



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ
ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΕ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ
ΑΠΟ ΤΗΝ POISSON ΚΑΤΑΝΟΜΗ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΑΝΑΣΗ ΜΑΡΙΑ

ΑΜ: 09114129

Επιβλέπων Καθηγητής: Χ. Κουκουβίνος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2020



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

**CONTROL CHARTS FOR MONITORING SHIFTS IN POISSON
PROCESSES**

DANASI MARIA

Supervisor Professor: Koukouvinos Christos,
Professor NTUA

Athens, 2020

Περίληψη

Ένα από τα χρησιμότερα στατιστικά εργαλεία για την παρακολούθηση και τον έλεγχο των παραγωγικών διεργασιών αποτελούν, στην εποχή μας, τα διαγράμματα ελέγχου. Σκοπός τους είναι η έγκαιρη ανίχνευση της αφύσικης συμπεριφοράς μίας διεργασίας. Για χαρακτηριστικά ποιότητας που δεν μετρώνται σε συνεχή κλίμακα και το μέτρο της ποιότητας είναι ο αριθμός των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων γίνεται, συνήθως, χρήση της Poisson κατανομής. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται, κατά κύριο λόγο, τα διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη (EWMA) για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή καθώς και εφαρμογές αυτών στην Πολεμική Αεροπορία (ΠΑ).

Στο 1^ο Κεφάλαιο περιγράφονται τα κύρια χαρακτηριστικά του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών (ΣΕΔ), καθώς και των διαγραμμάτων ελέγχου. Στο 2^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωμάτων (*c* charts). Στο 3^ο Κεφάλαιο γίνεται συνοπτική αναφορά στα συσσωρευμένα αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου (Cumulative Sum, CUSUM) και διενεργείται η τεχνική γρήγορης αρχικής απόκρισης (Fast Initial Response, FIR), για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή. Στο 4^ο Κεφάλαιο αναλύονται αρκετά διαγράμματα ελέγχου τύπου Exponentially Weighted Moving Average, EWMA για δεδομένα που ακολουθούν Poisson κατανομή. Στο 5^ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται το διάγραμμα ελέγχου προοδευτικού μέσου (Progressive Mean, PM) και σύγκριση αυτού με άλλα διαγράμματα. Στο 6^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο εφαρμογές των παραπάνω διαγραμμάτων σε δεδομένα που προέρχονται από τον χώρο της βιομηχανίας και της πολεμικής αεροπορίας. Τέλος, στο 7^ο Κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα από την παρούσα διατριβή.

Λέξεις – κλειδιά: στατιστικός έλεγχος ποιότητας, διαγράμματα ελέγχου, CUSUM, FIR, PEWMA, PDEWMA, PGWMA, PDGWMA, PPM.

Abstract

One of the most useful statistical tools for monitoring and controlling production processes are, in our time, control charts. Their purpose is to detect the abnormal behavior of a process in a timely manner. For quality characteristics that are not measured on a continuous scale and the measure of quality is the number of defective units/ non-conformities, the Poisson distribution is usually used. The present study presents mainly the exponentially weighted moving average (EWMA) control charts for data following the Poisson distribution, as well as their applications in industry and the Royal Norwegian Air Force (RnoAF).

Chapter 1 describes the main features of Statistical Quality Control, Statistical Process Control, as well as control charts. Chapter 2 presents the control charts for non-conformities (c charts). Chapter 3 summarizes the cumulative sum (CUSUM) control charts and is carried out the fast initial response technique (FIR) for data following the Poisson distribution. Chapter 4 analyzes several EWMA control charts for data following Poisson distribution. Chapter 5 presents the progressive mean control chart (PM) and its comparison with other charts. Chapter 6 presents two applications of the above control charts in data from the field of industry and of air force. Finally, Chapter 7 summarizes the conclusions of this thesis.

Keywords: statistical quality control, control charts, CUSUM, FIR, PEWMA, PDEWMA, PGWMA, PDGWMA, PPM.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Κουκουβίνο, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και επιβλέποντα της διπλωματικής μου διατριβής για την αρχική εμπιστοσύνη, την συνεχή υποστήριξη και την καθολική συμβολή του κατά την διάρκεια της εν λόγω εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον διδακτορικό φοιτητή Βασίλειο Αλεβιζάκο για τον χρόνο, την καθοδήγηση και την υποστήριξη που μου πρόσφερε μέχρι και το πέρας της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την αδερφή μου που με στηρίζει πάντοτε.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	v
Abstract.....	vii
Ευχαριστίες.....	ix
Περιεχόμενα.....	xi
Κατάλογος Συντομογραφιών.....	xiii
Λίστα Πινάκων.....	xv
Λίστα Σχημάτων.....	xvii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή.....	19
1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας.....	19
1.1.1 Η Έννοια της Ποιότητας και οι Διαστάσεις της.....	19
1.1.2 Συνιστώσες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας.....	21
1.2 Διαγράμματα Ελέγχου.....	24
1.2.1 Βασικά στοιχεία ελέγχου στατιστικών διεργασιών.....	24
1.2.2 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου.....	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων.....	31
2.1 Βασικές Αρχές Διαγραμμάτων Ελέγχου Ιδιοτήτων.....	31
2.2 Διάγραμμα Ελέγχου c	32
2.3 Αμερόληπτο μέσου μήκους ροής c -Chart ARL-Unbiased c -Chart.....	34
2.3.1 Επανεξέταση του c -chart.....	34
2.3.2 Εξάλειψη της μεροληψίας της συνάρτησης μέσου μήκους ροή.....	36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Διαγράμματα CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή.....	41
3.1 Εισαγωγή.....	41
3.2 Διάγραμμα ελέγχου Poisson CUSUM.....	42
3.3 Υπολογισμός μέσου μήκους ροής.....	44
3.4 FIR Poisson CUSUM διάγραμμα ελέγχου.....	46
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Διαγράμματα EWMA για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή.....	47
4.1 Εισαγωγή.....	47
4.2 Poisson EWMA διάγραμμα.....	47
4.2.1 Βασικές Αρχές PEWMA.....	48
4.2.2 Προσέγγιση της αλυσίδας Markov για την αξιολόγηση του EWMA διαγράμματος.....	50
4.2.3 FIR Poisson EWMA διάγραμμα.....	54
4.3 Poisson Double EWMA (PDEWMA) διάγραμμα.....	55
4.4 Poisson GWMA (PGWMA) διάγραμμα.....	58
4.5 Poisson Double GWMA (PDGWMA) διάγραμμα.....	61
4.5.1 Βασικές Αρχές του PDGWMA.....	62
4.5.2 Στατιστική απόδοση των διαγραμμάτων PDGWMA.....	63

4.6	Poisson Moving Average διάγραμμα.....	66
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Progressive Mean Διαγράμματα Ελέγχου.....	69
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Εφαρμογές Διαγραμμάτων.....	73
6.1	Εισαγωγή.....	73
6.2	1η Εφαρμογή –Βιομηχανία.....	73
6.3	2 ^η Εφαρμογή – Ατυχήματα Α/Φ F-16.....	90
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Συμπεράσματα - Προτάσεις.....	105
	Βιβλιογραφία.....	107

Κατάλογος Συντομογραφιών

ANOVA	Ανάλυση διασποράς	Analysis of Variance
ASQ	Αμερικανική Εταιρεία Ποιότητας	American Society of Quality
ARL	Μέσο Μήκος Ροής	Average Run Length
CL	Κεντρική γραμμή	Center Line
CUSUM	Συσσωρευμένα Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου	Cumulative Sum (Control Charts)
DOE	Σχεδιασμός πειράματος	Design of experiment
EWMA	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη	Exponentially Weighted Moving Average (Control Charts)
FIR	Γρήγορη Αρχική Απόκριση	Fast Initial Response
HS	Αρχική Τιμή	Head Start
LCL	Κάτω Όριο Ελέγχου	Lower Control Limit
OOB	Εκτός Ελέγχου	Out Of Control
PDEWMA	Διπλά Διαγράμματα Ελέγχου EWMA για Poisson δεδομένα	Poisson Double EWMA (Control Charts)
PDGWMA	Διπλά διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Γενικευμένα Βάρη για Poisson δεδομένα	Poisson Double Generally Weighted Moving Average
PEWMA	Διαγράμματα Ελέγχου EWMA για Poisson δεδομένα	Poisson EWMA (Control Charts)
PGWMA	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Γενικευμένα Βάρη για Poisson δεδομένα	Poisson Generally Weighted Moving Average
PMA	Διαγράμματα ελέγχου κινητού μέσου για Poisson δεδομένα	Poisson Moving Average
PPM	Διαγράμματα ελέγχου προοδευτικού μέσου για Poisson δεδομένα	Poisson Progressive Mean
RL	Μήκος Ροής	Run Length
SDRL	Τυπική Απόκλιση του Μήκους Ροής	Standard Deviation of the Run Length

SPC	Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών	Statistical Process Control
SSARL	Μέσο Μήκος Ροής Σταθερής Κατάστασης	Steady State Average Run Length
UCL	Άνω Όριο Ελέγχου	Upper Control Limit
UMP	Ομοιόμορφα πιο Ισχυρή δοκιμή	Uniformly Most Powerfull
UMPU	Ομοιόμορφα πιο Ισχυρή Αμερόληπτη δοκιμή	Uniformly Most Powerful Unbiased Test
UMPUCR	Κρίσιμη Περιοχή Ομοιόμορφης πιο Ισχυρής δοκιμής	Uniformly Most Powerful Critical Region

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 1-1 Η διάσταση της ποιότητας.....	21
Πίνακας 4-1 Σύγκριση τιμών ARL_1 των διαγραμμάτων c και Poisson EWMA	50
Πίνακας 4-2 Συνδυασμοί (μ_0, q, α, L) των PGWMA διαγραμμάτων όταν ARL_0 =500.....	61
Πίνακας 4-3_ Σύγκριση διαφόρων διαγραμμάτων με βέλτιστο σχεδιασμό κάτω από διάφορες μετατοπίσεις όταν $\mu_0 = 4$ και εντός ελέγχου $ARL = 500$	65
Πίνακας 4-4 Σύγκριση μέσου μήκους ροής διαγραμμάτων c και PMA με $\mu_0=1$ και 3.....	68
Πίνακας 5-1 Σύγκριση Μέσου μήκους ροής του διαγράμματος PPM με το c διάγραμμα.....	70
Πίνακας 5-2 Σύγκριση Μέσου μήκους ροής του διαγράμματος PPM με το Poisson CUSUM διάγραμμα.....	70
Πίνακας 5-3 Σύγκριση Μέσου μήκους ροής του διαγράμματος PPM με τα PEWMA και PDEWMA διαγράμματα.....	71
Πίνακας 6-1 Αριθμός μη συμμορφωμένων μονάδων.....	73
Πίνακας 6-2 Τιμές S_i και ορίων ελέγχου για το Poisson CUSUM.....	76
Πίνακας 6-3 Τιμές S_i και ορίων ελέγχου για το FIR Poison CUSUM.....	77
Πίνακας 6-4 Επιλογή των παραμέτρων λ και L, q, α και L για $ARL_0= 370$	78
Πίνακας 6-5 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PEWMA διάγραμμα με $\lambda = 0.05$	79
Πίνακας 6-6 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PDEWMA διάγραμμα με $\lambda= 0.05$	81
Πίνακας 6-7 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το FIR PEWMA διάγραμμα με λ =0.05.....	83
Πίνακας 6-8 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για τοPGWMA διάγραμμα με $q=0.95, \alpha$ = 0.8.....	85
Πίνακας 6-9 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για τοPDGWMA διάγραμμα με $q=0.95,$ $\alpha = 0.8$	87
Πίνακας 6-10 Τιμές PM_i και ορίων ελέγχου για το PPM διάγραμμα $L=3.586$	89
Πίνακας 6-11 Αριθμός ατυχημάτων F-16 στα τελευταία 40 χρόνια	91
Πίνακας 6-12 Τιμές S_i και ορίων ελέγχου για το Poisson CUSUM διάγραμμα....	94
Πίνακας 6-13 Τιμές S_i και ορίων ελέγχου για το FIR Poisson CUSUM διάγραμμα	95

Πίνακας 6-14	Επιλογή των παραμέτρων λ και L για $ARL_0 = 162.10$	96
Πίνακας 6-15	Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05$	97
Πίνακας 6-16	Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PDEWMA διάγραμμα $\lambda=0.05$	99
Πίνακας 6-17	Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PGWMA διάγραμμα με $q=0.95$, $\alpha=0.9$	100
Πίνακας 6-18	Τιμές PM_i και ορίων ελέγχου για το PPM διάγραμμα $L=1.213$	102

Λίστα Σχημάτων

Σχήμα 1-1 Οι φάσεις της διαδικασίας παραγωγής.....	22
Σχήμα 1-2 Διάγραμμα Φάσεων χρήσης στατιστικών μεθόδων.....	23
Σχήμα 1-3 Ειδικές, μη τυχαίες ακολουθίες σημείων, patterns.....	27
Σχήμα 1-4 $L\sigma$ όρια ελέγχου.....	28
Σχήμα 6-1 Διάγραμμα ελέγχου c για τα δεδομένα 1- 40 του πίνακα 6-1 (Φάση II)	74
Σχήμα 6-2 Poisson CUSUM διάγραμμα για τα δεδομένα του πίνακα 6-2.....	76
Σχήμα 6-3 Poisson FIR CUSUM διάγραμμα για τα δεδομένα του πίνακα 6-3....	77
Σχήμα 6-4 PEWMA διάγραμμα με $\lambda = 0.05$ και 0.10 για τα δεδομένα του πίνακα 6-5.....	79
Σχήμα 6-5 PDEWMA διάγραμμα με $\lambda = 0.05$ και 0.10 για τα δεδομένα του πίνακα 6-6.....	81
Σχήμα 6-6 FIR PEWMA διάγραμμα με $\lambda = 0.05$ και 0.10 για τα δεδομένα του πίνακα 6-7.....	83
Σχήμα 6-7 PGWMA διάγραμμα με $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-8.....	85
Σχήμα 6-8 PDGWMA διάγραμμα με $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-9.....	87
Σχήμα 6-9 PPM διάγραμμα με $L = 3.586$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-10.....	89
Σχήμα 6-10 Διάγραμμα ελέγχου c για τα έτη 1980 - 1994 του πίνακα 6-11 (Φάση I).....	92
Σχήμα 6-11 Διάγραμμα ελέγχου c για τα έτη 1995 - 2019 του πίνακα 6-11 (Φάση II).....	93
Σχήμα 6-12 Poisson CUSUM διάγραμμα για τα δεδομένα του πίνακα 6-12.....	94
Σχήμα 6-13 FIR Poisson CUSUM διάγραμμα για τα δεδομένα του πίνακα 6-13....	95
Σχήμα 6-14 PEWMA διάγραμμα με $\lambda = 0.05$, 0.10 και 0.25 για τα δεδομένα του πίνακα 6-14.....	97
Σχήμα 6-15 PDEWMA διάγραμμα με $\lambda = 0.05$, 0.10 και 0.25 για τα δεδομένα του πίνακα 6-15.....	99
Σχήμα 6-16 PGWMA διάγραμμα με $q = 0.95$ και $\alpha = 0.9$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-16.....	101
Σχήμα 6-17 PPM διάγραμμα με $L = 1.213$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-17.....	102

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

1.1.1 Η Έννοια και οι Διαστάσεις της Ποιότητας

Η κερδοφορία είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες για κάθε επιτυχημένη επιχείρηση. Η υψηλή κερδοφορία καθορίζεται από τις ισχυρές πωλήσεις και το συνολικό χαμηλό κόστος σε ολόκληρη την λειτουργία μίας επιχείρησης. Οι υγιείς πωλήσεις εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την “υψηλή” ποιότητα, συνεπώς η βελτίωση της ποιότητας και η μείωση του κόστους είναι από τα πιο σημαντικά καθήκοντα για κάθε επιχείρηση.

Ωστόσο, η ποιότητα είναι μια πιο ενδιαφέρουσα έννοια από ό,τι αποδεικνύεται. Για να κατορθώσουμε βελτίωση στην ποιότητα, είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε ακριβώς τι είναι ποιότητα. Μαθηματικά, η ποιότητα μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$Q = \frac{P}{E}$$

όπου με Q θεωρούμε την ποιότητα, με P την απόδοση και με E τις προσδοκίες.

Η αντιληπτή "απόδοση" είναι στην πραγματικότητα η απάντηση στην ερώτηση των πελατών "τι μπορεί να κάνει αυτό το προϊόν για μένα". Η Αμερικανική Εταιρεία Ποιότητας (American Society of Quality, ASQ) ορίζει την ποιότητα ως: “έναν υποκειμενικό όρο για τον οποίο κάθε άτομο έχει τον δικό του ορισμό. Στην τεχνική χρήση, η ποιότητα μπορεί να έχει δύο σημασίες δηλώνει είτε τα χαρακτηριστικά ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας που έχουν την ικανότητα να ικανοποιούν δηλωμένες ή υπονοούμενες ανάγκες είτε σηματοδοτεί ένα προϊόν ή μία υπηρεσία χωρίς ανεπάρκειες”. Ωστόσο, όταν προσπαθούμε να ορίσουμε λεπτομερέστερα "τι είναι η ποιότητα" θα μπορούσαμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η ποιότητα είναι επίσης άυλη, περίπλοκη έννοια. Για διαφορετικά προϊόντα ή υπηρεσίες ή διαφορετικές πτυχές από διάφορους ανθρώπους, όπως οι παραγωγοί, οι σχεδιαστές, η διοίκηση και

οι πελάτες, οι αντιληπτές έννοιες της ποιότητας είναι αρκετά διαφορετικές. Υπάρχει πληθώρα διαφορετικών ορισμών αλλά και τρόπων με τους οποίους κάποιος μπορεί να προσεγγίσει την ποιότητα. Αυτό μπορεί συχνά να προκαλέσει σύγχυση (ανάλογα με την σκοπιά από την οποία εξετάζεται η ποιότητα) αλλά παρά την οποιαδήποτε σύγχυση, αναμφισβήτητα η ποιότητα αποτελεί ένα αξιολογικό σύστημα αξιών, αρχών, προτύπων και μεθόδων δράσης που στόχο έχει τόσο να αξιοποιήσει πλήρως το ανθρώπινο δυναμικό της επιχείρησης όσο και να εξασφαλίσει την ικανοποίηση των πελατών με απώτερο στόχο να οδηγήσει στη βελτιστοποίηση της απόδοσης. Κάθε επιχείρηση, ανεξάρτητα από τον τομέα της επιχειρηματικής δραστηριότητας που ανήκει, μπορεί να ορίσει την ποιότητα ανάλογα με το τι εκφράζει ουσιαστικά την πολιτική και την στρατηγική δράσης της.

Αξιοσημείωτο είναι πως στο ενδιαφέρον έργο Αθηναίων Πολιτεία, ο Αριστοτέλης μας δίνει σημαντικές πληροφορίες γύρω από το θέμα της ποιότητας των προϊόντων της αγοράς και τον αυστηρό τους έλεγχο από λειτουργούς του δημοσίου. Σύμφωνα με το εν λόγω έργο, οι Αθηναίοι όριζαν με κλήρο δέκα αγορανόμους οι οποίοι έπρεπε να επιβλέπουν τα προς πώληση αγαθά ώστε να είναι καθαρά και ακίβδηλα (ανόθευτα). Επίσης, αξιοσημείωτη κι η ανακάλυψη που έγινε το 1863 στην Ελευσίνα απ' τον Δ. Φίλιο της ενεπίγραφης στήλης του 4^{ου} αιώνα π.Χ.. Η μελέτη του κειμένου της από τον γράφοντα οδήγησε σε ένα πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα: Η εν λόγω επιγραφή αποτελεί το αρχαιότερο πρότυπο με αυστηρές προδιαγραφές για την κατασκευή των μπρούντζινων πόλων και εμπολίων, που θα συνέδεαν τους σπονδύλους των κιόνων της Φιλώνειας Στοάς, ενός πανέμορφου κτίσματος, το οποίο θα αναγειρόταν μπροστά από έναν αρχαιότερο ναό, το γνωστό Τελεστήριο της Ελευσίνας. Η μελέτη του κειμένου της επιγραφής οδήγησε στο συγκλονιστικό συμπέρασμα ότι οι αρχαίοι Έλληνες εφήρμοζαν πρότυπα με αυστηρές προδιαγραφές σε κάθε περίπτωση. Που σημαίνει ότι θα υπήρχε οπωσδήποτε και έλεγχος ποιότητας. Διαφορετικά, οι προδιαγραφές της επιγραφής (όπως φυσικά και άλλων προδιαγραφών) δεν θα είχαν καμιά αξία και ο κίνδυνος νοθείας θα ήταν μεγάλος (Βαρουφάκης, 1996).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι συνιστώσες-διαστάσεις της ποιότητας όπως προτάθηκαν απ' τον Garvin (1987) ο οποίος με χρήση αυτών προσπάθησε να ορίσει την έννοια της ποιότητας.

Πίνακας 1-1 Η διάσταση της ποιότητας

Διάσταση	Σημασία και παράδειγμα
Απόδοση	Κύρια χαρακτηριστικά προϊόντος, όπως η φωτεινότητα της εικόνας
Χαρακτηριστικά	Δευτερεύοντα, πρόσθετα χαρακτηριστικά, όπως το τηλεχειριστήριο
Συμμόρφωση	Συγκεκριμένες προδιαγραφές, βιομηχανικά πρότυπα, ποιότητα εργασίας
Αξιοπιστία	Συνοχή απόδοσης του χρόνου, μέσος χρόνος για να αποτύχει η μονάδα
Ανθεκτικότητα	Χρήσιμη ζωή, συμπεριλαμβανομένης της επισκευής
Υπηρεσία	Επίλυση προβλημάτων και παραπόνων, εύκολη επισκευή
Απάντηση	Διεπαφή ανθρώπου-χρήστη, όπως η ευγένεια του αντιπροσώπου
Αισθητική	Αισθητήρια χαρακτηριστικά, όπως εξωτερικό φινίρισμα
Φήμη	Οι προηγούμενες επιδόσεις και άλλα άυλα στοιχεία, όπως πρώτη κατάταξη

1.1.2 Συνιστώσες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας

Η διαδικασία παραγωγής απασχολεί πολλούς εργαζομένους, καθένας από τους οποίους παράγει μόνο ένα τμήμα του προϊόντος με πολύ απλές εργασίες με συνέπεια το επίπεδο δεξιοτήτων του εργαζόμενου να καθίσταται λιγότερο σημαντικό. Έτσι, η ποιότητα δεν μπορεί πλέον να εξασφαλιστεί από την ικανότητα ενός μεμονωμένου εργαζόμενου. Στο σύγχρονο σύστημα παραγωγής, ο όγκος και ο αριθμός των εξαρτημάτων στην παραγωγή αυξήθηκε σημαντικά, γεγονός που αποτέλεσε ένα σημαντικό εμπόδιο στην παραγωγή, διότι κατέστρεψε τη συνοχή του προϊόντος και την αντικατάσταση μέρους αυτού. Επίσης, η σύγχρονη παραγωγή συναρμολογεί εξαρτήματα από πολλούς προμηθευτές, ακόμη και ένας μικρός αριθμός ελαττωματικών εξαρτημάτων μπορεί να καταστρέψει μια μεγάλη παρτίδα παραγωγής, και η επαναχρησιμοποίηση είναι συνήθως πολύ δαπανηρή. Συνεπώς, υπάρχει επείγουσα ανάγκη να ελέγχεται η παραλλαγή και να διερευνώνται τα ελαττωματικά μέρη. Αυτή η ανάγκη είναι η ώθηση για την δημιουργία σύγχρονου συστήματος ποιότητας και μεθόδων ποιότητας.



Σχήμα 1-1 Οι φάσεις της διαδικασίας παραγωγής.

Ο σχεδιασμός του πειράματος (Design of experiment, DOE) είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο ποιότητας. Αποτελεί μία γενική στατιστική μέθοδο που καθοδηγεί τον σχεδιασμό και την ανάλυση των πειραμάτων προκειμένου να εντοπιστεί η σχέση αιτίας-αποτελέσματος μεταξύ των μεταβλητών απόκρισης (εξόδου) και των μεταβλητών πρόβλεψης (εισόδου). Αυτή η σχέση προέρχεται από την εμπειρική μοντελοποίηση των πειραματικών δεδομένων. Στην δεκαετία του 1930, ο Ronald Fisher, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου, ήταν ο πρωτοπόρος στη χρήση στατιστικών μεθόδων στον πειραματικό σχεδιασμό. Ανέπτυξε και χρησιμοποίησε για πρώτη φορά την ανάλυση της διακύμανσης (ANOVA) ως την κύρια μέθοδο στην ανάλυση σε πειραματικό σχεδιασμό.

Ο έλεγχος της στατιστικής διαδικασίας (Statistical process control, SPC) είναι η εφαρμογή στατιστικών τεχνικών για τον έλεγχο μιας διαδικασίας. Το 1924, ο Walter A. Shewhart της Bell Telephone Laboratories ανέπτυξε ένα στατιστικό διάγραμμα ελέγχου για τον έλεγχο σημαντικών μεταβολών στην διαδικασία παραγωγής. Ο Shewhart θεωρείται συχνά ως ο πατέρας του στατιστικού ελέγχου ποιότητας, επειδή συγκέρασε τους κλάδους της στατιστικής, της μηχανικής και των οικονομικών. Ο έλεγχος της στατιστικής διαδικασίας είναι ένα εργαλείο παρακολούθησης της διεργασίας. Ελέγχει κατά πόσο η διεργασία βρίσκεται σε κατάσταση κανονικής ή ανώμαλης διακύμανσης. Η τελευταία κατάσταση δείχνει συχνά ότι υπάρχει ένα πρόβλημα στην διαδικασία, ωστόσο, ο έλεγχος δεν μπορεί να το ανιχνεύσει. Επομένως, απαιτείται η ανάπτυξη εργαλείων για την επίλυση αυτών των προβλημάτων. Προκειμένου η επιχείρηση να αναπτύξει το σύνολο των κατάλληλων τεχνικών και εργαλείων θα πρέπει αρχικά να προβεί στην κατάλληλη εξέταση και διαχείριση του συστήματος ποιότητας που εφαρμόζει. Με το να χρησιμοποιήσει

επιτυχώς τα εργαλεία ελέγχου ποιότητας, θα επιτύχει ώθηση στη βελτίωση αυτής.

Υπάρχουν πολλά εργαλεία διαθέσιμα σήμερα, ωστόσο, τα επτά βασικά εργαλεία για την ποιότητα που ανέπτυξε ο Kaoru Ishikawa (1985) για να υποστηρίξει τις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, είναι: το διάγραμμα αιτίας-αποτελέσματος, το φύλλο ελέγχου, το διάγραμμα ελέγχου, το διάγραμμα ροής, το ιστόγραμμα, το διάγραμμα Pareto και το διάγραμμα διασποράς. Τα επτά αυτά εργαλεία γρήγορα αφομοιώθηκαν σε προγράμματα ποιότητας και σύντομα νέα εργαλεία διερευνήθηκαν, με αποτέλεσμα το 1976 η ιαπωνική εταιρία Ποιοτικού Ελέγχου να αναπτύξει μια λίστα των "επτά «νέων» εργαλείων για την ποιότητα". Τα νέα εργαλεία αυτά άρχισαν να γίνονται όλο και πιο δημοφιλή στις επιχειρήσεις από τη δεκαετία του 1990. Τα επτά νέα εργαλεία για την ποιότητα είναι τα εξής: διάγραμμα "συγγένειας", διάγραμμα συσχετισμού, δένδροειδές διάγραμμα, βελοειδές διάγραμμα, διάγραμμα αποφάσεων, πίνακες και ανάλυση δεδομένων με πίνακα.

Στο στάδιο της παραγωγής, η διασφάλιση της ποιότητας των εισερχόμενων εξαρτημάτων από προμηθευτές είναι επίσης σημαντική, διότι τα ελαττωματικά μέρη θα μπορούσαν σίγουρα να αποτελέσουν ελαττωματικό τελικό προϊόν. Η δειγματοληψία αποδοχής (Acceptance sampling), η οποία αναπτύχθηκε για την επίλυση αυτού του προβλήματος, είναι η επιθεώρηση ενός δείγματος από μια παρτίδα για να αποφασιστεί εάν θα γίνει αποδεκτή ή θα απορριφθεί. Η δειγματοληψία αποδοχής μπορεί να συνίσταται σε απλή δειγματοληψία στην οποία επιθεωρείται μόνο ένα δείγμα στην παρτίδα ή πολλαπλή δειγματοληψία, στην οποία λαμβάνεται μια σειρά δειγμάτων και η απόφαση αποδοχής / απόρριψης βασίζεται σε στατιστικούς κανόνες.



Σχήμα 1-2 Διάγραμμα Φάσεων χρήσης στατιστικών μεθόδων

1.2 Διαγράμματα Ελέγχου

1.2.1 Βασικά στοιχεία ελέγχου στατιστικών διεργασιών

Η βασική αρχή είναι ότι οι διαδικασίες υπόκεινται πάντοτε σε τυχαίες διακυμάνσεις. Κάθε παραγωγική διαδικασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά είναι σχεδιασμένη και πόσο καλά συντηρείται, συνοδεύεται πάντα από μία μικρή σε μέγεθος φυσική μεταβλητότητα. Δηλαδή, εμπεριέχει πολλές μικρές αιτίες, οι οποίες οδηγούν τα παραγόμενα προϊόντα σε ελάχιστη διαφοροποίηση μεταξύ τους, σε κάποιο ή κάποια από τα χαρακτηριστικά τους. Παραδείγματα είναι η διακύμανση της ποιότητας του εισερχόμενου υλικού, οι περιβαλλοντικοί παράγοντες όπως η θερμοκρασία, η υγρασία, οι κραδασμοί και οι διαφορές στον χειρισμό του προϊόντος από διαφορετικούς ανθρώπους. Οι αιτίες αυτές είναι γνωστές ως τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (chance causes of variation). Μία διεργασία λειτουργεί “εντός στατιστικού ελέγχου” (in control process), όταν επηρεάζεται μόνο από τη φυσική μεταβλητότητα, και οι αιτίες αυτές θεωρούνται αναπόσπαστο μέρος της διεργασίας. Είναι όμως πιθανό, άλλα είδη μεταβλητότητας, περιστασιακά να εμφανίζονται σε μία διαδικασία. Αυτή η μεταβλητότητα συνήθως, οφείλεται σε τρεις λόγους: σε κακή ρύθμιση των μηχανημάτων, σε κακό χειρισμό των μηχανημάτων ή σε ελαττωματική πρώτη ύλη. Η μεταβλητότητα αυτή είναι συνήθως μεγάλη, οδηγεί σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διαδικασίας και καλείται ειδική μεταβλητότητα. Οι αιτίες αυτής της μεταβλητότητας ονομάζονται ειδικές αιτίες μεταβλητότητας (special causes of variation). Σε τέτοια περίπτωση, η διεργασία λειτουργεί εκτός στατιστικού ελέγχου (out of control process).

Προκειμένου να μελετηθεί αυτή η μεταβλητότητα, μπορούμε να σχεδιάσουμε διαδοχικά τα χαρακτηριστικά της διαδικασίας και να λάβουμε αποφάσεις βάσει των όσων έχουν παρατηρηθεί μακροπρόθεσμα. Το διάγραμμα ελέγχου είναι ένα γραφικό εργαλείο το οποίο χρησιμοποιείται για την κατανόηση μιας διαδικασίας και βοηθά στην εγγυημένη ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Ένας βασικός λόγος για την επιτυχία των διαγραμμάτων ελέγχου είναι γιατί παρουσιάζουν σημαντικά θέματα-προβλήματα τα οποία αναζητούν άμεση επίλυση. Ένας δεύτερος λόγος για την επιτυχία των διαγραμμάτων ελέγχου είναι ότι επικεντρώνουν την προσοχή στην διαδικασία παρά στο προϊόν. Ο τρίτος λόγος για την επιτυχία των διαγραμμάτων ελέγχου είναι ότι συνιστώνται από ένα σύνολο τεχνικών που διδάσκονται στα άτομα,

τα οποία με την σειρά τους μπορούν να εφαρμόσουν με έναν καθορισμένο τρόπο.

Υπάρχουν πολλοί τύποι διαγραμμάτων ελέγχου. Η διάκρισή τους βασίζεται σε ορισμένα χαρακτηριστικά, όπως το είδος (συνεχές ή διακριτό) και το πλήθος των ποιοτικών χαρακτηριστικών, η κατανομή των μετρήσεων του χαρακτηριστικού, η εξάρτηση των μετρήσεων μεταξύ διαδοχικών χρονικών στιγμών, το μέγεθος του δείγματος, καθώς, και η κρίσιμη ποσότητα που παρακολουθούμε. Εάν το ποιοτικό χαρακτηριστικό είναι συνεχές, δηλαδή περιγράφεται από μία συνεχή τυχαία μεταβλητή, τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές (control charts for variables). Ενώ, αν το ποιοτικό χαρακτηριστικό περιγράφεται από μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες (control charts for attributes). Εάν οι μετρήσεις που λαμβάνονται αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό, τότε αναφερόμαστε σε μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου, ενώ εάν αφορούν περισσότερα χαρακτηριστικά, τότε αναφερόμαστε σε πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου. Εάν οι μετρήσεις που λαμβάνονται ακολουθούν κάποια γνωστή κατανομή, τότε αναφερόμαστε σε παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, ενώ εάν δεν γνωρίζουμε την κατανομή που ακολουθούν οι μετρήσεις που λαμβάνονται, τότε αναφερόμαστε σε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου. Στην περίπτωση που οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή t είναι εξαρτημένες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται την χρονική στιγμή $t-1$, τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες, ενώ εάν οι μετρήσεις είναι ανεξάρτητες, τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για ασυσχέτιστες διεργασίες. Τέλος, εάν λαμβάνεται απ' την παραγωγική διαδικασία μία παρατήρηση σε κάθε χρονική στιγμή τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις, ενώ εάν τα δείγματα παρατηρήσεων που λαμβάνονται είναι μεγαλύτερα της μονάδας, τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για δείγματα ή ομάδες.

Αν και υπάρχουν πολλοί τύποι διαγραμμάτων ελέγχου και διαφορετικοί τρόποι κατασκευής τους, τα κοινά βήματα για τη δημιουργία ενός διαγράμματος ελέγχου στην πράξη μπορούν να συνοψιστούν ως εξής.

- (1) Λήψη μιας σειράς χαρακτηριστικών διεργασίας μέσω παρατήρησης, με ή χωρίς υπολογισμούς.
- (2) Υπολογισμός του μέσου της διεργασίας και χρήση αυτού ως κεντρική γραμμή.
- (3) Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης.

(4) Υπολογισμός του ανώτερου ορίου ελέγχου (UCL) και του κατώτερου ορίου ελέγχου (LCL).

(5) Σχεδιασμός των χαρακτηριστικών της διαδικασίας στο διάγραμμα και σύνδεση των διαδοχικών σημείων.

(6) Εάν υπάρχουν σημεία που βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου, γίνεται έλεγχος της αιτίας και λαμβάνεται απόφαση για την διαγραφή τους, κατόπιν έπεται τροποποίηση των CL , UCL και LCL εάν είναι απαραίτητο.

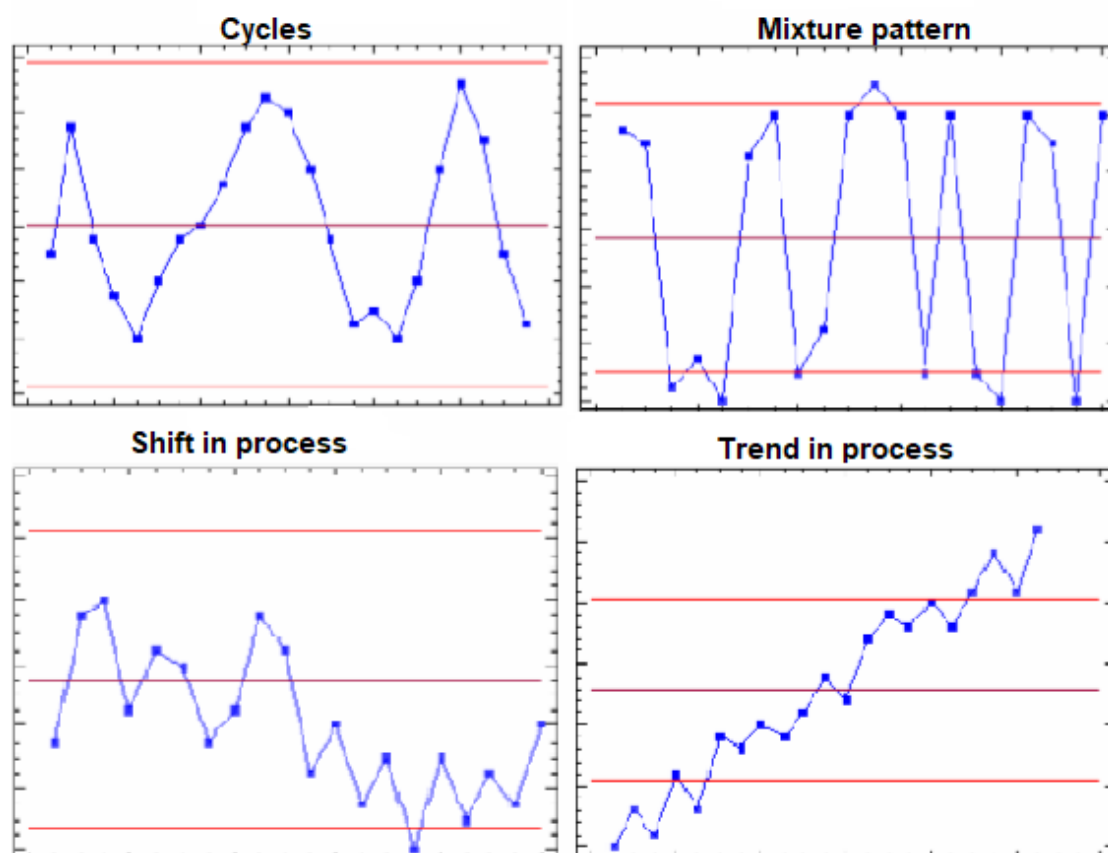
(7) Συνεχίζεται ο σχεδιασμός κάθε φορά που λαμβάνεται νέα μέτρηση.

Ο σκοπός των διαγραμμάτων ελέγχου είναι να ανιχνεύσουν πότε η μετατόπιση πρέπει να θεωρείται ελεγχόμενη ή ανεξέλεγκτη και στην συνέχεια είτε να εξαλείψουν τα αίτια, εάν είναι επιζήμια για την διαδικασία, είτε να τα καταστήσουν μέρος της διαδικασίας, εάν είναι ευεργετικά για την διαδικασία (Wheeler και Chambers, 1992). Έχει επίσης υποδειχθεί ότι υπάρχει στενή σχέση μεταξύ των διαγραμμάτων ελέγχου και της διαδικασίας ελέγχου υποθέσεων. Ο Montgomery (2013) πρότεινε ότι το διάγραμμα ελέγχου είναι μια εικόνα της μηδενικής υπόθεσης όταν μια διαδικασία βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο (δηλαδή, μια παρέμβαση δεν παρήγαγε κανένα αποτέλεσμα). Τα σημεία των παρατηρήσεων εντός των ορίων ελέγχου που καθορίζονται στο διάγραμμα ελέγχου υποστηρίζουν την μηδενική υπόθεση, ενώ τα σημεία των παρατηρήσεων εκτός των ορίων ελέγχου υποδηλώνουν την απόρριψή της.

Οι Wheeler και Chambers (1992) συζήτησαν μερικά από τα μειονεκτήματα των διαγραμμάτων ελέγχου σε σχέση με τη στατιστική θεωρία. Τα διαγράμματα ελέγχου έχουν επηρεαστεί σε κάποιο βαθμό από την παρουσία αυτοσυσχέτισης στα δεδομένα. Οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης μεγαλύτεροι από 0.8 βρέθηκαν να "σφίγγουν" τα όρια ελέγχου ενός διαγράμματος ελέγχου (Wheeler και Chambers, 1992). Άλλα πιθανά προβλήματα περιλαμβάνουν τον εσφαλμένο υπολογισμό των ορίων ελέγχου. Ένα σοβαρότερο μειονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου είναι ότι δεν υπάρχει κανένας τυποποιημένος κανόνας ως προς το τι συνιστά μια διαδικασία "εκτός ελέγχου".

Μεγάλη σημασία δίνεται όταν ένα διάγραμμα ελέγχου εμφανίζει ειδικές, μη-τυχαίες ακολουθίες σημείων, τα patterns. Οι βασικότερες μορφές προτύπων ή μοτίβων που δίνουν ενδείξεις για μη τυχαία συμπεριφορά είναι: τα κυκλικά/

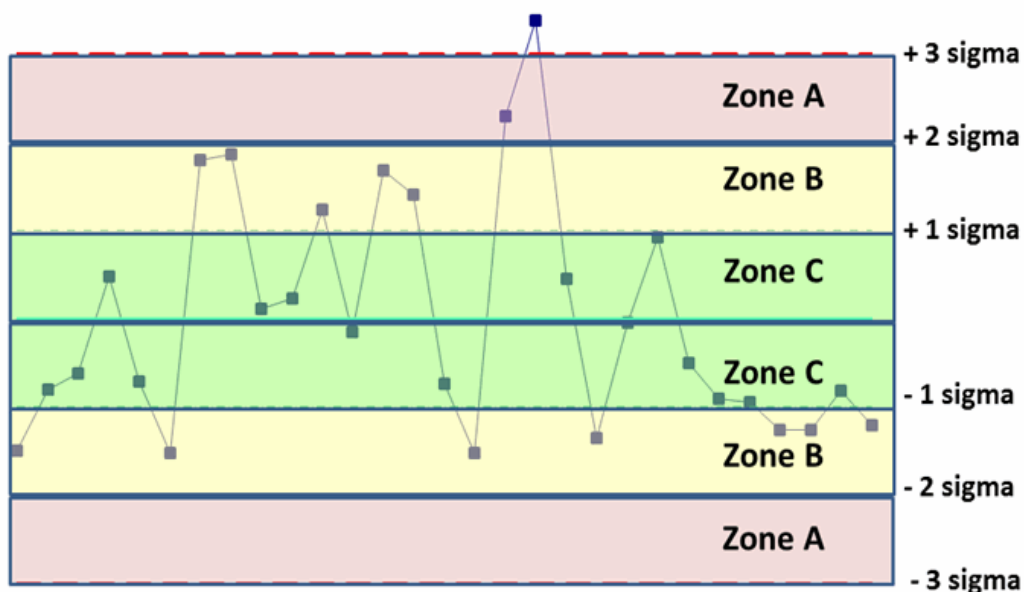
περιοδικά πρότυπα, τα μικτά πρότυπα, τα πρότυπα τάσης, τα πρότυπα αλμάτων και τα πρότυπα έλλειψης μεταβλητότητας. Ορισμένα παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1-3 Ειδικές, μη τυχαίες ακολουθίες σημείων, patterns

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στις οποίες τα σημεία ενός διαγράμματος ελέγχου εμφανίζουν patterns. Σκοπός, όμως, είναι να δημιουργήσουμε ένα πιο ευαίσθητο διάγραμμα ελέγχου, το οποίο έχει την ικανότητα να ανιχνεύει πιο γρήγορα τις εκτός ελέγχου διαδικασίες. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί σχεδιάζοντας πέραν από τα όρια ελέγχου και τα λεγόμενα προειδοποιητικά όρια (warning limits), τα οποία βρίσκονται εσωτερικά των ορίων ελέγχου. Τα όρια ελέγχου που βρίσκονται σε απόσταση 1σ από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου ονομάζονται εσωτερικά προειδοποιητικά όρια ελέγχου (Inner warning limits), ενώ τα όρια που βρίσκονται σε απόσταση 2σ ονομάζονται εξωτερικά προειδοποιητικά όρια ελέγχου (Outer warning limits). Τα όρια που βρίσκονται σε απόσταση 3σ από την κεντρική γραμμή ονομάζονται φυσικά όρια ανοχής της διεργασίας (Natural tolerance limits). Τα προειδοποιητικά όρια είναι χρήσιμα στην δημιουργία κανόνων, οι οποίοι εντοπίζουν τις ειδικές μη-τυχαίες ακολουθίες σημείων, τα patterns, που μπορεί να εμφανιστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Συμπεραίνουμε, πως δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει

κάποιο σημείο εκτός ορίων ελέγχου (LCL και UCL) για να θεωρηθεί μία διαδικασία εκτός ελέγχου. Οι σημαντικότεροι κανόνες ευαισθητοποίησης (run tests) είναι οι εξής:



Σχήμα 1-4 1σ όρια ελέγχου

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη Α.
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της ζώνης C.
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία πάνω ή κάτω από την κεντρική γραμμή.
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
6. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλασσόμενη μορφή.
7. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά σε οποιαδήποτε όρια.
8. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική ζώνη C.
9. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής ζώνης C.
10. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.

1.2.2 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου

Η απόδοση του διαγράμματος ελέγχου εκτιμάται γενικά από ορισμένες πτυχές της κατανομής του μήκους ροής (Run Length, RL). Στα διαγράμματα τύπου Shewhart το μέσο μήκος ροής ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p . Η

αναμενόμενη τιμή του RL , δηλαδή το μέσο μήκος ροής (ARL), είναι το πιο κοινό μέτρο που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου. Το μέσο μήκος ροής δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να τοποθετηθούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου έως ότου ενεργοποιηθεί για πρώτη φορά ένας συναγερμός εκτός ελέγχου. Η χρήση του μέσου μήκους ροής ως μοναδικού μέτρου απόδοσης μπορεί να μην είναι ικανοποιητική. Παρόλο που χρησιμοποιείται ένα διάγραμμα ελέγχου για την ανίχνευση περιστατικών πιθανών μετατοπίσεων, υπάρχει πιθανότητα για ένα ψευδή συναγερμό, δηλαδή σήμα εκτός ορίων ελέγχου όταν η διαδικασία βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου. Έτσι, ορίζουμε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$, όπου α είναι η πιθανότητα ένα σημείο να ξεπερνά τα όρια ελέγχου όταν η διαδικασία βρίσκεται υπό έλεγχο (Σφάλμα τύπου I). Η τιμή του ARL_0 μεταφράζεται ως το πλήθος των αναμενόμενων δειγμάτων που θα ληφθούν μέχρι να βρεθεί σημείο εκτός των ορίων ελέγχου, δεδομένου ότι η διαδικασία βρίσκεται υπό έλεγχο. Επίσης ορίζουμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}$, όπου β είναι η πιθανότητα ένα σημείο να βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου σε μία εκτός ελέγχου διαδικασία λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας (Σφάλμα τύπου II). Η τιμή του ARL_1 μεταφράζεται ως το πλήθος των αναμενόμενων δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η μετατόπιση στο μέσο μίας διεργασίας, από την στιγμή που θα συμβεί αυτή η μετατόπιση.

Στην πράξη, θέλουμε μεγάλο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_0) και μικρό εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_1). Δηλαδή, πρέπει να έχουμε όσα περισσότερα σημεία είναι δυνατό εντός των ορίων ελέγχου και ταυτόχρονα όσο το δυνατόν λιγότερα μέχρι να εντοπιστεί η αλλαγή στο μέσο της διεργασίας, από την στιγμή που η μετατόπιση αυτή συνέβη. Συχνά, χρησιμοποιούμε και ένα άλλο μέτρο για την αξιολόγηση της απόδοσης του διαγράμματος, το μέσο χρόνο σήματος (Average Time to Signal, ATS). Η ποσότητα ATS ορίζεται από τον τύπο:

$$ATS = ARL \times h$$

όπου h είναι ο χρόνος που μεσολαβεί για την λήψη δύο διαδοχικών δειγμάτων και θεωρείται σταθερός. Συνεπώς, δηλώνει τον μέσο (πραγματικό) χρόνο που απαιτείται για να δώσει το διάγραμμα ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων

2.1 Βασικές αρχές διαγραμμάτων ελέγχου

Άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι τα όρια προδιαγραφών (specification limits) των ποιοτικών χαρακτηριστικών του προϊόντος, τα οποία καθορίζονται κατά τον σχεδιασμό του. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αξιολογούνται συγκρινόμενα με προδιαγραφές. Για ένα βιομηχανικό προϊόν οι προδιαγραφές είναι οι επιθυμητές μετρήσεις των ποιοτικών χαρακτηριστικών των εξαρτημάτων τα οποία συγκροτούν το προϊόν, όπως επίσης και οι επιθυμητές τιμές των ποιοτικών χαρακτηριστικών του τελικού προϊόντος. Επειδή όμως η κατασκευή και ο έλεγχος ενός πρωτοτύπου δε γίνεται πάντα με δομημένο τρόπο, πολλά προβλήματα ποιότητας μπορεί να προκύψουν όταν το προϊόν βγει στην παραγωγή. Ως αποτέλεσμα, προκύπτουν εξαρτήματα ή και προϊόντα μη συμμορφωμένα (non conforming products), δηλαδή προϊόντα των οποίων ένα τουλάχιστον ποιοτικό χαρακτηριστικό έχει τιμή εκτός των ορίων προδιαγραφών, συνεπώς προϊόντα τα οποία δεν πληρούν μία ή περισσότερες από τις προδιαγραφές τους. Ένα τέτοιο προϊόν δεν είναι απαραίτητα ακατάλληλο προς χρήση. Θεωρείται όμως ελαττωματικό (defective), αν έχει ένα ή περισσότερα ελαττώματα, τα οποία είναι αρκετά σοβαρά ώστε να επηρεάζουν σημαντικά την ασφαλή ή αποτελεσματική χρήση του προϊόντος.

Η εμφάνιση μη συμμορφωμένων μονάδων θεωρείται ότι ακολουθεί κατανομή Poisson. Αυτή η κατανομή είναι κατάλληλη για τη μοντελοποίηση του αριθμού των συμβάντων που συμβαίνουν σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, χώρο ή όγκο. Ορισμένες προϋποθέσεις πρέπει να ισχύουν για τη κατανομή Poisson. Πρώτον, η πιθανότητα εμφάνισης ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων πρέπει να είναι μεγάλη και ο μέσος αριθμός των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων ανά μονάδα επιθεώρησης πρέπει να είναι μικρός. Ένα παράδειγμα είναι ο αριθμός ελαττωμάτων σε 100 m² υφάσματος. Θεωρητικά, αυτός ο αριθμός μπορεί να είναι αρκετά μεγάλος, αλλά ο μέσος αριθμός ελαττωμάτων σε υφάσματα των 100 m δεν

είναι απαραίτητως μεγάλη αξία. Η δεύτερη προϋπόθεση είναι ότι τα περιστατικά των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων πρέπει να είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Ας υποθέσουμε ότι 100 m^2 υφάσματος είναι το μέγεθος του δείγματος. Ένα ελάττωμα σε ένα συγκεκριμένο τμήμα υφάσματος δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να επηρεάσει την εμφάνιση άλλων ελαττωμάτων. Τρίτον, κάθε δείγμα πρέπει να έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων, δηλαδή οι επικρατούσες συνθήκες θα πρέπει να είναι συνεπείς από δείγμα σε δείγμα. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιούνται διαφορετικά “όπλα” με πριτσίνια για την εγκατάσταση των πριτσινιών σε ένα πλοίο, η πιθανότητα για ελαττώματα μπορεί να διαφέρει για διαφορετικά όπλα, οπότε η κατανομή Poisson δεν θα είναι αυστηρά εφαρμόσιμη.

2.2 Διάγραμμα ελέγχου c

Ένα c διάγραμμα χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση του συνολικού αριθμού ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων σε δείγματα σταθερού μεγέθους. Κατά την κατασκευή των c διαγραμμάτων ελέγχου, το μέγεθος του δείγματος αναφέρεται επίσης ως περιοχή ευκαιρίας. Η περιοχή ευκαιρίας μπορεί να είναι μεμονωμένες ή πολλαπλές μονάδες ενός προϊόντος (π.χ. 1 υπολογιστής ή μια συλλογή 10 υπολογιστών). Όταν τόσο ο μέσος αριθμός ελαττωμάτων ανά μονάδα όσο και η περιοχή ευκαιρίας είναι μικρά, οι περισσότερες παρατηρήσεις θα δείξουν μηδενικά ελαττώματα, με ένα ελάττωμα να εμφανίζεται περιστασιακά και δύο ή περισσότερα ελαττώματα ακόμα λιγότερο συχνά. Τέτοιες πληροφορίες μπορεί να είναι παραπλανητικές, επομένως είναι ωφέλιμο να επιλέξουμε μια αρκετά μεγάλη περιοχή ευκαιρίας, ώστε να μπορέσουμε να αναμένουμε κάποια ελαττώματα. Εάν ο μέσος αριθμός ελαττωμάτων ανά συσκευή υπολογιστή είναι μικρός (π.χ. περίπου 0.08), θα ήταν λογικό το μέγεθος του δείγματος να είναι 50 αντί για 10 σετ.

Εάν το X αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων στη μονάδα επιθεώρησης, τότε η πιθανότητα παρατήρησης x ελαττωμάτων είναι

$$P(X=x) = e^{-c} \frac{c^x}{x!}, x=0,1,\dots$$

Όπου ο μέσος αριθμός ελαττωμάτων ανά μονάδα δείγματος προκύπτει από τις παρατηρήσεις του δείγματος και υποδηλώνεται με c . Στην κατανομή Poisson, ο μέσος όρος και η διακύμανση είναι ίσοι $\mu_X = \sigma_X^2 = c$.

Η στατιστική συνάρτηση για την παρακολούθηση των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων ορίζεται ως $W_i = X_i$, όπου $X_i (i \geq 1)$ δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων στην i -οστή μονάδα επιθεώρησης. Η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου, όταν το c είναι γνωστό είναι:

Διάγραμμα c
$L\sigma$ Όρια Ελέγχου Φάσης II
$UCL = c + L\sqrt{c}$
$CL = c$
$LCL = c - L\sqrt{c}$

Εάν το κατώτερο όριο ελέγχου διαπιστωθεί ότι είναι μικρότερο από μηδέν, τίθεται ίσο με μηδέν.

Στην Φάση II, ο διαχειριστής της διεργασίας παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διαδικασία ώστε να ανιχνεύει εγκαίρως πιθανή μετατόπιση στον μέσο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Σε αυτήν την φάση, ο διαχειριστής της διεργασίας αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο ο μέσος των χαρακτηριστικών είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτός ήταν εξ αρχής γνωστός.

Εάν η παράμετρος c είναι άγνωστη, τότε βρισκόμαστε στην Φάση I, όπου δοθέντος ενός συνόλου δεδομένων από την διεργασία, τα δεδομένα αναλύονται όλα μαζί ταυτοχρόνως, ώστε να καθοριστεί εάν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου κατά την χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Ο κατασκευαστής είναι σε θέση να την “φέρει” εντός ελέγχου με δοκιμή των ορίων ελέγχου. Εφόσον, η διεργασία διαπιστωθεί ότι είναι πράγματι εντός ελέγχου, τα όρια του διαγράμματος που προέκυψαν είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς αυτής της διεργασίας.

Έστω X_i ο αριθμός των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων στην i -οστή μονάδα επιθεώρησης με $1 \leq i \leq m$, όπου m οι διαθέσιμες προκαταρκτικές μονάδες επιθεώρησης, εκτιμούμε το c , και το εκτιμημένο c είναι αυτό που θα χρησιμοποιηθεί στα όρια ελέγχου, δηλαδή $\hat{c} = \bar{c}$:

$$\bar{c} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$$

προκύπτει
$$E(\bar{c}) = \frac{1}{m} E\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(X_i) = \frac{1}{m} m c = c .$$

Επομένως,

Διάγραμμα c
Λσ Όρια Ελέγχου Φάσης I
$UCL = \bar{c} + L\sqrt{\bar{c}}$
$CL = \bar{c}$
$LCL = \bar{c} - L\sqrt{\bar{c}}$

Τα σφάλματα τύπου I και II ενός c διαγράμματος ελέγχου υπολογίζονται ως εξής:

Σφάλμα τύπου I:

$$\alpha = P(X \notin [LCL, UCL] | X \sim P(c)) = 1 - [F_x(UCL) - F_x(LCL)] = 1 - \sum_{x=\lfloor LCL \rfloor}^{\lfloor UCL \rfloor} e^{-c} \frac{c^x}{x!} \quad (2.1)$$

όπου c είναι η μέση τιμή των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων που εμφανίζονται σε μία μονάδα επιθεώρησης σε μία εντός ελέγχου διεργασία και $\lfloor LCL \rfloor$ είναι ο μικρότερος ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος με LCL , αντίστοιχα $\lfloor UCL \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του UCL .

Σφάλμα τύπου II:

$$\beta = P(LCL \leq X \leq UCL | X \sim P(\hat{c})) = F_x(UCL) - F_x(LCL) = \sum_{x=\lfloor LCL \rfloor}^{\lfloor UCL \rfloor} e^{-\hat{c}} \frac{\hat{c}^x}{x!} \quad (2.2)$$

όπου \hat{c} είναι η μέση τιμή των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων που εμφανίζονται σε μία μονάδα επιθεώρησης σε μία εκτός ελέγχου διεργασία.

2.3 ARL-Unbiased c διάγραμμα

2.3.1 Επανεξέταση του c διαγράμματος

Οι Paulino, Morais και Knoth (2016) πρότειναν ένα c διάγραμμα όπου όχι μόνο είναι αμερόληπτο, αλλά μπορεί να ανιχνευθεί και η μετατόπιση του μέσου της

διαδικασίας ανεξάρτητα από το πόσο μικρή είναι η τιμή c_0 . Κατά συνέπεια, όρισαν και απεικόνισαν ένα c διάγραμμα με μια προκαθορισμένη τιμή ARL_0 , ας πούμε ARL^* , και μια αμερόληπτη συνάρτηση ARL .

Το c διάγραμμα ελέγχου που συσχετίζεται με 3σ όρια ελέγχου έχει χρησιμοποιηθεί ιστορικά, εμμέσως υποθέτοντας ότι η κανονική προσέγγιση για την κατανομή Poisson είναι επαρκής. Η υιοθέτηση 3σ ορίων, όπως έπραξε ο Shewhart (1931), αντιστοιχεί σε μια πιθανότητα ενός ψευδούς συναγερμού περίπου 2×0.00135 αν η προσέγγιση αυτή είναι λογική. Ωστόσο, επειδή η κατανομή Poisson είναι λοξή προς τα δεξιά, οι κάτω και άνω περιοχές της ουράς τείνουν να είναι ανομοιογενείς και το ARL_0 μπορεί ουσιαστικά να διαφέρει από $(2 \times 0.00135)^{-1} = 370.4$.

Έστω $c = c_0 + \delta$ ο μέσος μίας διαδικασίας, όπου το δ αντιπροσωπεύει το μέγεθος της μετατόπισης του μέσου της διαδικασίας. Ασχολούμαστε με ένα c διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου, με $LCL > 0$ αν και μόνο αν ο μέσος της εντός ελέγχου διεργασίας $c_0 > 9$. Στην περίπτωση που $c_0 \leq 9$, έχουμε να κάνουμε με ένα άνω μονόπλευρο διάγραμμα, το οποίο ενεργοποιεί ένα ψευδή συναγερμό πιο συχνά από ένα έγκυρο σήμα με οποιαδήποτε μείωση του λ και του οποίου η συνάρτηση ARL έχει ένα supremum στο $\delta^* = -c_0$. Επιπλέον, για $c_0 > 9$, μπορούμε να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση ARL ενός c διαγράμματος με 3σ όρια ελέγχου παίρνει την μέγιστη τιμή της στο

$$\delta^*(c_0) = \operatorname{argmax}_{\delta \in (-c_0, +\infty)} ARL(\delta) = \frac{UCL!}{(LCL-1)!} \frac{1}{UCL-LCL+1} - c_0 \quad (2.3)$$

όπου L είναι μια θετική σταθερά, συνήθως επιλέγεται έτσι ώστε οι ψευδείς συναγερμοί να είναι σπάνιοι. Το μέγιστο $ARL(\delta)$ στο c διάγραμμα επιτυγχάνεται στο σημείο $\delta^*(c_0)$ κάτω από το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το μέγιστο της καμπύλης ARL επιτυγχάνεται παρουσία μιας μετατόπισης προς τα κάτω στον μέσο της διαδικασίας αντί να συμβαίνει στην εντός ελέγχου κατάσταση και πως το c διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο, κατά μέσο όρο, για την ανίχνευση ορισμένων μειώσεων στο c_0 παρά για την ενεργοποίηση ενός ψευδούς συναγερμού.

Οι Wetherill, Brown (1991) και Ryan (2011) συνέστησαν τη χρήση ορίων ελέγχου βασισμένων σε ποσοστημόρια της κατανομής Poisson αντί για 3σ όρια ελέγχου κατά τη δημιουργία ενός c διαγράμματος. Δεδομένου ότι ο διακριτός χαρακτήρας αυτής της κατανομής δυσκολεύει την επίτευξη μιας προκαθορισμένης πιθανότητας ψευδούς

συναγερμού α , προτείνεται η χρήση των ορίων ελέγχου LCL και UCL βασισμένων σε ποσοστημόρια. Τα LCL και UCL είναι οι μεγαλύτεροι και οι μικρότεροι μη αρνητικοί ακέραιοι (αντίστοιχα) που ικανοποιούν:

$$P_{\lambda_0}(X < LCL | c = c_0) \leq \alpha_{LCL} \quad \text{και} \quad P_{\lambda_0}(X > UCL | c = c_0) \leq \alpha_{UCL} \quad (2.4)$$

όπου $\alpha_{LCL} + \alpha_{UCL} = \alpha$. Η χρήση των ορίων ελέγχου βασισμένων σε ποσοστημόρια εγγυάται ότι το ARL_0 δεν είναι μικρότερο από α^{-1} . Η υιοθέτηση ορίων ελέγχου βασισμένων σε ποσοστημόρια μπορεί να οδηγήσει σε λιγότερο μεροληπτικές τιμές του ARL .

2.3.2 Εξάλειψη της μεροληψίας της συνάρτησης μέσου μήκους ροής

Η έννοια ενός ARL -unbiased c διαγράμματος σχετίζεται με την έννοια του αμερόληπτου ελέγχου (unbiased test), η οποία οφείλεται στους Neyman και Pearson (1936).

- ένας έλεγχος με μηδενική υπόθεση $H_0 : \theta \in \Theta_0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$ με τη συνάρτηση ισχύος $\xi(\theta)$, είναι αμερόληπτος αν

$$\xi(\theta) \leq \alpha \text{ για } \theta \in \Theta_0 \quad \text{και} \quad \xi(\theta) \geq \alpha \text{ για } \theta \in \Theta_0^c.$$

Έτσι, ο έλεγχος είναι τουλάχιστον τόσο πιθανό να απορρίψει υπό οποιαδήποτε εναλλακτική υπόθεση όσο υπό την H_0 .

- αν θεωρήσουμε C μια κλάση δοκιμών, για τον έλεγχο $H_0 : \theta \in \Theta_0$ έναντι $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$ τότε ένας έλεγχος στην κλάση C , με συνάρτηση ισχύος $\xi(\theta)$, είναι ένας ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος (Uniformly Most Powerful test, UMP), εάν

$$\xi(\theta) \geq \xi'(\theta) \text{ για κάθε } \theta \in \Theta_0^c$$

και για κάθε $\xi'(\theta)$ που είναι μια συνάρτηση ισχύος ενός ελέγχου στην κλάση C .

- Επίσης, σε πολλές περιπτώσεις που δεν υπάρχει έλεγχος UMP, θα υπάρχει ο αμερόληπτος ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος (Uniformly Most Powerful Unbiased test, UMPU) που είναι UMP μεταξύ της κλάσης όλων των αμερόληπτων ελέγχων.

Έστω η μηδενική υπόθεση $H_0 : \theta \in \omega_0$ με εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \theta \in \omega_1$ και το

τυχαίο δείγμα συμβολίζεται με $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)'$. Υποθέτουμε ότι η περιοχή απόρριψης C είναι τέτοια ώστε: Απορρίπτουμε την H_0 όταν $\mathbf{X} \in C$ ενώ δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0 όταν $\mathbf{X} \in C^c$. Ένας ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος (UMP) αντιστοιχεί στην “καλύτερη” περιοχή απόρριψης C έτσι ώστε κατά τον έλεγχο μίας απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0: \theta = \theta'$ έναντι μίας εναλλακτικής υπόθεσης $H_1: \theta = \theta''$, αυτός ο έλεγχος να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ισχύ ελέγχου $(1-\beta)$ μεταξύ όλων των ελέγχων μεγέθους α . Όπου η ισχύς ενός ελέγχου υπολογίζεται από $(1-\beta) = \gamma(\theta) = P_\theta(\text{Απόρριψη της } H_0 | \theta \in \omega_1)$ και το μέγεθος ενός ελέγχου υπολογίζεται ως $\alpha = \max_{\theta \in \omega_0} P(\mathbf{X} \in C) = \max_{\theta} P_\theta(\text{Απόρριψη της } H_0 | \theta \in \omega_0)$. Μια δοκιμή UMP ορίζεται συνήθως από την άποψη μιας ομοιόμορφα πιο ισχυρής περιοχής απόρριψης (UMPCR) (που ονομάζεται επίσης “κρίσιμη περιοχή”). Η “καλύτερη” περιοχή απόρριψης είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα δημιουργίας σφάλματος τύπου I ή τύπου II. Με άλλα λόγια, το UMPCR είναι η περιοχή που δίνει την μικρότερη πιθανότητα να προκληθεί σφάλμα Τύπου I ή II. Είναι επίσης η περιοχή που δίνει τον έλεγχο UMP με την μεγαλύτερη (ή εξίσου μεγαλύτερη) συνάρτηση ισχύος. Ο UMP έλεγχος δεν υφίσταται πάντα, ειδικά όταν ο έλεγχος έχει μεταβλητές οχλήσεων (μεταβλητές που δεν σχετίζονται με την εκάστοτε μελέτη, αλλά πρέπει να ληφθούν υπόψιν). Ωστόσο, αν υφίσταται ο έλεγχος UMP, μπορεί να χρησιμοποιηθεί με το λεγόμενο Neyman-Pearson λήμμα.

Εμπνευσμένο από τα κάπως ελπιδοφόρα αποτελέσματα των ορίων ελέγχου βασισμένων σε ποσοστημόρια και από τους ελέγχους UMPU όσον αφορά μια παράμετρο πραγματικής τιμής σε μια εκθετική οικογένεια, οι Paulino, Morais και Knoch (2016) αποφάσισαν να συνδυάσουν την χρήση ορίων ελέγχου βασισμένων σε ποσοστημόρια, LCL και UCL και τις πιθανότητες τυχαιοποίησης, γ_{LCL} και γ_{UCL} , για την ενεργοποίηση ενός σήματος όταν η τιμή του στατιστικού γίνεται ίση με LCL και UCL . Αυτή η προσέγγιση επιφέρει το ARL_0 σε α^{-1} και επίσης εγγυάται ένα ARL -unbiased c διάγραμμα.

Το ARL -unbiased c διάγραμμα, με τιμή ARL_0 ίση με α^{-1} , χρησιμοποιεί τα όρια ελέγχου βασισμένα σε ποσοστημόρια LCL και UCL , επειδή οι δύο εξισώσεις που ορίζουν τον έλεγχο UMPU δεν επαρκούν για τον καθορισμό των δύο ορίων ελέγχου LCL , UCL και γ_{LCL} , γ_{UCL} , τα οποία σχετίζονται με την σχέση $\alpha_{LCL} + \alpha_{UCL} = \alpha$. Ένα σήμα συναγερμού ενεργοποιείται με:

- πιθανότητα 1, εάν ο δειγματικός αριθμός των ελαττωμάτων είναι κάτω από το

LCL ή άνω από το UCL .

• πιθανότητα ίση με γ_{LCL} και γ_{UCL} , που λαμβάνονται με επίλυση του συστήματος των παρακάτω γραμμικών εξισώσεων:

$$\gamma_{LCL} P_{c_0}(X=LCL) + \gamma_{UCL} P_{c_0}(X=UCL) = \alpha - 1 + \sum_{X=LCL}^{UCL} P_{c_0}(X=x) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{LCL} LCL P_{c_0}(X=LCL) + \gamma_{UCL} UCL P_{c_0}(X=UCL) &= \alpha \lambda_0 - \lambda_0 + \\ &+ \sum_{X=LCL}^{UCL} x P_{c_0}(X=x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

εάν ο δειγματικός αριθμός των ελαττωμάτων είναι ίσος με LCL και UCL , αντίστοιχα. Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (2.8), (2.9) δίνει τις πιθανότητες τυχαιοποίησης:

$$\gamma_{LCL} = \frac{de-bf}{ad-bc} \quad \text{και} \quad \gamma_{UCL} = \frac{af-ce}{ad-bc} \quad (2.10)$$

όπου,

$$\alpha = P_{c_0}(X=LCL), b = P_{c_0}(X=UCL), c = LCL P_{c_0}(X=LCL),$$

$$d = UCL P_{c_0}(X=UCL), e = \alpha - 1 + \sum_{X=LCL}^{UCL} P_{c_0}(X=x),$$

$$f = \alpha c_0 - c_0 + \sum_{X=LCL}^{UCL} x P_{c_0}(X=x)$$

υπό την προϋπόθεση ότι:

$$\alpha d - bc = P_{c_0}(X=LCL) UCL P_{c_0}(X=UCL) - P_{c_0}(X=UCL) LCL P_{c_0}(X=LCL) \neq 0,$$

και λόγω ότι το $LCL < UCL$:

$$\gamma_{LCL} = \frac{UCL [\alpha - 1 + \sum_{X=LCL}^{UCL} P_{c_0}(X=x)] - [\alpha c_0 - c_0 + \sum_{X=LCL}^{UCL} x P_{c_0}(X=x)]}{P_{c_0}(X=LCL)(UCL - LCL)} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{UCL} = \frac{[\alpha c_0 - c_0 + \sum_{X=LCL}^{UCL} x P_{c_0}(X=x)] - LCL [\alpha - 1 + \sum_{X=LCL}^{UCL} P_{c_0}(X=x)]}{P_{c_0}(X=UCL)(UCL - LCL)} \quad (2.12)$$

Η τυχαιοποίηση της εκπομπής του σήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί στην πράξη χρησιμοποιώντας ένα λογισμικό για την δημιουργία ενός «ψευδο»-τυχαίου

αριθμού από μια κατανομή Bernoulli με παράμετρο γ_{LCL} (αντίστοιχα γ_{UCL}) κάθε φορά που ο παρατηρούμενος αριθμός των ελαττωμάτων ισούται με το LCL (αντίστοιχα UCL).

Επιπλέον, το σήμα ενεργοποιείται από το ARL -unbiased c διάγραμμα με πιθανότητα:

$$\begin{aligned} \xi(c^*) = & (1 - \sum_{X=LCL}^{UCL} P_{c_0+\delta}(X=x|c=c^*)) + \gamma_{LCL} P_{c_0+\delta}(X=LCL|c=c^*) + \\ & + \gamma_{UCL} P_{c_0+\delta}(X=UCL|c=c^*) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{με} \quad ARL_0 = \frac{1}{\xi(c^*)} \quad (2.14)$$

η οποία είναι μεγαλύτερη από εκείνη του c διαγράμματος με όρια ελέγχου βασισμένα σε ποσοστημόρια αλλά χωρίς τυχαιοποίηση, και επομένως λαμβάνουμε μικρότερες τιμές ARL , αλλά μια λογική ARL_0 τιμή που συμπίπτει με την επιθυμητή τιμή α^{-1} .

Όσον αφορά το c διάγραμμα, η πιθανότητα ενεργοποίησης ενός σήματος είναι ίση με:

$$\xi(c^*) = (1 - \sum_{X=LCL}^{UCL} P_{c_0+\delta}(X=x|c=c^*)) \quad (2.15)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Διαγράμματα CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή

3.1 Εισαγωγή

Το διάγραμμα ελέγχου CUSUM προτάθηκε από τον Βρετανό χημικό Page (1954). Έχει αποδειχθεί ότι είναι αποδοτικότερο στην ανίχνευση μικρών αλλαγών στον μέσο ενός, υπό παρακολούθηση, ποιοτικού χαρακτηριστικού, από ότι ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart. Ο λόγος είναι πως τα απεικονιζόμενα στατιστικά ενός διαγράμματος CUSUM ενσωματώνουν πληροφορίες από τρέχουσες αλλά και προηγούμενες παρατηρήσεις για να προσδιορίσουν εάν η διαδικασία βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου ή όχι, ενώ ένα διάγραμμα τύπου Shewhart χρησιμοποιεί μόνο τα τρέχοντα σημεία εκ των δεδομένων για τη λήψη απόφασης. Πολλοί επιστήμονες αργότερα ασχολήθηκαν με αυτό το διάγραμμα. Περιγράφησαν αρκετά σχεδιαγράμματα των εν λόγω διαγραμμάτων ελέγχου καθώς και ο τύπος της διεργασίας όπου αυτά είναι τα πιο κατάλληλα. Εξετάστηκε η σημασία τους για τον ποιοτικό έλεγχο και προτάθηκαν επεκτάσεις αυτής της τεχνικής για να διευκολυνθεί η εφαρμογή τους σε πρακτικές καταστάσεις. Οι Brook και Evans (1972) πρότειναν την χρήση του διαγράμματος CUSUM για την παρακολούθηση του μέσου όρου μιας κανονικής κατανομής. Οι Lucas και Crosier (1982) παρουσίασαν το μέσο μήκος ροής για το διάγραμμα Poisson CUSUM για να σηματοδοτεί τα σημεία εκτός ελέγχου. Παρουσίασαν επίσης πίνακες ARL που δείχνουν το μήκος ροής με την δυνατότητα χρήσης της τεχνικής γρήγορης αρχικής απόκρισης (Fast Initial Response, FIR). Ο Woodall (1985) παρουσίασε μια μέθοδο προβάλλοντας τα διαγράμματα ελέγχου βάσει της στατιστικής απόδοσής τους σε καθορισμένες περιοχές για εντός και εκτός ελέγχου τιμές των παραμέτρων. Ο Lucas (1985) έδωσε μια πιο ολοκληρωμένη ανάλυση του διαγράμματος CUSUM για το μοντέλο Poisson. Το επόμενο έτος αναπτύχθηκε ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικών υπολογιστών για τον υπολογισμό των μέσων μηκών ροής του διαγράμματος για τον έλεγχο των κανονικών μέσων. Οι White και Keats (1996) και White, Keats και Stanley (1997) παρουσίασαν ορισμένες

χρήσεις του με ένα μοντέλο Poisson. Η παράμετρος του ενδιαφέροντος για μια διαδικασία με παρατηρήσεις που ακολουθούν κατανομή Poisson είναι ο μέσος όρος της διαδικασίας. Σε αντίθεση με την κανονική κατανομή, η κατανομή Poisson καθορίζεται από μία μόνο παράμετρο, τη μέση τιμή (η οποία είναι επίσης η διακύμανση).

3.2 Διάγραμμα ελέγχου Poisson CUSUM

Το Poisson CUSUM είναι ένα εύκολο στην εφαρμογή διάγραμμα ελέγχου, το οποίο είναι κατάλληλο για την παρακολούθηση των μετρήσεων των μη συμμορφώσεων σε μια μονάδα από μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία παραγωγής. Η προσέγγιση μίας διαδικασίας με το διάγραμμα CUSUM, είναι πιο αποτελεσματική από ότι με τα διαγράμματα τύπου Shewhart, όταν ενδιαφέρει η ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου μίας διεργασίας. Υπάρχουν, όμως, δύο βασικά ζητήματα που ενδέχεται να διαφοροποιούν τη λειτουργική απόδοση ενός διαγράμματος Poisson CUSUM από την επιδιωκόμενη απόδοση, η καταλληλότητα προσαρμογής του υπό παρακολούθηση χαρακτηριστικού στην Poisson κατανομή και το σφάλμα κατά τον προσδιορισμό του εντός ελέγχου μέσου της διαδικασίας. Οι Hawkins και Olwell (1998) παρέχουν εκτεταμένες λεπτομέρειες σχετικά με τη θεωρητική θεμελίωση και κατασκευή των διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM γενικά, συμπεριλαμβανομένου του Poisson CUSUM. Ο Testik (2007) μελέτησε την απόδοση ενός Poisson CUSUM διαγράμματος όταν η παράμετρος είναι άγνωστη και εκτιμάται από ένα δείγμα που είναι εντός ελέγχου.

Σε ένα διάγραμμα CUSUM υπολογίζονται οι συσσωρευμένες διαφορές μεταξύ μιας παρατηρούμενης τιμής D_i και μιας τιμής αναφοράς k , για κάθε i μονάδα επιθεώρησης. Αν αυτό το άθροισμα υπερβαίνει ένα διάστημα απόφασης h , το διάγραμμα υποδηλώνει μια διαταραχή που υπάρχει. Για την παρακολούθηση βελτιώσεων της διεργασίας, τα συσσωρευμένα αθροίσματα CUSUM για ανίχνευση αυξήσεων ($\mu_1 > \mu_0$) και μειώσεων ($\mu_1 < \mu_0$), αντίστοιχα, του μέσου δίδονται ως:

$$S_i^+ = \max(0, D_i - k + S_{i-1}^+) \quad \text{και} \quad S_i^- = \max(0, k - D_i + S_{i-1}^-) \quad (3.1)$$

Η D είναι μία τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων σε μία επαναλαμβανόμενη παραγωγική διαδικασία.

Βασική προϋπόθεση είναι οι D_1, D_2, \dots να είναι ανεξάρτητες, ισόνομα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν την Poisson κατανομή με μέση τιμή μ . Η διαδικασία είναι εντός ελέγχου όταν $\mu = \mu_0$, όπου μ_0 καθορίζεται από τον κατασκευαστή (τιμή στόχος), ενώ βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν παρουσιαστεί μετατόπιση της τιμής αυτής, δηλαδή $\mu \neq \mu_0$. Έστω $\mu_1 > \mu_0$ η μέση τιμή μίας εκτός ελέγχου διαδικασίας. Η αύξηση της μέσης τιμής των ελαττωμάτων μπορεί να οφείλεται σε μία ανεπιθύμητη αιτία κατά την παραγωγή, η οποία πρέπει να ανιχνευθεί γρήγορα προκειμένου να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες και να επαναφέρουμε την διαδικασία εντός ελέγχου. Εάν $\mu_1 < \mu_0$, η μείωση της μέσης τιμής των ελαττωμάτων καθιστά την διαδικασία καλύτερη, γεγονός που επίσης απαιτεί την γρήγορη ανίχνευση της αλλαγής, καθώς θα λάβουμε εγκαίρως μέτρα για την βελτίωση της διαδικασίας.

Εάν βρισκόμαστε στην Φάση I, όπου η μέση τιμή μ_0 δεν είναι γνωστή την εκτιμούμε απ' την σχέση $\hat{\mu}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$.

Καθώς το συσσωρευμένο άθροισμα δεν μπορεί να είναι αρνητικό, η διεργασία είναι εντός ελέγχου όταν αυτό βρίσκεται μεταξύ του μηδενός και του διαστήματος απόφασης h . Η αρχική τιμή των συσσωρευμένων αθροισμάτων είναι μηδέν, δηλαδή $S_0^- = S_0^+ = 0$.

Το διάγραμμα Poisson CUSUM σχεδιάζεται, ώστε να ανιχνεύει γρήγορα μία μετατόπιση της εντός ελέγχου μέσης τιμής μ_a σε μία εκτός ελέγχου μέση τιμή μ_d . Η τιμή αναφοράς k η οποία υπολογίζεται απ' την παρακάτω σχέση

$$k = \frac{\mu_d - \mu_a}{\ln \mu_d - \ln \mu_a} \quad (3.2)$$

στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο ακέραιο. Γενικά η τιμή μ_a επιλέγεται να είναι ίση με μ_0 , εάν ο μέσος της εντός ελέγχου διαδικασίας είναι γνωστός ή με $\hat{\mu}_0$ όταν αυτός έχει εκτιμηθεί. Η τιμή μ_d είναι η μέση τιμή της εκτός ελέγχου διαδικασίας την οποία το διάγραμμα CUSUM έχει σχεδιαστεί να ανιχνεύσει γρήγορα, είναι εκείνη η μετατόπιση για την οποία το Poisson CUSUM είναι βέλτιστο.

Το διάστημα απόφασης h για το διάγραμμα CUSUM προσδιορίζεται σε συνδυασμό με την τιμή αναφοράς k και πρέπει να επιλέγεται προσεκτικά, καθώς ο

συνδυασμός τους επηρεάζει σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος, δηλαδή την τιμή του ARL . Αφού προσδιοριστεί το k , επιλέγεται το h για να δώσει μια κατάλληλα μεγάλη τιμή ARL_0 όταν η διαδικασία είναι υπό έλεγχο και μια κατάλληλα μικρή τιμή ARL_1 όταν η διαδικασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Οι πίνακες ARL για επιλεγμένες τιμές των ζευγών h και k για χρήση στο σχεδιασμό ενός διαγράμματος Poisson CUSUM έχουν δοθεί απ' τον Lucas (1985) και ένας υπολογιστικός κώδικας που εκτελεί υπολογισμούς των Poisson CUSUM ARL παρέχεται απ' τους White και Keats (1996).

Συνοπτικά, τα πλεονεκτήματα ενός διαγράμματος Poisson CUSUM έναντι ενός διαγράμματος c είναι τα ακόλουθα :

- Το c διάγραμμα υποθέτει συμμετρία για την μέση τιμή μ_0 της διεργασίας γεγονός που δεν ισχύει, καθώς τα δεδομένα μας ακολουθούν κατανομή Poisson, η οποία είναι ασύμμετρη. Εν αντιθέσει, το διάγραμμα Poisson CUSUM δεν επιβάλλει τέτοια υπόθεση.

- Όταν $\mu_0 < 3\sqrt{\mu_0}$, τότε το κάτω όριο ελέγχου LCL του c διαγράμματος ισούται με μηδέν, με συνέπεια να καθίσταται αδύνατος ο εντοπισμός μίας μείωσης του μέσου της διεργασίας.

- Το διάγραμμα Poisson CUSUM μπορεί να σχεδιαστεί για να ανιχνεύει συγκεκριμένες μετατοπίσεις της μέσης τιμής μ_0 , ενώ αυτό δεν μπορεί να συμβεί για το διάγραμμα c . (Το διάγραμμα c είναι ειδική περίπτωση του Poisson CUSUM με $h=0$ και $k=c+3\sqrt{c}$ (White et al, 1997), συνεπώς είναι σχεδιασμένο για την ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων).

3.3 Υπολογισμός μέσου μήκους ροής

Το μέσο μήκος ροής μπορούμε να το υπολογίσουμε είτε με χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων, είτε με προσομοιώσεις, είτε με ολοκληρωτικές εξισώσεις. Οι πιο συνηθισμένες μέθοδοι είναι οι δύο πρώτες. Στη συνέχεια περιγράφεται συνοπτικά η μέθοδος με χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων.

Οι θετικές τιμές του συσσωρευμένου αθροίσματος S_i που είναι από 0 μέχρι h

απεικονίζονται σε έναν πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P . Αυτές οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται από την μέση τιμή της Poisson κατανομής, όπου για μία εντός ελέγχου διεργασία ισούται με μ_0 . Η τελευταία γραμμή του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P αντιπροσωπεύει την κατάσταση $S_i=h$ και η τελευταία στήλη την απορροφούσα κατάσταση (absorbing state) $S_{i+1}=h$. Αφαιρώντας από τον πίνακα P την τελευταία γραμμή και στήλη του προκύπτει ο πίνακας R και ο πίνακας $Q=(I-R)^{-1}$ καλείται “θεμελιώδης πίνακας”, όπου το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής του είναι το μέσο μήκος ροής ARL της κατάστασης που αντιπροσωπεύει η κάθε γραμμή. Για να υπολογίσουμε το ARL για ένα διάγραμμα CUSUM, όπου $S_0=0$, αθροίζουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα Q , ενώ αθροίζοντας τα στοιχεία της γραμμής που αντιπροσωπεύει την κατάσταση $\frac{h}{2}$, υπολογίζουμε το ARL για ένα διάγραμμα FIR Poisson CUSUM.

Λόγω της ασυμμετρίας που παρουσιάζει η κατανομή του μήκους ροής, πολλές φορές είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση ($SDRL$) και τα εκατοστημόρια του (Testik, 2007). Ο V πίνακας διαστάσεων $h \times 1$, που το i -οστό στοιχείο του αντιστοιχεί στην τυπική απόκλιση ενός διαγράμματος Poisson CUSUM με $S_0=i-1$, υπολογίζεται από την σχέση:

$$V = \left\{ L + 2 \left[(I - R)^{-1} - I \right] L - L^2 \right\}^{1/2} \quad (3.4)$$

όπου $L = (I - R)^{-1} \mathbf{1}$ και $\mathbf{1}$ ένας $h \times 1$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με μονάδα.

Για να υπολογίσουμε τα εκατοστημόρια του μήκους ροής χρησιμοποιούμε την αθροιστική πιθανότητά του. Συγκεκριμένα, ορίζουμε ως F_r τον $h \times 1$ πίνακα αθροιστικών πιθανοτήτων, όπου κάθε ένα από τα στοιχεία του αντιστοιχεί για μία συγκεκριμένη αρχική τιμή S_0 και ο δείκτης r αντιπροσωπεύει την τιμή του μήκους ροής. Τότε ισχύει ότι $F_r = (I - R^r) \mathbf{1}$. Ο πίνακας των αθροιστικών πιθανοτήτων F_r πολλαπλασιασμένος επί 100, δίνει τα εκατοστημόρια της κατανομής RL . Για παράδειγμα, το 10^ο εκατοστημόριο της RL κατανομής, για την περίπτωση του $Z_0 = \hat{\mu}_0$, είναι η μικρότερη τιμή του r που αντιστοιχεί στην πρώτη τιμή του F_r που είναι μεγαλύτερη ή ίση με 0.1.

3.4 FIR Poisson CUSUM διάγραμμα ελέγχου

Εάν κάποιος έχει λόγους να πιστεύει ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου κατά την εκκίνηση, συνιστάται η χρήση της τεχνικής γρήγορης αρχικής απόκρισης (Fast Initial Response, FIR), όπου το S_0 ισούται με το $h/2$ αντί για το μηδέν, Lucas (1985), Lucas και Crosier (1982). Αν η διαδικασία βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση εκτός ελέγχου, τότε ένα από τα S^+ και S^- του CUSUM θα υπερβεί το h μετά από ένα μικρό αριθμό δειγμάτων. Μόλις κατασκευαστεί το FIR CUSUM διάγραμμα, μπορεί κανείς να προχωρήσει σε έλεγχο ποιότητας, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και στο CUSUM. Το πλεονέκτημα της τεχνικής FIR CUSUM είναι ότι η μείωση του ARL_1 είναι σχετικά μεγάλη, ενώ η μείωση του ARL_0 είναι σχετικά μικρή. Αυτό σημαίνει ότι ένα σήμα συναγερμού μπορεί να ενεργοποιηθεί σε λιγότερες δοκιμές με χρήση της τεχνικής FIR παρά χωρίς αυτήν. Προκειμένου να ρυθμιστεί η ελαφρά μείωση του ARL_0 στο πλαίσιο ελέγχου, το h μπορεί να ρυθμιστεί κατάλληλα ώστε να δώσει το επιθυμητό ARL_0 κατά τον έλεγχο.

Εάν η διαδικασία είναι από την αρχή υπό έλεγχο στην τιμή στόχο, η αρχικοποίηση επιδρά πολύ λίγο στην απόδοση του διαγράμματος CUSUM. Από την άλλη, αν η διαδικασία ξεκινήσει εκτός ελέγχου, η απόδοση αρχικής τιμής διάφορης του μηδενός αυξάνει τις τιμές των αθροισμάτων, απομακρύνοντας τα ακόμα περισσότερο από την κεντρική γραμμή. Επομένως, το διάγραμμα ανιχνεύει πολύ πιο γρήγορα την αλλαγή στον μέσο της διαδικασίας, βελτιώνεται η απόδοση του και μειώνεται σημαντικά η τιμή του ARL_1 (Κουκουβίνος, 2017).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Διαγράμματα EWMA για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή

4.1 Εισαγωγή

Το διάγραμμα ελέγχου με εκθετικά βάρη και κινητούς μέσους EWMA εισήχθη από τον Roberts (1959), αλλά υπάρχουν πολλοί συγγραφείς που συνέβαλαν σημαντικά σε αυτό το είδος διαγραμμάτων ελέγχου. Ο Gan (1990) εισήγαγε μια τροποποιημένη έκδοση του EWMA διαγράμματος το οποίο παρακολουθεί την μέση τιμή της κατανομής Poisson χρησιμοποιώντας μια διαδικασία η οποία στρογγυλοποιεί το στατιστικό ελέγχου EWMA σε μια ακέραια τιμή. Οι Borror, Rigdon και Champ (1998) αξιολόγησαν τα ARL του διαγράμματος Poisson EWMA, για διάφορες τιμές του εντός ελέγχου μέσου μίας διεργασίας, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Μαρκοβιανών αλυσιδών και προσομοίωση. Οι συγγραφείς επίσης έδειξαν ότι αυτό το διάγραμμα έχει αισθητά καλύτερη απόδοση από το c διάγραμμα. Ο Montgomery (2013) παρουσίασε το διάγραμμα ελέγχου EWMA, ως καλή επιλογή όταν το ενδιαφέρον εντοπίζεται στις μικρές μετατοπίσεις του μέσου στην διεργασία. Η απόδοση του διαγράμματος ελέγχου EWMA είναι περίπου ισοδύναμη με εκείνη του διαγράμματος CUSUM.

Το διάγραμμα EWMA συσσωρεύει τα τρέχοντα και τα προηγούμενα στατιστικά ελέγχου, με την πάροδο του χρόνου, και εκχωρεί διαφορετικά βάρη για κάθε τύπο παρατηρήσεων. Η βέλτιστη ανίχνευση για μικρά μεγέθη μετατοπίσεων ικανοποιείται όταν το βάρος που αποδίδεται στην τρέχουσα παρατήρηση είναι μικρό, ενώ το βάρος που αποδίδεται στις προηγούμενες παρατηρήσεις είναι υψηλό.

4.2 Poisson EWMA διάγραμμα

4.2.1 Βασικές Αρχές PEWMA

Η χρήση ενός διαγράμματος EWMA παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Roberts (1959), ενώ οι Borror Rigdon και Champ (1998) τροποποίησαν αυτό το διάγραμμα για την παρακολούθηση της διεργασίας για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή, έτσι οι τιμές του στατιστικού Z_t του διαγράμματος PEWMA, υπολογίζονται με βάση τον τύπο :

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda) Z_{t-1}, t=1, 2, \dots \quad (4.1)$$

όπου X_t είναι οι παρατηρήσεις και λ μία παράμετρος που ονομάζεται συντελεστής βαρύτητας ή εξομάλυνσης (weighting factor ή smoothing factor) με $0 < \lambda \leq 1$ και $Z_0 = \mu_0$. Οι τιμές του λ στο διάστημα $[0.05, 0.25]$ λειτουργούν καλά στην πράξη, με $\lambda=0.05$, $\lambda=0.10$ και $\lambda=0.20$ να αποτελούν τις πιο δημοφιλείς επιλογές, (Montgomery, 2013).

Αναπτύσσοντας τον τύπο του στατιστικού ελέγχου Z_t έχουμε:

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda X_t + (1 - \lambda) Z_{t-1} = \lambda X_t + (1 - \lambda) [\lambda X_{t-1} + (1 - \lambda) Z_{t-2}] = \\ &= \lambda X_t + \lambda(1 - \lambda) X_{t-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 X_{t-2} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{t-1} X_1 + (1 - \lambda)^t Z_0 = \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda)^j X_{t-j} + (1 - \lambda)^t Z_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου όσο αυξάνεται ο δειγματικός μέσος, τα βάρη $\lambda(1 - \lambda)^j$ μειώνονται γεωμετρικά και αθροίζονται στην μονάδα, αφού:

$$\lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda)^j = \lambda \left[\frac{1 - (1 - \lambda)^t}{1 - (1 - \lambda)} \right] = 1 - (1 - \lambda)^t \quad (4.3)$$

Από τα παραπάνω για την μέση τιμή του στατιστικού Z_t έχουμε:

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E \left[\lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda)^j X_{t-j} \right] + E[(1 - \lambda)^t Z_0] = [1 - (1 - \lambda)^t] E(X_{t-j}) + (1 - \lambda)^t E(Z_0) = \\ &= [1 - (1 - \lambda)^t] \mu_0 + (1 - \lambda)^t \mu_0 = \mu_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

και για την διασπορά:

$$\text{Var}(Z_t) = \lambda^2 \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^{2j} \mu_0 = \lambda^2 \frac{1-(1-\lambda)^{2t}}{1-(1-\lambda)^2} \mu_0 = \frac{\lambda}{2-\lambda} [1-(1-\lambda)^{2t}] \mu_0 \quad (4.5)$$

Το διάγραμμα ελέγχου PEWMA κατασκευάζεται, σχεδιάζοντας το Z_t συναρτήσει του δειγματικού αριθμού ή χρόνου, με μέση ή αναμενόμενη τιμή του Z_t να είναι

$$E(Z_t) = \mu_0 \text{ και με διασπορά } \text{Var}(Z_t) = \frac{\lambda}{2-\lambda} [1-(1-\lambda)^{2t}] \mu_0.$$

Τα όρια ελέγχου είναι τα ακόλουθα:

Όρια ελέγχου PEWMA
$UCL = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1-(1-\lambda)^{2t}] \mu_0}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1-(1-\lambda)^{2t}] \mu_0}$

όπου ο συντελεστής L είναι το πλάτος των ορίων ελέγχου. Για μεγάλες τιμές του t και καθώς $\lim_{t \rightarrow +\infty} [1-(1-\lambda)^{2t}] = 1$, η διασπορά του στατιστικού Z_t είναι περίπου

$\text{Var}(Z_t) = \frac{\lambda}{2-\lambda} \mu_0$ και τα εξομαλυμένα (ή σταθερά) όρια ελέγχου του PEWMA γίνονται:

Εξομαλυμένα όρια ελέγχου PEWMA
$UCL = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \mu_0}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \mu_0}$

Εάν το LCL προκύψει αρνητικό, τότε το θεωρούμε ίσο με μηδέν. Μερικές φορές είναι πλεονέκτημα να κατασκευάζονται ασύμμετρα διαγράμματα ελέγχου, δηλαδή το L στο ανώτερο και κατώτερο όριο να είναι διαφορετικό. Μία τέτοια περίπτωση είναι όταν το LCL προκύψει αρνητικό, όπου τότε το διάγραμμα PEWMA δεν δύναται να ανιχνεύσει μία προς τα κάτω μετατόπιση της μέσης τιμής.

Επισημαίνουμε ότι όσο μικρότερη είναι η μετατόπιση της διαδικασίας που θέλουμε να ανιχνεύσουμε, τόσο μικρότερη τιμή του λ προτείνεται για χρήση, Montgomery (2013). Η διεργασία είναι εκτός ελέγχου όταν $Z_t \leq LCL$ ή $Z_t \geq UCL$.

4.2.2 Προσέγγιση της αλυσίδας Markov για την αξιολόγηση της απόδοσης του EWMA διαγράμματος

Η προσέγγιση της αλυσίδας Markov για τη μελέτη της κατανομής του RL ενός Poisson CUSUM διαγράμματος ελέγχου, που εισήχθη απ' τους Brook και Evans (1972), υποθέτει ότι η παράμετρος της διεργασίας είναι γνωστή. Οι Borror, Rigdon και Champ (1998) χρησιμοποίησαν αυτήν την προσέγγιση για τον υπολογισμό ενός Poisson EWMA διαγράμματος ελέγχου για διάφορα μεγέθη μετατόπισης στον μέσο της διαδικασίας. Συνοπτικά, η προσέγγιση των Μαρκοβιανών αλυσιδών για την αξιολόγηση της απόδοσης των διαγραμμάτων Poisson EWMA, έχει ως εξής:

Έστω το διάστημα των ορίων ελέγχου (h_L, h_U) , το οποίο χωρίζεται σε N υποδιαστήματα που ονομάζονται καταστάσεις, όπου N ένας περιττός αριθμός. Το υποδιάστημα της j -οστής κατάστασης είναι:

$$(L_j, U_j) = \left(h_L + \frac{(j-1)(h_U - h_L)}{N}, h_L + \frac{j(h_U - h_L)}{N} \right) \quad (4.6)$$

και το μεσαίο σημείο της i -οστής κατάστασης, m_i , είναι:

$$m_i = h_L + \frac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2N} \quad (4.7)$$

Η διαδικασία είναι εντός ελέγχου όταν το στατιστικό Z_i βρίσκεται μέσα στο διάστημα (h_L, h_U) , ενώ όταν το στατιστικό Z_i βρεθεί έξω από τα όρια ελέγχου, τότε η διαδικασία είναι σε μία εκτός ελέγχου κατάσταση. Η περιοχή εκτός ελέγχου, δηλαδή το συμπλήρωμα του διαστήματος (h_L, h_U) , θεωρείται η $(N+1)$ -οστή κατάσταση και ονομάζεται κατάσταση απορρόφησης επειδή μια διαδικασία διακόπτεται όταν θεωρείται εκτός ελέγχου. Το μήκος ροής είναι ο αριθμός των βημάτων που λαμβάνονται ξεκινώντας από μια αρχική κατάσταση και καταλήγοντας σε μία από τις καταστάσεις απορρόφησης.

Ορίζεται ως P_{ij} η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε ένα βήμα, με τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P να είναι :

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{0,j} & \cdots & P_{0,N+1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \cdots & P_{1,j} & \cdots & P_{1,N+1} \\ & & & \vdots & & \\ P_{i,0} & P_{i,1} & \cdots & P_{i,j} & \cdots & P_{i,N+1} \\ & & & \vdots & & \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & (I-L)l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Ο παραπάνω πίνακας είναι στοχαστικός και το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής είναι 1. Τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής είναι 0 εκτός από το τελευταίο που είναι 1, αφού η E_{N+1} είναι η απορροφούμενη κατάσταση. Επιπλέον, ο $N \times N$ πίνακας L περιλαμβάνει τις πιθανότητες μετάβασης από μία μεταβατική κατάσταση σε μία άλλη, ο I είναι ένας $N \times N$ ταυτοτικός πίνακας, 1 ένας $N \times 1$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του να είναι 1 και ο $(I-L)1$ ένας $N \times 1$ πίνακας που τα στοιχεία του είναι οι πιθανότητες μετάβασης από μία μεταβατική κατάσταση στην απορροφούμενη κατάσταση. Οι πιθανότητες μετάβασης της μαρκοβιανής αλυσίδας ορίζονται ως εξής:

$$P_{i,1} = Pr(E_i \rightarrow E_1), P_{i,j} = Pr(E_i \rightarrow E_j), P_{i,N+1} = Pr(E_i \rightarrow E_{N+1})$$

$$P_{N+1,i} = 0, P_{N+1,N+1} = 1$$

Υποθέτουμε ότι η τιμή Z_{t-1} του στατιστικού EWMA την χρονική στιγμή $t-1$, είναι στην i -οστή κατάσταση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι το Z_{t-1} είναι ίσο με το μεσαίο σημείο του υποδιαστήματος της i -οστής κατάστασης. Εν συνεχεία, ως P_{ij} δηλώνεται η πιθανότητα το Z_{t-1} να κινείται στην κατάσταση j , από την κατάσταση i , στην επόμενη χρονική περίοδο, δηλαδή στην χρονική στιγμή t . Επομένως, η έκφραση για τις πιθανότητες μετάβασης είναι:

$$(P_{ij}) = Pr(L_j < Z_t < U_j | Z_{t-1} = m_i) =$$

$$P(L_j < \lambda X_t + (1-\lambda)Z_{t-1} < U_j | Z_{t-1} = m_i) = P(L_j < \lambda X_t + (1-\lambda)m_i < U_j) =$$

$$P\left(h_L + \frac{(j-1)(h_U - h_L)}{N} < \lambda X_t + (1-\lambda)\left(h_L + \frac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2N}\right) < h_L + \frac{j(h_U - h_L)}{N}\right) =$$

$$P\left(h_L + \frac{h_U - h_L}{2N\lambda} (2(j-1) - (1-\lambda)(2i-1)) < X_t < h_L + \frac{h_U - h_L}{2N\lambda} (2j - (1-\lambda)(2i-1))\right) \quad (4.9)$$

Το ποιοτικό χαρακτηριστικό του ενδιαφέροντος είναι η μεταβλητή X , η οποία ακολουθεί την Poisson κατανομή με μέση τιμή μ_0 για μία διεργασία εντός ελέγχου και μ_1 για μια διεργασία εκτός ελέγχου. Υποθέτουμε ότι ο πραγματικός μέσος όρος είναι άγνωστος, όμως για να ελέγξουμε την απόδοση του διαγράμματος ελέγχου μπορούμε υποθετικά να εκχωρήσουμε μερικές τιμές για τον μέσο όρο και να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες με βάση τον παραπάνω τύπο. Βέβαια, η μέση εκτίμηση μ_0 χρησιμοποιείται στον σχεδιασμό του διαγράμματος ελέγχου. Επομένως, τα όρια ελέγχου προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας την εκτίμηση $\hat{\mu}_0$ στην θέση του μ_0 και οι τιμές για h_L και h_U στον παραπάνω τύπο, υπολογίζονται ως:

$$h_L = \hat{\mu}_0 - A_L \sqrt{\frac{\lambda \hat{\mu}_0}{2 - \lambda}} \quad \text{και} \quad h_U = \hat{\mu}_0 + A_U \sqrt{\frac{\lambda \hat{\mu}_0}{2 - \lambda}} \quad (4.10)$$

Θεωρούμε ότι το $1 \times N$ διάνυσμα $R = [R_1, R_2, \dots, R_N]'$, με το i -οστό στοιχείο R_i να αντιστοιχεί στο ARL μιας διεργασίας που ξεκίνησε από την i -οστή κατάσταση, ώστε

$$\text{να ισχύει:} \quad Z_0 = m_i = h_L + \frac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2N}.$$

Ορίζεται το Q να είναι μια μεταβατική μήτρα $N \times N$ που αποτελείται από τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων ελέγχου (δηλαδή, $Q = [P_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, N$), διαγράφοντας την $(N+1)$ -οστή σειρά και την $(N+1)$ -οστή στήλη. Δηλαδή, το Q είναι ο πίνακας μετάβασης μεταξύ των εντός ελέγχου καταστάσεων.

Τότε το διάνυσμα R μπορεί να ληφθεί με υπολογισμό

$$R = (I - Q)^{-1} \mathbf{1} \quad (4.12)$$

Τα στοιχεία του $N \times 1$ πίνακα R είναι οι διάφορες τιμές του ARL ξεκινώντας από διάφορες καταστάσεις. Το ARL που ξεκινάει από την κατάσταση $Z_0 = \mu_0$ είναι το μεσαίο στοιχείο του πίνακα, δηλαδή το $((N+1)/2)$ -οστό στοιχείο του πίνακα R . Γι' αυτόν τον λόγο είναι απαραίτητο να επιλεγεί το N να είναι περιττός αριθμός, ώστε να υπάρχει μια μοναδική μέση τιμή.

Ο υπολογισμός του ARL με την χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων βασίζεται στην υπόθεση ότι η μετατόπιση του μέσου συμβαίνει στην αρχή της διαδικασίας γι' αυτό και ονομάζεται ARL μηδενικής ή αρχικής κατάστασης (zero/initial-state). Επίσης, υπάρχει και το ARL σταθερής κατάστασης (steady-state), το οποίο προϋποθέτει ότι η μετατόπιση του μέσου πραγματοποιείται πολύ αργότερα από το η διαδικασία βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο.

Επειδή η κατανομή του μήκους ροής είναι αρκετά ασύμμετρη (λοξή), για να μελετήσουμε την απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου Poisson EWMA με εκτιμώμενους μέσους, άλλες μετρήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκτός από το ARL είναι τα εκατοστημόρια της κατανομής μήκους ροής και η τυπική απόκλιση του μήκους ροής (Standard Deviation of Run Length, $SDRL$).

Τα εκατοστημόρια της κατανομής του μήκους ροής μπορούν να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας την αθροιστική πιθανότητα για το μήκος ροής. Έστω F_r το $1 \times N$ διάνυσμα αθροιστικής πιθανότητας, όπου κάθε μία από τις καταχωρήσεις N είναι

για μία τιμή εκκίνησης Z_0 και ο δείκτης $r=1, 2, \dots$ αντιπροσωπεύει μια τιμή του μήκους ροής. Τότε:

$$F_r = (I - Q^r)1. \quad (4.13)$$

Η αθροιστική πιθανότητα πολλαπλασιασμένη επί 100 δίνει το εκατοστημόριο που αντιστοιχεί στην τιμή μήκους ροής r .

Το μέγεθος του $SDRL$ είναι μια άλλο ένα σημαντικό μέτρο για σύγκριση της απόδοσης. Το $1 \times N$ διάνυσμα $SDRL$ είναι:

$$SDRL = (R + 2[(I - Q)^{-1} - I]R - R^2)^{0.5} \quad (4.14)$$

όπου οι μεσαίες τιμές εισόδου στα διανύσματα R , $SDRL$ και F_r που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις με την τιμή εκκίνησης $Z_0 = \hat{\mu}_0$ είναι εκείνες που μας ενδιαφέρουν.

4.2.3 FIR PEWMA διάγραμμα

Είναι εφικτό να επιτύχουμε την λεγόμενη γρήγορη αρχική απόκριση (Fast Initial Response, FIR) στο EWMA διάγραμμα ελέγχου, δηλαδή να εντοπίσουμε αρκετά γρήγορα ένα σημείο που είναι εκτός ελέγχου στην αρχή της διεργασίας. Με την τεχνική FIR επιτυγχάνεται η βελτίωση της τιμής του ARL για εκτός ελέγχου διεργασίες αλλά ταυτόχρονα ενδέχεται εμφάνιση σημείων εκτός ορίων ελέγχου νωρίς. Δηλαδή η τεχνική FIR μειώνει τόσο το ARL_1 όσο και το ARL_0 .

Οι Lucas και Saccucci (1990) πρότειναν ένα γρήγορης αρχικής απόκρισης FIR EWMA διάγραμμα ελέγχου με μη μηδενική αρχική τιμή (head-start) για να βελτιωθεί η απόδοση στην ανίχνευση προβλημάτων εκκίνησης. Ο Steiner (1999) παρουσίασε ένα διάγραμμα με στενότερα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, χρησιμοποιώντας μια εκθετικά μειούμενη προσαρμογή για να περιορίσει περαιτέρω τα όρια ελέγχου έτσι ώστε να βελτιωθεί η λειτουργία FIR. Η γραφική παράσταση του διαγράμματος αυτού υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Z_t και τα όρια ελέγχου προσαρμόζονται ως εξής:

Όρια ελέγχου FIR PEWMA	
$UCL = \mu_0 + L F_{adj} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]}$	μ_0
$CL = \mu_0$	
$LCL = \mu_0 - L F_{adj} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]}$	μ_0

όπου F_{adj} είναι ο συντελεστής προσαρμογής FIR και δίνεται από τον τύπο:

$$F_{adj} = 1 - (1 - f)^{1 + \alpha(t-1)} \quad (4.15)$$

όπου $\alpha > 0$ είναι η παράμετρος προσαρμογής και $0 < f \leq 1$ είναι η απόσταση από την τιμή εκκίνησης. Ο Steiner (1999) προτείνει το α να επιλέγεται ώστε το F_{adj} να έχει μικρή επίδραση μετά την 20^η παρατήρηση. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ορίσουμε:

$$\alpha = (-2 / \log(1 - f) - 1) / 19. \quad (4.16)$$

Για παράδειγμα, αν $f = 0.5$, τότε $\alpha = 0.3$. Η επιλογή του $f = 0.5$ είναι αρκετά ικανοποιητική, διότι μμείται το 50% FIR που χρησιμοποιείται συχνά στο διάγραμμα CUSUM.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές των ARL για διάφορες τιμές του μέσου μ όταν $\mu_0 = 4$, που μελετήθηκαν από τους Alevizakos and Koukouninos (2019). Διαπιστώνεται ότι το διάγραμμα c αδυνατεί να ανιχνεύσει μία προς τα κάτω μετατόπιση του μέσου της διαδικασίας, καθώς το $LCL = 0$. Για τα διαγράμματα PEWMA και FIR PEWMA, όσο μικρότερη είναι η τιμή του λ , τόσο αποδοτικότερο είναι το διάγραμμα. Επίσης, το διάγραμμα PEWMA με χρήση της τεχνικής FIR δίνει μικρότερες τιμές ARL_1 απ' ότι το αντίστοιχο διάγραμμα χωρίς χρήση της τεχνικής FIR.

Πίνακας 4-1 Σύγκριση τιμών ARL_1 των διαγραμμάτων c , PEWMA και FIR PEWMA

μ	c-chart	PEWMA			FIR PEWMA		
	$\lambda=1$ L=3	$\lambda=0.05$ L=2.514	$\lambda=0.10$ L=2.719	$\lambda=0.25$ L=2.943	$\lambda=0.05$ L=2.644	$\lambda=0.10$ L=2.840	$\lambda=0.25$ L=3.016
1	NA	3.45	3.83	4.78	1.43	1.45	1.99
2	NA	6.89	7.91	12.18	3.65	4.01	6.21
3	NA	22.70	29.88	92.53	17.10	22.74	83.87
3.5	NA	75.61	118.61	433.84	65.09	110.29	477.21
4	124.89	370.63	370.06	370.32	370.55	370.33	370.50
4.5	59.46	60.62	69.74	85.44	49.44	56.95	73.74
5	31.84	20.53	23.00	29.94	14.94	16.50	21.98
6	11.93	6.89	7.53	8.75	4.31	4.51	5.37
7	5.89	3.81	4.09	4.51	2.24	2.28	2.65

4.3 Poisson Double EWMA (PDEWMA) διάγραμμα

Αυτό το διάγραμμα απαιτεί ένα δεύτερο εκθετικά σταθμισμένο κινητό μέσο και παρουσιάστηκε από τους Zhang, Govindaraju, Lai και Bebbington (2003), για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή. Το διάγραμμα PDEWMA είναι πιο ευαίσθητο στις μικρές μετατοπίσεις προς τα κάτω του μέσου της διαδικασίας απ' ό,τι το διάγραμμα PEWMA και έχει ελαφρώς καλύτερη απόδοση απ' το διάγραμμα PEWMA για την ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων προς τα κάτω και προς τα άνω του μέσου της διαδικασίας .

Εάν $\mu = \mu_0$, όπου το μ_0 είναι γνωστό, τότε η διαδικασία είναι υπό έλεγχο, διαφορετικά η διαδικασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Για να παρακολουθήσουμε τις μετατοπίσεις στον μέσο της διαδικασίας, το στατιστικό PDEWMA, Z_t , ορίζεται μέσω του συστήματος εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \lambda X_t + (1-\lambda) Y_{t-1} = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} + (1-\lambda)^t Y_0, t \geq 1 \quad (4.17) \\ Y_0 = \mu_0 \\ Z_t = \lambda Y_t + (1-\lambda) Z_{t-1} = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j Y_{t-j} + (1-\lambda)^t Z_0, t \geq 1 \quad (4.18) \\ Z_0 = \mu_0 \end{array} \right.$$

όπου $0 < \lambda < 1$ είναι ένας συντελεστής βαρύτητας. Το Y_t αποτελεί το συνηθισμένο στατιστικό ελέγχου EWMA και το στατιστικό ελέγχου DEWMA Z_t είναι ένα EWMA του Y_t .

Το στατιστικό ελέγχου PDEWMA Z_t γράφεται ως:

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \left[\lambda \sum_{k=0}^{t-j-1} (1-\lambda)^k X_{t-j-k} + (1-\lambda)^{t-j} Y_0 \right] + (1-\lambda)^t Z_0 = \\ &= \lambda^2 \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \sum_{k=0}^{t-j-1} (1-\lambda)^k X_{t-j-k} + t \lambda (1-\lambda)^t Y_0 + (1-\lambda)^t Z_0 = \\ &= \lambda^2 \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \sum_{l=1}^{t-j} (1-\lambda)^{t-j-l} X_l + t \lambda (1-\lambda)^t Y_0 + (1-\lambda)^t Z_0 = \\ &= \lambda^2 \sum_{l=1}^t (t-l+1) (1-\lambda)^{t-j} X_l + t \lambda (1-\lambda)^t Y_0 + (1-\lambda)^t Z_0 \quad (4.19) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας όπου $l=j$ παίρνουμε την γενική έκφραση για το στατιστικό Z_t :

$$Z_t = \lambda^2 \sum_{j=1}^t (t-j+1)(1-\lambda)^{t-j} X_j + t\lambda(1-\lambda)^t Y_0 + (1-\lambda)^t Z_0, \quad (4.20)$$

με $Y_0 = Z_0 = \mu_0$.

Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διασπορά του στατιστικού Z_t , θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες δύο σχέσεις. Για κάθε $\alpha \neq 0$, ισχύει:

$$\sum_{k=1}^n k \alpha^k = \frac{\alpha(1-\alpha^n)}{(1-\alpha)^2} - \frac{n\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad (4.21)$$

και
$$\sum_{k=1}^n k^2 \alpha^k = \frac{\alpha + \alpha^2 - (n+1)^2 \alpha^{n+1} + (2n^2 + 2n - 1) \alpha^{n+2} - n^2 \alpha^{n+3}}{(1-\alpha)^3} \quad (4.22)$$

Επομένως,

$$E(Z_t) = E \left[\lambda^2 \sum_{j=1}^t (t-j+1)(1-\lambda)^{t-j} X_j + t\lambda(1-\lambda)^t Y_0 + (1-\lambda)^t Z_0 \right] =$$

$$\lambda^2 \sum_{j=1}^t (t-j+1)(1-\lambda)^{t-j} E(X_j) + t\lambda(1-\lambda)^t E(Y_0) + (1-\lambda)^t E(Z_0) =$$

$$\frac{\lambda^2}{1-\lambda} \sum_{j=1}^t (t-j+1)(1-\lambda)^{t-j+1} \mu_0 + t\lambda(1-\lambda)^t \mu_0 + (1-\lambda)^t \mu_0$$

και αντικαθιστώντας όπου $k=t-j+1$, έχουμε:

$$E(Z_t) = \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \sum_{k=1}^t k(1-\lambda)^k \mu_0 + t\lambda(1-\lambda)^t \mu_0 + (1-\lambda)^t \mu_0$$

όπου με την βοήθεια της σχέσεως (4.21) με $\alpha=1-\lambda$ και $n=t$, έχουμε:

$$E(Z_t) = \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left[\frac{(1-\lambda)[1-(1-\lambda)^t]}{[1-(1-\lambda)]^2} - \frac{t(1-\lambda)^{t+1}}{1-(1-\lambda)} \right] \mu_0 + t\lambda(1-\lambda)^t \mu_0 + (1-\lambda)^t \mu_0 =$$

$$\lambda^2 \left[\frac{1-(1-\lambda)^t}{\lambda^2} - \frac{t(1-\lambda)^t}{\lambda} \right] \mu_0 + t\lambda(1-\lambda)^t \mu_0 + (1-\lambda)^t \mu_0 =$$

$$\left[1-(1-\lambda)^t - t\lambda(1-\lambda)^t + t\lambda(1-\lambda)^t + (1-\lambda)^t \right] \mu_0 = \mu_0 \quad (4.23)$$

Και η διασπορά του στατιστικού Z_t :

$$\text{Var}(Z_t) = \text{Var} \left[\lambda^2 \sum_{j=1}^t (t-j+1)(1-\lambda)^{t-j} X_j + t\lambda(1-\lambda)^t Y_0 + (1-\lambda)^t Z_0 \right] =$$

$$\lambda^4 \sum_{j=1}^t (t-j+1)^2 [(1-\lambda)^2]^{t-j} \text{Var}(X_j) + 0 = \frac{\lambda^4}{(1-\lambda)^2} \sum_{j=1}^t (t-j+1)^2 [(1-\lambda)^2]^{t-j+1} \mu_0$$

και αντικαθιστώντας όπου $\alpha=(1-\lambda)^2, k=t-j+1$ και $n=t$ και με την βοήθεια της σχέσεως (4.22), έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t) &= \frac{\lambda^4}{(1-\lambda)^2} \frac{(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)^4 - (t+1)^2 (1-\lambda)^{2t+2}}{[1-(1-\lambda)^2]^3} \mu_0 \\ &+ \frac{\lambda^4}{(1-\lambda)^2} \frac{(2t^2+2t-1)(1-\lambda)^{2t+4} - t^2(1-\lambda)^{2t+6}}{[1-(1-\lambda)^2]^3} \mu_0 . \end{aligned}$$

Άρα,

$$\text{Var}(Z_t) = \lambda^4 \frac{1+(1-\lambda)^2 - (t+1)^2(1-\lambda)^{2t} + (2t^2+2t-1)(1-\lambda)^{2t+2} - t^2(1-\lambda)^{2t+4}}{[1-(1-\lambda)^2]^3} \mu_0 \quad (4.24)$$

Χρησιμοποιώντας το Z_t , το διάγραμμα PDEWMA κατασκευάζεται με την γραφική απεικόνιση του Z_t έναντι του t δειγματικού αριθμού ή χρόνου, με τα όρια ελέγχου να ορίζονται ως:

Όρια ελέγχου PDEWMA
$UCL = \mu_0 + L \sqrt{\text{Var}(Z_t)}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L \sqrt{\text{Var}(Z_t)}$

Για μεγάλες τιμές του t και καθώς $\lim_{t \rightarrow +\infty} [(1-\lambda)^{2t}] = 0$, η διασπορά του στατιστικού Z_t είναι: $\text{Var}(Z_t) = \lambda^4 \frac{(1+(1-\lambda)^2)}{(1-(1-\lambda)^2)^3} = \lambda^4 \frac{(1+1+\lambda^2-2\lambda)}{(1-1-\lambda^2+2\lambda)^3} = \lambda^4 \frac{(2-2\lambda+\lambda^2)}{(2\lambda-\lambda^2)^3}$
 $= \lambda \frac{(2-2\lambda+\lambda^2)}{(2-\lambda)^3}$ και τα εξομαλυμένα (ή σταθερά) όρια ελέγχου του PDEWMA γίνονται:

Εξομαλυμένα όρια ελέγχου PDEWMA
$UCL = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda(2-2\lambda+\lambda^2)}{(2-\lambda)^3}} \mu_0$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda(2-2\lambda+\lambda^2)}{(2-\lambda)^3}} \mu_0$

Σε ένα διάγραμμα ελέγχου PDEWMA, η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου, όταν

$Z_t < LCL$ ή $Z_t > UCL$. Το $L > 0$ είναι μια σταθερά ορίου ελέγχου η οποία, μαζί με τον συντελεστή βαρύτητας λ , καθορίζουν την απόδοση του διαγράμματος PDEWMA Σύμφωνα με τον Steiner (1999), χρησιμοποιούμε χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί η λειτουργία γρήγορης αρχικής απόκρισης (FIR).

4.4 Poisson GWMA (PGWMA) διάγραμμα

Οι Sheu και Lin (2003) πρότειναν το διάγραμμα ελέγχου με κινητούς μέσους και γενικευμένα βάρη GWMA (Generally Weighted Moving Average). Οι Sheu και Chiu (2007) επέκτειναν την χρήση του διαγράμματος αυτού σε δεδομένα που ακολουθούν την κατανομή Poisson. Αυτό το διάγραμμα έχει καλύτερη στατιστική απόδοση σε σχέση με άλλα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση παρατηρήσεων που ακολουθούν την Poisson κατανομή και είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διαδικασίας. Το διάγραμμα ελέγχου PGWMA είναι ένα γενικευμένο μοντέλο ελέγχου, για το οποίο το διάγραμμα PEWMA και το c διάγραμμα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις. Επιπλέον, το χαμηλότερο όριο ελέγχου LCL είναι συνήθως θετικό, ώστε να μπορεί να ανιχνευθεί επωφελώς μία προς τα κάτω μετατόπιση του μέσου της διαδικασίας. Κατά συνέπεια, η βελτίωση της ποιότητας μπορεί να εντοπιστεί και ενδεχομένως να διατηρηθεί.

Το GWMA αποτελεί ένα γενικό σταθμισμένο κινητό μέσο των διαδοχικών δεδομένων, στα οποία κάθε παρατήρηση έχει διαφορετικό βάρος. Το βάρος αυτό μειώνεται από την παρούσα περίοδο στην απομακρυσμένη παρελθούσα περίοδο έτσι ώστε το GWMA να αντικατοπτρίζει την σπουδαιότητα της πληροφορίας στην πρόσφατη διεργασία.

Έστω A το γεγονός για το οποίο το στατιστικό ελέγχου υπερβαίνει τα όρια ελέγχου και B το γεγονός για το οποίο είναι εντός των ορίων ελέγχου. Τα δύο συμβάντα είναι συμπληρωματικά και αλληλοαποκλείονται. Έστω M να αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δειγμάτων έως την πρώτη εμφάνιση του γεγονότος A από την προηγούμενη εμφάνισή του. Το $\bar{P}_j = P(M > j)$ και υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{\bar{P}_j\}_{j=1,2,\dots}$ είναι γνωστή με $1 = \bar{P}_0 \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_2 \geq \dots \geq 0$.

Τότε είναι εύκολο να επιτευχθεί

$$p_j = P(M=j) = \bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j = \bar{P}_{j-1} \left(1 - \frac{\bar{P}_j}{\bar{P}_{j-1}}\right), j=0,1,2,\dots$$

Αυτή η κοινή πιθανότητα υποδηλώνει ότι το γεγονός A συμβαίνει με πιθανότητα $1 - \bar{P}_j / \bar{P}_{j-1}$ στην j -οστή χρονική στιγμή ή το γεγονός B εμφανίζεται με πιθανότητα $\bar{P}_j / \bar{P}_{j-1}$. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα του γεγονότος A είναι χρονικά μεταβαλλόμενη, η πιθανότητά του περιλαμβάνει την χρονική περίοδο j . Λόγω της παρακάτω σχέσης:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} P(M=m) &= \lim_{j \rightarrow \infty} [P(M=1) + P(M=2) + \dots + P(M=j) + P(M>j)] = \\ \lim_{j \rightarrow \infty} [(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) + \dots + (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j) + \bar{P}_j] &= \bar{P}_0 + \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{P}_j = 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

οι $\{Pr(M=m)\}_{m=1,2,\dots}$ μπορούν να θεωρηθούν ως τα βάρη του GWMA. Επομένως, το στατιστικό GWMA στην j -οστή χρονική περίοδο μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} Y_j = \sum_{m=1}^j Pr(M=m) X_{j-m+1} + Pr(M>j) Y_0 &= \sum_{m=1}^j (\bar{P}_{m-1} - \bar{P}_m) X_{j-m+1} + \bar{P}_j Y_0 = \\ \lim_{j \rightarrow \infty} [(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) X_j + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) X_{j-1} + \dots + (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j) X_1 + \bar{P}_j \mu_0]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

όπου οι παρατηρήσεις $\{X_j\}_{j=1,2,\dots}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Poisson κατανομή με μέση τιμή μ_0 . Συνήθως, επιλέγεται από τον διαχειριστή της διαδικασίας $Y_0 = \mu_0$.

Η μέση τιμή και η διασπορά του στατιστικού Y_t υπολογίζονται αντίστοιχα ως:

$$\begin{aligned} E(Y_j) &= E[(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) X_j + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) X_{j-1} + \dots + (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j) X_1 + \bar{P}_j \mu_0] = \\ [(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) + \dots + (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j)] E(X) + \bar{P}_j \mu_0 &= \mu_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad \text{Var}(Y_j) &= [(\bar{P}_0 - \bar{P}_1)^2 + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2)^2 + \dots + (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j)^2] \text{Var}(X) = \\ [(\bar{P}_0 - \bar{P}_1)^2 + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2)^2 + \dots + (\bar{P}_{j-1} - \bar{P}_j)^2] \mu_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ορίζουμε το συντελεστή στάθμισης « P_j », ώστε τα βάρη του διαγράμματος PGWMA να μειώνονται από την παρούσα περίοδο προς τις προηγούμενες περιόδους: $\bar{P}_j = Pr(M>j) = q^j$, $0 \leq q < 1$, $\alpha > 0$, $j=1,2,3,\dots$ δηλαδή, η πιθανότητα για την οποία

συμβαίνει το γεγονός A κατά την j -οστή περίοδο είναι $1 - \frac{q^j}{(j-1)^\alpha}$, όπου η παράμετρος σχεδιασμού $0 \leq q \leq 1$ είναι μια σταθερά και η παράμετρος προσαρμογής α καθορίζεται από τον κατασκευαστή.

Το στατιστικό Y_j , η μέση τιμή του και η διακύμανση μετατρέπονται ως:

$$Y_j = \sum_{m=1}^j (q^{(m-1)\alpha} - q^{m\alpha}) X_{j-m+1} + q^{j\alpha} \mu_0 \quad (4.29)$$

$$\text{όπου} \quad E(Y_j) = \mu_0, \quad j=1,2,3,\dots \quad (4.30)$$

$$\text{Var}(Y_j) = Q_j \text{Var}(X_j) = Q_j \sigma^2, \quad j=1,2,3,\dots \quad (4.31)$$

$$\text{όπου} \quad Q_j = \sum_{m=1}^j (q^{(m-1)\alpha} - q^{m\alpha})^2. \quad (4.32)$$

Συγκεκριμένα, όταν η διαδικασία βρίσκεται υπό έλεγχο, $E(X_j) = \mu_0$ και $\text{Var}(X_j) = \sigma^2$ για όλες τις χρονικές περιόδους. Έτσι, το σχήμα ελέγχου GWMA μπορεί να κατασκευαστεί ως:

Όρια ελέγχου PGWMA
$UCL_j = \mu_0 + L \sqrt{Q_j} \sigma$
$CL_j = \mu_0$
$LCL_j = \mu_0 - L \sqrt{Q_j} \sigma$

όπου L είναι η σταθερά ορίου ελέγχου που καθορίζεται από τον κατασκευαστή ώστε να επιτυγχάνεται το επιθυμητό ARL_0 και εάν $LCL < 0$, τότε θέτουμε $LCL = 0$.

Διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα ελέγχου PEWMA είναι ειδική περίπτωση του PGWMA διαγράμματος, όταν $\alpha=1$ και $q=1-\lambda$, όπου η σχέση (4.29) γίνεται

$$Y_j = \sum_{m=1}^j ((1-\lambda)^{(m-1)} - (1-\lambda)^m) X_{j-m+1} + (1-\lambda)^j \mu_0 = \sum_{m=1}^j \lambda (1-\lambda)^{m-1} X_{j-m+1} + (1-\lambda)^j \mu_0$$

που αντιστοιχεί στο μοντέλο EWMA. Εάν $q=0$, τότε παίρνουμε το c διάγραμμα. Τα PGWMA διαγράμματα ελέγχου με $q = 0.95$ και $\alpha = 0.7 - 0.9$ είναι τα διαγράμματα PGWMA με τις καλύτερες επιδόσεις. Για μέτριες προς μεγάλες προς τα κάτω μετατοπίσεις του μέσου, το διάγραμμα ελέγχου PDEWMA με την καλύτερη επίδοση είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα ελέγχου PGWMA, (Sheu and Chiu, 2007).

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει μερικά αποτελέσματα σύγκρισης διαγραμμάτων ελέγχου PGWMA, για διάφορους (μ_0, q, α, L) συνδυασμούς και διαγραμμάτων ελέγχου PDEWMA για διάφορους (μ_0, λ, L) συνδυασμούς, με κοινό $ARL_0 \approx 500$, που μελετήθηκαν από τους Sheu και Chiu (2007). Διαπιστώνεται ότι τα διαγράμματα PGWMA με την καλύτερη απόδοση είναι συνήθως αποδοτικότερα από τα διαγράμματα PEWMA με την καλύτερη απόδοση, σε σχεδόν όλα τα επίπεδα μετατοπίσεων του μέσου. Είναι, όμως, ελαφρώς πιο αργά ώστε να ανιχνεύσουν ένα σήμα εκτός ελέγχου, απ' ότι το διάγραμμα ελέγχου PDEWMA με την καλύτερη απόδοση, για προς τα κάτω μετατόπιση του μέσου, πέραν των 0.5σ .

Πίνακας 4-2 Συνδυασμοί (μ_0, q, α, L) των PGWMA διαγραμμάτων και σύγκριση των ARL και $SDRL$, όταν $ARL_0 = 500$.

			Μετατοπίσεις του μέσου					
q	α	L	$\mu_1=2$	$\mu_1=3$	$\mu_0=4$	$\mu_1=5$	$\mu_1=6$	$\mu_1=7$
			-1σ	-0.5σ	0	0.5σ	1σ	1.5σ
0.95	0.7	2.754	8.448	26.85	499.8	20.59	7.195	4.011
			(3.68)	(15.78)	(526.8)	(16.82)	(5.263)	(2.725)
	0.8	2.692	7.757	25.17	499.6	20.87	7.137	3.899
			(3.524)	(15.42)	(520.5)	(17.18)	(5.281)	(2.667)
	0.9	2.657	7.474	25.08	500.3	21.53	7.16	3.913
			(3.468)	(15.81)	(513.3)	(17.91)	(5.367)	(2.672)
	1.0	2.64	7.448	25.3	501.1	22.67	7.379	3.975
EWMA			(3.502)	(16.54)	(511)	(18.63)	(5.504)	(2.746)
$\lambda=0.1$		2.367	7.107	24.37	499	23.55	7.6	3.997
PDEWMA			(3.616)	(16.4)	(512.8)	(19.86)	(5.953)	(3.073)

4.5 Poisson double GWMA (PDGWMA) διάγραμμα

Οι Chiu και Sheu (2007) εισήγαγαν διάφορα διαγράμματα ελέγχου τύπου PGWMA με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για την παρακολούθηση παρατηρήσεων που ακολουθούν την Poisson κατανομή, συμπεριλαμβανομένων των διαγραμμάτων ελέγχου PGWMA και FIR PGWMA. Τόνισαν τις μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διαδικασίας που εμφανίζονται στο στάδιο εκκίνησης, οπότε υιοθετήθηκε το χαρακτηριστικό γρήγορης αρχικής απόκρισης FIR. Δεν είναι σαφές εάν ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου PGWMA που επιλέχθηκε για καλή αρχική απόδοση θα λειτουργήσει επίσης αποδοτικά όταν οι μετατοπίσεις λαμβάνουν χώρα αργότερα, γι' αυτόν τον λόγο προχώρησαν την έρευνα και οι Chiu και Sheu (2008)

παρουσίασαν το PDGWMA (Poisson Double Generally Weighted Moving Average) διάγραμμα ελέγχου. Αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι το διάγραμμα PDGWMA ελέγχου με την καλύτερη απόδοση υπερτερεί έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου PEWMA, PGWMA και PDEWMA όταν η μετατόπιση του μέσου είναι μικρή και προς τα κάτω.

4.5.1 Βασικές Αρχές του PDGWMA

Θεωρούμε ένα σύστημα, όπου οι εμφανίσεις των ελαττωμάτων σε κάθε μονάδα επιθεώρησης ή παραγωγής, διαδοχικά καταγράφονται ως τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_t . Υποθέτουμε περαιτέρω ότι αυτές οι παρατηρήσεις ακολουθούν μία Poisson κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Αν η μ είναι ίση με τη γνωστή μέση τιμή μ_0 , τότε η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, αλλιώς, αν $\mu \neq \mu_0$ (δηλαδή, $\mu \neq \mu_0$), η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου.

Η επέκταση των πλεονεκτημάτων τόσο του γενικού GWMA όσο και του DEWMA έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία του διαγράμματος ελέγχου PDGWMA. Το στατιστικό ελέγχου GWMA (Y_t) ορίζεται ως εξής:

$$Y_t = \sum_{j=1}^t p_j X_{t-j+1} + \bar{p}_t Y_0, \quad t=1,2,3,\dots \quad (4.33)$$

Το στατιστικό ελέγχου DGWMA (Z_t), εξομαλύνει διπλά τις διαδοχικές τυχαίες μεταβλητές $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,t}$ με το στατιστικό ελέγχου GWMA:

$$Z_t = \sum_{j=1}^t p_j Y_{t-j+1} + \bar{p}_t Z_0, \quad t=1,2,3,\dots \quad (4.34)$$

όπου Z_0 ορίζεται γενικά ως: $Z_0 = E(Y_t) = \mu_0$.

Στη συνέχεια, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.33) και (4.34), αποκτούμε το στατιστικό ελέγχου DGWMA ως εξής:

$$Y_{t-j+1} = \sum_{i=1}^{t-j+1} p_i X_{(t-j+1)-i+1} + \bar{p}_{t-j+1} \mu_0$$

$$Z_t = \sum_{j=1}^t p_j \left(\sum_{i=1}^{t-j+1} p_i X_{(t-j+1)-i+1} + \bar{p}_{t-j+1} \mu_0 \right) + \bar{p}_t \mu_0$$

$$\begin{aligned}
&= p_1(p_1 X_t + p_2 X_{t-1} + \dots + p_{t-1} X_2 + p_t X_1 + \bar{p}_t \mu_0) \\
&+ p_2(p_1 X_{t-1} + p_2 X_{t-2} + \dots + p_{t-2} X_2 + p_{t-1} X_1 + \bar{p}_{t-1} \mu_0) + \dots \\
&+ p_{t-1}(p_1 X_2 + p_2 X_1 + \bar{p}_2 \mu_0) + p_t(p_1 X_1 + \bar{p}_1 \mu_0) + \bar{p}_t \mu_0 \\
&= p_1 p_1 X_t + (p_1 p_2 + p_2 p_1) X_{t-1} + (p_1 p_3 + p_2 p_2 + p_3 p_1) X_{t-2} + \dots \\
&+ (p_1 p_t + p_2 p_{t-1} + \dots + p_{t-1} p_2 + p_t p_1) X_1 + (p_1 \bar{p}_t + p_2 \bar{p}_{t-1} + \dots + p_{t-1} \bar{p}_2 + p_t \bar{p}_1) \mu_0 + \bar{p}_t \mu_0.
\end{aligned}$$

Έστω $w_j = \sum_{i=1}^j p_i p_{j-i+1} = \sum_{i=1}^j (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})(q^{(j-i)\alpha} - q^{(j-i+1)\alpha}), j=1,2,\dots,t$ (4.35)

Τότε $Z_t = \sum_{j=1}^t w_j X_{t-j+1} + (1 - \sum_{j=1}^t w_j) \mu_0, t=1,2,3,\dots$ (4.36)

τότε παίρνουμε: $E(Z_t) = \mu_0$ (4.37)

$$\text{Var}(Z_t) = \sum_{j=1}^t w_j^2 \sigma^2 = W_t \mu_0, t=1,2,3,\dots$$
 (4.38)

με $W_t = \sum_{j=1}^t w_j^2, t=1,2,3,\dots$ (4.39)

Έτσι, ένα διάγραμμα ελέγχου DGWMA για δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή (PDGWMA διάγραμμα ελέγχου) μπορεί να εκφραστεί ως:

Όρια ελέγχου PDGWMA
$UCL = \mu_0 + L \sqrt{W_t \mu_0}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \max(0, \mu_0 - L \sqrt{W_t \mu_0})$
$t=1,2,3,\dots$

όπου $L (> 0)$ είναι μια σταθερά των ορίων ελέγχου, η οποία μαζί με την παράμετρο σχεδιασμού q και την παράμετρο προσαρμογής α , καθορίζουν την απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου PDGWMA.

4.5.2 Στατιστική απόδοση των διαγραμμάτων PDGWMA

Ο υπολογισμός του ARL με τη χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων βασίζεται στην υπόθεση ότι η μετατόπιση του μέσου συμβαίνει στην αρχή της διαδικασίας γι' αυτό και ονομάζεται ARL μηδενικής ή αρχικής κατάστασης (zero/initial-state). Πέραν

αυτού, υπάρχει και το *ARL* σταθερής κατάστασης (steady-state), για το οποίο υποθέτουμε ότι η μετατόπιση του μέσου συμβαίνει μεταγενέστερα σε μία κατάσταση, αφότου η διεργασία λειτουργεί. Δεδομένου ότι το στατιστικό του DGWMA είναι πιο περίπλοκο από εκείνο του EWMA, η εύρεση του *ARL* σταθερής κατάστασης (steady-state, *SSARL*) με χρήση αναλυτικών προσεγγίσεων, όπως ολοκληρωτικών εξισώσεων ή Μαρκοβιανών αλυσιδών, είναι εξαιρετικά δύσκολη. Γι' αυτόν τον λόγο, οι Chiu και Lu (2015) ανέπτυξαν μια προσομοίωση για τον υπολογισμό του *SSARL* για διάφορες μετατοπίσεις του μέσου της διαδικασίας.

Έστω ότι η μέση τιμή μ_0 , οι παράμετροι του διαγράμματος ελέγχου q και α , το επιθυμητό *SSARL* μίας εντός ελέγχου διαδικασίας (π.χ. 500) και οι μετατοπίσεις του μέσου της διαδικασίας είναι γνωστά, τότε η διαδικασία προσομοίωσης (Chiu and Lu, 2015) περιλαμβάνει τα ακόλουθα πέντε βήματα:

1. Οι ψευδο-τυχαίες τιμές Poisson ($X_t, t=1,2,\dots,n_s$) παράγονται από την στατιστική “εργαλειοθήκη”, όπου n_s υποδηλώνει τον αριθμό των δειγματικών σημείων ανά επανάληψη προσομοίωσης και προτείνεται το $n_s \geq 5000$ ως επαρκές και αναγκαίο. Στην συνέχεια υπολογίζεται το στατιστικό του PDGWMA (Z_t)

2. Επιλέγοντας την κατάλληλη τιμή του L (ας πούμε, $2.0 \leq L \leq 3.0$), υπολογίζονται τα όρια ελέγχου (*UCL* και *LCL*) ,για $t=1,2,\dots,n_s$, τότε το *SSARL* υπολογίζεται με την εφαρμογή περισσότερων από 300 εντός έλεγχου παρατηρήσεων έως ότου το Z_t ($t > 300$) βρεθεί έξω από τα όρια ελέγχου.

3. Μετά την διεξαγωγή 100.000 επαναλήψεων των παραπάνω βημάτων, υπολογίζεται το *SSARL* που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη μετατόπιση και τον (q, α, L) συνδυασμό .

4. Η σταθερά ορίου ελέγχου (L) που αντιστοιχεί στην επιθυμητή τιμή $SSARL_0$, λαμβάνεται επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1-3, υποθέτοντας ότι η διαδικασία βρίσκεται εντός ελέγχου ($\mu = \mu_0$).

5. Με τον συγκεκριμένο συνδυασμό (q, α, L) που αντιστοιχεί στο επιθυμητό $SSARL_0$, όλες οι τιμές *SSARL* για τις δοσμένες μετατοπίσεις μπορούν να υπολογιστούν πραγματοποιώντας επαναληπτικά τα βήματα 1 - 3.

Έχει διαπιστωθεί ότι το L μειώνεται καθώς η παράμετρος σχεδιασμού q αυξάνεται, υπό μια καθορισμένη παράμετρο προσαρμογής α . Προκειμένου να

βελτιωθεί η συνολική στατιστική απόδοση και να διατηρηθεί η σταθερότητα του $SSARL_0$, επιλέγουμε $q = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.85, 0.9$ και 0.95 και $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ και 1.0 . Γενικά, το PDGWMA διάγραμμα ελέγχου με μικρό q (π.χ. $q < 0.5$) δεν είναι ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις. Το διάγραμμα PDGWMA με μεγάλη τιμή q (π.χ. $0.8 \leq q \leq 0.9$) και μια μεγάλη τιμή του α (π.χ. $\alpha \geq 0.7$) έχει καλή απόδοση στην ανίχνευση ελαφρώς μειούμενων μετατοπίσεων του μέσου, ενώ με μία μέση τιμή q (π.χ. $0.6 \leq q \leq 0.8$) και μέση τιμή α (π.χ. $0.5 \leq \alpha \leq 0.8$) έχει καλή απόδοση για την ανίχνευση ελαφρώς αυξανόμενων μετατοπίσεων του μέσου της διαδικασίας. Γενικά, μια μεγαλύτερη τιμή του q είναι κατάλληλη για μια μικρή μετατόπιση του μέσου και μια μεγαλύτερη τιμή του α είναι κατάλληλη για μια μεγάλη μετατόπιση του μέσου της διαδικασίας.

Στον παρακάτω πίνακα απεικονίζονται τα βέλτιστα $SSARL$ για τα διαγράμματα PDGWMA, PDEWMA, PGWMA και PEWMA με ασυμπτωτικά όρια ελέγχου, για $SSARL_0=500$, που μελετήθηκαν από τους Chiu και Lu (2015). Για παράδειγμα για τα διαγράμματα PDGWMA με $q = 0.7, \alpha = 0.9$, PDEWMA με $\lambda = 0.3$, PGWMA $q = 0.9, \alpha = 1.0$ και PEWMA $\lambda = 0.1$, διαπιστώνεται παρόμοια στατιστική απόδοση.

Πίνακας 4-3 Σύγκριση διαφόρων διαγραμμάτων με βέλτιστο σχεδιασμό κάτω από διάφορες μετατοπίσεις όταν $\mu_0=4$ και εντός ελέγχου $ARL=500$.

μ_0	μ_1	Διαγράμματα	q	α	λ	L	$SSARL$	
4	1 (0.25 μ_0)	PDGWMA	0.6	1.0	-	2.933	5.172	=PDEWMA $\lambda=0.4$
		PGWMA	0.8	1.0	-	3.000	5.538	=PEWMA $\lambda=0.2$
	2 (0.50 μ_0)	PDGWMA	0.7	0.9	-	2.796	9.958	
		PDEWMA	-	-	0.3	2.809	10.09	
		PGWMA	0.9	1.0	-	2.823	10.40	=PEWMA $\lambda=0.1$
	3 (0.75 μ_0)	PDGWMA	0.85	0.8	-	2.415	28.54	
		PDEWMA	-	-	0.1	2.337	28.86	
		PGWMA	0.95	1.0	-	2.616	29.46	=PEWMA $\lambda=0.05$
	5 (1.25 μ_0)	PDGWMA	0.7	0.5	-	2.868	27.71	
		PDEWMA	-	-	0.15	2.514	29.58	
		PGWMA	0.9	0.8	-	2.869	27.67	
		PEWMA	-	-	0.05	2.616	28.24	
	6 (1.50 μ_0)	PDGWMA	0.6	0.6	-	2.981	10.14	
		PDEWMA	-	-	0.3	2.809	10.36	
PGWMA		0.85	1.0	-	2.931	10.11	=PEWMA $\lambda=0.15$	
7 (1.50 μ_0)	PDGWMA	0.5	0.8	-	3.055	5.600		
	PDEWMA	-	-	0.5	3.040	5.634		
	PGWMA	0.75	1.0	-	3.063	5.615	=PEWMA $\lambda=0.25$	

4.6 Poisson Moving Average διάγραμμα

Ο Khoo (2004) εισήγαγε το διάγραμμα ελέγχου κινητού μέσου (Poisson Moving Average, PMA). Υποθέτουμε ότι συλλέγεται ο αριθμός των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων σε μια μονάδα επιθεώρησης του προϊόντος, X_1, X_2, \dots τότε ο κινητός μέσος όρος του πλάτους w την i -οστή χρονική στιγμή μπορεί να υπολογιστεί ως :

$$M_i = \frac{X_i + X_{i-1} + \dots + X_{i-w+1}}{w} = \frac{\sum_{j=i-w+1}^i X_j}{w}, \quad i \geq w. \quad (4.40)$$

Δηλαδή, την i -οστή χρονική στιγμή, η παλαιότερη παρατήρηση διαγράφεται και προστίθεται η πιο καινούρια. Η σχέση του μεγέθους της μεταβολής που θέλουμε να ανιχνεύσουμε σε σχέση με το w , είναι αντιστρόφως ανάλογη. Συγκεκριμένα, αν στόχος είναι να ανιχνευθεί μια αρκετά μικρή αλλαγή στο μέσο της διαδικασίας, γίνεται χρήση μεγάλης τιμής w , με κόστος όμως την όχι γρήγορη απόκριση του διαγράμματος στην ανίχνευση μεγάλων μεταβολών.

Για περιόδους $0 < i < w$, δεν υπάρχουν ακόμη w παρατηρήσεις για τον υπολογισμό ενός κινητού μέσου όρου Poisson πλάτους w . Για αυτές τις περιόδους, ο μέσος όρος όλων των παρατηρήσεων μέχρι την περίοδο i καθορίζει τον κινητό μέσο Poisson την i -οστή χρονική περίοδο. Δηλαδή:

$$M_i = \frac{\sum_{j=1}^i X_j}{i}, \quad i < w. \quad (4.41)$$

Ο μέσος όρος του κινητού μέσου Poisson M_i για περιόδους $i \geq w$ είναι:

$$E(M_i) = E\left[\frac{1}{w} \sum_{j=i-w+1}^i X_j\right] = \frac{1}{w} E\left[\sum_{j=i-w+1}^i X_j\right] = \frac{1}{w} \sum_{j=i-w+1}^i E(X_j) = \frac{1}{w} wc = c \quad (4.42)$$

και η αντίστοιχη διακύμανση είναι:

$$\begin{aligned} \text{Var}(M_i) &= \text{Var}\left[\frac{1}{w} \sum_{j=i-w+1}^i X_j\right] = \frac{1}{w^2} \text{Var}\left[\sum_{j=i-w+1}^i X_j\right] = \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^i \text{Var}(X_j) \\ \text{Var}(M_i) &= \frac{1}{w^2} wc = \frac{c}{w}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Είναι εύκολο να φανεί ότι για τις περιόδους $0 < i < w$, ο μέσος όρος και η διακύμανση του κινητού μέσου όρου είναι c και $\frac{c}{i}$, αντίστοιχα. Τα 3σ όρια ελέγχου για το διάγραμμα κινητού μέσου Poisson για χρονικές περιόδους $i \geq w$ είναι:

Διάγραμμα PMA 3σ Όρια Ελέγχου
$UCL = c + 3\sqrt{\frac{c}{w}}$ $CL = c$ $LCL = \max(0, c - 3\sqrt{\frac{c}{w}})$

και για περιόδους $0 < i < w$, τα όρια είναι

Διάγραμμα PMA 3σ Όρια Ελέγχου
$UCL_i = c + 3\sqrt{\frac{c}{i}}$ $CL_i = c$ $LCL_i = \max(0, c - 3\sqrt{\frac{c}{i}})$

Εάν η τιμή στόχος c δεν είναι γνωστή, τότε τα όρια λαμβάνονται με

$$\bar{c} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_i.$$

αντικατάσταση του c με την εκτίμηση του, \hat{c} , όπου:

Το \bar{c} υπολογίζεται από ένα προκαταρκτικό δείγμα μονάδων ελέγχου m . Η διεργασία θεωρείται ότι είναι εκτός ελέγχου, αν το στατιστικό είναι ίσο ή υπερβαίνει τα όρια ελέγχου.

Από τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα, που μελετήθηκαν από τον Khoo (2004), συγκρίνεται η απόδοση των διαγραμμάτων c και Poisson Moving Average και διαπιστώνεται η υπεροχή του Poisson Moving Average διαγράμματος έναντι του c διαγράμματος, διότι παρέχει, στις περισσότερες περιπτώσεις, μεγαλύτερες τιμές ARL_0 και μικρότερες τιμές ARL_1 .

Πίνακας 4-4 Σύγκριση μέσου μήκους ροής διαγραμμάτων *c* και PMA με $\mu_0=1$ και 3.

Poisson mean shift	$\mu_0=1$				$\mu_0=3$			
	<i>c</i> Chart	PMA			<i>c</i> Chart	PMA		
		w=2	w=3	w=4		w=2	w=3	w=4
0.00	284.5	263.7	349.9	522.1	257.7	317.2	523.4	455.3
0.50	54.8	37.7	39.6	44.5	58.1	46.1	53.0	43.1
0.75	30.0	20.3	20.4	21.3	31.4	23.2	25.1	20.3
1.00	18.6	12.4	12.0	12.4	18.9	13.4	13.6	11.4
1.25	12.8	8.6	8.2	8.3	12.5	8.8	8.6	7.5
1.50	9.2	6.4	6.0	6.0	8.8	6.2	6.1	5.4
2.00	5.5	3.9	3.8	3.7	5.0	3.7	3.6	3.4
2.50	3.7	2.8	2.8	2.7	3.2	2.6	2.5	2.5
3.00	2.7	2.2	2.2	2.2	2.3	2.0	2.0	1.9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Poisson Progressive Mean διάγραμμα ελέγχου

Ο Abbasi (2017) πρότεινε το Poisson Progressive Mean (PPM) διάγραμμα ελέγχου. Έστω X_t να αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ελαττωμάτων/μη συμμορφωμένων μονάδων σε μια παραγωγική διαδικασία την χρονική στιγμή t και ακολουθεί την Poisson κατανομή με μέσο μ . Η διαδικασία βρίσκεται εντός ελέγχου όταν $\mu = \mu_0$ και βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν η μέση τιμή μετατοπίζεται σε μ_1 . Το διάγραμμα ελέγχου PPM βασίζεται στη χρήση του ακόλουθου στατιστικού ελέγχου:

$$PM_t = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t X_j. \quad (5.1)$$

Η αναμενόμενη μέση τιμή και η διακύμανση του στατιστικού PM είναι αντιστοίχως:

$$E(PM_t) = \mu_0 \quad (5.2)$$

$$Var(PM_t) = \frac{\mu_0}{t}. \quad (5.3)$$

Τα όρια ελέγχου για το PPM διάγραμμα ορίζονται ως:

Όρια ελέγχου PPM
$UCL_t = \mu_0 + L \frac{1}{f(t)} \sqrt{\frac{\mu_0}{t}}$
$CL_t = \mu_0$
$LCL_t = \mu_0 - L \frac{1}{f(t)} \sqrt{\frac{\mu_0}{t}}$
$t=1,2,3,\dots$

όπου ο συντελεστής $L > 0$ είναι το πλάτος των ορίων ελέγχου και η $f(t)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του t που βελτιστοποιεί τις ιδιότητες του μέσου μήκους ροής. Ο Abbasi (2017), πρότεινε την χρήση του $f(t) = t^{0.2}$ ως την βέλτιστη επιλογή. Αν $LCL_t < 0$ τότε $LCL_t = 0$. Μία διαδικασία θεωρείται ότι είναι εκτός ελέγχου, εάν ένα στατιστικό PM_t βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου.

Η σύγκριση των τιμών του μέσου μήκους ροής ανέδειξε πολύ καλύτερη απόδοση του PPM διαγράμματος σε σύγκριση με τα υπάρχοντα διαγράμματα Poisson. Έχει αποδειχθεί ότι το προτεινόμενο διάγραμμα έχει μεγαλύτερη ικανότητα ανίχνευσης σημάτων εκτός ελέγχου και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αποδοτικό

διάγραμμα ελέγχου χαρακτηριστικών. Το ARL υπολογίζεται χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις Monte Carlo.

Από τα δεδομένα που μελετήθηκαν από τον Abbasi (2017), στους πίνακες 5-1 και 5-2 συγκρίνονται οι τιμές των ARL του διαγράμματος PPM με εκείνες των διαγραμμάτων c και Poisson CUSUM και διαπιστώνεται πως το διάγραμμα PPM έχει καλύτερη απόδοση και από τα δύο αυτά διαγράμματα σε όλα τα επίπεδα $\mu = \mu_0$ και δ

όπου $\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sqrt{\mu_0}}$, για τιμές $ARL_0 = 42$ και $ARL_0 = 52$, αντίστοιχα.

Στον πίνακα 5-3 παρουσιάζεται, από τον Abbasi (2017), μια σύγκριση του διαγράμματος PPM με τα διαγράμματα PEWMA και PDEWMA, όταν $\mu_0 = 4$ και $ARL_0 = 200$ για διαφορετικές τιμές του συντελεστή βαρύτητας λ . Διαπιστώνεται ότι το ARL_1 του διαγράμματος PPM είναι μικρότερο από αυτό των διαγραμμάτων PEWMA και PDEWMA για σχεδόν όλες τις τιμές του λ και των μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας.

Πίνακας 5-1 Σύγκριση Μέσου μήκους ροής του διαγράμματος PPM με το c διάγραμμα

δ	c	PPM	c	PPM	c	PPM
	$\mu_0 = 1$		$\mu_0 = 4$		$\mu_0 = 8$	
0.00	52.66	52.73	122.96	123.04	268.96	268.62
0.50	15.23	9.92	31.41	12.83	60.92	16.16
1.00	6.99	4.52	11.91	5.29	20.05	6.59
1.50	4.12	2.93	5.90	3.24	8.70	4.00
2.00	2.83	2.21	3.52	2.35	4.65	2.83
2.50	2.15	1.82	2.42	1.87	2.92	2.20

Πίνακας 5-2 Σύγκριση Μέσου μήκους ροής του διαγράμματος PPM με το Poisson CUSUM διάγραμμα

δ	CUSUM	PPM	CUSUM	PPM	CUSUM	PPM
	$\mu_0 = 1$		$\mu_0 = 4$		$\mu_0 = 8$	
0.00	42.96	42.13	171.78	171.30	332.07	333.09
0.50	11.95	9.02	20.86	14.26	32.66	17.08
1.00	5.59	4.19	7.76	5.92	9.51	6.84
1.50	3.44	2.77	4.59	3.66	5.00	4.11
2.00	2.48	2.14	3.30	2.67	3.39	2.92

Πίνακας 5-3 Σύγκριση Μέσου μήκους ροής του διαγράμματος PPM με τα PEWMA και PDEWMA διαγράμματα

μ									
	λ	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>PPM</i>		3.4	5.8	14.4	201.1	14.9	6.1	3.7	2.7
<i>PEWMA</i>	0.05	2.9	5.7	18.4	200.3	16.2	5.7	3.2	2.2
	0.10	3.3	6.7	23.0	200.1	18.1	6.2	3.4	2.3
	0.20	3.8	8.3	37.5	200.3	21.2	7.1	3.8	2.6
	0.25	4.0	9.4	51.1	200.3	22.3	7.4	3.9	2.7
	0.30	4.2	10.9	70.9	199.9	23.3	7.6	4.0	2.7
	0.40	5.3	18.2	168.4	200.1	25.9	8.3	4.2	2.8
	0.50	7.3	41.5	514.0	200.4	28.6	9.0	4.5	2.8
<i>PDEWMA</i>	0.05	2.0	4.3	14.8	200.4	15.1	5.2	2.8	1.9
	0.10	2.3	5.2	17.2	199.8	16.7	5.8	3.1	2.1
	0.20	3.1	6.3	22.0	200.3	19.5	6.6	3.5	2.4
	0.25	3.3	6.6	24.9	200.2	20.4	6.7	3.6	2.4
	0.30	3.4	7.0	28.8	200.1	21.0	6.8	3.6	2.4
	0.40	3.6	8.1	40.7	200.3	23.0	7.4	3.9	2.6
	0.50	4.0	10.5	66.5	200.0	24.8	7.7	4.0	2.7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εφαρμογές Διαγραμμάτων

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε διαγράμματα ελέγχου που μελετήσαμε στα κεφάλαια 2 έως 5 πάνω σε δεδομένα που προέρχονται από τον χώρο της βιομηχανίας και της Νορβηγικής Πολεμικής Αεροπορίας (Royal Norwegian Air Force). Το πρώτο σετ δεδομένων προέρχεται από το χώρο της παραγωγής και το δεύτερο σετ δεδομένων από τον χώρο της ΠΑ και αναφέρονται σε δεδομένα που ακολουθούν την Poisson κατανομή. Τα διαγράμματα ελέγχου, καθώς και οι έλεγχοι χ^2 καλής προσαρμογής δεδομένων έγιναν με τη βοήθεια της R.

6.2 1^η Εφαρμογή – Μη συμμορφωμένες μονάδες στην βιομηχανία

Στον πίνακα 6-1 παρουσιάζονται οι μη συμμορφωμένες μονάδες έστω X_i σε ένα δείγμα μεγέθους 40. Οι μη συμμορφωμένες μονάδες, δηλαδή τα ελαττωματικά προϊόντα, ακολουθούν την Poisson κατανομή.

Πίνακας 6-1 Αριθμός μη συμμορφωμένων μονάδων

i	X_i	i	X_i	i	X_i	i	X_i
1	5	11	2	21	7	31	3
2	3	12	6	22	2	32	5
3	4	13	5	23	1	33	4
4	0	14	1	24	2	34	6
5	2	15	7	25	6	35	1
6	9	16	3	26	2	36	3
7	2	17	2	27	3	37	1
8	2	18	0	28	2	38	0
9	4	19	4	29	0	39	3
10	1	20	3	30	1	40	1

Έχουμε μια διαδικασία που είναι εντός-ελέγχου με μέσο όρο των μή-

συμμορφωμένων μονάδων $\mu_0 = 4$. Έπειτα, παραλαμβάνουμε νέα παρτίδα πρώτων υλών, όπως φαίνεται στον Πίνακα 6-1.

Βρισκόμαστε στην Φάση II, εφόσον μας καθίσταται γνωστή η μέση τιμή της διαδικασίας. Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος c είναι:

$$UCL = c + 3\sqrt{c} = 4 + 3\sqrt{4} = 10$$

$$CL = c = 4$$

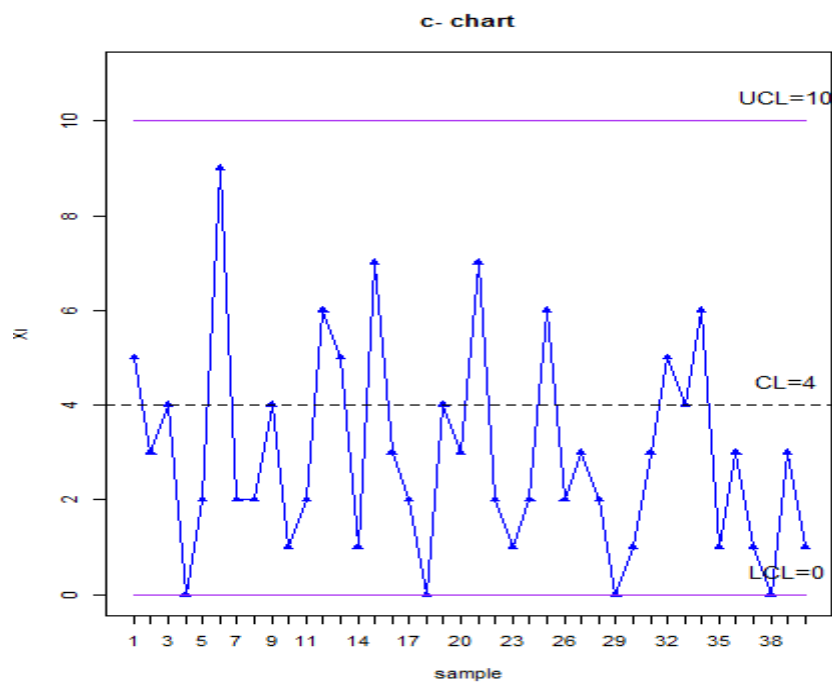
$$LCL = c - 3\sqrt{c} = 4 - 3\sqrt{4} = -2 \rightarrow LCL = 0.$$

Όσον αφορά την ικανότητα του διαγράμματος c , δηλαδή να ανιχνεύει μετατοπίσεις του μέσου αριθμού ατυχημάτων, υπολογίζουμε το ARL_0 :

$$\alpha = P(X \notin [LCL, UCL] | X \sim P(c)) = P(X \notin [0, 10] | X \sim P(4)) =$$

$$1 - P(0 \leq X \leq 10 | X \sim P(4)) = 1 - \sum_{i=0}^{10} e^{-4} \frac{4^i}{i!} = 1 - 0.99716023 \cong 0,00283977$$

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,00283977} \cong 352.$$



Σχήμα 6-1 Διάγραμμα ελέγχου c για τα δεδομένα 1-40 του πίνακα 6-1 (Φάση II).

Σύμφωνα με την τιμή του ARL_0 , όταν ο αριθμός των μη συμμορφωμένων μονάδων είναι υπό στατιστικό έλεγχο, ένα σημείο του διαγράμματος θα βρίσκεται εκτός του (κάτω) ορίου ελέγχου κάθε 352 δείγματα, επομένως το c διάγραμμα είναι αρκετά ικανοποιητικό.

Δημιουργούμε το διάγραμμα c για τα 40 δεδομένα μας (Φάση II) χρησιμοποιώντας

τα όρια ελέγχου που υπολογίσαμε παραπάνω. Ο μέσος όρος των δειγμάτων ανά μονάδα είναι 2.95 (ικανοποιητική προσέγγιση των δεδομένων σε κατανομή Poisson μιας και η p -τιμή του ελέγχου χ^2 καλής προσαρμογής είναι 0.5728). Παρατηρούμε ότι κανένα σημείο δεν βρίσκεται εκτός ορίων ελέγχου και επομένως το διάγραμμα c αδυνατεί να ανιχνεύσει μία μετατόπιση από $\mu_0=4$ σε $\mu_1=2.95$ στον μέσο της διεργασίας.

Στη συνέχεια, θα κατασκευάσουμε διαγράμματα CUSUM, FIR-CUSUM, PEWMA, FIR PEWMA, PDEWMA, PGWMA, PDEWMA και PPM για τιμές: $\lambda = 0.05$ και 0.10 , ώστε να καταφέρουμε να ανιχνεύσουμε την μετατόπιση του μέσου $\mu_0=4$.

Poisson CUSUM διάγραμμα

Με την βοήθεια του στατιστικού πακέτου R ευρέθησαν οι τιμές των παραμέτρων k και h ώστε τα διαγράμματα Poisson CUSUM και FIR-Poisson CUSUM να προσεγγίζουν το υπολογισμένο ARL_0 . Το k υπολογίστηκε από τον τύπο

$$k = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0} = \frac{2.95 - 4}{\ln(2.95) - \ln(4)},$$

το οποίο προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του μ_0 και το h επιλέγεται σε συνδυασμό με το k για να ληφθεί το επιθυμητό ARL_0 . Έπειτα, υπολογίζονται τα:

$$S_i^- = \max(0, k - X_i + S_{i-1}^-),$$

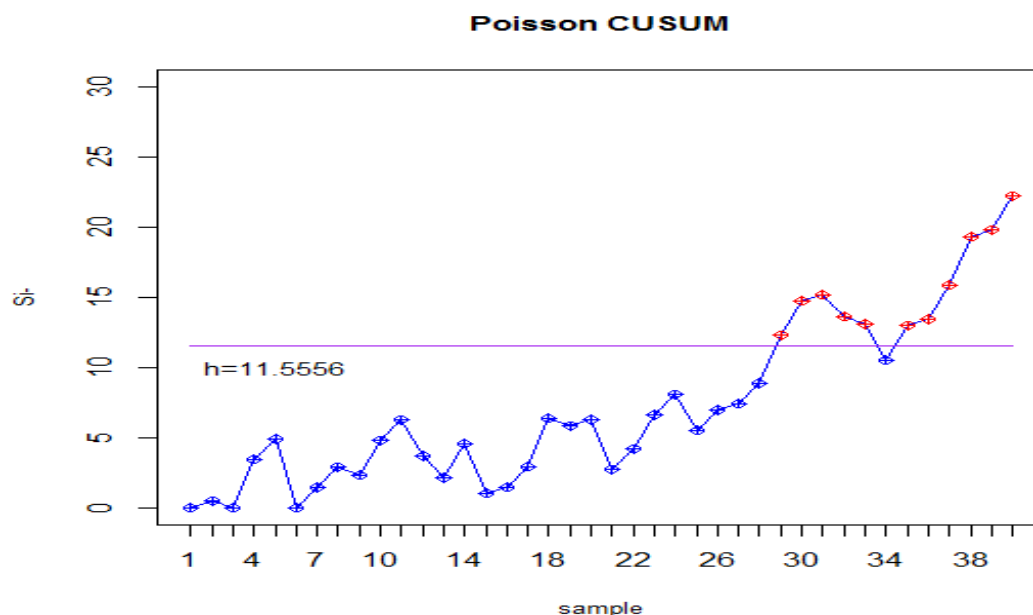
διότι απ' το c διάγραμμα δεν διαπιστώνουμε καμία μετατόπιση του μέσου της διεργασίας όμως αντιλαμβανόμαστε πιθανή μετατόπιση του μέσου προς τα κάτω, επομένως αρκεί να υπολογιστούν μόνο τα S_i^- όπου X_i είναι μία τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων. Με $S_0^- = 0$ και $k = 3.4480$, $h = 11.5556$ που δίνουν ένα ARL_0 γύρω στο 354.99, αρκετά κοντά στο επιθυμητό.

Για παράδειγμα για $i=1$,

$$S_1^- = \max(0, k - X_1 + S_0^-) = \max(0, 3.448 - 5 + 0) = 0.$$

Πίνακας 6-2 Τιμές των S_i για το Poisson CUSUM διάγραμμα

i	X_i	S_i^-	i	X_i	S_i^-
1	5	0	21	7	2.72
2	3	0.45	22	2	4.17
3	4	0	23	1	6.62
4	0	3.45	24	2	8.06
5	2	4.9	25	6	5.51
6	9	0	26	2	6.96
7	2	1.45	27	3	7.41
8	2	2.9	28	2	8.86
9	4	2.34	29	0	12.3
10	1	4.79	30	1	14.75
11	2	6.24	31	3	15.20
12	6	3.69	32	5	13.65
13	5	2.14	33	4	13.1
14	1	4.58	34	6	10.54
15	7	1.03	35	1	12.99
16	3	1.48	36	3	13.44
17	2	2.93	37	1	15.89
18	0	6.38	38	0	19.34
19	4	5.82	39	3	19.78
20	3	6.27	40	1	22.23



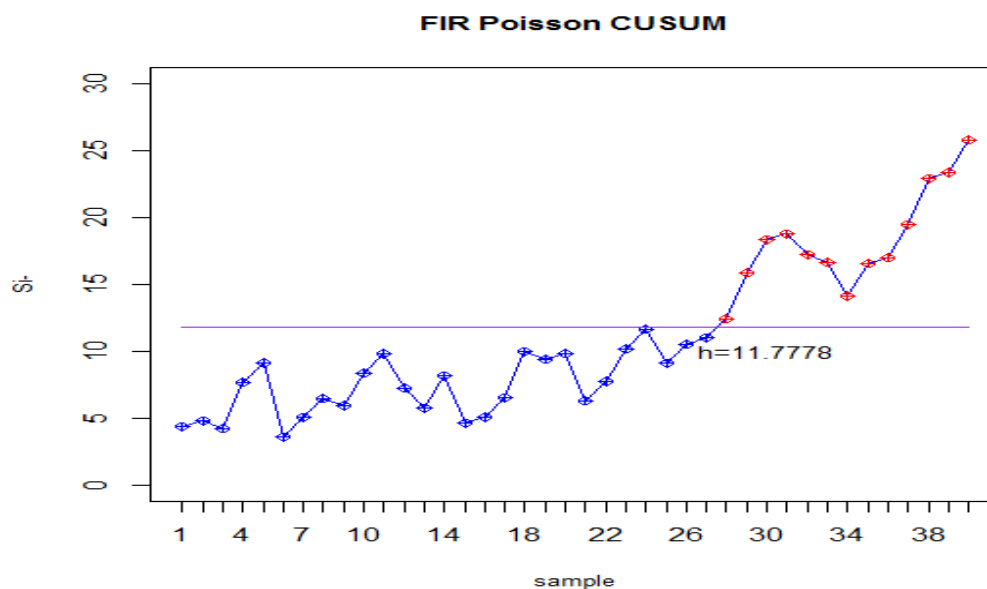
Σχήμα 6-2 Poisson CUSUM διάγραμμα για τα δεδομένα του πίνακα 6-2

Στο σχήμα 6-2 απεικονίζεται το διάγραμμα Poisson CUSUM με $k = 3.4480$, $h = 11.5556$. Διαπιστώνουμε ότι το Poisson CUSUM διάγραμμα, εν αντιθέσει με το c διάγραμμα, ανιχνεύει την προς τα κάτω μετατόπιση του μέσου, η οποία εντοπίζεται μετά από 29 παρατηρήσεις.

Έπειτα υπολογίζονται οι τιμές S_i για το διάγραμμα ελέγχου Poisson CUSUM με χρήση της τεχνικής γρήγορης αρχικής απόκρισης (Fast Initial Response, FIR).

Πίνακας 6-3 Τιμές S_i για το FIR Poisson CUSUM διάγραμμα

i	X_i	S_i^-	i	X_i	S_i^-
1	5	4.3369	21	7	6.2969
2	3	4.7849	22	2	7.7449
3	4	4.2329	23	1	10.1929
4	0	7.6809	24	2	11.6409
5	2	9.1289	25	6	9.0889
6	9	3.5769	26	2	10.5369
7	2	5.0249	27	3	10.9849
8	2	6.4729	28	2	12.4329
9	4	5.9209	29	0	15.8809
10	1	8.3689	30	1	18.3289
11	2	9.8169	31	3	18.7769
12	6	7.2649	32	5	17.2249
13	5	5.7129	33	4	16.6729
14	1	8.1609	34	6	14.1209
15	7	4.6089	35	1	16.5689
16	3	5.0569	36	3	17.0169
17	2	6.5049	37	1	19.4649
18	0	9.9529	38	0	22.9129
19	4	9.4009	39	3	23.3609
20	3	9.8489	40	1	25.8089



Σχήμα 6-3 Poisson FIR- CUSUM διάγραμμα για τα δεδομένα του πίνακα 6-3

Στο σχήμα 6-3 απεικονίζεται το Poisson CUSUM διάγραμμα με την τεχνική FIR με $k = 3.4480$, $h = 11.7778$ όπου επιτυγχάνεται $ARL_0 = 350.25$. Διαπιστώνουμε ότι με

χρήση της τεχνικής γρήγορης αρχικής απόκρισης η μετατόπιση εντοπίζεται πάλι μετά από 29 παρατηρήσεις, στην ουσία στην συγκεκριμένη κατάσταση, δεν προσφέρει κάποια επιπλέον πληροφορία, μόνη διαφορά ότι οι μετέπειτα παρατηρήσεις βρίσκονται όλες εκτός ορίων ελέγχου.

Poisson EWMA διάγραμμα

Στον πίνακα 6-4, παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων λ και L και q , α , L ώστε τα διαγράμματα PEWMA, FIR PEWMA, PDEWMA, PGWMA και PDGWMA να έχουν ARL_0 κοντά στο 370.

Πίνακας 6-4 Επιλογή των παραμέτρων λ και L , q , α και L για $ARL_0 \cong 370$

	PEWMA		FIR PEWMA		PDEWMA	
λ	0.05	0.10	0.05	0.10	0.05	0.10
L	2.514	2.719	2.644	2.840	1.964	2.237
ARL_0	370.63	370.06	370.55	370.33	369.73	369.83
	PGWMA		PDGWMA			
q	0.95	0.95	0.95	0.9		
α	0.8	0.9	0.8	0.6		
L	2.565	2.526	1.776	2.041		
ARL_0	370.08	370.90	370.79	370.01		

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$, $i=1, \dots, 40$ για $\lambda=0.05$ και βάζοντας, όπου X_i τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων που είχαμε στο i -οστό δείγμα, προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού Z_i , με $Z_0 = \mu_0 = 4$.

Για παράδειγμα, για $i=1$, έχουμε:

$$Z_1 = \lambda X_1 + (1 - \lambda)Z_0 = 0.05 \cdot 5 + 0.95 \cdot 4 = 4.05.$$

Τα όρια ελέγχου για $i=1$ είναι:

$$UCL_1 = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \mu_0 = 4 + 2.514 \sqrt{\frac{0.05}{1.95} [1 - (1 - 0.05)^{2 \cdot 1}]} \cdot 4 = 4.2514$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \mu_0 = 4 - 2.514 \sqrt{\frac{0.05}{1.95} [1 - (1 - 0.05)^{2 \cdot 1}]} \cdot 4 = 3.7486.$$

Επίσης, οι τιμές των ορίων ελέγχου όταν αυτές έχουν σταθεροποιηθεί είναι:

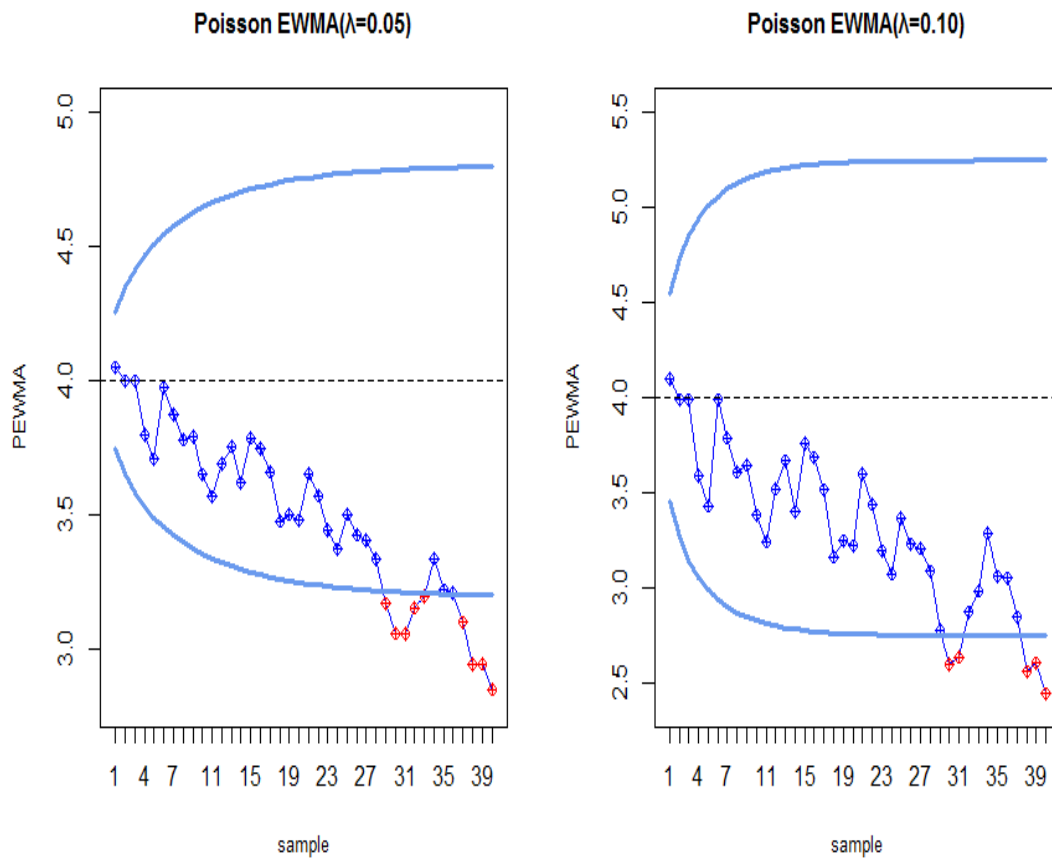
$$UCL_1 = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \mu_0 = 4 + 2.514 \sqrt{\frac{0.05}{2 - 0.05}} \cdot 4 = 4.8051$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \mu_0 = 4 - 2.514 \sqrt{\frac{0.05}{2 - 0.05}} \cdot 4 = 3.1949.$$

Οι τιμές του στατιστικού Z_i και τα όρια ελέγχου του PEWMA διαγράμματος ελέγχου παρουσιάζονται στον πίνακα 6-5 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6.4.

Πίνακας 6-5 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05$

i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i	i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i
1	5	4.0500	3.7486	4.2514	21	7	3.6545	3.2430	4.7569
2	3	3.9975	3.6532	4.3467	22	2	3.5718	3.2382	4.7618
3	4	3.9976	3.5856	4.4144	23	1	3.4432	3.2338	4.7662
4	0	3.7977	3.5329	4.4671	24	2	3.3711	3.2299	4.7700
5	2	3.7078	3.4899	4.5100	25	6	3.5025	3.2265	4.7735
6	9	3.9725	3.4542	4.5458	26	2	3.4274	3.2233	4.7766
7	2	3.8738	3.4237	4.5763	27	3	3.4060	3.2205	4.7795
8	2	3.7801	3.3976	4.6024	28	2	3.3357	3.2179	4.7820
9	4	3.7911	3.3749	4.6251	29	0	3.1689	3.2157	4.7843
10	1	3.6516	3.3551	4.6449	30	1	3.0605	3.2136	4.7864
11	2	3.5690	3.3378	4.6622	31	3	3.0575	3.2118	4.7882
12	6	3.6906	3.3225	4.6775	32	5	3.1546	3.2101	4.7899
13	5	3.7560	3.3091	4.6909	33	4	3.1969	3.2086	4.7914
14	1	3.6182	3.2971	4.7029	34	6	3.3370	3.2073	4.7927
15	7	3.7873	3.2865	4.7135	35	1	3.2202	3.2061	4.7939
16	3	3.7479	3.2771	4.7229	36	3	3.2092	3.2049	4.7950
17	2	3.6606	3.2686	4.7314	37	1	3.0987	3.2039	4.7960
18	0	3.4775	3.2611	4.7389	38	0	2.9438	3.2031	4.7969
19	4	3.5036	3.2544	4.7456	39	3	2.9466	3.2023	4.7977
20	3	3.4785	3.2484	4.7516	40	1	2.8492	3.2015	4.7984



Σχήμα 6-4 PEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05$ και 0.10 για τα δεδομένα του πίνακα 6-5

Στο σχήμα 6-4 απεικονίζεται το διάγραμμα PEWMA με $\lambda = 0.05$ και $\lambda = 0.10$. Διαπιστώνουμε ότι για $\lambda = 0.05$, η ανίχνευση της μετατόπισης πραγματοποιήθηκε μετά από 29 παρατηρήσεις, ενώ για $\lambda = 0.10$ μετά από 30 παρατηρήσεις, δηλαδή η αντίληψη των διαγραμμάτων για μετατόπιση του μέσου της διεργασίας είναι ίδια.

Poisson Double EWMA διάγραμμα

Χρησιμοποιώντας τους τύπους $Y_i = \lambda X_i + (1-\lambda)Y_{i-1}$ και $Z_i = \lambda Y_i + (1-\lambda)Z_{i-1}$, με $i=1, \dots, 40$ για $\lambda=0.05$ και βάζοντας, όπου X_i τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων απ' το i -οστό δείγμα, προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού Z_i . Για παράδειγμα, για $i=1$, έχουμε:

$$Y_1 = \lambda X_1 + (1-\lambda)Y_0 = 0.05 \cdot 5 + 0.95 \cdot 4 = 4.05$$

$$Z_1 = \lambda Y_1 + (1-\lambda)Z_0 = 0.05 \cdot 4.05 + 0.95 \cdot 4 = 4.0025.$$

Τα όρια ελέγχου για $i=1$ είναι:

$$UCL_i = \mu_0 + L \sqrt{\lambda^4 \frac{1+(1-\lambda)^2 - (i+1)^2(1-\lambda)^{2i} + (2i^2+2i-1)(1-\lambda)^{2i+2} - i^2(1-\lambda)^{2i+4}}{[1-(1-\lambda)^2]^3}} \mu_0$$

$$UCL_1 = 4 + 1.964 \sqrt{0.05^4 \frac{1+0.95^2 - 2^2 \cdot 0.95^2 + 3 \cdot 0.95^4 - 0.95^6}{[1-0.95^2]^3}} \cdot 4 = 4.00982$$

$$LCL_i = \mu_0 - L \sqrt{\lambda^4 \frac{1+(1-\lambda)^2 - (i+1)^2(1-\lambda)^{2i} + (2i^2+2i-1)(1-\lambda)^{2i+2} - i^2(1-\lambda)^{2i+4}}{[1-(1-\lambda)^2]^3}} \mu_0$$

$$LCL_1 = 4 - 1.964 \sqrt{0.05^4 \frac{1+0.95^2 - 2^2 \cdot 0.95^2 + 3 \cdot 0.95^4 - 0.95^6}{[1-0.95^2]^3}} \cdot 4 = 3.99018.$$

Επίσης, οι τιμές των ορίων ελέγχου όταν αυτές έχουν σταθεροποιηθεί είναι:

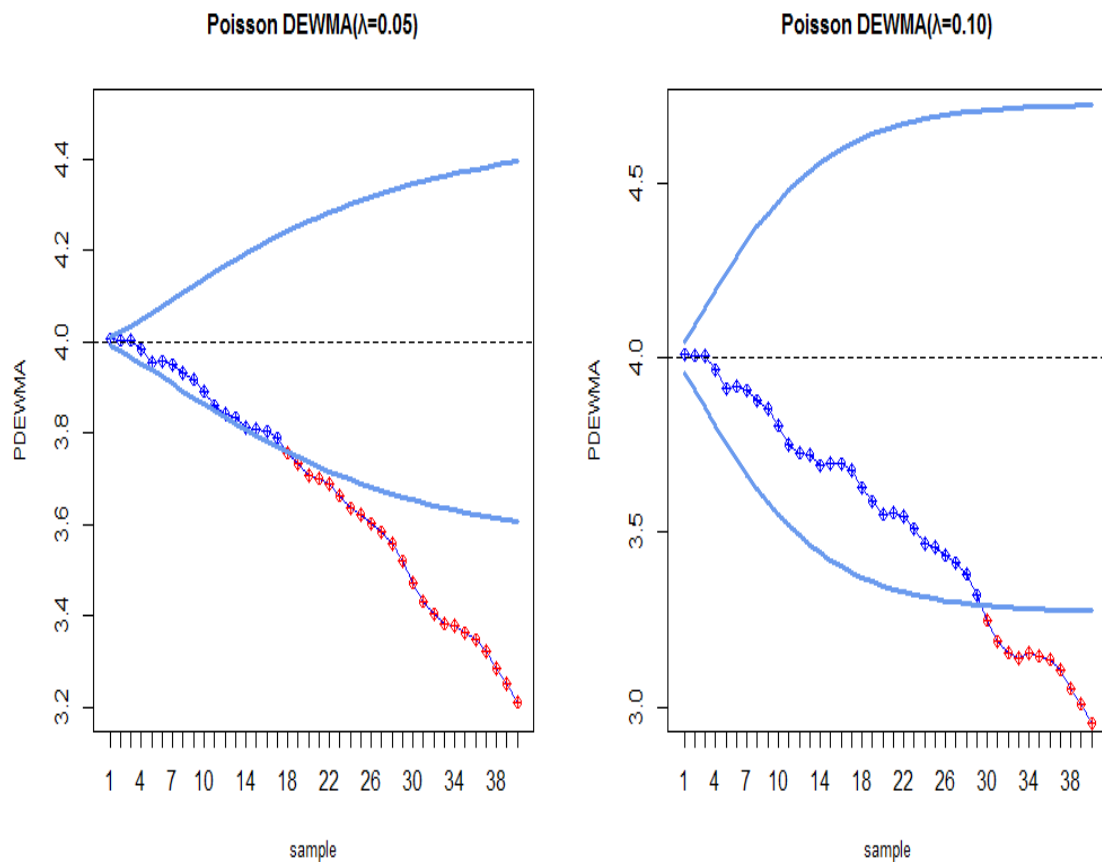
$$UCL = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda(2-2\lambda+\lambda^2)}{(2-\lambda)^3}} \mu_0 = 4 + 1.964 \sqrt{\frac{0.05 \cdot 1.9025}{1.95^3}} \cdot 4 = 4.4449$$

$$LCL = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda(2-2\lambda+\lambda^2)}{(2-\lambda)^3}} \mu_0 = 4 - 1.964 \sqrt{\frac{0.05 \cdot 1.9025}{1.95^3}} \cdot 4 = 3.5551.$$

Οι τιμές του στατιστικού Z_i και τα όρια ελέγχου για το συγκεκριμένο PDEWMA διάγραμμα παρουσιάζονται στον πίνακα 6-6 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχ. 6-5.

Πίνακας 6-6 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PDEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05$

i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i	i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i
1	5	4.00250	3.99018	4.00982	21	7	3.80292	3.72618	4.27383
2	3	4.00225	3.97892	4.02108	22	2	3.79137	3.71646	4.28354
3	4	4.00202	3.96607	4.03393	23	1	3.77396	3.70719	4.29280
4	0	3.99180	3.95219	4.04781	24	2	3.75382	3.69837	4.30163
5	2	3.97761	3.93767	4.06233	25	6	3.74125	3.68997	4.31003
6	9	3.97735	3.92278	4.07722	26	2	3.72556	3.68198	4.31802
7	2	3.97218	3.90771	4.09229	27	3	3.70958	3.67439	4.32560
8	2	3.96257	3.89264	4.10736	28	2	3.69088	3.66720	4.33279
9	4	3.95400	3.87767	4.12233	29	0	3.66479	3.66038	4.33962
10	1	3.93888	3.86291	4.13709	30	1	3.63457	3.65392	4.34608
11	2	3.92039	3.84842	4.15158	31	3	3.60572	3.64781	4.35219
12	6	3.90889	3.83426	4.16574	32	5	3.58316	3.64202	4.35798
13	5	3.90125	3.82048	4.17953	33	4	3.56385	3.63656	4.36344
14	1	3.88710	3.80710	4.19289	34	6	3.55250	3.63140	4.36859
15	7	3.88211	3.79416	4.20584	35	1	3.53589	3.62654	4.37346
16	3	3.87540	3.78167	4.21833	36	3	3.51955	3.62195	4.37805
17	2	3.86466	3.76964	4.23036	37	1	3.49851	3.61763	4.38237
18	0	3.84530	3.75807	4.24193	38	0	3.47077	3.61356	4.38644
19	4	3.82822	3.74697	4.25303	39	3	3.44456	3.60973	4.39027
20	3	3.81073	3.73634	4.26366	40	1	3.41479	3.60613	4.39387



Σχήμα 6-5 PDEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05$ και 0.10 για τα δεδομένα του πίνακα 6-6.

Στο σχήμα 6-5 απεικονίζεται το διάγραμμα PDEWMA με $\lambda = 0.05$ και $\lambda = 0.10$. Διαπιστώνουμε μεγάλη διαφορά ανάμεσα στα δύο διαγράμματα, η ανίχνευση πραγματοποιήθηκε μετά από 18 παρατηρήσεις για $\lambda = 0.05$ και μετά από 30 παρατηρήσεις για $\lambda = 0.10$.

FIR Poisson EWMA διάγραμμα

Οι τιμές του στατιστικού $Z_i, i=1, \dots, 40$ είναι ίδιες με αυτές του διαγράμματος PEWMA. Τα όρια ελέγχου για $\lambda=0.05, f=0.5$ και $a=0.3$ για παράδειγμα για την 1^η παρατήρηση είναι:

$$UCL_1 = \mu_0 + L \left(1 - (1-f)^{1+a(1-1)}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^2]} \mu_0$$

$$UCL_1 = 4 + 2.644 \cdot (1 - 0.5^{1+0.3 \cdot 0}) \sqrt{\frac{0.05}{1.95} (1 - 0.95^2)} \cdot 4 = 4.1318$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L \left(1 - (1-f)^{1+a(1-1)}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^2]} \mu_0$$

$$LCL_1 = 4 - 2.644 \cdot (1 - 0.5^{1+0.3 \cdot 0}) \sqrt{\frac{0.05}{1.95} (1 - 0.95^2)} \cdot 4 = 3.8681.$$

Επίσης, οι τιμές των ορίων ελέγχου όταν αυτές έχουν σταθεροποιηθεί είναι:

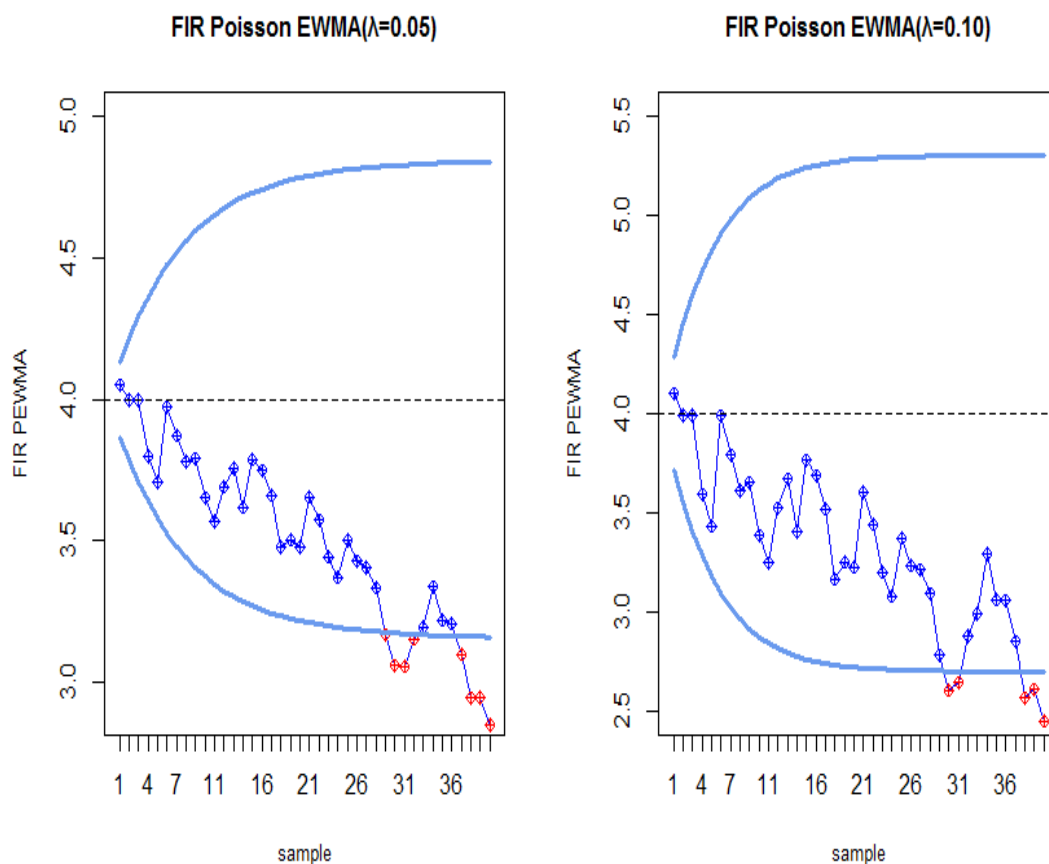
$$UCL = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \mu_0 = 4 + 2.644 \sqrt{\frac{0.05}{1.95}} \cdot 4 = 4.8468$$

$$LCL = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \mu_0 = 4 - 2.644 \sqrt{\frac{0.05}{1.95}} \cdot 4 = 3.1532.$$

Οι τιμές του στατιστικού Z_i και τα όρια ελέγχου για το FIR PEWMA διάγραμμα παρουσιάζονται στον πίνακα 6-7 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-6.

Πίνακας 6-7 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το FIR PEWMA διάγραμμα $\lambda=0.05$

i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i	i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i
1	5	4.05000	3.86780	4.13220	21	7	3.65454	3.21008	4.78992
2	3	3.99750	3.78342	4.21658	22	2	3.57182	3.20387	4.79613
3	4	3.99763	3.70795	4.29205	23	1	3.44322	3.19838	4.80162
4	0	3.79774	3.64038	4.35962	24	2	3.37106	3.19353	4.80647
5	2	3.70786	3.58036	4.41965	25	6	3.50251	3.18924	4.81076
6	9	3.97246	3.52741	4.47259	26	2	3.42738	3.18543	4.81457
7	2	3.87384	3.48094	4.51906	27	3	3.40602	3.18205	4.81796
8	2	3.78015	3.44031	4.55969	28	2	3.33571	3.17904	4.82096
9	4	3.79114	3.40486	4.59514	29	0	3.16893	3.17636	4.82364
10	1	3.65158	3.37398	4.62602	30	1	3.06048	3.17397	4.82603
11	2	3.56901	3.34709	4.65291	31	3	3.05746	3.17184	4.82816
12	6	3.69056	3.32368	4.67632	32	5	3.15459	3.16994	4.83006
13	5	3.75603	3.30329	4.69671	33	4	3.19686	3.16824	4.83176
14	1	3.61823	3.28552	4.71448	34	6	3.33701	3.16672	4.83328
15	7	3.78731	3.27001	4.72999	35	1	3.22016	3.16536	4.83464
16	3	3.74795	3.25647	4.74353	36	3	3.20915	3.16414	4.83586
17	2	3.66055	3.24462	4.75538	37	1	3.09869	3.16304	4.83696
18	0	3.47752	3.23424	4.76576	38	0	2.94376	3.16206	4.83794
19	4	3.50365	3.22513	4.77487	39	3	2.94657	3.16118	4.83882
20	3	3.47847	3.21713	4.78288	40	1	2.84925	3.16039	4.83961



Σχήμα 6-6 FIR PEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05$ και 0.10 για τα δεδομένα του πίνακα

Στο σχήμα 6-6 απεικονίζεται το διάγραμμα FIR PEWMA με $\lambda = 0.05$ και $\lambda = 0.10$. Διαπιστώνουμε ότι για $\lambda = 0.05$, η ανίχνευση της μετατόπισης στον μέσο της διαδικασίας πραγματοποιήθηκε μετά από 29 παρατηρήσεις, ενώ για $\lambda = 0.10$ μετά από 30 παρατηρήσεις, δηλαδή η αντίληψη των διαγραμμάτων για μετατόπιση του μέσου της διεργασίας είναι σχεδόν ίδια. Η τεχνική αρχικής απόκρισης (Fast Initial Response, FIR) δεν συνδράμει ιδιαίτερος στην προκείμενη περίπτωση.

Poisson GWMA διάγραμμα

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $Y_j = \sum_{m=1}^j (q^{(m-1)^\alpha} - q^{m^\alpha}) X_{j-m+1} + q^j \mu_0$ και βάζοντας, όπου X_{j-m+1} τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων που είχαμε στο $j-m+1$ -οστό δείγμα, προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού Y_j με τις τιμές $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$ και $L = 2.565$, ως βέλτιστες επιλογές για προσέγγιση $ARL_0 = 370$.

Για παράδειγμα, για $j=1$, έχουμε:

$$Y_1 = \sum_{m=1}^1 (0.95^{(m-1)^{0.8}} - 0.95^{m^{0.8}}) X_{1-m+1} + 0.95^1 4 =$$

$$(0.95^{(0)^{0.8}} - 0.95^{1^{0.8}}) X_1 + 0.95^1 4 = 4.05.$$

Υπολογίζουμε το Q_1 απ' τον τύπο :

$$Q_j = \sum_{m=1}^j (q^{(m-1)^\alpha} - q^{m^\alpha})^2$$

$$Q_1 = \sum_{m=1}^1 (0.95^{(m-1)^{0.8}} - 0.95^{m^{0.8}})^2 = \sum_{m=1}^1 (0.95^{(0)^{0.8}} - 0.95^{1^{0.8}})^2 = 0.0025.$$

Τα όρια ελέγχου για παράδειγμα για $j=1$ είναι:

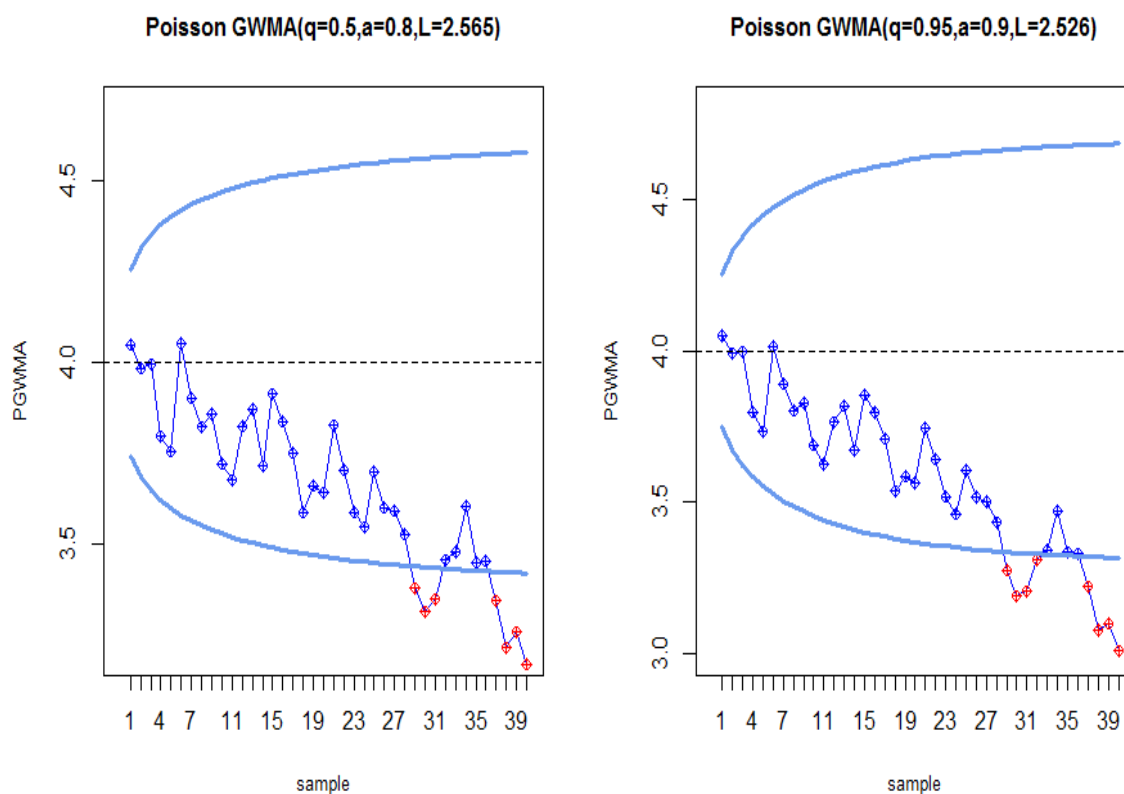
$$UCL_1 = \mu_0 + L \sqrt{Q_1 \mu_0} = 4 + 2.565 \sqrt{0.0025 \cdot 4} = 4.2565$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L \sqrt{Q_1 \mu_0} = 4 - 2.565 \sqrt{0.0025 \cdot 4} = 3.7435.$$

Οι τιμές του στατιστικού Y_j και τα όρια ελέγχου του PGWMA διαγράμματος ελέγχου παρουσιάζονται στον πίνακα 6-8 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-7.

Πίνακας 6-8 Τιμές Y_j και ορίων ελέγχου για το PGWMA διάγραμμα με $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$

i	X_i	Y_i	LCL	UCL	i	X_i	Y_i	LCL	UCL
1	5	4.05000	3.74350	4.25650	21	7	3.82753	3.46202	4.53798
2	3	3.98544	3.68562	4.31438	22	2	3.70530	3.45838	4.54162
3	4	3.99533	3.64822	4.35178	23	1	3.58749	3.45497	4.54503
4	0	3.79704	3.62040	4.37959	24	2	3.54607	3.45179	4.54821
5	2	3.75608	3.59829	4.40171	25	6	3.70117	3.44881	4.55119
6	9	4.05433	3.58002	4.41998	26	2	3.60065	3.44602	4.55398
7	2	3.90298	3.56452	4.43548	27	3	3.59220	3.44339	4.55660
8	2	3.82363	3.55112	4.44888	28	2	3.52819	3.44093	4.55907
9	4	3.85875	3.53939	4.46061	29	0	3.37911	3.43861	4.56139
10	1	3.72245	3.52900	4.47099	30	1	3.31434	3.43643	4.56357
11	2	3.67567	3.51972	4.48028	31	3	3.34781	3.43437	4.56563
12	6	3.82629	3.51137	4.48863	32	5	3.45604	3.43242	4.56758
13	5	3.87163	3.50381	4.49619	33	4	3.47938	3.43058	4.56942
14	1	3.71557	3.49693	4.50307	34	6	3.60514	3.42885	4.57116
15	7	3.91297	3.49065	4.50935	35	1	3.44891	3.42720	4.57280
16	3	3.83798	3.48488	4.51512	36	3	3.45375	3.42564	4.57436
17	2	3.75219	3.47958	4.52042	37	1	3.34491	3.42417	4.57583
18	0	3.58824	3.47468	4.52532	38	0	3.21470	3.42277	4.57723
19	4	3.66179	3.47014	4.52986	39	3	3.25858	3.42144	4.57856
20	3	3.64179	3.46594	4.53407	40	1	3.16964	3.42018	4.57982



Σχήμα 6-7 PGWMA διάγραμμα με $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$ και $q = 0.95$, $\alpha = 0.9$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-8

Στο σχήμα 6-7 απεικονίζεται το διάγραμμα PGWMA με $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$ και $q = 0.95$, $\alpha = 0.9$. Διαπιστώνουμε ότι και για τα δύο, η ανίχνευση της μετατόπισης πραγματοποιήθηκε μετά από 29 παρατηρήσεις, δηλαδή η αντίληψη των διαγραμμάτων για μετατόπιση του μέσου της διεργασίας είναι ίδια.

Poisson DGWMA διάγραμμα

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $Z_t = \sum_{j=1}^t w_j X_{t-j+1} + (1 - \sum_{j=1}^t w_j) \mu_0$, $t=1,2,3,\dots$ με

$w_j = \sum_{i=1}^j (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})(q^{(j-i)\alpha} - q^{(j-i+1)\alpha})$ και βάζοντας, όπου X_{t-j+1} τον αριθμό των μη

συμμορφωμένων μονάδων που είχαμε στο $t-j+1$ -οστό δείγμα, προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού Z_t με τις τιμές $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$ και $L = 1.776$ ως βέλτιστες επιλογές για προσέγγιση $ARL_0 = 370$.

Για παράδειγμα, για $t=1$, έχουμε:

$$Z_1 = \sum_{j=1}^1 w_j X_{1-j+1} + (1 - \sum_{j=1}^1 w_j) 4 = 0.0025 \cdot 5 + (1 - 0.0025) 4 = 4.0025.$$

όπου

$$w_1 = \sum_{i=1}^1 (0.95^{(i-1)0.8} - 0.95^{i0.8})(0.95^{(1-i)0.8} - 0.95^{(1-i+1)0.8}) = (0.95^{0.8} - 0.95^{1.8})(0.95^{0.8} - 0.95^{1.8}) = 0.0025.$$

Υπολογίζουμε το W_1 απ' τον τύπο :

$$W_1 = \sum_{j=1}^1 w_j^2 = w_1^2 = 0.00000625.$$

Τα όρια ελέγχου για $t=1$ είναι:

$$UCL_1 = \mu_0 + L \sqrt{W_1 \mu_0} = 4 + 1.776 \sqrt{0.00000625 \cdot 4} = 4.00888$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L \sqrt{W_1 \mu_0} = 4 - 1.776 \sqrt{0.00000625 \cdot 4} = 3.99112.$$

Οι τιμές του στατιστικού Z_t και τα όρια ελέγχου του PDGWMA διαγράμματος ελέγχου παρουσιάζονται στον πίνακα 6-9 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-

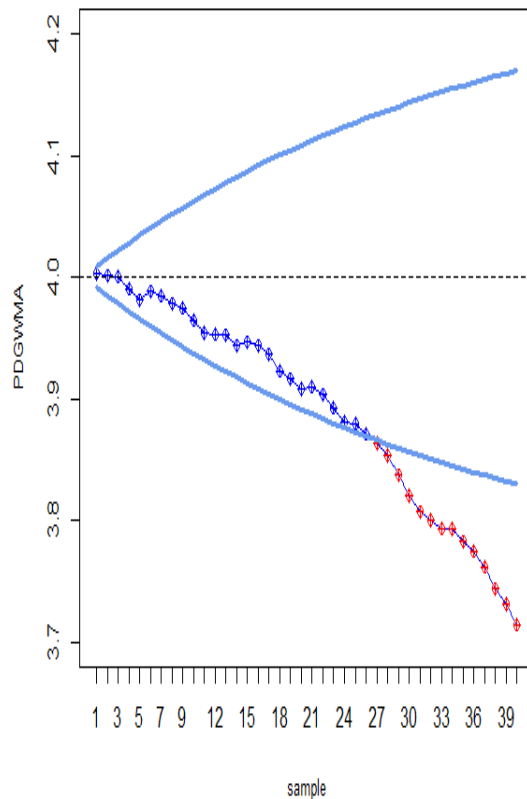
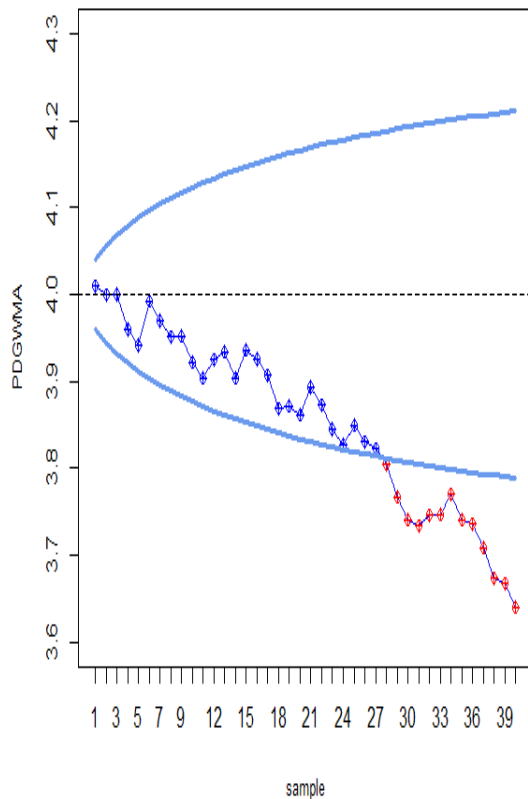
8.

Πίνακας 6-9 Τιμές Z_t και ορίων ελέγχου για το PDGWMA διάγραμμα με $q = 0.95, \alpha = 0.8$

t	X_t	Z_t	LCL_t	UCL_t	t	X_t	Z_t	LCL_t	UCL_t
1	5	4.00250	3.99112	4.00888	21	7	3.91000	3.88749	4.11251
2	3	4.00104	3.98459	4.01540	22	2	3.90358	3.88365	4.11635
3	4	4.00079	3.97823	4.02177	23	1	3.89256	3.87992	4.12008
4	0	3.99063	3.97199	4.02801	24	2	3.88151	3.87628	4.12372
5	2	3.98134	3.96582	4.03411	25	6	3.87961	3.87275	4.12725
6	9	3.98852	3.95994	4.04006	26	2	3.87116	3.86931	4.13069
7	2	3.98458	3.95414	4.04587	27	3	3.86359	3.86597	4.13403
8	2	3.97806	3.94848	4.05152	28	2	3.85339	3.86272	4.13728
9	4	3.97471	3.94297	4.05703	29	0	3.83706	3.85956	4.14044
10	1	3.96457	3.93761	4.06239	30	1	3.82027	3.85648	4.14352
11	2	3.95427	3.93239	4.06760	31	3	3.80723	3.85349	4.14651
12	6	3.95299	3.92733	4.07268	32	5	3.80030	3.85058	4.14942
13	5	3.95257	3.92239	4.07761	33	4	3.79362	3.84774	4.15226
14	1	3.94354	3.91759	4.08241	34	6	3.79298	3.84499	4.15502
15	7	3.94646	3.91292	4.08708	35	1	3.78279	3.84230	4.15769
16	3	3.94341	3.90838	4.09162	36	3	3.77469	3.83969	4.16031
17	2	3.93667	3.90397	4.09603	37	1	3.76161	3.83715	4.16285
18	0	3.92309	3.89967	4.10033	38	0	3.74396	3.83468	4.16532
19	4	3.91606	3.89549	4.10450	39	3	3.73119	3.83228	4.16773
20	3	3.90805	3.89144	4.10856	40	1	3.71454	3.82993	4.17007

Poisson DGWMA($q=0.9, \alpha=0.6, L=2.041$)

Poisson DGWMA($q=0.95, \alpha=0.8, L=1.776$)



Σχήμα 6-8 PDGWMA διάγραμμα με $q = 0.9, \alpha = 0.6$ και $q = 0.95, \alpha = 0.8$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-9.

Στο σχήμα 6-8 απεικονίζεται το διάγραμμα PDGWMA με $q = 0.9$, $\alpha = 0.6$ και $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$. Διαπιστώνουμε ότι και στα δύο διαγράμματα, η ανίχνευση της μετατόπισης πραγματοποιήθηκε μετά από 28 παρατηρήσεις, δηλαδή η αντίληψη των διαγραμμάτων για μετατόπιση του μέσου της διεργασίας είναι ίδια.

Poisson PM διάγραμμα

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $PM_i = \frac{\sum_{j=1}^i X_j}{i}$ και βάζοντας, όπου X_j τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων που είχαμε στο j -οστό δείγμα, προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού PM_i .

Τα όρια ελέγχου με $L = 3.586$ ως βέλτιστη τιμή προσέγγισης του $ARL_0 = 370$, του PPM διαγράμματος είναι:

$$UCL = \mu_0 + L \frac{1}{f(i)} \sqrt{\frac{\mu_0}{i}}$$

$$LCL = \mu_0 - L \frac{1}{f(i)} \sqrt{\frac{\mu_0}{i}}$$

όπου $f(i) = i^{0.2}$ η βέλτιστη επιλογή της αυθαίρετης συνάρτησης.

Για $i=1$ είναι:

$$PM_1 = \frac{\sum_{j=1}^1 X_j}{1} = 5$$

$$UCL_1 = 4 + 3.586 \frac{1}{f(1)} \sqrt{\frac{4}{1}} = 4 + 3.586 \frac{1}{1^{0.2}} \sqrt{\frac{4}{1}} = 11.172$$

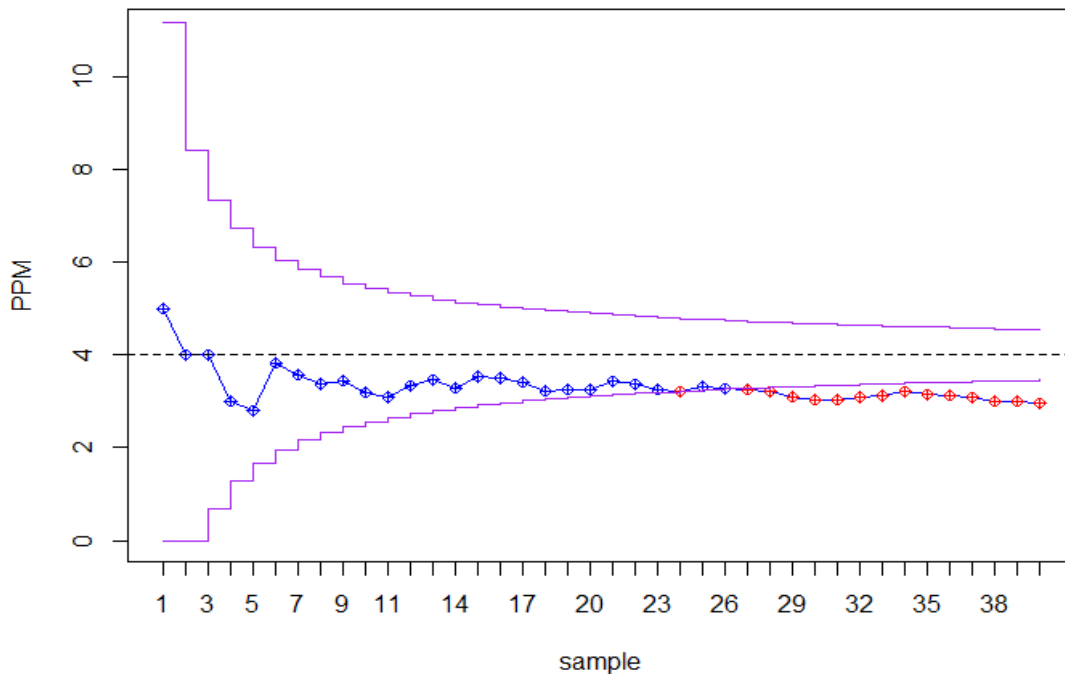
$$LCL_1 = 4 - 3.586 \frac{1}{f(1)} \sqrt{\frac{4}{1}} = 4 - 3.586 \frac{1}{1^{0.2}} \sqrt{\frac{4}{1}} = -3.172 \rightarrow LCL_1 = 0.$$

Οι τιμές του στατιστικού PM_i και τα όρια ελέγχου του PPM διαγράμματος ελέγχου παρουσιάζονται στον πίνακα 6-10 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-9.

Πίνακας 6-10 Τιμές PM_i και ορίων ελέγχου για το PPM διάγραμμα με $L = 3.586$

i	X_i	PM_i	LCL_i	UCL_i	i	X_i	PM_i	LCL_i	UCL_i
1	5	5.00000	0.00000	11.17200	21	7	3.42857	3.14869	4.85131
2	3	4.00000	0.00000	8.414884	22	2	3.36364	3.17597	4.82403
3	4	4.00000	0.67604	7.323957	23	1	3.26087	3.20121	4.79879
4	0	3.00000	1.28232	6.717680	24	2	3.20833	3.22466	4.77534
5	2	2.80000	1.67533	6.324670	25	6	3.32000	3.24650	4.75349
6	9	3.83333	1.95386	6.046136	26	2	3.26923	3.26691	4.73309
7	2	3.57143	2.16316	5.836841	27	3	3.25926	3.28602	4.71398
8	2	3.37500	2.32707	5.672928	28	2	3.21429	3.30397	4.69603
9	4	3.44444	2.45947	5.540531	29	0	3.10345	3.32086	4.67914
10	1	3.20000	2.56899	5.431002	30	1	3.03333	3.33678	4.66322
11	2	3.09091	2.66136	5.338645	31	3	3.03226	3.35183	4.64817
12	6	3.33333	2.74046	5.259544	32	5	3.09375	3.36608	4.63392
13	5	3.46154	2.80908	5.190913	33	4	3.12121	3.37959	4.62041
14	1	3.28571	2.86929	5.130708	34	6	3.20588	3.39242	4.60758
15	7	3.53333	2.92260	5.077399	35	1	3.14286	3.40462	4.59538
16	3	3.50000	2.97019	5.029808	36	3	3.13889	3.41625	4.58375
17	2	3.41177	3.01298	4.987020	37	1	3.08108	3.42734	4.57266
18	0	3.22222	3.05169	4.948308	38	0	3.00000	3.43793	4.56207
19	4	3.26316	3.08691	4.913088	39	3	3.00000	3.44806	4.55194
20	3	3.25000	3.11915	4.880885	40	1	2.95000	3.45775	4.54225

Poisson PM



Σχήμα 6-9 PPM διάγραμμα με $L = 3.586$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-10

Στο σχήμα 6-9 απεικονίζεται το διάγραμμα PPM με $L = 3.586$. Διαπιστώνουμε ότι η ανίχνευση της μετατόπισης πραγματοποιήθηκε μετά από 24 παρατηρήσεις. Αρκετά νωρίτερα από ότι πραγματοποιείται στα προηγούμενα διαγράμματα, πέραν του

PDEWMA με $\lambda = 0.05$.

Συγκεντρωτικά από την μελέτη των παραπάνω διαγραμμάτων, διαπιστώνουμε ότι η μετατόπιση ανιχνεύτηκε από όλα τα διαγράμματα. Συγκεκριμένα, για $\lambda = 0.10$ τα διαγράμματα PEWMA, PDEWMA και FIR PEWMA ανιχνεύουν την μετατόπιση έπειτα από 30 παρατηρήσεις. Για $\lambda = 0.05$, τα διαγράμματα CUSUM, PEWMA και FIR PEWMA και το PGWMA για $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$ και $q = 0.95$, $\alpha = 0.9$ ανιχνεύουν την μετατόπιση έπειτα από 29 παρατηρήσεις. Τα διαγράμματα FIR CUSUM και PDGWMA για $q = 0.9$, $\alpha = 0.6$ και $q = 0.95$, $\alpha = 0.8$ εντοπίζουν την μετατόπιση μετά από 28 παρατηρήσεις. Το διάγραμμα PPM αντιλαμβάνεται την μετατόπιση του μέσου νωρίτερα από όλα τα διαγράμματα έπειτα από 24 παρατηρήσεις, πέραν του PDEWMA διαγράμματος για $\lambda = 0.05$ που εμφανίζει ένδειξη εκτός ορίων ελέγχου μετά την 18^η παρατήρηση.

Εν κατακλείδι, επιβεβαιώνεται η ισοδυναμία των CUSUM διαγραμμάτων με τα PEWMA διαγράμματα ελέγχου και γενικότερα των διαγραμμάτων ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη μεταξύ τους. Το PDGWMA αποδεικνύεται ελάχιστα πιο αποδοτικό μιας κι εντοπίζει την μετατόπιση ελαφρώς γρηγορότερα, καθώς και τα PDEWMA, PPM διαγράμματα τα οποία αντιλαμβάνονται πολύ γρηγορότερα απ' όλα τα προαναφερθέντα διαγράμματα την μετατόπιση του μέσου της παραγωγικής διαδικασίας. Οι μη συμμορφωμένες μονάδες έχουν αισίως μειωθεί, και τα διαγράμματα είναι σε θέση να αντιληφθούν αυτήν την μείωση, η οποία πρέπει να γίνεται όσο το δυνατόν γρηγορότερα αντιληπτή προκειμένου να εντοπιστούν οι εκάστοτε ενέργειες της παραγωγής και να συνεχιστούν ή ακόμη και να βελτιωθούν.

6.3 2^η Εφαρμογή Ατυχήματα Α/Φ F-16

Στον πίνακα 6-11 παρουσιάζονται τα ατυχήματα Α/Φ F-16 της Νορβηγικής Πολεμικής Αεροπορίας τα τελευταία 40 χρόνια. Με τον όρο “ατύχημα” εννοείται ένα συμβάν που συνέβη σε ένα Α/Φ και έχει ως αποτέλεσμα είτε τον θάνατο του ιπταμένου είτε την ολική καταστροφή του Α/Φ ή την μακροχρόνια παραμονή του στο έδαφος για να επανέλθει σε κατάσταση εντός ενεργείας. Η πηγή προέλευσης των δεδομένων είναι το διεθνές site “F-16.net”. Επιπλέον, θεωρούμε ότι ο αριθμός των ωρών πτήσεων των Α/Φ F-16 /έτος μεταβάλλεται ελάχιστα κατά τη διάρκεια των 40

ετών.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις πρώτες δεκαπέντε παρατηρήσεις για να εκτιμήσουμε τον μέσο αριθμό ατυχημάτων ανά έτος, δηλαδή την εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας (Φάση I).

Ο αριθμός ατυχημάτων ανά έτος για τη χρονική περίοδο 1980-1994 είναι:

$$\bar{c} = \frac{14}{15} = 0.9334.$$

Πίνακας 6-11 Αριθμός ατυχημάτων F-16 τα τελευταία 40 χρόνια

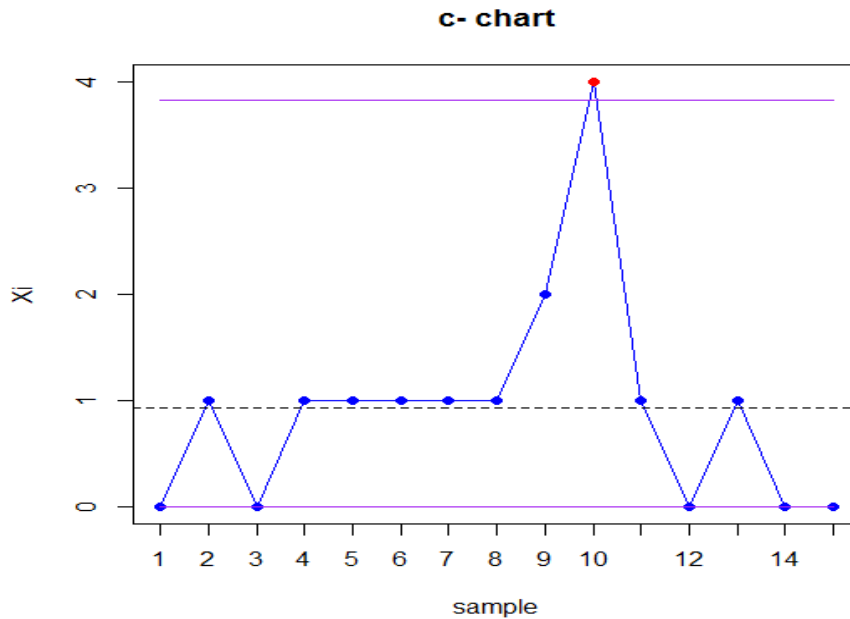
Έτος	Ατυχήματα	Έτος	Ατυχήματα	Έτος	Ατυχήματα	Έτος	Ατυχήματα
1980	0	1990	1	2000	0	2010	0
1981	1	1991	0	2001	1	2011	0
1982	0	1992	1	2002	1	2012	0
1983	1	1993	0	2003	1	2013	1
1984	1	1994	0	2004	0	2014	1
1985	1	1995	1	2005	0	2015	0
1986	1	1996	1	2006	1	2016	0
1987	1	1997	1	2007	0	2017	0
1988	2	1998	0	2008	0	2018	0
1989	4	1999	0	2009	0	2019	0

Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος c είναι:

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 0.9334 + 3\sqrt{0.9334} = 3.8318$$

$$CL = \bar{c} = 0.9334$$

$$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 0.9334 - 3\sqrt{0.9334} = -1.9649 \Rightarrow LCL = 0$$



Σχήμα 6-10 Διάγραμμα ελέγχου c για τα έτη 1980-1994 του πίνακα 6-11 (Φάση I)

Παρατηρούμε ότι η παρατήρηση που αντιστοιχεί στο έτος 1989 βρίσκεται εκτός ορίων ελέγχου. Αφαιρώντας την διαπιστώνουμε πως η διεργασία είναι εντός ορίων ελέγχου και υπολογίζουμε ξανά την εκτίμηση \bar{c} , καθώς και τα όρια ελέγχου. Έχουμε λοιπόν:

$$\bar{c} = \frac{10}{14} = 0.7143$$

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 0.7143 + 3\sqrt{0.7143} = 3.2498$$

$$CL = \bar{c} = 0.7143$$

$$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 0.7143 - 3\sqrt{0.7143} = -1.8215 \Rightarrow LCL = 0$$

Για να διαπιστωθεί η ικανότητα του c διαγράμματος, δηλαδή να ανιχνεύονται μετατοπίσεις του μέσου αριθμού ατυχημάτων, υπολογίζουμε το ARL_0 :

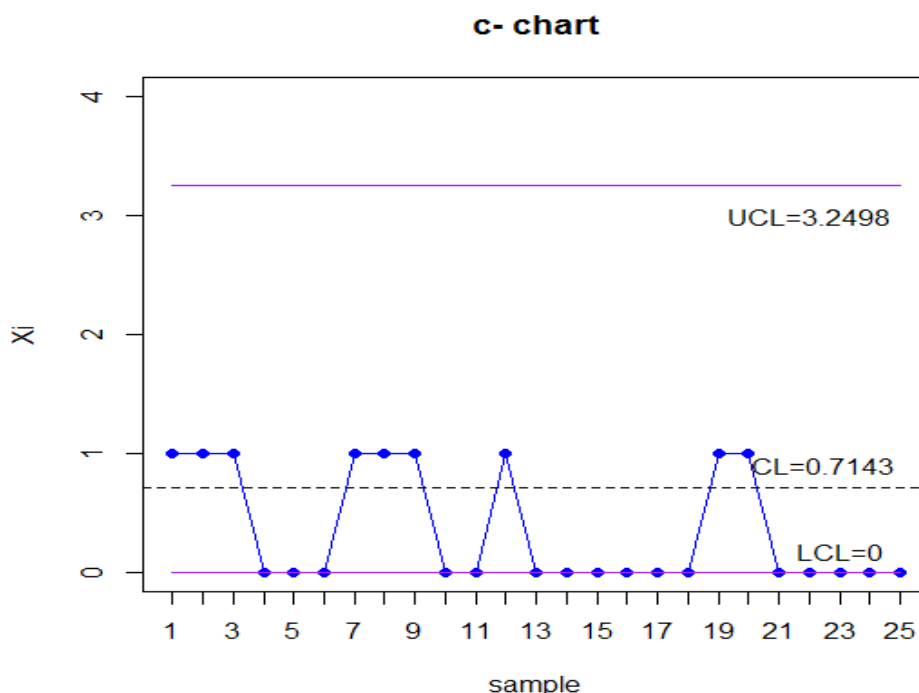
$$\alpha = P(X \notin [LCL, UCL] | X \sim P(c)) = P(X \notin [0, 3.2498] | X \sim P(0.7143)) =$$

$$1 - P(0 \leq X \leq 3 | X \sim P(0.7143)) = 1 - \sum_{i=0}^3 e^{-0.7143} \frac{0.7143^i}{i!} \cong 0.006169$$

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0061690} \cong 162.1$$

Στη συνέχεια, δημιουργούμε το διάγραμμα για τα υπόλοιπα 25 έτη (Φάση II) χρησιμοποιώντας τα όρια ελέγχου που υπολογίσαμε. Ο μέσος όρος των ατυχημάτων ανά έτος για τα τελευταία είκοσι πέντε έτη είναι 0.36 (ικανοποιητική προσέγγιση των

δεδομένων σε Poisson κατανομή με την p -τιμή του ελέγχου X^2 καλής προσαρμογής να είναι 0.5301). Παρατηρούμε ότι κανένα σημείο δεν βρίσκεται εκτός ορίων ελέγχου αλλά πολλά σημεία βρίσκονται πάνω στην γραμμή LCL και επομένως το c διάγραμμα αδυνατεί να ανιχνεύσει μία μετατόπιση του μέσου από $\mu_0 = 0.7143$ σε $\mu_1 = 0.36$.



Σχήμα 6-11 Διάγραμμα ελέγχου c για τα έτη 1995-2019 του πίνακα 6-11 (Φάση II)

Στη συνέχεια, θα κατασκευάσουμε διαγράμματα CUSUM, PEWMA, FIR PEWMA, PDEWMA, PGWMA και PPM για τιμές $\lambda = 0.05, 0.10$ και 0.25 ώστε να μπορούμε να ανιχνεύσουμε την μετατόπιση του μέσου $\mu_0 = 0.7143$.

Poisson CUSUM διάγραμμα

Απ' το c διάγραμμα δεν διαπιστώνουμε καμία μετατόπιση του μέσου της διαδικασίας όμως αντιλαμβανόμαστε πιθανή μετατόπιση του μέσου προς τα κάτω, επομένως αρκεί να υπολογιστούν μόνο τα S_i^-

$$S_i^- = \max(0, k - X_i + S_{i-1}^-),$$

όπου X_i είναι μία τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων. Με $S_0^- = 0$ και λαμβάνοντας τιμές $k = 0.517$ και $h = 4$ που δίνουν ένα ARL_0 γύρω στο 171.40, αρκετά κοντά στο επιθυμητό.

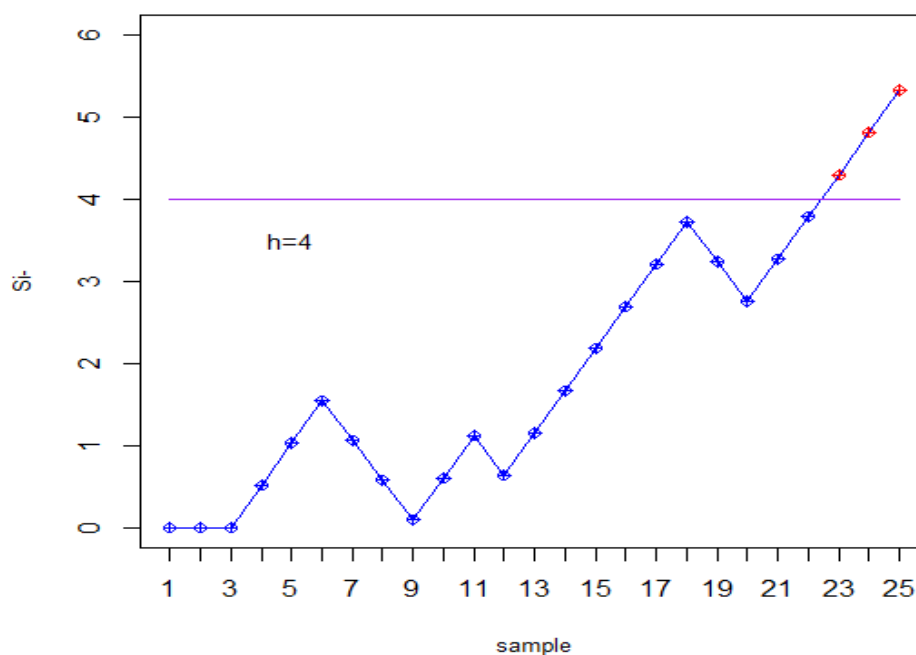
Για παράδειγμα για $i=1$: $S_1^- = \max(0, k - X_1 + S_0^-) = \max(0, 0.517 - 1 + 0) = 0$.

Οι τιμές του S_i του Poisson CUSUM διαγράμματος παρουσιάζονται στον πίνακα 6-12 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-12.

Πίνακας 6-12 Τιμές S_i για το Poisson CUSUM διάγραμμα

i	X_i	S_i^-	i	X_i	S_i^-
1	1	0.000	14	0	1.687
2	1	0.000	15	0	2.204
3	1	0.000	16	0	2.721
4	0	0.517	17	0	3.238
5	0	1.034	18	0	3.755
6	0	1.551	19	1	3.272
7	1	1.068	20	1	2.789
8	1	0.585	21	0	3.306
9	1	0.102	22	0	3.823
10	0	0.619	23	0	4.340
11	0	1.136	24	0	4.857
12	1	0.653	25	0	5.374
13	0	1.170			

Poisson CUSUM



Σχήμα 6-12 Poisson CUSUM διάγραμμα για τα δεδομένα του πίνακα 6-12

Στο σχήμα 6-12 απεικονίζεται το διάγραμμα Poisson CUSUM με $k = 0.517$ και $h = 4$ όπου επιτυγχάνεται $ARL_0=171.40$. Διαπιστώνουμε ότι η ανίχνευση της μετατόπισης

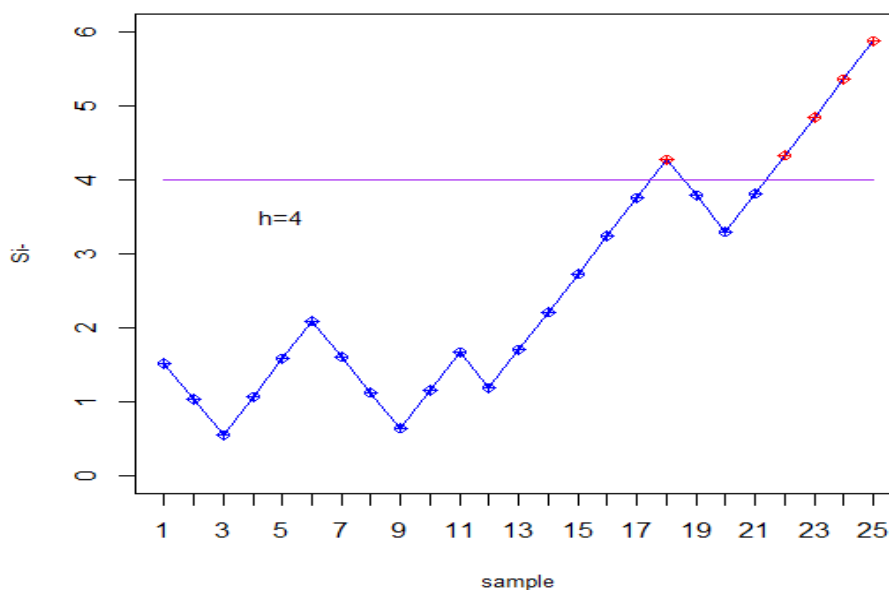
πραγματοποιήθηκε μετά από 23 παρατηρήσεις.

Έπειτα γίνεται χρήση της τεχνικής γρήγορης αρχικής απόκρισης (Fast Initial Response, FIR).

Πίνακας 6-13 Τιμές S_i για το FIR Poisson CUSUM διάγραμμα

i	X_i	S_i	i	X_i	S_i
1	1	1.517	14	0	2.238
2	1	1.034	15	0	2.755
3	1	0.551	16	0	3.272
4	0	1.068	17	0	3.789
5	0	1.585	18	0	4.306
6	0	2.102	19	1	3.823
7	1	1.619	20	1	3.340
8	1	1.136	21	0	3.857
9	1	0.653	22	0	4.374
10	0	1.170	23	0	4.891
11	0	1.687	24	0	5.408
12	1	1.204	25	0	5.925
13	0	1.721			

FIR Poisson CUSUM



Σχήμα 6-13 Poisson FIR- CUSUM διάγραμμα για τα δεδομένα του πίνακα 6-13

Στο σχήμα 6-13 απεικονίζεται το διάγραμμα Poisson CUSUM με την τεχνική FIR με $k = 0.517$, $h = 4$ όπου επιτυγχάνεται $ARL_0 = 146$. Διαπιστώνουμε ότι με χρήση της τεχνικής γρήγορης αρχικής απόκρισης η ανίχνευση εντοπίζεται μετά από 18 παρατηρήσεις, που αποτελεί σημαντική βελτίωση της εγγύτητας στην ανίχνευση της

μετατόπισης του μέσου.

Poisson EWMA διάγραμμα

Στον πίνακα 6-14, παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων λ και L και q , α και ω ώστε τα διαγράμματα να έχουν ARL_0 κοντά στο επιθυμητό 162.

Πίνακας 6-14 Επιλογή των παραμέτρων λ , L , q και α για $ARL_0 \cong 162.10$

	PEWMA			PDEWMA		
λ	0.05	0.10	0.25	0.05	0.10	0.25
L	2.161	2.369	2.750	1.586	1.879	2.271
	PGWMA					
q	0.95					
α	0.9					
L	2.194					

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$, $i=1, \dots, 25$ για $\lambda=0.05$ και βάζοντας, όπου X_i τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων που είχαμε στο i -οστό δείγμα, προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού Z_i και με $Z_0 = \mu_0 = 0.7143$.

Για παράδειγμα, για $i=1$, έχουμε:

$$Z_1 = \lambda X_1 + (1 - \lambda)Z_0 = 0.05 \cdot 1 + 0.95 \cdot 0.7143 = 0.72858$$

$$UCL_1 = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \mu_0} =$$

$$0.7143 + 2.161 \sqrt{\frac{0.05}{2 - 0.05} [1 - (1 - 0.05)^{2 \cdot 1}] \cdot 0.7143} = 0.805619$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \mu_0} =$$

$$0.7143 - 2.161 \sqrt{\frac{0.05}{2 - 0.05} [1 - (1 - 0.05)^{2 \cdot 1}] \cdot 0.7143} = 0.622980.$$

Επίσης, οι τιμές των ορίων ελέγχου όταν αυτές έχουν σταθεροποιηθεί είναι:

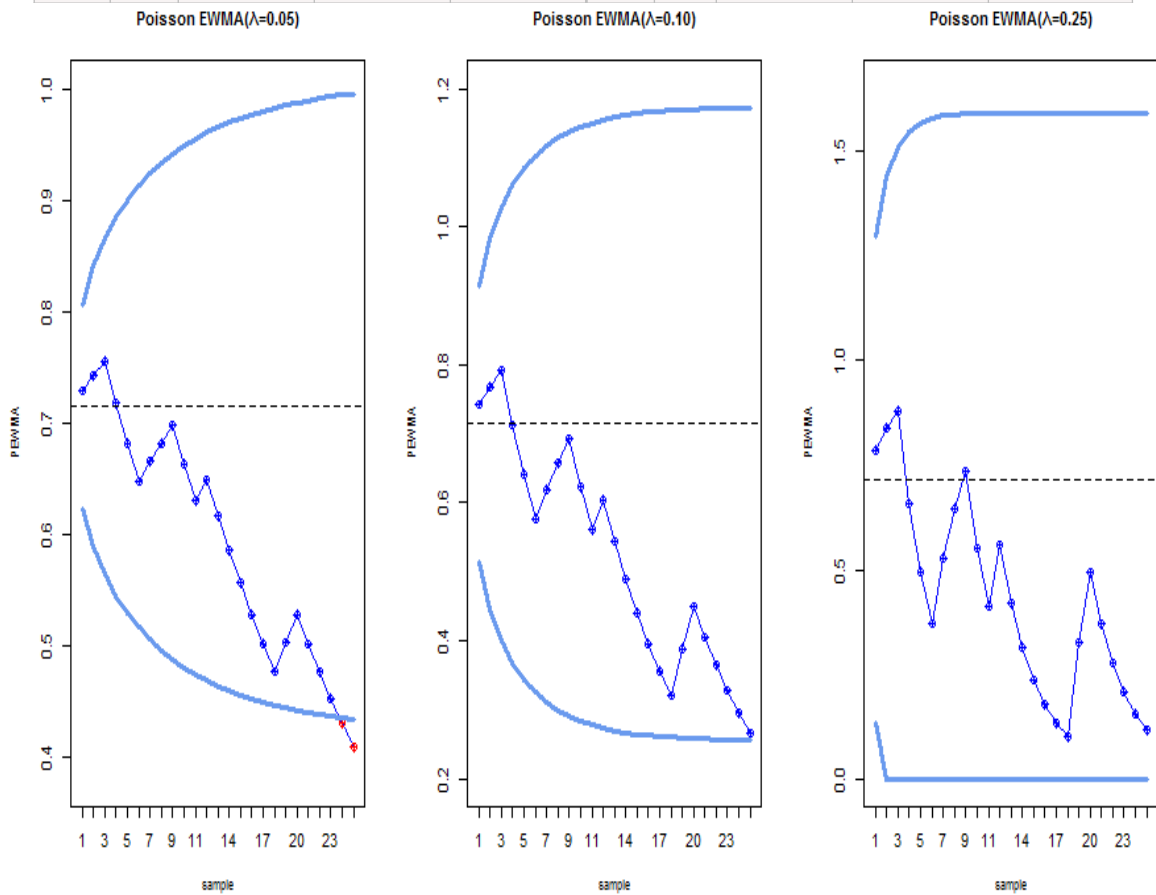
$$UCL_1 = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \mu_0} = 0.7143 + 2.161 \sqrt{\frac{0.05}{2 - 0.05} \cdot 0.7143} = 1.006756$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \mu_0} = 0.7143 - 2.161 \sqrt{\frac{0.05}{2 - 0.05} \cdot 0.7143} = 0.421842.$$

Οι τιμές του στατιστικού Z_i και τα όρια ελέγχου του PEWMA διαγράμματος παρουσιάζονται στον πίνακα 6-15 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-14.

Πίνακας 6-15 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05$

i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i	i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i
1	1	0.72859	0.62298	0.80562	14	0	0.58496	0.45898	0.96962
2	1	0.74216	0.58834	0.84026	15	0	0.55571	0.45512	0.97348
3	1	0.75505	0.56377	0.86483	16	0	0.52792	0.45169	0.97691
4	0	0.71729	0.54463	0.88397	17	0	0.50153	0.44863	0.97997
5	0	0.68143	0.52904	0.89956	18	0	0.47645	0.44590	0.98269
6	0	0.64736	0.51602	0.91258	19	1	0.50263	0.44346	0.98514
7	1	0.66499	0.50497	0.92363	20	1	0.52749	0.44128	0.98732
8	1	0.68174	0.49547	0.93313	21	0	0.50112	0.43934	0.98928
9	1	0.69765	0.48724	0.94136	22	0	0.47607	0.43757	0.99103
10	0	0.66277	0.48006	0.94854	23	0	0.45226	0.43599	0.99260
11	0	0.62963	0.47376	0.95484	24	0	0.42965	0.43459	0.99401
12	1	0.64815	0.46822	0.96038	25	0	0.40817	0.43332	0.99528
13	0	0.61574	0.46332	0.96528					



Σχήμα 6-14 PEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05, 0.10, 0.25$ για τα δεδομένα του πίνακα

6-15

Στο σχήμα 6-14 απεικονίζεται το διάγραμμα PEWMA με $\lambda = 0.05, 0.10$ και 0.25 . Διαπιστώνουμε ότι για $\lambda = 0.05$, η ανίχνευση πραγματοποιήθηκε μετά από 24 παρατηρήσεις, ενώ για $\lambda = 0.10$ και 0.25 δεν εντοπίζεται κάποια παρατήρηση εκτός ορίων ελέγχου.

Poisson DEWMA διάγραμμα

Χρησιμοποιώντας τους τύπους $Y_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}$ και $Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$, με $i = 1, \dots, 25$ για $\lambda = 0.05$ και βάζοντας, όπου X_i τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων απ' το i -οστό δείγμα, προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού Z_i .

Για παράδειγμα, για $i = 1$, έχουμε:

$$Y_1 = \lambda X_1 + (1 - \lambda)Y_0 = 0.05 \cdot 1 + 0.95 \cdot 0.7143 = 0.72858$$

$$Z_1 = \lambda Y_1 + (1 - \lambda)Z_0 = 0.05 \cdot 0.72858 + 0.95 \cdot 0.7143 = 0.71501.$$

Τα όρια ελέγχου για $t = 1$ είναι:

$$UCL = \mu_0 + L \sqrt{\lambda^4 \frac{1 + (1 - \lambda)^2 - (t + 1)^2 (1 - \lambda)^{2t} + (2t^2 + 2t - 1)(1 - \lambda)^{2t+2} - t^2 (1 - \lambda)^{2t+4}}{[1 - (1 - \lambda)^2]^3}} \mu_0$$

$$= 0.7143 + 1.586 \sqrt{0.05^4 \frac{1 + 0.95^2 - 2^2 \cdot 0.95^2 + 3 \cdot 0.95^4 - 0.95^6}{[1 - 0.95^2]^3}} \cdot 0.7143 = 0.7176511$$

$$LCL = \mu_0 - L \sqrt{\lambda^4 \frac{1 + (1 - \lambda)^2 - (t + 1)^2 (1 - \lambda)^{2t} + (2t^2 + 2t - 1)(1 - \lambda)^{2t+2} - t^2 (1 - \lambda)^{2t+4}}{[1 - (1 - \lambda)^2]^3}} \mu_0$$

$$= 0.7143 - 1.586 \sqrt{0.05^4 \frac{1 + 0.95^2 - 2^2 \cdot 0.95^2 + 3 \cdot 0.95^4 - 0.95^6}{[1 - 0.95^2]^3}} \cdot 0.7143 = 0.710949.$$

Επίσης, οι τιμές των ορίων ελέγχου όταν αυτές έχουν σταθεροποιηθεί είναι:

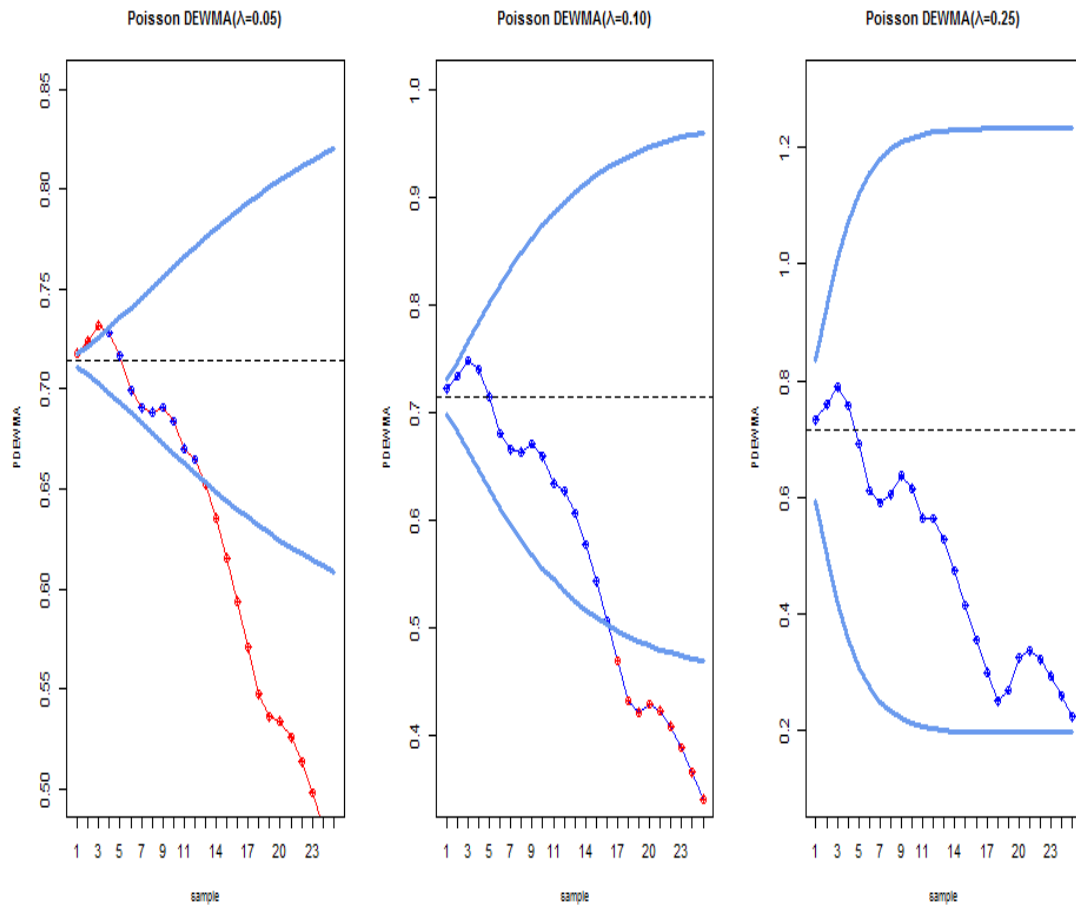
$$UCL = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2)}{(2 - \lambda)^3}} \mu_0 = 0.7143 + 1.586 \sqrt{\frac{0.05 \cdot 1.9025}{1.95^3}} \cdot 0.7143 = 0.866123$$

$$LCL = \mu_0 - L \sqrt{\frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2)}{(2 - \lambda)^3}} \mu_0 = 0.7143 - 1.586 \sqrt{\frac{0.05 \cdot 1.9025}{1.95^3}} \cdot 0.7143 = 0.562477.$$

Οι τιμές του στατιστικού Z_i και τα όρια ελέγχου του PDEWMA διαγράμματος παρουσιάζονται στον πίνακα 6-16 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-15.

Πίνακας 6-16 Τιμές Z_i και ορίων ελέγχου για το PDEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05$

i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i	i	X_i	Z_i	LCL_i	UCL_i
1	1	0.71501	0.71095	0.71765	14	0	0.68999	0.64847	0.78013
2	1	0.71637	0.70710	0.72149	15	0	0.68327	0.64406	0.78454
3	1	0.71831	0.70272	0.72588	16	0	0.67551	0.63979	0.78881
4	0	0.71825	0.69799	0.73061	17	0	0.66681	0.63569	0.79291
5	0	0.71641	0.69303	0.73557	18	0	0.65729	0.63174	0.79686
6	0	0.71296	0.68795	0.74065	19	1	0.64956	0.62796	0.80065
7	1	0.71056	0.68281	0.74579	20	1	0.64345	0.62433	0.80427
8	1	0.70912	0.67766	0.75094	21	0	0.63634	0.62086	0.80774
9	1	0.70855	0.67256	0.75604	22	0	0.62832	0.61754	0.81106
10	0	0.70626	0.66752	0.76108	23	0	0.61952	0.61438	0.81422
11	0	0.70243	0.66257	0.76603	24	0	0.61004	0.61137	0.81723
12	1	0.69971	0.65774	0.77086	25	0	0.59993	0.60850	0.82009
13	0	0.69552	0.65304	0.77556					



Σχήμα 6-15 PDEWMA διάγραμμα με $\lambda=0.05, 0.10, 0.25$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-16

Στο σχήμα 6-15 απεικονίζεται το διάγραμμα PDEWMA με $\lambda = 0.05, 0.10$ και 0.25 . Διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα αντιλαμβάνεται έντονα την μετατόπιση, για $\lambda = 0.10$ η ανίχνευση εντοπίζεται μετά από 17 παρατηρήσεις, ενώ για $\lambda = 0.25$ δεν εντοπίζεται κάποια παρατήρηση εκτός ορίων ελέγχου.

Poisson GWMA διάγραμμα

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $Y_j = \sum_{m=1}^j (q^{(m-1)\alpha} - q^{m\alpha}) X_{j-m+1} + q^{j\alpha} \mu_0$ και βάζοντας, όπου X_{j-m+1} τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων που είχαμε στο $j-m+1$ -οστό δείγμα, προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού Y_j με τις τιμές $q = 0.95$, $\alpha = 0.9$ και $L = 2.194$, ως βέλτιστες επιλογές για προσέγγιση $ARL_0 = 162.10$.

Για παράδειγμα, για $j=1$, έχουμε:

$$Y_1 = \sum_{m=1}^1 (0.95^{(m-1)0.9} - 0.95^{m0.9}) X_{1-m+1} + 0.95^{10.9} \cdot 0.7143 =$$

$$(0.95^{(0)0.9} - 0.95^{10.9}) X_1 + 0.95^{10.9} \cdot 0.7143 = 0.728585.$$

Υπολογίζουμε το Q_1 απ' τον τύπο :

$$Q_1 = \sum_{m=1}^1 (q^{(m-1)\alpha} - q^{m\alpha})^2$$

$$Q_1 = \sum_{m=1}^1 (0.95^{(m-1)0.9} - 0.95^{m0.9})^2 = \sum_{m=1}^1 (0.95^{(0)0.9} - 0.95^{10.9})^2 = 0.0025.$$

Τα όρια ελέγχου για $j=1$ είναι:

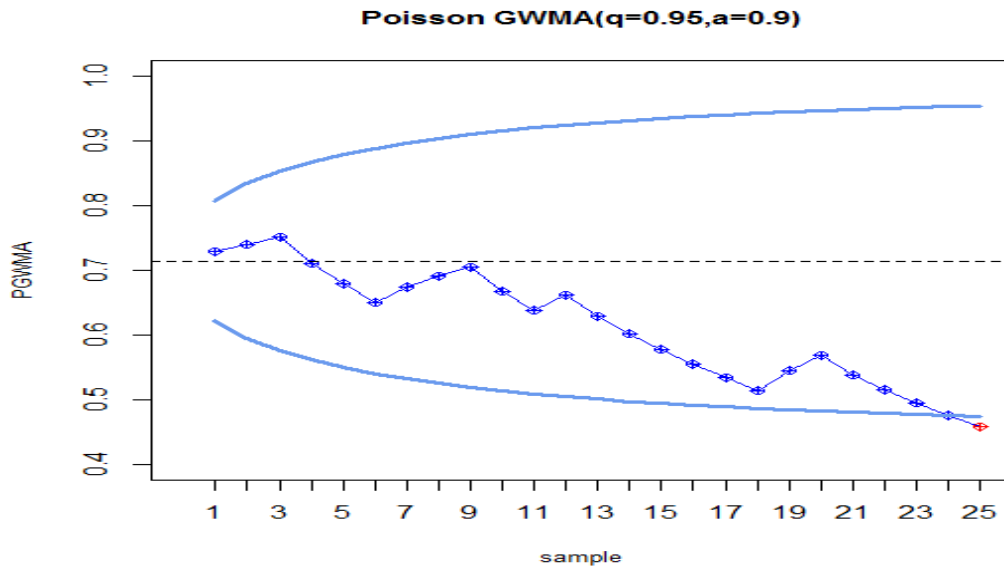
$$UCL_1 = \mu_0 + L \sqrt{Q_1 \mu_0} = 0.7143 + 2.194 \sqrt{0.0025 \cdot 0.7143} = 0.807014$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L \sqrt{Q_1 \mu_0} = 0.7143 - 2.194 \sqrt{0.0025 \cdot 0.7143} = 0.621586.$$

Οι τιμές του στατιστικού Y_i και τα όρια ελέγχου του PGWMA διαγράμματος παρουσιάζονται στον πίνακα 6-17 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-16.

Πίνακας 6-17 Τιμές Y_j και ορίων ελέγχου για το PGWMA διάγραμμα με $q = 0.95$, $\alpha = 0.9$

i	X_i	Y_i	LCL	UCL_i	i	X_i	Y_i	LCL_i	UCL_i
1	1	0.72859	0.62159	0.80701	14	0	0.60174	0.49697	0.93163
2	1	0.74038	0.59407	0.83453	15	0	0.57746	0.49383	0.93477
3	1	0.75109	0.57540	0.85319	16	0	0.55489	0.49098	0.93762
4	0	0.71103	0.56116	0.86744	17	0	0.53367	0.48839	0.94021
5	0	0.67906	0.54968	0.87892	18	0	0.51363	0.48602	0.94258
6	0	0.65032	0.54011	0.88849	19	1	0.54464	0.48386	0.94474
7	1	0.67384	0.53198	0.89662	20	1	0.56785	0.48188	0.94671
8	1	0.69041	0.52495	0.90365	21	0	0.53816	0.48007	0.94853
9	1	0.70472	0.51881	0.90979	22	0	0.51524	0.47841	0.95019
10	0	0.66759	0.51339	0.91520	23	0	0.49462	0.47688	0.95172
11	0	0.63814	0.50859	0.92001	24	0	0.47552	0.47546	0.95314
12	1	0.66162	0.50429	0.92430	25	0	0.45761	0.47416	0.95444
13	0	0.62840	0.50044	0.92816					



Σχήμα 6-16 PGWMA διάγραμμα με $q = 0.95, \alpha = 0.9$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-17

Στο σχήμα 6-16 απεικονίζεται το διάγραμμα PGWMA με $q = 0.95, \alpha = 0.9$. Διαπιστώνουμε ότι η ανίχνευση πραγματοποιείται μετά από 24 παρατηρήσεις.

Poisson PM διάγραμμα

Χρησιμοποιώντας το στατιστικό ελέγχου του PPM διαγράμματος και θέτοντας, όπου X_j τον αριθμό των μη συμμορφωμένων μονάδων που είχαμε στο j -οστό δείγμα, προκύπτουν η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου με $L = 1.213$ ως βέλτιστη τιμή προσέγγισης του $ARL_0 = 162.10$, με $f(i) = i^{0.2}$ βέλτιστη επιλογή.

Για παράδειγμα για $i=1$:

$$PM_1 = \frac{\sum_{j=1}^1 X_j}{1} = 1$$

$$UCL_1 = 0.7143 + 1.213 \frac{1}{f(1)} \sqrt{\frac{0.7143}{1}} = 0.7143 + 1.213 \frac{1}{1^{0.2}} \sqrt{\frac{0.7143}{1}} = 1.739482$$

$$LCL_1 = 0.7143 - 1.213 \frac{1}{f(1)} \sqrt{\frac{0.7143}{1}} = 0.7143 - 1.213 \frac{1}{1^{0.2}} \sqrt{\frac{0.7143}{1}} = -0.31088$$

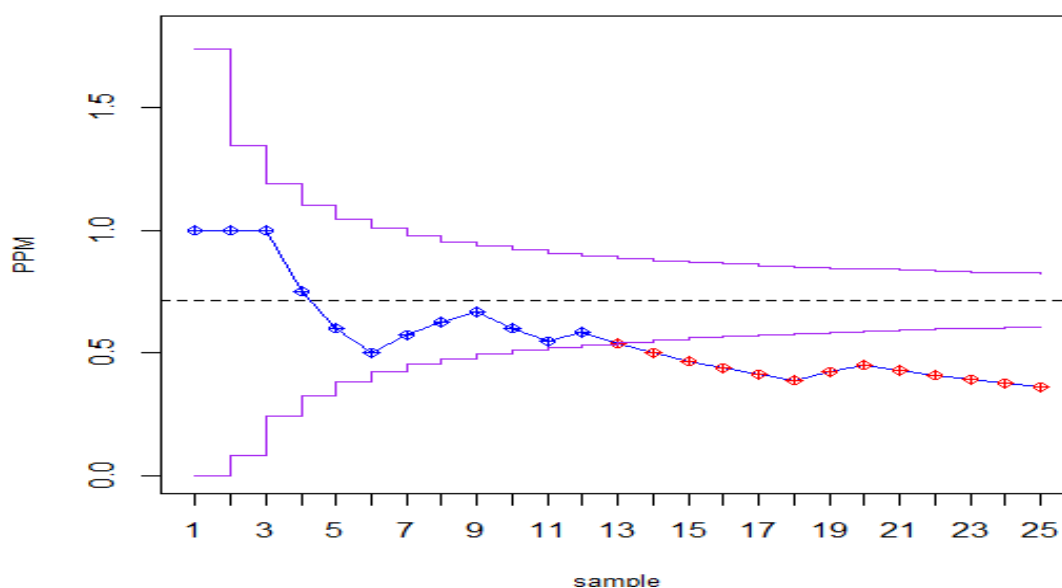
$$\rightarrow LCL_1 = 0.$$

Οι τιμές του στατιστικού PM_i και τα όρια ελέγχου του PPM διαγράμματος παρουσιάζονται στον πίνακα 6-18 και το αντίστοιχο διάγραμμα στο σχήμα 6-17.

Πίνακας 6-18 Τιμές PM_i και ορίων ελέγχου για το PPM διάγραμμα με $L = 1.213$

i	X_i	PM_i	LCL_i	UCL_i	i	X_i	PM_i	LCL_i	UCL_i
1	1	1.00000	0.000000	1.73948	14	0	0.50000	0.552674	0.87593
2	1	1.00000	0.083226	1.34537	15	0	0.46667	0.560294	0.86831
3	1	1.00000	0.239166	1.18943	16	0	0.43750	0.567097	0.86150
4	0	0.75000	0.325829	1.10277	17	0	0.41176	0.573213	0.85539
5	0	0.60000	0.382006	1.04659	18	0	0.38889	0.578747	0.84985
6	0	0.50000	0.421821	1.00678	19	1	0.42105	0.583781	0.84482
7	1	0.57143	0.451738	0.97686	20	1	0.45000	0.588384	0.84022
8	1	0.62500	0.475168	0.95343	21	0	0.42857	0.592612	0.83599
9	1	0.66667	0.494093	0.93451	22	0	0.40909	0.596511	0.83209
10	0	0.60000	0.509749	0.91885	23	0	0.39130	0.600119	0.82848
11	0	0.54545	0.522951	0.90565	24	0	0.37500	0.603471	0.82513
12	1	0.58333	0.534258	0.89434	25	0	0.36000	0.606593	0.82201
13	0	0.53846	0.544068	0.88453					

Poisson PM



Σχήμα 6-17 PPM διάγραμμα με $L = 1.213$ για τα δεδομένα του πίνακα 6-18

Στο σχήμα 6-17 απεικονίζεται το διάγραμμα PPM με $L = 1.213$. Διαπιστώνουμε ότι η ανίχνευση της μετατόπισης πραγματοποιείται μετά από 13 παρατηρήσεις, νωρίτερα από κάθε άλλο μελετηθέν διάγραμμα.

Συγκεντρωτικά από την μελέτη των παραπάνω διαγραμμάτων, διαπιστώνουμε ότι η μετατόπιση του μέσου ανιχνεύτηκε από τα περισσότερα διαγράμματα. Συγκεκριμένα, το διάγραμμα PEWMA για $\lambda = 0.10$ και 0.25 και το διάγραμμα

PDEWMA για $\lambda = 0.25$ δεν ανιχνεύουν κάποια μετατόπιση του μέσου. Τα διαγράμματα CUSUM, PEWMA για $\lambda = 0.05$ και PGWMA για $q = 0.95$, $\alpha = 0.9$ ανιχνεύουν την μετατόπιση μετά από 23 παρατηρήσεις το CUSUM, και μετά από 24 παρατηρήσεις τα PEWMA και PGWMA. Τα διαγράμματα FIR CUSUM και PDEWMA για $\lambda = 0.10$ εντοπίζουν την μετατόπιση αρκετά γρήγορα, μετά από 18 και 17 παρατηρήσεις, αντίστοιχα. Τέλος, το διάγραμμα PPM ανιχνεύει την μετατόπιση μετά από 13 παρατηρήσεις, ταχύτερα από τα υπόλοιπα μελετηθέντα διαγράμματα.

Εν κατακλείδι, τα διαγράμματα FIR CUSUM, το PDEWMA για $\lambda = 0.10$ αποδεικνύονται περισσότερο αποδοτικά μιας και ανιχνεύουν την μετατόπιση του μέσου της διαδικασίας γρηγορότερα απ' ό,τι τ' άλλα, καθώς και το διάγραμμα PPM το οποίο αντιλαμβάνεται την μετατόπιση ταχύτερα ακόμη και από αυτά τα δύο. Τα ατυχήματα έχουν αισίως μειωθεί, και τα διαγράμματα είναι σε θέση να αντιληφθούν αυτήν την μείωση, η οποία πρέπει να γίνεται όσο το δυνατόν γρηγορότερα αντιληπτή προκειμένου να εντοπιστούν οι εκάστοτε ενέργειες της αεροπορίας και να συνεχιστούν ή ακόμη και να βελτιωθούν, προκειμένου να αποφευχθούν μελλοντικά ατυχήματα.

Γενικά, η ύπαρξη πραγματικών δεδομένων που ακολουθούν την κατανομή Poisson με ενδεχομένως όχι τόσο καλή προσέγγιση, δεν μας εμποδίζει στη χρήση διαγραμμάτων τύπου μνήμης. Απεναντίας, σχεδιάζοντας διάφορα είδη διαγραμμάτων PEWMA για διάφορες τιμές των παραμέτρων μπορούμε να εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα για την πορεία της διεργασίας μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Συμπεράσματα - Προτάσεις

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε κυρίως διαγράμματα ελέγχου με εκθετικά βάρη και κινητούς μέσους EWMA για δεδομένα που ακολουθούν την κατανομή Poisson. Και εφαρμόσαμε τα εν λόγω διαγράμματα σε δεδομένα από τον χώρο της βιομηχανίας και από τον χώρο της Νορβηγικής ΠΑ εξάγοντας χρήσιμα συμπεράσματα.

Στο 2^ο Κεφάλαιο μελετήσαμε τα διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων και διαπιστώσαμε την αδυναμία τους να ανιχνεύουν μία μετατόπιση του μέσου της διαδικασίας προς τα κάτω, όταν το κάτω όριο ελέγχου είναι μηδέν. Με συνέπεια να δημιουργείται η ανάγκη μελέτης περισσότερων διαγραμμάτων για τον εντοπισμό μετατοπίσεων του μέσου.

Στο 3^ο Κεφάλαιο περιγράψαμε το διάγραμμα CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν την κατανομή Poisson. Διαπιστώσαμε ότι το εν λόγω διάγραμμα είναι αποδοτικότερο έναντι του c διαγράμματος, καθώς ανιχνεύει γρηγορότερα μικρές μετατοπίσεις του μέσου μίας διεργασίας. Επιπλέον, είδαμε ότι οφείλουμε να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στον υπολογισμό της τιμής αναφοράς k και στην επιλογή του ορίου ελέγχου h , καθώς αυτές οι δύο παράμετροι επηρεάζουν τον υπολογισμό του ARL. Συμπεράναμε ότι το διάγραμμα FIR Poisson CUSUM είναι αποδοτικότερο έναντι του τυπικού Poisson CUSUM και το τελευταίο αποδοτικότερο έναντι του c διαγράμματος.

Στο 4^ο Κεφάλαιο μελετήσαμε αρκετά αμφίπλευρα διαγράμματα PEWMA υπολογίζοντας την μέση τιμή και τη διασπορά του στατιστικού που απεικονίζεται στο εκάστοτε διάγραμμα. Παράλληλα, υπολογίσαμε αναλυτικά με χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων το ARL. Μελετήσαμε το κλασσικό PEWMA, το PEWMA με χρήση της τεχνικής FIR, το PDEWMA, το PGWMA, το PDGWMA καθώς και το PMA. Με την συμβολή διαφόρων πινάκων σύγκρισης μεταξύ των διαγραμμάτων συμπεράναμε την χρησιμότητα και την αναγκαιότητα βελτίωσης των διαγραμμάτων αλλά και της μελέτης αυτών. Συγκεκριμένα, το διάγραμμα PEWMA ισοδυναμεί με το Poisson CUSUM διάγραμμα ως προς την απόδοση για την ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Το διάγραμμα PDEWMA είναι πιο ευαίσθητο στις μικρές μετατοπίσεις προς τα κάτω και εκτελεί παρόμοια ή ελαφρώς καλύτερα ανίχνευση

μεγάλων μετατοπίσεων προς τα κάτω και προς τα άνω του μέσου της διαδικασίας απ' ότι το διάγραμμα PEWMA. Το διάγραμμα PGWMA αποτελεί ένα γενικευμένο μοντέλο ελέγχου, για το οποίο το διάγραμμα PEWMA και το c διάγραμμα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις και είναι ευαίσθητο για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Πιο αναλυτικά, διαγράμματα PGWMA με τιμές παραμέτρων $q = 0.95$ και $\alpha = 0.7 - 0.9$ έχουν τις καλύτερες επιδόσεις, ενώ για μέτριες προς μεγάλες, προς τα κάτω μετατοπίσεις, το διάγραμμα PDEWMA έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα PGWMA. Το διάγραμμα PDGWMA με τις καλύτερες επιδόσεις υπερτερεί έναντι των άλλων διαγραμμάτων όταν η μετατόπιση είναι μικρή και προς τα κάτω. Πιο αναλυτικά, με μικρή τιμή παραμέτρου q ($q < 0.5$) δεν είναι ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις. Με επιλογή μεγάλης τιμής q ($0.8 \leq q \leq 0.9$) και μεγάλης τιμής παραμέτρου α ($\alpha \geq 0.7$) έχει καλή απόδοση στην ανίχνευση ελαφρώς μειούμενων μετατοπίσεων του μέσου, ενώ με επιλογή μίας μεσαίας τιμής παραμέτρου q ($0.6 \leq q \leq 0.8$) και μεσαίας τιμής παραμέτρου α ($0.5 \leq \alpha \leq 0.8$) έχει καλή απόδοση για την ανίχνευση ελαφρώς αυξανόμενων μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Γενικά, επιλογή μεγαλύτερης τιμής της παραμέτρου q είναι κατάλληλη για ανίχνευση μιας μικρής μετατόπισης και επιλογή μιας μεγαλύτερης τιμής της παραμέτρου α είναι κατάλληλη για ανίχνευση μιας μεγάλης μετατόπισης.

Στο 5^ο Κεφάλαιο περιγράψαμε συνοπτικά το διάγραμμα PPM, τον σχεδιασμό ενός τέτοιου διαγράμματος και συγκρίναμε με επιβοηθητικούς πίνακες την επίδοσή του σε σχέση με το c διάγραμμα, το Poisson CUSUM και τα διάγραμμα PEWMA και PDEWMA και διαπιστώσαμε ότι είναι αρκετά αποδοτικότερο έναντι των υπόλοιπων διαγραμμάτων.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο εφαρμόσαμε τα περισσότερα διαγράμματα σε δεδομένα από τον χώρο της βιομηχανίας και ορισμένα από αυτά σε δεδομένα από τον χώρο της Πολεμικής αεροπορίας, διεξάγοντας χρήσιμα συμπεράσματα για την πορεία διεργασιών που άπτονται θεματολογίας της ποιότητας της παραγωγής και της ασφάλειας των Πτήσεων (ατυχήματα F-16).

Βιβλιογραφία

1. Βαρουφάκης, Γ. (1996). Αρχαία Ελλάδα και Ποιότητα. Η ιστορία και ο έλεγχος των υλικών που σημάδεψαν τον ελληνικό πολιτισμό. Αίολος.
2. Κουκουβίνος, Χ. (2017). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.
3. Abbasi, S. A. (2017). Poisson progressive mean control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 33 (8), 1855–1859.
4. Alevizakos, V. and Koukouvinos, C. (2019). A comparative study on Poisson control charts. *Quality Technology and Quantitative Management*.
5. Brook, D. and Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length. *Biometrika*, 59, 539–549.
6. Borror, C. M., Champ, C. W. and Rigdon, S. E. (1998). Poisson EWMA Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 30(4), 352-361.
7. Chiu, W. C. and Sheu, S. H. (2008). Fast Initial Response Features for Poisson GWMA Control Charts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 37(7), 1422-1439.
8. Chiu, W. C. and Lu, S. L. (2015). On the Steady-State Performance of the Poisson Double GWMA Control Chart. *Quality Technology and Quantitative Management*, 12(2), 195-208.
9. GAN, F. F. (1990). Monitoring Poisson Observations Using Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Charts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 19(1), 103-124.
10. Garvin, D. A. (1987). Competing in the Eight Dimensions of Quality. *Harvard Business Review*, 65, 101-109.

11. Hawkins, D. M. and Olwell, D. H. (1998). *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. Springer-Verlag, New York.
12. Ishikawa, K. (1985). *What is Total Quality Control? The Japanese Way*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
13. Khoo, M. B. C. (2004). Poisson Moving Average Versus c Chart for Nonconformities. *Quality Engineering*, 16(4), 525-534.
14. Lucas, J. M. and Crosier, R. B. (1982). Fast initial response for CUSUM quality-control schemes: give your CUSUM a head start. *Technometrics*, 24, 199–205.
15. Lucas, J. M. (1985). Counted data CUSUM's. *Technometrics*, 27, 129–144.
16. Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*, 32(1), 1-12.
17. Montgomery, D. C. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley and Sons, New York.
18. Neyman, J. and Pearson, E. S. (1936). Contributions to the theory of testing statistical hypotheses. *Statistical Research Memoirs*, 1, 1–37.
19. Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41, 100–115.
20. Paulino, S., Morais, M. C. and Knoth, S. (2016). An ARL-unbiased c -chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 10, 1002-1069.
21. Roberts, S.W. (1959). Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics*, 42(1), 97-102.
22. Ryan, T. P. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*. 3rd ed, John

Wiley and Sons, New York.

23. Sheu, S. H. and Chiu, W. C. (2007). Poisson GWMA Control Chart. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 36(5), 1099-1114.
24. Sheu, H.S. and Yang, S.L. (2003). The Generally Weighted Moving Average Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mean. *Quality Engineering*, 16(2), 209-231.
25. Shewhart, W. A. (1931). *Economic control of quality of manufactures product*. London, Macmillan.
26. Steiner, S. H. (1999). EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response. *Journal of Quality Technology*, 31, 75–86.
27. Testik, M. C. (2007). Conditional and marginal performance of the Poisson CUSUM control chart with parameter estimation. *International Journal of Production Research*, 45(23), 5621-5638.
28. Wheeler, D. J. and Chambers, D. S. (1992). *Understanding statistical process control*. SPC Press, Knoxville TN.
29. Wetherill, G. B. and Brown, D. W. (1991). *Statistical Process Control: Theory and Practice*. Chapman and Hall, London.
30. White, C.H. and Keats, J.B. (1996). ARLs and higher-order run-length moments for the Poisson CUSUM. *Journal of Quality Technology*, 28, 363–369.
31. White, C. H., Keats, J. B. and Stanley, J. (1997). Poisson CUSUM vs. c-chart for detect data. *Quality Engineering*, 9, 673–679.
32. Woodall, W. H. (1985). The statistical design of quality control charts. *Journal of the Royal Statistical Society*, 34, 155-160.
33. Zhang, L., Govindaraju, K., Lai, C. D. and Bebbington, M. S. (2003). Poisson

DEWMA Control Chart. Communications in Statistics- Simulation and Computation, 32(4), 1265-1283.