



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

**Έλεγχος Αντιστάθμισης Βλαβών
με Μεθοδολογίες Προβλεπτικού Ελέγχου
για Πολυ-Ελικοφόρα Αυτόνομα Ιπτάμενα Οχήματα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Ι. Αργυρόπουλος

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Ι. Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

**Έλεγχος Αντιστάθμισης Βλαβών
με Μεθοδολογίες Προβλεπτικού Ελέγχου
για Πολυ-Ελικοφόρα Αυτόνομα Ιπτάμενα Οχήματα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Ι. Αργυρόπουλος

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Ι. Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23^η Ιουλίου 2020.

.....
Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Ανδρέας-Γεώργιος Σταφυλοπάτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2020

.....

Γεώργιος Ι. Αργυρόπουλος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών

Copyright © Γεώργιος Ι. Αργυρόπουλος, 2020.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Τα πολυ-ελικοφόρα οχήματα αποτελούν μια ολοένα και δημοφιλέστερη ρομποτική πλατφόρμα τόσο μέσα όσο και έξω από τα ερευνητικά εργαστήρια. Ο αυξανόμενος αριθμός τους τα τελευταία χρόνια επισημάνει την ανάγκη ανάπτυξης ελεγκτών που είναι σε θέση να διαχειριστούν με ασφάλεια βλάβες εν ώρα πτήσης, βλάβες οι οποίες σε αντίθετη περίπτωση θα οδηγούσαν σε πιθανή απώλεια ελέγχου του οχήματος και σε ενδεχόμενο τραυματισμό ανθρώπων ή καταστροφή του ίδιου του εξοπλισμού. Στην παρούσα εργασία, προτείνεται αρχικά μια μεθοδολογία για την παραγωγή τροχιών αναφοράς για πολυ-ελικοφόρα οχήματα σε συνδυασμό με τη σχεδίαση ενός προβλεπτικού ελεγκτή που στόχο έχει την παρακολούθηση των προαναφερθέντων τροχιών από όχημα χωρίς βλάβες. Στη συνέχεια, γίνεται προσπάθεια αντιμετώπισης μιας υποκατηγορίας των πιθανών σφαλμάτων που είναι η ολική βλάβη ενός ή περισσότερων από τους κινητήρες του πολυ-ελικοφόρου. Προτείνονται προβλεπτικοί ελεγκτές που παρά τη βλάβη και ανάλογα την κατάσταση διαλέγουν ένα από τα ακόλουθα σενάρια: παρακολούθηση της τροχιάς αναφοράς, προσγείωση σε ασφαλή περιοχή, αποφυγή μη ασφαλούς περιοχής και ελαχιστοποίηση της ταχύτητας πρόσκρουσης. Τέλος, οι επιδόσεις των προτεινόμενων ελεγκτών ελέγχονται μέσω προσομοιώσεων.

Λέξεις Κλειδιά

Πολυ-ελικοφόρο, Προβλεπτικός Έλεγχος, Αντιστάθμιση Βλάβης, Παραγωγή Τροχιάς, Lyapunov, Reachability, Προσομοίωση

Abstract

Multi-rotors are an increasingly popular robotic platform both in and out of research labs. Their ever growing numbers over the last few years has highlighted the need for the development of controllers that are capable of safely handling faults during flight; faults that could otherwise potentially lead to the loss of vehicle control and the injury of people or the destruction of the robotic equipment itself. In this work, a methodology for reference trajectory generation for multi-rotors is initially proposed alongside with the design of a model predictive controller whose goal is to track the aforementioned trajectory without the presence of faults. Next, an effort is made to handle a subcategory of all possible faults which is the total loss of one or more of the multi-rotor's motors. Model predictive controllers are proposed that despite the fault and depending on the situation, choose one of the following scenarios: reference trajectory tracking, landing in safe region, avoidance of unsafe region, minimization of impact velocity. Finally, the performance of the proposed controllers is validated by means of simulations.

Keywords

Multi-rotor, Model Predictive Control, Fault Tolerant, Trajectory Generation, Lyapunov, Reachability, Simulation

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Κώστα Κυριακόπουλο που μου έδωσε την ευκαιρία να γίνω μέλος του Εργαστηρίου Αυτομάτου Ελέγχου στα πλαίσια της διπλωματικής μου εργασίας. Η καθοδήγησή του, οι συμβουλές και η κριτική του με βελτίωσαν και θα συνεχίσουν να με εξελίσσουν τόσο ως άνθρωπο όσο και ως ερευνητή.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Γιώργο Ζωγόπουλο-Παπαλιάκο, υποψήφιο Διδάκτορα και συνεργάτη. Η προθυμία του, οι ιδέες του και η γενικότερη υποστήριξη του καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης και πραγματικά πολύτιμη βοήθεια.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου, η στήριξη των οποίων μου δίνει καθημερινά δύναμη και κίνητρο.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	ii
Ευχαριστίες	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Δήλωση Προβλήματος	3
1.2 Πολυ-ελικοφόρα	3
1.2.1 Μέρη Πολυ-ελικοφόρου	4
1.2.2 Μοντέλο Πολυ-ελικοφόρου	5
1.3 Προηγούμενες δουλειές	7
1.4 Δομή Εργασίας	7
2 Παραγωγή Τροχιάς και Εισόδου Αναφοράς	9
2.1 Παραγωγή Τροχιάς Θέσης	9
2.1.1 Βέλτιστοι χρόνοι	10
2.2 Differential Flatness	12
3 Προβλεπτικός Ελεγκτής MPC	15
3.1 Μαθηματική Περιγραφή	15
4 Παρακολούθηση τροχιάς με μεθοδολογία προβλεπτικού ελέγχου χωρίς βλάβη	19
4.1 Σταθεροποίηση του γραμμικού χρονομεταβλητού συστήματος του σφάλματος	21
4.2 Θετικά Αμετάβλητα Χρονομεταβλητά Επιπεδοσύνολα	22
4.3 Υπολογισμός των χρονομεταβλητών επιπεδοσυνόλων	24
4.4 Υπολογισμός τελικής ποινής	27
5 Αντιμετώπιση Βλάβης	29
5.1 Συνθήκη κλειστότητας	29
5.2 Backwards Reachable Tube	31
5.3 Διαχωρισμός βλαβών σε κατηγορίες	34
6 Προσομοιώσεις	37
7 Συμπεράσματα και Μελλοντικές Κατευθύνσεις	69
A Quaternions	71
A.1 Ορισμός	71
A.2 Ιδιότητες	72
A.2.1 Άθροισμα	72
A.2.2 Γινόμενο	72
A.2.3 Ταυτότητα	73
A.2.4 Συζυγές	74

A.2.5	Νόρμα	74
A.2.6	Αντιστροφή	74
A.2.7	Μοναδιαίο ή κανονικοποιημένο quaternion	74
A.2.8	Εκθετικό των pure quaternion	75
A.2.9	Λογάριθμος των μοναδιαίων quaternion	75
A.3	Περί Περιστροφών	76
A.3.1	Περιστροφή τρισδιάστατου διανύσματος και quaternions	76
A.3.2	Ομάδα περιστροφής $SO(3)$	77
A.3.3	Ικανοποίηση περιορισμών $SO(3)$	78
A.3.4	Double Cover του $SO(3)$	78
A.3.5	Πίνακας περιστροφής	79
A.3.6	Συστήματα αναφοράς	79
A.3.7	Σύνθεση περιστροφών	80
A.3.8	Διαταραχές	81
A.3.9	Hopf fibration	81
B	Μοντέλο Πολυ-Ελικοφόρου	83
B.1	Συστήματα αναφοράς	83
B.1.1	Inertial Frame \mathcal{F}^i	83
B.1.2	Body Frame \mathcal{F}^b	83
B.2	Εξίσωση Coriolis	83
B.3	Μεταβλητές Κατάστασης	84
B.4	Κινηματική	85
B.5	Δυναμική Στερεού Σώματος	86
B.6	Μοντέλο	87
B.7	Δυνάμεις και Ροπές	87
B.8	Γραμμικοποίηση	89
	Βιβλιογραφία	91

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Χρήσεις πολυ-ελικοφόρων	1
1.2	Αριθμός πολυ-ελικοφόρων στην Αμερική	2
1.3	Δυνητικά επικίνδυνη κατάσταση με πολυ-ελικοφόρο πάνω από πλήθος	2
1.4	Παρακολούθηση τροχιάς	3
1.5	Παραδείγματα ασφαλούς και επικίνδυνης περιοχής	3
1.6	Κατηγορίες πολυ-ελικοφόρων	4
1.7	Μέρη Πολυ-ελικοφόρου	5
1.8	Γεωμετρία τετρακόπτερου	6
1.9	Γεωμετρία εξακόπτερου	7
1.10	Παραγωγή επιθυμητής τροχιάς	8
1.11	Σχεδίαση προβλεπτικού ελεγκτή	8
1.12	Αντιμετώπιση βλαβών	8
2.1	Πρόγραμμα παραγωγής τροχιάς θέσης	11
2.2	Σύγκριση μεταξύ ελεύθερων και βέλτιστων χρόνων	11
2.3	Παράδειγμα γωνίας θ_2 πριν και μετά το φιλτράρισμα	13
3.1	Κεντρική αρχή του NMPC	16
3.2	Ρόλος τερματικής περιοχής	17
5.1	Βλάβες και κυρτοί φλοιοί	30
5.2	Αρχή Δυναμικού Προγραμματισμού	32
5.3	Έννοια του κόστους V	33
5.4	Σημεία που λανθασμένα δε συμπεριλαμβάνονται στο BRT με το εικονιζόμενο κόστος V	33
5.5	Περιορισμός του επιθυμητού συνόλου \mathcal{L}	33
5.6	Αποφυγή περιοχής	35
6.1	Αρχιτεκτονική Λογισμικού	37
6.2	Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη	38
6.3	Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη	39
6.4	Διάγραμμα κατάστασης	40
6.5	Διάγραμμα εισόδου	41
6.6	Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη	42
6.7	Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη	43
6.8	Διάγραμμα κατάστασης	44
6.9	Διάγραμμα εισόδου	45
6.10	Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη	46
6.11	Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη	47
6.12	Διάγραμμα κατάστασης	48
6.13	Διάγραμμα εισόδου	49
6.14	Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη	50
6.15	Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη	51

6.16	Διάνυσμα κατάστασης	52
6.17	Διάνυσμα εισόδου	53
6.18	Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη	54
6.19	Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη	55
6.20	Διάνυσμα κατάστασης	56
6.21	Διάνυσμα εισόδου	57
6.22	Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη	58
6.23	Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη	59
6.24	Διάνυσμα κατάστασης	60
6.25	Διάνυσμα εισόδου	61
6.26	Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη	62
6.27	Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη	63
6.28	Διάνυσμα κατάστασης	64
6.29	Διάνυσμα εισόδου	65
6.30	Σύγκριση θέσης	66
6.31	Σύγκριση γραμμικής ταχύτητας	67
6.32	Σύγκριση γωνιακής ταχύτητας	68
A.1	Περιστροφή ενός διανύσματος \mathbf{x} , κατά μία γωνία φ , γύρω από τον άξονα \mathbf{u} .	76
A.2	Σύνθεση περιστροφών. Στο \mathbb{R}^2 αρκεί μια πρόσθεση $\theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC}$ που είναι αντιμεταθετική. Στο \mathbb{R}^3 η σύνθεση ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{q}_{AC} = \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}$ που δεν είναι αντιμεταθετική και συνεπώς η σειρά των πράξεων πρέπει να τηρείται αυστηρώς.	81
B.1	Συστήματα αναφοράς	83

Κεφάλαιο 1

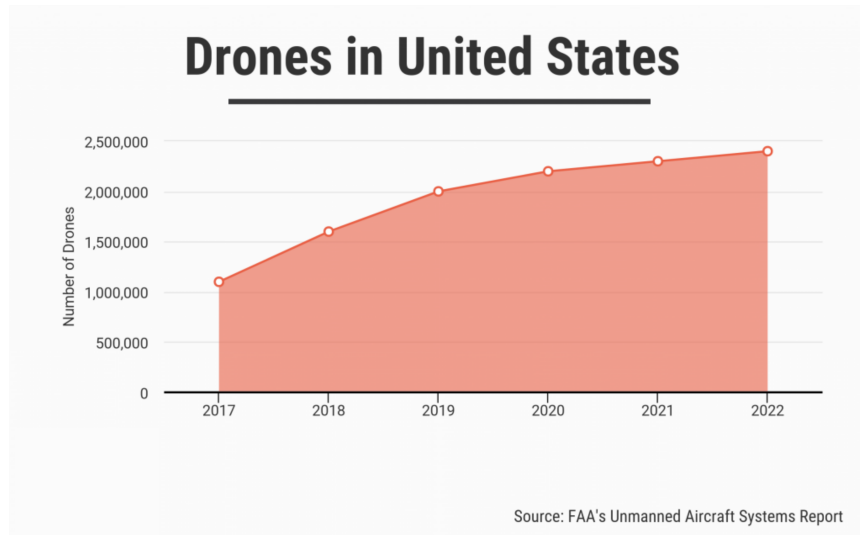
Εισαγωγή

Τα πολυ-ελικοφόρα οχήματα έχουν ήδη διεισδύσει στη παγκόσμια οικονομία. Συναντώνται τόσο σε ερευνητικά εργαστήρια όσο και σε πάρκα αναψυχής. Βρίσκουν ευρεία εφαρμογή σε βιομηχανίες όπως αυτές του κινηματογράφου, της οικοδομής και της γεωργίας ενώ προβλέπεται πως θα είναι αναπόσπαστο κομμάτι της αναδύομενης αγοράς του “last mile delivery” (Σχήμα 1.1). Σημειώνεται ότι στη πλειοψηφία των εφαρμογών τους, τα πολυ-ελικοφόρα οχήματα χρειάζεται να ακολουθήσουν μια συγκεκριμένη τροχιά για να θεωρηθεί η αποστολή τους επιτυχημένη.



Σχήμα 1.1: Χρήσεις πολυ-ελικοφόρων

Υπολογίζεται πως υπάρχουν ήδη περισσότερα από δύο εκατομμύρια πολυ-ελικοφόρα οχήματα μόνο στην αγορά της Αμερικής και όλες οι σχετικές προβλέψεις θέλουν αυτό το νούμερο να τριπλασιάζεται μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια (Σχήμα 1.2). Τα στατιστικά αυτά επιβεβαιώνουν την επιτυχία της πλατφόρμας των πολυ-ελικοφόρων και φανερώνουν πως η αγορά δεν έχει ακόμα φτάσει σε σημείο κορεσμού, υπάρχει δηλαδή ακόμα χώρος για εξέλιξη και καινοτομία.



Σχήμα 1.2: Αριθμός πολυ-ελικοφόρων στην Αμερική

Μαζί όμως με τα οφέλη της χρήσης των πολυ-ελικοφόρων σε μεγάλη κλίμακα, ελλοχεύουν και κίνδυνοι που πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη. Ένας από αυτούς παρουσιάζεται αν το πολυ-ελικοφόρο υποστεί κάποια βλάβη κατά τη διάρκεια της πτήσης του. Η πιθανότητα ενός τέτοιου ενδεχομένου, αν και μικρή, είναι μη μηδενική. Συνεπώς, όσο η δημοφιλία των πολυ-ελικοφόρων αυξάνεται τόσο θα αυξάνεται και συνολικά ο κίνδυνος κάποιας βλάβης εν ώρα πτήσης. Στην περίπτωση βλάβης, λοιπόν, το όχημα ενδέχεται να τεθεί εκτός ελέγχου και να θέσει σε κίνδυνο τόσο τη σωματική υγεία των παρευρισκόμενων (Σχήμα 1.3) όσο και τη δική του μηχανική ακεραιότητα.

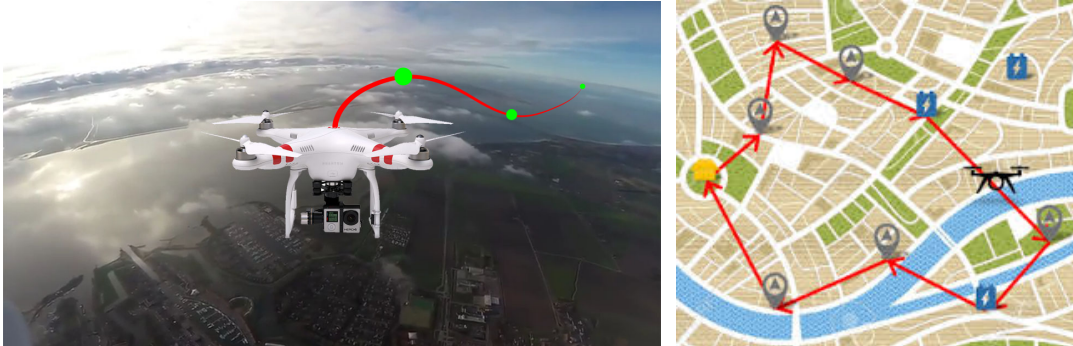


Σχήμα 1.3: Δυνητικά επικίνδυνη κατάσταση με πολυ-ελικοφόρο πάνω από πλήθος

Για το λόγο αυτό κρίνεται σημαντική η ανάπτυξη ελεγκτών για πολυ-ελικοφόρα οχήματα που είναι ικανοί να διαχειριστούν σφάλματα, επιδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο αυξημένη αυτονομία, προσαρμοστικότητα, ευρωστία και ασφάλεια.

1.1 Δήλωση Προβλήματος

Το πολυ-ελικοφόρο όχημα καλείται να ακολουθήσει αυτόνομα μια προκαθορισμένη επιθυμητή τροχιά (Σχήμα 1.4) στα πλαίσια μιας αποστολής. Ταυτόχρονα, πρέπει να είναι σε θέση



Σχήμα 1.4: Παρακολούθηση τροχιάς

να ανταποκριθεί στην περίπτωση ολικής βλάβης ενός ή περισσότερων από τους κινητήρες του. Στην ιδανική περίπτωση, το πολυ-ελικοφόρο, παρά τη βλάβη, θα συνεχίσει την παρακολούθηση της επιθυμητής τροχιάς. Αν αυτό όμως δεν είναι εφικτό, το πολυ-ελικοφόρο θα επιχειρήσει προσγείωση σε ασφαλή περιοχή (Σχήμα 1.5α). Σε κάθε περίπτωση, το πολυ-ελικοφόρο καλείται να αποφύγει τη σύγκρουση σε περιοχή που κρίνεται μη ασφαλής (Σχήμα 1.5β).



(α) Ασφαλής περιοχή

(β) Επικίνδυνη περιοχή

Σχήμα 1.5: Παραδείγματα ασφαλούς και επικίνδυνης περιοχής

Η σύντομη περιγραφή των πολυ-ελικοφόρων που ακολουθεί έχει σκοπό να παρουσιάσει σε μαθηματική γλώσσα τη λειτουργία τους και πως αυτή αλλάζει με την ύπαρξη βλάβης για τη βαθύτερη κατανόηση του προβλήματος.

1.2 Πολυ-ελικοφόρα

Τα πολυ-ελικοφόρα είναι ιπτάμενα οχήματα που παράγουν όλη τους την άνοση με έλικες. Συνηθίζεται να κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τον αριθμό των προπελών που έχουν, με τα περισσότερα να είναι τετρακόπτερα, εξακόπτερα ή οκτακόπτερα με τέσσερις, έξι ή οκτώ προπέλες αντίστοιχα (Σχήμα 1.6).



Σχήμα 1.6: Κατηγορίες πολυ-ελικοφόρων

1.2.1 Μέρη Πολυ-ελικοφόρου

Τα κύρια μέρη ενός πολυ-ελικοφόρου οχήματος (Σχήμα 1.7) είναι:

- **Πλαίσιο:** Το πλαίσιο είναι το δομικό μέρος του πολυ-ελικοφόρου. Πάνω του τοποθετούνται όλα τα υπόλοιπα εξαρτήματα, όπως οι κινητήρες και η υπολογιστική πλατφόρμα ενώ συνήθως φιλοξενεί και τον εξοπλισμό προσγείωσης. Κατασκευάζεται από πληθώρα υλικών με το ανθρακόνημα να είναι το πιο δημοφιλές χάρη στο χαμηλό του βάρος και την υψηλή του μηχανική αντοχή.
- **Επενεργητές:** Οι επενεργητές ενός πολυ-ελικοφόρου είναι οι κινητήρες του. Μαζί με τις προπέλες παράγουν την απαραίτητη ώση για τον έλεγχο του οχήματος. Χρησιμοποιούνται brushless dc motors λόγω της αυξημένης αποδοτικότητας και αντοχής τους έναντι των πιο απλών και φθηνών brushed dc motors.
- **Αισθητήρες:** Οι αισθητήρες που συναντώνται στα πολυ-ελικοφόρα χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της κατάστασης του οχήματος και για την επίτευξη λειτουργιών όπως η αποφυγή εμποδίων. Μια συνοπτική λίστα με τους συνηθέστερους αισθητήρες περιλαμβάνει βαρόμετρο, γυροσκόπιο, επιταχυνσιόμετρο, αισθητήρα GPS και οπτική κάμερα. Πολλοί αισθητήρες, πλέον, μπορούν να βρεθούν συσκευασμένοι σε ολοκληρωμένα κυκλώματα που είναι σχεδιασμένα συγκεκριμένα για εφαρμογές σε πολυ-ελικοφόρα οχήματα.
- **Υπολογιστική πλατφόρμα:** Η υπολογιστική πλατφόρμα του κάθε πολυ-ελικοφόρου αποτελεί τον ελεγκτή πτήσης του. Συνδυάζει τις μετρήσεις των αισθητήρων και με κάποιον αλγόριθμο ελέγχου παράγει τα σήματα που χρειάζονται οι επενεργητές. Οι ελεγκτές των πολυ-ελικοφόρων, όπως κάθε υπολογιστική πλατφόρμα, ποικίλουν ως προς την πολυπλοκότητα και την υπολογιστική τους ισχύ και συνεπώς μπορούν να σχεδιαστούν ειδικά για τις ανάγκες και ιδιαιτερότητες της κάθε αποστολής.
- **Τηλεπικοινωνίες:** Οι ικανότητες τηλεπικοινωνίας των πολυ-ελικοφόρων επιτρέπουν τον τηλεχειρισμό τους αλλά και την αποστολή τηλεμετρίας. Ειδικά για αυτόνομες εφαρμογές, η τηλεμετρία παρέχει χρήσιμα διαγνωστικά δεδομένα σχετικά με το ίδιο το όχημα αλλά και την εξέλιξη της εκάστοτε αποστολής.
- **Μπαταρία:** Τα πολυ-ελικοφόρα χρησιμοποιούν μπαταρία τύπου Li-Po για την τροφοδοσία όλων των υποσυστημάτων τους. Οι μπαταρίες λιθίου είναι ιδανικές γιατί είναι επαναφορτιζόμενες και προσφέρουν υψηλότερη ενεργειακή πυκνότητα από άλλες τεχνολογίες μπαταριών, επιτρέποντας στα πολυ-ελικοφόρα να διατηρούν χαμηλό συνολικό βάρος και όγκο.



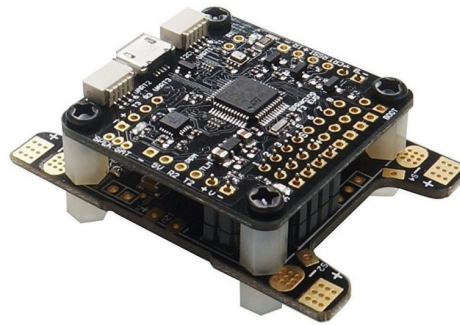
(α) Πλαίσιο



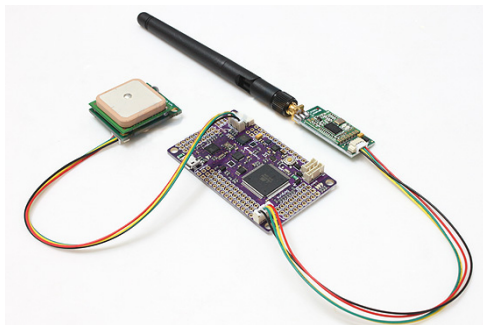
(β) Κινητήρας και προπέλα



(γ) Αισθητήρες



(δ) Υπολογιστική πλατφόρμα



(ε) Τηλεπικοινωνίες



(ζ) Μπαταρία

Σχήμα 1.7: Μέρη Πολυ-ελικοφόρου

1.2.2 Μοντέλο Πολυ-ελικοφόρου

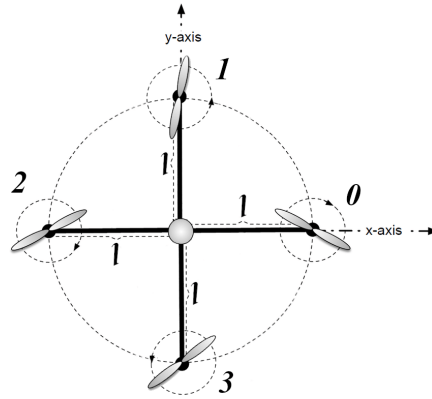
Για τη μοντελοποίηση του πολυ-ελικοφόρου χρησιμοποιήθηκαν quaternions που περιγράφονται στο [Παράρτημα Α](#). Το τελικό μοντέλο περιγράφεται αναλυτικά στο [Παράρτημα Β](#) και είναι το αποτέλεσμα συνδυασμού των [1, 2]. Συνοπτικά, η μη γραμμική δυναμική του πολυ-ελικοφόρου δίνεται παρακάτω:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \otimes \frac{\mathbf{F}}{m} \otimes \mathbf{q}^* + \mathbf{g} \\ \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Πιο συγκεκριμένα:

- $\xi = [p_x, p_y, p_z]^T$, είναι η θέση του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς,
- $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$, είναι η γραμμική ταχύτητα του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς,
- $\mathbf{Q} = [q_w, q_x, q_y, q_z]^T$, είναι το μοναδιαίο quaternion προσανατολισμού του πολυ-ελικοφόρου,
- \mathbf{F} , είναι το διάνυσμα ώσης εκφρασμένο στο τοπικό σύστημα αναφοράς,
- m , είναι η μάζα του πολυ-ελικοφόρου,
- $\mathbf{g} = [0, 0, -g]^T$, είναι το διάνυσμα επιτάχυνσης της βαρύτητας εκφρασμένο στο τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς,
- $\mathbf{\Omega} = [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^T$, είναι η γωνιακή ταχύτητα του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο τοπικό σύστημα αναφοράς,
- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$, είναι το διάνυσμα ροπής εκφρασμένο στο τοπικό σύστημα αναφοράς,
- J , είναι το μητρώο ροπής αδράνειας του πολυ-ελικοφόρου.

Εστιάζοντας στη συνολική παραγόμενη ώση F και ροπή $\boldsymbol{\tau}$, που είναι οι είσοδοι του συστήματος, κάνει την εμφάνιση της η γεωμετρία του πολυ-ελικοφόρου. Η γεωμετρία καθορίζει τη σχέση που συνδέει τα προαναφερθέντα μεγέθη με την δύναμη f_i που παράγει ο κάθε κινητήρας ξεχωριστά. Για παράδειγμα, για το τετρακόπτερο που φαίνεται στο [Σχήμα 1.8](#) η σχέση είναι η ακόλουθη,

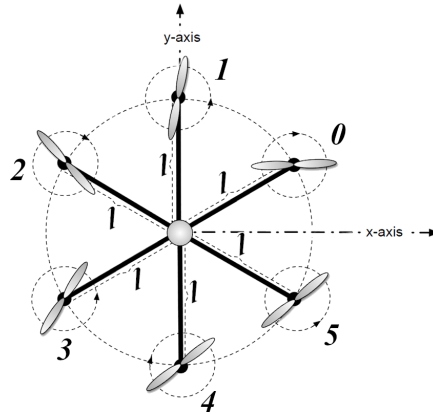


Σχήμα 1.8: Γεωμετρία τετρακόπτερου

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & l & 0 & -l \\ -l & 0 & l & 0 \\ km & -km & km & -km \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

ενώ για το εξακόπτερο που φαίνεται στο [Σχήμα 1.9](#) η σχέση είναι η παρακάτω,

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ l \sin \frac{\pi}{6} & l & l \sin \frac{\pi}{6} & -l \sin \frac{\pi}{6} & -l & -l \sin \frac{\pi}{6} \\ -l \sin \frac{\pi}{3} & 0 & l \sin \frac{\pi}{3} & l \sin \frac{\pi}{3} & 0 & -l \sin \frac{\pi}{3} \\ km & -km & km & -km & km & -km \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.9: Γεωμετρία εξακόπτερου

Στους παραπάνω πίνακες A , με l συμβολίζεται το μήκος του κάθε βραχίονα και με km μία σταθερά των κινητήρων. Σημειώνεται ακόμα πως ισχύει η ανισότητα $0 \leq f_i \leq f_{\max}$.

Έχοντας περιγράψει το μοντέλο του πολυ-ελικοφόρου, είναι εφικτό να μελετήσουμε πως αυτό αλλάζει υπό την παρουσία ολικής βλάβης ενός ή περισσότερων κινητήρων. Σύμφωνα, λοιπόν, με το μοντέλο, η ολική βλάβη του κινητήρα i “μεταφράζεται” στο μηδενισμό της στήλης i του εκάστοτε πίνακα A .

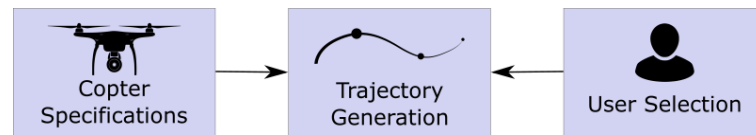
1.3 Προηγούμενες δουλειές

Προηγούμενες ερευνητικές δουλειές [3, 4, 5, 6, 7] στο χώρο των εναέριων οχημάτων έχουν επικεντρωθεί κυρίως στην αντιμετώπιση δομικών βλαβών σε αεροσκάφη σταθερών πτερύγων (fixed wing aircrafts). Οι δουλειές που χρησιμοποιούν τα πολυ-ελικοφόρα ως ερευνητική πλατφόρμα [8, 9, 10] ασχολούνται στην πλειοψηφία τους με την αντιμετώπιση βλάβης ενός μόνο κινητήρα. Στο [8] χρησιμοποιείται online actuator fault estimation είτε μέσω Moving Horizon Estimation είτε μέσω ενός Unscented Kalman Filter για το σχεδιασμό προβλεπτικού ελεγκτή που διαχειρίζεται μερικές βλάβες και δοκιμάζεται στην κατάσταση αιώρησης. Στο [9] σχεδιάζεται ένας αναδιαμορφώσιμος προβλεπτικός ελεγκτής που εκμεταλλεύεται τον πλεονασμό επενεργητών ενός εξακόπτερου για την αντιμετώπιση της ολικής απώλειας ενός κινητήρα, εισάγοντας επιπλέον και χρονική καθυστέρηση μεταξύ της ύπαρξης της βλάβης και της ανίχνευσής της. Στο [10] σχεδιάζεται cascaded προβλεπτικός ελεγκτής για εξακόπτερο που είναι ικανός να αναδιανείμει τα σήματα ελέγχου σε περίπτωση απώλειας ενός κινητήρα συνεχίζοντας την παρακολούθηση της επιθυμητής τροχιάς του. Υπάρχουν ακόμη στη βιβλιογραφία και δουλειές [11] που εξετάζουν την αντιμετώπιση βλαβών στο επίπεδο των αισθητήρων.

1.4 Δομή Εργασίας

Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια για μία ολοκληρωμένη προσέγγιση του προβλήματος. Κεντρικός άξονας είναι η παρακολούθηση τροχιάς και όχι η απλή σταθεροποίηση στην κατάσταση αιώρησης. Ακόμα, κύριο ρόλο έχουν οι ολικές βλάβες κινητήρων καθώς όντας τα μόνα κινούμενα μέρη, έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες αστοχίας, αστοχίας που αν δεν αντιμετωπιστεί οδηγεί στην απώλεια ελέγχου. Θα μελετηθούν βλάβες σε περισσότερους από έναν κινητήρες και θα εξεταστούν διαφορετικά από τη συνέχιση της τροχιάς σενάρια. Η αρχή γίνεται με τις επιθυμητές τροχιές. Στο **Κεφάλαιο 2** περιγράφεται μία μεθοδολογία παραγωγής βέλτιστων τροχιών αναφοράς για πολυ-ελικοφόρα οχήματα [12] (Σχήμα 1.10). Οι τροχιές

αυτές είναι απαραίτητες για το σχεδιασμό του ελεγκτή που στόχο έχει την παρακολούθησή τους.



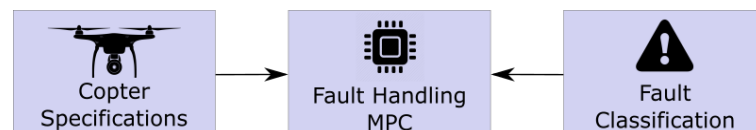
Σχήμα 1.10: Παραγωγή επιθυμητής τροχιάς

Στο **Κεφάλαιο 3** δίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των αρχών λειτουργίας ενός προβλεπτικού ελεγκτή (Model Predictive Control (MPC)) [13]. Στο **Κεφάλαιο 4** γίνεται σχεδίαση ενός προβλεπτικού ελεγκτή με σκοπό την παρακολούθηση της τροχιάς αναφοράς που παρήχθη στο **Κεφάλαιο 2** από ένα πολυ-ελικοφόρο που δεν έχει υποστεί βλάβη [14] (Σχήμα 1.11). Ο ελεγκτής αυτός έχει διπλό ρόλο. Αρχικά ελέγχει το πολυ-ελικοφόρο στο χρονικό διάστημα πριν την εμφάνιση της βλάβης και στη συνέχεια λειτουργεί ως μέτρο σύγκρισης για τον ελεγκτή που διαχειρίζεται τη βλάβη.



Σχήμα 1.11: Σχεδίαση προβλεπτικού ελεγκτή

Στο **Κεφάλαιο 5** προτείνεται μία μεθοδολογία για την κατηγοριοποίηση και την αντιμετώπιση των ολικών βλαβών των κινητήρων (Σχήμα 1.12) η οποία εξετάζεται μέσω προσομοιώσεων στο **Κεφάλαιο 6**. Τέλος, στο **Κεφάλαιο 7** δίνονται τα συμπεράσματα και μερικές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.



Σχήμα 1.12: Αντιμετώπιση βλαβών

Κεφάλαιο 2

Παραγωγή Τροχιάς και Εισόδου Αναφοράς

Είναι σημαντικό να εκμεταλλευτούμε τη δυναμική του συστήματος και όχι να την αντιμετωπίσουμε ως περιορισμό. Συνεπώς πρέπει να χαλαρώσουμε την υπόθεση των μικρών γωνιών και να ξεφύγουμε από την κοντινή γειτονιά της κατάστασης αώρησης. Σκοπός είναι να δημιουργήσουμε βέλτιστες δυναμικές τροχιές που διατρέχουν μια σειρά καθορισμένων σημείων στο χώρο και στο χρόνο.

2.1 Παραγωγή Τροχιάς Θέσης

Ορίζουμε ως ένα στιγμιότυπο τη θέση του συστήματος στο χώρο. Έστω το πρόβλημα της πλοήγησης δια μέσου $(m + 1)$ στιγμιότυπων σε καθορισμένες χρονικές στιγμές. Η απλούστερη τροχιά είναι η γραμμική παρεμβολή μεταξύ των στιγμιότυπων. Παρόλα αυτά, η συγκεκριμένη τροχιά δεν είναι αποδοτική καθώς παρουσιάζει άπειρη καμπυλότητα στη θέση των στιγμιότυπων που υποχρεώνει το πολυ-ελικοφόρο να σταματάει σε κάθε ένα από αυτά. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε, παράγει μια βέλτιστη τροχιά που μεταβαίνει ομαλώς μεταξύ των στιγμιότυπων στους καθορισμένους χρόνους. Θα εστιάσουμε σε τροχιές της θέσης στον χώρο του συστήματος αφού όπως θα εξηγηθεί παρακάτω, το υπόλοιπο διάνυσμα κατάστασης καθώς και το διάνυσμα εισόδου προκύπτει άμεσα από αυτή λόγω διαφορικής επιπεδότητας (differential flatness). Βολεύει να γράψουμε τις τροχιές ως τμηματικώς πολυωνυμικές συναρτήσεις τάξης n σε m χρονικά διαστήματα ως εξής:

$$\sigma_T(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n \sigma_{Ti1} t^i & t_0 \leq t \leq t_1 \\ \sum_{i=0}^n \sigma_{Ti2} t^i & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n \sigma_{Tim} t^i & t_{m-1} \leq t \leq t_m \end{cases} \quad (2.1)$$

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της k_r παραγώγου της θέσης φαίνεται παρακάτω:

$$\min \int_{t_0}^{t_m} \mu_r \left\| \frac{d^{k_r} \sigma_T}{dt^{k_r}} \right\|^2 dt \quad (2.2)$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \sigma_T(t_i) &= \sigma_i, & i &= 0, \dots, m \\ \frac{d^p x_T}{dt^p} \Big|_{t=t_j} &= 0, & j &= 0, m; p = 1, \dots, k_r \\ \frac{d^p y_T}{dt^p} \Big|_{t=t_j} &= 0, & j &= 0, m; p = 1, \dots, k_r \\ \frac{d^p z_T}{dt^p} \Big|_{t=t_j} &= 0, & j &= 0, m; p = 1, \dots, k_r \end{aligned}$$

όπου το μ_r είναι σταθερά που κάνει το ολοκλήρωμα μη διαστατικό. Εδώ, $\sigma_T = [x_T, y_T, z_T]^T$ και $\sigma_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ τα $(m + 1)$ στιγμιότυπα. Εκτός από τους παραπάνω περιορισμούς, επιβάλλουμε τη συνέχεια των πρώτων k_r παραγώγων του σ_T .

Μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα ως τετραγωνικό πρόβλημα (Quadratic Problem) γράφοντας τις σταθερές $\sigma_{Tij} = [x_{Tij}, y_{Tij}, z_{Tij}]^T$ ως ένα $3(n + 1)m \times 1$ διάνυσμα c :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T H c + f^T c \\ & A c \leq b \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1.1 Βέλτιστοι χρόνοι

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, ο χρόνος άφιξης στα διάφορα στιγμιότυπα είναι σημαντικός και πρέπει να καθοριστεί. Παρόλα αυτά, σε άλλες περιπτώσεις, οι χρόνοι άφιξης μπορεί να μην έχουν σημασία επιτρέποντάς μας να βρούμε καλύτερες λύσεις δίνοντας περισσότερο χρόνο σε κάποια τμήματα της τροχιάς ενώ τον αφαιρούμε ταυτόχρονα από άλλα, διατηρώντας έτσι το συνολικό χρόνο σταθερό. Παρακάτω περιγράφεται μία μέθοδος για την εύρεση των βέλτιστων χρόνων ανά τμήμα της τροχιάς για ένα σύνολο από στιγμιότυπα. Σε αυτό το κομμάτι, είναι πιο βολικό να σκεφτόμαστε τον χρόνο T_i που αφιερώνεται στο τμήμα i της τροχιάς παρά τον χρόνο άφιξης t_i στο στιγμιότυπο i , όπου $T_i = t_i - t_{i-1}$. Λύνουμε ακολουθώς το πρόβλημα βελτιστοποίησης:

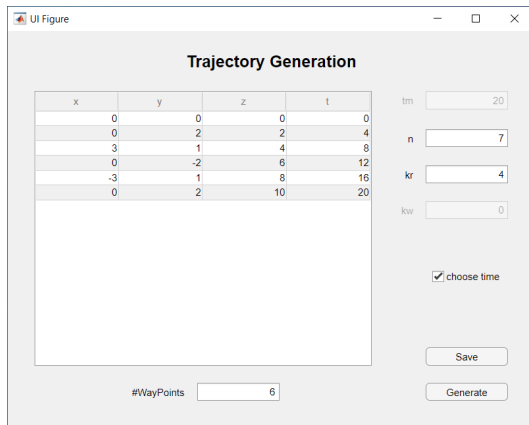
$$\begin{aligned} \min \quad & f(T) \\ \sum T_i &= t_m \\ T_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου $f(T)$ είναι η λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης 2.2 για χρόνους ανά τμήμα $T = [T_1, T_2, \dots, T_m]$. Λύνουμε το 2.4 μέσω μίας μεθόδου περιορισμένης απότομης καθόδου (constrained gradient descent). Αυτό επιτυγχάνεται με τον αριθμητικό υπολογισμό των κατευθυντικών παραγώγων για m διανύσματα που υποδηλώνονται ως g_i :

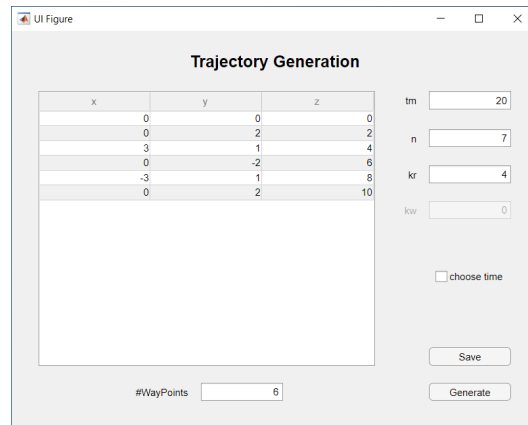
$$\nabla_{g_i} f = \frac{f(T + h g_i) - f(T)}{h} \quad (2.5)$$

όπου το h είναι κάποιος μικρός αριθμός. Τα διανύσματα g_i είναι κατασκευασμένα ώστε το στοιχείο i να έχει τιμή 1 και όλα τα υπόλοιπα να έχουν τη τιμή $\frac{-1}{m-1}$. Αυτό γίνεται ώστε να ισχύει $\sum g_i = 0$ και συνεπώς τα g_i να μπορούν να προστεθούν στο ή να αφαιρεθούν από το T χωρίς να αλλάξει ο τελικός χρόνος. Έχοντας λοιπόν τις εκτιμήσεις των κατευθυντικών παραγώγων, εφαρμόζουμε gradient descent με backtracking line search.

Στο Σχήμα 2.1 και στο Σχήμα 2.2 φαίνεται ένα παράδειγμα παραγωγής τροχιάς θέσης και η σύγκριση μεταξύ ελεύθερων και βέλτιστων χρόνων.

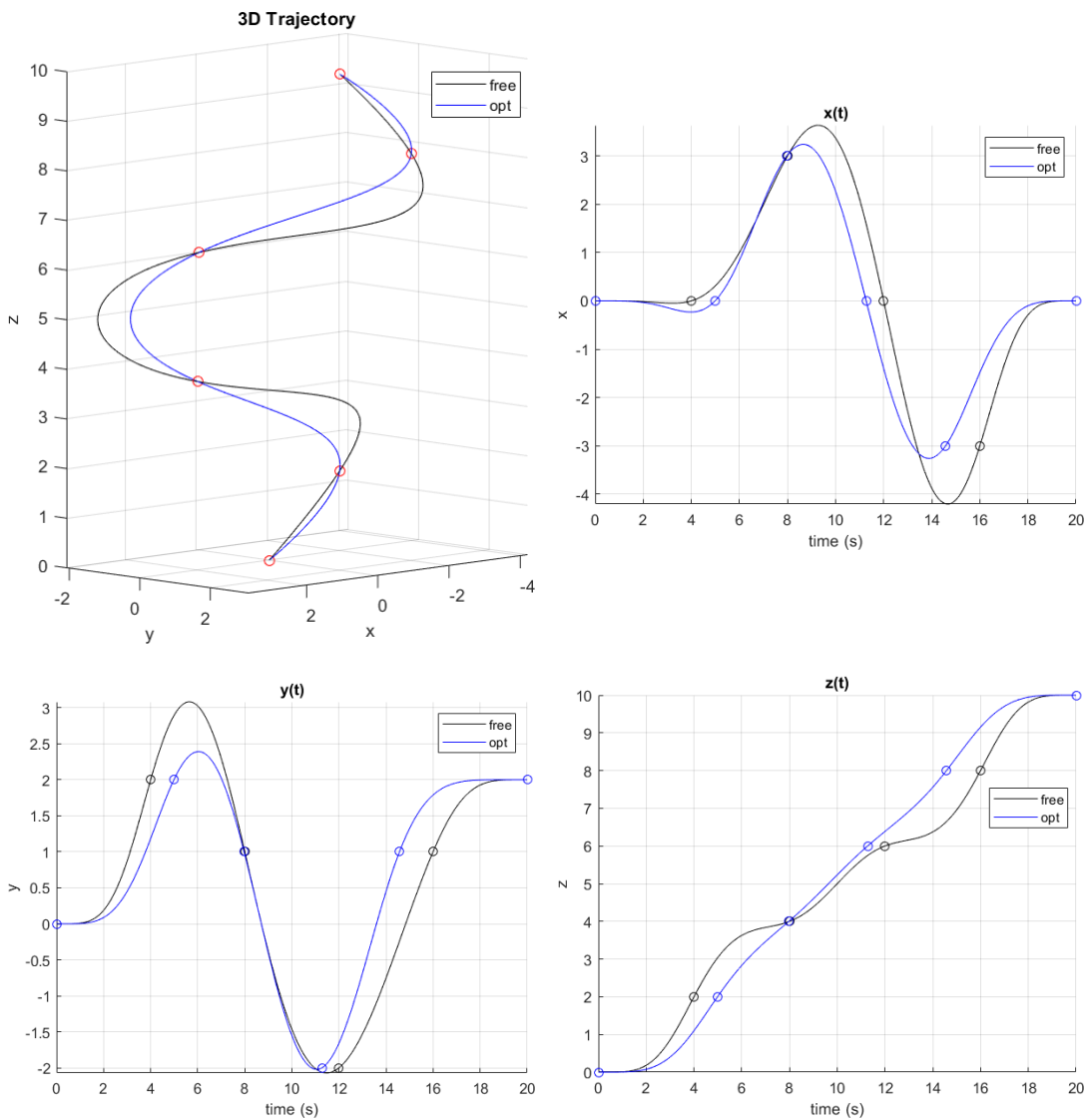


(α) Ελεύθερη επιλογή χρόνων



(β) Βέλτιστοι χρόνοι

Σχήμα 2.1: Πρόγραμμα παραγωγής τροχιάς θέσης



Σχήμα 2.2: Σύγκριση μεταξύ ελεύθερων και βέλτιστων χρόνων

2.2 Differential Flatness

Θα δείξουμε πως οι μεταβλητές κατάστασης και οι εισοδοί μπορούν να γραφτούν ως αλγεβρικές συναρτήσεις τεσσάρων προσεκτικά διαλεγμένων μεταβλητών και των παραγώγων τους. Αυτό επιτρέπει την αυτοματοποιημένη παραγωγή τροχιών, αφού κάθε ομαλή τροχιά (με λογικά οριοθετημένες παραγώγους) στο χώρο των παραπάνω τεσσάρων μεταβλητών μπορεί να ακολουθηθεί από ένα υποεπενεργούμενο πολυ-ελικοφόρο όχημα. Οι τέσσερις αυτές μεταβλητές είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες $[x, y, z]^T$ του συστήματος στο τρισδιάστατο χώρο μαζί με τη γωνία περιστροφής του γύρω από τον τοπικό του άξονα z .

Από την προηγούμενη ενότητα έχουμε αναλυτικά την επιθυμητή τρισδιάστατη θέση του συστήματος στο χώρο. Με τη γνώση αυτή μπορούμε να εκμαιεύσουμε την επιθυμητή ταχύτητα αλλά και επιτάχυνση του συστήματος με διαδοχικές παραγωγίσεις. Το πολυ-ελικοφόρο σύστημα έχει την ιδιαιτερότητα, ως υπο-επενεργούμενο, να μπορεί να παράξει ώση μόνο παράλληλα στον τοπικό του άξονα z . Συνεπώς, έχοντας υπόψη και την επίδραση της επιτάχυνσης λόγω βαρύτητας, είναι εφικτό να υπολογίσουμε τον προσανατολισμό που πρέπει να έχει ο τοπικός άξονας z του πολυ-ελικοφόρου μαζί με το μέτρο της ώσης που απαιτείται για την επίτευξη της επιθυμητής επιτάχυνσης. Πιο μαθηματικά, αν $\xi_r(t) = [x_r(t), y_r(t), z_r(t)]$ είναι η θέση αναφοράς τότε,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r(t) &= \dot{\xi}_r(t) \\ \mathbf{a}_r(t) &= \dot{\mathbf{v}}_r(t) \\ F_r(t) &= m\|\mathbf{a}_r(t) + \mathbf{g}\| \end{aligned} \quad (2.6)$$

Για να ευθυγραμμιστεί ο τοπικός άξονας z του συστήματος με το διάνυσμα της επιθυμητής επιτάχυνσης (με την επιτάχυνση λόγω βαρύτητας ενσωματωμένη) πρέπει να γίνει στροφή με το κατάλληλο quaternion \mathbf{q}_1 ,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\mathbf{z}_i \times (\mathbf{a}_r(t) + \mathbf{g})}{\|\mathbf{z}_W \times (\mathbf{a}_r(t) + \mathbf{g})\|} & \text{όπου } \mathbf{z}_i &= [0, 0, 1]^T \\ \cos \theta_1 &= \mathbf{z}_i \cdot \frac{\mathbf{a}_r(t) + \mathbf{g}}{\|\mathbf{a}_r(t) + \mathbf{g}\|} \\ \cos \frac{\theta_1}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \theta_1}{2}} \\ \sin \frac{\theta_1}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_1}{2}} \\ \mathbf{q}_1 &= \cos \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \alpha_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο πως το σύστημα διατηρεί ένα βαθμό ελευθερίας σχετικά με τον προσανατολισμό του μετά το “κλείδωμα” του τοπικού του άξονα z , ο οποίος είναι η γωνία περιστροφής θ_2 γύρω από τον προαναφερθέντα άξονα. Η γωνία μπορεί να καθοριστεί με διάφορα κριτήρια χωρίς να επηρεάζεται η παρακολούθηση της τρισδιάστατης τροχιάς. Στη συγκεκριμένη εργασία προκύπτει μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης που προσπαθεί να κρατήσει τον τοπικό άξονα x του συστήματος “πάνω” στην προβολή του διανύσματος της ταχύτητας στο τοπικό επίπεδο $x - y$ του συστήματος ενώ ταυτόχρονα προσπαθεί να κρατήσει τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μέσα σε επιτρεπτά

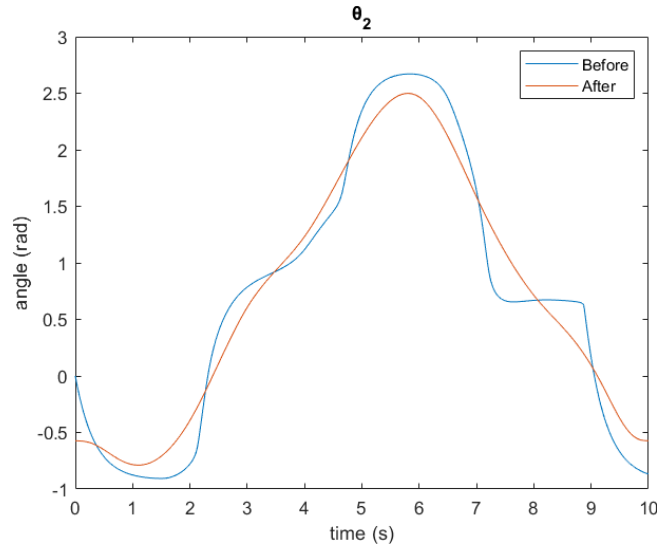
όρια.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_p &= \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_r \cdot (\mathbf{a}_r(t) + \mathbf{g}) \frac{\mathbf{a}_r(t) + \mathbf{g}}{\|\mathbf{a}_r(t) + \mathbf{g}\|^2} \\
 \mathbf{x}_b &= \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{q}_1^* \quad \text{όπου} \quad \mathbf{x}_i = [1, 0, 0]^T \\
 \alpha_2 &= \frac{\mathbf{x}_b \times \mathbf{v}_p}{\|\mathbf{x}_b \times \mathbf{v}_p\|} \\
 \cos \theta &= \mathbf{x}_b \cdot \frac{\mathbf{v}_p}{\|\mathbf{v}_p\|}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

όπου \mathbf{v}_p είναι η προβολή της επιθυμητής ταχύτητας στο τοπικό επίπεδο $x-y$ του συστήματος και \mathbf{x}_b είναι ο τοπικός άξονας x του συστήματος μετά τη στροφή του \mathbf{q}_1 . Αφού υπολογιστεί η ιδανική γωνία θ που θα ευθυγράμμιζε τον τοπικό άξονα x με την προβολή του διανύσματος ταχύτητας στο τοπικό επίπεδο $x-y$, λύνεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που σκοπό έχει να βρει μια ισορροπία μεταξύ της παρακολούθησης της προβολής και της επικείμενης γωνιακής ταχύτητας γύρω από τον τοπικό άξονα z .

$$\underset{-\pi < \theta_2 \leq \pi}{\text{minimize}} \quad \Omega_z(\theta_2)^2 + k(\theta_2 - \theta)^2 \tag{2.9}$$

Στη συνέχεια, η χρονοσειρά της γωνίας θ_2 φιλτράρεται ώστε να εξομαλυνθεί (median και gaussian φιλτράρισμα) και διαμορφώνεται με κατάλληλο τρόπο ώστε τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος της τροχιάς να έχει μηδενικές παραγώγους (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3: Παράδειγμα γωνίας θ_2 πριν και μετά το φιλτράρισμα

Έχοντας τη γωνία θ_2 είναι εφικτό να σχηματίσουμε το quaternion αναφοράς \mathbf{q}_r ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_2 &= \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} \alpha_2 \\
 \mathbf{q}_r &= \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_1
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Απομένει μόνο να υπολογιστούν η επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα και η επιθυμητή ροπή,

$$\begin{aligned}
 \Omega_r &= 2\mathbf{q}_r^{-1} \otimes \dot{\mathbf{q}}_r \\
 \tau_r &= J\Omega_r + \Omega_r \times J\Omega_r.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Κεφάλαιο 3

Προβλεπτικός Ελεγκτής MPC

Ο προβλεπτικός έλεγχος Model Predictive Control (MPC) βρίσκεται ακόμα και σήμερα, μετά από προσπάθειες δεκαετιών, στο επίκεντρο της έρευνας. Ίσως αυτό οφείλεται στο γεγονός πως θεωρείται από πολλούς η μόνη τεχνική ελέγχου που είναι ταυτόχρονα πιο προχωρημένη από το κλασικό έλεγχο PID και έχει ουσιαστική-ευρεία εφαρμογή στη βιομηχανία.

Η κεντρική ιδέα του MPC είναι η αξιοποίηση του μοντέλου ενός συστήματος για την πρόβλεψη και βελτιστοποίηση της μελλοντικής του συμπεριφοράς, δηλαδή την επιλογή τέτοιων εισόδων που βελτιστοποιούν την προβλεπόμενη συμπεριφορά του. Συνεπώς, το MPC σχήμα βασίζεται σε ένα δυναμικό μοντέλο του ελεγχόμενου συστήματος καθώς και σε ένα κριτήριο κόστους προς ελαχιστοποίηση. Στη βάση του, ο MPC χτίζεται πάνω στην επαναληπτική διαδικασία:

1. Απόκτηση μέτρησης του διανύσματος κατάστασης $x(t_k)$ τη χρονική στιγμή δειγματοληψίας t_k .
2. Πρόβλεψη της συμπεριφοράς του συστήματος μέσω του μοντέλου του συστήματος, ενός συνόλου από επιτρεπτές εισόδους ανοιχτού βρόχου και ενός κριτηρίου προς ελαχιστοποίηση.
3. Εφαρμογή του βέλτιστου σήματος ελέγχου $u_k^*(\cdot)$. Επιστροφή στο βήμα 1.

Παρόλο που η παραπάνω περιγραφή είναι απλουστευμένη, φανερώνει τα σημαντικά στοιχεία. Ουσιαστικά ο MPC στηρίζεται στην επαναληπτική επίλυση ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. Κάποιος θα μπορούσε να στοχεύσει στην εύρεση ενός βέλτιστου ελεγκτή με ανάδραση κατάστασης και σαν αποτέλεσμα να αποφύγει τον επαναληπτικό βέλτιστο έλεγχο. Αυτό, όμως, συνήθως δεν είναι εφικτό για μη γραμμικά συστήματα, καθώς ο υπολογισμός ενός βέλτιστου ελέγχου με ανάδραση περιλαμβάνει τη μερική διαφορική εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman, η επίλυση της οποίας είναι, εν γένει, δύσκολη. Αντί αυτού, ο MPC στοχεύει στον ευκολότερο υπολογισμό μιας ακολουθίας από βέλτιστες εισόδους ανοιχτού βρόχου για το δεδομένο διάνυσμα κατάστασης σε κάθε βήμα. Μάλιστα, πολλές φορές συναντάται ο όρος NMPC (Nonlinear Model Predictive Control) που δίνει έμφαση στη μη γραμμικότητα του μοντέλου που χρησιμοποιείται. Τέλος, πλεονέκτημα του MPC έναντι άλλων τεχνικών ελέγχου είναι και η δυνατότητα απευθείας ενσωμάτωσης των περιορισμών κατάστασης αλλά και εισόδου του ελεγχόμενου συστήματος στη διατύπωση του ελεγκτή.

3.1 Μαθηματική Περιγραφή

Έστω πως το μοντέλο του συστήματος προς έλεγχο είναι η χρονομεταβλητή διαφορική εξίσωση

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^{n_x}. \quad (3.1)$$

Τόσο οι μεταβλητές κατάστασης όσο και οι εισοδοί του συστήματος υπόκεινται σε περιορισμούς. Οι μεταβλητές κατάστασης x περιορίζονται στο απλά συνεκτικό και κλειστό σύνολο

$\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ με το $0 \in \mathcal{X}$. Οι εισοδοί είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις με τιμές στο συμπαγές σύνολο $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ και με το $0 \in \mathcal{U}$. Αυτά τα σήματα εισόδου γράφονται για συντομία $u(\cdot) \in \mathcal{PC}(\mathcal{U})$. Αν υπάρχει λύση της 3.1 τη χρονική στιγμή $t \geq t_0$ που ξεκινά τη χρονική στιγμή t_0 από το $x(t_0)$ και οδηγείται από την είσοδο $u(\cdot)$, συμβολίζεται με $x(t, t_0, x(t_0)|u(\cdot))$. Για την ευκολότερη διάκριση μεταξύ των πραγματικών μεταβλητών x, u του συστήματος και των προβλεπόμενων μεταβλητών, οι τελευταίες συμβολίζονται με \bar{x}, \bar{u} . Το κριτήριο επίδοσης προς βελτιστοποίηση σε κάθε επαναληπτικό βήμα πρόβλεψης δίνεται ως συναρτησιακό κόστος της μορφής

$$J(t_k, x(t_k), \bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) = \int_{t_k}^{t_k+T_p} F(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) d\tau + E(t_k + T_p, \bar{x}(t_k + T_p)). \quad (3.2)$$

Συνήθως, η $F : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ αναφέρεται ως συνάρτηση κόστους, και η $E : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ λέγεται τελική ποινή. Το T_p είναι ο ορίζοντας πρόβλεψης. Σε κάθε στιγμή δειγματοληψίας $t_k = t_0 + k\delta$, $k \in \mathbb{N}$, όπου $\delta > 0$ είναι η περίοδος δειγματοληψίας, η πρόβλεψη γίνεται μέσω της λύσης του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου (Optimal Control Problem - OCP)

$$\underset{\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{PC}(\mathcal{U})}{\text{minimize}} J(t_k, x(t_k), \bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \quad (3.3a)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\forall \tau \in [t_k, t_k + T_p] : \dot{\bar{x}}(\tau) = f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), \quad \bar{x}(t_k) = x(t_k) \quad (3.3\beta)$$

$$\bar{x}(\tau) \in \mathcal{X} \quad (3.3\gamma)$$

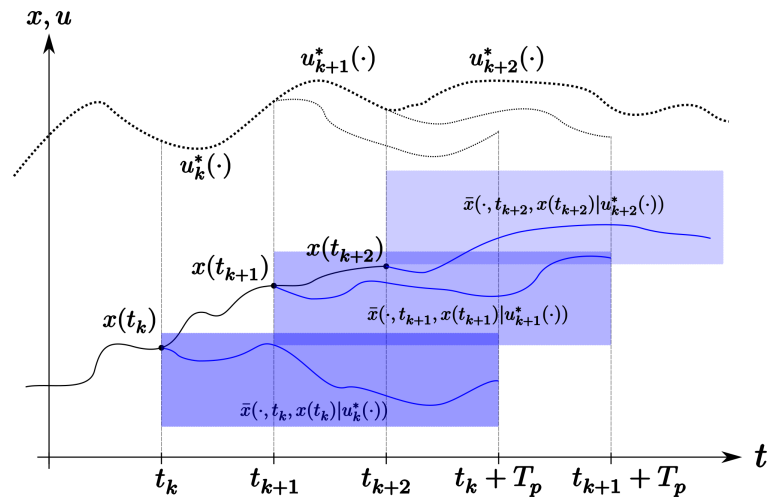
$$\bar{u}(\tau) \in \mathcal{U} \quad (3.3\delta)$$

$$\bar{x}(t_k + T_p) \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}. \quad (3.3\epsilon)$$

Η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος (συμβολίζεται με τον εκθέτη \cdot^*) είναι η ακολουθία εισόδου

$$u_k^*(\cdot) = \underset{\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{PC}(\mathcal{U})}{\text{argmin}} J(t_k, x(t_k), \bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)). \quad (3.4)$$

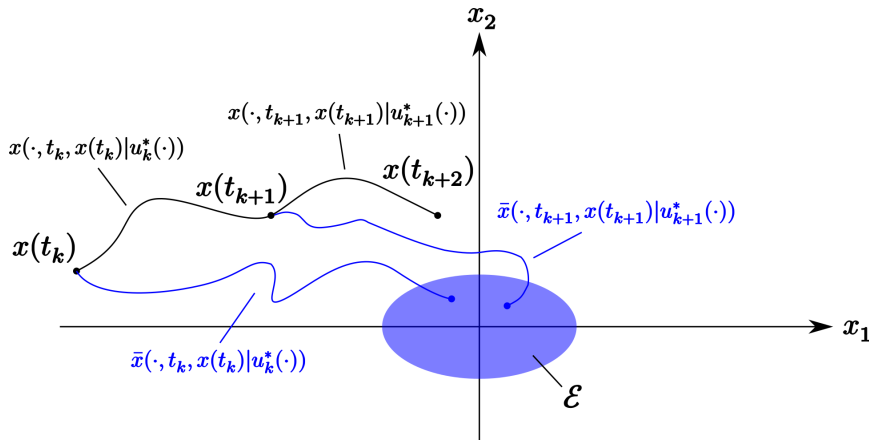
Ο δείκτης \cdot_k υποδεικνύει πως το σήμα εισόδου $u_k^*(\cdot)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας ως πληροφορία το διάνυσμα κατάστασης $x(t_k)$. Η κεντρική αρχή ενός MPC σχήματος που βασίζεται στο 3.3 απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1. Σε κάθε στιγμή δειγματοληψίας t_k γίνεται πρό-



Σχήμα 3.1: Κεντρική αρχή του NMPC

βλεψη της συμπεριφοράς του συστήματος για το χρονικό διάστημα $[t_k, t_k + T_p]$ μέσω του

υπολογισμού της εισόδου 3.4 και του $\bar{x}(\cdot, t_k, x(t_k)|u_k^*(\cdot))$. Κατά το διάστημα $[t_k, t_k + \delta)$, εφαρμόζεται στο σύστημα 3.1 η βέλτιστη είσοδος $u_k^*(\cdot)$. Το υπόλοιπο τμήμα της εισόδου $u_k^*(\cdot)$ απορρίπτεται. Ο ορίζοντας πρόβλεψης κυλιέται μπροστά στο χρόνο, σχηματίζοντας το διάστημα πρόβλεψης $[t_{k+1}, t_{k+1} + T_p]$, και η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται. Μία προβλεπόμενη είσοδος $\bar{u}(\cdot)$ λέγεται επιτρεπτή αν ικανοποιεί τον περιορισμό εισόδου 3.3δ και η αντίστοιχη τροχιά των μεταβλητών κατάστασης $\bar{x}(\cdot, t_k, x(t_k)|\bar{u}(\cdot))$ ικανοποιεί τα ακόλουθα: $\forall t \in [t_k, t_k + T_p] : \bar{x}(t, t_k, x(t_k)|\bar{u}_k(\cdot)) \in \mathcal{X}$ και $\bar{x}(t_k + T_p, t_k, x(t_k)|\bar{u}_k(\cdot)) \in \mathcal{E}$. Πρέπει, δηλαδή, οι προβλεπόμενες τροχιές να ικανοποιούν τόσο τον περιορισμό κατάστασης 3.3γ όσο και τον τερματικό περιορισμό 3.3ε. Η εφαρμογή της βέλτιστης εισόδου $u_k^*(\cdot)$ στο χρονικό διάστημα $[t_k, t_k + \delta)$ οδηγεί στη τροχιά $x(\cdot, t_k, x(t_k)|u_k^*(\cdot))$ που εν γένει δε ταυτίζεται με την προβλεπόμενη τροχιά $\bar{x}(\cdot, t_k, x(t_k)|u_k^*(\cdot))$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2. Για το λόγο



Σχήμα 3.2: Ρόλος τερματικής περιοχής

αυτό, ιδανικά, η περίοδος δειγματοληψίας - επαναυπολογισμού $\delta > 0$ πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη για να χρησιμοποιεί ο ελεγκτής περισσότερη πληροφορία ανάδρασης. Ακόμα, αν το μοντέλο του συστήματος είναι επαρκώς ακριβές, ο ορίζοντας πρόβλεψης T_p πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος για να παρουσιάσει ο ελεγκτής καλή επίδοση. Είναι προφανές πως τόσο η μικρή περίοδος δειγματοληψίας όσο και ο μεγάλος ορίζοντας πρόβλεψης αυξάνουν τις υπολογιστικές απαιτήσεις του ελεγκτή που είναι σαφώς περιορισμένες. Συνεπώς, πρέπει να βρεθεί ένας συμβιβασμός μεταξύ αυτών των δύο ποσοτήτων ώστε ο ελεγκτής να μπορεί αφενός να υλοποιηθεί αλλά και να πετυχαίνει αφετέρου την επιθυμητή απόκριση.

Κεφάλαιο 4

Παρακολούθηση τροχιάς με μεθοδολογία προβλεπτικού ελέγχου χωρίς βλάβη

Σκοπός του Κεφαλαίου είναι η σχεδίαση ενός προβλεπτικού ελεγκτή για προβλήματα παρακολούθησης τροχιάς από μη γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου που υπόκεινται σε περιορισμούς. Χρησιμοποιείται η υπόθεση πως η επιθυμητή τροχιά είναι εκ των προτέρων γνωστή και ασυμπτωτικά σταθερή. Μια τέτοια τροχιά είναι εφικτό να παραχθεί με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στο **Κεφάλαιο 2**. Για τον πλήρη προσδιορισμό του προβλεπτικού ελεγκτή θα εξεταστεί το συναρτησιακό κόστος, η τελική ποινή αλλά και η τερματική περιοχή του ελεγκτή.

Έχοντας ένα συνεχούς χρόνου μη γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (4.1)$$

όπου $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ και $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι περιορισμοί της κατάστασης και της εισόδου, ορισμένοι από τα απλά συνδεδεμένα συμπαγή σύνολα \mathcal{X}, \mathcal{U} . Υποθέτουμε πως η f είναι συνεχής και τοπικά Lipschitz στο x . Θέλουμε να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς.

Πρόβλημα 1 (Παρακολούθηση Τροχιάς υπό Περιορισμούς)

Δοσμένου ενός συστήματος **4.1** και μιας εκ των προτέρων γνωστής τροχιάς αναφοράς $x_r(t) \in \mathcal{C}^1$, σχεδιάσε ελεγκτή τέτοιο ώστε:

Π1 Σύγκλιση στην τροχιά αναφοράς: Η κατάσταση του συστήματος $x(t)$ συγκλίνει στην τροχιά αναφοράς $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_r(t)\| = 0$.

Π2 Ικανοποίηση περιορισμών: Οι περιορισμοί κατάστασης και εισόδου ικανοποιούνται για κάθε $t \geq 0 : x(t) \in \mathcal{X}, u(t) \in \mathcal{U}$.

Η συνήθης προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων παρακολούθησης τροχιάς βασίζεται στον ορισμό της μεταβλητής σφάλματος

$$e(t) := x(t) - x_r(t) \quad (4.2)$$

Υπό τις υποθέσεις πως η τροχιά αναφοράς είναι εκ των προτέρων γνωστή και πως $x_r(t) \in \mathcal{C}^1$, το πρόβλημα παρακολούθησης μπορεί να αναδιατυπωθεί ως πρόβλημα σταθεροποίησης σημείου της δυναμικής του σφάλματος

$$\dot{e}(t) = \tilde{f}(t, e, u) := f(e + x_r(t), u) - \dot{x}_r(t) \quad (4.3)$$

που είναι εγγενώς χρονομεταβλητή για μεταβαλλόμενη $x_r(t)$.

Προς επίλυση του προβλήματος προτείνεται μεθοδολογία μη γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου (NMPC) βασισμένη στη δυναμική του σφάλματος 4.3. Για διαφοροποίηση μεταξύ των προβλεπόμενων μεταβλητών του ελεγκτή και των μεταβλητών του πραγματικού συστήματος, δηλώνουμε τις προβλεπόμενες καταστάσεις και εισόδους με \bar{e}, \bar{u} . Για την εύρεση κατάλληλων εισόδων, σε κάθε χρονικό δείγμα $t_k = k\delta$, $\delta > 0, k \in \mathbb{N}$ επιλύεται κατ' επανάληψη το ακόλουθο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου

$$\underset{\bar{u}(\cdot)}{\text{minimize}} J(e(t_k), \bar{e}(\cdot), \bar{u}(\cdot)). \quad (4.4\alpha)$$

Το συναρτησιακό κόστους προς ελαχιστοποίηση δίνεται ως εξής

$$J(\cdot) = \int_{t_k}^{t_k+T_p} F(t, \bar{e}, \bar{u}) d\tau + E(t, \bar{e})|_{t_k+T_p}, \quad (4.4\beta)$$

όπου το $F(\cdot) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ δηλώνεται ως κόστος κατάστασης και $F(t, 0, 0) = 0$. Ο όρος $E(\cdot) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ αναφέρεται ως τελική ποινή. Ο χρόνος T_p είναι ο ορίζοντας πρόβλεψης. Το παραπάνω πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου υπόκειται στη συμπεριφορά του προβλεπόμενου συστήματος αλλά και στους παρακάτω περιορισμούς

$$\dot{\bar{e}} = \tilde{f}(t, \bar{e}, \bar{u}), \quad \bar{e}(t_k) = x(t_k) - x_r(t_k), \quad (4.4\gamma)$$

$$\forall t \in [t_k, t_k + T_p] : \bar{e}(t) + x_r(t) \in \mathcal{X}, \quad \bar{u}(t) \in \mathcal{U}, \quad (4.4\delta)$$

$$\bar{e}(t_k + T_p) \in \mathcal{E}_{t_k+T_p}. \quad (4.4\epsilon)$$

Τέλος, η βέλτιστη λύση $\bar{u}^*(t|\bar{e}(t_k))$ εφαρμόζεται στο σύστημα έτσι ώστε για κάθε $t \in (t_k, t_{k+1}] : u(t) = \bar{u}^*(\cdot)$.

Θεώρημα 1 (Σύγκλιση NMPC για Παρακολούθηση Τροχιάς). Έστω το πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς υπό περιορισμούς (Π1-Π2) για το σύστημα 4.1.

Υποθέτουμε την ύπαρξη μίας τελικής ποινής $E(t, e(t)) \in \mathcal{C}^1$ και μίας χρονομεταβλητής τελικής περιοχής \mathcal{E}_t έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$ ένας νόμος ελέγχου $u(t) = k(t, e) \in \mathcal{U}$ εξασφαλίζει τα ακόλουθα:

- Για κάθε $\tilde{e} \in \mathcal{E}_{\tilde{t}}$ και για κάθε $t > \tilde{t}$

$$\begin{aligned} e(t, \tilde{e}|k(t, e)) &\in \mathcal{E}_t \\ x_r(t) + e(t, \tilde{e}|k(t, e)) &\in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (4.5\alpha)$$

- Για κάθε λύση $e(t, \tilde{e}|k(t, e)) \in \mathcal{E}_t$ ισχύει

$$\frac{\partial E(t, e)}{\partial t} + \frac{\partial E(t, e)}{\partial e} \dot{e} + F(t, e, k(t, e)) \leq 0 \quad (4.5\beta)$$

- Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου 4.4 έχει εφικτή λύση για $e(0) = x_0 - x_r(0)$

Τότε το κλειστό βρόχου σύστημα που ορίζεται από τις 4.1 και 4.4 εξασφαλίζει τη σύγκλιση του σφάλματος παρακολούθησης

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_r(t)\| = 0$$

και την ικανοποίηση των περιορισμών $e(t) + x_r(t) \in \mathcal{X}, u(t) \in \mathcal{U}$.

Η 4.5α είναι απλά μία συνθήκη θετικής αμεταβλητότητας, που το αμετάβλητο σύνολο \mathcal{E}_t επιτρέπεται να αλλάζει συναρτήσει του χρόνου. Η συνθήκη 4.5β απαιτεί μείωση του κόστους

για κάθε $e(t) \in \mathcal{E}_t$, που είναι απαραίτητο για να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση κόστους του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου 4.4 ως συνάρτηση Lyapunov.

Για τα ακόλουθα κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

A1 Η εκ των προτέρων γνωστή τροχιά αναφοράς είναι ασυμπτωτικά σταθερή και ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ έτσι ώστε $x_r(t) \in \text{int}(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}^n$ και $x_r(t) \in \mathcal{C}^1$. Ακόμα, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_r(t) = x_r(T)$ με $T < \infty$.

A2 Μια αποδεκτή είσοδος αναφοράς $u_r(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ ορισμένη για κάθε $t \geq 0$ με $\dot{x}_r(t) = f(x_r, u_r)$ είναι γνωστή.

A3 Η τροχιά αναφοράς $x_r(t)$ τερματίζει σε σταθεροποιήσιμο σημείο του 4.1. Οι πίνακες $A(T), B(T)$

$$A(T) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_r(T), u_r(T)}, B(T) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_r(T), u_r(T)} \quad (4.6)$$

είναι σταθεροποιήσιμοι και $f(x, u)|_{x_r(T), u_r(T)} = 0$.

A4 Οι περιορισμοί \mathcal{X}, \mathcal{U} του συστήματος 4.1 είναι της μορφής $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ και $v_{min} \leq v \leq v_{max}$.

A5 Το κόστος F είναι:

$$F(t, e, u) := e^T Q_F e + (u - u_r(t))^T R_F (u - u_r(t))$$

με $Q_F, R_F > 0$.

4.1 Σταθεροποίηση του γραμμικού χρονομεταβλητού συστήματος του σφάλματος

Θεωρούμε τη δυναμική του σφάλματος 4.3 και τις υποθέσεις A1-A3. Η γραμμικοποίηση του συστήματος του σφάλματος γύρω από την τροχιά αναφοράς $x_r(t)$ και την είσοδο αναφοράς $u_r(t)$ εκφρασμένη με τις μεταβλητές $e = x - x_r$ και $w = u - u_r$ είναι

$$\dot{e}(t) = A(t)e + B(t)w \quad (4.7)$$

όπου οι χρονομεταβλητοί πίνακες $A(t) \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^{n \times n})$ και $B(t) \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^{n \times m})$.

Λήμμα 1. Αν οι υποθέσεις A1-A3 ισχύουν, τότε το γραμμικό χρονομεταβλητό (ΓΧΜ) σύστημα του σφάλματος 4.7 είναι εκθετικά σταθεροποιήσιμο.

Απόδειξη. Χωρίς απώλεια της γενικότητας διαλέγουμε δύο πίνακες $Q(t) \in \mathcal{BC}^+(\mathbb{R}^{n \times n})$ και $R(t) \in \mathcal{BC}^+(\mathbb{R}^{n \times m})$ τέτοιους ώστε για κάθε $t \in [0, T]$ η

$$Q(t) - (A(t) + A^T(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)) \geq \tilde{q}I \quad (4.8)$$

να ισχύει για κάποιο $\tilde{q} > 0$ και για $t \geq T$ οι πίνακες $Q(t)$ και $R(t)$ να είναι σταθεροί. Ακολουθώντας επαληθεύουμε πως η χρονομεταβλητή ανάδραση που δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\omega = K(t)e = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T(t)(P(t) - I)e \quad (4.9)$$

σταθεροποιεί το ΓΧΜ σύστημα του σφάλματος εκθετικά. Ο $P(t) \in \mathcal{BC}_0^+(\mathbb{R}^{n \times n})$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) - Q(t) - P(t)A(t) - A^T(t)P(t) \\ P(T) &= P_T \geq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Από το γεγονός πως για $t \geq T$ το ΓΧΜ σύστημα του σφάλματος είναι σταθεροποιήσιμο μπορούμε να εκμαιεύσουμε την ύπαρξη μιας θετικά ημιορισμένης λύσης της 4.10. Δηλώνουμε ως $\tilde{A}(t) := A(t) + B(t)K(t)$ τον πίνακα του συστήματος κλειστού βρόχου 4.7 υπό την ανάδραση 4.9. Έστω η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V(t, e) = e^T(P(t) + I)e \quad (4.11)$$

όπου $P(t) + I \in \mathcal{BC}^+(\mathbb{R}^{n \times n})$. Η χρονική της παράγωγος γύρω από τις τροχιές του 4.7 είναι

$$\dot{V} = e^T(A(t) + A^T(t) + B(t)R^{-1}B^T(t) - Q(t))e \quad (4.12)$$

Συνεπάγεται από την 4.8 πως $\dot{V}(t, e) \leq -\tilde{q}\|e\|^2$. Άρα η $V(t, e) := e^T(P(t) + I)e$ είναι τετραγωνική συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα 4.7 υπό την ανάδραση 4.9. Συνεπώς το ΓΧΜ σύστημα του σφάλματος 4.7 είναι εκθετικά σταθεροποιήσιμο. ■

Η ανισοτική σχέση 4.8 είναι δύσκολο να επαληθευτεί. Όμως, αν επιλέξουμε σταθερό $R(t) = R > 0$ μπορούμε να θέσουμε

$$Q(t) := \tilde{Q} + A(t) + A^T(t) + B(t)R^{-1}B^T(t) \quad (4.13)$$

και να βρούμε έναν κατάλληλο πίνακα $\tilde{Q} > 0$ μέσω μίας προσέγγισης χρονικά διακριτοποιημένων γραμμικών ανισοτήτων πινάκων (LMI) του 4.8. Σε αυτή την περίπτωση, ο ρυθμός μείωσης 4.12 της $V(t, e)$ είναι $\dot{V} = -e^T\tilde{Q}e$ και για κάθε $t \geq T$ η διαφορική εξίσωση Riccati 4.10 είναι χρονικά αμετάβλητη. Συνεπώς, η συνοριακή συνθήκη $P_T \geq 0$ μπορεί να βρεθεί ως στατική λύση της 4.10 για $t = T$. Το παραπάνω εξασφαλίζει ακόμα πως η $V(\cdot)$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$.

4.2 Θετικά Αμετάβλητα Χρονομεταβλητά Επιπεδοσύνολα

Συνήθως στα NMPC προβλήματα πραγματοποιείται ο υπολογισμός ενός κατάλληλου επιπεδοσυνόλου $\mathcal{E} = \{e \in \mathbb{R}^n | V(t, e) \leq \pi^2\}$ έτσι ώστε για κάθε $e \in \mathcal{E}$ να ισχύουν συνθήκες παρόμοιες με τις 4.5α και 4.5β. Αυτό όμως είναι περιοριστικό, καθώς το επιπεδοσύνολο ορίζεται από μια σταθερά. Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να χαλαρώσει αυτή τη συντηρητική προσέγγιση μέσω χρονομεταβλητών επιπεδοσυνόλων που ορίζονται από την ανισότητα $V(t, e) \leq \pi^2(t)$. Για το λόγο αυτό εισάγεται η έννοια των θετικά αμετάβλητων χρονομεταβλητών επιπεδοσυνόλων μιας συνάρτησης Lyapunov.

Έστω η συνάρτηση Lyapunov 4.11 για το ΓΧΜ σύστημα και μια συνάρτηση $\pi \in \mathcal{C}^1 : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$. Για να διαχειριστούμε το χρονομεταβλητό δεξί μέρος της ανισότητας $V(t, e) \leq \pi^2(t)$ θεωρούμε το κλειστό σύνολο

$$\Lambda := \{(t, e) | V(t, e) \leq \pi^2(t)\} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \quad (4.14)$$

στον επαυξημένο χώρο $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$. Αν η χρονική μεταβλητή του Λ σταθεροποιηθεί, γράφουμε

$$\Lambda_t := \Lambda \cap \{t\} \times \mathbb{R}^n. \quad (4.15)$$

Επιπρόσθετα, ορίζουμε μία προβολή $\Pi : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\Pi : (t, e) \mapsto e \in \mathbb{R}^n \quad (4.16)$$

η οποία αντιστοιχεί με συνεχές τρόπο οποιαδήποτε επαυξημένη κατάσταση (t, e) στο e . Οι προβολές $\Pi(\Lambda_t)$ είναι χρονομεταβλητά επιπεδοσύνολα.

Ορισμός 1 (Χρονομεταβλητά Επιπεδοσύνολα) Για κάθε $t \geq 0$ ονομάζουμε την οικογένεια υποσυνόλων του \mathbb{R}^n που δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}_{t,V,\pi} := \{e \in \mathbb{R}^n | (t, e) \in \Lambda\} = \Pi(\Lambda_t) \quad (4.17\alpha)$$

χρονομεταβλητά επιπεδοσύνολα της συνάρτησης Lyapunov $V(t, e)$ 4.11. Αναλόγως, ορίζουμε το σύνορο του $\mathcal{L}_{t,V,\pi}$, σημειακά στο χρόνο, ως

$$\partial\mathcal{L}_{t,V,\pi} := \partial\Pi(\Lambda_t). \quad (4.17\beta)$$

Για το ΓΧΜ σύστημα του σφάλματος της παρακολούθησης τροχιάς, τα χρονομεταβλητά επιπεδοσύνολα είναι ελλειψοειδή $\{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_r(t))^T (P(t) + I)(x - x_r(t)) \leq \pi^2(t)\}$ κεντραρισμένα γύρω από την τροχιά αναφοράς $x_r(t)$.

Θεώρημα 2 (Θετική Αμεταβλητότητα των Χρονομεταβλητών Επιπεδοσυνόλων). Έστω το σύστημα 4.7 υπό την ανάδραση 4.9 και τα σύνολα $\mathcal{L}_{t,V,\pi} = \Pi(\Lambda_t)$ όπου για κάθε $t \geq 0$: $\pi(t) > 0$.

Όλες οι λύσεις $e(t, e_0 | K(t)e)$ με $e_0 \in \mathcal{L}_{t=0,V,\pi}$ παραμένουν μέσα στο $\mathcal{L}_{t,V,\pi}$ για κάθε $t \geq 0$ αν και μόνο αν

$$\forall t \geq 0, \forall e \in \partial\mathcal{L}_{t,V,\pi} : \dot{V}(t, e) \leq 2\pi(t)\dot{\pi}(t) \quad (4.18)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο Θεώρημα του Nagumo σχετικά με τη θετική αμεταβλητότητα συνόλων για χρονοαμετάβλητα συστήματα.

Θα επαληθεύσουμε πως η 4.18 εξασφαλίζει τη θετική αμεταβλητότητα του συνόλου Λ υπό τη δυναμική του επαυξημένου συστήματος

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{A}(t)e \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}(t) = A(t) + B(t)K(t) \quad (4.19)$$

Μετά από την αλλαγή μεταβλητής $z := (t, e)^T$ το σύνολο Λ περιγράφεται ως $\{z \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n | v(z) \leq 0\}$ όπου $v(z) = V(z) - \pi^2(z)$. Σημειώνεται πως το Λ είναι κλειστό σύνολο. Ο εφαπτόμενος κώνος του Λ σε κάθε $z \in \partial\Lambda$ είναι

$$\mathcal{J}_\Lambda(z) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{1+n} | \nabla v(z)^T \zeta \leq 0\} \quad (4.20)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Nagumo, η θετική αμεταβλητότητα του συνόλου Λ επαληθεύεται αν το διάνυσμα ταχύτητας \dot{z} περιέχεται στον $\mathcal{J}_\Lambda(z)$ για κάθε $z \in \partial\Lambda$. Αν εφαρμόσουμε το παραπάνω με τις μεταβλητές (t, e) παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V(t,e)}{\partial t} - 2\pi\dot{\pi} \\ \frac{\partial V(t,e)}{\partial e} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{A}(t)e \end{pmatrix} = \dot{V}(t, e) - 2\pi\dot{\pi} \quad (4.21)$$

Συνεπώς για κάθε $z \in \partial\Lambda$ η υπόθεση 4.18 εξασφαλίζει πως το $\dot{z} = (1, \tilde{A}(t)e)^T \in \mathcal{J}_\Lambda(z)$. Επόμενο είναι πως το Λ είναι ένα αμετάβλητο σύνολο για το επαυξημένο σύστημα 4.19. Εξαιτίας της κατασκευής του $\mathcal{L}_{t,V,\pi}$ από το Π , το παραπάνω υποδηλώνει πως αν $e(t_0) \in \mathcal{L}_{t_0,V,\pi}$ με $t_0 \geq 0$ τότε για κάθε $t \geq t_0$: $e(t, e(t_0) | k(t, e)) \in \mathcal{L}_{t,V,\pi}$.

Η αναγκαιότητα της 4.18 εξακριβώνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω πως για κάποιο $z_0 = (t_0, e_0) \in \partial\Lambda$ με $t_0 \geq 0$ έχουμε $\dot{z}_0 \notin \mathcal{T}_\Lambda(z_0)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εφαπτόμενου κώνου 4.20 έχουμε πως $\nabla v(z)^T \dot{z}_0 > 0$. Συνεπώς, $\frac{dv(z)}{dt}|_{z_0} = \nabla v(z)^T \dot{z}_0 > 0$, που σημαίνει πως για κάποιο $\tau \in [t_0, t_0 + h]$ έχουμε $v(z(\tau)) > 0$. Συνεπώς, $\dot{z}_0 \notin \mathcal{T}_\Lambda(z_0)$ σημαίνει $z(\tau) \notin \Lambda$ και $e(\tau, e(t_0)|k(\tau, e)) \notin \mathcal{L}_{\tau, V, \pi}$. ■

4.3 Υπολογισμός των χρονομεταβλητών επιπεδοσυνόλων

Θέλουμε να βρούμε το $\pi(t)$ έτσι ώστε το $\mathcal{L}_{t, V, \pi}$ που βασίζεται στην V της 4.11 να είναι όσο μεγαλύτερο γίνεται, συνεπές με τους περιορισμούς και θετικά αμετάβλητο με την έννοια του παραπάνω θεωρήματος. Για να το πετύχουμε αυτό, μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα της εύρεσης του χρονομεταβλητού επιπεδοσυνόλου που είναι θετικά αμετάβλητο, συνεπές με τους περιορισμούς και έχει το μέγιστο όγκο ως εξής,

$$\text{maximize}_{\omega_\pi, \pi_0} \int_0^T \text{vol}(\mathcal{L}_{t, V, \pi}) d\tau \quad (4.22\alpha)$$

υποκείμενο στη δυναμική

$$\dot{\pi}(t) = \omega_\pi(t), \quad \pi(0) = \pi_0, \quad \dot{\pi}(T) = 0 \quad (4.22\beta)$$

και τους παρακάτω περιορισμούς

$$\forall t \in [0, T] : \quad \pi(t) > 0, \quad (4.22\gamma)$$

$$\forall t \in [0, T] : \quad \mathcal{L}_{t, V, \pi} = \Pi(\Lambda_t), \quad (4.22\delta)$$

$$\forall e \in \partial\mathcal{L}_{t, V, \pi} : \quad \dot{V}(t, e) \leq 2\pi(t)\omega_\pi(\tau), \quad (4.22\epsilon)$$

$$\forall e \in \mathcal{L}_{t, V, \pi} : \quad K(t)e + u_r(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad (4.22\zeta)$$

$$\forall e \in \mathcal{L}_{t, V, \pi} : \quad e + x_r(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (4.22\eta)$$

Βασιζόμενοι σε τεχνικές υπολογισμού μέγιστων ελλειψοειδών, μετασχηματίζουμε το πρόβλημα 4.22 σε κυρτό πρόβλημα. Έστω η αλλαγή μεταβλητής $b = \frac{1}{\pi(t)}S(t)e$, $S(t) = \sqrt{P(t) + I}$. Ξαναγράφοντας το $\mathcal{L}_{t, V, \pi}$ συναρτήσει της νέας μεταβλητής b έχουμε,

$$\mathcal{L}_{t, V, \pi} = \{\pi(t)S^{-1}(t)b \mid \|b\|^2 \leq 1\}. \quad (4.23)$$

Με αυτή την αναδιατύπωση, η 4.22α μπορεί να γραφεί ως $\max \int_0^T \log \det(S^{-1}(\tau)\pi(\tau)) d\tau$. Επειδή όμως η εξέλιξη του $P(t)$, άρα και του $S(t)$, δεν εξαρτάται από την επιλογή του $\pi(t)$, η 4.22α είναι ισοδύναμη με $\text{maximize} \int_0^T \pi(\tau) d\tau$.

Αν ο πίνακας $Q(t)$ έχει επιλεγθεί σύμφωνα με την εξίσωση 4.13 έχουμε $\dot{V}(t, e) = -e^\top \tilde{Q}e$. Αναδιατυπώνοντας στη συντεταγμένη b έχουμε,

$$\dot{V}(t, e) = -\pi^2(t) \cdot b^\top S^{-T}(t) \tilde{Q} S^{-1}(t) b \leq -\underline{q}(t)\pi^2(t)$$

όπου

$$\underline{q}(t) = \lambda_{\min}(S^{-T}(t) \tilde{Q} S^{-1}(t)) > 0.$$

Αφού $\pi(t) > 0$, $\dot{\pi} = \omega_\pi$ παίρνουμε $-q(t)\pi(t) \leq 2\omega_\pi(t)$.

Οι περιορισμοί της κατάστασης και τις εισόδου γράφονται ως προς b ,

$$\begin{aligned} x_{min} - x_r(t) &\leq \pi(t)S^{-1}(t)b \leq x_{max} - x_r(t) \\ u_{min} - u_r(t) &\leq \pi(t)K(t)S^{-1}(t)b \leq u_{max} - u_r(t). \end{aligned}$$

Εδώ το \leq αναφέρεται σε ανισότητα ανά στοιχείο. Ξαναγράφουμε τους πίνακες $S^{-1}(t)$ και $K(t)S^{-1}(t)$ συναρτήσσει των γραμμών τους,

$$\begin{aligned} S^{-1}(t) &= (\sigma_1^T(t), \sigma_2^T(t), \dots, \sigma_{n_x}^T(t))^T \\ K(t)S^{-1}(t) &= (\kappa_1^T(t), \kappa_2^T(t), \dots, \kappa_{n_u}^T(t))^T. \end{aligned}$$

και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$\forall \|b\|^2 \leq 1 : \quad -\|\sigma_i^T\| \leq \sigma_i^T b \leq \|\sigma_i^T\|.$$

Άρα μια συντηρητική προσέγγιση των περιορισμών κατάστασης είναι η,

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n_x\} : \quad &\|x_{min,i} - x_{r,i}(t)\| \geq \pi(t)\|\sigma_i^T(t)\| \\ \forall i \in \{1, \dots, n_x\} : \quad &\|x_{max,i} - x_{r,i}(t)\| \geq \pi(t)\|\sigma_i^T(t)\|. \end{aligned}$$

Οι περιορισμοί εισόδου γράφονται με παρόμοιο τρόπο. Ο μετασχηματισμός του 4.22 φαίνεται λοιπόν παρακάτω,

$$\underset{\omega_\pi, \pi_0}{\text{maximize}} \int_0^T \pi(\tau) d\tau \quad (4.24\alpha)$$

υποκείμενο στη γραμμική δυναμική

$$\dot{\pi}(t) = \omega_\pi(t), \quad \pi(0) = \pi_0, \quad \dot{\pi}(T) = 0 \quad (4.24\beta)$$

και τους παρακάτω περιορισμούς

$$\pi(t) \geq 0 \quad (4.24\gamma)$$

$$2\omega_\pi(t) \geq -\pi(t) \cdot \underline{q}(t) \quad (4.24\delta)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n_x\} : \quad \|x_{min,i} - x_{r,i}(t)\| \geq \pi(t)\|\sigma_i^T(t)\| \quad (4.24\epsilon)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n_x\} : \quad \|x_{max,i} - x_{r,i}(t)\| \geq \pi(t)\|\sigma_i^T(t)\| \quad (4.24\zeta)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n_u\} : \quad \|u_{min,i} - u_{r,i}(t)\| \geq \pi(t)\|\kappa_i^T(t)\| \quad (4.24\eta)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n_u\} : \quad \|u_{max,i} - u_{r,i}(t)\| \geq \pi(t)\|\kappa_i^T(t)\| \quad (4.24\theta)$$

όπου $\underline{q}(t) = \lambda_{min}(S^{-T}(t)\tilde{Q}S^{-1}(t))$. Το πρόβλημα λύνεται με χρονική διακριτοποίηση μέσω ενός γραμμικού προγράμματος.

Πρέπει, στη συνέχεια, να εξασφαλίσουμε πως το χρονομεταβλητό σύνολο $\mathcal{L}_{t,V,\pi}$ είναι θετικά αμετάβλητο υπό τη μη γραμμική δυναμική του σφάλματος 4.3 με τον έλεγχο δύο βαθμών ελευθερίας $u = K(t)e + u_r(t)$. Γνωρίζουμε πως το κλειστού βρόχου ΓΧΜ σύστημα του σφάλματος είναι εκθετικά σταθερό. Συνεπώς, μπορεί να δειχθεί πως για κάποιο $0 < \tilde{\pi}(t) < \pi(t)$ το σύνολο $\tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$ θα είναι θετικά αμετάβλητο για το μη γραμμικό σύστημα του σφάλματος 4.3 υπό τον έλεγχο $u = K(t)e + u_r(t)$. Για να βρούμε το $\tilde{\pi}(t)$ ξαναγράφουμε τη μη γραμμική δυναμική του σφάλματος 4.3

$$\dot{e} = \tilde{A}(t)e + \Phi(t, e) \quad (4.25)$$

όπου $\tilde{A}(t) = A(t) + B(t)K(t)$ είναι ο πίνακας του ΓΧΜ συστήματος κλειστού βρόχου του σφάλματος και $\Phi(t, e) = \tilde{f}(t, e, K(t)e + u_r(t)) - \tilde{A}(t)e$.

Πρέπει, βασικά, να εξασφαλίσουμε πως για κάθε $t \geq T$ η συνάρτηση Lyapunov του ΓΧΜ συστήματος του σφάλματος είναι ταυτόχρονα και μία τοπική συνάρτηση Lyapunov για τη μη γραμμική δυναμική του σφάλματος που ισχύει στο $\tilde{\mathcal{L}}_{t, V, \tilde{\pi}}$. Σημαντικό είναι να σημειωθεί πως για τα προηγούμενα χρονικά σημεία $t \in [0, T)$ η θετική αμεταβλητότητα του συνόλου $\tilde{\mathcal{L}}_{t, V, \tilde{\pi}}$ είναι επαρκής για τη χρήση του $\tilde{\mathcal{L}}_{t, V, \tilde{\pi}}$ σαν τερματική περιοχή στον NMPC αλγόριθμο για παρακολούθηση τροχιάς. Αρχικά υπολογίζουμε την ποσότητα $\frac{dV(t, e)}{dt}$ κατά μήκος των τροχιών της μη γραμμικής δυναμικής του συστήματος σφάλματος 4.25 υπό την γραμμική ανάδραση 4.9. Στα ακόλουθα ισχύει $\dot{P}(T) = P(T) + I$.

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, e)}{dt} &= \frac{d}{dt} (e^\top (P(t) + I)e) \\ &= 2e^\top (P(t) + I)\dot{e} + e^\top (\dot{P}(t))e \\ &= 2e^\top (P(t) + I)(\tilde{A}(t)e + \Phi(t, e)) \\ &\quad + e^\top (P(t)B(t)R^{-1}B^\top(t)P(t) - Q(t) - P(t)A(t) - A^\top(t)P(t))e \end{aligned}$$

Λύνουμε τα ακόλουθα ξεχωριστά,

$$\begin{aligned} 2e^\top (P(t) + I)\tilde{A}(t)e &= e^\top (P(t) + I)\tilde{A}(t)e + e^\top \tilde{A}^\top(t)(P(t) + I)^\top e \\ &= e^\top (PA + PBK + A + BK + A^\top P + K^\top B^\top P + A^\top + K^\top B^\top) e \\ &= e^\top (PA + A^\top P + A + A^\top - \frac{1}{2}PBR^{-1}B^\top P + \frac{1}{2}PBR^{-1}B^\top \\ &\quad - \frac{1}{2}BR^{-1}B^\top P + \frac{1}{2}BR^{-1}B^\top - \frac{1}{2}PBR^{-1}B^\top P \\ &\quad + \frac{1}{2}BR^{-1}B^\top P - \frac{1}{2}PBR^{-1}B^\top + \frac{1}{2}BR^{-1}B^\top) e \\ &= e^\top (PA + A^\top P + A + A^\top - PBR^{-1}B^\top P + BR^{-1}B^\top) e \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα δύο αποτελέσματα,

$$2e^\top (P(t) + I)\tilde{A}(t)e + e^\top (\dot{P}(t))e = e^\top (A + A^\top + BR^{-1}B^\top - Q)e = -e^\top \tilde{Q}e$$

και η αρχική μας εξίσωση παίρνει τη μορφή,

$$\frac{dV(t, e)}{dt} = 2e^\top \tilde{P}(t)\Phi(t, e) - e^\top \tilde{Q}e$$

Έστω για $t = T$ το σύνολο $\tilde{\mathcal{L}}_{T, V, \tilde{\pi}}$ και η συνάρτηση φ_T

$$\varphi_T(e) = 2e^\top \tilde{P}(T)\Phi(T, e) - e^\top \tilde{Q}e + \varepsilon \cdot e^\top \tilde{P}(T)e \quad (4.26)$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας $\varepsilon = \lambda_{\min}(S^{-1}\tilde{Q}S^{-1}|_{t=T})$. Η $\varphi_T(e)$ είναι ένα άνω όριο για το $\frac{dV(t, e)}{dt}$. Υποθέτουμε πως το $\pi(t)$ για το ΓΧΜ σύστημα του σφάλματος έχει προκύψει μέσω χρονικής διακριτοποίησης της 4.24. Μειώνουμε το $\pi(t)$ σημειακά στο χρόνο σε $\tilde{\pi}(t) < \pi(t)$ μέσω μιας ακολουθίας από ολικά προβλήματα βελτιστοποίησης. Επαναληπτικά τώρα βρίσκουμε το $\varphi_T^* = \max \varphi_T(e)$ για κάθε $e \in \tilde{\mathcal{L}}_{T, V, \tilde{\pi}}$. Ξεκινάμε με $\tilde{\pi}(T) = \pi(T)$ και υπολογίζουμε το φ_T^* . Αν $\varphi_T^* > 0$, υποδιπλασιάζουμε το $\tilde{\pi}(T)$ και επαναλαμβάνουμε μέχρι $\varphi_T^* \leq 0$. Τότε θα ισχύει,

$$\forall e \in \tilde{\mathcal{L}}_{T, V, \tilde{\pi}} : \quad \dot{V}(T, e) \leq -\varepsilon e^\top \tilde{P}(T)e \leq -\varepsilon \|e\|^2 \quad (4.27)$$

που σημαίνει πως το 4.3 είναι εκθετικά ευσταθές στο $\tilde{\mathcal{L}}_{T,V,\tilde{\pi}}$.

Για τα εναπομείναντα χρονικά σημεία $0 \leq t < T$ λύνουμε το πρόβλημα $\max \tilde{\pi}(t)$ έτσι ώστε για κάθε $e \in \partial \tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$ να ισχύει $\varphi_t(e) \leq 0$, όπου η φ_t είναι η

$$\varphi_t(e) = 2e^T \tilde{P}(t) \Phi(t, e) - e^T \tilde{Q}e - 2\dot{\tilde{\pi}}(t) \tilde{\pi}(t). \quad (4.28)$$

εξασφαλίζοντας έτσι τη θετική αμεταβλητότητα του $\tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$. Είναι εμφανές πως το παραπάνω πρόβλημα δε μπορεί να λυθεί για κάθε $t \in [0, T)$. Αν όμως γίνει χρονική διακριτοποίηση στο $\tilde{\pi}(t) = \omega_{\tilde{\pi}}$ προκύπτει μια ακολουθία από μη γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης, η οποία μπορεί να λυθεί αναδρομικά στο χρόνο.

4.4 Υπολογισμός τελικής ποινής

Σχετικά με την τελική ποινή του NMPC, αν για κάθε $t \in [0, T] : \tilde{\pi}(t) \in (0, \infty)$ και $\mathcal{E}_{t_k+T_p} = \tilde{\mathcal{L}}_{t_k+T_p,V,\tilde{\pi}}$, η τελική ποινή

$$E(t) = \begin{cases} \int_t^T \alpha(\tau) \beta \, d\tau + \beta \frac{\alpha(T)}{2\gamma} & t \in [0, T), \\ \beta \frac{\alpha(T)}{2\gamma} e^{-2\gamma(T-t)} & t \geq T, \end{cases} \quad (4.29)$$

όπου τα $\alpha(t), \beta, \gamma$ είναι

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \tilde{\pi}^2(t) \|S^{-1}(t)\|^2 \|Q_F + K(t)^T R_F K(t)\|, \\ \beta &= \bar{p} + 1, \quad \bar{p} = \sup \|P(t)\|, \\ \gamma &= \frac{1}{2(\bar{p} + 1)} \lambda_{\min}(S^{-1} \tilde{Q} S^{-1}|_{t=T}) \end{aligned}$$

πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.

Το χρονομεταβλητό σύνολο $\tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$ είναι θετικά αμετάβλητο υπό τον τερματικό νόμο ελέγχου $u = K(t)e + u_r(t)$. Σημειώνεται πως τόσο οι περιορισμοί της κατάστασης όσο και της εισόδου ικανοποιούνται για κάθε ονομαστική λύση $e(t, e_0|u)$ με $e_0 \in \tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$.

Το τελικό κόστος 4.29 προκύπτει ως μια εκτίμηση του χειρίστου κόστους μέσα στο $\tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$ που συνίσταται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι το κόστος που σχετίζεται με μία λύση που ταξιδεύει στο σύνορο της τερματικής περιοχής $\partial \tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$ για κάθε $t \in [0, T]$. Το δεύτερο μέρος χρησιμοποιεί το γεγονός πως στο εσωτερικό του $\tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$, ο τερματικός νόμος ελέγχου εξασφαλίζει εκθετική μείωση του κόστους. Γενικά ισχύει,

$$F(t, e, K(t)e + u_r(t)) \leq \|e\|^2 \cdot \|Q_F + K^T(t) R_f K(t)\|.$$

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $e = \tilde{\pi}(t) S^{-1}(t) b$, το σύνολο $\tilde{\mathcal{L}}_{t,V,\tilde{\pi}}$ περιγράφεται για $\|b\| \leq 1$. Έτσι έχουμε,

$$\forall e \in \tilde{\mathcal{L}}_{T,V,\tilde{\pi}} : F(\cdot) \leq \tilde{\pi}^2(t) \|S^{-1}(t)\|^2 \cdot \|Q_F + K^T(t) R_f K(t)\|.$$

Επειδή ακόμα $\beta \geq 1$,

$$\forall t \in [0, T), \forall e \in \tilde{\mathcal{L}}_{T,V,\tilde{\pi}} : F(\cdot) \leq \alpha(t) \leq \alpha(t) \beta.$$

Η παράγωγος της τελικής ποινής είναι,

$$\dot{E}(t) = \begin{cases} -\alpha(t)\beta & t \in [0, T), \\ -\alpha(T)\beta e^{-2\gamma(t-T)} & t \geq T \end{cases} \quad (4.30)$$

Για $t \in [0, T)$,

$$\dot{E}(t) + F(t, e, K(t)e + u_r(t)) \leq -\alpha(t)\beta + \alpha(t)\beta = 0, \quad (4.31)$$

δηλαδή η $E(t)$ ικανοποιεί την 4.5β για κάθε $t \in [0, T)$.

Για $t \geq T$, ισχύει πως $\tilde{\pi}(t) = \tilde{\pi}(T)$ και το $\tilde{\pi}(T)$ έχει υπολογιστεί ώστε να εξασφαλίζει την εκθετική ευστάθεια μέσα στο $\tilde{\mathcal{L}}_{T, V, \tilde{\pi}}$. Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε το όριο των λύσεων,

$$\forall t \geq T, \forall e \in \tilde{\mathcal{L}}_{T, V, \tilde{\pi}} : \|e(t, T, e_T)\| \leq \sqrt{\bar{p} + 1} \cdot \|e_T\| \cdot e^{j \frac{\varepsilon(t-T)}{2(\bar{p}+1)}}$$

όπου $\bar{p} = \sup_t \|P(t)\|$ και $\varepsilon = \lambda_{\min}(S^{-1}\tilde{Q}S^{-1}|_{t=T}) > 0$. Χρησιμοποιώντας τα β και γ μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση,

$$\forall e \in \tilde{\mathcal{L}}_{T, V, \tilde{\pi}} : \|e(t, T, e_T)\| \leq \sqrt{\beta} \cdot \|e_T\| \cdot e^{-\gamma(t-T)}. \quad (4.32)$$

Με αυτό το όριο μπορούμε να γράψουμε,

$$\forall t \geq T : F(t, e, K(t)e + u_r(t)) \leq \beta e^{-2\gamma(t-T)} \cdot \|e(T)\|^2 \cdot \|Q_F + K^T(t)R_fK(t)\|$$

Ισχύει πως για $t \geq T$, $K(t) = K(T)$ και $S(t) = S(T)$. Με την αλλαγή συντεταγμένων έχουμε,

$$\|e(T)\|^2 \cdot \|Q_F + K^T(t)R_fK(t)\| \leq \tilde{\pi}^2(t)\|S^{-1}(T)\|^2 \cdot \|Q_F + K^T(t)R_fK(t)\|.$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις για $t \geq T$, η 4.5β γίνεται,

$$\dot{E} + F(\cdot) \leq \beta e^{-2\gamma(t-T)} (-\alpha(t) + \tilde{\pi}^2(t)\|S^{-1}(T)\|^2 \cdot \|Q_F + K^T(t)R_fK(t)\|) \leq 0.$$

που σημαίνει πως η τελική ποινή ικανοποιεί την 4.5β για $t \geq T$.

Ενδιαφέρον είναι το γεγονός πως η τελική ποινή εξαρτάται μόνο από το χρόνο και όχι από τις μεταβλητές προς βελτιστοποίηση, πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί να παραλειφθεί εξο-λοκλήρου εφόσον δε παίζει ουσιαστικό ρόλο στη διαδικασία βελτιστοποίησης.

Κεφάλαιο 5

Αντιμετώπιση Βλάβης

Οι βλάβες στις οποίες θα εστιάσουμε στην εργασία είναι οι ολικές απώλειες κινητήρων. Η διάγνωση της βλάβης δεν αποτελεί μέρος της εργασίας και γίνεται η (μη ρεαλιστική) υπόθεση πως το σύστημα αντιλαμβάνεται τη βλάβη αμέσως μετά την εμφάνισή της. Ανάλογα με τη βλάβη, θα κατατάξουμε το όχημα σε διαφορετικές κατηγορίες, οι οποίες θα χρήζουν και διαφορετικής αντιμετώπισης από τον ελεγκτή. Για το διαχωρισμό μεταξύ των κατηγοριών χρησιμοποιήθηκε μία συνθήκη κλειστότητας και η έννοια του Backwards Reachable Tube.

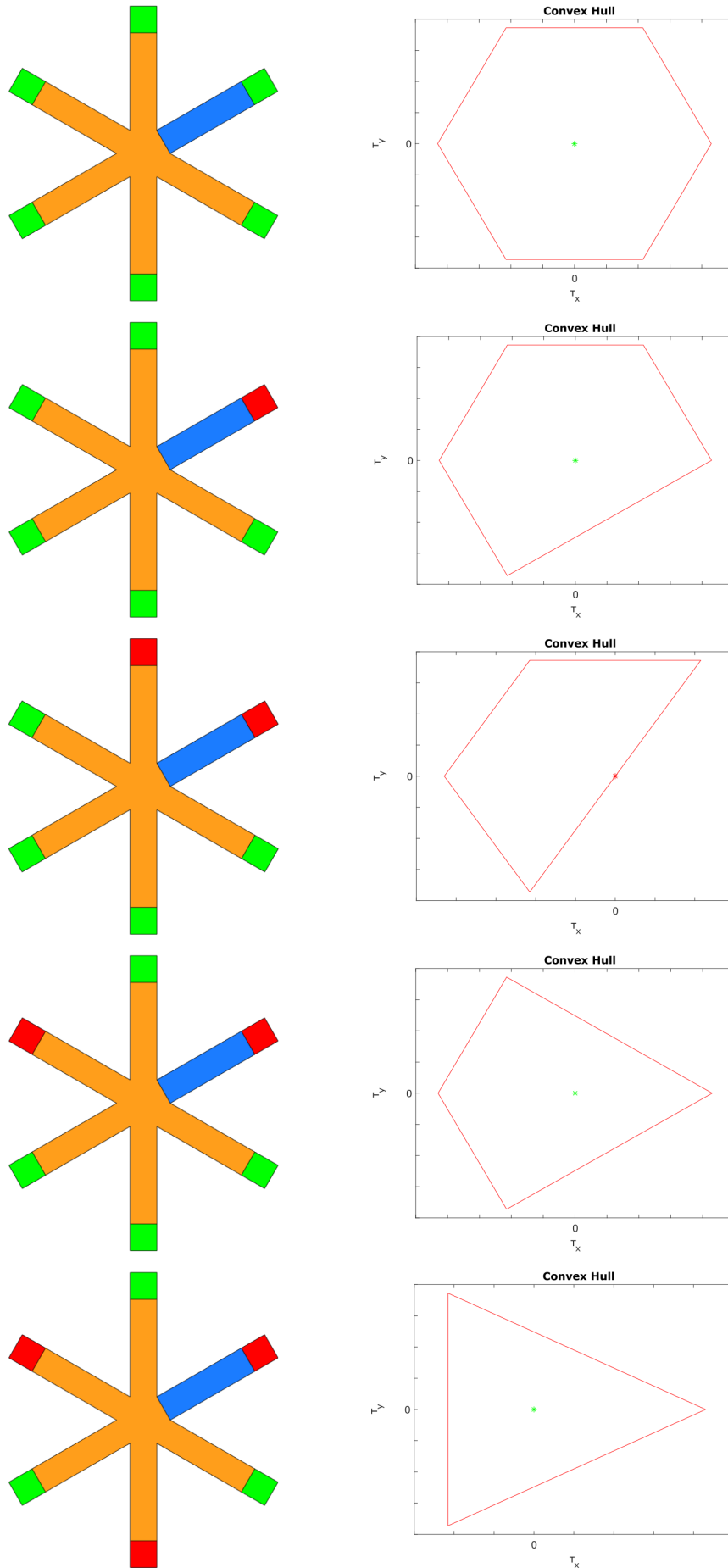
5.1 Συνθήκη κλειστότητας

Ονομάζουμε ένα πολυ-ελικοφόρο “ελεγχόμενο” αν μπορεί να διατηρηθεί σε κατάσταση αιώρησης. Κατάσταση αιώρησης ονομάζουμε την κατάσταση στην οποία ισχύει $v_x = v_y = v_z = q_x = q_y = \Omega_x = \Omega_y = 0$. Στην κατάσταση αυτή, το πολυ-ελικοφόρο έχει ευθυγραμμίσει τον τοπικό του άξονα z με τον αντίστοιχο του αδρανειακού συστήματος αναφοράς, η θέση του πολυ-ελικοφόρου παραμένει σταθερή ενώ επιτρέπεται μη μηδενική γωνιακή ταχύτητα μόνο γύρω από τον τοπικό άξονα z . Παρατηρείται ότι μόνο οι συνιστώσες τ_x και τ_y του διανύσματος ροπής τ συμμετέχουν στον έλεγχο του προσανατολισμού του τοπικού επιπέδου $x - y$ του συστήματος και συνεπώς για να μπορεί το σύστημα να διατηρηθεί σε κατάσταση αιώρησης πρέπει να είναι σε θέση να παράξει κάθε συνδυασμό των τ_x και τ_y . Για ένα hexacopter, ισχύει,

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin \frac{\pi}{6} & l & l \sin \frac{\pi}{6} & -l \sin \frac{\pi}{6} & -l & -l \sin \frac{\pi}{6} \\ -l \sin \frac{\pi}{3} & 0 & l \sin \frac{\pi}{3} & l \sin \frac{\pi}{3} & 0 & -l \sin \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}, \quad f_i \geq 0 \quad (5.1)$$

Αν συμβολιστεί με A ο πίνακας που πολλαπλασιάζει από αριστερά τις δυνάμεις από τους κινητήρες στην εξίσωση 5.1, τότε η απώλεια του κινητήρα i ισοδυναμεί με μηδενισμό της i στήλης του πίνακα A . Δανειζόμενοι ιδέες από τη θεωρία του grasping στη ρομποτική και πιο συγκεκριμένα τη συνθήκη κλειστότητας ως προς δύναμη, για να εκτείνονται θετικά (positively span) στο \mathbb{R}^2 οι στήλες του A , πρέπει ο κυρτός φλοιός (convex hull) των στηλών του A να περιέχει μια περιοχή της αρχής των αξόνων. Χρειάζονται τουλάχιστον τρεις στήλες για να ισχύει το παραπάνω που μεταφράζεται στο γεγονός πως χρειάζονται τουλάχιστον τρεις λειτουργικοί κινητήρες για να υπάρχει ευστάθεια στην κατάσταση αιώρησης.

Στο Σχήμα 5.1 φαίνονται ορισμένες διατάξεις και οι αντίστοιχοι κυρτοί φλοιοί. Στις αναπαραστάσεις των hexacopters με κόκκινο χρώμα συμβολίζονται οι κινητήρες με βλάβη. Με πράσινο χρωματίζεται το σημείο με συντεταγμένες $(0,0)$ στο διάγραμμα του κυρτού φλοιού όταν η αντίστοιχη διάταξη πληρεί τη συνθήκη κλειστότητας ενώ χρωματίζεται με κόκκινο στην αντίθετη περίπτωση.



Σχήμα 5.1: Βλάβες και κυρτοί φλοιοί

5.2 Backwards Reachable Tube

Επίσης χρήσιμη για το διαχωρισμό των διατάξεων είναι η έννοια του Backwards Reachable Tube που είναι το σύνολο όλων των καταστάσεων που μπορούν να φτάσουν ένα επιθυμητό σύνολο καταστάσεων \mathcal{L} μέσα σε χρονικό διάστημα T . Πιο μαθηματικά ισχύει,

$$\mathcal{R}(T) = \{x_0 : \exists u, s.t. \dot{x} = f(x, u), x(0) = x_0; \exists t \in [0, T], s.t. x(t) \in \mathcal{L}\} \quad (5.2)$$

Ο υπολογισμός του Backwards Reachable Tube είναι ταυτόσημος με την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης,

$$\begin{aligned} & \min_u \left(\min_{t \in [0, T]} l(x(t)) \right) \\ & \text{Subject to } \dot{x} = f(x, u) \\ & \mathcal{L} = \{x : l(x) \leq 0\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης με τη σειρά του, χάρη στις αρχές του Δυναμικού Προγραμματισμού, μπορεί να λυθεί με την αντίστοιχη μερική διαφορική εξίσωση Hamilton-Jacobi Bellman (HJB),

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} + \min\{0, H^*(x, \nabla V(x(t), t), t)\} &= 0 \\ V(x(T), T) &= l(x(T)) \\ H^* &= \min_u \{\nabla V(x(t), t) \cdot f(x, u, t)\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Για να γίνει εμφανής η σύνδεση μεταξύ των δύο προβλημάτων, έστω το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου,

$$\begin{aligned} \text{minimize } J(x, t) &= \int_t^T C(x(t), u(t)) dt + l(x(T)) \\ \text{Subject to } \dot{x} &= f(x, u, t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

και το κόστος (cost-to-go) από το (x, t) ,

$$V(x(t), t) = \min_{u(\cdot)} \left[\int_t^T C(x(t), u(t)) dt + l(x(T)) \right]. \quad (5.6)$$

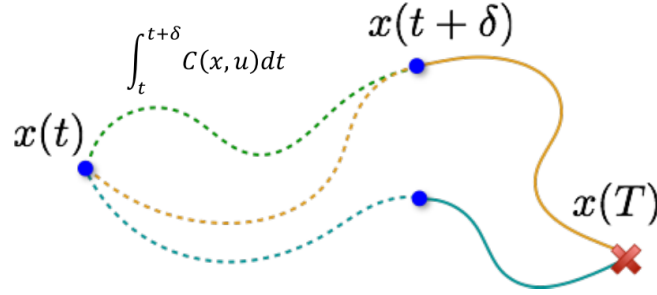
Μας ενδιαφέρει να βρούμε το κόστος από την κατάσταση x τη χρονική στιγμή 0, δηλαδή το

$$V(x(0), 0) = \min_{u(\cdot)} \left[\int_0^T C(x(t), u(t)) dt + l(x(T)) \right]. \quad (5.7)$$

Η αρχή του Δυναμικού Προγραμματισμού, δηλαδή το γεγονός ότι μια βέλτιστη τροχιά παραμένει βέλτιστη σε ενδιάμεσα χρονικά σημεία, συνεπάγεται πως,

$$V(x(t), t) = \min_{u(\cdot)} \left[V(x(t+\delta), t+\delta) + \int_t^{t+\delta} C(x(t), u(t)) dt \right]. \quad (5.8)$$

Με χρήση σειράς Taylor και προσεγγίσεις για μικρά δ έχουμε,



Σχήμα 5.2: Αρχή Δυναμικού Προγραμματισμού

$$\begin{aligned}
 V(x(t), t) &= \min_{u(\cdot)} \left[V(x(t+\delta), t+\delta) + \int_t^{t+\delta} C(x(t), u(t)) dt \right] \\
 V(x(t), t) &= \min_{u(\cdot)} \left[V(x(t), t) + \frac{dV}{dt}(x(t), t)\delta + \nabla V(x(t), t) \frac{dx}{dt} \delta + C(x, u)\delta \right] \\
 V(x(t), t) &= V(x(t), t) + \min_{u(\cdot)} \left[\frac{dV}{dt}(x(t), t)\delta + \nabla V(x(t), t) \frac{dx}{dt} \delta + C(x, u)\delta \right] \quad (5.9) \\
 0 &= \min_{u(\cdot)} \left[\frac{dV}{dt}(x(t), t)\delta + \nabla V(x(t), t) \frac{dx}{dt} \delta + C(x, u)\delta \right] \\
 0 &= \min_{u(\cdot)} \left[\frac{dV}{dt}(x(t), t) + \nabla V(x(t), t) \frac{dx}{dt} + C(x, u) \right]
 \end{aligned}$$

που καταλήγει στην HJB,

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt}(x(t), t) + \min_{u(\cdot)} \{ \nabla V(x(t), t) \cdot f(x, u) + C(x, u) \} &= 0 \\
 V(x(T), T) &= l(x(T))
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Αν τώρα ορίσουμε μία συνάρτηση $l(x)$ τέτοια ώστε,

$$\mathcal{L} = \{x : l(x) \leq 0\} \quad (5.11)$$

και θέσουμε το πρόβλημα,

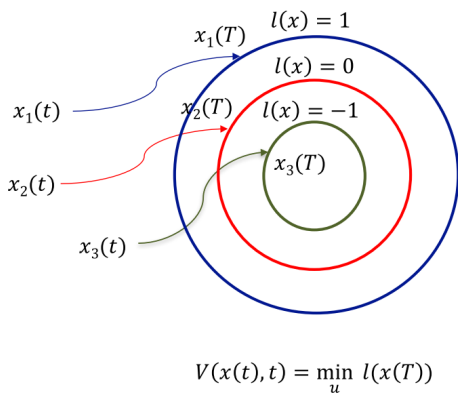
$$\begin{aligned}
 V(x(t), t) &= \min_u l(x(T)) \\
 \text{Subject to } \dot{x} &= f(x, u, t)
 \end{aligned} \quad (5.12)$$

τότε το $V(x(t), t)$ αντιπροσωπεύει τη τιμή της συνάρτησης $l(x)$ που θα επιτύχουμε τη χρονική στιγμή T . Συνεπώς ισχύει,

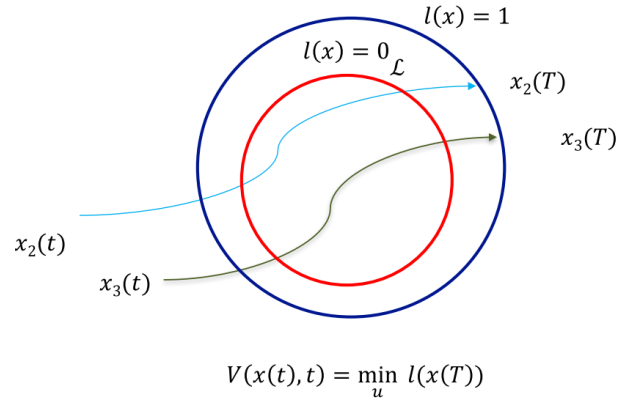
$$V(x(0), 0) \leq 0 \implies x(0) \in \mathcal{R}(T) \quad (5.13)$$

Για να συνυπολογίσουμε όμως και τις τροχιές που φτάνουν το επιθυμητό σύνολο αλλά βγαίνουν από αυτό στη συνέχεια, “παγώνουμε” τις τροχιές στο στόχο με την ακόλουθη προσθήκη στο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου,

$$\begin{aligned}
 \min_u \left(\min_{t \in [0, T]} l(x(t)) \right) \\
 \text{Subject to } \dot{x} &= f(x, u) \\
 \mathcal{L} &= \{x : l(x) \leq 0\}
 \end{aligned} \quad (5.14)$$



Σχήμα 5.3: Έννοια του κόστους V



Σχήμα 5.4: Σημεία που λανθασμένα δε συμπεριλαμβάνονται στο BRT με το εικονιζόμενο κόστος V

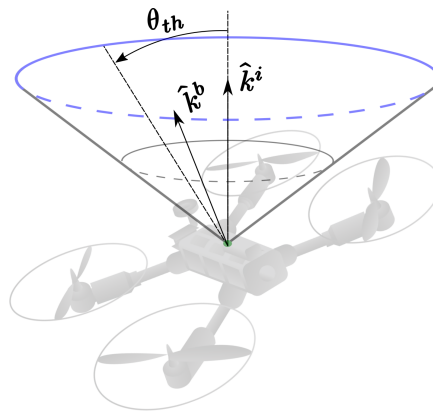
που αντιστοιχεί στην HJB,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} + \min\{0, H^*(x, \nabla V(x(t), t), t)\} &= 0 \\ V(x(T), T) &= l(x(T)) \\ H^* &= \min_u \{\nabla V(x(t), t) \cdot f(x, u, t)\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Τώρα ισχύει,

$$\begin{aligned} x(0) \in \mathcal{R}(T) &\Leftrightarrow V(x(0), 0) \leq 0 \\ x(0) \notin \mathcal{R}(T) &\Leftrightarrow V(x(0), 0) > 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Πίσω στο πρόβλημα των βλαβών, θέλουμε να βρούμε από ποιες καταστάσεις μπορούμε να φτάσουμε κοντά στην κατάσταση αιώρησης που θεωρείται ασφαλής. Για το σκοπό αυτό, το επιθυμητό σύνολο ορίστηκε ως $\mathcal{L} = \{x \mid \hat{\mathbf{k}}_i^\top \hat{\mathbf{k}}_b \geq \cos \theta_{th}, \Omega_x \leq \Omega_{th}, \Omega_y \leq \Omega_{th}\}$. Το σύνολο αυτό ορίζει ένα κώνο μέσα στον οποίο μπορεί να βρίσκεται ο τοπικός άξονας z του πολυ-ελικοφόρου (Σχήμα 5.5) και περιορίζει τις γωνιακές ταχύτητες Ω_x και Ω_y . Έτσι, για κάθε πιθανό συνδυασμό βλαβών επιλύεται η εξίσωση HJB και υπολογίζεται το Backwards Reachable Tube με επιθυμητό σύνολο το παραπάνω \mathcal{L} .

Σχήμα 5.5: Περιορισμός του επιθυμητού συνόλου \mathcal{L}

5.3 Διαχωρισμός βλαβών σε κατηγορίες

Κατηγορία I

Στην Κατηγορία I κατατάσσονται οι διατάξεις που δε πληρούν τη συνθήκη κλειστότητας και θεωρούνται “μη ασφαλείς”. Εφόσον δεν είναι εφικτός ο έλεγχος του προσανατολισμού του τοπικού άξονα z του οχήματος, άρα και του διανύσματος συνολικής ώσης από τους κινητήρες, δεν είναι εφικτός ο έλεγχος θέσης του οχήματος. Συνεπώς επιλέχθηκε να δοθεί ως ζητούμενο στον προβλεπτικό ελεγκτή η ελαχιστοποίηση της κάθετης ταχύτητας του οχήματος, μιας και η πρόσκρουση είναι αναπόφευκτη σε αυτή την περίπτωση.

Κατηγορία II

Στην Κατηγορία II κατατάσσονται οι διατάξεις που ενώ πληρούν τη συνθήκη κλειστότητας, βρίσκονται εκτός του Backwards Reachable Tube τη στιγμή της βλάβης. Αυτό σημαίνει πως ενώ υπάρχει έλεγχος του τοπικού επιπέδου $x - y$, δεν υπάρχει είσοδος που μπορεί να οδηγήσει το σύστημα κοντά στην ασφαλή κατάσταση αιώρησης μέσα στο χρονικό διάστημα T που βασίστηκε ο υπολογισμός του Backwards Reachable Tube. Στην περίπτωση αυτή, ο προβλεπτικός ελεγκτής θα προσπαθήσει να αποτρέψει την πρόσκρουση σε μία κυκλική περιοχή που θεωρείται μη κατάλληλη-ασφαλής.

Προς αυτή την κατεύθυνση, ο ελεγκτής κάνει μια πρόβλεψη των συντεταγμένων πρόσκρουσης του πολυ-ελικοφόρου αν αυτό εκτελέσει ελεύθερη πτώση αμέσως μετά τη βλάβη. Με απλές εξισώσεις κινηματικής και αν η θέση και η ταχύτητα του οχήματος τη στιγμή της βλάβης είναι (x_f, y_f, z_f) και $(v_{x,f}, v_{y,f}, v_{z,f})$ αντίστοιχα, το όχημα θα φτάσει στο έδαφος ($z = 0$) μετά από χρόνο,

$$t_{\text{fall}} = \frac{v_{z,f} + \sqrt{v_{z,f}^2 + 2gz_f}}{g} \quad (5.17)$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Οι συντεταγμένες προσγείωσης είναι ίσες με,

$$\begin{aligned} x_{\text{fall}} &= x_f + v_{x,f} t_{\text{fall}} \\ y_{\text{fall}} &= y_f + v_{y,f} t_{\text{fall}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

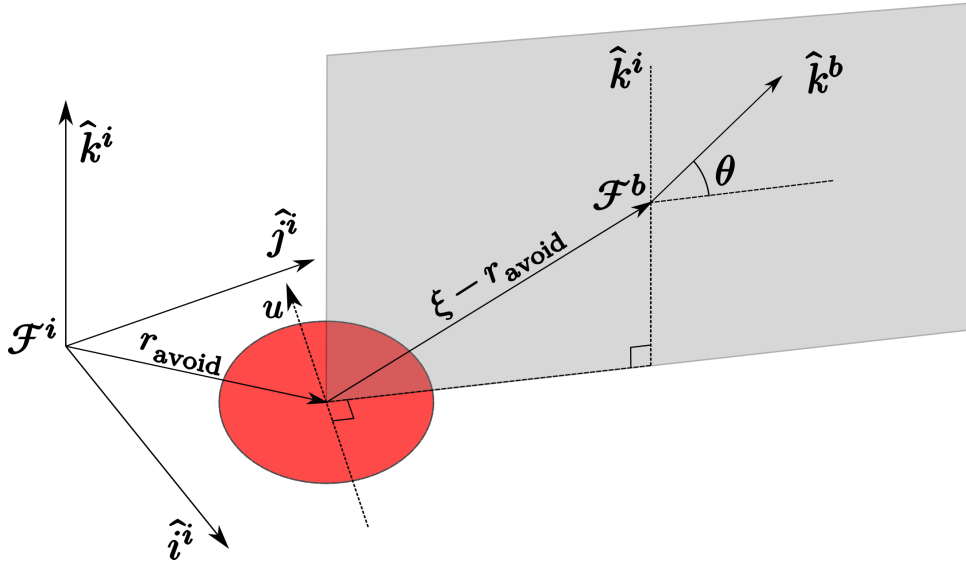
Αν αυτές οι συντεταγμένες βρίσκονται έξω από την κυκλική περιοχή που θέλουμε να αποφύγουμε, ο ελεγκτής επιχειρεί μηδενισμό τόσο του υψομέτρου όσο και των ταχυτήτων του πολυ-ελικοφόρου.

Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αυτή που οι προβλεπόμενες συντεταγμένες βρίσκονται μέσα στη μη ασφαλή περιοχή, ο ελεγκτής προσπαθεί να απομακρύνει το όχημα από την περιοχή αυτή. Για να γίνει αυτό, το όχημα προσπαθεί να αναπτύξει επιτάχυνση σε μία φυγόκεντρο διεύθυνση, που ισοδυναμεί με την ευθυγράμμιση του τοπικού του άξονα z με αυτή τη διεύθυνση (Σχήμα 5.6). Ο άξονας περιστροφής που φέρνει τον τοπικό άξονα z σε φυγόκεντρο διεύθυνση είναι ο,

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^i \times (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_{\text{avoid}}). \quad (5.19)$$

Η γωνία περιστροφής φ γύρω από τον άξονα u θα καθοριστεί από την επιθυμία να διατηρήσει το όχημα το ύψος z_0 που είχε τη στιγμή της βλάβης. Ισχύει,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z - z_0 \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - z_0 \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_z \quad (5.20)$$



Σχήμα 5.6: Αποφυγή περιοχής

Το παραπάνω σύστημα είναι στην κανονική ελέγξιμη μορφή και συνεπώς με κατάλληλη γραμμική ανάδραση κατάσταση γίνεται ευσταθής στο $[z_0, 0]^T$. Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned} a_z &= \frac{F_z}{m} - g = [k1 \quad k2] \begin{bmatrix} z - z_0 \\ v_z \end{bmatrix} \\ F_z &= m \left([k1 \quad k2] \begin{bmatrix} z - z_0 \\ v_z \end{bmatrix} + g \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Στη συνέχεια, με γραμμικό προγραμματισμό, υπολογίζεται η μέγιστη ώση F που μπορεί να αναπτυχθεί με μηδενικές ροπές τ_x και τ_y .

$$\max_{f_i} F = \sum f_i \quad (5.22\alpha)$$

υπό τους περιορισμούς,

$$0 = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (5.22\beta)$$

$$f_i \geq 0 \quad (5.22\gamma)$$

Σαν αποτέλεσμα, έχουμε πως,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{F_z}{F} \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} - \theta \end{aligned} \quad (5.23)$$

που οδηγεί στο επιθυμητό quaternion,

$$\mathbf{q}_d = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}. \quad (5.24)$$

και το αντίστοιχο σφάλμα,

$$\mathbf{q}_e = [q_{e,w}, q_{e,x}, q_{e,y}, q_{e,z}]^\top = \mathbf{q}_d^{-1} \otimes \mathbf{q} \quad (5.25)$$

Ο προβλεπτικός ελεγκτής προσπαθεί να μηδενίσει τις ποσότητες $q_{e,x}, q_{e,y}$. Επιτρέπει δηλαδή μία επιπλέον περιστροφή γύρω από τον τοπικό άξονα z που δε διαταράσσει τη διεύθυνση της παραχθείσας ώσης. Εφόσον το όχημα αναπτύξει φυγόκεντρη ταχύτητα και βρίσκεται έξω από τη μη ασφαλή περιοχή, ο ελεγκτής επιχειρεί προσγείωση προσέχοντας να διατηρεί σε όλη τη διάρκεια της προσγείωσης φυγόκεντρη ταχύτητα.

Κατηγορία III

Στην Κατηγορία III κατατάσσονται οι διατάξεις που πληρούν τη συνθήκη κλειστότητας, βρίσκονται εντός του Backwards Reachable Tube τη στιγμή της βλάβης αλλά η τροχιά αναφοράς που απομένει ξεφεύγει από το Backwards Reachable Tube περισσότερο από ένα κτώφλι. Στην περίπτωση αυτή, ο προβλεπτικός ελεγκτής σταθεροποιεί το όχημα στην κατάσταση αιώρησης και ακολούθως το οδηγεί για προσγείωση σε μία καθορισμένη τοποθεσία $(x_{\text{safe}}, y_{\text{safe}}, 0)$, φροντίζοντας να μη φύγει το όχημα από το Backwards Reachable Tube.

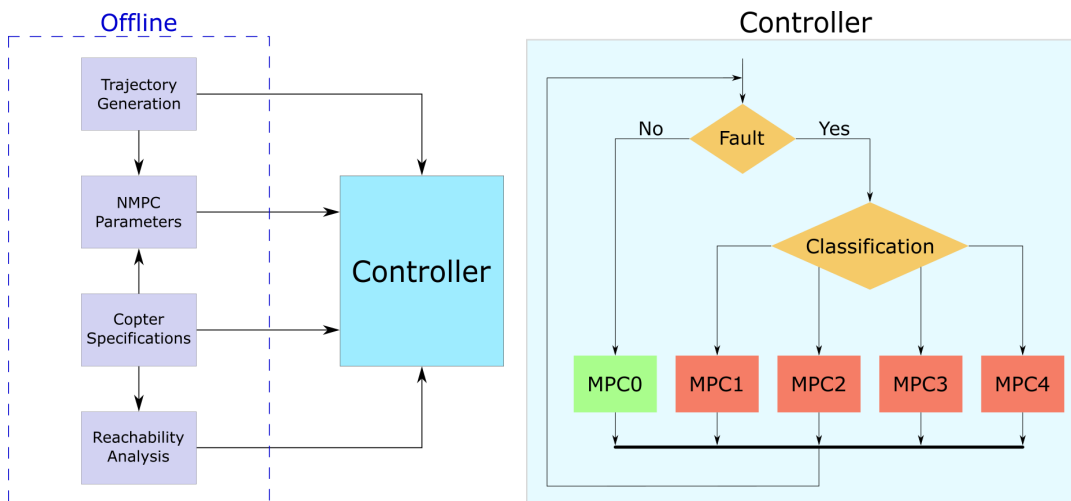
Κατηγορία IV

Στην Κατηγορία IV κατατάσσονται οι υπόλοιπες περιπτώσεις για τις οποίες ο προβλεπτικός ελεγκτής συνεχίζει την παρακολούθηση της τροχιάς αναφοράς ορίζοντας ως τερματική περιοχή το Backwards Reachable Tube.

Κεφάλαιο 6

Προσομοιώσεις

Η αρχιτεκτονική του συστήματος από πλευράς λογισμικού φαίνεται στο Σχήμα 6.1. Όλοι οι offline υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν στο προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB. Το κομμάτι του Reachability Analysis έγινε με τη χρήση του Toolbox of Level Set Methods [15] για MATLAB. Οι προβλεπτικοί ελεγκτές υλοποιήθηκαν σε C++ με τη βοήθεια του ACADO toolkit [16, 17] και έχουν ρυθμιστεί με ορίζοντα πρόβλεψης $T_p = 1s$ και συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 40Hz$. Σε laptop εξοπλισμένο με επεξεργαστή Intel Core i5-3337U και 8GB RAM, οι ελεγκτές θα μπορούσαν, από πλευράς υπολογιστικής ισχύος, να τρέξουν με συχνότητα δειγματοληψίας κοντά στα $250Hz$, με ίδιο ορίζοντα πρόβλεψης. Το επιπλέον υπολογιστικό headroom αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί με πολλούς τρόπους. Στο προαναφερθέν laptop υπάρχει η δυνατότητα επέκτασης του ορίζοντα πρόβλεψης και αύξησης του ρυθμού δειγματοληψίας ενώ υπάρχει και σχετική βεβαιότητα πως οι ελεγκτές θα μπορούσαν να λειτουργήσουν ομαλά και σε πιο αδύναμο υλικό, σαν και αυτό που συναντάται ενσωματωμένο στα περισσότερα πολυ-ελικοφόρα.

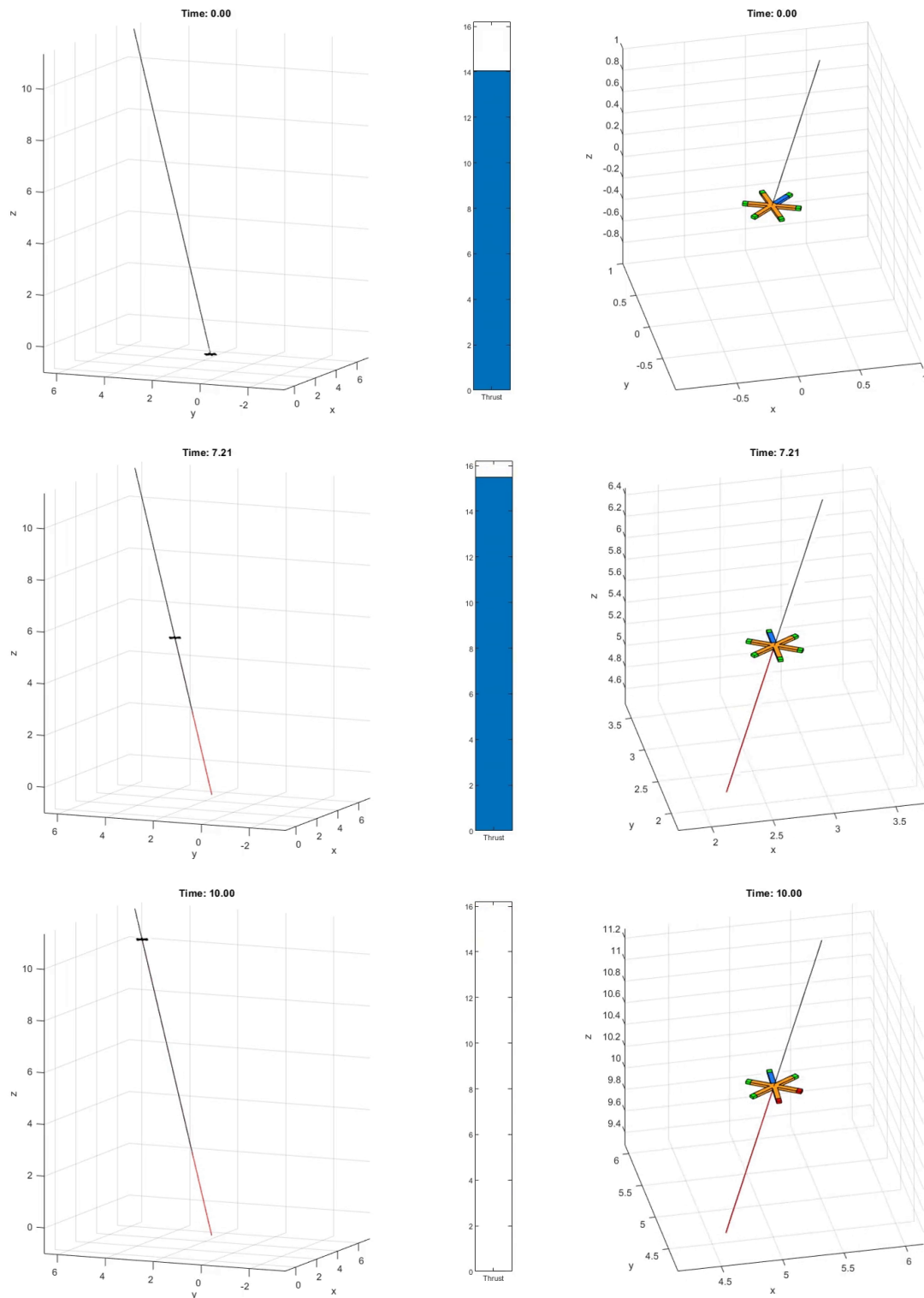


Σχήμα 6.1: Αρχιτεκτονική Λογισμικού

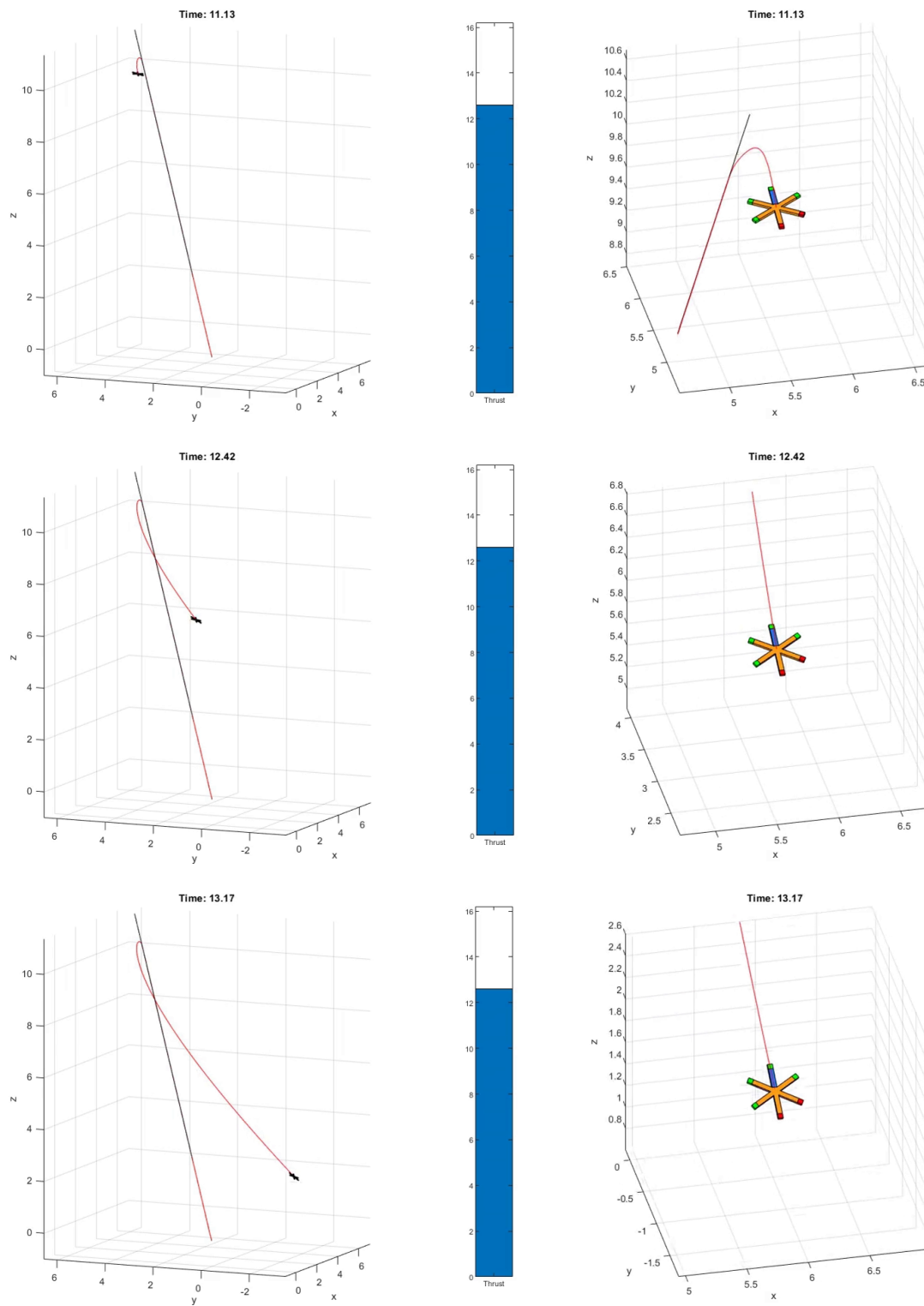
Στα ακόλουθα στιγμιότυπα των προσομοιώσεων, με μαύρο χρώμα φαίνεται η τροχιά αναφοράς ενώ με κόκκινο χρώμα φαίνεται η πραγματική τροχιά του πολυ-ελικοφόρου. Ακόμα, μετά τη χρονική στιγμή της βλάβης, χρωματίζονται με κόκκινο οι κινητήρες που έχουν υποστεί βλάβη. Τέλος, στα γραφήματα που ακολουθούν, η κάθετη κόκκινη γραμμή σηματοδοτεί τη στιγμή του σφάλματος.

Κατηγορία I

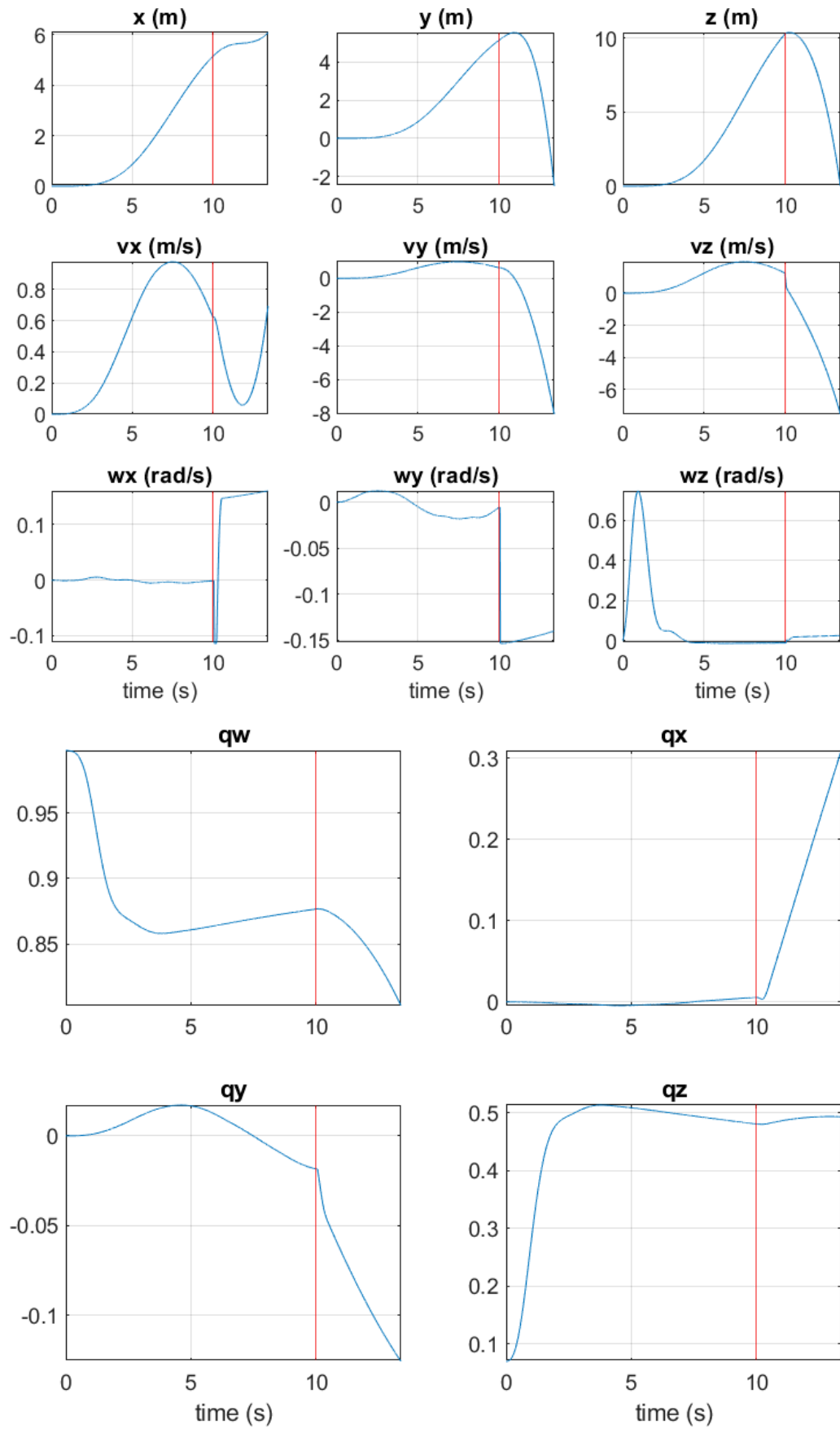
Η βλάβη συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 10s$ στους κινητήρες 3 και 4. Ο ελεγκτής σε αυτή τη περίπτωση χρησιμοποιεί τους κινητήρες 2 και 5 για να επιβραδύνει και τελικά καταφέρνει να μειώσει την κάθετη ταχύτητα πρόσκρουσης στο μισό της ταχύτητας που θα είχε το όχημα αν εκτελούσε ελεύθερη πτώση ($-7m/s$ αντί για $-14m/s$).



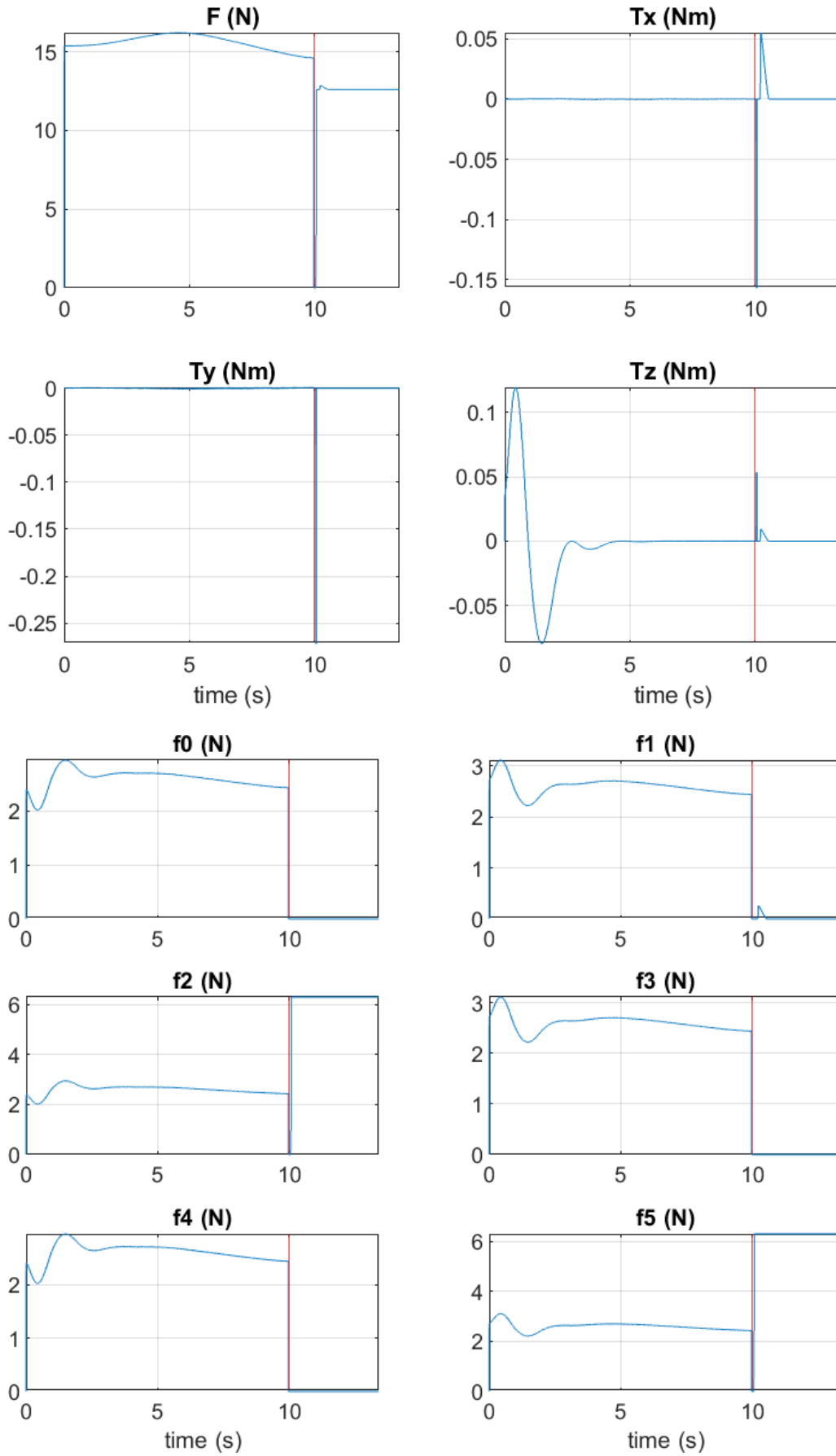
Σχήμα 6.2: Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη



Σχήμα 6.3: Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη



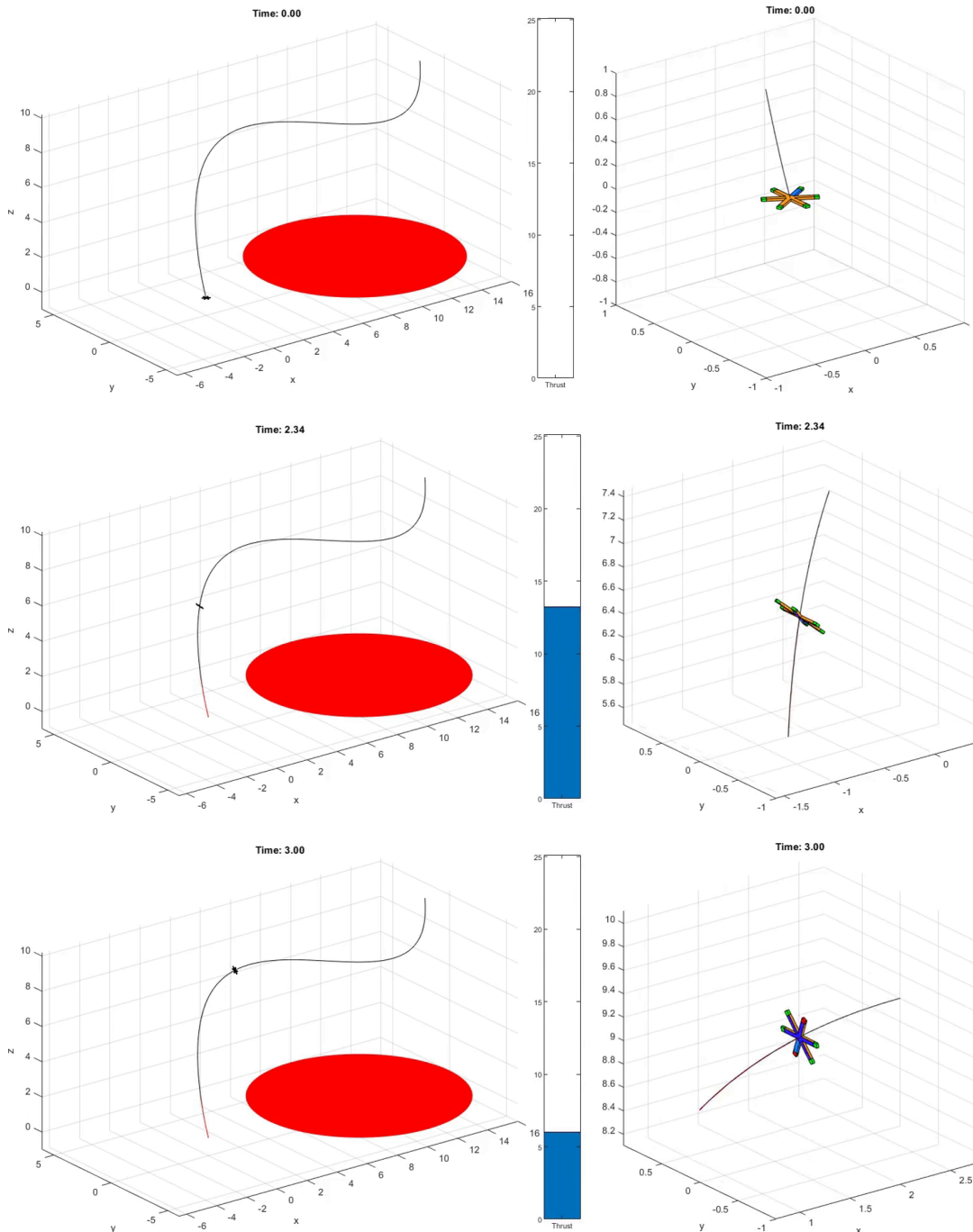
Σχήμα 6.4: Διάγραμμα κατάστασης



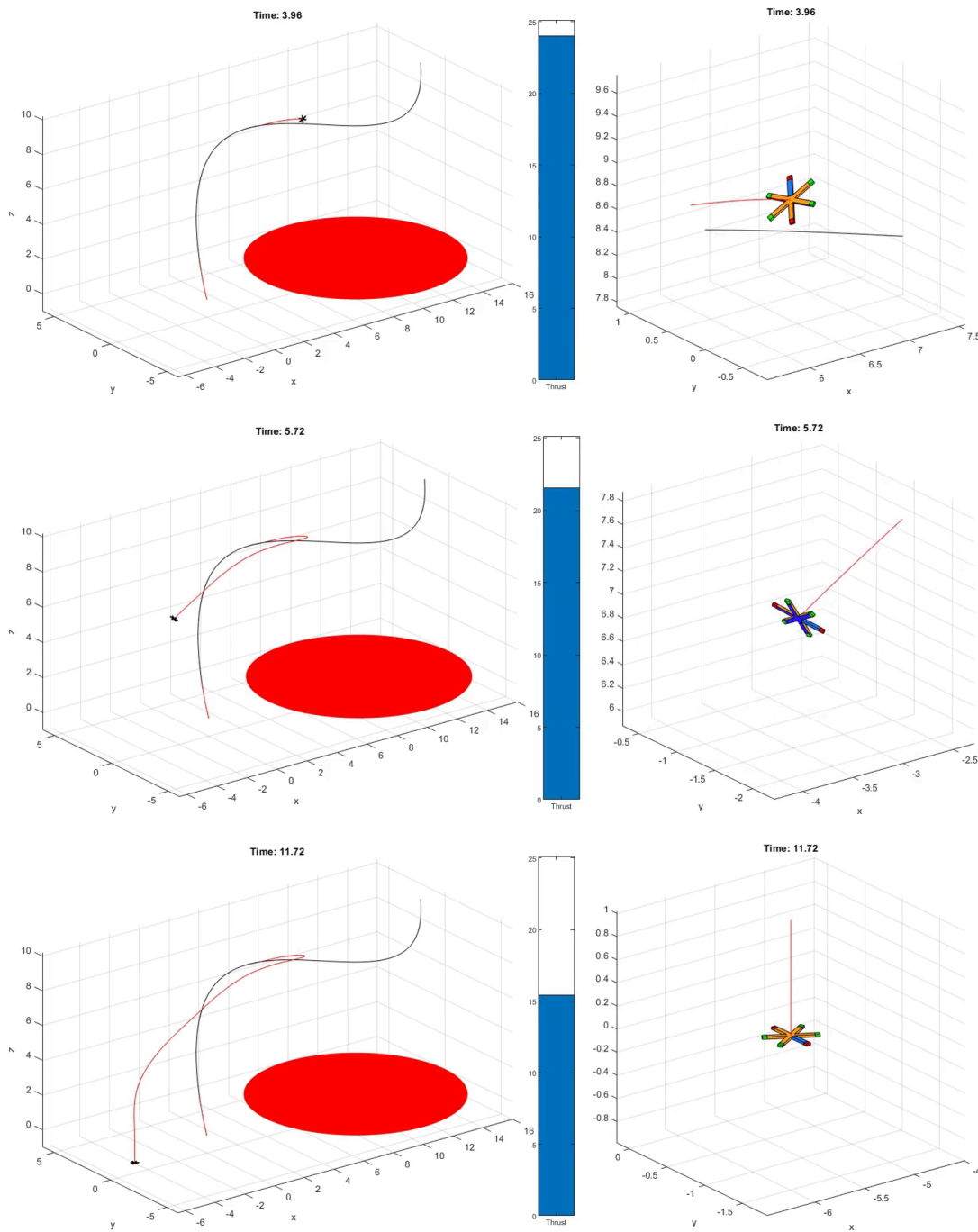
Σχήμα 6.5: Διάγραμμα εισόδου

Κατηγορία II

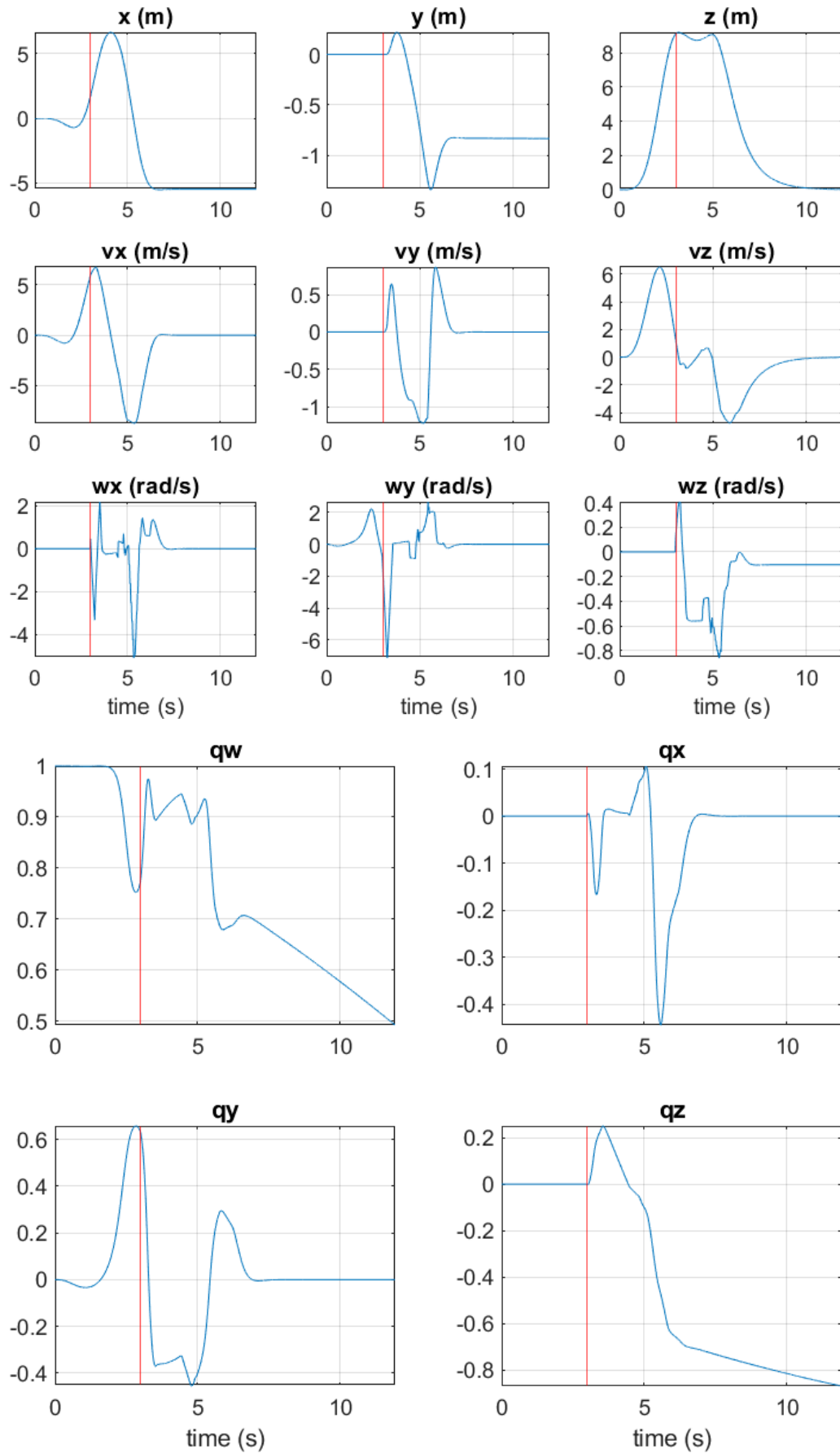
Η βλάβη συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 3s$ στους κινητήρες 0 και 3. Προβλέπεται ότι το όχημα θα πέσει μέσα στη μη ασφαλή περιοχή με κέντρο $(x, y) = (10, 0)$ και ακτίνα $R = 6$ αν εκτελέσει ελεύθερη πτώση. Ο ελεγκτής καλείται, διατηρώντας σταθερό το υψόμετρο του, να απομακρύνει το πολυ-ελικοφόρο από τη μη ασφαλή περιοχή και στη συνέχεια να επιχειρήσει προσγείωση.



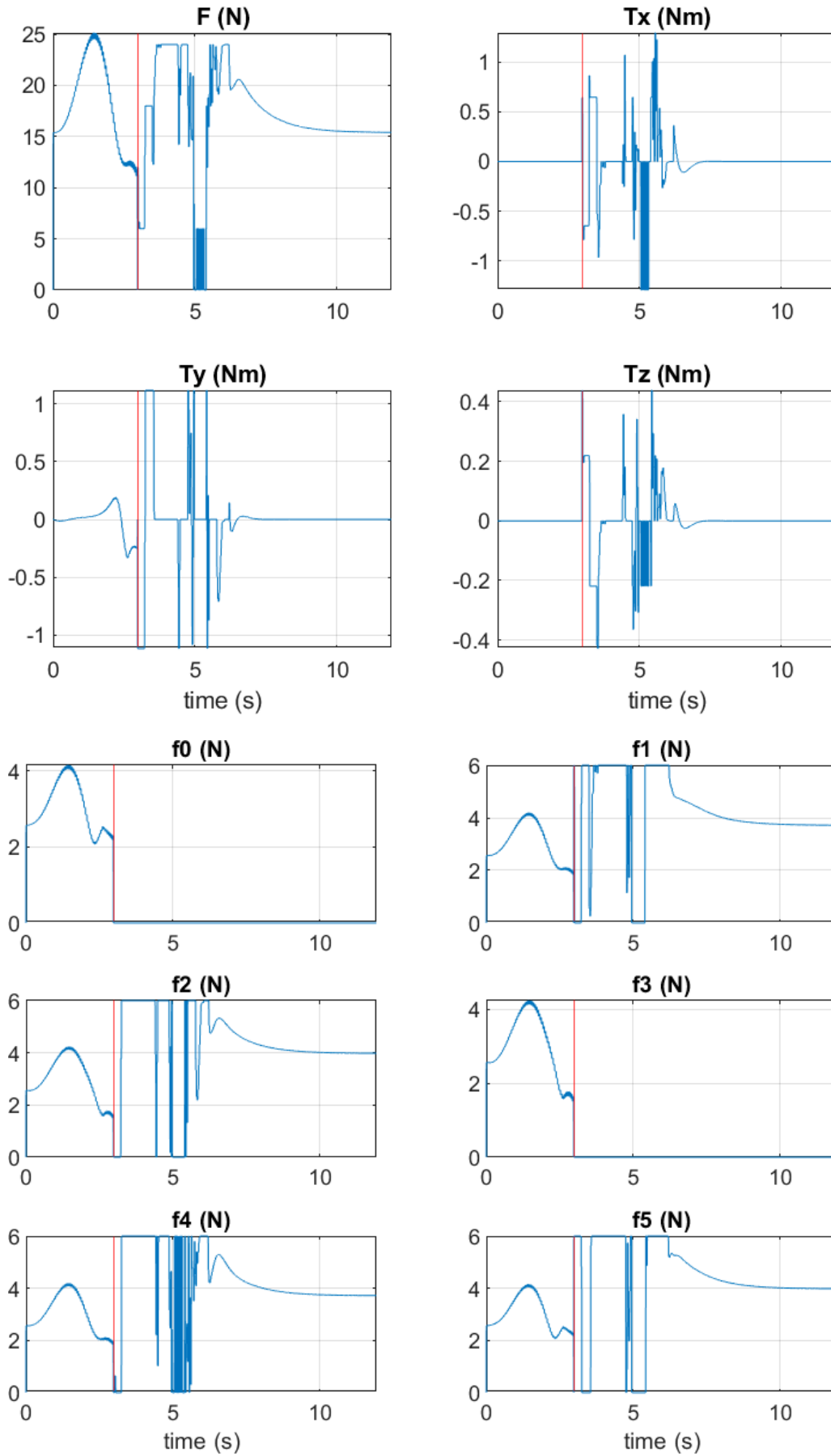
Σχήμα 6.6: Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη



Σχήμα 6.7: Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη

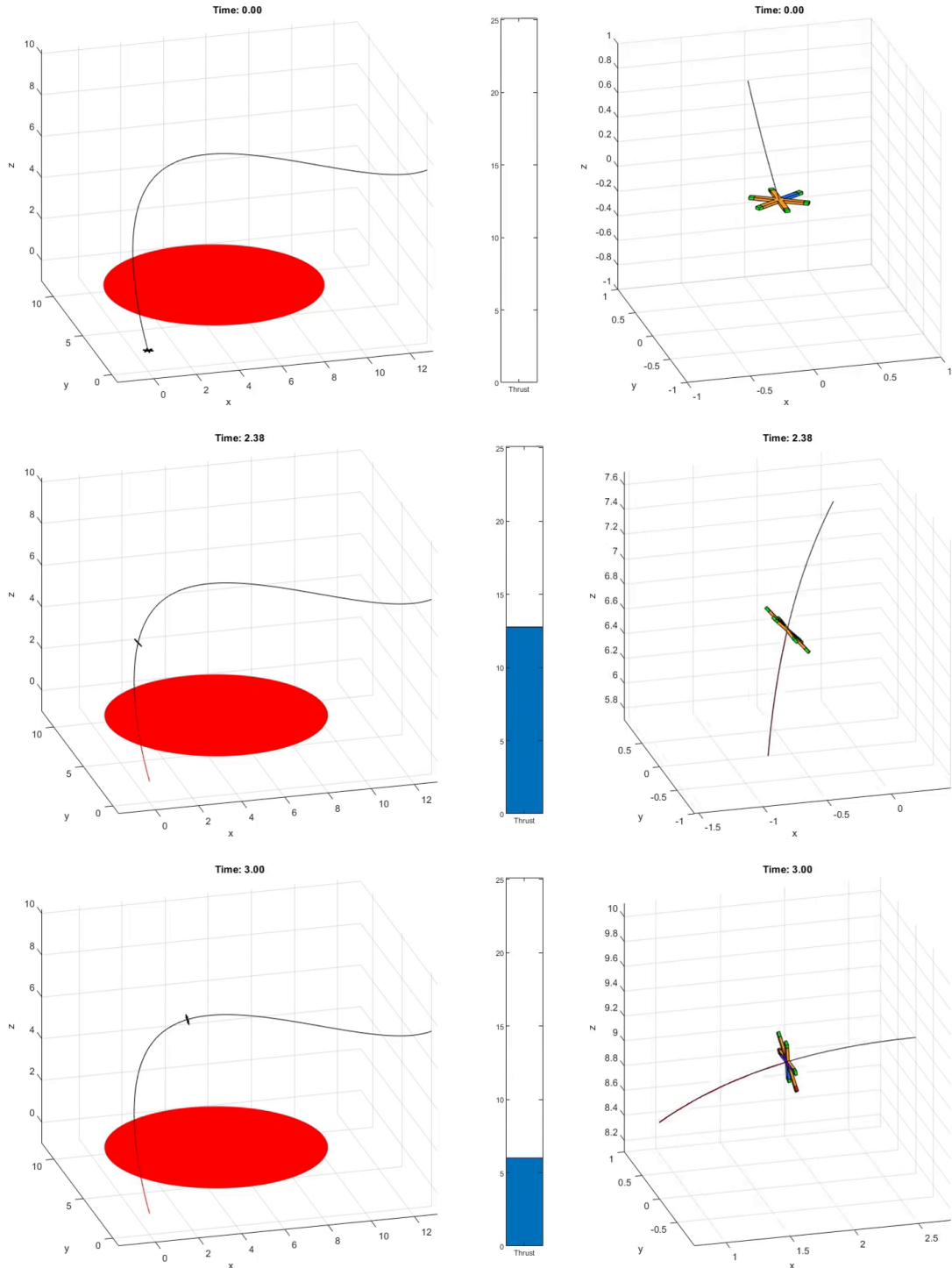


Σχήμα 6.8: Διάγραμμα κατάστασης

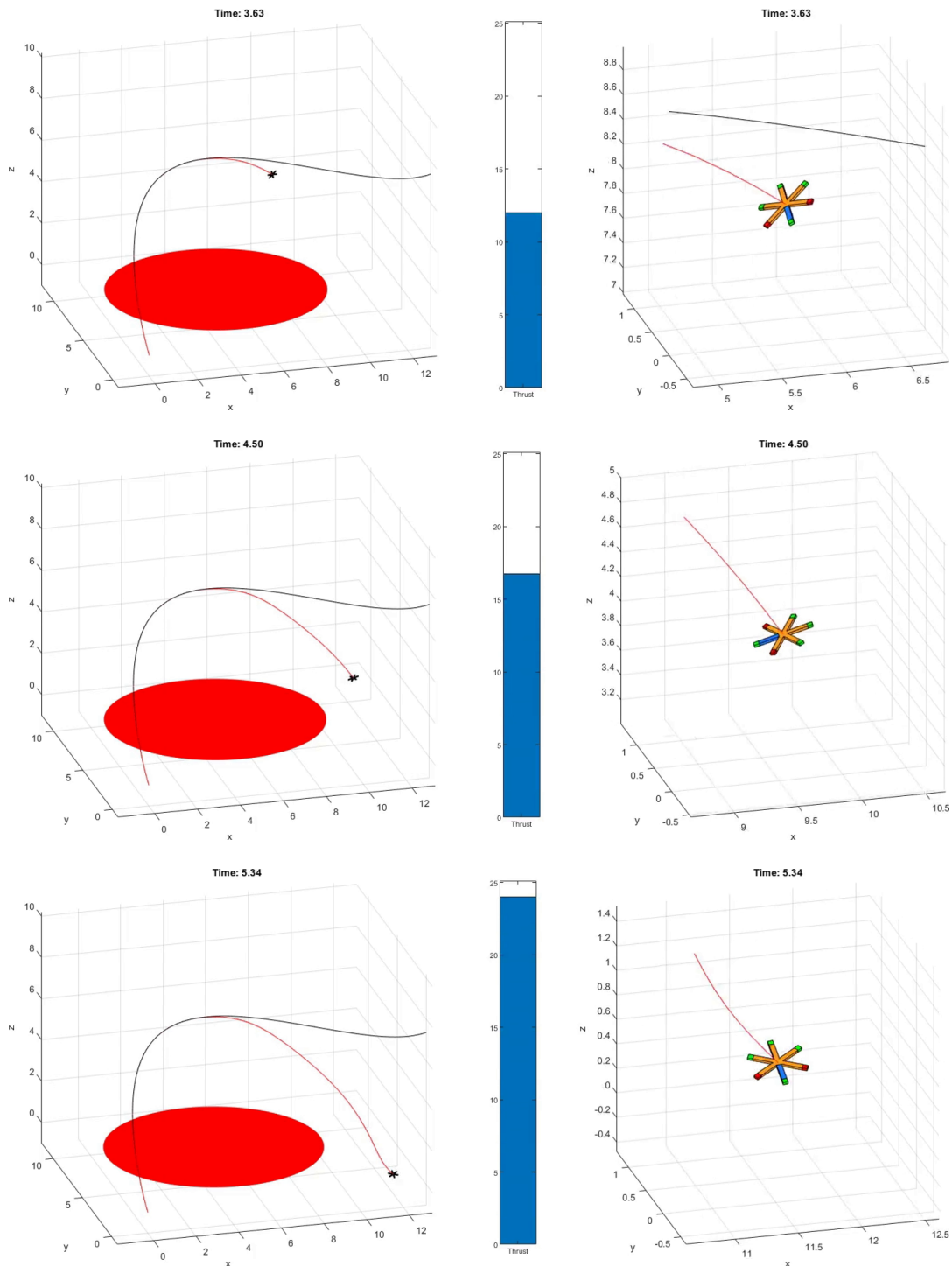


Σχήμα 6.9: Διάγραμμα εισόδου

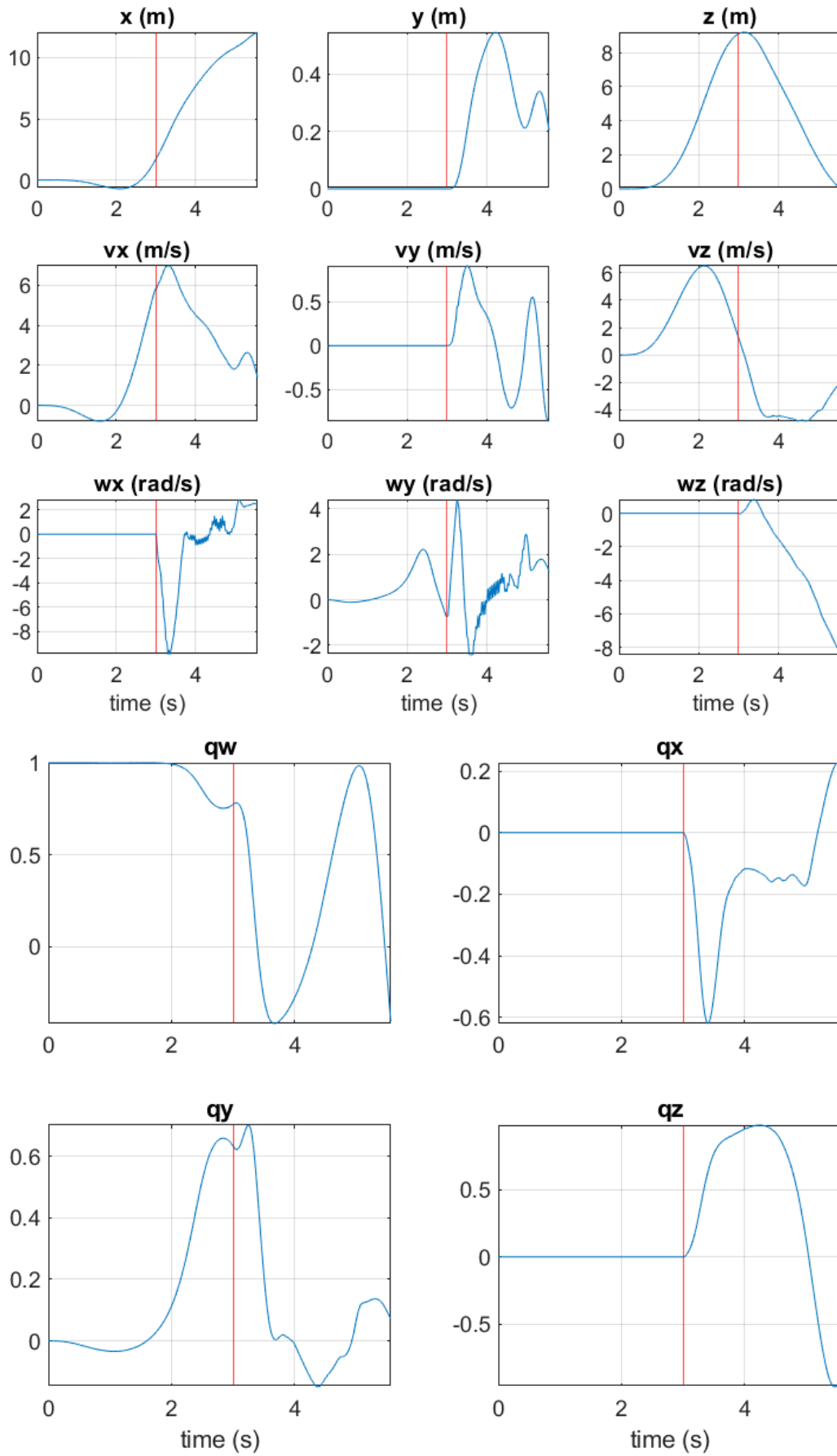
Η βλάβη συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 3s$ στους κινητήρες 1 και 5. Προβλέπεται ότι το όχημα δε θα πέσει μέσα στη μη ασφαλή περιοχή με κέντρο $(x, y) = (5, 7)$ και ακτίνα $R = 5$ αν εκτελέσει ελεύθερη πτώση. Ο ελεγκτής καλείται, διατηρώντας ίδια φορά κίνησης, να προσγειώσει το πολυ-ελικοφόρο.



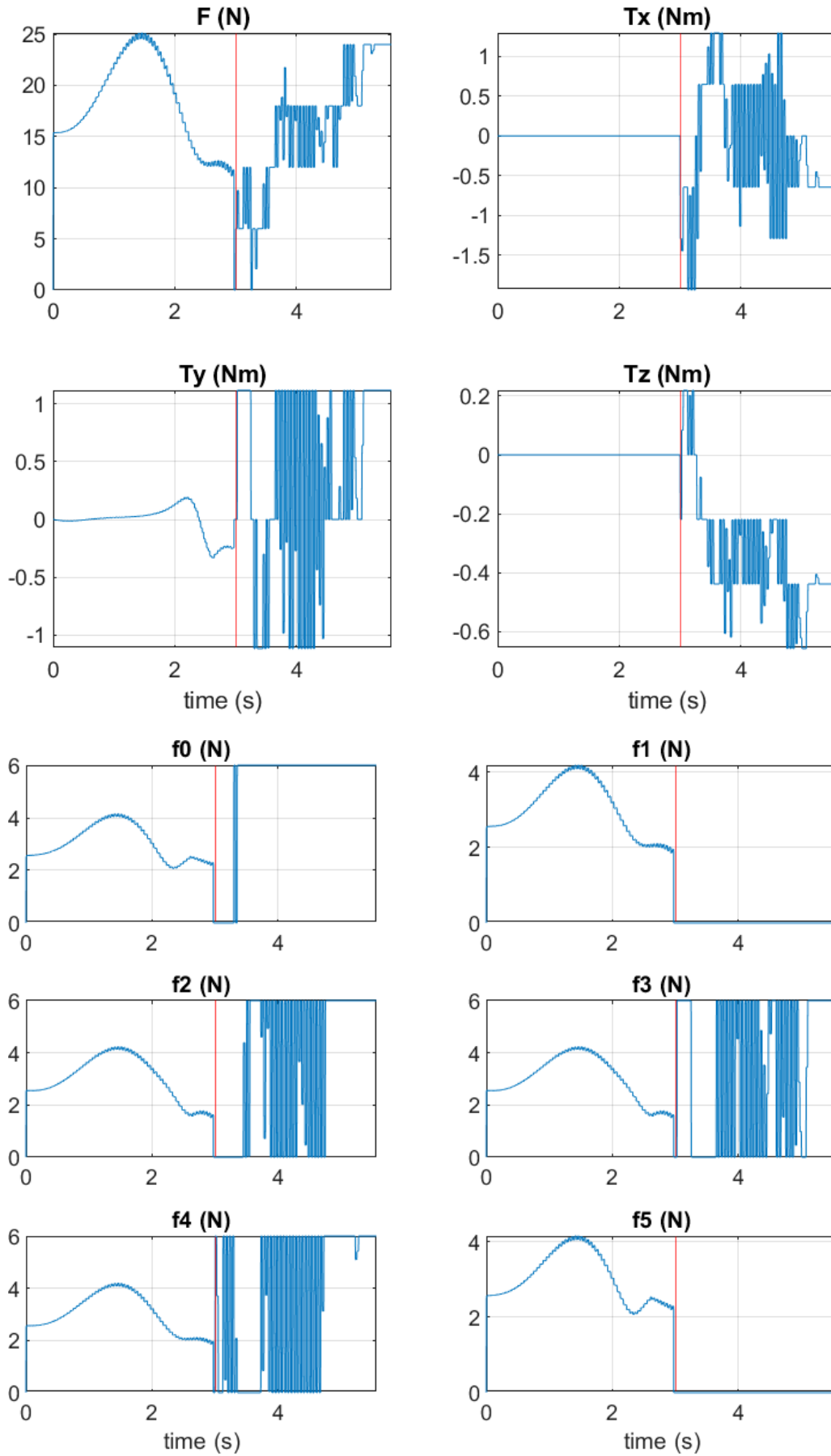
Σχήμα 6.10: Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη



Σχήμα 6.11: Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη



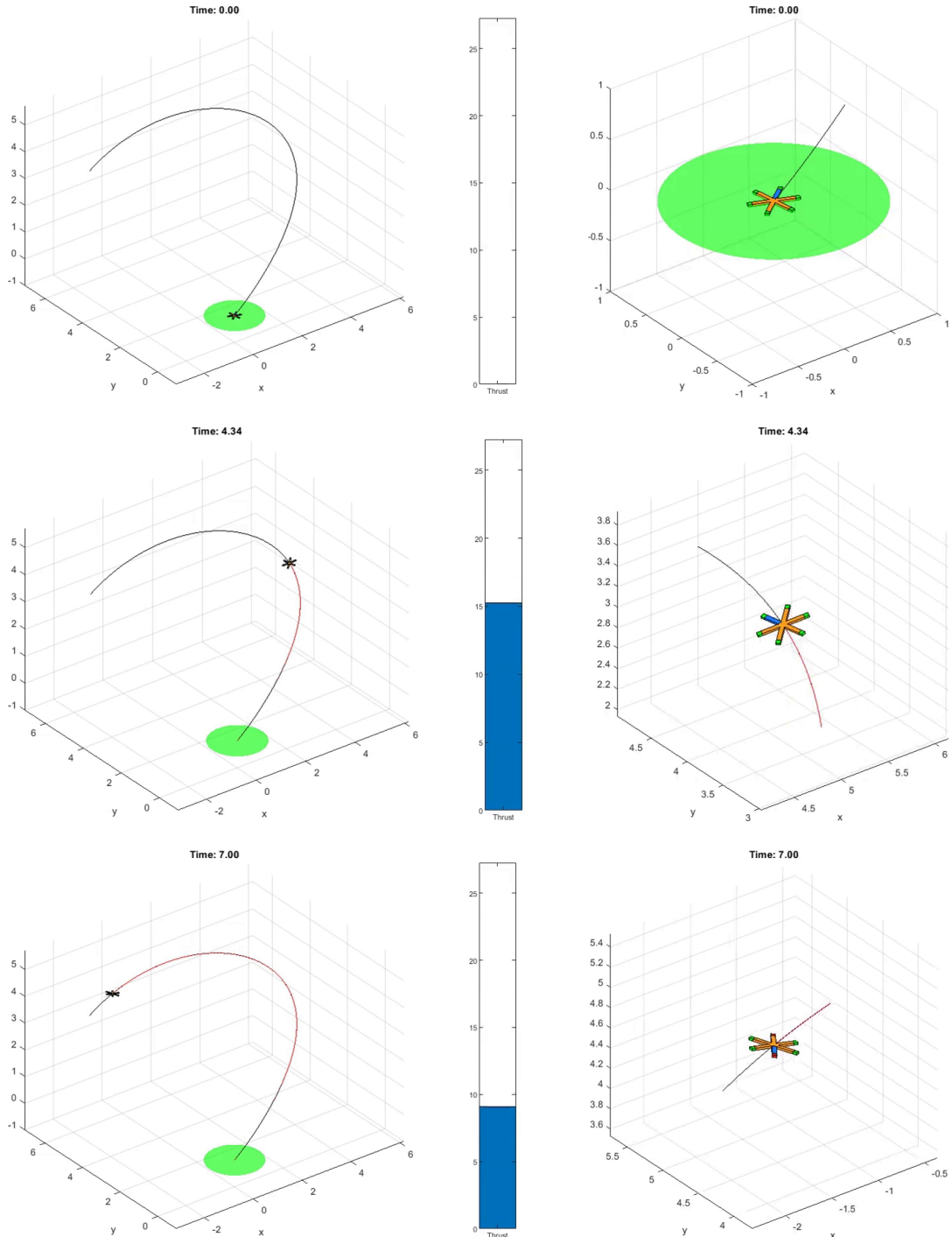
Σχήμα 6.12: Διάνυσμα κατάστασης



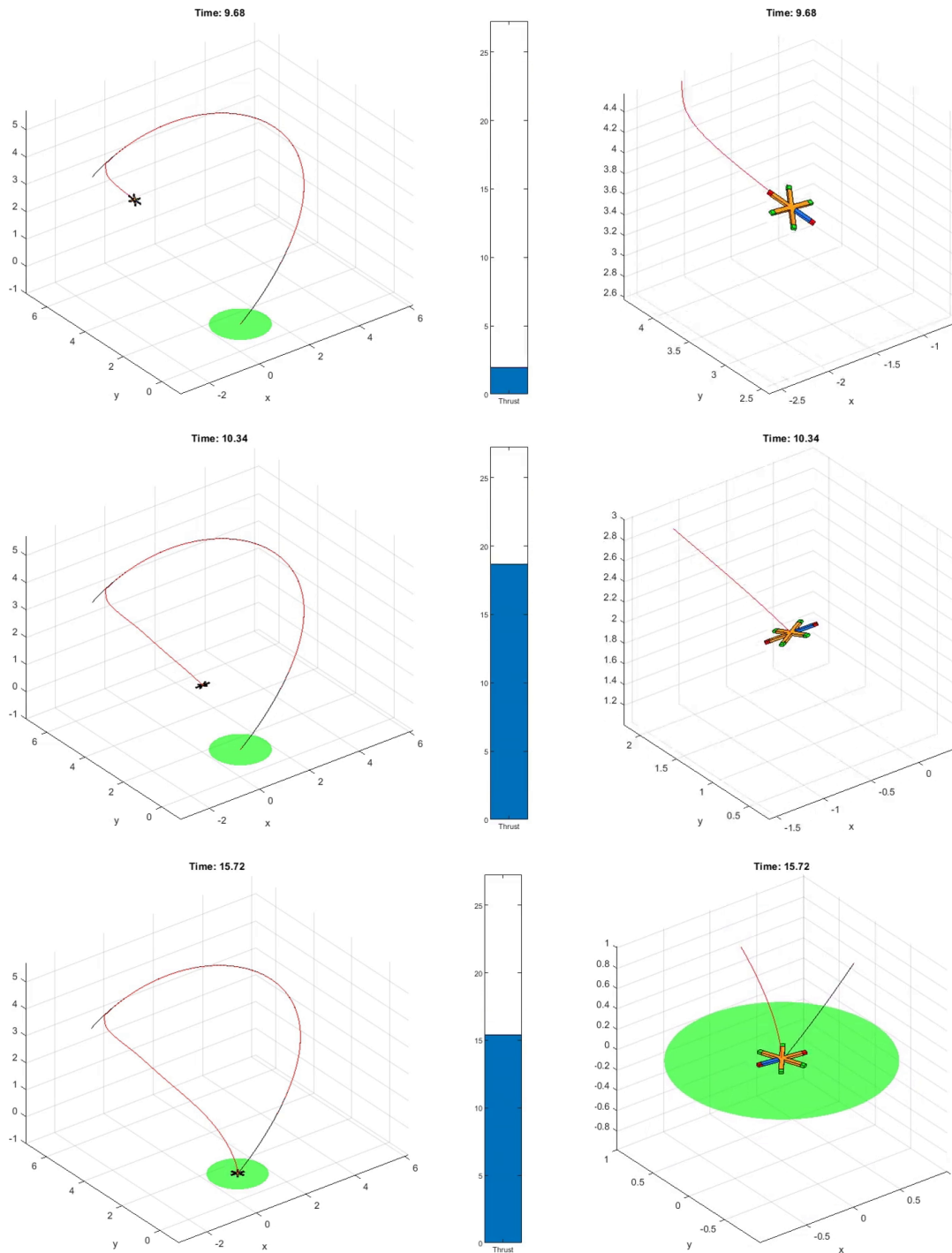
Σχήμα 6.13: Διάγραμμα εισόδου

Κατηγορία III

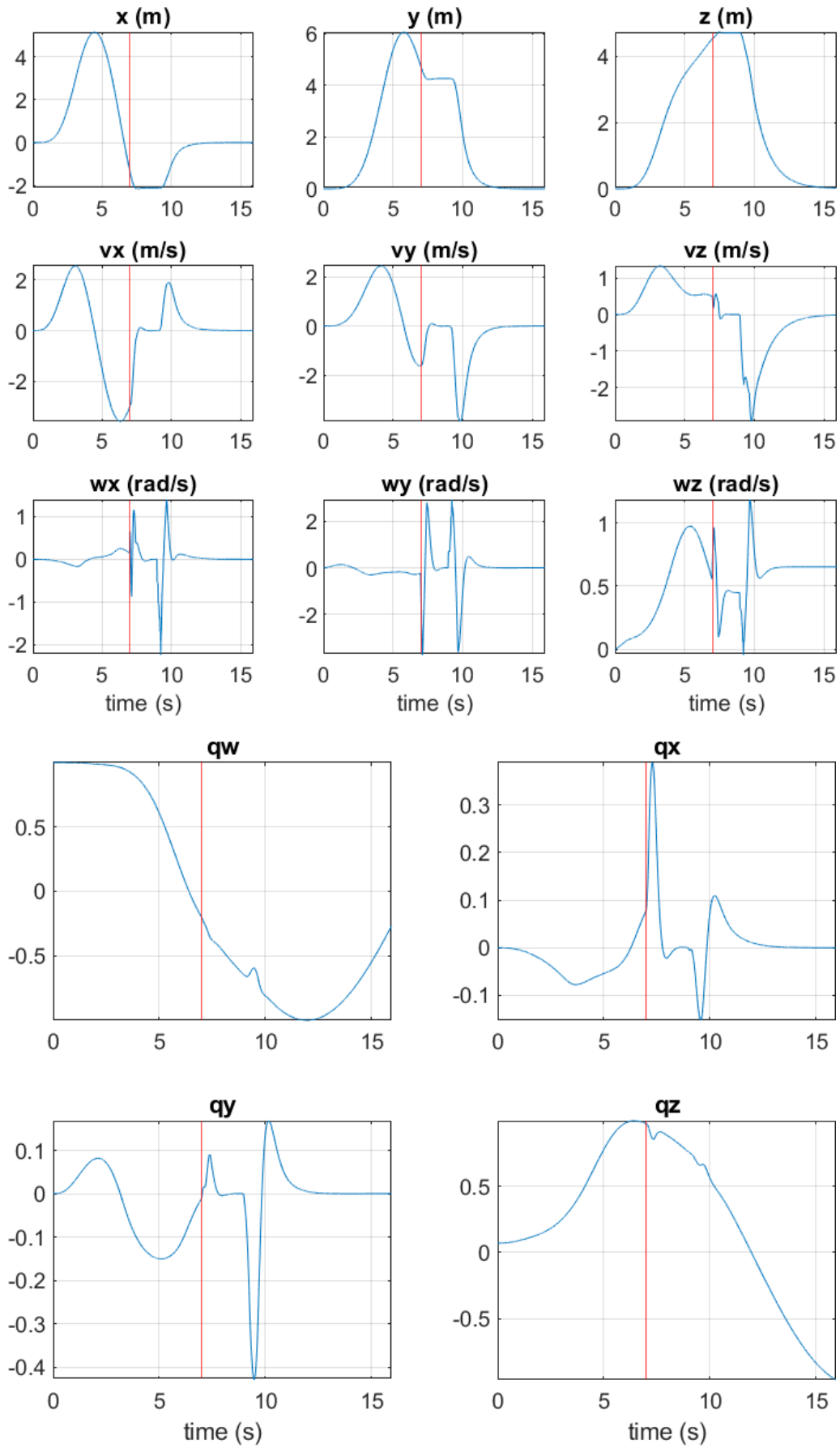
Η βλάβη συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 7s$ στους κινητήρες 0 και 3. Ο ελεγκτής μετά τη βλάβη καλείται να προσγειώσει το πολυ-ελικοφόρο στο σημείο με συντεταγμένες $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ που θεωρείται ασφαλές.



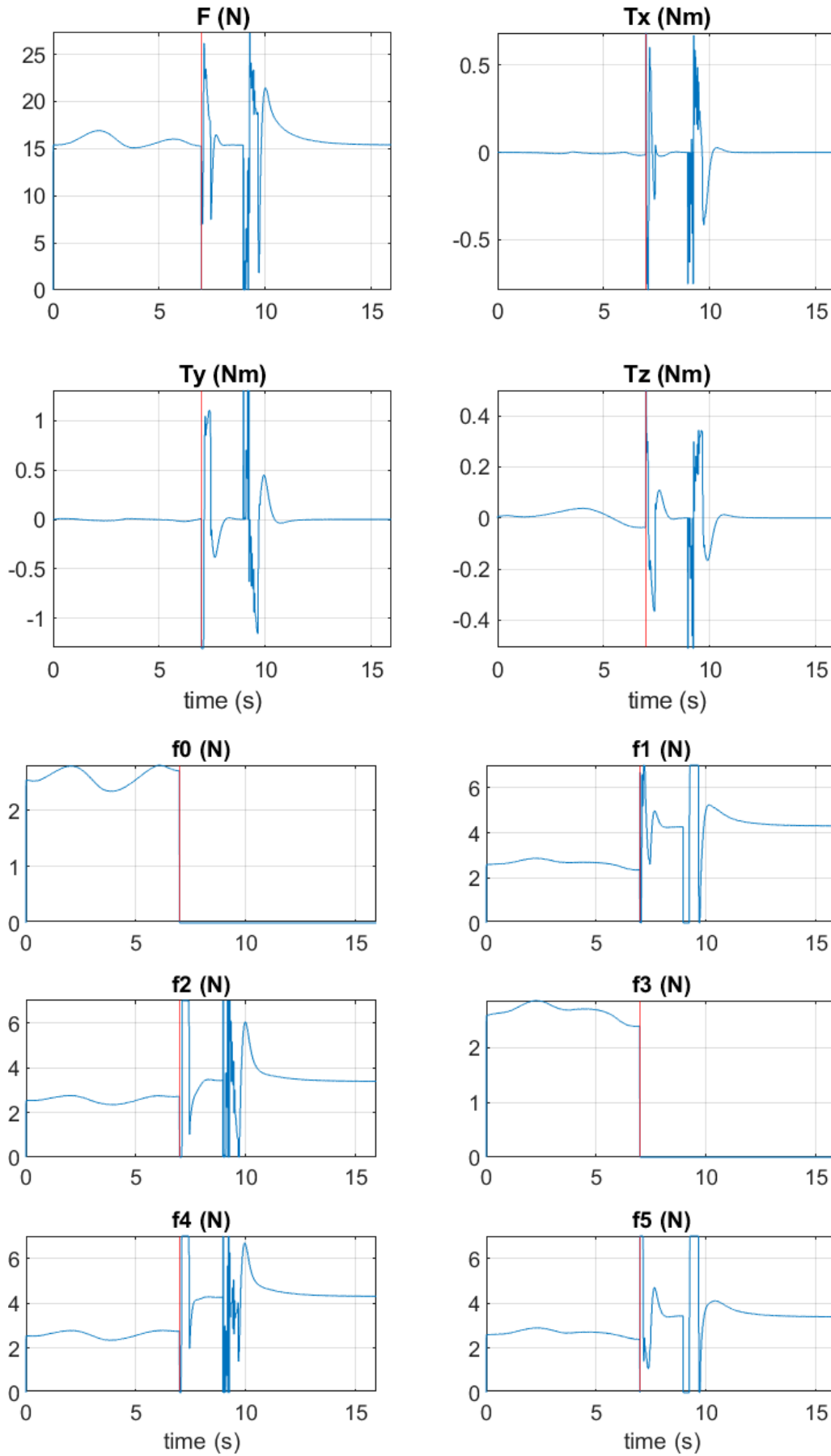
Σχήμα 6.14: Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη



Σχήμα 6.15: Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη

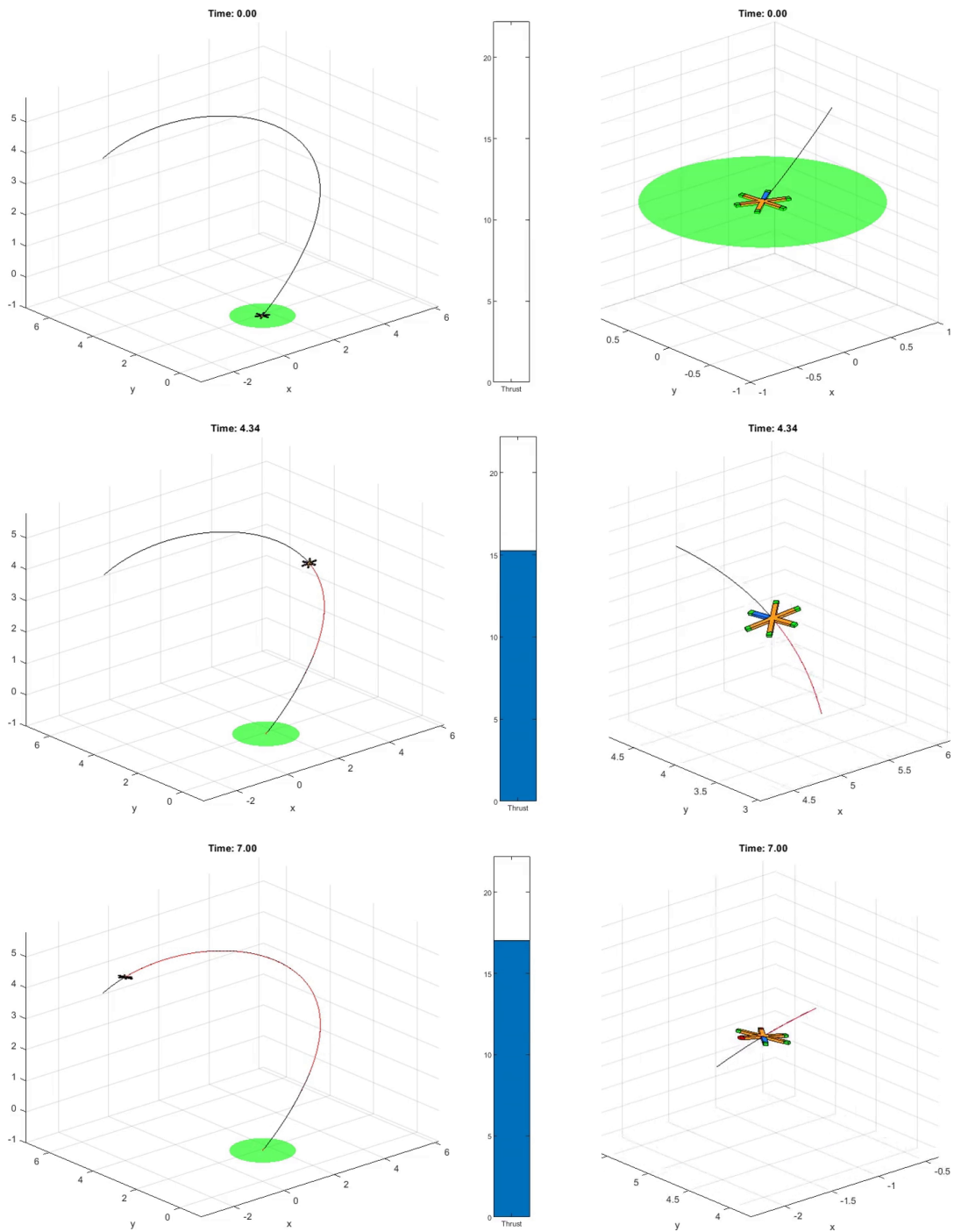


Σχήμα 6.16: Διάνυσμα κατάστασης

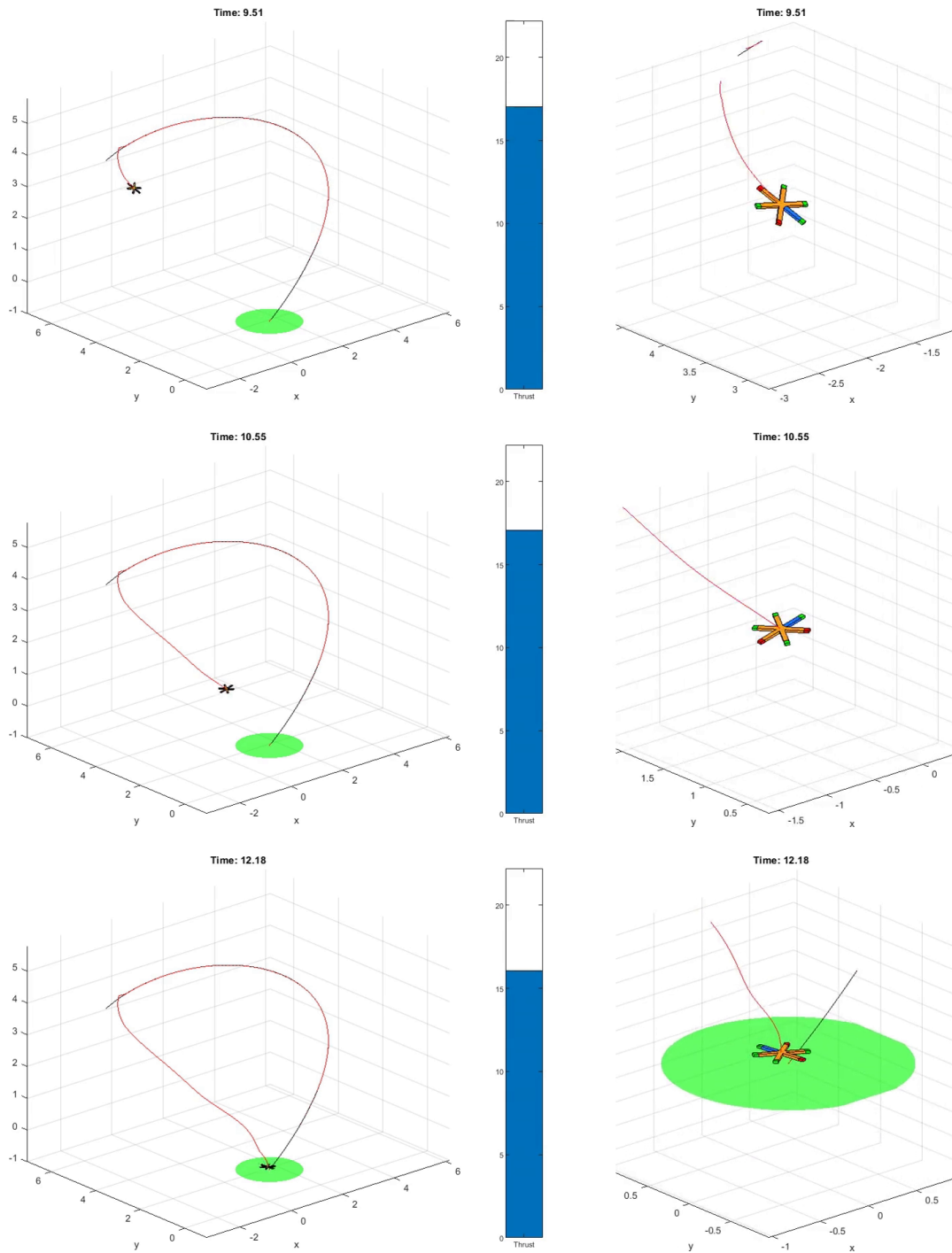


Σχήμα 6.17: Διάγραμμα εισόδου

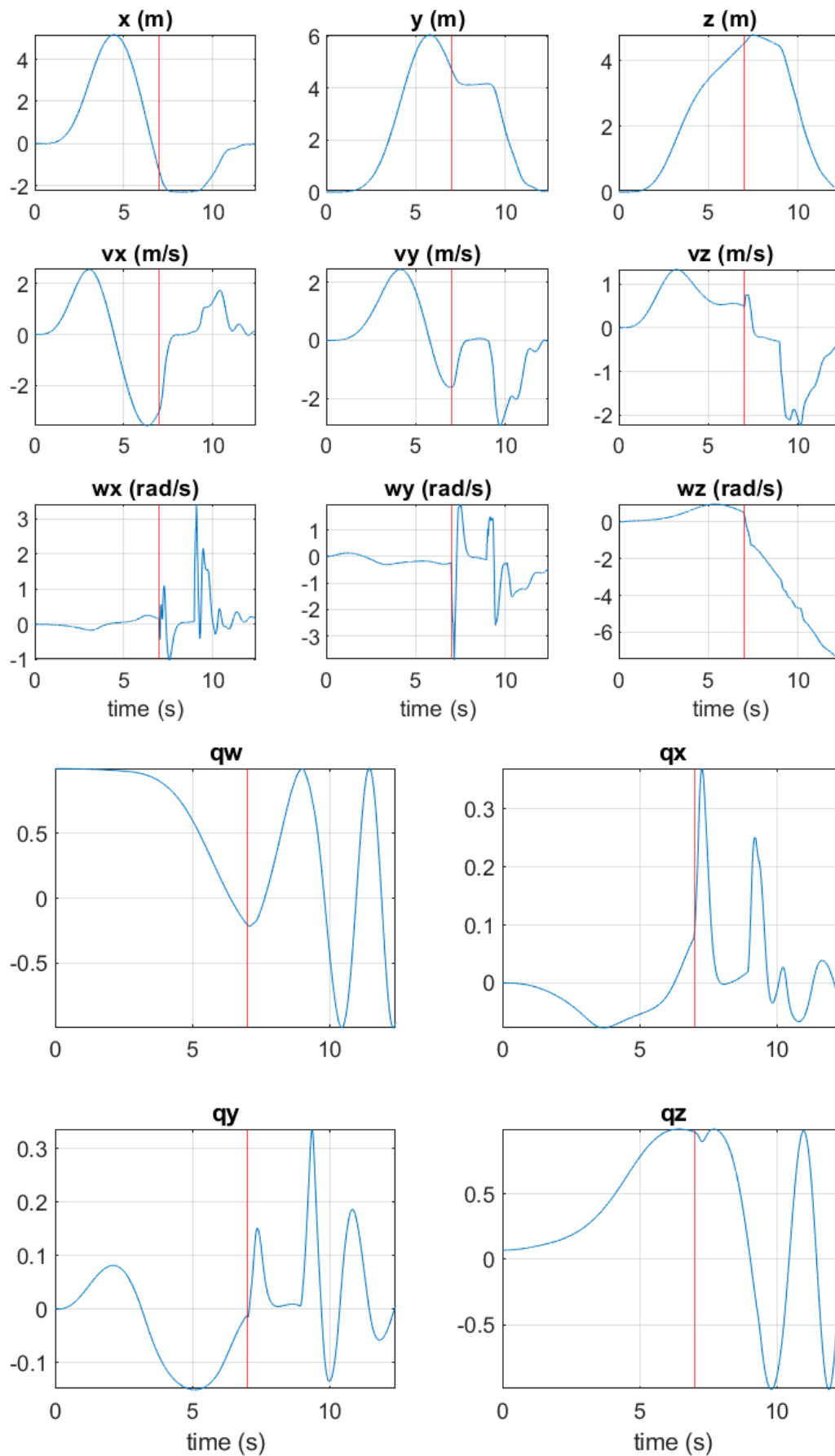
Η βλάβη συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 7s$ στους κινητήρες 3 και 5. Ο ελεγκτής μετά τη βλάβη καλείται να προσγειώσει το πολυ-ελικοφόρο στο σημείο με συντεταγμένες $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ που θεωρείται ασφαλές.



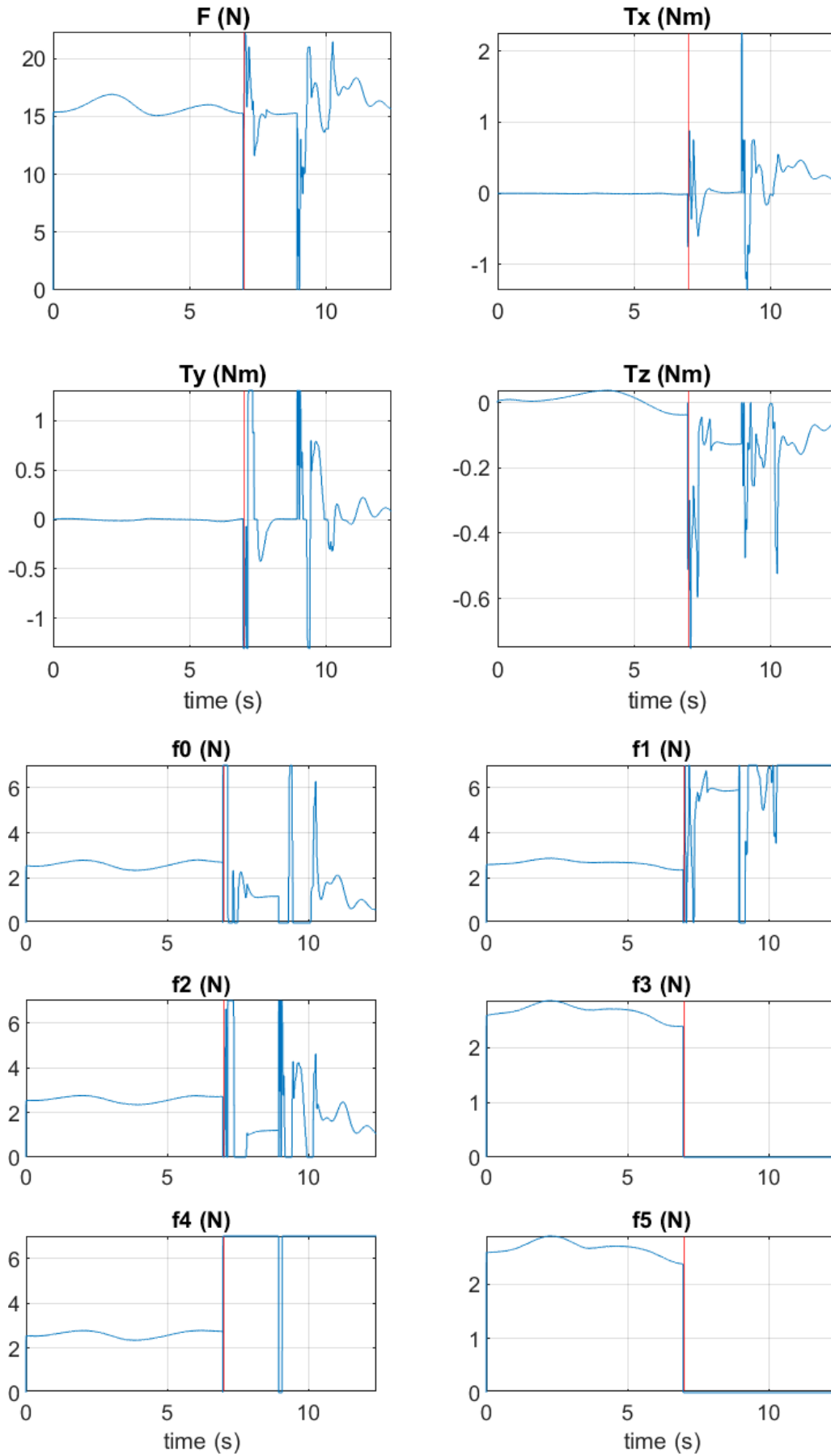
Σχήμα 6.18: Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη



Σχήμα 6.19: Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη



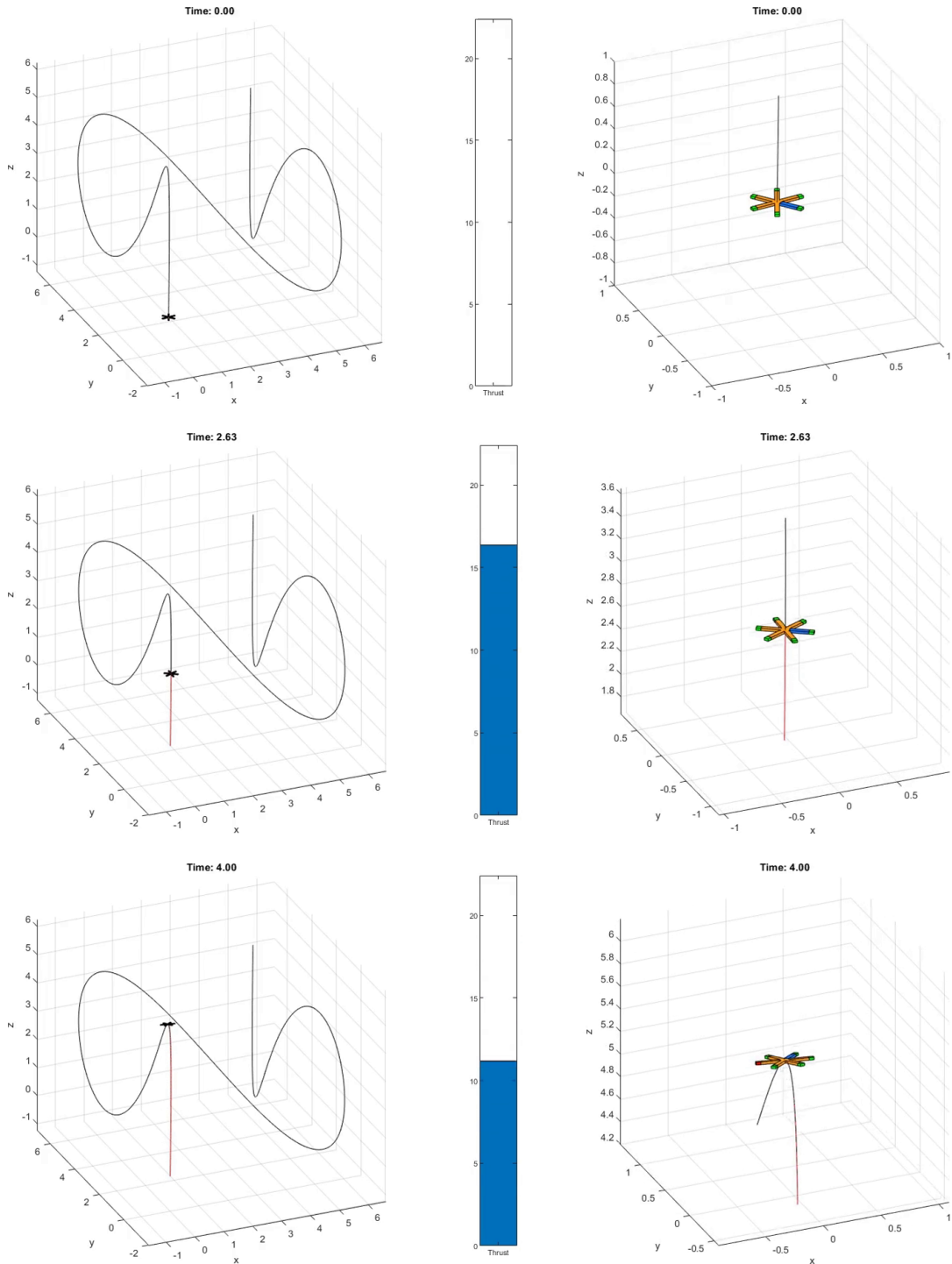
Σχήμα 6.20: Διάνυσμα κατάστασης



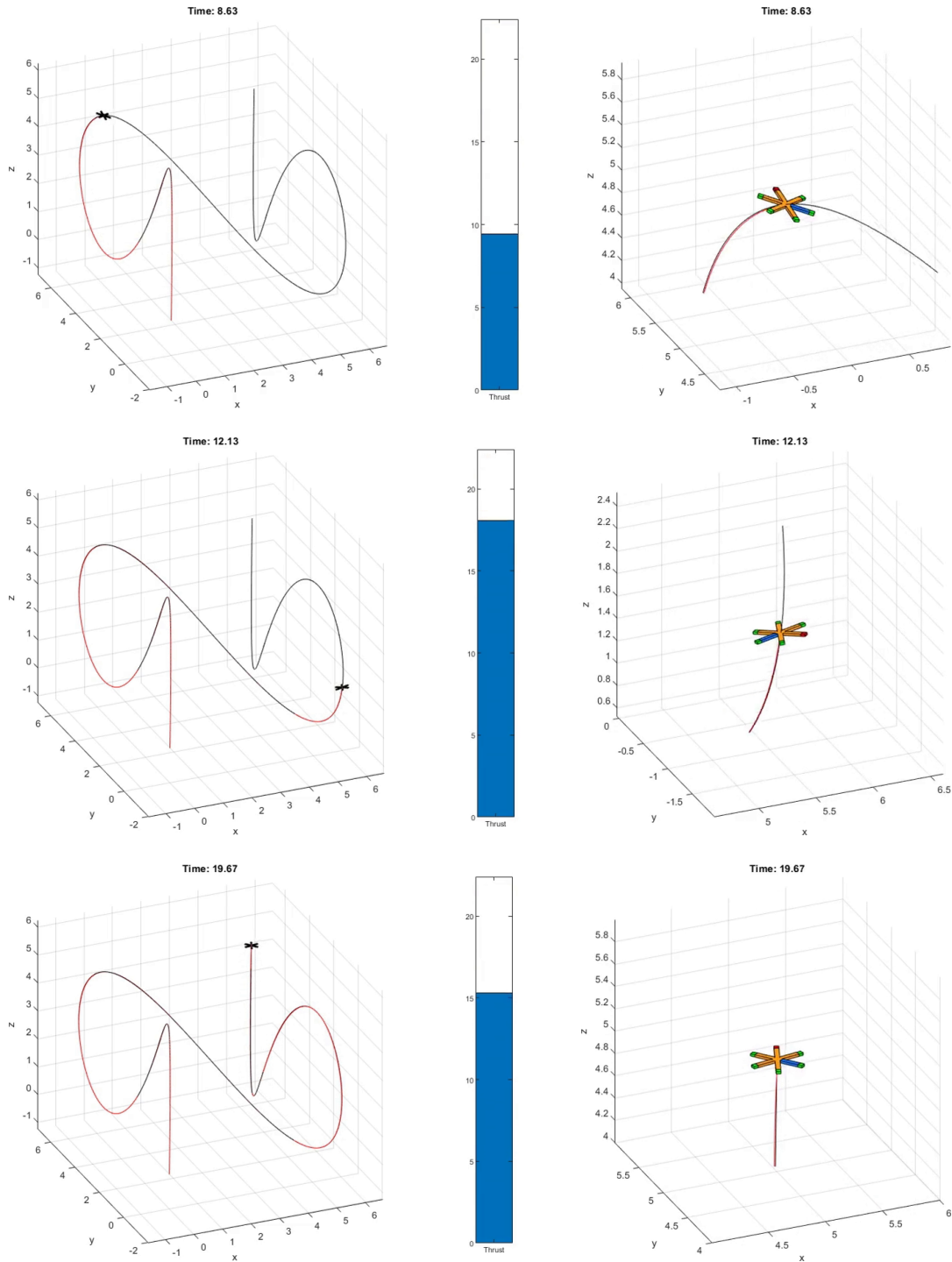
Σχήμα 6.21: Διάγραμμα εισόδου

Κατηγορία IV

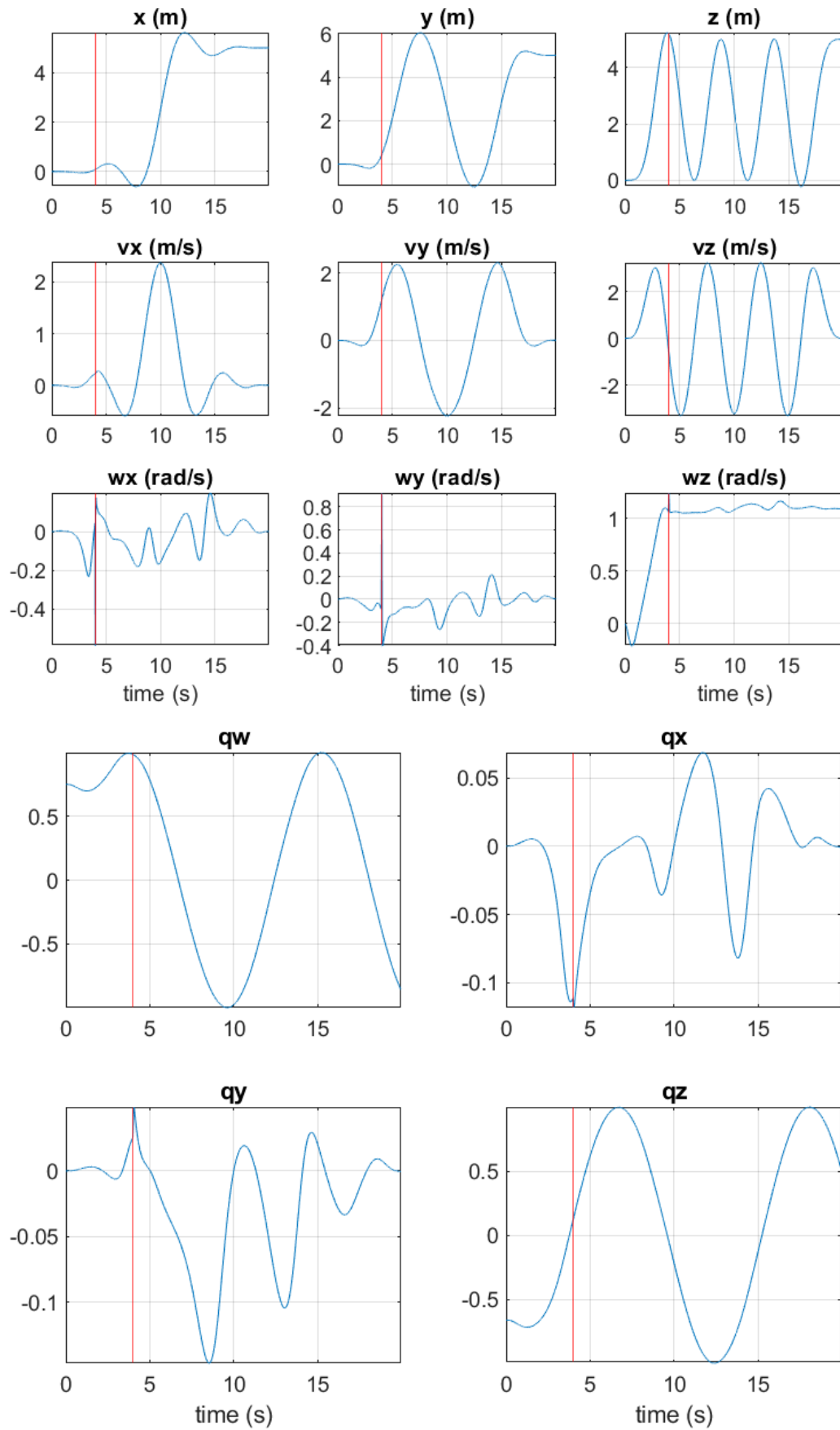
Η βλάβη συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 4s$ στον κινητήρα 2. Ο ελεγκτής μετά τη βλάβη συνεχίζει την παρακολούθηση της προκαθορισμένης τροχιάς αναφοράς.



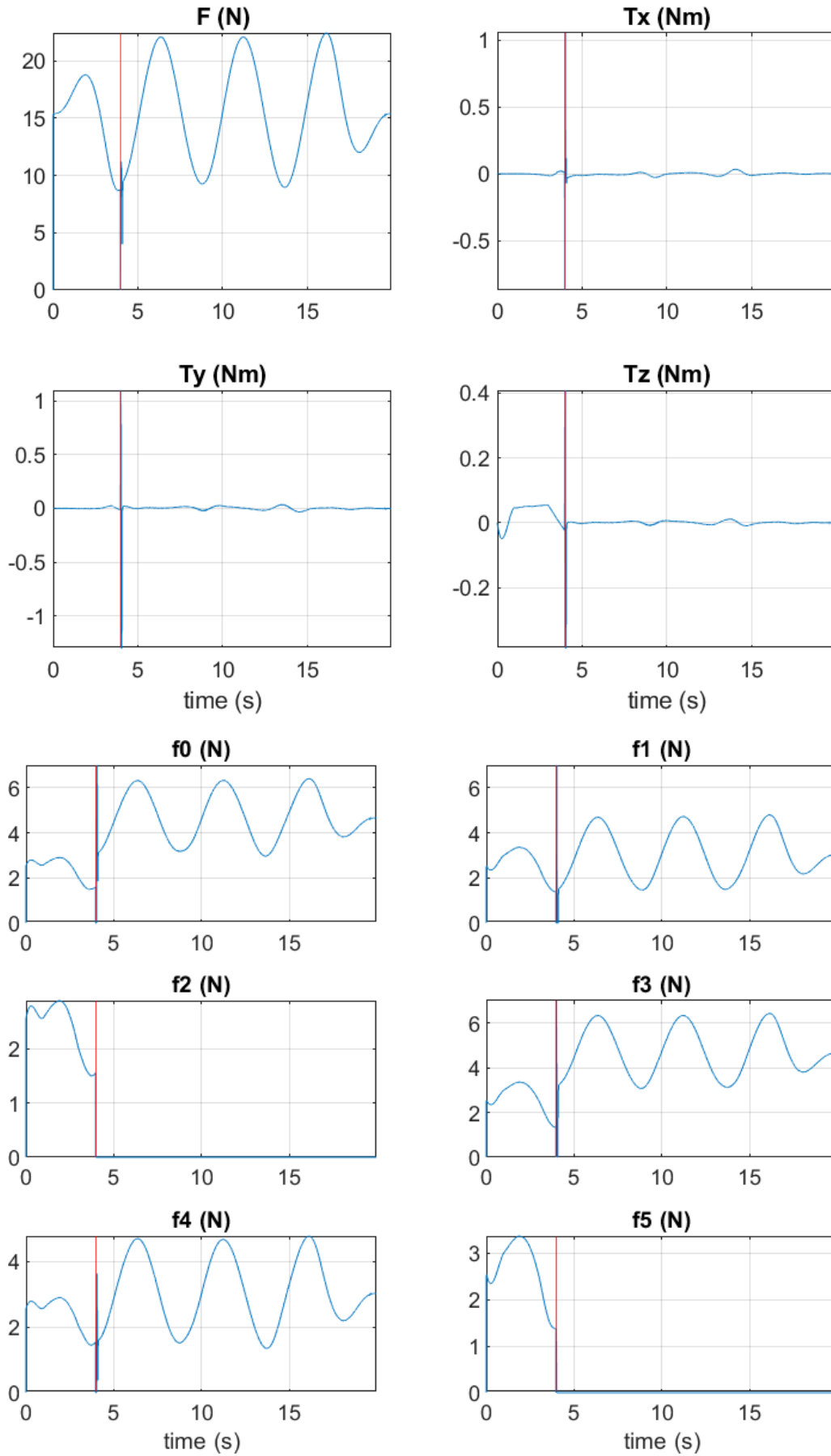
Σχήμα 6.22: Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη



Σχήμα 6.23: Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη

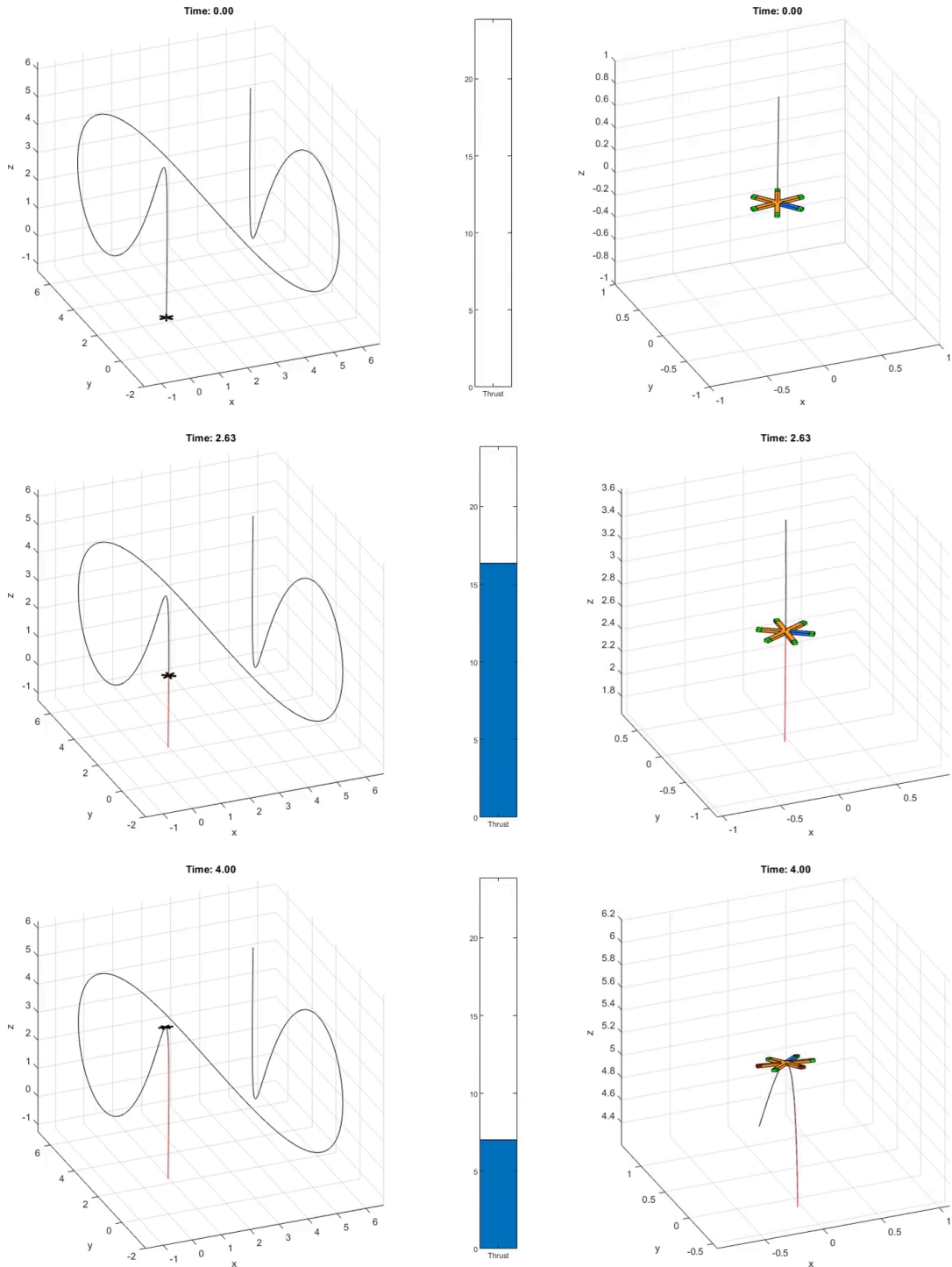


Σχήμα 6.24: Διάνυσμα κατάστασης

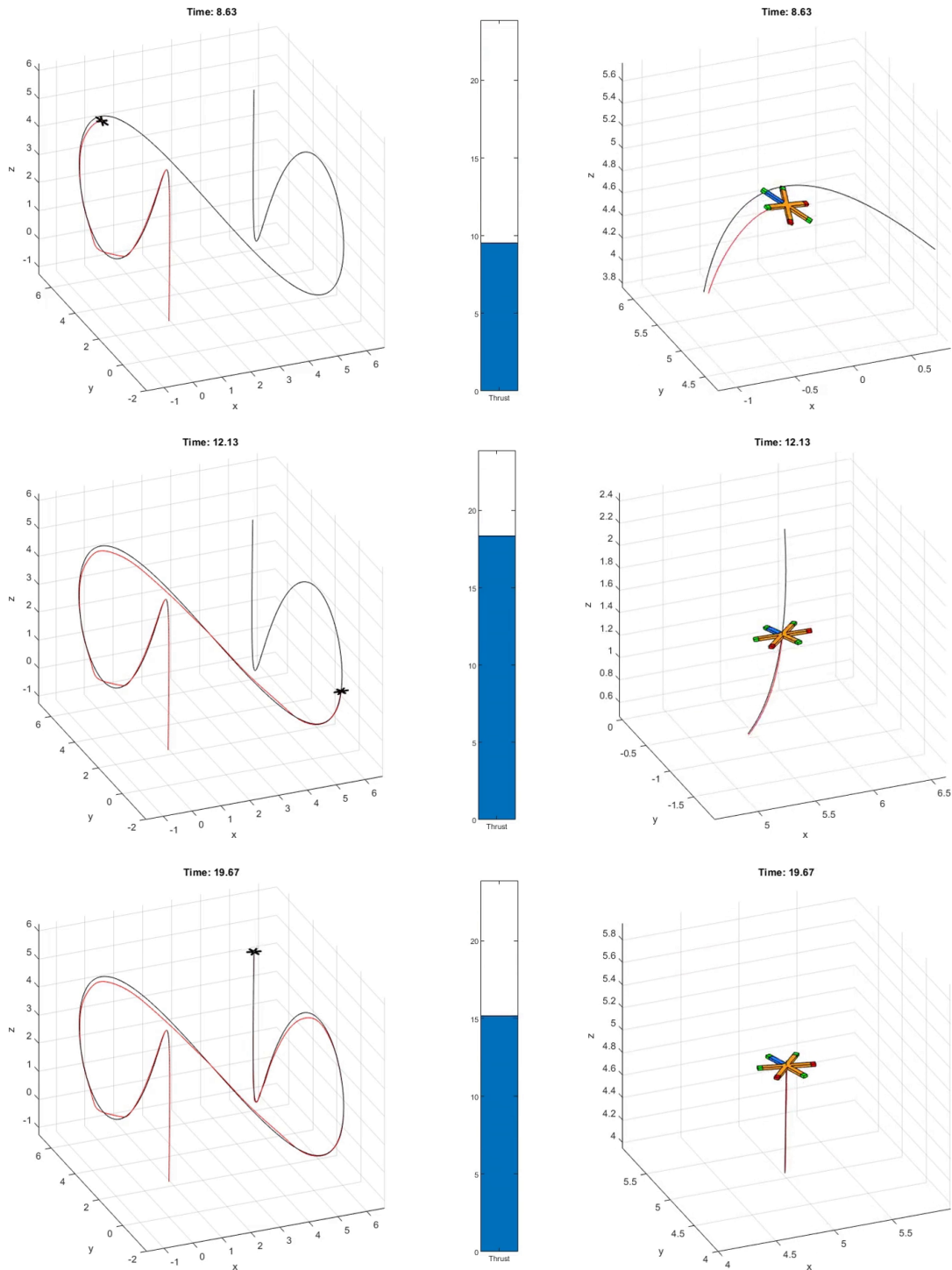


Σχήμα 6.25: Διάγραμμα εισόδου

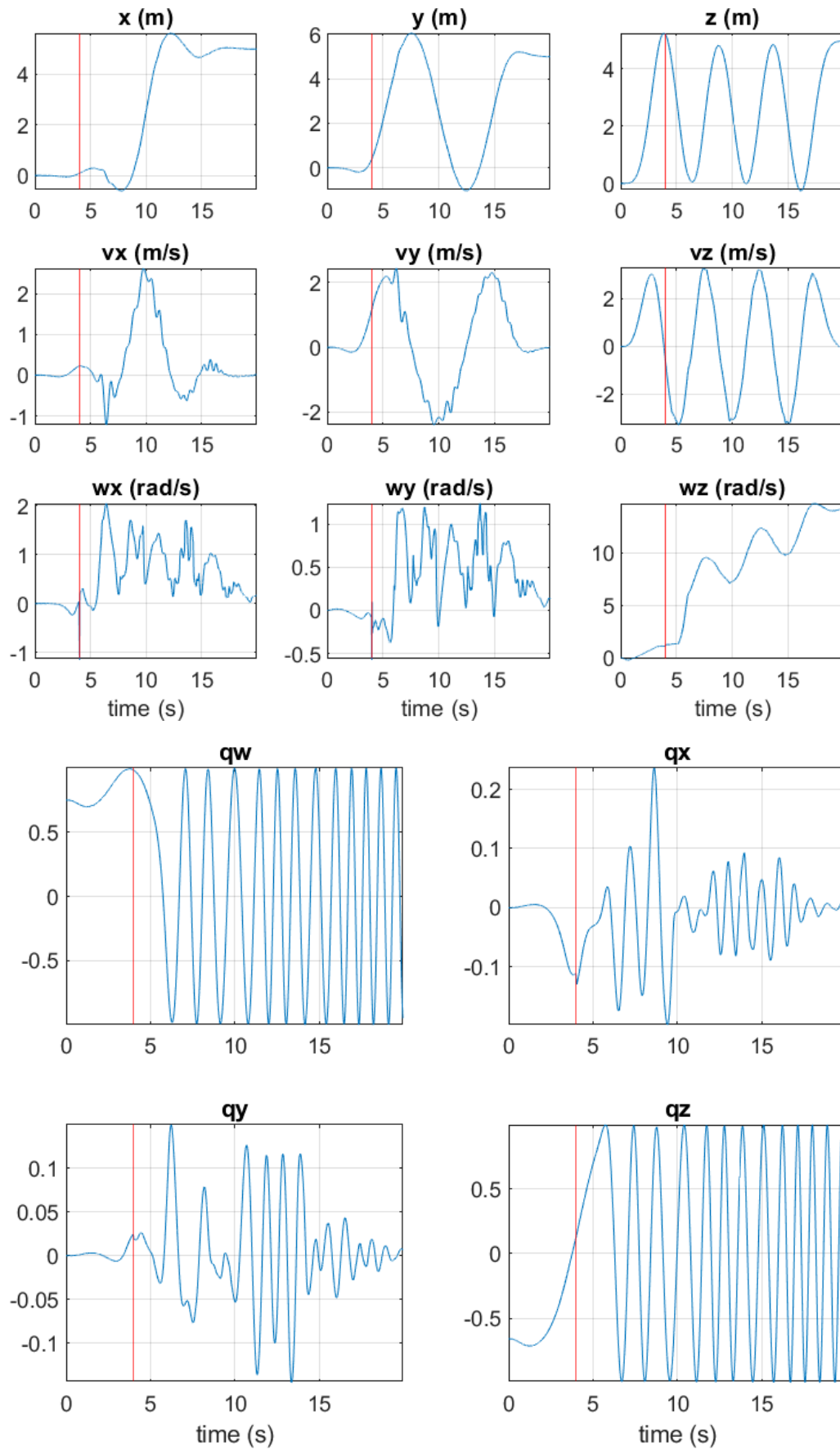
Η βλάβη συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 4s$ στους κινητήρες 2 και 4. Ο ελεγκτής μετά τη βλάβη συνεχίζει την παρακολούθηση της προκαθορισμένης τροχιάς αναφοράς.



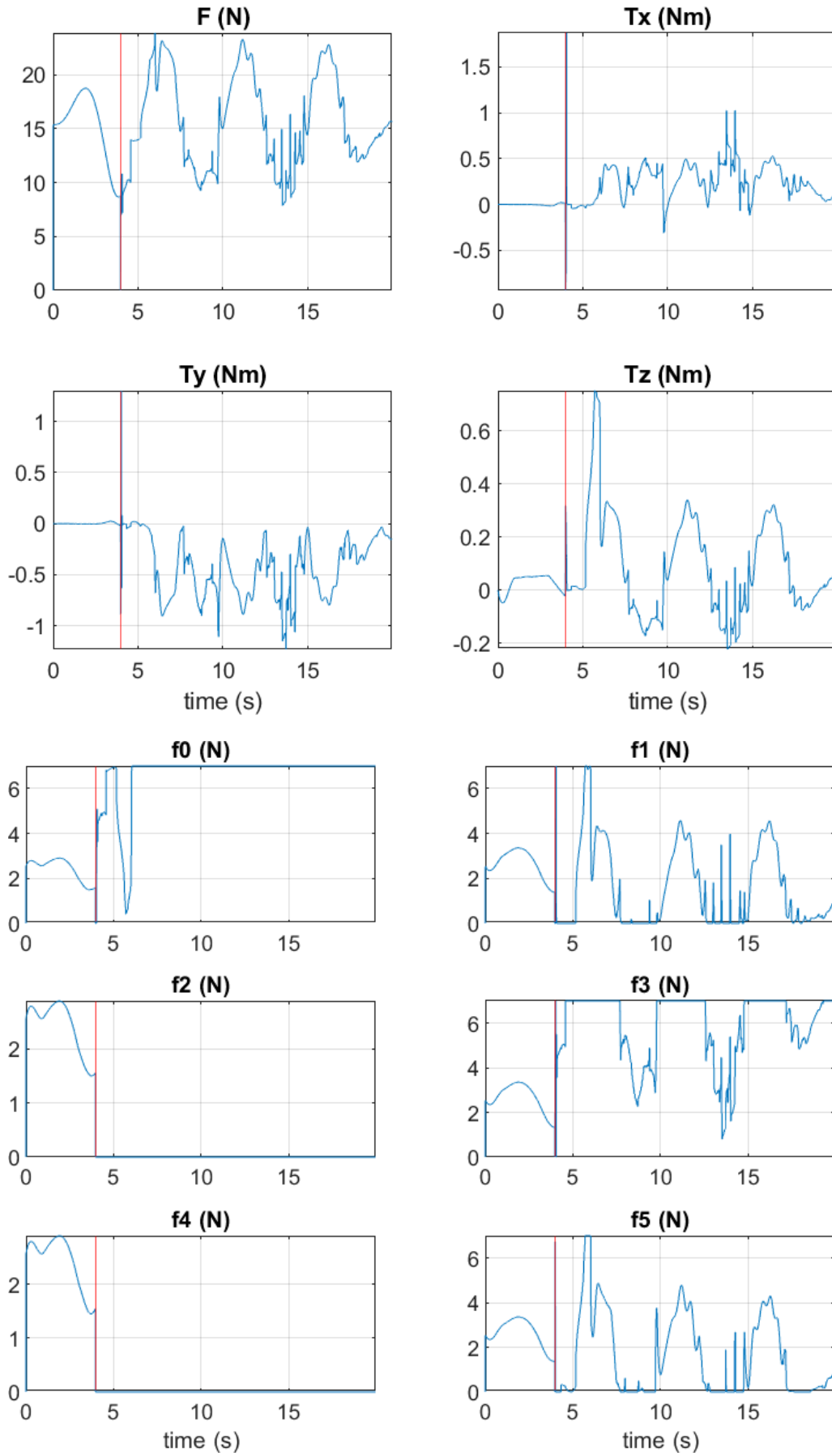
Σχήμα 6.26: Στιγμιότυπα προσομοίωσης πριν τη βλάβη



Σχήμα 6.27: Στιγμιότυπα προσομοίωσης μετά τη βλάβη

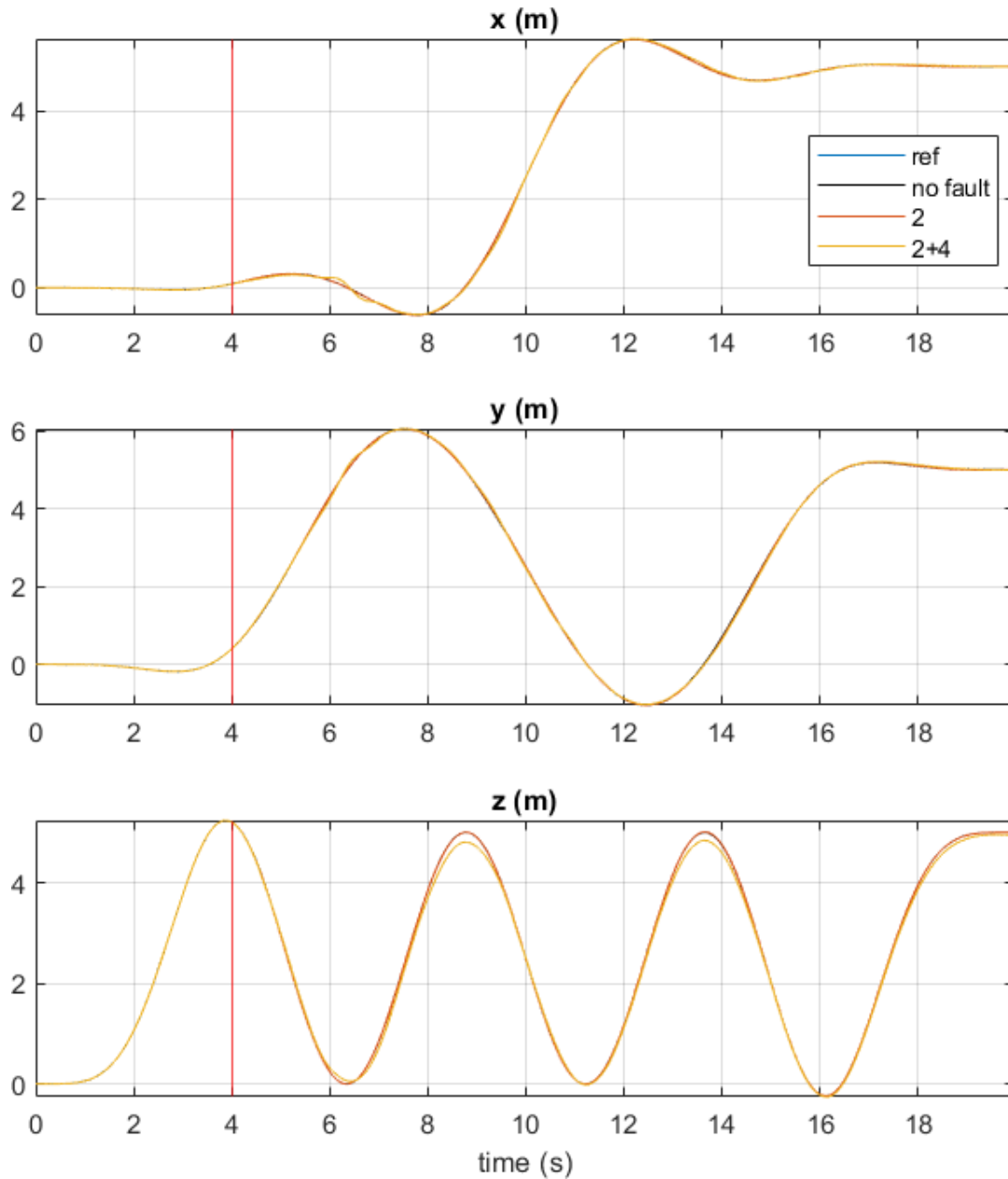


Σχήμα 6.28: Διάγραμμα κατάστασης

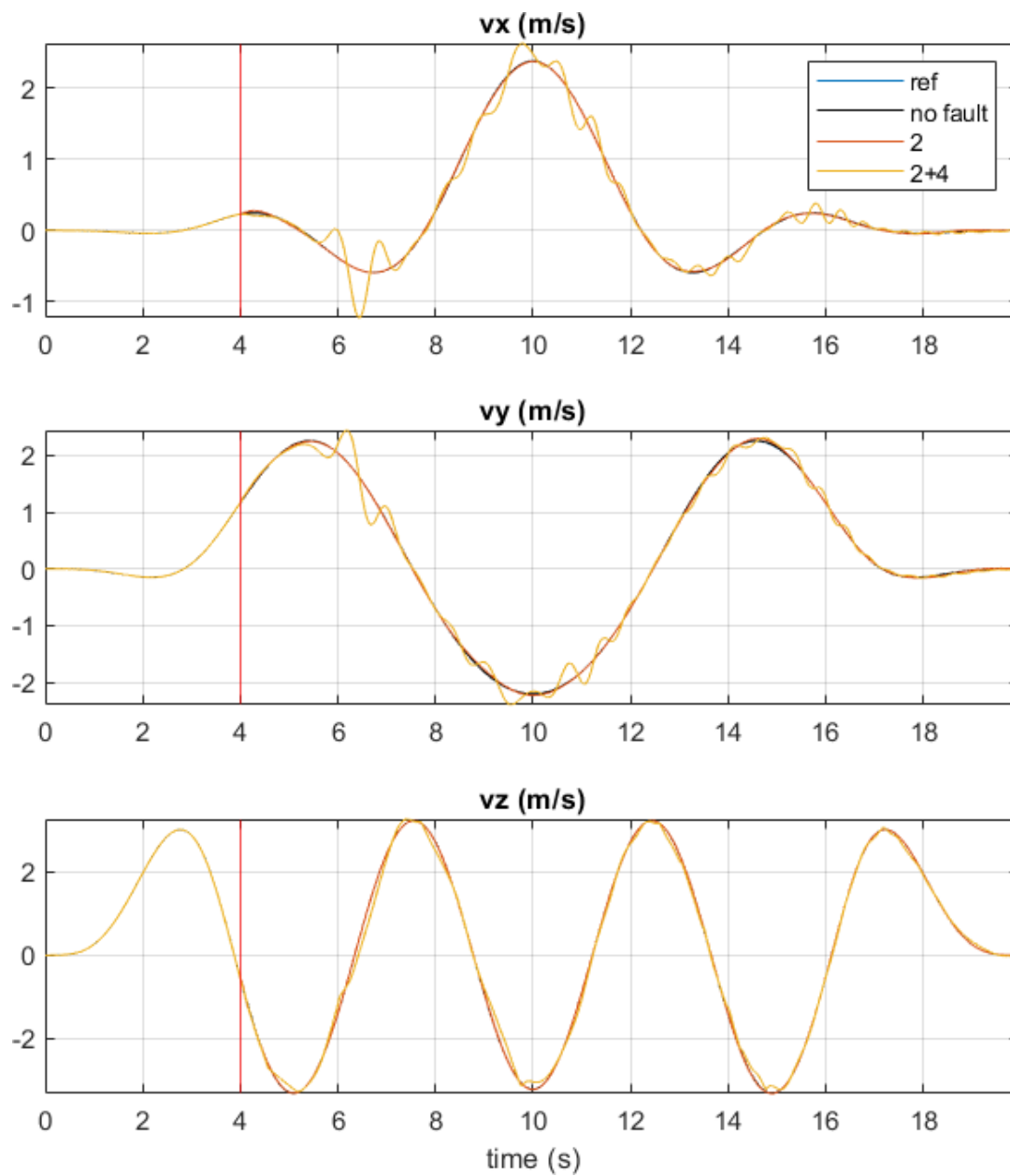


Σχήμα 6.29: Διάγραμμα εισόδου

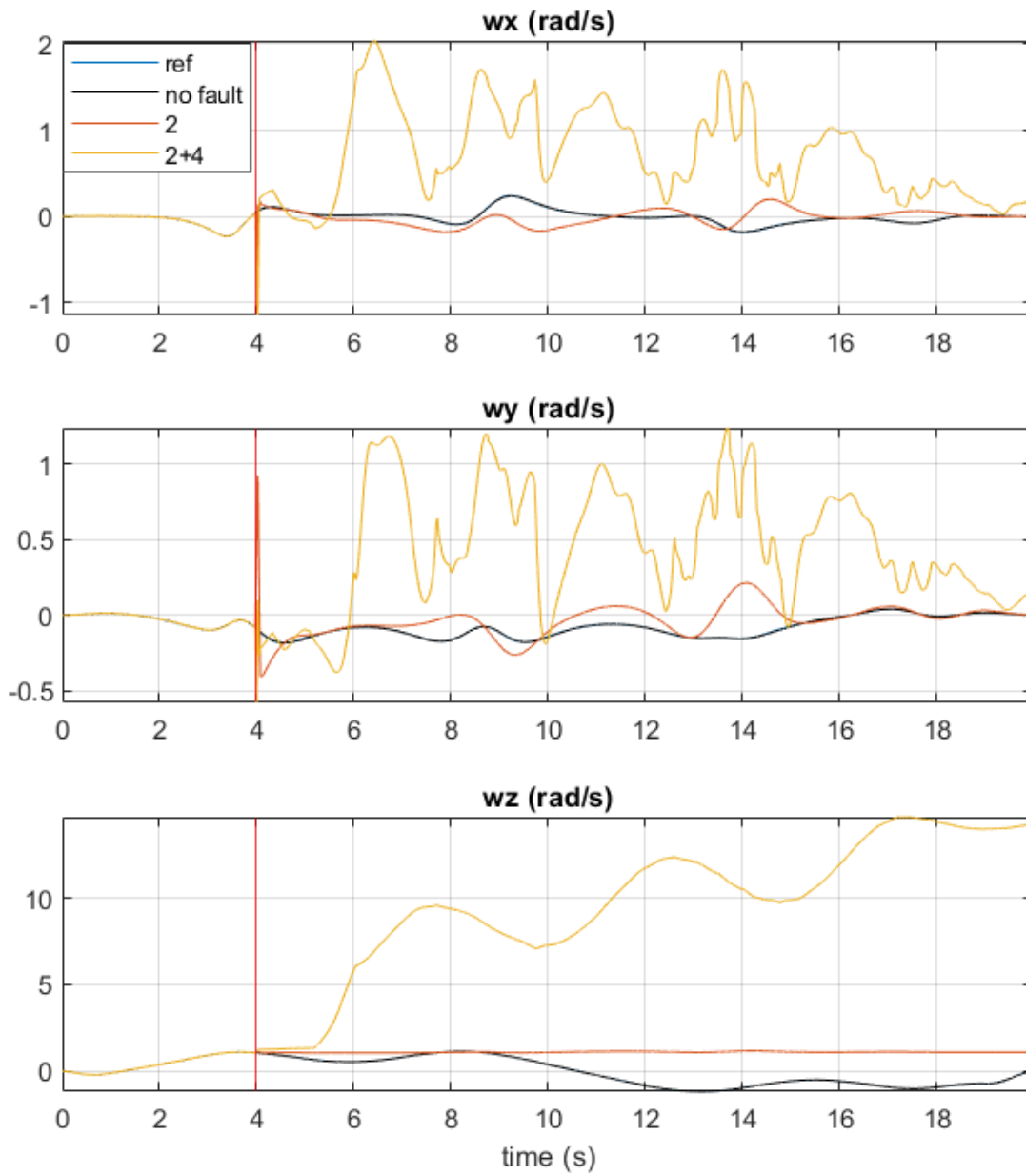
Στα επόμενα σχήματα γίνεται σύγκριση της επίδοσης των παραπάνω σεναρίων της Κατηγορίας 4 με την περίπτωση της παρακολούθησης της τροχιάς από ένα όχημα που δε παρουσιάζει βλάβη. Φαίνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις η παρακολούθηση θέσης είναι ικανοποιητικά κοντά στην τροχιά αναφοράς. Φαίνεται ακόμα ότι ο ελεγκτής, ειδικά στην περίπτωση της βλάβης των κινητήρων 2 και 4, “θυσιάζει” τη γωνιακή ταχύτητα του οχήματος για να παραμείνει πιστός στην παρακολούθηση της θέσης.



Σχήμα 6.30: Σύγκριση θέσης



Σχήμα 6.31: Σύγκριση γραμμικής ταχύτητας



Σχήμα 6.32: Σύγκριση γωνιακής ταχύτητας

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα και Μελλοντικές Κατευθύνσεις

Αναλογιζόμενοι τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως οι στόχοι της εργασίας που περιγράφηκαν στο **Κεφάλαιο 1** έχουν επιτευχθεί. Στη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας εξετάστηκε πρώτα η αποστολή της παρακολούθησης τροχιάς από όχημα χωρίς βλάβη. Αναπτύχθηκε αναλυτική μεθοδολογία για παραγωγή τροχιάς και εισόδου αναφοράς για πολυ-ελικοφόρα οχήματα. Οι τροχιές αναφοράς είναι τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις και προκύπτουν από επίλυση προβλήματος βελτιστοποίησης. Σχεδιάστηκε ακόμα προβλεπτικός ελεγκτής που χρησιμοποιώντας κατάλληλα χρονομεταβλητά επιπεδοσύνολα μιας συνάρτησης Lyapunov επιτυγχάνει παρακολούθηση των προαναφερθέντων τροχιών από πολυ-ελικοφόρο όχημα χωρίς βλάβη.

Στη συνέχεια έγινε επέκταση του προβλήματος με την εισαγωγή ολικών βλαβών ενός ή περισσότερων κινητήρων του πολυ-ελικοφόρου. Δόθηκαν κριτήρια με βάση τα οποία καθορίζεται η συμπεριφορά του ελεγκτή μετά την παρουσία της βλάβης. Τα πιθανά σενάρια που επιλέχθηκαν για τον ελεγκτή (με προτεραιότητα από πάνω προς τα κάτω) είναι τα ακόλουθα τέσσερα:

- Παρακολούθηση τροχιάς αναφοράς
- Προσγείωση σε ασφαλή περιοχή
- Αποφυγή μη ασφαλούς περιοχής
- Ελαχιστοποίηση ταχύτητας πρόσκρουσης

Ο ελεγκτής με αυτό τον τρόπο προσαρμόζεται στις ιδιαιτερότητες της κάθε βλάβης και επιτυγχάνει αύξηση της αυτονομίας του οχήματος.

Όλα τα παραπάνω ελέγχθηκαν σε περιβάλλον προσομοίωσης με επιτυχία. Οι δυσκολίες της εργασίας αφορούν στην πλειοψηφία τους την υπολογιστική υλοποίηση των προτεινόμενων μεθοδολογιών. Η επίτευξη σύγκλισης σε προβλήματα βελτιστοποίησης όπως και οι υψηλές υπολογιστικές απαιτήσεις για τον υπολογισμό του Backwards Reachable Tube ήταν κάποιες από αυτές.

Το πεδίο της αντιστάθμισης βλαβών είναι γεμάτο προκλήσεις και ευκαιρίες. Υπάρχει, λοιπόν, σίγουρα χώρος για βελτιώσεις και επεκτάσεις. Μελλοντικές εργασίες θα μπορούσαν να ασχοληθούν μεταξύ άλλων με

- Βελτίωση του δυναμικού μοντέλου με προσθήκη τριβών και διαταραχών
- Επέκταση για την αντιμετώπιση μερικής βλάβης κινητήρα
- Επέκταση για την αντιμετώπιση βλάβης αισθητήρα
- Πειραματική επαλήθευση των προτεινόμενων μεθοδολογιών.

Παράρτημα Α

Quaternions

Τα quaternions είναι ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο για την αναπαράσταση της περιστροφής ενός στερεού σώματος. Περιγράφηκαν για πρώτη φορά από τον Ιρλανδό μαθηματικό William Rowan Hamilton το 1843 και έχουν σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι των πιο συνηθισμένων γωνιών Euler χάρη στην έλλειψη μοναδικοτήτων/ασυνέχειας (singularities όπως το gimbal lock) αλλά και χάρη στη μαθηματική τους απλότητα. Ενώ πολλές μέθοδοι χρησιμοποιούν τριγωνομετρικές συναρτήσεις που είναι μη γραμμικές και υποφέρουν από αριθμητικά σφάλματα για την περιγραφή περιστροφών στον τρισδιάστατο χώρο, τα quaternions χρειάζονται μόνο πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις και αθροίσματα για τον ίδιο σκοπό.

A.1 Ορισμός

Τα quaternions είναι ένα αριθμητικό σύστημα που αποτελεί επέκταση των μιγαδικών αριθμών. Στο σύστημα αυτό υπάρχουν τρεις φανταστικές μονάδες (i, j και k) αντί της μίας που έχουν οι μιγαδικοί αριθμοί. Ένας αριθμός Q που ανήκει στο χώρο των quaternions \mathbb{H} είναι μία έκφραση της μορφής

$$Q = q_w + q_x i + q_y j + q_z k \in \mathbb{H}, \quad (\text{A.1})$$

όπου $\{q_w, q_x, q_y, q_z\} \in \mathbb{R}$ και $\{i, j, k\}$ είναι οι τρεις φανταστικές μονάδες που ορίζονται έτσι ώστε

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad (\text{A.2})$$

από το οποίο μπορούμε να πάρουμε

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (\text{A.3})$$

Ισοδύναμα, ένα quaternion μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός βαθμωτού και ενός διανυσματικού μέρους,

$$Q = q_w + q_x i + q_y j + q_z k \quad \Leftrightarrow \quad Q = q_w + \mathbf{q}_v, \quad (\text{A.4})$$

όπου το q_w αναφέρεται ως το *πραγματικό* ή *βαθμωτό* μέρος, και το $\mathbf{q}_v = q_x i + q_y j + q_z k = (q_x, q_y, q_z)$ αναφέρεται ως το *φανταστικό* ή *διανυσματικό* μέρος. Για λόγους πληρότητας, quaternions με μηδενικό βαθμωτό μέρος ονομάζονται pure quaternions,

$$Q = \mathbf{q}_v \in \mathbb{H}_p \subset \mathbb{H}. \quad (\text{A.5})$$

Συνηθίζεται τα quaternions να γράφονται ως ένα τετραδιάστατο διάνυσμα \mathbf{q} ,

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

ώστε να επιτρέπεται η χρήση της άλγεβρας πινάκων για πράξεις που συμπεριέχουν quaternions.

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο πως ενώ οι κανονικοί μιγαδικοί αριθμοί μοναδιαίου μήκους $\mathbf{z} = e^{i\theta}$ κωδικοποιούν περιστροφές στο δισδιάστατο επίπεδο (με ένα μιγαδικό γινόμενο, $\mathbf{x}' = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$), τα quaternions μοναδιαίου μήκους, η επέκταση δηλαδή των μιγαδικών, $\mathbf{q} = e^{(u_x i + u_y j + u_z k)\theta/2}$ κωδικοποιούν περιστροφές στον τρισδιάστατο χώρο (με ένα διπλό γινόμενο, $\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$, το οποίο θα επεξηγηθεί αργότερα στο κεφάλαιο).

A.2 Ιδιότητες

A.2.1 Άθροισμα

Το άθροισμα είναι απλό,

$$\mathbf{p} \pm \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w \pm q_w \\ \mathbf{p}_v \pm \mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Στο άθροισμα ισχύει η **αντιμεταθετική** και η **προσεταιριστική** ιδιότητα,

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r}. \quad (\text{A.9})$$

A.2.2 Γινόμενο

Το γινόμενο των quaternions συμβολίζεται με \otimes και απαιτεί τη χρήση των ορισμών [A.1](#) και [A.3](#). Το αποτέλεσμα γραμμένο σε μορφή διανύσματος είναι

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z \\ p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y \\ p_w q_y - p_x q_z + p_y q_w + p_z q_x \\ p_w q_z + p_x q_y - p_y q_x + p_z q_w \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί επίσης να γραφεί συναρτήσει των βαθμωτών και διανυσματικών μερών των quaternions

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - \mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v \\ p_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

όπου η παρουσία του εξωτερικού γινομένου υποδεικνύει πως το γινόμενο των quaternions **δεν είναι αντιμεταθετικό** στη γενική περίπτωση,

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}. \quad (\text{A.12})$$

Το γινόμενο των quaternions είναι παρόλα αυτά **προσεταιριστικό**,

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) = (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} \quad (\text{A.13})$$

και **επιμεριστικό επί του αθροίσματος**,

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \quad \text{και} \quad (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{r} \quad (\text{A.14})$$

Το γινόμενο δύο quaternions είναι bi-linear και μπορεί να εκφραστεί με δύο ισοδύναμα γινόμενα πινάκων, δηλαδή

$$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_1]_L \mathbf{q}_2 \quad \text{και} \quad \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_2]_R \mathbf{q}_1, \quad (\text{A.15})$$

όπου $[\mathbf{q}_1]_L$ και $[\mathbf{q}_2]_R$ είναι αντίστοιχα ο αριστερός και δεξιός πίνακας γινομένου των quaternions. Οι πίνακες αυτοί προκύπτουν από απλή επισκόπηση των [A.10](#) και [A.15](#),

$$[\mathbf{q}]_L = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & q_w & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_R = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

ή πιο συνοπτικά από τις εξισώσεις [A.11](#) και [A.15](#),

$$[\mathbf{q}]_L = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & [\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_R = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Εδώ, ο skew-symmetric τελεστής $[\bullet]_\times$ παράγει τον πίνακα εξωτερικού γινομένου,

$$[a]_\times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

που είναι ένας skew-symmetric πίνακας, $[a]_\times^\top = -[a]_\times$, ισοδύναμος με το εξωτερικό γινόμενο, δηλαδή,

$$[a]_\times b = a \times b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{A.19})$$

Τέλος, αφού

$$(\mathbf{q} \otimes \mathbf{x}) \otimes \mathbf{p} = [\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L \mathbf{x} \quad \text{και} \quad \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x} \otimes \mathbf{p}) = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R \mathbf{x} \quad (\text{A.20})$$

ισχύει η σχέση

$$[\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R, \quad (\text{A.21})$$

δηλαδή οι αριστεροί και δεξιοί πίνακες γινομένου των quaternions είναι αντιμεταθετικοί.

A.2.3 Ταυτότητα

Το ουδέτερο quaternion \mathbf{q}_1 όσο αφορά τον πολλαπλασιασμό είναι τέτοιο ώστε $\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$. Αντιστοιχεί στο ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών “1” εκφρασμένο ως quaternion,

$$\mathbf{q}_1 = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

A.2.4 Συζυγές

Το συζυγές quaternion ορίζεται ως

$$\mathbf{q}^* \triangleq q_w - \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Το συζυγές quaternion έχει τις ιδιότητες

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

και

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p}^*. \quad (\text{A.25})$$

A.2.5 Νόρμα

Η νόρμα ενός quaternion ορίζεται ως εξής

$$\|\mathbf{q}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*} = \sqrt{\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}} = \sqrt{q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.26})$$

Έχει την ιδιότητα

$$\|\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\| = \|\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|. \quad (\text{A.27})$$

A.2.6 Αντιστροφή

Το αντίστροφο quaternion \mathbf{q}^{-1} είναι τέτοιο ώστε να ισχύει η ιδιότητα,

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}_1. \quad (\text{A.28})$$

Μπορεί να υπολογιστεί ως εξής

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / \|\mathbf{q}\|^2. \quad (\text{A.29})$$

A.2.7 Μοναδιαίο ή κανονικοποιημένο quaternion

Για το μοναδιαίο quaternion, $\|\mathbf{q}\| = 1$, και συνεπώς

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*. \quad (\text{A.30})$$

Όταν ερμηνεύουμε το μοναδιαίο quaternion ως προδιαγραφή προσανατολισμού, η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται πως η αντιστροφή περιστροφή μπορεί να επιτευχθεί με το συζυγές quaternion. Τα μοναδιαία quaternions μπορούν πάντα να γραφούν στη μορφή

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \mathbf{u} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

όπου το $\mathbf{u} = u_x i + u_y j + u_z k$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα και το θ είναι βαθμωτό μέγεθος.

A.2.8 Εκθετικό των pure quaternion

Το εκθετικό για τα quaternion είναι μια συνάρτηση ανάλογη του συνηθισμένου εκθετικού. Ορίζεται ως η απολύτως συγκλίνουσα δυναμοσειρά,

$$e^{\mathbf{q}} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{q}^k \in \mathbb{H}. \quad (\text{A.32})$$

Προφανώς, το εκθετικό ενός αμιγώς πραγματικού quaternion συμπίπτει με το συνηθισμένο εκθετικό. Πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή του εκθετικού ενός pure quaternion $\mathbf{v} = v_x i + v_y j + v_z k$ που είναι ένα νέο quaternion ορισμένο ως εξής,

$$e^{\mathbf{v}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{v}^k \in \mathbb{H}. \quad (\text{A.33})$$

Έστω $\mathbf{v} = \mathbf{u}\theta$, με το $\theta = \|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}$ και το \mathbf{u} μοναδιαίο. Ομαδοποιώντας τους βαθμωτούς και διανυσματικούς όρους της σειράς,

$$e^{\mathbf{u}\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + \left(\mathbf{u}\theta - \frac{\mathbf{u}\theta^3}{3!} + \frac{\mathbf{u}\theta^5}{5!} + \dots\right) \quad (\text{A.34})$$

φαίνονται οι σειρές των $\cos \theta$ και $\sin \theta$. Συνεπώς,

$$e^{\mathbf{v}} = e^{\mathbf{u}\theta} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \mathbf{u} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

που αποτελεί μία όμορφη επέκταση του τύπου του Euler για τους φανταστικούς αριθμούς, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Άξιο προσοχής είναι πως αφού $\|e^{\mathbf{v}}\|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, το εκθετικό ενός pure quaternion είναι ένα μοναδιαίο quaternion. Επίσης, ισχύει η ιδιότητα $e^{-\mathbf{v}} = (e^{\mathbf{v}})^*$.

Για quaternion μικρής γωνίας θ γίνεται προσέγγιση με σειρές Taylor για να αποφευχθεί η διαίρεση με το μηδέν στη σχέση $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$,

$$e^{\mathbf{v}} \approx \begin{bmatrix} 1 - \theta^2/2 \\ \mathbf{u}\theta(1 - \theta^2/6) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 - \theta^2/2 \\ \mathbf{v}(1 - \theta^2/6) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

A.2.9 Λογάριθμος των μοναδιαίων quaternion

Εύκολα φαίνεται πως αν $\|\mathbf{q}\| = 1$,

$$\log \mathbf{q} = \log(\cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta) = \log(e^{\mathbf{u}\theta}) = \mathbf{u}\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}\theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

δηλαδή, ο λογάριθμος ενός μοναδιαίου quaternion είναι ένα pure quaternion. Οι τιμές της γωνίας και του άξονα προκύπτουν απλά,

$$\theta = \arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w) \quad (\text{A.38})$$

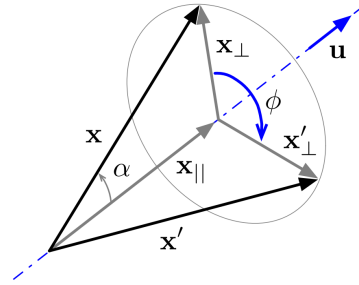
$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_v / \|\mathbf{q}_v\|. \quad (\text{A.39})$$

Για quaternion μικρής γωνίας θ γίνεται προσέγγιση με σειρές Taylor για να αποφευχθεί η διαίρεση με το μηδέν,

$$\log \mathbf{q} = \mathbf{u}\theta = \mathbf{q}_v \frac{\arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w)}{\|\mathbf{q}_v\|} \approx \frac{\mathbf{q}_v}{q_w} \left(1 - \frac{\|\mathbf{q}_v\|^2}{3q_w^2}\right) \approx \mathbf{q}_v \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \mathbf{0}. \quad (\text{A.40})$$

A.3 Περί Περιστροφών

A.3.1 Περιστροφή τρισδιάστατου διανύσματος και quaternions



$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} \\ \mathbf{x}_{\parallel} &= \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_{\perp} &= \mathbf{x} - \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

Σχήμα Α.1: Περιστροφή ενός διανύσματος \mathbf{x} , κατά μία γωνία φ , γύρω από τον άξονα \mathbf{u} .

Στο Σχήμα Α.1 απεικονίζεται η περιστροφή, κατά τον κανόνα του δεξιού χεριού, ενός γενικού τρισδιάστατου διανύσματος \mathbf{x} , κατά μία γωνία φ , γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{u} . Αυτό επιτυγχάνεται με τη διάσπαση του διανύσματος \mathbf{x} σε μία συνιστώσα \mathbf{x}_{\parallel} παράλληλη στο \mathbf{u} , και μία συνιστώσα \mathbf{x}_{\perp} κάθετη στο \mathbf{u} , έτσι ώστε

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}.$$

Αυτές οι συνιστώσες μπορούν να υπολογιστούν εύκολα (α είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{x} και \mathbf{u}),

$$\mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{u}(\|\mathbf{x}\| \cos \alpha) = \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x}$$

Κατά την περιστροφή, η παράλληλη συνιστώσα παραμένει αναλλοίωτη,

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \mathbf{x}_{\parallel},$$

ενώ η κάθετη συνιστώσα υπόκειται σε μία περιστροφή στο επίπεδο που είναι κάθετο στο \mathbf{u} . Αν δηλαδή δημιουργηθεί μία ορθογώνια βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ αυτού του επιπέδου με

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_{\perp}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{u} \times \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{u} \times \mathbf{x},$$

που ικανοποιεί τη σχέση $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\|$, τότε $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{e}_1 \cdot 1 + \mathbf{e}_2 \cdot 0$. Μία περιστροφή κατά φ rad σε αυτό το επίπεδο οδηγεί στο αποτέλεσμα,

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi,$$

που με αντικατάσταση γίνεται,

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \cos \varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \varphi.$$

Προσθέτοντας την παράλληλη συνιστώσα προκύπτει η έκφραση για το περιστραμμένο διάνυσμα, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_{\parallel} + \mathbf{x}'_{\perp}$, που είναι γνωστή ως ο τύπος περιστροφής διανύσματος,

$$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} \cos \varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \varphi}. \quad (\text{A.41})$$

Η ίδια περιστροφή του διανύσματος \mathbf{x} κατά μία γωνία φ γύρω από τον άξονα \mathbf{u} επιτυγχάνεται με τη χρήση των quaternions με το ακόλουθο διπλό γινόμενο,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*, \quad (\text{A.42})$$

όπου $\mathbf{q} = e^{\mathbf{u}\varphi/2} = [\cos \varphi/2 \quad \mathbf{u} \sin \varphi/2]^{\top}$ και το διάνυσμα \mathbf{x} έχει γραφτεί σε μορφή quaternion,

$$\mathbf{x} = xi + yj + zk = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p. \quad (\text{A.43})$$

Παρακάτω φαίνεται ότι το συγκεκριμένο διπλό γινόμενο επιφέρει την επιθυμητή περιστροφή,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* \\ &= (\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\varphi}{2}) \otimes (0 + \mathbf{x}) \otimes (\cos \frac{\varphi}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\varphi}{2}) \\ &= \mathbf{x} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{u}) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{u} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ &= \mathbf{x} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2(\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - (\mathbf{x}(\mathbf{u}^{\top} \mathbf{u}) - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^{\top} \mathbf{x})) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ &= \mathbf{x}(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{x})(2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}) + \mathbf{u}(\mathbf{u}^{\top} \mathbf{x})(2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \\ &= \mathbf{x} \cos \varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \varphi + \mathbf{u}(\mathbf{u}^{\top} \mathbf{x})(1 - \cos \varphi) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{u}\mathbf{u}^{\top} \mathbf{x}) \cos \varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \varphi + \mathbf{u}\mathbf{u}^{\top} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}_{\perp} \cos \varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \varphi + \mathbf{x}_{\parallel}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

που είναι ακριβώς ο τύπος περιστροφής διανύσματος A.41.

A.3.2 Ομάδα περιστροφής $SO(3)$

Στον \mathbb{R}^3 , η ομάδα περιστροφής $SO(3)$ είναι το σύνολο των περιστροφών γύρω από την αρχή των αξόνων υπό την πράξη της σύνθεσης. Οι περιστροφές είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί που διατηρούν το μήκος των διανυσμάτων και το σχετικό τους προσανατολισμό. Στη ρομποτική, η ομάδα περιστροφής $SO(3)$ αντιπροσωπεύει περιστροφές στερεών σωμάτων στον τρισδιάστατο χώρο καθώς σύμφωνα με το αντίστοιχο θεώρημα του Euler κάθε περιστροφή ενός στερεού σώματος μπορεί να εκφραστεί ως μια περιστροφή γύρω από ένα σταθερό άξονα κατά μία συγκεκριμένη γωνία περιστροφής.

Έστω ο τελεστής περιστροφής $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{v} \mapsto r(\mathbf{v})$ που εφαρμόζεται σε διανύσματα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ και ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες με τη βοήθεια των μετρικών του Ευκλείδειου χώρου όπως φαίνεται ακολούθως.

- Η περιστροφή διατηρεί τη διανυσματική νόρμα,

$$\|r(\mathbf{v})\| = \sqrt{\langle r(\mathbf{v}), r(\mathbf{v}) \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \triangleq \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{A.45})$$

- Η περιστροφή διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων,

$$\langle r(\mathbf{v}), r(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \alpha, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{A.46})$$

- Η περιστροφή διατηρεί το σχετικό προσανατολισμό μεταξύ των διανυσμάτων,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \iff r(\mathbf{u}) \times r(\mathbf{v}) = r(\mathbf{w}). \quad (\text{A.47})$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι πρώτες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες. Συνεπώς, η ομάδα περιστροφής $SO(3)$ ορίζεται ως,

$$SO(3) : \{r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \|r(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, r(\mathbf{v}) \times r(\mathbf{w}) = r(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\}. \quad (\text{A.48})$$

Η ομάδα των μοναδιαίων quaternion αντιπροσωπεύει καλά την ομάδα περιστροφής αν και δεν είναι τεχνικά αυτή καθώς αποτελεί double cover του $SO(3)$.

A.3.3 Ικανοποίηση περιορισμών $SO(3)$

Ο τελεστής περιστροφής συναρτήσεως των quaternions ορίζεται ως εξής,

$$r(\mathbf{v}) = \mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*. \quad (\text{A.49})$$

Για τη διατήρηση της νόρμας πρέπει να ισχύει,

$$\|\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{q}\|^2 \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|. \quad (\text{A.50})$$

Αυτό οδηγεί στον περιορισμό $\|\mathbf{q}\|^2 = 1$, δηλαδή στη χρήση αποκλειστικά μοναδιαίων quaternion που σημαίνει,

$$\boxed{\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = 1 = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*}. \quad (\text{A.51})$$

Παρομοίως, η διατήρηση του σχετικού προσανατολισμού των διανυσμάτων ικανοποιείται όπως φαίνεται παρακάτω,

$$\begin{aligned} r(\mathbf{v}) \times r(\mathbf{w}) &= (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \times (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) \\ &= \frac{1}{2} ((\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) - (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^* - \mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{q} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{q}^*) \\ &= \mathbf{q} \otimes (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \otimes \mathbf{q}^* \\ &= r(\mathbf{v} \times \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Το σύνολο των μοναδιαίων quaternion αποτελεί ομάδα υπό την πράξη του πολλαπλασιασμού. Η ομάδα αυτή είναι μια 3-Sphere τοπολογικά, δηλαδή, η τρισδιάστατη επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{R}^4 , και αναφέρεται ως S^3 .

A.3.4 Double Cover του $SO(3)$

Τα μοναδιαία quaternions αποτελούν double cover του $SO(3)$ γιατί το quaternion $-\mathbf{q}$ δίνει την ίδια περιστροφή με το quaternion \mathbf{q} . Πράγματι, για μια περιστροφή γύρω από έναν άξονα \mathbf{u} κατά μία γωνία φ χρειαζόμαστε το quaternion $\mathbf{q} = \cos \varphi/2 + \mathbf{u} \sin \varphi/2$. Η ίδια περιστροφή όμως μπορεί να επιτευχθεί γύρω από τον ίδιο άξονα \mathbf{u} κατά μία γωνία $-2\pi + \varphi$ που αντιστοιχεί

στο quaternion,

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \cos\left(\frac{-2\pi + \varphi}{2}\right) + \mathbf{u} \sin\left(\frac{-2\pi + \varphi}{2}\right) \\
&= \cos\left(-\pi + \frac{\varphi}{2}\right) + \mathbf{u} \sin\left(-\pi + \frac{\varphi}{2}\right) \\
&= -\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{u} \sin\frac{\varphi}{2}\right) \\
&= -\mathbf{q}.
\end{aligned} \tag{A.53}$$

Η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξασφαλιστεί η εφαρμογή περιστροφών με το μικρότερο δυνατό μέγεθος.

A.3.5 Πίνακας περιστροφής

Η περιστροφή ενός διανύσματος μπορεί επίσης να επιτευχθεί με τη χρήση ενός πίνακα περιστροφής και είναι βοηθητικό να οριστεί η σχέση μετατροπής ενός quaternion σε πίνακα περιστροφής έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα,

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R}\mathbf{x}. \tag{A.54}$$

Η σχέση μετατροπής είναι η ακόλουθη,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix}, \tag{A.55}$$

και δηλώνεται ως $\mathbf{R} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$. Μια εναλλακτική σχέση δίνεται από την σχέση A.20 του πολλαπλασιασμού των quaternions,

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}\mathbf{x} \end{bmatrix}, \tag{A.56}$$

που οδηγεί στη τελική σχέση,

$$\mathbf{R} = (q_w^2 - \mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v) \mathbf{I} + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\top + 2q_w [\mathbf{q}_v]_\times. \tag{A.57}$$

Ο πίνακας περιστροφής \mathbf{R} έχει τις ακόλουθες ιδιότητες,

$$\mathbf{R}\{[1, 0, 0, 0]^\top\} = \mathbf{I} \tag{A.58}$$

$$\mathbf{R}\{-\mathbf{q}\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\} \tag{A.59}$$

$$\mathbf{R}\{\mathbf{q}^*\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^\top \tag{A.60}$$

$$\mathbf{R}\{\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_1\} \mathbf{R}\{\mathbf{q}_2\}. \tag{A.61}$$

A.3.6 Συστήματα αναφοράς

Στην υποενότητα A.3.1 παρουσιάστηκε με ποιο τρόπο γίνεται η περιστροφή των διανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο με τη βοήθεια των quaternions. Αυτή η ερμηνεία της πράξης των quaternions αναφέρεται ως “active”, επειδή οι τελεστές περιστρέφουν τα διανύσματα “ενεργά”,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q}_{active} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}_{active}^*. \tag{A.62}$$

Ένας άλλος τρόπος να ερμηνευθεί η επίδραση του quaternion \mathbf{q} στο διάνυσμα \mathbf{x} είναι να θεωρηθεί ότι το διάνυσμα είναι σταθερό και είναι ο παρατηρητής που περιστρέφει την οπτική του γωνία με τον τρόπο που ορίζει το \mathbf{q} . Αυτό ονομάζεται *αλλαγή συστήματος αναφοράς* και αποτελεί την “passive” ερμηνεία της πράξης των quaternions, επειδή τα διανύσματα δε κινούνται,

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{q}_{passive} \otimes \mathbf{x}_A \otimes \mathbf{q}_{passive}^* \quad (\text{A.63})$$

όπου \mathcal{A} και \mathcal{B} είναι δύο Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς και \mathbf{x}_A και \mathbf{x}_B είναι εκφράσεις του ίδιου διανύσματος \mathbf{x} σε αυτά τα συστήματα αναφοράς.

Οι “active” και “passive” ερμηνείες στηρίζονται σε τελεστές αντίθετους, δηλαδή,

$$\mathbf{q}_{active} = \mathbf{q}_{passive}^* \quad (\text{A.64})$$

Στην “passive” περίπτωση, μία δεύτερη ερμηνεία σχετίζεται με την κατεύθυνση με την οποία δρα το quaternion, είτε μετατρέπει από το τοπικό στο καθολικό σύστημα αναφοράς είτε το αντίθετο. Έστω δύο Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς \mathcal{G} και \mathcal{L} , που συμβολίζουν τα συστήματα αναφοράς “Global” και “Local” αντιστοίχως. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς οι ορισμοί είναι σχετικοί, το \mathcal{G} είναι καθολικό σχετικά με το \mathcal{L} και το \mathcal{L} είναι τοπικό σχετικά με το \mathcal{G} . Με άλλα λόγια, το \mathcal{L} είναι ένα σύστημα αναφοράς ορισμένο στο σύστημα αναφοράς \mathcal{G} . Ορίζεται το $\mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$ ως το quaternion που μετασχηματίζει τα διανύσματα από το σύστημα αναφοράς \mathcal{L} στο \mathcal{G} , με την έννοια πως ένα διάνυσμα \mathbf{x}_L στο σύστημα αναφοράς \mathcal{L} εκφράζεται στο σύστημα αναφοράς \mathcal{G} με το γινόμενο,

$$\mathbf{x}_G = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}} \otimes \mathbf{x}_L \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}^* \quad (\text{A.65})$$

Ο αντίθετος μετασχηματισμός, από το \mathcal{G} στο \mathcal{L} , γίνεται με το γινόμενο,

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} \otimes \mathbf{x}_G \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}}^* \quad (\text{A.66})$$

όπου

$$\mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}^* \quad (\text{A.67})$$

Τέλος, σαν μνημονικός κανόνας για την “passive” ερμηνεία,

$$\mathbf{q} \triangleq \mathbf{q}_{[\text{σχετικά με το}][\text{του}]} = \mathbf{q}_{[\text{σε}][\text{από}]} = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}} \quad (\text{A.68})$$

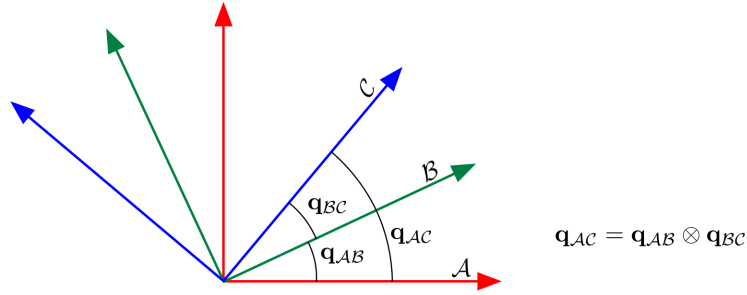
A.3.7 Σύνθεση περιστροφών

Στα παρακάτω ο συμβολισμός \mathbf{q}_{ji} αντιπροσωπεύει την περιστροφή από την κατάσταση i στην κατάσταση j . Η σύνθεση των quaternions γίνεται με τα κατάλληλα γινόμενα στη σωστή σειρά (Σχήμα A.2),

$$\mathbf{q}_{AC} = \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC} \quad (\text{A.69})$$

Αυτό προκύπτει απευθείας από την προσεταιριστική ιδιότητα των γινομένων,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{x}_B \otimes \mathbf{q}_{AB}^* \\ &= \mathbf{q}_{AB} \otimes (\mathbf{q}_{BC} \otimes \mathbf{x}_C \otimes \mathbf{q}_{BC}^*) \otimes \mathbf{q}_{AB}^* \\ &= (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}) \otimes \mathbf{x}_C \otimes (\mathbf{q}_{BC}^* \otimes \mathbf{q}_{AB}^*) \\ &= (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}) \otimes \mathbf{x}_C \otimes (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC})^* \\ &= \mathbf{q}_{AC} \otimes \mathbf{x}_C \otimes \mathbf{q}_{AC}^* \end{aligned}$$



Σχήμα A.2: Σύνθεση περιστροφών. Στο \mathbb{R}^2 αρκεί μια πρόσθεση $\theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC}$ που είναι αντιμεταθετική. Στο \mathbb{R}^3 η σύνθεση ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{q}_{AC} = \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}$ που δεν είναι αντιμεταθετική και συνεπώς η σειρά των πράξεων πρέπει να τηρείται αυστηρώς.

A.3.8 Διαταραχές

Ένας διαταραγμένος προσανατολισμός $\tilde{\mathbf{q}}$ μπορεί να εκφραστεί με τη σύνθεση του μη διαταραγμένου προσανατολισμού \mathbf{q} και μίας μικρής τοπικής διαταραχής $\Delta\mathbf{q}_{\mathcal{L}}$. Επειδή η διαταραχή είναι τοπική, εμφανίζεται στη δεξιά πλευρά του γινομένου σύνθεσης.

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \Delta\mathbf{q}_{\mathcal{L}}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\Delta\mathbf{R}_{\mathcal{L}}. \tag{A.70}$$

Αυτές οι τοπικές διαταραχές $\Delta\mathbf{q}_{\mathcal{L}}$ (ή $\Delta\mathbf{R}_{\mathcal{L}}$) προκύπτουν εύκολα από την ισοδύναμη διανυσματική τους μορφή $\Delta\varphi_{\mathcal{L}} = \mathbf{u}\Delta\varphi_{\mathcal{L}}$, ορισμένη στον εφαπτομενικό χώρο, χρησιμοποιώντας το εκθετικό. Αυτό δίνει,

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \exp(\Delta\varphi_{\mathcal{L}}/2), \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \exp(\Delta\varphi_{\mathcal{L}}/2). \tag{A.71}$$

Αν η γωνία $\Delta\varphi_{\mathcal{L}}$ της διαταραχής είναι μικρή, τότε η διαταραχή μπορεί να προσεγγιστεί με σειρά Taylor μέχρι τους γραμμικούς όρους,

$$\Delta\mathbf{q}_{\mathcal{L}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\Delta\varphi_{\mathcal{L}} \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{R}_{\mathcal{L}} \approx \mathbf{I} + [\Delta\varphi_{\mathcal{L}}]_{\times}. \tag{A.72}$$

A.3.9 Hopf fibration

Ένας τρόπος παραμετροποίησης των μοναδιαίων quaternions είναι οι Hopf συντεταγμένες. Για $\theta \in [0, \pi]$ και $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$ ισχύει,

$$\begin{aligned} q_w &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ q_x &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2} - \varphi\right) \\ q_y &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2} - \varphi\right) \\ q_z &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{aligned} \tag{A.73}$$

Παράρτημα Β

Μοντέλο Πολυ-Ελικοφόρου

Β.1 Συστήματα αναφοράς

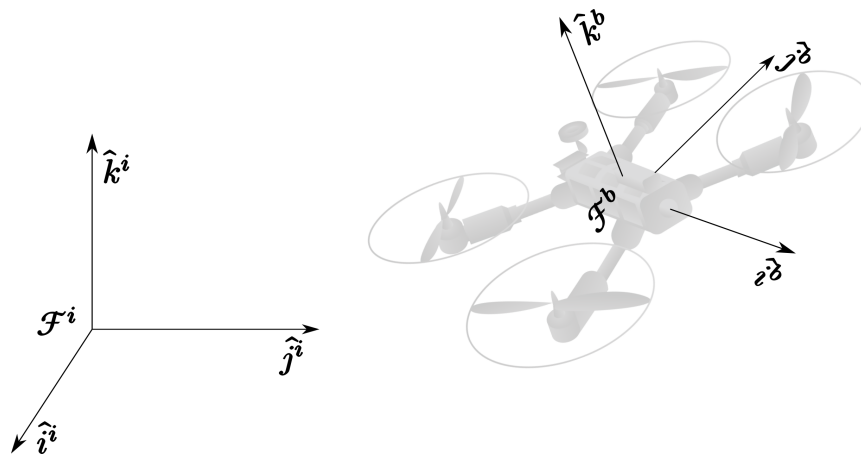
Για τη μελέτη των πολυ-ελικοφόρων μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλά και διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Για τους σκοπούς της εργασίας αρκούν τα δύο βασικά συστήματα αναφοράς, δηλαδή το inertial και το body, τα οποία παρουσιάζονται με λίγη περισσότερη λεπτομέρεια στις επόμενες υποενότητες.

Β.1.1 Inertial Frame \mathcal{F}^i

Το inertial σύστημα αναφοράς είναι προσκολλημένο στη Γη, με την αρχή των αξόνων του στην ορισμένη ως αρχική τοποθεσία.

Β.1.2 Body Frame \mathcal{F}^b

Το body σύστημα αναφοράς είναι προσκολλημένο στο πολυ-ελικοφόρο, με την αρχή των αξόνων του στο κέντρο βαρύτητας του σώματος. Προκύπτει από την περιστροφή του inertial συστήματος αναφοράς υπό το quaternion \mathbf{q} .



Σχήμα Β.1: Συστήματα αναφοράς

Β.2 Εξίσωση Coriolis

Έστω πως δίνονται τα δύο συστήματα αναφοράς \mathcal{F}^i και \mathcal{F}^b . Έστω ακόμα πως το διάνυσμα \mathbf{p} κινείται στο \mathcal{F}^b και πως το \mathcal{F}^b εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση σχετικά με το \mathcal{F}^i . Στόχος της ενότητας είναι να βρεθεί η χρονική παράγωγος του \mathbf{p} όπως φαίνεται από το \mathcal{F}^i .

Θα γίνει πρώτα η υπόθεση πως το \mathcal{F}^b δε περιστρέφεται σχετικά με το \mathcal{F}^i . Υποδηλώνοντας τη χρονική παράγωγο του \mathbf{p} στο σύστημα αναφοράς \mathcal{F}^i με $\frac{d}{dt_i}\mathbf{p}$ προκύπτει,

$$\frac{d}{dt_i}\mathbf{p} = \frac{d}{dt_b}\mathbf{p}. \quad (\text{B.1})$$

Στην αντίθετη περίπτωση, με την υπόθεση πως το \mathbf{p} είναι σταθερό στο \mathcal{F}^b και πως το \mathcal{F}^b περιστρέφεται σχετικά με το \mathcal{F}^i γύρω από το στιγμιαίο μοναδιαίο άξονα περιστροφής \mathbf{u} κατά γωνία $\delta\varphi$, ο τύπος περιστροφής διανύσματος A.41 δίνει,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbf{p}_{\parallel} + \mathbf{p}_{\perp} \cos \delta\varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{p}) \sin \delta\varphi \\ \mathbf{p} + \delta\mathbf{p} &= (1 - \cos \delta\varphi)\mathbf{u}\mathbf{u}^{\top}\mathbf{p} + \cos \delta\varphi\mathbf{p} + \sin \delta\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις μικρής γωνίας ($\cos \varphi \approx 1$ και $\sin \varphi \approx \varphi$) και διαιρώντας και τις δύο πλευρές με dt προκύπτει,

$$\frac{\delta\mathbf{p}}{\delta t} \approx \frac{\delta\varphi}{\delta t}\mathbf{u} \times \mathbf{p}. \quad (\text{B.3})$$

Με το όριο $\delta t \rightarrow 0$ και ορίζοντας τη γωνιακή ταχύτητα του \mathcal{F}^b σχετικά με το \mathcal{F}^i ως $\boldsymbol{\omega}_{b/i} \triangleq \mathbf{u}\dot{\varphi}$ προκύπτει,

$$\frac{d}{dt_i}\mathbf{p} = \boldsymbol{\omega}_{b/i} \times \mathbf{p}. \quad (\text{B.4})$$

Εφόσον η παραγωγή είναι γραμμική πράξη, είναι εφικτός ο συνδυασμός των εξισώσεων B.1 και B.4 με αποτέλεσμα,

$$\frac{d}{dt_i}\mathbf{p} = \frac{d}{dt_b}\mathbf{p} + \boldsymbol{\omega}_{b/i} \times \mathbf{p}, \quad (\text{B.5})$$

που είναι η εξίσωση Coriolis.

B.3 Μεταβλητές Κατάστασης

Οι μεταβλητές κατάστασης είναι οι ακόλουθες 13 ποσότητες

- $\boldsymbol{\xi} = [p_x, p_y, p_z]^{\top}$, είναι η θέση του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο \mathcal{F}^i ,
- $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^{\top}$, είναι η γραμμική ταχύτητα του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο \mathcal{F}^i ,
- $\mathbf{q} = [q_w, q_x, q_y, q_z]^{\top}$, είναι το μοναδιαίο quaternion προσανατολισμού του πολυ-ελικοφόρου,
- $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^{\top}$, είναι η γωνιακή ταχύτητα του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο \mathcal{F}^b .

Το quaternion \mathbf{q} κωδικοποιεί τον άξονα (εκφρασμένο στο \mathcal{F}^i) και την γωνία που χαρακτηρίζουν την περιστροφή που πρέπει να κάνει το inertial σύστημα αναφοράς \mathcal{F}^i για να προκύψει το body σύστημα αναφοράς \mathcal{F}^b .

B.4 Κινηματική

Τόσο οι μεταβλητές κατάστασης θέσης όσο και γραμμικής ταχύτητας είναι εκφρασμένες στο inertial σύστημα αναφοράς \mathcal{F}^i . Συνεπώς, η σχέση μεταξύ τους είναι μια απλή σχέση παραγώγισης,

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{v}. \quad (\text{B.6})$$

Η παράγωγος του quaternion προσανατολισμού αντιθέτως χρήζει περισσότερης προσοχής. Έστω \mathbf{p}' ένα οποιοδήποτε διάνυσμα (quaternion με μηδενικό βαθμωτό μέρος) που είναι σταθερό στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς \mathcal{F}^b και \mathbf{p} το ίδιο διάνυσμα από την οπτική του σταθερού \mathcal{F}^i . Ως γνωστόν,

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}' \otimes \mathbf{q}^* \quad \mathbf{p}' = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}. \quad (\text{B.7})$$

Εφαρμόζοντας χρονική παράγωγο και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως εκ κατασκευής $\dot{\mathbf{p}}' = 0$, προκύπτει,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{p}' \otimes \mathbf{q}^* + \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{p}}' \otimes \mathbf{q}^* \\ \dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{q}} \otimes (\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{q}^* + \mathbf{q} \otimes (\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{q}^* \\ \dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*) + (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*) \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}^* \\ \dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}^* \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Επειδή το \mathbf{q} είναι μοναδιαίο ισχύει,

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = 1 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* + \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}^* = 0. \quad (\text{B.9})$$

Συνεπώς, η B.8 γίνεται,

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p} - \mathbf{p} \otimes \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^*. \quad (\text{B.10})$$

Το γινόμενο $\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^*$ είναι διάνυσμα (quaternion με μηδενικό βαθμωτό μέρος) γιατί η νόρμα του \mathbf{q} είναι σταθερή στο χρόνο και ίση με 1,

$$\text{Re}(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^*) = q_w \dot{q}_w + q_x \dot{q}_x + q_y \dot{q}_y + q_z \dot{q}_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{q}\|^2 \right) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Άρα η B.10 γίνεται,

$$\dot{\mathbf{p}} = (\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^*) \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times (\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^*) = 2(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^*) \times \mathbf{p}. \quad (\text{B.12})$$

Εξ' ορισμού, εφόσον το \mathbf{p} εκτελεί απλή περιστροφή, $\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$, όπου το $\boldsymbol{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του διανύσματος \mathbf{p} (εκφρασμένη στο \mathcal{F}^i). Η παραπάνω γωνιακή ταχύτητα ταυτίζεται με τη γωνιακή ταχύτητα του \mathcal{F}^b ως προς το \mathcal{F}^i (διότι το \mathbf{p} είναι σταθερό στο \mathcal{F}^b). Ακόλουθο είναι, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = 2(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^*) \times \mathbf{p}$ και εφόσον το \mathbf{p} μπορεί να είναι το οποιοδήποτε διάνυσμα,

$$\boldsymbol{\omega} = 2(\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^*) \implies \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{q}. \quad (\text{B.13})$$

Στις περισσότερες εφαρμογές, η γωνιακή ταχύτητα του \mathcal{F}^b ως προς το \mathcal{F}^i μετριέται και εκφράζεται στο \mathcal{F}^b . Αν με $\boldsymbol{\Omega}$ συμβολίζεται η γωνιακή ταχύτητα του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο \mathcal{F}^b , τότε κατά τα γνωστά,

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\Omega} \otimes \mathbf{q}^* \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{q}^* \otimes \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{q}, \quad (\text{B.14})$$

και η εξίσωση B.13 παίρνει την τελική μορφή,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \Omega. \quad (\text{B.15})$$

B.5 Δυναμική Στερεού Σώματος

Οι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ο νόμος, λοιπόν, του Νεύτωνα για το κομμάτι της μεταφορικής κίνησης έχει τη μορφή,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt_i} = \mathbf{f}, \quad (\text{B.16})$$

όπου m είναι η μάζα του πολυ-ελικοφόρου, \mathbf{f} είναι η συνολική δύναμη που ασκείται στο πολυ-ελικοφόρο, και $\frac{d}{dt_i}$ είναι η χρονική παράγωγος στο inertial σύστημα αναφοράς. Στο απλοποιημένο μοντέλο που πραγματεύεται η εργασία γίνεται η υπόθεση πως η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι $\mathbf{f} = \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_g$, όπου \mathbf{f}_m είναι η συνολική δύναμη από τους κινητήρες του συστήματος και \mathbf{f}_g είναι η δύναμη της βαρύτητας. Η γραμμική ταχύτητα \mathbf{v} είναι εκφρασμένη στο inertial σύστημα αναφοράς. Αντιθέτως, η δύναμη από τους κινητήρες υπολογίζεται και εφαρμόζεται στο body σύστημα αναφοράς. Συνεπώς, χρειάζεται να εκφραστεί στο inertial σύστημα αναφοράς πριν χρησιμοποιηθεί. Αν λοιπόν, με \mathbf{F} συμβολίζεται η συνολική δύναμη των κινητήρων εκφρασμένη στο body σύστημα αναφοράς, η B.16 γίνεται,

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt_i} = \mathbf{f} = \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_g = \mathbf{q} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{q}^* + m\mathbf{g} &\implies \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{q} \otimes \frac{\mathbf{F}}{m} \otimes \mathbf{q}^* + \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Σχετικά με την περιστροφική κίνηση, ο νόμος του Νεύτωνα ορίζει,

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = \mathbf{m}, \quad (\text{B.18})$$

όπου \mathbf{h} είναι η στροφορμή και \mathbf{m} είναι η εφαρμοζόμενη ροπή. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Coriolis προκύπτει,

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = \frac{d\mathbf{h}}{dt_b} + \omega_{b/i} \times \mathbf{h} = \mathbf{m}. \quad (\text{B.19})$$

Η εξίσωση B.19 λύνεται ευκολότερα στο body σύστημα αναφοράς. Εκεί, $\omega_{b/i}^b = \Omega$ και $\mathbf{h}^b = \mathbf{J}\Omega$ όπου \mathbf{J} είναι το σταθερό μητρώο ροπής αδράνειας που δίνεται από τη σχέση,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \int (y^2 + x^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (y^2 + z^2) dm \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Αν το πολυ-ελικοφόρο είναι συμμετρικό γύρω και από τους τρεις άξονες ισχύει $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ που συνεπάγεται ότι,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix}.$$

Ορίζοντας $\mathbf{m}^b = \boldsymbol{\tau}$, η εξίσωση B.19 γράφεται,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(J\boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\Omega} &= \boldsymbol{\tau} \\ J \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} &= \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\Omega} \\ \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} &= J^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

B.6 Μοντέλο

Η τελική μη γραμμική δυναμική του πολυ-ελικοφόρου δίνεται παρακάτω:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \otimes \frac{\mathbf{F}}{m} \otimes \mathbf{q}^* + \mathbf{g} \\ \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\Omega} \\ J^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\Omega}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Πιο συγκεκριμένα:

- $\boldsymbol{\xi} = [p_x, p_y, p_z]^\top$, είναι η θέση του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο \mathcal{F}^i ,
- $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^\top$, είναι η γραμμική ταχύτητα του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο \mathcal{F}^i ,
- $\mathbf{q} = [q_w, q_x, q_y, q_z]^\top$, είναι το μοναδιαίο quaternion προσανατολισμού του πολυ-ελικοφόρου,
- \mathbf{F} , είναι το διάνυσμα ώσης εκφρασμένο στο \mathcal{F}^b ,
- m , είναι η μάζα του πολυ-ελικοφόρου,
- $\mathbf{g} = [0, 0, -g]^\top$, είναι το διάνυσμα επιτάχυνσης της βαρύτητας εκφρασμένο στο \mathcal{F}^i ,
- $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^\top$, είναι η γωνιακή ταχύτητα του πολυ-ελικοφόρου εκφρασμένη στο \mathcal{F}^b ,
- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^\top$, είναι το διάνυσμα ροπής εκφρασμένο στο \mathcal{F}^b ,
- J , είναι το μητρώο ροπής αδράνειας.

B.7 Δυνάμεις και Ροπές

Στην ενότητα αυτή περιγράφονται οι δυνάμεις και οι ροπές που ασκούνται στο πολυ-ελικοφόρο. Εφόσον δεν υπάρχουν αεροδυναμικές επιφάνειες, γίνεται η υπόθεση πως οι αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές είναι αμελητέες. Στη συνέχεια θα γίνει ανάλυση για ένα τετρακόπτερο

(quadrotor ή quadcopter) με τις υπόλοιπες περιπτώσεις να μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν κατάλληλα.

Οι δυνάμεις και οι ροπές οφείλονται στη βαρύτητα και στις τέσσερις προπέλες. Κάθε κινητήρας παράγει μία δύναμη F και μία ροπή τ στον άξονα περιστροφής του. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο quadrotor από τους κινητήρες αναπτύσσεται αποκλειστικά κατά τη διεύθυνση του άξονα z του body συστήματος αναφοράς. Το μέτρο της δίνεται από τη σχέση,

$$F = F_f + F_r + F_b + F_l. \quad (\text{B.22})$$

Οι ροπές στους δύο πρώτους άξονες του body συστήματος αναφοράς δίνονται από τις σχέσεις,

$$\tau_x = l(F_l - F_r) \quad (\text{B.23})$$

$$\tau_y = l(F_b - F_f). \quad (\text{B.24})$$

Εξαιτίας του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, η οπισθέλκουσα από τις προπέλες παράγει ροπή στον άξονα z του body συστήματος αναφοράς. Η κατεύθυνση της ροπής είναι αντίθετη της φοράς περιστροφής της κάθε προπέλας. Συνεπώς η συνολική ροπή στον άξονα z του body συστήματος αναφοράς δίνεται από τη σχέση,

$$\tau_z = \tau_f - \tau_l + \tau_b - \tau_r. \quad (\text{B.25})$$

Η άνωση και η οπισθέλκουσα της κάθε προπέλας είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής της ταχύτητας. Γίνεται η υπόθεση πως η προαναφερθείσα γωνιακή ταχύτητα είναι ευθέως ανάλογη της PWM εντολής που δίνεται στον αντίστοιχο κινητήρα. Συνεπώς, η δύναμη και η ροπή του κάθε κινητήρα μπορεί να εκφρασθεί ως,

$$F_* = k_1 \delta_* \quad (\text{B.26})$$

$$\tau_* = k_2 \delta_*, \quad (\text{B.27})$$

όπου k_1 και k_2 είναι σταθερές που καθορίζονται πειραματικά, δ_* είναι το σήμα ελέγχου του κινητήρα, και το * αντιπροσωπεύει τα f, r, b και l .

Σαν αποτέλεσμα των παραπάνω, οι δυνάμεις και οι ροπές στο quadrotor μπορούν να γραφούν σε μορφή πίνακα,

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ 0 & lk_1 & 0 & -lk_1 \\ -lk_1 & 0 & lk_1 & 0 \\ k_2 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{bmatrix} \triangleq M \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{bmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Στις επόμενες ενότητες, οι εντολές ελέγχου θα καθορίζουν δυνάμεις και ροπές. Οι πραγματικές εντολές μπορούν να βρεθούν ως εξής,

$$\begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} F \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Τέλος, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, το διάνυσμα \mathbf{F} του μοντέλου της προηγούμενης ενότητας παίρνει τη μορφή,

$$\mathbf{F} = [0, 0, F]^\top. \quad (\text{B.30})$$

B.8 Γραμμικοποίηση

Η γραμμικοποίηση της δυναμικής γύρω από μία τροχιά αναφοράς θα έχει ως αποτέλεσμα τη δυναμική του σφάλματος. Η γραμμικοποίηση αυτή δεν μπορεί να γίνει με τον κλασσικό τρόπο (Ιακωβιανή) λόγω των quaternions και τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται το σφάλμα τους. Έστω $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\Omega}]^\top$ το διάνυσμα κατάστασης και $\mathbf{u} = [\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}]^\top$ το διάνυσμα εισόδου. Η μη γραμμική δυναμική του συστήματος συμβολίζεται με τη σχέση $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Έστω ακόμα μια τροχιά αναφοράς $(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r)$ τέτοια ώστε $\dot{\mathbf{x}}_r = f(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r)$. Η γραμμικοποίηση έχει ως εξής:

Σχετικά με τη θέση $\boldsymbol{\xi}$,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_e = (\dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_r) = \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_e \quad (\text{B.31})$$

Σχετικά με τη γραμμική ταχύτητα \mathbf{v} , γνωρίζοντας ότι $\mathbf{R}\{\mathbf{q}\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\}(\mathbf{I} + [\boldsymbol{\theta}_e]_\times) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\theta}_e\|^2)$,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_e &= \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\}(\mathbf{I} + [\boldsymbol{\theta}_e]_\times) \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{g} - \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} \frac{\mathbf{F}_r}{m} - \mathbf{g} \\ &= \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} \left(\frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{\mathbf{F}_r}{m} \right) + \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} [\boldsymbol{\theta}_e]_\times \frac{\mathbf{F}}{m} \\ &= \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} \frac{\mathbf{F}_e}{m} + \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} [\boldsymbol{\theta}_e]_\times \left(\frac{\mathbf{F}_r}{m} + \frac{\mathbf{F}_e}{m} \right) \\ &= \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} \frac{\mathbf{F}_e}{m} + \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} [\boldsymbol{\theta}_e]_\times \frac{\mathbf{F}_r}{m} + \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} [\boldsymbol{\theta}_e]_\times \frac{\mathbf{F}_e}{m} \\ &= \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} \frac{\mathbf{F}_e}{m} - \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} \left[\frac{\mathbf{F}_r}{m} \right]_\times \boldsymbol{\theta}_e \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Σχετικά με το quaternion προσανατολισμού \mathbf{q} , με τη βοήθεια της σχέσης,

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}_r \otimes \dot{\mathbf{q}}_e) &= \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_r \otimes \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_r \otimes \dot{\mathbf{q}}_e &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_r \otimes \mathbf{q}_e \otimes \boldsymbol{\Omega} \\ \frac{1}{2} \mathbf{q}_r \otimes \boldsymbol{\Omega}_r \otimes \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_r \otimes \dot{\mathbf{q}}_e &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_r \otimes \mathbf{q}_e \otimes \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\Omega}_r \otimes \mathbf{q}_e + 2\dot{\mathbf{q}}_e &= \mathbf{q}_e \otimes \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

προκύπτει πως

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{q}}_e &= \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_e \end{bmatrix} = \mathbf{q}_e \otimes \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_r \otimes \mathbf{q}_e \\ &= [\boldsymbol{\Omega}]_R \mathbf{q}_e - [\boldsymbol{\Omega}_r]_L \mathbf{q}_e \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_r)^\top \\ (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_r) & -[\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}_r]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\theta}_e/2 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\theta}_e\|^2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\Omega}_e^\top \\ \boldsymbol{\Omega}_e & -[2\boldsymbol{\Omega}_r + \boldsymbol{\Omega}_e]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\theta}_e/2 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\theta}_e\|^2) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

που έχει ως αποτέλεσμα,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}}_e &= \boldsymbol{\Omega}_e - [\boldsymbol{\Omega}_r]_\times \boldsymbol{\theta}_e - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega}_e]_\times \boldsymbol{\theta}_e + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\theta}_e\|^2) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_e &= -[\boldsymbol{\Omega}_r]_\times \boldsymbol{\theta}_e + \boldsymbol{\Omega}_e \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Τέλος, σχετικά με τη γωνιακή ταχύτητα Ω ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega}_e &= \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_r = J^{-1} (\tau - \Omega \times J\Omega) - J^{-1} (\tau_r - \Omega_r \times J\Omega_r) \\
 &= J^{-1} \tau_e + J^{-1} [\Omega_r \times J\Omega_r - (\Omega_r + \Omega_e) \times J(\Omega_r + \Omega_e)] \\
 &= J^{-1} \tau_e - J^{-1} [\Omega_r \times J\Omega_e + \Omega_e \times J\Omega_r] \\
 &= J^{-1} \tau_e - J^{-1} ([\Omega_r]_{\times} J - [J\Omega_r]_{\times}) \Omega_e
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

Συγκεντρωτικά ισχύει:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_e &= \mathbf{v}_e \\
 \dot{\mathbf{v}}_e &= -\mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} \left[\frac{\mathbf{F}_r}{m} \right]_{\times} \boldsymbol{\theta}_e + \mathbf{R}\{\mathbf{q}_r\} \frac{\mathbf{F}_e}{m} \\
 \dot{\boldsymbol{\theta}}_e &= -[\Omega_r]_{\times} \boldsymbol{\theta}_e + \Omega_e \\
 \dot{\Omega}_e &= J^{-1} ([J\Omega_r]_{\times} - [\Omega_r]_{\times} J) \Omega_e + J^{-1} \tau_e
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Randal W. Beard. “Quadrotor Dynamics and Control Rev 0.1.” In: *Brigham Young University* June (2008), pp. 1–48.
- [2] Pedro Castillo-García, Laura Elena [Muñoz Hernandez], and Pedro [García Gil]. “Chapter 2 - Modeling Approaches**The results in this chapter were developed in collaboration with H. Abaunza and J. Cariño from the UMI LAFMIA 3175, Mexico.” In: *Indoor Navigation Strategies for Aerial Autonomous Systems*. Ed. by Pedro Castillo-García, Laura Elena [Muñoz Hernandez], and Pedro [García Gil]. Butterworth-Heinemann, 2017, pp. 31 –50. ISBN: 978-0-12-805189-4. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-805189-4.00003-2>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128051894000032>.
- [3] H N Nabi et al. “Effects of Structural Failure on the Safe Flight Envelope of Aircraft.” In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 41.6 (2018), pp. 1257–1275. ISSN: 0731-5090. DOI: [10.2514/1.G003184](https://doi.org/10.2514/1.G003184). URL: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.G003184>.
- [4] Ye Zhang, Coen C de Visser, and Q Ping Chu. “Online Safe Flight Envelope Prediction for Damaged Aircraft: A Database-driven Approach.” In: *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*. January. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2016, pp. 1–14. ISBN: 978-1-62410-387-2. DOI: [10.2514/6.2016-1189](https://doi.org/10.2514/6.2016-1189). URL: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2016-1189>.
- [5] Thomas Lombaerts et al. “On-Line Safe Flight Envelope Determination for Impaired Aircraft.” In: *Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control*. Ed. by Joël Bordeneuve-Guibé, Antoine Drouin, and Clément Roos. Cham: Springer International Publishing, 2015, pp. 263–282. ISBN: 978-3-319-17517-1. DOI: [10.1007/978-3-319-17518-8_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-17518-8_16). URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-17518-8http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-17518-8{_}16.
- [6] Yunshen Tang, Ella Atkins, and Robert Sanner. “Emergency Flight Planning for a Generalized Transport Aircraft with Left Wing Damage.” In: *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. August. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007, pp. 1–21. ISBN: 978-1-62410-015-4. DOI: [10.2514/6.2007-6873](https://doi.org/10.2514/6.2007-6873). URL: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2007-6873>.
- [7] M. M. Kale and A. J. Chipperfield. “Stabilized MPC formulations for robust reconfigurable flight control.” In: *Control Engineering Practice* 13.6 (2005), pp. 771–788. ISSN: 09670661. DOI: [10.1016/j.conengprac.2004.09.001](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2004.09.001).
- [8] Hojjat A. Izadi, Youmin Zhang, and Brandon W. Gordon. “Fault tolerant model predictive control of quad-rotor helicopters with actuator fault estimation.” In: *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*. Vol. 18. PART 1. IFAC, 2011, pp. 6343–6348. ISBN: 9783902661937. DOI: [10.3182/20110828-6-IT-1002.03709](https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.03709). URL: <http://dx.doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.03709>.

- [9] M. Mehndiratta and E. Kayacan. “Reconfigurable Fault-tolerant NMPC for Y6 Coaxial Tricopter with Complete Loss of One Rotor.” In: *2018 IEEE Conference on Control Technology and Applications, CCTA 2018* (2018), pp. 774–780. DOI: [10.1109/CCTA.2018.8511444](https://doi.org/10.1109/CCTA.2018.8511444).
- [10] Mina Kamel et al. “Fast Nonlinear Model Predictive Control for Multicopter Attitude Tracking on SO (3).” In: September (2015). DOI: [10.1109/CCA.2015.7320769](https://doi.org/10.1109/CCA.2015.7320769).
- [11] Guillaume Ducard et al. “Strategies for sensor-fault compensation on UAVs: Review, discussions & additions.” In: *2014 European Control Conference, ECC 2014* 3.4 (2014), pp. 1963–1968. DOI: [10.1109/ECC.2014.6862578](https://doi.org/10.1109/ECC.2014.6862578).
- [12] Daniel Mellinger and Vijay Kumar. “Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors.” In: *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2011), pp. 2520–2525. ISSN: 10504729. DOI: [10.1109/ICRA.2011.5980409](https://doi.org/10.1109/ICRA.2011.5980409).
- [13] James B Rawlings, David Q Mayne, and Moritz M Diehl. *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design, 2nd Edition*. Nob Hill Publishing, 2019, p. 819.
- [14] T. Faulwasser and R. Findeisen. “A model predictive control approach to trajectory tracking problems via time-varying level sets of Lyapunov functions.” In: *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. 2011, pp. 3381–3386. DOI: [10.1109/CDC.2011.6160492](https://doi.org/10.1109/CDC.2011.6160492).
- [15] Ian Mitchell and Jeremy Templeton. “A Toolbox of Hamilton-Jacobi Solvers for Analysis of Nondeterministic Continuous and Hybrid Systems.” In: vol. 3414. Mar. 2005, pp. 480–494. DOI: [10.1007/978-3-540-31954-2_31](https://doi.org/10.1007/978-3-540-31954-2_31).
- [16] B. Houska, H.J. Ferreau, and M. Diehl. “ACADO Toolkit – An Open Source Framework for Automatic Control and Dynamic Optimization.” In: *Optimal Control Applications and Methods* 32.3 (2011), pp. 298–312.
- [17] B. Houska, H.J. Ferreau, and M. Diehl. “An Auto-Generated Real-Time Iteration Algorithm for Nonlinear MPC in the Microsecond Range.” In: *Automatica* 47.10 (2011), pp. 2279–2285. DOI: [10.1016/j.automatica.2011.08.020](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.020).