



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΔΠΜΣ ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ BOUSSINESQ  
ΣΤΗ ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ  
ΑΠΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΠΙΕΣΗΣ  
ΣΕ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΒΑΘΥΜΕΤΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΝΕΡΟ ΜΙΚΡΟΥ ΒΑΘΟΥΣ

Διπλωματική Εργασία του  
Σπύρου Τσώνη

Επιβλέπων : Αν. Καθ. Κώστας Μπελιμπασάκης

ΑΘΗΝΑ, ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2015



## Ευχαριστίες

Η συνεχής καθοδήγηση του Επιβλέποντα Καθηγητή Κώστα Μπελιμπασάκη υπήρξε καθοριστική ως προς την ολοκλήρωση της παρούσης εργασίας. Τον ευχαριστώ θερμά, τόσο για την αμέριστη βοήθειά του, όσο και για την παρότρυνσή του να ασχοληθώ με ένα εν γένει απαιτητικό αλλά και ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα. Ευχαριστώ, επίσης, τους Καθηγητές Γ.Α. Αθανασούλη και Γ.Σ. Τριανταφύλλου για τις εποικοδομητικές τους παρατηρήσεις. Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τον Δρ. Θεοδόσιο Παπαθανασίου και τον Υ.Δρ. Άρη Καπελώνη για την βοήθειά τους στο MATLAB. Ιδιαίτερα ευχαριστώ το Ναυπηγό Γιάννη Γεωργίου για τη βοήθειά του στην τελική διαμόρφωση του κειμένου. Τέλος ευχαριστώ τους φίλους, Παναγιώτη Θεοδωρόπουλο για τις εύστοχες παρατηρήσεις του στο Mathematica, και Αντρέα Γουλέ για τις γόνιμες επιστημονικές συζητήσεις.

## Περίληψη

Στα πλαίσια της εργασίας, αρχικά γίνεται βιβλιογραφική επισκόπηση διαφόρων μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί για την μελέτη της διάδοσης κυματισμών πλοίου σε περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και κοντά στην ακτή, και ακολουθεί μια γενική περιγραφή των μοντέλων εξισώσεων Boussinesq που χρησιμοποιούνται για τον μετασχηματισμό των χαρακτηριστικών υδάτινων κυματισμών σε περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και ρηχό νερό. Ειδικότερα, θα παρουσιασθούν οι αρχικές εξισώσεις Peregrine (1967) καθώς και αντίστοιχα αριθμητικά σχήματα που αναπτύχθηκαν από τους Beji and Battjes (1994), για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων μονοδιάστατης διάδοσης τόσο μονοχρωματικών κυματισμών όσο και πολυχρωματικών κυματικών συστημάτων πάνω από τοπογραφία πυθμένα, με καλή προβλεπτική ικανότητα σε σύγκριση με εργαστηριακές μετρήσεις. Επίσης θα εξετασθούν εμπλουτισμένα μοντέλα που βασίζονται σε εξισώσεις Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς. Στην συνέχεια γίνεται εφαρμογή των ανωτέρω μοντέλων στις δύο οριζόντιες διαστάσεις στην αριθμητική μοντελοποίηση και μελέτη του προβλήματος παραγωγής και διάδοσης κυματισμών από αρχικές μορφές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας καθώς και από κινούμενη κατανομή επιβαλλόμενης πίεσης, που προσομοιάζει προσεγγιστικά την παραγωγή κυματισμών πλοίου σε περιορισμένο βάθος νερού. Με βάση το ανωτέρω σχήμα διερευνούνται τα χαρακτηριστικά των παραγόμενων κυματισμών σε σταθερό βάθος νερού, σε υποκριτικές και υπερκριτικές περιπτώσεις, καθώς και η μεταβολή τους στην περιοχή κοντά στην ακτή.

## Abstract

In this thesis, a review is initially presented concerning different methods that have been developed to treat water waves generated by ship and moving bodies approximated by means of moving pressure fields close to the free surface propagation over variable bathymetry regions and their effects close to the coast. The above introduction is followed by a general description and derivation of some standard Boussinesq equation models, usually exploited for calculating the transformation of the wave characteristics in areas of variable bathymetry and in shallow water depth. Specifically, the initial equations Peregrine (1967) are presented and discussed and, subsequently, the corresponding numerical schemes developed by Beji and Battjes (1994), for the numerical solution of one-dimensional propagation problems concerning both monochromatic and polychromatic wave systems over bottom topography. This system has shown to have good predictive capabilities in applications characterized by moderate nonlinearity and dispersion, as demonstrated by the previous authors through comparison with laboratory measurements. Then, enhanced models based on Boussinesq equations with improved dispersion characteristics are discussed, and the application of the system in two horizontal dimensions is presented. Based on the present numerical scheme the characteristics of the waves propagating in constant water depth and in variable bathymetry regions are studied, including both subcritical and supercritical cases, and the changes of the waves at the shallow water area near the coast is presented and discussed.



# Περιεχόμενα

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Εισαγωγή</b>  | <b>9</b>  |
| 1.1      | Σύνοψη της Εργασίας . . . . .                                    | 9         |
| 1.2      | Σύντομη Βιβλιογραφική Επισκόπηση . . . . .                       | 10        |
| 1.3      | Κινούμενα σώματα πάνω ή κοντά στην επιφάνεια του νερού . . . . . | 12        |
| 1.4      | Κυματογένεση από πλοία (Kelvin ship waves) . . . . .             | 17        |
| <b>2</b> | <b>Εξισώσεις Boussinesq</b>                                      | <b>21</b> |
| 2.1      | Χαρακτηρισμός υδάτινων κυματισμών . . . . .                      | 21        |
| 2.1.1    | Παράμετρος Ursell . . . . .                                      | 23        |
| 2.1.2    | Κατάταξη Κυματισμών . . . . .                                    | 24        |
| 2.2      | Εξισώσεις Boussinesq . . . . .                                   | 25        |
| 2.2.1    | Εξισώσεις ιδανικού ρευστού . . . . .                             | 26        |
| 2.2.2    | Η τοποθέτηση του προβλήματος . . . . .                           | 27        |
| 2.3      | Αναλυτική εξαγωγή των εξισώσεων Boussinesq . . . . .             | 32        |
| 2.3.1    | Εξαγωγή κατά Boussinesq . . . . .                                | 33        |
| 2.3.2    | Γενίκευση στην περίπτωση μεταβλητού πυθμένα . . . . .            | 40        |
| 2.3.3    | Εξαγωγή κατά Peregrine . . . . .                                 | 43        |
| 2.3.4    | Επεξεργασία των εξισώσεων . . . . .                              | 45        |
| 2.3.5    | Σχέση διασποράς της εξίσωσης Boussinesq . . . . .                | 49        |
| 2.3.6    | Επίλυση της εξίσωσης Boussinesq . . . . .                        | 52        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.3.7    | Μορφές των εξισώσεων Boussinesq . . . . .                   | 56         |
| 2.4      | Βελτιωμένες Εξισώσεις Boussinesq . . . . .                  | 57         |
| <b>3</b> | <b>Αριθμητική Επίλυση</b>                                   | <b>63</b>  |
| 3.1      | Η αριθμητική μέθοδος . . . . .                              | 64         |
| 3.2      | Παρουσίαση του πλέγματος . . . . .                          | 67         |
| 3.3      | Η προτεινόμενη μέθοδος . . . . .                            | 69         |
| 3.4      | Δόμηση του συστήματος . . . . .                             | 70         |
| 3.5      | Ευστάθεια . . . . .   | 75         |
| 3.6      | Συνοριακές Συνθήκες . . . . .                               | 79         |
| 3.7      | Αποτελέσματα . . . . .                                      | 83         |
| 3.7.1    | Παλμός σε σταθερό βάθος . . . . .                           | 84         |
| 3.7.2    | Εισαγωγή βαθυμετρίας . . . . .                              | 88         |
| 3.7.3    | Κινούμενη πίεση - Αργός Παλμός - Σταθερό βάθος . . . . .    | 91         |
| 3.7.4    | Κινούμενη πίεση - Γρήγορος Παλμός - Σταθερό βάθος . . . . . | 96         |
| 3.7.5    | Κινούμενη πίεση - Μεταβλητός πυθμένας . . . . .             | 100        |
| <b>4</b> | <b>Επέκταση στις δύο οριζόντιες διαστάσεις</b>              | <b>105</b> |
| 4.1      | Οι εξισώσεις στις δύο διαστάσεις . . . . .                  | 105        |
| 4.2      | Διακριτοποίηση του Συστήματος . . . . .                     | 107        |
| 4.3      | Αποτελέσματα . . . . .                                      | 109        |
| 4.3.1    | Σταθερό βάθος . . . . .                                     | 109        |
| 4.3.2    | Μεταβλητός πυθμένας . . . . .                               | 114        |
| 4.3.3    | Κινούμενη πίεση . . . . .                                   | 119        |
| 4.3.4    | Κινούμενη πίεση - Μεταβαλλόμενη Βαθυμετρία . . . . .        | 124        |
| <b>5</b> | <b>Συμπεράσματα</b>   | <b>129</b> |



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Σύνοψη της Εργασίας

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα μελετήσουμε διάδοση κυματισμών με χρήση μοντέλων Boussinesq σε περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και νερό μικρού βάθους. Θα εξετάσουμε διάδοση κυματισμών οι οποίοι διεγείρονται από αρχικές και συνοριακές συνθήκες καθώς και κυματισμούς που παράγονται από κινούμενη κατανομή πίεσης η οποία ασκείται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια. Αρχικά θα πραγματοποιηθεί βιβλιογραφική επισκόπηση μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί για τη μελέτη της διάδοσης κυματισμών πλοίου σε περιοχές μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και κοντά στην ακτή, βλ., π.χ.,(Belibassakis (2003)[1], (2009)[2]). Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν μοντέλα εξισώσεων Boussinesq που χρησιμοποιούνται για τον μετασχηματισμό των χαρακτηριστικών των υδάτινων κυματισμών σε περιοχές με ανομοιομορφίες πυθμένα και στην περιοχή σχετικά ρηχού νερού.

Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν οι αρχικές εξισώσεις Peregrine (1967)[3] καθώς και αντίστοιχα αριθμητικά σχήματα που αναπτύχθηκαν (Beji and Battjes (1994)[4]), για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων μονοδιάστατης διάδοσης μονοχρωματικών κυματισμών ή και πολυχρωματικών κυματικών συστημάτων πάνω από τοπογραφία πυθμένα, με καλή προβλεπτική ικανότητα σε σύγκριση με τις αντίστοιχες εργαστηριακές μετρήσεις ( Beji and Battjes

(1993)[6]). Επίσης, θα παρουσιαστούν (εμπλουτισμένα) μοντέλα Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς (Beji and Nadaoka (1996)[7]).

Στη συνέχεια εξετάζουμε επέκταση των ανωτέρω μοντέλων σε διδιάστατο (οριζόντιο) χώρο κυματικής διάδοσης μέσω μελέτης και αριθμητικής μοντελοποίησης του προβλήματος παραγωγής και διάδοσης κυματισμών από αρχικές συνθήκες και κινούμενη κατανομή πίεσης επιβαλλόμενης στην ελεύθερη επιφάνεια. Με τον τρόπο αυτό προσομοιάζουμε προσεγγιστικά το φαινόμενο της παραγωγής των κυματισμών από πλοίο που κινείται σε περιορισμένο βάθος νερού. Με βάση το ανωτέρω σχήμα θα διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά των παραγόμενων κυματισμών αρχικά σε σταθερό βάθος νερού, για υποκριτικές και υπερκριτικές περιπτώσεις, και στη συνέχεια η μεταβολή των χαρακτηριστικών αυτών κατά τη διάδοση των του συστήματος των κυματισμών σε περιοχές κοντά στην ακτή.

## 1.2 Σύντομη Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε επιλεγμένα στοιχεία και εργασίες από τη μέχρι τώρα εξέλιξη της μελέτης του φαινομένου της διάδοσης σύνθετων ντετερμινιστικών<sup>1</sup> κυματισμών σε περιβάλλοντα σταθερής και μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας καθώς αυτοί κινούνται προς την ακτή. Το θέμα αυτό είναι απαιτητικό τόσο από θεωρητική όσο και από αριθμητική σκοπιά, διότι οι μεταβαλλόμενες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αποτελούν μέρος της λύσης. Ήτοι η δυναμική και η κινηματική συνθήκη στην επιφάνεια (ελεύθερο σύνορο) καθιστούν το πρόβλημα εξαρχής μη γραμμικό<sup>2,3</sup>. Η μεταβολή (ανύψωση) της ελεύθερης επιφάνειας στην

<sup>1</sup> Τέτοιοι κυματισμοί για παράδειγμα, δημιουργούνται ως αποτέλεσμα των απόνερων των πλοίων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

<sup>2</sup> Παραπέμπουμε σε μια εισαγωγική μαθηματική περιγραφή στο βλ. πηγή[8]. Η μη γραμμικότητα και η ιδιομορφία του θέματος έγκειται στο γεγονός ότι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας αποτελεί τμήμα της λύσης.

<sup>3</sup> Αν και εκτός του πνεύματος της παρούσης εργασίας προτείνουμε σχετικά με τις αρχικές θεωρίες των κυματισμών το ενδιαφέρον άρθρο του Craik(2004)[9].

οποία πρέπει να ικανοποιούνται οι ανωτέρω συνοριακές συνθήκες είναι άγνωστη και επί της ουσίας αποτελεί το πρακτικά επιδιωκόμενο αποτέλεσμα της λύσης του προβλήματος.

Στην παρούσα εργασία δεν θα ασχοληθούμε με επιδράσεις έντονα μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, π.χ. Belibassakis (2003)[1], και θα θεωρήσουμε ήπια αλλά με ελαφρώς μεταβαλλόμενη τοπογραφία πυθμένα (mildly varying bathymetry).

Η αρχική μελέτη κυματισμών όπου συμπεριλαμβάνονται μερικές επιδράσεις διασποράς και μη γραμμικότητας, σε περιβάλλον όμως σταθερής βαθυμετρίας, ανάγεται στον Boussinesq (1872)[32]. Αργότερα οι Mei και Mehaute (1966)[10] και σχεδόν παράλληλα ο Peregrine (1967)[3] διατύπωσαν εξισώσεις τύπου Boussinesq για μεταβαλλόμενο βάθος νερού. Οι πρώτοι ανέπτυξαν το δυναμικό ταχυτήτων, σε δυνάμεις της κάθετης συνιστώσας με άγνωστες μεταβλητές τους συντελεστές τις παραγώγους του προσεγγιστικού πεδίου ταχυτήτων “απηλαγμένου” πλέον από την κατακόρυφη συνιστώσα, ενώ ο Peregrine χρησιμοποίησε τη μέση, ως προς την κακόρυφο, τιμή της ταχύτητας. Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται ως βασικές εξισώσεις Boussinesq (standard Boussinesq equations, sBe) για περιβάλλοντα μεταβλητής βαθυμετρίας. Αυτές ισχύουν για σχετικά μικρές τιμές των παραμέτρων διασποράς και μη γραμμικότητας.

Ακολούθησαν διάφορες προσπάθειες με σκοπό τη βελτίωση των χαρακτηριστικών της διασποράς. Ο Witting(1984)[11] έκανε μια πρώτη προσπάθεια να βελτιώσει τα χαρακτηριστικά της διασποράς στις εξισώσεις μονοδιάστατης διάδοσης με την εισαγωγή της μέσης ως προς την κατακόρυφο ταχύτητας αλλά και της επιφανειακής ταχύτητας στο σύστημα, διατηρώντας έτσι (αρχικά) τρεις αγνώστους στο σετ των δύο εξισώσεων Boussinesq. Οι Madsen et al. (1991)[12] και Madsen and Sorensen(1992)[13] συμπεριέλαβαν όρους ανώτερης τάξης με επίσης βελτιωμένους συντελεστές τόσο για σταθερή όσο και για μεταβαλλόμενη βαθυμετρία. Στα παραπάνω σχήματα η βελτίωση έγκειται στο ότι τα αναπτύγματα Taylor για την μέση και την επιφανειακή ταχύτητα εμπεριέχουν συντελεστές (calibration factors) οι οποίοι προδιορίζονται με τη βοήθεια αναπτυγμάτων Padé. Οι Beji and Nadaoka (1996[7]) διατύπωσαν μια εναλλακτική παραγωγή των Madsen and Sorensen (1992)[13].

Οι Liu και Wu (2004)[14] παρουσίασαν ένα μη γραμμικό μοντέλο Boussinesq με σκοπό την εφαρμογή σε κύματα που δημιουργούνται από κινούμενες κατανομές πίεσης σε ορθογώνια και τραπεζοειδή κανάλια. Αργότερα οι Torsvik et al.(2009)[15] πρότειναν μια αριθμητική διερεύνηση σε κύματα που δημιουργούνται από μια κατανομή πίεσης που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε κανάλι με μεταβλητή βαθυμετρία χρησιμοποιώντας το COULWAVE long wave model των Lynett et al. (2002)[16] καθώς και των Liu και Wu (2004). Την ίδια χρονιά οι Torsvik et al.(2009)[17] εφαρμόστηκε το ίδιο μοντέλο για την προσομοίωση οχηματαγωγών μεγάλης ταχύτητας. Οι Nascimento et al. (2009)[18] χρησιμοποίησαν το μοντέλο FUNWAVE των Wei και Kirby (1995)[19] με σκοπό τη μελέτη μιας κινούμενης πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια.

Στις εν λόγω εργασίες που αναφέραμε και οι οποίες διαπραγματεύονται το θέμα της επίδρασης της κινούμενης επιβαλλόμενης πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια, χρησιμοποιείται μια συνημιτονοειδής συνάρτηση προκειμένου να προσομοιάσει την ασκούμενη πίεση της γάστρας. Πρόσφατα οι Bayraktar Ersan και S.Beji(2012)[20] χρησιμοποίησαν εξίσωσεις Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς (με προσθήκη επιπλέον όρων ανώτερης τάξης), για να μελετήσουν κύματα λόγω κινούμενης κατανομής πίεσης. Οι κατανομές πίεσης που χρησιμοποίησαν οι εν λόγω συγγραφείς ήταν Gaussian για τη μονοδιάστατη περίπτωση και ημισφαιρικές - παραβολοειδείς συναρτήσεις για τη διδιάστατη περίπτωση, ώστε να προσομοιάσουν την κατανομή πιέσεων από μια κινούμενη γάστρα.

### 1.3 Κινούμενα σώματα πάνω ή κοντά στην επιφάνεια του νερού

Η κύρια αιτία της δημιουργίας των κυματισμών είναι η δράση του ανέμου. Υπάρχουν όμως και άλλες αιτίες που οφείλονται σε κινούμενα σύνορα, όπως πλωτά και βυθισμένα σώματα, καθώς και στη δράση κατανεμημένης πίεσης κινούμενης στην ελεύθερη επιφάνεια. Η τελευταία

### 1.3. ΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΣΩΜΑΤΑ ΠΑΝΩ Η ΚΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΝΕΡΟΥ 13

κατηγορία καθίσταται σημαντική καθώς οι ανάγκες του εμπορίου και της ναυτιλίας, αλλά και της αναψυχής, έχουν οδηγήσει στη συχνή διέλευση εμπορικών πλοίων κοντά από ακτές καθώς και ιδιαίτερα γρήγορων πλοίων και ταχυπλόων. Τα κινούμενα σύνορα αυτά δημιουργούν πεδία κυματισμών με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τα οποία χρήζουν μελέτης σε συνάρτηση με τις περιβαλλοντικές - οικολογικές - οικονομικές επιπτώσεις τους στις παράκτιες ζώνες.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, ο σκοπός της εργασίας δεν είναι η μελέτη της δημιουργίας των κυματισμών εξαιτίας της αλληλεπίδρασης γάστρας ρευστού. Αυτό το φαινόμενο αποτελεί περισσότερο ναυπηγικό θέμα και σχετίζεται με τη βελτιστοποίηση της σχεδίασης των πλοίων και τη λειτουργία τους. Στην εργασία αυτή θα εστιάσουμε στη διάδοση σύνθετων κυματισμών που παράγονται από μια επιβαλλόμενη στην ελεύθερη επιφάνεια κατανομή πίεσης, η οποία κινείται με σταθερή ταχύτητα. Το μοντέλο αυτό βέβαια προσομοιάζει στη διάδοση σύνθετων κυματισμών που προκαλούνται από την κίνηση των πλοίων (απόνερα).



Σχήμα 1.1: Προειδοποιητική πινακίδα κατά μήκος της ακτής του Belfast, στην Ιρλανδία.

Πέραν της διαφορετικής φυσικής διεργασίας παραγωγής των κυματισμών αυτών σε σχέση με τους ανεμογενείς, αυτό που τους διαφοροποιεί και καθιστά αναγκαία τη μελέτη τους, είναι η “ απρόσμενη ” προσέλευσή τους στην ακτή και εν γένει στην παράκτια ζώνη. Η επικινδυνότητά τους έγκειται αφενός μεν στην εκδήλωση απότομου πλάτους κυματισμού εξαιτίας φυσικών παραγόντων που πιθανών συγκυριακά να αλληλεπιδρούν (π.χ. κυματισμούς διαφορετικής αιτίας ή ρεύματα, ή διάθλαση - συμβολή λόγω βαθυμετρίας), και αφετέρου στο ότι ακριβώς

εκδηλώνονται μετά τη διέλευση πλοίου. Άρα η εκδήλωσή τους μπορεί να μη συνάδει με τη γενικότερη συμπεριφορά των επιφανειακών κυματισμών στη συγκεκριμένη περιοχή<sup>4</sup>. Αυτές οι δύο παρατηρήσεις καθιστούν τα απόνερα των πλοίων επικίνδυνους κυματισμούς εξαιτίας του “αιφνιδιαστικού” τους χαρακτήρα.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι το πρόβλημα των απόνερων των πλοίων μελετήθηκε για πρώτη φορά στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, όταν η απώλεια της ζωής ενός παιδιού από τα απόνερα του ρωσικού A/T NOVIK, που έπλεε με ταχύτητα 37 κόμβων, οδήγησε τον πρωτοπόρο ρώσο ερευνητή Aleksey Krylov[62] στην πρώτη διερεύνηση του προβλήματος, όπως αναφέρεται από τον T. Soomere(2009)[61]<sup>5</sup>. Παρόλα αυτά, η επικινδυνότητα των απόνερων των πλοίων, κυρίως των ταχέως κινούμενων, και πιο συγκεκριμένα τα ταχέως κινούμενα οχηματαγωγά, σε σχέση με την παράκτια δραστηριότητα δεν είναι ευρέως γνωστή. Κάιτοι έχουν αναφερθεί ατυχήματα από επίσημους οργανισμούς δεν έχει οδηγήσει σε πρακτικά αποτελέσματα - συγκεκριμένους κανονισμούς, όπως αναφέρεται για παράδειγμα από τους Γρηγορόπουλος κ.ά. (2008)[22].



Σχήμα 1.2: Προειδοποιητική πινακίδα απρόσμενων κυμάτων μετά τη διέλευση ταχύπλων.

Οι εν λόγω κυματισμοί αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως ship wakes ή wash waves, και θα τους αναφέρουμε απλά ως κυματισμούς (ή σύνθετους κυματισμούς) πλοίου. Έχει δε

<sup>4</sup>Χαρακτηριστική είναι η έρευνα της Marine Accident Investigation Branch (MAIB),(2000)[21] σύμφωνα με την οποία εκτιμάται ότι η διέλευση ενός ταχέως οχηματαγωγού προκάλεσε το θάνατο ενός ατόμου που βρισκόταν εν πλω, εξαιτίας των κυματισμών που δημιουργήθηκαν.

<sup>5</sup>βλ. στη σελ 221.

### 1.3. ΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΣΩΜΑΤΑ ΠΑΝΩ Η ΚΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΝΕΡΟΥ 15

παρουσιαστεί προσπάθεια προσομοίωσης της διάδοσής τους, π.χ. Bellibasakis (2003)[1]. Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί το φαινόμενο της κυματογένεσης εξαιτίας της κινούμενης κατανομής πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού και της διάδοσης των κυματισμών στα ρηχά, αποτέλεσμα το οποίο έχει σημασία ως προς την ασφάλεια και πρόληψη ατυχημάτων στην παράκτια ζώνη καθώς και στην προστασία των παράκτιων περιοχών. Γενικά εκτιμάται ότι το φαινόμενο αυτό μπορεί να φέρει αρνητική επίδραση όταν η ενέργεια κυματισμού των πλοίων κοντά στην ακτή ξεπεράσει τα ενεργειακά περιοχόμενα των επικρατούντων συνθηκών στην εξεταζόμενη περιοχή. Πιο κάτω (σχήμα 1.3<sup>6</sup>) δείχνουμε τους κυματισμούς πλοίου όπως εμφανίζονται στην ακτή.



Σχήμα 1.3: Ship wakes approaching the coast of Aegna. Περιοχή προσέγγισης του Tallinn.

Το σχήμα 1.3 παρουσιάζει την εικόνα των κυματισμών από ταχύπλοο ΕΒ/ΟΓ της γραμμής Helsinki - Tallinn κατά την προσέγγισή του στο λιμάνι του Tallin, παράπλευρα στο νησάκι Aegna, όπως φαίνεται στον χάρτη του σχήματος 1.4<sup>7</sup>.

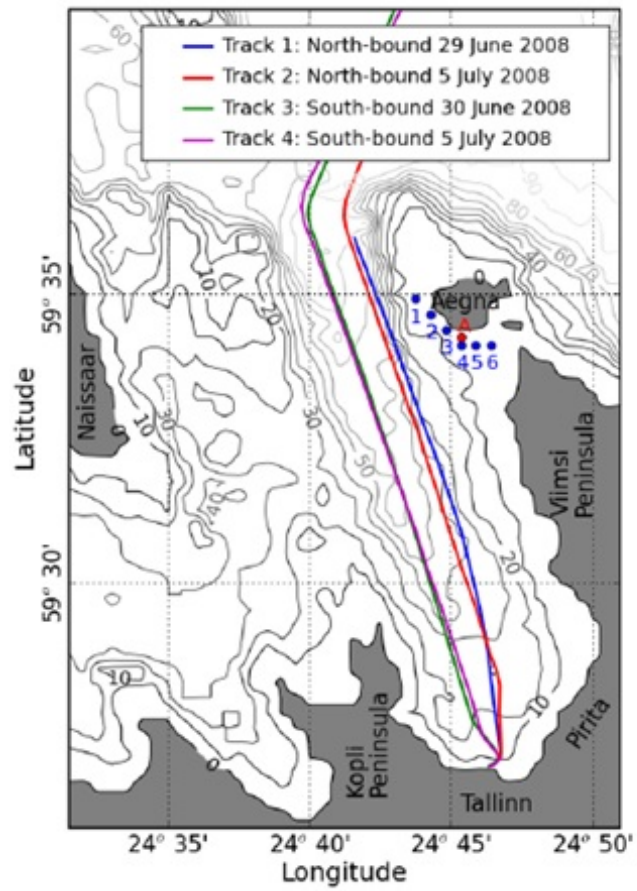
Σημειώνεται ότι ο ανασχεδιασμός της διαδρομής με μικρές τροποποιήσεις ως προς την τροχιά προσέγγισης και την ταχύτητα μπορεί να επιφέρει σημαντικές βελτιώσεις<sup>8</sup>.

---

<sup>6</sup>Βλ. Torsvik et al.(2009a)[17].

<sup>7</sup>Βλ. στην ίδια εργασία (Torsvik et al.(2009a)[17]).

<sup>8</sup>Βλ. στο ίδιο.



Σχήμα 1.4: Διαδρομή του ταχύπλουου ΕΒ/ΟΓ.



## 1.4 Κυματογένεση από πλοία (Kelvin ship waves)

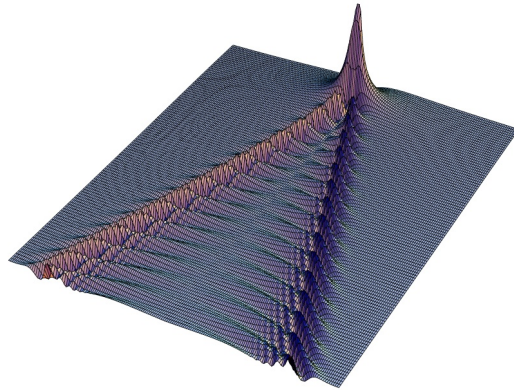
Στη μελέτη των κυματισμών πλοίου υπάρχουν δύο επίπεδα προσέγγισης. Αρχικά μπορεί κανείς να μελετήσει τι συμβαίνει στην επιφάνεια της γάστρας, ανάλογα με το σχήμα της, και τον τρόπο που αυτή αλληλεπιδρά με το ρευστό κατά τη σχετική κίνησή του. Μια τέτοια προσέγγιση, όπως είπαμε, θεωρούμε πως είναι αφορά περισσότερο στη ναυπηγική (βέλτιστη σχεδίαση και συμπεριφορά - λειτουργία πλοίου) ενός πλοίου<sup>9</sup>. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικά τη θεώρηση της επιβαλλόμενης πίεσης στην επιφάνεια του νερού σε συνδυασμό με μοντέλα εξισώσεων Boussinesq για την εξέταση των χαρακτηριστικών διάδοσης των κυματισμών. Θεωρούμε μια γενική, κατανομή πίεσης, επιβεβλημένη στην ελεύθερη επιφάνεια,

---

<sup>9</sup> Η θεμελίωση της θεωρητικής μελέτης των κυματισμών των πλοίων, ξεκινά από τον Kelvin. Στη θεώρησή του, η δράση του πλοίου στο ρευστό αντικαθίσταται από μια συγκεντρωμένη πίεση παλμού, η οποία κινείται στην επιφάνεια. Αυτή η θεώρηση αποτελεί μια βελτίωση της θεωρίας των Cauchy και Poisson σχετικά με τη διάδοση ενός επιφανειακού κυματισμού που οφείλεται σε μια τοπική διαταραχή. Η εξάρτηση της αντίστασης του πλοίου από τη μορφή της γάστρας, πρωτοθεμελιώθηκε, ανεξάρτητα, από τους Michell (1898)[23][24] και Zhukovskii (1903)[64]. Ο πρώτος μελέτησε το δυναμικό ταχυτήτων και την αντίσταση του πλοίου στην περίπτωση στενής γάστρας κινούμενης σε νερό απείρου βάθους, ενώ ο δεύτερος μελέτησε την περίπτωση γάστρας σχήματος κάθετου κυλίνδρου που κινείται σε ρηχό νερό. Ο δεύτερος μάλιστα, πέτυχε τη μορφή της ισάλου γραμμής που ελαχιστοποιεί την αντίσταση του κυματισμού. Για μεγάλο διάστημα, οι κατασκευαστές αγνοούσαν τη θεωρία του Michell, έως το 1923. Η περαιτέρω μελέτη της αντίστασης των κυματισμών ενός λεπτού πλοίου και η επέκταση σε ρηχό νερό, ή σε κανάλι τετραγωνικού σχήματος, ξεκίνησε το 1936-1937 με τους Sretenskii, Keldish, Sedov[63]. Στις εργασίες του Havelock (1932-1934)[25][26] δόθηκαν γενικές εκφράσεις για τη δημιουργία κυματισμών, όπισθεν ενός κινούμενου αντικειμένου, καθώς και εκτιμήσεις για την αντίστασή του. Δεν κατάφερε όμως να δώσει με ακρίβεια την ιδιομορφία της συνάρτησης κατανομής για ένα αντικείμενο αυθαίρετου σχήματος. Η πιο γενική θεώρηση του προβλήματος του δυναμικού ταχυτήτων και των δυνάμεων που επενεργούν πάνω στο σώμα, δόθηκε από τον Kochin το 1936. Εξέφρασε την άγνωστη συνάρτηση της συνεχούς κατανομής των πηγών της επιφάνειας του σώματος με όρους ολοκληρωτικής εξίσωσης, με συνοριακή συνθήκη την επιφάνεια του σώματος. Στη συνέχεια ο Khaskind επέκτεινε τη θεωρία του Kochin, στην περίπτωση κίνησης σε πεπερασμένο βάθος. Για λεπτομέρειες μπορεί κανείς να ανατρέξει στο κλασικό βιβλίο του A.A. Kostyukov (1959)[65].

η οποία αντιστοιχεί προσεγγιστικά στην παρουσία γάστρας, και αρα μπορεί να συμβάλλει στη μελέτη του φαινομένου των κυματισμών πλοίου.

Στο σχήμα 1.5 παρουσιάζουμε μια εικόνα<sup>10</sup> προσομοίωσης της αναπαράστασης ενός συστήματος κυματισμών Kelvin .



Σχήμα 1.5: Αριθμητική κατασκευή ομόρου.

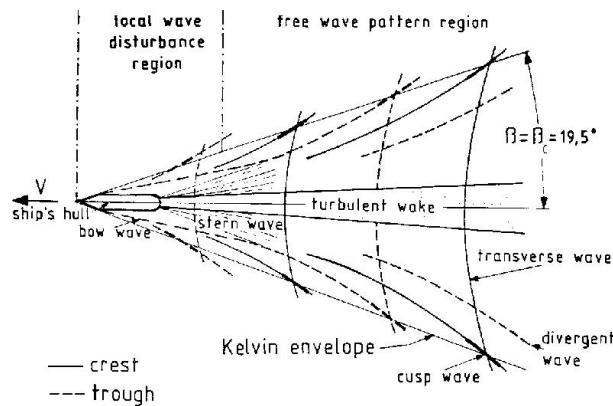
Ο παλμός αυτός με τη σειρά του καθώς κινείται, δημιουργεί κυματισμούς οι οποίοι διαδίδονται (αρχικά σε μία και έπειτα σε δύο διαστάσεις). Για τη διέλευσή τους προς στην ακτή θεωρούμε έναν πυθμένα του οποίου το βάθος μεταβάλλεται έτσι ώστε να έχουμε ένα όσο πιο πλούσιο (από πλευράς φυσικής) αποτέλεσμα.

Η αντίσταση του ρευστού στην κίνηση ενός πλοίου, έγκειται σε τρεις όρους. Τη δύναμη τριβής  $R_f$ , την αντίσταση λόγω σχήματος (*eddy resistance*)  $R_e$ , και την αντίσταση του κυματισμού  $R_w$ . Η δύναμη της τριβής αναπαριστά τις επαπτομενικές δυνάμεις που δημιουργούνται μεταξύ του ρευστού και του βρεχόμενου τμήματος της βυθιζόμενης επιφάνειας. Το άθροισμα των άλλων δύο αντιστάσεων δηλώνει την αντίσταση εξαιτίας των δυνάμεων πίεσης που δημιουργούνται κατά την κίνηση του αντικειμένου. Η αντίσταση λόγω μορφής οφείλεται στην επανακατανομή της ροής στην επιφάνεια του αντικειμένου, εξαιτίας του ιξώδους του ρευστού. Τόσο λοιπόν η αντίσταση λόγω τριβής όσο και η αντίσταση λόγω μορφής οφείλονται στο ιξώδες του ρευστού. Η αντίσταση λόγω κυματισμού, οφείλεται στο ότι κατά τη

<sup>10</sup>Βλ. σελ. 427 στο βιβλίο Howard Georgi (1993)[66].

βύθιση ολόκληρου ή τμήματος του αντικειμένου, υπάρχει παραμόρφωση της επιφάνειας. Αυτό συνεπάγεται μικροσκοπικά ότι υπάρχει μετατόπιση των μορίων από τη θέση ισορροπίας με αποτέλεσμα τη δημιουργία ταλαντώσεων, οι οποίες μακροσκοπικά δημιουργούν έναν κυματισμό που ταξιδεύει αρκετά πιο μακριά από το βυθιζόμενο αντικείμενο.

Τα χαρακτηριστικά του κυματισμού θα καθοριστούν από το πεδίο ταχυτήτων που θα διαμορφωθεί στη γειτονιά του κινούμενου αντικειμένου. Παρατηρήσεις και θεωρητική έρευνα έχουν δείξει ότι σχηματίζονται δύο ομάδες κυματισμών. Μία ομάδα στην πρόμνη και μία στην πλώρη. Επιπλέον αυτές οι ομάδες αποτελούνται από δύο ειδών κύματα. Αποκλίνοντα (diverging waves) κύματα και εγκάρσια (transverse waves) κύματα, τα οποία σχηματίζουν ένα σύστημα σύνθετων κυματισμών γνωστό στη βιβλιογραφία ως Kelvin pattern. Οι εν λόγω κυματισμοί αναπαριστούνται στο σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: Σχήμα απόνερων πλοίου.

Πιο αναλυτικά μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα μοντέλο<sup>11</sup> σύνθετων κυματισμών<sup>12</sup>, αποτελούμενο από δύο συστήματα, εκ των οποίων οι εγκάρσιοι κυματισμοί ακολουθούν κατά μία έννοια το πλοίο, ενώ οι αποκλίνοντες (της πορείας του πλοίου) κυματισμοί διερχόμενοι από περιβάλλοντα μεταβλητής βαθυμετρίας προς την ακτή υφίστανται διάθλαση και προσπίπτουν παράλληλα προς την ακτή<sup>13</sup>.

<sup>11</sup>Schematic sketch of a ship wake (adapted from Hennings et al., 1999)

<sup>12</sup>Βλ. στο κεφάλαιο 5 του Lokenath Debnath (1994)[67].

<sup>13</sup>Μπελιπμασάκης,Κ.-Αθανασούλης,Γ. (2012)[68] .



Σχήμα 1.7: Kelvin pattern, κλασσική φωτογραφία του Adrian Pingstone που εικονίζει και τη διάθλαση των κυματισμών πλοίου λόγω μεταβολών βαθυμετρίας.

## Κεφάλαιο 2

### Εξισώσεις Boussinesq

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την προέλευση και την παραγωγή των βασικών εξισώσεων Boussinesq, που παρουσιάστηκε από τον Peregrine(1967)[3], καθώς και τις εμπλουτισμένες ως προς τη διασπορά εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Στην αρχή του κεφαλαίου θα αναφερθούμε στην κατάταξη των κυματισμών και στη σημασία των εξισώσεων Boussinesq ως προς το εύρος των φαινομένων που καλύπτουν, και ως εκ τούτου τον λόγο για τον οποίο τις επιλέξαμε. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις εν λόγω εξισώσεις στην περίπτωση αμετάβλητου πυθμένα και στη συνέχεια στην περίπτωση όπου ο πυθμένας μεταβάλλεται ως προς την τοπογραφία του.

Στο τελευταίο μέρος θα επιλύσουμε μια απλή μορφή των εξισώσεων Boussinesq αναδεικνύοντας τη σημασία τους στην ερμηνεία της σολιτονικής συμπεριφοράς. Κλείνοντας θα περιγράψουμε εξισώσεις Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά συμπεριφοράς ως προς τη διασπορά.

#### 2.1 Χαρακτηρισμός υδάτινων κυματισμών

Οι απλοί περιοδικοί υδάτινοι επιφανειακοί κυματισμοί χαρακτηρίζονται με βάση το ύψος τους  $H$  και το μήκος κύματός τους  $\lambda$ , σε σχέση με το βάθος του νερού  $h$  που διαδίδονται.

Μια πρώτη κατηγοριοποίηση των κυμάτων γίνεται ανάλογα με το “σχετικό” βάθος της περιοχής που διαδίδονται<sup>1</sup> ως προς το μήκος κύματος, δηλαδή:

1. κύματα ρηχού νερού, όταν  $\frac{h}{\lambda} < \frac{1}{20}$ ,
2. κύματα ενδιάμεσου βάθους, όταν  $\frac{1}{20} < \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{2}$ , και
3. κύματα σε βαθύ νερό, όταν  $\frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2}$ .

Στην πρώτη κατηγορία των κυματισμών ρηχού νερού, το μήκος τους είναι πολύ μεγαλύτερο του βάθους, οπότε και αναφέρονται ως μακροί κυματισμοί (long waves). Στις άλλες κατηγορίες χαρακτηρίζονται ως βραχείς κυματισμοί (short waves).

Ένας άλλος τρόπος κατηγοριοποίησης των κυματισμών είναι η συσχέτιση του ύψους του κύματος με μήκος του ή και με το βάθος της περιοχής στην οποία διαδίδεται. Κατά αυτή την έννοια έχουμε την εξής κατηγοριοποίηση:

1. μικροί κυματισμοί (small waves), όταν  $\frac{H}{\lambda} \ll 1.0$ ,
2. κύματα ενδιάμεσου ύψους, όταν  $\frac{H}{\lambda} \sim 0.05 - 0.08$ , και
3. μεγάλοι κυματισμοί (steep waves), όταν  $H \sim h$ .

Μπορούμε να δούμε ότι η κατηγοριοποίηση ενός κανονικού κυματισμού, δεν μπορεί να γίνει με ένα μόνο κριτήριο. Ο πιο κατάλληλος τρόπος για να ομαδοποιηθούν οι κυματισμοί, είναι η συμφωνία των εξωτερικών χαρακτηριστικών ( $H, \lambda, T$ ), με τη δυναμική συμπεριφορά που εμφανίζουν σε ένα συγκεκριμένο βάθος νερού ( $h$ ). Αυτό που αναφέρουμε, αποκαλύπτει το γεγονός ότι ο χαρακτηρισμός και η κατάταξη ενός κυματισμού αποτελεί μια δυναμική διαδικασία, με την έννοια ότι ένα κύμα συγκεκριμένου ύψους ή μήκους κύματος, ανάλογα με το περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται, μπορεί να ενταχθεί σε διαφορετικές κάθε φορά κατηγορίες.

<sup>1</sup>Βλ. Massel(1989)[69] στο Ch.2, p.26.

Οπότε οι ανωτέρω παράμετροι μεμονωμένα, δεν δύνανται να αποκαλύψουν τη δυναμική του κυματισμού. Ως εκ τούτου τα αναφέρουμε συσχετισμένα με τη βοήθεια αδιάστατων παραμέτρων. Για αυτό στην πράξη χρησιμοποιούνται συνήθως αδιάστατες παράμετροι, όπως : το σχετικό ύψος κύματος ,  $(\frac{H}{\lambda})$ , το σχετικό βάθος νερού  $(\frac{h}{\lambda})$ , η κλίση του κύματος (wave steepness,  $\sigma = \frac{A}{\lambda}$ , όπου A το πλάτος του κύματος ) , ή η παράμετρος διασποράς/παράμετρος ρήχωσης  $(\mu = \frac{h}{\lambda})$ .

### 2.1.1 Παράμετρος Ursell

Η προσέγγιση για το ρηχό νερό (shallow water ή long wave approximation) στηρίζεται στο ότι το μήκος κύματος είναι σημαντικά μεγαλύτερο του βάθους, δηλαδή,

$$\mu = 2\pi \frac{h}{\lambda} = k h \ll 1,$$

όπου  $k$  ο αριθμός κύματος. Παρατηρούμε ότι αν στη σχέση διασποράς  $\omega = \sqrt{g k \tanh(k h)}$  αναπτύξουμε την υπόριζη ποσότητα ως προς το  $\mu = k h$ , δηλαδή ,  $\tanh(k h) = k h - \frac{1}{3}(k h)^3 + \frac{2}{15}(k h)^5 - O[k h]^7$  , έχουμε για τη σχέση διασποράς ότι:

$$\omega = \sqrt{g k \tanh(k h)} = \sqrt{g k} \sqrt{k h - \frac{1}{3}(k h)^3 + \frac{2}{15}(k h)^5 - \dots}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι καθώς η τιμή του  $\mu = k h$  αυξάνεται η σχέση διασποράς απαιτεί όλο και περισσότερους όρους για να υπολογισθεί. Όταν το  $\mu$  είναι πολύ μικρό, τότε η σχέση διασποράς γίνεται  $\omega^2 = k^2 g h$  και αντιστοιχεί στο ρηχό νερό. Στο βαθύ νερό, η μη γραμμικότητα των κυματισμών εξαρτάται κυρίως από την παράμετρο κλίσης ( $\sigma$ ). Στο ρηχό νερό, η μη γραμμικότητα εξαρτάται από την παράμετρο  $\sigma = \frac{A}{\lambda}$  αλλά και από τον λόγο  $\frac{A}{h}$ . Ο Ursell (1953)[27] έδειξε ότι για μακρείς κυματισμούς τα μη γραμμικά φαινόμενα καθορίζονται από συνδυασμό του βάθους, και των ιδιοτήτων διασποράς του κυματισμού, σύμφωνα με τον αριθμό:

$$U = \frac{H/h}{(h/\lambda)^2}.$$

Προκειμένου λοιπόν, ένας κυματισμός να δύναται να περιγραφεί από τη γραμμική θεωρία, θα πρέπει η παράμετρος Ursell αλλά και η κλίση του κύματος ( $\sigma$  wave steepness ) να είναι αρκετά μικρότερες της μονάδας. Αντίθετα, αν  $U \gg 8\pi^2$ , ο κυματισμός θα διαδίδεται δίχως διασπορά, αλλά θα είναι μη γραμμικός. Στην περίπτωση αυτή, το μέτωπο κύματος θα αποκτά όλο και πιο απότομη κλίση μέχρι τη θραύση του. Στην περίπτωση όπου  $U \approx 8\pi^2$  η διασπορά θα υφίσταται μεν, αλλά σε συνδυασμό με τη μη γραμμικότητα, το κύμα θα εμφανίζει τα χαρακτηριστικά μακρού κύματος (cnoidal wave) και οριακά αυτά του σολιτονικού κύματος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην τελευταία περίπτωση η σχέση διασποράς  $c = \sqrt{gh}$  θα εξαρτάται και από την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού.

Ανακαφελαιώνοντας τη σημασία της παραμέτρου  $U$  κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

| $U \ll 8\pi^2$ και $\sigma \ll 1$ | $U \approx 8\pi^2$  | $U \gg 8\pi^2$         |
|-----------------------------------|---|------------------------|
| θεωρία Airy                       | εξισορόπηση επίδρασης διασποράς<br>από τη μη γραμμικότητα | σολιτονική συμπεριφορά |
|                                   | μακριοί κυματισμοί  | θραύση                 |

### 2.1.2 Κατάταξη Κυματισμών

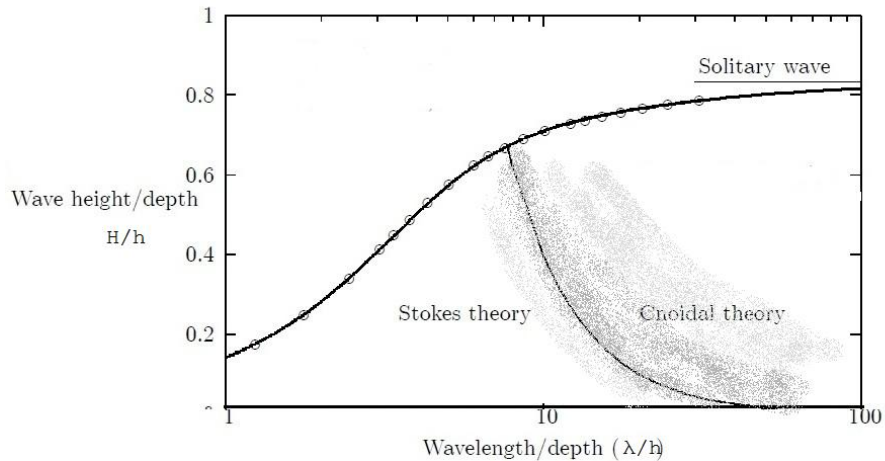
Στο σημείο αυτό, και πριν προχωρήσουμε, θα παρουσιάσουμε από την εργασία του Fenton σύμφωνα με την οποία, η θεωρία Stokes πέμπτης τάξης επαληθεύεται για κύματα για τα οποία το ύψος τους είναι κατά 10 φορές μικρότερο από το βάθος. Σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι όταν η παράμετρος  $U$  γίνει υψηλή τότε η θεωρία Stokes, αστοχεί και θεωρίες άλλου τύπου, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν( Cnoidal Theory ). Είναι γνωστό ότι η θεωρία Stokes πρώτης τάξης, που αναφέρεται και ως θεωρία Airy, πραγματεύεται το γραμμικό, υδροδυναμικό πρόβλημα<sup>2</sup>. Η περιοχή των παραμέτρων που μας ενδιαφέρει βρίσκεται κοντά στην γραμμοσκιασμένη περιοχή του χωρίου που παραθέτουμε, και σε αυτή την περιοχή οι εξισώσεις Boussinesq παρουσιάζουν εφαρμοσιμότητα.

Τέλος για λόγους πληρότητας παραθέτουμε από τον Fenton (1990)[28] τη γραφική παρά-

<sup>2</sup>Μπελιμπασάκης,Κ.-Αθανασούλης,Γ. (2012)[68].



σταση της ισχύος των διαφόρων θεωριών του  $\frac{H}{h}$  συναρτήσει του  $\frac{\lambda}{h}$ .



Σχήμα 2.1: Η γραμμοσκιασμένη περιοχή δείχνει ποιοτικά την ισχύ του μοντέλου μας.

Στο σχήμα 2.1 φαίνεται η οριακή καμπύλη ισχύος της σολιτονικής συμπεριφοράς όπως επίσης οι περιοχές ισχύος της θεωρίας κυματισμών Stokes και Cnoidal<sup>3</sup>. Παράλληλα απεικονίζεται η εμπειρική καμπύλη του Williams(1981) καθώς και η αντίστοιχη καμπύλη του Hedges (1995) για παράμετρο Ursell ίση με  $U = 40$ .

## 2.2 Εξισώσεις Boussinesq

Είναι γνωστό ότι καθώς ένας κυματισμός διαδίδεται προς την ακτή αλλάζει τα χαρακτηριστικά του, προσαρμόζεται δηλαδή στο νέο περιβάλλον, στο οποίο η αλλαγή στη βαθυμετρία κάνει πλέον ορατά τα αποτελέσματά της. Η μεταβολή στα χαρακτηριστικά του πυθμένα όταν πρόκειται για μεγάλα βάθη επιφέρει αμελητέες αλλαγές στα χαρακτηριστικά του κυματισμού. Στην περίπτωση όμως που εξετάζουμε, η βαθυμετρία παίζει σημαντικό ρόλο για τη διαμόρφωση των δυναμικών χαρακτηριστικών του κυματισμού, ανεξαρτήτως προελεύσεως του τελευταίου. Η οικογένεια των εξισώσεων που δύναται να περιγράψει τους εν λόγω κυματισμούς προέρχεται

<sup>3</sup>Βλ. Fenton (1990)[28].

από τις εξισώσεις του Euler με την υπόθεση ότι τα κύματα έχουν μεγάλο μήκος σε σχέση με το βάθος της περιοχής διάδοσης, με χαρακτηριστικότερο παράδειγμα τις εξισώσεις Boussinesq.

Ο λόγος για τον οποίο ακόμη καταφεύγουμε σε μοντέλα απλοποίησης των εξισώσεων του Euler, είναι διότι δεν δύνανται να επιλυθούν αριθμητικά εξαιτίας του τεράστιου υπολογιστικού κόστους που εμπεριέχουν όταν επιθυμούμε να τις μοντελοποιήσουμε σε μεγάλα χωρία. Οι εξισώσεις Boussinesq, δεν παρέχουν λύση σε κλειστή μορφή αλλά είναι ευκολότερο να επιλυθούν από άποψη υπολογιστικών απαιτήσεων.

### 2.2.1 Εξισώσεις ιδανικού ρευστού

Υποθέτουμε μη συνεκτικό ασυμπίεστο ρευστό. Η εξίσωση συνέχειας δίδει:

$$\nabla \mathbf{v} = u_x + v_y + w_z = 0.$$

Η διατήρηση της ορμής του ρευστού (εξίσωση Euler) δίδεται από:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = F \Rightarrow \mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{-\nabla(P + \rho g z)}{\rho},$$

όπου  $z$  ο κατακόρυφος θετικά προσανατολισμένος προς την επιφάνεια άξονας.

Η ανωτέρω σχέση για αστρόβιλη ροή  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  δίνει τη:

$$\mathbf{v}_t + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^2) = \frac{-\nabla(P + \rho g z)}{\rho}.$$

Στη συνέχεια, σχετικά με τον πυθμένα, εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη διείδυσης, παίρνουμε:

$$w = u h_x + v h_y, \quad \text{στο } z = -h(x, y).$$

Αντίθετα, στο πάνω σύνορο του χωρίου, που ταυτίζεται με την ελεύθερη επιφάνεια ( $\eta$ ), υπάρχει χρονική εξάρτηση καθώς η ελεύθερη επιφάνεια μεταβάλλεται με τον χρόνο, γεγονός που όπως αναφέραμε στην εισαγωγή καθιστά το εν λόγω πρόβλημα δύσκολο και ιδιαίτερο. Η προηγούμενη παρατήρηση σε συνδυασμό με την απαίτηση ότι η πίεση είναι μια συνεχής

συνάρτηση στην επιφάνεια παρέχει την κινηματική και τη δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας:

$$w = \eta_t + u\eta_x + v\eta_y \quad \text{στο } z = \eta(x, y, t),$$

$$P = P_\alpha(x, y, t) \quad \text{στο } z = \eta(x, y, t).$$

Με  $P_\alpha$  συμβολίζουμε την περιβάλλουσα πίεση. Στην περίπτωση μας όμως η πίεση αυτή αποτελεί την τοπική κινούμενη κατανομή πίεσης που θα επιβάλλουμε, η οποία μπορεί να μοντελοποιεί προσεγγιστικά τους κυματισμούς του πλοίου.

Μια εναλλακτική ισοδύναμη επαναδιατύπωση του προβλήματός μας γίνεται στα πλαίσια της θεωρίας μεταβολών. Η διατύπωση αυτή θα μας δώσει τη δυνατότητα να καταλήξουμε στις επιθυμητές μορφές των εξισώσεων Boussinesq.

### 2.2.2 Η τοποθέτηση του προβλήματος

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε συνοπτικά την παραγωγή των εξισώσεων με τη βοήθεια της μεθόδου των μεταβολών<sup>4,5</sup>

Η υπόθεση της μη στροβιλότητας<sup>6</sup> μας επιτρέπει τη χρήση της θεωρίας του δυναμικού. Συγκεκριμένα, έστω  $\phi$  το δυναμικό ταχύτητας που αναζητούμε, το οποίο είναι αποτέλεσμα της κίνησης του ρευστού  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V} = \nabla\phi.$$

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να δείξουμε<sup>7</sup> ότι:

$$P - P_\alpha = \Delta P = -\rho \left( gz + \phi_t + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 \right).$$

Αυτό ακριβώς το αποτέλεσμα, θα μας βοηθήσει στην ερμηνεία της χρήσης του συναρτησιακού. Πιο συγκεκριμένα, ολοκληρώνοντας την πίεση στην υπό μελέτη περιοχή, και εν

<sup>4</sup>Πολλές φορές αποδίδεται και ως παραλλακτική μέθοδος, βλ. *H. Goldstein*[70].

<sup>5</sup>Για μια εισαγωγή παραπέμπουμε στο κλασικό σύγγραμμα του Gilbert A. Bliss[71] αλλά και στους I. M. Gelfand και S. V. Fomin[72].

<sup>6</sup>Βλ. για παράδειγμα Robert G. Dean, Robert A. Dalrymple[73].

<sup>7</sup>βλ. για παράδειγμα Belibassakis (2011)[29].

συνεχεία ως προς ένα χρονικό διάστημα, προκύπτουν διαστάσεις δράσης. Έτσι δημιουργούμε το επιθυμητό συναρτησιακό, το οποίο αναλύουμε στη συνέχεια.

Ξεκινούμε με την θεώρηση ότι σε ένα διάστημα του χρόνου  $(t_1, t_2)$ , το κάτωθι συναρτησιακό  $F^8$  έχει την ακόλουθη μεταβολή:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z=-h(x,y)}^{z=\eta(x,y,t)} dx dy dz \Delta P = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z=-h(x,y)}^{z=\eta(x,y,t)} dx dy dz (-\rho) \left\{ (gz + \phi_t) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} ((\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 + (\phi_z)^2) \right\}. \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

Ακολουθούμε τον συμβολισμό  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ . Η συνολική μεταβολή συντίθεται<sup>9</sup> από

$$\delta F = \delta_\eta F + \delta_\phi F. \tag{2.2}$$

<sup>8</sup>Έχει ενδιαφέρον να πούμε ότι η Lagrangian με παρόμοια μορφή αναφέρεται στον Hargreaves (1908)(!)[30], βλ. επίσης Bateman (1932)[74]. Παρόλα αυτά στη βιβλιογραφία έχει επικρατήσει ως συναρτησιακό του Luke (1967)[31].

<sup>9</sup>Αξίζει, πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη της 2.2 να αναφέρουμε πολύ συνοπτικά το σκεπτικό της εν λόγω πράξης. Ως γνωστόν ο Lagrange εισήγαγε το συμβολισμό  $\delta$  για την πλασματική/δυνατή (virtual) απειροστή μεταβολή προκειμένου να τη διαχωρίσει από την πραγματική (actual) απειροστή μεταβολή όπου χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό  $d$ . Έτσι για μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορούμε να ορίσουμε την πρώτη μεταβολή ως:  $\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \dots$

Η συνθήκη για την ύπαρξη στάσιμης τιμής απαιτεί μηδενισμό της πρώτης μεταβολής. Η έννοια όμως της δυνατής μετατόπισης μας δίνει τη συνθήκη ότι για να μηδενίζεται η πρώτη μεταβολή σε κάθε κατεύθυνση απαιτείται ο μηδενισμός της  $F$  σε κάθε δυνατή κατεύθυνση, έτσι έχουμε ότι για όλες τις μερικές παραγώγους ισχύει:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Για περαιτέρω ανάλυση παραπέμπουμε στο εξαιρετικό βιβλίο του Cornelius Lancos (1949)[77] αλλά και στους Gelfand και Fomin (2000)[72].

Με αυτά κατά νου προχωρούμε στις δύο μεταβολές.

### Η δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας

Εφαρμόζοντας τη μεταβολή για την ελεύθερη επιφάνεια, θα ασχοληθούμε με τις συνέπειες του πρώτου όρου, δηλαδή του  $\delta_\eta F = 0$ . Η εξίσωση στο  $z = \eta(x, y, t)$  παίρνει τη μορφή:

$$\left( g\eta + \phi_t + \frac{1}{2}((\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 + (\phi_z)^2) \right) \Big|_{z=\eta(x,y,t)} = \frac{-(P - P_\alpha)}{\rho}. \quad (2.3)$$

Η έκφραση 2.3, ουσιαστικά αποτελεί την επαναδιατύπωση του ότι, σε κάθε σημείο της ελεύθερης επιφάνειας η πίεσή της ισούται με την επιβαλλόμενη κατανομή φορτίου. Ως εκ τούτου την αναφέρουμε ως δυναμική συνθήκη. Να τονίσουμε ότι στη συνθήκη αυτή υπεισέρχεται το άκρο, δηλαδή η ελεύθερη επιφάνεια, που είναι συνάρτηση:  $\eta = \eta(x, y, t)$ . Μπορούμε να ξαναγράψουμε πιο συμπυκνωμένα τη σχέση αυτή:

$$g\eta + \phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = \frac{-(P - P_\alpha)}{\rho}, \quad z = \eta.$$

Αυτή ακριβώς η εξάρτηση δίνει στο πρόβλημα μια μοναδικότητα, στην οποία η συνοριακή συνθήκη εξαρτάται και καθορίζεται από τη λύση, είναι δηλαδή μια πεπλεγμένη συνοριακή συνθήκη. Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε πάλι.

### Η κινηματική του προβλήματος

Η εφαρμογή της θεωρίας μεταβολών στο δυναμικό  $\phi$  απαιτεί μεγαλύτερη προσοχή διότι υπάρχει πεπλεγμένη εξάρτηση μεταξύ του πεδίου  $\phi$  και της Lagrangian. Ως εκ τούτου, για να τη δούμε αναλυτικά θα πρέπει να θεωρήσουμε τη μεταβολή εντός του συναρτησιακού και πιο συγκεκριμένα, εντός του τμήματος του συναρτησιακού το οποίο περιλαμβάνει την ολοκλήρωση ως προς την κατακόρυφη συνιστώσα. Ως  $\vec{x} \equiv (x, y)$  καθώς και στις διαφορίσεις οι δύο οριζόντιες θα δηλώνονται με τον δείκτη  $i$ . Καθώς θα προχωρήσουμε στις πράξεις με το συναρτησιακό θα διατηρήσουμε ένα φορμαλιστικό πλαίσιο σε επίπεδο συμβολισμού, επειδή οι

πράξεις είναι ιδιαίτερα απαιτητικές και πυκνές. Στη συνέχεια θα επανέλθουμε σε έναν πιο λιτό συμβολισμό σε σχέση με τις διαφορίσεις αλλά και τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Ο λόγος που αλλάζουμε τον φορμαλισμό γίνεται λοιπόν στα πλαίσια της αναγκαιότητας των πράξεων και όχι για κάποιον άλλο λόγο. Συνεχίζουμε λοιπόν με τη μεταβολή στο συναρτησιακό:

$$\begin{aligned} \delta_\phi F = & -\rho \delta_\phi \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \times \right. \\ & \left. \left\{ g z + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|^2 \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned} \delta_\phi F = & -\rho \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \times \right. \\ & \left. \left\{ \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x_i} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial z} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Προκειμένου να συνεχίσουμε θα λάβουμε υπόψη τα εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \delta\phi &= \delta\phi|_{z=\eta(\bar{x},t)} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \frac{\partial\delta\phi}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \delta\phi &= \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \delta\phi + \\ \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta\phi) &+ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \delta\phi|_{z=\eta(\bar{x},t)} \frac{\partial\eta}{\partial x_i} + \\ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \delta\phi|_{z=-h(\bar{x})} \frac{\partial h}{\partial x_i} & \\ \int_{-h}^{\eta} dz \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \delta\phi \right\} &= \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \delta\phi + \\ \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial z}. & \end{aligned} \quad (2.6)$$

Η τελευταία σχέση της 2.6 γίνεται:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \delta \phi \Big|_{z=\eta(\bar{x},t)} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \delta \phi \Big|_{z=-h(\bar{x})} = \\ & \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \delta \phi + \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial (\delta \phi)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Αντικαθιστώντας τις 2.6 και 2.7 στην 2.5 έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta_\phi F = & -\rho \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{\partial}{\partial t} \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \delta \phi + \right. \\ & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \delta \phi - \\ & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z=-h(\bar{x})}^{z=\eta(\bar{x},t)} dz \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \delta \phi - \\ & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \Big|_{z=\eta(\bar{x},t)} \delta \phi \Big|_{z=\eta(\bar{x},t)} - \\ & \left. \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial h}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} \Big|_{z=-h(\bar{x})} \delta \phi \Big|_{z=-h(\bar{x})} \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Την παραπάνω μεταβολική διαδικασία μπορούμε να την ξαναγράψουμε πιο αναλυτικά και ως:

$$\begin{aligned} \delta_\phi F = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dx dy (-\rho) \times \\ & \times \left\{ \partial_t \int_{z=-h(x,y)}^{z=\eta(x,y,t)} dz \delta \phi + \partial_x \int_{z=-h(x,y)}^{z=\eta(x,y,t)} dz (\phi_x) \delta \phi + \right. \\ & \partial_y \int_{z=-h(x,y)}^{z=\eta(x,y,t)} dz (\phi_y) \delta \phi - \\ & \int_{z=-h(x,y)}^{z=\eta(x,y,t)} dz (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) \delta \phi - \\ & \left. \left\{ (\phi_x) \eta_x + (\phi_y) \eta_y - (\phi_z) + \eta_t \right\} \Big|_{z=\eta(x,y,t)} \delta \phi \Big|_{z=\eta(x,y,t)} - \right. \\ & \left. \left\{ (\phi_x) h_x + (\phi_y) h_y + (\phi_z) \right\} \Big|_{z=-h(x,y)} \delta \phi \Big|_{z=-h(x,y)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Έτσι στην 2.8 οι δύο πρώτοι όροι, που βάσει της 2.9 είναι τρεις, μπορούν να διαγραφούν διότι αναφέρονται στις διαφορές των άκρων, είτε χρονικά, είτε χωρικά στις δύο οριζόντιες διαστάσεις, με αποτέλεσμα η δυνατή μεταβολή στις περιπτώσεις αυτές να θεωρείται ίση με το μηδέν. Οπότε απομένουν οι όροι αυτοί που θα μας δώσουν την πληροφορία εφόσον αναφέρονται σε κάθε δυνατή μεταβολή:

$$\begin{aligned}\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} &= 0, & (x, y, z) \in D, \\ \eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y - \phi_z &= 0, & z = \eta, \\ \phi_x h_x + \phi_y h_y + \phi_z &= 0, & z = -h.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Από τις σχέσεις αυτές η πρώτη αποτελεί την εξίσωση Laplace, στο χωρίο που μελετάμε. Μπορούμε εύκολα να το δούμε χρησιμοποιώντας το συνολικό δυναμικό όπου προκύπτει:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (x, y, z) \in D.$$

Φτάσαμε λοιπόν στην τελική διατύπωση του προβλήματος. Μπορούμε να δούμε την ισοδυναμία των δύο διατυπώσεων ως προς τις τελικές εξισώσεις. Ουσιαστικά αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα επίλυσης της εξίσωσης Laplace, στο χωρίο ανάμεσα στην ελεύθερη επιφάνεια και στον πυθμένα. Όπως όμως αναφέραμε, το πρόβλημα αυτό έχει την ιδιαιτερότητα, ότι οι συνοριακές συνθήκες εμπεριέχουν τη λύση. Αυτό αποτελεί και τη βασική δυσκολία του προβλήματος των θαλασσιών κυματισμών, που αποτελούν ουσιαστικά προβλήματα χωρίων ελευθέρων άκρων.

Είμαστε πλέον σε θέση να προχωρήσουμε στην περαιτέρω διερεύνηση.

### 2.3 Αναλυτική εξαγωγή των εξισώσεων Boussinesq

Δίχως να χάνουμε στη γενικότητα, μπορούμε να περιοριστούμε σε μονοδιάστατη ροή και να μην συμπεριλάβουμε ουσιαστικά την  $y$  συνιστώσα. Με αυτά κατά νου, και θεωρώντας  $P_\alpha = 0$ , παίρνουμε:



$$\begin{aligned}
\phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0, & (x, z) \in D. \\
\eta_t + \phi_x \eta_x &= \phi_z, & z = \eta(x; t). \\
\phi_x h_x + \phi_z &= 0, & z = -h(x). \\
\phi_t + \frac{1}{2} ((\phi_x)^2 + (\phi_z)^2) + g\eta &= 0 & z = \eta(x; t).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Η βασική ιδέα είναι η απλούστευση δια της λήψης της μέσης τιμής (**vertical averaging**) της κατακόρυφης ( $z$ ) συνιστώσας. Θα καταγράψουμε δύο διαφορετικούς τρόπους που στηρίζονται όμως στην κεντρική ιδέα της “απαλοιφής” της κατακόρυφης συνιστώσας. Στους αριθμητικούς υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε, όπως θα δούμε, την προσέγγιση κατά Peregrine. Στην εν λόγω προσέγγιση ξεκινάμε από μια τιμή της ταχύτητας στην αδιατάρακτη επιφάνεια  $u(x, 0, t)$  και φτάνουμε στην τιμή στον πυθμένα  $u(x, -h, t)$ . Στη συνέχεια θεωρούμε<sup>10</sup>:

$$\bar{u} = \int_{-h}^{\eta} u \, dz.$$

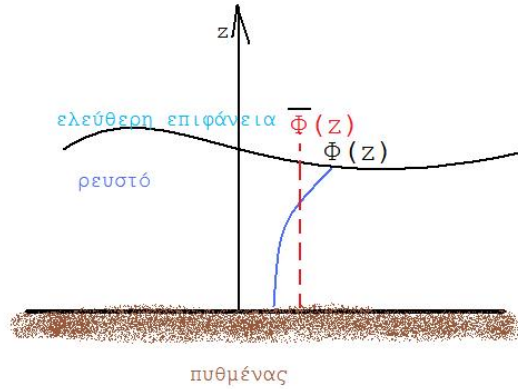
Ο δεύτερος τρόπος, που θα περιγράψουμε ευθύς εξαρχής, στηρίζεται στη μέθοδο που ακολούθησε ο Boussinesq (1872) για σταθερό<sup>11</sup> πυθμένα.

### 2.3.1 Εξαγωγή κατά Boussinesq

Στην προσέγγιση του Boussinesq θα θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα στην επιφάνεια για ρηχό νερό είναι περίπου ίση με αυτή του πυθμένα. Επίσης θεωρούμε πως **ο πυθμένας έχει σταθερό βάθος**, οπότε το  $h$  δεν εξαρτάται από το  $x$ .

<sup>10</sup> Αυτή τη μεθοδολογία ακολουθεί στη σελ. 816 ο D.H. Peregrine(1967)[3] τη μέση τιμή της ταχύτητας στην κατακόρυφη στήλη  $h + \eta$ . Στο εν λόγω άρθρο η μέση τιμή της ταχύτητας συμβολίζεται με  $\mathbf{Q}$  όπου αναφέρεται στις δύο διαστάσεις. Εμείς θα ακολουθήσουμε το συμβολισμό  $\bar{v}$  για το πρόβλημα των δύο διαστάσεων και την  $\bar{u}$  για το αντίστοιχο μονοδιάστατο.

<sup>11</sup> Σταθερό εννοούμε ότι δεν αλλάζει ούτε στο χρόνο ούτε στο χώρο. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε αναλυτικά στην περίπτωση χωρομεταβαλλόμενου πυθμένα.



Σχήμα 2.2: Αναπαράσταση απαλοιφής της κατακόρυφης συντεταγμένης.

Θα ξεκινήσουμε ολοκληρώνοντας την εξίσωση Laplace δύο φορές ως προς την κατακόρυφη στήλη. Μετά την πρώτη ολοκλήρωση έχουμε ότι:

$$\int_{-h}^{z'} \phi_{xx} dz + \phi_z(x, z', t) - \phi_z(x, -h, t) = c_1(x, t). \quad (2.12)$$

Ο όρος  $\phi_z(x, -h, t) = 0$ , αποτελεί τη συνθήκη μη διείσδυσης του πυθμένα. Κατά τη δεύτερη ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_{-h}^z dz' \int_{-h}^{z'} dz \phi_{xx} + \phi(x, z, t) - \phi(x, -h, t) = c_1(x, t)z + c_2(x, t). \quad (2.13)$$

Ο όρος  $c_2(x, t)$  δύναται να ενσωματωθεί στη σχέση  $\phi^b(x, t) \equiv \phi(x, -h, t) + c_2(x, t)$  όπου ο άνω δείκτης  $b$  αναφέρεται στον πυθμένα (bottom). Σε σχέση με τον όρο  $c_1(x, t)$ , που αποτελεί την πρώτη σταθερά ως προς το  $z$ , πρέπει να είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη μη διείσδυσης στην εξίσωση 2.13 προκύπτει ότι:

$$c_1(x, t) = \int_{-h}^{-h} \phi_{xx} dz = 0.$$

Ως εκ τούτου πρέπει να εγκαταλείψουμε τη  $c_1(x, t)$  μηδενίζοντάς τη από την επιβολή της συνοριακής συνθήκης μη διείσδυσης. Έτσι καταλήγουμε για τη συνάρτηση δυναμικού:

$$\phi(x, z, t) = \varphi^b(x, t) - \int_{-h}^z dz' \int_{-h}^{z'} \phi_{xx} dz. \quad (2.14)$$

Στο σημείο αυτό θα θεωρήσουμε ότι για κυματισμούς ρηχού νερού η οριζόντια ταχύτητα  $\phi_x(x, z, t)$  δεν αλλάζει σημαντικά σε σχέση με την ταχύτητα στον πυθμένα  $\varphi_x^b(x, t)$ . Θέτοντας λοιπόν

$$\phi \approx \varphi^b$$

στο ολοκλήρωμα, από την 2.14 προκύπτει η **πρώτη προσέγγιση**:

$$\phi(x, z, t) \approx \varphi^b(x, t) - \frac{(z+h)^2}{2!} \varphi_{xx}^b. \quad (2.15)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι έχουμε πετύχει την εξάλειψη κατακόρυφης συνιστώσας ( $z$ ) από το δυναμικό ταχυτήτων. Από εδώ και στο εξής μπορούμε να προχωρήσουμε σε όποια προσέγγιση θέλουμε αντικαθιστώντας στην 2.14. Προχωρούμε λοιπόν στο δεύτερο βήμα αντικαθιστώντας την 2.15 στη 2.14 για να προκύψει η **δεύτερη προσέγγιση**:

$$\phi(x, z, t) \approx \varphi^b(x, t) - \frac{(z+h)^2}{2!} \varphi_{xx}^b + \frac{(z+h)^4}{4!} \varphi_{xxxx}^b. \quad (2.16)$$

### Κινηματική Συνθήκη Ελεύθερης Επιφάνειας

Στο σημείο αυτό θα αντικαταστήσουμε το ανάπτυγμα στην κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας και θα διαγράψουμε όρους μεγαλύτερους της δεύτερης τάξης ως προς τις  $\eta$  και  $u$ . Προκύπτει<sup>12</sup> λοιπόν μετά την προσέγγιση δεύτερης τάξης και θέτοντας  $\phi_x(x; t) = u(x; t) \equiv u$  ότι:

$$\eta_t + u \eta_x - \frac{h^2}{2} u_{xx} \eta_x + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} \eta_x = -\eta u_x - h u_x + \frac{h^2}{2} \eta u_{xxx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx}. \quad (2.17)$$

<sup>12</sup>Πιο κάτω θα είμαστε ιδιαίτερα αναλυτικοί ως προς την εξαγωγή των σχέσεων στην περίπτωση του μεταβλητού πυθμένα.

Στην εξίσωση αυτή πρέπει, πριν δεχτούμε όλους τους όρους, να προχωρήσουμε σε αδιαστατοποίηση, προκειμένου να εκτιμήσουμε τη συνεισφορά όλων των εναπομεινάντων όρων. Έτσι θεωρούμε μια αλλαγή στις μεταβλητές:

$$x^* \leftrightarrow \frac{x}{\lambda}, \quad u^* \leftrightarrow \frac{u}{c}, \quad t^* \leftrightarrow \frac{ct}{\lambda}, \quad \eta^* \leftrightarrow \frac{\eta}{A}. \quad (2.18)$$

Η αδιαστατοποίηση γίνεται με το σκεπτικό της προσέγγισης των μακρών και ρηχών κυματισμών. Δηλαδή τα μεγέθη  $\epsilon = \frac{A}{h}$  και  $\mu = \frac{h}{\lambda}$ , είναι πολύ μικρά. Ως προς τη μεταξύ τους σχέση θεωρούμε ότι ισχύει  $\mu^2 \approx \epsilon$ , ακολουθώντας τον Ursell (1953)[27]. Η ταχύτητα  $c$  ισοδυναμεί με έναν όρο  $\sqrt{gh}$  όπου για τις ανάγκες της απόδειξης σταθερού πυθμένα η τιμή της είναι καθορισμένη<sup>13</sup>. Επίσης, ως προς τις αδιάστατες συντεταγμένες  $x_i^*$ , ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_i^*}. \quad (2.19)$$

Εφαρμόζοντας την αδιαστατοποίηση στη 2.17 λαμβάνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{cA}{\lambda} \eta_t + \frac{cA}{\lambda} u \eta_x - \frac{h^2 c A}{2\lambda^3} u_{xx} \eta_x + \frac{h^4 c A}{24\lambda^5} u_{xxx} \eta_x + \frac{cA}{\lambda} \eta u_x - \frac{h^2 c A}{2\lambda^3} \eta u_{xxx} = \\ - \frac{hc}{\lambda} u_x + \frac{h^3 c}{6\lambda^3} u_{xxx}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

όπου στην τελευταία σχέση εμφανίζονται οι αδιάστατες πλέον παραμέτροι.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η παράμετρος Ursell είναι της τάξης της μονάδος. Επίσης, θα εκφράσουμε την παραπάνω εξίσωση συναρτήσει της παραμέτρου ρήχωσης  $\mu$ , και δεδομένου ότι  $\epsilon \approx \mu^2$  θα διατηρήσουμε όρους μέχρι δεύτερης τάξης της  $\epsilon$  ή τέταρτης τάξης

<sup>13</sup>Σχετικά με μια κατανοητή και αναλυτική συζήτηση για την αδιαστατοποίηση προτείνουμε το βιβλίο του Lokenath Debnath, 1994[67] στο κεφάλαιο 4. Το θέμα αναφέρεται βέβαια και στον Dingenmans 1997, part two[78] στο κεφάλαιο 5. Στην εργασία μας, ακολουθούμε ένα διαφορετικό σκεπτικό.

του  $\mu$ . Για τον κάθε όρο χωριστά έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{c A}{\lambda} &= \frac{A h}{h \lambda} c = c \epsilon \mu, \\
 \frac{c A}{\lambda} &= \frac{A h}{h \lambda} c = c \epsilon \mu, \\
 \frac{h^2 A c}{2 \lambda^3} &= -\frac{A h^3 c}{h \lambda^3 2} = -\epsilon \mu^3 \frac{c}{2}, \\
 \frac{h^4 c A}{24 \lambda^5} &= \frac{h^5 A c}{\lambda^5 h 24} = \frac{c}{24} \epsilon \mu^5, \\
 \frac{-A c}{\lambda} &= \frac{-A h}{h \lambda} c = -c \epsilon \mu, \\
 \frac{-h c}{\lambda} &= -c \mu, \\
 \frac{h^2 c A}{2 \lambda^3} &= \frac{h^3 A c}{\lambda^3 h 2} = \frac{c}{2} \epsilon \mu^3, \\
 \frac{h^3 c}{6 \lambda^3} &= \frac{c}{6} \mu^3.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Έτσι προκύπτει η:

$$\begin{aligned}
 c \epsilon \mu \eta_t + c \epsilon \mu u \eta_x - \frac{c}{2} \epsilon \mu^3 u_{xx} \eta_x + \frac{c}{24} \epsilon \mu^5 u_{xxxx} \eta_x = \\
 -c \epsilon \mu \eta u_x - c \mu u_x + \frac{c}{2} \epsilon \mu^3 \eta u_{xxx} + \frac{c}{6} \mu^3 u_{xxx}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ακολουθούμε την αντίστροφη πορεία, επανερχόμαστε δηλαδή στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων διατηρώντας τους τέσσερις όρους από τους οκτώ στην 2.17, ήτοι:

$$\eta_t + u \eta_x = -\eta u_x - h u_x + \frac{h^3}{6} u_{xxx}. \tag{2.23}$$

### Δυναμική Συνθήκη Ελεύθερης Επιφάνειας

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την 2.16 στη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας. Η εξίσωση που προκύπτει διατηρώντας έως και δευτεροβάθμιους όρους είναι:

$$g \eta + \varphi_t - \frac{h^2}{2} u_{xt} - h \eta u_{xt} + \frac{\eta h^3}{3!} u_{xxx} + \frac{h^4}{4!} u_{xxx} + \frac{1}{2} (u^2 + h^2 u_x^2 - h^2 u u_{xx} + \frac{h^4}{4} u_{xx}^2 - \frac{h^4}{3} u_x u_{xxx} + \frac{h^6}{36} u_{xxx}^2 + \frac{h^4}{12} u u_{xxxx} - \frac{h^6}{24} u_{xx} u_{xxx} + \frac{h^8}{576} u_{xxxx}^2) = 0. \quad (2.24)$$

Προκειμένου να “διώξουμε” τον όρο του  $\varphi$  παραγωγίζουμε τη σχέση ως προς  $x$  για να προκύψει η ταχύτητα  $u$ . Αυτό βέβαια μας κοστίζει στο ότι οι όροι πληθαίνουν, αλλά με τη βοήθεια της αδιαστατοποίησης θα απλοποιηθεί η προσέγγισή μας κατά πολύ. Έχουμε λοιπόν μετά την παραγωγή:

$$g \eta_x + u_t - \frac{h^2}{2} u_{xxt} - h \eta_x u_{xt} - h \eta u_{xxt} + \frac{h^3}{6} \eta_x u_{xxx} + \frac{h^3}{6} \eta_x u_{xxx} + \frac{h^3}{6} \eta u_{xxxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxt} + u u_x + h^2 u_x u_{xx} - \frac{h^2}{2} u_x u_{xxt} - \frac{h^2}{2} u u_{xxx} + \frac{h^2}{4} u_{xx} u_{xxx} - \frac{h^4}{6} u_{xx} u_{xxx} - \frac{h^4}{6} u_x u_{xxxx} + \frac{h^6}{36} u_{xxx} u_{xxxx} + \frac{h^4}{24} u_x u_{xxxx} - \frac{h^6}{48} u_{xxx} u_{xxxx} - \frac{h^6}{48} u_{xx} u_{xxxx} + \frac{h^8}{576} u_{xxxx} u_{xxxx} = 0. \quad (2.25)$$

Στη 2.25 εφαρμόζουμε αδιαστατοποίηση. Η εν λόγω εξίσωση αποτελείται από 21 όρους. Οι όροι από τη δεύτερη γραμμή, δηλαδή από τον ένατο μέχρι τον εικοστό πρώτο, είναι οι όροι που παράγονται από τα τετράγωνα. Σε σχέση με τη συνεισφορά τους είναι απλό να δούμε ότι οι παράγωγοι υψηλής τάξης συνεισφέρουν ελάχιστα στην εξίσωση, για παράδειγμα ο όρος 13:

$$\frac{h^4}{4} u_{xx} u_{xxx} \Rightarrow \frac{h^4 c^2}{4\lambda^5} u_{xx} u_{xxx} = \frac{h^4 \sqrt{g} h^2}{4\lambda^5} u_{xx} u_{xxx} = \frac{g}{4} \mu^5 u_{xx} u_{xxx}.$$

Έτσι οι όροι από 13 έως 21 της εξίσωσης 2.24 μπορούν να παραληφθούν.

Σε σχέση λοιπόν με τους υπόλοιπους όρους, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{ορος1 :} & \quad g \eta_x \Rightarrow g A \frac{1}{\lambda} \eta_x = g \frac{A}{h} \frac{h}{\lambda} \eta_x = g \epsilon \mu \eta_x, \\
\text{ορος2 :} & \quad u_t \Rightarrow c \frac{c}{\lambda} u_t = \frac{g h}{\lambda} u_t = g \mu u_t, \\
\text{ορος3 :} & \quad -\frac{h^2}{2} u_{xxt} \Rightarrow -\frac{c^2 h^2}{2 \lambda^3} u_{xxt} = -g \frac{h^3}{2 \lambda^3} u_{xxt} = -\frac{g}{2} \mu^3 u_{xxt}, \\
\text{ορος4 :} & \quad -h \eta_x u_{xt} \Rightarrow -h A c \frac{c}{\lambda^3} \eta_x u_{xt} = -g \frac{h^3}{\lambda^3} \frac{A}{h} \eta_x u_{xt} = -g \epsilon \mu^3 \eta_x u_{xt}, \\
& \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \\
\text{ορος9 :} & \quad u u_x \Rightarrow \frac{c^2}{\lambda} u u_x = g \mu u u_x, \\
\text{ορος10 :} & \quad h^2 u_x u_{xx} \Rightarrow \frac{h^2 c^2}{\lambda^3} u_x u_{xx} = g \mu^3 u_x u_{xx}, \\
\text{ορος11 :} & \quad -\frac{h^2}{2} u_x u_{xxt} \Rightarrow -\frac{c^3 h^2}{\lambda^4} u_x u_{xxt} = \frac{g c}{\lambda} \mu^3 u_x u_{xxt}, \\
\text{ορος12 :} & \quad -\frac{h^2}{2} u u_{xxx} \Rightarrow \frac{c^3 h^2}{\lambda^4} u u_{xxx} = \frac{g c}{\lambda} \mu^3 u u_{xxx}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Σε σχέση με τους όρους 11 και 12, στην πραγματικότητα προκύπτει από τον λόγο  $\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\mu}$  ότι είναι τάξεως  $\mu^{7/2}$ . Ο λόγος όμως που δε θα τις λάβουμε υπόψη είναι το γινόμενο των ταχυτήτων  $u_x u_{xxt}$  και  $u u_{xxx}$ . Αυτός είναι και ο λόγος που θεωρούμε αμελητέα και την 10 καίτοι η τάξη του  $\mu$  πληρεί την αρχική μας προϋπόθεση, ότι δηλαδή δεχόμαστε τάξη το πολύ  $\mu^4$ .

Συνεπώς καταλήγουμε στην:

$$g \eta_x + u_t - \frac{h^2}{2} u_{xxt} + u u_x = 0. \tag{2.27}$$

Τελικά προκύπτει το σετ των εξισώσεων<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned}
\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} (u (h + \eta)) &= \frac{h^3}{6} u_{xxx}, \\
g \eta_x + u_t + u u_x &= \frac{h^2}{2} u_{xxt}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

<sup>14</sup>Αυτές οι εξισώσεις αποτελούν τις εξισώσεις (25) όπως τις εξήγαγε ο Boussinesq το 1872.

Δίχως τις τρίτες παραγώγους στο δεξί μέλος, που εκφράζουν διασπορά<sup>15</sup> οι εξισώσεις γράφονται πιο απλά:

$$\begin{aligned}\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} (u(h+u)) &= 0, \\ g\eta_x + u_t + uu_x &= 0.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν το σετ των κλασικών εξισώσεων για ρηχούς κυματισμούς.

Να υπενθυμίσουμε ότι στην ανάλυσή μας, δεν θεωρήσαμε ότι ο πυθμένας μεταβάλλεται σε σχέση με το  $x$ .

### 2.3.2 Γενίκευση στην περίπτωση μεταβλητού πυθμένα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε ένα, κατά τη γνώμη μας, πιο συστηματικό τρόπο εξαγωγής συτήματος διαφορικών όπου υπεισέρχεται η δυνατότητα αντιμετώπισης προβλημάτων μεταβλητού βάθους. Η μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι παραπλήσια με αυτή της προηγούμενης ενότητας, μόνο που οι όροι τώρα εξαιτίας της εξάρτησης  $h = h(x)$  πολλαπλασιάζονται.

Στο πρώτο βήμα θα πρέπει να διερευνήσουμε την ισχύ της προσέγγισης της συνάρτησης δυναμικού, διότι στην περίπτωσή μας πλέον, η συνθήκη μη διείσδυσης μας δίνει:

$$\phi_z = -\phi_x h_x, \quad z = -h(x).\tag{2.30}$$

$$\int_{-h}^z \phi_{xx} dz + \phi_z(x, z, t) - \phi_z(x, -h, t) = c_1(x, t).\tag{2.31}$$

Στην περίπτωση μεταβλητού πυθμένα ο όρος  $\phi_z(x, -h, t)$ , δεν μηδενίζεται και θα αντικατασταθεί με τη βοήθεια της 2.30. Κατά τη δεύτερη ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_{-h}^z dz' \int_{-h}^{z'} dz \phi_{xx} + \phi(x, z, t) - \phi(x, -h, t) + \int_{-h}^z dz' \phi_x h_x = c_1(x, t)z + c_2(x, t).$$

<sup>15</sup>βλ. Dingemans[78] στη σελίδα 478.



Ο όρος  $c_2(x, t)$  δύναται να ενσωματωθεί στη σχέση  $\varphi^b(x, t) \equiv \phi(x, -h, t) + c_2(x, t)$  όπου ο άνω δείκτης  $b$  αναφέρεται, όπως και στην αρχική περίπτωση, στον πυθμένα. Σε σχέση με τον όρο  $c_1(x, t)$ , εφαρμόζουμε τη συνθήκη 2.30 στην προηγούμενη εξίσωση και προκύπτει: ότι  $c_1(x, t) = 0$ . Οπότε η σχέση προσέγγισης 2.16 παραμένει ίδια ακόμη και στην περίπτωση μεταβλητού πυθμένα.

Συνεχίζουμε γράφοντας τη 2.16 αναλυτικά:

$$\begin{aligned} \phi(x, z; t) = & \varphi - \frac{h^2 \varphi_{xx}}{2} - h z \varphi_{xx} - \frac{z^2 \varphi_{xx}}{2} + \frac{h^4 \varphi_{xxxx}}{24} + \\ & \frac{1}{6} h^3 z \varphi_{xxxx} + \frac{1}{4} h^2 z^2 \varphi_{xxxx} + \frac{1}{6} h z^3 \varphi_{xxxx} + \frac{z^4 \varphi_{xxxx}}{24}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Με αυτόν τον τρόπο θα διαχειριστούμε καλύτερα τις προσεγγίσεις. Ας τις δούμε με τη σειρά:

$$\begin{aligned} \phi_z = & -h \varphi_{xx} - z \varphi_{xx} + \frac{1}{6} h^3 \varphi_{xxxx} + \frac{1}{2} h^2 z \varphi_{xxxx} + \frac{1}{2} h z^2 \phi_{xxxx} + \frac{z^3}{6} \varphi_{xxxx}, \\ \phi_t = & \varphi_t - \left( \frac{h^2}{2} + h z + \frac{z^2}{2} \right) \varphi_{xxt} + \left( \frac{h^2}{24} + \frac{h^3 z}{6} + \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \right) \varphi_{xxxxt}, \\ \phi_x = & \varphi_x - (h h_x + h_x z) \varphi_{xx} - \left( \frac{h^2}{2} + h z + \frac{z^2}{2} \right) \phi_{xxx} + \\ & \left( \frac{h^3}{6} h_x + \frac{h^2}{2} h_x z + \frac{h}{2} h_x z^2 \right) \varphi_{xxxx} + \\ & \left( \frac{h^4}{24} + \frac{h^3}{6} z + \frac{h^2}{4} z^2 + \frac{1}{24} z^4 \right) \varphi_{xxxxx}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Στη συνέχεια θα τις αντικαταστήσουμε στις δύο συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και θα έχουμε κατά νου ότι θα πρέπει να θέσουμε, εφόσον έχουμε υλοποιήσει τις αντίστοιχες παραγωγίσεις τη  $z = \eta$ , μιας και αναφερόμαστε στην ελεύθερη επιφάνεια. Οι υπολογισμοί στο σημείο αυτό είναι σχετικά απαιτητικοί. Να επαναλάβουμε ότι αρχικά θα κρατήσουμε όρους μέχρι δεύτερης τάξης ως προς  $\eta$  και  $u \equiv \varphi_x$ .

### Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

Σε σχέση με την  $\phi_t$  θα μετασχηματιστεί:

$$\phi_t = \varphi_t - \left( \frac{h^2}{2} + h\eta + \frac{\eta^2}{2} \right) \varphi_{xxt} + \left( \frac{h^2}{24} + \frac{h^3\eta}{6} + \frac{h^2\eta^2}{4} + \frac{h\eta^3}{6} + \frac{\eta^4}{24} \right) \varphi_{xxxxt}. \quad (2.34)$$

από την οποία θα κρατήσουμε:

$$\phi_t = \varphi_t - \left( \frac{h^2}{2} + h\eta \right) \varphi_{xxt} + \left( \frac{h^2}{24} + \frac{h^3\eta}{6} \right) \varphi_{xxxxt}. \quad (2.35)$$

Σε σχέση με την  $\phi_x^2$ , προκύπτει:

$$\phi_x^2 = \varphi_x^2 - 2hh_x\varphi_x\varphi_{xx} - 2\eta h_x\varphi_x\varphi_{xx} + h^2h_x^2\varphi_{xx}^2 + HOT. \quad (2.36)$$

από την οποία<sup>16</sup> θα κρατήσουμε:

$$\begin{aligned} \phi_x^2 = & \varphi_x^2 - 2hh_x\varphi_x\varphi_{xx} + h^2h_x^2\varphi_{xx}^2 - h^2\varphi_x\varphi_{xxx} + h^3h_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + \frac{1}{4}h^4\varphi_{xxx}^2 + \\ & \frac{1}{3}h^3h_x\varphi_x\varphi_{xxxx} - \frac{1}{3}h^4h_x^2\varphi_{xx}\varphi_{xxx} - \frac{1}{6}h^5h_x\varphi_{xxx}\varphi_{xxx} + \\ & \frac{1}{36}h^6h_x^2\varphi_{xxxx}^2 + \frac{1}{12}h^4\varphi_x\varphi_{xxxx} - \\ & \frac{1}{12}h^5h_x\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} - \frac{1}{24}h^6\varphi_{xxx}\varphi_{xxxx} + \frac{1}{72}h^7h_x\varphi_{xxx}\varphi_{xxxx} + \frac{1}{576}h^8\varphi_{xxxx}^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Σε σχέση με την  $\phi_z^2$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned} \phi_z^2 = & h^2\varphi_{xx}^2 + 2h\eta\varphi_{xx}^2 + \eta^2\varphi_{xx}^2 - \frac{1}{3}h^4\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} - \\ & \frac{4}{3}h^3\eta\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} - 2h^2\eta^2\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} - \frac{4}{3}h\eta^3\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} - \frac{1}{3}\eta^4\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} + \\ & \frac{1}{36}h^6\varphi_{xxxx}^2 + \frac{1}{6}h^5\eta\varphi_{xxxx}^2 + \frac{5}{12}h^4\eta^2\varphi_{xxxx}^2 + \frac{5}{9}h^3\eta^3\varphi_{xxxx}^2 + \\ & \frac{5}{12}h^2\eta^4\varphi_{xxxx}^2 + \frac{1}{6}h\eta^5\varphi_{xxxx}^2 + \frac{1}{36}\eta^6\varphi_{xxxx}^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

<sup>16</sup>Για την πλήρη έκφραση βλ. στο παράρτημα, όπου στις παραγώγους υψηλής τάξης, ανώτερης της τέταρτης, θα χρησιμοποιήσουμε τον παραδοσιακό συμβολισμό της μερικής παραγώγου, όπου θεωρούμε ότι μπορεί να κουράσει ή να μπερδέψει τον αναγνώστη.

η οποία προσεγγίζεται από:

$$\phi_z^2 = h^2 \phi_{xx}^2 - \frac{1}{3} h^4 \phi_{xx} \phi_{xxxx} + \frac{1}{36} h^6 \phi_{xxxx}^2. \quad (2.39)$$

Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε στη συνοριακή συνθήκη και να πάρουμε:

$$\begin{aligned} & \varphi_t - \left( \frac{h^2}{2} + h\eta \right) \varphi_{xxt} + \left( \frac{h^2}{24} + \frac{h^3\eta}{6} \right) \varphi_{xxxxt} + \\ & \frac{1}{2} \left( \varphi_x^2 - 2hh_x\varphi_x\varphi_{xx} + h^2h_x^2\varphi_{xx}^2 - h^2\varphi_x\varphi_{xxx} + h^3h_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + \frac{1}{4}h^4\varphi_{xxx}^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{3}h^3h_x\varphi_x\varphi_{xxxx} - \frac{1}{3}h^4h_x^2\varphi_{xx}\varphi_{xxx} - \frac{1}{6}h^5h_x\varphi_{xxx}\varphi_{xxxx} + \frac{1}{36}h^6h_x^2\varphi_{xxxx}^2 + \frac{1}{12}h^4\varphi_x\varphi_{xxxx} - \right. \\ & \left. \frac{1}{12}h^5h_x\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} - \frac{1}{24}h^6\varphi_{xxx}\varphi_{xxxx} + \frac{1}{72}h^7h_x\varphi_{xxxx}\varphi_{xxxx} + \frac{1}{576}h^8\varphi_{xxxx}^2 \right)^2 + \\ & \frac{1}{2} \left( h^2\phi_{xx}^2 - \frac{1}{3}h^4\phi_{xx}\phi_{xxxx} + \frac{1}{36}h^6\phi_{xxxx}^2 \right) + g\eta = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Τη σχέση αυτή θα την παραγωγίσουμε ως προς  $x$  για να προκύψει<sup>17</sup>:

$$\begin{aligned} & u_t - (h h_x + h_x \eta + h \eta_x) u_{xt} - \left( \frac{h^2}{2} + h \eta \right) u_{xxt} + \\ & \left( \frac{h}{12} h_x + \frac{h^2}{2} h_x \eta + \frac{h^3}{6} \eta_x u_{xxt} + \frac{h^3 \eta}{6} \right) u_{xxxxt} + \\ & u u_x - h_x^2 u u_x - h h_{xx} u u_x - h h_x u u_{xx} + HOT = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συγκριθούν από τις μεταγενέστερες προσεγγίσεις, ως προς τους όρους που εισάγονται. Για παράδειγμα ο όρος εμπλουτισμού στην ταχύτητα που εισάγεται από τους Beji - Battjes, όπως αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο, υπάρχει στην έκφρασή μας. Σε αυτό το σημείο θα επανέλθουμε.

### 2.3.3 Εξαγωγή κατά Peregrine

Εδώ θα καταγράψουμε έναν παραπλήσιο τρόπο, με τη διαφορά ότι στο ανάπτυγμα της συνάρτησης δυναμικού 2.16<sup>18</sup> θα την προσεγγίσουμε από τη

$$\overline{\phi(x, z, t)} = \varphi^b(x, t) - \frac{(\eta + h)^2}{6} \varphi_{xx}^b + HOT(\mu^4). \quad (2.42)$$

<sup>17</sup>Επίσης για την πλήρη έκφραση βλ. στο παράρτημα.

<sup>18</sup>Βλέπε Massel[69] στη σελίδα 118.

Αυτό διότι στον δεύτερο όρο  $\frac{(z+h)^2}{2}\varphi_{xx}^b$  ολοκληρώνουμε από τον πυθμένα ως την ελεύθερη επιφάνεια υπολογίζοντας τρόπον τινά τη μέση τιμή της ταχύτητας:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} dz \phi(x, z, t) &\approx \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} dz \varphi^b(x, t) - \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} dz \frac{(z+h)^2}{2!} \varphi_{xx}^b + \\ &\frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} dz \frac{(z+h)^4}{4!} \varphi_{xxxx}^b. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην 2.42 δεδομένου ότι ο αρχικός όρος ενσωματώνεται στην  $\varphi(x, t)$  και ότι από τον τρίτο και μετά όρο η τάξη είναι ανώτερη του  $\mu^4$ :

$$\bar{\phi} = \varphi \frac{\eta + h}{\eta + h} - \varphi_{xx} \frac{(\eta + h)^3}{3!(\eta + h)} + \varphi_{xxxx} \frac{(\eta + h)^5}{5!(\eta + h)} + HOT. \quad (2.44)$$

Συνάμα έχουμε καταγράψει ένα κατακόρυφο ανάπτυγμα βάσει του οποίου:

$$\phi(x, z; t) = \varphi^b(x, t) - \frac{(z+h)^2}{2} \varphi_{xx}^b + HOT[4] \Rightarrow \phi_z|_{z=\eta} = -(\eta+h)\varphi_{xx}. \quad (2.45)$$

Με αντικατάσταση της  $\phi_z$  από την τελευταία σχέση η εξίσωση για την κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια γίνεται:

$$\begin{aligned} \eta_t + \phi_x \eta_x - \phi_z &= 0 \Rightarrow \eta_t + (\varphi_x^b + HOT) \eta_x + (\eta + h)^2 \varphi_{xx}^b = 0 \\ \eta_t + \frac{\partial}{\partial x} ((h + \eta) \varphi_x^b) &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Σε σχέση με τη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, θέτουμε όπου  $\varphi^b \equiv \varphi$  και αντικαθιστούμε την  $\phi$  από το αρχικό ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned} \phi_t + g\eta + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) &= 0 \Rightarrow \\ \varphi_t - \frac{1}{2}(\eta + h)^2 \varphi_{xxt} - (\eta + h)\eta_t \varphi_{xx} + g\eta + \frac{1}{2}(\varphi_x + HOT)^2 + HOT &= 0 \\ \varphi_t + g\eta + \frac{1}{2}\varphi_x^2 - \frac{1}{2}(\eta + h)^2 \varphi_{xxt} &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Στον τελευταίο όρο αντικαταστήσαμε την  $\phi_z^2 = (\eta + h)^2 \phi_{xx}^2$ . Από την 2.42 επιλύουμε ως προς  $\phi^b \equiv \varphi$  και αντικαθιστούμε τη σχέση που βρίσκουμε στο αποτέλεσμα της 2.47:

$$\bar{\phi}_t + \left( \frac{(h + \eta)^2}{6} - \frac{(h + \eta)^2}{2} \right) \frac{\partial^3 (\bar{\phi} - HOT)}{\partial x^2 \partial t} + g \eta + \frac{1}{2} \bar{\phi}_x^2 + HOT = 0. \quad (2.48)$$

Καταλήξαμε έτσι στο πρώτο σετ των εξισώσεων Boussinesq:

$$\begin{aligned} \eta_t + \partial_x ((h + \eta) \bar{\phi}_x) &= 0, \\ \bar{\phi}_t + g \eta + \frac{1}{2} \bar{\phi}_x^2 &= \frac{1}{3} (h + \eta)^2 \bar{\phi}_{xxt}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Θέτοντας όπου  $\bar{\phi}_x = \bar{u}$  και παραγωγίζοντας τη δεύτερη σχέση ως προς  $x$  προκύπτει:

$$\begin{aligned} \eta_t + \partial_x ((h + \eta) \bar{u}) &= 0, \\ \bar{u}_t + g \eta_x + \bar{u} \bar{u}_x &= \frac{1}{3} (h + \eta)^2 \bar{u}_{xxt}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

### 2.3.4 Επεξεργασία των εξισώσεων

Στο σημείο αυτό θα προχωρήσουμε στη διαδικασία απαλοιφής της  $\bar{u}$  από το σύστημα των εξισώσεων, προκειμένου να προκύψει μια διαφορική εξίσωση ως προς την  $\eta$ . Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε την  $u$  αντι της  $\bar{u}$ . Για να μπορέσουμε να επιτύχουμε την απαλοιφή πρέπει στην πορεία να θεωρήσουμε ορισμένες προσεγγίσεις. Αυτές στηρίζονται στη γραμμικοποίηση των εξισώσεων, ήτοι:

$$\begin{aligned} \eta_t &\approx -h u_x \Rightarrow \eta_{tx} \approx -h u_{xx}, & \eta_{tt} &\approx -h u_{xt} \\ u_t &\approx -g \eta_x \Rightarrow u_{tt} \approx -g \eta_{xt} \approx g h u_{xx}, & u_{tx} &\approx -g \eta_{xx} \Rightarrow \eta_{tt} \approx g h \eta_{xx}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε την

$$\eta_t^2 \approx g h \eta_x^2. \quad (2.52)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων μπορούμε να προχωρήσουμε σε απλοποίηση των όρων που θα μας χρειαστούν στα βήματα της απαλοιφής. Ξεκινούμε από τη:

$$-u u_{xx} - u_x^2 \approx u \frac{\eta_{tx}}{h} - \frac{\eta_t^2}{h^2} \approx \frac{u \eta_{tx} - g x^2}{h}. \quad (2.53)$$

Από την εξίσωση Boussinesq (κινηματική σχέση της ελεύθερης επιφάνειας) 2.23 και την πρώτη εκ των 2.50, έχουμε παραγωγίζοντας:

$$\begin{aligned} \eta_x u &= -\eta_t - h u_x - \eta u_x \Rightarrow \eta_{tx} u + \eta_x u_t = -\eta_{tt} - h u_{xt} - \eta_t u_x - \eta u_{xt} \\ \eta_{xt} u &\approx -\eta_{tt} + g h \eta_{xx} + 2g \eta_x^2 + \eta g \eta_{xx}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Με αυτά κατά νου είμαστε σε θέση να προβούμε στην απολοιφή της  $u$  από το αρχικό σετ των εξισώσεων. Ξεκινάμε λοιπόν παραγωγίζοντας τη δεύτερη σχέση της 2.50 ως προς τη χωρική διάσταση  $x$ :

$$u_{tx} \approx -g \eta_{xx} - u u_{xx} - u_x^2 + \frac{1}{3}(h + \eta)^2 u_{xxx}. \quad (2.55)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την πρώτη από τη 2.50 ως προς το χρόνο:

$$\eta_{tt} + (h + \eta) u_{xt} + \eta_t u_x + \eta_{xt} u + \eta_x u_t = 0. \quad (2.56)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη σχέση 2.55 στη 2.56:

$$\begin{aligned} \eta_{tt} + (h + \eta) \frac{u \eta_{tx}}{h} - \frac{h + \eta}{h} g \eta_x^2 - g (h + \eta) \eta_{xx} + \\ \frac{(h + \eta)^3}{3} u_{xxx} - \frac{\eta_t^2}{h} - \eta_{tt} + g h \eta_{xx} + 2g \eta_x^2 + \eta g \eta_{xx} - g \eta_x^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Με τη βοήθεια των 2.51, 2.52, 2.54 η 2.57 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} -\eta_{tt} + g h \eta_{xx} + 2g \eta_x^2 + \eta g \eta_{xx} - \frac{\eta}{h} \eta_{tt} + \frac{\eta}{h} g h \eta_{xx} + \\ \frac{\eta}{h} 2g \eta_x^2 + \frac{\eta}{h} \eta g \eta_{xx} - g \eta_x^2 - \frac{\eta}{h} g \eta_x^2 - g h \eta_{xx} - g \eta \eta_{xx} - g \eta_x^2 + \\ g h \eta_{xx} + 2g \eta_x^2 + \eta g \eta_{xx} - g \eta_x^2 = \frac{(h + \eta)^3}{3} u_{xxx}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Στο τελευταίο βήμα θα χρησιμοποιήσουμε την

$$u_{xxxt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{xt} \approx -g \eta_{xxxx}. \quad (2.59)$$

Οπότε η 2.58 λαμβάνει τη μορφή:

$$\left(1 + \frac{\eta}{h}\right) \eta_{tt} - \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) h g \eta_{xx} = \frac{g h^3 \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^3}{3} \eta_{xxxx} + \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) \frac{g}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta^2). \quad (2.60)$$

Απλοποιώντας και γραμμικοποιώντας τον όρο  $\left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^2$  έχουμε:

$$\eta_{tt} - h g \eta_{xx} = \frac{h^3 g}{3} \eta_{xxxx} + \frac{g}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta^2). \quad (2.61)$$

Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να σταθούμε λίγο στην 2.61. Η εν λόγω εξίσωση αποτελεί μια τύπου Boussinesq εξίσωση. Με την παρατήρηση αυτή θέλουμε να πούμε πως αν ακολουθούσαμε μια διαφορετική επιλογή στις προσεγγίσεις που έλαβαν χώρα θα καταλήγαμε στους ίδιους γραμμικούς συντελεστές αλλά σε διαφορετικούς μη γραμμικούς.

Ας δούμε λοιπόν μια διαφορετική προσέγγιση. Αν για παράδειγμα στη 2.54 απλοποιήσουμε τους δύο πρώτους όρους, ακριβώς διότι  $\eta_{tt} = g h \eta_{xx}$ , θα προκύψει:

$$\eta_{xt} u \approx -\eta_{tt} + g h \eta_{xx} + 2 g \eta_x^2 + \eta g \eta_{xx} \approx 2 g \eta_x^2 + \eta g \eta_{xx}. \quad (2.62)$$

Η προσέγγιση αυτή θα μετατρέψει την 2.53:

$$-u u_{xx} - u_x^2 \approx u \frac{\eta_{tx}}{h} - \frac{\eta_t^2}{h^2} \approx \frac{u \eta_{tx} - g x^2}{h} \approx \frac{g \eta_x^2 + \eta g \eta_{xx}}{h}. \quad (2.63)$$

Η οποία με τη σειρά της θα μετατρέψει την 2.55:

$$u_{tx} \approx -g \eta_{xx} - u u_{xx} - u_x^2 + \frac{1(h + \eta)^2}{3} u_{xxxt} \approx -g \eta_{xx} + \frac{g \eta_x^2 + \eta g \eta_{xx}}{h} + \frac{-g(h + \eta)^2}{3}. \quad (2.64)$$

Στη συνέχεια πραγματοποιώντας πάλι τα ίδια βήματα καταλήγουμε στη:

$$\eta_{tt} - h g \eta_{xx} = \frac{h^3 g}{3} \eta_{xxxx} - \frac{g}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta^2). \quad (2.65)$$

Το 1872 ο Boussinesq[32] παρουσίασε ως set B - Boussinesq (1872), equation (26) την εξίσωση:

$$\eta_{tt} - h g \eta_{xx} = \frac{h^3 g}{3} \eta_{xxxx} + \frac{3g}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta^2). \quad (2.66)$$

Δε θα αναδείξουμε το σκεπτικό του Boussinesq το οποίο διαφοροποιείται ελαφρώς από το δικό μας. Θα προσθέσουμε στα προσεγγιστικά μας εργαλεία τη σχέση 24 στη σελίδα 74 του πρωτότυπου άρθρου σύμφωνα με την οποία:

$$\eta = -f(x - t\sqrt{gh}), \quad u = \sqrt{\frac{g}{h}}\eta. \quad (2.67)$$

Στην πραγματικότητα η 2.67 αναδεικνύει λύσεις οδεύοντων κυματισμών για τις οποίες οι αντίστοιχες κυματομορφές ταξιδεύουν με σταθερή ταχύτητα και έχουν επίσης σταθερή μορφή. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να μεταβούμε σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπου ο κυματισμός παραμένει στάσιμος δεδομένου ότι ο παρατηρητής κινείται με την ταχύτητα του οδεύοντος κύματος. Εχμεταλλευόμενοι λοιπόν αυτή τη σχέση<sup>19</sup>, και χρησιμοποιώντας για ευκολία ενίοτε αντί της  $\sqrt{\frac{g}{h}}$  το σύμβολο της φασικής ταχύτητας<sup>20</sup>  $c$ , μπορούμε να προβούμε στα εξής:

$$\begin{aligned} \xi = x - ct &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}, \\ \xi = x - ct &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

<sup>19</sup>Ο Miles(1980)[33] αναφέρει ότι αυτή η επιλογή της φοράς έχει κατά καιρούς παραμεληθεί από πολλούς ερευνητές.

<sup>20</sup>Θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε αυτό το σημείο σύντομα.



$$\begin{aligned}\eta_{xt} &= \frac{\partial}{\partial t}\eta_x = -c\eta_{xx} \Rightarrow \\ u \eta_{xt} &= -g \eta \eta_{xx}.\end{aligned}\quad (2.69)$$

Με τη βοήθεια της 2.69, που αποτελεί άλλη προσέγγιση<sup>21</sup> της 2.54 έχουμε για την 2.53:

$$-u u_{xx} - u_x^2 \approx -\frac{g\eta_x^2 + \eta g \eta_{xx}}{h}.\quad (2.70)$$

Οπότε η 2.55<sup>22</sup> γίνεται:

$$u_{tx} \approx -g \eta_{xx} - \frac{g \eta \eta_{xx} + g \eta_x^2}{h} - g \frac{1}{3} \eta_{xxxx}.\quad (2.71)$$

Με αντικατάσταση στην 2.56 έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\eta_{tt} + (h + \eta) \left( -g\eta_{xx} - \frac{g \eta \eta_{xx} + g \eta_x^2}{h} - \frac{g(h+\eta)^2}{3} \eta_{xxxx} \right) - 2g\eta_x^2 - g \eta \eta_{xx} &\approx 0 \Rightarrow \\ \eta_{tt} - 3g \eta \eta_{xx} - 3g \eta_x^2 - h g \eta_{xx} &= \frac{g(h+\eta)^3}{3} \eta_{xxxx} + \frac{\eta}{h} g \eta \eta_{xx} + \frac{\eta}{h} g \eta_x^2.\end{aligned}\quad (2.72)$$

Στο τελευταίο βήμα θεωρώντας αμελητέους τους  $\frac{\eta}{h}$  όρους έχουμε την εξίσωση του Boussinesq:

$$\eta_{tt} - h g \eta_{xx} = \frac{g}{3} h^3 \eta_{xxxx} + \frac{3g}{2} (\eta^2)_{xx}.\quad (2.73)$$

### 2.3.5 Σχέση διασποράς της εξίσωσης Boussinesq

Στην εξίσωση Boussinesq μπορούμε να θεωρήσουμε λύσεις της μορφής  $A e^{i(kx \pm \omega t)}$  για να πάρουμε τη σχέση διασποράς στη γραμμική προσέγγιση. Προφανώς ο μη γραμμικός όρος δε θα συνεισφέρει στη μεθοδολογία μας. Έτσι θα προκύψει:

<sup>21</sup> Ακριβώς στο βήμα αυτό ξεκινά η διαφοροποίηση σε σχέση με την προηγούμενη προσέγγιση.

<sup>22</sup> Προσοχή στην αλλαγή του προσήμου που έχει συμβεί στην  $u_{xt}$ .

$$-\omega^2 + h g k^2 = \frac{h^3 g k^4}{3} \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = h g \left( 1 - \frac{(k h)^2}{3} \right). \quad (2.74)$$

Μπορούμε να δούμε ότι επιβεβαιώνεται η γνωστή σχέση διασποράς  $c^2 = \frac{g h \tanh(k h)}{k h}$  την οποία αναπτύσσουμε κατά Taylor:

$$\frac{\tanh(k h)}{k h} = 1 - \frac{(k h)^2}{3} + \frac{2(k h)^4}{15} + O[k h]^6. \quad (2.75)$$

Πριν προχωρήσουμε στο θέμα μας ας πούμε δυο λόγια σχετικά με την παρατήρηση της χρήσης της φασικής ταχύτητας που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Υποθέτουμε λύσεις κυματικής διάδοσης, όπου επί της ουσίας συσχετίζουν τις χωρικές με τις χρονικές μεταβλητές. Η μορφή της εξάρτησης που προκύπτει από τη σχέση μεταξύ της φασικής ταχύτητας και του κυματάριθμου, αποκαλύπτει μια σχέση μεταξύ της ταχύτητας διάδοσης σε σχέση με το μήκος κύματος. Αυτό αποτελεί μια **σχέση διασποράς**. Φαίνεται δηλαδή ότι ένας κυματισμός διαμορφώνει την ταχύτητά του ανάλογα με το μήκος κύματός του. Να προσέξουμε όμως ότι στη φασική ταχύτητα υπεισέρχεται ένας λόγος που συσχετίζει τη χωρική με τη χρονική συντεταγμένη:

$$\frac{\omega}{k} = c. \quad (2.76)$$

Αυτή η σχέση αποτελεί την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται μια μονοχρωματική διαταραχή, η οποία εν γένει σχετίζεται με τη διάδοση μιας ταλάντωσης. Με τον όρο ταλάντωση περιγράφουμε ένα φαινόμενο με χαρακτηριστικά χρονικής επαναληψιμότητας, που μπορούν να περιγραφούν από μεγέθη περιόδου ή συχνότητας, ενώ ταυτόχρονα επιβάλλουν μια χωρική επαναληψιμότητα, που δηλώνεται από το μήκος κύματος ή τον κυματάριθμο.

Στην περίπτωση μιας αρμονικής διαταραχής  $A \sin(\omega t - k x)$ , η ταχύτητα διάδοσης δίνεται από το λόγο  $\omega/k$ . Αυτή όμως η **διαταραχή δεν περιέχει καμία πληροφορία**, υπό την έννοια ότι δεν αλλάζει χωροχρονικά. Έτσι προσδίδοντας μια μικρή διαμόρφωση στα κυματικά χαρακτηριστικά δύο κυματισμών, δηλαδή  $A \sin((\omega t \pm \Delta \omega t) - (k \pm \Delta k))$ , μπορούμε να δούμε για την υπέρθεσή τους ότι:

$$2 \sin(\Delta\omega t - \Delta k x) \cos(\omega t - k x). \quad (2.77)$$

Η διαταραχή αυτή αποτελείται από το κομμάτι της αρμονικής αναλλοίωτης διαταραχής αλλά και από το κομμάτι της περιβάλλουσας. Αυτό το δεύτερο κομμάτι περιέχει πληροφορία, υπό την έννοια ότι μας πληροφορεί για τη διαμόρφωσή του εφόσον δε διατηρεί αμετάβλητη δομή, όπως η αμιγώς αρμονική διαταραχή. Αυτό μας οδηγεί στην εισαγωγή της έννοιας της ταχύτητας ομάδας :

$$u_g = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (2.78)$$

Η ταχύτητα ομάδας, εν αντιθέσει με τη φασική ταχύτητα, αποκαλύπτει την ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας ή της ενέργειας ενός κύματος. Εν γένει, κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό σε όλες τις περιπτώσεις, αλλά σε γενικές γραμμές μπορούμε να δεχτούμε ότι η ομαδική ταχύτητα περιέχει αυτή την πληροφορία, της υλικής διάδοσης της κυματικής διαταραχής.

Πριν κλείσουμε αυτή την παρένθεση, να επισημάνουμε ότι η  $c_o \equiv \sqrt{hg}$ , δηλαδή η φασική ταχύτητα, αναφέρεται στη διάδοση των γραμμικών όρων. Η σχέση διασποράς 2.75 προκύπτει στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας του Airy<sup>23</sup>. Η θεωρία του Airy επιλύει το υδροδυναμικό πρόβλημα γραμμικοποιώντας το, ενώ η 2.76 αποτελεί έκφραση της ταχύτητας διάδοσης μιας αρμονικής διαταραχής που ικανοποιεί την κλασική κυματική εξίσωση:

$$\eta_{tt} = c_o^2 \eta_{xx}. \quad (2.79)$$

Το υδροδυναμικό πρόβλημα λοιπόν, έστω και στην απλούστερη εκδοχή του, μας παρέχει μια σχέση διασποράς την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση ενός μη γραμμικού προβλήματος, όπως εν προκειμένω στην εξίσωση Boussinesq. Αυτό βέβαια ενισχύεται και επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι η θεωρία του Airy δίδει τους ίδιους αρχικούς όρους στη σχέση διασποράς με τη γραμμικοποιημένη Boussinesq.

<sup>23</sup>Βλ. Μπελιπμασάκης Κ. - Αθανασούλης Γ. (2012)[68].

Επανερχόμενοι στο θέμα μας, η σχέση  $\omega = \omega(k)$  περιγράφει την εξάρτηση της συχνότητας από το μήκος κύματος, άρα και της φασικής ταχύτητας, δηλαδή της ταχύτητας διάδοσης της εκάστοτε συχνότητας από το μήκος κύματος. Παρατηρούμε δε ότι στην 2.74, ο όρος της τέταρτης παραγώγου δημιουργεί την παραβολοειδή εξάρτηση. Επίσης οι ταχύτητες που μπορούμε να ορίσουμε περιπλέκονται και καθίσταται ανέφικτος ο άμεσος προσδιορισμός τους, όταν τα μη γραμμικά φαινόμενα κάνουν την εμφάνισή τους. Εν προκειμένω, αναγκαζόμαστε να αφήσουμε το μη γραμμικό όρο προκειμένου να βρούμε τη σχέση διασποράς.

Τέλος αναφέρουμε ότι η σχέση διασποράς προσεγγίζει την αντίστοιχη που μας δίδει η θεωρία του Airy.

### 2.3.6 Επίλυση της εξίσωσης Boussinesq

Προχωρώντας στην επίλυση της 2.73 θα χρησιμοποιήσουμε, όπως κάναμε και πριν, την 2.68. Βάσει της 2.68 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.\end{aligned}\quad (2.80)$$

Οπότε με τη βοήθεια της 2.80 η 2.73 μετασχηματίζεται στην:

$$c^2 \eta_{\xi\xi} - h g \eta_{\xi\xi} = \frac{(gh)^3}{3} \eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{3g}{2} (\eta^2)_{\xi\xi}.\quad (2.81)$$

Θέτοντας στην εξίσωση 2.81, όπου  $c_0 = \sqrt{gh}$ , γίνεται:

$$(c^2 - c_0^2) \eta_{\xi\xi} = \frac{(gh)^3}{3} \eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{3g}{2} (\eta^2)_{\xi\xi}.\quad (2.82)$$

Η εξίσωση αυτή τώρα είναι εύκολο να επιλυθεί<sup>24,25,26</sup>. Ολοκληρώνοντας δύο φορές τη

<sup>24</sup>Η μεθοδολογία που ακολουθούμε μπορεί να αναζητηθεί πιο αναλυτικά στο εξαιρετικό άρθρο του Στέφανου Πνευματικού (1987)[34].

<sup>25</sup>Επίσης βλ. σελ 229-232 στον Stephen Nettel[75].

<sup>26</sup>Βλ. επίσης στα κεφάλαια 1 και 2 του WEINBERG[76].

σχέση προκύπτει:

$$(c^2 - c_o^2) \eta = \frac{(gh)^3}{3} \eta_{\xi\xi} + \frac{3g}{2} (\eta^2) + c_1 \xi + c_2. \quad (2.83)$$

Επειδή αναζητούμε εντοπισμένες λύσεις επιβάλλουμε τη συνθήκη ότι καθώς το  $\xi$  μεγαλώνει η  $\eta$  θα πρέπει να μικραίνει, άρα οι σταθερές μετά από κάθε ολοκλήρωση θα πρέπει να μας δίνουν μηδέν.

Έπειτα πολλαπλασιάζουμε την 2.83 με  $\eta_\xi$  με σκοπό να απλοποιήσουμε την έκφραση διότι θα μετατραπεί σε μια εξίσωση διαχωριζόμενων μεταβλητών:

$$\begin{aligned} (c^2 - c_o^2) \eta \eta_\xi &= \frac{(gh)^3}{3} \eta_{\xi\xi} \eta_\xi + \frac{3g}{2} (\eta^2) \eta_\xi \Rightarrow \\ \frac{c^2 - c_o^2}{2} (\eta^2)_\xi &= \frac{gh^3}{6} (\eta_\xi^2)_\xi + \frac{3g}{6} (\eta^3)_\xi \Rightarrow \\ \frac{c^2 - c_o^2}{2} (\eta^2) &= \frac{gh^3}{6} (\eta_\xi^2) + \frac{3g}{6} (\eta^3) + 0 \Rightarrow \\ \eta_\xi &= \pm \sqrt{\frac{3}{h^3}} \sqrt{\eta^2 \left( \frac{c^2 - c_o^2}{g} - \eta \right)} \Rightarrow \\ \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 \left( \frac{c^2 - c_o^2}{g} - \eta \right)}} &= \pm \sqrt{\frac{3}{h^3}} d\xi. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Στο σημείο αυτό θα περιγράψουμε την επιλογή της κατάλληλης ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} &= \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad b < 0. \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} &= \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C, \quad b > 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Επιλέγουμε τη δεύτερη περίπτωση από τον πίνακα ολοκληρωμάτων για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι ότι θεωρώντας ότι  $b < 0$  έχουμε ότι η λύση που προκύπτει από τη διαφορική καταλήγει να είναι η :

$$\eta = - \frac{|(c^2 - v^2)| \operatorname{Sec} \left( \frac{\sqrt{|(c^2 - v^2)|} (\sqrt{3}\xi)}{2\sqrt{gh^{3/2}}} \right)^2}{g}. \quad (2.86)$$

Η 2.86 δεν αποτελεί σολιτονική λύση διότι έχει χαρακτηριστικά που αντιτίθενται στις απαιτήσεις, όπως για παράδειγμα, είναι μια απεντοπισμένη διαταραχή. Έτσι αποκλείεται να ικανοποιείται και η σχέση διασποράς κατά Boussinesq η οποία αναφέρεται στην εξίσωση ελλείπει του μη γραμμικού όρου. Με την εξίσωση διασποράς 2.74 έχουμε ότι η φασική ταχύτητα ελαττώνεται σε σχέση με τον κυματάρημο, ως εκ τούτου δεν θα αναμέναμε να λάβει μια εκ των μικρότερων τιμών από τη σχέση διασποράς.

Ο δεύτερος λόγος, που κατά τη γνώμη μας είναι και ο ουσιαστικότερος, είναι ότι βάσει των πειραμάτων του Russel(1837)[35] τα οποία επιβεβαίωσε και ο Bazin (1865)[36] το σολιτόνιο φαίνεται να ταξιδεύει με ταχύτητα

$$c = \sqrt{g(h + A)}, \quad (2.87)$$

όπου  $A$  το πλάτος του κυματισμού. Άσχετα με το βαθμό ακρίβειας της εν λόγω μέτρησης, είναι προφανές ότι ο σολιτονικός κυματισμός ταξιδεύει με μεγαλύτερη ταχύτητα από την προβλεπόμενη από τη γραμμική θεωρία για το εν λόγω βάθος. Συνεπώς, επιβάλλουμε το  $b > 0$ . Ως εκ τούτου επιλύοντας με τη βοήθεια του δεύτερου ολοκληρώματος και προσέχοντας ότι στον αριθμητή η ύπαρξη της απόλυτης τιμής αλλάζει τα πρόσημα διότι ο συντελεστής  $a$  του  $\eta$  ισούται με  $-1$ :

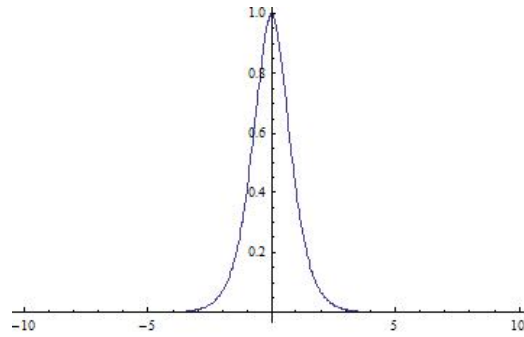
$$\sqrt{ax + b} - \sqrt{b} < 0, \quad a < 0.$$

Ακολούθως προκύπτει:

$$\eta = \frac{(c^2 - c_0^2)}{g} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{3(c^2 - c_0^2)}{4gh^3}} \xi \right). \quad (2.88)$$

Από την σχέση 2.88 εξισώνουμε τον συντελεστή  $(c^2 - c_0^2)/g$  με το πλάτος του μοναχικού κυματισμού. Αυτό διότι παρατηρούμε (βλ. σχήμα 2.3) ότι το σύνολο τιμών του  $\operatorname{sech}^2(x)$  βρίσκεται μεταξύ του:

$$0 < \operatorname{sech}^2(x) \leq 1$$

Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση του  $\operatorname{sech}^2(x)$ .

Έτσι προκύπτει ότι:

$$A = \frac{c^2 - c_0^2}{g} \Rightarrow Ag \approx c_0^2 \sigma \frac{A}{h}. \quad (2.89)$$

Η συνεπαγωγή προέκυψε από τον εξής συλλογισμό. Αν στην 2.87 υψώσουμε στο τετράγωνο, θα πάρουμε ότι:  $c^2 = c_0^2 + Ag$ . Οπότε θα έχουμε ότι ο όρος  $Ag$  θα αποτελεί την αναμενόμενη προσ αύξηση της ταχύτητας του σολιτονίου. Άρα αποτελεί μια διόρθωση, όχι υπό την έννοια της σχέσης διασποράς, αλλά υπό την έννοια της αλλαγής της ταχύτητας του κυματισμού κατά ένα χαρακτηριστικό του κυματισμού και συγκεκριμένα του ύψους του. Έτσι αναμένουμε ότι θα αποτελεί μια διόρθωση του  $c_0^2$ , εν προκειμένω του  $\sigma$ , και μιας ποσόστωσης του πλάτους, δηλαδή του λόγου  $\frac{A}{h}$ . Τη σταθερά  $\sigma$  θα την προσεγγίσουμε από τον μετασχηματισμό Γαλιλαίου θέτοντας στην 2.88 όπου  $\xi = x - ct$ :

$$c = \sqrt{c_0^2 + Ag} = \sqrt{c_0^2 \left(1 + \sigma \frac{A}{h}\right)}. \quad (2.90)$$

Με αντικατάσταση θα προκύψει ότι η  $\sigma = 1$ . Έτσι τελικά η λύση μας προκύπτει:

$$\eta = A \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{3A}{4h^3}} (x - ct) \right), \quad (2.91)$$

με

$$c = \sqrt{c_0^2 + c_0^2 \frac{A}{h}} \Rightarrow c^2 \approx c_0^2 + c_0^2 \frac{1}{2} \frac{A}{h}. \quad (2.92)$$

Η λύση μας είναι σε συμφωνία με αυτή του Miles όπως διατυπώνεται στον Massel, pp. 119(1989)[69].

Τέλος, στην εξίσωση Boussinesq, όταν το  $c$  τείνει στο  $c_0$  το σολιτόνιο Boussinesq τείνει στο σολιτόνιο KdV το οποίο περιγράφεται<sup>27</sup> από την:

$$\eta_t + \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3\eta}{2h}\right) \eta_x + \frac{h^2}{6} \sqrt{gh} \eta_{xxx} = 0, \quad (2.93)$$

με σχέση διασποράς τη

$$c = \frac{\sqrt{gh}}{1 + \frac{1}{6}(kh)^2}. \quad (2.94)$$

Και οι δύο εξισώσεις παρουσιάζουν την ιδιότητα να εξισσοροπούν τη διασπορά με τη μη γραμμικότητα και να διατηρούν σταθερό προφίλ στον κυματισμό, κάτι που η γραμμική θεωρία του Airy δεν προβλέπει.

### 2.3.7 Μορφές των εξισώσεων Boussinesq

Ολοκληρώνοντας τη θεωρητική ενότητα τούτη πρέπει να τονίσουμε τη σπουδαιότητα της εξίσωσης Boussinesq αλλά και ορισμένα σημεία που ίσως έχουμε αφήσει αδιευκρίνιστα. Ας ξεκινήσουμε από το δεύτερο.

Είδαμε ότι οι συντελεστές του μη γραμμικού όρου στην εξίσωση Boussinesq μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές ανάλογα με τη μεθοδολογία που ακολουθούμε στην επιλογή της σειράς των προσεγγίσεων. Έτσι για παράδειγμα στην “ πρωτότυπη ” εξίσωση 2.73, ο συντελεστής του μη γραμμικού όρου έχει την τιμή  $\frac{3g}{2}$ . Επίσης δείξαμε και δύο διαφορετικές επιλογές, αυτή της τιμής  $\frac{g}{2}$ , όπως φαίνεται στην 2.61, αλλά και της αρνητικής τιμής  $\frac{-g}{2}$ , όπως αναφέρεται στην 2.65. Κάτι τέτοιο προβλέπεται στη γενικότερη θεωρία. Στη φυσική στερεάς κατάστασης για παράδειγμα αρνητική μη γραμμικότητα επιβάλλει αρνητικό  $\eta$  που σημαίνει πύκνωση του

<sup>27</sup>βλ. Massel σελ.127. Να επαναλάβουμε με αφορμή την εν λόγω παραπομπή ότι η εξίσωση Boussinesq πράγματι δεν υποθέτει μονοκατευθυντήριες διαδόσεις αλλά στη γενική της μορφή. Αυτή που εξήγαγε ο Boussinesq και την οποία χαρακτηρίσαμε ως εξίσωση του Boussinesq, προϋποθέτει αριστερή διάδοση! Πάντως δεν χάνεται η γενικότητά της.



πλέγματος, ενώ θετική μη γραμμικότητα η λύση είναι ένας θετικός παλμός  $\eta > 0$  και άρα αραιώση του πλέγματος (Pneumatikos (1986)[5]).

Στους υδάτινους κυματισμούς, και σύμφωνα με τα πειράματα του Russel, ο αρνητικός παλμός δεν φαίνεται να είναι σταθερός και διασπείρεται εν αντιθέσει με έναν θετικό παλμό που επιδεικνύει σταθερότητα. Αφήνουμε όμως το θέμα αυτό για περαιτέρω διερεύνηση.

## 2.4 Εξισώσεις Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς

Όπως αναφεράμε στο σύντομο ιστορικό της εισαγωγής, οι εξισώσεις Boussinesq βρίσκουν εφαρμογή στη μοντελοποίηση κυματικών φαινομένων κοντά στην ακτή. Το μειονέκτημά τους σχετίζεται με το ότι αποτυγχάνουν να περιγράψουν επαρκώς κυματισμούς σε βάθη μεγαλύτερα του 20% σε σχέση με το μήκος κύματός τους<sup>28</sup>. Κατά την προσπάθεια επέκτασης των δυνατοτήτων περιγραφής των εν λόγω εξισώσεων σε μεγαλύτερο βάθος, ο Witting (1984)[11] έλαβε υπόψη τη μέση τιμή του κατακόρυφου προφίλ της ταχύτητας. Έτσι τροποποίησε τους όρους του αναπτύγματος κατά Taylor, ο καθορισμός των οποίων πραγματοποιείται τελικά από σύγκριση με το αντίστοιχο ανάπτυγμα κατά Pade<sup>29</sup>.

Εκμεταλλευόμενοι τη μεθοδολογία του Witting οι Madsen et al. (1991α) εισήγαγαν έναν παράγοντα διόρθωσης  $b$  που εμπεριέχει τρίτης τάξεως διαφορικά. Στη συνέχεια οι Beji και Battjes (1994)[4] εφήρμοσαν την εν λόγω τεχνική θεωρώντας ήπιες μεταβολές πυθμένα (mild slope approximation) και την οποία παραθέτουμε:

$$\begin{aligned} u_t + u u_x + g \eta_x &= \frac{1}{3} h^2 u_{xxt} + h h_x u_{xt} + b h^2 (u_{xxt} + g \eta_{xxx}) + F_x, \\ \eta_t + ((h + \eta) u)_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

<sup>28</sup>Βλ. S. Beji, J.A. Battjes(1994)[4].

<sup>29</sup>Βλ. στο ίδιο.

Ο όρος  $b$ , όπως αναφέραμε, αποτελεί τον όρο διαμόρφωσης (calibration factor) και εισάγει μια τριτοτάξια εξάρτηση <sup>30</sup> στη διαφορική εξίσωση η οποία φαίνεται να υπάρχει και στη σχέση <sup>31</sup> που εξαγάγαμε στην προηγούμενη ενότητα κατά την ενσωμάτωση μεταβλητού πυθμένα.

Ο όρος αυτός δεν υπολογίζεται από πρώτες αρχές αλλά είναι ελεύθερος να παίρνει τις τιμές εκείνες για τις οποίες ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα της φασικής ταχύτητας. Η τιμή του  $b$  επελέχθη ως  $1/21$  από τους Madsen et al. και  $1/15$  από τους Beji και Battjes. Πιο κάτω δείχνουμε αναλυτικά την επίδραση του διορθωτικού όρου στη σχέση διασποράς.

Ας δούμε τώρα την επίδραση του διορθωτικού αυτού όρου στη διαμόρφωση της σχέσης διασποράς. Προφανώς για να υπολογίσουμε τη σχέση διασποράς θα λάβουμε υπόψη μόνο τους γραμμικούς όρους. Θα επιλύσουμε λοιπόν το σύστημα 2.95, διατηρώντας αρχικά τους γραμμικούς όρους και στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε λύσεις της μορφής  $u = u_0 \cos(kx \pm \omega t)$  οι οποίοι θα μας αποκαλύψουν τη σχέση διασποράς.

Επιθυμούμε να μελετήσουμε την επίδραση και των δύο συνεισφορών της τριτοτάξιας διόρθωσης. Ως εκ τούτου θεωρούμε τον συντελεστή  $a$  ο οποίος λαμβάνει τιμές 0 ή 1 έτσι ώστε να μοντελοποιήσουμε την σχέση της εμπλουτισμένης διασποράς με ή χωρίς η συνεισφορά του  $\eta_{xxx}$ . Έχουμε λοιπόν για την πρώτη εκ των 2.95, τη γραμμικοποιημένη σχέση:

$$\begin{aligned} u_t + g \eta_x &= \frac{h^2}{3} u_{xxt} + b h^2 u_{xxt} + a b h^2 g \eta_{xxx} \\ \Rightarrow u_t + g \eta_x &= h^2 \left( \frac{1}{3} + b \right) u_{xxt} + a b h^2 g \eta_{xxx}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Γραμμικοποιώντας τώρα και τη δεύτερη σχέση της 2.95 και παραγωγίζοντας ως προς τη χωρική διάσταση και προκύπτει:

$$\eta_{tx} = -h u_{xx}. \quad (2.97)$$

<sup>30</sup>Βλ. Madsen (1993)[12].

<sup>31</sup>Βλ. στο παράρτημα τη σχέση A2.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο τη 2.96:

$$u_{tt} + g \eta_{xt} = h^2 \left( \frac{1}{3} \right) u_{xxtt} + a b h^2 g \eta_{xxxt}. \quad (2.98)$$

Από την 2.97 έχουμε ότι:

$$\eta_{xxxt} = (\eta_{xt})_{xx} = (-h u_{xx})_{xx} = -h u_{xxxx}. \quad (2.99)$$

Αντικαθιστώντας τις 2.97 και 2.99 στην 2.98 και προκύπτει:

$$u_{tt} - h g u_{xx} = h^2 \left( \frac{1}{3} + b \right) u_{xxtt} - a b h^3 g u_{xxxx}. \quad (2.100)$$

Προχωρούμε στο βήμα αναζήτησης λύσεων της μορφής  $u = u_0 \cos(kx \pm \omega t)$ , οπότε προκύπτει για κάθε όρο:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -(\pm\omega)^2 u_0 \cos(kx \pm \omega t), \\ u_{xx} &= -(k)^2 u_0 \cos(kx \pm \omega t), \\ u_{xxtt} &= (\omega k)^2 u_0 \cos(kx \pm \omega t), \\ u_{xxxx} &= k^4 u_0 \cos(kx \pm \omega t). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Με τη βοήθεια λοιπόν των 2.101 η 2.100 μετασχηματίζεται:

$$\begin{aligned} -\omega^2 + h g k^2 &= h^2 \left( \frac{1}{3} + b \right) \omega^2 k^2 - a b h^3 g k^4 \Rightarrow \\ \omega^2 \left( 1 + (h k)^2 \left( \frac{1}{3} + b \right) \right) &= k^2 h g \left( 1 + a b (h k)^2 \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.102)$$

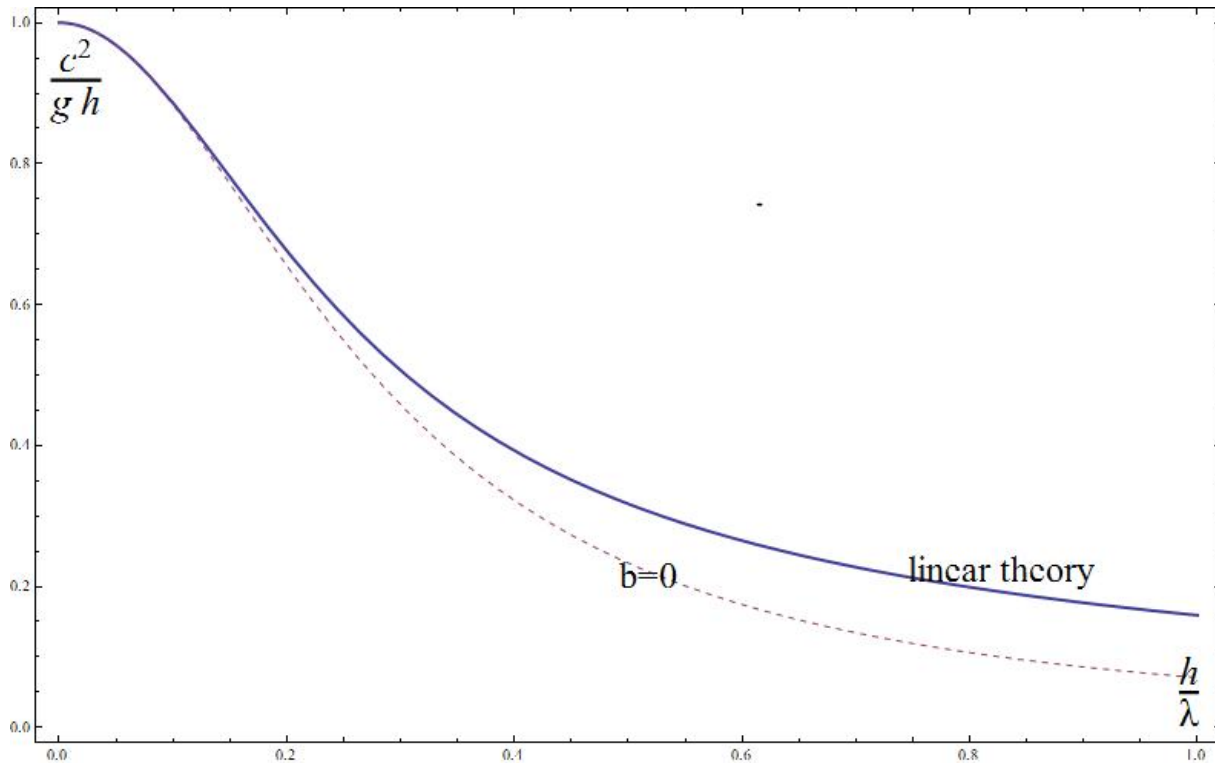
$$\frac{\hat{c}^2}{g h} = \frac{1 + a b (h k)^2}{1 + (h k)^2 \left( \frac{1}{3} + b \right)}. \quad (2.103)$$

Πιο κάτω (σχήματα 2.4 και 2.5), και με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica, θα αντιπαραβάλλουμε τη σχέση διασποράς Boussinesq 2.103 με αυτή της γραμμικής θεωρίας:

$$\omega^2 = g k \tanh(k h) \Rightarrow \frac{\omega^2}{g k} = \tanh(k h) \Rightarrow \quad (2.104)$$

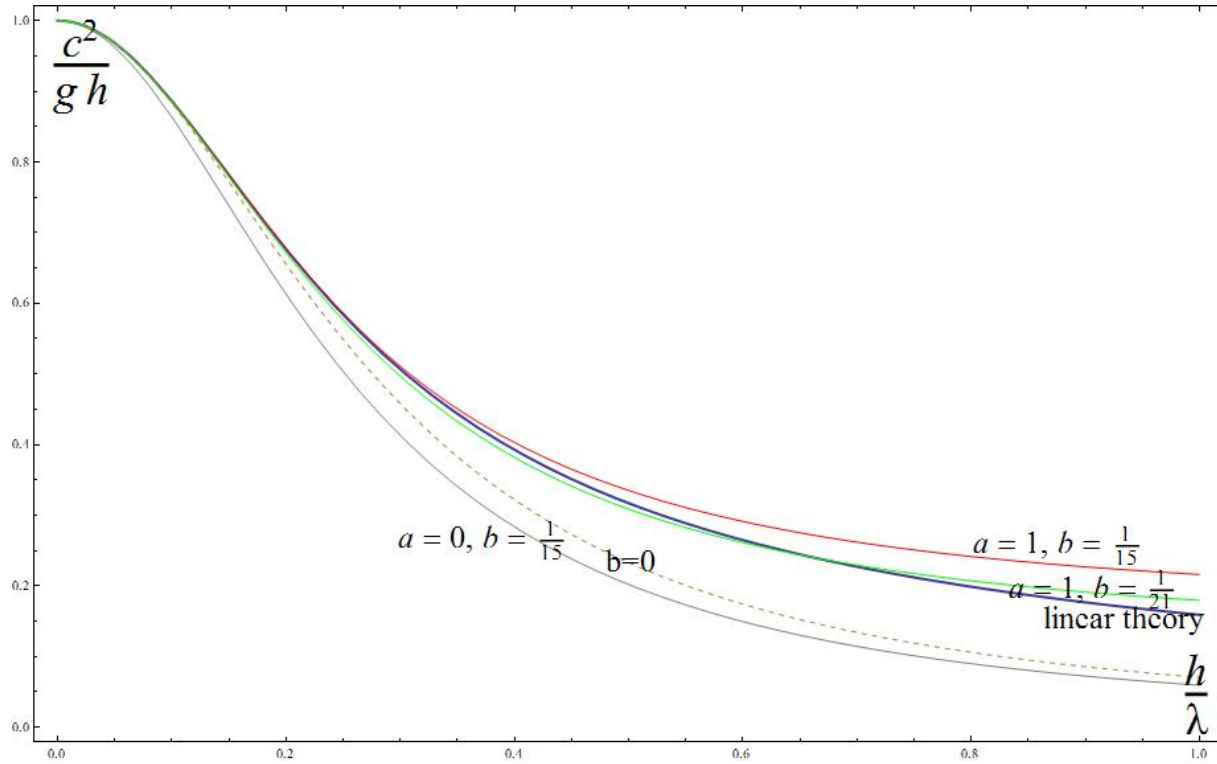
$$\frac{c^2}{g h} = \frac{\tanh(k h)}{(k h)}. \quad (2.105)$$

Αρχικά ( σχήμα 2.4) αντιπαραβάλλουμε την 2.105 (έντονη γραμμή) με την 2.103 (διακεκομμένη γραμμή) για  $b = 0$ :



Σχήμα 2.4: Σύγκριση της καμπύλης διασποράς της γραμμικής θεωρίας με αυτή της 2.103.

Στη συνέχεια (σχήμα 2.5) αντιπαραβάλλουμε τη γραμμική (έντονη γραμμή) με τη 2.103 για τιμές  $b = 0$  (διακεκομμένη γραμμή),  $b = 1/15$   $a = 0$  (γκρι γραμμή), και  $a = 1$ ,  $b = 1/15$  (κόκκινη γραμμή) και η πράσινη γραμμή με  $a = 1$ ,  $b = 1/21$ .



Σχήμα 2.5: Σύγκριση της καμπύλης διασποράς της γραμμικής θεωρίας για διαφορετικές τιμές του όρου διαμόρφωσης  $b$ .



## Κεφάλαιο 3

### Αριθμητική Επίλυση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε τον τρόπο με τον οποίο θα χειριστούμε αριθμητικά τις εξισώσεις Boussinesq που έχουμε παράξει. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το μονοδιάστατο χωρικό πρόβλημα (*1DH*, one dimensional horizontal problem).

Πριν προχωρήσουμε θα αναφέρουμε συνοπτικά τις εργασίες που αφορούν στην προσπάθεια αριθμητικής μοντελοποίησης και επίλυσης των εξισώσεων Boussinesq. Εκτενής αναφορά σε σχέση με την αριθμητική μοντελοποίηση των εν λόγω εξισώσεων μπορούν να βρεθούν στους Kirby(2003)[79] και στους Madsen και Madsen et.al(1999)[37].

Οι περισσότερες εργασίες στο πεδίο του χρόνου υιοθετούν τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (FDM - finite difference method). Χαρακτηριστική εργασία αναφοράς στις πεπερασμένες διαφορές που αφορούν σε μοντελοποίηση βραχέων κυματισμών σε ρηχά νερά είναι αυτή των Abbot et al.(1978)[38], σύμφωνα με την οποία οι διαφορικές εξισώσεις διακριτοποιούνται με τη βοήθεια ενός implicit σχήματος κεντρικών διαφορών χρόνου (time-centered implicit scheme) με μεταβλητές που ανήκουν σε ένα τετραγωνικό πλέγμα. Επίσης, η εργασία των Abbott et al.(1984)[39] περιλαμβάνει βελτιώσεις του προηγούμενου σχήματος.

Βασισμένοι στην ίδια αριθμητική μέθοδο επίλυσης (FDM) οι Madsen et al.(1991)[12] παρουσίασαν ένα σχήμα εξισώσεων με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς για ρηχό νερό, και οι Madsen και Sorensen(1992)[13] εξήγαγαν τις εξισώσεις Boussinesq για μεταβαλλόμενη

βαθυμετρία. Οι Beji and Battjes(1994)[4] χρησιμοποίησαν παρόμοιες εξισώσεις για να μοντελοποιήσουν το φαινόμενο που διέπει τη διάδοση κυματισμών σε ένα βυθισμένο αντικείμενο. Οι Wei και Kirby(1995)[19] ανέπτυξαν ένα υψηλότερης τάξης *FDM* σχήμα προκειμένου να επιλύσουν έντονα μη γραμμικές εξισώσεις Boussinesq, ενώ οι Beji και Nadaoka(1996)[7] χρησιμοποίησαν τρίτης τάξης πεπερασμένες διαφορές χρόνου προκειμένου να μοντελοποιήσουν τις διορθωμένες (που διατηρούν την ενέργεια) εξισώσεις των Madsen και Sorensen.

### 3.1 Η αριθμητική μέθοδος

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε στηρίζεται στη διακριτοποίηση των αγνώστων συναρτήσεων<sup>1</sup>, με την εισαγωγή ομοιόμορφου χωροχρονικού πλέγματος που ορίζουμε στη χωρική και στη χρονική διάσταση, και τη χρήση πεπερασμένων διαφορών ανώτερης τάξης για την προσέγγιση της λύσης. Πιο συγκεκριμένα το σχήμα που θα ακολουθήσουμε στηρίζεται σε μια γενίκευση<sup>2</sup> της μεθόδου Crank-Nicolson, κατά την οποία προσομοιάζεται μια ελαφρώς μη γραμμική μέθοδος κυματικής διάδοσης σε μεταβλητή βαθυμετρία περιοχής ρήχωσης.

Στα πλαίσια της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών θεωρούμε τους άξονες διακριτοποιημένους. Διακριτοποιώντας αντίστοιχα τη συνάρτηση μπορούμε να ορίσουμε τη διαφορά:

$$\frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής δύναται να θεωρείται ως ένα (κάθε φορά) σημείο του διακριτοποιημένου πλέον άξονα, με αντίστοιχη “εικόνα” την αντίστοιχη (επίσης) διακριτοποιημένη τιμή της συνάρτησης. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε και την παράγωγο μιας συνάρτησης  $f(x)$  ως προς  $x$  ως το λόγο των διακριτών διαφορών που λαμβάνει η συνάρτηση στα σημεία  $i + 1$  και  $i$  του πλέγματος προς το αντίστοιχο βήμα  $\Delta x$ , που αποτελεί την αντίστοι-

<sup>1</sup> Μια πολύπλευρη προσέγγιση στο θέμα της θεωρίας των σχημάτων διαφορών ο αναγνώστης μπορεί να βρει στο Alexander A. Samarskii[80].

<sup>2</sup>Βλ. στο κεφάλαιο 3 από το βιβλίο του Mark H. Holmes[81].



χη απόσταση μεταξύ των διακριτών σημείων στον άξονα. Ο δείκτης  $i$  αναφέρεται στη θέση, δηλαδή στον κόμβο που αναπαριστά την εν λόγω θέση στο πλέγμα. Η ποσότητα  $\Delta x$  αποτελεί την απόσταση των δύο κόμβων στη χωρική διάσταση. Ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάμε καθορίζουμε και το “βήμα”  $\Delta x$ , το οποίο στα πλαίσια της μεθόδου θεωρείται σταθερό. Η εξίσωση 3.1 ονομάζεται “πεπερασμένη διαφορά προς τα εμπρός” (forward difference of first order), ή “εμπρός σχήμα πεπερασμένης διαφοράς πρώτης τάξης”.

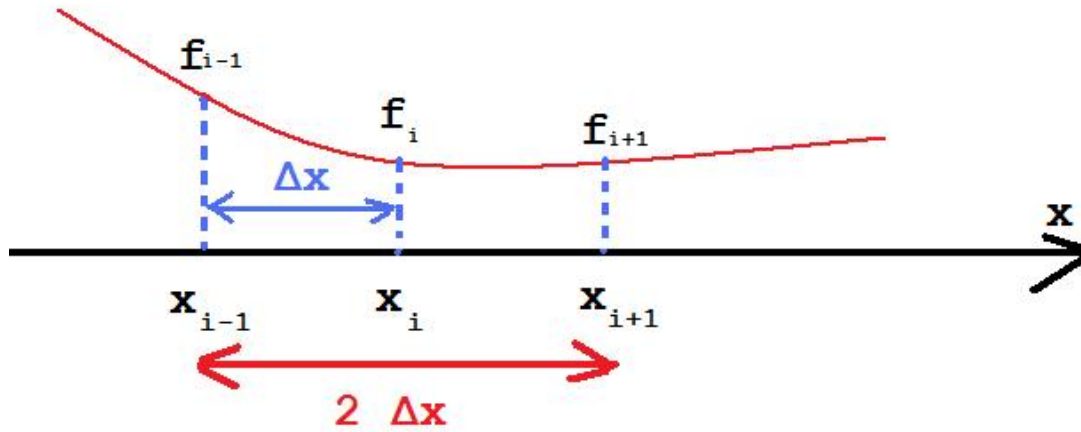
Παρατηρούμε ότι στην πρώτη προσέγγιση (3.1) “εμπλέκονται” δύο σημεία στην προσέγγιση της παραγώγου. Η θέση  $i$  και η επόμενη  $i + 1$ . Θα μπορούσαμε να έχουμε χρησιμοποιήσει τις θέσεις  $i, i - 1$  αντίστοιχα για τον προσδιορισμό της πρώτης παραγώγου<sup>3</sup>, λαμβάνοντας πάλι ένα σχήμα ίδιας τάξης προσέγγισης. Αυτή η πεπερασμένη διαφορά αναφέρεται “προς τα πίσω” (backward difference of first order). Μπορούμε επίσης να διπλασιάσουμε το βήμα γύρω από μια “κεντρική” τιμή  $x_i$  πετυχαίνουμε μεγαλύτερης τάξης ακρίβεια διότι λαμβάνουμε τις μεταβολές της συνάρτησης εκατέρωθεν της κεντρικής τιμής<sup>4</sup> που μας ενδιαφέρει με αποτέλεσμα να έχουμε τη “διπλάσια” πληροφορία για τη συμπεριφορά της. Αυτή ονομάζεται (σχήμα 3.1) “κεντρική πεπερασμένη διαφορά πρώτης τάξης” (central difference of first order). Έτσι, όπως θα δούμε, θα προκύψει ένα συμμετρικό σχήμα στην εύρεση των συντελεστών της μεθόδου.

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &\rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \Rightarrow \\ &\frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε και την παράγωγο στη χρονική διάσταση. Η χρονική διάσταση θα έχει αντίστοιχο “βήμα”  $\Delta t$  το οποίο θα καθορίζει την διακριτοποίηση στην αντίστοιχη διάσταση. Στη χρονική παράγωγο το σύστημα των εξισώσεων μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε παράγωγο πρώτης τάξης διότι η χρήση κεντρικής τιμής στη χρονική παράγωγο δεν θα προσδώσει περαιτέρω ακρίβεια.

<sup>3</sup>Βλ. για παράδειγμα το κεφάλαιο 1 του R.J. LeVeque[82].

<sup>4</sup>Βλ. το κεφάλαιο 5 στο J.W.Thomas[83].



Σχήμα 3.1: Αναπαράσταση κεντρικής τιμής πεπερασμένων διαφορών.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d}{dx} \frac{df}{dx} \rightarrow \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (3.3)$$

Είμαστε τώρα σε θέση παρουσιάσουμε τις εξισώσεις Boussinesq διακριτοποιημένες. Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε ήπια μεταβολή του πυθμένα και τις καταγράφουμε σύμφωνα με τον Peregrine (1967):

$$\begin{aligned} u_t + u u_x + g \eta_x &= \frac{1}{3} h^2 u_{xxt} + h h_x u_{xt} + F_x \\ \eta_t + ((h + \eta) u)_x &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου  $F_x$  αναφέρεται στην πίεση που επιβάλλουμε. Στην περίπτωση εμπλουτισμένης διασποράς οι εξισώσεις (με όρο διέγερσης που μοντελοποιεί την εξωτερική πίεση στην επιφάνεια) γίνονται:

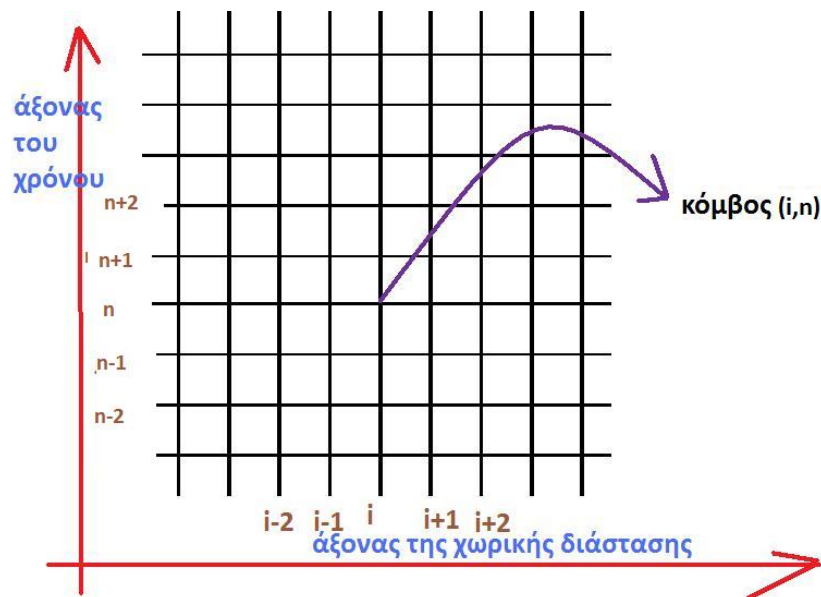
$$u_t + u u_x + g \eta_x = \frac{1}{3} h^2 u_{xxt} + h h_x u_{xt} + b h^2 (u_{xxt} + g \eta_{xxx}) + F_x,$$

$$\eta_t + ((h + \eta) u)_x = 0. \quad (3.5)$$

Ο όρος  $b$  αποτελεί τον όρο διαμόρφωσης (calibration factor) και εισάγει μια τριτοτάξια εξάρτηση (Madsen 1991[12]) στη διαφορική εξίσωση η οποία υπάρχει και στη σχέση που εξαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο κατά την ενσωμάτωση μεταβλητού πυθμένα.

### 3.2 Παρουσίαση του πλέγματος

Το πλέγμα που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι δύο διαστάσεων. Για παράδειγμα στο σχήμα 3.2 αναπαριστούμε ένα τμήμα ενός πλέγματος (φαίνεται το τμήμα δέκα επί δέκα):



Σχήμα 3.2: Αναπαράσταση πλέγματος.

Κάθε κόμβος του πλέγματος  $G$  αποτελεί ένα σημείο με την αντίστοιχη πληροφορία που του προσδίδουμε. Για παράδειγμα η τιμή της μεταβλητής που λαμβάνει η  $\eta_{i,n}$  ή  $(\eta_i^n)$  αποτελεί την ανύψωση στον εν λόγω κόμβο της επιφάνειας σε σχέση με την αδιατάρακτη της θέση. Αν λοιπόν καταφέρουμε να έχουμε ένα πλήθος τιμών των ανυψώσεων για τον κάθε κόμβο μπορούμε να κατασκευάσουμε τα στιγμιότυπα του προφίλ του κυματισμού αλλά και του τρόπου διάδοσης αυτών στο χρόνο. Εν ολίγοις να αναπαραστήσουμε με μεγάλη ακρίβεια το πραγματικό προφίλ του κυματισμού και την κίνηση αυτού.

Το πλέγμα που επιλέγουμε προκειμένου να προκύψει μια αριθμητική λύση της περιοχής του ρευστού ( $R = \Omega \times [t > 0]$ ), σε συνδυασμό με το σύνορο  $\partial R$  που αποτελείται από τις γραμμές  $x = L_0, L_1$  και  $t = 0$ , αποτελείται από σημεία  $(x, t) = (x_i, t_n) = (L_0 + i \Delta x, n \Delta t)$  όπου  $i = 0, 1, \dots, N+1$  και  $n = 0, 1, \dots$ , στο οποίο το  $\Delta x = (L_1 - L_0)/(N+1)$  αναπαριστά μια διακριτοποίηση της χρονικής μεταβλητής  $t$ . Η λύση των άγνωστων συναρτήσεων  $\eta$  και  $u$  ενός προσεγγιστικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών στα εν λόγω σημεία θα συμβολίζεται με  $\eta_i^n$  και  $u_i^n$ , αντίστοιχα, ενώ για το σκοπό της ανάλυσης της σταθερότητας της λύσης οι αριθμητικές τιμές θα συμβολίζονται αντίστοιχα με  $\tilde{\eta}_i^n$  και  $\tilde{u}_i^n$ .

Έστω ότι τα διανύσματα της λύσης είναι

$$\eta^n = \eta(t_n) = (\eta_1^n, \eta_2^n, \dots, \eta_N^n, \eta_{N+1}^n)^T, \quad (3.6)$$

$$u^n = u(t_n) = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n, u_{N+1}^n)^T. \quad (3.7)$$

Έτσι λοιπόν οι συναρτήσεις  $u, \eta$  βάσει των όσων προαναφέραμε θα διακριτοποιηθούν ως εξής :

$$u_t \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n), \quad (3.8)$$

$$u_x \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad (3.9)$$

ενώ στα σύνορα  $i = 1$  ή  $i = N + 1$ :

$$u_x \approx \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (3.10)$$

$$u_x \approx \frac{u(x, t) - u(x-\Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n). \quad (3.11)$$

Επίσης στις ανώτερες τάξεις έχουμε:

$$u_{xx} \approx \frac{u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &\approx \frac{u(x+\Delta x,t+\Delta t)-u(x-\Delta x,t+\Delta t)-u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x\Delta t} \\ &= \frac{1}{2\Delta x\Delta t}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^n + u_{i-1}^n), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} u_{xxx} &\approx \frac{-u(x-2\Delta x,t)+2u(x-\Delta x,t)-2u(x+\Delta x,t)+u(x+2\Delta x,t)}{2\Delta x^3} \\ &= \frac{1}{2\Delta x^3}(-u_{i-2}^n + 2u_{i-1}^n - 2u_{i+1}^n + u_{i+2}^n), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} u_{xxt} &\approx \frac{u(x+\Delta x,t+\Delta t)-2u(x,t+\Delta t)+u(x-\Delta x,t+\Delta t)-u(x+\Delta x,t)+2u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta x^2\Delta t}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.3 Η προτεινόμενη μέθοδος

Θεωρούμε ότι το σύστημα των εξισώσεων 3.5 ικανοποιείται στο σημείο  $(i\Delta x, (n+\theta)\Delta t)$  όπου  $\theta \in [0, 1]$  του πλέγματος  $G$ . Εξαιτίας αυτής της υποθέσης οι μερικές διαφορίσεις αντικαθίστανται από τις προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών στα σημεία του  $n$  και  $n+1$ , άξονα του χρόνου. Αυτή η μέθοδος για την  $u_x$  χρησιμοποιώντας την 3.9, δίνει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^{n+\theta} &= \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n \\ &\frac{1}{2\Delta x} (\theta (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + (1-\theta) (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Αντίστοιχα για την  $u_{xxx}$  χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.12 έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^{n+\theta} &= \theta \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n = \frac{1}{2\Delta x^3} (\theta (-u_{i-2}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} \\ &- 2u_{i+1}^{n+1} + u_{i+2}^{n+1}) + (1-\theta) (-u_{i-2}^n + 2u_{i-1}^n - 2u_{i+1}^n + u_{i+2}^n)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Οι 3.16 και 3.17, όταν λαμβάνεται  $\theta = \frac{1}{2}$ , καταλήγουν στη μέθοδο Crank-Nickolson που χρησιμοποίησαν οι Beji και Battjes (1994)[4].

### 3.4 Δόμηση του συστήματος

Αρχικά θεωρούμε μονοδιάστατη διάδοση. Θεωρούμε ως μεταβολή του πυθμένα την προσέγγιση ήπιας κλίσης (mild slope) για την οποία οι παράγωγοι ανώτερης τάξης του  $h$  παραλείπονται. Οι μη γραμμικοί όροι  $(\eta u)_x$  και  $u u_x$  επίσης στην αρχή παραλείπονται.

Ξεκινούμε διακριτοποιώντας την εξίσωση 3.18. Αρχικά δεν θα ασχοληθούμε με τους μη γραμμικούς όρους του συστήματος που θέλουμε να επιλύσουμε. Αυτό φαίνεται πιο κάτω, στις εξισώσεις 3.18 και 3.22, όπου έχουμε παραλείψει τους μη γραμμικούς όρους. Θα επανέλθουμε αργότερα στο ζήτημα αυτό.

$$\eta_t + ((h + \eta) u)_x = 0 \Rightarrow \eta_t + (\tilde{h} u)_x = 0, \quad (3.18)$$

με

$$\tilde{h} = h + \eta, \quad (3.19)$$

να αποτελεί μια γνωστή σταθερά για το πρώτο χρονικό βήμα σε κάθε σημείο  $i$  του πλέγματος. Στη συνέχεια μπορούμε να παραλείψουμε τον συμβολισμό και να επιστρέψουμε στον αρχικό. Η διακριτοποίηση τώρα γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_i^n - \eta_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( \frac{h_{i+1} u_{i+1}^n - h_{i-1} u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{h_{i+1} u_{i+1}^{n-1} - h_{i-1} u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} \right) = 0 \Rightarrow \\ \frac{\eta_i^n}{\Delta t} + \frac{h_{i+1}}{4\Delta x} u_{i+1}^n - \frac{h_{i-1}}{4\Delta x} u_{i-1}^n = B_i^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

όπου

$$B_i^{n-1} \equiv \frac{\eta_i^{n-1}}{\Delta x} + \frac{h_{i-1}}{4\Delta x} u_{i-1}^{n-1} - \frac{h_{i+1}}{4\Delta x} u_{i+1}^{n-1}. \quad (3.21)$$

Η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα implicit<sup>5</sup> σχήμα πεπερασμένων διαφορών το οποίο όπως θα δείξουμε στην επόμενη ενότητα μας διασφαλίζει σταθερότητα<sup>6</sup> από πλευράς διάδοσης αιρ-θμητικών σφαλμάτων. Διαχωρίζοντας την εξίσωση σε “παρούσες” ( $n$ ) και “παρελθούσες”

<sup>5</sup>Βλ. στο βιβλίο του K. Murawski[84] κεφάλαιο 6.

<sup>6</sup>Βλ. για παράδειγμα το Fadugba et.al(2013)[40].

$(n - 1)$  στιγμές έχουμε τη δυνατότητα της επίλυσης διότι, εμφανίζεται μια έκφραση της οποίας το άγνωστο διάνυσμα καθορίζεται από την “προηγούμενη” χρονική στιγμή. Για δεδομένη χρονική στιγμή το  $n = 1$  αποτελεί το αρχικό διάνυσμα ( αρχική συνθήκη ) του προβλήματος. Αυτό το διάνυσμα θα επαναπροσδιορίζεται κάθε φορά εκ νέου, με τη βοήθεια του επαναληπτικού υπολογισμού και θα αποτελεί, για την κάθε φορά, την “προηγούμενη” χρονική στιγμή στο πλέγμα.

Προχωρούμε τώρα στη διακριτοποίηση της δεύτερης εξίσωσης:

$$u_t + u u_x + g \eta_x = \frac{1}{3} h^2 u_{xxt} + h h_x u_{xt} + F_x, \quad (3.22)$$

από την οποία προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{g}{2} \left( \frac{\eta_{i+1}^{n-1} - \eta_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} + \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - \\ & \frac{h_i}{3} \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta t \Delta x^2} - \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{\Delta t \Delta x^2} \right) - \\ & h_i (h_x)_i \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x \Delta t} - \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x \Delta t} \right) = (F_x)_i \Rightarrow \\ & \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{2h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2} \right) u_i^n + \left( \frac{h_i (h_x)_i}{2\Delta t \Delta x} - \frac{h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2} \right) u_{i-1}^n + \\ & \left( -\frac{h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2} - \frac{h_i (h_x)_i}{2\Delta t \Delta x} \right) u_{i+1}^n + \frac{g}{4\Delta x} \eta_{i+1}^n - \frac{g}{4\Delta x} \eta_{i-1}^n = B_{i+I}^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

όπου

$$\begin{aligned} B_{i+I}^{n-1} & \equiv \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{2h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2} \right) u_i^{n-1} + \left( \frac{h_i (h_x)_i}{2\Delta t \Delta x} - \frac{h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2} \right) u_{i-1}^{n-1} + \\ & \left( -\frac{h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2} - \frac{h_i (h_x)_i}{2\Delta t \Delta x} \right) u_{i+1}^{n-1} - \frac{g}{4\Delta x} \eta_{i+1}^{n-1} + \frac{g}{4\Delta x} \eta_{i-1}^{n-1} + (F_x)_i. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Κατά αντιστοιχία δηλαδή με την 3.20 έχουμε το στο δεξιό μέλος της έκφρασης μόνο “προηγούμενες” χρονικές στιγμές. Επίσης στην εξίσωση αυτή η κλίση  $h_x$ , της οποίας η τιμή είναι μικρή, δύναται κάθε φορά να καθοριστεί από τα δεδομένα του προβλήματος που θέλουμε να μελετήσουμε.

Η έκφραση  $B_{i+I}^{n-1}$  αποτελεί ένα διάνυσμα στήλη. Σε συνδυασμό με το  $B_i^{n-1}$ , που επίσης αποτελεί διάνυσμα στήλη, έχουμε ένα ενιαίο διάνυσμα στήλη που καθορίζει το διάνυσμα της “παρελθούσης” χρονικής στιγμής για το συζευγμένο σύστημα πλέον των εξισώσεων. Ο προσδιορισμός του στα αρχικά βήματα στηρίζεται στην επιλογή των αρχικών και των συνοριακών συνθηκών που επιλέγουμε κάθε φορά για το πρόβλημα που επιθυμούμε να μελετήσουμε. Ας το δούμε αυτό πιο αναλυτικά.

Η εξίσωση που καλούμαστε να επιλύσουμε αποτελείται από ένα σύστημα της μορφής

$$A\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{B}^{(n-1)}, \quad (3.25)$$

όπου

$$\mathbf{X}^{(n)} = \begin{pmatrix} \eta_1^n \\ \eta_2^n \\ \vdots \\ \eta_N^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Προκειμένου να καταλάβουμε τη δομή του πίνακα  $A$ , ας μελετήσουμε την 3.20. Δεδομένου ότι πολλαπλασιάζει τις δύο άγνωστες συναρτήσεις παρέχοντάς μας την πληροφορία των 3.20 και 3.23 θα έχει τη μορφή ενός πίνακα που θα αποτελείται από τέσσερις διακριτούς υποπίνακες, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} T & \Delta \\ \hline M & \Lambda \end{array} \right). \quad (3.27)$$

Για τους υποπίνακες αυτούς θα έχουμε:



$$T = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & 0 & \frac{h_{i+1}}{4\Delta x} & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \frac{h_{i-1}}{4\Delta x} & 0 & \ddots \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & 0 & \frac{g}{4\Delta x} & 0 \\ 0 & \frac{-g}{4\Delta x} & 0 & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & & \ddots & & \mathbf{0} \\ \left(\frac{h_i(h_x)_i}{2\Delta t \Delta x} - \frac{h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2}\right) & \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2}\right) & \left(-\frac{h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2} - \frac{h_i(h_x)_i}{2\Delta t \Delta x}\right) & & & & \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Τα στοιχεία του διανύσματος  $\mathbf{B}^{(n-1)}$  προκύπτουν από τις πρώτες γραμμές του πίνακα  $A$  με το διάνυσμα  $\mathbf{X}^n$ . Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα στοιχεία που σχετίζονται με το  $\eta$  θα είναι στοιχεία της διαγωνίου το καθένα ίσο με  $T_i \equiv \frac{1}{\Delta t}$ , στον υποπίνακα  $T$ , ενώ τα στοιχεία που σχετίζονται με το  $u$  θα βρίσκονται εκατέρωθεν της διαγωνίου στο δεύτερο μπλοκ του πίνακα  $\Delta$ , με το κάθε ένα να ισούται με  $\Delta_{i-1} \equiv \frac{h_{i-1}}{4\Delta x}$  και  $\Delta_{i+1} \equiv \frac{h_{i+1}}{4\Delta x}$  αντίστοιχα. Βάσει της 3.23 ο  $M$  θα αποτελείται από τα στοιχεία  $M_{i-1} \equiv -\frac{g}{4\Delta x}$  και  $M_{i+1} \equiv \frac{g}{4\Delta x}$  που θα βρίσκονται επίσης εκατέρωθεν της διαγωνίου του. Τέλος ο  $\Lambda$  θα είναι τριδιαγώνιος με στοιχεία στη διαγώνιο  $\Lambda_i \equiv \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2}\right)$  και  $\Lambda_{i-1} \equiv \left(\frac{h_i(h_x)_i}{2\Delta t \Delta x} - \frac{h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2}\right)$  και  $\Lambda_{i+1} \equiv \left(-\frac{h_i^2}{3\Delta t \Delta x^2} - \frac{h_i(h_x)_i}{2\Delta t \Delta x}\right)$  εκατέρωθεν. Θα έχουμε λοιπόν συνολικά για τον πίνακα  $A$ :

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & \ddots & & & \\ & & & T_i & & \\ & & & & \Delta_{i-1} & \Delta_{i+1} \\ \hline & & & & & \\ \ddots & & \ddots & & & \\ & M_{i-1} & M_{i+1} & & \Lambda_{i-1} & \Lambda_i & \Lambda_{i+1} \\ & & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{array} \right), \quad (3.28)$$

και για το σύστημα:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} & & \ddots & & & \\ & & & T_i & & \\ & & & & \Delta_{i-1} & \Delta_{i+1} \\ \hline & & & & & \\ \ddots & & \ddots & & & \\ & M_{i-1} & M_{i+1} & & \Lambda_{i-1} & \Lambda_i & \Lambda_{i+1} \\ & & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{array} \right) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \eta_i^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ B_i^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{i+I}^{n-1} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Οπότε έχοντας τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή το αρχικό διάνυσμα  $\mathbf{B}^{(1)}$ , υπολογίζουμε το  $\mathbf{X}^{(2)}$  αντιστρέφοντας ουσιαστικά τον  $A$ :

$$A\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{B}^{(1)} \Rightarrow \mathbf{X}^{(2)} = A^{-1}\mathbf{B}^{(1)}. \quad (3.30)$$

Στη συνέχεια έχοντας προσδιορίσει τον  $\mathbf{X}^{(2)} \rightarrow \mathbf{B}^{(2)}$ , προσδιορίζουμε τον  $\mathbf{X}^{(3)}$  με την ίδια διαδικασία:

$$A\mathbf{X}^{(3)} = \mathbf{B}^{(2)} \Rightarrow \mathbf{X}^{(3)} = A^{-1}\mathbf{B}^{(2)}. \quad (3.31)$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή φτάνουμε έως τη χρονική στιγμή που επιθυμούμε

έχοντας στη διαθεσή μας τις τιμές όλων των μεταβλητών  $\eta^n, u^n$ , δηλαδή του διανύσματος  $\mathbf{X}^{(n)}$ , για κάθε χρονικό βήμα. Έτσι κατασκευάζουμε τη λύση του συστήματος.

### 3.5 Ευστάθεια

Όπως αναφέραμε και στην επιλογή της μεθόδου, ακολουθήσαμε τη μεθοδολογία Crank - Nickolson έτσι ώστε να διασφαλίσουμε ευστάθεια από πλευράς σφαλμάτων που σχετίζονται με την αριθμητική μέθοδο. Πριν προχωρήσουμε να τονίσουμε ότι η επιλογή της μεθόδου αυτής μας διασφαλίζει ευστάθεια, όχι όμως και απαραίτητα σύγκλιση υπό την έννοια της ακρίβειας. Η ακρίβεια θα διασφαλιστεί αν διασφαλίσουμε τη μη διόγκωση των αριθμητικών σφαλμάτων και αν ταυτόχρονα πυκνώσουμε πάρα πολύ το πλέγμα ώστε να πετύχουμε όσο καλύτερη σύγκλιση μπορούμε.

Ας ξεκινήσουμε από την von Neumann Stability Analysis<sup>7</sup>. Το κριτήριο αυτό μας προμηθεύει με τη δυνατότητα ελέγχου αριθμητικής ευστάθειας ενός αλγορίθμου. Θεωρώντας λοιπόν περιοδικότητα στις λύσεις μας μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις με Fourier αναπτύγματα που περιέχουν κοινό κυματάριθμο. Αγνοώντας λοιπόν τη μη γραμμικότητα, τη βαθυμετρία, που καταστρέφει την περιοδικότητα, αλλά και αγνοώντας τις συνοριακές συνθήκες μπορούμε να ελέγξουμε την ευστάθεια της λύσης. Η επιτυχία της μεθόδου έγκειται στην θεώρηση ενός μοναδικού τρόπου (mode) ταλάντωσης ο οποίος θα αναπαρίσταται από έναν κυματάριθμο  $k$ . Έτσι δυνάμεθα να αντικαταστήσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις με

$$\begin{aligned} \eta_i^n &= a_n \exp^{ikx_i}, & \eta_{i-1}^n &= a_n \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x}, & \eta_{i+1}^n &= a_n \exp^{ikx_i} \exp^{ik\Delta x} \\ \eta_i^{n-1} &= a_{n-1} \exp^{ikx_i}, & \eta_{i-1}^{n-1} &= a_{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x}, & \eta_{i+1}^{n-1} &= a_{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{ik\Delta x} \\ u_i^n &= u_n \exp^{ikx_i}, & u_{i-1}^n &= u_n \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x}, & u_{i+1}^n &= u_n \exp^{ikx_i} \exp^{ik\Delta x} \\ u_i^{n-1} &= u_{n-1} \exp^{ikx_i}, & u_{i-1}^{n-1} &= u_{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x}, & u_{i+1}^{n-1} &= u_{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{ik\Delta x} \end{aligned} \quad (3.32)$$

<sup>7</sup>Βλ. το βιβλίο του Daniel Dubin[85] στο κεφάλαιο 6.

όπου τα χρονικά τμήματα δίνονται από

$$a_n = A\xi^n, \quad u_n = U\xi^n.$$

Στο σημείο αυτό εισάγουμε τον παράγοντα αύξησης (growth factor) ή τον παράγοντα πλάτους (amplification factor). Ο παράγοντας  $\xi$  θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$|\xi| \leq 1$$

προκειμένου να έχουμε αριθμητική ευστάθεια.

Ας δούμε τώρα αναλυτικά την εφαρμογή του κριτηρίου στην 3.20:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} a_n \exp ikx_i + \frac{h}{4\Delta x} u_n \exp^{ikx_i} \exp^{ik\Delta x} - \frac{h}{4\Delta x} u_n \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x} = \\ & \frac{1}{\Delta t} a_{n-1} \exp^{ikx_i} + \frac{h}{4\Delta x} u_{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x} - \frac{h}{4\Delta x} u_{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{ik\Delta x} \Rightarrow \\ & \frac{1}{\Delta t} A\xi^n + \frac{h}{4\Delta x} U\xi^n \exp^{ik\Delta x} - \frac{h}{4\Delta x} U\xi^n \exp^{-ik\Delta x} = \\ & \frac{1}{\Delta t} A\xi^{n-1} + \frac{h}{4\Delta x} U\xi^{n-1} \exp^{-ik\Delta x} - \frac{h}{4\Delta x} U\xi^{n-1} \exp^{ik\Delta x} \Rightarrow \\ & \xi^n \left( 1 + \frac{h\Delta}{A4\Delta x U} (\exp^{ik\Delta x} - \exp^{-ik\Delta x}) \right) = \xi^{n-1} \left( 1 + \frac{h\Delta t U}{A4\Delta x} (\exp^{-ik\Delta x} - \exp^{ik\Delta x}) \right) \Rightarrow \\ & \xi = \frac{1 - i2r \sin(k \Delta x)}{1 + i2r \sin(k \Delta x)}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

όπου  $r = \frac{h\Delta t U}{4A\Delta x}$ .

Βλέπουμε ότι ο παράγοντας πλάτους<sup>8</sup> ικανοποιεί:

$$|\xi| \leq 1.$$

Να υπενθυμίσουμε ότι θεωρούμε ήπια κλίση στο αρχικό πρόβλημα, αλλά προκειμένου να εφαρμόσουμε το κριτήριο σταθερότητας υποθέτουμε σταθερό βάθος, άρα οι τιμές των  $h_i$  και  $h_{i+1}$  είναι σταθερές, για αυτό το λόγο τις αντικαθιστούμε με  $h$ . Επίσης στην εξίσωση 3.23

<sup>8</sup> Αυτό το αναμέναμε βάσει του σχήματος Crank - Nicolson, βλ. για παράδειγμα στη σελ. 135 του Wolfgang Hackbusch[86].

δεν θα θεωρήσουμε κλίση του πυθμένα, για τον ίδιο λόγο. Άρα θέτουμε  $h_x = 0$ . Σε σχέση με τη δεύτερη εξίσωση (3.23) έχουμε ότι:

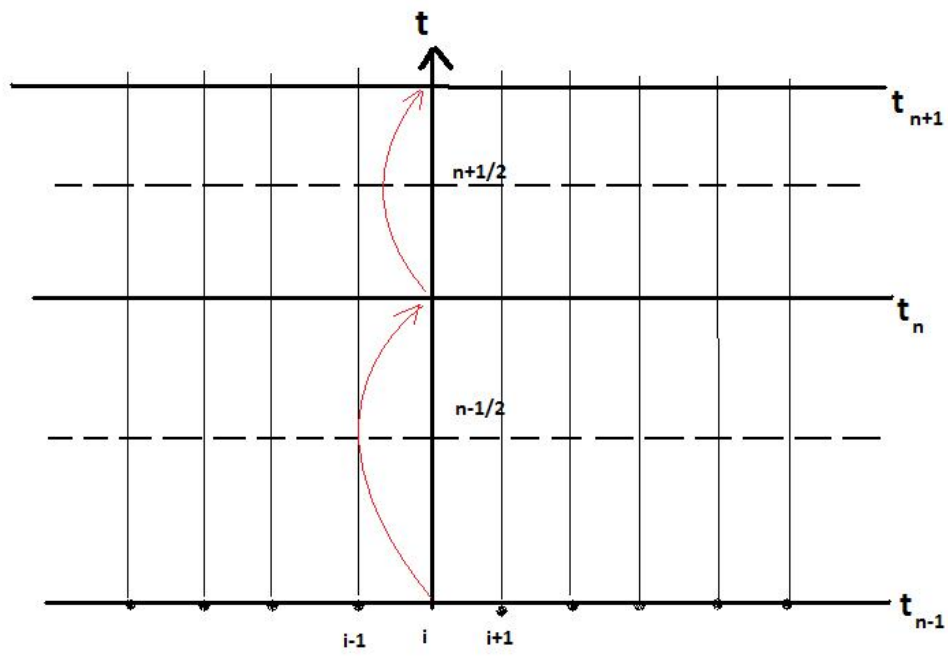
$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t} + 2\frac{h^2}{3\Delta t\Delta x} \right) U\xi^n \exp^{ikx_i} + \left( -\frac{h^2}{3\Delta t\Delta x^2} \right) U\xi^n \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x} + \\ & \left( \frac{-h^2}{3\Delta t\Delta x^2} \right) U\xi^n \exp^{ik\Delta x} \exp^{ik\Delta x} + \frac{g}{4\Delta x} A\xi^n \exp^{ikx_i} \exp^{ik\Delta x} - \frac{g}{4\Delta x} A\xi^n \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x} = \\ & \left( \frac{1}{\Delta t} + 2\frac{h^2}{3\Delta t\Delta x} \right) U\xi^{n-1} \exp^{ikx_i} + \left( -\frac{h^2}{3\Delta t\Delta x^2} \right) U\xi^{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x} + \\ & \left( \frac{-h^2}{3\Delta t\Delta x^2} \right) U\xi^{n-1} \exp^{ik\Delta x} \exp^{ik\Delta x} - \frac{g}{4\Delta x} A\xi^{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{ik\Delta x} + \frac{g}{4\Delta x} A\xi^{n-1} \exp^{ikx_i} \exp^{-ik\Delta x} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{(4h^2U + 6U\Delta x^2 - 4h^2U \cos(k\Delta x) - 3iAg\Delta t\Delta x \sin(k\Delta x))^2}{(4U^2(2h^2 + 3\Delta x^2 - 2h^2 \cos(k\Delta x))^2 + 9A^2g^2\Delta t^2\Delta x^2 \sin(k\Delta x)^2)}, \quad (3.34)$$

από όπου είναι προφανής η

$$|\xi| \leq 1.$$

Έχοντας εξασφαλίσει τη σταθερότητα αριθμητικά στη μέθοδό μας, μπορούμε να προσθέσουμε τα χαρακτηριστικά της ήπιας κλίσης στη βαθυμετρία. Επίσης μπορούμε να εμπλουτίσουμε τις εξισώσεις με ασθενή μη γραμμικότητα. Στην περίπτωση εισαγωγής των όρων  $\eta u$  και  $u u_x$  θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι ο χειρισμός των αγνώστων συναρτήσεων  $\tilde{u} u_x$  και  $\tilde{\eta} u_x$  μπορεί να θεωρηθεί ως περαιτέρω επεξεργασία των εξισώσεων με την εισαγωγή ενός συντελεστή  $\tilde{\eta}$  και  $\tilde{u}$  αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή επιλύουμε το σύστημα με μια αρχική προσέγγιση για τις άγνωστες συναρτήσεις. Στη συνέχεια βελτιώνουμε κάθε φορά το σύστημα ολοκληρώνοντας στο χρόνο για να διορθώσουμε τους εν λόγω συντελεστές των όρων που φέρουν την επίδραση της μη γραμμικότητας (σχήμα 3.3).



Επαναληπτικό σχήμα για τις μη γραμμικές εξισώσεις.

Σχήμα 3.3: Σχήμα αναπαράστασης διόρθωσης της μη γραμμικότητας.

### 3.6 Συνοριακές Συνθήκες

Όπως αναφέραμε η επιλογή των συνοριακών συνθηκών καθορίζει το πρόβλημα που κάθε φορά έχουμε να μελετήσουμε. Η επιλογή τους μπορεί να σχετίζεται με συνθήκη ανάκλασης στα άκρα, ή στρώματος απορρόφησης. Αυτή η συνθήκη επιβάλλεται ταυτόχρονα με την εξωτερική επιβαλλόμενη πίεση, η οποία μπορεί να είναι και ένας κυματικός παλμός, ή μια αρχική συνθήκη ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που να σχετίζεται με μια ποικιλία από φυσικά φαινόμενα.

Αυτή η αρχική συνθήκη σε συνδυασμό με τη συνοριακή θα αποτελέσουν το υπο μελέτη πρόβλημα. Είναι αντιληπτό πάντως ότι δεν μας ενδιαφέρει τόσο, σε περίπτωση που επιλέξουμε συνθήκες ανάκλασης στα άκρα ο τρόπος με τον οποίο αυτές θα λάβουν χώρα, ούτε και ο τρόπος με τον οποίο θα “ρυπάνουν” την περαιτέρω εξέλιξη του προβλήματος. Μας ενδιαφέρει κυρίως η αλληλεπίδραση του κυματισμού με τη βαθυμετρία. Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε έτσι το πλέγμα ώστε να είναι αρκούντως επαρκείς οι ενδείξεις από την επεξεργασία των μετρήσεων πριν λάβουμε υπόψη και τις επιδράσεις από τις συνοριακές συνθήκες. Κάτι τέτοιο, ενώ φαίνεται απλό στην περιγραφή του, στην εφαρμογή του εμπεριέχει εφαρμογή αντίστοιχων μεθόδων αριθμητικών στα σύνορα που ενδέχεται να είναι απαιτητικές.

Τα στρώματα απορρόφησης (sponge layers) βρίσκουν εφαρμογή σε πληθώρα προβλημάτων<sup>9</sup> διότι επιτυγχάνουν τον “τερματισμό” της υπό μελέτης περιοχής με την εισαγωγή οριακού στρώματος όπου επιτυγχάνεται ελαχιστοποίηση των ανακλάσεων (η οποία βελτιστοποιείται καθώς πυκνώνει το πλέγμα) και η πλήρης απορρόφηση των κυμάτων.

Η επιβολή συνοριακών συνθηκών με χαρακτηριστικά στρωμάτων απορρόφησης, που καλείται και perfectly matched layers - PML, έχει προκύψει από τις ανοιχτές συνοριακές συνθήκες (open boundary conditions - OBC)<sup>10</sup>. Οι ανοιχτές συνοριακές συνθήκες ξεκίνη-

<sup>9</sup>Η μέθοδος αυτή οδηγεί ορισμένες φορές σε αστάθεια όταν η περιοχή που εφαρμόζεται είναι “αριστερόστροφη” (“left handed” media), βλ. P.-R. Loh, A. F. Oskooi, M. Ibanescu, M. Skorobogatiy, and S. G. Johnson(2009)[41].

<sup>10</sup>Βλ. κεφάλαιο 5 nesting ocean models από το βιβλίο των E.P.Chassignet, J. Verron[87] αλλά και στο Open boundary conditions and coupling methods for ocean flows του Eric Blayo[88].

σαν με μια αβεβαιότητα ως προς την αποτελεσματικότητά τους. Πολλά από τα σχήματα των OBC προκύπτουν από την συνθήκη ακτινοβολίας (radiation condition) που εισήγαγε ο Sommerfeld(1949)[89] τα οποία τροποποιήθηκαν από διάφορους ερευνητές, όπως για παράδειγμα οι Pearson(1974)[42], Enguist και Majda(1977)[43], Orsanki(1976)[44], O' Brien (1980)[45], Miller(1981)[46], Raymond (1984)[47], Palma (2001)[48].

Η βασική ιδέα των σχημάτων PML<sup>11</sup> στηρίζεται στο ότι οι διαταραχές ταξιδεύουν πάνω στο σύνορο ως κύματα, τα οποία περιγράφονται από απλουστευμένη δυναμική σε σχέση με το υπόλοιπο χωρίο.

Μια δεύτερη κατηγορία των OBC αποτελούν οι μέθοδοι εφησυχασμού (relaxation methods) οι οποίες έχουν ως βασική ιδέα την επέκταση του υπολογιστικού χωρίου με την εισαγωγή ενός στρώματος απορρόφησης όπου η αριθμητική λύση θεωρείται προοδευτικά φθίνουσα προς την εξωτερική λύση<sup>12</sup>. Η λογική του σχήματος μπορεί να αναπαρασταθεί στο σχήμα 3.4.

Το παραπάνω σχήμα είναι γνωστό και ως flow relaxation scheme - FRS . Το σχήμα αυτό τροποποιήθηκε αρχικά στα πλαίσια του ηλεκτρομαγνητισμού από τον Berenger (1994)[51] και (2007)[52] με την εισαγωγή της ιδέας του perfectly matched layer - PML η οποία πέρασε και στο πεδίο της μηχανικής των ρευστών με τον Hu FQ (1996)[53],(2001)[54] και (2008)[55] και ωκεανογραφίας, με τους Darblade G, Baraille R, Le Roux AY, Carton X, Pinchon D (1997)[56] , Navon IM, Neta B, Hussaini MY (2004)[57].

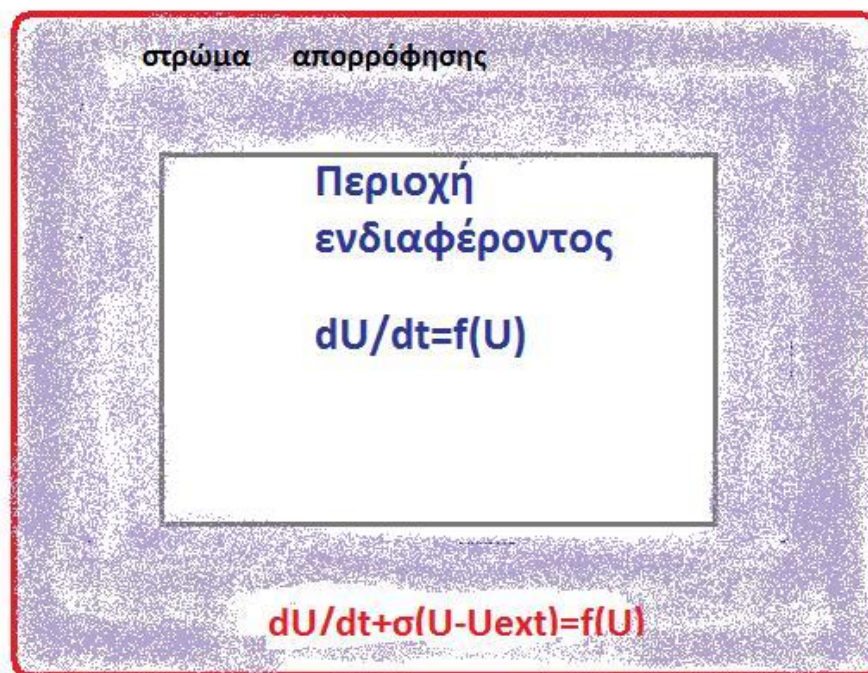
Όταν η εξωτερική λύση τίθεται ίση με το μηδέν  $U_{ext} = 0$ , τότε τα σχήματα FRS και PML ταυτίζονται. Επί της ουσίας εισάγουν έναν γραμμικό όρο απόσβεσης στο απορροφητικό στρώμα που εξαρτάται από την  $\sigma$ . Η επιλογή θα πρέπει να είναι τέτοια που να διασφαλίζεται λεία διακύμανση της παραμέτρου έτσι ώστε να αποφεύγονται ανακλάσεις που ρυπαίνουν τη λύση και αφετέρου να είναι τέτοια η απόσβεση που να μπορεί να πνίξει τις διαταραχές στο στρώμα απορρόφησης.

Στο πρόβλημα που επιλέγουμε ακολουθούμε τους Belibassakis et al.(2001)[58] και Beli-

<sup>11</sup>Βλ. επίσης A. Modave et al. (2010)[49].

<sup>12</sup>Βλ. Davies (1976)[50].





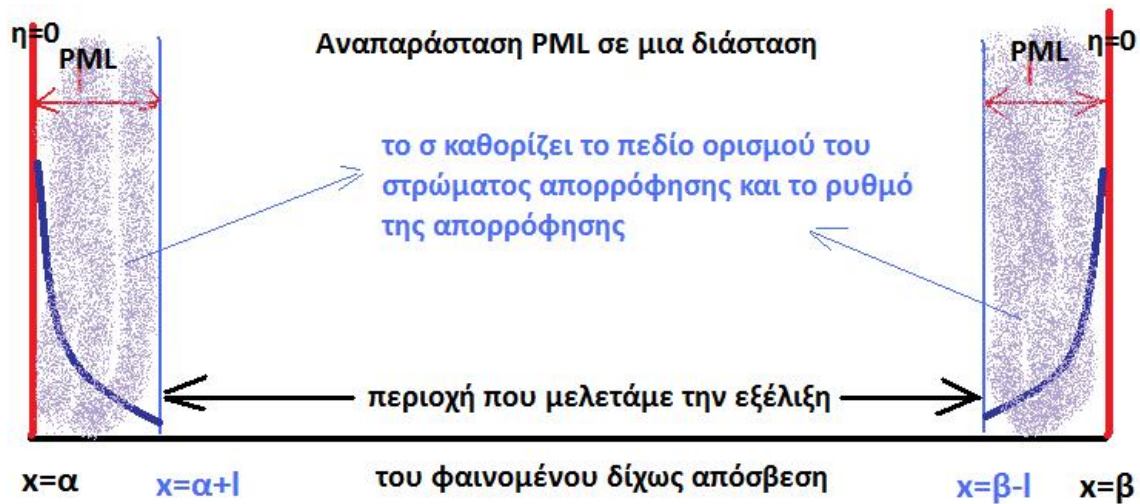
Σχηματική απεικόνιση στρώματος απορρόφησης στις δύο διαστάσεις. Εισαγωγή του όρου  $\sigma$ .

Σχήμα 3.4: Flow relaxation scheme - 2DH.

bassakis και Athanassoulis(2011)[59] όπου ο παράγοντας  $\sigma$  δίνεται από την

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 \left| \frac{x-\alpha-l}{l} \right|^p, & x < \alpha + l \\ 0, & \alpha + l < x < \beta - l \\ \sigma_0 \left| \frac{x-\beta+l}{l} \right|^p, & x > \beta - l \end{cases} \quad (3.35)$$

όπου  $\sigma_0$  μια θετική παράμετρος που καθορίζει το πλάτος της κατανομής  $\sigma$  η οποία είναι συγκρίσιμη με το χαρακτηριστικό μήκος κύματος και  $p$  επίσης μια θετική παράμετρος που καθορίζει το ρυθμό απορρόφησης του στρώματος<sup>13</sup>.

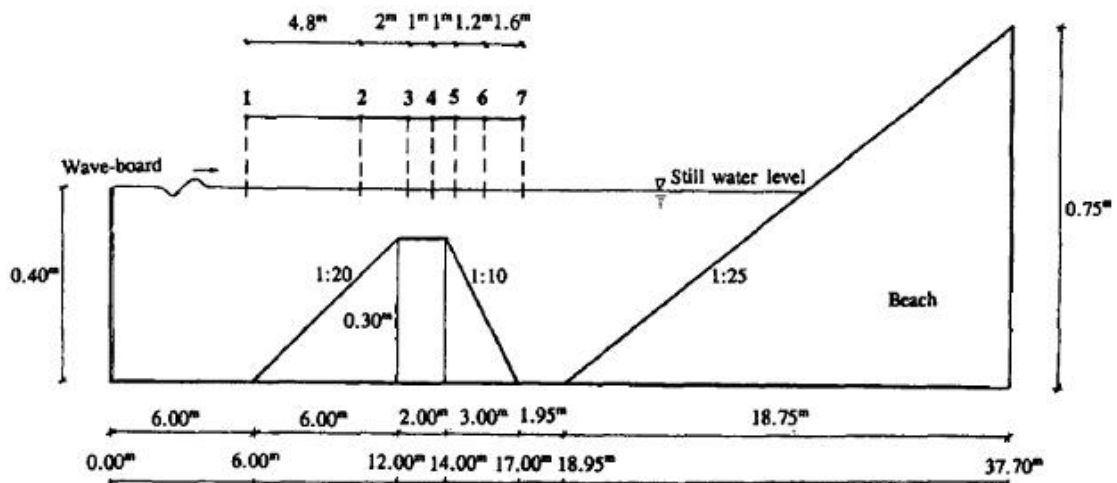


Σχήμα 3.5: Flow relaxation scheme - 1DH.

<sup>13</sup>Βλ. E.S. Filippas, K.A. Belibassakis[60].

### 3.7 Αποτελέσματα

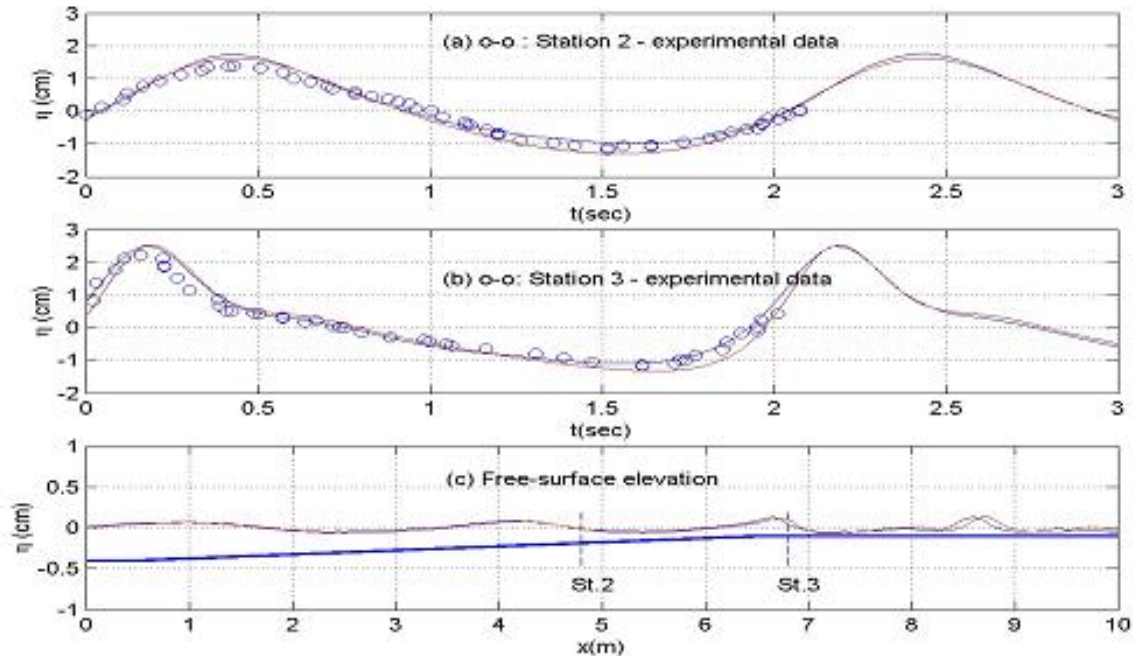
Είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα σε μια διάσταση. Αρχικά θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με την πειραματική διάταξη που χρησιμοποίησαν οι Beji και Battjes (1993)[6] για κυματισμούς ύψους  $H = 2\text{cm}$  και συχνότητας  $f = 0.5\text{Hz}$ . Η διάταξη αναπαρίσταται στο σχήμα 3.6.



Σχήμα 3.6: Αναπαράσταση της πειραματικής διάταξης Beji-Battjes.

Το μοντέλο μας αναπαρίσταται με τη μπλε γραμμή και το συγκρίνουμε με τα πειραματικά δεδομένα των σταθμών 2 και 3 αλλά και με το MIKE 21 BW (κόκκινη γραμμή).

Στο σχήμα 3.7 φαίνεται η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στους σταθμούς 2 και 3 αλλά και ένα χαρακτηριστικό στιγμιότυπο καθώς ο κυματισμός έχει εξελιχθεί και έχει εισχωρήσει στο απορροφητικό στρώμα.



Σχήμα 3.7: Σύγκριση των αποτελεσμάτων.

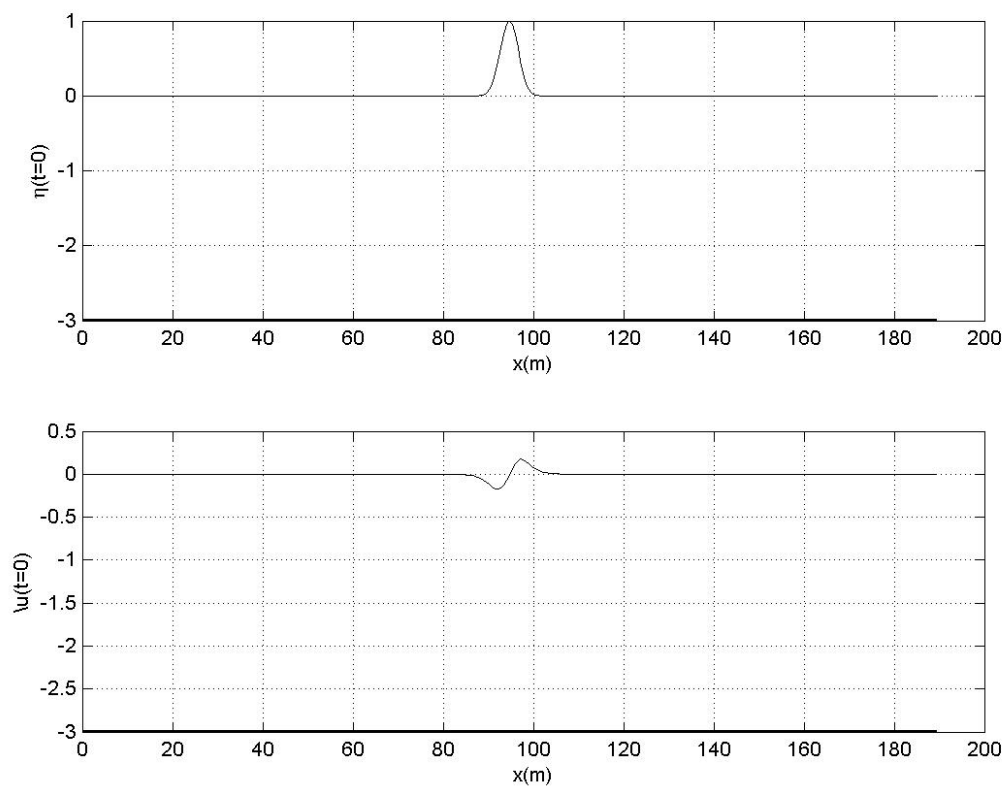
### 3.7.1 Παλμός σε σταθερό βάθος

Αρχικά θεωρούμε παλμό σε σταθερό βάθος ο οποίος εξελίσσεται προς τις δύο κατευθύνσεις. Στο σχήμα 3.8 παρουσιάζουμε αρχική συνθήκη για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας  $\eta(t = 0s)$  συναρτήσει της οριζόντιας θέσης ( $x$ ) στο πεδίο διάδοσης της διαταραχής. Η αρχική συνθήκη για την ταχύτητα λαμβάνεται μηδενική. Η κατανομή της ταχύτητας παρουσιάζεται αμέσως μετά το πρώτο χρονικό βήμα ( $\Delta t = 0.1 s$ ). Επιλέγουμε ένα χωρίο επαρκές ( $200 m$ ) τέτοιο ώστε να επιτρέπει την παρατήρηση στην εξέλιξη του παλμού.

Ο παλμός που απεικονίζουμε έχει τη μορφή

$$\eta(t = 0) = e^{(-\gamma(x-x_m)^2)} \cos(k_1(x - x_m)), \quad (3.36)$$

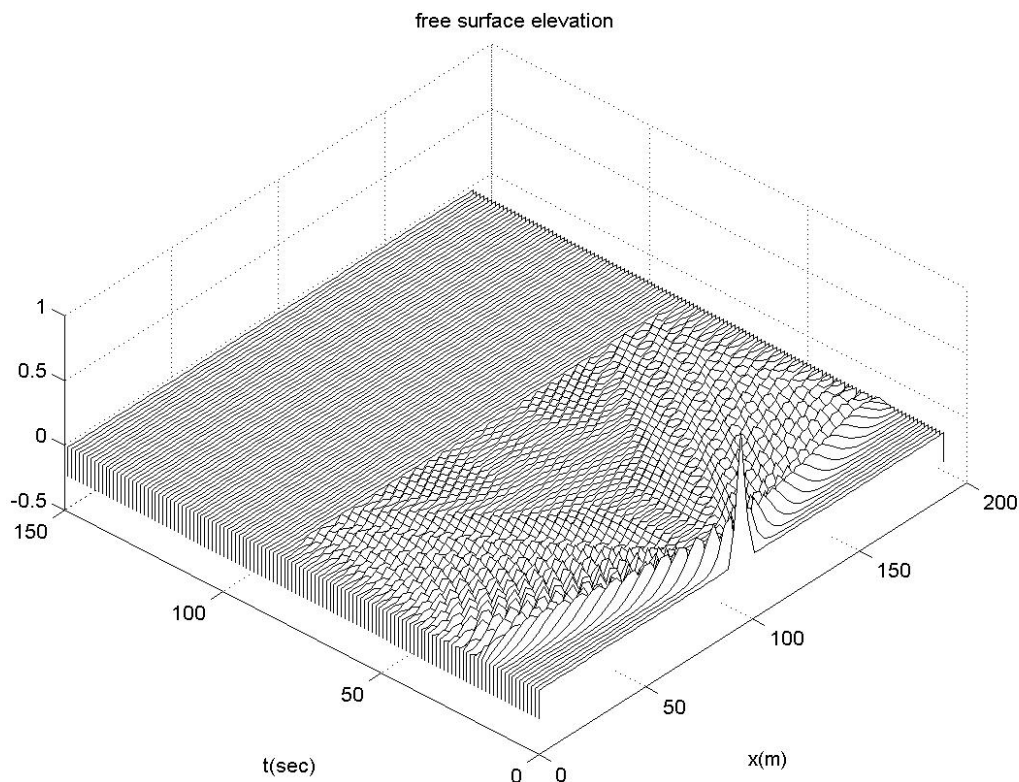
όπου  $\gamma = -0.1$  και  $k_1 = 0.2$ , ενώ το  $x_m$  λαμβάνεται στη μέση περίπου του χωρίου.



Σχήμα 3.8: Αρχική ανύψωση και κατανομή ταχύτητας.

Παρατηρούμε ότι η αρχική παραμόρφωση, που ανέρχεται στο 1 μέτρο, κατευθύνεται εκατέρωθεν της αρχικής θέσης επιβολής του παλμού, με ταχύτητες ίσου μέτρου. Αναμένουμε λοιπόν ένα χωρικά συμμετρικό φαινόμενο στη χρονική του εξέλιξη, τόσο στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας όσο και στην κατανομή της ταχύτητας, όπως αυτή διαμορφώνεται κατά την ολοκλήρωση των χρονικών βημάτων.

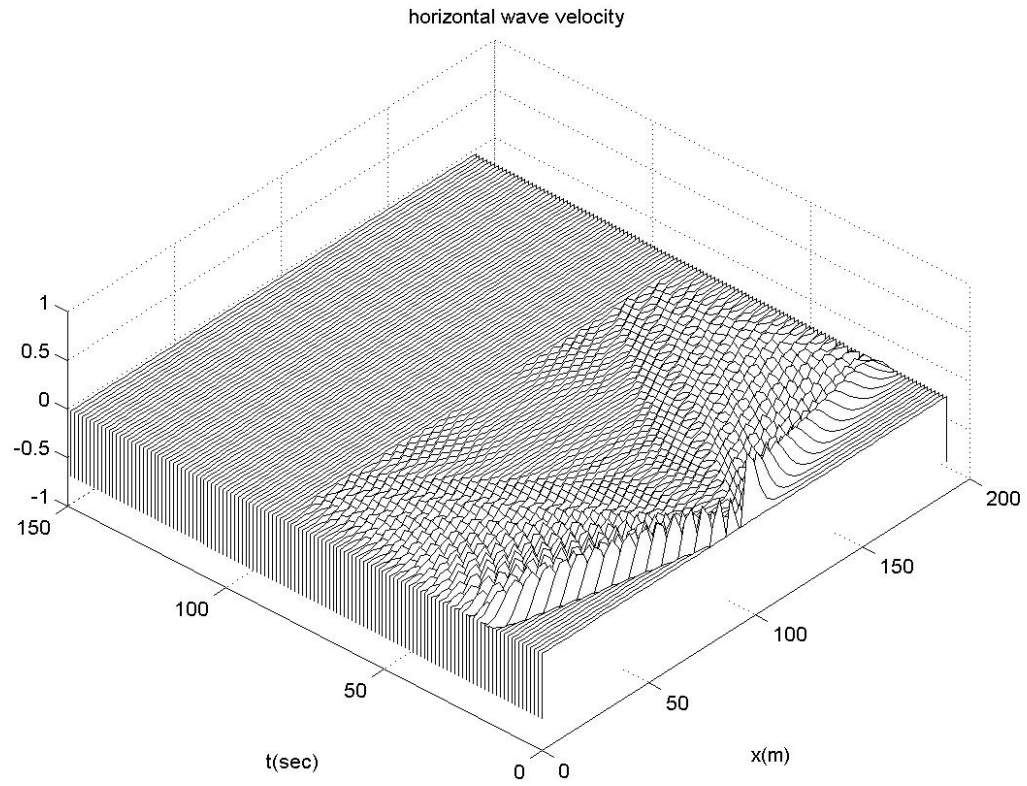
Στα επόμενα διαγράμματα επιβεβαιώνουμε την παραπάνω παρατήρηση. Πράγματι στο διάγραμμα της εξέλιξης της ανύψωσης επιφάνειας σε σχέση με το χρόνο (σχήμα 3.9) παρατηρούμε ότι η κλίση του διαγράμματος της απομάκρυνσης του παλμού σε σχέση με το χρόνο είναι η ίδια και προς τις δύο κατευθύνσεις.



Σχήμα 3.9: Χρονική εξέλιξη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Το ίδιο επιβεβαιώνουμε με το πεδίο ταχυτήτων (σχήμα 3.10) όπως αυτό διαμορφώνεται σε

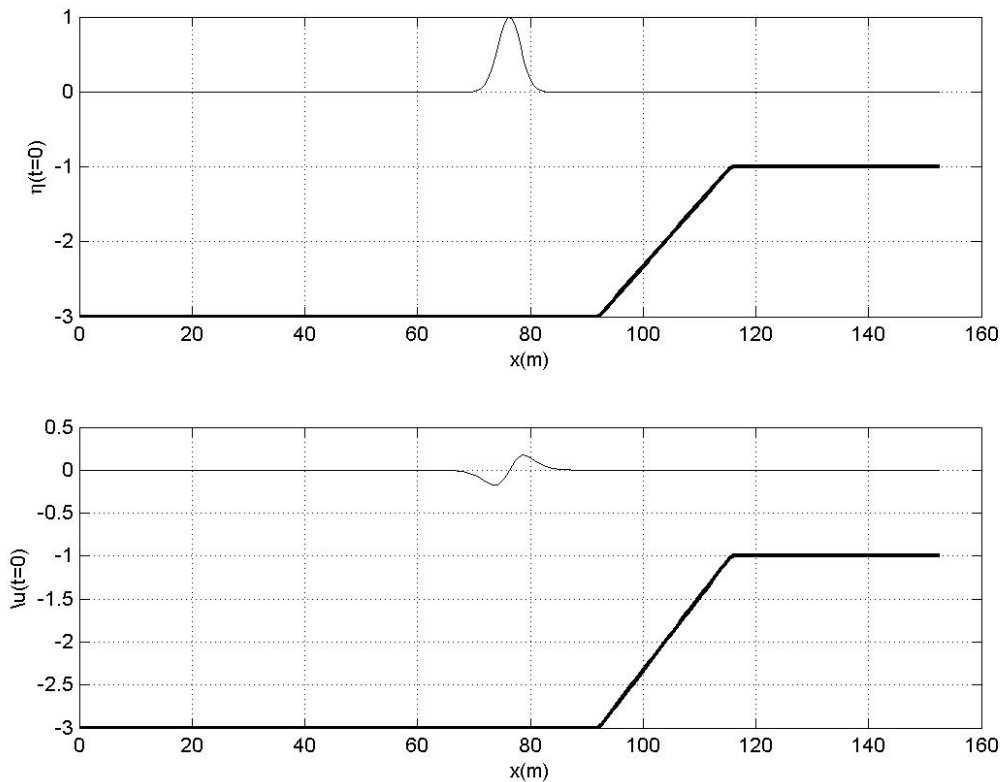
σχέση με το χρόνο.



Σχήμα 3.10: Χρονική εξέλιξη της κατανομής του πεδίου ταχυτήτων.

### 3.7.2 Εισαγωγή βαθυμετρίας

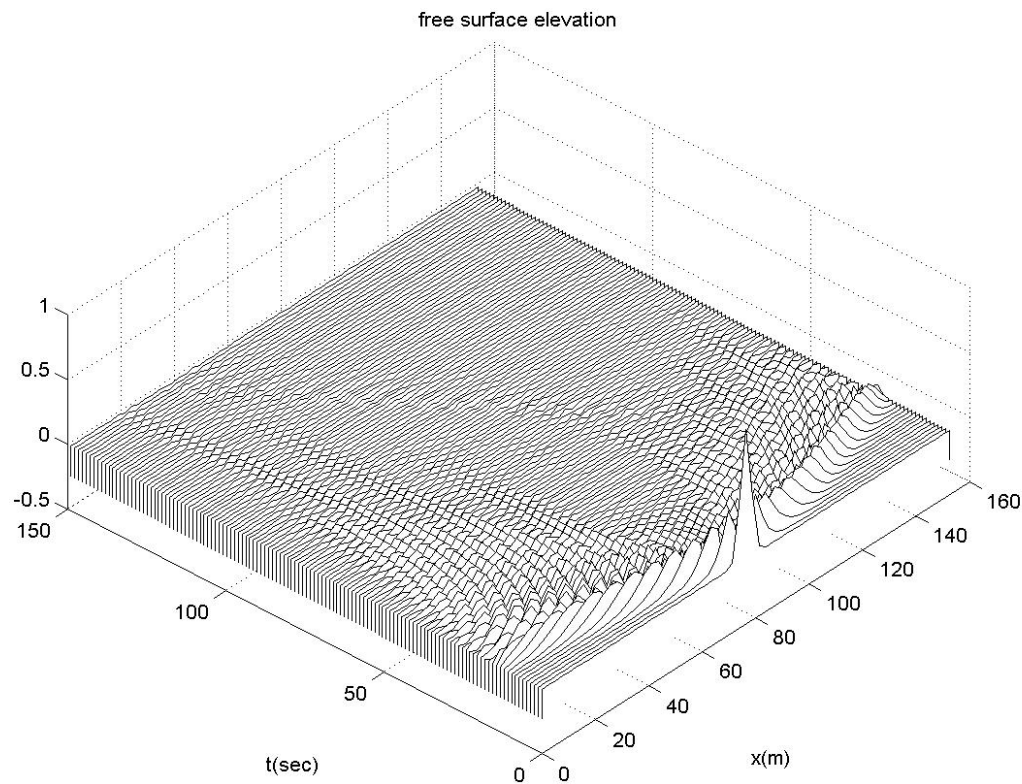
Στη συνέχεια παραθέτουμε την ίδια αρχική συμθήκη σε περιβάλλον μεταβλητού πυθμένα (σχήμα 3.11), ο οποίος παρουσιάζει κλίση 26%. Σε σχέση με την εξέλιξη του παλμού αναμένουμε ότι, καθώς θα πλησιάζει προς την κατεύθυνση ρήγωσης, τα χαρακτηριστικά του θα μεταβάλλονται σε σχέση με εκείνα που θα διαδίδονται σε σταθερό βάθος. Έτσι αναμένουμε αλλαγή των χαρακτηριστικών των  $\eta$  και  $u$  προς τις δύο κατευθύνσεις διάδοσης.



Σχήμα 3.11: Αρχική ανύψωση και κατανομή ταχύτητας - Μεταβλητός πυθμένας.

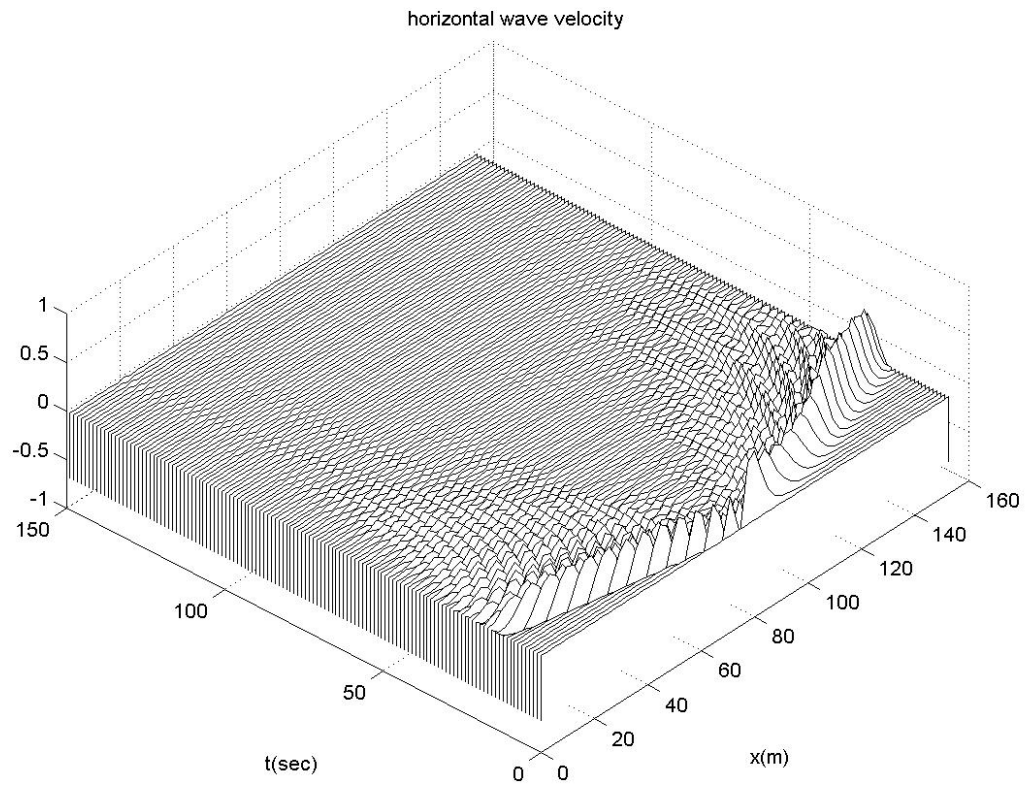


Επομένως, αναμένεται ένα χωρικά ασύμμετρο φαινόμενο στη χρονική του εξέλιξη. Πράγματι, παρατηρώντας τα επόμενα διαγράμματα (σχήματα 3.12 και 3.13), η χωρική ασυμμετρία της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και του αντίστοιχου πεδίου ταχυτήτων σε σχέση με τις δύο κατευθύνσεις διάδοσης είναι εμφανής.



Σχήμα 3.12: Χρονική εξέλιξη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Καθώς ο κυματισμός διαδίδεται προς το μέρος της ρήχωσης έχουμε μια αύξηση του ύψους του και ταυτόχρονα μείωση της ταχύτητάς του. Αυτό είναι συνεπές με τη διατήρηση της ροής της μηχανικής ενέργειας στη στήλη του νερού. Αυτό το φαινόμενο αποκαλείται φαινόμενο ρήχωσης (shoaling) και σχετίζεται με την ανύψωση του πλάτους του κυματισμού και ταυτόχρονα τη μείωση της ταχύτητας του μετώπου του. Να υπενθυμίσουμε ότι στο μοντέλο Boussinesq με τον όρο ταχύτητα εννοούμε την μέση ταχύτητα κατά την κατακόρυφη στήλη στο ρευστό.



Σχήμα 3.13: Χρονική εξέλιξη της κατανομής του πεδίου ταχυτήτων.

Δεν πρέπει το φαινόμενο της ρήχωσης, όπως το περιγράψαμε, να το συγχέουμε με φαινόμενα τριβής και εν γένει με τα φαινόμενα απώλειας ενέργειας. Αυτά ναι μεν συμβαίνουν στην πραγματικότητα αλλά δεν έχουμε υποθέσει κάτι τέτοιο στην περίπτωση μας.

### 3.7.3 Κινούμενη πίεση - Αργός Παλμός - Σταθερό βάθος

Στην επόμενη περίπτωση θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα μιας κινούμενης επιβαλλόμενης πίεσης με μικρή σχετικά ταχύτητα ( $u = 0.5m/s$ ). Αρχικά τη θεωρούμε σε σταθερό βάθος πυθμένα. Στο διάγραμμα 3.14 παρουσιάζουμε την πίεση (διακεκομμένη γραμμή) σε σχέση με την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας αλλά και την αντίστοιχη κατανομή ταχύτητας που αναφέρεται στο πεδίο κατανομής ταχυτήτων του ρευστού.

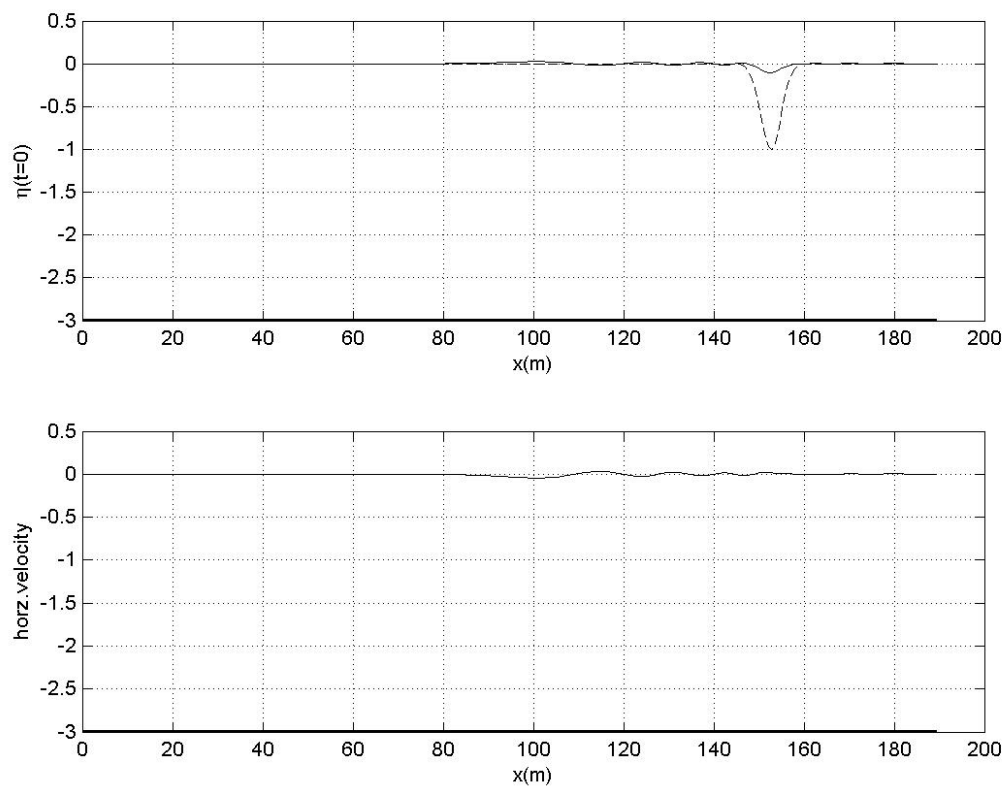
Ο παλμός έχει τη μορφή

$$F(x, t) = -e^{-\gamma(x-x_m)^2}, \quad (3.37)$$

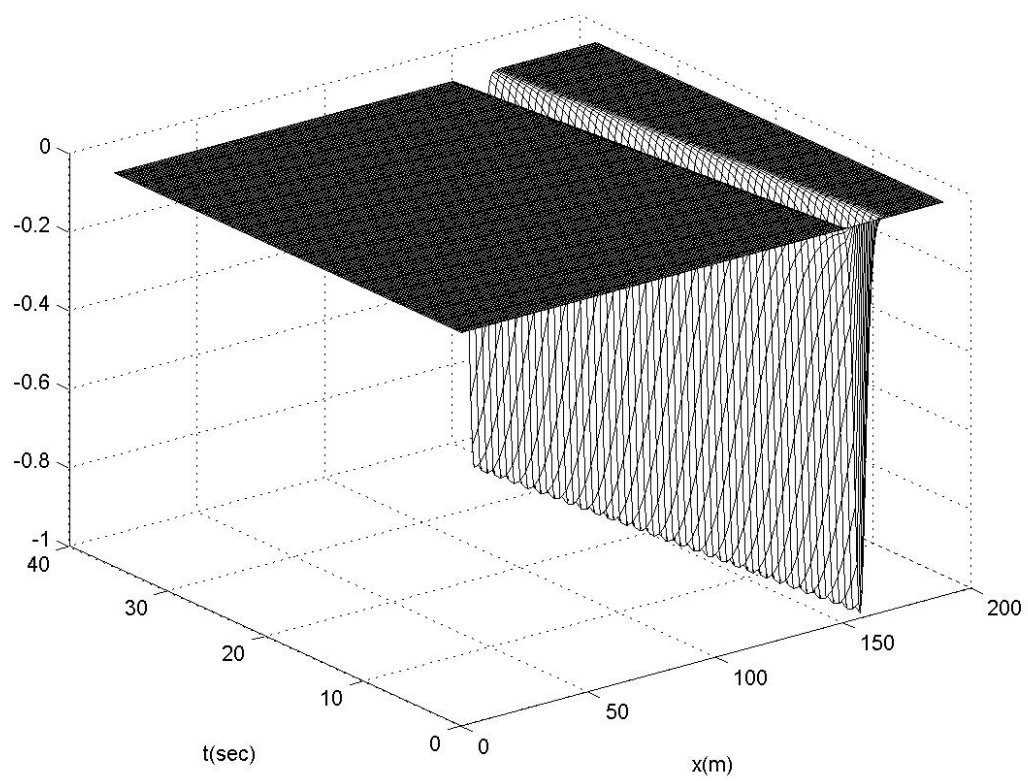
όπου  $\gamma = 0.1$  και  $x_m = x_o - ut$ , με  $x_o$  η αρχική θέση και  $u$  η προαναφερθείσα ταχύτητα.

Στην εν λόγω περίπτωση αναμένουμε την επίδραση της αρχικής πίεσης ως μια απότομη μεταβολή στα χαρακτηριστικά του ρευστού η οποία θα προκαλέσει μια σειρά διαταραχών που θα τείνουν να αποκαταστήσουν την ισορροπία στο φαινόμενο δεδομένης μιας “μόνιμης” παραμόρφωσης στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Εφόσον δηλαδή ο παλμός θα κινείται αργά θα αναμένουμε να προσομοιάζει με την τοποθέτηση ενός αντικειμένου στον εν λόγω χώρο και την εξέλιξη της επίδρασής του στο χρόνο, τόσο στην επιφάνεια του υπόλοιπου αδιατάρακτου πεδίου όσο και στην διαμόρφωση του αντίστοιχου πεδίου ταχυτήτων στο ρευστό. Επίσης παρόλο που παλμός κινείται προς μια κατεύθυνση, εφόσον η ταχύτητά του είναι μικρή αναμένουμε να έχουμε ένα σχετικά συμμετρικό φαινόμενο κατά τη χρονική του εξέλιξη, τόσο στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας όσο και στην κατανομή των ταχυτήτων.

Αρχικά (σχήμα 3.15) παρουσιάζουμε την κίνηση του παλμού σε σχέση με το χρόνο.

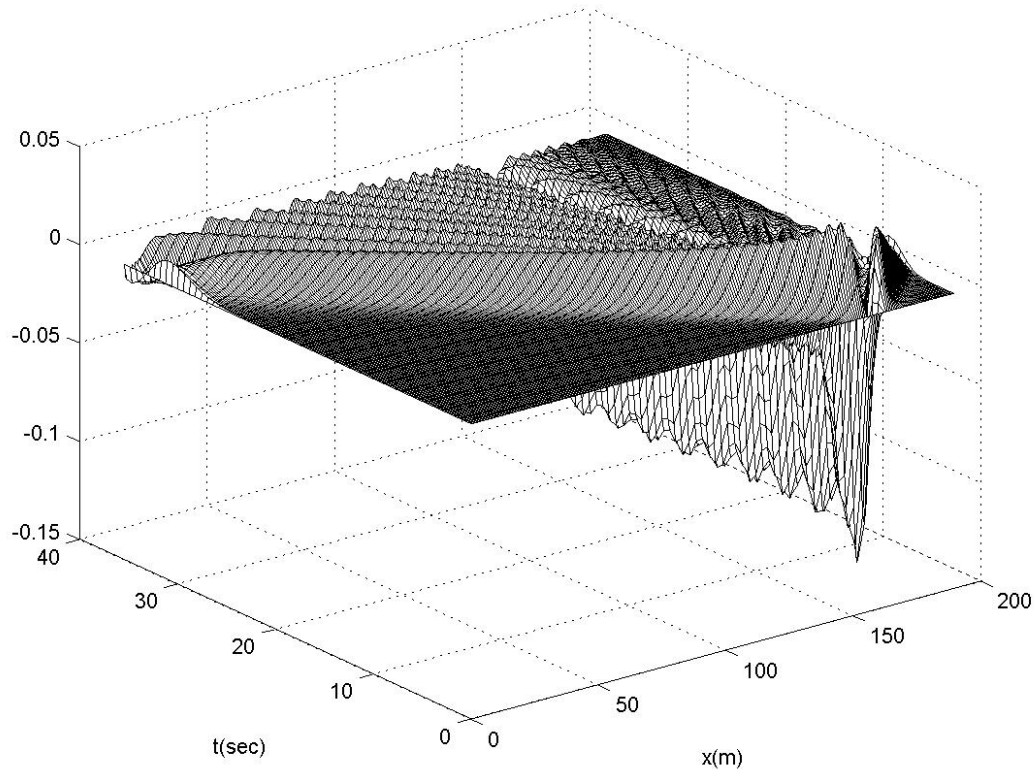


Σχήμα 3.14: Αργά κινούμενη πίεση.



Σχήμα 3.15: Ο παλμός ταξιδεύει ελάχιστα.

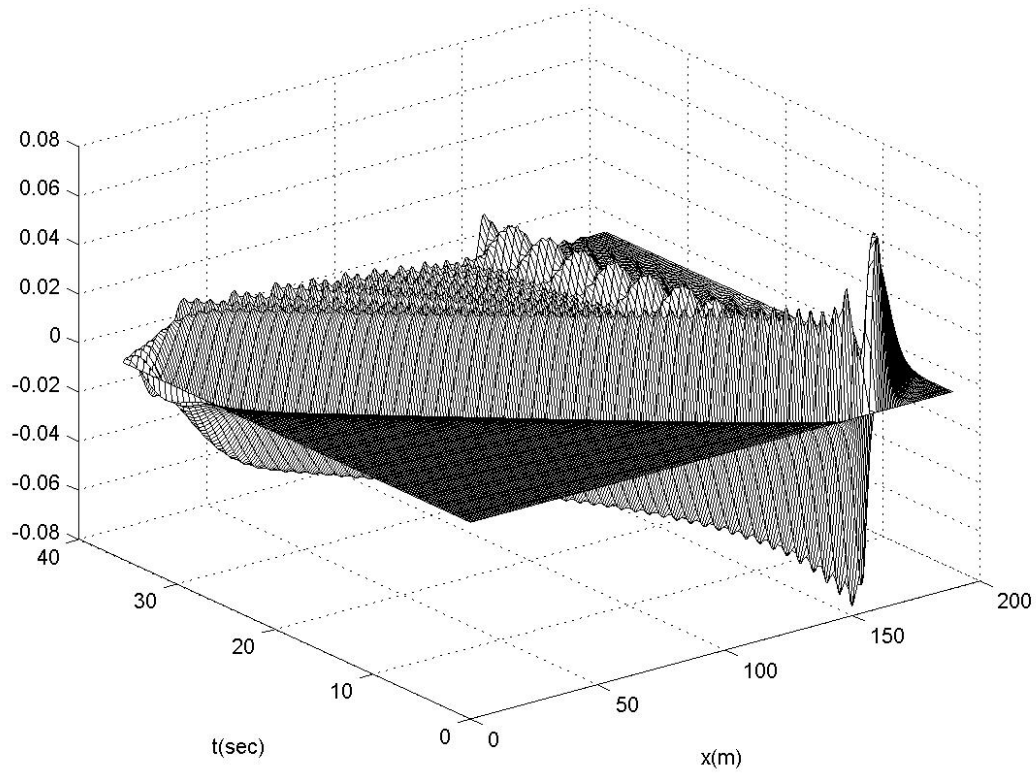
Στη συνέχεια (σχήμα 3.16) παρουσιάζουμε την χρονική εξέλιξη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 3.16: Χρονική εξέλιξη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Πράγματι επιβεβαιώνουμε μια μικρή χωρική ασυμμετρία στο εξεταζόμενο πρόβλημα. Να τονίσουμε ότι η συμμετρία αξιολογείται περίξ της αρχής της κίνησης του παλμού. Η αριστερή ουρά (δηλαδή προς το μηδέν του βαθμονομημένου άξονα) σχετίζεται με το ότι έχουμε επιλέξει το ασύμμετρο πλέγμα, μιας και στη συνέχεια ο εν λόγω παλμός θα τενθεί σε κίνηση με μεγαλύτερη ταχύτητα οπότε και θα χρειαστούμε περισσότερο “χώρο” για να τον μελετήσουμε.

Στη συνέχεια (σχήμα 3.17) παρουσιάζουμε την κατανομή των ταχυτήτων σε σχέση με τον χρόνο και σε σχέση με τον άξονα διάδοσης. Εδώ η ασυμμετρία του πεδίου κατά τις δύο

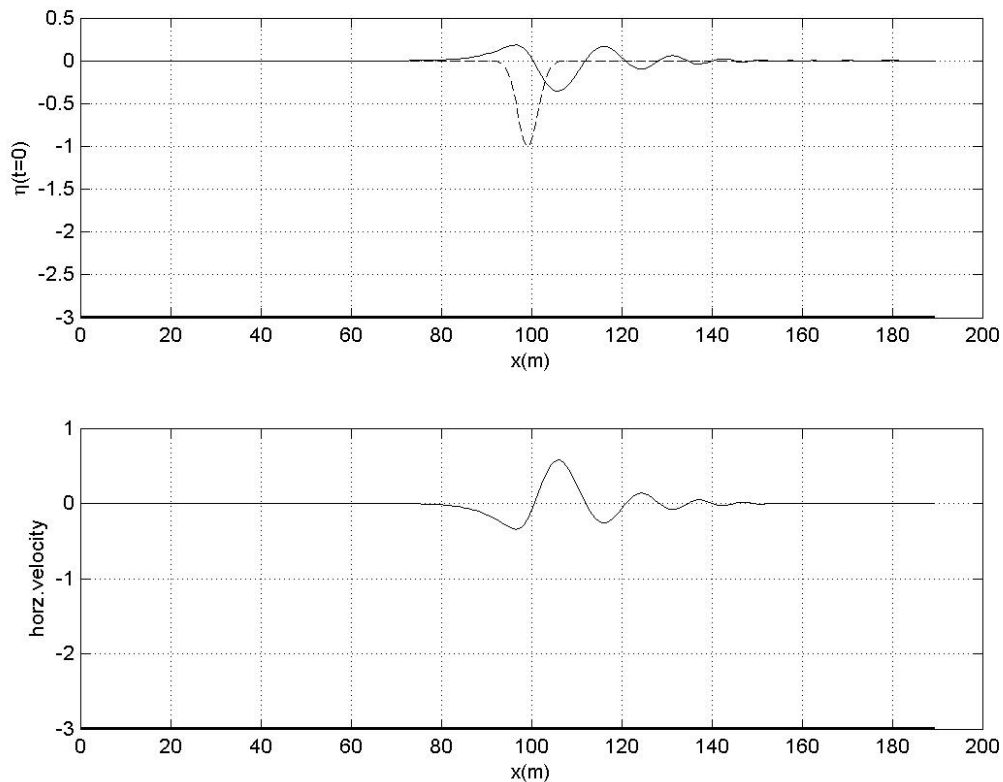


Σχήμα 3.17: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας.

κατευθύνσεις διάδοσης, είναι εντονότερη εφόσον αμέσως μετά τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η μικρή μεταβολή στη θέση της ασκούμενης πίεσης επηρεάζει το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού.

### 3.7.4 Κινούμενη πίεση - Γρήγορος Παλμός - Σταθερό βάθος

Στη συνέχεια (σχήμα 3.18) θα εφαρμόσουμε το αριθμητικό μοντέλο στην υπερκρίσιμη περιοχή. Δηλαδή θεωρούμε ταχύτητα ( $u = 5 \text{ m/s}$ ) στην ασκούμενη πίεση, τέτοια που να είναι αρκετά μεγαλύτερη εκείνης που αντιστοιχεί στο γραμμικό μοντέλο για αυτό το βάθος.



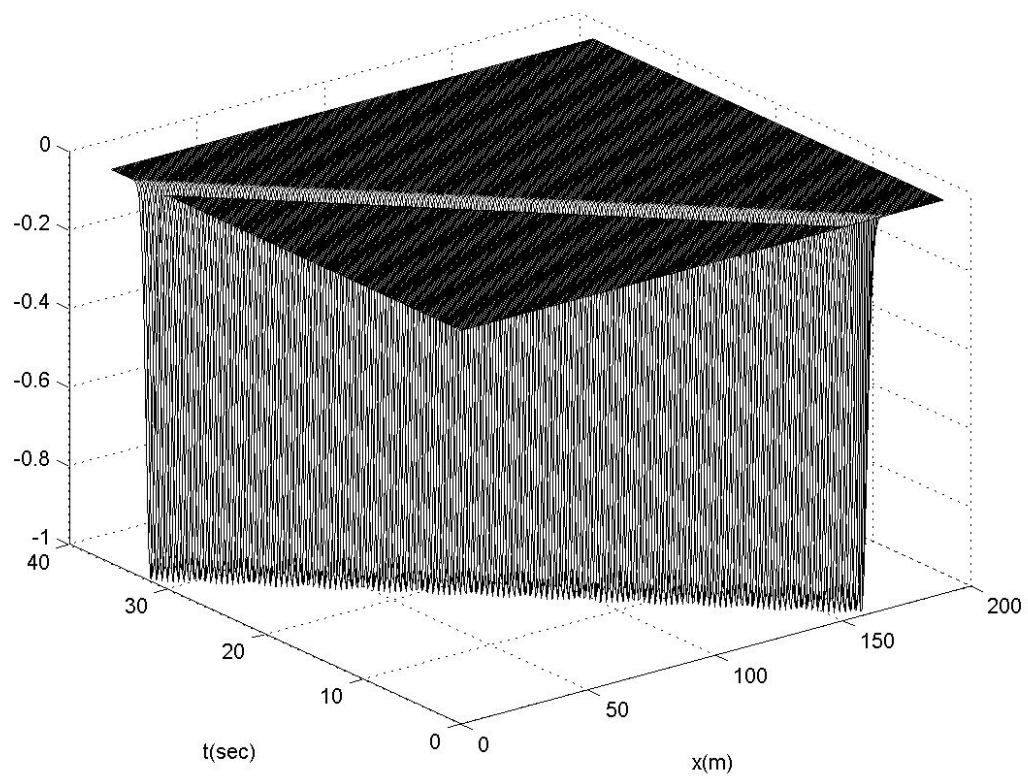
Σχήμα 3.18: Ασκούμενη πίεση - Αρχική ανύψωση - Αρχική κατανομή ταχύτητας.

Στην εξέλιξη του φαινομένου αναμένουμε εμφανή χωρική ασυμμετρία τόσο στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας όσο και στο πεδίο ταχυτήτων. Αυτό διότι ο παλμός θα επιβάλλει πλέον στο ρευστό να αλλοιώσει τα χαρακτηριστικά του πριν το ίδιο προλάβει να αποκαταστήσει τα νέα δυναμικά χαρακτηριστικά στις περιοχές που θα ταξιδέψει ο παλμός.

Στο σχήμα 3.19 παρουσιάζουμε τη διάδοση του παλμού.

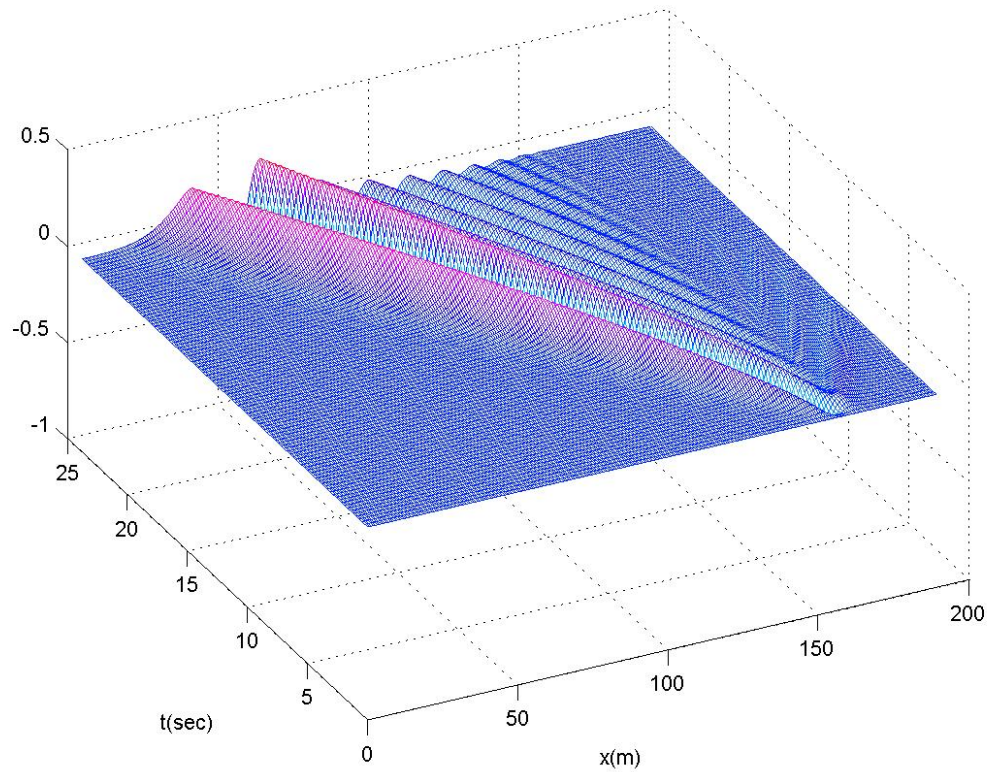
Ας εξετάσουμε τις πιο πάνω παρατηρήσεις στο διάγραμμα 3.20 της ανύψωσης της ελεύθερης





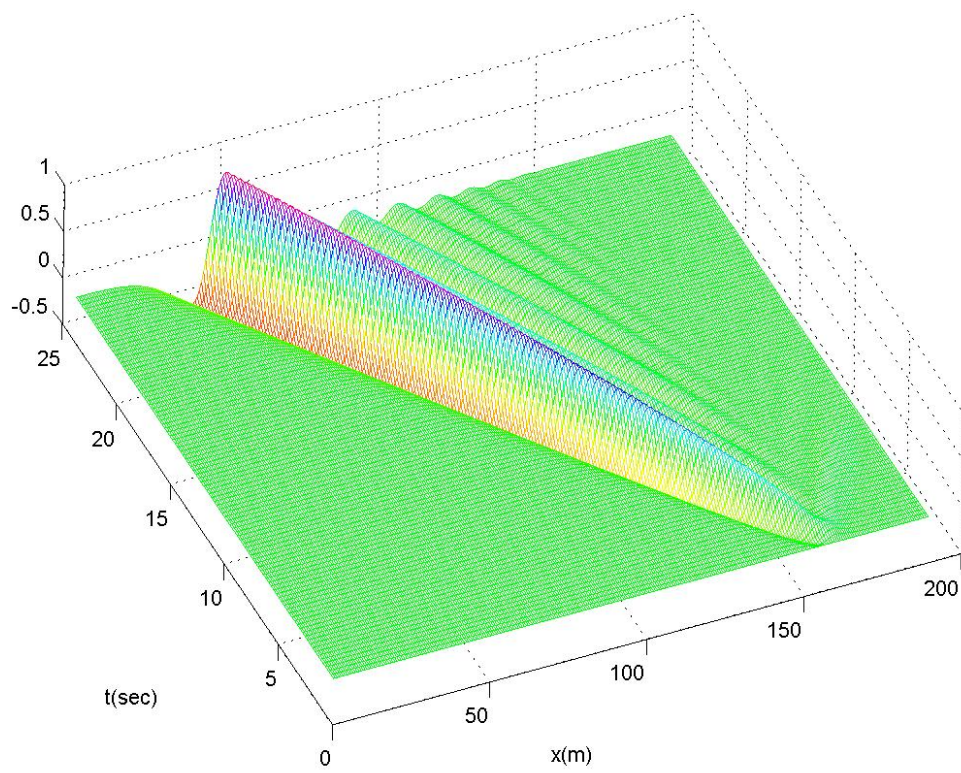
Σχήμα 3.19: Διάδοση του παλμού.

επιφάνειας σε σχέση με το χρόνο.



Σχήμα 3.20: Χρονική εξέλιξη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Η ασυμμετρία επιβεβαιώνεται και επίσης παρατηρείται αύξηση του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας καθώς ο παλμός μετακινείται. Το ίδιο παρατηρούμε και στο αντίστοιχο διάγραμμα κατανομής της ταχύτητας (σχήμα 3.21).

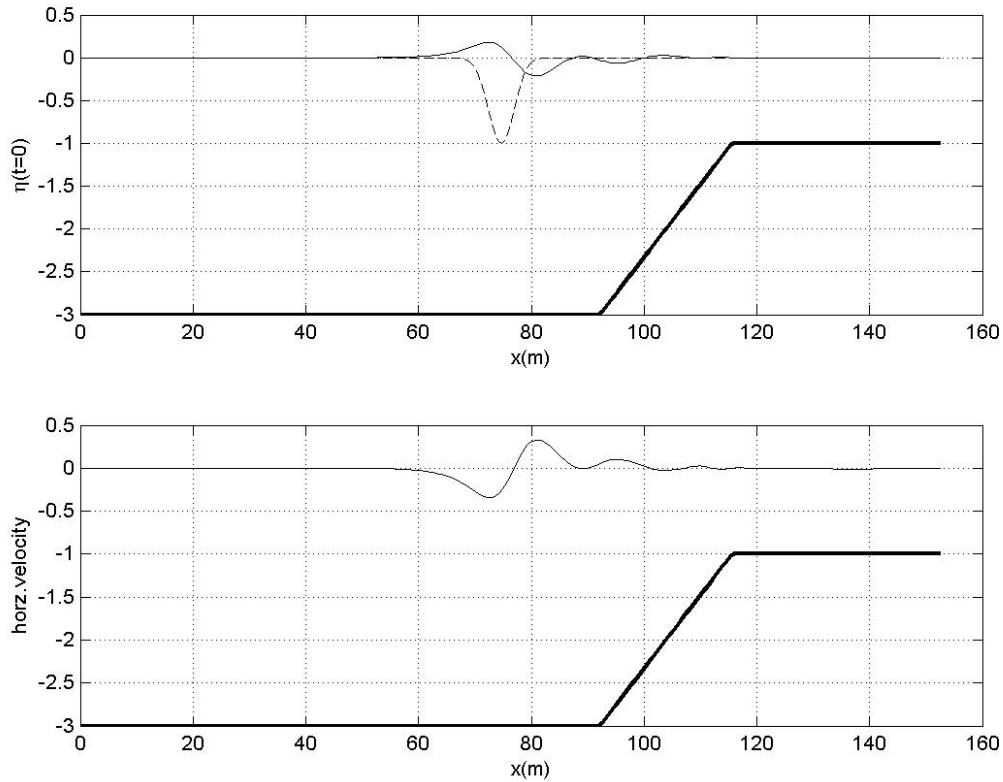


Σχήμα 3.21: Χρονική εξέλιξη της κατανομής ταχυτήτων.

### 3.7.5 Κινούμενη πίεση - Μεταβλητός πυθμένας

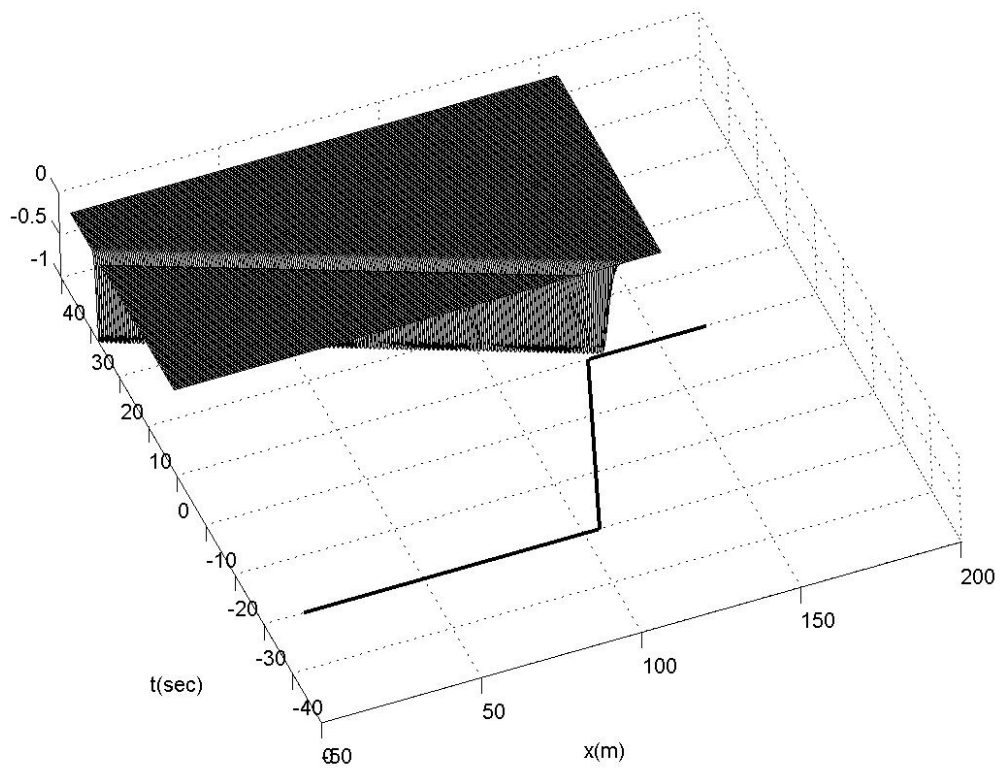
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση κινούμενης πίεσης στην υπερκρίσιμη περιοχή.

Η αρχική συνθήκη παρουσιάζεται στο σχήμα 3.22.



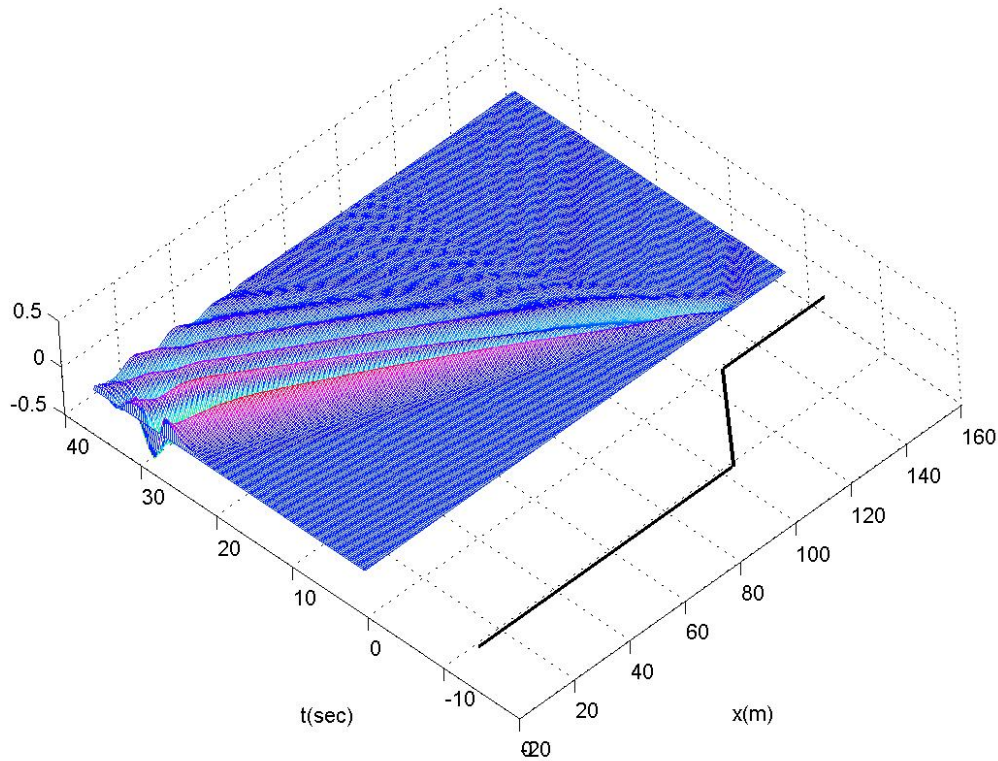
Σχήμα 3.22: Κινούμενος παλμός - Μεταβλητός πυθμένας.

Το ταξίδι του παλμού αναμένουμε να είναι το ίδιο και στην περίπτωση του μεταβλητού πυθμένα. Πράγματι αυτό φαίνεται αμέσως παρακάτω στο σχήμα 3.23.



Σχήμα 3.23: Διάδοση του παλμού.

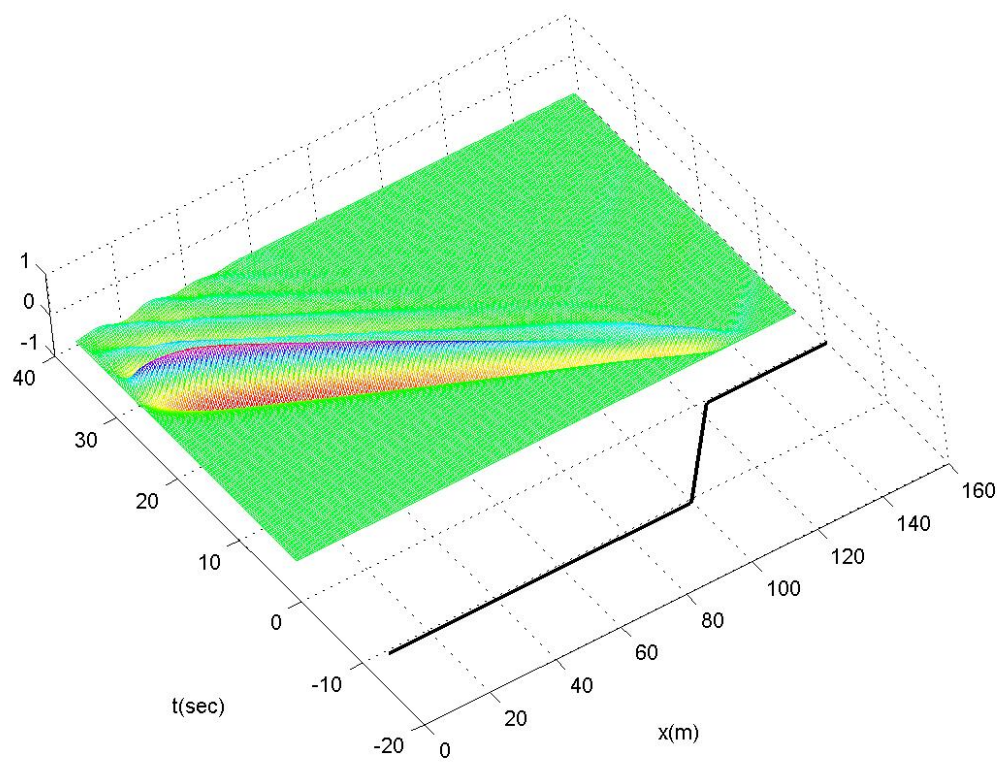
Στο σχήμα 3.24 μπορούμε να παρατηρήσουμε την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 3.24: Χρονική εξέλιξη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Παρατηρούμε ότι τα χαρακτηριστικά μοιάζουν με εκείνα του σταθερού πυθμένα, αλλά αν κοιτάξουμε προσεκτικότερα θα διαπιστώσουμε ότι στον μεταβλητό πυθμένα συμβαίνει μια συγκέντρωση της διαταραχής της ελεύθερης επιφάνειας γύρω από τον παλμό. Δηλαδή η κλίση φαίνεται να παίζει έναν ρόλο φιλτραρίσματος της ανύψωσης συγκεντρώνοντάς τη γύρω από την κινούμενη πίεση.

Σε γενικές γραμμές παρατηρούμε το ίδιο και στην κατανομή των ταχυτήτων (σχήμα 3.25).



Σχήμα 3.25: Χρονική εξέλιξη της κατανομής ταχυτήτων.





## Κεφάλαιο 4

# Επέκταση στις δύο οριζόντιες διαστάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκταθούμε στις δύο οριζόντιες διαστάσεις. Θα μελετήσουμε τη διάδοση μιας αρχικής παραμόρφωσης σε σταθερό αρχικά και έπειτα σε μεταβλητό πυθμένα και στη συνέχεια θα μελετήσουμε την επίδραση κινούμενης πίεσης στα δύο αυτά περιβάλλοντα. Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων αξίζει να επισημάνουμε ορισμένα στοιχεία σχετικά με τις δύο διαστάσεις.

### 4.1 Οι εξισώσεις στις δύο διαστάσεις

Οι εξισώσεις του εξεταζόμενου συστήματος Boussinesq στις δύο οριζόντιες διαστάσεις, με  $\mathbf{u} = (u, w)$ , γράφονται στη μορφή:

$$\eta_t + \nabla \cdot ((h + \eta) \mathbf{u}) = 0, \quad (4.1)$$

και

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u})) - \frac{h}{6} \frac{\partial}{\partial t} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (4.2)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε γραμμικότητα και ήπια κλίση πυθμένα. Ασχολούμενοι με το δεξί μέλος της εξίσωσης 4.2 έχουμε:

$$\frac{h}{2} \nabla \nabla (h \mathbf{u}_t) = \frac{h}{2} (h \nabla^2 \mathbf{u}_t + 2 \nabla h \nabla \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \nabla^2 h). \quad (4.3)$$

Ο τελευταίος όρος της της 4.3 παραλείπεται (ήπια κλίση), οπότε το δεξί μέλος της 4.2 γίνεται:

$$\frac{h^2}{2} \nabla^2 \mathbf{u}_t - \frac{h^2}{6} \nabla^2 \mathbf{u}_t + h \nabla h \nabla \cdot \mathbf{u}_t. \quad (4.4)$$

Εν τω μεταξύ έχοντας υποθέσει γραμμικότητα το αριστερό μέλος της 4.2 γίνεται:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + g \nabla h \approx \mathbf{u}_t + g \nabla h. \quad (4.5)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 4.2, 4.4 και 4.5 και συνδυάζοντας και την εξωτερική πίεση, καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων:

$$\eta_t + (hu)_x + (hw)_y = 0, \quad (4.6)$$

$$u_t + g\eta_x = \frac{h^2}{3} \nabla^2 u_t + hh_x (u_{tx} + w_{ty}) + F_x, \quad (4.7)$$

$$w_t + g\eta_y = \frac{h^2}{3} \nabla^2 w_t + hh_y (u_{tx} + w_{ty}) + F_y. \quad (4.8)$$

Θα προχωρήσουμε στη συνέχεια με την διακριτοποίηση των εξισώσεων στη γραμμική τους μορφή και την επίλυσή της σε διάφορα χαρακτηριστικά παραδείγματα. Σημειώνεται ότι η μέθοδός μας επεκτείνεται στην αντιμετώπιση των μη γραμμικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας ένα σχήμα επαναλήψεων σε κάθε χρονικό βήμα όπου επανορίζεται η τιμή του  $h + \eta$  και  $\mathbf{u}$  στις 4.1 και 4.2 από την προηγούμενη πρόβλεψη.

## 4.2 Διακριτοποίηση του Συτήματος

Οι επιπλέον όροι που προκύπτουν σχετικά με τη διακριτοποίηση γίνονται:

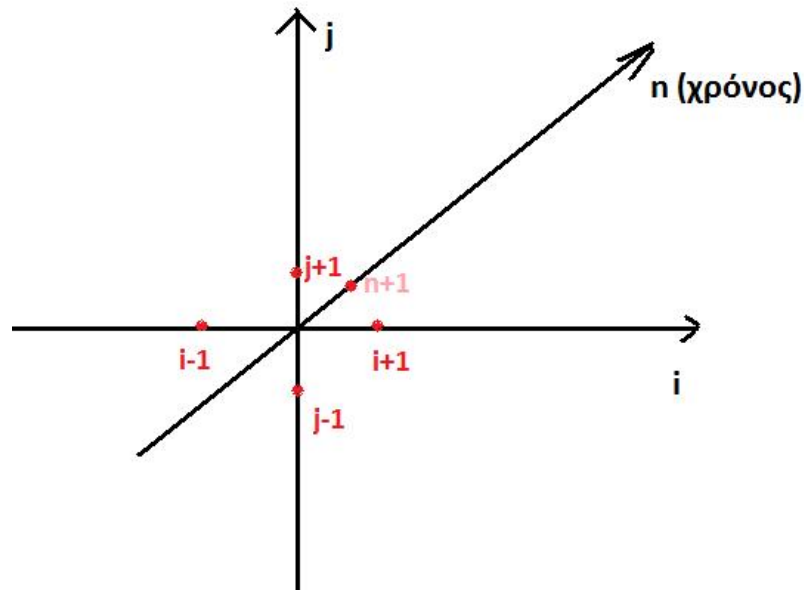
$$\nabla^2 u_t = \frac{(u_t)_{i+1,j} - 2(u_t)_{i,j} + (u_t)_{i-1,j}}{2\Delta x^2} + \frac{(u_t)_{i+1,j} - 2(u_t)_{i,j} + (u_t)_{i-1,j}}{2\Delta y^2}, \quad (4.9)$$

$$\nabla^2 w_t = \frac{(w_t)_{i,j+1} - 2(w_t)_{i,j} + (w_t)_{i,j-1}}{2\Delta x^2} + \frac{(w_t)_{i,j+1} - 2(w_t)_{i,j} + (w_t)_{i,j-1}}{2\Delta y^2}, \quad (4.10)$$

όπως επίσης και:

$$\nabla(h\mathbf{u}) = \frac{h_{i+1,j}u_{i+1,j} - h_{i-1,j}u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{h_{i,j+1}w_{i,j+1} - h_{i,j-1}w_{i,j-1}}{2\Delta y}. \quad (4.11)$$

Το πλέγμα στην περίπτωση των δύο οριζόντιων διαστάσεων φαίνεται όπως εικονίζεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Το πλέγμα στις δύο οριζόντιες διαστάσεις.

Εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση της μιας διάστασης, το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει θα είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ \hline | & | & | \\ \hline | & | & | \\ \hline | & | & | \\ \hline | & | & | \\ \hline | & | & | \\ \hline | & | & | \\ \hline | & | & | \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} \vdots \\ \eta_{i,j}^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,j}^n \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{i,j}^n \\ \vdots \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_x \\ \vdots \\ \vdots \\ f_y \\ \vdots \end{pmatrix} . \tag{4.12}$$

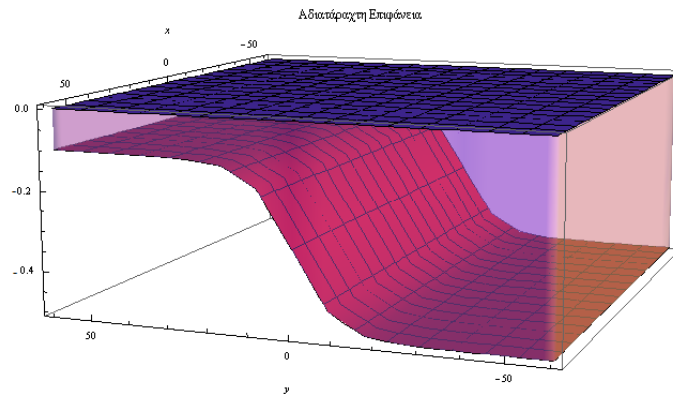
Αρχικά θα εργαστούμε σε σταθερό βάθος και στη συνέχεια θα εισάγουμε μεταβλητό πυθμένα όπως κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την εξίσωση στη μία οριζόντια διάσταση. Θα χρησιμοποιήσουμε έναν παλμό ως αρχική συνθήκη και στη συνέχεια μια κατανομή πίεσης η οποία θα είναι κινούμενη.

Σχετικά με τη βαθυμετρία επιλέξαμε μια συνάρτηση της μορφής:

$$h(x, y) = 0.5 (h_1 + h_3) - 0.5 (h_1 - h_3) \tanh(0.1y), \tag{4.13}$$

η οποία φαίνεται στο σχήμα 4.2, η οποία περιγράφει ομαλή ρήχωση προς την πλευρά των αυξανόμενων  $y$  τιμών.

Σε σχέση με τα σύνορα, χρησιμοποιούμε στρώμα απορρόφησης (βλ. σχήμα 3.4 από το προηγούμενο κεφάλαιο) με πάχος συγκρίσιμο του χαρακτηριστικού μήκους κύματος, που όπως θα δούμε απορροφά τον κυματισμό με επιτυχία.



Σχήμα 4.2: Η βαθυμετρία στις δύο οριζόντιες διαστάσεις.

## 4.3 Αποτελέσματα

### 4.3.1 Σταθερό βάθος

Ως αρχική συνθήκη υποθέσαμε μια ανύψωση της μορφής

$$\eta(x, y, t = 0) = A \exp^{-\gamma r^2} \cos(k(x - x_o)),$$

$$r^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2,$$

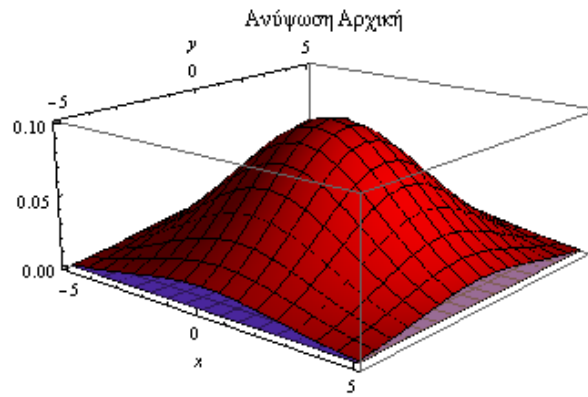
Οι τιμές που δίνουμε για ρεαλιστικούς υπολογισμούς:

$$A = 0.1, \quad \gamma = 0.05, \quad k = 0.2.$$

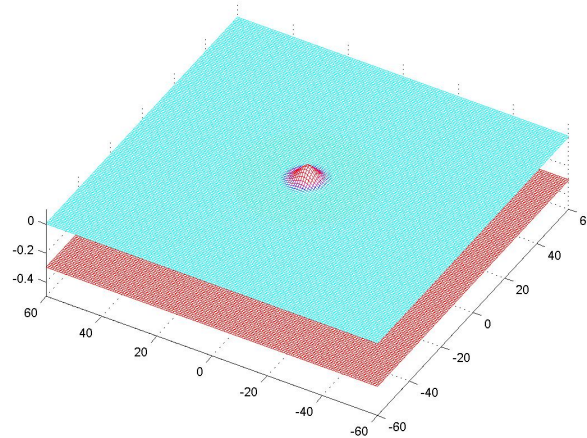
Οι συντεταγμένες  $x_o$  και  $y_o$  αντιπροσωπεύουν του κέντρου της αρχικής ανύψωσης στο οριζόντιο επίπεδο.

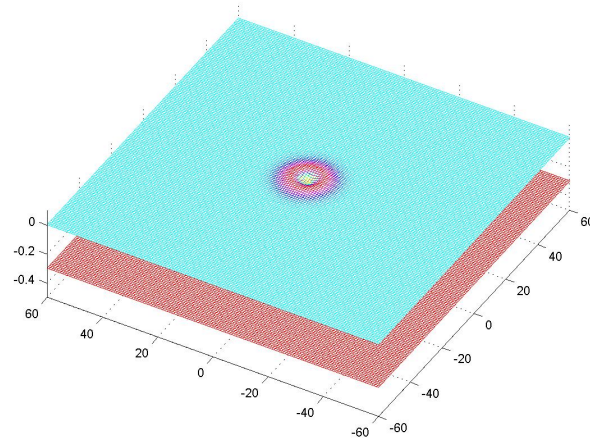
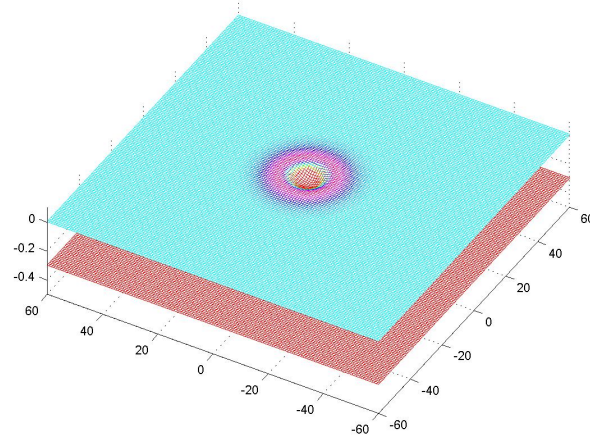
Ας δούμε λοιπόν τη χρονική εξέλιξη αυτής της αρχικής συνθήκης.

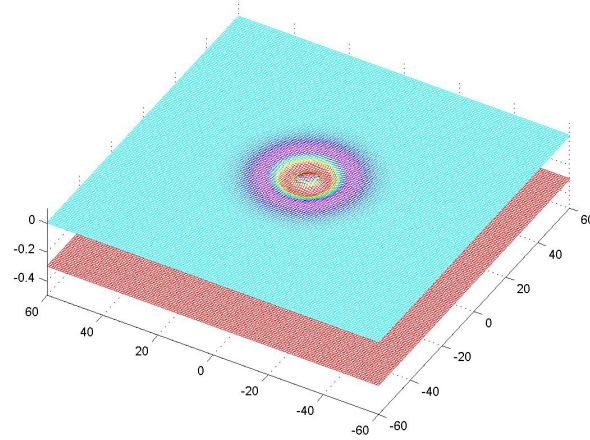
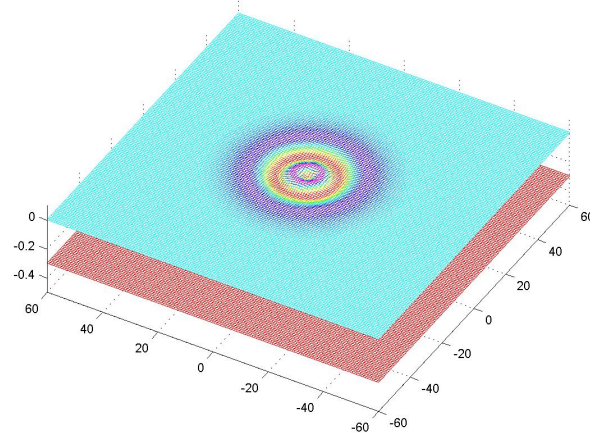
Η χρονική εξέλιξη λαμβάνει χώρα συμμετρικά υπό την έννοια ότι δημιουργεί μέτωπα με πολική συμμετρία και ίδιου πλάτους κύματος. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν αλλάζει το βάθος του πυθμένα, με αποτέλεσμα η ενεργειακή διαταραχή να κατανέμεται ομοιόμορφα κατά τη διάδοση του κυματισμού. Στα στιγμιότυπα των σχημάτων η συμμετρία αυτή καταδεικνύεται



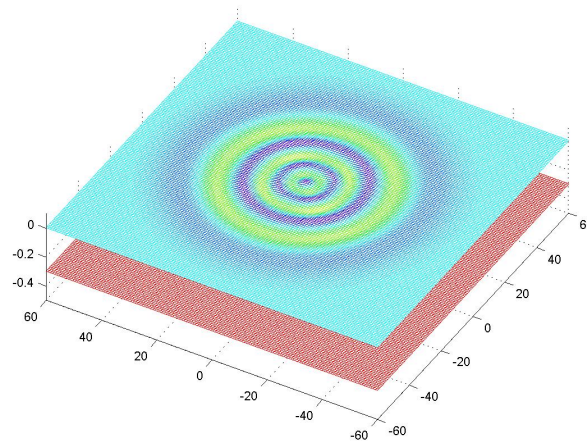
Σχήμα 4.3: Η αρχική συνθήκη.

Σχήμα 4.4: Στιγμιότυπο για  $t = 0s$ .

Σχήμα 4.5: Στιγμιότυπο για  $t = 1s$ .Σχήμα 4.6: Στιγμιότυπο για  $t = 2s$ .

Σχήμα 4.7: Στιγμιότυπο για  $t = 3s$ .Σχήμα 4.8: Στιγμιότυπο για  $t = 4s$ .





Σχήμα 4.9: Στιγμιότυπο για  $t = 8s$ .

από την ομοιομορφία στα χρώματα που αποτελούν επί της ουσίας τις ισοϋψείς καμπύλες στο υπό μελέτη πλέγμα.

Στο σχήμα 4.10 εικονίζουμε<sup>1</sup> μια ομοιόμορφη κυματική διάδοση, τα μέτωπα της οποίας σχηματίζουν ομόκεντρους κύκλους.

Επίσης η συνολική χρονική διάρκεια που επιλέγουμε είναι τέτοια όπου ο κυματισμός δεν προλαβαίνει να απορροφηθεί στα άκρα του πλέγματος.

---

<sup>1</sup>Φωτογραφία από τον H. Armstrong Roberts .



Σχήμα 4.10: Σχηματισμός κυματισμών στην επιφάνεια του νερού. Περίπτωση ομοιόμορφης διάδοσης.

### 4.3.2 Μεταβλητός πυθμένας

Εισάγοντας τη βαθυμετρία στο υπό μελέτη πρόβλημα, αναμένουμε μια χωρικά ασύμμετρη εξέλιξη, συναρτήσεως του χρόνου, η οποία θα οφείλεται στη μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας καθώς θα κινείται προς την περιοχή ρήχωσης.

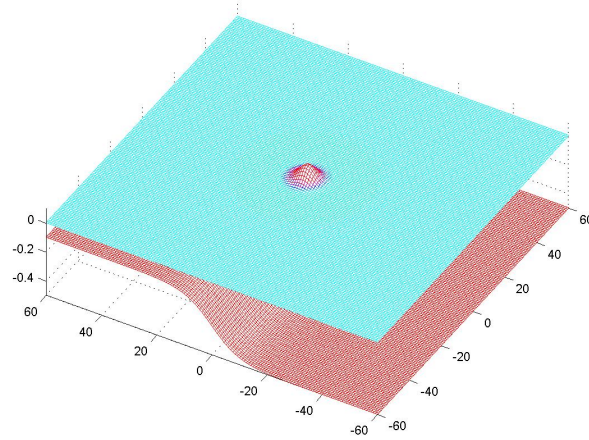
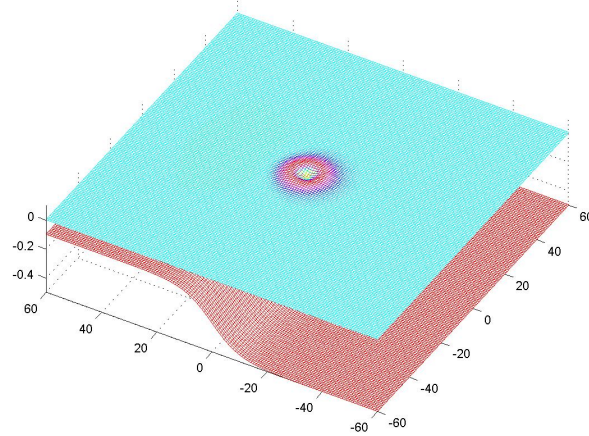
Παρατηρούμε ήδη από τη χρονική στιγμή  $t = 3 \text{ s}$  (σχήμα 4.14) την εμφάνιση του φαινομένου της ρήχωσης και της περίθλασης, δηλαδή την αύξηση του πλάτους σε συνδυασμό με τη μείωση της ταχύτητας του μετώπου, στα πλαίσια της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

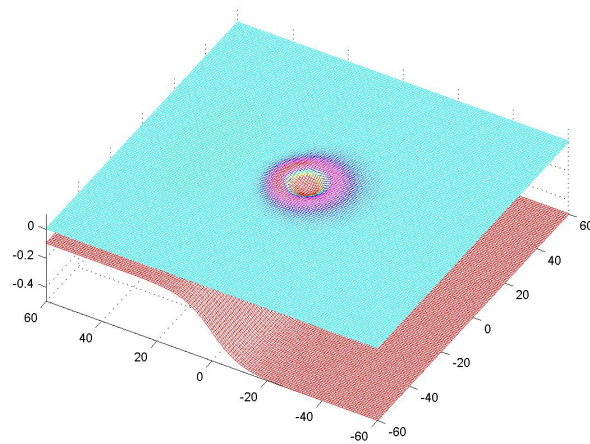
Από το στιγμιότυπο για  $t = 4 \text{ s}$  (σχήμα 4.15) αρχίζει να φαίνεται καθαρά και το φαινόμενο της ρήχωσης, δηλαδή η αύξηση του ύψους του κυματισμού shoaling καθώς αυτός πλησιάζει την ακτή. Στο σχήμα 4.16 βλέπουμε καθαρά το συνδυασμό των φαινομένων της ρήχωσης, της περίθλασης.

Στα σχήματα 4.17 και 4.18 αναδεικνύονται<sup>2,3</sup> τα φαινόμενα της ρήχωσης, της περίθλασης και της θραύσης αντίστοιχα.

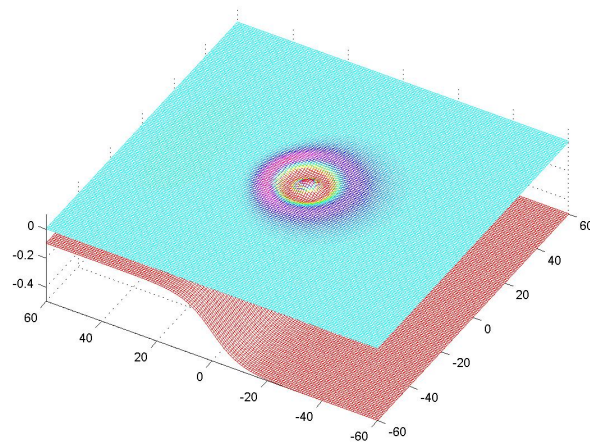
<sup>2</sup> Southern reef power. WA on Nov 3, 2009.

<sup>3</sup> Οι εικόνες έχουν αναρτηθεί στο Southern and Northern Australian wave climate.

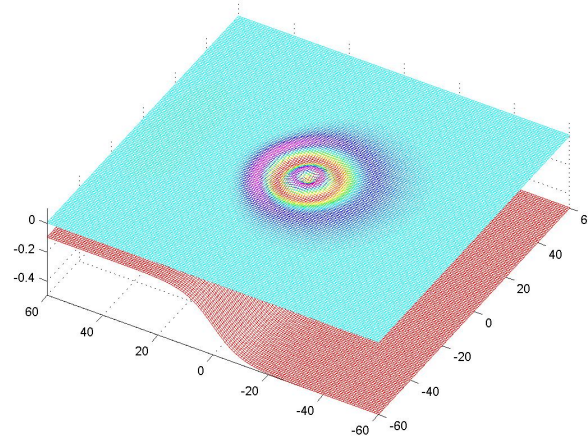
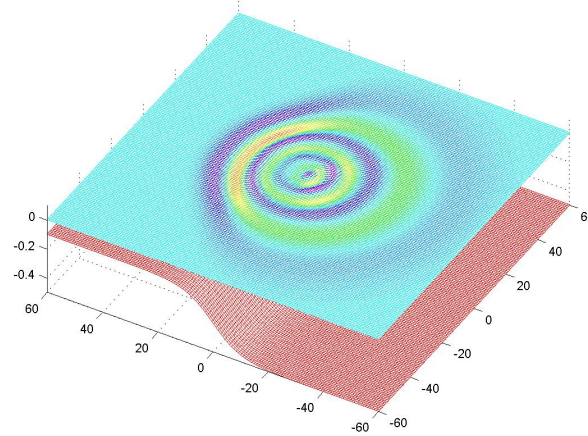
Σχήμα 4.11: Στιγμιότυπο για  $t = 0s$ .Σχήμα 4.12: Στιγμιότυπο για  $t = 1s$ .



Σχήμα 4.13: Στιγμιότυπο για  $t = 2s$ . Αρχίζει να εμφανίζεται χωρική ασυμμετρία στα μέτωπα.



Σχήμα 4.14: Στιγμιότυπο για  $t = 3s$ . Τα φαινόμενα διάθλασης και της περίθλασης είναι πλέον εμφανή.

Σχήμα 4.15: Στιγμιότυπο για  $t = 4s$ .Σχήμα 4.16: Στιγμιότυπο για  $t = 8s$ .



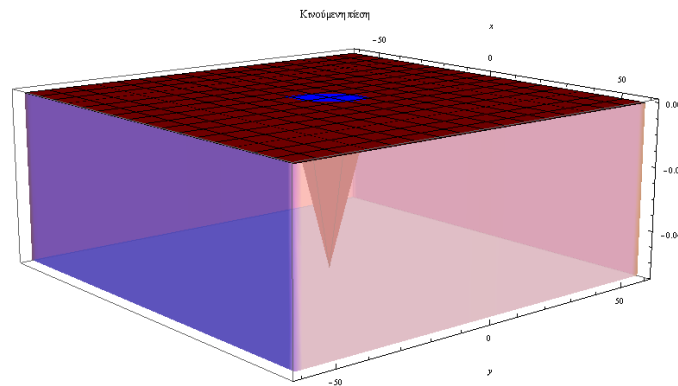
Σχήμα 4.17: Το φαινόμενο της ρήχωσης (shoaling) και της θραύσης (breaking) του κύματος.



Σχήμα 4.18: Το φαινόμενο της ρήχωσης, περίθλασης και θραύσης ενός μακρύ κυματισμού, κατά την είσοδό του στο Earlham Lagoon, Tasmania.

### 4.3.3 Κινούμενη πίεση

Στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε για την πίεση να έχει τη μορφή ενός παλμού (σχήμα 4.19), με κεντρικό συχνοτικό περιεχόμενο, με σταθερή ταχύτητα στο οριζόντιο επίπεδο.



Σχήμα 4.19: Αναπαράσταση της κινούμενης πίεσης.

Η ασκούμενη πίεση θεωρούμε ότι κινείται με ταχύτητα  $u = 7m/s$ , βάσει της

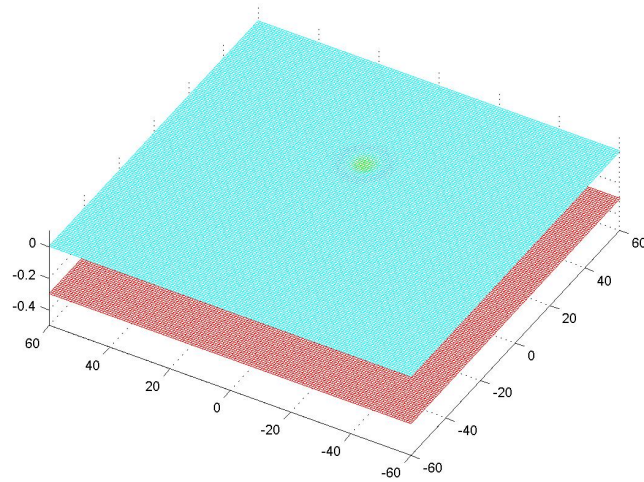
$$Fm = C \exp^{-\gamma r^2} \cos(k(r - x_r)),$$

με  $x_r = x_0 - ut$  και  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ , με  $x_0$  και  $y_0 = 0$  η αρχική θέση του κέντρου του παλμού. Ο παλμός κινείται παράλληλα με τη βαθυμετρία στην κατεύθυνση των αρνητικών  $x$ .

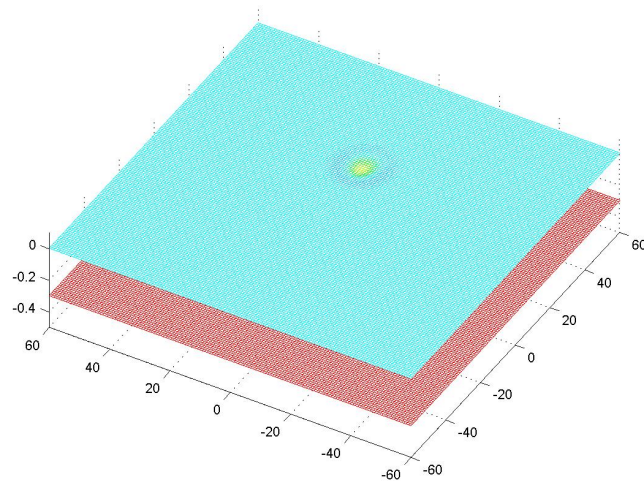
Παρουσιάζουμε στη συνέχεια αποτελέσματα υπολογισμών σε διάφορες χρονικές στιγμές. Ο παλμός ξεκινά από τη θέση  $x = -40m$  να φτάσει στο άκρο του υπολογιστικού χωρίου. Αναμένουμε ότι η κινούμενη πίεση θα δημιουργήσει συμμετρικά σχήματα Kelvin shape τα οποία θα αρχίσουν να αναπτύσσονται και να διαμορφώνονται πλήρως κατά την χρονική τους εξέλιξη.

Παρατηρούμε ότι πράγματι οι κυματισμοί είναι συμμετρικοί εμφανίζοντας το kelvin pattern<sup>4</sup>. Διακρίνουμε τις δύο ομάδες κυματισμών που έχουμε περιγράψει από την εισαγωγή,

<sup>4</sup>Η φωτογραφία έχει αναρτηθεί στο πηγή

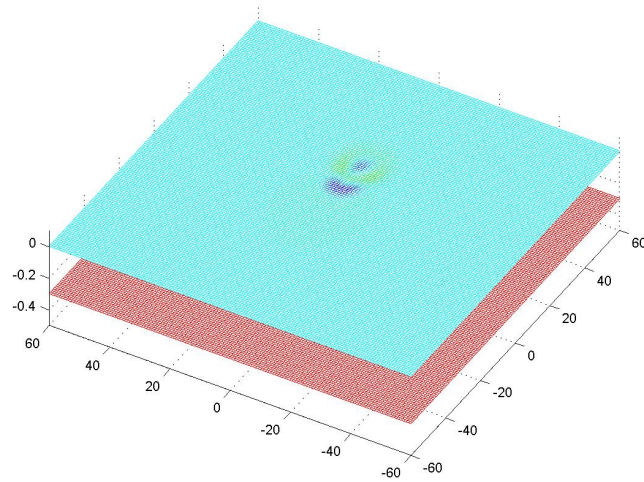


Σχήμα 4.20: Στιγμιότυπο για  $t = 0.7s$ .

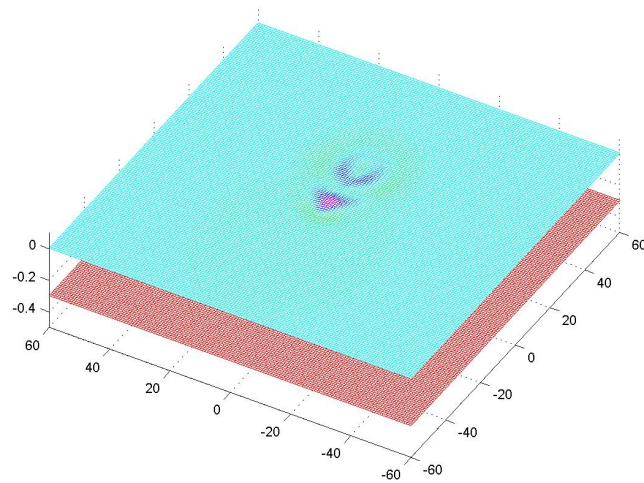


Σχήμα 4.21: Στιγμιότυπο για  $t = 1s$ .

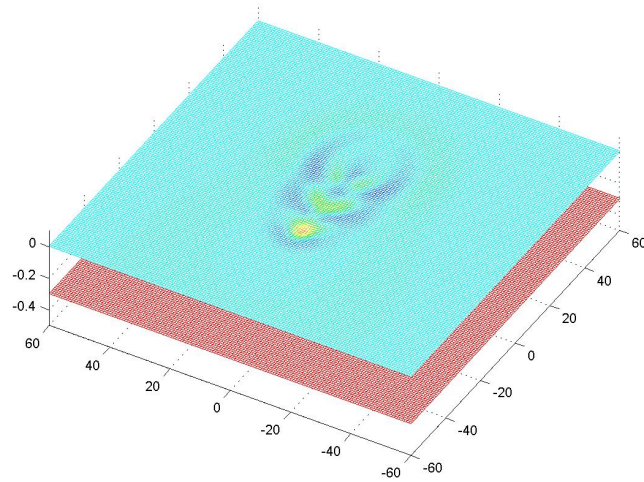
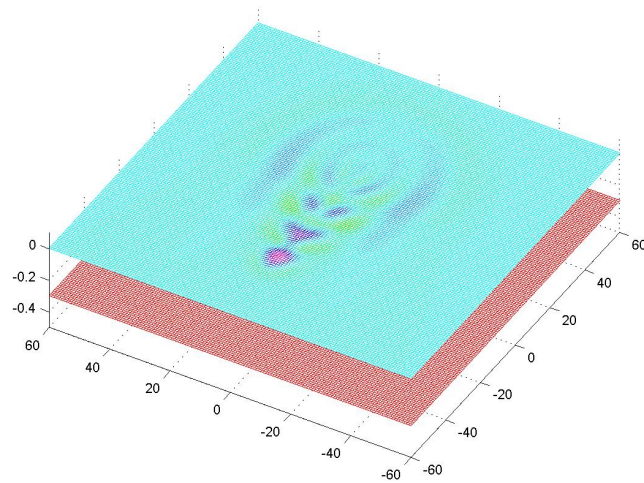




Σχήμα 4.22: Στιγμιότυπο για  $t = 2.5s$ .



Σχήμα 4.23: Στιγμιότυπο για  $t = 4s$ .

Σχήμα 4.24: Στιγμιότυπο για  $t = 6s$ .Σχήμα 4.25: Στιγμιότυπο για  $t = 8s$ .

τους εγκάρσιους και τους αποκλίνοντες. Στην εικόνα του σχήματος 4.26, παρουσιάζεται<sup>5</sup> το φαινόμενο σχηματισμού κυματισμών στην υπερκρίσιμη περιοχή ταχύτητας της κινούμενης πίεσης. Δηλαδή το πλοίο έχει ταχύτητα μεγαλύτερη της αντίστοιχης ταχύτητας που θα είχε το ρευστό από τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας για το εν λόγω βάθος. Το σύστημα των κυματισμών αυτών προσομοιώνεται και στο αριθμητικό μας παράδειγμα στα σχήματα από το σχήμα 4.20 έως το σχήμα 4.25.



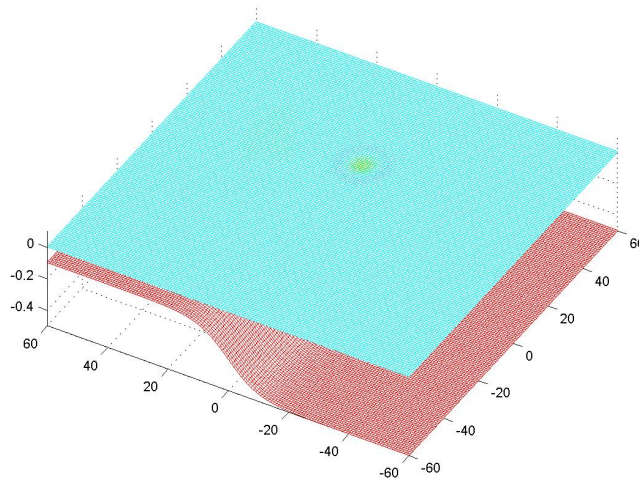
Σχήμα 4.26: Απόνερα ταχύπλοου στο Lyse fjord, στη Νορβηγία.

---

<sup>5</sup>Εικόνα από την Wikipedia.

#### 4.3.4 Κινούμενη πίεση - Μεταβαλλόμενη Βαθυμετρία

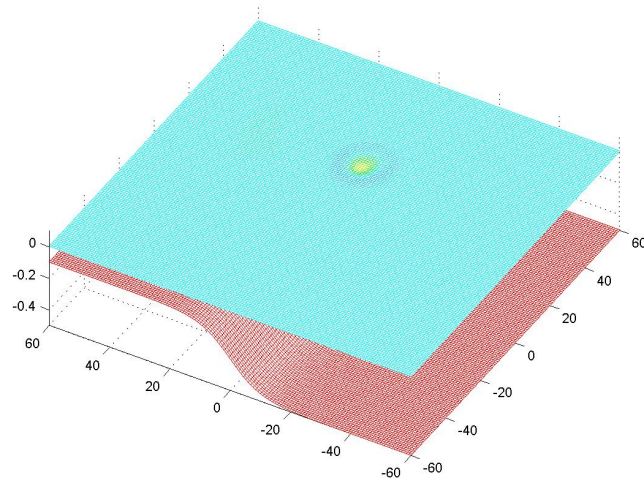
Τέλος εξετάζουμε την περίπτωση κινούμενης πίεσης θεωρούμενης στην προαναφερθείσα βαθυμετρία. Στην περίπτωση μας αναμένουμε την εμφάνιση του φαινομένου της ρήχωσης (shoaling) δεξιά της κινούμενης πίεσης εξαιτίας της μεταβολής του πυθμένα.



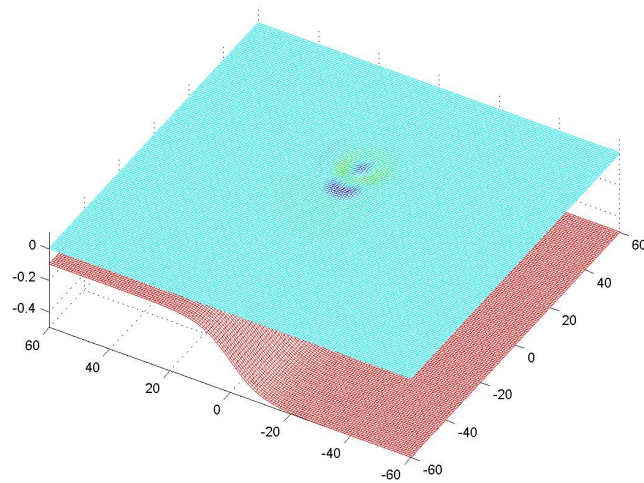
Σχήμα 4.27: Στιγμιότυπο για  $t = 0.7s$ .

Το φαινόμενο της ρήχωσης λόγω της διατήρησης της ενέργειας μπορούμε να το παρατηρήσουμε να συμβαίνει κατά τη διέλευση ενός πλοίου κοντά από την ακτή. Οι αρχικοί σύνθετοι κυματισμοί (Kelvin pattern) ελαττώνουν το μήκος κύματός τους προς την πλευρά της ακτής ενώ ταυτόχρονα αυξάνουν το ύψος τους. Αυτό προκύπτει εφόσον η ταχύτητά τους μειώνεται καθώς κατευθύνονται σε περιοχές ρήχωσης. Η διαφορά της ταχύτητας διάδοσης κατά την προσέγγισή τους στην ακτή, φαίνεται από το γεγονός ότι οι αποκλίνοντες κυματισμοί στον ομόρρου του πλοίου, δεν είναι πλέον συμμετρικοί ως προς τη διεύθυνση κίνησής του, αλλά πυκνώνουν από τη μια μεριά, δηλαδή από αυτή που ταξιδεύει προς την ακτή. Αυτό αποκαλύπτει το γεγονός ότι το μέτωπο κινείται με μικρότερη ταχύτητα σε σχέση με αυτό που ταξιδεύει προς τα μεγαλύτερα βάθη. Αυτό μπορούμε να το παρατηρήσουμε στην εικόνα 4.33<sup>6</sup>,

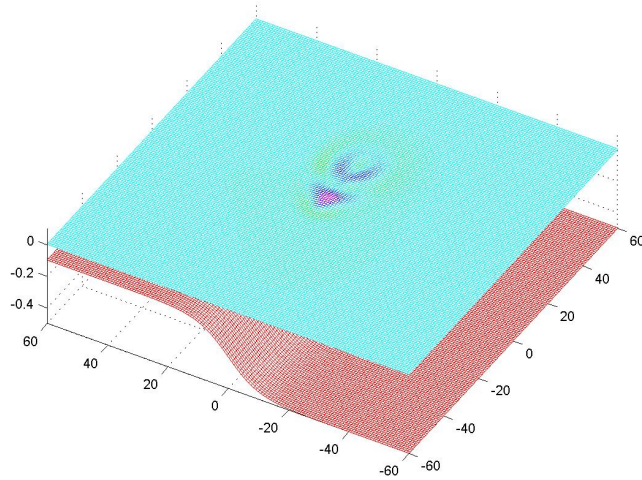
<sup>6</sup> Βλ. αντίστοιχη πηγή .



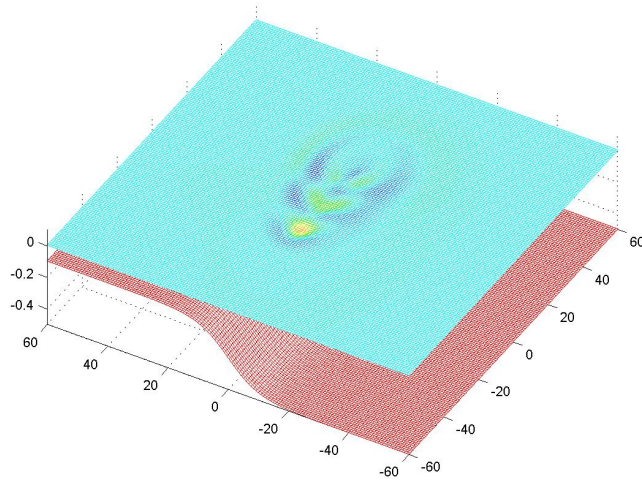
Σχήμα 4.28: Στιγμιότυπο για  $t = 1s$ .



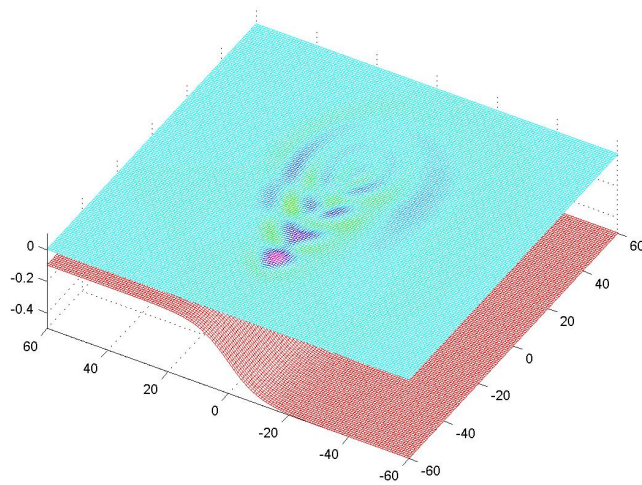
Σχήμα 4.29: Στιγμιότυπο για  $t = 2.5s$ .



Σχήμα 4.30: Στιγμιότυπο για  $t = 4s$ .



Σχήμα 4.31: Στιγμιότυπο για  $t = 6s$ .



Σχήμα 4.32: Στιγμιότυπο για  $t = 8s$ .

όπου εμφανίζονται καθαρά οι επιδράσεις των φαινομένων διάθλασης και περίθλασης, λόγω των μεταβολών της βαθυμετρίας, στη μορφή του συστήματος των κυματισμών πλοίου.



Σχήμα 4.33: Στην εικόνα αυτή παρατηρούμε τα φαινόμενα περίθλασης και διάθλασης λόγω μεταβολών της βαθυμετρίας. Οι κυματισμοί πυκνώνουν, και αλλάζουν την κατεύθυνσή τους καθώς προσεγγίζουν την ακτή.



# Κεφάλαιο 5

## Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή κινήθηκε σε δύο βασικούς άξονες. Αρχικά ασχοληθήκαμε με το θεωρητικό κομμάτι της εξαγωγής των εξισώσεων Boussinesq σε περιβάλλοντα σταθερού βάθους νερού αλλά και σε περιβάλλοντα μεταβλητής βαθυμετρίας. Οι εξισώσεις μελετήθηκαν στη μορφή που παρήχθησαν από τον Peregrine(1968) για γενική μορφολογία πυθμένα (υπό τον περιορισμό μικρών κλίσεων), και όπως ακολούθως απλοποιούνται για κυματική διάδοση σε λωρίδα ρευστού σταθερού βάθους.

Προκειμένου να εξαγάγουμε τις εν λόγω εξισώσεις στηριχτήκαμε ως αφετηρία στο συναρτησιακό του Luke(1967) σε συνδυασμό με απλές πολυωνυμικές αναπαραστάσεις του κυματικού δυναμικού κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Στη συνέχεια, με εφαρμογή της θεωρίας των μεταβολών διατυπώσαμε τις εξισώσεις των συντελεστών του ανωτέρου αναπτύγματος, από όπου με επεξεργασία και περαιτέρω απλουστεύσεις προέκυψαν οι εξισώσεις Boussinesq. Ακολούθως εξετάσαμε τη μορφή που αυτές μπορούν να πάρουν και παρήχθεισαν αναλυτικές λύσεις σε απλές περιπτώσεις, που αφορούν σολιτονικούς παλμούς στην οριακή περίπτωση περιοδικών λύσεων μεγάλου μήκους κύματος.

Ο δεύτερος άξονας σχετίζεται με την ανάπτυξη του αριθμητικού μοντέλου, το οποίο παρουσιάσαμε στη μία και στις δύο οριζόντιες διαστάσεις. Επεξεργαζόμενοι τις εξισώσεις Boussinesq και εισάγοντας κατάλληλη διακριτοποίηση με την μέθοδο των δευτεροτάξιων πεπερασμένων

διαφορών, συζητήθηκε η επέκταση του μοντέλου στις μη γραμμικές εξισώσεις με κατάλληλο χειρισμό των αντιστοίχων όρων και επαναλήψεις. Κάτι τέτοιο όμως είναι υπολογιστικά απαιτητικότερο και πιο χρονοβόρο ιδιαίτερα στην περίπτωση των δύο οριζόντιων διαστάσεων, και ως εκ τούτου η διερεύνησή του αφήνεται για μελλοντική εργασία.

Παρουσιάστηκαν παραδείγματα εφαρμογής του μοντέλου σε συγκεκριμένα περιβάλλοντα και βαθυμετρίες τύπου ομαλής ρήχωσης. Η επιλογή της συγκεκριμένης βαθυμετρίας, μάς αποκαλύπτει τα φαινόμενα διάθλασης, ρήχωσης και περίθλασης. Εντούτοις το φαινόμενο της περίθλασης δεν εμφανίζεται ισχυρά στην εξετασθείσα περίπτωση, καθότι η συγκεκριμένη βαθυμετρία δεν μεταβάλλεται ως προς τον έναν οριζόντιο άξονα.

Σε σχέση λοιπόν με την περαιτέρω διερεύνηση του θέματος, θα μπορούσαμε αρχικά, και πριν θεωρήσουμε ασύμμετρη τοπογραφία πυθμένα, να μελετήσουμε καταστάσεις όπου η επιβαλλόμενη πίεση μετακινείται σε μια κατεύθυνση που δεν είναι παράλληλη με την ακτογραμμή, οπότε τα φαινόμενα περίθλασης θα κάνουν εντονότερα την εμφάνισή τους. Επίσης θα μπορούσαμε να μελετήσουμε πιο σύνθετους κυματισμούς μεταβάλλοντας τα χαρακτηριστικά της διέγερσης, των αρχικών συνθηκών, και τη γεωμετρία του συνόρου.

# Παράρτημα

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζουμε τις πλήρεις εκφράσεις των όρων ανώτερης τάξης (high order terms - HOT ) των εξισώσεων 2.36 και 2.41.

Η εξίσωση 2.41 σε πλήρη μορφή είναι ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
& u_t - (h h_x + h_x \eta + h \eta_x) u_{xt} - \left( \frac{h^2}{2} + h \eta \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} u \right) + \\
& \left( \frac{h}{12} h_x + \frac{h^2}{2} h_x \eta + \frac{h^3}{6} \eta_x \left( \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial t} u \right) + \frac{h^3 \eta}{6} \right) \left( \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} u \right) + \\
& u u_x - h_x^2 u u_x - h h_{xx} u u_x - h h_x u \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) + \\
& h h_x^3 u_x^2 + h^2 h_x h_{xx} u_x^2 + h^2 h_x^2 u_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) - \\
& h h_x u \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) - \frac{h^2}{2} u_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) - \frac{h^2}{2} u_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) + \frac{3}{2} h^2 h_x^2 u_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) + \\
& \frac{h^3}{2} h_{xx} u_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) + \frac{h^3}{2} h_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right)^2 + \frac{h^3}{2} h_x u_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) + \\
& \frac{1}{2} h^3 h_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right)^2 + \frac{1}{4} h^4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) + \frac{1}{2} h^2 h_x^2 u \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) + \frac{1}{6} h^3 h_{xx} u \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) + \\
& \frac{1}{6} h^3 h_x u_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) + \frac{1}{6} h^3 h_x u \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) - \\
& \frac{2}{3} h^3 h_x^3 u_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) - \frac{1}{3} h^4 h_x h_{xx} u_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) - \frac{1}{6} h^4 h_x^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) - \frac{1}{6} h^4 h_x^2 u_x \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) - \\
& \frac{5}{12} h^4 h_x^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) - \frac{1}{12} h^5 h_{xx} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) - \frac{1}{12} h^5 h_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right)^2 - \frac{1}{12} h^5 h_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) + \\
& \frac{1}{12} h^5 h_x^3 \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right)^2 + \frac{1}{36} h^6 h_x h_{xx} \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right)^2 + \frac{1}{12} h^6 h_x^2 \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) + \\
& \frac{1}{6} h^3 h_x u \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) + \frac{1}{24} h^4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) + \\
& \frac{1}{24} h^4 u \left( \frac{\partial^5}{\partial x^5} u \right) - \frac{5}{24} h^4 h_x^2 u_x \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) - \frac{1}{24} h^5 h_{xx} u_x \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) - \\
& \frac{1}{24} h^5 h_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) - \frac{1}{24} h^5 h_x u_x \left( \frac{\partial^5}{\partial x^5} u \right) - \\
& \frac{1}{8} h^5 h_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) - \frac{1}{48} h^6 \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) - \frac{1}{48} h^6 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^5}{\partial x^5} u \right) + \\
& \frac{7}{104} h^6 h_x^2 \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) + \frac{1}{104} h^7 h_{xx} \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) + \\
& \frac{1}{104} h^7 h_x \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right)^2 + \frac{1}{104} h^7 h_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) \left( \frac{\partial^5}{\partial x^5} u \right) + \frac{1}{144} h^7 h_x \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right)^2 + \frac{1}{576} h^8 \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) \left( \frac{\partial^5}{\partial x^5} u \right) + \\
& h h_x u_x^2 + h^2 u_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) - \frac{2}{3} h^3 h_x u_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) - \frac{1}{6} h^4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) - \frac{1}{6} h^4 u_x \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) + \\
& \frac{1}{12} h^5 h_x \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right)^2 + \frac{1}{36} h^6 \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \right) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u \right) + g \eta_x = 0
\end{aligned}$$

Επίσης η εξίσωση 2.36 σε πλήρη μορφή είναι ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\phi_x^2 = & \varphi_x^2 - 2hh_x\varphi_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right) - 2\eta h_x\varphi_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right) + h^2h_x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)^2 \\
& 2h\eta h_x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)^2 + \eta^2h_x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)^2 - h^2\varphi_x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right) - \\
& 2h\eta\varphi_x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right) - \eta^2\varphi_x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right) + h^3h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right) + 3h^2\eta h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right) + \\
& 3h\eta^2h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right) + \eta^3h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right) + \frac{1}{4}h^4\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)^2 + h^3\eta\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)^2 + \\
& \frac{3}{2}h^2\eta^2\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)^2 + h\eta^3\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)^2 + \frac{1}{4}\eta^4\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)^2 + \frac{1}{3}h^3h_x\varphi_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) + \\
& h^2\eta h_x\varphi_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) + h\eta^2h_x\varphi_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - \frac{1}{3}h^4h_x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - \\
& \frac{4}{3}h^3\eta h_x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - 2h^2\eta^2h_x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - h\eta^3h_x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - \\
& \frac{1}{6}h^5h_x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - \frac{5}{6}h^4\eta h_x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - \\
& \frac{5}{3}h^3\eta^2h_x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - \frac{3}{2}h^2\eta^3h_x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) - \\
& \frac{1}{2}h\eta^4h_x\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right) + \frac{1}{36}h^6h_x^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)^2 + \frac{1}{6}h^5\eta h_x^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)^2 + \frac{5}{12}h^4\eta^2h_x^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)^2 + \\
& \frac{1}{2}h^3\eta^3h_x^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)^2 + \frac{1}{4}h^2\eta^4h_x^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)^2 + \frac{1}{12}h^4\varphi_x\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \\
& \frac{1}{3}h^3\eta\varphi_x\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \frac{1}{2}h^2\eta^2\varphi_x\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \frac{1}{12}\eta^4\varphi_x\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \\
& \frac{1}{12}h^5h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \frac{5}{12}h^4\eta h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \frac{5}{6}h^3\eta^2h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \\
& \frac{1}{2}h^2\eta^3h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \frac{1}{12}h\eta^4h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \frac{1}{12}\eta^5h_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \\
& \frac{1}{24}h^6\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \frac{1}{4}h^5\eta\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \frac{5}{8}h^4\eta^2\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \\
& \frac{2}{3}h^3\eta^3\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \frac{7}{24}h^2\eta^4\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \\
& \frac{1}{12}h\eta^5\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) - \frac{1}{24}\eta^6\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \frac{1}{72}h^7h_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \\
& \frac{7}{72}h^6\eta h_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \frac{7}{24}h^5\eta^2h_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \\
& \frac{5}{12}h^4\eta^3h_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \frac{19}{72}h^3\eta^4h_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \\
& \frac{1}{24}h^2\eta^5h_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \frac{1}{24}h\eta^6h_x\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\varphi\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right) + \frac{1}{576}h^8\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right)^2 + \\
& \frac{1}{72}h^7\eta\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right)^2 + \frac{7}{144}h^6\eta^2\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right)^2 + \frac{1}{12}h^5\eta^3\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right)^2 + \frac{19}{288}h^4\eta^4\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right)^2 + \\
& \frac{1}{72}h^3\eta^5\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right)^2 + \frac{1}{48}h^2\eta^6\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right)^2 + \frac{1}{576}\eta^8\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}\varphi\right)^2
\end{aligned}$$

# Βιβλιογραφία

- [1] Belibassakis, K.A., *A coupled-mode technique for the transformation of ship generated waves over variable bathymetry regions*, Applied Ocean Research, vol.25, 321-336, 2003.
- [2] Belibassakis, K.A., *A combined panel method/coupled-mode technique for the spatial evolution of ship-generated wave systems over variable bathymetry regions*, Proc.10th International Conference on Fast Sea Transportation (FAST 2009), Athens, Greece, 2009.
- [3] Peregrine, D.H., *Long waves on a beach*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 27, 815-827, 1967.
- [4] Beji S. and Battjes J.A., *Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar*, Coastal Engineering vol. 23, 1-16, 1994.
- [5] Pnevmatikos St., Flytzanis N., Rernoissenet M. , *Phys. Rev. B*, 33 2308 - 2311, 1986.
- [6] Beji S., Battjes J.A., *Experimental investigation of wave propagation over a bar*, Coastal Engineering vol. 19, 151-162, 1993.
- [7] Beji, S., Nadaoka, K., *A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth* Ocean Engineering, vol. 23, 691-701, 1996.

- [8] The legacy of V A Stelkov, *AMS, Vol 64, No 1*, πηγή, 2014.
- [9] Craik D. D. Alex, *The origins of water wave theory*, *Annu. Rev. Fluid Mech*, vol. 36,1-28, 2004.
- [10] Mei, C.,Mehaute, L., *Note on the equations of long waves over an uneven bottom*, *J.Geophys.Res.*71,393, 1966.
- [11] Witting, J.M., *A unified model for the evolution non linear water waves* *J. Comput.Phys.*, 56,203-236, 1984.
- [12] Madsen, P.A., Murray, R., Sorensen, O.R., 1991. *A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics* *Coastal Eng.*15, 371-388, 1991.
- [13] Madsen, P.A.,Sorensen, O.R., *A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics Part2. A slowly-varying bathymetry*. *Coastal Eng.*18,183-204, 1992.
- [14] Liu, P.,Wu,T., *Waves generated by moving pressure disturbances in rectangular and trapezoidal channels* *J.Hydraul.Res.* 42,163-171, 2004.
- [15] Torsvik, T.,Pedersen,G.,Dysthe,K., *Waves generated by a pressure disturbance moving in a channe with a variablecross-sectional topography* *J. Waterway Port Coast. OceanEng.*135,120-123, 2009b.
- [16] Lynett, P., Wu, T., Liu, P., *Modeling wave runup with depth-integrated equations*. *CoastalEng.*46,89-107, 2002.
- [17] Torsvik, T.,Didenkulova, I., Soomere, T., Parnell, K.E., *Variability in spatial patterns of long non linear waves from fast ferries* *Nonlinear Proc.Geophys.* 16, 351-363, 2009a.

- [18] Nascimento, M.F., Neves, C.F., Maciel, G.d.F., *Propagation of shipwaves on a sloping bottom. In: 31st International Conference on Coastal Engineering* Hamburg, Germany, August 31-September 05, pp. 696-708, 2008.
- [19] Wei, G., Kirby, J., *Time - dependent numerical code for extended Boussinesq equations* J. Waterway Port Coast. Ocean Eng. 121, 251-261, 1995.
- [20] Bayraktar Ersan D., Beji S., *Numerical simulation of waves generated by a moving pressure field* Ocean Engineering 59 231-239, 2013.
- [21] *Report on the investigation of the man overboard fatality from the angling boat PURDY at Shipwash Rank, off Harwich on 17 July 1999, MAIB Report No 17/2000:* Εδώ είναι το αντίστοιχο link, 2000.
- [22] Γρηγορόπουλος Γ., Χαλκιάς Δ., ΤΕΧΝΙΚΑ ΧΡΟΝΙΚΑ, *Πρόβλεψη περιβαλλοντικών επιδράσεων των απόνερων ταχύπλων σκαφών στις ακτές και τα μέτρα περιορισμού τους*, Ιούλιος - Αύγουστος 2008.
- [23] E. O. Tuck, *The wave resistance formula of J.H. Michell (1898) and its significance to recent research in ship hydrodynamics* J. Austral. Math. Soc. Ser. B 30 , 365-377, 1989.
- [24] Michell J., *The Wave Resistance of a Ship*, Phil. Mag., 5th series, vol. 45, p. 106, 1898.
- [25] Havelock H., *Theory of Wave Resistance* , Proc. Royal Soc., sero A, vol. 183, p. 339, 1932.
- [26] Havelock H., *Wave Resistance: the Mutual Action of Two Bodies* , Proc. Royal Soc., sero A, vol. 155, p. 460, 1936.
- [27] Ursell F. *The long-wave paradox in the theory of gravity waves*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 49 (4): 685-694, 1953.

- [28] Fenton J. D., *Non Linear Wave Theories*, The Sea Vol.9: Ocean Engineering Science, Eds.B.Le Mehaute and D.M.Hanes, Wiley, New York: 1990.
- [29] Belibassakis K.A., Gerostathis Th., Athanassoulis G.A., *A coupled-mode model for water wave scattering by horizontal, non-homogeneous current in general bottom topography*, Applied Ocean Research, Vol.33, pp. 384 - 397, 2011.
- [30] Hargreaves R., *A pressure integral as a kinetic potential*, Phil. Mag. vol xvi, p. 436, 1908.
- [31] Luke J. C., *A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface*, Journal of Fluid Mechanics 27 (2): 395-397, 1967.
- [32] Boussinesq J., *Theorie des ondes et des remous qui se propagent Le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond* Pures et Appliquees, Deuxieme Serie 17: 55-108 1872.
- [33] Miles W. J., *Solitary Waves*, Ann. Rev. Fluid Mech. 12: 11-43, 1980.
- [34] Πνευματικός Σ., *Τάξη και Χάος στα Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα*, Τόμος Ι, Πρακτικά πρώτου σχολείου Μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων (Πάτρα, Ιούλιος 1987), Επιστ. Εκδότες: Στέφανος Πνευματικός και Αναστ. Μπούντης, Αθήνα 1988.
- [35] Russell J. S., *Report of the Committee on Waves*, Rep. Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., 7th, Liverpool, pp. 417 - 496, London : John Murray, 1838.
- [36] Bazin H. , *Recherches experimentales sur la propagation des ondes*, Mem. presentes par divers Savants a L'Acad. Sci. Inst. France 19 : 495 - 644, 1865.
- [37] Madsen P.A., Schäffer H.A., *A review of Boussinesq-type equations for surface gravity waves*, In *Advances in Coastal and Ocean Engineering, vol. 5*, Liu PL-F (ed.). World Scientific: Singapore, 1-95, 1999.



- [38] Abbott M.B., Petrsen H.M., Skovgaard O *On the numerical modeling of short waves in shallow water* Journal of Hydraulic Research ; bf16(3):173-203, 1978.
- [39] Abbott M.B., McCowan A.D., Warren I.R., *Accuracy of short wave numerical models*, Journal of Hydraulic Engineering ; **110**(10):1287-1301, 1984.
- [40] Fadugba et.al, *Crank Nicolson Method for Solving Parabolic Partial Differential Equations*, IJA2M , Vol.1, No.3 , 8-23, ISSN: 2336-0054, Sep. 2013.
- [41] Loh P. R., Oskooi A. F., Ibanescu M., Skorobogatiy M., and Johnson S. G., *Fundamental relation between phase and group velocity, and application to the failure of perfectly matched layers in backward-wave structures*, Phys. Rev. E 79 065601(R), 2009.
- [42] Pearson R.A. , *Consistent boundary conditions for numerical models of systems that admit dispersive waves*, J Atmos Sci 31:1481-1489, 1974.
- [43] Engquist B., Majda A. , *Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves*, Math Comput 139:629-651, 1977.
- [44] Orlanski I., *A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows*, J Comput Phys 21:251-269, 1976.
- [45] Camerlengo A.L., O'Brien JJ, *Open boundary conditions in rotating fluids*, J Comput Phys 35:12-35, 1980.
- [46] Miller M.J., Thorpe A.J., *Radiation conditions for the lateral boundaries of limited-area numerical models*, Q J R Meteorol Soc 107:615-628, 1981.
- [47] Raymond W.H., Kuo H.L., *A radiation boundary condition for multi-dimensional flows*, Q J R Meteorol Soc 110:535- 551, 1984.

- [48] Palma E.D., Matano R.P., *Dynamical impacts associated with radiation boundary conditions*, J Sea Res 46(2):117-132, 2001.
- [49] Modave A. et al, *On the parameters of absorbing layers for shallow water models*, Ocean Dynamics 60:65-79 DOI 10.1007/s10236-009-0243-0, 2010.
- [50] Davies H.C. , *A lateral boundary formulation for multi-level prediction models*, Q J R Meteorol Soc 102:405-418, 1976.
- [51] Berenger J.P., *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J Comput Phys 114:185-200, 1994.
- [52] Berenger JP, *Perfectly matched layer (PML) for computational electromagnetics*, Morgan and Claypool, San Rafael, 2007.
- [53] Hu F.Q., *On absorbing boundary conditions for linearized euler equations by a perfectly matched layer*, J Comput Phys 129:201-219, 1996.
- [54] Hu F.Q., *A stable, perfectly matched layer for linearized euler equations in unsplit physical variables* , J Comput Phys 173:455-480, 2001.
- [55] Hu F.Q., *Development of PML absorbing boundary conditions for computational aeroacoustics: a progress review*, Comput Fluids 37:336-348, 2008.
- [56] Darblade G., Baraille R., Le Roux A.Y., Carton X., Pinchon D., *Conditions limites non réfléchissantes pour un modele de Saint-Venant bidimensionnel barotrope linearise. Comptes Rendus de l Acad? , mie des Sciences Paris 324:485- 490, 1997.*
- [57] Navon I.M., Neta B., Hussaini M.Y., *A perfectly matched layer approach to the linearized shallow water equations models* , Mon Weather Rev 132:1369-1378, 2004.

- [58] Belibassakis K.A., Athanassoulis G.A., Gerostathis Th. , *A coupled-mode model for the refraction - diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry*, Appl Ocean Res ;23(6):319-36, 2001.
- [59] Belibassakis K.A., Athanassoulis G.A., *A coupled-mode system with application to nonlinear water waves propagating in finite water depth and invariable bathymetry regions*, Coast Eng ;58:337-50, 2011.
- [60] Filippas E. S. , Belibassakis K. A., *Hydrodynamic analysis of flapping-foil thrusters operating beneath the free surface and in waves*, 2014.
- [61] Quak E., Soomere T. *Applied Wave Mathematics*, ©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009.
- [62] Krylov, A.N.: *On the wave resistance and large ship waves. In: My Memoirs*, pp. 364-368. Politechnika, Sankt-Peterburg (in Russian), 2003.
- [63] Loitsyanskii L. G., *Mechanics of Liquids and Gases*, Pergamon Press , p. 24 -29, 1966.
- [64] *Explorations in the History of Machines and Mechanisms*, Proceedings of HMM2012, Springer Science + Business Media Dordrecht, p. 42-45, 2012.
- [65] Kostyukov A. A., *Theory of Ship Waves and Wave Resistance*, 1959.
- [66] Georgi H., *The physics of waves*, by Prentice-Hall, Inc, 1993.
- [67] Debnath L., *Nonlinear Water Waves*, Academic Press, 1994.
- [68] Μπελιπμασάκης Κ.-Αθανασούλης Γ. , Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος *Κυματικά Φαινόμενα στο θαλάσσιο περιβάλλον*, 2012.
- [69] Massel S.R., *Hydrodynamics of coastal zones* , Elsevier, 1989.
- [70] Goldstein H., *Κλασσική Μηχανική*, Εκδ. Π.Πουρναράς, Μτφ. Γ.Τζιβανίδης, 1980.

- [71] Bliss G. A., *Lectures on the calculus of variations*, Phoenix Science Series, 1945.
- [72] Gelfand I. M. and Fomin S. V. , *Calculus of Variations* , Prentice Hall Inc., 1963; Dover, 2000.
- [73] Dean R. G., Dalrymple R. A., *Water wave mechanics for engineers and scientists* , World Scientific 1991.
- [74] Bateman H., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Dover, 1932.
- [75] Nettel S., *Wave Physics Oscillations - Solitons - Chaos*, Fourth Edition, Springer 2009.
- [76] Weinberg E. J., *Classical Solutions in Quantum Field Theory Solitons and Instantons in High Energy Physics* , cambridge university press 2012.
- [77] Lancos C., *The variational principles of mechanics*, 1949.
- [78] Dingemans M.W. , *Water wave propagation over uneven bottoms*, Parts 1 - 2, Advanced Series on Ocean Engineering 13. Singapore: World Scientific. 1997.
- [79] Kirby nT, *Boussinesq models and applications to nearshore wave propagation, surf zone processes and wave-induced currents* , In Advances in Coastal Engineering, Lakhani C (ed.). Elsevier: Amsterdam, 2003.
- [80] Samarskii A. A., *The theory of difference schemes* , Marcel 2001.
- [81] Holmes M.H. , *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*, Springer 2006.
- [82] LeVeque R. J., *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, by the Society for Industrial and Applied Mathematics 2007.

- [83] Thomas J. W. , *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Springer 1995.
- [84] Murawski K., *Analytical and Numerical Methods for Wave Propagation in Fluid Media*, World Scientific, by Wydawnictwo Naukowe PWN SA, 2002.
- [85] Dubin D., *Numerical and analytical methods for scientists and engineers using mathematica*, by John Wiley - Sons, 2003.
- [86] Hackbusch W., *The Concept of Stability in Numerical Mathematics* , Springer 2014.
- [87] Verron J. , *Ocean Weather Forecasting*, E.P.Chassignet, Springer 2006.
- [88] Blayo E., *Open boundary conditions and coupling methods for ocean flows.*, Jean Kuntzmann Laboratory University of Grenoble, France, 2010.
- [89] Sommerfeld A. , *Partial differential equations in physics*, Academic Press, 1949.