

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ
ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΠΡΟΥΜΑ ΙΩΑΝΝΑ

A.M. ge13076

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ



ΑΘΗΝΑ 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ
ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΛΛΕΠΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΜΠΡΟΥΜΑ ΙΩΑΝΝΑ

Επιβλέπων : Χρυσάφινος Κωνσταντίνος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την Τρίτη 14 Ιουλίου 2020.

.....
Κωνσταντίνος Χρυσάφινος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κολέτσος Ιωάννης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κοκκίνης Βασίλειος
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2020

.....

ΜΠΡΟΥΜΑ ΙΩΑΝΝΑ

Διπλωματούχος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

© 2020 – All rights reserved

“The book of nature is written in the
language of Mathematic”

Galileo

Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας εικόνων	9
Συμβολισμοί	11
Εισαγωγή	13
Abstract	14
Ευχαριστίες	15
1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	17
1.1 Χώροι συνεχών συναρτήσεων και γενικευμένες παράγωγοι	17
1.2 Χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων	21
1.2.1 Εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $L^2(\Omega)$	23
1.3 Οι χώροι του Sobolev σε πολλές διαστάσεις	25
2. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	32
2.1 Ελλειπτικές εξισώσεις δεύτερης τάξης	32
2.2 Μεταβολική διατύπωση του προβλήματος Dirichlet	35
2.2.1 Το πρόβλημα Dirichlet με ομογενείς συνοριακές συνθήκες	35
2.2.2 Το πρόβλημα Dirichlet με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες	38
2.2.3 Ομαλότητα των ασθενών λύσεων	39
3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	40
3.1 Μεθοδολογία	41
3.2 Τύποι πεπερασμένων στοιχείων	42
3.3 Πεπερασμένα στοιχεία στο επίπεδο	44
3.3.1 Συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις σε τριγωνισμούς πολυγώνων	44
3.3.2 Βαθμοί ελευθερίας	47
3.4 Παρεμβολή με συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις και εκτιμήσεις των σφαλμάτων	48
3.4.1 Ελλειπτική προβολή	50
3.4.2 Ορθογώνια προβολή	52
Βασική εκτίμηση σφάλματος για το πρόβλημα Laplace	52
3.5 Η γενικευμένη μέθοδος Galerkin (Generalized Galerkin Method)	54
4. ΧΡΟΝΙΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ	57
4.1 Εισαγωγή	57
4.2 Η ημι-διακριτή προσέγγιση	58
4.3 Εκτιμήσεις σφαλμάτων στην ημι-διακριτή προσέγγιση	59
4.4 Εκτιμήσεις σφαλμάτων στην πλήρως διακριτή προσέγγιση – Η μέθοδος Backward Euler - Galerkin	63

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ FreeFem++	67
5.1 Το γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα	68
5.2 Το γραμμικό παραβολικό πρόβλημα	74
Βιβλιογραφία	83
Λεξικό αγγλικών όρων	85
Ευρετήριο όρων	87

Πίνακας εικόνων

<i>Εικόνα 1: Συνήθεις τύποι πεπερασμένων στοιχείων. [βλ (13)]</i>	41
<i>Εικόνα 2: Γραμμικό, Επιφανειακό και Χωρικό στοιχείο στο λογισμικό SAP 2000. [βλ (14)]</i>	43
<i>Εικόνα 3: Μη αποδεκτός και αποδεκτός, αριστερά και δεξιά, τριγωνισμός. [βλ (1)]</i>	45
<i>Εικόνα 4 Το πλέγμα για $h=0.282843$ και η αντίστοιχη u_h</i>	69
<i>Εικόνα 5 Το πλέγμα για $h=0.141421$ και η αντίστοιχη u_h</i>	70
<i>Εικόνα 6 Το πλέγμα για $h=0.0707107$ και η αντίστοιχη u_h</i>	70
<i>Εικόνα 7 Το πλέγμα για $h=0.0353553$ και η αντίστοιχη u_h</i>	71
<i>Εικόνα 8 Το πλέγμα για $h=0.0176777$ και η αντίστοιχη u_h</i>	71
<i>Εικόνα 9 Το πλέγμα για $h=0.00883883$ και η αντίστοιχη u_h</i>	72
<i>Εικόνα 10 Η πραγματική λύση</i>	72
<i>Εικόνα 11 Το πλέγμα για $h=0.707107$ και η αντίστοιχη u_h</i>	76
<i>Εικόνα 12 Το πλέγμα για $h=0.353553$ και η αντίστοιχη u_h</i>	76
<i>Εικόνα 13 Το πλέγμα για $h=0.176777$ και η αντίστοιχη u_h</i>	77
<i>Εικόνα 14 Το πλέγμα για $h=0.0883883$ και η αντίστοιχη u_h</i>	77
<i>Εικόνα 15 Το πλέγμα για $h=0.0441942$ και η αντίστοιχη u_h</i>	78
<i>Εικόνα 16 Το πλέγμα για $h=0.0220971$ και η αντίστοιχη u_h</i>	78

Συμβολισμοί

Γενικοί συμβολισμοί

V' ο δυϊκός του χώρου V

p' συζυγής εκθέτης του p , δηλαδή $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$

σ. π. σχεδόν παντού

$\frac{\partial u}{\partial n}$ κάθετη εξωτερική παράγωγος

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ σύμβολο του Kronecker

$$\nabla v = \text{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right)$$

$$\nabla \cdot w = \text{div} w = \sum_{i=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

$$\Delta v = \nabla \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$$

$$D^a u(x) = \frac{\partial^{|a|} u}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_d}}, |a| = a_1 + \dots + a_d, a_i \geq 0$$

$$\text{int} \Omega := \{x \in \Omega : \exists \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε } B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega\}$$

Συναρτησιακοί χώροι

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \geq 0} C^m(\Omega)$$

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K, \text{ όπου } K \subset \Omega \text{ συμπαγές}\}$$

$$C_c^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$$L^p(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη και } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη και } \exists \text{ σταθερά } C \text{ τέτοια ώστε } |f| \leq C \text{ σ. π. στο } \Omega\}$$

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f: f \in L^1(K) \text{ για κάθε } K \text{ συμπαγές } \subset \text{int}\Omega\}$$

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) | \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ για κάθε μη αρνητικό πολυδείκτη} \\ \alpha: |\alpha| \leq k, \text{ τέτοια ώστε } \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

$$L^q(0, T; W^{k,p}(\Omega)) := \left\{ \begin{array}{l} u: (0, T) \rightarrow W^{k,p}(\Omega) | u \text{ μετρήσιμο} \\ \text{και } \int_0^T \|v(t)\|_{k,p,\Omega}^q dt < \infty \end{array} \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega): D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega): v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega): u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_{x_i}|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, d\}$$

$$H^k(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) | (1 + |\xi|^2)^{k/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

$$H(\text{div}; \Omega) := \{u \in (L^2(\Omega))^d | \text{div} u \in L^2(\Omega)\}$$

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin της Αριθμητικής Ανάλυσης σε προβλήματα ελλειπτικού τύπου. Για τους σκοπούς της μελέτης, αναλύθηκε ελληνική και ξένη βιβλιογραφία, τόσο σε έντυπη όσο και σε ηλεκτρονική μορφή.

Για την καλύτερη δυνατή προσέγγιση του θέματος, παρατίθενται αρχικά οι προαπαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις, όπως τα στοιχεία των χώρων συνεχών ή ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και οι χώροι του Sobolev, οι οποίοι αποτελούν βασικό εργαλείο στην μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών για διαφορικές εξισώσεις.

Στη συνέχεια, αναλύονται οι ελλειπτικές εξισώσεις και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στο επίπεδο, καθώς επίσης παρουσιάζονται μερικές από τις μεθόδους διακριτοποίησης προβλημάτων συνοριακών τιμών. Μια από αυτές είναι η μέθοδος Galerkin μέσω της οποίας προσεγγίζονται τα ελλειπτικά προβλήματα.

Παράλληλα, γίνεται η μελέτη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για παραβολικά προβλήματα και συγκεκριμένα για την εξίσωση της θερμότητας.

Τέλος, παρατίθενται ένα ελλειπτικό και ένα παραβολικό πρόβλημα στο υπολογιστικό πρόγραμμα FreeFem++ για την σύγκριση των θεωρητικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων της μεθόδου.

Λέξεις Κλειδιά: Αριθμητική Ανάλυση, Χώροι του Sobolev, Μέθοδος Galerkin, Ελλειπτικά Προβλήματα, Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων, Εξίσωση της θερμότητας

Abstract

The present study, is a systematic review evaluating the Galerkin finite element method of Numerical Analysis in elliptical problems. For the purpose of the study, Greek and foreign literature were analyzed, both in print and online form.

The primary focus of this study is to cover the prerequisite mathematical knowledge, such as the function spaces' fundamentals and Sobolev spaces, which are a key tool in the study of boundary value problems for differential equations.

Next, the elliptical equations and the finite element methods at the plate are analyzed and some of the methods for distinguishing boundary value problems are presented. One of them is the Galerkin method through which elliptical problems are approached.

At the same time, the finite element method for parabolic problems is studied and specifically for heat equation.

Finally, an elliptical and a parabolic problem are solved in the FreeFem++ computational program for the comparison of the theoretical and numerical results of the method.

Key words: *Numerical Analysis, Sobolev Spaces, Galerkin method, Elliptical Problems, Finite Element Method, Heat Equation*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους συνέβαλαν με τον τρόπο τους στην επιτυχή εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, και ιδιαιτέρως τον υπεύθυνο καθηγητή για την διπλωματική μου εργασία κύριο Χρυσάφινο Κωνσταντίνο. Ήταν πάντοτε πρόθυμος και διαθέσιμος να μου λύσει οποιαδήποτε απορία, ενώ παράλληλα με καθοδήγησε με τις πολύτιμες συμβουλές τους στην σωστή συγγραφή της εργασίας μου αυτής. Επιπλέον, θα ήθελα να πω και ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου και τους φίλους μου, οι οποίοι με στήριξαν και με ενθάρρυναν καθ' όλη τη διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Αυτό το κεφάλαιο περιέχει μια εισαγωγή στις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες για την κατανόηση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

1.1 Χώροι συνεχών συναρτήσεων και γενικευμένες παράγωγοι

Έστω Ω ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$, όπου

$$\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d\}.$$

Εάν $d = 1$, τότε το Ω είναι ένα οριοθετημένο ανοιχτό διάστημα. Εάν $d = 2$ υποθέτουμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ είναι ομαλό ή πολύγωνο, ενώ εάν $d = 3$ είναι πολυέδρο. Με $\bar{\Omega}$ θα συμβολίζουμε την κλειστότητα του Ω , δηλαδή $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ (βλ [(1), Κεφάλαιο 1.2]).

Ως $C^m(\Omega)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων που είναι ορισμένες πάνω στο Ω , έτσι ώστε οι μερικές παράγωγοι $D^\alpha f$ να είναι συνεχείς πάνω στο Ω για όλους τους πολυδείκτες $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, με $|\alpha| < m$.

Θα εισάγουμε μία μικρή έννοια για τις μερικές παραγώγους, την έννοια του πολυδείκτη. Ένας πολυδείκτης α , είναι μια ακολουθία $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ με $\alpha_i \geq 0$ ακέραιο (βλ [(2), Κεφάλαιο 9]).

Το μήκος του α δίνεται από:

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

Ως $C^0(\Omega)$ ορίζουμε το σύνολο

$$C^0(\Omega) = \{u(x), u(x) \text{ συνεχής στο } \Omega\}.$$

Δηλαδή, ο $C^0(\Omega)$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων οι οποίες είναι συνεχείς στο Ω και είναι γραμμικός, διότι για τις συναρτήσεις $u_1, u_2 \in C^0(\Omega)$ έχουμε ότι οι au_1 και βu_2 είναι συνεχείς, συνεπώς η $au_1 + \beta u_2$ είναι συνεχής ή ισοδύναμα ισχύει ότι

$$u_1, u_2 \in C^0(\Omega) \Rightarrow au_1 + \beta u_2 \in C^0(\Omega).$$

$C^m(\Omega)$: ο χώρος των συναρτήσεων που είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμες πάνω στο $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Για τον συμβολισμό της μερικής παραγώγου μιας συνάρτησης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και δείκτες, όπως

$$u_t = D_t u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = D_x^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Έστω τώρα δυο βαθμωτές συναρτήσεις u, v και $w = (w_1, \dots, w_d)$ μια διανυσματική συνάρτηση με $x \in \mathbb{R}^d$ (βλ [(1), Κεφάλαιο 1.2]). Θα ορίσουμε την κλίση, την απόκλιση, καθώς και τον τελεστή *Laplace*, αντίστοιχα,

$$\nabla v = \text{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right),$$

$$\nabla \cdot w = \text{div} w = \sum_{i=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

$$\Delta v = \nabla \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}.$$

Για μερικές παραγώγους υψηλής τάξης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, η σημειογραφία διευκολύνεται εάν χρησιμοποιήσουμε την εξής συνθήκη:

Έστω συνάρτηση $u(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ και $a = (a_1, \dots, a_d), a_i \in \mathbb{R}^d, a_i \geq 0$, τότε

$$(1.1.1) \quad D^a u(x) = \frac{\partial^{|a|} u}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}}, \quad |a| = a_1 + \dots + a_d, a_i \geq 0.$$

Συνεπώς, για το $D^a u(x)$ θα έχουμε:

$$D^a u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \quad (a = (2, 0)),$$

$$D^a u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (a = (0, 2)),$$

$$D^a u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (a = (1, 1)).$$

Περαιτέρω μπορούμε να ορίσουμε χώρους άπειρης τάξης

$$(1.1.2) \quad C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \geq 0} C^m(\Omega).$$

Ορισμός. (βλ [(1), Κεφάλαιο 1]) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση είναι ομαλή, εάν είναι $C^\infty(\Omega)$.

Ας ορίσουμε τώρα τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο Ω με συμπαγή φορέα $C_c(\Omega)$, δηλαδή (βλ [(2), Κεφάλαιο 4])

$$(1.1.3) \quad C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K, \text{ όπου } K \subset \Omega \text{ συμπαγές}\}.$$

Επιπλέον,

$$C_c^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_c(\Omega).$$

Συμβολίζουμε με $C_0^\infty(\Omega)$ το σύνολο των συναρτήσεων, που ορίζονται στο Ω , είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες και έχουν συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω . Ο $C_0^\infty(\Omega)$ λέγεται χώρος δοκιμής, ή χώρος ελέγχου, και τα στοιχεία του ονομάζονται συναρτήσεις δοκιμής (βλ [(4), Κεφάλαιο 2.3.1]).

Ανισότητα Cauchy-Schwartz (βλ [(5), Κεφάλαιο 1])

Αν $(V, (\cdot, \cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε

$$(1.1.4) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα u, v είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Η απεικόνιση $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$ ορίζει τη νόρμα στον χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(V, (\cdot, \cdot))$.

Ορισμός. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο \mathbb{R} . Μια νόρμα $\|\cdot\|$ στο V είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το V και τιμές στο \mathbb{R} , με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i. $\|u\| > 0, u \in V$.
- ii. $\|u\| = 0$ αν και μόνο αν $u = 0$.
- iii. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, u \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.
- iv. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, u, v \in V$ (τριγωνική ανισότητα).
- v. $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|, u, v \in V$.

Μια συνάρτηση $|\cdot|$ ονομάζεται ημι-νόρμα αν ισχύουν αυτές οι ιδιότητες, με εξαίρεση την i., η οποία αντικαθίσταται από την $|u| \geq 0$, για κάθε $u \in V$ (βλ [(1), Κεφάλαιο A.1]). Η νόρμα σε ένα διανυσματικό χώρο είναι το ανάλογο της απόλυτης τιμής στο \mathbb{R} .

Η θεμελιώδης ιδιότητα που περιέχεται στον ορισμό είναι ότι κάθε νόρμα ορίζει μια «απόσταση» μεταξύ των διανυσμάτων του χώρου.

Στον χώρο $C^0(\Omega)$, οι συναρτήσεις:

$$d(u, v) = \max_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|$$

και

$$\|u(x)\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |u(x)|$$

ορίζουν την απόσταση και τη νόρμα, αντίστοιχα.

Ορισμός. Έστω X γραμμικός χώρος και G ένα υποσύνολο του X . Ονομάζουμε γραμμική θήκη του G και συμβολίζουμε με $\langle G \rangle$ το μικρότερο γραμμικό υπόχωρο που περιέχει το G .

Ορισμός. Ένα υποσύνολο B του V καλείται βάση του V αν τα στοιχεία του B είναι ανεξάρτητα και παράγουν το V . Τα στοιχεία $x \in V$ παράγουν τον χώρο V αν κάθε στοιχείο $x \in V$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Έστω V ένας γραμμικός χώρος (ή διανυσματικός χώρος) (βλ [(1), Κεφάλαιο A.1]).

Ένα γραμμικό συναρτησοειδές L στον V είναι μια συνάρτηση $L : V \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v), \quad \forall u, v \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Μια διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot, \cdot)$ στον V είναι μια συνάρτηση $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γραμμική για κάθε όρο χωριστά, δηλαδή για όλα τα $u, v, w \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \alpha(u, w) + \mu \alpha(v, w),$$

$$\alpha(w, \lambda u + \mu v) = \lambda \alpha(w, u) + \mu \alpha(w, v).$$

Επιπλέον, η διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot, \cdot)$ είναι συμμετρική εάν

$$\alpha(w, v) = \alpha(v, w), \quad \forall v, w \in V$$

και θετικά ορισμένη εάν

$$\alpha(v, v) > 0, \quad \forall v \in V, v \neq 0.$$

Μια διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot, \cdot)$ στον V είναι φραγμένη, εάν υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε

$$(1.1.5) \quad |\alpha(w, v)| \leq M \|w\| \|v\|, \quad \forall w, v \in V.$$

Ορισμός. Έστω ότι Ω είναι ένα χωρίο στον \mathbb{R}^d . Ορίζουμε ως $D(\Omega)$ ή $C_0^\infty(\Omega)$ το σύνολο των $C^\infty(\Omega)$ συναρτήσεων με συμπαγές στήριγμα στο Ω . Για μία συνεχή

συνάρτηση f στον \mathbb{R}^d , στήριγμα ορίζεται η κλειστότητα του συνόλου $\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}$ στο Ω . Επομένως, το στήριγμα είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του Ω έτσι ώστε $f = 0$ στο $\{\Omega \setminus \text{στήριγμα } f\}$.

Ορισμός. Για ένα δοσμένο χωρίο Ω , το σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ορίζεται ως

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f: f \in L^1(K) \text{ για κάθε } K \text{ συμπαγές } \subset \text{int}\Omega\},$$

$$\text{όπου } \text{int}\Omega := \{x \in \Omega: \exists \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε } B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega\}.$$

1.2 Χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Έστω Ω ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue dx . Θα συμβολίζουμε με

$$\int_{\Omega} f(x) dx,$$

το ολοκλήρωμα Lebesgue της συνάρτησης f στο χωρίο Ω .

Συμβολίζουμε με $L^1(\Omega)$ τον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων πάνω στο Ω με τιμές στον \mathbb{R} . Θέτουμε

$$(1.2.1) \quad \|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Συχνά θα γράφουμε L^1 αντί για $L^1(\Omega)$. Συνηθίζουμε να ταυτίζουμε δυο συναρτήσεις στον L^1 που συμπίπτουν σχεδόν παντού (σ.π.) (βλ [(2), Κεφάλαιο 4]).

Ορισμός. Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p \leq \infty$. Θέτουμε

$$(1.2.2) \quad L^p(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ μετρήσιμη και } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

με τη νόρμα

$$(1.2.3) \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Ορισμός. Θέτουμε

$$L^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ μετρήσιμη και } \exists \text{ σταθερά } C \text{ τέτοια ώστε } |f| \leq C \text{ σ. π. στο } \Omega\},$$

με τη νόρμα

$$(1.2.4) \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C: |f(x)| \leq C \text{ σ. π. στο } \Omega\}.$$

Συμβολίζουμε με p' τον συζυγή εκθέτη του p , δηλαδή

$$(1.2.5) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Ας δούμε κάποιες χρήσιμες ανισότητες (βλ [(5), Κεφάλαιο 1]).

Ανισότητα Hölder

Εστω $f \in L^p(\Omega)$ και $g \in L^{p'}(\Omega)$, όπου $1 \leq p \leq \infty$. Τότε $fg \in L^1$ και

$$(1.2.6) \quad \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Ανισότητα Minkowski

Για $1 \leq p \leq \infty$ και $f, g \in L^p(\Omega)$, έχουμε

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Θεώρημα 1.2.1. (βλ [(2), Κεφάλαιο 4, Θεώρημα 4.7]) Ο $L^p(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος και η απεικόνιση $\|\cdot\|: L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$(1.2.7) \quad \|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

είναι νόρμα. Η συνάρτηση

$$d(f, g) = \left\{ \int_{\Omega} |f - g|^p dx \right\}^{1/p}$$

είναι απόσταση. □

Ορισμός. Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\Omega, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα.

Θεώρημα 1.2.2. (βλ [(2), Κεφάλαιο 4, Θεώρημα 4.8]) Για κάθε $1 \leq p \leq \infty$, ο $L^p(\Omega)$ είναι χώρος Banach. □

Ορισμός. Ο τετραγωνικά ολοκληρώσιμος χώρος $L^2(\Omega)$, ορίζεται ως

$$(1.2.8) \quad L^2(\Omega) = \left\{ u(x), \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}, \text{ όπου } u(x) \text{ μετρήσιμη συνάρτηση.}$$

Στον $L^2(\Omega)$, οι συναρτήσεις:

$$d(u, w) = \left(\int_{\Omega} |u - w|^2 dx \right)^{1/2} \text{ και } \|u\|_{L^2} = \|u\|_2 = \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \right\}^{1/2}$$

σημαίνουν απόσταση και νόρμα, αντίστοιχα. Συνεπώς ο $L^2(\Omega)$ εφοδιασμένος με τις παραπάνω συναρτήσεις, είναι μετρικός και χώρος με νόρμα. Ως βάση της απόστασης ορίζεται η ισότητα δυο συναρτήσεων στον χώρο $L^2(\Omega)$, όπου δυο συναρτήσεις u, w είναι ίσες εάν και μόνο εάν $d(u, w) = 0$.

1.2.1 Εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $L^2(\Omega)$

Έστω δύο διανύσματα στον \mathbb{R}^d , $x = [x_1, \dots, x_d]^T$ και $y = [y_1, \dots, y_d]^T$, γνωρίζουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής (βλ [(3), Κεφάλαιο 2.2])

$$(1.2.9) \quad \langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Κατ' αναλογία, εάν ορίσουμε στον χώρο $L^2(\Omega)$ τη συνάρτηση

$$(1.2.10) \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2(\Omega),$$

τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες του εσωτερικού γινομένου:

- i. $(u, w) = (w, u)$, για κάθε $u, w \in L^2(\Omega)$,
- ii. $(\alpha u, w) = (u, \alpha w) = \alpha(u, w)$, για κάθε $u, w \in L^2(\Omega)$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,
- iii. $(u, w + v) = (u, w) + (u, v)$, για κάθε $u, w, v \in L^2(\Omega)$.

Η νόρμα, η απόσταση και το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $L^2(\Omega)$ συνδέονται ως εξής

$$(1.2.11) \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u, u)} = \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Ο $L^2(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert, δηλαδή έχει εσωτερικό γινόμενο και είναι πλήρης ως προς την νόρμα του $\|u\|_2$.

Ο χώρος Sobolev $H^1(\Omega)$ που θα συναντήσουμε παρακάτω, είναι ένας χώρος Hilbert με «πρότυπο» τον $L^2(\Omega)$.

Έστω V, W δύο χώροι Hilbert. Ένας γραμμικός τελεστής $B : V \rightarrow W$ είναι φραγμένος, εάν υπάρχει μια σταθερά C , τέτοια ώστε

$$(1.2.12) \quad \|Bv\|_W \leq C \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

Ορισμός. Για ένα φραγμένο τελεστή B από το V στο Y ορίζεται η νόρμα τελεστή του B με

$$\|B\| = \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|B(x)\|_Y}{\|x\|_V} \right) \quad \text{ή} \quad \|B\| = \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} (\|B\|_Y : x \in X, \|x\| \leq 1)$$

και ισχύει η ανισότητα: $\|B(x)\|_Y \leq \|B\| \|x\|_V$.

Συμβολίζουμε με V' τον δυϊκό χώρο του V , δηλαδή τον χώρο των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών στον V .

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί μια σημαντική ιδιότητα των χώρων Hilbert.

Θεώρημα 1.2.4 (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz). (βλ [(1), Κεφάλαιο Α, Θεώρημα Α.1.]) Έστω V ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) . Για κάθε φραγμένο συναρτησοειδές l στον V υπάρχει μια μοναδική $u \in V$ τέτοια ώστε

$$(1.2.13) \quad l(v) = (v, u), \quad \forall v \in V.$$

Επιπλέον,

$$(1.2.14) \quad \|l\|_{V'} = \|u\|_V. \quad \square$$

Η νόρμα του V' ορίζεται ως

$$\|l\|_{V'} := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|l(v)|}{\|v\|}.$$

1.3 Οι χώροι του Sobolev σε πολλές διαστάσεις

Οι χώροι του Sobolev είναι πολύ χρήσιμοι στη μελέτη των προβλημάτων συνοριακών τιμών για διαφορικές εξισώσεις και γενικά στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Αποτελούν το χώρο για τη διατύπωση τέτοιων προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη μέθοδο του Galerkin. Μια περιεκτική παρουσίαση μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο του Adams (1975) (βλ [(6), Κεφάλαιο 1]).

Η χρήση των χώρων Sobolev μας παρέχει δυο βασικά εργαλεία (βλ [(3), Κεφάλαιο 2.9]) :

- i. Την αντικατάσταση των συνεχών χώρων με πεπερασμένων διαστάσεων χώρους, όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις βάσης και κατ' επέκταση οποιοδήποτε σημείο του χώρου.
- ii. Τη δυνατότητα κατασκευής της ασθενούς μορφής χρησιμοποιώντας δοκιμαστικές συναρτήσεις όπου δεν εμφανίζονται τα προβλήματα συνέχειας και ολοκληρωσιμότητας.

Οι χώροι του Sobolev σε πολλές διαστάσεις μπορούν να ορισθούν σε οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^d . Ουσιαστικό ρόλο σε αυτούς παίζουν οι γενικευμένες παράγωγοι.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και έστω $p \in \mathbb{R}$, με $1 \leq p < \infty$ (βλ [(2), Κεφάλαιο 9]).

Ορισμός. Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως¹

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p \mid \exists g_1, g_2, \dots, g_d \in L^p(\Omega), \text{ τέτοια ώστε } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \right. \\ \left. \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, \dots, d \right\}$$

Θέτουμε $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Για $u \in W^{1,2}(\Omega)$, γράφουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i.$$

¹ Όταν δεν δημιουργείται σύγχυση, θα γράφουμε συχνά $W^{1,p}$ αντί $W^{1,p}(\Omega)$.

Ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$(1.3.1) \quad \|u\|_{1,p,\Omega} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Θεώρημα 1.3.1 (Χαρακτηρισμός του $W^{1,\infty}$). (βλ [(7), Κεφάλαιο 5.8, Θεώρημα 4])
Έστω Ω ανοιχτό και φραγμένο, με σύνορο $\partial\Omega$ τάξης C^1 . Τότε η $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής, αν και μόνο αν $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. \square

Ορισμός. Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, όπου $k \geq 2$ ένας ακέραιος και $1 \leq p < \infty$, είναι ο χώρος των συναρτήσεων $v \in L^p(\Omega)$ για τις οποίες όλες οι μερικές παράγωγοι του Ω , τάξης μέχρι k , είναι συνάρτηση του $L^p(\Omega)$.

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) \mid \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ για κάθε μη αρνητικό πολυδείκτη} \\ \alpha: |\alpha| \leq k, \text{ τέτοια ώστε } \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\}.$$

Ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$(1.3.2) \quad \|u\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

είναι χώρος Banach. Η νόρμα ορίζεται ως

$$(1.3.3) \quad |u|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Θέτουμε $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$. Όταν $p = 2$ γράφουμε $H^k(\Omega)$, αντί για $W^{k,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ και $|\cdot|_{k,\Omega}$ αντί για $\|\cdot\|_{k,2,\Omega}$ και $|\cdot|_{k,2,\Omega}$.

Ο $H^k(\Omega)$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(1.3.4) \quad (u, v)_{k,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{0,\Omega}$$

είναι χώρος Hilbert.

Παρακάτω θα ορίσουμε τους χώρους Hilbert-Sobolev $H^1(\Omega)$ και $H^2(\Omega)$.

$$(1.3.5) \quad H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\},$$

$$(1.3.6) \quad H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 2\}.$$

Από την άλλη, ο χώρος $W^{k,\infty}(\Omega)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$(1.3.7) \quad \|u\|_{k,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

είναι χώρος Banach. Και η αντίστοιχη νόρμα ορίζεται από

$$(1.3.8) \quad |u|_{k,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Πρόταση 1.3.1 (βλ [(6),Κεφάλαιο 1.2, (vi)]) *Υποθέτουμε ότι Ω είναι ένα οποιοδήποτε χωρίο, k_1, k_2 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $k_1 \leq k_2$ και p ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $1 \leq p \leq \infty$, τότε*

$$W^{k_2,p}(\Omega) \subset W^{k_1,p}(\Omega). \quad \square$$

Ο χώρος H_0^1 . Ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ είναι πλήρης υπόχωρος του $H^1(\Omega)$ και θα παίξει σημαντικό ρόλο στην μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών και τη διακριτοποίηση τους με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων.

Ορισμός. (βλ [(4), Κεφάλαιο 2]) Έστω Ω ένα χωρίο του \mathbb{R}^d . Ο χώρος $H_0^1 := H_0^1(\Omega)$ αποτελείται από τα στοιχεία του $H^1(\Omega)$ που είναι όρια στη νόρμα $\|\cdot\|_1$ ακολουθιών συναρτήσεων δοκιμής.

Σχέση μεταξύ H_0^1 και H^1 (βλ [(4), Κεφάλαιο 2])

- i. Στην περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^d$, ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ συμπίπτει με τον $H^1(\Omega)$. Στην περίπτωση που $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, ο $H_0^1(\Omega)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $H^1(\Omega)$.
- ii. Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^d με σύνορο $\partial\Omega$ της κλάσης C^1 . Τότε ένα στοιχείο u του $H^1(\Omega)$ ανήκει στον $H_0^1(\Omega)$, αν και μόνο αν το ίχνος της u στο $\partial\Omega$ είναι 0, δηλαδή

$$(1.3.9) \quad H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Ανάλογα με τον $H_0^1(\Omega)$ ορίζονται και οι χώροι $H_0^k(\Omega)$ για $k \in \mathbb{N}$. Ο $H_0^k(\Omega)$ αποτελείται από τα στοιχεία του $H^k(\Omega)$ που είναι όρια ακολουθιών συναρτήσεων δοκιμής, στη νόρμα του $H^k(\Omega)$. Στην περίπτωση που το σύνορο $\partial\Omega$ είναι αρκετά ομαλό, παραδείγματος χάρη της κλάσης C^k . Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση $u \in H^k(\Omega)$ ανήκει στον $H_0^k(\Omega)$, αν και μόνο αν $(D^\alpha u)|_{\partial\Omega} = 0$, για κάθε πολυδείκτη

$\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ τάξης το πολύ $k - 1$. Τέλος, ας σημειωθεί η διαφορά μεταξύ των χώρων $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ και $H_0^2(\Omega)$:

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega): u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega): u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_{x_i}|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, d\}.$$

Ορισμός. Έστω $1 \leq p < \infty$. Συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(\Omega)$ το κλειστό περίβλημα του $C_0^\infty(\Omega)$, εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$. Γράφουμε $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Θεώρημα 1.3.2 (βλ [(7)]) Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξης C^1 . Έστω

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ με } 1 \leq p < \infty.$$

Τότε οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες

- i. $u = 0$ στο $\partial\Omega$
- ii. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

Με $W^{-1,p'}(\Omega)$ συμβολίζουμε τον δυϊκό χώρο του $W_0^{1,p}(\Omega)$, με $1 \leq p < \infty$, και με $H^{-1}(\Omega)$ τον δυϊκό του $H_0^1(\Omega)$. Με άλλα λόγια, η f ανήκει στον $H^{-1}(\Omega)$ υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι ένα γραμμικό φραγμένο συναρτησιακό στον $H_0^1(\Omega)$.

Θα γράφουμε $\langle \cdot, \cdot \rangle$ για να υποδηλώσουμε την αντιστοίχιση του $H^{-1}(\Omega)$ με τον $H_0^1(\Omega)$ (βλ [(7), Κεφάλαιο 5.9]).

Ταυτίζουμε τον $L^2(\Omega)$ με τον δυϊκό του, αλλά δεν ταυτίζουμε τον $H_0^1(\Omega)$ με τον δυϊκό του. Επίσης, αποδεικνύεται ότι $W_0^{k,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ και ότι αν ο Ω έχει ένα Lipschitz συνεχές σύνορο, το $W^{k,p}(\Omega)$ είναι όντως η κλειστότητα του $C^\infty(\bar{\Omega})$ με σεβασμό στη νόρμα $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$. Δηλαδή το $C^\infty(\bar{\Omega})$ είναι πυκνό στο $W^{k,p}(\Omega)$.

Συχνά, είναι χρήσιμο να θεωρούμε τον χώρο Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, όπου $k \in \mathbb{R}$ και $1 \leq p < \infty$. Αν $\Omega = \mathbb{R}^d$ και $p = 2$, το $W^{k,2}(\mathbb{R}^d) = H^k(\mathbb{R}^d)$ μπορεί να χαρακτηριστεί με το μετασχηματισμό Fourier $\hat{u}(\xi)$ (βλ [(6), Κεφάλαιο 1])

$$(1.3.10) \quad H^k(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) | (1 + |\xi|^2)^{k/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Όταν θεωρούμε συναρτήσεις $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, χρησιμοποιούμε επίσης το χώρο

$$(1.3.11) \quad H(\operatorname{div}; \Omega) := \{u \in (L^2(\Omega))^d | \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\},$$

ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$(1.3.12) \quad \|u\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} := \left(u_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div}u\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αν ο Ω έχει Lipschitz συνεχές σύνορο, το $H(\operatorname{div};\Omega)$ είναι η κλειστότητα του $(C^\infty(\bar{\Omega}))^d$ με σεβασμό στη νόρμα $\|\cdot\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}$.

Όταν θεωρούμε χωρο-χρονικές συναρτήσεις $u(t,x)$, $(t,x) \in Q_T := (0,T) \times \Omega$,

εισάγουμε το χώρο

$$L^q(0,T;W^{k,p}(\Omega)) := \left\{ \begin{array}{l} u: (0,T) \rightarrow W^{k,p}(\Omega) \mid u \text{ μετρήσιμο} \\ \text{και} \int_0^T \|v(t)\|_{k,p,\Omega}^q dt < \infty \end{array} \right\},$$

με $1 \leq p < \infty$ και ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{L^q(0,T;W^{k,p}(\Omega))} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_{k,p,\Omega}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Στη συνέχεια, θα μιλήσουμε για την πιθανότητα εκχώρησης συνοριακών τιμών από το $\partial\Omega$ σε μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$, υποθέτοντας ότι το $\partial\Omega$ είναι κλάσης C^1 . Τώρα εάν $u \in C(\bar{\Omega})$, τότε προφανώς το u παίρνει τιμές στο $\partial\Omega$. Το πρόβλημα είναι ότι μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$ δεν είναι πάντα συνεχής, αλλά μόνο ορισμένη σχεδόν παντού στο Ω . Η ιδέα ενός τελεστή ίχνους επιλύει το πρόβλημα αυτό.

Έστω $1 \leq p < \infty$.

Θεώρημα 1.3.3 (Θεώρημα Ίχνους). (βλ [(6), Κεφάλαιο 1.3, Θεώρημα 1.3.1])
Υποθέτουμε ότι το Ω είναι φραγμένο και το $\partial\Omega$ είναι κλάσης C^1 . Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

τέτοιος ώστε

- i. $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$ αν $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ και
- ii. $\|\gamma u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, με την σταθερά C να εξαρτάται μόνο από τα p και Ω . □

Ορισμός. Θα καλούμε γ το ίχνος της u στο $\partial\Omega$.

Σημαντική είναι η μελέτη των εμφυτεύσεων μεταξύ χώρων Sobolev. Το κύριο εργαλείο για αυτήν είναι οι αποκαλούμενες ανισότητες τύπου Sobolev τις οποίες θα δούμε παρακάτω για ομαλές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.3.4 (Θεώρημα ενσωμάτωσης Sobolev). (βλ [(6), Κεφάλαιο 1.3, Θεώρημα 1.3.4]) Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^d με ένα Lipschitz συνεχές σύνορο και $1 \leq p < \infty$. Τότε διατηρούνται οι ακόλουθες συνεχείς ενσωματώσεις:

- i. Αν $0 \leq kp < d$, τότε $W^{k,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ για $p^* = \frac{dp}{d-kp}$.
- ii. Αν $kp = d$, τότε $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ για κάθε $p \leq q < \infty$.
- iii. Αν $kp > d$, τότε $W^{k,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$. □

Θεώρημα 1.3.5 (Θεώρημα συμπαγοποίησης Rellich-Kondrachov). (βλ [(6), Κεφάλαιο 1.3, Θεώρημα 1.3.5]) Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα ανοιχτό σύνολο του \mathbb{R}^d με ένα Lipschitz συνεχές σύνορο και $1 \leq p < \infty$. Τότε οι ακόλουθες ενσωματώσεις είναι συμπαγείς:

- i. Αν $0 < kp < d$, τότε $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ για κάθε q τέτοιο ώστε $1 \leq q < p^* = \frac{dp}{d-kp}$.
- ii. Αν $kp = d$, τότε $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ για κάθε q τέτοιο ώστε $1 \leq q < \infty$.
- iii. Αν $kp > d$, τότε $W^{k,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$.
- iv. Αν $p > \frac{2d}{d+2}$, τότε $L^p(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Συγκεκριμένα, το $H^k(\Omega)$ είναι ενσωματωμένο συμπαγές στο $H^{k-1}(\Omega)$, όπου k ένας μη αρνητικός ακέραιος. □

Θεώρημα 1.3.6 (Ανισότητα παρεμβολής Gagliardo-Nirenberg). (βλ [(6), Κεφάλαιο 1.3, Θεώρημα 1.3.6]) Έστω (a, b) ένα φραγμένο διάστημα. Τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$(1.3.13) \quad \max_{a \leq x \leq b} |v(x)| \leq \left(\frac{1}{b-a} + 2 \right)^{1/2} \|v\|_0^{1/2} \|v\|_1^{1/2}, \quad \forall v \in H^1(a, b). \quad \square$$

Θεώρημα 1.3.7 (Θεώρημα παρεμβολής). (βλ [(6), Κεφάλαιο 1.3, Θεώρημα 1.3.7])

Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα ανοιχτό χωρίο του \mathbb{R}^d με ένα Lipschitz συνεχές σύνορο.

Εστω $s_1 < s_2$ δυο πραγματικοί αριθμοί και θέτουμε $r = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2, 0 \leq \theta \leq 1$.

Τότε υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$(1.3.14) \quad \|v\|_r \leq C \|v\|_{s_1}^{1-\theta} \|v\|_{s_2}^{\theta}, \quad \forall v \in H^{s_2}(\Omega). \quad \square$$

Ο τύπος του Green (βλ [(4), Κεφάλαιο 4.1])

Εστω Ω ένα φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^d με σύνορο $\partial\Omega$ της κλάσης C^1 . Αποδεικνύεται τότε ότι ισχύει ο τύπος του Green

$$(1.3.15) \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i dy, \quad i = 1, \dots, d,$$

με n_i την i -οστή συνιστώσα του μοναδιαίου κάθετου εξωτερικού διανύσματος n στο $\partial\Omega$. Από την (1.3.15) προκύπτει ότι

$$(1.3.16) \quad \forall u \in H^2(\Omega) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dy,$$

με $\frac{\partial u}{\partial n}$ την κατά κατεύθυνση παράγωγο της u στην κατεύθυνση του μοναδιαίου κάθετου εξωτερικού διανύσματος n στο $\partial\Omega$. Οι ασθενείς μερικές παράγωγοι u_{x_i} ανήκουν στον $H^1(\Omega)$, αφού $u \in H^2(\Omega)$, συνεπώς ορίζεται και το ίχνος τους στο σύνορο $\partial\Omega$, οπότε $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$.

Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, πιο συχνά γίνεται με την Green formula.

Θεώρημα 1.3.8 (Ανισότητα Poincaré). (βλ [(6), Κεφάλαιο 1.3, Θεώρημα 1.3.3])

Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα φραγμένο συνδεδεμένο ανοιχτό σύνολο του \mathbb{R}^d και το Σ

ένα μη κενό Lipschitz συνεχές υποσύνολο του συνόρου $\partial\Omega$. Τότε υπάρχει μια σταθερά

$C_{\Omega} > 0$ τέτοια ώστε

$$(1.3.17) \quad \int_{\Omega} v^2(x) dx \leq C_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx, \quad \forall v \in H_{\Sigma}^1(\Omega). \quad \square$$

2. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σημαντικό κλάδο της Αριθμητικής Ανάλυσης αποτελεί η Αριθμητική Προσέγγιση των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις χρησιμεύουν στη διατύπωση ερωτημάτων για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, οι οποίες είτε λύνονται αναλυτικά, είτε προσεγγιστικά. Υπάρχουν περιπτώσεις διαφορικών συστημάτων για τα οποία οι αναλυτικές λύσεις είναι γνωστές, παρ' όλα αυτά, γενικά θα πρέπει να στοχεύουμε σε κάποια προσεγγιστική ή σε κάποια αριθμητική μέθοδο για την επίλυση τους.

Στο εξής, θα θεωρούμε ότι ένα πρόβλημα είναι καλά-τοποθετημένο, αν έχει μια μοναδική λύση, η οποία εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος. Στόχος μας, θα είναι να περιγράψουμε, να κατασκευάσουμε και να μελετήσουμε ως προς διάφορα χαρακτηριστικά, διάφορες αριθμητικές μεθόδους για την προσέγγιση του δεδομένου μας προβλήματος (βλ [(8), Πρόλογος]).

Υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων, για την προσέγγιση της λύσης των προβλημάτων αυτών, η Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών και η Μέθοδος Πεπερασμένων στοιχείων.

Εμείς θα εστιάσουμε στις ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, όπου σε αντίθεση με τις παραβολικές ή τις υπερβολικές εξισώσεις, οι εξισώσεις ελλειπτικής μορφής περιγράφουν τη στατική συμπεριφορά ενός μεγέθους σε συγκεκριμένη περιοχή (βλ [(9), Κεφάλαιο 10]).

2.1 Ελλειπτικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Οι ελλειπτικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται σε μια ποικιλία εφαρμογών, μοντελοποιώντας, για παράδειγμα διάφορα πιθανά πεδία όπως της ηλεκτροστατικής

και της μαγνητοστατικής, πυκνότητες πιθανότητας σε τυχαίους περίπατους, τη στάσιμη ροή θερμότητας και βιολογικά φαινόμενα.

Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή δεύτερης τάξης L , ο οποίος ορίζεται ως

$$(2.1.1) \quad Lu := - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u,$$

όπου $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $a_0 = a_0(x)$ δοσμένες συναρτήσεις και υποθέτουμε ότι $a_{ij} = a_{ji}$ (βλ [(6), Κεφάλαιο 6.1]).

Σε προβλήματα συνοριακών τιμών, η μερική διαφορική εξίσωση συνοδεύεται από συνοριακές συνθήκες στο σύνορο του Ω , το οποίο συμβολίζουμε με $\partial\Omega$. Οι τύποι των συνοριακών συνθηκών ορίζονται παρακάτω (βλ [(10), Κεφάλαιο 10.1]) :

i. Συνθήκη Dirichlet:

$$u = g \text{ στο } \partial\Omega.$$

Βάση αυτής της συνθήκης προσδιορίζεται η τιμή της λύσης u στη συνοριακή περιοχή.

ii. Συνθήκη Neumann:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_j = g, \quad \text{στο } \partial\Omega,$$

όπου $v = (v_1, \dots, v_N)^T$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$.

Προσδιορίζει την κανονική ή κάθετη παράγωγο της λύσης u στη συνοριακή περιοχή.

iii. Συνθήκη του Robin:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_j + \sigma u = g, \quad \text{στο } \partial\Omega,$$

όπου $\sigma \geq 0$ στο $\partial\Omega$. Αυτή η συνθήκη αποτελεί συνδυασμό των συνθηκών Neumann και Dirichlet.

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε κυρίως στο παρακάτω πρόβλημα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet (βλ [(6), Κεφάλαιο 6]), δηλαδή σε πρόβλημα της μορφής

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} Lu = f \text{ στο } \Omega \\ u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου Ω ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, με τουλάχιστον Lipschitz συνεχές σύνορο $\partial\Omega$ και $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνωστή συνάρτηση.

Λέμε ότι μια μερική διαφορική εξίσωση είναι αποκλίνουσας μορφής, εάν ο τελεστής L δίνεται από την σχέση (2.1.1).

Ορισμός. (βλ [(2), Κεφάλαιο IX]) Κλασική ή ισχυρή λύση της (2.1.2) είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\bar{\Omega})$, η οποία ικανοποιεί την (2.1.2).

Ορισμός. (βλ [(7), Κεφάλαιο 6.1]) Ο διαφορικός τελεστής L είναι ελλειπτικός στο Ω , εφόσον υπάρχει $c \geq 0$, τέτοιο ώστε

$$(2.1.3) \quad \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^d$ και σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$.

Ελλειπτικότητα, επίσης, σημαίνει ότι για κάθε $x \in \Omega$, ο συμμετρικός $n \times n$ πίνακας $A(x) = (a_{ij}(x))$ είναι θετικά ορισμένος, με τη μικρότερη ιδιοτιμή μεγαλύτερη ή ίση του c .

Θεώρημα 2.1.1 (Η Αρχή του Μεγίστου-Ελαχίστου). (βλ [(1), Κεφάλαιο 3.2, Θεώρημα 3.1]) Έστω ο διαφορικός τελεστής L , ο οποίος δίνεται από την σχέση (2.1.1) και υποθέτουμε ότι $u \in C^2(\bar{\Omega})$ και $Lu \leq 0$ ή $Lu \geq 0$ στο Ω .

i. Εάν $a_0 = 0$, τότε

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{ή} \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u .$$

ii. Εάν $a_0 \geq 0$, τότε

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max \left\{ \max_{\partial\Omega} u, 0 \right\} \quad \text{ή} \quad \min_{\bar{\Omega}} u \geq \min \left\{ \min_{\partial\Omega} u, 0 \right\}. \quad \square$$

Το θεώρημα 2.1.1 υποδηλώνει σταθερότητα στη maximum-νόρμα ή minimum-νόρμα, αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.1.2 (βλ [(1), Κεφάλαιο 3.2, Θεώρημα 3.2]) Έστω $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Τότε υπάρχει μια σταθερά C , τέτοια ώστε

$$(2.1.4) \quad \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|u\|_{C(\partial\Omega)} + C \|Lu\|_{C(\bar{\Omega})}. \quad \square$$

2.2 Μεταβολική διατύπωση του προβλήματος Dirichlet

2.2.1 Το πρόβλημα Dirichlet με ομογενείς συνοριακές συνθήκες

Η ακόλουθη τεχνική περιγράφει τις βασικές αρχές της μεταβολικής μεθόδου στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Καταρχάς, δίνουμε τον ακριβή ορισμό της ασθενούς λύσεως, η οποία χρησιμοποιεί τους χώρους Sobolev ως βασικά εργαλεία. Για την ύπαρξη και μοναδικότητα της ασθενούς λύσεως με τη μεταβολική μέθοδο, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Lax-Milgram. Τέλος, δείχνουμε ότι η ασθενής λύση είναι ομαλή και επιστρέφουμε στις κλασικές λύσεις, δηλαδή δείχνουμε ότι μια ασθενής λύση είναι κλασική (βλ [(2), Κεφάλαιο VIII]).

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.1.2), με τον τελεστή L να έχει την αποκλίνουσα μορφή (2.1.1). Το αρχικό μας βήμα για να λύσουμε το πρόβλημα θα είναι να ορίσουμε και να κατασκευάσουμε μια κατάλληλη ασθενή λύση $u \in H_0^1(\Omega)$ για την (2.1.2).

Υποθέτουμε ότι $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$. Κάθε $f \in L^2(\Omega)$ ορίζει ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $v \rightarrow (f, v)$ στον $H_0^1(\Omega)$.

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την $Lu = f$ με την δοκιμαστική συνάρτηση $v \in H_0^1(\Omega)$ και ύστερα ολοκληρώνουμε στο Ω , οπότε προκύπτει

$$(2.2.1) \quad \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 uv \right] dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Παρατηρούμε πως δεν υπάρχουν συνοριακοί όροι, καθώς $u = 0$ στο $\partial\Omega$.

Λέμε ότι η $u \in H_0^1(\Omega)$ είναι η ασθενής ή μεταβολική λύση του προβλήματος (2.1.2), η οποία από το θεώρημα Lax-Milgram, που θα δούμε παρακάτω, είναι και μοναδική για $f \in L^2(\Omega)$.

Ορισμός. Η διγραμμική μορφή $a(\cdot, \cdot)$ που συνδέεται με τον ελλειπτικό τελεστή απόκλισης L ορίζεται ως

$$(2.2.2) \quad \alpha(u, v) := \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 uv \right] dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Αν επιλέξουμε τον κλειστό υπόχωρο V του $H^1(\Omega)$, τέτοιο ώστε

$$V = H_0^1(\Omega)$$

και υποθέσουμε ότι

$$a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega),$$

τότε το $\alpha(\cdot, \cdot)$ θα είναι ορισμένο στον $V \times V$.

Λέμε ότι το $u \in H_0^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1.2) αν για κάθε $v \in H_0^1(\Omega)$

$$(2.2.3) \quad \alpha(u, v) = (f, v).$$

Η διατύπωση αυτή του προβλήματος λέγεται ασθενής ή γενικευμένη (γιατί σε αυτή χρησιμοποιούνται μόνο οι πρώτες παράγωγοι κατ' αντιδιαστολή προς το αρχικό πρόβλημα (2.1.2), όπου εμφανίζονται και δεύτερες παράγωγοι).

Θεώρημα 2.2.1 (Lax–Milgram). (βλ [(6), Κεφάλαιο 5.1.1, Θεώρημα 5.1.1]) *Εστω V ένας (πραγματικός) χώρος Hilbert και $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ μια διγραμμική σχέση για την οποία υπάρχουν σταθερές $m, n > 0$ ανεξάρτητες των $u, v \in V$ τέτοιες ώστε η $\alpha(\cdot, \cdot)$ να είναι συνεχής και φραγμένη, δηλαδή*

$$(2.2.4) \quad |\alpha(u, v)| \leq m \|u\| \|v\|, \quad u, v \in V$$

και V -ελλειπτική, δηλαδή

$$(2.2.5) \quad n \|u\|_V^2 \leq \alpha(u, u), \quad u \in V.$$

Εστω $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ ένα γραμμικό και φραγμένο συναρτησοειδές στον V , δηλαδή

$$l(v) := \int_{\Omega} f v \, dx = \langle f, v \rangle$$

όπου $f \in V^$. Τότε υπάρχει μοναδικό $u \in V$ τέτοιο ώστε για κάθε $v \in V$*

$$(2.2.6) \quad \alpha(u, v) = \langle f, v \rangle.$$

Επιπρόσθετα, ορίζεται η εκ των προτέρων εκτίμηση (a-priori estimate)

$$(2.2.7) \quad \|u\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V_1}. \quad \square$$

Το θεώρημα Lax-Milgram είναι ένα απλό και αποτελεσματικό εργαλείο για την επίλυση γραμμικών ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Εάν $f \in L^2(\Omega)$ και $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ικανοποιεί την (2.1.2), τότε λέμε ότι είναι ισχυρή λύση. Μια ασθενής λύση που ανήκει στο H^2 είναι κλασική.

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(2.2.8) \quad \begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \text{ στο } \Omega, \\ u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου ο L είναι της μορφής (2.1.1), $f^i \in L^2(\Omega)$, $i = 0, \dots, n$ και $f = f^0 - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f^i}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$, όπου $H^{-1}(\Omega)$ ο δυικός του $H_0^1(\Omega)$.

Ορισμός. Λέμε ότι η $u \in H_0^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1.2)

$$\alpha(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

όπου

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f^0 v - \sum_{i=1}^d f^i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ η αντιστοίχιση του χώρου $H^{-1}(\Omega)$ με τον $H_0^1(\Omega)$.

Εύκολα διαπιστώνουμε για την περίπτωση $a_{ij} = 1$, $a_0 = 1$, πως υπάρχει μοναδική λύση.

Θεώρημα 2.2.2 (βλ [(1), Κεφάλαιο 2, Θεώρημα 2.4]) Έστω $f \in L^2$. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.1.2), έχει μια μοναδική λύση και επιπλέον υπάρχει μια σταθερά C ανεξάρτητη της f , τέτοια ώστε

$$(2.2.9) \quad \|u\|_1 \leq C \|f\|. \quad \square$$

Η ασθενής λύση συνδέεται με ελαχιστοποίηση κατάλληλης ενέργειας, μέσω του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.2.3 (Η Αρχή Dirichlet). (βλ [(2), Κεφάλαιο IX, Θεώρημα IX.21]) Στο πρόβλημα (2.1.2) θα θεωρήσουμε $a_{ij} = 1$ και $a_0 = 1$. Για κάθε $f \in L^2(\Omega)$, υπάρχει $u \in H_0^1(\Omega)$ μοναδική ασθενής λύση του (2.3.1). Επιπλέον, η u είναι λύση του προβλήματος

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_{\Omega} f v \right\}. \quad \square$$

Θεώρημα 2.2.4 (βλ [(11), Κεφάλαιο 2.2, θεώρημα 2.3]) Το πρόβλημα (2.1.2) και το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης είναι ισοδύναμα. Επιπρόσθετα, υπάρχει μια μοναδική λύση $u \in V$ των προβλημάτων και ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση ευστάθειας

$$\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}. \quad \square$$

2.2.2 Το πρόβλημα Dirichlet με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

Ας δούμε τώρα το πρόβλημα για μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες (βλ [(1), Κεφάλαιο 3.5])

$$(2.2.10) \quad \begin{cases} Lu = f \text{ στο } \Omega \\ u = g \text{ στο } \partial\Omega \end{cases},$$

όπου υποθέτουμε ότι $f \in L^2(\Omega)$ και $g \in L^2(\partial\Omega)$. Για την ασθενή διατύπωση του προβλήματος ψάχνουμε $u \in H^1(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$(2.2.11) \quad \alpha(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \text{με } \gamma u = g,$$

όπου $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$, ο τελεστής ίχνους² και

$$(2.2.12) \quad l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx = \langle f, v \rangle.$$

Για την ύπαρξη λύσης, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g στο $\partial\Omega$ είναι το ίχνος κάποιων συναρτήσεων $u_0 \in H^1(\Omega)$, δηλαδή $g = \gamma u_0$. Θέτουμε $w = u - u_0$ και ψάχνουμε $w \in H_0^1(\Omega)$, η οποία να ικανοποιεί την

² Βλέπε θεώρημα 1.3.3, σελίδα 27

$$(2.2.13) \quad \alpha(w, v) = \langle f, v \rangle - a(u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Το δεξί μέλος της ισότητας αυτής είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $H_0^1(\Omega)$ και από το θεώρημα Lax-Milgram υπάρχει μοναδική $w \in H_0^1(\Omega)$, η οποία να ικανοποιεί την (2.2.8). Έτσι, η (2.2.6) έχει μοναδική ασθενή λύση u , η οποία είναι ανεξάρτητη της επέκτασης u_0 με συνοριακές συνθήκες g .

Η εκ των προτέρων εκτίμηση (2.2.7) παίρνει την μορφή (βλ [(6), Κεφάλαιο 6.1.2])

$$\|u\|_1 \leq \|w\|_1 + \|u_0\|_1.$$

2.2.3 Ομαλότητα των ασθενών λύσεων

Ορισμός (βλ [(2), Κεφάλαιο IX.6]). Λέμε ότι ένα ανοιχτό Ω είναι τάξεως C^m , $m \geq 1$ ακέραιος, αν για κάθε $x \in \partial\Omega$ υπάρχει περιοχή U του x στον \mathbb{R}^d και μια απεικόνιση $H : Q \rightarrow U$ αμφιμονοσήμαντη και επί τέτοια ώστε

$$H \in C^m(\bar{Q}), \quad H^{-1} \in C^m(\bar{U}), \quad H(Q_+) = U \cap \Omega, \quad H(Q_0) = U \cap \partial\Omega.$$

Λέμε ότι το Ω είναι τάξεως C^∞ , αν το Ω είναι τάξεως C^m για κάθε m .

Θεώρημα 2.2.5 (Ομαλότητα για το πρόβλημα Dirichlet). (βλ [(2), Κεφάλαιο IX.6, Θεώρημα IX.25]) Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του C^2 με $\partial\Omega$ φραγμένο. Έστω $f \in L^2(\Omega)$, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $a_0 \geq 0$ και $u \in H_0^1(\Omega)$ που ικανοποιούν την

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + a_0 uv = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Τότε $u \in H^2(\Omega)$ και $\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2}$, όπου C μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το Ω . Επιπλέον, αν το Ω είναι τάξεως C^{m+2} , $m \geq 1$, $a_{ij} \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ και αν $f \in H^m(\Omega)$, τότε

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ με } \|u\|_{H^{m+2}} \leq C \|\Delta u\|_m = C \|f\|_{H^m}.$$

Τέλος, αν το Ω είναι τάξεως C^∞ και αν $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, τότε $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. \square

3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων για την προσέγγιση της επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτές είναι οι Μέθοδοι Πεπερασμένων Διαφορών (ΜΠΔ) και οι Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ).

Στην παρούσα διπλωματική, θα εξετάσουμε την ΜΠΣ. Διάφορες εκδόσεις της μεθόδου αποτελούν η Μέθοδος Galerkin, μαζί με την επέκτασή της, τη γενικευμένη Μέθοδο Galerkin.

Αν και αποτελεί μια προσεγγιστική μέθοδο, η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι αξιόπιστη και έχει ένα πολύ ευρύ φάσμα εφαρμογής.

Η συγκεκριμένη μέθοδος, ωστόσο, μειονεκτεί στις απαιτήσεις υπολογιστικής ισχύος, φαινόμενο ιδιαίτερα έντονο στα πιο πολύπλοκα μοντέλα. Φυσικά, η πρόοδος της τεχνολογίας και η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών συντέλεσε θετικά στην καταπολέμησή του προβλήματος αυτού.

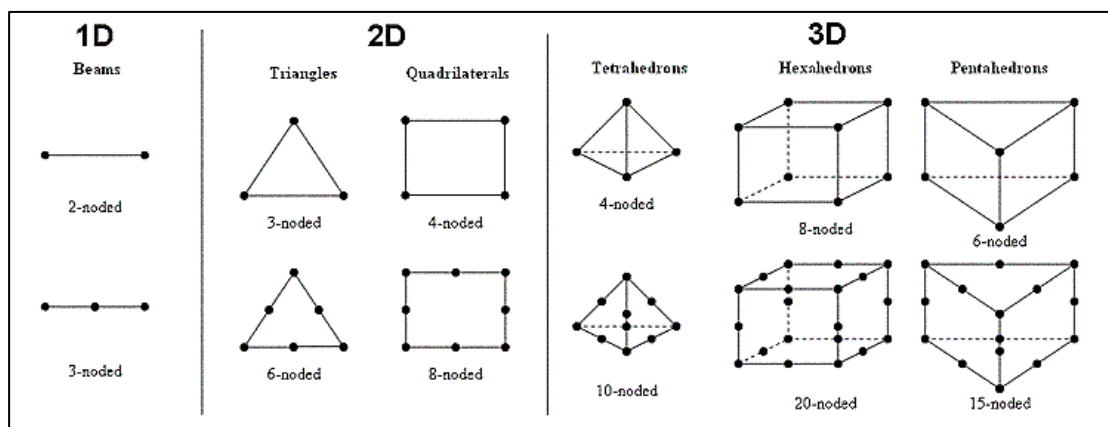
Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων έχει αποδειχθεί αποτελεσματική και χρήσιμη σε τόσους επιστημονικούς και βιομηχανικούς κλάδους, ώστε να χρησιμοποιείται ακόμη και στις μέρες μας.

Τέλος, αποτελώντας την μετεξέλιξη των μητρωϊκών μεθόδων για διαφορικές εξισώσεις, έχει χρησιμοποιηθεί και διαδοθεί από εξέχουσες προσωπικότητες της επιστήμης, όπως ο Boris Galerkin, ο Walter Ritz, ο Ιωάννης Αργύρης και πολλοί άλλοι (βλ [(12), Κεφάλαιο 1]).

3.1 Μεθοδολογία

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet (2.1.2) με πεπερασμένα στοιχεία, μπορεί να χωριστεί σε πέντε φάσεις (βλ [(9), Κεφάλαιο 10.8]).

Φάση 1: Διαμερίζουμε την περιοχή Ω σε ένα πεπερασμένο πλήθος απλών υποσυνόλων. Ο τρόπος διακριτοποίησης εξαρτάται από την επιλογή διαστάσεων σχεδίασης της δεδομένης διάταξης στον χώρο, δηλαδή αν είναι σε μια, δυο ή τρεις διαστάσεις (εικόνα 1). Το μεγάλο προτέρημα των τριγωνικών και τετραεδρικών στοιχείων είναι ότι οποιαδήποτε πολυγωνική διάταξη μπορεί να προσεγγιστεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια.



Εικόνα 1: Συνήθεις τύποι πεπερασμένων στοιχείων. [βλ (13)]

Φάση 2: Αν V είναι ο χώρος της θεωρητικής λύσης του προβλήματος (2.1.2), διαλέγουμε έναν υπόχωρο V_h πεπερασμένης διάστασης. Συνήθως τον σύνολο V_h είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου $C(\bar{\Omega})$ ή του $C^1(\bar{\Omega})$. Τα στοιχεία του συνόλου V_h τις περισσότερες φορές είναι πολυώνυμα ορισμένα σε κάθε τμήμα ορισμού του Ω . Η συνάρτηση παρεμβολής αποτελεί τη συνάρτηση με την οποία ο επιλυτής θα προσεγγίσει τις λύσεις του ανάλογου πεδίου μέσα στον χώρο, ο οποίος αποτελείται από το εσωτερικό του στοιχείου που χρησιμοποιείται κάθε φορά, εκτός τους κόμβους.

Φάση 3: Διαλέγουμε μια βάση $\{\varphi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, M_h$ του χωρίου V_h . Αν u παριστάνει την θεωρητική λύση και u_h την αντίστοιχη προσεγγιστική, τότε επειδή $u_h \in V_h$, μπορούμε να γράψουμε,

$$u_h = \sum_{i=1}^{M_h} \xi_i \varphi_i.$$

Οι συναρτήσεις βάσεις φ_i κατασκευάζονται με όσο το δυνατόν μικρότερο φορέα, είναι τμηματικά πολώνυμα 1^{ου} ή μεγαλύτερου βαθμού, και προσδιορίζονται με ένα πλήθος συνθηκών παρεμβολής.

Φάση 4: Το πρόβλημα (2.1.2) μετασχηματίζεται στην ασθενή μορφή, και εν συνέχεια εφαρμόζουμε μια διακριτή μέθοδο προσέγγισης της ασθενούς μορφής, με ένα σύνολο προσεγγιστικών εξισώσεων με άγνωστους τους συντελεστές ξ_i , $i = 1, 2, \dots, M_h$. Αν ο τελεστής L είναι γραμμικός, τότε οι προσεγγιστικές εξισώσεις είναι ένα $n \times n$ γραμμικό σύστημα της μορφής $A\xi = F$, όπου ο πίνακας A είναι αραιός. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι προσέγγισης της ασθενούς μορφής του προβλήματος, μεταξύ αυτών ξεχωρίζει η μέθοδος Galerkin. Για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα (2.1.2) με την μέθοδο Galerkin, ψάχνουμε $u_h \in V_h$, τέτοια ώστε

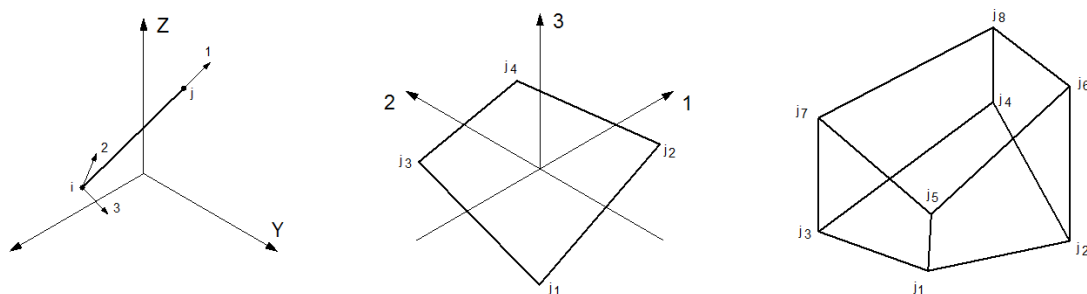
$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Φάση 5: Το γραμμικό σύστημα επιλύεται με έναν από τους γνωστούς αλγόριθμους επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Με τον όρο πεπερασμένα στοιχεία θα εννοούμε τις συναρτήσεις βάσης φ_i , τις οποίες χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση της λύσης u .

3.2 Τύποι πεπερασμένων στοιχείων

Οι τύποι των πεπερασμένων στοιχείων διακρίνονται κυρίως βάσει των διαστάσεων στις οποίες αναπτύσσονται στον Γραμμικό (μονοδιάστατο), στον Επιφανειακό (δισδιάστατο) και στον Χωρικό τύπο (πολυδιάστατο).



Εικόνα 2: Γραμμικό, Επιφανειακό και Χωρικό στοιχείο στο λογισμικό SAP 2000. [βλ (14)]

Ο γραμμικός τύπος είναι ο πιο απλός, ακολουθούν τα επιφανειακά στοιχεία, ενώ περισσότερο σύνθετα είναι τα χωρικά (κυβικά) στοιχεία (βλ [(14), Κεφάλαιο 1]). Για παράδειγμα, στις δύο διαστάσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως τυπικά επιφανειακά στοιχεία τρίγωνα. Η ένωση όλων των τριγώνων αποτελούν το «πλέγμα». Τότε πολυώνυμα ορίζονται σε κάθε τρίγωνο στο πλέγμα τα οποία απαρτίζουν το σύνολο των συναρτήσεων βάσης του τριγωνικού στοιχείου (βλ [(3), Κεφάλαιο 2.8.1]). Συνήθως, κάθε συνάρτηση βάσης παίρνει την τιμή 1 σε ένα κόμβο, και 0 στους άλλους, ως εξής:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Παραδείγματος χάρη, όταν χρησιμοποιούμε γραμμικά στοιχεία οι συναρτήσεις βάσης είναι γραμμικά πολυώνυμα 1^{ου} βαθμού, της μορφής

$$\varphi_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y.$$

Οι συναρτήσεις για τη βάση στα τετραγωνικά στοιχεία είναι γραμμικά πολυώνυμα 2^{ου} βαθμού και στα κυβικά στοιχεία γραμμικά πολυώνυμα 3^{ου} βαθμού.

3.3 Πεπερασμένα στοιχεία στο επίπεδο

3.3.1 Συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις σε τριγωνισμούς πολυγώνων

Θα παρουσιάσουμε τους χώρους πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούμε πιο συχνά. Αυτοί οι χώροι θα αποτελούνται από συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις σε υποδιαιρέσεις ή τριγωνισμούς $\mathcal{T}_h = \{K_i\}$, ενός φραγμένου τομέα \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$ των στοιχείων K . Για $d = 1$ τα στοιχεία K θα είναι διαστήματα, για $d = 2$ τρίγωνα ή τετράπλευρα και για $d = 3$ τετράεδρα. Επιπλέον, θα πρέπει να ικανοποιείται ότι $S_h \subset H^1(\Omega)$ για τα προβλήματα συνοριακών τιμών 2^{ης} τάξης (βλ [(11), Κεφάλαιο 3.1]).

Έστω Ω ένα πολυγωνικό χωρίο στο επίπεδο \mathbb{R}^2 και θεωρούμε το μοντέλο προβλήματος (βλ [(1), Κεφάλαιο 3])

$$(3.3.1) \quad Lu := - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u = f \text{ στο } \Omega, \quad \text{με } u = 0 \text{ στο } \partial\Omega.$$

Υποθέτουμε ότι ο συντελεστής $a_{ij} = a_{ij}(x)$ είναι ομαλός με $a_{ij}(x) \geq a_0 > 0$ στο $\bar{\Omega}$ και $f \in L^2(\Omega)$. Στο κεφάλαιο 2, διατυπώσαμε την μεταβολική μορφή της (3.3.1), όπου ψάχνουμε μοναδική $u \in H_0^1(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$(3.3.2) \quad \alpha(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το Ω είναι κυρτό, τότε η εκτίμηση κανονικότητας υποδηλώνει ότι $u \in H^2(\Omega)$ και

$$(3.3.3) \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Διαμερίζουμε το Ω σε τρίγωνα $\{K_i\}$, τα οποία σχηματίζουν έναν τριγωνισμό του Ω . Υποθέτουμε ότι τα $\{K_i\}$ είναι ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά, δηλαδή

$$(3.3.4) \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \text{αν } i \neq j, \quad \Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{M_h},$$

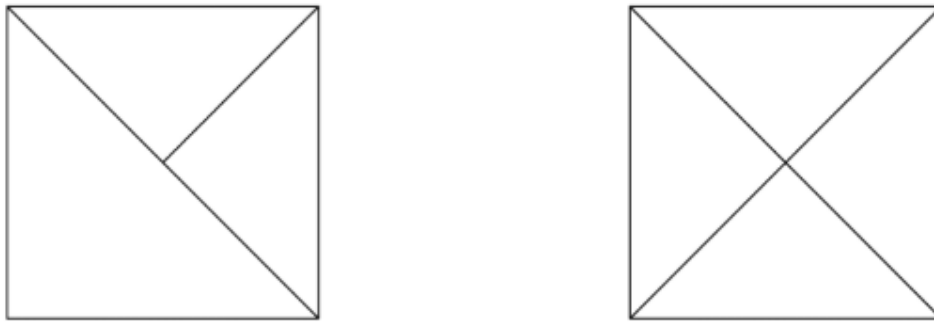
έτσι ώστε καμία κορυφή ενός τριγώνου να μην βρίσκεται στην άκρη ενός άλλου τριγώνου. Συμβολίζουμε με h τη μέγιστη διάμετρο, δηλαδή τη μέγιστη πλευρά των τριγώνων K ,

$$h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K), \text{ όπου } h_K = \text{diam}K = \text{διάμετρος του } K = \text{μέγιστη πλευρά του } K$$

και με $\mathcal{T}_h = \{K_1, \dots, K_{M_h}\}$ τον τριγωνισμό. Όλα τα τρίγωνα του τριγωνισμού, έχουν πλευρές όχι μεγαλύτερες του h . Παρακάτω, θα δούμε ότι οι εκτιμήσεις μας εξαρτώνται από το h . Οι κορυφές P των τριγώνων K_i καλούνται κόμβοι του τριγωνισμού \mathcal{T}_h και αξίζει να αναφερθεί ότι στις απλές περιπτώσεις δεν υπάρχουν στα εσωτερικά των πλευρών των τριγώνων, όπως φαίνεται στην εικόνα 3 (βλ [(10), Κεφάλαιο 10.2]).

Έστω S_h ένας συναρτησιακός χώρος, ο οποίος αποτελείται από τις συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις στον \mathcal{T}_h που μηδενίζονται στο σύνορο $\partial\Omega$ και σε κάθε τρίγωνο K_i είναι πολώνυμα βαθμού το πολύ ένα, \mathbb{P}_1 , δηλαδή

$$(3.3.5) \quad S_h := \{u_h \in C(\bar{\Omega}) : u_h|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$



Εικόνα 3: Μη αποδεκτός και αποδεκτός, αριστερά και δεξιά, τριγωνισμός. [βλ (1)]

Συμβολίζουμε για $r = 1, 2, \dots$,

$$\mathbb{P}_r(K) = \{\mathbb{P}_r(x) \text{ πολώνυμο βαθμού } r \text{ στο } K\}$$

Έστω $\{P_i\}_{i=1}^{M_h}$ το σύνολο των εσωτερικών κόμβων του τριγωνισμού, δηλαδή των κόμβων που δεν ανήκουν στο σύνορο $\partial\Omega$.

Κάθε στοιχείο $u \in S_h$, ορίζεται μονοσήμαντα από τις κομβικές τιμές του u , $u(P_j)$, $j = 1, \dots, M_h$ στους εσωτερικούς κόμβους P_j και το σύνολο των βασικών συναρτήσεων $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M_h} \subset S_h$. Οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν βάση του S_h και έχουν την ιδιότητα

$$(3.3.6) \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, M_h.$$

Η διάσταση του S_h είναι M_h , δηλαδή $\dim S_h = M_h$.

Ο φορέας κάθε συνάρτησης φ_i είναι η κλειστή θήκη της ένωσης των τριγώνων του τριγωνισμού \mathcal{T}_h που έχουν το P_i ως κορυφή τους.

Οι συναρτήσεις φ_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Πράγματι, αν

$$\sum_{i=1}^{M_h} \xi_i \varphi_i = 0,$$

τότε

$$\sum_{i=1}^{M_h} \xi_i \varphi_i(P_j) = 0,$$

δηλαδή $\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, M_h$. Επίσης, οι $\varphi_1, \dots, \varphi_{M_h}$ παράγουν το S_h . Πράγματι, κάθε $u \in S_h$ γράφεται ως

$$(3.3.7) \quad u = \sum_{i=1}^{M_h} u(P_i) \varphi_i.$$

Αφού και τα δυο μέλη αυτής της σχέσης είναι στοιχεία του S_h και οι τιμές τους συμπίπτουν στους εσωτερικούς κόμβους P_j , $j = 1, \dots, M_h$. Επομένως, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{M_h}\}$ μια βάση του S_h , σημαντική στο υπολογιστικό μέρος των προσεγγίσεων (βλ [(4), Κεφάλαιο 4.3]).

Ο χώρος S_h είναι ένας πεπερασμένων διαστάσεων υπόχωρος του χώρου Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Προφανώς, ο S_h είναι υπόχωρος του $L^2(\Omega)$ και τα στοιχεία του μηδενίζονται στο σύνορο $\partial\Omega$.

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι, ο χώρος S_h (3.3.5) των γραμμικών πολυωνύμων σε κάθε K ικανοποιεί την προσέγγιση

$$(3.3.8) \quad \inf_{\chi \in S_h} \{\|v - \chi\| + h\|\nabla(v - \chi)\|\} \leq Ch^2\|v\|_2, \quad \text{για } v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Υποθέτουμε, ότι έχουμε μια διαμέριση του Ω με παράμετρο διαμέρισης h και μια οικογένεια υποχώρων πεπερασμένης διάστασης $\{S_h^r\}$ του $H_0^1(\Omega)$, με $r \geq 2$ ακέραιο. Δηλαδή, χρησιμοποιούμε πολυώνυμα βαθμού $r \geq 2$, για τον ορισμό του χώρου των πεπερασμένων στοιχείων. Υποθέτουμε ότι ο $\{S_h^r\}$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα προσέγγισης για $2 \leq s \leq r$,

$$(3.3.9) \quad \inf_{\chi \in S_h^r} \{\|v - \chi\| + h\|\nabla(v - \chi)\|\} \leq Ch^s\|v\|_s, \quad \text{για } v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

όπου C είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη των h και v .

3.3.2 Βαθμοί ελευθερίας

Ένα σημαντικό πρόβλημα στην υλοποίηση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι η διαχείριση των βαθμών ελευθερίας. Ως βαθμούς ελευθερίας επιλέγουμε συνήθως τις τιμές στους κόμβους του τριγωνισμού \mathcal{T}_h (συμπεριλαμβανομένων των σημείων των κόμβων στο σύνορο $\partial\Omega$).

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα πολυγωνικό χωρίο και \mathcal{T}_h ένας τριγωνισμός του Ω . Έστω K ένα τρίγωνο του τριγωνισμού \mathcal{T}_h , με κορυφές P_i για $i = 1, 2, 3$. Οι τοπικές συναρτήσεις βάσης φ_i , $i = 1, 2, 3$ ανήκουν στον χώρο που ορίζονται τα πολυώνυμα βαθμού ένα $\mathbb{P}_1(K)$ και ικανοποιούν την

$$(3.3.10) \quad u_h = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x)u_h(P_i), \quad x \in K.$$

Οι πραγματικοί αριθμοί $\{u_h(P_i)\}$, $i = 1, 2, 3$ είναι οι τοπικοί βαθμοί ελευθερίας, οι οποίοι ορίζουν μονοσήμαντα την $u_h(x)$ στο τρίγωνο K .

Θεώρημα 3.3.1 (βλ [(11), Κεφάλαιο 3.2, Θεώρημα 3.1]) *Έστω $K \in \mathcal{T}_h$ ένα τρίγωνο με κορυφές $P_i = (P_{i1}, P_{i2})$, $i = 1, 2, 3$. Μια συνάρτηση $v \in \mathbb{P}_1(K)$ ορίζεται μοναδικά από τους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή δεδομένων των τιμών α_i , $i = 1, 2, 3$, υπάρχει μοναδικά ορισμένα συνάρτηση $v \in \mathbb{P}_1(x)$ τέτοια ώστε*

$$v(P_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad \square$$

Αν τώρα ο τριγωνισμός \mathcal{T}_h αποτελείται από M_h κόμβους P_i , $i = 1, \dots, M_h$ συμπεριλαμβανομένου και αυτών που βρίσκονται στο σύνορο, τότε οι κόμβοι $P_1^{(K)}, P_2^{(K)}, P_3^{(K)}$ του τριγώνου K αντιστοιχούν σε κάποιους κόμβους $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}$ στην καθολική αρίθμηση των κόμβων του τριγωνισμού.

3.4 Παρεμβολή με συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις και εκτιμήσεις των σφαλμάτων

Θεωρούμε ότι $V = H_0^1(\Omega)$ και $V_h = \{v \in V : v|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, δηλαδή ο V_h είναι ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων των τριγώνων K (βλ[(11), Κεφάλαιο 4.2]).

Υποθέτουμε ότι

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| \rightarrow 0 \text{ καθώς } h \rightarrow 0 \forall v \in V.$$

Μια δοσμένη ομαλή συνάρτηση $v \in \Omega$, η οποία μηδενίζεται στο $\partial\Omega$ μπορεί να προσεγγιστεί από την παρεμβολή της $\pi_h v \in V_h$, η οποία συμφωνεί με την v στις εσωτερικές κορυφές του \mathcal{T}_h , δηλαδή

$$\pi_h v(x) = \sum_{j=1}^{M_h} v(P_j) \varphi_j(x).$$

Για $K \in \mathcal{T}_h$ ορίζουμε με ϱ_K τη διάμετρο του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο K . Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά β , ανεξάρτητη του τριγωνισμού $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$, τέτοια ώστε

$$(3.4.1) \quad \frac{\varrho_K}{h_K} \geq \beta, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

τότε ο τριγωνισμός είναι κανονικός. Η σταθερά β είναι το μέτρο της μικρότερης γωνίας σε οποιοδήποτε $K \in \mathcal{T}_h$, για κάθε $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$.

Έστω P_i , $i = 1, \dots, M_h$ οι κόμβοι του \mathcal{T}_h . Δεδομένου ότι $u \in C^0(\bar{\Omega})$ ορίζουμε την παρεμβολή $\pi_h u \in V_h$ ως

$$\pi_h u(P_i) = u(P_i), \quad i = 1, \dots, M_h.$$

Επιπλέον, το $\pi_h u$ είναι μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση που συμφωνεί με την u στους κόμβους του \mathcal{T}_h .

Θεώρημα 3.4.1 (βλ [(11), Κεφάλαιο 4.2, Θεώρημα 4.2]) Έστω $K \in \mathcal{T}_h$ ένα τρίγωνο με κορυφές a^i , $i = 1, 2, 3$. Δεδομένου ότι $v \in C^0(K)$ η παρεμβολή

$$(3.4.2) \quad \pi_h v(a^i) = v(a^i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε

$$(3.4.3) \quad \|v - \pi_h v\|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)},$$

$$(3.4.4) \quad |v - \pi_h v|_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}. \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.4.1 θα εκτιμήσουμε τα σφάλματα παρεμβολής $\|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)}$ και $|u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)}$.

Αθροίζοντας στο $K \in \mathcal{T}_h$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{L^2(K)}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C^2 h_K^4 |u|_{H^2(K)}^2 \\ &\leq C^2 h^4 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u|_{H^2(K)}^2 = C^2 h^4 |u|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

και ομοίως χρησιμοποιώντας την (3.4.1)

$$(3.4.5) \quad \begin{aligned} |u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C^2 \frac{h_K^4}{\rho_K^2} |u|_{H^2(K)}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C^2 \frac{h_K^2}{\beta^2} |u|_{H^2(K)}^2 \\ &\leq C^2 \frac{h^2}{\beta^2} |u|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$(3.4.6) \quad |u - \pi_h u|_{H^1(K)} \leq \frac{Ch}{\beta} |u|_{H^2(\Omega)} = Ch |u|_{H^2(\Omega)},$$

εάν η σταθερά β συμπεριλαμβάνεται στην σταθερά C και

$$(3.4.7) \quad \|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Οι εκτιμήσεις (3.4.6) και (3.4.7) είναι τυπικά παραδείγματα εκτιμήσεων του σφάλματος παρεμβολής $u - \pi_h u$, στην περίπτωση παρεμβολής με συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Στην περίπτωση των τμηματικών πολυωνύμων βαθμού $r \geq 1$ των τριγωνισμών \mathcal{T}_h , που ικανοποιούν την (3.4.1), έχουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$(3.4.8) \quad \|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{r+1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)},$$

$$(3.4.9) \quad |u - \pi_h u|_{H^1(K)} \leq Ch^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)},$$

όπου η σταθερά β συμπεριλαμβάνεται στην σταθερά C στην (3.3.9).

Στην γενική περίπτωση ενός τομέα Ω του \mathbb{R}^d με $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, για $r \geq 2$ και μικρό h , μπορούμε να λάβουμε εκτιμήσεις παρόμοιες με την (3.3.9), με τη βοήθεια του τελεστή παρεμβολής $\pi_h: H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ (βλ [(15), Κεφάλαιο 1]),

$$(3.4.10) \quad \|v - \pi_h v\| + h\|\nabla(v - \pi_h v)\| \leq Ch^s \|v\|_s, \quad 1 \leq s \leq r.$$

3.4.1 Ελλειπτική προβολή

Δεδομένου ότι $v \in H_0^1(\Omega)$, ορίζουμε ως $R_h v$ την ελλειπτική προβολή του v στον V_h , με την γραμμική απεικόνιση $R_h: H^1(\Omega) \rightarrow V_h$, έτσι ώστε

$$(3.4.11) \quad (\nabla R_h v, \nabla \chi) = (\nabla v, \nabla \chi), \quad \forall \chi \in V_h, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Εφόσον $v \in H_0^1(\Omega)$ υπάρχει μοναδικό $R_h v$ στον V_h και ικανοποιεί

$$\|\nabla R_h v\| \leq \|\nabla v\|.$$

Η ακόλουθη εκτίμηση σφάλματος προκύπτει από τις (3.3.9) και (3.4.11).

Πρόταση 3.4.1 (βλ [(16), Κεφάλαιο 6, Πρόταση 6.1]) *Υποθέτουμε ότι $v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $2 \leq s \leq r$. Τότε, υπάρχει μια σταθερά C ανεξάρτητη από τα v και h , έτσι ώστε*

$$(3.4.12) \quad \|R_h v - v\| + h\|\nabla(R_h v - v)\| \leq Ch^s \|v\|_s, \quad 2 \leq s \leq r.$$

Απόδειξη Από την (3.4.11)

$$\begin{aligned} \|\nabla(R_h v - v)\|^2 &= (\nabla(R_h v - v), \nabla R_h v - \nabla v) = -(\nabla(R_h v - v), \nabla v) \\ &= (\nabla(R_h v - v), \nabla \chi - \nabla v), \quad \forall \chi \in V_h. \end{aligned}$$

Τότε από την (3.3.9)

$$\|\nabla(R_h v - v)\|^2 \leq \|\nabla(R_h v - v)\| \|\nabla(v - \chi)\| \leq C \|\nabla(R_h v - v)\| h^{s-1} \|v\|_s,$$

από την οποία προκύπτει η H^1 εκτίμηση από την (3.4.12). Για την L^2 εκτίμηση θα χρησιμοποιήσουμε το “Nitsche’s trick”. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, για $g \in L^2(\Omega)$ θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta \psi = g & \text{στο } \Omega \\ \psi = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}.$$

Αυτό το πρόβλημα έχει μια μοναδική λύση $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, τέτοια ώστε ισχύει η ελλειπτική κανονικότητα $\|\psi\|_2 \leq C \|\Delta \psi\| = C \|g\|$. Για $v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $2 \leq s \leq r$, από το θεώρημα του Gauss και την (3.4.11) :

$$(R_h v - v, g) = -(R_h v - v, \Delta \psi) = (\nabla(R_h v - v), \nabla \psi) = (\nabla(R_h v - v), \nabla(\psi - \chi)),$$

$\forall \chi \in V_h$. Ως εκ τούτου, από την H^1 εκτίμηση στην (3.4.12), την (3.3.9) και την ελλειπτική κανονικότητα, έχουμε

$$(R_h v - v, g) \leq C h^{s-1} \|v\|_s h \|\psi\|_2 \leq C h^s \|v\|_s \|g\|.$$

Αντικαθιστώντας $g = R_h v - v$ παίρνουμε την εκτίμηση για την L^2 νόρμα για την (3.4.12). □

Θεώρημα 3.4.2 (βλ [(1), Κεφάλαιο 5.4, Θεώρημα 5.5]) Έστω Ω κυρτό. Τότε για $s = 1, 2$,

$$\|R_h v - v\| \leq C h^s \|v\|_s, \quad |R_h v - v|_1 \leq C h^{s-1} \|v\|_s,$$

$\forall v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. □

3.4.2 Ορθογώνια προβολή

Η ορθογώνια προβολή $P_h = P_{V_h}$ του χώρου Hilbert $L^2(\Omega)$ πάνω στον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης V_h ορίζεται ως:

$$(3.4.13) \quad (P_h v - v, \chi) = 0, \quad \forall \chi \in V_h, \quad v \in L^2(\Omega).$$

Εφόσον, $P_h v$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του v στον V_h με την L^2 νόρμα, στην περίπτωση ενός πολυγωνικού χωρίου, τότε

$$(3.4.14) \quad \|P_h v - v\| \leq \|\pi_h v - v\| \leq Ch^r \|v\|_r, \quad \forall v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Βασική εκτίμηση σφάλματος για το πρόβλημα Laplace

Η ιδιότητα προσέγγισης (3.3.9) μας επιτρέπει να αποδείξουμε εκτιμήσεις για τα σφάλματα $u - u_h$ και $\nabla(u - u_h)$ για το πρόβλημα Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ στο } \Omega \\ u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \end{cases},$$

όπου

$$\Delta := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ ο τελεστής Laplace}$$

και f μια δεδομένη συνάρτηση πάνω στο Ω .

Θεώρημα 3.4.2 (βλ [(15), Κεφάλαιο 1, Θεώρημα 1.1]) Έστω $u \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ η λύση του προβλήματος (3.3.1) και $u_h \in S_h^r$ η λύση του μεταβολικού προβλήματος (3.3.2). Τότε υπάρχει σταθερά C , ανεξάρτητη των u και h , τέτοια ώστε

$$(3.4.15) \quad \|u - u_h\| + h\|\nabla(u - u_h)\| \leq Ch^r \|u\|_r.$$

Απόδειξη Θα ξεκινήσουμε από την εκτίμηση σφάλματος της απόκλισης.

$$(3.4.16) \quad \begin{aligned} \|\nabla(u_h - \chi_h)\|_{L^2}^2 &\leq (\nabla(u_h - \chi_h), \nabla(u_h - \chi_h)) \\ &\leq (\nabla(u_h - u), \nabla(u_h - \chi_h)) + (\nabla(u - \chi_h), \nabla(u_h - \chi_h)). \end{aligned}$$

Αφαιρούμε τη μεταβολική εξίσωση

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v)$$

με την αντίστοιχη προσεγγιστική

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

οπότε προκύπτει

$$(3.4.17) \quad (\nabla(u - u_h), \nabla v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Επομένως, από την (3.4.16) και την (3.4.17)

$$\|\nabla(u_h - \chi_h)\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla(u - \chi_h)\|_{L^2} \|\nabla(u_h - \chi_h)\|_{L^2}.$$

Διαιρώντας με $\|\nabla(u_h - \chi_h)\|_{L^2}$ και τα δύο μέλη

$$\|\nabla(u_h - \chi_h)\|_{L^2} \leq \|\nabla(u - \chi_h)\|_{L^2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_h - u)\| &\leq \|\nabla(u_h - \chi_h)\|_{L^2} + \|\nabla(u - \chi_h)\|_{L^2} \leq C \|\nabla(u - \chi_h)\|_{L^2} \\ &\leq C \|\nabla(u - R_h u)\|_{L^2} \leq C h^{s-1} \|v\|_s. \end{aligned}$$

Για το φράγμα σφάλματος στην L^2 νόρμα θα χρησιμοποιήσουμε το “Nitsche’s trick”.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, για $g \in L^2(\Omega)$ θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta \psi = g & \text{στο } \Omega \\ \psi = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}.$$

Αυτό το πρόβλημα έχει μια μοναδική λύση $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, τέτοια ώστε ισχύει η ελλειπτική κανονικότητα

$$\|\psi\|_2 \leq C \|\Delta \psi\| = C \|g\|.$$

Για κάθε $\chi \in S_h^r$

$$\begin{aligned} (u - u_h, g) &= -(u - u_h, \Delta \psi) = (\nabla(u - u_h), \nabla \psi) = (\nabla(u - u_h), \nabla(\psi - \chi)) \\ &\leq \|\nabla(u - u_h)\| \|\nabla(\psi - \chi)\|. \end{aligned}$$

Από την (3.4.16), την (3.3.9) και την ελλειπτική κανονικότητα, έχουμε

$$(u - u_h, g) \leq C h^{s-1} \|v\|_s h \|\psi\|_2 \leq C h^s \|v\|_s \|g\|.$$

Αντικαθιστώντας $g = u - u_h$ ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

3.5 Η γενικευμένη μέθοδος Galerkin (Generalized Galerkin Method)

Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα πεπερασμένων διαστάσεων είναι να βρούμε $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$(3.5.1) \quad \alpha_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

όπου $\{V_h \mid h > 0\}$ μια οικογένεια υποχώρων πεπερασμένων διαστάσεων του V . Τα α_h και l_h δηλώνουν κατάλληλες προσεγγίσεις των α και l , αντίστοιχα.

Η $l_h(\cdot)$ είναι μια γραμμική μορφή ορισμένη στον V_h και $\alpha_h(\cdot, \cdot)$ μια διγραμμική μορφή ορισμένη στον $V_h \times V_h$. Τυπικά, τα α_h και l_h περιέχουν σημεία του u_h ή και των παραγώγων του, τα οποία δεν υπάρχουν για συναρτήσεις του V απαραίτητα.

Θεώρημα 3.5.1 (Πρώτο λήμμα του Strang). (βλ [(6), Κεφάλαιο 5.5, Θεώρημα 5.5.1]) Σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος Lax-Milgram, θεωρούμε, επιπλέον, ότι το l_h είναι μια γραμμική απεικόνιση και ότι η διγραμμική μορφή α_h είναι πιστική στον $V_h \times V_h$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\alpha^* > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $h > 0$

$$(3.5.2) \quad \alpha_h(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|^2, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Τότε υπάρχει μια μοναδική λύση u_h της (3.5.1), η οποία ικανοποιεί την

$$(3.5.3) \quad \|u_h\| \leq \frac{1}{\alpha^*} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{l_h(v_h)}{\|v_h\|},$$

και αν η u λύση της (2.2.3)

$$\|u - u_h\| \leq \inf_{w_h \in V_h} \left[\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha^*}\right) \|u - w_h\| + \frac{1}{\alpha^*} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|a(w_h, v_h) - \alpha_h(w_h, v_h)|}{\|v_h\|} \right] + \frac{1}{\alpha^*} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|l(v_h) - l_h(v_h)|}{\|v_h\|}.$$

Απόδειξη Έστω w_h ένα αυθαίρετο στοιχείο του V_h . Θέτουμε $\sigma_h := u_h - w_h$ και λόγω της (3.5.2) έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha^* \|\sigma_h\|^2 &\leq \alpha_h(\sigma_h, \sigma_h) \\ &= \alpha(u - w_h, \sigma_h) + \alpha(w_h, \sigma_h) - \alpha_h(w_h, \sigma_h) - l_h(\sigma_h) - l(\sigma_h).\end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι $\sigma_h \neq 0$, λόγω συνέχειας της διγραμμικής μορφής

$$\begin{aligned}\alpha^* \|\sigma_h\| &\leq \gamma \|u - w_h\| + \frac{|\alpha(w_h, \sigma_h) - \alpha_h(w_h, \sigma_h)|}{\|\sigma_h\|} + \frac{|l_h(\sigma_h) - l(\sigma_h)|}{\|\sigma_h\|} \\ &\leq \gamma \|u - w_h\| \\ &\quad + \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|\alpha(w_h, v_h) - \alpha_h(w_h, v_h)|}{\|v_h\|} + \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|l_h(v_h) - l(v_h)|}{\|v_h\|}.\end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για $\sigma_h = 0$. Συνδυάζοντας με την τριγωνική ανισότητα $\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|\sigma_h\|$, για $w_h \in V_h$ παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

Πρόταση 3.5.1 (βλ [(6), Κεφάλαιο 5.5, Πρόταση 5.5.1]) Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 3.5.1, υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η διγραμμική μορφή $\alpha_h(\cdot, \cdot)$ είναι ορισμένη στο (u, v_h) , όπου u είναι η λύση της (2.2.3) και $v_h \in V_h$, και ικανοποιεί για κατάλληλο $\gamma^* > 0$ την

$$(3.5.4) \quad |\alpha_h(u - w_h, v_h)| \leq \gamma^* \|u - w_h\| \|v_h\|, \quad \forall w_h, v_h \in V_h,$$

με $h > 0$. Τότε ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση σύγκλισης

$$(3.5.5) \quad \|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{\gamma^*}{\alpha^*}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\| + \frac{1}{\alpha^*} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|\alpha_h(u, v_h) - l_h(v_h)|}{\|v_h\|}. \quad \square$$

Παρατήρηση 3.5.1 (βλ [(6), Κεφάλαιο 5.5, Παρατήρηση 5.5.1]) Μια ακραία περίπτωση για την (3.5.1) είναι όταν ο V_h δεν είναι υπόχωρος του V , όπου η διγραμμική μορφή α δεν είναι απαραίτητα ορισμένη στον $V_h \times V_h$. Υποθέτουμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|_h$ και η προσεγγιστική διγραμμική μορφή $\alpha_h(\cdot, \cdot)$ είναι ορισμένες στον $(V + V_h)$, και ότι το γραμμικό προσεγγιστικό συναρτησοειδές $l_h(\cdot)$ είναι ορισμένο στον V_h . Απαιτούμε, επίσης, την ύπαρξη σταθερών $\alpha^* > 0, \gamma^* > 0$ τέτοιων ώστε για κάθε $h > 0$

$$\alpha_h(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_h^2, \quad \forall v_h \in V_h$$

$$|\alpha_h(u - w_h, v_h)| \leq \gamma^* \|w\|_h \|v_h\|_h, \quad v_h \in V_h.$$

Έτσι, μπορούμε να βρούμε την ακόλουθη εκτίμηση σφάλματος

$$\|u - u_h\|_h \leq \left(1 + \frac{\gamma^*}{\alpha^*}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_h + \frac{1}{\alpha^*} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|\alpha_h(u, v_h) - l_h(v_h)|}{\|v_h\|_h}. \quad \square$$

4. ΧΡΟΝΙΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων standard Galerkin για να βρούμε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας (heat equation) (βλ [(15), Κεφάλαιο 1]),

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ στο } \Omega, & \text{για } t > 0 \\ u = 0 \text{ στο } \partial\Omega, & \text{για } t > 0 \\ u(\cdot, 0) = v \text{ στο } \Omega \end{cases} ,$$

όπου Ω ένα τομέας του \mathbb{R}^d με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Το πρόβλημα αυτό περιγράφει την χρονική εξέλιξη της θερμοκρασίας u ενός ιστροπικού και ομογενούς μέσου που περιέχεται στο $\bar{\Omega}$ υπό μια εξωτερική πηγή θερμότητας f , με v την αρχική θερμοκρασία.

Όπως στην περίπτωση του ελλειπτικού προβλήματος θα ξεκινήσουμε γράφοντας το πρόβλημα στην ασθενή του μορφή. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση θερμότητας με μια ομαλή συνάρτηση $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, ολοκληρώνουμε στο Ω και εφαρμόζουμε την Green formula, οπότε

$$(4.1.2) \quad (u_t, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad t \geq 0.$$

Μια συνάρτηση $u = u(x, t)$ είναι ασθενής λύση της (4.1.1) στο $[0, \bar{t}]$, αν ισχύει η (4.1.2) με $u \in L^2(0, \bar{t}; H_0^1)$ και $u_t \in L^2(0, \bar{t}; H^{-1})$ και αν $u(\cdot, 0) = v$. Εφόσον το σύνορο $\partial\Omega$ είναι ομαλό, μια τέτοια λύση είναι ομαλή, καθώς τα δεδομένα είναι ομαλές συναρτήσεις και σε αυτήν την περίπτωση πληρούν ορισμένες προϋποθέσεις συμβατότητας στο $t = 0$. Οι απαιτούμενες προϋποθέσεις συμβατότητας εκφράζουν ότι οι διαφορετικοί όροι στην (4.1.1) στο $\partial\Omega$ είναι συνεπείς μεταξύ τους.

Η πρώτη τέτοια προϋπόθεση, όπου απαιτείται $m = 0$, είναι ότι εφόσον $u(t) = 0$ στο $\partial\Omega$ για $t > 0$, τότε το $u(0) = v$ θα πρέπει επίσης να μηδενιστεί στο σύνορο $\partial\Omega$. Ύστερα, για $m = 1$, εφόσον $u_t(t) = 0$ στο $\partial\Omega$ για $t > 0$, η ομαλότητα απαιτεί $u_t(0) = g := \Delta v + f(0)$ στο $\partial\Omega$, και ομοίως για $u^{(m)}(0)$ με $m \geq 2$.

Είναι βολικό να προχωρήσουμε σε δύο στάδια, με την παραγωγή και ανάλυση της προσεγγιστικής λύσης του προβλήματος (4.1.1). Καταρχάς, θα προσεγγίσουμε την $u(x, t)$ μέσω μιας συνάρτησης $u_h(x, t) \in V_h$, για κάθε σταθερό t . Αυτή η συνάρτηση θα είναι η λύση ενός h -εξαρτώμενου πεπερασμένου συστήματος συνήθη διαφορικών εξισώσεων στο χρόνο και θα αναφέρεται ως μερικώς διακριτή ή ημι-διακριτή λύση. Το ημι-διακριτό πρόβλημα βασίζεται στην ασθενή διατύπωση του προβλήματος (4.1.1). Ύστερα, προχωράμε στην διακριτοποίηση αυτού του συστήματος με τη χρονική μεταβλητή, για να παράγουμε μια πλήρως διακριτή προσέγγιση της λύσης του (4.1.1) με μια χρονική μέθοδο.

4.2 Η ημι-διακριτή προσέγγιση

Αρχικά, θέτουμε το ημι-διακριτό πρόβλημα, το οποίο βασίζεται στην ασθενή διατύπωση (4.1.2), ώστε να βρούμε $u_h(t) := u_h(\cdot, t) \in V_h$, για $t \geq 0$, τέτοια ώστε

$$(4.2.1) \quad (u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in V_h, \quad t > 0,$$

με $u_h(0) = v_h$, όπου v_h η προσέγγιση του v στον V_h . Το πρόβλημα (4.2.1) συνήθως ονομάζεται ημι-διακριτή ή συνεχής στο χρόνο προσέγγιση της (4.1.2).

Σύμφωνα με τη βάση $\{\varphi_j\}_1^{M_h} \in V_h$, για το ημι-διακριτό πρόβλημα ψάχνουμε συντελεστές $\xi_j(t)$ στην

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{M_h} \xi_j(t) \varphi_j(x),$$

τέτοιους ώστε

$$\sum_{j=1}^{M_h} \frac{d\xi_j(t)}{dt} (\varphi_j, \varphi_k) + \sum_{j=1}^{M_h} \xi_j(t) (\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, M_h,$$

και με γ_j από την δεδομένη αρχική προσέγγιση v_h , ώστε $\xi_j(0) = \gamma_{0,j}$, $j = 1, \dots, M_h$.

Σε σημειογραφία πίνακα αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$(4.2.2) \quad M \frac{d\xi(t)}{dt} + A\xi(t) = F(t), \quad \xi(0) = \xi_0,$$

όπου για κάθε $t \geq 0$, $\xi(t) = (\xi_j(t))$, $F(t) := (f, \varphi_k)$ όταν $\xi_0 = (\xi_{0,j})$. Επιπλέον, $M_{jk} := (\varphi_j, \varphi_k)$ ο πίνακας μάζας και $A_{jk} := (\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k)$ ο πίνακας ακαμψίας με $j, k = 1, \dots, M_h$. Η διάσταση αυτών ισούται με M_h , δηλαδή με την διάσταση του V_h .

Οι πίνακες M και A είναι πίνακες Gram, και ειδικότερα είναι θετικά ορισμένοι και αντιστρέψιμοι, οπότε το σύστημα των συνήθη διαφορικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί ως

$$(4.2.3) \quad \frac{d\xi(t)}{dt} + M^{-1}A\xi(t) = M^{-1}F(t), \quad \text{για } t > 0, \quad \text{με } \xi(0) = \gamma,$$

και έχει μοναδική λύση για t θετικό (βλ [(15), Κεφάλαιο 1]).

4.3 Εκτιμήσεις σφαλμάτων στην ημι-διακριτή προσέγγιση

Ο πρώτος μας στόχος είναι να αποδείξουμε την ακόλουθη εκτίμηση στην L^2 νόρμα για το σφάλμα ανάμεσα στις λύσεις του ημι-διακριτού και του συνεχούς προβλήματος.

Θεώρημα 4.3.1 (βλ [(15), Κεφάλαιο 1, Θεώρημα 1.2]) Έστω u_h και u οι λύσεις των (4.2.1) και (4.1.1), αντίστοιχα, και υποθέτουμε ότι $v = 0$ στο $\partial\Omega$. Τότε

$$(4.3.1) \quad \|u_h(t) - u(t)\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r \left(\|v\|_r + \int_0^t \|u_s\|_r ds \right), \text{ για } t \geq 0.$$

Απόδειξη Γράφουμε

$$(4.3.2) \quad u_h - u = \theta + \rho,$$

με $\theta = u_h - R_h u$, όπου R_h η ελλειπτική προβολή όπως ορίστηκε στην (3.4.11) και $\rho = R_h u - u$. Σημειώνουμε ότι, $\theta \in V_h$ και προκειμένου να εκτιμήσουμε το $\|u_h - u\|$, θα πρέπει να εκτιμήσουμε τα $\|\theta\|$ και $\|\rho\|$. Για το τελευταίο, έχουμε

$$\|\rho(t)\| = \|R_h u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^r \|u(t)\|_r, \quad t \geq 0,$$

από την (3.4.12). Εφόσον

$$u(x, t) = v(x) + \int_0^t u_t(x, s) ds,$$

υποθέτουμε ότι $v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ και $u_t \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ για $t \geq 0$ με

$$\int_0^t \|u_t\|_r ds < \infty,$$

και παρατηρούμε ότι $u \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ για $t \geq 0$ και $\|u(t)\|_r \leq \|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds$.

Επιπρόσθετα,

$$(4.3.3) \quad \|\rho(t)\| \leq Ch^r \left(\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right), \quad \text{για } t \geq 0.$$

Προκειμένου, να λάβουμε μια εξίσωση για το θ , για $t \geq 0$ και για κάθε $\chi \in V_h$, έχουμε

$$(\theta_t, \chi) + (\nabla \theta, \nabla \chi) = (u_{ht}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) - ((R_h u)_t, \chi) - (\nabla R_h u, \nabla \chi).$$

Από τις (4.2.1) και (3.4.11) και το γεγονός ότι $((R_h u)_t, \chi) = (R_h u_t, \chi)$ για $\chi \in V_h$, το οποίο προκύπτει διαφορίζοντας με το χρόνο και τα δύο μέλη της (3.6.5), έχουμε

$$(\theta_t, \chi) + (\nabla \theta, \nabla \chi) = (f, \chi) - (R_h u_t, \chi) - (\nabla u, \nabla \chi).$$

Επιπλέον, από την (6.1.2) και τον ορισμό του ρ

$$(4.3.4) \quad (\theta_t, \chi) + (\nabla \theta, \nabla \chi) = -(\rho_t, \chi), \quad \forall \chi \in V_h, \quad t \geq 0.$$

Για $t > 0$, θέτουμε $\chi = \theta$, οπότε έχουμε

$$(4.3.5) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 = -(\rho_t, \theta).$$

Όμως, $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = \|\theta\| \frac{d}{dt} \|\theta\|$ οπότε από την (4.3.5)

$$(4.3.6) \quad \|\theta(t)\| \leq \|\theta(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds.$$

Όμως, δεν γνωρίζουμε αν το $\frac{d}{dt} \|\theta(t)\|$ υπάρχει ή αν $\theta = 0$ για κάποιο t . Οπότε εργαζόμαστε ως εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ από την (4.3.4)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\theta\|^2 + \varepsilon^2) \leq \|\rho_t\| \|\theta\|.$$

Επομένως,

$$\sqrt{\|\theta\|^2 + \varepsilon^2} \frac{d}{dt} \sqrt{\|\theta\|^2 + \varepsilon^2} \leq \|\rho_t\| \|\theta\| \leq \|\rho_t\| \sqrt{\|\theta\|^2 + \varepsilon^2}.$$

Επιπλέον, $\frac{d}{dt} \sqrt{\|\theta\|^2 + \varepsilon^2} \leq \|\rho_t\| \forall t > 0$, οπότε

$$\sqrt{\|\theta\|^2 + \varepsilon^2} \leq \int_0^t \|\rho_t\| ds + \sqrt{\|\theta(0)\|^2 + \varepsilon^2}.$$

Θέτοντας $\varepsilon \rightarrow 0$ παίρνουμε την επιθυμητή ανισότητα (4.3.6).

Αφού $\rho_t = R_h u_t - u_t$, τότε $\int_0^t \|\rho_t\| ds \leq Ch^r \int_0^t \|u_t\|_r ds$ από την (3.4.12). Από την άλλη πλευρά,

$$\|\theta(0)\| \leq \|v_h - v\| + \|R_h v - v\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r \|v\|_r.$$

Από τις (4.3.6), (4.3.2) και (4.3.3) παίρνουμε την επιθυμητή εκτίμηση (4.3.1). □

Το θεώρημα 4.3.1 και οι ανάλογες εκτιμήσεις των σφαλμάτων, εξαρτώνται στις υποθέσεις επαρκούς κανονικότητας της λύσης u στο συνεχές πρόβλημα. Σε αυτήν την περίπτωση η απόδειξη απαιτούσε $v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ και $u_t(\cdot, s) \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ για $0 \leq s \leq t$.

Οι υποθέσεις αυτές εξασφαλίζουν ότι το φράγμα της $\|u_h(t) - u(t)\|$ στην (4.3.1) είναι της μορφής $\|v_h - v\| + O(h^r)$, όπου $O(h^r)$ είναι η βέλτιστη τάξη σύγκλισης στην L^2 στον V_h .

Παράλληλα, η αρχική τιμή v_h μπορεί να επιλεγεί με πολλούς τρόπους, έτσι ώστε $\|v_h - v\| = O(h^r)$. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $v_h = R_h v$ ή $v_h = P_h v$, όπου P_h η L^2 ορθογώνια προβολή του v στον V_h . Έτσι, εάν επιλέγαμε ένα από τα δύο, οι (3.3.9) και (3.4.12) θα έδιναν $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$, δεδομένου ότι $v \in H^r \cap H_0^1$ και η ολική βέλτιστη τάξη ακρίβειας $O(h^r)$ διατηρείται στο δεξί μέλος της (4.3.1).

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε την ακόλουθη εκτίμηση σφάλματος για την απόκλιση.

Θεώρημα 4.3.2 (βλ [(15), Κεφάλαιο 1, Θεώρημα 1.3]) Σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος 4.3.1 έχουμε

$$(4.3.7) \quad \|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| \leq C \|\nabla v_h - \nabla v\| + Ch^{r-1} \left(\|v\|_r + \|u(t)\|_r + \left(\int_0^t \|u_s\|_{r-1}^2 ds \right)^{1/2} \right), \quad \text{για } t \geq 0.$$

Απόδειξη Γράφουμε το σφάλμα στην μορφή (4.3.2), όπως και πριν. Από το σφάλμα της ελλειπτικής προβολής (3.4.12), έχουμε

$$\|\nabla \rho(t)\| = \|\nabla(R_h u(t) - u(t))\| \leq Ch^{r-1} \|u(t)\|_r.$$

Προκειμένου να εκτιμήσουμε το $\nabla \theta$, χρησιμοποιούμε την (4.3.4), με $\chi = \theta_t$. Οπότε

$$\|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \theta\|^2 = -(\rho_t, \theta_t) \leq \frac{1}{2} \|\rho_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\theta_t\|^2,$$

έτσι ώστε $\left(\frac{d}{dt}\right) \|\nabla \theta\|^2 \leq \|\rho_t\|^2$ ή

$$\begin{aligned} \|\nabla \theta(t)\|^2 &\leq \|\nabla \theta(0)\|^2 + \int_0^t \|\rho_s\|^2 ds \\ &\leq (\|\nabla(v_h - v)\| + \|\nabla(R_h v - v)\|)^2 + \int_0^t \|\rho_s\|^2 ds. \end{aligned}$$

Από το σφάλμα της ελλειπτικής προβολής (3.4.12),

$$\|\nabla\theta(t)\|^2 \leq 2\|\nabla(v_h - v)\|^2 + Ch^{2r-2} \left(\|v\|_r^2 + \int_0^t \|u_t\|_{r-1}^2 ds \right),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

4.4 Εκτιμήσεις σφαλμάτων στην πλήρως διακριτή προσέγγιση – Η μέθοδος Backward Euler - Galerkin

Θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας σε μερικά απλά σχήματα για τη διακριτοποίηση και σε σχέση με τη χρονική μεταβλητή. Θα εισάγουμε το χρονικό βήμα k και η χρονική διαμέριση $t = t_n = nk$, όπου n ένας μη αρνητικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $U^n = U_n^h \in V_h$ την προσέγγιση της $u(t_n)$. (βλ [(15), Κεφάλαιο 1])

Θα ορίσουμε την μέθοδο backward Euler Galerkin, η οποία ορίζεται αντικαθιστώντας την παράγωγο ως προς το χρόνο στην (6.2.1) με ένα πηλίκο προς τα πίσω (backward) διαφοράς, οπότε για

$$\bar{\partial}U^n = (U^n - U^{n-1})/k,$$

γίνεται

$$(4.4.1) \quad (\bar{\partial}U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in V_h, \quad n \geq 1, \quad U^0 = u_h.$$

Για δοσμένο U^{n-1} ορίζεται το U^n από την εξίσωση

$$(U^n, \chi) + k(\nabla U^n, \nabla \chi) = (U^{n-1} + kf(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in V_h,$$

η οποία αποτελεί την πεπερασμένων στοιχείων μορφή μιας ελλειπτικής εξίσωσης της μορφής $(I - k\Delta)u = g$. Όπως στην ημιδιακριτή περίπτωση, αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων

$$(M + kA)\xi^n = M\xi^{n-1} + kF(t_n),$$

όπου $M + kA$ θετικά ορισμένο και αντιστρέψιμο.

Η μέθοδος Backward Euler είναι ευσταθής ανεξάρτητα από την σχέση μεταξύ των h και k . Επιλέγοντας $\chi = U^n$ στην (6.4.1) και αφού $(\nabla U^n, \nabla U^n) \geq 0$, έχουμε

$$(\bar{\partial} U^n, U^n) \leq \|f^n\| \|U^n\|, \quad \text{όπου } f^n = f(t_n)$$

ή

$$\|U^n\|^2 - (U^{n-1}, U^n) \leq k \|f^n\| \|U^n\|$$

και αφού $(U^{n-1}, U^n) \leq \|U^{n-1}\| \|U^n\|$ έχουμε

$$\|U^n\| \leq \|U^{n-1}\| + k \|f^n\|, \quad n \geq 1,$$

οπότε προκύπτει

$$\|U^n\| \leq \|U^0\| + k \sum_{j=1}^n \|f^j\|.$$

Θα αποδείξουμε την ακόλουθη εκτίμηση σφάλματος.

Θεώρημα 4.4.1 (βλ [(1), Κεφάλαιο 1, Θεώρημα 1.5]) *Εστω U^n και u οι λύσεις των (4.4.1) και (4.1.1), αντίστοιχα. Εάν $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|u\|_r$ και $v = 0$ στο $\partial\Omega$,*

$$(4.4.2) \quad \|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r \left(\|u\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds \right) + k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds, \quad \text{για } n \geq 0.$$

Απόδειξη *Ανάλογα με την (4.3.2), γράφουμε*

$$U^n - u(t_n) = (U^n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - u(t_n)) = \theta^n + \rho^n,$$

όπου $\rho^n = \rho(t_n)$ φραγμένο, όπως στην (4.3.3). Επιπλέον, έχουμε

$$(4.4.3) \quad (\bar{\partial} \theta^n, \chi) + (\nabla \theta^n, \nabla \chi) = -(\omega^n, \chi), \quad \forall \chi \in V_h, \quad n \geq 1,$$

όπου

$$\omega^n = R_h \bar{\partial} u(t_n) - u_t(t_n) = (R_h - I) \bar{\partial} u(t_n) + (\bar{\partial} u(t_n) - u_t(t_n)) = \omega_1^n + \omega_2^n.$$

Επιλέγοντας $\chi = \theta^n$ στην (4.4.3), παίρνουμε $(\bar{\partial} \theta^n, \theta^n) \leq \|\omega^n\| \|\theta^n\|$, ή

$$\|\theta^n\|^2 - (\theta^{n-1}, \theta^n) \leq k \|\omega^n\| \|\theta^n\|,$$

έτσι ώστε

$$(4.4.4) \quad \|\theta^n\| \leq \|\theta^{n-1}\| + k\|\omega^n\|,$$

και με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή,

$$(4.4.5) \quad \|\theta^n\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega^j\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\|.$$

Το $\theta^0 = \theta(0)$ είναι φραγμένο. Γράφουμε

$$(4.4.6) \quad \omega_1^j = (R_h - I)k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds = k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I)u_t ds,$$

οπότε

$$k \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} Ch^r \|u_t\|_r ds = Ch^r \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds.$$

Επιπρόσθετα,

$$(4.4.7) \quad k\omega_2^j = u(t_j) - u(t_{j-1}) - ku_t(t_j) = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u_{tt}(s) ds,$$

έτσι ώστε

$$k \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\| \leq \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u_{tt}(s) ds \right\| \leq k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds.$$

Οι εκτιμήσεις αυτές μας δίνουν το ζητούμενο. □

Για να αποδείξουμε μια εκτίμηση για το $\nabla\theta^n$ μπορούμε να επιλέξουμε $\chi = \bar{\delta}\theta^n$ στην (4.4.3), οπότε $\bar{\delta}\|\nabla\theta^n\|^2 \leq \|\omega^n\|^2$, ή εάν $\nabla\theta^0 = 0$,

$$(4.4.8) \quad \|\nabla\theta^n\|^2 \leq k \sum_{j=1}^n \|\omega^j\|^2 \leq Ch^{2s} \int_0^{t_n} \|u_t\|_s^2 dt + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\|^2 dt,$$

για $1 \leq s \leq r$. Μαζί με την εκτίμηση για το $\nabla\rho$, με $s = r - 1$ στην (4.4.8),

$$\|\nabla(U^n - u(t_n))\| \leq C(u)(h^{r-1} + k).$$

Παρατηρούμε ότι εξαιτίας της μη συμμετρικής επιλογής της διακριτοποίησης στο χρόνο, η μέθοδος backward Euler Galerkin είναι πρώτης τάξης στο k .

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ FreeFem++

Το FreeFem++ αποτελεί ένα υψηλού επιπέδου προγραμματιστικό περιβάλλον ανάπτυξης για την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η γλώσσα προγραμματισμού του FreeFem++ είναι ένας ιδιοματισμός της C++. Το προγραμματιστικό περιβάλλον του FreeFem++ χρησιμοποιεί τριγωνικά ή τετράεδρα πεπερασμένα στοιχεία, συμπεριλαμβανομένων των ασυνεχών στοιχείων. Περιέχει πολλά εκπαιδευτικά παραδείγματα κατανόησης και εκμάθησης.

Τα χαρακτηριστικά του FreeFem++ είναι μερικά από τα παρακάτω:

- i. Περιγραφή του προβλήματος με την ασθενή του μορφή.
- ii. Εύκολος ορισμός του χωρίου όπου ορίζεται το πρόβλημα.
- iii. Αυτόματη δημιουργία πλέγματος, βασισμένη στον αλγόριθμο Delaunay-Voronoi.
- iv. Ποικιλία τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων, όπως γραμμικά, τετραγωνικά και άλλα τύπου Lagrange και ασυνεχή P1.
- v. Πολλές μέθοδοι, άμεσες και επαναληπτικές επίλυσης γραμμικών συστημάτων και προβλημάτων ιδιοτιμών.
- vi. Εργαλεία ορισμού ασυνεχών Galerkin πεπερασμένων στοιχείων.

Ο αναγνώστης μπορεί να φορτώσει το FreeFem++ στον υπολογιστή του από την ιστοσελίδα <https://github.com/FreeFem/FreeFem-sources/releases>, σε περιβάλλον Linux, Windows, MacOS X. (βλ [(17)])

5.1 Το γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα

Ας ξεκινήσουμε με το πρόβλημα του Poisson με ομογενείς συνθήκες Dirichlet στις δύο διαστάσεις. Ψάχνουμε $u : \Omega = [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για δεδομένη $f \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = -y^2(y-1)2(3x-2) - x(x-1)^22(3y-1), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Η πραγματική λύση του προβλήματος είναι η $u(x, y) = x(x-1)^2y^2(y-1)$.

Μετατρέπουμε το πρόβλημα στην ασθενή του μορφή. Ψάχνουμε $u \in H_0^1(\Omega)$, τέτοια ώστε για κάθε $v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = (f, v).$$

Ύστερα, διακριτοποιούμε την ασθενή μορφή. Έστω T_h ο κανονικός τριγωνισμός του Ω με τρίγωνα μέγιστου μεγέθους $h < 1$ και V_h ο πεπερασμένων διαστάσεων υπόχωρος του $H_0^1(\Omega)$. Ψάχνουμε $u_h \in V_h$:

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ισχύουν οι εξής εκτιμήσεις για τα σφάλματα στην L^2 και την H^1 νόρμα

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2$$

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch.$$

Για να επαληθεύσουμε τις εκτιμήσεις αυτές, θα λύσουμε το πρόβλημα μας σε πλέγμα με h που συνεχώς θα υποδιπλασιάζεται. Ύστερα, θα πάρουμε τον λόγο των ανά δύο διαδοχικών σφαλμάτων, ο οποίος θα πρέπει να τείνει στο $4 = 2^2$ και στο $2 = 2^1$, επαληθεύοντας την τάξη σύγκλισης 2 και 1, αντίστοιχα, για την L^2 και την H^1 νόρμα.

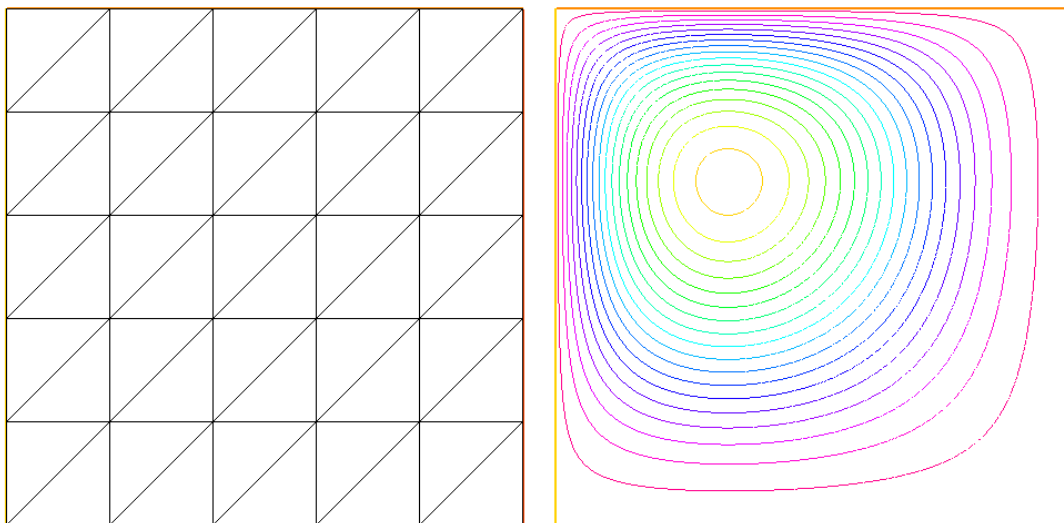
Επιλύοντας το πρόβλημα για συνεχώς υποδιπλασιασμένο h , προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αποτελεσμάτων :

Μέγεθος πλέγματος	Εκτιμήσεις σφαλμάτων			
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\frac{\ u - u_h\ _{L^2}}{\ u - u_{h/2}\ _{L^2}}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$	$\frac{\ u - u_h\ _{H^1}}{\ u - u_{h/2}\ _{H^1}}$
0.282843	0.00185456	-	0.0216311	-
0.141421	0.000508938	3.64398	0.0110171	1.96341
0.0707107	0.000130458	3.90115	0.00553203	1.99152
0.0353553	3.28241e-05	3.97447	0.00276888	1.99793
0.0176777	8.21925e-06	3.99356	0.0013848	1.99949
0.00883883	2.05564e-06	3.99839	0.000692443	1.99987

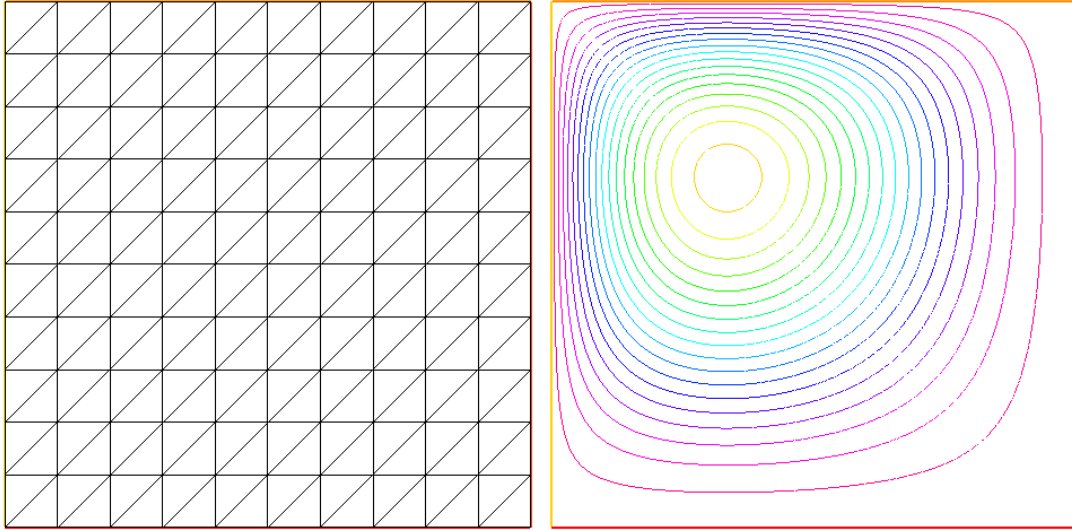
Συμπεράσματα

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των σφαλμάτων τείνουν πράγματι στις αναμενόμενες τιμές επαληθεύοντας την θεωρία. Επιπλέον, οι τιμές των $\|u - u_h\|_{L^2}$ και $\|u - u_h\|_{H^1}$, τείνουν πράγματι στο μηδέν.

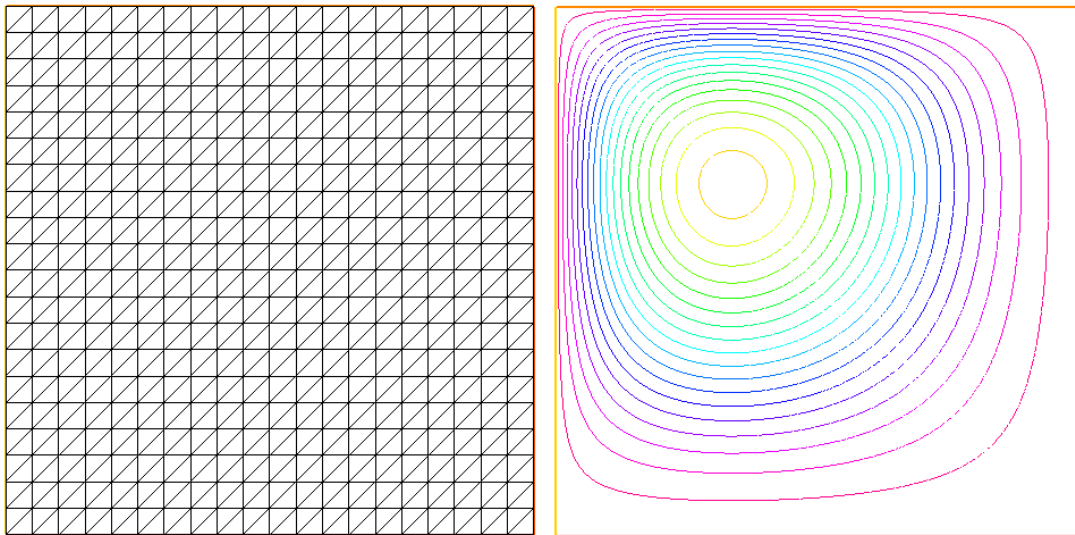
Παρακάτω ακολουθούν τα πλέγματα, οι u_h που αντιστοιχούν στα h και η πραγματική λύση η οποία προσεγγίζεται ακόμη καλύτερα καθώς μικραίνουμε το h .



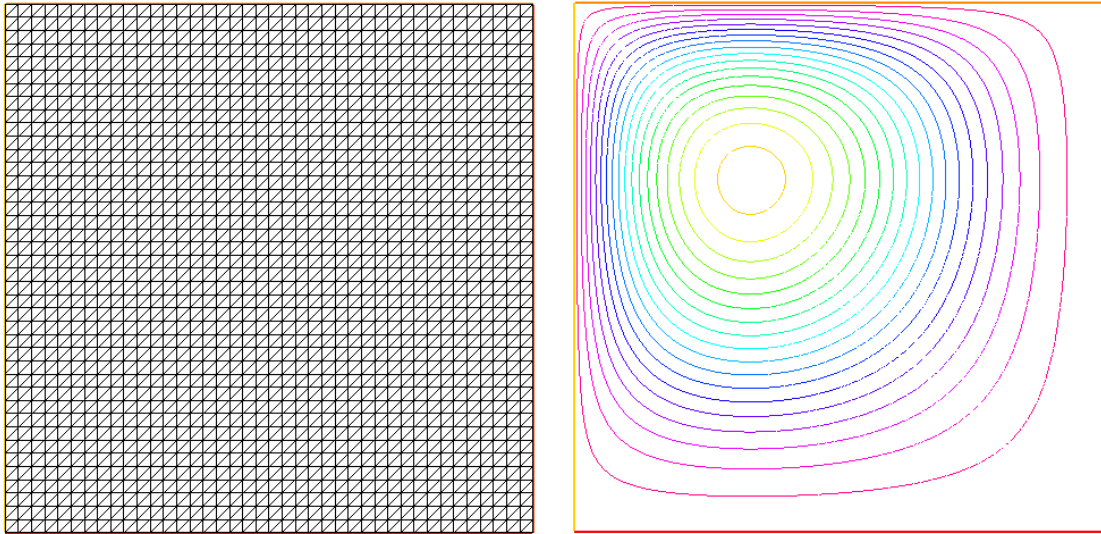
Εικόνα 4 Το πλέγμα για $h=0.282843$ και η αντίστοιχη u_h



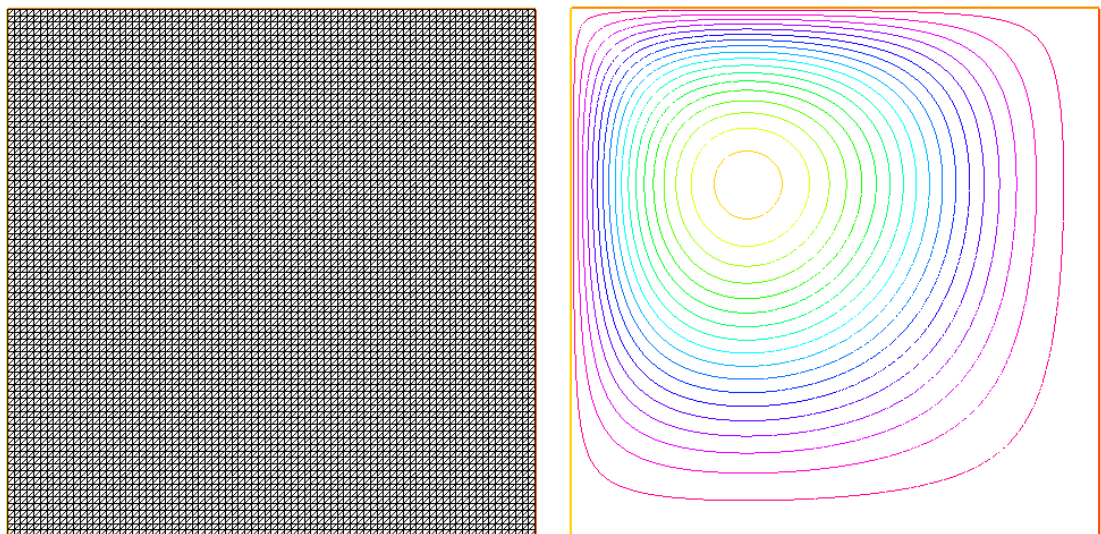
Εικόνα 5 Το πλέγμα για $h=0.141421$ και η αντίστοιχη u_h



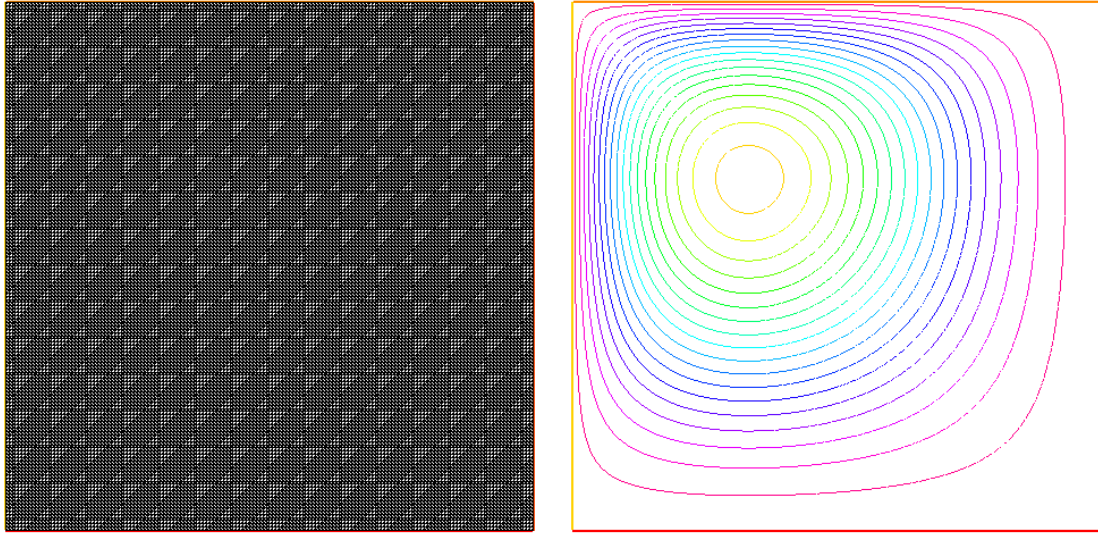
Εικόνα 6 Το πλέγμα για $h=0.0707107$ και η αντίστοιχη u_h



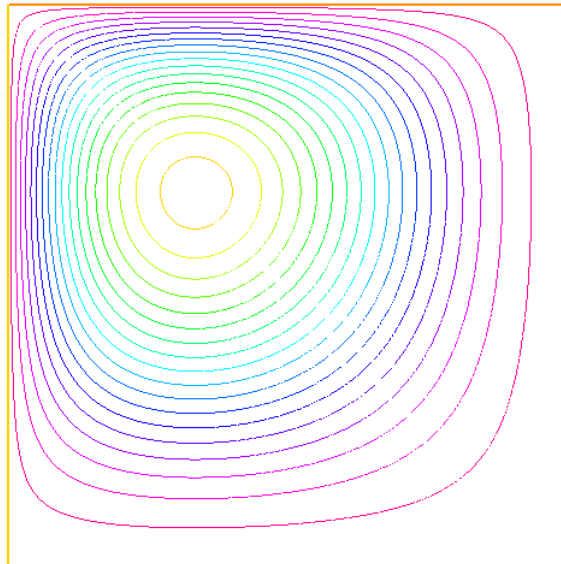
Εικόνα 7 Το πλέγμα για $h=0.0353553$ και η αντίστοιχη u_h



Εικόνα 8 Το πλέγμα για $h=0.0176777$ και η αντίστοιχη u_h



Εικόνα 9 Το πλέγμα για $h=0.00883883$ και η αντίστοιχη u_h



Εικόνα 10 Η πραγματική λύση

Ο κώδικας στο FreeFem++

```

real L2pr=0,H1pr=0;
int n=5;
real L2,H1;
func g=x*(x-1)^2*y^2*(y-1);
for(int j=1;j<7;j++)
{
mesh Th=square(n,n);
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v,f,h;
h=hTriangle;
f=-y^2*(y-1)*2*(3*x-2)-x*(x-1)^2*2*(3*y-1);
problem linear(u,v)= int2d(Th) (dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
-int2d(Th) (f*v) + on(1,2,3,4,u=0);
linear;
L2= sqrt ( int2d(Th) ( (u-g)^2 ) );
H1= sqrt (int2d(Th) ((u-g)^2)
+ int2d(Th) ((dx(u)-y^2*(y-1)*(3*x^2-4*x+1))^2)
+ int2d(Th) ((dy(u)-x*(x-1)^2*(3*y^2-2*y))^2));
plot(Th);
plot(u);
cout << h[].max << endl;
n=2*n;
cout << L2 << endl;
cout << H1 << endl;
cout << L2pr/L2 << endl;
cout << H1pr/H1 << endl;
L2pr=L2;

```

```

H1pr=H1;
}
mesh Th=square(500,500);
fespace Vh(Th,P1);
Vh k=x*(x-1)^2*y^2*(y-1);
plot(k);

```

5.2 Το γραμμικό παραβολικό πρόβλημα

Με την χρήση του λογισμικού FreeFem++ θα λυθεί το παρακάτω παραβολικό πρόβλημα με τη μέθοδο Galerkin για την διακριτοποίηση του χώρου και με τη μέθοδο backward Euler Galerkin για την διακριτοποίηση του χρόνου. Με $k = dt$ συμβολίζεται το χρονικό βήμα και με h το βήμα για την διακριτοποίηση του χώρου.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ισχύουν οι παρακάτω εκτιμήσεις για τα σφάλματα στην L^2 και την H^1 νόρμα, απορροφώντας σε σταθερές C τις νόρμες της πραγματικής λύσης, των χρονικών της παραγώγων και της αρχικής συνάρτησης

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C(h^2 + k)$$

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C(h + k).$$

Έστω $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ και $T = (0,1)$, θα πάρουμε το ελλειπτικό πρόβλημα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως στο οποίο προσθέτουμε και την πρώτη παράγωγο ως προς το χρόνο

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \text{στο } \Omega \times T \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \times \partial T \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{στο } \Omega \end{cases}.$$

Η πραγματική λύση του προβλήματος είναι η $u(x, y) = e^{-t}x(x-1)^2y^2(y-1)$ με $f = -e^{-t}x(x-1)^2y^2(y-1) - e^{-t}[y^2(y-1)2(3x-2) + x(x-1)^22(3y-1)]$.

Θα διακριτοποιήσουμε το χρόνο, θέτοντας ως χρονικό βήμα κάθε φορά $k = dt = h^2$, για να έχουμε εκτιμήσεις ανάλογες των h^2 και h στην L^2 και H^1 νόρμα, αντίστοιχα, και να παρατηρήσουμε αντίστοιχες τάξεις 2 και 1, όπως και στο ελλειπτικό πρόβλημα. Έχοντας κάνει διακριτοποίηση ως προς τον χρόνο, εκφράζουμε την αρχική μας εξίσωση ως

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{dt} - \Delta u = f, \quad \text{όπου } U^n = u(\cdot, t_n).$$

όπου $U^n = u(\cdot, t_n)$.

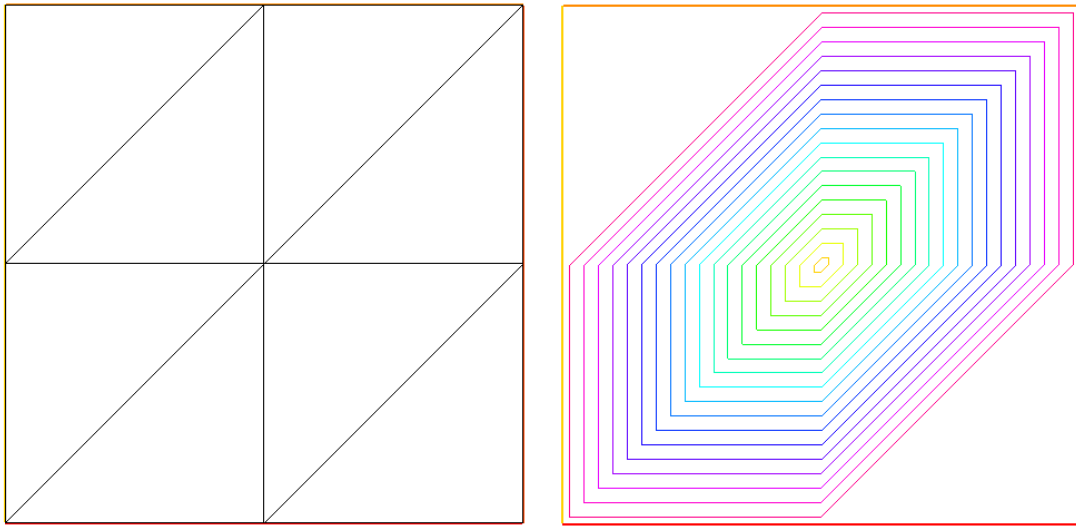
Επιλύοντας το πρόβλημα για συνεχώς υποδιπλασιαζόμενο h και $dt = h^2$, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αποτελεσμάτων.

Μέγεθος πλέγματος	Εκτιμήσεις σφαλμάτων			
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\frac{\ u - u_h\ _{L^2}}{\ u - u_{h/2}\ _{L^2}}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$	$\frac{\ u - u_h\ _{H^1}}{\ u - u_{h/2}\ _{H^1}}$
0.707107	0.006559226745	-	0.04401505183	-
0.353553	0.001955861062	3.35362612	0.01962513767	2.242789455
0.176777	0.0005256170741	3.721075967	0.009304688032	2.109166649
0.0883883	0.000134318689	3.913208788	0.004578665821	2.03218326
0.0441942	3.377659994e-05	3.976678802	0.002279751594	2.00840558
0.0220971	8.456748472e-06	3.994040978	0.0011386658	2.002125289

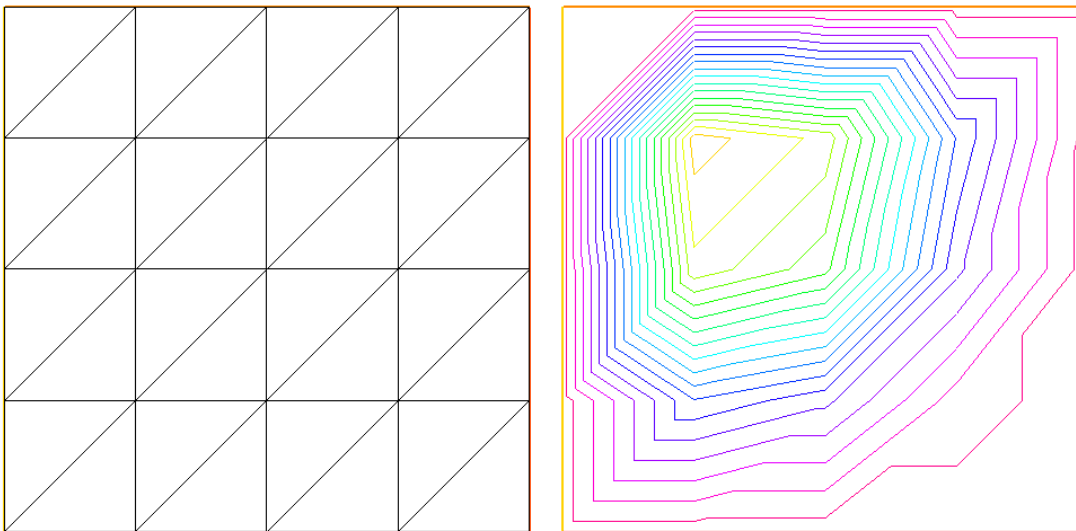
Συμπεράσματα

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των σφαλμάτων τείνουν πράγματι στις τιμές που περιμέναμε, επαληθεύοντας τη θεωρία. Επιπλέον, οι τιμές των $\|u - u_h\|_{L^2}$ και $\|u - u_h\|_{H^1}$, τείνουν πράγματι στο μηδέν.

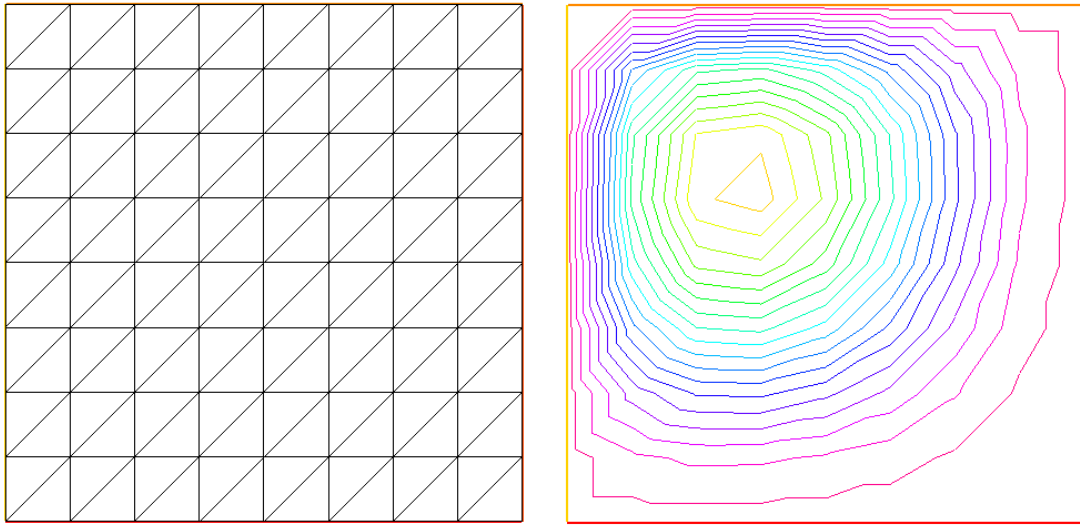
Ακολουθούν τα πλέγματα και οι u_h που αντιστοιχούν στα παραπάνω h , υπολογισμένες σε χρόνο $t = 1$.



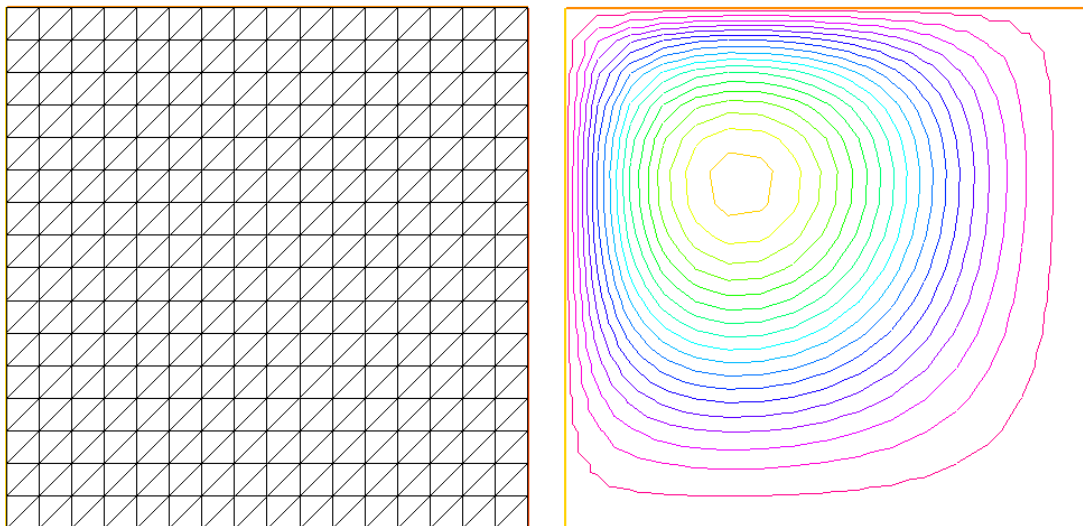
Εικόνα 11 Το πλέγμα για $h=0.707107$ και η αντίστοιχη u_h



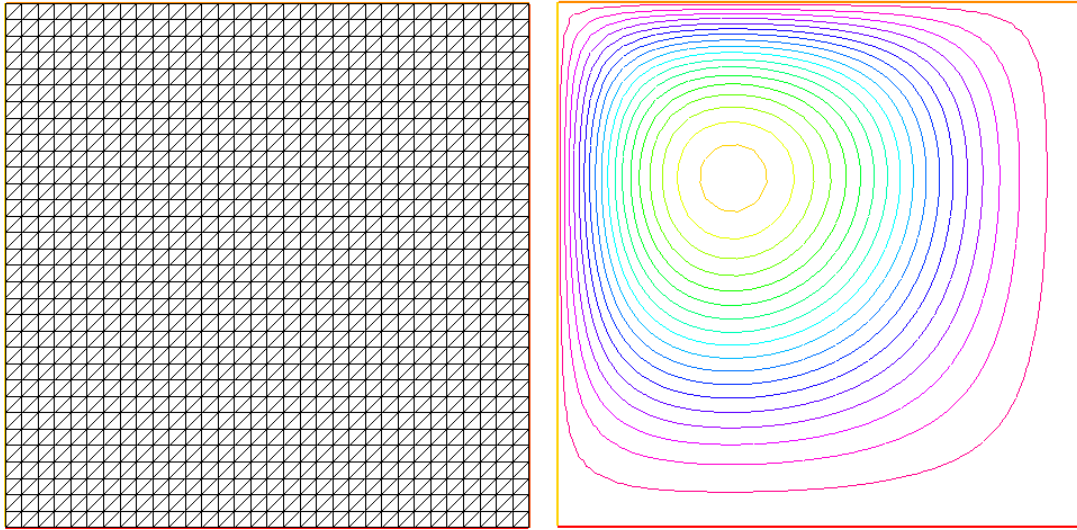
Εικόνα 12 Το πλέγμα για $h=0.353553$ και η αντίστοιχη u_h



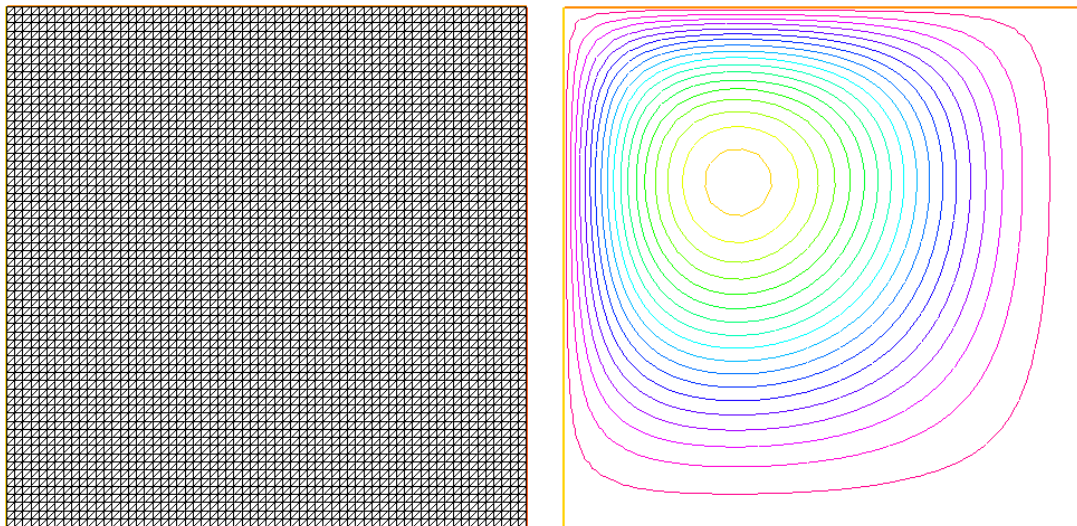
Εικόνα 13 Το πλέγμα για $h=0.176777$ και η αντίστοιχη u_h



Εικόνα 14 Το πλέγμα για $h=0.0883883$ και η αντίστοιχη u_h



Εικόνα 15 Το πλέγμα για $h=0.0441942$ και η αντίστοιχη u_h



Εικόνα 16 Το πλέγμα για $h=0.0220971$ και η αντίστοιχη u_h

Ο κώδικας στο FreeFem++

```

int n=2;

real L,H;

real [int] L2(6),H1(6);

real[int] L2r(6),H1r(6);

for(int j=1;j<7;j++)

{

mesh Th=square(n,n);

fespace Vh(Th,P1);

Vh u,v,uu,f,h,u0;

h=hTriangle;

real dt = (h[]).max)^2;

problem parab(u,v) =

int2d(Th) (u*v + dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)))

+ int2d(Th) (- uu*v - dt*f*v)

+ on(1,2,3,4,u=0);

real t = 0;

u0 = x*(x-1)^2*y^2*(y-1); // u(x,y,0)=0

uu=u0;

func g = exp(-t)*x*(x-1)^2*y^2*(y-1);

real L20,H10;

```

```

L20=dt*int2d(Th) ((u0-g)^2)/2;
H10=dt*(int2d(Th) ((u0-g)^2) +
int2d(Th) ((dx(u0)-exp(-t)*y^2*(y-1)*(3*x^2-4*x+1))^2)
+int2d(Th) ((dy(u0)-exp(-t)*x*(x-1)^2*(3*y^2-2*y))^2))/2;

for ( t=0;t<=1;t+=dt)
{
func g = exp(-t)*x*(x-1)^2*y^2*(y-1);
f=-exp(-t)*x*(x-1)^2*y^2*(y-1)-exp(-t)*y^2*(y-
1)*2*(3*x-2)-exp(-t)*x*(x-1)^2*2*(3*y-1);
parab;
uu = u;
L20+=dt*int2d(Th) ((u-g)^2 );
H10+=dt*(int2d(Th) ( (u-g)^2 ) +
int2d(Th) ((dx(u)-exp(-t)*y^2*(y-1)*(3*x^2-4*x+1))^2 ) +
int2d(Th) ((dy(u)-exp(-t)*x*(x-1)^2*(3*y^2-2*y))^2) );
}
L20-=dt*(int2d(Th) ((u-g)^2 ))/2;
H10-=dt*( int2d(Th) ((u-g)^2 ) +
int2d(Th) ((dx(u)-exp(-t)*y^2*(y-1)*(3*x^2-4*x+1))^2 ) +
int2d(Th) ((dy(u)-exp(-t)*x*(x-1)^2*(3*y^2-2*y))^2) )/2;

L2[j-1]=sqrt(L20);
H1[j-1]=sqrt(H10);

```



```
plot(Th);  
plot(u);  
cout << h[].max << endl;  
n=2*n;  
}  
  
for(int j=1;j<6;j++)  
{  
L2r[j-1]=L2[j-1]/L2[j];  
H1r[j-1]=H1[j-1]/H1[j];  
}  
  
cout << L2 << endl;  
cout << L2r << endl;  
cout << H1 << endl;  
cout << H1r << endl;
```


Βιβλιογραφία

1. **Larsson, S. και Thomée, V.** Partial differential equations with numerical methods. *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 2009.
2. **Brezis, Haim.** *Συναρτησιακή Ανάλυση*. Αθήνα : Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1997.
3. **Καρτσιώτης, Γ. Θ.** *Μέθοδοι επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων - μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων - εφαρμογές σε matlab*. Θεσσαλονίκη : Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2013.
4. **Ακρίβης, Γ. Δ.** *Μεθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων*. Λευκωσία : s.n., 2005.
5. **Brenner, S.C. και Scott, L.R.** The mathematical theory of finite element methods. *Texts in Applied Mathematics*. 3rd Edition, 2008.
6. **Valli, A. Quarteroni & F.** *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. s.l. : Springer, 1994.
7. **Evans, Lawrence C.** *Partial Differential Equations*. s.l. : American Mathematical Society.
8. **Παπαγεωργίου, Γιώργος.** *Αριθμητική ανάλυση των διαφορικών εξισώσεων*. Αθήνα : Συμεών, 2005.
9. **Γ.Σ.Παπαγεωργίου, Χ.Σ.Τσίτουρας.** *Αριθμητική ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica*. Αθήνα : Συμεών, 2008.
10. **Πλεξουσάκης, Μ. και Χατζηπαντελίδης, Π.** *Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων*. s.l. : Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2015.
11. **Johnson, C.** *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge : Cambridge University Press, 1987.
12. **Daryl, L. L.** *A First Course in the Finite Element Method*. s.l. : Cengage Learning, 2011.
13. **Μαμαλάκης, Θ. Μ.** *Μελέτη Ηλεκτρομαγνητικών Χαρακτηριστικών Ασύγχρονης Μηχανής με τη Μεθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων σε Τρεις Διαστάσεις*. Πάτρα : Πανεπιστήμιο Πατρών, 2015.
14. **Γκότσης, Κ. Π.** *Πεπερασμένα Στοιχεία*. s.l. : Ζήτη, 2013.
15. **Thomee, Vidar.** *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Sweden : Springer, 1997.
16. **Δουγαλής, Β.** *Finite element methods for the numerical solution of partial differential equations*. Αθήνα : Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, 2013.
17. **Hecht, Frederic.** *FreeFEM Documentation*. 2020.

Λεξικό αγγλικών όρων

απόκλιση	divergence
ασθενής μορφή	weak form
βαθμοί ελευθερίας	degrees of freedom
γραμμικά στοιχεία	linear elements
γραμμικό συναρτησοειδές	linear functional
διγραμμική μορφή	bilinear form
δυϊκός χώρος	dual space
ελλειπτική προβολή	elliptic projection
εκ των προτέρων εκτίμηση	a-priori estimate
εκτίμηση ευστάθειας	stability estimate
εκτίμηση σφάλματος	error estimate
εξίσωση της θερμότητας	heat equation
εσωτερικό γινόμενο	inner / scalar product
εσωτερικοί κόμβοι	interior nodes
ημι-διακριτή προσέγγιση	semi-discrete approximation
ημι-νόρμα	seminorm
καλά-τοποθετημένο πρόβλημα	well posed problem
κανονικός	regular
κλίση	gradient
κόμβοι	nodes
κυβικά στοιχεία	cubic elements
μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων	finite element method
μερικές διαφορικές εξισώσεις	partial differential equations
μεταβολική μορφή	variational form
νόρμα	norm
νόρμα ενέργειας	energy norm
ομαλή	smooth
ορθογώνια προβολή	orthogonal projection
παραβολικό πρόβλημα	parabolic problem

παρεμβολή	interpolation
πιεστική	coercive
πίνακας ακαμψίας	stiffness matrix
πλέγμα	mesh
πλήρης διακριτή προσέγγιση	full-discrete approximation
πολυδείκτης	multi-index
ευστάθεια	stability
συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις	piecewise linear functions
τελεστής ίχνους	trace operator
τετραγωνικά στοιχεία	quadratic elements
φασματικός	spectral
φορέας φορτίου	load vector
χρονικά εξαρτώμενα προβλήματα	time-dependent problems

Ευρετήριο όρων

G	εξίσωση της θερμότητας.....57
Green formula 31	εσωτερικό γινόμενο23
	εσωτερικοί κόμβοι45
N	H
Nitsche's trick 51, 53	ημι-διακριτό πρόβλημα.....58
	ημι-νόρμα19
A	Θ
ανισότητα Cauchy-Schwartz..... 19	θεώρημα Lax–Milgram36
ανισότητα Hölder 22	θεώρημα αναπαράστασης του Riesz24
ανισότητα Poincare 31	
αποκλίνουσα μορφή 34	I
απόκλιση 18	ιδιότητα προσέγγισης47
απόσταση 23	ίχνος.....30
αρχή του Dirichlet 38	
ασθενής λύση 37	K
	κανονικός.....48
B	κλασική λύση.....34
βαθμοί ελευθερίας..... 47	κλίση.....18
	κόμβοι.....45
Γ	κυβικά στοιχεία43
γραμμικά πολυώνυμα 1ου βαθμού..... 43	
γραμμικό συναρτησοειδές..... 20	M
γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις 46	μέθοδος backward Euler Galerkin63
	μετασχηματισμός Fourier28
Δ	O
διγραμμική μορφή 20, 35	ολοκλήρωμα Lebesgue21
δυϊκός χώρος 24	ομαλή συνάρτηση.....19
	Π
E	παρεμβολή48
εκ των προτέρων εκτίμηση 36	πεπερασμένο στοιχείο.....42
εκτίμηση ευστάθειας..... 38	πίνακας Gram59
εκτίμηση κανονικότητας 44	πολυδείκτης17
εκτίμηση σφάλματος..... 52	πρώτο λήμμα του Strang.....54
εκτίμηση σφάλματος ελλειπτικής προβολής 50	πυραμοειδείς συναρτήσεις.....46
εκτίμηση σφάλματος της εξίσωσης της θερμότητας..... 59	
ελλειπτική κανονικότητα 51, 53	Σ
ελλειπτική προβολή 50	στήριγμα21
ελλειπτικός διαφορικός τελεστής..... 34	
ελλειπτικότητα 34	

συναρτήσεις δοκιμής.....	19
συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις	45
συνοριακή συνθήκη Dirichlet	33
συνοριακή συνθήκη Neumann.....	33
συνοριακή συνθήκη Robin.....	33
σφάλματα παρεμβολής.....	49

T

τάξη σύγκλισης	61
τελεστής Laplace.....	18

τετραγωνικά στοιχεία	43
τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.....	21
τοπικές συναρτήσεις βάσης.....	47
τριγωνισμός	44

X

χώροι Sobolev.....	25
χώρος Banach	22
χώρος Hilbert.....	24
χώρος δοκιμής	19
χώρος ελέγχου	19

