

# Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων Feynman τάξεως δύο βρόχων

Νικόλαος Τσώλης

Ιούλιος 2020



## Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα υπολογίσουμε την οικογένεια ολοκληρωμάτων του Double box with one off-shell leg το οποίο είναι ένα διάγραμμα Feynman δύο βρόχων με τέσσερα πόδια εκ των οποίων το ένα έχει μάζα. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτή των Απλοποιημένων Διαφορικών Εξισώσεων

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Κβαντική Χρωμοδυναμική</b>	<b>5</b>
2.1	Η ομάδα βαθμίδας $SU(N)$	6
2.2	Η Λαγκραντζιανή της ΚΧΔ	6
2.3	Κανόνες Feynman στην ΚΧΔ	8
2.4	Διαστατική Κανονικοποίηση	10
2.5	Ολοκληρώματα Feynman	10
2.6	IBP ταυτότητες	11
<b>3</b>	<b>One Box Loop</b>	<b>12</b>
3.1	Διαφόριση των Master Integrals κατά $s$	15
3.2	Διαφόριση των Master Integrals κατά $t$	18
3.3	Αλλαγή βάσης	19
3.4	Η Λύση της διαφορικής εξίσωσης	20
<b>4</b>	<b>Double Box</b>	<b>23</b>
4.1	Το Double Box	24
4.2	Κατασκευή της Διαφορικής Εξίσωσης	26
4.3	Η Canonical βάση	26
4.4	Expansion by Regions	29
4.5	Λύση της διαφορικής	30
4.6	Αριθμητικός έλεγχος	32
<b>5</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>33</b>
<b>A'</b>	<b>Πολυλογάρισμοι Goncharov</b>	<b>34</b>

# 1 Εισαγωγή

Οι γνώσεις μας για την Φυσική Στοιχειωδών σωματιδίων αποτυπώνονται στο Καθιερωμένο Πρότυπο (ΚΠ) των Στοιχειωδών Σωματιδίων το οποίο αποτελεί την μαθηματική περιγραφή των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων της ύλης μέσω της γλώσσας της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Μέσω της θεωρίας αυτής μπορούμε να πραγματοποιήσουμε θεωρητικές προβλέψεις για την συμπεριφορά των διαδικασιών σκέδασης. Η ακρίβεια των προβλέψεων αυτών βελτιώνεται όσο υπολογίζουμε διορθώσεις ανώτερης τάξης.

Μέχρι σήμερα, οι θεωρητικές προβλέψεις συμφωνούν με τα πειραματικά δεδομένα. Η συνεχής όμως αύξηση της ακρίβειας των πειραματικών μετρήσεων μας προκαλεί να πραγματοποιήσουμε υπολογισμούς που θα οδηγήσουν προβλέψεις μεγαλύτερης ακρίβειας. Εκτός αυτού, ενδείξεις από την Κοσμολογία, όπως η ύπαρξη της σκοτεινής ύλης και οι ταλαντώσεις των νετρίνων, μας υποδεικνύουν πως το ΚΠ αποτελεί μία μη-πλήρη περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας σε θεμελιώδες επίπεδο, γεγονός που μας προμηνύει της ύπαρξη νέας φυσικής. Τα νέα φαινόμενα που προσδοκούμε να ανιχνεύσουμε μπορεί να εμφανιστούν ως μικρές αποκλίσεις μεταξύ των υπολογισμών και των μετρήσεων. Έτσι, μέσω των υπολογισμών ανώτερης τάξης, μπορούμε να οδηγηθούμε σε προβλέψεις που θα φανερώσουν τον δρόμο για την αναζήτηση νέας φυσικής.

Η δυσκολία που παρουσιάζουν οι υπολογισμοί ανώτερης τάξης είναι πως περιέχουν ολοκληρώματα βρόχων, τα λεγόμενα ολοκληρώματα Feynman. Τα ολοκληρώματα αυτά δε συγκλίνουν και έτσι, η διαδικασία υπολογισμού τους είναι πολυσύνθετη. Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε για τον υπολογισμό είναι αυτή των διαφορικών εξισώσεων [ΔΕ]. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην χρήση της ολοκλήρωσης κατά τμηματικές ταυτότητες (IBP identities), που μας επιτρέπει να ανάγουμε τα ολοκληρώματα που μας απασχολούν σε ένα σχετικά μικρότερο σύνολο Κύριων Ολοκληρωμάτων (Master Integrals [MI]) [1] [2]. Συνήθως, οι ΔΕ εξάγονται παραγωγίζοντας τα MI ως προς τις κινηματικές σταθερές και έπειτα, χρησιμοποιώντας τις IBP ταυτότητες για να εκφράσουμε τις παραγωγούς σαν όρους άλλων MI ίσης ή μεγαλύτερης απλότητας. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την μέθοδο στο πρόβλημα του one-loop box, το οποίο είναι ένα διάγραμμα Feynman ενός βρόχου με τέσσερα άμαζα πόδια. Η λύση αυτού του προβλήματος μας βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση της μεθόδου των ΔΕ πριν μας απασχολήσει το κύριο πρόβλημα αυτής της εργασίας.

Στην εργασία αυτή θα υπολογίσουμε την οικογένεια ολοκληρωμάτων του Double box with one off-shell leg το οποίο είναι ένα διάγραμμα Feynman δύο βρόχων με τέσσερα πόδια εκ των οποίων το ένα έχει μάζα. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτή των Απλοποιημένων Διαφορικών Εξισώσεων (Simplified Differential Equations [SDE])[3][4][5]. Σύμφωνα με αυτή, κατασκευάζουμε τις ΔΕ παραγωγίζοντας τα MI ως προς μία αυθαίρετη παράμετρο  $x$  η

οποία είναι αρκετά απλή και ευθέως επιλύσιμη σε όρους Πολυλογάριθμων Γοντζάρου (Goncharov Polylogarithms [GPs]). Η μέθοδος αυτή έχει πολλά πλεονεκτήματα: απλοποιεί σημαντικά την διαδικασία εξαγωγής των ΔΕ, μας επιτρέπει να εκφράσουμε την λύση σε GPs με εύκολο και φυσικό τρόπο, καθώς επίσης καθιστά το πρόβλημα ανεξάρτητο του αριθμού των κινηματικών όρων που συμμετέχουν.

Τα double-box ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται συγκεκριμένα για τον υπολογισμό των NNLO KXΔ διορθώσεων σε διαδικασίες  $pp \rightarrow VV^*$  στον LHC, όπου  $VV^*$  είναι ηλεκτρασθενή διανυσματικά μποζόνια με μάζα. Συγκεκριμένα η περίπτωση δύο διαφορετικών μαζών μπορεί να βοηθήσει στην μελέτη της off-shell παραγωγής  $ZZ^*$  ή  $W^+W^-$ , όπως και της παραγωγής διαφορετικών μποζονίων όπως  $WZ$ ,  $V\gamma^*$ ,  $ZH$ ,  $\gamma^*\gamma^*$  κτλ. Επίσης η  $pp \rightarrow VV^*$  έχει την κύρια συνεισφορά στο υπόβαθρο για τις δοκιμές διάσπασης μποζονίου Higgs σε δύο διανυσματικά μποζόνια. Βαθύτερη κατανόηση αυτού του υποβάθρου μπορεί να οδηγήσει σε βελτιωμένες μετρήσεις της σύζευξη του Higgs με διανυσματικά μποζόνια καθώς και του πλάτους διάσπασης του Higgs.

Η βαθύτερη κατανόηση της αναγωγής ολοκληρωμάτων ενός βρόχου σε ένα σύνολο MI έχει οδηγήσει σε πλήρως αυτοματοποιημένους υπολογισμούς ενός βρόχου. Τα τελευταία χρόνια μεγάλη πρόοδος έχει σημειωθεί στην επέκταση αυτών των αναγωγικών μεθόδων και στην τάξη των δύο βρόχων. Όμως, μία πλήρης βιβλιοθήκη των MI στους δύο βρόχους δεν υπάρχει ακόμα. Αυτό φαίνεται να είναι το κύριο εμπόδιο για την δημιουργία ενός πλήρως αυτοματοποιημένου πλαισίου NNLO υπολογισμών όμοιο με εκείνο της περίπτωσης του ενός βρόχου.

## 2 Κβαντική Χρωμοδυναμική

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε σε μερικά βασικά στοιχεία της Κβαντικής χρωμοδυναμικής (KXΔ), η οποία αποτελεί το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας.

Η KXΔ είναι η θεωρία που περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ κουάρκ και γλουονίων μέσα στα αδρόνια. Τα θεμελιώδη σωματίδια της KXΔ είναι τα κουάρκ (u,d,s,t,b) με τα αντισωματίδια τους και το γλουόνιο (g). Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις είναι αναλλοίωτες υπό τους μετασχηματισμούς της ομάδας  $SU(3)_{Color}$ . Κάθε σωματίδιο έχει ένα από τα τρία χρώματα (r,g,b) και κάθε αντισωματίδιο ένα από τα  $(\bar{r}, \bar{g}, \bar{b})$ . Στην φύση παρατηρούμε μονάχα χρωματικά ουδέτερες δέσμιες καταστάσεις. Για αυτό τον λόγο, ελεύθερα κουάρκ δεν μπορούν να παρατηρηθούν, αυτή η ιδιότητα ονομάζεται color confinement. Επίσης, η KXΔ χαρακτηρίζεται από μία ακόμα ιδιότητα, την ασυμπτωτική ελευθερία.

## 2.1 Η ομάδα βαθμίδας $SU(N)$

Η ΚΧΔ είναι μία μη-Αβελιανή θεωρία βαθμίδας που περιγράφεται από την βαθμωτή ομάδα  $SU(3)$ . Αυτή η ομάδα έχει 8 γεννήτορες, τους πίνακες Gell-Mann και συνεπώς θα πρέπει να έχει και 8 πεδία βαθμίδας  $A_\mu^a$ . Η θεμελιώδης αναπαράσταση της ομάδας καταλαμβάνεται από τα κουάρκ, ενώ η adjoint αναπαράσταση καταλαμβάνεται από τα γλουόνια. Ουσιαστικά, μπορούμε να περιγράψουμε την ΚΧΔ σαν μια τοπική θεωρία βαθμίδας όπου για φορτίο έχουμε το φορτίο χρώματος. Τέτοιες θεωρίες περιγράφονται από τις ομάδες Lie. Τα στοιχεία μίας ομάδας Lie γενικά γράφονται ως:

$$g(a) = e^{ia_a T_a}$$

Όπου  $a_a$  είναι οι παράμετροι της ομάδας και  $T_a$  οι γεννήτορες της. Για τους γεννήτορες έχουμε  $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ , όπου  $\lambda_a$  είναι οι πίνακες Gell-Mann. Συνεπώς οι γεννήτορες είναι άιχνοι και μετατίθονται ως

$$[T_a, T_b] = i f^{abc} T_c$$

Όπου τα  $f^{abc}$  είναι οι απόλυτα αντισυμμετρικές σταθερές δομής.

## 2.2 Η Λαγκραντζιανή της ΚΧΔ

Για να κατασκευάσουμε την Λαγκραντζιανή της ΚΧΔ ξεκινάμε περιγράφοντας την Λαγκραντζιανή των ελεύθερων κουάρκ στην οποία θα επιβάλλουμε τον τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας του πεδίου των κουάρκ, στον οποίο θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη. Αρχίζουμε με την γνωστή Λαγκραντζιανή του Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi$$

Ο τοπικός μετασχηματισμός βαθμίδας  $U(x)$  είναι:

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x) = \exp[i\alpha^\alpha(x)T^\alpha]\psi(x)$$

όπου  $T^\alpha$  είναι οι 8 γεννήτορες της  $SU(3)$  που αναφέραμε παραπάνω. Χρειάζεται να αναβαθμίσουμε την παράγωγο εισάγωντας το πεδίο βαθμίδας  $A_\mu^\alpha$  στην Λαγκραντζιανή, η οποία γίνεται:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x)(i\cancel{D} - m)\psi$$

όπου  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^\alpha T^\alpha$  η συναλλοίωτη παράγωγος. Το πεδίο βαθμίδας μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu^\alpha \rightarrow A_\mu^\alpha + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^\alpha + f^{abc}A_\mu^b\alpha^c$$

Τώρα το μόνο που μένει είναι να εισάγουμε τετραγωνικούς όρους στα πεδία βαθμίδας οι οποίοι να έχουν αναλλοίωτο βαθμίδας, ώστε η Λαγκραντζιανή να είναι αναλλοίωτη υπό τοπικού  $SU(3)$  μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για αυτό εισάγουμε τον μη-Αβελιανό τανιστή πεδίου δύναμης ως:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος μετασχηματίζεται ως

$$D_\mu \rightarrow U(x)D_\mu U^\dagger(x)$$

και η αντιμετάθεση δύο συναλλοίωτων παραγώγων θα μετασχηματίζεται ως

$$[D_\mu, D_\nu] \rightarrow U(x)[D_\mu, D_\nu]U^\dagger(x)$$

που μας δίνει και τον τρόπο που μετασχηματίζεται ο τανυστής πεδίου δύναμης. Έτσι,  $G_{\mu\nu}^\alpha \rightarrow \exp[i\alpha^\alpha(x)T^\alpha]G_{\mu\nu}^\alpha \exp[-i\alpha^\alpha(x)T^\alpha]$ , συμπεραίνουμε ότι το ίχνος του  $(G_{\mu\nu}^\alpha)^2$  είναι ο απλούτερος αναλλοίωτος κινητικός όρος βαθμίδας. Παίρνουμε λοιπόν την παρακάτω Λαγκραντζιανή [6]

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x)\not{D}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]$$

όπου  $G_{\mu\nu}$  είναι συντομογραφία του  $G_{\mu\nu}^\alpha T^\alpha$ . Επίσης, ο διαδότης ανάστροφου πεδίου βαθμίδας δεν είναι αντιστρέψιμος, για αυτό εισάγουμε έναν διορθωτικό όρο στην Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\not{D}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\text{Tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] - \frac{\lambda}{2}(\xi \cdot A)^2$$

Που μας επιτρέπει να ορίσουμε διαδότες πεδίου βαθμίδας για διάφορες τιμές του  $\xi$  και του  $\lambda$ . Παρόλα αυτά, ο νέος όρος προκαλεί νέα προβλήματα, αφού από αυτόν αναδύεται μία αναντιστοιχία στον αριθμό των βαθμών ελευθερίας. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα, εισάγουμε έναν νέο όρο (πεδία ghost) που εξουδετερώνει τους προβληματικούς όρους που παράγονται από τον διορθωτικό όρο που εισήχθη προηγουμένως.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\bar{\psi}\not{D}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\text{Tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] - \frac{\lambda}{2}(\xi \cdot A)^2 + \xi^\mu \bar{c}_a (\partial^\mu \delta_{ad} - gf_{abd}A_b^\mu)c_d \\ &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Gauge-Fields} + \mathcal{L}_{GaugeFixing} + \mathcal{L}_{Ghost} \end{aligned}$$

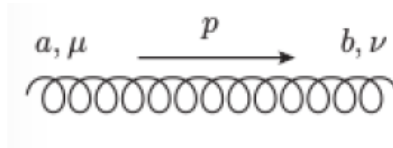
Όπου τα  $c_d$  και  $\bar{c}_a$  είναι τα πεδία ghost και αντί-ghost.

## 2.3 Κανόνες Feynman στην ΚΧΔ

Με βάση την Λαγκραντζιανή της ΚΧΔ μπορούμε να διατυπώσουμε τους κανόνες Feynman της ΚΧΔ. Τα κουάρκ συμβολίζονται με μια συμπαγή γραμμή, τα γλουόνια από μία κατσαρή και τα ghost με μία διακεκομμένη.

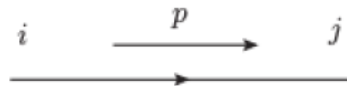
- Διαδότης γλουονίου

$$-i \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \delta_{ab}$$



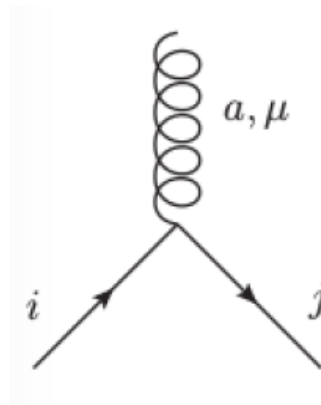
- Διαδότης κουάρκ

$$i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



- Κορυφή κουάρκ-γλουονίου

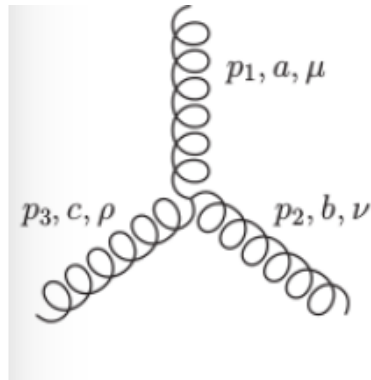
$$ig\gamma^\mu T_{i,j}^\alpha$$



- Κορυφή τριών γλουονίων

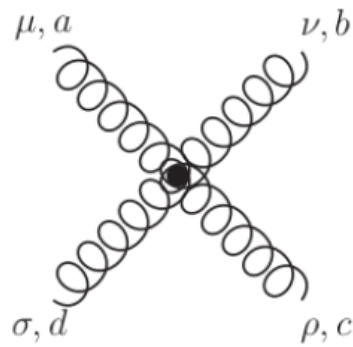
$$gf^{abc}[g^{\mu\rho}(p_1^\nu - p_3^\nu) + g^{\mu\nu}(p_2^\rho - p_1^\rho) + g^{\nu\rho}(p_3^\mu - p_2^\mu)]$$





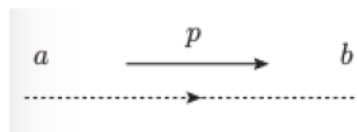
- Κορυφή τεσσάρων γλουονίων

$$-ig^2 [f^{lab} f^{lcd} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{lac} f^{lbd} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{lad} f^{lbc} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$



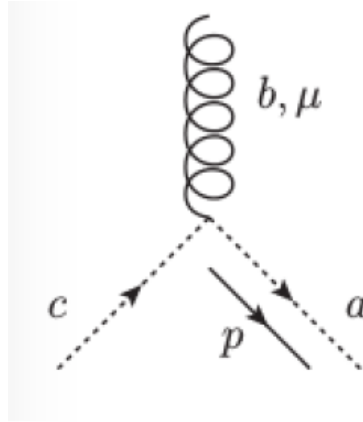
- Διαδότης ghost

$$\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \delta_{ab}$$



- Κορυφή γλουονίου-ghost

$$igf^{abc}p^\mu$$



Για κάθε διάγραμμα:

Βάζουμε έναν παράγοντα  $(-1)$  για κάθε φερμιονικό βρόχο.

Η ορμή πρέπει να διατηρείται σε κάθε κορυφή.

Ολοκληρώνουμε την ορμή βρόχου με το μέτρο ολοκλήρωσης  $\int d^d k / (2\pi)^d$  όπου το  $d$  είναι ο αριθμός των διαστάσεων του χωρικού χρόνου.

## 2.4 Διαστατική Κανονικοποίηση

Τα ολοκληρώματα βρόχων συχνά αποκλίνουν. Για να κάνουμε τα ολοκληρώματα καλώς-ορισμένα εισάγουμε μια κανονικοποίηση. Με την διαστατική κανονικοποίηση (Dimensional Regularization [DR]) αντικαθιστούμε το 4-διάστατο ολοκλήρωμα γύρω από την ορμή βρόχου με ένα  $d$ -διάστατο ολοκλήρωμα, όπου το  $d$  είναι μία επιπλέον παράμετρος, η οποία μπορεί να είναι μη-ακέραιος ή ακόμα και μιγαδικός αριθμός. Εξετάζουμε το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος ως συνάρτηση του  $d$  και μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του όταν το  $d$  πλησιάζει το 4. Η DR είναι μία μέθοδος που ρυθμίζει τόσο τις UV όσο και τις IR αποκλίσεις, ενώ διατηρεί την αναλλοιότητα των μετασχηματισμών Lorentz και των μετασχηματισμών βαθμίδας. Ορίζουμε την διαστατικότητα του χωρικού χρόνου  $d$  από 4 σε:

$$d = 4 - 2\epsilon$$

Έτσι τα αποκλίνοντα ολοκληρώματα 1-βρόχων θα εμφανίζουν πόλους  $\frac{1}{\epsilon}$  στις υπερύψεις αποκλίσεις και  $\frac{1}{\epsilon^{2l}}$  στις υπέρυφρες.

## 2.5 Ολοκληρώματα Feynman

Το βαθμωτό ολοκλήρωμα του αντίστοιχου διαγράμματος με  $L$  βρόχους,  $E$  εξωτερικές ορμές και  $f$  εσωτερικές γραμμές έχει την μορφή:

$$\int \frac{d^d k_1}{i\pi^{d/2}} \cdots \int \frac{d^d k_L}{i\pi^{d/2}} \frac{\prod_{j=1}^B S_j^{n_j}}{\prod_{i=1}^f P_i}$$

Ο τύπος που μας δίνει τα διάφορα βαθμωτά γινόμενα είναι:

$$B = \frac{L(L+1)}{2} + L \cdot E$$

Όπου

$L$  είναι ο αριθμός των βρόχων,

$E$  ο αριθμός των ανεξάρτητων εξωτερικών ορμών,

$B$  τα διάφορα βαθμωτά γινόμενα,

$f$  οι εσωτερικές γραμμές,

$S_j (j = 1, 2, \dots, B)$  είναι όλα τα πιθανά βαθμωτά γινόμενα, με  $n_j \geq 0$

$P_i = q_i^2 + m_i^2 (i = 1, 2, \dots, f)$  είναι ο παρανομαστής του διαδότη με ορμή  $q_i$  και μάζα  $m_i$

Για να υπολογίσουμε τέτοιου είδους ολοκληρώματα τα εκφράζουμε με τους διαδότες. Ο αριθμός των διάφορων διαδοτών που χρειαζόμαστε είναι παρόμοιος με αυτόν των  $B$  ανεξάρτητων βαθμωτών γινομένων. Οι  $f$  διαδότες εμφανίζονται με αυθαίρετες δυνάμεις  $a_i (i = 1, 2, \dots, f)$ , όπου το  $(B - f)$  περιορίζεται σε μη-θετικούς δείκτες

$$\int \frac{d^d k_1}{i\pi^{d/2}} \cdots \int \frac{d^d k_L}{i\pi^{d/2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^B P_i^{a_i}}$$

Τελικά, θα μπορέσουμε να ανάγουμε όλα τα βαθμωτά ολοκληρώματα σε ένα σύνολο γραμμικών ανεξάρτητων ολοκληρωμάτων τα οποία ονομάζουμε Master Integrals

## 2.6 IBP ταυτότητες

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα πιο εύκολα, χρησιμοποιούμε την μέθοδο των IBP ταυτοτήτων, ώστε να εκφράσουμε τα ολοκληρώματα ως γραμμικό συνδυασμό απλότερων ολοκληρωμάτων MI. Οι ταυτότητες αυτές έχουν μορφή:

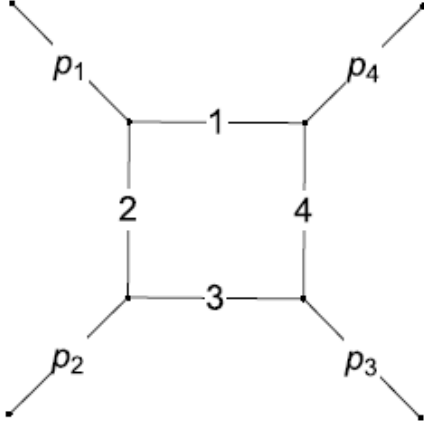
$$\int \frac{d^d k_1}{i\pi^{d/2}} \cdots \int \frac{d^d k_L}{i\pi^{d/2}} \frac{\partial}{\partial k_{j,\mu}} \frac{u_\mu}{\prod_{i=1}^B P_i^{a_i}} = 0$$

όπου  $k_{i,\mu}$  είναι μία από τις ορμές βρόχου και  $u_\mu$  μία αυθαίρετη ορμή, βρόχου ή και εξωτερική

Η IBP αναγωγή συνήθως είναι χρονοβόρα και απαιτητική διαδικασία για αυτό το λόγο, χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα FIRE6 [7] του A.V.Smirnov το οποίο πραγματοποιεί την αναγωγή των ολοκληρωμάτων μέσω του αλγορίθμου Laporta.

### 3 One Box Loop

Πριν εξετάσουμε την περίπτωση του double box με το ένα off-shell πόδι, θα υπολογίσουμε το πολύ απλούστερο one-loop box. [8] [9]



Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε το διάγραμμα της αλληλεπίδρασης με τέσσερα άμαζα σωματίδια και τέσσερις άμαζους διαδότες. Το λεγόμενο One-loop Box. Όπου  $p_1, p_2, p_3, p_4$  οι ορμές των τεσσάρων σωματιδίων και υποθέτοντας πως η ορμή του πρώτου διαδότη είναι  $k$ , τότε από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει πως οι ορμές των τεσσάρων διαδοτών αντίστοιχα είναι:  $k, k + p_1, k + p_1 + p_2, k + p_1 + p_2 + p_3$ .

Έτσι η έκφραση του ολοκληρώματος θα είναι:

$$G_{a_1, a_2, a_3, a_4} = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[-k^2]^{a_1} [-(k + p_1)^2]^{a_2} [-(k + p_1 + p_2)^2]^{a_3} [-(k + p_1 + p_2 + p_3)^2]^{a_4}} \quad (1)$$

Όπου ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} p_i^2 &= 0 \\ \sum p_i &= 0 \\ s &= (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 p_2 \\ t &= (p_2 + p_3)^2 = 2p_2 p_3, 2p_1 p_3 = -(s + t) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις IBP identities μέσω του προγράμματος FIRE6 μπορούμε να δούμε ότι η οικογένεια ολοκληρωμάτων (1) μπορεί να αναχθεί στα εξής MI:

$$f_1 = G_{0,1,0,1} = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[-(k+p_1)^2] [-(k+p_1+p_2+p_3)^2]} \quad (2)$$

$$f_2 = G_{1,0,1,0} = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[-k^2] [-(k+p_1+p_2)^2]} \quad (3)$$

$$f_3 = G_{1,1,1,1} = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[-k^2] [-(k+p_1)^2] [-(k+p_1+p_2)^2] [-(k+p_1+p_2+p_3)^2]} \quad (4)$$

Από τα παραπάνω 3 ολοκληρώματα ορίζω την βάση  $\vec{f}$ , όπου κάθε ολοκλήρωμα της οικογένειας (1) μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω MI.

Τώρα για να κατασκευάσουμε την διαφορική εξίσωση πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε τους διαφορικούς τελεστές  $\partial_s, \partial_t$  τους οποίους θα δράσουμε στην βάση  $\vec{f}$  ώστε να πάρουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\partial_s \vec{f}(s, t; \epsilon) = A_s(s, t, \epsilon) \vec{f}(s, t; \epsilon) \quad (5)$$

$$\partial_t \vec{f}(s, t; \epsilon) = A_t(s, t, \epsilon) \vec{f}(s, t; \epsilon) \quad (6)$$

όπου τα  $A_s, A_t$  είναι  $N$  πίνακες και  $N$  είναι ο αριθμός των MI που έχουμε (3 στην περίπτωση μας).

Τα  $\partial_s, \partial_t$  λοιπόν είναι:

$$\partial_s = \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial(p_1 p_2)}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial(p_1 p_2)} + \frac{\partial(p_1 p_3)}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial(p_1 p_3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial(p_1 p_2)} - \frac{\partial f}{\partial(p_1 p_3)} \right) \quad (7)$$

$$\partial_t = \frac{\partial f}{\partial s t} = \frac{\partial(p_2 p_3)}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial(p_2 p_3)} + \frac{\partial(p_1 p_3)}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial(p_1 p_3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial(p_2 p_3)} - \frac{\partial f}{\partial(p_1 p_3)} \right) \quad (8)$$

Για να υπολογίσω τα παραπάνω χρειάζομαι τις εξής σχέσεις[10]:

$$\frac{\partial}{\partial(p_1 p_2)} = [G^{-1}]_{12} p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + [G^{-1}]_{22} p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + [G^{-1}]_{32} p_3 \frac{\partial}{\partial p_1} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial(p_1 p_3)} = [G^{-1}]_{13} p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + [G^{-1}]_{23} p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + [G^{-1}]_{33} p_3 \frac{\partial}{\partial p_1} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial(p_2 p_3)} = [G^{-1}]_{13} p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} + [G^{-1}]_{23} p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + [G^{-1}]_{33} p_3 \frac{\partial}{\partial p_2} \quad (11)$$

όπου  $G = p_i \cdot p_j$  είναι ο πίνακας Gram, που στην περίπτωση μας έχει την μορφή

$$G = \begin{bmatrix} 0 & s/2 & -(s+t)/2 \\ s/2 & 0 & t/2 \\ -(s+t)/2 & t/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

και ο αντίστροφος του, είναι

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{t}{s^2 + st} & \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+t} \\ \frac{1}{s} & \frac{s+t}{st} & \frac{1}{t} \\ \frac{-1}{s+t} & \frac{1}{t} & \frac{s}{t^2 + st} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Έτσι, εν τέλει προκύπτει ότι

$$\partial_s = (b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \partial_{p_1} \quad (14)$$

$$\partial_t = (\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3) \partial_{p_3} \quad (15)$$

όπου

$$b_1 = \frac{2s+t}{2s(s+t)}$$

$$b_2 = \frac{1}{2s}$$

$$b_3 = \frac{1}{2(s+t)}$$

και

$$\beta_1 = \frac{1}{2(s+t)}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2t}$$

$$\beta_3 = \frac{2t+s}{2t(s+t)}$$

### 3.1 Διαφόριση των Master Integrals κατά $s$

Πριν ξεκινήσουμε την διαφóριση θα ήταν χρήσιμο να προσέξουμε μερικές σχέσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν κατά κόρων στην διαδικασία των υπολογισμών.

$$2p_1k = [(k + p_1)^2 - k^2] \quad (16)$$

$$2p_2k = [(p_1 + p_2 + k)^2 - (k + p_1)^2 - 2p_1p_2] \quad (17)$$

$$2p_3k = [(p_1 + p_2 + p_3 + k)^2 - (p_1 + p_2 + k)^2 - 2p_1p_3 - 2p_2p_3] \quad (18)$$

και θέτοντας  $[0] = (k)$ ,  $[1] = (k + p_1)$ ,  $[2] = (k + p_1 + p_2)$ ,  $[3] = (k + p_1 + p_2 + p_3)$  Έχουμε:

$$2p_1k = [1]^2 - [0]^2 \quad (19)$$

$$2p_2k = [2]^2 - [1]^2 - s \quad (20)$$

$$2p_3k = [3]^2 - [2]^2 + s \quad (21)$$

Έχουμε πλέον εισάγει όλα τα στοιχεία που μας χρειάζονται για να διαφορίσουμε τα MI.

Πρώτα θα διαφορίσουμε το  $f_1$

$$\begin{aligned} \partial_s f_1 &= (b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \partial_{p_1} \left( \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[1]^2 [3]^2} \right) \\ p_1 \partial_{p_1} f_1 &= \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_1(k + p_1)}{([1]^2)^2 [3]^2} + \frac{-2p_1(k + p_1 + p_2 + p_3)}{[1]^2 ([3]^2)^2} \right) \\ p_1 \partial_{p_1} f_1 &= -G_{0,1,0,1} + G_{-1,2,0,1} + G_{-1,1,0,2} - G_{0,0,0,2} - tG_{0,1,0,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 \partial_{p_1} f_1 &= \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_2(k + p_1)}{([1]^2)^2 [3]^2} + \frac{-2p_2(k + p_1 + p_2 + p_3)}{[1]^2 ([3]^2)^2} \right) \\ p_2 \partial_{p_1} f_1 &= G_{0,0,0,2} - G_{0,1,-1,2} + tG_{0,1,0,2} + G_{0,1,0,1} - G_{0,2,-1,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 \partial_{p_1} f_1 &= \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_3(k + p_1)}{([1]^2)^2 [3]^2} + \frac{-2p_3(k + p_1 + p_2 + p_3)}{[1]^2 ([3]^2)^2} \right) \\ p_3 \partial_{p_1} f_1 &= -tG_{0,2,0,1} - G_{0,2,0,0} + G_{0,2,-1,1} + G_{0,1,-1,2} - G_{0,1,0,1} \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\begin{aligned}\partial_s f_1 = & b_1(-G_{0,1,0,1} + G_{-1,2,0,1} + G_{-1,1,0,2} - G_{0,0,0,2} - tG_{0,1,0,2}) \\ & + b_2(G_{0,0,0,2} - G_{0,1,-1,2} + tG_{0,1,0,2} + G_{0,1,0,1} - G_{0,2,-1,1}) \\ & + b_3(-tG_{0,2,0,1} - G_{0,2,0,0} + G_{0,2,-1,1} + G_{0,1,-1,2} - G_{0,1,0,1})\end{aligned}$$

Κάνοντας αναγωγή σε  $MI$  μέσω του FIRE6 παίρνω ότι

$$\partial_s f_1 = 0 \quad (22)$$

Τώρα θα διαφορίσουμε το  $f_2$

$$\partial_s f_2 = (b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \partial_{p_1} \left( \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[0]^2 [2]^2} \right)$$

$$p_1 \partial_{p_1} f_2 = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_1(k + p_1 + p_2)}{[0]^2 ([2]^2)^2} \right)$$

$$p_1 \partial_{p_1} f_2 = -G_{1,-1,2,0} + G_{0,0,2,0} - sG_{1,0,2,0}$$

$$p_2 \partial_{p_1} f_2 = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_2(k + p_1 + p_2)}{[0]^2 ([2]^2)^2} \right)$$

$$p_2 \partial_{p_2} f_2 = G_{1,-1,2,0} - G_{1,0,1,0}$$

$$p_3 \partial_{p_1} f_2 = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_3(k + p_1 + p_2)}{[0]^2 ([2]^2)^2} \right)$$

$$p_3 \partial_{p_3} f_2 = G_{1,0,1,0} - G_{1,0,2,-1}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\partial_s f_2 = & b_1(-G_{1,-1,2,0} + G_{0,0,2,0} - sG_{1,0,2,0}) \\ & + b_2(G_{1,-1,2,0} - G_{1,0,1,0}) \\ & + b_3(G_{1,0,1,0} - G_{1,0,2,-1})\end{aligned}$$

Κάνοντας αναγωγή σε  $MI$  μέσω του FIRE6 παίρνω ότι

$$\partial_s f_2 = -\frac{\epsilon}{s} f_2 \quad (23)$$



Τώρα θα διαφορίσουμε το  $f_3$

$$\partial_s f_3 = (b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \partial_{p_1} \left( \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[0]^2 [1]^2 [2]^2 [3]^2} \right)$$

$$p_1 \partial_{p_1} f_3 = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_1(k+p_1)}{[0]^2 ([1]^2)^2 [2]^2 [3]^2} + \frac{-2p_1(k+p_1+p_2)}{[0]^2 [1]^2 ([2]^2)^2 [3]^2} + \frac{-2p_1(k+p_1+p_2+p_3)}{[0]^2 [1]^2 [2]^2 ([3]^2)^2} \right)$$

$$p_1 \partial_{p_1} f_3 = G_{0,2,1,1} - G_{1,1,1,1} + G_{0,1,2,1} - G_{1,0,2,1} \\ + s G_{1,1,2,1} + G_{0,1,1,2} - G_{1,0,1,2} - t G_{1,1,1,2}$$

$$p_2 \partial_{p_1} f_3 = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_2(k+p_1)}{[0]^2 ([1]^2)^2 [2]^2 [3]^2} + \frac{-2p_2(k+p_1+p_2)}{[0]^2 [1]^2 ([2]^2)^2 [3]^2} + \frac{-2p_2(k+p_1+p_2+p_3)}{[0]^2 [1]^2 [2]^2 ([3]^2)^2} \right)$$

$$p_2 \partial_{p_1} f_3 = G_{1,1,1,1} - G_{1,2,0,1} + G_{1,0,2,1} - G_{1,1,1,1} \\ + G_{1,0,1,2} - G_{1,1,0,2} + t G_{1,1,1,2}$$

$$p_3 \partial_{p_1} f_3 = \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \left( \frac{-2p_3(k+p_1)}{[0]^2 ([1]^2)^2 [2]^2 [3]^2} + \frac{-2p_3(k+p_1+p_2)}{[0]^2 [1]^2 ([2]^2)^2 [3]^2} + \frac{-2p_3(k+p_1+p_2+p_3)}{[0]^2 [1]^2 [2]^2 ([3]^2)^2} \right)$$

$$p_3 \partial_{p_1} f_3 = -t G_{1,2,1,1} + G_{1,2,0,1} - G_{1,2,1,0} \\ + G_{1,1,1,1} - G_{1,1,2,0} + G_{1,1,0,2} - G_{1,1,1,1}$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\partial_s f_3 = b_1 (G_{0,2,1,1} - G_{1,1,1,1} + G_{0,1,2,1} - G_{1,0,2,1} \\ + s G_{1,1,2,1} + G_{0,1,1,2} - G_{1,0,1,2} - t G_{1,1,1,2}) \\ + b_2 (G_{1,1,1,1} - G_{1,2,0,1} + G_{1,0,2,1} - G_{1,1,1,1} \\ + G_{1,0,1,2} - G_{1,1,0,2} + t G_{1,1,1,2}) \\ + b_3 (-t G_{1,2,1,1} + G_{1,2,0,1} - G_{1,2,1,0} \\ + G_{1,1,1,1} - G_{1,1,2,0} + G_{1,1,0,2} - G_{1,1,1,1})$$

Εισάγοντας στο FIRE τους παραπάνω όρους παίρνω ότι

$$\partial_s f_3 = \left[ \frac{-2(1-2\epsilon)}{st(s+t)} \right] f_1 + \left[ \frac{2(1-2\epsilon)}{s^2(s+t)} \right] f_2 + \left[ -\frac{s+t+\epsilon t}{s(s+t)} \right] f_3 \quad (24)$$

Έτσι, πλέον ξέρω ότι για την

$$\partial_s \vec{f}(s, t; \epsilon) = A_s(s, t, \epsilon) \vec{f}(s, t; \epsilon) \quad (25)$$

έχουμε

$$A_s(s, t, \epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon}{s} & 0 \\ \frac{-2(1-2\epsilon)}{st(s+t)} & \frac{2(1-2\epsilon)}{s^2(s+t)} & -\frac{s+t+\epsilon t}{s(s+t)} \end{bmatrix} \quad (26)$$

### 3.2 Διαφόριση των Master Integrals κατά $t$

Όπως και πριν, θα ξεκινήσουμε με την διαφóριση του  $f_1$

$$\begin{aligned} \partial_t f_1 &= (b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \partial_{p_3} \left( \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[1]^2 [3]^2} \right) \\ &= \left( \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{-(b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3)(k + p_1 + p_2 + p_3)}{[1]^2 ([3]^2)^2} \right) \\ \partial_t f_1 &= (b_2 - b_1) G_{0,0,0,2} + b_1 G_{-1,1,0,2} + (b_3 - b_2) G_{0,1,-1,2} \\ &\quad - b_3 G_{0,1,0,1} + (-t b_1 + t b_2) G_{0,1,0,2} \end{aligned}$$

Κάνοντας αναγωγή σε  $MI$  μέσω του FIRE6 παίρνω ότι

$$\partial_t f_1 = -\frac{\epsilon}{t} f_1 \quad (27)$$

Σειρά έχει το  $f_2$ , το οποίο δεν περιέχει όρους  $p_3$

$$\begin{aligned} \partial_t f_2 &= (b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \partial_{p_3} \left( \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[0]^2 [2]^2} \right) \\ \partial_t f_2 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

και τέλος, διαφορίζουμε το  $f_3$

$$\begin{aligned} \partial_t f_3 &= (b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) \\ \partial_{p_3} &= \left( \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{1}{[0]^2 [1]^2 [2]^2 [3]^2} \right) \\ &= \left( \int \frac{d^D k}{i p^{D/2}} \frac{-2(b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3)(k + p_1 + p_2 + p_3)}{[0]^2 [1]^2 [2]^2 ([3]^2)^2} \right) \\ \partial_t f_3 &= (b_2 - b_1) G_{1,0,1,2} + b_1 G_{0,1,1,2} + (b_3 - b_2) G_{1,1,0,2} \\ &\quad - b_3 G_{1,1,1,1} + (-t b_1 + t b_2) G_{1,1,1,2} \end{aligned}$$

Κάνοντας αναγωγή σε  $MI$  μέσω του FIRE6 παίρνω ότι

$$\partial_t f_3 = \left[ \frac{2(1-2\epsilon)}{t^2(s+t)} \right] f_1 + \left[ \frac{-2(1-2\epsilon)}{st(s+t)} \right] f_2 + \left[ -\frac{s+t+\epsilon s}{t(s+t)} \right] f_3 \quad (29)$$

Έτσι, πλέον ξέρω ότι για την

$$\partial_t \vec{f}(s, t; \epsilon) = A_t(s, t, \epsilon) \vec{f}(s, t; \epsilon) \quad (30)$$

έχουμε

$$A_t(s, t, \epsilon) = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2(1-2\epsilon)}{t^2(s+t)} & \frac{-2(1-2\epsilon)}{st(s+t)} & -\frac{s+t+\epsilon s}{t(s+t)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

### 3.3 Αλλαγή βάσης

Διαλέγουμε για νέα βάση την

$$g_1 = c(-s)^\epsilon t G_{0,1,0,2} \quad (32)$$

$$g_2 = c(-s)^\epsilon s G_{1,0,2,0} \quad (33)$$

$$g_3 = c\epsilon(-s)^\epsilon st G_{1,1,1,1} \quad (34)$$

Όπου  $c = \epsilon e^{\epsilon g_E}$ , με το  $g_E$  να είναι η σταθερά του Euler.

Με την βοήθεια του FIRE βλέπω ότι

$$G_{0,1,0,2} = \frac{1-2\epsilon}{t} f_1 \quad (35)$$

$$G_{1,0,2,0} = \frac{1-2\epsilon}{s} f_2 \quad (36)$$

και φυσικά

$$G_{1,1,1,1} = f_3 \quad (37)$$

Έτσι τελικά έχω

$$g_1 = c(-s)^\epsilon (1-2\epsilon) f_1 \quad (38)$$

$$g_2 = c(-s)^\epsilon (1-2\epsilon) f_2 \quad (39)$$

$$g_3 = c\epsilon(-s)^\epsilon st f_3 \quad (40)$$

Τώρα θα εισάγουμε την μεταβλητή  $x = \frac{t}{s}$  και θα διαφορίσουμε ως προς  $x$ , όπου  $\partial_x = s\partial_t$ .

Έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \partial_x g_1 &= -\frac{\epsilon}{x} g_1 \\ \partial_x g_2 &= 0 \\ \partial_x g_3 &= \epsilon \left[ \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{1+x} \right) g_1 - \frac{2}{1+x} g_2 - \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{1+c} \right) g_3 \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω στην εξής βολική μορφή

$$\partial_x \vec{g}(x; \epsilon) = \epsilon \left[ \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} \right] \vec{g}(x; \epsilon) \quad (42)$$

Όπου

$$a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Έτσι πλέον έχω φέρει την διαφορική εξίσωση στην canonical μορφή της.

### 3.4 Η Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Ξεκινάμε την λύση της διαφορικής από τα ολοκληρώματα  $g_1, g_2$  που έχουν την μορφή

$$G_{0,\alpha_1,0,\alpha_2} = \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{[-(k+p_1)^2]^{\alpha_1} [-(k+p_1+p_2+p_3)^2]^{\alpha_2}} \quad (44)$$

$$G_{\alpha_1,0,\alpha_2,0} = \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{[-k^2]^{\alpha_1} [-(k+p_1+p_2)^2]^{\alpha_2}} \quad (45)$$

όπου φυσικά στην περίπτωση μας έχουμε  $a_1 = 1, a_2 = 2$ .

Τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν με την μέθοδο των Alpha Parameters για ένα loop.

Θέτοντας για την (44)

$$k + p_1 = y - y_1 \quad (46)$$

$$k + p_1 + p_2 + p_3 = y - y_2 \quad (47)$$

$$t = (y_1 - y_2)^2 = y_{12}^2 \quad (48)$$

και για την (45)

$$k = y - y_1 \quad (49)$$

$$k + p_1 + p_2 = y - y_2 \quad (50)$$

$$s = (y_1 - y_2)^2 = y_{12}^2 \quad (51)$$

Παίρνουμε κοινή μορφή και για τα δύο ολοκληρώματα, με

$$G_{0,\alpha_1,0,\alpha_2} = \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{[-(y-y_1)^2]^{\alpha_1} [-(y-y_2)^2]^{\alpha_2}} \quad (52)$$

$$G_{\alpha_1,0,\alpha_2,0} = \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{[-(y-y_1)^2]^{\alpha_1} [-(y-y_2)^2]^{\alpha_2}} \quad (53)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τους Alpha Parameters:

$$I_n = \frac{\Gamma(a - D/2)}{\prod_i \Gamma(a_i)} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n db_i b_i^{a_i-1} \frac{U^{a-D} d(\sum_i b_i - 1)}{[V + U \sum_{i=1}^n b_i m_i^2 - i0]^{a-D/2}} \quad (54)$$

όπου

$$V = \sum_{i<j} b_i b_j (-y_{ij}^2) \quad (55)$$

$$U = \sum_i b_i \quad (56)$$

$$a = \sum_i a_i \quad (57)$$

Εμείς έχουμε

$$V = b_1 b_2 (-y_{12}^2) \quad (58)$$

$$U = b_1 + b_2 \quad (59)$$

$$a = a_1 + a_2 \quad (60)$$

Εν τέλει, υπολογίζοντας το  $I_2$  για τα δύο ολοκληρώματα, παίρνουμε

$$G_{0,a_1,0,a_2} = (-t)^{D/2-a} \frac{\Gamma(a - D/2) \Gamma(D/2 - a_1) \Gamma(D/2 - a_2)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \Gamma(D - a)} \quad (61)$$

$$G_{a_1,0,a_2,0} = (-s)^{D/2-a} \frac{\Gamma(a - D/2) \Gamma(D/2 - a_1) \Gamma(D/2 - a_2)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \Gamma(D - a)} \quad (62)$$

και αντικαθιστώντας τα  $a_1 = 1, a_2 = 2$  παίρνουμε τις λύσεις για τα  $g_1, g_2$  τις οποίες αναπτύσσουμε ως δυναμοσειρές γύρω από το  $\epsilon$

$$g_1 = 1 - \log(x)\epsilon + \frac{1}{12}(-\pi^2 + 6 \log(x)^2)\epsilon^2 + \frac{1}{12}(\pi^2 \log(x) - 2 \log(x)^3 - 28\zeta(3))\epsilon^3 + O[\epsilon]^4 \quad (63)$$

$$g_2 = 1 - \frac{\pi^2 \epsilon^2}{12} - \frac{7}{3}\zeta[3]\epsilon^3 + O[\epsilon]^4 \quad (64)$$

Γνωρίζοντας τα  $g_1, g_2$  μπορούμε πλέον να λύσουμε την (42) αλλά χρειαζόμαστε συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες που παίρνουμε είναι ότι θέλουμε τα ολοκληρώματα μας να είναι πεπερασμένα για  $x = -1$  και να παίρνουν πραγματικές τιμές για  $x > 0$ .

Γράφουμε την λύση με την μορφή

$$\vec{g}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon^k \vec{g}^{(k)}(x) = \vec{g}^{(0)}(x) + \epsilon^1 \vec{g}^{(1)}(x) + \epsilon^2 \vec{g}^{(2)}(x) + \epsilon^3 \vec{g}^{(3)}(x) + \dots \quad (65)$$

όπου εισάγοντας την λύση αυτή στην (42), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\partial_x \bar{g}^{(0)}(x) &= 0 \\ \partial_x \bar{g}^{(1)}(x) &= A(x) \bar{g}^{(0)}(x) \\ \partial_x \bar{g}^{(2)}(x) &= A(x) \bar{g}^{(1)}(x) \\ \partial_x \bar{g}^{(3)}(x) &= A(x) \bar{g}^{(2)}(x) \\ &\dots\end{aligned}$$

με

$$A(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} \quad (66)$$

Για την λύση μηδενικού βαθμού στο  $\epsilon$  έχουμε

$$\bar{g}^{(0)}(x) = \bar{c}^{(0)} = (1, 1, c[0, 3]) \quad (67)$$

Η παράμετρος  $c[0, 3]$  θα βρεθεί χρησιμοποιώντας την απαίτηση ότι όλα τα ολοκληρώματα πρέπει να είναι πεπερασμένα για  $x = -1$  στην λύση επόμενης τάξης, που είναι

$$\bar{g}^{(1)}(x) = \int_{-1}^x dt \frac{a\bar{c}^{(0)}}{t} + \int_{-1}^x dt \frac{b\bar{c}^{(0)}}{t+1} + \bar{c}^{(0)} \quad (68)$$

Όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα παρουσιάζει πρόβλημα το οποίο το ξεπερνάμε απαιτώντας  $b\bar{c}^{(0)} = 0$ . Η παραπάνω απαίτηση μας δίνει ότι  $c[0, 3] = 4$ . Έτσι

$$\bar{g}^{(1)}(x) = a\bar{c}^{(0)}G(1; x+1) + \bar{c}^{(1)} \quad (69)$$

Γενικά, αυτές οι παράμετροι μπορούν να είναι και μιγαδικοί αριθμοί. Για να βρούμε τα φανταστικά μέρη αυτών των σταθερών θα χρησιμοποιήσουμε την απαίτηση μας για πραγματικές τιμές της πεπερασμένης λύσης μας στα θετικά  $x$ . Αφού η λύση οφείλει να είναι πεπερασμένη το φανταστικό μέρος των σταθερών ολοκλήρωσης θα πρέπει να ακυρώνεται με το φανταστικό μέρος της υπόλοιπης λύσης. Για το κάνουμε αυτό θα πρέπει να γνωρίζουμε το φανταστικό μέρος των  $GPs$ , το οποίο το υπολογίζουμε με την βοήθεια του πακέτου HyperInt [11] για το Maple

Για την λύση δεύτερης και την τρίτης τάξης παίρνουμε

$$\begin{aligned}\bar{g}^{(2)}(x) &= aa\bar{c}^{(0)}G(1, 1; x+1) + a\bar{c}^{(1)}G(1; x+1) \\ &+ ba\bar{c}^{(0)}G(0, 1; x+1) + b\bar{c}^{(1)}G(0; x+1) + \bar{c}^{(2)}\end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned}\bar{g}^{(3)}(x) &= aaa\bar{c}^{(0)}G(1, 1, 1; x+1) + aa\bar{c}^{(1)}G(1, 1; x+1) \\ &+ a\bar{c}^{(2)}G(1; x+1) + baa\bar{c}^{(0)}G(0, 1, 1; x+1) + ba\bar{c}^{(1)}G(0, 1; x+1) \\ &+ b\bar{c}^{(2)}G(0; x+1) + \bar{c}^{(3)}\end{aligned} \quad (71)$$

Εφαρμόζουμε ξανά τις απαιτήσεις για πραγματική και πεπερασμένη λύση για  $x = -1$  (που σημαίνει ότι παίρνουμε  $b\bar{c}^{(1)} = 0, b\bar{c}^{(2)} = 0, b\bar{c}^{(3)} = 0$ ) διορθώνοντας τους όρους που μας λείπουν.

Η πλήρης λύση για το  $g_3$  ως την τάξη του  $\epsilon^3$  είναι:

$$g_3(x) = 4 - 2\epsilon \log[x] - \frac{4\epsilon^2\pi^2}{3} + \frac{1}{6}\epsilon^3 \left( 7\pi^2 \log[x] + 2 \log[x]^3 - 6\pi^2 \log[1+x] - 6 \log[x]^2 \log[1+x] - 12 \log[x] Li_2[-x] + 12 Li_3[-x] - 68\zeta[3] \right) \quad (72)$$

Η σε όρους Πολυλογάριθμων Γκοντζάροφ

$$g_3(x) = 4 - 2\epsilon G(0; x) - 4 \frac{4\epsilon^2\pi^2}{3} + \epsilon^3 \left( 2G(0, 0, 0; x) - 2G(-1, 0, 0; x) + \frac{7G(0; x)]\pi^2}{6} - G(-1; x)\pi^2 - \frac{34\zeta[3]}{3} \right) \quad (73)$$

## 4 Double Box

Παραπάνω είδαμε το πρόβλημα του one loop box όπου για την λύση του κάναμε χρήση της καθιερωμένης μεθόδου διαφορικών εξισώσεων, όπου διαφορίσαμε τα  $MI$  ως προς τις κινηματικές σταθερές και ανάγαμε τα ολοκληρώματα που προέκυψαν σε  $MI$  μέσω της μεθόδου  $IBP$ , ώστε να φτιάξουμε ένα γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Έπιτα εισάγαμε την αδιάστατη μεταβλητή  $x = \frac{t}{s}$  ώστε οι διαφορικές μας εξισώσεις να μπορούν να λυθούν σε όρους Πολυλογάριθμων Γκοντσαροφ.

Για την λύση του Double box με το ένα off-shell πόδι θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των απλοποιημένων διαφορικών εξισώσεων (SDE). Αυτή η προσέγγιση αποσκοπεί στην απλοποίηση και την συστηματοποίηση της κατασκευής του κατάλληλου συστήματος διαφορικών εξισώσεων που να ικανοποιούνται από τα  $MI$ . Έτσι, παραμετροποιούμε τις εισερχόμενες εξωτερικές ορμές με όρους του  $x$  ως:  $q_i(x) = p_i + (1-x)q_i$  όπου τα  $q_i$  είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των ορμών ( $p_i$ ) τέτοιος ώστε  $\sum_i q_i = 0$ . Τώρα τα ολοκληρώματα Feynman θα

εξαρτώνται από το  $x$  μέσω των εξωτερικών ορμών:

$$G_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\{s_{ij}\}, \epsilon; x) = \int \left( \prod_{r=1}^l \frac{d^d k_r}{i\pi^{d/2}} \right) \frac{1}{D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}}, \quad (74)$$

$$D_i = (c_{ij}k_j + d_{ij}p_j(x))^2$$

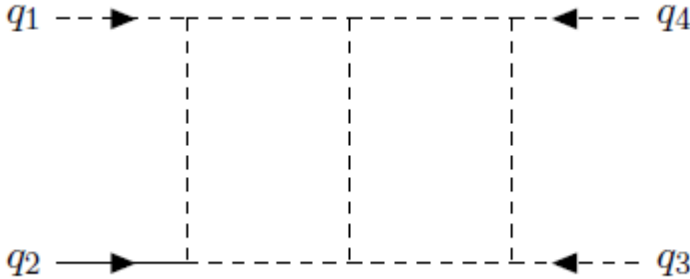
Αφού εισάγουμε την αδιάστατη παράμετρο  $x$  ο πίνακας των ΜΙ θα ικανοποιεί την

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{G}(\{s_{ij}\}, \epsilon; x) = \mathbf{M}(\{s_{ij}\}, \epsilon; x) \mathbf{G}(\{s_{ij}\}, \epsilon; x) \quad (75)$$

ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων σε μία ανεξάρτητη μεταβλητή, όπου το  $\mathbf{M}$  είναι ένας πίνακας με στοιχεία συναρτήσεις των κινηματικών όρων ( $s_{ij} = p_i \cdot p_j$ ), του  $x$  και του  $\epsilon$ . Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου έγκειται στο ότι η ολοκλήρωση της διαφορικής μας επιτρέπει να εκφράσουμε τα ΜΙ σε όρους GPs με εύκολο και φυσικό τρόπο, καθώς επίσης και στο ότι καθιστά το πρόβλημα ανεξάρτητο του αριθμού των κινηματικών όρων που συμμετέχουν. Να σημειώσουμε ότι για  $x \rightarrow 1$  παράγεται η αρχική διαμόρφωση του ολοκληρώματος.

## 4.1 Το Double Box

Το διάγραμμα του Double Box με το ένα off-shell πόδι είναι:



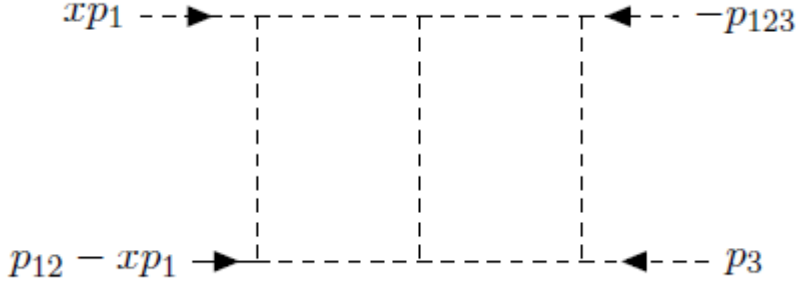
όπου η συμπαγής γραμμή είναι το εξωτερικό πόδι που έχει μάζα και οι υπόλοιπες είναι θεωρούνται άμαζες. Όλες οι εξωτερικές ορμές θεωρούνται εισερχόμενες και παραμετροποιούνται ως εξής:

$$q_1 = xp_1, q_2 = p_{12} - xp_1, q_3 = p_3, q_4 = -p_{123}, p_i^2 = 0, \sum_i p_i = 0, \quad (76)$$

$$s_{12} \equiv p_{12}^2 = 2p_1 p_2, s_{23} \equiv p_{23}^2 = 2p_2 p_3, S \equiv q_{12}^2 = s_{12}, T \equiv q_{23}^2 = s_{23}x$$



Με βάση την παραμετροποίηση το διάγραμμα του Double Box γίνεται:



η οικογένεια ολοκληρωμάτων τώρα θα έχει την μορφή:

$$G_{\alpha_1, \dots, \alpha_9}(x, s, \epsilon) = e^{2\gamma_E \epsilon} \int \frac{d^d k_1}{i\pi^{d/2}} \frac{d^d k_2}{i\pi^{d/2}} \frac{1}{k_1^{2\alpha_1} (k_1 + xp_1)^{2\alpha_2} (k_1 + p_{12})^{2\alpha_3} (k_1 + p_{123})^{2\alpha_4}} \times \frac{1}{k_2^{2\alpha_5} (k_2 - xp_1)^{2\alpha_6} (k_2 - p_{12})^{2\alpha_7} (k_2 - p_{123})^{2\alpha_8} (k_1 + k_2)^{2\alpha_9}} \quad (77)$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο IBP με την βοήθεια του προγράμματος FIRE6 για την παραπάνω οικογένεια ολοκληρωμάτων παίρνουμε τα εξής 18 MI:

- $G_{0,0,1,0,1,0,0,0,1}$
- $G_{0,1,0,0,0,0,1,0,1}$
- $G_{0,1,0,0,0,0,0,1,1}$
- $G_{0,1,1,0,1,0,0,0,1}$
- $G_{1,0,1,0,0,0,0,1,1}$
- $G_{0,1,1,0,0,0,0,1,1}$
- $G_{0,1,0,0,1,0,1,0,1}$
- $G_{1,0,1,0,1,0,1,0,0}$
- $G_{0,1,1,0,1,0,1,0,1}$
- $G_{1,1,1,0,0,0,0,1,1}$
- $G_{1,1,0,0,0,0,1,1,1}$
- $G_{0,1,1,0,1,0,0,1,2}$
- $G_{0,1,1,0,1,0,0,1,1}$
- $G_{0,1,1,0,1,0,1,0,1}$
- $G_{0,1,0,0,1,0,1,1,1}$
- $G_{0,1,1,0,1,0,1,1,1}$
- $G_{1,1,1,0,1,0,1,1,1}$

$$G_{1,1,1,-1,1,0,1,1,1} \quad (78)$$

Η αρχική βάση που μας έδωσε το FIRE6 δεν είχε MI με  $\alpha_9 = 2$  ( $G_{0,1,1,0,1,0,0,1,2}$ ). Στην θέση του εμφανιζόταν το  $G_{-1,1,1,0,1,0,0,1,1}$ , όμως μελετώντας την διαφορική εξίσωση για αυτό το ολοκλήρωμα είδαμε ότι η παράμετρος  $x$  έμπλεκε με την παράμετρο  $\epsilon$ . Το γεγονός αυτό περιέπλεκε πολύ την λύση της διαφορικής εξίσωσης, έτσι διαλέξαμε το  $G_{0,1,1,0,1,0,0,1,2}$  ως αντικαταστάτη, του οποίου η διαφορική έχει απλούστερη μορφή.

## 4.2 Κατασκευή της Διαφορικής Εξίσωσης

Αφού πλέον γνωρίζουμε τα MI μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Όπως είδαμε στο παράδειγμα του one-loop box η διαδικασία κατασκευής της διαφορικής εξίσωσης ήταν περίπλοκη και χρονοβόρα, όμως με την προσέγγιση SDE θα δούμε ότι η διαδικασία απλοποιείται σημαντικά. Αντί να παραγωγίσουμε ως προς τους κινηματικούς όρους  $s, t$  όπως συνηθίζεται, θα παραγωγίσουμε ως προς την αυθαίρετη σταθερά  $x$ . Έτσι παραγωγίζοντας την εξίσωση (77) παίρνουμε ότι ο τελεστής  $\partial_x$  δρα πάνω στα ολοκληρώματα μας ως:

$$-\frac{\alpha_2}{x} - \frac{\alpha_6}{x} + \frac{\alpha_2 Y[2] Y_m[1]}{x} + \frac{\alpha_6 Y[6] Y_m[5]}{x} \quad (79)$$

Όπου για ένα ολοκλήρωμα  $G_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$  τα  $Y[n]$  και  $Y_m[n]$  αυξάνουν και μειώνουν αντίστοιχα κατά ένα τον δείκτη  $\alpha_n$  του ολοκληρώματος. Για παράδειγμα, στο ολοκλήρωμα  $G_{1,1,1,-1,1,0,1,1,1}$  έχουμε  $\alpha_2 = 1$  και  $\alpha_6 = 0$ , άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_x G_{1,1,1,-1,1,0,1,1,1} &= \left( -\frac{1}{x} + \frac{Y[2] Y_m[1]}{x} \right) G_{1,1,1,-1,1,0,1,1,1} \\ &= -\frac{G_{1,1,1,-1,1,0,1,1,1}}{x} + \frac{G_{0,2,1,-1,1,0,1,1,1}}{x} \end{aligned} \quad (80)$$

Έπειτα, κάνω αναγωγή τα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους σε MI μέσω του FIRE6.

Αφού το κάνω αυτό και για τα 18 ολοκληρώματα, μπορώ πλέον να δημιουργήσω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\partial_x G = M \cdot G \quad (81)$$

## 4.3 Η Canonical βάση

Σε αυτή την εργασία πριν πάμε να λύσουμε την διαφορική εξίσωση θα φέρουμε τον πίνακα στην Canonical μορφή, εφαρμόζοντας μία σειρά μετασχηματισμών



και  $G'' = N^{-1}S^{-1}G$  είναι η canonical βάζση, με:

$$\begin{aligned}
& G_{0,0,1,0,1,0,0,0,1} \\
& \frac{G_{0,1,0,0,0,0,1,0,1}}{x-1} \\
& \frac{G_{0,1,0,0,0,0,0,1,1}}{x} \\
& \frac{\epsilon G_{0,1,1,0,1,0,0,0,1}}{3\epsilon-2} \\
& \epsilon G_{1,0,1,0,0,0,0,1,1} \\
& \frac{\epsilon G_{0,1,1,0,0,0,0,1,1}}{3\epsilon-2} \\
& \frac{\epsilon G_{0,1,0,0,1,0,1,0,1}}{3\epsilon-2} \\
& \epsilon G_{1,0,1,0,1,0,1,0,0} \\
& \frac{\epsilon(2\epsilon-1)G_{0,1,1,0,1,0,1,0,0}}{(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{x\epsilon^2 G_{1,1,1,0,0,0,0,1,1}}{(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{x\epsilon^3 G_{1,1,0,0,0,0,1,1,1}}{(2\epsilon-1)(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{x\epsilon^2 G_{0,1,1,0,1,0,0,1,2}}{(2\epsilon-1)(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{\epsilon^3(s_{12} + s_{23}x)G_{0,1,1,0,1,0,0,1,1}}{(2\epsilon-1)(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{x\epsilon^3 G_{0,1,1,0,1,0,1,0,1}}{(2\epsilon-1)(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{\epsilon^2 G_{0,1,0,0,1,0,1,1,1}}{(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{\epsilon^3(s_{12}(-x) + s_{12} - s_{23}x)G_{0,1,1,0,1,0,1,1,1}}{(2\epsilon-1)(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{x\epsilon^3 G_{1,1,1,0,1,0,1,1,1}}{(2\epsilon-1)(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)} \\
& \frac{x\epsilon^3 G_{1,1,1,-1,1,0,1,1,1}}{(2\epsilon-1)(3\epsilon-2)(3\epsilon-1)}
\end{aligned} \tag{87}$$

Για να λύσουμε όμως την διαφορική εξίσωση πρέπει να γνωρίζουμε τις συνοριακές συνθήκες

## 4.4 Expansion by Regions

Για να βρούμε τις συνοριακές συνθήκες εφαρμόζουμε την μέθοδο Expansion by regions.[12]

Αν ένα ολοκλήρωμα Feynman εξαρτάται από κινηματικές σταθερές και όρους μάζας με κλίμακες που διαφέρουν μπορούμε να το αναπτύξουμε σε αναλογίες μικρών και μεγάλων παραμέτρων. Έτσι, το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί σαν μία σειρά από απλούστερες ποσότητες. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

- Χωρίζουμε τον χώρο των ορμών βρόχου σε διαφορετικές περιοχές, σε κάθε περιοχή αναπτύσσουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα σε σειρά Taylor ως προς τις παραμέτρους που θεωρούνται μικρές εκεί.
- Ολοκληρώνουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα με κατάλληλο τρόπο σε κάθε περιοχή επί ολόκληρου του τομέα ολοκλήρωσης της ορμής βρόχου
- θέτουμε μηδέν κάθε scaleless ολοκλήρωμα

Για την υλοποίηση της μεθόδου χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα Asy2.1, το οποίο κάνει χρήση γεωμετρικών προσεγγίσεων στην Alpha αναπαράσταση και το πακέτο ανοιχτού κώδικα QHull που βρίσκει τους κυρτούς φλοιούς, τα αποτελέσματα προκύπτουν ύστερα από ολοκληρώσεις σε Feynman Parameters.

Παρακάτω βλέπουμε ένα παράδειγμα της εξαγωγής των συνοριακών συνθηκών για το ολοκλήρωμα  $G_{0,1,1,0,1,0,0,1,2}$ , ενώ τα όρια όλων των ολοκληρωμάτων επισυνάπτονται ως παράρτημα της εργασίας.

Τρέχοντας το Asy2.1 για το ολοκλήρωμα  $G_{0,1,1,0,1,0,0,1,2}$  παίρνουμε ότι η κύρια περιοχή είναι η  $-1 - 2\epsilon$ , επίσης το πρόγραμμα μας δίνει πληροφορίες για τα πολυώνυμα  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  της Feynman αναπαράστασης, τους ανάλογους εκθέτες των πολυωνύμων, καθώς και τον prefactor, σύμφωνα με την σχέση:

$$G_{q_1, \dots, q_n; d} = (-1)^\alpha \frac{(\iota\pi^{d/2})^h \Gamma(\alpha - hd/2)}{\prod_l \Gamma(a_l)} \times \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots \int_0^\infty d\alpha_L \delta(\sum \alpha_i - 1) \frac{\mathcal{U}^{\alpha - (h+1)d/2} \prod_l \alpha_l^{\alpha_i - 1}}{(\mathcal{V}(s_1, s_2, \dots))^{\alpha - hd/2}}$$

Έτσι μπορούμε να σχηματίσουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα στο Mathematica και να πραγματοποιήσουμε τις διαδοχικές ολοκληρώσεις ως προς τα  $a$  ώστε τελικά να υπολογίσουμε το όριο.

Όπου για το  $G_{0,1,1,0,1,0,0,1,2}$  προκύπτει:

$$\begin{aligned}
G_{0,1,1,0,1,0,0,1,2} &\rightarrow -\frac{1}{s_{12}(s_{23}x)\epsilon^3} + \frac{2(\log(-s_{23}) + \log(x))}{((s_{12}s_{23})x)\epsilon^2} \\
&+ \frac{-6\log^2(-s_{23}) + \pi^2 - 6\log^2(x) - (12\log(-s_{23}))\log(x)}{(((3s_{12})s_{23})x)\epsilon} \\
&+ \frac{1}{((3s_{12})s_{23})x} \left( 4\log^3(-s_{23}) + 4\log^3(x) - (2\pi^2)\log(x) + (12\log^2(-s_{23}))\log(x) \right. \\
&\quad \left. - (2\log(-s_{23}))(\pi^2 - 6\log^2(x)) + 53\zeta(3) \right) \\
&+ \frac{1}{((360s_{12})s_{23})x} \left( (-240\log^4(-s_{23}) + 167\pi^4 - 240\log^4(x) + (240\pi^2)\log^2(x) \right. \\
&\quad \left. - (960\log^3(-s_{23}))\log(x) + (240\log^2(-s_{23}))(\pi^2 - 6\log^2(x)) \right. \\
&\quad \left. - (12720\log(x))\zeta(3) + (240\log(-s_{23}))(-4\log^3(x) + (2\pi^2)\log(x) - 53\zeta(3)) \right) \epsilon \\
&\quad + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

Τώρα που ξέρω τα όρια των ολοκληρωμάτων, βρίσκω εύκολα τα όρια της canonical βάσης για  $x \rightarrow 0$ . Μία ακόμα επεξεργασία που πρέπει να κάνουμε πριν πάμε να λύσουμε την διαφορική εξίσωση είναι το να βγάλουμε τα  $\log x$  από τα όρια γιατί αυτοί οι όροι θα προκύψουν από την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης.

## 4.5 Λύση της διαφορικής

Για να λύσουμε την ΔΕ αρχικά την εκφράζουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να φαίνονται οι πόλοι που εμφανίζει, γιαυτό τον λόγο πραγματοποιούμε τους εξής μετασχηματισμούς στους παρανομαστές των στοιχείων του πίνακα της canonical ΔΕ:

$$\begin{aligned}
s_{12}x - s_{12} + s_{23}x &\rightarrow x(s_{12} + s_{23}) - s_{12} \\
x(s_{12} + s_{23}) - s_{12} &\rightarrow (s_{12} + s_{23})\left(x - \frac{s_{12}}{s_{12} + s_{23}}\right) \\
s_{12} + s_{23}x &\rightarrow s_{23}\left(\frac{s_{12}}{s_{23}} + x\right)
\end{aligned} \tag{88}$$



συμπαγής μορφή:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} = & \epsilon^{-1} \mathbf{b}_0^{(-1)} + \epsilon^0 \left( \sum \mathcal{G}_\alpha \mathbf{M}_\alpha \mathbf{b}_0^{(-1)} + \mathbf{b}_0^{(0)} \right) \\
& + \epsilon^1 \left( \sum \mathcal{G}_{\alpha\beta} \mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\beta \mathbf{b}_0^{(-1)} \right. \\
& \quad \left. + \sum \mathcal{G}_\alpha \mathbf{M}_\alpha \mathbf{b}_0^{(0)} + \mathbf{b}_0^{(1)} \right) \\
& + \epsilon^2 \left( \sum \mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\beta \mathbf{M}_\gamma \mathbf{b}_0^{(-1)} \right. \\
& \quad \left. + \sum \mathcal{G}_{\alpha\beta} \mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\beta \mathbf{b}_0^{(0)} + \sum \mathcal{G}_\alpha \mathbf{M}_\alpha \mathbf{b}_0^{(1)} + \mathbf{b}_0^{(2)} \right) \\
& + \epsilon^3 \left( \sum \mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\beta \mathbf{M}_\gamma \mathbf{M}_\delta \mathbf{b}_0^{(-1)} \right. \\
& \quad \left. + \sum \mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\beta \mathbf{M}_\gamma \mathbf{b}_0^{(0)} \right. \\
& \quad \left. + \sum \mathcal{G}_{\alpha\beta} \mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\beta \mathbf{b}_0^{(1)} + \sum \mathcal{G}_\alpha \mathbf{M}_\alpha \mathbf{b}_0^{(2)} + \mathbf{b}_0^{(3)} \right)
\end{aligned} \tag{91}$$

Όπου τα  $\mathbf{b}_0^{(i)}$ ,  $i = -1, \dots, 3$  είναι τα ανεξάρτητα από το  $x$  μέρη της λύσης στο όριο  $x \rightarrow 0$  στην δύναμη  $\epsilon^i$  όταν την γράφουμε ως:

$$\mathbf{G} \sim \sum_{i=-1}^3 \epsilon^i \sum_{n=0}^{i+1} \mathbf{b}_n^{(i)} \log^n(x) + \text{subleading terms} \tag{92}$$

Δηλαδή οι συνοριακοί όροι που υπολογίσαμε.

## 4.6 Αριθμητικός έλεγχος

Για να ελέγξουμε αριθμητικά το αποτέλεσμα μας χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα pySecDec το οποίο υπολογίζει αριθμητικά τα ολοκληρώματα Feynman και μας παρέχει και μία τιμή σφάλματος για τους υπολογισμούς, τα αποτελέσματα του θα συγκρίνουμε με τα δικά μας αναλυτικά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα μας είναι γραμμένα σε όρους πολυλογάριθμων Γκοντσάροφ, για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα Ginac[13]. Επίσης έχουμε όρους  $x$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{23}$  οι οποίοι χρειάζονται προσδιορισμό. Για το  $x$  θέλουμε  $0 < x < 1$  και για τα  $s_{12}$ ,  $s_{23}$  απαιτούμε να είναι αρνητικά διότι βρισκόμαστε στην Ευκλείδεια περιοχή ολοκλήρωσης. Θέτουμε:

$$\begin{aligned}
x & \rightarrow 0.2 \\
s_{12} & \rightarrow -3 \\
s_{23} & \rightarrow -7
\end{aligned} \tag{93}$$



Έτσι υπολογίζουμε την τιμή της αναλυτικής λύσης.

Για να επαληθεύσουμε την ορθότητα της αναλυτικής μας λύσης ελέγχουμε αν η διαφορά αναλυτικής και αριθμητικής λύσης είναι μικρότερη από το σφάλμα της αριθμητικής. Δηλαδή

$$\frac{|analytic - numerical|}{error} < 1 \quad (94)$$

Παρακάτω παραθέτω ενδεικτικά τον αριθμητικό έλεγχο για ένα από τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} G_{1,1,1,-1,1,0,1,1,1}^{analytical} \rightarrow & -\frac{0.185953}{\epsilon^3} - \frac{0.0734433}{\epsilon^2} \\ & - \frac{0.00896468 - 3.670209014306086 \cdot 10^{-17}i}{\epsilon} \\ & + (2.32669 - 5.321803070743825 \cdot 10^{-16}i) + O(\epsilon^1) \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} G_{1,1,1,-1,1,0,1,1,1}^{numerical} \rightarrow & -\frac{0.185913760646337911}{\epsilon^3} - \frac{0.0727736586974038202}{\epsilon^2} \\ & - \frac{0.00760445197214210111}{\epsilon} + (2.31585622231305566) \end{aligned} \quad (96)$$

Υπολογίζοντας το πηλίκο (94) ξεχωριστά για την κάθε τάξη του  $\epsilon$  προκύπτει 0.0364878, 0.185907, 0.199711, 0.497693 για τα  $\epsilon^{-3}$ ,  $\epsilon^{-2}$ ,  $\epsilon^{-1}$ ,  $\epsilon^0$  αντίστοιχα. Όλα είναι μικρότερα του 1 άρα τα αποτελέσματα είναι αποδεκτά.

Το αρχείο Mathematica του αριθμητικού ελέγχου των ολοκληρωμάτων επισυνάπτεται ως παράρτημα της εργασίας.

## 5 Επίλογος

Η μέθοδος των απλοποιημένων ΔΕ μπορεί να προσφέρει ένα νέο δρόμο για τον υπολογισμό των ΜΙ στους δύο βρόχους, που χρειάζονται σε φυσικές εφαρμογές. Μας επιτρέπει να εξάγουμε τις ΔΕ με μία παραμετροποίηση κατάλληλη ώστε να εκφράσουμε άμεσα τα ΜΙ σε όρους GPs. Η γνώση των ΜΙ δύο βρόχων σε συνδυασμό με την επέκταση της μεθόδου OPP σε δύο βρόχους και η χρήση των IBPI θα στρώσουν τον δρόμο για τον αυτοματισμό των NNLO υπολογισμών.

A'

## Πολυλογάριθμοι Goncharov

Οι Πολυλογάριθμοι Goncharov ορίζονται ως[14]:

$$G(a_1, \dots, a_n; z) = \int_0^z \frac{dt}{t - a_1} G(a_2, \dots, a_n; t) \quad (97)$$

και έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$G(\vec{0}_n; z) = \frac{1}{n!} \log^{(n)}(z)$$

$$G(\vec{a}_n; z) = \frac{1}{n!} \log^{(n)}\left(1 - \frac{z}{a}\right)$$

$$G(\vec{0}_{n-1}, a; z) = -Li_n\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$G(\vec{0}_n, \vec{a}_p; z) = (-1)^p S_{n,p}\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$G(z) = G(; z) = 1$$

$$G(a; z)G(b; z) = G(a, b; z) + G(b, a; z)$$

$$G(a; z)G(b, c; z) = G(a, b, c; z) + G(b, a, c; z) + G(b, c, a; z)$$

$$G(a, b; z)G(s, t; z) = G(a, b, s, t; z) + G(a, s, b, t; z) + G(a, s, t, b; z) \\ + G(s, a, b, t; z) + G(s, a, t, b; z) + G(s, t, a, b; z)$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να γράψουμε τα ολοκληρώματα  $\int_{-1}^x \frac{dt}{t}$ ,  $\int_{-1}^x \frac{dt}{t+1}$  ως:

$$\int_{-1}^x \frac{dt}{t} \rightarrow \int_0^{x+1} \frac{dz}{z-1} \rightarrow G(1; x+1) \\ \int_{-1}^x \frac{dt}{t+1} \rightarrow \int_0^{x+1} \frac{dz}{z} \rightarrow G(0; x+1)$$

## References

- [1] Vladimir Smirnov. *Analytic Tools for Feynman Integrals*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [2] Vladimir A. Smirnov and Matthias Steinhauser. Solving recurrence relations for multi-loop feynman integrals. *Nuclear Physics B*, 672(1-2):199–221, 2003.

- [3] Costas G. Papadopoulos, Damiano Tommasini, and Christopher Wever. Two-loop master integrals with the simplified differential equations approach. *Journal of High Energy Physics*, 2015(1), 2015.
- [4] Costas G. Papadopoulos. Simplified differential equations approach for master integrals. *Journal of High Energy Physics*, 2014(7), 2014.
- [5] Costas G. Papadopoulos, Damiano Tommasini, and Christopher Wever. The pentabox master integrals with the simplified differential equations approach. *Journal of High Energy Physics*, 2016(4):1–18, 2016.
- [6] Michael Edward Peskin and Daniel V Schroeder. *An introduction to quantum field theory*.
- [7] A.V Smirnov. Algorithm fire—feynman integral reduction. *Journal of High Energy Physics*, 2008(10):107–107, 2008.
- [8] T. Gehrmann and E. Remiddi. Differential equations for two-loop four-point functions. *Nuclear Physics B*, 580(1-2):485–518, 2000.
- [9] Johannes M Henn. Lectures on differential equations for feynman integrals. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(15):153001, 2015.
- [10] Roman Lee. Modern techniques of multiloop calculations. 05 2014.
- [11] Erik Panzer. Algorithms for the symbolic integration of hyperlogarithms with applications to feynman integrals. *Computer Physics Communications*, 188, 03 2014.
- [12] Bernd Jantzen, Alexander V. Smirnov, and Vladimir A. Smirnov. Expansion by regions: revealing potential and glauber regions automatically. *The European Physical Journal C*, 72(9), 2012.
- [13] Jens Vollinga and Stefan Weinzierl. Numerical evaluation of multiple polylogarithms. *Computer Physics Communications*, 167(3):177–194, 2005.
- [14] A. B. Goncharov. Multiple polylogarithms and mixed tate motives, 2001.