ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

ΜΕ ΤΙΤΛΟ:

Η Μεθοδος των Πεπερασμενων Στοιχειων για Ελλειπτικες Εξισωσεις: Αναλυση και Εφαρμογες

The finite element method for elliptic parabolic partial differential equations: Analysis and Applications

ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ:

ΟΛΓΑ ΒΡΑΧΑΣΩΤΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2020

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια θεωρητική προσέγγιση στην μελέτη των πεπερασμένων στοιχείων. Μελετάται η δομή, η κατασκευή τους όπως επίσης και οι επιτρεπτοί χώροι που μπορούν να φιλοξενήσουν τέτοια στοιχεία. Ακολούθως, παρουσιάζεται η μελέτη των στοιχείων σε 2 και n διαστάσεις με σκοπό, τελικά, να μελετηθούν μη γραμμικά προβλήματα σε συνθήκες μονοτονίας και να εξαχθεί μια εκτίμηση σφάλματος για αυτά.
Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 1 συναντάται η θεωρία για τους χώρους Hilbert και Sobolev, όπως επίσης και κάποια βασικά θεωρήματα, τα οποία θέτουν τα θεμέλια για την μετέπειτα μελέτη. Χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά αυτά εργαλεία, ακολουθεί η παρουσίαση των στοιχείων σε δισδιάστατους χώρους, αλλά και σε χώρους n-διαστάσεων στα κεφάλαια 2 και 4. Σε κάθε ένα από τα κεφάλαια αυτά, αναλύονται τα βασικά θεωρήματα καθώς επίσης, και οι εκτιμήσεις σφάλματος που ισχύουν σε κάθε περίπτωση. Στο κεφάλαιο 3 γίνεται λόγος για την δομή και την κατασκευή των πεπερασμένων στοιχείων μέσα από σχήματα και βασικούς ορισμούς, ενώ γίνεται αναφορά και στην πολυωνυμική προσεγγιστική θεωρία χώρων Sobolev. Το τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, το κεφάλαιο 5, μελετά τα μη γραμμικά προσεγγιστικά προβλήματα, κάνοντας μια παρουσίαση της βασικής θεωρίας και αποδεικνύοντας την εκτίμηση σφάλματος για προβλήματα σε συνθήκες μονοτονίας.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ.Κωνσταντίνο Χρυσαφίνο, τόσο για την καθοδήγηση και την πολύτιμη συμβολή του σε κάθε φάση της δημιουργίας της, όσο και την στήριξή του στο να ασχοληθώ περαιτέρω με τον τομέα της Αριθμητικής Ανάλυσης. Παράλληλα, θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής τον καθηγητή κ.Βασίλειο Κοκκίνη και τον καθηγητή κ.Ιωάννη Κολέτσο, καθώς μέσα από το εξαμηνιαίο μάθημα συν διδασκαλίας τους, με έφεραν σε επαφή με το αντικείμενο και με έκαναν να το αγαπήσω και να εντρυφήσω καλύτερα πάνω σε αυτό. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τόσο την οικογένειά μου, όσο και τους φίλους μου για την στήριξή τους σε αυτή την μακράν πορεία.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι Sobolev

1.1 Χώροι Banach

Ορισμός 1.1.1. Έστω U διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\|u\| \geq 0$, για κάθε $u \in U$

(ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(iii) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$, για κάθε $u \in U$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

(iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ για κάθε $u, v \in U$, γνωστή και ως Τριγωνική Ανισότητα

Παρατήρηση 1.1.1. (Ορισμός ημινόρμας) Σε ένα γραμμικό χώρο U η απεικόνιση $\|\cdot\| : U \mapsto \mathbb{R}$ λέγεται ημινόρμα αν για κάθε $u, v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύουν:

(i) $\|u\| \geq 0$

(ii) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Δηλαδή, η ημινόρμα έχει όλες τις ιδιότητες της νόρμας εκτός από την διαχωρισιμότητα των στοιχείων του χώρου $U(\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0)$.

Ορισμός 1.1.2. Θα λέμε ότι μια ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ συγκλίνει στο $u \in U$, και γράφουμε

$$u_n \to u$$

αν ισχύει ότι

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Ορισμός 1.1.3. Μια ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ καλείται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|u_k - u_l\| < \epsilon \text{ για κάθε } k, l \geq n_0$$

Ορισμός 1.1.4. Ένας χώρος με νόρμα $(\mathbb{U}, \|.\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει η νόρμα.(Ουσιαστικά, πρέπει κάθε Cauchy ακολουθία στον $\mathbb{U}$ να συγκλίνει σε κάποιο από τα στοιχεία του $\mathbb{U}$.)

Ορισμός 1.1.5. Έστω X χώρος με νόρμα. Ο δυϊκός ή συζυγής χώρος του X συμβολίζεται με X^* και είναι ο χώρος των συνεχών γραμμικών συναρτήσεων $f : X \mapsto \mathbb{R}$.

Πρόταση 1.1.1. *Η νόρμα του δυϊκού χώρου X^* ενός χώρου Banach X δίνεται από την σχέση*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

όπου, $f \in X^*$.

1.2 Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.2.1. Έστω, U ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Ως εσωτερικό γινόμενο στον U ορίζεται η απεικόνιση:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \to \mathbb{C}$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\langle u, u \rangle \geq 0$ και αν $\langle u, u \rangle = 0$, τότε $u = 0$

(ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

(iii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ για κάθε $u, v \in U$

(iv) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ όπου $u, v, w \in U$ και $\lambda \in \mathbb{C}$

Ένας διανυσματικός χώρος U μαζί με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ λέγεται διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Παρατήρηση 1.2.1. Σε αυτή την εργασία θα δουλέψουμε μόνο σε πραγματικούς διανυσματικούς χώρους U. Συνεπώς, στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου ισχύει στο (2) ότι $\lambda \in \mathbb{R}$ και στο (3) ότι $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Θεώρημα 1.2.1. ***Cauchy-Schwarz***[1], *page 50 Έστω $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $u, v \in U$ ισχύει*

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα u, v είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη. Έστω ότι για $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle u - tv, u - tv\rangle = \langle u, u\rangle - 2t\langle u, v\rangle + t^2\langle v, v\rangle.$$

Αν $\langle v, v\rangle = 0$, τότε $\langle u, u\rangle - 2t\langle u, v\rangle \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι $\langle u, v\rangle = 0$, και επομένως, η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Για αυτό, υποθέτουμε ότι $\langle v, v\rangle \neq 0$. Αντικαθιστώντας με $t = \langle u, v\rangle / \langle v, v\rangle$ στην ανισότητα παίρνουμε:

$$0 \leq \langle u, u\rangle - |\langle u, v\rangle|^2 / \langle v, v\rangle,$$

η οποία είναι η υποδειχθείσα.
Αν τα u και v είναι γραμμικώς εξαρτημένα, βλέπουμε εύκολα ότι η ανισότητα επαληθεύεται. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η ισότητα ισχύει. Αν $v = 0$, τότε τα u και v είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αν $v \neq 0$, τότε με $\lambda = \langle u, v\rangle / \langle v, v\rangle$ προκύπτει $\langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $u - \lambda v = 0$, και άρα, τα u και v είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

Πρόταση 1.2.1. [2] *Έστω $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, η συνάρτηση*

$$\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}^+$$

που ορίζεται ως

$$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

ορίζει μια νόρμα στον U, ισοδύναμα για κάθε $u, v \in U$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ιδιότητες του ορισμού 1.1.1.

Ορισμός 1.2.2. Ένας διανυσματικός χώρος $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1.2.3. Ένας H ένας χώρος Hilbert και $S \subset H$ ένα γραμμικό υποσύνολο του τέτοιο ώστε, το S να είναι κλειστό στον H. Τότε, το S ονομάζεται υπόχωρος του H.

[1](2.1.4) Theorem. (The Schwarz Inequality), book Brenner-Scott

[2]Πρόταση από τις σημειώσεις του μαθήματος Συναρτησιακή Ανάλυση

Ορισμός 1.2.4. Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert και $M \subset H$ ένα υποσύνολο του. Ορίζουμε ως ορθογώνιο συμπλήρωμα του M το σύνολο

$$M^{\perp} := \{u \in H : \langle u, x\rangle = 0, \forall x \in M\}$$

Θεώρημα 1.2.2. [3] *Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert και $M \subset H$ ένα υποσύνολο του. Τότε, το σύνολο $M^{\perp}$ είναι ένας υπόχωρος του Hilbert.*

Απόδειξη. Έστω $u_1, u_2 \in M^{\perp}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) $\langle 0, x\rangle = 0, \forall x \in M$

(ii) $\langle \lambda u_1, x\rangle = \lambda\langle u_1, x\rangle = \lambda \cdot 0 = 0, \forall x \in M$.

(iii) $\langle u_1 + u_2, x\rangle = \langle u_1, x\rangle + \langle u_2, x\rangle = 0 + 0 = 0, \forall x \in M$

Άρα, ο $M^{\perp}$ είναι υπόχωρος του H. □

Πρόταση 1.2.2. [4] *Έστω H ένας χώρος Hilbert.*

(i) Για κάθε υποσύνολα $M, N \subset H, M \subset N \Rightarrow N^{\perp} \subset M^{\perp}$

(ii) Για κάθε υποσύνολο M του H, το οποίο περιέχει το 0 ισχύει ότι $M \cap M^{\perp} = \{0\}$

(iii) $\{0\}^{\perp} = H$.

(iv) $H^{\perp} = \{0\}$

Απόδειξη. (i) Έστω $u \in N^{\perp}$. Τότε, $\langle u, x\rangle = 0, \forall x \in N \Rightarrow \langle u, x\rangle = 0, \forall x \in M \Rightarrow u \in M^{\perp}$

(ii) Έστω $u \in M \cap M^{\perp}$. Τότε, $u \in M$ και $u \in M^{\perp}$. Άρα, $\langle u, x\rangle = 0, \forall x \in M \Rightarrow \langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

(iii) Ισχύει ότι $\langle 0, x\rangle = 0, \forall x \in H$. Άρα, από τον ορισμό ισχύει ότι $\{0\}^{\perp} = H$

(iv) Αφού ισχύει ότι $H^{\perp} \subset H = \{0\}$, συνεπάγεται ότι $H^{\perp} = \{0\}$

□

Θεώρημα 1.2.3. [5] *Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο. Τότε για κάθε $u, v \in H$ έχουμε:*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

[3] Θεώρημα από τις σημειώσεις του μαθήματος Συναρτησιακή Ανάλυση

[4] (2.2.7) Proposition, book Brenner-Scott

[5] (2.2.8) Theorem. (Parallelogram Law), book Brenner-Scott

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1.2.4. [6] *Έστω M υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Έστω $u \in H \setminus M$ και ορίζουμε $\delta := inf\{\|u-w\| : w \in M\}$. Τότε, υπάρχει $w_0 \in M$ τέτοιο ώστε:*

(i) $\|u - w_0\| = \delta$

(ii) $u - w_0 \in M^{\perp}$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\{w_n\}$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty}\|u - w_n\| = \delta$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{w_n\}$ είναι Cauchy. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε ότι:

$\|(w_n - u) + (w_m - u)\|^2 + \|(w_n - u) - (w_m - u)\|^2 = 2(\|w_n - u\|^2 + \|w_m - u\|^2)$.

Ισχύει ότι

$$0 \leq \|w_n - w_m\|^2 = 2(\|w_n - u\|^2 + \|w_m - u\|^2) - 4\|\frac{1}{2}(w_n - w_m) - u\|^2$$

Αφού ο M είναι υπόχωρος, ισχύει ότι $\frac{1}{2}(w_n + w_m) \in M$, έχουμε

$$\|\frac{1}{2}(w_n + w_m - u)\| \geq \delta.$$

Άρα,

$$0 \leq \|w_n - w_m\|^2 = 2(\|w_n - u)\|^2 + \|w_m - u\|^2) - 4\delta^2.$$

Για $n, m \to \infty$ έχουμε ότι

$$2\|w_n - u\|^2 + 2\|w_m - u\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Συνεπώς, $\|w_n - w_m\| \to 0$, και έτσι η w_n είναι Cauchy. Άρα, υπάρχει $w_0 \in M$ τέτοιο ώστε $w_n \to w_0$. Λόγω συνέχειας της νόρμας έχουμε ότι $\|w_0 - u\| = \delta$.

(ii) Έστω $z = w_0 - u$, με $\|z\| = \delta$. Θα αποδείξουμε ότι $z \perp M$. Έστω $w \in M$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, $w_0 + \lambda w \in M$ και η ποσότητα

$$\|z - \lambda w\|^2 = \|u - (w_0 + \lambda w)\|^2$$

έχει ελάχιστο για $\lambda = 0$. Άρα,

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\|z - \lambda w\|^2|_{\lambda=0} = -2\langle z, w\rangle.$$

Άρα, για κάθε $w \in M$ ισχύει ότι

$$\langle u - w_0, w\rangle = \langle z, w\rangle = 0.$$

που σημαίνει ότι το $u - w_0 \perp M$ ή $u - w_0 \in M^{\perp}$.

□

[6] (2.3.1) Proposition, book Brenner-Scott

Θεώρημα 1.2.5. [7] *Έστω M υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H και $u \in H$. Τότε, ισχύει ότι*

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in H$. Αν y είναι το μοναδικό σημείο του H που είναι το πιο κοντινό στο x, τότε έχουμε ότι $y' = x - y \in M^{\perp}$. Άρα, $x = y + y'$, όπου $y \in M$ και $y' \in M^{\perp}$. Επιπλέον, έχει δειχθεί ότι $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, το οποίο συνεπάγεται το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.2.5. Ένας τελεστής P πάνω σε ένα γραμμικό χώρο V ονομάζεται προβολή αν $P^2 = P$.

Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι αν H χώρος Hilbert και M ένας υπόχωρος του, τότε υπάρχει $P : H \to M$ με $Px = y$ για κάθε $x \in H$, όπου $x = y + y'$ με $y \in M$ και $y' \in M^{\perp}$.(Συμβολίζουμε την προβολή αυτή με P_M)

Θεώρημα 1.2.6. [8] *Έστω H χώρος Hilbert και $u \in H$. Θεωρούμε την απεικόνιση $L_u : H \to \mathbb{R}$ με $L_u(v) = \langle u, v\rangle$. Τότε, η L_u είναι γραμμική και συνεχής.*

Απόδειξη. Λόγω της γραμμικότητας και συνέχειας του εσωτερικού γινομένου, ισχύει ότι η L_u είναι γραμμική και συνεχής. □

Θεώρημα 1.2.7. ***(Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz)***[9]
Κάθε συνεχής γραμμική συνάρτηση L σε ένα χώρο Hilbert μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά ως

$$L(v) = \langle u, v\rangle$$

για κάποιο $u \in H$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\|L_u\|_{H'} = \|u\|_H.$$

Απόδειξη. Έστω $M := \langle v \in H : L(v) = 0\rangle$. Παρατηρούμε ότι το M είναι υπόχωρος του H λόγω της γραμμικότητας και της συνέχειας της L. Συνεπώς, $H = M \oplus M^{\perp}$.

(i) Αν $M^{\perp} = \{0\}$, τότε $M = H$ και αυτό συνεπάγεται ότι $L = 0$, συνεπώς ισχύει για $u = 0$.

[7] Θεώρημα από τις σημειώσεις του μαθήματος Συναρτησιακή Ανάλυση
[8] Θεώρημα από τις σημειώσεις του μαθήματος Συναρτησιακή Ανάλυση
[9] (2.4.2) Theorem. (Riesz Representation Theorem), book Brenner-Scott

(ii) Αν $M^{\perp} \neq \{0\}$, συνεπώς ένα $z \in M^{\perp}$, με $z \neq 0$. Τότε, $L(z) \neq 0$,διότι αν $L(z) = 0, \; z \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Για $v \in H$ και $\beta = L(v)/L(z)$ έχουμε ότι

$$L(v - \beta z) = L(v) - \beta L(z) = 0.$$

Άρα, $v - \beta z \in M$, δηλαδή $v - \beta z = P_M v$ και συνεπώς $\beta z = P_{M^{\perp}} v$. Συγκεκριμένα, αν $v \in M^{\perp}$, τότε $v - \beta z = 0$ ή $v = \beta z$, το οποίο έπεται ότι ο $M^{\perp}$ είναι μονοδιάστατος. Επιλέγουμε

$$u := \frac{L(z)}{\|z\|_H^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $u \in M^{\perp}$. Οπότε έχουμε

$$\langle u, v \rangle = \langle u, (v - \beta z) + \beta z \rangle$$

$$= \langle u, v - \beta z \rangle + \langle u, \beta z \rangle$$

$$= \langle u, \beta z \rangle = \beta \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} \langle z, z \rangle$$

$$\beta L(z) = L(v).$$

Για την μοναδικότητα, θεωρούμε u_1, u_2 δύο τέτοιες λύσεις. Τότε:

$$0 = L(u_1 - u_2) - L(u_1 - u_2) = \langle u_1, u_1 - u_2 \rangle - \langle u_2, u_1 - u_2 \rangle$$

$$= \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $u_1 = u_2$. Τέλος, απομένει να δειχθεί ότι $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\|u\|_H = \frac{L(z)}{\|z\|_H}.$$

Από τον ορισμό της δυϊκής νόρμας συνεπάγεται ότι

$$\|L\|_{H^{\perp}} = \sup_{0 \neq v \in H} \frac{\|L(v)\|}{\|v\|_H}$$

$$\sup_{0 \neq v \in H} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|_H} \leq \|L\|_{H'}.$$

Συνεπώς, $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$.

□

1.3 Χώροι Hölder

Σχόλιο. Ως γνωστόν, αν $U \subset \mathbb{R}$ και $u : U \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz, τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε να ισχύει:

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \text{όπου } x, y \in U$$

Τότε η συνάρτηση u είναι Lipschitz συνεχής, δηλαδή μια πιο ισχυρή μορφή από την ομοιόμορφη συνέχεια.

Συμβολισμός: Θα συμβολίζουμε με $Lip(u) := \sup_{x,y,\in\mathbb{R}^n, x\neq y,}\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\} < \infty$, όπου u μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση.

Ορισμός 1.3.1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Οι συναρτήσεις $u : U \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma$$

για κάποιο $\gamma \in (0, 1]$, λέγονται Hölder συνεχείς με εκθέτη γ και $x, y \in U$

Ορισμός 1.3.2. (i) Εάν η συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής, η νόρμα στο $C(\overline{U})$ είναι $\|u\|_{C(\overline{U})} := \sup_{x\in U} |u(x)|$

(ii) Η $\gamma^{th} - \text{Hö}lder$ ημινόρμα της $u : U \to \mathbb{R}$ είναι η

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} := \sup_{x,y\in U, x\neq y}\{\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}\}.$$

(iii) Ο Hölder χώρος $C^{\kappa,\gamma}(\overline{U})$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in C^\kappa(\overline{U})$ με την νόρμα να είναι πεπερασμένη και ορισμένη ως εξής:

$$\|u\|_{C^{\kappa,\gamma}(\overline{U})} := \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{|\alpha|=\kappa} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}.$$

Επομένως, ο χώρος $C^{\kappa,\gamma}(\overline{U})$ αποτελείται από αυτές τις συναρτήσεις u που είναι κ-φορές παραγωγίσιμες και των οποίων η κ^{th}-μερική παράγωγος είναι φραγμένη και Hölder συνεχής με εκθέτη γ.

Θεώρημα 1.3.1. *Ο χώρος $C^{0,\gamma}(\overline{U})$ είναι ένας χώρος Banach.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο $C^{0,\gamma}(\overline{U})$ είναι πλήρης ως προς την μετρική $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}$. Θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset C^{0,\gamma}(\overline{U})$. Αφού ο $C(\overline{U})$ είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}$, υπάρχει $u \in C(\overline{U})$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{C(\overline{U})} = 0$. Για $x, y \in C(\overline{U})$ με $x \neq y$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x - y|^\gamma} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} [u_n]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \leq \infty.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $u \in C^{0,\gamma}(\overline{U})$. Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{|u(x) - u_n(x) - (u(y) - u_n(y))|}{|x-y|^\gamma} &= \lim_{m\to\infty} \frac{|(u_m - u_n)(x) - (u_m - u_n)(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}[|u_m - u_n|]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \to 0\end{aligned}$$

για $n \to \infty$. Άρα, δείξαμε ότι $[u-u_n]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \to 0$ για $n \to \infty$ και συνεπώς, $\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = 0$. □

Θεώρημα 1.3.2. [10] *Ο χώρος $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ είναι ένας χώρος Banach.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^{\kappa,\gamma}(\overline{U})$. Αφού ο C^k είναι πλήρης υπάρχει $u \in C^k$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{C^k(\overline{U})} = 0$. □

Σχόλιο. Οι Hölder χώροι δεν είναι συχνά κατάλληλοι για την μελέτη βασικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, καθώς δεν κατασκευάζονται εύκολα αναλυτικές προσεγγίσεις που αποδεικνύουν την ύπαρξη των λύσεων σε τέτοιους χώρους. Για αυτό τον λόγο, προτιμάμε χώρους με λιγότερες λείες συναρτήσεις. Ένα παράδειγμα αυτών των χώρων είναι οι χώροι Sobolev.

1.4 Χώροι Sobolev

1.4.1 Ασθενής Παράγωγος

Ορισμός 1.4.1. Έστω ο C_c^∞ ο χώρος των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\phi : U \to \mathbb{R}$ των οποίων το στήριγμα είναι συμπαγές υποσύνολο του U. Το στήριγμα μιας συνεχούς συνάρτησης είναι το σύνολο (ή η κλειστότητα αυτού) πάνω στο οποίο η συνάρτηση δεν μηδενίζεται. Μια συνάρτηση ϕ που ανήκει στο C_c^∞ συνήθως καλείται δοκιμαστική συνάρτηση.

Ορισμός 1.4.2. Έστω $u, v \in L^1_{loc}(U)$ και α είναι ένα διάνυσμα. Λέμε ότι το v είναι η α^{th} ασθενής μερική παράγωγος της u, και συμβολίζουμε με $D^\alpha u = v$, αν ισχύει

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx$$

για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Σχόλιο. Ως D^α ορίζουμε την ποσότητα

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial^{\alpha_n}_{x_n}} \phi$$

[10](5.1)Theorem 1 (Hölder spaces as function spaces), book Lawrence C. Evans

Λήμμα 1.4.1. [11] Η α-ασθενής μερική παράγωγος της u, αν υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη σχεδόν παντού στο $L^1_{loc}(U)$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις $v, \overline{v} \in L^1_{loc}(U)$ τέτοιες ώστε

$$\int_U uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \overline{v}\phi dx$$

για κάθε $\phi \in C_c^\infty(U)$ Τότε,

$$\int_U (v - \overline{v})\phi dx = 0$$

για κάθε $\phi \in C_c^\infty(U)$ Συνεπώς, $v = \overline{v}$ σχεδόν παντού στο $L^1_{loc}(U)$. $\square$

Παράδειγμα 1.4.1 (1)**.** Έστω $n = 1, U = (0, 2)$, και

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ \\ 1, & \text{αν } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

και ορίζουμε

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ \\ 0, & \text{αν } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι $u' = v$ με την ασθενή έννοια. Για την απόδειξη, επιλέγουμε μία δοκιμαστική συνάρτηση $\phi \in C_C^\infty(U)$. Πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει

$$\int_0^2 u\phi' dx = -\int_0^2 v\phi dx.$$

Με εύκολους υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\phi' dx &= \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx \\ &= -\int_0^1 \phi dx + \phi(1) - \phi(1) \\ &= -\int_0^2 v\phi dx \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.4.2 (2)**.** Έστω $n = 1, U = (0, 1)$, και

$$u(x) = \begin{cases} x/4, & \text{αν } 0 < x \leq 1/2 \\ \\ (1-x)/4, & \text{αν } 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

[11](5.2.1)Lemma (Uniqueness of weak derivatives), book Lawrence C. Evans

και ορίζουμε

$$v(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{αν } 0 < x \leq 1/2 \\ \\ -1/4, & \text{αν } 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι $u' = v$ με την ασθενή έννοια. Για την απόδειξη, επιλέγουμε μία δοκιμαστική συνάρτηση $\phi \in C_C^\infty(U)$. Πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει

$$\int_0^1 u\phi' dx = -\int_0^1 v\phi dx.$$

Με εύκολους υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v\phi dx &= \int_0^{1/2} \frac{1}{4}\phi dx + \int_{1/2}^1 \frac{-1}{4}\phi dx \\
&= \frac{x}{4}\phi\Big|_{x=0}^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{4}\phi' dx - \frac{x}{4}\phi\Big|_{x=1/2}^{1} + \int_{1/2}^1 \frac{x}{4}\phi' dx \\
&= -\int_0^{1/2} u\phi' dx - \int_{1/2}^1 u\phi' dx \\
&= -\int_0^1 u\phi' dx
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.4.3 (3). Έστω $n = 1, U = (-1, 1)$, και

$$u(x) = |x|$$

και ορίζουμε

$$v(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ \\ 1, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι $u' = v$ με την ασθενή έννοια. Για την απόδειξη, επιλέγουμε μία δοκιμαστική συνάρτηση $\phi \in C_C^\infty(U)$. Πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει

$$\int_0^1 u\phi' dx = -\int_0^1 v\phi dx.$$

Με εύκολους υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 v\phi dx &= \int_{-1}^0 -\phi dx + \int_0^1 \phi dx \\
&= -\int_{-1}^0 (-x)'\phi dx + \int_0^1 (x)'\phi dx \\
&= (-x)\phi\Big|_{-1}^0 - \int_0^{-1} (-x)\phi' dx + x\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 x\phi' dx \\
&= -\int_{-1}^1 |x|\phi' dx = -\int_{-1}^1 u\phi' dx
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.4.4 (4). Έστω $n = 1, U = (0,2)$, και

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ \\ 2 & \text{αν } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση, θα υποθέσουμε ότι η u' δεν υπάρχει με την ασθενή έννοια. Πράγματι, θα πρέπει να δείξουμε ότι δεν υπάρχει καμία συνάρτηση $v \in L^1_{loc}(U)$ που να ικανοποιεί

$$\int_0^2 u\phi' dx = -\int_0^2 v\phi dx.$$

για όλες τις συναρτήσεις $\phi \in C_C^\infty(U)$. Στον αντίποδα, υποθέτουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για κάποιο v και για όλες τις ϕ. Τότε

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v\phi dx &= \int_0^2 u\phi' dx \\ &= \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx \\ &= -\int_0^1 \phi dx - \phi(1). \end{aligned}$$

Επιλέγοντας μια ακολουθία $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$ ομαλών συναρτήσεων για την οποία ισχύουν

$$0 \leq \phi_m \leq 1, \phi_m(1) = 1, \phi_m(x) \to 0 \text{ για όλα τα } x \neq 1.$$

και αντικαθιστώντας την ϕ με ϕ_m για $m \to \infty$ έχουμε

$$1 = \lim_{m\to\infty} \phi_m(1) = \lim_{m\to\infty} \Big[\int_0^2 v\phi_m dx - \int_0^1 \phi_m dx\Big] = 0.$$

Επομένως, καταλήξαμε σε αντίφαση.

Ορισμός 1.4.3. Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$, με $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $1 \leq p \leq \infty$ αποτελείται από όλες τις τοπικά αθροίσιμες συναρτήσεις $u : U \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε διάνυσμα α με $|\alpha| \leq k$, υπάρχει η α-ασθενής μερική παράγωγος $D^\alpha u$ και ανήκει στον $L^p(U)$.

Παρατήρηση 1.4.1. Στον παραπάνω ορισμό, αν $p = 2$, τότε γράφουμε $H^k(U) = W^{k,2}(U)$, όπου ο H είναι ένας χώρος Hilbert. Αν, επιπλέον, $k = 0$, τότε $H^0(U) = L^2(U)$.

Ορισμός 1.4.4. Αν $u \in W^{k,p}(U)$, ορίζουμε τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx\Big)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \\ \sum_{|\alpha|\leq k} ess\sup_U |D^\alpha u|, & p = \infty \end{cases}$$

Ορισμός 1.4.5. Έστω k μη αρνητικός ακέραιος και $u \in W^{k,p}(U)$. Τότε ορίζουμε ως ημινόρμα την ποσότητα

$$|u|_{W^{k,p}(U)} := \Big(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L_p(U)} \Big)^{1/p},$$

όταν $1 \leq p < \infty$ και για $p = \infty$

$$|u|_{W^{k,\infty}(U)} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty}.$$

Ορισμός 1.4.6. (i) Έστω $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ και $u \in W^{k,p}(U)$. Θα λέμε ότι η u_m συγκλίνει στην u στο $W^{k,p}(U)$ και γράφουμε $u_m \to u$ στο $W^{k,p}(U)$, αν

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

(ii) Γράφουμε $u_m \to u$ στο $W^{k,p}_{loc}(U)$, αν

$$u_n \to u \text{ στο } W^{k,p}(V)$$

για κάθε $V \subset\subset U$

Ορισμός 1.4.7. Συμβολίζουμε με $W_0^{k,p}$ την κλειστότητα του C_c^∞ στον $W^{k,p}$. Επιπλέον, $u \in W_0^{k,p}(U)$ αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(U)$ τέτοιες ώστε, $u_m \to u \in W^{k,p}(U)$. Ερμηνεύουμε τον $W_0^{k,p}(U)$ ως τον χώρο που αποτελείται από συναρτήσεις $u \in W^{k,p}(U)$ για τις οποίες ισχύουν

$$\text{"}D^\alpha u = 0\text{" στο } \partial u \text{ για όλα τα } |\alpha| \leq k-1.$$

Σχόλιο. Γράφουμε $H_0^k = W_0^{k,2}$

Γενικότερα, ισχύει ότι αν $n = 1$ και U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^1$, τότε $u \in W^{1,p}(U)$ αν και μόνο αν η u ισούται σχεδόν παντού με μια συνεχής συνάρτηση, της οποίας η παράγωγος (που υπάρχει σχεδόν παντού) ανήκει στον $L^p(U)$. Αυτός ο χαρακτηρισμός ισχύει αποκλειστικά για $n = 1$. Επιπλέον, υπάρχει η πιθανότητα μια συνάρτηση να ανήκει σε ένα χώρο Sobolev, και παράλληλα να είναι ασυνεχής ή/και μη φραγμένη.

Θεώρημα 1.4.1. ***(Ιδιότητες Ασθενής Παραγώγου)***[12] *Έστω $u, v \in W^{k,p}(U), |\alpha| \leq k$. Τότε:*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ και $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ για κάθε διανύσματα α, β με $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ και $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v, |\alpha| \leq k$.

[12](5.2.3)Theorem 1 (Properties of weak derivatives), book Lawrence C. Evans

(iii) Αν V είναι ανοιχτό υποσύνολο του U, τότε $u \in W^{k,p}(V)$

(iv) Αν $\zeta \in C_c^{\infty}$, τότε $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ και

$$D^{\alpha}(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta}\zeta D^{\alpha-\beta}u \text{ (Leibniz' Formula)}$$

όπου, $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη των ιδιοτήτων βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 2.3, Theorem 1 (Properties of weak derivatives), Page 247). □

Θεώρημα 1.4.2. ***(Οι χώροι Sobolev ως χώροι συναρτήσεων)***[13] *Για κάθε $k = 1, 2, ...$ και $1 \leq p \leq \infty$ οι χώροι Sobolev $W^{k,p}(U)$ είναι χώροι Banach.*

Απόδειξη. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι η $\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$ είναι νόρμα. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

και ότι

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$

Έστω $u, v \in W^{k,p}(U)$. Τότε, αν $1 \leq p < \infty$, από την ανισότητα Minkowski έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} &= \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u + D^{\alpha}v\|^p_{L_p(U)}\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^{\alpha}u\|_{L_p} + \|D^{\alpha}v\|^p_{L_p(U)})^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|^p_{L_p(U)}\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}v\|^p_{L_p(U)}\Big)^{1/p} \\
&= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}.
\end{aligned}$$

Μένει να αποδείξουμε ότι ο $W^{k,p}(U)$ είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$. Έστω $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία Cauchy στον $W^{k,p}(U)$. Τότε, για κάθε $|\alpha| \leq k, \{D^{\alpha}u_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy ακολουθία στον $L^p(U)$. Αφού, ο $L^p(U)$ είναι πλήρης, υπάρχουν συναρτήσεις $u_{\alpha} \in L^p(U)$ τέτοιες ώστε

$$D^{\alpha}u_n \to u_{\alpha} \text{ στον } L^p(U)$$

για κάθε $|\alpha| \leq k$. Συγκεκριμένα,

$$u_n \to u_{0,0,\dots,0} := u \text{ στον } L^p(U).$$

[13](5.2.3)Theorem 2 (Sobolev spaces as function spaces), book Lawrence C. Evans

Ισχυριζόμαστε ότι $u \in W^{k,p}(U)$ και $D^\alpha u = u_\alpha$, όπου $|\alpha| \leq k$. Πράγματι, έστω $\phi \in C_c^\infty(U)$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_U u D^\alpha \phi dx &= \lim_{n\to\infty} \int_U u_n D^\alpha \phi dx \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_n \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi dx.\end{aligned}$$

Συνεπώς, ισχύει ότι $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ στον $L^p(U)$ για κάθε $|\alpha| \leq k$, και έτσι έχουμε ότι $u_n \to u$ στον $W^{k,p}(U)$. □

1.4.2 Προσεγγίσεις σε χώρους Sobolev

Προκειμένου να εξεταστούν οι ιδιότητες των χώρων Sobolev απαιτείται η ύπαρξη συστηματικών διαδικασιών προσέγγισης μίας συνάρτησης σε ένα χώρο Sobolev από ομαλές συναρτήσεις. Η μέθοδος των mollifiers παρέχει αυτή την δυνατότητα.

Σχόλιο. Συμβολίζουμε $U_\epsilon := \{x \in U : dist(x, \partial U) > \epsilon\}$.

Ορισμός 1.4.8. (i) Ορίζουμε $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ με

$$\eta(x) := \begin{cases} Cexp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{αν} |x| < 1 \\ 0, & \text{αν} |x| \geq 1 \end{cases}$$

με $C > 0$ σταθερά τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$.

(ii) Για κάθε $\epsilon > 0$, ορίζουμε την συνάρτηση standard mollifier ως

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon_n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Η συνάρτηση η_ϵ είναι C^∞ και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon dx = 1, \; supp(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$$

Ορισμός 1.4.9. Αν η συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση mollifier της u ως

$$u^\epsilon := \eta_\epsilon * u, \; \text{στο } U_\epsilon$$

με τύπο

$$u^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)u(x-y)dy, \; \text{για } x \in U_\epsilon$$

Θεώρημα 1.4.3. ***(Τοπική Προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις)***[14] *Έστω $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p < \infty, k > 0$ και θέτουμε $u^{\epsilon} = \eta_{\epsilon} * u$ στο U_{ϵ}. Τότε:*

(i) $u^{\epsilon} \in C^{\infty}(U_{\epsilon})$, *για κάθε* $\epsilon > 0$,

(ii) $u^{\epsilon} \to u$ *στο* $W^{k,p}_{loc}(U)$, *καθώς* $\epsilon \to 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 3.1, Theorem 1 (Local approximation by smooth functions), Page 250). □

Θεώρημα 1.4.4. ***(Ολική Προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις)***[15] *Έστω U φραγμένο και έστω ότι $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p < \infty$. Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^{\infty}(U) \cap W^{k,p}(U)$ τέτοιες ώστε*

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 3.2, Theorem 2 (Global approximation by smooth functions), Page 251). □

Θεώρημα 1.4.5. ***(Ολική Προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις μέχρι το σύνορο)***[16] *Έστω U φραγμένο σύνολο και ∂U είναι C^1. Αν $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p < \infty$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^{\infty}(\overline{U})$ τέτοιες ώστε*

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 3.3, Theorem 3 (Global approximation by functions smooth up to the boundary), Page 252). □

[14] (5.3.1)Theorem 1 (Local approximation by smooth functions), book Lawrence C. Evans
[15] (5.3.2)Theorem 2 (Global approximation by smooth functions), book Lawrence C. Evans
[16] (5.3.3)Theorem 3 (Global approximation by functions smooth up to the boundary), book Lawrence C. Evans

1.4.3 Επέκταση

Στόχος αυτής της υποενότητας, είναι η επέκταση συναρτήσεων από χώρους Sobolev $W^{1,p}(U)$ σε χώρους $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Υποθέτουμε ότι $1 \leq p \leq \infty$.

Ορισμός 1.4.10. Η συνάρτηση Eu καλείται η επέκταση της u στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.4.6. *(Θεώρημα Επέκτασης)*[17] *Έστω U ένα φραγμένο σύνολο και ∂U είναι C^1. Επιλέγουμε ένα ανοιχτό και φραγμένο σύνολο V τέτοιο ώστε $U \subset\subset V$ Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής*

$$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

όπου $1 \leq p \leq \infty$ τέτοιος ώστε για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$ να ισχύει:

(i) $Eu = u$ σχεδόν παντού στο U

(ii) Eu έχει στήριγμα στο V, και

(iii)

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

με σταθερά C η οποία εξαρτάται από τα p, U και V.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 4, Theorem 1 (Extension Theorem), Page 254). □

Παρατήρηση 1.4.2. (i) Έστω ότι το ∂U είναι C^2. Τότε ο τελεστής επέκτασης που κατασκευάστηκε παραπάνω είναι επίσης, φραγμένος γραμμικός τελεστής από το $W^{2,p}(U)$ στο $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Για την απόδειξη του παρατηρούμε ότι μπορεί το $\overline{u}$ να μην ανήκει γενικότερα στο C^2 αλλά να ανήκει στο $W^{2,p}(B)$. Επίσης, έχουμε την ανισότητα,

$$\|\overline{u}\|_{W^{2,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(B^+)}$$

και όπως, και πριν έχουμε την εκτίμηση

$$\|Eu\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^{\varkappa})} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(U)},$$

όπου C σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα U, V, n και p.

(ii) Η παραπάνω κατασκευή δεν μας δίνει την επέκταση για χώρους Sobolev $W^{k,p}(U)$, αν $k > 2$

[17](5.4)Theorem 1 (Extension Theorem), book Lawrence C. Evans

1.4.4 Ίχνος

Ακολούθως, θα εξεταστεί η πιθανότητα μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$ να έχει συνοριακές τιμές κατά μήκος του ∂U, υποθέτοντας ότι ∂U είναι C^1. Αν $u \in C(\overline{U})$, τότε προφανώς, η u έχει τιμές στο ∂U με την συνήθη έννοια. Το πρόβλημα προκύπτει, όταν η συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$ δεν είναι γενικά συνεχής και, ακόμα χειρότερα αν είναι ορισμένη σχεδόν παντού στο U. Με το σύνορο ∂U να έχει n διαστάσεις και μέτρο Lebesgue ίσο με το μηδέν, δεν υπάρχει κάποιος άμεσος τρόπος να περιορίσουμε την u στο ∂U. Το πρόβλημα αυτό, επιλύεται με τον τελεστή ίχνους.

Ορισμός 1.4.11. Η συνάρτηση Tu καλείται το ίχνος της u στον ∂U.

Θεώρημα 1.4.7. ***(Θεώρημα Ίχνους)***[18] *Έστω U ένα φραγμένο σύνολο και ∂U είναι C^1. Τότε υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

με $1 \leq p < \infty$ τέτοιος ώστε:

(i) $Tu = u|_{\partial U}$, *αν* $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$,

(ii)
$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$
για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$ με σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τα p και U.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 5, Theorem 1 (Trace Theorem), Page 258). □

Θεώρημα 1.4.8. ***(Συναρτήσεις μηδενικού ίχνους στον*** $W^{1,p}(U)$***)***[19] *Έστω U ένα φραγμένο σύνολο με σύνορο ∂U να είναι C^1. Υποθέτουμε επίσης, ότι $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε:*

$$u \in W_0^{1,p}(U) \text{ αν και μόνο αν } Tu = 0 \text{ στο } \partial U.$$

Απόδειξη. (Ευθύ) Έστω $u \in W_0^{1,p}(U)$. Τότε, εξ' ορισμού υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(U)$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στο } W^{1,p}(U)$$

Αφού, $Tu_m = 0$ στο $\partial U, m = 1, \ldots$ και $T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, συνεπάγεται ότι $Tu = 0$ στο ∂U.
(Αντίστροφο) Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 5, Theorem 2 (Trace-zero functions in $W^{1,p}$), Page 259). □

---

[18](5.5)Theorem 1 (Trace Theorem), book Lawrence C. Evans

[19](5.5)Theorem 2 (Trace-zero functions in $W^{1,p}$)), book Lawrence C. Evans

1.4.5 Βασικές Ανισότητες

Θεώρημα 1.4.9. ***(Ανισότητα Cauchy)***[20] *Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$$

Απόδειξη.

$$0 \le (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2.$$

□

Θεώρημα 1.4.10. ***(Ανισότητα Cauchy με ϵ)***[20] *Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ και $\epsilon > 0$ ισχύει*

$$\alpha\beta \le \epsilon\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4\epsilon}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\alpha\beta = ((2\epsilon)^{1/2}\alpha)(\frac{\beta}{(2\epsilon)^{1/2}})$$

και εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα Cauchy. □

Θεώρημα 1.4.11. ***(Ανισότητα Young)***[20] *Έστω $1 < p, q < \infty$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε, για $\alpha, \beta > 0$ ισχύει*

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto e^x$ είναι κυρτή, και συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= e^{\log\alpha + \log\beta} \\ &= e^{\frac{1}{p}\log\alpha^p + \frac{1}{q}\log\beta^q} \\ &\le \frac{1}{p}e^{\log\alpha^p} + \frac{1}{q}e^{\log\beta^q} \\ &= \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1.4.12. ***(Ανισότητα Young με ϵ)***[20]. *Έστω $1 < p, q < \infty$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε, για $\alpha, \beta > 0$ ισχύει*

$$\alpha\beta \le \epsilon\alpha^p + C(\epsilon)\beta^q,$$

όπου $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p}q^{-1}$.

[20] Θεώρημα από τις σημειώσεις του μαθήματος Συναρτησιακή Ανάλυση

Απόδειξη. Γράφουμε
$$\alpha\beta = ((\epsilon p)^{1/p}\alpha)(\frac{\beta}{(\epsilon p)^{1/p}})$$
και εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα. □

Θεώρημα 1.4.13. ***(Ανισότητα Hölder)***[21] *Υποθέτουμε ότι $1 \leq p, q \leq \infty$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε, αν $u \in L^p(U), v \in L^q(U)$, έχουμε ότι*
$$\int_U |u \cdot v| dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|u\|_{L^p} = \|v\|_{L^q} = 1$. Τότε, για $1 < p, q < \infty$ από την ανισότητα Young συνεπάγεται ότι
$$\int_U |u \cdot v| dx \leq \frac{1}{p} \int_U |u|^p dx + \frac{1}{q} \int_U |v|^q dx = \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$
□

Θεώρημα 1.4.14. ***(Ανισότητα Minkowski)***[21] *Υποθέτουμε ότι $1 \leq p \leq \infty$ και $u, v \in L^p(U)$. Τότε,*
$$\|u + v\|_{L^p(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}.$$

Απόδειξη.
$$\begin{aligned}
\|u + v\|^p_{L^p(U)} &= \int_U |u + v|^p dx \\
&\leq \int_U |u + v|^{p-1} (|u| + |v|) dx \\
&\leq \Big(\int_U |u + v|^p \Big)^{(p-1)/p} \Big((\int_U |u|^p dx)^{1/p} + (\int_U |v|^p dx)^{1/p} \Big) \\
&= \|u + v\|^{p-1}_{L^p(U)} (\|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}).
\end{aligned}$$
□

Θεώρημα 1.4.15. ***(Γενικευμένη Ανισότητα Hölder)***[21]. *Έστω $1 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$ με $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$, και έστω ότι$u_k \in L^p_k(U)$ για $k = 1, ..., n$. Τότε,*
$$\int_U |u_1 \cdot ... \cdot u_m| dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_i\|_{L^{p_k}(U)}.$$

[21]Θεώρημα από τις σημειώσεις του μαθήματος Συναρτησιακή Ανάλυση

Απόδειξη. Με επαγωγή από την ανισότητα Hölder έπεται το ζητούμενο του θεωρήματος. □

Θεώρημα 1.4.16. ***(Ανισότητα Παρεμβολής για L^p-νόρμες)***[22] *Υποθέτουμε ότι $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ και*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

Υποθέτουμε επίσης, ότι $u \in L^s(U) \cap L^t(U)$. Τότε, $u \in L^r(U)$, και

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^s(U)} \|u\|^{1-\theta}_{L^t(U)}.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\int_U |u|^r dx &= \int_U |u|^{\theta r} |u|^{(1-\theta)r} dx \\ &\leq (\int_U |u|^{\frac{\theta r s}{r\theta}} dx)^{\theta r/s} + (\int_U |u|^{(1-\theta)r \frac{t}{(1-\theta)r}} dx)^{(1-\theta)r/t}\end{aligned}$$

Εδώ έγινε χρήση της ανισότητας Hölder, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις εφαρμογής με

$$\frac{\theta r}{s} + \frac{(1-\theta)r}{t} = 1.$$

□

1.4.6 Ανισότητες Sobolev

Οι ανισότητες Sobolev χρησιμοποιούνται ως εργαλείο για την εμφύτευση των χώρων Sobolev σε άλλους χώρους. Θα εξεταστούν τρεις περιπτώσεις:

1. $1 \leq p < n$,
2. $p = n$, και
3. $n < p \leq \infty$

Ορισμός 1.4.12. Αν $1 \leq p < n$, τότε ο Sobolev συζυγής του p είναι

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Ισοδύναμα, ισχύει ότι $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, με $p^* > p$.

[22] Θεώρημα από τις σημειώσεις του μαθήματος Συναρτησιακή Ανάλυση

Θεώρημα 1.4.17. ***(Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)***[23] *Έστω* $1 \leq p < n$. *Τότε, υπάρχει σταθερά* C *που εξαρτάται από το* p *και το* n *τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

για όλες τις $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα ότι $p = 1$. Αφού το u έχει συμπαγές υποστήριγμα, για κάθε $i = 1, ..., n$ και $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, ...x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)dy_i$$

και έτσι

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |Du(x_1, ...x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)|dy_i$$

με $i = 1, ..., n$. Συνεπώς,

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du(x_1, ...x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)|dy_i\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x_1, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dy_i\Big)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dy_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dy_i\Big)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dy_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \Big(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dx_1 dy_i\Big)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς x_2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} \leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dx_1 dy_2\Big)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1, i\neq 2}^{n} I_i^{1/(n-1)} dx_2.$$

όπου $I_i := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dx_1 dy_i, i = 3, ..., n$. Με εφαρμογή της γενικευμένης ανισότητας Hölder έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dx_1 dy_2\Big)^{1/(n-1)} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dy_1 dx_2\Big)^{1/(n-1)}$$

$$\prod_{i=3}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Du|dx_1 dx_2 dy_i\Big)^{1/(n-1)}$$

[23](5.6.1)Theorem 1 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequality), book Lawrence C. Evans

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο ολοκληρώνοντας διαδοχικά ως προς $x_3, ..., x_n$ και καταλήγουμε στην ανίσωση

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^{n} \Big(\int_{\infty}^{\infty} ... \int_{\infty}^{\infty} |Du| dx_1 ... dy_i ... dx_n \Big)^{1/(n-1)} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \Big)^{n/(n-1)}.\end{aligned}$$

Τώρα για $1 < p < n$ εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση για $|u|^\gamma$ με κατάλληλο $\gamma > 1$. Τότε

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \Big)^{(n-1)/n} &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^\gamma| dx \Big) \\ &= \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \\ &\leq \gamma \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \Big)^{(p-1)/p} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε το γ έτσι ώστε $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1}$. Λύνοντας, βρίσκουμε $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$ για το οποίο έχουμε ότι $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$. Συνεπώς, έχουμε από την παραπάνω σχέση με αντικατάσταση ότι

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \Big)^{1/p^*} \leq C \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \Big)^{1/p}.$$

□

Θεώρημα 1.4.18. ***(Εκτίμηση στον** $W^{1,p}(U), 1 \leq p < n$**)***[24] *Έστω U ένα φραγμένο και ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι το σύνορο ∂U είναι C^1. Έστω $1 \leq p < n$ και $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε, $u \in L^{p^*}(U)$ με την εκτίμηση*

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τα p, n και U.

Απόδειξη. Αφού το ∂U είναι C^1, υπάρχει μια επέκταση $Eu = \overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \overline{u} = u \text{ στο } U, \text{ το } \overline{u} \text{ έχει συμπαγές υποστήριγμα, και} \\ \\ \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Αφού το $\overline{u}$ έχει συμπαγές υποστήριγμα, υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), m = 1, 2, ...$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στο } W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, ισχύει ότι $\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ για όλα τα $l, m \geq 1$. Συνεπώς,

$$u_m \to \overline{u} \text{ στον} L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

[24](5.6.1)Theorem 2 (Estimates for $W^{1,p}, 1 \leq p < n$), book Lawrence C. Evans

Επίσης, από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι $\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, άρα, έχουμε και για το όριο ότι

$$\|\overline{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D\overline{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Από την παραπάνω ανισότητα και την (1) έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 1.4.19. ***(Εκτίμηση στον*** $W_0^{1,p}(U), 1 \leq p < n$***)***[25] *Έστω U ένα φραγμένο και ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $u \in W_0^{1,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p < n$. Τότε, έχουμε την εκτίμηση*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)},$$

για κάθε $q \in [1, p^*]$, με σταθερά C που εξαρτάται από τα p, q, n και U.

Απόδειξη. Αφού το $u \in W_0^{1,p}(U)$, υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(U), m = 1, 2, ...$, που συγκλίνουν στο u στον $W_0^{1,p}(U)$. Επεκτείνουμε κάθε συνάρτηση u_m έτσι ώστε να είναι 0 στο $\mathbb{R}^n - U$ και με

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

Αφού το $|U| < \infty$, έχουμε ότι

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^{p^*}(U)}$$

για $1 \leq q \leq p^*$. $\square$

Θεώρημα 1.4.20. ***(Ανισότητα Morrey)***[26] *Έστω $n < p \leq \infty$. Τότε, υπάρχει μια σταθερά C που εξαρτάται από τα p και n, τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

για όλες τις $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, όπου $\gamma := 1 - \frac{n}{p}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 6.2, Theorem 4 (Morrey's Inequality), Page 266). $\square$

Παρατήρηση 1.4.3. Μια μικρή διαφοροποίηση του παραπάνω θεωρήματος είναι η ανισότητα

$$|u(x) - u(y)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}}\Big(\int_{B(x,2r)} |Du(z)|^p dz\Big)^{1/p}$$

για όλες τις $u \in C^1(B(x, 2r)), y \in B(x, r)$ και $n < p < \infty$. Με μία προσέγγιση, η ίδια ανίσωση ισχύει και για $u \in W^{1,p}(B(x, 2r)), n < p < \infty$.

[25](5.6.1)Theorem 3 (Estimates for $W_0^{1,p}(U), 1 \leq p < n$), book Lawrence C. Evans
[26](5.6.2)Theorem 4 (Morrey's inequality), book Lawrence C. Evans

Ορισμός 1.4.13. Θα λέμε ότι η συνάρτηση u^* είναι μια έκδοση μιας συνάρτησης u αν ισχύει
$$u = u^* \text{ σχεδόν παντού.}$$

Θεώρημα 1.4.21. ***(Εκτίμηση στον*** $W^{1,p}, n < p \leq \infty$***).***[27] *Έστω U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι το σύνορο $\partial U \in C^1$. Έστω $n < p \leq \infty$, και $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε η u έχει μια έκδοση $u^* \in C^{0,\gamma}(\overline{U})$, για $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, με εκτίμηση*
$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$
όπου C σταθερά που εξαρτάται από τα p, n και U.

Απόδειξη. Αφού, το ∂U είναι C^1 έχουμε ότι υπάρχει μια επέκταση $Eu = \overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε
$$\begin{cases} \overline{u} = u \text{ στο } U, \\ \overline{u} \text{ έχει συμπαγές υποστήριγμα, και} \\ \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Αφού το $\overline{u}$ έχει συμπαγές υποστήριγμα, τότε, θα υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοιες ώστε
$$u_m \to \overline{u} \text{ στο } W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$
Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε ότι $\|u_m - u_l\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ για όλα τα $l, m \geq 1$. Συνεπώς, υπάρχει μια συνάρτηση $u^* \in C^{0,1-\frac{n}{p}(\mathbb{R}^n)}$ τέτοια ώστε
$$u_m \to u^* \text{ στο } C^{0,1-\frac{n}{p}(\mathbb{R}^n)}.$$
Άρα, παρατηρούμε ότι $u^* = u$ σχεδόν παντού στο U και έτσι, η u^* αποτελεί εκδοχή της u. Επίσης, από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι $\|u_m\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}(\mathbb{R}^n)}} \leq C\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ καταλήγοντας τελικά στο συμπέρασμα,
$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}(\mathbb{R}^n)}} \leq C\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$
Από την παραπάνω ανισότητα και την (1.2) αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.4.22. ***(Γενικευμένες Ανισότητες Sobolev.)***[28] *Έστω U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο $\partial U \in C^1$, και $u \in W^{k,p}(U)$.*

(i) Αν $k < \frac{n}{p}$, τότε $u \in L^q(U)$ όπου $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση
$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$
με σταθερά C που εξαρτάται από τα k, p, n και U.

---
[27](5.6.2)Theorem 5 (Estimates for $W^{1,p}, n < p \leq \infty$), book Lawrence C. Evans
[28](5.6.3)Theorem 6 (General Sobolev inequalities), book Lawrence C. Evans

(ii) Αν $k > \frac{n}{p}$ τότε, $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{U})$, όπου

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{αν } \frac{n}{p} \text{δεν είναι ακέραιος} \\ \text{οποιοσδήποτε θετικός αριθμός} < 1, & \text{αν } \frac{n}{p} \text{είναι ακέραιος.} \end{cases}$$

Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{U})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

με σταθερά C που εξαρτάται από τα k, p, n, γ και U.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 6.3, Theorem 6 (General Sobolev inequalities), Page 270). □

1.4.7 Συμπάγεια

Ορισμός 1.4.14. Έστω X, Y δύο χώροι Banach με νόρμες $\|\cdot\|_X$,$\|\cdot\|_Y$ και $X \subset Y$. Θα λέμε ότι ο X είναι συμπαγώς ενσωματωμένος στον Y, γράφουμε $X \subset\subset Y$ αν

(i) $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X (x \in X)$, για κάποια σταθερά C

(ii) κάθε ακολουθία σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του X έχει υπακολουθία που είναι Cauchy ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_Y$

Θεώρημα 1.4.23. *(Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov).*[29] *Έστω U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο ∂U να είναι C^1. Έστω επίσης $1 \leq p < n$. Τότε,*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

για κάθε $1 \leq q < p^*$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 7, Theorem 1 (Rellich-Kondrachov Compactness Theorem), Page 272). □

Παρατήρηση 1.4.4. Παρατηρούμε ότι για $p^* > p$ και $p^* \to \infty$ καθώς $p \to n$, έχουμε ότι

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

για όλα τα $1 \leq p \leq \infty$. (Παρατηρούμε ότι αν $n < p \leq \infty$, αυτό έπεται από την ανισότητα Morrey και το κριτήριο συμπάγειας Arzela-Ascoli.) Επίσης,

$$W_0^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

ακόμα και αν δεν θεωρήσουμε ότι το ∂U είναι C^1.

[29](5.7)Theorem 1 (Rellich-Kondrachov Compactness Theorem), book Lawrence C. Evans

1.4.8 Περισσότερες Ανισότητες

Σχόλιο. Ορίζουμε ως $(u)_U = \fint_U u dy = \frac{1}{meas(U)} \int_U u dy$ τη μέση τιμή του u στο U.

Θεώρημα 1.4.24. *(Ανισότητα Poincare).* [30] *Έστω U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο ∂U να είναι C^1. Έστω επίσης $1 \leq p \leq \infty$. Τότε, υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται μόνο από τα n, p και U τέτοια ώστε*

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leq \|Du\|_{L^p(U)}$$

για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$.

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι υπάρχει για κάθε ακέραιο $k = 1, 2, ...$ μια συνάρτηση $u_k \in W^{1,p}(U)$ τέτοια ώστε

$$\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)} > k\|Du_k\|_{L^p(U)}.$$

Ορίζουμε

$$v_k := \frac{u_k - (u_k)_U}{\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)}}, \text{ με } \kappa = 1, 2, ...$$

Τότε

$$(v_k)_U = 0, \|v_k\|_{L^p(U)} = 1, \text{ και } \|Dv_k\|_{L^p(U)} < \frac{1}{k}.$$

Άρα, οι συναρτήσεις $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι φραγμένες στον $W^{1,p}(U)$. Βάση την παραπάνω παρατήρηση, υπάρχει υπακολουθία $\{v_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ και μια συνάρτηση $v \in L^p(U)$ τέτοια ώστε

$$v_{kj} \to v, \text{ στον } L^p(U).$$

Επίσης, για την v ισχύει ότι

$$(v)_U = 0, \|v\|_{L^p(U)} = 1.$$

Από την άλλη έχουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $\phi \in C_c^{\infty}(U)$ ότι

$$\int_U v\phi_{x_i} dx = \lim_{kj \to \infty} v_{kj}\phi_{x_i} dx = -\lim_{kj \to \infty} \int_U v_{kj,x_i}\phi dx = 0.$$

Συνεπώς, $v \in W^{1,p}(U)$ με $Du = 0$ σχεδόν παντού. Επομένως, η v είναι σταθερή, αφού το U είναι συνεκτικό. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς με v σταθερή και $(v)_U = 0$, πρέπει να ισχύει ότι $v = 0$, το οποίο αντιτίθεται στο ότι $\|v\|_{L^p(U)}$. $\square$

Παρατήρηση 1.4.5. Ορίζουμε ως $(u)_{x,r} = \frac{1}{meas(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u dy$ τη μέση τιμή της u στην μπάλα $B(x, r)$.

[30] (5.8.1)Theorem 1 (Poincare's inequality), book Lawrence C. Evans

Θεώρημα 1.4.25. *(Ανισότητα Poincare σε μπάλα).* [31] *Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Τότε, υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται από τα n και p τέτοια ώστε*

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr\|Du\|_{L^p(B(x,r))}$$

για κάθε μπάλα $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ και κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(B^0(x,r))$.

Απόδειξη. Αν $U = B^0(0,1)$ η ανισότητα ισχύει από το προηγούμενο θεώρημα. Γενικά, αν $u \in W^{1,p}(B^0(x,r))$ γράφουμε

$$v(y) := u(x + ry), y \in B(0,1).$$

Τότε $v \in W^{1,p}(B^0(x,r))$ και έχουμε ότι:

$$\|v - (v)_U\|_{L^p(B(0,1))} \leq C\|Du\|_{L^p(B(0,1))}.$$

Με αλλαγή μεταβλητών καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.4.6. Έστω $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ και έστω $B(x,r)$ μια μπάλα. Τότε, το προηγούμενο θεώρημα για $p = 1$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \fint_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}| dy &\leq Cr \fint_{B(x,r)} |Du| dy \\ &\leq Cr\Big(\fint_{B(x,r)} |Du|^n dy\Big)^{1/n} \qquad \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^n dy\Big)^{1/n}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $u \in BMO(\mathbb{R}^n)$, τον χώρο των συναρτήσεων φραγμένης μέσης κύμανσης στον $\mathbb{R}^n$ με την ημινόρμα

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B(x,r) \subset \mathbb{R}^n} \Big\{ \fint_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}| dy \Big\}.$$

1.4.9 Διαφορισιμότητα

Ορισμός 1.4.15. Μια συνάρτηση $u : U \mapsto \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x \in U$ αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$u(y) = u(x) + \alpha \cdot (y - x) + o(|y - x|), \text{ καθώς, } y \to x.$$

Με άλλα λόγια

$$\lim_{y \to x} \frac{|u(y) - u(x) - \alpha \cdot (y - x)|}{|y - x|} = 0.$$

[31] (5.8.1)Theorem 2 (Poincare's inequality for a ball), book Lawrence C. Evans

Σχόλιο. Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν το α υπάρχει, τότε είναι και μοναδικό. Οπότε γράφουμε $grad(u(x))$ αντί για α και ονομάζουμε το $grad(u(x))$ ως η κλίση (gradient) της u.

Θεώρημα 1.4.26. *(Διαφορισιμότητα σχεδόν παντού).*[32] *Έστω $u \in W^{1,p}_{loc}(U)$ για κάποιο $n < p \leq \infty$. Τότε, η u είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο U, και η κλίση της είναι ίση με την ασθενή παράγωγο σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Lawrence C.Evans (Chapter 5, Section 8.3, Theorem 5 (Differentiability almost everywhere), Page 280). □

Θεώρημα 1.4.27. *(Θεώρημα Rademacher).*[33] *Έστω u μια τοπικά Lipschitz συνεχής συνάρτηση στο U. Τότε, η u είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο U.*

Απόδειξη. Αποτελεί άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος. □

1.4.10 Λοιποί Χώροι Συναρτήσεων

Ορισμός 1.4.16. Έστω $u, v \in H^1_0(U)$. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως

$$(u, v) := \int_U DuDv + uvdx.$$

Ορισμός 1.4.17. Γράφουμε ως $H^{-1}(U)$ τον δυϊκό χώρο του $H^1_0(U)$. Δηλαδή $H^{-1}(U) := \{f : H^1_0(U) \mapsto \mathbb{R}^n$ με f συνεχή, φραγμένη$\}$.

Σχόλιο. Με $\langle ., . \rangle : H^{-1}(U) \times H^1_0(U) \mapsto \mathbb{R}$ συμβολίζουμε το δυϊκό γινόμενο μεταξύ των $H^{-1}(U)$ και $H^1_0(U)$.

Ορισμός 1.4.18. Αν $f \in H^{-1}(U)$, ορίζουμε την νόρμα

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} := \sup\{\langle f, u \rangle : u \in H^1_0(U), \|u\|_{H^1_0(U)} \leq 1\}.$$

[32](5.8.3)Theorem 5 (Differentiability almost everywhere), book Lawrence C. Evans
[33](5.8.3)Theorem 6 (Rademacher's Theorem), book Lawrence C. Evans

Θεώρημα 1.4.28. ***(Χαρακτηρισμός του** $H^{-1}(U)$**).***[34]

(i) Έστω $f \in H^{-1}(U)$. Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις $f^0, f^1, ..., f^n \in L^2(U)$ τέτοιες ώστε

$$\langle f, u\rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx, v \in H_0^1(U). \quad (4)$$

(ii) Επιπλέον,

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf\left\{\left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\right)^{1/2} : f \text{ ικανοποιεί την } (4) \text{ για } f^0, ..., f^n \in L^2(U)\right\}.$$

Σχόλιο. Γράφουμε ως $f = f^0 - \sum_{i=0}^{n} f^i_{x_i}$, όταν ισχύει η (4)

Απόδειξη. (i) Έστω $f \in H^{-1}(U)$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in H_0^1(U)$ τέτοια ώστε να ισχύει $B[u, v] = \langle f, v\rangle$ για όλες τις $v \in H_0^1(U)$. Δηλαδή,

$$\int_U DuDv + uvdx = \langle f, v\rangle$$

για κάθε $v \in H_0^1(U)$. Άρα, η (4) ισχύει για

$$\begin{cases} f^0 = u, \\ f^i = u_{x_i}, \quad \text{ι=1,...,ν} \end{cases}$$

Έστω τώρα ότι $f \in H^{-1}(U)$,

$$\langle f, u\rangle = \int_U g^0 v + \sum_{i=1}^{n} g^i v_{x_i} dx,$$

για $g^0, ..., g^n \in L^2(U)$. Θέτοντας $v = u$ έχουμε ότι

$$\int_U |Du|^2 + |u|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx.$$

Επομένως,

$$\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx.$$

Από την (4) έχουμε ότι

$$|\langle f, v\rangle| \leq \Big(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\Big).$$

[34](5.9.1)Theorem 1 (Characterization of H^{-1}), book Lawrence C. Evans

αν $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$. Συνεπώς,

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} \leq \Big(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\Big).$$

Θέτοντας $v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(U)}}$, συνεπάγεται ότι

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \Big(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\Big).$$

(ii) Η σχέση (ii) επάγεται άμεσα από το ότι

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^{-1}(U)} &= \Big(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\Big)\\ &\leq \Big(\int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx\Big)\end{aligned}$$

για $g^0, ..., g^n \in L^2(U)$ με $\langle f, v\rangle = \int_U g^0 v + \sum_{i=1}^{n} g^i v_{x_i} dx$.

$\square$

Κεφάλαιο 2

Μεταβολική διατύπωση των Ελλειπτικών Συνοριακών Προβλημάτων

2.1 Συμμετρικό Μεταβολικό Πρόβλημα

Ορισμός 2.1.1. Έστω V ένας γραμμικός χώρος. Μια διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot)$ στο U είναι μια απεικόνιση $\alpha : V \times V \mapsto \mathbb{R}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\alpha(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda\alpha(u_1, v) + \lambda\alpha(u_2, v)$.

(ii) $\alpha(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1\alpha(u, v_1) + \mu_2\alpha(u, v_2)$. για κάθε $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.1.2. Μια διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot)$ σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα H λέμε ότι είναι φραγμένη (ή συνεχής) αν $\exists C < \infty$ τέτοιο ώστε

$$|\alpha(v, w)| \leq C\|v\|_H\|w\|_H,\ \forall v, w \in H$$

και πιεστική στο $V \subset H$ αν $\exists a > 0$ τέτοιο ώστε

$$\alpha(v, v) \geq a\|v\|_H^2$$

Πρόταση 2.1.1. [1] *Έστω H χώρος Hilbert και $\alpha(\cdot,\cdot)$ μια συμμετρική διγραμμική μορφή η οποία είναι συνεχής στο H και πιεστική σε έναν υπόχωρο V του H. Τότε, ο $(V, \alpha(\cdot,\cdot))$ είναι χώρος Hilbert.*

Απόδειξη. Επειδή η $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι πιεστική, συνεπάγεται ότι για κάθε $v \in V$ τέτοιο ώστε $\alpha(v, v) = 0$ ισχύει ότι $v = 0$. Συνεπώς, η $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον V. Έστω τώρα, ότι $\|v\|_E = \sqrt{\alpha(v, v)}$, και υποθέτουμε ότι η $\{v_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(V, \|\cdot\|_E)$. Λόγω της πιεστικότητας, η $\{v_n\}$ είναι επίσης Cauchy στον $(H, \|\cdot\|_H)$.

[1] (2.5.3) Proposition, book Brenner-Scott

Αφού, ο H είναι πλήρης, υπάρχει $v \in H$ τέτοιο ώστε $v_n \to v$ με την $\|\cdot\|_H$ νόρμα. Αφού το V είναι κλειστό στον H, $v \in V$ Τώρα, όμως, $\|v - v_n\|_E \leq \sqrt{c_1}\|v - v_n\|_H$, αφού η $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι φραγμένη. Άρα, η $v_n \to v$ στην $\|\cdot\|_E$ νόρμα και συνεπώς, ο χώρος $(V, \|\cdot\|_E)$ είναι πλήρης. □

Για την τοποθέτηση του γενικού συμμετρικού μεταβολικού προβλήματος γίνεται η υπόθεση ότι:

1. $(H, (\cdot,\cdot))$ είναι χώρος Hilbert.
2. V είναι υπόχωρος του H.
3. $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή συνεχής στο H και πιεστική στο V.

Τότε, το συμμετρικό πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\text{Δοθέντος ότι } F \in V^*, \text{ να ευρεθεί } u \in V \\ &\text{τέτοιο ώστε } \alpha(u,v) = F(v),\ \forall v \in V. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Θεώρημα 2.1.1. [2] *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες του συμμετρικού προβλήματος ισχύουν. Τότε, υπάρχει μοναδικό $u \in V$ το οποίο επιλύει το πρόβλημα (2.1).*

Απόδειξη. Από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι ο χώρος $(V, \alpha(\cdot,\cdot))$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο το $\alpha(\cdot,\cdot)$. Συνεπώς, με εφαρμογή του θεωρήματος αναπαράστασης του Riez έπεται το ζητούμενο. □

Το προσεγγιστικό πρόβλημα Ritz-Galerkin για το συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} &\text{Δοθέντος ενός πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο } V_h \subset V \text{ και} \\ &F \in V^*, \text{ να ευρεθεί } u_h \in V_h \text{ τέτοιο ώστε } \alpha(u_h,v) = F(v),\ \forall v \in V_h \end{aligned} \tag{2.2}$$

Θεώρημα 2.1.2. [3] *Κάτω από τις συνθήκες του συμμετρικού προβλήματος, υπάρχει μοναδικό $u_h \in V_h \subset V$ τέτοιο ώστε να επιλύει την (2.2).*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο χώρος $(V_h, \alpha(\cdot,\cdot))$ είναι χώρος Hilbert και ότι $F|_{V_h} \in V_h^*$. Συνεπώς, το θεώρημα έπεται εφαρμόζοντας το θεώρημα αναπαράστασης του Riez. □

Πρόταση 2.1.2. ***(Θεμελιώδης Ορθογωνιότητα Galerkin)***[4] *Έστω u και u_h λύσεις των προβλημάτων (2.1) και (2.2) αντίστοιχα. Τότε,*

$$\alpha(u - u_h, v) = 0,\ \forall v \in V_h.$$

[2] (2.5.6) Theorem, book Brenner-Scott
[3] (2.5.8) Theorem, book Brenner-Scott
[4] (2.5.9) Proposition. (Fundamental Galerkin Orthogonality), book Brenner-Scott

Απόδειξη. Αφαιρούμε τις δύο παρακάτω σχέσεις

$$\alpha(u, v) = F(v),\ \forall v \in V,$$

$$\alpha(u_h, v) = F(v),\ \forall v \in V_h$$

και προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 2.1.1. [5]

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_E^2 &= \alpha(u - u_h, u - u_h) \\
&= \alpha(u - u_h, u - v) + \alpha(u - u_h, v - u_h) \\
&= \alpha(u - u_h, u - v) \\
&\leq \|u - u_h\|_E \|u - v\|_E
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v\|_E,\ \forall v \in V$$
$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E.$$

□

Σχόλιο. Στην περίπτωση του συμμετρικού προβλήματος, το u_h ελαχιστοποιεί την τετραγωνική συνάρτηση

$$q(v) = \alpha(v, v) - 2F(v)$$

για όλα τα $v \in V_h$.

2.2 Μη-συμμετρικό Μεταβολικό Πρόβλημα

Για το μη-συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα, θεωρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

1. $(H, (\cdot, \cdot))$ είναι χώρος Hilbert
2. V είναι ένας υπόχωρος του H.
3. $\alpha(\cdot, \cdot)$ είναι μια διγραμμική μορφή, όχι απαραίτητα συμμετρική.
4. $\alpha(\cdot, \cdot)$ είναι συνεχής στο V.
5. $\alpha(\cdot, \cdot)$ είναι πιεστική στο V.

[5] (2.5.10) Corollary, book Brenner-Scott

Τότε, το μη-συμμετρικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\text{Δοθέντος ότι } F \in V^*, \text{ να ευρεθεί } u \in V \\ &\text{τέτοιο ώστε } \alpha(u,v) = F(v), \ \forall v \in V \end{aligned} \tag{2.3}$$

Το αντίστοιχο προσεγγιστικό πρόβλημα Galerkin διατυπώνεται ως:

$$\begin{aligned} &\text{Δοθέντος ενός πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο } V_h \subset V \text{ και} \\ &F \in V^*, \text{ να ευρεθεί } u_h \in V_h \text{ τέτοιο ώστε } \alpha(u_h,v) = F(v), \ \forall v \in V_h \end{aligned} \tag{2.4}$$

Λήμμα 2.2.1. (Αρχή της Συστολικής Απεικόνισης)[6] Δοθέντος ενός χώρου Banach V και μιας απεικόνισης $T : V \to V$, η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq M\|v_1 - v_2\|$$

για κάθε $v_1, v_2 \in V$ και σταθερά M, με $0 \leq M < 1$, υπάρχει ένα μοναδικό $u \in V$ τέτοιο ώστε

$$u = Tu.$$

Απόδειξη. Για την ύπαρξη, θεωρούμε ένα $v_0 \in V$ και ορίζουμε

$$v_1 = TV_0, v_2 = TV_1, ..., v_{k+1} = TV_k, ...$$

Παρατηρούμε τώρα, ότι

$$\|v_{k+1} - v_k\| = \|Tv_k - Tv_{k-1}\| \leq M\|v_k - v_{k-1}\|.$$

Επομένως, με επαγωγή έχουμε ότι

$$\|v_k - v_{k-1}\| \leq M^{k-1}\|v_1 - v_0\|.$$

Συνεπώς, για κάθε $N > n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|v_N - v_n\| &= \|\sum_{k=n+1}^{N} v_k - v_{k-1}\| \\ &\leq \|v_1 - v_0\| \sum_{k=n+1}^{N} M^{k-1} \\ &\leq \frac{M^n}{1-M}\|v_1 - v_0\| \\ &= \frac{M^n}{1-M}\|Tv_0 - v_0\| \end{aligned}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι η $\{v_k\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αφού, ο V είναι πλήρης, η ακολουθία $\{v_k\}$ είναι συγκλίνουσα. Επομένως, αν $\lim_{n\to\infty} v_n := v$, τότε:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{n\to\infty} v_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} Tv_n \\ &= T(\lim_{n\to\infty} v_n) \\ &= T(v) \end{aligned}$$

[6](2.7.2) Lemma. (Contraction Mapping Principle), book Brenner-Scott

λόγω συνέχειας της T.
Για την μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι $Tv_1 = v_1$ και $Tv_2 = v_2$. Αφού, η T είναι συστολική απεικόνιση, ισχύει:

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq M\|v_1 - v_2\|$$

για κάποιο $0 \leq M < 1$. Όμως, $\|Tv_1 - Tv_2\| = \|v_1 - v_2\|$, και άρα,

$$\|v_1 - v_2\| \leq M\|v_1 - v_2\|.$$

Αυτό είναι αληθές μόνο για $M = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $v_1 = v_2$. □

Θεώρημα 2.2.1. ***(Lax - Milgram)***[7] *Δοθέντος ενός χώρου Hilbert $(V, (\cdot,\cdot))$, μιας συνεχούς, πιεστικής διγραμμικής μορφής $\alpha(\cdot,\cdot)$ και ενός συνεχούς γραμμικού συναρτησιακού $F \in V^*$, υπάρχει ένα μοναδικό $u \in V$ τέτοιο ώστε*

$$\alpha(u, v) = F(v), \ \forall v \in V.$$

Απόδειξη. Για κάποιο $u \in V$, ορίζουμε μια συνάρτηση Au ως $Au(v) = \alpha(u, v)$, $\forall v \in V$.
Η Au είναι γραμμική αφού,

$$\begin{aligned} Au(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &= \alpha(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) \\ &= \beta_1 \alpha(u, v_1) + \beta_2 \alpha(u, v_2) \\ &= \beta_1 Au(v_1) + \beta_2 Au(v_2) \end{aligned}$$

για κάθε $v_1, v_2 \in V$ και $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.
Η Au είναι και συνεχής, αφού για κάθε $v \in V$

$$|Au(v)| = |\alpha(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

όπου, C είναι η σταθερά από τον ορισμό της συνέχειας της $\alpha(\cdot,\cdot)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \|Au\|_{V^*} &= \sup_{v \neq 0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|} \\ &\leq C\|u\| < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $Au \in V^*$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $u \mapsto Au$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $V \mapsto V^*$. Εδώ επιπλέον, μπορεί να δειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση $A : V \to V^*$ είναι συνεχής με $\|A\|_{L(V,V^*)} \leq C$.
Από το θεώρημα της αναπαράστασης του Riez ισχύει ότι για κάθε $\phi \in V^*$ υπάρχει μοναδικό $\tau\phi \in V$ τέτοιο ώστε $\phi(v) = \langle \tau\phi, v \rangle$ για κάθε $v \in V$. Πρέπει να βρούμε ένα μοναδικό $u \in V$ τέτοιο ώστε:

$$Au(v) = F(v), \ \forall v \in V.$$

Ισοδύναμα, πρέπει να βρούμε ένα μοναδικό $u \in V$ τέτοιο ώστε

$$Au = F, \ \text{στο } V^*$$

[7](2.7.7) Theorem. (Lax-Milgram), book Brenner-Scott

ή

$$\tau A u = \tau F, \text{ στο } V,$$

αφού η $\tau : V^* \to V$ είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση.
Θέλουμε να βρούμε $\rho \neq 0$ τέτοιο ώστε η απεικόνιση $T : V \to V$ να είναι συστολική, όπου η T ορίζεται ως:

$$Tv := v - \rho(\tau A v - \tau F), \; v \in V.$$

Αν η T είναι συστολική, τότε, από το προηγούμενο Λήμμα θα υπάρχει ένα μοναδικό $u \in V$ τέτοιο ώστε

$$Tu = u - \rho(\tau A u - \tau F) = u$$

το οποίο σημαίνει ότι $\rho(\tau A u - \tau F) = 0$ ή $\tau A u = \tau F$. Επομένως, αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ένα $\rho \neq 0$. Για κάποια $v_1, v_2 \in V$, έστω ότι $v = v_1 - v_2$.
Τότε,

$$\begin{aligned}
\|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau A v_1 - \tau A v_2)\|^2 \\
&= \|v - \rho \tau A v\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\rho\langle \tau A v, v\rangle + \rho^2 \|\tau A v\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\rho A v(v) + \rho^2 A v(\tau A v) \\
&= \|v\|^2 - 2\rho \alpha(v, v) + \rho^2 \alpha(v, \tau A v) \\
&\leq \|v\|^2 - 2\rho a \|v\|^2 + \rho^2 C \|v\| \|\tau A v\| \\
&\leq (1 - 2\rho a + \rho^2 C^2)\|v\|^2 \\
&= (1 - 2\rho a + \rho^2 C^2)\|v_1 - v_2\|^2 \\
&= M^2 \|v_1 - v_2\|^2.
\end{aligned}$$

Παραπάνω έγινε η χρήση του $\|\tau A v\| = \|Av\| \leq C\|v\|$. Συνεπώς, χρειαζόμαστε

$$1 - 2\rho a + \rho^2 C^2 \leq 1 \leftrightarrow \rho(C^2 \rho - 2a) < 0.$$

Αν επιλέξουμε $\rho \in (0, 2a/C^2)$, τότε $M < 1$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Πρόταση 2.2.1. [8] *Κάτω από τις συνθήκες του μη-συμμετρικού μεταβολικού προβλήματος, το πρόβλημα (2.3) έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Οι δύο πρώτες συνθήκες συνεπάγονται ότι ο χώρος $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert. Οπότε, με εφαρμογή του θεωρήματος Lax-Milgram έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.2.2. [9] *Κάτω από τις συνθήκες του μη-συμμετρικού μεταβολικού προβλήματος, το πρόβλημα (2.4) έχει μοναδική λύση.*

[8] (2.7.12) Corollary, book Brenner-Scott
[9] (2.7.13) Corollary, book Brenner-Scott

Απόδειξη. Έστω ότι ο V_h είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του V και έστω ότι $dimV_h = n$. Αν $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ είναι μια βάση του V_h, τότε για κάθε στοιχείο $u_h \in V_h$ θα ισχύει $u_h = \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha(u_h, v) &= f(v) \Rightarrow \\ \alpha(\sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j, v) &= f(v) \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha(\phi_j, v) &= f(v),\ v \in V_h \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha(\phi_j, \phi_i) &= f(\phi_i),\ i = 1, ..., n \end{aligned}$$

δηλαδή, καταλήξαμε σε ένα γραμμικό σύστημα $A{\cdot}c = b$ με $A = (\alpha_{ij}) = \alpha(\phi_j, \phi_i), c = c_j$ και $b = b_i = f(\phi_i)$.
Προκειμένου, το παραπάνω γραμμικό σύστημα να έχει λύση, αρκεί να υπάρχει ένα $d \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε

$$A \cdot d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Πράγματι, αν $A \cdot d = 0$, για $i = 1, ..., n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}d_j &= \sum_{j=1}^{n} \alpha(\phi_j, \phi_i)d_j \\ &= \alpha(\sum_{j=1}^{n} d_j\phi_j, \phi_i) \\ &= \alpha(\sum_{j=1}^{n} d_j\phi_j, \sum_{i=1}^{n} d_i\phi_i) \\ &\geq a\|\sum_{j=1}^{n} d_j\phi_j\|_V^2 \end{aligned}$$

Άρα, $\sum_{j=1}^{n} d_j\phi_j = 0$ και με ϕ_j γραμμικώς ανεξάρτητα έχουμε ότι $d_j = 0, j = 1, ...n$. Συνεπώς, το σύστημα $A{\cdot}c = b$ έχει μια μοναδική λύση c και το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. □

Παρατήρηση 2.2.1. Ο V_h δεν είναι απαραίτητο να είναι πεπερασμένης διάστασης ώστε το προσεγγιστικό πρόβλημα (2.4) να είναι καλά τοποθετημένο.

2.3 Εκτιμήσεις για προσέγγιση με Πεπερασμένα Στοιχεία

Θεωρούμε ότι u είναι η λύση του προβλήματος (2.3) και u_h η λύση του προσεγγιστικού προβλήματος (2.4).

Θεώρημα 2.3.1. ***(Céa)***[10] *Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες του μη-συμμετρικού μεταβολικού προβλήματος. Τότε, για το μεταβολικό πρόβλημα των πεπερασμένων στοιχείων έχουμε την εκτίμηση*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{C}{a} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V,$$

όπου C είναι η σταθερά που ορίζεται λόγω συνέχειας και a η σταθερά λόγω της πιεστικότητας της διγραμμικής μορφής $\alpha(\cdot, \cdot)$ στο V.

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\alpha(u, v) = F(v),\ \forall v \in V$$

και

$$\alpha(u_h, v) = F(v),\ \forall v \in V_h$$

αφαιρώντας τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι

$$\alpha(u - u_h, v) = 0,\ \forall v \in V_h.$$

Για κάθε $v \in V_h$ έχουμε

$$\begin{aligned} a\|u - u_h\|_V^2 &\leq \alpha(u - u_h, u - u_h) \\ &= \alpha(u - u_h, u - v) + \alpha(u - u_h, v - u_h) \\ &= \alpha(u - u_h, u - v) \\ &\leq C\|u - u_h\|_V \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{a} \|u - v\|_V,\ \forall v \in V_h.$$

Ως εκ τούτου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{C}{a} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \\ &= \frac{C}{a} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.3.1. Στην περίπτωση του συμμετρικού μεταβολικού προβλήματος ισχύει ότι

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E.$$

Από αυτή τη σχέση μπορούμε να εξάγουμε το θεώρημα Céa ως εξής:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{1}{\sqrt{a}} \|u - u_h\|_E \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{a}} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \\ &\leq \frac{C}{a} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \end{aligned}$$

[10](2.8.1) Theorem. (Céa), book Brenner-Scott

2.4 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή, θα δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα μονοδιάστατων προβλημάτων με συνοριακές τιμές.

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής

$$-u'' + g(x)u = f, \text{ στο } I(0,1)$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet της μορφής

$$u(0) = u(1) = 0$$

Για την συνάρτηση g γνωρίζουμε ότι $g \in C(\overline{I}), g(x) \geq 0, \ \forall x \in \overline{I}$.
Θα δείξουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική ασθενής λύση ελέγχοντας τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Lax-Milgram. Πράγματι, με το $\alpha(\cdot,\cdot)$ να είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον $H_0^1(0,1)$ έχουμε:

(i) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχές.

$$\begin{aligned}
|\alpha(u,v)| &= |\int_I u'v'dx + \int_I guvdx| \\
&\leq |\int_I u'v'dx| + |\int_I guvdx|, \ u,v \in L^2(I) \\
&\leq \|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} + \max_{x\in\overline{I}}|g(x)||\int_0^1 uvdx| \\
&\leq \|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} + (\max_{x\in\overline{I}}|g(x)|)\|u\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \\
&\leq \max(1, \max_{x\in\overline{I}}|g(x)|)(\|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)}) \\
&\leq C\sqrt{\|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u\|^2_{L^2(I)}} \cdot \sqrt{\|v'\|^2_{L^2(I)} + \|v\|^2_{L^2(I)}} \\
&\leq C\|u\|_{H_0^1(I)}\|v\|_{H_0^1(I)}
\end{aligned}$$

(ii) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι πιεστικό

$$\begin{aligned}
\alpha(u,u) &= \int_I u'^2 + \int_I gu^2 \\
&\geq \int_I u'^2 dx \\
&= \|u'\|^2_{L^2(I)} \\
&\geq C\|u\|^2_{H_0^1(I)}
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από την ανισότητα Poincare.

(iii)

$$|f(v)| = |\int_I fvdx| \leq \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \leq C\|v\|_{H_0^1(I)}$$

Επομένως, από το θεώρημα Lax-Milgram το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα 2.4.2. Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής

$$-(\rho u')' + g(x)u = f, \text{ στο } I(0,1)$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet της μορφής

$$u(0) = u(1) = 0$$

Για τις συναρτήσεις g, ρ γνωρίζουμε ότι $g \in C(\overline{I}), g(x) \geq 0, \rho \in C^1(\overline{I}), \rho(x) \geq a > 0, \ \forall x \in \overline{I}$.
Η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 (\rho u')' v dx + \int_0^1 gu \cdot v dx = \int_0^1 f v dx, \ \forall v \in H_0^1(I) \Rightarrow \\
\int_0^1 \rho u' v' dx + \int_0^1 gu \cdot v dx = \int_0^1 f v dx
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική ασθενής λύση ελέγχοντας τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Lax-Milgram. Πράγματι, με το $\alpha(\cdot,\cdot)$ να είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον $H_0^1(0,1)$ έχουμε:

(i) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχές.

$$\begin{aligned}
|\alpha(u,v)| &= |\int_I \rho u' v' dx + \int_I guv dx| \\
&\leq |\int_I \rho u' v' dx| + |\int_I guv dx|, \ u, v \in L^2(I) \\
&\leq \max_{x \in \overline{I}} |\rho(x)| \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \max_{x \in \overline{I}} |g(x)| \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} \\
&\leq \max(\max_{x \in \overline{I}} |\rho(x)|, \max_{x \in \overline{I}} |g(x)|)(\|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)}) \\
&\leq C \sqrt{\|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u\|^2_{L^2(I)}} \cdot \sqrt{\|v'\|^2_{L^2(I)} + \|v\|^2_{L^2(I)}} \\
&\leq C \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}
\end{aligned}$$

(ii) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι πιεστικό

$$\begin{aligned}
\alpha(u,u) &= \int_I \rho (u')^2 + \int_I g u^2 \\
&\geq C \int_I u'^2 dx \\
&\geq C \|u\|^2_{H_0^1(I)}
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από την ανισότητα Poincare.

(iii)

$$|f(v)| = |\int_I fv dx| \leq \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \leq C\|v\|_{H_0^1(I)}$$

Επομένως, το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Στο τελευταίο παράδειγμα θα εξετάσουμε ένα πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες Neumann.

Παράδειγμα 2.4.3. Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής

$$-u'' + g(x)u = f, \text{ στο } I(0,1)$$

με συνοριακές συνθήκες Neumann της μορφής

$$u'(0) = u'(1) = 0$$

Για την συνάρτηση g γνωρίζουμε ότι $g \in C(\overline{I}), g(x) \geq \beta > 0, \ \forall x \in \overline{I}$.
Θα δείξουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική ασθενής λύση ελέγχοντας τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Lax-Milgram. Πράγματι, με το $\alpha(\cdot,\cdot)$ να είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον $H^1(0,1)$ έχουμε:

(i) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχές.

$$\begin{aligned}
|\alpha(u,v)| &= |\int_I u'v'dx + \int_I guvdx| \\
&\leq |\int_I u'v'dx| + |\int_I guvdx|, \ u,v \in L^2(I) \\
&\leq \|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} + \max_{x\in\overline{I}}|g(x)||\int_0^1 uvdx| \\
&\leq \|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} + (\max_{x\in\overline{I}}|g(x)|)\|u\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \\
&\leq \max(1, \max_{x\in\overline{I}}|g(x)|)(\|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)}) \\
&\leq C\sqrt{\|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u\|^2_{L^2(I)}} \cdot \sqrt{\|v'\|^2_{L^2(I)} + \|v\|^2_{L^2(I)}} \\
&\leq C\|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)}
\end{aligned}$$

(ii) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι πιεστικό

$$\begin{aligned}
\alpha(u,u) &= \int_I u'^2 + \int_I gu^2 \\
&\geq \int_I (u')^2 dx + \beta\int_I u^2 dx \\
&\geq \min(1,\beta)\Big[\int_I (u')^2 dx + \int_I u^2 dx\Big] \\
&= C\|u\|^2_{H^1(I)}
\end{aligned}$$

(iii)

$$|f(v)| = |\int_I fv dx| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq C\|v\|_{H_0^1(I)}$$

Επομένως, το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Κεφάλαιο 3

Πεπερασμένα Στοιχεία: Βασικές Ιδιότητες-Θεωρία Προσέγγισης

3.1 Κατασκευή ενός χώρου Πεπερασμένων Στοιχείων

Σκοπός της υποενότητας είναι να κατασκευαστούν χώροι πεπερασμένης διάστασης $S \subset V$ για το προσεγγιστικό πρόβλημα

$$\alpha(u, v) = F(v), \forall\ v \in V,$$

οι οποίοι να πρακτικοί. Επιπλέον, θα αναπτυχθεί η θεωρία προσέγγισης που είναι κατάλληλη για αυτά τα πεπερασμένα στοιχεία.

3.1.1 Πεπερασμένα Στοιχεία

Ορισμός 3.1.1. Έστω ότι

(i) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο κλειστό υποσύνολο με μη κενό εσωτερικό και τμηματικά ομαλό σύνορο (ο χώρος των στοιχείων),

(ii) $\mathcal{P}$ είναι ένας χώρος συναρτήσεων πεπερασμένης διάστασης στο K (ο χώρος των συναρτήσεων του σχήματος), και

(iii) $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, ..., N_k\}$ μια βάση του $\mathcal{P}^*$ (το σύνολο των κομβικών μεταβλητών).

Τότε, ο $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ καλείται πεπερασμένο στοιχείο.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ένα πεπερασμένο στοιχείο. Η δυϊκή βάση $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ του $\mathcal{P}$ ως προς το $\mathcal{N}$ καλείται κομβική βάση του $\mathcal{P}$.

Λήμμα 3.1.1. [1] Έστω $\mathcal{P}$ ένας διανυσματικός χώρος διάστασης d και έστω $\{N_1, N_2, ..., N_k\}$ ένα υποσύνολο του δυϊκού χώρου $\mathcal{P}^*$. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. $\{N_1, N_2, ..., N_k\}$ είναι μια βάση του χώρου $\mathcal{P}^*$.
2. Αν $v \in \mathcal{P}$ με $N_i v = 0$ για $i = 1, 2, ..., d$, τότε $v \equiv 0$.

Απόδειξη. Έστω $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ μια βάση του χώρου $\mathcal{P}$. Το σύνολο $\{N_1, N_2, ..., N_k\}$ είναι βάση για τον χώρο $\mathcal{P}^*$ αν για κάθε $L \in \mathcal{P}^*$ ισχύει ότι

$$L = \alpha_1 N_1 + ... + \alpha_d N_d$$

(διότι, $d = dim(\mathcal{P}) = dim(\mathcal{P}^*)$.) Ισοδύναμα, ισχύει ότι

$$y_i := L(\phi_i) = \alpha_1 N_1(\phi_1) + ... + \alpha_d N_d(\phi_d).$$

Έστω $\boldsymbol{B} = (N_j(\phi_i)),\ i, j = 1, ..., d$. Συνεπώς, η πρώτη πρόταση είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι το σύστημα $\boldsymbol{B}\alpha = y$ έχει πάντα λύση, το οποίο σημαίνει ότι το $\boldsymbol{B}$ είναι αντιστρέψιμο.
Δοθέντος κάποιου $v \in \mathcal{P}$, μπορούμε να γράψουμε ότι $v = \beta_1\phi_1 + ... + \beta_d\phi_d$. Το $N_i v = 0$ σημαίνει ότι

$$\beta_1 N_i(\phi_1) + ... + \beta_d N_i(\phi_d) = 0.$$

Συνεπώς, η δεύτερη πρόταση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\beta_1 N_i(\phi_1) + ... + \beta_d N_i(\phi_d) = 0,\ \forall i = 1, ..., d$$

$$\Rightarrow \beta_1 = ... = \beta_d = 0.$$

Έστω $\boldsymbol{C} = N_i(\phi_j),\ i, j = 1, ..., d$. Τότε, η δεύτερη πρόταση είναι ισοδύναμη με το σύστημα $\boldsymbol{C}x = 0$ να έχει μόνο τετριμμένη λύση ή ισοδύναμα ο $\boldsymbol{C}$ να είναι αντιστρέψιμος. Όμως, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^T$. Άρα, οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες. □

Σχόλιο. Η συνθήκη (3) στον ορισμό του πεπερασμένου στοιχείου είναι ισοδύναμη με την πρόταση (1) του λήμματος, το οποίο μπορεί να επαληθευτεί με τον έλεγχο του (2) στο παραπάνω λήμμα. Γενικά, αν $v \in \mathcal{P}_k$ και $0 = N_i(v) = v(\alpha + (\beta - \alpha)i \setminus k)\ \forall i = 0, 1, ..., k$ τότε το v εξαφανίζεται και αυτό λόγω του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας. Συνεπώς, το $(K, \mathcal{P}_k, \mathcal{N}_k)$ είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.

Ορισμός 3.1.3. Θα λέμε ότι το $\mathcal{N}$ χαρακτηρίζει το $\mathcal{P}$ αν $\psi \in \mathcal{P}$ με $N(\psi) = 0$ για κάθε $N \in \mathcal{N}$ συνεπάγεται ότι $\psi = 0$.

Σχόλιο. Θα αναφερόμαστε στο υπερεπίπεδο $x : L(x) = 0$, όπου L είναι μια μη τετριμμένη γραμμική συνάρτηση, ως L.

[1] (3.1.4) Lemma, book Brenner-Scott

Λήμμα 3.1.2. [2] Έστω P ένα πολυώνυμο βαθμού $d \geq 1$, το οποίο εξαφανίζεται σε ένα υπερεπίπεδο L. Τότε, μπορούμε να γράψουμε $P = LQ$, όπου Q είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $d-1$.

Απόδειξη. Κάνουμε μια συσχετισμένη αλλαγή των συντεταγμένων τέτοια ώστε $L(\hat{x}, x_n) = x_n$ και το υπερεπίπεδο $L(\hat{x}, x_n) = 0$ να είναι ο άξονας $(\hat{x})$. Τότε, $P((\hat{x}), 0) \equiv 0$. Αφού, ο βαθμός του P είναι d, έχουμε

$$P(\hat{x}, x_n) = \sum_{j=0}^{d} \sum_{|\hat{i}| \leq d-j} c_{\hat{i}j} \hat{x}^{\hat{i}} x_n^j$$

όπου $\hat{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$ και $\hat{i} = (i_1, ..., i_{n-1})$. Θέτοντας $x_n = 0$ λαμβάνουμε ότι $0 \equiv P(\hat{x}, 0) = \sum_{|\hat{i}| \leq d} c_{\hat{i}0} \hat{x}^{\hat{i}}$, το οποίο, συνεπάγεται ότι $c_{\hat{i}0} = 0$ για $|\hat{i}| \leq d$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P(\hat{x}, x_n) &= \sum_{j=1}^{d} \sum_{|\hat{i}| \leq d-j} c_{\hat{i}j} \hat{x}^{\hat{i}} x_n^j \\ &= x_n \sum_{j=1}^{d} \sum_{|\hat{i}| \leq d-j} c_{\hat{i}j} \hat{x}^{\hat{i}} x_n^{j-1} \\ &= x_n Q \\ &= LQ, \end{aligned}$$

όπου το Q είναι βαθμού $d-1$. □

3.1.2 Τριγωνικά Πεπερασμένα Στοιχεία

Έστω K ένα οποιοδήποτε τρίγωνο. Έστω ότι με $\mathcal{P}_k$ δηλώνουμε το σύνολο όλων των πολυωνύμων με δύο μεταβλητές με βαθμό μικρότερο ή ίσο του k. Οι διαστάσεις του $\mathcal{P}_k$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

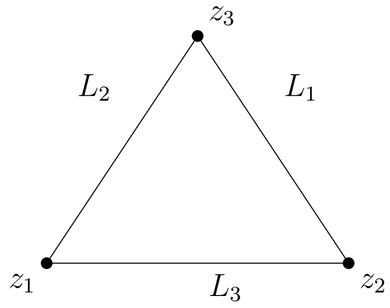
k	$dim P_k$
1	3
2	6
3	10
.	.
.	.
.	.
k	$\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Πίνακας 3.1: Μέγεθος του $\mathcal{P}_k$ σε δύο διαστάσεις

[2] (3.1.10) Lemma, book Brenner-Scott

Τα στοιχεία Lagrange

Παράδειγμα 3.1.1. ($k = 1$). Έστω $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\infty$. Έστω $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3\}$ ($dim\mathcal{P}_1 = 3$) όπου $N_i(v) = v(z_i)$ και z_1, z_2, z_3 είναι οι κορυφές του K. Αυτό το στοιχείο απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Το '•' δηλώνει την τιμή της κομβικής μεταβλητής στο σημείο όπου βρίσκεται η τελεία.



Θα γίνει επαλήθευση της συνθήκης (3) του ορισμού κάνοντας χρήση της πρότασης (2) του λήμματος (δηλαδή ότι το $\mathcal{N}$ χαρακτηρίζει το $\mathcal{P}_1$). Έστω L_1, L_2 και L_3 μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις που ορίζουν τις πλευρές του τριγώνου. Υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο $P \in \mathcal{P}$ εξαφανίζεται στα σημεία z_1, z_2, z_3. Αφού η $P|_{L_1}$ είναι γραμμική συνάρτηση μιας μεταβλητής που εξαφανίζεται σε δύο σημεία, $P = 0$ στο L_1. Από προηγούμενο λήμμα μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο ως $P = cL_1$, όπου c είναι μια σταθερά. Όμως,

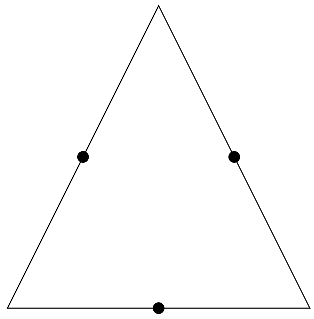
$$0 = P(z_1) = cL_1(z_1) \Rightarrow c = 0,$$

διότι, $L_1(z_1) \neq 0$. Συνεπώς, $P \equiv 0$ και έτσι, το $\mathcal{N}_1$ χαρακτηρίζει το $\mathcal{P}_1$.

Σχόλιο. Η παραπάνω επιλογή του $\mathcal{N}$ δεν είναι η μοναδική δυνατή. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το

$$N_i(v) = v \text{ (του μέσου της κάθε } i \text{ γραμμής)},$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ενώνοντας τα κεντρικά σημεία, κατασκευάζουμε ένα τρίγωνο στο οποίο $P \in \mathcal{P}_1$ εξαφανίζεται στις κορυφές. Το σχήμα απεικονίζεται παρακάτω.

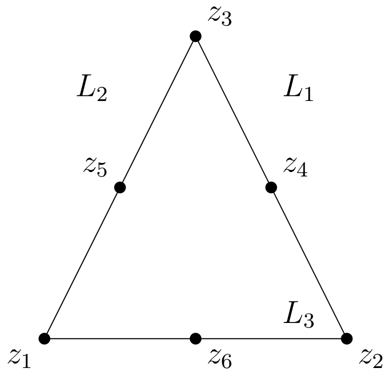


Με ανάλογο επιχείρημα με αυτό του προηγούμενου παραδείγματος αποδεικνύεται ότι $P \equiv 0$ και άρα, το $\mathcal{N}_1$ χαρακτηρίζει το $\mathcal{P}_1$.

Παράδειγμα 3.1.2. ($k = 2$). Έστω $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$. Έστω $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, ..., N_6\}$ ($dim\mathcal{P}_2 = 6$) όπου

$$N_i(v) = \begin{cases} v \text{ (της } i \text{ κορυφή)}, & i = 1,2,3 \\ v \text{ (του μέσου της } (i-3) \text{ πλευράς)}, & \\ \text{(ή οποιοδήποτε άλλο σημείο της } (i-3) \text{ πλευράς)}, & i = 4,5,6 \end{cases}$$

Αυτό το στοιχείο απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathcal{N}_2$ χαρακτηρίζει το $\mathcal{P}_2$. Όπως και πριν, έστω L_1, L_2 και L_3 μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις που ορίζουν τις πλευρές του τριγώνου.
Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $P \in \mathcal{P}_2$ μηδενίζεται στα σημεία $z_1, ..., z_6$. Αφού, το $P|_{L_1}$ είναι μια τετραγωνική συνάρτηση μιας μεταβλητής που μηδενίζεται σε τρία σημεία, τότε $P \equiv 0$ στο L_1. Από προηγούμενο λήμμα, μπορούμε να γράψουμε ότι, $P = L_1Q_1$, όπου το Q_1 είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Όμως, το P μηδενίζεται και στο L_2. Συνεπώς, $L_1Q_1|_{L_2} = 0$. Άρα, το $L_1 = 0$ ή το $Q_1 = 0$ στο L_2. Όμως, το L_1 μπορεί να είναι μηδέν μόνο σε ένα σημείο του L_2 ώστε να μην είναι τετριμμένο το τρίγωνο (να μην εκφυλίζεται σε μια ευθεία ή ένα σημείο.) Συνεπώς, $Q_1 = 0$ στο L_2 εκτός από ένα σημείο του. Λόγω συνέχειας, έχουμε ότι $Q \equiv 0$ στο L_2.
Από προηγούμενο λήμμα, μπορούμε να γράψουμε $Q_1 = L_2Q_2$, όπου το Q_2 είναι μηδενικού βαθμού, δηλαδή $Q_2 = c$. Οπότε, μπορούμε να γράψουμε $P = cL_1L_2$.
Όμως, $P(z_6) = 0$ διότι, το z_6 δεν ανήκει ούτε στο L_1 ούτε στο L_2. Συνεπώς,

$$0 = P(z_6) = cL_1(z_6)L_2(z_6) \Rightarrow c = 0,$$

$$\text{διότι, } L_1(z_6) \neq 0 \text{ και } L_2(z_6) \neq 0. \text{ Συνεπώς, } P \equiv 0.$$

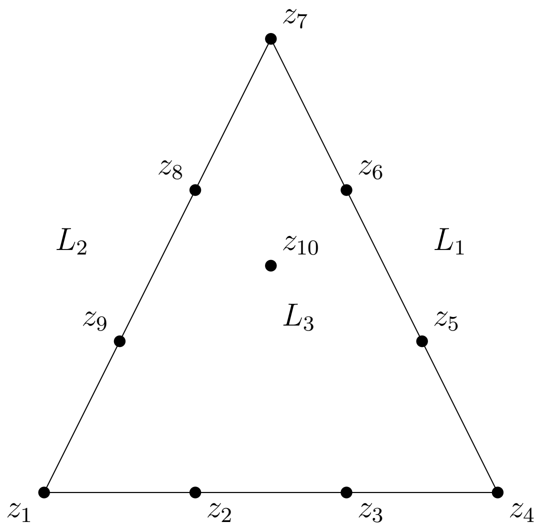
Παράδειγμα 3.1.3. ($k = 3$). Έστω $\mathcal{P} = \mathcal{P}_3$. Έστω $\mathcal{N}_3 = \{N_i, i = 1, ..., 10\}$ ($dim\mathcal{P}_3 = 10$), όπου

$$N_i(v) = v(z_i),\ i = 1, ..., 9 \text{ (} z_i \text{ ξεχωριστά σημεία πάνω στις πλευρές του τριγώνου)}$$

και

$$N_{10}(v) = v,\ \text{(ενός οποιουδήποτε σημείου στο εσωτερικό του τριγώνου)},$$

όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathcal{N}_3$ χαρακτηρίζει το $\mathcal{P}_3$. Έστω L_1, L_2 και L_3 μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις που ορίζουν τις πλευρές του τριγώνου. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $P \in \mathcal{P}_3$ μηδενίζεται στα σημεία z_i για $i = 1, ..., 10$. Εφαρμόζοντας το λήμμα όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα τρεις φορές και συνδυαστικά με την ιδιότητα ότι $P(z_i) = 0$ για $i = 1, ..., 9$ έχουμε ότι $P = cL_1L_2L_3$. Όμως,

$$0 = P(z_{10}) = cL_1(z_{10})L_2(z_{10})L_3(z_{10}) \Rightarrow c = 0$$

διότι, $L_i(z_{10}) \neq 0$ για $i = 1, 2, 3$. Συνεπώς, $P \equiv 0$.

Γενικότερα, για $k \geq 1$, θεωρούμε $\mathcal{P} = \mathcal{P}_k$. Για $\mathcal{N}_k = \{N_i : i = 1, ..., \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = dim\mathcal{P}_k\}$ επιλέγουμε σημεία ως εξής:

$$\begin{cases} 3 \text{ κόμβους στις κορυφές.} \\ 3(k-1) \text{ ξεχωριστούς κόμβους στις πλευρές του τριγώνου.} \\ \frac{1}{2}(k-1)(k-2) \text{ κόμβους στο εσωτερικό του τριγώνου.} \end{cases}$$

(Τα εσωτερικά σημεία επιλέγονται με επαγωγή για τον καθορισμό του $\mathcal{P}_{k-3}$). Αυτές οι επιλογές επαρκούν, καθώς

$$\begin{aligned} 3k + 3(k-1) + \frac{1}{2}(k-1)(k-2) &= 3k + \frac{1}{2}(k^2 - 3k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ &= \dim \mathcal{P}_k \end{aligned}$$

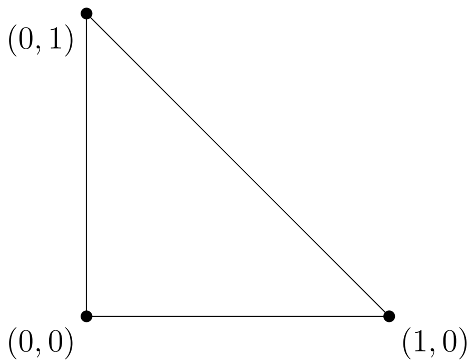
Για να δείξουμε ότι το $\mathcal{N}_k$ χαρακτηρίζει το $\mathcal{P}_k$, υποθέτουμε ότι το $P \in \mathcal{P}_k$ εξαφανίζεται σε όλους τους κόμβους.Έστω L_1, L_2, L_3 είναι μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις που ορίζουν τις πλευρές του τριγώνου. Όπως πριν, συμπεραίνουμε από τον μηδενισμό του P στους κόμβους των πλευρών και των κορυφών του τριγώνου του ότι $P = cL_1L_2L_3$, όπου ο βαθμός του Q είναι μικρότερος ή ίσος με $k - 3$. Το Q πρέπει να μηδενίζεται σε όλα τα εσωτερικά σημεία, αφού, κανένα από τα L_i δεν μηδενίζεται εκεί. Αυτά τα σημεία επιλέγονται με ακρίβεια έτσι ώστε να ισχύει ότι $Q \equiv 0$.

3.1.3 Τελεστής Παρεμβολής

Ορισμός 3.1.4. Έστω ένα πεπερασμένο στοιχείο $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, και έστω ότι το σύνολο $\{\phi_i : 1 \leq i \leq k\} \subseteq \mathcal{P}$ είναι μια δυϊκή βάση του $\mathcal{P}$ στο $\mathcal{N}$. Αν η v είναι μια συνάρτηση για την οποία όλα τα $N_i \in \mathcal{N}, i = 1, ..., k$ ορίζονται, τότε ορίζουμε τον τελεστή παρεμβολής ως:

$$I_K v := \sum_{i=1}^{d} N_i(v)\phi_i.$$

Παράδειγμα 3.1.4. Έστω K ένα τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0), (0,1)$ και $(1,0)$. Έστω $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1, \mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3\}$, όπως στο παράδειγμα του στοιχείου Lagrange και $f = e^{xy}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $I_K f$.



Εξ' ορισμού, $I_K f = N_1(f)\phi_1 + N_2(f)\phi_2 + N_3(f)\phi_3$. Ως εκ τούτου, πρέπει να ευρεθούν τα ϕ_1, ϕ_2 και ϕ_3. Η γραμμή L_1 δίνεται από τον τύπο $y = 1 - x$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε $\phi_1 = cL_1 = c(1 - x - y)$. Όμως, $N_1\phi_1 = 1$ συνεπάγεται ότι $c = \phi_1(z_1) = 1$ και συνεπώς $\phi_1 = 1 - x - y$. Ομοίως, $\phi_2 = L_2(x,y)/L_2(z_2) = x$ και $\phi_3 = L_3(x,y)/L_3(z_3) = y$. Ως εκ τούτου, έχουμε ότι

$$I_K f = N_1(f)(1 - x - y) + N_2(f)x + N_3(f)y = 1 - x - y + x + y = 1.$$

Πρόταση 3.1.1. [3] *Ο τελεστής παρεμβολής I_K είναι γραμμικός.*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα του I_K έπεται από την γραμμικότητα των $\{N_1, ..., N_k\}$, τα οποία είναι γραμμικά ως βάση του δυϊκού χώρου P^*. $\square$

Πρόταση 3.1.2. [4] *Ισχύει ότι $N_i(I_K(f)) = N_i(f)$ για κάθε $1 \leq i \leq d$.*

[3] (3.3.4) Proposition, book Brenner-Scott
[4] (3.3.5) Proposition, book Brenner-Scott

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} N_i(I_K(f)) &= N_i\Big(\sum_{j=1}^{k} N_j(f)\phi_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} N_j(f)N_i(\phi_j) \\ &= N_i(f). \end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Η ερμηνεία της παραπάνω πρότασης είναι ότι η $I_k(f)$ είναι η μοναδική συνάρτηση σχήματος που έχει τις ίδιες τιμές στους κόμβους με την f.

Πρόταση 3.1.3. [5] *Ισχύει $I_k(f) = f$ για κάθε $f \in \mathcal{P}$. Συγκεκριμένα, ο τελεστής I_k είναι ταυτοδύναμος ($I_k^2 = I_k$).*

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$N_i(f - I_k(f)) = 0,\ \forall i,$$

το οποίο, συνεπάγεται την πρώτη υπόθεση της πρότασης. Η δεύτερη υπόθεση είναι άμεση συνέπεια της πρώτης αφού,

$$I_k^2(f) = I_k(I_k(f)) = I_k(f),$$

από την στιγμή που $I_k(f) \in \mathcal{P}$. □

Ορισμός 3.1.5. Μια υποδιαίρεση ενός χωρίου Ω είναι μια πεπερασμένη συλλογή ανοιχτών συνόλων $\{K_i\}$ έτσι ώστε

1. $K_i \cap K_j = \emptyset$, αν $i \neq j$ και
2. $\cup\overline{K_i} = \overline{\Omega}$.

Ορισμός 3.1.6. Έστω Ω ένα χωρίο με μία υποδιαίρεση $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε χωρίο του στοιχείου K, στην υποδιαίρεση που είναι εφοδιασμένη με κάποιου τύπου συναρτήσεις σχήματος, $\mathcal{P}$, και μεταβλητές κόμβων, $\mathcal{N}$, έτσι ώστε το $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ να είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο. Έστω m είναι η μεγαλύτερη τάξη των μερικών παραγώγων που εμπλέκονται στις μεταβλητές κόμβων. Για $f \in C^m(\overline{\Omega})$, ο ολικός τελεστής παρεμβολής ορίζεται ως:

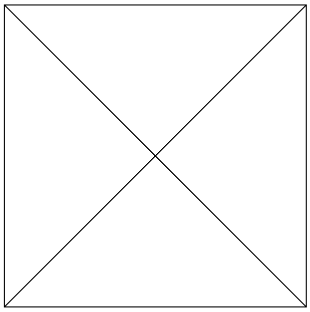
$$I_{\mathcal{T}} f|_{K_i} = I_{K_i} f$$

για όλα τα $K_i \in \mathcal{T}$.

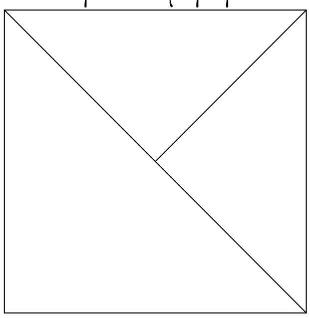
[5] (3.3.7) Proposition, book Brenner-Scott

Ορισμός 3.1.7. Τριγωνοποίηση ενός πολυγωνικού χωρίου Ω είναι μια υποδιαίρεση που αποτελείται από τρίγωνα που έχουν την ιδιότητα ότι:
(3) καμία κορυφή κάποιου τριγώνου δεν βρίσκεται στο εσωτερικό μιας πλευράς ενός άλλου τριγώνου.

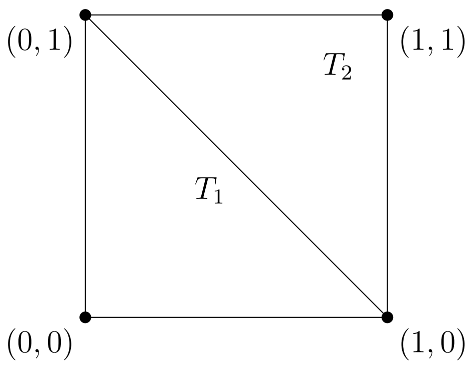
Παράδειγμα 3.1.5. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε μία τριγωνοποίηση ενός χωρίου.



Ακολούθως, δίνεται ένα παράδειγμα στο οποίο η τριγωνοποίηση του χωρίου δεν είναι η επιθυμητή.



Παράδειγμα 3.1.6. Έστω ότι το Ω είναι ένα τετράγωνο που απεικονίζεται παρακάτω.



Η τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ αποτελείται από δύο τρίγωνα T_1 και T_2, όπως παρουσιάζεται. Το πεπερασμένο στοιχείο σε κάθε τρίγωνο είναι ένα στοιχείο Lagrange. Συνεπώς, η δυϊκή βάση στο T_1 είναι $\{x, y, 1 - x - y\}$ και η δυϊκή βάση του T_2 είναι η $\{1 - x, 1 - y, x + y - 1\}$. Έστω $f = \sin(p(x + y)/2)$. Τότε,

$$I_{\mathcal{T}} f = \begin{cases} x + y, & \text{στο } T_1, \\ 2 - x - y, & \text{στο } T_2. \end{cases}$$

Ορισμός 3.1.8. Θα λέμε ότι ένας τελεστής παρεμβολής είναι συνεχής τάξης r, (εν συντομία ότι είναι C^r), αν $I_{\mathcal{T}} f \in C^r$ για κάθε $f \in C^m(\overline{\Omega})$. Ο χώρος $V_{\mathcal{T}} = \{I_{\mathcal{T}} f : f \in C^m\}$ καλείται C^r χώρος πεπερασμένων στοιχείων.

Σχόλιο. Στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση $r = 0$, δηλαδή $I_{\mathcal{T}} f \in C^0$.

Ορισμός 3.1.9. Έστω $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ένα πεπερασμένο στοιχείο και έστω $F(x) = \boldsymbol{A}x + b$ ($\boldsymbol{A}$ είναι αντιστρέψιμος) μια συσχετισμένη απεικόνιση. Το πεπερασμένο στοιχείο $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$ είναι συσχετισμένα ισοδύναμο με το $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ αν

(i) $F(K) = \hat{K}$

(ii) $F^* \hat{P} = \hat{P}$

(iii) $F_* \mathcal{N} = \hat{\mathcal{N}}$.

Σχόλιο. Η συνάρτηση F^* ορίζεται ως

$$F^* \hat{f} = \hat{f} \circ F$$

και η συνάρτηση F_*, ως

$$(F_* N)(\hat{f}) = N(F^*(\hat{f})).$$

3.2 Πολυωνυμική Προσεγγιστική θεωρία σε χώρους Sobolev

Ορισμός 3.2.1. Έστω $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$. Μια συνάρτηση $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ με τις ιδιότητες

(i) $\operatorname{supp} \phi = \overline{B}$, και

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$,

καλείται δοκιμαστική συνάρτηση.

Υποθέτουμε ότι $u \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$.

Ορισμός 3.2.2. Το πολυώνυμο Taylor τάξης m στην τιμή y δίνεται από τον τύπο

$$T_y^m(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y)(x - y)^\alpha,$$

όπου $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ είναι ένα διάνυσμα n μη αρνητικών ακεραίων, $x \in \mathbb{R}^n, x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$ και $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Παρατήρηση 3.2.1. Γενικότερα, αν u ανήκει σε κάποιον χώρο Sobolev το $D^\alpha u$ μπορεί να μην υπάρχει με την συνήθη (σημειακή) έννοια. Τότε, ο ορισμός του πολυωνύμου Taylor για μια τέτοια συνάρτηση δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.2.3. Υποθέτουμε ότι η u έχει ασθενείς παραγώγους τάξεως μικρότερης από m σε μια περιοχή Ω τέτοια ώστε $B \subset\subset \Omega$. Το αντιπροσωπευτικό πολυώνυμο Taylor βαθμού m του u κατά μέσο όρο στο B ορίζεται ως

$$Q^m u(x) = \int_B T_y^m u(x)\phi(y)dy,$$

όπου $T_y^m u(x)$ ορίζεται όπως προηγουμένως, B είναι μία μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ και ϕ είναι μία δοκιμαστική συνάρτηση που έχει υποστήριγμα το $\overline{B}$.

Ορισμός 3.2.4. Το χωρίο Ω είναι σε σχήμα αστεριού ως προς το B, αν για κάθε $x \in \Omega$, το κλειστό, κυρτό σύνολο του $\{x\} \cup B$ είναι ένα υποσύνολο του Ω.

Ορισμός 3.2.5. Υποθέτουμε ότι το Ω έχει διάμετρο d και είναι σε σχήμα αστεριού ως προς μια μπάλα B. Έστω $\rho_{\max} = \sup\{\rho : \Omega$ είναι σε σχήμα αστεριού ως προς μια μπάλα ακτίνας $\rho\}$. Τότε, η παράμετρος πεπλάτυνσης του Ω ορίζεται ως:

$$\gamma = \frac{d}{\rho_{\max}}.$$

Λήμμα 3.2.1. (**Bramble-Hilbert**)[6] Έστω B μια μπάλα στο Ω τέτοια ώστε το Ω να είναι σε σχήμα σε αστεριού ως προς την B, η οποία έχει ακτίνα $\rho > (1/2)\rho_{\max}$. Έστω $Q^m u$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού m της u κατά μέσο όρο στην B, όπου $u \in W^{m,p}(\Omega)$ και $p \leq 1$. Τότε

$$|u - Q^m u|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C_{m,n,\gamma} d^{m-k} |u|_{W^{m,p}(\Omega)},\ k = 0, 1, ..., m$$

όπου $d = diam(\Omega)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του λήμματος βρίσκεται στο βιβλίο των Brenner-Scott (Chapter 4, Section 3, Lemma (4.3.8)(Bramble-Hilbert), Page 102). □

Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ότι το $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. Το K είναι σε σχήμα αστεριού ως προς κάποια μπάλα,
2. $\mathcal{P}_{m-1} \subseteq \mathcal{P} \subseteq W^{m,\infty}(K)$, και

[6] (4.3.8) Lemma. (Bramble-Hilbert), book Brenner-Scott

3. $\mathcal{N} \subseteq (C^l(\overline{K}))^*$.

Ορισμός 3.2.6. Έστω Ω ένα δοσμένο χωρίο και έστω $\{\mathcal{T}^h, 0 < h \leq 1\}$, μια οικογένεια υποδιαιρέσεων τέτοια ώστε

$$\max\{diam T : T \in \mathcal{T}^h\} \leq h \cdot diam(\Omega).$$

Η οικογένεια αυτή λέγεται σχεδόν ομοιόμορφη αν υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε

$$\min\{diam B_T : T \in \mathcal{T}^h\} \geq \rho h \cdot diam(\Omega)$$

για κάθε $h \in (0,1]$, όπου το B_T είναι η μεγαλύτερη μπάλα που περιέχεται στην T, τέτοια ώστε η T να είναι σε μορφή αστεριού ως προς την B. Η οικογένεια αυτή λέγεται μη εκφυλισμένη αν υπάρχει $\rho > 0$, τέτοιο ώστε για όλες τις $T \in \mathcal{T}^h$ και για κάθε $h \in (0,1]$

$$diam(B_T) \geq \rho \cdot diam(T). \quad (1)$$

Από εδώ και στο εξής, θεωρούμε ότι $\mathcal{I}^h : C^l(\overline{\Omega}) \to L^1(\Omega)$ είναι ο ολικός τελεστής παρεμβολής, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{I}^h u|_T := \mathcal{I}^h_T u, \text{ για } T \in \mathcal{T}^h, h \in (0,1],$$

Εδώ, ο $\mathcal{I}^h_T$ είναι ο παρεμβολικός τελεστής για το συσχετισμένα ισοδύναμο στοιχείο $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$.

Θεώρημα 3.2.1. [7] *Έστω $\{\mathcal{T}^h\}, h \in (0,1]$ είναι μία μη εκφυλισμένη οικογένεια υποδιαιρέσεων ενός πολυεδρικού χωρίου Ω στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ένα στοιχείο αναφοράς που ικανοποιεί τις συνθήκες που προαναφέρθηκαν για κάποια l, m και p. Για κάθε $T \in \mathcal{T}^h, 0 < h \leq 1$, έστω $(K_T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$ το συσχετισμένο ισοδύναμο στοιχείο. Τότε, υπάρχει μία θετική σταθερά C που εξαρτάται από το στοιχείο αναφοράς, τα n, m, p και τον αριθμό ρ από τη σχέση (1) τέτοια ώστε για $0 \leq s \leq m$,*

$$\Big(\sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}^h v\|^p_{W^{s,p}(T)}\Big)^{1/p} \leq C h^{m-s} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

για όλα τα $v \in W^{m,p}(\Omega)$, όπου η ανισότητα στην περίπτωση που $p = \infty$ παίρνει τη μορφή

$$\max_{T \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,\infty}(T)} \leq C h^{m-s-n/p} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}, \forall v \in W^{m,p}(\Omega),$$

για $0 \leq s \leq l$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο των Brenner-Scott (Chapter 4, Section 4, Theorem (4.4.20), Page 108). □

[7] (4.4.20) Theorem, book Brenner-Scott

Πρόταση 3.2.1. [8] *Έστω $\{\mathcal{T}^h\}, 0 < h \leq 1$, είναι μία μη εκφυλισμένη οικογένεια υποδιαιρέσεων ενός πολυεδρικού χωρίου Ω. Έστω $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ένα στοιχείο αναφοράς που ικανοποιεί τις συνθήκες που προαναφέρθηκαν για κάποια l, m και p. Υποθέτουμε ότι όλα τα $(K_T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$, για $T \in \mathcal{T}^h, 0 < h \leq 1$, είναι συσχετισμένα ισοδύναμα με την έννοια της παρεμβολής με το $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$. Τότε, υπάρχει μία θετική σταθερά C που εξαρτάται από το στοιχείο αναφοράς, τα l, n, m, p και τον αριθμό ρ από τη σχέση (1) τέτοια ώστε για $0 \leq s \leq m$,*

$$\Big(\sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}^h v\|^p_{W^{s,p}(T)} \Big)^{1/p} \leq C h^{m-s} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

για όλα τα $v \in W^{m,r}(\Omega)$. Στην περίπτωση που $p = \infty$ έχουμε ότι:

$$\max_{T \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,\infty}(T)} \leq C h^{m-s-n/p} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}, \forall v \in W^{m,p}(\Omega).$$

Λήμμα 3.2.2. Ανισότητα Friedrichs[9] Υποθέτουμε ότι Ω είναι σε σχήμα αστεριού αναφορικά με μια μπάλα B. Τότε, για όλα $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ισχύει

$$\|u - \overline{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_\Omega |u|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

όπου $\overline{u} = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega u(x)dx$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της ανισότητας βρίσκεται στο βιβλίο των Brenner-Scott (Chapter 4, Section 3, Lemma (4.3.14)(Friedrichs' Inequality), Page 104). □

Σχόλιο. Την ανισότητα Friedrich θα την χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 4 για την απόδειξη της πιεστικότητας σε ένα πρόβλημα Neumann για τον τελεστή Laplace.

[8] (4.4.24) Corollary, book Brenner-Scott

[9] (4.3.14) Lemma(Friedrichs' Inequality), book Brenner-Scott

Κεφάλαιο 4

n-Διάστατα Μεταβολικά Προβλήματα

Χρησιμοποιώντας την θεωρία που έχει αναπτυχθεί στα προηγούμενα κεφάλαια θα μελετηθούν τα μεταβολικά προβλήματα μεγαλύτερης τάξης. Στο παρόν κεφάλαιο θα θεωρούμε ότι το χωρίο Ω είναι φραγμένο.

4.1 Μεταβολική Διατύπωση της εξίσωσης Poisson

Θεωρούμε την εξίσωση Poisson

$$-\Delta u = f \text{ στο } \Omega$$

όπου το Δ δηλώνει τον τελεστή Laplace

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Επιπλέον, θεωρούμε τις συνοριακές συνθήκες δύο τύπων:

$$u = 0, \text{ στο } \Gamma \subset \partial\Omega, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ στο } \partial\Omega \setminus \Gamma \tag{4.2}$$

όπου το $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ δηλώνει την παράγωγο της u κατά τη φυσιολογική κατεύθυνση ως προς το σύνορο της $\partial\Omega$. Θεωρούμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ είναι Lipschitz συνεχής. Τότε, θεωρούμε ότι το ν είναι το μοναδιαίο φυσιολογικό διάνυσμα του $\partial\Omega$ με κατεύθυνση προς τα έξω, το οποίο από υπόθεση ανήκει στον $L^\infty(\partial\Omega)$ και θέτουμε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u.$$

Αρχικά, υποθέτουμε ότι το Γ είναι κλειστό και μη μηδενικού μέτρου. Αργότερα, θα εξεταστεί και η περίπτωση όπου το Γ είναι μηδενικού μέτρου, δηλαδή θα έχουμε συνοριακές συνθήκες Neymann.
Ορίζουμε ένα μεταβολικό σύνολο που εμπεριέχει τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$V := \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}, \tag{4.3}$$

όπου παρατηρούμε ότι από το θεώρημα ίχνους, ότι το $v|_\Gamma$ ανήκει στον $L^2(\partial\Omega)$. Η κατάλληλη διγραμμική μορφή για το μεταβολικό πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

$$-\Delta u \cdot v = f \cdot v, v \text{ κατάλληλα ομαλή συνάρτηση}$$

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v dx = \int_\Omega f \cdot v dx, v \text{ κατάλληλα ομαλή συνάρτηση}$$

Για την ολοκλήρωση κατά μέλη πρέπει να γίνει η διατύπωση μερικών θεωρημάτων.

Πρόταση 4.1.1. [1] *Έστω $v, w \in H^1(\Omega)$. Τότε, για $i = 1, ..., n$ έχουμε*

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) w dx = -\int_\Omega v \Big(\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big) dx + \int_{\partial\Omega} v w \nu_i ds.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ιδιότητα $\int_\Omega \nabla \cdot u dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu ds$ με $u := vwe_i$. Αρχικά, υποθέτουμε ότι $w \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \cdot e_i \phi' dx &= \int_\Omega v w \phi' dx \\ &= \int_\Omega v((w\phi)' - w'\phi) dx \\ &= -\int_\Omega Dv \cdot w\phi dx - \int_\Omega v w' \phi dx \\ &= -\int_\Omega (Dv \cdot w + vw')\phi dx.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $D(vw) = Dv \cdot w + vw'$.
Οπότε, λόγω της πυκνότητας του $C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ στο $W^{1,1}(\Omega)$ και της ανισότητας Schwarz το u ανήκει στον $W^{1,1}(\Omega)^n$ και ισχύει το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.1.2. [2] *Έστω $u \in H^2(\Omega)$ και $v \in H^1(\Omega)$. Τότε, έχουμε*

$$\int_\Omega (-\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v ds.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση με $v := -\frac{\partial u}{\partial x_i}$ και $w := v$, και αθροίζοντας ως προς i έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.1.3. [3] *Έστω $u \in H^2(\Omega)$ λύση της εξίσωσης Poisson (αυτό συνεπάγεται ότι $f \in L^2(\Omega)$) με συνοριακές συνθήκες τις (4.1) και (4.2). Τότε, η u χαρακτηρίζεται από την πρόταση:*

$$u \in V, \text{ που ικανοποιεί την } \alpha(u, v) = (f, v), \forall v \in V. \tag{4.4}$$

[1](5.1.5) Proposition, book Brenner-Scott
[2](5.1.6) Proposition, book Brenner-Scott
[3](5.1.7) Proposition, book Brenner-Scott

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την τελευταία πρόταση, αν $u \in H^2(\Omega)$ και ικανοποιεί την εξίσωση Poisson με συνοριακές συνθήκες τις (1) και $v \in V$, τότε

$$\begin{aligned}(f,v) &= \int_\Omega (-\Delta u) v dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &:= \alpha(u,v).\end{aligned}$$

Ο συνοριακός όρος εξαφανίζεται για $v \in V$ διότι, είτε το $v = 0$ είτε το $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ είναι μηδέν σε κάθε τμήμα του συνόρου. □

Πρόταση 4.1.4. [4] *Έστω $f \in L^2(\Omega)$ και υποθέτουμε ότι η $u \in H^2(\Omega)$ επιλύει το μεταβολικό πρόβλημα* (4.4). *Τότε, το u επιλύει και το πρόβλημα Poisson με τις συνοριακές συνθήκες* (4.1), (4.2).

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης βρίσκεται στο βιβλίο των Brenner-Scott (Chapter 5, Section 1, Proposition(5.1.9), Page 131) □

4.2 Μεταβολική Διατύπωση για Προβλήματα Neumann

Σε αυτή την ενότητα θα διερευνήσουμε την εξίσωση Poisson για την περίπτωση των Neumann (ή φυσικών) συνοριακών συνθηκών

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ στο } \Omega \tag{4.5}$$

με $\Gamma = \emptyset$. Συγκεκριμένα, οι λύσεις σε αυτή την περίπτωση είναι μοναδικές μόνο κατά μια προσθετική σταθερά και υπάρχουν μόνο εάν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x) dx &= \int_\Omega (-\Delta u(x)) dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla 1 dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Για αυτή την περίπτωση, ένας κατάλληλος μεταβολικός χώρος είναι ο ακόλουθος:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v(x) dx = 0\}. \tag{4.7}$$

[4](5.1.9) Proposition, book Brenner-Scott

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση g, ορίζουμε την μέση τιμής της, $\overline{g}$, ως εξής:

$$\overline{g} = \frac{1}{meas(\Omega)} \int_\Omega g(x)dx.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $v \in V$ ισχύει ότι $v - \overline{v} \in V$.

Πρόταση 4.2.1. [5] *Έστω $u \in H^2(\Omega)$ λύση της εξίσωσης Poisson με Neumann συνοριακές συνθήκες (4.5)(Αυτό συνεπάγεται ότι η $f \in L^2(\Omega)$ ικανοποιεί την $\int_\Omega f(x)dx = 0$). Τότε, το $u - \overline{u}$ ικανοποιεί την μεταβολική διατύπωση (4.4), με τον V να ορίζεται όπως και στην (4.7).*

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(f, v) - \alpha(u - \overline{u}, v) &= \int_\Omega (-\Delta u)v dx - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.2.2. [6] *Έστω ότι $f \in L^2(\Omega)$ και υποθέτουμε ότι η $u \in H^2(\Omega)$ αποτελεί λύση του μεταβολικού προβλήματος (4.4), με τον V να ορίζεται όπως στην (4.7). Τότε, η u επιλύει την εξίσωση Poisson με το δεξί της μέλος να δίνεται από την σχέση:*

$$\tilde{f} := f(x) - \overline{f}, \ \forall x \in \Omega$$

με συνοριακή συνθήκη (4.5)

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης βρίσκεται στο βιβλίο των Brenner-Scott (Chapter 5, Section 2, Proposition(5.2.6), Page 133) □

Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι το θεώρημα αναπαράστασης του Riez εξασφαλίζει μια λύση για κάθε f από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι το $\alpha(\cdot, \cdot)$ είναι πιεστικό. Αφού, το $v \in V$ συνεπάγεται ότι $\int_\Omega v(x)dx = 0$, έχουμε ότι

$$\int_\Omega v(x)\tilde{f}(x)dx = \int_\Omega f(x)dx, \ \forall v \in V,$$

έτσι ώστε τα μεταβολικά προβλήματα για f και $\tilde{f}$ να είναι τα ίδια.

4.3 Πιεστικότητα του Μεταβολικού Προβλήματος

Αρχικά, θα εξεταστεί η πιεστικότητα της $\alpha(\cdot, \cdot)$ για το πρόβλημα Neumann.

Πρόταση 4.3.1. [7] *Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο, το οποίο μπορεί να γραφεί ως*

[5](5.2.5) Proposition, book Brenner-Scott
[6](5.2.6) Proposition, book Brenner-Scott
[7](5.3.2) Proposition, book Brenner-Scott

πεπερασμένη ένωση χωρίων, τα οποία είναι σε σχήμα αστεριού ως προς μια μπάλα, και για το οποίο ισχύει

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\|v-r\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{H^1(\Omega)},\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Έστω ότι ο V ορίζεται όπως στην (4.7). Τότε,

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1+C^2_\Omega)\alpha(v,v),\ \forall v \in V,$$

όπου C_Ω είναι η σταθερά που ορίστηκε παραπάνω.

Απόδειξη. Από την ανισότητα Friedrich 3.2.2 γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\inf_{r\in\mathbb{R}}\|v-r\|_{L^2(\Omega)} = \|v-\overline{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{H^1(\Omega)},$$

όπου $v \in H^1(\Omega)$ και $\overline{v}$ είναι η μέση τιμή του v στο Ω. Όμως, $\overline{v}=0$, επομένως,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{H^1(\Omega)} = C_\Omega\sqrt{\alpha(v,v)}.$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και προσθέτοντας την ποσότητα $\alpha(v,v)$ προκύπτει το ζητούμενο. □

Τώρα, αντίστοιχα θα εξετάσουμε την περίπτωση πειστικότητας για συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Πρόταση 4.3.2. [8] *Έστω Ω ένα χωρίο που ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 4.3.1 και υποθέτουμε ότι το Γ είναι κλειστό και $|\Gamma|>0$. Έστω ότι το V ορίζεται όπως στην σχέση (4.3). Τότε, θα υπάρχει μια σταθερά C εξαρτώμενη μόνο από τα Ω και Γ έτσι ώστε:*

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\alpha(v,v),\ \forall v \in V.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα της συμπάγειας ως εξής:
Υποθέτουμε ότι η $\alpha(\cdot,\cdot)$ δεν είναι πιεστική στον V. Τότε, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{v_j \in V : j = 1,2,...$ τέτοια ώστε $\alpha(v_j,v_j)/\|v_j\|^2_{H^1(\Omega)} \to 0$ καθώς $j\to\infty$. Ορίζουμε $w_j = v_j/\|v_j\|_{H^1(\Omega)}$ με τις ιδιότητες:

$$\|w_j\|_{H^1(\Omega)} = 1,\ \text{και}\ \alpha(w_j,w_j)\to 0,\ \text{με}\ j\to\infty.$$

Από την πιεστικότητα της Neumann περίπτωσης βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\|w_j-\overline{w_j}\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq C\alpha(w_j-\overline{w_j},w_j-\overline{w_j})\\ C\alpha(w_j,w_j)&\to 0\end{aligned}$$

[8] (5.3.4) Proposition, book Brenner-Scott

καθώς, $j \to \infty$. Επιπλέον, όλες οι τιμές $\overline{w_j}$ ικανοποιούν

$$\begin{aligned} |\overline{w_j}| &= \frac{1}{|\Omega|}\Big|\int_\Omega w_j(x)dx\Big| \\ &\leq |\Omega|^{-1/2}\|w_j\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |\Omega|^{-1/2} \end{aligned}$$

από την ανισότητα Hölder. Αφού, οι αριθμοί $\overline{w_j}$ κυμαίνονται σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο (δηλαδή συμπαγές), θα υπάρχει μια υπακολουθία $\overline{w_{jk}}$, η οποία θα συγκλίνει σε έναν αριθμό $r_0 \in [-|\Omega|^{-1/2}, |\Omega|^{1/2}]$ Συμπεραίνουμε ότι,

$$\|w_{jk} - r_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \|w_{jk} - \overline{w_{jk}}\|_{H^1(\Omega)} + \|\overline{w_{jk}} - r_0\|_{H^1(\Omega)} \to 0$$

καθώς, $k \to \infty$. Δηλαδή, $w_{jk} \to r_0$ στον $H^1(\Omega)$, όπου r_0 είναι μία σταθερά. Από το θεώρημα ίχνους έχουμε ότι $w_{jk}|_\Gamma \to r_0$ στον $L^2(\Gamma)$. Αλλά, $w_{jk}|_\Gamma = 0$, και με $|\Gamma| > 0$ προκύπτει ότι $r_0 = 0$. Επομένως, έχουμε συγχρόνως, ότι

$$w_{jk} \to 0, \text{ στον } H^1(\Omega), \text{ και } \|w_{jk}\|_{H^1(\Omega)} = 1.$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε άτοπο, και άρα, η είναι πιεστική. □

4.4 Μεταβολική Προσέγγιση της Εξίσωσης Poisson

Έστω ότι $\mathcal{T}^h$ είναι μία υποδιαίρεση του Ω και έστω $\mathcal{I}^h$ ένας ολικός τελεστής παρεμβολής για μία οικογένεια πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται στα στοιχεία του $\mathcal{T}^h$. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{I}^h u$ είναι συνεχές (δηλαδή, η οικογένεια των στοιχείων που εμπλέκονται είναι C^0). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι αντιπροσωπευτικές συναρτήσεις σχήματος έχουν μία προσέγγιση τάξης m για την οποία ισχύει:

$$\|u - \mathcal{I}^h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{m-1}|u|_{H^m(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Για να προσεγγίσουμε το μεταβολικό πρόβλημα (4.4) με μεταβολικό χώρο (4.3) πρέπει να εξασφαλίσουμε τις δύο ιδιότητες του αντιπροσωπευτικού χώρου V_h. Για να εφαρμόσουμε το λήμμα του Céa πρέπει:

$$V_h \subset V. \tag{4.9}$$

ενώ, για να χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική θεωρία του κεφαλαίου 3 θα πρέπει να ισχύει:

$$\mathcal{I}^h(V \cap C_k(\Omega)) \subset V_h \tag{4.10}$$

όπου k είναι είναι η μεγαλύτερη τάξη διαφορισιμότητας τον ορισμό του $\mathcal{I}^h$.

Θεώρημα 4.4.1. [9] *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (4.8), (4.9) και (4.10) ισχύουν. Τότε, η μοναδική λύση $u_h \in V_h$ του μεταβολικού προβλήματος*

$$\alpha(u_h, v) = (f, v), \forall v \in V_h$$

ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{m-1}|u|_{H^m(\Omega)}.$$

Οι συνθήκες (4.9) και (4.10) θέτουν περιορισμό στην υποδιαίρεση στην περίπτωση που το Γ δεν είναι ούτε το κενό σύνολο, ούτε όλο το σύνορο. Σε μία τέτοια περίπτωση, είναι απαραίτητο να επιλεγεί το πλέγμα, το οποίο να ευθυγραμμίζει κατάλληλα τα σημεία που βρίσκονται εκεί που οι συνοριακές συνθήκες αλλάζουν από Dirichlet σε Neumann.

Θεώρημα 4.4.2. [10] *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (4.8), (4.9) και (4.10) ισχύουν. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη*

$$|w|_{H^2(\Omega)} \leq C\|e\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.11}$$

όπου $e := u - u_h$ και w είναι η λύση της εξίσωσης

$$-\Delta w = e, \text{ στο } \Omega$$

$$w = 0, \text{ στο } \Omega \text{ και } \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \text{ στο } \partial\Omega \setminus \Gamma.$$

Τότε,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^m|u|_{H^m(\Omega)}.$$

Απόδειξη. Η μεταβολική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος είναι η εξής:
Να βρεθεί $w \in V$ τέτοιο ώστε,

$$\alpha(w, v) = (e, v), \ \forall v \in V.$$

Αφού το $u - u_h \in V^*$, υπάρχει μοναδική λύση. Επομένως,

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} &= (u - u_h, u - u_h) = \alpha(w, u - u_h)\\ &= \alpha(u - u_h, w - \mathcal{I}^h w)\\ &\leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}\|w - \mathcal{I}^h w\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leq Ch\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}|w|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Με βάση τη συνθήκη (4.11) έπεται το ζητούμενο. □

[9](5.4.4) Theorem, book Brenner-Scott
[10](5.4.8) Theorem, book Brenner-Scott

Παράδειγμα 4.4.1. Υποθέτουμε ότι έχουμε το πρόβλημα

$$-\Delta u = f, \text{ στο } \Omega$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u = g_D, \text{ στο } \Gamma \subset \partial\Omega \text{ και } \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_N, \text{ στο } \partial\Omega \setminus \Gamma.$$

όπου g_D, g_N δοθείσες συναρτήσεις. Για απλότητα, θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση g_D ορίζεται σε όλο το Ω, με $g_D \in H_1(\Omega)$ και η συνάρτηση $g_N \in L^2(\partial\Omega \setminus \Gamma)$. Ορίζουμε το V να δίνεται από την σχέση (4.3) Τότε, η μεταβολική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος είναι η εξής:
Να βρεθεί u τέτοιο ώστε, $u - g_D \in V$ και επιπλέον,

$$\alpha(u, v) = (f, v) + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} g_N v ds, \ \forall v \in V.$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα καλά τοποθετημένο, διότι η γραμμική μορφή

$$F(v) := (f, v) + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} g_N v ds$$

είναι καλά ορισμένη και συνεχής για κάθε $v \in V$. Η ισοδυναμία αυτών των δύο διατυπώσεων φαίνεται ως εξής:
Αν το u είναι λύση του προβλήματος που περιγράφηκε, τότε

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\Delta u) v dx &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= \alpha(u, v) - \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds\end{aligned}$$

για κάθε $v \in V$. Συνεπώς, το μεταβολικό πρόβλημα έπεται.
Αντίστροφα, αν η u επιλύει το μεταβολικό πρόβλημα, τότε, επιλέγοντας v τέτοιο ώστε να μηδενίζεται κοντά στο σύνορο, δείχνουμε ότι η εξίσωση ισχύει, και συνεπώς,

$$\int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} g_N v ds - \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0, \ \forall v \in V.$$

Επιλέγοντας το v όπως στην πρόταση 4.1.4 έπεται το μεταβολικό πρόβλημα. Η προσέγγιση μέσω πεπερασμένων στοιχείων του μεταβολικού προβλήματος, περιλαμβάνει τη χρήση ενός τελεστή παρεμβολής $\mathcal{I}^h g_D$ των δεδομένων Dirichlet. Επιλέγουμε έναν υπόχωρο V_h του V όπως πριν, και αναζητούμε ένα u_h τέτοιο ώστε $u_h - \mathcal{I}^h g_D \in V_h$ και επιπλέον,

$$\alpha(u_h, v) = (f, v) + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} g_N v ds, \ \forall v \in V.$$

4.5 Γενικευμένοι Ελλειπτικοί Τελεστές Δευτέρας Τάξης

Έστω $\alpha_{ij} \in L^\infty(\Omega), i, j = 1, ..., n$ και $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Ο πίνακας των συντελεστών (α_{ij}) λέμε ότι είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός αν υπάρχει σταθερά a τέτοια ώστε

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \ \forall \xi_i \in \mathbb{R}^n \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega, \tag{4.12}$$

δηλαδή, αν ο πίνακας (α_{ij}) είναι ομοιόμορφα (σχεδόν παντού) θετικά ορισμένος. Ο ελλειπτικός τελεστής που συνδέεται με έναν ελλειπτικό πίνακα συντελεστών ορίζεται ως

$$Au(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big). \tag{4.13}$$

Αν, για παράδειγμα, η (α_{ij}) είναι ο ταυτοτικός πίνακας για κάθε $x \in \Omega$, τότε λαμβάνουμε τον τελεστή Laplace και η σταθερά a μπορεί να πάρει την τιμή 1. Η φυσική διγραμμική μορφή που συνδέεται με τον παραπάνω τελεστή είναι

$$\alpha(u, v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)dx. \tag{4.14}$$

Πρόταση 4.5.1. [11] *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας συντελεστών είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός. Τότε, η συνδεδεμένη διγραμμική μορφή (4.14) ικανοποιεί την σχέση*

$$\alpha(v, v) \geq a|v|^2_{H^1(\Omega)}, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

όπου a είναι η σταθερά από τον ορισμό της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας.

Απόδειξη. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha(v, v) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j dx \\
&\geq \int_\Omega a\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 dx \\
&= a|v|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται από τον ορισμό της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας. □

[11] (5.6.4) Lemma, book Brenner-Scott

Οι φυσικές συνοριακές συνθήκες που συνδέονται με τη γενική μορφή (4.14) είναι πιο σύνθετες από το προηγούμενο παράδειγμα. Εφαρμόζοντας προηγούμενη πρόταση του κεφαλαίου, με $v := \alpha_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$ έχουμε ότι

$$\int_\Omega Au \cdot w dx = \alpha(u,w) - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i w dx.$$

Συνεπώς, οι φυσικές συνοριακές συνθήκες που συνδέονται με την (4.14) εκφρασμένες σε μορφή τελεστή είναι

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i = 0.$$

Η μεταβολική μορφή (4.14) είναι συμμετρική. Γενικότερα, όμως, μη συμμετρικά προβλήματα προκύπτουν πρακτικά. Ένα πρόβλημα στη διαφορική μορφή του είναι

$$Au(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big) + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + b_0(x)u(x) \tag{4.15}$$

είναι φυσικά ορισμένος χρησιμοποιώντας την μεταβολική μορφή

$$\alpha(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k\frac{\partial u}{\partial x_k}v + b_0 uv dx \tag{4.16}$$

Θεώρημα 4.5.1. ***(Ανισότητα Garding)***[12] *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας συντελεστών είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός και ότι οι συντελεστές $b_k \in L^\infty(\Omega),\ k = 0, ..., n$. Τότε, υπάρχει μία σταθερά $K < \infty$ τέτοια ώστε*

$$\alpha(v,v) + K\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{a}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)},\ \forall v \in H^1(\Omega),$$

όπου a είναι η σταθερά στον ορισμό της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι

$$\alpha(v,v) + K\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}(x)v(x) + b_0(x)v^2(x)dx$$
$$+ \int_\Omega Kv^2(x)dx$$
$$\geq a|v|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}(x)v(x) + (b_0(x)+K)v^2(x)dx.$$

[12] (5.6.8) Theorem. (Garding's Inequality), book Brenner-Scott

Από την ανισότητα Hölder ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_\Omega \sum_{k=1}^n b_k(x) \frac{\partial v}{\partial x_k}(x) v(x) dx \Big| &\le \int_\Omega \sum_{k=1}^n |b_k(x)| | \frac{\partial v}{\partial x_k}(x)| |v(x)| dx \\
&\le \sum_{k=1}^n \|b_k(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega | \frac{\partial v}{\partial x_k}(x)| |v(x)| dx \\
&\le \sum_{k=1}^n \|b_k(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \| \frac{\partial v}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le B|v|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

όπου

$$B^2 := \sum_{k=1}^n \|b_k\|^2_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ως εκ τούτου,

$$
\begin{aligned}
\alpha(v,v) + K\|v\|^2_{L^2(\Omega)} &\ge a|v|^2_{H^1(\Omega)} - B|v|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (b_0(x) + K) v^2(x) dx \\
&\ge a|v|^2_{H^1(\Omega)} - B|v|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + (\beta + K)\|v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

όπου

$$\beta := ess \inf\{b_0(x) : x \in \Omega\}.$$

Από την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα καταλήγουμε ότι

$$\alpha(v,v) + K\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \frac{a}{2}(|v|_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)})$$

δεδομένου ότι

$$K \ge \frac{a}{2} + \frac{B^2}{2a} - \beta.$$

□

4.6 Μεταβολική Προσέγγιση Γενικών Ελλειπτικών Προβλημάτων

Θεωρούμε ότι έχουμε μια διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot)$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.
Υποθέτουμε ότι η $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχής στον $H^1(\Omega)$,

$$|\alpha(u,v)| \le C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \ \forall u, v \in H^1(\Omega), \tag{4.17}$$

και ότι μια κατάλληλη σταθερά $K \in \mathbb{R}$ την κάνει πιεστική

$$\alpha(v,v) + K(v,v) \ge a\|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{4.18}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $V \subset H^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε να υπάρχει μοναδική λύση u στο μεταβολικό πρόβλημα

$$\alpha(u, v) = (f, v), \ \forall v \in V$$

καθώς και στο συζυγές μεταβολικό πρόβλημα

$$\alpha(v, u) = (f, v), \ \forall v \in V$$

και ότι και στις δύο περιπτώσεις ισχύει η εκτίμηση ευστάθειας:

$$|u|_{H^2(\Omega)} \leq C_R \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.19}$$

για κάθε $f \in L^2(\Omega)$.
Έστω V_h ένα πεπερασμένο στοιχείο υπόχωρος του V, όπως είχε οριστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο και ορίζουμε το $u_h \in V_h$ ως

$$\alpha(u_h, v) = (f, v), \ \forall v \in V_h. \tag{4.20}$$

Η παραπάνω εξίσωση δεν είναι απαραίτητο να έχει μοναδική λύση, αφού η $\alpha(\cdot,\cdot)$ μπορεί να μην είναι πιεστική. Πράγματι, δεν είναι δυνατόν να εξασφαλιστεί η πιεστικότητα της για όλους τους υπόχωρους V_h. Παρόλα αυτά, υποθέτουμε ότι το ακόλουθο ισχύει

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_A h |u|_{H^2(\Omega)}, \ \forall u \in H^2(\Omega). \tag{4.21}$$

Θεώρημα 4.6.1. [13] *Κάτω από τις συνθήκες (4.17), (4.18), (4.19) και (4.21) υπάρχουν σταθερές h_0 και C, τέτοιες ώστε για κάθε $h \leq h_0$ να υπάρχει μοναδική λύση στο πρόβλημα (4.20) που ικανοποιεί την*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{H^1(\Omega)},$$

όπου μπορούμε να πάρουμε ως $C = 2C_1/a$ και

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 C_A C_R h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Συγκεκριμένα, μπορούμε να πάρουμε ως

$$h_0 = (a/2)^{1/2} / C_1 C_A C_R.$$

Απόδειξη. Αρχικά, θα εξάγουμε μία εκτίμηση για κάθε λύση της (4.20) που μπορεί να υπάρχει. Παρατηρούμε ότι, σε κάθε περίπτωση, έχουμε ότι

$$\alpha(u - u_h, v) = 0, \ \forall v \in V_h.$$

Συνεπώς, έπεται ότι για κάθε $v \in V_h$,

$$\begin{aligned} a\|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq \alpha(u - u_h, u - u_h) + K(u - u_h, u - u_h) \\ &= \alpha(u - u_h, u - u_h) + K\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} + K\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

[13](5.7.6) Theorem, book Brenner-Scott

Έστω τώρα, ότι w είναι η λύση του συζυγούς προβλήματος

$$\alpha(v, w) = (u - u_h, v), \ \forall v \in V.$$

Τότε, για κάποιο $w_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = (u - u_h, u - u_h) &= \alpha(u - u_h, w) \\ &= \alpha(u - u_h, w - w_h) \\ &\leq C_1 \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|w - w_h\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, για κατάλληλη επιλογή του w_h έχουμε,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = (u - u_h, u - u_h) &\leq C_1 C_A h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} |w|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 C_A C_R h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

όπου $C = C_1 C_A C_R$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω, βρίσκουμε ότι

$$a \|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v\|^2_{H^1(\Omega)} + KC^2 h^2 \|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Συνεπώς, για $h \leq h_0$, όπου $h_0 = (a/2K)^{1/2}/C_1 C_A C_R$, βρίσκουμε ότι

$$a \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq 2C_1 \|u - v\|_{H^1(\Omega)}, \ \forall v \in V_h.$$

Ως τώρα στην απόδειξη έχουμε υποθέσει την ύπαρξη μίας λύσης u_h. Τώρα, θα εξετάσουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης. Αφού, η (4.20) είναι ένα σύστημα πεπερασμένων διαστάσεων που έχει τον ίδιο αριθμό αγνώστων και εξισώσεων, η ύπαρξη και η μοναδικότητα είναι έννοιες ισοδύναμες. Αν η λύση δεν ήταν μοναδική, θα είχαμε ότι για $f \equiv 0$ θα υπήρχε μια μη τετριμμένη λύση, u_h. Σε μία τέτοια περίπτωση, θα είχαμε ότι $u \equiv 0$ από την (4.19). Όμως, η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι $u_h \equiv 0$, δεδομένου ότι το h είναι αρκετά μικρό. Πιο συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι η (4.20) έχει μοναδική λύση για h αρκετά μικρό, διότι για $f = 0$ συνεπάγεται ότι $u_h = 0$. Τέλος, για $h \leq h_0$ καταλήγουμε ότι υπάρχει μια μοναδική λύση στην (4.20) που ικανοποιεί τις παραπάνω ανισότητες. □

4.7 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Μετά την παρουσίαση της παραπάνω θεωρίας, θα μελετήσουμε κάποια δισδιάστατα προβλήματα με συνοριακές τιμές.

Παράδειγμα 4.7.1. Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής

$$-\Delta u = f, \ \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet της μορφής

$$u = 0$$

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική ασθενής λύση ελέγχοντας τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Lax-Milgram. Πράγματι, με το $\alpha(\cdot,\cdot)$ να είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον $H_0^1(\Omega)$ έχουμε:

(i) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχές.

$$
\begin{aligned}
|\alpha(u,v)| &= |\int\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdy| \\
&\leq \|\frac{\partial u}{\partial x}\|\|\frac{\partial v}{\partial x}\| + \|\frac{\partial u}{\partial y}\|\|\frac{\partial v}{\partial y}\| \\
&\leq \Big(\|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2 + \|\frac{\partial u}{\partial y}\|^2\Big)^{1/2}\Big(\|\frac{\partial v}{\partial x}\|^2 + \|\frac{\partial v}{\partial y}\|^2\Big)^{1/2} \\
&\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

(ii) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι πιεστικό

$$
\begin{aligned}
\alpha(u,u) &= \int\int_\Omega (\nabla u)^2 dxdy \\
&= \|\nabla u\|^2 \\
&\geq a\|\nabla u\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

όπου, το τελευταίο ισχύει από την ανισότητα Poincare.

(iii)

$$
|f(v)| = |\int\int_\Omega f v dxdy| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}
$$

Για όλα τα $u, v \in V = \{v \in H^1 : v = 0, \text{ στο } \partial\Omega\}$. Επομένως, από το θεώρημα Lax-Milgram το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα 4.7.2. Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής

$$
-\Delta u + u = f, \text{ στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2
$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet της μορφής

$$
u = 0
$$

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική ασθενής λύση ελέγχοντας τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Lax-Milgram. Πράγματι, με το $\alpha(\cdot,\cdot)$ να είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον $H_0^1(\Omega)$ έχουμε:

(i) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχές.

$$\begin{aligned}
|\alpha(u,v)| &= |\int\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dxdy + \int\int_{\Omega} uvdxdy| \\
&= |(u,v)|_{H^1} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

(ii) Το $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι πιεστικό

$$\begin{aligned}
\alpha(u,u) &= \int\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dxdy + \int\int_{\Omega} u^2 dxdy \\
&\geq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\|v
\end{aligned}$$

(iii)

$$|f(v)| = |\int\int_{\Omega} fvdxdy| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Για όλα τα $u, v \in V = \{v \in H^1 : v = 0, \text{ στο } \partial\Omega\}$. Επομένως, το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα 4.7.3. Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής

$$-\Delta u = f, \text{ στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet της μορφής

$$u = 0, \text{ στο } \Gamma_1 \text{ και } \frac{\partial u}{\partial r} = g, \text{ στο } \Gamma_2.$$

Αρχικά, θα βρούμε την ασθενή του μορφή. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα (4.1.2) έχουμε:

$$\begin{aligned}
-\int\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot vdxdy &= \int\int_{\Omega} fvdxdy, \Rightarrow \\
-\int\int_{\Omega} (\nabla u) \cdot \nabla vdxdy &= \int\int_{\Omega} fvdxdy + \oint_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial r} \cdot vdr, \Rightarrow \\
-\int\int_{\Omega} (\nabla u) \cdot \nabla vdxdy &= \int\int_{\Omega} fvdxdy + \oint_{\Gamma_2} g \cdot vdr,
\end{aligned}$$

Για όλα τα $u, v \in V = \{v \in H^1 : v|_{\Gamma_1} = 0\}$.
Οι ιδιότητες (i) και (ii) είναι ίδιες με εκείνες του πρώτου παραδείγματος, για αυτό θα

αποδείξουμε την τρίτη ιδιότητα.

$$\begin{aligned}(iii)|f(v)| &= |\int\int_{\Omega} fvdxdy + \oint_{\Gamma_2} g\cdot vdr| \\ &\leq |\int\int_{\Omega} fvdxdy| + |\oint_{\Gamma_2} g\cdot vdr| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \max\{\|f\|,\|g\|\}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= c\|v\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Επομένως, το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Κεφάλαιο 5

Μη Γραμμικά Προβλήματα

5.1 Εισαγωγή

5.1.1 Βασική Ιδέα

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την επίλυση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και θα εξάγουμε μια εκτίμηση σφάλματος για το προσεγγιστικό πρόβλημα αυστηρής μονοτονίας. Προτού, όμως, προχωρήσουμε στην εν λόγω εκτίμηση θα πρέπει να μελετήσουμε τα μη γραμμικά προβλήματα.
Έστω ότι επιθυμούμε να επιλύσουμε μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$A[u] = 0. \tag{5.1}$$

όπου το $A[\cdot]$ αντιπροσωπεύει ένα δοσμένο, πιθανό μη γραμμικό διαφορικό τελεστή και το u είναι άγνωστο. Γενικά, δεν υπάρχει κάποια γενική θεωρία για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, παρά μόνο η χρήση τεχνικών από την μη γραμμική συναρτησιακή ανάλυση. Αυτή είναι η κατηγορία των μεταβολικών προβλημάτων, δηλαδή, η διαφορική εξίσωση της μορφής (5.1), όπου ο μη γραμμικός τελεστής $A[\cdot]$ είναι η παράγωγος ενός κατάλληλου ενεργειακού συναρτησιακού $I[\cdot]$. Συμβολικά γράφουμε

$$A[\cdot] = I'[\cdot]. \tag{5.2}$$

Τότε το πρόβλημα (5.1) ισοδυναμεί

$$I'[\cdot] = 0. \tag{5.3}$$

Το πλεονέκτημα του παραπάνω σχηματισμού είναι ότι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (5.1) αντιστοιχούν στα κρίσιμα σημεία της $I[\cdot]$. Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις τα σημεία αυτά είναι ευκολότερο να βρεθούν, αν παραδείγματος χάρη, το συναρτησιακό $I[\cdot]$ έχει ελάχιστο στο u, τότε από την σχέση (5.3) η u είναι η λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (5.1). Επομένως, ενώ είναι συνήθως εξαιρετικά δύσκολο να επιλύσουμε την (5.1) απευθείας, είναι πολύ πιο εύκολο να ανακαλύψουμε τα ελάχιστα σημεία του συναρτησιακού $I[\cdot]$.

5.1.2 Πρώτη Μεταβολή-Η εξίσωση Euler-Lagrange.

Υποθέτουμε ότι το $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο, ανοιχτό σύνολο με ομαλό σύνορο ∂U, και μας δίνεται η ομαλή συνάρτηση

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \to \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση L ονομάζεται συνάρτηση Lagrange.

Σχόλιο. Θα γράφουμε

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, \cdots, p_n, z, x_1, \cdots, x_n)$$

για $p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$ και $x \in U$. Επιπλέον, το $'p'$ θα αντικατασταθεί αργότερα από το $Dw(x)$ και το $'z'$ από το $w(x)$. Επιπρόσθετα ορίζουμε

$$\begin{cases} D_pL = (L_{p_1}, \cdots, L_{p_n}) \\ D_zL = L_z \\ D_xL = (L_{x_1}, \cdots, L_{x_n}) \end{cases}$$

Έχοντας ορίσει τα παραπάνω μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε την μορφή του $I[\cdot]$ ως εξής

$$I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x)dx, \tag{5.4}$$

για ομαλές συναρτήσεις $w : U \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη

$$w = g \text{ στο } \partial U. \tag{5.5}$$

Θεώρημα 5.1.1. [1] *Έστω ότι η u είναι μια συγκεκριμένη ομαλή συνάρτηση, που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u = g$, στο ∂U. Αν η $I[\cdot]$ έχει ελάχιστο στο u, τότε το u είναι μια λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει μια ομαλή συνάρτηση $v \in C_C^\infty$ και μια συνάρτηση πραγματικών τιμών που ορίζεται ως

$$i(\tau) := I[u + \tau v], \ (\tau \in \mathbb{R}), \ v = 0 \text{ στο } \partial U. \tag{5.6}$$

Αφού το u είναι το ελάχιστο της συνάρτησης $I[\cdot]$, και ισχύει $u + \tau v = u = g$ στο ∂U, παρατηρούμε ότι η $i(\cdot)$ έχει ελάχιστο στο $\tau = 0$. Επομένως,

$$i'(0) = 0. \tag{5.7}$$

Θα υπολογίσουμε αυτή την πρώτη παράγωγο (που ονομάζεται πρώτη μεταβολή) της συνάρτησης που γράφεται

$$i(\tau) = \int_U L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)dx. \tag{5.8}$$

ως εξής

$$i'(\tau) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)v_{x_i} + L_z(Du + \tau Dv, u + \tau v, x)vdx.$$

[1] (8.1.2) Theorem 1, book Lawrence C. Evans

Αντικαθιστώντας όπου $\tau = 0$ και σε συνδυασμό με την (5.7) παίρνουμε ότι

$$0 = i'(0) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x) v_{x_i} + L_z(Du, u, x) v dx.$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες λαμβάνουμε την σχέση

$$0 = \int_U \Big[- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) \Big] v dx.$$

Τελικά, με το v να έχει συμπαγές υποστήριγμα, η ισότητα ισχύει για όλες τις συναρτήσεις u, και επομένως, συμπεραίνουμε ότι η u επιλύει την μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0 \text{ στο } U. \tag{5.9}$$

□

Σχόλιο. Η παραπάνω εξίσωση (5.9) είναι η εξίσωση των Euler-Lagrange. Επομένως, κάθε ομαλή συνάρτηση u που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $I[\cdot]$ είναι η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Euler-Lagrange, και κατ΄ επέκταση, αντί να ψάχνουμε τα σημεία που ελαχιστοποιούν την (5.4), θα προσπαθούμε να βρίσκουμε λύσεις της (5.9).

Παράδειγμα 5.1.1. (Αρχή του Dirichlet) Έστω ότι η συνάρτηση Lagrange δίνεται από τον τύπο

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2.$$

Τότε, $L_{p_i} = p_i, (i = 1, \cdots, n)$ και $L_z = 0$. Η εξίσωση Euler-Lagrange που συσχετίζεται με το συναρτησιακό

$$I[w] := \frac{1}{2} \int_U |Dw|^2 dx$$

είναι

$$\Delta u = 0, \text{ στο } U.$$

Αυτή είναι και η αρχή του Dirichlet.

Παράδειγμα 5.1.2. (Γενικευμένη αρχή του Dirichlet) Έστω ότι η συνάρτηση Lagrange δίνεται από τον τύπο

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha^{i,j}(x) p_i p_j - z f(x),$$

όπου $\alpha^{i,j}(x) = \alpha^{ji}(x), (i, j = 1, \cdots, n)$, και παραγώγους $L_{p_i} = \sum_{j=1}^n \alpha^{ij}(x) p_j, (i = 1, \cdots, n)$ και $L_z = -f(x)$. Η εξίσωση Euler-Lagrange που συσχετίζεται με το συναρτησιακό

$$I[w] := \int_U \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha^{ij} w_{x_i} w_{x_j} - w f dx$$

είναι η γραμμική εξίσωση

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(\alpha^{ij}u_{x_i})_{x_i} = f, \text{ στο } \in U.$$

Αργότερα, θα δείξουμε ότι η συνθήκη της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας των α^{ij} είναι απαραίτητη για την απόδειξη της μοναδικότητας του σημείου ελαχίστου.

Παράδειγμα 5.1.3. (Ελάχιστες Επιφάνειες) Έστω

$$L(p,z,x) = (1+|p|^2)^{1/2}$$

και

$$I[w] = \int_U (1+|Dw|^2)^{1/2}dx$$

είναι η περιοχή του γραφήματος της συνάρτησης $w : U \to \mathbb{R}$. Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι η

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_{x_i}}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\right)_{x_i} = 0, \text{ στο } \in U. \tag{5.10}$$

Αυτή είναι η και η εξίσωση της ελάχιστης επιφάνειας. Η έκφραση $div\Big(\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\Big)$ στο αριστερό μέλος της συνάρτησης (5.10) είναι n φορές η μέση καμπυλότητα του γραφήματος της u. Επομένως, μια ελάχιστη επιφάνεια έχει μέση καμπυλότητα ίση με μηδέν.

5.1.3 Δεύτερη Μεταβολή

Συνεχίζοντας όπως πριν θα υπολογίσουμε την δεύτερη μεταβολή της $I[\cdot]$ στην συνάρτηση u. Αυτό προκύπτει εύκολα παρατηρώντας ότι με το u να ελαχιστοποιεί το $I[\cdot]$, πρέπει να έχουμε

$$i''(0) \geq 0,$$

όπου το $i(\cdot)$ ορίζεται όπως και στην σχέση (5.6). Από την σχέση (5.8) μπορούμε να υπολογίσουμε

$$\begin{aligned} i''(\tau) = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} & L_{p_ip_j}(Du+\tau Dv, u+\tau v, x)v_{x_i}v_{x_j} \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n} L_{p_iz}(Du+\tau Dv, u+\tau v, x)v_{x_i}v \\ &+ L_{zz}(Du+\tau Dv, u+\tau v, x)v^2dx. \end{aligned}$$

Θέτοντας όπου $\tau = 0$ εξάγουμε την ανισότητα

$$0 \leq i''(0) = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_ip_j}(Du,u,x)v_{x_i}v_{x_j} + 2\sum_{i=1}^{n} L_{p_iz}(Du,u,x)v_{x_i}v + L_{zz}(Du,u,x)v^2dx, \tag{5.11}$$

που ισχύει για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις $v \in C_C^\infty(U)$.
Μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμες πληροφορίες από την σχέση (5.11). Αρχικά, παρατηρούμε ότι η σχέση (5.11) ισχύει για κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση v που μηδενίζεται στο ∂U. Για $\xi \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$v(x) := \epsilon\rho\big(\frac{x\cdot\xi}{\epsilon}\big)\zeta(x),\ (x \in U), \tag{5.12}$$

όπου $\zeta \in C_C^\infty(U)$ και $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια περιοδική 'ζικ-ζακ' συνάρτηση που ορίζεται ως

$$\rho(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{αν } \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases} \text{ και } \rho(x+1) = \rho(x),\ (x \in \mathbb{R}).$$

Επιπλέον,

$$|\rho'| = 1,\ \text{σχεδόν παντού} \tag{5.13}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης v είναι

$$v_{x_i}(x) = \rho'\big(\frac{x\cdot\xi}{\epsilon}\big)\xi_i\zeta + O(\epsilon)$$

και καθώς, $\epsilon \to 0$ αντικαθιστώντας την (5.12) στην (5.11) προκύπτει

$$0 \le \int_U \sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(Du,u,x)(\rho')\xi_i\xi_j\zeta^2 dx + O(\epsilon).$$

Από την σχέση (5.13) και στέλνοντας $\epsilon \to 0$ παίρνουμε την ανισότητα

$$0 \le \int_U \sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(Du,u,x)\xi_i\xi_j\zeta^2 dx.$$

Με την παραπάνω σχέση να ισχύει για όλα τα $\zeta \in C_C^\infty(U)$, εξάγουμε την σχέση

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(Du,u,x)\xi_i\xi_j \ge 0,\ (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in U). \tag{5.14}$$

5.2 Ύπαρξη του Ελαχίστου

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες της συνάρτησης Lagrange L, οι οποίες εξασφαλίζουν ότι το συναρτησιακό $I[\cdot]$ πράγματι ελαχιστοποιείται, τουλάχιστον μέσα σε κατάλληλους χώρους Sobolev.

5.2.1 Πιεστικότητα, κάτω Ημισυνέχεια

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, το συναρτησιακό

$$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x)dx,$$

που ορίζεται για κατάλληλες συναρτήσεις $w : U \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη

$$w = g,\ \text{στο } \partial U,$$

πρέπει να έχει ελάχιστο.

α.Πιεστικότητα

Υποθέτουμε ότι

$$1 < q < \infty$$

και επιπλέον,

$$\begin{cases} \text{Υπάρχουν σταθερές } \alpha > 0, \beta \geq 0, \text{ τέτοιες ώστε} \\ L(p,z,x) \geq \alpha |p|^q - \beta \\ \text{για όλα τα } p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in U. \end{cases} \tag{5.15}$$

Επομένως,

$$I[w] \geq \alpha \|Dw\|^q_{L^q(U)} - \gamma \tag{5.16}$$

για $\gamma := \beta|U|$. Επιπλέον, $I[w] \to \infty$ καθώς $\|Dw\|_{L^q} \to \infty$. Συνηθίζεται να καλούμε την παραπάνω σχέση ως συνθήκη πιεστικότητας του $I[\cdot]$. Από την ανισότητα (5.16) γίνεται φανερό ότι το συναρτησιακό $I[\cdot]$ δεν ορίζεται μόνο για ομαλές συναρτήσεις w, αλλά επιπλέον, για συναρτήσεις σε χώρους Sobolev $W^{1,q}(U)$ που ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη $w = g$ στο ∂U με την έννοια του ίχνους.
Με βάση τα παραπάνω θα ορίσουμε το σύνολο

$$\mathbb{A} := \{w \in W^{1,q}(U) | w = g, \text{ στο } \partial U \text{ με την έννοια του ίχνους}\},$$

που περιλαμβάνει το σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων w. Σημειώνεται ότι με βάση την (5.15) η $I[w]$ ορίζεται (αλλά μπορεί να ισούται και με το $+\infty$) για κάθε $w \in \mathbb{A}$.

β.Κάτω Ημισυνέχεια

Παρόλο, που μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την συνθήκη της πιεστικότητας πετυχαίνει το ελάχιστο της, στην περίπτωση του συναρτησιακού $I[\cdot]$ γενικώς, δεν ισχύει. Πράγματι, έστω ότι

$$m := \inf_{w \in \mathbb{A}} I[w] \tag{5.17}$$

και ότι υπάρχει μια ακολουθία συναρτήσεων $u_k \in \mathbb{A}(k = 1, \cdots)$ τέτοια ώστε

$$I[u_k] \to m, \text{ καθώς } k \to \infty \tag{5.18}$$

Καλούμε την $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ελάχιστη ακολουθία.
Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε ένα πραγματικό ελάχιστο. Για να δείξουμε, βέβαια, κάτι τέτοιο χρειαζόμαστε ένα είδος συμπάγειας που δεν υπάρχει στον απειροδιάστατο χώρο $W^{1,q}(U)$. Για το λόγω αυτό, θα στραφούμε στην ασθενή τοπολογία. Με την υπόθεση ότι $1 < q < \infty$, ο χώρος $L^q(U)$ είναι ανακλαστικός, και επομένως συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει μια υπακολουθία $\{u_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ και μια συνάρτηση $u \in W^{1,q}(U)$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} u_{kj} \rightharpoonup u \text{ ασθενώς στο } L^q(U) \\ Du_{kj} \rightharpoonup Du \text{ ασθενώς στο } L^q(U;\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{5.19}$$

Η σχέση (5.19) μας οδηγεί ισοδύναμα στην σχέση

$$u_{kj} \rightharpoonup u \text{ ασθενώς στο } W^{1,q}(U) \tag{5.20}$$

και με $u = g$ στο ∂U προκύπτει ότι $u \in \mathbb{A}$.
Μια επιπλέον δυσκολία που προκύπτει, είναι ότι το συναρτησιακό $I[\cdot]$ δεν είναι συνεχές ως προς την ασθενή σύγκλιση. Αυτό που χρησιμοποιείται τελικά, είναι η σχέση

$$I[u] \leq \liminf_{j\to\infty} I[u_{kj}]$$

Τότε, από την σχέση (5.18) εξάγουμε την σχέση $I[u] \leq m$, ενώ από την (5.17) προκύπτει $m \leq I[u]$. Συμπερασματικά, το u είναι πράγματι το ελάχιστο.

Ορισμός 5.2.1. Θα λέμε ότι το συναρτησιακό $I[\cdot]$ είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές στον $W^{1,q}(U)$, αν

$$I[u] \leq \liminf_{k\to\infty} I[u_k]$$

όπου

$$u_k \rightharpoonup u \text{ ασθενώς στο } W^{1,q}(U).$$

5.2.2 Κυρτότητα

Από την ανάλυση της δεύτερης μεταβολής στην προηγούμενη ενότητα είχαμε καταλήξει στην ανισότητα

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(Du, u, x)\xi_i \xi_j \geq 0, \;\; (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in U)$$

που ισχύει για κάθε ομαλή συνάρτηση u που ελαχιστοποιεί το $I[\cdot]$. Αυτή η ανισότητα υποδηλώνει την κυρτότητα της συνάρτησης L ως προς το πρώτο όρισμα.

Θεώρημα 5.2.1. ***(Ασθενή Κάτω Ημισυνέχεια)***[2] *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση L είναι κάτω φραγμένη, και επιπλέον, ότι η απεικόνιση*

$$p \mapsto L(p, z, x)$$

είναι κυρτή, για κάθε $z \in \mathbb{R}, x \in U$. Τότε,

$$I[\cdot] \text{ είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής στον } W^{1,q}(U)$$

Θεώρημα 5.2.2. ***(Ύπαρξη του ελαχίστου)***[3] *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση Lagrange, L, ικανοποιεί την ανισότητα πιεστικότητας (5.15) και είναι κυρτή ως προς την μεταβλητή p. Υποθέτουμε επίσης ότι σύνολο $\mathbb{A}$ είναι μη κενό.*
Τότε θα υπάρχει τουλάχιστον μια συνάρτηση $u \in \mathbb{A}$ που να επιλύει την

$$I[u] = \min_{w\in\mathbb{A}} I[w].$$

[2](8.2.2) Theorem 1 (Weak lower semicontinuity), book Lawrence C. Evans
[3](8.2.2) Theorem 2 (Existance of minimizer), book Lawrence C. Evans

Απόδειξη. Θέτουμε $m := \inf_{w\in\mathbb{A}} I[w]$. Αν $m = +\infty$ έχουμε τελειώσει, επομένως, θεωρούμε ότι το m είναι πεπερασμένο. Επιλέγουμε μια ελάχιστη ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Τότε,

$$I[u_k] \to m. \tag{5.21}$$

Επιπλέον, από την υπόθεση πιεστικότητας για $\beta = 0$ παίρνουμε ότι $L \geq \alpha|p|^q$ και επομένως,

$$I[w] \geq \alpha \int_U |Dw|^q dx. \tag{5.22}$$

Με το m να είναι πεπερασμένο, από τις σχέσεις (5.21) και (5.22) προκύπτει

$$\sup_k \|Du_k\|_{L^q(U)} < \infty. \tag{5.23}$$

Έστω, τώρα ότι υπάρχει μια συνάρτηση $w \in \mathbb{A}$. Αφού η u_k και η w ισούται με g στο σύνορο ∂U, έχουμε $u_k - w \in W_0^{1,q}(U)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Poincare λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|u_k\|_{L^q(U)} &\leq \|u_k - w\|_{L^q(U)} + \|w\|_{L^q(U)}\\ &\leq c\|Du_k - Dw\|_{L^q(U)} + C\\ &\leq C\end{aligned}$$

Επομένως, $\|u_k\|_{L^q(U)} < \infty$. Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (5.23) υποδηλώνουν ότι η $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη στο $W^{1,q}(U)$.
Συνεπώς, θα υπάρχει μια υπακολουθία της $\{u_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ και μια συνάρτηση $u \in W^{1,q}(U)$ τέτοια ώστε

$$u_{kj} \rightharpoonup u, \text{ ασθενώς στο } W^{1,q}(U).$$

Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι $u \in \mathbb{A}$. Πράγματι, με $w \in \mathbb{A}$ όπως παραπάνω, το $u_k - w \in W_0^{1,q}(U)$. Τώρα, ο $W_0^{1,q}(U)$ είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $W^{1,q}(U)$, και επομένως, από το θεώρημα του Mazur, είναι και ασθενώς κλειστό. Τελικά, $u - w \in W_0^{1,q}(U)$, και ισοδυνάμως, το ίχνος του u στο ∂U είναι ίσο με g.
Χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα του θεωρήματος (5.2.1) έχουμε ότι

$$I[u] \leq \liminf_{j\to\infty} I[u_{kj}] = m,$$

αλλά με $u \in \mathbb{A}$ προκύπτει τελικά ότι

$$I[u] = m = \min_{w\in\mathbb{A}} I[w].$$

□

Για το πρόβλημα της μοναδικότητας τώρα, χρειαζόμαστε κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Υποθέτουμε για παράδειγμα ότι

$$L = L(p, x), \text{ ανεξάρτητο του } z. \tag{5.24}$$

και

$$\begin{cases}\text{υπάρχει } \theta > 0 \text{ τέτοιο ώστε}\\ \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(p, x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \ (p, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in U).\end{cases} \tag{5.25}$$

Η συνθήκη (5.25) μας δείχνει ότι η απεικόνιση $p \mapsto L(p, x)$ είναι ομοιόμορφα κυρτή για κάθε x.

Θεώρημα 5.2.3. (Μοναδικότητα Ελαχίστου)[4] *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (5.24) και (5.25) ισχύουν. Τότε, το ελάχιστο $u \in \mathbb{A}$ του $I[\cdot]$ είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $u, \tilde{u} \in \mathbb{A}$, όπου και τα δύο ελαχιστοποιούν το συναρτησιακό $I[\cdot]$ στο $\mathbb{A}$. Θέτουμε $v := \frac{u+\tilde{u}}{2} \in \mathbb{A}$ και ισχυριζόμαστε ότι

$$I[v] \leq \frac{I[u] + I[\tilde{u}]}{2}, \tag{5.26}$$

με την ισχυρή ανισότητα να ισχύει μόνο για $u = \tilde{u}$ σχεδόν παντού.
Για την απόδειξη του ισχυρισμού, χρησιμοποιούμε την σχέση (5.25) από όπου προκύπτει

$$L(p,x) \geq L(q,x) + D_pL(q,x) \cdot (p-q) + \frac{\theta}{2}|p-q|^2, \ (x \in U, p, q \in \mathbb{R}^n). \tag{5.27}$$

Θέτουμε $q = \frac{Du+D\tilde{u}}{2}, p = Du$ και ολοκληρώνουμε πάνω στο U λαμβάνοντας

$$I[v] + \int_U D_pL\Big(\frac{Du+D\tilde{u}}{2}, x\Big) \cdot \Big(\frac{Du-D\tilde{u}}{2}\Big)dx + \frac{\theta}{8}\int_U |Du-D\tilde{u}|^2 dx \leq I[u]. \tag{5.28}$$

Ομοίως, θέτοντας $q = \frac{Du+D\tilde{u}}{2}, p = D\tilde{u}$, στην (5.27) και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$I[v] + \int_U D_pL\Big(\frac{Du+D\tilde{u}}{2}, x\Big) \cdot \Big(\frac{D\tilde{u}-Du}{2}\Big)dx + \frac{\theta}{8}\int_U |Du-D\tilde{u}|^2 dx \leq I[\tilde{u}]. \tag{5.29}$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (5.28) και (5.29) και διαιρώντας δια 2 προκύπτει

$$I[v] + \frac{\theta}{8}\int_U |Du-D\tilde{u}|^2 dx \leq \frac{I[u]+I[\tilde{u}]}{2}.$$

Δηλαδή, η σχέση (5.26) ισχύει.
Καθώς, $I[u] = I[\tilde{u}] = \min_{w \in \mathbb{A}} I[w] \leq I[v]$, συμπεραίνουμε ότι $Du = D\tilde{u}$ σχεδόν παντού στο U. Επομένως, $u = \tilde{u} = g$ στο ∂U, και άρα $u = \tilde{u}$ σχεδόν παντού. □

5.2.3 Οι Ασθενείς Λύσεις της Εξίσωσης Euler-Lagrange

Επιδιώκουμε να καταλήξουμε στο γεγονός ότι αν η $u \in \mathbb{A}$ είναι το ελάχιστο του συναρτησιακού $I[\cdot]$, τότε επιλύει και την εξίσωση Euler-Lagrange. Για την απόδειξη του ισχυρισμού χρειαζόμαστε κάποιες επιπλέον προϋποθέσεις, καθώς δεν γνωρίζουμε εάν η u είναι μια ομαλή συνάρτηση, απλώς μονάχα ότι ανήκει στο $W^{1,q}(U)$. Κάνουμε τις εξής υποθέσεις

$$|L(p,z,x)| \leq C(|p|^q + |z|^q + 1), \tag{5.30}$$

και επιπλέον,

$$\begin{cases} |D_pL(p,z,x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \\ |D_zL(p,z,x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \end{cases} \tag{5.31}$$

για κάποια σταθερά C και για όλα τα $p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in U$.

[4](8.2.2) Theorem 3 (Uniqueness of minimizer), book Lawrence C. Evans

Κίνητρο για τον Ορισμό των Ασθενών Λύσεων

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στο συνοριακό πρόβλημα για την διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange. Με την u να είναι μια ομαλή συνάρτηση και ελάχιστο του $I[\cdot]$ έχουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}(L_{p_i}(Du,u,x))_{x_i} + L_z(Du,u,x) = 0, & \text{στο } U, \\ u = g, & \text{στο } \partial U. \end{cases} \tag{5.32}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.32) με μία δοκιμαστική συνάρτηση $v \in C_C^\infty(U)$ και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du,u,x)v_{x_i} + L_z(Du,u,x)vdx = 0. \tag{5.33}$$

Υποθέτουμε τώρα, ότι $u \in W^{1,q}(U)$. Κάνοντας χρήση των υποθέσεων (5.31) βλέπουμε ότι

$$|D_pL(Du,u,x)| \leq C(|Du|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1) \in L^{q'}(U),$$

όπου $q' = \frac{q}{q-1}$, $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$. Ομοίως,

$$|D_zL(Du,u,x)| \leq C(|Du|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1) \in L^{q'}(U).$$

Συμπερασματικά, προκύπτει ότι η σχέση (5.33) ισχύει για κάθε $v \in W_0^{1,q}(U)$.

Ορισμός 5.2.2. Θα λέμε ότι το $u \in \mathbb{A}$ είναι μία ασθενή λύση του συνοριακού προβλήματος για την εξίσωση Euler-Lagrange αν ισχύει

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du,u,x)v_{x_i} + L_z(Du,u,x)vdx = 0.$$

για κάθε $v \in W_0^{1,q}(U)$.

Θεώρημα 5.2.4. ***(Λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange)***[5] *Υποθέτουμε ότι το L ικανοποιεί τις προϋποθέσεις (5.30) και (5.31), και ότι το $u \in \mathbb{A}$ ικανοποιεί την σχέση*

$$I[u] = \min_{w \in \mathbb{A}} I[w].$$

Τότε το u είναι μια ασθενή λύση της (5.32).

Απόδειξη. Έστω μια οποιαδήποτε συνάρτηση $v \in W_0^{1,q}(U)$. Θέτουμε ότι

$$i(\tau) := I[u + \tau v], \ (\tau \in \mathbb{R}).$$

[5](8.2.3) Theorem 4 (Solution of Euler-Lagrange equation), book Lawrence C. Evans

Λαμβάνοντας υπόψιν μας την σχέση (5.30) βλέπουμε ότι το $i(\tau)$ είναι πεπερασμένο για όλα τα τ.
Για $\tau \neq 0$ γράφουμε το πηλίκο διαφορών

$$\begin{aligned}\frac{i(\tau)-i(0)}{\tau} &= \int_U \frac{L(Du+\tau Dv, u+\tau v, x) - L(Du, u, x)}{\tau} dx \\ &= \int_U L^\tau(x) dx,\end{aligned} \tag{5.34}$$

όπου

$$L^\tau(x) := \frac{L(Du(x)+\tau Dv(x), u(x)+\tau v(x), x) - L(Du(x), u(x), x)}{\tau}$$

για $x \in U$ σχεδόν παντού. Είναι φανερό ότι

$$L^\tau(x) \to \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x) v_{x_i} + L_z(Du, u, x) v \tag{5.35}$$

σχεδόν παντού, καθώς $\tau \to 0$. Επιπρόσθετα,

$$\begin{aligned}L^\tau(x) &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{ds} L(Du+sDv, u+sv, x) ds \\ &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du+sDv, u+sv, x) v_{x_i} \\ &\quad + L_z(Du+sDv, u+sv, x) v ds\end{aligned}$$

Με τα $u, v \in W^{1,q}(U)$, την σχέση (5.31) και την ανισότητα Young λαμβάνουμε την σχέση

$$|L^\tau(x)| \leq C(|Du|^q + |u|^q + |Dv|^q + |v|^q + 1) \in L^1(U)$$

για κάθε $\tau \neq 0$. Από το θεώρημα Κυρίαρχης Σύγκλισης και τις σχέσεις (5.34) και (5.35), συμπεραίνουμε ότι η $i'(0)$ υπάρχει και ισούται

$$\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x) v_{x_i} + L_z(Du, u, x) v dx.$$

Αλλά τότε, η $i(\cdot)$ έχει ελάχιστο στο $\tau = 0$, και με $i'(0) = 0$, καταλήγουμε ότι η u είναι η ασθενή λύση. □

Σχόλιο. Γενικά, κάθε λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange (5.33) δεν αποτελεί ελάχιστο για το συναρτησιακό $I\cdot$. Ωστόσο, υπάρχει μια ιδιαίτερη περίπτωση, όπου η απεικόνιση $(p, z) \mapsto L(p, z, x)$ είναι κυρτή για κάθε x, και τότε μόνο κάθε ασθενή λύση είναι πράγματι και η ελάχιστη.
Για να το δούμε αυτό, επιλέγουμε μια συνάρτηση $u \in \mathbb{A}$, η οποία επιλύει την εξίσωση

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0, & \text{στο } U, \\ u = g, & \text{στο } \partial U. \end{cases} \tag{5.36}$$

με την ασθενή έννοια, και επιλέγουμε μια συνάρτηση $w \in \mathbb{A}$. Από την κυρτότητα της συνάρτησης $(p, z) \mapsto L(p, z, x)$, έχουμε

$$L(p, z, x) + D_pL(p, z, x) \cdot (q - p) + D_zL(p, z, x) \cdot (w - z) \leq L(q, w, x).$$

Θέτοντας $p = Du(x), q = Dw(x), z = u(x), w = w(x)$ και ολοκληρώνοντας πάνω στο U

$$I[u] + \int_U D_pL(Du, u, x) \cdot (Dw - Du) + D_zL(Du, u, x) \cdot (w - u) \leq I[w].$$

Από την σχέση (5.36) ο δεύτερος όρος στο αριστερό μέλος είναι μηδέν, και τελικά $I[u] \leq I[w]$ για κάθε $w \in \mathbb{A}$.

5.2.4 Εκτιμήσεις Δεύτερης Παραγώγου

Σε αυτή την υποενότητα θα θεωρούμε ότι το ενεργειακό συναρτησιακό θα δίνεται από τον τύπο

$$I[w] := \int_U L(Dw) - wf dx,$$

για $f \in L^2(U)$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι $q = 2$, και ότι ισχύει η συνθήκη

$$|D_pL(p)| \leq C(|p| + 1), \ (p \in \mathbb{R}^n).$$

Τότε, κάθε ελάχιστο $u \in \mathbb{A}$ είναι μια ασθενή λύση της Euler-Lagrange μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$-\sum_{i=1}^{n} (L_{p_i}(Du))_{x_i} = f, \text{ στο } U, \tag{5.37}$$

δηλαδή,

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du) v_{x_i} dx = \int_U fv dx,$$

για όλα τα $v \in H_0^1(U)$ Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι αν η $u \in H^1(U)$ είναι μια λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (5.37), τότε η $u \in H_{loc}^2(U)$. Για τον λόγο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη συνθήκη

$$|D^2L(p)| \leq C, \ (p \in \mathbb{R}^n) \tag{5.38}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η L είναι ομοιόμορφα κυρτή, και επομένως, θα υπάρχει μια σταθερά $\theta > 0$ τέτοια ώστε,

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \text{ στο } U, \tag{5.39}$$

Θεώρημα 5.2.5. *(Δεύτερη Παράγωγος Ελαχίστου)*[6]

[6](8.3.1) Theorem 1 (Second derivatives for minimizers), book Lawrence C. Evans

1. *Έστω ότι η $u \in H^1(U)$ είναι μια ασθενή λύση της μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης (5.37), όπου η συνάρτηση L ικανοποιεί τις συνθήκες (5.38) και (5.39). Τότε,*
$$u \in H^2_{loc}(U).$$
2. *Αν επιπλέον, η $u \in H^1_0(U)$ και το σύνορο ∂U είναι C^2, τότε*
$$u \in H^2(U),$$
με την εκτίμηση
$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\|f\|_{L^2(U)}.$$

5.3 Ένα Παράδειγμα Μη-Γραμμικού Προβλήματος

Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών μιας σχεδόν γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{cases} -div(\boldsymbol{\alpha}(x,u)\nabla u) = f, & \text{στο } U, \\ u = 0, & \text{στο } \partial U, \end{cases} \tag{5.40}$$

όπου $f \in L^2(U)$ είναι μια γνωστή συνάρτηση και $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}(x,u) = |u| + c$ ομαλή. Όπως συνήθως, θεωρούμε ότι $u : \overline{U} \to \mathbb{R}, u = u(x)$ όπου U είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με ομαλό σύνορο.

Ορισμός 5.3.1. Το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται μονότονο αν

$$(\boldsymbol{\alpha}(p) - \boldsymbol{\alpha}(q)) \cdot (p - q) \geq 0 \tag{5.41}$$

για όλα τα $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ είναι πράγματι μονότονο και ότι ισχύουν δύο επιπλέον υποθέσεις

$$|\boldsymbol{\alpha}(p)| \leq C(1 + |p|), \tag{5.42}$$
$$\boldsymbol{\alpha}(p) \cdot p \geq \alpha|p|^2 - \beta \tag{5.43}$$

για όλα τα $p \in \mathbb{R}^n$ και με κατάλληλες σταθερές $C, \alpha > 0, \beta \geq 0$. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (5.43) αντιστοιχεί σε μια συνθήκη πιεστικότητας του $\boldsymbol{\alpha}$ για την μη γραμμικότητα. Θα εξετάσουμε την ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.40). Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν ομαλές συναρτήσεις $w_k = w_k(x)(k = 1, \cdots)$ και

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι μια ορθοκανονική βάση του } H^1_0(U),$$

με εσωτερικό γινόμενο $(u, v) = \int_U Du \cdot Dv dx$.
Ψάχνουμε συναρτήσεις $u_m \in H^1_0(U)$ της μορφής

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} d^k_m w_k, \tag{5.44}$$

όπου οι σταθερές d_m^k επιλέγονται έτσι ώστε

$$\int_U \boldsymbol{\alpha}(Du_m) \cdot Dw_k dx = \int_U f w_k dx, \ (k = 1, \cdots, m). \tag{5.45}$$

Δηλαδή θα δείξουμε ότι η u_m αποτελεί την προβολή του προβλήματος (5.40) σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης, ο οποίος έχει στοιχεία βάσης τα $\{w_k\}_{k=1}^m$.

Θεώρημα 5.3.1. ***(Κατασκευή των Προσεγγιστικών Λύσεων)***[7] *Για κάθε ακέραιο $m = 1, \cdots$ θα υπάρχει μια συνάρτηση u_m της μορφής (5.44) που να ικανοποιεί την (5.45).*

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Evans (Chapter 9, Section 1, Theorem 1 (Construction of approximate solutions), Page 494) □

Θεώρημα 5.3.2. ***(Ενεργειακές Εκτιμήσεις)***[8] *Έστω ότι υπάρχει μια σταθερά C, η οποία να εξαρτάται μόνο από το U και το $\boldsymbol{\alpha}$, τέτοια ώστε*

$$\|u_m\|_{H_0^1(U)} \leq C(1 + \|f\|_{L^2(U)}) \tag{5.46}$$

για $m = 1, 2, \cdots$.

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας την (5.45) με d_m^k και αθροίζοντας για $k = 1, \cdots, m$:

$$\int_U \boldsymbol{\alpha}(Du_m) \cdot Du_m dx = \int_U f u_m dx.$$

Από την συνθήκη πιεστικότητας βρίσκουμε

$$\alpha \int_U |Du_m|^2 dx \leq C + \int_U f u_m dx$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Young με ϵ :

$$C + \int_U f u_m dx \leq C + \epsilon \int_U u_m^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_U f^2 dx.$$

Τελικά, από την ανισότητα Poincare και επιλέγοντας $\epsilon > 0$ και αρκετά μικρό προκύπτει η (5.46). □

Θεωρούμε ένα πολύ απλό πρόβλημα δύο διαστάσεων με:

$$\alpha(u, v; w) = \int_U \boldsymbol{\alpha}(w) \nabla u \cdot \nabla v dx$$

[7](9.1) Theorem 1 (Construction of approximate solutions), book Lawrence C. Evans
[8](9.1) Theorem 2 (Energy estimates), book Lawrence C. Evans

όπου η συνάρτηση $\boldsymbol{\alpha}(w)$ δίνεται από την σχέση:

$$\boldsymbol{\alpha}(w) := |w| + 1, \ \forall w \in \mathbb{R}$$

Για την συνάρτηση $\boldsymbol{\alpha}(w)$ παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (5.41) - (5.43), επομένως, υπάρχει και η ασθενή λύση του προβλήματος $a(u, v; u) = (f, v), \ \forall v \in H_0^1(U)$ Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μας είναι φραγμένη σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ψάχνουμε u τέτοιο ώστε

$$\begin{gathered}\alpha(u, v) = f(v) \\ \iint_U (|u| + 1)\nabla u \nabla v dxdy = \iint_U fv dxdy \\ (|u|\nabla u, \nabla v) + (\nabla u, \nabla v) = (f, v)\end{gathered}$$

$\forall v \in V$ με $V = H_0^1(U)$. Για το παραπάνω πρόβλημα η σχέση πιεστικότητας που ισχύει είναι:

$$\begin{aligned}\alpha(u, u) &= (|u|\nabla u, \nabla u) + (\nabla u, \nabla u) \\ &= \iint_U |u|(\nabla u)^2 dxdy + \iint_U (\nabla u)^2 dxdy \\ &\geq \iint_U (\nabla u)^2 dxdy + (\|\nabla u\|)^2_{L^2(U)} \\ &\geq c_c \|u\|^2_{H^1(U)}\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την σχέση του Poincare με $c_c < \infty$. Και άρα,

$$\alpha(u, u) \geq c_c \|u\|^2_{H^1(U)}$$

Επιπλέον, για την εκτίμηση ευστάθειας έχουμε:

$$(\||u|\nabla u\|)^2_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)} \leq \|f\|^2_{H^{-1}(U)}$$

Με βάση τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι η ασθενή μορφή

$$\alpha(u, v; u) = f(v), \ \forall v \in H_0^1(U) \tag{5.47}$$

αλλά και η διακριτή ασθενή μορφή

$$\alpha(u_h, v; u_h) = f(v), \ \forall v \in V_h \subset H_0^1(U) \tag{5.48}$$

έχει λύση κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Έστω,

$$V_h^{K,p} := \{v \in V_h : \|v\|_{W^{1,p}(U)} \leq K\}$$

για δοσμένο $K > 0$. Ορίζουμε την απεικόνιση $T_h : V_h \to V_h$, ως

$$\alpha(T_h u_h, v; u_h) = F(v), \ \forall v \in V_h$$

Η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη, αφού για $u_h \in V_h$ η $\boldsymbol{\alpha}(u_h) \in L^\infty(U)$.

Θεώρημα 5.3.3. [9] *Υποθέτουμε ότι η $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$ είναι φραγμένη σε φραγμένα υποσύνολα και μάλιστα ότι $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot) > 0$. Τότε, θα υπάρχουν $K > 0, p > 2, h_0 > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε F με $\|F\|_{W^{-1,p}} \leq \delta$ η T_h να απεικονίζει τον $V_h^{K,p}$ στον εαυτό του για όλα τα $0 < h \leq h_0$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο των Brenner-Scott (Chapter 8, Section 7, Theorem(8.7.7), Page 235) □

Πρόταση 5.3.1. ***(Ύπαρξη Ασθενής Λύσης)***[10] *Υποθέτουμε ότι η $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχής και $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot) > 0$. Έστω $K > 0, p > 2, h_0 > 0$ και $\delta > 0$ όπως ακριβώς και στο θεώρημα (5.3.3). Για $\|F\|_{W^{-1,p}} \leq \delta$ η σχέση $a(u_h, v; u_h) = F(v)$ έχει λύση u_h, η οποία ικανοποιεί την σχέση*

$$\|u_h\|_{W^{1,p}(U)} \leq K$$

για όλα τα $0 < h \leq h_0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης βρίσκεται στο βιβλίο των Brenner-Scott (Chapter 8, Section 7, Corollary(8.7.9), Page 236) □

Συνεπώς, η Πρόταση μας εγγυάται την ύπαρξη λύσης για το διακριτό πρόβλημα, η οποία μάλιστα είναι φραγμένη για καθώς, $h \to 0$. Αυτό μας επιτρέπει να κάνουμε μια εκτίμηση σφάλματος όπως ακολούθως:

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα Galerkin αφαιρούμε την (5.47) από την (5.48) λαμβάνοντας:

$$\begin{aligned}
&a(u, v_h; u) - a(u_h, v_h; u_h) = 0\\
&((1 + |u|)\nabla u, \nabla v_h) - ((1 + |u_h|)\nabla u_h, \nabla v_h) = 0\\
&((1 + |u|)\nabla(u - u_h), \nabla v_h) + ((1 + |u|)\nabla u_h, \nabla v_h) - ((1 + |u_h|)\nabla u_h, \nabla v_h) = 0\\
&((1 + |u|)\nabla(u - u_h), \nabla v_h) - ((1 + |u| - (1 + |u_h|))\nabla u_h, \nabla v_h) = 0\\
&((1 + |u|)\nabla(u - u_h), \nabla v_h) - ((|u| - |u_h|)\nabla u_h, \nabla v_h) = 0
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας την ποσότητα $w_h \in V_h$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
((1 + |u|)\nabla(u - w_h), \nabla v_h) &+ ((1 + |u|)\nabla(w_h - u_h), \nabla v_h)\\
&+ ((|u| - |u_h|))\nabla u_h, \nabla v_h) = 0
\end{aligned}$$

Θέτοντας $v_h = w_h - u_h$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
((1 + |u|)\nabla(u - w_h), \nabla(w_h - u_h)) &+ ((1 + |u|)\nabla(w_h - u_h), \nabla(w_h - u_h))\\
&+ ((|u| - |u_h|)\nabla(u_h), \nabla(w_h - u_h))\\
&= 0
\end{aligned}$$

[9] (8.7.7) Theorem, book Lawrence C. Evans
[10] (8.7.9) Corollary, book Lawrence C. Evans

Θέτουμε τις παραπάνω ως:

$$I_1 := ((1+|u|)\nabla(u-w_h), \nabla(w_h-u_h))$$
$$I_2 := ((1+|u|)\nabla(w_h-u_h), \nabla(w_h-u_h))$$
$$I_3 := ((|u|-|u_h|)\nabla(u_h), \nabla(w_h-u_h))$$

Επομένως έχουμε:

$$I_2 = -I_1 - I_3$$

Παρατηρούμε ότι για την ποσότητα I_2 ισχύει:

$$\begin{aligned}
|I_2| &= |((1+|u|)\nabla(w_h-u_h), \nabla(w_h-u_h))| \\
&= |\int_U (1+|u|)\nabla(w_h-u_h)\nabla(w_h-u_h)d\mathbf{x}| \\
&\geq |\int_U \nabla(w_h-u_h)\nabla(w_h-u_h)d\mathbf{x}| \\
&= \|\nabla(w_h-u_h)\|^2_{L^2(U)}
\end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί να φράξουμε κατάλληλα τα I_1 και I_3 ως:

$$\|\nabla(w_h-u_h)\|^2_{L^2(U)} \leq |I_1| + |I_3|$$

Για το I_1 έχουμε:

$$\begin{aligned}
|I_1| &= |((1+|u|)\nabla(u-w_h), \nabla(w_h-u_h))| \\
&= |\int_U (1+|u|)\nabla(u-w_h)\nabla(w_h-u_h)d\mathbf{x}| \\
&\leq \int_U |(1+|u|)||\nabla(u-w_h)||\nabla(w_h-u_h)|d\mathbf{x} \\
&\leq \|1+|u|\|_{L^\infty(U)}\|\nabla(u-w_h)\|_{L^2(U)}\|\nabla(w_h-u_h)\|_{L^2(U)} \\
&\leq \|1+|u|\|^2_{L^\infty(U)}\|\nabla(u-w_h)\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{4}\|\nabla(w_h-u_h)\|^2_{L^2(U)}
\end{aligned}$$

όπου παραπάνω έγινε χρήση της ανισότητας Hölder και έπειτα της Young.
Αντίστοιχα για τον όρο I_3 παρατηρούμε:

$$\begin{aligned}
|I_3| &= |((|u|-|u_h|)\nabla(u_h), \nabla(w_h-u_h))| \\
&= |\int_U (|u|-|u_h|)\nabla(u_h)\nabla(w_h-u_h)d\mathbf{x}| \\
&\leq \int_U |(|u|-|u_h|)||\nabla(u_h)||\nabla(w_h-u_h)|d\mathbf{x} \\
&\leq \int_U |u-w_h+w_h-u_h||\nabla u_h||\nabla(w_h-u_h)|d\mathbf{x} \\
&\leq \int_U |u-w_h||\nabla u_h||\nabla(w_h-u_h)|d\mathbf{x} + \int_U |w_h-u_h||\nabla u_h||\nabla(w_h-u_h)|d\mathbf{x} \\
&:= I_{3,1} + I_{3,2}
\end{aligned}$$

Από τα προηγούμενα θεωρήματα έχουμε ότι για κατάλληλα δεδομένα και με $\|f\|_{W^{-1,4}(U)} < \delta$ ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\|u_h\|_{W^{1,4}(U)} < \delta$$

για δ κατάλληλα μικρό. Επομένως, ο υπολογισμός της $I_{3,2}$ γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
I_{3,2} &= \int_U |w_h - u_h||\nabla u_h||\nabla(w_h - u_h)|d\mathbf{x} \\
&\leq \|w_h - u_h\|_{L^4(U)}\|\nabla u_h\|_{L^4(U)}\|\nabla(w_h - u_h)\|_{L^2(U)} \quad \text{(Γενικευμένη Ανισότητα Hölder)} \\
&\leq \|w_h - u_h\|_{L^4(U)}\|u_h\|_{W^{1,4}(U)}\|\nabla(w_h - u_h)\|_{L^2(U)} \quad \text{(Ανισότητα Gagliardo-Nierenberg-Sobolev)} \\
&\leq \delta\|w_h - u_h\|_{L^4(U)}\|\nabla(w_h - u_h)\|_{L^2(U)} \\
&\leq c\delta\|\nabla(w_h - u_h)\|^2_{L^2(U)} \quad \text{(Ανισότητα Poincare)}
\end{aligned}$$

Διαλέγουμε το δ έτσι ώστε $c\delta < 1/4$, δηλαδή για κατάλληλα ¨μικρά δεδομένα¨. Απομένει να εξετάσουμε τον όρο $I_{3,1}$. Ισχύει:

$$\begin{aligned}
I_{3,1} &= \int_U |u - w_h||\nabla u_h||\nabla(w_h - u_h)|d\mathbf{x} \\
&\leq \|u - w_h\|_{L^4(U)}\|\nabla u_h\|_{L^4(U)}\|\nabla(w_h - u_h)\|_{L^2(U)} \quad \text{(Γενικευμένη Ανισότητα Hölder)} \\
&\leq c\delta\|\nabla(u - w_h)\|_{L^2(U)}\|\nabla(w_h - u_h)\|_{L^2(U)} \quad \text{(Ενσφήνωση του } H^1(U) \subset L^4(U)\text{)} \\
&\leq \tilde{c}\delta^2\|\nabla(u - w_h)\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{4}\|\nabla(w_h - u_h)\|^2_{L^2(U)} \quad \text{(Ανισότητα Young)}
\end{aligned}$$

Τελικά, συγκεντρώνοντας όλους τους όρους, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{4}\|\nabla(w_h - u_h)\|^2_{L^2(U)} \leq C_u\|\nabla(w_h - u)\|^2_{L^2(U)} \tag{5.49}$$

όπου C_u εξαρτάται από το χωρίο μέσω των σταθερών Poincare και $\|u\|_{L^\infty(U)}$. Το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε είναι μια μορφή του Λήμματος Céa για μικρά δεδομένα.

Θεώρημα 5.3.4. ***(Μοναδικότητα Ασθενής Λύσης)*** *Υποθέτουμε ότι η $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$ είναι Lipschitz συνεχής και $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot) > 0$. Τότε θα υπάρχουν $\delta > 0, h_0 > 0$ και $p > 2$, τέτοια ώστε οι σχέσεις $a(u,v;u) = F(v)$ και $a(u_h,v;u_h) = F(v)$, για όλα τα $0 < h \leq h_0$ να έχουν μοναδικές λύσεις με F τέτοια ώστε $\|F\|_{W^{-1,p}} \leq \delta$. Επιπλέον, το σφάλμα $u - u_h$ ικανοποιεί την σχέση (5.49).*

Κεφάλαιο 6

Παράρτημα

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια αναλυτική παρουσίαση ορισμένων από των όρων που χρησιμοποιήθηκαν, όπως επίσης και κάποια επιπλέον μαθηματικά εργαλεία που αναφέρθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια.

Ορισμός 6.0.1. Μια συνάρτηση $u : U \to \mathbf{R}$, όπου

$$u(x) = u(x_1, ..., x_n),\ \ (x \in U).$$

θα λέμε ότι η u είναι ομαλή αν είναι απείρως παραγωγίσιμη.

Ορισμός 6.0.2. Μια συνάρτηση $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ καλείται κυρτή αν

$$f(\tau x + (1-\tau)y) \leq \tau f(x) + (1-\tau)f(y)$$

για όλα τα $x, y \in \mathbf{R}^n$ και κάθε $0 \leq \tau \leq 1$.

Έστω ότι $U \subset \mathbf{R}^n$ να είναι ανοιχτό και φραγμένο και $k \in \{1, 2, ...\}$.

Ορισμός 6.0.3. Θα λέμε ότι το ∂U είναι C^k αν για κάθε σημείο $x^0 \in \partial U$ υπάρχει ένα $r > 0$ και μια συνάρτηση $C^k, \gamma : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$, έτσι ώστε

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) | x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}.$$

Ορισμός 6.0.4.

1. Δύο στοιχεία $u, v \in H$ λέγονται ορθογώνια αν $(u, v) = 0$.
2. Μια αριθμήσιμη βάση $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ καλείται ορθοκανονική αν

$$\begin{cases} (w_k, w_l) = 0, & (k, l = 1, ...; k \neq l) \\ \|w_k\| = 1, & (k = 1, ...) \end{cases}$$

Ορισμός 6.0.5.

1. Η απεικόνιση $A : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός τελεστής αν ισχύει

$$A[\lambda u + \mu v] = \lambda Au + \mu Av$$

για όλα τα $u, v \in X,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ είναι φραγμένος αν

$$\|A\| := \sup\{\|Au\|_Y | \|u\|_X \leq 1\} < \infty.$$

3. Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ καλείται κλειστός αν για οποιαδήποτε $u_k \to u$ και $Au_k \to u$ στον Y θα ισχύει ότι

$$Au = v.$$

Αν ο τελεστής είναι φραγμένος, τότε ισοδύναμα είναι και συνεχής.

Ορισμός 6.0.6. 1. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $u^* : X \to \mathbb{R}$ καλείται ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον X.

2. Με X^* συμβολίζουμε την συλλογή όλων των φραγμένων και γραμμικών συναρτησιακών στον X. Ο χώρος X^* καλείται δυϊκός χώρος του X.

Ορισμός 6.0.7. 1. Αν $u \in X, u^* \in X^*$ γράφουμε

$$u^*(u) = \langle u^*, u \rangle$$

2. Ορίζουμε την νόρμα στον χώρο X^* ως:

$$\|u^*\| := \sup\{\langle u^*, u \rangle | \|u\| \leq 1\}.$$

3. Ένας χώρος Banach είναι ανακλαστικός αν $(X^*)^* = X$. Πιο συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $u^{**} \in (X^*)^*$, θα υπάρχει $u \in X$, τέτοιο ώστε:

$$\langle u^{**}, u^* \rangle = \langle u^*, u \rangle, \ \forall u^* \in X^*.$$

Ορισμός 6.0.8. Θα λέμε ότι μια ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ συγκλίνει ασθενώς στο $u \in X$ αν

$$\langle u^*, u_k \rangle \to \langle u^*, u \rangle$$

και γράφουμε

$$u_k \rightharpoonup u$$

για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $u^* \in X^*$.

Ορισμός 6.0.9. Θα λέμε ότι μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ που ορίζονται στο $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $|x - y| < \delta$ να ισχύει ότι

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, ...$

Ορισμός 6.0.10. Ένας υπόχωρος Y ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται συνδιάστασης 1, αν $Y \neq X$ και υπάρχει ένα $x \in X$ ώστε $X = \langle Y \cup \{x\} \rangle$.

Ορισμός 6.0.11. Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται υπερεπίπεδο, αν $W = x + Y$, όπου $x \in X$ και y είναι συνδιάστασης 1 υπόχωρος του X.

Θεώρημα 6.0.1. ***(Ασθενή Συμπάγεια)***[1] *Έστω ότι ο X είναι ένας ανακλαστικός χώρος Banach και υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ είναι φραγμένη. Τότε, θα υπάρχει μια υπακολουθία $\{u_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ και ένα $u \in X$, τέτοιο ώστε*

$$u_{kj} \rightharpoonup u.$$

Θεώρημα 6.0.2. ***(Θεώρημα Mazur)***[2] *Έστω ότι ο είναι ένας ανακλαστικός χώρος Banach. Τότε, κάθε κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του είναι ασθενώς κλειστό.*

Θεώρημα 6.0.3. ***(Κριτήριο Arzela-Ascoli)***[3] *Έστω ότι η $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$, τέτοιες ώστε*

$$|f_k(x)| \leq M, \ k = 1, 2, ..., x \in \mathbb{R}^n$$

για κάποια σταθερά M, και οι $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής. Τότε, υπάρχει μια ακολουθία $\{f_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ και μια συνεχής συνάρτηση f, τέτοια ώστε

$$f_{kj} \to f, \ \text{ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του } \mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 6.0.4. ***(Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)***[4] *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ολοκληρώσιμες και*

$$f_k \to f, \ \text{σχεδόν παντού}.$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$|f_k| \leq g, \ \text{σχεδόν παντού},$$

για κάποια αθροίσιμη συνάρτηση g. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

[1] Appendix D4, Theorem 3(Weak Compactness), book Lawrence C. Evans
[2] Θεώρημα III.7, book Haim Brezis
[3] Θεώρημα IV.24(Ascoli), book Haim Brezis
[4] Appendix E3, Theorem 5(Dominant Convergence Theorem), book Lawrence C. Evans

Θεώρημα 6.0.5. ***(Θεώρημα Brouwer)*** *Υποθέτουμε*

$$u : B(0,1) \to B(0,1)$$

είναι συνεχής, όπου $B(0,1)$ *είναι μια κλειστή μπάλα στον* $\mathbb{R}^n$. *Τότε, το* u *έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή, υπάρχει ένα σημείο* $x \in B(0,1)$ *με*

$$u(x) = x.$$

Θεώρημα 6.0.6. ***(Το Επιχείρημα της Ομοιογένειας)*** *Η τεχνική της εξαγωγής μιας εκτίμησης ανεξάρτητης από το μέγεθος του πλέγματος από μια εκτίμηση που εξαρτάται από το μέγεθός του, με χρήση μιας συσχετισμένης απεικόνισης για την αλλαγή των μεταβλητών, ονομάζεται επιχείρημα της ομοιογένειας.*

Θεώρημα 6.0.7. ***(Το Επιχείρημα της Πυκνότητας)*** *Η τεχνική κατά την οποία εξάγουμε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα σε κάποιον χώρο* X *που αρχικά να ισχύει σε ένα πυκνό υποσύνολο του* D *με χρήση της ιδιότητας:*

Για κάθε $x \in X$ *υπάρχει μια ακολουθία* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ *στον* D *τέτοια ώστε να ισχύει ότι*

$$d_n \to x \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Βιβλιογραφία

[1] ¨Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις¨, Γ.Δάσιος, Κ.Κυριάκη (1994), Γ.Δάσιος

[2] ¨Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών¨, William E. Boyce, Richard C. DiPrima (1999), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

[3] ¨Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές¨, Σ.Καρανάσιος, (2009), Σ.Καρανάσιος

[4] ¨Σημειώσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση (Δεύτερη Έκδοση)¨, Σ.Αργυρός (2004), Σημειώσεις Μαθήματος Συναρτησιακής Ανάλυσης

[5] "Partial Differential Equations: Third Edition", L.C.Evans(1998), American Mathematical Society

[6] "The Mathematical Theory of Finite Element Methods: Third Edition", S.C.Brenner, L.R.Scott(2007), Springer

[7] ¨Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων¨, Ι.Χρυσοβέργης, Α.Μπακόπουλος (2003), Συμεών