι w*-συμπαγής έχουμε ότι το δίκτυο z_λ^* έχει μοναδικό σημείο συσσώρευσης $z^* \in X^*$, $\|z^*\| \leq 1$ καθώς το $\lambda \to +\infty$. Από τις **3.3** και **3.4** έχουμε ότι

$$\mathrm{Re}\langle z^*, Tx\rangle \leq 0$$

και

$$\mathrm{Re}\langle z^*, x\rangle \geq \|x\|.$$

Όμως,

$$\mathrm{Re}\langle z^*, x\rangle \leq |\langle z^*, x\rangle| \leq \|x\|$$

και άρα $\langle z^*, x\rangle = \|x\|$. Για $x^* = \|x\|z^*$ έχουμε ότι $x^* \in \mathcal{J}(x)$ και

$$\mathrm{Re}\langle x^*, Tx\rangle \leq 0.$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in D(T)$ υπάρχει $x^* \in \mathcal{J}(x)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Re}\langle x^*, Tx\rangle \leq 0$ δηλαδή ο T είναι dissipative. ∎

Λήμμα 3.3.2. Αν ο T είναι ένας φραγμένος dissipative τελεστής σε ένα χώρο ημιεσωτερικού γινομένου X, ο επιλύων τελεστής του T, ο $R_\lambda(T)$ υπάρχει για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με Re$\lambda > 0$.

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Τότε υπάρχει $\{x_n\} \subset X$ με $\|x_n\| = 1$, τέτοια ώστε $(\lambda I - T)x_n \to 0$. Επομένως,

$$[\lambda x_n - Tx_n] = \lambda - [Tx, x] \to 0,$$

και επομένως Re$[Tx_n, x_n] \leq 0$. Δηλαδή Re$\lambda \leq 0$ και άρα το φάσμα περιέχεται στο ημιεπίπεδο Re$\lambda \leq 0$. ■

Λήμμα 3.3.3. Αν ο T είναι dissipative και $\lambda > 0$, τότε ο $(\lambda I - T)^{-1}$ υπάρχει και είναι φραγμένος με $\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Απόδειξη. Έστω $y = (\lambda I - T)x$. Τότε

$$\lambda\|x\|^2 = \lambda[x,x] \leq \text{Re}(\lambda[x,x] - [Tx,x]) = \text{Re}[y,x] \leq |[y,x]| \leq \|y\|\|x\|$$

$$\Rightarrow \|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \lambda > 0.$$

■

3.3.2 Το θεώρημα Lumer-Phillips.

Θα επικεντρωθούμε τώρα σε ένα σημαντικό θεώρημα που αφορά τους dissipative τελεστές και έχει χαρακτήρα γέννησης ημιομάδων τελεστών. Η φύση του θεωρήματος Lumer-Phillips είναι συνυφασμένη με προβλήματα αρχικών τιμών και κυρίως εξελικτικών εξισώσεων. Αυτό που πετυχαίνει κανείς με την εισαγωγή των ημιομάδων είναι να περιγράφει όλες τις λύσεις του αντίστοιχου προβλήματος που γεννάει ο εκάστοτε τελεστής όπως κάναμε παραδείγματος χάριν με το στοιχειώδες παράδειγμα της εκθετικής και την περιγραφή της από ένα πρόβλημα παραγώγων. Για περισσότερα σχετικά με τους dissipative τελεστές μπορεί κανείς να δει στα [19] και [21].

Θεώρημα 3.3.4. Έστω X χώρος με νόρμα και $T \in \mathcal{B}(X)$. Τότε

$$\max\{\text{Re}\lambda : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\} = \sup\{\frac{1}{t}\log\|\exp(tT)\| : t > 0\}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\log\|\exp(tT)\|.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $m = \max\text{Re}V(T, \mathcal{B}(X))$ και έστω $t \geq 0$. Αν $S \in S_{\mathcal{A}}$ και $f \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}(S)$ τότε όπως και στην απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος του Lumer έχουμε

$$\|(I - tT)S\| \geq (1 - tm)\|S\|, S \in \mathcal{A}.$$

Αν $1 - tm \geq 0$ τότε έχουμε επαγωγικά ότι

$$\|(I - tT)^n S\| \geq (1 - tm)^n \|S\|.$$

Για αρκετά μεγάλο n έχουμε ότι $1 - \frac{t}{n}m \geq 0$ και άρα αντικαθιστώντας το t με $\frac{t}{n}$ και παίρνοντας $n \to +\infty$ έχουμε

$$\|\exp(-tT)S\| \geq e^{-tm}\|S\|.$$

Αν $S = \exp(tT)$ τότε

$$\|\exp(tT)\| \leq e^{tm}$$

και επομένως

$$\sup\{\frac{1}{t}\log\|\exp(tT)\| : t \geq 0\} \leq m. \tag{3.5}$$

Όμως,

$$\|\exp(tT)\| = \|I + tT\| + g(t),$$

όπου η g είναι τέτοια ώστε για κάποιο $M > 0$, να ισχύει

$$|g(t)| \leq Mt^2, (0 \leq t \leq 1). \tag{3.6}$$

Με χρήση της ανισότητας

$$\log t \geq \frac{t-1}{t}, t > 0$$

έχουμε

$$\frac{1}{t}\|\exp(tT)\| \geq \frac{\frac{1}{t}(\|I + tT\| - 1) + \frac{1}{t}g(t)}{\|I + tT\| + g(t)}.$$

Από την 3.6 και το κεντρικό θεώρημα του Lumer έχουμε ότι το δεξί μέλος της ανισότητας συγκλίνει στο m όσο το $t \to 0^+$ που σε συνδυασμό με την 3.5 μας δίνουν το επιθυμιτό αποτέλεσμα.

■

Θεώρημα 3.3.5. (G. Lumer - R. S. Phillips). Ένας $T \in \mathcal{B}(X)$ είναι dissipative αν και μόνον αν

$$\|\exp(tT)\| \leq 1,$$

για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη. Άμεση από το προηγούμενο θεώρημα. ■

Παρατήρηση 12. Ο T είναι dissipative ως προς όλα τα ημιεσωτερικά γινόμενα που είναι συμβατά με τη νόρμα του X αφού είναι dissipative για κάθε $x^* \in \mathcal{J}(x)$. Σε αυτό συμφωνούν και το θεώρημα του Lumer το λήμμα 2.2.2. και το iii) στο θεώρημα 2.3.1. Δηλαδή στο θεώρημα Lumer-Phillips αν υποθέσουμε ότι ο T είναι γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημιομάδας συστολών τότε

$$\mathrm{Re}[(S(t)x - x), x] = \mathrm{Re}[S(t)x, x] - \|x\|^2 \leq 0$$

και αν $x \in X$ τότε

$$\text{Re}[Tx, x] = \lim_{t \to 0^+} [S(t)x - x), x] \leq 0.$$

Δηλαδή ο γεννήτορας είναι dissipative ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο.

Πόρισμα 8. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής T είναι γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημιομάδας συστολών αν και μόνον αν είναι dissipative.

3.3.3 Ερμιτιανοί τελεστές σε χώρους Banach.

Ορισμός 3.3.2. Ένας $T \in \mathcal{B}(X)$ σε ένα χώρο με νόρμα καλείται ερμιτιανός αν $V(T, \mathcal{B}(X)) \subset \mathbb{R}$

Θεώρημα 3.3.6. Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$ σε ένα χώρο με νόρμα, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα

i) Ο T είναι ερμιτιανός.

ii) $\lim_{t \to 0} \frac{\|I+itT\|-1}{t} = 0$.

iii) $\|\exp(itT)\| = 1, t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο T είναι ερμιτιανός αν και μόνον αν

$$\text{maxRe}V(iT, \mathcal{B}(X)) = \text{maxRe}V(-iT, \mathcal{B}(X)) = 0.$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα από το κεντρικό θεώρημα του Lumer και το ότι ο iT και ο $-iT$ είναι dissipative. ■

Κεφάλαιο 4

Συμπληρωματικότητα Εικόνας και Πυρήνα.

4.1 Ιδιοτιμές στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου.

4.1.1 Ορθογωνιότητα του πυρήνα στην εικόνα του τελεστή.

Στην ενότητα αυτή μελετάμε ιδιοτιμές στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου. Πιο συγκεκριμένα δίνονται ικανές συνθήκες ώστε ο πυρήνας ενός τελεστή να είναι ορθογώνιος στην εικόνα του, με την Birkhoff-James έννοια. Επίσης, προσθέτοντας επιπλέον συνθήκες δείχνουμε ότι μπορουμε να σπάσουμε το χώρο X ως ευθύ άθροισμα της εικόνας και του πυρήνα του τελεστή. Όσα θα συζητήσουμε οφείλονται στον Sinclair [24] εκτός αν αναφερθεί κάτι διαφορετικό.

Όσον αφορά τις ιδιοτιμές του τελεστή T παίρνουμε αποτελέσματα που αφορούν τις τάξεις των ιδιοτιμών και τις διαστάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων. Θα αξιοποιήσουμε την σχέση $V(\lambda I + T, \mathcal{B}(X)) = \lambda + V(T, \mathcal{B}(X))$, που αφορά το αριθμητικό πεδίο για να μεταφέρουμε τα αποτελέσματα των προτάσεων στους αντίστοιχους τελεστές, αφού θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του T δηλαδή $\lambda = 0$.

Πρόταση 4.1.1. (A. M. Sinclair). Έστω T συνεχής γραμμικός τελεστής σε ένα μιγαδικό χώρο Banach X. Αν $0 \in \partial V(T, \mathcal{B}(X))$, τότε ο $KerT$ είναι ορθογώνιος κατά Birkhoff-James στον $R(T)$. Πιο συγκεκριμένα ο $KerT \oplus \overline{R(T)}$ είναι κλειστός στον X.

Ισχυρισμός: Εάν $0 \in \partial V(T, \mathcal{B}(X)) = \partial \overline{co} W(T) = \partial \overline{co} V(T)$ τότε για κάθε $y \in KerT$, υπάρχει $y^* \in \mathcal{J}(y)$ τέτοιο ώστε

$$y^* \in KerT^* = R(T)^\perp = \{y^* \in X^* : \langle y^*, z \rangle = 0, \forall z \in R(T)\},$$

όπου $\mathcal{J}(y)$ η δυική απεικόνιση.

Επομένως, το συμπέρασμα έπεται άμεσα από το παραπάνω αφού για $y \in KerT$ θα είναι:

$$\|y\|^2 = \langle y^*, y\rangle = \langle y^*, z\rangle + \langle y^*, y\rangle = |\langle y^*, y+z\rangle| \leq \|y^*\|\|y+z\| \Rightarrow \|y\| \leq \|y+z\|,$$

$\forall z \in \overline{R(T)}$, αφού $\|y\| = \|y^*\|$.

Προφανώς αφού ο $KerT$ κάθετος στον $R(T)$ θα είναι και στον $\overline{R(T)}$.

Απόδειξη. (Του ισχυρισμού.) Αφού $0 \in \partial V(T, \mathcal{B}(X))$, το οποίο είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, υποθέτουμε ότι

$$\max\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in V(T, \mathcal{B}(X))\} = 0,$$

πολλαπλασιάζοντας τον T με ένα κατάλληλο μιγαδικο αριθμό $e^{i\theta}$, μέτρου 1. Θεωρώντας αυτό, έχουμε $\|\mathrm{exp}aT\| \leq 1$, για κάθε $a \geq 0$ λόγω του θεωρήματος Lumer-Phillips.

Αν ο T είναι 1-1 τότε $KerT = 0$ και το αποτέλεσμα έπεται αφού το 0 είναι ορθογώνιο σε όλα τα διανύσματα. Θεωρούμε ότι ο T δεν είναι 1-1. Έστω $y \in KerT$ με $y \in S_X$ και θεωρούμε το σύνολο της δυϊκής απεικόνισης

$$\mathcal{J}(y) = \{y^* \in X^* : \langle y^*, y\rangle = \|y\|^2 = \|y^*\|^2\},$$

το οποίο είναι μη κενό, w*-συμπαγές και κυρτό.

Τώρα η $\mathrm{exp}aT^*$ είναι μία w*-συνεχής, αφού $\mathrm{exp}aT \in \mathcal{B}(X)$ και αφφινική απεικόνιση με $\mathrm{exp}aT^* : \mathcal{J}(y) \to \mathcal{J}(y)$ για κάθε $a \geq 0$.

Το πως η $\mathrm{exp}aT^*$ απεικονίζει τα y^* από το $\mathcal{J}(y)$ στο $\mathcal{J}(y)$ προκύπτει από το ότι :

$$\mathrm{exp}aTy = Iy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n T^n}{n!} y = y$$

εφόσον $y \in KerT = {}^{\perp}R(T^*)$. Δηλαδή, αν $y^* \in \mathcal{J}(y)$ τότε

$$\langle \mathrm{exp}aT^* y^*, y\rangle = \langle y^*, \mathrm{exp}aTy\rangle = \langle y^*, y\rangle = \|y\|^2$$

και

$$\|y\|^2 = |\langle \mathrm{exp}aT^* y^*, y\rangle| \leq \|\mathrm{exp}aT^* y^*\|\|y\| \Rightarrow \|y^*\| = \|y\| \leq \|\mathrm{exp}aT^* y^*\|.$$

Επιπλέον, αφού $\|\mathrm{exp}aT^*\| = \sup\{\frac{\|\mathrm{exp}aT^* y^*\|}{\|y^*\|} : y^* \in X^*\} \leq 1$ έχουμε για $y^* \in \mathcal{J}(y)$ ότι $\|\mathrm{exp}aT^* y^*\| \leq \|y^*\|$. Άρα $\|\mathrm{exp}aT^* y^*\| = \|y^*\|$, δηλαδή $\mathrm{exp}aT^* y^* \in \mathcal{J}(y)$.

Τώρα, η $\{\mathrm{exp}aT^* : a \geq 0\}$ είναι μια μεταθετική ημιομάδα στο $\mathcal{J}(y)$ και πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου των Markov-Kakutani, δηλαδή υπάρχει $y^* \in \mathcal{J}(y)$ τέτοιο ώστε exp$aT^*y^* = y^*$ για κάθε $a \geq 0$. Παίρνοντας παράγωγο από δεξιά στο $a = 0$ και εφαρμόζοντας την exp$aT^*y^* = y^*$ για την exp$aT^* : \mathbb{R}_+ \to X^*$ έχουμε $T^*y^* = 0$ αφού

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\exp(t+0)T^*y^* - \exp 0T^*y^*}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\exp tT^*y^* - Iy^*}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\exp tT^*y^* - y^*}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{y^* - y^*}{t} = 0$$

Όμως η expaT^* από συναρτησιακό λογισμό είναι συνεχής με συνεχή παράγωγο και

$$\frac{d\exp aT^*}{da} = T^* \circ \exp aT^* = \exp aT^* \circ T^*.$$

Άρα η exp$aT^* \circ T^*y^*$ στο $a = 0$ ισούται με το όριο άρα

$$\exp 0T^* \circ T^*y^* = 0 \Rightarrow T^*y^* = 0$$

αφού exp$0T^* = I$. Επομένως $y^* \in KerT^*$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Παρατήρηση 13. Αν ο X είναι λείος το θεώρημα σταθερού σημείου δεν χρειάζεται αφού το $\mathcal{J}(y)$ είναι μονοσύνολο.

Η παραπάνω πρόταση αποδείχθηκε αργότερα με έναν αρκετά απλούστερο τρόπο. Θα δώσουμε και την εναλλακτική σύντομη απόδειξη αξιοποιώντας τον ισοδύναμο χαρακτηρισμό των dissipative τελεστών και της Birkhoff-James ορθογωνιότητας για κλειστούς υπόχωρους. Ο ισχυρισμός που κάναμε πλέον δεν θα μας χρειαστεί μιας και θα περάσουμε κατευθείαν στο συμπέρασμα δηλαδή για $x \in KerT$ έχουμε $\|x + Ty\| \geq \|x\|, \forall y \in X$. Η απόδειξη δουλεύει από το σημείο που έχουμε περιστρέψει το αριθμητικό πεδίο.

Απόδειξη. (B. Bollobás). Αφού ο T είναι dissipative από το θεώρημα 3.3.1. έχουμε ότι

$$\|\lambda x - Tx\| \geq \lambda\|x\|, \forall x \in X, \lambda > 0.$$

Επομένως,

$$\|x - rTx\| \geq \|x\|, \forall x \in X, r \geq 0.$$

Αν $x = z - \frac{y}{N}$ με $z \in KerT, y \in X, N > 0$, τότε

$$\|z - \frac{y}{N} - NT(z - \frac{y}{N})\| = \|z - \frac{y}{N} + Ty\| \geq \|z - \frac{y}{N}\|, \forall y \in X, z \in KerT, N > 0.$$

Παίρνοντας όριο για $N \to \infty$ έχουμε ότι για $z \in KerT$

$$\|z + Ty\| \geq \|z\|, \forall y \in X.$$

■

Παρατήρηση 14. Το παραπάνω άθροισμα δεν είναι απαραίτητα όλος ο X. Παρακάτω όμως θα δώσουμε τις απαραίτητες προϋποθέσεις για να ισχύει αυτό.

Παράδειγμα 4.1.1. Έστω ο μιγαδικός χώρος Banach των συνεχών συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{C}$, $(C[0,1], \|\cdot\|_{sup})$. Αν $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0$ και $g(x) \geq 0, \forall x \in (0,1]$, τότε θεωρούμε τον πολλαπλασιαστικό τελεστή

$$T_g : (C[0,1], \|\cdot\|_{sup}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_{sup})$$

με

$$T_g(f) = g \cdot f, \forall f \in (C[0,1], \|\cdot\|_{sup}).$$

Ισχύει ότι $\|\text{exp}itTg\| = 1$ για τον συγκεκριμένο τελεστή, αφού εφόσον T_g είναι ο πολλαπλασιασμός επί g και $g(x) \geq 0$ με $g(x) = 0$ μόνο στο 0, τότε το $tg(x), t \in \mathbb{R}$ είναι πάντα μια γωνία θ και άρα

$$\|e^{itg}\| = |e^{itg(x)}| = \sqrt{\cos^2(tg(x)) + \sin^2(tg(x))} = 1.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\|\text{exp}itT_g\| = \sup\{\|\text{exp}itgf\|, \forall f \in (C[0,1], \|\cdot\|_{sup}) : \|f\|_{sup} = 1\} \leq 1,$$

αφού

$$\|\text{exp}itgf\| \leq \|\text{exp}itg\|\|f\| \leq 1, \forall f \in (C[0,1], \|\cdot\|_{sup}) : \|f\|_{sup} = 1.$$

Τώρα για $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$ έχουμε $\|\text{exp}itgf\| = 1$, άρα $\|\text{exp}itT_g\| \geq 1$. Επομένως $\|\text{exp}itT_g\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

Οπότε ο T_g είναι ερμιτιανός. Επίσης, το 0 είναι στο αριθμητικό πεδίο αφού το φάσμα του πολλαπλασιαστικού τελεστή ισούται με το $\overline{R(g)}$. Αφού η g μηδενίζεται, το 0 ανήκει στο φάσμα και από τον φασματικό εγκλεισμό το 0 ανήκει στο αριθμητικό πεδίο. Τέλος, αφού ο T_g είναι ερμιτιανός το αριθμητικό πεδίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ άρα ταυτίζεται με το σύνορο του. Παρατηρούμε τώρα ότι ο $\overline{R(T)}$ ισούται με τις συναρτήσεις του χώρου οι οποίες μηδενίζονται στο 0. Επίσης αφού ο T_g είναι 1-1 ο $KerT \oplus \overline{R(T)} = \overline{R(T)}$, άρα δεν είναι όλος ο αρχικός χώρος.

4.1.2 Εφαρμογές στον δείκτη ανόδου και σε ιδιοχώρους τελεστών.

Μπορούμε τώρα να περάσουμε από την προηγούμενη πρόταση σε αποτελέσματα που αφορούν τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους των τελεστών. Θα χρειαστούμε μερικά αποτελέσματα της θεωρίας Riesz-Schauder των συμπαγών τελεστών αλλά θα βγάλουμε συμπεράσματα και για ιδιοχώρους φραγμένων τελεστών ανεξαρτήτως συμπάγειας. Γενικά για ένα τελεστή T σε ένα διανυσματικό χώρο X ισχύει

$$\{0\} = KerT^0 \subset KerT \subset KerT^2 \subset ... \subset KerT^n \subset ...$$

και

$$X \supset R(T) \supset R(T^2) \supset ... \supset R(T^n) \supset ...$$

Ονομάζουμε δείκτη ανόδου (ascent) τον μικρότερο $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $KerT^n = KerT^{n+1}$ και τον συμβολίζουμε με $a(T)$. Όμοια ονόμαζουμε δείκτη καθόδου (descent) τον μικρότερο $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $R(T^{n+1}) = R(T^n)$ και συμβολίζουμε με $d(T)$. Αν δεν υπάρχει n ώστε να συμβαίνει κάποιο από τα παραπάνω τότε ο δείκτης για τον οποίο συμβαίνει αυτό ισούται με άπειρο. Αν $a(T) = 0$ τότε ο T είναι 1-1 και αν $d(T) = 0$ ο T είναι επί. Τέλος αν και οι δύο δείκτες είναι πεπερασμένοι τότε ισούνται και έχουμε $i(T) = a(T) = d(T) = p$ όπου $i(T)$ ο δείκτης του T για τον οποίο ισχύει

$$X = KerT^p \oplus R(T^p).$$

Για τα παραπάνω αλλά και περισσότερα σχετικά με αυτά παραπέμπουμε στο [[11], σελ. 160-164]. Πιο συγκεκριμένα από την πρόταση που αποδείξαμε μέσω του παρακάτω λήμματος συνεπάγεται το εξής σημαντικό αποτέλεσμα των Nirschl και Schneider.

Λήμμα 4.1.2. Έστω X διανυσματικός χώρος και T φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν $KerT \cap R(T) = \{0\}$ τότε $KerT^2 = KerT$.

Απόδειξη. Ο ένας εγκλεισμός ισχύει αφού $Tx = 0 \Rightarrow T^2x = 0$. Έστω $x \in KerT^2$ τότε $T^2x = 0 \Rightarrow T(Tx) = 0$. Δηλαδή $Tx \in KerT \Rightarrow Tx = 0$ λόγω της υπόθεσης του λήμματος. Άρα $x \in KerT$. Γενικά ισχύει και το αντίστροφο. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [[11], σελ.161] ■

Πρόταση 4.1.3. (N. Nirschl - H. Schneider). Έστω X χώρος με νόρμα και T φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν $0 \in \partial\overline{co}V(T)$ και $x \in KerT^2$ τότε $x \in KerT$.

Απόδειξη. Για την αρχική απόδειξη παραπέμπουμε στο [[4], σελ. 94] ■

Όπως προείπαμε μέσω της σχέσης $V(\lambda I + T, \mathcal{B}(X)) = \lambda + V(T, \mathcal{B}(X))$ μπορούμε να δουλέψουμε τις προτάσεις για τους μετατοπισμένους τελέστες. Αν κοιτάξουμε τους $\lambda I - T$ θα δούμε ότι αν το λ είναι ιδιοτιμή που ικανοποιεί την πρόταση 4.1.3. οι γεωμετρικές και οι αλγεβρικές διαστάσεις των ιδιοχώρων συμπίπτουν και οι αύξουσες αυτές αλυσίδες σταματάνε να αυξάνονται αμέσως. Δηλαδή η τάξη της ιδιοτιμής είναι 1.

Πόρισμα 9. Έστω X χώρος Banach και T γραμμικός, φραγμένος τελεστής. Αν ο T είναι ερμιτιανός με $\lambda \in \sigma(T)$ και $x \in KerT_\lambda^2$ τότε $x \in KerT_\lambda$, όπου $T_\lambda = \lambda I - T$.

Απόδειξη. Από το φασματικό εγκλεισμό και το ότι ο T είναι ερμιτιανός έχουμε $\sigma(T) \subset \overline{V(T)} \subset \mathbb{R}$ και επομένως

$$\lambda \in \partial V(T, \mathcal{B}(X)) = V(T, \mathcal{B}(X)).$$

Δηλαδή το $0 \in \partial V(T_\lambda, \mathcal{B}(X))$ και άρα από την πρόταση 4.1.1. του Sinclair και το λήμμα 4.1.2. έπεται το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 10. Για τις ιδιοτιμές ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή με $|\lambda| = \|T\|$ ισχύει $KerT_\lambda^2 = KerT_\lambda$.

Απόδειξη. Έχουμε $r_\sigma(T) \leq v(T) \leq \|T\| \Rightarrow v(T) = |\lambda| \Rightarrow \lambda \in \partial V(T, \mathcal{B}(X))$. Επομένως το αποτέλεσμα έπεται από την πρόταση 4.1.3. αφού $0 \in \partial V(T_\lambda, \mathcal{B}(X))$. ■

Η επόμενη πρόταση αφορά τους συμπαγείς τελεστές και το πως συμπίπτουν οι αντίστοιχες γεωμετρικές και αλγεβρικές πολλαπλότητες. Για την περίπτωση που είμαστε σε χώρο Hilbert οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου μας εξασφαλίζουν το αποτέλεσμα, το οποίο είναι σημαντική ιδιότητα των συμπαγών αυτοσυζηγών τελεστών. Σε χώρους Banach όσα είπαμε νωρίτερα μας βοηθάνε να παρούμε τα ίδια επιθυμητά αποτελέσματα, σαν εφαρμογή της πρότασης του Sinclair. Θυμίζουμε ότι όταν ο T είναι συμπαγής, ο $R(T_\lambda) = R(\lambda I - T)$ είναι κλειστός $\forall \lambda \neq 0$, το οποίο είναι απαραίτητο συστατικό της απόδειξης. Ας δούμε όμως πρώτα την πρώτη περίπτωση σε ένα χώρο Hilbert για να φέρουμε τα αποτελέσματα σε αναλογία. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{K}(X)$ του συμπαγείς τελεστές στον αντίστοιχο χώρο X που βρισκόμαστε.

Πρόταση 4.1.4. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{K}(H)$. Αν ο T είναι αυτοσυζηγής και $\lambda \in \sigma(T)$ τότε $KerT_\lambda^2 = KerT_\lambda$, όπου $T_\lambda = \lambda I - T$. Επιπλέον, αν $\lambda \neq 0$ τότε $H = KerT_\lambda \oplus R(T_\lambda)$.

Απόδειξη. Έστω $x \in KerT_\lambda^2$ τότε $(\lambda I - T)^2 x = 0$ και άρα

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = \langle (\lambda I - T)x, (\lambda I - T)x \rangle = \langle (\lambda I - T)^2 x, x \rangle = 0$$

αφού $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα $\|(\lambda I - T)x\| = 0 \Rightarrow (\lambda I - T)x = 0 \Rightarrow x \in KerT_\lambda \Rightarrow KerT_\lambda^2 = KerT_\lambda$.

Επειδή τώρα ισχύει ότι $H = KerT_\lambda^{p_\lambda} \oplus R(T_\lambda^{p_\lambda}), \forall \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$, δηλαδή $p_\lambda < \infty$ και οι αλυσσίδες των πυρήνων σταθεροποιούνται με $a(T_\lambda) = 1$ έχουμε ότι: $i(T_\lambda) = d(T_\lambda) = a(T_\lambda) = p_\lambda = 1, \forall \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$. Άρα, $H = KerT_\lambda \oplus R(T_\lambda)$. ■

Πρόταση 4.1.5. Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{K}(X)$. Αν ο T είναι ερμιτιανός και $\lambda \in \sigma(T)$ τότε $KerT_\lambda^2 = KerT_\lambda$. Επιπλέον, αν $\lambda \neq 0$ τότε

$$X = KerT_\lambda \oplus R(T_\lambda)$$

και

$$X^* = KerT_\lambda^* \oplus R(T_\lambda^*).$$

Απόδειξη. Αφού ο T είναι ερμιτιανός έχουμε

$$\lambda \in \partial V(T, \mathcal{B}(X)) \subset \mathbb{R}, \forall \lambda \in \sigma(T)$$

από το φασματικό εγκλεισμό. Από τις προτάσεις 4.1.1. κα 4.1.3. έχουμε ότι

$$KerT_\lambda^2 = KerT_\lambda, \lambda \in \sigma(T).$$

Ακριβώς με τα ίδια επιχειρήματα όπως και στην προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$X = KerT_\lambda \oplus R(T_\lambda), \forall \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0.$$

Τώρα από το θεώρημα του Schauder [[20], σελ. 323] ο T^* είναι συμπαγής. Με εφαρμογή της πρότασης στον συζυγή έχουμε το ζητούμενο. ■

4.1.3 Η ιδιότητα της συμπληρωματικότητας και η μηδενική ιδιοτιμή.

Περνάμε τώρα στο κεντρικό θεώρημα που αφορά την συμπληρωματικότητα του πυρήνα και της εικόνας ενός τελεστή. Η σχετική δυσκολία που υπάρχει ώστε να συμβεί αυτό σε ένα χώρο Banach, έγγειται στο γεγονός ότι οι σχέσεις μεταξύ ορθογωνιότητας και συμπληρωματικότητας χάνονται και δεν ισχύουν αυτές καθ' αυτές όπως στους χώρους Hilbert. Μάλιστα τέτοιες έννοιες είναι ασθενέστερες σε χώρους Banach αφού υπάρχουν υπόχωροι οι οποίοι δεν είναι καν συμπληρωματικοί. Άν κάθε υπόχωρος ενός χώρου Banach ήταν συμπληρωματικός τότε ο χώρος θα ήταν ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert όπως έχει αποδειχθεί από τους J. Lindenstrauss και L. Tzafriri [16].

Από την άλλη μεριά δείξαμε στο παράδειγμα 4.1.1. ότι η καθετότητα ενός υπόχωρου σε κάποιον άλλον δεν συνεπάγεται την μεταξύ τους συμπληρωματικότητα. Θα δούμε ότι με μερικές επιπλέον συνθήκες από την πρόταση 4.1.1. ο Sinclair στο [24] έδειξε πότε αυτό είναι δυνατόν να συμβεί για έναν τελεστή. Θα χρειαστούμε πρώτα όμως τα δύο παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 4.1.6. (B. E. Johnson -A. M. Sinclair). Αν $\lambda \in \partial\sigma(T)$ τότε $R(T_\lambda) \neq X$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [[14], λήμμα 2.2]. ■

Λήμμα 4.1.7. (A. M. Sinclair). Έστω X χώρος Banach και T φραγμένος γραμμικός τελεστής με $0 \in \partial\overline{co}V(T)$ και

$$\overline{R(T^*)} = KerT^\perp$$

τότε $X = KerT \oplus \overline{R(T)}$.

Απόδειξη. Έχουμε $KerT \oplus \overline{R(T)}$ κλειστός υπόχωρος του X, οπότε αν δεν είναι όλος ο X από συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*, f \neq 0$ τέτοιο ώστε $\langle f, x\rangle = 0, \forall f \in KerT \oplus \overline{R(T)}$. Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$KerT^* = \overline{R(T)}^\perp.$$

Εφόσον τώρα

$$f|_{\overline{R(T)}} = 0 \Rightarrow f \in KerT^*$$

και

$$f|_{KerT} = 0 \Rightarrow f \in \overline{R(T^*)}$$

προκύπτει ότι $f \in KerT^* \cap \overline{R(T^*)}$. Όμως αφού $V(T, \mathcal{B}(X)) = V(T^*, \mathcal{B}(X^*))$ έχουμε ότι

$$0 \in \partial V(T^*, \mathcal{B}(X^*)).$$

Δηλαδή ο T^* ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης 4.1.1. Άρα ο $KerT^* \oplus \overline{R(T^*)}$ είναι κλειστός στον X^* και

$$f \in KerT^* \cap \overline{R(T^*)} = \{0\} \Rightarrow f = 0.$$

Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο και άρα

$$X = KerT \oplus \overline{R(T)}.$$

■

Πρόταση 4.1.8. (A. M. Sinclair). Έστω T συνεχής γραμμικός τελεστής σε ένα μιγαδικό χώρο Banach X. Αν $0 \in \sigma(T) \cap \partial V(T, \mathcal{B}(X))$ και ο T έχει κλειστή εικόνα τότε:

i) $X = KerT \oplus R(T)$ και $X^* = KerT^* \oplus R(T^*)$.

ii) Το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του $\sigma(T)$ και ιδιοτιμή του T.

Απόδειξη. Έχουμε $KerT \oplus R(T)$ κλειστός υπόχωρος του X και $KerT^* = R(T)^{\perp}$. Αφού ο $R(T)$ είναι κλειστός, ισχύει ότι $R(T^*) = \overline{R(T^*)} = KerT^{\perp}$, από το θεώρημα κλειστής εικόνας του Banach [[20], σελ. 292]. Από το λήμμα 4.1.7. προκύπτει ότι

$$X = KerT \oplus R(T).$$

Λόγω του φασματικού εγκλεισμού έχουμε ότι $0 \in \partial\sigma(T)$ διότι αλλιώς αν $0 \in \sigma(T)^{\circ}$ τότε $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(0; \varepsilon) \subset \sigma(T) \Rightarrow D(0; \varepsilon) \cap V(T, \mathcal{B}(X))^c \neq \oslash,$$

δηλαδή το φάσμα δεν είναι υποσύνολο του αριθμητικού πεδίου, άτοπο. Συνεπώς, από το λήμμα Johnson-Sinclair έχουμε $R(T) \neq X \Rightarrow KerT \neq \{0\} \Rightarrow 0$ ιδιοτιμή του T. Από αυτό φαίνεται κιόλας ότι το ευθύ άθροισμα δεν είναι τετριμμένο.

Βλέπουμε τώρα ότι ο $T|_{R(T)}$ αντιστρέφεται και αφού και ο $\lambda I|_{R(T)}$ είναι αντιστρέψιμος, ο $\lambda I - T|_{R(T)}$ αντιστρέφεται για λ γύρω από το 0. Επίσης,

$$\sigma(T|_{KerT}) = \{0\}$$

και εφόσον $X = KerT \oplus R(T)$ ο $\lambda I - T$ αντιστρέφεται γύρω από το 0 όμως όχι στο 0. Συνεπώς το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του φάσματος. ■

Παρατήρηση 15. Όπως γνωρίζουμε και είδαμε και νωρίτερα η ορθογωνιότητα και η συμπληρωματικότητα δύο υπόχωρων δεν είναι ισοδύναμες έννοιες σε ένα χώρο Banach. Σε χώρους Hilbert, από την μια μεριά η ύπαρξη του ορθογώνιου συμπληρώματος ενός υπόχωρου M, δηλαδή του κάθετου υπόχωρου στον M που είναι και συμπληρωματικός με τον M, έχει την ιδιότητα να περιέχει κάθε ορθογώνιο υπόχωρο στον M. Από την άλλη μερία αν M, N συμπληρωματικοί τότε μπορούμε να ορίσουμε ορθογώνια προβολή από τον N στον $M^{\perp}$, οπότε είναι εμφανές ότι η σχέση αυτών των δύο εννοιών είναι ισχυρή σε τέτοιους χώρους αν και όχι ισοδύναμη.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που χάνεται στους χώρους Banach είναι η συμμετρία της σχέσης ορθογωνιότητας που ισχύει στους χώρους Hilbert. Για την ακρίβεια ένας χώρος με νόρμα διάστασης μεγαλύτερης ίσης του 3 είναι χώρος εσωτερικού γινομένου αν και μόνο αν η Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι συμμετρική. Το παραπάνω θεώρημα οφείλεται στον James [12]. Βασιζόμενοι σε αυτό, θα δείξουμε ότι η εικόνα του T στην παραπάνω πρόταση δεν είναι απαραίτητα ορθογώνια κατά Birkhoff-James στον πυρήνα. Αυτό μπορεί να φανεί με ένα στοιχειώδες παράδειγμα αξιοποιώντας την μη-συμμετρική ιδιότητα της σχέσης αυτής.

Παράδειγμα 4.1.2. Έστω ένας χώρος Banach όπου η Birkhoff-James ορθογωνιότητα δεν είναι συμμετρική και Y, Z κλειστοί υπόχωροι τέτοιοι ώστε Y κάθετος στον Z και $X = Y \oplus Z$. Τότε αν P η ορθογώνια προβολή επί του Y κατά μήκος του Z με $\|P\| = 1$, έχουμε ότι το $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή του P, αφού είναι προβολή, στο $\partial V(P, \mathcal{B}(X))$. Αυτό φαινέται από την ανισότητα

$$r_\sigma(P) \leq v(P) \leq \|P\| \Rightarrow 1 \leq v(P) \leq 1 \Rightarrow v(P) = 1.$$

Επίσης, $R(I-P) = KerP = Z$ κλειστό, άρα από την πρόταση 4.1.8. του Sinclair

$$X = R(I-P) \oplus Ker(I-P)$$

και $R(I-P)$ όχι ορθογώνιος στον $Ker(I-P)$.

Μπορούμε να δούμε τώρα μερικά πορίσματα που προκύπτουν άμεσα από την προηγούμενη πρόταση. Με απλή παρατήρηση βλέπουμε ότι η πρόταση 4.1.5. μπορεί να αποδειχθεί συντομότερα με χρήση της πρότασης 4.1.8. του Sinclair.

Πόρισμα 11. Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{K}(X)$. Αν ο T είναι ερμιτιανός και $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$ τότε $X = KerT_\lambda \oplus R(T_\lambda)$ και $X^* = KerT_\lambda^* \oplus R(T_\lambda^*)$.

Πόρισμα 12. Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{K}(X)$. Αν $\|T\| = \lambda \in \sigma(T)$ τότε $X = Ker(\lambda I - T) \oplus R(\lambda I - T)$ και $X^* = Ker(\lambda I - T^*) \oplus R(\lambda I - T^*)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$r_\sigma(T) \leq v(T) \leq \|T\| \Rightarrow \lambda \leq v(T) \leq \lambda \Rightarrow v(T) = \lambda \Rightarrow \lambda \in \partial V(T, \mathcal{B}(X)).$$

Επειδή $R(\lambda I - T)$ κλειστός από την πρόταση 4.1.8. του Sinclair έπεται το ζητούμενο. ■

Πρόταση 4.1.9. (A. M. Sinclair). Αν X ανακλαστικός χώρος Banach και

$$0 \in \partial V(T, \mathcal{B}(X))$$

τότε $X = KerT \oplus \overline{R(T)}$.

Απόδειξη. Αφού ο X είναι ανακλαστικός για $T \in \mathcal{B}(X)$ ισχύει ότι

$$\overline{R(T^*)} = KerT^{\perp}.$$

Αυτό γιατί $\overline{R(T^*)} = KerT^{**\perp} = KerT^{\perp}$.Άρα αφού $0 \in \partial V(T, \mathcal{B}(X))$ από λήμμα 4.1.7.

$$X = KerT \oplus \overline{R(T)}.$$

■

Παρατήρηση 16. Αν ο T είναι dissipative σε ανακλαστικό χώρο Banach τότε ικανοποιεί το παραπάνω. Το ίδιο ισχύει αν είναι γενικά ορισμένος σε χώρο Banach και έχει κλειστή εικόνα λόγω της πρότασης 4.1.8. Επίσης για ερμιτιανό τελεστή σε χώρο Banach ισχύουν και τα δύο αφού ο iT και ο $-iT$ είναι dissipative και $R(iT) = R(T), KeriT = KerT$.

Πρόταση 4.1.10. (A. M. Sinclair). Αν X ανακλαστικός χώρος Banach και

$$0 \in \partial V(T, \mathcal{B}(X))$$

τότε το 0 είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν ο $R(T)$ δεν είναι πυκνός στον X αν και μόνον αν το 0 είναι ιδιοτιμή του T^*.

Απόδειξη. Επειδή ο X είναι ανακλαστικός από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε $X = KerT \oplus \overline{R(T)}$. Ο $R(T)$ δεν είναι πυκνός αν και μόνον αν ο T δεν είναι 1-1 αν και μόνον αν $0 \in \sigma_p(T)$. Για τον T^* τώρα πάλι αν ο $R(T)$ δεν είναι πυκνός από συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*, f \neq 0$ τέτοιο ώστε $f|_{\overline{R(T)}} = 0, \forall x \in \overline{R(T)}$. Για $x \in X$ έχουμε λόγω της γραφής του x

$$\langle Tx, f \rangle = \langle x, T^* f \rangle = 0.$$

Άρα αφού $T^* f = 0 \Rightarrow 0 \in \sigma_p(T^*)$, αφού T^* όχι 1-1. Αν τώρα $0 \in \sigma_p(T^*)$ τότε υπάρχει $f \in X^*, f \neq 0$ τέτοιο ώστε $T^* f = 0$ και για $x \in X$

$$\langle x, T^* f \rangle = \langle Tx, f \rangle = 0.$$

Όμως αν ο $R(T)$ είναι πυκνός τότε $f = 0$ αφού ${}^{\perp}KerT^* = \overline{R(T)} = X$, άτοπο.

■

4.2 Η συμπεριφορά του τελεστή με βάση το χωρικό αριθμητικό πεδίο.

4.2.1 Ορθογωνιότητα του πυρήνα στην εικόνα του τελεστή.

Αργότερα από αυτά τα αποτελέσματα ο Crabb και ο Sinclair στο [6] γενίκευσανε το αποτέλεσμα της πρότασης 4.1.1. σε χώρους με νόρμα με την χρήση μιας ανισότητας η οποία ποσοτικοποιείται με βάση περιοχές στο μιγαδικό επίπεδο. Παρόμοια αποτελέσματα είχαν δουλευτεί από τον Crabb στο [5], για τον δείκτη ανόδου των ιδιοτιμών στο σύνορο του χωρικού αριθμητικού πεδίου, αξιοποιώντας την άνω ημισυνέχεια της απεικόνισης $x \to V(T, x)$. Ακριβώς για αυτό το λόγο θα χρειαστούμε κάποια τοπολογικά επιχειρήματα ώστε να δώσουμε τα αποτελέσματα της εργασίας τους, που τα περισσότερα τα έχουμε παρουσιάσει στην ενότητα 2.3.4. Επίσης, θα χρειαστούμε το παρακάτω πολύ γνωστό θεώρημα σταθερού σημείου.

Θεώρημα 4.2.1. (S. Kakutani). Έστω $S \neq \emptyset$ συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $F : S \to \mathcal{P}(S)$ άνω ημισυνεχής συνολοσυνάρτηση τέτοια ώστε το $F(x) \neq \emptyset$ να είναι κλειστό και κυρτό $\forall x \in S$. Τότε η F έχει σταθερό σημείο.

Θεώρημα 4.2.2. (M. J. Crabb - A. M. Sinclair). Έστω T συνεχής γραμμικός τελεστής σε ένα μιγαδικό χώρο με νόρμα X. Αν $x, y \in X$ τέτοια ώστε

$$\|x + Ty\| < \|x\| - (8\|Tx\|\|y\|)^{\frac{1}{2}}$$

τότε το 0 είναι στο εσωτερικό του $V(T)$.

Απόδειξη. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|x\| = 1$. Αν στην σχέση που ικανοποιούν τα x, y ορίσουμε $\epsilon = \|x\| - \|x + Ty\|$ και $4\delta\|y\| = \epsilon$ τότε έχουμε $\epsilon^2 > 8\|Tx\|\|y\|$. Δείχνουμε ότι υπάρχει $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε :

$$D(0; \gamma) \subset V(T) \Rightarrow 0 \in V(T)^\circ.$$

Έχουμε ότι το

$$\gamma = \frac{\epsilon^2 - 8\|Tx\|\|y\|}{2\|y\|(4 + \epsilon)} > 0.$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| \leq \delta$, τότε για την παρακάτω ποσότητα έχουμε ότι:

$$\|x + \lambda y + Ty\| \leq \|x + Ty\| + \|\lambda y\| \leq \|x\| - \epsilon + \delta\|y\|,$$

επειδή $\|x + Ty\| = \|x\| - \epsilon$ και $|\lambda| \leq \delta$. Συνεχίζοντας τις πράξεις

$$\begin{aligned}
\|x\| - \epsilon + \delta\|y\| &= \|x + \lambda y - \lambda y\| - \epsilon + \delta\|y\| \\
&\leq \|x + \lambda y\| + \|\lambda y\| - \epsilon + \delta\|y\| \\
&\leq \|x + \lambda y\| + \delta\|y\| - \epsilon + \delta\|y\| \\
&= \|x + \lambda y\| - \epsilon + 2\delta\|y\|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x + \lambda y + Ty\| \leq \|x + \lambda y\| - \frac{\epsilon}{2} \tag{4.1}$$

αφού $4\delta\|y\| = \epsilon$. Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ με $|\alpha| \leq \gamma$. Αν $z \in X$ με $\|z\| = 1$, θεωρούμε το

$$V(T, z) = \{\langle f, Tz\rangle : f \in \mathcal{J}(z)\}, \mathcal{J}(z) = \{f \in X^* : \langle f, z\rangle = \|f\| = 1\}.$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \delta$ θεωρούμε την συνολοσυνάρτηση

$$F(\lambda) = \lambda + V(T, \frac{x + \lambda y}{\|x + \lambda y\|}) - \alpha.$$

Θα δείξουμε ότι το $F(\lambda)$ περιέχεται στον δίσκο $D(0; \delta)$. Ένα στοιχείο του $F(\lambda)$ είναι της μορφής: $\lambda + w - \alpha$ όπου:

$$\|x + \lambda y\| w = \langle f, T(x + \lambda y) \rangle \Leftrightarrow w = \langle f, T(\frac{x + \lambda y}{\|x + \lambda y\|}) \rangle \in V(T, \frac{x + \lambda y}{\|x + \lambda y\|}),$$

για κάποιο $f \in \mathcal{J}(\frac{x+\lambda y}{\|x+\lambda y\|})$. Επιπλέον έχουμε :

$$\begin{aligned}
\|x + \lambda y\| |\lambda + w| &= |\|x + \lambda y\| \lambda + \|x + \lambda y\| w| \\
&= |\lambda \langle f, x + \lambda y \rangle + \langle f, Tx + \lambda Ty \rangle| \\
&= |\lambda \langle f, x + \lambda y + Tx \rangle + \lambda \langle f, Tx \rangle| \\
&\leq |\lambda| |\langle f, x + \lambda y + Tx \rangle| + |\langle f, Tx \rangle| \\
&\leq \delta \|x + \lambda y + Tx\| + \|Tx\| \\
&\leq \delta (\|x + \lambda y\| - \frac{\epsilon}{2}) + \|Tx\|
\end{aligned}$$

από την **(4.1)**. Επομένως, από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
|F(\lambda)| &= |\lambda + w - \alpha| \\
&\leq |\lambda + w| + |\alpha| \\
&\leq |\lambda + w| + \gamma \\
&\leq \frac{\delta(\|x + \lambda y\| - \frac{\epsilon}{2}) + \|Tx\|}{\|x + \lambda y\|} + \gamma \\
&= \delta + \underbrace{\frac{\delta(-\frac{\epsilon}{2}) + \|Tx\|}{\|x + \lambda y\|} + \gamma}_{m}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το γ και το δ μόνο στο m έχουμε για την παραπάνω ποσότητα:

$$m = \frac{8\|Tx\|\|y\| - \epsilon^2}{8\|y\|\|x + \lambda y\|} + \frac{\epsilon^2 - 8\|Tx\|\|y\|}{8\|y\| + 2\epsilon\|y\|}.$$

Κάνουμε ομώνυμα

$$(8\|Tx\|\|y\| - \epsilon^2)(8\|y\| + 2\epsilon\|y\|) = 64\|Tx\|\|y\|^2 + 16\|Tx\|\|y\|\epsilon - \epsilon^2 8\|y\| - 2\epsilon^3\|y\|. \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
(\epsilon^2 - 8\|Tx\|\|y\|)(8\|y\|\|x + \lambda y\|) &= 8\epsilon^2\|y\|\|x + \lambda y\| - 64\|Tx\|\|y\|^2\|x + \lambda y\| \\
&\leq 8\epsilon^2\|y\|(\|x\| + |\lambda|\|y\|) - 64\|Tx\|\|y\|^2(\|x\| + |\lambda|\|y\|) \\
&\leq 8\epsilon^2\|y\|(1 + \delta\|y\|) - 64\|Tx\|\|y\|^2(1 + \delta\|y\|)
\end{aligned}$$

το οποίο είναι ίσο με

$$8\epsilon^2\|y\| + 2\epsilon^3\|y\| - 64\|Tx\|\|y\|^2 - 16\epsilon\|Tx\|\|y\|^2, \tag{4.3}$$

αφού $4\delta\|y\| = \epsilon$. Αν προσθέσουμε την **(4.2)** και την **(4.3)** ισούνται με 0 άρα $|F(\lambda)| \leq \delta$. Επομένως, το $F(\lambda)$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου (ως παράλληλη μεταφορά του $V(T,z)$) και η $\lambda \to F(\lambda)$ είναι άνω ημισυνεχής από τον δίσκο $D(0;\delta)$ μέσα στα κλειστά και κυρτά υποσύνολα του ίδιου δίσκου (δες την επόμενη πρόταση).

Από το θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani η F έχει σταθερό σημείο. Δηλαδή υπάρχει $\mu \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $|\mu| \leq \delta$ και $\mu \in F(\mu)$. Άρα από τον ορισμό της F έχουμε ότι $\alpha \in V(T)$. Επομένως υπάρχει $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(0;\gamma) \subset V(T) \Rightarrow 0 \in V(T)^{\circ}.$$

■

Πρόταση 4.2.3. Αν $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| \leq \delta = \frac{\|x\|+\|x+Ty\|}{4\|y\|}$ τότε η $F(\lambda) = \lambda + V(T, \frac{x+\lambda y}{\|x+\lambda y\|}) + a, a \in \mathbb{C}$ είναι άνω ημισυνεχής.

Απόδειξη. Η απεικόνιση $u : (\mathbb{C}, |\cdot|) \to (X, \|\cdot\|)$ με $u(\lambda) = x + \lambda y$ είναι συνεχής αφού αν $\epsilon > 0$ για $\delta = \frac{\epsilon}{\|y\|}$ και $\mu \in \mathbb{C}$ με $|\mu - \lambda| < \delta$ έχουμε

$$\|(x + \mu y) - (x + \lambda y)\| = \|\mu y - \lambda y\| = |\mu - \lambda|\|y\| < \epsilon.$$

Η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής δηλαδή η $\lambda \mapsto \frac{x+\lambda y}{\|x+\lambda y\|}$ είναι συνεχής αφού ο παρονομαστής είναι διάφορος του 0 διότι αν στην ανισότητα **(4.1)** του προηγούμενου θεωρήματος βάλουμε όπου $x = -\lambda y$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|-\lambda y + \lambda y + Ty\| &\leq \|-\lambda y + \lambda y\| - \frac{\epsilon}{2}\\ \Rightarrow \|Ty\| &\leq -\frac{\epsilon}{2} = -\frac{\|x\| - \|x + Ty\|}{2}.\end{aligned}$$

Επιπλέον από την ανισότητα στην διατύπωση του θεωρήματος έχουμε

$$(\|x\| - \|x + Ty\|) > (8\|Tx\|\|y\|)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -(\|x\| - \|x + Ty\|) < -(8\|Tx\|\|y\|)^{\frac{1}{2}}$$

Από την προηγούμενη ανισότητα τώρα

$$\Rightarrow \|Ty\| < -(8\|Tx\|\|y\|)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \|Ty\| < 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα η $\lambda \mapsto V(T, \frac{x+\lambda y}{\|x+\lambda y\|})$είναι άνω ημισυνεχής από την πρόταση 2.3.13.

Η F είναι άνω ημισυνεχής ως άθροισμα συνεχούς με άνω ημισυνεχή και μια σταθερά μέσα στο δίσκο με ακτίνα γ σε ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο. ■

Πρόταση 4.2.4. (M. J. Crabb - A. M. Sinclair). Έστω T συνεχής γραμμικός τελεστής σε ένα μιγαδικό χώρο με νόρμα X. Αν το 0 είναι στο σύνορο του χωρικού αριθμητικού πεδίου τότε ο πυρήνας του T είναι ορθογώνιος κατά Birkhoff-James στην εικόνα του.

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Επομένως υπάρχει $x \in KerT$ τέτοιο ώστε $\|x\| > \|x + z\|$ για κάποιο $z \in R(T)$. Άρα ισχύει η ανισότητα του θεωρήματος 4.2.2. αφού για το $x \in KerT$ έχουμε ότι :

$$\|x+Ty\| < \|x\| - (8\|Tx\|\|y\|)^{\frac{1}{2}} = \|x\| - (8\|0\|\|y\|)^{\frac{1}{2}} = \|x\|, y \in X : z = Ty.$$

$$\Rightarrow \|x + Ty\| < \|x\| \Rightarrow 0 \in V(T)^{\circ}.$$

Άτοπο. ∎

4.2.2 Συμπληρωματικότητα και ιδιότητες αντιστρεψιμότητας.

Ο Crabb και ο Sinclair δείξανε ότι αν $0 \in \partial\overline{V(T)}$ τότε ο $KerT$ είναι ορθογώνιος κατά Birkhoff-James στον $R(T)$. Ο Bollobás έδειξε ότι $\overline{V(T)} = \overline{V(T^{*})}$. Θα δώσουμε μια επέκταση της πρότασης του Sinclair τροποποιώντας ελαφρά μέρος της απόδειξης της. Μας διαφεύγει κάποια αναφορά σε βιβλιογραφία. Το σημαντικό στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι ότι ο τελεστής εμφανίζει αυτή την ιδιότητα ενώ έρχεται σε πλήρη αλληλεπίδραση με τις σφαίρες του X και του δυϊκού του, λόγω του πως ορίζεται το χωρικό αριθμητικό πεδίο.

Πρόταση 4.2.5. (C. Puttamadaiah - H. Gowda). Έστω X χώρος Banach και T φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε το $0 \notin V(T)$ τότε ο T είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω $x \in S_X$ τέτοιο ώστε $Tx = 0$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $\langle f, x\rangle = \|f\| = 1$. Άρα

$$0 = \langle f, Tx\rangle \in V(T).$$

Άτοπο. ∎

Παρατήρηση 17. Από το παραπάνω φαίνεται ότι αν

$$0 \notin V(T)^{\circ},$$

τότε ο $KerT$ είναι ορθογώνιος κατά Birkhoff-James στην εικόνα του T, αφού το 0 είναι ορθογώνιο σε όλα τα διανύσματα.

Πρόταση 4.2.6. Αν X χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$ με κλειστή εικόνα και $0 \in \partial\overline{V(T)}$ τότε

$$X = KerT \oplus R(T)$$

και

$$X^* = KerT^* \oplus R(T^*).$$

Απόδειξη. Έστω $0 \in \partial\overline{V(T)}$ τότε από την πρόταση των Crabb-Sinclair έχουμε ότι ο πυρήνας του T είναι Birkhoff-James ορθογώνιος στην εικόνα του T και άρα $KerT \oplus R(T)$ κλειστός υπόχωρος του X. Οπότε αν δεν είναι όλος ο X από συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*, f \neq 0$ τέτοιο ώστε $\langle f, x\rangle = 0, \forall x \in KerT \oplus \overline{R(T)}$. Επίσης αφού ο T έχει κλειστή εικόνα έχουμε ότι $R(T^*) = KerT^{\perp}$ από το θεώρημα κλειστών εικόνων του Banach. Εφόσον τώρα $f|_{R(T)} = 0 \Rightarrow f \in KerT^*$ και $f|_{KerT} = 0 \Rightarrow f \in R(T^*)$ προκύπτει ότι $f \in KerT^* \cap R(T^*)$. Όμως αφού $\overline{V(T)} = \overline{V(T^*)} \Rightarrow 0 \in \partial\overline{V(T^*)}$. Δηλαδή ο $KerT^*$ είναι Birkhoff-James ορθογώνιος στην εικόνα του T^*, σύμφωνα με την πρόταση Crabb-Sinclair, άρα $KerT^* \oplus R(T^*)$ κλειστός στον X^* και $f \in KerT^* \cap R(T^*) = \{0\} \Rightarrow f = 0$. Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο και άρα

$$X = KerT \oplus R(T).$$

Με εφαρμογή των σχέσεων ορθογωνιότητας για τον υπόχωρο της εικόνα και του πυρήνα του T^* έχουμε

$$X^* = KerT^* \oplus R(T^*).$$

■

Λήμμα 4.2.7. (C. Puttamadaiah - H. Gowda). Αν ο M είναι υπόχωρος ενός ανακλαστικού χώρου Banach X τότε υπάρχει μοναδικό $y \neq 0$ και ένα συμβατό ημιεσωτερικό γινόμενο τέτοιο ώστε το y να είναι ορθογώνιο στον M.

Απόδειξη. Για την απόδειξη στο [[22]]. ■

Πρόταση 4.2.8. (C. Puttamadaiah - H. Gowda). Αν ο X είναι ανακλαστικός χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$ με $0 \notin V(T)$ τότε $\overline{R(T)} = X$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\overline{R(T)} \neq X$. Τότε από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει συμβατό ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot,\cdot]$ στον X και μη μηδενικό y τέτοιο ώστε $[Tx, y] = 0$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή $[Ty, y] = 0$ για $\|y\| = 1$ και άρα $0 \in W(T) \subset V(T)$, άτοπο. ■

Πρόταση 4.2.9. ([21]). Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$ και $\lambda \in \overline{V(T)}^c$ τότε ο $\lambda I - T$ είναι 1-1 και έχει κλειστή εικόνα.

Απόδειξη. Έστω $\lambda \notin \overline{V(T)}$ και $x \in X, \|x\| = 1$ και $x^* \in \mathcal{J}(x)$ έχουμε

$$0 < d(\lambda, \overline{V(T)}) \leq |\lambda - \langle x^*, Tx\rangle| = |\langle x^*, \lambda x - Tx\rangle| \leq \|\lambda x - Tx\|$$

δηλαδή ο $\lambda I - T$ είναι κάτω φραγμένος το οποίο είναι σημαίνει ότι είναι 1-1 και έχει κλειστή εικόνα. ■

Το τελευταίο αποτέλεσμα που θα παρουσιάσουμε αφορά μια πολύ σημαντική ιδιότητα των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ χώρων με νόρμα αφού δίνονται ικανές συνθήκες ώστε ένας γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο Banach να είναι 1-1 αν και μόνον αν είναι επί. Η σημαντικότητα του παρακάτω αποτελέσματος έγκειται στο γεγονός ότι ο τελεστής ανακτάει αυτήν την ιδιότητα που έχουν οι μετασχηματισμοί της γραμμικής άλγεβρας αλλά και οι τελεστές της θεωρίας Fredholm. Μια διαφορετική προσέγγιση του θέματος βρίσκεται στο [9] .

Πόρισμα 13. Έστω X χώρος Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$ με κλειστή εικόνα και

$$0 \notin V(T)^o.$$

Τότε ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν είναι επί.

Απόδειξη. Αν το $0 \notin \overline{V(T)}$ τότε δεν ανήκει και στο φάσμα και άρα είναι 1-1 και επί. Αν $0 \in \partial\overline{V(T)}$ τότε από τη διάσπαση του χώρου ως ευθύ άθροισμα της εικόνας και του πυρήνα, ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν είναι επί. ■

Λέμε ότι ο $T \in \mathcal{B}(X)$ έχει γενικευμένο αντίστροφο αν υπάρχει $S \in \mathcal{B}(X)$ τέτοιος ώστε να ισχύουν:

$$T = TST$$

και

$$S = STS.$$

Γενικότερα ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.2.10. Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$ τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

i) O T έχει μοναδικό γενικευμένο αντίστροφο με τον οποίο μετατίθεται.

ii) $X = R(T) \oplus KerT$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [15]. ■

Πόρισμα 14. Αν ο X είναι χώρος Banach και ο T όπως στο θεώρημα 4.2.11., τότε είτε ο T έχει φραγμένο αντίστροφο είτε έχει μοναδικό γενικευμένο αντίστροφο με τον οποίο μετατίθεται.

Απόδειξη. Φαίνεται από το προηγούμενο θεώρημα ότι είτε ο T έχει φραγμένο αντίστροφο λόγω του ότι είναι 1-1 και επί είτε ο χώρος διασπάται σε ένα μη τετριμμένο ευθύ άθροισμα της εικόνας και του πυρήνα. Αφού αυτή η διάσπαση ισχύει η προηγούμενη πρόταση μας εγγυάται το επιθυμητό αποτέλεσμα. ■

Βιβλιογραφία

[1] B. Bollobás *"An extension to the theorem of Bishop and Phelps", Bull. Lond. math. Soc. 2 (1970),181-182.*

[2] B. Bollobás *"On the Numerical Range of an Operator", Stohastic Analysis edited by D. G. Kendall and E. F. Harding Statistical Laboratory, University of Cambridge (1973).*

[3] F. F. Bonsall B. E. Cain H. Schneider *"The Numerical Range of a Continuous Mapping of a Normed Space", Reprint from Aequationes Mathimaticae Birkhauser Verlag Basel, Vol. 2, (1968).*

[4] F. F. Bonsall J. Duncan *"Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras", London Mathematical Society Lecture Notes 2, Cambridge University Press, (1971).*

[5] M. J. Crabb *"Some results on the numerical range of an operator", J. London Math. Soc. (1970), p. 741-745.*

[6] M. J. Crabb A. M. Sinclair *"On the boundary of the spatial numerical range", Bull. London Math. Soc, 4 (1972), 17-19.*

[7] I. Cioranescu *"Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems", Springer (1990).*

[8] S. Dragomir *"Semi-Inner Products and Applications", School of Computer Science and Mathematics, VictoriaUniversity of Technology, PO Box 14428, Melbourne CityMC, Victoria 8001, Australia.*

[9] D. Drivaliaris N. Yannakakis *"The angle of an operator and range-kernel complementarity", J. Operator Theory pp. 205-218, (2016).*

[10] J. R. Giles *"Classes of semi-inner-product spaces", Transactions of the American Mathematical Society 129 (1967), 436–446.*

[11] H. G. Heuser *"Functional Analysis", translated by John Horvath, A Wiley-Interscience publication (1982).*

[12] R. C. James *"Inner products in normed linear spaces" Bull. Amer. Math. Soc. Volume 53, Number 6 (1947), 559-566.*

[13] R. C. James *"Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces", Trans. Amer. Math. Soc. 61, 265-292 (1947).*

[14] B. E. Johnson A. M. Sinclair *"Continuity of linear operators commuting with continuous linear operators II", Trans. Amer. Math. Soc. 146 (1969).*

[15] K. B. Laursen M. Mbekhta *"Closed range multipliers and generalized inverses." Studia Mathematica 107.2 (1993): 127-135.*

[16] J. Lindenstrauss L. Tzafriri *"On the complemented subspaces problem", Israel Journal of Mathematics Volume 9, Issue 2, 1971, pp 263–269.*

[17] V. Lomonosov *"A counterexample to the Bishop-Phelps Theorem in complex spaces", Israel Journal of Mathematics, December 2000, Volume 115, Issue 1, pp 25–28*

[18] G. Lumer *"Semi-inner-product spaces", Transactions of the American Mathematical Society, 100: (1961), 29–43.*

[19] G. Lumer R. S. Phillips *"Dissipative operators in a Banach space", Pacific J. Math. Volume 11, Number 2 (1961), 679-698.*

[20] R. E. Megginson *"An Introduction to Banach Space Theory", Graduate Texts in Mathematics 183, Springer, (1998).*

[21] A. Pazy, *"Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations". Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag. VIII, 279 S., DM 88,(Applied Mathematical Sciences 44), (1983).*

[22] C. Puttamadaiah H. Gowda *Indian J. pure appl. Math. 17 (1986). 919-24.*

[23] C. Puttamadaiah H. Gowda *"On spatial numerical ranges of operators on Banach spaces", Indian J. pure appl. Math. 19(2): 177-182, February (1988).*

[24] A. M. Sinclair *"Eigenvalues in the boundary of the numerical range", Pacific Journal of Mathematics Vol. 35, No.1, (1970).*