ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΑΠΟΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΣΤΡΩΣΕΩΝ ΣΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ ΠΛΑΚΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Σ. ΓΑΡΓΑΝΙΔΗ

Επιβλέπων:
Νικόλαος Γ. Τσούβαλης, Αναπλ. Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ , ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1
Εισαγωγή στην επίδραση του αποχωρισμού των στρώσεων στο λυγισμό πλακών από σύνθετα υλικά 1

1.1 Εισαγωγή 1

1.2 Λυγισμός πλακών από ινώδη σύνθετα υλικά 2
1.2.1 Γενικά περί ινωδών σύνθετων υλικών 2
1.2.2 Πολύστρωτα 7
1.2.3 Αποχωρισμός των στρώσεων ενός πολύστρωτου 11
1.2.4 Λυγισμός πολύστρωτων πλακών 12

1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση 15

1.4 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας 19

Κεφάλαιο 2
Αναλυτική προσέγγιση του λυγισμού πολύστρωτων πλακών 21

2.1 Εισαγωγή 21

2.2 Αναλυτικά μοντέλα για τη μελέτη του λυγισμού επίπεδων πολύστρωτων πλακών 22
2.2.1 Βασικά στοιχεία της Κλασσικής Θεωρίας Πολύστρωτων 22
2.2.2 Λυγισμός επίπεδων πολύστρωτων πλακών 28
2.2.3 Απλές μέθοδοι υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού 36

2.3 Εφαρμογή των απλών μεθόδων υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού 40

Κεφάλαιο 3
Ανάλυση του λυγισμού πολύστρωτων πλακών με πεπερασμένα στοιχεία 43

3.1 Εισαγωγή 43

3.2 Προεπεξεργασία 44
3.2.1 Επιλογή τύπου στοιχείων 44
3.2.2 Ορισμός μηχανικών ιδιοτήτων 46
3.2.3 Σχεδίαση της πλάκας 47
3.2.4 Κατασκευή του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων 50

3.3 Επίλυση 59
3.3.1 Ορισμός οριακών συνθηκών και φόρτισης 59
3.3.2 Τύπος ανάλυσης 60

3.4 Μεταεπεξεργασία 61

3.5 Επαλήθευση του τρόπου μοντελοποίησης 64

3.6 Επαλήθευση των αναλυτικών μεθόδων 73

Κεφάλαιο 4
Παραμετρική μελέτη της αντοχής σε λυγισμό πολύστρωτων πλακών με αποχωρισμένες στρώσεις 77

4.1 Σταθερές και παράμετροι του προβλήματος 77

4.2 Μοντελοποίηση 84

4.3 Αποτελέσματα ανάλυσης 84

4.4 Υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού 110

Κεφάλαιο 5
Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις 119

Βιβλιογραφία 121

Παραρτήματα
Α Επιλογή παραμέτρων κατασκευής του μοντέλου
Α.1 Εντολή δημιουργίας του επιφανειακού καννάβου
Α.2 Αριθμός στοιχείων στη διεύθυνση του πάχους του μοντέλου

Β Καθορισμός του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λυγισμού (συνδυασμός μη γραμμικής ανάλυσης - ανάλυσης ιδιοτιμών)

Γ Έλεγχος σύγκλισης καννάβου
Γ.1 Πρώτο παράδειγμα επαλήθευσης του τρόπου μοντελοποίησης
Γ.2 Άθικτη πλάκα για την παραμετρική μελέτη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στην επίδραση του αποχωρισμού των στρώσεων στο λυγισμό πλακών από σύνθετα υλικά

1.1 Εισαγωγή

Η προσπάθεια επίτευξης λύσεων χαμηλότερου κόστους και υψηλότερης απόδοσης χαρακτηρίζει κάθε κατασκευαστικό τομέα. Η βασική αυτή επιδίωξη ικανοποιείται με τη μεταβολή ορισμένων παραμέτρων που επηρεάζουν σημαντικά, άμεσα ή έμμεσα, τα μεγέθη αυτά. Μία συνήθης πρακτική οικονομικής και λειτουργικής βελτιστοποίησης μίας κατασκευής είναι η προσπάθεια μείωσης του βάρους της, η οποία αποτέλεσε ανέκαθεν καθοριστικό παράγοντα νέων σχεδιάσεων και τεχνολογικών εξελίξεων.

Οι ναυπηγικές κατασκευές αποτελούν τυπικά παραδείγματα κατασκευών το βάρος των οποίων επηρεάζει σημαντικά την απόδοσή τους. Είτε πρόκειται για πλωτές κατασκευές είτε για πλοία και μικρά σκάφη, η μείωση του βάρους συνεπάγεται πιθανή ελάττωση του κόστους κατασκευής. Παράλληλα, παρέχει τη δυνατότητα μεγαλύτερης μεταφορικής ικανότητας, αυξάνοντας έτσι την εμπορική εκμεταλλευσιμότητά τους. Επιπλέον, τα ελαφρύτερα σκάφη έχουν χαμηλότερες απαιτήσεις σε ισχύ, ενώ η πιθανή μείωση της αντίστασης των γαστρών τους οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας. Συνεπώς, η ναυπηγική αποτελεί πεδίο εφαρμογής νέων σχεδιάσεων και τεχνολογιών που συμβάλλουν στην παραγωγή ελαφρύτερων κατασκευών.

Η πρακτική των συγκολλήσεων και η χρήση ενισχυτικών στα ελάσματα των ναυπηγικών κατασκευών συμβάλλουν σημαντικά στη μείωση του βάρους εδώ και πολλά χρόνια. Όμως, η εξέλιξη της τεχνολογίας υλικών χαμηλότερου ειδικού βάρους από εκείνο του παραδοσιακού ναυπηγικού χάλυβα προσέφερε νέες κατασκευαστικές λύσεις. Σύντομα, το αλουμίνιο αντικατέστησε το χάλυβα σε τμήματα σκαφών και πλοίων, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις αποτέλεσε το βασικό υλικό κατασκευής. Παρ' όλα αυτά, η μεγάλη ανάπτυξη που γνώρισαν τις τελευταίες δεκαετίες τα σύνθετα υλικά, ιδίως τα ινώδη, διεύρυνε τα περιθώρια μείωσης του βάρους και αύξησης της απόδοσης των σκαφών.

Τα ινώδη σύνθετα υλικά ή ενισχυμένα με ίνες πλαστικά (Fibre Reinforced Plastics, FRP's) πλεονεκτούν σημαντικά έναντι των συμβατικών υλικών (χάλυβας, αλουμίνιο, ξύλο). Λόγω του αξιοσημείωτα χαμηλού ειδικού βάρους τους, χαρακτηρίζονται από υψηλές τιμές της ειδικής αντοχής και της ειδικής δυσκαμψίας, ενώ παράλληλα, παρουσιάζουν εξαιρετική αντοχή σε διάβρωση. Τα παραπάνω, σε συνδυασμό με τις σχετικά εύκολες διαδικασίες παραγωγής και το χαμηλό κόστος συντήρησης, έχουν οδηγήσει στη διαρκώς αυξανόμενη χρήση των υλικών αυτών σε πλήθος θαλάσσιων και όχι μόνο εφαρμογών. Το ναρκαλιευτικό του Σχήματος 1.1 είναι κατασκευασμένο εξ' ολοκλήρου από FRP.

Η εκτεταμένη πλέον χρήση των ινωδών σύνθετων υλικών απαιτεί πολύ καλή γνώση της συμπεριφοράς τους υπό ένα ευρύ φάσμα συνθηκών. Τα υλικά αυτά χρησιμοποιούνται ήδη στη ναυπηγική για την εξ' ολοκλήρου κατασκευή σκαφών, ήτοι κατασκευών που συνήθως επιχειρούν υπό δυσμενείς συνθήκες. Οι καταπονήσεις που υφίσταται μία τέτοια κατασκευή

είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε αστοχία του υλικού της, γεγονός που εν γένει επιδρά στη συμπεριφορά της. Ως εκ τούτου, αλλά και δεδομένων των νέων τρόπων αστοχίας που εισάγει η χρήση των FRP's, η μελέτη της επίδρασης αυτής καθίσταται ιδιαίτερα σημαντική.

Σχήμα 1.1: Ναρκαλιευτικό του Βρετανικού Ναυτικού κατασκευασμένο από FRP.

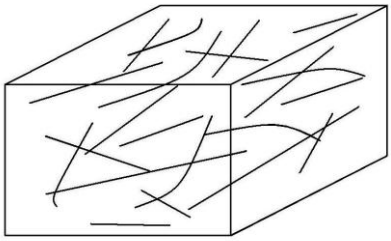
Η παρούσα εργασία κινείται στα πλαίσια της κατανόησης της μηχανικής συμπεριφοράς κατασκευών από ινώδη σύνθετα υλικά που έχουν ήδη αστοχήσει. Αντικείμενό της αποτελεί ο αποχωρισμός των στρώσεων, ένας συνήθης τρόπος αστοχίας κατασκευών από τέτοια υλικά, και ειδικότερα, η επίδραση αυτού στο λυγισμό πλακών. Η μελέτη αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα κατασκευαστικά στοιχεία σκαφών από FRP's, οι καταπονήσεις των οποίων είναι δυνατόν να οδηγήσουν τόσο σε αστοχία υπό τη μορφή του αποχωρισμού των στρώσεων όσο και σε λυγισμό.

1.2 Λυγισμός πλακών από ινώδη σύνθετα υλικά

1.2.1 Γενικά περί ινωδών σύνθετων υλικών

Τα ινώδη σύνθετα υλικά αποτελούν υποκατηγορία των σύνθετων, δηλαδή υλικών τα συνιστώντα μέρη των οποίων έχουν σημαντικά διαφορετικές φυσικές και μηχανικές ιδιότητες μεταξύ τους. Όπως προκύπτει από την ονομασία τους, αποτελούνται από ένα υλικό, τη μήτρα (matrix), μέσα στην οποία βρίσκονται ίνες (fibres) ενός άλλου υλικού, κατανεμημένες με διάφορους τρόπους και προσανατολισμούς (Σχήμα 1.2). Λόγω κατασκευής, οι ίνες χαρακτηρίζονται από πολύ μεγαλύτερη αντοχή και δυσκαμψία από το ίδιο το υλικό τους σε άλλη μορφή και είναι αυτές που καθορίζουν εν πολλοίς τις ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Αντίθετα, η μήτρα λειτουργεί ως μέσο σταθεροποίησης των ινών, το οποίο παράλληλα τις προστατεύει και τις υποστηρίζει. Επιπρόσθετα, μεταφέρει τα φορτία μεταξύ αυτών και τα

διασκορπίζει μέσα στο υλικό μέσω διατμητικών τάσεων. Η λειτουργία αυτή έχει μεγάλη σημασία στην περίπτωση θραύσης των ινών, καθώς το φορτίο μεταφέρεται από τη μία πλευρά της σπασμένης ίνας στην άλλη, αλλά και στις γειτονικές ίνες (Τσούβαλης - 1998).



Σχήμα 1.2: Σχηματική αναπαράσταση ενός ινώδους σύνθετου υλικού.

Τα υλικά που χρησιμοποιούνται ως μήτρες των ινωδών σύνθετων υλικών είναι ως επί το πλείστον θερμοσκληρυνόμενες ρητίνες, ενώ σε εξειδικευμένες περιπτώσεις γίνεται χρήση θερμοπλαστικών. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις πολυεστερικές, τις εποξικές, τις βινυλεστερικές και τις φαινολικές ρητίνες. Οι πρώτες, ιδίως οι ακόρεστες, είναι οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες σε ναυπηγικές εφαρμογές εξαιτίας του λογικού κόστους, της ευκολίας χρήσης και της καλής συμπεριφοράς που παρουσιάζουν στο θαλάσσιο περιβάλλον. Οι μηχανικές ιδιότητες των ρητινών (Πίνακας 1.1, Τσούβαλης - 1998) είναι αρκετά χαμηλές, καθιστώντας απαραίτητη την ενίσχυσή τους. Στον αντίποδα, παρουσιάζουν εξαιρετική αντοχή σε διαβρωτικά περιβάλλοντα και υψηλές θερμοκρασίες.

Πίνακας 1.1: Τυπικές ιδιότητες θερμοσκληρυνόμενων ρητινών.

Ρητίνη	γ [1]	E [2]	ν [3]	σ_τ [4]	ε_τ [5]	σ_c [6]	κόστος [7]
	g/cm^3	GPa		MPa	%	MPa	$/lb
Πολυεστερική (ορθοφθαλική)	1.23	3.2	0.36	65	2	130	1.05
Πολυεστερική (ισοφθαλική)	1.21	3.6	0.36	60	2.5	130	1.19
Βινυλεστερική (Derekane 411-45)	1.12	3.4	-	83	5	120	1.74
Εποξική	1.20	3.0	0.37	85	5	130	3.90
Φαινολική	1.15	3.0	-	50	2	-	1.10

[1] Ειδικό βάρος
[2] Μέτρο ελαστικότητας του Young
[3] Λόγος του Poisson
[4] Αντοχή σε εφελκυσμό
[5] Παραμόρφωση μέχρι τη θραύση σε εφελκυσμό
[6] Αντοχή σε θλίψη
[7] Τιμές 1995

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ενίσχυση του υλικού της μήτρας γίνεται με χρήση ινών ενός άλλου υλικού, δηλαδή ενισχύσεων με μήκος πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες διαστάσεις τους. Λόγω της ευθυγράμμισης της κρυσταλλικής τους δομής κατά τη διαδικασία παραγωγής τους, οι ίνες παρουσιάζουν ιδιαίτερα μεγάλη αντοχή και δυσκαμψία στη διεύθυνση του μήκους τους. Αν και μπορούν να παραλάβουν μόνο εφελκυστικά φορτία, συνεισφέρουν σημαντικά τόσο στην εφελκυστική όσο και στη θλιπτική, την καμπτική και τη διατμητική δυσκαμψία και αντοχή του τελικού υλικού. Οι ίνες που χρησιμοποιούνται ευρέως στη ναυπηγική είναι από γυαλί λόγω του χαμηλού κόστους και της υψηλής αντοχής τους, ενώ συνεχώς αυξανόμενη είναι η χρήση ινών άνθρακα και aramid. Τυπικές ιδιότητες των τύπων αυτών παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.2 (Τσούβαλης - 1998).

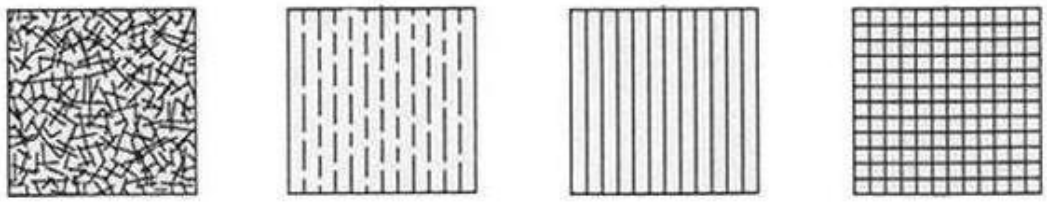
Πίνακας 1.2: Τυπικές ιδιότητες μερικών ενισχυτικών ινών.

Είδος Ίνας	γ [1]	E [2]	ν [3]	σ_τ [4]	ε_τ [5]	α [6]	κόστος [7]
	g/cm^3	GPa		MPa	%	10^6 ^oC	$/lb
Γυαλί-E	2.55	72	0.2	2400	3.0	5.0	1.1
Γυαλί-S2, -R	2.50	88	0.2	3400	3.5	5.6	5.0
Άνθρακας Υ. Α. [α] (Thornell T-40)	1.74	297	-	4100	1.4	-	13.3
Άνθρακας Υ. Α. [α] (Thornell T-700)	1.81	248	-	4500	1.8	-	12.0
Άνθρακας Υ. Α. [α] (Fortafil F-5)	1.80	345	-	3100	0.9	-0.5	13.3
Άνθρακας Υ. Μ. [β] (P-75S)	2.00	520	-	2100	0.4	-1.2	67.0
Άνθρακας Υ. Μ. [β] (P-120)	2.18	826	-	2200	0.3	-	720.0
Aramid (Kevlar® 49)	1.45	124	-	2800	2.5	-2.0	20.0

[α] Υψηλής αντοχής
[β] Υψηλού μέτρου ελαστικότητας
[1] Ειδικό βάρος
[2] Μέτρο ελαστικότητας του Young
[3] Λόγος του Poisson
[4] Αντοχή σε εφελκυσμό
[5] Παραμόρφωση μέχρι τη θραύση σε εφελκυσμό
[6] Συντελεστής γραμμικής θερμικής διαστολής
[7] Τιμές 1995

Ανάλογα με τις απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής, η ενίσχυση της μήτρας γίνεται με διάφορους τύπους διάταξης των ινών. Οι βασικές μορφές διάθεσής τους στο εμπόριο είναι το υαλοπίλημα (Chopped Strand Mat, CSM), οι πλεξίδες ινών (rovings), το υαλοΰφασμα (Woven Roving, WR), τα πεπλεγμένα υφάσματα (woven fabrics, clothes) και τα μονοαξονικά υφάσματα (Uni - Directional rovings, UD). Το υαλοπίλημα είναι ένα «χαλαρό» ύφασμα

τυχαίου προσανατολισμού που κατασκευάζεται από κοντές ίνες, συνδεδεμένες μεταξύ τους με τη βοήθεια ενός ειδικού συνδετικού υλικού. Αντίθετα, τα μονοαξονικά υφάσματα προκύπτουν από την παράλληλη σύνδεση πολλών μακριών ινών, προσανατολισμένων σε μία διεύθυνση. Οι πλεξίδες αποτελούνται από περιορισμένο αριθμό παράλληλα συνδεδεμένων μακριών ινών και χρησιμοποιούνται ως έχουν ή συνηθέστερα, πλέκονται κάθετα μεταξύ τους δίνοντας ένα «τραχύ και χοντροκομμένο» ύφασμα (υαλοΰφασμα). [1] Τέλος, η πλέξη με απλές ίνες που έχουν υποστεί περιστροφή έχει ως αποτέλεσμα πεπλεγμένα υφάσματα ή υφάσματα «πυκνής πλέξης». Ορισμένοι τύποι υφασμάτων φαίνονται στα Σχήματα 1.3 - 1.7.



(α) (β) (γ) (δ)

Σχήμα 1.3: Τύποι διάταξης ινών: (α) υαλοπίλημα, (β) μονοαξονικό ύφασμα με κοντές ίνες, (γ) μονοαξονικό ύφασμα με μακριές ίνες και (δ) υαλοΰφασμα.

Σχήμα 1.4: Υαλοπίλημα (Chopped Strand Mat, CSM).

Σχήμα 1.5: Πλεξίδες (rovings).

[1] Τα υαλοϋφάσματα διακρίνονται σε ισοσταθμισμένα (balanced) και μη, ανάλογα με τον αριθμό των ινών στις δύο διευθύνσεις πλέξης. Όταν ο αριθμός είναι περίπου ίδιος, τα υαλοϋφάσματα καλούνται ισοσταθμισμένα.

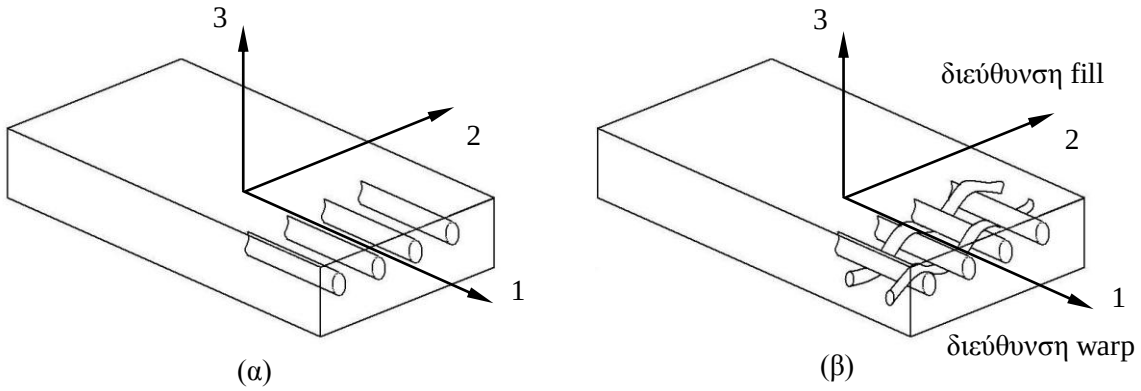
Σχήμα 1.6: Υαλοΰφασμα (Woven Roving, WR).

Σχήμα 1.7: Ύφασμα πυκνής πλέξης (woven fabric, cloth).

Το βασικότερο κατασκευαστικό στοιχείο από ινώδη σύνθετα υλικά είναι η στρώση (lamina), η οποία αποτελεί μία επίπεδη διαμόρφωση ινών σε μία μήτρα. Ο τύπος διάταξης των ινών μπορεί να είναι οποιοσδήποτε από αυτούς που αναφέρονται παραπάνω. Δύο τυπικές στρώσεις, μία μονοαξονική και μία με υαλοΰφασμα, αναπαρίστανται στο Σχήμα 1.8. Κάθε στρώση χαρακτηρίζεται από ένα σύστημα κυρίων αξόνων (1, 2, 3), παράλληλων ή κάθετων στις ίνες. Οι άξονες 1 και 2 βρίσκονται στο επίπεδό της, ενώ ο άξονας 3 είναι κάθετος σε αυτό. Επιπλέον, ο άξονας 1 είναι συνήθως παράλληλος στη διεύθυνση με τις υψηλότερες μηχανικές ιδιότητες και ο άξονας 2 είναι κάθετος σε αυτήν. Όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα, σε μία μονοαξονική στρώση, ο άξονας 1 είναι παράλληλος στις ίνες. Στην περίπτωση υαλοϋφάσματος, συμπίπτει με τη λεγόμενη warp διεύθυνση, την παράλληλη στο μήκος του ρολού ενίσχυσης, ενώ η κάθετη σε αυτήν καλείται fill. Επίσης, είναι προφανές ότι οι κύριοι άξονες μίας στρώσης υαλοπιλήματος μπορούν να έχουν οποιαδήποτε διεύθυνση.

Το σύστημα κυρίων αξόνων μίας στρώσης είναι δυνατόν να μη συμπίπτει με εκείνο των γεωμετρικών αξόνων της. Συνεπώς, ο άξονας 1 μπορεί να σχηματίζει γωνία με τον άξονα x, η οποία είναι θετική αντίστροφα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ο προσανατολισμός των κυρίων αξόνων της στρώσης έχει ιδιαίτερη σημασία κατά τη φόρτισή της. Ένα φορτίο στη διεύθυνση ενός κύριου άξονα συνεπάγεται την ορθοτροπική συμπεριφορά της, δηλαδή το μέγεθος της παραμόρφωσής της εξαρτάται από τη διεύθυνση της φόρτισης. Αντίθετα, όταν η στρώση φορτίζεται μη παράλληλα με κάποιον από τους κύριους άξονές της παρουσιάζει ανισοτροπικό χαρακτήρα, δηλαδή εκτός της μεταβολής του μεγέθους της παραμόρφωσής της συναρτήσει της διεύθυνσης, παρατηρούνται συζεύξεις έκτασης - διάτμησης και κάμψης -

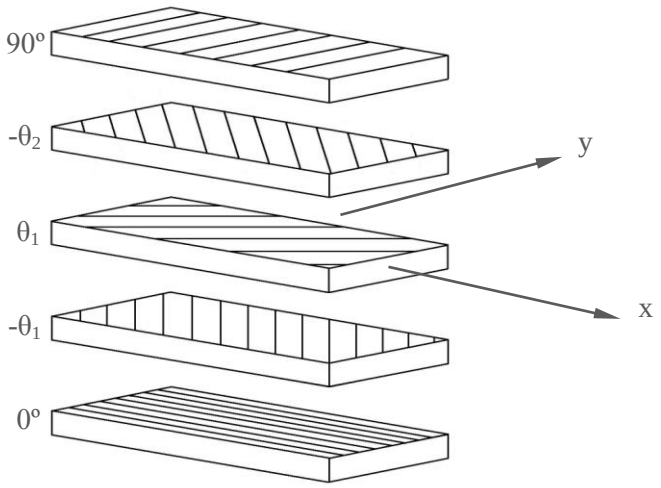
στρέψης. Ως εκ τούτου, ο προσανατολισμός των στρώσεων είναι καθοριστικός παράγοντας της μηχανικής συμπεριφοράς πιο σύνθετων διαμορφώσεων, όπως τα πολύστρωτα.



Σχήμα 1.8: Σχηματική αναπαράσταση στρώσεων με (α) μονοαξονικές και (β) πεπλεγμένες ίνες (υαλοΰφασμα).

1.2.2 Πολύστρωτα

Η χρήση των ινωδών σύνθετων υλικών προσφέρει ένα ευρύ φάσμα επιλογών όσον αφορά το υλικό μίας κατασκευής. Το φάσμα αυτό διευρύνεται με την κατασκευή πολύστρωτων (laminates), δηλαδή στοιβάδων επάλληλων διαφορετικών στρώσεων από FRP's οι οποίες κολλούνται μεταξύ τους με το υλικό της μήτρας που υπάρχει σε καθεμία από αυτές. Η διαφορετικότητα των στρώσεων συνίσταται συνήθως σε διαφορετικούς τρόπους ενισχύσεων (τύπος διάταξης των ινών, επιφανειακό βάρος ενίσχυσης, προσανατολισμός ινών) παρά σε διαφορετικά υλικά (ινών ή και μήτρας). Στην πράξη, συνηθίζεται η κατασκευή πολύστρωτων από στρώσεις ίδιων ιδιοτήτων και παχών (κανονικά πολύστρωτα), αλλά διαφορετικών προσανατολισμών των ινών τους τόσο μεταξύ των στρώσεων όσο και σε σχέση με τους γεωμετρικούς άξονες του πολύστρωτου (Σχήμα 1.9).



Σχήμα 1.9: Ανεπτυγμένη όψη ενός πολύστρωτου με στρώσεις διαφορετικών προσανατολισμών.

Τα πολύστρωτα διακρίνονται βάσει της διεύθυνσης των ινών των στρώσεών τους σε εκείνα με διασταυρούμενες (cross - ply) και εκείνα με διαγώνιες στρώσεις (angle - ply). Στην πρώτη περίπτωση, οι ίνες των στρώσεων ευθυγραμμίζονται με τα γεωμετρικά άκρα του πολύστρωτου, ενώ στη δεύτερη, μία τουλάχιστον στρώση δεν ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή. Το πολύστρωτο του Σχήματος 1.9 έχει διαγώνιες στρώσεις. Επιπρόσθετα, ένα πολύστρωτο είναι συμμετρικό όταν για κάθε στρώση στο μισό πάχος του υπάρχει στο άλλο μισό πάχος μία άλλη, συμμετρική ως προς το μέσο επίπεδο στρώση, ίδιου υλικού και προσανατολισμού των ινών. Όταν όμως τα πρόσημα της γωνίας προσανατολισμού σε κάθε ζεύγος συμμετρικών στρώσεων είναι αντίθετα, τότε είναι αντισυμμετρικό. Τα πολύστρωτα των παραπάνω τύπων είναι εν γένει ανισοτροπικά, αλλά με αύξηση του αριθμού των στρώσεών τους (μεγαλύτερου από περίπου οκτώ) τείνουν να αποκτήσουν ορθοτροπικό χαρακτήρα (Τσούβαλης - 1998).

Τα ινώδη σύνθετα υλικά που χρησιμοποιούνται σε ναυπηγικές εφαρμογές ανήκουν στην κατηγορία των πολύστρωτων. Το χαμηλό ειδικό βάρος τους και οι συνεπαγόμενες υψηλές ειδικές ιδιότητές τους (λόγοι των τιμών των ιδιοτήτων προς το βάρος) αποτελούν σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι των συμβατικών ναυπηγικών υλικών, καθώς συμβάλλουν στην κατασκευή ελαφρύτερων σκαφών, ανάλογου ή και ανώτερου επιπέδου αντοχής. Τυπικές ιδιότητες ορισμένων πολύστρωτων υλικών, αλλά και μερικών συμβατικών, παρουσιάζονται στους Πίνακες 1.3 και 1.4 (Τσούβαλης - 1998, Naik et al - 2000). Οι ιδιότητες των πολύστρωτων είναι στη διεύθυνση των ινών ή κάθετα σε αυτές. Οι τιμές τους σε άλλες διευθύνσεις μπορεί να είναι σημαντικά μικρότερες εξαιτίας της ανισοτροπικότητας ή συχνότερα, της ορθοτροπικότητας των υλικών αυτών. Το φαινόμενο αυτό αντισταθμίζεται από τη δυνατότητα προσανατολισμού των ενισχυτικών ινών των στρώσεων, άρα και της επίτευξης υψηλής αντοχής και δυσκαμψίας, στις διευθύνσεις των φορτίων.

Η δυνατότητα παραγωγής ελαφρύτερων κατασκευών, ενισχυμένων εκεί όπου ακριβώς χρειάζεται, συνδυάζεται με έναν αριθμό επιπρόσθετων πλεονεκτημάτων που παρουσιάζουν τα πολύστρωτα από FRP's. Μεταξύ αυτών ξεχωρίζουν η μεγάλη αντίσταση σε διαβρωτικά περιβάλλοντα, όπως το θαλάσσιο, και η εξαιρετική συμπεριφορά έναντι χημικών ενώσεων, όπως τα οξειδωτικά μέσα και οι οργανικές ενώσεις. Επιπλέον, τα υλικά αυτά παρέχουν ευελιξία στην κατασκευή, με αποτέλεσμα μεγάλες και πολύπλοκες κατασκευές να αποτελούνται συχνά από ένα κομμάτι. Άλλα σημαντικά πλεονεκτήματα είναι η δυνατότητα επίτευξης χαμηλών τιμών του συντελεστή γραμμικής θερμικής διαστολής, η χαμηλή θερμική και ηλεκτρική αγωγιμότητα, η εξαιρετική αντοχή σε κόπωση, η απουσία ραφών και ενώσεων, τα πολύ καλά χαρακτηριστικά απόσβεσης, η εύκολη επισκευή τους και η μικρή συντήρηση που απαιτούν, ιδίως οι μικρές κατασκευές.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.4, τα πολύστρωτα από FRP's χαρακτηρίζονται από χαμηλές τιμές του μέτρου ελαστικότητας του Young, γεγονός που λειτουργεί άλλοτε ως πλεονέκτημα και άλλοτε ως μειονέκτημα. Η μικρή δυσκαμψία τους ικανοποιεί τις υψηλές απαιτήσεις απορρόφησης ενέργειας σε μία κατασκευή, ενώ δεν εξυπηρετεί σε περιπτώσεις όπου επιτρέπονται μικρές παραμορφώσεις. Επιπρόσθετα, τα υλικά αυτά δεν παρουσιάζουν πλαστική περιοχή, άρα και ολκιμότητα, με αποτέλεσμα η θραύση τους να επέρχεται ουσιαστικά χωρίς προειδοποίηση. Επίσης, μειονεκτήματα των πολύστρωτων είναι η δυσκολία και η μεγάλη διάρκεια της επιθεώρησής τους λόγω των μη σταθερών συνθηκών

κατασκευής, η πολυπλοκότητα και οι αυξημένες απαιτήσεις των μεθόδων παραγωγής τους, το φαινόμενο του ερπυσμού, η μειωμένη αντοχή σε τριβή και η ευπάθεια σε φωτιά.

Πίνακας 1.3: Τυπικές ιδιότητες αντοχής πολύστρωτων από FRP's.

Υλικό	V_f [1]	$\sigma_{1\tau}$ [2]	$\sigma_{2\tau}$ [3]	σ_{1c} [4]	σ_{2c} [5]	τ_{12} [6]
		MPa				
E-glass/polyester (CSM)	0.19	108	108.0	148	148.0	85.0
E-glass/polyester (WR-balanced)	0.34	250	250.0	210	210.0	100.0
E-glass/polyester (UD)	0.43	750	-	600	-	-
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR)	0.33	360	360	240	205	98
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG06 [α]	0.4	315	315	210	210	28
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG07 [α]	0.4	290	290	196	196	28
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG02 [α]	0.4	250	250	183	183	28
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG08 [α]	0.4	230	230	170	170	28
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG10 [α]	0.4	210	210	120	120	28
E-glass/epoxy ($\pm 45^o$ WR)	0.33	185	185	122	122	137
E-glass/epoxy (UD)	0.53	1190	73	1001	159	67
E-glass/epoxy (UD)	0.65	1297	27.8	820	150	39.2
E-glass/epoxy (UD)	0.60	1197	27.7	740	145.0	38.7
E-glass/epoxy (UD)	0.4	798	27.1	480	140	36.8
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR)	0.5	625	625	500	500	130
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG06 [α]	0.4	565	565	420	420	66
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG07 [α]	0.4	500	500	370	370	66
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG02 [α]	0.4	405	405	300	300	66
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG08 [α]	0.4	365	365	255	255	66
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG10 [α]	0.4	345	345	240	240	66
Carbon/epoxy ($\pm 45^o$ WR)	0.5	240	240	200	200	-
Carbon/epoxy (UD)	0.57	2040	90	1000	148	49
Carbon/epoxy (UD)	0.7	1744	52.6	1650	260	107.8
Carbon/epoxy (UD)	0.65	1622	52	1525	250	106.4
Carbon/epoxy (UD)	0.4	1013	49.5	940	220	100.5
Aramid/epoxy ($0^o/90^o$ WR)	0.5	517	517	172	172	110
Aramid/epoxy (UD)	0.6	1379	30	276	138	60
Steel (B-quality)	-	325 [β]	325 [β]	340 [β]	340 [β]	190 [β]
Aluminium (5083 alloy)	-	150 [β]	150 [β]	150 [β]	150 [β]	87 [β]
Marine plywood (mahogany)	-	40	40	25	25	8

[α] Σειρά WG με υφάσματα διαφόρων μεγεθών των ινών και πυκνοτήτων της πλέξης (Naik et al - 2000)

[β] Όριο διαρροής σε 0.2% παραμόρφωση

[1] Περιεκτικότητα κατ' όγκο σε ίνες

[2] Αντοχή σε εφελκυσμό στη διεύθυνση των ινών

[3] Αντοχή σε εφελκυσμό σε διεύθυνση κάθετη στις ίνες

[4] Αντοχή σε θλίψη στη διεύθυνση των ινών
[5] Αντοχή σε θλίψη σε διεύθυνση κάθετη στις ίνες
[6] Αντοχή σε διάτμηση στο επίπεδο του πολύστρωτου

Πίνακας 1.4: Τυπικές ιδιότητες δυσκαμψίας πολύστρωτων από FRP's.

Υλικό	γ [1]	E_1 [2]	E_2 [3]	G_{12} [4]	ILSS [5]	ν_{12} [6]
	g/cm^3	GPa			MPa	
E-glass/polyester (CSM)	1.45	8	8	2.75	-	0.32
E-glass/polyester (WR-balanced)	1.70	15	15	3.5	-	-
E-glass/polyester (UD)	1.80	30	-	3.5	-	-
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR)	1.92	17	17	5	60	0.24
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG06 [α]	1.75	22	22	3.91	-	0.17
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG07 [α]	1.75	21	21	3.91	-	0.17
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG02 [α]	1.75	21	21	3.92	-	0.17
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG08 [α]	1.75	20	20	3.92	-	0.18
E-glass/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG10 [α]	1.75	18	18	3.94	-	0.19
E-glass/epoxy ($\pm 45^o$ WR)	1.92	10	10	8	48	0.70
E-glass/epoxy (UD)	1.92	39	15	4	90	-
E-glass/epoxy (UD)	2.11	48	15	5.10	-	0.32
E-glass/epoxy (UD)	2.04	45	13	4.40	-	0.32
E-glass/epoxy (UD)	1.75	31	8	2.80	-	0.33
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR)	1.53	70	70	5	57	-
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG06 [α]	1.41	53	53	3.79	-	0.06
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG07 [α]	1.41	50	50	3.79	-	0.06
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG02 [α]	1.41	44	44	3.79	-	0.06
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG08 [α]	1.41	38	38	3.79	-	0.07
Carbon/epoxy ($0^o/90^o$ WR-balanced) WG10 [α]	1.41	29	29	3.79	-	0.09
Carbon/epoxy ($\pm 45^o$ WR)	1.53	18	18	27	57	-
Carbon/epoxy (UD)	1.57	134	11	5	94	0.26
Carbon/epoxy (UD)	1.58	162	15	5.70	-	0.28
Carbon/epoxy (UD)	1.55	151	13	4.90	-	0.29
Carbon/epoxy (UD)	1.41	94	8	2.80	-	0.31
Aramid/epoxy ($0^o/90^o$ WR)	1.33	31	31	2	70	-
Aramid/epoxy (UD)	1.38	76	5	2	83	0.34
Steel (B-quality)	7.80	207	207	80	-	0.33
Aluminium (5083 alloy)	2.80	70	70	26	-	0.33
Marine plywood (mahogany)	0.60	7	7	1	-	-

[α] Σειρά WG με υφάσματα διαφόρων μεγεθών των ινών και πυκνοτήτων της πλέξης (Naik et al - 2000)
[1] Ειδικό βάρος
[2] Μέτρο ελαστικότητας του Young στη διεύθυνση των ινών
[3] Μέτρο ελαστικότητας του Young σε διεύθυνση κάθετη στις ίνες

[4] Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο του πολύστρωτου
[5] Αντοχή σε διάτμηση μεταξύ των στρώσεων
[6] Λόγος του Poisson στο επίπεδο του πολύστρωτου.

Αν και από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι τα πολύστρωτα από ινώδη σύνθετα υλικά δεν αποτελούν λύση για κάθε κατασκευαστικό πρόβλημα, εν τούτοις, παρουσιάζουν σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι των παραδοσιακών κατασκευαστικών υλικών. Η χρήση τους στη ναυπηγική περιλαμβάνει την κατασκευή υπερκατασκευών, δεξαμενών και βοηθητικών οργάνων (θόλοι προστασίας οργάνων πλοήγησης, υδροδυναμικά πτερύγια) μεγάλων πλοίων. Επίσης, αποτελούν το βασικό υλικό κατασκευής μικρών σκαφών (βάρκες, σκάφη αναψυχής, σωσίβιες λέμβοι), αλιευτικών, μικρών φορτηγών και επιβατηγών (<50m), πολεμικών σκαφών (ναρκαλιευτικά, περιπολικά, αποβατικά) και σκαφών υψηλής απόδοσης, όπως τα ιστιοπλοϊκά και τα ταχύπλοα. Λόγω του υψηλού επιπέδου ασφάλειας που απαιτείται για τις κατασκευές αυτές, η σχεδίασή τους προϋποθέτει την καλή γνώση της μηχανικής συμπεριφοράς των πολύστρωτων και κατ' επέκταση, των τρόπων αστοχίας αυτών, οι οποίοι διαφέρουν γενικά από εκείνους των συμβατικών υλικών.

1.2.3 Αποχωρισμός των στρώσεων ενός πολύστρωτου

Ένας συνήθης τρόπος αστοχίας των πολύστρωτων από ινώδη σύνθετα υλικά είναι ο αποχωρισμός των στρώσεών τους (delamination). Οι πιθανές κατασκευαστικές ατέλειες και οι καταπονήσεις που υφίσταται μία κατασκευή, σε συνδυασμό με τη διαμόρφωση των υλικών αυτών με επάλληλες στρώσεις, είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε τοπική θραύση της μήτρας (matrix cracking) στη διεπιφάνεια μεταξύ δύο στρώσεων. Αποτέλεσμα αυτού είναι η δημιουργία δύο ξεχωριστών τμημάτων του πολύστρωτου εκατέρωθεν της περιοχής της θραύσης, φαινόμενο που επηρεάζει τη συνολική συμπεριφορά της κατασκευής.

Οι στρώσεις ενός πολύστρωτου χαρακτηρίζονται εν γένει από διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες λόγω συνήθως των διαφορετικών μεταξύ τους προσανατολισμών. Αυτό έχει ως συνέπεια την τάση κάθε στρώσης να παραμορφωθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες υπό την επίδραση ενός φορτίου, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη ορθών και διατμητικών τάσεων μεταξύ των στρώσεων. Οι διαστρωματικές αυτές τάσεις μεγιστοποιούνται στα άκρα του πολύστρωτου και είναι δυνατόν να υπερβούν το όριο αντοχής του συνδετικού υλικού τους, δηλαδή του υλικού της μήτρας, το οποίο χαρακτηρίζεται από χαμηλές μηχανικές ιδιότητες. Η συνεπαγόμενη θραύση της μήτρας και ο αποχωρισμός των στρώσεων ευνοούνται από τυχόν κατασκευαστικές ατέλειες, όπως τα κενά αέρα. Στον Πίνακα 1.4 παρατίθενται οι τιμές της αντοχής σε διάτμηση μεταξύ των στρώσεων για ορισμένα πολύστρωτα.

Οι κατασκευαστικές ατέλειες στο υλικό της μήτρας είναι υπεύθυνες για τον αποχωρισμό των στρώσεων μακρυά από τα άκρα, όπου οι διαστρωματικές τάσεις είναι αμελητέες. Η παρουσία κενών αέρα ανάμεσα στις στρώσεις ενός πραγματικού πολύστρωτου είναι πολύ πιθανή λόγω σφαλμάτων κατά την παραγωγή. Οι ατέλειες αυτές αποτελούν την απαρχή αστοχίας του πολύστρωτου, καθώς η καταπόνησή του με εναλλασσόμενα ή κρουστικά φορτία οδηγεί σε αύξηση του μεγέθους τους ή σε μεταξύ τους ένωση και τελικά, στον τοπικό αποχωρισμό των στρώσεων. Η κόπωση λόγω κυματισμών και τα κρουστικά φορτία λόγω

σφυρόκρουσης και ατυχημάτων, όπως πτώσεις αντικειμένων, συγκρούσεις και προσαράξεις, είναι δυνατόν να προκαλέσουν αποχωρισμό των στρώσεων σε ναυπηγικά πολύστρωτα, όπως αυτά που χρησιμοποιούνται στον πυθμένα, στο κατάστρωμα και στις φρακτές ενός σκάφους.

Ο αποχωρισμός δύο στρώσεων συμβαίνει σε μία περιοχή της διεπιφάνειας μεταξύ αυτών με τη δημιουργία δύο ξεχωριστών τμημάτων του πολύστρωτου εκατέρωθεν αυτής. Η περιοχή αυτή είναι διαφόρων σχημάτων και μεγεθών και μπορεί να βρίσκεται σε διάφορες θέσεις κατά το μήκος, το πλάτος και το πάχος του πολύστρωτου. Επιπλέον, μία κατασκευή είναι δυνατόν να αστοχήσει με αυτόν τον τρόπο σε περισσότερες από μία περιοχές. Σε κάθε περίπτωση, το αρχικό πολύστρωτο χωρίζεται σε δύο υποπολύστρωτα (sublaminates) στην περιοχή του αποχωρισμού, τα οποία αποτελούνται από μικρότερο αριθμό στρώσεων και μπορούν να παραμορφωθούν ελεύθερα, όντας όμως το καθένα φυσικό εμπόδιο του άλλου.

Η αλλαγή της γεωμετρίας ενός πολύστρωτου λόγω του αποχωρισμού των στρώσεών του επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά του. Έτσι, οι λιγότερες στρώσεις των υποπολύστρωτων συνεπάγονται μείωση των μηχανικών ιδιοτήτων και αύξηση της ανισοτροπικότητάς τους, καθιστώντας πιθανές τις μεγαλύτερες και εντονότερα συζευγμένες παραμορφώσεις αυτών. Επιπλέον, η ελευθερία παραμόρφωσής τους μπορεί να οδηγήσει σε φορτίσεις μεταξύ αυτών, λόγω της παρεμπόδισης της παραμόρφωσης του ενός από το άλλο, ή στην περαιτέρω θραύση της μήτρας και τη διεύρυνση της επιφάνειας του αποχωρισμού. Η διεύρυνση αυτή οφείλεται στην απομάκρυνση μεταξύ των δύο υποπολύστρωτων (άνοιγμα), στη μεταξύ τους επίπεδη ή αντεπίπεδη διάτμηση (γλίστρημα ή σχίσιμο) ή σε συνδυασμούς αυτών (Σχήμα 1.10). [2] Τα παραπάνω, σε συνδυασμό με τη μικρότερη διασπορά των τάσεων διαμέσου της μήτρας λόγω της τοπικής θραύσης της, οδηγούν στην εξασθένιση της αντοχής του πολύστρωτου. Σε αυτό συμβάλλει επίσης η συγκέντρωση τάσεων στα όρια της επιφάνειας του αποχωρισμού. Εκτός των άλλων, η παρουσία μεγάλων κενών μεταξύ των στρώσεων, κυρίως κοντά στην εξωτερική επιφάνεια του πολύστρωτου, ευνοεί την εμφάνιση ανεπιθύμητων φαινομένων, όπως η ώσμωση. [3]

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, ο αποχωρισμός των στρώσεων ενός πολύστρωτου αποτελεί έναν σύνθετο τρόπο αστοχίας που επηρεάζει σημαντικά και με διάφορους τρόπους τη μηχανική συμπεριφορά του. Κατά συνέπεια, κρίνεται απαραίτητη η κατανόηση της επίδρασης αυτής, δεδομένου ότι τα υλικά αυτά χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές με υψηλές απαιτήσεις ασφάλειας. Στις ναυπηγικές κατασκευές ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η επίδραση του αποχωρισμού στο λυγισμό, φαινόμενο που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά των κατασκευαστικών στοιχείων της γάστρας ενός σκάφους.

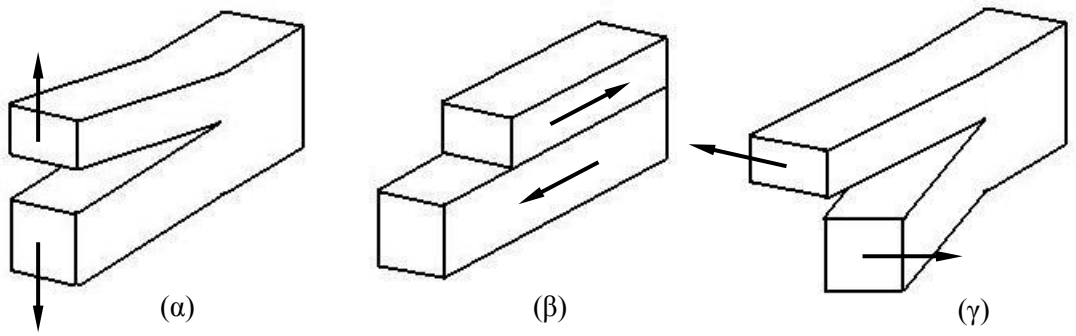
1.2.4 Λυγισμός πολύστρωτων πλακών

Βασική προϋπόθεση της σχεδίασης μίας κατασκευής αποτελεί η ικανοποίηση διαφόρων κριτηρίων αστοχίας, τα οποία καθορίζουν μέγιστα όρια τόσο για τα φορτία (τάσεις) που

[2] Χαρακτηριστικό μέγεθος της διεύρυνσης της επιφάνειας του αποχωρισμού των στρώσεων είναι ο ρυθμός απελευθέρωσης της ενέργειας παραμόρφωσης (strain energy release rate) και εξαρτάται από τον τύπο της σχετικής παραμόρφωσης των πολύστρωτων.

[3] Το φαινόμενο της ώσμωσης χαρακτηρίζεται από την εμφάνιση φυσαλίδων στην επιφάνεια του πολύστρωτου και οφείλεται στη δημιουργία ωσμωτικής πίεσης σε θύλακες νερού μεταξύ πολύστρωτου και προστατευτικού επιστρώματος (gel coat), αλλά και μεταξύ των εξωτερικών στρώσεων.

μπορεί να παραλάβει η κατασκευή όσο και για τις παραμορφώσεις (βέλος κάμψης) που μπορεί να υποστεί. Μεταξύ των κριτηρίων αυτών ιδιαίτερη θέση κατέχουν τα σχετιζόμενα με το λυγισμό (buckling), καθώς το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζεται από απαράδεκτα μεγάλες παραμορφώσεις που οδηγούν πρακτικά σε αστοχία της κατασκευής.



Σχήμα 1.10: Σχηματική αναπαράσταση των βασικών τύπων παραμόρφωσης των υποπολύστρωτων: (α) άνοιγμα, (β) γλίστρημα και (γ) σχίσιμο.

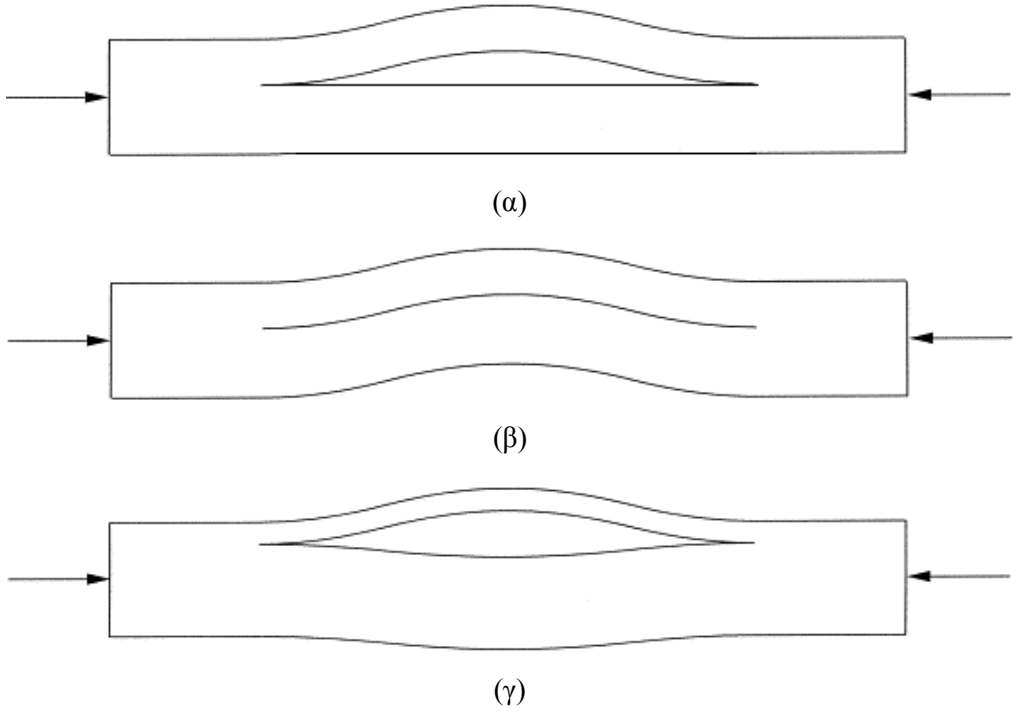
Ο λυγισμός αποτελεί φαινόμενο μη ευσταθούς ισορροπίας μίας κατασκευής, η οποία υπόκειται σε αξονική ή επίπεδη καταπόνηση. Για μικρά φορτία, η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής, οπότε η κατασκευή επιστρέφει στην αρχική μορφή της μετά την αποφόρτιση, ενώ η απόκρισή της είναι γραμμική. Όταν όμως τα φορτία γίνουν αρκετά μεγάλα, η κατάσταση ισορροπίας παύει να είναι ευσταθής και η κατασκευή υφίσταται παραμορφώσεις κάθετα στη διεύθυνση ή στο επίπεδο της φόρτισης. Επιπλέον, η συμπεριφορά της γίνεται μη γραμμική, ενώ είναι πιθανή η μείωση της αντοχής της λόγω των μόνιμων παραμορφώσεων. Το σημείο έναρξης της απόκλισης της κατασκευής από την αρχική επίπεδη μορφή της αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη τιμή του φορτίου, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (critical buckling load, P_{cr}), το οποίο είναι εν γένει μικρότερο από το μέγιστο φορτίο που μπορεί να παραλάβει η κατασκευή.

Κάθε ελαστικό σύστημα μπορεί να υποστεί λυγισμό υπό κατάλληλη φόρτιση. Ως επί το πλείστον, τάση προς λυγισμό παρουσιάζουν κατασκευές με μία ή δύο διαστάσεις σημαντικά μικρότερες από την τρίτη, όπως οι λεπτές πλάκες. Μία πλάκα θεωρείται λεπτή όταν το πάχος της είναι τουλάχιστον είκοσι φορές μικρότερο του μήκους ή του πλάτους της, όποιο από τα δύο είναι μικρότερο (Jensen - 2006). Ο λυγισμός τέτοιων πλακών οφείλεται στις υψηλές μεμβρανικές θλιπτικές τάσεις που αναπτύσσονται κατά την επίπεδη φόρτισή τους. Τυπικά παραδείγματα λεπτών πλακών είναι τα τμήματα μεταξύ των ενισχυτικών των ελασμάτων (πυθμένα, καταστρώματος και πλευρικά) και των φρακτών ενός πλοίου. Τα κατασκευαστικά αυτά στοιχεία υφίστανται επίπεδες φορτίσεις λόγω της διαμήκους κάμψης του πλοίου και των φορτίων εκατέρωθεν αυτού και συνεπώς, μπορούν να λυγίσουν.

Η συνεχώς αυξανόμενη χρήση των πολύστρωτων από ινώδη σύνθετα υλικά στη ναυπηγική εντείνει την κρισιμότητα του προβλήματος του λυγισμού λεπτών πλακών. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο εδάφιο 1.2.2, η χρήση των υλικών αυτών, που χαρακτηρίζονται από χαμηλές τιμές του μέτρου ελαστικότητας του Young, συνεπάγεται μείωση της δυσκαμψίας

των κατασκευών. Ως εκ τούτου, η κατασκευή σκαφών από πολύστρωτα υλικά καθιστά τα επιμέρους κατασκευαστικά στοιχεία της γάστρας τους, όπως οι επίπεδες πλάκες μεταξύ των ενισχυτικών των φρακτών, του πυθμένα, του καταστρώματος και των πλευρών του σκάφους, περισσότερο εύκαμπτα από τα αντίστοιχα μεταλλικά ελάσματα. Συνέπεια αυτού είναι η αυξημένη πιθανότητα λυγισμού τους υπό το καθεστώς επίπεδων καταπονήσεων, η υπέρβαση των επιτρεπόμενων ορίων παραμόρφωσης και πρακτικά, η αστοχία τους.

Εκτός των επίπεδων φορτίσεων, τα κατασκευαστικά στοιχεία της γάστρας ενός σκάφους υπόκεινται σε κόπωση και κρουστικά φορτία. Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο εδάφιο, οι καταπονήσεις αυτές μπορούν να προκαλέσουν αποχωρισμό των στρώσεων στοιχείων κατασκευασμένων από πολύστρωτα υλικά. Συνεπώς, κατά τη λειτουργία ενός σκάφους από τέτοια υλικά και λόγω του σύνθετου συστήματος καταπονήσεων που δημιουργείται, είναι πιθανός ο λυγισμός μίας πλάκας που έχει αστοχήσει με αυτόν τον τρόπο. Η επίπεδη καταπόνησή της μπορεί να προκαλέσει επιμέρους λυγισμό των υποπολύστρωτών της για χαμηλότερα φορτία, εξαιτίας των λιγότερων στρώσεών τους, άρα και της μικρότερης δυσκαμψίας τους. Επιπλέον, η σχετική ελευθερία παραμόρφωσής τους οδηγεί σε γενικό λυγισμό της πλάκας (global buckling), με τα δύο υποπολύστρωτα να λυγίζουν προς την ίδια κατεύθυνση με ίσα βέλη κάμψης, σε τοπικό (local buckling), όταν μόνο το ένα λυγίζει, ενώ το άλλο δεν παραμορφώνεται, ή μεικτής μορφής (mixed mode buckling), όπου το καθένα λυγίζει ξεχωριστά προς την ίδια ή την αντίθετη κατεύθυνση (Σχήμα 1.11).



Σχήμα 1.11: Σχηματική αναπαράσταση διαφόρων τύπων λυγισμού μίας πλάκας: (α) τοπικός (local mode), (β) γενικός (global mode) και (γ) μεικτής μορφής (mixed mode).

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, το φαινόμενο του λυγισμού μίας πλάκας που έχει υποστεί αποχωρισμό των στρώσεών της είναι ιδιαίτερα κρίσιμο για την ασφάλεια σκαφών

από πολύστρωτα υλικά. Η δυνατότητα επιμέρους λυγισμού των εύκαμπτων υποπολύστρωτών της καθιστά πιθανή την αστοχία της για σχετικά χαμηλά επίπεδα καταπονήσεων, λόγω υπέρβασης των επιτρεπόμενων ορίων παραμόρφωσης. Επιπλέον, στην περίπτωση τοπικού λυγισμού, είναι δυνατόν να υπάρξει περαιτέρω διεύρυνση της επιφάνειας του αποχωρισμού, ενώ οι μόνιμες παραμορφώσεις και η πιθανή θραύση των υποπολύστρωτων, εξαιτίας των υψηλών τάσεων που αναπτύσσονται κατά το λυγισμό, έχουν ως αποτέλεσμα την εξασθένιση της αντίστασης της πλάκας σε νέες καταπονήσεις. Συνεπώς, η γνώση του τρόπου με τον οποίο επιδρούν οι παράμετροι του αποχωρισμού των στρώσεων στο λυγισμό των πλακών αποτελεί βασική προϋπόθεση για την ασφαλή σχεδίαση σκαφών από πολύστρωτα υλικά.

1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Τα πλεονεκτήματα των ινωδών σύνθετων υλικών έναντι των συμβατικών είναι γνωστά από τις πρώτες δεκαετίες του προηγούμενου αιώνα. Η δυνατότητα παραγωγής κατασκευών πολύπλοκων μορφών με μικρότερο κόστος και ικανοποιητική αντοχή οδήγησε από νωρίς (1936) στη χρησιμοποίησή τους στην αεροναυπηγική. Σύντομα, ακολούθησαν η ναυπηγική και η αεροδιαστημική, επιτυγχάνοντας την παραγωγή ελαφρύτερων και αποδοτικότερων τμημάτων των κατασκευών. Η χρήση των FRP’s σε ναυπηγικές εφαρμογές χρονολογείται από τις αρχές της δεκαετίας του 1950, οπότε πραγματοποιήθηκε μαζική παραγωγή μικρών σκαφών από πολυεστερική ρητίνη με ενίσχυση ινών γυαλιού (Strong - 2002). Έκτοτε παρατηρείται μία τάση αντικατάστασης των παραδοσιακών υλικών από αυτά, με αποτέλεσμα σκάφη από FRP’s να περιλαμβάνονται στους στόλους όλων των μεγάλων χωρών. Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι στις αρχές της προηγούμενης δεκαετίας το 60% των νηολογημένων στην Ιαπωνία αλιευτικών σκαφών ήταν από πλαστικά ενισχυμένα με ίνες γυαλιού (Glass fibre Reinforced Plastics, GRP’s), συμπεριλαμβανομένων των σκαφών με μήκος μέχρι 45m (Τσούβαλης - 1998).

Καθοριστικός παράγοντας της ευρείας και διαρκώς αυξανόμενης χρήσης των ινωδών σύνθετων υλικών είναι η κατανόηση και η πρόβλεψη της συμπεριφοράς κατασκευών από τέτοια υλικά υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης που αναμένεται να συναντήσουν κατά τη λειτουργία τους. Όπως έχει αναφερθεί στα προηγούμενα εδάφια, τα κατασκευαστικά στοιχεία της γάστρας ενός σκάφους, κατασκευασμένης από FRP’s, υπόκεινται σε σύνθετες καταπονήσεις, ικανές να προκαλέσουν το λυγισμό αυτών, αλλά και αστοχία με τη μορφή του αποχωρισμού των στρώσεών τους. Συνεπώς, η διερεύνηση του λυγισμού πολύστρωτων πλακών και της επίδρασης του αποχωρισμού των στρώσεων σε αυτόν είναι ζωτικής σημασίας για την ασφαλή σχεδίαση και λειτουργία των σκαφών.

Ο λυγισμός άθικτων πολύστρωτων πλακών αποτελεί αντικείμενο ενός μεγάλου αριθμού μελετών, σκοπός των οποίων είναι ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού για διάφορες περιπτώσεις πολύστρωτων. Προς αυτήν την κατεύθυνση έχουν γίνει σημαντικές προσπάθειες για την απόκτηση απλών μαθηματικών τύπων για άμεσους υπολογισμούς, όπως αυτοί που υπάρχουν για απλά εδρασμένες (Zor - 2003) και για πακτωμένες (Chirica et al - 2008) ορθοτροπικές πολύστρωτες πλάκες υπό μονοαξονική θλίψη. Ένα εξίσου εύχρηστο μέσο υπολογισμών είναι οι σχεδιαστικές καμπύλες λυγισμού, που παρέχουν τιμές αδιάστατων συντελεστών λυγισμού συναρτήσει χαρακτηριστικών μεγεθών του πολύστρωτου. Τέτοιες

καμπύλες έχουν αναπτυχθεί τόσο για πακτωμένες όσο και για απλά εδρασμένες ορθοτροπικές πολύστρωτες πλάκες, υποκείμενες σε ομοιόμορφη ή τριγωνική μονοαξονική θλίψη, επίπεδη κάμψη, διάτμηση ή συνδυασμούς αυτών (Καρυαμπάς - 1992, Tsouvalis - 2004). Επίσης, ο Nemeth έχει κατασκευάσει καμπύλες για απλά εδρασμένες ή πακτωμένες, ορθοτροπικές και ανισοτροπικές πολύστρωτες πλάκες. Οι καμπύλες αυτές αφορούν σε ένα ευρύτερο φάσμα φορτίσεων που μπορούν να οδηγήσουν στο λυγισμό (Nemeth - 1992, Nemeth - 1995).

Ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου πραγματοποιείται επίσης μέσω γενικευμένων αναλυτικών μαθηματικών μοντέλων, με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης ορισμένων παραμέτρων στο φαινόμενο του λυγισμού. Μία τέτοια παράμετρος είναι η κατανομή του φορτίου στα άκρα της πλάκας, καθώς διαφορετικές μορφές αυτής οδηγούν σε διαφορετικές τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, με την περίπτωση του σημειακού φορτίου να είναι η δυσμενέστερη (Kalyan - 2006). Οι κατασκευαστικές παράμετροι ενός πολύστρωτου (προσανατολισμός των ινών, ακολουθία των στρώσεων) αποτελούν συχνά αντικείμενο παραμετρικής μελέτης. Ο Παπάζογλου έχει ασχοληθεί με την επίδραση του βαθμού ορθοτροπικότητας (E_1/E_2) και του προσανατολισμού των ινών στο λυγισμό πολύστρωτων πλακών με διασταυρούμενες ή διαγώνιες στρώσεις, αντίστοιχα, για διάφορες κατανομές φορτίου σε συνδυασμό με διάτμηση (Papazoglou et al - 1992). Η μελέτη αυτή έχει δείξει ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αυξάνεται με αύξηση της ορθοτροπικότητας και για γωνίες προσανατολισμού μεταξύ 45° και 60°, ενώ η τιμή του μειώνεται σημαντικά με την εφαρμογή διατμητικής φόρτισης. Ανάλογα συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν άμεσα από τις κατασκευαστικές καμπύλες λυγισμού (Nemeth - 1992, Nemeth - 1995).

Ένα πολύστρωτο από ινώδη σύνθετα υλικά μπορεί υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης να αστοχήσει λόγω θραύσης των ινών ή της μήτρας του, αποσύνδεσης αυτών ή αποχωρισμού των στρώσεών του. Σημαντικές προσπάθειες έχουν γίνει για την κατανόηση των μηχανισμών έναρξης αυτών των τρόπων αστοχίας (Hassan - 2007), ιδιαίτερα όμως του αποχωρισμού των στρώσεων, που εμφανίζεται συχνότερα σε τέτοιες κατασκευές. Προς την κατεύθυνση αυτή, επιχειρείται η κατασκευή αναλυτικών μαθηματικών μοντέλων, με σκοπό την ικανοποιητική πρόβλεψη της εμφάνισης, καθώς και της περαιτέρω διεύρυνσης της επιφάνειας του αποχωρισμού (Wang - 1983, Barbero - 1991, Williams - 1996). Σε ορισμένες περιπτώσεις, τα μοντέλα αυτά συνδυάζονται με εκείνα των πεπερασμένων στοιχείων, μειώνοντας σημαντικά το χρόνο επίλυσης του προβλήματος (Shaw - 1988). Εξάλλου, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται ικανοποιητικά για τη μοντελοποίηση του αποχωρισμού των στρώσεων, με σκοπό την πρόβλεψη της διεύρυνσης της επιφάνειάς του (Guedra-Degeorges et al - 1992, Jensen - 2002, Abdullah et al - 2004, de Borst - 2005).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της επίδρασης του αποχωρισμού των στρώσεων στο λυγισμό πολύστρωτων πλακών. Στο πλαίσιο αυτό, έχουν αναπτυχθεί απλές μεθοδολογίες υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ενός πολύστρωτου και των υποπολύστρωτων αυτού (Bull - 1995). Αντίστοιχες μεθοδολογίες είναι εκείνες των Καρδοματέα και Shan, όπου μέσω απλών μαθηματικών τύπων προκύπτει το κρίσιμο φορτίο τοπικού και γενικού λυγισμού απλά εδρασμένων ή πακτωμένων μακριών πλακών, οι οποίες φορτίζονται μονοαξονικά (Kardomateas - 1989, Shan - 2003). Επιπλέον, σχετικά ακριβείς προσεγγίσεις του προβλήματος παρέχουν τα γενικευμένα αναλυτικά

μοντέλα. Ο Sallam έχει κατασκευάσει ένα τέτοιο μοντέλο, μέσω του οποίου υπολογίζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπό μονοαξονική θλίψη και προβλέπει τη διεύρυνση της επιφάνειας του αποχωρισμού στην περίπτωση μίας πακτωμένης πολύστρωτης πλάκας (Sallam - 1985). Μία παραμετρική μελέτη βάσει του μοντέλου αυτού έχει οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι ο λυγισμός επέρχεται για μικρότερα φορτία στην περίπτωση που ο αποχωρισμός βρίσκεται κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας και χαρακτηρίζεται από μεγάλο μήκος. Επιπρόσθετα, μικρότερα φορτία λυγισμού προκύπτουν με μείωση της ορθοτροπικότητας του πολύστρωτου. Ο Kim έχει αναπτύξει ένα ανάλογο αναλυτικό μοντέλο για μία πλάκα με ελλειπτική επιφάνεια αποχωρισμού των στρώσεων, μέσω του οποίου μπορεί να προβλεφθεί ο τύπος λυγισμού της (τοπικός ή γενικός) σε συνθήκες επίπεδης φόρτισης και να υπολογιστούν τα αντίστοιχα φορτία (Kim - 1999). Στην περίπτωση τοπικού λυγισμού, μοντελοποιείται μόνο το υποπολύστρωτο που αναμένεται να λυγίσει, σαν μία πακτωμένη ελλειπτική πλάκα που υποβάλλεται σε ένα ποσοστό του συνολικού φορτίου.

Εκτός των αναλυτικών μεθόδων, το φαινόμενο του λυγισμού πολύστρωτων πλακών που έχουν υποστεί αποχωρισμό των στρώσεών τους μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά με χρήση μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων. Ο Hwang έχει κατασκευάσει ένα τέτοιο μοντέλο μίας πλάκας με πολλαπλούς αποχωρισμούς διαφόρων μεγεθών, με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης αυτών στο λυγισμό της (Hwang - 2001). Συγκεκριμένα, έχει μοντελοποιήσει μία διατομή της πλάκας κατά το πάχος αυτής και παράλληλα στη διεύθυνση του φορτίου με χρήση επίπεδων στοιχείων, ενώ οι αποχωρισμοί χαρακτηρίζονται από μία διάσταση, το μήκος τους. Τα μοντέλα της μορφής αυτής αναπαριστούν με ικανοποιητική ακρίβεια αποχωρισμούς υπό μορφή λωρίδας, το πλάτος των οποίων ισούται με εκείνο της πλάκας. Η αντίστοιχη παραμετρική μελέτη δείχνει ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού επηρεάζεται ως επί το πλείστον από τον αποχωρισμό με το μεγαλύτερο μήκος, όταν αυτός βρίσκεται κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας, ενώ η επίδραση των υπολοίπων εντείνεται όταν αυτός πλησιάζει το μέσο του πάχους της.

Τρισδιάστατη μοντελοποίηση των αποχωρισμών υπό μορφή λωρίδας έχει γίνει επίσης από τους Zor και Pekbey για τη μελέτη της επίδρασης ενός τέτοιου κεντρικού αποχωρισμού στο λυγισμό μίας απλά εδρασμένης και μίας πακτωμένης, αντίστοιχα, πλάκας (Zor - 2003, Pekbey - 2006). Σε κάθε περίπτωση, κατασκευάζονται δύο κατά το πάχος τμήματα, τα οποία αποτελούνται από τόσες στρώσεις τρισδιάστατων στοιχείων όσες οι στρώσεις του υλικού τους και ενώνονται μεταξύ τους εκτός της περιοχής του αποχωρισμού. Ο Zor έχει καταλήξει στο συμπέρασμα ότι για λόγους του μήκους του αποχωρισμού προς εκείνου της πλάκας μικρότερους του 0.1, η επίδραση του αποχωρισμού είναι αμελητέα. Επιπλέον, τα πολύστρωτα με διαγώνιες στρώσεις λυγίζουν για μεγαλύτερα φορτία. Αντίθετα, στην περίπτωση πακτωμένων πλακών, μεγαλύτερες τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού προκύπτουν για τα πολύστρωτα με διασταυρούμενες στρώσεις. Σε κάθε περίπτωση πάντως, η μείωση του λόγου μήκους - πλάτους της πλάκας ή η αύξηση του μήκους του αποχωρισμού προκαλούν μείωση της αντίστασης σε λυγισμό.

Τα τρισδιάστατα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων παρέχουν τη δυνατότητα ανάλυσης πλακών με αποχωρισμούς διαφόρων σχημάτων στο εσωτερικό τους. Ο Kyoung έχει χρησιμοποιήσει ένα τέτοιο μοντέλο για τη μελέτη της επίδρασης πολλαπλών αποχωρισμών,

κυκλικών ή υπό μορφή λωρίδας και διαφόρων μεγεθών, στο λυγισμό μίας πολύστρωτης πλάκας με διασταυρούμενες στρώσεις (Kyoung et al - 1999). Σε αντίθεση με το παραπάνω μοντέλο των Zor και Pekbey, η περιοχή εκτός αποχωρισμού μοντελοποιείται με μία στρώση επίπεδων στοιχείων, ενώ επιπλέον στρώσεις, συνδεδεμένες με αυτή, χρησιμοποιούνται στην περιοχή του αποχωρισμού, αναπαριστώντας ένα υποπολύστρωτο η καθεμία. Προκύπτει δε, ότι αν και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας είναι μικρότερο σε κάθε περίπτωση, η τιμή του δεν επηρεάζεται από τον τύπο διανομής των αποχωρισμών κατά το πάχος της. Αντίθετα, η παράμετρος αυτή επιδρά σημαντικά στην ικανότητα του πολύστρωτου να παραλαμβάνει φορτία μετά το λυγισμό, ιδιαίτερα στην περίπτωση αποχωρισμών υπό μορφή λωρίδας.

Παρόμοια μελέτη έχει πραγματοποιήσει ο Lee, με τη διαφορά ότι οι υπό εξέταση περιπτώσεις είναι πολύστρωτες πλάκες, διασταυρούμενων ή διαγώνιων στρώσεων, με αποχωρισμούς υπό μορφή λωρίδας ή τετραγωνικούς (Lee - 2007). Η μοντελοποίηση των πλακών αυτών γίνεται με χρήση μίας στρώσης τρισδιάστατων στοιχείων για κάθε στρώση του υλικού, οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους στις περιοχές εκτός των αποχωρισμών. Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη είναι ότι για μικρά μεγέθη του αποχωρισμού, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μειώνεται απότομα, ενώ τείνει να αποκτήσει μία σταθερή τιμή για μεγαλύτερα μεγέθη. Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι ένα αποδεκτό μέγεθος αποχωρισμού είναι αυτό που αντιστοιχεί σε λόγο του μήκους του αποχωρισμού προς εκείνου της πλάκας ίσο με 0.2. Επιπλέον, προκύπτει ότι η αντίσταση σε λυγισμό ενός πολύστρωτου με διαγώνιες στρώσεις επηρεάζεται σημαντικά από τη γωνία προσανατολισμού των ινών, με την περίπτωση των $\pm 30^{o}$ να εμφανίζει τις υψηλότερες τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Ανάλογη με τις παραπάνω εργασίες είναι εκείνη που έχει εκπονηθεί από τον Chirica, όπου μελετάται η επίδραση ενός ελλειπτικού αποχωρισμού των στρώσεων στο λυγισμό μίας πακτωμένης ορθοτροπικής πλάκας υπό μονοαξονική θλίψη (Chirica et al - 2008). Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων που έχει κατασκευαστεί για τις ανάγκες της παραμετρικής μελέτης βασίζεται στο αναλυτικό μοντέλο του Kim και είναι παρόμοιο με εκείνο του Kyoung (Kim - 1999, Kyoung et al - 1999). Κατά συνέπεια, κάθε ελλειπτικό υποπολύστρωτο αποτελείται από μία στρώση επίπεδων στοιχείων, η οποία συνδέεται με εκείνη που αναπαριστά την άθικτη περιοχή. Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα που εξάγεται από τη σχετική παραμετρική μελέτη είναι ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αυξάνεται με αύξηση της διαμέτρου της έλλειψης, της παράλληλης στη διεύθυνση του φορτίου, σε βάρος της άλλης. Επιπλέον, η αντίσταση σε λυγισμό μειώνεται όσο ο αποχωρισμός πλησιάζει το μέσο του πάχους της πλάκας.

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μελέτες σχετικά με την επίδραση του αποχωρισμού των στρώσεων στην αντοχή ενός πολύστρωτου. Μία προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή έχει γίνει από τους Short και Wang με την κατασκευή μοντέλων μίας απλά εδρασμένης πλάκας για τη μελέτη της επίδρασης ενός ή περισσότερων κατά το πάχος τετραγωνικών αποχωρισμών στη θλιπτική αντοχή της (Short et al - 2001, Wang et al - 2005). Το μοντέλο που έχει χρησιμοποιηθεί στις περιπτώσεις αυτές μοιάζει με εκείνο των Zor και Pekbey, με τη διαφορά ότι κάθε τμήμα μοντελοποιείται από μία στρώση τρισδιάστατων στοιχείων, τα οποία χωρίζονται σε περισσότερες επιμέρους στρώσεις. Οι σχετικές παραμετρικές μελέτες έχουν

δείξει ότι η αύξηση του μεγέθους του αποχωρισμού προκαλεί μεγαλύτερη εξασθένιση της αντοχής, ενώ το ίδιο συμβαίνει κατά τη μετατόπισή του προς το μέσο του πάχους της πλάκας. Στην περίπτωση πολλαπλών αποχωρισμών κατά το πάχος, η εξασθένιση αυτή είναι ακόμα μεγαλύτερη όταν η απόσταση μεταξύ των αποχωρισμών μεγαλώνει.

1.4 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Στα πλαίσια της μελέτης του φαινομένου του λυγισμού πολύστρωτων πλακών οι οποίες έχουν αστοχήσει με αποχωρισμό των στρώσεών τους, εντάσσεται η παρούσα διπλωματική εργασία. Μέσω αυτής, γίνεται μία προσπάθεια κατανόησης του τρόπου με τον οποίο επιδρά η αστοχία αυτής της μορφής στο λυγισμό τέτοιων πλακών. Ο σκοπός αυτός επιτυγχάνεται με τη διερεύνηση της επίδρασης ορισμένων παραμέτρων του αποχωρισμού στην τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, καθώς και στον τύπο της παραμόρφωσης της πλάκας (τοπικός, γενικός ή μεικτής μορφής). Οι εξεταζόμενες παράμετροι είναι το σχήμα, το μέγεθος και η κατά το πάχος θέση του αποχωρισμού, των οποίων οι συνδυασμοί οδηγούν σε διάφορες περιπτώσεις αστοχίας.

Η πραγματοποίηση αυτής της παραμετρικής μελέτης προϋποθέτει τη μοντελοποίηση της πλάκας με βάση τον τύπο της προσέγγισης που επιλέγεται. Εν προκειμένω, κατασκευάζεται ένα τρισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων, το οποίο παρέχει τόσο αριθμητικά όσο και οπτικοποιημένα αποτελέσματα. Η επιβεβαίωση της ορθότητας του μοντέλου αυτού επιτυγχάνεται βάσει διαθέσιμων αποτελεσμάτων από τη βιβλιογραφία. Εκτός των παραπάνω, γίνεται χρήση ορισμένων απλών αναλυτικών μεθόδων για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και επιχειρείται η επαλήθευση των αποτελεσμάτων τους βάσει εκείνων της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο, πραγματοποιείται μία εισαγωγή στο αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας. Στο πλαίσιο αυτό, γίνεται μια σύντομη αναφορά στα ινώδη σύνθετα υλικά και τα πολύστρωτα που προκύπτουν από αυτά. Ακολουθεί η αναλυτική περιγραφή του φαινομένου του αποχωρισμού των στρώσεων, που χαρακτηρίζει κατασκευές από τέτοια υλικά, καθώς και του λυγισμού πλακών, άθικτων ή μη, που παρουσιάζει μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης στα κατασκευαστικά στοιχεία της γάστρας ενός σκάφους. Εν συνεχεία, γίνεται μία παράθεση ορισμένων εργασιών που έχουν κατά καιρούς εκπονηθεί σχετικά με το λυγισμό πλακών, τον αποχωρισμό των στρώσεων και κυρίως, την αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών. Το κεφάλαιο κλείνει με την περιγραφή του σκοπού της εργασίας.

Η αναλυτική προσέγγιση του προβλήματος του λυγισμού πολύστρωτων πλακών με αποχωρισμένες στρώσεις αποτελεί το αντικείμενο του δεύτερου κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, παρατίθενται ορισμένες αναλυτικές μεθοδολογίες υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και πρόβλεψης της παραμορφωμένης μορφής της πλάκας. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις μεθόδους εκείνες που επιτρέπουν άμεσους υπολογισμούς με χρήση απλών εξισώσεων, ακόμα και για την περίπτωση άθικτων πλακών. Περιγράφεται δε η διαδικασία επίλυσης αυτών, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για την αξιοπιστία τους.

Η κατασκευή και η επιβεβαίωση της ορθότητας των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν κατά την παραμετρική μελέτη περιγράφονται στο τρίτο κεφάλαιο. Εφόσον επιλεγεί ο τρόπος μοντελοποίησης της πλάκας και του αποχωρισμού των στρώσεών

της, καταγράφονται οι τύποι ανάλυσης του προβλήματος του λυγισμού (ανάλυση ιδιοτιμών, μη γραμμική κ.α.). Ακολούθως, περιγράφονται τα προτεινόμενα μοντέλα για την επίλυση του προβλήματος, ενώ εκτενής αναφορά γίνεται σε τυχόν προβλήματα που προέκυψαν κατά την κατασκευή τους. Η παραπάνω διαδικασία ακολουθείται από τον έλεγχο της ορθότητας των μοντέλων αυτών, οπότε για το σκοπό αυτό, συλλέγονται αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία. Αυτά θα αποτελέσουν μέτρο σύγκρισης τόσο για τα αποτελέσματα των παραπάνω μοντέλων όσο και για εκείνα των αναλυτικών μεθόδων.

Το τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την επίλυση των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων στα πλαίσια της παραμετρικής μελέτης. Αρχικά, περιγράφεται ο σκοπός της μελέτης αυτής και ορίζονται οι σταθερές και οι παράμετροί της. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι εξεταζόμενες παράμετροι είναι το σχήμα, το μέγεθος και η κατά το πάχος θέση του αποχωρισμού. Όσον αφορά το σχήμα, γίνεται η υπόθεση ενός ελλειπτικού αποχωρισμού, οπότε ουσιαστικά εξετάζεται η επίδραση του λόγου μεταξύ των διαμέτρων της έλλειψης. Η επίλυση του προβλήματος έγκειται στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού της πλάκας και πραγματοποιείται με διάφορους τρόπους (ανάλυση ιδιοτιμών, μη γραμμική ανάλυση και συνδυασμός αυτών). Τα εξαγόμενα αποτελέσματα συγκεντρώνονται σε πίνακες ή παρατίθενται υπό μορφή διαγραμμάτων, ενώ ο τύπος παραμόρφωσης της πλάκας σε κάθε περίπτωση φαίνεται στα αντίστοιχα σχήματα. Επιπρόσθετα, πραγματοποιούνται συγκρίσεις των περιπτώσεων όπου υπάρχει αστοχία, τόσο μεταξύ τους όσο και με την περίπτωση της άθικτης κατάστασης. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται σε τυχόν προβλήματα που εμφανίστηκαν κατά τη μελέτη.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης περιγράφονται αναλυτικά στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο. Προηγουμένως, γίνεται μία σύντομη ανακεφαλαίωση του σκοπού και των ορισμών, των σταθερών και των παραμέτρων της μελέτης αυτής. Στο ίδιο κεφάλαιο, παρατίθενται τα συμπεράσματα για την αξιοπιστία των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων που κατασκευάστηκαν για τις ανάγκες της μελέτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αναλυτική προσέγγιση του λυγισμού πολύστρωτων πλακών

2.1 Εισαγωγή

Η ασφαλής σχεδίαση και κατ' επέκταση, η λειτουργία μίας κατασκευής προϋποθέτουν τη σε βάθος κατανόηση της συμπεριφοράς της υπό ένα φάσμα συνθηκών που αναμένεται να συναντήσει στη διάρκεια της λειτουργίας της. Αυτό επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των μεγεθών που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά αυτή και τη μελέτη της επίδρασης ορισμένων παραμέτρων στις τιμές αυτών. Τα παραπάνω μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσω μεθόδων που διαφέρουν ως προς τον τρόπο προσέγγισης του εκάστοτε προβλήματος και βάσει αυτού, διακρίνονται σε πειραματικές, αναλυτικές και εκείνες των πεπερασμένων στοιχείων.

Οι παράγοντες που καθορίζουν ως επί το πλείστον την επιλογή του τύπου της μεθόδου είναι η αξιοπιστία των αντίστοιχων αποτελεσμάτων και το συνακόλουθο κόστος, τόσο το οικονομικό όσο και από άποψη χρόνου. Δεδομένων των απαιτήσεων αναφορικά με τα μεγέθη αυτά, προτιμάται κατά περίπτωση ο ένας ή ο άλλος τρόπος προσέγγισης του προβλήματος. Συχνά, είναι χρήσιμη μία άμεση και πρόχειρη εκτίμηση ενός μεγέθους, όπως συμβαίνει κατά την προκαταρκτική μελέτη μίας κατασκευής. Επιπρόσθετα, ο αριθμός των εξεταζόμενων περιπτώσεων στα πλαίσια μίας παραμετρικής μελέτης μπορεί να είναι σημαντικά μεγάλος. Στις περιπτώσεις αυτές, οι πειραματικές μέθοδοι και ενίοτε εκείνες των πεπερασμένων στοιχείων, καθίστανται αντιοικονομικές, καθώς είναι αρκετά χρονοβόρες και απαιτούν την κατασκευή ενός μεγάλου αριθμού μοντέλων. Οι δυσκολίες αυτές αντιμετωπίζονται μέσω των αναλυτικών μεθόδων, οι οποίες προσφέρουν μία θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος.

Κατά την αναλυτική προσέγγιση της συμπεριφοράς μίας κατασκευής, η περιγραφή αυτής γίνεται μέσω συστημάτων μαθηματικών εξισώσεων, η πολυπλοκότητα των οποίων είναι ανάλογη της ακρίβειας που παρέχουν. Οι αναλυτικές μέθοδοι ενδείκνυνται συνήθως για χονδρικές εκτιμήσεις των μεγεθών λόγω των υποθέσεων και των απλοποιήσεων που γίνονται κατά την κατασκευή τους. Σχετικά αξιόπιστα αποτελέσματα παρέχουν τα γενικευμένα αναλυτικά μοντέλα, τα οποία αποτελούνται από μεγάλα συστήματα εξισώσεων. Η επίλυση τους πραγματοποιείται με τη βοήθεια κατάλληλων προγραμμάτων και συνήθως, παρουσιάζει αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική δύναμη, ανάλογα με το μέγεθος του συστήματος. Η ανάγκη για περισσότερο άμεσους υπολογισμούς έχει οδηγήσει σε απλούστερα μοντέλα, αποτελούμενα από απλές εξισώσεις που επιλύονται εύκολα και γρήγορα. Στον αντίποδα, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων τους ελαττώνεται εξαιτίας των πολλών παραδοχών και των παραλείψεων ορισμένων όρων των εξισώσεων χάριν ευκολίας. Επιπλέον, εξίσου άμεσες εκτιμήσεις διαφόρων μεγεθών μπορούν να γίνουν με χρήση σχεδιαστικών καμπυλών, όπου τα μεγέθη δίνονται υπό μορφή συντελεστών συναρτήσει παραμέτρων του προβλήματος.

Αν και οι αναλυτικές μέθοδοι δεν είναι οι πλέον ακριβείς, συγκρινόμενες με εκείνες των πειραμάτων και των πεπερασμένων στοιχείων, εν τούτοις, αποτελούν ένα ιδιαίτερα εύχρηστο εργαλείο για τη μελέτη της συμπεριφοράς μίας κατασκευής. Ένα τυπικό πεδίο εφαρμογής

αυτών είναι η μελέτη του φαινομένου του λυγισμού λεπτών πλακών. Μέσω των αναλυτικών μεθόδων, εκτιμώνται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και η μορφή της παραμορφωμένης πλάκας και κατ' επέκταση, είναι εφικτή η πραγματοποίηση παραμετρικών μελετών. Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζονται ορισμένες αναλυτικές προσεγγίσεις του προβλήματος του λυγισμού επίπεδων πολύστρωτων πλακών, άθικτων ή με αποχωρισμένες στρώσεις. Στο πλαίσιο αυτό, περιγράφονται τα αντίστοιχα αναλυτικά μοντέλα, είτε αυτά είναι γενικευμένα είτε απλοί μαθηματικοί τύποι και σχεδιαστικές καμπύλες, με την παράθεση των ορισμών, των υποθέσεων και των βασικών εξισώσεών τους. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την περιγραφή της επίλυσης των απλούστερων μεθοδολογιών, με σκοπό τον έλεγχο της αξιοπιστίας τους.

2.2 Αναλυτικά μοντέλα για τη μελέτη του λυγισμού επίπεδων πολύστρωτων πλακών

Οι επίπεδες πολύστρωτες πλάκες, οριοθετούμενες στις πλευρές τους από διαμήκη και εγκάρσια ενισχυτικά, απαντώνται συχνά στο περίβλημα της γάστρας, στα καταστρώματα και στις φρακτές ενός σκάφους από ινώδη σύνθετα υλικά και αποτελούν συνήθως το 60 - 80% του συνολικού βάρους της κατασκευής (Τσούβαλης - 1998). Λόγω της διαμήκους κάμψης του σκάφους και των φορτίσεων που υφίστανται τα τμήματά του εξαιτίας των κυματισμών, των ανέμων και της θάλασσας, οι πλάκες υπόκεινται σε σημαντικές καταπονήσεις που συνεπάγονται την ανάπτυξη τάσεων και παραμορφώσεων. Ο υπολογισμός των μεγεθών αυτών, που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των πλακών, είναι απαραίτητος για την ασφαλή σχεδίαση των τμημάτων του σκάφους.

2.2.1 Βασικά στοιχεία της Κλασσικής Θεωρίας Πολύστρωτων

Ένα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των πολύστρωτων από FRP's είναι η Κλασσική Θεωρία Πολύστρωτων (Classical Lamination Theory, CLT). Στα πλαίσια αυτής, επιχειρείται η ανάλυση της συμπεριφοράς του πολύστρωτου βάσει της μακροσκοπικής ανάλυσης της στρώσης, όπου λαμβάνονται υπόψη μόνο οι μέσες φαινόμενες μηχανικές ιδιότητές της και όχι οι λεπτομερείς αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ινών και της μήτρας της. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται μία σύντομη περιγραφή της θεωρίας αυτής όσον αφορά τις επίπεδες πολύστρωτες πλάκες, με την παράθεση των βασικών υποθέσεων και των εξισώσεών της.

Μία σημαντική παραδοχή που γίνεται κατά την ανάλυση των πολύστρωτων αφορά στον τρόπο σύνδεσης των στρώσεών τους. Βάσει της παραδοχής αυτής, οι στρώσεις είναι πλήρως κολλημένες μεταξύ τους και επιπλέον, οι αντίστοιχοι δεσμοί είναι απείρως λεπτοί και μη παραμορφώσιμοι σε διάτμηση. Οι υποθέσεις αυτές καθιστούν αδύνατη τη σχετική ολίσθηση μίας στρώσης ως προς κάποια άλλη και ως εκ τούτου, εξασφαλίζουν την ύπαρξη συνέχειας στις μετατοπίσεις μεταξύ αυτών. Επομένως, το πολύστρωτο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μία στρώση με πολύ ειδικές ιδιότητες.

Οι κυριότερες υποθέσεις της Κλασσικής Θεωρίας Πολύστρωτων (ΚΘΠ) είναι η ύπαρξη επίπεδης εντατικής κατάστασης και η ισχύς της υπόθεσης Kirchhoff όσον αφορά τις πλάκες. Η πρώτη ικανοποιείται θέτοντας ίσες με μηδέν τις τάσεις με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του πολύστρωτου, δηλαδή την ορθή τάση σ_z και τις εγκάρσιες διατμητικές τάσεις τ_{yz} και τ_{zx}:

$$\sigma_z = 0 \tag{2.1α}$$

$$\tau_{yz} = 0 \tag{2.1β}$$

$$\tau_{zx} = 0 \tag{2.1γ}$$

Σύμφωνα με τη δεύτερη υπόθεση, ένα γραμμικό στοιχείο, κάθετο στη μέση επιφάνεια, δεν επιμηκύνεται ούτε μικραίνει υπό την επίδραση της φόρτισης και επιπρόσθετα, γραμμές αρχικά ευθείες και κάθετες στη μέση επιφάνεια παραμένουν ευθείες και κάθετες σε αυτήν στην παραμορφωμένη κατάσταση. Με βάση τα παραπάνω, μπορούν να αγνοηθούν τόσο η κάθετη στο μέσο επίπεδο παραμόρφωση ε_z όσο και οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις γ_{yz} και γ_{zx}:

$$\varepsilon_z = 0 \tag{2.2α}$$

$$\gamma_{yz} = 0 \tag{2.2β}$$

$$\gamma_{zx} = 0 \tag{2.2γ}$$

Οι παραπάνω υποθέσεις είναι σωστές και προσεγγίζουν ικανοποιητικά την εντατική και την παραμορφωσιακή κατάσταση μίας πλάκας εφόσον το πάχος αυτής είναι πολύ μικρότερο του μήκους και του πλάτους της. Χαρακτηριστικά, μία πλάκα θεωρείται λεπτή όταν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$\frac{b}{t} > 20 \tag{2.3}$$

όπου t το πάχος της πλάκας και b η μικρότερη από τις διαστάσεις στο επίπεδο αυτής. Όταν παύει να ισχύει η συνθήκη αυτή, η υπόθεση της επίπεδης εντατικής κατάστασης είναι λάθος και συνεπώς, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι αρχικά κάθετες στη μέση επιφάνεια γραμμές δεν παραμένουν κάθετες σε αυτήν στην παραμορφωμένη κατάσταση. Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να γίνει χρήση της θεωρίας της διατμητικής παραμόρφωσης πρώτης τάξης (First - Order Shear Deformation Laminated Plate Theory, FSDT), η περιγραφή της οποίας ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας (Jensen - 2006).

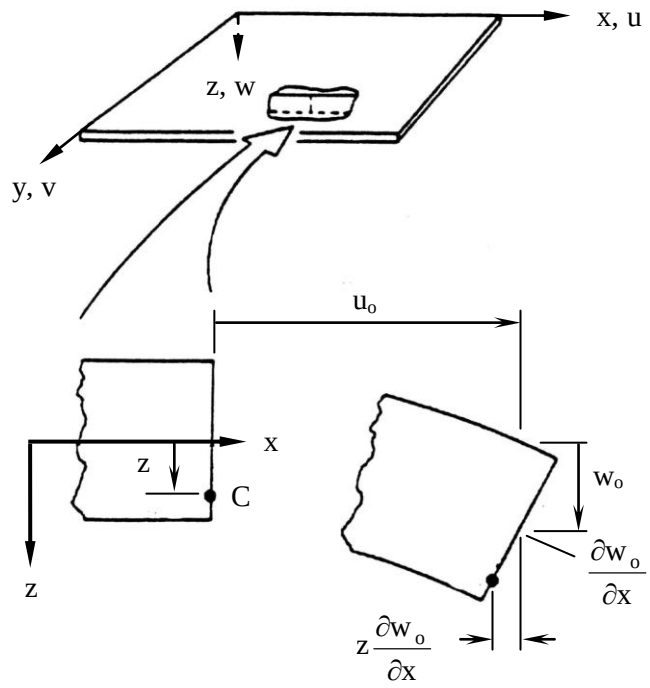
Το πεδίο μετατοπίσεων ενός επίπεδου πολύστρωτου είναι ίδιο με εκείνο της Κλασσικής Θεωρίας Πλακών που αφορά σε ισοτροπικά υλικά και εξάγεται βάσει της υπόθεσης Kirchhoff με χρήση της εγκάρσιας τομής του πολύστρωτου στο επίπεδο x - z (Σχήμα 2.1). Συνεπώς, προκύπτει ότι η μετατόπιση u κατά τη διεύθυνση x ενός τυχαίου σημείου C στο πάχος του πολύστρωτου, που απέχει απόσταση z από τη μέση επιφάνεια αυτού, δίνεται από την εξίσωση:

$$u = u_o - z\frac{\partial w_o}{\partial x} \tag{2.4α}$$

όπου u_o και w_o είναι οι μετατοπίσεις ενός σημείου στη μέση επιφάνεια του πολύστρωτου κατά τις διευθύνσεις x και z, αντίστοιχα. Ομοίως, η μετατόπιση v κατά τη διεύθυνση y είναι:

$$v = v_o - z\frac{\partial w_o}{\partial y} \tag{2.4β}$$

όπου v_o η μετατόπιση ενός σημείου στη μέση επιφάνεια του πολύστρωτου κατά τη διεύθυνση y.



Σχήμα 2.1: Γεωμετρία παραμορφώσεων στο επίπεδο x - z.

Όπως έχει αναφερθεί στο εδάφιο 1.2.2, τα πολύστρωτα από FRP's δεν παρουσιάζουν συνήθως πλαστική περιοχή, δηλαδή συμπεριφέρονται ελαστικά μέχρι τη θραύση τους, οπότε για μικρές μετατοπίσεις σε σχέση με το πάχος της πλάκας, μπορεί να υποτεθεί ότι τα υλικά αυτά είναι γραμμικά ελαστικά. Με βάση την υπόθεση αυτή και θεωρώντας παραμορφώσεις πολύ μικρότερες της μονάδας, είναι δυνατός ο ορισμός των παραμορφώσεων συναρτήσει των μετατοπίσεων. Επομένως, δεδομένων των εξισώσεων (2.4), προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xo} \\ \varepsilon_{yo} \\ \gamma_{xyo} \end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

όπου ε_{xo}, ε_{yo} και γ_{xyo} είναι οι παραμορφώσεις και k_x, k_y και k_{xy} οι καμπυλότητες της μέσης επιφάνειας του πολύστρωτου, οι οποίες δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

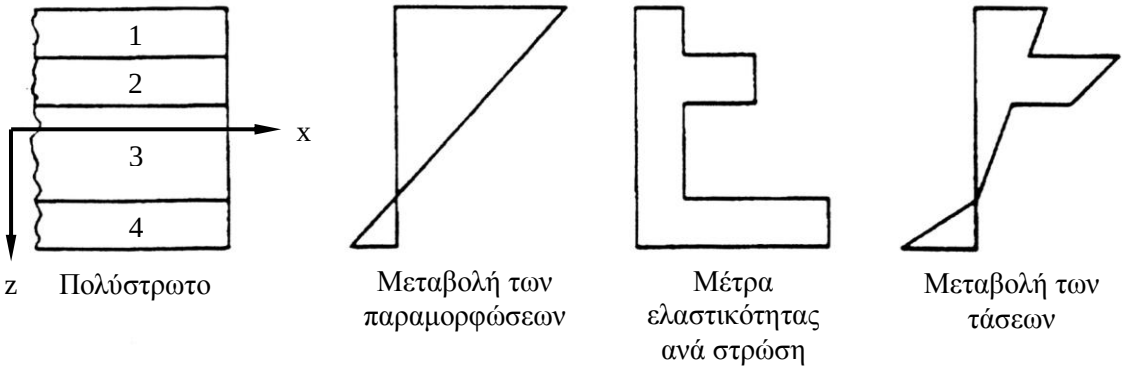
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xo} \\ \varepsilon_{yo} \\ \gamma_{xyo} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_o}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_o}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_o}{\partial y} + \dfrac{\partial v_o}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

Ένα συμπέρασμα που προκύπτει από την εξίσωση (2.5) είναι ότι η υπόθεση Kirchhoff συνεπάγεται τη γραμμική μεταβολή των παραμορφώσεων κατά το πάχος μίας πολύστρωτης πλάκας. Δεν ισχύει το ίδιο όμως για τις τάσεις, οι οποίες για μία τυχαία στρώση k της πλάκας μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των παραμορφώσεων και των καμπυλοτήτων της μέσης επιφάνειας μέσω της εξίσωσης:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xo} \\ \varepsilon_{yo} \\ \gamma_{xyo} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \tag{2.8}$$

όπου $\overline{Q}_{ij}$ οι ανηγμένες δυσκαμψίες της στρώσης. Βάσει της εξίσωσης (2.8), η κατανομή των τάσεων είναι γραμμική κατά το πάχος κάθε στρώσης, αλλά λόγω των διαφορετικών εν γένει δυσκαμψίων μεταξύ των στρώσεων, είναι ασυνεχής στα όρια αυτών. Τυπικές κατανομές των τάσεων και των παραμορφώσεων ενός πολύστρωτου φαίνονται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Τυπικές κατανομές τάσεων και παραμορφώσεων κατά το πάχος ενός πολύστρωτου.

Η εξίσωση (2.8) είναι αποτέλεσμα της μακροσκοπικής ανάλυσης μίας στρώσης τυχαίου προσανατολισμού των ινών της και σταθερού πάχους (Τσούβαλης - 1998). Οι ανηγμένες δυσκαμψίες υπολογίζονται βάσει των εξισώσεων:

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \tag{2.9α}$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \tag{2.9β}$$

$$\overline{Q}_{16} = -mn^3Q_{22} + m^3nQ_{11} - mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \tag{2.9γ}$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \tag{2.9δ}$$

$$\overline{Q}_{26} = -m^3nQ_{22} + mn^3Q_{11} + mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \tag{2.9ε}$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2 \tag{2.9στ}$$

όπου $m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$, θ η γωνία προσανατολισμού των ινών και Q_{ij} οι δυσκαμψίες της στρώσης, οι οποίες ορίζονται συναρτήσει των μηχανικών ιδιοτήτων αυτής ως ακολούθως:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} \tag{2.10α}$$

$$Q_{12} = \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{12}v_{21}} = \frac{v_{21}E_1}{1 - v_{12}v_{21}} \tag{2.10β}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}} \tag{2.10γ}$$

$$Q_{66} = G_{12} \tag{2.10δ}$$

Στις εξισώσεις (2.10) υπάρχουν τέσσερεις ανεξάρτητες μεταξύ τους μηχανικές ιδιότητες λόγω της υπόθεσης επίπεδης εντατικής κατάστασης στα πλαίσια της ανάλυσης της στρώσης. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιούνται τα μέτρα ελαστικότητας του Young E_1 και E_2 στη διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτές, αντίστοιχα, το μέτρο διάτμησης G_{12} και ο λόγος του Poisson v_{12} στο επίπεδο της στρώσης, σε συνδυασμό με την εξίσωση αμοιβαιότητας:

$$\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} \tag{2.11}$$

Δεδομένης της μεταβολής των τάσεων κατά το πάχος μίας πλάκας, πολύστρωτης ή μη, στην κλασσική θεωρία πλακών ορίζονται και χρησιμοποιούνται συνισταμένες συνεπίπεδες δυνάμεις N_i και ροπές M_i, ανηγμένες ανά μονάδα μήκους. Τα μεγέθη αυτά είναι στατικά ισοδύναμα με τις κατά το πάχος κατανεμημένες τάσεις και θεωρείται ότι δρουν στη μέση επιφάνεια της πλάκας (Σχήμα 2.3). Επομένως, το σύστημα των τάσεων ανάγεται σε ένα σύστημα δυνάμεων και ροπών, ανά μονάδα μήκους, οι οποίες δεν εξαρτώνται από τη συνιστώσα του πάχους z. Τα φορτία αυτά προκύπτουν με ολοκλήρωση των τάσεων κατά το

πάχος της πλάκας, οπότε στην περίπτωση πολύστρωτων πλακών και λόγω της εξίσωσης (2.8), ορίζονται ως:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xo} \\ \varepsilon_{yo} \\ \gamma_{xyo} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.12α}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xo} \\ \varepsilon_{yo} \\ \gamma_{xyo} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.12β}$$

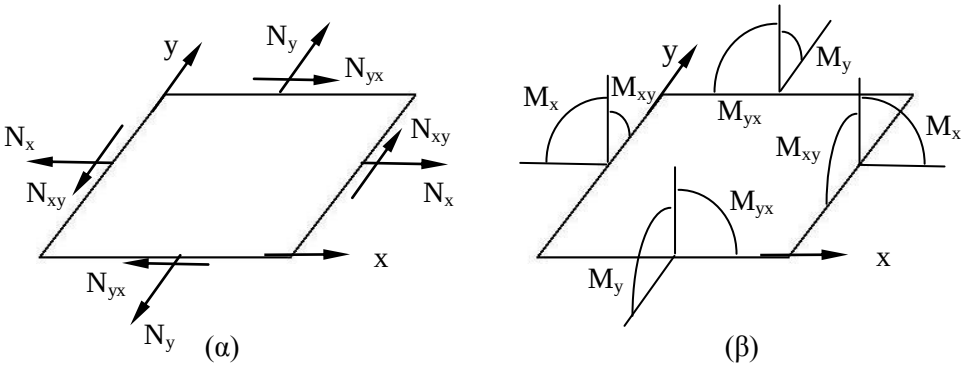
Τα A_{ij}, B_{ij} και D_{ij} στις εξισώσεις (2.12) υπολογίζονται σύμφωνα με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k - z_{k-1}\right) \tag{2.13α}$$

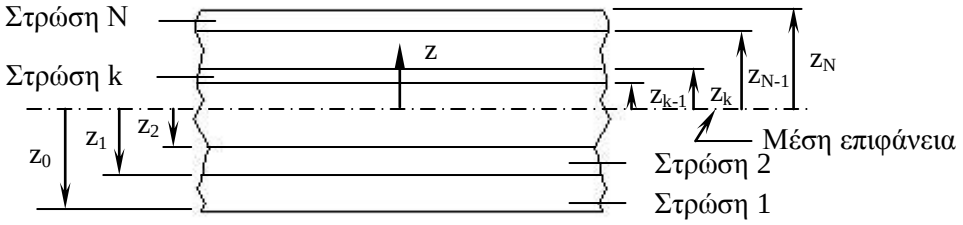
$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) \tag{2.13β}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right) \tag{2.13γ}$$

όπου N είναι ο αριθμός των στρώσεων και τα μεγέθη z_k και z_{k-1} ορίζονται στο Σχήμα 2.4, με $z_0 = -t/2$ και t το πάχος της πλάκας. Αποτελούν δε, τα στοιχεία των μητρώων δυσκαμψίας του πολύστρωτου, τα οποία, ανάλογα με τα μεγέθη που συνδέουν, διακρίνονται στο μητρώο εκτατικής δυσκαμψίας [A], στο μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας [D] και στο μητρώο σύζευξης [B]. Μέσω του μητρώου [A], γίνεται η συσχέτιση των συνεπίπεδων συνισταμένων δυνάμεων με τις παραμορφώσεις της μέσης επιφάνειας, ενώ μέσω του μητρώου [D], συσχετίζονται οι συνισταμένες ροπές με τις καμπυλότητες αυτής. Αντίθετα, το μητρώο [B] συνεπάγεται τη σύζευξη μεταξύ κάμψης και έκτασης καθώς συνδέει τις συνεπίπεδες δυνάμεις με τις καμπυλότητες της μέσης επιφάνειας και τις ροπές με τις παραμορφώσεις αυτής.



Σχήμα 2.3: (α) Συνεπίπεδες συνισταμένες δυνάμεις και (β) συνισταμένες ροπές σε ένα επίπεδο πολύστρωτο.



Σχήμα 2.4: Εγκάρσια τομή πολύστρωτου αποτελούμενου από N στρώσεις.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι υποθέσεις της ΚΘΠ δε συνδέονται αποκλειστικά και μόνο με τα πολύστρωτα. Συνεπώς, η ανάλυση της συμπεριφοράς των επίπεδων πολύστρωτων πλακών πραγματοποιείται ουσιαστικά μέσω της κλασσικής θεωρίας πλακών. Θα πρέπει να τονιστεί επίσης ότι στα πλαίσια της ανάλυσης αυτής, δε λαμβάνονται υπόψη τυχόν δυνάμεις πεδίου, όπως η επιτάχυνση της βαρύτητας. Στη συνέχεια, επιχειρείται η ανάλυση του φαινομένου του λυγισμού επίπεδων πολύστρωτων πλακών με τη βοήθεια της παραπάνω θεωρίας.

2.2.2 Λυγισμός επίπεδων πολύστρωτων πλακών

Κατ' αντιστοιχία με τις ισοτροπικές πλάκες, μία πολύστρωτη πλάκα λυγίζει όταν τα συνεπίπεδα φορτία γίνουν τόσο μεγάλα, ώστε η αρχικά επίπεδη κατάσταση ισορροπίας της παύει να είναι ευσταθής. Συνέπεια αυτού είναι η παραμόρφωσή της σε μία μη επίπεδη μορφή, καθώς και η αδυναμία επιστροφής στην αρχική μορφή της μετά την αποφόρτιση. Όπως έχει αναφερθεί στο εδάφιο 1.2.4, η έναρξη του φαινομένου αντιστοιχεί σε μία χαρακτηριστική τιμή του φορτίου που ονομάζεται κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Επομένως, η αντιμετώπιση του προβλήματος του λυγισμού αφορά ουσιαστικά στον υπολογισμό του μεγέθους αυτού.

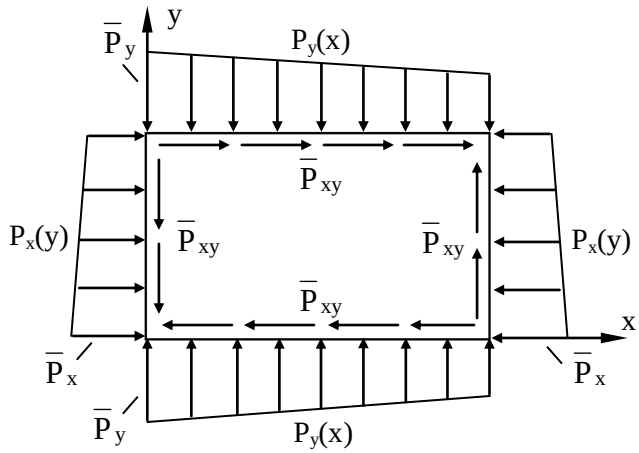
Στα πλαίσια της ανάλυσης του φαινομένου, θεωρείται μία πολύστρωτη πλάκα μήκους a (στη διεύθυνση x), πλάτους b (στη διεύθυνση y) και πάχους h που φορτίζεται από δύο αξονικά, συνεπίπεδα φορτία P_x και P_y στις διευθύνσεις x και y, αντίστοιχα, συνδυασμένα με μία συνεπίπεδη διάτμηση $\overline{P}_{xy}$. Μία τέτοια συνεπίπεδη φόρτιση αναπαρίσταται σχηματικά στο Σχήμα 2.5, όπου τα φορτία P_x και P_y μεταβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των πλευρών στις οποίες εφαρμόζονται, σύμφωνα με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$P_x(y) = \overline{P}_x\left(1-\varphi_1\frac{y}{b}\right) \tag{2.14α}$$

$$P_y(x) = \overline{P}_y\left(1-\varphi_2\frac{x}{a}\right) \tag{2.14β}$$

ενώ το διατμητικό φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα, οπότε παραμένει σταθερό κατά μήκος των πλευρών. Ανάλογα με τις τιμές των συντελεστών φ_1 και φ_2, οι κατανομές των αξονικών φορτίων αποκτούν διάφορες μορφές που συναντώνται στην πράξη. Συνεπώς, στην περίπτωση μονοαξονικής καταπόνησης, για $\varphi_1 = 0$, το φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα, οπότε η πλάκα φορτίζεται όπως μία πλάκα του καταστρώματος ή του πυθμένα ενός σκάφους εξαιτίας της

διαμήκους κάμψης αυτού. Αντίστοιχα, για $\varphi_1 = 1$, η κατανομή του φορτίου είναι τριγωνική, όπως συμβαίνει στις φρακτές λόγω των υδροστατικών φορτίων εκατέρωθεν του σκάφους, ενώ για $\varphi_1 = 2$, προκύπτει συνεπίπεδη καμπτική φόρτιση, όπως αυτή που αναμένεται να αναπτυχθεί στο περίβλημα της πλευράς, κοντά στον ουδέτερο άξονα της εγκάρσιας διατομής του σκάφους, λόγω της διαμήκους κάμψης αυτού (Τσούβαλης - 1998).



Σχήμα 2.5: Συνεπίπεδη φόρτιση μίας πολύστρωτης πλάκας.

Οι βασικές εξισώσεις λυγισμού της πλάκας προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται σε ένα στοιχειώδες τμήμα αυτής και είναι:

$$\frac{\partial \delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{2.15α}$$

$$\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_y}{\partial y} = 0 \tag{2.15β}$$

$$\frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} + P_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2\overline{P}_{xy}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + P_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = 0 \tag{2.15γ}$$

όπου δN_i και δM_i οι μεταβολές των συνισταμένων δυνάμεων και ροπών από τη μεμβρανική κατάσταση ισορροπίας πριν το λυγισμό, ενώ δw και αντίστοιχα δu και δv, οι μεταβολές των μετατοπίσεων από την ίδια κατάσταση ισορροπίας πριν το λυγισμό. Μέσω των καταστατικών εξισώσεων (2.12) του πολύστρωτου, οι μεταβολές των συνισταμένων δυνάμεων και ροπών συνδέονται με εκείνες των παραμορφώσεων και των καμπυλοτήτων της μέσης επιφάνειας και εν συνεχεία, μέσω των εξισώσεων (2.6) και (2.7), με τις μεταβολές των μετατοπίσεων. Τελικά, προκύπτει η ακόλουθη γενική μορφή (όπου παραλείπονται το ‘δ’ και ο δείκτης ‘ο’):

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(A_{12} + A_{66}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad - B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \left(B_{12} + 2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \tag{2.16α}$$

$$A_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2A_{26}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$
$$-B_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-3B_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0 \qquad (2.16\beta)$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$
$$-B_{11}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-3B_{16}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-B_{26}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$$
$$-B_{16}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}-3B_{26}\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}-B_{22}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \qquad (2.16\gamma)$$
$$-P_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\overline{P}_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-P_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

όπου είναι προφανής η σύζευξη μεταξύ των εξισώσεων του συστήματος. Η απλοποίηση και η αποσύζευξη αυτών είναι δυνατή κατά την ανάλυση περιπτώσεων πολύστρωτων πλακών με απλούστερες ακολουθίες στρώσεων.

Μία ενεργειακή προσέγγιση του φαινομένου του λυγισμού πραγματοποιείται μέσω της μεθόδου Rayleigh - Ritz, σε συνδυασμό με την Κλασσική Θεωρία Πολύστρωτων. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το σύστημα των εξισώσεων για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας Π της πλάκας. Το μέγεθος αυτό ορίζεται ως το αλγεβρικό άθροισμα της ενέργειας U των παραμορφώσεων της πλάκας και του έργου V των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε αυτήν. Για μία πολύστρωτη πλάκα υπό συνεπίπεδη φόρτιση, η γενική μορφή της ενέργειας των παραμορφώσεών της είναι:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a\left\{A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+A_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(A_{16}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{26}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right.$$
$$+A_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-2B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2B_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-2B_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
$$-2B_{16}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-2B_{26}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] \qquad (2.17\alpha)$$
$$-4B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2$$
$$\left.+4\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dxdy$$

ενώ το έργο των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται από την εξίσωση:

$$V = -\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a \left\{ P_x\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + 2\bar{P}_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \right.$$
$$\left. + P_y\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\} dxdy \qquad (2.17\beta)$$

Οι μετατοπίσεις u, v και w της μέσης επιφάνειας της πλάκας αντικαθίστανται στις εξισώσεις (2.17) από κατάλληλα επιλεγμένες εκφράσεις, μέσω των οποίων ικανοποιούνται οι φυσικές και οι γεωμετρικές οριακές συνθήκες του προβλήματος. Οι εκφράσεις αυτές περιλαμβάνουν ορισμένες μη καθορισμένες παραμέτρους, ως προς τις οποίες ελαχιστοποιείται η δυναμική ενέργεια της πλάκας, οπότε προκύπτει ένα σύστημα τόσων εξισώσεων όσες οι παράμετροι αυτές. Το σύστημα αυτό μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, η επίλυση του οποίου δίνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας.

Τυπικό παράδειγμα εφαρμογής της παραπάνω μεθοδολογίας αποτελεί η διαδικασία που ακολουθείται στα πλαίσια της εργασίας του Παπάζογλου, που αφορά στο λυγισμό άθικτων, μη συμμετρικών πολύστρωτων πλακών υπό συνεπίπεδη φόρτιση (Papazoglou et al - 1992). Ειδικότερα, εξετάζονται οι περιπτώσεις μη συμμετρικών πολύστρωτων με διασταυρούμενες στρώσεις και αντισυμμετρικών με διαγώνιες στρώσεις σε συνθήκες απλής έδρασης. Ως εκ τούτου, λόγω των απλούστερων ακολουθιών των στρώσεων, η εξίσωση (2.17α) μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά. Στην περίπτωση μη συμμετρικών πολύστρωτων διασταυρούμενων στρώσεων, μηδενίζονται όλα τα στοιχεία των μητρώων δυσκαμψίας με δείκτες 16 και 26, δηλαδή:

$$A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \qquad (2.18)$$

ενώ στην περίπτωση αντισυμμετρικών πολύστρωτων με διαγώνιες στρώσεις, ισχύει:

$$A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \qquad (2.19\alpha)$$
$$B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0 \qquad (2.19\beta)$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις που επίσης εξετάζονται, όπως είναι τα συμμετρικά και τα αντισυμμετρικά πολύστρωτα με διασταυρούμενες στρώσεις.

Στο παράδειγμα αυτό, η μελέτη του φαινομένου του λυγισμού περιορίζεται στις παραπάνω περιπτώσεις λόγω των κατάλληλων εκφράσεων που επιλέγονται για τις μετατοπίσεις της μέσης επιφάνειας. Οι εκφράσεις αυτές ικανοποιούν τις συνθήκες απλής έδρασης μόνο για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, οπότε για τα μη συμμετρικά πολύστρωτα με διασταυρούμενες στρώσεις είναι:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \qquad (2.20\alpha)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y \tag{2.20β}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \tag{2.20γ}$$

ενώ για τα αντισυμμετρικά πολύστρωτα με διαγώνιες στρώσεις είναι:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y \tag{2.21α}$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \cos\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \tag{2.21β}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \tag{2.21γ}$$

όπου m και n οι μέγιστοι αριθμοί των ημικυμάτων της παραμόρφωσης της μέσης επιφάνειας στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα. Οι εξισώσεις (2.20) και (2.21) αντικαθίστανται στο αλγεβρικό άθροισμα των απλοποιημένων εξισώσεων (2.17), οπότε η δυναμική ενέργεια της πλάκας εκφράζεται συναρτήσει των μη καθορισμένων παραμέτρων U_{mn}, V_{mn} και W_{mn}. [4] Η ελαχιστοποίησή της ως προς τα μεγέθη αυτά οδηγεί σε ένα σύστημα 3mn ομογενών αλγεβρικών εξισώσεων, το μέγεθος του οποίου καθορίζεται από την επιλογή των μεγεθών m και n και περιορίζεται από τις δυνατότητες του υπολογιστή που χρησιμοποιείται. Το σύστημα αυτό γράφεται υπό μορφή πινάκων ως:

$$\left([A] - \overline{P}_x [B]\right)\{x\} = 0 \tag{2.22}$$

όπου ο πίνακας στήλη {x} περιλαμβάνει τις παραμέτρους U_{mn}, V_{mn} και W_{mn} και $\overline{P}_x$ το κρίσιμο φορτίου λυγισμού στη διεύθυνση x. [5] Τα στοιχεία του μητρώου [A] προκύπτουν συναρτήσει των δυσκαμψιών A_{ij}, B_{ij} και D_{ij} και των διαστάσεων της πολύστρωτης πλάκας, ενώ εκείνα του μητρώου [B] προκύπτουν από τις διαστάσεις της πλάκας και τις σχετικές με τα φορτία παραμέτρους, σε συνδυασμό με τα μεγέθη m και n.

Η εξίσωση (2.22) αποτελεί τη γενικευμένη έκφραση του προβλήματος του λυγισμού. Ο μετασχηματισμός αυτής, θέτοντας:

$$[C] = [A]^{-1}[B] \tag{2.23α}$$

[4] Σημειώνεται ότι στην εφαρμογή αυτή, οι όροι της εξίσωσης (2.17β) που αναφέρονται στις μετατοπίσεις u και v παραλείπονται.

[5] Χάριν ευκολίας, όλα τα φορτία που ασκούνται στην πλάκα εκφράζονται συναρτήσει του P_x, δηλαδή:

$$\overline{P}_y = \lambda \overline{P}_x$$
$$\overline{P}_{xy} = \xi \overline{P}_x$$

$$\mu = \frac{1}{\overline{P}_x} \tag{2.23β}$$

οδηγεί στο ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$([C] - \mu[I])\{x\} = 0 \tag{2.24}$$

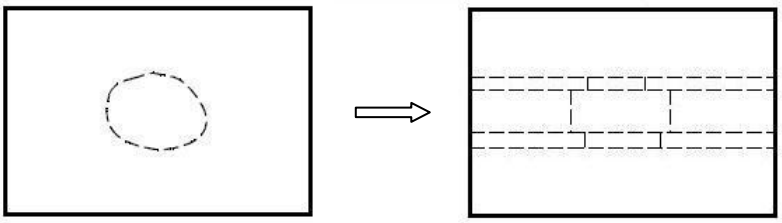
το οποίο επιλύεται εύκολα μέσω κατάλληλων προγραμμάτων. Τελικά, η μεγαλύτερη από τις ιδιοτιμές που προκύπτουν αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας.

Σε αντιστοιχία με την παραπάνω εφαρμογή της μεθόδου Rayleigh - Ritz για άθικτες πολύστρωτες πλάκες, ο Kim χρησιμοποιεί τη μέθοδο αυτή για την πρόβλεψη του τύπου του λυγισμού πλακών που έχουν υποστεί έναν ή περισσότερους αποχωρισμούς των στρώσεών τους σε τυχαίες περιοχές του πολύστρωτου και τυχαίου σχήματος (Kim - 1999). Σύμφωνα με την προτεινόμενη μεθοδολογία, υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο για τις περιπτώσεις γενικού και τοπικού λυγισμού υπό συνεπίπεδη φόρτιση (Σχήμα 2.5) και η μικρότερη από τις τιμές που προκύπτουν καθορίζει τον τύπο του λυγισμού της πλάκας.

Στην περίπτωση του γενικού λυγισμού, γίνεται η υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις και οι καμπυλότητες των υποπολύστρωτων εκατέρωθεν της περιοχής του αποχωρισμού είναι ίδιες λίγο πριν το λυγισμό. Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι δυσκαμψίες του πολύστρωτου στην περιοχή του αποχωρισμού προκύπτουν από το άθροισμα των αντίστοιχων δυσκαμψιών των υποπολύστρωτων, οπότε στην περίπτωση πολλαπλών αποχωρισμών ισχύει:

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right)_{\substack{\text{delam.}\\ \text{zone}}} = \sum_{h=1}^{S}\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right)_h \tag{2.25}$$

όπου S ο αριθμός των υποπολύστρωτων. Επομένως, η ανάλυση του γενικού λυγισμού είναι ανάλογη εκείνης του λυγισμού μίας άθικτης πλάκας, με τη διαφορά ότι η πλάκα παρουσιάζει μειωμένες δυσκαμψίες στην περιοχή του αποχωρισμού. Η υπόθεση αυτή καθιστά δύσκολο τον υπολογισμό της ενέργειας των παραμορφώσεων της πλάκας βάσει της εξίσωσης (2.17α), καθώς οι δυσκαμψίες αυτής δεν παραμένουν σταθερές σε όλη την έκτασή της. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τον κατακερματισμό της μέσης επιφάνειάς της σε ορθογωνικά τμήματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Κατακερματισμός της μέσης επιφάνειας μίας πολύστρωτης πλάκας που έχει υποστεί αποχωρισμό των στρώσεών της.

Η διαίρεση της πλάκας σε επιμέρους τμήματα γίνεται με σκοπό το μετασχηματισμό της περιοχής του αποχωρισμού των στρώσεων από μία περιοχή τυχαίου σχήματος σε ένα σύνολο μικρότερων τμημάτων απλούστερου σχήματος. Το μέγεθος και κατ' επέκταση, ο αριθμός των τμημάτων αυτών είναι τέτοια, ώστε να αναπαριστούν την περιοχή αυτή με ικανοποιητική ακρίβεια. Επιπλέον, οι δυσκαμψίες παραμένουν σταθερές σε όλη την έκταση των επιμέρους τμημάτων, καθιστώντας δυνατή τη χρήση της εξίσωσης (2.17α), όπου οι τιμές των μεγεθών A_{ij}, B_{ij} και D_{ij} καθορίζονται από την περιοχή της πλάκας (άθικτη ή αποχωρισμού) στην οποία ανήκει το εκάστοτε τμήμα. Ως εκ τούτου, η ενέργεια των παραμορφώσεων ολόκληρης της πλάκας προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους ενεργειών, δηλαδή:

$$U = \iint_{I} f\left(u, v, w, A_{ij}^{(I)}, B_{ij}^{(I)}, D_{ij}^{(I)}\right) dxdy + \iint_{II} f\left(u, v, w, A_{ij}^{(II)}, B_{ij}^{(II)}, D_{ij}^{(II)}\right) dxdy + \ldots \qquad (2.26)$$

Τα μεγέθη u, v και w στην εξίσωση (2.26) αποτελούν τις μετατοπίσεις της μέσης επιφάνειας της πλάκας, οπότε αντικαθίστανται από τις εκφράσεις που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες αυτής. Εν προκειμένω, λόγω απλής έδρασης, επιλέγονται οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$u = c_1\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) \qquad (2.27\alpha)$$

$$v = c_2\left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right) \qquad (2.27\beta)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \qquad (2.27\gamma)$$

όπου οι εξισώσεις (2.27α) και (2.27β) προκύπτουν από την υπόθεση σταθερών επίπεδων παραμορφώσεων της πλάκας μέχρι λίγο πριν το λυγισμό. Οι αδιάστατες παράμετροι c_1, c_2 και W_{mn} αποτελούν τα μεγέθη ως προς τα οποία ελαχιστοποιείται το αλγεβρικό άθροισμα της ενέργειας των παραμορφώσεων της πλάκας, όπως αυτή ορίζεται παραπάνω, και της ενέργειας των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε αυτήν και δίνεται από την εξίσωση (2.17β). Τελικά, το σύστημα ομογενών εξισώσεων που προκύπτει επιλύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που έχει περιγραφεί για την περίπτωση των άθικτων πολύστρωτων πλακών.

Αντίθετα με την περίπτωση του γενικού λυγισμού, όπου λαμβάνεται υπόψη ολόκληρη η πλάκα, η ανάλυση του τοπικού λυγισμού περιορίζεται στο τμήμα που λυγίζει. Αυτό βασίζεται στην υπόθεση ότι ο λυγισμός ενός λεπτού υποπολύστρωτου, κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας, προηγείται του λυγισμού των υπόλοιπων λόγω τόσο του μικρότερου πάχους του υποπολύστρωτου αυτού όσο και των περιορισμένων μη επίπεδων παραμορφώσεων των υποκείμενων υποπολύστρωτων πριν το λυγισμό. Επομένως, θεωρείται ότι λυγίζει μόνο το υποπολύστρωτο αυτό, ενώ η υπόλοιπη πλάκα παραμένει επίπεδη. Με βάση τα παραπάνω, το πρόβλημα του τοπικού λυγισμού μετασχηματίζεται σε ένα απλό πρόβλημα λυγισμού μίας πλάκας, η οποία αναπαριστά το υποπολύστρωτο. Η πλάκα αυτή θεωρείται ελλειπτική και πακτωμένη, οπότε οι εκφράσεις των μετατοπίσεων της μέσης επιφάνειάς της είναι:

$$u = c_1\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) \tag{2.28α}$$

$$v = c_2\left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right) \tag{2.28β}$$

$$w = \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^2 \left(c_3 + c_4 x^2 + c_5 y^2\right) \tag{2.28γ}$$

Όσον αφορά τα συνεπίπεδα φορτία που δρουν στην πλάκα, αυτά προκύπτουν βάσει της υπόθεσης ότι τα φορτία P_x, P_y και $\overline{P}_{xy}$ είναι ίδια σε όλη την έκταση της αρχικής πλάκας, άρα και στην περιοχή του αποχωρισμού των στρώσεων. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι το μητρώο εκτατικής δυσκαμψίας [A] της αρχικής πλάκας δε μεταβάλλεται παρουσία του αποχωρισμού. Ως εκ τούτου, υπολογίζονται οι δυσκαμψίες του αρχικού πολύστρωτου στην περιοχή του αποχωρισμού βάσει της εξίσωσης (2.25) και στη συνέχεια, μέσω των εξισώσεων (2.12) για την περιοχή αυτή, προκύπτουν οι παραμορφώσεις $\{\varepsilon_o\}_{delam}$ και οι καμπυλότητες $\{k\}_{delam}$ της μέσης επιφάνειάς της. Συναρτήσει αυτών, υπολογίζονται οι παραμορφώσεις της μέσης επιφάνειας του υποπολύστρωτου, οπότε τα ζητούμενα φορτία είναι:

$$\{N\}_{sub} = [A]_{sub}\left(\{\varepsilon_o\}_{delam} + z\{k\}_{delam}\right) \tag{2.29}$$

όπου $[A]_{sub}$ το μητρώο εκτατικής δυσκαμψίας του υποπολύστρωτου και z η κατά το πάχος θέση της μέσης επιφάνειας αυτού.

Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται στα πλαίσια της μεθόδου Rayleigh - Ritz για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του υποπολύστρωτου και κατ' επέκταση, του φορτίου τοπικού λυγισμού της πλάκας. Σημειώνεται ότι η τιμή αυτή μπορεί να αποκλίνει σημαντικά από την πραγματική λόγω μη επίπεδης παραμόρφωσης του υποπολύστρωτου πριν το λυγισμό, η οποία οφείλεται στη μη συμμετρική ακολουθία των στρώσεών του και τη συνεπαγόμενη σύζευξη έκτασης - κάμψης. Σε κάθε περίπτωση, η τιμή που προκύπτει από την παραπάνω μεθοδολογία συγκρίνεται με την αντίστοιχη για το γενικό λυγισμό και η μικρότερη από αυτές καθορίζει τον τύπο λυγισμού της πλάκας, ενώ παράλληλα, παρέχει μία εκτίμηση για το κρίσιμο φορτίο.

Τα μοντέλα που έχουν ήδη περιγραφεί προσεγγίζουν το πρόβλημα του λυγισμού μίας επίπεδης πολύστρωτης πλάκας, άθικτης ή με αποχωρισμένες στρώσεις, μέσω της επίλυσης ενός συστήματος εξισώσεων. Η πολυπλοκότητα του συστήματος αυτού καθορίζεται από τις υποθέσεις και τις παραδοχές που λαμβάνονται υπόψη, ενώ το μέγεθός του εξαρτάται από την απαιτούμενη ακρίβεια. Καθώς η επίλυσή του απαιτεί τη χρήση κατάλληλων υπολογιστικών προγραμμάτων, τα μοντέλα αυτά δεν ενδείκνυνται για περιπτώσεις όπου το ζητούμενο είναι η άμεση εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου μέσω απλών υπολογισμών. Το κενό αυτό καλύπτουν ορισμένες απλές μέθοδοι, όπως οι απλοί μαθηματικοί τύποι και οι σχεδιαστικές καμπύλες.

2.2.3 Απλές μέθοδοι υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το πρόβλημα του λυγισμού πολύστρωτων πλακών μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά στα πλαίσια της ανάλυσης περιπτώσεων απλούστερων ακολουθιών των στρώσεων, ενώ το ίδιο συμβαίνει κατά την απλούστευση του συστήματος συνεπίπεδης φόρτισης. Λόγω των απλοποιήσεων, η επίλυση του αντίστοιχου συστήματος εξισώσεων δεν απαιτεί εξειδικευμένα προγράμματα και τελικά, οδηγεί σε μία απλή μαθηματική εξίσωση για τον άμεσο υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Εναλλακτικά, μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών της εξίσωσης αυτής, ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου περιορίζεται στην εκτίμηση ενός συντελεστή από αντίστοιχα διαγράμματα. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται ορισμένες τυπικές μέθοδοι που αφορούν σε πλάκες τόσο στην άθικτη κατάσταση όσο και με αποχωρισμένες στρώσεις.

Οι βασικές εξισώσεις λυγισμού (2.16) μίας άθικτης πολύστρωτης πλάκας είναι γενικά συζευγμένες. Στην περίπτωση όμως ενός συμμετρικού πολύστρωτου με διασταυρούμενες στρώσεις, όλα τα στοιχεία του μητρώου σύζευξης [B], καθώς και εκείνα των μητρώων [A] και [D] με δείκτες 16 και 26 μηδενίζονται, οπότε η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων αυτών ανάγεται στην επίλυση μίας και μόνο ομογενούς εξίσωσης. Περαιτέρω απλοποίηση του προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί στα πλαίσια της θεώρησης μονοαξονικής φόρτισης, ομοιόμορφα κατανεμημένης, οπότε η τελική μορφή της ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-P_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{2.30}$$

Η μη επίπεδη μετατόπιση w της μέσης επιφάνειας της πλάκας αντικαθίσταται στην εξίσωση (2.30) από μία κατάλληλα επιλεγμένη έκφραση. Εν προκειμένω, υποτίθεται ότι η πλάκα είναι απλά εδρασμένη, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{2.31}$$

όπου τα μεγέθη m και n ορίζονται όπως στο προηγούμενο εδάφιο. Επομένως, το πρόβλημα επιλύεται βάσει των παραπάνω και τελικά, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει από την εξίσωση (Zor - 2003):

$$P_{cr}=\pi^2\left[D_{11}\left(\frac{m}{a}\right)^2+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^2+D_{22}\left(\frac{1}{b}\right)^4\left(\frac{a}{m}\right)^2\right] \tag{2.32}$$

Μέσω της εξίσωσης (2.32) και για διάφορες τιμές του m, υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές του φορτίου, με τη μικρότερη από αυτές να είναι η κρίσιμη (Jensen - 2006).

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να κατασκευαστούν μαθηματικοί τύποι για διάφορες απλές περιπτώσεις πλακών. Ενδεικτικά, για συμμετρικά πολύστρωτα με διασταυρούμενες στρώσεις σε συνθήκες πάκτωσης, το κρίσιμο φορτίο δίνεται από την εξίσωση (Chirica et al - 2008):

$$P_{cr} = 4\pi^2\left[D_{11}\left(\frac{m}{a}\right)^2 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{1}{b}\right)^4\left(\frac{a}{m}\right)^2\right] \tag{2.33}$$

ενώ για απλά εδρασμένα, αντισυμμετρικά πολύστρωτα με διαγώνιες στρώσεις, γίνεται χρήση της εξίσωσης (Zor - 2003):

$$P_{cr} = \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\left[T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T_{13}^2 - T_{11}T_{23}^2}{T_{11}T_{22} - T_{12}^2}\right] \tag{2.34}$$

όπου τα μεγέθη T_{ij} υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$T_{11} = A_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + A_{66}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \tag{2.35α}$$

$$T_{12} = \left(A_{12} + A_{66}\right)\frac{m\pi}{a}\frac{\pi}{b} \tag{2.35β}$$

$$T_{13} = -\left[3B_{16}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + B_{26}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]\frac{\pi}{b} \tag{2.35γ}$$

$$T_{22} = A_{22}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + A_{66}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \tag{2.35δ}$$

$$T_{23} = -\left[B_{16}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 3B_{26}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]\frac{m\pi}{a} \tag{2.35ε}$$

$$T_{33} = D_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \tag{2.35στ}$$

Τα παραπάνω αφορούν στην απλή περίπτωση της ομοιόμορφης μονοαξονικής φόρτισης των πλακών. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις (2.32) και (2.33) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για οποιαδήποτε περίπτωση συμμετρικού ή αντισυμμετρικού πολύστρωτου με αυξημένο αριθμό στρώσεων. Αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι οι συζεύξεις έκτασης - κάμψης, που οφείλονται στο μη μηδενικό μητρώο [B], ελαττώνονται σημαντικά και είναι δυνατόν να παραλειφθούν για αριθμό στρώσεων μεγαλύτερο περίπου από οκτώ.

Οι απλές εξισώσεις υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού αποτελούν τη βάση για την κατασκευή αδιάστατων σχεδιαστικών καμπυλών, οι οποίες παρέχουν μία εξίσου εύχρηστη μέθοδο εκτίμησης του κρίσιμου φορτίου (Jensen - 2006). Μέσω κατάλληλων αδιάστατων παραμέτρων που περιγράφουν επαρκώς το πρόβλημα του λυγισμού, οι απλές εξισώσεις μετασχηματίζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορούν να αποδοθούν γραφικά. Κατά συνέπεια, ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου ανάγεται στην εκτίμηση ενός συντελεστή από ένα κατάλληλο διάγραμμα, συναρτήσει των παραμέτρων αυτών. Ένα τυπικό παράδειγμα σχεδιαστικών καμπυλών είναι αυτές που έχουν αναπτυχθεί από τον Τσούβαλη

για άθικτες, ορθοτροπικές πολύστρωτες πλάκες σε συνθήκες πάκτωσης και για διάφορα συνεπίπεδα φορτία (Tsouvalis - 2004). Αντίστοιχες καμπύλες υπάρχουν επίσης για την περίπτωση απλά εδρασμένων πλακών (Καρυαμπάς - 1992). Στα πλαίσια της προτεινόμενης μεθοδολογίας, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης:

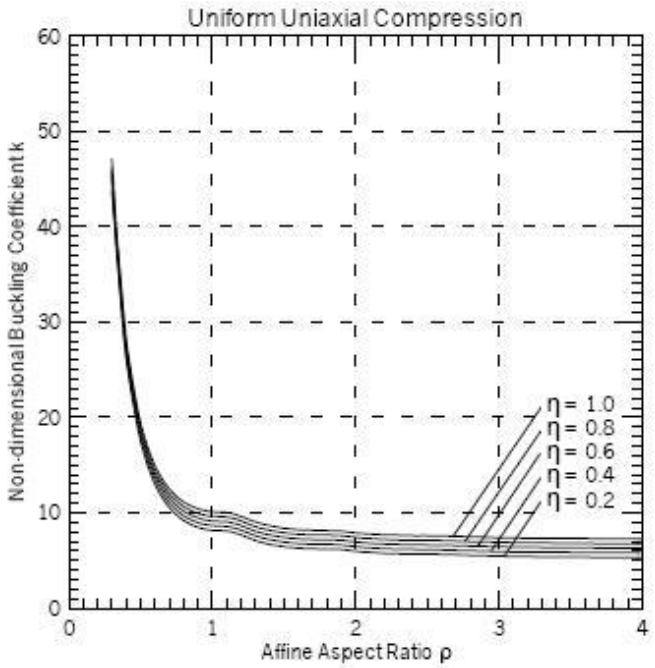
$$\bar{P}_{x,cr} = k\frac{\pi^2\sqrt{D_{11}D_{22}}}{b^2} \tag{2.36}$$

όπου k ο αδιάστατος συντελεστής λυγισμού. Ανάλογα με τις οριακές συνθήκες και τον τύπο της φόρτισης της πλάκας, ο συντελεστής αυτός προκύπτει από το αντίστοιχο διάγραμμα σαν συνάρτηση του αφφινικού λόγου πλευρών ρ και του γενικευμένου λόγου δυσκαμψιών η, που υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$\rho = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \tag{2.37}$$

$$\eta = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \tag{2.38}$$

Μέσω των εξισώσεων (2.37) και (2.38), συμπεριλαμβάνονται στην ανάλυση όλες οι βασικές παράμετροι μίας πολύστρωτης πλάκας, δηλαδή οι διαστάσεις της και η ακολουθία, τα πάχη, οι προσανατολισμοί και οι ιδιότητες των στρώσεών της. Στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζονται οι καμπύλες για μία πακτωμένη πλάκα, υποκείμενη σε ομοιόμορφη μονοαξονική θλίψη.



Σχήμα 2.7: Συντελεστής λυγισμού k για πακτωμένη πλάκα υπό ομοιόμορφη μονοαξονική θλίψη.

Εξίσου απλές μέθοδοι υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού έχουν προταθεί για ορισμένες περιπτώσεις πολύστρωτων πλακών που έχουν υποστεί αποχωρισμό των στρώσεών τους. Τυπικά παραδείγματα απλών μαθηματικών εξισώσεων είναι αυτές που παρουσιάζονται στη συνέχεια και αφορούν σε ομογενείς ορθοτροπικές πλάκες [6] με έναν αποχωρισμό υπό μορφή λωρίδας. Επομένως, θεωρείται μία πλάκα μήκους L (στη διεύθυνση x) και πάχους T που έχει υποστεί έναν αποχωρισμό μήκους l και σε απόσταση h από την εξωτερική επιφάνειά της, ενώ παράλληλα, καταπονείται αξονικά από ένα φορτίο P στη διεύθυνση x (Σχήμα 2.8). Στην περίπτωση απλής έδρασης, το κρίσιμο φορτίο γενικού λυγισμού υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης:

$$P_{glo} = \frac{\pi^2 E T^3}{12(1 - v_{12} v_{21}) L^2} \tag{2.39}$$

ενώ το φορτίο τοπικού λυγισμού προκύπτει από την εξίσωση:

$$P_{loc} = \frac{\pi^2 E h^2 T}{12(1 - v_{12} v_{21}) l^2} \tag{2.40}$$

όπου οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας E στη διεύθυνση x και του λόγου του Poisson v_{12} στο επίπεδο xy θεωρούνται σταθερές σε όλη την έκταση του πολύστρωτου (Kardomateas - 1989). Σε αντιστοιχία με τα παραπάνω, όταν η πλάκα είναι πακτωμένη, τα φορτία γενικού και τοπικού λυγισμού της υπολογίζονται ως ακολούθως (Shan - 2003):

$$P_{glo} = \frac{\pi^2 E T^3}{3(1 - v_{12}^2) L^2}\left(\frac{L - l}{L}\right) + \frac{\pi^2 E (T - h)^3}{3(1 - v_{12}^2) L^2}\left(\frac{l}{L}\right) \tag{2.41}$$

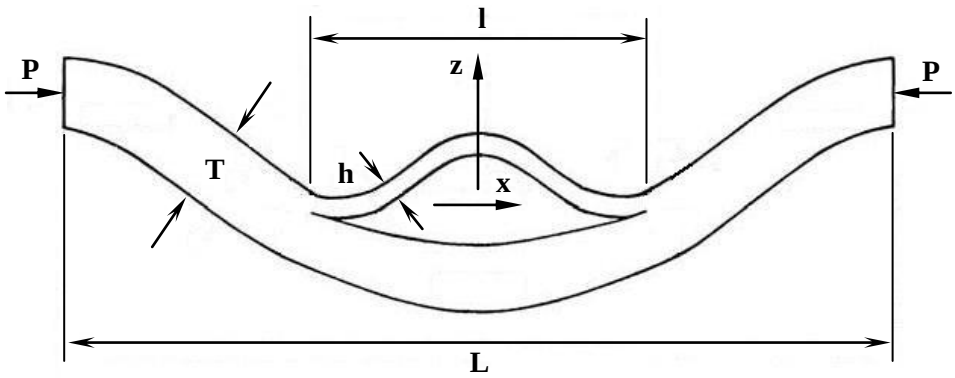
$$P_{loc} = \frac{\pi^2 E h^3}{3(1 - v_{12}^2) l^2} \tag{2.42}$$

Οι εξισώσεις (2.39) - (2.42) είναι αποτέλεσμα της μακροσκοπικής ανάλυσης του φαινομένου του λυγισμού, μέσω της οποίας επιχειρείται ο έλεγχος των διαφόρων φάσεών του. Βασίζονται δε στην εξίσωση του Euler για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μίας ισοτροπικής πλάκας, ενώ η εξίσωση (2.40) προκύπτει από την υπόθεση ότι ο αποχωρισμός των στρώσεων είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί σαν μία ατέλεια της πλάκας.

Από τα παραπάνω καθίσταται προφανές ότι οι απλές μέθοδοι υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μίας πολύστρωτης πλάκας δεν ενδείκνυνται για εκτιμήσεις ικανοποιητικής ακρίβειας. Χαρακτηριστικά, στις εξισώσεις (2.39) - (2.42) τα μεγέθη E και v_{12} παίρνουν την ίδια τιμή για κάθε περιοχή του πολύστρωτου, οπότε σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πιθανή η υπερεκτίμηση ή η υποεκτίμηση του κρίσιμου φορτίου. Παρ' όλα αυτά, προσφέρουν χρήσιμα

[6] Ένα υλικό ονομάζεται ομογενές όταν οι ιδιότητές του σε ένα σημείο δεν εξαρτώνται από τη θέση του σημείου αυτού, δηλαδή σε κάθε σημείο οι ιδιότητές του είναι ομοιόμορφες.

και άμεσα συμπεράσματα για το επίπεδο της φόρτισης που προκαλεί λυγισμό και συνεπώς, αποτελούν αξιόλογα εργαλεία για την αρχική μελέτη μίας κατασκευής. Στο επόμενο εδάφιο, περιγράφεται η διαδικασία υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου μέσω αυτών των μεθόδων, ώστε να εκτιμηθεί η ακρίβεια που παρέχουν.



Σχήμα 2.8: Διατομή μίας πολύστρωτης πλάκας με έναν αποχωρισμό υπό μορφή λωρίδας.

2.3 Εφαρμογή των απλών μεθόδων υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού

Στα πλαίσια της αξιολόγησης της ακρίβειας μίας αναλυτικής μεθόδου, είναι απαραίτητη η σύγκριση των αποτελεσμάτων της με εκείνα που προκύπτουν βάσει του πειράματος ή των πεπερασμένων στοιχείων. Η σύγκριση αυτή αποτελεί αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου, οπότε στο παρόν εδάφιο, περιγράφεται με συντομία η διαδικασία που ακολουθείται κατά τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μίας πολύστρωτης πλάκας μέσω των εξισώσεων που παρατίθενται παραπάνω. Η εκτίμηση του μεγέθους αυτού μέσω γενικευμένων μοντέλων που οδηγούν σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, καθώς και η αξιολόγηση αυτών, ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μίας άθικτης πολύστρωτης πλάκας υπό ομοιόμορφη μονοαξονική καταπόνηση μπορεί να γίνει μέσω των εξισώσεων (2.32) - (2.34), ανάλογα με τον τύπο του πολύστρωτου και τις οριακές συνθήκες. Οι δυσκαμψίες A_{ij}, B_{ij} και D_{ij} που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς αυτούς προκύπτουν από τις εξισώσεις (2.13), οι οποίες μπορούν να απλοποιηθούν βάσει ορισμένων υποθέσεων. Επομένως, ελλείψει λοιπών στοιχείων, ένα ομογενές ορθοτροπικό πολύστρωτο μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μία στρώση, πάχους ίσου με εκείνο του πολύστρωτου, οπότε οι εξισώσεις (2.13) γράφονται ως ακολούθως:

$$A_{ij} = \overline{Q}_{ij} t \tag{2.43α}$$

$$B_{ij} = 0 \tag{2.43β}$$

$$D_{ij} = \frac{\overline{Q}_{ij} t^3}{12} \tag{2.43γ}$$

όπου τα $\overline{Q}_{ij}$ προκύπτουν από τις εξισώσεις (2.9). Με βάση τα παραπάνω, η αρχική εξίσωση επιλύεται για διάφορες τιμές του ακέραιου αριθμού m ($m = 1,2,\ldots$) και τελικά, το μικρότερο

από τα φορτία που προκύπτουν είναι το κρίσιμο. Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα φορτία είναι ανηγμένα ανά μονάδα πάχους της πλάκας.

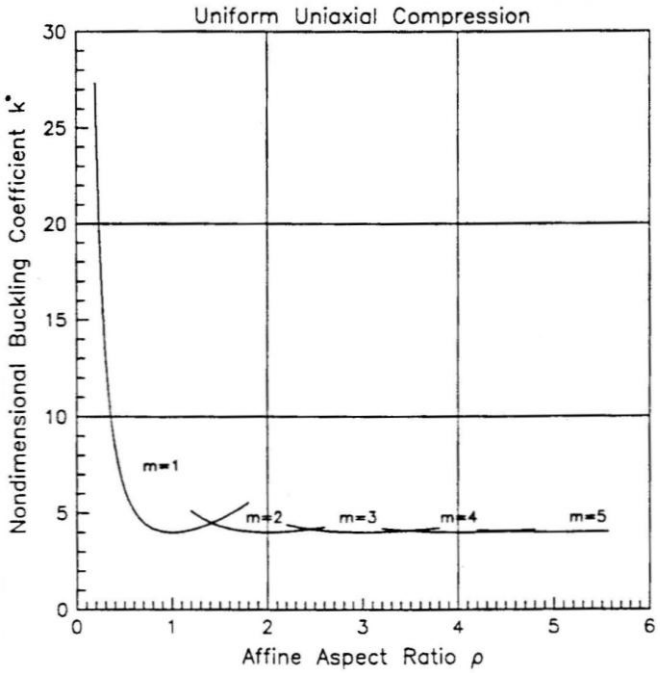
Ανάλογη διαδικασία ακολουθείται κατά τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου μέσω της εξίσωσης (2.36). Έτσι, βάσει του τύπου της φόρτισης και των οριακών συνθηκών, επιλέγεται το διάγραμμα για την εκτίμηση του αδιάστατου συντελεστή λυγισμού k. Εναλλακτικά, μέσω ενός αντίστοιχου διαγράμματος, εκτιμάται η τιμή του συντελεστή αυτού για $\eta = 1$ και βάσει αυτής, υπολογίζεται η τελική τιμή του. Στο Σχήμα 2.9 φαίνεται ένα τέτοιο διάγραμμα για την περίπτωση μίας απλά εδρασμένης πλάκας υπό ομοιόμορφη μονοαξονική θλίψη, ενώ ο συντελεστής k δίνεται από την εξίσωση (Tsouvalis - 2004):

$$k = k^* + 2(\eta - 1) \tag{2.44}$$

όπου k^* ο συντελεστής λυγισμού για $\eta = 1$. Η αντίστοιχη εξίσωση για μία πακτωμένη πλάκα είναι (Τσούβαλης - 1998):

$$k = (-0.06\eta + 1.02)k^* + (3.04\eta - 2.64) \tag{2.45}$$

Σε κάθε περίπτωση, οι δυσκαμψίες D_{ij} στις εξισώσεις της μεθόδου αυτής υπολογίζονται όπως στην περίπτωση των εξισώσεων (2.32) - (2.34), ενώ τα φορτία που προκύπτουν είναι ανηγμένα ανά μονάδα πάχους της πλάκας.



Σχήμα 2.9: Συντελεστής λυγισμού k^* για απλά εδρασμένη πλάκα υπό ομοιόμορφη μονοαξονική θλίψη.

Τέλος, οι εξισώσεις (2.39) - (2.42) για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου γενικού και τοπικού λυγισμού μίας πολύστρωτης πλάκας που έχει υποστεί αποχωρισμό των στρώσεών

της επιλύονται με απλή αντικατάσταση των διαφόρων μεγεθών. Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο εδάφιο, οι μηχανικές ιδιότητες της πλάκας παραμένουν σταθερές σε όλη την έκτασή της, ανεξαρτήτως περιοχής (άθικτης ή αποχωρισμού), οπότε το κρίσιμο φορτίο είναι δυνατόν να υποεκτιμάται ή να υπερεκτιμάται. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί μερικά με τη θεώρηση της καμπτικής δυσκαμψίας D_i κάθε επιμέρους τμήματος, που δίνεται από την εξίσωση (Kardomateas - 1989):

$$D_i = \frac{Et_i^3}{12(1 - v_{12}v_{21})} \tag{2.46}$$

όπου t_i το πάχος και E και v_{12} οι μηχανικές ιδιότητες του τμήματος αυτού. Επομένως, μέσω της εξίσωσης (2.46) και σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (2.40) και (2.42), το κρίσιμο φορτίο τοπικού λυγισμού της πλάκας υπολογίζεται με βάση τις ιδιότητες του υποπολύστρωτου που λυγίζει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανάλυση του λυγισμού πολύστρωτων πλακών με πεπερασμένα στοιχεία

3.1 Εισαγωγή

Οι αναλυτικές μέθοδοι προσέγγισης της συμπεριφοράς μίας κατασκευής αποτελούν ένα εύχρηστο εργαλείο για κάθε μελετητή. Βάσει των υποθέσεων και των παραδοχών τους, το εκάστοτε πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά και κατά συνέπεια, επιλύεται εύκολα και άμεσα. Λόγω όμως των απλοποιήσεων, οι εκτιμήσεις των διαφόρων μεγεθών είναι συχνά χονδρικές, ενώ το πεδίο εφαρμογής των μεθόδων περιορίζεται σε απλές περιπτώσεις. Σε αντιδιαστολή με τις αναλυτικές, οι πειραματικές μέθοδοι είναι ιδιαίτερα αξιόπιστες καθώς μέσω αυτών μπορεί να επιτευχθεί η ακριβής αναπαράσταση του προβλήματος. Η εκτεταμένη προετοιμασία όμως που απαιτούν, αλλά και η διάρκεια των πειραμάτων τις καθιστούν ιδιαίτερα χρονοβόρες και αντιοικονομικές. Οι αδυναμίες αυτές των παραπάνω μεθόδων μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά μέσω των πεπερασμένων στοιχείων.

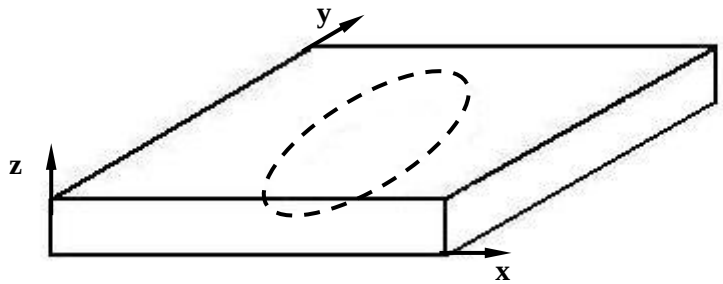
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, FEM) αποτελεί μία αριθμητική τεχνική προσέγγισης της συμπεριφοράς μίας κατασκευής. Σύμφωνα με αυτήν, η κατασκευή αναπαρίσταται από ένα σύνολο επιμέρους τμημάτων (στοιχεία, elements) που συνδέονται μεταξύ τους με εξισώσεις συνέχειας. Μέσω της επίλυσης των εξισώσεων αυτών, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις ισορροπίας κάθε στοιχείου, μπορούν να υπολογιστούν τα ζητούμενα μεγέθη σε οποιοδήποτε σημείο της κατασκευής. Επομένως, κατά την ανάλυση ενός προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία, λαμβάνεται υπόψη ολόκληρη η κατασκευή και όχι ένα στοιχειώδες τμήμα αυτής, όπως συμβαίνει με τις αναλυτικές μεθόδους, γεγονός που επιτρέπει τη μελέτη πολύπλοκων κατασκευών. Επιπρόσθετα, η ακρίβεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) είναι ικανοποιητική και συχνά συγκρίσιμη εκείνης των πειραματικών μεθόδων και εξαρτάται από τις διάφορες παραμέτρους που υπεισέρχονται κατά την εφαρμογή της. Οι παράμετροι αυτές καθορίζονται βάσει του επιθυμητού συνδυασμού της ακρίβειας και της ταχύτητας της ανάλυσης, με τις αντίστοιχες επιλογές να περιορίζονται από τις δυνατότητες του εκάστοτε υπολογιστή. Σε γενικές γραμμές πάντως, η ΜΠΣ συνδυάζει τη μικρή διάρκεια της ανάλυσης με την υψηλή αξιοπιστία των αντίστοιχων αποτελεσμάτων και συνεπώς, αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για ένα μεγάλο αριθμό μελετών.

Η ανάλυση ενός προβλήματος με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων πραγματοποιείται μέσω κατάλληλων προγραμματιστικών πακέτων που παρέχουν ένα ευρύ φάσμα επιλογών για τις παραμέτρους αυτής. Παρά την πληθώρα των πακέτων αυτών και ανεξαρτήτως του τύπου του εξεταζόμενου προβλήματος, η διαδικασία επίλυσης είναι εν γένει ίδια και χωρίζεται σε τρία βασικά στάδια. Αρχικά, στα πλαίσια της προεπεξεργασίας (preprocessing), γίνονται οι ενέργειες εκείνες που οδηγούν στη δημιουργία του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων της κατασκευής. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται η επίλυση (solution) του προβλήματος, ενώ η ανάγνωση και η επεξεργασία των αποτελεσμάτων αυτής πραγματοποιούνται στο στάδιο της μεταεπεξεργασίας (postprocessing).

Η παραπάνω διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, περιγράφονται αναλυτικά τα στάδια της ανάλυσης του λυγισμού πολύστρωτων πλακών, άθικτων ή με αποχωρισμένες στρώσεις, μέσω του προγραμματιστικού πακέτου ANSYS, το οποίο συνδυάζει τις υψηλές δυνατότητες προσομοίωσης με την ευκολία χειρισμού από το χρήστη. Στο πλαίσιο αυτό, καταγράφονται επίσης τα προβλήματα που προέκυψαν κατά τη μοντελοποίηση του φαινομένου. Τέλος, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την περιγραφή της διαδικασίας ελέγχου της αξιοπιστίας τόσο των μοντέλων αυτών όσο και των απλών αναλυτικών μεθόδων υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που έχουν περιγραφεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3.2 Προεπεξεργασία

Η δημιουργία του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων της κατασκευής αποτελεί το πλέον σημαντικό βήμα μίας ανάλυσης, καθώς βάσει του μοντέλου αυτού επιλύεται το υπό μελέτη πρόβλημα. Η σημασία του έγκειται στο ότι η ορθότητα και η ακρίβεια της αναπαράστασης της κατασκευής καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την αξιοπιστία των τελικών αποτελεσμάτων της επίλυσης. Επομένως, το στάδιο της προεπεξεργασίας, που αφορά στην κατασκευή του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, είναι καθοριστικό για την ανάλυση. Στα πλαίσια αυτού, επιλέγεται ο τύπος των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν, εισάγονται οι ιδιότητες της κατασκευής και κατασκευάζεται το γεωμετρικό μοντέλο αυτής, το οποίο διακριτοποιείται ώστε να δημιουργηθεί ο κάνναβος (mesh), δηλαδή το σύνολο των πεπερασμένων στοιχείων. Τα βασικά αυτά βήματα περιγράφονται στη συνέχεια για την περίπτωση μίας τετραγωνικής πολύστρωτης πλάκας με έναν κεντρικό, ελλειπτικό αποχωρισμό των στρώσεών της, ο οποίος διευθετείται παράλληλα στα γεωμετρικά άκρα αυτής (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1: Τετραγωνική πλάκα με έναν κεντρικό αποχωρισμό ελλειπτικού σχήματος.

3.2.1 Επιλογή τύπου στοιχείων

Στα πλαίσια της ανάλυσης του λυγισμού πολύστρωτων πλακών μέσω πεπερασμένων στοιχείων, έχουν προταθεί κατά καιρούς διάφοροι τρόποι μοντελοποίησης του αποχωρισμού των στρώσεων. Μία σχετικά απλή αναπαράσταση μίας πλάκας με αποχωρισμένες στρώσεις είναι εκείνη που αφορά σε μία διατομή κάθετα στο πλάτος αυτής, η οποία μοντελοποιείται μέσω δισδιάστατων (επίπεδων) στοιχείων (plane elements, Hwang - 2001). Η διατομή αυτή χωρίζεται σε δύο τμήματα εκατέρωθεν του επιπέδου του αποχωρισμού, τα οποία ενώνονται στην άθικτη περιοχή, επιτυγχάνοντας έτσι μία απλή και ικανοποιητική αναπαράσταση της

αστοχίας. Μέσω του μοντέλου αυτού, η ανάλυση απλοποιείται σημαντικά, οπότε μειώνεται ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος. Παρ' όλα αυτά, το επίπεδο της ακρίβειας που παρέχεται εξαρτάται από τον τύπο του εξεταζόμενου προβλήματος. Επομένως, αξιόπιστα αποτελέσματα προκύπτουν κατά την ανάλυση πλακών με σταθερή διατομή, όπως εκείνες με αποχωρισμούς υπό μορφή λωρίδας.

Η αναπαράσταση πλακών με αποχωρισμούς διαφόρων σχημάτων και μεγεθών μπορεί να επιτευχθεί μέσω μοντέλων που λαμβάνουν υπόψη ολόκληρη την πλάκα. Τέτοια μοντέλα είναι δυνατόν να κατασκευαστούν με χρήση είτε δισδιάστατων (Kyoung et al - 1999, Chirica et al - 2008) είτε τρισδιάστατων (στερεών) στοιχείων (solid elements, Short et al - 2001, Zor - 2003, Lee - 2007). Στην πρώτη περίπτωση, τα τμήματα της άθικτης περιοχής και καθένα από τα υποπολύστρωτα της πλάκας αναπαρίστανται ξεχωριστά από δισδιάστατα μοντέλα, τα οποία εν συνεχεία συνδέονται μεταξύ τους στα όρια του αποχωρισμού. Στη δεύτερη περίπτωση, το τρισδιάστατο μοντέλο της πλάκας χωρίζεται σε δύο τμήματα εκατέρωθεν του επιπέδου του αποχωρισμού, τα οποία ενώνονται στην άθικτη περιοχή. Η διαφορά των δύο προσεγγίσεων έγκειται τόσο στην ακρίβεια που παρέχουν όσο και στον υπολογιστικό χρόνο που απαιτούν, δηλαδή σε μεγέθη που εξαρτώνται από τον αριθμό των κόμβων (nodes) του μοντέλου. [7] Έτσι, η χρήση δισδιάστατων στοιχείων καθιστά πιο γρήγορη την ανάλυση λόγω των σχετικά λίγων κόμβων που αυτά συνεπάγονται, ενώ αντίθετα, η αύξηση του αριθμού των κόμβων κατά τη χρήση τρισδιάστατων στοιχείων οδηγεί σε πιο αργές, αλλά περισσότερο ακριβείς αναλύσεις.

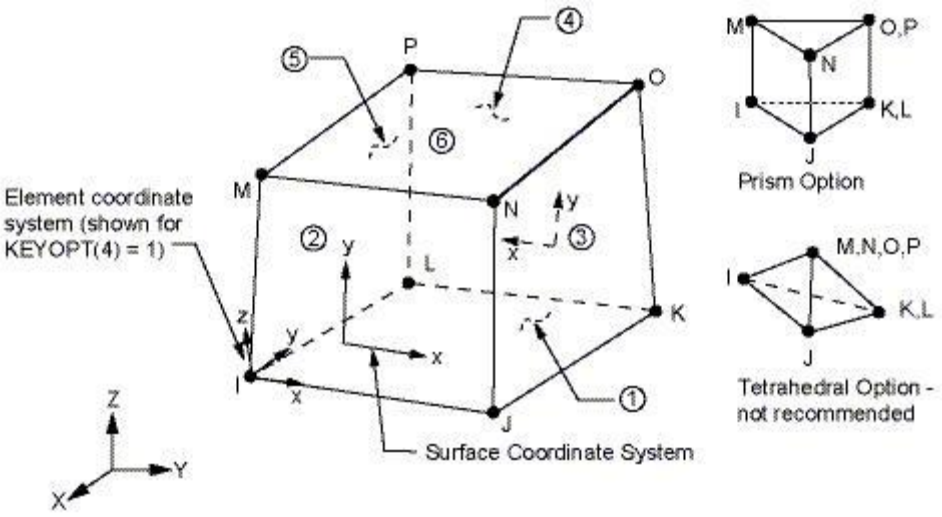
Όπως προκύπτει βάσει των παραπάνω, μία πλάκα με έναν εσωτερικό αποχωρισμό των στρώσεών της μπορεί να μοντελοποιηθεί ικανοποιητικά μέσω τρισδιάστατων στοιχείων. Το μοντέλο που κατασκευάζεται για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας αποτελείται από δύο στρώσεις στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας, μία για κάθε τμήμα αυτής εκατέρωθεν του επιπέδου του αποχωρισμού, οι οποίες ενώνονται στην άθικτη περιοχή (Short et al - 2001). Ο τύπος των στοιχείων του μοντέλου επιλέγεται από τη σχετική βιβλιοθήκη του ANSYS, το οποίο προσφέρει μία μεγάλη ποικιλία τρισδιάστατων στοιχείων.

Το απλούστερο τρισδιάστατο στοιχείο που εξυπηρετεί τη μοντελοποίηση μίας πλάκας είναι το SOLID45, το οποίο αποτελείται από οκτώ κόμβους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Οι κόμβοι καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός εξαέδρου και έχουν τρεις βαθμούς ελευθερίας, ήτοι τις μετατοπίσεις στις διευθύνσεις των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων του στοιχείου. Επιπρόσθετα, το SOLID45 υποστηρίζει την εφαρμογή μεγάλων παραμορφώσεων, γεγονός ιδιαίτερα σημαντικό για την ανάλυση του λυγισμού, ενώ η χρήση του είναι απλή και δεν απαιτεί τον ορισμό άλλων παραμέτρων (ANSYS - 2007).

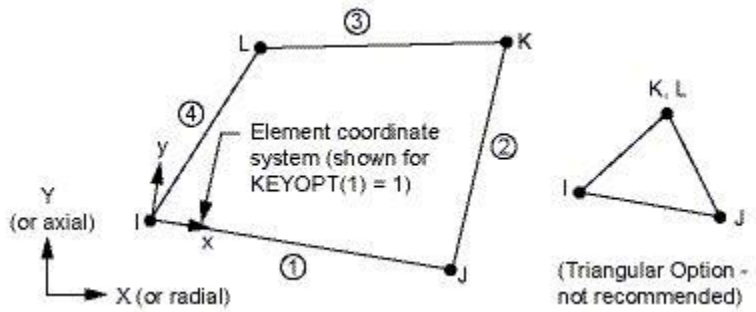
Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι παράλληλα με το στερεό SOLID45, γίνεται χρήση του δισδιάστατου στοιχείου PLANE42 που αναπαρίσταται σχηματικά στο Σχήμα 3.3. Το στοιχείο αυτό αποτελείται από τέσσερεις κόμβους, οι οποίοι καταλαμβάνουν τις γωνίες ενός τετραπλεύρου και επιπλέον, χαρακτηρίζονται από δύο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις μετατοπίσεις στις διευθύνσεις των αξόνων x και y του συστήματος συντεταγμένων του

[7] Κάθε στοιχείο ορίζεται από ένα σύνολο κόμβων, μέσω των οποίων αποδίδονται βαθμοί ελευθερίας στο τελικό μοντέλο της κατασκευής. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του μοντέλου καθορίζει το επίπεδο της ακρίβειας της ανάλυσης, καθώς και τον αντίστοιχο υπολογιστικό χρόνο.

στοιχείου (ANSYS - 2007). Η χρήση του PLANE42 είναι καθαρά βοηθητική και αφορά σε ένα ενδιάμεσο στάδιο της κατασκευής του μοντέλου, το οποίο περιγράφεται στα επόμενα.



Σχήμα 3.2: Σχηματική αναπαράσταση του τρισδιάστατου στοιχείου SOLID45.



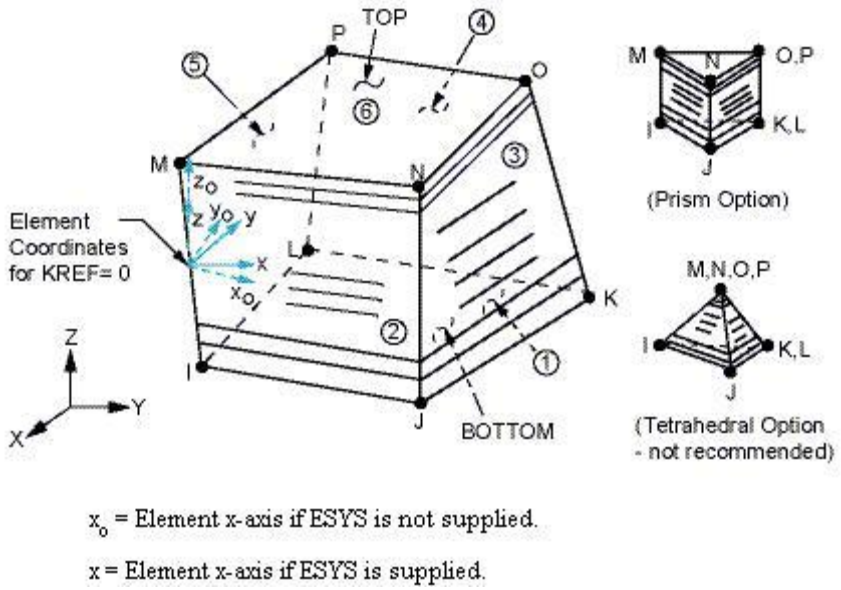
Σχήμα 3.3: Σχηματική αναπαράσταση του δισδιάστατου στοιχείου PLANE42.

3.2.2 Ορισμός μηχανικών ιδιοτήτων

Εφόσον επιλεγεί ο κατάλληλος τύπος στοιχείων, η διαδικασία κατασκευής του μοντέλου της πλάκας συνεχίζεται με τον καθορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του. Για το σκοπό αυτό, το ANSYS προσφέρει ορισμένα μοντέλα υλικών που καλύπτουν διάφορες κατηγορίες, όπως τα γραμμικά ελαστικά και τα μη γραμμικά υλικά (ελαστικά, ανελαστικά, ιξωδοελαστικά). Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας και σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στα προηγούμενα κεφάλαια σχετικά με τα πολύστρωτα υλικά, μία πολύστρωτη πλάκα παρουσιάζει γραμμικά ελαστική συμπεριφορά και έχει ορθοτροπικό χαρακτήρα. Επομένως, επιλέγεται το αντίστοιχο μοντέλο υλικών και μέσω αυτού, εισάγονται στην ανάλυση οι ιδιότητες της υπό εξέταση πλάκας.

Οι ιδιότητες που απαιτούνται για τον πλήρη καθορισμό του μοντέλου υλικών εξαρτώνται από τον τύπο αυτού. Έτσι, δεδομένης της επιλογής του γραμμικά ελαστικού, ορθοτροπικού μοντέλου, απαιτείται ο ορισμός των μέτρων ελαστικότητας της πλάκας στις διευθύνσεις των γεωμετρικών αξόνων αυτής (E_x, E_y και E_z), τα μέτρα διάτμησης στα επίπεδα που ορίζονται από τους παραπάνω άξονες (G_{xy}, G_{yz} και G_{zx}) και οι αντίστοιχοι λόγοι του Poisson (ν_{xy}, ν_{yz} και ν_{zx}). Συνήθως όμως, οι ιδιότητες αυτές είναι γνωστές για το υλικό των στρώσεων της

πλάκας, οπότε λόγω των διαφορετικών προσανατολισμών αυτών μέσα στο πολύστρωτο, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν. Η δυσκολία αυτή μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρήση μίας στρωσιγενούς εκδοχής του στοιχείου που έχει ήδη επιλεγεί (SOLID46, Σχήμα 3.4), μέσω της οποίας οι ιδιότητες εισάγονται ανά στρώση, σε συνδυασμό με το πάχος και τον προσανατολισμό των ινών αυτής (ANSYS - 2007). Εναλλακτικά, μέσω κατάλληλων υποθέσεων και παραδοχών, οι ιδιότητες της στρώσης μπορούν να συνδυαστούν με τη χρήση της απλής εκδοχής των στοιχείων (SOLID45), όπως συμβαίνει κατά την παραμετρική μελέτη.



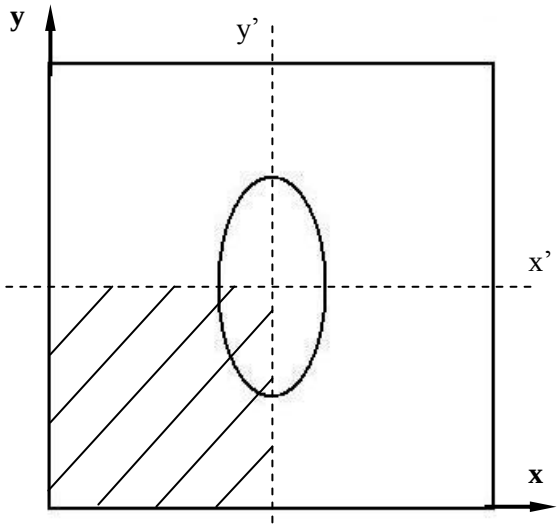
Σχήμα 3.4: Σχηματική αναπαράσταση του στρωσιγενούς τρισδιάστατου στοιχείου SOLID46.

3.2.3 Σχεδίαση της πλάκας

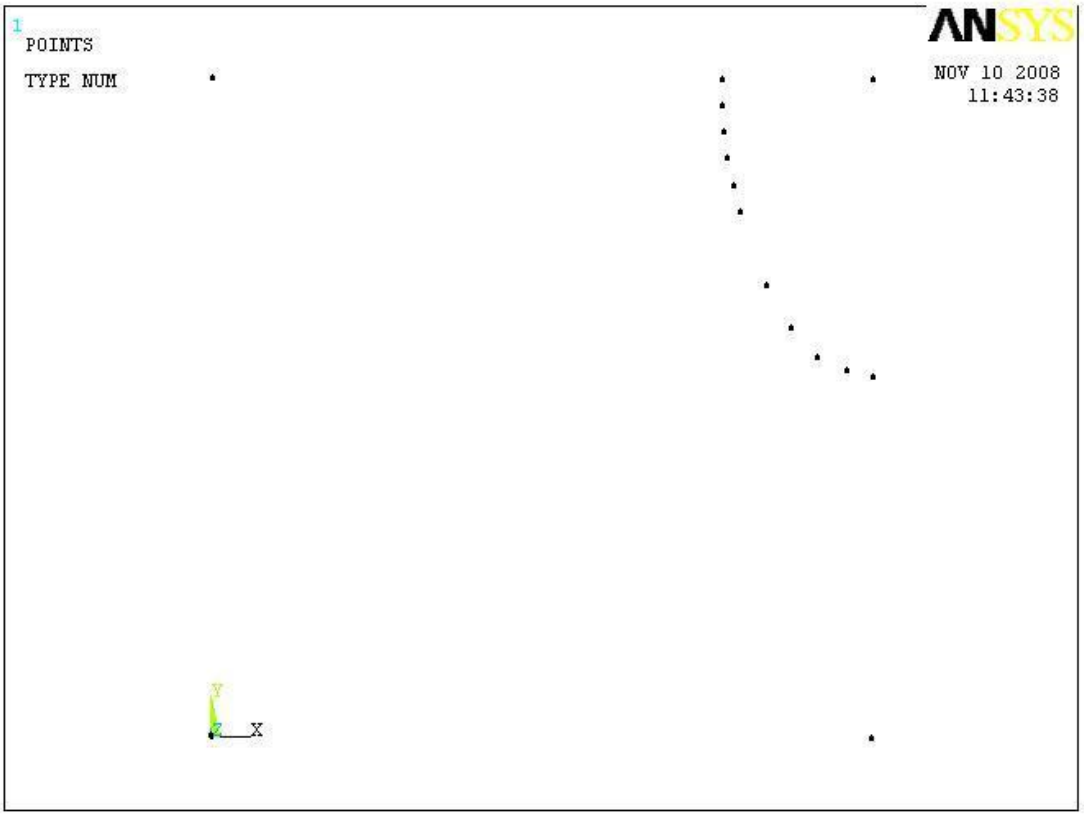
Η επιλογή τρισδιάστατης προσέγγισης του λυγισμού της πλάκας έχει σαν συνέπεια την κατασκευή ενός τρισδιάστατου γεωμετρικού μοντέλου για τις ανάγκες της ανάλυσης. Έτσι, μέσω κατάλληλων εργαλείων του ANSYS, δημιουργούνται οι γραμμές, οι επιφάνειες και τελικά, οι όγκοι που αναπαριστούν την πλάκα. Η κατασκευή των όγκων αυτών βασίζεται στην τομή της πλάκας με το επίπεδο του αποχωρισμού, η οποία αναπαρίσταται σχηματικά στο Σχήμα 3.5. Όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα, η τομή εμφανίζει δύο άξονες συμμετρίας, τον x' παράλληλα στον άξονα x και τον y' παράλληλα στον άξονα y, οπότε η σχεδίαση μπορεί να βασιστεί στο γραμμοσκιασμένο τμήμα που αντιστοιχεί στο ¼ αυτής.

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές, το πρώτο βήμα για τη σχεδίαση της πλάκας είναι ο ορισμός των συντεταγμένων των σημείων που οριοθετούν το γραμμοσκιασμένο τμήμα του Σχήματος 3.5, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που ορίζουν το όριο του αποχωρισμού (Σχήμα 3.6). Βάσει των σημείων αυτών, σχεδιάζονται το περίγραμμα του τμήματος και το όριο του αποχωρισμού (Σχήμα 3.7) και ακολούθως, βάσει των γραμμών, σχηματίζονται δύο επιφάνειες (Σχήμα 3.8). Οι επιφάνειες αυτές, εκ των οποίων η μία αντιστοιχεί στην άθικτη περιοχή και η άλλη στην περιοχή του αποχωρισμού, προεκβάλλονται στη διεύθυνση του πάχους της πλάκας ώστε να σχηματιστούν οι αντίστοιχοι όγκοι (Σχήμα 3.9). Το πάχος των όγκων αυτών είναι ίσο με εκείνο του κατώτερου υποπολύστρωτου, περιορίζοντας έτσι τη σχεδίαση της πλάκας στο ¼ του τμήματος αυτής, κάτω από το επίπεδο του αποχωρισμού. Η διαδικασία της σχεδίασης

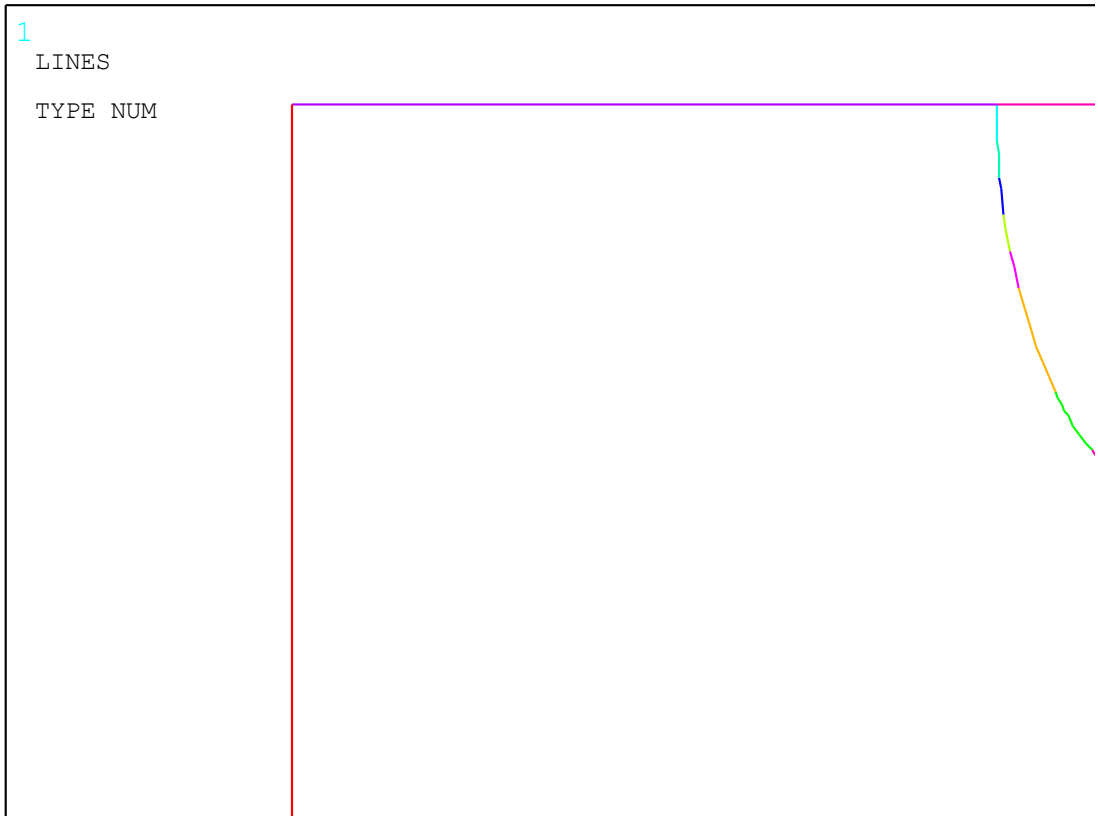
ολοκληρώνεται με την ένωση των όγκων στα κοινά σημεία τους μέσω της εντολής *nummrg* (ANSYS - 2007), ώστε να λειτουργούν σαν ένα σώμα.



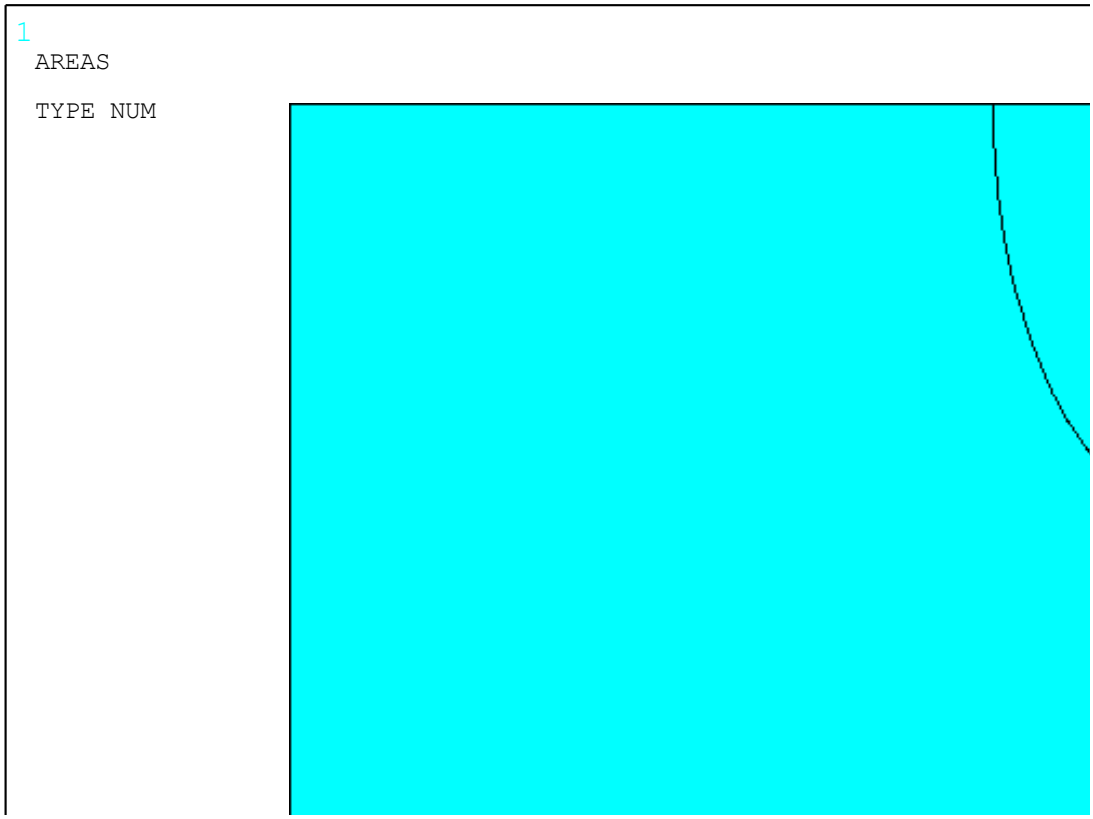
Σχήμα 3.5: Τομή της πλάκας με το επίπεδο του αποχωρισμού των στρώσεων.



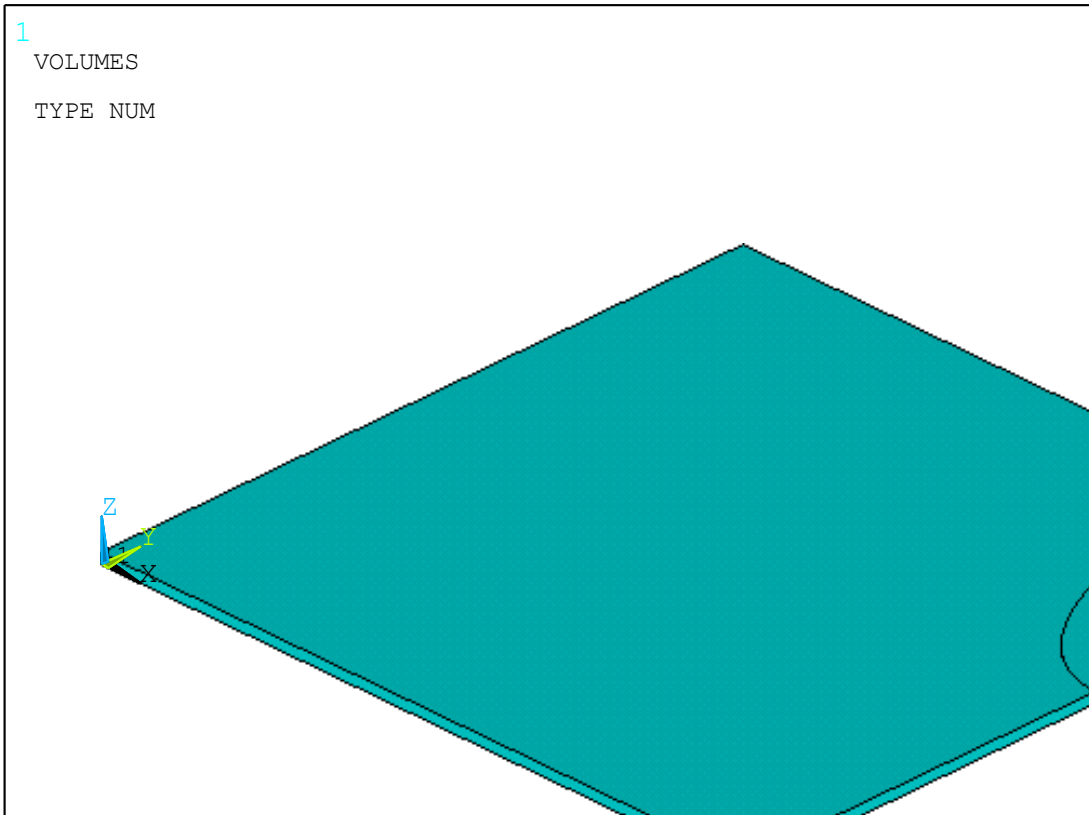
Σχήμα 3.6: Ορισμός των σημείων του γραμμοσκιασμένου τμήματος της τομής.



Σχήμα 3.7: Σχεδίαση των γραμμών του γραμμοσκιασμένου τμήματος της τομής.



Σχήμα 3.8: Δημιουργία των επιφανειών του γραμμοσκιασμένου τμήματος της τομής.



Σχήμα 3.9: Δημιουργία των όγκων του τμήματος της πλάκας.

Το παραπάνω γεωμετρικό μοντέλο της πλάκας αποτελεί τη βάση για την κατασκευή του τελικού μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, εξασφαλίζοντας έτσι την επαρκή αναπαράσταση του αποχωρισμού των στρώσεων. Μέσω της σχεδίασης αυτής, πραγματοποιείται μία σαφής διάκριση μεταξύ της άθικτης περιοχής και της περιοχής του αποχωρισμού, η οποία απαιτείται για την τμηματική ένωση των στρώσεων των στοιχείων του τελικού μοντέλου (βλέπε εδάφιο 3.2.4). Επιπρόσθετα, εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός ελάχιστου αριθμού σημείων για το τελικό γεωμετρικό μοντέλο, στο επίπεδο του αποχωρισμού και στην περιοχή αυτού. Τα σημεία αυτά είναι απαραίτητα στα πλαίσια της εφαρμογής της εντολής *nummrg* για την τμηματική ένωση των στρώσεων των στοιχείων, δεδομένου ότι μέσω αυτής, ενώνονται τόσο οι κοινοί κόμβοι των στοιχείων όσο και τα αντίστοιχα σημεία του γεωμετρικού μοντέλου (ANSYS - 2007). Επομένως, η απαίτηση για ένωση των κοινών σημείων, εκτός εκείνων που βρίσκονται στην περιοχή του αποχωρισμού, εξασφαλίζει την τμηματική ένωση του γεωμετρικού μοντέλου και τη συμφωνία μεταξύ αυτού και του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων.

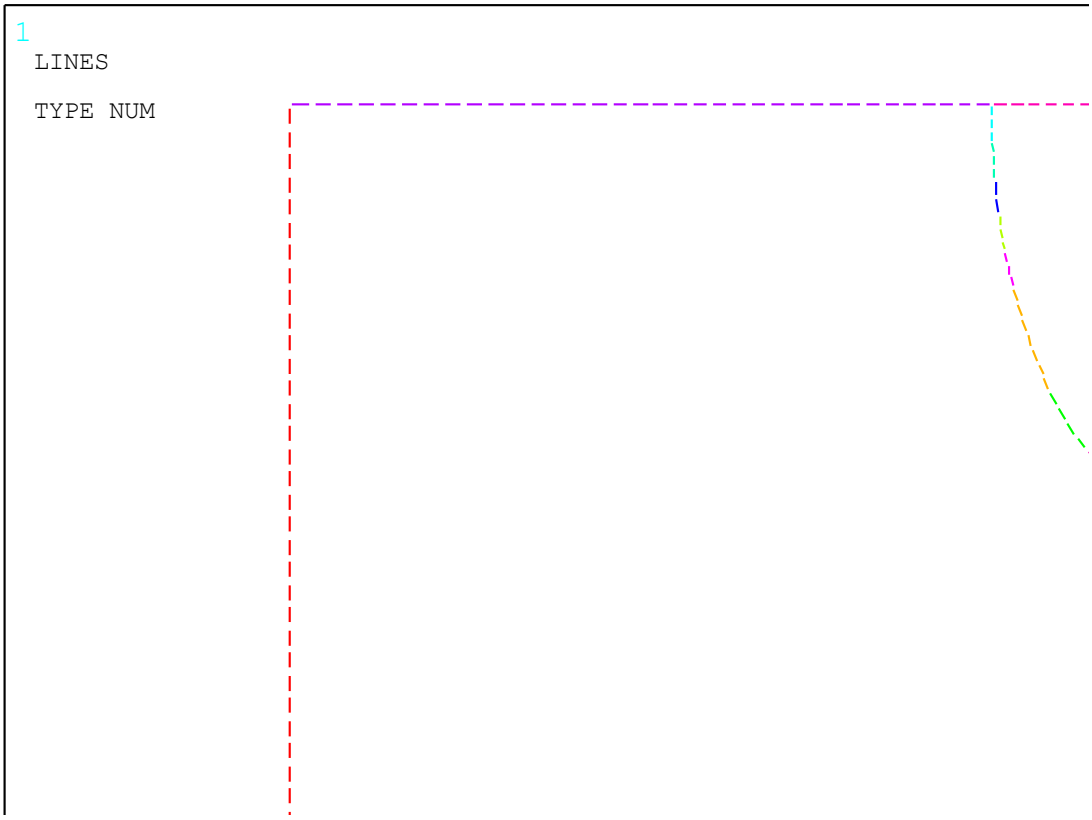
3.2.4 Κατασκευή του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων

Δεδομένης της σχεδίασης ενός τμήματος της πλάκας, η κατασκευή του τελικού μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων πραγματοποιείται σε δύο φάσεις. Αρχικά, καθορίζονται ορισμένες επιπλέον παράμετροι της ανάλυσης, όπως το σχήμα και ο αριθμός των στοιχείων στο τελικό μοντέλο και βάσει αυτών, σχηματίζεται ο τρισδιάστατος κάνναβος του τμήματος της πλάκας που έχει ήδη σχεδιαστεί. Στη συνέχεια, με βάση τον κάνναβο αυτό και μέσω κατάλληλων ενεργειών, κατασκευάζεται το τελικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στο στάδιο της επίλυσης.

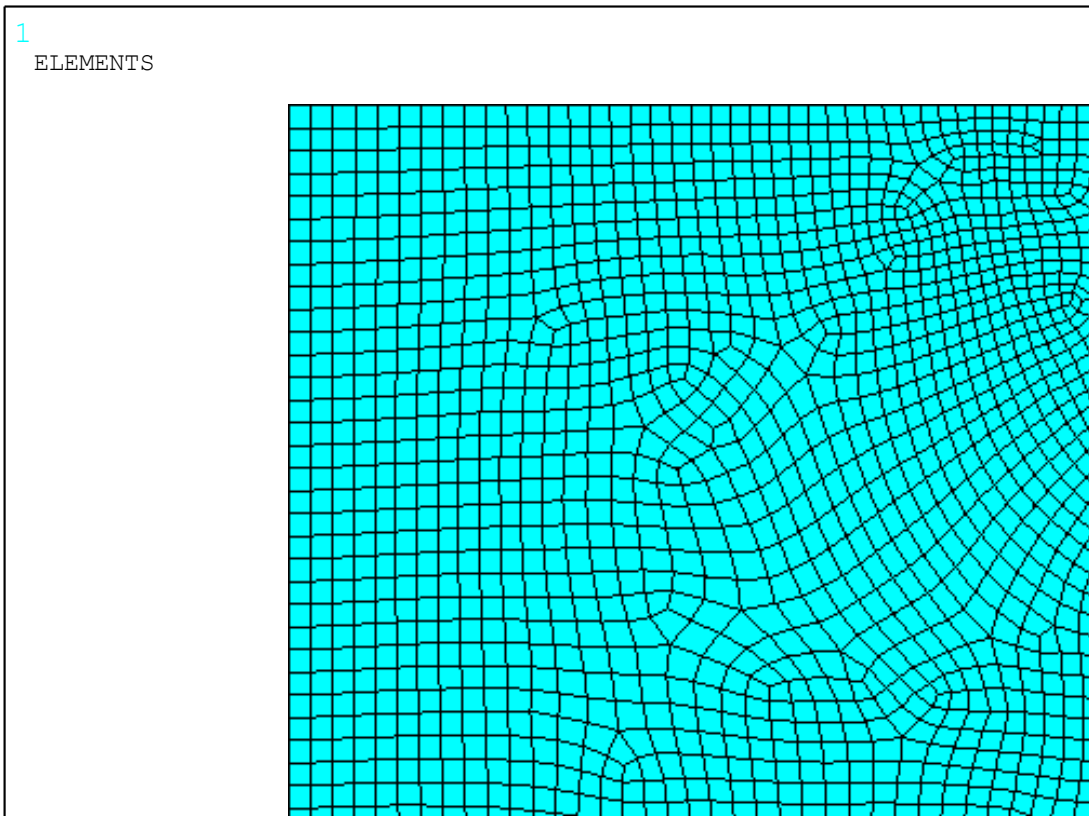
Η διακριτοποίηση (meshing) των όγκων που συναποτελούν το τμήμα του μοντέλου της πλάκας πραγματοποιείται με την εφαρμογή της εντολής *vsweep*, μέσω της οποίας ο κάνναβος της βάσης κάθε διακριτοποιούμενου όγκου προεκβάλλεται στο χώρο έτσι, ώστε ο όγκος να γεμίσει με τον αντίστοιχο τρισδιάστατο κάνναβο (ANSYS - 2007). Οι επιφανειακοί κάνναβοι των βάσεων των όγκων σχηματίζονται είτε πριν την εφαρμογή της παραπάνω εντολής, μέσω της εντολής *amesh* (ANSYS - 2007), είτε αυτόματα, με την έναρξη της προεκβολής, εφόσον δεν έχουν ήδη σχηματιστεί. Σε κάθε περίπτωση όμως, θα πρέπει να έχει οριστεί εξαρχής ένας δισδιάστατος τύπος στοιχείων έτσι, ώστε να δημιουργηθούν οι επιφανειακοί κάνναβοι και εν συνεχεία, μέσω της προεκβολής αυτών, να προκύψουν τα τρισδιάστατα στοιχεία του τύπου που έχει επιλεγεί. Ως εκ τούτου, παράλληλα με το στερεό SOLID45, ορίζεται το δισδιάστατο, ίδιας τάξης στοιχείο, PLANE42.

Δεδομένου του τρόπου κατασκευής του τρισδιάστατου καννάβου του μοντέλου, η μορφή αυτού εξαρτάται άμεσα από τη μορφή του αντίστοιχου επιφανειακού καννάβου. Επομένως, ο χρήστης μπορεί να δημιουργήσει το επιθυμητό μοντέλο στερεών στοιχείων καθορίζοντας το σχήμα, το μέγεθος και κατ' επέκταση, τον αριθμό των επίπεδων στοιχείων που συναποτελούν τον επιφανειακό κάνναβο. Ο καθορισμός των παραμέτρων αυτών, που επιτυγχάνεται με τη διακριτοποίηση των περιγραμμάτων των αντίστοιχων επιφανειών μέσω της εντολής *lesize* (ANSYS - 2007), γίνεται βάσει του επιθυμητού συνδυασμού της ακρίβειας και της ταχύτητας της ανάλυσης, αλλά και των απαιτήσεων σχετικά με ορισμένους σχεδιαστικούς περιορισμούς για τα τελικά, τρισδιάστατα στοιχεία. Έτσι, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, απαιτείται η δημιουργία ενός καννάβου πυκνού κοντά στο όριο του αποχωρισμού, καθώς εκεί αναμένεται να εμφανιστούν υψηλές τάσεις και αραιού στις υπόλοιπες περιοχές, ώστε να συνδυαστούν η ακρίβεια της ανάλυσης με το μικρό υπολογιστικό χρόνο. Παράλληλα όμως, λόγω των λεπτών όγκων που σχηματίζονται κατά την αναπαράσταση μίας πλάκας με λεπτά υποπολύστρωτα, τα δισδιάστατα στοιχεία θα πρέπει να είναι αρκετά μικρά, ώστε κατά την προεκβολή τους, να αποφευχθεί ο σχηματισμός στοιχείων με λόγο ακμών μεγαλύτερο του 20, η χρησιμοποίηση των οποίων δεν ενδείκνυται. Συνέπεια των απαιτήσεων αυτών είναι ο κατακερματισμός των γραμμών της βάσης του μοντέλου σε πολύ μικρά τμήματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.10.

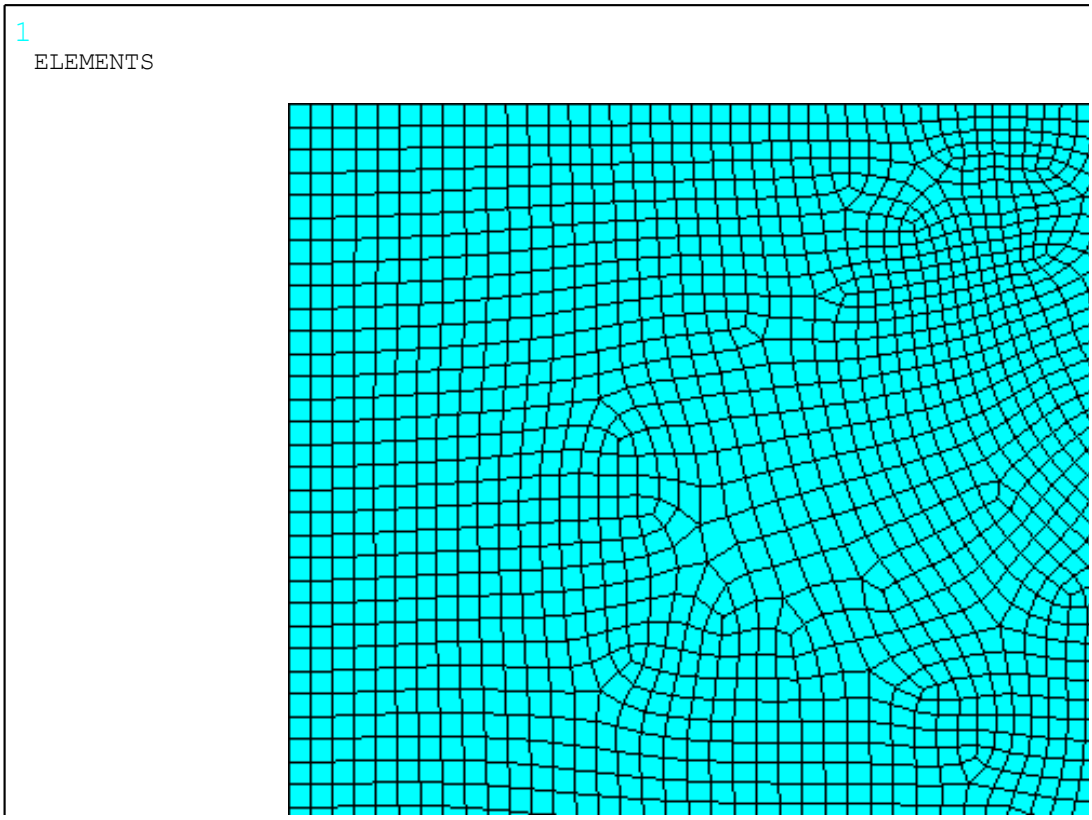
Η διακριτοποίηση των γραμμών πραγματοποιείται ανεξάρτητα από την εντολή μέσω της οποίας δημιουργείται στη συνέχεια ο επιφανειακός κάνναβος, οπότε καθίσταται δυνατός ο καθορισμός της μορφής αυτού ακόμα και στην περίπτωση που ο σχηματισμός του γίνεται με την έναρξη της προεκβολής (εντολή *vsweep*). Αν και οι κάνναβοι που προκύπτουν κατά την εφαρμογή των εντολών *amesh* και *vsweep* είναι πιθανόν να διαφέρουν μεταξύ τους, όπως προκύπτει από τη σύγκριση των Σχημάτων 3.11 και 3.12, εν τούτοις, ο κάνναβος σε κάθε περίπτωση είναι εξίσου πυκνός σε όλη την έκτασή του. Ως εκ τούτου, αλλά και λόγω των μικρών αποκλίσεων των αποτελεσμάτων της ανάλυσης για τους δύο τύπους του καννάβου (Παράρτημα Α), η εντολή *amesh* μπορεί να παραληφθεί. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι μεταξύ των δισδιάστατων στοιχείων μπορεί να υπάρχουν ορισμένα τριγωνικού σχήματος, η χρήση των οποίων δεν ενδείκνυται σύμφωνα με τις οδηγίες του PLANE42. Δεδομένου όμως του περιορισμού της χρήσης τους στην εφαρμογή της εντολής *vsweep*, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, τα σχετικά προειδοποιητικά μηνύματα μπορούν να αγνοηθούν.



Σχήμα 3.10: Διακριτοποίηση των γραμμών της βάσης του γεωμετρικού μοντέλου.



Σχήμα 3.11: Επιφανειακός κάνναβος της βάσης του γεωμετρικού μοντέλου (εντολή *amesh*).

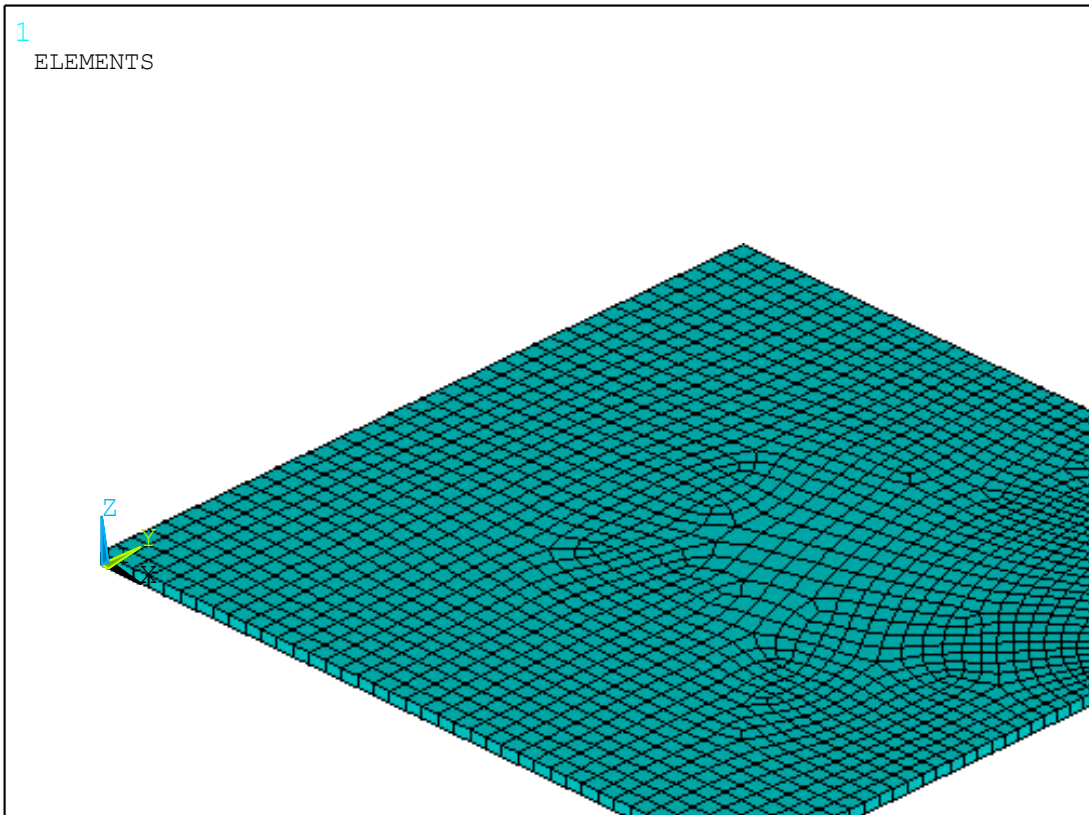


Σχήμα 3.12: Κάτοψη του τρισδιάστατου καννάβου του γεωμετρικού μοντέλου (εντολή *vsweep*).

Στα πλαίσια της εφαρμογής της εντολής *vsweep*, εκτός από τη μορφή του επιφανειακού καννάβου, καθορίζονται ορισμένες επιπλέον παράμετροι της διακριτοποίησης των όγκων του μοντέλου. Επομένως, μέσω της εντολής *vatt*, ορίζονται ο τύπος, οι μηχανικές ιδιότητες και το σύστημα συντεταγμένων που θα αποδοθούν στα τρισδιάστατα στοιχεία μετά την προεκβολή (ANSYS - 2007). Οι τιμές των παραμέτρων αυτών είναι εκείνες που έχουν ήδη επιλεγεί στα προηγούμενα βήματα, ενώ όσον αφορά στο σύστημα συντεταγμένων, αυτό θα πρέπει να είναι παράλληλο με εκείνο του γεωμετρικού μοντέλου προς αποφυγή λαθών κατά τον ορισμό των οριακών συνθηκών και των φορτίων της πλάκας. Επιπλέον, μέσω της εντολής *esize* (ANSYS - 2007), καθορίζεται ο αριθμός των στοιχείων κατά το πάχος του τρισδιάστατου καννάβου. Ο αριθμός αυτός περιορίζεται σημαντικά κατά τη μοντελοποίηση λεπτών πλακών με λεπτά υποπολύστρωτα, καθώς η δημιουργία ενός πυκνότερου κατά το πάχος καννάβου συνεπάγεται τη μείωση του πάχους των στοιχείων, καθιστώντας πιθανή την υπέρβαση του ορίου για το λόγο των ακμών τους. Παράλληλα, η συνεπαγόμενη αύξηση του αριθμού των στοιχείων και κατ' επέκταση, των κόμβων του μοντέλου, σε συνδυασμό με τον πυκνό επιφανειακό κάνναβο, προκαλεί την επιβράδυνση της ανάλυσης. Ως εκ τούτου και λόγω των μικρών αποκλίσεων των αποτελεσμάτων της ανάλυσης για χρήση ενός και τεσσάρων κατά το πάχος στοιχείων (Παράρτημα Α), κάθε όγκος αποτελείται από μία στρώση στοιχείων. Τέλος, τα υπολογιστικά λάθη που είναι πιθανόν να προκληθούν λόγω της συνύπαρξης του επιφανειακού και του τρισδιάστατου καννάβου καθιστούν απαραίτητο το σβήσιμο των δισδιάστατων στοιχείων μετά την προεκβολή. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της εντολής extopt, η οποία επίσης καθορίζει τον τρόπο επιλογής του επιφανειακού καννάβου (αυτόματα ή από το χρήστη, ANSYS -

2007). Εν προκειμένω, η επιλογή γίνεται αυτόματα, ώστε να προεκβάλλονται ταυτόχρονα τα τμήματα του καννάβου της βάσης του μοντέλου.

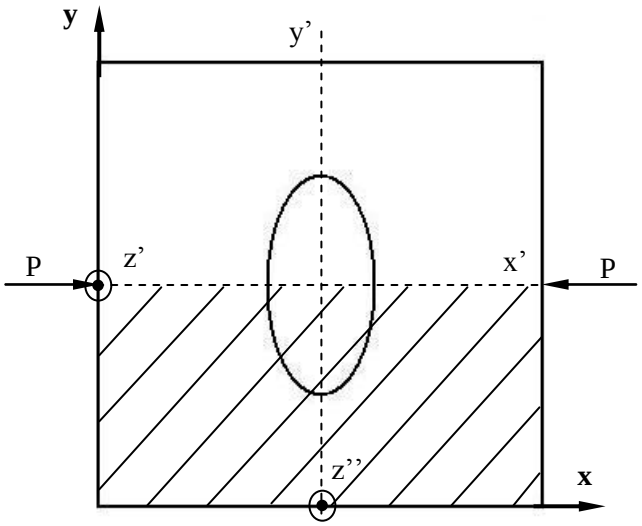
Εφόσον καθοριστούν οι παραπάνω παράμετροι, η εντολή *vsweep* εφαρμόζεται, ώστε να σχηματιστεί ο τρισδιάστατος κάνναβος του τμήματος της πλάκας που έχει σχεδιαστεί (Σχήμα 3.13). Ακολούθως, βάσει του καννάβου αυτού και μέσω της εφαρμογής ορισμένων εντολών, προκύπτει το τελικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για τις ανάγκες της ανάλυσης. Όμως, η παρουσία ενός αρκετά μεγάλου αριθμού κόμβων (της τάξης των 4000) στο βασικό κάνναβο καθιστά αντιοικονομική την πλήρη μοντελοποίηση της πλάκας, καθώς στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός των κόμβων του τελικού μοντέλου ανέρχεται σε περίπου 32000, επιβραδύνοντας την ανάλυση. Επομένως, δεδομένης της αναγκαιότητας του πυκνού καννάβου, ο περιορισμός του αριθμού των κόμβων επιτυγχάνεται με τη μοντελοποίηση της μισής πλάκας, η οποία είναι εφικτή λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει η πλάκα, σε συνδυασμό με το υπό εξέταση πρόβλημα της μονοαξονικής θλίψης, ως προς το επίπεδο x'z' (Σχήμα 3.14). Κατά συνέπεια, δημιουργούνται σχεδόν οι μισοί κόμβοι (περίπου 16000), οπότε η ανάλυση είναι σχετικά γρήγορη, ενώ παράλληλα, το επίπεδο της ακρίβειάς της παραμένει υψηλό. Σημειώνεται ότι περαιτέρω μείωση του αριθμού των κόμβων λόγω της συμμετρίας ως προς το επίπεδο y'z'' δεν ενδείκνυται, εξαιτίας των αντισυμμετρικών μορφών λυγισμού που προκύπτουν κατά την ανάλυση.



Σχήμα 3.13: Τρισδιάστατη αναπαράσταση του καννάβου του τμήματος της πλάκας.

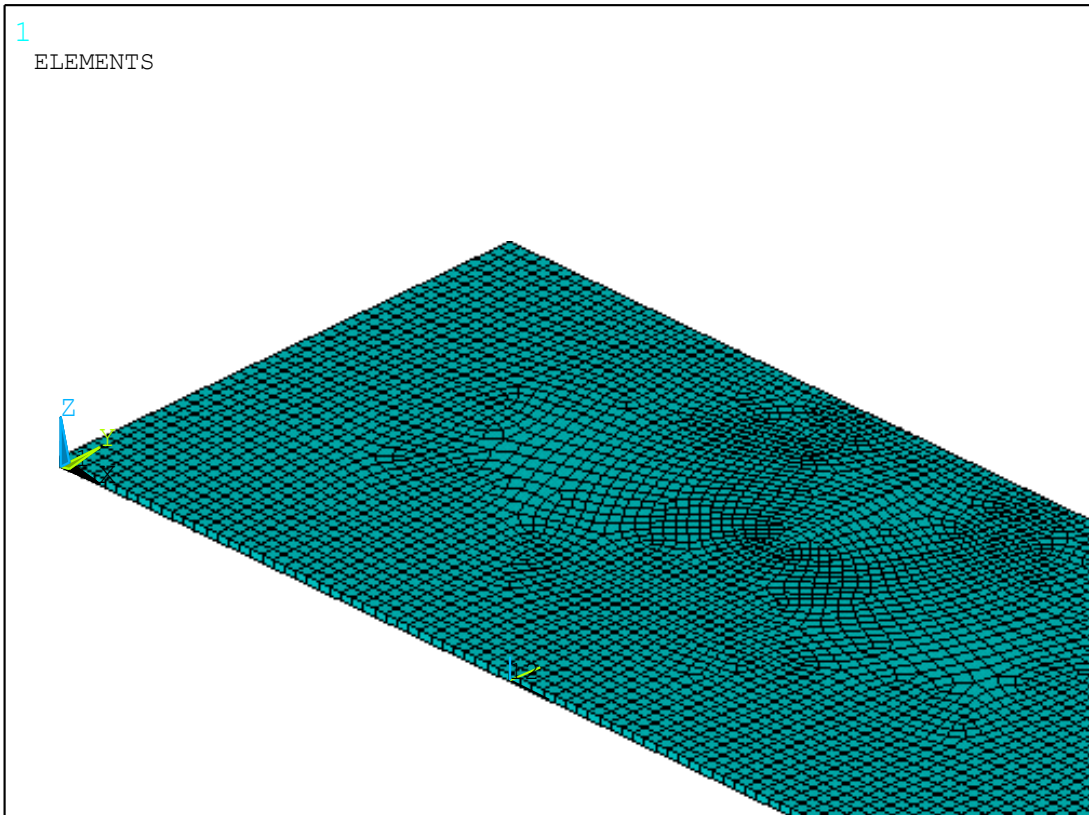
Με βάση την παραπάνω παραδοχή, το πρώτο βήμα για την κατασκευή του τελικού μοντέλου είναι η δημιουργία ενός συμμετρικού αντίγραφου του καννάβου ως προς το επίπεδο

συμμετρίας της πλάκας y'z'' (Σχήμα 3.15), μέσω της εντολής *vsymm* (ANSYS - 2007). Η ενέργεια αυτή έχει σαν συνέπεια την ύπαρξη κοινών κόμβων μεταξύ του βασικού καννάβου και του αντίγραφού του, οπότε εφαρμόζεται η εντολή *nummrg* για όλα τα κοινά ζεύγη, ώστε να προκύψει ένας ενιαίος κάνναβος για το μισό του τμήματος της πλάκας, κάτω από το επίπεδο του αποχωρισμού. Ακολούθως, βάσει του νέου καννάβου και μέσω της εντολής *vgen* (ANSYS - 2007), δημιουργείται ένα απλό αντίγραφο στη διεύθυνση του πάχους της πλάκας και σε τέτοια απόσταση από τον κάνναβο, ώστε οι κόμβοι της βάσης του αντίγραφου να συμπίπτουν με εκείνους της κορυφής του καννάβου (Σχήματα 3.16 και 3.17). Ο επιπλέον κάνναβος που προκύπτει με τον τρόπο αυτό αντιστοιχεί στο τμήμα της πλάκας, πάνω από το επίπεδο του αποχωρισμού και ως εκ τούτου, το πάχος του θα πρέπει να μετασχηματιστεί έτσι, ώστε να είναι ίσο με εκείνο του ανώτερου υποπολύστρωτου. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της εντολής *vscale* (ANSYS - 2007), οπότε το μοντέλο που προκύπτει αποτελείται από δύο στρώσεις στοιχείων εκατέρωθεν του επιπέδου του αποχωρισμού, με πάχη ίσα με εκείνα των αντίστοιχων υποπολύστρωτων (Σχήματα 3.18 και 3.19). Η κατασκευή του τελικού μοντέλου ολοκληρώνεται με την ένωση των κοινών κόμβων των στρώσεων εκτός της περιοχής του αποχωρισμού και στα όρια αυτής μέσω της εντολής *nummrg*.

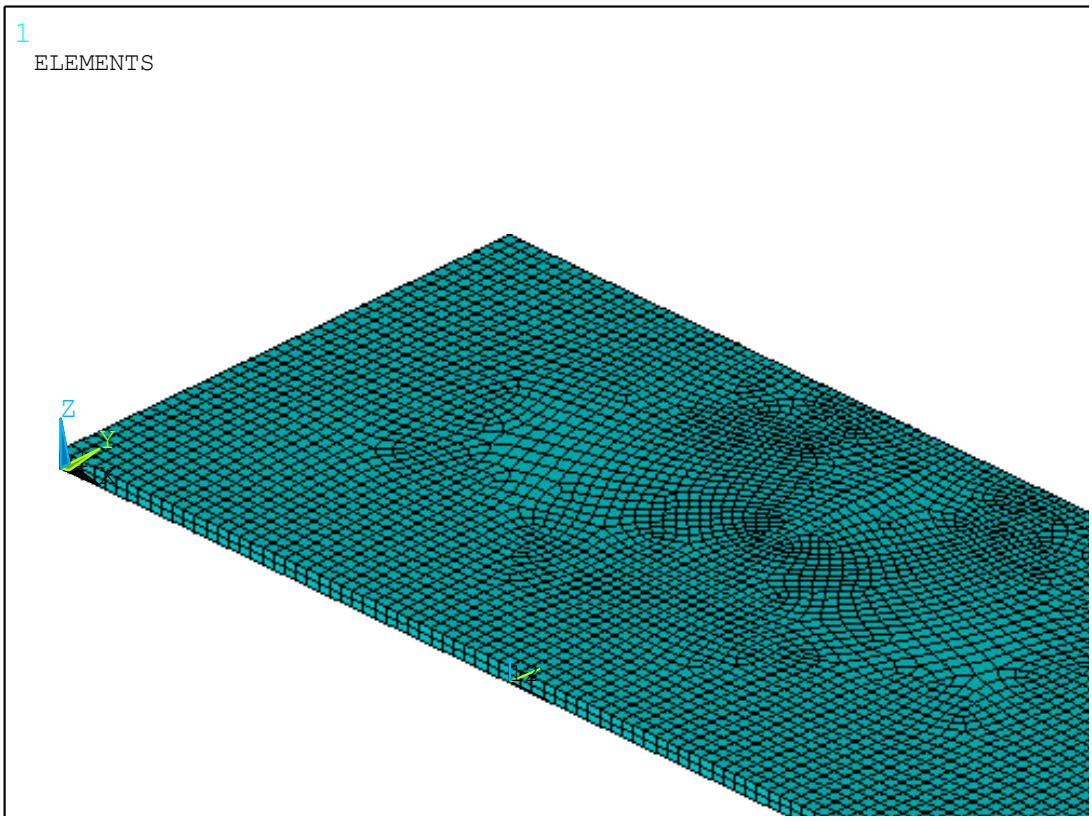


Σχήμα 3.14: Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος μονοαξονικής θλίψης της πλάκας.

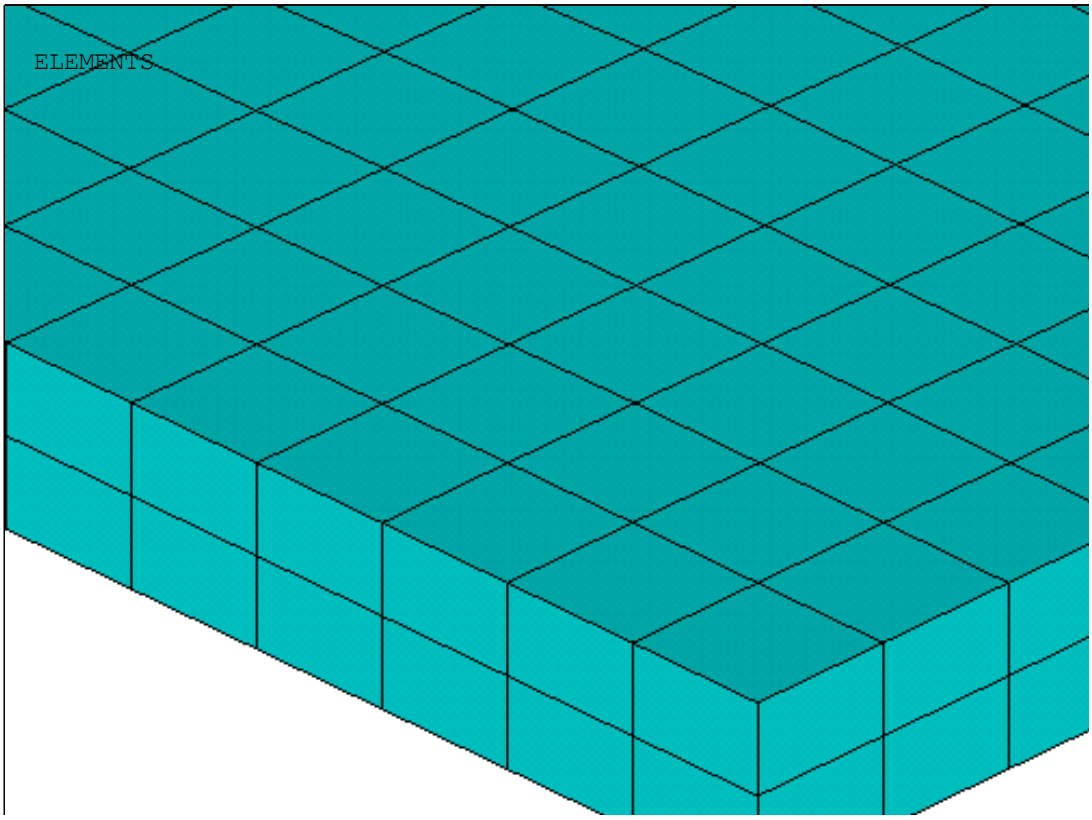
Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι παράλληλα με το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της πλάκας, σχηματίζεται το αντίστοιχο γεωμετρικό μοντέλο (Σχήμα 3.20), καθώς η εφαρμογή των εντολών *vsymm, vgen* και *vscale* αφορά τόσο στον κάνναβο όσο και στους όγκους που αναπαριστούν το εκάστοτε τμήμα της πλάκας (ANSYS - 2007). Κατά συνέπεια, η εντολή *nummrg* εφαρμόζεται στους κόμβους και στα αντίστοιχα σημεία των δύο μοντέλων, οπότε εξασφαλίζεται η συμφωνία μεταξύ αυτών. Τέλος, για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, απαιτείται η κατασκευή του μοντέλου της άθικτης πολύστρωτης πλάκας. Η διαδικασία κατασκευής είναι ανάλογη εκείνης που έχει ήδη περιγραφεί, με τη διαφορά ότι τα τμήματα του μοντέλου εκατέρωθεν του επιπέδου του αποχωρισμού ενώνονται σε όλη την έκταση της κοινής επιφάνειας.



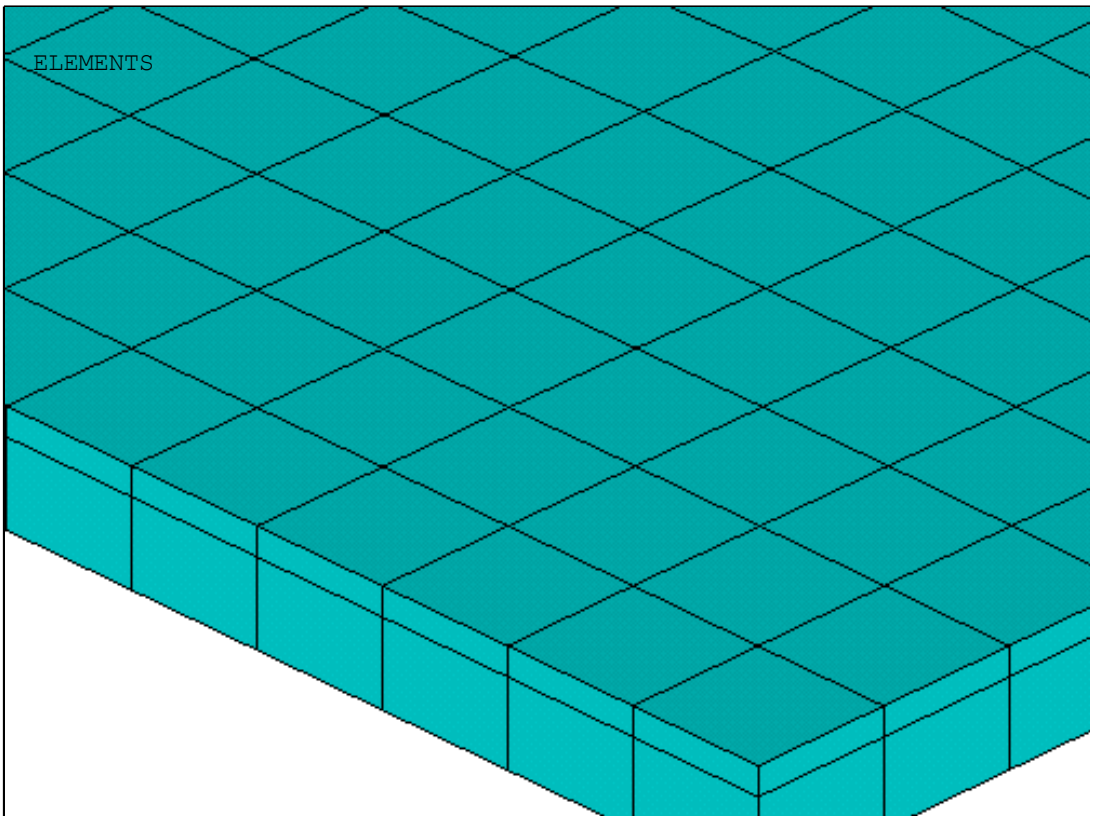
Σχήμα 3.15: Δημιουργία συμμετρικού αντίγραφου (εντολή *vsymm*).



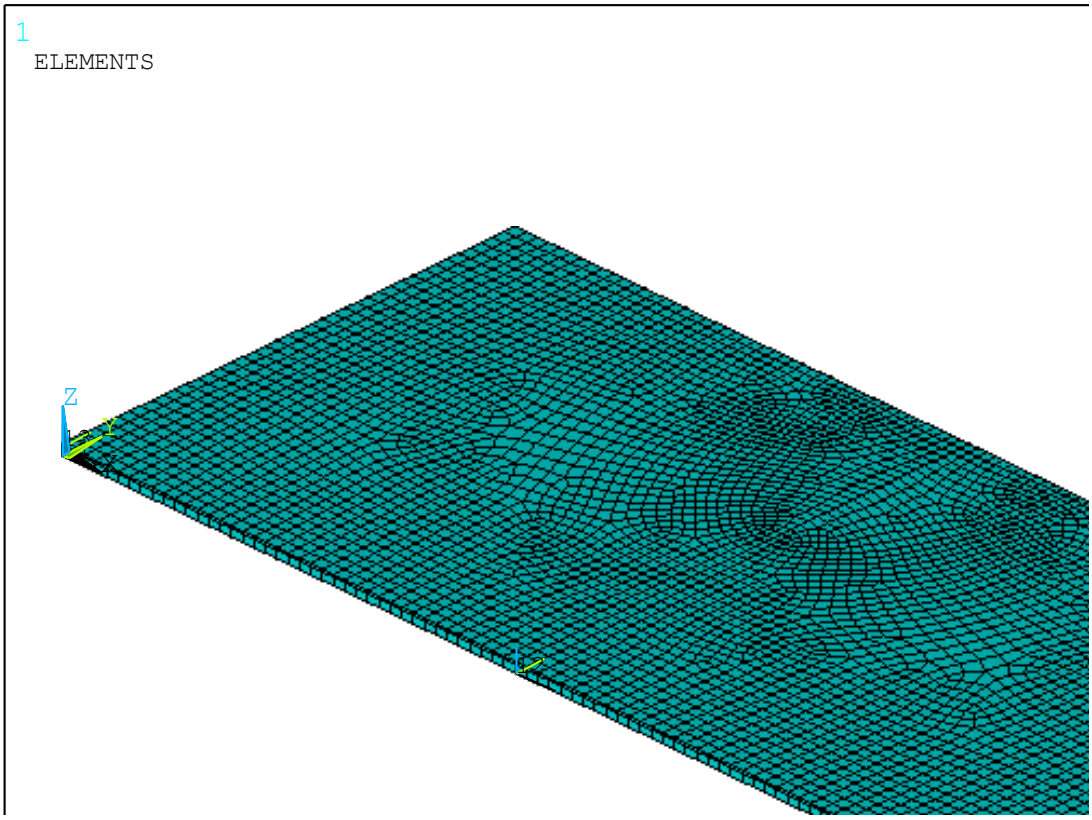
Σχήμα 3.16: Δημιουργία απλού αντίγραφου κατά το πάχος (εντολή *vgen*).



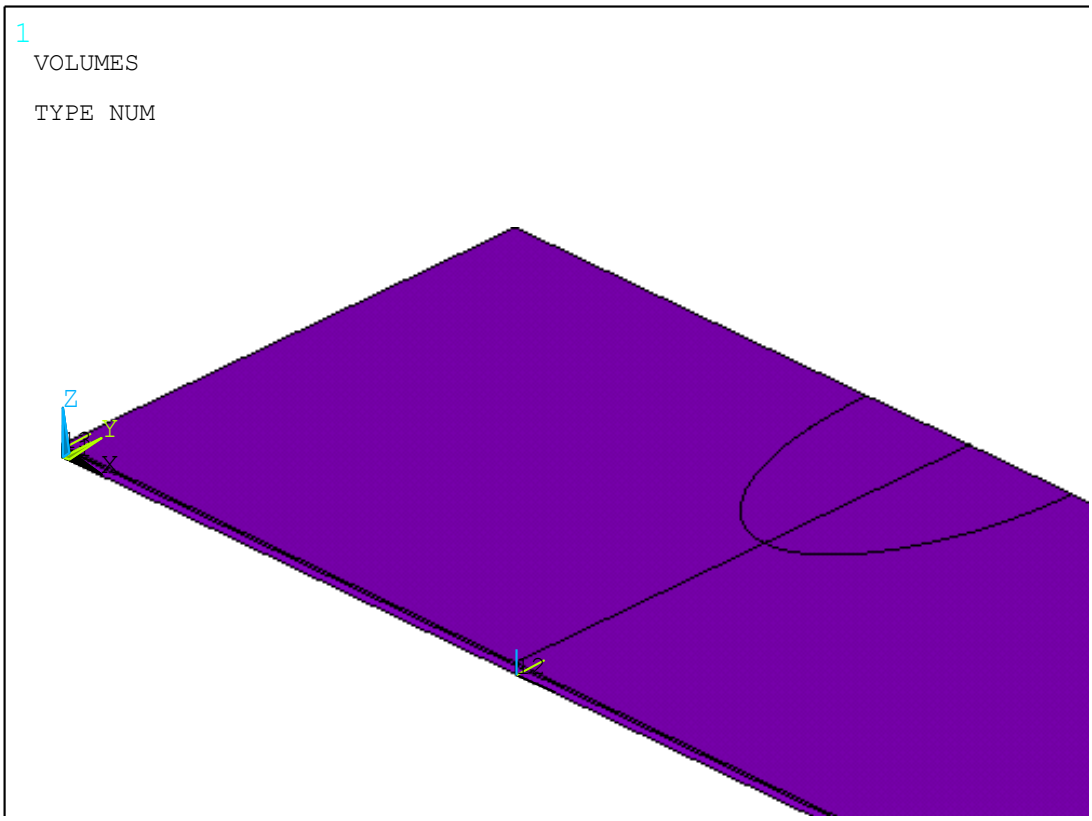
Σχήμα 3.17: Μεγέθυνση του καννάβου που προκύπτει μετά την εφαρμογή της εντολής *vgen*.



Σχήμα 3.18: Μετασχηματισμός του πάχους (εντολή *vscale*).



Σχήμα 3.19: Τελικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.



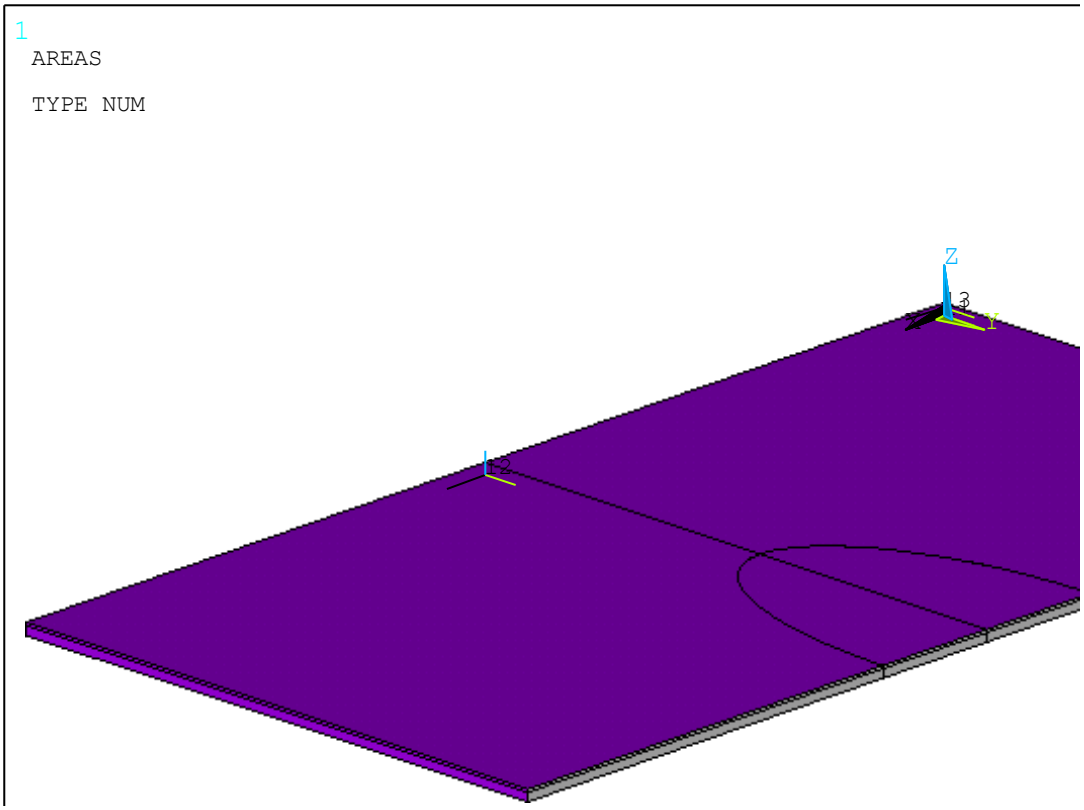
Σχήμα 3.20: Τελικό γεωμετρικό μοντέλο.

3.3 Επίλυση

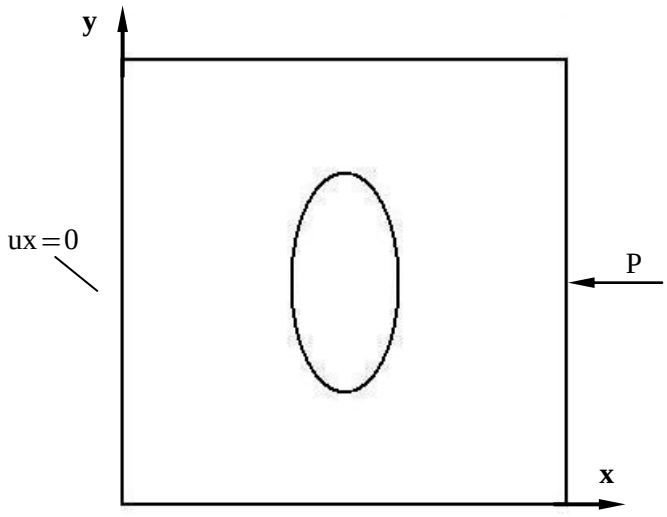
Το επόμενο βήμα της ανάλυσης περιλαμβάνει μία σειρά ενεργειών που ολοκληρώνεται με την επίλυση του εξεταζόμενου προβλήματος. Έτσι, στα πλαίσια του σταδίου της επίλυσης, καθορίζονται ορισμένες επιπλέον παράμετροι του προβλήματος, όπως οι συνθήκες έδρασης και φόρτισης της πλάκας και επιλέγεται ο τύπος της ανάλυσης που θα χρησιμοποιηθεί, βάσει των αντίστοιχων απαιτήσεων. Στη συνέχεια, τα παραπάνω περιγράφονται αναλυτικά για την περίπτωση της μονοαξονικής θλιπτικής φόρτισης μίας πλάκας με έναν κεντρικό αποχωρισμό των στρώσεών της.

3.3.1 Ορισμός οριακών συνθηκών και φόρτισης

Η μοντελοποίηση της μισής πλάκας κατά την προεπεξεργασία καθιστά απαραίτητη την επιβολή ορισμένων περιορισμών στο μοντέλο, ώστε κατά την ανάλυση να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση του συμμετρικού τμήματος που παραλείπεται. Οι περιορισμοί αυτοί επιβάλλονται στις επιφάνειες του μοντέλου που βρίσκονται στο επίπεδο συμμετρίας x'z' (Σχήμα 3.21) και αφορούν στις μετατοπίσεις αυτών στη διεύθυνση του άξονα y και στις περιστροφές τους γύρω από τους άξονες x' και z'. Επιπρόσθετα, λόγω της επίλυσης του προβλήματος της μονοαξονικής θλίψης της πλάκας μέσω του ισοδύναμου προβλήματος που περιγράφεται στο Σχήμα 3.22, το μοντέλο θα πρέπει να περιορίζεται έτσι, ώστε η πλευρά του, απέναντι από την πλευρά που φορτίζεται, να μη μετατοπίζεται στη διεύθυνση του άξονα x. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του περιορισμού του αντίστοιχου βαθμού ελευθερίας ($ux = 0$) των κόμβων της πλευράς αυτής, οι οποίοι βρίσκονται στο επίπεδο του αποχωρισμού.



Σχήμα 3.21: Επιφάνειες όπου επιβάλλονται οι περιορισμοί συμμετρίας (γκρι χρώμα).



Σχήμα 3.22: Ισοδύναμο πρόβλημα μονοαξονικής θλίψης.

Εφόσον επιβληθούν οι περιορισμοί του μοντέλου βάσει των παραπάνω και των οριακών συνθηκών του προβλήματος, επιβάλλονται τα φορτία, τα οποία σύμφωνα με το Σχήμα 3.22, εφαρμόζονται σε μία πλευρά της πλάκας. Η επιβολή τους μπορεί να γίνει με τη μορφή πίεσης στις επιφάνειες που συναποτελούν την πλευρά αυτή, όμως η συνεπαγόμενη περιστροφή των επιφανειών δεν είναι πάντα αποδεκτή. Ως εκ τούτου και δεδομένης της αδυναμίας επιβολής επιπλέον περιορισμών, αντί των φορτίων, εφαρμόζεται μία ομοιόμορφη, αξονική μετατόπιση, αρνητικού πρόσημου ($ux < 0$), στους κόμβους της πλευράς, ώστε αυτή να παραμένει ευθεία και κάθετη στη διεύθυνση της φόρτισης σε όλη τη διάρκεια της ανάλυσης.

3.3.2 Τύπος ανάλυσης

Το πρόβλημα του λυγισμού μίας πλάκας που έχει υποστεί αποχωρισμό των στρώσεών της αντιμετωπίζεται ως στατικό εφόσον δε λαμβάνεται υπόψη η διεύρυνση της περιοχής του αποχωρισμού. Η επίλυσή του μέσω του ANSYS μπορεί να γίνει είτε γραμμικά (ανάλυση ιδιοτιμών, eigenvalue analysis, EIG) είτε μη γραμμικά (nonlinear analysis, N-L), οπότε η επιλογή του τύπου της ανάλυσης καθορίζεται από τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε περίπτωσης. Έτσι, στην πρώτη περίπτωση, η επίλυση είναι αρκετά σύντομη και οδηγεί σε μία τιμή για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, η διάρκεια της επίλυσης είναι μεγαλύτερη και ο υπολογισμός της τιμής του κρίσιμου φορτίου απαιτεί την εκτενή επεξεργασία των αποτελεσμάτων. Παρ' όλα αυτά, για λόγους που θα εξηγηθούν σε επόμενο εδάφιο, η μη γραμμική ανάλυση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, οπότε χρησιμοποιούνται τόσο οι δύο παραπάνω τύποι όσο και ένας συνδυασμός αυτών (N-L & EIG).

Η εφαρμογή της ανάλυσης ιδιοτιμών έχει σαν συνέπεια την επίλυση του προβλήματος κατ' αντιστοιχία με τις αναλυτικές προσεγγίσεις, ενώ παράλληλα, δεν απαιτεί τον καθορισμό πολλών παραμέτρων. Επομένως, εφόσον επιλεγεί η μέθοδος επίλυσης, καθορίζεται ο αριθμός των μορφών λυγισμού (buckling modes) που θα υπολογιστούν. Αντίθετα, στα πλαίσια της μη γραμμικής ανάλυσης, εφαρμόζεται η θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων, οπότε η προσέγγιση

του προβλήματος γίνεται σε βήματα. Έτσι, η επιβαλλόμενη φόρτιση κατακερματίζεται σε τμήματα, καθένα από τα οποία επιβάλλεται στο μοντέλο ανά βήμα. Σε κάθε βήμα, μέσω της μεθόδου Newton - Raphson, επιχειρείται η σύγκλιση των κριτηρίων που έχουν τεθεί, ενώ μετά την ολοκλήρωση αυτού, το μητρώο δυσκαμψίας της πλάκας προσαρμόζεται στη νέα παραμορφωσιακή κατάσταση, ώστε να χρησιμοποιηθεί στο επόμενο βήμα. Ο αριθμός των βημάτων της ανάλυσης θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος, ώστε να επιτυγχάνεται γρήγορα η σύγκλιση, αλλά και αρκετά μικρός, ώστε να μην αυξάνεται ιδιαίτερα ο υπολογιστικός χρόνος. Ως εκ τούτου, μέσω της εντολής *deltim* (ANSYS - 2007), το μέγεθος των βημάτων ορίζεται ίσο με 0.001, ενώ παράλληλα, γίνεται μία κατάλληλη ρύθμιση, ώστε εφόσον είναι δυνατόν, να αυξάνεται αυτόματα το μέγεθος των βημάτων και κατ' επέκταση, να μειώνεται η διάρκεια της επίλυσης. Προς το σκοπό αυτό, το μέγιστο όριο για το μέγεθος των βημάτων ορίζεται ίσο με 0.005, ενώ το ελάχιστο ορίζεται ίσο με 0.0001.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μη γραμμική ανάλυση προϋποθέτει την ύπαρξη μίας αρχικής ατέλειας του μοντέλου, ώστε να εκκινήσει το φαινόμενου του λυγισμού. Ο σχηματισμός της ατέλειας αυτής μπορεί να επιτευχθεί με τη μεταβολή της γεωμετρίας του μοντέλου βάσει μίας από τις μορφές λυγισμού που υπολογίζονται κατά την εφαρμογή της ανάλυσης ιδιοτιμών. Επομένως, πριν τη μη γραμμική ανάλυση, πραγματοποιείται εκείνη των ιδιοτιμών και εν συνεχεία, μέσω της εντολής *upgeom* (ANSYS - 2007) και βάσει της πρώτης κυματομορφής (eigenmode), σε συνδυασμό με ένα συντελεστή σμίκρυνσης, σχηματίζεται η επιθυμητή ατέλεια. Η επιλογή της πρώτης κυματομορφής οφείλεται στο γεγονός ότι αποτελεί τη δυσμενέστερη περίπτωση λυγισμού, ενώ ο συντελεστής σμίκρυνσης λαμβάνεται ίσος με το ένα εκατοστό του πάχους της πλάκας, ώστε να μη μεταβάλλεται σημαντικά η γεωμετρία του μοντέλου. Επιπλέον, όσον αφορά την επιβαλλόμενη φόρτιση για τη μη γραμμική ανάλυση, αυτή προκύπτει από την επιβαλλόμενη φόρτιση κατά την ανάλυση ιδιοτιμών (ux=-1), πολλαπλασιασμένης με την ιδιοτιμή λ_1 της πρώτης κυματομορφής, καθώς επίσης και με έναν κατάλληλο συντελεστή, ώστε η ανάλυση να ολοκληρωθεί μετά το σημείο λυγισμού.

Τέλος, εκτός των παραπάνω τύπων ανάλυσης, χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός αυτών, μέσω του οποίου προκύπτει απευθείας το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, αξιοποιώντας παράλληλα τα πλεονεκτήματα της μη γραμμικής ανάλυσης. Επομένως, σε πρώτη φάση πραγματοποιείται μία μη γραμμική ανάλυση, όπως αυτή έχει περιγραφεί παραπάνω, με τη διαφορά ότι η επιβαλλόμενη φόρτιση είναι ένα κλάσμα της ιδιοτιμής λ_1 της πρώτης κυματομορφής. Το κλάσμα αυτό θα πρέπει να είναι αρκετά μικρό, ώστε η ανάλυση να ολοκληρωθεί πριν από το λυγισμό της πλάκας και συνεπώς, λαμβάνεται ίσο με ένα δέκατο (Παράρτημα Β). Εφόσον ολοκληρωθεί η μη γραμμική ανάλυση, οι παράμετροί της καθορίζονται εκ νέου έτσι, ώστε να πραγματοποιηθεί ακολούθως η ανάλυση ιδιοτιμών. Έτσι, επιλέγεται η θεωρία των μικρών παραμορφώσεων, ορίζεται η διενέργεια ενός μόνο βήματος και απενεργοποιείται η αυτόματη αύξηση του μεγέθους αυτού, οπότε η διαδικασία ολοκληρώνεται με τη γραμμική επίλυση από το σημείο όπου ολοκληρώθηκε η μη γραμμική ανάλυση μέχρι το σημείο λυγισμού.

3.4 Μεταεπεξεργασία

Εφόσον ολοκληρωθεί η επίλυση του προβλήματος, ο χρήστης μπορεί να επεξεργαστεί τα αποτελέσματα που προκύπτουν μέσω κατάλληλων εντολών του ANSYS και ακολούθως, να

προχωρήσει σε εκτιμήσεις σχετικά με τα ζητούμενα μεγέθη. Εν προκειμένω, το ζητούμενο μέγεθος είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας, το οποίο υπολογίζεται με διάφορους τρόπους, ανάλογα με τον τύπο ανάλυσης που χρησιμοποιείται.

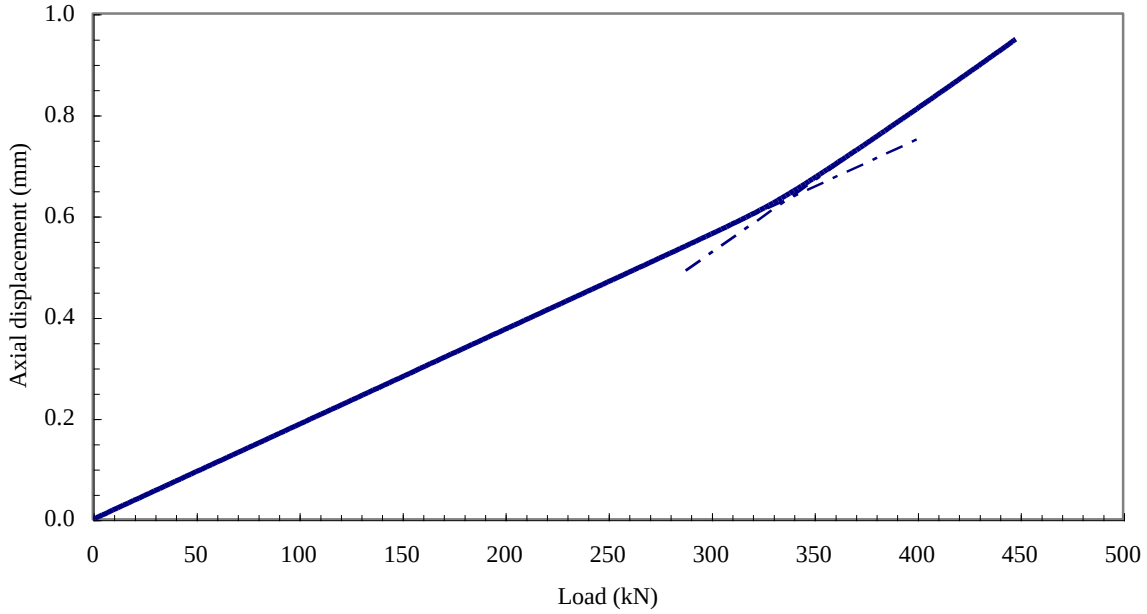
Στα πλαίσια της ανάλυσης ιδιοτιμών, το κρίσιμο φορτίο υπολογίζεται ως το γινόμενο της ιδιοτιμής λ_1, της πρώτης μορφής λυγισμού της πλάκας, με τη δύναμη αντίδρασης της πλάκας στη διεύθυνση του άξονα x, που δρα στην πλευρά, απέναντι από εκείνη που φορτίζεται. Η δύναμη αυτή αποτελεί ουσιαστικά το άθροισμα των αντίστοιχων δυνάμεων οι οποίες δρουν στους κόμβους της πλευράς, οπότε επιλέγονται οι κόμβοι εκείνοι που δε μετατοπίζονται στη διεύθυνση του άξονα x, ώστε να αποτελέσουν τη βάση για τον υπολογισμό του αθροίσματος μέσω της εντολής *fsum* (ANSYS - 2007). Η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ακολουθείται επίσης κατά την εφαρμογή του συνδυασμού της ανάλυσης ιδιοτιμών με τη μη γραμμική ανάλυση (N-L & EIG), δεδομένου ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν αφορούν σε μία τιμή για την ιδιοτιμή λ_1 και μία για τη δύναμη αντίδρασης της πλάκας, κατ' αντιστοιχία με την ανάλυση ιδιοτιμών.

Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω, κατά τη μη γραμμική ανάλυση, η δύναμη αντίδρασης της πλάκας υπολογίζεται για κάθε βήμα της ανάλυσης, οπότε αποδίδεται διαγραμματικά, σαν συνάρτηση των βημάτων. Επιπλέον, επιλέγεται ένας κόμβος της φορτιζόμενης πλευράς, για την εύρεση της αξονικής μετατόπισης της πλάκας στη διεύθυνση του φορτίου (άξονας x), καθώς και όλοι οι κόμβοι του μοντέλου που αντιστοιχούν στην κορυφή του ημικύματος της μορφής λυγισμού, για την εύρεση της μη επίπεδης μετατόπισης, τόσο για το κάτω όσο και για το πάνω υποπολύστρωτο. Κατ' αντιστοιχία με τη δύναμη αντίδρασης, τα παραπάνω μεγέθη αποδίδονται συναρτήσει των βημάτων της ανάλυσης, οπότε μπορούν να κατασκευαστούν διαγράμματα φορτίου - μετατόπισης (αξονικής και μη επίπεδης), με βάση τα οποία εκτιμάται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας.

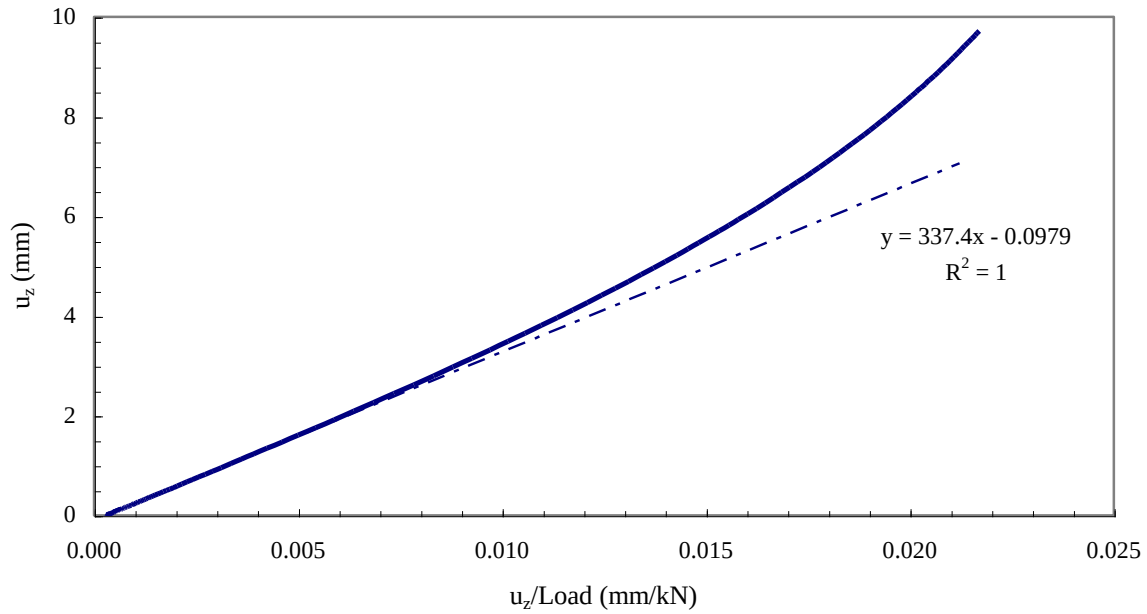
Ο καθορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού βάσει των διαγραμμάτων επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλων μεθόδων, όπως η μέθοδος μεταβολής της κλίσης των καμπυλών φορτίου - μετατόπισης και η μέθοδος Southwell. Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο, η οποία εφαρμόζεται στα διαγράμματα αξονικής μετατόπισης, το κρίσιμο φορτίο αντιστοιχεί στο σημείο τομής των δύο ευθειών που χαράσσονται εφαπτομενικά του πρώτου και του τελευταίου ευθύγραμμου τμήματος της καμπύλης φορτίου - αξονικής μετατόπισης (Σχήμα 3.23, Parlapalli et al - 2007). Αντίθετα, στα πλαίσια της μεθόδου Southwell, η οποία αφορά στα διαγράμματα μη επίπεδης μετατόπισης, η εξεταζόμενη καμπύλη μετασχηματίζεται σε μία καμπύλη που συνδέει το λόγο u_z/P, της μη επίπεδης μετατόπισης προς το φορτίο, με τη μη επίπεδη μετατόπιση u_z, οπότε το κρίσιμο φορτίο ισούται με την κλίση της εφαπτομένης στο αρχικό ευθύγραμμο τμήμα αυτής (Σχήμα 3.24, Parlapalli et al - 2007). Δεδομένου ότι διαγράμματα μη επίπεδης μετατόπισης προκύπτουν τόσο για το κάτω όσο και για το πάνω υποπολύστρωτο της πλάκας, η τελευταία μέθοδος εφαρμόζεται στα διαγράμματα και των δύο υποπολύστρωτων.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα όλων των τύπων ανάλυσης μπορούν να οπτικοποιηθούν, δίνοντας έτσι μία εικόνα της παραμορφωμένης κατάστασης της κατασκευής στο σημείο λυγισμού (Σχήμα 3.25). Ειδικότερα, στην περίπτωση της μη γραμμικής ανάλυσης, η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων μπορεί να γίνει ανά βήμα και ως εκ τούτου, να προκύψει

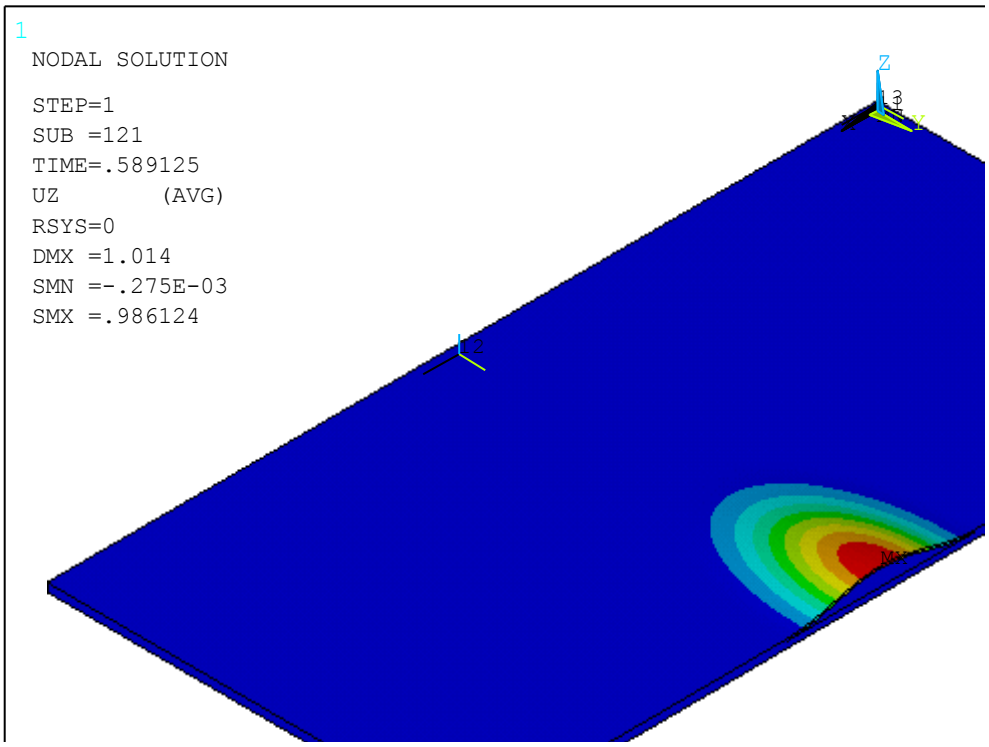
μία περισσότερο λεπτομερής καταγραφή της συμπεριφοράς της κατασκευής, από την αφόρτιστη κατάσταση αυτής μέχρι το σημείο λυγισμού της ή και πέρα από αυτό.



Σχήμα 3.23: Μέθοδος μεταβολής της κλίσης της καμπύλης φορτίου - αξονικής μετατόπισης.



Σχήμα 3.24: Μέθοδος Southwell (εφαρμογή σε διάγραμμα φορτίου - μη επίπεδης μετατόπισης).



Σχήμα 3.25: Οπτικοποιημένη μορφή αποτελεσμάτων.

3.5 Επαλήθευση του τρόπου μοντελοποίησης

Η χρησιμοποίηση του μοντέλου που έχει κατασκευαστεί για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας προϋποθέτει την πραγματοποίηση ενός ελέγχου της ορθότητάς του. Η επαλήθευση αυτή του τρόπου μοντελοποίησης επιτυγχάνεται μέσω σύγκρισης των αποτελεσμάτων του με εκείνα που προκύπτουν από άλλα μοντέλα της βιβλιογραφίας. Στο πλαίσιο αυτό, σύμφωνα με τη διαδικασία που έχει ήδη περιγραφεί στα προηγούμενα εδάφια, προσομοιώνονται ορισμένα παραδείγματα, διατηρώντας τα περισσότερα χαρακτηριστικά μοντελοποίησης ίδια με εκείνα των πηγών, οπότε συγκρίνονται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και τα σχετικά διαγράμματα που προκύπτουν με τα αντίστοιχα άλλων τρισδιάστατων μοντέλων. Ακολούθως, παρατίθενται τα αποτελέσματα του ελέγχου του μοντέλου βάσει δύο παραδειγμάτων.

Η πρώτη περίπτωση αφορά σε μία απλά εδρασμένη, τετραγωνική πολύστρωτη πλάκα με έναν κεντρικό αποχωρισμό υπό μορφή λωρίδας, η οποία υπόκειται σε μονοαξονική θλίψη. Οι διαστάσεις της πλάκας και οι ιδιότητες των στρώσεών της συγκεντρώνονται στον Πίνακα 3.1 (Zor - 2003), ενώ ο αποχωρισμός των στρώσεων αυτής βρίσκεται στο μέσο του πάχους της. Το μοντέλο του παραδείγματος κατασκευάζεται μέσω μίας παλαιότερης έκδοσης του ANSYS (ANSYS 5.4), με χρήση οκτάκομβων, τρισδιάστατων στοιχείων, ενώ ο τύπος ανάλυσης είναι εκείνος των ιδιοτιμών. Στα πλαίσια της προσομοίωσης του παραδείγματος, η μοντελοποίηση της πλάκας γίνεται με χρήση των οκτάκομβων, στρωσιγενών στοιχείων SOLID46, το μέγεθος των οποίων καθορίζεται μέσω ενός ελέγχου σύγκλισης (Παράρτημα Γ). Επίσης, για λόγους σύγκρισης γίνεται χρήση όλων των τύπων ανάλυσης που αναφέρονται στο εδάφιο 3.3.2, ενώ αναφορικά με τη μη γραμμική ανάλυση, η εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού γίνεται μέσω της μεθόδου Southwell.

Πίνακας 3.1: Διαστάσεις και ιδιότητες της πλάκας του πρώτου παραδείγματος.

Διαστάσεις			Ιδιότητες					
Μήκος	Πλάτος	Πάχος	$E_1=E_2$ [1]	E_3 [2]	G_{12} [3]	$G_{13}=G_{23}$ [4]	ν_{12} [5]	$\nu_{13}=\nu_{23}$ [6]
mm			MPa					
100	100	1	53100	8000	3790	3700	0.055	0.074

[1] Μέτρα ελαστικότητας στη διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτές
[2] Μέτρο ελαστικότητας κάθετα στο επίπεδο της στρώσης
[3] Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης
[4] Μέτρα διάτμησης στα επίπεδα 13 και 23
[5] Λόγος του Poisson στο επίπεδο της στρώσης
[6] Λόγοι του Poisson στα επίπεδα 13 και 23

Όπως προκύπτει από τους Πίνακες 3.2 - 3.5, οι τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που υπολογίζονται βάσει του εξεταζόμενου μοντέλου αποκλίνουν ελάχιστα από εκείνες που προκύπτουν μέσω της παλαιότερης έκδοσης του ANSYS. Συγκεκριμένα, κατά την ανάλυση ιδιοτιμών, οι αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν το 0.2%, ανεξάρτητα από την παρουσία ή όχι του αποχωρισμού, ενώ μικρές αποκλίσεις προκύπτουν και στην περίπτωση του συνδυασμού των δύο τύπων ανάλυσης ($<0.5\%$). Σχετικά αυξημένες αποκλίσεις εμφανίζονται στην περίπτωση της ύπαρξης ενός αποχωρισμού με λόγο μήκους προς εκείνο της πλάκας ίσο με 0.5 (Πίνακας 3.3), κυρίως κατά την εφαρμογή του μη γραμμικού τύπου ανάλυσης ($\approx 1\%$), όμως σε κάθε περίπτωση, μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι αν και οι αποκλίσεις είναι μικρές, η μη γραμμική ανάλυση δίνει σταθερά μεγαλύτερα αποτελέσματα από τους άλλους δύο τύπους.

Πίνακας 3.2: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την άθικτη κατάσταση.

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)	ANSYS 11.0					
		EIG		N-L		N-L & EIG	
	P_{cr}	P_{cr}	%	P_{cr}	%	P_{cr}	%
[0/0/0/0]	10.539	10.539	-0.003	10.582	0.408	10.542	0.026
[30/-30/30/-30]	15.091	15.089	-0.014	15.152	0.401	15.090	-0.003
[30/-30/-30/30]	15.545	15.544	-0.005	15.601	0.360	15.546	0.007

Πίνακας 3.3: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.5. [1]

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)	ANSYS 11.0					
		EIG		N-L		N-L & EIG	
	P_{cr}	P_{cr}	%	P_{cr}	%	P_{cr}	%
[0/0/0/0]	7.991	7.989	-0.017	8.065	0.923	7.995	0.058
[30/-30/30/-30]	8.962	8.971	0.100	9.042	0.890	9.004	0.468
[30/-30/-30/30]	9.125	9.125	0.004	9.174	0.539	9.128	0.028

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας

Πίνακας 3.4: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.05. [1]

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)	ANSYS 11.0			
		EIG		N-L & EIG	
	P_{cr}	P_{cr}	%	P_{cr}	%
[0/0/0/0]	10.522	10.523	0.014	10.527	0.044
[30/-30/30/-30]	15.077	15.076	-0.004	15.079	0.010
[30/-30/-30/30]	15.530	15.530	0.002	15.532	0.012

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας

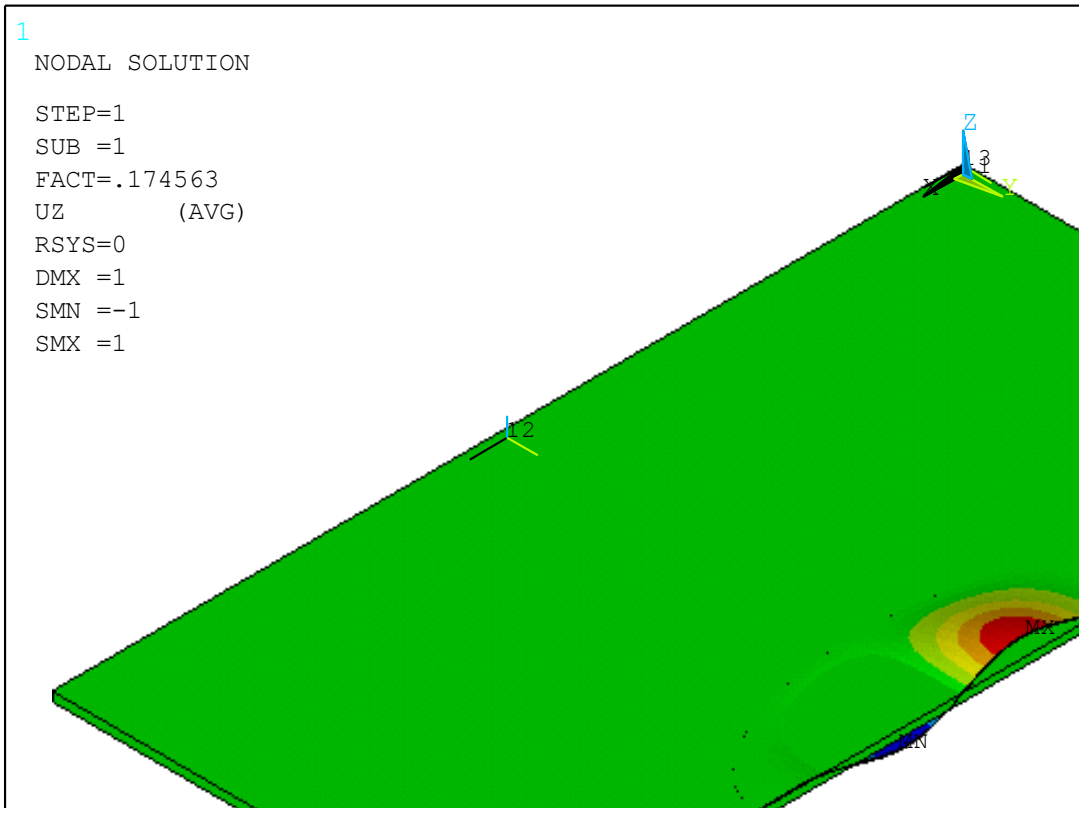
Πίνακας 3.5: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.95. [1]

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)	ANSYS 11.0			
		EIG		N-L & EIG	
	P_{cr}	P_{cr}	%	P_{cr}	%
[0/0/0/0]	4.779	4.773	-0.136	4.775	-0.086
[30/-30/30/-30]	5.413	5.412	-0.013	5.425	0.232
[30/-30/-30/30]	5.664	5.654	-0.161	5.656	-0.133

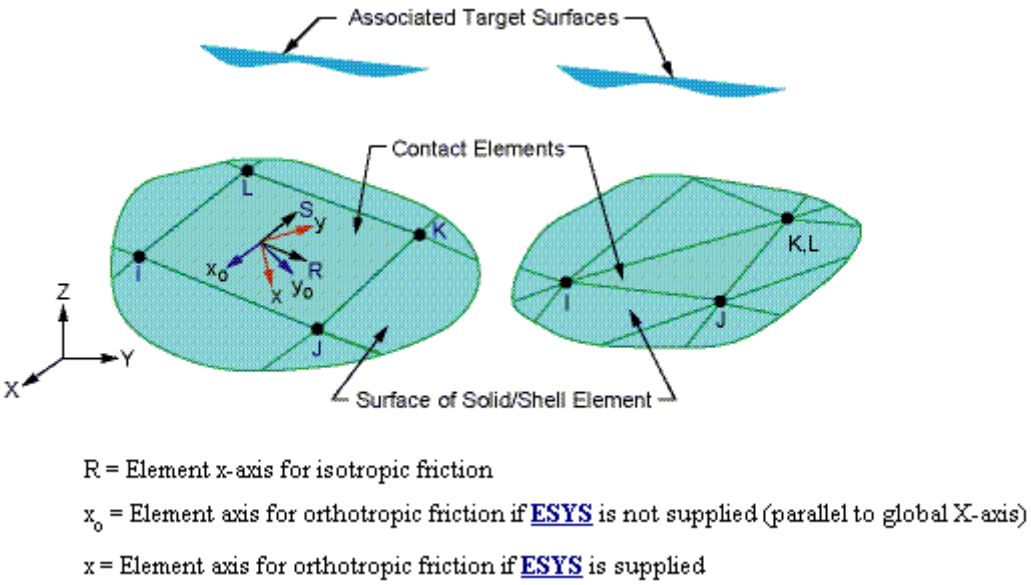
[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας

Τα παραπάνω αποτελέσματα της ανάλυσης ιδιοτιμών, σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες αποδεκτές μορφές λυγισμού που προκύπτουν, καθιστούν αυτόν τον τύπο ανάλυσης ιδιαίτερα αξιόπιστο για περιπτώσεις αποχωρισμών στο μέσο του πάχους της πλάκας. Ωστόσο, όταν ο αποχωρισμός βρίσκεται σε άλλη κατά το πάχος θέση, μπορεί να εμφανιστούν μη αποδεκτές μορφές λυγισμού της πλάκας εξαιτίας της διείσδυσης του λεπτότερου υποπολύστρωτου στο παχύτερο, στην περιοχή του αποχωρισμού, κατά τον πρόωρο λυγισμό αυτού (Σχήμα 3.26). Το πρόβλημα αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την ανάλυση ιδιοτιμών δε λαμβάνεται υπόψη κάποιος κανόνας επαφής, ώστε να αποφευχθεί η διείσδυση μεταξύ των τμημάτων της πλάκας. Ένας τέτοιος κανόνας μπορεί να επιβληθεί μέσω των στοιχείων επαφής (contact elements), τα οποία εξασφαλίζουν την ελαχιστοποίηση της διείσδυσης, ώστε αυτή να θεωρείται αμελητέα. Η εφαρμογή των στοιχείων επαφής πραγματοποιείται σε συνδυασμό με τη μη γραμμική ανάλυση, ενώ δεν μπορεί να συνδυαστεί με εκείνη των ιδιοτιμών. Επιπλέον, η επιλογή του τύπου τους καθορίζεται βάσει του τύπου των στοιχείων που μοντελοποιούν την πλάκα, οπότε δεδομένης της χρήσης του τρισδιάστατου, οκτάκομβου στοιχείου SOLID45 (ή SOLID46), επιλέγεται το στοιχείο CONTA173 (Σχήμα 3.27, ANSYS - 2007), το οποίο αποτελείται από τέσσερεις κόμβους. Επιπρόσθετα, επιλέγεται η τετράκομβη εκδοχή του στοιχείου - στόχου (target element) TARG170 (Σχήμα 3.28, ANSYS - 2007), [8] το οποίο συνδυάζεται με το CONTA173 για τη μοντελοποίηση των εσωτερικών επιφανειών των τμημάτων της πλάκας, στην περιοχή του αποχωρισμού.

[8] Το TARG170 είναι οκτάκομβο, αλλά «ρίχνει» τους μεσαίους κόμβους εφόσον συνδυαστεί με το τετράκομβο CONTA173.



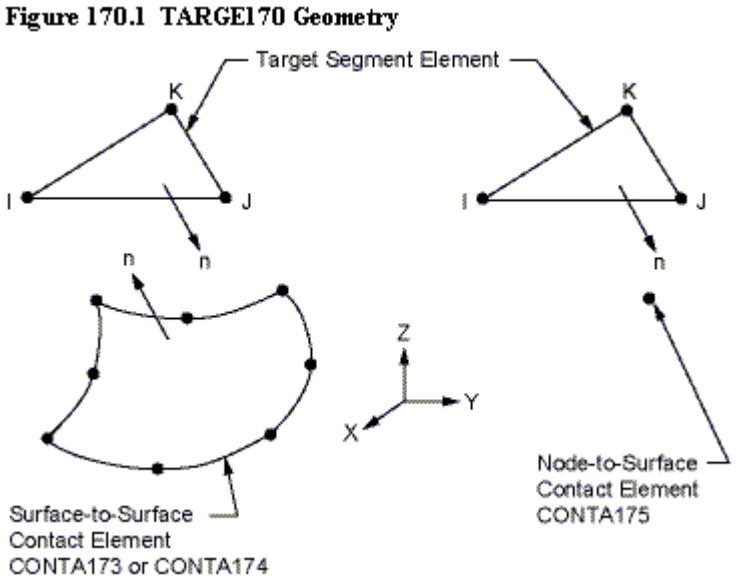
Σχήμα 3.26: Μη αποδεκτή μορφή λυγισμού.



Σχήμα 3.27: Σχηματική αναπαράσταση του στοιχείου επαφής CONTA173.

Στα πλαίσια της χρήσης των παραπάνω στοιχείων καθορίζονται ορισμένες παράμετροι σχετικά με τις συνθήκες επαφής που θα επιβληθούν στο μοντέλο. Έτσι, αρχικά καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας των κόμβων των στοιχείων, ώστε αυτοί να αφορούν στις μετατοπίσεις στις διευθύνσεις των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων των στοιχείων, κατ' αντιστοιχία με τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων των τρισδιάστατων στοιχείων. Επιπρόσθετα, μέσω

κατάλληλης ρύθμισης, λαμβάνεται υπόψη η πιθανή αρχική διείσδυση μεταξύ των τμημάτων της πλάκας, οφειλόμενη σε γεωμετρική ατέλεια. Παράλληλα, ορίζεται ένα κατώτερο και ένα ανώτερο όριο, εντός των οποίων η αρχική διείσδυση είναι αποδεκτή, οπότε αν αυτή βρίσκεται εκτός των ορίων, το ANSYS επιχειρεί να την ελαχιστοποιήσει πριν την έναρξη της ανάλυσης. Συνέπεια αυτού είναι η δυνατότητα σχηματισμού της γεωμετρικής ατέλειας του μοντέλου για τις ανάγκες της μη γραμμικής ανάλυσης με βάση την πρώτη μορφή λυγισμού, είτε αυτή είναι αποδεκτή είτε όχι. Εν προκειμένω, το κατώτερο όριο ορίζεται ίσο με 10^{-11}mm, ενώ το ανώτερο ορίζεται ίσο με 0.0001mm. Επίσης, καθορίζεται ένα άνω όριο διείσδυσης, πέραν του οποίου η διείσδυση που εμφανίζεται κατά την ανάλυση δεν είναι αποδεκτή (0.0001mm). Με βάση την ανοχή αυτή και ένα συντελεστή που αφορά στο μητρώο δυσκαμψίας της επαφής (contact stiffness matrix), σε κάθε βήμα της ανάλυσης ελέγχεται το μέγεθος της διείσδυσης και εφόσον αυτό δεν είναι αποδεκτό, επιχειρείται η εκ νέου σύγκλιση των κριτηρίων, ώστε να μειωθεί σε ανεκτά επίπεδα. Επιπλέον, ενεργοποιείται η αυτόματη ανανέωση του μητρώου δυσκαμψίας της επαφής σε κάθε βήμα, με σκοπό την αύξηση του επιπέδου της ακρίβειας της ανάλυσης.



Σχήμα 3.28: Σχηματική αναπαράσταση του στοιχείου - στόχου TARG170.

Δεδομένου ότι τα στοιχεία επαφής και τα στοιχεία - στόχοι εφαρμόζονται σε επιφάνειες, ο σχηματισμός τους απλοποιείται σημαντικά, καθώς μπορεί να γίνει βάσει των επιφανειών των υποκείμενων τρισδιάστατων στοιχείων του μοντέλου. Έτσι, εφόσον γίνει η αντιστοίχηση καθενός από τους δύο τύπους με την επιφάνεια που θα μοντελοποιήσει, επιλέγονται οι κόμβοι του μοντέλου που βρίσκονται στην περιοχή του αποχωρισμού. Εξαιτίας όμως του τρόπου κατασκευής του μοντέλου, το σύνολο των κόμβων που επιλέγονται αποτελείται από ζεύγη ταυτιζόμενων κόμβων, εκ των οποίων ο ένας αντιστοιχεί στο τμήμα κάτω από το επίπεδο του αποχωρισμού και ο άλλος στο τμήμα πάνω από το επίπεδο αυτό. Επομένως, ακολουθεί ένας διαχωρισμός των κόμβων σε δύο υποσύνολα, εκ των οποίων το ένα αφορά στο πάνω τμήμα της πλάκας και το άλλο στο κάτω. Εν συνεχεία, μέσω καθενός από τα σύνολα αυτά και της εφαρμογής της εντολής *esurf* (ANSYS - 2007), τα στοιχεία επαφής και τα στοιχεία - στόχοι

σχηματίζονται ουσιαστικά πάνω στις επιφάνειες των τρισδιάστατων στοιχείων, στην περιοχή του αποχωρισμού. Τέλος, εφόσον δημιουργηθούν τα στοιχεία αυτά, θα πρέπει τα συστήματα συντεταγμένων τους να είναι διευθετημένα έτσι, ώστε οι άξονες z των στοιχείων επαφής να έχουν κατεύθυνση προς τα στοιχεία - στόχους και αντίστροφα.

Το προηγούμενο παράδειγμα αφορά στην περίπτωση μίας πλάκας με έναν αποχωρισμό στο μισό του πάχους αυτής, οπότε η ορθότητα του μοντέλου θα πρέπει να ελεγχθεί και στην περίπτωση που ο αποχωρισμός βρίσκεται σε διάφορες θέσεις κατά το πάχος. Προς τον σκοπό αυτό γίνεται χρήση ενός δεύτερου παραδείγματος, το οποίο αφορά σε μία τετραγωνική πλάκα με έναν κεντρικό, τετραγωνικό αποχωρισμό των στρώσεών της, υποκείμενη σε μονοαξονική θλίψη. Οι διαστάσεις της πλάκας και οι ιδιότητες των στρώσεών της συγκεντρώνονται στον Πίνακα 3.6 (Short et al - 2001), ενώ η ακολουθία των στρώσεων φαίνεται στο Σχήμα 3.29. Το μοντέλο του παραδείγματος δημιουργείται μέσω του προγραμματιστικού πακέτου ABAQUS και αποτελείται από εικοσάκομβα, στρωσιγενή στοιχεία με μήκος ακμής, στο επίπεδο της πλάκας, ίσο με 2.5 mm, ενώ στην περιοχή του αποχωρισμού εφαρμόζονται συνθήκες επαφής για την αποφυγή της διείσδυσης μεταξύ των τμημάτων της πλάκας. Επιπρόσθετα, η ανάλυση είναι μη γραμμική και η απαιτούμενη ατέλεια του μοντέλου αντιστοιχεί σε μία μη επίπεδη μετατόπισή του στο κέντρο του αποχωρισμού, ίση με 0.01 mm.

Πίνακας 3.6: Διαστάσεις και ιδιότητες της πλάκας του δεύτερου παραδείγματος.

Διαστάσεις			Ιδιότητες					
Μήκος	Πλάτος	Πάχος	E_1 [1]	$E_2=E_3$ [2]	$G_{12}=G_{31}$ [3]	G_{23} [4]	$\nu_{12}=\nu_{31}$ [5]	ν_{23} [6]
mm			MPa					
50	50	2.4	46000	13000	5000	4600	0.3	0.42

[1] Μέτρο ελαστικότητας στη διεύθυνση των ινών

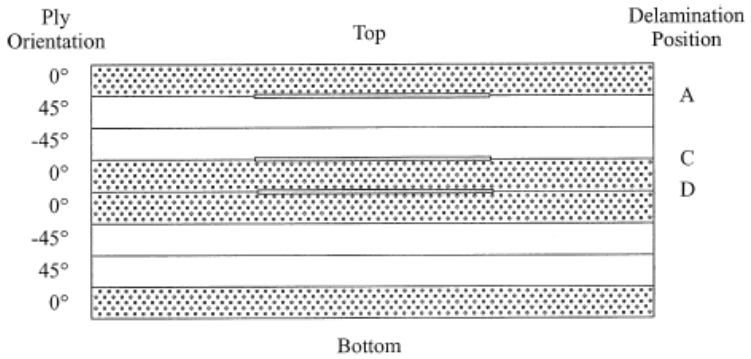
[2] Μέτρα ελαστικότητας κάθετα στη διεύθυνση των ινών και στο επίπεδο της στρώσης

[3] Μέτρα διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης και στο επίπεδο 31

[4] Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο 23

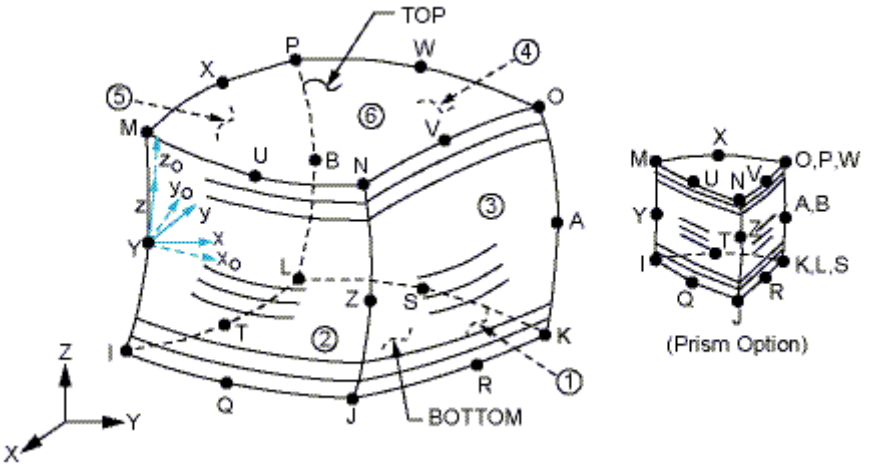
[5] Λόγοι του Poisson στο επίπεδο της στρώσης και στο επίπεδο 31

[6] Λόγος του Poisson στο επίπεδο 23

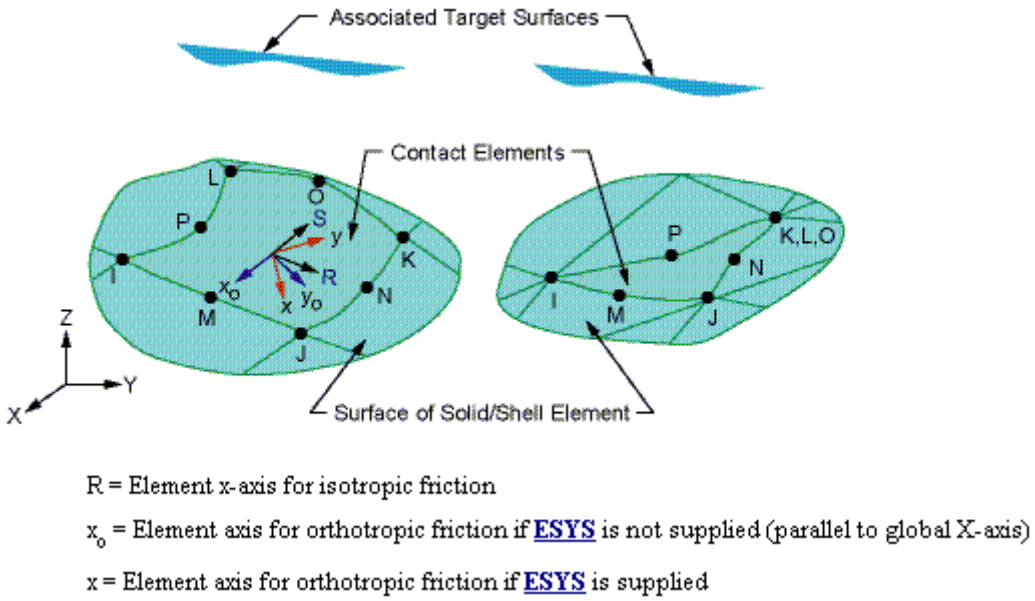


Σχήμα 3.29: Σχηματική αναπαράσταση της ακολουθίας των στρώσεων της πλάκας.

Κατ' αντιστοιχία με τα παραπάνω, το μοντέλο που κατασκευάζεται μέσω του ANSYS αποτελείται από στρωσιγενή στοιχεία τύπου SOLID186 (Σχήμα 3.30, ANSYS - 2007), με το ίδιο μήκος ακμής. Τα στοιχεία αυτά αποτελούνται από είκοσι κόμβους που καταλαμβάνουν τις κορυφές και τα μέσα των ακμών ενός παραλληλόγραμμου και χαρακτηρίζονται από τρεις βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις μετατοπίσεις στις διευθύνσεις των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων του στοιχείου. Επιπλέον, η επιφάνεια του αποχωρισμού μοντελοποιείται με τα οκτάκομβα στοιχεία επαφής CONTA174 (Σχήμα 3.31, ANSYS - 2007), σε συνδυασμό με τα στοιχεία - στόχους TARG170. Επίσης, η ανάλυση είναι μη γραμμική, ενώ η ατέλεια του μοντέλου επιτυγχάνεται βάσει μίας μορφής λυγισμού της πλάκας που χαρακτηρίζεται από ένα ημικύμα στις διευθύνσεις x και y, καθώς και ενός συντελεστή σμίκρυνσης, ίσου με 0.01.



Σχήμα 3.30: Σχηματική αναπαράσταση της στρωσιγενούς εκδοχής του στοιχείου SOLID186.

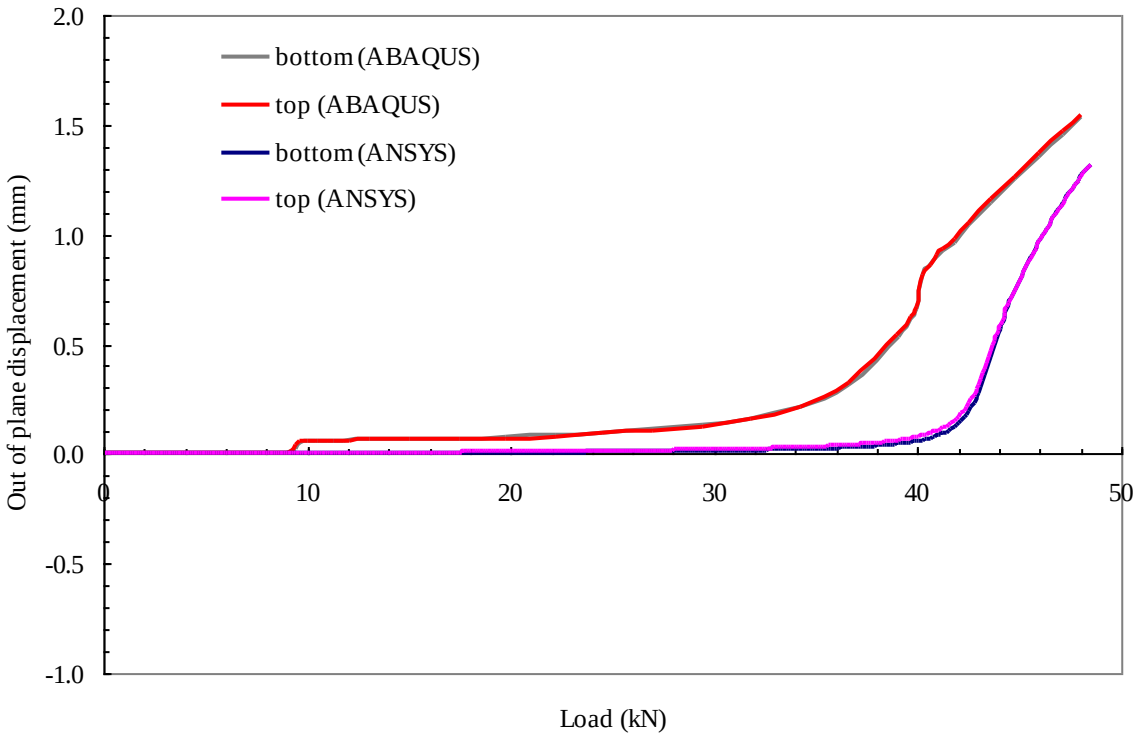


Σχήμα 3.31: Σχηματική αναπαράσταση του στοιχείου επαφής CONTA174.

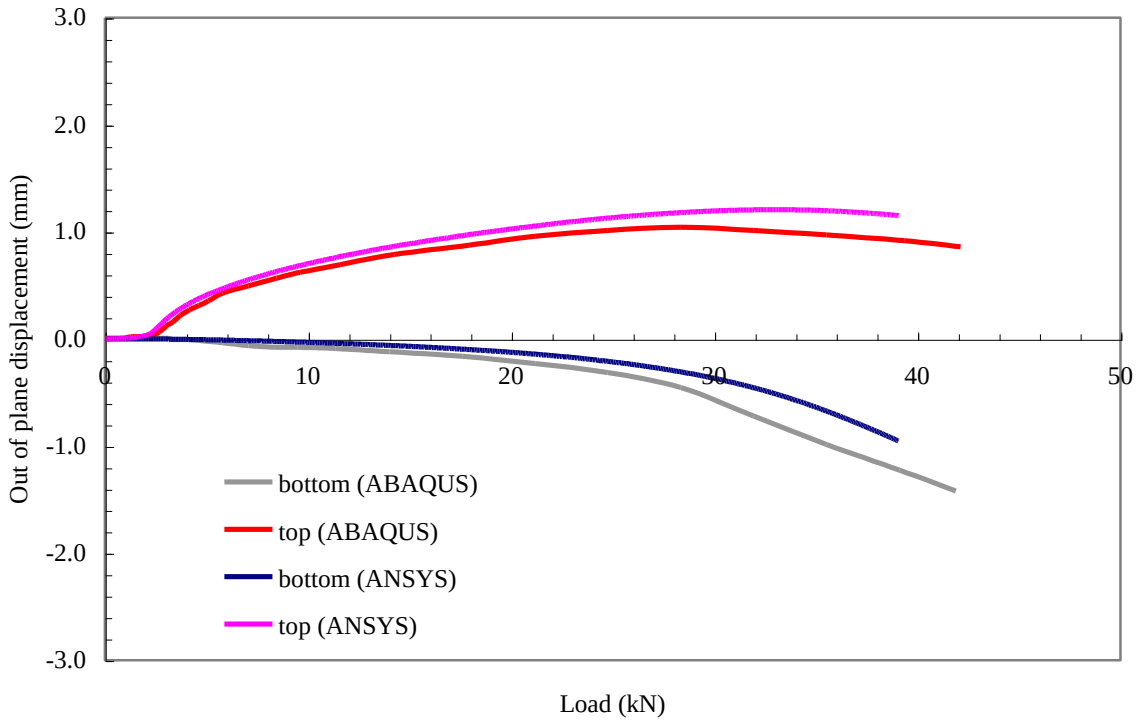
Όπως προκύπτει από τα διαγράμματα των Σχημάτων 3.32 και 3.33, οι προβλέψεις των δύο μοντέλων ως προς τη γενική συμπεριφορά της πλάκας συμφωνούν για κάθε εξεταζόμενη περίπτωση. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση ενός αποχωρισμού μεταξύ των στρώσεων 4 και 5,

με μήκος επιφάνειας 15 mm, τα δύο μοντέλα προβλέπουν τον γενικό λυγισμό της πλάκας (Σχήμα 3.32), ενώ στην περίπτωση ενός αποχωρισμού μεταξύ των στρώσεων 6 και 7, με μήκος επιφάνειας 25 mm, συμφωνούν ως προς τον τοπικό λυγισμό αυτής (Σχήμα 3.33). Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα του ANSYS αποκλίνουν ως προς εκείνα του ABAQUS, με τις διαφορές να είναι σημαντικές στην πρώτη περίπτωση, αλλά αρκετά μικρές στη δεύτερη, καθιστώντας έτσι τη μοντελοποίηση μέσω του ANSYS σχετικά ικανοποιητική.

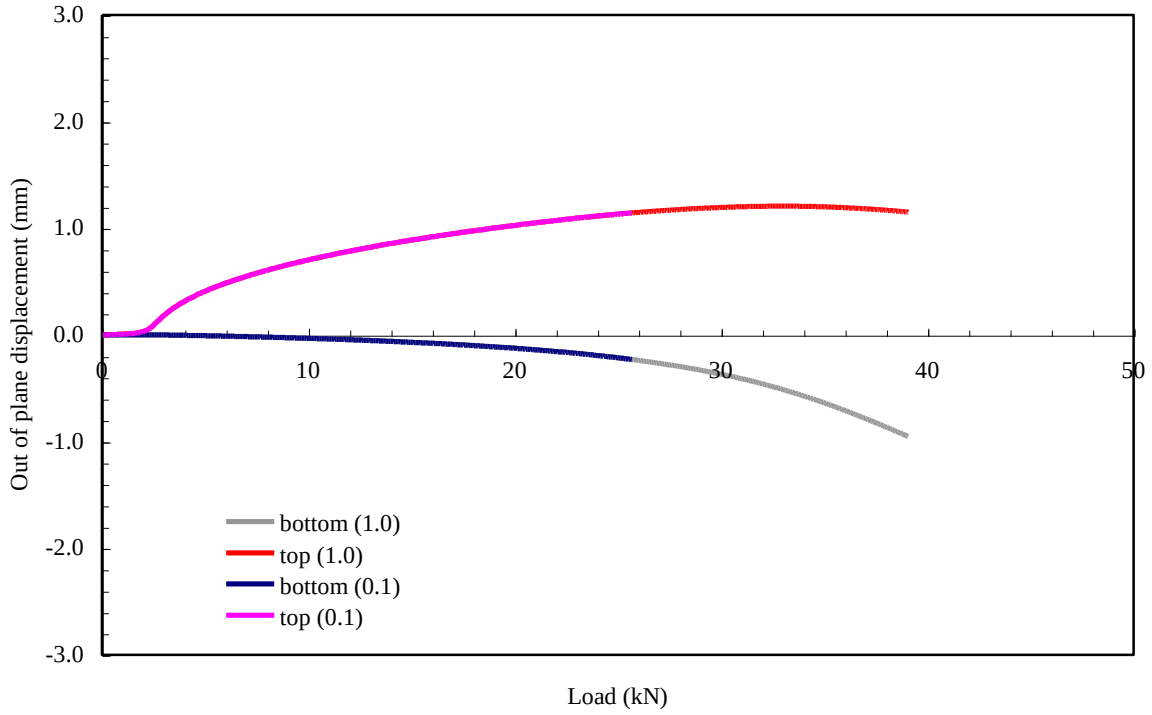
Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά την επιλογή της τιμής 0.1 για το συντελεστή του μητρώου δυσκαμψίας της επαφής, όπως υποδεικνύεται από τις οδηγίες χρήσης του ANSYS, η ανάλυση για την περίπτωση ενός αποχωρισμού μεταξύ των στρώσεων 6 και 7 παρουσιάζει προβλήματα (μείωση του μεγέθους του βήματός της και πιθανή διακοπή), ενώ παράλληλα, συνεχίζεται παρά τις μη αποδεκτές τιμές της διείσδυσης μεταξύ των υποπολύστρωτων. Κατά συνέπεια, η καμπύλη φορτίου - μη επίπεδης μετατόπισης, η οποία υπολογίζεται βάσει των βημάτων μέχρι το πρώτο σφάλμα, δεν είναι πλήρως αναπτυγμένη (Σχήμα 3.34). Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με τη χρήση μίας μεγαλύτερης τιμής του συντελεστή (1.0), οπότε η ανάλυση ολοκληρώνεται με επιτυχία και η καμπύλη που προκύπτει αναπτύσσεται πλήρως, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Τα παραπάνω δεν ισχύουν στην περίπτωση ενός αποχωρισμού μεταξύ των στρώσεων 4 και 5, καθώς η καμπύλη που υπολογίζεται για την τιμή 0.1 είναι ακριβώς ίδια με εκείνη που προκύπτει για την τιμή 1.0 (Σχήμα 3.35).



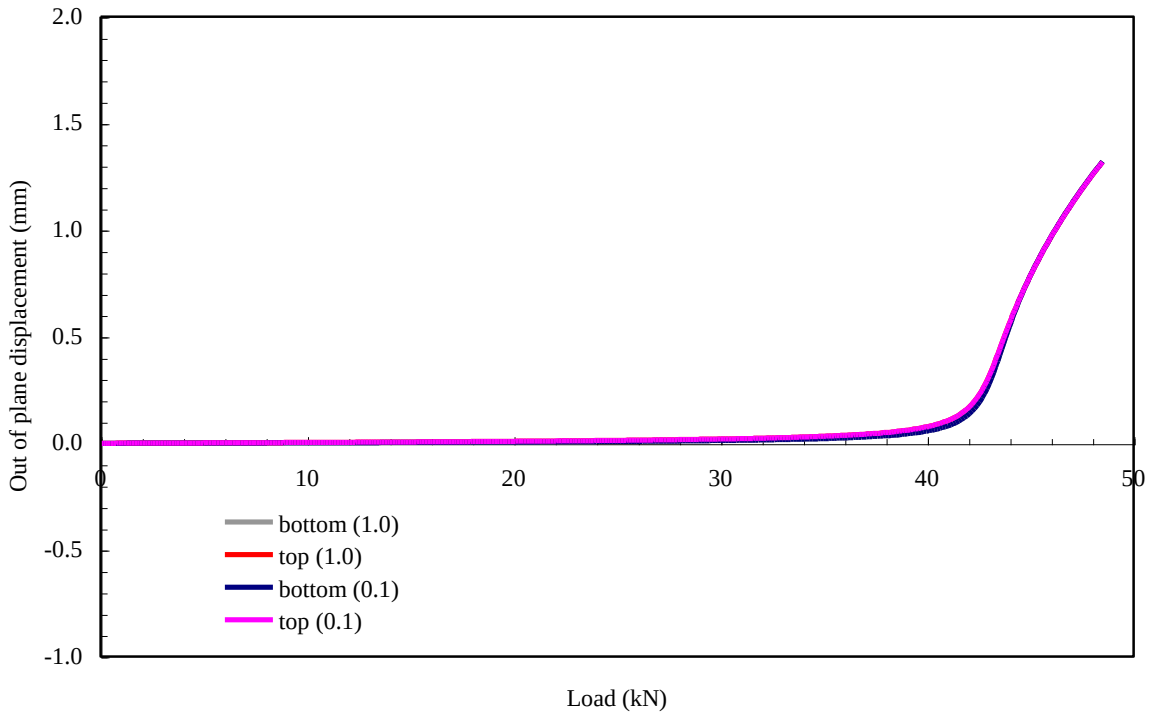
Σχήμα 3.32: Μη επίπεδη μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού μεταξύ των στρώσεων 4 και 5, με μήκος επιφάνειας 15 mm.



Σχήμα 3.33: Μη επίπεδη μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού μεταξύ των στρώσεων 6 και 7, με μήκος επιφάνειας 25 mm.



Σχήμα 3.34: Καμπύλες μη επίπεδης μετατόπισης για την περίπτωση αποχωρισμού μεταξύ των στρώσεων 6 και 7 (συντελεστής μητρώου δυσκαμψίας της επαφής ίσος με (α) 0.1 και (β) 1.0).



Σχήμα 3.35: Καμπύλες μη επίπεδης μετατόπισης για την περίπτωση αποχωρισμού μεταξύ των στρώσεων 4 και 5 (συντελεστής μητρώου δυσκαμψίας της επαφής ίσος με (α) 0.1 και (β) 1.0).

3.6 Επαλήθευση των αναλυτικών μεθόδων

Ο έλεγχος της ορθότητας των απλών αναλυτικών μεθόδων υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, που περιγράφονται στο Κεφάλαιο 2, πραγματοποιείται κατ' αντιστοιχία με την επαλήθευση του τρόπου μοντελοποίησης. Έτσι, οι εξισώσεις επιλύονται για ορισμένα παραδείγματα της βιβλιογραφίας και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα των πηγών. Εν προκειμένω, ο έλεγχος γίνεται βάσει του πρώτου από τα δύο παραδείγματα που εξετάζονται κατά την επαλήθευση του τρόπου μοντελοποίησης. Όπως έχει περιγραφεί στο προηγούμενο εδάφιο, το παράδειγμα αυτό αφορά σε μία απλά εδρασμένη πλάκα με έναν αποχωρισμό υπό μορφή λωρίδας στο μέσο του πάχους της, υπό καθεστώς μονοαξονικής θλίψης. Οι διαστάσεις και οι ιδιότητες, ανά στρώση, της πλάκας φαίνονται στον Πίνακα 3.1.

Δεδομένων των συνθηκών του παραδείγματος, ελέγχεται η εξίσωση (2.36) που αφορά στην άθικτη κατάσταση της πλάκας και οι εξισώσεις (2.39) και (2.40) για τον γενικό και τον τοπικό λυγισμό της πλάκας με αποχωρισμένες στρώσεις. Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.7, τα αποτελέσματα της εξίσωσης (2.36) αποκλίνουν ελάχιστα από εκείνα της πηγής για την περίπτωση των συμμετρικών πλακών, είτε αυτά προκύπτουν βάσει αναλυτικών μεθόδων [9] είτε βάσει του χρησιμοποιούμενου μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων. Αντίθετα, η απόκλιση είναι μεγάλη στην περίπτωση του αντισυμμετρικού πολύστρωτου, γεγονός που οφείλεται στις μη μηδενικές δυσκαμψίες σύζευξης B_{16} και B_{26} αυτού, σε συνδυασμό με το μικρό αριθμό των στρώσεών του (μικρότερου από οκτώ).

[9] Στα πλαίσια του παραδείγματος, γίνεται χρήση των εξισώσεων (2.32) και (2.34).

Πίνακας 3.7: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την άθικτη κατάσταση.

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)		εξίσωση (2.36)		
	αναλυτικές	FEM			
	P_{cr}	P_{cr}	P_{cr}	% (ως προς αναλυτικές)	% (ως προς FEM)
[0/0/0/0]	10.49	10.539	10.490	-0.002	-0.467
[30/30/30/30]	15.764	15.645	15.764	0.001	0.761
[30/-30/30/-30]	15.15	15.091	15.764	4.054	4.460

Στην περίπτωση της πλάκας με αποχωρισμένες στρώσεις, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει ως η μικρότερη από τις τιμές που υπολογίζονται μέσω των εξισώσεων (2.39) και (2.40). Ειδικά κατά την εφαρμογή της εξίσωσης (2.40), οι υπολογισμοί γίνονται τόσο για τη δυσκαμψία ολόκληρης της πλάκας όσο και για εκείνη που αφορά στο υποπολύστρωτο, οπότε σε κάθε περίπτωση προκύπτουν δύο τιμές προς σύγκριση με το αποτέλεσμα της εξίσωσης (2.39), όπως φαίνεται στους Πίνακες 3.8 - 3.10. Βάσει των πινάκων αυτών, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού λαμβάνεται ίσο με εκείνο για τον γενικό λυγισμό, εκτός από την περίπτωση ενός αποχωρισμού με λόγο μήκους προς εκείνο της πλάκας ίσο με 0.95. Στην περίπτωση αυτή, το φορτίο τοπικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας ολόκληρης της πλάκας είναι μικρότερο από εκείνο για το γενικό λυγισμό, σε αντιδιαστολή με το φορτίο τοπικού λυγισμού με βάση τη δυσκαμψία του υποπολύστρωτου, το οποίο είναι μεγαλύτερο. Κατά συνέπεια, ανάλογα με τη δυσκαμψία που λαμβάνεται υπόψη, το κρίσιμο φορτίο είναι ίσο είτε με το φορτίο τοπικού (δυσκαμψία πλάκας) είτε με το φορτίο γενικού λυγισμού (δυσκαμψία υποπολύστρωτου).

Όπως φαίνεται στους Πίνακες 3.11 - 3.14, σε κάθε περίπτωση, οι αποκλίσεις των τιμών του κρίσιμου φορτίου ως προς εκείνες που υπολογίζονται με βάση το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του παραδείγματος είναι υπερβολικά μεγάλες (>40%), ενώ μόνο στην περίπτωση μίας πλάκας με ακολουθία στρώσεων [0°/0°/0°/0°] και έναν αποχωρισμό με λόγο μήκους προς εκείνο της πλάκας ίσο με 0.95, η απόκλιση είναι σχετικά μικρή (8.34%, Πίνακας 3.14). Επομένως, η χρήση των εξισώσεων (2.39) και (2.40) κρίνεται αμφισβητήσιμη.

Πίνακας 3.8: Φορτίο γενικού (P_{glo}, σε N/mm) και τοπικού λυγισμού (P_{loc}, σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.05. [1]

ακολουθία στρώσεων	P_{glo} [2]	P_{loc} [3]	P_{loc} [4]
[0/0/0/0]	4.381	438.055	1752.220
[30/-30/30/-30]	3.062	306.198	1224.792
[30/-30/-30/30]	3.062	306.198	1224.792

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας

[2] Φορτίο γενικού λυγισμού (εξίσωση 2.39)

[3] Φορτίο τοπικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας ολόκληρης της πλάκας (εξίσωση 2.40)

[4] Φορτίο τοπικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας του υποπολύστρωτου (εξίσωση 2.40)

Πίνακας 3.9: Φορτίο γενικού (P_{glo}, σε N/mm) και τοπικού λυγισμού (P_{loc}, σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.5. [1]

ακολουθία στρώσεων	P_{glo} [2]	P_{loc} [3]	P_{loc} [4]
[0/0/0/0]	4.381	4.381	17.522
[30/-30/30/-30]	3.062	3.062	12.248
[30/-30/-30/30]	3.062	3.062	12.248

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας
[2] Φορτίο γενικού λυγισμού (εξίσωση 2.39)
[3] Φορτίο τοπικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας ολόκληρης της πλάκας (εξίσωση 2.40)
[4] Φορτίο τοπικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας του υποπολύστρωτου (εξίσωση 2.40)

Πίνακας 3.10: Φορτίο γενικού (P_{glo}, σε N/mm) και τοπικού λυγισμού (P_{loc}, σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.95. [1]

ακολουθία στρώσεων	P_{glo} [2]	P_{loc} [3]	P_{loc} [4]
[0/0/0/0]	4.381	1.213	4.854
[30/-30/30/-30]	3.062	0.848	3.393
[30/-30/-30/30]	3.062	0.848	3.393

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας
[2] Φορτίο γενικού λυγισμού (εξίσωση 2.39)
[3] Φορτίο τοπικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας ολόκληρης της πλάκας (εξίσωση 2.40)
[4] Φορτίο τοπικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας του υποπολύστρωτου (εξίσωση 2.40)

Πίνακας 3.11: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.05.[1]

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)	αναλυτική μέθοδος	
	P_{cr}	P_{cr}	%
[0/0/0/0]	10.522	4.381	-58.368
[30/-30/30/-30]	15.077	3.062	-79.691
[30/-30/-30/30]	15.53	3.062	-80.283

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας

Πίνακας 3.12: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.5. [1]

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)	αναλυτική μέθοδος	
	P_{cr}	P_{cr}	%
[0/0/0/0]	7.9908	4.381	-45.180
[30/-30/30/-30]	8.9618	3.062	-65.833
[30/-30/-30/30]	9.1251	3.062	-66.444

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας

Πίνακας 3.13: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.95.[1]

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)	αναλυτική μέθοδος	
	P_{cr}	P_{cr} [2]	%
[0/0/0/0]	4.7792	1.213	-74.610
[30/-30/30/-30]	5.4127	0.848	-84.330
[30/-30/-30/30]	5.6636	0.848	-85.024

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας

[2] Φορτίο τοπικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας ολόκληρης της πλάκας

Πίνακας 3.14: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε N/mm) για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.95.[1]

ακολουθία στρώσεων	Zor (2003)	αναλυτική μέθοδος	
	P_{cr}	P_{cr} [2]	%
[0/0/0/0]	4.7792	4.381	-8.341
[30/-30/30/-30]	5.4127	3.062	-43.430
[30/-30/-30/30]	5.6636	3.062	-45.936

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος πλάκας

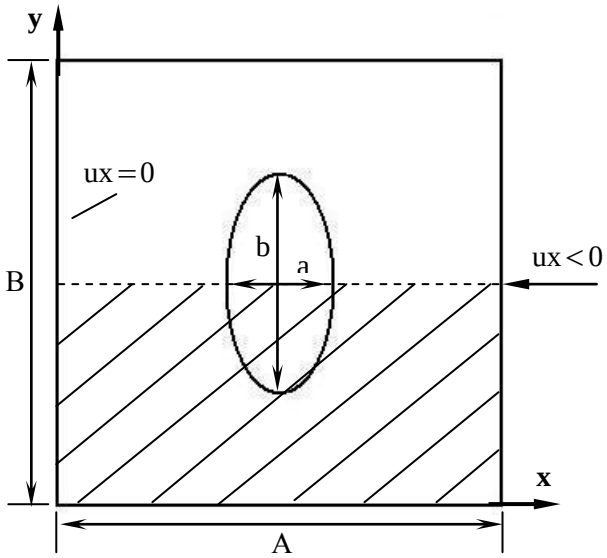
[2] Φορτίο γενικού λυγισμού βάσει της δυσκαμψίας του υποπολύστρωτου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παραμετρική μελέτη της αντοχής σε λυγισμό πολύστρωτων πλακών με αποχωρισμένες στρώσεις

4.1 Σταθερές και παράμετροι του προβλήματος

Η παραμετρική μελέτη που πραγματοποιείται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αποσκοπεί στην κατανόηση του τρόπου επίδρασης ορισμένων παραμέτρων του αποχωρισμού των στρώσεων στο λυγισμό μίας πολύστρωτης πλάκας. Τα μοντέλα που κατασκευάζονται για τις ανάγκες της μελέτης αυτής αφορούν σε μία επίπεδη, τετραγωνική πολύστρωτη πλάκα με έναν κεντρικό αποχωρισμό ελλειπτικού σχήματος, του οποίου οι διάμετροι a και b είναι παράλληλοι στους γεωμετρικούς άξονες x και y του μοντέλου, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Η επιλογή ελλειπτικού σχήματος για την περιοχή του αποχωρισμού οφείλεται στο γεγονός ότι προσεγγίζει καλύτερα τις πραγματικές αστοχίες αυτού του τύπου συγκριτικά με τα ορθογωνικά σχήματα που λαμβάνονται υπόψη στη βιβλιογραφία. Όσον αφορά το υλικό της πλάκας, αυτό είναι ένα τυπικό ναυπηγικό πολύστρωτο, [10] αποτελούμενο από πολλές ίδιες στρώσεις ενός ισοσταθμισμένου υαλοϋφάσματος ινών άνθρακα σε εποξική ρητίνη, οι οποίες διευθετούνται παράλληλα στα γεωμετρικά άκρα της πλάκας. Οι ιδιότητες του υλικού, καθώς και οι διαστάσεις της πλάκας συγκεντρώνονται στον Πίνακα 4.1. Επιπρόσθετα, η πλάκα είναι πακτωμένη κατά μήκος όλων των πλευρών της, κατ' αντιστοιχία με τα τμήματα μεταξύ των ενισχυτικών της γάστρας ενός σκάφους, ενώ παράλληλα, υπόκειται σε μονοαξονική θλιπτική φόρτιση (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Γεωμετρία και φορτίσεις της πλάκας.

[10] Ένα τυπικό ναυπηγικό πολύστρωτο αποτελείται από πολλές ίδιες στρώσεις υαλοϋφάσματος ή πεπλεγμένου υφάσματος και συνήθως, είναι ομογενές και ορθοτροπικό με ίσα μέτρα ελαστικότητας στις διευθύνσεις x και y.

Πίνακας 4.1: Διαστάσεις και ιδιότητες της πλάκας.

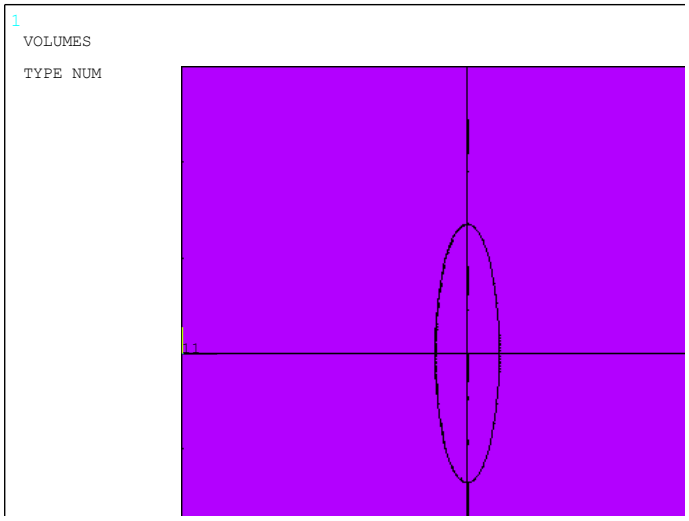
Διαστάσεις			Ιδιότητες					
A [1]	B [2]	t [3]	$E_1=E_2$ [4]	E_3 [5]	G_{12} [6]	$G_{13}=G_{23}$ [7]	ν_{12} [8]	$\nu_{13}=\nu_{23}$ [9]
mm			MPa					
1000	1000	10	53100	8000	3790	3700	0.055	0.074

[1] Μήκος πλάκας
[2] Πλάτος πλάκας
[3] Πάχος πλάκας
[4] Μέτρα ελαστικότητας στη διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτές
[5] Μέτρο ελαστικότητας κάθετα στο επίπεδο της στρώσης
[6] Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης
[7] Μέτρα διάτμησης στα επίπεδα 13 και 23
[8] Λόγος του Poisson στο επίπεδο της στρώσης
[9] Λόγοι του Poisson στα επίπεδα 13 και 23

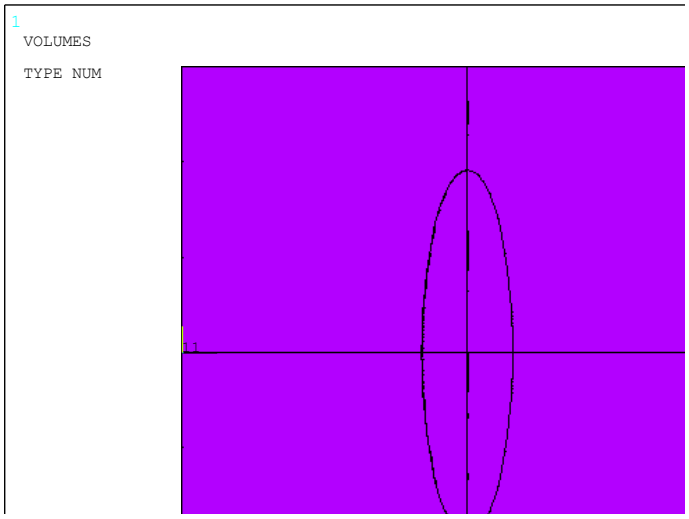
Οι παράμετροι που εξετάζονται στα πλαίσια της μελέτης είναι το σχήμα, το μέγεθος και η κατά το πάχος θέση του αποχωρισμού των στρώσεων. Δεδομένου ότι το βασικό σχήμα του αποχωρισμού είναι ελλειπτικό, εξετάζονται πέντε περιπτώσεις όσον αφορά το σχήμα και τον προσανατολισμό της έλλειψης, οι οποίες εκφράζονται μέσω πέντε διαφορετικών τιμών του λόγου a/b των διαμέτρων αυτής (0.25, 0.5, 1.0, 2.0 και 4.0). Συνεπώς, καλύπτεται ένα φάσμα περιπτώσεων από ένα μακρύ αποχωρισμό, κάθετο στο φορτίο, μέχρι ένα μακρύ αποχωρισμό, παράλληλο με αυτό, με την τιμή 1.0 να αντιστοιχεί σε έναν κυκλικό αποχωρισμό. Επιπλέον, εξετάζονται τρεις περιπτώσεις του μεγέθους του αποχωρισμού, οι οποίες εκφράζονται μέσω τριών τιμών του λόγου A_d/A_p, της επιφάνειας του αποχωρισμού προς εκείνη της πλάκας (0.04 - μικρός αποχωρισμός, 0.08 - μεσαίος και 0.12 - μεγάλος). Οι πιθανοί συνδυασμοί σχήματος - μεγέθους του αποχωρισμού φαίνονται στα Σχήματα 4.2 - 4.16, ενώ οι αντίστοιχες διάμετροι a και b συγκεντρώνονται στον Πίνακα 4.2. Τέλος, εξετάζονται τρεις περιπτώσεις της κατά το πάχος θέσης του αποχωρισμού ως προς την εξωτερική επιφάνεια της πλάκας (t/2 - στο μέσο του πάχους, t/4 και t/8, όπου t το πάχος της πλάκας), με το πάνω υποπολύστρωτο να είναι το λεπτότερο στις δύο τελευταίες περιπτώσεις. Επομένως, οι εξεταζόμενες περιπτώσεις για την παραμετρική μελέτη είναι συνολικά 45.

Πίνακας 4.2: Διάμετροι a και b (σε mm) του ελλειπτικού αποχωρισμού ανά εξεταζόμενη περίπτωση σχήματος και μεγέθους.

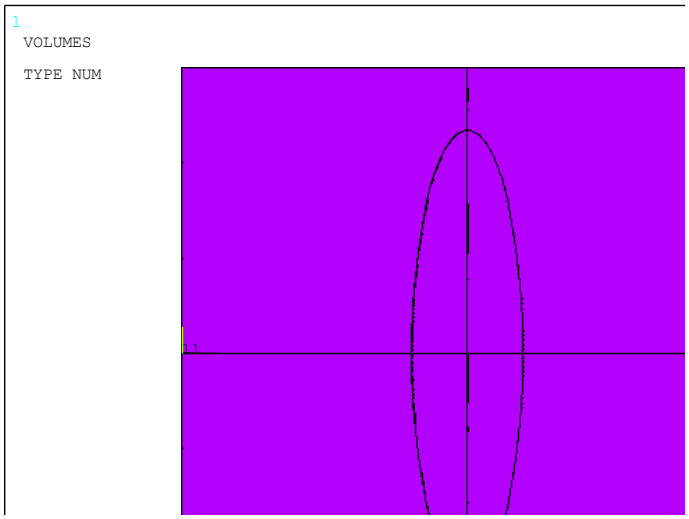
A_d/A_p	a/b=0.25		a/b=0.5		a/b=1.0		a/b=2.0		a/b=4.0	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
0.04	112.84	451.35	159.58	319.15	225.67	225.67	319.15	159.58	451.35	112.84
0.08	159.58	638.30	225.67	451.35	319.15	319.15	451.35	225.67	638.30	159.58
0.12	195.44	781.76	276.39	552.79	390.88	390.88	552.79	276.39	781.76	195.44



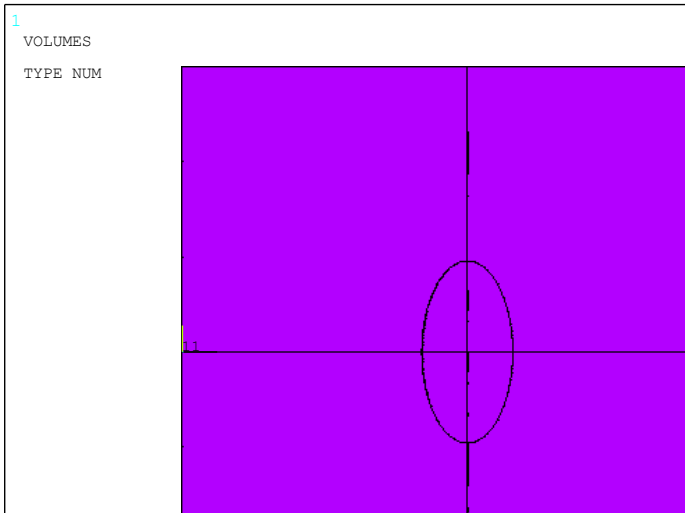
Σχήμα 4.2: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=0.25 και A_d/A_p=0.04.



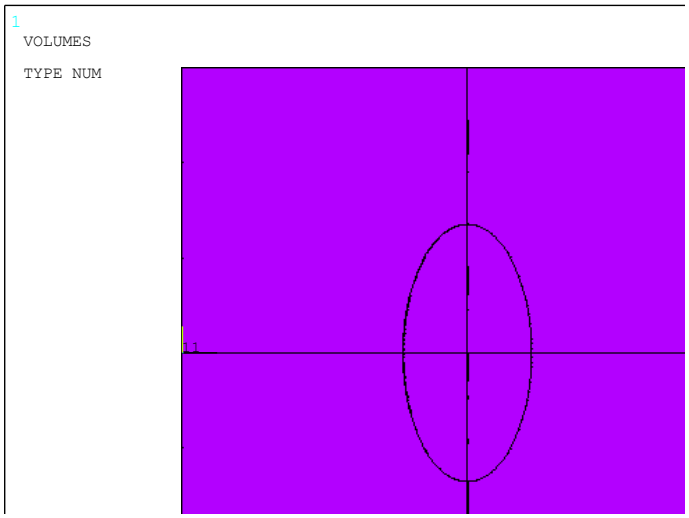
Σχήμα 4.3: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=0.25 και A_d/A_p=0.08.



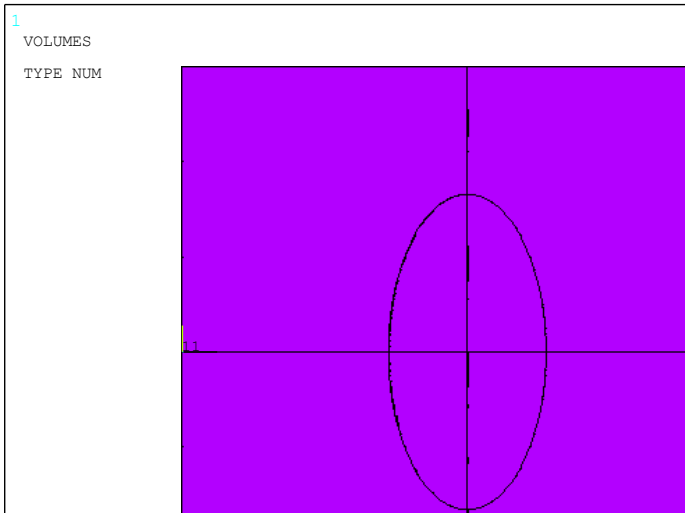
Σχήμα 4.4: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=0.25 και A_d/A_p=0.12.



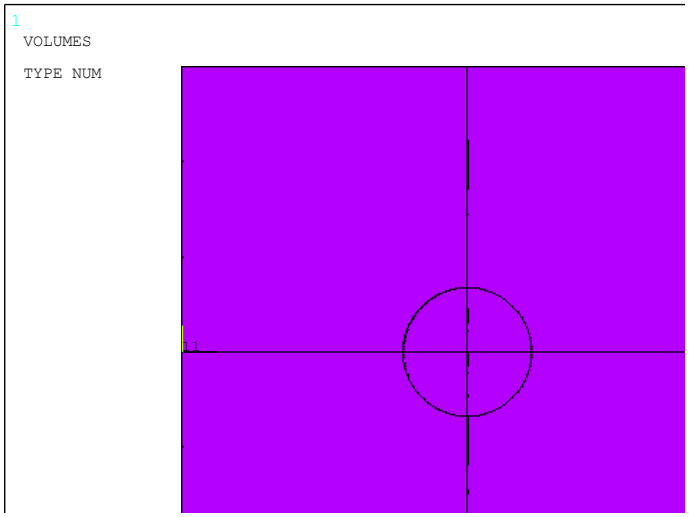
Σχήμα 4.5: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=0.5 και A_d/A_p=0.04.



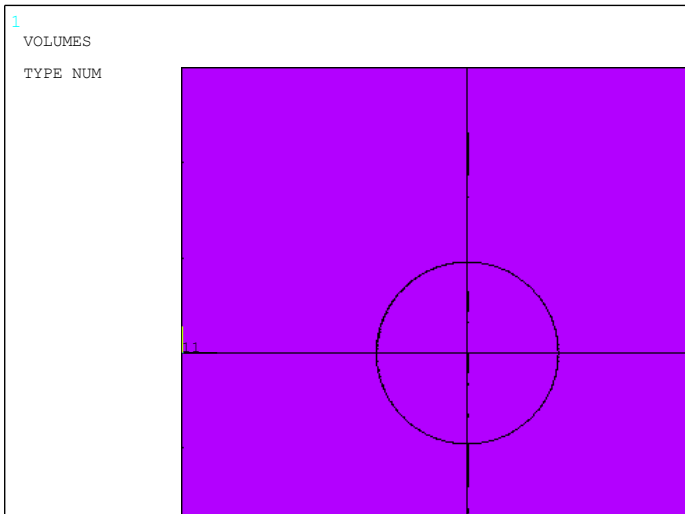
Σχήμα 4.6: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=0.5 και A_d/A_p=0.08.



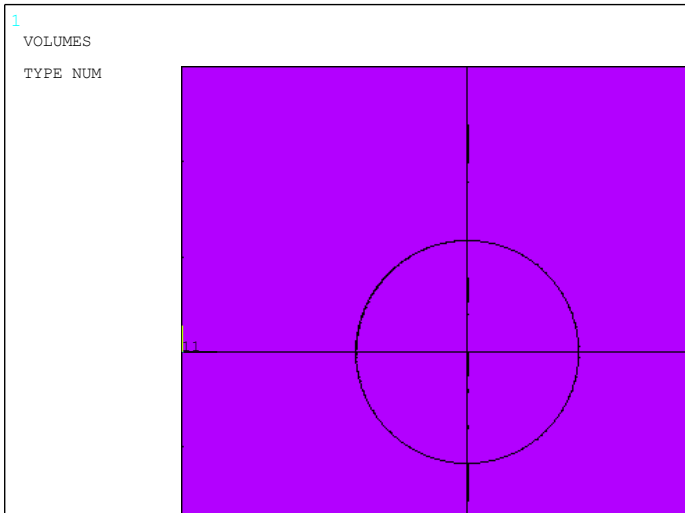
Σχήμα 4.7: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=0.5 και A_d/A_p=0.12.



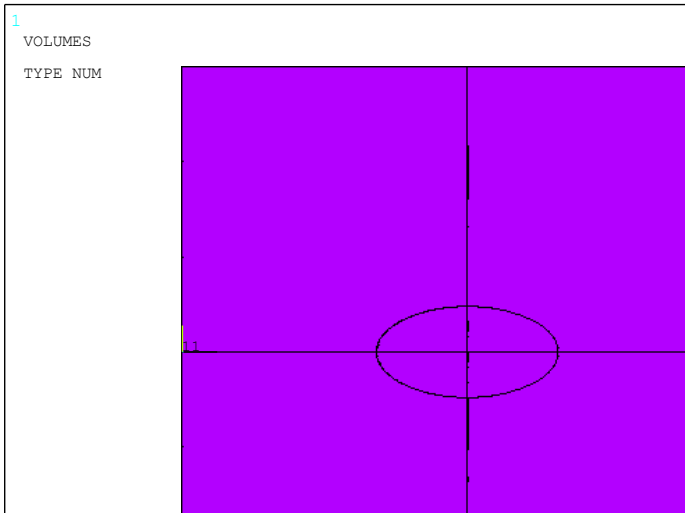
Σχήμα 4.8: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=1.0 και A_d/A_p=0.04.



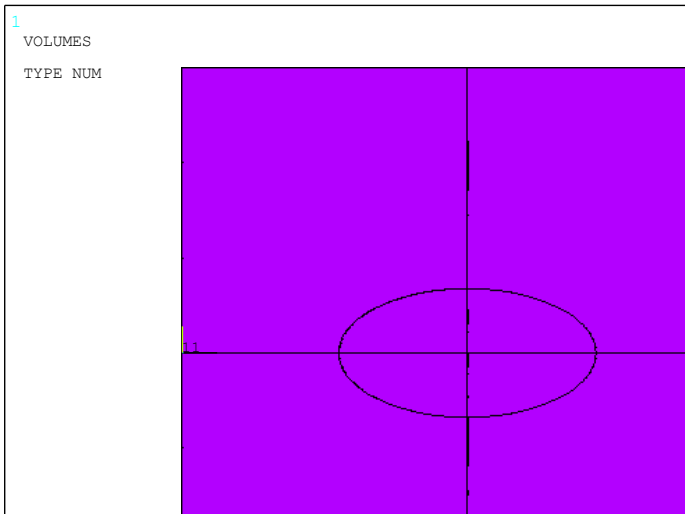
Σχήμα 4.9: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=1.0 και A_d/A_p=0.08.



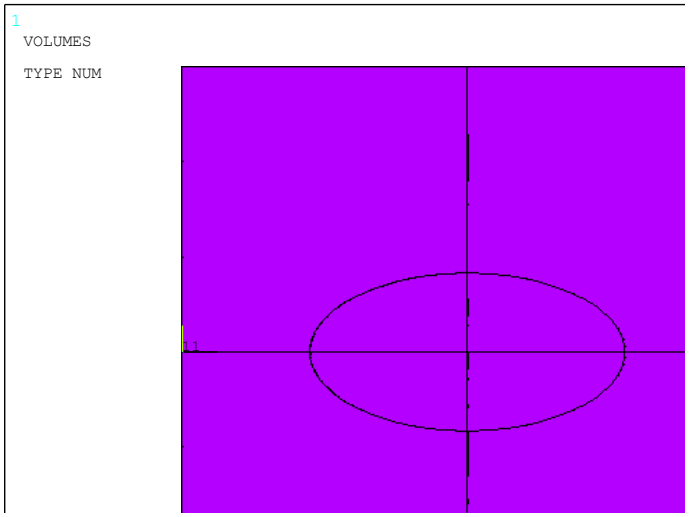
Σχήμα 4.10: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=1.0 και A_d/A_p=0.12.



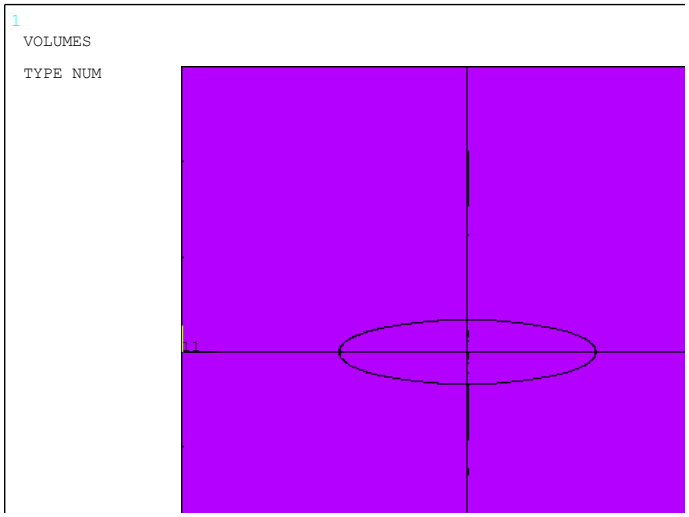
Σχήμα 4.11: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=2.0 και A_d/A_p=0.04.



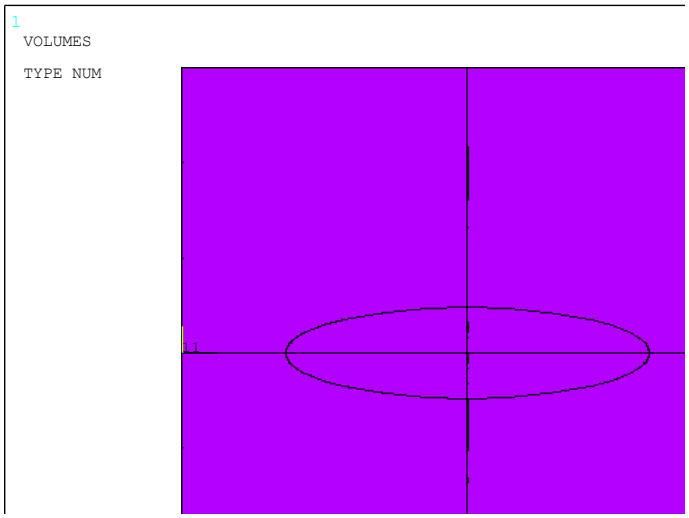
Σχήμα 4.12: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=2.0 και A_d/A_p=0.08.



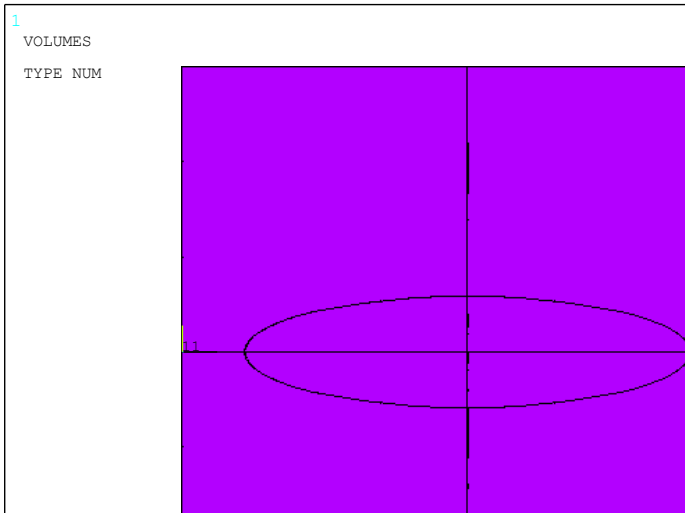
Σχήμα 4.13: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=2.0 και A_d/A_p=0.12.



Σχήμα 4.14: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=4.0 και A_d/A_p=0.04.



Σχήμα 4.15: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=4.0 και A_d/A_p=0.08.



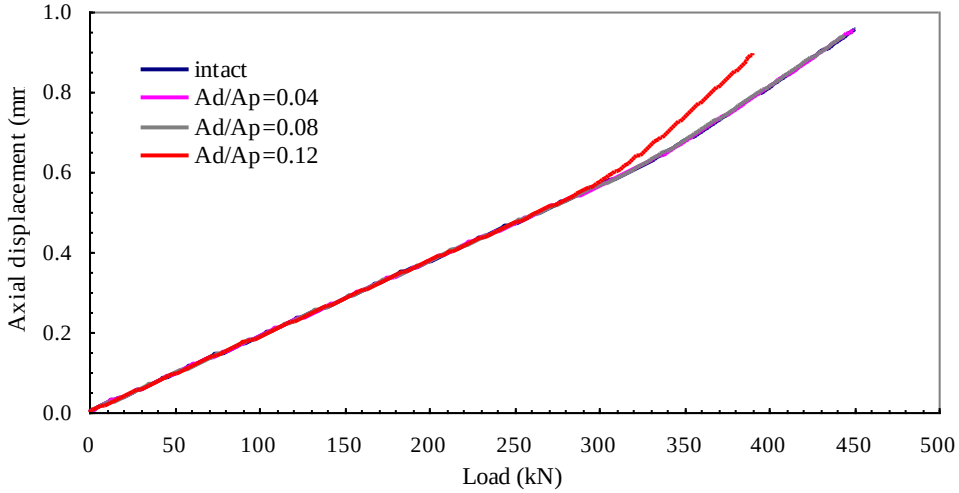
Σχήμα 4.16: Ελλειπτικός αποχωρισμός με a/b=4.0 και A_d/A_p=0.12.

4.2 Μοντελοποίηση

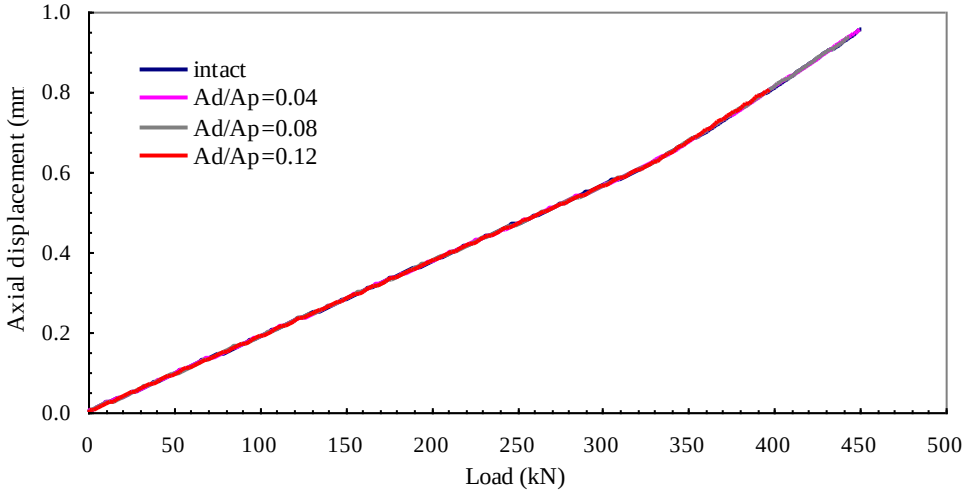
Τα μοντέλα της παραμετρικής μελέτης κατασκευάζονται σύμφωνα με τη διαδικασία που έχει περιγραφεί στο Κεφάλαιο 3 και αφορούν στη μισή πλάκα (γραμμοσκιασμένο τμήμα στο Σχήμα 4.1). Παράλληλα, επιλέγεται ο τρισδιάστατος, οκτάκομβος τύπος στοιχείων SOLID45, ο οποίος χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τις ιδιότητες του Πίνακα 4.2, δεδομένου ότι το πολύστρωτο της πλάκας μπορεί να θεωρηθεί σαν μία στρώση του υλικού, ίδιου πάχους. Κατά συνέπεια, τα στοιχεία επαφής στην περιοχή του αποχωρισμού θα πρέπει να είναι τετράκομβα, οπότε επιλέγεται ο τύπος CONTA173. Επιπλέον, λόγω πάκτωσης της πλάκας, οι κόμβοι των πλευρών του μοντέλου, εκτός από εκείνους των επιφανειών όπου επιβάλλονται περιορισμοί συμμετρίας (εδάφιο 3.3.1), περιορίζονται ως προς τις μετατοπίσεις τους στις διευθύνσεις των αξόνων y και z ($uy = uz = 0$), ενώ οι κόμβοι της πλευράς απέναντι από εκείνη που φορτίζεται, περιορίζονται επίσης ως προς τη διεύθυνση του άξονα x ($ux = 0$). Σημειώνεται ότι σύμφωνα με τη διαδικασία μοντελοποίησης του Κεφαλαίου 3, το φορτίο εφαρμόζεται σαν μία θλιπτική μετατόπιση ($ux < 0$) στους κόμβους της φορτιζόμενης πλευράς (Σχήμα 4.1). Τέλος, όσον αφορά το μοντέλο της άθικτης πλάκας, το μέγεθος των στοιχείων προκύπτει μέσω ενός ελέγχου σύγκλισης και αντιστοιχεί σε μήκος ακμής αυτών ίσο με 20 mm (Παράρτημα Γ).

4.3 Αποτελέσματα ανάλυσης

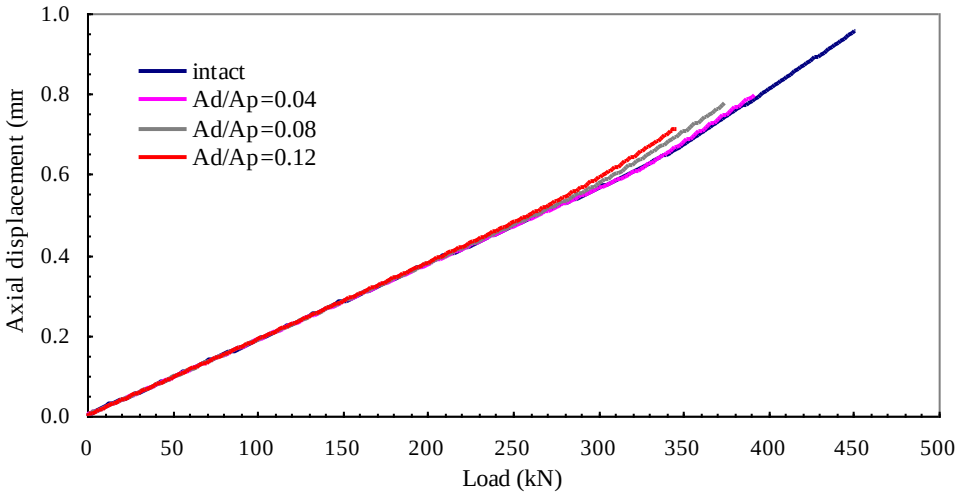
Εφόσον κατασκευαστεί το μοντέλο της πλάκας και προσομοιωθούν οι συνθήκες έδρασης και φόρτισης, επιλέγονται οι τύποι της ανάλυσης, βάσει των οποίων θα υπολογιστεί τελικά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Έτσι, κάθε περίπτωση της παραμετρικής μελέτης αναλύεται τόσο μη γραμμικά (N-L) όσο και μέσω του συνδυασμού της μη γραμμικής ανάλυσης με εκείνη των ιδιοτιμών (N-L & EIG) σύμφωνα με όσα έχουν περιγραφεί στο εδάφιο 3.3.2, οπότε συνολικά πραγματοποιούνται 92 αναλύσεις, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που αφορούν στην άθικτη πλάκα. Στο στάδιο της μεταεπεξεργασίας, αφού οριστούν οι κατάλληλοι κόμβοι, επιλέγεται ο υπολογισμός των μεγεθών που απαιτούνται για την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού (εδάφιο 3.4). Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της μη γραμμικής ανάλυσης, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται για κάθε βήμα αυτής αφορούν στη δύναμη αντίδρασης και στην αξονική μετατόπιση της πλάκας στη διεύθυνση του φορτίου (άξονας x), καθώς και στη μη επίπεδη μετατόπιση αυτής. Επομένως, προκύπτουν διαγράμματα φορτίου - μετατόπισης (αξονικής και μη επίπεδης), στα οποία τα αποτελέσματα ομαδοποιούνται κατά z (κατά το πάχος θέση του αποχωρισμού) και a/b (σχήμα αποχωρισμού) για διάφορες τιμές του A_d/A_p (μέγεθος του αποχωρισμού) και κατά z και A_d/A_p για διάφορες τιμές του a/b. Τα διαγράμματα των Σχημάτων 4.17 - 4.21 (διάφορες τιμές του A_d/A_p) και 4.22 - 4.24 (διάφορες τιμές του a/b) αφορούν στην αξονική μετατόπιση της πλάκας, τα διαγράμματα των Σχημάτων 4.25 - 4.29 (διάφορες τιμές του A_d/A_p) και 4.30 - 4.32 (διάφορες τιμές του a/b) αφορούν στη μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω (παχύτερου) υποπολύστρωτου, ενώ τα διαγράμματα των Σχημάτων 4.33 - 4.37 (διάφορες τιμές του A_d/A_p) και 4.38 - 4.40 (διάφορες τιμές του a/b) αφορούν στη μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω (λεπτότερου) υποπολύστρωτου. Τέλος, στην περίπτωση του συνδυασμού των δύο τύπων ανάλυσης (NL - EIG), τα αποτελέσματα που λαμβάνονται σε κάθε περίπτωση αφορούν σε μία τιμή για την ιδιοτιμή λ_1, της πρώτης μορφής λυγισμού της πλάκας και μία τιμή για τη δύναμη αντίδρασης αυτής στη διεύθυνση του άξονα x.



(α)

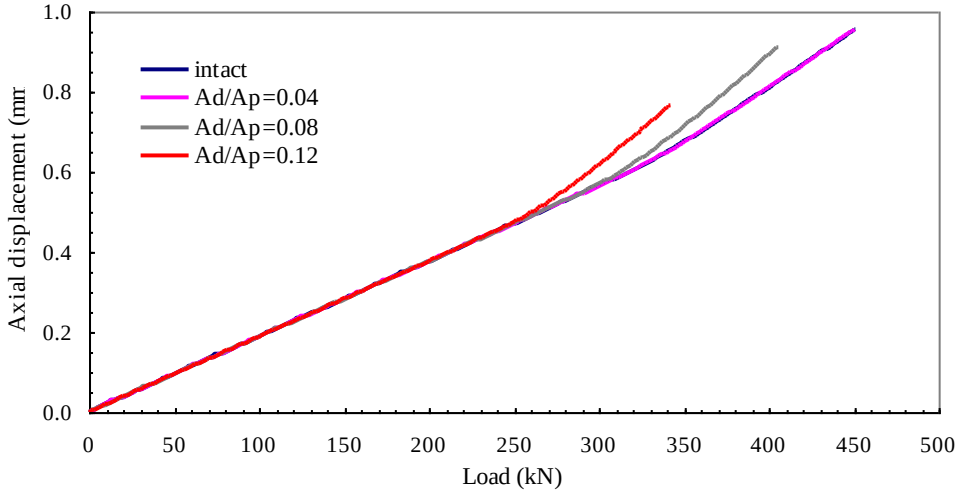


(β)

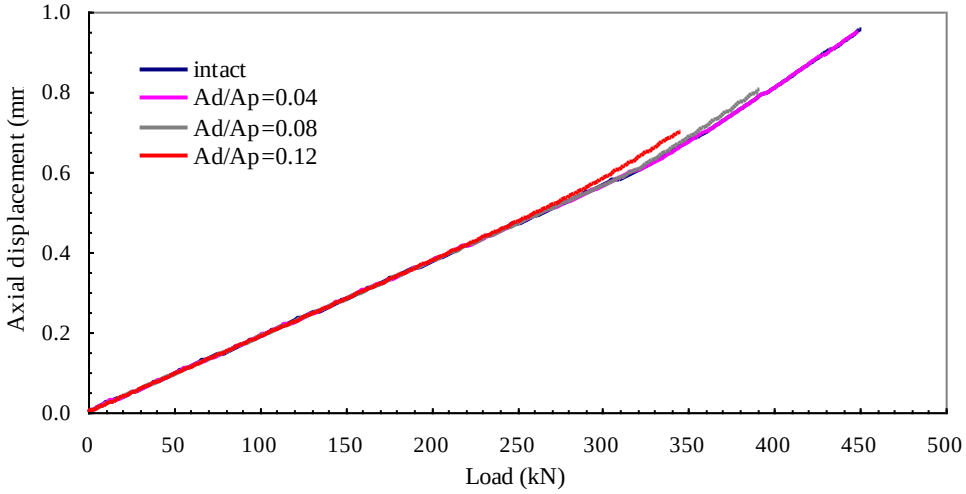


(γ)

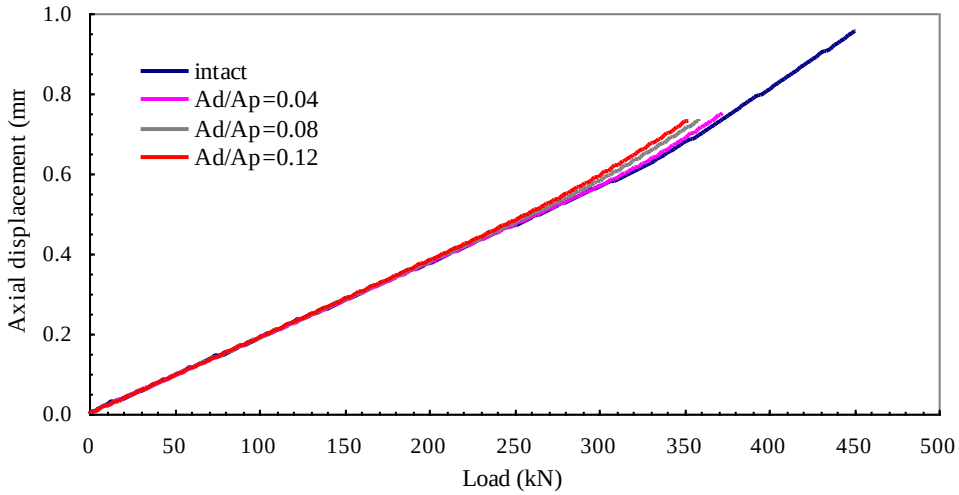
Σχήμα 4.17: Αξονική μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.25 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

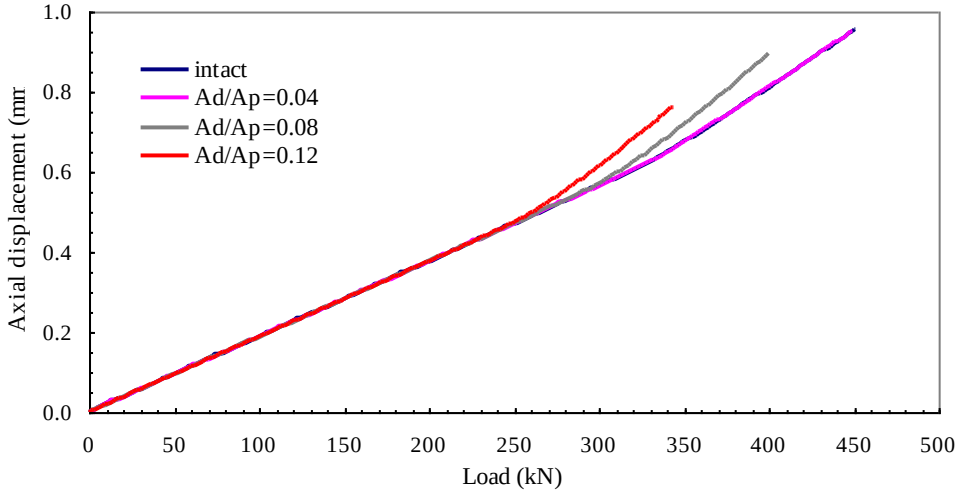


(β)

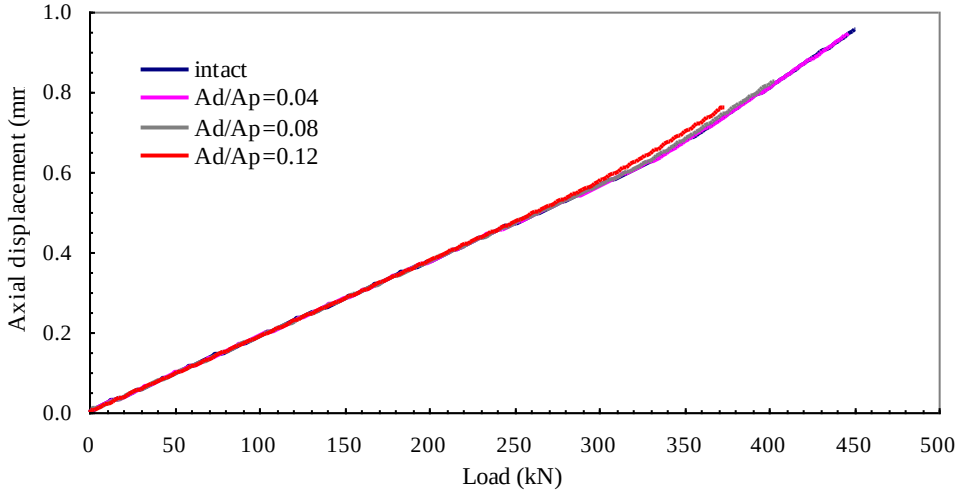


(γ)

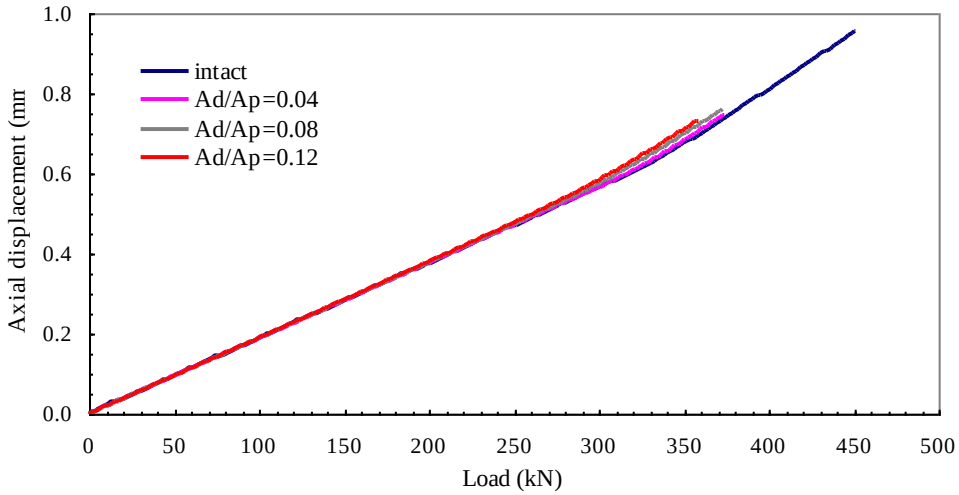
Σχήμα 4.18: Αξονική μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.5 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

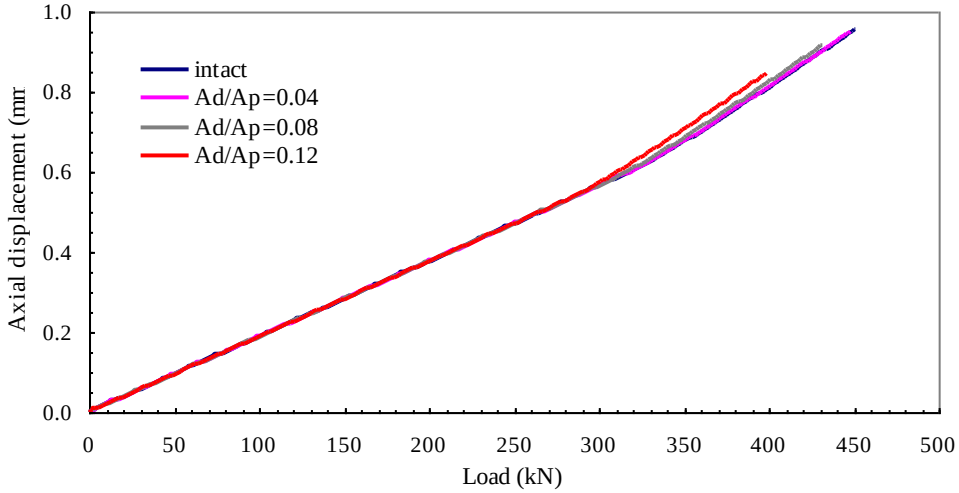


(β)

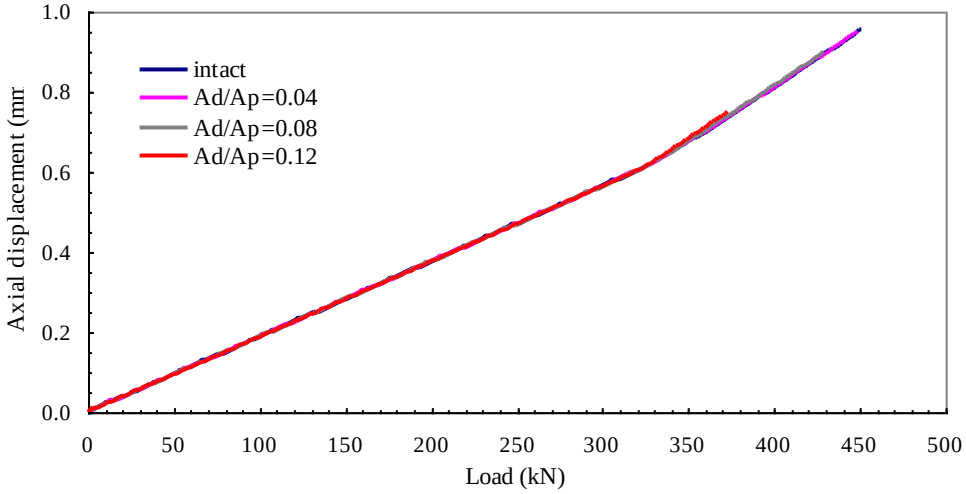


(γ)

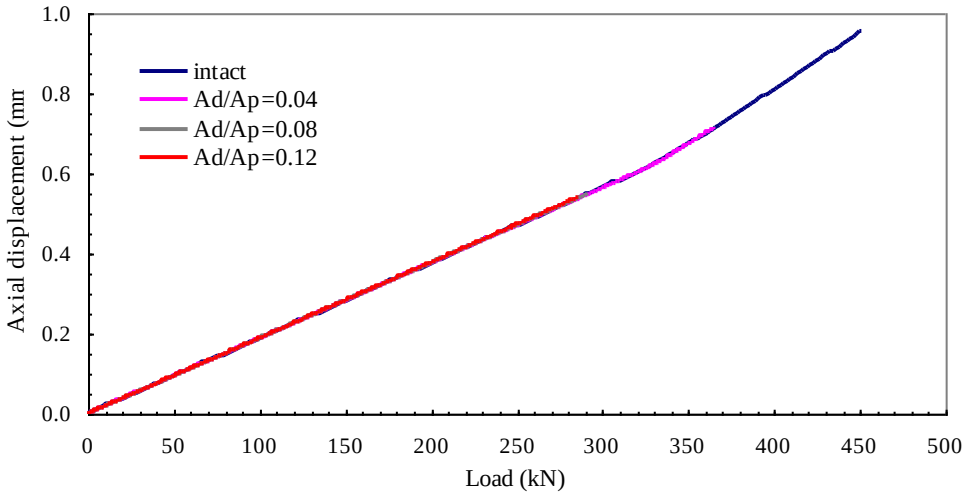
Σχήμα 4.19: Αξονική μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b = 1.0 και (α) z = t/2, (β) z = t/4 και (γ) z = t/8.



(α)

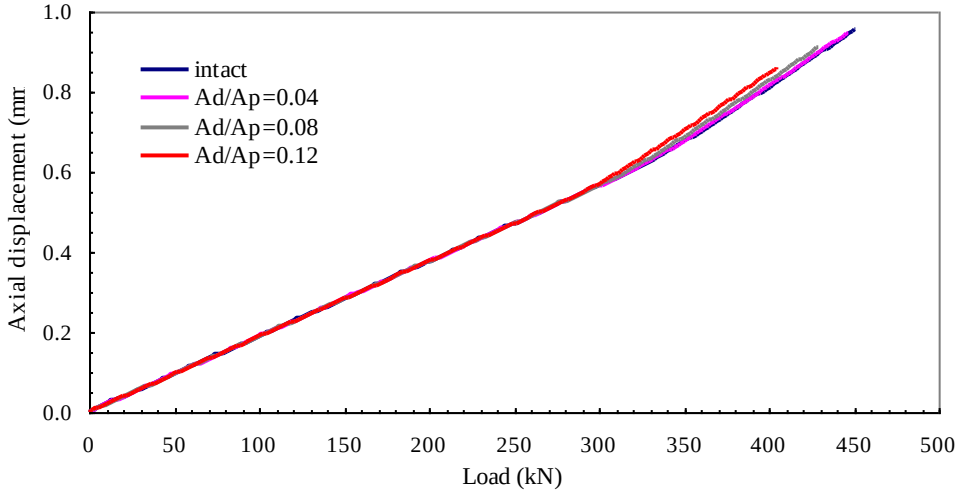


(β)

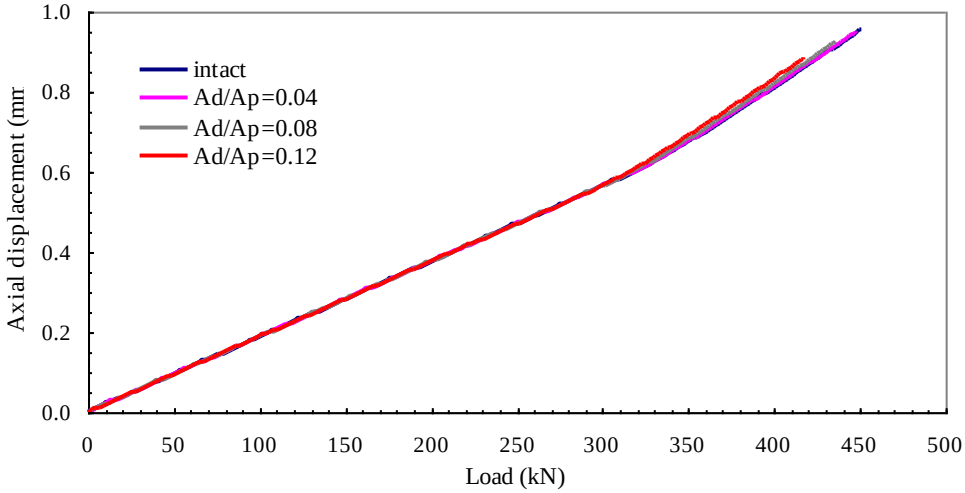


(γ)

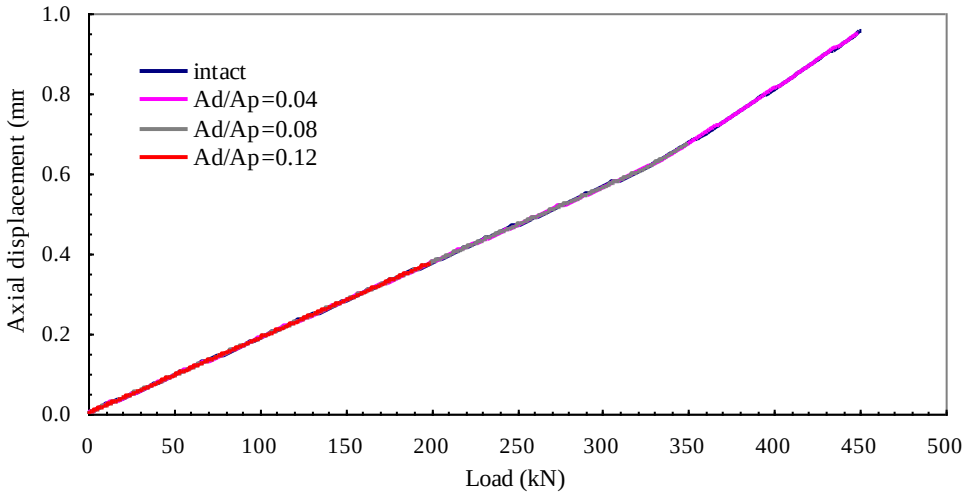
Σχήμα 4.20: Αξονική μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=2.0 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

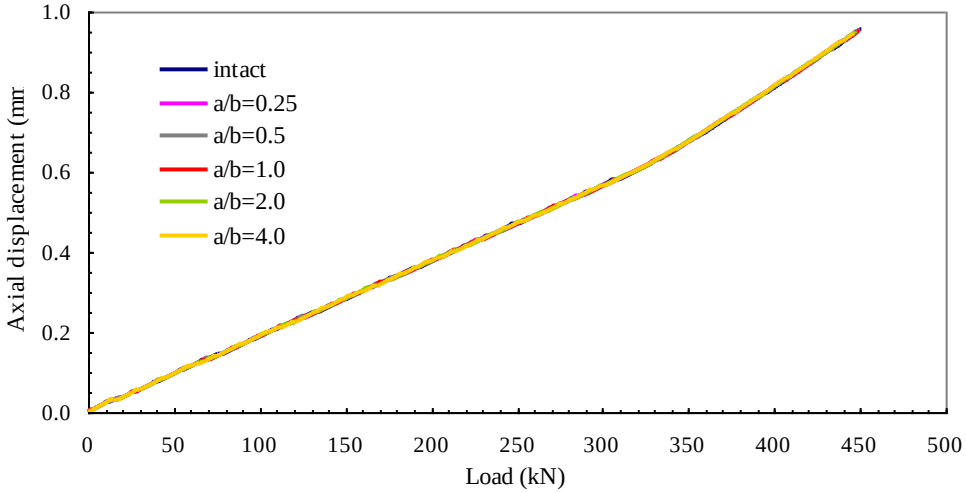


(β)

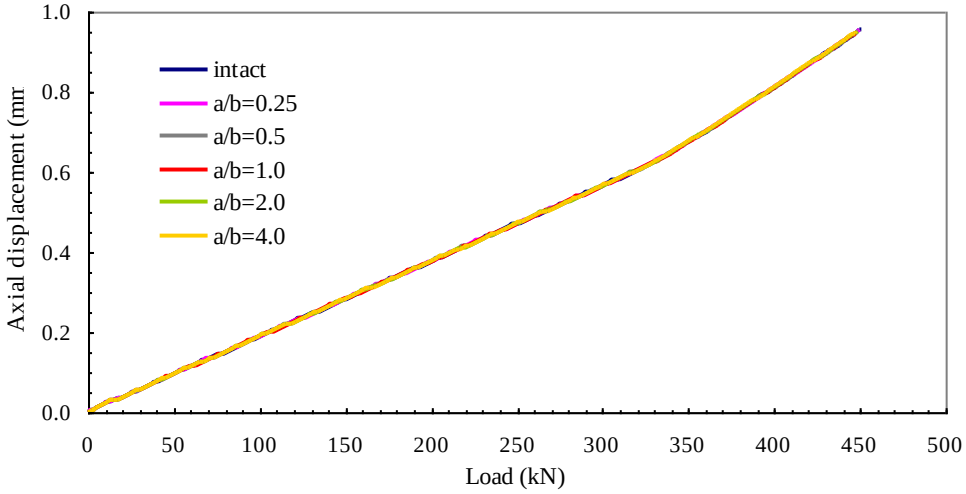


(γ)

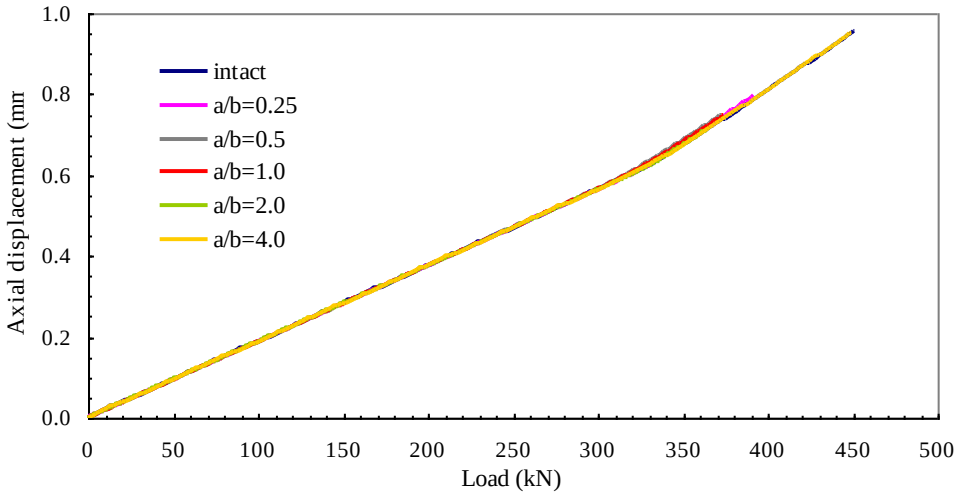
Σχήμα 4.21: Αξονική μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=4.0 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

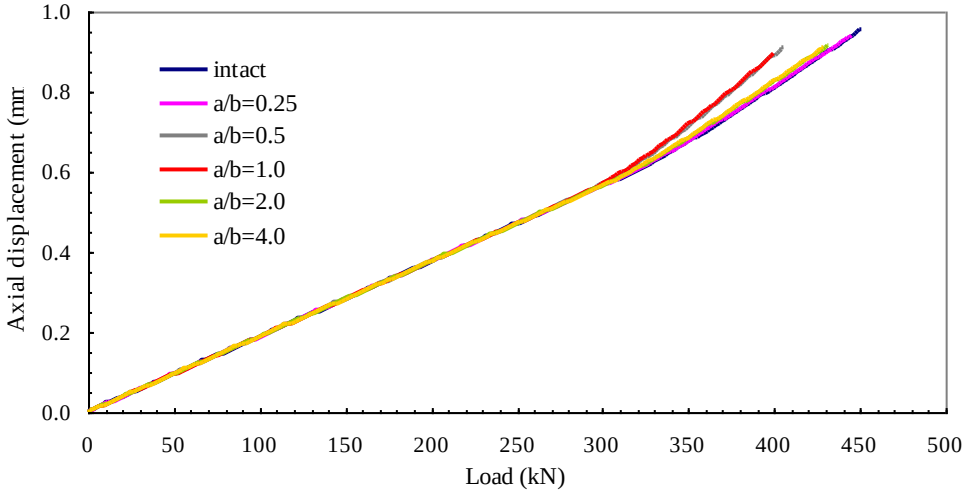


(β)

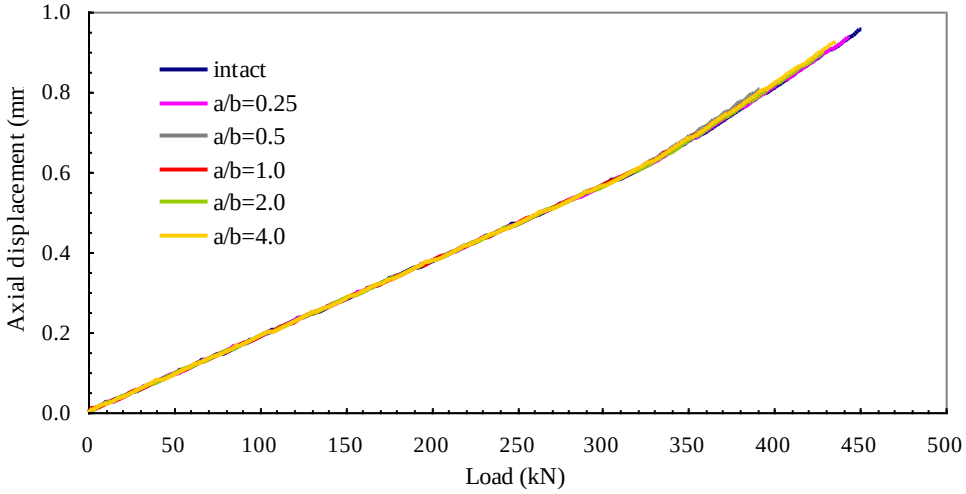


(γ)

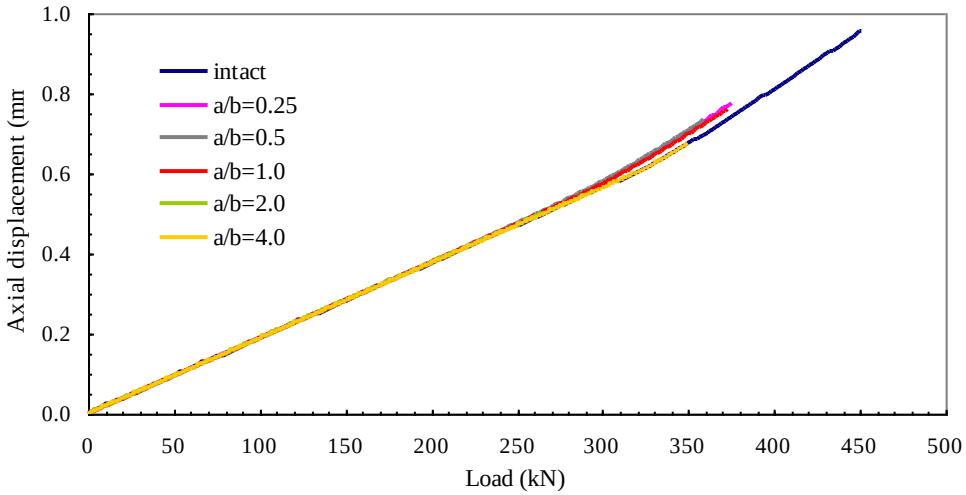
Σχήμα 4.22: Αξονική μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.04$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.



(α)

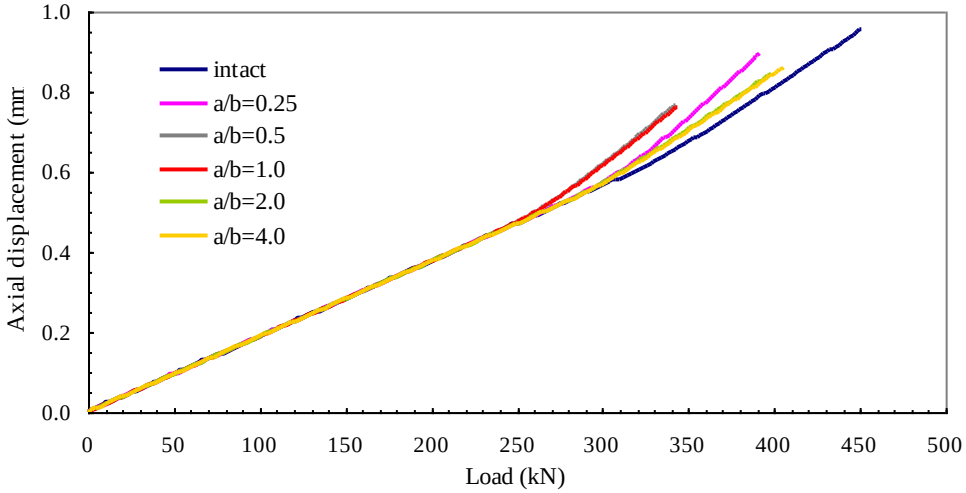


(β)

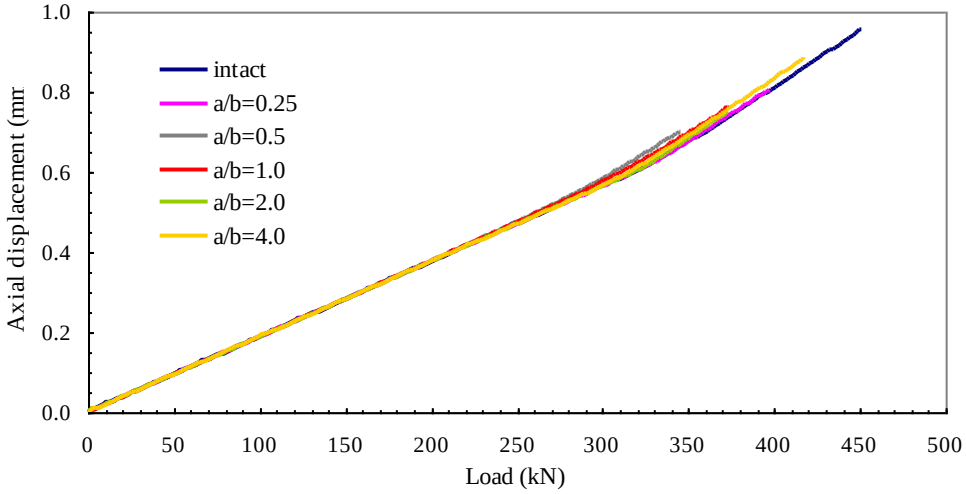


(γ)

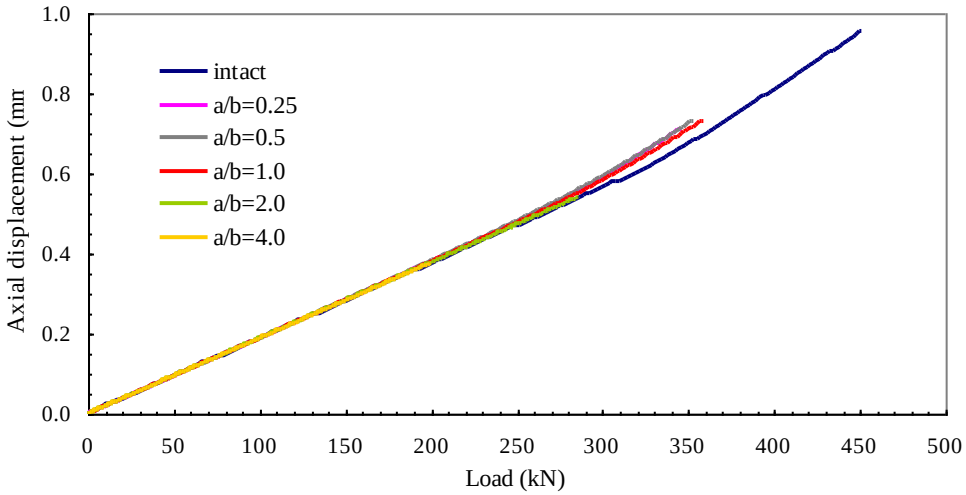
Σχήμα 4.23: Αξονική μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.08$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.



(α)

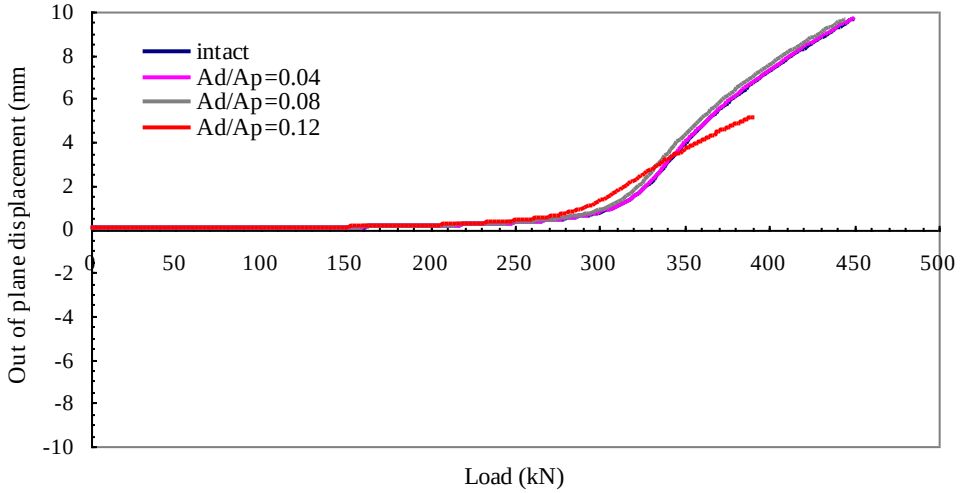


(β)

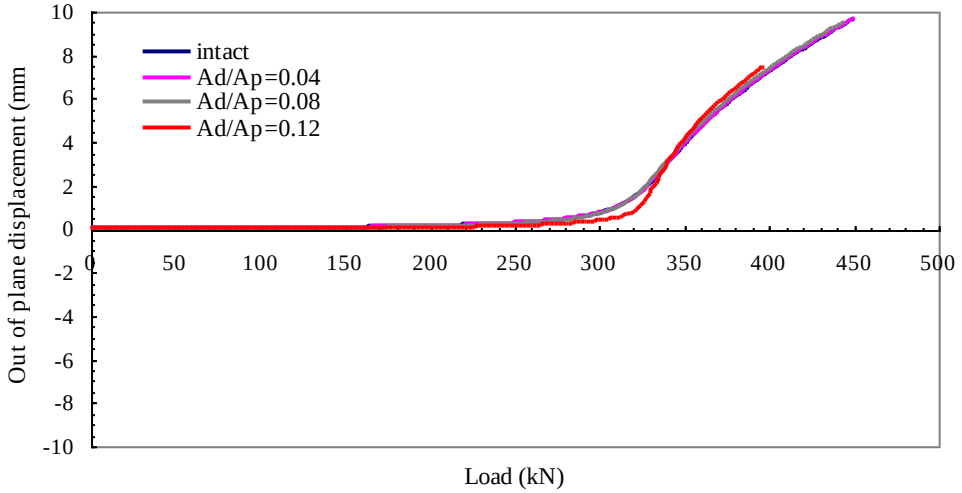


(γ)

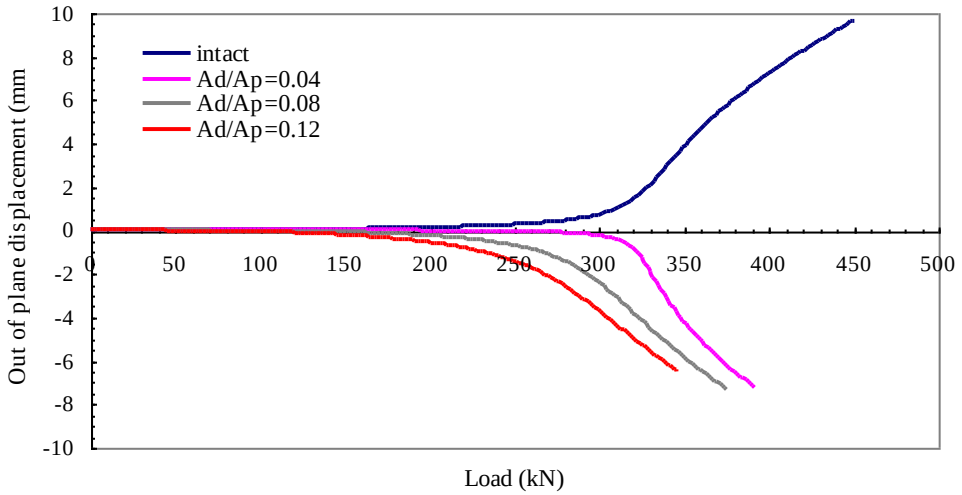
Σχήμα 4.24: Αξονική μετατόπιση συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.12$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.



(α)

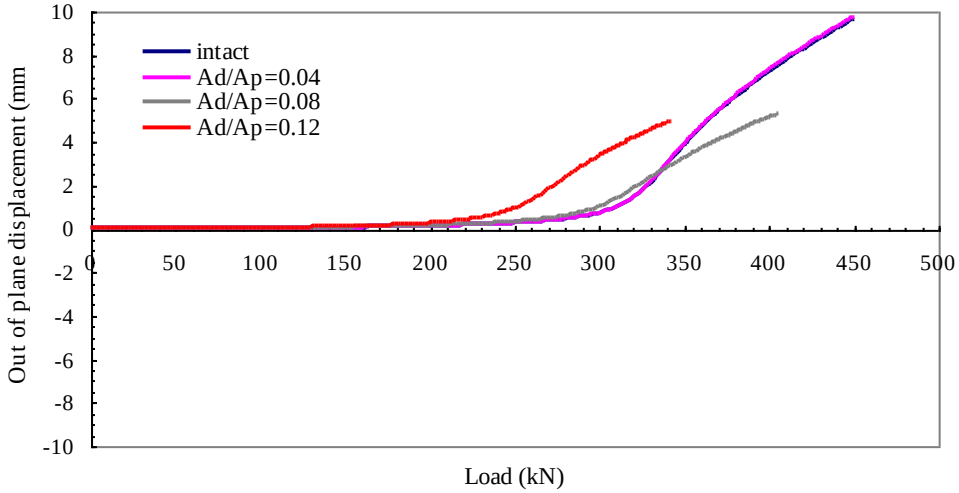


(β)

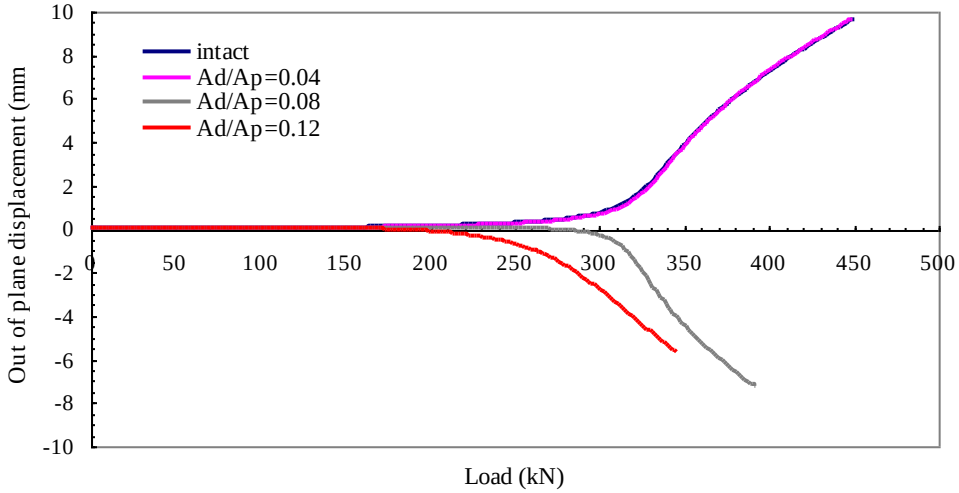


(γ)

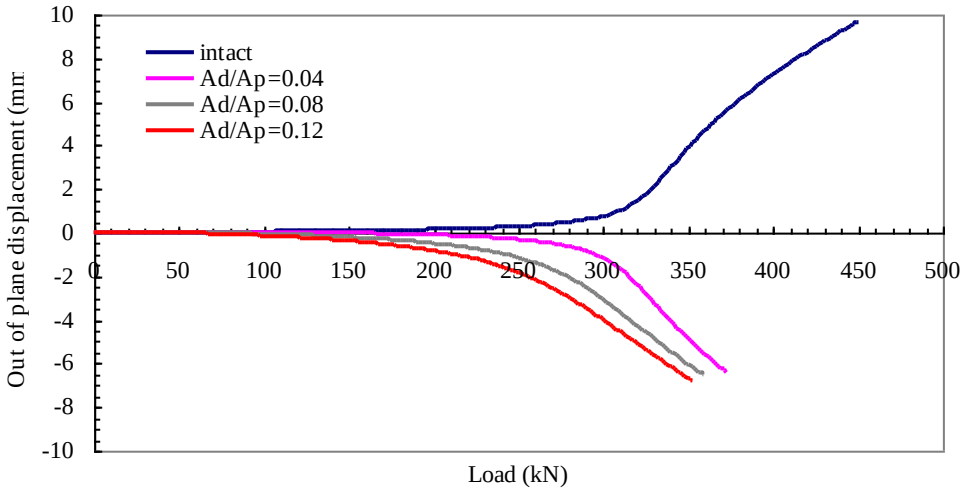
Σχήμα 4.25: Μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.25 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

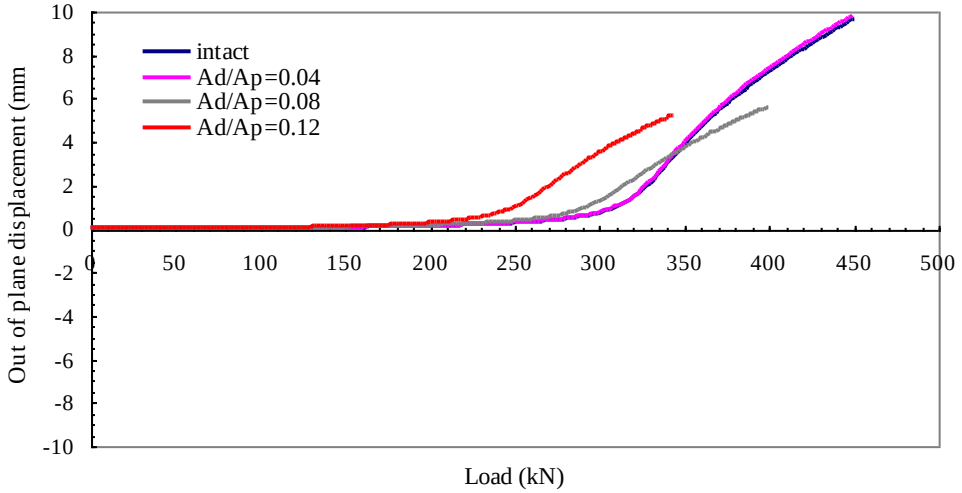


(β)

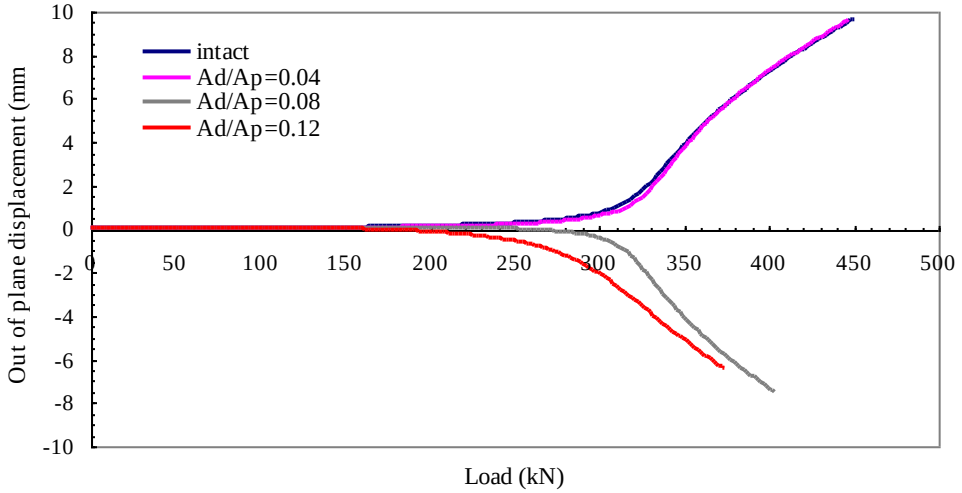


(γ)

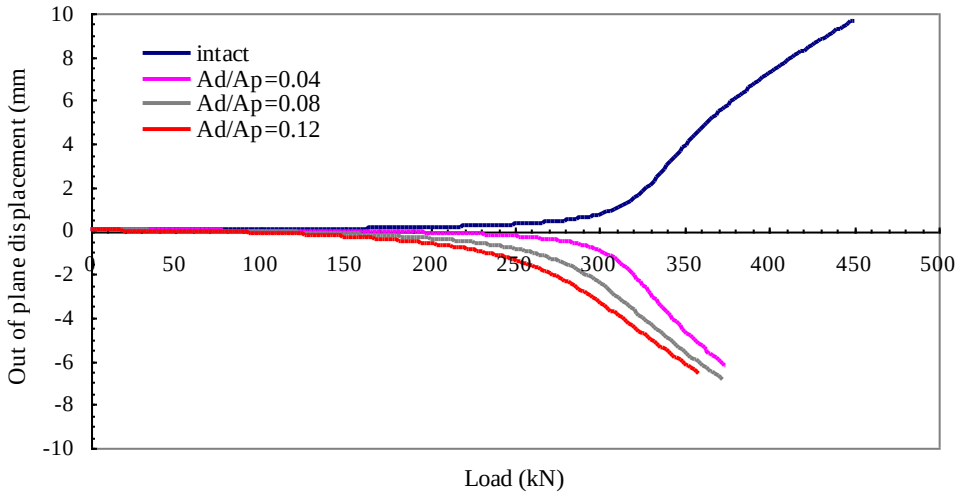
Σχήμα 4.26: Μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.5 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

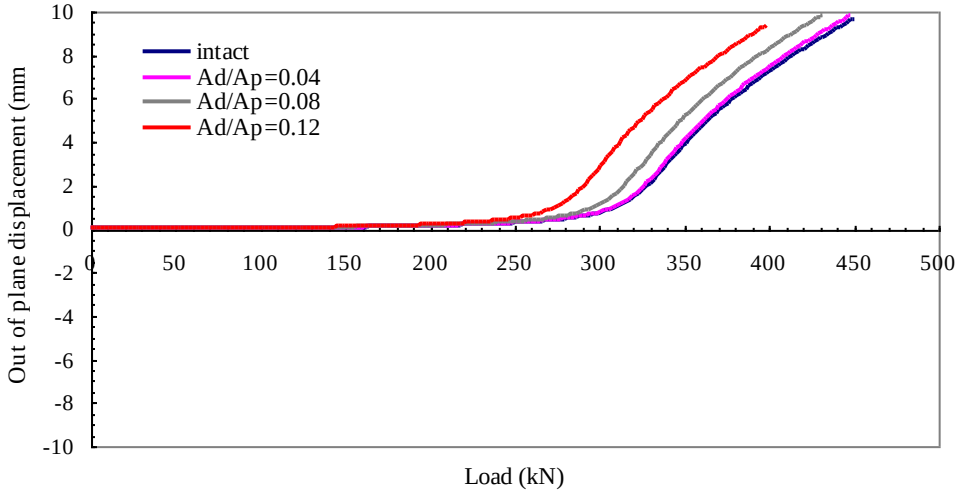


(β)

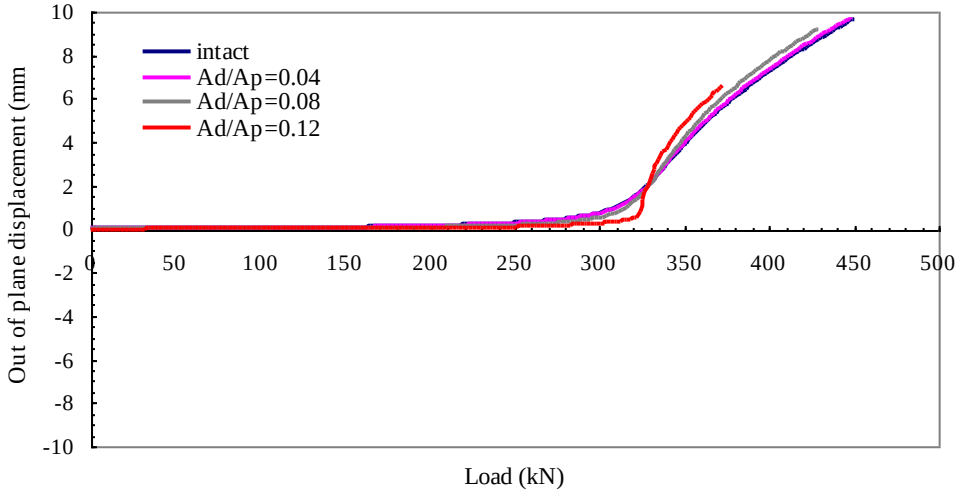


(γ)

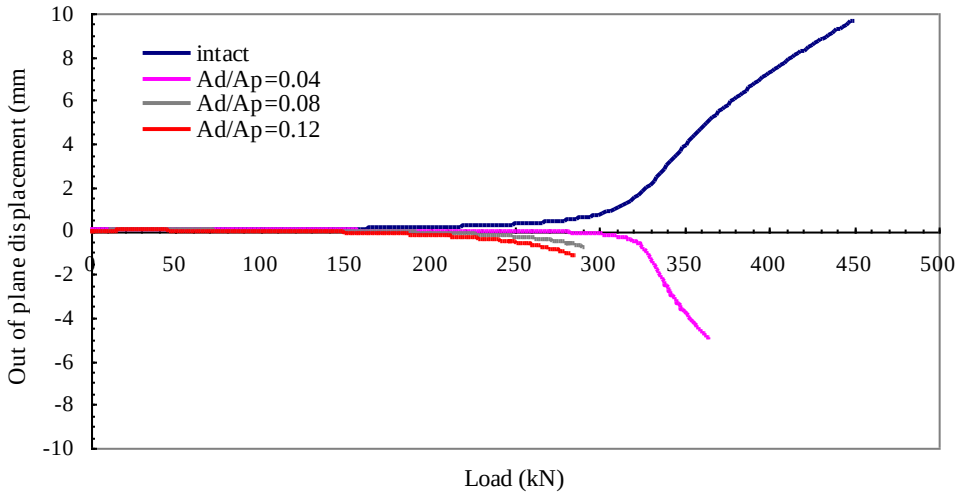
Σχήμα 4.27: Μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b = 1.0 και (α) z = t/2, (β) z = t/4 και (γ) z = t/8.



(α)

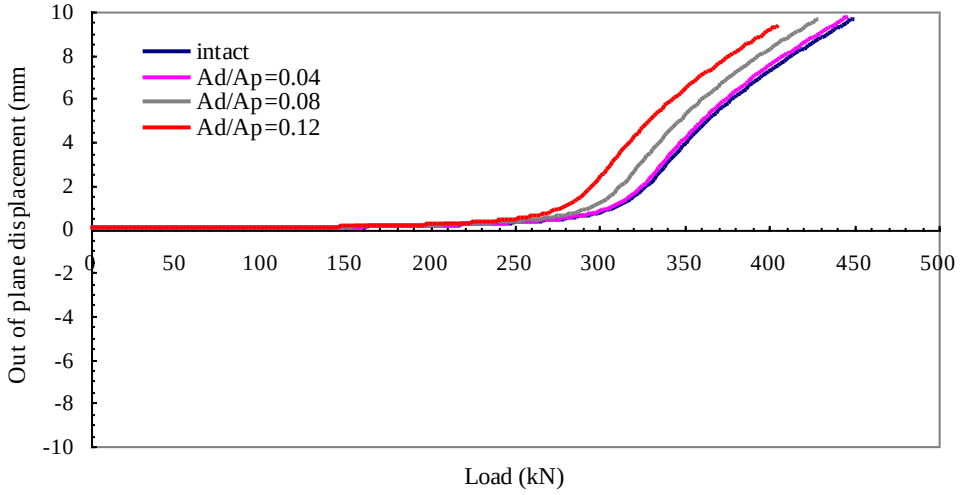


(β)

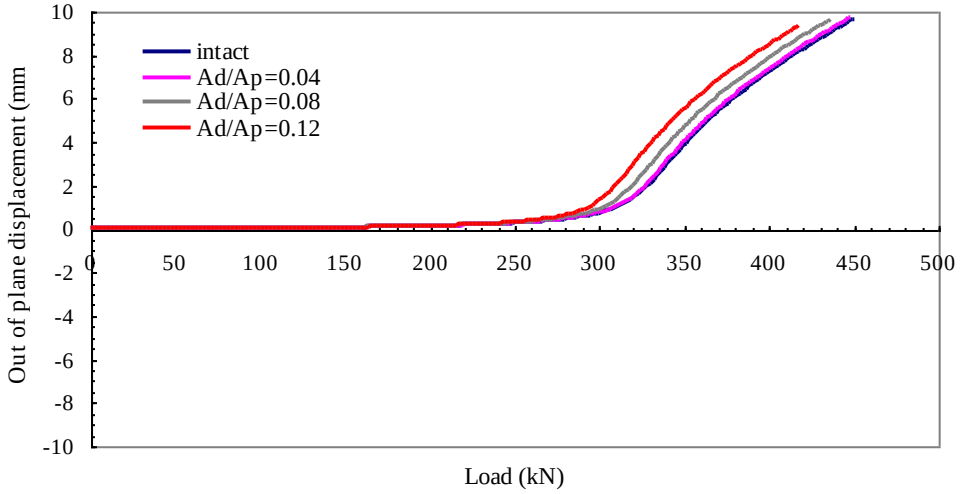


(γ)

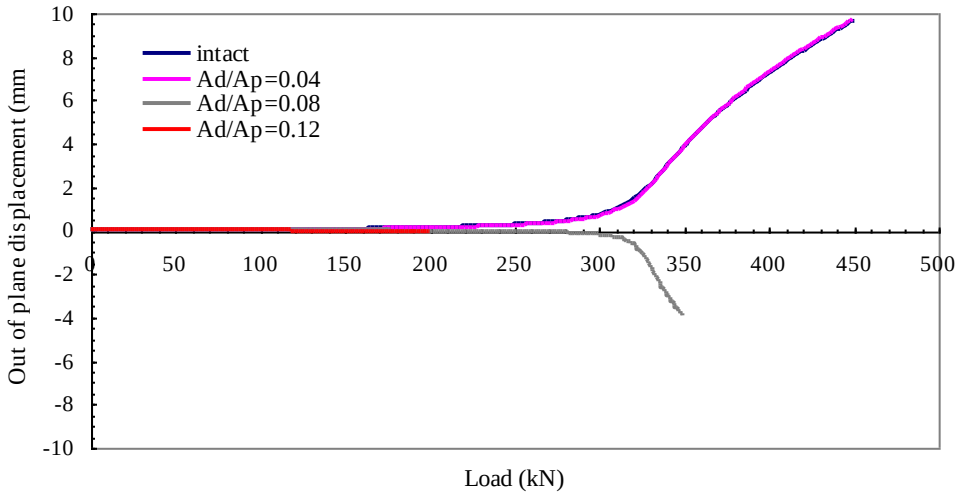
Σχήμα 4.28: Μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=2.0 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

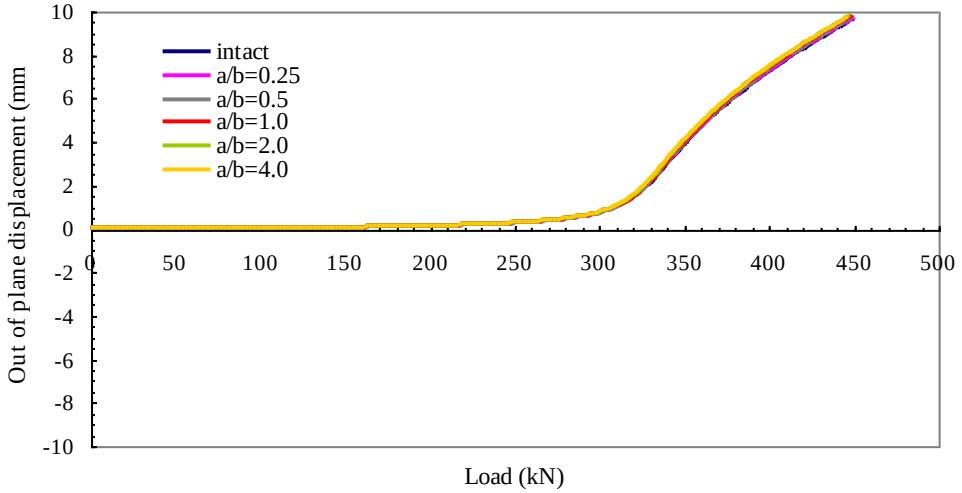


(β)

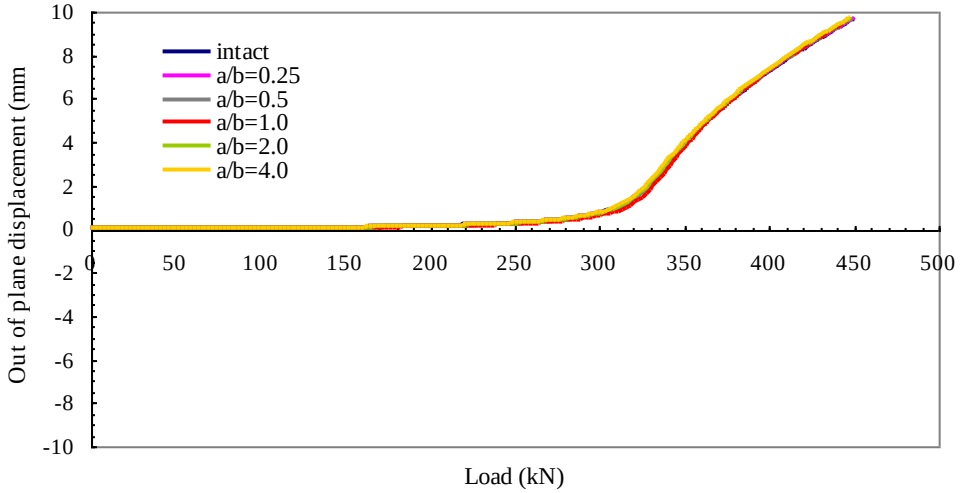


(γ)

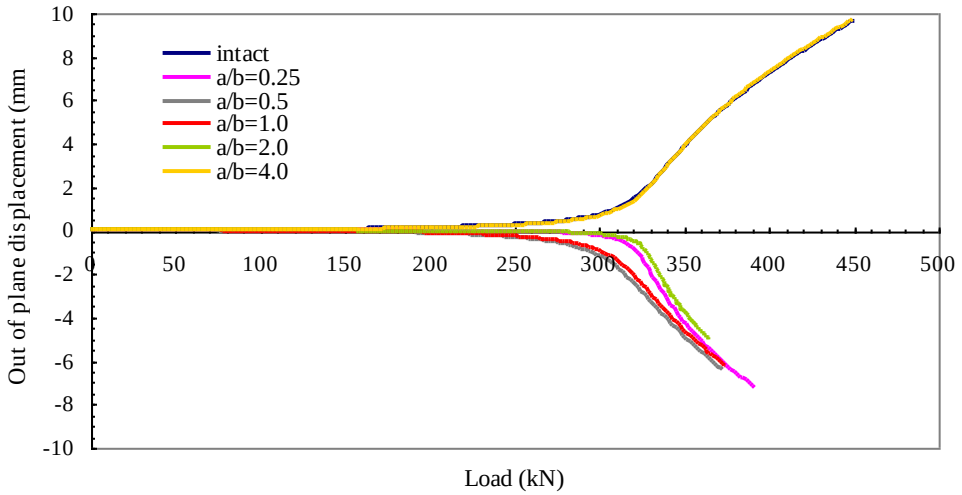
Σχήμα 4.29: Μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=4.0 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

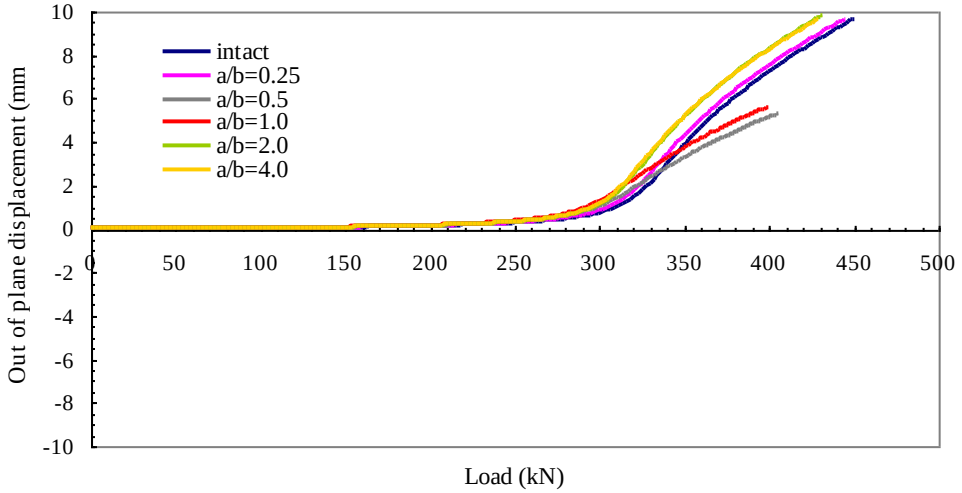


(β)

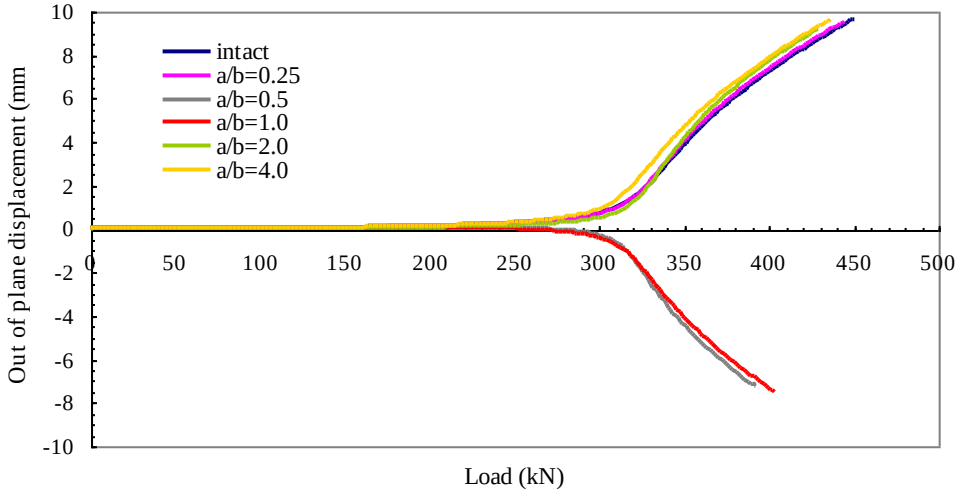


(γ)

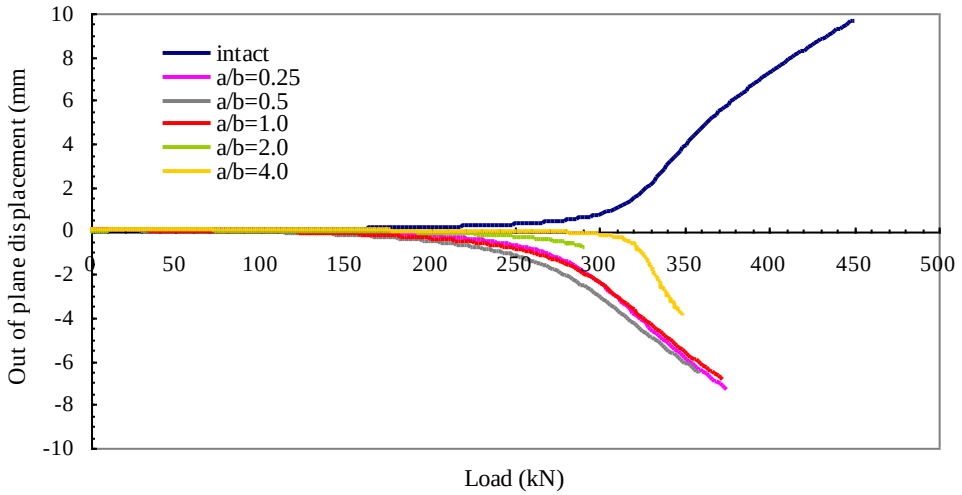
Σχήμα 4.30: Μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.04$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.



(α)

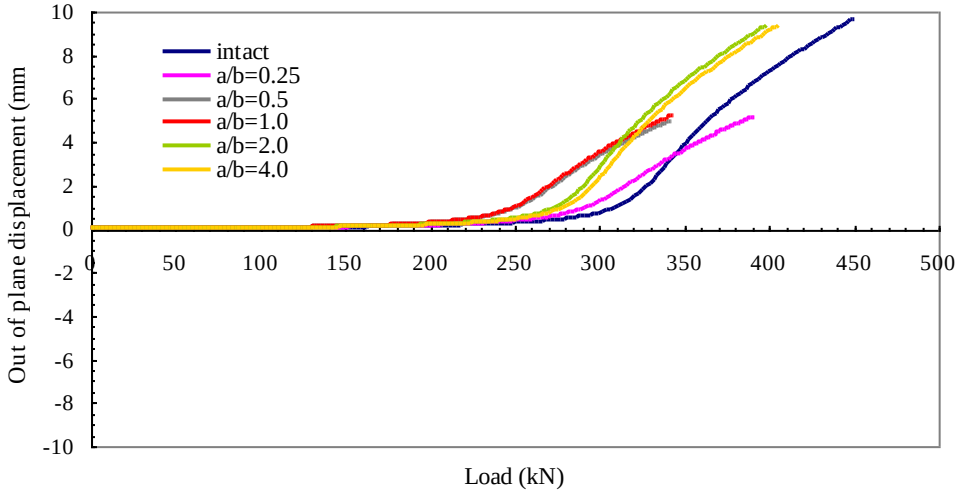


(β)

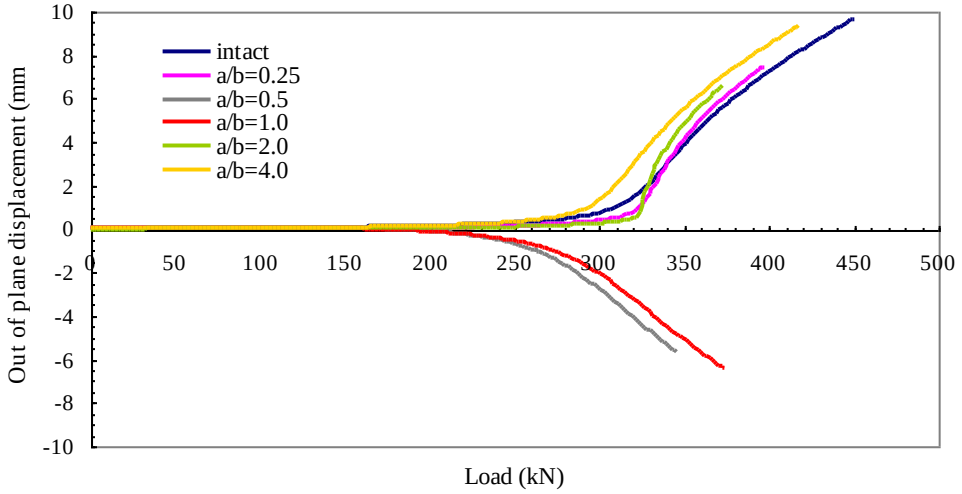


(γ)

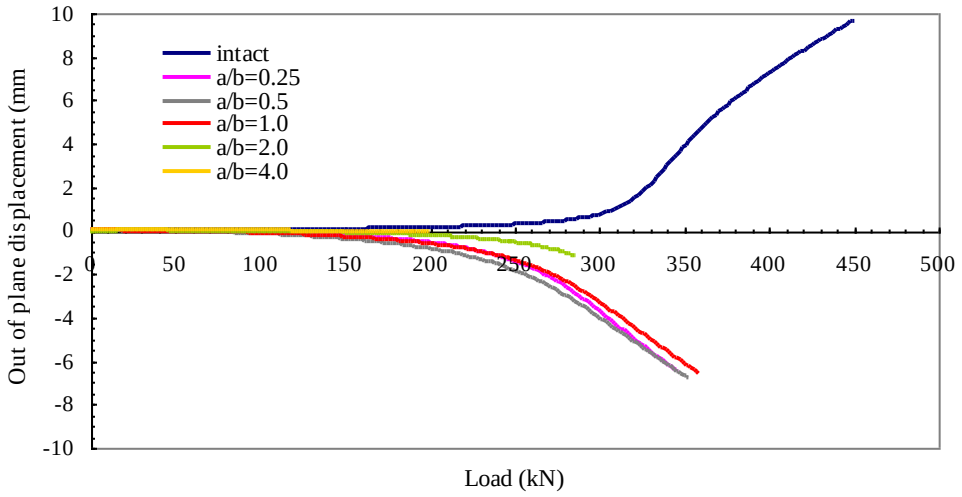
Σχήμα 4.31: Μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.08$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.



(α)

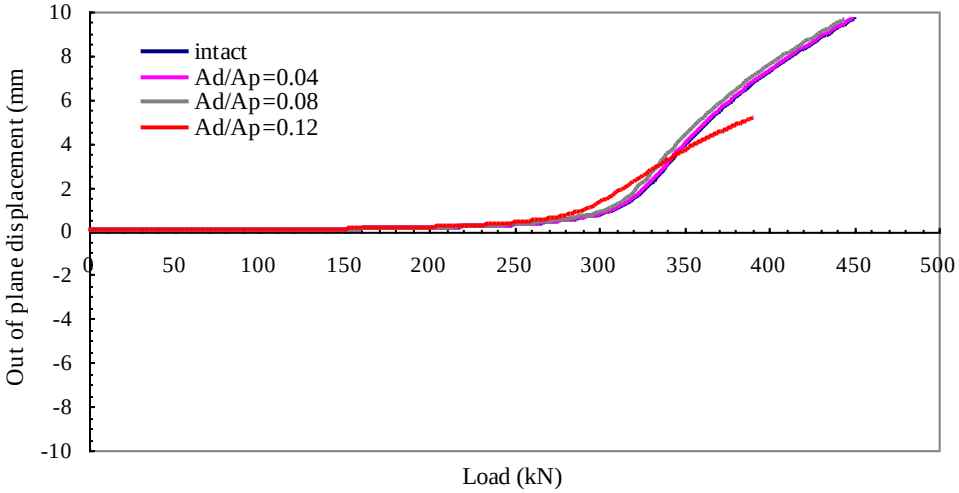


(β)

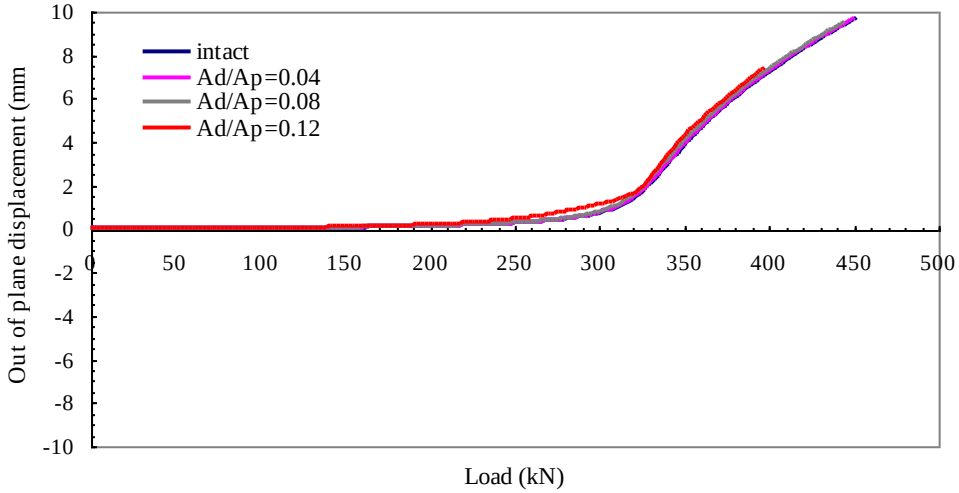


(γ)

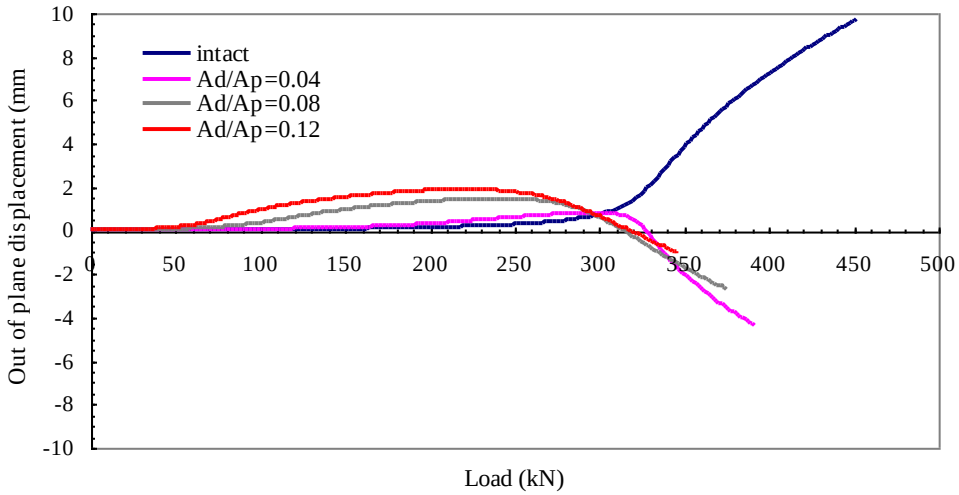
Σχήμα 4.32: Μη επίπεδη μετατόπιση του κάτω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.12$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.



(α)

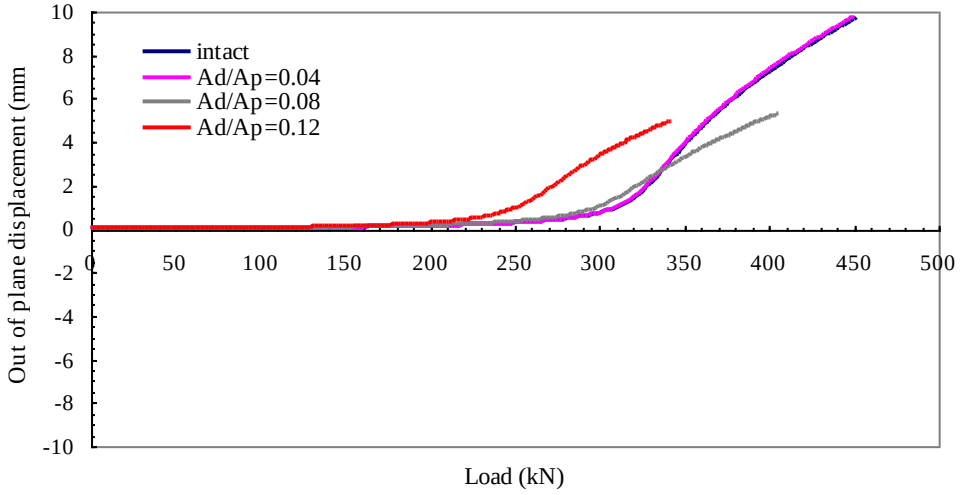


(β)

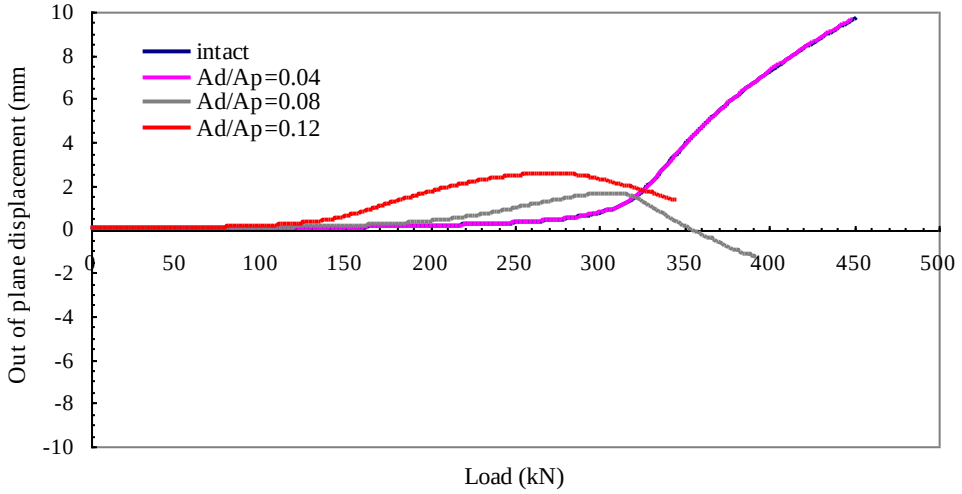


(γ)

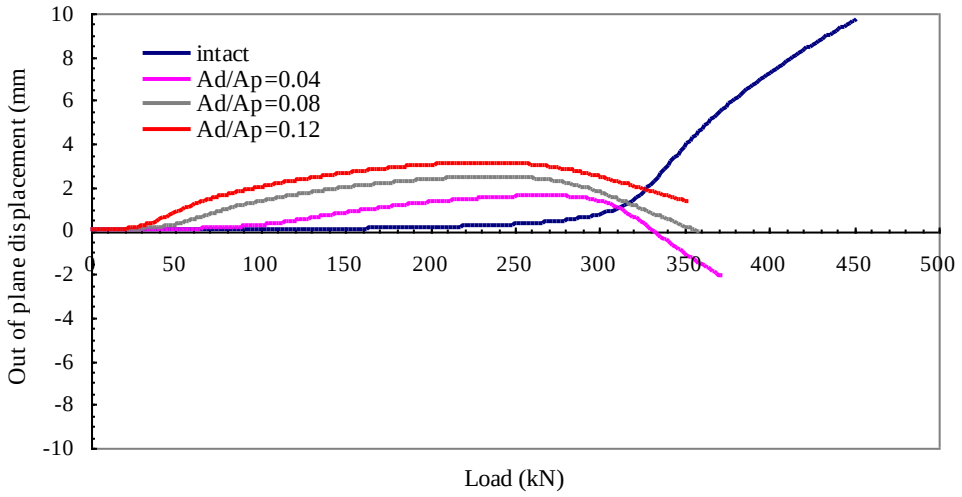
Σχήμα 4.33: Μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.25 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

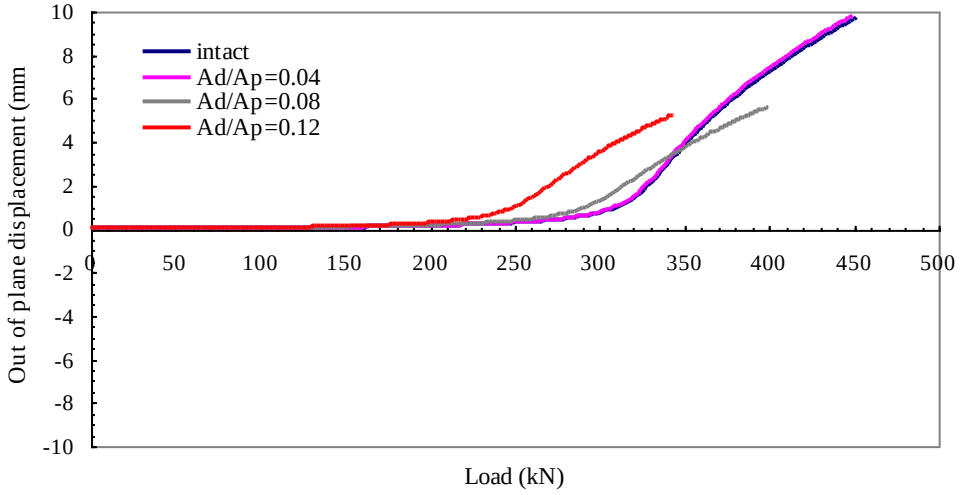


(β)

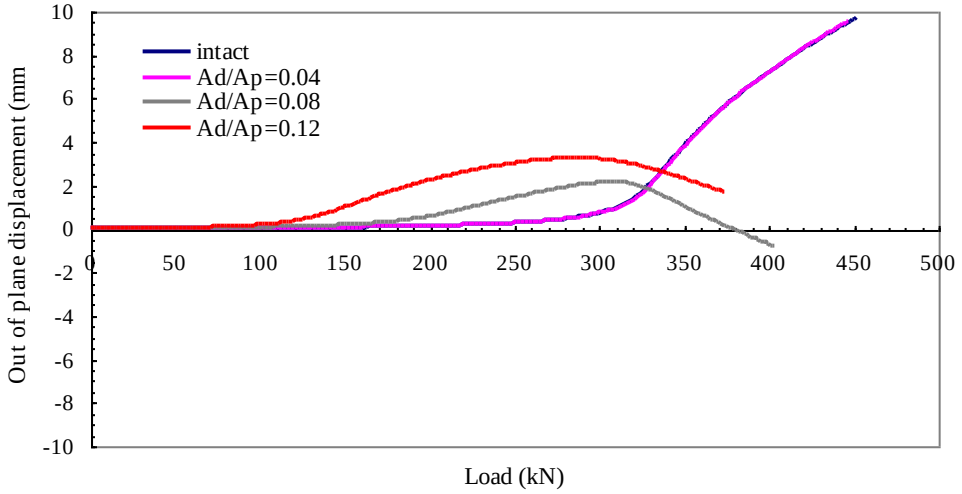


(γ)

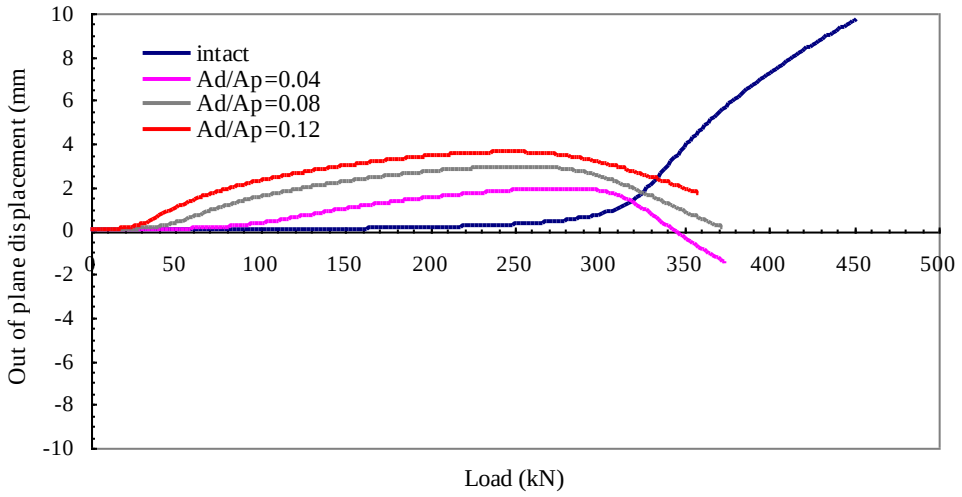
Σχήμα 4.34: Μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.5 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

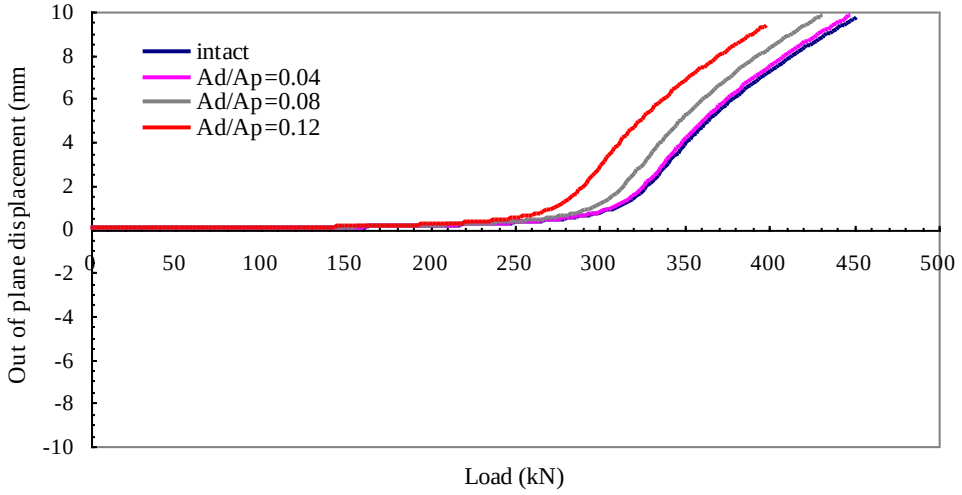


(β)

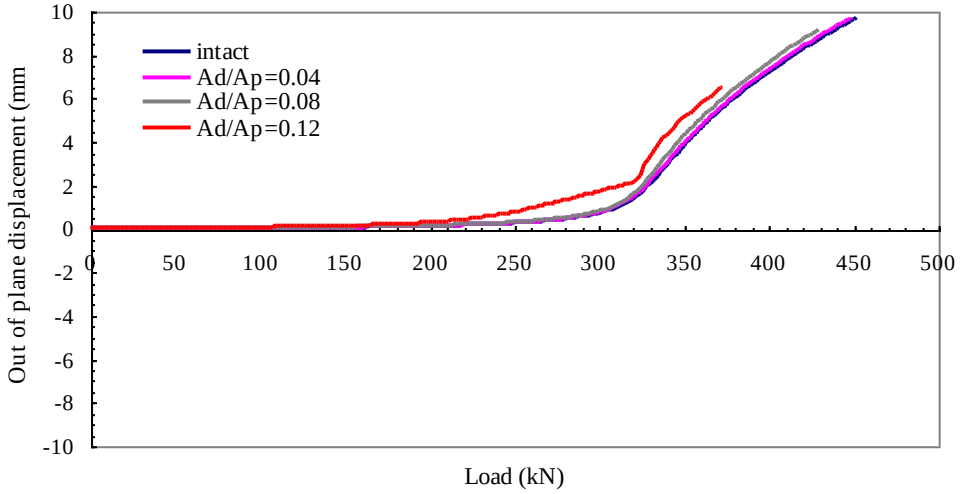


(γ)

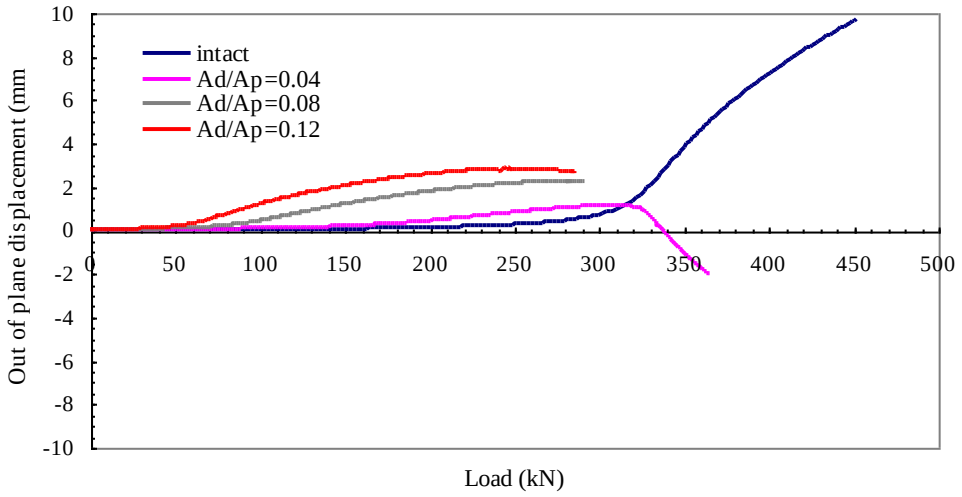
Σχήμα 4.35: Μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b = 1.0 και (α) z = t/2, (β) z = t/4 και (γ) z = t/8.



(α)

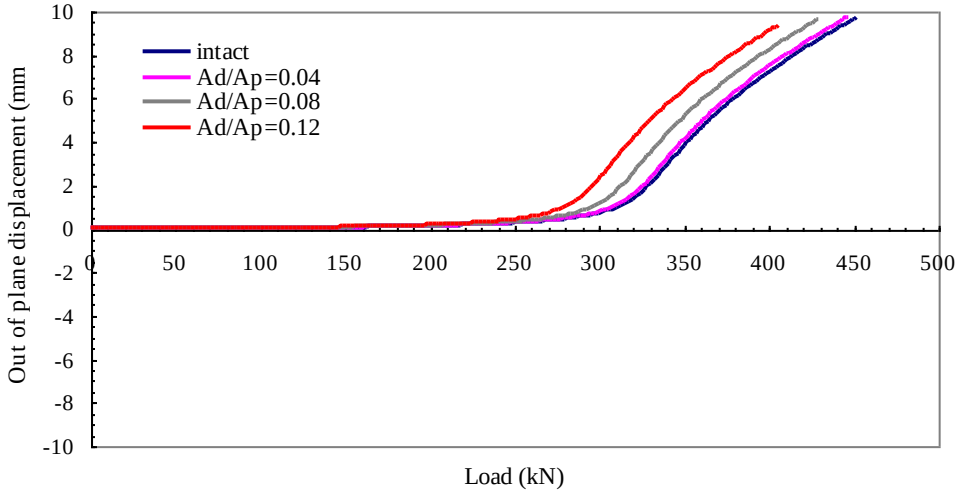


(β)

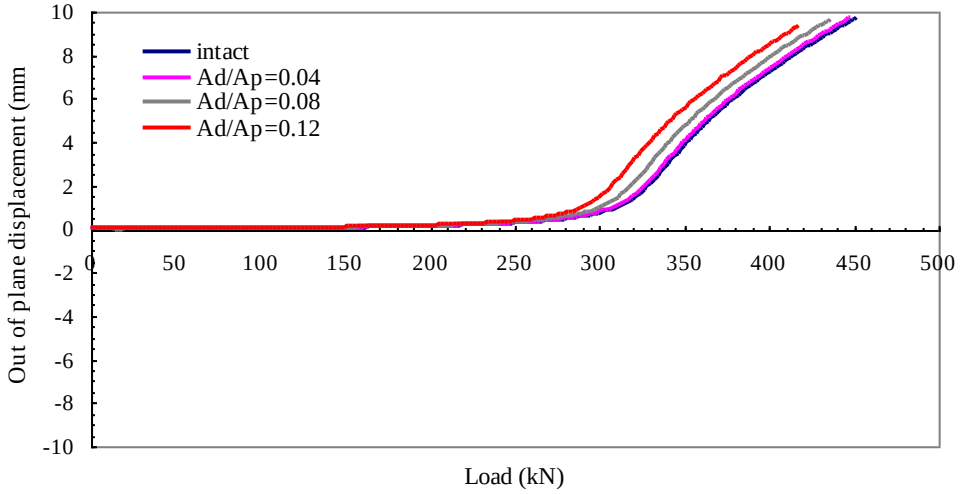


(γ)

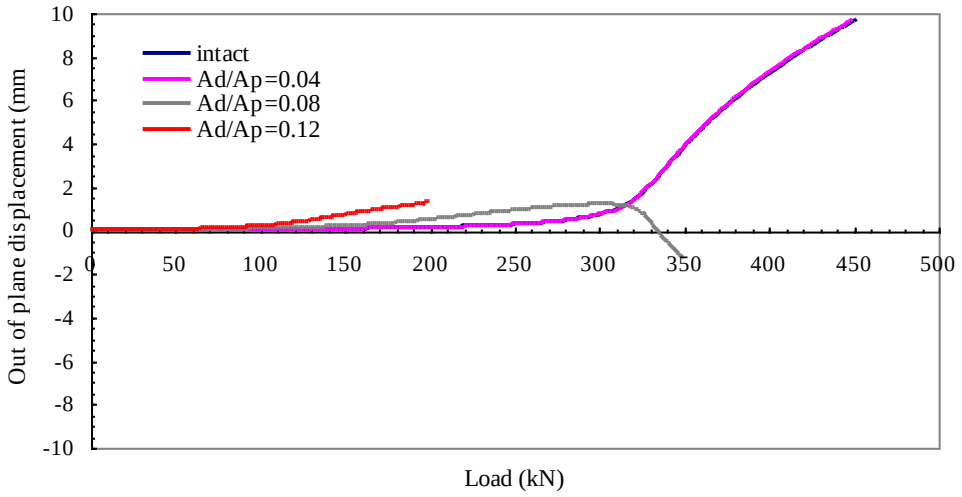
Σχήμα 4.36: Μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=2.0 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

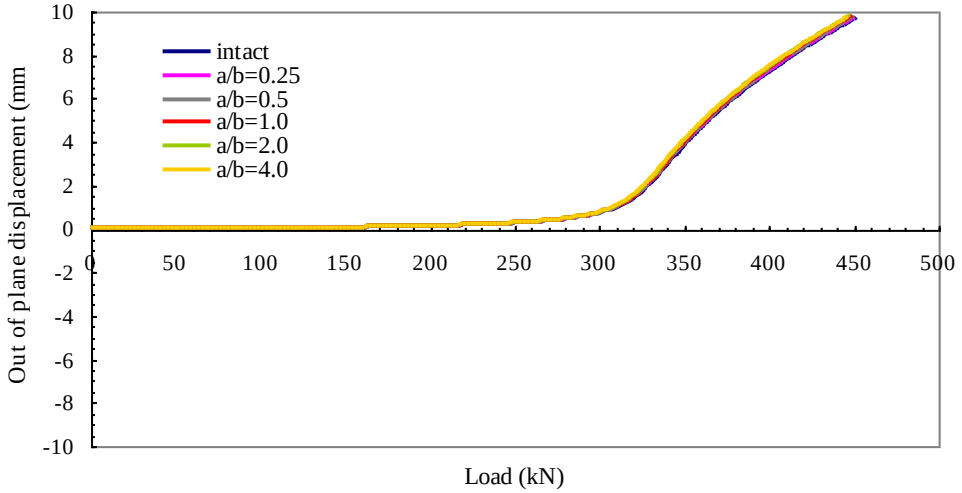


(β)

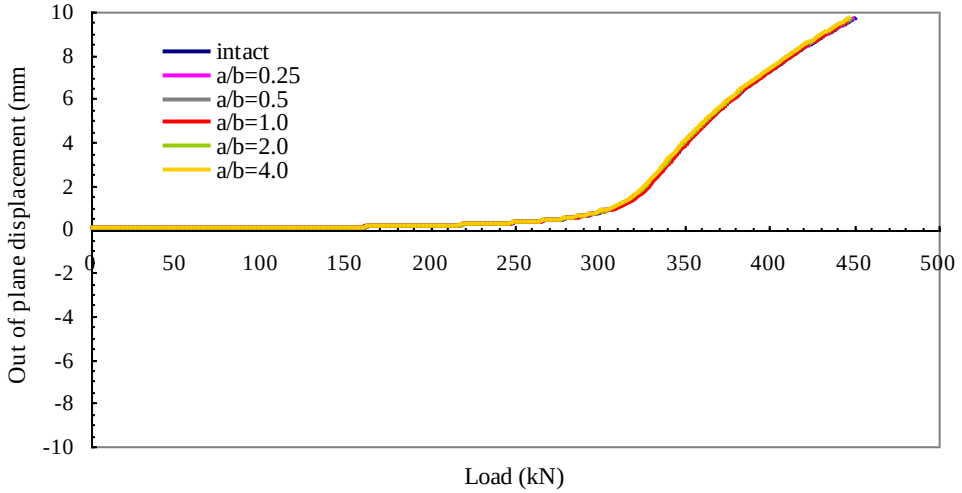


(γ)

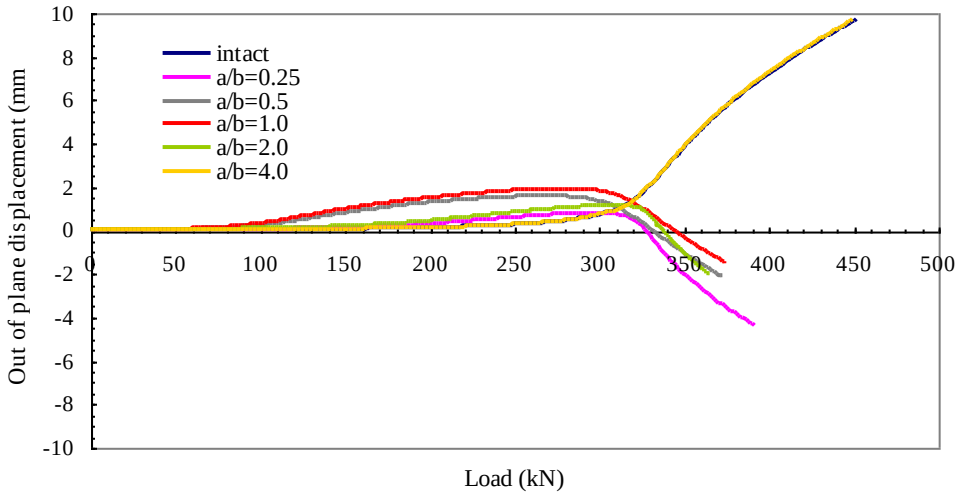
Σχήμα 4.37: Μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με a/b=4.0 και (α) z=t/2, (β) z=t/4 και (γ) z=t/8.



(α)

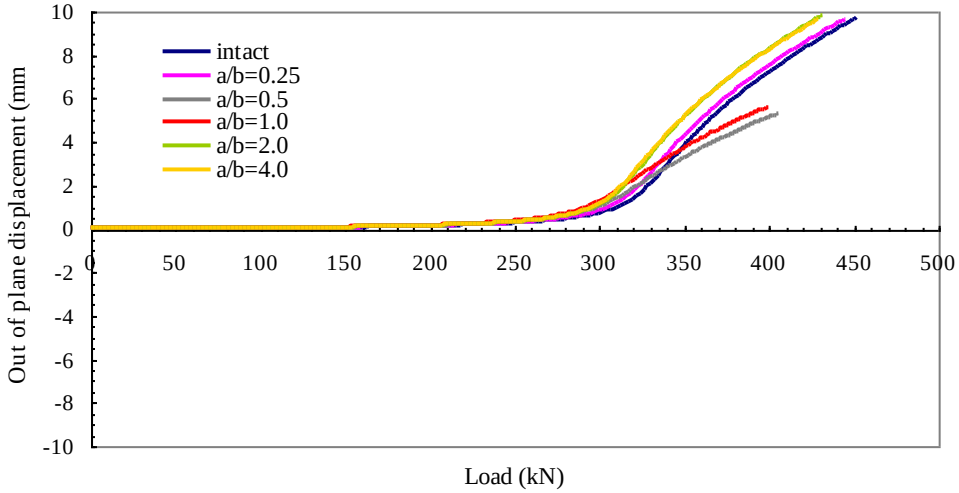


(β)

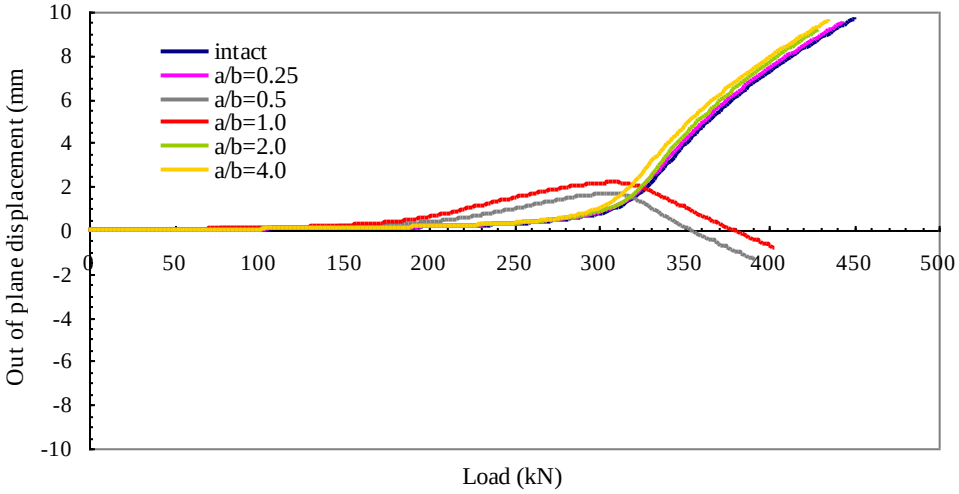


(γ)

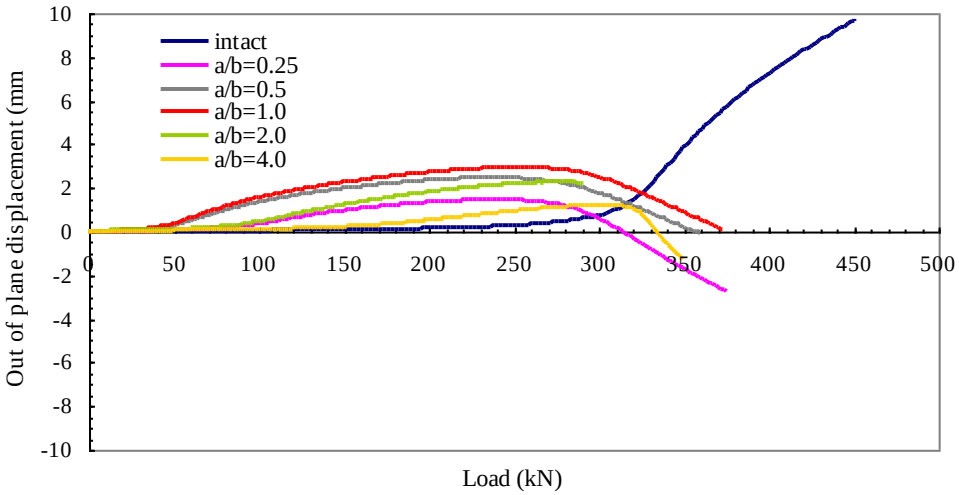
Σχήμα 4.38: Μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.04$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.



(α)

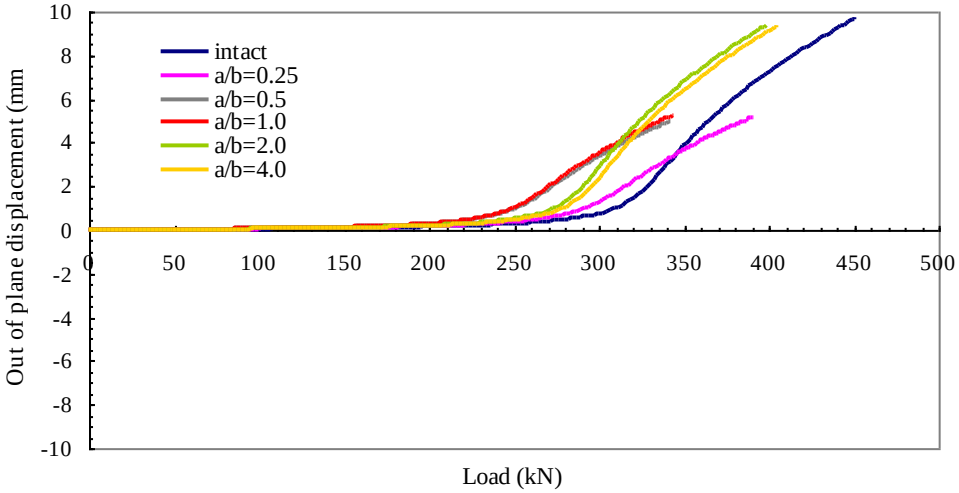


(β)

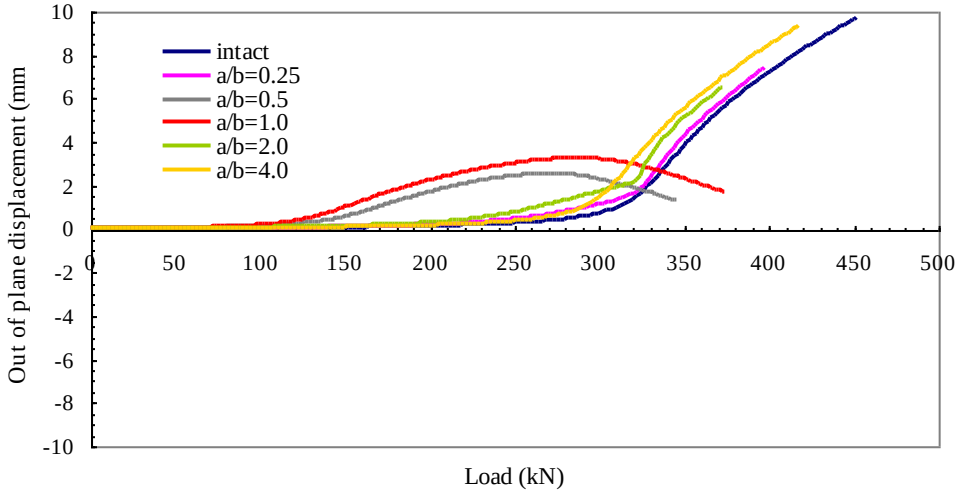


(γ)

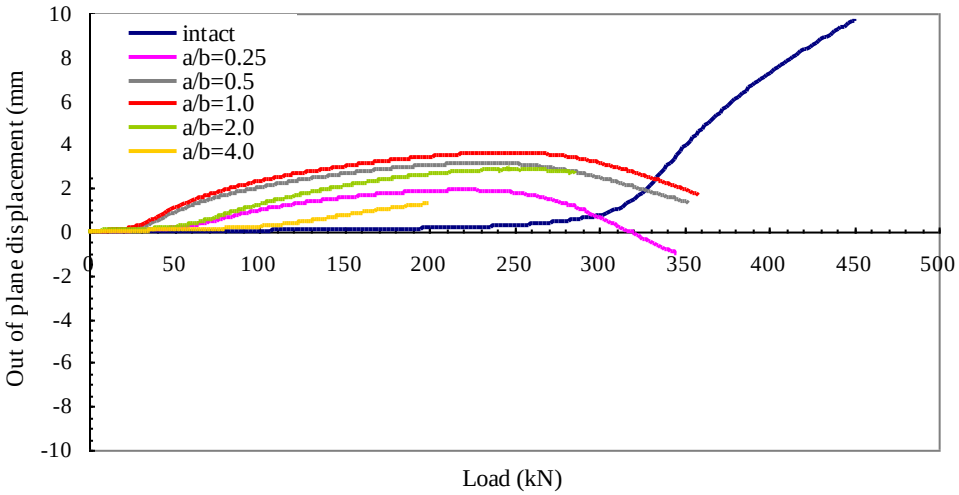
Σχήμα 4.39: Μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.08$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 4.40: Μη επίπεδη μετατόπιση του πάνω υποπολύστρωτου συναρτήσει του φορτίου για την περίπτωση αποχωρισμού με $A_d/A_p = 0.12$ και (α) $z = t/2$, (β) $z = t/4$ και (γ) $z = t/8$.

Όπως προκύπτει από τα Σχήματα 4.17 - 4.24, για μικρές τιμές του φορτίου, οι καμπύλες φορτίου - αξονικής μετατόπισης για τις περιπτώσεις αποχωρισμού ταυτίζονται με εκείνη για την άθικτη πλάκα, ενώ αποκλίνουν από αυτήν για μεγαλύτερα φορτία, με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις να είναι μεγαλύτερες από εκείνες της άθικτης πλάκας. Η συμπεριφορά αυτή υποδηλώνει ότι ο λυγισμός μίας πλάκας με αποχωρισμένες στρώσεις επέρχεται για μικρότερα φορτία συγκριτικά με την άθικτη κατάσταση αυτής. Ωστόσο, ο βαθμός εξασθένισης της αντοχής της σε λυγισμό καθορίζεται από τις παραμέτρους του αποχωρισμού. Ειδικότερα, η αύξηση του μεγέθους του αποχωρισμού (μεγαλύτερες τιμές του λόγου A_d/A_p) συνεπάγεται τον περιορισμό του εύρους ταύτισης μεταξύ των καμπυλών και ως εκ τούτου, τη μεγαλύτερη εξασθένιση της πλάκας, με την περίπτωση ενός μεγάλου αποχωρισμού ($A_d/A_p=0.12$) να είναι η δυσμενέστερη, όπως αναμένεται. Επιπλέον, η επίδραση του αποχωρισμού είναι σημαντική όταν αυτός είναι κυκλικός ή ελλειπτικός και προσανατολισμένος κάθετα στη διεύθυνση του φορτίου ($a/b=0.5$ & 1.0) ή βρίσκεται κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας ($z=t/8$), οπότε το λεπτό υποπολύστρωτο δεν επηρεάζει ουσιαστικά την αξονική ακαμψία της πλάκας. Ωστόσο, η μεταβολή της κλίσης των καμπυλών αξονικής μετατόπισης είναι μεγαλύτερη για αποχωρισμούς στο μέσο του πάχους της πλάκας, γεγονός που υποδηλώνει την εμφανέστερη μείωση της αξονικής ακαμψίας της σε σχέση με τις άλλες δύο περιπτώσεις της κατά το πάχος θέσης του αποχωρισμού. Αυτό οφείλεται στην παρουσία δύο ισοπαχών υποπολύστρωτων αντί ενός λεπτότερου κι ενός παχύτερου (περιπτώσεις με $z=t/4$ και $t/8$), όπου το παχύτερο υποπολύστρωτο συνεισφέρει σημαντικά στην αξονική ακαμψία της πλάκας. Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω, οι καμπύλες των περιπτώσεων ενός μικρού αποχωρισμού ($A_d/A_p=0.04$) ή ενός αποχωρισμού μεσαίου μεγέθους ($A_d/A_p=0.08$) και προσανατολισμένου παράλληλα με το φορτίο ($a/b=2.0$ & 4.0) ταυτίζονται πλήρως με εκείνη της άθικτης πλάκας και συνεπώς, η επίδραση του αποχωρισμού είναι αμελητέα.

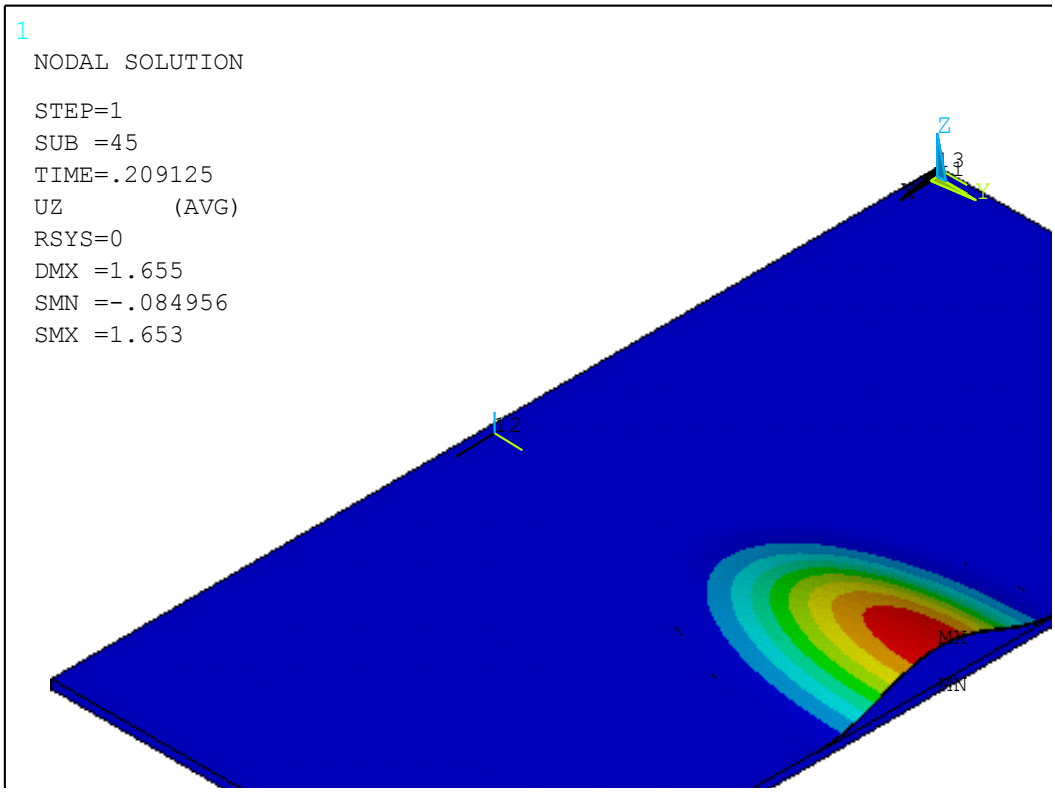
Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν επίσης από τα διαγράμματα των Σχημάτων 4.25 - 4.32 και 4.33 - 4.40, τα οποία αφορούν στις μη επίπεδες μετατοπίσεις για το κάτω και το πάνω υποπολύστρωτο της πλάκας, αντίστοιχα. Έτσι, όσο μεγαλύτερος είναι ο αποχωρισμός τόσο μικρότερο είναι το εύρος ταύτισης των καμπυλών των δύο υποπολύστρωτων με εκείνη της άθικτης πλάκας και ως εκ τούτου, τόσο μικρότερο είναι το επίπεδο φόρτισης για το οποίο επέρχεται ο λυγισμός τους. Επιπρόσθετα, η δυσμενέστερη περίπτωση ως προς το σχήμα του αποχωρισμού είναι εκείνη με $a/b=0.5$ & 1.0 (κυκλικός ή ελλειπτικός αποχωρισμός, κάθετος στη διεύθυνση του φορτίου). Παρ' όλα αυτά, ο μεγαλύτερος περιορισμός του εύρους ταύτισης των καμπυλών παρατηρείται για αποχωρισμούς κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας, οπότε τα δύο υποπολύστρωτα, ειδικότερα το λεπτότερο, λυγίζουν για αρκετά μικρές τιμές του φορτίου λόγω των χαμηλότερων μηχανικών ιδιοτήτων τους. Στον αντίποδα, η επίδραση του αποχωρισμού είναι αμελητέα για μικρούς αποχωρισμούς στο μέσο του πάχους της πλάκας ή στο $z=t/4$ και για αποχωρισμούς μεσαίου μεγέθους στις ίδιες θέσεις και προσανατολισμένους παράλληλα με το φορτίο.

Ένα επιπλέον συμπέρασμα που προκύπτει από τις καμπύλες των Σχημάτων 4.25 - 4.40 αφορά στον τύπο λυγισμού της πλάκας (τοπικός ή γενικός). Επομένως, για αποχωρισμούς κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας (εκτός από εκείνη με $a/b=4.0$ και $A_d/A_p=0.04$) και για μεγάλους αποχωρισμούς ($A_d/A_p=0.08$ & 0.12) στο $z=t/4$, το πάνω υποπολύστρωτο

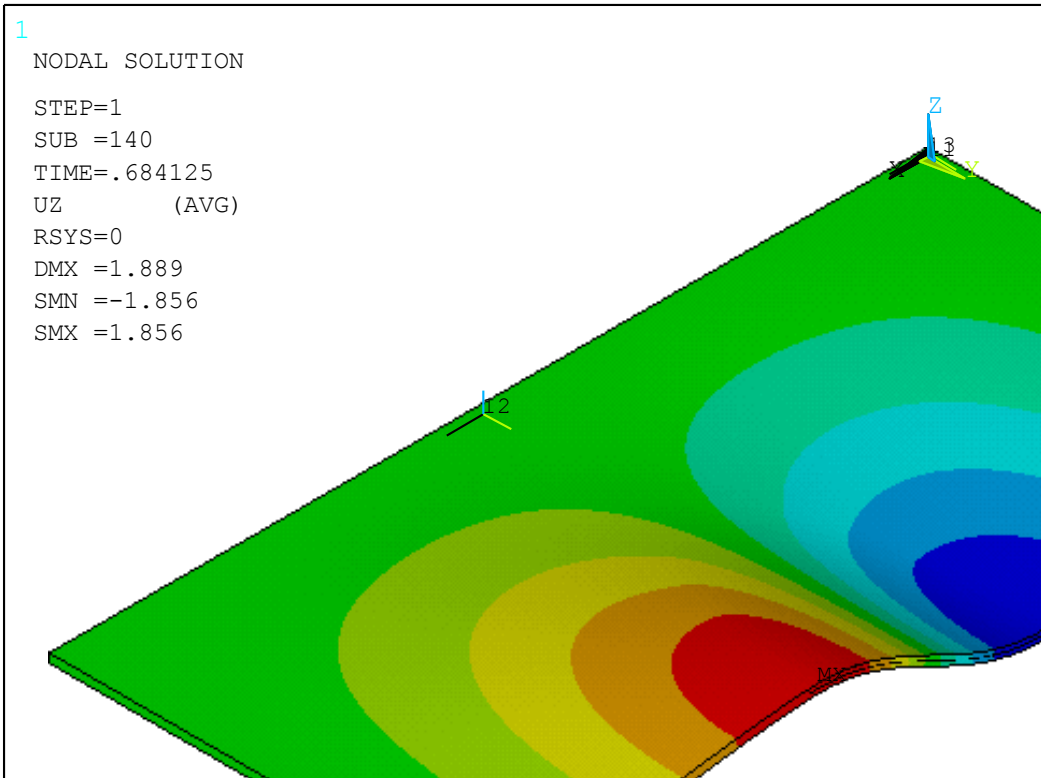
λυγίζει για μικρότερα φορτία σε σχέση με το κάτω υποπολύστρωτο, οπότε η πλάκα λυγίζει τοπικά (Σχήμα 4.41). Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, ο λυγισμός της πλάκας είναι γενικός, με τα υποπολύστρωτα να λυγίζουν μαζί (Σχήματα 4.42 και 4.43). Σημειώνεται ότι στις περιπτώσεις αποχωρισμών κοντά στην εξωτερική επιφάνεια ή αποχωρισμών στο $z=t/4$ με $a/b=0.5$ & 1.0 και $A_d/A_p=0.08$ & 0.12, για αρκετά μεγάλα φορτία, η πλάκα υπόκειται σε λυγισμό μεικτής μορφής, καθώς πλέον λυγίζει και το παχύτερο υποπολύστρωτο, αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση (Σχήμα 4.44). Επιπλέον, για μεγάλα φορτία, η μεταβολή της κλίσης των καμπυλών για αποχωρισμούς στο μέσο του πάχους της πλάκας με $a/b=0.25$, 0.5 & 1.0 και $A_d/A_p=0.08$ & 0.12 (εκτός εκείνων με $a/b=0.25$ και $A_d/A_p=0.08$) είναι μικρή συγκρινόμενη με εκείνη της άθικτης πλάκας και συνεπώς, οι μετατοπίσεις των δύο υποπολύστρωτων είναι μικρότερες εκείνων της άθικτης πλάκας. Αυτό οφείλεται στην παρουσία δύο ημικυμάτων στη διεύθυνση του άξονα x στις ιδιομορφές λυγισμού των περιπτώσεων αυτών (Σχήμα 4.42), αντί ενός ημικύματος, όπως συμβαίνει στις υπόλοιπες περιπτώσεις (Σχήματα 4.41, 4.43 και 4.44).

4.4 Υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού

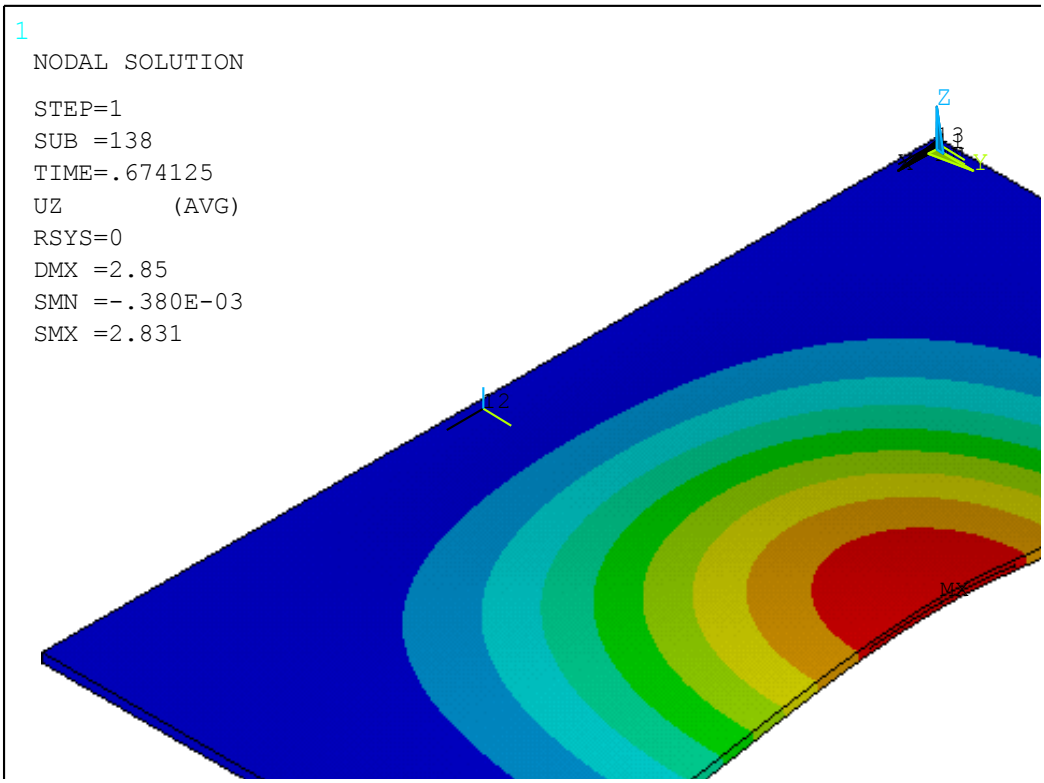
Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο εδάφιο 3.4, ο τρόπος υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού της πλάκας καθορίζεται από τον τύπο της ανάλυσης που χρησιμοποιείται κατά την επίλυση του προβλήματος. Επομένως, δεδομένης της εφαρμογής της μη γραμμικής ανάλυσης και του συνδυασμού αυτής με την ανάλυση ιδιοτιμών, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού εκτιμάται μέσω τεσσάρων διαφορετικών μεταξύ τους διαδικασιών.



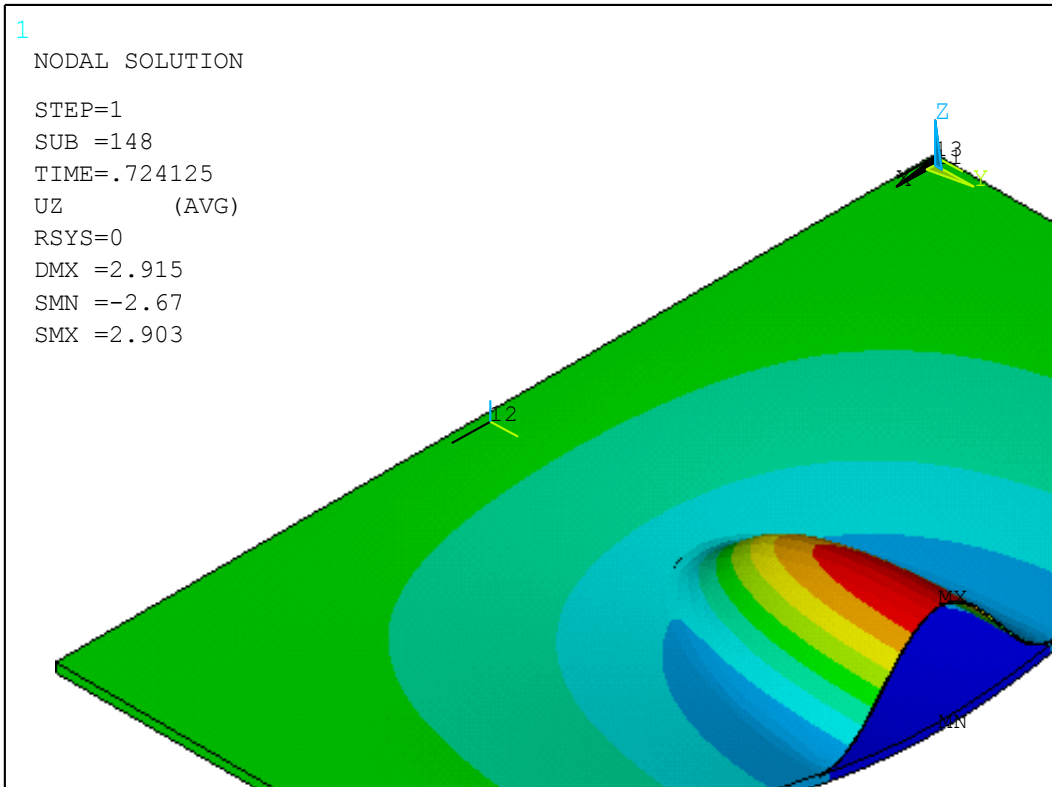
Σχήμα 4.41: Τοπικός λυγισμός (περίπτωση αποχωρισμού με $a/b=0.50$, $A_d/A_p=0.12$ και $z=t/8$ - προβολή μισής πλάκας).



Σχήμα 4.42: Γενικός λυγισμός - ιδιομορφή με δύο ημικύματα στη διεύθυνση του άξονα x (περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.50, A_d/A_p=0.12 και z=t/2 - προβολή μισής πλάκας).



Σχήμα 4.43: Γενικός λυγισμός - ιδιομορφή με ένα ημικύμα στη διεύθυνση του άξονα x (περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.50, A_d/A_p=0.04 και z=t/2 - προβολή μισής πλάκας).



Σχήμα 4.44: Λυγισμός μεικτής μορφής (περίπτωση αποχωρισμού με a/b=0.50, A_d/A_p=0.12 και z=t/8 - προβολή μισής πλάκας).

Σύμφωνα με την πρώτη διαδικασία, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας εκτιμάται βάσει των διαγραμμάτων της αξονικής μετατόπισης (Σχήματα 4.17 - 4.24), σε συνδυασμό με τη μέθοδο μεταβολής της κλίσης των αντίστοιχων καμπυλών (εδάφιο 3.4). Τα αποτελέσματα της διαδικασίας αυτής συγκεντρώνονται στον Πίνακα 4.3, ο οποίος είναι ελλειπής λόγω της απουσίας ορισμένων τιμών και συγκεκριμένα, εκείνων που αφορούν στις περιπτώσεις ενός αποχωρισμού με z=t/8, A_d/A_p=0.08 & 0.12 και a/b=2.0 και z=t/8, A_d/A_p=0.12 και a/b=4.0. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πάνω υποπολύστρωτο είναι αρκετά λεπτό, οπότε ο λυγισμός του δεν επιδρά σημαντικά στην ακαμψία της πλάκας στη διεύθυνση του φορτίου. Ως εκ τούτου, η κλίση των καμπυλών αξονικής μετατόπισης των παραπάνω περιπτώσεων δεν παρουσιάζει καμία μεταβολή (Σχήματα 4.20 (γ) και 4.21 (γ)).

Η εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μέσω της δεύτερης διαδικασίας βασίζεται στα διαγράμματα της μη επίπεδης μετατόπισης του κάτω υποπολύστρωτου (Σχήματα 4.25 - 4.32), σε συνδυασμό με την εφαρμογή της μεθόδου Southwell (εδάφιο 3.4). Τα αντίστοιχα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον Πίνακα 4.4. Η τιμή που απουσιάζει αντιστοιχεί στην περίπτωση ενός αποχωρισμού με z=t/8, A_d/A_p=0.12 και a/b=4.0 και οφείλεται στο γεγονός ότι το κάτω υποπολύστρωτο δε λυγίζει καθόλου.

Η τρίτη διαδικασία που ακολουθείται είναι ακριβώς ίδια με τη δεύτερη, με τη διαφορά ότι βασίζεται στα διαγράμματα της μη επίπεδης μετατόπισης του πάνω υποπολύστρωτου (Σχήματα 4.33 - 4.40). Τα αντίστοιχα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον Πίνακα 4.5, χωρίς να λείπει κάποια τιμή. Ένα συμπέρασμα που προκύπτει από τη σύγκριση των τιμών του πίνακα αυτού με εκείνες του Πίνακα 4.4 είναι ότι για αποχωρισμούς στο μέσο του πάχους της

Πίνακας 4.3: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) βάσει της αξονικής μετατόπισης της πλάκας.

z [1]	A_d/A_p [2]	P_{cr}				
		a/b=0.25 [3]	a/b=0.5 [3]	a/b=1.0 [3]	a/b=2.0 [3]	a/b=4.0 [3]
t/2	0.04	337.5	337.7	337.2	336.3	337.3
	0.08	334.9	320.0	315.8	326.1	326.1
	0.12	315.7	269.1	268.0	300.9	307.9
t/4	0.04	337.6	337.2	337.9	336.8	336.3
	0.08	334.7	320.6	326.0	330.3	327.4
	0.12	328.2	279.7	301.2	322.3	315.8
t/8	0.04	327.0	318.2	322.5	326.6	337.4
	0.08	301.0	291.0	306.1	-	326.1
	0.12	277.9	277.7	289.8	-	-

[1] κατά το πάχος t θέση του αποχωρισμού (σε mm)
[2] λόγος της επιφάνειας του αποχωρισμού προς την επιφάνεια της πλάκας
[3] λόγος διαμέτρων της έλλειψης

Πίνακας 4.4: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) βάσει της μη επίπεδης μετατόπισης του κάτω υποπολύστρωτου (μέθοδος Southwell).

z [1]	A_d/A_p [2]	P_{cr}				
		a/b=0.25 [3]	a/b=0.5 [3]	a/b=1.0 [3]	a/b=2.0 [3]	a/b=4.0 [3]
t/2	0.04	339.2	339.1	338.4	337.5	336.6
	0.08	334.5	324.4	317.8	325.4	323.6
	0.12	318.3	273.0	271.5	300.3	305.7
t/4	0.04	338.9	338.1	338.3	338.0	337.4
	0.08	333.7	281.9	278.2	333.4	329.9
	0.12	328.6	208.9	195.0	325.3	315.3
t/8	0.04	298.0	246.6	255.5	330.6	339.1
	0.08	214.7	162.1	208.2	259.7	327.9
	0.12	168.4	136.3	175.0	205.3	-

[1] κατά το πάχος t θέση του αποχωρισμού (σε mm)
[2] λόγος της επιφάνειας του αποχωρισμού προς την επιφάνεια της πλάκας
[3] λόγος διαμέτρων της έλλειψης

πλάκας ($z=t/2$) ή για μικρούς αποχωρισμούς ($A_d/A_p=0.04$) με $z=t/4$, τα κρίσιμα φορτία που υπολογίζονται βάσει του κάτω και του πάνω υποπολύστρωτου αποκλίνουν ελάχιστα μεταξύ τους ($<1\%$). Το ίδιο ισχύει για μεσαίους και μεγάλους αποχωρισμούς ($A_d/A_p=0.08$ & 0.12) με $z=t/4$ που προσανατολίζονται παράλληλα με το φορτίο ($a/b=2.0$ & 4.0), καθώς και για τις περιπτώσεις αποχωρισμών με $z=t/4$, $A_d/A_p=0.08$ και $a/b=0.25$ και $z=t/8$, $A_d/A_p=0.04$ και $a/b=4.0$. Η ταύτιση αυτή μεταξύ των τιμών των δύο πινάκων σημαίνει ότι τα δύο υποπολύστρωτα λυγίζουν μαζί προς την ίδια κατεύθυνση, οπότε η πλάκα υφίσταται γενικό λυγισμό (Σχήματα 4.42 και 4.43). Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, οι οποίες αφορούν σε έναν

αποχωρισμό με z=t/4, είτε μεγάλου μεγέθους είτε προσανατολισμένου κάθετα στο φορτίο, ή σε έναν αποχωρισμό αρκετά κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας (z=t/8), το κρίσιμο φορτίο που προκύπτει βάσει του πάνω, λεπτότερου υποπολύστρωτου είναι μικρότερο εκείνου που προκύπτει βάσει του κάτω υποπολύστρωτου. Αυτό σημαίνει ότι ο λυγισμός του πάνω υποπολύστρωτου προηγείται και ως εκ τούτου, η πλάκα λυγίζει τοπικά (Σχήμα 4.41), όπως αναμένεται. Συνεπώς, στα πλαίσια της εφαρμογής της μεθόδου Southwell, λαμβάνονται υπόψη μόνο τα αποτελέσματα εκείνα που προκύπτουν βάσει του λεπτότερου, πάνω υποπολύστρωτου (Πίνακας 4.5).

Πίνακας 4.5: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) βάσει της μη επίπεδης μετατόπισης του πάνω υποπολύστρωτου (μέθοδος Southwell).

z [1]	A_d/A_p [2]	P_{cr}				
		a/b=0.25 [3]	a/b=0.5 [3]	a/b=1.0 [3]	a/b=2.0 [3]	a/b=4.0 [3]
t/2	0.04	339.4	339.3	338.9	337.9	337.0
	0.08	334.8	324.9	318.3	325.8	324.1
	0.12	318.5	273.3	271.7	300.6	306.1
t/4	0.04	337.3	339.9	339.9	338.5	337.9
	0.08	335.7	253.6	227.5	337.1	328.5
	0.12	295.9	173.8	154.2	295.0	316.5
t/8	0.04	260.7	142.2	130.0	293.9	340.6
	0.08	125.7	67.4	62.1	145.4	282.9
	0.12	86.2	46.1	41.3	96.3	182.0

[1] κατά το πάχος t θέση του αποχωρισμού (σε mm)
[2] λόγος της επιφάνειας του αποχωρισμού προς την επιφάνεια της πλάκας
[3] λόγος διαμέτρων της έλλειψης

Οι παραπάνω διαδικασίες και τα αντίστοιχα αποτελέσματα αφορούν στη μη γραμμική ανάλυση του λυγισμού της πλάκας. Εκτός της μη γραμμικής ανάλυσης όμως, εφαρμόζεται και ο συνδυασμός αυτής με την ανάλυση ιδιοτιμών (N-L & EIG), που επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν βάσει αυτής της διαδικασίας παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.6. Η σύγκριση των τιμών του πίνακα αυτού με εκείνες του Πίνακα 4.3 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα των δύο αντίστοιχων μεθόδων είναι σχεδόν ίδια για όλες τις περιπτώσεις όπου ο αποχωρισμός βρίσκεται στο μέσο του πάχους της πλάκας (z=t/2), καθώς και για εκείνες με z=t/4, όπου ο αποχωρισμός είναι είτε μικρός (A_d/A_p=0.04) είτε μεγαλύτερος και προσανατολισμένος παράλληλα με το φορτίο (A_d/A_p=0.08 & 0.12 και a/b=2.0 & 4.0). Το ίδιο ισχύει για τις περιπτώσεις αποχωρισμών με z=t/4, A_d/A_p=0.08 και a/b=0.25 και z=t/8, A_d/A_p=0.04 και a/b=4.0. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, η πλάκα υπόκειται σε γενικό λυγισμό. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, δηλαδή για αποχωρισμούς κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας (z=t/8) ή για αποχωρισμούς με z=t/4 και προσανατολισμένους κάθετα στη διεύθυνση του φορτίου, οι αποκλίσεις μεταξύ των πινάκων είναι πολύ μεγάλες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αξονική ακαμψία της πλάκας στη διεύθυνση του φορτίου δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα από το λυγισμό του λεπτότερου, πάνω

υποπολύστρωτου, ο οποίος προηγείται εκείνου του παχύτερου υποπολύστρωτου σε αυτές τις περιπτώσεις (τοπικός λυγισμός της πλάκας). Επομένως, η μέθοδος υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που βασίζεται στα διαγράμματα της αξονικής μετατόπισης της πλάκας εφαρμόζεται ικανοποιητικά μόνο στις περιπτώσεις γενικού λυγισμού και ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.3 δε λαμβάνονται υπόψη στο εξής.

Πίνακας 4.6: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) βάσει του συνδυασμού μη γραμμικής ανάλυσης - ανάλυσης ιδιοτιμών (N-L & EIG).

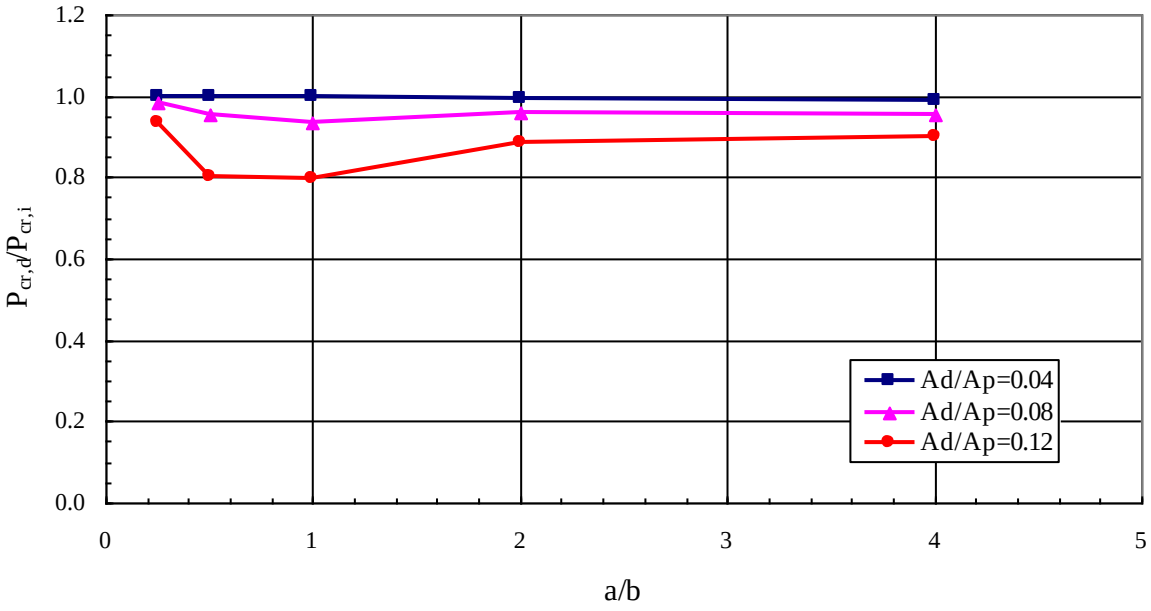
z [1]	A_d/A_p [2]	P_{cr}				
		a/b=0.25 [3]	a/b=0.5 [3]	a/b=1.0 [3]	a/b=2.0 [3]	a/b=4.0 [3]
t/2	0.04	338.4	338.6	338.1	337.2	336.3
	0.08	333.8	323.8	317.2	325.1	323.4
	0.12	317.4	272.4	270.7	300.0	305.4
t/4	0.04	338.4	337.8	336.1	337.5	337.2
	0.08	333.1	248.7	222.8	328.5	328.1
	0.12	290.7	168.1	148.9	311.4	314.5
t/8	0.04	247.1	135.0	124.4	295.4	338.0
	0.08	119.9	66.1	60.8	144.2	296.5
	0.12	81.3	44.0	39.6	97.0	197.1

[1] κατά το πάχος t θέση του αποχωρισμού (σε mm)
[2] λόγος της επιφάνειας του αποχωρισμού προς την επιφάνεια της πλάκας
[3] λόγος διαμέτρων της έλλειψης

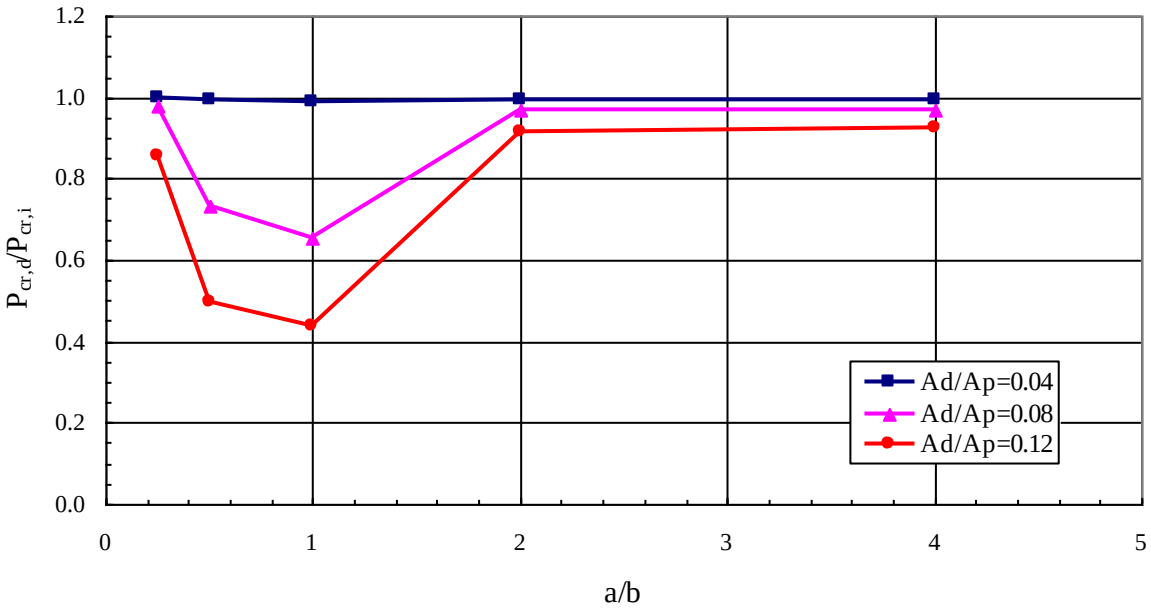
Ο Πίνακας 4.6 συγκρίνεται επίσης με τον Πίνακα 4.5 και το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι τιμές τους είναι σχεδόν ίδιες. Ειδικά για αποχωρισμούς στο μέσο του πάχους της πλάκας, οι αποκλίσεις μεταξύ των πινάκων είναι αμελητέες, ενώ για αποχωρισμούς με z=t/4, οι αποκλίσεις είναι σχετικά μικρές. Μεγαλύτερες αποκλίσεις παρατηρούνται για περιπτώσεις αποχωρισμών κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας, με τη μέγιστη απόκλιση να είναι περίπου 8%. Ωστόσο, οι αποκλίσεις αυτές δικαιολογούνται δεδομένων των ανακριβειών που υπεισέρχονται κατά την εφαρμογή της μεθόδου Southwell στα διαγράμματα της μη επίπεδης μετατόπισης του πάνω, λεπτότερου υποπολύστρωτου. Ως εκ τούτου και λόγω της έκτασης της εργασίας που απαιτείται στα πλαίσια της εφαρμογής της μεθόδου Southwell, επιλέγεται ο συνδυασμός της μη γραμμικής ανάλυσης με την ανάλυση των ιδιοτιμών για την εκτίμηση των αποτελεσμάτων της παρούσας παραμετρικής μελέτης (Πίνακας 4.6).

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.6 μπορούν να αποδοθούν διαγραμματικά υπό τη μορφή αναλυτικών καμπυλών, όπως εκείνες των Σχημάτων 4.45 - 4.47. Συγκεκριμένα, στα σχήματα αυτά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας αποδίδεται συναρτήσει του σχήματος και του προσανατολισμού του αποχωρισμού, τα οποία εκφράζονται μέσω του λόγου των διαμέτρων αυτού (a/b). Επιπρόσθετα, το κρίσιμο φορτίο εκφράζεται μέσω του λόγου $P_{cr,d}/P_{cr,i}$, όπου $P_{cr,d}$ το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας που έχει υποστεί αποχωρισμό των στρώσεών της και $P_{cr,i}$ το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας στην άθικτη κατάσταση, το οποίο προκύπτει ίσο με 339.5 kN βάσει του συνδυασμού των δύο τύπων ανάλυσης (N-L & EIG). Καθένα από τα

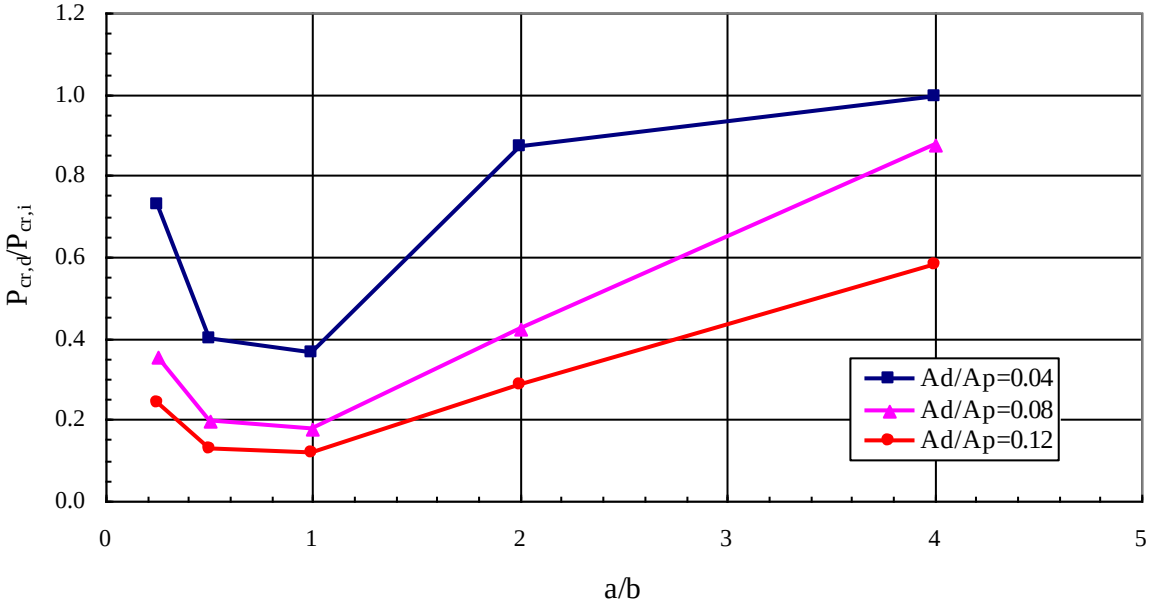
παραπάνω σχήματα αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη θέση του αποχωρισμού κατά το πάχος της πλάκας και επιπλέον, αποτελείται από τρεις καμπύλες, μία για κάθε περίπτωση μεγέθους του αποχωρισμού (λόγος A_d/A_p).



Σχήμα 4.45: Αναλυτικές καμπύλες λυγισμού της πλάκας για αποχωρισμούς με z=t/2.



Σχήμα 4.46: Αναλυτικές καμπύλες λυγισμού της πλάκας για αποχωρισμούς με z=t/4.



Σχήμα 4.47: Αναλυτικές καμπύλες λυγισμού της πλάκας για αποχωρισμούς με z=t/8.

Η μελέτη και η σύγκριση μεταξύ των Σχημάτων 4.45 - 4.47 οδηγεί σε ορισμένα γενικά και σημαντικά συμπεράσματα για την επίδραση ενός αποχωρισμού στην αντοχή μίας πλάκας σε λυγισμό, τα οποία είναι τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά. Έτσι, σύμφωνα με τις καμπύλες των σχημάτων, η παρουσία ενός αποχωρισμού συνεπάγεται τη μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού της πλάκας, ενώ η επίδραση αυτού είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερος είναι ο αποχωρισμός (αύξηση του λόγου A_d/A_p) και όσο πλησιέστερα στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας βρίσκεται αυτός (μετατόπιση από το z=t/2 στο z=t/8). Χαρακτηριστικά, στα πλαίσια της παρούσας παραμετρικής μελέτης, η επίδραση αυτή κινείται από αμελητέα επίπεδα μέχρι μία μείωση του κρίσιμου φορτίου κατά 88% ως προς εκείνο της άθικτης πλάκας.

Σημαντικά συμπεράσματα προκύπτουν επίσης για την επίδραση του σχήματος και του προσανατολισμού του αποχωρισμού στο λυγισμό της πλάκας. Συγκεκριμένα, η δυσμενέστερη περίπτωση είναι εκείνη ενός κυκλικού αποχωρισμού (a/b=1.0), ενώ όσο πιο μακρόστενος είναι ένας ελλειπτικός αποχωρισμός τόσο μικρότερη είναι η μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Επιπρόσθετα, η επίδραση ενός ελλειπτικού αποχωρισμού, προσανατολισμένου με τέτοιο τρόπο, ώστε ο μεγάλος άξονάς του να είναι κάθετος στη διεύθυνση του φορτίου, είναι μεγαλύτερη από εκείνη ενός ισοδύναμου αποχωρισμού με το μεγάλο άξονα παράλληλο με τη διεύθυνση αυτή.

Αναφορικά με το μέγεθος της επίδρασης των διαφόρων παραμέτρων του αποχωρισμού, ένας μικρός αποχωρισμός, με επιφάνεια μικρότερη του 4% της επιφάνειας της πλάκας, έχει αμελητέα επίδραση στην αντοχή της πλάκας σε λυγισμό, είτε βρίσκεται στο μέσο του πάχους αυτής (z=t/2) είτε στο z=t/4 (είτε μεταξύ αυτών των δύο θέσεων), ανεξάρτητα από το σχήμα και τη διεύθυνσή του. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με παρόμοια σχόλια από τους Lee & Park (Lee - 2007). Αντίθετα, όταν ένας μικρός αποχωρισμός βρίσκεται κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας (z=t/8), η μείωση του κρίσιμου φορτίου είναι σημαντική (μέχρι 63%).

Παρ' όλα αυτά, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση ενός μικρού αποχωρισμού με a/b = 4.0, δεδομένου ότι η επίδρασή του είναι αμελητέα, ανεξάρτητα από τη θέση του κατά το πάχος της πλάκας. Επιπλέον, ένας αποχωρισμός με επιφάνεια ίση με το 12% της επιφάνειας της πλάκας επιδρά αρνητικά στη συμπεριφορά αυτής σε λυγισμό, με τη μείωση του κρίσιμου φορτίου να κυμαίνεται από σχετικά υψηλές τιμές, για αποχωρισμούς στο μέσο του πάχους της πλάκας (μείωση κατά 20%), μέχρι καταστροφικά επίπεδα, για αποχωρισμούς κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας (μείωση κατά 88%).

Όπως προκύπτει από τα Σχήματα 4.45 - 4.47, οι μέγιστες μειώσεις του κρίσιμου φορτίου αντιστοιχούν σε ένα μεγάλο κυκλικό αποχωρισμό. Συγκεκριμένα, ένας τέτοιος αποχωρισμός στο μέσο του πάχους της πλάκας προκαλεί μείωση του κρίσιμου φορτίου κατά 20% (Σχήμα 4.45), ενώ η μετατόπισή του προς την εξωτερική επιφάνεια έχει σαν συνέπεια την περαιτέρω μείωση του μεγέθους αυτού κατά 56%, για έναν αποχωρισμό με z = t/4 (Σχήμα 4.46) και 88%, για έναν αποχωρισμό με z = t/8 (Σχήμα 4.47). Οι μειώσεις αυτές είναι ελαφρά μικρότερες για έναν σχετικά κοντό ελλειπτικό αποχωρισμό, με το μεγάλο άξονά του κάθετο στη διεύθυνση του φορτίου (a/b = 0.5) και ισούνται με 20%, 50% και 87%, αντίστοιχα.

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα που συγκεντρώνονται στον Πίνακα 4.6 και αποδίδονται γραφικά στα Σχήματα 4.45 - 4.47 αντιστοιχούν είτε σε γενικό (Σχήματα 4.42 και 4.43) είτε σε τοπικό λυγισμό της πλάκας (Σχήμα 4.41), ανάλογα με το ποιά από τις δύο μορφές επικρατεί σε κάθε περίπτωση. Ως εκ τούτου, η εκτίμηση των αποτελεσμάτων της παραμετρικής μελέτης γίνεται βάσει της υπόθεσης ότι οποιαδήποτε μορφή λυγισμού αποτελεί μία μορφή αστοχίας η οποία θα πρέπει να αποφευχθεί. Παρ' όλα αυτά, όπως προκύπτει από τη σύγκριση των Πινάκων 4.6 και 4.3, σε ορισμένες περιπτώσεις ο λυγισμός του λεπτότερου υποπολύστρωτου, ακόμα και αν συνεπάγεται την αστοχία αυτού, δεν επιδρά ουσιαστικά στην αξονική ακαμψία της πλάκας, η οποία μπορεί να παραλάβει μεγαλύτερα θλιπτικά φορτία. Ωστόσο, μία ολοκληρωμένη μελέτη του φαινομένου είναι δυνατή μέσω της ανάλυσης της συμπεριφοράς της πλάκας μετά το λυγισμό, σε συνδυασμό με την πρόβλεψη της διεύρυνσης της περιοχής του αποχωρισμού και ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η κατανόηση της συμπεριφοράς μίας τυπικής ναυπηγικής πολύστρωτης πλάκας με αποχωρισμένες στρώσεις, η οποία υπόκειται σε συνεπίπεδη θλιπτική φόρτιση. Στο πλαίσιο αυτό, εξετάζεται η επίδραση του αποχωρισμού και ορισμένων παραμέτρων αυτού στην αντοχή της πλάκας σε λυγισμό, χαρακτηριστικό μέγεθος της οποίας είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Συγκεκριμένα, με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων αναλύεται μία πολύστρωτη πλάκα, συγκεκριμένης γεωμετρίας (μήκος, πλάτος, πάχος) και μηχανικών ιδιοτήτων (μέτρα ελαστικότητας, μέτρα διάτμησης και λόγοι Poisson), με έναν κεντρικό αποχωρισμό ελλειπτικού σχήματος και πραγματοποιείται μία παραμετρική μελέτη ως προς το σχήμα και τον προσανατολισμό (λόγος διαμέτρων της έλλειψης, a/b), το μέγεθος (λόγος A_d/A_p) και την κατά το πάχος της πλάκας θέση του αποχωρισμού αυτού.

Ένα συμπέρασμα που εξάγεται από τις αναλύσεις της παραμετρικής μελέτης αφορά στην αδυναμία εφαρμογής της ανάλυσης ιδιοτιμών για αυτό το πρόβλημα λυγισμού. Ειδικότερα, οι μορφές λυγισμού που προκύπτουν σε ορισμένες περιπτώσεις δεν είναι αποδεκτές, με το ένα υποπολύστρωτο να διεισδύει στο άλλο και κατά συνέπεια, τα αντίστοιχα αποτελέσματα δεν είναι σωστά. Το πρόβλημα αυτό εξαλείφεται κατά την εφαρμογή της μη γραμμικής ανάλυσης ή του συνδυασμού αυτής με την ανάλυση ιδιοτιμών, λόγω της δυνατότητας χρήσης στοιχείων επαφής. Επιπρόσθετα, η σύγκριση μεταξύ των διαφόρων τεχνικών που εφαρμόζονται για την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού δείχνει ότι ο συνδυασμός των δύο τύπων ανάλυσης παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα, ενώ παράλληλα απαιτεί λιγότερο εκτενείς εργασίες κατά το στάδιο της μεταεπεξεργασίας και μικρότερη υπολογιστική ισχύ.

Αναφορικά με τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης, ένα γενικό συμπέρασμα που προκύπτει αφορά στην εν γένει συμπεριφορά μίας πλάκας που έχει υποστεί αποχωρισμό των στρώσεών της. Επομένως, ανεξάρτητα από το σχήμα, το μέγεθος και την κατά το πάχος της πλάκας θέση του αποχωρισμού, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και κατ' επέκταση, η αντοχή της πλάκας σε λυγισμό μειώνονται, με την επίδραση αυτή να κυμαίνεται από αμελητέα επίπεδα μέχρι μειώσεις της τάξης του 85%. Επιπλέον, όπως αναμένεται, η μεγαλύτερη επίδραση στο λυγισμό της πλάκας παρατηρείται τόσο για αρκετά μεγάλους αποχωρισμούς όσο και για αποχωρισμούς πολύ κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας, με το συνδυασμό αυτών να αντιστοιχεί σε δραματικές μειώσεις. Επίσης, όσον αφορά το σχήμα και τον προσανατολισμό του αποχωρισμού, η παρουσία ενός κυκλικού αποχωρισμού αντιστοιχεί στη δυσμενέστερη περίπτωση, ενώ ακολουθεί, με πολύ μικρές αποκλίσεις από αυτήν, η περίπτωση ενός ελαφρά επιμήκη ελλειπτικού αποχωρισμού, προσανατολισμένου κάθετα στη διεύθυνση του φορτίου. Αντίθετα, η επίδραση ενός αρκετά επιμήκη αποχωρισμού, προσανατολισμένου παράλληλα με τη διεύθυνση του φορτίου, είναι η μικρότερη σε σχέση με τα υπόλοιπα εξεταζόμενα σχήματα.

Η παραμετρική μελέτη παρέχει επίσης ορισμένα ποσοτικά αποτελέσματα για το λυγισμό μίας πολύστρωτης πλάκας με αποχωρισμένες στρώσεις. Έτσι, ένας μικρός αποχωρισμός, με

επιφάνεια μικρότερη του 4% της επιφάνειας ολόκληρης της πλάκας, δεν επιδρά ουσιαστικά στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού αυτής όταν δε βρίσκεται πολύ κοντά στην εξωτερική επιφάνειά της, δεδομένου ότι οι αντίστοιχες αποκλίσεις ως προς το κρίσιμο φορτίο της άθικτης πλάκας είναι αμελητέες, ανεξαρτήτως σχήματος και προσανατολισμού του αποχωρισμού. Αντίθετα, όταν αυτός βρίσκεται κοντά στην εξωτερική επιφάνεια, οι αποκλίσεις φτάνουν μέχρι περίπου 65% (περίπτωση κυκλικού αποχωρισμού). Στην περίπτωση ενός μεγαλύτερου αποχωρισμού, η μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού είναι ακόμα μεγαλύτερη. Χαρακτηριστικά, ένας αρκετά μεγάλος κυκλικός αποχωρισμός, με επιφάνεια ίση με το 12% εκείνης της πλάκας, ο οποίος βρίσκεται στο μέσο του πάχους αυτής, συνεπάγεται μία εξασθένιση της αντοχής σε λυγισμό της τάξης του 20%, ενώ το ποσοστό αυτό αυξάνεται μέχρι 88% όσο ο αποχωρισμός πλησιάζει την εξωτερική επιφάνεια.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η επίδραση του αποχωρισμού και των παραμέτρων του στον τύπο λυγισμού της πλάκας. Ειδικότερα, για αποχωρισμούς στο μέσο του πάχους αυτής, η πλάκα υφίσταται γενικό λυγισμό, με τα δύο υποπολύστρωτα να παραμορφώνονται μαζί και προς την ίδια κατεύθυνση, ενώ για αποχωρισμούς κοντά στην εξωτερική επιφάνεια, η πλάκα λυγίζει τοπικά, με το λυγισμό του λεπτότερου υποπολύστρωτου να προηγείται εκείνου του παχύτερου. Αντίθετα, για ενδιάμεσες κατά το πάχος θέσεις, ο τύπος του λυγισμού εξαρτάται επιπλέον από το σχήμα, τον προσανατολισμό και το μέγεθος του αποχωρισμού. Επιπρόσθετα, αξίζει να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις τοπικού λυγισμού, η αξονική ακαμψία της πλάκας δεν επηρεάζεται από το λυγισμό του λεπτότερου υποπολύστρωτου και ως εκ τούτου, η πλάκα μπορεί να παραλάβει επιπλέον θλιπτικό φορτίο. Ωστόσο, η μεταλυγιστική συμπεριφορά της πλάκας μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα μέσω μίας μελέτης, στα πλαίσια της οποίας θα λαμβάνεται υπόψη η πιθανότητα διεύρυνσης της περιοχής του αποχωρισμού.

Τα παραπάνω αποτελέσματα και συμπεράσματα συμβάλλουν σημαντικά στην καλύτερη κατανόηση του λυγισμού πολύστρωτων πλακών με αποχωρισμένες στρώσεις, προσφέροντας πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο επίδρασης των παραμέτρων του αποχωρισμού στο φαινόμενο αυτό. Επιπλέον, τα ποσοτικά αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως δεδομένα, βάσει των οποίων θα προτείνεται η επισκευή ναυπηγικών πολύστρωτων που έχουν αστοχήσει και θα καθορίζεται η έκταση αυτής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Καρυαμπάς, Γ. 1992. Κάμψη και λυγισμός πακτωμένων πλακών από σύνθετα υλικά με βάση την Κλασσική Θεωρία Επιστρώσεων. Διπλωματική Εργασία, Εργαστήριο Ναυπηγικής Τεχνολογίας, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σεπτέμβριος 1992.

Τσούβαλης, Ν.Γ. 1998. Σημειώσεις για το μάθημα Ανάλυση και Σχεδίαση Σκαφών από Σύνθετα Υλικά. Τομέας Θαλάσσιων Κατασκευών, Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Διεθνής

Abdullah, S., Ferrero, J.F., Mouilet, J.B. & Barrau, J.J. 2004. Development of a finite element for composite delamination analysis. *Composite Science and Technology*, Vol. 13, No 1, pg. 77-86.

ANSYS, Release 11.0 Documentation, 2007.

Barbero, E.J. & Reddy, J.N. 1991. Modeling of delamination in composite laminates using a layer - wise plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 28, No 3, pg. 373-388.

de Borst, R. & Remmers, J.J.C. 2006. Computational modelling of delamination. *Composite Science and Technology*, Vol. 66, No 6, pg. 713-722.

Bull, J.W. 1995. Numerical analysis and modelling of composite materials. Springer, edition 1, pg. 36-39.

Chirica, I., Beznea, E.F., Chirica, R., Boazu, D. & Chirica, A. 2008. Buckling behavior of the delaminated ship hull panels. In Guedes Soares & Kolev (eds), *Maritime Industry, Ocean Engineering and Coastal Resources*: 161-166. London: Taylor and Francis.

Guedra - Degeorges, D., Maison, S., Trallero, D. & Petitniot, J.L. 1992. Buckling and post - buckling behavior of delamination in a carbon - epoxy laminated structure: experiments and modelling. A.G.A.R.D. Conference Proceeding 530: debonding/delamination of Composites, No 7, pg. 1-11.

Hassan, N.M. & Batra, R.C. 2008. Modelling damage in polymeric composites. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 39, No. 1, pg. 66-82.

Hwang, S.F. & Liu, G.H. 2001. Buckling behavior of composite laminates with multiple delaminations under uniaxial compression. *Composite Structures*, Vol. 53, No 2, pg. 235-243.

Jensen, C. 2006. Defects in FRP panels and their influence on compressive strength. Master Thesis, Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark.

Jensen, H.M. & Sheinman, I. 2002. Numerical analysis of buckling - driven delamination. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pg. 3373-3386.

Kalyan, J.B. & Bhaskar, K. 2006. An analytical parametric study on buckling of non - uniformly compressed orthotropic rectangular plates. *Composite Structures*, Vol. 82, pg. 10-18.

Kardomateas, G.A. 1989. End fixity effects on the buckling and post - buckling of delaminated composites. *Composite Science and Technology*, Vol. 34, pg. 113-128.

Kim, H. & Kedward, K.T. 1999. A method for modeling the local and global buckling of delaminated composite plates. *Composite Structures*, Vol. 44, No 1, pg. 43-53.

Kyoung, W.M., Kim, C.G. & Hong, C.S. 1999. Buckling and postbuckling behavior of composite cross - ply laminates with multiple delaminations. *Composite Structures*, Vol. 43, No 4, pg. 257-274.

Lee, S.Y. & Park, D.Y. 2007. Buckling analysis of laminated composite plates containing delaminations using the enhanced assumed strain solid method. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No 24, pg. 8006-8027.

Naik, N.K., Sekher, Y.C. & Meduri, S. 2000. Polymer matrix woven fabric composites subjected to low velocity impact: Part I - Damage initiation studies. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 19, No 12, pg. 911-954.

Nemeth, M.P. 1992. Buckling behavior of long symmetrically laminated plates subjected to combined loadings. Technical Paper, No 3195, NASA.

Nemeth, M.P. 1995. Buckling behavior of long anisotropic plates subjected to combined loads. Technical Paper, No 3568, NASA.

Papazoglou, V.J., Tsouvalis, N.G. & Kyriakopoulos, G.D. 1992. Buckling of unsymmetric laminates under linearly varying biaxial in - plane loads combined with shear. *Composite Structures*, Vol. 20, No 2, pg.155-163.

Parlapalli, M.R., Soh, K.C., Dong, W.S. & Ma, G. 2007. Experimental investigation of delamination buckling of stitched composite laminates. *Composites: Part A*, Vol. 38, No 9, pg. 2024-2033.

Pekbey, Y. 2006. A numerical and experimental investigation of critical buckling load of rectangular laminated composite plates with strip delamination. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 25, No 7, pg. 685-697.

Sallam, S. & Simitses, G.J. 1985. Delamination buckling and growth of flat cross - ply laminates. *Composite Structures*, Vol. 4, pg. 361-381.

Shan, B. & Pelegri, A.A. 2003. Approximate analysis of the buckling behavior of composites with delamination. *Journal of Composite Materials*, Vol. 37, No 8, pg. 673-685.

Shaw, D. & Tsai, M.Y. 1989. Analysis of delamination in compressively loaded laminates. *Composite Science and Technology*, Vol. 34, pg. 1-17.

Short, G.J., Guild, F.J. & Pavier, M.J. 2001.The effect of delamination geometry on the compressive failure of composite laminates. *Composite Science and Technology*, Vol. 61, No 14, pg. 2075-2086.

Strong, A.B. 2002. History of Composite Materials - opportunities and necessities. Brighman Young University.

Tsouvalis, N.G. & Papazoglou, V.J. 2004. Design buckling curves for clamped orthotropic laminated plates. *Advanced Composites Letters*, Vol. 13, No 5, pg. 227-235.

Wang, S.S. & Choi, I. 1983. The mechanics of delamination in fiber - reinforced composite materials Part II: The delamination behavior and fracture mechanics parameters. *Mechanics of Composite Materials*, AMD, Vol. 83.

Wang, X.W., Pont - Lezica, I., Harris, J.M., Guild, F.J. & Pavier, M.J. 2005. Compressive failure of composite laminates containing multiple delaminations. *Composite Science and Technology*, Vol. 65, pg. 191-200.

Williams, T.O. & Addesio, F.L. 1997. A general theory for laminated plates with delaminations. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No 16, pg. 2003-2024.

Zor, M. 2003. Delamination width effect on buckling loads of simply supported woven - fabric laminated composite plates made of carbon/epoxy. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 22, No 17, pg. 1535-1546.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Επιλογή παραμέτρων κατασκευής του μοντέλου

Α.1 Εντολή δημιουργίας του επιφανειακού καννάβου

Η επιλογή μεταξύ των εντολών *amesh* και *vsweep* για την κατασκευή του επιφανειακού καννάβου στα πλαίσια της μοντελοποίησης της πολύστρωτης πλάκας επιτυγχάνεται βάσει της σύγκρισης των αποτελεσμάτων των δύο αντίστοιχων μοντέλων. Τα μοντέλα αυτά αφορούν σε μία πλάκα κατασκευασμένη από στρώσεις ινών άνθρακα σε εποξική ρητίνη (carbon - epoxy), με διαστάσεις και ιδιότητες εκείνες που συγκεντρώνονται στον Πίνακα Α.1 και αποτελούνται από στοιχεία τύπου SOLID45. Η σύγκριση των δύο προσεγγίσεων πραγματοποιείται για ορισμένες περιπτώσεις αποχωρισμού των στρώσεων της πλάκας.

Πίνακας Α.1: Διαστάσεις και ιδιότητες της πλάκας.

Διαστάσεις			Ιδιότητες					
Μήκος	Πλάτος	Πάχος	$E_1=E_2$ [1]	E_3 [2]	G_{12} [3]	$G_{13}=G_{23}$ [4]	ν_{12} [5]	$\nu_{13}=\nu_{23}$ [6]
mm			MPa					
1000	1000	10	53100	8000	3790	3700	0.055	0.074

[1] Μέτρα ελαστικότητας στη διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτές
[2] Μέτρο ελαστικότητας κάθετα στο επίπεδο της στρώσης
[3] Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης
[4] Μέτρα διάτμησης στα επίπεδα 13 και 23
[5] Λόγος του Poisson στο επίπεδο της στρώσης
[6] Λόγοι του Poisson στα επίπεδα 13 και 23

Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του συνδυασμού της μη γραμμικής ανάλυσης με την ανάλυση ιδιοτιμών για τα εξεταζόμενα μοντέλα παρουσιάζονται στον Πίνακα Α.2. Οι τιμές του πίνακα αφορούν στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πλάκας για κάθε περίπτωση αποχωρισμού. Επιπρόσθετα, στον ίδιο πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα της σύγκρισης των δύο διαφορετικών μοντέλων της πλάκας, τα οποία υπολογίζονται ως προς το μοντέλο που προκύπτει με χρήση της εντολής *vsweep*. Δεδομένου ότι οι αποκλίσεις μεταξύ των δύο μοντέλων είναι σχετικά μικρές ($\leq 3\%$), οι εντολές *vsweep* και *amesh* οδηγούν πρακτικά στα ίδια αποτελέσματα, οπότε η επιλογή της μίας ή της άλλης δεν επηρεάζει ουσιαστικά τη μοντελοποίηση της πλάκας.

Α.2 Αριθμός στοιχείων στη διεύθυνση του πάχους του μοντέλου

Ο αριθμός των στοιχείων στη διεύθυνση του πάχους του μοντέλου μπορεί να καθοριστεί μέσω της ακόλουθης παραμετρικής μελέτης, στα πλαίσια της οποίας εξετάζεται η χρήση ενός ή περισσοτέρων στοιχείων για το παχύτερο ή και για τα δύο υποπολύστρωτα της πλάκας. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένων των περιορισμών για τις διαστάσεις των στοιχείων, σε συνδυασμό

με τα λεπτά υποπολύστρωτα που προκύπτουν για περιπτώσεις αποχωρισμών σχετικά κοντά στην εξωτερική επιφάνεια της πλάκας, η μοντελοποίηση με περισσότερα του ενός στοιχεία είναι δυνατή μόνο για το παχύτερο υποπολύστρωτο. Αντίθετα, όταν ο αποχωρισμός βρίσκεται στο μέσο του πάχους της πλάκας, το πάχος των δύο υποπολύστρωτων είναι σχετικά μεγάλο, οπότε και τα δύο μπορούν να μοντελοποιηθούν με περισσότερα στοιχεία. Η ακόλουθη μελέτη αφορά στον έλεγχο δύο μοντέλων της πλάκας, με ένα και τέσσερα κατά το πάχος στοιχεία για κάθε υποπολύστρωτο, αντίστοιχα. Τα μοντέλα αυτά αφορούν σε μία πολύστρωτη πλάκα με τα χαρακτηριστικά του Πίνακα Α.1 και αποτελούνται από στοιχεία τύπου SOLID45.

Τα κρίσιμα φορτία για τις περιπτώσεις αποχωρισμού που εξετάζονται προκύπτουν από την εφαρμογή του συνδυασμού της μη γραμμικής ανάλυσης με την ανάλυση ιδιοτιμών και συγκεντρώνονται στον Πίνακα Α.3. Στον ίδιο πίνακα πραγματοποιείται επίσης σύγκριση των δύο διαφορετικών μοντελοποιήσεων ως προς το μοντέλο με ένα στοιχείο κατά το πάχος κάθε υποπολύστρωτου. Όπως προκύπτει από τις τιμές του πίνακα, τα δύο μοντέλα αποκλίνουν ελάχιστα μεταξύ τους ($<1\%$) και κατά συνέπεια, μπορεί να γίνει χρήση ενός μόνο στοιχείου ανά υποπολύστρωτο, μειώνοντας σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο της ανάλυσης και διατηρώντας παράλληλα το επίπεδο της ακρίβειάς της.

Πίνακας Α.2: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) για μοντέλα με επιφανειακό κάνναβο που προκύπτει βάσει (α) της εντολής *vsweep* και (β) της εντολής *amesh*.

z	a/b	A_d/A_p	P_{cr}		%
			vsweep	amesh	
t/2	0.5	0.04	338.6	338.5	-0.009
	1.0	0.12	270.7	270.7	-0.010
t/4	0.25	0.08	333.1	333.0	-0.021
	2.0	0.12	311.4	311.6	0.082
t/8	2.0	0.08	144.2	148.9	3.221
	4.0	0.12	197.1	200.9	1.928

Πίνακας Α.3: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) για μοντέλα με (α) ένα και (β) τέσσερα στοιχεία στη διεύθυνση του πάχους της πλάκας.

z	a/b	A_d/A_p	P_{cr}		%
			1 element	4 elements	
t/2	0.5	0.04	338.6	338.1	-0.134
	1.0	0.12	270.7	269.4	-0.482
t/4	0.25	0.08	333.1	332.7	-0.109
	2.0	0.12	311.4	311.2	-0.051
t/8	2.0	0.08	144.2	144.4	0.134
	4.0	0.12	197.1	198.3	0.574

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Καθορισμός του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λυγισμού (συνδυασμός μη γραμμικής ανάλυσης - ανάλυσης ιδιοτιμών)

Στα πλαίσια της εφαρμογής του συνδυασμού της μη γραμμικής ανάλυσης με εκείνη των ιδιοτιμών, η επιβαλλόμενη φόρτιση για την οποία πραγματοποιείται η μη γραμμική ανάλυση ισούται με την επιβαλλόμενη φόρτιση κατά την ανάλυση ιδιοτιμών, πολλαπλασιασμένη με ένα μικρό κλάσμα της πρώτης ιδιοτιμής λυγισμού λ_1. Ο καθορισμός της τιμής του κλάσματος αυτού επιτυγχάνεται μέσω της ακόλουθης παραμετρικής μελέτης, η οποία περιλαμβάνει τον έλεγχο πέντε τιμών αυτής. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για το σκοπό αυτό αφορούν σε μία πολύστρωτη πλάκα με τις διαστάσεις και τις ιδιότητες που φαίνονται στον Πίνακα Α.1 και αποτελούνται από στοιχεία τύπου SOLID45.

Τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης συγκεντρώνονται στους Πίνακες Β.1 - Β.6 και αποδίδονται γραφικά στο Σχήμα Β.1. Οι τιμές των πινάκων αφορούν στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις αποχωρισμού, ενώ οι καμπύλες του Σχήματος Β.1 αποδίδουν το μέγεθος αυτό συναρτήσει του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λ_1. Σύμφωνα με το σχήμα αυτό, για μικρές τιμές του κλάσματος (1/40, 1/20), το κρίσιμο φορτίο μεταβάλλεται εν γένει προς μεγαλύτερες τιμές, ενώ για κλάσματα μεγαλύτερα του 1/10, σταθεροποιείται σε μία τιμή. Ως εκ τούτου, η επιβαλλόμενη φόρτιση για τη μη γραμμική ανάλυση επιλέγεται ίση με το 1/10 της ολικής.

Πίνακας Β.1: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) για διάφορες τιμές του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λ_1 (περίπτωση αποχωρισμού με $a/b=0.5$, $A_d/A_p=0.08$ και $z=t/2$).

λ_1 fraction	P_{cr}
1/40	323.8
1/20	323.8
1/10	323.8
1/5	323.8
2/5	323.8

Πίνακας Β.2: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) για διάφορες τιμές του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λ_1 (περίπτωση αποχωρισμού με $a/b=2.0$, $A_d/A_p=0.12$ και $z=t/4$).

λ_1 fraction	P_{cr}
1/40	310.8
1/20	311.4
1/10	311.7
1/5	311.8
2/5	311.6

Πίνακας Β.3: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) για διάφορες τιμές του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λ_1 (περίπτωση αποχωρισμού με $a/b=1.0$, $A_d/A_p=0.12$ και $z=t/8$).

λ_1 fraction	P_{cr}
1/40	39.6
1/20	39.6
1/10	39.6
1/5	39.6
2/5	39.6

Πίνακας Β.4: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) για διάφορες τιμές του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λ_1 (περίπτωση αποχωρισμού με $a/b=2.0$, $A_d/A_p=0.04$ και $z=t/8$).

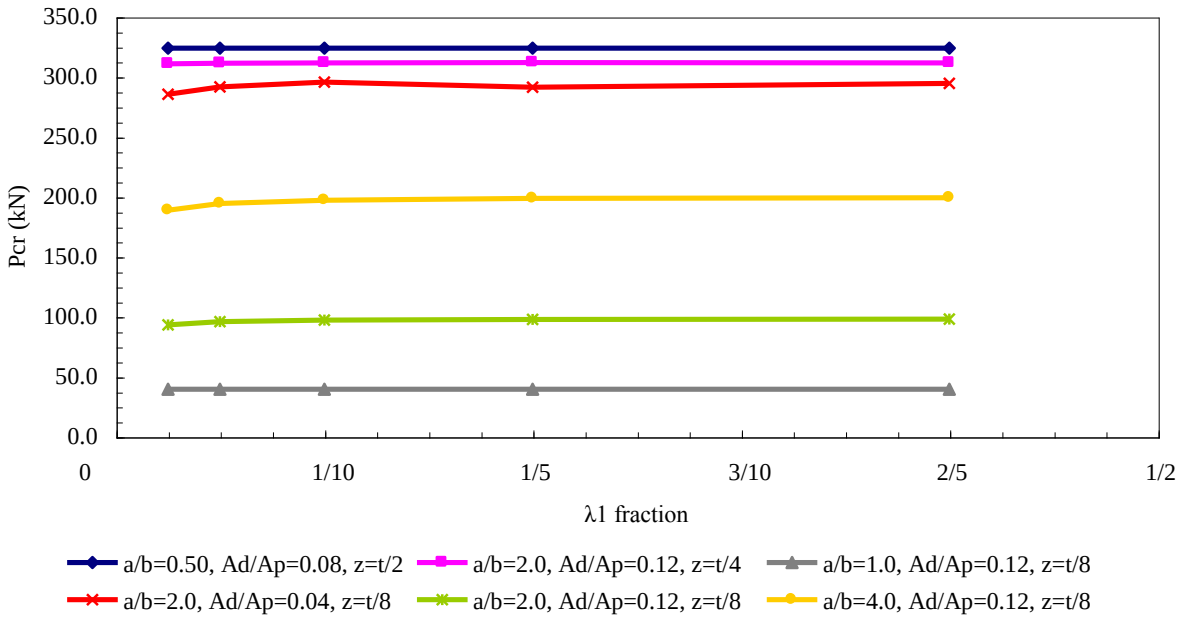
λ_1 fraction	P_{cr}
1/40	285.5
1/20	291.6
1/10	295.4
1/5	291.2
2/5	294.6

Πίνακας Β.5: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) για διάφορες τιμές του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λ_1 (περίπτωση αποχωρισμού με $a/b=2.0$, $A_d/A_p=0.12$ και $z=t/8$).

λ_1 fraction	P_{cr}
1/40	93.2
1/20	95.8
1/10	97.0
1/5	97.8
2/5	98.0

Πίνακας Β.6: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} (σε kN) για διάφορες τιμές του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λ_1 (περίπτωση αποχωρισμού με $a/b=4.0$, $A_d/A_p=0.12$ και $z=t/8$).

λ_1 fraction	P_{cr}
1/40	188.8
1/20	194.3
1/10	197.1
1/5	198.6
2/5	199.3



Σχήμα B.1: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} συναρτήσει του κλάσματος της πρώτης ιδιοτιμής λ_1.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Έλεγχος σύγκλισης καννάβου

Γ.1 Πρώτο παράδειγμα επαλήθευσης του τρόπου μοντελοποίησης

Στα πλαίσια της προσομοίωσης του παραδείγματος και δεδομένου ότι δεν παρέχεται από την πηγή κάποια πληροφορία σχετικά με το μέγεθος των στοιχείων, αυτό καθορίζεται μέσω ενός ελέγχου σύγκλισης. Συγκεκριμένα, το μοντέλο της πλάκας κατασκευάζεται για διάφορες τιμές της ακμής των στοιχείων (τύπου SOLID46), στο επίπεδο της πλάκας, [1] και μέσω της ανάλυσης ιδιοτιμών, υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} για κάθε περίπτωση. Επομένως, σχηματίζεται μία φθίνουσα καμπύλη μήκους ακμής - φορτίου, σύμφωνα με την οποία η τιμή του φορτίου τείνει να σταθεροποιηθεί. Κατά συνέπεια, η πρώτη από τις τιμές του μήκους της ακμής για τις οποίες δε μεταβάλλεται το φορτίο λυγισμού επιλέγεται για τα στοιχεία του μοντέλου.

Η παραπάνω διαδικασία ακολουθείται τόσο για την άθικτη κατάσταση της πλάκας όσο και στην περίπτωση αποχωρισμού. Ειδικά στη δεύτερη περίπτωση, ο έλεγχος γίνεται για τις ακραίες περιπτώσεις αποχωρισμού, δηλαδή για λόγους μήκους του αποχωρισμού προς εκείνο της πλάκας ίσους με 0.05 και 0.95. Η σχετική παραμετρική μελέτη πραγματοποιείται με βάση την πλάκα του παραδείγματος με ακολουθία στρώσεων [0°/0°/0°/0°] και περιλαμβάνει τον έλεγχο δέκα τιμών του μήκους της ακμής των στοιχείων. Τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στους Πίνακες Γ.1 και Γ.2, ενώ παρουσιάζονται διαγραμματικά στα Σχήματα Γ.1 - Γ.3, βάσει των οποίων σε κάθε περίπτωση, το μήκος της ακμής επιλέγεται ίσο με 5 mm.

Πίνακας Γ.1: Πίνακας αποτελεσμάτων ελέγχου σύγκλισης για την περίπτωση της άθικτης πλάκας.

μήκος ακμής	P_{cr}
mm	N/mm
2	10.467
4	10.505
6	10.583
8	10.741
10	11.140
12	11.450
14	11.984
16	12.977
18	15.023
20	19.864

[1] Λόγω της τοπολογίας του μοντέλου, τα στοιχεία που προκύπτουν είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα, οπότε το μέγεθός τους μπορεί να καθοριστεί βάσει της ακμής τους.

Πίνακας Γ.2: Πίνακας αποτελεσμάτων ελέγχου σύγκλισης για την περίπτωση αποχωρισμού με (α) l/a=0.05 [1] και (β) l/a=0.95. [1]

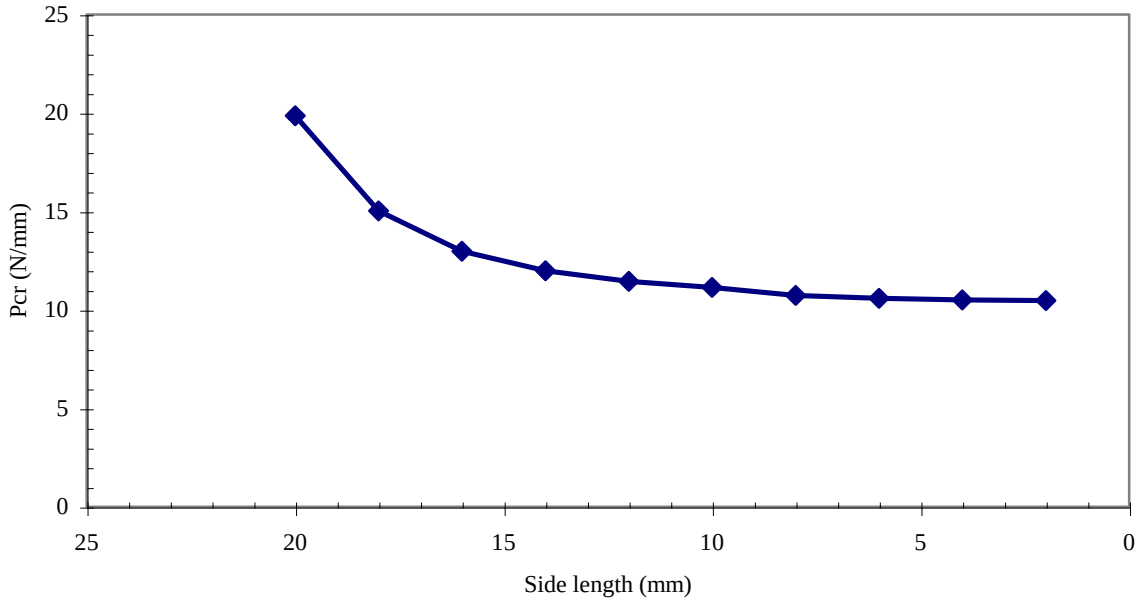
μήκος ακμής	P_{cr}
mm	N/mm
2	10.455
4	10.497
6	10.576
8	10.738
10	11.057
12	11.511
14	11.778
16	13.274
18	14.265
20	15.937

(α)

μήκος ακμής	P_{cr}
mm	N/mm
2	4.700
4	4.736
6	4.827
8	4.996
10	5.473
12	5.835
14	6.473
16	7.698
18	8.636
20	12.570

(β)

[1] Λόγος μήκους αποχωρισμού προς μήκος ακμής

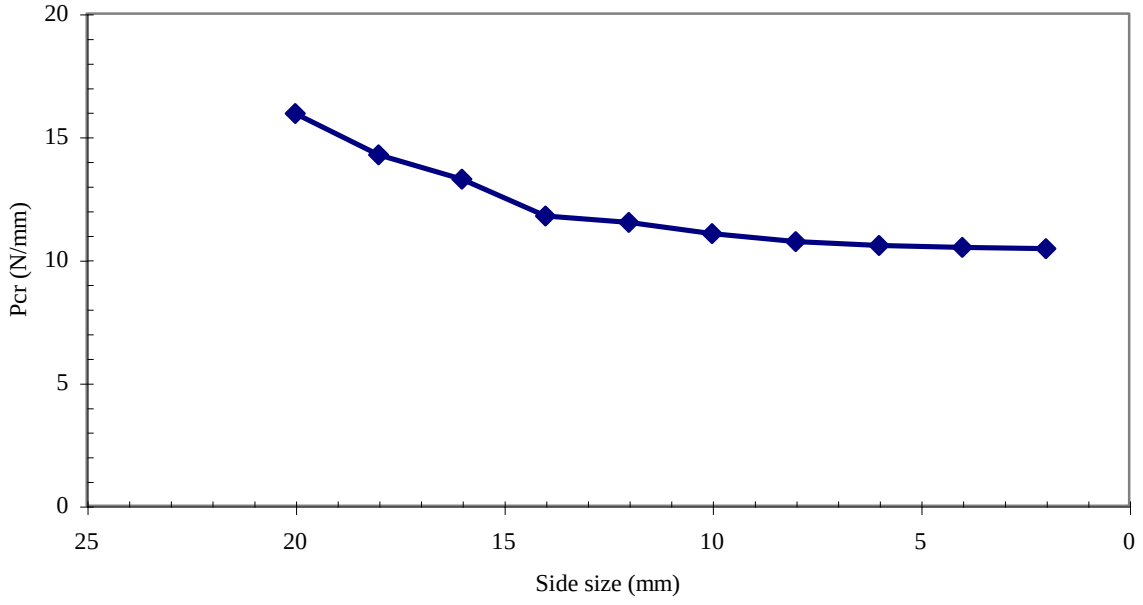


Σχήμα Γ.1: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} συναρτήσει του μήκους ακμής για την περίπτωση της άθικτης πλάκας.

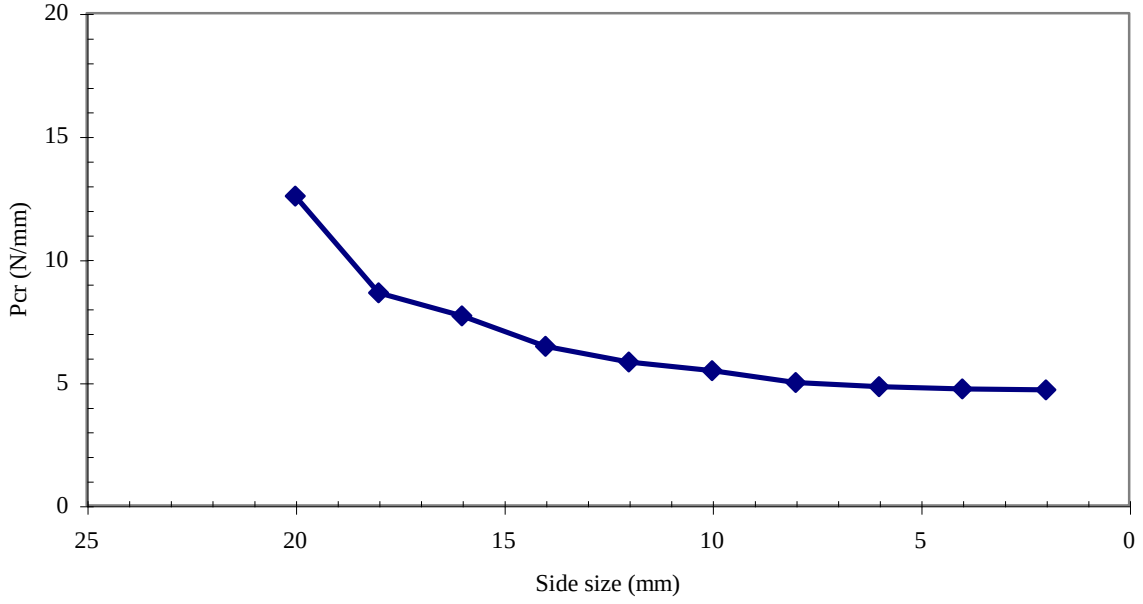
Γ.2 Άθικτη πλάκα για την παραμετρική μελέτη

Κατ' αντιστοιχία με τα παραπάνω, το μέγεθος των στοιχείων του μοντέλου της άθικτης πλάκας που κατασκευάζεται για τις ανάγκες της παραμετρικής μελέτης καθορίζεται βάσει ενός ελέγχου σύγκλισης του καννάβου. Επομένως, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της άθικτης πλάκας υπολογίζεται βάσει ενός τρισδιάστατου μοντέλου (στοιχεία τύπου SOLID45) και μέσω της ανάλυσης ιδιοτιμών, για έντεκα τιμές του μήκους της ακμής των στοιχείων. Τα

αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον Πίνακα Γ.3, ενώ με βάση το αντίστοιχο διάγραμμα του Σχήματος Γ.4, το μήκος της ακμής των στοιχείων ορίζεται ίσο με 20mm.



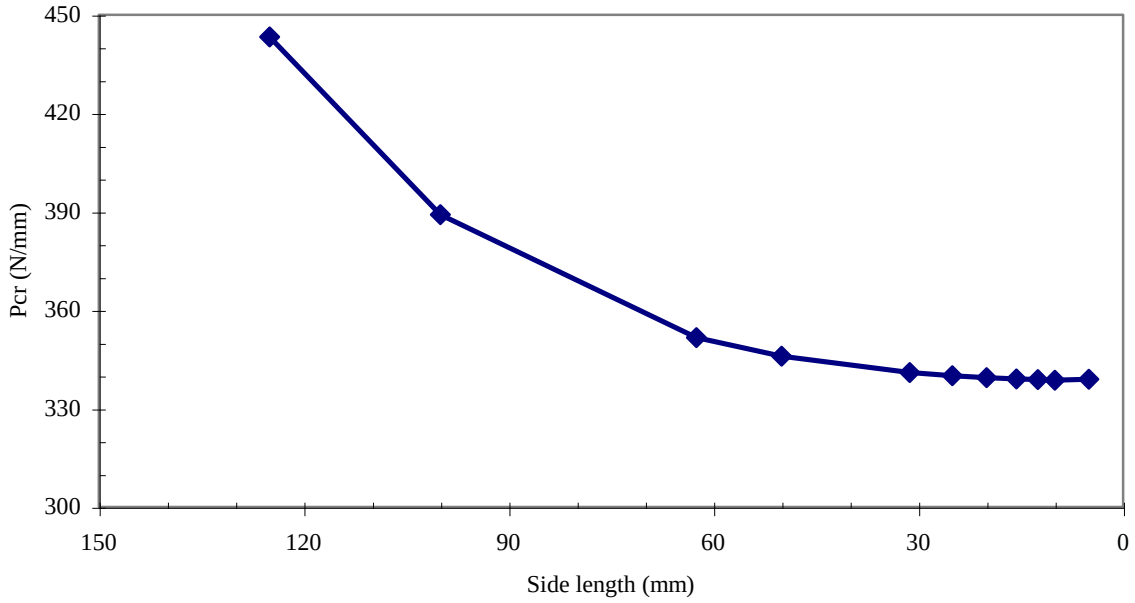
Σχήμα Γ.2: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} συναρτήσει του μήκους ακμής για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.05.



Σχήμα Γ.3: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} συναρτήσει του μήκους ακμής για την περίπτωση αποχωρισμού με l/a=0.95.

Πίνακας Γ.3: Πίνακας αποτελεσμάτων ελέγχου σύγκλισης για την περίπτωση της άθικτης πλάκας.

μήκος ακμής	P_{cr}
mm	N/mm
5	338.979
10	338.692
12.5	338.831
15.625	339.045
20	339.441
25	340.028
31.25	341.005
50	345.976
62.5	351.658
100	389.065
125	443.274



Σχήμα Γ.4: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} συναρτήσει του μήκους ακμής για την περίπτωση της άθικτης πλάκας.