



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Με τίτλο:

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ
ΣΕ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΕΜΦΙΑΛΩΣΗΣ

Υπότιτλος:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ/ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ
ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ/ΟΥΓΓΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Της φοιτήτριας:

Πετροπούλου Βασιλικής

Επιβλέπων Καθηγητής: Κολέτσος Ιωάννης

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Με τίτλο:

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ
ΣΕ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΕΜΦΙΑΛΩΣΗΣ

Υπότιτλος:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ/ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ
ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ/ΟΥΓΓΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Πετροπούλου Βασιλική

Επιβλέπων Καθηγητής: Κολέτσος Ιωάννης

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής:

Βασίλειος Κοκκίνης
Επίκουρος Καθηγητής
ΕΜΠ

Ιωάννης Κολέτσος
Αναπληρωτής Καθηγητής
ΕΜΠ

Πέτρος Στεφανέας
Επίκουρος Καθηγητής
ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2020

*Στη γιαγιά μου που έζησε, δημιούργησε,
αγωνίστηκε και αγάπησε την Κορπή*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Λόγω της τεχνολογικής ανάπτυξης και του συνεχώς αυξανόμενου ανταγωνισμού, οι επιχειρήσεις πλέον έρχονται συχνά αντιμέτωπες με τη λήψη κρίσιμων αποφάσεων αλλά και με τις συνέπειες που αυτές επιφέρουν. Οι αποφασίζοντες έχουν ως κύριο μέλημά τους την εύρεση της ορθότερης και πιο ωφέλιμης λύσης. Τα κριτήριά τους είναι, είτε υποκειμενικά και βασίζονται στην εμπειρία και στις γνώσεις τους, είτε αντικειμενικά και προέρχονται από συγκεκριμένα δεδομένα και στοιχεία, τα οποία στη συνέχεια θα επεξεργαστούν και θα μοντελοποιηθούν κατάλληλα. Η επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι αρωγός σε αυτή την προσπάθεια των επιχειρήσεων για την αναζήτηση της βέλτιστης απόφασης. Σύγχρονες μέθοδοι και κατάλληλο λογισμικό έχουν αναπτυχθεί με στόχο την αντιμετώπιση των προβλημάτων που ανακύπτουν στις σημερινές επιχειρήσεις όπως ο σχεδιασμός της παραγωγής, η ελαχιστοποίηση κόστους, η μεγιστοποίηση κέρδους ή ο αποδοτικότερος καταμερισμός της εργασίας.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η περιγραφή των μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας και η κατανόησή τους μέσα από εφαρμογές σε ρεαλιστικά παραδείγματα με δεδομένα που ανταποκρίνονται πλήρως στην πραγματικότητα. Τα αντικείμενα που θα μας απασχολήσουν θα είναι η Ελαχιστοποίηση του Κόστους Μεταφοράς, καθώς και το Πρόβλημα της Παραγωγής για το εργοστάσιο Φυσικού Μεταλλικού Νερού Κορπή. Η ανάλυση και η καταγραφή των αποτελεσμάτων θα οδηγήσει τελικά στη λήψη της βέλτιστης απόφασης που είναι και το ζητούμενο κάθε παρόμοιας μελέτης, ενώ ταυτόχρονα θα γίνουν αντιληπτά τα οφέλη της Επιχειρησιακής Έρευνας και γενικότερα η σημαντικότητά της στο χώρο της βιομηχανίας και των επιχειρήσεων.

Λέξεις Κλειδιά:

Επιχειρησιακή Έρευνα, Γραμμικός Προγραμματισμός, Πρόβλημα της Μεταφοράς, Ελαχιστοποίηση Κόστους, Πρόβλημα της Παραγωγής, Κόστος Αποθήκευσης, Επιλυτής-Solver, Ουγγρική Μέθοδος.

ABSTRACT

Due to the technological advancement and the continually increasing competition, businesses confront very often not only critical decision-making, but also the consequences that are induced by it. Decision makers have as a main concern the finding of the most reasonable and most beneficial solution. Their criteria are either subjective and are based on their experience and knowledge, or objective and result from specific data and evidence, which will subsequently be elaborated and will be suitably modeled. The science of Operations Research is an aid in this effort of businesses for the quest of an optimal decision. Modern methods and appropriate software have been developed aiming at the confrontation of problems that come up in current businesses, as for example the production design, the cost minimization, the profit maximization or the most effective division of labour.

The goal of the current dissertation is the description of Operations Research methods and their understanding through applications on realistic examples with data, which are totally corresponded in real life. The items that will concern us will be the Minimization of Transportation Costs, as long as the Production Problem for the factory of Natural Mineral Water Korpi. The analysis and recording of the results will eventually lead to the optimal decision which is the desired outcome of every similar study, while at the same time the benefits of Operations Research will become aware, as well as generally its importance in the industrial and business environment.

Key words:

Operations Research, Linear Programming, The Transportation Problem, Minimizing Costs, The Problem of Production, Storage Cost, Solver, Hungarian Method.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή.....	11
1.1 Ιστορική Αναδρομή.....	11
1.2 Ορισμός	13
1.3 Τα στάδια της Επιχειρησιακής Έρευνας	14
1.4 Κατηγορίες Μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας.....	16
1.4.1 Γραμμικός Προγραμματισμός.....	16
1.4.2 Ακέραιος Προγραμματισμός	25
1.4.3 Δυναμικός Προγραμματισμός	26
1.5 Κλάδοι και Εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας.....	27
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Παρουσίαση του Προβλήματος.....	30
2.1 Η Κορπή από το Χθες στο Σήμερα	31
2.2 Περιγραφή του Προβλήματος	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Το Πρόβλημα της Μεταφοράς.....	38
3.1 Εισαγωγή.....	38
3.2 Ορισμός του Προβλήματος Μεταφοράς.....	38
3.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση	41
3.4 Κόστος Μεταφοράς για Χιλιομετρικές Αποστάσεις	47
3.5 Κόστος Μεταφοράς για Αποστάσεις από το Εργοστάσιο	55
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Το Πρόβλημα της Παραγωγής.....	61
4.1 Περιγραφή του Προβλήματος	61
4.2 Μαθηματική Μοντελοποίηση	64
4.3 Παράδειγμα Αλλαγής του Πλάνου της Παραγωγής.....	71
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Η Ουγγρική Μέθοδος.....	74
5.1 Εισαγωγή.....	74
5.2 Εφαρμογή της Μεθόδου	77
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	92
Βιβλιογραφικές Αναφορές και Σύνδεσμοι	100

Επιχειρησιακή Έρευνα



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή

Η Επιχειρησιακή Έρευνα (Operational Research) αποτελεί μια επιστημονική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων με σκοπό τη λήψη αποφάσεων, που απαιτεί τη διαμόρφωση μαθηματικών, οικονομικών και στατιστικών μοντέλων για την αντιμετώπιση των προβλημάτων απόφασης που προκύπτουν εξαιτίας του ρίσκου και της αβεβαιότητας. Τα προβλήματα ελέγχου και απόφασης σε έναν οργανισμό είναι ιδιαίτερα συχνά σε καθημερινές δραστηριότητες όπως ο έλεγχος αποθεμάτων, ο προγραμματισμός παραγωγής, η οργάνωση ανθρώπινου δυναμικού, η διανομή και η συντήρηση.

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Μετά την έναρξη της βιομηχανικής επανάστασης πολλές μικρές επιχειρήσεις άρχισαν να αναπτύσσονται και να εξελίσσονται σε εταιρείες μεγάλης συγκέντρωσης κεφαλαίων και πλούσιου καταμερισμού της εργασίας. Οι νέες αυτές ευθύνες και η αύξηση της εξειδίκευσης οδήγησε στη δημιουργία και στην ανάπτυξη μίας νέας επιστήμης, την Επιχειρησιακή Έρευνα, που ως σκοπό της είχε την σωστή οργάνωση των επιχειρήσεων και την επίλυση των διοικητικών προβλημάτων που είχαν προκύψει.

Η αρχή της Επιχειρησιακής Έρευνας μπορεί να εντοπιστεί στην Αγγλία περίπου το 1840 όπου ο Charles Babbage (1791-1871), ο οποίος από μεγάλο μέρος της επιστημονικής κοινότητας θεωρείται ως ο «πατέρας της Επιχειρησιακής Έρευνας», μελετώντας σχετικά με το κόστος μεταφοράς και ταξινόμησης της αλληλογραφίας οδηγήθηκε στην ίδρυση του «Penny Post».

Ενώ η Επιχειρησιακή Έρευνα είχε ξεκινήσει σχεδόν έναν αιώνα νωρίτερα ως επίσημη αρχή του κλάδου θεωρείται το 1940 με την αρχή του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Η επίλυση στρατιωτικών προβλημάτων, όπως η επιλογή της βέλτιστης τοποθέτησης του πυροβολικού και των ραντάρ οδήγησε τους ερευνητές στην εξερεύνηση νέων τεχνικών και εύρεση γρήγορων και βέλτιστων λύσεων. Οι αρχικοί ερευνητές που εμπλέκονταν στις παραπάνω διαδικασίες ήταν μαθηματικοί, ψυχολόγοι και φυσικοί. Επιστήμονες στο Ηνωμένο Βασίλειο, μεταξύ άλλων, οι Patrick Blackett, Cecil Gordon, C. H. Waddington, Owen Wansbrough-Jones και Frank Yates και στις ΗΠΑ ο George Dantzig, αναζήτησαν τρόπους με σκοπό τη λήψη βέλτιστων αποφάσεων σε τομείς όπως η προμήθεια πολεμικών εφοδίων καθώς και τα προγράμματα εκπαίδευσης. Μερικά παραδείγματα εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας την συγκεκριμένη περίοδο αναφέρονται παρακάτω.

1. Η Βρετανία ήθελε να εισάγει ένα σύστημα νηοπομπής προκειμένου να μειώσει τις απώλειες κατά την φόρτωση των πλοίων. Το ερώτημα ήταν αν οι νηοπομπές έπρεπε να ήταν μικρές ώστε να μην εντοπίζονται εύκολα από τα γερμανικά πολεμικά ή αν θα έπρεπε να ήταν μεγάλες ώστε να πετύχαιναν ένα πιο αποφασιστικό πλήγμα σε περίπτωση εισβολής. Τελικά η λύση στο πρόβλημα ήταν ότι η νηοπομπή έπρεπε να αποτελούνταν από λιγότερα αλλά μεγαλύτερα πλοία.

2. Μια άλλη έρευνα διεξήχθη από την διοίκηση βομβαρδιστικών αεροσκαφών RAF. Η διοίκηση των βομβαρδιστικών επιθεώρησε όλα τα αεροσκάφη που είχαν συμμετάσχει σε αποστολές στην Γερμανία για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Καθώς κατέγραφαν όλες τις ζημιές που είχαν υποστεί τα αεροσκάφη αποφάσισαν να ενισχύσουν την θωράκιση των σημείων τα οποία είχαν υποστεί τις ισχυρότερες βλάβες. Η μελέτη των επιστημόνων της Επιχειρησιακής Έρευνας οδήγησε σε αντίθετο αποτέλεσμα καθώς υποστήριζαν ότι επιπλέον θωράκιση έπρεπε να τοποθετηθεί στα σημεία των αεροσκαφών που δεν είχαν υποστεί βλάβες καθώς αυτά ήταν και τα πιο ζωτικά πλέον για τα αεροσκάφη. Και αυτό γιατί, θεωρώντας ότι η επισκόπηση λάμβανε υπόψιν της μόνο αεροσκάφη που επέστρεψαν από την Γερμανία, συμπεράναν πως όσα βομβαρδιστικά είχαν υποστεί τις σοβαρότατες βλάβες θα είχαν πέσει στο πεδίο της μάχης.

Μετά την λήξη του πολέμου ακολούθησε μια ραγδαία βιομηχανική ανάπτυξη η οποία δημιούργησε νέες ανάγκες, καθώς η πολυπλοκότητα των προβλημάτων που προκύπταν σε διάφορους οργανισμούς, επιχειρήσεις αλλά ακόμη και στις κυβερνήσεις, κατέστησαν αναγκαία την εξερεύνηση νέων τρόπων αντιμετώπισής τους. Οι επιστήμονες δεν άργησαν να καταλάβουν ότι τα προβλήματα που είχαν ανακύψει ήταν παρόμοια με αυτά που αντιμετώπιζε η Επιχειρησιακή Έρευνα κατά την διάρκεια του πολέμου, έτσι ο νέος αυτός κλάδος αναπτύχθηκε διεθνώς την δεκαετία του '60. Η Επιχειρησιακή Έρευνα δεν άργησε να κάνει την εμφάνισή της και στη χώρα μας, καθώς το 1963 ιδρύεται η «Ελληνική Εταιρεία Επιχειρησιακών Ερευνών», μια επιστημονική, μη κερδοσκοπική εταιρεία που σκοπό είχε να προάγει την Επιχειρησιακή Έρευνα στην Ελλάδα.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα συνέχισε να αναπτύσσεται τις επόμενες δεκαετίες, με την ανάπτυξη της τεχνολογίας και τη δημιουργία των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας και των ηλεκτρονικών υπολογιστών είναι αλληλένδετη, καθώς η πρώτη απαιτεί πληθώρα υπολογισμών τους οποίους ο ανθρώπινος εγκέφαλος δεν μπορεί να εκτελέσει με τόση ευκολία και ταχύτητα. Διάφορα εργαλεία της Επιχειρησιακής Έρευνας όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, ο δυναμικός προγραμματισμός, η θεωρία ουρών αναμονής αλλά και αντίστοιχα software όπως το Spreadsheet OR add-in software έκαναν την εμφάνισή τους και ενίσχυσαν ακόμη περισσότερο το έργο της. Τίποτα επομένως δεν μπορούσε να ανακόψει την πορεία της νέας αυτής επιστήμης που ήρθε να δώσει λύσεις σε κάθε παλιό και νέο προβληματισμό.

1.2 Ορισμός

Η **Επιχειρησιακή Έρευνα** είναι ένας διεπιστημονικός κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που κάνει χρήση μαθηματικών μοντέλων, στατιστικής και αλγορίθμων με στόχο την εύρεση βέλτιστων ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων σε πολύπλοκα προβλήματα. Η Επιχειρησιακή Έρευνα προσεγγίζει ποσοτικά τη διατύπωση, την ανάλυση και την επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων. Δεν βασίζεται σε υποκειμενική κρίση και σε προβλέψεις αλλά σε δεδομένα, πληροφορίες και λογική ανάλυση.

Ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα προέρχεται από τον αγγλικό όρο “Operational Research” που σημαίνει έρευνα στις επιχειρήσεις. Από μια πιο πρακτική σκοπιά, η Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να θεωρηθεί ως μια τεχνική βελτιστοποίησης, δηλαδή εύρεσης του μέγιστου και του ελάχιστου μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Μερικές αντικειμενικές συναρτήσεις που συναντάμε συχνά σε προβλήματα είναι οι εξής:

1. Η μεγιστοποίηση του κέρδους
2. Η ελαχιστοποίηση του κόστους
3. Η απόδοση μιας γραμμής παραγωγής
4. Ο χρόνος αναμονής σε ουρά

Έχουν δοθεί αρκετοί ορισμοί για την Επιχειρησιακή Έρευνα. Παρακάτω παρατίθενται 2 από τους πιο σημαντικούς.

1. Από την εταιρεία Επιχειρησιακής Έρευνας της Μεγάλης Βρετανίας:

«Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα, τα οποία ανακύπτουν στη διεύθυνση και στη διοίκηση των μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια, στη Βιομηχανία, τις Επιχειρήσεις, τις Κυβερνητικές Υπηρεσίες και την Άμυνα.

Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων.

Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει την διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειές της επιστημονικά.»

2. Από την Ε.Ε.Ε.Ε:

«Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική προετοιμασία των αποφάσεων της Διοικήσεως (με την επιστημονική ανάλυση των δεδομένων και τη δημιουργία μαθηματικών προτύπων)».

1.3 Τα στάδια της Επιχειρησιακής Έρευνας

Σε καθημερινό επίπεδο στον χώρο εργασίας μας και όχι μόνο ερχόμαστε αντιμέτωποι με μια σειρά προβλημάτων με τεχνικές δυσκολίες που ζητούν άμεσα λύσεις και σωστή καθοδήγηση. Η πορεία και η στρατηγική που ακολουθείται σε γενικό πλαίσιο για την επιτυχή διεκπεραίωση και επίλυση τέτοιων προβλημάτων μέσω της Επιχειρησιακής Έρευνας περιλαμβάνει τα παρακάτω στάδια:

1 Αναγνώριση και Περιγραφή του Προβλήματος:

Στο στάδιο αυτό στόχος μας είναι να κατανοήσουμε σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βαθμό το πρόβλημα που τίθεται προς επίλυση, τόσο ως προς τη δομή του όσο και ως προς τον τρόπο λειτουργίας του. Για να γίνει αυτό προχωράμε στην ανάλυση του αρχικού συστήματος σε επιμέρους υποσυστήματα και προσπαθούμε να εντοπίσουμε τα τρωτά του σημεία. Ο αναλυτής πρέπει να προσδιορίσει ποιες πτυχές του συστήματος είναι ελέγξιμες και ποιες όχι. Με τον τρόπο αυτό, αποκτούμε μια πιο σαφή αντίληψη για το σύστημα που μας ζητήθηκε να μελετήσουμε και μπορούμε πλέον να ορίσουμε με μεγαλύτερη ευκολία τις μεταβλητές-παραμέτρους του συστήματος αλλά και τους περιορισμούς που προκύπτουν είτε από την δομή, είτε από την λειτουργία του, είτε από το ευρύτερο περιβάλλον.

2 Καθορισμός Στόχων:

Στο συγκεκριμένο στάδιο ορίζουμε με ακρίβεια τους στόχους που θέλουμε να επιτύχουμε με την λύση του προς μελέτη συστήματος. Μερικοί στόχοι που μπορούμε να θέσουμε είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους ή η ελαχιστοποίηση του κόστους. Η διατύπωση όμως των στόχων δεν είναι πάντα εύκολη καθώς πολλές φορές τα συμφέροντα σε έναν οργανισμό είναι αντικρουόμενα έτσι η ευθύνη αυτή βαραίνει την ομάδα της Επιχειρησιακής Έρευνας που σκοπός της είναι να συνδυάσει αυτούς τους στόχους με γνώμονα το καλό της επιχείρησης. Προφανώς όλοι οι στόχοι δεν επιτυγχάνονται με την ίδια στρατηγική και συνήθως θα πρέπει να ακολουθείται μια σειρά προτεραιότητας.

3 Διατύπωση του Μοντέλου:

Στο στάδιο που ακολουθεί σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματός μας. Μοντέλο ονομάζουμε μια αναπαράσταση της πραγματικότητας. Ως μοντέλο στην Επιχειρησιακή Έρευνα ορίζεται μια εξιδανικευμένη αναπαράσταση ενός πραγματικού συστήματος. Η διαδικασία της δημιουργίας μαθηματικών μοντέλων είναι ιδιαίτερα σημαντική στην πρακτική της Επιχειρησιακής Έρευνας. Ονομάζονται «μαθηματικά μοντέλα» διότι ορίζονται από μαθηματικές σχέσεις όπως ισότητες, ανισότητες, συναρτήσεις και τελεστές. Η μαθηματική μοντελοποίηση του συστήματος που διαθέτουμε έχει ως αποτέλεσμα την μετατροπή του προβλήματος σε ποσοτικές σχέσεις οι οποίες στη συνέχεια μεταφράζονται σαν εντολές στον υπολογιστή και εκφράζουν τους στόχους που έχουμε θέσει παραπάνω για το σύστημα (αντικειμενική συνάρτηση) αλλά και τους περιορισμούς του περιβάλλοντος. Η διαμόρφωση του μοντέλου είναι ένα από τα πιο δύσκολα στάδια καθώς είναι καθοριστικής σημασίας για την λήψη της βέλτιστης λύσης και οποιοδήποτε λάθος οδηγεί κατευθείαν στη λήψη λανθασμένων αποφάσεων. Τέλος ο αναλυτής πρέπει να διαθέτει κριτική σκέψη και να προχωρήσει στην ελάττωση των διαστάσεων του προβλήματος αν το θεωρεί εφικτό, δηλαδή

στην αφαίρεση κάποιων μεταβλητών που μπορεί να μην επηρεάζουν τόσο το σύστημα καθώς έτσι μειώνεται το υπολογιστικό κόστος για την επίλυσή του. Ο σκοπός της μοντελοποίησης των συστημάτων είναι η κατανόηση του πραγματικού συστήματος, η πρόβλεψη της συμπεριφοράς του, η καταγραφή των δυνατοτήτων του και τελικά η λήψη αποφάσεων σχετικά με τον σχεδιασμό, την ανάπτυξη, την κατασκευή, την τροποποίηση ή τη λειτουργία του.

4 Επίλυση του Μοντέλου:

Καθώς στο προηγούμενο στάδιο αξιοποιήσαμε όλα τα δεδομένα και τους περιορισμούς, δημιουργήσαμε το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος το οποίο στο τέταρτο στάδιο πρέπει να επιλύσουμε με την χρήση διαφόρων τεχνικών. Η επίλυση του μοντέλου βασίζεται κυρίως σε Ανώτερα Μαθηματικά, στη Θεωρία Πιθανοτήτων αλλά και στην Στατιστική ή σε Μεθόδους και Θεωρίες της Επιχειρησιακής Έρευνας. Μερικές από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι ο [Γραμμικός Προγραμματισμός](#), ο [Ακέραιος Προγραμματισμός](#), ο [Δυναμικός Προγραμματισμός](#) και ο [Μη Γραμμικός Προγραμματισμός](#). Άλλες εξίσου σημαντικές μέθοδοι είναι ο [Προγραμματισμός δικτύων](#), τα [Δέντρα Αποφάσεων](#), η [Θεωρία Ουρών Αναμονής](#) και η [Θεωρία Παιγνίων](#). Η επιλογή της κατάλληλης τεχνικής εξαρτάται από τον τύπο αλλά και την πολυπλοκότητα του εκάστοτε προβλήματος. Συχνό είναι να πρέπει να συνδυάσουμε δύο ή παραπάνω από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν για την τελική επίλυση του συστήματος.

5 Ανάλυση Ευαισθησίας:

Έχοντας πλέον επιλύσει το πρόβλημα έχουμε οδηγηθεί στην βέλτιστη κατά τον αναλυτή λύση του συστήματος. Σε αυτό το στάδιο θέλουμε να μελετήσουμε τις επιπτώσεις που θα έχουν στην λύση που έχει προκύψει κάποιες μεταβολές του περιβάλλοντος του συστήματος. Αυτό το στάδιο είναι γνωστό ως ανάλυση ευαισθησίας και περιγράφει τις μεταβολές στη λύση υπό την προϋπόθεση αλλαγών στις μεταβλητές και στους περιορισμούς του προβλήματος. Όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό η ανάλυση της ευαισθησίας είναι ένα πολύ σημαντικό στάδιο της Επιχειρησιακής Έρευνας καθώς μια λύση δεν μας ενδιαφέρει μόνο βραχυπρόθεσμα αλλά θέλουμε να μελετήσουμε και την συμπεριφορά της σε βάθος χρόνου.

6 Υλοποίηση της Λύσης:

Το έκτο και τελικό στάδιο της διαδικασίας περιλαμβάνει την υλοποίηση των αποτελεσμάτων που έχουν ανακύψει από την λύση του προβλήματος. Η ομάδα της Επιχειρησιακής Έρευνας πρέπει να διατυπώσει με σαφήνεια και ακρίβεια τα αποτελέσματα της ανάλυσης που έχουν μετατραπεί σε λειτουργικές οδηγίες καθώς και τις αλλαγές που πρέπει να γίνουν ώστε να επιτευχθεί η υλοποίηση της βέλτιστης λύσης σε πρακτικό επίπεδο και να διατηρηθεί στο μέλλον.

1.4 Κατηγορίες Μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει για την επίλυση των προβλημάτων της Επιχειρησιακής Έρευνας έχουν αναπτυχθεί ποικίλες τεχνικές και μεθοδολογίες. Μερικές από τις πιο δημοφιλείς παρατίθενται παρακάτω:

1.4.1 Γραμμικός Προγραμματισμός

➤ Εισαγωγή

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια μαθηματική τεχνική που χρησιμοποιείται για την βέλτιστη κατανομή συγκεκριμένων πόρων σε συγκεκριμένο αριθμό απαιτήσεων. Η συγκεκριμένη τεχνική αντιμετωπίζει το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης (αντικειμενική συνάρτηση), που υπόκειται στους περιορισμούς που έχουν προκύψει, με τη χρήση γραμμικών εξισώσεων ή ανισώσεων. Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να εκφράζει οποιοδήποτε μέτρο αποτελεσματικότητας το οποίο πρέπει να υλοποιηθεί κατά τον βέλτιστο τρόπο. Οι περιορισμοί επιβάλλονται από διάφορους παράγοντες όπως η ζήτηση, η διαδικασία παραγωγής, ο εξοπλισμός, η χωρητικότητα των αποθηκευτικών χώρων, η διαθεσιμότητα πρώτων υλών κτλ. Οι μεταβλητές χαρακτηρίζονται από τις ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας.

➤ Προϋποθέσεις

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προβλήματα βελτιστοποίησης τα οποία πρέπει να πληρούν τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Πρέπει να υπάρχει μοναδική αντικειμενική συνάρτηση προς βελτιστοποίηση η οποία θα εκφράζεται σαν γραμμική συνάρτηση των διαφόρων μεταβλητών του συστήματος.
- Πρέπει να υπάρχουν συγκεκριμένοι περιορισμοί για το σύστημα και οι οποίοι θα εκφράζονται ως γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών σε μορφή εξισώσεων ή ανισώσεων.
- Πρέπει να υπάρχουν εναλλακτικές πορείες δράσεις ώστε να επιλεγεί η βέλτιστη. Για παράδειγμα ένα προϊόν να έχει την δυνατότητα να παραχθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους και το πρόβλημα να είναι ποιος από τους δύο είναι ο πιο συμφέρον για την επιχείρηση.
- Πρέπει οι μεταβλητές του συστήματος που τίθεται προς μελέτη να είναι αλληλένδετες και μη αρνητικές για να μπορούν τα αποτελέσματα που ανακύπτουν να είναι λογικά.

➤ Ιδιότητες του Μοντέλου

- **Γραμμικότητα:** Η αντικειμενική συνάρτηση και οι συναρτήσεις των περιορισμών πρέπει να είναι πρώτου βαθμού γραμμικές συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές απόφασης.

- **Αναλογικότητα:** Τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι εξισώσεις-ανισώσεις των περιορισμών πρέπει να διέπονται από την ιδιότητα της αναλογικότητας. Δηλαδή η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλά και των περιορισμών να ισούται με τη συμβολή κάθε μεταβλητής στο μοντέλο. Για παράδειγμα εάν ένα προϊόν επιφέρει κέρδος στην εταιρεία 10€ τότε η πώληση 10 τέτοιων μονάδων προϊόντος θα επιφέρει κέρδος 100€. Το ίδιο συμβαίνει και με το κόστος κατασκευής του ίδιου προϊόντος ή με τον χρόνο που απαιτείται για την παραγωγή των προϊόντων, για τα οποία ισχύει ξανά η αναλογικότητα. Σε πραγματικές συνθήκες μπορεί να μην ισχύει αυστηρά η αναλογικότητα καθώς με την πώληση μιας μεγάλης ποσότητας προϊόντων υπάρχει το ενδεχόμενο έκπτωσης ανάλογη με την ζήτηση από τον αγοραστή. Ωστόσο η υποτιθέμενη γραμμικότητα αντιπροσωπεύει αρκετά καλές προσεγγίσεις και δίνει χρήσιμες απαντήσεις.
- **Προσθετικότητα:** Ας το δούμε με ένα παράδειγμα για τον χρόνο. Έστω ότι διαθέτουμε ένα μηχάνημα το οποίο παράγει 2 προϊόντα το Α και το Β. Έστω ότι για την παραγωγή του προϊόντος Α απαιτείται χρόνος t_1 και για την παραγωγή του προϊόντος Β απαιτείται χρόνος t_2 , τότε ο χρόνος λειτουργίας του μηχανήματος θα είναι συνολικά t_1+t_2 , εάν υποθέσουμε ότι ο χρόνος μετάβασης από το ένα προϊόν στο άλλο είναι μηδενικός.
- **Διαιρετότητα:** Στα περισσότερα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού το πεδίο ορισμού όλων των δραστηριοτήτων (μεταβλητών απόφασης) και όλων των περιορισμών είναι το $[0,+\infty)$. Επομένως οι μεταβλητές του συστήματος μπορούν να παίρνουν και μη ακέραιες τιμές. Στην περίπτωση που δεν μπορεί να υφίσταται αυτή η προϋπόθεση καταφεύγουμε σε άλλες τεχνικές όπως ο Ακέραιος Προγραμματισμός.
- **Βεβαιότητα:** Οι διάφορες παράμετροι που επηρεάζουν το σύστημα πρέπει να είναι εξ αρχής γνωστές και σταθερές. Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών, το κέρδος ή το κόστος, η εργασία και οι πρώτες ύλες που απαιτούνται ανά μονάδα προϊόντος, η διαθεσιμότητα, η ζήτηση κτλ. Υποτίθεται ότι είναι γνωστά με ακρίβεια και δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Όταν αυτή η προϋπόθεση δεν ικανοποιείται, η λύση μπορεί να προσεγγιστεί με την Ανάλυση της Ευαισθησίας που έχουμε ήδη αναφέρει.

➤ Εφαρμογές

Στην καθημερινότητα μας, τα περισσότερα προβλήματα είναι μη γραμμικά υπάρχουν ωστόσο πολλά από αυτά τα οποία μπορούν να προσεγγιστούν ως γραμμικά και να επιλυθούν με τη χρήση του Γραμμικού Προγραμματισμού γι' αυτό και θεωρείται ως η πιο διαδεδομένη τεχνική της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός δραστηριοποιείται σε διάφορους τομείς όπως στο χώρο των επιχειρήσεων, της βιομηχανίας, του στρατού, της οικονομίας, του marketing και της διαφήμισης. Πιο αναλυτικά οι τομείς εφαρμογής είναι οι εξής:

- ✚ Βιομηχανικές Εφαρμογές:
 1. Προβλήματα παραγωγής διαφορετικών προϊόντων
 2. Προβλήματα συγχώνευσης

3. Προβλήματα Προγραμματισμού της παραγωγής
4. Προβλήματα απωλειών από επεξεργασία
5. Προβλήματα παραγωγής ή αγοράς

✚ Εφαρμογές στη Διαχείριση:

1. Προβλήματα επιλογής Μέσων Μαζικής Ενημέρωσης
2. Προβλήματα σχεδιασμού κέρδους
3. Προβλήματα Μεταφορών
4. Προβλήματα ανάθεσης έργου
5. Προβλήματα ανθρώπινου δυναμικού

✚ Διάφορες Εφαρμογές:

1. Προβλήματα Διατροφής
2. Προβλήματα οργάνωσης πτήσεων
3. Προβλήματα προστασίας του περιβάλλοντος
4. Προβλήματα τοποθεσίας εγκαταστάσεων

➤ **Μέθοδοι Επίλυσης**

- *Μέθοδος Simplex*: Πρόκειται για μια αλγεβρική διαδικασία που με μια σειρά επαναλαμβανόμενων πράξεων, φτάνει σταδιακά στη βέλτιστη λύση. Η μέθοδος αυτή είναι ικανή να λύσει με την βοήθεια υπολογιστή προβλήματα μεγάλων διαστάσεων.
- *Γραφική Μέθοδος*: Περιλαμβάνει την σχεδίαση των περιορισμών σε ένα γράφημα και τον εντοπισμό της «εφικτής περιοχής». Η εφικτή περιοχή περιέχει όλες τις πιθανές λύσεις του προβλήματος, δηλαδή τις λύσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς, ωστόσο η βέλτιστη λύση εάν υπάρχει βρίσκεται στα γωνιακά σημεία αυτής της περιοχής. Σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης το γωνιακό σημείο που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση, δίνει τη βέλτιστη λύση.

1.4.1.1 Η Μέθοδος Simplex

Η μέθοδος Simplex είναι μια από τις πιο βασικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού και ταυτόχρονα ευρέως γνωστή. Αναπτύχθηκε από τον George Dantzig και αποτελεί μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία η οποία επιλύει ακριβώς, κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τον τρόπο εφαρμογής της για τα διάφορα συστήματα.

Η μέθοδος αυτή δουλεύει μετατρέποντας όλους τους περιορισμούς που έχουν τη μορφή ανισοτικής σχέσης, σε ισότητες. Ένα κύριο γνώρισμα της μεθόδου Simplex είναι ότι λύνει το πρόβλημα με ένα σύνολο επαναλήψεων. Η βασική ιδέα της Simplex συνδέεται με την γραφική μέθοδο επίλυσης η οποία εντοπίζει ακρότατα σημεία του χώρου των λύσεων. Με τη σειρά της η Simplex μετακινεί σε κάθε επανάληψη τη λύση σε ένα νέο ακρότατο σημείο και έτσι έχει την ικανότητα να βελτιστοποιήσει την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος. Οι επαναλήψεις τερματίζονται όταν η αντικειμενική συνάρτηση σταματάει πια να βελτιώνεται περαιτέρω.

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή της μεθόδου πρέπει πρώτα να ορίσουμε κάποιες βασικές έννοιες.

1. Κανονική ή Τυποποιημένη Μορφή:

Λέμε ότι ένα πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή όταν όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος είναι ισότητες με μη αρνητικό δεξιό μέλος και όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές. Όταν οι περιορισμοί έχουν την μορφή ανίσωσης πρέπει ο προγραμματιστής να τους μετατρέψει σε ισότητες. Αυτό γίνεται εισάγοντες νέες μη αρνητικές μεταβλητές οι οποίες ονομάζονται περιθώριες. Αν μια ανίσωση έχει την μορφή “ \leq ”, τότε θα προσθέσουμε μια μη αρνητική μεταβλητή την οποία θα ονομάζουμε χαλαρή μεταβλητή. Αν μια ανίσωση έχει την μορφή “ \geq ”, τότε θα αφαιρέσουμε μια μη αρνητική μεταβλητή την οποία θα ονομάζουμε πλεονασματική μεταβλητή.

Τελικά το μοντέλο του γενικού προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού στην κανονική μορφή υπό μορφή πινάκων γράφεται:

$$\begin{aligned} \max \text{ (ή } \min) z &= f(x) = c^T x \\ Ax &= b, (b \geq 0) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Βασικές και μη βασικές μεταβλητές:

Ο τετραγωνικός πίνακας ($m \times m$) που προκύπτει από τον A και έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, καλείται βάση του συστήματος και συμβολίζεται με B . Οι m μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μιας βάσης B καλούνται βασικές. Οι υπόλοιπες ($n-m$) μεταβλητές που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες στήλες του A που δεν περιλαμβάνονται στη βάση B καλούνται μη βασικές μεταβλητές.

3. Βασική (εφικτή) λύση:

Ονομάζεται η λύση ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μια βάση B , η οποία έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές ως προς τη βάση αυτή διαφορες του μηδενός και όλες τις μη βασικές ίσες με το μηδέν.

Η εκτέλεση των υπολογισμών προς εύρεση της βέλτιστης βασικής εφικτής λύσης αποτελεί μια επίπονη και χρονοβόρα διαδικασία. Για αυτό το λόγο έχει προταθεί από τους Orden, Dantzing και Hofman ένας πιο συστηματικός τρόπος καταχώρησης όλων των απαραίτητων ποσοτήτων σε έναν πίνακα (Simplex tableau), ώστε να είναι πιο εύκολη και γρήγορη η εκτέλεση των βημάτων του αλγορίθμου.

4. Αρχικός Simplex πίνακας καλείται ο επαυξημένος πίνακας ο οποίος αποτελείται από γραμμές με στοιχεία τους συντελεστές των μεταβλητών των εξισώσεων των περιορισμών, η τελευταία του γραμμή περιέχει τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης, ενώ η τελευταία του στήλη τις σταθερές τους.

Κάθε αρχικός Simplex πίνακας έχει περισσότερες στήλες από ότι γραμμές, ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις. Η καλύτερη βασική εφικτή λύση θα εξαρτηθεί από την μορφή του πίνακα και την εφαρμογή του ελέγχου μέγιστης λύσης.

5. Ο έλεγχος αυτός λέει το εξής: Ο αρχικός Simplex πίνακας θα δώσει την βέλτιστη λύση αν και μόνο αν η τελευταία γραμμή, η οποία αναφέρεται στην αντικειμενική συνάρτηση, περιλαμβάνει μόνο μη αρνητικά στοιχεία.

Η στήλη που έχει το πιο αρνητικό στοιχείο στην τελευταία γραμμή ονομάζεται στήλη οδηγός. Η μεταβλητή που αντιστοιχεί στην στήλη αυτή καλείται εισερχομένη μεταβλητή. Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερα ίσα και αρνητικά στοιχεία, τότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις στήλες επιθυμούμε. Όταν επιλεγεί η στήλη οδηγός, αναζητάμε τη γραμμή οδηγό με την εξής διαδικασία. Αρχικά θα υπολογίσουμε για κάθε γραμμή εκτός από την τελευταία, με θετική καταχώριση στην στήλη οδηγό τον λόγο του στοιχείου στην τελευταία στήλη προς το στοιχείο στην στήλη οδηγό. Αν προκύψουν ισοπαλίες στις γραμμές, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε γραμμή, αλλιώς το στοιχείο που αντιστοιχεί στην γραμμή με τον μικρότερο θετικό λόγο ονομάζεται στοιχείο οδηγός. Το στοιχείο αυτό θα γίνει 1 και τα υπόλοιπα της στήλης του 0 ύστερα από μία σειρά εργασιών στις γραμμές που θα πραγματοποιηθεί, προκειμένου να μετατραπεί η στήλη άξονας σε βασική μορφή. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται οδήγηση.

Ας περιγράψουμε τώρα τα βήματα του αλγορίθμου της μεθόδου Simplex για προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού σε **Κανονική Μορφή**.

1) Μετατρέπουμε τους περιορισμούς που έχουν την μορφή ανίσωσης σε εξισώσεις, εισάγοντας τις νέες περιθώριες μεταβλητές και εκφράζουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε κατάλληλη μορφή.

2) Κατασκευάζουμε τον αρχικό Simplex πίνακα βάζοντας τα στοιχεία του προβλήματος.

3) Εφαρμόζουμε τον έλεγχο της μέγιστης λύσης. Αν δεν υπάρχουν αρνητικά στοιχεία στην τελευταία γραμμή του πίνακα, τότε η βασική εφικτή λύση είναι η μέγιστη και το πρόβλημα έχει λυθεί. Αν όχι τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα.

4) Κατασκευάζουμε ένα νέο Simplex tableau ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία: Αρχικά επιλέγουμε την στήλη άξονα και στη συνέχεια την γραμμή άξονα. Τέλος εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης όπως την περιγράψαμε πριν γύρω από την καταχώριση άξονα.

5) Γυρνάμε και εφαρμόζουμε ξανά τον έλεγχο της μέγιστης λύσης του βήματος 3.

Υπάρχουν όμως και προβλήματα **Μη Κανονικής Μορφής** για τα οποία ο αλγόριθμος της μεθόδου Simplex διαφοροποιείται ελαφρώς. Πάμε να περιγράψουμε τα βήματα για τέτοιου είδους προβλήματα.

1) Αν το πρόβλημα ζητά την ελαχιστοποίηση της C , τότε θα πρέπει να το μετατρέψουμε σε πρόβλημα μεγιστοποίησης με την αντικειμενική συνάρτηση $-C$.

2) Αν οι περιορισμοί είναι της μορφής “ \geq ”, τότε πολλαπλασιάζοντας με το -1 λαμβάνουμε την επιθυμητή μορφή.

3) Αν δεν εμφανιστεί αρνητικός αριθμός στην τελευταία στήλη, εκτός από το τελευταίο της στοιχείο, τότε ισχύει το κριτήριο της μέγιστης λύσης και πηγαίνουμε κατευθείαν στο βήμα 6, αλλιώς συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

4) Σε αυτό το βήμα στόχος μας είναι να μετατρέψουμε τον αρνητικό αριθμό σε θετικό με τον ακόλουθο τρόπο: Διαλέγουμε ένα αρνητικό στοιχείο της τελευταίας στήλης. Η στήλη του θα γίνει στήλη οδηγός. Στη συνέχεια υπολογίζουμε όλους τους λόγους, συμπεριλαμβανομένων και αυτών που αντιστοιχούν στους αρνητικούς αριθμούς της στήλης οδηγού. Τότε η γραμμή οδηγός θα είναι αυτή με το μικρότερο θετικό λόγο και εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης γύρω από το στοιχείο οδηγό.

5) Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 όσες φορές χρειαστεί μέχρι να μην υπάρχει άλλη αρνητική καταχώριση στην τελευταία στήλη πλην του τελευταίου στοιχείου.

6) Τελικά ο πίνακας που προκύπτει είναι σε κανονική μορφή και συνεχίζουμε με την μεθοδολογία που περιγράψαμε πριν για τα προβλήματα της Κανονικής Μορφής.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα για να γίνει πλήρως αντιληπτή η διαδικασία της μεθόδου Simplex.

$$MaxC = 2x + y - 3z + 4w$$

$$x + 2y - 2z + 4w \leq 40$$

$$2x - y + z + 2w \leq 8$$

$$4x - 2y + z - w \leq 10$$

Θα μετατρέψουμε τώρα τις ανισώσεις των περιορισμών σε ισότητες.

$$x + 2y - 2z + 4w + s_1 = 40$$

$$2x - y + z + 2w + s_2 = 8$$

$$4x - 2y + z - w + s_3 = 10$$

Simplex tableau:

Βάση	x	y	z	w	S ₁	S ₂	S ₃	Λύση
S ₁	1	2	-2	4	1	0	0	40
S ₂	2	-1	1	2	0	1	0	8
S ₃	4	-2	1	-1	0	0	1	10
C	-2	-1	3	-5	0	0	0	0

Table 1: Simplex Tableau 1

Θα επιλέξουμε το πιο αρνητικό στοιχείο της τελευταίας γραμμής:

$$\min\{-2, -1, -5\} = -5$$

Επομένως θεωρούμε ως κύρια στήλη την στήλη 4 και για αυτή τη στήλη θα υπολογίσουμε τους λόγους των στοιχείων της. Έτσι θα προκύψει η κύρια γραμμή του πίνακα επιλέγοντας από τους θετικούς λόγους τον πιο μικρό.

$$\min\left\{\frac{40}{4}, \frac{8}{2}\right\} = \frac{8}{2} = 4$$

Βάση	x	y	z	w	S ₁	S ₂	S ₃	Λύση
S ₁	1	2	-2	4	1	0	0	40
S ₂	2	-1	1	2	0	1	0	8
S ₃	4	-2	1	-1	0	0	1	10
C	-2	-1	3	-5	0	0	0	0

Table 2: Επιλογή κύριας στήλης και κύριας γραμμής

Με κόκκινο χρώμα έχουμε σημειώσει τον οδηγό στοιχείο του πίνακα. Επομένως στη θέση της S_2 θα εισάγουμε την w και θα εκτελέσουμε τις γραμμοπράξεις.

Άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Βάση	x	y	z	w	S_1	S_2	S_3	Λύση
S_1	-3	4	-4	0	1	-2	0	24
w	1	-0.5	0.5	1	0	0.5	0	4
S_3	5	-2.5	1.5	0	0	0.5	1	14
C	3	-3.5	5.5	0	0	2.5	0	20

Table 3: Simplex Tableau 2

Θα εκτελέσουμε πάλι την ίδια διαδικασία έως ότου να μην υπάρχει κανένα αρνητικό στοιχείο στην τελευταία γραμμή:

$$\min\{-3.5\} = -3.5$$

Έτσι επιλέγεται η δεύτερη στήλη ως κύρια στήλη του πίνακά μας.

Και
$$\min\left\{\frac{24}{4}\right\} = \frac{24}{4} = 6$$

Ως κύρια γραμμή επιλέγεται η πρώτη γραμμή. Το οδηγό στοιχείο θεωρείται το στοιχείο στο κελί (1,2).

Ο συγκεκριμένος πίνακας στον οποίο έχουν σημειωθεί η κύριες γραμμές και στήλες και το οδηγό στοιχείο φαίνονται παρακάτω.

Βάση	x	y	z	w	S_1	S_2	S_3	Λύση
S_1	-3	4	-4	0	1	-2	0	24
w	1	-0.5	0.5	1	0	0.5	0	4
S_3	5	-2.5	1.5	0	0	0.5	1	14
C	3	-3.5	5.5	0	0	2.5	0	20

Table 4: Επιλογή κύριας στήλης και κύριας γραμμής

Εισάγουμε στη θέση της S_1 την y και εκτελούμε τις γραμμοπράξεις, έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα Simplex.

Βάση	x	y	z	w	S_1	S_2	S_3	Λύση
y	-0.75	1	-1	0	0.25	-0.5	0	6
w	0.63	0	0	1	0.13	0.25	0	7
S_3	3.13	0	-1	0	0.63	-0.75	1	29
C	0.38	0	2	0	0.88	0.75	0	41

Table 5: Simplex Tableau 3

Εξετάζοντας το κριτήριο της μέγιστης λύσης βλέπουμε ότι αυτό ικανοποιείται άρα η βέλτιστη λύση εντοπίστηκε και συνεπώς ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Η βέλτιστη λύση είναι η εξής: $(x, y, z, w, s_1, s_2, s_3) = (0, 6, 0, 7, 0, 0, 29)$.

Και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης γι' αυτή τη λύση θα είναι $C = 41$.

Κάπου εδώ ολοκληρώνεται η περιγραφή της μεθόδου Simplex για τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού.

1.4.2 Ακέραιος Προγραμματισμός

➤ Εισαγωγή

Ο Ακέραιος Προγραμματισμός είναι μια υποκατηγορία του Γραμμικού Προγραμματισμού. Ένα πρόβλημα ακέραιου (γραμμικού) προγραμματισμού, είναι εκείνο το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού όπου τουλάχιστον μια μεταβλητή παίρνει αποκλειστικά ακέραιες τιμές. Η έννοια αμιγώς Ακέραιος Προγραμματισμός χρησιμοποιείται για προβλήματα όπου όλες οι μεταβλητές παίρνουν μόνο ακέραιες τιμές. Ωστόσο συχνό φαινόμενο αποτελεί η ύπαρξη συνεχών μεταβλητών μαζί με ακέραιες μεταβλητές. Ένα τέτοιο μοντέλο ονομάζεται και μοντέλο Μεικτού Ακέραιου Προγραμματισμού.

Η εφαρμογή του Ακέραιου Προγραμματισμού ως μέθοδος μοντελοποίησης απευθύνεται κυρίως σε προβλήματα παραγωγής ολοκληρωμένων ποσοτήτων συγκεκριμένων αγαθών, όπως τα αυτοκίνητα, τα αεροπλάνα ή τα σπίτια, αλλά και σε περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται ολοκληρωμένες ποσότητες συγκεκριμένων πόρων, όπως οι εργαζόμενοι. Πολλές είναι οι περιπτώσεις όπου αντί για τον Ακέραιο Προγραμματισμό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Γραμμικό Προγραμματισμό με στρογγυλοποίηση των μη ακέραιων αποτελεσμάτων στους πλησιέστερους ακέραιους. Αυτή η πρακτική όμως, οδηγεί πολλές φορές σε μια μη εφικτή λύση ή σε λύση που δεν είναι η βέλτιστη, επομένως η επίλυση με Ακέραιο Προγραμματισμό είναι απαραίτητη. Τα πιο πρακτικά μαθηματικά μοντέλα του Ακέραιου Προγραμματισμού περιορίζουν τις ακέραιες μεταβλητές σε δύο τιμές, 0 ή 1. Τέτοιες μεταβλητές που παίρνουν τις τιμές 0 ή 1 ονομάζονται δίτιμες και χρησιμοποιούνται συνήθως για να αντιπροσωπεύσουν τις αποφάσεις «ναι» ή «όχι».

➤ Εφαρμογές

Το 2013 έγινε μια πρώτη προσπάθεια από τον Williams ώστε να ταξινομηθούν τα διάφορα είδη προβλημάτων για τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν μοντέλα Ακέραιου Προγραμματισμού. Τα είδη των προβλημάτων είναι τα παρακάτω:

- ✚ Προβλήματα με διακριτά δεδομένα και λύσεις
- ✚ Προβλήματα με λογικές συνθήκες
- ✚ Συνδυαστικά προβλήματα
- ✚ Μη γραμμικά προβλήματα
- ✚ Προβλήματα δικτύου

1.4.3 Δυναμικός Προγραμματισμός

➤ Εισαγωγή

Αντιμετωπίζοντας προβλήματα κατανομής, μεταφοράς, οργάνωσης και σχεδιασμού οι τιμές που λαμβάνουν οι μεταβλητές απόφασης θεωρούνται σταθερές. Τα προβλήματα αυτά ήταν στατικής φύσης και λύνονταν ως συγκεκριμένες καταστάσεις, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Υπάρχει όμως και μια κατηγορία προβλημάτων στα οποία οι τιμές των μεταβλητών μεταβάλλονται με το χρόνο. Τα προβλήματα αυτά θεωρούνται ότι είναι δυναμικής φύσης και αντιμετωπίζονται με την τεχνική του Δυναμικού Προγραμματισμού.

Σε προβλήματα βελτιστοποίησης που περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό μεταβλητών ή ανισοτικών περιορισμών, μπορεί να μην είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν οι λογιστικές μέθοδοι για την εξεύρεση λύσης και ο υπολογισμός των βέλτιστων τιμών να αυξάνει το υπολογιστικό κόστος. Η προφανής λύση είναι να διαχωριστεί το αρχικό πρόβλημα σε μικρά υπο-προβλήματα και αυτό ακριβώς κάνει ο Δυναμικός Προγραμματισμός.

➤ Ιδιότητες

Τα χαρακτηριστικά του Δυναμικού Προγραμματισμού που τον διαφοροποιούν από τις υπόλοιπες τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα παρακάτω:

- Περιλαμβάνει μια πολυδιάστατη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Τα στάδια μπορεί να είναι ορισμένα χρονικά διαστήματα ή ορισμένα τμήματα του προβλήματος για τα οποία μπορούν να ληφθούν ανεξάρτητες αποφάσεις.
- Οι «καταστάσεις» του προβλήματος είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και δεν είναι απαραίτητο για να επιλυθεί μία κατάσταση να γνωρίζουμε τις αποφάσεις των προηγούμενων καταστάσεων.
- Στο Δυναμικό Προγραμματισμό οι αποφάσεις που λαμβάνονται εξαρτώνται από ένα μικρό αριθμό μεταβλητών απόφασης. Δηλαδή σε κάθε στάδιο μερικές μόνο μεταβλητές ορίζουν το πρόβλημα.
- Η απόφαση σε ένα στάδιο δεν μεταβάλλει τον αριθμό μεταβλητών από τις οποίες εξαρτάται το αποτέλεσμα, αλλά μόνο τις αριθμητικές τιμές τους.
- Ο Δυναμικός Προγραμματισμός διέπεται από την Αρχή της Βελτιστοποίησης, σύμφωνα με την οποία «Η βέλτιστη πολιτική (σειρά αποφάσεων) έχει την ιδιότητα, ότι οποιαδήποτε κι αν είναι η αρχική απόφαση, οι υπόλοιπες αποφάσεις πρέπει να αποτελέσουν μια βέλτιστη πολιτική στην κατάσταση που προέκυψε από την πρώτη απόφαση.» Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μια λανθασμένη απόφαση σε κάποιο στάδιο δεν εμποδίζει την λήψη βέλτιστων αποφάσεων.
- Ο Δυναμικός Προγραμματισμός παρέχει μια συστηματική διαδικασία όπου ξεκινώντας κανείς από το τελευταίο στάδιο και προχωρώντας προς τα πίσω λαμβάνει τη βέλτιστη απόφαση για κάθε στάδιο του προβλήματος. Οι πληροφορίες για το τελικό στάδιο προέρχονται από τα προηγούμενα στάδια. Τα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού μπορούν να λυθούν και ξεκινώντας από το πρώτο στάδιο και καταλήγοντας στο τελευταίο.

1.5 Κλάδοι και Εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας

Η Επιχειρησιακή Έρευνα και η επιστήμη της διοίκησης είναι αλληλένδετοι όροι που στοχεύουν στη λήψη βέλτιστων αποφάσεων και στην επίλυση των προβλημάτων. Η επικράτηση της Επιχειρησιακής Έρευνας στις οικονομίες των αναπτυγμένων κρατών, αντικατοπτρίζει την αυξανόμενη πολυπλοκότητα διαχείρισης μεγάλων συστημάτων, τα οποία απαιτούν μια αποτελεσματική διαχείριση χρημάτων, υλικού, εξοπλισμού και εργατικού δυναμικού. Οι αναλυτές Επιχειρησιακής Έρευνας βοηθούν στη διαμόρφωση βέλτιστων μεθόδων συντονισμού αυτών των στοιχείων, εφαρμόζοντας αναλυτικές μεθόδους από τα μαθηματικά και τη μηχανική. Επιλύουν προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους και προτείνουν εναλλακτικές λύσεις. Σε γενικές γραμμές, η Επιχειρησιακή Έρευνα διαπραγματεύεται διαφορετικά ζητήματα, όπως την στρατηγική, τον σχεδιασμό, την πρόβλεψη και διάθεση των πόρων, την μέτρηση της απόδοσης, την σχεδίαση των μονάδων και συστημάτων παραγωγής, την μεταφορά και διανομή καθώς και την ανάλυση δεδομένων. Οι μεθοδολογίες της Επιχειρησιακής Έρευνας με επιτυχία έχουν εφαρμοστεί και συνεχίζουν να εφαρμόζονται στην επίλυση προβλημάτων σε αρκετούς κλάδους όπως μερικοί παρακάτω:

- Εκπαίδευση
- Υγεία
- Ενέργεια
- Περιβάλλον και Βιώσιμη ανάπτυξη
- Βιομηχανίες εξόρυξης πετρωμάτων και άλλων κοιτασμάτων
- Μεταφορές
- Τηλεπικοινωνίες
- Δίκτυα
- Ναυτιλιακά
- Συγκοινωνιακά Συστήματα
- Στρατιωτικά και εξοπλιστικά Συστήματα
- Χρηματοοικονομικά
- Διοίκηση και έλεγχος παραγωγής
- Έλεγχος ποιότητας

Θα αναφερθούμε τέλος σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα εφαρμογής της Επιχειρησιακής Έρευνας στον χώρο των επιχειρήσεων για να γίνουν όσο το δυνατόν πιο κατανοητά όσα ειπώθηκαν παραπάνω.

Η αμερικανική αεροπορική εταιρεία Delta Airlines εκτελεί περισσότερες από 2.500 εγχώριες πτήσεις ημερησίως (δεδομένα του 1993) και χρησιμοποιεί περίπου 450 αεροσκάφη από 10 διαφορετικούς στόλους. Το πρόβλημα που κλήθηκε να αντιμετωπίσει η Επιχειρησιακή Έρευνα ήταν η επιλογή του κατάλληλου αεροσκάφους σε μέγεθος ανάλογα με την απόσταση που διανύεται, ώστε να μεγιστοποιούνται τα έσοδα σε σχέση με τις θέσεις. Η σκέψη ήταν η εξής: Αν ένα αεροσκάφος είναι αρκετά μικρό σε μέγεθος, τότε η εταιρεία είναι πιθανό να χάνει έσοδα από επιβάτες που θα ήθελαν να ταξιδέψουν αλλά δεν μπόρεσαν λόγω έλλειψης θέσεων. Ενώ αν ένα

αεροσκάφος είναι αρκετά μεγάλο, τότε οι κενές θέσεις που μπορεί να υπάρχουν σημαίνουν αυτομάτως απώλεια κέρδους. Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρήση του Ακέραιου Προγραμματισμού. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους λειτουργίας και του κόστους των χαμένων εσόδων από τους επιβάτες. Οι περιορισμοί που υπάρχουν σε αυτό το πρόβλημα είναι αρκετοί. Ορισμένοι από αυτούς μπορεί να προέρχονται από τη διατήρηση της ροής των αεροσκαφών από διαφορετικούς στόλους σε διαφορετικούς προορισμούς και σε διαφορετικές προγραμματισμένες ώρες απογείωσης και προσγείωσης. Ακόμη, η διαθεσιμότητα του αεροσκάφους, του πληρώματος, οι απαιτήσεις για συντήρηση και άλλες ρυθμίσεις που επιβάλλονται από τα αεροδρόμια μπορεί να αποτελούν επιπλέον περιορισμούς. Με τη βοήθεια της Επιχειρησιακής Έρευνας εντοπίστηκε η βέλτιστη λύση και σύμφωνα με τα δεδομένα της εταιρείας εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν η Delta Airlines εξοικονομούσε περίπου 220.000\$ την ημέρα!

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΚΛΑΔΟΙ	ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΕΣ
Φυσικές Επιστήμες	Γραμμικός Προγραμματισμός
Μαθηματικά	Δυναμικός Προγραμματισμός
Επιστήμη των Υπολογιστών	Ακέραιος Προγραμματισμός
Κοινωνικές Επιστήμες	Μη Γραμμικός Προγραμματισμός
Διοίκηση	Δέντρα Αποφάσεων
Πολιτικές Επιστήμες	Προγραμματισμός Δικτύων
Οικονομικά	Θεωρία Ουρών Αναμονής
	Θεωρία Παιγνίων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Παρουσίαση του Προβλήματος

Στην προηγούμενη ενότητα δώσαμε τον ορισμό της Επιχειρησιακής Έρευνας, τους τομείς στους οποίους δραστηριοποιείται η συγκεκριμένη επιστήμη, καθώς και μερικά παραδείγματα για το πώς εφαρμόζεται πρακτικά, αλλά και την αξία των αποτελεσμάτων της. Έχουμε δημιουργήσει επομένως μια αρχική εικόνα για το τι είναι τελικά η Επιχειρησιακή Έρευνα.

Στην συνέχεια της παρούσας εργασίας θα εξετάσουμε διεξοδικά την εφαρμογή αυτού του επιστημονικού κλάδου σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα με πραγματικά δεδομένα. Αντικείμενο της μελέτης μας θα αποτελέσει ένα φυσικό αγαθό, το οποίο είναι ζωτικής σημασίας για την ύπαρξη και την πρόοδο του πλανήτη μας, Το νερό! Αδιαμφισβήτητη είναι η αξία του συγκεκριμένου αγαθού τόσο για την υγεία μας, όσο και για την ανάπτυξη πολιτισμού και διατήρησης της ζωής πάνω στη Γη. Πολύς λόγος γίνεται τα τελευταία χρόνια για τις ολέθριες συνέπειες της μείωσης των αποθεμάτων νερού ανά τον κόσμο.

Πιο συγκεκριμένα θα μας απασχολήσει **το εργοστάσιο Κορπή** το οποίο είναι ένα εργοστάσιο εμφιάλωσης φυσικού, μεταλλικού νερού που πηγάζει από τις Ιαματικές Πηγές Κορπή. Σε αυτό το σημείο χρειάζεται να διαχωρίσουμε το φυσικό, μεταλλικό νερό από το επιτραπέζιο καθώς το πρώτο, έχει αποκλειστικά υπόγεια προέλευση και εμφιαλώνεται επιτόπου στην πηγή προέλευσής του (συνήθως γεώτρηση). Οι κοινοτικές οδηγίες απαγορεύουν οποιαδήποτε κατεργασία ή απολύμανση στο φυσικό μεταλλικό νερό, εν αντιθέσει με το επιτραπέζιο, το οποίο επιτρέπεται να είναι οποιασδήποτε προέλευσης (π.χ. από γεώτρηση, από λίμνη, από ποτάμι, ακόμη και αφαλατωμένο νερό θάλασσας). Το προαναφερθέν εργοστάσιο υπάγεται στον Όμιλο της **Nestlé¹** από το 1993 μέχρι και σήμερα. Ας γνωρίσουμε όμως λίγο καλύτερα την πορεία και τον τρόπο λειτουργίας του εργοστασίου.

-
1. Το 1866 ο Γάλλος φαρμακοποιός Henri Nestlé ίδρυσε στην Ελβετία την ομώνυμη εταιρεία. Αφορμή αποτέλεσε η δημιουργία μια βρεφικής κρέμας κατάλληλη για νεογνά των οποίων οι μητέρες δεν μπορούσαν να θηλάσουν. Τα πρώτα χρόνια η εταιρεία δραστηριοποιούνταν στην παραγωγή και πώληση βρεφικών κρεμών καθώς και σε τυποποιημένα γάλατα.
Το 1875 ο Henri πούλησε την εταιρεία του στον Vevey ο οποίος την επάνδρωσε με εξειδικευμένο προσωπικό και αύξησε τις πωλήσεις της.
Το 1905, συγχωνεύθηκε με την Anglo-Swiss Condensed Milk Company με έδρα το Σαμ της Ελβετίας.
Η Nestlé σήμερα παράγει πληθώρα προϊόντων όπως στιγμιαίο καφέ (Nescafe, Nespresso), δημητριακά (Fitness, Nesquik), βρεφικές κρέμες, σοκολάτες, γαλακτοκομικά προϊόντα, ροφήματα, τροφές για κατοικίδια, νερό και παγωτά. Επιπλέον το 2014 η Nestlé αγόρασε μεγάλο ποσοστό των δικαιωμάτων και ξεκίνησε μια νέα συνεργασία με την εταιρεία κοσμητικής L'Oréal. Η εταιρεία μετρά πλέον πάνω από 150 χρόνια λειτουργίας, απασχολεί περίπου 291.000 εργαζόμενους και διαθέτει 413 εργοστάσια σε 85 χώρες ανά τον κόσμο.
Τα πρώτα προϊόντα της Nestlé στη Ελλάδα εμφανίζονται στα τέλη του 19^{ου} αιώνα σε απευθείας εισαγωγή από την Ελβετία.
Το 1973 ιδρύεται η Nestlé Ελλάς Α.Β.Ε., με συμμετοχή κατά ποσοστό 51% της Nestlé S.A. και κατά ποσοστό 49% της Προβγάλ Α.Ε.

2.1 Η Κορπή από το Χθες στο Σήμερα

Η Κορπή είναι ένας ημιορεινός οικισμός του νομού Αιτωλοακαρνανίας, με υψόμετρο 265 μέτρα από την επιφάνεια της θάλασσας και πληθυσμό 7 κατοίκους. Η έδρα του δήμου είναι η Βόνιτσα και ανήκει στο γεωγραφικό διαμέρισμα Στερεάς Ελλάδας. Βρίσκεται στο βορειοδυτικό άκρο του νομού, στις βόρειες απολήξεις των Ακαρνανικών και υπάγεται διοικητικά στον νέο δήμο Ακτίου-Βόνιτσας. Το νερό της Κορπή άρχισε να αξιοποιείται ως πόσιμο από το 1854. Μέχρι τότε χρησίμευε μόνο για την άρδευση. Το έτος εκείνο κατασκευάστηκε το πρώτο υδραγωγείο για την ύδρευση της Βόνιτσας και το νερό Κορπή υπήρξε για όλους τους κατοίκους της το φάρμακο της ζωής, διότι μαστίζονταν από τους ελώδεις πυρετούς. Το υδραγωγείο αυτό συστηματοποιήθηκε και τελειοποιήθηκε το έτος 1911. Στο χώρο της πηγής κατασκευάστηκαν από τους ιδιοκτήτες των γύρω αγρών πετρόκτιστα και κεραμοσκεπή δωμάτια για να μένουν όσοι παραθεριστές πήγαιναν για υδροθεραπεία, διότι το νερό της Κορπή είχε αποδειχθεί και εμπειρικά και με χημικές αναλύσεις ότι είναι **ιαματικό** για λίθους στα νεφρά και άλλες παθήσεις.

Πριν τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο οι κατασκευές ήταν πρόχειρες. Από την δεκαετία όμως του 1950 και μετά ήταν τόσο αθρόα η προσέλευση των πασχόντων παραθεριστών και των συνοδών τους, ώστε ο αριθμός των δωματίων αυξήθηκε, οι κατασκευές έγιναν πιο ανθρώπινες και ο χώρος έσφυζε από ζωή!



Τα πράγματα άλλαξαν και εκσυγχρονίστηκαν όταν περί το έτος 1989 ο Νικόλαος Θ. Παπαγιάννης, ιδιοκτήτης οικοπέδου κοντά στην πηγή και ο Ι. Κολομάζος από την Άρτα συνέστησαν εταιρεία και δημιούργησαν στην Κορπή το πρώτο εργοστάσιο εμφιάλωσης. Η επιχείρηση είχε μεγάλη επιτυχία και η ζήτηση του εμφιαλωμένου νερού είχε καταπληκτική διάδοση.

Στο εργοστάσιο αυτό εργάζονταν αρκετοί κάτοικοι του οικισμού αλλά και των γύρω χωριών και η Κοινότητα Μοναστηρακίου εισέπραττε αρκετά χρήματα από το ειδικό τέλος που

αναλογούσε από τις πωλήσεις των προϊόντων, με τα οποία έγιναν πολλά κοινωφελή έργα στο χωριό, όπως δρόμοι, πλατείες, διδακτήρια κ.α.

Το 1993 τα σχετικά δικαιώματα ανέλαβε η εταιρεία NESTLE ΕΛΛΑΣ Α.Ε. και από τότε το νερό Κορπή έγινε παντού γνωστό ως ένα από τα καλύτερα μεταλλικά νερά. Λόγω της προέλευσης του, το Κορπή είναι ιδανικά ισορροπημένο σε πολύτιμα μέταλλα και ιχνοστοιχεία, ευεργετικά για τον οργανισμό, όπως:

Νάτριο – η χαμηλή περιεκτικότητά του σε νάτριο το καθιστά ιδανικό για δίαιτα Άλατα – η χαμηλή περιεκτικότητά του σε άλατα το καθιστά ιδανικό για παιδιά
Ενώ έχει ιδιαίτερα χαμηλή περιεκτικότητα σε Αμμωνιακές Ρίζες, Νιτρικά (5,07mg/l) και Νιτρώδη.

Το 1995 τίθεται σε λειτουργία το νέο εργοστάσιο φυσικού μεταλλικού νερού. Μια τεράστια έκταση που βρίσκεται μακριά από τα μεγάλα αστικά κέντρα και δεν κινδυνεύει από αστικά λήμματα, φιλοξενεί ένα από τα πιο σύγχρονα εργοστάσια στην Ευρώπη. Με πλήρες ανοξειδωτο δίκτυο νερού, με μικροβιακά ελεγχόμενα εμφιαλωτήρια στα οποία ασκείται πλήρης έλεγχος θερμοκρασίας και υγρασίας, με ό,τι πιο νέο από άποψη τεχνολογίας και αυτοματισμού, με γρήγορες και αποτελεσματικές γραμμές παραγωγής και εμφιάλωσης, το εργοστάσιο Κορπή αποτελεί εγγύηση για την άριστη ποιότητα του φυσικού μεταλλικού νερού. Σήμερα διαθέτει δύο γεωτρήσεις, παράγει φυσικό μεταλλικό νερό, απλό και ανθρακούχο, πραγματοποιεί εμφιάλωση του νερού της πηγής Κορπή και απασχολεί 56 άτομα.



2.2 Περιγραφή του Προβλήματος

Πριν ξεκινήσουμε την επίλυση του συστήματος, κάνοντας χρήση των μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας, θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε το περιβάλλον της συγκεκριμένης μελέτης.

Αρχικά στη διάθεση μας έχουμε **18 αποθήκες** (μαζί με το Κεντρικό Εργοστάσιο) ανά την επικράτεια, οι οποίες προμηθεύουν τις διάφορες περιοχές της Ελλάδας με το Προϊόν μας (φιάλες Φυσικού Μεταλλικού Νερού Κορπή).

Οι αποθήκες παρουσιάζονται ονομαστικά:

- 0447 GR PL NW Korpi NH
- 0762 GR DC Diakinisi ATH NH
- 3673 GR DC Kerkira NH
- 3675 GR DC Chalkida NH
- 3676 GR DC Iraklio NH
- 3677 GR DC Rodos NH
- 3680 GR DC Agrinio NH
- 3682 GR DC Patra NH
- 3683 GR DC Larisa NH
- 3689 GR DC Chios NH
- 3690 GR DC Ioannina NH
- 3692 GR DC Sindos NH
- 3693 GR DC Salonika DiakinisiTHE NH
- 6695 GR DC Tavros Distribu
- 6780 GR DC Volos Kapsala NH
- 6876 GR DC Kavala NH
- 7599 GR DC Kalamata NH
- 8887 GR DC Elefsina NH

Όλα τα προϊόντα παράγονται στο εργοστάσιο και ένα μέρος της ζήτησης καλύπτεται με απευθείας πωλήσεις από εκεί, ενώ η υπόλοιπη ζήτηση καλύπτεται από τις άλλες αποθήκες. Οι λοιπές αποθήκες, εφοδιάζονται, ανάλογα με τη ζήτηση των περιοχών που εξυπηρετούν, από το εργοστάσιο. Δηλαδή το εργοστάσιο παράγει προϊόντα και αυτά μεταφέρονται στις αποθήκες για να πωληθούν στα διάφορα σημεία της χώρας. Συνεπώς το Κεντρικό Εργοστάσιο έχει διττή φύση, από τη μια λειτουργεί σαν αποθήκη και διανέμει το Προϊόν στις διάφορες περιοχές που εξυπηρετεί και από την άλλη λειτουργεί σαν εργοστάσιο προμηθεύοντας τις άλλες αποθήκες.

Το εργοστάσιο Κορπή παράγει 7 διαφορετικές κατηγορίες προϊόντων:

- Φιάλη του 0.5lt
- Φιάλη του 0.5lt (Korpi Mania)
- Φιάλη του 0.75lt (Sport Max)
- Φιάλη του 1lt

- Φιάλη του 1.5lt
- Φιάλη ανθρακούχου νερού 0.33lt
- Φιάλη ανθρακούχου νερού 1lt

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι η μελέτη του προβλήματος θα διεξαχθεί με την θεώρηση της Παλέτας (PAL) ως το βασικό προϊόν παραγωγής, μεταφοράς και αποθήκευσης και συνεπώς τα αντίστοιχα κόστη θα αφορούν την μια Παλέτα. Τα κόστη που δίνονται παρακάτω είναι κατά προσέγγιση και μπορούν να θεωρηθούν κοινά για όλες τις κατηγορίες προϊόντων που αναφέρθηκαν πριν. Από εδώ και στο εξής θα αντιμετωπίζουμε όλα τα προϊόντα σαν ένα είδος προϊόντος με παρόμοιες ιδιότητες και κόστη.

Πιο συγκεκριμένα τα κόστη είναι τα εξής:

- Εκτιμώμενο Μέσο Κόστος Α' υλών: **45€/PAL**
- Εκτιμώμενο Μέσο Κόστος Αποθήκευσης: **8€/PAL**
- Κόστος Μεταφοράς. Το κόστος μεταφοράς ποικίλει ανάλογα με την διαδρομή, δηλαδή από ποια αποθήκη ξεκινάει το φορτίο και που καταλήγει. Κατά κανόνα η μεταφορά γίνεται με συγκεκριμένα φορτηγά τα οποία διαθέτουν αποθηκευτική ικανότητα 30 PAL ανά δρομολόγιο.

Στον παρακάτω Πίνακα παρουσιάζονται τα κόστη μεταφοράς από το Κεντρικό Εργοστάσιο προς τις διάφορες αποθήκες. Στην πρώτη στήλη του πίνακα παρουσιάζονται τα δρομολόγια που πραγματοποιούνται σε ένα χρόνο (2018) προς την κάθε αποθήκη. Να σημειωθεί ότι η εταιρεία επιβαρύνεται μόνο με την μία διαδρομή που πραγματοποιούν τα φορτηγά μεταφορών και όχι και με το κόστος επιστροφής τους από την κάθε αποθήκη.

Πίνακας 1

2018 loads	Delivery Point	Route Description	AVG cost per PAL
365	ΑΘΗΝΑ		12,0 €
393	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	Korpi -> Thessaloniki	15,0€
187	ΑΧΑΙΑ	Korpi -> Akhaia	9,0€
125	ΙΩΑΝΝΙΝΑ	Korpi -> Ioannina	8,0€
438	ΑΙΤΩΛΟ-ΑΚΑΡΝΑΝΙΑ	Korpi -> Agrinio	6,0€
		Korpi -> Thermo	10,0€
		Korpi -> Astakos	7,0€
		Korpi -> Vonitsa	5,0€
2	ΒΟΙΩΤΙΑ	Korpi -> Thiva	13,0€

28	ΤΡΙΚΑΛΑ	Korpi -> Trikala	13,0 €
71	ΕΥΒΟΙΑ	Korpi -> Chalkida	14,0€
		Korpi -> Evvoia	18,0€
105	ΘΕΣΣΠΡΩΤΙΑ	Korpi -> Igoumenitsa	9,0€
		Korpi -> Paramithia,Filiates	9,0€
37	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	Korpi -> Kalamata	15,0€
35	ΛΑΡΙΣΑ	Korpi -> Larisa	14,0€
46	ΚΑΒΑΛΑ	Korpi -> Kavala	21,0€
106	ΛΕΥΚΑΔΑ	Korpi -> Levkas	6,0€
49	ΜΑΓΝΗΣΙΑ	Korpi -> Volos	15,0€
		Korpi -> Sporades	53,0€
28	ΚΕΡΚΥΡΑ	Korpi -> Kerkira	21,0€
		Korpi -> Paxoi	23,0€
115	ΑΡΤΑ	Korpi -> Arta	6,0€
28	ΗΡΑΚΛΕΙΟ	Korpi -> Iraklion	34,0€
19	ΚΟΖΑΝΗ	Korpi -> Kozani	14,0€
56	ΡΟΔΟΠΗ	Korpi -> Komotini	25,0€
16	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	Korpi -> Argos	14,0€
		Korpi -> Nafplio	14,0€
		Korpi -> Kranidi, Troizina	20,0€
34	ΣΕΡΡΕΣ	Korpi -> Serrai	17,0€
84	ΠΡΕΒΕΖΑ	Korpi -> Preveza	6,0€
		Korpi -> Kanalaki, Parga	8,0€
5	ΗΛΕΙΑ	Korpi -> Ilia	12,0€
61	ΖΑΚΥΝΘΟΣ	Korpi -> Zakynthos	23,0€
28	ΚΟΡΙΝΘΙΑ	Korpi -> Korinthos	12,0€
		Korpi -> Nemea	13,0€
10	ΕΒΡΟΣ	Korpi -> Alexandroupoli	29,0€
		Korpi -> Orestiada	31,0€
22	ΑΡΚΑΔΙΑ	Korpi -> Tripoli	15,0€
3	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ	Korpi -> Kefallinia	27,0€
5	ΠΙΕΡΙΑ	Korpi -> Katerini	15,0€
2	ΚΑΣΤΟΡΙΑ	Korpi -> Kastoria	17,0€

Πίνακας 1:Κόστη Μεταφοράς απο το Κεντρικό Εργοστάσιο

Στον παρακάτω πίνακα απεικονίζονται τα κόστη μεταφοράς από την κάθε αποθήκη προς τις διάφορες περιοχές.

Πίνακας 2

Stores		AVG cost per pal
0762	GR DC Diakinisi ATH NH	39 €
3673	GR DC Kerkira NH	16 €
3675	GR DC Chalkida NH	26 €
3676	GR DC Iraklio NH	16 €
3677	GR DC Rodos NH	16 €
3680	GR DC Agrinio NH	26 €
3682	GR DC Patra NH	16 €
3683	GR DC Larisa NH	16 €
3689	GR DC Chios NH	16 €
3690	GR DC Ioannina NH	16 €
3692	GR DC Sindos NH	23 €
3693	GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	23 €
6695	GR DC Tavros Distribu	16 €
6780	GR DC Volos Kapsala NH	16 €
6876	GR DC Kavala NH	16 €
7599	GR DC Kalamata NH	16 €
8887	GR DC Elefsina NH	24 €

Πίνακας 2: Κόστη Μεταφοράς από κάθε Αποθήκη

Τα κόστη αυτά είναι σταθερά και ανεξάρτητα από την περιοχή. Για παράδειγμα, το κόστος μεταφοράς Αθήνα-Αλεξανδρούπολη είναι ίδιο με το κόστος μεταφοράς Αθήνα-Πάτρα: 39€, κάτι το οποίο με μια πρώτη ματιά φαίνεται παράλογο, αλλά στην πραγματικότητα πρόκειται για μια

σύμβαση της εταιρείας, για εσωτερικούς λογιστικούς λόγους, ώστε να είναι πιο απλή η κοστολόγηση. Εν γνώση της η εταιρεία οδηγείται μερικές φορές σε υπερεκτίμηση και υποεκτίμηση του κόστους, θεωρώντας όμως ότι μακροσκοπικά οι υπολογισμοί της είναι ακριβείς. Στην πραγματικότητα αυτή η ομογενοποίηση του κόστους μεταφοράς είναι μη ρεαλιστική και στερεί από την επιχείρηση την δυνατότητα να βελτιστοποιήσει το κόστος μεταφοράς της.

Στην ανάλυση του προβλήματος μεταφοράς που θα εφαρμοστεί στη συνέχεια θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα στηριζόμενοι σε ρεαλιστικά κόστη που θα προκύψουν από τις χιλιομετρικές αποστάσεις των αποθηκών και των προορισμών. Από την προσεκτική μελέτη των δεδομένων βλέπουμε ότι υπάρχουν αρκετές τριγωνικές μεταφορές οι οποίες είναι αρκετά κοστοβόρες. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μεταφορά προϊόντων στη διαδρομή Εργοστάσιο Κορπή-Σίνδος-Αττική. Αυτό το φαινόμενο θα προσπαθήσουμε να περιορίσουμε με την λύση του προβλήματος της μεταφοράς. Τέλος υπάρχουν και κάποιες μεταφορές οι οποίες είναι εντελώς παράδοξες όπως η μεταφορά από την αποθήκη της Κέρκυρας στο Ρέθυμνο. Αυτή η μεταφορά είναι τυπική καθώς μπορεί μια επιχείρηση να λειτουργεί σε μια περιοχή αλλά για λογιστικούς λόγους η έδρα της να φαίνεται σε άλλη περιοχή. Αυτές τις περιπτώσεις δεν θα τις λάβουμε υπόψιν μας στη μελέτη του προβλήματος.

Το νερό Κορπή, είναι ένα Φυσικό Μεταλλικό Νερό το οποίο πηγάζει από τις Ιαματικές Πηγές της ομώνυμης περιοχής. Επομένως μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι η παραγωγή του εξαρτάται, τόσο από την δυνατότητα και τον εξοπλισμό του εργοστασίου και του ανθρώπινου δυναμικού που διαθέτει η εταιρεία, όσο και από το φυσικό περιβάλλον. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η παραγωγική ικανότητα να διαφέρει ανά εποχή ανάλογα με την ροή των Πηγών και την ποσότητα του διαθέσιμου νερού. Αυτός είναι ένας αστάθμητος παράγοντας που επηρεάζεται από τις βροχοπτώσεις στην περιοχή και δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η παραγωγική ικανότητα του Κεντρικού Εργοστασίου ανά μήνα για το προηγούμενο έτος.

Πίνακας 3

01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
15.800	17.300	15.800	14.400	14.400	13.700	13.700	12.900	12.900	12.600	13.700	13.700

Πίνακας 3: Παραγωγική Ικανότητα του Εργοστασίου σε παλέτες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Έχοντας κατανοήσει το περιβάλλον του συστήματος που διαθέτουμε προς ανάλυση, θα προχωρήσουμε στην επίλυση του Προβλήματος της Μεταφοράς με βάση τα συγκεκριμένα δεδομένα. Πριν προβούμε όμως στην εύρεση της βέλτιστης λύσης, ας μελετήσουμε κάποιες βασικές λεπτομέρειες για **το Πρόβλημα της Μεταφοράς**.

3.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα της μεταφοράς είναι μια ειδική κατηγορία προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Γενικά, το πρόβλημα μεταφοράς, αφορά την εύρεση βέλτιστου σχεδίου μεταφοράς και τον προσδιορισμό των καταλλήλων ποσοτήτων ενός συγκεκριμένου προϊόντος, που πρέπει να μεταφερθούν από ορισμένα κέντρα **προέλευσης** (παραγωγής ή εφοδιασμού), τα οποία ονομάζονται **αφετηρίες** ή **πηγές**, σε ορισμένα κέντρα **προορισμού** (κατανάλωσης ή ζήτησης). Ως αφετηρίες μπορούν να θεωρηθούν οι βιομηχανίες, οι μονάδες παραγωγής προϊόντων, οι κεντρικές αποθήκες εφοδιασμού κλπ. Ενώ ως προορισμοί μπορούν να θεωρηθούν τα καταστήματα λιανικής πώλησης, οι περιφερειακές αποθήκες κλπ.

Η κάθε αφετηρία παρέχει συγκεκριμένο αριθμό αγαθών και έχει περιορισμένη δυναμικότητα διάθεσης (προσφορά). Ταυτόχρονα και ο κάθε προορισμός μπορεί να απορροφήσει συγκεκριμένη ποσότητα αγαθών (ζήτηση). Η μεταφορά των προϊόντων από μία αφετηρία προς κάθε προορισμό έχει ένα συγκεκριμένο κόστος το οποίο εξαρτάται κυρίως από την απόσταση και τα μέσα μεταφοράς που χρησιμοποιούνται. Το κόστος αυτό προσδιορίζεται με μια ειδική συνάρτηση κόστους ή κέρδους (αντικειμενική συνάρτηση). Ανάλογα με την διατύπωση του προβλήματος μπορεί να πρόκειται για μια συνάρτηση μεγιστοποίησης κέρδους ή ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους. Ο βέλτιστος τρόπος μεταφοράς που εξάγεται από την επίλυση του συστήματος ονομάζεται «βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς» και προκύπτει με βάση το κριτήριο του συνολικού κόστους μεταφοράς των αγαθών από τις διάφορες πηγές, στους διάφορους προορισμούς. Τέλος απαραίτητη προϋπόθεση είναι, το κόστος μεταφοράς να είναι ανάλογο με τον αριθμό των μονάδων που μεταφέρονται σε μια συγκεκριμένη διαδρομή.

3.2 Ορισμός του Προβλήματος Μεταφοράς

Το γενικό μοντέλο του προβλήματος μεταφοράς διαμορφώνεται ως εξής:
Έστω ότι υπάρχουν n κέντρα **προέλευσης** ή **πηγές** και m κέντρα προορισμού.
Συμβολίζουμε με:

s_i : την συνολική ποσότητα προσφορά ή παραγωγική δυναμικότητα της i προέλευσης, σε ποσότητες του προϊόντος ($i = 1, \dots, n$)

d_j : την συνολική ποσότητα ζήτηση του j προορισμού, σε μονάδες προϊόντος, ($j = 1, \dots, m$)

c_{ij} : το κόστος μεταφοράς από την i προέλευση στον j προορισμό, ανά μονάδα προϊόντος σε χρηματικές μονάδες.

x_{ij} : τις μεταβλητές απόφασης που παριστάνουν τις ποσότητες του προϊόντος που θα μεταφερθούν από την i προέλευση στον j προορισμό και των οποίων τις τιμές θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Οι παραπάνω ποσότητες απεικονίζονται όλες μαζί στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 4

	Προορισμός 1		Προορισμός 2		Προορισμός m		Προσφορά
Προέλευση 1	x_{11}	c_{11}	x_{12}	c_{12}		x_{1m}	c_{1m}	s_1
Προέλευση 2	x_{21}	c_{21}	x_{22}	c_{22}		x_{2m}	c_{2m}	s_2
....							
Προέλευση n	x_{n1}	c_{n1}	x_{n2}	c_{n2}		x_{nm}	c_{nm}	s_n
Ζήτηση	d_1		d_2		d_m		Σύνολο

Πίνακας 4: Τυπικός Πίνακας δεδομένων του Προβλήματος Μεταφοράς

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη Μαθηματική Μοντελοποίηση του Προβλήματος της Μεταφοράς, έτσι ώστε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τις τιμές των μεταβλητών x_{ij} που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος μεταφοράς, ενώ παράλληλα ικανοποιούν τους περιορισμούς της προσφοράς και της ζήτησης.

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\text{Minimize Cost} = \min C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

Περιορισμοί:

- Περιορισμοί Προσφοράς $\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq s_i \quad i=1,2,\dots,n$

- Περιορισμοί Ζήτησης $\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq d_j \quad j=1,2,\dots,m$
- Περιορισμοί μη αρνητικότητας $x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n \text{ και } j=1,2,\dots,m$

Η δομή του παραπάνω μοντέλου στηρίζεται στην υπόθεση ότι το Πρόβλημα είναι ισορροπημένο, δηλαδή ότι η ζήτηση και η προσφορά είναι ίσες. Διαφορετικά αν το Πρόβλημα που διαθέτουμε είναι μη ισορροπημένο τότε, προσθέτουμε εικονικές προελεύσεις ή εικονικούς προορισμούς με μηδενικό κόστος μεταφοράς. Το παραπάνω μοντέλο του προβλήματος μεταφοράς με n προελεύσεις και m προορισμούς έχει $n + m$ περιορισμούς. Το μοντέλο όμως, του προβλήματος μεταφοράς, είτε είναι είτε το μετατρέπουμε εμείς σε ισορροπημένο έχει $n + m - 1$ ανεξάρτητες περιοριστικές εξισώσεις. Επομένως μια αρχική βασική εφικτή λύση αποτελείται από $n + m - 1$ βασικές μεταβλητές, με τιμές διαφορετικές του μηδενός. Στην περίπτωση που μία ή περισσότερες από τις βασικές μεταβλητές έχουν μηδενικές τιμές η λύση θεωρείται εκφυλισμένη.

Ένα πρόβλημα μεταφοράς μπορεί να επιλυθεί όπως και κάθε άλλο γραμμικό πρόγραμμα, είτε χειροκίνητα με τη μέθοδο SIMPLEX, την οποία περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1, είτε μέσω υπολογιστή με το λογισμικό Excel – SOLVER και LINGO.

Για την επίλυση των γραμμικών προγραμμάτων που αντιστοιχούν σε προβλήματα μεταφοράς έχουν επινοηθεί ειδικές τεχνικές και αλγόριθμοι οι οποίοι επιτρέπουν τον εντοπισμό εφικτών και βέλτιστων λύσεων. Οι υπολογιστικές αυτές τεχνικές βασίζονται σε απλούς υπολογισμούς που μπορεί να γίνουν ακόμη και χωρίς τη χρήση ειδικού λογισμικού.

Η διαδικασία επίλυσης που ακολουθούν οι μέθοδοι αυτοί είναι μια επαναληπτική διαδικασία που ξεκινά από μια αρχική βασική εφικτή λύση η οποία με τη βοήθεια ενός κριτηρίου ελέγχεται εάν αποτελεί και βέλτιστη λύση. Εάν δεν αποτελεί βέλτιστη λύση, εντοπίζεται μια επόμενη καλύτερη λύση έως ότου η διαδικασία να καταλήξει στη βέλτιστη λύση. Γενικά το πρόβλημα μεταφοράς επιλύεται σε δύο βήματα ως εξής:

Βήμα 1

Πρώτα, βρίσκουμε μια **αρχική βασική εφικτή λύση**. Οι μέθοδοι εύρεσης της αρχικής βασικής εφικτής λύσης είναι:

1. Μέθοδος της Βορειοδυτικής γωνίας
2. Μέθοδος του Ελαχίστου Κόστους
3. Μέθοδος Vogel

Η μέθοδος της Βορειοδυτικής γωνίας απαιτεί τους λιγότερους και πιο εύκολους υπολογισμούς, ενώ η μέθοδος Vogel παράγει μια καλύτερη αρχική βασική λύση, δηλαδή μια αρχική λύση που δίνει καλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση και συνήθως οδηγεί σε γρηγορότερη εύρεση της βέλτιστης λύσης. Η μέθοδος ελαχίστου κόστους χωρίς να έχει το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου Vogel, επιτυγχάνει μια πολύ ικανοποιητική αρχική βασική εφικτή λύση που όχι σπάνια δίνει εφάμιλλα αποτελέσματα με εκείνα της μεθόδου Vogel.

Βήμα 2

Βάσει της αρχικής βασικής εφικτής λύσης, που εντοπίστηκε στο Βήμα 1, προχωρούμε για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Αυτό γίνεται με την εισαγωγή και την διαγραφή μεταβλητών από την αρχική λύση. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται μέθοδος Ανακατανομής των Εκχωρήσεων (Modified Distribution Method-MODI).

Για το πρόβλημα που διαθέτουμε προς ανάλυση, μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς του Εργοστασίου Κορπή, μέσω του βέλτιστου πλάνου διανομής των παραγόμενων προϊόντων. Σκοπός της μελέτης είναι να αξιοποιήσουμε στο μέγιστο βαθμό τις αποθήκες που έχει η εταιρεία στην διάθεσή της και τελικά να προκύψει ένας προγραμματισμός για το ποιες αποθήκες θα προμηθεύουν ποιες περιοχές ανάλογα με τους περιορισμούς που επιβάλλουν τα κόστη μεταφοράς, αλλά και η εκάστοτε ζήτηση.

3.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση

Αφού περιγράψαμε παραπάνω το θεωρητικό υπόβαθρο του Προβλήματος της Μεταφοράς θα προσπαθήσουμε τώρα να μοντελοποιήσουμε το σύστημα που εμείς διαθέτουμε. Αρχικά, για να απλοποιήσουμε ως ένα βαθμό το πρόβλημα, θα λάβουμε υπόψιν μας τις τέσσερις περιοχές με τις περισσότερες πωλήσεις στη χώρα μας. Αυτές είναι η **Αττική**, η **Θεσσαλονίκη**, η **Αχαΐα** και η **Αιτωλοακαρνανία**. Στόχος μας λοιπόν είναι να βελτιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς για αυτούς τους προορισμούς. Δημιουργούμε έτσι έναν πίνακα με αυτές τις τέσσερις περιοχές (στήλες) και τις αποθήκες που τις προμηθεύουν (γραμμές). Στα κελιά του πίνακα εκχωρούνται τα κόστη που έχει ορίσει η επιχείρηση ως κόστος μεταφοράς ανά παλέτα από την κάθε αποθήκη προς την κάθε περιοχή. Τα κενά κελιά του πίνακα συμβολίζουν το ότι δεν πραγματοποιούνται δρομολόγια από μια αποθήκη προς έναν συγκεκριμένο προορισμό. (Πίνακας 5). Έπειτα δημιουργούμε και έναν δεύτερο πίνακα με την ίδια μορφή, αλλά τώρα στα κελιά περιέχεται ο αριθμός των παλετών που μεταφέρθηκαν από μια αποθήκη προς έναν συγκεκριμένο προορισμό κατά το έτος 2019. Τα κενά κελιά συμβολίζουν και πάλι το ότι δεν υπάρχει συναλλαγή μεταξύ αποθήκης και προορισμού σύμφωνα με το πλάνο δράσης της εταιρείας. (Πίνακας 6). Για τους πίνακες αντλήσαμε τα δεδομένα από τα στοιχεία που παραθέσαμε στο Κεφάλαιο 2 «Παρουσίαση του Προβλήματος» καθώς και από το παράρτημα.

Για την Αιτωλοακαρνανία δίνονταν τέσσερα διαφορετικά κόστη για τέσσερις διαφορετικούς προορισμούς, Αγρίνιο 6€, Θέρμο 10€, Βόνιτσα 5€ και Αστακός 7€. Αντιμετωπίσαμε αυτή την ιδιαιτερότητα παίρνοντας τον μέσο όρο για τα κόστη.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι 2 πίνακες.

Πίνακας 5

	Προορισμοί			
Αποθήκες	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	12€	15€	9€	7€
Αθήνα	39€	39€	39€	39€
Ελευσίνα	24€			
Χαλκίδα	26€			
Ηράκλειο	16€			
Ρόδος	16€			
Αγρίνιο	26€		26€	26€
Πάτρα	16€		16€	
Λάρισα	16€			
Χίος	16€			
Ιωάννινα	16€			
Σίνδος	23€	23€		
Θεσσαλονίκη	23€	23€		
Τάυρος Αττικής	16€			
Βόλος	16€			
Καλαμάτα	16€			

Πίνακας 5: Κόστη Μεταφοράς ανά παλέτα

Πίνακας 6

	Προορισμοί			
Αποθήκες	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	19.447	10.969	4.298	9.956
Αθήνα	1.121	313	31	0
Ελευσίνα	16.930			
Χαλκίδα	104			
Ηράκλειο	9			
Ρόδος	384			
Αγρίνιο	362		62	1.463
Πάτρα	24		1.436	
Λάρισα	4			
Χίος	21			
Ιωάννινα	14			
Σίνδος	30	1.647		
Θεσσαλονίκη	1	44		
Τάυρος Αττικής	44			
Βόλος	2			
Καλαμάτα	122			

Πίνακας 6: Αριθμός Μεταφορών σε παλέτες

Κάνοντας τις πράξεις με τη βοήθεια του excel, υπολογίσαμε το κόστος μεταφοράς σύμφωνα με τα υπάρχοντα δεδομένα κόστη μεταφοράς και τις ποσότητες που πωλούνται για τις τέσσερις περιοχές που διαθέτουμε προς μελέτη (Ο πίνακας των πωλήσεων, από τον οποίο αντλήσαμε τα δεδομένα, φαίνεται στο Παράρτημα της Παρούσας Εργασίας), και αυτό ανέρχεται στα **1.094.060€**.

Στόχος μας τώρα είναι να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς όσο το δυνατόν περισσότερο, με βάση τα κόστη που ορίζει η εταιρεία για τις μετακινήσεις. Αυτό θα επιτευχθεί με την μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος.

Η μοντελοποίηση αποτελείται από τα παρακάτω βήματα.

- **Ορισμός Μεταβλητών:**

Θέτουμε $X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{164}$, δηλαδή X_{ij} με $i = 1, 2, \dots, 16$ ο αριθμός των αποθηκών και $j = 1, 2, 3, 4$ ο αριθμός των περιοχών. Οι μεταβλητές X_{ij} συμβολίζουν τον αριθμό των παλετών που θα μεταφερθούν από την αποθήκη i στον προορισμό j . Αυτές είναι οι ποσότητες που θα προσπαθήσουμε να μεταβάλουμε για να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος.

- **Αντικειμενική Συνάρτηση:**

Minimize Cost = MinC = $\sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^4 C_{ij} X_{ij}$ με X_{ij} τις μεταβλητές που ορίσαμε παραπάνω και C_{ij} τα αντίστοιχα κόστη που φαίνονται στον πίνακα 2.

- **Περιορισμοί:**

- Περιορισμοί Προσφοράς $\sum_{j=1}^4 X_{ij} \leq s_i$ για $i = 1, \dots, 16$ με s_i να είναι συγκεκριμένες ποσότητες προσφοράς για την κάθε αποθήκη.
- Περιορισμοί Ζήτησης $\sum_{i=1}^{16} X_{ij} \geq d_j$ για $j = 1, 2, 3, 4$ με d_j να είναι συγκεκριμένες ποσότητες ζήτησης για τον κάθε προορισμό.
- Περιορισμοί μη αρνητικότητας $X_{ij} \geq 0$ για $i = 1, \dots, 16$ και $j = 1, \dots, 4$.

Για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι διαθέσιμη μεγάλη ποικιλία λογισμικού, κατάλληλου όχι μόνο για ισχυρές υπολογιστικές μονάδες, αλλά ακόμα και για προσωπικούς υπολογιστές. Ένα από τα πιο χρήσιμα και δημοφιλή λογιστικά πακέτα για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ο “επιλυτής”-“Solver” ο οποίος βρίσκεται ενσωματωμένος στο φύλλο εργασίας του προγράμματος Excel. Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες που έχουμε ορίσει για την λειτουργία του επιλυτή-Solver, αλλά και το παράθυρο με τα ορίσματα που έχουμε δώσει στον Solver για την τελική βελτιστοποίηση της λύσης του συστήματός μας.

Πίνακας 7

Αποθήκες	Προορισμοί			
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	12€	15€	9€	7€
Αθήνα	39€	39€	39€	39€
Ελευσίνα	24€	24€	24€	24€
Χαλκίδα	26€	26€	26€	26€
Ηράκλειο	16€	16€	16€	16€
Ρόδος	16€	16€	16€	16€
Αγρίνιο	26€	26€	26€	26€
Πάτρα	16€	16€	16€	16€
Λάρισα	16€	16€	16€	16€
Χίος	16€	16€	16€	16€
Ιωάννινα	16€	16€	16€	16€
Σίνδος	23€	23€	23€	23€
Θεσσαλονίκη	23€	23€	23€	23€
Ταύρος Αττικής	16€	16€	16€	16€
Βόλος	16€	16€	16€	16€
Καλαμάτα	16€	16€	16€	16€

Πίνακας 7: Κόστη Μεταφοράς ανά παλέτα(Βελτιστοποίησης)

Στον πίνακα 7 βλέπουμε ότι όλα τα κελιά είναι συμπληρωμένα σε αντίθεση με τον αντίστοιχο πίνακα 5 που υπάρχουν αρκετά κενά. Ο πίνακας συμπληρώθηκε με τα κόστη μεταφοράς που χρησιμοποιεί η επιχείρηση για τις μετακινήσεις που πραγματοποιεί. Αυτό συνέβη γιατί δεν γνωρίζουμε από πριν ποιος θα είναι ο πιο συμφέρον τρόπος οργάνωσης των μετακινήσεων. Ο επιλυτής μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα την κατάργηση ενός δρομολογίου που υπήρχε πριν ή την δημιουργία ενός νέου, έτσι έχοντας όλα τα κόστη συμπληρωμένα του δίνουμε όλες τις δυνατές επιλογές για την ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς.

Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας 8, ο οποίος σε κάθε κελί του περιέχει τον νέο αριθμό των παλετών που θα μεταφερθούν από κάθε αποθήκη σε κάθε περιοχή μετά την επίδραση του Solver. Με κίτρινο χρώμα φαίνεται το άθροισμα των ποσοτήτων των παλετών ανά γραμμή και ανά στήλη. Με πράσινο χρώμα φαίνονται οι περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιούνται για το σύστημα που διαθέτουμε. Είναι σταθερές που έχουμε ορίσει εμείς σύμφωνα με τα δεδομένα που διαθέτουμε από τις πωλήσεις της εταιρείας. Σαν οριζόντιοι περιορισμοί είναι αυτοί της ζήτησης, δηλαδή πόσες παλέτες χρειάζεται η κάθε περιοχή συνολικά και ως κατακόρυφοι περιορισμοί είναι αυτοί της προσφοράς, δηλαδή πόσες παλέτες μπορεί να στείλει η κάθε αποθήκη. Εδώ να σημειωθεί ότι το πρόβλημα είναι ισορροπημένο, διότι η συνολική ζήτηση ισούται με τη συνολική προσφορά. Τέλος με μπλε χρώμα φαίνονται οι ανισοτικές σχέσεις που πρέπει να ισχύουν.

Πίνακας 8

Αποθήκες	Προορισμοί						
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία			
Κορπή	27.134	0	6.117	11.419	44.670	<=	44.670
Αθήνα	0	1465	0	0	1.465	<=	1.465
Ελευσίνα	5.422	11508	0	0	16.930	<=	16.930
Χαλκίδα	104	0	0	0	104	<=	104
Ηράκλειο	9	0	0	0	9	<=	9
Ρόδος	384	0	0	0	384	<=	384
Αγρίνιο	1887	0	0	0	1.887	<=	1.887
Πάτρα	1750	0	0	0	1.750	<=	1.750
Λάρισα	4	0	0	0	4	<=	4
Χίος	21	0	0	0	21	<=	21
Ιωάννινα	14	0	0	0	14	<=	14
Σίνδος	1677	0	0	0	1.677	<=	1.677
Θεσσαλονίκη	45	0	0	0	45	<=	45
Ταύρος Αττικής	44	0	0	0	44	<=	44
Βόλος	2	0	0	0	2	<=	2
Καλαμάτα	122	0	0	0	122	<=	122
	38.619	12.973	6.117	11.419			
	>=	>=	>=	>=			
	38.619	12.973	6.117	11.419			

Πίνακας 8: Αριθμός Μεταφορών σε παλέτες (Βελτιστοποίηση)

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας 6 διαφέρει σημαντικά με τον πίνακα 8 που προκύπτει από τον επιλυτή-Solver του Excel. Αρχικά φαίνεται ότι το Κεντρικό Εργοστάσιο πρέπει να αποστέλλει πολύ περισσότερες παλέτες στη Αττική, στην Αχαΐα και στην Αιτωλοακαρνανία απ' ότι πριν, ενώ δεν πρέπει να στέλνει καθόλου στην Θεσσαλονίκη. Επιπλέον η Ελευσίνα πρέπει να μειώσει τις αποστολές της προς την Αττική, ενώ πρέπει να τις αυξήσουν το Αγρίνιο, η Πάτρα, η Σίνδος και η Θεσσαλονίκη. Για τη Θεσσαλονίκη φαίνεται ότι πρέπει να υπάρχουν 2 μόνο αποθήκες που να την εφοδιάζουν και αυτές είναι της Αθήνας και της Ελευσίνας. Τέλος για την Αχαΐα και την Αιτωλοακαρνανία πιο συμφέρον φαίνεται να είναι όλη ζήτησή τους να καλύπτεται από το Κεντρικό Εργοστάσιο της Κορπή

Εφαρμόζοντας τη νέα λύση του συστήματος όπως προέκυψε από τον επιλυτή για τις μεταφορές των παλετών υπολογίζεται ότι το κόστος μεταφοράς ανέρχεται στα **1.049.251**. Η διαφορά του Αρχικού Κόστους Μεταφοράς με το Βελτιωμένο ισούται με **1.094.060€-1.053.021€=41.039€**. Συνεπώς γίνεται αντιληπτό πως με τη νέα λύση του συστήματος η εταιρεία εξοικονομεί 41.039€ από το Πρόβλημα της Μεταφοράς. Τέλος παρατηρούμε κάποια παράδοξα αποτελέσματα στη λύση μας, καθώς η αποθήκη της Αθήνας φαίνεται να μην προμηθεύει την Αττική και το ίδιο συμβαίνει και με την αποθήκη της Σίνδου και της Θεσσαλονίκης για την Θεσσαλονίκη. Αυτό οφείλεται στα σταθερά κόστη μεταφοράς ανά

παλέτα που έχουν οριστεί από την σύμβαση που έχει κάνει η εταιρεία την οποία περιγράψαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2. Από την αποθήκη της Αθήνας και προς οποιαδήποτε περιοχή το κόστος είναι 39€, κάτι που προφανώς είναι ασύμφορο καθώς άλλες αποθήκες έχουν πολύ πιο φθηνά μεταφορικά. Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε αυτό το παράδοξο γεγονός υπολογίζοντας τα χιλιομετρικά κόστη μεταφοράς από την κάθε αποθήκη προς την εκάστοτε περιοχή.

Παρακάτω παρουσιάζεται το παράθυρο του επιλυτή-Solver που χρησιμοποιήσαμε για τη λύση μας.

Παράμετροι Επίλυσης

Ορισμός στόχου:

Σε: Μέγιστη Ελάχιστη Ίμμή του:

Με αλλαγή μεταβλητών κελιών:

Σύμφωνα με τους περιορισμούς:

-
-
-

Καταστήστε τις μεταβλητές που δεν έχουν περιορισμούς μη αρνητι

Επιλέξτε μια μέθοδο επίλυσης:

Επιλογές

Μέθοδος επίλυσης

Επιλέξτε το μη γραμμικό GRG μηχανισμό για προβλήματα της Επίλυσης που είναι ομαλά μη γραμμικά. Επιλέξτε το μηχανισμό LP Simplex για γραμμικά προβλήματα της Επίλυσης και επιλέξτε το μηχανισμό Evolutionary για προβλήματα της Επίλυσης που δεν είναι ομαλά.

Βοήθεια Επίλυση Κλείσιμο

Εικόνα 1:Επιλυτής-Solver

Στο πρώτο πεδίο ορίζουμε το κελί στο οποίο θέλουμε να φαίνεται το αποτέλεσμα μας, στην συγκεκριμένη περίπτωση το Κόστος Μεταφοράς. Το κελί αυτό δεν πρέπει να είναι κενό αλλά να έχει οριστεί η κατάλληλη συνάρτηση που να συνδέει τις μεταβλητές που έχουμε στη διάθεση μας, με τα κόστη μεταφοράς. Στη συνέχεια ορίζουμε το είδος της βελτιστοποίησης, στη δική μας περίπτωση επιλέγουμε την ελαχιστοποίηση. Έπειτα θέτουμε τα κελιά που περιέχουν τις μεταβλητές μας προς αλλαγή, καθώς αυτά τα κελιά είναι που θα μας δώσουν την νέα μας λύση. Έπεται ο ορισμός των περιορισμών της προσφοράς, της ζήτησης αλλά και της μη αρνητικότητας των μεταβλητών μας. Τέλος στο πεδίο με τη μέθοδο επίλυσης επιλέγουμε την Simplex LP η οποία είναι κατάλληλη για προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού. Έτσι προχωράμε στην επίλυση του συστήματος μας και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.

3.4 Κόστος Μεταφοράς για Χιλιομετρικές Αποστάσεις

Θεωρώντας τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει από τον επίλυση του Excel στην προηγούμενη παράγραφο μη ρεαλιστικά, λόγω της σύμβασης που έχει κάνει η εταιρεία για τα κόστη μεταφοράς των προϊόντων, θα προβούμε σε μια νέα μελέτη για την βελτιστοποίηση του κόστους μεταφοράς η οποία στηρίζεται στα χιλιομετρικά δεδομένα.

Για τη μελέτη αυτού του νέου συστήματος θα δημιουργήσουμε ξανά 2 πίνακες, ο πρώτος θα αφορά τα χιλιομετρικά κόστη από την κάθε αποθήκη προς μια από τις τέσσερις περιοχές (Αθήνα, Θεσσαλονίκη, Αχαΐα και Αιτωλοακαρνανία) και ο δεύτερος θα περιέχει τον αριθμό των παλετών που θα μεταφέρονται.

Για τον υπολογισμό του χιλιομετρικού κόστους χρησιμοποιήσαμε στοιχεία από το Κεντρικό Εργοστάσιο της Κορφή, από μεταφορείς και ιδιοκτήτες φορτηγών οχημάτων, από το site vriskoapostasi.gr αλλά και από ακτοπλοϊκές εταιρείες, έτσι δημιουργήσαμε τους παρακάτω πίνακες τους οποίους θα περιγράψουμε αναλυτικά.

Οι πίνακες σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουν μια μικρή διαφοροποίηση σε σχέση με αυτούς από την προηγούμενη ως προς τις αποθήκες. Αυτό συμβαίνει γιατί χιλιομετρικά δεν είχε ιδιαίτερη σημασία να διαχωρίσουμε τις αποθήκες που βρίσκονται στον Ασπρόπυργο, στην Ελευσίνα και στον Ταύρο, καθώς το κόστος μεταφοράς ήταν περίπου το ίδιο. Επίσης οι πρώτες δύο αποθήκες λειτουργούν συμπληρωματικά καθώς η μία προμηθεύει την Αττική και η άλλη την υπόλοιπη Ελλάδα, συνεπώς τις θεωρήσαμε ως μία αποθήκη με έδρα στον Ασπρόπυργο. Το ίδιο συνέβη και στην περίπτωση της Σίνδου και την Θεσσαλονίκης που πάλι θεωρήσαμε μια αποθήκη και για τις δύο αυτές περιοχές, με έδρα την Σίνδο.

Στον πρώτο πίνακα περιλαμβάνονται οι χιλιομετρικές αποστάσεις από κάθε αποθήκη προς κάθε προορισμό όπως προέκυψαν από την εφαρμογή Google Earth που παρέχει η Google.

Πίνακας 9

Αποθήκες	Προορισμοί			
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	334 km	385 km	186 km	70 km
Αθήνα	19 km	507 km	187 km	273 km
Χαλκίδα	79 km	455 km	267 km	354 km
Ηράκλειο (Μέχρι το λιμάνι του Πειραιά)	14 km	510 km	200 km	287 km
Ρόδος (Μέχρι το λιμάνι του Πειραιά)	14 km	510 km	200 km	287 km
Αγρίνιο	275 km	395 km	127 km	13 km
Πάτρα	211 km	462 km	46 km	93 km
Λάρισα	355 km	152 km	370 km	323 km
Χίος (Μέχρι το λιμάνι του Πειραιά)	14 km	510 km	200 km	287 km
Ιωάννινα	411 km	262 km	263 km	147 km
Σίνδος	495 km	17 km	505 km	389 km
Βόλος	331 km	212 km	346 km	384 km
Καλαμάτα	239 km	728 km	274 km	360 km

Πίνακας 9: Πίνακας Χιλιομετρικών Αποστάσεων

Στον δεύτερο πίνακα φαίνονται τα κόστη για την Κατανάλωση Καυσίμου για τις παραπάνω διαδρομές. Η εταιρεία χρησιμοποιεί για τις μεταφορές της επικαθήμενα φορτηγά οχήματα 5 αξόνων και 15 μέτρα μήκους το καθένα. Μιλώντας με τους ιδιοκτήτες των φορτηγών οχημάτων που πραγματοποιούν τις μεταφορές καταλήξαμε στο ότι κάθε φορτηγό όχημα ανεξαρτήτου μάρκας και έχοντας το μέγιστο φορτίο διανύει 2,8km καταναλώνοντας 1 lt πετρελαίου. Τέλος γνωρίζοντας ότι η τιμή του πετρελαίου είναι 1,4€/lt υπολογίσαμε τα παρακάτω κόστη μεταφοράς. Εδώ να σημειώσουμε ότι η εταιρεία επιβαρύνεται μόνο το ένα δρομολόγιο και όχι και την επιστροφή του οχήματος.

Πίνακας 10

Αποθήκες	Προορισμοί			
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	167 €	192,50 €	93 €	35 €
Αθήνα	9,50 €	253,50 €	93,50 €	136,50 €
Χαλκίδα	39,50 €	227,50 €	133,50 €	177 €
Ηράκλειο (Μέχρι το λιμάνι του Πειραιά)	7 €	255 €	100 €	143,50 €
Ρόδος (Μέχρι το λιμάνι του Πειραιά)	7 €	255 €	100 €	143,50 €
Αγρίνιο	137,50 €	197,50 €	63,50 €	6,50 €
Πάτρα	105,50 €	231 €	23 €	46,50 €
Λάρισα	177,50 €	76 €	185 €	161,50 €
Χίος (Μέχρι το λιμάνι του Πειραιά)	7 €	255 €	100 €	143,50 €
Ιωάννινα	205,50 €	131 €	131,50 €	73,50 €
Σίνδος	247,50 €	8,50 €	252,50 €	194,50 €
Βόλος	165,50 €	106 €	173 €	192 €
Καλαμάτα	119,50 €	364 €	137 €	180 €

Πίνακας 10: Πίνακας Κατανάλωσης Καυσίμου

Στη συνέχεια δημιουργούμε έναν πίνακα με τα έξοδα των διοδίων για τις παραπάνω διαδρομές και για τον συγκεκριμένο τύπο οχήματος. Τα κόστη των διοδίων τα υπολογίσαμε από το vriskoapostasi.gr βάζοντας την κάθε διαδρομή ξεχωριστά. Να σημειωθεί ότι για τις διαδρομές που περιλαμβάνουν τη γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου θεωρήσαμε πως τα οχήματα της εταιρείας περνούν από τη γέφυρα και όχι από το ferry boat. Αυτό αναφέρεται γιατί υπάρχει μια σημαντική διαφορά στο κόστος των διοδίων. Επίσης σε αυτόν τον πίνακα περιλαμβάνουμε και τα κόστη για τα πλοία καθώς έχουμε 3 αποθήκες που βρίσκονται σε νησιά. Αρχικά για την αποθήκη του Ηρακλείου μετά από επικοινωνία μας με την Minoan Lines προέκυψε ότι το κόστος είναι 35€ ανά μέτρο μαζί με τον οδηγό. Για την Χίο και την Ρόδο επικοινωνήσαμε με την Blue Star Ferries και προέκυψε ότι το κόστος για την Χίο είναι 34,50€ ανά μέτρο μαζί με τον οδηγό, ενώ για τη Ρόδο είναι 59,50€ ανά μέτρο μαζί με τον οδηγό.

Τα αντίστοιχα κόστη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 11

Αποθήκες	Προορισμοί			
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	106,60 €	45,15 €	65,10 €	5,80 €
Αθήνα	0 €	121,25 €	30,50 €	94,10 €
Χαλκίδα	11,65 €	98,30 €	53,45 €	117,05 €
Ηράκλειο (Διόδια + Ναύλα)	525 €	634,45 €	555,50 €	619,10 €
Ρόδος (Διόδια + Ναύλα)	892,50 €	1.002,45 €	923 €	986,60 €
Αργίριο	94,10 €	50,95 €	52,60 €	0 €
Πάτρα	41,50 €	110,25 €	0 €	52,61 €
Λάρισα	77,95 €	32 €	77,05 €	39,05 €
Χίος (Διόδια + Ναύλα)	517,50 €	627,45 €	548 €	611,60 €
Ιωάννινα	128,25 €	23,50 €	86,75 €	27,45 €
Σίνδος	109,95 €	0 €	110,25 €	50,95 €
Βόλος	68,25 €	46 €	67,55 €	53,05 €
Καλαμάτα	49,30 €	170,55 €	18,05 €	115,60 €

Πίνακας 11: Πίνακας με τα Κόστη Διοδίων και τα Ναύλα

Να σημειωθεί τέλος πως οι ιδιοκτήτες των φορτηγών οχημάτων δεν χρεώνουν τις φθορές για τα ελαστικά των οχημάτων ή άλλες φθορές που ενδέχεται να προκύψουν.

Μπορούμε τώρα έχοντας καταγράψει τα επιμέρους κόστη να υπολογίσουμε τα συνολικά κόστη μεταφοράς από την κάθε αποθήκη προς τον κάθε προορισμό. Έτσι θα προκύψει ένας πίνακας με το κόστος σε € που χρειάζεται ένα όχημα για να διανύσει μια συγκεκριμένη διαδρομή. Επειδή όμως εμείς στην προηγούμενη παράγραφο είχαμε ως δεδομένα τα κόστη ανά παλέτα θα διαιρέσουμε το κάθε κόστος με το 30 καθώς γνωρίζουμε πως κάθε φορτηγό όχημα μεταφέρει 30 παλέτες ανά δρομολόγιο. Έτσι στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα κόστη ανά παλέτα για κάθε διαδρομή.

Πίνακας 12

Αποθήκες	Προορισμοί			
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	9,12 €	7,92 €	5,27 €	1,36 €
Αθήνα	0,32 €	12,49 €	4,13 €	7,69 €
Χαλκίδα	1,71 €	10,86 €	6,23 €	9,80 €
Ηράκλειο	17,73 €	29,65 €	21,85 €	25,42 €
Ρόδος	29,98 €	41,92 €	34,10 €	37,67 €
Αγρίνιο	7,72 €	8,28 €	3,87 €	0,22 €
Πάτρα	4,90 €	11,38 €	0,77 €	3,30 €
Λάρισα	8,52 €	3,60 €	8,74 €	6,69 €
Χίος	17,48 €	29,42 €	21,60 €	25,17 €
Ιωάννινα	11,13 €	5,15 €	7,28 €	3,37 €
Σίνδος	11,92 €	0,28 €	12,09 €	8,18 €
Βόλος	7,79 €	5,07 €	8,02 €	8,17 €
Καλαμάτα	5,63 €	17,82 €	5,17 €	9,85 €

Πίνακας 12: Τελικός Πίνακας με τα χιλιομετρικά Κόστη Μεταφοράς ανά παλέτα

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα του αριθμού των παλετών που θα μεταφερθούν από κάθε αποθήκη προς κάποιο προορισμό όπως και στην παράγραφο 3.3 «Μαθηματική Μοντελοποίηση». Έχοντας κάνει ήδη την μοντελοποίηση πιο πάνω έχουμε δημιουργήσει την αντικειμενική συνάρτηση η οποία είναι η εξής:

$$\text{Minimize Cost} = \text{MinC} = \sum_{i=1}^{13} \sum_{j=1}^4 C_{ij} X_{ij}$$

όπου X_{ij} με $i = 1, 2, \dots, 13$ ο αριθμός των αποθηκών και $j = 1, 2, 3, 4$ ο αριθμός των περιοχών και οι μεταβλητές X_{ij} συμβολίζουν τον αριθμό των παλετών που θα μεταφερθούν από την αποθήκη i στον προορισμό j . και C_{ij} τα αντίστοιχα κόστη μεταφοράς που φαίνονται στον πίνακα 12.

Διαφοροποίηση θα υπάρξει σε σχέση με την προηγούμενη παράγραφο στους περιορισμούς της ζήτησης και της προσφοράς

Οι περιορισμοί θα είναι οι εξής:

- Περιορισμοί Προσφοράς $\sum_{j=1}^4 X_{ij} \leq s_i$ για $i = 1, \dots, 13$ με s_i να είναι συγκεκριμένες ποσότητες προσφοράς για την κάθε αποθήκη.

- Περιορισμοί Ζήτησης $\sum_{i=1}^{13} X_{ij} \geq d_j$ για $j = 1,2,3,4$ με d_j να είναι συγκεκριμένες ποσότητες ζήτησης για τον κάθε προορισμό.
- Περιορισμοί μη αρνητικότητας $X_{ij} \geq 0$ για $i = 1, \dots, 13$ και $j = 1, \dots, 4$.

Σε αντίθεση με την προηγούμενη παράγραφο θα στρογγυλοποιήσουμε είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω τους περιορισμούς της ζήτησης ώστε το συνολικό άθροισμα να ισούται τελικά με την ολική ζήτηση και τους περιορισμούς της προσφοράς μόνο προς τα πάνω, ώστε το πρόβλημα που θα προκύψει να είναι ελαφρώς μη ισορροπημένο αλλά ταυτόχρονα επιλύσιμο, αφού η συνολική προσφορά θα υπερβαίνει την συνολική ζήτηση.

Το σύστημα θα επιλυθεί στο Excel με τη βοήθεια του επιλυτή-Solver ο οποίος και θα μας υποδείξει την βέλτιστη λύση. Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας με τις παλέτες που θα μεταφερθούν από κάθε αποθήκη σε κάθε προορισμό, καθώς και οι περιορισμοί αλλά και οι αντίστοιχες ανισοτικές σχέσεις.

Πίνακας 13

Αποθήκες	Προορισμοί						
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία			
Κορπή	17.692	11.220	4.370	11.418	44.700	<=	44.700
Αθήνα	18.400	0	0	0	18.400	<=	18.400
Χαλκίδα	105	0	0	0	105	<=	105
Ηράκλειο	10	0	0	0	10	<=	10
Ρόδος	373	0	0	0	373	<=	385
Αγρίνιο	1890	0	0	0	1.890	<=	1.890
Πάτρα	0	0	1.750	0	1.750	<=	1.750
Λάρισα	0	5	0	0	5	<=	5
Χίος	25	0	0	0	25	<=	25
Ιωάννινα	0	15	0	0	15	<=	15
Σίνδος	0	1.725	0	0	1.725	<=	1.725
Βόλος	0	5	0	0	5	<=	5
Καλαμάτα	125	0	0	0	125	<=	125
	38.620	12.970	6.120	11.418			
	>=	>=	>=	>=			
	38.620	12.970	6.120	11.418			

Πίνακας 13:Αριθμός Μεταφορών σε παλέτες

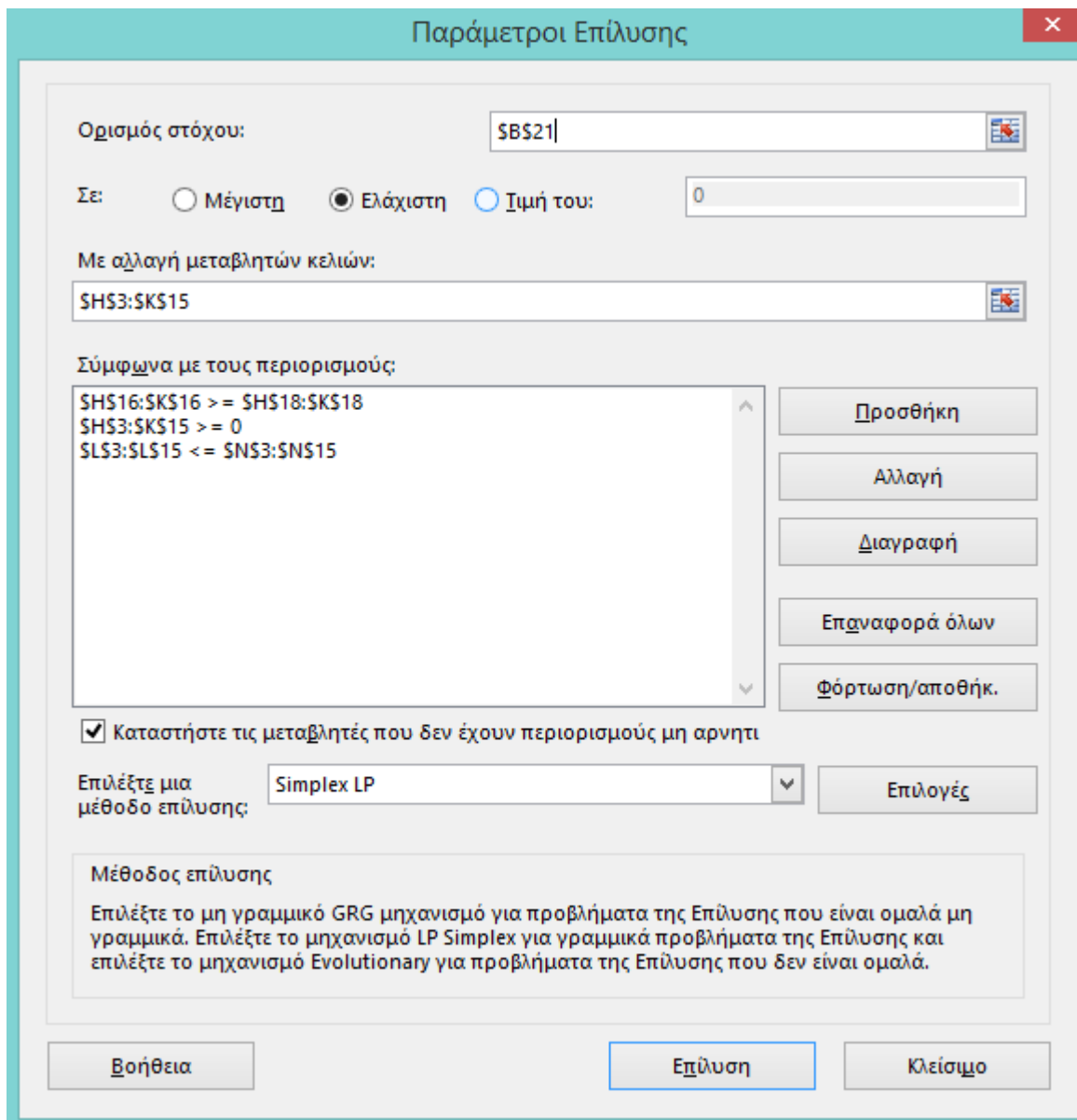
Στον παραπάνω πίνακα βλέπουμε τον αριθμό των παλετών που πρέπει να μεταφέρονται από κάθε αποθήκη σε κάθε περιοχή ανάλογα με την εκάστοτε ζήτηση. Σε σχέση με την προηγούμενη βελτιστοποιημένη λύση που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 3.3, εδώ εμφανίζεται μια πιο ρεαλιστική λύση καθώς τα κόστη είναι πιο συμβατά με την πραγματικότητα.

Αρχικά βλέπουμε ότι η Αιτωλοακαρνανία προμηθεύεται εξ ολοκλήρου από το Κεντρικό εργοστάσιο καθώς είναι πιο κοντά και συμφέρει πολύ περισσότερο μια τέτοια μεταφορά. Στη συνέχεια η Αχαΐα εφοδιάζεται από το κεντρικό εργοστάσιο της Κορφή αλλά και από την αποθήκη της Πάτρας κάτι που κι εδώ φαίνεται αρκετά ρεαλιστικό. Έπειτα η Θεσσαλονίκη προμηθεύεται κυρίως από το εργοστάσιο της Κορφή και την κεντρική αποθήκη της Σίνδου, και σε μικρότερο βαθμό από τις αποθήκες των Ιωαννίνων, της Λάρισας και του Βόλου. Τέλος η Αθήνα καλύπτει τις ανάγκες της από το Κεντρικό Εργοστάσιο και από την αποθήκη του Ασπρόπυργου στο μεγαλύτερο ποσοστό και στη συνέχεια από τις αποθήκες του Αγρινίου, της Χαλκίδας, του Ηρακλείου, της Ρόδου, της Χίου και της Καλαμάτας. Φαίνεται ότι και για τις 4 περιοχές το Κεντρικό εργοστάσιο έχει πρωτεύοντα ρόλο στον ανεφοδιασμό τους κι αυτό συμβαίνει τόσο γιατί έχει μεγάλη δυνατότητα παραγωγής και αποθήκευσης των προϊόντων, όσο και για την τοποθεσία του, καθώς είναι περίπου στο κέντρο της Ελλάδας κι έτσι διευκολύνονται αρκετά οι μετακινήσεις από αυτό.

Ο επιλυτής-Solver σύμφωνα με τους περιορισμούς που εμείς έχουμε ορίσει μας παρουσιάζει τον πιο συμφέρον συνδυασμό μεταφορών. Επειδή έχουμε ορίσει ότι αναγκαστικά πρέπει να γίνουν μερικά «ακριβά» δρομολόγια όπως είναι αυτά από τα νησιά που διαθέτουν αποθήκες, Ηράκλειο, Ρόδος και Χίος επιλέγει να τα μεταφέρει στην Αθήνα που είναι το πιο φθηνό δρομολόγιο σε σχέση με τις άλλες 3 περιοχές και όχι στη Θεσσαλονίκη που είναι το πιο κοστοβόρο. Με τον ίδιο τρόπο επιλέγει από το Βόλο να στείλει ολόκληρη την ποσότητα των παλετών που διαθέτει στη Θεσσαλονίκη και όχι παραδείγματος χάρη στην Αιτωλοακαρνανία καθώς για τον δεύτερο προορισμό αυξάνεται σημαντικά το κόστος μεταφοράς.

Τελικά το συνολικό κόστος μεταφοράς που προκύπτει από την χιλιομετρική κοστολόγηση των δρομολογίων σύμφωνα με τη συνάρτηση SumProduct του Excel είναι: **323.881,86 €**. Παρατηρούμε ότι η διαφορά με την αρχική λύση και ανάλογα με τις μεταφορές που πραγματοποίησε η εταιρεία το περασμένο έτος είναι αρκετά μεγάλη καθώς ανέρχεται στο ποσό των 770.178,14€. Συνεπώς γίνεται αντιληπτό ότι είναι πολύ πιο συμφέρουσα μια χιλιομετρική προσέγγιση του Κόστους μεταφοράς όσο κι αν είναι πιο χρονοβόρα από λογιστικής άποψης.

Παρακάτω παρουσιάζεται το παράθυρο της επίλυσης που εφαρμόζουμε για την χρήση του επιλυτή-Solver, όπου και φαίνονται οι περιορισμοί, η μέθοδος της επίλυσης (Simplex LP), ο τρόπος της βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίηση της συνάρτησης του Κόστους Μεταφοράς) και ο ορισμός των μεταβλητών.



Εικόνα 2: Επιλύτης-Solver

3.5 Κόστος Μεταφοράς για Αποστάσεις από το Εργοστάσιο

Στις προηγούμενες παραγράφους του συγκεκριμένου κεφαλαίου παρουσιάσαμε τα κόστη μεταφοράς από τις διάφορες αποθήκες προς τους 4 προορισμούς που έχουμε επιλέξει προς μελέτη (Αθήνα, Θεσσαλονίκη, Αιτωλοακαρνανία, Αχαΐα). Στην παρούσα παράγραφο θα εμπλουτίσουμε αυτούς του πίνακες, καθώς θα λάβουμε υπόψιν μας και τα κόστη μεταφοράς από το εργοστάσιο προς τις αποθήκες, δηλαδή θα εξετάσουμε την διαδρομή:

Εργοστάσιο → Αποθήκη → Προορισμός

Αρχικά θα παρουσιάσουμε έναν πίνακα με τα κόστη μεταφοράς όπως τα έχει ορίσει η εταιρεία με τις συμβάσεις τις οποίες έχει θεωρήσει και έναν πίνακα με χιλιομετρικά κόστη μεταφοράς από το εργοστάσιο προς τις διάφορες αποθήκες.

Πίνακας 14

Αποθήκες	Προορισμοί			
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	0 €	0 €	0 €	0 €
Αθήνα	12 €	12 €	12 €	12 €
Χαλκίδα	14 €	14 €	14 €	14 €
Ηράκλειο	34 €	34 €	34 €	34 €
Ρόδος	49 €	49 €	49 €	49 €
Αγρίνιο	6 €	6 €	6 €	6 €
Πάτρα	9 €	9 €	9 €	9 €
Λάρισα	14 €	14 €	14 €	14 €
Χίος	49 €	49 €	49 €	49 €
Ιωάννινα	8 €	8 €	8 €	8 €
Σίνδος	15 €	15 €	15 €	15 €
Βόλος	15 €	15 €	15 €	15 €
Καλαμάτα	15 €	15 €	15 €	15 €

Πίνακας 14: Κόστη Μεταφοράς από το Εργοστάσιο (1)

Στον παραπάνω πίνακα φαίνονται τα Κόστη Μεταφοράς που έχει ορίσει η εταιρεία από το εργοστάσιο για την κάθε περιοχή. Παραδείγματος χάρη για την αποθήκη της Αθήνας το Κόστος Μεταφοράς ανά παλέτα είναι 12€, συνεπώς σε ολόκληρη την γραμμή έχουμε βάλει το κόστος μεταφοράς από το εργοστάσιο προς την συγκεκριμένη αποθήκη. Το ίδιο έχουμε κάνει και για τις άλλες αποθήκες.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα Συνολικά Κόστη Μεταφοράς, δηλαδή τα κόστη μεταφοράς από την κάθε αποθήκη προς τον κάθε προορισμό προσαυξημένα με τα κόστη μεταφοράς από το εργοστάσιο προς τις αποθήκες (πίνακας 14).

Πίνακας 15

Αποθήκες	Προορισμοί			
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	12 €	15 €	9 €	7 €
Αθήνα	51 €	51 €	51 €	51 €
Ελευσίνα	36 €	36 €	36 €	36 €
Χαλκίδα	40 €	40 €	40 €	40 €
Ηράκλειο	50 €	50 €	50 €	50 €
Ρόδος	65 €	65 €	65 €	65 €
Αγρίνιο	32 €	32 €	32 €	32 €
Πάτρα	25 €	25 €	25 €	25 €
Λάρισα	30 €	30 €	30 €	30 €
Χίος	65 €	65 €	65 €	65 €
Ιωάννινα	24 €	24 €	24 €	24 €
Σίνδος	38 €	38 €	38 €	38 €
Θεσσαλονίκη	38 €	38 €	38 €	38 €
Βόλος	31 €	31 €	31 €	31 €
Καλαμάτα	31 €	31 €	31 €	31 €

Πίνακας 15:Συνολικά Κόστη Μεταφοράς (1)

Έχοντας πια τον νέο πίνακα με τα συνολικά Κόστη Μεταφοράς σύμφωνα με τις συμβάσεις της εταιρείας, μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό Κόστος Μεταφοράς για την επιχείρηση ανάλογα με τις πωλήσεις που πραγματοποιούνται, δεδομένα που ήδη ξέρουμε και έχουμε χρησιμοποιήσει παραπάνω.

Πίνακας 16

Αποθήκες	Προορισμοί			
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	19.447	10.969	4.298	9.956
Αθήνα	1.121	313	31	0
Ελευσίνα	16.974			
Χαλκίδα	104			
Ηράκλειο	9			
Ρόδος	384			
Αγρίνιο	362		62	1.463
Πάτρα	24		1.436	
Λάρισα	4			

Χίος	21			
Ιωάννινα	14			
Σίνδος	30	1.647		
Θεσσαλονίκη	1	44		
Βόλος	2			
Καλαμάτα	122			

Πίνακας 16: Πωλήσεις ανά περιοχή (χωρίς βελτιστοποίηση)

Υπολογίζοντας τώρα το Κόστος Μεταφοράς βλέπουμε ότι αυτό ανέρχεται στα **1.389.607€**.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν αντίστοιχο πίνακα με τα χιλιομετρικά κόστη μεταφοράς από το εργοστάσιο προς τις αποθήκες και έναν αντίστοιχο με τα συνολικά χιλιομετρικά κόστη μεταφοράς. Η κοστολόγηση των χιλιομετρικών αποστάσεων έχει αναφερθεί και αναλυθεί εκτενώς στην προηγούμενη παράγραφο.

Παρακάτω φαίνονται οι πίνακες από τους οποίους προέκυψαν τα χιλιομετρικά κόστη, Δηλαδή οι πίνακες με τα έξοδα μεταφοράς από το εργοστάσιο προς τις υπόλοιπες αποθήκες της χώρας.

Πίνακας 17

	Χιλιόμετρα
Αποθήκες	
Ασορόπυργος	318km
Χαλκίδα	399km
Ηράκλειο (Μέχρι τον Πειραιά)	335km
Ρόδος (Μέχρι τον Πειραιά)	335km
Αγρίνιο	72km
Πάτρα	140km
Λάρισα	310km
Χίος (Μέχρι τον Πειραιά)	335km
Ιωάννινα	139km
Σίνδος	376km
Βόλος	369km
Καλαμάτα	406km

Πίνακας 17: Πίνακας Χιλιομετρικών Αποστάσεων από το Εργοστάσιο προς τις Αποθήκες

Πίνακας 18

	€ για τα καύσιμα
Αποθήκες	
Ασορόπυργος	158,998€
Χαλκίδα	199,5€
Ηράκλειο (Μέχρι τον Πειραιά)	167,496€
Ρόδος (Μέχρι τον Πειραιά)	167,496€
Αγρίνιο	35,994€
Πάτρα	70€
Λάρισα	154,994€
Χίος (Μέχρι τον Πειραιά)	167,496€
Ιωάννινα	69,496€
Σίνδος	188,006€
Βόλος	184,506€
Καλαμάτα	203€

Πίνακας 18: Πίνακας με τα κόστη από την κατανάλωση καυσίμων

Πίνακας 19

	€ για τα διόδια
Αποθήκες	
Ασορόπυργος	106,60 €
Χαλκίδα	129,55 €
Ηράκλειο (Μέχρι τον Πειραιά)	631,60 €
Ρόδος (Μέχρι τον Πειραιά)	999,10 €
Αγρίνιο	5,80 €
Πάτρα	65,10 €
Λάρισα	33,25 €
Χίος (Μέχρι τον Πειραιά)	624,10 €
Ιωάννινα	21,65 €
Σίνδος	45,15 €
Βόλος	47,25 €
Καλαμάτα	128,10 €

Πίνακας 19: Πίνακας με τα κόστη των Διοδίων και τα Ναύλα

Τώρα μπορούμε πια να παρουσιάσουμε τον τελικό πίνακα με τα συνολικά χιλιομετρικά κόστη μεταφοράς, δηλαδή τα κόστη μεταφοράς από το εργοστάσιο προς τις αποθήκες, αλλά και τα κόστη από τις αποθήκες προς τους προορισμούς. Ο τελικός πίνακας περιέχει τα κόστη μεταφοράς για την κάθε διαδρομή ανά παλέτα, είναι δηλαδή διαιρεμένος με το πλήθος των παλετών που μεταφέρεται σε κάθε δρομολόγιο (=30).

Πίνακας 20

	Προορισμοί			
Αποθήκες	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία
Κορπή	9,12 €	7,92 €	5,27 €	1,36 €
Αθήνα	9,17 €	21,34 €	12,98 €	16,54 €
Χαλκίδα	12,68 €	21,83 €	17,20 €	20,77 €
Ηράκλειο	44,37 €	56,29 €	48,49 €	52,06 €
Ρόδος	68,87 €	80,81 €	72,99 €	76,56 €
Αγρίνιο	9,11 €	9,67 €	5,26 €	1,61 €
Πάτρα	9,40 €	15,88 €	5,27 €	7,80 €
Λάρισα	14,79 €	9,87 €	15,01 €	12,96 €
Χίος	43,87 €	55,81 €	47,99 €	51,56 €
Ιωάννινα	14,17 €	8,19 €	10,32 €	6,41 €
Σίνδος	19,69 €	8,05 €	19,86 €	15,95 €
Βόλος	15,52 €	12,80 €	15,75 €	15,90 €
Καλαμάτα	16,67 €	28,86 €	16,21 €	20,89 €

Πίνακας 20: Τελικός πίνακας για τα Χιλιομετρικά Κόστη(2)

Γνωρίζοντας τις πωλήσεις που έχουν πραγματοποιηθεί το προηγούμενο έτος από την κάθε αποθήκη προς τον εκάστοτε προορισμό μπορούμε να εξάγουμε μια νέα εκτίμηση κόστους ανάλογη με την προηγούμενη μόνο που τώρα διαφοροποιούνται σημαντικά τα κόστη μεταφοράς. Το συνολικό κόστος μεταφοράς που επιβαρύνει την επιχείρηση με τις καινούργιες κοστολογήσεις που έχουν γίνει για τα δρομολόγια είναι **532.911,501€**. Η διαφορά με το προηγούμενο κόστος μεταφοράς είναι αρκετά μεγάλη, κάτι που το παρατηρήσαμε και στην προηγούμενη παράγραφο του συγκεκριμένου Κεφαλαίου, συγκεκριμένα ανέρχεται στα **856.695€**.

Η τελευταία λύση δεν είναι η βέλτιστη, αλλά είναι σύμφωνη με τις πωλήσεις που πραγματοποίησε η επιχείρηση πέρυσι. Μπορούμε τώρα να προβούμε σε μια βελτιστοποίηση της λύσης μας χρησιμοποιώντας τον επιλυτή-Solver του Excel όπως ακριβώς και παραπάνω, δηλαδή με την ίδια μοντελοποίηση, την ίδια αντικειμενική συνάρτηση και τους ίδιους περιορισμούς.

Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας που χρησιμοποιείται για τον επιλυτή και περιλαμβάνει τις σταθερές της αντικειμενικής συνάρτησης και τους περιορισμούς.

Πίνακας 21

Αποθήκες	Προορισμοί						
	Αττική	Θεσσαλονίκη	Αχαΐα	Αιτωλοακαρνανία			
Κορπή	17.692	11.220	4.370	11.418	44.700	<=	44.700
Αθήνα	18.400	0	0	0	18.400	<=	18.400
Χαλκίδα	105	0	0	0	105	<=	105
Ηράκλειο	10	0	0	0	10	<=	10
Ρόδος	373	0	0	0	373	<=	385
Αγρίνιο	1890	0	0	0	1.890	<=	1.890
Πάτρα	0	0	1.750	0	1.750	<=	1.750
Λάρισα	0	5	0	0	5	<=	5
Χίος	25	0	0	0	25	<=	25
Ιωάννινα	0	15	0	0	15	<=	15
Σίνδος	0	1.725	0	0	1.725	<=	1.725
Βόλος	0	5	0	0	5	<=	5
Καλαμάτα	125	0	0	0	125	<=	125
	38.620	12.970	6.120	11.418			
	>=	>=	>=	>=			
	38.620	12.970	6.120	11.418			

Πίνακας 21: Πίνακας Βέλτιστης Λύσης (2)

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας 21 που περιέχει την βέλτιστη λύση είναι ο ίδιος με τον πίνακα 13 της προηγούμενης παραγράφου. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό καθώς δεν άλλαξε η αναλογία της κοστολόγησης των δρομολογίων, απλά μόνο αυξήθηκαν με ένα πάγιο ποσό ανά αποθήκη τα κόστη μεταφοράς. Έτσι η βέλτιστη λύση παραμένει η ίδια και δεν χρειάζεται κάποια περαιτέρω ανάπτυξη. Το κόστος μεταφοράς στην συγκεκριμένη περίπτωση ανέρχεται στα **528.781,09€** και η διαφορά με την προηγούμενη μη βέλτιστη λύση είναι **4.130,411€**.

Κάπου εδώ ολοκληρώνεται το κεφάλαιο με το Πρόβλημα της Μεταφοράς και μπορούμε να προχωρήσουμε στο επόμενο, το οποίο πραγματεύεται το πρόβλημα της Παραγωγής.

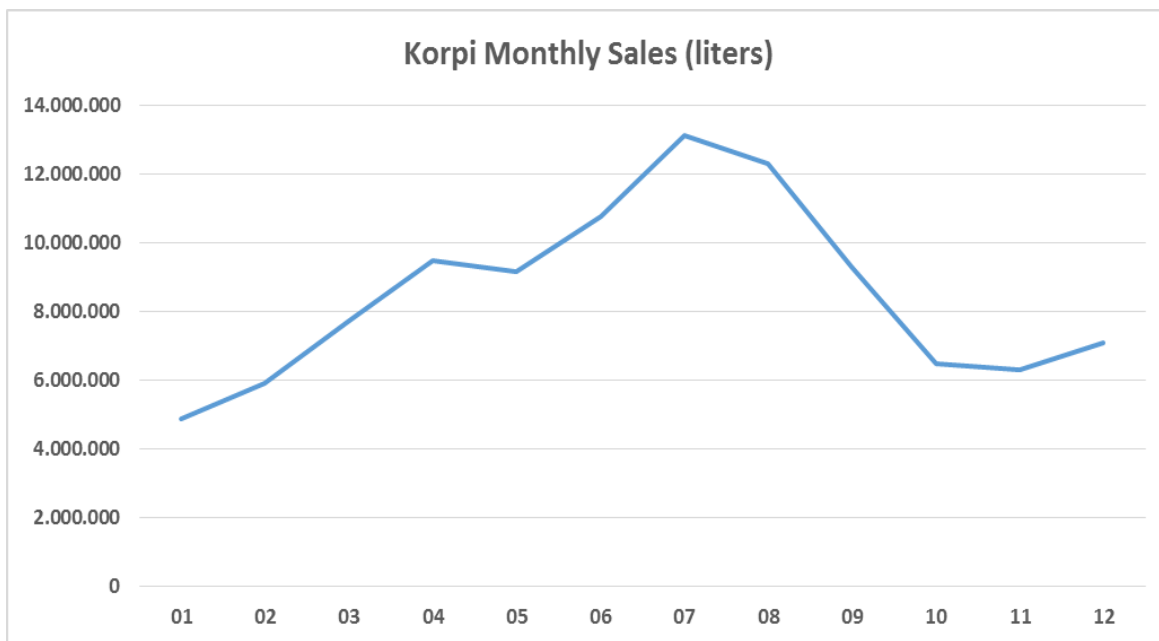
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Το Πρόβλημα της Παραγωγής

4.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Το νερό Κορπή είναι ένα φυσικό αγαθό το οποίο μας δίνει απλόχερα η φύση προς κατανάλωση, για αυτό και χαρακτηρίζεται ως φυσικό μεταλλικό νερό. Αυτό πρακτικά εγκυμονεί αρκετούς κινδύνους για τον σχεδιασμό της παραγωγής της εταιρείας. Όπως έχουμε περιγράψει και στο Κεφάλαιο 2 «Παρουσίαση του Προβλήματος», η παραγωγή των προϊόντων Κορπή είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τις βροχοπτώσεις και τη ροή του νερού στην περιοχή. Γίνεται αντιληπτό ότι η δυνατότητα παραγωγής ποικίλει από μήνα σε μήνα καθώς τους χειμερινούς μήνες οι ποσότητες νερού είναι πολύ περισσότερες σε σχέση με τους καλοκαιρινούς, που οι βροχοπτώσεις μειώνονται αρκετά στη χώρα μας. Η παραγωγική ικανότητα είναι βέβαια αντιστρόφως ανάλογη της ζήτησης η οποία αυξάνεται τους καλοκαιρινούς μήνες λόγω των υψηλών θερμοκρασιών και του τουρισμού και μειώνεται τους χειμερινούς. Καταλαβαίνουμε λοιπόν τη δυσκολία καθώς η παραγωγή δεν εξαρτάται αποκλειστικά από τον εξοπλισμό που διαθέτει η εταιρεία και το ανθρώπινο δυναμικό που την επανδρώνει αλλά και από αστάθμητους παράγοντες όπως ο καιρός. Για να καλυφθούν οι ανάγκες της ζήτησης λαμβάνοντας υπόψιν τους περιορισμούς της παραγωγικής ικανότητας πρέπει να γίνει ένας σωστός σχεδιασμός αποθήκευσης των προϊόντων.

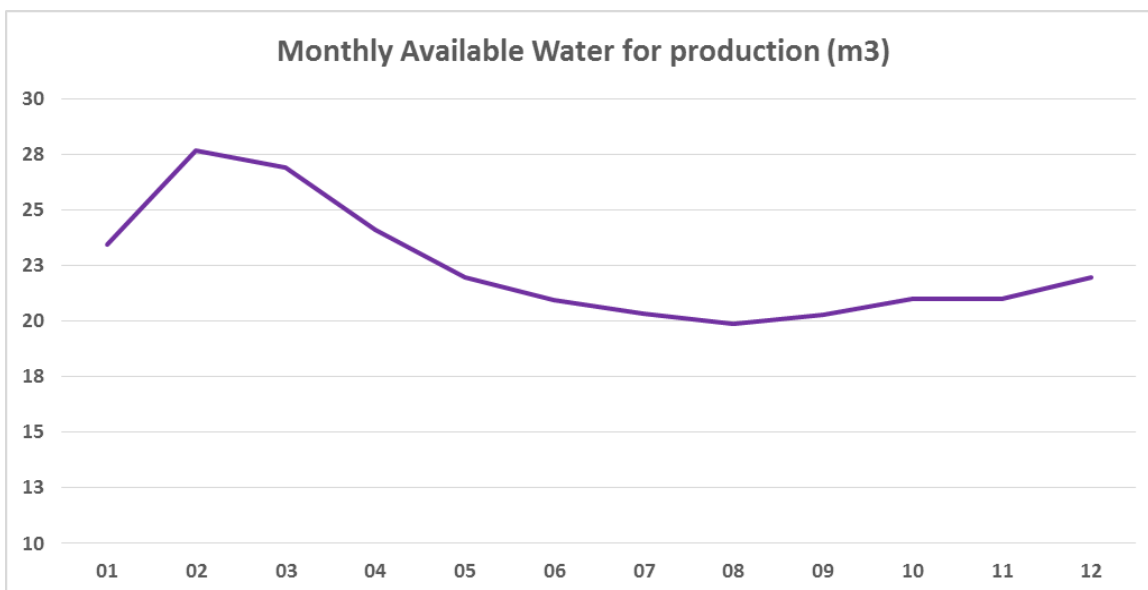
Για να μπορέσουμε να καταστήσουμε πλήρως σαφή την συγκεκριμένη ιδιαιτερότητα στην παραγωγή παρουσιάζουμε εν συνεχεία τρία διαγράμματα στα οποία απεικονίζεται η παραγωγική ικανότητα του εργοστασίου ανά μήνα, αλλά και οι μηνιαίες πωλήσεις του προϊόντος.

Το Φυσικό Μεταλλικό Νερό Κορπή χαρακτηρίζεται ως ένα «εποχικό προϊόν», καθώς η ζήτηση και η κατανάλωση του ποικίλει ανάλογα με την εποχή του χρόνου στην οποία βρισκόμαστε. Όπως φαίνεται και από το παρακάτω γράφημα τους καλοκαιρινούς μήνες οι πωλήσεις είναι πιο αυξημένες, σε σχέση με τους υπόλοιπους μήνες του χρόνου. Η μέγιστη ποσότητα πωλήσεων εντοπίζεται τον Ιούλιο και αγγίζει περίπου τα 13.000.000lt Φυσικού Μεταλλικού Νερού, ενώ τις λιγότερες πωλήσεις έχουμε τον Ιανουάριο, οι οποίες είναι μόνο 5.000.000lt. Συμπεραίνουμε επομένως την έντονη εποχικότητα του προϊόντος καθώς οι μέγιστες πωλήσεις κατά τον Ιούλιο είναι σχεδόν τριπλάσιες από τις πωλήσεις τον μήνα Ιανουάριο.



Διάγραμμα 1: Μηνιαίες Πωλήσεις των προϊόντων Κορπή

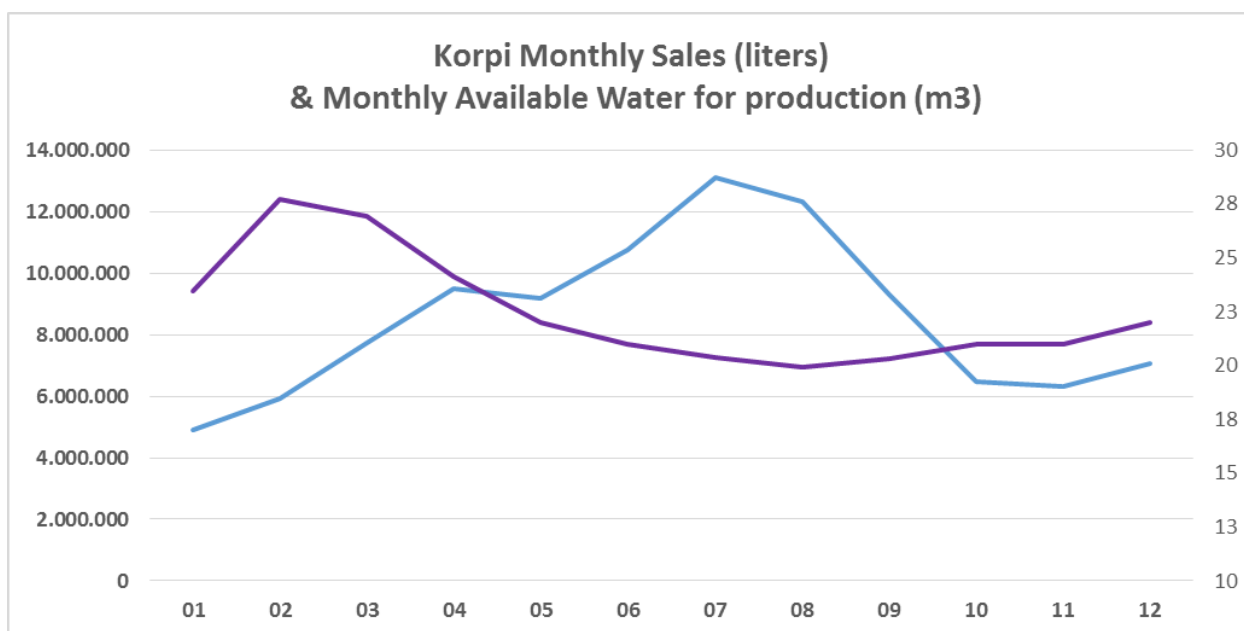
Στο επόμενο διάγραμμα αναπαρίσταται η παραγωγική ικανότητα του Εργοστασίου ανά μήνα. Παρατηρούμε ότι η δυνατότητα παραγωγής είναι μεγαλύτερη κατά τους χειμερινούς μήνες (Φεβρουάριο, Μάρτιο) σε σχέση με τον υπόλοιπο χρόνο. Βλέπουμε ότι την μικρότερη παραγωγική ικανότητα έχουμε τον μήνα Αύγουστο καθώς παράγονται 20.000lt Φυσικού Μεταλλικού Νερού ανά ώρα, σε αντίθεση με την μέγιστη παραγωγική ικανότητα που έχουμε τον Φεβρουάριο που παράγονται 28.000lt ανά ώρα. Εξάγεται επομένως ένα λογικό συμπέρασμα καθώς την εποχή του έτους κατά την οποία παρατηρείται το λιώσιμο των χιονιών και αυξάνεται η ροή των πηγών, εντοπίζεται η μέγιστη παραγωγική ικανότητα.



Διάγραμμα 2: Μηνιαία Παραγωγική Ικανότητα

Τέλος, στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζονται οι 2 προηγούμενες καμπύλες, των Πωλήσεων και της Παραγωγικής Ικανότητας μαζί.

Γίνεται πλήρως αντιληπτό ότι αυτά τα δύο ποσά μπορούν να χαρακτηριστούν ως αντιστρόφως ανάλογα καθώς στα σημεία που η παραγωγική ικανότητα παρουσιάζει μέγιστο, η καμπύλη των πωλήσεων παρουσιάζει ελάχιστο και το αντίστροφο.



Διάγραμμα 3: Σύγκριση Πωλήσεων-Παραγωγικής Ικανότητας

Πρακτικά το αποτέλεσμα που προκύπτει από αυτή την ερμηνεία των δεδομένων, είναι ότι χρειάζεται να γίνει μια σωστή και μεθοδική διαχείριση των ποσοτήτων του παραγόμενου προϊόντος, τους μήνες με την αυξημένη παραγωγική ικανότητα, ώστε να καλυφθεί η περίσσεια ζήτηση που υπάρχει κατά τους καλοκαιρινούς μήνες. Συνεπώς κατά τους μήνες Μάρτιο, Απρίλιο και Μάιο, πρέπει να παράγεται και να αποθηκεύεται επιπλέον ποσότητα προϊόντος, από αυτή που καταναλώνεται, ώστε να είναι σε θέση η εταιρεία να ανταποκριθεί στην αυξημένη ζήτηση που εντοπίζεται τους μήνες Ιούνιο, Ιούλιο, Αύγουστο και Σεπτέμβριο καθώς η παραγωγική ικανότητα τότε είναι μειωμένη.

Σύμφωνα με τα δεδομένα των πωλήσεων που διαθέτουμε για το έτος 2019 έχουμε δημιουργήσει τον Πίνακα 22, στον οποίο απεικονίζονται οι πωλήσεις των προϊόντων Κορπή σε παλέτες για κάθε μήνα του έτους. Ακριβώς πιο κάτω παρουσιάζεται ο Πίνακας 23 που εκφράζει την παραγωγική ικανότητα της εταιρείας σε αριθμό παλετών για κάθε μήνα.

Πίνακας 22

01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
5.365	6.896	8.501	9.205	12.140	14.098	15.827	16.069	12.003	9.483	8.626	8.876

Πίνακας 22: Πωλήσεις προϊόντων Κορπή σε παλέτες

Πίνακας 23

01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
15.800	17.300	15.800	14.400	14.400	13.700	13.700	12.900	12.900	12.600	13.700	13.700

Πίνακας 23: Παραγωγική Ικανότητα Εργοστασίου σε παλέτες

Με πράσινο χρώμα έχουμε σημειώσει τους 3 μήνες για τους οποίους η ζήτηση ξεπερνάει την παραγωγική ικανότητα και συνεπώς θα πρέπει να δημιουργηθεί το απαραίτητο απόθεμα προϊόντων, σκεπτόμενοι πάντα την ελαχιστοποίηση του Κόστους Αποθήκευσης του αποθέματος. Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα προβούμε ξανά σε Μαθηματική Μοντελοποίηση του συστήματος που έχουμε στη διάθεσή μας, η οποία περιλαμβάνει τον ορισμό των μεταβλητών, την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς που επιβάλλονται για την παραγωγή. Στη συνέχεια το πρόβλημα θα επιλυθεί με τη βοήθεια του Excel και του επιλυτή-Solver όπως έγινε και στο προηγούμενο κεφάλαιο για «το Πρόβλημα της Μεταφοράς», και έτσι θα έχουμε πια την βέλτιστη λύση για το πρόβλημα της Παραγωγής και της Αποθήκευσης ανάλογα με τη ζήτηση και την παραγωγική ικανότητα.

4.2 Μαθηματική Μοντελοποίηση

Για την μαθηματική μοντελοποίηση του παραπάνω προβλήματος θα ακολουθήσουμε την κλασική διαδικασία της μοντελοποίησης όπως αυτή έχει περιγραφεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Θα ορίσουμε δηλαδή την κατάλληλη αντικειμενική συνάρτηση, τις μεταβλητές, αλλά και τους απαραίτητους περιορισμούς.

- **Ορισμός Μεταβλητών:**

Θέτουμε $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{12}$, δηλαδή X_i με $i = 1, 2, \dots, 12$ ο αριθμός των παλετών που θα παράγονται κάθε μήνα. Αυτές είναι οι ποσότητες που θα προσπαθήσουμε να μεταβάλουμε για να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος αποθήκευσης της εταιρείας αλλά και ταυτόχρονα να ικανοποιήσουμε την ζήτηση.

Οι παραπάνω μεταβλητές είναι οι ζητούμενες τιμές τις οποίες η εταιρεία θα χρησιμοποιήσει για να οργανώσει κατάλληλα την παραγωγή της, δεν είναι όμως και οι μεταβλητές που θα λάβουν μέρος στην αντικειμενική συνάρτηση. Θα ορίσουμε μια ομάδα νέων μεταβλητών οι οποίες θα εξαρτώνται από τις X_i . Αυτές οι νέες μεταβλητές θα είναι οι Y_i με $i = 1, 2, \dots, 12$ όσοι δηλαδή και οι μήνες του έτους και θα εκφράζουν την ποσότητα του αποθέματος που θα έχει η εταιρεία στην διάθεση της από τους προηγούμενους μήνες, δηλαδή τις παλέτες που έχουμε παράξει τους προηγούμενους μήνες και δεν έχουμε πουλήσει αλλά τις αποθηκεύουμε για να τις αξιοποιήσουμε αργότερα.

- **Αντικειμενική Συνάρτηση:**

$$\text{Minimize Cost} = \text{Min}C = \sum_{i=1}^{12} 8Y_i$$

Συμβολίζουμε με Y_i τις μεταβλητές που ορίσαμε παραπάνω, πολλαπλασιασμένες με τον συντελεστή 8. Αυτό συμβαίνει γιατί γνωρίζουμε πως το κόστος αποθήκευσης της μίας παλέτας για ένα μήνα είναι 8€.

- **Περιορισμοί:**

- Περιορισμοί Παραγωγικής Ικανότητας $\sum_{i=1}^{12} X_i \leq s_i$ για $i = 1, \dots, 12$ με s_i να είναι συγκεκριμένες ποσότητες παραγωγικής ικανότητας για τον κάθε μήνα του έτους.
- Περιορισμοί Ζήτησης $\sum_{i=1}^{12} (X_i + Y_i) \geq d_i$ για $i = 1, \dots, 12$ με d_i να είναι συγκεκριμένες ποσότητες ζήτησης για τον κάθε μήνα. Εδώ προσθέτουμε τις δύο μεταβλητές, δηλαδή τις παλέτες που παράγουμε και τις παλέτες που διαθέτουμε ως απόθεμα από τους προηγούμενους μήνες. Και οι δύο αυτές ποσότητες μαζί αποτελούν την διαθέσιμη ποσότητα προϊόντων που έχουμε προς πώληση.
- Περιορισμοί μη αρνητικότητας $Y_i \geq 0$ και $X_i \geq 0$ για $i = 1, \dots, 12$.
- Τέλος έχουμε και έναν ακόμη περιορισμό, αυτόν του ακέραιου προγραμματισμού. Θέλουμε οι ποσότητες που θα προκύψουν από τον επιλυτή-Solver ως η βέλτιστη λύση να είναι ακέραιες, συνεπώς θα προσθέσουμε και έναν νέο περιορισμό αυτή τη φορά: $X_i = \text{integer}$.

Το μαθηματικό Μοντέλο του Ακέραιου Προγραμματισμού είναι ίδιο με εκείνο του Γραμμικού Προγραμματισμού με τον επιπλέον περιορισμό των ακέραιων μεταβλητών. Για τις μεταβλητές που είναι ακέραιες καταργείται επομένως η προϋπόθεση της διαιρετότητας. Το πρόβλημα του προγραμματισμού της παραγωγής είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού. Θα ήταν λάθος να αντιμετωπίζαμε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού και στη συνέχεια να στρογγυλοποιούσαμε την προκύπτουσα λύση μόνοι μας είτε πάνω, είτε κάτω, ώστε να προκύψει μια ακέραια τιμή, γιατί μπορεί η τελική λύση να μην ικανοποιούσε τους περιορισμούς ή να μην ήταν τελικά η βέλτιστη.

Παρακάτω φαίνονται οι αντίστοιχοι πίνακες που δημιουργήθηκαν στο Excel για την επίλυση του συστήματος που διαθέτουμε.

Δημιουργούμε αρχικά έναν πίνακα που περιέχει τον αριθμό των παλετών που θα παράγονται κάθε μήνα ανάλογα με τη ζήτηση και την παραγωγική ικανότητα. Θα περιλαμβάνει δηλαδή τις μεταβλητές X_i οι οποίες θα προσαρμόζονται ανάλογα με τους περιορισμούς. Αυτή τελικά θα είναι και η βέλτιστη λύση που θα την αναλύσουμε στο τέλος.

Πίνακας 24

Μήνας	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
Παραγωγή σε παλέτες	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	5.365	6.896	8.501	12.639	14.400	13.700	13.700	12.900	12.003	9.483	8.626	8.876

Πίνακας 24 : Μηνιαίος αριθμός παραγωγής παλετών

Στη συνέχεια δημιουργούμε έναν πίνακα ο οποίος περιέχει το απόθεμα που διαθέτει η επιχείρηση για κάθε μήνα του έτους, δηλαδή τις μεταβλητές Y_i που ορίσαμε παραπάνω στη μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος. Στο κάθε κελί προσθέτουμε το απόθεμα που έχουμε από τους προηγούμενους μήνες, συν τις παλέτες που παράξαμε τον προηγούμενο μήνα, μείον τις παλέτες που πουλήσαμε τον προηγούμενο μήνα.

Θεωρούμε ότι τον Ιανουάριου έχουμε μηδενικό απόθεμα, καθώς τον θεωρούμε ως αρχή του έτους και δεχόμαστε ότι δεν υπήρχε στοκ από τον προηγούμενο χρόνο. Αυτό μπορεί να αλλάξει σύμφωνα με τις ανάγκες και την σύμβαση που κάνει η εταιρεία.

Πίνακας 25

Μήνας	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
Απόθεμα σε παλέτες	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	0	0	0	0	3.434	5.694	5.296	3.169	0	0	0	0

Πίνακας 25: Αριθμός των παλετών που διαθέτουμε για στοκ

Στον παρακάτω πίνακα έχουμε πολλαπλασιάσει το απόθεμα που διαθέτουμε κάθε μήνα ως επιχείρηση και φαίνεται στον προηγούμενο πίνακα με το κόστος αποθήκευσης, το οποίο είναι 8€ ανά παλέτα για κάθε μήνα. Στη συνέχεια προσθέτουμε όλα τα κόστη αποθήκευσης και προκύπτει το τελικό κόστος αποθήκευσης για ένα έτος, το οποίο παίζει και τον ρόλο της αντικειμενικής συνάρτησης και είναι αυτό που τελικά θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, ώστε να προκύψει η βέλτιστη λύση.

Πίνακας 26

Μήνας	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	0	0	0	0	27.472	45.552	42.368	25.352	0	0	0	0

Πίνακας 26: Κόστος Αποθήκευσης

Στους επόμενους πίνακες θα ορίσουμε τους περιορισμούς που επηρεάζουν το σύστημα μας και πρέπει να τους λάβουμε υπόψιν για την επίλυση του προβλήματος.

Πίνακας 27

Μήνας	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
Παλέτες που διαθέτουμε προς πώληση	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	5.365	6.896	8.501	12.639	17.834	19.394	18.996	16.069	12.003	9.483	8.626	8.876
	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=
	5.365	6.896	8.501	9.205	12.140	14.098	15.827	16.069	12.003	9.483	8.626	8.876

Πίνακας 27: Περιορισμός της Ζήτησης

Στον παραπάνω πίνακα φαίνονται αρχικά με πράσινο χρώμα οι περιορισμοί της ζήτησης, δηλαδή έχουμε βάλει τις συνολικές πωλήσεις που πραγματοποιούνται για κάθε μήνα του έτους σύμφωνα με τα δεδομένα που μας έχουν δοθεί από την επιχείρηση. Στα κενά κελιά του πίνακα ορίσαμε να προστίθενται για κάθε μήνα ο αριθμός των παλετών οι οποίες παράγονται, συν το απόθεμα που έχει δημιουργηθεί από τους προηγούμενους μήνες. Έτσι έχουμε θεωρήσει τις παλέτες που διαθέτουμε προς πώληση για κάθε μήνα του έτους και ο περιορισμός είναι ότι οι παλέτες προς πώληση πρέπει ξεπερνούν σε ποσότητα την αντίστοιχη μηνιαία ζήτηση.

Ο επόμενος περιορισμός είναι αυτός της παραγωγικής ικανότητας της εταιρείας η οποία εξαρτάται κυρίως από περιβαλλοντικούς παράγοντες.

Πίνακας 28

Μήνας	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
Παραγωγή σε παλέτες	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	5.365	6.896	8.501	12.639	14.400	13.700	13.700	12.900	12.003	9.483	8.626	8.876
	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=
	15.800	17.300	15.800	14.400	14.400	13.700	13.700	12.900	12.900	12.600	13.700	13.700

Πίνακας 28: Περιορισμός της Παραγωγικής Ικανότητας

Στον παραπάνω πίνακα έχουμε τους περιορισμούς της παραγωγικής ικανότητας. Με πράσινο χρώμα φαίνονται οι μέγιστες ποσότητες σε παλέτες που μπορούν να παραχθούν κάθε μήνα ανάλογα με τη ροή του νερού, τον μέσο όρο βροχοπτώσεων στην περιοχή και διάφορους ακόμα περιβαλλοντικούς παράγοντες, σύμφωνα με τα δεδομένα που μας έχουν δοθεί από το εργοστάσιο. Στα κενά κελιά του πίνακα έχουμε βάλει τις ποσότητες που παράγουμε κάθε μήνα στο κεντρικό εργοστάσιο, οι οποίες θα πρέπει να είναι μικρότερες από την Παραγωγική Ικανότητα.

Χρησιμοποιώντας τον επιλυτή-Solver του Excel, έχουμε υπολογίσει την βέλτιστη λύση η οποία είναι η παρακάτω, δηλαδή παρουσιάζεται η ποσότητα σε παλέτες που πρέπει να παράγεται κάθε μήνα.

Πίνακας 29

Μήνας	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
Παραγωγή σε παλέτες	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	5.365	6.896	8.501	12.639	14.400	13.700	13.700	12.900	12.003	9.483	8.626	8.876

Πίνακας 29: Η βέλτιστη λύση του Προβλήματος της Παραγωγής

Η ανάλυση της βέλτιστης λύσης για την επιχείρηση φαίνεται παρακάτω:

Τον μήνα Ιανουάριο πρέπει να παράγονται 5.365 παλέτες.

Τον μήνα Φεβρουάριο πρέπει να παράγονται 6.896 παλέτες.

Τον μήνα Μάρτιο πρέπει να παράγονται 8.501 παλέτες.

Τον μήνα Απρίλιο πρέπει να παράγονται 12.639 παλέτες.

Τον μήνα Μάιο πρέπει να παράγονται 14.400 παλέτες.

Τον μήνα Ιούνιο πρέπει να παράγονται 13.700 παλέτες.

Τον μήνα Ιούλιο πρέπει να παράγονται 13.700 παλέτες.

Τον μήνα Αύγουστο πρέπει να παράγονται 12.900 παλέτες.

Τον μήνα Σεπτέμβριο πρέπει να παράγονται 12.003 παλέτες.

Τον μήνα Οκτώβριο πρέπει να παράγονται 9.483 παλέτες.

Τον μήνα Νοέμβριο πρέπει να παράγονται 8.626 παλέτες.

Τον μήνα Δεκέμβριο πρέπει να παράγονται 8.876 παλέτες.

Παρατηρούμε ότι τους μήνες Μάιο, Ιούνιο, Ιούλιο και Αύγουστο εξαντλούμε στον μέγιστο βαθμό την παραγωγική ικανότητα που διαθέτει το κεντρικό εργοστάσιο, κάτι που φαίνεται απόλυτα λογικό καθώς αυτούς τους μήνες η ζήτηση είναι αρκετά αυξημένη, λόγω των καιρικών συνθηκών, της αύξησης της θερμοκρασίας που συνδέεται άμεσα με την κατανάλωση νερού και της έλευσης περισσότερων τουριστών στη χώρα μας. Γι' αυτόν τον λόγο άλλωστε τα προϊόντα

Κορπή χαρακτηρίζονται, ως εποχικά προϊόντα και η ανάγκη για αποθήκευσή τους είναι επιτακτική.

Τους υπόλοιπους μήνες η παραγωγή περιορίζεται αρκετά καθώς φαίνεται να παράγεται τόση ποσότητα προϊόντων όση είναι και η αντίστοιχη ζήτηση που έχουν τα προϊόντα. Θεωρούμε ότι γνωρίζουμε τη ζήτηση που θα υπάρχει κάθε μήνα, είτε από τις παραγγελίες που θα γίνονται, είτε από το ενδιαφέρον που θα εκδηλώνουν οι υπόλοιπες επιχειρήσεις για την απόκτηση των προϊόντων μας. Έτσι έχουμε τη δυνατότητα να ελέγχουμε την παραγωγή μας και να μην δημιουργούμε απόθεμα το οποίο δεν μας χρειάζεται και να αυξάνουμε έτσι το κόστος αποθήκευσης.

Γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει μια αρκετά μεγάλη διαφοροποίηση στις ποσότητες παραγωγής από μήνα σε μήνα έτσι θα ήταν λογικό η επιχείρηση τους μήνες αιχμής όπως είναι ο Μάιος, ο Ιούνιος, ο Ιούλιος και ο Αύγουστος να χρειάζεται περισσότερα εργατικά χέρια σε σχέση με τους υπόλοιπους μήνες του έτους, οπότε μπορεί να προχωρήσει στην πρόσληψη επιπλέον προσωπικού κατά τους καλοκαιρινούς μήνες με περιορισμένη σύμβαση.

Σύμφωνα με τις ποσότητες της παραγωγής που έχουν προκύψει από τον επιλυτή-Solver προκύπτει ότι θα δημιουργείται ένα συγκεκριμένο απόθεμα το οποίο παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 30

Μήνας	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	09.2019	10.2019	11.2019	12.2019
Απόθεμα σε παλέτες	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	0	0	0	0	3.434	5.694	5.296	3.169	0	0	0	0

Πίνακας 30: Το απόθεμα που προκύπτει σύμφωνα με τη Βέλτιστη Λύση

Δηλαδή τον Μάιο θα έχουμε 3.434 παλέτες προϊόντων Κορπή οι οποίες θα αποθηκευτούν για την μετέπειτα αξιοποίηση τους. Τον Ιούνιο το απόθεμα θα ανέρχεται στις 5.694 παλέτες και περίπου τον ίδιο αριθμό αποθέματος θα έχουμε και τον Ιούλιο, συγκεκριμένα 5.296 παλέτες. Αυτούς τους 2 μήνες παρατηρείται ότι θα διαθέτουμε το περισσότερο απόθεμα. Τέλος τον μήνα Αύγουστο το απόθεμα μας θα είναι 3.169 παλέτες και στη συνέχεια το στοκ της επιχείρησης μηδενίζεται, καθώς δεν υπάρχει λόγος να αποθηκεύουμε προϊόντα πια, αφού η ζήτηση δεν ξεπερνά την παραγωγική ικανότητα για τους υπόλοιπους μήνες του έτους.

Με αυτόν τον προγραμματισμό της παραγωγής και της αποθήκευσης για τα προϊόντα και με δεδομένο ότι κάθε παλέτα για να αποθηκευτεί κοστίζει 8€ τον μήνα, το τελικό Κόστος Αποθήκευσης ανέρχεται στα **140.744€**.

Παρακάτω παρουσιάζεται το παράθυρο του επιλυτή-Solver τον οποίον χρησιμοποιήσαμε για την βελτιστοποίηση του παραπάνω συστήματος.

Παράμετροι Επίλυσης

Ορισμός στόχου:

Σε: Μέγιστη Ελάχιστη Σμή του:

Με αλλαγή μεταβλητών κελιών:

Σύμφωνα με τους περιορισμούς:

- \$B\$25:\$M\$25 = ακέραιος
- \$B\$25:\$M\$25 >= 0
- \$B\$30:\$M\$30 >= 0
- \$B\$41:\$M\$41 >= \$B\$43:\$M\$43
- \$B\$48:\$M\$48 <= \$B\$50:\$M\$50

Καταστήστε τις μεταβλητές που δεν έχουν περιορισμούς μη αρνητι

Επιλέξτε μια μέθοδο επίλυσης:

Μέθοδος επίλυσης

Επιλέξτε το μη γραμμικό GRG μηχανισμό για προβλήματα της Επίλυσης που είναι ομαλά μη γραμμικά. Επιλέξτε το μηχανισμό LP Simplex για γραμμικά προβλήματα της Επίλυσης και επιλέξτε το μηχανισμό Evolutionary για προβλήματα της Επίλυσης που δεν είναι ομαλά.

Εικόνα 3: Ο Επιλυτής-Solver

Αρχικά στο πρώτο πεδίο ορίζουμε το κελί στο οποίο βρίσκεται η αντικειμενική συνάρτηση που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το κόστος αποθήκευσης. Σε αυτό το κελί, για να δουλέψει ο επιλυτής-Solver πρέπει από την αρχή να έχει οριστεί η κατάλληλη συνάρτηση που στην δική μας περίπτωση ήταν το άθροισμα του Κόστους Αποθήκευσης για τις παλέτες που διαθέτουμε ως απόθεμα. Στο δεύτερο πεδίο επιλέγουμε τον τρόπο βελτιστοποίησης, δηλαδή εδώ θέλουμε ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής μας συνάρτησης. Στο τρίτο πεδίο ορίζουμε τα κελιά που περιέχουν τις μεταβλητές, οι οποίες θέλουμε να προσαρμόζονται στους περιορισμούς και τελικά να μας δίνουν την τελική βέλτιστη λύση του συστήματος. Στη συνέχεια, το επόμενο πεδίο είναι

το πεδίο των περιορισμών, εκεί ορίζουμε τους περιορισμούς που θα επηρεάζουν και τελικά θα διαμορφώνουν το πρόβλημά μας. Αρχικά έχουμε εισάγει τον περιορισμό της ακεραιότητας της λύσης, δηλαδή επιβάλλουμε στον επιλυτή η βέλτιστη λύση που θα εξάγει να αποτελείται από ακέραιες τιμές. Στη συνέχεια ορίζουμε τους περιορισμούς της μη αρνητικότητας και για τις 2 μεταβλητές του συστήματος μας. Τέλος θέτουμε τους περιορισμούς της ζήτησης και της παραγωγικής ικανότητας με τις αντίστοιχες ανισώσεις που πρέπει να ισχύουν ακριβώς όπως περιγράψαμε πιο πάνω στην μοντελοποίηση του προβλήματος. Τέλος στο τελευταίο πεδίο ορίζουμε τον τρόπο επίλυσης του συστήματος μας να είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός και συγκεκριμένα η μέθοδος Simplex. Πατώντας την «Επίλυση», παρουσιάζεται στο αντίστοιχο φύλλο του Excel η βέλτιστη λύση για το πρόβλημά μας. Στην συγκεκριμένη μοντελοποίηση μπορούμε να καταλάβουμε πως οι πίνακες είναι διασυνδεδεμένοι μεταξύ τους και οποιαδήποτε αλλαγή στις τελικές τιμές, επηρεάζει ολόκληρο το πρόβλημα.

Θα μπορούσαμε επειδή οι πίνακες στο πρόβλημα μας είναι σχετικά μικροί σε μέγεθος και δεδομένα, να βρίσκαμε την βέλτιστη λύση για την ελαχιστοποίηση του Κόστους Αποθήκευσης και την οργάνωση της παραγωγής χειροκίνητα και χωρίς να προχωρήσουμε σε μοντελοποίηση και χρήση του επιλυτή. Αυτό όμως θα μας έδινε μια εξ ολοκλήρου προσωρινή λύση την οποία δεν θα μπορούσαμε να αξιοποιήσουμε σε περίπτωση αλλαγής της παραγωγικής ικανότητας ή της ζήτησης. Παραδείγματος χάρη μπορεί κάποια χρονιά να είχαμε μείωση της παραγωγικής ικανότητας για έναν μήνα του έτους λόγω των καιρικών συνθηκών και της ελάττωσης της ροής του νερού λόγω των μειωμένων βροχοπτώσεων. Μια άλλη περίπτωση μπορεί να ήταν η αύξηση της ζήτησης λόγω μαζικής εισροής τουριστών στη χώρα μας την οποία δεν είχαμε τα προηγούμενα έτη. Τότε η λύση μας δεν θα είχε καμία αξία και θα έπρεπε να προβούμε σε νέα μελέτη των δεδομένων μας για να οργανώσουμε εκ νέου το πλάνο της παραγωγής μας. Έχοντας όμως κάνει την μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματός μας μπορούμε απλά με μια αλλαγή στους περιορισμούς ανάλογα με τα νέα δεδομένα που έχουν προκύψει να έχουμε άμεσα την καινούργια βέλτιστη λύση. Για να γίνουν πλήρως αντιληπτά τα οφέλη της μοντελοποίησης μπορούμε να δούμε ένα επίκαιρο παράδειγμα που μπορεί να επηρεάσει τον προγραμματισμό της παραγωγής.

4.3 Παράδειγμα Αλλαγής του Πλάνου της Παραγωγής

Όπως είπαμε και παραπάνω είναι συχνό, καθώς πολλοί είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν την παραγωγή, να πρέπει να αλλάξουμε και να προσαρμόσουμε εκ νέου τον προγραμματισμό μας για την παραγωγή και την αποθήκευση των προϊόντων μας, σύμφωνα με τα νέα δεδομένα. Ένα επίκαιρο και αρκετά χαρακτηριστικό παράδειγμα για τις μέρες που διανύουμε είναι η μείωση της έλευσης των τουριστών στη χώρα μας λόγω της νέας πανδημίας του ιού Covid-19. Πέρα από τον πολύ μεγάλο ανθρώπινο πόνο και τους δεκάδες χιλιάδες θανάτους που έχει προκαλέσει η πρωτόγνωρη πανδημία του COVID-19, έχει και τεράστιο οικονομικό αντίκτυπο που με τη σειρά του έχει οδηγήσει στην κατακόρυφη μείωση των ταξιδιών και της τουριστικής κίνησης σε όλον τον κόσμο. Η Ελλάδα είναι μια χώρα που κατεξοχήν στηρίζει την οικονομία της στον καλοκαιρινό

τουρισμό. Τους θερινούς μήνες η εισροή των τουριστών στη χώρα μας είναι τεράστια και η οργάνωση των χώρων εστίασης, των ξενοδοχείων αλλά και των επιχειρήσεων ξεκινάει από πολύ νωρίτερα, έτσι ώστε όλοι να είναι έτοιμοι για την υποδοχή και την εξυπηρέτηση των ταξιδιωτών.

Λόγω της νέας πραγματικότητα που έχει επιφέρει η πανδημία με την τήρηση των αποστάσεων, των μέτρων ασφαλείας και της αποφυγής του συνωστισμού η προσέλευση των τουριστών στη χώρα μας θα μειωθεί αρκετά. Σύμφωνα με την εκτίμηση (24/03) του Παγκόσμιου Οργανισμού Τουρισμού (UNWTO) σχετικά με τον πιθανό αντίκτυπο του Covid-19 στον διεθνή τουρισμό – που πιθανόν να αναθεωρηθεί όσο εξελίσσεται η τρέχουσα κρίση, αναμένεται οι διεθνείς αφίξεις να μειωθούν κατά 20% έως 30% το 2020 σε σύγκριση με το 2019. Μια τέτοια εξέλιξη θα είναι η χειρότερη μείωση που έχει παρατηρηθεί ποτέ σε καιρό ειρήνης. Συγκριτικά, το 2009, με την παγκόσμια οικονομική κρίση, οι διεθνείς αφίξεις τουριστών μειώθηκαν κατά 4%, ενώ η επιδημία SARS οδήγησε σε πτώση μόλις 0,4% το 2003. Τέλος οι προβλέψεις για τις απώλειες των τουριστικών εσόδων για το 2020 θα είναι για το δεύτερο τρίμηνο (Απρίλιος, Μάιος, Ιούνιος) -26%, ενώ για το τρίτο τρίμηνο (Ιούλιος, Αύγουστος, Σεπτέμβριος) θα είναι -59%.

Αυτή η μείωση στον τουρισμό θα επηρεάσει σίγουρα την ζήτηση και τις πωλήσεις των προϊόντων Κορπή. Αν θεωρήσουμε ότι τα προϊόντα μας χωρίζονται σε 2 κατηγορίες ως προς την κατανάλωσή τους, και η πρώτη είναι η αγορά και η κατανάλωση για προσωπική χρήση, ενώ η δεύτερη αφορά τους χώρους εστίασης και τις ξενοδοχειακές μονάδες, μπορούμε να προβλέψουμε ως ένα βαθμό την μείωση στην ζήτηση. Υποθέτουμε πως η πρώτη κατηγορία δεν επηρεάζεται σχεδόν καθόλου και η ζήτηση παραμένει στα ίδια επίπεδα. Στη δεύτερη κατηγορία όμως προβλέπουμε μια μείωση της τάξης του 20%, άρα σε συνολικό επίπεδο θεωρούμε ότι η ζήτηση των προϊόντων μας θα μειωθεί κατά 10% για τους μήνες Μάιο-Σεπτέμβριο.

Οι συνολικές πωλήσεις που πραγματοποιήθηκαν το προηγούμενο έτος κατά τους μήνες Μάιο-Σεπτέμβριο ήταν 70.137 παλέτες. Έστω ότι υπάρχει μια μείωση 10%, τότε αναμένουμε για αυτούς τους μήνες η ζήτηση να είναι περίπου 7.000 παλέτες λιγότερη άρα θα έχουμε 63.000 παλέτες προς πώληση. Γνωρίζοντας περίπου την ζήτηση που θα έχουμε τους επόμενους μήνες με μια μικρή αλλαγή στους περιορισμούς της ζήτησης στο συγκεκριμένο φύλλο του excel μπορούμε να προβλέψουμε με μεγάλη ακρίβεια την παραγωγή.

Θα μοιράσουμε τις 63.000 παλέτες που έχουμε προβλέψει προς πώληση στους 5 μήνες που μας ενδιαφέρουν. Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες των παλετών για τους μήνες Μάιο και Σεπτέμβριο είναι οι λιγότερες σε σχέση με τους υπόλοιπους μήνες και περίπου ίδιες μεταξύ τους, ενώ τις περισσότερες παλέτες τις έχουμε τον Αύγουστο. Επομένως παρακάτω φαίνεται ο νέος πίνακας των περιορισμών της ζήτησης.

Με έντονο χρώμα φαίνονται οι αλλαγές που κάναμε στους περιορισμούς της ζήτησης. Μοιράσαμε τις 63.000 παλέτες που υπολογίσαμε ότι θα είναι η νέα μας ζήτηση για τους μήνες Μάιο-Σεπτέμβριο, μετά την μείωση που έχουν προκαλέσει οι συνέπειες της πανδημίας. Κάνοντας αυτές τις αλλαγές και χρησιμοποιώντας ξανά τον επιλυτή-Solver στην ήδη υπάρχουσα μοντελοποίηση προέκυψε η βέλτιστη λύση του συστήματός μας.

Πίνακας 31

Μήνας	01.2020	02.2020	03.2020	04.2020	05.2020	06.2020	07.2020	08.2020	09.2020	10.2020	11.2020	12.2020
Παραγωγή σε παλέτες	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	5.365	6.896	8.501	12.639	17.834	21.034	21.734	20.634	17.637	16.620	15.763	16.013
	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=
	5.365	6.896	8.501	9.205	10.500	13.000	14.000	15.000	10.500	9.483	8.626	8.876

Πίνακας 31: Νέος Πίνακας Περιορισμών της Ζήτησης

Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με τις ποσότητες που πρέπει να παράγουμε σε παλέτες για τους μήνες του 2020.

Πίνακας 32

Μήνας	01.2020	02.2020	03.2020	04.2020	05.2020	06.2020	07.2020	08.2020	09.2020	10.2020	11.2020	12.2020
Παραγωγή σε παλέτες	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
	5.365	6.896	8.501	9.205	12.200	13.700	13.700	12.900	10.500	9.483	8.626	8.876

Πίνακας 32: Νέος Πίνακας Σχεδιασμού Παραγωγής

Παρατηρούμε ότι τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο, Μάρτιο, Ιούνιο, Ιούλιο, Αύγουστο, Οκτώβριο, Νοέμβριο και Δεκέμβριο η παραγωγή σε παλέτες θα είναι ακριβώς η ίδια με πέρυσι καθώς γι' αυτούς τους μήνες η ζήτηση δεν έχει αλλάξει δραστικά και σε συνδυασμό την παραγωγική ικανότητα φαίνεται να έχουμε πετύχει το βέλτιστο αποτέλεσμα. Οι μήνες για τους οποίους φαίνεται να έχουμε διαφοροποίηση της παραγωγής είναι ο Απρίλιος και ο Μάιος, όπου η παραγωγή σε παλέτες μειώνεται αρκετά κάτι που είναι απόλυτα λογικό καθώς σημειώνεται μια πτωτική πορεία στη ζήτηση, έτσι η ανάγκη για δημιουργία αποθέματος δεν είναι πια τόσο μεγάλη όσο το προηγούμενο έτος. Τέλος διαφοροποίηση στον αριθμό παραγωγής παρουσιάζεται και τον Σεπτέμβριο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν τίθεται θέμα παραγωγής για αποθήκευση αλλά για απευθείας κατανάλωση και αφού η ζήτηση έχει μειωθεί συνεπάγεται ταυτόχρονη μείωση και προσαρμογή της παραγωγής στα νέα δεδομένα.

Λογικό είναι μετά τις αλλαγές στον σχεδιασμό της παραγωγής, η εταιρία να έχει ανάγκη για λιγότερο απόθεμα και συνεπώς να απαιτείται να αποθηκευτούν λιγότερες παλέτες. Το νέο κόστος αποθήκευσης που θα επιβαρύνει την επιχείρηση θα ανέρχεται στα 49.600€. Είναι αρκετά μικρότερο από το προηγούμενο κάτι το οποίο φαίνεται απόλυτα λογικό καθώς και το απόθεμα είναι λιγότερο.

Μέσα από αυτό το παράδειγμα ελπίζουμε να έγινε αντιληπτή η αξία της μοντελοποίησης και πόσο εύκολα μπορεί να προσαρμοστεί σε νέες συνθήκες και νέα δεδομένα και τελικά να εξάγει την βέλτιστη λύση που θα είναι σύμφωνη με τις καινούργιες ανάγκες της εταιρείας, σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Η Ουγγρική Μέθοδος

5.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα ανάθεσης είναι μια ειδική περίπτωση των Προβλημάτων Μεταφοράς που έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 3, για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- Ένα σύνολο n ατόμων R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) καλούνται να εκτελέσουν ένα σύνολο n εργασιών D_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Κάθε άτομο μπορεί να αναλάβει **μόνο** μια εργασία και κάθε εργασία εκτελείται από **μόνο** ένα άτομο. Δηλαδή στην περίπτωση του προβλήματός μας μια αποθήκη μπορεί να εφοδιάζει μόνο έναν προορισμό και ταυτόχρονα ένας προορισμός μπορεί να δέχεται προϊόντα από μόνο μια αποθήκη. Για αυτό το λόγο υπάρχει και το ενδεχόμενο μια εργασία να εκτελείται ή να μην εκτελείται (δεν νοείται μερική εκτέλεση της εργασίας) αν δεν είναι συμφέρουσα.

Έστω c_{ij} το κόστος εκτέλεσης της εργασίας j από το άτομο i . Σκοπός της μεθόδου είναι να ανατεθούν σε κάθε άτομο i η κατάλληλη εργασία j , έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς. Είναι πλήρως αντιληπτό ότι η βέλτιστη λύση του συστήματός μας, είναι εκείνος ο συνδυασμός των ζευγαριών άτομο-εργασία που ελαχιστοποιεί το κόστος μεταφοράς.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή ότι ο αριθμός των συνδυασμών είναι $n!$ Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των εφικτών λύσεων αυξάνεται με εκρηκτικό ρυθμό με το μέγεθος του προβλήματος. Για να αντιληφθούμε τον εκρηκτικό ρυθμό αύξησης του αριθμού των λύσεων, αρκεί να αναλογιστούμε ότι σε ένα πρόβλημα με 5 εργασίες υπάρχουν $5! = 120$ εφικτές λύσεις και επομένως είναι αδύνατον για μεγάλο n να επιλυθεί το πρόβλημα με εξαντλητικό έλεγχο όλων συνδυασμών. Απαιτείται λοιπόν λύση με αλγοριθμική μέθοδο.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:

$$\min Cost = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \text{ (το συνολικό κόστος)}$$

και η x_{ij} είναι μια δίτιμη μεταβλητή με τιμές $x_{ij} = 0$ εάν στο άτομο i ανατίθεται η εργασία j

και $x_{ij} = 1$ διαφορετικά.

Κάτω από

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \text{ για } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \text{ για } j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Είναι προφανές ότι το παραπάνω είναι μια ειδική περίπτωση του Προβλήματος Μεταφοράς και μπορεί να επιλυθεί με τις ίδιες μεθόδους που αναφέραμε στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 3.

Όπως είπαμε και πριν λόγω του μεγάλου αριθμού των συνδυασμών που προκύπτουν είναι αρκετά δύσκολο αυτή η μέθοδος να επιλυθεί εξετάζοντας ένα ένα τα ζεύγη, έτσι αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος ο οποίος μας εξυπηρετεί και διευκολύνει την επίλυση των προβλημάτων ανάθεσης. Αυτός ο αλγόριθμος ονομάζεται Ουγγρική Μέθοδος.

Η **Ουγγρική Μέθοδος** είναι ένας αλγόριθμος που αναπτύχθηκε από τον Harold Kuhn το 1955 για τη λύση των προβλημάτων ανάθεσης. Η μαθηματική βάση της μεθόδου είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα: Έαν ένας αριθμός προστεθεί ή αφαιρεθεί από όλα τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης του πίνακα κόστους ενός προβλήματος ανάθεσης, τότε η βέλτιστη λύση που προκύπτει για το νέο πρόβλημα ανάθεσης ταυτίζεται με τη βέλτιστη λύση που αναζητάμε για το αρχικό πρόβλημα.

Η ουγγρική μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος ανάθεσης χρησιμοποιεί διαδοχικά το θεώρημα για έναν πίνακα κόστους $n \times n$ με τα βήματα να φαίνονται παρακάτω. Η βασική αρχή της μεθόδου είναι ότι αν σε κάθε βήμα ο ελάχιστος αριθμός των διαγραμμισμένων γραμμών ή στηλών που απαιτούνται για να καλύψουμε όλα τα μηδενικά στοιχεία είναι ίσος με τον αρχικό αριθμό των γραμμών ή στηλών του πίνακα, τότε μπορεί να γίνει μια βέλτιστη ανάθεση.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των βημάτων του αλγορίθμου πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι η μέθοδος εφαρμόζεται μόνο σε τετραγωνικούς πίνακες. Αν το σύστημά μας είναι μη ισορροπημένο τότε θα πρέπει να προσθέσουμε εμείς μια εικονική εργασία ή ένα εικονικό άτομο με μηδενικό κόστος στα συγκεκριμένα κελιά του πίνακα, ώστε να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος.

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα βήματα του αλγορίθμου.

Βήμα 1: Δημιουργούμε τον πίνακα κόστους ευκαιρίας

Από τον πίνακα κόστους που μας δίνεται αρχικά στο πρόβλημα ανάθεσης, δημιουργούμε τον πίνακα κόστους ευκαιρίας που μας χρειάζεται για την επίλυση του συστήματος. Αυτός δημιουργείται ως εξής:

Αφαιρούμε την τιμή του μικρότερου κόστους σε κάθε γραμμή του αρχικού πίνακα κόστους από όλα τα στοιχεία της γραμμής. (Στην περίπτωση προβλημάτων μεγιστοποίησης, επιλέγουμε το μεγαλύτερο κέρδος σε κάθε γραμμή και παίρνουμε τις διαφορές των υπολοίπων στοιχείων από αυτό. Στο παρόν κεφάλαιο εμείς δεν θα ασχοληθούμε με πρόβλημα μεγιστοποίησης).

Με τον τρόπο αυτό, σε κάθε γραμμή υπάρχει το μηδενικό στοιχείο στη θέση που θα θεωρηθεί ως η πιο συμφέρουσα ανάθεση στη συγκεκριμένη γραμμή.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τις στήλες του νέου πίνακα που προέκυψε από την προηγούμενη διαδικασία. Τώρα θα αφαιρέσουμε το μικρότερο στοιχείο από κάθε στήλη σε όλα τα στοιχεία της συγκεκριμένης στήλης. Μετά και από αυτή τη μετατροπή υπάρχει τουλάχιστο ένα μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πίνακα.

Βήμα 2: Ελέγχουμε αν ο πίνακας που προέκυψε από το Βήμα 1, δίνει τη βέλτιστη ανάθεση. Ο έλεγχος γίνεται με τον εξής τρόπο:

Στόχος μας είναι να διαγράψουμε όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό είτε οριζόντιων, είτε κατακόρυφων γραμμών. Αν ο αριθμός των γραμμών που απαιτούνται για την διαγραφή των μηδενικών, είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών ή των στηλών του αρχικού πίνακα, τότε μπορούμε να προχωρήσουμε στην αντιστοίχιση των ατόμων με τις κατάλληλες εργασίες, που θα μας δώσουν το μικρότερο κόστος μεταφοράς. Έτσι γνωρίζουμε πλέον ότι το σύστημά μας έχει βέλτιστη λύση και μας μένει να την εντοπίσουμε, γι' αυτό προχωρούμε στο Βήμα 4, αλλιώς, συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα

Βήμα 3: Αναπροσαρμογή των τιμών του πίνακα

Αν οι γραμμές που χρησιμοποιούνται για τη διαγραφή των μηδενικών στοιχείων, δεν είναι ίσες με τις αρχικές διαστάσεις του πίνακα, τότε προχωράμε σε αναπροσαρμογή του πίνακά μας. Γι' αυτό το λόγο, αφαιρούμε το μικρότερο στοιχείο του πίνακα που δεν καλύπτεται με γραμμές από όλα τα υπόλοιπα στοιχεία που επίσης δεν καλύπτονται, ενώ ταυτόχρονα το προσθέτουμε σε όλα τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στα σημεία τομής των οριζόντιων και των κατακόρυφων γραμμών που τραβήχτηκαν στο Βήμα 2. Τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα τα αφήνουμε αμετάβλητα και επιστρέφουμε στο Βήμα 2

Βήμα 4: Εκτελούμε την αντιστοίχιση εργασιών και ατόμων.

Ξεκινούμε από μια γραμμή ή μια στήλη η οποία έχει μόνο ένα μηδενικό και αναθέτουμε στο άτομο που αντιστοιχεί στη γραμμή, την συγκεκριμένη εργασία της στήλης.

Στη συνέχεια διαγράφουμε το άτομο και την εργασία και προχωρούμε στο υπόλοιπο τμήμα του πίνακα με τον ίδιο τρόπο.

Αν δεν υπάρχει γραμμή ή στήλη του πίνακα με ένα μόνο μηδενικό στοιχείο, τότε διαλέγουμε τη σειρά ή στήλη με τα λιγότερα μηδενικά στοιχεία και επιλέγουμε ένα από αυτά. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να εξαντληθούν όλες οι αντιστοιχίσεις.

Είναι προφανές ότι σε αυτή την περίπτωση μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια βέλτιστες λύσεις.

5.2 Εφαρμογή της Μεθόδου

Έχοντας περιγράψει την θεωρία της Ουγγρικής Μεθόδου καθώς και τα βήματα του αλγορίθμου της, στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε τώρα να την εφαρμόσουμε για να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση στο πρόβλημα μεταφοράς που διαθέτουμε. Στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το Κόστος Μεταφοράς για τα προϊόντα Κορπή από συγκεκριμένες αποθήκες προς τους εκάστοτε προορισμούς. Στη θέση των ατόμων έχουμε τώρα αποθήκες, ενώ στη θέση των εργασιών έχουμε προορισμούς. Όπως είπαμε και πριν διαθέτουμε έναν πίνακα με τα αντίστοιχα κόστη μεταφοράς από την κάθε αποθήκη προς τον κάθε προορισμό και σκοπός μας είναι να βρούμε τα κατάλληλα ζεύγη αποθήκη-προορισμός, ώστε κάθε αποθήκη να στέλνει προϊόντα μόνο σε έναν προορισμό και κάθε προορισμός να λαμβάνει αντιστοίχως προϊόντα μόνο από μια αποθήκη. Ο συνδυασμός όλων αυτών των ζευγαριών αποτελεί τη βέλτιστη λύση του συστήματός μας.

Ας δούμε όμως τώρα τον πίνακα του συστήματός μας.

Πίνακας 33

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	10,44 €	13,59 €	9,46 €	10,21 €	14,46 €
Αθήνα	9,50 €	12,54 €	8,15 €	8,04 €	13,42 €
Λάρισα	2,52 €	5,56 €	3,46 €	1,85 €	6,42 €
Σίνδος	4,24 €	4,84 €	4,14 €	2,77 €	5,72 €

Πίνακας 33: Τελικός Πίνακας με τα Χιλιομετρικά Κόστη Μεταφοράς ανά παλέτα

Ο παραπάνω πίνακας είναι ένας μη τετραγωνικός πίνακας με 4 γραμμές και 5 στήλες. Στις γραμμές φαίνονται οι αποθήκες που διαθέτουμε, οι οποίες είναι η Κορπή, η Αθήνα, η Λάρισα και η Σίνδος, ενώ στις στήλες φαίνονται οι προορισμοί, οι οποίοι είναι η Θεσσαλονίκη, η Καβάλα, η Καστοριά, η Πιερία και η Ξάνθη. Οι πέντε προορισμοί του συστήματός μας έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό, ότι είναι όλες πόλεις της Βορείου Ελλάδας. Επιλέξαμε τη Βόρεια Ελλάδα ως αντικείμενο μελέτης για το συγκεκριμένο πρόβλημα μεταφοράς, καθώς η ζήτηση των προϊόντων μας στη Βόρεια Ελλάδα δεν είναι τόσο μεγάλη όσο στις υπόλοιπες περιοχές της χώρας. Επίσης παλαιότερα η πρόσβαση σε αυτές τις περιοχές ήταν πιο δύσκολη και αρκετά κοστοβόρα σε σύγκριση με περιοχές της Κεντρικής Ελλάδας ή της Πελοποννήσου, πλέον όμως με την δημιουργία των σύγχρονων οδικών δικτύων η μετακίνηση έχει γίνει πιο εύκολη και είναι μια καλή ευκαιρία για την επιχείρηση, να αναπτυχθεί και να αυξήσει τις πωλήσεις της και στη Βόρεια Ελλάδα.

Τα κόστη του παραπάνω πίνακα είναι υπολογισμένα σύμφωνα με τις χιλιομετρικές αποστάσεις των προορισμών από τις αποθήκες και ανάλογα με την κατανάλωση καυσίμου. Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποιοι πίνακες μέσα από τους οποίους προέκυψε ο τελικός πίνακας του προβλήματος.

Πίνακας 34

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	384km	534km	288km	394km	586km
Αθήνα	506km	656km	489km	442km	709km
Λάρισα	151km	301km	184km	87km	353km
Σίνδος	164km	161km	182km	69km	214km

Πίνακας 34: Πίνακας Χιλιομετρικών Αποστάσεων

Ο παραπάνω πίνακας περιέχει τις χιλιομετρικές αποστάσεις των προορισμών από τις αποθήκες.

Ο επόμενος πίνακας περιέχει τα χιλιομετρικά κόστη των αποστάσεων αυτών. Έστω ότι η επιχείρηση χρησιμοποιεί για τις μετακινήσεις της φορτηγά οχήματα 5 αξόνων, τα οποία κινούνται με πετρέλαιο και καταναλώνουν 1lt για 2,8km που διανύουν. Τέλος γνωρίζουμε ότι η τιμή του πετρελαίου σήμερα είναι 1,4€/lt. Με βάση αυτά τα στοιχεία προκύπτει ο παρακάτω πίνακας για το κόστος κατανάλωσης καυσίμου.

Πίνακας 35

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	192€	267€	144€	197€	293€
Αθήνα	253€	328€	244,5€	221€	354,5€
Λάρισα	75,5€	150,5€	92€	43,5€	176,5€
Σίνδος	82€	80,5€	91€	34,5€	107€

Πίνακας 35: Πίνακας Κατανάλωσης Καυσίμου

Τέλος έχουμε έναν τελευταίο πίνακα ο οποίος περιέχει τα έξοδα των φορτηγών οχημάτων για τα διόδια με τα οποία επιβαρύνεται κάθε δρομολόγιο της επιχείρησης.

Πίνακας 36

Αποθήκες	Προορισμοί				
	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	121,25 €	140,65 €	139,85 €	109,35 €	140,65 €
Αθήνα	32 €	48,20 €	0 €	20,10 €	48,20 €
Λάρισα	0 €	16,20 €	11,90 €	11,90 €	16,20 €
Σίνδος	45,15 €	64,55 €	33,25 €	48,65 €	64,55 €

Πίνακας 36: Πίνακας διοδίων

Τώρα θα προσθέσουμε τους πίνακες 35 και 36 και θα προκύψει ένας πίνακας με τα συνολικά κόστη μεταφοράς για κάθε διαδρομή που εκτελείται. Επειδή γνωρίζουμε ότι το κάθε φορτηγό όχημα που χρησιμοποιείται από την επιχείρηση έχει χωρητικότητα 30 παλέτες, θα διαιρέσουμε τα κόστη που βρήκαμε με το 30 ώστε να προκύψει ο πίνακας 33 με τα τελικά κόστη μεταφοράς ανά παλέτα, που είναι και ο πίνακας που αποτελεί το σύστημά μας.

Αφού έχουμε περιγράψει πλήρως το πρόβλημα που διαθέτουμε μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση της βέλτιστης λύσης με τη βοήθεια της Ουγγρικής Μεθόδου ακολουθώντας τα βήματα του αλγορίθμου που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Όπως τονίσαμε και πριν το πρόβλημα δεν είναι ισορροπημένο, δηλαδή έχουμε 4 γραμμές (αποθήκες) και 5 στήλες (προορισμοί). Η Ουγγρική μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε μη ισορροπημένο σύστημα και γι' αυτό το λόγο θα προσθέσουμε μια επιπλέον γραμμή, δηλαδή μια εικονική αποθήκη ώστε το σύστημά μας να γίνει τετραγωνικό (5*5). Τα αντίστοιχα κόστη μεταφοράς για την εικονική αποθήκη θα είναι μηδενικά για κάθε προορισμό. Ας δούμε τελικά τον πίνακα που προκύπτει μετά από αυτή την αλλαγή, ο οποίος θα είναι και ο πίνακας που θα εφαρμόσουμε την Ουγγρική Μέθοδο.

Πίνακας 37

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	10,44 €	13,59 €	9,46 €	10,21 €	14,46 €
Αθήνα	9,50 €	12,54 €	8,15 €	8,04 €	13,42 €
Λάρισα	2,52 €	5,56 €	3,46 €	1,85 €	6,42 €
Σίνδος	4,24 €	4,84 €	4,14 €	2,77 €	5,72 €
Εικονική	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €

Πίνακας 37: Πίνακας για την Ουγγρική Μέθοδο

Είμαστε πλέον σε θέση να εφαρμόσουμε ένα, ένα τα βήματα του αλγορίθμου για τη μέθοδο που μελετάμε.

Βήμα 1:

Αρχικά θα εντοπίσουμε το μικρότερο στοιχείο κάθε γραμμής και θα το αφαιρέσουμε από τα υπόλοιπα στοιχεία της ίδιας γραμμής. Αυτό θα το κάνουμε και για τις 5 γραμμές του πίνακά μας.

Πίνακας 38

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	10,44 €	13,59 €	9,46 €	10,21 €	14,46 €
Αθήνα	9,50 €	12,54 €	8,15 €	8,04 €	13,42 €
Λάρισα	2,52 €	5,56 €	3,46 €	1,85 €	6,42 €
Σίνδος	4,24 €	4,84 €	4,14 €	2,77 €	5,72 €
Εικονική	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €

Πίνακας 38: Πίνακας με τα μικρότερα στοιχεία κάθε γραμμής

Με κίτρινο χρώμα έχουμε σημειώσει τα μικρότερα στοιχεία της κάθε γραμμής. Για την εικονική αποθήκη θα επιλέξουμε οποιοδήποτε από τα μηδενικά στοιχεία θέλουμε, έστω αυτό της πρώτης στήλης. Στη συνέχεια θα κάνουμε τις αφαιρέσεις που αναφέραμε πριν και έτσι θα προκύψει ο νέος πίνακας.

Πίνακας 39

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,98 €	4,13 €	0,00 €	0,75 €	5,00 €
Αθήνα	1,46 €	4,50 €	0,11 €	0,00 €	5,38 €
Λάρισα	0,67 €	3,71 €	1,61 €	0,00 €	4,57 €
Σίνδος	1,47 €	2,07 €	1,37 €	0,00 €	2,95 €
Εικονική	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €

Πίνακας 39: Ο πίνακας μετά την αφαίρεση των στοιχείων των γραμμών

Στη συνέχεια θα εντοπίσουμε το μικρότερο στοιχείο κατά στήλη και θα το αφαιρέσουμε από όλα τα στοιχεία της συγκεκριμένης στήλης. Αυτό θα το κάνουμε και για τις 5 στήλες του πίνακα. Παρακάτω με πράσινο χρώμα φαίνονται τα μικρότερα στοιχεία της κάθε στήλης. Αν μια στήλη έχει μηδενικό στοιχείο τότε ως μικρότερο στοιχείο θα θεωρηθεί το μηδέν. Επίσης αν μια στήλη έχει παραπάνω από ένα μηδενικά στοιχεία, τότε μπορούμε να διαλέξουμε όποιο θέλουμε εμείς ως το μικρότερο.

Πίνακας 40

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,98 €	4,13 €	0,00 €	0,75 €	5,00 €
Αθήνα	1,46 €	4,50 €	0,11 €	0,00 €	5,38 €
Λάρισα	0,67 €	3,71 €	1,61 €	0,00 €	4,57 €
Σίνδος	1,47 €	2,07 €	1,37 €	0,00 €	2,95 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €

Πίνακας 40: Πίνακας με τα μικρότερα στοιχεία κάθε στήλης

Αφαιρώντας τα μικρότερα στοιχεία από κάθε στήλη του πίνακα προκύπτει ο παρακάτω.

Πίνακας 41

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,98 €	4,13 €	0,00 €	0,75 €	5,00 €
Αθήνα	1,46 €	4,50 €	0,11 €	0,00 €	5,38 €
Λάρισα	0,67 €	3,71 €	1,61 €	0,00 €	4,57 €
Σίνδος	1,47 €	2,07 €	1,37 €	0,00 €	2,95 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €

Πίνακας 41: Πίνακας μετά την αφαίρεση των στηλών

Μετά τις αφαιρέσεις που κάναμε έχει προκύψει ένας πίνακας ο οποίος έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή, αλλά και σε κάθε στήλη του. Με πορτοκαλί χρώμα έχουμε σημειώσει όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακά μας.

Πίνακας 42

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,98 €	4,13 €	0,00 €	0,75 €	5,00 €
Αθήνα	1,46 €	4,50 €	0,11 €	0,00 €	5,38 €
Λάρισα	0,67 €	3,71 €	1,61 €	0,00 €	4,57 €
Σίνδος	1,47 €	2,07 €	1,37 €	0,00 €	2,95 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €

Πίνακας 42: Πίνακας μηδενικών στοιχείων

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα του αλγορίθμου.

Βήμα 2:

Στο συγκεκριμένο βήμα θα διαγράψουμε με οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές όλα τα μηδενικά στοιχεία του παραπάνω πίνακα. Θα προσπαθήσουμε να πάρουμε όσο λιγότερες γραμμές γίνεται, δηλαδή θα προσπαθήσουμε με μία γραμμή να διαγράψουμε πάνω από ένα μηδενικό στοιχείο. Παρακάτω φαίνονται οι διαγραφές.

Πίνακας 43

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,98 €	4,13 €	0,00 €	0,75 €	5,00 €
Αθήνα	1,46 €	4,50 €	0,11 €	0,00 €	5,38 €
Λάρισα	0,67 €	3,71 €	1,61 €	0,00 €	4,57 €
Σίνδος	1,47 €	2,07 €	1,37 €	0,00 €	2,95 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €

Πίνακας 43: Πίνακας διαγραφών

Κάνοντας τις ελάχιστες διαγραφές που μπορούμε για να σβήσουμε τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα βλέπουμε ότι αυτές είναι τρεις και όχι πέντε, όσες δηλαδή το πλήθος των γραμμών και των στηλών του πίνακα. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουμε εντοπίσει ακόμα την βέλτιστη λύση του συστήματος. Επομένως μπορούμε να προχωρήσουμε στο Βήμα 3.

Βήμα 3:

Σε αυτό το βήμα επειδή δεν έχει εντοπιστεί ακόμα η βέλτιστη λύση του προβλήματος, θα εντοπίσουμε το μικρότερο στοιχείο από τα στοιχεία του πίνακα τα οποία δεν έχουν καλυφθεί από τις γραμμές των διαγραφών. Αυτό το στοιχείο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα με κόκκινο χρώμα.

Πίνακας 44

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,98 €	4,13 €	0,00 €	0,75 €	5,00 €
Αθήνα	1,46 €	4,50 €	0,11 €	0,00 €	5,38 €
Λάρισα	0,67 €	3,71 €	1,61 €	0,00 €	4,57 €
Σίνδος	1,47 €	2,07 €	1,37 €	0,00 €	2,95 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €

Πίνακας 44: Πίνακας για το Βήμα 3 (μικρότερο στοιχείο)

Το μικρότερο στοιχείο από τα μη διαγραμμένα στοιχεία του πίνακα είναι αυτό που βρίσκεται στο κελί Λάρισα-Θεσσαλονίκη και είναι ίσο με 0,67€. Θα αφαιρέσουμε τώρα αυτή την τιμή από τα υπόλοιπα μη διαγραμμένα κελιά και στη συνέχεια θα την προσθέσουμε στα κελιά τα οποία είναι σημεία τομής των γραμμών διαγραφής.

Στον παρακάτω πίνακα με μπλε χρώμα φαίνονται τα κελιά που είναι σημεία τομής των διαγραφών για να γίνει πλήρως αντιληπτή η μεθοδολογία που ακολουθείται.

Πίνακας 45

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,98 €	4,13 €	0,00 €	0,75 €	5,00 €
Αθήνα	1,46 €	4,50 €	0,11 €	0,00 €	5,38 €
Λάρισα	0,67 €	3,71 €	1,61 €	0,00 €	4,57 €
Σίνδος	1,47 €	2,07 €	1,37 €	0,00 €	2,95 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €	0,00 €

Πίνακας 45: Πίνακας για το Βήμα 3 (κελία τομής των γραμμών διαγραφής)

Θα προχωρήσουμε τώρα στις αφαιρέσεις και στις προσθέσεις στον παραπάνω πίνακα όπως ακριβώς περιγράψαμε πριν. Επομένως έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 46

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,31 €	3,46 €	0,00 €	0,75 €	4,33 €
Αθήνα	0,79 €	3,83 €	0,11 €	0,00 €	4,71 €
Λάρισα	0,00 €	3,04 €	1,61 €	0,00 €	3,90 €
Σίνδος	0,80 €	1,40 €	1,37 €	0,00 €	2,28 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,67 €	0,67 €	0,00 €

Πίνακας 46: Νέος Πίνακας μετά το Βήμα 3

Αφού έχουμε δημιουργήσει τον νέο πίνακα πια μετά το Βήμα 3 θα γυρίσουμε ξανά στο Βήμα 2 και θα επαναλάβουμε τις διαγραφές έτσι ώστε να σβήσουμε όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα με τις λιγότερες γραμμές που μπορούμε. Με πορτοκαλί χρώμα θα σημειώσουμε πάλι τα νέα μηδενικά στοιχεία και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στις διαγραφές.

Βήμα 2:

Πίνακας 47

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,31 €	3,46 €	0,00 €	0,75 €	4,33 €
Αθήνα	0,79 €	3,83 €	0,11 €	0,00 €	4,71 €
Λάρισα	0,00 €	3,04 €	1,61 €	0,00 €	3,90 €
Σίνδος	0,80 €	1,40 €	1,37 €	0,00 €	2,28 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,67 €	0,67 €	0,00 €

Πίνακας 47: Νέος Πίνακας μηδενικών στοιχείων

Κάνοντας τις νέες διαγραφές στον καινούργιο πίνακα που έχει προκύψει μετά το Βήμα 3 και μετρώντας τις βλέπουμε ότι αυτές είναι τέσσερις και όχι πέντε, όσες δηλαδή οι γραμμές και οι στήλες του πίνακά μας, άρα δεν μπορούμε να πάμε στο Βήμα 4 και να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση του συστήματος. Έτσι θα συνεχίσουμε ξανά με το Βήμα 3. Θα βρούμε δηλαδή πάλι το κελί με την μικρότερη ακάλυπτη τιμή (κόκκινο χρώμα) καθώς και τα σημεία τομής των γραμμών διαγραφής (μπλε χρώμα) τα οποία φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Βήμα 3:

Πίνακας 48

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,31 €	3,46 €	0,00 €	0,75 €	4,33 €
Αθήνα	0,79 €	3,83 €	0,11 €	0,00 €	4,71 €
Λάρισα	0,00 €	3,04 €	1,61 €	0,00 €	3,90 €
Σίνδος	0,80 €	1,40 €	1,37 €	0,00 €	2,28 €
Εικονική	0,00 €	0,00 €	0,67 €	0,67 €	0,00 €

Πίνακας 48: Πίνακας για το Βήμα 3

Θα προχωρήσουμε τώρα στις αφαιρέσεις και στις προσθέσεις όπως ακριβώς περιγράψαμε πιο πάνω στη διαδικασία του Βήματος 3. Παρακάτω φαίνεται ο καινούργιος πίνακας μετά τις πράξεις που έχουν γίνει:

Πίνακας 49

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,31 €	2,06 €	0,00 €	0,75 €	2,93 €
Αθήνα	0,79 €	2,43 €	0,11 €	0,00 €	3,31 €
Λάρισα	0,00 €	1,64 €	1,61 €	0,00 €	2,50 €
Σίνδος	0,80 €	0,00 €	1,37 €	0,00 €	0,88 €
Εικονική	1,40 €	0,00 €	2,07 €	2,07 €	0,00 €

Πίνακας 49: Πίνακας μετά τις πράξεις για το Βήμα 3

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο Τελικός πίνακας του Βήματος 3, στον οποίο έχουν σημειωθεί με πορτοκαλί χρώμα τα νέα μηδενικά στοιχεία.

Πίνακας 50

	Προορισμοί				
Αποθήκες	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,31 €	2,06 €	0,00 €	0,75 €	2,93 €
Αθήνα	0,79 €	2,43 €	0,11 €	0,00 €	3,31 €
Λάρισα	0,00 €	1,64 €	1,61 €	0,00 €	2,50 €
Σίνδος	0,80 €	0,00 €	1,37 €	0,00 €	0,88 €
Εικονική	1,40 €	0,00 €	2,07 €	2,07 €	0,00 €

Πίνακας 50: Τελικός Πίνακας για το Βήμα 3

Θα επιστρέψουμε τώρα και πάλι στο Βήμα 2 όπου έχουμε τον Τελικό Πίνακα που έχει προκύψει από το Βήμα 3 και θα κάνουμε ξανά τις διαγραφές των μηδενικών στοιχείων. Το αποτέλεσμα φαίνεται παρακάτω.

Βήμα 2:

Πίνακας 51

Αποθήκες	Προορισμοί				
	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,31 €	2,06 €	0,00 €	0,75 €	2,93 €
Αθήνα	0,79 €	2,43 €	0,11 €	0,00 €	3,31 €
Λάρισα	0,00 €	1,64 €	1,61 €	0,00 €	2,50 €
Σίνδος	0,80 €	0,00 €	1,37 €	0,00 €	0,88 €
Εικονική	1,40 €	0,00 €	2,07 €	2,07 €	0,00 €

Πίνακας 51: Πίνακας διαγραφών

Κάνοντας τις διαγραφές με τις ελάχιστες γραμμές που μπορούμε να τραβήξουμε για να διώξουμε όλα τα μηδενικά στοιχεία βλέπουμε ότι αυτές είναι πέντε, όσες δηλαδή και το πλήθος των γραμμών και των στηλών του πίνακα. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι το σύστημά μας έχει βέλτιστη λύση την οποία και μπορούμε να εντοπίσουμε πλέον στο Βήμα 4 του αλγορίθμου μας.

Βήμα 4:

Σκοπός μας στο συγκεκριμένο βήμα είναι να εντοπίσουμε την βέλτιστη λύση του προβλήματος ανάθεσης που έχουμε στη διάθεσή μας. Από τη στιγμή που ελέγξαμε ότι υπάρχει όντως βέλτιστη λύση θα προχωρήσουμε στις κατάλληλες αντιστοιχίσεις. Όπως αναφέραμε στην περιγραφή της μεθόδου μια αποθήκη μπορεί να στέλνει σε έναν μόνο προορισμό και κάθε προορισμός μπορεί να δέχεται προϊόντα από μια και μοναδική αποθήκη. Στόχος μας τώρα είναι να βρούμε αυτά τα ζεύγη αποθήκη-προορισμός που θα αποτελούν τη βέλτιστη λύση.

Θα ξεκινήσουμε αρχικά από τη γραμμή ή τη στήλη που έχει μόνο ένα μηδενικό στοιχείο και θα αντιστοιχίσουμε την συγκεκριμένη αποθήκη με τον προορισμό που προκύπτει από το κελί του μηδενικού στοιχείου και έπειτα θα διαγράψουμε την αποθήκη και τον προορισμό. Στη συνέχεια θα επαναλάβουμε τη διαδικασία για τις υπόλοιπες γραμμές και στήλες του πίνακα. Αν μια γραμμή έχει περισσότερα από ένα μηδενικά στοιχεία έχουμε περισσότερες από μια επιλογές αντιστοίχισης αρκεί όμως αυτές να μην έρχονται σε αντίθεση με τα υπόλοιπα ζεύγη.

Παρατηρώντας τον πίνακα 51, βλέπουμε ότι η πρώτη γραμμή του έχει μόνο ένα μηδενικό στοιχείο στο κελί Κορπή-Καστοριά, επομένως συμπεραίνουμε ότι είναι πιο συμφέρον σύμφωνα με την Ουγγρική Μέθοδο η Κεντρική αποθήκη της Κορπή να στέλνει προϊόντα αποκλειστικά και μόνο στην Καστοριά. Άρα έχει προκύψει το πρώτο ζευγάρι.

Πίνακας 52

Αποθήκες	Προορισμοί				
	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,31 €	2,06 €	0,00 €	0,75 €	2,93 €
Αθήνα	0,79 €	2,43 €	0,00 €	0,00 €	3,31 €
Λάρισα	0,00 €	1,64 €	1,61 €	0,00 €	2,50 €
Σίνδος	0,80 €	0,00 €	1,37 €	0,00 €	0,88 €
Εικονική	1,40 €	0,00 €	2,07 €	2,07 €	0,00 €

Πίνακας 52: Πρώτη αντιστοίχιση

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι στην πρώτη στήλη έχουμε ξανά μόνο ένα μηδενικό στοιχείο στο κελί Λάρισα-Θεσσαλονίκη, συνεπώς προκύπτει το νέο μας ζευγάρι και αυτό σημαίνει ότι η αποθήκη της Λάρισας θα είναι η μόνη που θα προμηθεύει την πόλη της Θεσσαλονίκης.

Πίνακας 53

Αποθήκες	Προορισμοί				
	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
Κορπή	0,00 €	2,06 €	0,00 €	0,75 €	2,93 €
Αθήνα	0,79 €	2,43 €	0,00 €	0,00 €	3,31 €
Λάρισα	0,00 €	1,64 €	1,61 €	0,00 €	2,50 €
Σίνδος	0,00 €	0,00 €	1,37 €	0,00 €	0,88 €
Εικονική	1,40 €	0,00 €	2,07 €	2,07 €	0,00 €

Πίνακας 53: Δεύτερη αντιστοίχιση

Για τη γραμμή δύο βλέπουμε ότι και αυτή έχει μόνο ένα μηδενικό στοιχείο στο κελί Αθήνα-Πιερία, άρα αυτό συνεπάγεται ότι η κεντρική Αποθήκη της Αθήνας θα στέλνει προϊόντα στην Πιερία και σε καμία άλλη πόλη από τις υπόλοιπες τέσσερις που διαθέτει το σύστημά μας.

Πίνακας 54

Αποθήκες	Προορισμοί				
	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
	0,31 €				
Κορπή		2,06 €	0,00 €	0,75 €	2,93 €
Αθήνα	0,79 €	2,43 €	0,11 €	0,00 €	3,31 €
Λάρισα	0,70 €	1,64 €	1,61 €	0,00 €	2,50 €
Σίνδος	0,30 €	0,00 €	1,37 €	0,00 €	0,88 €
Εικονική	1,70 €	0,00 €	2,07 €	2,07 €	0,00 €

Πίνακας 54: Τρίτη αντιστοίχιση

Τέλος η πέμπτη στήλη έχει και αυτή μόνο ένα μηδενικό στοιχείο στο κελί Εικονική-Ξάνθη. Αυτό θεωρητικά σημαίνει ότι η εικονική αποθήκη θα στέλνει στην πόλη της Ξάνθης τα εμπορεύματα που απαιτούνται αλλά με μηδενικό κόστος μεταφοράς κάτι το οποίο πρακτικά δεν μπορεί να ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι η Ξάνθη σύμφωνα με την βέλτιστη λύση που εξάγεται από την Ουγγρική Μέθοδο δεν συμφέρει να εφοδιάζεται από καμία αποθήκη της εταιρείας.

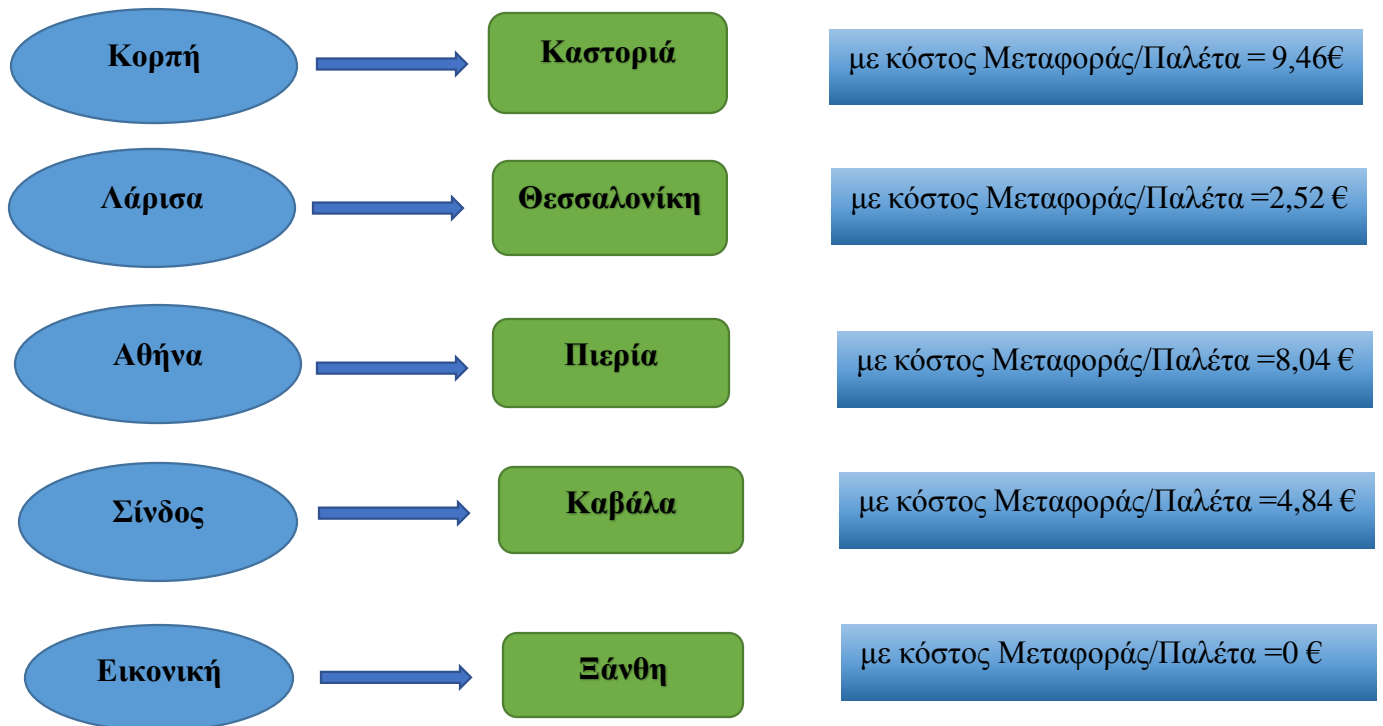
Πίνακας 55

Αποθήκες	Προορισμοί				
	Θεσσαλονίκη	Καβάλα	Καστοριά	Πιερία	Ξάνθη
	0,31 €		0,00 €	0,75 €	
Κορπή		2,06 €			2,93 €
Αθήνα	0,79 €	2,43 €	0,11 €	0,00 €	3,31 €
Λάρισα	0,70 €	1,64 €	1,61 €	0,00 €	2,50 €
Σίνδος	0,30 €	0,00 €	1,37 €	0,00 €	0,88 €
Εικονική	1,70 €	0,00 €	2,07 €	2,07 €	0,00 €

Πίνακας 55: Τέταρτη αντιστοίχιση

Οι υπόλοιπες γραμμές και στήλες έχουν περισσότερα από ένα μηδενικά στοιχεία, επομένως δεν μπορούμε κατευθείαν να διακρίνουμε το ζεύγος αποθήκη-προορισμός. Η μόνη όμως αποθήκη που μας έχει απομείνει είναι αυτή της Σίνδου και ο μόνος προορισμός είναι η Καβάλα, επομένως γίνεται αντιληπτό ότι το τελευταίο μας ζευγάρι είναι αυτό της Σίνδου-Καβάλας.

Και έτσι ολοκληρώνεται η αντιστοίχιση των αποθηκών με τους προορισμούς. Παρακάτω φαίνεται ξεκάθαρα η βέλτιστη λύση του Προβλήματος.



Για να βρούμε τώρα το συνολικό Κόστος Μεταφοράς για τις Αποθήκες και τους προορισμούς που διαθέτουμε θα προσθέσουμε τα επιμέρους κόστη και αυτό θα είναι το νέο βέλτιστο Κόστος Μεταφοράς για μια παλέτα, έτσι όπως προέκυψε από την Ουγγρική Μέθοδο.

Επομένως έχουμε:

$$\min Cost = 9.46 + 2.52 + 8.04 + 4.84 + 0 = 24.86€$$

το Συνολικό Κόστος Μεταφοράς για μια παλέτα, για κάθε προορισμό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας Πωλήσεων για το έτος 2019. Οι πωλήσεις μετριοούνται και αυτές σε παλέτες.

Cal. year / month		01/19	02/19	03/019	04/19	05/019	06/19	07/19	08/019	09/19	10/19	11/19	12/19
Region		PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL	PAL
GR PL NW Korpi NH	Achaia	260	120	245	219	608	490	151	386	503	520	457	337
GR PL NW Korpi NH	Aitoloakarnania	385	654	917	760	793	1.249	932	1.162	967	800	622	714
GR PL NW Korpi NH	Argolida	30	30	30	30	60	56	91	93	61	31	61	31
GR PL NW Korpi NH	Arkadia	0	91	0	30	30	30	30	62	62	0	29	30
GR PL NW Korpi NH	Arta	79	146	180	210	153	183	115	184	194	150	168	171
GR PL NW Korpi NH	Attiki	489	945	1.054	1.250	1.952	2.421	2.180	2.252	1.846	1.752	1.589	1.717
GR PL NW Korpi NH	Chalkidiki	0	0	0	17	0	0	12	0	0	0	0	0
GR PL NW Korpi NH	Evros	0	0	0	0	0	20	0	0	0	25	0	0
GR PL NW Korpi NH	Evyrotania	0	0	9	0	9	8	9	8	8	8	0	10
GR PL NW Korpi NH	Evvoia	42	64	82	58	72	129	109	174	98	77	64	9
GR PL NW Korpi NH	Florina	15	28	0	22	15	30	33	30	23	15	10	9
GR PL NW Korpi NH	Fokida	7	0	10	0	11	15	17	33	27	8	25	0
GR PL NW Korpi NH	Fthiotida	30	5	0	0	60	0	30	64	29	0	32	30
GR PL NW Korpi NH	Grevena	0	16	0	0	0	0	4	0	5	0	0	0
GR PL NW Korpi NH	Ilia	0	0	30	0	30	0	0	30	0	30	0	0
GR PL NW Korpi NH	Ioannina	245	186	488	298	390	451	345	625	382	191	275	319
GR PL NW Korpi NH	Iraklio	0	30	30	60	30	129	30	65	30	28	60	0
GR PL NW Korpi NH	Karditsa	0	0	0	0	8	0	0	6	0	0	0	5
GR PL NW Korpi NH	Kastoria	0	0	0	0	0	0	31	0	31	0	0	0
GR PL NW Korpi NH	Kavala	62	89	89	63	154	180	268	413	151	61	90	90
GR PL NW Korpi NH	Kefallinia	118	63	128	135	306	367	601	599	251	106	62	126
GR PL NW Korpi NH	Kerkyra	57	183	224	206	244	407	488	560	322	136	106	76

GR PL NW Korpi NH	Korinthia	63	60	60	92	80	129	90	151	78	73	33	49
GR PL NW Korpi NH	Kozani	59	60	59	29	72	70	31	73	52	40	35	35
GR PL NW Korpi NH	Lakonia	0	0	0	0	0	0	30	31	0	0	0	0
GR PL NW Korpi NH	Larisa	14	34	61	66	257	194	78	171	74	113	42	23
GR PL NW Korpi NH	Lefkada	83	100	82	203	138	290	433	399	179	99	70	49
GR PL NW Korpi NH	Magnisia	96	157	173	129	184	202	221	186	141	139	85	146
GR PL NW Korpi NH	Messinia	30	214	251	307	293	437	352	248	169	125	93	151
GR PL NW Korpi NH	Pieria	0	23	17	0	29	26	20	15	22	0	15	0
GR PL NW Korpi NH	Preveza	91	208	244	299	320	297	402	628	279	197	211	147
GR PL NW Korpi NH	Rodopi	0	57	55	123	172	239	238	329	268	118	183	211
GR PL NW Korpi NH	Serres	60	30	90	60	92	121	152	152	91	60	30	59
GR PL NW Korpi NH	Thesprotia	163	138	219	198	188	272	330	542	200	163	91	131
GR PL NW Korpi NH	Thessaloniki	475	584	638	670	1.064	1.144	1.251	1.544	1.204	778	867	749
GR PL NW Korpi NH	Trikala	10	13	10	14	137	123	18	80	161	182	227	148
GR PL NW Korpi NH	Voiotia	22	31	44	31	47	47	73	32	42	60	40	48
GR PL NW Korpi NH	Xanthi	0	0	0	0	0	10	0	0	0	5	0	0
GR PL NW Korpi NH	Zakynthos	126	92	147	186	461	364	458	547	491	186	121	128
GR DC Diakinisi ATH NH	Achaia	2	2	2	5	3	2	6	1	2	3	1	3
GR DC Diakinisi ATH NH	Aitolokarnania	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Argolida	4	4	4	7	7	7	15	13	9	11	4	4
GR DC Diakinisi ATH NH	Arkadia	0	0	0	0	0	0	30	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Attiki	125	51	80	66	98	62	197	83	135	74	96	54
GR DC Diakinisi ATH NH	Chios	2	0	8	2	26	17	33	106	105	132	67	97

GR DC Diakinisi ATH NH	Dodekanisos	67	116	106	200	222	156	263	202	185	129	142	108
GR DC Diakinisi ATH NH	Drama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Evros	0	0	0	0	0	2	1	1	3	7	0	1
GR DC Diakinisi ATH NH	Evvoia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Fokida	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Fthiotida	0	0	0	6	0	0	0	0	4	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Ioannina	0	3	0	1	1	1	2	0	0	0	1	1
GR DC Diakinisi ATH NH	Iraklio	9	10	22	23	29	49	4	5	6	14	3	2
GR DC Diakinisi ATH NH	Kastoria	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Kavala	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Kefallinia	1	2	1	1	2	1	1	1	0	1	1	1
GR DC Diakinisi ATH NH	Kerkyra	0	0	1	0	0	2	2	0	2	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Korinthia	0	0	1	0	9	0	9	6	1	2	1	1
GR DC Diakinisi ATH NH	Kozani	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Kyklades	40	24	42	98	134	95	185	161	103	98	77	66
GR DC Diakinisi ATH NH	Larisa	1	0	2	1	1	1	2	0	1	7	0	1
GR DC Diakinisi ATH NH	Lasithi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Lesvos	22	39	67	27	25	118	158	45	13	34	55	54

GR DC Diakinisi ATH NH	Magnisia	15	16	10	23	28	39	65	58	19	12	13	23
GR DC Diakinisi ATH NH	Messinia	0	0	0	0	0	32	0	27	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Rethymno	0	0	0	0	0	4	0	9	8	14	0	6
GR DC Diakinisi ATH NH	Rodopi	1	2	1	1	1	1	3	1	1	0	1	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Samos	14	18	33	11	40	16	83	55	23	21	18	28
GR DC Diakinisi ATH NH	Serres	5	7	4	10	7	5	10	7	7	10	6	10
GR DC Diakinisi ATH NH	Thessaloniki	15	17	19	17	82	33	47	32	20	6	17	7
GR DC Diakinisi ATH NH	Trikala	0	0	0	9	0	0	4	15	0	0	4	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Voiotia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH	Xanthi	2	8	6	12	13	10	14	14	12	12	11	9
GR HO Nestle Hellas Maroussi	Attiki	3	3	3	3	4	3	5	3	3	4	3	3
GR DC Kerkira NH	Kerkyra	6	12	7	13	11	6	19	14	8	15	6	10
GR DC Kerkira NH	Rethymno	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0
GR DC Chalkida NH	Attiki	6	4	10	15	7	9	13	14	4	8	8	5
GR DC Chalkida NH	Evrytania	2	5	3	4	4	6	7	11	4	4	4	5
GR DC Chalkida NH	Evvoia	28	34	37	53	48	66	77	87	41	45	39	46
GR DC Chalkida NH	Fokida	6	5	7	10	11	10	6	1	0	0	0	0
GR DC Chalkida NH	Fthiotida	25	21	28	30	33	49	76	65	32	25	28	24
GR DC Chalkida NH	Voiotia	23	24	24	34	26	30	42	46	26	23	33	29
GR DC Iraklio NH	Attiki	1	0	1	1	1	1	1	2	1	1	1	0
GR DC Iraklio NH	Chania	9	10	11	18	29	29	41	46	28	22	15	14

GR DC Iraklio NH	Iraklio	24	24	28	41	47	44	57	38	43	44	34	41
GR DC Iraklio NH	Lasithi	4	5	5	8	9	7	11	11	8	8	7	7
GR DC Iraklio NH	Rethymno	3	4	3	5	7	5	8	8	6	6	5	4
GR DC Rodos NH	Attiki	20	29	27	31	39	38	55	34	36	30	22	21
GR DC Rodos NH	Dodekanisos	100	127	171	213	190	226	295	167	231	182	135	183
GR DC Agrinio NH	Achaia	0	0	0	0	0	0	62	0	0	0	0	0
GR DC Agrinio NH	Aitolokarnania	74	77	81	91	98	107	441	145	111	91	71	75
GR DC Agrinio NH	Arta	22	35	28	39	49	47	181	75	46	41	43	35
GR DC Agrinio NH	Attiki	14	16	16	19	21	16	175	31	17	13	13	10
GR DC Agrinio NH	Evvoia	0	0	0	0	0	0	26	0	0	0	0	0
GR DC Agrinio NH	Ioannina	0	0	0	0	0	0	96	0	0	0	0	0
GR DC Agrinio NH	Lefkada	14	15	13	24	20	23	69	54	26	20	15	9
GR DC Agrinio NH	Magnisia	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0
GR DC Agrinio NH	Preveza	0	0	0	0	0	0	78	0	0	0	0	0
GR DC Agrinio NH	Rodopi	0	0	0	0	0	0	30	0	0	0	0	0
GR DC Agrinio NH	Thesprotia	0	0	0	0	0	0	46	0	0	0	0	0
GR DC Agrinio NH	Zakynthos	0	0	0	0	0	0	65	12	0	0	0	0
GR DC Patra NH	Achaia	87	100	104	144	137	158	212	227	139	147	126	146
GR DC Patra NH	Attiki	1	1	2	2	1	2	3	4	2	2	2	2
GR DC Patra NH	Korinthia	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
GR DC Patra NH	Rethymno	0	0	0	0	0	1	2	3	2	0	0	0
GR DC Patra NH	Zakynthos	12	19	15	29	23	28	44	34	25	18	13	18
GR DC Larisa NH	Attiki	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
GR DC Larisa NH	Karditsa	4	3	4	10	5	11	9	10	6	8	7	9
GR DC Larisa NH	Larisa	19	23	22	29	27	33	38	29	34	30	23	31
GR DC Larisa NH	Pella	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	2

GR DC Larisa NH	Pieria	4	5	5	6	8	10	14	16	8	7	7	8
GR DC Larisa NH	Trikala	8	10	14	17	14	12	19	19	14	12	14	18
GR DC Chios NH	Attiki	2	4	1	3	3	2	4	0	0	0	0	0
GR DC Chios NH	Chios	61	60	82	78	98	64	113	0	0	0	0	0
GR DC Ioannina NH	Attiki	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	1
GR DC Ioannina NH	Ioannina	64	73	74	91	79	90	95	107	77	73	75	62
GR DC Ioannina NH	Preveza	15	15	16	24	22	28	40	42	26	18	18	29
GR DC Ioannina NH	Thesprotia	1	2	2	3	3	3	4	4	0	4	4	3
GR DC Sindos NH	Attiki	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2
GR DC Sindos NH	Chalkidiki	2	5	7	5	10	16	16	25	12	5	7	3
GR DC Sindos NH	Imathia	6	7	7	7	6	9	6	9	7	6	9	10
GR DC Sindos NH	Kavala	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Sindos NH	Kilkis	5	4	3	3	4	3	4	4	4	2	5	5
GR DC Sindos NH	Pella	6	5	5	6	5	7	6	7	6	6	5	5
GR DC Sindos NH	Rethymno	0	0	0	0	0	0	2	3	1	0	0	0
GR DC Sindos NH	Thessaloniki	131	104	113	136	128	170	145	132	142	150	145	152
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Attiki	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Drama	6	5	6	7	6	8	7	6	5	6	9	6
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Florina	3	3	3	3	4	3	3	4	2	3	5	3
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Grevena	1	1	1	1	2	1	2	2	2	8	1	3
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Kastoria	2	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3

GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Kavala	6	6	7	8	7	10	11	10	8	7	7	5
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Kozani	11	12	11	12	12	13	16	13	14	13	13	20
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Rodopi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Serres	1	2	1	2	2	3	2	2	2	2	3	2
GR DC Salonika DiakinisiTHE NH	Thessaloniki	0	0	0	0	0	0	0	0	44	0	0	0
GR DC Diakinisi ATH NH Spoilt	Attiki	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Inofyta NH Staff Shop	Attiki	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
GR DC Korpi NH Staff Shop	Attiki	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Tavros Distribu	Argolida	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Tavros Distribu	Arkadia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Tavros Distribu	Attiki	2	4	2	2	4	6	6	6	5	4	0	3
GR DC Tavros Distribu	Evros	13	13	13	28	15	20	18	33	21	15	22	16
GR DC Tavros Distribu	Fokida	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Tavros Distribu	Korinthia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Tavros Distribu	Kozani	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Tavros Distribu	Rodopi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

GR DC Volos Kapsala NH	Attiki	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
GR DC Volos Kapsala NH	Fthiotida	1	1	1	1	2	2	3	2	2	2	2	1
GR DC Volos Kapsala NH	Magnisia	28	31	28	33	29	30	38	41	32	36	35	32
GR DC Kavala NH	Kavala	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Kalamata NH	Attiki	8	6	9	12	8	12	14	19	11	7	8	11
GR DC Kalamata NH	Ilia	14	26	28	31	37	36	63	88	46	28	36	31
GR DC Kalamata NH	Lakonia	8	8	10	12	10	10	24	18	19	7	8	9
GR DC Kalamata NH	Messinia	16	23	26	38	34	46	82	78	33	36	30	39
GR DC Kalamata NH	Rethymno	0	0	0	0	0	0	8	2	0	0	0	0
GR DC Elefsina NH	Attiki	975	1.085	1.290	1.466	1.546	1.735	1.938	1.465	1.452	1.364	1.186	1.428
GR DC Elefsina NH	Iraklio	17	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
GR DC Elefsina NH	Rethymno	1	2	1	2	2	2	3	1	6	1	2	8

Βιβλιογραφικές Αναφορές και Σύνδεσμοι

Τα Βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν για την παρούσα εργασία είναι τα ακόλουθα:

- «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα», των Εκδόσεων ΣΥΜΕΩΝ
Συγγραφείς: Κολέτσος Ιωάννης και Στογιάννης Δημήτρης.
- «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεωρία και Ασκήσεις», των Εκδόσεων ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
Συγγραφείς: Φακίνος Δημήτρης και Οικονόμου Αντώνης.

Οι Σύνδεσμοι που χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο είναι οι ακόλουθοι:

- <https://iaitoloakarnania.gr/2019/07/kante-mia-volta-stis-mageftikes-piges-korpi/>
- <https://www.korpi.gr/>
- <https://www.nestle.gr/>
- https://insete.gr/meletes/2004_COVID-19_Greek_Tourism.pdf
- <http://users.uom.gr/~acg/Courses/QA1/material/Ch07slides-miniatures.pdf>
- https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5906/2/00_master_document%20A%26B%20v2-KOY.pdf
- http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/Summary_of_OR.pdf
- https://www.researchgate.net/publication/313880623_Introduction_to_Operations_Research_Theory_and_Applications/link/5a7931ff0f7e9b41dbd44db2/download
- <http://cgi.di.uoa.gr/~vassilis/ae/L10-Transport%20Problem.pdf>
- <https://eclass.hmu.gr/modules/document/file.php/DBI110/%CE%A0%CE%95%CE%A1%CE%99%CE%95%CE%A7%CE%9F%CE%9C%CE%95%CE%9D%CE%9F/%CE%A0%CE%91%CE%A1%CE%9F%CE%A5%CE%A3%CE%99%CE%91%CE%A3%CE%95%CE%99%CE%A3/K.4-/EPIXEIRHSIAKH%20EREYNA.121-147.pdf>
- https://thalis.math.upatras.gr/~tsantas/DownloadFiles/OR_TransportationProblem.pdf
- <http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/method%20Simplex.pdf>