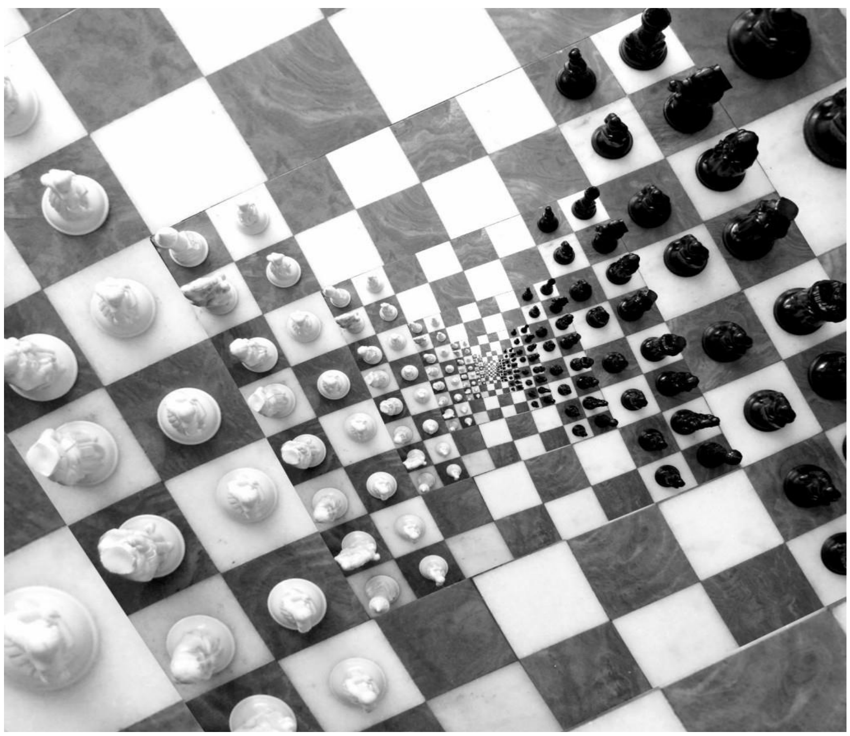
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ & ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ»

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Σίμος



Επιβλέπων Καθηγητής: Βλάσης Κουμούσης, Καθηγητής ΕΜΠ

Συνεπιβλέπων: Γεράσιμος Παναγιωτακόπουλος, Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ, MSc

ΑΘΗΝΑ ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2016

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία αποτελεί μια συνέχιση της προσπάθειας χρήσης της θεωρίας παιγνίων σε προβλήματα βελτιστοποίησης του σχεδιασμού των κατασκευών, η οποία ξεκίνησε από τον Γεράσιμο Παναγιωτακόπουλο στην εργασία «Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών με Χρήση Θεωρίας Παιγνίων» [1]. Ο βέλτιστος σχεδιασμός αποτελεί μια διαδικασία συμβιβασμού των επιθυμητών χαρακτηριστικών της κατασκευής, δηλαδή της ασφάλειας και λειτουργικότητας, με την οικονομικότητα. Η Θεωρία Παιγνίων, ως κατεξοχήν θεωρία ανάλυσης στρατηγικών, παρέχει πολύτιμες συμβουλές σχετικά με την αξιολόγηση καταστάσεων και τη λήψη αποφάσεων. Είναι σε θέση, λοιπόν, να αποτελέσει ένα πολύτιμο εργαλείο στα χέρια του μηχανικού, σε πολλά προβλήματα που απαιτούν κρίση και ιδιαίτερα σε εφαρμογές βελτιστοποίησης.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή σε έννοιες της θεωρίας παιγνίων, ούτως ώστε ο αναγνώστης να εξοικειωθεί με το αντικείμενό της. Αρχικά, εκτίθεται μια σειρά από βασικά παίγνια που παρουσιάζουν με απλό και σαφή τρόπο τη λογική της θεωρίας παιγνίων. Ακολούθως, γίνεται αναφορά σε βασικές έννοιες, όπως είναι η ωφέλεια και η Ισορροπία Nash. Το κεφάλαιο αυτό έχει αποκλειστικό στόχο να εξοικειώσει με τις βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων και δεν περιλαμβάνει μαθηματικές σχέσεις.

Το Κεφάλαιο 2 είναι περισσότερο προσανατολισμένο σε μαθηματικούς υπολογισμούς. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους είναι δυνατή η εύρεση Ισορροπίας Nash. Οι κυριότερες μέθοδοι που αναφέρονται είναι η διαδοχική διαγραφή κυριαρχούμενων στρατηγικών και η μέθοδος της πίσω επαγωγής, και αφορούν Ισορροπίες Nash με χρήση καθαρών στρατηγικών.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών, όπως αυτό ορίζεται και επιλύεται στην παρούσα εργασία και εν συνεχεία εξηγείται η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται, δηλαδή η Μέθοδος Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας. Η μέθοδος αυτή παρέχει τη δυνατότητα επιλογής αντικειμενικής συνάρτησης διαφορετικής από αυτήν του κλασικού προβλήματος του οικονομικότερου σχεδιασμού, ενώ παράλληλα επιτρέπει τη χρήση περιορισμών που αφορούν οποιαδήποτε πιθανή μεταβλητή σχεδιασμού, συμπεριλαμβανομένων και των οικονομικών πόρων. Σύμφωνα με τη Μέθοδο Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας, το διακριτό πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών προσομοιώνεται ως παίγνιο, με παίκτες τον αμυνόμενο, που «υπερασπίζεται» τον φορέα διαχειριζόμενος τις διαθέσιμες επιλογές διατομών και τον επιτιθέμενο, ο οποίος επιλέγει τον τρόπο που θα πλήξει το φορέα, ανάμεσα σε κάποια προκαθορισμένα σενάρια φόρτισης που περιγράφουν οι κανονισμοί ή και άλλες πρόσθετες φορτίσεις. Παράλληλα, η μέθοδος προσδιορίζει την ωφέλεια των δύο παικτών ανάλογα με τα αποτελέσματα (σε όρους τάσεων, μετακινήσεων, φορτικού συντελεστή και χρηματικών δαπανών) που προκύπτουν από τις κινήσεις τους. Το παίγνιο προσομοιώνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι πλήρως ανταγωνιστικό, αποκλείοντας κάθε δυνατότητα συνεργασίας μεταξύ των δύο παικτών. Εν συνεχεία, η επίλυση γίνεται με τη χρήση της θεωρίας παιγνίων και τη μέθοδο της πίσω -

επαγωγής. Με αυτό τον τρόπο εντοπίζονται ταυτόχρονα ο βέλτιστος σχεδιασμός της κατασκευής, καθώς και η κρίσιμη φόρτιση που θα δεχτεί στην Ισορροπία Nash.

Το Κεφάλαιο 4 αναφέρεται στις δυσκολίες που παρουσιάζονται λόγω του μεγάλου μεγέθους των προβλημάτων και προτείνει ως λύση τους ευρετικούς αλγορίθμους. Η εγγενής δυσκολία της μεθοδολογίας έγκειται στην συνδυαστική έκρηξη όλων των πιθανών συνδυασμών που συγκροτούν το χώρο των λύσεων, η πλήρης εξέταση των οποίων απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο και μνήμη υπολογιστή, σε σημείο που η χρήση της να καθίσταται ασύμφορη. Η αδυναμία αυτή οφείλεται στο ότι, ακόμα και για μικρού μεγέθους προβλήματα, οι πιθανές στρατηγικές που είναι διαθέσιμες στον αμυνόμενο είναι μεν πεπερασμένες, αλλά ταυτόχρονα πολυπληθείς. Η Θεωρία Παιγνίων προϋποθέτει τη διαδοχική εξέταση όλων των στρατηγικών, γεγονός που καθιστά ασύμφορη τη μέθοδο στην κλασική της μορφή. Για το λόγο αυτό γίνεται χρήση δύο ευρετικών αλγορίθμων (*heuristics*), οι οποίοι στοχεύουν στο να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση σε μικρό χρονικό διάστημα, εξετάζοντας κατάλληλα επιλεγμένο τμήμα του χώρου των λύσεων. Η λειτουργία τους, μολονότι περιορίζει τη βεβαιότητα εύρεσης της μαθηματικά βέλτιστης λύσης, παρέχει καλές προϋποθέσεις εύρεσης καλών λύσεων στη περιοχή της θεωρητικά βέλτιστης λύσης. Ο ένας εκ των αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν αφορά στην Προσομοιωμένη Ανόπτηση (*simulated annealing*), ενώ ο δεύτερος στη Σταδιακή Απομείωση (*gradual reduction*). Στην περίπτωση της Σταδιακής Απομείωσης, έγιναν ορισμένες επεμβάσεις για τη βελτίωση της απόδοσής της, ενώ αναπτύχθηκε μια σειρά τεχνικών που αποσκοπούν στην ενίσχυση της αποτελεσματικότητάς της.

Ο συνδυασμός της Μεθόδου Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας (*maximization of minimum utility*) και των ευρετικών αλγορίθμων, παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο διακριτής βελτιστοποίησης, ικανό για επίλυση πλήθους προβλημάτων. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται μια σειρά αριθμητικών εφαρμογών που αφορούν προβλήματα διαστασιολόγησης με ελαστική αλλά και πλαστική ανάλυση, τοπολογίας και ελαχιστοποίησης μετακίνησης με οικονομικούς περιορισμούς. Η εγκυρότητα της μεθόδου επαληθεύεται επιλύοντας ήδη γνωστά προβλήματα από τη βιβλιογραφία.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας και προτείνονται ιδέες για μελλοντική έρευνα. Τόσο η Μέθοδος Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας όσο και οι ευρετικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για την επιτάχυνση της μεθόδου έχουν λειτουργήσει ικανοποιητικά. Έχει γίνει προσπάθεια βελτίωσης τόσο της ταχύτητας των αλγορίθμων, όσο και της αποτελεσματικότητας αυτού της Σταδιακής Απομείωσης με την χρήση των τεχνικών που αναπτύχθηκαν, η οποία κρίνεται επιτυχής βάσει των αποτελεσμάτων. Η προτεινόμενη μεθοδολογία μπορεί να λύσει κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης, εφόσον το πρόβλημα αυτό έχει οριστεί κατάλληλα. Ο φορέας προς βελτιστοποίηση επιτρέπεται να είναι δικτύωμα, πλαίσιο ή οποιαδήποτε άλλης μορφής. Παράλληλα, η προτεινόμενη μεθοδολογία καθιστά δυνατή τη μελέτη πλήθους σεναρίων φόρτισης.

Abstract

The present MSc Thesis is a continuation of the attempt to use Game Theory in structural optimization which began by Gerasimos Panayiotakopoulos in his MSc thesis titled “Structural Optimization using Game Theory” [1]. Structural optimization is a procedure of compromises between the desired structural attributes, that is, safety and functionality on the one side, and cost effectiveness on the other. Game theory, as purely strategic analysis theory, provides with valuable advice regarding the evaluation of conditions and decision making. It is therefore possible for game theory, if used in an appropriate way, to become a useful tool in the hands of an engineer, both in structural optimization and in other applications that require calculated decisions.

The remaining work is organized as follows:

In Chapter 1 an introduction to game theory is taking place, so that the readers can familiarize themselves with its objective. At first, a series of basic games is displayed, that present the logic of Game Theory in a simple and comprehensible way. Subsequently, the most basic concepts are explained, such as utility and Nash Equilibrium. This chapter’s exclusive aim is to get the reader accustomed to the basic concepts of game theory.

Chapter 2 is more mathematically oriented. In this chapter, the various ways to discover a Nash Equilibrium are presented. The covered methods, are the iterative deletion of dominated alternatives and the backward induction, as far as pure strategy equilibria are concerned.

In Chapter 3 the structural optimization problem addressed in the present thesis is discussed and after that the methodology used is described, named Maximization of Minimum Utility Method. This method allows a wider choice of objective function, surpassing the limits of the classic problem of the most economic design, while at the same time allowing the usage of limitations regarding any design variable, funding included. According to the Maximization of Minimum Utility Method, the discrete problem of structural optimization is simulated as a game, played by the defending player, who “defends” the structure, managing the cross sections at hand, and the attacking player, who decides upon the way to attack the structure, by choosing among some predefined load combinations, usually described by code regulations. Furthermore, the method defines the utility value of each player, depending on the results (in terms of stresses, displacements, plastic collapse load factor and funding) of their combined decisions. The game is simulated as a zero sum game, in order to make it fully competitive, excluding any possibility of cooperation between the players. The game is then solved using game theory and the backward induction method. In this way both the optimal design of the given structure and the critical loading case at Nash Equilibrium are simultaneously identified.

Chapter 4 refers to difficulties presented due to the great size of most problems and suggests heuristic algorithms as a solution. The inherent problem of the method lies in the combinatorial explosion of the set of the possible alternatives that define the solution space, the accurate analysis of which demands huge computational time and computer memory, rendering

the method inefficient. This flaw is due to the fact that even in small scale problems, the number of possible strategies available to the defending player is just too big to handle. Game theory requires sequential analysis of each and every strategy, which renders inefficient the above method in its classic form. For this reason two heuristic algorithms are being used, aiming to identify the optimal solution by examining only a small fraction of the solution space in a short time period. This comes at the cost of giving up the certainty of finding the mathematically optimal solution, but preserving sufficient conditions for finding satisfactory solutions in the area of the theoretically optimal solution. The first of the algorithms in use is the well-known Simulated Annealing algorithm, whereas the second is the Gradual Reduction algorithm. In case of the latter algorithm, some changes took place in order to improve its efficiency, while a series of technics was developed that aim to enhance its effectiveness.

By combining the maximization of minimum utility method with heuristic algorithms, a powerful discrete optimization tool emerges, which is capable of solving numerous kinds of optimization problems. A code is written in Java, containing both the maximization of minimum utility method and the heuristic algorithms employed. The code was used in order to solve a number of structural optimization problems, which are discussed in chapter 5. These problems regard weight minimization considering either elastic or plastic analysis, topology optimization or displacement minimization with budget constraints. The validity of the suggested method is verified by solving already known problems from references.

In Chapter 6 the conclusions of the thesis are presented, as well as some ideas for future work. Both the maximization of minimum utility method and the heuristic algorithms employed to accelerate the method have worked successfully. The suggested methodology can be applied to any kind of structural optimization problem. The attempt to improve the speed of both algorithms as well as the effectiveness of the Gradual Reduction algorithm by using techniques developed, is considered successful judging by the results. The suggested method can be applied in any kind of structure, trusses, frames or any other structure, provided that the corresponding solver is available. Moreover, the method can also apply to structures with several loading cases.

Περιεχόμενα

Πρόλογος και Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία συνεχίζει την απόπειρα αξιοποίησης ενός πολύ ενδιαφέροντος κλάδου, όπως είναι η Θεωρία Παιγνίων, στην επιστήμη της ανάλυσης των κατασκευών. Φιλοδοξία του έργου αυτού είναι να παγιώσει τις αρχές που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενη εργασία και να διερευνήσει τρόπους ώστε η προτεινόμενη μέθοδος βελτιστοποίησης να γίνει ελκυστικότερη από άποψη χρόνου και αποτελεσμάτων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα Καθηγητή κ. Β. Κουμούση, ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία να συνεχίσω ένα έργο με εξαιρετικά μεγάλο ενδιαφέρον, παρέχοντάς μου χρήσιμες ιδέες και προτάσεις για βιβλιογραφικές αναζητήσεις.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον αγαπητό φίλο και συνάδελφο Γεράσιμο Παναγιωτακόπουλο, ο οποίος είχε καθοριστική συμβολή στην υλοποίηση της εργασίας, προσφέροντάς μου αφειδώς τις γνώσεις και την εμπειρία του πάνω στο συγκεκριμένο θέμα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς, τα αδέλφια και τους φίλους μου για την συμπαράσταση και την αγάπη τους.

Στους δικούς μου ανθρώπους

1 Λίγα λόγια για τη Θεωρία Παιγνίων

Η Θεωρία Παιγνίων είναι ο κλάδος που ασχολείται με την ανάλυση και αξιολόγηση των παιγνίων, υπό την προϋπόθεση πως οι παίκτες συμπεριφέρονται λογικά. Ως παίγνιο θεωρείται μια οποιαδήποτε κατάσταση στην οποία δύο ή και περισσότερα άτομα, που αποκαλούνται παίκτες, καλούνται να λάβουν μία ή περισσότερες αποφάσεις, ανάλογα με τις οποίες θα συμβεί και ένα γεγονός, το οποίο έχει διαφορετική αξία για κάθε παίκτη. Ο ορισμός αυτός διακρίνει την έννοια «παίγνιο» από τον όρο «παιχνίδι», ο οποίος χρησιμοποιείται πιο συχνά στην καθημερινή ζωή και έχει κυρίως ψυχαγωγική σημασία.

1.1 Απόλυτα λογική συμπεριφορά

Σε αντίθεση με άλλες επιστήμες, η Θεωρία Παιγνίων δεν στοχεύει στο να κρίνει αυτές καθαυτές τις επιλογές των παικτών. Έχει σχολιαστεί χαρακτηριστικά πως «η Θεωρία Παιγνίων θεωρεί απολύτως αποδεκτό για κάποιον παίκτη να προτιμάει την καταστροφή του σύμπαντος από το να κουνήσει το δάχτυλό του» [2].

Απαραίτητη προϋπόθεση ώστε η Θεωρία Παιγνίων να έχει σωστή λειτουργία και να αποδίδει επαρκώς, είναι η «απολύτως λογική» συμπεριφορά των παικτών. Αυτή η λογική συμπεριφορά καθορίζεται και διαμορφώνεται από κάποιους απαράβατους κανόνες.

Πρωταρχική σημασία έχει η συνέπεια στις αποφάσεις που παίρνει το κάθε άτομο το οποίο συμμετέχει στο παίγνιο. Αν δηλαδή προτιμάει το γεγονός Α από το γεγονός Β και ταυτόχρονα προτιμάει το γεγονός Β από το γεγονός Γ, τότε αναγκαστικά θα προτιμάει το Α από το Γ. Το τι αντιπροσωπεύουν τα παραπάνω γεγονότα δεν επηρεάζει τη θεωρία, αρκεί να ακολουθεί το άτομο μια συνεπή συμπεριφορά στις προτιμήσεις του ως προς τα γεγονότα αυτά. Η συμπεριφορά αυτή των παικτών ασφαλώς δεν συνάδει με την πραγματικότητα όπου η λήψη αποφάσεων των ατόμων επηρεάζεται από ηθικές, κοινωνικές, εθνικές, και λοιπές αρχές που καθορίζουν το πλαίσιο της συμπεριφοράς τους.

1.2 Μερικά βασικά παίγνια

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούν ενδεικτικά ορισμένα βασικά παίγνια, ώστε με απλό αλλά σαφή τρόπο να παρουσιαστεί η συλλογιστική της θεωρίας παιγνίων. Τα παίγνια αυτά διεξάγονται μεταξύ 2 παικτών, της Alice και του Bob.

1.2.1 Matching Pennies

Στο παίγνιο αυτό η Alice και ο Bob επιλέγουν ταυτόχρονα μια πλευρά νομίσματος, κορώνα ή γράμματα. Αν επιλέξουν την ίδια πλευρά, τότε κερδίζει η Alice. Αν επιλέξουν διαφορετική πλευρά, τότε κερδίζει ο Bob.

Ο Πίνακας 1.1 αποτελεί την αναπαράσταση σε κανονική μορφή του παιγνίου Matching Pennies. Αποτελεί τον λεγόμενο **πίνακα απολαβών** (*payoff table*) του παιγνίου. Ο πίνακας απολαβών συμπληρώνεται ως εξής: Οι επιλογές της Alice συμπληρώνουν το 1^{o} στοιχείο του κάθε αποτελέσματος και του Bob το 2^{o}. Έτσι, ορίζεται μονοσήμαντα ένα αποτέλεσμα απολαβών $(a\ , b)$, εκ των οποίων στην Alice αντιστοιχεί το a και στον Bob το b. Η επιλογή του κάθε παίκτη καλείται και **στρατηγική** ή **κίνηση**, ενώ τα πιθανά αποτελέσματα στα οποία ενδέχεται να καταλήξουν οι παίκτες καλούνται **ενδεχόμενα**.

Alice\Bob	Κορώνα	Γράμματα
Κορώνα	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Γράμματα	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Πίνακας 1.1: Πίνακας απολαβών για το «Matching Pennies»

Στο συγκεκριμένο παίγνιο υπάρχει πλήρης ανταγωνισμός μεταξύ των παικτών και δεν προκύπτει κάποια κατάσταση που να αφήνει και τους δυο ικανοποιημένους. Το παίγνιο αυτό μπορεί να δείχνει πολύ απλό, παραλλαγές του όμως παίζονται και στην πραγματικότητα.

Για παράδειγμα, μια ξενοδοχειακή επιχείρηση σε ένα απομακρυσμένο τουριστικό νησί που επιλέγει μια ημέρα να μην κόβει αποδείξεις και οι ελεγκτές της εφορίας που επιλέγουν μια ημέρα που θα κάνουν έλεγχο, μπορεί να θεωρηθεί ότι παίζουν μια παραλλαγή του Matching Pennies. Οι ελεγκτές κερδίζουν (ή αντίστοιχα η επιχείρηση χάνει) όταν οι δύο ημέρες συμπίπτουν, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση κερδίζει η επιχείρηση (και αντίστοιχα χάνει το κράτος).

1.2.2 Rock – Paper – Scissors

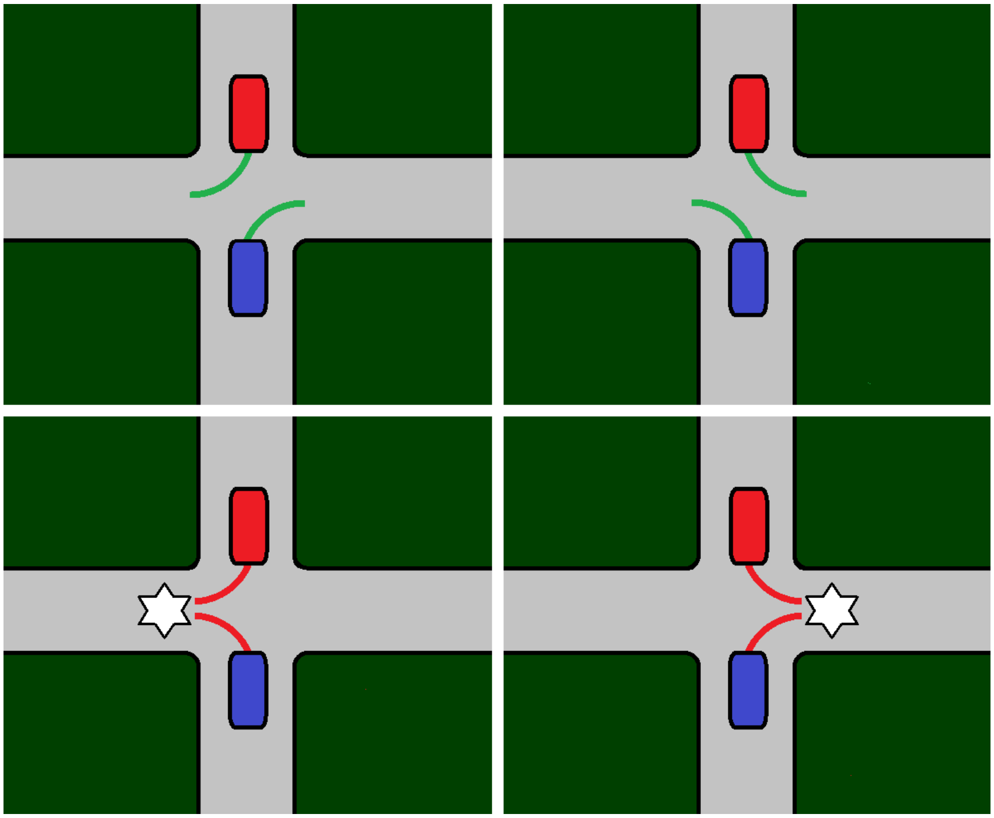
Ίσως το πιο γνωστό παίγνιο είναι το «πέτρα – ψαλίδι – χαρτί», το οποίο δίνει τρεις επιλογές σε κάθε παίκτη, με απολαβές όπως δείχνει ο Πίνακας 1.2. Σύμφωνα με τους κανόνες, η πέτρα σπάει το ψαλίδι, το ψαλίδι κόβει το χαρτί και το χαρτί τυλίγει την πέτρα, ενώ αν οι δύο παίκτες κάνουν την ίδια επιλογή, τότε το αποτέλεσμα είναι ισόπαλο.

Alice\Bob	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Ψαλίδι	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
Χαρτί	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

Πίνακας 1.2: Πίνακας απολαβών για το «πέτρα – ψαλίδι – χαρτί»

1.2.3 Driving Game

Στο παίγνιο αυτό η Alice και ο Bob είναι δύο οδηγοί, των οποίων τα αυτοκίνητα βρίσκονται το ένα απέναντι από το άλλο σε μια διασταύρωση και πρέπει να συνεννοηθούν για το πώς θα περάσουν. Τα δύο οχήματα θα κινηθούν ταυτόχρονα. Αν κάνουν και οι δύο δεξιά ή και οι δύο αριστερά, τότε θα καταφέρουν να περάσουν με ασφάλεια. Αν ο ένας στρίψει δεξιά και ο άλλος αριστερά ή το αντίστροφο, θα συγκρουστούν. Ο Πίνακας 1.3 συνοψίζει τα πιθανά αποτελέσματα του παιγνίου αυτού. Παρατηρείται πως σε αντίθεση με τα παίγνια Matching Pennies και Rock – Paper – Scissors, εδώ οι δύο παίκτες δεν ανταγωνίζονται αλλά προσπαθούν να συνεργαστούν με τον συμπαίκτη τους, ώστε να κερδίσουν και οι δύο (*win-win situation*).



Σχήμα 1.1: Τα αποτελέσματα ανάλογα με τις αποφάσεις των 2 παικτών για το «Driving game»

Υπάρχουν δύο ζεύγη στρατηγικών, τα (αριστερά, αριστερά), (δεξιά, δεξιά), τα οποία αφήνουν ικανοποιημένους και τους δύο παίκτες.

Alice\Bob	Αριστερά	Δεξιά
Αριστερά	$(1, 1)$	$(-1, -1)$
Δεξιά	$(-1, -1)$	$(1, 1)$

Πίνακας 1.3: Πίνακας απολαβών για το «Driving Game»

1.2.4 Chicken

Όπως και στο «Driving Game», έτσι και στο «Chicken», η Alice και ο Bob είναι δύο οδηγοί που όμως αυτή τη φορά ανταγωνίζονται για το ποιος θα περάσει πρώτος από ένα στενό πέρασμα. Οι δύο παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα να οδηγήσουν είτε γρήγορα, είτε αργά (δηλαδή να δειλιάσουν, εξ ου και η ονομασία chicken). Αν δειλιάσουν και οι δύο, τότε αμφότεροι καταφέρνουν να περάσουν ανέπαφοι. Αν οδηγήσουν και οι δύο γρήγορα, θα συγκρουστούν. Αν ο ένας οδηγήσει γρήγορα και ο άλλος δειλιάσει, τότε αυτός που οδήγησε γρήγορα θα περάσει πρώτος και αυτός που δείλιασε θα αναγκαστεί να περιμένει, όπως δείχνει και ο Πίνακας 1.4.

Alice\Bob	Αργά	Γρήγορα
Αργά	$(3, 3)$	$(0, 4)$
Γρήγορα	$(4, 0)$	$(-1, -1)$

Πίνακας 1.4: Πίνακας απολαβών για το «Chicken»

1.2.5 Battle of the Sexes

Στο παίγνιο αυτό η Alice και ο Bob είναι ένα παντρεμένο ζευγάρι στο μήνα του μέλιτος, που συζητά για το πώς θα περάσει το απόγευμά του. Η Alice προτείνει να πάνε να παρακολουθήσουν έναν χορό, ενώ ο Bob προτείνει έναν αγώνα μποξ. Το μεσημέρι το ζευγάρι χάνεται μέσα στην πολυκοσμία και δεν μπορεί να επικοινωνήσει, οπότε η Alice και ο Bob πρέπει να αποφασίσουν ξεχωριστά για το πού θα συναντηθούν. Πρώτη προτεραιότητα και των δύο είναι να περάσουν το απόγευμα μαζί, ενώ δεύτερη προτεραιότητα αποτελεί να συναντηθούν στον χώρο που προτιμούν. Ο Πίνακας 1.5 δίνει τις απολαβές που προκύπτουν, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω επιθυμίες των δύο παικτών.

Alice\Bob	Χορός	Μποξ
Χορός	$(2,1)$	$(0,0)$
Μποξ	$(0,0)$	$(1,2)$

Πίνακας 1.5: Πίνακας απολαβών για το «Battle of the Sexes»

1.2.6 Prisoners' Dilemma

Το «Δίλημμα των Φυλακισμένων» (*Prisoners' Dilemma*) αποτελεί ίσως το πιο διάσημο και πολυσυζητημένο παίγνιο:

"Ο Bob και η Alice έχουν διαπράξει ένα έγκλημα και έχουν συλληφθεί, όμως οι δικαστές δε διαθέτουν τα απαιτούμενα στοιχεία για να τους καταδικάσουν. Γι' αυτό το λόγο δίνεται στον κάθε παίκτη ξεχωριστά η ευκαιρία να ομολογήσει καταδίδοντας το συνένοχό του (εγωιστική συμπεριφορά). Αν ο ένας εκ των δύο ομολογήσει και ο άλλος μείνει πιστός στο συνένοχό του (αλτρουιστική συμπεριφορά), τότε αυτός που ομολόγησε αποφυλακίζεται ενώ αυτός που μένει πιστός καταδικάζεται με ποινή φυλάκισης 10 ετών. Αν και οι δύο ομολογήσουν, τότε αντιμετωπίζουν ποινή φυλάκισης 9 ετών έκαστος, ενώ αν κανείς δεν ομολογήσει, αντιμετωπίζουν ποινή φυλάκισης ενός έτους. Επισημαίνεται πως οι κατηγορούμενοι επιδιώκουν αποκλειστικά να ελαχιστοποιήσουν το χρόνο που θα περάσουν στη φυλακή."

Προσεγγίζοντας το παίγνιο από την πλευρά της Alice, γίνεται απόπειρα να προσδιοριστεί η καλύτερη απάντησή της σε κάθε πιθανή κίνηση του Bob. Αν η Alice γνώριζε εκ των προτέρων πως ο Bob θα την καταδώσει, τότε είναι καλύτερο γι' αυτήν επίσης να τον καταδώσει, καθώς σε αυτή την περίπτωση θα φυλακιστεί για 9 χρόνια, ενώ αν δείξει αλτρουισμό θα φυλακιστεί για 10 χρόνια. Ο ίδιος συλλογισμός ισχύει και στην περίπτωση που η Alice γνωρίζει εκ των προτέρων πως ο Bob θα συμπεριφερθεί αλτρουιστικά. Ξανά η Alice θα πρέπει να επιλέξει να καταδώσει τον Bob, καθώς προτιμάει να αφεθεί ελεύθερη από το να φυλακιστεί για 1 χρόνο. Κατά συνέπεια, ανεξαρτήτως του τι θα κάνει ο Bob, η Alice είναι προτιμότερο να ομολογήσει. Καθώς ο Bob σκέφτεται το ίδιο λογικά, θα καταλήξει στο ίδιο συμπέρασμα. Οπότε, οι δύο παίκτες θα καταδώσουν ο ένας τον άλλο, καταλήγοντας να δεχθούν ποινή φυλάκισης 9 ετών έκαστος.

Ο Πίνακας 1.6 αποτελεί την κανονική μορφή του παιγνίου, η οποία οδηγεί στο εξής ενδιαφέρον συμπέρασμα: εάν οι δύο παίκτες **συνεργάζονταν** και συμπεριφερόντουσαν αλτρουιστικά, τότε θα φυλακίζονταν μόλις για 1 χρόνο ο καθένας, γεγονός που αναμφισβήτητα θα προτιμούσαν και οι δύο.

Alice\Bob	Εγωισμός	Αλτρουισμός
Εγωισμός	$(-9,-9)$	$(0,-10)$
Αλτρουισμός	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

Πίνακας 1.6: Πίνακας Απολαβών για το «Prisoners' Dilemma»

1.3 Κατηγοριοποίηση Παιγνίων

Τα παίγνια μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με τη **συμπεριφορά** που αναμένεται να έχουν οι παίκτες. Έτσι, διακρίνονται σε:

- **Παίγνια Σταθερού Αθροίσματος:** Σε αυτά τα παίγνια, για καθένα από τα πιθανά ενδεχόμενα, το άθροισμα των απολαβών των δύο παικτών είναι κάποιος σταθερός αριθμός c. Και σε αυτή την περίπτωση οι δύο παίκτες ανταγωνίζονται, για το ποιος θα πάρει καλύτερο μερίδιο του c. Παρόλα αυτά, ενδέχεται να υπάρχουν ενδεχόμενα (π.χ. «δίκαιη» μοιρασιά από $\frac{c}{2}$ στον κάθε παίκτη) που να ικανοποιούν μερικώς και τους δύο παίκτες.
- **Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος:** Στα παίγνια που ανήκουν στην κατηγορία αυτή, για καθένα από τα πιθανά ενδεχόμενα, το άθροισμα των απολαβών των δύο παικτών είναι 0. Τα παίγνια αυτά θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως υποκατηγορία των παιγνίων σταθερού αθροίσματος, όμως έχουν ιδιαίτερη σημασία και για το λόγο αυτό αποτελούν ξεχωριστή κατηγορία. Τέτοιου είδους παίγνια χαρακτηρίζονται και ως «πλήρως ανταγωνιστικά», καθώς το κέρδος του ενός παίκτη εξισώνεται με την απώλεια του άλλου. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν παίγνια όπως το Matching Pennies και το Rock – Paper – Scissors. Η πλήρως ανταγωνιστική φύση τους τα καθιστά ευκολότερα στην ανάλυση και αποκλείει την εμφάνιση παραδόξων (βλ. Prisoners' Dilemma). Επιπλέον, είναι η κατηγορία παιγνίων η οποία έχει αναλυθεί περισσότερο, ενώ τα περισσότερα σημαντικά θεωρήματα προέκυψαν από τη μελέτη των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος και στη συνέχεια επεκτάθηκαν ώστε να αφορούν περισσότερες κατηγορίες.
- **Παίγνια μη Σταθερού Αθροίσματος:** Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα παίγνια στα οποία το άθροισμα των απολαβών των παικτών δεν είναι σταθερό για κάθε ενδεχόμενο. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα περισσότερα παίγνια, όπως το Driving Game, το Battle of the Sexes και το Prisoners' Dilemma. Η αναμενόμενη συμπεριφορά των παικτών ποικίλλει. Τις περισσότερες φορές η συνεργασία είναι επιθυμητή, δεν είναι όμως πάντα και εφικτή.

1.4 Η έννοια της ωφέλειας

Ο ορισμός της ωφέλειας (*utility*) αποδίδεται στον σπουδαίο μαθηματικό John von Neumann και είναι ίσως από τις βασικότερες έννοιες της θεωρίας παιγνίων, καθώς διευκολύνει σημαντικά το χειρισμό και την ανάλυσή τους. Δημιουργήθηκε με στόχο να μετρήσει την ικανοποίηση που αποκτά ένα άτομο ως απόρροια κάποιου αποτελέσματος.

Πιο συγκεκριμένα, η ωφέλεια είναι μια αυθαίρετη κλίμακα μέτρησης της ικανοποίησης, η οποία στοχεύει να ποσοτικοποιήσει την επίδραση ενός γεγονότος στην ευτυχία κάποιου ατόμου. Όπως κάθε μέγεθος έτσι και η ωφέλεια έχει τη δική της μονάδα μέτρησης, το «$util$». Βέβαια, τα $utils$ δεν έχουν φυσική υπόσταση, αλλά χρησιμεύουν ως μονάδες μέτρησης της ωφέλειας. Η αντιστοίχιση ενός μεγέθους σε ωφέλεια που αποκομίζει κάποιο άτομο, αποτελεί τη συνάρτηση ωφέλειας (*utility function*) του ατόμου. Για παράδειγμα, στο «δίλημμα των φυλακισμένων» που παρουσιάστηκε παραπάνω, η αντιστοίχιση του χρόνου φυλάκισης σε ωφέλεια θα μπορούσε να δίνεται από τον τύπο $u(t) = -t$, όπου t ο χρόνος φυλάκισης και $u(t)$ η ωφέλεια που προκύπτει από τη φυλάκιση.

Σύμφωνα με τη Θεωρία Παιγνίων, οι άνθρωποι, έστω και χωρίς να το συνειδητοποιούν, προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τη συνάρτηση ωφέλειάς τους. Πολλές φορές αυτό συμπίπτει με άλλους προφανείς στόχους. Στο δίλημμα των φυλακισμένων και πάλι, η επιδίωξη των δυο παικτών να φυλακιστούν για όσο το δυνατό μικρότερο χρονικό διάστημα ισοδυναμεί με την προσπάθεια μεγιστοποίησης της συνάρτησης ωφέλειάς τους, εφόσον η συνάρτηση $u(t) = -t$ οδηγεί τον κάτοχό της στο να προτιμάει αυστηρά τα λιγότερα χρόνια φυλάκισης από τα περισσότερα. Παρόλα αυτά, δεν έχει ιδιαίτερη σημασία εάν το ένα έτος φυλάκισης αντιστοιχεί σε $1util$ ή σε $100\,utils$, ούτε εάν η συνάρτηση ωφέλειας είναι η συγκεκριμένη ή κάποια παρεμφερής. Το παίγνιο θα μοντελοποιείται με ακρίβεια, αρκεί πάντα τα λιγότερα χρόνια φυλάκισης να δίνουν μεγαλύτερη ωφέλεια από τα περισσότερα.

Σημαντικό χαρακτηριστικό της συνάρτησης ωφέλειας αποτελεί το γεγονός πως είναι **μη συγκρίσιμη** για διαφορετικά άτομα. Καθώς ο βαθμός της ικανοποίησης που πηγάζει από ένα γεγονός είναι εντελώς διαφορετικός για διαφορετικά άτομα, δεν έχει κανένα νόημα να συγκριθούν μεταξύ τους οι συναρτήσεις ωφέλειας του Bob και της Alice. Εξάλλου αυτό δεν είναι απαραίτητο, καθώς στα περισσότερα παίγνια ο κάθε παίκτης προσπαθεί να μεγιστοποιήσει τη δική του συνάρτηση ωφέλειας, οπότε καμία απόφασή του δε θα προκύψει από εσφαλμένη σύγκριση ωφελειών διαφορετικών ατόμων. Εξαίρεση (σε θεωρητικό επίπεδο τουλάχιστον) ίσως αποτελεί η περίπτωση των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος όπου, όπως αναφέρθηκε, το όφελος του ενός παίκτη ισούται με την απώλεια του άλλου, οπότε θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι οι ωφέλειες των παικτών συσχετίζονται. Παρόλα αυτά, αυτός ο πλήρης ανταγωνισμός επιτρέπει την ανάλυση της ωφέλειας από την σκοπιά του ενός παίκτη και αναγωγή της ως ίση και αντίθετη στην ωφέλεια του αντίπαλου παίκτη.

1.5 Διάταξη στην κλίμακα ωφέλειας

Παρόλο που η κλίμακα ωφέλειας είναι εντελώς αυθαίρετη, για λόγους συνέπειας και λογικής συμπεριφοράς, είναι αναγκαίο τα διάφορα γεγονότα να είναι διατεταγμένα σε αυτήν ανάλογα με τις προτιμήσεις του ατόμου. Αν η κλίμακα ωφέλειας αντιπροσωπεύει ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε είναι λογικό το a να αντιστοιχεί στο χειρότερο δυνατό γεγονός και το b στο καλύτερο δυνατό. Το ερώτημα που προκύπτει είναι: με ποιόν τρόπο θα αξιολογείται οποιοδήποτε άλλο ενδιάμεσο γεγονός;

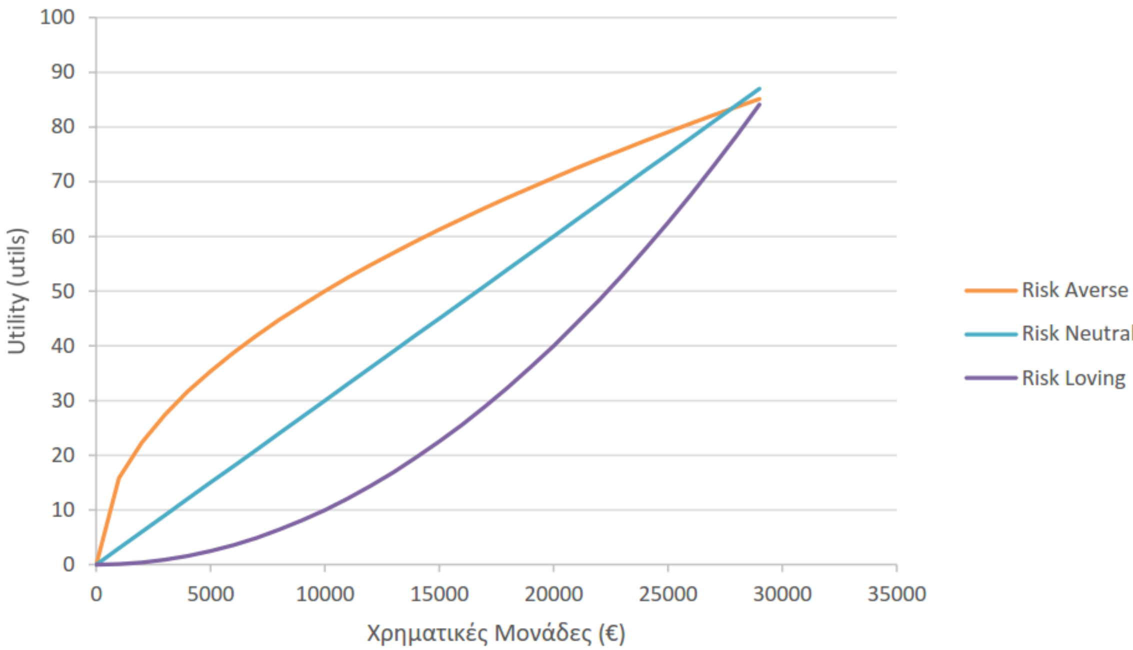
Έστω ότι για στην κλίμακα ωφέλειας κάποιου ατόμου, το χειρότερο γεγονός αντιστοιχεί σε ωφέλεια $0\ utils$, το καλύτερο γεγονός σε ωφέλεια $100\ utils$ και πως υπάρχει γεγονός που θα αποφέρει στο άτομο ωφέλεια $50\ utils$. Γίνεται η υπόθεση πως το άτομο, αντί για το συγκεκριμένο γεγονός με ωφέλεια $50\ utils$, μπορεί να επιλέξει ένα λαχείο ώστε, με πιθανότητα p να του συμβεί το καλύτερο δυνατό γεγονός και να λάβει $100\ utils$, ενώ με πιθανότητα $1-p$ να του συμβεί το χειρότερο δυνατό γεγονός και να κερδίσει $0\ utils$. Όσο η πιθανότητα p είναι μικρότερη από 50%, είναι λογικό το άτομο να προτιμάει το ενδιάμεσο γεγονός από το λαχείο. Όταν όμως η πιθανότητα p ξεπεράσει το 50%, τότε το άτομο θα προτιμήσει το λαχείο από το ενδιάμεσο γεγονός. Για πιθανότητα ακριβώς 50%, το άτομο είναι αδιάφορο μεταξύ του γεγονότος και του λαχείου. Το σημείο στο οποίο το άτομο αλλάζει την απόφασή του απότομα από «όχι» σε «ναι» προσδιορίζει και την πραγματική ωφέλεια που δίνει στο άτομο το συγκεκριμένο γεγονός.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση που το άτομο είναι αδιάφορο ως προς το ρίσκο (*risk neutral*), δηλαδή ενεργεί αδιαφορώντας μεταξύ της επιλογής ενός βέβαιου γεγονότος και ενός πιθανοτικού με το ρίσκο που αυτό συνεπάγεται.

Υπάρχουν όμως και άτομα τα οποία είναι απρόθυμα να ρισκάρουν και προτιμούν πιο σίγουρες λύσεις. Αυτό είναι ιδιαίτερα σύνηθες όταν διακυβεύονται μεγάλα χρηματικά ποσά. Για παράδειγμα, πόσοι θα αγόραζαν για $1.000.000$€ ένα λαχείο που κατά 50% δίνει $2.000.000$€ και κατά 50% δε δίνει τίποτα; Επίσης, οι άνθρωποι επιλέγουν να ασφαλίσουν τα σημαντικά περιουσιακά τους στοιχεία. Κάτι τέτοιο κατά πάσα πιθανότητα δεν τους συμφέρει οικονομικά, όμως προτιμούν να «αγοράσουν» σιγουριά, έστω και αν γνωρίζουν πως θα έχουν μια «μικρή» χρηματική απώλεια (συγκριτικά με το εισόδημά τους). Για τους περισσότερους ανθρώπους, από ένα σημείο και μετά, η κάθε επιπλέον χρηματική μονάδα προσφέρει λιγότερη ωφέλεια από την προηγούμενη. Αυτός ο τύπος ατόμου χαρακτηρίζεται ως άτομο που αντιπαθεί το ρίσκο (*risk averse*).

Τέλος, υπάρχουν και άνθρωποι στους οποίους το ρίσκο προσφέρει από μόνο του επιπλέον ωφέλεια λόγω του ότι τους συναρπάζει (*risk loving*). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν εκείνοι που παίζουν συχνά τυχερά παιχνίδια. Αν και η συντριπτική πλειοψηφία καταλήγει ζημιωμένη, εντούτοις ο ενθουσιασμός της πρόκλησης τους οδηγεί στο να συνεχίζουν να παίζουν.

Στο Σχήμα 1.2 παρουσιάζονται ενδεικτικά συναρτήσεις ωφέλειας και για τους τρεις τύπους ατόμων. Επισημαίνεται πως, καθώς γίνεται λόγος για 3 διαφορετικά άτομα, δεν έχει κανένα νόημα η σύγκριση των συναρτήσεων ωφέλειας, παρά μόνο η μορφή της καθεμίας ξεχωριστά. Παρατηρείται πως η συνάρτηση ωφέλειας στρέφει τα κοίλα προς τα άνω για τον τύπο risk loving, στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω για τον risk averse, ενώ είναι γραμμική για τον risk neutral.



Σχήμα 1.2: Συναρτήσεις ωφέλειας για διάφορους τύπους ατόμων

1.6 Μικτή στρατηγική

Στην υποενότητα 1.2.6 αναλύθηκε διεξοδικά και προέκυψε μια λογική λύση για το παίγνιο Prisoners' Dilemma. Η μία στρατηγική ήταν σαφώς χειρότερη από την άλλη, συνεπώς αποκλείστηκε. Σε κάποια άλλα παίγνια όμως, όπως για παράδειγμα στο Matching Pennies ή στο Rock – Paper – Scissors, η καλύτερη στρατηγική δεν μπορεί να επιλεχθεί τόσο εύκολα.

Αν η Alice γνώριζε εκ των προτέρων τι θα έπαιζε ο Bob, θα της ήταν πολύ εύκολο να αποφασίσει και το αντίστροφο. Από τα παραπάνω προκύπτει πως ο παίκτης του οποίου η σκέψη «διαβάζεται» πιο εύκολα έχει σημαντικό μειονέκτημα. Γεννάται λοιπόν το ερώτημα, τι συμβουλεύει η Θεωρία Παιγνίων την Alice όταν παίζει Matching Pennies και αντιμετωπίζει έναν αντίπαλο σαν τον Bob, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να γνωρίζει πολύ καλά τον τρόπο σκέψης της;

Σίγουρα πρέπει να παρεμποδιστεί ο Bob, ώστε να μην μπορεί να αντιληφθεί ποια στρατηγική θα ακολουθήσει η Alice και απαντήσει ανάλογα. Ο τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι με τη βοήθεια κάποιας στρατηγικής που ακολουθεί τυχαία πορεία. Για παράδειγμα, αν η Alice στρίψει ένα νόμισμα και επιλέξει το αποτέλεσμα του στριψίματος ως τη στρατηγική που θα ακολουθήσει, τότε ο Bob πλέον δεν μπορεί με κανένα τρόπο να εκμεταλλευτεί το γεγονός ότι γνωρίζει καλά την Alice. Ομοίως, για το παίγνιο Rock – Paper – Scissors, η Alice μπορεί να ρίξει ένα ζάρι, και να αντιστοιχίσει τους αριθμούς 1, 2 στην «πέτρα», τους 3, 4 στο «ψαλίδι» και τους 5, 6 στο «χαρτί», κάνοντας τις επιλογές της απρόβλεπτες, και άρα μη επιτρέποντας στον Bob να υιοθετήσει επιτυχημένα κάποια στρατηγική εναντίον της.

Σημειώνεται πως από τη στιγμή που η Alice μοιράζει εξίσου τις επιλογές της σε πέτρα, ψαλίδι, χαρτί, ο Bob είναι τελείως **αδιάφορος** μεταξύ οποιασδήποτε δικής του στρατηγικής. Είτε χρησιμοποιεί 100% μια συγκεκριμένη στρατηγική, είτε μιμηθεί την Alice και επιλέγει εντελώς τυχαία ανάμεσα στις τρεις στρατηγικές του, το προσδοκώμενο αποτέλεσμα θα παραμείνει το ίδιο: να κερδίζει, να χάνει ή να έρχεται ισόπαλος με πιθανότητα 33.33%. Η ίδια στρατηγική μπορεί να γενικευτεί για κάθε παίγνιο στο οποίο κάποιος παίκτης φοβάται πως η στρατηγική του θα είναι προβλέψιμη. Με τη χρήση μιας οποιαδήποτε γεννήτριας τυχαίων αριθμών, η στρατηγική του παίκτη καθίσταται απρόβλεπτη, συνεπώς μη εκμεταλλεύσιμη.

Όταν ένας παίκτης αποφασίζει την κίνησή του κάθε φορά με συγκεκριμένο μηχανισμό, τότε λέγεται ότι χρησιμοποιεί καθαρή στρατηγική (*pure strategy*). Όταν όμως ο παίκτης επιλέγει ανάμεσα σε περισσότερες από μία κινήσεις χρησιμοποιώντας έναν τυχαίο μηχανισμό, τότε λέγεται πως χρησιμοποιεί μικτή στρατηγική (*mixed strategy*).

1.7 Η Ισορροπία Nash

Η Ισορροπία Nash (*Nash Equilibrium*) αποδίδεται στον Αμερικανό μαθηματικό John Nash (1928 – 2015) και αποτελεί πιθανότατα την πλέον σημαντική έννοια της θεωρίας παιγνίων, πάνω στην οποία βασίζονται τα περισσότερα σύγχρονα επιτεύγματα του κλάδου.

Ως Ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο δύο παικτών ορίζεται ένα ζεύγος στρατηγικών, οι οποίες αποτελούν ταυτόχρονα την καλύτερη δυνατή απάντηση η μία στην άλλη. Σε ένα παίγνιο που παίζεται με n παίκτες, η Ισορροπία Nash είναι μία n-αδα στρατηγικών (μία για κάθε παίκτη), καθεμία από τις οποίες αποτελεί την καλύτερη κίνηση του αντίστοιχου παίκτη δεδομένων των $n-1$ στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών.

Για παράδειγμα, στο παίγνιο Driving Game, τα ζεύγη στρατηγικών $(Αριστερά, Αριστερά)$ και $(Δεξιά, Δεξιά)$ αποτελούν το καθένα ξεχωριστά μια Ισορροπία Nash. Στο παίγνιο Battle of the sexes, τα ζεύγη στρατηγικών $(Χορός, Χορός)$ και $(Μποξ, Μποξ)$ επίσης αποτελούν Ισορροπίες Nash. Στο δίλημμα των φυλακισμένων, το ζεύγος στρατηγικών $(Ομολογεί, Ομολογεί)$ αποτελεί Ισορροπία Nash.

Ορισμένες παρατηρήσεις:

- Στα παραπάνω παίγνια, για καθένα από αυτά τα ζεύγη επιλογών οι προτεινόμενες στρατηγικές είναι καλύτερες απαντήσεις η μία στην άλλη. Δηλαδή, κανείς παίκτης δεν έχει το κίνητρο για να αλλάξει την επιλογή του, γνωρίζοντας την κίνηση του αντιπάλου του.
- Είναι δυνατόν κάποια παίγνια να έχουν παραπάνω από μία Ισορροπία Nash, όπως φαίνεται μετά από μια προσεκτική μελέτη των παιγνίων Driving Game, Chicken και Battle of the Sexes.
- Κάποια παίγνια φαίνεται να μην έχουν καμία Ισορροπία Nash, όπως για παράδειγμα το Matching Pennies και το Rock – Paper – Scissors. Όμως αυτό δεν είναι εντελώς αληθές (βλ. Θεώρημα παρακάτω).
- Κάποια άλλα παίγνια, όπως για παράδειγμα το σκάκι, είναι βέβαιο πως έχουν Ισορροπίες Nash, αλλά είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν.

- Αν υπάρχει κάποιος «σωστός» τρόπος να παιχτεί ένα οποιοδήποτε παίγνιο, τότε αυτός σίγουρα αποτελεί Ισορροπία Nash. Σε διαφορετική περίπτωση, τουλάχιστον μία στρατηγική δε θα ήταν η καλύτερη απάντηση δεδομένων των υπόλοιπων στρατηγικών, οπότε τουλάχιστον ένας παίκτης θα είχε κίνητρο να διαφοροποιήσει το παίξιμό του.
- Όταν κάποιοι παίκτες παίζουν πολλές φορές το ίδιο παίγνιο, αρχικά δοκιμάζουν διάφορες στρατηγικές, μη έχοντας κατανοήσει ποιά είναι η καλύτερη δυνατή. Σταδιακά όμως μαθαίνουν και βελτιώνονται. Η διαδικασία αυτή συντελείται διαρκώς στη φύση, τόσο από σκεπτόμενους οργανισμούς που βρίσκονται σε θέση να αντιλαμβάνονται πλήρως ένα «παίγνιο», όπως οι άνθρωποι, όσο και από μη σκεπτόμενους, όπως ψάρια, έντομα, κλπ., τα οποία δρουν ενστικτωδώς. Όταν τελικά, τελειοποιήσουν τις στρατηγικές τους και παίζουν όσο καλύτερα μπορούν, τότε το σύνολο των στρατηγικών που υιοθετούν και επαναλαμβάνουν κάθε φορά που παίζουν αποτελεί Ισορροπία Nash. Σε διαφορετική περίπτωση κάποιος εκ των παικτών θα προτιμούσε να αλλάξει τις στρατηγικές του και να αποσταθεροποιήσει το παίγνιο.

Αναλογιζόμενος κανείς όλα τα παραπάνω, αντιλαμβάνεται πως η εύρεση των Ισορροπιών Nash σε ένα παίγνιο έχει εξέχουσα σημασία για τη μελέτη και κατανόησή του. Το παρακάτω θεώρημα παρέχει θεωρητική βοήθεια και σιγουριά για την ύπαρξη Ισορροπιών Nash.

Θεώρημα (Nash, 1950):

“Σε κάθε πεπερασμένο παίγνιο το οποίο διεξάγεται μεταξύ δύο παικτών υπάρχει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash, υπό την προϋπόθεση πως επιτρέπεται η χρήση μικτών στρατηγικών.”

Με τον όρο πεπερασμένο παίγνιο εννοείται κάθε παίγνιο, του οποίου το σύνολο των καθαρών στρατηγικών είναι πεπερασμένο. Σε αυτή την περίπτωση, επιτρέποντας τη χρήση μικτών στρατηγικών (οι οποίες φυσικά είναι άπειρες), διασφαλίζεται η ύπαρξη τουλάχιστον μίας Ισορροπίας Nash.

Παρ’ όλα αυτά, το θεώρημα αυτό δε δίνει κάποια απάντηση σε αρκετές σημαντικές ερωτήσεις, όπως το πώς βρίσκεται μια Ισορροπία Nash, πόσες Ισορροπίες Nash υπάρχουν σε ένα παίγνιο κλπ.

1.8 Στρατηγική Ασφαλείας

Η Στρατηγική Ασφαλείας είναι μια πολύ σημαντική έννοια της θεωρίας παιγνίων. Υπάρχει μία για κάθε παίκτη, και διασφαλίζει στον παίκτη μια ελάχιστη ποσότητα ωφέλειας. Αρχικά, η στρατηγική ασφαλείας αναπτύχθηκε για παίγνια μηδενικού αθροίσματος, όμως στη συνέχεια επεκτάθηκε και πλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε πιο περίπλοκα παίγνια.

Η έννοια της στρατηγικής ασφαλείας γίνεται πιο εύκολα κατανοητή σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Έστω πως η Alice και ο Bob παίζουν ένα τέτοιο παίγνιο και πως η Alice έχει ένα πλεονέκτημα απέναντι στον Bob, καθώς είναι σε θέση να γνωρίζει το πώς θα σκεφτεί ο Bob. Αυτή η ικανότητα της Alice είναι φυσικά καταστροφική για τον αντίπαλό της, καθώς εκείνη πλέον μπορεί εύκολα να επιλέξει την καλύτερη δυνατή απάντηση απέναντι στη στρατηγική του Bob, όποια και αν είναι αυτή. Σε αυτή την περίπτωση λέγεται πως όποια στρατηγική και αν διαλέξει ο Bob θα του συμβεί το χειρότερο δυνατό σενάριο, καθώς η Alice θα τη μαντέψει. Τότε, το καλύτερο που μπορεί να κάνει ο Bob είναι να περιορίσει την Alice, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική ασφαλείας του (*security strategy*).

Γενικεύοντας τα παραπάνω, η στρατηγική ασφαλείας είναι μια στρατηγική που μπορεί κάθε παίκτης να ακολουθήσει σε οποιοδήποτε παίγνιο, μεγιστοποιώντας την ωφέλειά του, θεωρώντας πως ο αντίπαλος πάντα επιλέγει την καλύτερη απάντηση απέναντι στη στρατηγική του. Για παράδειγμα, η στρατηγική ασφαλείας του κάθε παίκτη στο Matching Pennies είναι η χρήση κάποιου τυχαίου μηχανισμού για την επιλογή με 50% πιθανότητα «Κορώνα» και με 50% πιθανότητα «Γράμματα». Ακόμα και αν η Alice γνωρίζει το πώς ο Bob παίρνει τις αποφάσεις του, δεν μπορεί με κανένα τρόπο να προβλέψει το αποτέλεσμα που θα προκύψει εάν ο Bob στρίψει ένα νόμισμα, ενώ η γνώση ότι κάθε στρατηγική του Bob επιλέγεται με πιθανότητα 50% δεν της παρέχει καμία στρατηγική που να της επιτρέπει να τον εκμεταλλευτεί.

Η στρατηγική του Bob του εξασφαλίζει μια ελάχιστη ποσότητα ωφέλειας. Αυτή είναι η ωφέλεια που θα προκύψει όταν ο Bob μεγιστοποιεί την ωφέλειά του, φοβούμενος πάντα το χειρότερο δυνατό σενάριο (*minimax value*). Μια άλλη σημαντική έννοια είναι η ωφέλεια που θα αποκόμιζε ο Bob, αν προσπαθούσε να ελαχιστοποιήσει το κέρδος του, δεδομένου ότι του συμβαίνει πάντα το καλύτερο δυνατό σενάριο (*maximin value*). Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος η minimax value του ενός παίκτη αποτελεί το αντίθετο της maximin value του αντιπάλου του και το αντίστροφο.

Θεώρημα Minimax (von Neumann, 1928): Για κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες (έστω A και B), υπάρχει μια ποσότητα V^* και ένα προφίλ μικτών στρατηγικών για κάθε παίκτη, ούτως ώστε:

- Δεδομένης της στρατηγικής του Παίκτη B, η μέγιστη δυνατή ωφέλεια για τον Παίκτη A είναι V^* .
- Δεδομένης της στρατηγικής του Παίκτη A, η μέγιστη δυνατή ωφέλεια για τον Παίκτη B είναι $-V^*$.

1.9 Επαναλαμβανόμενα Παίγνια

Επαναλαμβανόμενα καλούνται τα παίγνια στα οποία οι παίκτες καλούνται να παίξουν ένα υπό-παίγνιο παραπάνω από μία φορά. Κάθε παίκτης γνωρίζει πως θα παίξει παραπάνω από μία φορά με τους ίδιους αντιπάλους και πως οι αντίπαλοί του το γνωρίζουν επίσης.

Τα επαναλαμβανόμενα παίγνια χωρίζονται σε τρεις επιμέρους κατηγορίες:

1. τα **πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια**, στα οποία όλοι οι παίκτες γνωρίζουν εκ των προτέρων πως θα παίξουν για N φορές.
2. τα **απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια** στα οποία οι παίκτες παίζουν επ' άπειρον.
3. τα **υπό πιθανότητα επαναλαμβανόμενα παίγνια**, τα οποία έχουν μια (γνωστή) πιθανότητα p να συνεχιστούν και αντίστοιχα πιθανότητα $1 - p$ να τερματιστούν.

2 Εύρεση της Ισορροπίας Nash

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν συγκεκριμένες τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί, προκειμένου να προσδιορίζονται οι Ισορροπίες Nash. Ακολούθως, θα εξεταστούν ορισμένα παίγνια, τα οποία και θα αναλυθούν με τις παραπάνω τεχνικές.

2.1 Κανονική Μορφή Παιγνίου

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτυχθούν ορισμένες σημαντικές τεχνικές που εφαρμόζονται σε περίπτωση που δίνεται η κανονική μορφή του παιγνίου. Οι πλέον σημαντικές τεχνικές είναι η εύρεση καλύτερης απάντησης και η διαδοχική διαγραφή κυριαρχούμενων στρατηγικών. Τέλος, για την περίπτωση χρήσης μικτών στρατηγικών, θα παρουσιαστεί η διαδικασία με την οποία παράγεται το προφίλ μικτών στρατηγικών.

2.1.1 Εύρεση της καλύτερης απάντησης

Η μέθοδος εύρεσης καλύτερης απάντησης είναι ο πλέον αναλυτικός τρόπος εύρεσης Ισορροπιών Nash σε κάποιο παίγνιο, δεδομένης της κανονικής του μορφής, όπως για παράδειγμα αυτής του παιγνίου που περιγράφει ο Πίνακας 2.1. Όμως, αυτός ο τρόπος χρησιμεύει μόνο για την εύρεση Ισορροπιών Nash που περιλαμβάνουν αποκλειστικά καθαρές στρατηγικές.

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Αριστερά	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	$(6,9)$	$(7,1)$	$(3,3)$
Μέση	$(5,5)$	$(4,0)$	$(6,6)$
Κάτω	$(1,3)$	$(2,8)$	$(5,5)$

Πίνακας 2.1: Κανονική Μορφή Παιγνίου

Σύμφωνα με τη μέθοδο εύρεσης καλύτερης απάντησης, ακολουθείται η εξής διαδικασία: Για κάθε γραμμή, δηλαδή για κάθε δυνατή επιλογή του Παίκτη 1, βρίσκεται η καλύτερη απάντηση του Παίκτη 2, και σημειώνεται με πορτοκαλί χρώμα. Ακολούθως, για κάθε στήλη, δηλαδή για κάθε δυνατή επιλογή του Παίκτη 2, βρίσκεται η καλύτερη απάντηση του Παίκτη 1, και σημειώνεται με πράσινο χρώμα. Εξ ορισμού, κάθε Ισορροπία Nash αποτελεί ένα ζεύγος στρατηγικών που αποτελούν την καλύτερη απάντηση η μία στην άλλη. Συνεπώς, όταν σε κάποιο τετράγωνο του πίνακα είναι χρωματισμένες και οι δύο αποκρίσεις, τότε το ζεύγος των στρατηγικών που αντιστοιχούν στο τετράγωνο αυτό αποτελεί μια Ισορροπία Nash. Ο Πίνακας 2.2 δείχνει πώς πραγματοποιείται αυτή η διαδικασία. Όπως είναι φανερό, αμφότερα τα ζεύγη $(Πάνω, Αριστερά)$ και $(Μέση, Δεξιά)$ αποτελούν Ισορροπίες Nash.

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Αριστερά	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	$(\mathbf{6},\mathbf{9})$	$(\mathbf{7},1)$	$(3,3)$
Μέση	$(5,5)$	$(4,0)$	$(\mathbf{6},\mathbf{6})$
Κάτω	$(1,3)$	$(2,\mathbf{8})$	$(5,5)$

Πίνακας 2.2: Εύρεση Καλύτερης Απάντησης

2.1.2 Διαδοχική Διαγραφή Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

Για να γίνει κατανοητή η παρακάτω μέθοδος, πρέπει πρώτα να εξηγηθεί η έννοια της κυριαρχούμενης στρατηγικής. Θα λέγεται ότι μια στρατηγική s_i του παίκτη i για ένα παίγνιο κυριαρχεί (ισχυρά) μιας άλλης στρατηγικής s'_i , όταν ισχύει:

$$u_i(s_i, s_j) > u_i(s'_i, s_j), \quad \forall s_j \in S_j$$

Όπου s_j μια οποιαδήποτε απάντηση των υπόλοιπων παικτών, η οποία ανήκει στο S_j, το σύνολο (ή προφίλ) δυνατών απαντήσεων των υπόλοιπων παικτών. Δηλαδή, για κάθε δυνατή απάντηση των υπόλοιπων παικτών, η στρατηγική s_i προσφέρει στον παίκτη i αυστηρά μεγαλύτερη ωφέλεια από τη στρατηγική s'_i. Σε αυτή την περίπτωση θα λέγεται πως η στρατηγική s'_i είναι (ισχυρά) κυριαρχούμενη από τη στρατηγική s_i.

Ομοίως, θα λέγεται ότι μια στρατηγική s_i του παίκτη i για ένα παίγνιο κυριαρχεί ασθενώς μιας άλλης στρατηγικής s'_i, όταν ισχύει:

$$u_i(s_i, s_j) \geq u_i(s'_i, s_j), \quad \forall s_j \in S_j$$

Η διαφορά της ασθενούς κυριαρχίας σε σχέση με την αυστηρή είναι πως επιτρέπεται και η ισότητα σε κάποιες ή και όλες από τις δυνατές απαντήσεις των υπόλοιπων παικτών. Σε αυτή την περίπτωση θα λέγεται πως η στρατηγική s'_i είναι **ασθενώς κυριαρχούμενη** από τη στρατηγική s_i. Κάθε στρατηγική είναι ασθενώς κυριαρχούμενη από τον εαυτό της, όμως σε κάθε παίγνιο υπάρχει τουλάχιστον μία μη ισχυρά κυριαρχούμενη στρατηγική για κάθε παίκτη. Τέλος, όταν κάποια στρατηγική κυριαρχεί σε όλες τις υπόλοιπες, τότε η στρατηγική αυτή αποκαλείται **κυρίαρχη στρατηγική**.

Σημειώνεται πως μια στρατηγική είναι πιθανόν να μην είναι κυριαρχούμενη από κάποια άλλη καθαρή στρατηγική, αλλά από μια μικτή στρατηγική. Για παράδειγμα, στο παίγνιο που περιγράφει ο Πίνακας 2.3 η στρατηγική «Μέση» δεν κυριαρχείται από καμία καθαρή στρατηγική. Όμως, αν εξεταστεί η μικτή στρατηγική s_i, σύμφωνα με την οποία η στρατηγική «Πάνω» παίζεται με πιθανότητα 50%, η στρατηγική «Μέση» παίζεται με 0% και η στρατηγική «Κάτω» με 50%, τότε προκύπτει πως κυριαρχεί ισχυρά της στρατηγικής «Μέση», καθώς η ωφέλειά της προκύπτει ως εξής:

$$u(s_i, s_j) = (0.5 \cdot 5 + 0.5 \cdot 1, 0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4, 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 9) = (3, 3, 6)$$

Οπότε το προφίλ της μικτής στρατηγικής $(0.5, 0, 0.5)$ για τον Παίκτη 1 δίνει ωφέλεια $(3, 3, 6)$, οπότε η στρατηγική «Μέση», η οποία δίνει ωφέλεια $(2, 2, 5)$ είναι ισχυρά κυριαρχούμενη.

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Αριστερά	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	$(5, 2)$	$(2, 2)$	$(3, 4)$
Μέση	$(2, 3)$	$(2, 6)$	$(5, 1)$
Κάτω	$(1, 3)$	$(4, 4)$	$(9, 5)$

Πίνακας 2.3: Κανονική Μορφή Παιγνίου

Είναι λογικό λοιπόν σε μια Ισορροπία Nash ο παίκτης i να μην επιλέγει ποτέ την κυριαρχούμενη στρατηγική s'_i, καθώς, τότε θα ήταν προτιμότερο να αλλάξει τη στρατηγική του σε s_i, η οποία κυριαρχεί στην s'_i. Κάνοντας τον παραπάνω συλλογισμό, ένας παίκτης μπορεί να απορρίψει εντελώς ορισμένες από τις στρατηγικές που έχει στη διάθεσή του, διαγράφοντάς τις από τον πίνακα απολαβών. Όταν οι παίκτες γνωρίζουν πως οι υπόλοιποι παίκτες είναι λογικοί, τότε μπορούν να λάβουν τις αποφάσεις τους με βάση τον αναθεωρημένο πίνακα απολαβών, συμπεριλαμβάνοντας στη διαδικασία λήψης απόφασης ότι οι υπόλοιποι παίκτες δεν πρόκειται να επιλέξουν κάποια ισχυρά κυριαρχούμενη στρατηγική. Σε αυτή τη λογική βασίζεται και η τεχνική της **διαδοχικής διαγραφής κυριαρχούμενων στρατηγικών**.

Ο Πίνακας 2.4 παρουσιάζει μία κανονική μορφή παιγνίου.

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Αριστερά	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	$(2, 1)$	$(5, 6)$	$(6, 7)$
Μέση	$(3, 3)$	$(4, 5)$	$(5, 2)$
Κάτω	$(8, 2)$	$(6, 1)$	$(4, 4)$

Πίνακας 2.4: Κανονική Μορφή Παιγνίου

Παρατηρείται πως η στρατηγική «$Αριστερά$» του Παίκτη 2 κυριαρχείται από τη μικτή στρατηγική $(0, 0.50, 0.50)$. Συνεπώς, ο Παίκτης 2 μπορεί κάλλιστα να τη διαγράψει από τις επιλογές του. Ο Πίνακας 2.5 παρουσιάζει την επικαιροποιημένη μορφή του παιγνίου, στην οποία θα καταλήξει και ο Παίκτης 1, αν γνωρίζει πως ο Παίκτης 2 είναι λογικός.

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	$(5, 6)$	$(6, 7)$
Μέση	$(4, 5)$	$(5, 2)$
Κάτω	$(6, 1)$	$(4, 4)$

Πίνακας 2.5: Διαγραφή Στρατηγικής «Αριστερά»

Πλέον, η στρατηγική «$Μέση$» του Παίκτη 1 κυριαρχείται ισχυρά από τη στρατηγική «$Πάνω$», οπότε μπορεί και αυτή να διαγραφεί, καταλήγοντας στη μορφή που δείχνει ο Πίνακας 2.6.

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Κέντρο	Δεξιά
Πάνω	$(5, 6)$	$(6, 7)$
Κάτω	$(6, 1)$	$(4, 4)$

Πίνακας 2.6: Διαγραφή Στρατηγικής «Μέση»

Τώρα, η στρατηγική «$Κέντρο$» κυριαρχείται από τη στρατηγική «$Δεξιά$» για τον Παίκτη 2. Ο Πίνακας 2.7 δείχνει τη μορφή που θα πάρει πλέον το παίγνιο, όταν διαγραφεί και η στρατηγική «$Κέντρο$».

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Δεξιά
Πάνω	$(6, 7)$
Κάτω	$(4, 4)$

Πίνακας 2.7: Διαγραφή Στρατηγικής «Κέντρο»

Σε αυτό το σημείο η επιλογή του Παίκτη 2 είναι μία, η στρατηγική «$Δεξιά$», οπότε ο Παίκτης 1 θα επιλέξει την καλύτερη απάντηση που διαθέτει, δηλαδή τη στρατηγική «$Πάνω$», διαγράφοντας την κυριαρχούμενη στρατηγική «$Κάτω$». Η κίνηση αυτή οδηγεί στην μοναδική

Ισορροπία Nash του παιγνίου (Πίνακας 2.8), που προκύπτει εάν ο Παίκτης 1 παίξει «$Πάνω$» και ο Παίκτης 2 παίξει «$Δεξιά$».

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Δεξιά
Πάνω	$(6,7)$

Πίνακας 2.8: Διαγραφή Στρατηγικής «Κάτω»

Η παραπάνω μέθοδος δεν απλοποιεί πάντα το παίγνιο τόσο πολύ όσο στο προηγούμενο παράδειγμα ώστε να είναι προφανής η Ισορροπία Nash. Κάποιες φορές, το παίγνιο έχει περισσότερες στρατηγικές που δεν κυριαρχούνται ούτε από καθαρές ούτε από μικτές στρατηγικές. Όμως, η παραπάνω μέθοδος τις περισσότερες φορές απλοποιεί σημαντικά το παίγνιο και το φέρνει σε μορφή στην οποία πλέον δεν υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές. Σε αυτό το σημείο μπορεί κανείς να εργαστεί όπως στην επόμενη ενότητα (2.1.3), κάνοντας χρήση μικτών στρατηγικών στην Ισορροπία Nash.

Σημειώνεται πως ορισμένες φορές υπάρχουν και άλλοι τρόποι, οι οποίοι καταλήγουν επίσης στο ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή, κάποιες φορές, υπάρχουν περισσότερες από μία ισχυρά κυριαρχούμενες στρατηγικές, οι οποίες μπορούν να διαγραφούν. Σε αυτή την περίπτωση η σειρά με την οποία διαγράφονται οι κυριαρχούμενες στρατηγικές δεν έχει απολύτως καμία σημασία, το αποτέλεσμα παραμένει ανεπηρέαστο. Όμως, δεν ισχύει το ίδιο στην περίπτωση διαγραφής ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών. Ως παράδειγμα αναφέρεται το παίγνιο που παρουσιάζει ο Πίνακας 2.9. Τα ζεύγη στρατηγικών $(Κάτω, Αριστερά)$, $(Κάτω, Δεξιά)$ και $(Πάνω, Δεξιά)$ αποτελούν Ισορροπίες Nash, καθώς κανείς εκ των δύο παικτών δεν μπορεί να ανεβάσει τις απολαβές του παίζοντας διαφορετική στρατηγική. Όμως, οι στρατηγικές «$Πάνω$» και «$Αριστερά$» είναι ασθενώς κυριαρχούμενες από τις στρατηγικές «$Κάτω$» και «$Δεξιά$», αντίστοιχα. Είναι φανερό πως, ανάλογα με τη σειρά με την οποία διαγράφονται οι στρατηγικές αυτές, το παίγνιο καταλήγει σε διαφορετική Ισορροπία Nash.

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τις παραπάνω αναλύσεις είναι πως οι παίκτες μπορούν με βεβαιότητα να διαγράψουν τις ισχυρά κυριαρχούμενες στρατηγικές τους, όμως χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή κατά τη διαγραφή των ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών, καθώς ενδέχεται να χαθούν ορισμένες Ισορροπίες Nash κατά τη διαγραφή.

Παίκτης 1\ Παίκτης 2	Αριστερά	Δεξιά
Πάνω	$(0,0)$	$(0,1)$
Κάτω	$(1,0)$	$(0,0)$

Πίνακας 2.9: Κανονική Μορφή Παιγνίου

2.1.3 Χρήση Μικτών Στρατηγικών

Στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιαστεί η αναγκαιότητα χρήσης μικτών στρατηγικών και εν συνεχεία θα προσδιοριστεί τρόπος τόσο για τον υπολογισμό Ισορροπιών Nash με χρήση μικτών στρατηγικών όσο και για τον υπολογισμό της αναμενόμενης ωφέλειας που δίνει κάποιο προφίλ μικτής στρατηγικής.

Είναι φανερό πως σε κάποια παίγνια οι βέλτιστες στρατηγικές των παικτών δεν είναι ξεκάθαρες. Για παράδειγμα, στο παίγνιο Matching Pennies δεν υπάρχει καμία Ισορροπία Nash με χρήση καθαρών στρατηγικών. Επίσης, υπάρχουν κάποια άλλα παίγνια, όπως π.χ. το Battle Of The Sexes ή το Driving Game, στα οποία υπάρχουν περισσότερες από μία Ισορροπίες Nash. Οι μικτές στρατηγικές αποτελούν ένα πολύ σημαντικό εργαλείο, το οποίο βοηθά τους παίκτες να αποφασίσουν ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν. Όπως θα γίνει φανερό και στη συνέχεια, όταν και οι δύο παίκτες υιοθετήσουν το κατάλληλο προφίλ μικτών στρατηγικών, τότε προκύπτει εξ ορισμού μια νέα Ισορροπία Nash.

Όταν χρησιμοποιείται κάποια μικτή στρατηγική, ο βασικός στόχος δεν είναι να μπερδευτεί ο αντίπαλος, καθώς οι μικτές στρατηγικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε παίγνια στα οποία οι παίκτες καλούνται να συνεργαστούν μεταξύ τους (π.χ. Driving Game). Ο κυριότερος στόχος είναι να καταστεί ο αντίπαλος αδιάφορος ανάμεσα στις στρατηγικές του, ώστε η τελική του επιλογή να μην έχει σημασία γι' αυτόν. Όταν ο αντίπαλος πράττει με τη σειρά του το ίδιο, τότε οι δύο παίκτες δεν μπορούν να κερδίσουν τίποτα περισσότερο από οποιαδήποτε διαφοροποίηση της στρατηγικής τους, οπότε εξ ορισμού καταλήγουμε σε μια Ισορροπία Nash.

Είναι πολύ εύκολο να αντιληφθεί κανείς πως στο «Matching Pennies» και στο «Driving Game» προκύπτει Ισορροπία Nash αν ο κάθε παίκτης παίζει κάθε στρατηγική του με πιθανότητα 50%. Όμως, σε κάποια παίγνια η απάντηση είναι λιγότερο προφανής. Για να επιλεγεί η σωστή κατανομή πιθανοτήτων στις διάφορες διαθέσιμες στρατηγικές, ο παίκτης εργάζεται ως εξής. Εξετάζει την αναμενόμενη ωφέλεια που θα αποφέρουν στον αντίπαλό του οι διάφορες καθαρές στρατηγικές του, υπό την προϋπόθεση πως το δικό του προφίλ μικτής στρατηγικής είναι παραμετρικά γνωστό. Εν συνεχεία, απαιτεί κάθε καθαρή στρατηγική του αντιπάλου να του αποφέρει ίδια αναμενόμενη ωφέλεια (ώστε ο αντίπαλος να είναι τελικά αδιάφορος μεταξύ των καθαρών στρατηγικών του). Επιλύοντας τις εξισώσεις που θα προκύψουν, προσδιορίζεται και το προφίλ μικτής στρατηγικής του παίκτη.

<u>Παράδειγμα:</u> *Να βρεθεί μια Ισορροπία Nash με χρήση μικτών στρατηγικών για το παίγνιο «Battle Of the sexes»* (Πίνακας 1.5).

Το παίγνιο εξετάζεται πρώτα από την πλευρά της Alice. Η Alice αρχικά υποθέτει πως παίζει τη στρατηγική «$Χορός$» με πιθανότητα p και τη στρατηγική «$Μποξ$» με πιθανότητα $1 - p$. Τότε, αν ο Bob επιλέξει «$Χορό$», η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u(Χορός) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$$

Αντίστοιχα, αν ο Bob επιλέξει «$Μποξ$», η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u(Μποξ) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 = 2 - 2p$$

Η Alice καθιστά τον Bob αδιάφορο ανάμεσα στις στρατηγικές του εξισώνοντας τις αναμενόμενες ωφέλειες που του παρέχει η καθεμία, έτσι προκύπτει η πιθανότητα p:

$$u(Χορός) = u(Μποξ) \Rightarrow p = 2 - 2p \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

Συνεπώς, η Alice μπορεί να επιλέγει «$Χορό$» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και «$Μποξ$» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Καθώς το παίγνιο είναι συμμετρικό, ο Bob μπορεί αντίστοιχα να επιλέγει «$Χορό$» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και «$Μποξ$» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Επειδή η Alice και ο Bob γίνονται αδιάφοροι για οποιαδήποτε στρατηγική τους, προκύπτει Ισορροπία Nash. Γεννάται όμως το ερώτημα, ποια είναι η αναμενόμενη ωφέλεια για τον κάθε παίκτη;

Για να απαντηθεί το ερώτημα χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \cdot \Pr(a|s)$$

Όπου $\Pr(a|s)$ = $\prod_{j \in N} s_j(a_j)$ είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός εκ των δυνατών συμβάντων. Στην περίπτωση που η Alice και ο Bob χρησιμοποιούν τις μικτές στρατηγικές που περιγράφηκαν παραπάνω, προκύπτει ο Πίνακας 2.10.

Γεγονός	Πιθανότητα Πραγματοποίησης	Ωφέλεια Alice	Ωφέλεια Bob	Αναμενόμενη Ωφέλεια Alice	Αναμενόμενη Ωφέλεια Bob
(Χορός, Χορός)	$2/9$	2	1	$4/9$	$2/9$
(Χορός, Μποξ)	$4/9$	0	0	0	0
(Μποξ, Χορός)	$1/9$	0	0	0	0
(Μποξ, Μποξ)	$2/9$	1	2	$2/9$	$4/9$
Σύνολο	1	−	−	$2/3$	$2/3$

Πίνακας 2.10: Πίνακας Αναμενόμενης Ωφέλειας (Battle Of the Sexes)

Παρατηρείται πως η αναμενόμενη ωφέλεια των δύο παικτών είναι $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, η οποία είναι χαμηλότερη από την ωφέλεια που προσφέρουν οι άλλες 2 Ισορροπίες Nash, $(Χορός, Χορός)$ και $(Μποξ, Μποξ)$. Δηλαδή, παρ' όλο που ο Bob προτιμά «$Μποξ$» από «$Χορό$», θα ήταν προτιμότερο γι' αυτόν να υποχωρήσει και να παίξει την Ισορροπία Nash $(Χορός, Χορός)$, η οποία του αποφέρει ωφέλεια 1. Γεννάται λοιπόν το ερώτημα, κατά πόσο συμφέρει τους παίκτες να ακολουθήσουν αυτή τη μικτή στρατηγική, αντί να συνεννοηθούν να παίξουν μία από τις δύο Ισορροπίες Nash που προκύπτουν από καθαρές στρατηγικές;

Οι λόγοι για τους οποίους μπορεί κάποιος να υιοθετήσει ένα προφίλ μικτών στρατηγικών είναι πολλοί. Κατ' αρχάς, σε κάποια παίγνια η έννοια της συνεργασίας δεν υφίσταται, καθώς εκ φύσεως είναι ανταγωνιστικά (π.χ. Matching Pennies). Σε τέτοιου είδους παίγνια η χρήση μικτών στρατηγικών είναι επιβεβλημένη. Στο παίγνιο Battle Of the Sexes η έννοια της συνεργασίας είναι θεμιτή, καθώς οι δύο παίκτες προσπαθούν να συναντηθούν. Όμως οι αποφάσεις τους είναι ανεξάρτητες, οπότε δεν υπάρχει ξεκάθαρος τρόπος να βοηθήσουν ο ένας τον άλλο. Ακόμα κι αν ο Bob αποφασίσει πως είναι διατεθειμένος να υποχωρήσει, δεν είναι σίγουρος ότι η Alice δε θα υποχωρήσει επίσης. Σε αυτή την περίπτωση οι δύο παίκτες θα πάρουν από 0, κάτι που είναι χειρότερο από τα $\frac{2}{3}$ της μικτής στρατηγικής. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι πως στο παραπάνω παίγνιο, όταν και οι δύο παίκτες υιοθετούν το προφίλ μικτής στρατηγικής που προτείνεται, τότε τα $\frac{5}{9}$ των περιπτώσεων αποτυγχάνουν να συναντηθούν. Αν η συνεννόηση ήταν επιτρεπτή, τότε οι παίκτες ποτέ δε θα επέλεγαν να μη συναντηθούν και θα επέλεγαν από κοινού με 50% πιθανότητα «$Χορό$» και με 50% πιθανότητα «$Μποξ$», απολαμβάνοντας έτσι αναμενόμενη ωφέλεια 1.5, ξεπερνώντας έτσι τη μοναδιαία ωφέλεια που θα έπαιρνε ένας εκ των δύο παικτών αν υποχωρούσε.

2.1.4 Εύρεση Στρατηγικής Ασφαλείας

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να γίνει διαχωρισμός μεταξύ της μικτής στρατηγικής που καθιστά τον αντίπαλο αδιάφορο μεταξύ των στρατηγικών του και της στρατηγικής ασφαλείας του κάθε παίκτη. Είναι δυνατόν κάποιος παίκτης (επιτιθέμενος) να αδιαφορήσει για τις δικές του απολαβές και να θέσει ως στόχο του να ελαχιστοποιήσει τις απολαβές του αντιπάλου του (αμυνόμενος). Αυτό ενδέχεται να συμβαίνει για διάφορους λόγους. Για παράδειγμα, ενδέχεται να θέλει να «τιμωρήσει» τον αμυνόμενο, είτε για παραδειγματισμό (βλ. Επαναλαμβανόμενα Παίγνια), είτε για άλλους λόγους. Σε αυτή την περίπτωση, ο παίκτης που φοβάται αυτή την επίθεση μπορεί να αμυνθεί παίζοντας τη στρατηγική ασφαλείας του.

Όταν ο επιτιθέμενος θέτει ως αποκλειστικό στόχο του την τιμωρία του αντιπάλου του, τότε αναγκαστικά ο πίνακας απολαβών των δύο παικτών πρέπει να αλλάξει, εξαιτίας της θεωρίας της αποκαλυμμένης προτίμησης. Ο επιτιθέμενος, στην προσπάθειά του να τιμωρήσει τον αμυνόμενο, απαρνείται την ωφέλεια που καταγράφεται στον πίνακα απολαβών του και φανερώνει τις νέες του προτιμήσεις, οι οποίες είναι εκ διαμέτρου αντίθετες με αυτές του αμυνόμενου. Συνεπώς, όταν ο αμυνόμενος προσπαθεί να εντοπίσει τη στρατηγική ασφαλείας του, μπορεί να καταστήσει τον επιτιθέμενο αδιάφορο ανάμεσα στις στρατηγικές του, αναλογιζόμενος όμως μια τροποποιημένη μορφή του παιγνίου, σύμφωνα με την οποία η ωφέλεια του επιτιθέμενου είναι εξ ολοκλήρου αντίθετη της ωφέλειας του ίδιου του αμυνόμενου. Δηλαδή, το παίγνιο, ανεξαρτήτως της μορφής που είχε προηγουμένως, μετατρέπεται σε **παίγνιο μηδενικού αθροίσματος**. Πλέον, ο παίκτης που αμύνεται μπορεί να συμπεριφερθεί όπως στην ενότητα 2.1.3.

<u>Παράδειγμα:</u> *Προσδιορισμός της στρατηγικής ασφαλείας της Alice για το παίγνιο «Battle Of the sexes»* (Πίνακας 1.5).

Αν η Alice (αμυνόμενος) θέλει να εντοπίσει τη στρατηγική ασφαλείας της, τότε θα πρέπει να αναθεωρήσει τον πίνακα απολαβών, σύμφωνα με την αντίληψή της για τη συνάρτηση ωφέλειας του Bob (επιτιθέμενος). Ο Πίνακας 2.11 δείχνει την επικαιροποιημένη μορφή του παιγνίου, σύμφωνα με τις εκτιμώμενες προτιμήσεις του Bob. Πλέον, η Alice μπορεί εύκολα να καταστήσει τον Bob αδιάφορο απέναντι στις στρατηγικές του, παίζοντας έτσι ταυτόχρονα τη στρατηγική ασφαλείας της.

Alice\Bob	Χορός	Μποξ
Χορός	$(2,-2)$	$(0,0)$
Μποξ	$(0,0)$	$(1,-1)$

Πίνακας 2.11: Πίνακας Απολαβών για το τροποποιημένο Battle of the Sexes

Η Alice αρχικά υποθέτει πως παίζει τη στρατηγική «$Χορός$» με πιθανότητα p και τη στρατηγική «$Μποξ$» με πιθανότητα $1 - p$. Τότε, αν ο Bob επιλέξει «$Χορό$», η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u(Χορός) = p \cdot (-2) + (1-p) \cdot 0 = -2p$$

Αντίστοιχα, αν ο Bob επιλέξει «$Μποξ$», η αναμενόμενη ωφέλειά του θα είναι:

$$u(Μποξ) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot -1 = p - 1$$

Η Alice καθιστά τον Bob αδιάφορο ανάμεσα στις στρατηγικές του εξισώνοντας τις αναμενόμενες ωφέλειες που του παρέχει η καθεμία, έτσι προκύπτει η πιθανότητα p:

$$u(Χορός) = u(Μποξ) \Rightarrow -2p = p - 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

Συνεπώς, η στρατηγική ασφαλείας της Alice συνίσταται στο να παίζει «$Χορό$» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και «$Μποξ$» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Ανεξαρτήτως του τι θα επιλέξει ο Bob, η αναμενόμενη ωφέλειά της Alice θα είναι $\frac{2}{3}$, κάτι που μπορεί πολύ εύκολα να εξακριβωθεί με απλούς μαθηματικούς υπολογισμούς.

<u>Παρατήρηση:</u> Η αναμενόμενη ωφέλεια της Alice δείχνει να είναι σταθερή και ίση με $\frac{2}{3}$, είτε επιλέξει τη στρατηγική ασφαλείας της, είτε επιλέξει τη μικτή στρατηγική που αναφέρθηκε στην ενότητα 2.1.3. Όμως, αυτό δεν ισχύει στην πραγματικότητα. Το μόνο που αποδείχθηκε στο αντίστοιχο παράδειγμα της ενότητας 2.1.3 είναι πως το ζεύγος μικτών στρατηγικών με προφίλ $\left(\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}\right)$ αποτελεί Ισορροπία Nash με αναμενόμενη ωφέλεια ίση με $\frac{2}{3}$ για κάθε παίκτη. Όμως, η θεώρηση αυτή έγινε υπό τη θεώρηση ότι ο Bob προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφέλειά του. Αν ο στόχος του είναι να ελαχιστοποιήσει την ωφέλεια της Alice, τότε μπορεί να τα καταφέρει καλύτερα, παίζοντας ως απάντηση στο προφίλ $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ της Alice την καθαρή στρατηγική του «$Μποξ$», περιορίζοντάς την σε αναμενόμενη ωφέλεια ίση με $\frac{1}{3}$. Επομένως, μόνο η στρατηγική ασφαλείας της Alice της διασφαλίζει αναμενόμενη ωφέλεια $\frac{2}{3}$.

Μέχρι στιγμής, το παίγνιο εξετάστηκε από την πλευρά του αμυνόμενου, αγνοώντας την πλευρά του επιτιθέμενου. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν ήδη οι βάσεις για την πλήρη κατανόηση των κινήσεων του επιτιθέμενου. Αρχικά, ο επιτιθέμενος οφείλει να αναθεωρήσει την ωφέλειά του, ώστε να μετατρέψει το παίγνιο σε κατηγορία μηδενικού αθροίσματος. Έπειτα, αντιλαμβανόμενος ότι η ελαχιστοποίηση της ωφέλειας του αντιπάλου ισοδυναμεί με τη μεγιστοποίηση της δικής του στρατηγικής, δεν μπορεί να κάνει τίποτα καλύτερο από το να παίξει με τη σειρά του τη δική του στρατηγική ασφαλείας, για το παίγνιο που περιγράφεται από το νέο πίνακα απολαβών. Στο παράδειγμα που εξετάστηκε παραπάνω μπορεί να επαληθευτεί εύκολα πως η στρατηγική ασφαλείας του Bob συνίσταται στο να παίξει «Χορό» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και

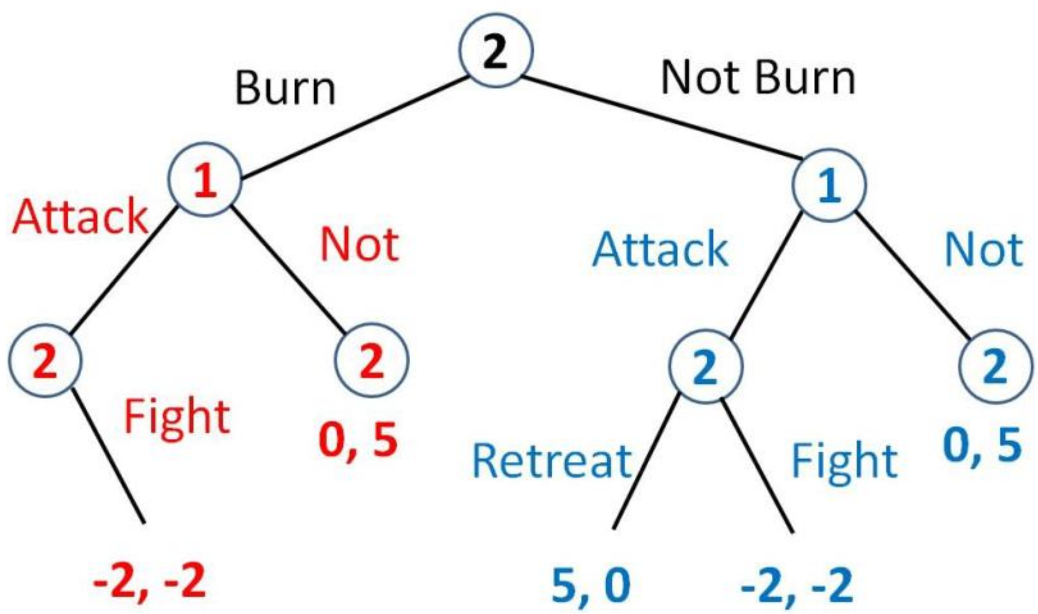
«Μποξ» με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Σε αυτή την περίπτωση η Alice είναι αδιάφορη ανάμεσα στις στρατηγικές της, και περιορίζεται σε αναμενόμενη ωφέλεια ίση με $\frac{2}{3}$.

2.2 Δενδροειδής Μορφή Παιγνίου

Η δενδροειδής μορφή είναι ένας διαφορετικός τρόπος απεικόνισης του παιγνίου, σε σχέση με την κανονική μορφή. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν οι παίκτες πρόκειται να εκτελέσουν περισσότερες από μία κινήσεις εναλλάξ, απαντώντας δηλαδή ο ένας στον άλλο.

Η δενδροειδής μορφή ονομάζεται έτσι ακριβώς επειδή η εξέλιξή της θυμίζει τη μορφή δένδρου. Αποτελείται από κόμβους και κλαδιά. Κάθε κόμβος φέρει το όνομα ενός παίκτη και εκφράζει πως, όταν το παίγνιο φτάσει εκεί, ο αντίστοιχος παίκτης καλείται να πάρει μια απόφαση, για αυτό και ονομάζεται και κόμβος απόφασης (*decision node*). Κάθε κλαδί αντιστοιχεί σε μια στρατηγική που έχει διαθέσιμη ο παίκτης. Η δενδροειδής μορφή είναι σαφώς πιο παραστατική από την κανονική μορφή, και μπορεί να φανεί ξεκάθαρα η ροή του παιγνίου.

Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζεται η κανονική μορφή ενός παιγνίου, στο οποίο ο Παίκτης 2 είναι ο στρατηγός ενός στρατού που εισβάλει σε κάποιο νησί, το στρατό του οποίου καθοδηγεί ο Παίκτης 1. Όπως φαίνεται και στο δένδρο, οι δύο παίκτες έχουν αρκετές στρατηγικές. Αρχικά ο παίκτης 2 καλείται να αποφασίσει αν θέλει να κάψει τη γέφυρα που ενώνει το νησί με την ενδοχώρα. Εν συνεχεία, ο παίκτης 1 καλείται να αποφασίσει αν θέλει να επιτεθεί στον παίκτη 2, ή να επιτρέψει την προέλασή του. Τέλος, ο παίκτης 2 καλείται και πάλι να αποφασίσει, αν, σε περίπτωση που δεχτεί επίθεση, θα πολεμήσει ή θα υποχωρήσει (αν δεν έχει επιλέξει να κάψει τη γέφυρα).



Σχήμα 2.1: Δενδροειδής Μορφή Παιγνίου

Για την ανάλυση του παραπάνω παιγνίου χρησιμοποιείται η **μέθοδος της πίσω-επαγωγής** (*backward induction*). Καθώς το παίγνιο μπορεί να γίνει χαοτικό στην περίπτωση που κάποιος ξεκινήσει να το αναλύει από την αρχή προς το τέλος, η λογική της πίσω-επαγωγής είναι να εξεταστεί το παίγνιο από το τέλος προς την αρχή. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, εξετάζονται πρώτα οι τελευταίοι κόμβοι απόφασης του παιγνίου. Καθώς οι προκύπτουσες ωφέλειες αναγράφονται στο τέλος και λαμβάνοντας υπόψη πως οι δύο παίκτες έχουν αποκλειστικό στόχο να μεγιστοποιήσουν την ωφέλειά τους, είναι εύκολο να εξαχθεί συμπέρασμα αναφορικά με ποια απόφαση θα πάρουν οι παίκτες στον τελευταίο κόμβο απόφασης. Έπειτα, καθώς είναι πλέον γνωστή η κατάληξη του παιγνίου, αν φτάσει σε κάποιον από τους τελευταίους κόμβους απόφασης, αυτοί πλέον μπορούν να αντικατασταθούν από τις προκύπτουσες ωφέλειες. Μετά την αντικατάσταση αυτή το παίγνιο πλέον έχει απλοποιηθεί, καθώς έχουν εξαφανιστεί τα τελευταία κλαδιά. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία είναι δυνατόν να απλοποιηθεί εξ ολοκλήρου το παίγνιο, μέχρις ότου οι στρατηγικές που θα ακολουθήσουν οι παίκτες είναι απολύτως προφανείς.

<u>Παράδειγμα:</u> *Ανάλυση του παιγνίου του Σχήματος 2.1 με τη μέθοδο της πίσω επαγωγής.*

Παρατηρείται πως ανάλογα με την απόφαση του παίκτη 2, το παίγνιο θα εξελιχτεί είτε στο κόκκινο είτε στο μπλε υπό-παίγνιο. Θα αναλυθεί το καθένα ξεχωριστά, και θα εξεταστεί ποιο από τα δύο υπό-παίγνια θα δώσει στον παίκτη 1 μεγαλύτερη ωφέλεια.

Έστω πως αναλύεται πρώτα το μπλε υπό-παίγνιο. Αρχικά εξετάζεται ο κόμβος απόφασης του παίκτη 2, στον οποίο καλείται να επιλέξει ανάμεσα σε υποχώρηση ($retreat$) και πόλεμο ($fight$). Καθώς ο παίκτης 2 θα λάβει ωφέλεια 0 στην πρώτη περίπτωση και -2 στη δεύτερη, εξάγεται το συμπέρασμα πως θα προτιμήσει τη στρατηγική της υποχώρησης. Συνεπώς, ο συγκεκριμένος κόμβος απόφασης του παίκτη 2 αντιστοιχεί σε ωφέλεια $(5, 0)$ για τους δύο παίκτες. Στον άλλο κόμβο του παίκτη 2, δεν υπάρχει καμία απόφαση να ληφθεί, οπότε μπορεί αμέσως να αντικατασταθεί από την ωφέλεια $(0, 5)$. Εν συνεχεία, εξετάζεται ο κόμβος απόφασης του παίκτη 1. Έχει τη δυνατότητα να επιλέξει είτε επίθεση ($attack$), είτε όχι επίθεση (not). Είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς πως αν ο παίκτης 1 επιλέξει την πρώτη στρατηγική θα αποκομίσει ωφέλεια 5, ενώ αν επιλέξει τη δεύτερη θα αποκομίσει ωφέλεια 0. Καθώς είναι λογικός παίκτης, θα επιλέξει τη στρατηγική της επίθεσης. Συνεπώς, ο κόμβος απόφασης του παίκτη 1 μπορεί να αντικατασταθεί από την ωφέλεια $(5, 0)$, η οποία είναι και η ωφέλεια που θα αποκομίσουν τελικά οι δύο παίκτες, αν παιχτεί το μπλε υπό-παίγνιο.

Το κόκκινο υπό-παίγνιο είναι όμοιο με το μπλε, με τη σημαντική διαφορά πως ο παίκτης 2 έχει στερήσει από τον εαυτό του τη στρατηγική υποχώρησης. Πλέον, η μοναδική του επιλογή είναι ο πόλεμος, ο οποίος αποφέρει στους δύο παίκτες ωφέλεια $(-2, -2)$. Συνεπώς, στον κόμβο απόφασης του παίκτη 1, πλέον η στρατηγική επίθεσης του δίνει ωφέλεια -2, ενώ η στρατηγική μη επίθεσης του αποφέρει ωφέλεια 0. Είναι προφανές, πως σε αυτή την περίπτωση, ο παίκτης 2 θα επιλέξει τη στρατηγική μη επίθεσης. Συνεπώς, ο κόμβος απόφασης του παίκτη 1 μπορεί να αντικατασταθεί από την ωφέλεια $(0, 5)$, η οποία είναι και η ωφέλεια που θα αποκομίσουν τελικά οι δύο παίκτες, αν παιχτεί το κόκκινο υπό-παίγνιο.

Η ανάλυση τελειώνει στην αρχική απόφαση που έχει να λάβει ο παίκτης 2. Εκεί, καλείται να επιλέξει ποιο από τα 2 υπό-παίγνια θα προτιμήσει να παιχτεί. Καθώς η ωφέλεια που θα του επιφέρει το κόκκινο υπό-παίγνιο είναι 5, ενώ η ωφέλεια που θα του αποφέρει το μπλε υπό-παίγνιο είναι 0, τότε είναι λογικό ο παίκτης 2 να κάψει τη γέφυρα, στερώντας από τον εαυτό του τη δυνατότητα οπισθοχώρησης και εξαναγκάζοντας τον παίκτη 1 να αλλάξει τη στρατηγική του. Στην τελική λύση του παιγνίου ο παίκτης 2, καίει τη γέφυρα, και ο παίκτης 1 δεν επιτίθεται, καθώς σε περίπτωση επίθεσης ο παίκτης 2 θα αναγκαζόταν να πολεμήσει, με ολέθριες συνέπειες για τον παίκτη 1. Μάλιστα, ο παίκτης 2 θα επέλεγε να κάψει τη γέφυρα, ακόμα και αν αυτό του κόστιζε σε ωφέλεια, υπό την προϋπόθεση πως η απώλεια ωφέλειας από το κάψιμο της γέφυρας δεν ξεπερνά τα $5\ utils$.

3 Θεωρία Παιγνίων και Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών

3.1 Ultimatum Game

Το Ultimatum Game [3] διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1982 από τον Ισραηλινό οικονομολόγο Ariel Rubinstein. Το συγκεκριμένο παίγνιο μπορεί να περιγραφεί πολύ απλά, παρουσιάζει όμως ιδιαίτερο ενδιαφέρον, τόσο από λογικής πλευράς, όσο και από κοινωνικής, καθώς τα αποτελέσματα που προκύπτουν με λογικούς συλλογισμούς δεν επαληθεύονται και στην πραγματικότητα, όπως αποδεικνύεται με πάρα πολλά πειράματα που έχουν διεξαχθεί [4], [5]. Η περιγραφή του Ultimatum Game έχει ως εξής:

«Ένας φιλάνθρωπος δωρίζει σε δύο άγνωστους μεταξύ τους ανθρώπους (έστω Α και Β) ένα συγκεκριμένο χρηματικό ποσό Χ, το οποίο καλούνται να μοιραστούν ως εξής: Ο Α καλείται να προτείνει έναν και μόνο έναν τρόπο διαμοίρασης του ποσού (x χρηματικές μονάδες στον Α και $X - x$ χρηματικές μονάδες στον Β) και ο Β καλείται είτε να αποδεχτεί την προσφορά, είτε να αρνηθεί, χωρίς όμως να δικαιούται να αντιπροτείνει κάτι διαφορετικό. Αν ο Β αποδεχτεί την προσφορά του Α, τότε οι δύο παίκτες μοιράζονται το χρηματικό ποσό με τον τρόπο που συμφώνησαν. Αν όμως ο Β απορρίψει την προσφορά του Α, τότε κανείς εκ των 2 παικτών δεν παίρνει κάτι και τα χρήματα επιστρέφονται στο φιλάνθρωπο».

Η Θεωρία Παιγνίων καλείται να αναλύσει το παιχνίδι ώστε να είναι σε θέση να ορίσει ποια στρατηγική θα πρέπει να ακολουθήσει ο καθένας από τους δύο παίκτες. Για να είναι δυνατή η επίλυση του παιγνίου, θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές:

1. Οι δύο παίκτες είναι άγνωστοι μεταξύ τους και αποφασίζουν ανεξάρτητα, ενώ γνωρίζουν και οι δύο πως αποκλείεται να αλληλεπιδράσουν στο μέλλον.
2. Οι δύο παίκτες ενδιαφέρονται αποκλειστικά για τα χρήματα, προτιμώντας αυστηρά περισσότερα χρήματα.
3. Η υπόθεση 2. είναι γνωστή και στους δύο παίκτες.

Θα αναλυθεί η επίλυση μίας εκ των παραλλαγών του Ultimatum Game, στην οποία $X = 10$ €, ενώ οι επιτρεπτές προσφορές μοιρασιάς που μπορεί να προτείνει ο Α περιορίζονται στις (9,1), (8,2), (7,3), (6,4), (5,5), (4,6), (3,7), (2,8), (1,9). Δηλαδή υποχρεούται να προσφέρει τουλάχιστον 1€ στον Β και ταυτόχρονα η μεταβλητή x θεωρείται **διακριτή** (στο αρχικό πρόβλημα είναι συνεχής στο διάστημα $[0, X]$). Το παίγνιο πλέον μπορεί να επιλυθεί με 2 τρόπους, είτε διατυπώνοντάς το στην κανονική του μορφή και διαγράφοντας τις κυριαρχούμενες στρατηγικές του κάθε παίκτη, καταλήγοντας έτσι στην Ισορροπία Nash, είτε με τη μέθοδο της πίσω-επαγωγής.

3.1.1 Εύρεση της Ισορροπίας Nash

Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει το παίγνιο στην κανονική του μορφή.

A/B	Αποδοχή	Απόρριψη
Πρόταση για (9,1)	(9,1)	(0,0)
Πρόταση για (8,2)	(8,2)	(0,0)
Πρόταση για (7,3)	(7,3)	(0,0)
Πρόταση για (6,4)	(6,4)	(0,0)
Πρόταση για (5,5)	(5,5)	(0,0)
Πρόταση για (4,6)	(4,6)	(0,0)
Πρόταση για (3,7)	(3,7)	(0,0)
Πρόταση για (2,8)	(2,8)	(0,0)
Πρόταση για (1,9)	(1,9)	(0,0)

Πίνακας 3.1: Ultimatum Game (κανονική μορφή)

Είναι φανερό πως ανεξαρτήτως της στρατηγικής του παίκτη Α (δηλαδή σε κάθε γραμμή), η στρατηγική του παίκτη Β *«Απόρριψη»* προσφέρει στον παίκτη Β χαμηλότερες χρηματικές απολαβές από ό,τι η στρατηγική *«Αποδοχή»*, οπότε είναι ισχυρώς κυριαρχούμενη. Συνεπώς, η Θεωρία Παιγνίων συμβουλεύει τον παίκτη Β να μην επιλέξει ποτέ τη στρατηγική *«Απόρριψη»*, αλλά αντίθετα να επιλέξει *«Αποδοχή»* ανεξαρτήτως της επιλογής του Παίκτη Α. Ο Πίνακας 3.2 παρουσιάζει την επικαιροποιημένη μορφή του παιχνιδιού, μετά τη διαγραφή της στρατηγικής *«Απόρριψη»* από τις επιλογές του Παίκτη Β.

A/B	Αποδοχή
Πρόταση για (9,1)	(9,1)
Πρόταση για (8,2)	(8,2)
Πρόταση για (7,3)	(7,3)
Πρόταση για (6,4)	(6,4)
Πρόταση για (5,5)	(5,5)
Πρόταση για (4,6)	(4,6)
Πρόταση για (3,7)	(3,7)
Πρόταση για (2,8)	(2,8)
Πρόταση για (1,9)	(1,9)

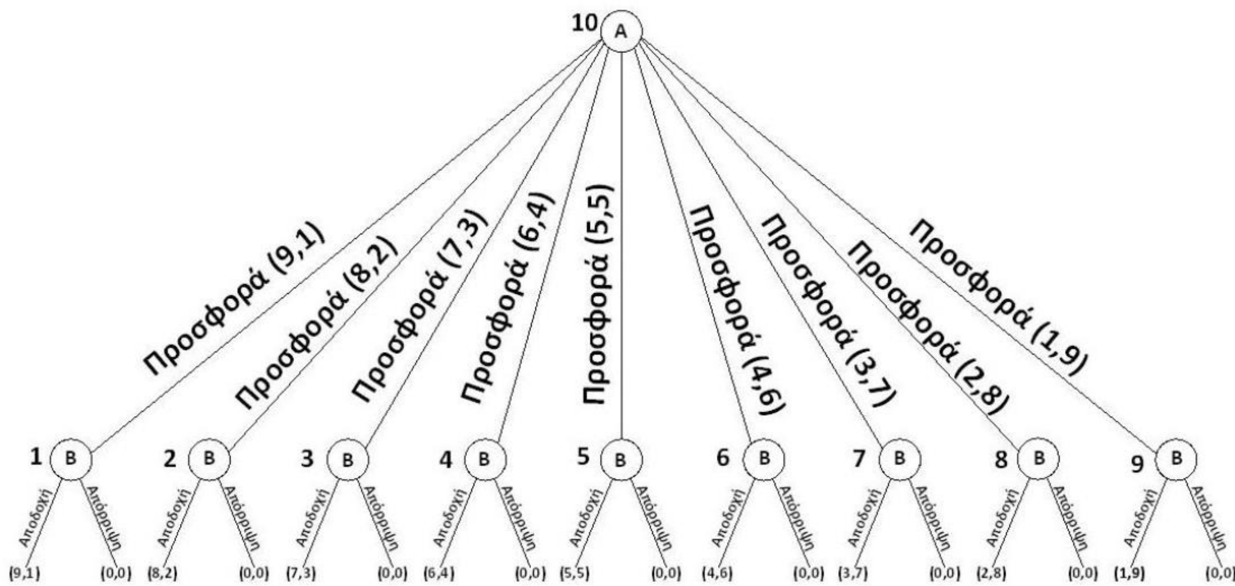
Πίνακας 3.2: Ultimatum Game (μετά τη διαγραφή της στρατηγικής «απόρριψη»)

Από την υπόθεση (3), γνωρίζουμε πως ο παίκτης Α γνωρίζει πως ο παίκτης Β θα καταλήξει σε αυτό το συλλογισμό. Συνεπώς μπορεί να επιλέξει στρατηγική γνωρίζοντας την επικαιροποιημένη μορφή του παιγνίου. Προφανώς, θα επιλέξει τη στρατηγική που του αποφέρει τις περισσότερες χρηματικές μονάδες, δηλαδή την *«Πρόταση για* (9,1)*»*, καθώς όλες οι υπόλοιπες στρατηγικές είναι ισχυρώς κυριαρχούμενες από αυτή τη στρατηγική. Το ζεύγος στρατηγικών *(«Πρόταση για (9,1)», «Αποδοχή»)* αποτελεί και την Ισορροπία Nash, στο οποίο οφείλουν να καταλήξουν οι δύο παίκτες αν συμπεριφερθούν λογικά.

3.1.2 Επίλυση με τη μέθοδο της Πίσω-Επαγωγής

Σύμφωνα με τη μέθοδο της Πίσω-Επαγωγής, το παίγνιο καταγράφεται σε δενδροειδή μορφή. Κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει μια απόφαση που πρέπει να πάρει ένας εκ των δύο παικτών και κάθε κλαδί αντιπροσωπεύει τις δυνατές αποφάσεις. Στη συνέχεια, κάθε κλαδί του δέντρου αντικαθίσταται με την τιμή που πρόκειται να πάρει, υπό την προϋπόθεση πως ο παίκτης που πρέπει να πάρει μια απόφαση θα συμπεριφερθεί λογικά, προσπαθώντας να μεγιστοποιήσει τη δική του ωφέλεια.

Στην περίπτωση του διασκευασμένου Ultimatum Game που παρουσιάστηκε παραπάνω, η δενδροειδής μορφή του παιγνίου φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Φυσικά το παίγνιο ξεκινάει από τον κόμβο απόφασης 10, στον οποίο ο παίκτης Α καλείται να προτείνει μια μοιρασιά του χρηματικού ποσού. Ανάλογα με την επιλογή του, το παιχνίδι θα οδηγηθεί σε ένα από τα παρακλάδια (κόμβοι απόφασης 1-9), ενώ ο δρόμος που θα ακολουθηθεί στη συνέχεια θα αποφασιστεί από τον παίκτη Β. Εν συνεχεία, για κάθε κόμβο του δέντρου διακρίνεται ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική του κάθε παίκτη, ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω. Σε κάθε κόμβο δίνεται ένας αριθμός, ούτως ώστε να μπορεί να γίνεται λόγος γι’ αυτόν, ενώ μέσα σε κάθε κόμβο γράφεται το όνομα του παίκτη που πρέπει να πάρει κάποια απόφαση. Έτσι, στον κόμβο 1, καλείται ο παίκτης Β να αποφασίσει αν θα δεχτεί ή θα απορρίψει την πρόταση του παίκτη Α για μοιρασιά $(9,1)$.



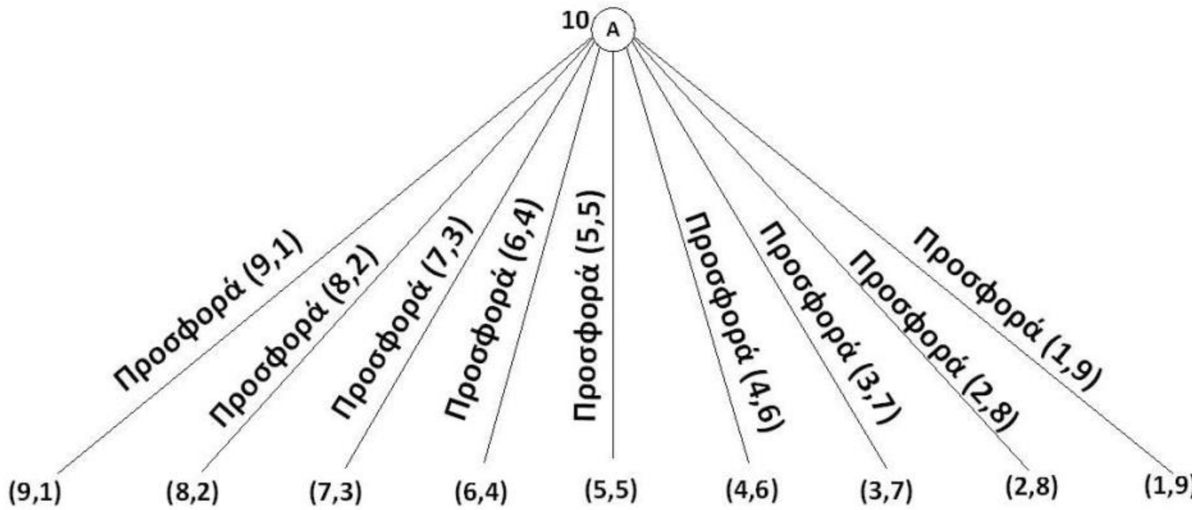
Σχήμα 3.1: Ultimatum Game – Δενδροειδής Απεικόνιση

Είναι προφανές ότι αν ο παίκτης Β βρεθεί στον κόμβο 1, είναι προτιμότερο να επιλέξει *«Αποδοχή»* παρά *«Απόρριψη»*, αφού στην πρώτη περίπτωση θα πληρωθεί μία χρηματική μονάδα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση δε θα λάβει καμία πληρωμή.

Έχοντας εκτελέσει τον παραπάνω συλλογισμό και γνωρίζοντας ότι ο Β είναι λογικός παίκτης, προκύπτει πως κάθε φορά που το παίγνιο φτάνει στον κόμβο 1, ο παίκτης Β θα επιλέγει *«Αποδοχή»* και ο παίκτης Α θα πληρώνεται 9 χρηματικές μονάδες, ενώ ο παίκτης Β θα πληρώνεται μία χρηματική μονάδα. Επομένως, ο κόμβος 1 (και όλα τα παρακλάδια του) μπορεί να αντικατασταθεί με την ωφέλεια που θα πάρουν οι 2 παίκτες, αν το παίγνιο φτάσει σε αυτό το σημείο.

Ο ίδιος συλλογισμός ισχύει και για τους κόμβους 2-9. Κάθε φορά ο παίκτης Β προτιμάει να πληρωθεί κάποιο ποσό από το να μην πληρωθεί απολύτως τίποτα, οπότε πάντα επιλέγει

«Αποδοχή», συνεπώς και αυτοί οι κόμβοι μπορούν να αντικατασταθούν από τις ωφέλειες στις οποίες αντιστοιχούν. Στο Σχήμα 3.2 φαίνεται η ενημερωμένη μορφή του παιγνίου, στην οποία οι κόμβοι απόφασης 2-9 έχουν αντικατασταθεί. Παρατηρείται πως ο παίκτης Β δεν παίρνει καμία απόφαση στο νέο αυτό παίγνιο. Είναι αποκλειστικά ένα πρόβλημα απόφασης για τον παίκτη Α, ο οποίος καλείται να επιλέξει μεταξύ των εναλλακτικών που διαθέτει. Φυσικά, θα επιλέξει τη στρατηγική που μεγιστοποιεί τη δική του ωφέλεια, δηλαδή τη στρατηγική *«Πρόταση για* $(9,1)$*»*, την οποία ο παίκτης Β θα αποδεχτεί. Η λύση στην οποία το παίγνιο καταλήγει είναι *(«Πρόταση για* $(9,1)$*», «Αποδοχή»)*, η οποία φυσικά είναι η ίδια που προέκυψε με τον πρώτο τρόπο επίλυσης, αναλύοντας το παίγνιο στην κανονική του μορφή.



Σχήμα 3.2: Ultimatum Game (ανανεωμένη μορφή)

3.1.3 Ποιά είναι η πραγματικότητα;

Έχουν διεξαχθεί πάρα πολλά πειράματα [4], [5] στα οποία καλούνται άτομα να παίξουν το Ultimatum Game ώστε να μελετηθεί η συμπεριφορά τους. Για να είναι ακριβή αυτά τα πειράματα, διασφαλίζονται τα παρακάτω βασικά στοιχεία:

- Τα άτομα που συμμετέχουν στα πειράματα έχουν κατανοήσει καλά τους κανόνες του παιχνιδιού. Αυτό επιτυγχάνεται παρέχοντάς τους τη δυνατότητα να παίξουν πολλές φορές δοκιμαστικά, ούτως ώστε να εξοικειωθούν με τη διαδικασία.
- Οι αμοιβές αντιστοιχούν σε πραγματικά χρήματα, ούτως ώστε οι παίκτες να έχουν επαρκές κίνητρο να παίξουν με τον τρόπο που θεωρούν καλύτερο.
- Οι παίκτες δεν πρέπει να γνωρίζονται ή να πρόκειται να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους στο μέλλον. Το παραπάνω ισχύει για το Ultimatum Game μιας φάσης, αν και στο Ultimatum Game περισσότερων φάσεων αυτό είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί (ή έστω να το κατανοούν οι παίκτες).

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων εν γένει δεν επαληθεύουν τη θεωρία. Από τη μία τα άτομα που καλούνται να παίξουν το ρόλο του παίκτη Α κάνουν πιο μοιρασμένες προσφορές (π.χ. 5-5) σε σχέση με τη θεωρητικά σωστή προσφορά (9-1), από την άλλη, μεγάλο ποσοστό των ατόμων που καλούνται να παίξουν το ρόλο του παίκτη Β αρνούνται αρκετά συχνά προσφορές που θεωρούν άδικες (π.χ. 7-3), προτιμώντας να πάρουν 0 χρηματικές μονάδες σύνολο παρά να αφήσουν τον παίκτη Α να αποκτήσει περισσότερες χρηματικές μονάδες από τους ίδιους.

Τα γεγονότα αυτά δεν αναιρούν σε καμία περίπτωση την εγκυρότητα του αποτελέσματος στο οποίο κατέληξαν οι παραπάνω υποενότητες. Η θεωρητική λύση του παιγνίου είναι αυτή που περιγράφηκε προηγουμένως. Όμως, η ανθρώπινη συμπεριφορά είναι πολύ δύσκολο να προβλεφθεί με αντίστοιχη ακρίβεια.

Συγκεκριμένα, η δεύτερη παραδοχή («οι παίκτες ενδιαφέρονται αποκλειστικά για τα χρήματα») παύει να ισχύει. Όσο η παραδοχή αυτή ήταν σε ισχύ, μπορούσαμε με ασφάλεια να πούμε πως η συνάρτηση ωφέλειας των ατόμων ταυτιζόταν με τις χρηματικές τους απολαβές. Όταν όμως εμπλέκονται ανθρώπινα συναισθήματα, όπως ζήλια, πληγωμένη υπερηφάνεια, οργή και πείσμα [4], [5], τότε ο καθορισμός της συνάρτησης ωφέλειας του κάθε ατόμου δυσχεραίνει σημαντικά. Όμως, είναι αδιαμφισβήτητο γεγονός ότι τέτοιοι παράγοντες επηρεάζουν το αποτέλεσμα. Χαρακτηριστικά παρατηρείται πως κάποιοι παίκτες απορρίπτουν προσφορές που θεωρούν ότι τους προσβάλλουν. Αυτές βέβαια διαφέρουν ανάλογα με τον κάθε παίκτη. Κάποιοι αρνούνται να δεχτούν οποιουδήποτε είδους «άδικη» προσφορά κάτω από 50-50, ενώ κάποιοι άλλοι έχουν το δικό τους ξεχωριστό όριο χαμηλότερης αποδεκτής προσφοράς. Επίσης, οι συμπεριφορές μεταβάλλονται και ανάλογα με το μέγεθος του χρηματικού ποσού που διακυβεύεται, επαληθεύεται δηλαδή το φαινόμενο “The size of the pie matters”. Παρατηρείται δηλαδή πως καθώς το χρηματικό ποσό μεγαλώνει τα άτομα τείνουν να αποδέχονται όλο και πιο άδικες προσφορές. Για παράδειγμα, όταν το χρηματικό ποσό που οι δύο παίκτες καλούνται να μοιραστούν αποτελεί σημαντικό ποσοστό του μηνιαίου εισοδήματός τους, τότε ο παίκτης Α γίνεται πιο επιθετικός (δηλαδή προτείνει πιο άδικες μοιρασιές), ενώ ο παίκτης Β τείνει να αποδέχεται όλο και πιο άδικες προσφορές.

Η Θεωρία Παιγνίων, αν και δίνει τη λύση στο θεωρητικό πρόβλημα, αδυνατεί να λάβει υπόψη της παράγοντες που δε γνωρίζει, όπως την ανθρώπινη συμπεριφορά. Το πώς πρέπει να συμπεριφερθεί κανείς σε ένα Ultimatum Game στην πραγματική ζωή είναι αντικείμενο ενός άλλου κλάδου, της **συμπεριφορικής θεωρίας παιγνίων** (*behavioral game theory*).

3.2 Ορισμός του προβλήματος βελτιστοποίησης

Έστω ένας υπό μελέτη φορέας, για το σχεδιασμό του οποίου είναι αναγκαίο να προσδιοριστούν συγκεκριμένες ποσότητες. Έστω $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ το διάνυσμα των παραπάνω ποσοτήτων, οι οποίες καλούνται και μεταβλητές σχεδιασμού (*design variables*). Οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να είναι οποιεσδήποτε ποσότητες που αφορούν το σχεδιασμό του φορέα. Για παράδειγμα, μπορεί $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ να είναι οι συντεταγμένες των κόμβων του φορέα, $(a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m})$ να είναι οι διατομές των μελών του. Ο μηχανικός καλείται να αποφασίσει ποιος είναι ο βέλτιστος δυνατός σχεδιασμός του φορέα, δεδομένων των περιορισμών που του επιβάλλονται από τη φύση, τους κανονισμούς, το χρήστη, κλπ.

Οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να ποικίλλουν και ανάλογα με τη φύση τους αλλάζει και το πρόβλημα που καλείται να επιλύσει ο μηχανικός. Για παράδειγμα, αν οι μεταβλητές σχεδιασμού αφορούν αποκλειστικά τις διατομές των μελών, τότε καλείται να λύσει ένα πρόβλημα διαστασιολόγησης (***size optimization***). Στην περίπτωση που κάποια μέλη και κάποιοι κόμβοι επιτρέπεται να σβηστούν τελείως, τότε καλείται να λύσει ένα πρόβλημα τοπολογίας (***topology optimization***). Αν οι μεταβλητές σχεδιασμού αποτελούν συνδυασμό συντεταγμένων του φορέα και διατομών των μελών, τότε ο μηχανικός καλείται να λύσει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σχήματος και διαστασιολόγησης (***shape & size optimization***). Με την προτεινόμενη μέθοδο είναι δυνατόν με χρήση της θεωρίας παιγνίων να επιλυθούν και αυτά τα προβλήματα αλλά και συνδυασμοί αυτών (δηλαδή ταυτόχρονος προσδιορισμός και συντεταγμένων φορέα αλλά και διαστάσεων διατομής).

3.3 Παραδοχές

- Όλες οι οικογένειες προβλημάτων που καλείται να επιλύσει ο μηχανικός προσεγγίζονται με το ίδιο παίγνιο. Στο παίγνιο αυτό, ο πρώτος παίκτης είναι ο αμυνόμενος, ο οποίος καθορίζει το σχεδιασμό του φορέα, ενώ ο δεύτερος παίκτης είναι ο επιτιθέμενος, ο οποίος καθορίζει τη φόρτιση του φορέα. Στην πράξη, το ρόλο του αμυνόμενου καλείται να παίξει ο μηχανικός, τον οποίο η Θεωρία Παιγνίων θα συμβουλέψει για να παίξει όσο καλύτερα γίνεται στο παίγνιο. Ο επιτιθέμενος παίκτης φυσικά θα είναι ένας άξιος αντίπαλος, του οποίου οι κινήσεις θα είναι οι καλύτερες δυνατές. Το ρόλο του επιτιθέμενου παίκτη μπορεί να πάρει η Φύση ή οποιοσδήποτε υποθετικός αντίπαλος, καθώς αυτό δεν επηρεάζει την πορεία του παιχνιδιού.
- Θεωρείται πως οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να πάρουν μόνο διακριτές τιμές. Η παραδοχή αυτή είναι ρεαλιστική τόσο σε επίπεδο τοπολογίας όσο και σε επίπεδο διαστασιολόγησης. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, οι διατομές που χρησιμοποιούνται είτε είναι προκατασκευασμένες (για παράδειγμα, οι διατομές IPE, HEA, HEB των μεταλλικών κατασκευών), είτε υπόκεινται αναγκαστικά σε στρογγυλοποίηση για κατασκευαστικούς λόγους (π.χ. στις κατασκευές από σκυρόδεμα). Ανάλογη είναι η κατάσταση και στις συντεταγμένες των φορέων.
- Η φόρτιση του φορέα μπορεί να επιλεγεί από ένα πλήθος περιπτώσεων φόρτισης. Αυτή η παραδοχή επίσης είναι ρεαλιστική, καθώς οι κανονισμοί επιβάλλουν ορισμένες περιπτώσεις φόρτισης για τις οποίες η κατασκευή πρέπει να μελετηθεί. Φορτίσεις μικρότερες από τις κανονιστικές δεν πρόκειται να επηρεάσουν το σχεδιασμό της κατασκευής και άρα αγνοούνται, ενώ φορτίσεις μεγαλύτερες από τις κανονιστικές θα οδηγήσουν σε υπερσυντηρητικό σχεδιασμό, κάτι που επίσης πρέπει να αποφύγει ο μηχανικός εκτός αν του ζητηθεί. Σε κάθε περίπτωση όμως το πλήθος των φορτίσεων είναι πεπερασμένο και γνωστό εκ των προτέρων, με εξαίρεση το ίδιο βάρος του φορέα στην περίπτωση που οι διατομές των μελών δεν είναι ακόμη γνωστές.
- Η βέλτιστη λύση εξαρτάται από το χρήστη, το άτομο που ωφελείται από την κατασκευή. Αυτό ίσως ακούγεται λίγο παράδοξο στην αρχή, όμως είναι σωστό. Κάθε άτομο αντιλαμβάνεται με διαφορετικό τρόπο το ίδιο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, κάποιος πιο ευκατάστατος είναι πιο πιθανό να είναι διατεθειμένος να πληρώσει κάποιο χρηματικό ποσό ώστε να εξασφαλίσει επιπλέον ασφάλεια για την κατασκευή του, ενώ κάποιος λιγότερο ευκατάστατος είναι πιο πιθανό να είναι ικανοποιημένος με μια πιο φθηνή λύση (performance based design). Καθώς κατά κανόνα η βέλτιστη λύση

δε θα είναι καλύτερη από τις υπόλοιπες λύσεις σε όλους τους τομείς (δηλαδή είναι απίθανο η πιο ασφαλής λύση να είναι και η πιο φθηνή), εξάγεται το συμπέρασμα πως η βέλτιστη λύση θα προκύψει μέσα από συμβιβασμούς. Οπότε ανάλογα με τη συνάρτηση ωφέλειας του εκάστοτε χρήστη θα προκύψει και διαφορετική βέλτιστη λύση.

3.4 Η Μέθοδος Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας

Σύμφωνα με τη ΜΜΕΩ [1], το πρόβλημα μπορεί να αναλυθεί σε δύο επιμέρους στάδια:

1. Την κατασκευή του μητρώου απολαβών των παικτών.

2. Την ανάλυση του παιγνίου με σκοπό την επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής για τον αμυνόμενο παίκτη (δηλαδή το μηχανικό).

3.4.1 Κατασκευή Μητρώου Απολαβών – Υπολογισμός Ωφέλειας

Στο πρώτο βήμα προβλέπεται το τι θα συμβεί για κάθε περίπτωση σχεδιασμού και φόρτισης. Δηλαδή, με βάση τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του φορέα και τη φόρτιση που επιλέγεται, εκτελείται μια ανάλυση, η οποία θα δώσει αποτελέσματα μετακινήσεων, τάσεων και εντατικών μεγεθών. Επίσης, καθώς πλέον είναι γνωστά τα χαρακτηριστικά της κατασκευής, μπορεί να υπολογιστεί ο συνολικός όγκος του υλικού και κατά συνέπεια το κόστος της κατασκευής. Χρειάζεται όμως να προσδιοριστεί ένας τρόπος συσχετισμού του κόστους της κατασκευής και των αποτελεσμάτων της φόρτισης (μετακινήσεις, τάσεις).

3.4.1.1 Συνάρτηση ωφέλειας για ελαστική ανάλυση

Στο Σχήμα 3.3 απεικονίζεται η συνάρτηση ωφέλειας μετακινήσεων, της οποίας η μαθηματική έκφραση είναι:

$$u_{d,i}(d_i) = \begin{cases} {a_{d,i}}^{+} \cdot d_i, & 0 \leq d_i \leq {d_{i,lim}}^{+} \\ {a_{d,i}}^{-} \cdot |d_i|, & {d_{i,lim}}^{-} \leq d_i < 0 \\ {a_{d,i}}^{+} \cdot {d_{i,lim}}^{+} + p_d + {a_{d,i}}^{+} \cdot \left(d_i - {d_{i,lim}}^{+}\right)^k, & d_i > {d_{i,lim}}^{+} \\ {a_{d,i}}^{-} \cdot \left|{d_{i,lim}}^{-}\right| + p_d + {a_{d,i}}^{-} \cdot \left({d_{i,lim}}^{-} - d_i\right)^k, & d_i < {d_{i,lim}}^{-} \end{cases}$$

Όπου:

$u_{d,i}(d_i)$: είναι η συνάρτηση ωφέλειας για μία συγκεκριμένη μετακίνηση d_i.

${d_{i,lim}}^{+}$: είναι ένα όριο μετακίνησης ενός βαθμού ελευθερίας κατά τη θετική κατεύθυνση, το οποίο είναι επιθυμητό να μην ξεπεραστεί.

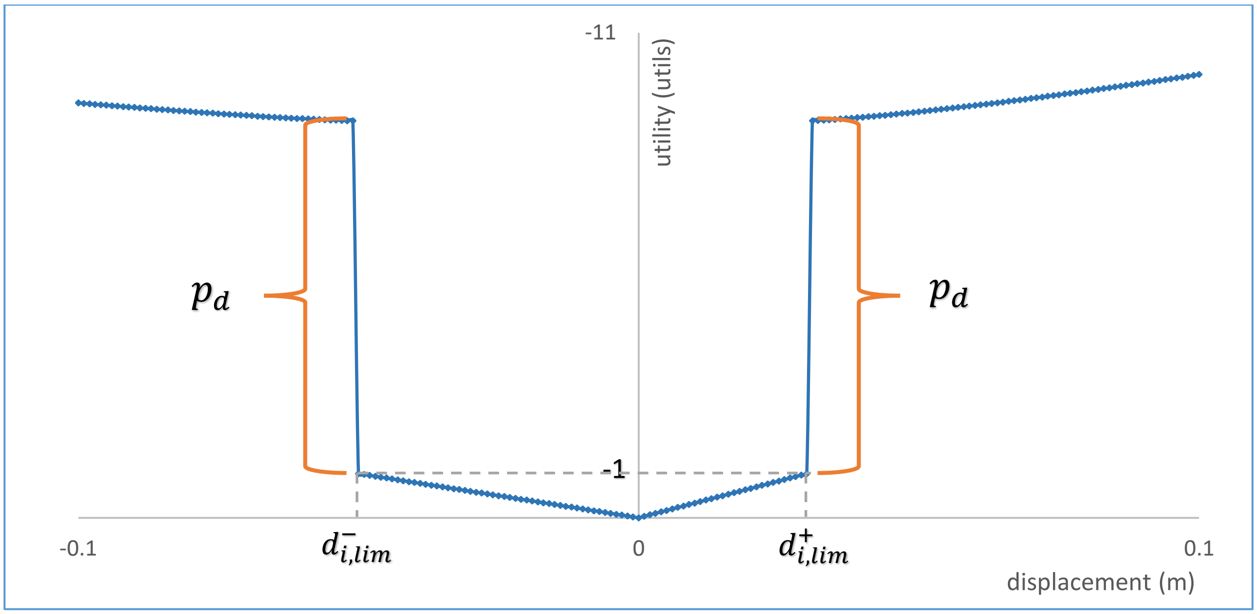
${d_{i,lim}}^{-}$: είναι ένα όριο μετακίνησης κάθε βαθμού ελευθερίας κατά την αρνητική κατεύθυνση, το οποίο είναι επιθυμητό να μην ξεπεραστεί.

p_d : είναι η ποινή που επιβάλλεται στην περίπτωση που ξεπεραστεί κάποιο από τα όρια μετακίνησης για το συγκεκριμένο βαθμό ελευθερίας. Η τιμή της είναι αρνητική.

$a_{d,i}{}^{+}$: συντελεστής που δείχνει τη γραμμική μεταβολή της ωφέλειας για μικρές τιμές της μετακίνησης d_i όταν αυτή έχει θετική φορά. Είναι αυστηρά αρνητικός και υποδηλώνει την προτίμηση του παίκτη Α σε μικρότερες μετακινήσεις από μεγαλύτερες.

$a_{d,i}{}^{-}$: συντελεστής που δείχνει τη γραμμική μεταβολή της ωφέλειας για μικρές τιμές της μετακίνησης d_i όταν αυτή έχει αρνητική φορά. Είναι αυστηρά αρνητικός και υποδηλώνει την προτίμηση του παίκτη Α σε μικρότερες μετακινήσεις από μεγαλύτερες.

k: δείκτης που δείχνει τον τρόπο μεταβολής της χρησιμότητας για τιμές της μετακίνησης d_i μεγαλύτερες από το αντίστοιχο επιθυμητό όριο.



Σχήμα 3.3: Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης ωφέλειας μετακινήσεων

Αντίστοιχα, ο προσδιορισμός της ωφέλειας λόγω τάσεων γίνεται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$u_{\sigma,i}(\sigma_i) = \begin{cases} a_{\sigma,i}{}^{+} \cdot \sigma_i \,, & 0 \le \sigma_i \le \sigma_{i,lim}{}^{+} \\ a_{\sigma,i}{}^{-} \cdot |\sigma_i|, & \sigma_{i,lim}{}^{-} \le \sigma_i < 0 \\ a_{\sigma,i}{}^{+} \cdot \sigma_{i,lim}{}^{+} + p_\sigma + a_{\sigma,i}{}^{+} \cdot \left(\sigma_i - \sigma_{i,lim}{}^{+}\right)^k, & \sigma_i > \sigma_{i,lim}{}^{+} \\ a_{\sigma,i}{}^{-} \cdot \left|\sigma_{i,lim}{}^{-}\right| + p_\sigma + a_{\sigma,i}{}^{-} \cdot \left(\sigma_{i,lim}{}^{-} - \sigma_i\right)^k, & \sigma_i < \sigma_{i,lim}{}^{-} \end{cases}$$

Η συνολική ωφέλεια των αποτελεσμάτων (*utility of results*) συνοψίζεται στη σχέση:

$$u_{res} = w_d \cdot u_d + w_\sigma \cdot u_\sigma$$

Όπου:

$$u_d = \sum w_{d,i} \cdot u_{d,i}$$

και

$$u_\sigma = \sum w_{\sigma,i} \cdot u_{\sigma,i}$$

Τα μεγέθη w_d και w_σ εκφράζουν τη βαρύτητα που έχουν οι μετακινήσεις και οι τάσεις αντίστοιχα, στη διαμόρφωση της χρησιμότητας των αποτελεσμάτων.

Προκύπτει πως εάν τεθούν περιορισμοί σε ένα μόνο από τα 2 είδη αποτελεσμάτων που ενδιαφέρουν, τότε αυτό λαμβάνει συνολική βαρύτητα 1 ενώ το άλλο 0. Αν για παράδειγμα στο πρόβλημα υπάρχουν μόνο περιορισμοί τάσεων, θα υπολογιστεί $w_\sigma = 1$ και $w_d = 0$. Αντίστοιχα, αν υπάρχουν μόνο περιορισμοί μετακινήσεων, θα είναι $w_\sigma = 0$ και $w_d = 1$. Αν όμως υπάρχουν και τα 2 είδη περιορισμών τότε: $w_d = w_\sigma = \frac{1}{2}$.

Τα μεγέθη $w_{d,i}$ και $w_{\sigma,i}$ εκφράζουν τους συντελεστές βαρύτητας των επιμέρους μετακινήσεων και τάσεων αντίστοιχα, δηλαδή τη σημασία που έχει η κάθε μετακίνηση κόμβου ή η τάση που αναπτύσσεται σε ένα μέλος στη διαμόρφωση της τελικής ωφέλειας. Για τους συντελεστές αυτούς ισχύει:

$$\sum w_{d,i} = 1$$

και

$$\sum w_{\sigma,i} = 1$$

Η τιμή που θα πάρει ο συντελεστής βαρύτητας μετακίνησης ή τάσης θα εξαρτηθεί από το εάν ο κόμβος έχει δεσμευθεί για τη συγκεκριμένη μετακίνηση ή αντίστοιχα αν το συγκεκριμένο μέλος έχει περιορισμό στην τάση που του αναπτύσσεται. Έτσι, αν το συνολικό πλήθος των περιορισμών σε μετακινήσεις συμβολιστεί με $n_{c,d}$ και το πλήθος των περιορισμών σε τάσεις με $n_{c,\sigma}$, τότε οι επιμέρους συντελεστές βαρύτητας θα παίρνουν τιμές:

$$w_{d,i} = \begin{cases} \dfrac{1}{n_{c,d}}, & \text{με περιορισμό} \\ 0, & \text{χωρίς περιορισμό} \end{cases}$$

$$w_{\sigma,i} = \begin{cases} \dfrac{1}{n_{c,\sigma}}, & \text{με περιορισμό} \\ 0, & \text{χωρίς περιορισμό} \end{cases}$$

Στις προτιμήσεις του παίκτη Α πρέπει να ληφθεί υπόψη και το γεγονός πως εκτός από μικρότερες μετακινήσεις, πρέπει να επιδιώκει και κατά το δυνατό χαμηλότερο κόστος. Επομένως, είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί και η χρησιμότητα που αποκομίζει ο χρήστης λόγω του κόστους της κατασκευής. Αυτή ορίζεται:

$$u_{des} = \begin{cases} a_{cost} \cdot cost, & \text{cost} \leq \text{budget} \\ a_{cost} \cdot cost + p_{budget}, & \text{cost} > \text{budget} \end{cases}$$

Όπου $cost$ είναι το συνολικός κόστος της κατασκευής, a_{cost} είναι ένας αρνητικός συντελεστής που υποδηλώνει την προτίμηση του παίκτη Α σε φθηνότερους φορείς από ακριβότερους και p_{budget} είναι ποινή που επιβάλλεται στην περίπτωση που ξεπεραστεί ένα επιτρεπόμενο όριο κόστους. Στην περίπτωση προβλημάτων που δεν υπάρχει περιορισμός κόστους, θα ισχύει:

$$u_{des} = a_{cost} \cdot cost$$

Η συνολική ωφέλεια που απολαμβάνει ο παίκτης Α θα είναι αποτέλεσμα της ταυτόχρονης δράσης των χρησιμοτήτων λόγω σχεδιασμού και αποτελεσμάτων. Ο βαθμός με τον οποίο επιδρά το καθένα στο τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται από τον χρήστη και είναι αυτό που σε μεγάλο βαθμό θα καθορίσει το τελικό αποτέλεσμα του βέλτιστου σχεδιασμού:

$$u_A = w_{res} \cdot u_{res} + w_{des} \cdot u_{des}$$

Όπου w_{res}, w_{des} είναι οι συντελεστές βαρύτητας που αποδίδει ο χρήστης στα αποτελέσματα της ανάλυσης και το σχεδιασμό, αντίστοιχα. Φυσικά, οφείλουν να ικανοποιούν την ιδιότητα:

$$w_{res} + w_{des} = 1$$

Στη συνήθη περίπτωση, δίνεται εξίσου σημασία στο κόστος και τα αποτελέσματα της ανάλυσης, οπότε κατά κανόνα θα ισχύει:

$$w_{res} = w_{des} = \frac{1}{2}$$

Μέχρι στιγμής έχει γίνει λόγος αποκλειστικά στη συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη Α (δηλαδή του μηχανικού ή του χρήστη). Η συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη Β, που επιβάλλει τη φόρτιση λαμβάνεται ίση και αντίθετη με τη συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη Α ώστε το όφελος του ενός παίκτη να είναι ζημία του αντιπάλου.

$$u_B = -u_A$$

Η παραπάνω σχέση ίσως να δείχνει αντιφατική, καθώς η συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη Α εμπεριέχει δείκτες και ποσότητες που είναι ατομικά χαρακτηριστικά του παίκτη Α και άρα δεν είναι λογικό να βρίσκονται και στη συνάρτηση χρησιμότητας του άλλου παίκτη. Επιπλέον, θα περίμενε κανείς πως ο επιτιθέμενος θα αδιαφορούσε για το κόστος της κατασκευής και θα επικεντρωνόταν αποκλειστικά στο κατά πόσο η φόρτιση επιφέρει σημαντικές ζημιές σε αυτήν. Παρ’ όλα αυτά οι παραπάνω ενδοιασμοί δεν είναι απόλυτα δικαιολογημένοι.

Αφ’ ενός, ο επιτιθέμενος δεν αποτελεί πραγματικό πρόσωπο, αλλά βοηθητικό παίκτη (ψευδο - παίκτη). Καθώς δεν είναι φυσικό πρόσωπο, η μεθοδολογία επιλέγει από μόνη της τη συνάρτηση χρησιμότητάς του με τρόπο που να καθιστά όσο το δυνατό πιο απλή την επίλυση του παιγνίου που προκύπτει, χωρίς φυσικά να υστερεί σε ρεαλισμό.

Επιπλέον, η παραδοχή ότι οι συναρτήσεις χρησιμότητας των παικτών είναι ίσες και αντίθετες κατατάσσει το παίγνιο στην κατηγορία παιγνίων μηδενικού αθροίσματος. Σε αυτή την κατηγορία παιγνίων κάθε αποτέλεσμα είναι εκ διαμέτρου αντίθετο για τους δύο παίκτες, υπό την έννοια πως ό,τι «κερδίζει» ο ένας παίκτης, το «χάνει» ο άλλος. Με αυτό τον τρόπο αποκλείεται οποιαδήποτε δυνατότητα συνεργασίας των δύο παικτών με στόχο την πραγματοποίηση ενός γεγονότος που συμφέρει σχετικά και τους δύο, κάτι που μπορεί να χαρακτηριστεί απόλυτα ρεαλιστικό από τη στιγμή που ο τρόπος που έχει οριστεί το πρόβλημα δεν επιτρέπει οποιουδήποτε είδους συνεργασίες μεταξύ των δυο παικτών.

Οι απολαβές του παίκτη Α για κάθε σχεδιασμό του φορέα και για κάθε φόρτισή του σχηματίζουν το μητρώο απολαβών του παιγνίου, από την επίλυση του οποίου θα προκύψει η βέλτιστη στρατηγική του Παίκτη Α.

3.4.1.2 Συνάρτηση ωφέλειας για βελτιστοποίηση με πλαστική ανάλυση

Μέχρι τώρα η διαδικασία βελτιστοποίησης που έχει περιγραφεί αφορά την οικονομικότερη δυνατή υλοποίηση του φορέα ώστε αυτός να ικανοποιεί ορισμένους περιορισμούς μετακινήσεων και τάσεων στο πλαίσιο της ελαστικής συμπεριφοράς του. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρόλα αυτά έχει και η συγκρότηση μιας ανάλογης διαδικασίας, η οποία λαμβάνει υπόψη της την οριακή κατάσταση αστοχίας της κατασκευής. Η ανάλυση πλέον θα είναι ελαστοπλαστική. Για την υλοποίησή της χρησιμοποιείται η μέθοδος «βήμα προς βήμα» (*step by step method*) με τη βοήθεια της οποίας υπολογίζεται ο φορτικός συντελεστής λ, ο οποίος προσδιορίζει το μέγεθος των φορτίων που μπορεί να φέρει η κατασκευή έως την τελική της κατάρρευση.

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης αυτού του τύπου, στόχος θα είναι η τιμή του λ να μην είναι μικρότερη από ένα όριο, οπότε και η συνάρτηση ωφέλειας πρέπει να λαμβάνει υπόψη την απαίτηση αυτή.

Στο Σχήμα 3.4 απεικονίζεται η συνάρτηση ωφέλειας λόγω του φορτικού συντελεστή λ, η μαθηματική έκφραση της οποίας είναι:

$$u_{\lambda}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{-1}{1+\lambda - \lambda_{lim}}, & \lambda \geq \lambda_{lim} \\ -1 + p_{\lambda} - c \cdot (\lambda_{lim} - \lambda), & \lambda < \lambda_{lim} \end{cases}$$

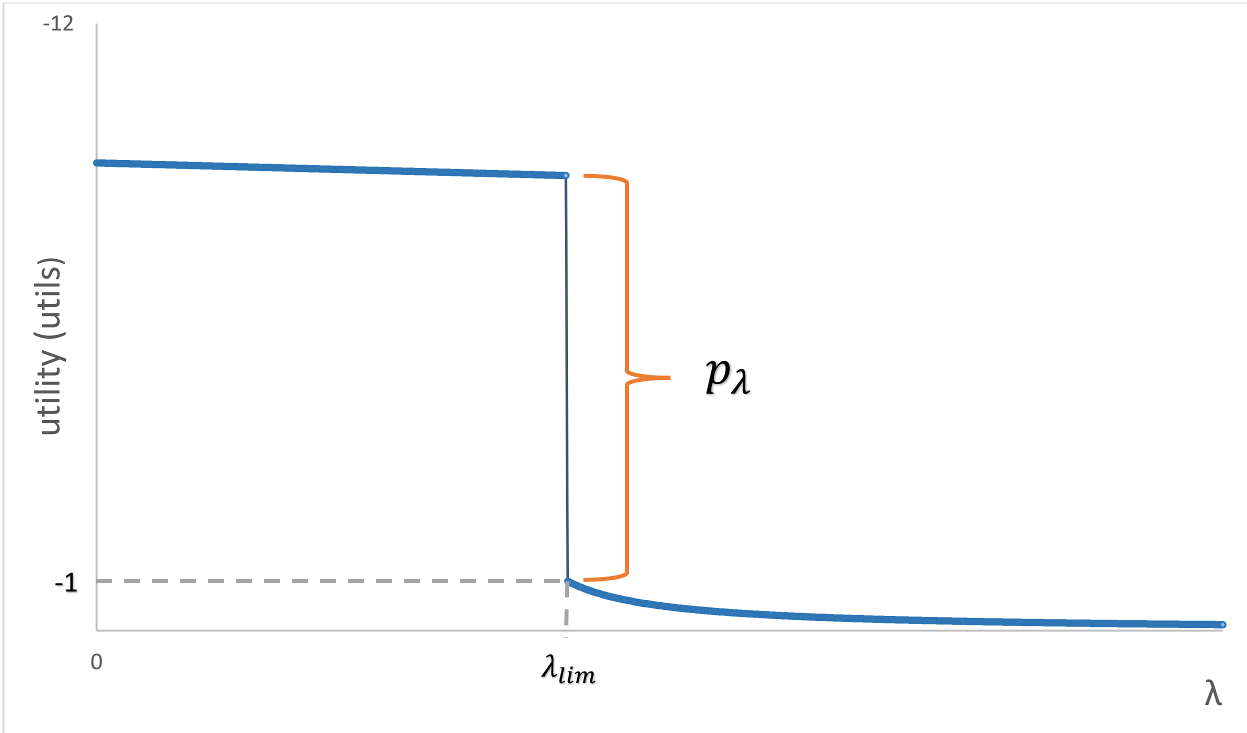
Όπου:

$u_{\lambda}(\lambda)$: είναι η ωφέλεια συναρτήσει του φορτικού συντελεστή λ.

λ_{lim} : είναι το όριο του φορτικού συντελεστή πάνω από το οποίο είναι επιθυμητό να βρίσκεται η τιμή του λ.

p_{λ} : είναι η ποινή που επιβάλλεται στην περίπτωση που μετά την ανάλυση βήμα προς βήμα, ο φορτικός συντελεστής προκύψει μικρότερος από το λ_{lim}.

c: θετική σταθερά που δείχνει τη γραμμική μεταβολή της χρησιμότητας για τιμές του φορτικού συντελεστή μικρότερες από το αντίστοιχο επιθυμητό όριο. Εκφράζει την προτίμηση του παίκτη Α σε μεγαλύτερους συντελεστές ωφέλειας από μικρότερους (εξ ου και ο φθίνων χαρακτήρας της συνάρτησης). Με αυτόν τον τρόπο δηλώνεται όλο και πιο μικρή χρησιμότητα όσο ο φορτικός συντελεστής κινείται προς το μηδέν. Ενδεικτικά τίθεται $c = 0.01$.

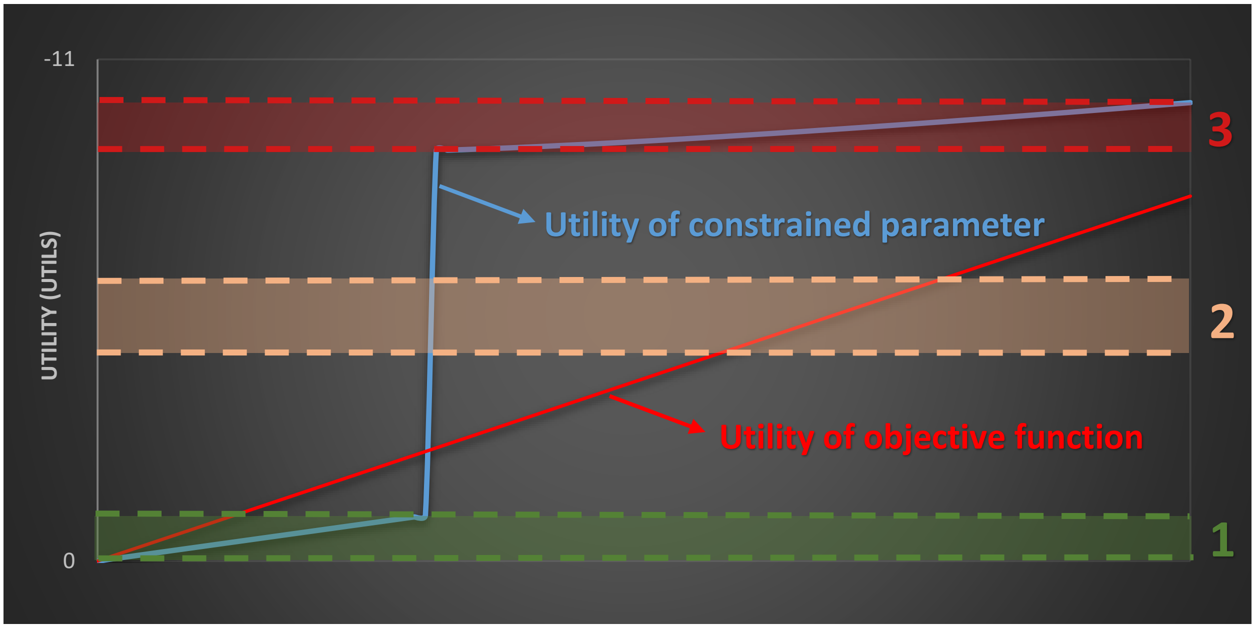


Σχήμα 3.4: Γραφική απεικόνιση της ωφέλειας συναρτήσει του φορτικού συντελεστή λ

3.4.1.3 Προσδιορισμός των παραμέτρων υπολογισμού της ωφέλειας

Έχοντας ορίσει και παρουσιάσει τον τρόπο προσδιορισμού της ωφέλειας, μένει να καθοριστούν οι παράμετροι που απαιτούνται για τον υπολογισμό της. Στον προσανατολισμό αυτόν, καταλυτική σημασία έχουν οι 3 ζώνες ωφέλειας, οι οποίες εξηγούν πώς δίνονται οι κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους ωφέλειας, ενώ παράλληλα διασφαλίζουν την ορθότητα της ΜΜΕΩ.

Στην 1η ζώνη ωφέλειας βρίσκεται το τμήμα της ωφέλειας που απολαμβάνει ο παίκτης Α λόγω των περιοριζόμενων μεγεθών, υπό την προϋπόθεση ότι αυτά δεν ξεπερνούν τα επιθυμητά όρια. Στη 2η ζώνη ωφέλειας θα βρίσκεται το τμήμα της ωφέλειας το οποίο εξάγεται από τη μεταβλητή που αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση, ενώ στην 3η ζώνη ωφέλειας θα ανήκει το τμήμα της ωφέλειας λόγω των περιοριζόμενων μεγεθών, στην περίπτωση που έχουν ξεπεραστεί τα επιθυμητά όρια. Τονίζεται πως οι ζώνες ωφέλειας απέχουν μεταξύ τους τάξεις μεγέθους στην κλίμακα ωφέλειας.



Σχήμα 3.5: Ζώνες ωφέλειας για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης βάρους

Η κάθε λύση θα αξιολογείται ως εξής: η αντικειμενική συνάρτηση θα βρίσκεται πάντοτε στη ζώνη ωφέλειας 2. Η επίδραση των περιορισμών θα είναι πάντοτε αμελητέα, οπότε η ωφέλεια που θα λαμβάνει ο παίκτης Α λόγω αυτών θα ανήκει στη ζώνη 1, με εξαίρεση τις περιπτώσεις υπέρβασης κάποιας οριακής τιμής που έχει τεθεί στο πρόβλημα, οπότε η ωφέλεια θα υποβιβάζεται στη ζώνη 3. Με αυτόν τον τρόπο, μια λύση η οποία ικανοποιεί τους περιορισμούς θα είναι πάντοτε καλύτερη από μια άλλη λύση που δεν τους ικανοποιεί, καθώς θα βρίσκεται σε χαμηλότερη ζώνη ωφέλειας.

Για τον καλύτερο έλεγχο της συνάρτησης ωφέλειας, οι γραμμικοί συντελεστές των περιορισμών επιλέγονται τέτοιοι ούτως ώστε, όταν οι περιορισμοί ικανοποιούνται οριακά, η επιμέρους ωφέλεια του παίκτη Α λόγω των περιορισμών να είναι -1. Με αυτό τον τρόπο παρέχεται η δυνατότητα βαθμονόμησης της συνάρτησης ωφέλειας και συνεπακόλουθα, σαφούς προσδιορισμού των υπολοίπων συντελεστών.

Για να εξασφαλιστεί η ορθότητα της μεθόδου εξετάζονται εσκεμμένα ακραίες περιπτώσεις, στις οποίες οι παράμετροι ωφέλειας του παίκτη Α προσδιορίζονται με βάση τις απαιτήσεις του εκάστοτε προβλήματος. Έτσι, για τον υπολογισμό του γραμμικού συντελεστή της μεταβλητής της αντικειμενικής συνάρτησης, επιδιώκεται η ελάχιστη δυνατή μεταβολή της μεταβλητής αυτής να υπερκεράσει σε ωφέλεια τη συμβολή όλων των μεταβλητών που ανήκουν στους περιορισμούς, υπό την προϋπόθεση ότι δεν παραβιάζονται οι οριακές τιμές (ζώνη 1, ζώνη 2). Παράλληλα, υπολογίζοντας τις τιμές των ποινών παράβασης περιορισμών, επιδιώκεται αυτές να υπερνικούν τη μέγιστη δυνατή μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης (ζώνη 2, ζώνη 3).

Στη συνέχεια, αναλύεται η εφαρμογή των παραπάνω κανόνων ανά περίπτωση προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού που εξετάζεται στην παρούσα εργασία.

3.4.1.3.1 Πρόβλημα 1: Ελαχιστοποίηση βάρους

Στόχος αυτού του τύπου προβλημάτων είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους της κατασκευής και συνεπακόλουθα η ελαχιστοποίηση του κόστους της. Επομένως, ο συντελεστής γραμμικής μεταβολής της ωφέλειας λόγω κόστους οφείλει να δείχνει «ευαισθησία» ακόμα και για τις μικρότερες πιθανές μεταβολές του κόστους. Για τον λόγο αυτό, υπολογίζεται η μικρότερη δυνατή (μη μηδενική) μεταβολή κόστους ($dCost_{min}$) λαμβάνοντας υπόψη τις επιλογές διατομών ανά ομάδα μελών. Αυτό γίνεται προσεγγιστικά ως εξής: Για κάθε ομάδα μελών, υπολογίζεται η μικρότερη διαφορά κόστους μεταξύ 2 επιλογών διατομής από τις διαθέσιμες. Τελικά, η $dCost_{min}$ ισούται με τη μικρότερη διαφορά που προκύπτει από όλες τις ομάδες μελών.

<u>Προσδιορισμός γραμμικών συντελεστών περιορισμών</u>

Καθώς απαιτείται $u\left(d_{i,lim}\right) = -1$, προκύπτει ότι:

$$a_{d,i} = -\frac{1}{d_{i,lim}}$$

Ομοίως:

$$a_{\sigma,i} = -\frac{1}{\sigma_{i,lim}}$$

<u>Προσδιορισμός γραμμικού συντελεστή κόστους</u>

Οριακή περίπτωση 1:

Επιλέγεται λύση με κόστος c_1, η οποία οριακά ικανοποιεί τα όρια που έχουν τεθεί, δηλαδή $d_i = d_{i,lim}$ και $\sigma_i = \sigma_{i,lim}$. Η ωφέλεια λόγο σχεδιασμού τότε είναι $u_{des} = a_{cost} \cdot c_1$, ενώ η ωφέλεια λόγω αποτελεσμάτων είναι $u_{res} = -1$,εφόσον όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται στο όριο. Τελικά $u_1 = a_{cost} \cdot c_1 - 1$.

Οριακή περίπτωση 2:

Επιλέγεται λύση με κόστος $c_2 = c_1 + dCost_{min}$, η οποία γίνεται η υπόθεση πως οδηγεί σε μηδενικές τάσεις και μετακινήσεις των μελών και κόμβων αντίστοιχα που απασχολούν. Επομένως ισχύει ότι:

$$u_{d,i} = u_{s,i} = 0 \Rightarrow u_{res} = 0$$

ενώ

$$u_{des} = a_{cost} \cdot (c_1 + dCost_{min})$$

Τελικά:

$$u_2 = a_{cost} \cdot (c_1 + dCost_{min})$$

Σκοπός του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μέσα στο πλαίσιο των περιορισμών, οπότε η οριακή περίπτωση 1 θα πρέπει να αποφέρει μεγαλύτερη ωφέλεια συγκριτικά με την οριακή περίπτωση 2. Θα είναι λοιπόν:

$$u_1 > u_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{cost} < -\frac{1}{dCost_{min}}$$

Επομένως, οριακά τίθεται:

$$a_{cost} = -\frac{1}{dCost_{min}}$$

Όσον αφορά την ποινή για παράβαση του ορίου προϋπολογισμού, αυτή δεν έχει νόημα αφού ο προϋπολογισμός θεωρείται ανεξάντλητος, οπότε:

$$p_{budget} = 0 \text{ και } budget = +\infty$$

ενώ ο συντελεστής k τίθεται ίσος με 1 (γραμμική μεταβολή και μετά την παράβαση).

<u>Προσδιορισμός ποινής λόγω παράβασης περιορισμού μετακινήσεων</u>

Οριακή περίπτωση 1:

Επιλέγεται η βαρύτερη δυνατή λύση για την κατασκευή (heaviest), η οποία οριακά εξασφαλίζει μετακινήσεις που δεν υπερβαίνουν τα όρια που έχουν τεθεί (δηλαδή η πιο ακριβή επιτρεπτή λύση).

Η ωφέλεια που προκύπτει από τη λύση αυτή θα είναι:

$$u_1 = a_{cost} \cdot cost_{max} \cdot w_{dis} - 1 \cdot w_{res}$$

όπου $a_{cost} \cdot cost_{max}$ είναι η ωφέλεια σχεδιασμού και -1 η ελάχιστη δυνατή ωφέλεια των αποτελεσμάτων μετακίνησης (όταν όλοι οι περιορισμοί μετακίνησης ικανοποιούνται οριακά).

Οριακή περίπτωση 2:

Επιλέγεται η ελαφρύτερη δυνατή λύση για την κατασκευή (*lightest*), η οποία οριακά παραβιάζει έναν περιορισμό μετακίνησης, ενώ θεωρείται πως οι υπόλοιπες μετακινήσεις είναι μηδενικές.

Επομένως, η ωφέλεια εδώ είναι:

$$u_2 = a_{cost} \cdot cost_{min} \cdot w_{dis} + \left(\frac{-1 + p_d}{n_{dofs}}\right) \cdot w_{res}$$

Επειδή πρωταρχικός στόχος είναι να μην υπάρχει παράβαση περιορισμών, η 1η περίπτωση θα πρέπει να προτιμηθεί σε σχέση με τη 2η, δηλαδή πρέπει:

$$u_1 > u_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{cost} \cdot (cost_{max} - cost_{min}) \cdot w_{dis} - 1 \cdot w_{res} > \frac{(-1 + p_d)}{n_{dofs}} \cdot w_{res}$$

Και επειδή $w_{res} = w_{dis} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow a_{cost} \cdot (cost_{max} - cost_{min}) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} > \frac{(-1 + p_d)}{n_{dofs}} \cdot \frac{1}{2}$$

Επομένως επιλέγεται:

$$p_d = (a_{cost} \cdot (cost_{max} - cost_{min}) - 1) \cdot n_{dofs} + 1$$

<u>Προσδιορισμός ποινής λόγω παράβασης περιορισμού τάσεων</u>

Με ακριβώς την ίδια λογική προσδιορίζεται και η ποινή λόγω παράβασης περιορισμού τάσεων. Αυτή προκύπτει ίση με:

$$p_\sigma = (a_{cost} \cdot (cost_{max} - cost_{min}) - 1) \cdot n_{elements} + 1$$

3.4.1.3.2 Πρόβλημα 2: Ελαχιστοποίηση μετακίνησης

Σε αυτό το είδος προβλημάτων στόχος είναι η ελαχιστοποίηση μιας συγκεκριμένης μετακίνησης κόμβου του φορέα, αυτή τη φορά όμως με περιοριστικό παράγοντα έναν προκαθορισμένο προϋπολογισμό (*budget*). Ο συντελεστής γραμμικής μεταβολής της ωφέλειας λόγω κόστους πλέον εξαρτάται από τον προϋπολογισμό. Ακολουθώντας τη σύμβαση που θέλει στην οριακή περίπτωση η τιμή της ωφέλειας να είναι -1, γίνεται η υπόθεση ότι με διάθεση ολόκληρου του προϋπολογισμού επιτυγχάνεται (ιδανικά) μηδενισμός της ζητούμενης μετακίνησης. Επομένως:

$$u = a_{cost} \cdot budget = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{cost} = -\frac{1}{budget}$$

Το βασικό ζητούμενο του προβλήματος πάντως είναι η ελαχιστοποίηση της συγκεκριμένης μετακίνησης, οπότε πρέπει να καθοριστεί νέος συντελεστής γραμμικής μεταβολής της μετακίνησης αυτής ($a_{displ,obj}$), ο οποίος οφείλει να δείχνει μια επιθυμητή «ευαισθησία» στις μεταβολές της μετακίνησης. Για τον λόγο αυτό, πρέπει αρχικά να προσδιοριστεί μια ελάχιστη διαφορά μετακίνησης, η οποία θα διακρίνει μια περίπτωση οριακά προτιμότερη από μια παραπλήσια. Η διαφορά αυτή επιλέγεται να παίρνει την τιμή:

$$d_{displ,min} = 10^{-5} m$$

Για να προσδιοριστεί ο συντελεστής γραμμικής μεταβολής της μετακίνησης, εξετάζονται 2 οριακές περιπτώσεις.

Οριακή περίπτωση 1:

Θεωρείται η λύση στην οποία έχει γίνει διάθεση ολόκληρου το προϋπολογισμού, με αποτέλεσμα η μετακίνηση να παίρνει την τιμή d_1. Έτσι, η ωφέλεια στην περίπτωση αυτή είναι:

$$u_1 = a_{cost} \cdot budget + a_{displ,obj} \cdot d_1$$

Οριακή περίπτωση 2:

Θα είναι η λύση στην οποία με μηδενικό κόστος, επιτυγχάνεται μετακίνηση $d_2 = d_1 + d_{displ,min}$. Η τιμή της ωφέλειας εδώ είναι:

$$u_2 = a_{displ,obj} \cdot (d_1 + d_{displ,min})$$

Από τις 2 λύσης προτιμητέα πρέπει να είναι η 1η, εφόσον με κόστος εντός προϋπολογισμού επιτυγχάνεται μικρότερη μετακίνηση. Άρα:

$$u_1 > u_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{displ,obj} < -\frac{1}{dCost_{min}}$$

$$\Rightarrow a_{displ,obj} = -\frac{1}{10^{-5}}$$

<u>Προσδιορισμός ποινής λόγω υπέρβασης προϋπολογισμού</u>

Οριακή περίπτωση 1:

Θεωρείται η εξιδανικευμένη λύση στην οποία με μηδενικό κόστος θα γινόταν υλοποίηση της κατασκευής (μέγιστο οικονομικά συμφέρον), η οποία παρόλα αυτά μετά την ανάλυσή της θα έδινε μέγιστη τιμή στη μετακίνηση που ενδιαφέρει. Επειδή η τιμή αυτή πρέπει να είναι συγκεκριμένη, θα δοθεί μια υπερβολικά μεγάλη τιμή μετακίνησης, η οποία δεν πρόκειται να προκύψει για οποιοδήποτε ρεαλιστικό φορτίο στην κατασκευή π.χ. $d_{max,obj} = 100\text{m}$.

Οριακή περίπτωση 2:

Θεωρείται η λύση, στην οποία επιτυγχάνεται το ιδανικό για την μετακίνηση που ενδιαφέρει, δηλαδή αυτή είναι μηδενική, αλλά έχει γίνει οριακή υπέρβαση του προϋπολογισμού. Έστω λοιπόν ότι το κόστος είναι:

$$cost_2 = budget + 0.001$$

Όπως τονίστηκε, στόχος είναι η ελαχιστοποίηση μετακίνησης, αλλά αυστηρά στο οικονομικό πλαίσιο που ορίζει ο προϋπολογισμός του προβλήματος. Για αυτόν τον λόγο, η 1η περίπτωση αν και όχι ικανοποιητική ως προς τη μετακίνηση, θα πρέπει να προτιμηθεί σε σχέση με τη 2η η οποία είναι εκτός προϋπολογισμού, δηλαδή πρέπει:

$$u_1 > u_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + a_{displ,obj} \cdot d_{max,obj} \cdot w_{res} > a_{cost} \cdot \left(budget + 0.001 + p_{budget}\right) \cdot w_{des} + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_{budget} < \frac{a_{displ,obj} \cdot d_{max,obj} \cdot w_{res} - a_{cost} \cdot (budget + 0.001) \cdot w_{des}}{w_{des}}$$

και επειδή $w_{res} = w_{des} = \frac{1}{2}$, τελικά η ποινή παίρνει την τιμή:

$$p_{budget} = \; a_{displ,obj} \cdot d_{max,obj} - a_{cost} \cdot (budget + 0.001)$$

Οι υπόλοιπες ποινές μένουν ως έχουν οριστεί στο προηγούμενο πρόβλημα.

3.4.1.3.3 Πρόβλημα 3: Ελαχιστοποίηση βάρους με πλαστική ανάλυση

Ο σκοπός αυτού του προβλήματος είναι κοινός με αυτόν του προβλήματος 1 της ελαστικής ανάλυσης, με τη διαφορά πως πλέον ο φορέας εξετάζεται στην **οριακή κατάσταση αστοχίας**. Από την ελαστοπλαστική ανάλυση βήμα προς βήμα, προκύπτει ο φορτικός συντελεστής λ που οδηγεί στην τελική κατάρρευση της κατασκευής. Από εκεί και πέρα το ζητούμενο είναι η κατασκευή να καταρρεύσει υπό συγκεκριμένο μέγεθος φορτίσεων και να είναι η οικονομικότερη δυνατή, άρα ο συντελεστής γραμμικής μεταβολής της ωφέλειας κόστους παραμένει ίδιος:

$$a_{cost} = -\frac{1}{dCost_{min}}$$

<u>Προσδιορισμός ποινής όταν ο φορτικός συντελεστής λ προκύψει μικρότερος του ορίου</u>

Οριακή περίπτωση 1:

Στην λύση αυτή θεωρείται ότι ο φορέας είναι ο οικονομικά πιο ασύμφορος, δηλαδή ο βαρύτερος δυνατός (*heaviest*) με βάση τις διαθέσιμες επιλογές διατομών και ο φορτικός συντελεστής είναι οριακά αποδεκτός, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_{lim}$. Η χρησιμότητα στην περίπτωση αυτή είναι:

$$u_1 = w_{des} \cdot a_{cost} \cdot cost_{max} + w_{res} \cdot (-1)$$

Οριακή περίπτωση 2:

Εδώ, επιλέγεται μια λύση για την οποία ισχύει ότι η κατασκευή είναι η πιο συμφέρουσα οικονομικά, δηλαδή η ελαφρύτερη δυνατή (*lightest*) με βάση τις διαθέσιμες επιλογές διατομών, αλλά ο φορτικός συντελεστής οριακά δεν ικανοποιεί τις απαιτήσεις του χρήστη, δηλαδή $\lambda_2 \longrightarrow {\lambda_{lim}}^{-}$. Η συνολική ωφέλεια θα είναι:

$$u_2 = w_{des} \cdot a_{cost} \cdot cost_{min} + w_{res} \cdot (-1 + p_\lambda)$$

Από τις 2 περιπτώσεις πρέπει να προκριθεί η 1η, μιας που ο φορτικός συντελεστής οφείλει απαράβατα να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του ορίου που έχει τεθεί. Επομένως:

$$u_1 > u_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_\lambda < a_{cost} \cdot (cost_{max} - cost_{min}) \qquad (w_{des} = w_{res} = \tfrac{1}{2})$$

Τελικά:

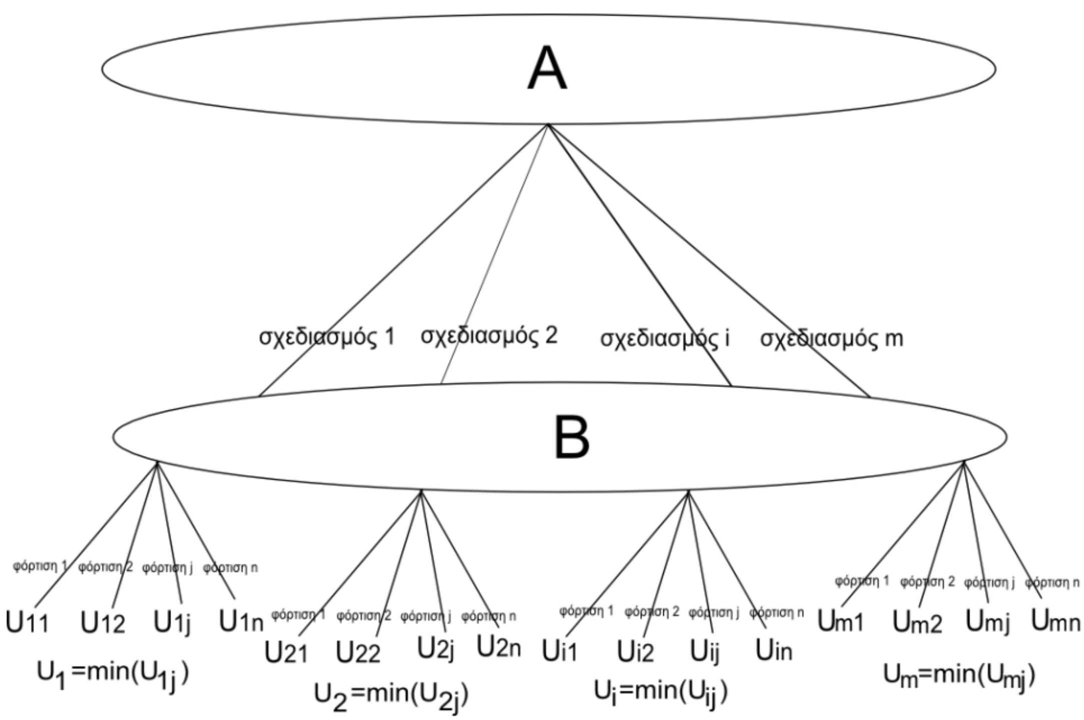
$$p_\lambda = a_{cost} \cdot (cost_{max} - cost_{min})$$

3.4.2 Επίλυση με τη χρήση της Θεωρίας Παιγνίων

Στο δεύτερο βήμα, και αφού πλέον έχει κατασκευαστεί πλήρως ο πίνακας απολαβών για κάθε δυνατό συνδυασμό σχεδιασμού - φόρτισης, προσδιορίζεται η στρατηγική την οποία θα πρέπει να ακολουθήσει ο αμυνόμενος, ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση χρησιμότητάς του. Για την επίλυση του παιγνίου ιδιαίτερη σημασία έχουν οι παρακάτω αρχές:

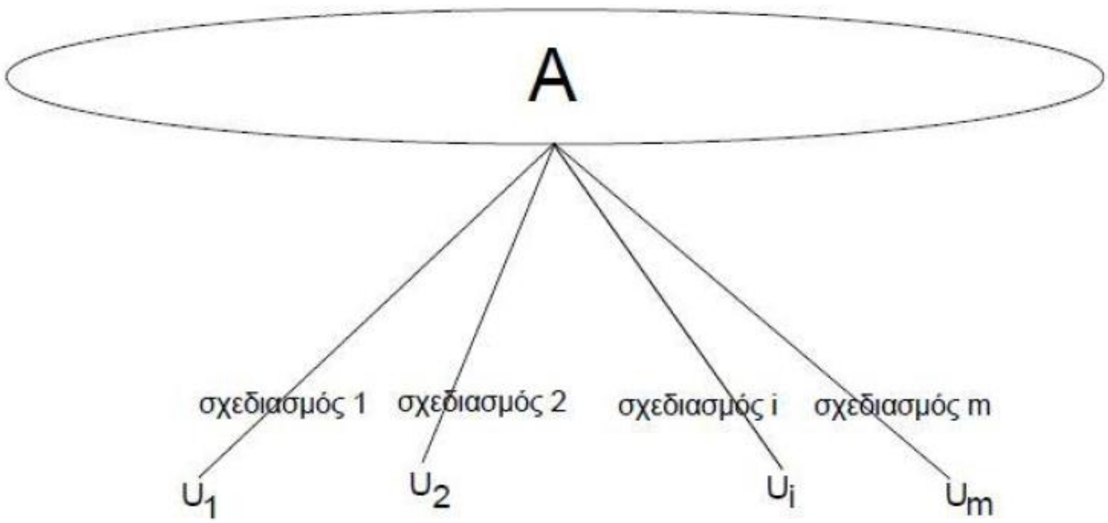
- Ο αμυνόμενος παίζει πρώτος, καθώς πρώτα θα σχεδιαστεί και θα κατασκευαστεί ο φορέας και ύστερα θα επιβληθεί η φόρτιση και θα υλοποιηθεί η ανάλυσή του. Αυτό διαφοροποιεί σημαντικά το παίγνιο από άλλα (π.χ. δίλημμα των φυλακισμένων, matching pennies, και άλλα) στα οποία οι δύο παίκτες κινούνται ταυτόχρονα.
- Η χρήση μικτών στρατηγικών (*mixed strategies*) δεν έχει νόημα εδώ. Υπενθυμίζεται ότι ο λόγος για τον οποίο υιοθετείται η χρήση μικτών στρατηγικών είναι η επιθυμία να καταστεί αδύνατο για τον αντίπαλο να προβλέψει την κίνηση του παίκτη που υιοθετεί τη μικτή στρατηγική, με τελικό στόχο ο αντίπαλος να είναι αδιάφορος μεταξύ δύο ή περισσότερων δικών του στρατηγικών. Στην προκειμένη περίπτωση όμως, το γεγονός ότι ο αμυνόμενος παίζει πρώτος και ο επιτιθέμενος το γνωρίζει, κατατάσσει το παίγνιο σε κατηγορία τέλειας πληροφόρησης (*perfect information game*), στο οποίο οι μικτές στρατηγικές δεν έχουν νόημα.

Για την επίλυση του παιγνίου πρώτα θα παρασταθούν οι στρατηγικές και οι αντίστοιχες απολαβές γραφικά με δενδροειδή μορφή και εν συνεχεία θα επιλυθεί με τη μέθοδο της πίσω-επαγωγής. Στο Σχήμα 3.6 απεικονίζεται το παίγνιο σε δενδροειδή μορφή. Στην κορυφή βρίσκεται ο κόμβος απόφασης του παίκτη A, και αμέσως μετά ακολουθεί ο κόμβος απόφασης του παίκτη B. Ακριβώς από κάτω, για κάθε συνδυασμό σχεδιασμού - φόρτισης, αναγράφεται η χρησιμότητα του παίκτη A (η χρησιμότητα του παίκτη B παραλείπεται, καθώς είναι γνωστό ότι $U_B = -U_A$).



Σχήμα 3.6: Δενδροειδής απεικόνιση του παιγνίου

Σύμφωνα με τη μέθοδο της πίσω-επαγωγής, και σε αναλογία με την επίλυση του Ultimatum Game που παρουσιάστηκε προηγουμένως, η επίλυση του παιγνίου ξεκινάει από κάτω προς τα πάνω. Ο παίκτης Β πρέπει να αποφασίσει την απάντησή του για κάθε πιθανή στρατηγική του παίκτη Α. Αν ο παίκτης Α έχει τη δυνατότητα να επιλέξει ανάμεσα σε $\boldsymbol{m}$ διαφορετικούς σχεδιασμούς και ο παίκτης Β για κάθε σχεδιασμό μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε $\boldsymbol{n}$ φορτίσεις, τότε το πλήθος των καθαρών στρατηγικών (*pure strategies*) του παίκτη Β είναι $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}$, όμως το διάνυσμα των στρατηγικών που τελικά θα επιλέξει θα αποτελείται από $\boldsymbol{m}$ στοιχεία, ένα ως απάντηση σε κάθε σχεδιασμό του παίκτη Α. Είναι προφανές πως σε κάθε σχεδιασμό, ο παίκτης Β θα επιλέξει να μεγιστοποιήσει τη δική του ωφέλεια, δηλαδή να ελαχιστοποιήσει την ωφέλεια του παίκτη Α. Ορίζοντας λοιπόν ως $U_i = \min(U_{ij})$, είναι δυνατόν να αντικατασταθεί ο κόμβος απόφασης του παίκτη Β με την ωφέλεια U_i που θα αποκομίσει ο παίκτης Α, για κάθε σχεδιασμό i, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.7. Πλέον, η επίλυση του παιγνίου είναι πολύ απλή. Ο παίκτης Α προφανώς θα επιλέξει το σχεδιασμό i, του οποίου η αντίστοιχη ωφέλεια U_i είναι η μέγιστη.



Σχήμα 3.7: Αντικατάσταση του κόμβου απόφασης του παίκτη Β

4 Αλγοριθμικές Τεχνικές

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει αναφορά στις πρακτικές δυσκολίες επίλυσης του προβλήματος ως έχει και θα προταθούν μέθοδοι με τη βοήθεια των οποίων είναι δυνατή η παράκαμψη των δυσκολιών αυτών. Στη συνέχεια, θα γίνει μια αναφορά στους ευρετικούς αλγορίθμους και θα εξηγηθεί η ανάγκη χρησιμοποίησής τους, ενώ θα παρουσιαστούν ορισμένοι αλγόριθμοι που μπορούν να λύσουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης με την παραπάνω μεθοδολογία.

4.1 Ανάγκη για επιτάχυνση της μεθόδου

Στις προηγούμενες ενότητες αναπτύχθηκε μια μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης σχεδιασμού των κατασκευών. Η εξαγωγή λύσης συνίσταται στην εύρεση της γραμμής του πίνακα κανονικής μορφής του αντίστοιχου παιγνίου με το μεγαλύτερο ελάχιστο στήλης. Για να καταστεί δυνατό κάτι τέτοιο, πρέπει να κατασκευαστεί ο πίνακας κανονικής μορφής του παιγνίου. Δηλαδή, πρέπει να απαριθμηθούν όλες οι δυνατές επιλογές των σχεδιασμών ανάμεσα στις οποίες μπορεί να διαλέξει ο αμυνόμενος (στρατηγικές) και εν συνεχεία για καθεμία εξ αυτών να πραγματοποιηθούν αναλύσεις για κάθε πιθανή περίπτωση φόρτισης, ώστε να κατασκευαστεί ο πίνακας ωφελειών, να έρθει το παίγνιο στην κανονική του μορφή και να ακολουθήσει η διαδικασία επίλυσης.

Η παραπάνω διαδικασία όπως περιγράφηκε, παρουσιάζει σημαντικά υπολογιστικά προβλήματα. Όταν η κατασκευή έχει m ομάδες μελών, N δυνατές επιλογές για κάθε μέλος και L δυνατές περιπτώσεις φόρτισης, οι πιθανοί σχεδιασμοί είναι N^m και οι στατικές αναλύσεις που πρέπει να εκτελεστούν είναι $N^m \cdot L$. Το μέγεθος αυτό είναι υπερβολικά μεγάλο ακόμα και για μετρίου μεγέθους προβλήματα. Για παράδειγμα, αν $m = 8$, $N = 20$, $L = 5$, τότε συνολικά πρέπει να εκτελεστούν $20^8 \cdot 5 = 1.28 \cdot 10^{11}$ στατικές αναλύσεις. Όταν η μία στατική επίλυση χρειάζεται γύρω στα 0.015 δευτερόλεπτα για να εκτελεστεί, τότε ο συνολικός χρόνος ανάλυσης ανέρχεται στα $1.28 \cdot 10^{11} \cdot 0.015 = 1.92 \cdot 10^9$ δευτερόλεπτα, δηλαδή περίπου 61 χρόνια! Από την άλλη, ακόμα και αν μειωθεί ο χρόνος της ανάλυσης, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου παραμένει τεράστια. Το πλήθος των ομάδων μελών είναι ο πιο καθοριστικός παράγοντας, καθώς αυξάνει εκθετικά το μέγεθος του προβλήματος. Για παράδειγμα, αν στο πρόβλημα που παρουσιάστηκε παραπάνω οι ομάδες μελών γίνουν 9 αντί για 8, τότε ο εκτιμώμενος χρόνος επίλυσης θα ξεπεράσει τα 1200 χρόνια! Πέρα όμως από το πρόβλημα του χρόνου ανάλυσης, ένας μέτριος υπολογιστής θα αντιμετωπίσει και προβλήματα μνήμης, αφού καλείται να αποθηκεύσει μητρώα με πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων, με αποτέλεσμα η επίλυση του προβλήματος με αυτόν τον τρόπο να καθίσταται αδύνατη.

Ένας τρόπος να μειωθεί ο χρόνος ανάλυσης προκύπτει από την παρατήρηση πως σε περίπτωση πολλαπλών φορτίσεων ενός δεδομένου φορέα, το τελικό μητρώο δυσκαμψίας του δεν αλλάζει επειδή εξαρτάται αποκλειστικά από τη γεωμετρία και τα μέλη και όχι από τη φόρτιση. Για τον λόγο αυτόν, είναι σκόπιμο όλες οι αναλύσεις που αφορούν τον ίδιο φορέα να εκτελούνται μαζί, αποφεύγοντας έτσι μεγάλο πλήθος επαναλαμβανόμενων πράξεων. Έτσι, το μητρώο δυσκαμψίας θα αντιστρέφεται μόλις μία φορά για κάθε σχεδιασμό, οπότε επί της ουσίας το πλήθος των αναλύσεων γίνεται ανεξάρτητο σχεδόν του πλήθους των περιπτώσεων φόρτισης και περιορίζεται ο αριθμός των σχεδιασμών.

Το παραπάνω βήμα αν και συντομεύει το χρόνο επίλυσης, εντούτοις δεν προσφέρει ουσιαστική λύση στο πρόβλημα. Ξανά, αν εκτελέσει κανείς τους υπολογισμούς αγνοώντας το πλήθος των περιπτώσεων φόρτισης, προκύπτουν μη αποδεκτοί χρόνοι επίλυσης. Η ανάγκη για ταχύτερη επίλυση είναι επιτακτική και γι’ αυτό το λόγο γίνεται στροφή στους ευρετικούς αλγορίθμους.

4.2 Ο Χώρος των Λύσεων

Πριν γίνει εκτενέστερη αναφορά στη λογική και τη δράση των ευρετικών αλγορίθμων, κρίνεται αναγκαίο να παρουσιαστεί ο τρόπος που δομείται ο χώρος των λύσεων ενός προβλήματος. Στην παρουσίαση του προβλήματος βελτιστοποίησης που εξετάζεται στην παρούσα εργασία, αναφέρθηκε πως οι μεταβλητές σχεδιασμού θα είναι οι διατομές των μελών του. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, μεταβλητές σχεδιασμού θα μπορούσαν να είναι και οι συντεταγμένες των κόμβων του φορέα, για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σχήματος. Ακόμα και αυτό όμως είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί σε πολλά προβλήματα ελαχίστου βάρους, στα οποία αποκλειστικά ως μεταβλητές σχεδιασμού έχουμε τις διατομές των μελών.

Κάθε ομάδα μελών θα μπορεί να «επιλέξει» τη διατομή της από μια λίστα τυποποιημένων μεταλλικών διατομών (π.χ. πίνακες HEA, HEB, IPE κ.λπ.). Επίσης, είναι δυνατόν διαφορετικές ομάδες να παίρνουν διατομές από διαφορετικές λίστες. Για τη διευκόλυνση της διατύπωσης του χώρου λύσεων, οι λίστες αυτές συγχωνεύονται σε μια Μεγάλη Λίστα, ή αλλιώς **Master List**, με τον ακόλουθο τρόπο: Πρώτα τοποθετούνται τα στοιχεία της λίστας από την οποία παίρνει τις διατομές της η πρώτη ομάδα μελών, εν συνεχεία τοποθετούνται τα στοιχεία της λίστας από τα οποία παίρνει τις διατομές της η δεύτερη ομάδα μελών κ.ο.κ. Αν κάποιες ομάδες μελών παίρνουν τιμές από την ίδια λίστα, κάτι που φυσικά είναι πολύ συνηθισμένο, τότε αυτή η λίστα δεν τοποθετείται πολλές φορές στη Master List, αλλά μόνο μία.

Επισημαίνεται πως τα στοιχεία της κάθε λίστας, τοποθετούνται διατεταγμένα ανά λίστα στη Master List. Σε διαφορετική περίπτωση, κάποιοι από τους αλγόριθμους που παρουσιάζονται παρακάτω, ενδέχεται να μη λειτουργήσουν σωστά. Επίσης, για τη σωστή εποπτεία του προβλήματος, πρέπει να είναι σαφές σε ποια σημεία της Master List γίνεται η μετάβαση από μία λίστα διατομών σε μία άλλη.

<u>Παράδειγμα Κατασκευής Master List:</u>

Έστω ένας φορέας, που αποτελείται από 3 ομάδες μελών. Η πρώτη και η τρίτη ομάδα μελών ανήκουν στις 3 πρώτες διατομές HEB, ενώ η δεύτερη ομάδα μελών παίρνει διατομές από τη λίστα με τις 2 τελευταίες διατομές HEA. Τότε θα ισχύουν τα εξής:

L_1 = L_3 = [HEB100, HEB120, HEB140], L_2 = [HEA900, HEA1000]

Η Master List θα πρέπει να προκύψει ως εξής:

ML = [HEB100, HEB120, HEB140, HEA900, HEA1000]

Για καλύτερη εποπτεία και διαχείριση, η κάθε διατομή θα συμβολίζεται με έναν αριθμό:

HEB100 ⟶ 1

HEB120 ⟶ 2

HEB140 ⟶ 3

HEA900 ⟶ 4

HEA1000 ⟶ 5

Οπότε:

ML = [1, 2, 3, 4, 5]

Κάθε σχεδιασμός θα έχει τη μορφή ενός διανύσματος, του οποίου το στοιχείο i θα υποδηλώνει τη διατομή της Master List που αντιστοιχεί στην ομάδα μελών i. Για παράδειγμα, το διάνυσμα [3, 4, 1] αντιστοιχεί σε ένα σχεδιασμό, στον οποίο η πρώτη ομάδα μελών παίρνει τη διατομή HEB140, η δεύτερη ομάδα μελών παίρνει τη διατομή HEA900, ενώ η τρίτη ομάδα μελών παίρνει τη διατομή HEB100. Το σύνολο των δυνατών περιπτώσεων αποτελεί το χώρο των λύσεων, τον οποίο θα έπρεπε να εξερευνήσει εξ ολοκλήρου ένας ακριβής αλγόριθμος. Ο Πίνακας 4.1 απεικονίζει το χώρο των λύσεων για το παραπάνω πρόβλημα, ο οποίος έχει διαστάσεις $18x3$. Ο χώρος λύσεων εδώ είναι μικρός, αλλά γιγαντώνεται καθώς αυξάνονται οι ομάδες μελών και οι δυνατές επιλογές για καθεμία.

α/α	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3
1	1	4	1
2	1	4	2
3	1	4	3
4	1	5	1
5	1	5	2
6	1	5	3
7	2	4	1
8	2	4	2
9	2	4	3
10	2	5	1
11	2	5	2
12	2	5	3
13	3	4	1
14	3	4	2
15	3	4	3
16	3	5	1
17	3	5	2
18	3	5	3

Πίνακας 4.1: Παράδειγμα Χώρου Λύσεων

Ο χώρος λύσεων, ανεξαρτήτως μεγέθους, μπορεί να περιγραφεί πλήρως από δύο μόνο διανύσματα: το πρώτο και το τελευταίο του. Ορίζοντας λοιπόν τα διανύσματα $d_{min} = [1, 4, 1]$ και $d_{max} = [3, 5, 3]$, περιγράφεται εξ ολοκλήρου ο χώρος λύσεων, καθώς κάθε άλλο στοιχείο που ανήκει σε αυτόν, βρίσκεται ανάμεσα στα d_{min} και d_{max}. Επίσης, ο χώρος των λύσεων είναι μονοσήμαντα ορισμένος, δηλαδή η θέση (αύξων αριθμός) της κάθε λύσης ορίζεται με μοναδικό τρόπο.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν δυο μεθοδολογίες που αφορούν τη διαχείριση του χώρου των λύσεων και παίζουν σημαντικό ρόλο στη σωστή λειτουργία των αλγορίθμων που θα ακολουθήσουν, αλλά και στην οικονομία μνήμης του υπολογιστή ανεξαρτήτως αλγορίθμου επίλυσης.

Η πρώτη μεθοδολογία αφορά τον προσδιορισμό του αύξοντα αριθμού μιας λύσης, δεδομένου του χώρου λύσεων $[d_{min}, d_{max}]$ και του διανύσματος της συγκεκριμένης λύσης, d_0. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, στην περίπτωση που χρειαστεί να δοθεί «ταυτότητα» σε μια συγκεκριμένη λύση, ώστε να γίνει αυτή αριθμητικά και προγραμματιστικά διαχειρίσιμη.

Η δεύτερη μεθοδολογία ακολουθεί την αντίστροφη πορεία. Δεδομένου δηλαδή του αύξοντα αριθμού μιας λύσης, ζητείται να προσδιοριστούν επακριβώς τα στοιχεία του διανύσματός της. Το πρόβλημα αυτό είναι εξίσου σημαντικό με το πρώτο. Η μετατροπή του διανύσματος της λύσης σε αριθμό και το αντίστροφο χρησιμεύουν ιδιαίτερα στο δεύτερο αλγόριθμο, όπου χρειάζεται να δημιουργηθεί μια γειτονιά της λύσης d_0.

Ο τρόπος που εργάζονται οι δυο αυτές μέθοδοι γίνεται πιο εύκολα κατανοητός, εάν αντιληφθεί κανείς το χώρο των λύσεων ως ένα σύστημα αρίθμησης, όμως με δύο σημαντικές διαφορές σε σχέση με τα καθιερωμένα συστήματα.

Πρώτον, η βάση του συστήματος δεν είναι σταθερός αριθμός, αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση των ψηφίων. Δηλαδή, ενώ σε ένα κλασικό σύστημα αρίθμησης με βάση β, το στοιχείο m στη θέση i από δεξιά αντιστοιχεί στον αριθμό $m \cdot \beta^{i-1}$ του συστήματος, εδώ το ίδιο στοιχείο αντιστοιχεί σε κάτι διαφοροποιημένο, καθώς δεν μπορεί να οριστεί ένας αριθμός β που να λειτουργεί ως βάση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι επιλογές κάθε ομάδας μελών εν γένει γίνονται από διαφορετική λίστα, με διαφορετικό πλήθος επιλογών.

Η δεύτερη σημαντική διαφοροποίηση αφορά το γεγονός ότι κάθε σύστημα αρίθμησης αντιστοιχεί στον αριθμό 1 του δεκαδικού συστήματος επίσης τον αριθμό 000…0001, ανεξαρτήτως της βάσης β. Στο πρόβλημα που παρουσιάζεται όμως εδώ, αυτό δεν μπορεί να συμβεί. Κάθε στοιχείο του διανύσματος της λύσης αντιστοιχεί σε μία θέση διατομής στη Master List. Επιπλέον, αφού κάθε ομάδα μελών παίρνει διατομές από «τυχαίες» θέσεις της Master List, δεν υπάρχει κανένας λόγος εν γένει ο ελαφρύτερος σχεδιασμός (δηλαδή η λύση με αύξοντα αριθμό 1) να είναι η $[0, 0, \dots, 1]$. Αυτό επαληθεύεται και από το παράδειγμα που δόθηκε παραπάνω, για το οποίο η ελαφρύτερη λύση ήταν η $[1,4,1]$.

Αν όλες οι λίστες είχαν ακριβώς το ίδιο πλήθος επιλογών β, και αν γινόντουσαν οι κατάλληλες τροποποιήσεις ώστε η λύση με αύξοντα αριθμό 1 να αντιστοιχούσε όντως σε κάποιο διάνυσμα $[0, 0, \dots, 1]$, τότε τα δύο παραπάνω προβλήματα θα «εκφυλίζονταν» στην μετατροπή δεκαδικού συστήματος σε σύστημα με βάση β, και το αντίστροφο. Η επίλυση δηλαδή του προβλήματος, αποτελεί μια γενίκευση μετατροπής από δεκαδικό σε άλλο, εντελώς τυχαίο σύστημα αρίθμησης, με τα χαρακτηριστικά που περιγράφηκαν παραπάνω.

Η επίλυση των προβλημάτων πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Αρχικά, ο δεδομένος σχεδιασμός μετασχηματίζεται, ούτως ώστε να βρεθεί ποια θα ήταν τα ψηφία του, στην περίπτωση που ο χώρος λύσεων αντιστοιχούσε τη λύση στον αύξοντα αριθμό 1 τη λύση $[0, 0, \dots, 1]$. Εν συνεχεία, πραγματοποιείται η μετατροπή από το μεταβλητό σύστημα αρίθμησης στο δεκαδικό, ώστε να προσδιοριστεί ο αύξων αριθμός του δεδομένου σχεδιασμού. Ακριβώς η αντίστροφη διαδικασία πραγματοποιείται στο πρόβλημα 2.

Παρακάτω παρατίθενται οι λύσεις των δυο προβλημάτων, υπό μορφή βημάτων αλγορίθμου, ώστε να είναι δυνατός ο προγραμματισμός της σε οποιαδήποτε γλώσσα.

1. Προσδιορισμός αύξοντα αριθμού λύσης

Δεδομένα: $\boldsymbol{d_{min}}, \boldsymbol{d_{max}}, \boldsymbol{d_0}$

Ζητούμενα: $\boldsymbol{designID}$

Αλγόριθμος επίλυσης:

1. Θέσε $groupCount =$ (το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος d_{min}).
2. Θέσε $power = d_{max} - d_{min} + 1$
3. Θέσε $\mathrm{designID} = d_0 - d_{min} + [0\ 0 \dots 1]$
4. $\mathrm{designID} = \sum_{j=1}^{groupCount-1}\left\{designID(j) \cdot \prod_{i=j+1}^{groupCount} power(j)\right\}$

2. Προσδιορισμός λύσης δεδομένου του αύξοντα αριθμού της

Δεδομένα: $\boldsymbol{d_{min}}, \boldsymbol{d_{max}}, \boldsymbol{designID}$

Ζητούμενα: $\boldsymbol{d_0}$

Αλγόριθμος επίλυσης:

1. Θέσε $groupCount =$ (το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος d_{min}).
2. Θέσε $power = d_{max} - d_{min} + 1$
3. Για j από 1 μέχρι $groupCount$, θέσε:
   $$temp(j) = \left(\left[\frac{designID}{\prod_{i=j+1}^{groupCount} power(j)}\right] + 1\right) mod\ power(j)$$
4. Αν $temp(j) = 0, τότε\ θέσε\ temp(j) = power(j)$
5. Θέσε $\mathrm{designDigits} = \mathrm{temp} - 1 + [0\ 0 \dots 1]$
6. Θέσε $d_0 = designDigits + d_{min} - [0\ 0 \dots 1]$

Στις επόμενες ενότητες θα παρουσιαστούν συνοπτικά 2 ευρετικοί αλγόριθμοι που έχουν χρησιμοποιηθεί στη βιβλιογραφία για την επίλυση του προβλήματος, ενώ ακολούθως θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στον δεύτερο, στον οποίο έχουν γίνει τροποποιήσεις για μεγιστοποίηση της απόδοσής του.

4.3 Ευρετικοί Αλγόριθμοι

Οι ευρετικοί αλγόριθμοι (*heuristic algorithms*) [6], ανήκουν στην κατηγορία των προσεγγιστικών αλγορίθμων, οι οποίοι βρίσκουν το παγκόσμιο βέλτιστο ή τουλάχιστον μία αρκετά καλή προσέγγιση αυτού, έχοντας ως μεγάλο πλεονέκτημα τη σημαντική μείωση του υπολογιστικού χρόνου και των απαιτήσεων σε μνήμη. Η προσεγγιστική τους φύση, τους διακρίνει από τις υπόλοιπες κατηγορίες αλγορίθμων, τους ακριβείς αλγόριθμους (*exact algorithms*), οι οποίοι εξετάζουν ολόκληρο το χώρο των λύσεων με σκοπό να καταλήξουν στο παγκόσμιο βέλτιστο.

Καθοριστικό ρόλο αναφορικά με τον τρόπο περιήγησης των ευρετικών αλγορίθμων, παίζει η εμπειρία και οι γνώσεις που διατίθενται σχετικά με το εκάστοτε πρόβλημα που εξετάζεται. Από την άλλη, έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι που στοχεύουν στην επίλυση γενικευμένων προβλημάτων (π.χ. γενετικοί αλγόριθμοι, προσομοιωμένη ανόπτηση).

Το βασικό μειονέκτημα των ευρετικών αλγορίθμων έγκειται στο ότι καταλήγουν στην καλύτερη λύση από αυτές που εξετάζονται, δηλαδή σε ένα τοπικό βέλτιστο, το οποίο πάντως είναι πιθανό να αποτελεί και παγκόσμιο βέλτιστο. Η αποτελεσματικότητά τους, δηλαδή το πόσο καλή λύση θα βρουν, καθορίζεται από τη μεθοδολογία που ακολουθούν κατά την εξέταση στο σύνολο των περιπτώσεων. Παρόλα αυτά, το σύνολο των λύσεων που δεν εξετάζονται είναι πολύ πιθανό να περιέχει το παγκόσμιο βέλτιστο, με συνέπεια τελικά αυτό να μην επιλέγεται [6]. Όμως, αυτό το μειονέκτημα αντισταθμίζεται από το γεγονός ότι σε αποδεκτό χρονικό διάστημα προσφέρουν μια τιμή που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του παγκόσμιου βέλτιστου, ενώ υπάρχει σημαντική πιθανότητα η τιμή αυτή να είναι όντως το παγκόσμιο βέλτιστο.

4.3.1 Αλγόριθμος Προσομοιωμένης Ανόπτησης

Ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης (*simulated annealing*), περιγράφηκε από τους Scott Kirkpatrick, C. Daniel Gelatt, Mario P. Vecchi το 1983 [7] και από τον Vlado Černý το 1985 [8]. Έχει καθαρά πιθανοτικό χαρακτήρα, ενώ χρησιμοποιεί την εμπειρία που αποκτά κατά τη διάρκεια του προβλήματος για να αποδέχεται ή να απορρίπτει λύσεις. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της προσομοιωμένης ανόπτησης είναι ότι είναι διατεθειμένη να δεχτεί και λύσεις χειρότερες από την τρέχουσα, ανάλογα με το πόσο χειρότερη είναι η νέα λύση, κι ανάλογα με το στάδιο στο οποίο βρίσκεται ο αλγόριθμος.

Η προσομοιωμένη ανόπτηση βασίζεται σε μία βοηθητική παράμετρο, τη θερμοκρασία T, η οποία ξεκινά από μία δεδομένη αρχική τιμή T_0 και σταδιακά μειώνεται. Χρησιμοποιείται ο όρος θερμοκρασία, γιατί ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης έχει πάρει στοιχεία από τη μεταλλουργία, στην οποία γίνεται ανόπτηση των μετάλλων. Επί της ουσίας όμως, το μέγεθος της θερμοκρασίας δεν έχει σχέση με την φυσική έννοια της θερμοκρασίας. Αντιθέτως, εκφράζει το αντίστροφο της εμπειρίας που διαθέτει ο αλγόριθμος.

Πολύ σημαντικό στοιχείο στην προσομοιωμένη ανόπτηση αποτελεί η λήψη απόφασης για το αν μια νέα λύση s' η οποία είναι χειρότερη από την s (δηλαδή $u_{s'} < u_s$) πρέπει να γίνει αποδεκτή. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται η συνάρτηση αποδοχής, η οποία ορίζεται ως:

$$P(s', s, T) = \begin{cases} 1 & , \quad a \cdot u_{s'} \geq a \cdot u_s \\ e^{\frac{a \cdot [u_{s'} - u_s]}{T}} & , \quad a \cdot u_{s'} < a \cdot u_s \end{cases}$$

Όπου α μια παράμετρος που παίρνει την τιμή 1 αν ο αλγόριθμος στοχεύει σε μεγιστοποίηση της δοθείσας συνάρτησης, ή -1, αν στοχεύει σε ελαχιστοποίηση. Είναι προφανές πως καθώς η θερμοκρασία ελαττώνεται, μειώνεται και συνάρτηση αποδοχής, δηλαδή η πιθανότητα να επιλεγεί κάποια χειρότερη λύση από την τρέχουσα.

Για να έχει νόημα ο αλγόριθμος, η λύση s' θα πρέπει να είναι γειτονική της s. Για το σκοπό αυτό απαιτείται ένα σύστημα «μετάλλαξης» (*mutation system*), ώστε να παράγονται γειτονικές λύσεις. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικά συστήματα μετάλλαξης: στο πρώτο επιλέγεται τυχαία μία από τις ομάδες μελών της λύσης s, ενώ στο δεύτερο δύο εξ αυτών. Το δεύτερο σύστημα δημιουργήθηκε λόγω του ότι με το πρώτο πολλές φορές η διαδικασία εγκλωβίζεται σε τοπικό βέλτιστο πολύ κοντά στην ολικά βέλτιστη λύση. Στη συνέχεια, για την ομάδα (ή τις ομάδες) μελών που επιλέχτηκε(αν), εκλέγεται τυχαία μια νέα διαφορετική διατομή από τις επιτρεπόμενες περιπτώσεις της Master List. Οι υπόλοιπες ομάδες μελών διατηρούν τις διατομές που είχε η λύση s.

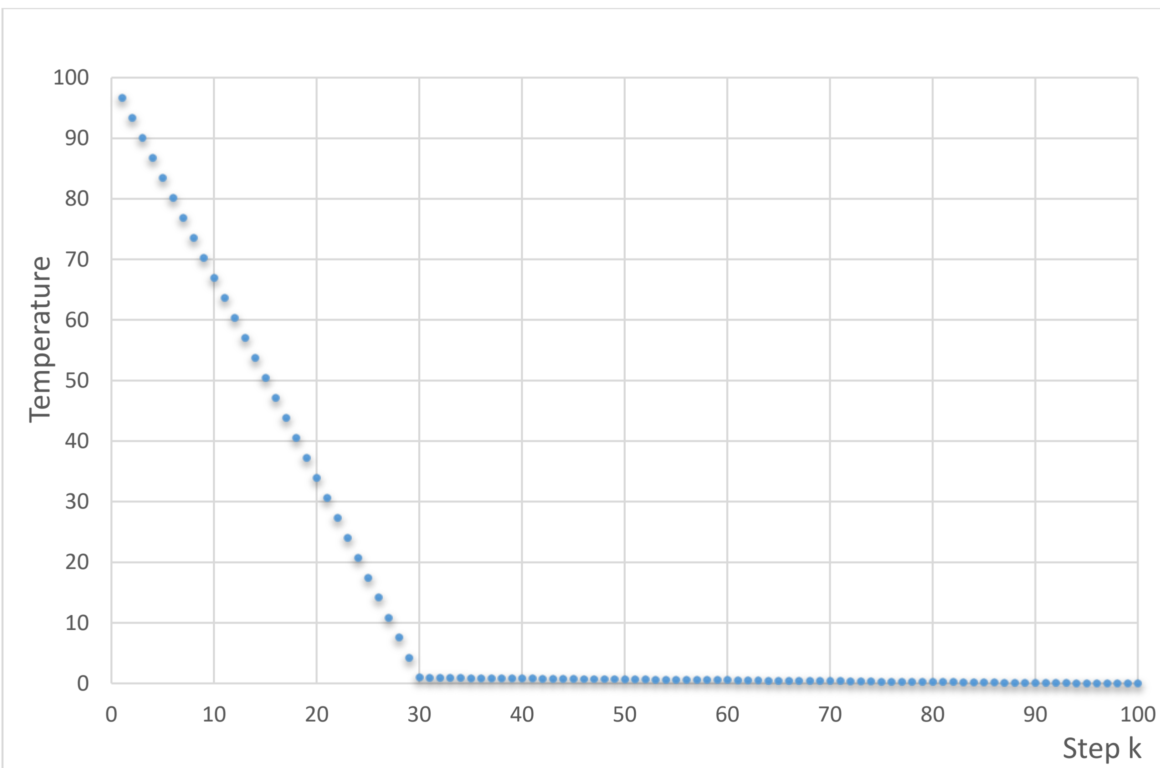
Εκτός από τα παραπάνω, ο αλγόριθμος χρειάζεται να προσδιορίσει την αρχική θερμοκρασία του συστήματος, το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελούνται σε κάθε θερμοκρασία, καθώς και μία συνάρτηση ψύξης, η οποία θα μεταφέρει το σύστημα από την υψηλότερη θερμοκρασία στη χαμηλότερη. Η βιβλιογραφία είναι γεμάτη από μεγάλο πλήθος ερευνών σχετικών με το σωστό καθορισμό των παραπάνω παραμέτρων με στόχο τη μέγιστη δυνατή αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου [9]. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, ο κώδικας που συντάχθηκε εκλέγει τις παραμέτρους με τον εξής τρόπο:

- Η μέγιστη θερμοκρασία υπολογίζεται αυτόματα από τον αλγόριθμο, με την εξής λογική: Αρχικά είναι επιθυμητό να λαμβάνεται υπόψη ένα μεγάλο μέρος των συνολικών περιπτώσεων, το οποίο επιλέγεται να είναι το 85% του χώρου λύσεων. Με τόσο μεγάλη αρχική αποδοχή, μπορούν να εξεταστούν διαδοχικά λύσεις όπου η μία ικανοποιεί τους περιορισμούς και η άλλη τους παραβιάζει. Επειδή οι ποινές που δίνονται είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από τις ωφέλειες των λύσεων που δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς, προσεγγιστικά θα θεωρηθεί πως στην αρχή της ανάλυσης θα είναι:
$$du_{max} = [u_{s'} - u_s]_{max} \simeq p_d + p_\sigma$$
Από τη συνάρτηση αποδοχής, προκύπτει ότι:
$$T_0 = \frac{du_{max}}{ln(0.85)}$$
- Το πλήθος επαναλήψεων που εκτελούνται σε κάθε θερμοκρασία μπορεί είτε να δοθεί από το χρήστη κατά την κλήση του αλγορίθμου, είτε εκλέγεται ως $\lambda \cdot m$, όπου m το πλήθος των διαφορετικών ομάδων μελών.

- Ως σύστημα ψύξης εκλέγεται μια γραμμική δικλαδική συνάρτηση, η οποία ρίχνει τη θερμοκρασία του συστήματος από τη μέγιστη τιμή στη μηδενική, σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων, $\boldsymbol{n_k}$. Ο αριθμός των βημάτων αυτός θα ορίζεται από τον χρήστη, ενώ η θερμοκρασία θα πρέπει να ψύχεται σχετικά γρήγορα στην αρχή και στη συνέχεια πιο αργά. Αυτό δίνει τη δυνατότητα στον αλγόριθμο να κάνει μια γρήγορη αναζήτηση σε όλο τον χώρο λύσεων με μεγάλη όμως πιθανότητα να δεχτεί χειρότερες λύσεις ως πιο προτιμητέες, ενώ στη συνέχεια περιορίζεται στην εξέταση ενός πιο συγκεκριμένου υπό - χώρου με μικρή πιθανότητα εσφαλμένων επιλογών σε κάθε επόμενο βήμα (greedy behavior) . Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε και χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω συνάρτηση ψύξης:

$$T_k = \begin{cases} T_0 - \dfrac{0.99 \cdot T_0}{0.3 \cdot n_k} \cdot k \quad , & k \leq 0.3 \cdot n_k \\ 0.01 \cdot T_0 - \dfrac{0.01 \cdot T_0}{0.7 \cdot n_k} \cdot (k - 0.3 \cdot n_k), & k > 0.3 \cdot n_k \end{cases}$$

Το συγκεκριμένο σύστημα ψύξης, οδηγεί στη γρήγορη μείωση της αρχικής θερμοκρασίας, η οποία επιτυγχάνεται με γραμμικό τρόπο, έως το 1% της τιμής της στο πρώτο 30% των συνολικών βημάτων και στη συνέχεια στον σταδιακό μηδενισμό της με ήπιο τρόπο από το σημείο αυτό και μετά. Η λογική του συστήματος απεικονίζεται στο επόμενο διάγραμμα.



Σχήμα 4.1: Γραφική απεικόνιση του συστήματος ψύξης

Στη συνέχεια παρατίθεται με μορφή βημάτων ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης.

Βήμα 1: Επίλεξε T_{max}, N_{max}, σύστημα ψύξης.

Βήμα 2: Επίλεξε τυχαία την τρέχουσα λύση s και αξιολόγησέ την.

Βήμα 3: Θέσε $\mathrm{best} = \mathrm{s}, u_{max} = u(s)$.

Βήμα 4: Θέσε $T = T_{max}$.

Βήμα 5: Θέσε $N = 1$.

Βήμα 6: Επίλεξε τυχαία μια νέα λύση s' γειτονική της s και αξιολόγησέ τη.

Βήμα 7: Επίλεξε τυχαία έναν αριθμό $R \in [0,1]$.

Βήμα 8: Αν $P(s', s, T) \geq R$ τότε θέσε $\mathrm{s} = \mathrm{s}'$.

Βήμα 9: Αν $u(s') > u_{max}$, τότε θέσε $\mathrm{best} = \mathrm{s}', u_{max} = u(s')$.

Βήμα 10: Θέσε $N = N + 1$.

Βήμα 11: Αν $N \leq N_{max}$, γύρισε στο Βήμα 6, αλλιώς συνέχισε.

Βήμα 12: Χαμήλωσε τη θερμοκρασία σύμφωνα με το σύστημα ψύξης. Θέσε $T = T'$.

Βήμα 13: Αν $T > 0$, γύρισε στο Βήμα 5, διαφορετικά συνέχισε.

Βήμα 14: Εμφάνισε τη βέλτιστη λύση που εντοπίστηκε, την best, με $u(best) = u_{max}$.

4.3.2 Αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης

Ο Αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης ανήκει στην κατηγορία των αλγορίθμων Τοπικής Έρευνας (*Local Search Algorithms*), και ειδικότερα στην κατηγορία των αλγορίθμων μέγιστης κατάβασης. Οι αλγόριθμοι Τοπικής Έρευνας, δεδομένης μιας λύσης εξετάζουν μια «γειτονιά» αυτής, με στόχο να προσδιοριστεί κάποιο τοπικό ελάχιστο εντός της γειτονιάς. Με βάση το τοπικό ελάχιστο, δημιουργείται μια νέα γειτονιά, εντός της οποίας αναζητείται πάλι κάποιο τοπικό ελάχιστο κ.ο.κ. Ο τρόπος ορισμού της γειτονιάς και η μέθοδος με την οποία προσδιορίζεται το τοπικό ελάχιστο αποτελούν ξεχωριστά χαρακτηριστικά του κάθε αλγορίθμου.

Οι αλγόριθμοι μέγιστης κατάβασης εν γένει λειτουργούν με τον εξής τρόπο: Επιλέγεται με κάποιο μηχανισμό μια αρχική λύση s και εκτελείται μια διαδικασία που να δημιουργεί τη γειτονιά αυτής, $N(s)$. Ο αλγόριθμος αναζητά μια λύση s', η οποία είναι η καλύτερη από όλες τις εναλλακτικές λύσεις της γειτονιάς $N(s)$ [6]. Στο επόμενο στάδιο, δημιουργείται η γειτονιά $N(s')$ και ακολουθείται η ίδια διαδικασία για έναν αριθμό κύκλων.

Για να γίνει κατανοητή η διαδικασία θα πρέπει να οριστεί με σαφήνεια η έννοια της γειτονιάς. «***Γειτονιά N(s) μιας δεδομένης λύσης s**, καλείται ένα σύνολο λύσεων που ανήκουν στο χώρο των λύσεων και διαφέρουν με μικρές αλλαγές από την s*» [6]. Είναι απαραίτητο μια γειτονιά να είναι εσωτερικά συνδεδεμένη (προσεγγιστικότητα των λύσεων), ενώ είναι καλό η γειτονιά να έχει μικρό μέγεθος, και να δημιουργείται με σαφή και σχετικά απλό τρόπο.

Στους συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων που εξετάζονται στην παρούσα εργασία, η γειτονιά έχει τον εξής ορισμό:

Έστω $s = [s_1\ s_2 \dots s_n]$ *ένας σχεδιασμός που ανήκει στον χώρο λύσεων. Γειτονιά μεγέθους* (m^-, m^+) *καλείται ο χώρος* $N(s)$ *στον οποίο ανήκουν όλες οι λύσεις* $s' = [s'_1\ s'_2 \dots s'_n]$ *που ανήκουν στον χώρο λύσεων, για τις οποίες ισχύει:*

$$-m^- \le s_i - s'_i \le m^+, \forall i = 1,2,\dots,n$$

Από τον ορισμό αυτόν φαίνεται και η διαφορά της γειτονικής λύσης εδώ σε σχέση με την αντίστοιχη έννοια στην Προσομοιωμένη Ανόπτηση. Στον αλγόριθμο σταδιακής απομείωσης η γειτονική λύση προκύπτει με αλλαγές όλων των ομάδων μελών μέσα σε συγκεκριμένο εύρος, ενώ στην Προσομοιωμένη Ανόπτηση αυτή προκύπτει με αλλαγές σε μία ή δύο τυχαίες κάθε φορά ομάδες και σε ολόκληρο το εύρος επιλογών. Το αποτέλεσμα είναι ο μεν αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης να εξετάζει όντως παραπλήσιες λύσης εντός της γειτονιάς, ο δε αλγόριθμος Προσομοιωμένης Ανόπτησης να επιλέγει λύσεις διασκορπισμένες σε διάφορα σημεία του χώρου λύσεων.

Η λειτουργία του αλγόριθμου Σταδιακής Απομείωσης συνίσταται στα εξής: Αρχικά επιλέγεται ως βασική λύση η βαρύτερη λύση που ανήκει στο χώρο των λύσεων, η d_{max}. Δημιουργείται μια γειτονιά λύσεων $N(d_{max})$, μεγέθους (m^-, m^+) η οποία μπορεί να εξεταστεί αναλυτικά, καθώς το πλήθος των λύσεων που περιέχει είναι πολύ μικρό σε σχέση με το συνολικό πλήθος των λύσεων. Από τις λύσεις που ανήκουν στη γειτονιά λύσεων, επιλέγεται η καλύτερη όλων. Καθώς ενδέχεται πολλές λύσεις να είναι αποδεκτές και να έχουν το ίδιο κόστος, κριτήρια επιλογής θα είναι επίσης οι μετακινήσεις και τάσεις, οπότε επιλέγεται η λύση με τις μικρότερες τιμές αυτών, ανάλογα με τη συνολική ωφέλεια που αυτές δίνουν. Δηλαδή, παρ' όλο που στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης βάρους οι μετακινήσεις και οι τάσεις δεν ενδιαφέρουν αρκεί να μην υπερβαίνουν κάποιο όριο, σε αυτό τον αλγόριθμο έχει νόημα να χρησιμοποιηθούν ως tiebreakers. Η καλύτερη λύση s' από τη γειτονιά λύσεων $N(d_{max})$, θα αποτελέσει τη βάση για μια νέα γειτονιά λύσεων $N(s')$, μεγέθους (m^-, m^+), για την οποία πάλι θα προσδιοριστεί η καλύτερη λύση s''. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται, μέχρις ότου η καλύτερη λύση κάποιας επανάληψης να συμπίπτει με την καλύτερη λύση της προηγούμενης. Σε αυτό το σημείο ο αλγόριθμος τερματίζεται, καθώς δεν μπορεί να βελτιώσει περαιτέρω τη λύση.

Τα βήματα του αλγορίθμου σε μορφή ψευδοκώδικα είναι τα παρακάτω:

Βήμα 1: Αρχικοποιήσεις. Θέσε $cost_{min} = +\infty$, $u_{max} = -\infty$.

Βήμα 2: Θέσε όπου s τη βαρύτερη λύση.

Βήμα 3: Φτιάξε τη γειτονιά της, $N(s)$, μεγέθους (m^-, m^+).

Βήμα 4: Εξέτασε τις λύσεις $s_i \in N(s)$ για τις οποίες ισχύει $cost(s_i) \le cost_{min}$.

Βήμα 5: Αν $u(s_i) > u_{max}$, θέσε $u_{max} = u(s_i)$ και $cost_{min} = cost(s_i)$. Προκύπτει η καλύτερη λύση $s' \in N(s)$, οπότε $cost_{min} = cost(s')$.

Βήμα 6: Αν $s' \neq s$, γύρισε στο Βήμα 3, αλλιώς η s' είναι η βέλτιστη λύση.

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης δεδομένου του χαοτικού χώρου λύσεων. Παρέχει ικανοποιητική λύση σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, εξετάζοντας μικρό μέρος του χώρου λύσεων.
- Ο αλγόριθμος διαθέτει ελευθερία κινήσεων, αφού διατηρεί τη δυνατότητα να αυξήσει τις διαστάσεις κάποιων μελών, καθώς η γειτονιά των λύσεων εκτείνεται και προς τα κάτω και προς τα πάνω.
- Καθοριστικός παράγοντας για την ταχύτητα επίλυσης, είναι το μέγεθος της γειτονιάς. Ορίζοντας μεγάλο μέγεθος γειτονιάς, αυξάνονται οι πιθανότητες για εύρεση καλύτερης λύσης, καθώς ο αλγόριθμος μπορεί να αποφύγει τον εγκλωβισμό σε περιοχές τοπικών βέλτιστων στις οποίες είναι επιρρεπής η ίδια διαδικασία με μικρή γειτονιά. Το μειονέκτημα αυτής της επιλογής έγκειται στον υπολογιστικό χρόνο, ο οποίος αυξάνεται εκθετικά. Και αν αυτό προκαλεί μικρές διαφοροποιήσεις στο χρόνο επίλυσης για μικρά προβλήματα, για μέτρια προς μεγάλα η ανάλυση γίνεται ανέφικτη. Για τον λόγο αυτό, το μέγεθος γειτονιάς θα ορίζεται σταθερά το μικρότερο δυνατό, δηλαδή $(1,1)$, παρέχοντας τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα στον αλγόριθμο.
- Αν και μειώνει πολύ σημαντικά τον όγκο του προβλήματος, ο αλγόριθμος ενδέχεται να εμφανίσει τα ίδια μειονεκτήματα με το αρχικό πρόβλημα. Όταν οι ομάδες μελών είναι πάρα πολλές, τότε ακόμα και με γειτονιά $(1, 1)$, το πλήθος των αναλύσεων μπορεί να γίνει εξαιρετικά μεγάλο. Αυτό σημαίνει πως κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου ενδέχεται να προκύψουν σοβαρά προβλήματα χρόνου αλλά και μνήμης υπολογιστή.

Από τη χρήση του αλγορίθμου στη βιβλιογραφία [1], έγινε σαφές πως πρόκειται για μια διαδικασία που προσφέρει ικανοποιητική λύση σε συντομότερο χρόνο συγκριτικά με τους προηγούμενους δύο αλγορίθμους. Παρόλα αυτά, η μορφή της όπως παρουσιάστηκε, παρουσιάζει τα μειονεκτήματα που υπογραμμίστηκαν παραπάνω. Στις επόμενες παραγράφους θα αναλυθούν διάφορες τεχνικές που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών και την επιτάχυνση της διαδικασίας.

4.3.2.1 Τεχνική 1: Τυχαία Αρχικοποίηση

Η τεχνική αυτή βασίζεται στην παρατήρηση πως η διαδικασία του αλγορίθμου όπως περιγράφηκε αρχικά, ξεκινάει πάντοτε από τη βαρύτερη δυνατή επιλογή μελών, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε κάποιο όχι τόσο καλό τοπικό βέλτιστο. Από το να αυξηθεί το μέγεθος γειτονιάς (κάτι το οποίο είναι ασύμφορο), κρίνεται προτιμότερο να γίνει ένα πλήθος επαναλήψεων του αλγορίθμου πέραν της 1ης, κάθε φορά με τυχαία επιλογή της αρχικής λύσης. Η τυχαία αυτή αρχική λύση προκύπτει με επιλογή του αύξοντα αριθμού της διατομής ανά ομάδα μελών (από τη λίστα των διαθέσιμων διατομών) με πιθανοτικό τρόπο που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή.

Το κέρδος που αποφέρει η τεχνική αυτή συνίσταται στο ότι πλέον ο αλγόριθμος γίνεται απρόβλεπτος, αφού η εκκίνησή του δεν περιορίζεται στη βαρύτερη λύση, αλλά επεκτείνεται και σε άλλες τυχαίες περιοχές του χώρου λύσεων. Οι λύσεις στις οποίες θα συγκλίνει ο αλγόριθμος για κάθε μια από τις επιπλέον επαναλήψεις του, μπορεί να είναι οι ίδιες με την αρχική ή χειρότερες. Υπάρχει σοβαρή περίπτωση όμως να καταλήξει και σε μία έστω καλύτερη λύση από αυτή που βρίσκει στην 1η επανάληψή του. Σημειώνεται πως μετά το πέρας όλων των επαναλήψεων, ο αλγόριθμος θα εμφανίσει την καλύτερη λύση όλων, οπότε στη χειρότερη περίπτωση το αποτέλεσμα θα είναι αυτό της 1ης βέλτιστης λύσης.

Με αφορμή ακριβώς αυτές τις περιπτώσεις, εγείρεται το ερώτημα: αξίζει να καταναλωθεί επιπλέον χρόνος για τυχαίες αναζητήσεις με το ελάχιστο μέγεθος γειτονιάς, παρά να γίνει μία μοναδική επανάληψη με μεγαλύτερο εύρος γειτονιάς; Η απάντηση είναι θετική δεδομένου ότι, όπως προαναφέρθηκε, η αύξηση του μεγέθους της γειτονιάς λύσεων προκαλεί εκθετική προσαύξηση στο χρόνο ανάλυσης. Το φαινόμενο αυτό παίρνει μεγαλύτερες διαστάσεις, αν αναλογιστεί κανείς πως η πρώτη αναζήτηση που ξεκινά από τη βαρύτερη δυνατή λύση, πιθανότατα θα χρειαστεί κάποιον παραπάνω χρόνο για να συγκλίνει, αφού η βέλτιστη λύση αναμένεται να μην περιλαμβάνει σε όλες τις ομάδες τις βαρύτερες διατομές.

Η τελική λύση θα είναι η καλύτερη όλων των επαναλήψεων του αλγορίθμου. Επειδή είναι πολύ πιθανόν το παγκόσμιο βέλτιστο να βρίσκεται κάπου παραπλήσια αυτής, η τεχνική δίνει -προαιρετικά- τη δυνατότητα για μία τελευταία αναζήτηση με κέντρο τη βέλτιστη λύση και γειτονιά διπλάσιου μεγέθους (δηλαδή (2,2)). Η τελευταία αυτή επιλογή δείχνει απορριπτέα με βάση τα μειονεκτήματα που αναφέρθηκαν σχετικά με τις γειτονιές μεγαλύτερου μεγέθους, αλλά έχει νόημα, δεδομένου ότι ο αλγόριθμος αναμένεται είτε να συγκλίνει ξανά στην ίδια λύση αν δεν βρεθεί κάποια καλύτερη στη νέα γειτονιά, είτε να συγκλίνει σχετικά σύντομα, εφόσον μια καλύτερη λύση θεωρείται πως βρίσκεται κοντά σε αυτήν που κατέληξε με τις ελάχιστες γειτονιές.

4.3.2.2 Τεχνική 2: Αρχικοποίηση βάσει Μήκους Ομάδων

Η τεχνική «Τυχαία Αρχικοποίηση» που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ανοίγει νέες προοπτικές στη λογική αναζήτησης μέσα στον χαοτικό χώρο λύσεων, παρά τον εντελώς πιθανοτικό χαρακτήρα της. Η τεχνική «Αρχικοποίηση βάσει Μήκους Ομάδων» από την άλλη, ακολουθεί μια πιο στοχευμένη διαδικασία, συνδυάζοντας πιθανότητες και προτίμηση.

Συγκεκριμένα, με βάση τη νέα αυτή τεχνική, ο αλγόριθμος εκτελείται ξανά για μία σειρά αναλύσεων ξεκινώντας την πρώτη με αρχική λύση τη βαρύτερη όλων και συνεχίζοντας με αρχικές λύσεις που προσδιορίζονται με καθοριστικό παράγοντα το συνολικό μήκος κάθε ομάδας μελών. Η λογική με την οποία γίνεται η επιλογή βασίζεται στην υπόθεση πως, όσον αφορά το οικονομικό τουλάχιστον σκέλος, η βέλτιστη επιλογή θα «κατανείμει» ελαφρύτερες διατομές στις ομάδες μελών με το μεγαλύτερο συνολικό μήκος και βαρύτερες στις ομάδες με το μικρότερο συνολικό μήκος. Φυσικά, η λογική αυτή δεν έχει απόλυτη ισχύ, καθώς η επιλογή των διατομών εξαρτάται άμεσα και από την εντατική κατάσταση του φορέα που διαφέρει από πρόβλημα σε πρόβλημα. Παρόλα αυτά, η διαίσθηση που παρέχει αυτή η αμιγώς οικονομική οπτική, μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή μιας αρχικής λύσης που να αποφέρει καλύτερη σύγκλιση.

Επειδή ακριβώς όμως το κριτήριο το συνολικού μήκους μιας ομάδας μελών δεν είναι απόλυτα φερέγγυο, η επιλογή οφείλει να γίνεται με έναν τρόπο που να λαμβάνει υπ' όψη τον παράγοντα του μήκους, αλλά να επιτρέπει και ευελιξία. Με αυτόν τον τρόπο θα γίνει ένα πλήθος αναζητήσεων με αρχικές λύσεις που επηρεάζονται μεν από το μήκος, αλλά θα είναι κάθε φορά διαφορετικές. Για να υλοποιηθεί αυτός ο τρόπος επιλογής, γίνεται χρήση της πιθανοτικής κατανομής Rayleigh (*Rayleigh distribution*).

Η κατανομή Rayleigh αποτελεί μια συνεχή πιθανοτική κατανομή της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (*probability density function - pdf*) καθώς και η συνάρτηση κατανομής (*cumulative distribution function - cdf*) μιας τυχαίας μεταβλητής $R \sim Rayleigh(\sigma)$, με $\sigma > 0$, δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις αντιστοίχως:

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ r \geq 0 \\ 0 \qquad , & \acute{o}\tau\alpha\nu\ r < 0 \end{cases}$$

και

$$F_R(r) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \acute{o}\tau\alpha\nu\ r \geq 0 \\ 0 \qquad , & \acute{o}\tau\alpha\nu\ r < 0 \end{cases}$$

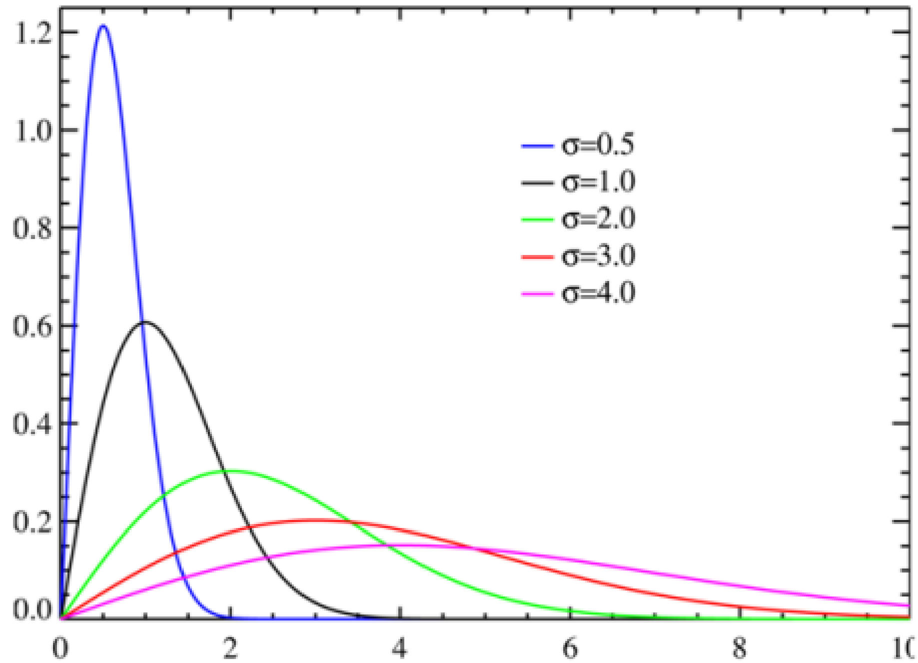
Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση για την τυχαία μεταβλητή $R \sim Rayleigh(\sigma)$ είναι αντίστοιχα:

$$\mu = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

και

$$s = \sigma\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}$$

Η πιθανοτική αυτή κατανομή έχει κωδωνοειδή μη συμμετρική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία συγκεντρώνεται σε κάποια ορισμένη τιμή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της κατανομής Rayleigh για διάφορες τιμές της παραμέτρου σ

Αυτή τη μορφή είναι επιθυμητό να έχει και η πιθανοτική κατανομή των επιλογών όσον αφορά τις διατομές, ανάλογα βέβαια με το κέντρο βάρους που θα ορίζεται ανά ομάδα μελών. Με αυτόν τον τρόπο, για παράδειγμα, η ομάδα μελών με το μεγαλύτερο συνολικό μήκος θα επιλέγεται με μεγάλη πιθανότητα να πάρει τη μικρότερη διατομή, χωρίς όμως να αποκλείεται πως θα της αποδοθεί και μία διατομή μεγαλύτερου εμβαδού.

Η τεχνική οργανώνεται ως εξής:

Κατ' αρχάς, γίνεται μια κατάταξη των ομάδων μελών, ανάλογα με το συνολικό τους μήκος και ταυτόχρονα δίνεται ένας αύξοντας αριθμός σε κάθε μία από αυτές (1 στην ομάδα με το μικρότερο συνολικό μήκος, 2 σε εκείνη με το αμέσως μεγαλύτερο κ.ο.κ.). Από αυτόν τον αριθμό θα προκύψει ένα νέο νούμερο για κάθε ομάδα μελών που θα αποτελέσει το κέντρο επιρροής για την κατανομή Rayleigh, με βάση τον τύπο:

$$n = minValue + (maxValue - minValue) \cdot \frac{id}{nGroup}$$

Όπου:

$minValue$: ο α/α της ελαφρύτερης διατομής της εκάστοτε ομάδας.

$maxValue$: ο α/α της βαρύτερης διατομής της εκάστοτε ομάδας.

id: ο α/α με βάση την κατάταξη των ομάδων με κριτήριο το συνολικό μήκος.

$nGroup$: το πλήθος των ομάδων.

Απαιτείται μια γεννήτρια αριθμών που να ακολουθεί την κατανομή της συνάρτησης Rayleigh. Οι περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού χρησιμοποιούν γεννήτριες αριθμών που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$. Ένας απλός τρόπος για να δημιουργηθεί αντίστοιχη γεννήτρια με κατανομή Rayleigh, είναι η χρήση του παρακάτω τύπου, ο οποίος μετατρέπει τιμές που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή (U) σε τιμές με κατανομή $Rayleigh$ (R) στο διάστημα $[0,1]$:

$$R = \sigma\sqrt{-2\ln(1-U)}$$

Η μεταβλητή σ στο πρόβλημα αυτό θα παίρνει την τιμή:

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{n - minValue + 1}{maxValue - minValue + 1} \quad , & n \le \dfrac{maxValue + minValue}{2} \\ \dfrac{maxValue - n + 1}{maxValue - minValue + 1} \quad , & n > \dfrac{maxValue + minValue}{2} \end{cases}$$

και

$$R = \begin{cases} \sigma\sqrt{-2\ln(1-U)} \quad , & n \le \dfrac{maxValue + minValue}{2} \\ 1 - \sigma\sqrt{-2\ln(1-U)} \quad , & n > \dfrac{maxValue + minValue}{2} \end{cases}$$

Τελικά, η τιμή του α/α της διατομής που θα επιλέγεται για την κάθε ομάδα θα δίνεται (με στρογγυλοποίηση) από τη σχέση:

$$A = floor[(maxValue - minValue + 1) \cdot R + minValue]$$

4.3.2.3 Τεχνική 3: Αρχικοποίηση βάσει Ποσοστού Απομείωσης

Η συγκεκριμένη τεχνική αξιοποιεί τα αποτελέσματα του αλγορίθμου μετά από την πρώτη του σύγκλιση, όταν έχει δηλαδή ξεκινήσει την αναζήτηση από τη βαρύτερη δυνατή λύση. Όπως έχει περιγραφεί ήδη, η διαδικασία συγκλίνει σε μία λύση, η οποία όμως πιθανότατα δεν είναι και η βέλτιστη δυνατή. Παρόλα αυτά, ορισμένες πληροφορίες από την αναζήτηση αυτήν μπορούν να φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες σε επόμενες αναζητήσεις.

Ο αλγόριθμος κατά την εξέλιξή του στο πλαίσιο της 1ης αναζήτησης, κινείται προς τη βέλτιστη δυνατή λύση κατανέμοντας σε ορισμένα μέλη όλο και ελαφρύτερες διατομές, ενώ σε άλλα παρουσιάζει προτίμηση σε διατομές μεγαλύτερου εμβαδού. Δεδομένου ότι η αρχική λύση είναι η βαρύτερη, είναι θεμιτό να μελετηθεί αυτή η «τάση» προς μεγάλες ή μικρότερες διατομές με την αξιοποίηση του ποσοστού απομείωσης ανά ομάδα μελών, όπως προκύπτει στο τέλος της 1ης διαδικασίας.

Η διαδικασία της τεχνικής εκτελείται ως εξής:

Για κάθε ομάδα μελών υπολογίζεται το ποσοστό απομείωσης με βάση τη σχέση:

$$RP = \frac{maxValue - Value}{maxValue}$$

όπου

$maxValue$: ο α/α της βαρύτερης διατομής της εκάστοτε ομάδας.

$Value$: ο α/α της διατομής που προκύπτει από την $1^{η}$ επίλυση για την εκάστοτε ομάδα.

Επιπλέον, οι τιμές αυτές καταχωρούνται σε ένα διάνυσμα μεγέθους $nGroup$, δηλαδή με θέσεις όσες είναι οι ομάδες μελών.

Οι τιμές εντός του διανύσματος αυτού, ανακατατάσσονται με αύξουσα σειρά. Στη συνέχεια, υπολογίζεται η μέγιστη διαφορά μεταξύ δυο συνεχόμενων τιμών ποσοστού απομείωσης. Η τιμή του ποσοστού απομείωσης με βάση την οποία θα προχωρήσει η διαδικασία, επιλέγεται να είναι η μεγαλύτερη από τις δυο συνεχόμενες που έχουν τη μέγιστη διαφορά. Επομένως, η επιλογή της διατομής της κάθε ομάδας μελών γίνεται ως εξής:

- Αν το ποσοστό απομείωσης της ομάδας είναι μεγαλύτερο ή ίσο της οριακής τιμής απομείωσης, αυτό σημαίνει πως ο αλγόριθμος τείνει να μειώσει τη διατομή στα συγκεκριμένα μέλη, οπότε προτιμάται μια ελαφριά διατομή ως αρχική επιλογή.
- Αν το ποσοστό απομείωσης της ομάδας είναι μικρότερο της οριακής τιμής απομείωσης, αυτό σημαίνει πως ο αλγόριθμος τείνει να καταλήξει σε βαρύτερη διατομή στα συγκεκριμένα μέλη, οπότε προτιμάται μια βαριά διατομή ως αρχική επιλογή.

Παρατηρήσεις:

1. Σημειώνεται πως και σε αυτήν την τεχνική αξιοποιείται η κατανομή Rayleigh για την πιθανοτική επιλογή ελαφρύτερων ή βαρύτερων διατομών, ώστε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου να ξεκινά από διαφορετική κάθε φορά αρχική λύση.
2. Το οριακό ποσοστό απομείωσης θα πρέπει να είναι και μεγαλύτερο του 50% ώστε να έχει νόημα η μέθοδος. Σε διαφορετική περίπτωση δεν μπορεί να εξαχθεί κάποιο ασφαλές συμπέρασμα για την επιλογή βαρύτερης ή ελαφρύτερης αρχικής λύσης.

4.3.2.4 Τεχνική 4: Αρχικοποίηση βάσει Ποσοστού Εκμετάλλευσης

Πρόκειται για ακόμα μία τεχνική που χρησιμοποιεί πληροφορίες οι οποίες προκύπτουν από την $1^{η}$ διαδικασία αναζήτησης. Στην περίπτωση αυτή, αξιοποιείται το ποσοστό εκμετάλλευσης των μελών του φορέα, δηλαδή το ποσοστό της έντασης που αυτά αναλαμβάνουν σε σχέση με την αντοχή τους. Το ποσοστό αυτό ορίζεται για κάθε μέλος ως:

$$ep = \frac{stressMax}{f_y}$$

Όπου:

$stressMax$: η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή τάση που παραλαμβάνει το μέλος.

f_y: το όριο διαρροής του μέλους.

Ως ποσοστό εκμετάλλευσης που αντιπροσωπεύει την ομάδα, τίθεται το μεγαλύτερο από τα αντίστοιχα ποσοστά των μελών της, ep_{max}. Στη συνέχεια, υπολογίζεται ο παρακάτω ακέραιος αριθμός:

$$n = \begin{cases} floor[minValue + (maxValue - minValue) \cdot ep_{max}], & ep_{max} \leq 1 \\ maxValue, & ep_{max} > 1 \end{cases}$$

Με βάση τον αριθμό αυτόν και με τη χρήση της κατανομής Rayleigh, γίνεται επιλογή της διατομής για την κάθε ομάδα. Με παρατήρηση του παραπάνω τύπου, γίνεται σαφές πως ομάδες με μικρό ποσοστό εκμετάλλευσης, θα τείνουν να ξεκινούν στις επόμενες αναζητήσεις με μικρότερες διατομές, ενώ αντίθετα, ομάδες με μεγάλο ποσοστό εκμετάλλευσης θα επιλέγουν μεγαλύτερες διατομές.

4.3.2.5 Τεχνική 5: Αρχικοποίηση βάσει Απόστασης από Στηρίξεις

Η ιδέα για τη διαμόρφωση της νέας αυτής τεχνικής πηγάζει από την υπόθεση ότι, μέλη τα οποία βρίσκονται κοντά σε στηρίξεις είναι πιθανότερο να παραλαμβάνουν μεγαλύτερες δυνάμεις (αφού στη συνέχεια τις μεταβιβάζουν στον τελικό αποδέκτη, δηλαδή τις στηρίξεις) και άρα να χρειάζονται πιο μεγάλες διατομές, ενώ εκείνα που απέχουν περισσότερο από στηρίξεις επιβαρύνονται συγκριτικά λιγότερο, οπότε θα μπορούν να ανταπεξέλθουν στις φορτίσεις με διατομές μικρότερου εμβαδού. Βέβαια, καθώς ανάλογα με την τοπολογία και τις φορτίσεις του προβλήματος, η εντατική κατάσταση του φορέα μπορεί να μην ακολουθεί επακριβώς τη λογική αυτή. Παρόλα αυτά, είναι ένα σκεπτικό που μπορεί να βοηθήσει τον αλγόριθμο στην επιλογή κατάλληλης αρχικής λύσης, η οποία θα τον οδηγήσει σε ένα καλύτερο αποτέλεσμα.

Με ποιόν τρόπο όμως θα οριστεί η απόσταση όχι ενός μέλους, αλλά μιας ομάδας μελών από παραπάνω από μία στηρίξεις; Κατ' αρχάς, ως απόσταση ενός μέλους από ένα πλήθος στηρίξεων, λογίζεται ως η μέγιστη απόσταση της πλησιέστερης στο μέλος στήριξης από τους δύο ακραίους κόμβους του. Στη συνέχεια, η απόσταση της ομάδας μελών από την πλησιέστερη στήριξη ($\boldsymbol{d_i}$), υπολογίζεται ως η μικρότερη από τις αποστάσεις των μελών της ομάδας, όπως υπολογίστηκαν προηγουμένως.

Έτσι, ακολουθείται η ακόλουθη διαδικασία:

- Υπολογίζεται η απόσταση d_i για κάθε ομάδα μελών i.
- Εξάγεται ένα ποσοστό απόστασης για την κάθε ομάδα με βάση την ακόλουθη σχέση: $\mathrm{c} = \frac{d}{\sum d_i}$.
- Προσδιορίζεται ο αριθμός

$$n = floor[minValue + (maxValue - minValue) \cdot (1 - \mathrm{c})].$$

- Γίνεται επιλογή της διατομής ανά ομάδα μελών με χρήση της κατανομής Rayleigh και κέντρο τον αριθμό n. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται η αρχική λύση που ακολουθεί τη λογική της απόστασης από τις στηρίξεις.

4.3.2.6 Τεχνική 6: Εξερεύνηση Μεγάλου Βήματος

Έχει επανειλημμένα αναφερθεί πως ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης θα πρέπει να χρησιμοποιεί κατά βάση μικρό μέγεθος γειτονιάς, ώστε να είναι χρονικά αποδεκτή η διαδικασία ανάλυσης που εκτελεί. Το χαρακτηριστικό αυτό αποτελεί όμως ταυτόχρονα και την αχίλλειο πτέρνα του αλγορίθμου, καθώς μπορεί εύκολα να απομονώσει την ανάλυσή του σε κάποιο τοπικό βέλτιστο του συνολικού χώρου λύσεων, χάνοντας έτσι περιοχές καλύτερων λύσεων ή ακόμη και του ολικού βέλτιστου.

Μια σημαντική συνεισφορά στην αντιμετώπιση του φαινομένου αυτού παρέχει η τεχνική «Εξερεύνηση Μεγάλου Βήματος». Η τεχνική αυτή, επί της ουσίας επιτρέπει μια αναζήτηση όμοια με τη συνήθη, αυτή τη φορά όμως με τη χρήση μεγαλύτερων γειτονιών, αποφεύγοντας παράλληλα τους εκθετικά μεγαλύτερους χρόνους ανάλυσης. Πώς είναι δυνατό αυτό, από τη στιγμή που μεγαλύτερη γειτονιά συνεπάγεται σημαντικά μεγαλύτερο χρόνο επίλυσης; Η επιτάχυνση επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας μεγαλύτερο «διασκελισμό» κατά την εξέταση του χώρου της γειτονιάς. Για να γίνει κατανοητή αυτή η έννοια του διασκελισμού και η διαφοροποίησή της σε σχέση με τον κλασικό τρόπο ψηλάφησης των περιεχομένων ενός χώρου λύσεων, θα γίνει μια διευκρίνιση για τον τρόπο που αυτή υλοποιείται.

Η γενική διαδικασία με την οποία εξετάζει ο αλγόριθμος τις λύσεις που περιλαμβάνονται σε μια γειτονιά είναι ο ακόλουθος:

- Πρώτα εξετάζεται η ελαφρύτερη λύση της γειτονιάς.
- Σε επόμενες φάσεις, προσαυξάνεται ο α/α της 1ης ομάδας μελών κατά 1 κάθε φορά, έως ότου φτάσει τη μέγιστη τιμή που αντιστοιχεί στη βαρύτερη δυνατή διατομή για την ομάδα. Στο σημείο αυτό, γίνεται ξανά εκκίνηση από τη μικρότερη επιλογή της 1ης ομάδας, ενώ προσαυξάνεται κατά 1 ο α/α της 2ης ομάδας μελών.
- Η διαδικασία συνεχίζεται με προσαύξηση του α/α της 1ης ομάδας μετά το πέρας της οποίας θα προστεθεί ξανά 1 στον α/α της 2ης ομάδας και θα επανεκκινηθεί η καταμέτρηση στην 1η .
- Όταν εξαντληθούν οι επιλογές και στην 2η ομάδα μελών, τότε θα αυξηθεί ο α/α της επόμενης ομάδας και θα επανεκκινηθούν οι 2 πρώτες κ.ο.κ.
- Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν εξεταστεί και η βαρύτερη λύση της γειτονιάς. Είναι προφανές ότι με τον τρόπο αυτόν εξετάζονται όλες οι λύσεις που υπάγονται στη γειτονιά.

Παράδειγμα:

Έστω πρόβλημα στο οποίο τα μέλη είναι χωρισμένα σε 3 ομάδες και η γειτονιά που εξετάζεται είναι η $[(1,1,1),(3,3,3)]$. Η σειρά με την οποία θα εξεταστούν οι λύσεις της γειτονιάς θα είναι αυτή που παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.2.

α/α Λύσης	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3
1	1	1	1
2	2	1	1
3	3	1	1
4	1	2	1
5	2	2	1
6	3	2	1
7	1	3	1
8	2	3	1
9	3	3	1
10	1	1	2
11	2	1	2
12	3	1	2
13	1	2	2
14	2	2	2
15	3	2	2
16	1	3	2
17	2	3	2
18	3	3	2
19	1	1	3
20	2	1	3
21	3	1	3
22	1	2	3
23	2	2	3
24	3	2	3
25	1	3	3
26	2	3	3
27	3	3	3

Πίνακας 4.2: Λύσεις εντός της γειτονιάς με τη σειρά που εξετάζονται με βήμα 1

Στο πλαίσιο της νέας τεχνικής, το βήμα αναζήτησης μπορεί να διαφοροποιηθεί από την τιμή 1. Με αυτόν τον τρόπο, δεν εξετάζονται όλες οι λύσεις της γειτονιάς μία προς μία, αλλά πραγματοποιείται εξερεύνηση όλου του υποχώρου με μια πιο «αραιή» αναζήτηση.

Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, εάν είναι επιθυμητό να εξεταστεί η γειτονιά $([1,1,1], [6,6,6])$, τότε με βήμα 2 ο χώρος εξετάζεται στον ίδιο αριθμό λύσεων, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.3.

α/α Λύσης	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3
1	1	1	1
2	3	1	1
3	5	1	1
4	1	3	1
5	3	3	1
6	5	3	1
7	1	5	1
8	3	5	1
9	5	5	1
10	1	1	3
11	3	1	3
12	5	1	3
13	1	3	3
14	3	3	3
15	5	3	3
16	1	5	3
17	3	5	3
18	5	5	3
19	1	1	5
20	3	1	5
21	5	1	5
22	1	3	5
23	3	3	5
24	5	3	5
25	1	5	5
26	3	5	5
27	5	5	5

Πίνακας 4.3: Λύσεις εντός της γειτονιάς με τη σειρά που εξετάζονται με βήμα 2

Το όφελος που μπορεί να προκύψει είναι πολύ σημαντικό αν αναλογιστεί κανείς πως, μολονότι γίνεται μια παρέκκλιση ως προς την πληρότητα της αναζήτησης στη γειτονιά (είναι χαρακτηριστικό πως στο συγκεκριμένο παράδειγμα εξετάστηκαν μόλις 27 από τις συνολικά 216 λύσεις της γειτονιάς), εντούτοις πλέον ο αλγόριθμος μπορεί να κάνει μια γρήγορη αναζήτηση σε σαφώς μεγαλύτερο τμήμα του χώρου λύσεων, όπου θα βρει ενδεχομένως μια αρκετά καλή σύγκλιση. Η λύση αυτή δεν αναμένεται φυσικά να είναι το τέλος της διαδικασίας, αλλά χρησιμοποιείται ως αρχική και ακολουθεί πλέον η πλήρης διαδικασία αναζήτησης της βέλτιστης περίπτωσης σε γειτονιές ελαχίστου μεγέθους.

Παρατηρήσεις:

1. Όπως φαίνεται και στον 2ο πίνακα, εάν ο α/α της ομάδας υπερβαίνει στο επόμενο βήμα τη μέγιστη δυνατή τιμή του, επανεκκινείται από την ελάχιστη τιμή και αυξάνεται ο α/α

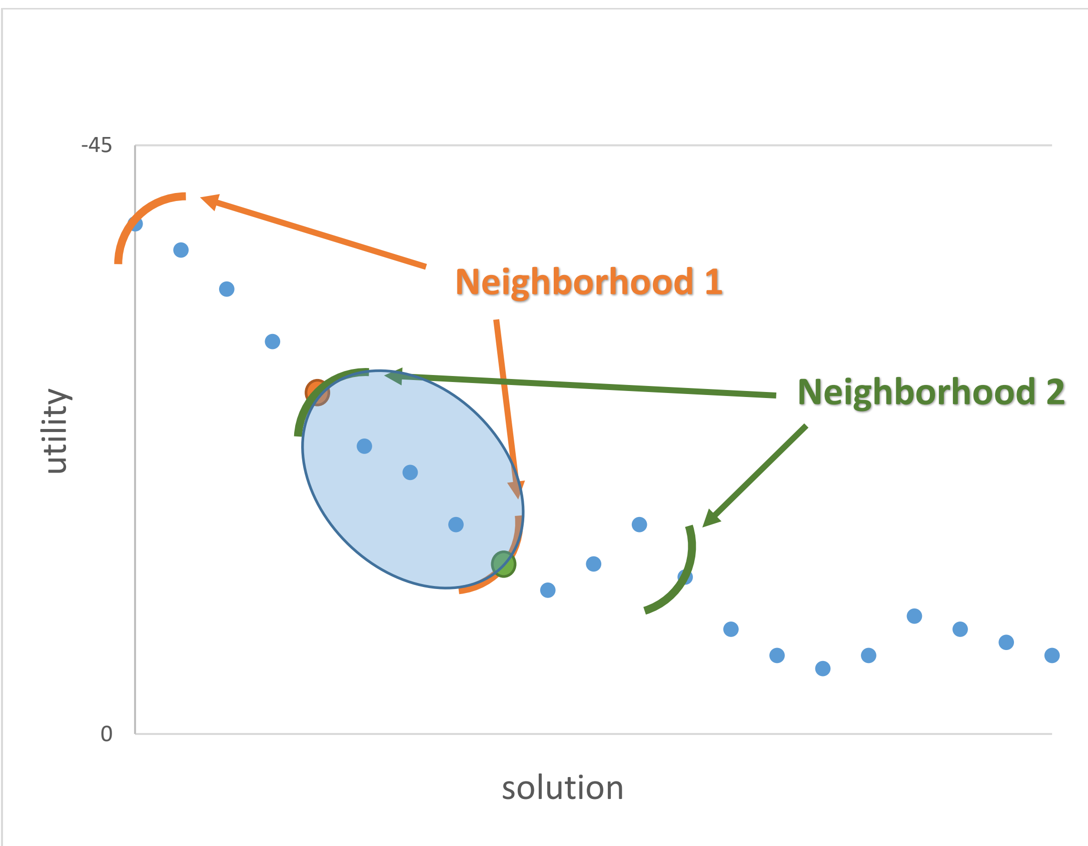
της επόμενης ομάδας κατά ένα βήμα. Αυτός είναι και ο λόγος που στο εν λόγω παράδειγμα δεν εξετάστηκε η βαρύτερη λύση, [6,6,6].

2. Σκοπός της τεχνικής δεν είναι η πλήρης εξέταση των λύσεων της γειτονιάς, αλλά η δυνατότητα γρήγορης αναζήτησης σε μεγαλύτερα τμήματα του χώρου λύσεων. Με τον τρόπο που εκτελείται, εξετάζει κάποιες λύσεις στα τμήματα αυτά, οι οποίες επιλέγονται ομοιόμορφα. Επί της ουσίας συγκρίνονται λύσεις σε ένα πιο ευρύ φάσμα του χώρου λύσεων, οπότε η επικρατέστερη αυτών είναι πιο πιθανό να αποτελέσει μια πιο καλή αρχική λύση για την αναλυτική διαδικασία σύγκλισης.

4.3.2.7 Περαιτέρω επιτάχυνση του αλγορίθμου

Πέραν των τεχνικών που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους και οι οποίες οδηγούν σε σημαντική βελτίωση της μεθόδου τόσο από άποψη αποτελέσματος όσο και ταχύτητας, τροποποιήσεις έγιναν και στην ίδια τη δομή του αλγορίθμου.

Οι αλλαγές αυτές έγιναν με αφορμή την ακόλουθη παρατήρηση: Σε κάθε βήμα του, ο αλγόριθμος ορίζει και μια περιοχή στην οποία μετά την ανάλυσή του εντοπίζει την καλύτερη λύση, με κέντρο την οποία σχηματίζει μια καινούρια γειτονιά. Κατά την εξέταση της νέας γειτονιάς, δε θα επανεξετάζονται λύσεις οι οποίες έχουν ήδη απορριφθεί στο προηγούμενο βήμα; Η απάντηση είναι πως όντως συμβαίνει κάτι τέτοιο και μάλιστα εξετάζονται ξανά στην καλύτερη περίπτωση οι μισές λύσεις της προηγούμενης γειτονιάς. Αυτή η επικάλυψη λύσεων, απεικονίζεται χαρακτηριστικά στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Επικάλυψη λύσεων μεταξύ 2 συνεχόμενων γειτονιών

Από τα παραπάνω, είναι εμφανές πως ο αλγόριθμος καλείται να επαναλάβει υπολογισμούς για περιπτώσεις που ήδη έχει εξετάσει στα προηγούμενα βήματα. Σε πολλές περιπτώσεις η επιπλέον αυτή δουλειά είναι λιγότερο επίπονη, αφού αρκεί απλά ο υπολογισμός του κόστους της υποψήφιας λύσης. Σε άλλες περιπτώσεις όμως, το κόστος περνάει το πρώτο σημείο ελέγχου του αλγορίθμου και ακολουθεί στατική επίλυση και προσδιορισμός της ωφέλειας, διαδικασία σαφώς πιο περίπλοκη. Σε κάθε περίπτωση, ο αλγόριθμος χρονοτριβεί χωρίς λόγο.

Για την αντιμετώπιση αυτής της αδυναμίας, είναι θεμιτό να υπάρξει μια καταγραφή των λύσεων που έχουν ελεγχθεί, ώστε να μην επαναλαμβάνεται η ανάλυσή τους στα επόμενα βήματα. Η καταγραφή αυτή παρουσιάζει τρεις σημαντικές ιδιαιτερότητες:

- Το πλήθος των λύσεων που θα καταγραφούν θα είναι αρκετά έως πολύ μεγάλο και κατά συνέπεια με τη χρήση της κοινής λίστας θα δαπανηθεί σημαντικό μέρος της μνήμης του υπολογιστή.
- Το πλήθος των καταγραφών δεν μπορεί να προσδιοριστεί εκ των προτέρων. Μπορεί να γίνει μια εκτίμηση του αριθμού αυτού, αλλά όχι ακριβής υπολογισμός. Αυτό σημαίνει πως δεν μπορεί να προσδιοριστεί ο αριθμός των θέσεων μιας λίστας που θα τις περιλαμβάνει.
- Η διαδικασία καταχώρησης και αναζήτησης για τον έλεγχο ενδέχεται να μην είναι ικανοποιητικά γρήγορη.

Απάντηση σε όλα αυτά τα προβλήματα, δίνει η χρήση των bloom filters που παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

4.3.2.8 Bloom Filters

Τα Bloom Filters είναι δομές δεδομένων που αναπτύχθηκαν από τον Burton Bloom το 1970 [10]. Πλεονεκτούν σε σύγκριση με άλλες λίστες δεδομένων (*hash tables*) στο ότι είναι πιο αποδοτικά όσον αφορά τον χώρο μνήμης (*space efficient*), επιτρέποντας πάντως μια πιθανότητα σφάλματος κατά την αναζήτηση εντός των καταγραφών. Παρόλα αυτά, προσφέρουν σημαντικό κέρδος σε πολλές εφαρμογές.

Οι δομή ενός Bloom Filter υποστηρίζει πολύ γρήγορες καταχωρήσεις και αναζητήσεις. Δεδομένου ότι και τα hash tables είναι αρκετά γρήγορα, γεννάται το ερώτημα γιατί μπορεί να προτιμηθούν τα bloom filters; Το σημαντικότερο πλεονέκτημά τους έγκειται στην πολύ καλύτερη απόδοσή τους σε μεγάλο όγκο δεδομένων, όπως επίσης και στον πολύ μικρό χώρο μνήμης που χρησιμοποιείται ανά αντικείμενο που καταχωρείται. Η χρήση τους είναι ιδανική για εφαρμογές στις οποίες κάποιος επιθυμεί να ελέγξει εάν περιλαμβάνεται κάποια τιμή (*value*) στη λίστα.

Από την άλλη, παρουσιάζονται και ορισμένα μειονεκτήματα. Πρώτα απ' όλα, σε ένα bloom filter δεν μπορεί να γίνει καταχώρηση «αντικειμένων», ούτε δεικτών προς αντικείμενα (*pointers*), παρά μόνο τιμές. Κατά την αναζήτηση, γίνεται έλεγχος αν κάποια τιμή έχει συναντηθεί ή όχι στη φάση της καταχώρησης. Ένα δεύτερο μειονέκτημα είναι πως δεν επιτρέπονται διαγραφές από τις καταχωρήσεις. Τέλος, η σημαντικότερη αδυναμία είναι η ύπαρξη πιθανότητας σφάλματος. Στην περίπτωση που κάποια τιμή έχει καταχωρηθεί, δεν υπάρχει περίπτωση να θεωρηθεί εσφαλμένα πως αυτή δεν περιλαμβάνεται στις καταχωρήσεις (*false negative*). Αντίθετα, υπάρχει βέβαιη πιθανότητα να μην έχει γίνει καταγραφή κάποιας τιμής και το bloom filter κατά τη διαδικασία αναζήτησης να ισχυρίζεται πως αυτή έχει βρεθεί στη λίστα (*false positive*).

Η δημιουργία των bloom filters και οι νέες δυνατότητες που αυτά προσέφεραν δε θα μπορούσαν να μην αξιοποιηθούν στην ανάπτυξη διαφόρων εφαρμογών. Μία από τις πρώτες χρήσεις τους έλαβε χώρα στη δημιουργία των πρώιμων αυτόματων ορθογραφικών ελεγκτών. Αυτό επιτεύχθηκε σε πρώτη φάση με την καταχώρηση όλων των λέξεων ενός λεξικού, μία προς μία, σε ένα bloom filter. Στη συνέχεια, κατά τον έλεγχο ενός ψηφιακού εγγράφου, το πρόγραμμα εξέταζε εάν η κάθε λέξη υπήρχε εντός των καταχωρήσεων. Στην περίπτωση που δινόταν θετική ένδειξη, η λέξη θα χαρακτηριζόταν σωστή, διαφορετικά θα ήταν λάθος. Αυτός ο τύπος ορθογραφικού ελέγχου παρόλα αυτά, δεν είναι απόλυτα σωστός, αφού υπάρχει περίπτωση μια λάθος λέξη να θεωρηθεί πως έχει καταχωρηθεί από το λεξικό. Πέραν αυτού όμως, η λειτουργία τους θεωρήθηκε ιδιαίτερα χρήσιμη, λόγω και του μικρού χώρου διαθέσιμης μνήμης της εποχής.

Μια άλλη εφαρμογή, πολύ χρήσιμη σε ιστοσελίδες που απαιτούν κωδικούς πρόσβασης, είναι η διατήρηση μιας λίστας από απαγορευμένους κωδικούς. Πολλοί κωδικοί είναι εύκολα προβλέψιμοι, κοινοί ή επίσης έχουν χρησιμοποιηθεί από προηγούμενους χρήστες. Ο έλεγχος γίνεται με τη βοήθεια ενός bloom filter. Ο χρήστης καταχωρεί τον επιθυμητό κωδικό και εάν αυτός εντοπιστεί στη λίστα με τους απαγορευμένους, τότε παρουσιάζεται μήνυμα που ζητά από τον χρήστη να συμπληρώσει έναν διαφορετικό κωδικό. Σε αυτές τις εφαρμογές δεν απασχολεί ιδιαίτερα η πιθανότητα σφάλματος, η οποία εξάλλου θα είναι της τάξης του 0.1%. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι σε μία περίπτωση στις 100 ή στις 1000 ο χρήστης θα εισαγάγει έναν κωδικό που κανονικά θα πρέπει να είναι αποδεκτός, αλλά θα λάβει λανθασμένα μήνυμα να τον αλλάξει. Σε σύγκριση όμως με την ταχύτατη λειτουργία που προσφέρεται, το μειονέκτημα αυτό έχει αμελητέα σημασία.

Η σημαντικότερη ίσως εφαρμογή των bloom filters, έχει να κάνει με λογισμικά που έχουν αναπτυχθεί για τους δρομολογητές δικτύου (*network routers*), δηλαδή τα συστήματα του διαδικτύου που είναι υπεύθυνα για τη μεταφορά πακέτων από το ένα μέρος στο άλλο. Αλλά γιατί η χρήση των bloom filters είναι τόσο ζωτικής σημασίας; Κατ’ αρχάς, υπάρχει ένας περιορισμός χώρου δεδομένων, τον οποίο, λόγω του μεγάλου πλήθους λειτουργιών που απαιτείται να διεξαχθούν, δεν πρέπει να σπαταλήσει κανείς σε τυχαίες δομές δεδομένων για μια συγκεκριμένη ενέργεια. Επιπλέον, ζητείται πολύ γρήγορη διακίνηση των δεδομένων, κάτι που γίνεται αντιληπτό αν ληφθεί υπ’ όψη η χειμαρρώδης ροή τους σε πραγματικό χρόνο. Η επεξεργασία των δεδομένων αυτών μπορεί να αφορά τον έλεγχο για απαγορευμένες διευθύνσεις πρωτοκόλλων διαδικτύου (*blocked IP addresses*), στατιστικές καταγραφές κ.λπ.

4.3.2.8.1 Η λειτουργία των bloom filters

Τα συστατικά που συνθέτουν τη δομή ενός bloom filter είναι δύο:

- Μια λίστα καταχωρήσεων

- Διαφορετικοί μηχανισμοί αντιστοίχισης (*hash functions*), των οποίων η λειτουργία έγκειται στην αντιστοίχιση ή μετατροπή δεδομένων τυχαίου μεγέθους σε δεδομένα συγκεκριμένου μεγέθους (π.χ. αντιστοίχιση λέξεων σε ακέραιους αριθμούς).

Η λίστα καταχωρήσεων δεν έχει οριστεί με συγκεκριμένο πλήθος θέσεων καταχώρησης, ενώ κάθε καταχώρηση αποτελείται από ένα πλήθος bits, καθένα από τα οποία μπορεί να πάρει 2 πιθανές τιμές: 0 ή 1. Ο χώρος που απαιτείται από το bloom filter εξαρτάται από το πλήθος των bits που χρησιμοποιούνται ανά καταχώρηση. Αν το πλήθος των συνολικών bits που δεσμεύονται είναι $\boldsymbol{n}$ και το πλήθος των καταχωρήσεων $\boldsymbol{s}$, τότε ανά καταχώρηση χρησιμοποιούνται $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{s}}$ bits.

Ας θεωρηθεί πως για κάθε καταχώρηση χρησιμοποιούνται 8 bits μνήμης. Όπως αναφέρθηκε, σε ένα bloom filter είναι απαραίτητο επίσης να υπάρχει ένα πλήθος από μηχανισμούς αντιστοίχισης. Αυτό το πλήθος συμβολίζεται με $\boldsymbol{k}$ και είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός με μικρή σχετικά τιμή (π.χ. $k = 5$).

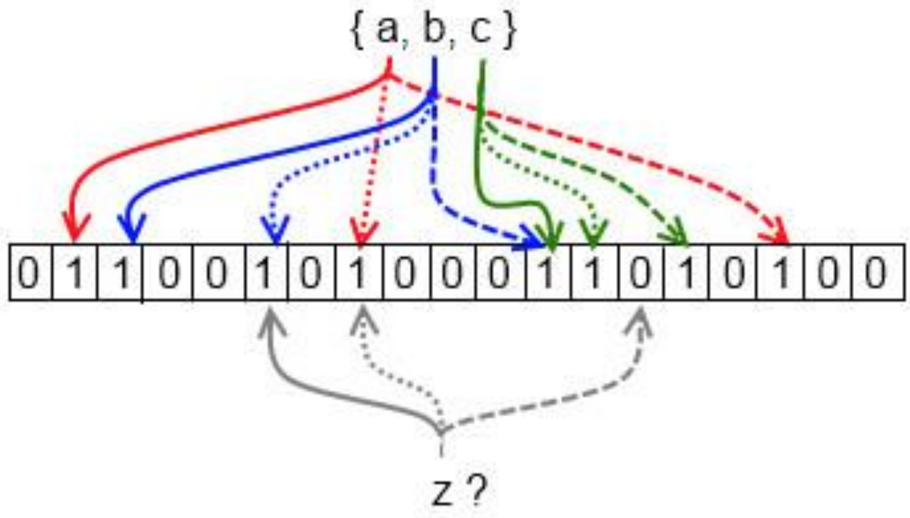
Εισαγωγή στοιχείου

Έστω ότι καταχωρείται μια διεύθυνση IP. Τότε, θα ενεργοποιηθεί καθένας από τους k μηχανισμούς αντιστοίχισης για τη συγκεκριμένη καταχώρηση. Κάθε ένας από αυτούς δηλώνει μια θέση στη σειρά από bits που συνθέτουν την καταχώρηση, η οποία θα πάρει την τιμή 1, ανεξαρτήτως του ποια τιμή είχε προηγουμένως.

Αναζήτηση στοιχείου

Σε αυτό το βήμα γίνεται έλεγχος για το «αποτύπωμα» της προηγούμενης εισαγωγής. Όταν γίνεται αναζήτηση, υπολογίζονται για το συγκεκριμένο αντικείμενο οι k μηχανισμοί αντιστοίχισης και ελέγχεται εάν στις k αυτές θέσεις που προκύπτουν, η τιμή είναι σε όλες 1.

Με βάση τα παραπάνω, είναι προφανές πως εάν κάτι έχει καταχωρηθεί, δεν υπάρχει περίπτωση το bloom filter να απαντήσει λανθασμένα κατά την αναζήτησή του, διότι θα βρει στις αντίστοιχες θέσεις την τιμή 1. Από την άλλη όμως, είναι απολύτως πιθανό να υπάρξει κάποιο «αντικείμενο-φάντασμα» το οποίο θα αναζητηθεί και το bloom filter θα θεωρήσει πως έχει συναντηθεί, ενώ αυτό δε θα έχει γίνει ποτέ.



Σχήμα 4.4: Απεικόνιση της λειτουργίας ενός Bloom Filter με 3 hash functions

Παράδειγμα:

Έστω $k = 3$, δηλαδή ότι υπάρχουν 3 μηχανισμοί αντιστοίχισης. Έστω τώρα πως γίνεται αναζήτηση μιας διεύθυνσης IP για την οποία οι μηχανισμοί αντιστοίχισης δηλώνουν πως τα σχετικά με αυτήν bits βρίσκονται στις θέσεις 17, 23 και 36. Μπορεί να μην έχει καταχωρηθεί η συγκεκριμένη διεύθυνση IP, αλλά μια για την οποία το 17^{ο} bit να τέθηκε 1, μία δεύτερη για την οποία το 23^{ο} bit να πήρε την τιμή 1 και μια τρίτη στην οποία άλλαξε το 36^{ο} bit σε 1. Επομένως, όταν γίνει αναζήτηση, θα ελεγχθούν οι 3 θέσεις αυτές και θα διαπιστωθεί πως έχουν όλες την τιμή 1, γεγονός που λανθασμένα θα οδηγήσει στο συμπέρασμα πως έχει γίνει καταχώρηση.

4.3.2.8.2 Μαθηματική ανάλυση των bloom filters

Για να έχει νόημα η λειτουργία των bloom filters θα πρέπει αρχικά να αποδειχθεί πως υπάρχει η δυνατότητα περιορισμού της πιθανότητας σφάλματος, δηλαδή πως όσος περισσότερος χώρος μνήμης διατίθεται, τόσο η πιθανότητα αυτή θα τείνει να εξαλειφθεί. Επίσης, βασικό ζητούμενο είναι και ο προσδιορισμός των κατάλληλων παραμέτρων, ώστε να βελτιστοποιηθεί η αποδοτικότητα του bloom filter, δηλαδή να επιτευχθεί μικρή χρήση της μνήμης με ταυτόχρονα αποδεκτό ποσοστό σφάλματος [11].

Γίνεται η εξής υπόθεση: όλοι οι μηχανισμοί αντιστοίχισης ενεργούν με εντελώς τυχαίο τρόπο. Αυτό σημαίνει πως οι θέσεις (στη σειρά από bits) που προσδιορίζονται από τους μηχανισμούς αντιστοίχισης, οι οποίοι ενεργούν σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή και είναι εντελώς ανεξάρτητες από τις άλλες καταχωρήσεις. Δεδομένης της χρήσης $\boldsymbol{n}$ bits και της εισαγωγής ενός συνόλου δεδομένων $\boldsymbol{S}$, πλήθους $\boldsymbol{s}$, είναι επιθυμητό να προσδιοριστεί η πιθανότητα σφάλματος.

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι, ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των τιμών «1» μετά την εισαγωγή όλων των αντικειμένων; Για να προσδιοριστεί αυτό, θα εξεταστεί μια συγκεκριμένη θέση της σειράς από bits και θα υπολογιστεί η πιθανότητα ώστε στη συγκεκριμένη θέση να υπάρχει η τιμή 1 μετά το πέρας των καταχωρήσεων.

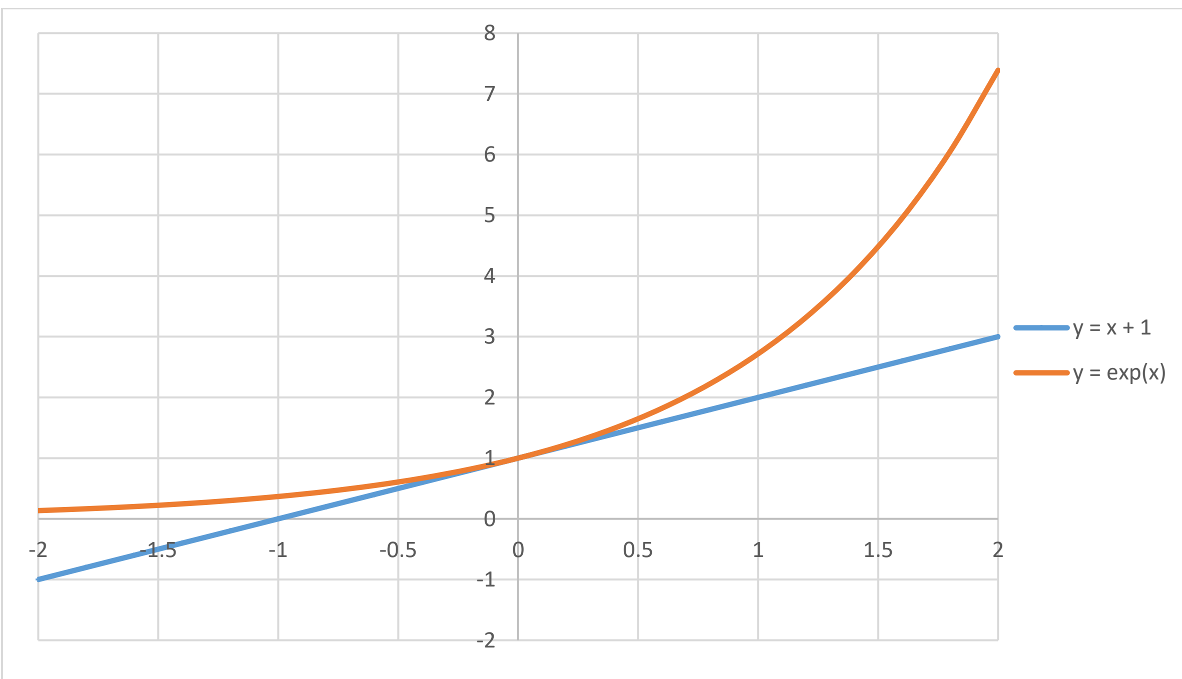
Αρχικά, θα προσδιοριστεί η πιθανότητα το συγκεκριμένο bit να έχει την τιμή 0 μετά τις καταχωρήσεις. Η πιθανότητα να πάρει την τιμή 1 με την δράση ενός μηχανισμού αντιστοίχισης είναι μόλις $\frac{1}{n}$, άρα η πιθανότητα να μείνει 0 είναι $\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Επομένως, για k μηχανισμούς αντιστοίχισης και s πλήθος αντικειμένων, η πιθανότητα γίνεται: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k\cdot s}$ και τελικά η πιθανότητα για κάθε bit να έχει τεθεί «1» μετά από όλες τις καταχωρήσεις θα είναι: $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k\cdot s}$.

Παρατηρώντας το Σχήμα 4.5, είναι φανερό πως η συνάρτηση $y_1 = 1 + x$ είναι άνω φραγμένη από την $y_2 = e^x$, αφού $e^x \geq 1 + x, \ \forall x \in R$, ενώ για $x \longrightarrow 0 \Rightarrow e^x \simeq 1 + x$. Συνεπώς, για την παραπάνω πιθανότητα αντίστοιχα θα ισχύει:

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k\cdot s} \simeq 1- e^{-\frac{k\cdot s}{n}}$$

και επειδή $b = \frac{n}{s}$, όπου b τα bits ανά αντικείμενο, τελικά η πιθανότητα διαμορφώνεται ως:

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k\cdot s} \simeq 1- e^{-\frac{k}{b}}$$



Σχήμα 4.5: Οι συναρτήσεις $y_1 = 1 + x$ και $y_2 = e^x$

Από τη σχέση αυτή είναι πλέον φανερό πως όσο μεγαλώνει το πλήθος των bits ανά αντικείμενο, η πιθανότητα ενός συγκεκριμένου bit να γίνει «1» τείνει στο μηδέν.

Τώρα, για παράδειγμα εξετάζεται ένα αντικείμενο $X \notin S$. Για να γίνει λάθος, πρέπει όλα τα k bits στις αντίστοιχες θέσεις να έχουν την τιμή 1. Η πιθανότητα αυτή λοιπόν, είναι:

$$\varepsilon \simeq \left[1 - e^{-\frac{k}{b}}\right]^k$$

Στο σημείο αυτό, επανέρχεται το ερώτημα: μπορούν να προσδιοριστούν παράμετροι τέτοιες ώστε χρησιμοποιώντας μικρό χώρο της μνήμης να προκύπτει ένα ανεκτά μικρό σφάλμα;

Πρώτα πρέπει να αποφασιστεί το πλήθος των bits ανά αντικείμενο, δηλαδή το b. Για δεδομένο b, το σφάλμα ε προκύπτει ότι ελαχιστοποιείται για τιμή του $k \simeq ln2 \cdot b$. Το k πρέπει να είναι ακέραιος, άρα εξάγεται μετά από στρογγυλοποίηση του παραπάνω αριθμού. Έτσι προκύπτει:

$$\varepsilon \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^{ln2 \cdot b}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να εκφραστεί ως προς το b, οπότε για δεδομένο σφάλμα να υπολογίζονται να bits ανά καταχώρηση:

$$b \simeq 1.44 \cdot log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Για 8 bits ανά καταχώριση υπολογίζεται:

$$k \simeq ln2 \cdot 8 \simeq 5.54 \Rightarrow k = 5$$

Οπότε προκύπτει:

$$\varepsilon \simeq 2\%$$

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι, αν διπλασιαστούν τα bits ανά καταχώρηση σε 16, τότε η πιθανότητα αυτή γίνεται περίπου $\varepsilon \simeq 0.4‰$!

Από τα παραπάνω, φάνηκε πόσο μεγάλη είναι η χρησιμότητα των bloom filters τόσο σε πολύπλοκες εφαρμογές, όσο και σε μία απλή χρήση όπως είναι αυτή που ο βελτιωμένος πλέον αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης καλείται να κάνει. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, παρατίθενται ορισμένες παρατηρήσεις:

- Όπως αναφέρθηκε, σε ένα bloom filter γίνεται καταχώρηση τιμών και όχι αντικειμένων. Όμως, κάθε υποψήφια λύση είναι επί της ουσίας μια λίστα, δηλαδή ένα αντικείμενο, που περιλαμβάνει αύξοντες αριθμούς των διαφόρων ομάδων μελών. Δεδομένου αυτού, πώς θα γίνει καταχώρηση και αναζήτηση των λύσεων; Την υλοποίηση των διαδικασιών αυτών επιτρέπει ο αύξων αριθμός λύσης, ο προσδιορισμός του οποίου αναλύθηκε στην παράγραφο 4.2. Συνεπώς, στο bloom filter θα καταχωρείται ο αύξων αριθμός της λύσης, ο οποίος είναι μοναδικός για κάθε λύση και με βάση αυτόν ξανά θα γίνεται αναζήτηση στις καταχωρήσεις.

- Η πιθανότητα σφάλματος (η οποία ούτως ή άλλως είναι ελάχιστη) δεν προβληματίζει, καθώς είναι απίθανο να προκαλέσει κάποιο καθοριστικό λάθος. Συγκεκριμένα, το bloom filter κατά την αναζήτηση μιας λύσης, μπορεί λανθασμένα να θεωρήσει πως αυτή ήδη υπάρχει στη λίστα του και συνεπακόλουθα δε θα αναλυθεί περαιτέρω. Θα είναι τρομερά ατυχές αυτή η (σπανίως) κακώς απορριφθείσα περίπτωση να είναι η βέλτιστη.
- Τα αποτελέσματα της χρήσης του bloom filter στα προβλήματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, επιβεβαιώνουν απόλυτα την ταχύτητα και την εν γένει χρησιμότητά του. Συγκεκριμένα, με τη χρήση του, αποτρέπεται η ανάλυση του $20-40\%$ των συνολικών λύσεων που εξετάζονταν αρχικά, επιτυγχάνοντας αντίστοιχη μείωση του υπολογιστικού χρόνου.

5 Επιλύσεις προβλημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό γίνονται αριθμητικές εφαρμογές της μεθοδολογίας και των τεχνικών που αναλύθηκαν. Αυτές αφορούν προβλήματα ελαχιστοποίησης βάρους με ελαστική και πλαστική ανάλυση, βελτιστοποίησης τοπολογίας και ελαχιστοποίησης μετακίνησης με οικονομικό περιορισμό.

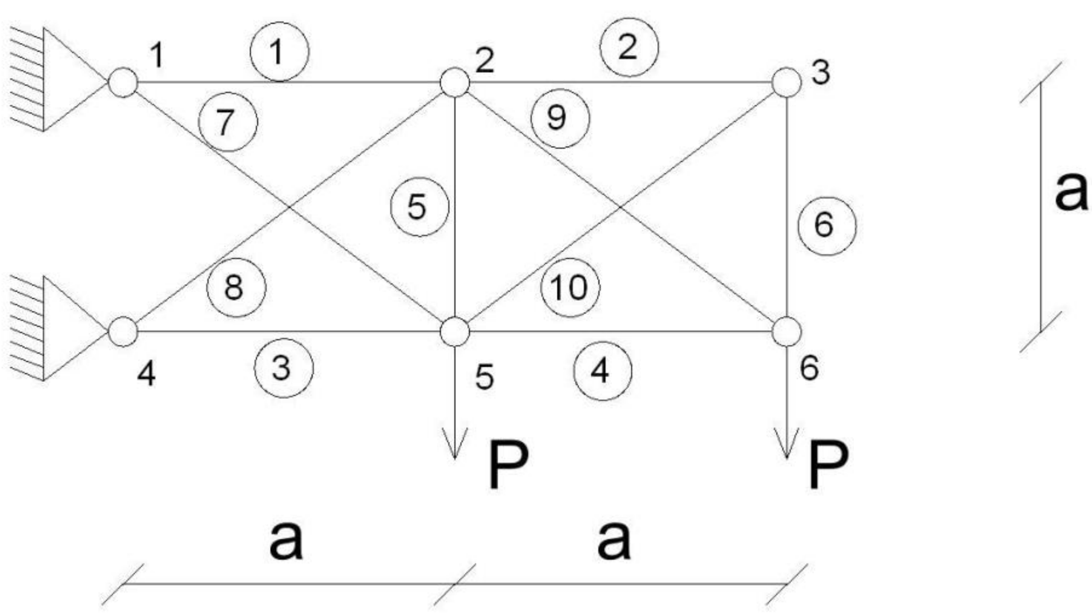
Για την επίλυση των παρακάτω προβλημάτων συντάχθηκε κώδικας σε γλώσσα Java. Στο πλαίσιο της δόμησης ενός προγράμματος που εκτελεί μια ολοκληρωμένη διαδικασία βελτιστοποίησης, κατασκευάστηκαν ρουτίνες εκτέλεσης στατικών αναλύσεων με τη μέθοδο της άμεσης δυσκαμψίας, οριακής ανάλυσης με τη μέθοδο βήμα προς βήμα, υπολογισμού ελάχιστης ωφέλειας για τον κάθε τύπο προβλήματος, καθώς και ρουτίνες για καθέναν ευρετικό αλγόριθμο από αυτούς που αναπτύχθηκαν.

5.1 Πρόβλημα 1 (πρόβλημα τοπολογίας)

Για το δικτύωμα του σχήματος ζητείται η βέλτιστη τοπολογία, από πλευράς οικονομικότητας σχεδιασμού. Κάθε μέλος σχεδιάζεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα (κάθε ομάδα μελών απαρτίζεται μόνο από το αντίστοιχο μέλος), ενώ η φόρτιση του δικτυώματος είναι αποκλειστικά αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Περιορισμοί:

- Δεν επιτρέπεται να διαρρεύσει κανένα μέλος.
- Μέγιστη επιτρεπόμενη μετακίνηση: $2in$ $(5.08cm)$.



Σχήμα 5.1: Δικτυωτός φορέας

Η τάση διαρροής είναι $f_y = 25000psi$ (172,25MPa) και το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 10^7\ psi\ (68.948GPa)$. Το ειδικό βάρος του υλικού είναι $\gamma = 0.1lb/in^3 (27.1447kN/m^3)$.

Δίνονται:

$\alpha = 360in\ (9.144m), P = 100kips\ (444.82kN).$

Ο Πίνακας 5.1 παρουσιάζει το σύνολο των διατομών που επιτρέπεται να πάρει κάθε μέλος. Επιπλέον, υπάρχει η δυνατότητα διαγραφής μελών (εμβαδόν διατομής 0.00).

α/α	A (in^2)	A (cm^2)
0	0.00	0.00
1	1.62	10.45
2	1.80	11.61
3	1.99	12.84
4	2.13	13.74
5	2.38	15.35
6	2.62	16.90
7	2.63	16.97
8	2.88	18.58
9	2.93	18.90
10	3.09	19.94
11	3.13	20.19
12	3.38	21.81
13	3.47	22.39
14	3.55	22.90
15	3.63	23.42
16	3.84	24.77
17	3.87	24.97
18	3.88	25.03
19	4.18	26.97
20	4.22	27.23
21	4.49	28.97
22	4.59	29.61
23	4.80	30.97
24	4.97	32.06
25	5.12	33.03
26	5.74	37.03
27	7.22	46.58
28	7.97	51.42
29	11.50	74.19
30	13.50	87.10
31	13.90	89.68
32	14.20	91.61
33	15.50	100.00
34	16.00	103.23
35	16.90	109.03
36	18.80	121.29

37	19.90	128.39
38	22.00	141.94
39	22.90	147.74
40	26.50	170.97
41	30.00	193.55
42	33.50	216.13

Πίνακας 5.1: Διαθέσιμες διατομές. American Institute of Steel Construction Manual (Arora 1989) [12]

Επίλυση:

Το πρόβλημα υπάγεται στα προβλήματα τοπολογίας, επομένως προστίθεται στη Master List ως πρώτη επιλογή διατομής η μηδενική, ώστε πρακτικά να μπορούν να αγνοηθούν κάποια μέλη. Όταν αυτή επιλέγεται, τότε το αντίστοιχο μέλος αμελείται κατά τη στατική επίλυση. Όταν όλα τα μέλη που συντρέχουν σε έναν κόμβο αμελούνται, τότε ο κόμβος διαγράφεται.

Σε αυτό το πρώτο παράδειγμα, θα παρατεθούν ορισμένα στοιχεία που αφορούν τις μεταβλητές της μεθόδου, ώστε να επαληθευτεί η φιλοσοφία του υπολογισμού τους. Έτσι, ο Πίνακας 5.2 και ο Πίνακας 5.3 παρουσιάζουν τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $w_{d,i}$ και $w_{\sigma,i}$ που αφορούν κάθε βαθμό ελευθερίας και κάθε τάση αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες οριακές τιμές που επιτρέπεται να πάρουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και τάσεις. Ο Πίνακας 5.4 δίνει τις τιμές των υπόλοιπων συντελεστών βαρύτητας, όπως αυτοί περιγράφονται στην ενότητα 3.4.1.1, ενώ ο Πίνακας 5.5 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις τιμές των παραμέτρων που αφορούν σε συναρτήσεις ωφέλειας μετακινήσεων, τάσεων και σχεδιασμού.

Β. Ελευθερίας	Συντ. Βαρύτητας ($w_{d,i}$)	d_{lim}(in)
1	1/12	2
2	1/12	2
3	1/12	2
4	1/12	2
5	1/12	2
6	1/12	2
7	1/12	2
8	1/12	2
9	1/12	2
10	1/12	2
11	1/12	2
12	1/12	2

Πίνακας 5.2: Συντελεστές Βαρύτητας και οριακές τιμές βαθμών ελευθερίας

Ομάδα Μελών	Συντ. Βαρύτητας ($w_{\sigma,i}$)	σ_{lim}(psi)
1	1/10	25000
2	1/10	25000
3	1/10	25000
4	1/10	25000

5	1/10	25000
6	1/10	25000
7	1/10	25000
8	1/10	25000
9	1/10	25000
10	1/10	25000

Πίνακας 5.3: Συντελεστής Βαρύτητας και οριακές τιμές Τάσεων για κάθε ομάδα μελών

w_d	w_σ	w_{res}	w_{des}
1/2	1/2	1/2	1/2

Πίνακας 5.4: Συντελεστές Βαρύτητας Μετακινήσεων, Τάσεων, Σχεδιασμού και Αποτελεσμάτων

a_{di}^{+}	-19.68	$a_{\sigma i}^{+}$	-5.80E-06	**budget**	∞
a_{di}^{-}	-19.68	$a_{\sigma i}^{-}$	-5.80E-06	p_{budjet}	0
p_d	-468616.54	p_σ	-390513.62	a_{cost}	-16951.04
k	1	**k**	1		

Πίνακας 5.5: Παράμετροι υπολογισμού ωφέλειας μετακινήσεων, τάσεων, σχεδιασμού

Το μέγεθος του προβλήματος είναι τεράστιο (43^{10}) και αποτελεί μια καλή ευκαιρία για να γίνει σύγκριση πολλών από τις τεχνικές που έχουν περιγραφεί. Θεωρητικά, το πλεονέκτημα έχει η προσομοιωμένη ανόπτηση, η οποία είναι γνωστή για την ευχέρεια πολύ καλής προσέγγισης του παγκόσμιου βέλτιστου σε μεγάλα προβλήματα. Μένει να διαπιστωθεί το εάν και οι υπόλοιπες τεχνικές αποδίδουν καλά σε αυτό το επίπεδο.

Επίλυση με τον αλγόριθμο προσομοιωμένης ανόπτησης

Ορίζονται 1000 διαφορετικές θερμοκρασίες και 500 κύκλοι δοκιμών για κάθε θερμοκρασία. Απαιτήθηκαν συνολικά 1 λεπτό και 34 δευτερόλεπτα για το τέλος της διαδικασίας και ο αλγόριθμος κατέληξε στην καλύτερη λύση. Επομένως, ο αλγόριθμος με 500000 στατικές αναλύσεις, εξετάζοντας δηλαδή μόλις το $2.3 * 10^{-9}\%$ του συνολικού χώρου λύσεων, έχει βρει το παγκόσμιο βέλτιστο [12], [1]!

Επίλυση με τον αλγόριθμο σταδιακής απομείωσης (χωρίς bloom filter)

Εδώ ο αλγόριθμος χρησιμοποιείται στην αρχική του μορφή, χωρίς την συνδρομή καμιάς από τις τεχνικές που αναφέρθηκαν και χωρίς τη βελτίωση που προσφέρει η χρήση του bloom filter. Ως γνωστόν, η διαδικασία θα ξεκινήσει από τη βαρύτερη δυνατή λύση με επαναλήψεις γειτονιάς $(1,1)$. Είναι χαρακτηριστικό ότι παρόλο που εξετάστηκαν συνολικά 2441716 λύσεις, δηλαδή περισσότερες από όσες εξέτασε η προσομοιωμένη ανόπτηση, εν τούτοις, μόνον οι 831163 από αυτές προχώρησαν σε στατική ανάλυση και υπολογισμό της ωφέλειάς τους, καθώς οι υπόλοιπες απορρίφθηκαν κατά τον έλεγχο του κόστους. Η όλη διαδικασία διήρκεσε 4 λεπτά, ενώ κατέληξε σε αποτέλεσμα ελαφρώς χειρότερο ($-7707.37\ utils$).

Επίλυση με τον αλγόριθμο σταδιακής απομείωσης (με χρήση bloom filter)

Η επίλυση αυτή δεν αναμένεται να οδηγήσει σε διαφορετικό αποτέλεσμα από την προηγούμενη, καθώς η διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια, αλλά γίνεται με σκοπό να διαπιστωθεί η ευεργετική δράση του bloom filter. Πλέον, εκτός από τις λύσεις που απορρίπτονται λόγω του ελέγχου του κόστους τους, «διυλίζονται» επιπλέον και όσες λύσεις έχουν εξεταστεί στο παρελθόν. Με αυτόν τον τρόπο, οι στατικές αναλύσεις που έλαβαν χώρα έφτασαν στον αριθμό 601205, μειωμένες κατά 27.6% σε σχέση με πριν, επιτυγχάνοντας παράλληλα χρόνο ανάλυσης ίσο με 2 λεπτά και 40 δευτερόλεπτα, ελαττωμένο δηλαδή κατά 33%.

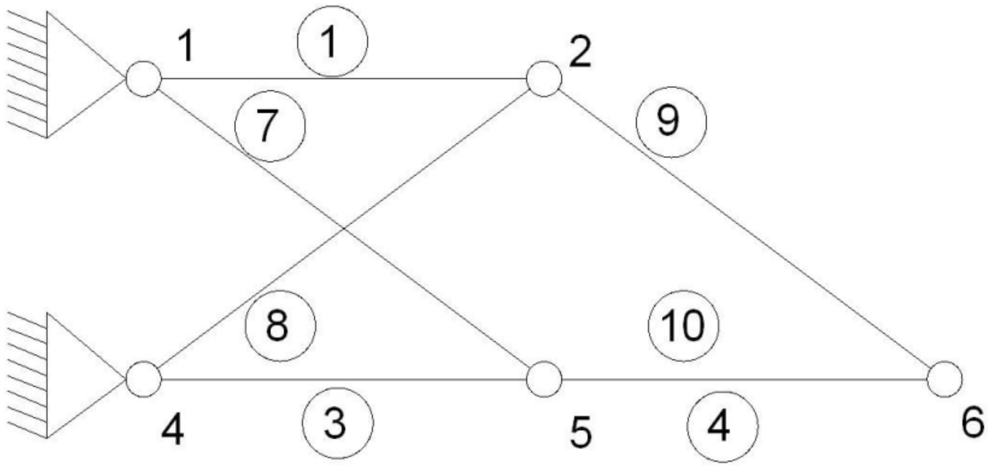
Σημειώνεται πως στο εξής όλες οι επιλύσεις με τον αλγόριθμο σταδιακής απομείωσης θα γίνονται με την ενσωμάτωση του bloom filter στη διαδικασία.

Χρήση της τεχνικής «Εξερεύνηση Μεγάλου Βήματος»

Για την εκκίνηση της διαδικασίας, ορίστηκε βήμα αρχικής αναζήτησης ίσο με 10. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται μια ευρεία αναζήτηση μέσα στον αχανή χώρο λύσεων, η οποία δίνει μια σύγκλιση ικανή να οδηγήσει την κλασική αλγοριθμική διαδικασία της σταδιακής απομείωσης σε καλύτερη λύση. Πραγματικά, η λύση στην οποία κατέληξε ο αλγόριθμος ($-6896.92\ utils$), είναι ελάχιστα χειρότερη της ολικά βέλτιστης, ενώ συμφωνεί απόλυτα με αυτήν ως προς την τοπολογία του αποτελέσματος, διαγράφοντας τα ίδια μέλη. Σημειώνεται επίσης πως αναζητήθηκαν ακόμη λιγότερες λύσεις (821906), εκ των οποίων οι 599579 επιλύθηκαν στατικά, ενώ ο χρόνος επίλυσης περιορίστηκε στα 2 λεπτά και 26 δευτερόλεπτα. Δηλαδή, δόθηκε σωστότερη ακόμα λύση σε συντομότερο χρόνο.

Χρήση της τεχνικής «Αρχικοποίηση βάσει Ποσοστού Απομείωσης»

Στην περίπτωση αυτή, ορίζεται μετά το πέρας της πρώτης αναζήτησης του αλγορίθμου σταδιακής απομείωσης, να χρησιμοποιηθούν επιπλέον 5 αναζητήσεις με την τεχνική «Αρχικοποίηση βάσει Ποσοστού Απομείωσης». Η καλύτερη αναζήτηση όλων θα αποτελέσει και τη λύση του προβλήματος. Ο αλγόριθμος καταλήγει στο ολικό βέλτιστο του τεράστιου αυτού προβλήματος σε 3 λεπτά και 44 δευτερόλεπτα, έχοντας εξετάσει περίπου το $2 \cdot 10^{-8}\%$ του χώρου λύσεων.



Σχήμα 5.2: Βέλτιστη τοπολογία του δικτυώματος

Τα στοιχεία όλων των αναλύσεων συγκεντρώνονται συνοπτικά στον Πίνακα 5.6.

Ομάδα	α/α Διατομής [12], [1]	α/α Διατομής [Π. Ανόπτηση]	α/α Διατομής [Στ. Απομ.]	α/α Διατομής [Στ. Απομ. + Bloom Filter]	α/α Διατομής [Στ. Απομ. + τεχνική Α.Π.Α.]	α/α Διατομής [Στ. Απομ. + τεχνική Α.Μ.Β.]
1	**41**	**41**	**41**	**41**	**41**	**41**
2	**0**	**0**	**15**	**15**	**0**	**0**
3	**37**	**37**	**39**	**39**	**37**	**38**
4	**33**	**33**	**32**	**32**	**33**	**30**
5	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**11**	**11**	**0**	**0**
7	**27**	**27**	**32**	**32**	**27**	**27**
8	**38**	**38**	**37**	**37**	**38**	**38**
9	**38**	**38**	**36**	**36**	**38**	**38**
10	**0**	**0**	**17**	**17**	**0**	**0**
Όγκος (m^3)	0.8131	0.8131	0.9094	0.9094	0.8131	0.8137
Utility (utils)	-	-6891.92	-7707.37	-7707.37	-6891.92	-6896.92
Αναζητήσεις	-	500000	2441716	1911286	3348348	821906
Στ.αναλύσεις	-	500000	831163	601205	815496	599579
Χρόνος (sec)	-	94	240	160	224	146

Πίνακας 5.6: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων

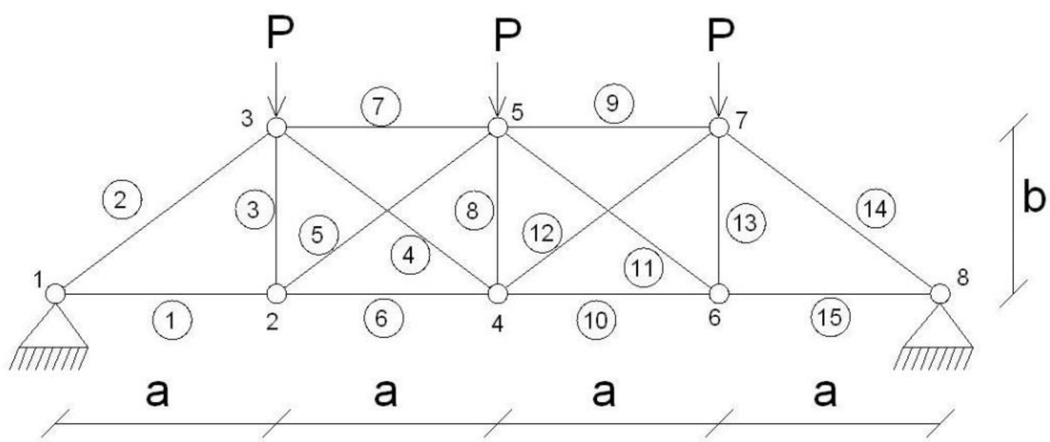
5.2 Πρόβλημα 2 (πρόβλημα τοπολογίας)

Για το δικτύωμα του σχήματος ζητείται η βέλτιστη τοπολογία, από πλευράς οικονομικότητας σχεδιασμού. Η φόρτιση του δικτυώματος είναι αποκλειστικά αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο Πίνακας 5.7 παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο είναι οργανωμένες οι ομάδες μελών, ούτως ώστε να σχεδιαστεί συμμετρικά ο φορέας. Οι διατομές των μελών θα επιλεγούν από το σύνολο $\{0.1, 0.2, \ldots 1.6\}(in^2)$, το οποίο περιέχει 16 ισαπέχοντα στοιχεία.

Περιορισμοί:

- Δεν επιτρέπεται να διαρρεύσει κανένα μέλος.
- Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στις μετακινήσεις.



Σχήμα 5.3: Δικτυωτός φορέας

Η τάση διαρροής είναι $f_y = 345MPa$ και το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 207GPa$.

Δίνονται: $a = 1.016m, b = 0.762m, P = 89kN$.

α/α	A (in^2)	A (cm^2)
0	0.00	0.00
1	0.10	0.65
2	0.20	1.29
3	0.30	1.94
4	0.40	2.58
5	0.50	3.23
6	0.60	3.87
7	0.70	4.52
8	0.80	5.16
9	0.90	5.81
10	1.00	6.45
11	1.10	7.10
12	1.20	7.74
13	1.30	8.39

14	1.40	9.03
15	1.50	9.68
16	1.60	10.32

Πίνακας 5.7: Διαθέσιμες διατομές

Ομάδα μελών	Μέλη
1	1,15
2	2,14
3	3,13
4	4,12
5	5,11
6	6,10
7	7,9
8	8

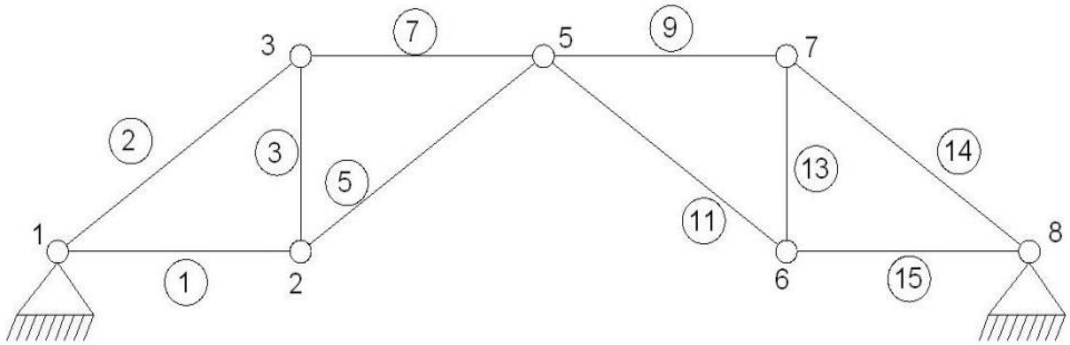
Πίνακας 5.8: Ομάδες μελών

Για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης με την απλή του μορφή αλλά και με τη χρήση της τεχνικής «Εξερεύνηση Μεγάλου Βήματος» και ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης. Ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης θα οριστεί να εκτελέσει 500 κύκλους δοκιμών για καθεμιά από 500 διαφορετικές θερμοκρασίες. Στη συνέχεια θα συγκριθούν τα αποτελέσματά τους.

Ο Πίνακας 5.9 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων των τριών διαδικασιών, καθώς και τη λύση της βιβλιογραφίας [1], [13], [14], [15]. Και οι 3 επιλύσεις συμφωνούν ως προς το αποτέλεσμα το οποίο είναι το βέλτιστο. Η βέλτιστη τοπολογία φαίνεται στο Σχήμα 5.4 .

Ομάδα	α/α Διατομής [1]	α/α Διατομής [Π. Ανόπτηση]	α/α Διατομής [Στ. Απομ.]	α/α Διατομής [Στ. Απομ. + Ε.Μ.Β.]
1	3	3	3	3
2	10	10	10	10
3	2	2	2	2
4	0	0	0	0
5	4	4	4	4
6	0	0	0	0
7	8	8	8	8
8	0	0	0	0
Όγκος (m^3)	3932.89	3932.89	3932.89	3932.89
Utility (utils)	-	-40.31	-40.31	-40.31
Αναζητήσεις	-	250000	94882	16544
Στ.αναλύσεις	-	250000	8506	3798
Χρόνος (sec)	-	109	6	2

Πίνακας 5.9: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων



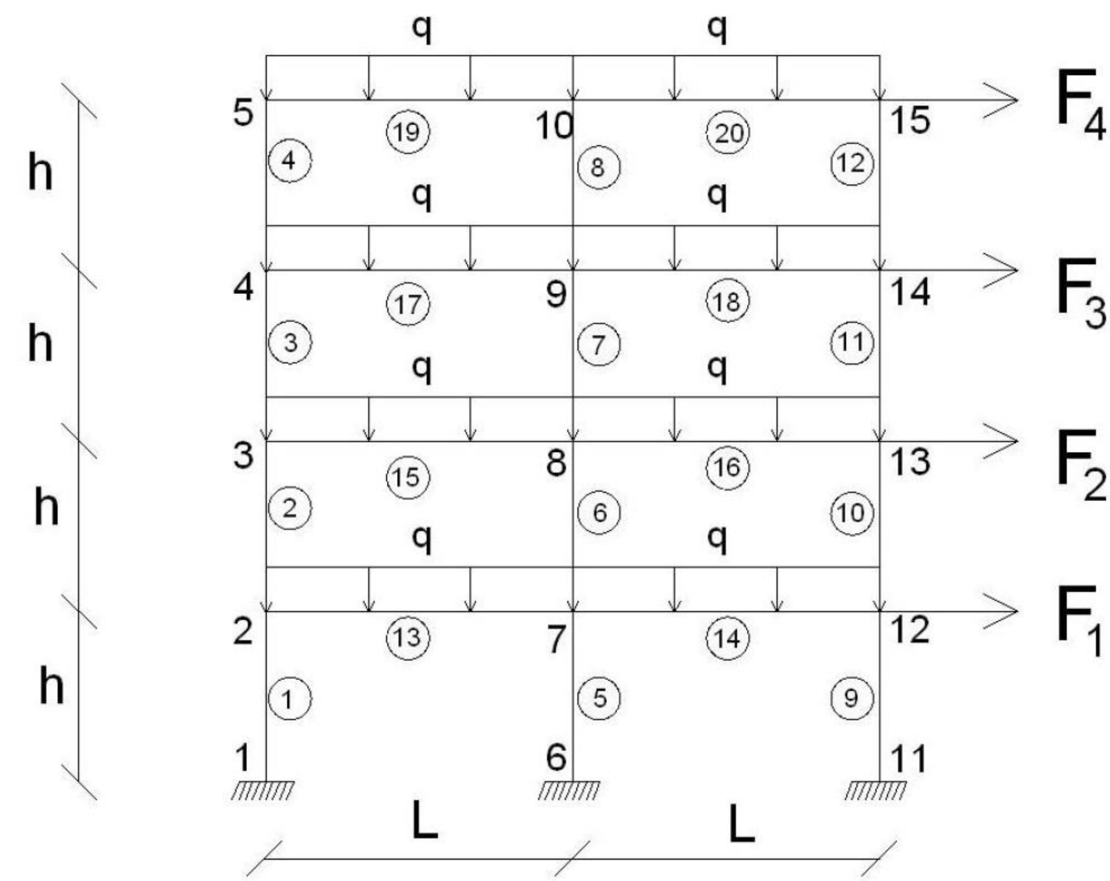
Σχήμα 5.4: Βέλτιστη τοπολογία του δικτυώματος

5.3 Πρόβλημα 3 (ελαχιστοποίηση μετακίνησης)

Για το τετραώροφο πλαίσιο δύο ανοιγμάτων του Σχήματος 5.5 ζητούνται τα εξής:

Α) Ο οικονομικότερος δυνατός σχεδιασμός (ελαχιστοποίηση βάρους). Μοναδικός περιορισμός είναι να μην ξεπεραστεί το όριο διαρροής για κανένα μέλος (χάλυβας S355).

Β) Ελαχιστοποίηση της οριζόντιας μετακίνησης του κόμβου 15, με μέγιστη χρηματική δαπάνη 19000€.



Σχήμα 5.5: Τετραώροφος πλαισιακός φορέας

Περιπτώσεις φόρτισης:

Το κατανεμημένο φορτίο ανά όροφο θεωρείται σταθερό στα $50kN/m$. Μεταβάλλοντας τα συγκεντρωμένα φορτία δημιουργούνται οι τρεις ακόλουθες περιπτώσεις φόρτισης (*Πίνακας 5.10*).

Φορτίο	1η περίπτωση	2η περίπτωση	3η περίπτωση
F_1 [kN]	250	100	450
F_2 [kN]	250	200	350
F_3 [kN]	250	300	250
F_4 [kN]	250	400	150

Πίνακας 5.10: Περιπτώσεις φόρτισης

Ομάδες Μελών:

Κάθε υποστύλωμα (από πάνω έως κάτω) και κάθε όροφος αποτελεί ανεξάρτητη ομάδα μελών (*Πίνακας 5.11*)

Ομάδα μελών	Μέλη	Διατομές
1	1,2,3,4	HEA
2	5,6,7,8	HEA
3	9,10,11,12	HEA
4	13,14	IPE
5	15,16	IPE
6	17,18	IPE
7	19,20	IPE

Πίνακας 5.11: Ομάδες μελών

Ο χάλυβας είναι $S355$ και το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 210\text{GPa}$. Το ειδικό βάρος του δομικού χάλυβα είναι $7850kg/m^3$, ενώ το κόστος του είναι $1.30€/kg$.

Επίσης, δίνεται ότι: $h = 3m, L = 8m$.

A) Ελαχιστοποίηση Βάρους

Το πρόβλημα αυτό θα επιλυθεί με παρόμοιο τρόπο με τα προηγούμενα δύο. Αρχικά, θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης στην απλή του μορφή, στη συνέχεια θα γίνουν επιλύσεις με την προσθήκη των τεχνικών «Αρχικοποίηση βάσει Ποσοστού Εκμετάλλευσης», «Αρχικοποίηση βάσει Ποσοστού Απομείωσης» και «Εξερεύνηση Μεγάλου Βήματος» και τέλος θα γίνει χρήση του αλγορίθμου προσομοιωμένης ανόπτησης με 200 κύκλους επαναλήψεων για 500 θερμοκρασίες. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.13.

B) Ελαχιστοποίηση Μετακίνησης

Αν και η φύση του προβλήματος αλλάζει εντελώς, η αντιμετώπισή του από τη ΜΜΕΩ παραμένει εντελώς ίδια. Η διαδικασία θα εξελιχθεί με ακριβώς την ίδια λογική, με μόνη διαφορά τις τιμές των παραμέτρων. Στο κεφάλαιο 3.4.1.3 έγινε εκτενής παρουσίαση της φιλοσοφίας υπολογισμού των παραμέτρων για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μετακίνησης. Για να γίνει αισθητή η διαφοροποίηση στις τιμές των παραμέτρων, αυτές παρατίθενται ξεχωριστά για τα 2 προβλήματα στον Πίνακα 5.12 .

Πρόβλημα Α		a_{di}^{+}	-19.68	$a_{\sigma i}^{+}$	$-2.82\ 10^{-6}$
budget	∞	a_{di}^{-}	-19.68	$a_{\sigma i}^{-}$	$-2.82\ 10^{-6}$
p_{budjet}	0	p_d	-	p_σ	-84607.8
a_{cost}	-0.16	k	1	k	1
Πρόβλημα Β		a_{di}^{+}	-100000	$a_{\sigma i}^{+}$	$-2.82\ 10^{-6}$
budget	19000	a_{di}^{-}	-100000	$a_{\sigma i}^{-}$	$-2.82\ 10^{-6}$
p_{budjet}	-10000000	p_d	-	p_σ	-46.26
a_{cost}	$-5.26\ 10^{-5}$	k	1	k	1

Πίνακας 5.12: Παράμετροι υπολογισμού ωφέλειας μετακινήσεων, τάσεων και κόστους των (Α) και (Β)

Το πρόβλημα θα επιλυθεί με χρήση του αλγορίθμου σταδιακής απομείωσης στην απλή του μορφή, αλλά και με την προσθήκη των τεχνικών «Αρχικοποίηση βάσει Ποσοστού Απομείωσης» και «Εξερεύνηση Μεγάλου Βήματος», ενώ θα γίνει επίλυση και με τον αλγόριθμο προσομοιωμένης ανόπτησης με 200 κύκλους επαναλήψεων για 500 θερμοκρασίες. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.14.

Ομάδα	[1]	Στ. Απομ.	Στ. Απομ. + τεχνική Α.Π.Ε.	Στ. Απομ. + τεχνική Α.Π.Α.	Στ. Απομ. + τεχνική Ε.Μ.Β.	Π. Ανόπτηση
1	**HEA 100**	**HEA 320**	**HEA 100**	**HEA 160**	**HEA 100**	**HEA 160**
2	**HEA 900**	**HEA 500**	**HEA 650**	**HEA 800**	**HEA 650**	**HEA 800**
3	**HEA 320**	**HEA 650**	**HEA 650**	**HEA 500**	**HEA 650**	**HEA 500**
4	**IPE 600**	**IPE 550**	**IPE 550**	**IPE 500**	**IPE 550**	**IPE 500**
5	**IPE 500**	**IPE 550**	**IPE 600**	**IPE 550**	**IPE 600**	**IPE 550**
6	**IPE 750x147**	**IPE 500**	**IPE 500**	**IPE 500**	**IPE 500**	**IPE 500**
7	**IPE 450**	**IPE 450**	**IPE 450**	**IPE 450**	**IPE 450**	**IPE 450**
Κόστος (€)	14816	14599	14049	13909	14049	13909
Utility (utils)	-	-1192.45	-1147.61	-1136.17	-1147.61	-1136.17
Αναζητήσεις	-	18683	72488	114868	8393	100000
Στ.αναλύσεις	-	5280	22227	36696	3982	100000
Χρόνος (sec)	-	12	46	66	10	177

Πίνακας 5.13: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων (Α)

Ομάδα	[1]	Στ. Απομ.	Στ. Απομ. + τεχνική Α.Π.Α.	Στ. Απομ. + τεχνική Ε.Μ.Β.	Π. Ανόπτηση
1	**HEA 100**	**HEA 280**	**HEA 100**	**HEA 160**	**HEA 100**
2	**HEA 1000**	**HEA 1000**	**HEA 1000**	**HEA 1000**	**HEA 900**
3	**HEA 1000**	**HEA 600**	**HEA 1000**	**HEA 800**	**HEA 900**
4	**IPE 450**	**IPE 750x147**	**IPE 450**	**IPE 750x147**	**IPE 750x147**
5	**IPE 750x173**	**IPE 750x147**	**IPE 750x173**	**IPE 750x147**	**IPE 750x147**
6	**IPE 750x147**	**IPE 750x147**	**IPE 750x147**	**IPE 750x147**	**IPE 750x147**
7	**IPE 500**	**IPE 450**	**IPE 500**	**IPE 450**	**IPE 450**
U_{43} (cm)	2.57	2.78	2.57	2.63	2.60
Κόστος (€)	18923	18985	18923	18922	18738
Utility (utils)	-	-695.64	-642.12	-657.12	-652.25
Αναζητήσεις	-	17043	47363	11078	100000
Στ.αναλύσεις	-	7816	27256	4879	100000
Χρόνος (sec)	-	16	42	16	1765

Πίνακας 5.14: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων (Β)

Η επίλυση του πρώτου προβλήματος καταλήγει με όλες τις μεθόδους σε καλύτερη λύση από αυτή που αναφέρεται στη βιβλιογραφία [1]. Καλύτερη όλων, είναι η λύση της προσομοιωμένης ανόπτησης, η οποία διαφέρει ελάχιστα από τα αποτελέσματα των υπόλοιπων μεθόδων.

Στο δεύτερο πρόβλημα, η καλύτερη λύση προκύπτει από τον αλγόριθμο σταδιακής απομείωσης, ενισχυμένο με την τεχνική «Αρχικοποίηση βάσει Ποσοστού Απομείωσης» και ταυτίζεται με αυτήν της βιβλιογραφίας [1]. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, οι διαφορές της ζητούμενης μετακίνησης στην βέλτιστη λύση από τα αποτελέσματα των άλλων μεθόδων, είναι της τάξης του χιλιοστού!

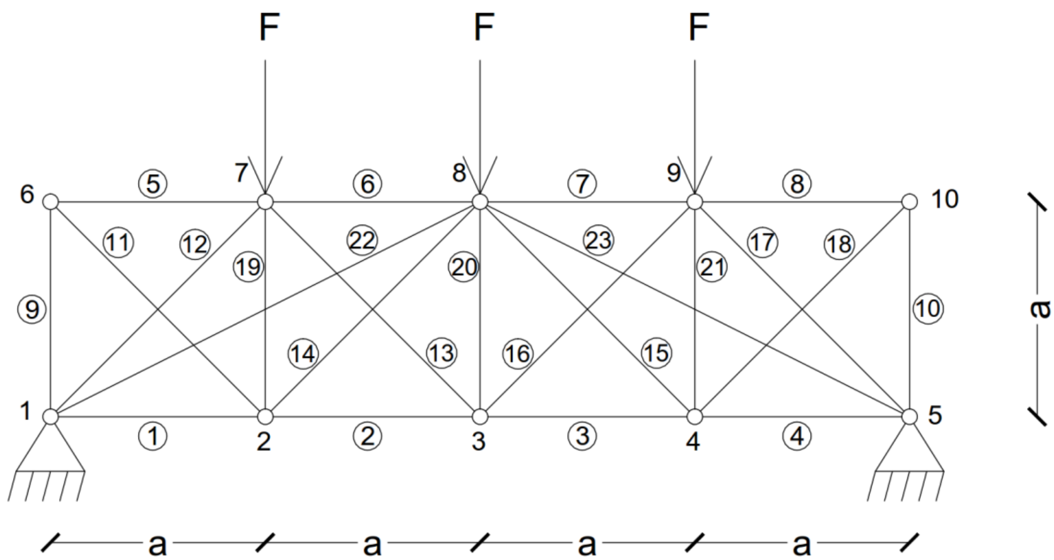
5.4 Πρόβλημα 4 (πρόβλημα τοπολογίας)

Για το δικτύωμα του σχήματος ζητείται η βέλτιστη τοπολογία, από πλευράς οικονομικότητας σχεδιασμού. Η φόρτιση του δικτυώματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο Πίνακας 5.16 παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο είναι οργανωμένες οι ομάδες μελών, ούτως ώστε να σχεδιαστεί συμμετρικά ο φορέας. Οι διατομές των μελών θα επιλεγούν από το σύνολο $\{0, 0.05, 0.1, \ldots 1\}(in^2)$, το οποίο περιέχει 21 ισαπέχοντα στοιχεία.

Περιορισμοί:

- Δεν επιτρέπεται να διαρρεύσει κανένα μέλος.
- Η μέγιστη επιτρεπόμενη μετακίνηση για όλους τους κόμβους είναι 2 ίντσες $(5.08cm)$.



Σχήμα 5.6: Δικτυωτός φορέας

Η τάση διαρροής είναι $f_y = 25ksi$ $(172.37MPa)$ και το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 10^4 ksi$ $(68.95GPa)$. Το ειδικό βάρος του υλικού είναι $\gamma = 0.1 lb/in^3 (27.1447 kN/m^3)$.

Δίνονται: $a = 100in$ $(2.54m)$, $F = 10^4 lb$ $(44.48kN)$.

α/α	A (in^2)	A (cm^2)
0	0.00	0.00
1	0.05	0.32
2	0.10	0.65
3	0.15	0.97
4	0.20	1.29
5	0.25	1.61
6	0.30	1.94
7	0.35	2.26
8	0.40	2.58
9	0.45	2.90
10	0.50	3.23
11	0.55	3.55
12	0.60	3.87
13	0.65	4.19
14	0.70	4.52
15	0.75	4.84
16	0.80	5.16
17	0.85	5.48
18	0.90	5.81
19	0.95	6.13
20	1.00	6.45

Πίνακας 5.15: Διαθέσιμες διατομές

Ομάδα μελών	Μέλη
1	1,4
2	2,3
3	5,8
4	6,7
5	9,10
6	11,18
7	12,17
8	13,16
9	14,15
10	19,21
11	20
12	22,23

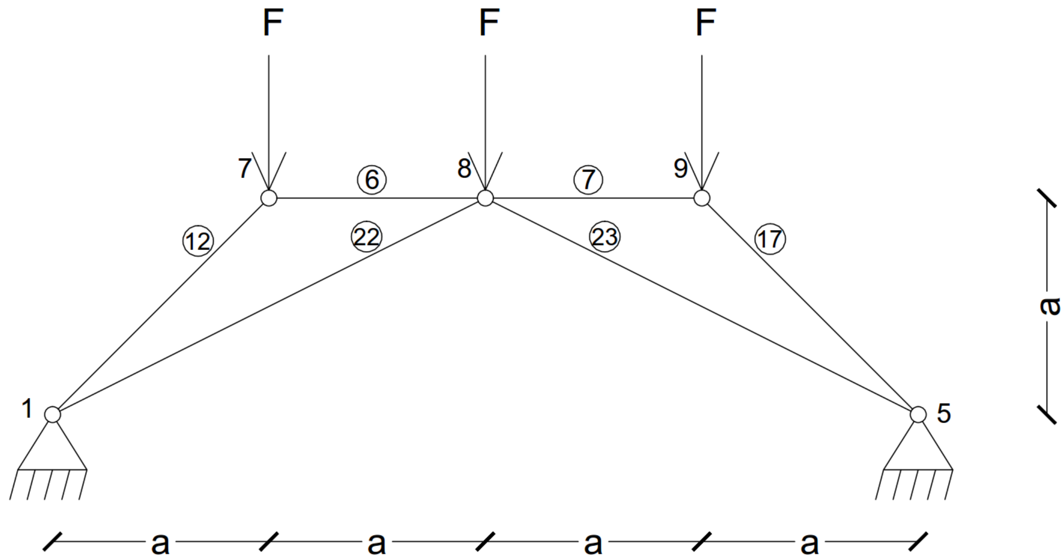
Πίνακας 5.16: Ομάδες μελών

Για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος σταδιακής απομείωσης με την απλή του μορφή αλλά και με τη χρήση της τεχνικής «Εξερεύνηση Μεγάλου Βήματος», και ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης. Ο αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης θα οριστεί να εκτελέσει 500 κύκλους δοκιμών για καθεμιά από 1000 διαφορετικές θερμοκρασίες.

Ο Πίνακας 5.17 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων των τριών διαδικασιών. Η βέλτιστη τοπολογία φαίνεται στο Σχήμα 5.7.

Ομάδα	α/α Διατομής [Π. Ανόπτηση]	α/α Διατομής [Στ. Απομ.]	α/α Διατομής [Στ. Απομ. + Ε.Μ.Β.]
1	**0**	**0**	**0**
2	**0**	**0**	**0**
3	**0**	**0**	**0**
4	**9**	**9**	**9**
5	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**0**
7	**12**	**12**	**12**
8	**0**	**0**	**0**
9	**0**	**0**	**0**
10	**0**	**0**	**0**
11	**0**	**0**	**0**
12	**9**	**9**	**9**
Όγκος (m^3)	0.0076	0.0076	0.0076
Utility (utils)	-46.18	-46.18	-46.18
Αναζητήσεις	500000	10076176	582640
Στ.αναλύσεις	500000	534057	32896
Χρόνος (sec)	351	353	9

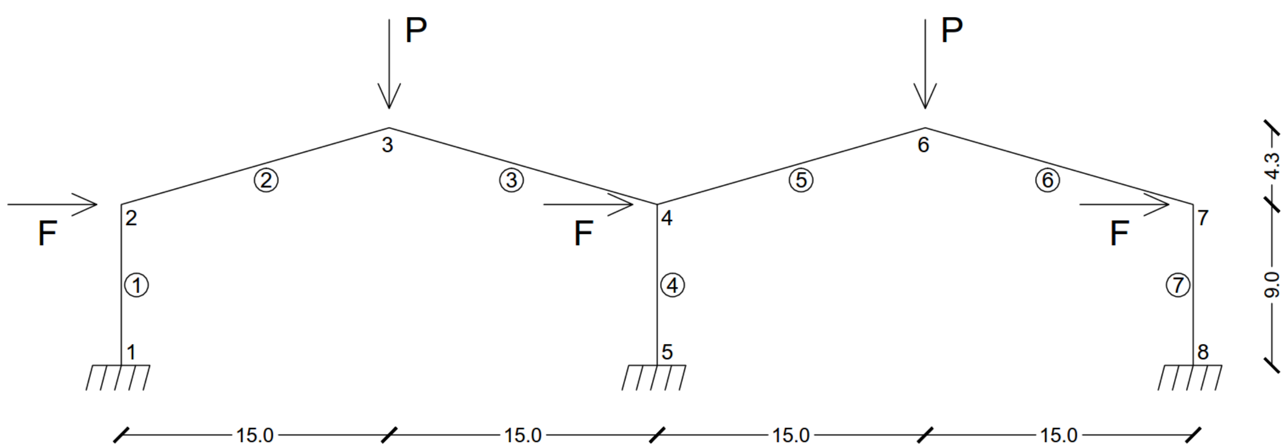
Πίνακας 5.17: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων



Σχήμα 5.7: Βέλτιστη τοπολογία του δικτυώματος

5.5 Πρόβλημα 5 (πρόβλημα ελαχιστοποίησης βάρους με πλαστική ανάλυση)

Για την πλαισιακή κατασκευή του Σχήματος 5.8, ζητείται ο οικονομικότερος σχεδιασμός, ούτως ώστε αυτή να μην οδηγηθεί σε κατάρρευση με τη δράση φορτίων μικρότερων από τα φορτία σχεδιασμού. Τα οριακά φορτία εικονίζονται στον Πίνακα 5.18.



Σχήμα 5.8: Πλαισιακός φορέας

Δίνονται επίσης τα εξής:

Ο χάλυβας είναι S235 και το μέτρο ελαστικότητας $E = 210\text{GPa}$. Το ειδικό βάρος του δομικού χάλυβα είναι $7850kg/m^3$, ενώ το κόστος του είναι $1.30€/kg$.

Φορτίο	1η περίπτωση	2η περίπτωση
P (kN)	200	100
F (kN]	70	200

Πίνακας 5.18: Οριακές φορτίσεις

Διαθέσιμες διατομές και ομάδες μελών:

Στα υποστυλώματα θα γίνει επιλογή διατομών από τον πίνακα πρότυπων διατομών HEA, ενώ στα ζυγώματα από τον πίνακα πρότυπων διατομών IPE. Λόγω της συμμετρίας της κατασκευής, τα μέλη οργανώνονται σε ομάδες ως εξής:

Ομάδα μελών	Μέλη	Διατομές
1	1, 7	HEA
2	2, 6	IPE
3	3, 5	IPE
4	4	HEA

Πίνακας 5.19: Ομάδες μελών

Επίλυση:

Πλέον ο υπολογισμός της ωφέλειας για κάθε λύση αλλάζει ριζικά και γίνεται με τη διαδικασία που αναλύθηκε στην παράγραφο 3.4.1.2. Για τον υπολογισμό του φορτικού συντελεστή λ ακολουθείται η μέθοδος βήμα προς βήμα, που εμπεριέχει πολλαπλές στατικές αναλύσεις. Συνεπώς, καθίσταται σαφές ότι η διαδικασία της πλαστικής ανάλυσης απαιτεί πολλαπλάσιο χρόνο από αυτόν μίας απλής στατικής ανάλυσης, περιορίζοντας τις δυνατότητες για επίλυση μεγάλων προβλημάτων σε σχετικά σύντομο χρόνο. Για τον λόγο αυτόν, στις επιλύσεις τέτοιων προβλημάτων θα προτιμηθεί η αποκλειστική χρήση της μεθόδου σταδιακής απομείωσης, που κατά τεκμήριο είναι και η γρηγορότερη από αυτές που παρουσιάστηκαν.

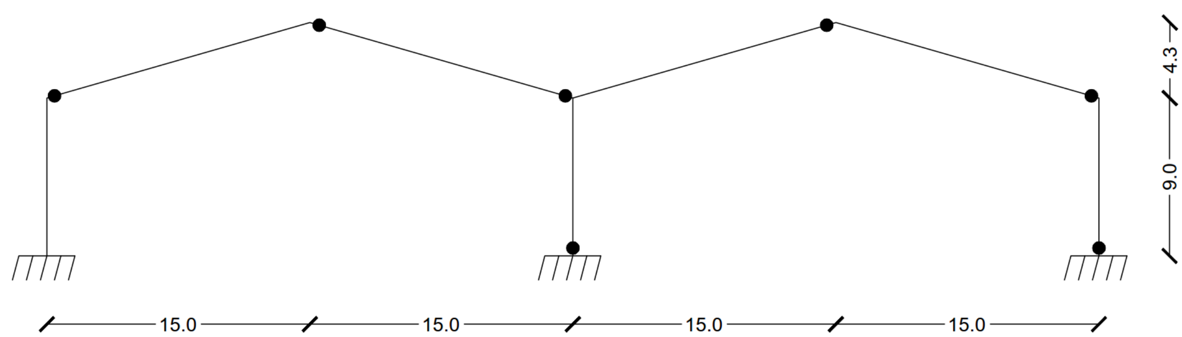
Στον Πίνακα 5.20 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης, ενώ στο Σχήμα 5.9 φαίνεται ο μηχανισμός κατάρρευσης για τη συγκεκριμένη επιλογή.

Ομάδα	Επιλογή [Στ. Απομ.]
1	**HEA 1000**
2	**IPE 300**
3	**IPE 300**
4	**HEA 600**
Κόστος (€)	11878
λ_{min} (kN)	200.45
Utility (utils)	-1293.56
Αναζητήσεις	585
Πλ.αναλύσεις	177
Χρόνος (sec)	4

Πίνακας 5.20: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων

Φορτίο	1η περίπτωση	2η περίπτωση
P	200.45	103.05
F	70.16	206.10

Πίνακας 5.21: Οριακές φορτίσεις της βέλτιστης επιλογής

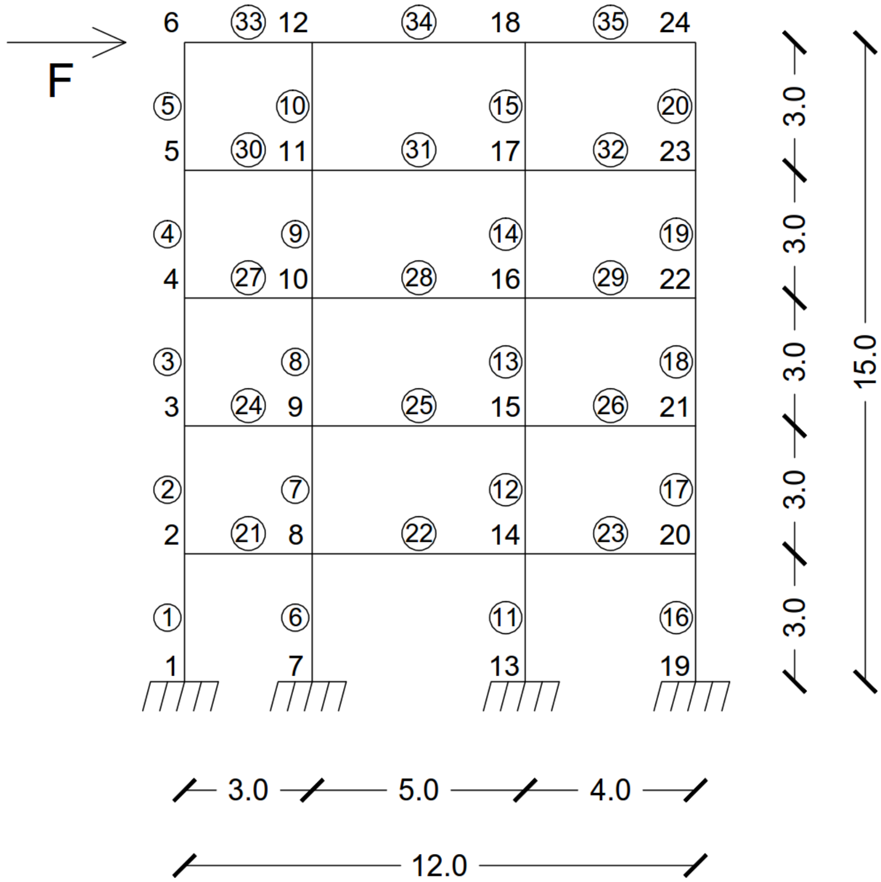


Σχήμα 5.9: Μηχανισμός κατάρρευσης της κατασκευής

Σημειώνεται ότι στη βιβλιογραφία [16], αν και δεν ακολουθείται κάποια διαδικασία βελτιστοποίησης, οι διατομές που επιλέγονται στο παρόν πρόβλημα οδηγούν σε φορτικό συντελεστή ίσο με $182.91kN$ για την 1η περίπτωση φόρτισης, με κόστος $15711€$. Δηλαδή, χάρη στη διαδικασία βελτιστοποίησης προέκυψε συνδυασμός επιλογών που προσφέρει οικονομικότερο αλλά και ανθεκτικότερο αποτέλεσμα.

5.6 Πρόβλημα 6 (πρόβλημα ελαχιστοποίησης βάρους με πλαστική ανάλυση)

Ο φορέας του Σχήματος 5.10 έχει 5 ορόφους και 72 βαθμούς ελευθερίας. Για τον φορέα αυτόν, ζητείται ο οικονομικότερος σχεδιασμός, ούτως ώστε να μην οδηγηθεί σε κατάρρευση με τη δράση φορτίου μικρότερου από το οριακό φορτίο σχεδιασμού.



Σχήμα 5.10: Πενταώροφος πλαισιακός φορέας

Δίνονται τα παρακάτω:

Ο χάλυβας είναι S235 και το μέτρο ελαστικότητας $E = 210\text{GPa}$. Το ειδικό βάρος του δομικού χάλυβα είναι $7850kg/m^3$, ενώ το κόστος του είναι $1.30€/kg$. Επίσης, $F_{lim} = 500kN$.

Διαθέσιμες διατομές και ομάδες μελών:

Για όλα τα μέλη θα γίνει επιλογή διατομών από τον πίνακα πρότυπων διατομών IPE. Τα μέλη οργανώνονται σε ομάδες ως εξής:

Ομάδα μελών	Μέλη	Διατομές
1	1, 2, 3, 4, 5, 16, 17, 18, 19, 20	IPE
2	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	IPE
3	21, 22, 23	IPE
4	24, 25, 26	IPE
5	27, 28, 29	IPE
6	30, 31, 32	IPE
7	33, 34, 35	IPE

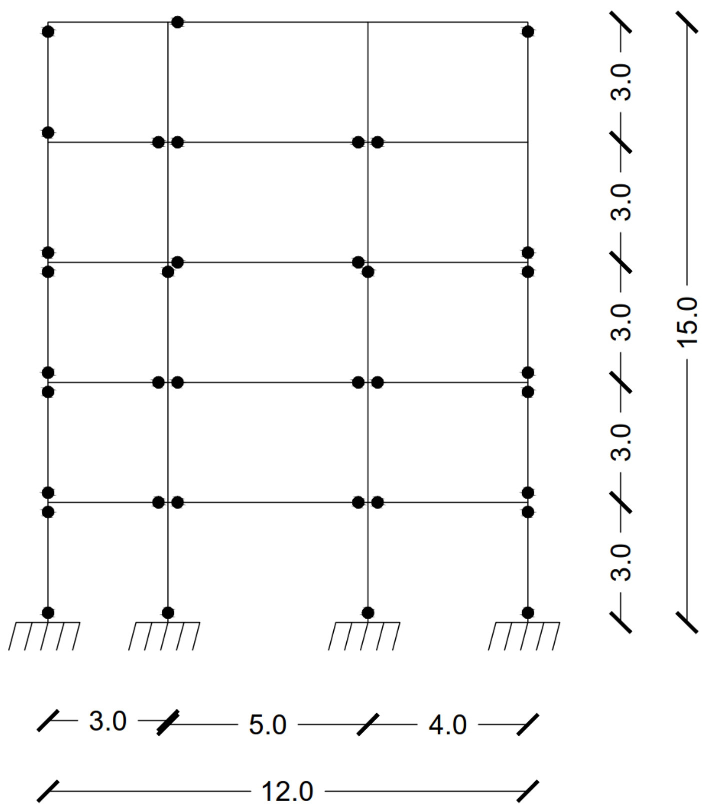
Πίνακας 5.22: Ομάδες μελών

Επίλυση:

Το μέγεθος του προβλήματος είναι ίσο με $1.28 \cdot 10^{9}$. Στον Πίνακα 5.23 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης, ενώ στο Σχήμα 5.11 φαίνεται ο μηχανισμός κατάρρευσης για τη συγκεκριμένη επιλογή.

Ομάδα	Επιλογή [Στ. Απομ.]
1	**IPE 270**
2	**IPE 400**
3	**IPE 360**
4	**IPE 360**
5	**IPE 400**
6	**IPE 360**
7	**IPE 300**
Κόστος (€)	8357
λ (kN)	501.02
Utility (utils)	-128.52
Πλ.αναλύσεις	2500
Ποσοστό λύσεων (%)	0.0002
Χρόνος (sec)	448

Πίνακας 5.23: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων

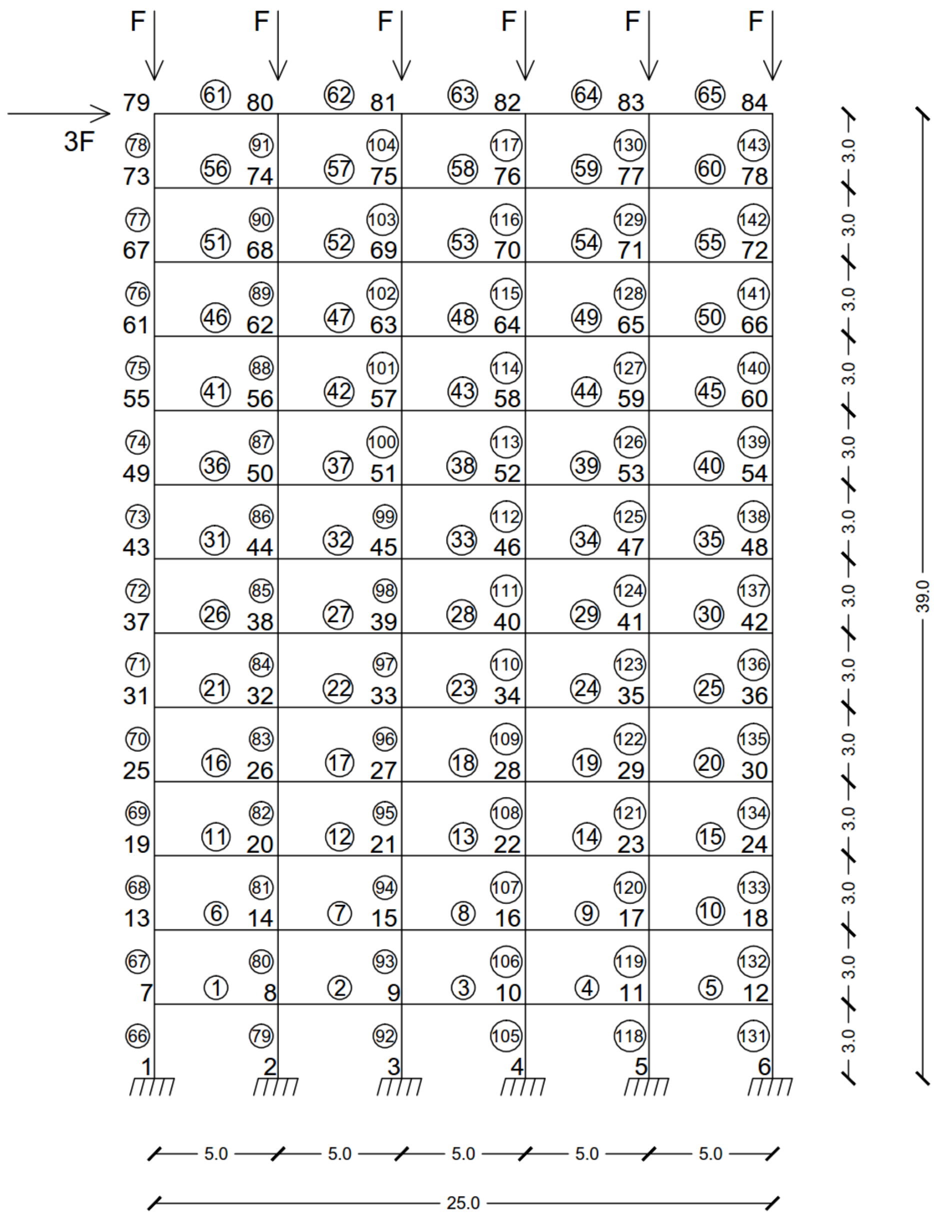


Σχήμα 5.11: Μηχανισμός κατάρρευσης της κατασκευής

Στη βιβλιογραφία [16], χωρίς βέβαια να ακολουθείται διαδικασία βελτιστοποίησης, επιλέγονται για στο παρόν πρόβλημα διατομές IPE 300 για τις δοκούς και IPE 450 για τα υποστυλώματα. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης καταλήγει σε φορτικό συντελεστή ίσο με $401.82kN$, με κόστος $9344€$. Ξανά δηλαδή, διαπιστώνεται πως με κατάλληλη επιλογή διατομών κατέστη δυνατό να προκύψει συνδυασμός με χαμηλότερο κόστος και βελτιωμένη αντοχή κατάρρευσης. Σημειώνεται πως η επίλυση δεν έγινε με ικανοτικό σχεδιασμό.

5.7 Πρόβλημα 7 (πρόβλημα ελαχιστοποίησης βάρους με πλαστική ανάλυση)

Ο φορέας του Σχήματος 5.12 έχει 13 ορόφους και 252 βαθμούς ελευθερίας. Για τον φορέα αυτόν, ζητείται ο οικονομικότερος σχεδιασμός, ούτως ώστε να μην οδηγηθεί σε κατάρρευση με τη δράση φορτίου μικρότερου από το οριακό φορτίο σχεδιασμού.



Σχήμα 5.12: Πλαισιακός φορέας 13 ορόφων

Δίνονται τα παρακάτω:

Ο χάλυβας είναι S235 και το μέτρο ελαστικότητας $E = 210\text{GPa}$. Το ειδικό βάρος του δομικού χάλυβα είναι $7850 kg/m^3$, ενώ το κόστος του είναι $1.30€/kg$. Επίσης, $F_{lim} = 500kN$.

Διαθέσιμες διατομές και ομάδες μελών:

Για τις δοκούς θα γίνει επιλογή διατομών από τον πίνακα πρότυπων διατομών IPE, ενώ για τα υποστυλώματα από τον πίνακα HEA. Τα μέλη οργανώνονται σε ομάδες ως εξής:

Ομάδα μελών	Μέλη	Διατομές
1	66 - 91	HEA
2	92 - 117	HEA
3	118 - 143	HEA
4	1 – 25	IPE
5	26 – 45	IPE
6	46 – 65	IPE

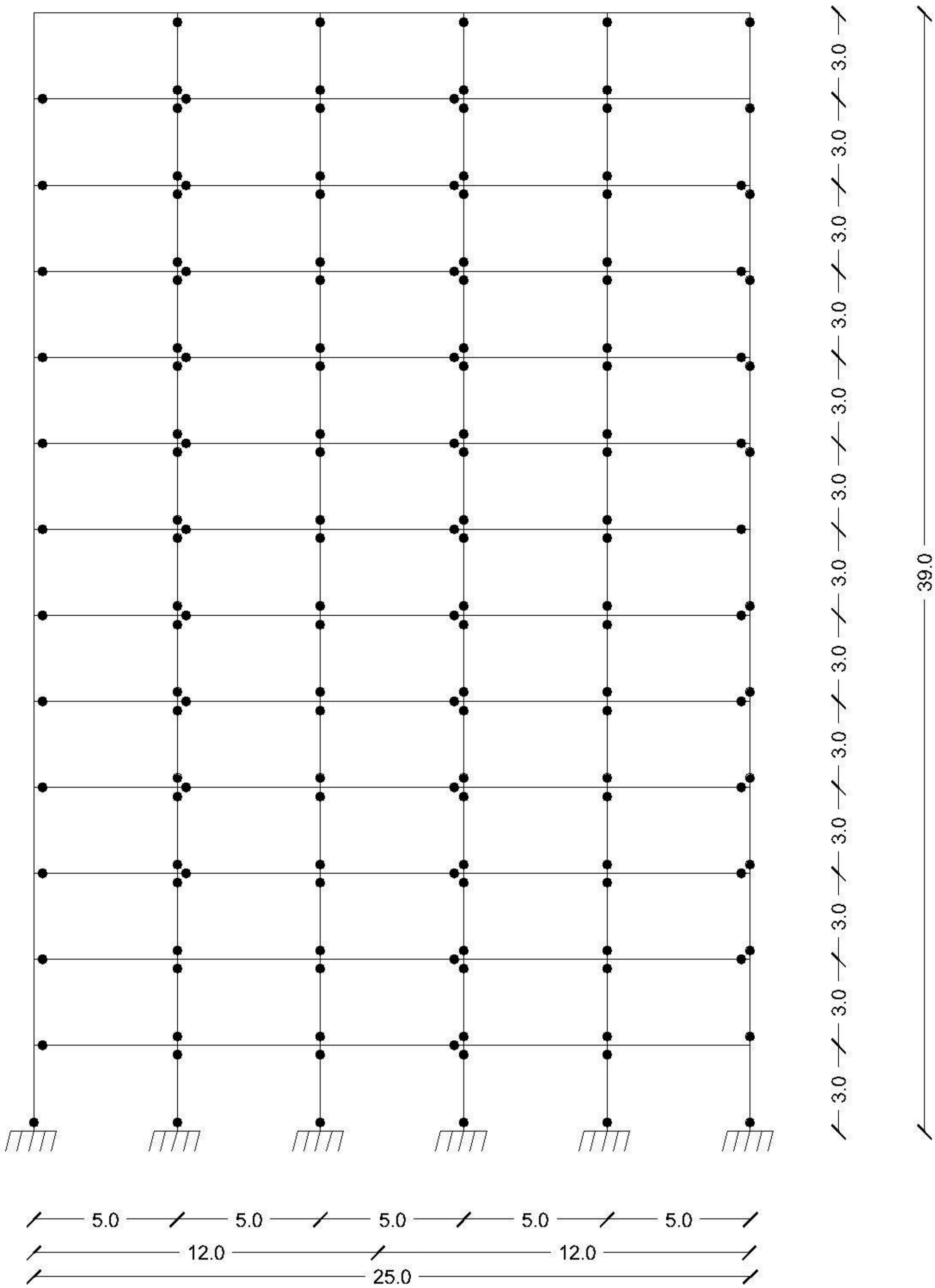
Πίνακας 5.24: Ομάδες μελών

Επίλυση:

Το μέγεθος του προβλήματος είναι $1.1 \cdot 10^8$. Στον Πίνακα 5.25 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης, ενώ στο Σχήμα 5.13 φαίνεται ο μηχανισμός κατάρρευσης για τη συγκεκριμένη επιλογή.

Ομάδα	Επιλογή [Στ. Απομ.]
1	**HEA 360**
2	**HEA 360**
3	**HEA 280**
4	**IPE 500**
5	**IPE 500**
6	**IPE 500**
Κόστος (€)	68951
λ (kN)	502.84
Utility (utils)	-866.36
Πλ.αναλύσεις	2138
Ποσοστό λύσεων (%)	0.002
Χρόνος (hours)	10

Πίνακας 5.25: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων



Σχήμα 5.13: Μηχανισμός κατάρρευσης της κατασκευής

6 Συμπεράσματα – Προτάσεις

6.1 Σχετικά με τη Μέθοδο Μεγιστοποίησης Ελάχιστης Ωφέλειας

Η μέθοδος, στη μορφή που αναπτύχθηκε αρχικά, έδωσε τη δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης των κατασκευών χρησιμοποιώντας τις αρχές της Θεωρίας Παιγνίων, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στα Κεφάλαια 1 και 2. Ωστόσο, σε αυτή την πρώιμη μορφή, αν και παρουσιάστηκαν σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς την ταχύτητα επίλυσης και το αποτέλεσμα των αναλύσεων, σημειώθηκαν και ορισμένα μειονεκτήματα.

Ένας βασικός στόχος της παρούσας εργασίας ήταν να ολοκληρώσει τη μέθοδο ΜΜΕΩ, επιλύοντας τις αδυναμίες που αναφέρθηκαν και συμπληρώνοντας παράλληλα ορισμένα χρήσιμα στοιχεία. Συνοπτικά, οι βελτιώσεις της μεθόδου συνίστανται στα εξής:

- Ένα μειονέκτημα στη χρήση της μεθόδου, που την καθιστούσε μη πρακτική σε κάποιον ανεξοικείωτο χρήστη, αποτελούσε το γεγονός ότι μεγάλο μέρος των παραμέτρων που απαιτούνταν για την επίλυση έπρεπε να συμπληρωθούν χειροκίνητα. Αντίθετα πλέον, η διαδικασία ορισμού των συντελεστών βαρύτητας και των διαφόρων παραμέτρων που απαιτούνται για τη διεξαγωγή της διαδικασίας βελτιστοποίησης είναι αυτοματοποιημένη. Ο χρήστης απλώς εισαγάγει τον τύπο του προβλήματος που επιθυμεί να επιλύσει (π.χ. «Ελαχιστοποίηση βάρους») και οι παράμετροι υπολογίζονται με βάση τη λογική που αναπτύχθηκε στο 3.4.1.3. Έτσι αποφεύγεται η σύγχυση και η πιθανότητα λανθασμένης εισαγωγής παραμέτρων, ενώ στην περίπτωση κακού ορισμού κάποιου προβλήματος, ο χρήστης μπορεί εύκολα να καταλάβει το λάθος, καθώς το αποτέλεσμα θα έχει δεδομένα πολύ μικρή τιμή ωφέλειας.
- Πέραν των προβλημάτων βελτιστοποίησης με ελαστική ανάλυση προστέθηκε και το πρόβλημα βελτιστοποίησης με ανάλυση «βήμα προς βήμα», δίνοντας δυνατότητα βέλτιστου σχεδιασμού στην οριακή κατάσταση αστοχίας.
- Δίνεται η δυνατότητα καθορισμού διαφορετικών ορίων για τις θετικές και τις αρνητικές τιμές των περιοριζόμενων μεγεθών. Η προσθήκη αυτή επιτρέπει στον χρήστη να δώσει διαφορετική σημασία στις θετικές και αρνητικές τιμές κάποιου μεγέθους.

6.2 Σχετικά με τις αλγοριθμικές τεχνικές

Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν δίνουν λύση στο υπολογιστικό πρόβλημα που δημιουργεί ο τεράστιος όγκος του χώρου των λύσεων. Στην παρούσα εργασία έγινε μελέτη και χρήση 2 αλγόριθμων: του αλγόριθμου Προσομοιωμένης Ανόπτησης και του αλγόριθμου Σταδιακής Απομείωσης. Παρακάτω ακολουθεί μια σύνοψη για τον καθένα ξεχωριστά, καθώς και των βελτιώσεων που έγιναν.

6.2.1 Αλγόριθμος Προσομοιωμένης Ανόπτησης

Πρόκειται για έναν γνωστό αλγόριθμο, που έχει εφαρμογές σε ποικίλα προβλήματα βελτιστοποίησης. Αν και στην κλασική του μορφή αφορά προβλήματα με συνεχείς τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, στην παρούσα εργασία έχουν γίνει τροποποιήσεις ώστε να επιλύει διακριτά προβλήματα. Στο πλαίσιο αυτό ορίστηκε συγκεκριμένο σύστημα ψύξης καθώς και δύο διαφορετικά συστήματα παραγωγής γειτονικών λύσεων (*σύστημα μετάλλαξης*). Τα αποτελέσματα του ήταν πολύ ενθαρρυντικά, καθώς σε κάθε περίπτωση κατέληξε στο παγκόσμιο βέλτιστο ή πολύ κοντά σε αυτό. Σημαντικό πλεονέκτημα του αλγορίθμου (έναντι της Σταδιακής Απομείωσης) είναι η δυνατότητά του να χειριστεί ακόμα και πολύ μεγάλα προβλήματα χωρίς να προκαλεί προβλήματα μνήμης, εφόσον το πλήθος των επιλύσεών του ορίζεται εκ των προτέρων.

Από την άλλη, σε ορισμένες περιπτώσεις ο χρόνος εκτέλεσης ήταν σημαντικά μεγαλύτερος από αυτόν του αλγόριθμου Σταδιακής Απομείωσης. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε κακή επιλογή των παραμέτρων (σύστημα ψύξης, πλήθος κύκλων, κλπ.), ίσως όμως και στη ίδια τη φύση της μεθόδου, καθώς ο τρόπος λειτουργίας της είναι αμιγώς πιθανοτικός, χωρίς να λαμβάνει υπόψη τις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες του προβλήματος.

6.2.2 Αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης

Ο αλγόριθμος αυτός ξεκινάει από τη βαρύτερη λύση και ανοίγει ένα «μονοπάτι» μέσα στο χαοτικό χώρο των λύσεων, εξερευνώντας γειτονιές. Ακόμη και στην απλή του μορφή, ο αλγόριθμος παρουσιάζει το σημαντικό πλεονέκτημα πως μπορεί πολύ σύντομα να δώσει μια πολύ καλή λύση, η οποία έχει αρκετές πιθανότητες να είναι η απολύτως βέλτιστη.

Εντούτοις, αυτή η αρχική μορφή παρουσίαζε και αρκετά μειονεκτήματα. Κατ’ αρχάς, όπως διαπιστώθηκε, πολλές λύσεις της κάθε γειτονιάς (τουλάχιστον οι μισές) επανεξετάζονταν στην επόμενη καθυστερώντας τον αλγόριθμο. Επίσης, ο αλγόριθμος από τη φύση του περιορίζει τη δράση του εντός της γειτονιάς, αδυνατώντας να κάνει πιο «τολμηρές» αλλαγές στη διατομή ενός ή περισσοτέρων μελών. Γι’ αυτό το λόγο ορισμένες φορές εγκλωβίζεται σε τοπικά ακρότατα, χάνοντας την επαφή με το παγκόσμιο βέλτιστο.

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω φαινομένων, αλλά και την εν γένει ενίσχυση της αποτελεσματικότητας του αλγορίθμου, πραγματοποιήθηκαν οι εξής αλλαγές:

- Οι λύσεις που εξετάζονται καταγράφονται ώστε να αποφευχθεί η επανεξέτασή τους στο επόμενο βήμα, με τη χρήση Bloom Filter.
- Δημιουργήθηκαν συνολικά 6 τεχνικές, κάθε μία από τις οποίες με τη δικιά της φιλοσοφία δίνει στον αλγόριθμο τη δυνατότητα να εξερευνήσει διαφορετικά τμήματα του χώρου των λύσεων, αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα εντοπισμού της βέλτιστης λύσης του προβλήματος.

Όπως φάνηκε και στις αριθμητικές εφαρμογές, οι παραπάνω τεχνικές συνέβαλαν καθοριστικά στην επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης.

6.3 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια συμπλήρωσης μιας ήδη υπάρχουσας μεθόδου βελτιστοποίησης κατασκευών με τη λογική της Θεωρίας Παιγνίων, διεύρυνσης των εφαρμογών της και βελτίωσης των υπολογιστικών εργαλείων που αυτή χρησιμοποιεί. Παρόλο που σε ένα βαθμό οι στόχοι αυτοί επετεύχθησαν, υπήρξαν και ορισμένες ιδέες οι οποίες λόγω χρονικών περιορισμών δεν κατέστη δυνατό να διερευνηθούν. Αυτές συνοπτικά είναι οι ακόλουθες:

- Ένας σημαντικός περιοριστικός παράγοντας που σχετίζεται με τον αλγόριθμο Σταδιακής Απομείωσης, είναι το πλήθος των ομάδων μελών. Καθώς οι ομάδες μελών αυξάνονται, το μέγεθος του προβλήματος γιγαντώνεται με εκθετικό τρόπο, δυσχεραίνοντας σημαντικά τη διαδικασία εξεύρεσης βέλτιστης λύσης. Η αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου θα μπορούσε να γίνει με κατάλληλη τροποποίηση του αλγορίθμου, ώστε σε κάθε σχηματισμό γειτονιάς να γίνεται ομαδοποίηση κάποιων ομάδων μελών (με τυχαίο τρόπο κάθε φορά), ώστε αυτές να αλλάζουν ταυτόχρονα την επιλογή διατομής τους. Η αλλαγή αυτή αναμένεται να προκαλέσει σημαντική μείωση του υπολογιστικού όγκου, καθώς η διαδικασία θα είναι ισοδύναμη με πρόβλημα λιγότερων ομάδων μελών.
- Δεδομένου ότι βασική διαδικασία στα προβλήματα που εξετάστηκαν ήταν η στατική ανάλυση, γίνεται φανερό πως, επιτάχυνση της επιμέρους διαδικασίας αυτής συνεπάγεται συνολική επιτάχυνση της όλης διαδικασίας βελτιστοποίησης. Επομένως, μια ενδεχόμενη βελτιστοποίηση του αλγορίθμου υλοποίησης της στατικής ανάλυσης θα έχει ευεργετικά αποτελέσματα ως προς την ταχύτητα των αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν.
- Ο τρόπος που έχει οργανωθεί η ΜΜΕΩ δίνει το μεγάλο πλεονέκτημα της ευελιξίας ως προς το αντικείμενο επίλυσης. Με μικρές μεταβολές σε κάποιες παραμέτρους, ο χρήστης μπορεί να επιλύσει εντελώς διαφορετικά προβλήματα, κάτι που έγινε φανερό από τη χρήση της μεθόδου για επίλυση προβλημάτων πλαστικής ανάλυσης. Η ευελιξία κατασκευής της μεθόδου την καθιστά παράλληλα και επεκτάσιμη. Ένα τέτοιο παράδειγμα επέκτασης θα μπορούσε να επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης τρισδιάστατων φορέων.
- Ο αλγόριθμος Προσομοιωμένης Ανόπτησης, παρόλο που σε μεγάλο βαθμό έχει αυτοματοποιηθεί, απαιτεί την εισαγωγή κάποιων παραμέτρων (πλήθος θερμοκρασιών, πλήθος επαναλήψεων ανά θερμοκρασία) οι οποίες πολλές φορές είναι καθοριστικές για την αποτελεσματικότητα στην εξεύρεση της βέλτιστης λύσης. Εντούτοις, ο αλγόριθμος αυτός σε κάθε περίπτωση ακολουθεί το μονοπάτι του ολικού βέλτιστου καταλήγοντας σε μια πολύ καλή λύση, αν όχι στη βέλτιστη, με ελεγχόμενο πλήθος βημάτων. Από την άλλη, ο αλγόριθμος Σταδιακής Απομείωσης δείχνει ικανός να εντοπίσει το παγκόσμιο βέλτιστο, αρκεί να βρεθεί σε κατάλληλο τμήμα του χώρου λύσεων, δηλαδή να ξεκινήσει από την κατάλληλη λύση. Μια ενδεχόμενη συνεργασία των δύο αυτών αλγορίθμων, κατά την οποία ο πρώτος -με σχετικά λίγες επαναλήψεις- θα εντοπίζει την αρχική λύση του δεύτερου, πολύ πιθανόν θα οδηγούσε σε βελτίωση χρόνου και αποτελέσματος.

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Παναγιωτακόπουλος, Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών με Χρήση Θεωρίας Παιγνίων, Αθήνα, 2014.

[2] K. Binmore, Game Theory: A Very Short Introduction, New York: Oxford University Press Inc., 2007.

[3] A. Rubinstein, «Perfect Equilibrium in a Bargaining Model,» *Econometrica,* τόμ. 50, pp. 97-109, 1982.

[4] N. J. Bearden, Ultimatum Bargaining Experiments: The State of the Art, 2001.

[5] G. Kirchsteiger, «The role of envy in ultimatum games,» *Journal of Economic Behavior and Organization,* τόμ. 25, αρ. 1994, pp. 373-389, 1993.

[6] Χ. Κυρανούδης, Μηχανική Συστημάτων Εφοδιαστικής Διαχείρισης, Αθήνα: ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ, 2013.

[7] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt και M. P. Vecchi, «Optimization by Simulated Annealing,» *Science,* τόμ. 220, αρ. 4598, pp. 671-680, 1983.

[8] V. Černý, «Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm,» *Journal of Optimization Theory and Applications,* τόμ. 45, pp. 41-51, 1985.

[9] M.-W. Park και Y.-D. Kim, «A Systematic Procedure for Setting Parameters in Simulated Annealing Algorithms,» *Computers & Operations Research,* τόμ. 25, αρ. 3, pp. 207-217, 1998.

[10] T. Roughgarden, «Lecture 74 - Bloom Filters: The Basics,» Coursera, [Ηλεκτρονικό]. Available: www.coursera.org.

[11] T. Roughgarden, «Lecture 75 - Bloom Filters: Heuristic Analysis,» Coursera, [Ηλεκτρονικό]. Available: www.coursera.org.

[12] S. D. Rajan, «Sizing, shape and topology design optimization of trusses using genetic algorithm,» *Journal of Structural Engineering,* τόμ. 121, αρ. 10, pp. 1480-1487, 1995.

[13] U. Kirsch, «On the relationship between optimum structural topologies and geometries,» *Structural and Multidisciplinary Optimization,* τόμ. 2, αρ. 1, pp. 39-45, 1990.

[14] S. Ruiyi, G. Liangjin και F. Zijie, «Truss Topology Optimization Using Genetic Algorithm with Individual Identification Technique,» σε *World Congress on Engineering*, London, 2009.

[15] R. J. Balling, R. R. Briggs και K. Gillman, «Multiple Optimum Size/Shape/Topology Designs for Skeletal Structures Using a Genetic Algorithm,» *Journal of Structural Engineering,* τόμ. 132, pp. 1158-1165, 2006.

[16] Μ. Παπαδρακάκης, ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ V - ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ - ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ, Αθήνα, 2011.

[17] J. Von Neumann και O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton: Princeton University Press, 1953.

[18] W. Tang, L. Tong και Y. Gu, «Improved genetic algorithm for design optimization of truss structures with sizing, shape and topology variables,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* τόμ. 62, p. 1737–1762, 2005.

[19] S. Rajeev και C. S. Krishnamoorthy, «Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms,» *Journal of Structural Engineering,* τόμ. 118, pp. 1233-1250, 1992.

[20] K. G. Murty, Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming, 1988.

[21] L. J. Li, Z. B. Huang και F. Liu, «A heuristic particle swarm optimization method for truss structures with discrete variables,» *Computers and Structures,* τόμ. 87, p. 435–443, 2009.

[22] C. E. Lemke και J. T. Howson, «Equilibrium Points of Bimatrix Games,» *SIAM Journal on Applied Mathematics,* τόμ. 12, αρ. 2, pp. 413-423, 1964.

[23] O. M. Jackson, K. Leyton-Brown και Y. Shoham, «Coursera, Game Theory Online Class,» 2013-2014. [Ηλεκτρονικό]. Available: https://www.coursera.org/course/gametheory.

[24] O. M. Jackson, K. Leyton-Brown και Y. Shoham, «Coursera, Game Theory 2 Online Class,» 2014. [Ηλεκτρονικό]. Available: https://www.coursera.org/course/gametheory2.

[25] L. Brouwer, «Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten,» *Mathematische Annalen,* τόμ. 71, pp. 97-115, 1911.

[26] K. Binmore, Playing for Real, New York: Oxford University Press, Inc., 2007.

[27] K. Arrow, «A difficulty in the concept of social welfare,» *Journal of Political Economy,* αρ. 4, 1950.