



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

**Μη Γραμμική Ανάλυση Πλακών Ενισχυμένων με Δοκούς με
Μερική Διατμητική Σύνδεση**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΙΩΑΝΝΗ Χ. ΔΙΚΑΡΟΥ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
Ε.Ι. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2011

Στη μνήμη της Γιαγιάς μου

Ευχαριστίες

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ολοκληρώθηκε υπό την επίβλεψη και την καθοδήγηση του κ. Ε. Σαπουντζάκη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Αισθάνομαι την υποχρέωση να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου για τη συνεχή επιστημονική και ηθική υποστήριξη του, καθώς και για τις εύστοχες και εποικοδομητικές παρατηρήσεις του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησεως της παρούσας εργασίας.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της ερευνητικής ομάδας, Β. Τσίπηρα, Α. Καμπίτση, Ι. Ντουρακόπουλο και Β. Μώκο για την αρμονική συνεργασία και τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Αθήνα, Οκτώβριος 2011
Ιωάννης Χ. Δίκαιος

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία παρουσιάζεται μια γενική μεθοδολογία για τη γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση πλακών ενισχυμένων με παράλληλες δοκούς διατομής απλής συμμετρίας με μερική διατμητική σύνδεση, υπό τη δράση τυχούσας εξωτερικής φόρτισης. Η ενισχυμένη πλάκα υπόκειται σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις και η ανάλυση της πραγματοποιείται διατηρώντας μη γραμμικούς όρους στις κινηματικές σχέσεις. Σύμφωνα με το προτεινόμενο προσομοίωμα, οι δοκοί ενίσχυσης απομονώνονται από την πλάκα με νοητές τομές παράλληλες στην κάτω εξωτερική επιφάνεια της, υιοθετώντας την υπόθεση ότι η πλάκα και οι δοκοί μπορούν να ολισθαίνουν και προς τις δύο διευθύνσεις χωρίς ανύψωση της πλάκας. Με τη βοήθεια των τομών αυτών προκύπτουν τάσεις στις διεπιφάνειες και κατά τις τρεις διευθύνσεις, οι οποίες λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση του φορέα. Με την ολοκλήρωση των αναπτυσσόμενων τάσεων σε πλάτος ίσο με το μισό πλάτος της διεπιφάνειας, εμφανίζονται δύο διαμήκεις κατανομές δυνάμεων ανά μέτρο μήκους που αποτελούν τη φόρτιση των δοκών ενίσχυσης και την επιπρόσθετη φόρτιση της πλάκας. Οι άγνωστες αυτές κατανομές προσδιορίζονται με την εφαρμογή συνθηκών συνέχειας στις διεπιφάνειες και κατά τις τρεις διευθύνσεις, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση τους με την ολίσθηση μέσω της δυσκαμψίας των διατμητικών συνδέσμων. Με την παρούσα μεθοδολογία οποιαδήποτε κατανομή διατμητικών συνδέσμων μπορεί να ληφθεί υπόψη. Η ύπαρξη δύο κατανομών δυνάμεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για κάθε δοκό, επιτρέπει να ληφθεί υπόψη η ανομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών δυνάμεων καθώς και η ανομοιόμορφη στρεπτική συμπεριφορά των δοκών. Μορφώνονται έξι προβλήματα συνοριακών τιμών τα οποία επιλύονται με την Μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης (ΑΕΜ), που βασίζεται στη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (ΒΕΜ). Η εφαρμογή της εν λόγω μεθόδου οδηγεί στη διαμόρφωση ενός συστήματος μη γραμμικών και πεπλεγμένων αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν με χρήση κατάλληλης επαναληπτικής μεθόδου. Το προτεινόμενο προσομοίωμα επιτρέπει τον υπολογισμό των συνεπίπεδων δυνάμεων διεπιφάνειας μεταξύ πλάκας και δοκών και κατά τις δύο διευθύνσεις (διαμήκεις και εγκάρσιες), η γνώση των οποίων είναι ιδιαίτερα σημαντική στη διαστασιολόγηση των διατμητικών συνδέσμων στις περιπτώσεις προκατασκευασμένων δοκών ή σύμμικτων ενισχυμένων πλακών. Η αξιοπιστία της παρουσιαζόμενης μεθόδου διαπιστώνεται μέσα από συγκρίσεις με προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων κελύφους και στερεών πεπερασμένων στοιχείων.

Abstract

In this M.Sc. thesis a general procedure for the geometrically nonlinear analysis of plates stiffened by arbitrarily placed parallel beams of arbitrary monosymmetric cross section with deformable connection subjected to arbitrary loading is presented. The plate-beam structure is assumed to undergo moderate large deflections and the nonlinear analysis is carried out by retaining nonlinear terms in the kinematical relations. According to the proposed model, the stiffening beams are isolated from the plate by sections in the lower outer surface of the plate making the hypothesis that the plate and the beams can slip in all directions of the connection without separation, while the arising tractions in all directions at the fictitious interfaces are taken into account. These tractions are integrated with respect to each half of the interface width, yielding two interface lines along which the loading of the beams as well as the additional loading of the plate is defined. Their unknown distribution is established by applying continuity conditions at the interfaces, in all directions taking into account their relation with the interface slip through the shear connectors' stiffness. Any distribution of connectors in each direction of the interfaces can be handled. The utilization of two interface lines for each beam enables the nonuniform distribution of the interface transverse shear forces and the nonuniform torsional response of the beams to be taken into account. Six boundary value problems are formulated and solved using the Analog Equation Method (AEM), a BEM based method. Application of the boundary element technique leads to a system of nonlinear and coupled algebraic equations which is solved using iterative numerical methods. The adopted model permits the evaluation of the shear forces at the interfaces in both directions, the knowledge of which is very important in the design of prefabricated or composite ribbed plates. The accuracy of the proposed method is verified comparing the obtained results with those from a FEM solution employing either shell or solid finite element models.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Γενικά	3
1.2 Στόχοι της παρούσας εργασίας	5
2. Η Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης	7
2.1 Εισαγωγή.....	9
2.2 Βασικές έννοιες της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης	10
2.3 Η ΑΕΜ για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξης	11
2.3.1 Ολοκληρωτικές παραστάσεις – Αριθμητική επίλυση	11
2.3.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	17
2.4 Η ΑΕΜ για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις τετάρτης τάξης	18
2.4.1 Ολοκληρωτικές παραστάσεις – Αριθμητική επίλυση	18
2.4.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	28
2.5 Η ΑΕΜ για μερικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξης που περιλαμβάνουν τον τελεστή Laplace	30
2.5.1 Ολοκληρωτικές παραστάσεις – Αριθμητική επίλυση	30
2.5.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	37
2.6 Η ΑΕΜ για μερικές διαφορικές εξισώσεις τετάρτης τάξης που περιλαμβάνουν το Διαρμονικό τελεστή.....	41
2.6.1 Ολοκληρωτικές παραστάσεις – Αριθμητική επίλυση	41
2.6.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	49
3. Διατύπωση προβλημάτων συνοριακών τιμών	53
3.1 Εισαγωγή.....	55
3.2 Διατύπωση προβλήματος μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων λεπτής πλάκας – Εξισώσεις Von Kármán	55
3.2.1 Πεδίο μετατοπίσεων	57
3.2.2 Παραμορφώσεις – Τάσεις	58
3.2.3 Εξισώσεις ισορροπίας.....	62
3.2.4 Συνοριακές συνθήκες	68
3.3 Διατύπωση προβλήματος μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων δοκού τυχούσας διατομής.....	71
3.3.1 Πεδίο μετατοπίσεων	73
3.3.2 Παραμορφώσεις – Τάσεις	75
3.3.3 Εξισώσεις ισορροπίας.....	78
3.3.4 Συνοριακές συνθήκες	83
3.4 Διατύπωση προβλήματος μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων ενισχυμένης πλάκας με μερική διατμητική σύνδεση	84
3.4.1 Εξισώσεις ισορροπίας πλάκας.....	89
3.4.2 Εξισώσεις ισορροπίας δοκών ενίσχυσης.....	95

3.4.3 Συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων.....	103
4. Αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.....	109
4.1 Εισαγωγή.....	111
4.2 Η ΑΕΜ για τα κινηματικά μεγέθη της πλάκας.....	111
4.3 Η ΑΕΜ για τα κινηματικά μεγέθη των δοκών.....	121
4.4 Συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων.....	126
5. Αριθμητικές εφαρμογές.....	129
5.1 Εισαγωγή.....	131
5.2 Εφαρμογές.....	131
5.2.1 Παράδειγμα 1.....	131
5.2.2 Παράδειγμα 2.....	136
5.2.3 Παράδειγμα 3.....	142
5.2.4 Παράδειγμα 4.....	149
6. Συμπεράσματα και ιδέες για μελλοντική έρευνα.....	156
6.1 Συμπεράσματα.....	157
6.2 Ιδέες για μελλοντική έρευνα.....	158
Παραρτήματα.....	159
Παράρτημα Α: Η συνάρτηση Dirac.....	161
Παράρτημα Β: Εκφράσεις των παραγώγων του r	167
Παράρτημα Γ: Προσέγγιση παραγώγων συνάρτησης με πεπερασμένες διαφορές.....	169
Βιβλιογραφία.....	181

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Ένας από τους ευρύτερα χρησιμοποιούμενους τρόπους σχεδιασμού του φορέα κατασκευών μεγάλων ανοιγμάτων ή κατασκευών από λεπτότοιχα στοιχεία, περιλαμβάνει την ύπαρξη ενισχυμένων πλακών (πλάκες με νευρώσεις). Η χρήση του συγκεκριμένου φέροντος συστήματος παρέχει τα εξής πλεονεκτήματα: Οικονομία της κατασκευής (επίτευξη υψηλής δυσκαμψίας με οικονομία υλικού), υψηλή ταχύτητα ολοκλήρωσης της κατασκευής λόγω χρήσης προκατασκευασμένων στοιχείων, καθώς και δυνατότητα κάλυψης μεγάλων ανοιγμάτων (μείωση νεκρού φορτίου με παράλληλη αύξηση δυσκαμψίας). Επιπλέον οι ενισχύσεις αποτρέπουν την ανάπτυξη φαινομένων αστάθειας (λυγισμός), κατά τις περιπτώσεις ισχυρής συνεπίπεδης φόρτισης. Χαρακτηριστικά παραδείγματα χρήσης ενισχυμένων πλακών αποτελούν οδικές ή σιδηροδρομικές χαραδρογέφυρες, κοιλαδογέφυρες, ποταμογέφυρες, καθώς και γέφυρες άνω διαβάσεων με σχεδιασμό πλακοδοκού, ενώ εκτεταμένη χρήση πλακών με νευρώσεις γίνεται και για την κατασκευή τοιχωμάτων μεταλλικών κιβωτίων γεφυρών. Εκτός από τα έργα γεφυροποιίας, η χρήση των ενισχυμένων πλακών είναι ευρεία και σε άλλες κατηγορίες κατασκευών, σε κλάδους όπως η Ναυπηγική, η Αεροναυπηγική και η Μηχανολογία. Οι φορείς πλοίων και αεροπλάνων είναι κατασκευές με μεγάλο ποσοστό επιφανειακών στοιχείων, τα οποία καλούνται να παραλάβουν σημαντικά εγκάρσια ή/και συνεπίπεδα φορτία. Στις περιπτώσεις αυτές η απαίτηση αυξημένης δυσκαμψίας του φέροντα οργανισμού χωρίς παράλληλη αύξηση του ιδίου βάρους είναι θεμελιώδους σημασίας, καθιστώντας το σύστημα της πλακοδοκού το μόνο ενδεδειγμένο για την επίτευξη του σκοπού αυτού.

Για τους παραπάνω λόγους, η ανάλυση της συμπεριφοράς των ενισχυμένων πλακών αποτέλεσε αντικείμενο ιδιαίτερα εκτεταμένης έρευνας, τις τελευταίες δεκαετίες και έχει προταθεί πλήθος προσομοιωμάτων για τον υπολογισμό της απόκρισης τους. Οι πρώτες εφαρμογές της πλακοδοκού σε κατασκευές από σκυρόδεμα αποδίδονται στους Joseph Monier και Francois Hennebique [(Lohmeyer, 1994), (Jürges, 2000)]. Οι πρώτες προσπάθειες προσομοίωσης που στόχευαν στη γραμμική ανάλυση του φορέα περιλαμβάνουν προσέγγιση των πλακών αυτών με ισοδύναμες ορθοτροπικές πλάκες σταθερού πάχους με στόχο τον προσδιορισμό των ισοδύναμων ελαστικών σταθερών και ακολούθως την επίλυση της αντίστοιχης ορθοτροπικής πλάκας [(Massonet, 1950), (Cornelius, 1952), (Pama & Cusens, 1967), (Powell & Ogden, 1969)]. Σημειώνεται ότι το εν λόγω προσομοίωμα δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο σε περιπτώσεις ενισχυμένων πλακών με πυκνά τοποθετημένες δοκούς σχετικά μικρού ελεύθερου ύψους, ενώ σε καμία περίπτωση δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού της αναπτυσσόμενης έντασης στη διεπιφάνεια πλάκας-δοκού. Με τη συνεχή ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών άρχισαν να προτείνονται βελτιωμένες μέθοδοι προσδιορισμού της συμπεριφοράς των ενισχυμένων πλακών, κυρίως με χρήση της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) [(Deb & Booton, 1988), (Palani et al., 1992), (Rombach, 2000), (Hartmann & Katz, 2002)]. Οι κυριότερες από αυτές περιελάμβαναν προσομοίωση πλάκας και δοκού με στοιχεία κελύφους, προσομοίωση πλάκας με στοιχεία κελύφους και δοκού με ραβδωτά στοιχεία ή προσομοίωση ολόκληρης της πλακοδοκού με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία.

Η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (BEM) έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για την γραμμική ανάλυση ενισχυμένων πλακών [(Hu and Hartley, 1994), (De Paiva, 1996), (Tanaka & Bercin., 1997), (Sapountzakis & Katsikadelis, 2000), (Wen et al., 2002), (Oliveira & Paiva, 2003),

(Fernandes & Venturini, 2005)], ενώ έχει χρησιμοποιηθεί και συνδυασμός των δύο αριθμητικών μεθόδων (Ng et al., 1990). Ωστόσο, σε όλες τις προαναφερθείσες προσεγγίσεις η ανάλυση δεν είναι πλήρης καθώς, είτε λαμβάνονται υπόψη μόνο οι κατακόρυφες δυνάμεις στις διεπιφάνειες, είτε στην περίπτωση που λαμβάνονται υπόψη και οι συνεπίπεδες δυνάμεις, η ανάλυση πραγματοποιείται στην απαραμόρφωτη διαμόρφωση του φορέα της ενισχυμένης πλάκας. Αγνοούνται έτσι φαινόμενα δεύτερης τάξης λόγω μεμβρανικών δυνάμεων και η συμπεριφορά της πλάκας και των δοκών εξετάζεται ανεξάρτητα (για τις δοκούς συνήθως θεωρείται ομοιόμορφη στρέψη). Εξάιρεση αποτελεί η εργασία των Sarountzakis & Katsikadelis (2000) στην οποία η πλακοδοκός θεωρείται στην παραμορφωμένη κατάσταση (λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα δεύτερης τάξης) και στις οποίες λαμβάνονται υπόψη οι κατακόρυφες και διαμήκεις δυνάμεις στη διεπιφάνεια πλάκας-δοκών, καθώς και οι εργασίες των Sarountzakis & Mokos (2007, 2008), οι οποίες λαμβάνουν υπόψη και τις εγκάρσιες δυνάμεις, που ενδέχεται να είναι σημαντικές σε περίπτωση έκκεντρης φόρτισης.

Η τάση, που επικρατεί σήμερα, για οικονομικό σχεδιασμό των κατασκευών οδηγεί συχνά σε ελαφρούς και εύκαμπτους φορείς, οι οποίοι, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις δυναμικών φορτίσεων, ενδέχεται να αναπτύξουν μεγάλες μετακινήσεις. Επομένως η γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση καθίσταται αναγκαία, προκειμένου να προσδιοριστεί ρεαλιστικά η απόκριση της κατασκευής αποφεύγοντας τις ανακρίβειες που προκύπτουν από μια γραμμική ή γραμμικοποιημένη (θεωρία δεύτερης τάξης) ανάλυση. Ωστόσο, σε αντίθεση με τις έρευνες που αφορούν στη γραμμική ανάλυση ενισχυμένων πλακών οι εργασίες που αφορούν στη γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση τους είναι περιορισμένες. Στις πρώτες ερευνητικές προσπάθειες περιλαμβάνεται η προσομοίωση της ενισχυμένης πλάκας ως ορθοτροπικής πλάκας και η ανάλυση φορέων απλής γεωμετρίας και συνοριακών συνθηκών με χρήση της μεθόδου Galerkin [(Prathap & Varadan, 1978), (Varadan & Pandalai, 1979)]. Η μέθοδος Galerkin εφαρμόστηκε και σε βελτιωμένες προσομοιώσεις της ενισχυμένης πλάκας, οι οποίες περιελάμβαναν γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση υπό τη δράση συνεπίπεδων ή/και εγκάρσιων φορτίων [(Ueda et al., 1987), (Paik & Lee, 2005)], ενώ και η μέθοδος Rayleigh-Ritz έχει εφαρμοστεί για τη μεταλυγισμική ανάλυση ενισχυμένων πλακών (Shin, 1999). Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης έχουν επίσης εφαρμοστεί για την επίλυση του προβλήματος. Στην πλειοψηφία των σχετικών εργασιών, εφαρμόζεται η Μέθοδος Πεπερασμένων Λωρίδων (FSM) και η FEM [(Khalil et al., 1988), (Koko & Olson, 1991), (Venugopal Rao et al. 1993), (Chattopadhyay & Sinha, 1995), (Kolli & Chandrashekara, 1997), (Sheikh & Mukhopadhyay, 2000), (Fujicubo & Kaeding, 2002), (Sheikh & Mukhopadhyay, 2002), (Fujicubo et al., 2005), (Ojeda et al., 2007), (Vörös, 2009)], ενώ έχουν εφαρμοστεί και άλλες μέθοδοι, όπως η Μέθοδος Δυναμικής Χαλάρωσης (DRM) [(Caridis and P.A. Frieze, 1988), (Turvey & Salehi, 1997, 1998, 2008, 2010)], η μέθοδος meshfree Galerkin (Liew et al., 2007) και η BEM (Fernandes & Venturini, 2007). Παρ' όλα αυτά σε όλες τις προαναφερθείσες προσπάθειες, υπάρχουν περιορισμοί, που προκύπτουν από την αμέλεια των συνεπίπεδων δυνάμεων, της ανομοιόμορφης κατανομής των εγκάρσιων συνεπίπεδων δυνάμεων, ή της ανομοιόμορφης στρεπτικής συμπεριφοράς των δοκών.

Η ταυτόχρονη χρήση διαφορετικών υλικών στις κατασκευές (σύμμικτες ενισχυμένες πλάκες) ή προκατασκευασμένων στοιχείων, επιβάλλει τον ακριβή υπολογισμό της εντατικής κατάστασης στη διεπιφάνεια μεταξύ των συνεργαζόμενων δομικών στοιχείων, προκειμένου να γίνει η διαστασιολόγηση των διατμητικών συνδέσμων. Συνεπώς είναι αναγκαίος ο

ακριβής υπολογισμός των δυνάμεων διεπιφάνειας, συμπεριλαμβάνοντας στο προσομοίωμα του φορέα και τη δυσκαμψία των διατμητικών συνδέσμων, η οποία επηρεάζει τη συνολική απόκριση του (μερική διατμητική σύνδεση). Η πρώτη αναλυτική λύση για το πρόβλημα δοκού με μερική διατμητική σύνδεση αποδίδεται στους Newmark et al. (1951) (Ranzi et al., 2010) και το προσομοίωμα αυτό έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς για την ανάλυση συμμίκτων δοκών με μερική διατμητική σύνδεση. Αρκετές εργασίες που έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια και αφορούν στην ανάλυση σύμμικτων δοκών με μερική διατμητική σύνδεση βασίζονται κυρίως στη FEM [(Nguyen et al., 2011), (Sousa Jr. & Da Silva, 2007), (Zona & Ranzi, 2011)]. Η πλειοψηφία των εργασιών αυτών εστιάζει κυρίως στην υλική μη γραμμικότητα, ενώ οι εργασίες που αφορούν γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση συμμίκτων δοκών είναι αρκετά περιορισμένες [(Oven et al., 1997), (Čas et al., 2004), (Girhammar & Pan, 2007), (Battini et al. 2009), (Ranzi et al., 2010), (Sousa Jr. et al., 2010)]. Στις εν λόγω εργασίες, εφαρμόζονται απλοποιήσεις, καθώς εξετάζεται μόνο η περίπτωση της μονοαξονικής κάμψης, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη περιπτώσεις έκκεντρων φορτίων, που οδηγούν σε στρεπτικές καταπονήσεις, ενώ επίσης δεν λαμβάνεται υπόψη η δυσκαμψία των διατμητικών συνδέσμων κατά την εγκάρσια διεύθυνση της δοκού. Εξαιρέση αποτελούν οι εργασίες των [(Erkmen & Bradford, 2009), (Tan & Uy, 2011)], στις οποίες πραγματοποιείται ανάλυση σύμμικτων δοκών καμπύλης κάτοψης. Τονίζεται ακόμη ότι στις περισσότερες από τις προαναφερθείσες εργασίες η πλάκα αντιμετωπίζεται ως στοιχείο δοκού, αγνοώντας έτσι την επιφανειακή της λειτουργία.

1.2 Σκοπός της παρούσας εργασίας

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια γενική μεθοδολογία για τη γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση πλακών ενισχυμένων με παράλληλες δοκούς διατομής μονής συμμετρίας με μερική διατμητική σύνδεση, υπό τη δράση τυχούσας εξωτερικής φόρτισης. Η ενισχυμένη πλάκα υπόκειται σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις και η ανάλυση της πραγματοποιείται διατηρώντας μη γραμμικούς όρους στις κινηματικές σχέσεις. Σύμφωνα με το προτεινόμενο προσομοίωμα, οι δοκοί ενίσχυσης απομονώνονται από την πλάκα με νοητές τομές παράλληλες στην κάτω εξωτερική επιφάνεια της, υιοθετώντας την υπόθεση ότι η πλάκα και οι δοκοί μπορούν να ολισθαίνουν και προς τις δύο διευθύνσεις χωρίς *ανύψωση (uplift)* της πλάκας. Με τη βοήθεια των τομών αυτών προκύπτουν τάσεις στις διεπιφάνειες και κατά τις τρεις διευθύνσεις, οι οποίες λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση του φορέα. Με την ολοκλήρωση των αναπτυσσόμενων τάσεων σε πλάτος ίσο με το μισό πλάτος της διεπιφάνειας, εμφανίζονται δύο διαμήκεις κατανομές δυνάμεων ανά μέτρο μήκους που αποτελούν τη φόρτιση των δοκών ενίσχυσης και την επιπρόσθετη φόρτιση της πλάκας. Οι άγνωστες αυτές κατανομές προσδιορίζονται με την εφαρμογή συνθηκών συνέχειας στις διεπιφάνειες και κατά τις τρεις διευθύνσεις, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση τους με την ολίσθηση μέσω της δυσκαμψίας των διατμητικών συνδέσμων. Με την παρούσα μεθοδολογία οποιαδήποτε κατανομή διατμητικών συνδέσμων μπορεί να ληφθεί υπόψη. Η ύπαρξη δύο κατανομών δυνάμεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για κάθε δοκό, επιτρέπει να ληφθεί υπόψη η ανομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών δυνάμεων καθώς και η ανομοιόμορφη στρεπτική συμπεριφορά των δοκών. Μορφώνονται έξι προβλήματα συνοριακών τιμών τα οποία επιλύονται με την Μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης (AEM), που

βασίζεται στη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Η εφαρμογή της εν λόγω μεθόδου οδηγεί στη διαμόρφωση ενός συστήματος μη γραμμικών και πεπλεγμένων αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν με χρήση κατάλληλης επαναληπτικής μεθόδου. Το προτεινόμενο προσομοίωμα επιτρέπει τον υπολογισμό των συνεπίπεδων δυνάμεων διεπιφάνειας μεταξύ πλάκας και δοκών και κατά τις δύο διευθύνσεις (διαμήκεις και εγκάρσιες), η γνώση των οποίων είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη διαστασιολόγηση των διατμητικών συνδέσμων στις περιπτώσεις προκατασκευασμένων δοκών. Η αξιοπιστία της παρουσιαζόμενης μεθόδου διαπιστώνεται με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων κελύφους και στερεών πεπερασμένων στοιχείων.

Τα κύρια χαρακτηριστικά και οι πρωτοτυπίες της προτεινόμενης μεθοδολογίας συνοψίζονται στα εξής:

- Η ενισχυμένη πλάκα μπορεί να έχει τυχαίο σχήμα και υποβάλλεται σε τυχαίο εξωτερικό φορτίο. Ο αριθμός των παραλλήλων δοκών είναι επίσης τυχαίος ενώ είναι δυνατόν να τοποθετηθούν σε οποιαδήποτε θέση στο χωρίο της πλάκας. Η πλάκα και οι δοκοί υπόκεινται στις πλέον γενικές συνθήκες στήριξης, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής.
- Επιβάλλονται συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων και ως προς τους τρεις άξονες του συστήματος αναφοράς.
- Η παρούσα μεθοδολογία επιτρέπει τον υπολογισμό των διαμήκων και εγκάρσιων συνεπίπεδων δυνάμεων στις διεπιφάνειες, ανάμεσα στην πλάκα και τις δοκούς, στη γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση της ενισχυμένης πλάκας, λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική ολίσθηση της διεπιφάνειας. Η γνώση των δυνάμεων αυτών είναι πολύ σημαντική για το σχεδιασμό των διατμητικών συνδέσμων σε φορείς μορφής πλακοδοκού. Η χρήση δύο γραμμών διεπιφάνειας επιτρέπει να ληφθεί υπόψη η ανομοιομόρφη κατανομή των δυνάμεων αυτών κατά το πλάτος της σύνδεσης.
- Η διατομή των δοκών ενίσχυσης μπορεί να είναι τυχούσα μονοσυμμετρική λεπτότοιχη ή χονδρότοιχη. Η μεθοδολογία δεν υιοθετεί παραδοχές της θεωρίας λεπτότοιχων διατομών και συνεπώς η δυστεψία και η αντίσταση σε στρέβλωση υπολογίζονται «επακριβώς» με εφαρμογή της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων (BEM) χρησιμοποιώντας μόνο συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής.
- Η ανομοιομόρφη στρεπτική συμπεριφορά των δοκών, λαμβάνεται υπόψη επιλύοντας το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών και εισάγοντας την προκύπτουσα στρεπτική στροφή και στρέβλωση στις συνθήκες συνέχειας των μετατοπίσεων. Το διανεμημένο δίρροπο στρέβλωσης, που δημιουργείται από πιθανή ανομοιομόρφη κατανομή των διαμήκων δυνάμεων στη διεπιφάνεια, λαμβάνεται υπόψη.

Κεφάλαιο 2

Η Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης

2.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία τα προβλήματα συνοριακών τιμών που θα αναπτυχθούν επιλύονται με εφαρμογή της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης (AEM). Η μέθοδος αυτή, αναπτύχθηκε από τον Katsikadelis (1994, 2002) και ανήκει στην οικογένεια Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων. Η AEM μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση γραμμικών ή μη γραμμικών, στατικών ή δυναμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών με σταθερούς ή μεταβλητούς συντελεστές, που υπόκεινται σε γραμμικές ή μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες, αντιμετωπίζοντας τα μειονεκτήματα που παρουσιάζει η αμιγής Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (BEM).

Η BEM σε αντίθεση με τις πεδιακού τύπου αριθμητικές μεθόδους, όπως η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) και η Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (FDM), οδηγεί μέσω των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων στην ανάγκη διακριτοποίησης μόνο του συνόρου, μειώνοντας έτσι κατά μία τάξη τη διάσταση του προβλήματος. Σαν αποτέλεσμα η διαδικασία διακριτοποίησης απλοποιείται και το πλήθος των αγνώστων του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων μειώνεται σημαντικά. Ένα ακόμη σημαντικό πλεονέκτημα που παρουσιάζει η μέθοδος αφορά το γεγονός ότι αποφεύγονται οι προσεγγίσεις των συναρτήσεων πεδίου, οι οποίες μειώνουν σημαντικά την ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων της λύσης (Κατσιακαδέλης, 1999). Τα βασικά μειονεκτήματα της BEM εντοπίζονται στη δυσκολία ευρέσεως θεμελιώδους λύσης και στην αδυναμία διατύπωσης της ολοκληρωτικής παράστασης της λύσης στην περίπτωση μη γραμμικών προβλημάτων (Μπαμπούσκος, 2011). Συνεπώς η BEM αδυνατεί να δώσει λύση σε αρκετά μη γραμμικά στατικά ή δυναμικά προβλήματα της επιστήμης του μηχανικού. Διάφορες μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την αντιμετώπιση των μειονεκτημάτων της BEM (Yu et al. 2010), ενώ από τις πλέον αποτελεσματικές είναι η Μέθοδος Δυικής Αμοιβαιότητας (Dual Reciprocity Method, DRM), η οποία διατυπώθηκε από τους Nardini & Brebbia (Partridge & Brebbia, 1991) και η AEM. Ωστόσο, προκειμένου να είναι δυνατή η εφαρμογή της DRM, πρέπει το εξεταζόμενο πρόβλημα να πληρεί ορισμένους περιορισμούς (Katsikadelis, 2002), ενώ η AEM μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς τους περιορισμούς αυτούς.

Η AEM, βασίζεται στην αντικατάσταση του αρχικού γραμμικού ή μη γραμμικού διαφορικού τελεστή που ορίζει το αρχικό πρόβλημα από έναν απλούστερο γραμμικό τελεστή που ορίζει ένα υποκατάστατο πρόβλημα. Η πρακτική σημασία της αντικατάστασης αυτής γίνεται φανερή από το γεγονός ότι ως διαφορικός τελεστής για το υποκατάστατο πρόβλημα μπορεί να επιλεγεί οποιοσδήποτε γραμμικός τελεστής με γνωστή θεμελιώδη λύση. Στη συνέχεια το υποκατάστατο αυτό πρόβλημα λύνεται με χρήση της BEM. Η αριθμητική υλοποίηση της AEM περιλαμβάνει και πεδιακή διακριτοποίηση του χωρίου, αλλοιώνοντας τον αμιγή συνοριακό χαρακτήρα της μεθόδου. Ωστόσο, τονίζεται ότι η εν λόγω πεδιακή διακριτοποίηση δεν έχει το χαρακτήρα της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, καθώς δεν χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου αλλά για τον υπολογισμό πεδιακών ολοκληρωμάτων όταν αυτά δεν είναι εφικτό να μετασχηματιστούν σε επικαμπύλια στο σύνορο (Brebbia, 2010). Έτσι σε αντίθεση με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων δεν απαιτείται σύμπτωση των κόμβων των εσωτερικών στοιχείων ή ύπαρξη συνθηκών συνέχειας. Παρ' όλα αυτά τα τελευταία χρόνια έχει διατυπωθεί μια πιο εξελιγμένη μορφή της AEM, σύμφωνα με την οποία τα πεδιακά ολοκληρώματα αντικαθίστανται από κατάλληλα αθροίσματα όρων στα εσωτερικά κομβικά

σημεία με χρήση ακτινικών συναρτήσεων βάσης (RBF) (Katsikadelis & Tsiatas, 2003). Στην περίπτωση αυτή όμως, παρόλο που η μέθοδος γίνεται αμιγώς συνοριακή, λόγω των RBFs εισάγονται άγνωστες παράμετροι, η βέλτιστη τιμή των οποίων δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί [(Katsikadelis, 2008), (Μπαμπούσκος, 2011)]. Για το λόγο αυτό, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, η AEM εφαρμόζεται με χρήση πεδιακής διακριτοποίησης. Σημειώνεται, επίσης, ότι πρόσφατα έχει αναπτυχθεί και η MAEM (Meshless Analog Equation Method), η οποία επεκτείνει την AEM στην οικογένεια των μεθόδων που δεν απαιτούν διακριτοποίηση του χωρίου ή του συνόρου παρά μόνο την ύπαρξη κομβικών σημείων (*meshless methods*) (Katsikadelis, 2009).

Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζεται η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών διαφόρων τάξεων με την AEM. Η παρουσίαση αυτή είναι χρήσιμη για την πλήρη κατανόηση της μεθόδου, αλλά και λόγω του ότι τα εξεταζόμενα προβλήματα αποτελούν τη βάση για τη μόρφωση των αναλογικών εξισώσεων στην περίπτωση της ενισχυμένης πλάκας με μερική διατμητική σύνδεση υποβαλλόμενης σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις.

2.2 Βασικές έννοιες της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης

Η βασική ιδέα της AEM, όπως περιγράφηκε παραπάνω, εκφράζεται με μαθηματικές σχέσεις ως εξής: Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (Κατσικαδέλης, 2010)

$$N(u) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.2.1\alpha)$$

$$B(u) = \bar{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.2.1\beta)$$

όπου $N(\cdot)$, $B(\cdot)$ είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί διαφορικοί τελεστές με σταθερούς ή μεταβλητούς συντελεστές, $g(\mathbf{x})$ είναι γνωστή κατανομή πηγής ή εξωτερικού φορτίου και $u(\mathbf{x})$ είναι η λύση του προβλήματος. Έστω $N^*(\cdot)$ ένας άλλος γραμμικός ή μη γραμμικός διαφορικός τελεστής της ίδιας τάξης με τον N . Εάν εφαρμόσουμε τον τελεστή αυτόν στην $u(\mathbf{x})$ προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$N^*(u) = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.2.2)$$

όπου $p(\mathbf{x})$ είναι άγνωστη συνάρτηση πηγής ή φορτίου, η οποία στο εξής θα ονομάζεται *πλασματικό φορτίο*. Η εξίσωση (2.2.2) ονομάζεται *αναλογική εξίσωση* του αρχικού προβλήματος. Η αναλογική εξίσωση (2.2.2) σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες (2.2.1β) μπορούν να δώσουν τη λύση του αρχικού προβλήματος (σχέσεις (2.2.1)), υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση του πλασματικού φορτίου $p(\mathbf{x})$ θα προσδιοριστεί προηγουμένως. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών που ορίζεται από τις (2.2.2) και (2.2.1β) ονομάζεται *ισοδύναμο* ή *υποκατάστατο πρόβλημα*. Σημειώνεται ότι η αναλογική εξίσωση πρέπει να ορίζεται από διαφορικό τελεστή της ίδιας τάξης με τον αρχικό τελεστή

προκειμένου να εξασφαλιστεί ο ίδιος αριθμός συνοριακών συνθηκών για το αρχικό και το υποκατάστατο πρόβλημα, αλλά και η συνέχεια της λύσης και των παραγώγων της μέχρι την τάξη που εμφανίζονται στον αρχικό τελεστή N (Μπαμπούσκος, 2011).

2.3 Η ΑΕΜ για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξης

2.3.1 Ολοκληρωτικές παραστάσεις – Αριθμητική επίλυση

Θεωρούμε το μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$N\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right) = g(x), \quad x \in (0, l) \quad (2.3.1\alpha)$$

$$a_1 u + a_2 B\left(u, \frac{du}{dx}\right) = a_3, \quad x = 0, l \quad (2.3.1\beta)$$

όπου $N(\cdot)$, $B(\cdot)$ είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί μονοδιάστατοι τελεστές δευτέρας και πρώτης τάξης, αντίστοιχα. a_i ($i = 1, 2, 3$) είναι γνωστές συναρτήσεις που ορίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος και $g(x)$ είναι τυχαία κατανεμημένο φορτίο ή πηγή στο εσωτερικό $(0, l)$ του προβλήματος. $u = u(x)$ είναι η συνάρτηση της λύσης η οποία είναι συνεχής και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, l)$. Σύμφωνα με την ΑΕΜ το υποκατάστατο πρόβλημα θα πρέπει να είναι επίσης δευτέρας τάξης και ως η απλούστερη αναλογική εξίσωση με γνωστή θεμελιώδη λύση, μπορεί να επιλεγεί η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{d^2u}{dx^2} = p(x) \quad (2.3.2)$$

Από φυσικής άποψης, η εξίσωση (2.3.2) περιγράφει την αξονική καταπόνηση ράβδου με δυστένεια $EA = 1$, η οποία υποβάλλεται στο άγνωστο πλασματικό φορτίο $p(x)$. Σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν στην ενότητα 2.2, η λύση της εξίσωσης (2.3.1α) μπορεί να προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης (2.3.2) με την ίδια συνοριακή συνθήκη (2.3.1β), εάν προσδιοριστεί το πλασματικό φορτίο $p(x)$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με χρήση της ΒΕΜ ως εξής: Η ασθενής μορφή της αναλογικής εξίσωσης γράφεται ως (Μώκος, 2007)

$$\int_0^l [u''(x) - q_x(x)] u^*(x, \xi) dx = 0 \Rightarrow \int_0^l u''(x) u^*(x, \xi) dx - \int_0^l q_x(x) u^*(x, \xi) dx = 0 \quad (2.3.3)$$

όπου ο συμβολισμός $()'$ υποδηλώνει παραγωγή κατά x . Ως συνάρτηση u^* χρησιμοποιείται η θεμελιώδης λύση για το μονοδιάστατο τελεστή Laplace, η οποία προκύπτει ως μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2 u^*(x, \xi)}{dx^2} = \delta(x - \xi) \quad (2.3.4)$$

όπου $\delta(x - \xi)$ είναι η συνάρτηση δ (συνάρτηση Dirac) σε μια διάσταση (Παράρτημα Α). Η θεμελιώδης λύση u^* προκύπτει ως [(Sapountzakis and Katsikadelis, 2000), (Μώκος, 2007)]

$$u^*(x, \xi) = \frac{1}{2}|r| \quad (2.3.5)$$

όπου $r = x - \xi$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων x και ξ . Το σημείο ξ αποτελεί το σταθερό σημείο ταξιδεσίας ενώ το σημείο x διατρέχει το διάστημα $(0, l)$. Εφαρμόζοντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες στο πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.3.3), αντικαθιστώντας τις (2.3.2) και (2.3.5) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης Dirac, (Παράρτημα Α) προκύπτει

$$u(\xi) = \int_0^l \Lambda_2(x, \xi) p(x) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi) u(x) + \Lambda_2(x, \xi) u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.3.6)$$

Με $\Lambda_i(r)$ ($i=1,2$) συμβολίζονται οι δισημειακοί πυρήνες, οι οποίοι δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (Μώκος, 2007)

$$\Lambda_1(r) = \frac{1}{2} \operatorname{sgnr} \quad (2.3.7\alpha)$$

$$\Lambda_2(r) = \frac{1}{2}|r| \quad (2.3.7\beta)$$

όπου sgn είναι η συνάρτηση signum, η οποία ορίζεται ως

$$\operatorname{sgnr} = \begin{cases} +1, & r > 0 \\ -1, & r < 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

για $r=0$ η συνάρτηση signum δεν ορίζεται. Η σχέση (2.3.6) αποτελεί την ολοκληρωτική παράσταση της λύσης του προβλήματος συναρτήσεως του πλασματικού φορτίου και των συνοριακών ποσοτήτων. Προκειμένου να συσχετίσουμε τις συνοριακές ποσότητες με το πλασματικό φορτίο, εφαρμόζουμε την ολοκληρωτική παράσταση (2.3.6) στα άκρα $0, l$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει

$$\xi \rightarrow \xi_0 = 0^+ \quad (2.3.9\alpha)$$

$$\xi \rightarrow \xi_l = l^- \quad (2.3.9\beta)$$

Συνεπώς λαμβάνουμε δύο συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις ως

$$u(0) = \int_0^l \Lambda_2(x, \xi_0) \rho(x) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_0)u(x) + \Lambda_2(x, \xi_0)u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.3.10\alpha)$$

$$u(l) = \int_0^l \Lambda_2(x, \xi_l) \rho(x) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_l)u(x) + \Lambda_2(x, \xi_l)u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.3.10\beta)$$

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.3.10) μπορούν να διατυπωθούν σε μητρωϊκή μορφή ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \quad (2.3.11)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u(0) \quad u(l)] \quad (2.3.12\alpha)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{,x}^T = [u'(0) \quad u'(l)] \quad (2.3.12\beta)$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_1(0, \xi_0) + 1 & -\Lambda_1(l, \xi_0) \\ \Lambda_1(0, \xi_l) & -\Lambda_1(l, \xi_l) + 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.12\gamma)$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -\Lambda_2(0, \xi_0) & \Lambda_2(l, \xi_0) \\ -\Lambda_2(0, \xi_l) & \Lambda_2(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (2.3.12\delta)$$

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \int_0^l \Lambda_2(x, \xi_0) \rho(x) dx \\ \int_0^l \Lambda_2(x, \xi_l) \rho(x) dx \end{Bmatrix} \quad (2.3.12\epsilon)$$

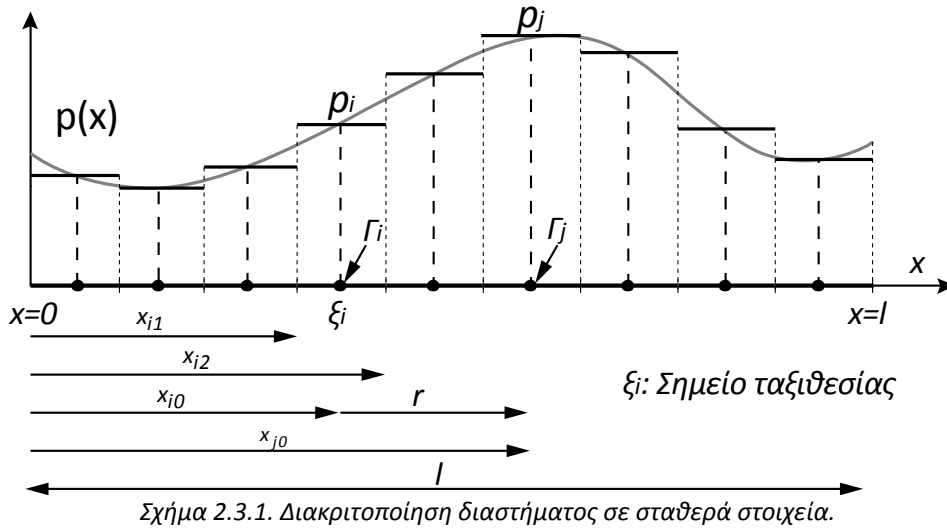
Τα μητρώα των σχέσεων (2.3.12γ,δ) με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3.7) γράφονται ως

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.3.13\alpha)$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.13\beta)$$

Οι εξισώσεις (2.3.11) και (2.3.1β) επαρκούν για την έκφραση των συνοριακών ποσοτήτων συναρτήσεως του πλασματικού φορτίου. Στη συνέχεια, προχωρούμε στη διακριτοποίηση του διαστήματος $(0, l)$. Διαιρούμε το διάστημα σε L ίσα γραμμικά στοιχεία με μήκος l/L το καθένα, στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι το πλασματικό φορτίο $\rho(x)$ έχει σταθερή τιμή

και ίση με αυτή στον κόμβο στο μέσο του στοιχείου (Σχ. 2.3.1). Χρησιμοποιώντας την παραδοχή αυτή, το διάνυσμα \mathbf{T} προσεγγίζεται ως



$$\mathbf{T} = \begin{cases} \sum_{j=1}^L p^j \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(x, \xi_0) dx \\ \sum_{j=1}^L p^j \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(x, \xi_l) dx \end{cases} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \cdots & \hat{F}_{1L} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} & \cdots & \hat{F}_{2L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^L \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{F}}\mathbf{p} \quad (2.3.14)$$

όπου οι συντελεστές \hat{F}_{ij} ($i=1,2$) και ($j=1,2,\dots,L$) ορίζονται ως

$$\hat{F}_{1j} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(x, \xi_0) dx \quad (2.3.15\alpha)$$

$$\hat{F}_{2j} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(x, \xi_l) dx \quad (2.3.15\beta)$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε τις συνοριακές συνθήκες (2.3.1β), οι οποίες στη γενική τους μορφή θεωρούνται μη γραμμικές, σε μητρωϊκή μορφή ως

$$[\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} + \mathbf{D}^{nl} = \boldsymbol{\alpha}_3 \quad (2.3.16)$$

όπου \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων 2×2 με γνωστούς συντελεστές, τα οποία περιλαμβάνουν και τις τιμές των συνοριακών συναρτήσεων a_i ($i=1,2$), που παρουσιάζονται στη σχέση (2.3.1β), ενώ \mathbf{D}^{nl} είναι διάνυσμα διαστάσεων 2×1 , το οποίο περιέχει τους μη γραμμικούς όρους που περιλαμβάνονται στις εκφράσεις της διαφορικής

συνοριακής εξίσωσης (2.3.1β). α_3 είναι γνωστό διάνυσμα διαστάσεων 2×1 , το οποίο περιλαμβάνει τις τιμές της συνοριακής συνάρτησης α_3 που παρουσιάζεται στη σχέση (2.3.1β) στα άκρα $0, l$. Συνολικά, οι εξισώσεις (2.3.11) και (2.3.16) γράφονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{F}}\mathbf{p} \\ \alpha_3 - \mathbf{D}^{nl} \end{Bmatrix} \quad (2.3.17)$$

Στην περίπτωση των γραμμικών συνοριακών συνθηκών τα συνοριακά μεγέθη εκφράζονται συναρτήσει των πλασματικών φορτίων με απευθείας αντιστροφή του μητρώου των συντελεστών τους. Εναλλακτικά οι συνοριακές εξισώσεις (2.3.17) διατυπώνονται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha_3 - \mathbf{D}^{nl} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha_3 - \mathbf{D}^{nl} \end{Bmatrix} \quad (2.3.18)$$

όπου $\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{F}}$. Το σύστημα (2.3.17) ή (2.3.18) αποτελείται από 4 αλγεβρικές εξισώσεις ως προς $4+L$ αγνώστους. Επομένως οι αγνώστοι του προβλήματος είναι υπεράριθμοι και χρειαζόμαστε L ακόμη εξισώσεις για τον προσδιορισμό τους.

Η λύση σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(0, l)$ θα προκύψει από εφαρμογή της ολοκληρωτικής παράστασης της λύσης (2.3.6). Η σχέση αυτή με χρήση της διακριτοποίησης του διαστήματος (Σχ. 2.3.1) μπορεί να γραφτεί στη θέση ξ_i του i εσωτερικού στοιχείου ως εξής:

$$u(\xi_i) = \sum_{j=1}^L p_j \int_0^l \Lambda_2(x, \xi_i) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_i)u(x) + \Lambda_2(x, \xi_i)u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.3.19)$$

Για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο να υπολογιστεί και η παράγωγος της λύσης. Αυτό επιτυγχάνεται με αναλυτική παραγωγή της ολοκληρωτικής παράστασης (2.3.6). Η διακριτοποιημένη έκφραση της παραγώγου στη θέση ξ_i , προκύπτει ως εξής

$$\frac{du(\xi_i)}{d\xi} = \sum_{j=1}^L p_j \int_0^l \frac{\partial \Lambda_2(x, \xi_i)}{\partial \xi} dx - \left[-\frac{\partial \Lambda_1(x, \xi_i)}{\partial \xi} u(x) + \frac{\partial \Lambda_2(x, \xi_i)}{\partial \xi} u'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.3.20)$$

όπου

$$\frac{\partial \Lambda_1(x, \xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (2.3.21\alpha)$$

$$\frac{\partial \Lambda_2(x, \xi)}{\partial \xi} = -\Lambda_1(x, \xi) \quad (2.3.21\beta)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.3.19) και (2.3.20) στα L σημεία ταξιθεσίας προκύπτουν δύο συστήματα εξισώσεων ως

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.3.22\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{A}_{,x}\mathbf{p} + \mathbf{C}_{,x} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{,x}\mathbf{d} \quad (2.3.22\beta)$$

όπου

$$\mathbf{u}^T = [(u)_1 \quad (u)_2 \quad \cdots \quad (u)_L] \quad (2.3.23\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{,x}^T = [(u')_1 \quad (u')_2 \quad \cdots \quad (u')_L] \quad (2.3.23\beta)$$

είναι μητρώα στήλης διαστάσεων $L \times 1$ τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές της u και της παραγώγου της ως προς x στα L εσωτερικά κομβικά σημεία κατά μήκος του εξεταζόμενου διαστήματος. Τα \mathbf{A} , $\mathbf{A}_{,x}$ είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $L \times L$ των οποίων οι συντελεστές δίδονται από τις σχέσεις

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(x, \xi_i) dx \quad (2.3.24\alpha)$$

$$A_{ij,x} = - \int_{\Gamma_j} \Lambda_1(x, \xi_i) dx \quad (2.3.24\beta)$$

Τα μητρώα \mathbf{C} , $\mathbf{C}_{,x}$ είναι διαστάσεων $L \times 4$ και ορίζονται ως

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \Lambda_2(0, \xi_1) & -\Lambda_1(0, \xi_1) & | & -\Lambda_2(l, \xi_1) & \Lambda_1(l, \xi_1) \\ \Lambda_2(0, \xi_2) & -\Lambda_1(0, \xi_2) & | & -\Lambda_2(l, \xi_2) & \Lambda_1(l, \xi_2) \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots \\ \Lambda_2(0, \xi_L) & -\Lambda_1(0, \xi_L) & | & -\Lambda_2(l, \xi_L) & \Lambda_1(l, \xi_L) \end{bmatrix} \quad (2.3.25\alpha)$$

$$\mathbf{C}_{,x} = \begin{bmatrix} -\Lambda_1(0, \xi_1) & 0 & | & \Lambda_1(l, \xi_1) & 0 \\ -\Lambda_1(0, \xi_2) & 0 & | & \Lambda_1(l, \xi_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots \\ -\Lambda_1(0, \xi_L) & 0 & | & \Lambda_1(l, \xi_L) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.25\beta)$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3.7) λαμβάνουμε

$$\Lambda_1(0, \xi_i) = -\frac{1}{2} \quad (2.3.26\alpha)$$

$$\Lambda_2(0, \xi_i) = \frac{1}{2} \xi_i \quad (2.3.26\beta)$$

$$\Lambda_1(l, \xi_i) = \frac{1}{2} \quad (2.3.26\gamma)$$

$$\Lambda_2(l, \xi_i) = \frac{1}{2}(l - \xi_i) \quad (2.3.26\delta)$$

όπου $\xi_i = x_{i0}$ οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχ. 2.3.1). Το τελικό βήμα της AEM είναι η εφαρμογή της κυρίαρχης εξίσωσης (2.3.1) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία του εξεταζόμενου διαστήματος και στη συνέχεια η αντικατάσταση των διακριτοποιημένων τιμών της u και της παραγώγου της u' στα L εσωτερικά σημεία, σύμφωνα με τις σχέσεις (2.3.22). Είναι προφανές ότι λόγω ισχύος της αναλογικής εξίσωσης (2.3.2), το διάνυσμα των τιμών της δεύτερης παραγώγου u'' στα κομβικά σημεία ισούται με το διάνυσμα του πλασματικού φορτίου \mathbf{p} . Έτσι, προκύπτει ένα επιπλέον σύστημα L αλγεβρικών εξισώσεων ως προς το άγνωστο διάνυσμα \mathbf{d} . Επιλύοντας αριθμητικά το εν λόγω σύστημα μαζί με τις συνοριακές εξισώσεις (2.3.18) υπολογίζεται το πλασματικό φορτίο καθώς και οι τιμές της u και της u' στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος. Στη συνέχεια με χρήση των (2.3.22) λαμβάνουμε το διάνυσμα των τιμών της λύσης και της παραγώγου της στα L εσωτερικά κομβικά σημεία.

2.3.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Ο προσδιορισμός των μητρών \mathbf{F} , \mathbf{A} και $\mathbf{A}_{,x}$ (σχέσεις (2.3.18), (2.3.22)) επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που ορίζονται από τις σχέσεις (2.3.15) και (2.3.24). Ο Υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία με εφαρμογή αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss [(Κατσικαδέλης, 1999), (Παπαδρακάκης, 2001)]. Ωστόσο, στην συγκεκριμένη περίπτωση, λόγω των απλών εκφράσεων των πυρήνων, ενδείκνυται η αναλυτική ολοκλήρωση κατά μήκος του στοιχείου Γ_j , αποφεύγοντας έτσι το αριθμητικό σφάλμα και την αύξηση υπολογιστικού χρόνου. Με χρήση των σχέσεων (2.3.7) τα ολοκληρώματα των συντελεστών \hat{F}_{ij} (σχέσεις 2.3.15) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως (Μώκος, 2007)

$$\hat{F}_{1j} = \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.3.27\alpha)$$

$$\hat{F}_{2j} = -\frac{1}{4} \left[(l-x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.3.27\beta)$$

όπου x_{j1} , x_{j2} είναι οι συντεταγμένες των άκρων του στοιχείου Γ_j (Σχ. 2.3.1). Επιπλέον, με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3.7) οι συντελεστές A_{ij} (σχέσεις 2.3.24) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως (Μώκος, 2007)

$$A_{ij} = -\frac{1}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.3.28\alpha)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.3.28\beta)$$

$$A_{ij} = -\frac{1}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{1}{4} \left[(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (2.3.28\gamma)$$

$$A_{ij,x} = \frac{1}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.3.28\delta)$$

$$A_{ij,x} = -\frac{1}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.3.28\epsilon)$$

$$A_{ij,x} = 0 \quad (2.3.28\sigma)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} και x_{j0} είναι οι συντεταγμένες των άκρων και του μέσου του στοιχείου Γ_j , αντίστοιχα, ενώ x_{i0} οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχ. 2.3.1).

2.4 Η ΑΕΜ για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις τετάρτης τάξης

2.4.1 Ολοκληρωτικές παραστάσεις – Αριθμητική επίλυση

Θεωρούμε το μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$N \left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}, \frac{d^4u}{dx^4} \right) = g(x), \quad x \in (0, l) \quad (2.4.1\alpha)$$

$$a_1 u + a_2 B_1 \left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3} \right) = a_3, \quad x = 0, l \quad (2.4.1\beta)$$

$$\theta_1 \frac{du}{dx} + \theta_2 B_2 \left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2} \right) = \theta_3, \quad x = 0, l \quad (2.4.1\gamma)$$

όπου $N(\)$ είναι γραμμικός ή μη γραμμικός διαφορικός τελεστής τετάρτης τάξης. B_1, B_2 είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί τελεστές τρίτης και δευτέρας τάξης, αντίστοιχα, ενώ a_i, θ_i ($i=1,2,3$) είναι γνωστές συναρτήσεις που ορίζονται στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος και $g(x)$ είναι τυχαία κατανομημένο φορτίο ή πηγή στο εσωτερικό $(0, l)$ του προβλήματος. $u = u(x)$ είναι η συνάρτηση της λύσης η οποία είναι συνεχής και τέσσερις

φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, l)$. Σύμφωνα με την ΑΕΜ το υποκατάστατο πρόβλημα θα πρέπει να είναι επίσης τετάρτης τάξης και ως η απλούστερη αναλογική εξίσωση με γνωστή θεμελιώδη λύση, μπορεί να επιλεγεί η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = p(x) \quad (2.4.2)$$

Από φυσικής άποψης, η εξίσωση (2.4.2) περιγράφει την καμπτική καταπόνηση ράβδου με δυσκαμψία $EI = 1$, η οποία υποβάλλεται στο άγνωστο πλασματικό φορτίο $p(x)$. Σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν στην ενότητα 2.2 η λύση της (2.4.1α) μπορεί να προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης (2.4.2) με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (2.4.1β,γ), εάν προσδιοριστεί το πλασματικό φορτίο $p(x)$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με χρήση της ΒΕΜ ως εξής: Η ασθενής μορφή της αναλογικής εξίσωσης γράφεται ως (Μώκος, 2007)

$$\int_0^l [u''''(x) - q_x(x)] u^*(x, \xi) dx = 0 \Rightarrow \int_0^l u''''(x) u^*(x, \xi) dx - \int_0^l q_x(x) u^*(x, \xi) dx = 0 \quad (2.4.3)$$

όπου ο συμβολισμός $()'$ υποδηλώνει παραγωγή κατά x . Ως συνάρτηση u^* χρησιμοποιείται η θεμελιώδης λύση, η οποία προκύπτει ως μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^4 u^*(x, \xi)}{dx^4} = \delta(x - \xi) \quad (2.4.4)$$

όπου $\delta(x - \xi)$ είναι η συνάρτηση δ (συνάρτηση Dirac) σε μια διάσταση (Παράρτημα Α). Η θεμελιώδης λύση u^* προκύπτει ως [(Sapountzakis and Katsikadelis, 2000), (Μώκος, 2007)]

$$u^*(x, \xi) = \frac{1}{12} (|r|^3 - 3|r|^2 + 2l^3) = \frac{1}{12} l^3 (2 + |\rho|^3 - 3|\rho|^2) \quad (2.4.5)$$

όπου $r = x - \xi$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων x, ξ . Το σημείο ξ αποτελεί το σταθερό σημείο ταξιδείας ενώ το σημείο x διατρέχει το διάστημα $(0, l)$. $\rho = r/l$ είναι η ανηγμένη απόσταση μεταξύ των σημείων x, ξ . Εφαρμόζοντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες στο πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.4.3), αντικαθιστώντας τις (2.4.2) και (2.4.5) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης Dirac, (Παράρτημα Α) προκύπτει

$$u(\xi) = \int_0^l \Lambda_4(x, \xi) p(x) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi) u(x) + \Lambda_2(x, \xi) u'(x) - \Lambda_3(x, \xi) u''(x) + \Lambda_4(x, \xi) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.6)$$

Με $\Lambda_i(r)$ ($i=1,2,3,4$) συμβολίζονται οι δισημειακοί πυρήνες, οι οποίοι δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (Μώκος, 2007)

$$\Lambda_1(x, \xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} r = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \rho \quad (2.4.7\alpha)$$

$$\Lambda_2(x, \xi) = \frac{1}{2} (|r| - l) = -\frac{1}{2} l (1 - |\rho|) \quad (2.4.7\beta)$$

$$\Lambda_3(x, \xi) = \frac{1}{4} |r| (|r| - 2l) \operatorname{sgn} r = \frac{1}{4} l^2 |\rho| (|\rho| - 2) \operatorname{sgn} \rho \quad (2.4.7\gamma)$$

$$\Lambda_4(x, \xi) = \frac{1}{12} (|r|^3 - 3l|r|^2 + 2l^3) = \frac{1}{12} l^3 (2 + |\rho|^3 - 3|\rho|^2) \quad (2.4.7\delta)$$

όπου sgn είναι η συνάρτηση signum που ορίζεται από τη σχέση (2.3.8). Η σχέση (2.4.6) αποτελεί την ολοκληρωτική παράσταση της λύσης του προβλήματος συναρτήσεως του πλασματικού φορτίου και των συνοριακών ποσοτήτων. Προκειμένου να συσχετίσουμε τις συνοριακές ποσότητες με το πλασματικό φορτίο, εφαρμόζουμε την ολοκληρωτική παράσταση (2.4.6) στα άκρα $0, l$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει

$$\xi \rightarrow \xi_0 = 0^+ \quad (2.4.8\alpha)$$

$$\xi \rightarrow \xi_l = l^- \quad (2.4.8\beta)$$

Οπότε λαμβάνουμε δύο συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις ως

$$u(0) = \int_0^l \Lambda_4(x, \xi_0) p(x) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_0) u(x) + \Lambda_2(x, \xi_0) u'(x) - \Lambda_3(x, \xi_0) u''(x) + \Lambda_4(x, \xi_0) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.9\alpha)$$

$$u(l) = \int_0^l \Lambda_4(x, \xi_l) p(x) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_l) u(x) + \Lambda_2(x, \xi_l) u'(x) - \Lambda_3(x, \xi_l) u''(x) + \Lambda_4(x, \xi_l) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.9\beta)$$

Οι ολοκληρωτικές σχέσεις (2.4.9) μπορούν να διατυπωθούν σε μητρωϊκή μορφή ως

$$[\mathbf{E}_{11} \quad \mathbf{E}_{12} \quad \mathbf{E}_{13} \quad \mathbf{E}_{14}] \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}_{,x} \\ \hat{u}_{,xx} \\ \hat{u}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_1 \quad (2.4.10)$$

όπου

$$\hat{u}^T = [u(0) \quad u(l)] \quad (2.4.11\alpha)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{,x}^T = [u'(0) \quad u'(l)] \quad (2.4.11\beta)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{,xx}^T = [u''(0) \quad u''(l)] \quad (2.4.11\gamma)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{,xxx}^T = [u'''(0) \quad u'''(l)] \quad (2.4.11\delta)$$

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} \Lambda_1(0, \xi_0) + 1 & -\Lambda_1(l, \xi_0) \\ \Lambda_1(0, \xi_l) & -\Lambda_1(l, \xi_l) + 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.11\epsilon)$$

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} -\Lambda_2(0, \xi_0) & \Lambda_2(l, \xi_0) \\ -\Lambda_2(0, \xi_l) & \Lambda_2(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (2.4.11\sigma\tau)$$

$$\mathbf{E}_{13} = \begin{bmatrix} \Lambda_3(0, \xi_0) & -\Lambda_3(l, \xi_0) \\ \Lambda_3(0, \xi_l) & -\Lambda_3(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (2.4.11\zeta)$$

$$\mathbf{E}_{14} = \begin{bmatrix} -\Lambda_4(0, \xi_0) & \Lambda_4(l, \xi_0) \\ -\Lambda_4(0, \xi_l) & \Lambda_4(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (2.4.11\eta)$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{Bmatrix} \int_0^l \Lambda_4(x, \xi_0) p(x) dx \\ \int_0^l \Lambda_4(x, \xi_l) p(x) dx \end{Bmatrix} \quad (2.4.11\theta)$$

Τα μητρώα των σχέσεων (2.4.11ε-η) με τη βοήθεια των σχέσεων (2.4.7) προκύπτουν ως

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.4.12\alpha)$$

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} l/2 & 0 \\ 0 & -l/2 \end{bmatrix} \quad (2.4.12\beta)$$

$$\mathbf{E}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & l^2/4 \\ l^2/4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.12\gamma)$$

$$\mathbf{E}_{14} = \begin{bmatrix} -l^3/6 & 0 \\ 0 & l^3/6 \end{bmatrix} \quad (2.4.12\delta)$$

Οι εξισώσεις (2.4.10) και (2.4.1β,γ) δεν επαρκούν για την έκφραση των συνοριακών ποσοτήτων συναρτήσεως του πλασματικού φορτίου και χρειαζόμαστε μια επιπλέον συνοριακή εξίσωση σε κάθε άκρο του διαστήματος $(0, l)$. Οι εξισώσεις αυτές θα προκύψουν από την ολοκληρωτική παράσταση της παραγώγου της λύσης, η οποία προκύπτει με παραγωγή ως προς ξ ως

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}_4(x, \xi)}{\partial \xi} \rho(x) dx - \left[-\frac{\partial \mathcal{L}_1(x, \xi)}{\partial \xi} u(x) + \frac{\partial \mathcal{L}_2(x, \xi)}{\partial \xi} u'(x) - \frac{\partial \mathcal{L}_3(x, \xi)}{\partial \xi} u''(x) + \frac{\partial \mathcal{L}_4(x, \xi)}{\partial \xi} u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.13)$$

όπου

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1(x, \xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (2.4.14\alpha)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2(x, \xi)}{\partial \xi} = -\mathcal{L}_1(x, \xi) \quad (2.4.14\beta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_3(x, \xi)}{\partial \xi} = -\mathcal{L}_2(x, \xi) \quad (2.4.14\gamma)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4(x, \xi)}{\partial \xi} = -\mathcal{L}_3(x, \xi) \quad (2.4.14\delta)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.4.14) και εφαρμόζοντας την ολοκληρωτική παράσταση στα άκρα του διαστήματος $0, l$ προκύπτουν οι παρακάτω συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις

$$\frac{du(0)}{d\xi} = -\int_0^l \mathcal{L}_3(x, \xi_0) \rho(x) dx - \left[-\mathcal{L}_1(x, \xi_0) u'(x) + \mathcal{L}_2(x, \xi_0) u''(x) - \mathcal{L}_3(x, \xi_0) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.15\alpha)$$

$$\frac{du(l)}{d\xi} = \int_0^l \mathcal{L}_3(x, \xi_l) \rho(x) dx - \left[-\mathcal{L}_1(x, \xi_l) u'(x) + \mathcal{L}_2(x, \xi_l) u''(x) - \mathcal{L}_3(x, \xi_l) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.15\beta)$$

Οι ολοκληρωτικές σχέσεις (2.4.15) μπορούν να διατυπωθούν σε μητρική μορφή ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}_{,x} \\ \hat{u}_{,xx} \\ \hat{u}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2 \quad (2.4.16)$$

όπου

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(0, \xi_0) + 1 & -\mathcal{L}_1(l, \xi_0) \\ \mathcal{L}_1(0, \xi_l) & -\mathcal{L}_1(l, \xi_l) + 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.17\alpha)$$

$$\mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} -\Lambda_2(0, \xi_0) & \Lambda_2(l, \xi_0) \\ -\Lambda_2(0, \xi_l) & \Lambda_2(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (2.4.17\beta)$$

$$\mathbf{E}_{23} = \begin{bmatrix} \Lambda_3(0, \xi_0) & -\Lambda_3(l, \xi_0) \\ \Lambda_3(0, \xi_l) & -\Lambda_3(l, \xi_l) \end{bmatrix} \quad (2.4.17\gamma)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{Bmatrix} -\int_0^l \Lambda_3(x, \xi_0) \rho(x) dx \\ -\int_0^l \Lambda_3(x, \xi_l) \rho(x) dx \end{Bmatrix} \quad (2.4.17\delta)$$

Τα μητρώα των σχέσεων (2.4.17α-γ) με τη βοήθεια των σχέσεων (2.4.7) προκύπτουν ως

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.4.18\alpha)$$

$$\mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} l/2 & 0 \\ 0 & -l/2 \end{bmatrix} \quad (2.4.18\beta)$$

$$\mathbf{E}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & l^2/4 \\ l^2/4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.18\gamma)$$

Οι σχέσεις (2.4.10) και (2.4.16) γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,xx} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4.19)$$

Οι εξισώσεις (2.4.19) και (2.4.1β,γ) επαρκούν για την έκφραση των συνοριακών ποσοτήτων συναρτήσει του πλασματικού φορτίου. Στη συνέχεια, προχωρούμε στη διακριτοποίηση του διαστήματος $(0, l)$. Διαιρούμε το διάστημα σε L ίσα γραμμικά στοιχεία με μήκος l/L το καθένα, στα οποία υιοθετείται η υπόθεση ότι το πλασματικό φορτίο $\rho(x)$ έχει σταθερή τιμή και ίση με αυτή στον κόμβο στο μέσο του στοιχείου (Σχ. 2.3.1). Χρησιμοποιώντας την παραδοχή αυτή, το διάνυσμα $\mathbf{T}^T = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2]$ προσεγγίζεται ως

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^L p_j \int_{\Gamma_j} \Lambda_4(x, \xi_0) dx \\ \sum_{j=1}^L p_j \int_{\Gamma_j} \Lambda_4(x, \xi_l) dx \\ \dots \\ -\sum_{j=1}^L p_j \int_{\Gamma_j} \Lambda_3(x, \xi_0) dx \\ -\sum_{j=1}^L p_j \int_{\Gamma_j} \Lambda_3(x, \xi_l) dx \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \dots & \hat{F}_{1L} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} & \dots & \hat{F}_{2L} \\ \hat{F}_{31} & \hat{F}_{32} & \dots & \hat{F}_{3L} \\ \hat{F}_{41} & \hat{F}_{42} & \dots & \hat{F}_{4L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (2.4.20)$$

όπου οι συντελεστές \hat{F}_{ij} ($i=1,2,3,4$) και ($j=1,2,\dots,L$) ορίζονται ως

$$\hat{F}_{1j} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_4(x, \xi_0) dx \quad (2.4.21\alpha)$$

$$\hat{F}_{2j} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_4(x, \xi_l) dx \quad (2.4.21\beta)$$

$$\hat{F}_{3j} = -\int_{\Gamma_j} \Lambda_3(x, \xi_0) dx \quad (2.4.21\gamma)$$

$$\hat{F}_{4j} = -\int_{\Gamma_j} \Lambda_3(x, \xi_l) dx \quad (2.4.21\delta)$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε τις συνοριακές συνθήκες (2.4.1β), οι οποίες στη γενική τους μορφή θεωρούνται μη γραμμικές, σε μητρική μορφή ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,xx} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,xxx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_1^{nl} \\ \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.4.22)$$

όπου \mathbf{D}_{11} έως \mathbf{D}_{24} είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων 2×2 με γνωστούς συντελεστές, τα οποία περιλαμβάνουν και τις τιμές των συνοριακών συναρτήσεων a_i, β_i ($i=1,2$), που παρουσιάζονται στις σχέσεις (2.4.1β,γ), ενώ $\mathbf{D}_1^{nl}, \mathbf{D}_2^{nl}$ είναι διανύσματα διαστάσεων 2×1 που περιέχουν τους μη γραμμικούς όρους που περιλαμβάνονται στις εκφράσεις των διαφορικών συνοριακών συνθηκών (2.4.1β,γ). $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3$ είναι γνωστά διανύσματα διαστάσεων 2×1 που περιλαμβάνουν τις τιμές της συνοριακών συναρτήσεων a_3, β_3 που παρουσιάζονται στις σχέσεις (2.4.1β,γ) στα άκρα $0, l$. Συνολικά, οι εξισώσεις (2.4.19) και (2.4.22) γράφονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,xx} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \mathbf{p} \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}_1^{nl} \\ \boldsymbol{\beta}_3 - \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} \quad (2.4.23)$$

Στην περίπτωση των γραμμικών συνοριακών συνθηκών τα συνοριακά μεγέθη εκφράζονται συναρτήσει των πλασματικών φορτίων με απευθείας αντιστροφή του μητρώου των συντελεστών τους. Εναλλακτικά οι συνοριακές εξισώσεις (2.4.23) διατυπώνονται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,x} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,xx} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}_1^{nl} \\ \boldsymbol{\beta}_3 - \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}_1^{nl} \\ \boldsymbol{\beta}_3 - \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} \quad (2.4.24)$$

όπου $\mathbf{F}_1 = -\hat{\mathbf{F}}_1$ και $\mathbf{F}_2 = -\hat{\mathbf{F}}_2$. Το σύστημα (2.4.23) ή (2.4.24) αποτελείται από 8 αλγεβρικές εξισώσεις ως προς 8+L αγνώστους. Επομένως οι άγνωστοι του προβλήματος είναι υπεράριθμοι και χρειαζόμαστε L ακόμη εξισώσεις για τον προσδιορισμό τους.

Η λύση σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος (0,l) θα προκύψει από εφαρμογή της ολοκληρωτικής παράστασης της λύσης (2.4.6). Η σχέση αυτή με χρήση της διακριτοποίησης του διαστήματος μπορεί να γραφτεί στη θέση ξ_i του i εσωτερικού στοιχείου, ως εξής:

$$u(\xi_i) = \sum_{j=1}^L p_j \int_0^l \Lambda_4(x, \xi_i) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_i) u(x) + \Lambda_2(x, \xi_i) u'(x) - \Lambda_3(x, \xi_i) u''(x) + \Lambda_4(x, \xi_i) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.25)$$

Για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο να υπολογιστούν και οι παράγωγοι της λύσης. Η πρώτη παράγωγος έχει ήδη προσδιοριστεί και δίνεται από τη σχέση (2.4.13). Εφαρμόζοντας αναλυτικές παραγωγίσεις στη σχέση (2.4.13) προκύπτουν και οι υπόλοιπες δύο παράγωγοι. Τελικά οι ζητούμενες διακριτοποιημένες εκφράσεις των παραγώγων της λύσης στη θέση ξ^i , προκύπτουν ως (Μώκος, 2007)

$$\frac{du(\xi_i)}{d\xi} = - \sum_{j=1}^L p_j \int_0^l \Lambda_3(x, \xi_i) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_i) u'(x) + \Lambda_2(x, \xi_i) u''(x) - \Lambda_3(x, \xi_i) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.26\alpha)$$

$$\frac{d^2u(\xi_i)}{d\xi^2} = \sum_{j=1}^L p_j \int_0^l \Lambda_2(x, \xi_i) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_i) u''(x) + \Lambda_2(x, \xi_i) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.26\beta)$$

$$\frac{d^3 u(\xi_i)}{d\xi^3} = -\sum_{j=1}^L p_j \int_0^l \Lambda_j(x, \xi_i) dx - \left[-\Lambda_1(x, \xi_i) u'''(x) \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.4.26\gamma)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.4.25) και (2.4.26) στα L σημεία ταξιθεσίας προκύπτει

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}_{,x} \\ \hat{u}_{,xx} \\ \hat{u}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.4.27\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{A}_{,x}\mathbf{p} + \mathbf{C}_{,x} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}_{,x} \\ \hat{u}_{,xx} \\ \hat{u}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{,x}\mathbf{d} \quad (2.4.27\beta)$$

$$\mathbf{u}_{,xx} = \mathbf{A}_{,xx}\mathbf{p} + \mathbf{C}_{,xx} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}_{,x} \\ \hat{u}_{,xx} \\ \hat{u}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{,xx}\mathbf{d} \quad (2.4.27\gamma)$$

$$\mathbf{u}_{,xxx} = \mathbf{A}_{,xxx}\mathbf{p} + \mathbf{C}_{,xxx} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}_{,x} \\ \hat{u}_{,xx} \\ \hat{u}_{,xxx} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{,xxx}\mathbf{d} \quad (2.4.27\delta)$$

όπου

$$\mathbf{u}^T = [(u)_1 \quad (u)_2 \quad \cdots \quad (u)_L] \quad (2.4.28\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{,x}^T = [(u')_1 \quad (u')_2 \quad \cdots \quad (u')_L] \quad (2.4.28\beta)$$

$$\mathbf{u}_{,xx}^T = [(u'')_1 \quad (u'')_2 \quad \cdots \quad (u'')_L] \quad (2.4.28\gamma)$$

$$\mathbf{u}_{,xxx}^T = [(u''')_1 \quad (u''')_2 \quad \cdots \quad (u''')_L] \quad (2.4.28\delta)$$

είναι μητρώα στήλες διαστάσεων $L \times 1$ τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές της u και των παραγώγων της ως προς x στα L εσωτερικά κομβικά σημεία κατά μήκος του εξεταζόμενου διαστήματος. Τα \mathbf{A} , $\mathbf{A}_{,x}$, $\mathbf{A}_{,xx}$, $\mathbf{A}_{,xxx}$ είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $L \times L$ των οποίων οι συντελεστές δίδονται από τις σχέσεις

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_4(x, \xi_i) dx \quad (2.4.29\alpha)$$

$$A_{ij,x} = -\int_{\Gamma_j} \Lambda_3(x, \xi_i) dx \quad (2.4.29\beta)$$

$$A_{ij,xx} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(x, \xi_i) dx \quad (2.4.29\gamma)$$

$$A_{ij,xxx} = -\int_{\Gamma_j} \Lambda_1(x, \xi_i) dx \quad (2.4.29\delta)$$

Τα μητρώα \mathbf{C} , $\mathbf{C}_{,x}$, $\mathbf{C}_{,xx}$, $\mathbf{C}_{,xxx}$ είναι διαστάσεων $L \times 8$ και ορίζονται ως

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \Lambda_4(0, \xi_1) & -\Lambda_3(0, \xi_1) & \Lambda_2(0, \xi_1) & -\Lambda_1(0, \xi_1) & | & -\Lambda_4(l, \xi_1) & \Lambda_3(l, \xi_1) & -\Lambda_2(l, \xi_1) & \Lambda_1(l, \xi_1) \\ \Lambda_4(0, \xi_2) & -\Lambda_3(0, \xi_2) & \Lambda_2(0, \xi_2) & -\Lambda_1(0, \xi_2) & | & -\Lambda_4(l, \xi_2) & \Lambda_3(l, \xi_2) & -\Lambda_2(l, \xi_2) & \Lambda_1(l, \xi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_4(0, \xi_L) & -\Lambda_3(0, \xi_L) & \Lambda_2(0, \xi_L) & -\Lambda_1(0, \xi_L) & | & -\Lambda_4(l, \xi_L) & \Lambda_3(l, \xi_L) & -\Lambda_2(l, \xi_L) & \Lambda_1(l, \xi_L) \end{bmatrix} \quad (2.4.30\alpha)$$

$$\mathbf{C}_{,x} = \begin{bmatrix} -\Lambda_3(0, \xi_1) & \Lambda_2(0, \xi_1) & -\Lambda_1(0, \xi_1) & 0 & | & \Lambda_3(l, \xi_1) & -\Lambda_2(l, \xi_1) & \Lambda_1(l, \xi_1) & 0 \\ -\Lambda_3(0, \xi_2) & \Lambda_2(0, \xi_2) & -\Lambda_1(0, \xi_2) & 0 & | & \Lambda_3(l, \xi_2) & -\Lambda_2(l, \xi_2) & \Lambda_1(l, \xi_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Lambda_3(0, \xi_L) & \Lambda_2(0, \xi_L) & -\Lambda_1(0, \xi_L) & 0 & | & \Lambda_3(l, \xi_L) & -\Lambda_2(l, \xi_L) & \Lambda_1(l, \xi_L) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.30\beta)$$

$$\mathbf{C}_{,xx} = \begin{bmatrix} \Lambda_2(0, \xi_1) & -\Lambda_1(0, \xi_1) & 0 & 0 & | & -\Lambda_2(l, \xi_1) & \Lambda_1(l, \xi_1) & 0 & 0 \\ \Lambda_2(0, \xi_2) & -\Lambda_1(0, \xi_2) & 0 & 0 & | & -\Lambda_2(l, \xi_2) & \Lambda_1(l, \xi_2) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_2(0, \xi_L) & -\Lambda_1(0, \xi_L) & 0 & 0 & | & -\Lambda_2(l, \xi_L) & \Lambda_1(l, \xi_L) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.30\gamma)$$

$$\mathbf{C}_{,xxx} = \begin{bmatrix} -\Lambda_1(0, \xi_1) & 0 & 0 & 0 & | & \Lambda_1(l, \xi_1) & 0 & 0 & 0 \\ -\Lambda_1(0, \xi_2) & 0 & 0 & 0 & | & \Lambda_1(l, \xi_2) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Lambda_1(0, \xi_L) & 0 & 0 & 0 & | & \Lambda_1(l, \xi_L) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.30\delta)$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.4.7) λαμβάνουμε

$$\Lambda_1(0, \xi_i) = -\frac{1}{2} \quad (2.4.31\alpha)$$

$$\Lambda_2(0, \xi_i) = \frac{1}{2}(\xi_i - l) \quad (2.4.31\beta)$$

$$\Lambda_3(0, \xi_i) = -\frac{1}{4}\xi_i(\xi_i - 2l) \quad (2.4.31\gamma)$$

$$\Lambda_4(0, \xi_i) = \frac{1}{12}(\xi_i^3 - 3l\xi_i^2 + 2l^3) \quad (2.4.31\delta)$$

$$\Lambda_1(l, \xi_i) = \frac{1}{2} \quad (2.4.31\epsilon)$$

$$\Lambda_2(l, \xi_i) = -\frac{1}{2}\xi_i \quad (2.4.31\sigma\tau)$$

$$\Lambda_3(l, \xi_i) = -\frac{1}{4}(l^2 - \xi_i^2) \quad (2.4.31\zeta)$$

$$\Lambda_4(l, \xi_i) = +\frac{1}{12}\left((l - \xi_i)^3 - 3l(l - \xi_i)^2 + 2l^3\right) \quad (2.4.31\eta)$$

όπου $\xi_i = x_{i0}$ οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχ. 2.3.1). Το τελικό βήμα της ΑΕΜ είναι η εφαρμογή της κυρίαρχης εξίσωσης (2.4.1) στα L εσωτερικά κομβικά σημεία του εξεταζόμενου διαστήματος και στη συνέχεια η αντικατάσταση των διακριτοποιημένων τιμών της u και των παραγώγων της στα L εσωτερικά σημεία σύμφωνα με τις σχέσεις (2.4.27). Είναι προφανές ότι λόγω ισχύος της αναλογικής εξίσωσης (2.4.2), το διάνυσμα των τιμών της τετάρτης παραγώγου u'''' στα κομβικά σημεία ισούται με το διάνυσμα του πλασματικού φορτίου \mathbf{p} . Έτσι, προκύπτει ένα επιπλέον σύστημα L αλγεβρικών εξισώσεων ως προς το άγνωστο διάνυσμα \mathbf{d} . Επιλύοντας αριθμητικά το εν λόγω σύστημα μαζί με τις συνοριακές εξισώσεις (2.4.24) υπολογίζεται το πλασματικό φορτίο και οι τιμές της u και των παραγώγων της στα άκρα του εξεταζόμενου διαστήματος. Στη συνέχεια με χρήση των (2.4.27) λαμβάνουμε το διάνυσμα των τιμών της λύσης και των παραγώγων της στα L εσωτερικά κομβικά σημεία.

2.4.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Ο προσδιορισμός των μητρώων \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{A} , $\mathbf{A}_{,x}$, $\mathbf{A}_{,xx}$ και $\mathbf{A}_{,xxx}$ (σχέσεις (2.4.24), (2.3.27)) επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που ορίζονται από τις σχέσεις (2.4.21) και (2.4.29). Ο Υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία με εφαρμογή αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss [(Κατσιακαδέλης, 1999), (Παπαδρακάκης, 2001)]. Ωστόσο στην συγκεκριμένη περίπτωση, λόγω των απλών εκφράσεων των πυρήνων, ενδείκνυται η αναλυτική ολοκλήρωση κατά μήκος του στοιχείου Γ_j , αποφεύγοντας έτσι το αριθμητικό σφάλμα και την αύξηση υπολογιστικού χρόνου. Με χρήση των σχέσεων (2.4.7) τα ολοκληρώματα των συντελεστών \hat{F}_{ij} ($i=1,2,3,4$) (σχέσεις (2.4.21)) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως (Μώκος, 2007)

$$\hat{F}_{1j} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x + \frac{1}{4} x^4 - lx^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.4.32\alpha)$$

$$\hat{F}_{2j} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x - \frac{1}{4} (l-x)^4 + l(l-x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.4.32\beta)$$

$$\hat{F}_{3j} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} x^3 - lx^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.4.32\gamma)$$

$$\hat{F}_{4j} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (l-x)^3 - l(l-x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}} \quad (2.4.32\delta)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} είναι οι συντεταγμένες των άκρων του στοιχείου Γ_j (Σχ. 2.3.1). Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.4.7) οι συντελεστές A_{ij} , $A_{ij,x}$, $A_{ij,xx}$ και $A_{ij,xxx}$ (σχέσεις (2.4.29)) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά ως (Μώκος, 2007)

$$A_{ij} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x - \frac{1}{4} (x_{i0} - x)^4 + l(x_{i0} - x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.4.33\alpha)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x + \frac{1}{4} (x - x_{i0})^4 - l(x - x_{i0})^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.4.33\beta)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{12} \left[2l^3 x - \frac{1}{4} (x_{i0} - x)^4 + l(x_{i0} - x)^3 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{1}{12} \left[2l^3 x + \frac{1}{4} (x - x_{i0})^4 - l(x - x_{i0})^3 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (2.4.33\gamma)$$

$$A_{ij,x} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (x_{i0} - x)^3 - l(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.4.34\alpha)$$

$$A_{ij,x} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (x - x_{i0})^3 - l(x - x_{i0})^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.4.34\beta)$$

$$A_{ij,x} = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (x_{i0} - x)^3 - l(x_{i0} - x)^2 \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} (x - x_{i0})^3 - l(x - x_{i0})^2 \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i = j \quad (2.4.34\gamma)$$

$$A_{ij,xx} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x_{i0} - x)^2 + lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.4.35\alpha)$$

$$A_{ij,xx} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x - x_{i0})^2 - lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.4.35\beta)$$

$$A_{ij,xx} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x_{i0} - x)^2 + lx \right]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j0}} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x - x_{i0})^2 - lx \right]_{x=x_{j0}}^{x=x_{j2}}, \quad i=j \quad (2.4.35\gamma)$$

$$A_{ij,xxx} = \frac{1}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i > j \quad (2.4.36\alpha)$$

$$A_{ij,xxx} = -\frac{1}{2} [x]_{x=x_{j1}}^{x=x_{j2}}, \quad i < j \quad (2.4.36\beta)$$

$$A_{ij,xxx} = 0, \quad i = j \quad (2.4.36\gamma)$$

όπου x_{j1}, x_{j2} και x_{j0} είναι οι συντεταγμένες των άκρων και του μέσου του στοιχείου Γ_j , αντίστοιχα, ενώ x_{i0} οι συντεταγμένες του μέσου του στοιχείου Γ_i (Σχ. 2.3.1).

2.5 Η ΑΕΜ για μερικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξης που περιλαμβάνουν τον τελεστή Laplace

2.5.1 Ολοκληρωτικές παραστάσεις – Αριθμητική επίλυση

Θεωρούμε το δισδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$N \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \nabla^2 u \right) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.5.1\alpha)$$

$$a_1 u + a_2 B \left(u, \frac{\partial u}{\partial n} \right) = a_3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.5.1\beta)$$

όπου $N(\cdot)$, $B(\cdot)$ είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί διαφορικοί τελεστές δευτέρας και πρώτης τάξης, αντίστοιχα. a_i ($i=1,2,3$) είναι γνωστές συναρτήσεις που ορίζονται στο σύνορο του εξεταζόμενου προβλήματος και $g(\mathbf{x})$ είναι τυχαία κατανεμημένο φορτίο ή πηγή στο χωρίο Ω του προβλήματος. $u = u(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση της λύσης η οποία είναι συνεχής και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ω . Σύμφωνα με την ΑΕΜ το υποκατάστατο πρόβλημα θα πρέπει να είναι επίσης δευτέρας τάξης και ως η απλούστερη αναλογική εξίσωση με γνωστή θεμελιώδη λύση, μπορεί να επιλεγεί η εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 u = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.5.2)$$

Η εξίσωση Poisson είναι η δεσπόζουσα εξίσωση στη θεωρία δυναμικού. Σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν στην ενότητα 2.2 η λύση της (2.5.1α) μπορεί να προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης (2.5.2) με την ίδια συνοριακή συνθήκη (2.5.1β), εάν προσδιοριστεί το

πλασματικό φορτίο $p(\mathbf{x})$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με χρήση της BEM ως εξής: Θεωρούμε τη δεύτερη ταυτότητα του Green (Κατσιακαδέλης, 1999) για δύο συναρτήσεις $u = u(\mathbf{x})$ και $u^* = u^*(\mathbf{x})$

$$\iint_{\Omega} (u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) ds \quad (2.5.3)$$

Ως συνάρτηση u^* χρησιμοποιείται η θεμελιώδης λύση για τον τελεστή Laplace, η οποία προκύπτει ως μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\nabla^2 u^*(Q, P) = \delta(Q - P) \quad (2.5.4)$$

όπου $\delta(Q - P)$ είναι η συνάρτηση δ (συνάρτηση Dirac) σε δύο διαστάσεις (Παράρτημα Α). Εκφράζοντας την (2.5.4) σε πολικές συντεταγμένες (Κατσιακαδέλης, 1999), προκύπτει η θεμελιώδης λύση της, η οποία είναι η συνάρτηση

$$u^* = u^*(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \ln r(Q, P) \quad (2.5.5)$$

όπου $r = |Q - P| = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right]^{1/2}$, $Q(\xi, \eta) \in \Omega$, $P(x, y) \in \Omega$. Το σημείο P είναι το σταθερό σημείο ταξιοθεσίας, ενώ το σημείο Q διατρέχει το χωρίο Ω και το σύνορο Γ . Αντικαθιστώντας τις (2.5.2), (2.5.5) στην (2.5.3) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης Dirac (Παράρτημα Α), προκύπτει

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (u^*(Q, P) p(Q) - u(Q) \delta(Q - P)) d\Omega &= \int_{\Gamma} \left(u^*(q, P) \frac{\partial u(q)}{\partial n} - \frac{\partial u^*(q, P)}{\partial n} u(q) \right) ds \Rightarrow \\ u(P) &= \iint_{\Omega} u^*(Q, P) p(Q) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(u^*(q, P) \frac{\partial u(q)}{\partial n} - \frac{\partial u^*(q, P)}{\partial n} u(q) \right) ds \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

όπου $q(\xi, \eta) \in \Gamma$. Η σχέση (2.5.6) αποτελεί την ολοκληρωτική παράσταση της λύσης του προβλήματος συναρτήσεως του πλασματικού φορτίου και των συνοριακών ποσοτήτων. Η (2.5.6) γράφεται ως εξής

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} (\Lambda_2(r) - 1) p(Q) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\Lambda_1(r) u(q) + (\Lambda_2(r) - 1) \frac{\partial u(q)}{\partial n} \right] ds \quad (2.5.7)$$

Με $\Lambda_i(r)$ ($i=1,2$) συμβολίζονται οι δισημειακοί πυρήνες, οι οποίοι δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\Lambda_1(r) = -\frac{\cos\varphi}{r} \quad (2.5.8\alpha)$$

$$\Lambda_2(r) = \ln r + 1 \quad (2.5.8\beta)$$

όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζεται από το διάνυσμα \mathbf{r} και το κάθετο, στην καμπύλη του συνόρου, διάνυσμα \mathbf{n} . Εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις μεταξύ των $r, \varphi, \chi, \gamma, \xi, \eta$ και των συνημιτόνων κατεύθυνσης του \mathbf{n} (Κατσικαδέλης 1999), οι παραπάνω πυρήνες (2.5.8) μπορούν να γραφτούν ως εξής

$$\Lambda_1(r) = -\frac{r, \mathbf{n}}{r} \quad (2.5.9\alpha)$$

$$\Lambda_2(r) = \ln r + 1 \quad (2.5.9\beta)$$

Ο συμβολισμός $(\)_{,n}$ υποδηλώνει παραγώγιση ως προς το μέγεθος που βρίσκεται μετά το κόμμα. Οι εκφράσεις των παραγώγων του r παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β. Προκειμένου να συσχετίσουμε τις συνοριακές ποσότητες με το πλασματικό φορτίο, εφαρμόζουμε την ολοκληρωτική παράσταση (2.5.7) στο σύνορο Γ . Στην περίπτωση αυτή, όπου το σημείο ταξιθεσίας $P \in \Omega$ τείνει στο σημείο $p \in \Gamma$ η συνάρτηση u είναι ασυνεχής και παρουσιάζει άλμα ίσο με $1 - \alpha/2\pi$, όπου α είναι η γωνία που σχηματίζει το σύνορο στη θέση του σημείου p . Υποθέτοντας ότι το σύνορο είναι λείο (το οποίο ισχύει στην περίπτωση των σταθερών συνοριακών στοιχείων) τότε ισχύει ότι $\alpha = \pi$ (Κατσικαδέλης, 1999). Σημειώνεται ακόμα ότι για σημεία εκτός του χωρίου Ω που δεν ανήκουν στο Γ , η ταυτότητα Green δίνει

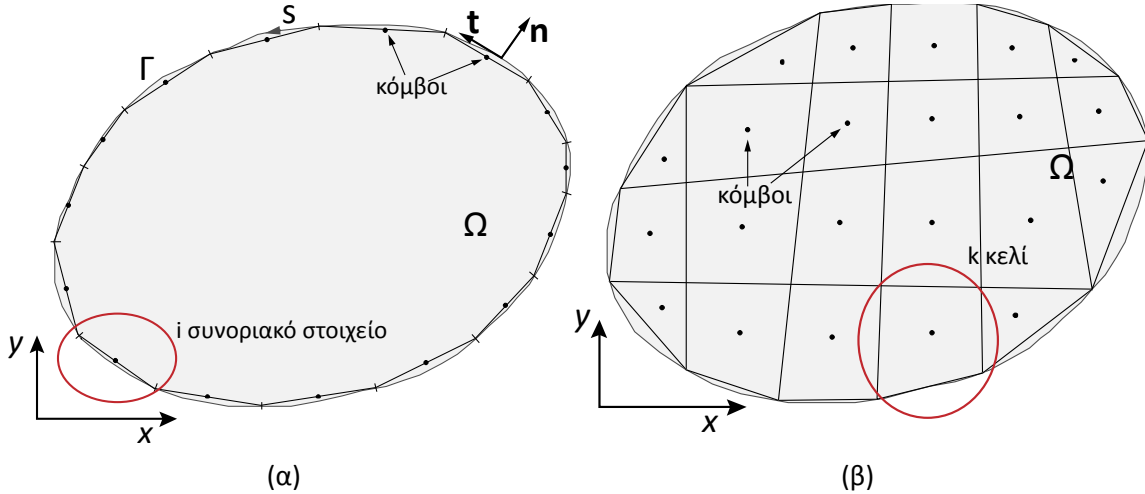
$$0 = \iint_{\Omega} u^*(Q, P) \rho(Q) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(q)}{\partial n} u^*(q, P) - u(q) \frac{\partial u^*(q, P)}{\partial n} \right) ds \quad (2.5.10)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση δίνεται ως

$$\pi u(p) = \iint_{\Omega} (\Lambda_2(r) - 1) \rho(Q) d\Omega - \int_{\Gamma} \left[\Lambda_1(r) u(q) + (\Lambda_2(r) - 1) \frac{\partial u(q)}{\partial n} \right] ds \quad (2.5.11)$$

Οι εξισώσεις (2.5.11) και (2.5.1β) επαρκούν για την έκφραση των συνοριακών ποσοτήτων συναρτήσει του πλασματικού φορτίου. Στη συνέχεια, προχωρούμε στη διακριτοποίηση του χωρίου Ω και του συνόρου Γ . Το σύνορο χωρίζεται σε N συνοριακά στοιχεία τα οποία προσεγγίζουν την καμπύλη με ευθύγραμμο τμήμα, ενώ η τιμή της συνοριακής ποσότητας θεωρείται σταθερή και ίση με την τιμή στον κόμβο στο μέσον του στοιχείου (Σχ. 2.5.1α). Το

σταθερό συνοριακό στοιχείο είναι η απλούστερη προσέγγιση της γεωμετρίας και των άγνωστων ποσοτήτων και χρησιμοποιείται λόγω της απλότητας στον προγραμματισμό του και της ικανοποιητικής ακρίβειας των αποτελεσμάτων ακόμα και με σχετικά μικρό αριθμό στοιχείων. Το χωρίο Ω χωρίζεται σε M τετραπλευρικά ή τριγωνικά κελιά στα οποία η τιμή του πλασματικού φορτίου θεωρείται σταθερή και ίση με την τιμή στον εσωτερικό κόμβο του κελιού (Σχ. 2.5.1β).



Σχήμα 2.5.1. Διακριτοποίηση του συνόρου (α) και διακριτοποίηση του χωρίου (β).

Χρησιμοποιώντας την ως άνω διακριτοποίηση, η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (2.5.11) στο i συνοριακό στοιχείο γράφεται ως

$$\pi u(p_i) = \sum_{k=1}^M p_k \iint_{\Omega_k} (\Lambda_2(r) - 1) d\Omega - \sum_{j=1}^N \left[u(q_j) \int_{\Gamma_j} \Lambda_1(r) ds + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{\Gamma_j} (\Lambda_2(r) - 1) ds \right] \quad (2.5.12)$$

όπου p_k είναι η τιμή του πλασματικού φορτίου στο επιφανειακό στοιχείο k και u_j , $\partial u(q_j)/\partial n$ είναι οι τιμές της λύσης και της παραγώγου της ως προς n , αντίστοιχα, στο συνοριακό στοιχείο j . Η εξίσωση (2.5.12) εφαρμόζεται στα N συνοριακά στοιχεία και προκύπτει το σύστημα

$$[\mathbf{H} \quad \mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,n} \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{p} \quad (2.5.13)$$

όπου \mathbf{H} , \mathbf{G} είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $N \times N$, τα στοιχεία των οποίων προκύπτουν ως

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_1(p_i, q_j) ds + \pi \delta_{ij} \quad (2.5.14\alpha)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} (\Lambda_2(p_i, q_j) - 1) ds \quad (2.5.14\beta)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του *Kronecker*, για το οποίο ισχύει $\delta_{ij} = 1$ για $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Το μητρώο $\hat{\mathbf{A}}$ είναι διαστάσεων $N \times M$ και τα στοιχεία του ορίζονται ως

$$\hat{A}_{ik} = \iint_{\Omega_k} \Lambda_2(p_i, Q_k) d\Omega \quad (2.5.15)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνοριακή διακριτοποίηση που περιγράφηκε παραπάνω και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου, η διαφορική συνοριακή εξίσωση (2.5.1β), η οποία στη γενική της μορφή υποτίθεται μη γραμμική, μπορεί να διακριτοποιηθεί ως εξής

$$[\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,n} \end{Bmatrix} + \mathbf{D}^{nl} = \boldsymbol{\alpha}_3 \quad (2.5.16)$$

όπου $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $N \times N$ με γνωστούς συντελεστές, τα οποία περιλαμβάνουν και τις τιμές των συνοριακών συναρτήσεων a_i ($i=1,2$), που παρουσιάζονται στη σχέση (2.5.1β), ενώ \mathbf{D}^{nl} είναι διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$ που περιέχει τους μη γραμμικούς όρους που περιλαμβάνονται στις εκφράσεις της διαφορικής συνοριακής συνθήκης (2.5.1β). $\boldsymbol{\alpha}_3$ είναι γνωστό διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$ που περιλαμβάνει τις τιμές της συνοριακής συνάρτησης a_3 , που παρουσιάζεται στη σχέση (2.5.1β), στα N συνοριακά στοιχεία. Συνολικά, οι εξισώσεις (2.5.13) και (2.5.16) γράφονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{A}}\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}^{nl} \end{Bmatrix} \quad (2.5.17)$$

Στην περίπτωση των γραμμικών συνοριακών συνθηκών τα συνοριακά μεγέθη εκφράζονται συναρτήσει των πλασματικών φορτίων με απευθείας αντιστροφή του μητρώου των συντελεστών τους. Εναλλακτικά οι εξισώσεις (2.5.17) διατυπώνονται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}^{nl} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}^{nl} \end{Bmatrix} \quad (2.5.18)$$

όπου $\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{A}}$. Το σύστημα (2.5.17) ή (2.5.18) αποτελείται από $2N$ αλγεβρικές εξισώσεις ως προς $2N + M$ αγνώστους. Επομένως οι άγνωστοι του προβλήματος είναι υπεράριθμοι και χρειαζόμαστε M ακόμη εξισώσεις για τον προσδιορισμό τους.

Η λύση σε εσωτερικό σημείο του χωρίου θα προκύψει από εφαρμογή της ολοκληρωτικής παράστασης της λύσης (2.5.7). Η σχέση αυτή με χρήση της διακριτοποίησης του χωρίου και του συνόρου μπορεί να γραφτεί για το k εσωτερικό κομβικό σημείο ως εξής:

$$u(P_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} (\Lambda_2(r) - 1) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[u(q_j) \int_{r_j} \Lambda_1(r) ds + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} (\Lambda_2(r) - 1) ds \right] \quad (2.5.19)$$

όπου ρ_l είναι η τιμή του πλασματικού φορτίου στο επιφανειακό στοιχείο l . Για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο να υπολογιστούν και οι παράγωγοι της λύσης. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλες αναλυτικές παραγωγίσεις ως προς x , y της ολοκληρωτικής παράστασης (2.5.7). Οι διακριτοποιημένες εκφράσεις των παραγώγων προκύπτουν ως εξής

$$\frac{\partial u(P_k)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial \Lambda_2(r)}{\partial x} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_1(r)}{\partial x} ds + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_2(r)}{\partial x} ds \right] \quad (2.5.20\alpha)$$

$$\frac{\partial u(P_k)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial \Lambda_2(r)}{\partial y} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_1(r)}{\partial y} ds + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_2(r)}{\partial y} ds \right] \quad (2.5.20\beta)$$

$$\frac{\partial^2 u(P_k)}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial x^2} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_1(r)}{\partial x^2} ds + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial x^2} ds \right] \quad (2.5.20\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u(P_k)}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial y^2} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_1(r)}{\partial y^2} ds + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial y^2} ds \right] \quad (2.5.20\delta)$$

$$\frac{\partial^2 u(P_k)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial x \partial y} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_1(r)}{\partial x \partial y} ds + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial x \partial y} ds \right] \quad (2.5.20\epsilon)$$

όπου οι παράγωγοι των δισημειακών πυρήνων $\Lambda_i(r)$ ($i=1,2$) δίνονται από τις σχέσεις (Σαπουντζάκης, 1991)

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} = -\frac{\cos(\omega - \varphi)}{r^2} = \frac{r_{,n} r_{,x} - r_{,t} r_{,y}}{r^2} \quad (2.5.21\alpha)$$

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} = -\frac{\sin(\omega - \varphi)}{r^2} = \frac{r_{,t}r_{,x} + r_{,n}r_{,y}}{r^2} \quad (2.5.21\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x^2} = -\frac{2}{r^3} \cos(2\omega - \varphi) = \frac{2(-r_{,x}^2 r_{,n} + 2r_{,t}r_{,x}r_{,y} + r_{,y}^2 r_{,n})}{r^3} \quad (2.5.21\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial y^2} = \frac{2}{r^3} \cos(2\omega - \varphi) = \frac{2(r_{,x}^2 r_{,n} - 2r_{,t}r_{,x}r_{,y} - r_{,y}^2 r_{,n})}{r^3} \quad (2.5.21\delta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{r^3} \sin(2\omega - \varphi) = -\frac{2(r_{,n}r_{,x}r_{,y} + r_{,x}^2 r_{,t} - r_{,y}^2 r_{,t})}{r^3} \quad (2.5.21\epsilon)$$

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial x} = -\frac{\cos \omega}{r} = \frac{r_{,x}}{r} \quad (2.5.22\alpha)$$

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial y} = -\frac{\sin \omega}{r} = \frac{r_{,y}}{r} \quad (2.5.22\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} (\sin^2 \omega - \cos^2 \omega) = \frac{-r_{,x}^2 + r_{,y}^2}{r^2} \quad (2.5.22\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) = \frac{r_{,x}^2 - r_{,y}^2}{r^2} \quad (2.5.22\delta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial x \partial y} = \frac{\sin 2\omega}{r^2} = -\frac{2r_{,x}r_{,y}}{r^2} \quad (2.5.22\epsilon)$$

όπου ω είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος \mathbf{r} και του άξονα x . Εφαρμογή των σχέσεων (2.5.19) και (2.5.20) στα M κομβικά σημεία του χωρίου Ω οδηγεί στις παρακάτω διακριτοποιημένες σχέσεις

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.5.23\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{B}_{,x}\mathbf{d} \quad (2.5.23\beta)$$

$$\mathbf{u}_{,y} = \mathbf{B}_{,y}\mathbf{d} \quad (2.5.23\gamma)$$

$$\mathbf{u}_{,xx} = \mathbf{B}_{,xx}\mathbf{d} \quad (2.5.23\delta)$$

$$\mathbf{u}_{,yy} = \mathbf{B}_{,yy}\mathbf{d} \quad (2.5.23\epsilon)$$

$$\mathbf{u}_{,xy} = \mathbf{B}_{,xy}\mathbf{d} \quad (2.5.23\sigma)$$

όπου $\mathbf{B}_{,x}$, $\mathbf{B}_{,y}$, $\mathbf{B}_{,xx}$, $\mathbf{B}_{,yy}$, $\mathbf{B}_{,xy}$ είναι ορθογωνικά μητρώα διαστάσεων $M \times (2N + M)$ που περιέχουν τα ολοκληρώματα των πυρήνων και των παραγώγων τους.

Μέχρι στιγμής, δεν είμαστε σε θέση να παράγουμε τη ζητούμενη λύση από τις εξισώσεις (2.5.23), καθώς δεν έχει προσδιοριστεί ακόμη το πλασματικό φορτίο και κατ' επέκταση οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Για να παράγουμε τον απαιτούμενο αριθμό

εξισώσεων για τον προσδιορισμό των ως άνω μεγεθών εφαρμόζουμε την αρχική διαφορική εξίσωση (2.5.1) στα M εσωτερικά σημεία του χωρίου. Η εφαρμογή αυτή πραγματοποιείται με αντικατάσταση των τιμών της λύσης u και των παραγώγων της από τις ποσότητες που ορίζονται από τις εξισώσεις (2.5.23). Παράγεται έτσι ένα επιπλέον σύστημα από M αλγεβρικές εξισώσεις ως προς το διάνυσμα \mathbf{d} . Το εν λόγω σύστημα μαζί με τις συνοριακές εξισώσεις (2.5.19) επιλύονται αριθμητικά για να προκύψει το πλασματικό φορτίο και οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Στην συνέχεια με χρήση των (2.5.23) μπορούμε να υπολογίσουμε τη u και τις παραγώγους της στο εσωτερικό του χωρίου Ω .

2.5.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

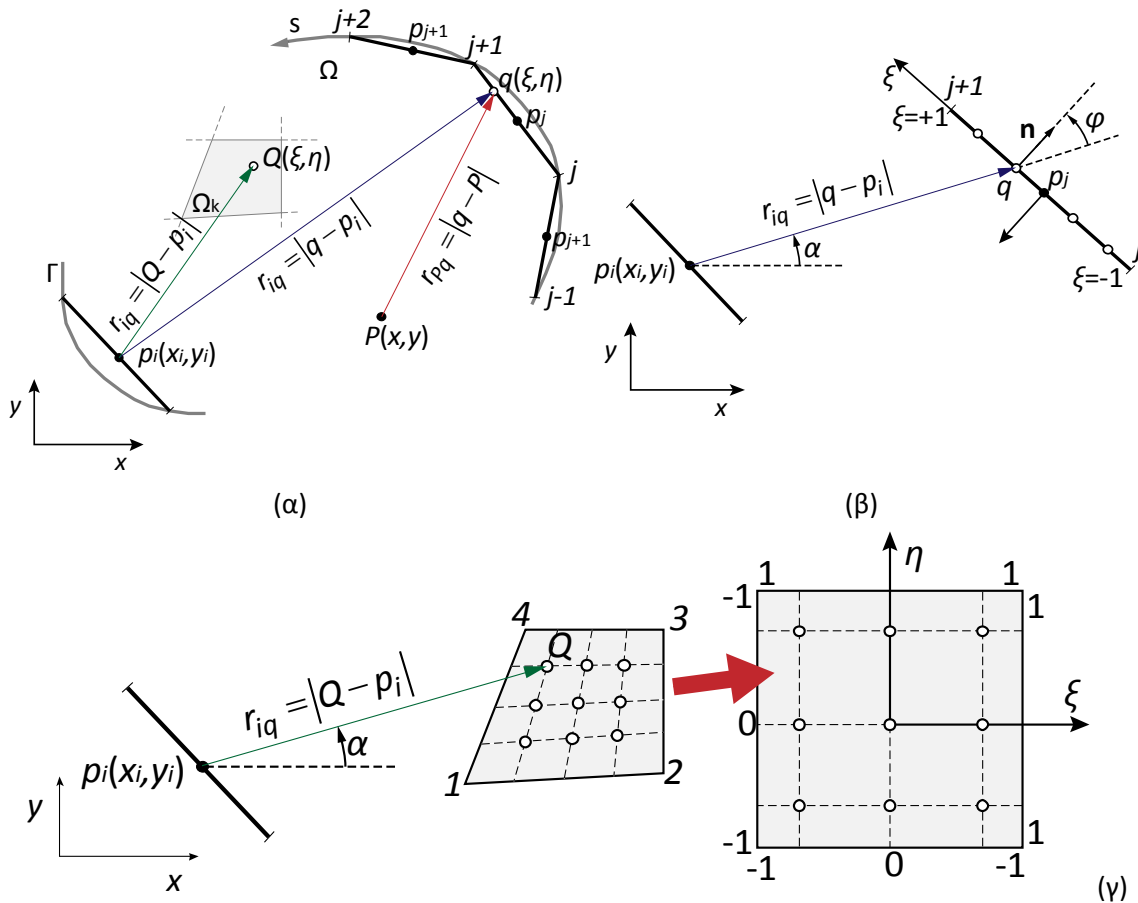
Ο προσδιορισμός των μητρώων \mathbf{H} , \mathbf{G} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{B}_{,x}$, $\mathbf{B}_{,y}$, $\mathbf{B}_{,xx}$, $\mathbf{B}_{,yy}$ και $\mathbf{B}_{,xy}$ (σχέσεις (2.5.18), (2.5.23)) επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που ορίζονται από τις σχέσεις (2.5.14), (2.5.15), (2.5.19) και (2.5.20).

Για τον υπολογισμό των συντελεστών επιρροής της σειράς i των μητρών \mathbf{H} , \mathbf{G} το σημείο p_i παραμένει σταθερό και το σημείο q διατρέχει το σύνορο με τη θετική φορά (Σχ. 2.5.2α). Για τα μη διαγώνια στοιχεία των μητρώων, όπου το στοιχείο j δεν ταυτίζεται με το στοιχείο i , οι πυρήνες των ολοκληρωμάτων παρουσιάζουν ομαλή συμπεριφορά. Συνεπώς είναι δυνατόν εφαρμοστεί αριθμητική ολοκλήρωση Gauss στο κάθε στοιχείο [(Παπαδρακάκης, 2001), (Kiusalaas, 2009)] (Σχ. 2.5.2β). Όταν $i=j$ τότε το $r \rightarrow 0$ και οι πυρήνες εμφανίζουν ιδιόμορφη συμπεριφορά, λόγω απειρισμού του $\ln(r)$ και του $\cos\varphi/r$ (λογαριθμική ανωμαλία και ανωμαλία τύπου Cauchy, αντίστοιχα). Προκειμένου να γίνει ο υπολογισμός των διαγώνιων στοιχείων εφαρμόζεται αναλυτική ολοκλήρωση (Κατσικαδέλης, 1999). Οι εν λόγω τιμές των διαγώνιων στοιχείων των μητρώων \mathbf{H} , \mathbf{G} προκύπτουν ως

$$H_{jj} = -2 \left[\cos\varphi \cdot \ln|\xi| \right]_0^1 + \pi = \pi \quad (2.5.24\alpha)$$

$$G_{jj} = I_j \left(\ln \frac{I_j}{2} - 1 \right) \quad (2.5.24\beta)$$

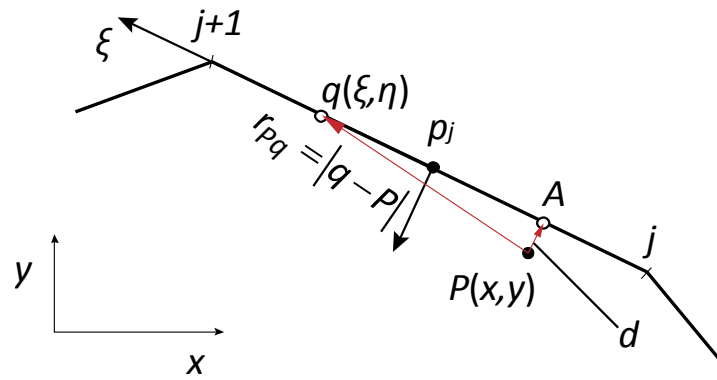
όπου I_j είναι το μήκος του συνοριακού στοιχείου.



Σχήμα 2.5.2. Ολοκλήρωση κατά μήκος του συνόρου (α). Τοπικό σύστημα συνοριακού στοιχείου (β) και τοπικό σύστημα εσωτερικού κελιού (γ).

Για τον υπολογισμό των συντελεστών επιρροής της σειράς i των μητρών \hat{A} το σημείο p_i παραμένει σταθερό και το σημείο Q τοποθετείται στο χωρίο (Σχ. 2.5.2α). Στην περίπτωση αυτή το r δεν μηδενίζεται, συνεπώς οι πυρήνες των ολοκληρωμάτων εμφανίζουν ομαλή συμπεριφορά. Επομένως εφαρμόζεται αριθμητική ολοκλήρωση Gauss σε κάθε κελί k (Kiusalaas, 2009) (Σχ. 2.5.2 γ).

Για τον υπολογισμό των επικαμπυλιών ολοκληρωμάτων των σχέσεων (2.5.19) και (2.5.20) ισχύουν τα εξής: Η πηγή P_k βρίσκεται στο εσωτερικό του χωρίου, συνεπώς οι πυρήνες και οι παράγωγοι τους παρουσιάζουν γενικά ομαλή συμπεριφορά καθώς το r δεν τείνει στο μηδέν. Επομένως τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με εφαρμογή αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss σε κάθε συνοριακό στοιχείο. Προσοχή πρέπει να δοθεί στα εσωτερικά κελιά που εφάπτονται στο σύνορο Γ . Σε περίπτωση που το κελί έχει μικρές διαστάσεις, το σημείο P_k βρίσκεται πολύ κοντά στο σύνορο (Σχ. 2.5.3) με αποτέλεσμα οι πυρήνες των ολοκληρωμάτων να παρουσιάζουν «σχεδόν ιδιόμορφη» συμπεριφορά, δηλαδή λαμβάνουν πεπερασμένες αλλά πολύ μεγάλες τιμές. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο υποδιαίρεσης του στοιχείου (Κατσικαδέλης, 1999).



Σχήμα 2.5.3. Πηγή P κοντά στο σύνορο Γ .

Για τον υπολογισμό των πεδιακών ολοκληρωμάτων των σχέσεων (2.5.19) και (2.5.20) ισχύουν τα εξής: Στην περίπτωση που η ολοκλήρωση δεν πραγματοποιείται στο κελί που βρίσκεται η πηγή P_k ($l \neq k$), τότε οι πυρήνες παρουσιάζουν ομαλή συμπεριφορά και μπορούν να υπολογιστούν με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss. Στην περίπτωση που η ολοκλήρωση πραγματοποιείται στο ίδιο κελί με το P_k ($l = k$), τότε οι πυρήνες παρουσιάζουν ιδιόμορφη συμπεριφορά καθώς το $r \rightarrow 0$. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με μετατροπή των πεδιακών ολοκληρωμάτων των σχέσεων (2.5.19) και (2.5.20) σε επικαμπύλια στο σύνορο του κελιού (Σχ. 2.5.4). Αυτό πραγματοποιείται ως εξής: Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\iint_{\Omega_l} (\Lambda_2(r) - 1) d\Omega = \iint_{\Omega_l} \ln r d\Omega \quad (2.5.25)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Green (σχέση (2.5.3)) και θέτοντας $u^* = 1$ και $u = U$, έχουμε

$$\iint_{\Omega_l} \nabla^2 U d\Omega = \int_{\Gamma_l} \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (2.5.26)$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$\nabla^2 U = \Lambda_2(r) = \ln r + 1 \quad (2.5.27)$$

Η σχέση (2.5.25) γράφεται ως

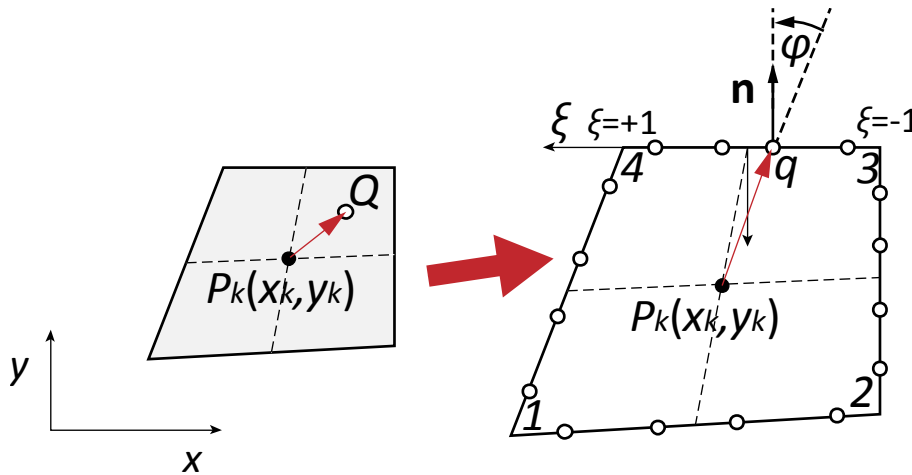
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_l} \Lambda_2(r) d\Omega &= \int_{\Gamma_l} \frac{\partial U}{\partial n} ds \Rightarrow \\ \iint_{\Omega_l} (\Lambda_2(r) - 1) d\Omega &= \int_{\Gamma_l} \frac{\partial U}{\partial n} ds - A_l \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

όπου A_i είναι το εμβαδόν του κελιού. Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση U γράφουμε την (2.5.26) σε πολικές συντεταγμένες ως

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = \ln r + 1 \quad (2.5.29)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.5.28) προκύπτει

$$U = \frac{1}{4} r^2 \ln r \quad (2.5.30)$$



Σχήμα 2.5.4. Μετατροπή του πεδιακού ολοκληρώματος σε επικαμπύλιο στο στοιχείο k .

Είναι φανερό ότι τα ολοκληρώματα των παραγώγων του πυρήνα $\Lambda_2(r) - 1$ προκύπτουν με κατάλληλες παραγωγίσεις της (2.5.28), ενώ οι αντίστοιχες παράγωγοι της U προκύπτουν ως εξής

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{4} (2 \ln r + 1) r r_{,n} \quad (2.5.31\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial n} = \left(\frac{1}{2} \ln r + \frac{3}{4} \right) r_{,n} r_{,x} + \left(\frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{4} \right) r_{,t} r_{,y} \quad (2.5.31\beta)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial n} = \left(\frac{1}{2} \ln r + \frac{3}{4} \right) r_{,n} r_{,y} - \left(\frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{4} \right) r_{,t} r_{,x} \quad (2.5.31\gamma)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial^2 x \partial n} = \frac{r_{,n} + 2 r_{,t} r_{,x} r_{,y}}{2r} \quad (2.5.31\delta)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial^2 y \partial n} = \frac{r_{,n} - 2 r_{,t} r_{,x} r_{,y}}{2r} \quad (2.5.31\epsilon)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial n} = \frac{r_{,t} r_{,y}^2 - r_{,t} r_{,x}^2}{2r} \quad (2.5.31\sigma\tau)$$

2.6 Η ΑΕΜ για μερικές διαφορικές εξισώσεις τετάρτης τάξης που περιλαμβάνουν το Διαρμονικό τελεστή

2.6.1 Ολοκληρωτικές παραστάσεις – Αριθμητική επίλυση

Θεωρούμε το δισδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$N\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \nabla^4 u\right) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.6.1\alpha)$$

$$a_1 u + a_2 B_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \nabla^2 u, \frac{\partial \nabla^2 u}{\partial n}\right) = a_3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.6.1\beta)$$

$$\beta_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \beta_2 B_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \nabla^2 u\right) = \beta_3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.6.1\gamma)$$

όπου $N(\)$ είναι γραμμικός ή μη γραμμικός διαφορικός τελεστής τετάρτης τάξης. B_1, B_2 είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί τελεστές τρίτης και δευτέρας τάξης, αντίστοιχα, ενώ a_i, β_i ($i=1,2,3$) είναι γνωστές συναρτήσεις που ορίζονται στο σύνορο του εξεταζόμενου προβλήματος και $g(\mathbf{x})$ είναι τυχαία κατανομημένο φορτίο ή πηγή στο χωρίο Ω του προβλήματος. $u=u(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση της λύσης η οποία είναι συνεχής και τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ω . Σύμφωνα με την ΑΕΜ το υποκατάστατο πρόβλημα θα πρέπει να είναι επίσης τετάρτης τάξης και ως η απλούστερη αναλογική εξίσωση με γνωστή θεμελιώδη λύση μπορεί να επιλεγεί η Διαρμονική εξίσωση

$$\nabla^4 u = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.6.2)$$

Από φυσικής άποψης η εξίσωση (2.6.2) περιγράφει την κάμψη λεπτής πλάκας με καμπτική αντίσταση $D=1$, που υποβάλλεται στο κατανομημένο πλασματικό φορτίο $p(\mathbf{x})$. Σύμφωνα με τα όσα περιγράφηκαν στην ενότητα 2.2 η λύση της (2.6.1α) μπορεί να προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης (2.6.2) με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (2.6.1β,γ), εάν προσδιοριστεί το πλασματικό φορτίο $p(\mathbf{x})$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με χρήση της ΒΕΜ ως εξής: Θεωρούμε τη δεύτερη ταυτότητα του Green (σχέση 2.5.3) για δύο συναρτήσεις $\bar{u} = \nabla^2 u(\mathbf{x})$ και $\bar{u}^* = u^*(\mathbf{x})$ (Σαπουντζάκης, 2003)

$$\iint_{\Omega} \left(u^* \nabla^2 (\nabla^2 u) - \nabla^2 u \nabla^2 u^* \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u^* \frac{\partial \nabla^2 u}{\partial n} - \frac{\partial u^*}{\partial n} \nabla^2 u \right) ds \quad (2.6.3)$$

Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία και για $\bar{u} = u(\mathbf{x})$ και $\bar{u}^* = \nabla^2 u^*(\mathbf{x})$ και έχουμε

$$\iint_{\Omega} \left(\nabla^2 u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 (\nabla^2 u^*) \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\nabla^2 u^* \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \nabla^2 u^*}{\partial n} u \right) ds \quad (2.6.4)$$

Προσθέτωντας τις (2.6.3) και (2.6.4) προκύπτει η ταυτότητα Rayleigh-Green ως

$$\iint_{\Omega} \left(u^* \nabla^4 u - u \nabla^4 u^* \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u^* \frac{\partial \nabla^2 u}{\partial n} - \frac{\partial u^*}{\partial n} \nabla^2 u + \nabla^2 u^* \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \nabla^2 u^*}{\partial n} u \right) ds \quad (2.6.5)$$

Ως συνάρτηση u^* χρησιμοποιείται η θεμελιώδης λύση για τον Διαρμονικό τελεστή, η οποία προκύπτει ως μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\nabla^4 u^*(Q, P) = \delta(Q - P) \quad (2.6.6)$$

όπου $\delta(Q - P)$ είναι η συνάρτηση δ (συνάρτηση Dirac) σε δύο διαστάσεις (Παράρτημα Α). Εκφράζοντας την (2.6.6) σε πολικές συντεταγμένες (Κατσικαδέλης, 2010), προκύπτει η θεμελιώδης λύση της, η οποία είναι η συνάρτηση

$$u^* = u^*(Q, P) = \frac{1}{8\pi} r^2(Q, P) \ln r(Q, P) \quad (2.6.7)$$

όπου $r = |Q - P| = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right]^{1/2}$, $Q(\xi, \eta) \in \Omega$, $P(x, y) \in \Omega$. Αντικαθιστώντας τις (2.6.2), (2.6.6) στην (2.6.5) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης Dirac (Παράρτημα Α), προκύπτει

$$u(P) = \iint_{\Omega} u^*(Q, P) p(Q) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(u^*(q, P) \frac{\partial \nabla^2 u(q)}{\partial n} - \frac{\partial u^*(q, P)}{\partial n} \nabla^2 u(q) + \nabla^2 u^*(q, P) \frac{\partial u(q)}{\partial n} - \frac{\partial \nabla^2 u^*(q, P)}{\partial n} u(q) \right) ds \quad (2.6.8)$$

Η σχέση (2.6.8) αποτελεί την ολοκληρωτική παράσταση της λύσης του προβλήματος συναρτήσεως του πλασματικού φορτίου και των συνοριακών ποσοτήτων. Η (2.6.8) γράφεται ως εξής

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \Lambda_4(r) \rho(Q) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\Lambda_1(r) u(q) + \Lambda_2(r) \frac{\partial u(q)}{\partial n} + \Lambda_3(r) \nabla^2 u(q) + \Lambda_4(r) \frac{\partial \nabla^2 u(q)}{\partial n} \right) ds \quad (2.6.9)$$

Με $\Lambda_i(r)$ ($i=1,2,3,4$) συμβολίζονται οι δισημειακοί πυρήνες, οι οποίοι δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (Katsikadelis & Armenakas, 1989)

$$\Lambda_1(r) = -\frac{\cos \varphi}{r} = -\frac{r_{,n}}{r} \quad (2.6.10\alpha)$$

$$\Lambda_2(r) = \ln r + 1 \quad (2.6.10\beta)$$

$$\Lambda_3(r) = -\frac{1}{4} (2r \ln r + r) \cos \varphi = -\frac{1}{4} (2r \ln r + r) r_{,n} \quad (2.6.10\gamma)$$

$$\Lambda_4(r) = \frac{1}{4} r^2 \ln r \quad (4.6.10\delta)$$

Υπενθυμίζεται ότι φ είναι η γωνία που σχηματίζεται από το διάνυσμα \mathbf{r} και το κάθετο, στην καμπύλη του συνόρου, διάνυσμα \mathbf{n} , ενώ οι εκφράσεις των παραγώγων του r παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β. Προκειμένου να συσχετίσουμε τις συνοριακές ποσότητες με το πλασματικό φορτίο, εφαρμόζουμε την ολοκληρωτική παράσταση (2.6.9) στο σύνορο Γ . Στην περίπτωση αυτή, όπου το σημείο $P \in \Omega$ τείνει στο σημείο $p \in \Gamma$, όπως έχει περιγραφεί και στην ενότητα 2.5, η συνάρτηση u είναι ασυνεχής και η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση δίνεται ως

$$\pi u(p) = \iint_{\Omega} \Lambda_4(r) \rho(Q) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(\Lambda_1(r) u(q) + \Lambda_2(r) \frac{\partial u(q)}{\partial n} + \Lambda_3(r) \nabla^2 u(q) + \Lambda_4(r) \frac{\partial \nabla^2 u(q)}{\partial n} \right) ds \quad (2.6.11)$$

Οι εξισώσεις (2.6.11) και (2.6.1β,γ) δεν επαρκούν για την έκφραση των συνοριακών ποσοτήτων συναρτήσει του πλασματικού φορτίου και χρειαζόμαστε μια επιπλέον εξίσωση. Η εξίσωση αυτή θα προκύψει από την ολοκληρωτική παράσταση της Λαπλασιανής του βέλους κάμψης της πλάκας (Katsikadelis & Armenakas, 1989), η οποία λαμβάνεται αν εφαρμόσουμε τον τελεστή Laplace και στα δύο μέλη της σχέσης (2.6.11) ως

$$\pi \nabla^2 u(p) = \iint_{\Omega} \Lambda_2(r) \rho(Q) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(\Lambda_1(r) \nabla^2 u(q) + \Lambda_2(r) \frac{\partial \nabla^2 u(q)}{\partial n} \right) ds \quad (2.6.12)$$

Η σχέση (2.6.12) ορίζει την τελευταία απαιτούμενη σχέση προκειμένου να εκφραστούν τα συνοριακά μεγέθη συναρτήσει του πλασματικού φορτίου. Στη συνέχεια, προχωρούμε στη διακριτοποίηση του χωρίου Ω και του συνόρου Γ . Το σύνορο χωρίζεται σε N σταθερά συνοριακά στοιχεία και το χωρίο χωρίζεται σε M τετραπλευρικά ή τριγωνικά σταθερά κελιά (Σχ. 2.5.1). Χρησιμοποιώντας την εν λόγω διακριτοποίηση, οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.6.11) και (2.6.12), στο i συνοριακό στοιχείο, γράφονται ως

$$\pi u(p_i) = \sum_{k=1}^M \rho_k \iint_{\Omega_k} \Lambda_4(r) d\Omega - \sum_{j=1}^N \left(u(q_j) \int_{\Gamma_j} \Lambda_1(r) ds + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(r) ds + \nabla^2 u(q_j) \int_{\Gamma_j} \Lambda_3(r) ds + \frac{\partial \nabla^2 u(q_j)}{\partial n} \int_{\Gamma_j} \Lambda_4(r) ds \right) \quad (2.6.13\alpha)$$

$$\pi \nabla^2 u(p_i) = \sum_{k=1}^M \rho_k \iint_{\Omega_k} \Lambda_2(r) d\Omega - \sum_{j=1}^N \left(\nabla^2 u(q_j) \int_{\Gamma_j} \Lambda_1(r) ds + \frac{\partial \nabla^2 u(q_j)}{\partial n} \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(r) ds \right) \quad (2.6.13\beta)$$

όπου ρ_k είναι η τιμή του πλασματικού φορτίου στο επιφανειακό στοιχείο k και u_j , $\partial u(q_j)/\partial n$, $\nabla^2 u(q_j)$, $\partial \nabla^2 u(q_j)/\partial n$ είναι οι τιμές της λύσης και των παραγώγων της στο συνοριακό στοιχείο j . Οι εξισώσεις (2.6.13) εφαρμόζονται στα N συνοριακά στοιχεία και προκύπτει το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,n} \\ \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} \\ (\nabla^2 \hat{\mathbf{u}}_{p3})_{,n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 \\ \hat{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (2.6.14)$$

όπου \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $N \times N$ με στοιχεία που προκύπτουν ως

$$H_{1ij} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_1(p_i, q) ds + \pi \delta_{ij} \quad (2.6.15\alpha)$$

$$H_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_2(p_i, q) ds \quad (2.6.15\beta)$$

$$G_{1ij} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_3(p_i, q) ds \quad (2.6.15\gamma)$$

$$G_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \Lambda_4(p_i, q) ds \quad (2.6.15\delta)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, για το οποίο ισχύει $\delta_{ij} = 1$ για $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Τα μητρώα \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 είναι διαστάσεων $N \times M$ και τα στοιχεία τους ορίζονται ως

$$\hat{A}_{1ik} = \iint_{\Omega_k} \Lambda_4(p_i, Q) d\Omega \quad (2.6.16\alpha)$$

$$\hat{A}_{2ik} = \iint_{\Omega_k} \Lambda_2(p_i, Q) d\Omega \quad (2.6.16\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνοριακή διακριτοποίηση που περιγράφηκε παραπάνω και την υπόθεση του σταθερού στοιχείου οι διαφορικές συνοριακές εξισώσεις (2.6.1β), οι οποίες στη γενική τους μορφή υποτίθενται μη γραμμικές, μπορούν να διακριτοποιηθούν ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,n} \\ \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} \\ (\nabla^2 \hat{\mathbf{u}}_{p3})_{,n} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_1^{nl} \\ \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.6.17)$$

όπου \mathbf{D}_{11} έως \mathbf{D}_{24} είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $N \times N$ με γνωστούς συντελεστές, τα οποία περιλαμβάνουν και τις τιμές των συνοριακών συναρτήσεων a_i, β_i ($i=1,2$), που παρουσιάζονται στις σχέσεις (2.6.1β,γ), ενώ $\mathbf{D}_1^{nl}, \mathbf{D}_2^{nl}$ είναι διάνυσματα διαστάσεων $N \times 1$ που περιέχουν τους μη γραμμικούς όρους που περιλαμβάνονται στις εκφράσεις των διαφορικών συνοριακών συνθηκών (2.6.1β,γ). $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3$ είναι γνωστά διανύσματα διαστάσεων $N \times 1$ που περιλαμβάνουν τις τιμές της συνοριακών συναρτήσεων a_3, β_3 που παρουσιάζονται στις σχέσεις (2.6.1β,γ) στα N συνοριακά στοιχεία. Συνολικά, οι εξισώσεις (2.6.14) και (2.6.17) γράφονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,n} \\ \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} \\ (\nabla^2 \hat{\mathbf{u}}_{p3})_{,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{p} \\ \hat{\mathbf{A}}_2 \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}_1^{nl} \\ \boldsymbol{\beta}_3 - \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} \quad (2.6.18)$$

Στην περίπτωση των γραμμικών συνοριακών συνθηκών τα συνοριακά μεγέθη εκφράζονται συναρτήσει των πλασματικών φορτίων με απευθείας αντιστροφή του μητρώου των συντελεστών τους. Οι σχέσεις (2.6.18) μπορούν να διατυπωθούν και ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{,n} \\ \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} \\ (\nabla^2 \hat{\mathbf{u}}_{p3})_{,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}_1^{nl} \\ \boldsymbol{\beta}_3 - \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_3 - \mathbf{D}_1^{nl} \\ \boldsymbol{\beta}_3 - \mathbf{D}_2^{nl} \end{Bmatrix} \quad (2.6.19)$$

όπου $\mathbf{A}_1 = -\hat{\mathbf{A}}_1$, $\mathbf{A}_2 = -\hat{\mathbf{A}}_2$. Το σύστημα (2.6.18) ή (2.6.19) αποτελείται από $4N$ αλγεβρικές εξισώσεις ως προς $4N+M$ αγνώστους. Επομένως οι άγνωστοι του προβλήματος είναι υπεράριθμοι και χρειαζόμαστε M ακόμη εξισώσεις για τον προσδιορισμό τους.

Η λύση σε εσωτερικό σημείο του χωρίου θα προκύψει από εφαρμογή της ολοκληρωτικής παράστασης της λύσης (2.6.9). Η σχέση αυτή με χρήση της διακριτοποίησης του χωρίου και του συνόρου μπορεί να γραφτεί για το k κομβικό σημείο ως εξής:

$$u(P_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \Lambda_4(r) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(u(q_j) \int_{r_j} \Lambda_1(r) ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \Lambda_2(r) ds + \nabla^2 u(q_j) \int_{r_j} \Lambda_3(r) ds + \frac{\partial \nabla^2 u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \Lambda_4(r) ds \right) \quad (2.6.20)$$

όπου ρ_l είναι η τιμή του πλασματικού φορτίου στο επιφανειακό στοιχείο l . Για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο να υπολογιστούν και οι παράγωγοι της λύσης στο εσωτερικό του χωρίου. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλες αναλυτικές παραγωγίσεις της ολοκληρωτικής παράστασης (2.6.9). Οι διακριτοποιημένες εκφράσεις των παραγώγων προκύπτουν ως εξής

$$\frac{\partial u(P_k)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial \Lambda_4(r)}{\partial x} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_1(r)}{\partial x} ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_2(r)}{\partial x} ds + \nabla^2 u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_3(r)}{\partial x} ds + \frac{\partial \nabla^2 u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_4(r)}{\partial x} ds \right) \quad (2.6.21\alpha)$$

$$\frac{\partial u(P_k)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial \Lambda_4(r)}{\partial y} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_1(r)}{\partial y} ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_2(r)}{\partial y} ds + \nabla^2 u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_3(r)}{\partial y} ds + \frac{\partial \nabla^2 u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial \Lambda_4(r)}{\partial y} ds \right) \quad (2.6.21\beta)$$

$$\frac{\partial^2 u(P_k)}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial^2 \Lambda_4(r)}{\partial x^2} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_1(r)}{\partial x^2} ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial x^2} ds + \nabla^2 u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_3(r)}{\partial x^2} ds + \frac{\partial \nabla^2 u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_4(r)}{\partial x^2} ds \right) \quad (2.6.21\gamma)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(P_k)}{\partial y^2} = & \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial^2 \Lambda_4(r)}{\partial y^2} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_1(r)}{\partial y^2} ds + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial y^2} ds + \nabla^2 u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_3(r)}{\partial y^2} ds + \frac{\partial \nabla^2 u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_4(r)}{\partial y^2} ds \right) \end{aligned} \quad (2.6.21\delta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(P_k)}{\partial x \partial y} = & \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \rho_l \iint_{\Omega_l} \frac{\partial^2 \Lambda_4(r)}{\partial x \partial y} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_1(r)}{\partial x \partial y} ds + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_2(r)}{\partial x \partial y} ds + \nabla^2 u(q_j) \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_3(r)}{\partial x \partial y} ds + \frac{\partial \nabla^2 u(q_j)}{\partial n} \int_{r_j} \frac{\partial^2 \Lambda_4(r)}{\partial x \partial y} ds \right) \end{aligned} \quad (2.6.21\epsilon)$$

όπου οι παράγωγοι των δισημειακών πυρήνων $\Lambda_i(r)$ ($i=1,2,3,4$) δίνονται από τις σχέσεις (Σαπουντζάκης, 1991)

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} = -\frac{\cos(\omega - \varphi)}{r^2} = \frac{r_{,n} r_{,x} - r_{,t} r_{,y}}{r^2} \quad (2.6.22\alpha)$$

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} = -\frac{\sin(\omega - \varphi)}{r^2} = \frac{r_{,t} r_{,x} + r_{,n} r_{,y}}{r^2} \quad (2.6.22\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x^2} = -\frac{2}{r^3} \cos(2\omega - \varphi) = \frac{2(-r_{,x}^2 r_{,n} + 2r_{,t} r_{,x} r_{,y} + r_{,y}^2 r_{,n})}{r^3} \quad (2.6.22\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial y^2} = \frac{2}{r^3} \cos(2\omega - \varphi) = \frac{2(r_{,x}^2 r_{,n} - 2r_{,t} r_{,x} r_{,y} - r_{,y}^2 r_{,n})}{r^3} \quad (2.6.22\delta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{r^3} \sin(2\omega - \varphi) = -\frac{2(r_{,n} r_{,x} r_{,y} + r_{,x}^2 r_{,t} - r_{,y}^2 r_{,t})}{r^3} \quad (2.6.22\epsilon)$$

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial x} = -\frac{\cos \omega}{r} = \frac{r_{,x}}{r} \quad (2.6.23\alpha)$$

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial y} = -\frac{\sin \omega}{r} = \frac{r_{,y}}{r} \quad (2.6.23\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} (\sin^2 \omega - \cos^2 \omega) = \frac{-r_{,x}^2 + r_{,y}^2}{r^2} \quad (2.6.23\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) = \frac{r_{,x}^2 - r_{,y}^2}{r^2} \quad (2.6.23\delta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial x \partial y} = \frac{\sin 2\omega}{r^2} = -\frac{2r_{,x}r_{,y}}{r^2} \quad (2.6.23\epsilon)$$

$$\frac{\partial \Lambda_3}{\partial x} = \frac{1}{4}(2 \ln r + 1) \cos(\omega + \varphi) + \frac{1}{2} \cos \varphi \cos \omega = -\frac{1}{4}(2 \ln r + 1) r_{,t} r_{,y} - \frac{1}{2} \left(\ln r + \frac{3}{2} \right) r_{,n} r_{,x} \quad (2.6.24\alpha)$$

$$\frac{\partial \Lambda_3}{\partial y} = \frac{1}{4}(2 \ln r + 1) \sin(\alpha + \omega) + \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \omega = \frac{1}{4}(2 \ln r + 1) r_{,t} r_{,x} - \frac{1}{2} \left(\ln r + \frac{3}{2} \right) r_{,n} r_{,y} \quad (2.6.24\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_3}{\partial x^2} = \frac{\sin \varphi \sin 2\omega - \cos \varphi}{2r} = -\frac{r_{,n} r_{,x}^2 + 2r_{,t} r_{,x} r_{,y} + r_{,n} r_{,y}^2}{2r} \quad (2.6.24\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_3}{\partial y^2} = -\frac{\sin \varphi \sin 2\omega + \cos \varphi}{2r} = \frac{-r_{,n} r_{,x}^2 + 2r_{,t} r_{,x} r_{,y} - r_{,n} r_{,y}^2}{2r} \quad (2.6.24\delta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_3}{\partial x \partial y} = -\frac{\sin \varphi \cos 2\omega}{2r} = -\frac{-r_{,t} r_{,x}^2 + r_{,t} r_{,y}^2}{2r} \quad (2.6.24\epsilon)$$

$$\frac{\partial \Lambda_{p4}}{\partial x} = -\frac{1}{4} r \cos \omega (2 \ln r + 1) = \frac{1}{4} r r_{,x} (2 \ln r + 1) \quad (2.6.25\alpha)$$

$$\frac{\partial \Lambda_{p4}}{\partial y} = -\frac{1}{4} r \sin \omega (2 \ln r + 1) = \frac{1}{4} r r_{,y} (2 \ln r + 1) \quad (2.6.25\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_{p4}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos^2 \omega = \frac{1}{2} \left(\ln r + \frac{3}{2} \right) r_{,x}^2 + \frac{1}{2} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) r_{,y}^2 \quad (2.6.25\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_{p4}}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 \omega = \frac{1}{2} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) r_{,x}^2 + \frac{1}{2} \left(\ln r + \frac{3}{2} \right) r_{,y}^2 \quad (2.6.25\delta)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_{p4}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4} \sin 2\omega = \frac{1}{2} r_{,x} r_{,y} \quad (2.6.25\epsilon)$$

όπου ω είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος r και του άξονα x . Εφαρμογή των σχέσεων (2.6.20) και (2.6.21) στα M κομβικά σημεία του χωρίου Ω οδηγεί στις παρακάτω διακριτοποιημένες σχέσεις

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (2.6.26\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{,x} = \mathbf{B}_{,x} \mathbf{d} \quad (2.6.26\beta)$$

$$\mathbf{u}_{,y} = \mathbf{B}_{,y} \mathbf{d} \quad (2.6.26\gamma)$$

$$\mathbf{u}_{,xx} = \mathbf{B}_{,xx} \mathbf{d} \quad (2.6.26\delta)$$

$$\mathbf{u}_{,yy} = \mathbf{B}_{,yy} \mathbf{d} \quad (2.6.26\epsilon)$$

$$\mathbf{u}_{,xy} = \mathbf{B}_{,xy} \mathbf{d} \quad (2.6.26\sigma\tau)$$

όπου $\mathbf{B}_{,x}, \mathbf{B}_{,y}, \mathbf{B}_{,xx}, \mathbf{B}_{,yy}, \mathbf{B}_{,xy}$ είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $M \times (4N + M)$ που περιέχουν τα ολοκληρώματα των πυρήνων και των παραγώγων τους.

Μέχρι στιγμής, δεν είμαστε σε θέση να πάρουμε τη ζητούμενη λύση από τις εξισώσεις (2.6.26) καθώς δεν έχει προσδιοριστεί ακόμη το πλασματικό φορτίο και κατ' επέκταση οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Για να παράγουμε τον απαιτούμενο αριθμό εξισώσεων για τον προσδιορισμό των ως άνω μεγεθών εφαρμόζουμε τη διαφορική εξίσωση (2.6.1) στα M εσωτερικά σημεία του χωρίου. Η εφαρμογή αυτή πραγματοποιείται με αντικατάσταση των τιμών της λύσης u και των παραγώγων της από τις ποσότητες που ορίζονται από τις εξισώσεις (2.6.26). Παράγεται έτσι ένα επιπλέον σύστημα από M αλγεβρικές εξισώσεις ως προς το διάνυσμα \mathbf{d} . Το εν λόγω σύστημα μαζί με τις συνοριακές εξισώσεις (2.6.19) επιλύονται αριθμητικά για να προκύψει το πλασματικό φορτίο και οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες. Στη συνέχεια με χρήση των (2.6.26) μπορούμε να υπολογίσουμε τη u και τις παραγώγους της στο εσωτερικό του χωρίου Ω .

2.6.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Ο προσδιορισμός των μητρώων $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}, \mathbf{B}_{,x}, \mathbf{B}_{,y}, \mathbf{B}_{,xx}, \mathbf{B}_{,yy}$ και $\mathbf{B}_{,xy}$ (σχέσεις (2.6.19), (2.6.26)) επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που ορίζονται από τις σχέσεις (2.6.15), (2.6.16), (2.6.20) και (2.6.21). Για τον υπολογισμό των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων των σχέσεων (2.6.15) εργαζόμαστε όπως περιγράφηκε στην ενότητα 2.5: Για τον μη διαγώνια στοιχεία των μητρώων $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ εφαρμόζεται αριθμητική ολοκλήρωση Gauss, ενώ για τα διαγώνια στοιχεία, πραγματοποιείται αναλυτική ολοκλήρωση λόγω ιδιομορφίας των πυρήνων. Οι εν λόγω τιμές των διαγώνιων στοιχείων των μητρώων $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ προκύπτουν ως

$$H_{1jj} = -2 \left[\cos \varphi \cdot \ln |\xi| \right]_0^1 + \pi = \pi \quad (2.6.27\alpha)$$

$$H_{2jj} = l_j \left(\ln \frac{l_j}{2} - 1 \right) + l_j \quad (2.6.27\beta)$$

$$G_{1jj} = -\frac{l_j^2}{8} \cos \varphi \cdot \ln \frac{l_j}{2} = 0 \quad (2.6.27\gamma)$$

$$G_{2jj} = \frac{l_j^3}{144} \left(3 \ln \frac{l_j}{2} - 1 \right) \quad (2.6.27\delta)$$

όπου l_j είναι το μήκος του συνοριακού στοιχείου. Για τον υπολογισμό των πεδιακών ολοκληρωμάτων της σχέσης (2.6.16), λόγω ομαλής συμπεριφοράς των πυρήνων, εφαρμόζεται αποκλειστικά αριθμητική ολοκλήρωση Gauss σε κάθε κελί.

Για τον υπολογισμό των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων των σχέσεων (2.6.20) και (2.6.21) ισχύουν τα εξής: Η πηγή P_k βρίσκεται στο εσωτερικό του χωρίου, συνεπώς οι πυρήνες και οι παράγωγοί τους παρουσιάζουν γενικά ομαλή συμπεριφορά καθώς το r δεν

τείνει στο μηδέν. Συνεπώς τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με εφαρμογή αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss σε κάθε συνοριακό στοιχείο. Προσοχή πρέπει να δοθεί στα εσωτερικά κελιά που εφάπτονται στο σύνορο Γ . Σε περίπτωση που το κελί έχει μικρές διαστάσεις, το σημείο P_k βρίσκεται πολύ κοντά στο σύνορο (Σχ. 2.5.3) με αποτέλεσμα οι πυρήνες των ολοκληρωμάτων να παρουσιάζουν «σχεδόν ιδιόμορφη» συμπεριφορά, δηλαδή λαμβάνουν πεπερασμένες αλλά πολύ μεγάλες τιμές. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο υποδιαίρεσης του στοιχείου (Κατσικαδέλης, 1999).

Για τον υπολογισμό των πεδιακών ολοκληρωμάτων των σχέσεων (2.6.20) και (2.6.21) ισχύουν τα εξής: Στην περίπτωση που η ολοκλήρωση δεν πραγματοποιείται στο κελί που βρίσκεται η πηγή P_k ($l \neq k$), τότε οι πυρήνες παρουσιάζουν ομαλή συμπεριφορά και μπορούν να υπολογιστούν με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss. Στην περίπτωση που η ολοκλήρωση πραγματοποιείται στο ίδιο κελί με το P_k ($l = k$), τότε οι πυρήνες παρουσιάζουν ιδιόμορφη συμπεριφορά καθώς το $r \rightarrow 0$. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με μετατροπή των πεδιακών ολοκληρωμάτων των σχέσεων (2.6.20) και (2.6.21) σε επικαμπύλια στο σύνορο του κελιού (Σχ. 2.5.4). Αυτό πραγματοποιείται ως εξής: Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\iint_{\Omega_l} \Lambda_4(r) d\Omega = \iint_{\Omega_l} \frac{1}{4} r^2 \ln r d\Omega \quad (2.6.27)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Green (σχέση (2.5.3)) και θέτοντας $u^* = 1$ και $u = U$, έχουμε

$$\iint_{\Omega_l} \nabla^2 U d\Omega = \int_{\Gamma_l} \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (2.6.28)$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$\nabla^2 U = \Lambda_4(r) \quad (2.6.29)$$

Η σχέση (2.6.28) γράφεται ως

$$\iint_{\Omega_l} \Lambda_4(r) d\Omega = \int_{\Gamma_l} \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (2.6.30)$$

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση U γράφουμε την (2.6.29) σε πολικές συντεταγμένες ως

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{1}{4} r^2 \ln r \quad (2.6.31)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.5.28) προκύπτει

$$U = \frac{1}{128} r^4 (2 \ln r - 1) \quad (2.6.32)$$

Είναι φανερό ότι τα ολοκληρώματα των παραγώγων του πυρήνα $\Lambda_4(r)$ προκύπτουν με κατάλληλες παραγωγίσεις της (2.6.30), ενώ οι αντίστοιχες παράγωγοι της U προκύπτουν ως εξής

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{64} (4 \ln r - 1) r^3 r_{,n} \quad (2.5.33\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial n} = \frac{3}{16} \left[\left(\ln r + \frac{1}{12} \right) r_{,n} r_{,x} + \left(\frac{1}{3} \ln r - \frac{1}{12} \right) r_{,t} r_{,y} \right] r^2 \quad (2.5.33\beta)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial n} = \frac{3}{16} \left[\left(\ln r + \frac{1}{12} \right) r_{,n} r_{,y} - \left(\frac{1}{3} \ln r - \frac{1}{12} \right) r_{,t} r_{,x} \right] r^2 \quad (2.5.33\gamma)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial^2 x \partial n} = \frac{3}{8} \left\{ \left[\left(\ln r + \frac{7}{12} \right) r_{,x}^2 + \left(\frac{1}{3} \ln r + \frac{1}{12} \right) r_{,y}^2 \right] r_{,n} + \left(\frac{2}{3} \ln r + \frac{1}{12} \right) r_{,t} r_{,x} r_{,y} \right\} r \quad (2.5.33\delta)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial^2 y \partial n} = \frac{3}{8} \left\{ \left[\left(\frac{1}{3} \ln r + \frac{1}{12} \right) r_{,x}^2 + \left(\ln r + \frac{7}{12} \right) r_{,y}^2 \right] r_{,n} - \left(\frac{2}{3} \ln r + \frac{1}{12} \right) r_{,t} r_{,x} r_{,y} \right\} r \quad (2.5.33\epsilon)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial n} = \frac{1}{4} \left[- \left(\frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{8} \right) (r_{,x}^2 - r_{,y}^2) r_{,t} + \left(\ln r + \frac{3}{4} \right) r_{,n} r_{,x} r_{,y} \right] r \quad (2.5.33\sigma)$$

Κεφάλαιο 3

Διατύπωση προβλημάτων συνοριακών τιμών

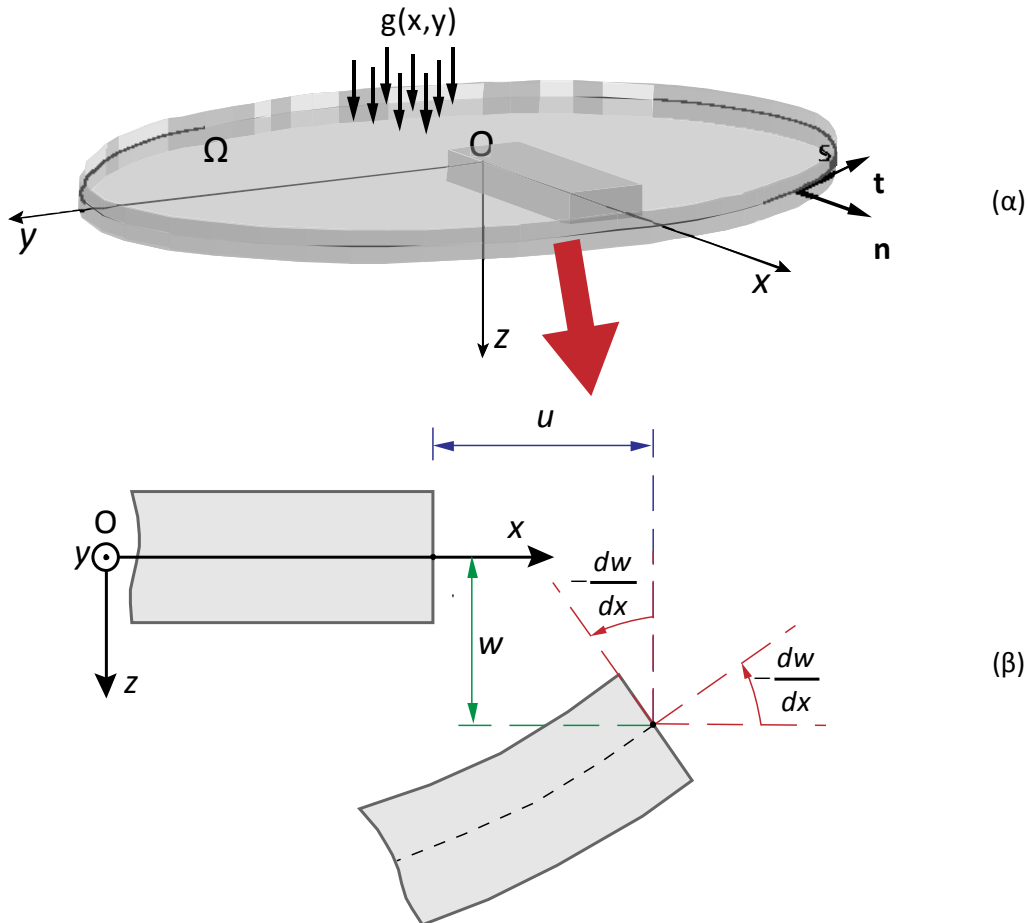
3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία διέπουν τη συμπεριφορά ενισχυμένων πλακών με μερική διατμητική σύνδεση που υποβάλλονται σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις. Όπως έχει αναφερθεί, η ανάλυση βασίζεται στην απομόνωση των δοκών ενίσχυσης από την πλάκα με νοητές τομές παράλληλες στην κάτω εξωτερική επιφάνειά της, υποθέτοντας ότι η πλάκα και οι δοκοί μπορούν να ολισθαίνουν και προς τις δύο διευθύνσεις χωρίς ανύψωση της πλάκας. Με τη βοήθεια των τομών αυτών προκύπτουν τάσεις στις διεπιφάνειες και κατά τις τρεις διευθύνσεις, οι οποίες λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση του φορέα. Συνεπώς τα μέρη που απαρτίζουν τον φορέα (πλάκα, δοκοί) αναλύονται ξεχωριστά ενώ η συνέχεια τους αποκαθίσταται τελικά με εισαγωγή των συνθηκών συνέχειας μετατοπίσεων ως προς τις τρεις διευθύνσεις.

Στις ενότητες 3.2 και 3.3 του κεφαλαίου θα αναπτυχθούν η θεωρία πλάκας μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων όπως διατυπώθηκε από τον Von Κάρμάν (1910), καθώς και η θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων δοκού τυχούσας διατομής. Οι θεωρίες αυτές αναλύονται διότι με ορισμένες τροποποιήσεις αποτελούν τη βάση για την επίλυση του προβλήματος ενισχυμένης πλάκας το οποίο θα αναπτυχθεί στην ενότητα 3.3 και είναι χρήσιμες για την πλήρη κατανόηση του προβλήματος. Η διατύπωση των εξισώσεων γίνεται με γενικό τρόπο ούτως ώστε να είναι δυνατή η επίλυση φορέων μορφής ενισχυμένης πλάκας χωρίς περιορισμούς στη μορφή του φορέα, στις συνοριακές συνθήκες ή στην επιβαλλόμενη εξωτερική φόρτιση.

3.2 Διατύπωση προβλήματος μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων λεπτής πλάκας – Εξισώσεις Von Κάρμάν

Θεωρούμε λεπτή πλάκα από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G και λόγο Poisson ν , η οποία έχει σταθερό πάχος h και καταλαμβάνει το δισδιάστατο πολλαπλά συνεκτικό χωρίο Ω του επιπέδου xy , τα σύνορα του οποίου είναι κατά τμήματα λεία (μπορούν να περιλαμβάνουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών) και συμβολίζονται με Γ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, K$) όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.1β. Η πλάκα υπόκειται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα της, ενώ υποβάλλεται σε τυχαία κατανεμημένο κατακόρυφο φορτίο $g = g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} : \{x, y\}$. Στην παρούσα περίπτωση θεωρούμε ότι δεν ασκούνται στο εσωτερικό της πλάκας συνεπίπεδες (μεμβρανικές) δυνάμεις. Η πλάκα θεωρείται ότι υπόκειται σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις, επομένως η ανάλυση πραγματοποιείται με τη διατήρηση μη γραμμικών όρων στις σχέσεις μετατοπίσεων-παραμορφώσεων.



Σχήμα. 3.2.1. Δυσδιάστατο χωρίο Ω που καταλαμβάνει η πλάκα (α) και μετακινήσεις και στροφή τυχαίας διατομής κατά x (β).

Το πρόβλημα των μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων πλάκας απασχόλησε αρχικά τον Förrle (1907), στην προσπάθεια να αναλύσει προβλήματα ευστάθειας επίπεδων λεπτών πλακών. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος, ο Förrle εισήγαγε την τασική συνάρτηση Airy Φ , η οποία αποτέλεσε τη βάση για τον Von Kármán (1910) ώστε να διατυπώσει τις κυρίαρχες μη γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας της πλάκας (Murray, 1984). Οι εξισώσεις αυτές, οι οποίες θα παρουσιαστούν και στη συνέχεια, είναι γνωστές ως *εξισώσεις Von Kármán* και περιγράφουν την ισορροπία της πλάκας ως προς δύο μόνο αγνώστους (τη βύθιση και την τασική συνάρτηση). Στην παρούσα εργασία, ωστόσο, οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων ενισχυμένων πλακών είναι διατυπωμένες συναρτήσει της βύθισης και των μεμβρανικών κινηματικών μεγεθών της πλάκας.

Η ανάλυση λεπτής πλάκας, η οποία υποβάλλεται σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις, ακολουθεί την υπόθεση του Von Kármán (1910), σύμφωνα με την οποία *η βύθιση που αναπτύσσει η πλάκα είναι συγκρίσιμη με το πάχος της, αλλά παραμένει μικρή σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις της πλάκας*. Η αντίστοιχη θεωρία πλακών είναι γνωστή ως θεωρία Von Kármán ή ως *Κλασική Θεωρία Πλακών με παραμορφώσεις κατά Von Kármán* (Classical

Plate Theory-CPT with Von Kármán strains) (Reddy, 2004). Ο όρος «Κλασική Θεωρία Πλακών» υποδηλώνει ότι ακόμα και στα πλαίσια της θεωρίας μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων, το μετακινησιακό πεδίο επιλέγεται ούτως ώστε να ικανοποιεί τις παραδοχές Kirchhoff (1850). Οι εν λόγω παραδοχές είναι οι παρακάτω:

- Το πάχος της πλάκας θεωρείται μικρό σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις της πλάκας.
- Οι ευθείες γραμμές κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας, παραμένουν ευθείες και κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια. Η παραδοχή αυτή ισοδυναμεί με την αμέλεια των διατμητικών παραμορφώσεων ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). Επίσης θεωρείται ότι το μήκος τους παραμένει αμετάβλητο ($\epsilon_{zz} = 0$).
- Η ορθή τάση προς τη μέση επιφάνεια αμελείται ($\sigma_{zz} = 0$), θεωρώντας ότι στην πλάκα ισχύει κατάσταση επίπεδης έντασης (Mansfield, 1989). Ωστόσο το γεγονός ότι η παραδοχή αυτή υιοθετείται ταυτόχρονα με την παραδοχή μηδενικής κατακόρυφης παραμόρφωσης, αντιβαίνει στη θεωρία ελαστικότητας και αποτελεί ασυνέπεια της εν λόγω θεωρίας (Σαπουντζάκης, 2003).
- Οι καμπτικές στροφές που υφίσταται η πλάκα θεωρούνται μικρές. Συνεπώς ισχύει (Σχ. 3.2.1β)

$$\tan \vartheta_x \approx \vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.2.1\alpha)$$

$$\tan \vartheta_y \approx \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2.1\beta)$$

3.2.1 Πεδίο μετατοπίσεων

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω το πεδίο μετατοπίσεων του προβλήματος γράφεται ως εξής:

$$\bar{u}(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.2.2\alpha)$$

$$\bar{v}(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2.2\beta)$$

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.2.2\gamma)$$

Όπου \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} είναι η συνιστώσες της μετατόπισης του τυχαίου σημείου της πλάκας. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ είναι η μετακινήσεις της μέσης επιφάνειας της πλάκας στο επίπεδο $(x, y, 0)$. Στην περίπτωση της ανάλυσης μικρών μετατοπίσεων, ο φορέας αναλύεται στην απαραμόρφωτη διαμόρφωση με χρήση του απειροστού τανυστή παραμόρφωσης $[\epsilon]$ της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας. Συνέπεια αυτού είναι ότι η καμπτική συμπεριφορά της πλάκας δεν εμπλέκεται με τη συμπεριφορά «δίσκου» και τα δύο προβλήματα μπορούν να αναλυθούν ανεξάρτητα. Έτσι το αντίστοιχο πεδίο μετατοπίσεων της κλασικής θεωρίας κάμψης λεπτών πλακών, δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\bar{u}(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.2.3\alpha)$$

$$\bar{v}(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2.3\beta)$$

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.2.3\gamma)$$

Τονίζεται ότι η χρήση του πεδίου μετακινήσεων (3.2.2) για την επίλυση του προβλήματος μικρών μετατοπίσεων, θα οδηγούσε και πάλι στην ίδια εξίσωση ισορροπίας για την κάμψη της πλάκας, καθώς και στις γνωστές εξισώσεις του προβλήματος επίπεδης έντασης που ορίζουν τη συμπεριφορά «δίσκου». Στο πρόβλημα μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων, το οποίο θα αναλυθεί στη συνέχεια της παρούσας ενότητας, η σύζευξη μεταξύ των προβλημάτων κάμψης και επίπεδης έντασης, επιβάλλει την υιοθέτηση του πεδίου μετατοπίσεων που ορίζεται από τις σχέσεις (3.2.2).

3.2.2 Παραμορφώσεις – Τάσεις

Στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας, οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν το εξεταζόμενο μη γραμμικό πρόβλημα, θα μορφωθούν στην παραμορφωμένη (άγνωστη) διαμόρφωση της πλάκας. Για τον υπολογισμό των παραμορφώσεων, θα χρησιμοποιηθεί ο τανυστής παραμορφώσεων Green ϵ^G αντί του απειροστού τανυστή παραμορφώσεων. Οι συνιστώσες του τανυστή Green δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις [(Rothert & Gensichen, 1987), (Ramm & Hofmann, 1995)].

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.2.4\alpha)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.2.4\beta)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.2.4\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.2.4\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.2.4\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (3.2.4\sigma)$$

Εάν υποθέσουμε ότι στις σχέσεις (3.2.4) οι κλίσεις των μετατοπίσεων είναι τάξεως ϵ , δηλαδή

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = O(\varepsilon) \quad (3.2.5)$$

τότε η υπόθεση μικρών παραμορφώσεων, η οποία υιοθετείται και στην παρούσα θεωρία, υποδεικνύει ότι οι όροι της τάξεως ε^2 είναι αρκετά μικροί και θα μπορούσαν να αμεληθούν. Στην περίπτωση, όμως, που οι καμπτικές στροφές λαμβάνουν «μετρίως μεγάλες» τιμές της τάξεως των $10^0 - 15^0$ (Reddy, 2004), ή εναλλακτικά η βύθιση της πλάκας λαμβάνει τιμές συγκρίσιμες με το πάχος της, δηλαδή $w = O(h)$ (Szilard, 2004), τότε οι όροι

$$\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)^2, \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (3.2.6)$$

εξακολουθούν να είναι μικροί συγκρινόμενοι με τους όρους τάξεως ε , αλλά όχι αμελητέοι. Στις παραπάνω παρατηρήσεις βασίζεται η θεωρία πλακών μετρίως μεγάλων στροφών και μικρών παραμορφώσεων ή αλλιώς μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων και μικρών παραμορφώσεων. Διατηρώντας, λοιπόν, τους όρους (3.2.6), οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης (σχέσεις 3.2.4) μπορούν να απλοποιηθούν ως εξής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)^2 \quad (3.2.7\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)^2 \quad (3.2.7\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (3.2.7\gamma)$$

$$\nu_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.2.7\delta)$$

$$\nu_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (3.2.7\epsilon)$$

$$\nu_{yz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (3.2.7\sigma)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων (σχέσεις (3.2.2)), στις εκφράσεις των παραμορφώσεων (σχέσεις (3.2.7)), προκύπτουν οι εξής εκφράσεις των παραμορφώσεων

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.2.8\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.2.8\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2.8\gamma)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.2.8\delta)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.2.8\epsilon)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2.8\sigma)$$

Οι εκφράσεις των παραμορφώσεων που δίνονται από τις σχέσεις (3.2.8) είναι γνωστές ως *παραμορφώσεις Von Kármán*. Παρατηρείται ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις γ_{xz}, γ_{yz} προκύπτουν ταυτοτικά ίσες με μηδέν, όπως ορίζει η δεύτερη παραδοχή. Αυτό οφείλεται στην έκφραση των καμπτικών στροφών που υποθέσαμε στις σχέσεις (3.2.1). Η υπόθεση αυτή δεν έχει γίνει αυθαίρετα. Οι συσχέτιση των καμπτικών στροφών με την παράγωγο της βύθισης προκύπτει εάν κρατήσουμε τις εκφράσεις τους ως ϑ_x, ϑ_y και απαιτήσουμε εκ των υστέρων το μηδενισμό των διατμητικών παραμορφώσεων. Οι εν λόγω εκφράσεις των καμπτικών στροφών δεν ισχύουν σε περιπτώσεις χονδρών πλακών, όπου δεν είναι ακριβής η υπόθεση περί αμελητέων διατμητικών παραμορφώσεων γ_{xz}, γ_{yz} . Τέτοιες περιπτώσεις πλακών αντιμετωπίζονται με τις θεωρίες πλακών Reissner ή Mindlin και δεν θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια της παρούσας εργασίας.

Με διανυσματική γραφή η παραπάνω σχέσεις (3.2.8) γράφονται ως

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^m + z\boldsymbol{\epsilon}^b \Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^m \\ \epsilon_{yy}^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^b \\ \epsilon_{yy}^b \\ \gamma_{xy}^b \end{Bmatrix} \quad (3.2.9)$$

όπου

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^m \\ \epsilon_{yy}^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^b \\ \epsilon_{yy}^b \\ \gamma_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.2.10)$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ αναφέρεται στις παραμορφώσεις που σχετίζονται με το πρόβλημα δίσκου ενώ το διάνυσμα $\boldsymbol{\varepsilon}^b$ αναφέρεται στις καμπυλότητες λόγω κάμψης. Στην ειδική περίπτωση του προβλήματος μικρών μετατοπίσεων τα δύο διανύσματα γράφονται ως

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^b \\ \varepsilon_{yy}^b \\ \gamma_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.2.11)$$

Συνοπτικά γίνεται αντιληπτό ότι η ανάπτυξη **μεγάλων καμπτικών βελών** επισύρει την ενεργοποίηση της μεμβρανικής λειτουργίας της πλάκας ακόμα και στην περίπτωση που δεν ασκείται καμία εξωτερική συνεπίπεδη φόρτιση. Αντίστοιχα η ύπαρξη μεμβρανικών δυνάμεων είτε εφελκυστικών είτε θλιπτικών τροποποιεί τη δυσκαμψία της πλάκας. Όταν τα καμπτικά βέλη **δεν λαμβάνουν σημαντικές τιμές** οι ως άνω επιρροές είναι τόσο μικρές που μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες, επιτρέποντας την ανεξάρτητη επίλυση των προβλημάτων κάμψης και επίπεδης έντασης.

Στη συνέχεια έχοντας θεωρήσει ότι η πλάκα αποτελείται από γραμμικά ελαστικό, ομογενές υλικό, μπορούμε να εξαγάγουμε τις εκφράσεις των συνιστωσών του 2^{ου} τανυστή τάσεων Piola-Kirchhoff, ο οποίος είναι *συζυγής ως προς το έργο (work conjugate)* με τον τανυστή παραμορφώσεων Green.

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.2.12)$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι το υλικό είναι ισότροπο και υιοθετώντας την παραδοχή ότι ισχύουν συνθήκες επίπεδης έντασης στην πλάκα (τρίτη παραδοχή), οι συντελεστές Q_{ij} προκύπτουν ως

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (3.2.13\alpha)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (3.2.13\beta)$$

$$Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.2.13\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.13) στις σχέσεις (3.2.12), οι μη μηδενικές συνιστώσες τάσης προκύπτουν ως

$$S_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \nu \left[\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.2.14\alpha)$$

$$S_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.2.14\beta)$$

$$S_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.2.14\gamma)$$

3.2.3 Εξισώσεις ισορροπίας

Στη συνέχεια, πριν την εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας για το πρόβλημα που εξετάζουμε, είναι σκόπιμο να ορίσουμε τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται σε ένα στοιχείο πλάκας. Η αποδέσμευση από την αναγκαιότητα μελέτης του αρχικού τρισδιάστατου φορέα και η αναγωγή του προβλήματος σε δισδιάστατο (θεωρία πλάκας), επιτρέπει το να μην λαμβάνουμε υπόψη τις κατανομές των τάσεων κατά τη διεύθυνση του ύψους και να εξετάζουμε μόνο το συνολικό αποτέλεσμα των τάσεων αυτών μέσω των εντατικών μεγεθών. Τα μεγέθη αυτά προκύπτουν από κατάλληλες ολοκληρώσεις των τάσεων καθ' ύψος της πλάκας και εκφράζουν δυνάμεις και ροπές ανά μονάδα μήκους (Timoshenko & Woinowski-Krieger, 1959):

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xx} dz \quad (3.2.15\alpha)$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} S_{yy} dz \quad (3.2.15\beta)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xy} dz \quad (3.2.15\gamma)$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z S_{xx} dz \quad (3.2.15\delta)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z S_{yy} dz \quad (3.2.15\epsilon)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z S_{xy} dz \quad (3.2.15\sigma\tau)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} S_{xz} dz \quad (3.2.15\zeta)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} S_{yz} dz \quad (3.2.15\eta)$$

Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι οι τάσεις S_{xz}, S_{yz} δεν συμμετέχουν στην ενέργεια παραμορφώσεως καθώς τα δυνατά έργα των τάσεων αυτών προκύπτουν ίσα με μηδέν,

αφού ισχύει ότι $\gamma_{xz}, \gamma_{yz} = 0$. Τονίζεται όμως ότι παρ' όλο που δεν λαμβάνεται υπόψη η συνεισφορά των εν λόγω διατμητικών παραμορφώσεων στη συνολική ενέργεια παραμόρφωσης, οι προκύπτουσες τέμνουσες δυνάμεις είναι απαραίτητες για την επίτευξη της ισορροπίας [(Σαπουντζάκης, 2003), (Reddy, 2004)] και μάλιστα μπορούν να προσδιοριστούν στο σύνορο της πλάκας. Οι σχέσεις (3.2.15α-γ) και (3.2.15δ-στ) γράφονται σε διανυσματική μορφή ως

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} dz \Rightarrow \mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S} dz \Rightarrow \mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dz \quad (3.2.16\alpha)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} dz \Rightarrow \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{S} dz \Rightarrow \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dz \quad (3.2.16\beta)$$

Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση (3.2.9) οι σχέσεις (3.2.16) γράφονται ως

$$\mathbf{N} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}^m \int_{-h/2}^{h/2} dz + \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}^b \int_{-h/2}^{h/2} z dz = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}^m \int_{-h/2}^{h/2} dz = h \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}^m \quad (3.2.17\alpha)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}^m \int_{-h/2}^{h/2} z dz + \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}^b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}^b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}^b \quad (3.2.17\beta)$$

Εκτελώντας τις πράξεις τα εντατικά μεγέθη της πλάκας προκύπτουν ως

$$N_{xx} = C \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.2.18\alpha)$$

$$N_{yy} = C \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.2.18\beta)$$

$$N_{xy} = C \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.2.18\gamma)$$

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.2.18\delta)$$

$$M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.2.18\epsilon)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.2.18\sigma\tau)$$

όπου $C = Eh/(1-\nu^2)$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ είναι η μεμβρανική και καμπτική αντίσταση της πλάκας, αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις ισορροπίας της πλάκας θα διατυπωθούν μέσω εφαρμογής της Αρχής των Δυνατών Έργων. Η έκφραση της Αρχής των Δυνατών Έργων, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\delta W = \delta U + \delta V = 0 \quad (3.2.19)$$

Όπου δU είναι η δυνατή μεταβολή της ενέργειας παραμόρφωσης η οποία είναι

$$\begin{aligned} \delta U &= \iint_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (S_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + S_{xy} \delta \gamma_{xy} + S_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^m + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^b + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^m + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^b + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^m + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^b) dx dy \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

δV είναι το δυνατό έργο των εξωτερικών φορτίσεων το οποίο οφείλεται στο κατανεμημένο τυχαίο φορτίο $g = g(x, y)$ στην επιφάνεια της πλάκας στο επίπεδο $(x, y, -h/2)$ καθώς και στις ορθές τάσεις S_{nn} , S_{nt} , S_{nz} που ασκούνται στην παράπλευρη επιφάνεια του συνόρου της πλάκας $\Gamma \times (-h/2, h/2)$. Οι τάσεις αυτές προκαλούνται από τις στηρίξεις της πλάκας. Ο δείκτης $(\)_{nn}$ υποδηλώνει μέγεθος που αναπτύσσεται κατά την διεύθυνση του καθέτου, στην καμπύλη του συνόρου, διανύσματος \mathbf{n} και ο δείκτης $(\)_{nt}$ υποδηλώνει μέγεθος που αναπτύσσεται κατά τη διεύθυνση του εφαπτομενικού, στην καμπύλη του συνόρου, διανύσματος \mathbf{t} . Η έκφραση του δV προκύπτει ως

$$\begin{aligned} \delta V &= - \left\{ \iint_{\Omega} g(x, y) \delta \bar{w} \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} (S_{nn} \delta \bar{u}_n + S_{nt} \delta \bar{u}_t + S_{nz} \delta \bar{w}) dz ds \right\} = \\ &= - \left\{ \iint_{\Omega} g \delta w dx dy + \int_{\Gamma} \left(N_{nn} \delta u_n - M_{nn} \frac{\partial \delta w}{\partial n} + N_{nt} \delta u_t - M_{nt} \frac{\partial \delta w}{\partial t} + Q_n \delta w \right) ds \right\} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

όπου

$$\begin{Bmatrix} N_{nn} \\ N_{nt} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} S_{nn} \\ S_{nt} \end{Bmatrix} dz \quad (3.2.22\alpha)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{nn} \\ N_{nt} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} S_{nn} \\ S_{nt} \end{Bmatrix} dz \quad (3.2.22\beta)$$

$$Q_n = \int_{-h/2}^{h/2} S_{nz} dz \quad (3.2.22\gamma)$$

είναι τα συνοριακά μεμβρανικά και καμπτικά εντατικά μεγέθη καθώς και η τέμνουσα δύναμη που αναπτύσσονται στο σύνορο της πλάκας λόγω των στηρίξεων που της

επιβάλλονται. Εισάγοντας τις σχέσεις (3.2.20) και (3.2.21) στη σχέση (3.2.19) και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των δυνατών μεταβολών των παραμορφώσεων προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\iint_{\Omega} \left[N_{xx} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + N_{yy} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - g \delta w \right] dx dy - \int_{\Gamma} \left(N_{nn} \delta u_n - M_{nn} \frac{\partial \delta w}{\partial n} + N_{nt} \delta u_t - \right. \\ \left. - M_{nt} \frac{\partial \delta w}{\partial t} + Q_n \delta w \right) ds = 0 \quad (3.2.23)$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να εξαλειφθούν οι παράγωγοι των δυνατών μεταβολών των κινηματικών μεγεθών, εφαρμόζεται ολοκλήρωση κατά παράγοντες (θεώρημα Gauss-Green). Τελικά προκύπτει:

$$\iint_{\Omega} \left[- \left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u - \left(\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta v - \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N + g \right) \delta w \right] dx dy + \\ + \int_{\Gamma} \left[(N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) \delta u + (N_{xy} n_x + N_{yy} n_y) \delta v + \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} n_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} n_x + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} n_y + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} n_y + P \right) \delta w - (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial x} - (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] ds - \\ - \int_{\Gamma} \left(N_{nn} \delta u_n - M_{nn} \frac{\partial \delta w}{\partial n} + N_{nt} \delta u_t - M_{nt} \frac{\partial \delta w}{\partial t} + Q_n \delta w \right) ds = 0 \quad (3.2.24)$$

όπου

$$N(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.2.25\alpha)$$

$$P(u, v, w) = \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_x + \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_y \quad (3.2.25\beta)$$

n_x, n_y είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του καθέτου διανύσματος \mathbf{n} . Απαιτώντας η σχέση (3.2.24) να ισχύει για κάθε δυνατή μεταβολή, προκύπτουν οι παρακάτω μη γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσει των εντατικών μεγεθών ως

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.2.26\alpha)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3.2.26\beta)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N(u, v, w) = -g \quad (3.2.26\gamma)$$

Με εκτέλεση των πράξεων και με χρήση των (3.2.25α) και (3.2.25β), η (3.2.25γ) απλοποιείται ως

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -g \quad (3.2.27)$$

Σημειώνεται ότι οι εξισώσεις ισορροπίας (3.2.26) είναι ταυτόσημες με αυτές που προκύπτουν για το γραμμικοποιημένο πρόβλημα 2^{ης} τάξης (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959) με τη διαφορά ότι τα εντατικά μεγέθη που δίνονται από τις σχέσεις (3.2.18α-γ) δεν περιέχουν τους μη γραμμικούς όρους της βύθισης. Περαιτέρω γραμμικοποίηση του προβλήματος οδηγεί στις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.2.28\alpha)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3.2.28\beta)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -g \quad (3.2.28\gamma)$$

οι οποίες αποτελούν τις αποσυζευγμένες εξισώσεις επίπεδης έντασης (τελεστής Navier) και κάμψης πλάκας που ισχύουν στα πλαίσια της παραδοχής μικρών μετατοπίσεων. Για να καταλήξουμε στις εξισώσεις Von Kármán, χρειάζεται να ορίσουμε μια τασική συνάρτηση τύπου Airy $\Phi(x, y)$ η οποία να πληρεί τις παρακάτω απαιτήσεις (Νεραντζάκη, 1991)

$$N_{xx} = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (3.2.29\alpha)$$

$$N_{yy} = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (3.2.29\beta)$$

$$N_{xy} = -h \frac{\partial \Phi}{\partial x \partial y} \quad (3.2.29\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι με χρήση των (3.2.29) οι εξισώσεις (3.2.26α,β) ικανοποιούνται ταυτοτικά, ενώ η (3.2.27) γράφεται ως

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -g \quad (3.2.30)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (3.2.18δ-στ), παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.2.30) είναι διατυπωμένη ως προς τις δύο άγνωστες ποσότητες w , Φ . Συνεπώς χρειαζόμαστε μια παραπάνω εξίσωση για τον προσδιορισμό τους. Αυτή μπορεί να προκύψει διατυπώνοντας την εξίσωση συμβιβαστού. Ισχύει [(Νεραντζάκη, 1991), (Szilard, 2004)]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.2.31)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (3.2.2), (3.2.8), (3.2.12) και (3.2.18) προκύπτει το παρακάτω σύστημα

$$\nabla^4 w = \frac{g}{D} + \frac{h}{D} L(w, \Phi) \quad (3.2.32\alpha)$$

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{E}{2} L(w, w) \quad (3.2.32\beta)$$

Όπου $L(,)$ είναι μη γραμμικός διαφορικός τελεστής που ορίζεται ως εξής

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (3.2.33)$$

Η έκφραση του $L(w, w)$ Προκύπτει με αντικατάσταση του Φ από το w στην σχέση (3.2.33). Οι εξισώσεις (3.2.32) αποτελούν τις εξισώσεις *Von Kármán*. Οι εξισώσεις Von Kármán τροποποιήθηκαν αργότερα από τον Marguerre (1938) ώστε να περιλαμβάνουν και αρχική καμπυλότητα ως ατέλεια. Οι εκφράσεις δίνονται ως (Νεραντζάκη, 1991)

$$\nabla^4 w = \frac{g}{D} + \frac{h}{D} L(w + w_0, \Phi) \quad (3.2.34\alpha)$$

$$\nabla^4 \Phi = -EL \left(w, \frac{w}{2} + w_0 \right) \quad (3.2.34\beta)$$

όπου $w_0 = w_0(x, y)$ είναι η παραμορφωμένη μέση επιφάνεια της πλάκας λόγω των αρχικών ατελειών. Οι εξισώσεις (3.2.34) έχουν ιδιαίτερη σημασία για τη μελέτη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς πλακών.

3.2.4 Συνοριακές συνθήκες

Οι παραπάνω εξισώσεις (3.2.26) ορίζουν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Συνεπώς πρέπει να ορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες. Για να διατυπωθούν, όμως, οι συνοριακές συνθήκες σε τυχαίο σύνορο, είναι αναγκαίο να συσχετιστούν τα εντατικά μεγέθη ως προς τους άξονες x, y με τα αντίστοιχα που ασκούνται σε τυχαίες επιφάνειες με κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} και εφαπτομενικό διάνυσμα \mathbf{t} (Σχ. 3.2.2). Τα εν λόγω εντατικά μεγέθη έχουν οριστεί στις σχέσεις (3.2.22). Παρατηρώντας το Σχήμα 3.2.2 και εφαρμόζοντας τις σχέσεις γεωμετρίας, προκύπτει η παρακάτω σχέση για τις τάσεις S_{nn}, S_{nt} ως

$$\begin{Bmatrix} S_{nn} \\ S_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.35)$$

Αναλόγως πρέπει και τα κινηματικά μεγέθη ($u, v, w, \partial w / \partial x, \partial w / \partial y$), που αναφέρονται στο σύστημα $Oxyz$ να εκφραστούν σε όρους των αντίστοιχων μεγεθών κατά τη διεύθυνση των \mathbf{n}, \mathbf{t} . Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$u = u_n n_x - u_t n_y \quad (3.2.36\alpha)$$

$$v = u_n n_y + u_t n_x \quad (3.2.36\beta)$$

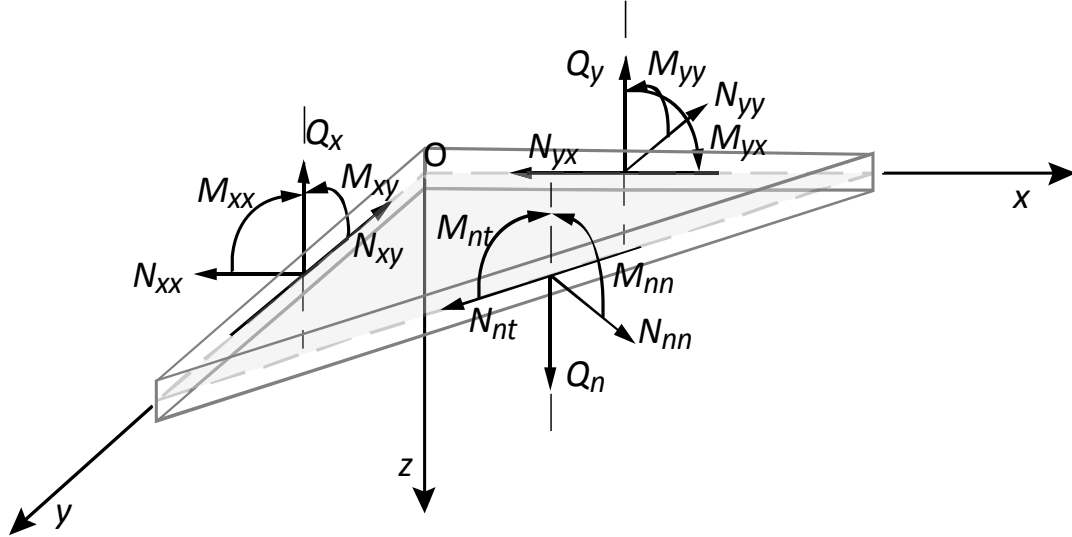
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial n} n_x - \frac{\partial w}{\partial t} n_y \quad (3.2.36\gamma)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial n} n_y + \frac{\partial w}{\partial t} n_x \quad (3.2.36\delta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.2.36) τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της σχέσης (3.2.24) γράφονται ως

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[(N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) (\delta u_n n_x - \delta u_t n_y) + (N_{xy} n_x + N_{yy} n_y) (\delta u_n n_y + \delta u_t n_x) + \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} n_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} n_x + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} n_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} n_y + P \right) \delta w - (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \left(\frac{\partial w}{\partial n} n_x - \frac{\partial w}{\partial t} n_y \right) - \right. \\ \left. - (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \left(\frac{\partial w}{\partial n} n_y + \frac{\partial w}{\partial t} n_x \right) - \left(N_{nn} \delta u_n - M_{nn} \frac{\partial \delta w}{\partial n} + N_{nt} \delta u_t - M_{nt} \frac{\partial \delta w}{\partial t} + \right. \right. \\ \left. \left. + Q_n \delta w \right) \right] ds = \int_{\Gamma} \left[(N_{xx} n_x^2 + 2N_{xy} n_x n_y + N_{yy} n_y^2 - N_{nn}) \delta u_n + [(N_{yy} - N_{xx}) n_x n_y + \right. \\ \left. + N_{xy} (n_x^2 - n_y^2) - N_{nt}] \delta u_t + \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} n_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} n_x + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} n_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} n_y + P - Q_n \right) \delta w - \right. \end{aligned}$$

$$-\left(M_{xx}n_x^2 + 2M_{xy}n_xn_y + M_{yy}n_y^2 - M_{nn}\right)\frac{\partial\delta w}{\partial n} - \left[(M_{yy} - M_{xx})n_xn_y + M_{xy}(n_x^2 - n_y^2) - M_{nt}\right]\frac{\partial\delta w}{\partial t} \Bigg\} ds \quad (3.2.37)$$



Σχήμα 3.2.2. Δυνάμεις και ροπές ανά μέτρο μήκους σε στοιχείο πλάκας

Μηδενίζοντας τις παραστάσεις που πολλαπλασιάζουν τις δυνατές μεταβολές των κινηματικών μεγεθών $\delta u_n, \delta u_t, \delta w, \partial\delta w/\partial n, \partial\delta w/\partial t$ προκύπτουν οι φυσικές συνοριακές συνθήκες ως

$$N_{nn} = N_{xx}n_x^2 + 2N_{xy}n_xn_y + N_{yy}n_y^2 \quad (3.2.38\alpha)$$

$$N_{nt} = (N_{yy} - N_{xx})n_xn_y + N_{xy}(n_x^2 - n_y^2) \quad (3.2.38\beta)$$

$$M_{nn} = M_{xx}n_x^2 + 2M_{xy}n_xn_y + M_{yy}n_y^2 \quad (3.2.38\gamma)$$

$$M_{nt} = (M_{yy} - M_{xx})n_xn_y + M_{xy}(n_x^2 - n_y^2) \quad (3.2.38\delta)$$

$$Q_n = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x}n_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}n_x + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}n_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}n_y + P \quad (3.2.38\epsilon)$$

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε μια ασυνέπεια που δημιουργείται στην εν λόγω θεωρία. Εάν οι διαφορικές εξισώσεις εκφραστούν συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών, τότε συνολικά το πρόβλημα είναι ογδόης τάξης. Στις εξισώσεις του προβλήματος επίπεδης έντασης υπάρχουν παράγωγοι των u, v μέχρι δευτέρας τάξης ενώ στην εξίσωση κάμψης υπάρχουν παράγωγοι του w μέχρι τετάρτης τάξης. Συνεπώς για το εξεταζόμενο πρόβλημα θα πρέπει να ορίζονται συνολικά οκτώ συνοριακές συνθήκες (τέσσερις κινηματικές ή ουσιώδεις και τέσσερις φυσικές). Όπως έγινε φανερό από τα παραπάνω, μέχρι στιγμής έχουν οριστεί δέκα συνοριακές συνθήκες (πέντε κινηματικές και πέντε φυσικές). Φαίνεται

συνεπώς, ότι το πρόβλημα δεν είναι καλώς ορισμένο. Όπως θα προκύψει όμως στη συνέχεια, η δυσχέρεια αυτή αναιρείται, καθώς οι φυσικές συνοριακές συνθήκες δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους, διότι η τέμνουσα Q_n σχετίζεται με τη ροπή συστροφής M_{nt} . Ο Kirchhoff (1850) έδωσε πρώτος τη λύση στο ως άνω πρόβλημα, διασπώντας τη ροπή συστροφής του κάθε στοιχειώδους τμήματος σε ζεύγος κατακόρυφων δυνάμεων και εισήγαγε την έννοια της υποκατάστατης τέμνουσας (Szilard, 2004). Έτσι, μείωσε τις φυσικές συνοριακές συνθήκες σε τέσσερις και περιέγραψε το φαινόμενο των συγκεντρωμένων δυνάμεων, οι οποίες αναπτύσσονται στις γωνίες της πλάκας και οδηγούν στην ανύψωση τους όταν δεν υπάρχει δέσμευση (Σαπουντζάκης, 2003).

Στα ίδια αποτελέσματα για τις συνοριακές συνθήκες θα καταλήξουμε ακολουθώντας την ενεργειακή μέθοδο που έχει αναπτυχθεί στην παρούσα ενότητα. Θεωρώντας το τμήμα του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της σχέσης (3.2.35) που αντιστοιχεί στη ροπή συστροφής και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει

$$-\int_{\Gamma} M_{nt} \frac{\partial \delta w}{\partial t} ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \delta w ds - [M_{nt} \delta w]_{\Gamma} \quad (3.2.39)$$

όπου ο όρος $[M_{nt} \delta w]_{\Gamma}$ μηδενίζεται όταν τα άκρα μιας καμπύλης συμπίπτουν ή όταν $M_{nt} = 0$. Εάν η συνθήκη $M_{nt} = 0$ δεν εισάγεται στις πιθανές γωνίες ενός συνόρου Γ , συγκεντρωμένες δυνάμεις $F_c = -2M_{nt}$ εμφανίζονται που αντιστοιχούν στις δυνάμεις στις οποίες αναφέρεται ο Kirchhoff. Παρατηρώντας τον πρώτο όρο της σχέσης (3.2.39), διαπιστώνουμε ότι η παράγωγος της συστροφής πολλαπλασιάζεται με τη δυνατή μεταβολή της βύθισης. Συνεπώς είναι πλέον εφικτό να προστεθεί στην έκφραση της τέμνουσας στη σχέση (3.2.37). Εισάγεται λοιπόν ένα νέο μέγεθος ως

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad (3.2.39)$$

Το παραπάνω μέγεθος είναι γνωστό ως *υποκατάστατη τέμνουσα*. Έχοντας πλέον τον απαιτούμενο αριθμό συνοριακών μεγεθών, μπορούμε να διατυπώσουμε τις συνοριακές συνθήκες της πλάκας σε μια γενική μορφή ως εξής

$$a_1 u_n + a_2 N_{nn} = a_3 \quad (3.2.40\alpha)$$

$$b_1 u_t + b_2 N_{nt} = b_3 \quad (3.2.40\beta)$$

$$\gamma_1 w + \gamma_2 V_n = \gamma_3 \quad (3.2.40\gamma)$$

$$\delta_1 \frac{\partial w}{\partial n} + \delta_2 M_{nn} = \delta_3 \quad (3.2.40\delta)$$

Στις περιπτώσεις γωνιών πρέπει να ισχύει και η πρόσθετη συνθήκη (Katsikadelis and Armenakas, 1989)

$$\varepsilon_{1k} w + \varepsilon_2 \|M_{nt}\|_k = \varepsilon_{3k}, \quad \varepsilon_{2k} \neq 0 \quad (3.2.41)$$

όπου $a_l, b_l, \gamma_l, \delta_l$ ($l=1,2,3$) είναι γνωστές συναρτήσεις εξαρτώμενες από τις συνθήκες στήριξης της πλάκας και ορίζονται στο σύνορο Γ . Επιπλέον ε_{lk} ($l=1,2,3$) είναι συναρτήσεις που ορίζονται στις k γωνίες της πλάκας. Οι συνοριακές συνθήκες (3.2.38α,β) αναφέρονται στο πρόβλημα επίπεδης έντασης. Συνεπώς, για να γίνουν συμβατές με τη διατύπωση των εξισώσεων Von Κάρμάν (σχέσεις (3.2.32)), πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει της τασικής συνάρτησης Φ . Η διατύπωση των συνοριακών συνθηκών διαχωρίζεται σε δύο περιπτώσεις: Για την περίπτωση των φυσικών συνοριακών συνθηκών οι σχέσεις προσδιορίζονται σχετικά εύκολα και δίνονται από τις σχέσεις (Νεραντζάκη, 1991)

$$\Phi = \zeta_1 \quad (3.2.42\alpha)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \zeta_2 \quad (3.2.42\alpha)$$

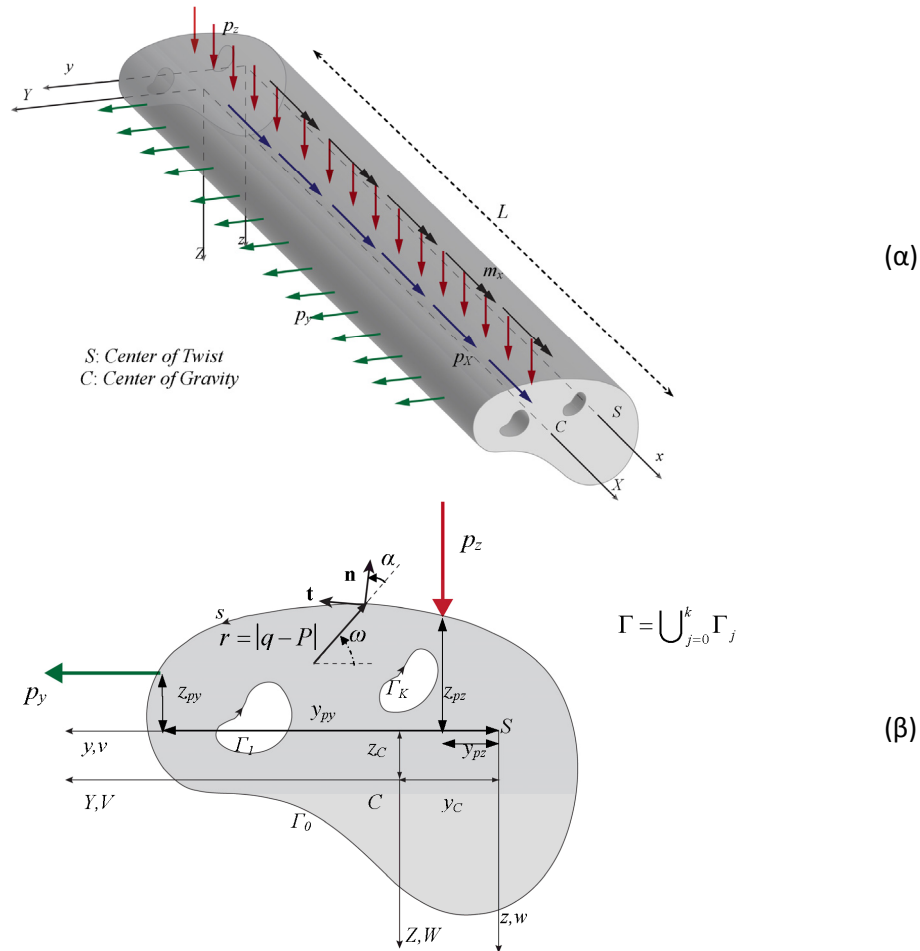
όπου ζ_l , ($l=1,2$) είναι γνωστές συναρτήσεις στο σύνορο της πλάκας. Για την περίπτωση των κινηματικών συνοριακών συνθηκών προκύπτουν δυσχέρειες στην έκφραση τους λόγω της εμφάνισης αγνώστων συναρτήσεων ολοκλήρωσης κατά την ολοκλήρωση των παραμορφώσεων που εκφράζονται συναρτήσει της τασικής συνάρτησης. Γίνεται λοιπόν φανερό το μειονέκτημα που παρουσιάζουν οι εξισώσεις Von Κάρμάν ως προς την αντιμετώπιση γενικών συνοριακών συνθηκών. Το μειονέκτημα αυτό τις καθιστά χρήσιμες μόνο για περιπτώσεις, όπου οι συνοριακές συνθήκες περιλαμβάνουν αμιγείς φυσικές συνοριακές συνθήκες για το μεμβρανικό πρόβλημα (Νεραντζάκη, 1991).

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας για την επίλυση του προβλήματος μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων της ενισχυμένης πλάκας, οι εξισώσεις ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες θα εκφραστούν συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών. Η διατύπωση αυτή συγκρινόμενη με τις εξισώσεις Von Κάρμάν παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι αυξάνει τους αγνώστους του προβλήματος και κάνει πιο πολύπλοκη την αριθμητική επίλυση, όπως θα γίνει φανερό στο κεφάλαιο 4, παρουσιάζει ωστόσο το σημαντικό πλεονέκτημα ότι μπορεί να εξετάσει την πιο γενική περίπτωση πλάκας χωρίς περιορισμούς στο σχήμα ή τις συνοριακές συνθήκες. Βάση για τη διατύπωση των εξισώσεων θα αποτελέσουν οι σχέσεις (3.2.26), (3.2.40) και (3.2.41) και θα παρουσιαστούν στην ενότητα 3.4.

3.3 Διατύπωση προβλήματος μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων δοκού τυχούσας διατομής

Θεωρούμε ευθύγραμμη δοκό μήκους L , σταθερής διατομής, τυχόντος σχήματος, εμβαδού A . Η διατομή περιλαμβάνει το δισδιάστατο χωρίο Ω το οποίο είναι απλά ή πολλαπλά συνεκτικό (υπάρχει η δυνατότητα να περιλαμβάνει οπές), ενώ το σύνορο της εν λόγω διατομής $\Gamma = \partial\Omega$, είναι τμηματικά λείο (Σχ. 3.3.1β). Το υλικό από το οποίο αποτελείται η ράβδος είναι γραμμικά ελαστικό, ομογενές και ισότροπο με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G και λόγο Poisson ν . Με $CXYZ$ συμβολίζεται το κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής C , ενώ με $Sxyz$ συμβολίζεται το

σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο στρέψης της διατομής S , με άξονες παράλληλους προς το $CXYZ$.



Σχήμα. 3.3.1. Πρισματική ράβδος (α) τυχούσας διατομής Ω (β) που υπόκειται σε συνδυασμένη δράση αξονικών, εγκάρσιων φορτίων και στρεπτικών ροπών

Η δοκός υπόκειται στις πλέον γενικές συνθήκες στήριξης στα άκρα της, ενώ υποβάλλεται σε συνδυασμό τυχαία κατανεμημένης ή/και συγκεντρωμένης αξονικής φόρτισης $p_x = p_x(X)$, η οποία ασκείται κατά μήκος του κεντροβαρικού άξονα X , εγκάρσιας φόρτισης $p_y = p_y(x)$ και $p_z = p_z(x)$, η οποία ασκείται σε αποστάσεις y_{p_y} , z_{p_y} και y_{p_z} , z_{p_z} , αντίστοιχα, από το κέντρο στρέψης και στρεπτικής ροπής $m_x = m_x(x)$ κατά την διεύθυνση του διαμήκη άξονα x του συστήματος Syz , που διέρχεται από το κέντρο στρέψης της διατομής. Στην παρούσα ανάλυση, για λόγους ευκολίας, θεωρούμε ότι στη δοκό δεν ασκούνται συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες καμπτικές ροπές ή δίρροπο στρέβλωσης που οφείλονται στην πιθανή ανομοιόμορφη κατανομή των αξονικών εξωτερικά επιβαλλόμενων επιφανειακών τάσεων. Τονίζεται ότι η απλοποίηση αυτή δεν μπορεί να

υιοθετηθεί στην περίπτωση της ενισχυμένης πλάκας και οι εν λόγω φορτίσεις θα ληφθούν υπόψη στην αντίστοιχη περιγραφή των προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Στις ασύμμετρες διατομές, σε αντίθεση με τις διατομές διπλής συμμετρίας, το κέντρο στρέψης δεν ταυτίζεται με το κέντρο βάρους της διατομής, οδηγώντας σε σύζευξη των φαινομένων της κάμψης και της στρέψης. Για την συμπεριφορά της ράβδου, στα πλαίσια της παρούσας μελέτης, υιοθετούνται οι παρακάτω παραδοχές:

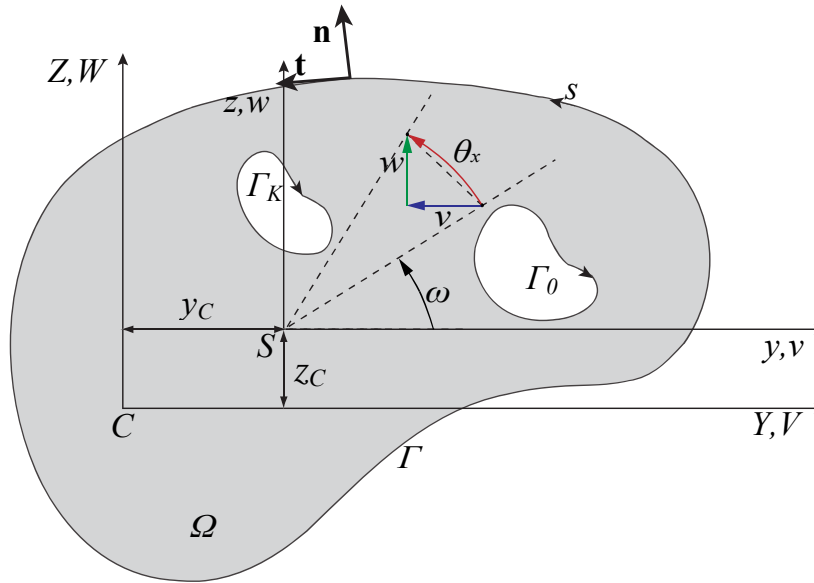
- Οι διατομές της ράβδου περιστρέφονται περί τον διαμήκη άξονα, που διέρχεται από το κέντρο στρέψης, ως στερεά σώματα. Δεν αναπτύσσονται, συνεπώς, παραμορφώσεις εντός του επιπέδου της διατομής (*distortion*).
- Οι διατμητικές παραμορφώσεις που οφείλονται στα εγκάρσια φορτία που δρουν στη δοκό θεωρούνται μηδενικές (θεωρία δοκού Euler-Bernoulli).
- Οι εγκάρσιες μετατοπίσεις και οι γωνίες στροφής λόγω στρέψης μπορούν να είναι μετρίως μεγάλες, αλλά οι παραμορφώσεις θεωρούνται μικρές. Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, οι συνιστώσες του τανυστή παραμορφώσεων είναι μικρότερες της μονάδας και οι όροι δεύτερης τάξης θεωρούνται μικροί αλλά όχι αμελητέοι (Reddy, 2004) (θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων-μικρών παραμορφώσεων).

3.3.1 Πεδίο μετατοπίσεων

Για την προσέγγιση του προβλήματος που διατυπώθηκε παραπάνω, θα γίνει χρήση της *ημιαντίστροφης μεθόδου* του St. Venant (*semi-inverse method*). Αρχικά θα υιοθετηθεί ένα κατάλληλο πεδίο μετατοπίσεων με βάση το οποίο, υποθέτουμε, ότι η ράβδος θα παραμορφωθεί. Σύμφωνα με την εν λόγω μέθοδο, εάν το συγκεκριμένο πεδίο ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας και δίνει τη λύση του προβλήματος, τότε είναι το σωστό. Η μόρφωση του κατάλληλου πεδίου μετατοπίσεων, θα βασιστεί στις παραδοχές που αναφέρθηκαν παραπάνω. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω οι διατομές περιστρέφονται ως στερεά σώματα, συνεπώς τα σημεία εκτελούν κυκλική κίνηση γύρω από το κέντρο στρέψης της διατομής S . Η στρόφη της διατομής σε τυχούσα θέση της ράβδου x θα περιγράφεται από το μέγεθος $\vartheta_x(x)$. Η πρώτη παράγωγος της στροφής, $\vartheta'_x(x)$ ονομάζεται *συστροφή* και εκφράζει τη σχετική γωνία στροφής δύο γειτονικών διατομών της ράβδου, ανηγμένη στη μονάδα μήκους. Η διαμήκης συνιστώσα της μετατόπισης οφείλεται αφ' ενός σε στρόφη των διατομών περί τους άξονες Y και Z λόγω κάμψης και αφ' ετέρου στη στρέβλωση των διατομών λόγω στρέψης. Για την περιγραφή της διαμήκους μετατόπισης των σημείων της διατομής λόγω στρέβλωσης, υιοθετείται μια συνάρτηση $\varphi_S^P(y,z)$, η οποία ονομάζεται *πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης*, αναφέρεται στο κέντρο στρέψης της διατομής S και εκφράζει τη στρέβλωση της δοκού για μοναδιαία συστροφή $\vartheta'_x(x)$. Η στρέβλωση που περιγράφει η εν λόγω συνάρτηση οφείλεται στην κατανομή των πρωτογενών διατμητικών τάσεων (Sapountzakis & Mokos, 2003).

Τα φαινόμενα της κάμψης και της στρέψης είναι αποζευγμένα ως προς το κέντρο στρέψης S , ενώ ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο, υπάρχει σύζευξη μεταξύ τους [(Bleich, 1952), (Attard, 1986b)]. Συνεπώς, οι εγκάρσιες μετατοπίσεις ενός τυχαίου σημείου μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μετακινήσεων του συγκεκριμένου σημείου και της γωνίας στροφής της διατομής στο επίπεδο της. Θεωρώντας, λοιπόν, την κίνηση ενός τυχαίου

σημείου της διατομής κατά την παραμόρφωση της δοκού (Σχ. 3.3.2), προκύπτουν οι εκφράσεις των συνιστωσών του διανύσματος της μετατόπισης, ως εξής



Σχήμα 3.3.2. Τυχούσα διατομή δοκού που υποβάλλεται σε στρεπτική στρόφιξη περί το κέντρο στρέψης της

$$\bar{u}(x, y, z) = u(x) - (y - y_C) \vartheta_Z(x) + (z - z_C) \vartheta_Y(x) + \vartheta_x'(x) \varphi_S^P(y, z) \quad (3.3.1\alpha)$$

$$\bar{v}(x, y, z) = v(x) - z \sin \vartheta_x(x) - y(1 - \cos \vartheta_x(x)) \quad (3.3.1\beta)$$

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x) + y \sin \vartheta_x(x) - z(1 - \cos \vartheta_x(x)) \quad (3.3.1\gamma)$$

$$\vartheta_Z(x) = \cos \vartheta_x(x) v'(x) + \sin \vartheta_x(x) w'(x) \quad (3.3.1\delta)$$

$$\vartheta_Y(x) = \sin \vartheta_x(x) v'(x) - \cos \vartheta_x(x) w'(x) \quad (3.3.1\epsilon)$$

Όπου \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} είναι η συνιστώσες της μετατόπισης του τυχαίου σημείου ως προς το σύστημα αξόνων Syz . Όπου $u = \frac{1}{A} \int_A \bar{u}(x, y, z) dA$ αποτελεί τη μέση αξονική μετακίνηση της διατομής (Attard, 1986a), $v = v(x)$, $w = w(x)$ είναι οι συνιστώσες μετατόπισης του κέντρου στρέψης, ενώ $\vartheta_Y(x)$, $\vartheta_Z(x)$ είναι οι γωνίες στρόφιξης της διατομής λόγω της κάμψης περί τους άξονες Y και Z , αντίστοιχα, οι εκφράσεις των οποίων προέκυψαν από απαίτηση μηδενισμού των διατμητικών παραμορφώσεων γ_{xy} και γ_{xz} στο κέντρο στρέψης της διατομής. Η απαίτηση αυτή, οφείλεται στην υιοθέτηση δοκού τύπου Euler-Bernoulli (δεύτερη παραδοχή) και στο γεγονός ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις στο κέντρο στρέψης, λόγω στρέβλωσης, είναι επίσης μηδενικές. Με τον συμβολισμό (\prime) , υποδηλώνεται η παραγωγή ως προς τη μεταβλητή x και θα εφαρμόζεται σε όλη τη συνέχεια της παρούσας ενότητας, για απλοποίηση της παρουσίασης των εξισώσεων. Οι

σχέσεις (3.3.1), συνεπώς, αποτελούν το διανυσματικό πεδίο μετατοπίσεων που υιοθετείται για την επίλυση του προβλήματος.

3.3.2 Παραμορφώσεις – Τάσεις

Στην περίπτωση της γραμμικής ανάλυσης, η παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων απλοποιεί σημαντικά το πρόβλημα, καθώς επιτρέπει διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση της δοκού και για τον προσδιορισμό της παραμόρφωσης χρησιμοποιείται ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης. Στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας, όπως έχει αναφερθεί, δεν υιοθετείται η παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων και οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν το εξεταζόμενο μη γραμμικό πρόβλημα, θα μορφωθούν στην παραμορφωμένη (άγνωστη) διαμόρφωση της δοκού, με ολική διατύπωση Lagrange. Συνεπώς, για τον υπολογισμό των παραμορφώσεων, θα χρησιμοποιηθεί ο τανυστής παραμορφώσεων Green ϵ^G αντί του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων. Οι συνιστώσες του τανυστή Green δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις [(Rothert & Gensichen, 1987), (Ramm & Hofmann, 1995)].

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.3.2\alpha)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.3.2\beta)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.3.2\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.3.2\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.3.2\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (3.3.2\sigma)$$

Για την απλοποίηση των παραπάνω εκφράσεων, υιοθετείται η παραδοχή ότι οι διαμήκεις μετατοπίσεις είναι αρκούντως μικρές, ούτως ώστε οι μη γραμμικοί όροι που προκύπτουν λόγω της μετατόπισης \bar{u} να μπορούν να αμεληθούν. Η παραδοχή αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι σε ένα ραβδωτό σώμα, όπου η μια διάσταση είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο, η παραμορφωσιακή εικόνα που αναμένεται να αναπτυχθεί, θα οφείλεται κυρίως στα εγκάρσια βέλη και τη στροφή λόγω στρέψης, ενώ οι διαμήκεις μετατοπίσεις θα είναι σημαντικά μικρότερες. Από τη θεώρηση του πεδίου μετατοπίσεων (σχέσεις (3.3.1)) και με εφαρμογή της παραπάνω παραδοχής, προκύπτει εύκολα ότι $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = 0$, ενώ οι εναπομείναντες όροι του τανυστή παραμορφώσεων γράφονται ως εξής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.3.3\alpha)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.3.3\beta)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.3.3\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων (σχέσεις (3.3.1)) στις σχέσεις (3.3.3) προκύπτουν οι τελικές εκφράσεις των παραμορφώσεων συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & u' + (z - z_C)(v'' \sin \vartheta_x - w'' \cos \vartheta_x) - (y - y_C)(v'' \cos \vartheta_x + w'' \sin \vartheta_x) + \\ & + \vartheta_x'' \varphi_S^P - \vartheta_x' \left[z_C (v' \cos \vartheta_x + w' \sin \vartheta_x) + y_C (v' \sin \vartheta_x - w' \cos \vartheta_x) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[v'^2 + w'^2 + (y^2 + z^2) (\vartheta_x')^2 \right] \end{aligned} \quad (3.3.4\alpha)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial y} - z \right) \vartheta_x' \quad (3.3.4\beta)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial z} + y \right) \vartheta_x' \quad (3.3.4\gamma)$$

Στη συνέχεια, έχοντας θεωρήσει ότι η ράβδος αποτελείται από γραμμικά ελαστικό, ισότροπο, ομογενές υλικό και αμελώντας την επιρροή του λόγου του Poisson, μπορούμε να εξάγουμε τις εκφράσεις των συνιστωσών του 2^{ου} τανυστή τάσεων Piola-Kirchhoff, ο οποίος είναι συζυγής ως προς το έργο με τον τανυστή παραμορφώσεων Green.

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^* & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.3.5)$$

Όπου το απομειωμένο μέτρο ελαστικότητας E^* προκύπτει από το νόμο του Hooke ως εξής:

$$E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.3.6)$$

Η παραπάνω έκφραση του E^* μπορεί να απλοποιηθεί εάν γίνει παραδοχή ότι ισχύουν συνθήκες επίπεδης έντασης στη δοκό [(Vlasov, 1963), (Armenakas, 2006)]. Έτσι προκύπτει ότι:

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \approx E \quad (3.3.7)$$

Συνεπώς, στη συνέχεια της παρούσας θεωρίας το μέτρο ελαστικότητας του υλικού E θα χρησιμοποιηθεί στη θέση του E^* , ενώ σημειώνεται ότι οποιαδήποτε εύλογη τιμή του E^* μπορεί να χρησιμοποιηθεί, χωρίς κανένα περιορισμό. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.3.4) στις (3.3.5), προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις

$$S_{xx} = E \left\{ u' + (z - z_C)(v'' \sin \vartheta_x - w'' \cos \vartheta_x) - (y - y_C)(v'' \cos \vartheta_x + w'' \sin \vartheta_x) + \right. \\ \left. + \vartheta_x'' \varphi_S^P - \vartheta_x' [z_C (v' \cos \vartheta_x + w' \sin \vartheta_x) + y_C (v' \sin \vartheta_x - w' \cos \vartheta_x)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [v'^2 + w'^2 + (y^2 + z^2)(\vartheta_x')^2] \right\} \quad (3.3.8\alpha)$$

$$S_{xy} = G \cdot \vartheta_x' \cdot \left(\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial y} - z \right) \quad (3.3.8\beta)$$

$$S_{xz} = G \cdot \vartheta_x' \cdot \left(\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial z} + y \right) \quad (3.3.8\gamma)$$

Από την εξίσωση (3.3.8α), γίνεται φανερή η συμμετοχή της συστροφής $\vartheta_x'(x)$ στην ανάπτυξη ορθών τάσεων μέσω του όρου $(1/2) \cdot (y^2 + z^2) \cdot (\vartheta_x')^2$, που εκφράζει τη μη γραμμική επιρροή της στρέψης (όρος Wagner) [(Attard, 1986b), (Chen & Trahair, 1992)]. Στην περίπτωση δοκού υποβαλλόμενης σε στρεπτική καταπόνηση, αναπτύσσονται εφελκυστικές ορθές τάσεις λόγω της στροφής που υφίσταται η διατομή περί το διαμήκη άξονα της, με αποτέλεσμα, οι αρχικά ευθύγραμμες διαμήκεις ίνες της δοκού να αποκτούν ελικοειδή μορφή. Στην περίπτωση αυτή, προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισορροπία των δυνάμεων (το ολοκλήρωμα των ορθών τάσεων απουσία εξωτερικής αξονικής φόρτισης, πρέπει να μηδενίζεται) η δοκός υφίσταται βράχυνση [(Attard, 1986a, 1986b), (Ronagh et al. 2000a, 2000b)]. Για το λόγο αυτό η προαναφερθείσα επιρροή αναφέρεται είτε ως μη γραμμική επιρροή στρέψης, είτε ως *βράχυνση λόγω στρέψης (shortening effect)*.

3.3.3 Εξισώσεις ισορροπίας

Μέχρι στιγμής, στο πεδίο μετατοπίσεων που χρησιμοποιήθηκε, έχουν εισαχθεί οι πέντε άγνωστες ποσότητες $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $\vartheta_x(x)$ και $\varphi_S^P(y)$. Η ζητούμενη συνάρτηση στρέβλωσης φ_S^P θα προκύψει από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών τύπου Neumann

$$\nabla^2 \varphi_S^P = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (3.3.9\alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.3.9\beta)$$

Όπου $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ είναι ο αρμονικός τελεστής ή τελεστής Laplace και $\frac{\partial}{\partial n}$ είναι ο τελεστής παραγώγου συνάρτησης κατά διεύθυνση ως προς το κάθετο, στο σύνορο Γ της διατομής, διάνυσμα n . Η συνοριακή συνθήκη του παραπάνω προβλήματος (τύπου Neumann), όπως προκύπτει από τη θεωρία των εξισώσεων δυναμικού (Κατσικαδέλης, 1999), οδηγεί σε λύση της εξίσωσης βάσει μιας αυθαίρετης σταθεράς, η οποία αφορά παράλληλη μετάθεση της διατομής κατά μήκος του διαμήκου άξονα. Για τον υπολογισμό της εν λόγω σταθεράς υιοθετείται η παρακάτω συνθήκη ορθογωνικότητας:

$$\iint_{\Omega} \varphi_S^P d\Omega = 0 \quad (3.3.10)$$

την οποία πρέπει να ικανοποιεί η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης φ_S^P . Το πρόβλημα υπολογισμού της φ_S^P επιλύεται σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφεται στις εργασίες των Sarountzakis (2001) και Sarountzakis & Mokos (2003).

Ο προσδιορισμός της συνάρτησης στρέβλωσης, πρέπει να προηγηθεί του προσδιορισμού των κινηματικών μεγεθών u , v , w , ϑ_x για τον υπολογισμό των οποίων, θα διατυπωθούν τέσσερις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας μέσω εφαρμογής της Αρχής των Δυνατών Έργων. Η έκφραση της Αρχής των Δυνατών Έργων, όπως διατυπώνεται στη γενικότητα της για δυναμικά προβλήματα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\delta W = \delta U + \delta V = 0 \quad (3.3.11)$$

Όπου,

$$\delta U = \int_L \iiint_{\Omega} (S_{xx} \delta \epsilon_{xx} + S_{xy} \delta \gamma_{xy} + S_{xz} \delta \gamma_{xz}) dydzdx \quad (3.3.12\alpha)$$

$$\delta V = - \int_L (p_x \delta u_C + p_y \delta \tilde{v}_{p_y} + p_z \delta \tilde{w}_{p_z} + m_x \delta \vartheta_x) dx \quad (3.3.12\beta)$$

Όπου $\delta(\)$ είναι ο τελεστής του λογισμού των μεταβολών, ο οποίος υποδηλώνει τις δυνατές μεταβολές των ποσοτήτων. Στα ολοκληρώματα των σχέσεων (3.3.12α), (3.3.12β), όπου u_C είναι η αξονική μετατόπιση του κέντρου βάρους λόγω της αξονικής φόρτισης p_x και \tilde{v}_{p_y} , \tilde{v}_{p_z} είναι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις των σημείων εφαρμογής των φορτίων p_y , p_z , αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των δυνατών μεταβολών προκύπτει

$$\delta V = -\int_L \left\{ p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w + \left[p_y \left(-z_{p_y} \cos \vartheta_x - y_{p_y} \sin \vartheta_x \right) + p_z \left(y_{p_z} \cos \vartheta_x - z_{p_z} \sin \vartheta_x \right) + m_x \right] \delta \vartheta_x \right\} dx \quad (3.3.13)$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις που εμφανίζονται στη σχέση (3.3.13) αναπτύσσονται σε σειρά Taylor και διατηρούνται οι δύο πρώτοι όροι (Mohri, 2002) ως εξής

$$\cos \vartheta_x = 1 - \frac{\vartheta_x^2}{2!} = 1 - \frac{\vartheta_x^2}{2} \quad (3.3.14\alpha)$$

$$\sin \vartheta_x = \vartheta_x - \frac{\vartheta_x^3}{3!} = \vartheta_x - \frac{\vartheta_x^3}{6} \quad (3.3.14\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (3.3.14) στην (3.3.13), η έκφραση του εξωτερικού έργου προκύπτει ως

$$\delta V = -\int_L \left\{ p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w + \left[p_y \left(-z_{p_y} - y_{p_y} \vartheta_x + \frac{1}{2} \vartheta_x^2 z_{p_y} + \frac{1}{6} \vartheta_x^3 y_{p_y} \right) + p_z \left(y_{p_z} - z_{p_z} \vartheta_x - \frac{1}{2} \vartheta_x^2 y_{p_z} + \frac{1}{6} \vartheta_x^3 z_{p_z} \right) + m_x \right] \delta \vartheta_x \right\} dx \quad (3.3.15)$$

Σημειώνεται ότι η έκφραση του εξωτερικού έργου δV , όπως εκφράζεται στη σχέση (3.3.15), λαμβάνει υπόψη την αλλαγή μήκους που υφίσταται ο μοχλοβραχίονας των εγκάρσιων φορτίων (Mohri, 2002), η οποία συμβαίνει κατά τη διάρκεια περιστροφής της διατομής περί τον διαμήκη άξονα της δοκού. Η αύξηση ή μείωση του μήκους του μοχλοβραχίονα κατά την διάρκεια της κίνησης αυτής, επιβάλλει πρόσθετη και μεταβαλλόμενη στρεπτική ροπή (θετική ή αρνητική), η οποία καταπονεί τη δοκό. Το μη γραμμικό αυτό φαινόμενο μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την απόκριση της δοκού.

Στη συνέχεια ορίζονται τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται στις διατομές, στην παραμορφωμένη διαμόρφωση της δοκού ως εξής

$$N = \iint_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad (3.3.16\alpha)$$

$$M_y = \iint_{\Omega} S_{xx} Z d\Omega \quad (3.3.16\beta)$$

$$M_Z = -\iint_{\Omega} S_{xx} y d\Omega \quad (3.3.16\gamma)$$

$$M_t^P = \iint_{\Omega} \left[S_{xy} \left(\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial y} - z \right) + S_{xz} \left(\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (3.3.16\delta)$$

$$M_w = -\iint_{\Omega} S_{xx} \varphi_S^P d\Omega \quad (3.3.16\epsilon)$$

$$M_R = \iint_{\Omega} S_{xx} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (3.3.16\sigma)$$

Όπου M_t^P είναι η στρεπτική ροπή που οφείλεται στις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις S_{xy} , S_{xz} (Sapountzakis & Mokos, 2003, 2004), M_w η ροπή στρέβλωσης και M_R εντατικό μέγεθος ανώτερης τάξης (Mohri, 2001, 2002, 2004). Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων, όπως προέκυψαν στις εξισώσεις (3.3.8), προκύπτουν οι εκφράσεις των εντατικών μεγεθών της δοκού συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών, ως εξής

$$N = EA \left\{ u' + \frac{1}{2} \left(v'^2 + w'^2 + \frac{I_S}{A} \vartheta_x'^2 \right) - \vartheta_x' \left[z_C (v' \cos \vartheta_x + w' \sin \vartheta_x) + y_C (v' \sin \vartheta_x - w' \cos \vartheta_x) \right] \right\} \quad (3.3.17\alpha)$$

$$M_Y = -EI_Y (w'' \cos \vartheta_x - v'' \sin \vartheta_x - \beta_Z \vartheta_x'^2) \quad (3.3.17\beta)$$

$$M_Z = EI_Z (v'' \cos \vartheta_x + w'' \sin \vartheta_x - \beta_Y \vartheta_x'^2) \quad (3.3.17\gamma)$$

$$M_t^P = GI_t \vartheta_x' \quad (3.3.17\delta)$$

$$M_w = -EC_S (\vartheta_x'' + \beta_\omega \vartheta_x'^2) \quad (3.3.17\epsilon)$$

$$M_R = N \frac{I_S}{A} - 2EI_Z \beta_Y (v'' \cos \vartheta_x + w'' \sin \vartheta_x) + 2EC_S \beta_\omega \vartheta_x'' - 2EI_Y \beta_Z (w'' \cos \vartheta_x - v'' \sin \vartheta_x) + \frac{1}{2} E \left(I_R - \frac{I_S^2}{A} \right) \vartheta_x'^2 \quad (3.3.17\sigma)$$

όπου το εμβαδόν A , οι κύριες ροπές αδράνειας I_Y , I_Z ως προς το κέντρο βάρους της διατομής C , η πολική ροπή αδράνειας I_S , το μέγεθος I_R , που αποτελεί την ροπή αδράνειας τέταρτης τάξης (Mohri, 2001, 2002, 2004), η στρεπτική σταθερά I_t και η σταθερά στρεβλώσεως C_S , ως προς το κέντρο στρέψης της διατομής S , ορίζονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$A = \iint_{\Omega} d\Omega \quad (3.3.18\alpha)$$

$$I_S = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (3.3.18\beta)$$

$$I_Y = \iint_{\Omega} Z^2 d\Omega \quad (3.3.18\gamma)$$

$$I_Z = \iint_{\Omega} Y^2 d\Omega \quad (3.3.18\delta)$$

$$I_R = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega \quad (3.3.18\epsilon)$$

$$C_S = \iint_{\Omega} (\varphi_S^P)^2 d\Omega \quad (3.3.18\sigma\tau)$$

$$I_t = \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \varphi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.3.18\zeta)$$

Ακόμη ορίζονται τα μεγέθη β_Z , β_Y και β_ω , τα οποία είναι γνωστά και ως συντελεστές Wagner (Mohri, 2001, 2002, 2004), ως εξής:

$$\beta_Z = \frac{1}{2I_Y} \iint_{\Omega} (z - z_C)(y^2 + z^2) d\Omega \quad (3.3.19\alpha)$$

$$\beta_Y = \frac{1}{2I_Z} \iint_{\Omega} (y - y_C)(y^2 + z^2) d\Omega \quad (3.3.19\beta)$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{2C_S} \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) \varphi_S^P d\Omega \quad (3.3.19\gamma)$$

Οι εν λόγω συντελεστές παίρνουν μηδενική τιμή στις διατομές διπλής συμμετρίας. Χρησιμοποιώντας τη σχέση της Αρχής των Δυνατών Έργων (εξίσωση (3.3.11)) και τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών, όπως αυτά ορίστηκαν στις εξισώσεις (3.3.13), εκτελώντας ολοκληρώσεις κατά παράγοντες προκειμένου να εξαλειφθούν οι παράγωγοι των δυνατών μεταβολών των κινηματικών μεγεθών και μηδενίζοντας τις ποσότητες που πολλαπλασιάζουν τις δυνατές μεταβολές (βλ. ενότητα 3.2), προκύπτει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας της δοκού, ως προς τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται στη διατομή

$$-N' = p_x \quad (3.3.20\alpha)$$

$$\left[-N(v' - y_C \vartheta_x' \sin \vartheta_x - z_C \vartheta_x' \cos \vartheta_x) \right]' + (M_Z \cos \vartheta_x)'' + (M_Y \sin \vartheta_x)'' = p_y \quad (3.3.20\beta)$$

$$\left[-N(w' + y_C \vartheta_x' \cos \vartheta_x - z_C \vartheta_x' \sin \vartheta_x) \right]' - (M_Y \cos \vartheta_x)'' + (M_Z \sin \vartheta_x)'' = p_z \quad (3.3.20\gamma)$$

$$N \left(-y_C v' \vartheta_x' \cos \vartheta_x - y_C w' \vartheta_x' \sin \vartheta_x - z_C w' \vartheta_x' \cos \vartheta_x + z_C v' \vartheta_x' \sin \vartheta_x \right) + \left[N(z_C (v' \cos \vartheta_x + w' \sin \vartheta_x)) \right]' + \left[N(y_C (v' \sin \vartheta_x - w' \cos \vartheta_x)) \right]' +$$

$$M_Y (w'' \sin \vartheta_x + v'' \cos \vartheta_x) + M_Z (w'' \cos \vartheta_x - v'' \sin \vartheta_x) - M_t^{P'} - M_w'' - \\ - (M_R \vartheta_x')' = m_x + p_z \gamma \rho_z \cos \vartheta_x - p_y z \rho_y \cos \vartheta_x - p_z z \rho_z \sin \vartheta_x - p_y \gamma \rho_y \sin \vartheta_x \quad (3.3.20\delta)$$

Το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων είναι σημαντικά μη γραμμικό και πεπλεγμένο. Η απλοποίηση του μπορεί να επιτευχθεί, αναπτύσσοντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.3.14) και διατηρώντας όρους μέχρι τρίτης τάξης (π.χ. $v'''' \vartheta_x^2$, $w'' \vartheta_x \vartheta_x''$, κλπ) προκύπτει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας της δοκού ως

$$-EA \left[u'' + w' w'' + v' v'' + \frac{I_S}{A} \vartheta_x' \vartheta_x'' - z_C (\vartheta_x \vartheta_x' w'' + \vartheta_x \vartheta_x'' w' + \vartheta_x'' v' + \vartheta_x' v'' + \vartheta_x'^2 w') - \right. \\ \left. - \gamma_C (\vartheta_x \vartheta_x'' v' + \vartheta_x \vartheta_x' v'' - \vartheta_x'' w' - \vartheta_x' w'' + \vartheta_x'^2 v') \right] = p_x \quad (3.3.21\alpha)$$

$$EI_Z v'''' - N \left[-z_C \vartheta_x'' - \gamma_C (\vartheta_x'^2 + \vartheta_x'' \vartheta_x) + v'' \right] + \\ + (EI_Z - EI_Y) (w'''' \vartheta_x + 2w'' \vartheta_x' + w'' \vartheta_x'' - v'''' \vartheta_x^2 - 4v'' \vartheta_x \vartheta_x' - 2v'' \vartheta_x \vartheta_x'' - 2v'' \vartheta_x'^2) + \\ + EI_Z \beta_Y (-2\vartheta_x' \vartheta_x''' - 2\vartheta_x''^2) + EI_Y \beta_Z (2\vartheta_x' \vartheta_x'' \vartheta_x + 2\vartheta_x''^2 \vartheta_x + 5\vartheta_x'^2 \vartheta_x'') = \\ = p_y - p_x (v' - \gamma_C \vartheta_x' \vartheta_x - z_C \vartheta_x') \quad (3.3.21\beta)$$

$$EI_Y w'''' - N \left[w'' + \gamma_C \vartheta_x'' - z_C (\vartheta_x'^2 + \vartheta_x \vartheta_x'') \right] + \\ + (EI_Z - EI_Y) (v'''' \vartheta_x + 2v'' \vartheta_x' + v'' \vartheta_x'' + w'''' \vartheta_x^2 + 4w'' \vartheta_x \vartheta_x' + 2w'' \vartheta_x \vartheta_x'' + 2w'' \vartheta_x'^2) + \\ + EI_Z \beta_Y (-2\vartheta_x' \vartheta_x''' \vartheta_x - 5\vartheta_x'^2 \vartheta_x'' - 2\vartheta_x''^2 \vartheta_x) + EI_Y \beta_Z (-2\vartheta_x' \vartheta_x''' - 2\vartheta_x''^2) = \\ = p_z - p_x (w' + \gamma_C \vartheta_x' - z_C \vartheta_x' \vartheta_x) \quad (3.3.21\gamma)$$

$$EC_S \vartheta_x'''' - GI_t \vartheta_x'' - \frac{3}{2} E \left(I_R - \frac{I_S^2}{A} \right) \vartheta_x'^2 \vartheta_x'' - N \left[\frac{I_S}{A} \vartheta_x'' + \gamma_C (w'' - v'' \vartheta_x) - z_C (v'' + w'' \vartheta_x) \right] + \\ + (EI_Z - EI_Y) (v'' w'' - v''^2 \vartheta_x + w''^2 \vartheta_x) + \\ + EI_Z \beta_Y (2\vartheta_x'' w'' \vartheta_x + w'' \vartheta_x'^2 + 2\vartheta_x' v'' + 2\vartheta_x'' v'' + 2\vartheta_x' w'' \vartheta_x) + EI_Y \beta_Z \cdot \\ \cdot (-2\vartheta_x'' v'' \vartheta_x + 2\vartheta_x'' w'' + 2\vartheta_x' w'' - v'' \vartheta_x'^2 - 2\vartheta_x' v'' \vartheta_x) = m_x + p_z \gamma \rho_z - p_y z \rho_z +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{2} \vartheta_x^2 z \rho_y + \frac{1}{6} \vartheta_x^3 \gamma \rho_y - \vartheta_x \gamma \rho_y \right) \rho_y + \left(\frac{1}{6} \vartheta_x^3 z \rho_z - \frac{1}{2} \vartheta_x^2 \gamma \rho_z - z \rho_z \vartheta_x \right) \rho_z - \\
 & - \rho_x \left(\frac{I_S}{A} \vartheta_x' - \gamma_C v' \vartheta_x - z_C w' \vartheta_x - z_C v' + \gamma_C w' \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.21δ}$$

όπου η έκφραση του N δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$N = EA \left[u' + \frac{1}{2} \left(v'^2 + w'^2 + \frac{I_S}{A} \vartheta_x'^2 \right) - \vartheta_x' \left(z_C (w' \vartheta_x + v') + \gamma_C (v' \vartheta_x - w') \right) \right] \tag{3.3.22}$$

3.3.4 Συνοριακές συνθήκες

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών που ορίζει τη συμπεριφορά δοκού τυχούσας διατομής που υπόβάλλεται σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις και στρεπτικές στροφές. Το εν λόγω πρόβλημα υπόκειται στις παρακάτω συνοριακές συνθήκες που εξασφαλίζουν την ισορροπία της δοκού στα άκρα $x = 0, l$

$$a_1 u(x, t) + a_2 N(x, t) = a_3 \tag{3.3.23}$$

$$\beta_1 v(x, t) + \beta_2 V_y(x, t) = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 \vartheta_z(x, t) + \bar{\beta}_2 M_z(x, t) = \bar{\beta}_3 \tag{3.3.24\alpha, \beta}$$

$$\gamma_1 w(x, t) + \gamma_2 V_z(x, t) = \gamma_3 \quad \bar{\gamma}_1 \vartheta_y(x, t) + \bar{\gamma}_2 M_y(x, t) = \bar{\gamma}_3 \tag{3.3.25\alpha, \beta}$$

$$\delta_1 \vartheta_x(x, t) + \delta_2 M_t(x, t) = \delta_3 \quad \bar{\delta}_1 \vartheta_x'(x, t) + \bar{\delta}_2 M_w(x, t) = \bar{\delta}_3 \tag{3.3.26\alpha, \beta}$$

Στις σχέσεις (3.3.23)-(3.3.26), V_y, V_z είναι οι εγκάρσιες αντιδράσεις ως προς τους άξονες y, z , αντίστοιχα και M_z, M_y είναι οι καμπτικές ροπές ως προς τους άξονες Y, Z , αντίστοιχα, που αναπτύσσονται στα άκρα της δοκού. Επίσης M_t είναι η στρεπτική ροπή, που οφείλεται στις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις S_{xy}, S_{xz} και M_w είναι η ροπή στρέβλωσης που, επίσης αναπτύσσονται στα δύο άκρα. Τα εν λόγω μεγέθη, που έχουν προκύψει από την ολοκλήρωση κατά παράγοντες στη σχέση της Αρχής Δυνατών Έργων (βλ. ενότητα 3.2) δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (έχοντας διατηρήσει τους όρους μέχρι τρίτης τάξης):

$$\begin{aligned}
 V_y = & N \left(v' - z_C \vartheta_x' - \gamma_C \vartheta_x \vartheta_x' \right) + \\
 & + EI_z \left(v''' \vartheta_x^2 - w'' \vartheta_x' - w''' \vartheta_x - v''' + 2v'' \vartheta_x \vartheta_x' + 2\beta_y \vartheta_x' \vartheta_x'' \right) + \\
 & + EI_y \left(w''' \vartheta_x + w'' \vartheta_x' - 2v'' \vartheta_x \vartheta_x' - v''' \vartheta_x^2 - \beta_z \vartheta_x'^3 - 2\beta_z \vartheta_x \vartheta_x' \vartheta_x'' \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.27\alpha}$$

$$\begin{aligned}
V_z = & N \left(w' + \gamma_C \vartheta_x' - z_C \vartheta_x' \vartheta_x \right) + \\
& + EI_Y \left(w''' \vartheta_x^2 + v''' \vartheta_x - w''' + v'' \vartheta_x' + 2w'' \vartheta_x \vartheta_x' + 2\beta_Z \vartheta_x' \vartheta_x'' \right) - \\
& - EI_Z \left(v'' \vartheta_x' + w''' \vartheta_x^2 + v''' \vartheta_x + 2w'' \vartheta_x \vartheta_x' - 2\beta_Y \vartheta_x \vartheta_x' \vartheta_x'' - \beta_Y \vartheta_x'^3 \right)
\end{aligned} \quad (3.3.27\beta)$$

$$M_Z = EI_Z \left(w'' \vartheta_x - \beta_Y \vartheta_x'^2 + v'' - v'' \vartheta_x^2 \right) + EI_Y \left(-w'' \vartheta_x + v'' \vartheta_x^2 + \beta_Z \vartheta_x'^2 \vartheta_x \right) \quad (3.3.27\gamma)$$

$$M_Y = EI_Z \left(-w'' \vartheta_x^2 + \beta_Y \vartheta_x'^2 \vartheta_x - v'' \vartheta_x \right) + EI_Y \left(\beta_Z \vartheta_x'^2 - w'' + w'' \vartheta_x^2 + v'' \vartheta_x \right) \quad (3.3.27\delta)$$

$$\begin{aligned}
M_t = & GI_t \vartheta_x' - EC_S \vartheta_x''' + N \left(-z_C w' \vartheta_x + \gamma_C w' - \gamma_C v' \vartheta_x - z_C v' + \frac{I_S}{A} \vartheta_x' \right) + EI_Z \beta_Y \cdot \\
& \cdot \left(-2\vartheta_x' v'' - 2\vartheta_x' w'' \vartheta_x \right) + EI_Y \beta_Z \left(-2\vartheta_x' w'' + 2\vartheta_x' v'' \vartheta_x \right) + \frac{1}{2} E \left(I_R - \frac{I_S^2}{A} \right) \vartheta_x'^3
\end{aligned} \quad (3.3.27\epsilon)$$

$$M_w = -EC_S \left(\vartheta_x'' + \beta_\omega \vartheta_x'^2 \right) \quad (3.3.27\sigma)$$

Ακόμη $\alpha_k, \beta_k, \bar{\theta}_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k, \delta_k, \bar{\delta}_k$ ($k=1,2,3$) είναι καθορισμένες συναρτήσεις που ορίζονται στα άκρα της δοκού. Σημειώνεται ότι οι συνοριακές συνθήκες (3.3.23)-(3.3.26) μπορούν να είναι οι πλέον γενικές συνθήκες που μπορούν να θεωρηθούν στα άκρα μιας δοκού, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης. Οποιοσδήποτε συμβατικός τρόπος στήριξης (πάκτωση, κυλιόμενη πάκτωση, απλή έδραση ή ελεύθερο άκρο) μπορεί να προκύψει από τις συγκεκριμένες εξισώσεις συνοριακών συνθηκών με κατάλληλη θεώρηση της τιμής των εν λόγω συναρτήσεων (π.χ. για πακτωμένο άκρο ισχύει, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 1$, $\bar{\beta}_1 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\delta}_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = \delta_2 = \delta_3 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_3 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0$).

3.4 Διατύπωση προβλήματος μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων ενισχυμένης πλάκας με μερική διατμητική σύνδεση

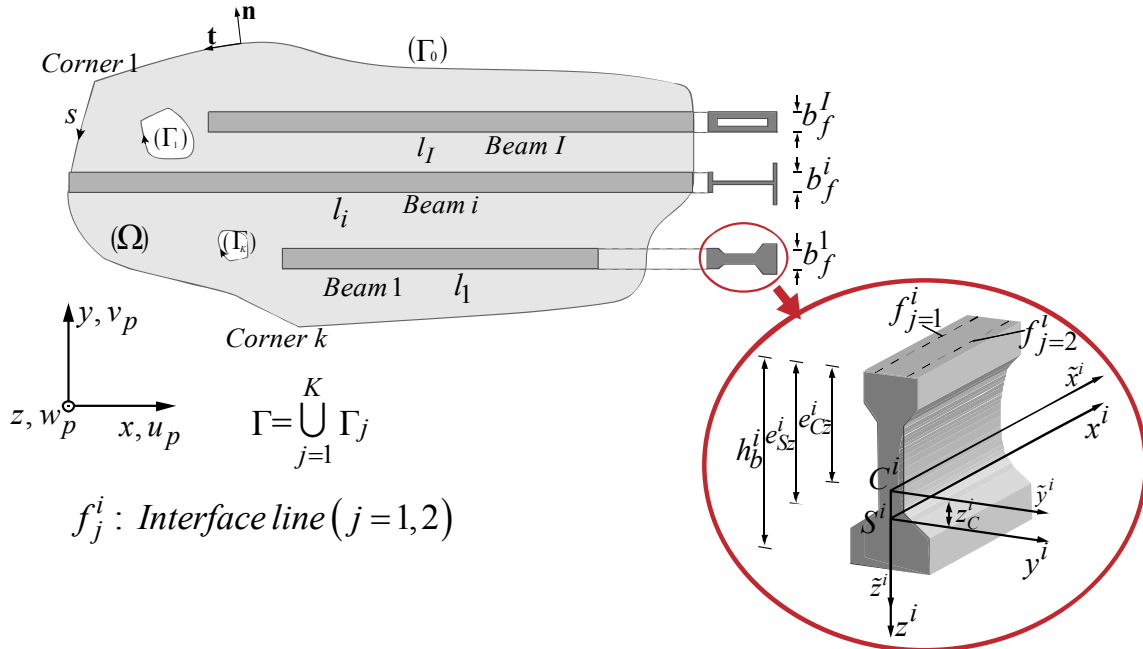
Θεωρούμε λεπτή πλάκα από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας E_p , μέτρο διάτμησης G_p και λόγο Poisson ν_p , η οποία έχει σταθερό πάχος h_p και καταλαμβάνει το δισδιάστατο πολλαπλά συνεκτικό χωρίο Ω του επιπέδου xy , τα σύνορα του οποίου είναι κατά τμήματα λεία (μπορούν να περιλαμβάνουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών) και συμβολίζονται με Γ_j ($j=0,1,2,\dots,K$) όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4.1.

Η πλάκα ενισχύεται από σύνολο παράλληλων δοκών πλήθους $i = 1, 2, \dots, I$ ελεύθερα τοποθετημένες στο χωρίο Ω . Οι δοκοί ενίσχυσης είναι πρισματικές και η διατομή τους έχει έναν τουλάχιστον άξονα συμμετρίας (μονοσυμμετρική δοκός) ο οποίος, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, επιλέγεται να είναι ο τοπικός άξονας z^i . Κάθε δοκός μπορεί να περιλαμβάνει εσωτερικές ή συνοριακές σημειακές στηρίξεις. Το υλικό των δοκών θεωρείται ισότροπο και γραμμικά ελαστικό με μέτρο ελαστικότητας E_b^i , μέτρο διάτμησης G_b^i και λόγο Poisson ν_b^i . Η ενισχυμένη πλάκα υποβάλλεται σε τυχαία καταναμεμημένο κατακόρυφο φορτίο $g = g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} : \{x, y\}$. Λόγω της ύπαρξης του εν λόγω φορτίου το σύστημα πλάκας-δοκών κάμπτεται με παράλληλη ανάπτυξη σχετικής ολίσθησης μεταξύ πλάκας και δοκών και κατά τις δύο διευθύνσεις της σύνδεσης, x , y . Η πιθανή εγκάρσια αποκόλληση των δύο στοιχείων (uplift) θεωρείται αμελητέα. Όπως έχει αναφερθεί, η πρώτη αναλυτική λύση για το πρόβλημα δοκού με μερική διατμητική σύνδεση αποδίδεται στους Newmark et al. (1951) (Ranzi et al., 2010) και το προσομοίωμα αυτό έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς για την ανάλυση συμμίκτων δοκών με μερική διατμητική σύνδεση. Η λογική του προσομοιώματος αυτού χρησιμοποιείται και στην παρούσα εργασία και επεκτείνεται προκειμένου να ληφθεί υπόψη και η εγκάρσια δυσκαμψία των συνδέσμων στην ανάλυση μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων. Για την επίλυση του προαναφερθέντος προβλήματος θεωρείται καθολικό σύστημα αξόνων $Oxyz$ για την ανάλυση της πλάκας και τοπικά κύρια συστήματα αξόνων $C^i \tilde{x}^i \tilde{y}^i \tilde{z}^i$ και $S^i x^i y^i z^i$ για την ανάλυση των δοκών, τα οποία διέρχονται από το κέντρο βάρους και το κέντρο διάτμησης, αντίστοιχα, των διατομών κάθε δοκού (Σχ. 3.4.2). Για διευκόλυνση της ανάλυσης ο άξονας x του καθολικού συστήματος λαμβάνεται παράλληλος προς τη διαμήκη διεύθυνση των δοκών.

Η ανάλυση βασίζεται στο βελτιωμένο προσομοίωμα που πρότειναν οι Sarountzakis & Mokos (2008). Σύμφωνα με το προσομοίωμα αυτό, η ανάλυση του φορέα μορφής πλακοδοκού συνίσταται στην απομόνωση των δοκών από την πλάκα μέσω τομών παράλληλων στην κάτω εξωτερική επιφάνειά της λαμβάνοντας υπόψη τα αναπτυσσόμενα κατά τις τρεις διευθύνσεις διανύσματα τάσεων (Σχ. 3.4.2β). Με τη βοήθεια των τομών αυτών και ολοκληρώνοντας τις αναπτυσσόμενες τάσεις κατά το ήμισυ του πλάτους της διεπιφάνειας πλάκας-δοκών εμφανίζονται δυνάμεις ανηγμένες ανά μέτρο μήκους στη διεπιφάνεια (π.χ. kN/m) και κατά τις τρεις διευθύνσεις x, y, z , οι οποίες συμβολίζονται ως q_{xj}^i, q_{yj}^i και q_{zj}^i ($j = 1, 2$). Οι δυνάμεις αυτές θεωρούνται σταθερές κατά το ήμισυ του πλάτους της διεπιφάνειας και αναφέρονται στη μέση γραμμή του πλάτους αυτού, αντίστοιχα, δηλαδή σε κάθε δοκό λαμβάνονται υπόψη δύο γραμμές διεπιφάνειας. Η χρήση δύο γραμμών διεπιφάνειας είναι απαραίτητη προκειμένου να ληφθεί υπόψη η ανομοιόμορφη κατανομή των πραγματικών δυνάμεων κατά πλάτος της διεπιφάνειας. Σημειώνεται ότι μια υπόθεση γραμμικής (ή ανώτερης τάξης) και όχι σταθερής κατανομής των εν λόγω δυνάμεων θα καθιστούσε επαρκή την ύπαρξη μιας και μόνο γραμμής διεπιφάνειας, όμως θα αύξανε την πολυπλοκότητα της ανάλυσης. Οι δυνάμεις διεπιφάνειας αποτελούν φόρτιση των δοκών και επιπρόσθετη φόρτιση της πλάκας. Η διαμήκης κατανομή τους είναι εξ αρχής άγνωστη, ωστόσο μπορεί να προσδιοριστεί επιβάλλοντας κατάλληλες συνθήκες συνέχειας στις γραμμές διεπιφάνειας προς όλες τις διευθύνσεις x, y, z , όπου

λαμβάνεται υπόψη η στρέβλωση λόγω στρέψης των διατομών των δοκών και η ολίσθηση, σύμφωνα με τη διαδικασία που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Οι φορτίσεις που προκαλούν οι δυνάμεις διεπιφάνειας, κατά μήκος της μέσης επιφάνειας της πλάκας καθώς και κατά μήκος των αξόνων των δοκών που διέρχονται από το κέντρο βάρους και το κέντρο στρέψης των διατομών τους, συνοψίζονται ως εξής:



Σχήμα 3.4.1. Περιοχή Ω του επιπέδου x, y που καταλαμβάνει η ενισχυμένη πλάκα (άνοψη).

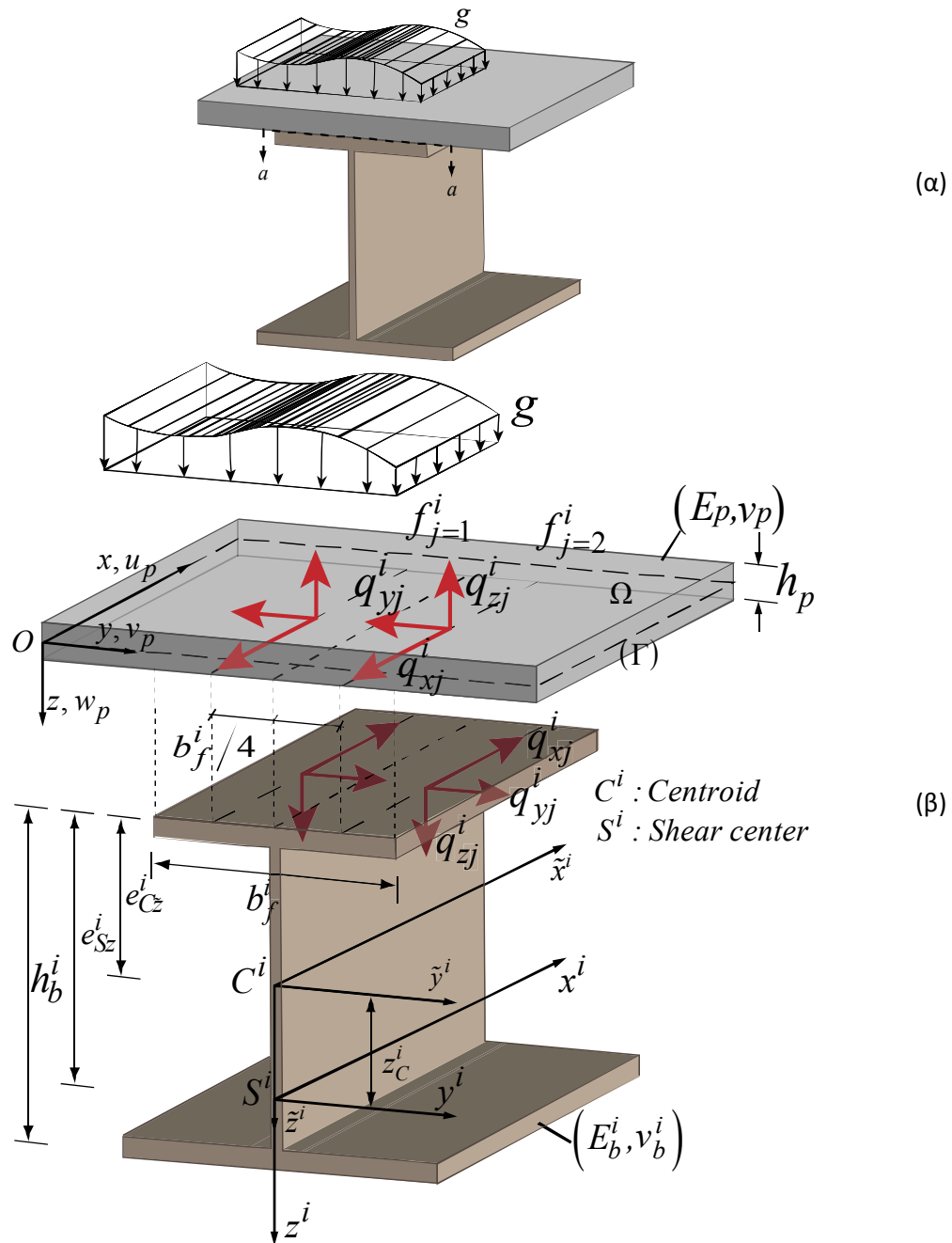
• **Στην πλάκα** (στην προβολή των γραμμών διεπιφάνειας f_j^i ($j = 1, 2$) στο μέσο επίπεδο της πλάκας):

- (i) Συνεπίπεδο-διάμηκες γραμμικά κατανεμημένο (μαζικό) φορτίο q_{xj}^i στη μέση επιφάνεια της πλάκας.
- (ii) Συνεπίπεδο-εγκάρσιο γραμμικά κατανεμημένο (μαζικό) φορτίο q_{yj}^i στη μέση επιφάνεια της πλάκας.
- (iii) Κατακόρυφο γραμμικά κατανεμημένο φορτίο q_{zj}^i .
- (iv) Κατακόρυφο γραμμικά κατανεμημένο φορτίο $\partial m_{\rho yj}^i / \partial x$ λόγω της εκκεντρότητας της συνιστώσας q_{xj}^i ως προς τη μέση επιφάνεια της πλάκας. $m_{\rho yj}^i = q_{xj}^i h_p / 2$ Είναι η αντίστοιχη καμπτική ροπή.
- (v) Κατακόρυφο γραμμικά κατανεμημένο φορτίο $\partial m_{\rho xj}^i / \partial y$ λόγω της εκκεντρότητας της συνιστώσας q_{yj}^i ως προς τη μέση επιφάνεια της πλάκας. $m_{\rho xj}^i = -q_{yj}^i h_p / 2$ Είναι η αντίστοιχη καμπτική ροπή.

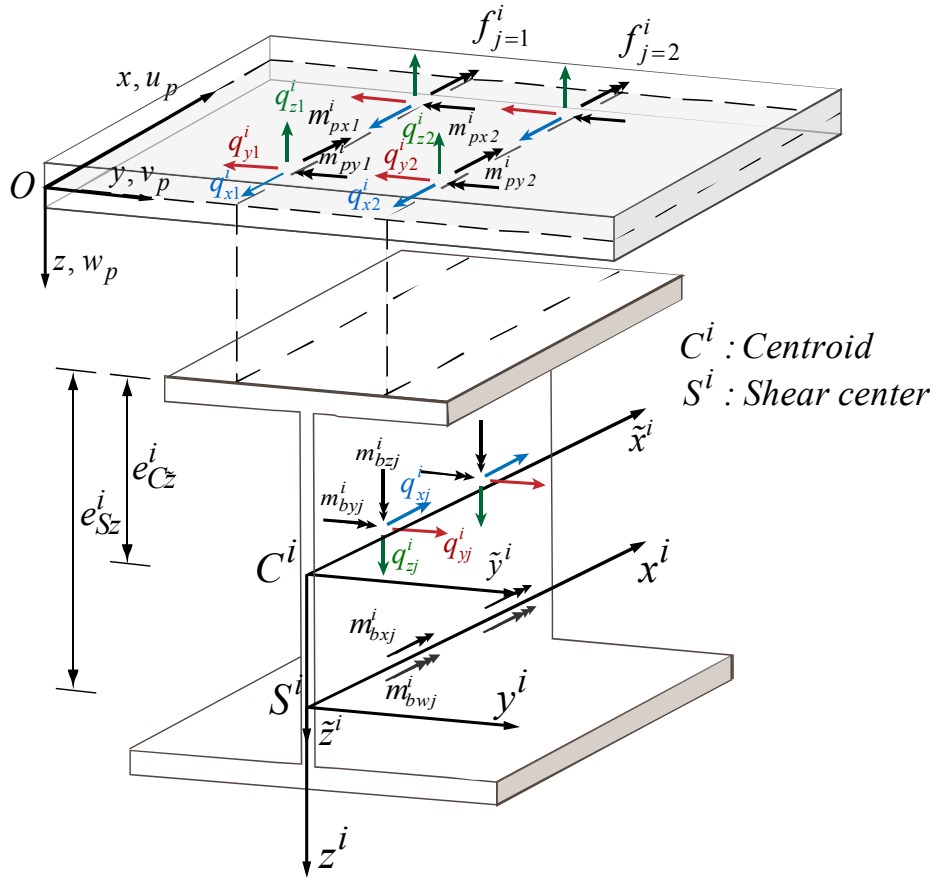
• Σε κάθε δοκό (Ως προς τα συστήματα $C^i \tilde{x}^i \tilde{y}^i \tilde{z}^i$ και $S^i x^i y^i z^i$)

- (i) Διάμηκες (αξονικό) γραμμικά κατανεμημένο φορτίο q_{xj}^i κατά μήκος του άξονα $C^i \tilde{x}^i$.
- (ii) Εγκάρσιο (καμπτικό) γραμμικά κατανεμημένο φορτίο q_{yj}^i κατά μήκος του άξονα $C^i \tilde{x}^i$.
- (iii) Εγκάρσιο (καμπτικό) γραμμικά κατανεμημένο φορτίο q_{zj}^i κατά μήκος του άξονα $C^i \tilde{x}^i$.
- (iv) Γραμμικά κατανεμημένη καμπτική ροπή $m_{byj}^i = q_{xj}^i e_{Czj}^i$ κατά μήκος του τοπικού άξονα $C^i \tilde{y}^i$ εξαιτίας των εκκεντροτήτων e_{Czj}^i (Σχ. 3.4.2β) των συνιστωσών q_{xj}^i ως προς τον τοπικό κεντροβαρικό άξονα.
- (v) Γραμμικά κατανεμημένη καμπτική ροπή $m_{bzj}^i = -q_{xj}^i e_{C\tilde{y}j}^i$ κατά μήκος του τοπικού άξονα $C^i \tilde{z}^i$ εξαιτίας των εκκεντροτήτων $e_{C\tilde{y}j}^i$ (Σχ. 3.4.2β) των συνιστωσών q_{xj}^i ως προς τον τοπικό κεντροβαρικό άξονα. $e_{C\tilde{y}1}^i = -b_f^i/4$, $e_{C\tilde{y}2}^i = b_f^i/4$ είναι οι εκκεντρότητες λόγω της συμμετρίας της διατομής ως προς τον κατακόρυφο άξονα.
- (vi) Γραμμικά κατανεμημένη στρεπτική ροπή $m_{bxj}^i = q_{zj}^i e_{S_{yj}}^i - q_{yj}^i e_{S_{zj}}^i$ κατά μήκος του τοπικού άξονα $S^i x^i$ εξαιτίας των εκκεντροτήτων $e_{S_{zj}}^i$, $e_{S_{yj}}^i$ των συνιστωσών q_{yj}^i , q_{zj}^i ως προς το κέντρο στρέψης (διάτμησης) της διατομής, αντίστοιχα. $e_{S_{y1}}^i = -b_f^i/4$, $e_{S_{y2}}^i = b_f^i/4$ είναι οι εκκεντρότητες των q_{zj}^i λόγω της συμμετρίας της διατομής ως προς τον κατακόρυφο άξονα.
- (vii) Γραμμικά κατανεμημένο δίρροπο στρέβλωσης $m_{bwj}^i = -q_{xj}^i (\varphi_S^{Pi})_{ff}$ κατά μήκος του τοπικού άξονα $S^i x^i$ το οποίο σε προηγούμενα προσομοιώματα (Sarountzakis & Mokos 2007, 2008) δεν λαμβανόταν υπόψη. $(\varphi_S^{Pi})_{ff}$ είναι η τιμή της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης φ_S^{Pi} ως προς το κέντρο διάτμησης της διατομής (Sarountzakis & Tsirpiras, 2010) στη γραμμή διεπιφάνειας j της i σύνδεσης μεταξύ πλάκας και δοκού.

Τα στατικά προσομοιώματα και οι προαναφερθείσες πρόσθετες φορτίσεις της πλάκας και των δοκών παρουσιάζονται στο Σχ. 3.4.3. Με βάση τις παραπάνω θεωρήσεις, η απόκριση της πλάκας και των δοκών μπορεί να περιγραφεί από έξι προβλήματα συνοριακών τιμών, που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.



Σχήμα 3.4.2. Λεπτή ελαστική πλάκα ενισχυμένη με δοκό (α) και απομόνωση δοκού από την πλάκα (β).



Σχήμα 3.4.3 Στατικά προσομοιώματα και κατευθύνσεις (διευθύνσεις και φορές) πρόσθετων φορτίων πλάκας και δοκών ενίσχυσης.

3.4.1 Εξισώσεις ισορροπίας πλάκας

Προκειμένου να ληφθούν υπόψη μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις (γεωμετρική μη γραμμικότητα) για τον φορέα της πλάκας, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, υιοθετείται η παραδοχή της θεωρίας πλακών κατά Von Κάρμάν (βλ. ενότητα 3.2). Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή η βύθιση της πλάκας δεν εξακολουθεί να θεωρείται μικρή συγκρινόμενη με το πάχος της πλάκας – βασική παραδοχή της θεωρίας πλακών κατά Kirchhoff – παραμένει ωστόσο μικρή σε σχέση με τις πλευρικές διαστάσεις της πλάκας (Reddy, 2004). Μέσα στα πλαίσια της παραδοχής αυτής είναι δυνατόν να υιοθετηθεί το πεδίο μετακινήσεων που διατυπώνεται βάσει των παραδοχών Kirchhoff και εκφράζεται ως

$$\bar{u}_p(x, y, z) = u_p(x, y) - z \frac{\partial w_p}{\partial x} \tag{3.4.1\alpha}$$

$$\bar{v}_p(x, y, z) = v_p(x, y) - z \frac{\partial w_p}{\partial y} \tag{3.4.1\beta}$$

$$\bar{w}_p(x, y, z) = w_p(x, y) \quad (3.4.1\gamma)$$

όπου \bar{u}_p , \bar{v}_p , \bar{w}_p είναι οι συνεπίπεδες και εγκάρσιες συνιστώσες μετακίνησης ενός τυχαίου σημείου της πλάκας και $u_p = u_p(x, y)$, $v_p = v_p(x, y)$ και $w_p = w_p(x, y)$ είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες σημείου στη μέση επιφάνεια της. Για τον υπολογισμό των παραμορφώσεων υιοθετείται ο τανυστής παραμορφώσεων Green ϵ^G [(Rothert & Gensichen, 1987), (Ramm & Hofmann, 1995)] και θεωρώντας ότι οι συνεπίπεδες (μεμβρανικές) μετατοπίσεις της πλάκας θα είναι μικρές, οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή γράφονται ως

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_p}{\partial x} \right)^2 \quad (3.4.2\alpha)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}_p}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_p}{\partial y} \right)^2 \quad (3.4.2\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_p}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_p}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}_p}{\partial y} \quad (3.4.2\gamma)$$

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.4.2\delta)$$

Με αντικατάσταση των εκφράσεων (3.4.1), (3.4.2) στις καταστατικές σχέσεις που ορίζονται από το νόμο του Hooke, μπορούμε να εξάγουμε τις εκφράσεις των συνιστωσών του 2^{ου} τανυστή τάσεων Piola-Kirchhoff, ο οποίος είναι συζυγής ως προς το έργο με τον τανυστή παραμορφώσεων Green. Οι μη μηδενικές συνιστώσες προκύπτουν ως εξής

$$S_{xx} = \frac{E_p}{(1-\nu_p^2)} \left\{ \left[\frac{\partial u_p}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} \right)^2 \right] + \nu_p \left[\frac{\partial v_p}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.4.3\alpha)$$

$$S_{yy} = \frac{E_p}{(1-\nu_p^2)} \left\{ \nu_p \left[\frac{\partial u_p}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial v_p}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.4.3\beta)$$

$$S_{xy} = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)} \left(\frac{\partial u_p}{\partial y} + \frac{\partial v_p}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_p}{\partial x} \frac{\partial w_p}{\partial y} \right) \quad (3.4.3\gamma)$$

Οι εκφράσεις των μεμβρανικών και καμπτικών εντατικών μεγεθών που δρουν σε ένα στοιχείο πλάκας, σύμφωνα με τους ορισμούς που έχουν δοθεί στις σχέσεις (3.2.15), δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$N_{px} = C \left[\frac{\partial u_p}{\partial x} + \nu_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu_p \left(\frac{\partial w_p}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.4.4\alpha)$$

$$N_{py} = C \left[\frac{\partial v_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} v_p \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.4.4\beta)$$

$$N_{pxy} = C \frac{1-v_p}{2} \left(\frac{\partial u_p}{\partial y} + \frac{\partial v_p}{\partial x} + \frac{\partial w_p}{\partial y} \frac{\partial w_p}{\partial x} \right) \quad (3.4.4\gamma)$$

$$M_{px} = -D \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + v_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} \right) \quad (3.4.4\delta)$$

$$M_{py} = -D \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + v_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} \right) \quad (3.4.4\epsilon)$$

$$M_{pxy} = -D(1-v_p) \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} \quad (3.4.4\sigma)$$

όπου $C = E_p h_p / (1-v_p^2)$, $D = E_p h_p^3 / 12(1-v_p^2)$ είναι η μεμβρανική και καμπτική αντίσταση της πλάκας, αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας τη σχέση της Αρχής των Δυνατών Έργων (σχέση (3.2.19)), προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας για την πλάκα συναρτήσει των εντατικών μεγεθών

$$\frac{\partial N_{px}}{\partial x} + \frac{\partial N_{pxy}}{\partial y} = \sum_{i=1}^I \left(\sum_{j=1}^2 q_{xj}^i \delta(y-y_j) \right) \quad (3.4.5\alpha)$$

$$\frac{\partial N_{py}}{\partial y} + \frac{\partial N_{pxy}}{\partial x} = \sum_{i=1}^I \left(\sum_{j=1}^2 q_{yj}^i \delta(y-y_j) \right) \quad (3.4.5\beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{px}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{pxy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{py}}{\partial y^2} + N_{px} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + 2N_{pxy} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} + N_{py} \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} = \\ = -g + \sum_{i=1}^I \left[\sum_{j=1}^2 \left(q_{zj}^i - \frac{\partial m_{pxj}^i}{\partial y} + \frac{\partial m_{pyj}^i}{\partial x} - q_{xj}^i \frac{\partial w_{pj}^i}{\partial x} - q_{yj}^i \frac{\partial w_{pj}^i}{\partial y} \right) \delta(y-y_j) \right] \end{aligned} \quad (3.4.5\gamma)$$

όπου $\delta(y-y_j)$ είναι η συνάρτηση δέλτα ή Dirac κατά τη διεύθυνση y . Σε αντιδιαστολή με τις εξισώσεις ισορροπίας (3.2.26), (3.2.27), που προέκυψαν στην ενότητα 3.2, οι εξισώσεις (3.4.5) διαφέρουν ως προς τα δεξιά μέλη, λόγω του ότι περιλαμβάνουν πρόσθετους όρους εξωτερικών φορτίων εξαιτίας των συνεπίπεδων δυνάμεων στο χωρίο της πλάκας. Όπως έχει αναφερθεί, για την επίλυση του προβλήματος δεν θα χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις Von Kármán (σχέσεις 3.2.32) καθώς δεν ενδείκνυνται για την επίλυση γενικών προβλημάτων. Έτσι κρίνεται σκόπιμο οι εξισώσεις ισορροπίας να εκφραστούν ως προς τα κινηματικά

μεγέθη. Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών που παρουσιάστηκαν στις σχέσεις (3.4.4) και εκτελώντας τις πράξεις, προκύπτει το ζητούμενο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας της πλάκας ως εξής

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_p + \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \right) + \left(\frac{2}{1-\nu_p} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w_p}{\partial x} + \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_p}{\partial y} = \\ = \frac{1}{G_p h_p} \sum_{i=1}^I \left(\sum_{j=1}^2 q_{xj}^i \delta(y-y_j) \right) \end{aligned} \quad (3.4.6\alpha)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 v_p + \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \right) + \left(\frac{2}{1-\nu_p} \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w_p}{\partial y} + \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_p}{\partial x} = \\ = \frac{1}{G_p h_p} \sum_{i=1}^I \left(\sum_{j=1}^2 q_{yj}^i \delta(y-y_j) \right) \end{aligned} \quad (3.4.6\beta)$$

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w_p - C \left\{ \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} \right)^2 \right) + \nu_p \left(\frac{\partial v_p}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + (1-\nu_p) \cdot \right. \\ \cdot \left. \left(\frac{\partial u_p}{\partial y} + \frac{\partial v_p}{\partial x} + \frac{\partial w_p}{\partial x} \frac{\partial w_p}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} + \left[\left(\frac{\partial v_p}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial y} \right)^2 \right) + \nu_p \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} \right\} = g - \sum_{i=1}^I \left[\sum_{j=1}^2 \left(q_{zj}^i - \frac{\partial m_{pxj}^i}{\partial y} + \frac{\partial m_{pyj}^i}{\partial x} - q_{xj}^i \frac{\partial w_{pj}^i}{\partial x} - q_{yj}^i \frac{\partial w_{pj}^i}{\partial y} \right) \delta(y-y_j) \right] \end{aligned} \quad (3.4.6\gamma)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών και υπόκεινται στις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, οι οποίες δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$a_{p1} u_{pn} + a_{p2} N_{pn} = a_{p3} \quad (3.4.7\alpha)$$

$$b_{p1} u_{pt} + b_{p2} N_{pt} = b_{p3} \quad (3.4.7\beta)$$

$$\gamma_{p1} w_p + \gamma_{p2} R_{pn} = \gamma_{p3} \quad (3.4.7\gamma)$$

$$\delta_{p1} \frac{\partial w_p}{\partial n} + \delta_{p2} M_{pn} = \delta_{p3} \quad (3.4.7\delta)$$

όπου a_{pl} , b_{pl} , γ_{pl} , δ_{pl} ($l=1,2,3$) είναι γνωστές συναρτήσεις εξαρτώμενες από τις συνθήκες στήριξης της πλάκας και ορίζονται στο σύνορο Γ . u_{pn} , u_{pt} και N_{pn} , N_{pt} είναι οι συνοριακές μεμβρανικές μετατοπίσεις και δυνάμεις οι οποίες αναπτύσσονται κατά την κάθετη και εφαπτομενική διεύθυνση, αντίστοιχα, της καμπύλης του συνόρου. R_{pn} και M_{pn}

είναι η υποκατάστατη (ενεργός) τέμνουσα κατά μήκος του συνόρου και η καμπτική ροπή κατά την κάθετη διεύθυνση του συνόρου, αντίστοιχα. Τα μεγέθη αυτά, έχουν οριστεί στις σχέσεις (3.2.39) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.4.4) γράφονται ως

$$N_{pn} = C \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial n} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial t} \right) n_x + \left(\frac{\partial v_p}{\partial n} - v_p \frac{\partial u_p}{\partial t} \right) n_y \right] + \frac{C}{2} \left[\left(\frac{\partial w_p}{\partial n} \right)^2 + v_p \left(\frac{\partial w_p}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (3.4.8\alpha)$$

$$N_{pt} = \frac{C}{2} (1 - v_p) \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial t} + \frac{\partial v_p}{\partial n} \right) n_x + \left(\frac{\partial v_p}{\partial t} - \frac{\partial u_p}{\partial n} \right) n_y \right] - \frac{C}{2} (v_p - 1) \frac{\partial w_p}{\partial n} \frac{\partial w_p}{\partial t} \quad (3.4.8\beta)$$

$$R_{pn} = -D \left[\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w_p - (v_p - 1) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial t \partial n} \right) \right] + N_{pn} \frac{\partial w_p}{\partial n} + N_{pt} \frac{\partial w_p}{\partial t} \quad (3.4.8\gamma)$$

$$M_{pn} = -D \left[\nabla^2 w_p + (v_p - 1) \frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} \right] \quad (3.4.8\delta)$$

όπου n_x , n_y είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος \mathbf{n} . Η έκφραση της ροπής συστροφής $T w_p$ κατά μήκος του συνόρου δίνεται από την παρακάτω έκφραση

$$T w_p = D (v_p - 1) \frac{\partial^2 w_p}{\partial t \partial n} \quad (3.4.9)$$

Λόγω του γεγονότος ότι το σύνορο της πλάκας μπορεί να είναι καμπύλο, είναι σκόπιμο οι σχέσεις (3.4.8) και (3.4.9) να εκφραστούν σε *καμπυλόγραμμες* ή *εγγενείς συντεταγμένες*, δηλαδή με χρήση του n και του μήκους τόξου s ως συντεταγμένων. Οι σχέσεις μετασχηματισμού των παραγώγων εκφράζονται ως [(Slivker, 2007), (Κατσικαδέλης, 2010)]

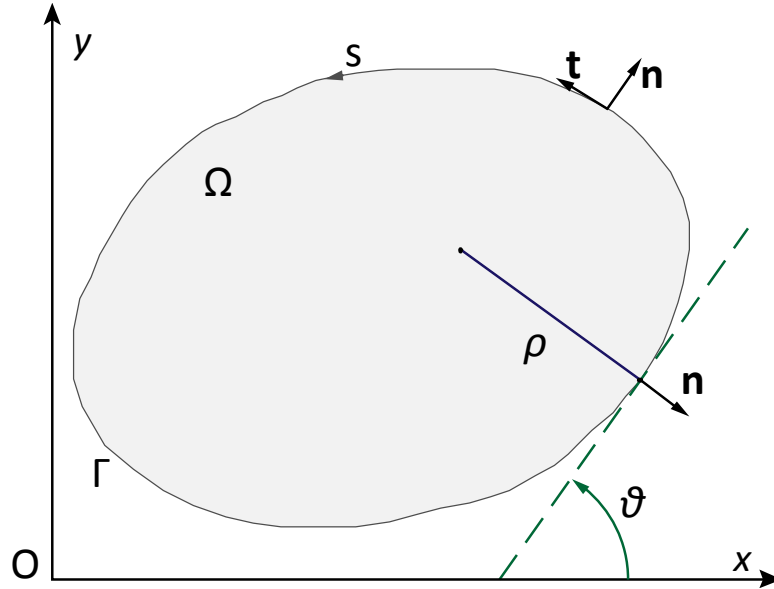
$$\frac{\partial w_p}{\partial t} = \frac{\partial w_p}{\partial s} \quad (3.4.10\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_p}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial w_p}{\partial n} \quad (3.4.10\beta)$$

$$\frac{\partial^2 w_p}{\partial t \partial n} = \frac{\partial^2 w_p}{\partial s \partial n} - \kappa \frac{\partial w_p}{\partial s} \quad (3.4.10\gamma)$$

Όπου $\kappa(s)$ είναι η καμπυλότητα του συνόρου της πλάκας (Σχ. 3.4.4), η οποία ορίζεται ως εξής (Washizu, 1975)

$$\kappa(s) = \frac{d\vartheta(s)}{ds} = \frac{1}{\rho(s)} \quad (3.4.11)$$



Σχήμα 3.4.4. Καμπυλότητα του συνόρου της πλάκας.

Τελικά οι εκφράσεις των (3.4.8) και (3.4.9) τροποποιούνται ως εξής

$$N_{pn} = C \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial n} + \nu_p \frac{\partial v_p}{\partial s} \right) n_x + \left(\frac{\partial v_p}{\partial n} - \nu_p \frac{\partial u_p}{\partial s} \right) n_y \right] + \frac{C}{2} \left[\left(\frac{\partial w_p}{\partial n} \right)^2 + \nu_p \left(\frac{\partial w_p}{\partial s} \right)^2 \right] \quad (3.4.12\alpha)$$

$$N_{pt} = \frac{C}{2} (1 - \nu_p) \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial s} + \frac{\partial v_p}{\partial n} \right) n_x + \left(\frac{\partial v_p}{\partial s} - \frac{\partial u_p}{\partial n} \right) n_y \right] - \frac{C}{2} (\nu_p - 1) \frac{\partial w_p}{\partial n} \frac{\partial w_p}{\partial s} \quad (3.4.12\beta)$$

$$R_{pn} = -D \left[\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w_p - (\nu_p - 1) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial s \partial n} - \kappa \frac{\partial w_p}{\partial s} \right) \right] + N_{pn} \frac{\partial w_p}{\partial n} + N_{pt} \frac{\partial w_p}{\partial s} \quad (3.4.12\gamma)$$

$$M_{pn} = -D \left[\nabla^2 w_p + (\nu_p - 1) \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial w_p}{\partial n} \right) \right] \quad (3.4.12\delta)$$

$$T w_p = D (\nu_p - 1) \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial s \partial n} - \kappa \frac{\partial w_p}{\partial s} \right) \quad (3.4.12\epsilon)$$

Τονίζεται ότι οι σχέσεις (3.4.7) αποτελούν τις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες για το πρόβλημα της πλάκας. Με κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων α_{pl} , β_{pl} , γ_{pl} and δ_{pl} ($l=1,2,3$) μπορούμε να περιγράψουμε όλα τα πιθανά είδη συνοριακής στήριξης συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής (π.χ. για πακτωμένο σύνορο ισχύει $\alpha_{p1} = \beta_{p1} = \gamma_{p1} = \delta_{p1} = 1$, $\alpha_{p2} = \alpha_{p3} = \beta_{p2} = \beta_{p3} = \gamma_{p2} = \gamma_{p3} = \delta_{p2} = \delta_{p3} = 0$).

Στην ειδική περίπτωση που η πλάκα περιλαμβάνει πεπερασμένο πλήθος ελεύθερων γωνιών με ελεύθερο ή ελαστικά δεσμευμένο σύνορο, οι συνοριακές συνθήκες (3.4.7) θα πρέπει να επαυξηθούν με την ακόλουθη «γωνιακή συνθήκη»

$$\varepsilon_{1k} w_p + \varepsilon_{2k} \|T w_p\|_k = \varepsilon_{3k}, \quad \varepsilon_{2k} \neq 0 \quad (3.4.13)$$

όπου ε_{lk} ($l=1,2,3$) είναι συναρτήσεις που ορίζονται στις k γωνίες της πλάκας. Το μέγεθος $\|T w_p\|_k$ αποτελεί το άλμα της ασυνέχειας της ροπής συστροφής $T w_p$ στην k γωνία της πλάκας. Υπενθυμίζεται ότι το άλμα $\|T w_p\|_k$ που οφείλεται στην ασυνέχεια της ροπής συστροφής στη γωνία k εκφράζει μια ιδεατή συγκεντρωμένη δύναμη, η οποία προκύπτει από την αντικατάσταση των ροπών συστροφής με ζεύγη κατακόρυφων δυνάμεων, σύμφωνα με τη θεώρηση του Kirchhoff (1850). Η ιδεατή συγκεντρωμένη δύναμη τείνει να προκαλέσει ανύψωση της γωνίας k . Εάν η γωνία k δεν εξασφαλιστεί έναντι ανύψωσης οι ροπές συστροφής μειώνονται στην περιοχή της γωνίας, ενώ αντίστοιχα αυξάνεται η παραμόρφωση και ένταση στο μέσο της πλάκας. Στην περίπτωση φορέων από οπλισμένο σκυρόδεμα που οι γωνίες ελεύθερα εδραζόμενων ορίων εξασφαλίζονται έναντι ανύψωσης (π.χ. λόγω ύπαρξης υπερκείμενης τοιχοποιίας), τότε απαιτείται να λαμβάνεται ειδική μέριμνα για την όπλιση της περιοχής της γωνίας (οπλισμός «συστροφής»), καθώς η παρεμπόδιση της ανύψωσης της γωνίας δημιουργεί εφελκυστικές τάσεις στην πάνω επιφάνεια με διεύθυνση περίπου κατά τη διχοτόμο της γωνίας και εφελκυστικές τάσεις στην κάτω επιφάνεια με διεύθυνση κάθετη προς τη διχοτόμο. Σημειώνεται ότι, στην πράξη σχεδόν πάντα παρεμποδίζεται η ανύψωση των γωνιών πλάκας, καθώς τις περισσότερες φορές μια τουλάχιστον από τις συντρέχουσες στη γωνία πλευρές της πλάκας είναι μονολιθικά συνδεδεμένη με τη στήριξη ή με γειτονική πλάκα, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει επαρκής επιφόρτιση.

3.4.2 Εξισώσεις ισορροπίας δοκών ενίσχυσης

Κάθε δοκός υφίσταται εγκάρσιες μετακινήσεις (βυθίσεις) λόγω κάμψης ως προς τους άξονες \tilde{z}^i και \tilde{y}^i , ενώ υπόκειται σε μετακινήσεις κατά τον άξονα \tilde{x}^i (αξονική μετακίνηση) και ανομοιόμορφη γωνία στρέψης περί τον διαμήκη άξονα x^i . Τονίζεται ότι τα φαινόμενα της κάμψης και της στρέψης είναι αποζευγμένα ως προς το κέντρο στρέψης S^i , ενώ ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο, υπάρχει σύζευξη μεταξύ τους [(Bleich, 1952), (Attard, 1986a)]. Το πεδίο μετατοπίσεων για δοκό τυχούσας διατομής έχει διατυπωθεί στις σχέσεις (3.3.1). Στην παρούσα ενότητα οι σχέσεις αυτές τροποποιούνται καθώς έχουμε θεωρήσει ότι οι δοκοί ενίσχυσης έχουν διατομή τουλάχιστον απλής συμμετρίας με άξονα συμμετρίας τον z^i . Θεωρώντας, λοιπόν, την κίνηση ενός τυχαίου σημείου της διατομής κατά την παραμόρφωση της δοκού, προκύπτουν οι εκφράσεις των συνιστωσών του διανύσματος της μετατόπισης, ως εξής:

$$\bar{u}_b^i(x^i, y^i, z^i) = u_b^i(x^i) - y^i \vartheta_{bz}^i(x^i) + (z^i - z_C^i) \vartheta_{by}^i(x^i) + \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \varphi_S^{Pi}(y^i, z^i) \quad (3.4.14\alpha)$$

$$\bar{v}_b^i(x^i, y^i, z^i) = v_b^i(x^i) - z^i \sin(\vartheta_{bx}^i(x^i)) - y^i \left[1 - \cos(\vartheta_{bx}^i(x^i)) \right] \quad (3.4.14\beta)$$

$$\bar{w}_b^i(x^i, y^i, z^i) = w_b^i(x^i) + y^i \sin(\vartheta_{bx}^i(x^i)) - z^i \left[1 - \cos(\vartheta_{bx}^i(x^i)) \right] \quad (3.4.14\gamma)$$

$$\vartheta_{by}^i(x^i) = \frac{dv_b^i}{dx^i} \sin(\vartheta_{bx}^i(x^i)) - \frac{dw_b^i}{dx^i} \cos(\vartheta_{bx}^i(x^i)) \quad (3.4.14\delta)$$

$$\vartheta_{bz}^i(x^i) = \frac{dv_b^i}{dx^i} \cos(\vartheta_{bx}^i(x^i)) + \frac{dw_b^i}{dx^i} \sin(\vartheta_{bx}^i(x^i)) \quad (3.4.14\epsilon)$$

Στις σχέσεις (3.4.14), \bar{u}_b^i , \bar{v}_b^i , \bar{w}_b^i είναι η συνιστώσες της μετατόπισης του τυχαίου σημείου ως προς το σύστημα αξόνων $S^i x^i y^i z^i$. $u_b^i = \frac{1}{A_b^i} \int_{A_b^i} \bar{u}_b^i(x^i, y^i, z^i) dA$ αποτελεί τη μέση αξονική μετακίνηση της διατομής [(Attard, 1986b), (Sapountzakis & Dikaros, 2011)], $v_b^i = v_b^i(x^i)$ and $w_b^i = w_b^i(x^i)$ είναι οι συνιστώσες μετατόπισης του κέντρου στρέψης S^i . z_C^i είναι η απόσταση του κέντρου βάρους C^i ως προς το σύστημα αξόνων $S^i x^i y^i z^i$, ενώ $\vartheta_{by}^i = \vartheta_{by}^i(x^i)$, $\vartheta_{bz}^i = \vartheta_{bz}^i(x^i)$ είναι οι γωνίες στροφής της διατομής λόγω της κάμψης ως προς το κεντροβαρικό σύστημα. Η ποσότητα $d\vartheta_{bx}^i/dx^i$ αποτελεί τη συστροφή, δηλαδή τη σχετική γωνία στροφής $\vartheta_{bx}^i(x^i)$ δύο γειτονικών διατομών της ράβδου, ανηγμένη στη μονάδα μήκους. φ_S^{Pi} είναι η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, ως προς το κέντρο στρέψης της διατομής S^i και εκφράζει τη στρέβλωση της δοκού για μοναδιαία συστροφή $d\vartheta_{bx}^i/dx^i$. Χρησιμοποιώντας και πάλι τις σχέσεις μετατοπίσεων-παραμορφώσεων της τρισδιάστατης ελαστικότητας για μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις [(Rothert & Gensichen, 1987), (Ramm & Hofmann, 1995)], οι μη μηδενικές συνιστώσες παραμόρφωσης γράφονται ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}_b^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_b^i}{\partial x^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}_b^i}{\partial x^i} \right)^2 \right] \quad (3.4.15\alpha)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}_b^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{u}_b^i}{\partial z^i} + \left(\frac{\partial \bar{v}_b^i}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{v}_b^i}{\partial z^i} + \frac{\partial \bar{w}_b^i}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{w}_b^i}{\partial z^i} \right) \quad (3.4.15\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{v}_b^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{u}_b^i}{\partial y^i} + \left(\frac{\partial \bar{v}_b^i}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{v}_b^i}{\partial y^i} + \frac{\partial \bar{w}_b^i}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{w}_b^i}{\partial y^i} \right) \quad (3.4.15\gamma)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.4.15\delta)$$

Εφαρμόζοντας τις καταστατικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων του Hooke, όπως έχει περιγραφεί στην ενότητα 3.3, και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των σχέσεων (3.3.16), προκύπτουν τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη της δοκού ως

$$N_b^i = E_b^i A_b^i \left[\frac{du_b^i}{dx^i} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dv_b^i}{dx^i} \right)^2 + \left(\frac{dw_b^i}{dx^i} \right)^2 + \frac{I_p^i}{A_b^i} \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 \right) - \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} z_C^i \cdot \left(\frac{dv_{bx}^i}{dx^i} \cos \vartheta_{bx}^i + \frac{dw_{bx}^i}{dx^i} \sin \vartheta_{bx}^i \right) \right] \quad (3.4.16\alpha)$$

$$M_{by}^i = -E_b^i I_y^i \left[\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \cos \vartheta_{bx}^i - \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \sin \vartheta_{bx}^i - \beta_z^i \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 \right] \quad (3.4.16\beta)$$

$$M_{bz}^i = E_b^i I_z^i \left(\frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \cos \vartheta_{bx}^i + \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \sin \vartheta_{bx}^i \right) \quad (3.4.16\gamma)$$

$$M_{bt}^{Pi} = G_b^i I_t^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \quad (3.4.16\delta)$$

$$M_{bw}^i = -E_b^i C_S^i \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \quad (3.4.16\epsilon)$$

$$M_{bR}^i = N_b^i \frac{I_p^i}{A_b^i} - 2E_b^i I_y^i \beta_z^i \left(\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \cos \vartheta_{bx}^i - \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \sin \vartheta_{bx}^i \right) + \frac{1}{2} E_b^i \left(I_R^i - \frac{I_p^{i2}}{A_b^i} \right) \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 \quad (3.4.16\sigma)$$

Όπου M_{bt}^{Pi} είναι η στρεπτική ροπή που οφείλεται στις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις S_{xy} , S_{xz} (Sarountzakis & Mokos, 2003, 2004), M_{bw}^i η ροπή στρέβλωσης και M_{bR}^i όρος ανώτερης τάξης (Mohri, 2001, 2002, 2004). Ακόμη I_y^i , I_z^i είναι οι κύριες ροπές αδράνειας ως προς το κέντρο βάρους της διατομής C^i , I_p^i είναι η πολική ροπή αδράνειας, ενώ I_t^i και C_S^i είναι η στρεπτική σταθερά και η σταθερά στρεβλώσεως, αντίστοιχα, ως προς το κέντρο στρέψης S^i της i δοκού και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$I_t^i = \int_{A_b^i} \left(y^{i2} + z^{i2} + y^i \frac{\partial \varphi_S^{Pi}}{\partial z^i} - z^i \frac{\partial \varphi_S^{Pi}}{\partial y^i} \right) dA \quad (3.4.17\alpha)$$

$$C_S^i = \int_{A_b^i} \left(\varphi_S^{Pi} \right)^2 dA \quad (3.4.17\beta)$$

Επίσης το μέγεθος I_R^i αποτελεί την ροπή αδράνειας τέταρτης τάξης (Mohri, 2001, 2002, 2004), η οποία ορίζεται ως

$$I_R^i = \int_{A_b^i} \left(y^{i2} + z^{i2} \right)^2 dA \quad (3.4.18)$$

Οι συντελεστές Wagner που έχουν οριστεί στις σχέσεις (3.3.19α,β) προκύπτουν μηδενικοί λόγω της γεωμετρίας της διατομής ενώ ο μη μηδενικός συντελεστής θ_z^i προκύπτει ως εξής

$$\theta_z^i = \frac{1}{2I_y^i} \int_{A_b^i} \left(z^i - z_C^i \right) \left(y^{i2} + z^{i2} \right) dA \quad (3.4.19)$$

Στη συνέχεια η αρχή των δυνατών έργων (σχέση 3.3.11) εφαρμόζεται και οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας που αφορούν την ανάλυση μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων και στρεπτικών στροφών της κάθε δοκού ενίσχυσης, προκύπτουν συναρτήσει των εντατικών μεγεθών ως εξής

$$-\frac{dN_b^i}{dx^i} = \sum_{j=1}^2 q_{xj}^i \quad (3.4.20\alpha)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx^i} \left[N_b^i \left(\frac{dv_b^i}{dx^i} - z_C^i \frac{d\theta_{bx}^i}{dx^i} \cos \vartheta_{bx}^i \right) \right] + \frac{d^2}{dx^{i2}} \left(M_{bz}^i \cos \vartheta_{bx}^i \right) + \frac{d^2}{dx^{i2}} \left(M_{by}^i \sin \vartheta_{bx}^i \right) = \\ = \sum_{j=1}^2 \left(q_{yj}^i - \frac{dm_{bzj}^i}{dx^i} \right) \end{aligned} \quad (3.4.20\beta)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx^i} \left[N_b^i \left(\frac{dw_b^i}{dx^i} - z_C^i \frac{d\theta_{bx}^i}{dx^i} \sin \vartheta_{bx}^i \right) \right] - \frac{d^2}{dx^{i2}} \left(M_{by}^i \cos \vartheta_{bx}^i \right) + \frac{d^2}{dx^{i2}} \left(M_{bz}^i \sin \vartheta_{bx}^i \right) = \\ = \sum_{j=1}^2 \left(q_{zj}^i + \frac{dm_{byj}^i}{dx^i} \right) \end{aligned} \quad (3.4.20\gamma)$$

$$\begin{aligned}
 & N_b^i z_C^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \left(\frac{dv_b^i}{dx^i} \sin\vartheta_{bx}^i - \frac{dw_b^i}{dx^i} \cos\vartheta_{bx}^i \right) + \frac{d}{dx^i} \left[N_b^i z_C^i \left(\frac{dv_b^i}{dx^i} \cos\vartheta_{bx}^i + \frac{dw_b^i}{dx^i} \sin\vartheta_{bx}^i \right) \right] + \\
 & + M_{by}^i \left(\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \sin\vartheta_{bx}^i + \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \cos\vartheta_{bx}^i \right) + M_{bz}^i \left(\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \cos\vartheta_{bx}^i - \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \sin\vartheta_{bx}^i \right) - \\
 & - \frac{d}{dx^i} M_{bt}^i - \frac{d^2}{dx^{i2}} M_{bw}^i - \frac{d}{dx^i} \left(M_{bR}^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right) = \sum_{j=1}^2 \left(q_{zj}^i e_{S_{yj}}^i \cos\vartheta_{bx}^i - \right. \\
 & \left. - q_{zj}^i e_{S_{zj}}^i \sin\vartheta_{bx}^i - q_{yj}^i e_{S_{zj}}^i \cos\vartheta_{bx}^i - q_{yj}^i e_{S_{yj}}^i \sin\vartheta_{bx}^i + \frac{dm_{bwj}^i}{dx^i} \right) \quad (3.4.20\delta)
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (σχέσεις (3.4.16)) στις σχέσεις (3.4.20), οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας για την κάθε δοκό μπορούν να γραφούν συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$\begin{aligned}
 & -E_b^i A_b^i \left[\frac{d^2 u_b^i}{dx^{i2}} + \frac{dw_b^i}{dx^i} \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} + \frac{dv_b^i}{dx^i} \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} + \frac{l_p^i}{A_b^i} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} - z_C^i \left(\vartheta_{bx}^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \vartheta_{bx}^i \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \frac{dw_b^i}{dx^i} + \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \frac{dv_b^i}{dx^i} + \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} + \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 \frac{dw_b^i}{dx^i} \right) \right] = \sum_{j=1}^2 q_{xj}^i \quad (3.4.21\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & E_b^i l_z^i \frac{d^4 v_b^i}{dx^{i4}} - N_b^i \left(\frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} - z_C^i \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \right) + (E_b^i l_z^i - E_b^i l_y^i) \cdot \\
 & \cdot \left[\frac{d^4 w_b^i}{dx^{i4}} \vartheta_{xb}^i + 2 \frac{d^3 w_b^i}{dx^{i3}} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} + \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} - \frac{d^4 v_b^i}{dx^{i4}} (\vartheta_{bx}^i)^2 - 4 \frac{d^3 v_b^i}{dx^{i3}} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i - \right. \\
 & \left. - 2 \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \vartheta_{bx}^i - 2 \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 \right] + E_b^i l_y^i \beta_z^i \left[2 \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^3 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i3}} \vartheta_{bx}^i + \right. \\
 & \left. + 2 \left(\frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \right)^2 \vartheta_{bx}^i + 5 \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \right] = \sum_{j=1}^2 \left[q_{yj}^i - q_{xj}^i \left(\frac{dv_b^i}{dx^i} - z_C^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right) - \frac{dm_{bzj}^i}{dx^i} \right] \quad (3.4.21\beta)
 \end{aligned}$$

$$E_b^i l_y^i \frac{d^4 w_b^i}{dx^{i4}} - N_b^i \left[\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} - z_C^i \left(\left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 + \vartheta_{bx}^i \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \right) \right] + (E_b^i l_z^i - E_b^i l_b^i) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{d^4 v_b^i}{dx^{i4}} \vartheta_{bx}^i + 2 \frac{d^3 v_b^i}{dx^{i3}} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} + \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} + \frac{d^4 w_b^i}{dx^{i4}} \left(\vartheta_{bx}^i \right)^2 + 4 \frac{d^3 w_b^i}{dx^{i3}} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i + \right. \\
& \left. + 2 \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \vartheta_{bx}^i + 2 \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 \right] - 2E_b^i l_b^i \beta_z^i \left[\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^3 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i3}} + \left(\frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \right)^2 \right] = \\
& = \sum_{j=1}^2 \left[q_{zj}^i - q_{xj}^i \left(\frac{dw_b^i}{dx^i} - z_C^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i \right) + \frac{dm_{byj}^i}{dx^i} \right] \quad (3.4.21\gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_b^i C_S^i \frac{d^4 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i4}} - G_b^i l_b^i \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} - \frac{3}{2} E_b^i \left(l_R^i - \frac{l_p^{i2}}{A_b^i} \right) \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} - N_b^i \left[\frac{l_p^i}{A_b^i} \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} - \right. \\
& \left. - z_C^i \left(\frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} + \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \vartheta_{bx}^i \right) \right] + \left(E_b^i l_z^i - E_b^i l_y^i \right) \left[\frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} - \left(\frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \right)^2 \vartheta_{bx}^i + \right. \\
& \left. + \left(\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \right)^2 \vartheta_{bx}^i \right] + E_b^i l_y^i \beta_z^i \left[-2 \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \vartheta_{bx}^i + 2 \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} + 2 \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^3 w_b^i}{dx^{i3}} - \right. \\
& \left. - \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \left(\frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right)^2 - 2 \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^3 v_b^i}{dx^{i3}} \vartheta_{bx}^i \right] = \sum_{j=1}^2 \left[m_{bxj}^i + \frac{dm_{bwj}^i}{dx^i} + \left(\frac{1}{2} \left(\vartheta_{bx}^i \right)^2 e_{Szj}^i - \right. \right. \\
& \left. \left. - \vartheta_{bx}^i e_{Syj}^i \right) q_{yj}^i + \left(-\frac{1}{2} \left(\vartheta_{bx}^i \right)^2 e_{Syj}^i - \vartheta_{bx}^i e_{Szj}^i \right) q_{zj}^i - q_{xj}^i \left(\frac{l_p^i}{A_b^i} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} - \right. \right. \\
& \left. \left. - z_C^i \frac{dw_b^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i - z_C^i \frac{dv_b^i}{dx^i} \right) \right] \quad (3.4.21\delta)
\end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι οι εξισώσεις ισορροπίας (3.4.21) διαφέρουν από τις εξισώσεις (3.3.21) λόγω της γεωμετρίας της διατομής και θα μπορούσαν να προκύψουν εάν στις (3.3.21) θέταμε $\gamma_C = 0$, $\beta_\gamma = 0$, $\beta_\omega = 0$. Το παραπάνω σύστημα είναι φανερό ότι είναι έντονα μη γραμμικό και σημαντικά πεπλεγμένο. Εξετάζοντας τη συμπεριφορά ενός φορέα ενισχυμένης πλάκας, το παραπάνω σύστημα μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω εκμεταλλευόμενοι την παρατήρηση ότι λόγω της σύνδεσης των δοκών με την πλάκα δεν δίνεται η ελευθερία στις δοκούς να αναπτύξουν σημαντικά μεγέθη στρεπτικών στροφών ϑ_{bx}^i και εγκάρσιων μετακινήσεων v_b^i κατά τη διεύθυνση y^i . Αμελώντας, λοιπόν, τους μη γραμμικούς όρους των ϑ_{bx}^i και v_b^i προκύπτει το παρακάτω απλοποιημένο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$-E_b^i A_b^i \left(\frac{d^2 u_b^i}{dx^{i2}} + \frac{dw_b^i}{dx^i} \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \right) = \sum_{j=1}^2 q_{xj}^i \quad (3.4.22\alpha)$$

$$E_b^i l_z^i \frac{d^4 v_b^i}{dx^{i4}} - N_b^i \left(\frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} - z_C^i \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \right) + (E_b^i l_z^i - E_b^i l_y^i) \cdot \left(\frac{d^4 w_b^i}{dx^{i4}} \vartheta_{xb}^i + \right. \\ \left. + 2 \frac{d^3 w_b^i}{dx^{i3}} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} + \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \right) = \sum_{j=1}^2 \left[q_{yj}^i - q_{xj}^i \left(\frac{dv_b^i}{dx^i} - z_C^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right) - \frac{dm_{bzj}^i}{dx^i} \right] \quad (3.4.22\beta)$$

$$E_b^i l_y^i \frac{d^4 w_b^i}{dx^{i4}} - N_b^i \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} = \sum_{j=1}^2 \left(q_{zj}^i - q_{xj}^i \frac{dw_b^i}{dx^i} + \frac{dm_{byj}^i}{dx^i} \right) \quad (3.4.22\gamma)$$

$$E_b^i C_s^i \frac{d^4 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i4}} - G_b^i l_t^i \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} - N_b^i \left[\frac{l_p^i}{A_b^i} \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} - z_C^i \left(\frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} + \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \vartheta_{bx}^i \right) \right] + \\ + (E_b^i l_z^i - E_b^i l_y^i) \left[\frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} + \left(\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \right)^2 \vartheta_{bx}^i \right] + E_b^i l_y^i \beta_z^i \left[2 \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} + \right. \\ \left. + 2 \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^3 w_b^i}{dx^{i3}} \right] = \sum_{j=1}^2 \left[m_{bxj}^i + \frac{dm_{bwj}^i}{dx^i} - q_{xj}^i \left(\frac{l_p^i}{A_b^i} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} - z_C^i \frac{dw_b^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i - z_C^i \frac{dv_b^i}{dx^i} \right) \right] \quad (3.4.22\delta)$$

όπου η έκφραση της αξονικής δύναμης των δοκών N_b^i , όπως παρουσιάστηκε στη σχέση (3.4.16α), γράφεται ως

$$N_b^i = E_b^i A_b^i \left[\frac{du_b^i}{dx^i} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_b^i}{dx^i} \right)^2 \right] \quad (3.4.23)$$

Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι για περιπτώσεις σχετικά «ισχυρής» ενίσχυσης, η παραπάνω προσέγγιση είναι ικανοποιητική, ενώ τονίζεται ότι το πλήρες σύστημα διαφορικών εξισώσεων (σχέσεις (3.4.21)) μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς καμία πρόσθετη δυσκολία για την επίλυση του προβλήματος. Οι διαφορικές εξισώσεις (3.4.22) ορίζουν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα $x^i = 0, l^i$ της i δοκού δίνονται ως

$$\alpha_{b1}^i u_b^i + \alpha_{b2}^i N_b^i = \alpha_{b3}^i \quad (3.4.24)$$

$$\beta_{b1}^i v_b^i + \beta_{b2}^i R_{by}^i = \beta_{b3}^i \quad \bar{\theta}_{b1}^i \vartheta_{bz}^i + \bar{\theta}_{b2}^i M_{bz}^i = \bar{\theta}_{b3}^i \quad (3.4.25\alpha, \beta)$$

$$V_{b1}^i W_b^i + V_{b2}^i R_{bz}^i = V_{b3}^i \quad \bar{V}_{b1}^i \vartheta_{by}^i + \bar{V}_{b2}^i M_{by}^i = \bar{V}_{b3}^i \quad (3.4.26\alpha, \beta)$$

$$\delta_{b1}^i \vartheta_{bx}^i + \delta_{b2}^i M_{bt}^i = \delta_{b3}^i \quad \bar{\delta}_{b1}^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} + \bar{\delta}_{b2}^i M_{bw}^i = \bar{\delta}_{b3}^i \quad (3.4.27\alpha, \beta)$$

Όπου οι γωνίες των καμπτικών στροφών της διατομής $\vartheta_{by}^i, \vartheta_{bz}^i$ που παρουσιάστηκαν στις σχέσεις (3.4.14δ), (3.4.14ε) απλοποιούνται ως εξής

$$\vartheta_{by}^i = -\frac{dw_b^i}{dx^i} \quad (3.4.28\alpha)$$

$$\vartheta_{bz}^i = \frac{dv_b^i}{dx^i} + \frac{dw_b^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i \quad (3.4.28\beta)$$

R_{by}^i, R_{bz}^i and M_{bz}^i, M_{by}^i είναι οι αντιδράσεις (τέμνουσες δυνάμεις) και οι καμπτικές ροπές ως προς τους άξονες y^i και z^i , αντίστοιχα, οι οποίες μετά την προαναφερθείσα απλοποίηση γράφονται ως

$$R_{by}^i = N_b^i \left(\frac{dv_b^i}{dx^i} - z_c^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right) + E_b^i I_z^i \left(-\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} - \frac{d^3 w_b^i}{dx^{i3}} \vartheta_{bx}^i - \frac{d^3 v_b^i}{dx^{i3}} \right) + E_b^i I_y^i \left(\frac{d^3 w_b^i}{dx^{i3}} \vartheta_{bx}^i + \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \right) \quad (3.4.29\alpha)$$

$$R_{bz}^i = N_b^i \frac{dw_b^i}{dx^i} - E_b^i I_y^i \frac{d^3 w_b^i}{dx^{i3}} \quad (3.4.29\beta)$$

$$M_{bz}^i = E_b^i I_z^i \left(\frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \vartheta_{bx}^i + \frac{d^2 v_b^i}{dx^{i2}} \right) - E_b^i I_y^i \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \vartheta_{bx}^i \quad (3.4.29\gamma)$$

$$M_{by}^i = -E_b^i I_y^i \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \quad (3.4.29\delta)$$

M_{bt}^i, M_{bw}^i είναι η στρεπτική ροπή και η ροπή στρέβλωσης που αναπτύσσονται στα δύο άκρα της δοκού, αντίστοιχα, και δίνονται ως

$$M_{bt}^i = G_{bt}^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} - E_b^i C_S^i \frac{d^3 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i3}} + N_b^i \left(\frac{I_p^i}{A_b^i} \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} - z_C^i \frac{dw_b^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i - z_C^i \frac{dv_b^i}{dx^i} \right) - 2E_b^i \gamma^i \beta_z^i \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} \frac{d^2 w_b^i}{dx^{i2}} \quad (3.4.30\alpha)$$

$$M_{bw}^i = -E_b^i C_S^i \frac{d^2 \vartheta_{bx}^i}{dx^{i2}} \quad (3.4.30\beta)$$

Ακόμη $\alpha_{bk}^i, \beta_{bk}^i, \bar{\beta}_{bk}^i, \gamma_{bk}^i, \bar{\gamma}_{bk}^i, \delta_{bk}^i, \bar{\delta}_{bk}^i$ ($k=1,2,3$) είναι γνωστές συναρτήσεις που ορίζονται στα άκρα της δοκού. Σημειώνεται ότι οι συνοριακές συνθήκες (3.4.24-27) μπορούν να είναι οι πλέον γενικές συνθήκες που μπορούν να θεωρηθούν στα άκρα μιας δοκού, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης. Οποιοσδήποτε συμβατικός τρόπος στήριξης (πάκτωση, κυλιόμενη πάκτωση, απλή έδραση ή ελεύθερο άκρο) μπορεί να προκύψει από τις συγκεκριμένες εξισώσεις συνοριακών συνθηκών με κατάλληλη θεώρηση της τιμής των εν λόγω συναρτήσεων (π.χ. για πακτωμένο άκρο ισχύει, $\alpha_{b1}^i = \beta_{b1}^i = \gamma_{b1}^i = \delta_{b1}^i = 1, \bar{\beta}_{b1}^i = \bar{\gamma}_{b1}^i = \bar{\delta}_{b1}^i = 1, \alpha_{b2}^i = \alpha_{b3}^i = \beta_{b2}^i = \beta_{b3}^i = \gamma_{b2}^i = \gamma_{b3}^i = \delta_{b2}^i = \delta_{b3}^i = \bar{\beta}_{b2}^i = \bar{\beta}_{b3}^i = \bar{\gamma}_{b2}^i = \bar{\gamma}_{b3}^i = \bar{\delta}_{b2}^i = \bar{\delta}_{b3}^i = 0$).

3.4.3 Συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων

Σύμφωνα με όσα διατυπώθηκαν στις προηγούμενες υποενότητες ισχύουν τα εξής: Οι εξισώσεις (3.4.6), (3.4.22) αποτελούν ένα σύνολο από επτά συζευγμένες και μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ως προς δεκατρείς αγνώστους, δηλαδή $u_p, v_p, w_p, u_b^i, v_b^i, w_b^i, \vartheta_{bx}^i, q_{x1}^i, q_{y1}^i, q_{z1}^i, q_{x2}^i, q_{y2}^i, q_{z2}^i$. Μέχρι στιγμής, λοιπόν, ο αριθμός των αγνώστων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των διατιθέμενων εξισώσεων. Για την επίλυση του προβλήματος υπολείπονται έξι επιπλέον εξισώσεις, οι οποίες θα προκύψουν από τις συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων που πρέπει να επιβληθούν στις διευθύνσεις x^i, y^i και z^i των τοπικών αξόνων στις γραμμές διεπιφάνειας f_j^i ($j=1,2$) πλάκας-δοκού. Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση πλήρους σύνδεσης. Οι συνθήκες συνέχειας προκύπτουν απαιτώντας να επιβληθεί το ίδιο διάνυσμα μετατόπισης στα σημεία των δύο γραμμών διεπιφάνειας, στην πλάκα και στην κάθε δοκό. Η απαίτηση αυτή διατυπώνεται ως εξής

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα x^i :

$$\bar{u}_{p1}^i \left(x_{f1}, y_{f1}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{u}_b^i \left(x^i, -\frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) \quad \text{κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 (} f_{j=1}^i \text{)} \quad (3.4.31\alpha)$$

$$\bar{u}_{p2}^i \left(x_{f2}, y_{f2}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{u}_b^i \left(x^i, \frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right)$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.31β)

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα y^i :

$$\bar{v}_{p1}^i \left(x_{f1}, y_{f1}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{v}_b^i \left(x^i, -\frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right)$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$) (3.4.32α)

$$\bar{v}_{p2}^i \left(x_{f2}, y_{f2}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{v}_b^i \left(x^i, \frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right)$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.32β)

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα z^i :

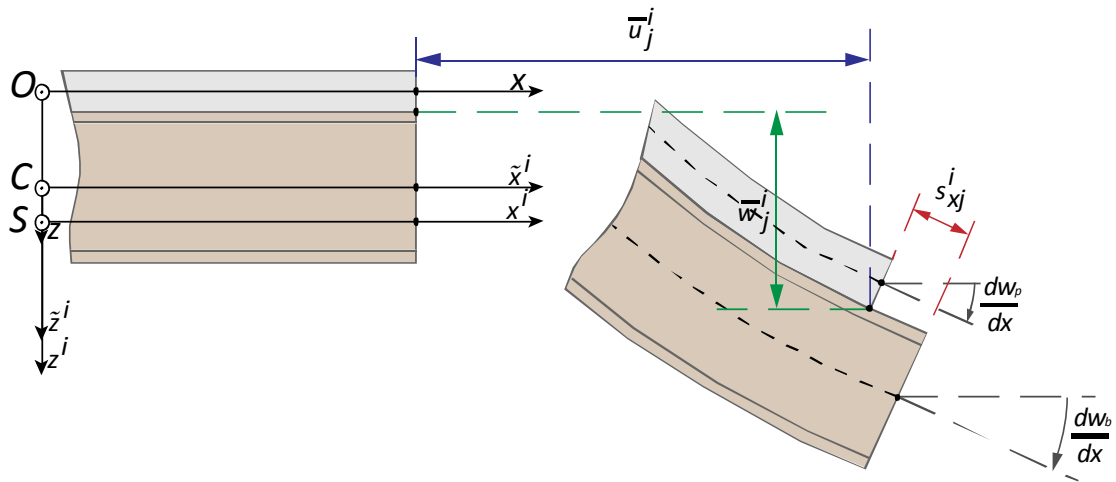
$$\bar{w}_{p1}^i \left(x_{f1}, y_{f1}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{w}_b^i \left(x^i, -\frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right)$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$) (3.4.33α)

$$\bar{w}_{p2}^i \left(x_{f2}, y_{f2}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{w}_b^i \left(x^i, \frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right)$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.33β)

όπου x_{fj}, y_{fj} ($j=1,2$) θέτουμε τις συντεταγμένες των σημείων της j γραμμής διεπιφάνειας ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Στην περίπτωση της μερικής διατμητικής σύνδεσης (Σχ. 3.4.5), οι συνεπίπεδες μετακινήσεις της πλάκας διαφέρουν από τις αντίστοιχες μετακινήσεις της δοκού κατά την αντίστοιχη συνιστώσα της ολίσθησης. Συνεπώς οι σχέσεις (3.4.31), (3.4.32) τροποποιούνται ως εξής



Σχήμα 3.4.5. Ολίσθηση κατά τη διεύθυνση x στη διεπιφάνεια μεταξύ πλάκας-δοκού.

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα x^i :

$$\bar{u}_{p1}^i \left(x_{f1}, y_{f1}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{u}_b^i \left(x^i, -\frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) + s_{x1}^i \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw_b^i}{dx^i} \right)^2 \right]$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$) (3.4.34α)

$$\bar{u}_{p2}^i \left(x_{f2}, y_{f2}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{u}_b^i \left(x^i, \frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) + s_{x2}^i \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw_b^i}{dx^i} \right)^2 \right]$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.34β)

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα y^i :

$$\bar{v}_{p1}^i \left(x_{f1}, y_{f1}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{v}_b^i \left(x^i, -\frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) + s_{y1}^i \left[1 - \frac{1}{2} \left(\vartheta_{bx}^i \right)^2 \right]$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$) (3.4.35α)

$$\bar{v}_{p2}^i \left(x_{f2}, y_{f2}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{v}_b^i \left(x^i, \frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) + s_{y2}^i \left[1 - \frac{1}{2} \left(\vartheta_{bx}^i \right)^2 \right]$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.35β)

όπου s_{xj}^i, s_{yj}^i ($j=1,2$) είναι οι ολισθήσεις μεταξύ πλάκας και δοκού κατά τις διευθύνσεις x^i, y^i , αντίστοιχα. Στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων, οι σχέσεις (3.4.34), (3.4.35) απλοποιούνται ως

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα x^i :

$$\bar{u}_{p1}^i \left(x_{f1}, y_{f1}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{u}_b^i \left(x^i, -\frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) + s_{x1}^i$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$) (3.4.36α)

$$\bar{u}_{p2}^i \left(x_{f2}, y_{f2}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{u}_b^i \left(x^i, \frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) + s_{x2}^i$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.36β)

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα y^i :

$$\bar{v}_{p1}^i \left(x_{f1}, y_{f1}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{v}_b^i \left(x^i, -\frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) + s_{y1}^i$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$) (3.4.37α)

$$\bar{v}_{p2}^i \left(x_{f2}, y_{f2}, -\frac{h_p}{2} \right) = \bar{v}_b^i \left(x^i, \frac{b_f^i}{4}, e_{Cz}^i \right) + s_{y2}^i$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.37β)

Τα s_{xj}^i, s_{yj}^i ($j=1,2$) συνδέονται με τις συνεπίπεδες δυνάμεις διεπιφάνειας μέσω των σχέσεων

$$s_{xj}^i = \frac{q_{xj}^i}{k_{xj}^i}, \quad j=1,2$$

(3.4.38α)

$$s_{yj}^i = \frac{q_{yj}^i}{k_{yj}^i}, \quad j=1,2$$

(3.4.38β)

όπου k_{xj}^i, k_{yj}^i είναι οι δυσκαμψίες των τοποθετούμενων διατμητικών συνδέσμων κατά τις διευθύνσεις x^i και y^i , αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι οι όροι $k_{xj}^i = k_{xj}^i(s_{xj}^i)$, $k_{yj}^i = k_{yj}^i(s_{yj}^i)$ μπορούν να αποτελούν οποιαδήποτε γραμμική ή μη γραμμική σχέση μεταξύ των

συνεπίπεδων δυνάμεων της διεπιφάνειας και της ολίσθησης s_j^i προς την αντίστοιχη διεύθυνση. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (3.4.38) και τα πεδία μετατοπίσεων (3.4.1) και (3.4.14), οι συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων (3.4.33)-(3.4.35) διατυπώνονται ως εξής:

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα x^i :

$$u_{p1}^i - u_b^i = \frac{h_p}{2} \frac{\partial w_{p1}^i}{\partial x} - e_{Cz}^i \frac{dw_b^i}{dx^i} + \frac{b_f^i}{4} \left(\frac{dv_b^i}{dx^i} + \frac{dw_b^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i \right) + \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} (\varphi_S^{Pi})_{f1} + \frac{q_{x1}^i}{k_{x1}^i} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw_b^i}{dx^i} \right)^2 \right]$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$) (3.4.39α)

$$u_{p2}^i - u_b^i = \frac{h_p}{2} \frac{\partial w_{p2}^i}{\partial x} - e_{Cz}^i \frac{dw_b^i}{dx^i} - \frac{b_f^i}{4} \left(\frac{dv_b^i}{dx^i} + \frac{dw_b^i}{dx^i} \vartheta_{bx}^i \right) + \frac{d\vartheta_{bx}^i}{dx^i} (\varphi_S^{Pi})_{f1} + \frac{q_{x2}^i}{k_{x2}^i} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw_b^i}{dx^i} \right)^2 \right]$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.39β)

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα y^i :

$$v_{p1}^i - v_b^i = \frac{h_p}{2} \frac{\partial w_{p1}^i}{\partial y} - e_{S\bar{z}}^i \vartheta_{bx}^i + \frac{q_{y1}^i}{k_{y1}^i} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\vartheta_{bx}^i \right)^2 \right]$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$) (3.4.40α)

$$v_{p2}^i - v_b^i = \frac{h_p}{2} \frac{\partial w_{p2}^i}{\partial y} - e_{S\bar{z}}^i \vartheta_{bx}^i + \frac{q_{y2}^i}{k_{y2}^i} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\vartheta_{bx}^i \right)^2 \right]$$

κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$) (3.4.40β)

Κατά τη διεύθυνση του τοπικού άξονα z^i :

$$w_{p1}^i - w_b^i = -\frac{b_f^i}{4} \vartheta_{bx}^i \quad \text{κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 1 ($f_{j=1}^i$)} \quad (3.4.41α)$$

$$w_{p2}^i - w_b^i = \frac{b_f^i}{4} \vartheta_{bx}^i \quad \text{κατά μήκος της γραμμής διεπιφάνειας 2 ($f_{j=2}^i$)} \quad (3.4.41β)$$

όπου $(\varphi_S^{Pi})_{ff}$ είναι η αλγεβρική τιμή της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ως προς το κέντρο στρέψης της διατομής στη γραμμή της διεπιφάνειας f_j^i . Σε όλες τις προηγούμενες σχέσεις οι τιμές των εκκεντροτήτων e_{Cz}^i , $e_{S\bar{z}}^i$ και της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης

$\varphi_S^{P_i}(y^i, z^i)$ θα πρέπει να λαμβάνουν το αντίστοιχο αλγεβρικό πρόσημο, όπως αυτό ορίζεται σε σχέση με τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθεί η αριθμητική μέθοδος με την οποία επιλύεται το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για το πρόβλημα μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων ενισχυμένης πλάκας με μερική διατμητική σύνδεση. Υπενθυμίζεται, ότι από τη διαδικασία που παρουσιάστηκε εκτενώς στο κεφάλαιο 3, έχει προκύψει ένα σύστημα συζευγμένων και μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ως προς δεκατρείς συνολικά αγνώστους, που περιλαμβάνουν τα κινηματικά μεγέθη της πλάκας u_p, v_p, w_p , τα κινηματικά μεγέθη της κάθε δοκού ενίσχυσης $u_b^i, v_b^i, w_b^i, \theta_{bx}^i$ καθώς και τις δυνάμεις διεπιφάνειας σε κάθε μια εκ των δύο γραμμών διεπιφάνειας $q_{x1}^i, q_{y1}^i, q_{z1}^i, q_{x2}^i, q_{y2}^i, q_{z2}^i$ που αναπτύσσονται στις συνδέσεις μεταξύ πλάκας-δοκού. Το σύστημα αυτό περιλαμβάνει τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας της πλάκας με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας για την κάθε δοκό με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες και τέλος τις συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων σε κάθε γραμμή διεπιφάνειας.

Η αριθμητική επίλυση των έξι προβλημάτων συνοριακών τιμών της ενότητας 3.4 που περιγράφονται από τις εξισώσεις (3.4.6), (3.4.7), (3.4.22), (3.4.24)-(3.4.27) και (3.4.39)-(3.4.41) επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης (ΑΕΜ) (Katsikadelis, 1994, 2002), που έχει περιγραφεί αναλυτικά στο κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (ΒΕΜ) την οποία εξελίσσει αντιμετωπίζοντας εγγενή μειονεκτήματά της. Το σύστημα προς επίλυση, λόγω της θεώρησης μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων περιλαμβάνει μη γραμμικούς όρους, ενώ ο διαφορικός τελεστής που ορίζει το πρόβλημα της ενισχυμένης πλάκας (ακόμα και στην περίπτωση που θελήσουμε να προβούμε σε πλήρη γραμμικοποίηση του προβλήματος και αμελήσουμε όλους τους μη γραμμικούς όρους) είναι αρκετά πολύπλοκος αποκλείοντας την εφαρμογή της αμιγούς ΒΕΜ, καθώς η θεμελιώδης λύση δεν είναι γνωστή. Η ΑΕΜ, ωστόσο, επιτρέπει την επίλυση του προβλήματος μέσω επίλυσης επιμέρους υποκατάστατων προβλημάτων που διέπονται από γραμμικούς διαφορικούς τελεστές, των οποίων οι θεμελιώδεις λύσεις είναι γνωστές (βλ. κεφάλαιο 2).

4.2 Η ΑΕΜ για τα κινηματικά μεγέθη της πλάκας

Η ΑΕΜ για το πρόβλημα μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων πλακών, έχει αναπτυχθεί στην εργασία των Katsikadelis & Nerantzaki (1994). Ωστόσο στην εν λόγω εργασία χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Von Kármán (1910) οι οποίες αποτελούνται από δύο διαφορικές εξισώσεις ως προς τη βύθιση $w_p(x, y)$ και μια τασική συνάρτηση $\Phi(x, y)$, με κυρίαρχο γραμμικό διαφορικό τελεστή το Διαρμονικό τελεστή ∇^4 (σχέσεις (3.2.32)). Συνεπώς η ΑΕΜ αναπτύχθηκε μόνο για το Διαρμονικό τελεστή. Στην παρούσα εργασία, η εφαρμογή της ΑΕΜ διαφοροποιείται και βασίζεται στη διατύπωση που παρουσιάστηκε από τους Katsikadelis & Babouskos (2010).

Έστω ότι $u_{p1} = u_p(x, y)$, $u_{p2} = v_p(x, y)$ και $u_{p3} = w_p(x, y)$ είναι οι ζητούμενες λύσεις του προβλήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.4.6), οι οποίες είναι συνεχείς, δύο

φορές και τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, αντίστοιχα, στο εσωτερικό Ω της πλάκας και μια φορά και τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, αντίστοιχα, στο σύνορο Γ . Εφαρμόζοντας τον Αρμονικό τελεστή (τελεστής Laplace) στις μεμβρανικές μετατοπίσεις και το Διαρμονικό τελεστή στη βύθιση της πλάκας, μπορούμε να παράγουμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\nabla^2 u_{p_i} = p_{p_i}(x, y), \quad (i=1,2) \quad \nabla^4 u_{p_3} = p_{p_3}(x, y) \quad (4.2.1\alpha, \beta)$$

Οι εξισώσεις (4.2.1) ονομάζονται Αναλογικές Εξισώσεις και $p_{p_i}(x, y)$ ($i=1,2,3$) είναι οι άγνωστες κατανομές πλασματικών φορτίων. Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναπτυχθεί στο κεφάλαιο 2, Οι εξισώσεις (4.2.1) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (3.4.7) ορίζουν το υποκατάστατο πρόβλημα το οποίο θα δώσει τη λύση του αρχικού προβλήματος υπό την προϋπόθεση ότι τα πλασματικά φορτία θα προσδιοριστούν προηγουμένως. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με χρήση της BEM. Σημειώνεται ότι σε αντίθεση με την προσέγγιση που πραγματοποιείται στην εργασία των Katsikadelis & Babouskos (2010), όπου εφαρμόζεται η Άμεση BEM για το πρόβλημα της πλάκας, στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η Έμμεση BEM (Katsikadelis & Armenakas, 1989), λόγω της απλότητας των πυρήνων των ολοκληρωτικών παραστάσεων. Ο όρος «Έμμεση» χρησιμοποιείται με την έννοια ότι οι συνοριακές ποσότητες δεν έχουν όλες άμεσο φυσικό νόημα, ενώ οι ολοκληρωτικές εξισώσεις διατυπώνονται με τη βοήθεια της συνάρτησης Green του απείρως εκτεινόμενου χώρου των δύο διαστάσεων.

Η ολοκληρωτική παράσταση των λύσεων των εξισώσεων Poisson (4.2.1α), μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας την δεύτερη ταυτότητα του Green (σχέση 2.5.3), με θεμελιώδη λύση μια μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\nabla^2 u_{p_i}^*(Q, P) = \delta(Q-P), \quad (i=1,2) \quad P(x, y), \quad Q(\xi, \eta) \in \Omega \quad (4.2.2)$$

όπου $\delta(Q-P)$ είναι η συνάρτηση δ (συνάρτηση Dirac) σε δύο διαστάσεις (Παράρτημα Α). Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης (4.2.2) είναι η συνάρτηση

$$u_{p_i}^* = u_{p_i}^*(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \ln r(Q, P), \quad (i=1,2) \quad (4.2.3)$$

Αντίστοιχα, η ολοκληρωτική παράσταση της βύθισης της πλάκας u_{p_3} μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας τη ταυτότητα Rayleigh-Green (σχέση 2.6.5) και με θεμελιώδη λύση μια μερική ιδιόμορφη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\nabla^4 u_{p_3}^*(Q, P) = \delta(Q-P) \quad P(x, y), \quad Q(\xi, \eta) \in \Omega \quad (4.2.4)$$

η οποία προκύπτει ως

$$u_{p3}^* = u_{p3}^*(Q,P) = \frac{1}{8\pi} r^2(Q,P) \ln r(Q,P) \quad (4.2.5)$$

όπου $r = |Q-P| = \left[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 \right]^{1/2}$, με $P(x,y), Q(\xi,\eta) \in \Omega$ σημεία της πλάκας. Από τις σχέσεις (4.2.3), (4.2.5) είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις u_{pi}^* ($i=1,2,3$) είναι συμμετρικές, δηλαδή $u_{pi}^*(Q,P) = u_{pi}^*(P,Q)$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι λύσεις των Αναλογικών Εξισώσεων (4.2.1) σε ένα τυχαίο σημείο $P(x,y) \in \Omega$, δίνονται σε ολοκληρωτική μορφή ως εξής

$$u_{pi}(P) = \int_{\Omega} p_{pi}(Q) u_{pi}^*(Q,P) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(-u_{pi}(q) \frac{\partial u_{pi}^*(q,P)}{\partial n} + \frac{\partial u_{pi}(q)}{\partial n} u_{pi}^*(q,P) \right) ds, \quad (i=1,2) \quad (4.2.6\alpha)$$

$$u_{p3}(P) = \int_{\Omega} p_{p3}(Q) u_{p3}^*(Q,P) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(-u_{p3}(q) \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}^*(q,P)}{\partial n} + \frac{\partial u_{p3}(q)}{\partial n} \nabla^2 u_{p3}^*(q,P) - \nabla^2 u_{p3}(q) \frac{\partial u_{p3}^*(q,P)}{\partial n} + \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}(q)}{\partial n} u_{p3}^*(q,P) \right) ds \quad (4.2.6\beta)$$

Με χρήση των εξισώσεων (4.2.3) και (4.2.5) Οι ολοκληρωτικές παραστάσεις των λύσεων μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\begin{aligned} \varepsilon(P) u_{pi}(P) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} (\Lambda_{p2}(r) - 1) p_{pi}(Q) d\Omega - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\Lambda_{p1}(r) u_{pi}(q) + (\Lambda_{p2}(r) - 1) \frac{\partial u_{pi}(q)}{\partial n} \right) ds, \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (4.2.7\alpha)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(P) u_{p3}(P) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \Lambda_{p4}(r) p_{p3}(Q) d\Omega - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\Lambda_{p1}(r) u_{p3}(q) + \Lambda_{p2}(r) \frac{\partial u_{p3}(q)}{\partial n} + \Lambda_{p3}(r) \nabla^2 u_{p3}(q) + \Lambda_{p4}(r) \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}(q)}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4.2.7\beta)$$

Όπου $\varepsilon(P) = 1, 1/2$ ή 0 ανάλογα με το αν το σημείο P ανήκει στο χωρίο Ω , στο σύνορο Γ ή εκτός του χωρίου Ω , αντίστοιχα. Με $\Lambda_{pj}(r)$ ($j=1,2,3,4$) συμβολίζονται οι δισημειακοί πυρήνες, οι οποίοι δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (Katsikadelis & Armenakas, 1989)

$$\Lambda_{p1}(r) = -\frac{\cos\varphi}{r} = -\frac{r_{,n}}{r} \quad (4.2.8\alpha)$$

$$\Lambda_{p2}(r) = \ln r + 1 \quad (4.2.8\beta)$$

$$\Lambda_{p3}(r) = -\frac{1}{4}(2r \ln r + r) \cos\varphi = -\frac{1}{4}(2r \ln r + r) r_{,n} \quad (4.2.8\gamma)$$

$$\Lambda_{p4}(r) = \frac{1}{4} r^2 \ln r \quad (4.2.8\delta)$$

όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζεται από το διάνυσμα \mathbf{r} και το κάθετο, στην καμπύλη του συνόρου, διάνυσμα \mathbf{n} . Οι εκφράσεις των παραγώγων του r παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β. Τονίζεται ότι στις σχέσεις (4.2.7) για τα επικαμπύλια ολοκληρώματα ισχύει

$$r = |q - p| = \left[(\zeta - x)^2 + (\psi - y)^2 \right]^{1/2}, \quad q(\zeta, \psi) \in \Gamma \quad \text{ενώ για τα πεδιακά ολοκληρώματα ισχύει}$$

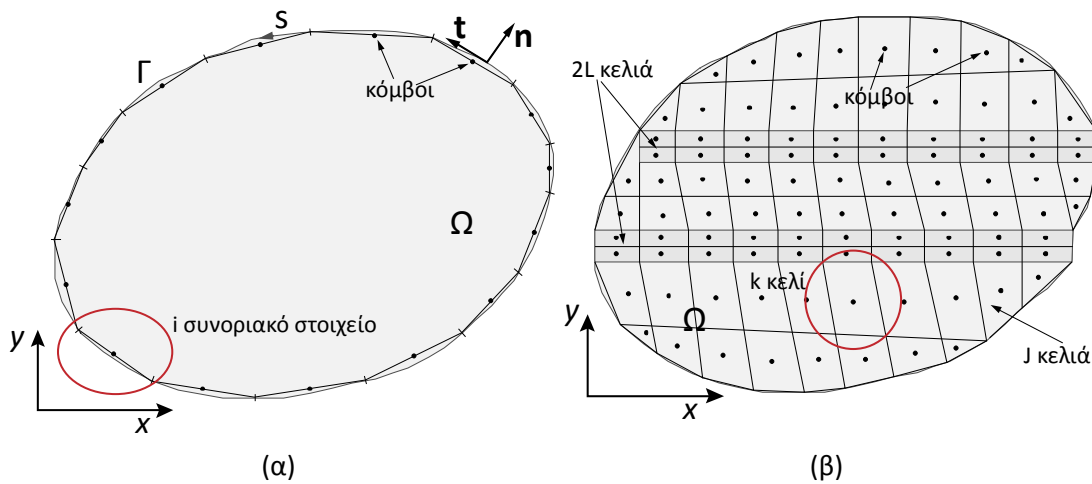
$$r = |Q - P| = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right]^{1/2}, \quad Q(\xi, \eta) \in \Omega, \quad \text{όπου } P(x, y) \in \Omega. \quad \text{Τα σημεία που}$$

βρίσκονται στο εσωτερικό του χωρίου Ω παριστάνονται με κεφαλαία γράμματα (π.χ. P, Q), ενώ τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο σύνορο Γ παριστάνονται με μικρά γράμματα (π.χ. p, q). Οι ολοκληρωτικές παραστάσεις (4.2.7) περιλαμβάνουν δύο άγνωστες συνοριακές ποσότητες για κάθε μεμβρανικό κινηματικό μέγεθος $u_{pi}(x, y)$ ($i=1,2$) και τέσσερις άγνωστες συνοριακές ποσότητες για τη βύθιση της πλάκας $u_{p3}(x, y)$. Συνεπώς, προκειμένου να συσχετίσουμε τα συνοριακά μεγέθη με τα πλασματικά φορτία $p_{pi}(x, y)$ χρειαζόμαστε δύο και τέσσερις εξισώσεις για κάθε εξίσωση Poisson (σχέσεις 4.2.1α) και τη Διαρμονική εξίσωση (σχέση 4.2.1β), αντίστοιχα. Οι συνοριακές συνθήκες της πλάκας (3.4.7α,β), που διατυπώθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποτελούν μια διαφορική συνοριακή εξίσωση για κάθε εξίσωση Poisson και οι συνθήκες (3.4.7γ,δ) αποτελούν δύο διαφορικές συνοριακές εξισώσεις για τη Διαρμονική εξίσωση. Τις υπόλοιπες σχέσεις μπορούμε να τις παράγουμε με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών παραστάσεων (4.2.7), εάν εφαρμοστούν σε τυχαίο συνοριακό σημείο $p \in \Gamma$, για το οποίο θα ισχύει $\varepsilon(p) = 1/2$ (βλ. ενότητες 2.5, 2.6). Για τη Διαρμονική εξίσωση υπολείπεται μια ακόμη συνοριακή εξίσωση, η οποία θα προκύψει από την ολοκληρωτική παράσταση της Λαπλασιανής του βέλους κάμψης (Katsikadelis & Armenakos, 1989). Η εν λόγω ολοκληρωτική παράσταση λαμβάνεται αν εφαρμόσουμε τον αρμονικό τελεστή $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ και στα δύο μέλη της σχέσης (4.2.7β) ως

$$\varepsilon(p) \nabla^2 u_{p3}(p) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \Lambda_{p2}(r) p_{p3}(Q) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\Lambda_{p1}(r) \nabla^2 u_{p3}(q) + \Lambda_{p2}(r) \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}(q)}{\partial n} \right) ds \quad (4.2.9)$$

Η σχέση (4.2.9) εφαρμόζεται στα συνοριακά σημεία $p \in \Gamma$ ($\varepsilon(p)=1/2$) και ορίζει την τελευταία απαιτούμενη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση.

Στη συνέχεια προχωρούμε στη διακριτοποίηση της πλάκας. Το σύνορο Γ της πλάκας διαιρείται σε N σταθερά συνοριακά στοιχεία (Σχ. 4.2.1α), ενώ το εσωτερικό του χωρίου Ω διαιρείται σε $M=2L+J$ επιφανειακά στοιχεία (κελιά), όπου L είναι ορθογωνικά στοιχεία που ανήκουν στις διεπιφάνειες με πλάτος στη διεύθυνση y ίσο με το ήμισυ του πλάτους της διεπιφάνειας και J τριγωνικά, τετραπλευρικά ή/και ορθογωνικά στοιχεία που βρίσκονται εκτός των διεπιφανειών (Σχ. 4.2.1β). Υπενθυμίζεται ότι, στα σταθερά στοιχεία η γεωμετρία της καμπύλης του στοιχείου προσεγγίζεται με ευθύγραμμο τμήμα (γραμμικές συναρτήσεις σχήματος), ενώ η τιμή της συνοριακής ποσότητας θεωρείται σταθερή κατά μήκος του στοιχείου και ίση με την τιμή του κομβικού σημείου που βρίσκεται στο μέσο του στοιχείου.



Σχήμα 4.2.1. Διακριτοποίηση του συνόρου (α) και διακριτοποίηση του χωρίου (β).

Η πεδιακή διακριτοποίηση που πραγματοποιείται κατά την υλοποίηση της AEM, χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό των πεδικών ολοκληρωμάτων και όχι για τη διακριτοποίηση της κατασκευής, η λύση δηλαδή εξαρτάται από τη διακριτοποίηση του συνόρου. Τονίζεται ότι οι φορείς ανωδομής γεφυρών μορφής πλακοδοκού ή οι ενισχυμένες πλάκες που χρησιμοποιούνται σε μεταλλικά κιβώτια γεφυρών, στην αεροναυπηγική και τη ναυπηγική έχουν συνήθως κανονική κάτοψη, δηλαδή ορθογωνική ή λοξή μορφής παραλληλογράμμου, όπου μια τυποποιημένη (δομημένη) διακριτοποίηση είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί. Ακόμη, η ύπαρξη πλέον έτοιμων υποπρογραμμάτων και λογισμικών διευκολύνει σημαντικά τη διακριτοποίηση ακόμα και σε περιπτώσεις πιο πολύπλοκης γεωμετρίας.

Σύμφωνα με την προαναφερθείσα διακριτοποίηση οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (4.2.7), (4.2.9) προσεγγίζονται αριθμητικά με σταθερά στοιχεία στο σύνορο και επιφανειακά στοιχεία στο εσωτερικό του χωρίου της πλάκας εφαρμόζοντας για τα ολοκληρώματα των στοιχείων αυτών αριθμητική ολοκλήρωση Gauss. Για τα πεδικά ολοκληρώματα τα σημεία Gauss λαμβάνονται στο εσωτερικό κάθε επιφανειακού στοιχείου και όχι στο σύνορό του, έτσι ώστε να αποφευχθεί η πιθανότητα τα ολοκληρώματα να

εμφανίσουν «σχεδόν ιδιόμορφη» συμπεριφορά. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα με ανωμαλία του πυρήνα τους (λογαριθμική ή τύπου Cauchy) υπολογίζονται αναλυτικά (Κατσικαδέλης, 1999), ενώ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα με ομαλή συμπεριφορά υπολογίζονται με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss. Οι εν λόγω διαδικασίες περιγράφονται λεπτομερώς στις υποενότητες 2.5.2 και 2.6.2. Όσον αφορά στις διαφορικές συνοριακές εξισώσεις, γίνεται η εξής παρατήρηση: Στις εκφράσεις των συνοριακών συνθηκών (3.4.7) περιέχονται παράγωγοι ως προς το μήκος τόξου s οι οποίες αποτελούν πρόσθετες άγνωστες συνοριακές ποσότητες που δεν συμπεριλαμβάνονται στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (4.2.7), (4.2.9). Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό, οι παράγωγοι ως προς s των σχέσεων (3.4.7) προσεγγίζονται αριθμητικά με τη βοήθεια κατάλληλων σχημάτων κεντρικών, εμπρόσθιων ή οπίσθιων διαφορών. Η διαδικασία με την οποία επιτυγχάνεται η προσέγγιση αυτή περιγράφεται αναλυτικά στο Παράρτημα Γ. Έτσι, οι διακριτοποιημένες σχέσεις (3.4.7) περιέχουν μόνο τις ζητούμενες άγνωστες συνοριακές ποσότητες και μαζί με τις (4.2.7), (4.2.9) μορφώνουν ένα σύστημα $8 \times N$ μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως

$$\begin{bmatrix} E_{p11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{p22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{p33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{p1} \\ \mathbf{d}_{p2} \\ \mathbf{d}_{p3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{p1}^{nl} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{p2}^{nl} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{p3}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha_{p3} \\ \mathbf{0} \\ \beta_{p3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \gamma_{p3} \\ \delta_{p3} \end{Bmatrix} \quad (4.2.10)$$

όπου

$$E_{p11} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{H}_1 & \hat{\mathbf{H}}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{p22} & \mathbf{D}_{p23} \end{bmatrix} \quad (4.2.11\alpha)$$

$$E_{p22} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{H}_1 & \hat{\mathbf{H}}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{p44} & \mathbf{D}_{p45} \end{bmatrix} \quad (4.2.11\beta)$$

$$E_{p33} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{p78} & \mathbf{D}_{p79} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{p711} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{p88} & \mathbf{D}_{p89} & \mathbf{D}_{p810} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2.11\gamma)$$

\mathbf{D}_{p22} έως \mathbf{D}_{p810} είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $N \times N$ με γνωστούς συντελεστές, τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές των συνοριακών συναρτήσεων $\alpha_{pj}, \beta_{pj}, \gamma_{pj}, \delta_{pj}$ ($j=1,2$), που παρουσιάζονται στις σχέσεις (3.4.7). $\alpha_{p3}, \beta_{p3}, \gamma_{p3}, \delta_{p3}$ είναι γνωστά διανύσματα διαστάσεων $N \times 1$ που περιλαμβάνουν τις τιμές των συνοριακών συναρτήσεων

$a_{p3}, \theta_{p3}, \gamma_{p3}, \delta_{p3}, (j=1,2)$, που παρουσιάζονται στις σχέσεις (3.4.7). $\mathbf{H}_i (i=1,2)$, $\hat{\mathbf{H}}_2$ και $\mathbf{G}_i (i=1,2)$ είναι γνωστά τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $N \times N$ που προκύπτουν από τις τιμές των πυρήνων των ολοκληρωτικών παραστάσεων στα συνοριακά στοιχεία της πλάκας. $\mathbf{A}_1, \hat{\mathbf{A}}_1, \mathbf{A}_2$ είναι γνωστά τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $N \times M$ που προκύπτουν από την ολοκλήρωση των πυρήνων στα κελιά του χωρίου της πλάκας. $\mathbf{D}_{pi}^{nl} (i=1,2)$ είναι γνωστά διανύσματα διαστάσεων $N \times 1$ και \mathbf{D}_{p3}^{nl} είναι διανύσματα διαστάσεων $2N \times 1$ που περιέχουν τους μη γραμμικούς όρους που περιλαμβάνονται στις εκφράσεις των διαφορικών συνοριακών συνθηκών (σχέσεις (3.4.7)). Ακόμη οι ποσότητες

$$\mathbf{d}_{pi} = \left\{ p_{pi} \quad \hat{u}_{pi} \quad \hat{u}_{pi,n} \right\}^T, (i=1,2) \quad (4.2.12\alpha)$$

$$\mathbf{d}_{p3} = \left\{ p_{p3} \quad \hat{u}_{p3} \quad \hat{u}_{p3,n} \quad \nabla^2 \hat{u}_{p3} \quad \left(\nabla^2 \hat{u}_{p3} \right)_{,n} \right\}^T \quad (4.2.12\beta)$$

Είναι γενικευμένα διανύσματα αγνώστων, όπου

$$\hat{u}_{pi} = \left\{ (u_{pi})_1 \quad (u_{pi})_2 \quad \dots \quad (u_{pi})_N \right\}^T, (i=1,2,3) \quad (4.2.13\alpha)$$

$$\hat{u}_{pi,n} = \left\{ \left(\frac{\partial u_{pi}}{\partial n} \right)_1 \quad \left(\frac{\partial u_{pi}}{\partial n} \right)_2 \quad \dots \quad \left(\frac{\partial u_{pi}}{\partial n} \right)_N \right\}^T, (i=1,2,3) \quad (4.2.13\beta)$$

$$\nabla^2 \hat{u}_{p3} = \left\{ (\nabla^2 u_{p3})_1 \quad (\nabla^2 u_{p3})_2 \quad \dots \quad (\nabla^2 u_{p3})_N \right\}^T \quad (4.2.13\gamma)$$

$$\left(\nabla^2 \hat{u}_{p3} \right)_{,n} = \left\{ \left(\frac{\partial \nabla^2 u_{p3}}{\partial n} \right)_1 \quad \left(\frac{\partial \nabla^2 u_{p3}}{\partial n} \right)_2 \quad \dots \quad \left(\frac{\partial \nabla^2 u_{p3}}{\partial n} \right)_N \right\}^T \quad (4.2.13\delta)$$

είναι διανύσματα που συγκεντρώνουν τις τιμές των αγνώστων συνοριακών ποσοτήτων και $\mathbf{p}_{pi} = \left\{ (p_{pi})_1 \quad (p_{pi})_2 \quad \dots \quad (p_{pi})_M \right\}^T, (i=1,2,3)$ είναι διανύσματα που περιέχουν τις M άγνωστες τιμές των πλασματικών φορτίων στα εσωτερικά σημεία ταξιοθεσίας του χωρίου της πλάκας. Στην περίπτωση που το σύνορο Γ περιέχει έναν πεπερασμένο αριθμό k ελεύθερων ή ελαστικά δεσμευμένων γωνιών, k επιπλέον εξισώσεις πρέπει να ικανοποιούνται μαζί με τις συνοριακές εξισώσεις (4.2.10). Οι επιπλέον αυτές εξισώσεις προκύπτουν από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (3.4.23) στα εκατέρωθεν συνοριακά στοιχεία της κάθε γωνίας, ακολουθώντας τη διαδικασία που παρουσιάζεται στην εργασία των Katsikadelis & Armenakos (1989). Σημειώνεται ότι στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των διατιθέμενων εξισώσεων αυξάνεται ενώ ο αριθμός των αγνώστων παραμένει σταθερός. Αυτό αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή τεχνητών αγνώστων, οι οποίοι παριστάνουν ιδεατές

δυνάμεις στις γωνίες, που εξισορροπούν την κατακόρυφη δύναμη που προβλέπει η θεωρία Kirchhoff.

Στη συνέχεια διακριτοποιώντας τις ολοκληρωτικές παραστάσεις των κινηματικών μεγεθών (4.2.7) και εφαρμόζοντας στα M σημεία ταξίθεσίας, προκύπτουν οι εξής εξισώσεις

$$\mathbf{u}_{pi} = \mathbf{B}_{pi} \mathbf{d}_{pi}, \quad (i=1,2,3) \quad (4.2.14)$$

όπου \mathbf{B}_{pi} , ($i=1,2$) είναι ορθογωνικό μητρώο διαστάσεων $M \times (2N+M)$ και \mathbf{B}_{p3} είναι ορθογωνικό μητρώο διαστάσεων $M \times (4N+M)$ με γνωστούς συντελεστές. Στη συνέχεια θα διατυπωθούν και οι ολοκληρωτικές παραστάσεις των παραγώγων των κινηματικών μεγεθών οι οποίες θα προκύψουν από αναλυτική παραγωγή των (4.2.7). Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η παραγωγή και η ολοκλήρωση μπορούν να εναλλάσσονται ως προς διαφορετικές μεταβλητές, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{pi}(P)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial x} \rho_{pi}(Q) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial x} u_{pi}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial x} \frac{\partial u_{pi}(q)}{\partial n} \right) ds, \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (4.2.15\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{pi}(P)}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial y} \rho_{pi}(Q) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial y} u_{pi}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial y} \frac{\partial u_{pi}(q)}{\partial n} \right) ds, \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (4.2.15\beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{pi}(P)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \Lambda_{p2}(r)}{\partial x^2} \rho_{pi}(Q) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial x^2} u_{pi}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial x^2} \frac{\partial u_{pi}(q)}{\partial n} \right) ds, \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (4.2.15\gamma)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{pi}(P)}{\partial y^2} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \Lambda_{p2}(r)}{\partial y^2} \rho_{pi}(Q) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial y^2} u_{pi}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial y^2} \frac{\partial u_{pi}(q)}{\partial n} \right) ds, \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (4.2.15\delta)$$

$$\frac{\partial^2 u_{pi}(P)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \Lambda_{p2}(r)}{\partial x \partial y} \rho_{pi}(Q) d\Omega$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial xy} u_{pi}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial xy} \frac{\partial u_{pi}(q)}{\partial n} \right) ds, \quad (i=1,2) \quad (4.2.15\epsilon)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{p3}(P)}{\partial x} = & \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \Lambda_{p4}(r)}{\partial x} \rho_{p3}(Q) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial x} u_{p3}(q) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial x} \frac{\partial u_{p3}(q)}{\partial n} + \frac{\partial \Lambda_{p3}(r)}{\partial x} \nabla^2 u_{p3}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p4}(r)}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}(q)}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4.2.15\sigma\tau)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{p3}(P)}{\partial y} = & \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \Lambda_{p4}(r)}{\partial y} \rho_{p3}(Q) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial y} u_{p3}(q) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial y} \frac{\partial u_{p3}(q)}{\partial n} + \frac{\partial \Lambda_{p3}(r)}{\partial y} \nabla^2 u_{p3}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p4}(r)}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}(q)}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4.2.15\zeta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{p3}(P)}{\partial x^2} = & \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \Lambda_{p4}(r)}{\partial x^2} \rho_{p3}(Q) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial x^2} u_{p3}(q) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial x^2} \frac{\partial u_{p3}(q)}{\partial n} + \frac{\partial \Lambda_{p3}(r)}{\partial x^2} \nabla^2 u_{p3}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p4}(r)}{\partial x^2} \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}(q)}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4.2.15\eta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{p3}(P)}{\partial y^2} = & \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \Lambda_{p4}(r)}{\partial y^2} \rho_{p3}(Q) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial y^2} u_{p3}(q) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial y^2} \frac{\partial u_{p3}(q)}{\partial n} + \frac{\partial \Lambda_{p3}(r)}{\partial y^2} \nabla^2 u_{p3}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p4}(r)}{\partial y^2} \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}(q)}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4.2.15\theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{p3}(P)}{\partial x \partial y} = & \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \Lambda_{p4}(r)}{\partial x \partial y} \rho_{p3}(Q) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Lambda_{p1}(r)}{\partial x \partial y} u_{p3}(q) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Lambda_{p2}(r)}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_{p3}(q)}{\partial n} + \frac{\partial \Lambda_{p3}(r)}{\partial x \partial y} \nabla^2 u_{p3}(q) + \frac{\partial \Lambda_{p4}(r)}{\partial x \partial y} \frac{\partial \nabla^2 u_{p3}(q)}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4.2.15\iota)$$

όπου οι παράγωγοι των δισημειακών πυρήνων $\Lambda_{pi}(r)$ ($i=1,2,3,4$) δίνονται από τις σχέσεις (2.5.21), (2.6.22), που έχουν παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 2. Διακριτοποίηση των εξισώσεων (4.2.15) και εφαρμογή στα M σημεία ταξίθεσίας της πλάκας οδηγεί στις παρακάτω διακριτοποιημένες σχέσεις

$$\mathbf{u}_{pi,x} = \mathbf{B}_{pi,x} \mathbf{d}_{pi}, \quad (i=1,2,3) \quad (4.2.16\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{pi,y} = \mathbf{B}_{pi,y} \mathbf{d}_{pi}, \quad (i=1,2,3) \quad (4.2.16\beta)$$

$$\mathbf{u}_{pi,xx} = \mathbf{B}_{pi,xx} \mathbf{d}_{pi}, \quad (i=1,2,3) \quad (4.2.16\gamma)$$

$$\mathbf{u}_{pi,yy} = \mathbf{B}_{pi,yy} \mathbf{d}_{pi}, \quad (i=1,2,3) \quad (4.2.16\delta)$$

$$\mathbf{u}_{pi,xy} = \mathbf{B}_{pi,xy} \mathbf{d}_{pi}, \quad (i=1,2,3) \quad (4.2.16\epsilon)$$

όπου $\mathbf{B}_{pi,x}, \mathbf{B}_{pi,y}, \mathbf{B}_{pi,xx}, \mathbf{B}_{pi,yy}, \mathbf{B}_{pi,xy}$ ($i=1,2$) είναι ορθογωνικά μητρώα διαστάσεων $M \times (2N+M)$ και $\mathbf{B}_{p3,x}, \mathbf{B}_{p3,y}, \mathbf{B}_{p3,xx}, \mathbf{B}_{p3,yy}, \mathbf{B}_{p3,xy}$ είναι ορθογωνικά μητρώα διαστάσεων $M \times (4N+M)$ με γνωστούς συντελεστές. Κατά τον υπολογισμό των πεδιακών ολοκληρωμάτων των πυρήνων στα κελιά, ιδιόμορφα και υπέρ-ιδιόμορφα ολοκληρώματα προκύπτουν. Αυτά υπολογίζονται με μετασχηματισμό των πεδιακών ολοκληρωμάτων σε επικαμπύλια στο σύνορο του κάθε κελιού (Κατσικαδέλης 1999). Οι διαδικασίες αυτή καθώς και οι βοηθητικές συναρτήσεις για το μετασχηματισμό των ολοκληρωμάτων των πυρήνων και των παραγώγων τους, παρουσιάζονται στις υποενότητες 2.5.2, 2.6.2. Το τελικό βήμα της ΑΕΜ είναι η εφαρμογή των εξισώσεων (3.4.6) στα M σημεία ταξιθεσίας στο χωρίο Ω . Αυτό οδηγεί στις παρακάτω διακριτοποιημένες εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{p1} + \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} (\mathbf{B}_{p1,xx} \mathbf{d}_{p1} + \mathbf{B}_{p2,xy} \mathbf{d}_{p2}) + \left[\frac{2}{1-\nu_p} (\mathbf{B}_{p3,xx} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3} + (\mathbf{B}_{p3,yy} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \cdot \right. \\ \left. \cdot \mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3} \right] + \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} (\mathbf{B}_{p3,xy} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3} = \frac{1}{G_p h_p} \mathbf{Z} \mathbf{q}_x \end{aligned} \quad (4.2.17\alpha)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{p2} + \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} (\mathbf{B}_{p1,xy} \mathbf{d}_{p1} + \mathbf{B}_{p2,yy} \mathbf{d}_{p2}) + \left[\frac{2}{1-\nu_p} (\mathbf{B}_{p3,yy} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3} + (\mathbf{B}_{p3,xx} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \cdot \right. \\ \left. \cdot \mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3} \right] + \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} (\mathbf{B}_{p3,xy} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3} = \frac{1}{G_p h_p} \mathbf{Z} \mathbf{q}_y \end{aligned} \quad (4.2.17\beta)$$

$$\begin{aligned} D_{p3} - C \left\{ \left[(\mathbf{B}_{p1,x} \mathbf{d}_{p1})_{dg} \mathbf{B}_{p3,xx} \mathbf{d}_{p3} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3})_{dg} (\mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,xx} \mathbf{d}_{p3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu_p (\mathbf{B}_{p2,y} \mathbf{d}_{p2})_{dg} \mathbf{B}_{p3,xx} \mathbf{d}_{p3} + \frac{1}{2} \nu_p (\mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3})_{dg} (\mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,xx} \mathbf{d}_{p3} \right] + \right. \\ \left. + (1-\nu_p) \left[(\mathbf{B}_{p1,y} \mathbf{d}_{p1})_{dg} \mathbf{B}_{p3,xy} \mathbf{d}_{p3} + (\mathbf{B}_{p2,x} \mathbf{d}_{p2})_{dg} \mathbf{B}_{p3,xy} \mathbf{d}_{p3} + (\mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. (\mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,xy} \mathbf{d}_{p3} \right] + \left[(\mathbf{B}_{p2,y} \mathbf{d}_{p2})_{dg} \mathbf{B}_{p3,yy} \mathbf{d}_{p3} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \cdot \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & (\mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,yy} \mathbf{d}_{p3} + \nu_p (\mathbf{B}_{p1,x} \mathbf{d}_{p1})_{dg} \mathbf{B}_{p3,yy} \mathbf{d}_{p3} + \frac{1}{2} \nu_p (\mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \cdot \\ & (\mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3})_{dg} \mathbf{B}_{p3,yy} \mathbf{d}_{p3} \end{aligned} \right\} = \mathbf{g} - \mathbf{Zq}_z + \mathbf{ZX}_y \mathbf{q}_y - \mathbf{ZX}_x \mathbf{q}_x + (\mathbf{Zq}_x)_{dg} \mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3} + \\ + (\mathbf{Zq}_y)_{dg} \mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3} \quad (4.2.17\gamma)$$

όπου $\mathbf{q}_x = \{\mathbf{q}_{x1} \quad \mathbf{q}_{x2}\}^T$, $\{\mathbf{q}_y\} = \{\mathbf{q}_{y1} \quad \mathbf{q}_{y2}\}^T$ και $\{\mathbf{q}_z\} = \{\mathbf{q}_{z1} \quad \mathbf{q}_{z2}\}^T$ είναι διανύσματα διαστάσεων $2L$ που περιλαμβάνουν τις άγνωστες δυνάμεις διεπιφάνειας q_{xj}^i , q_{yj}^i , q_{zj}^i ($j=1,2$). $2L$ είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων σε κάθε σύνδεση πλάκας-δοκού. \mathbf{Z} είναι ένα μητρώο μετάθεσης διαστάσεων $M \times 2L$ το οποίο μετατρέπει τα διανύσματα \mathbf{q}_x , \mathbf{q}_y , \mathbf{q}_z σε αντίστοιχα με διάσταση M . Ο συμβολισμός $(\)_{dg}$ ορίζει ένα διαγώνιο μητρώο διαστάσεων $M \times M$ με στοιχεία αυτά του διανύσματος που περιέχεται στην παρένθεση. Τα μητρώα \mathbf{X}_x , \mathbf{X}_y προκύπτουν ύστερα από την προσέγγιση των παραγώγων των καμπτικών ροπών m_{pyj}^i , m_{pxj}^i , αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας κατάλληλα σχήματα κεντρικών, οπίσθιων και εμπρόσθιων διαφορών (Παράρτημα Γ). Οι διαστάσεις τους είναι $2L \times 2L$.

4.3 Η ΑΕΜ για τα κινηματικά μεγέθη των δοκών

Η ανάλυση μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων της i δοκού προκύπτει με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που αναλύθηκε προηγουμένως για το πρόβλημα της πλάκας. Οι εξισώσεις (3.4.22) και (3.4.24)-(3.4.27) λύνονται με εφαρμογή της ΑΕΜ, όπως αυτή εφαρμόζεται στην εργασία των Sarountzakis & Morkos (2007) και έχει περιγραφεί αναλυτικά στις ενότητες 2.3 και 2.4. Έστω ότι $u_{b1}^i(x^i) = u_b^i(x^i)$ και $u_{b2}^i(x^i) = v_b^i(x^i)$, $u_{b3}^i(x^i) = w_b^i(x^i)$, $u_{b4}^i(x^i) = \vartheta_{bx}^i(x^i)$ είναι οι ζητούμενες λύσεις του προβλήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.4.22) και (3.4.24)-(3.4.27), οι οποίες είναι συνεχείς, δύο φορές και τέσσερις φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, αντίστοιχα, στο εσωτερικό της δοκού και μια φορά και τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, αντίστοιχα, στα άκρα της ($x^i = 0, l^i$). Παραγωγίζοντας δύο φορές την αξονική μετατόπιση και τέσσερις φορές τα υπόλοιπα κινηματικά μεγέθη, μπορούμε να παράγουμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{d^2 u_{b1}^i}{dx^{i2}} = p_{b1}^i(x^i) \quad \frac{d^4 u_{bj}^i}{dx^{i4}} = p_{bj}^i(x^i), \quad (j=2,3,4) \quad (4.3.1\alpha,\beta)$$

Σύμφωνα με την ΑΕΜ η λύση των εξισώσεων (3.4.22) και (3.4.24)-(3.4.27) μπορεί να προσδιοριστεί επιλύοντας τις αναλογικές εξισώσεις (4.3.1) με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες με το αρχικό πρόβλημα (σχέσεις (3.4.24)-(3.4.27)), υπό την προϋπόθεση ότι τα πλασματικά

φορτία $\rho_{bj}^i(x^i)$ ($j=1,2,3,4$) θα προσδιοριστούν προηγουμένως. Οι κατανομές των φορτίων αυτών θα προσδιοριστούν εφαρμόζοντας τη BEM. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στις ενότητες 2.3 και 2.4 και υιοθετώντας την υπόθεση των σταθερών στοιχείων στο εσωτερικό της δοκού για την κατανομή των ρ_{bj}^i στα L εσωτερικά στοιχεία (καθώς η αριθμητική υλοποίηση γίνεται ευκολότερη, ενώ η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι υψηλή), οι ολοκληρωτικές παραστάσεις των κινηματικών μεγεθών u_{bj}^i ($j=1,2,3,4$) και των παραγώγων τους ως προς x^i (σχέσεις (2.3.10), (2.4.9) και (2.4.15)), εφαρμόζονται στα άκρα της δοκού ($0, l^i$) και μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (3.4.24)-(3.4.27) χρησιμοποιούνται για να εκφραστούν οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες $u_{bj}^i(\zeta^i)$, $u_{bj,x}^i(\zeta^i)$, $u_{bj,xx}^i(\zeta^i)$ και $u_{bj,xxx}^i(\zeta^i)$ ($\zeta^i=0, l^i$) συναρτήσει των πλασματικών φορτίων ρ_{bj}^i ($j=1,2,3,4$). Συνεπώς, οι παρακάτω 28 μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις για την i δοκό προκύπτουν ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{b11}^i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{b22}^i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{b33}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{b44}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{b1}^i \\ \mathbf{d}_{b2}^i \\ \mathbf{d}_{b3}^i \\ \mathbf{d}_{b4}^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{b1}^{i nl} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{b2}^{i nl} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{b3}^{i nl} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{b4}^{i nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\alpha}_{b3}^i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{\beta}_b^i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{\gamma}_b^i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{\delta}_b^i \end{Bmatrix} \quad (4.3.2)$$

όπου

$$\mathbf{E}_{b11}^i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_2^i & \mathbf{E}_1^i & \hat{\mathbf{E}}_2^i \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b22}^i & \mathbf{D}_{b23}^i \end{bmatrix} \quad (4.3.3\alpha)$$

$$\mathbf{E}_{b22}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4^i & \mathbf{E}_1^i & \mathbf{E}_2^i & \mathbf{E}_3^i & \mathbf{E}_4^i \\ \mathbf{F}_3^i & \mathbf{0} & \mathbf{E}_1^i & \mathbf{E}_2^i & \mathbf{E}_3^i \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b55}^i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b58}^i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b66}^i & \mathbf{D}_{b67}^i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.3.3\beta)$$

$$\mathbf{E}_{b33}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4^i & \mathbf{E}_1^i & \mathbf{E}_2^i & \mathbf{E}_3^i & \mathbf{E}_4^i \\ \mathbf{F}_3^i & \mathbf{0} & \mathbf{E}_1^i & \mathbf{E}_2^i & \mathbf{E}_3^i \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b9\ 10}^i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b9\ 13}^i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b10\ 11}^i & \mathbf{D}_{b10\ 12}^i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.3.3\gamma)$$

$$\mathbf{E}_{b44}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4^i & \mathbf{E}_1^i & \mathbf{E}_2^i & \mathbf{E}_3^i & \mathbf{E}_4^i \\ \mathbf{F}_3^i & \mathbf{0} & \mathbf{E}_1^i & \mathbf{E}_2^i & \mathbf{E}_3^i \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b13\ 15}^i & \mathbf{D}_{b13\ 16}^i & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b13\ 18}^i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{b14\ 16}^i & \mathbf{D}_{b14\ 17}^i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.3.3\delta)$$

$$\boldsymbol{\beta}_b^i = \left\{ \boldsymbol{\beta}_{b3}^i \quad \bar{\boldsymbol{\beta}}_{b3}^i \right\}^T, \quad \mathbf{v}_b^i = \left\{ \mathbf{v}_{b3}^i \quad \bar{\mathbf{v}}_{b3}^i \right\}^T, \quad \boldsymbol{\delta}_b^i = \left\{ \boldsymbol{\delta}_{b3}^i \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}_{b3}^i \right\}^T \quad (4.3.3\epsilon, \sigma\tau, \zeta)$$

Τα μητρώα \mathbf{D}_{b22}^i έως $\mathbf{D}_{b14\ 17}^i$ είναι γνωστά τετραγωνικά μητρώα 2×2 τα οποία περιλαμβάνουν τις τιμές των συναρτήσεων $\alpha_{bj}^i, \theta_{bj}^i, \bar{\theta}_{bj}^i, \gamma_{bj}^i, \bar{\gamma}_{bj}^i, \delta_{bj}^i, \bar{\delta}_{bj}^i$ ($j=1,2$) των σχέσεων (3.4.24)-(3.4.27). $\boldsymbol{\alpha}_{b3}^i, \boldsymbol{\beta}_{b3}^i, \bar{\boldsymbol{\beta}}_{b3}^i, \mathbf{v}_{b3}^i, \bar{\mathbf{v}}_{b3}^i, \boldsymbol{\delta}_{b3}^i, \bar{\boldsymbol{\delta}}_{b3}^i$ είναι γνωστά διανύσματα 2×1 που περιλαμβάνουν τις τιμές των συνοριακών εξισώσεων $\alpha_{b3}^i, \theta_{b3}^i, \bar{\theta}_{b3}^i, \gamma_{b3}^i, \bar{\gamma}_{b3}^i, \delta_{b3}^i, \bar{\delta}_{b3}^i$, των σχέσεων (3.4.24)-(3.4.27). \mathbf{E}_1^i έως \mathbf{E}_4^i και $\hat{\mathbf{E}}_2^i$ είναι γνωστά τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων 2×2 που προκύπτουν από τις τιμές των πυρήνων στα άκρα των δοκών. $\hat{\mathbf{F}}_2^i, \mathbf{F}_3^i, \mathbf{F}_4^i$ είναι γνωστά μητρώα διαστάσεων $2 \times L$ που προκύπτουν από την ολοκλήρωση των πυρήνων κατά μήκος του άξονα της δοκού. $\mathbf{D}_{b1}^{i\ n!}$ είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων 2×1 και $\mathbf{D}_{bj}^{i\ n!}$ ($j=2,3,4$) είναι διανύσματα διαστάσεων 4×1 τα οποία περιέχουν τους μη γραμμικούς όρους που περιλαμβάνονται στις συνοριακές συνθήκες (σχέσεις (3.4.24)-(3.4.27)). Τέλος

$$\mathbf{d}_{b1}^i = \left\{ \mathbf{p}_{b1}^i \quad \hat{\mathbf{u}}_{b1}^i \quad \hat{\mathbf{u}}_{b1,x}^i \right\}^T \quad (4.3.4\alpha)$$

$$\mathbf{d}_{bj}^i = \left\{ \mathbf{p}_{bj}^i \quad \hat{\mathbf{u}}_{bj}^i \quad \hat{\mathbf{u}}_{bj,x}^i \quad \hat{\mathbf{u}}_{bj,xx}^i \quad \hat{\mathbf{u}}_{bj,xxx}^i \right\}^T, \quad (j=2,3,4) \quad (4.3.4\beta)$$

Είναι γενικευμένα διανύσματα αγνώστων, όπου

$$\hat{\mathbf{u}}_{bj}^i = \left\{ u_{bj}^i(0) \quad u_{bj}^i(l^i) \right\}^T, \quad (j=1,2,3,4) \quad (4.3.5\alpha)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{bj,x}^i = \left\{ \frac{\partial u_{bj}^i(0)}{\partial x^i} \quad \frac{\partial u_{bj}^i(l^i)}{\partial x^i} \right\}^T, \quad (j=1,2,3,4) \quad (4.3.5\beta)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{bj,xx}^i = \left\{ \frac{\partial^2 u_{bj}^i(0)}{\partial x^{i2}} \quad \frac{\partial^2 u_{bj}^i(l^i)}{\partial x^{i2}} \right\}^T, \quad (j=1,2,3,4) \quad (4.3.5\gamma)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{bj,xxx}^i = \left\{ \frac{\partial^3 u_{bj}^i(0)}{\partial x^{i3}} \quad \frac{\partial^3 u_{bj}^i(l^i)}{\partial x^{i3}} \right\}^T, \quad (j=1,2,3,4) \quad (4.3.5\delta)$$

είναι διανύσματα που περιλαμβάνουν τις δύο άγνωστες τιμές των αντιστοίχων συνοριακών ποσοτήτων και $\mathbf{p}_{bj}^i = \left\{ (p_{bj}^i)_1 \quad (p_{bj}^i)_2 \quad \dots \quad (p_{bj}^i)_L \right\}^T$ ($j=1,2,3,4$) είναι διανύσματα που περιλαμβάνουν τις L άγνωστες τιμές των πλασματικών φορτίων.

Η διακριτοποίηση των ολοκληρωτικών παραστάσεων των αγνώστων ποσοτήτων u_{bj}^i ($j=1,2,3,4$) και των αντιστοίχων των παραγώγων τους ως προς x^i στο εσωτερικό της δοκού ($x^i \in (0, l^i)$) (σχέσεις (2.3.19), (2.3.20), (2.4.25) και (2.4.26)) και η εφαρμογή τους στα L σημεία ταξιθεσίας οδηγεί στις παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{u}_{b1}^i = \mathbf{B}_{b1}^i \mathbf{d}_{b1}^i \quad (4.3.6\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{b1,x}^i = \mathbf{B}_{b1,x}^i \mathbf{d}_{b1}^i \quad (4.3.6\beta)$$

$$\mathbf{u}_{bj}^i = \mathbf{B}_{bj}^i \mathbf{d}_{bj}^i, \quad (j=2,3,4) \quad (4.3.6\gamma)$$

$$\mathbf{u}_{bj,x}^i = \mathbf{B}_{bj,x}^i \mathbf{d}_{bj}^i, \quad (j=2,3,4) \quad (4.3.6\delta)$$

$$\mathbf{u}_{bj,xx}^i = \mathbf{B}_{bj,xx}^i \mathbf{d}_{bj}^i, \quad (j=2,3,4) \quad (4.3.6\epsilon)$$

$$\mathbf{u}_{bj,xxx}^i = \mathbf{B}_{bj,xxx}^i \mathbf{d}_{bj}^i, \quad (j=2,3,4) \quad (4.3.6\sigma)$$

όπου $\mathbf{B}_{b1}^i, \mathbf{B}_{b1,x}^i$ είναι μητρώα διαστάσεων $L \times (L+4)$ και $\mathbf{B}_{bj}^i, \mathbf{B}_{bj,x}^i, \mathbf{B}_{bj,xx}^i, \mathbf{B}_{bj,xxx}^i$ ($j=2,3,4$) είναι μητρώα διαστάσεων $L \times (L+8)$ με γνωστούς συντελεστές, αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας της κάθε δοκού (σχέσεις 3.4.22) στα L σημεία ταξιθεσίας και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.3.6), προκύπτουν $4 \times L$ μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις για την i δοκό ως εξής

$$-E_b^i A_b^i \left[\mathbf{p}_{b1}^i + \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3}^i \right)_{dg} \mathbf{B}_{b3,xx}^i \mathbf{d}_{b3}^i \right] = \mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i \quad (4.3.7\alpha)$$

$$E_b^i I_z^i \mathbf{p}_{b2}^i - \left(\mathbf{N}_b^i \right)_{dg} \left(\mathbf{B}_{b2,xx}^i \mathbf{d}_{b2}^i - z_C \mathbf{B}_{b4,xx}^i \mathbf{d}_{b4}^i \right) + \left(E_b^i I_z^i - E_b^i I_y^i \right) \cdot \left[\left(\mathbf{p}_{b3}^i \right)_{dg} \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4}^i + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2\left(\mathbf{B}_{b3,xxx}^i \mathbf{d}_{b3}^i\right)_{dg} \cdot \mathbf{B}_{b4,x}^i \mathbf{d}_{b4}^i + \left(\mathbf{B}_{b3,xx}^i \mathbf{d}_{b3}^i\right)_{dg} \mathbf{B}_{b4,xx}^i \mathbf{d}_{b4}^i \Big] = \mathbf{q}_{y1}^i + \mathbf{q}_{y2}^i - \\
& - \left[\left(\mathbf{B}_{b2,x}^i \mathbf{d}_{b2}^i\right)_{dg} - z_C^i \left(\mathbf{B}_{b4,x}^i \mathbf{d}_{b4}^i\right)_{dg} \right] \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i\right) - \mathbf{X}_{by}^i \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i\right) \quad (4.3.7\beta)
\end{aligned}$$

$$E_b^i l_y^i \mathbf{p}_{b3}^i - \left(\mathbf{N}_b^i\right)_{dg} \mathbf{B}_{b3,xx}^i \mathbf{d}_{b3}^i = \mathbf{q}_{z1}^i + \mathbf{q}_{z2}^i - \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3}^i\right)_{dg} \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i\right) + \mathbf{X}_{bx}^i \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i\right) \quad (4.3.7\gamma)$$

$$\begin{aligned}
& E_b^i C_s^i \mathbf{p}_{b4}^i - G_b^i l_t^i \mathbf{B}_{b4,xx}^i \mathbf{d}_{b4}^i - \left(\mathbf{N}_b^i\right)_{dg} \left[\frac{l_p^i}{A_b^i} \mathbf{B}_{b4,xx}^i \mathbf{d}_{b4}^i - z_C^i \left(\mathbf{B}_{b2,xx}^i \mathbf{d}_{b2}^i + \left(\mathbf{B}_{b3,xx}^i \mathbf{d}_{b3}^i\right)_{dg} \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4}^i \right) \right] + \left(E_b^i l_z^i - E_b^i l_y^i \right) \cdot \left[\left(\mathbf{B}_{b2,xx}^i \mathbf{d}_{b2}^i\right)_{dg} \mathbf{B}_{b3,xx}^i \mathbf{d}_{b3}^i + \left(\mathbf{B}_{b3,xx}^i \mathbf{d}_{b3}^i\right)_{dg} \cdot \right. \\
& \left. \left(\mathbf{B}_{b3,xx}^i \mathbf{d}_{b3}^i\right)_{dg} \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4}^i \right] + E_b^i l_y^i \theta_z^i \cdot \left[2 \left(\mathbf{B}_{b4,xx}^i \mathbf{d}_{b4}^i\right)_{dg} \mathbf{B}_{b3,xx}^i \mathbf{d}_{b3}^i + \right. \\
& \left. + 2 \left(\mathbf{B}_{b4,x}^i \mathbf{d}_{b4}^i\right)_{dg} \cdot \mathbf{B}_{b3,xxx}^i \mathbf{d}_{b3}^i \right] = \mathbf{e}_{s\tilde{y}1}^i \mathbf{q}_{z1}^i + \mathbf{e}_{s\tilde{y}2}^i \mathbf{q}_{z2}^i - \mathbf{e}_{s\tilde{z}1}^i \mathbf{q}_{y1}^i - \mathbf{e}_{s\tilde{z}2}^i \mathbf{q}_{y2}^i + \\
& + \mathbf{X}_{bw}^i \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i\right) - \left[\frac{l_p^i}{A_b^i} \left(\mathbf{B}_{b4,x}^i \mathbf{d}_{b4}^i\right)_{dg} - z_C^i \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3}^i\right)_{dg} \left(\mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4}^i\right)_{dg} - \right. \\
& \left. - z_C^i \left(\mathbf{B}_{b2,x}^i \mathbf{d}_{b2}^i\right)_{dg} \right] \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i\right) \quad (4.3.7\delta)
\end{aligned}$$

όπου $\left(\mathbf{N}_b^i\right)_{dg}$ είναι διαγώνιο μητρώο διαστάσεων $L \times L$ το οποίο περιλαμβάνει τις τιμές των αξονικών δυνάμεων για την i δοκό. Ο συμβολισμός $()_{dg}$ υποδηλώνει ένα διαγώνιο μητρώο διαστάσεων $L \times L$ με τα στοιχεία του διανύσματος που περιλαμβάνεται στην παρένθεση. Τα μητρώα \mathbf{X}_{bx}^i , \mathbf{X}_{by}^i , \mathbf{X}_{bw}^i προκύπτουν ύστερα από προσέγγιση των παραγώγων των ροπών m_{byj}^i , m_{bzj}^i , m_{bwj}^i χρησιμοποιώντας κατάλληλα σχήματα κεντρικών, οπίσθιων ή εμπρόσθιων διαφορών (Παράρτημα Γ). Οι διαστάσεις των εν λόγω μητρώων είναι επίσης $L \times L$. Επιπροσθέτως $\mathbf{e}_{s\tilde{y}1}^i$, $\mathbf{e}_{s\tilde{y}2}^i$, $\mathbf{e}_{s\tilde{z}1}^i$, $\mathbf{e}_{s\tilde{z}2}^i$ είναι διαγώνια μητρώα διαστάσεων $L \times L$ που περιέχουν τις τιμές των εκκεντροτήτων $e_{s\tilde{y}j}^i$, $e_{s\tilde{z}j}^i$ των συνιστωσών q_{zj}^i , q_{yj}^i ως προς το κέντρο στρέψης της i δοκού, αντίστοιχα.

4.4 Συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων

Για την επίλυση του προβλήματος της ενισχυμένης πλάκας, υπολείπονται οι εξισώσεις που προκύπτουν από τις συνθήκες συνέχειας των μετατοπίσεων στις διεπιφάνειες μεταξύ πλάκας-δοκού. Οι εξισώσεις αυτές, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (3.4.39)-(3.4.41), μπορούν να διακριτοποιηθούν χρησιμοποιώντας τα σχήματα διακριτοποίησης της πλάκας (Σχ. 4.2.1) και δοκού που έχουν αναλυθεί στις προηγούμενες ενότητες. Χρησιμοποιώντας τις διακριτοποιημένες σχέσεις των εξισώσεων (4.2.16) και (4.3.6) και με εφαρμογή των σχέσεων (3.4.39)-(3.4.41) στα L σημεία ταξίθεσίας της κάθε διεπιφάνειας, οι διακριτοποιημένες συνθήκες συνέχειας για το πρόβλημα μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων ενισχυμένης πλάκας με μερική διατμητική σύνδεση λαμβάνονται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{p1} \mathbf{d}_{p1} - \mathbf{B}_{b1}^i \mathbf{d}_{b1}^i &= \frac{h_p}{2} \mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3} - e_{Cz}^i \mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} + \frac{b_f^i}{4} \left[\mathbf{B}_{b2,x}^i \mathbf{d}_{b2} + \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4} \right] + \left(\varphi_S^{Pi} \right)_{f_1} \mathbf{B}_{b4,x}^i \mathbf{d}_{b4} + \mathbf{K}_{x1}^i \left[\mathbf{1} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i \right) \end{aligned} \quad (4.4.1\alpha)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{p1} \mathbf{d}_{p1} - \mathbf{B}_{b1}^i \mathbf{d}_{b1}^i &= \frac{h_p}{2} \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{p3,x} \mathbf{d}_{p3} - e_{Cz}^i \mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} - \frac{b_f^i}{4} \left[\mathbf{B}_{b2,x}^i \mathbf{d}_{b2} + \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4} \right] + \left(\varphi_S^{Pi} \right)_{f_2} \mathbf{B}_{b4,x}^i \mathbf{d}_{b4} + \mathbf{K}_{x2}^i \left[\mathbf{1} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i \right) \end{aligned} \quad (4.4.1\beta)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{p2} \mathbf{d}_{p2} - \mathbf{B}_{b2}^i \mathbf{d}_{b2}^i &= \frac{h_p}{2} \mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3} - e_{Sz}^i \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4} + \\ &\quad + \mathbf{K}_{y1}^i \left[\mathbf{1} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \right] \cdot \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i \right) \end{aligned} \quad (4.4.2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{p2} \mathbf{d}_{p2} - \mathbf{B}_{b2}^i \mathbf{d}_{b2}^i &= \frac{h_p}{2} \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{p3,y} \mathbf{d}_{p3} - e_{Sz}^i \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4} \\ &\quad + \mathbf{K}_{y2}^i \left[\mathbf{1} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \right] \cdot \left(\mathbf{q}_{x1}^i + \mathbf{q}_{x2}^i \right) \end{aligned} \quad (4.4.2\beta)$$

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{p3} \mathbf{d}_{p3} - \mathbf{B}_{b3}^i \mathbf{d}_{b3}^i = -\frac{b_f^i}{4} \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4}^i \quad (4.4.3\alpha)$$

$$\mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{p3} \mathbf{d}_{p3} - \mathbf{B}_{b3}^i \mathbf{d}_{b3}^i = \frac{b_f^i}{4} \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4}^i \quad (4.4.3\beta)$$

όπου $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ είναι μητρώα μετάθεσης διαστάσεων $L \times M$ που μετατρέπουν τα μητρώα $\mathbf{B}_{\rho i}$ ($i=1,2,3$), $\mathbf{B}_{\rho 3,x}, \mathbf{B}_{\rho 3,y}$ σε αντίστοιχα με διαστάσεις $L \times M$, ούτως ώστε να αναφέρονται στα σημεία ταξιθεσίας των δύο διεπιφανειών $f_{j=1}^i, f_{j=2}^i$, αντίστοιχα, για κάθε σύνδεση. Επιπλέον, $\mathbf{K}_{x1}^i, \mathbf{K}_{x2}^i$ και $\mathbf{K}_{y1}^i, \mathbf{K}_{y2}^i$ είναι τετραγωνικά μητρώα διαστάσεων $L \times L$ που περιλαμβάνουν τις τιμές των ευκαμψιών $1/k_{xj}^i$ και $1/k_{yj}^i$ ($j=1,2$) των τυχαία κατανομημένων διατμητικών συνδέσμων κατά τις διευθύνσεις x^i και y^i , αντίστοιχα.

Στην ειδική περίπτωση που οι δοκοί θεωρούνται άρρηκτα συνδεδεμένες με την πλάκα (πλήρης διατμητική σύνδεση) οι παραπάνω συνθήκες (4.4.1)-(4.4.3) τροποποιούνται ως εξής:

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{\rho 1} \mathbf{d}_{\rho 1} - \mathbf{B}_{b1}^i \mathbf{d}_{b1}^i = \frac{h_p}{2} \mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{\rho 3,x} \mathbf{d}_{\rho 3} - e_{Cz}^i \mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} + \frac{b_f^i}{4} \left[\mathbf{B}_{b2,x}^i \mathbf{d}_{b2} + \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \cdot \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4} \right] + \left(\varphi_S^{Pi} \right)_{f_1} \mathbf{B}_{b4,x}^i \mathbf{d}_{b4} \quad (4.4.4\alpha)$$

$$\mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{\rho 1} \mathbf{d}_{\rho 1} - \mathbf{B}_{b1}^i \mathbf{d}_{b1}^i = \frac{h_p}{2} \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{\rho 3,x} \mathbf{d}_{\rho 3} - e_{Cz}^i \mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} - \frac{b_f^i}{4} \left[\mathbf{B}_{b2,x}^i \mathbf{d}_{b2} + \left(\mathbf{B}_{b3,x}^i \mathbf{d}_{b3} \right)_{dg} \cdot \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4} \right] + \left(\varphi_S^{Pi} \right)_{f_2} \mathbf{B}_{b4,x}^i \mathbf{d}_{b4} \quad (4.4.4\beta)$$

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{\rho 2} \mathbf{d}_{\rho 2} - \mathbf{B}_{b2}^i \mathbf{d}_{b2}^i = \frac{h_p}{2} \mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{\rho 3,y} \mathbf{d}_{\rho 3} - e_{Sz}^i \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4}^i + \quad (4.4.5\alpha)$$

$$\mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{\rho 2} \mathbf{d}_{\rho 2} - \mathbf{B}_{b2}^i \mathbf{d}_{b2}^i = \frac{h_p}{2} \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{\rho 3,y} \mathbf{d}_{\rho 3} - e_{Sz}^i \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b4}^i \quad (4.4.5\beta)$$

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_{\rho 3} \mathbf{d}_{\rho 3} - \mathbf{B}_{b3}^i \mathbf{d}_{b3}^i = -\frac{b_f^i}{4} \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b3}^i \quad (4.4.6\alpha)$$

$$\mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_{\rho 3} \mathbf{d}_{\rho 3} - \mathbf{B}_{b3}^i \mathbf{d}_{b3}^i = \frac{b_f^i}{4} \mathbf{B}_{b4}^i \mathbf{d}_{b3}^i \quad (4.4.6\beta)$$

Σημειώνεται επίσης, ότι περιπτώσεις πλήρους διατμητικής σύνδεσης μπορούν να αναλυθούν και με χρήση των συνθηκών (4.4.1)-(4.4.3) χωρίς καμία δυσκολία, με εισαγωγή κάποιων πολύ μεγάλης τιμής στους δείκτες δυσκαμψίας των διατμητικών συνδέσμων.

Συνολικά οι εξισώσεις (4.2.10), (4.2.17), (4.3.2), (4.3.6) και (4.4.1)-(4.4.3) αποτελούν ένα σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις άγνωστες ποσότητες \mathbf{q}_{x1} ,

$\mathbf{q}_{x2}, \mathbf{q}_{y1}, \mathbf{q}_{y2}, \mathbf{q}_{z1}, \mathbf{q}_{z2}$ (δυνάμεις διεπιφάνειας) και \mathbf{d}_{pi} ($i=1,2,3$), \mathbf{d}_{bj}^i ($i=1\dots I$), ($j=1,2,3,4$) (γενικευμένα διανύσματα αγνώστων για την πλάκα και τις δοκούς). Το σύστημα μπορεί να επιλυθεί με οποιονδήποτε επαναληπτικό επιλύτη. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκε η τροποποιημένη υβριδική μέθοδος Powell [(Broyden, 1965), (Powell, 1970), (Moré et al., 1980)], όπως αυτή υλοποιείται σε υποπρόγραμμα της βιβλιοθήκης IMSL, με εφαρμογή σχήματος πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση του Ιακωβιανού μητρώου του συστήματος.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι δοκοί που τοποθετούνται επί της γραμμής του συνόρου μπορούν να αντιμετωπιστούν όπως οποιαδήποτε άλλη δοκός ενίσχυσης, αφού οι γραμμές διεπιφάνειας στις οποίες ορίζονται οι συνιστώσες των αγνώστων δυνάμεων q_{xj}^i , q_{yj}^i και q_{zj}^i ($j=1,2$) εξακολουθούν να τοποθετούνται στο εσωτερικό. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται κατά τη διάρκεια του αριθμητικού υπολογισμού των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων, ώστε να αποφευχθεί η «σχεδόν ιδιόμορφη» συμπεριφορά τους. Προκειμένου να αποφευχθεί το φαινόμενο αυτό, τα συνοριακά στοιχεία που βρίσκονται πολύ κοντά στον πόλο ολοκλήρωσης ή μεταξύ τους (απόσταση μικρότερη από το μήκος τους) χωρίζονται σε υποστοιχεία, σε καθένα από τα οποία εφαρμόζεται ολοκλήρωση Gauss (Κατσικαδέλης, 1999).

Κεφάλαιο 5

Αριθμητικές εφαρμογές

5.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με την αναλυτική και αριθμητική διαδικασία που παρουσιάστηκε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή σε γλώσσα FORTRAN 90/95 που πραγματοποιεί ανάλυση μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων ενισχυμένων πλακών με μερική διατμητική σύνδεση.

Με τη βοήθεια του προγράμματος που αναπτύχθηκε, μελετήθηκαν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της παρουσιαζόμενης μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την παρούσα μεθοδολογία, τόσο με διαθέσιμα αποτελέσματα στη διεθνή βιβλιογραφία, όσο και με αντίστοιχα προσομοιώματα που καταρτίστηκαν με χρήση εμπορικών λογισμικών που βασίζονται στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM). Η αξιοπιστία της μεθόδου επιβεβαιώθηκε ειδικά μέσα από συγκρίσεις με προσομοιώματα τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων που παρουσιάζουν αυξημένη ακρίβεια αποτελεσμάτων, ωστόσο αυξάνουν σημαντικά την πολυπλοκότητα προσομοίωσης, και το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης. Επιπλέον, στα παραδείγματα που μελετήθηκαν διερευνήθηκε η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας καθώς και της μερικής διατμητικής σύνδεσης στη συμπεριφορά των ενισχυμένων πλακών.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα ελήφθησαν χρησιμοποιώντας $N=180$ άνισα σταθερά συνοριακά στοιχεία με ομαλή πύκνωση στις γωνίες (όπου υπάρχουν), ενώ ο αριθμός των εσωτερικών κελιών δεν ξεπερνά τον $M=(2L)I+J=486$, όπου I ο αριθμός των δοκών. Επίσης, για την ανάλυση κάθε δοκού χρησιμοποιήθηκαν $L=18$ ίσα σταθερά στοιχεία. Οι τιμές της συνάρτησης στρέβλωσης στις γραμμές διεπιφάνειας υπολογίζονται από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.3.9) με εφαρμογή της αμιγούς Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Ομοίως τα ολοκληρώματα των γεωμετρικών σταθερών των δοκών (σχέσεις (3.3.18), (3.3.19)), μετατρέπονται σε επικαμπύλια και υπολογίζονται με την ίδια συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής (Sarountzakis & Dikaros, 2011). Τέλος, σημειώνεται ότι στη συνέχεια του κεφαλαίου, ο όρος γραμμική ανάλυση θα αναφέρεται στα αποτελέσματα που ελήφθησαν με την παρούσα μεθοδολογία ύστερα από αμέλεια όλων των μη γραμμικών όρων των εξισώσεων (3.4.6), (3.4.7), (3.4.22), (3.4.24)-(3.4.27) και (3.4.39)-(3.4.41).

5.2 Εφαρμογές

5.2.1 Παράδειγμα 1

Στο 1^ο παράδειγμα, για λόγους σύγκρισης με άλλες μεθοδολογίες, εξετάζεται μια κυκλική πλάκα ($r=5\text{ m}$, $h_p=0,05\text{ m}$, $E_p=E_b^i=2,1\times 10^8\text{ kN/m}^2$, $\nu_p=\nu_b^i=0,3$) η οποία ενισχύεται από μια δοκό ορθογωνικής διατομής με πλάτος $0,05\text{ m}$ η οποία τοποθετείται κατά τη διάμετρο της πλάκας (Σχ. 5.2.1). Η ενισχυμένη πλάκα υποβάλλεται σε ομοιόμορφα

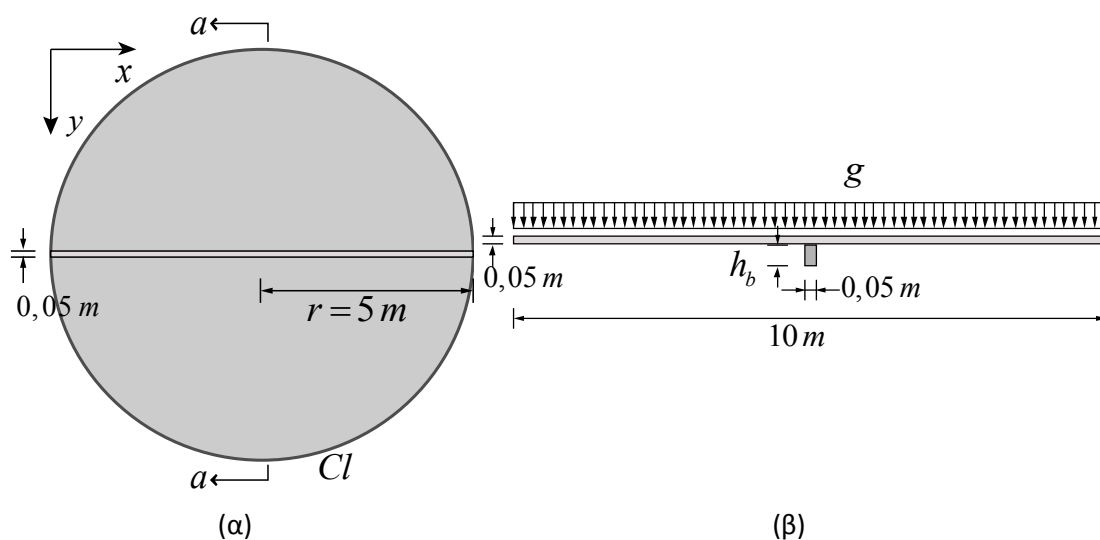
κατανεμημένη φόρτιση $g = 21 \text{ kN/m}^2$. Το σύνορο της πλάκας θεωρείται πακτωμένο ως προς τις κατακόρυφες και μεμβρανικές συνοριακές συνθήκες, ενώ η δοκός ενίσχυσης θεωρείται επίσης πακτωμένη στα άκρα της ως προς την αξονική, τη στρεπτική και τις εγκάρσιες συνοριακές συνθήκες. Η σύνδεση μεταξύ της πλάκας και της δοκού θεωρείται άκαμπτη (Πλήρης Διατμητική Σύνδεση). Στον Πίνακα 5.2.1 παρουσιάζονται η σταθερά στρέψης I_t , η σταθερά στρέβλωσης C_S και οι τιμές της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης της διατομής της δοκού $(\phi_S^P)_{ff}$, ($j=1,2$) στις δύο γραμμές διεπιφάνειας της σύνδεσης για δύο διαφορετικά ύψη δοκών $h_b = 0,05 \text{ m}$, $h_b = 0,1 \text{ m}$. Στα Σχ. 5.2.2 και 5.2.3 παρουσιάζονται οι κατανομές του βέλους κάμψης της πλάκας w_p κατά μήκος της δοκού ενίσχυσης για ύψος $h_b = 0,05 \text{ m}$ και $h_b = 0,10 \text{ m}$, αντίστοιχα, συγκρινόμενες με αποτελέσματα που έχουν προκύψει με εφαρμογή της μεθόδου Δυναμικής Χαλάρωσης (DR) και της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) όπως αυτά παρουσιάζονται στην εργασία των Turvey & Salehi (2008), σε αδιαστατοποιημένη μορφή. Σημειώνεται ότι στο εν λόγω σχήμα, λόγω συμμετρίας του φορέα και της φόρτισης, παρουσιάζεται το μισό διάγραμμα της κατανομής. Από το παραπάνω σχήμα, μπορεί να επιβεβαιωθεί η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου. Στο Σχ. 5.2.4 παρουσιάζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες της μεμβρανικής μετατόπισης της πλάκας u_p , όπως προέκυψαν για τα δύο διαφορετικά ύψη ενίσχυσης $h_b = 0,05 \text{ m}$, $h_b = 0,1 \text{ m}$, αντίστοιχα. Επίπλέον, προκειμένου να διαπιστωθεί η επιρροή των καμπτικών στροφών στη συνθήκη συμβιβαστού κατά τη διεύθυνση του άξονα x^i (σχέσεις (3.4.39)), στο Σχ. 5.2.5 παρουσιάζεται η αξονική μετατόπιση u_b της δοκού για ύψος $h_b = 0,1 \text{ m}$ λαμβάνοντας υπόψη ή αμελώντας τους όρους $\partial w_p / \partial x$ και dw_b^i / dx^i στις σχέσεις (3.4.39). Από το εν λόγω σχήμα, μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι αμελώντας τη συνεισφορά των καμπτικών στροφών οδηγεί σε σημαντικά εσφαλμένη εκτίμηση της συμπεριφοράς. Ακόμη, στο Σχ. 5.2.6 παρουσιάζονται οι συνολικές δυνάμεις διεπιφάνειας q_x για τα εξεταζόμενα ύψη δοκού. Τέλος στον Πίνακα 5.2.2 αναγράφονται οι μέγιστες τιμές των κινηματικών μεγεθών u_p , u_b , w_p , w_b . Από τα αποτελέσματα που εξήχθησαν, μπορεί να διαπιστωθεί η επιρροή του ύψους της δοκού ενίσχυσης στη συμπεριφορά της πλάκας, ενώ είναι φανερό και η επίδραση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί σε σημαντική μείωση της τιμής των κινηματικών μεγεθών με την αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου, ενώ η επίδραση της στην κατανομή των δυνάμεων q_x είναι επίσης αξιοσημείωτη.

Πίνακας 5.2.1. Σταθερές στρέψης και στρέβλωσης και τιμές της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης στις διεπιφάνειες για ύψη δοκού $h_b = 0,05 \text{ m}$, $h_b = 0,1 \text{ m}$.

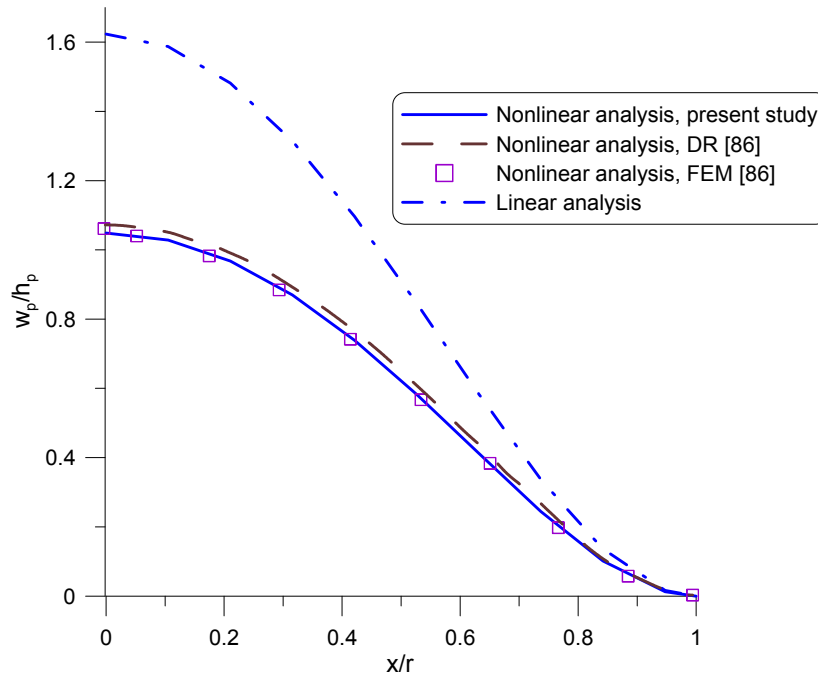
$h_b \text{ (m)}$	$I_t \text{ (m}^4\text{)}$	$C_S \text{ (m}^6\text{)}$	$(\phi_S^P)_{f1} \text{ (m}^2\text{)}$	$(\phi_S^P)_{f2} \text{ (m}^2\text{)}$
0.05	8.78611E-07	2.17619E-12	-8.68309E-05	8.68309E-05
0.10	2.85858E-06	3.33630E-10	1.89579E-04	-1.89579E-04

Πίνακας 5.2.2. Μέγιστες τιμές των κινηματικών μεγεθών u_p , u_b , w_p , w_b (m) της ενισχυμένης πλάκας του παραδείγματος 1 για ύψη δοκού $h_b = 0,05$ m, $h_b = 0,1$ m.

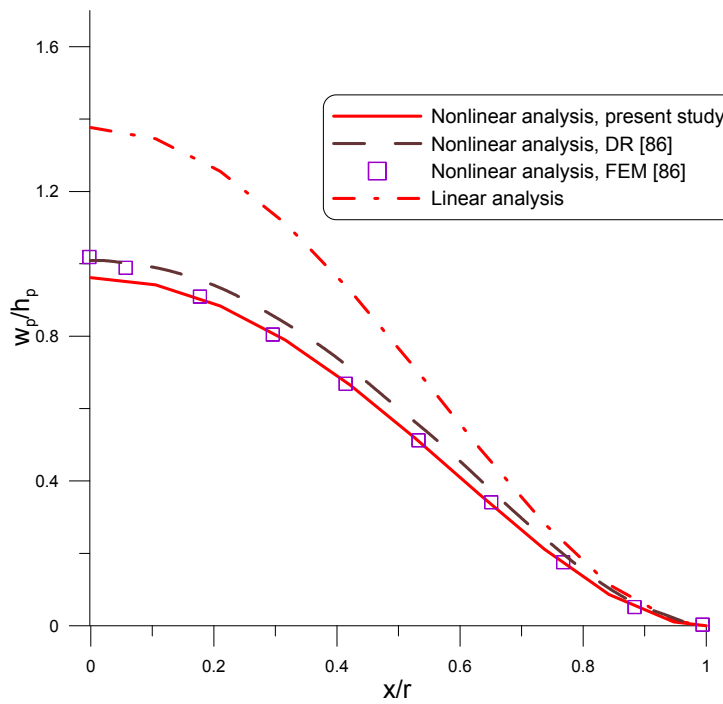
	Γραμμική ανάλυση	Μη γραμμική ανάλυση	
		Πλήρες σύστημα εξισώσεων	Αμελώντας τους όρους $\partial w_p / \partial x$, dw_b^i / dx^i Στις σχέσεις (3.4.39)
$h_b = 0,05$ m			
u_{pmax}	7.52962E-06	7.51862E-05	8.29307E-05
u_{bmax}	1.22915E-03	8.38493E-04	8.30915E-05
w_{pmax}	8.11555E-02	5.24250E-02	5.35527E-02
w_{bmax}	8.11555E-02	5.24248E-02	5.36746E-02
$h_b = 0,10$ m			
u_{pmax}	1.80695E-05	5.44051E-05	7.96850E-05
u_{bmax}	1.55786E-03	1.11949E-03	7.99599E-05
w_{pmax}	6.88240E-02	4.81010E-02	5.29107E-02
w_{bmax}	6.88243E-02	4.81010E-02	5.30321E-02



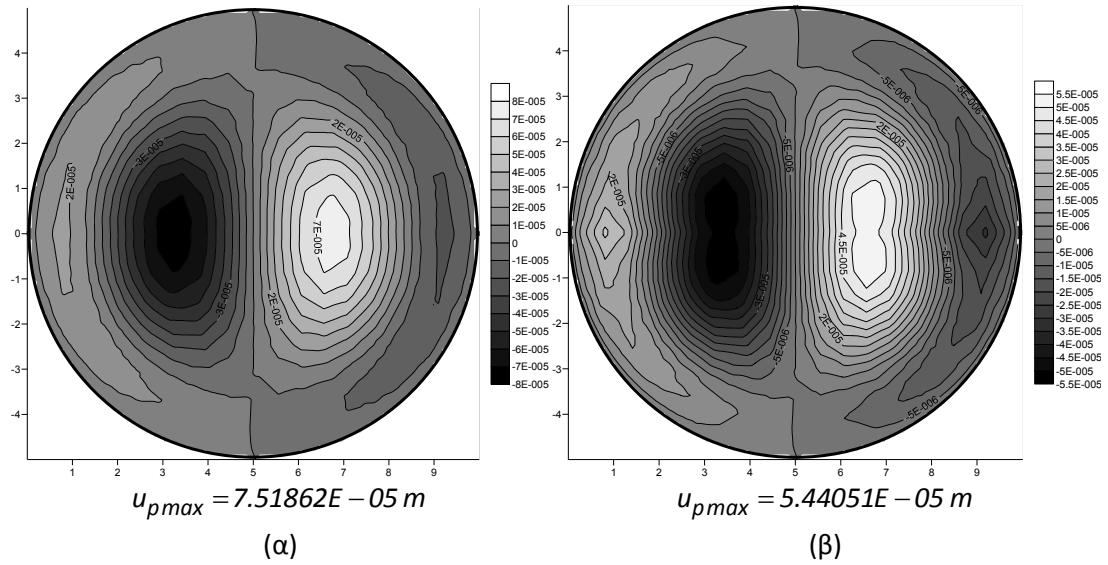
Σχήμα 5.2.1. Άνοψη (α) και τομή α-α (β) της ενισχυμένης πλάκας του 1^{ου} παραδείγματος.



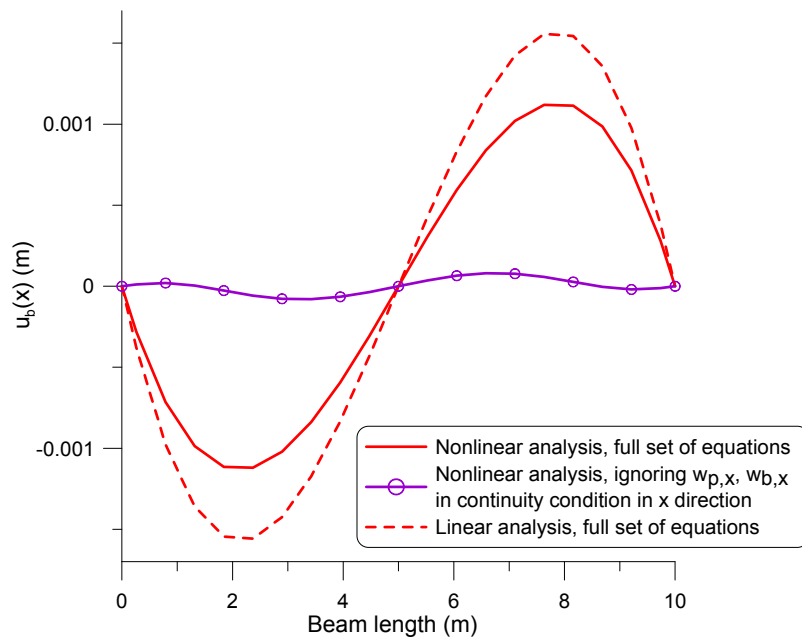
Σχήμα 5.2.2 Βύθιση w_p κατά μήκος της δοκού ενίσχυσης του 1^{ου} παραδείγματος για ύψος δοκού $h_b = 0,05$ m .



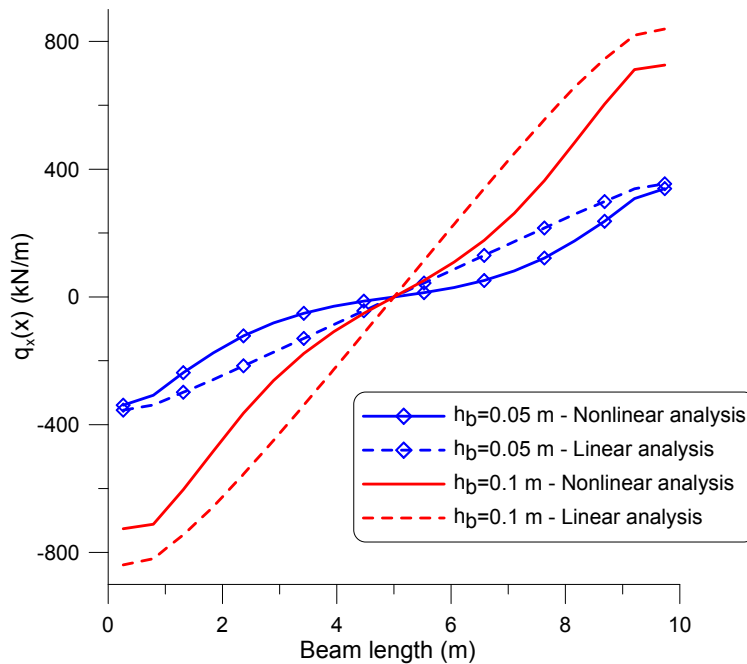
Σχήμα 5.2.3. Βύθιση w_p κατά μήκος της δοκού ενίσχυσης του 1^{ου} παραδείγματος για ύψος δοκού $h_b = 0,10$ m .



Σχήμα 5.2.4. Ισοσταθμικές καμπύλες της μεμβρανικής μετατόπισης u_{ρ} της ενισχυμένης πλάκας του 1^{ου} παραδείγματος για ύψη δοκού $h_b = 0,05 \text{ m}$ (α), $h_b = 0,10 \text{ m}$ (β).



Σχήμα 5.2.5. Αξονική μετατόπιση u_b της δοκού ενίσχυσης του 1^{ου} παραδείγματος για ύψος $h_b = 0,10 \text{ m}$.

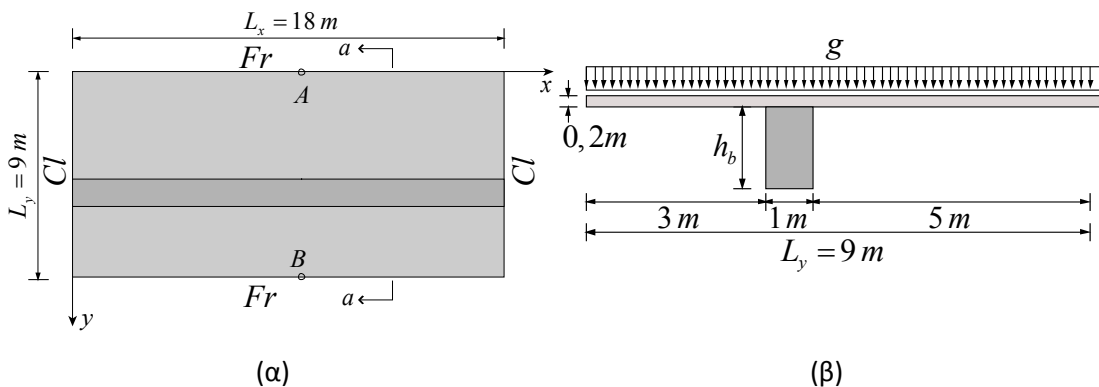


Σχήμα 5.2.6. Συνολικές δυνάμεις διεπιφάνειας q_x της ενισχυμένης πλάκας του 1^{ου} παραδείγματος για ύψη $h_b = 0,05 \text{ m}$ και $h_b = 0,10 \text{ m}$.

5.2.2 Παράδειγμα 2

Στο παράδειγμα αυτό εξετάζεται ορθογωνική πλάκα ($L_x \times L_y = 18 \times 9 \text{ m}^2$, $h_p = 0,2 \text{ m}$, $E_p = E_b^i = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu_p = \nu_b^i = 0,2$) η οποία ενισχύεται από μια ορθογωνική δοκό πλάτους 1 m , η οποία τοποθετείται έκκεντρα ως προς τον άξονα που συνδέει τα μέσα των δύο μικρών πλευρών (Σχ. 5.2.7). Η κατασκευή υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση $g = 160 \text{ kN/m}^2$. Το σύνορο της πλάκας θεωρείται πακτωμένο κατά μήκος των μικρών πλευρών, ενώ οι υπόλοιπες πλευρές είναι εντελώς ελεύθερες ως προς τις εγκάρσιες και μεμβρανικές συνοριακές συνθήκες. Η δοκός ενίσχυσης είναι επίσης πακτωμένη στα άκρα της ως προς την αξονική, τη στρεπτική και τις εγκάρσιες συνοριακές συνθήκες. Θεωρείται πλήρης διατμητική σύνδεση μεταξύ πλάκας-δοκού. Στον Πίνακα 5.2.3 παρουσιάζονται η σταθερά στρέψης I_t , η σταθερά στρέβλωσης C_S και οι τιμές της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης της διατομής της δοκού $(\varphi_S^P)_{ff}$, ($j = 1, 2$) στις δύο γραμμές διεπιφάνειας της σύνδεσης για τέσσερα ύψη δοκών. Στο Σχ. 5.2.8 παρουσιάζονται οι κατανομές της συνάρτησης στρέβλωσης στο σύνορο της διατομής για τα διάφορα ύψη δοκών. Στον Πίνακα 5.2.4 αναγράφονται τα βέλη κάμψης w_p της ενισχυμένης πλάκας στο κέντρο και στα μέσα των ελεύθερων πλευρών, A και B (Σχ. 5.2.7α) για τα διάφορα ύψη δοκών, συγκρινόμενα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από εφαρμογή της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων

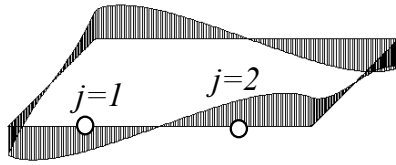
(FEM) με χρήση του εμπορικού λογισμικού FEMAP v.10 (NX Nastran 6) (2008). Για τη σύγκριση χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις προσομοίωσης: α) προσομοίωση της πλάκας με στοιχεία κελύφους και της δοκού ενίσχυσης με στοιχεία δοκού (shell-beam model), με εκκεντρότητα (rigid offset) ίση το μισό του ύψους της δοκού συν το μισό του ύψους της πλάκας. β) προσομοίωση ολόκληρης της πλακοδοκού με στοιχεία κελύφους (shell model) και γ) προσομοίωση ολόκληρης της πλακοδοκού με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία (solid model). Για τα ως άνω προσομοιώματα χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία δοκού Euler-Bernoulli, 4-κομβικά τετραπλευρικά στοιχεία κελύφους και 8-κομβικά εξαεδρικά τρισδιάστατα στοιχεία. Τονίζεται στο σημείο αυτό ότι το προσομοίωμα α), λόγω της σύζευξης διαφορετικών δομητικών στοιχείων με στοιχεία εκκεντρότητας, οι κινηματικές ή στατικές υποθέσεις στη διεπιφάνεια δεν τηρούνται πάντα (Hartmann & Katz, 2002). Επίσης το προσομοίωμα β) μπορεί να δώσει ακριβή αποτελέσματα μόνο σε περιπτώσεις λεπτότοιχων δοκών ενίσχυσης, ενώ η προσομοίωση γ) απαιτεί μεγάλο αριθμό στοιχείων προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα παρασιτικών δυσκαμψιών (locking effects) (Rombach, 2000). Στα Σχ. 5.2.9, 5.2.10 παρουσιάζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες του βέλους κάμψης w_p της ενισχυμένης πλάκας για ύψη δοκού $h_b = 0,5 m$ και $h_b = 2 m$, αντίστοιχα, συγκρινόμενες με τις λύσεις που προέκυψαν με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων. Στο Σχ. 5.2.11 παρουσιάζεται η καμπύλη φορτίου-μετατόπισης για το βέλος w_p στο μέσο της ελεύθερης πλευράς A (Σχ. 5.2.7α) για ύψος δοκού $h_b = 0,5 m$. Από τα παραπάνω σχήματα και τον πίνακα, διαπιστώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου, ιδίως συγκρίνοντας με το προσομοίωμα γ) το οποίο είναι και το πιο ακριβές. Επιπροσθέτως στα Σχ. 5.2.12, 5.2.13 παρουσιάζονται η μετατόπιση w_b της δοκού και η συνολική δύναμη διεπιφάνειας q_x , αντίστοιχα, για τα διάφορα ύψη δοκού. Από τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρείται η σημαντική επίδραση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, η οποία αυξάνεται με τη μείωση του ύψους της δοκού ενίσχυσης.



Σχήμα 5.2.7. Άνοψη (α) και τομή α-α (β) της ενισχυμένης πλάκας του 2^{ου} παραδείγματος.

Πίνακας 5.2.3. Σταθερές στρέψης και στρέβλωσης και τιμές της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης στις διεπιφάνειες για διάφορα ύψη δοκού.

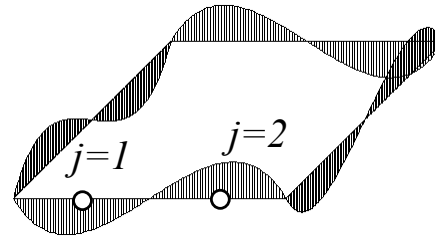
h_b (m)	I_t (m ⁴)	C_S (m ⁶)	$(\varphi_S^P)_{f1}$ (m ²)	$(\varphi_S^P)_{f2}$ (m ²)
0.50	2.85863 E-02	3.17495 E-04	-4.97916 E-02	4.97916 E-02
1.00	1.40579 E-01	1.34406 E-04	-3.47237 E-02	3.47237 E-02
1.50	2.93644 E-01	3.78965 E-03	1.59126 E-02	-1.59126 E-02
2.00	4.57382 E-01	2.03227 E-02	7.58392 E-02	-7.58392 E-02



(α)

 $h_b=0.50m:$

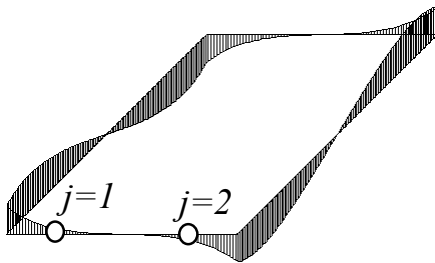
$$(\varphi_S^P)_{f1} = -(\varphi_S^P)_{f2} = -4.97916 E - 02 m^2$$



(β)

 $h_b=1.00m:$

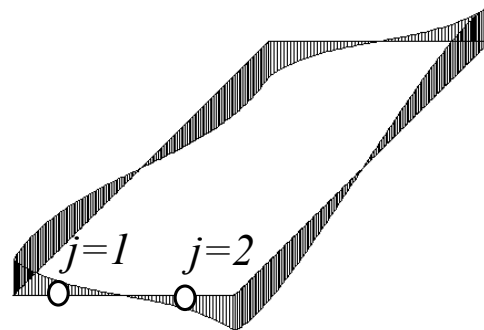
$$(\varphi_S^P)_{f1} = -(\varphi_S^P)_{f2} = -3.47237 E - 02 m^2$$



(γ)

 $h_b=1.50m:$

$$(\varphi_S^P)_{f1} = -(\varphi_S^P)_{f2} = -1.59126 E - 02 m^2$$



(δ)

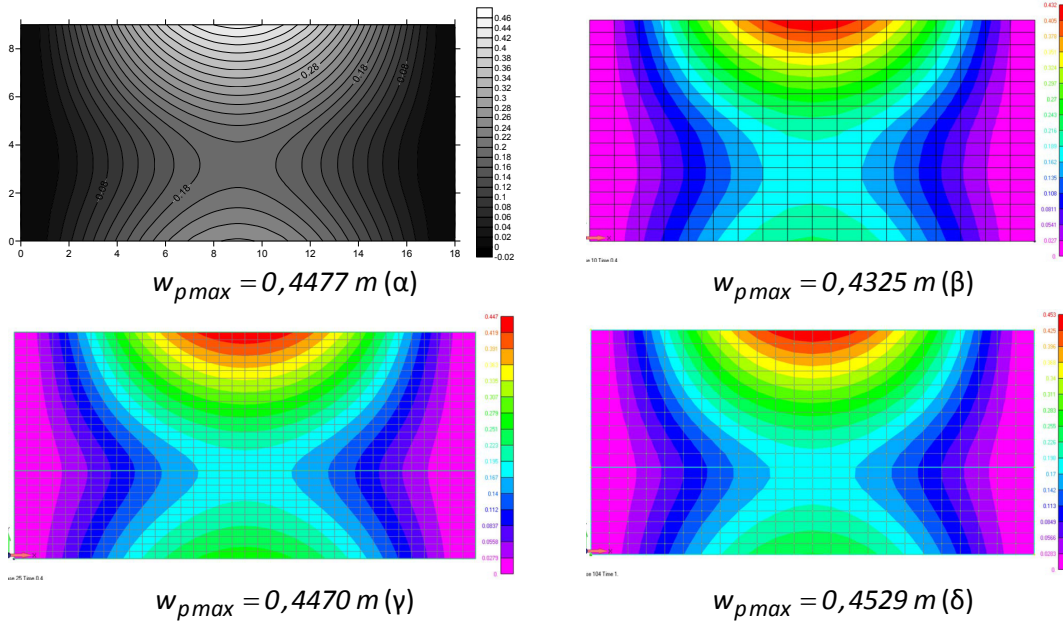
 $h_b=2.00m:$

$$(\varphi_S^P)_{f1} = -(\varphi_S^P)_{f2} = -7.58392 E - 02 m^2$$

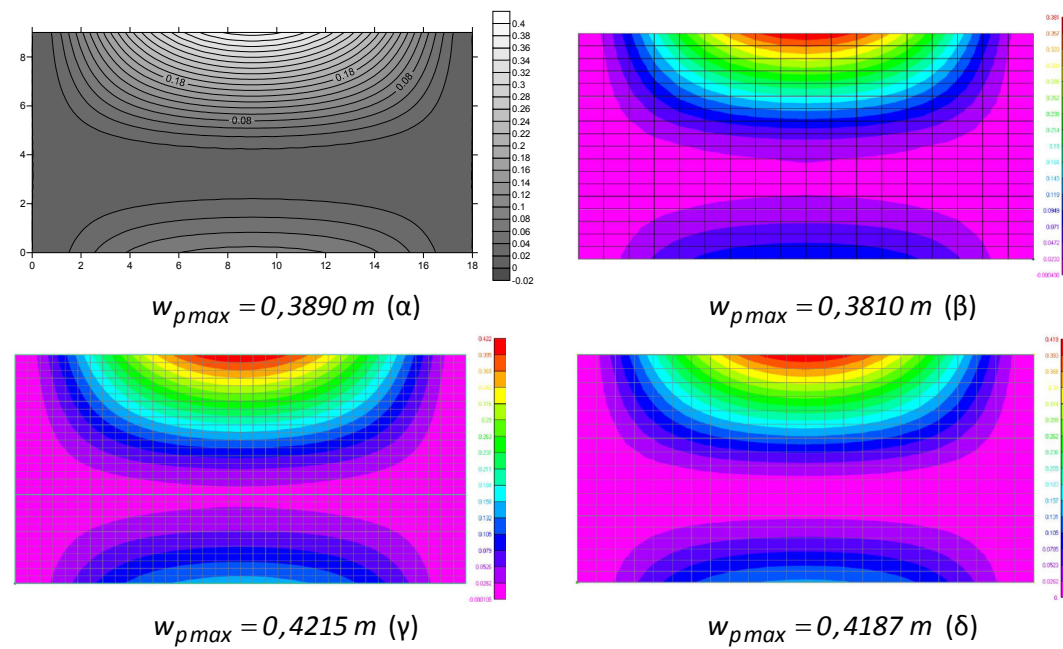
Σχήμα 5.2.8. Κατανομή πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης κατά μήκος του συνόρου των δοκών ενίσχυσης του 2^{ου} παραδείγματος.

Πίνακας 5.2.4. Μετατόπιση w_p (m) της ενισχυμένης πλάκας του 2^{ου} παραδείγματος για διάφορα ύψη δοκών h_b .

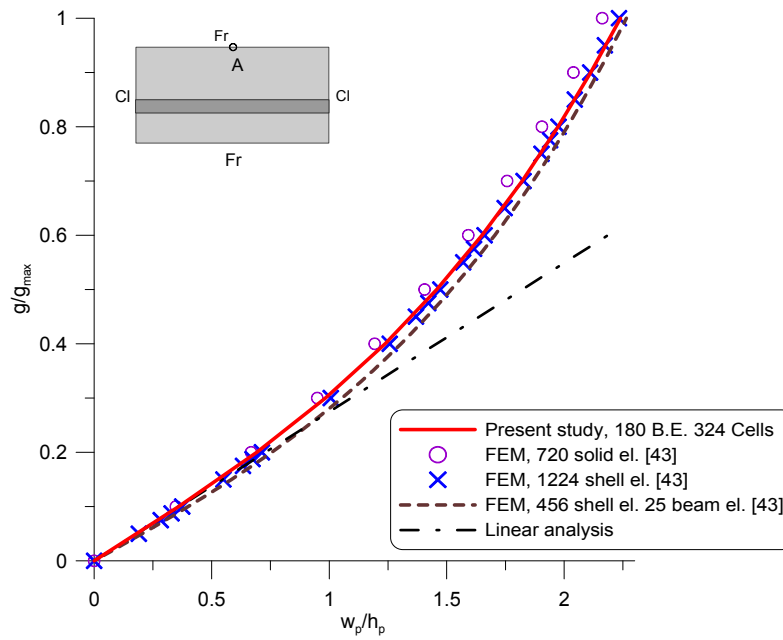
h_b (m)	Γραμμική ανάλυση	Μη γραμμική ανάλυση			
		ΑΕΜ Προτεινόμενη μέθοδος	FEM Solid model (FEMAP v.10)	FEM Shell-shell model (FEMAP v.10)	FEM Shell-beam model (FEMAP v.10)
Κέντρο της πλάκας					
0.50	0.2674	0.2091	0.1980	0.2100	0.2110
1.00	0.0796	0.0707	0.0778	0.0885	0.0581
1.50	0.0450	0.0396	0.0498	0.0622	0.0286
2.00	0.0336	0.0292	0.0352	0.0479	0.0189
Μέσο της ελεύθερης πλευράς A της πλάκας					
0.50	0.7231	0.4473	0.4325	0.4470	0.4529
1.00	0.5401	0.4085	0.3990	0.4310	0.4333
1.50	0.5018	0.3946	0.3875	0.4251	0.4228
2.00	0.4878	0.3890	0.3810	0.4215	0.4187
Μέσο της ελεύθερης πλευράς B της πλάκας					
0.50	0.2670	0.2635	0.2210	0.2680	0.2570
1.00	0.1120	0.1231	0.1230	0.1790	0.1550
1.50	0.0891	0.0952	0.1030	0.1570	0.1400
2.00	0.0833	0.0877	0.0918	0.1450	0.1360



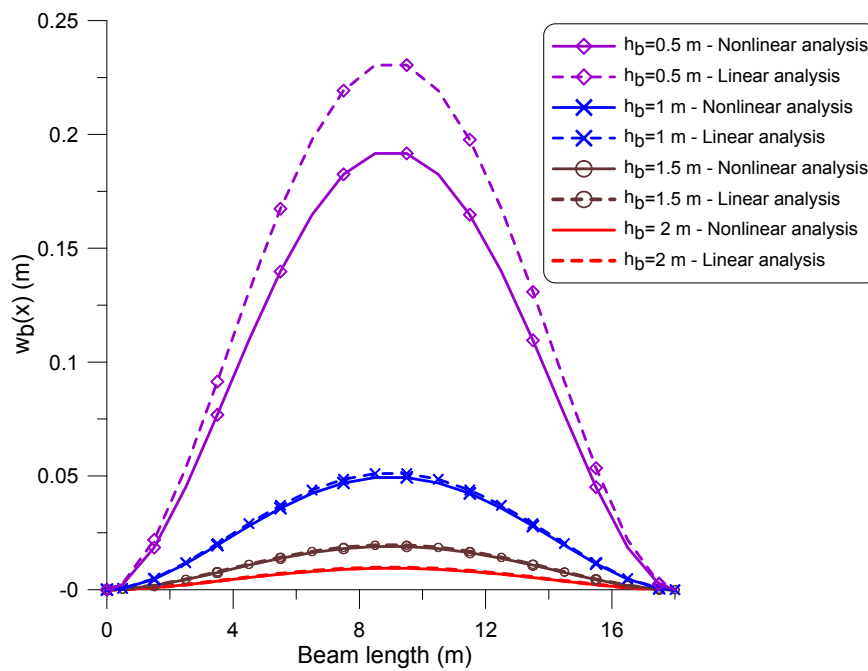
Σχήμα 5.2.9. Ισοσταθμικές καμπύλες του βέλους w_p της ενισχυμένης πλάκας του 2^{ου} παραδείγματος για $h_b = 0,5 \text{ m}$ σύμφωνα με την AEM (α) και τη FEM με solid model (β), shell model (γ) ή shell-beam model (δ).



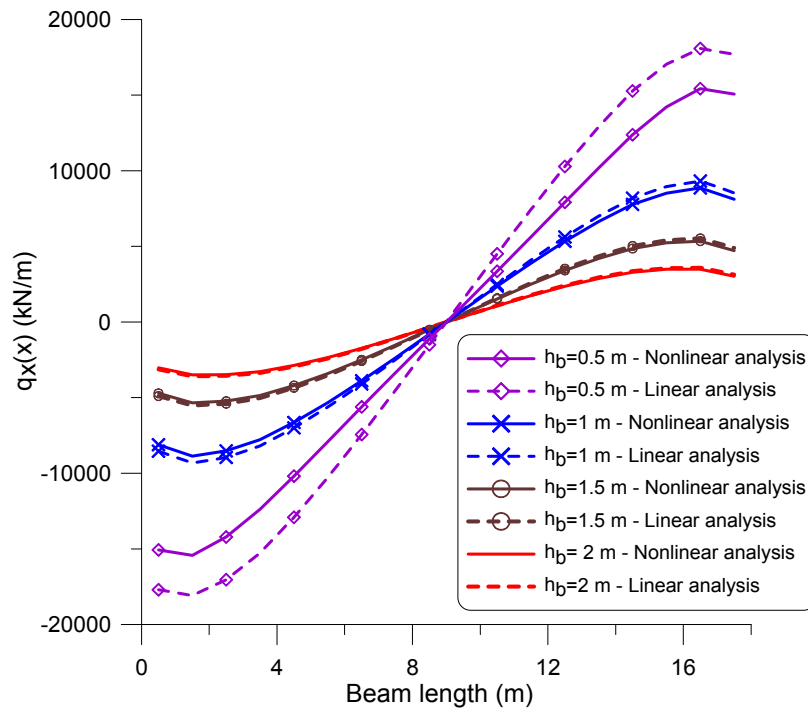
Σχήμα 5.2.10. Ισοσταθμικές καμπύλες του βέλους w_p της ενισχυμένης πλάκας του 2^{ου} παραδείγματος για $h_b = 2 \text{ m}$ σύμφωνα με την AEM (α) και τη FEM με solid model (β), shell model (γ) ή shell-beam model (δ).



Σχήμα 5.2.11. Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης για τη w_p στο σημείο A της ενισχυμένης πλάκας του 2^{ου} παραδείγματος για $h_b = 0,5\text{ m}$ ($g_{max} = 160\text{ kN/m}^2$).



Σχήμα 5.2.12. Μετατόπιση w_b της ενισχυμένης πλάκας του 2^{ου} παραδείγματος για διάφορα ύψη h_b .



Σχήμα 5.2.13. Συνολικές δυνάμεις διεπιφάνειας q_x της ενισχυμένης πλάκας του 2^{ου} παραδείγματος για διάφορα ύψη h_b .

5.2.3 Παράδειγμα 3

Στο παρόν παράδειγμα, εξετάζεται η ορθογωνική ενισχυμένη πλάκα του προηγούμενου παραδείγματος ($I_{px} \times I_{py} = 18 \times 9 \text{ m}^2$, $h_p = 0,2 \text{ m}$, $E_p = E_b^i = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu_p = \nu_b^i = 0,2$). Οι γεωμετρικές σταθερές και οι τιμές της συνάρτησης στρέβλωσης στις διεπιφάνειες για διάφορα ύψη της δοκού, έχουν παρουσιαστεί στον Πίνακα 5.2.3. και στο Σχ. 5.2.8, αντίστοιχα. Στην παρούσα περίπτωση η δοκός ενίσχυσης τοποθετείται κεντρικά στην πλάκα (Σχ. 5.2.14). Η ενισχυμένη πλάκα υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση $g = 250 \text{ kN/m}^2$. Η σύνδεση μεταξύ πλάκας και δοκού επιτυγχάνεται με χρήση διατμητικών συνδέσμων οι οποίοι κατανομούνται γραμμικά σε κάθε διεπιφάνεια. Η υιοθετούμενη σχέση για τη δυσκαμψία των διατμητικών συνδέσμων είναι η παρακάτω

$$k_{xj}^i = k_{yj}^i = K \left(750 - 200h_b^i \right) \left| x^i - \frac{l_{bx}^i}{2} \right| \text{ kN/m}^2, \quad (j=1,2) \quad (5.2.1)$$

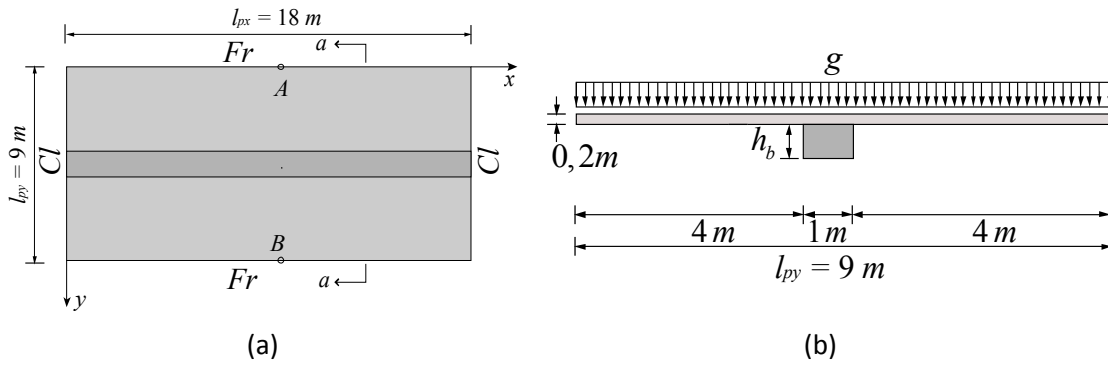
όπου K είναι συντελεστής μεγέθυνσης. Στον Πίνακα 5.2.5 παρουσιάζονται οι τιμές του βέλους κάμψης w_p της ενισχυμένης πλάκας στο κέντρο και στο μέσο της ελεύθερης πλευράς A (Σχ.5.2.14α) για διάφορες τιμές του συντελεστή K και διάφορα ύψη δοκού,

συγκρινόμενες με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από εφαρμογή της FEM με χρήση του εμπορικού λογισμικού ABAQUS v.6.9 (2009). Για τις ανάγκες του παρόντος παραδείγματος εφαρμόστηκε προσομοίωση της πλακοδοκού με χρήση 8-κομβικών εξαεδρικών πεπερασμένων στοιχείων (Χρησιμοποιήθηκαν τουλάχιστον 41400 πεπερασμένα στοιχεία). Η προσομοίωση της μερικής διατμητικής σύνδεσης χρειάζεται ειδική διαχείριση και επιτυγχάνεται με χρήση στοιχείων επαφής (contact elements) ή συνδεδετικών στοιχείων (cohesive elements) (ABAQUS v.6.9, 2009). Το γεγονός αυτό αυξάνει την πολυπλοκότητα του προσομοιώματος. Από τα παρουσιαζόμενα αποτελέσματα, μπορεί να διαπιστωθεί ότι παρόλο που η αύξηση του ύψους της δοκού μειώνει σημαντικά την επίδραση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, η ύπαρξη μερικής διατμητικής σύνδεσης ενισχύει σημαντικά την επιρροή της. Στο Σχ. 5.2.15 παρουσιάζεται η καμπύλη φορτίου-μετατόπισης του βέλους κάμψης w_p στο μέσον της ελεύθερης πλευράς της πλάκας A (Σχ. 5.2.14α) για ύψος δοκού ενίσχυσης $h_b = 0,5 m$. Στα Σχ. 5.2.16, 5.2.17 παρουσιάζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες των μετατοπίσεων w_p και u_p , αντίστοιχα, της ενισχυμένης πλάκας για ύψος $h_b = 0,5 m$. Από όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου, συγκρίνοντας με το τρισδιάστατο προσομοίωμα FEM, μπορεί να διαπιστωθεί. Στο Σχ. 5.2.18 παρουσιάζεται η συνολική δύναμη διεπιφάνειας q_x , για ύψος δοκού $h_b = 0.5 m$. Στο Σχ. 5.2.19 παρουσιάζεται η ολίσθηση μεταξύ πλάκας-δοκού $|s_x|$ στην κατεύθυνση του άξονα x κατά μήκος του άξονα της δοκού με ύψος $h_b = 0.5 m$ for, για την περίπτωση της μερικής διατμητικής σύνδεση με διάφορες τιμές του συντελεστή K .

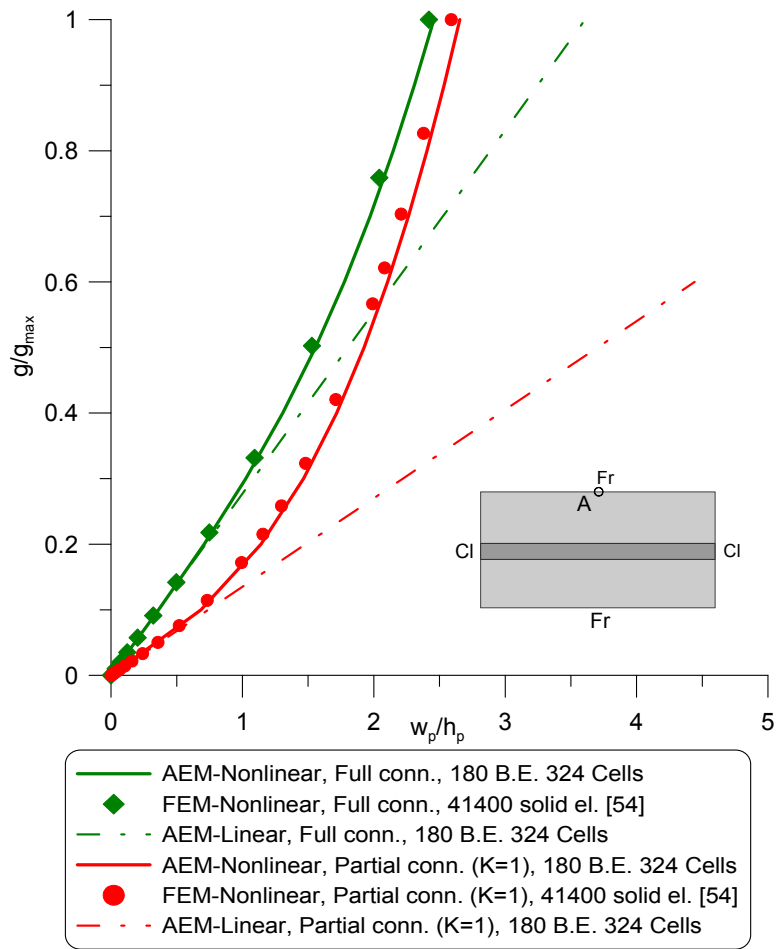
Τέλος, προκειμένου να διαπιστωθεί η επιρροή της παραμορφωσιμότητας των συνδέσμων κατά τη διεύθυνση του άξονα y^i , στο Σχ. 5.2.20 παρουσιάζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες της μεμβρανικής μετατόπισης v_p για τις περιπτώσεις της πλήρους και μερικής σύνδεσης, λαμβάνοντας υπόψη ή αμελώντας τη δυσκαμψία των συνδέσμων κατά τη διεύθυνση του άξονα y^i , συγκρινόμενες με την προαναφερθείσα επίλυση με τη FEM. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, αμελώντας τους όρους των $k_{y^i}^i$, γεγονός που είναι συνήθης παραδοχή κατά το σχεδιασμό και την ανάλυση συμμίκτων πλακοδοκών, τροποποιεί τη συμπεριφορά της ενισχυμένης πλάκας ακόμα και στην περίπτωση συμμετρικού φορέα και φόρτισης. Η τροποποίηση αυτή η οποία συνίσταται σε πιο εύκαμπτη συμπεριφορά του φορέα, οφείλεται στην μεμβρανική λειτουργία της πλάκας.

Πίνακας 5.2.5 Βέλος κάμψης w_p (m) της ενισχυμένης πλάκας του 3^{ου} παραδείγματος για διάφορα ύψη δοκών ενίσχυσης και διάφορες τιμές του συντελεστή K .

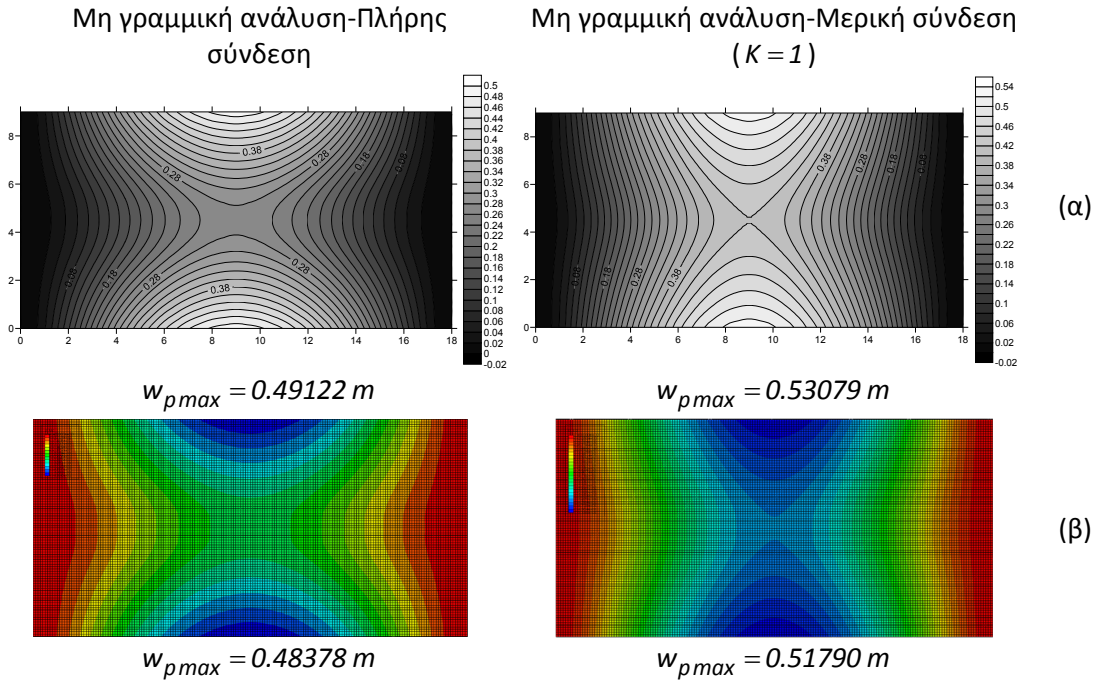
h_b (m)	K	Γραμμική ανάλυση	Μη γραμμική ανάλυση	
			ΑΕΜ Προτεινόμενη μέθοδος	Τρισδιάστατο προσομοίωμα FEM (ABAQUS v.6.9)
Κέντρο της πλάκας				
0.50	Πλήρης συνδ.	0.36684	0.27454	0.27835
	500	0.45661	0.29720	0.33032
	100	0.67409	0.35249	0.38693
	1	1.18997	0.41977	0.42727
1.00	Πλήρης συνδ.	0.07999	0.07998	0.08265
	500	0.10433	0.09731	0.11949
	100	0.15297	0.13322	0.15837
	1	0.21711	0.17402	0.18556
1.50	Πλήρης συνδ.	0.02984	0.03030	0.03337
	500	0.03952	0.03809	0.04901
	100	0.05415	0.05080	0.06112
	1	0.06689	0.06136	0.06777
Μέσον της ελεύθερης πλευράς της πλάκας A				
0.50	Πλήρης συνδ.	0.72149	0.49122	0.48378
	500	0.80233	0.51821	0.50191
	100	1.00284	0.52586	0.51238
	1	1.48072	0.53079	0.51790
1.00	Πλήρης συνδ.	0.44914	0.39902	0.38727
	500	0.55573	0.45131	0.41542
	100	0.60311	0.46337	0.43058
	1	0.66266	0.47307	0.43953
1.50	Πλήρης συνδ.	0.40036	0.36599	0.35442
	500	0.49766	0.42307	0.37566
	100	0.51368	0.42907	0.38164
	1	0.52627	0.43288	0.38470



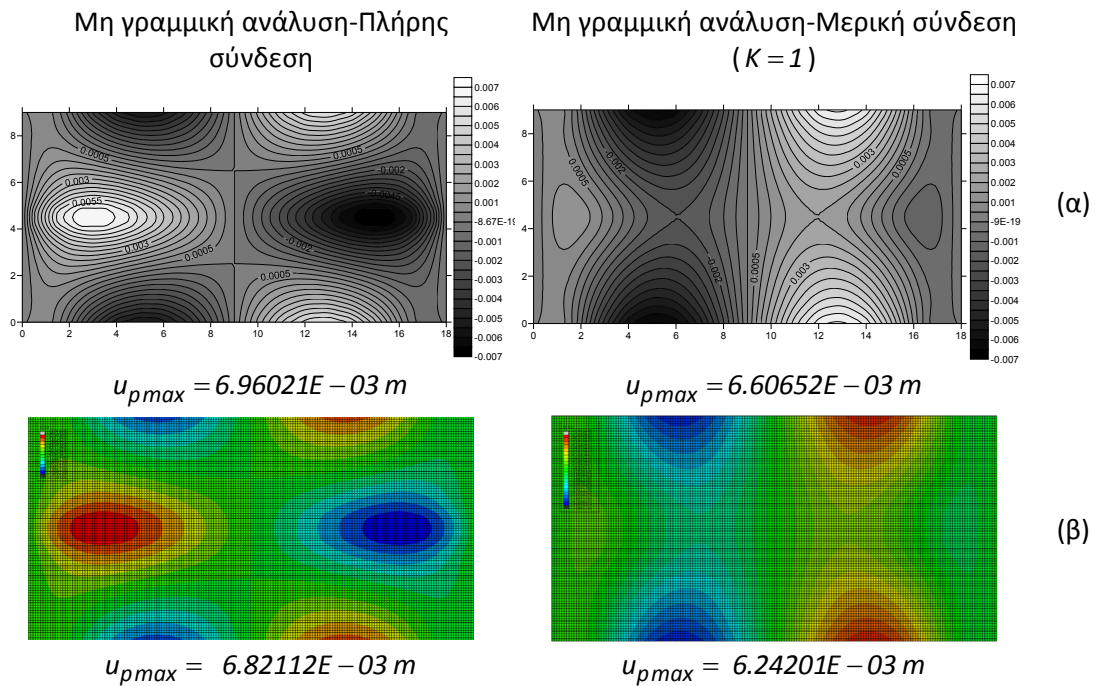
Σχήμα 5.2.14. Άνοψη (α) και τομή α-α (β) της ενισχυμένης πλάκας του 3^{ου} παραδείγματος.



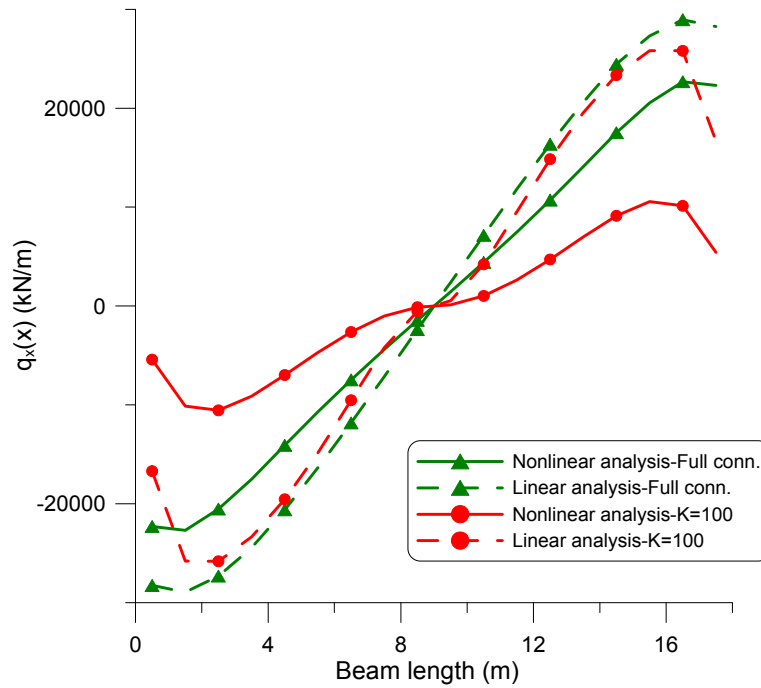
Σχήμα 5.2.15. Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης για τη w_p στο σημείο A της ενισχυμένης πλάκας του 3^{ου} παραδείγματος για $h_b = 0,5 \text{ m}$ ($g_{max} = 250 \text{ kN/m}^2$).



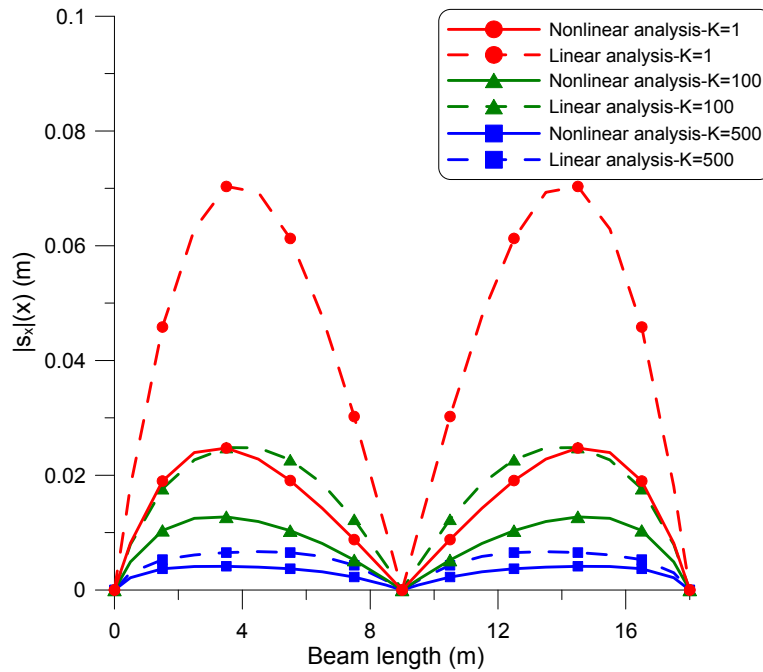
Σχήμα 5.2.16. Ισοσταθμικές καμπύλες της w_{ρ} της ενισχυμένης πλάκας του 3^{ου} παραδείγματος για $h_b = 0.5 \text{ m}$ με την AEM (α) και τη FEM (β).



Σχήμα 5.2.17. Ισοσταθμικές καμπύλες της u_{ρ} της ενισχυμένης πλάκας του 3^{ου} παραδείγματος για $h_b = 0.5 \text{ m}$ με την AEM (α) και τη FEM (β).

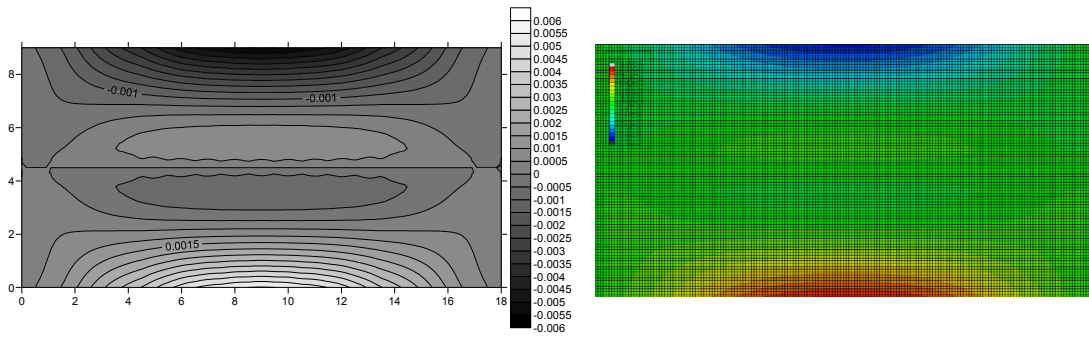


Σχήμα 5.2.18. Συνολικές δυνάμεις διεπιφάνειας q_x της ενισχυμένης πλάκας του 3^{ου} παραδείγματος για $h_b = 0.5 \text{ m}$.



Σχήμα 5.2.19. Ολίσθηση $|s_x|$ της ενισχυμένης πλάκας του 3^{ου} παραδείγματος για $h_b = 0.5 \text{ m}$ και διάφορες τιμές του K .

Μη γραμμική ανάλυση-Πλήρης σύνδεση



$$v_{\rho max} = 5.53404E - 03 \text{ m}$$

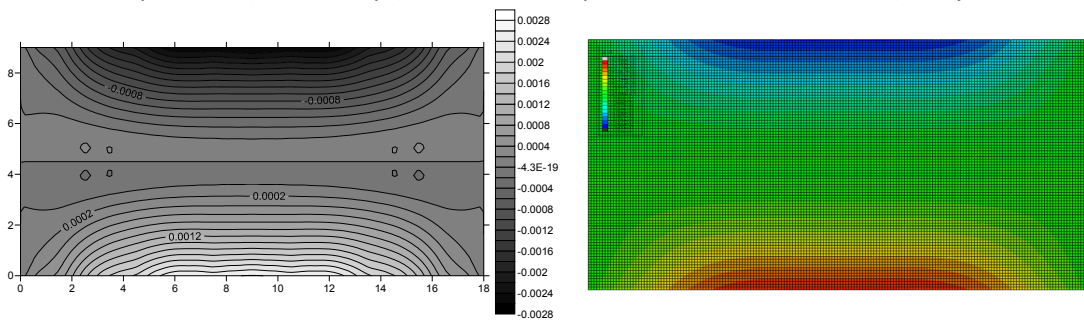
$$(w_{\rho max} = 0.49122 \text{ m})$$

$$v_{\rho max} = 5.50962E - 03 \text{ m}$$

$$(w_{\rho max} = 0.48378 \text{ m})$$

Μη γραμμική ανάλυση-Μερική σύνδεση ($K = 1$)

Αμελώντας τη δυσκαμψία των συνδέσμων στη διεύθυνση του άξονα y^j



$$v_{\rho max} = 2.61076E - 03 \text{ m}$$

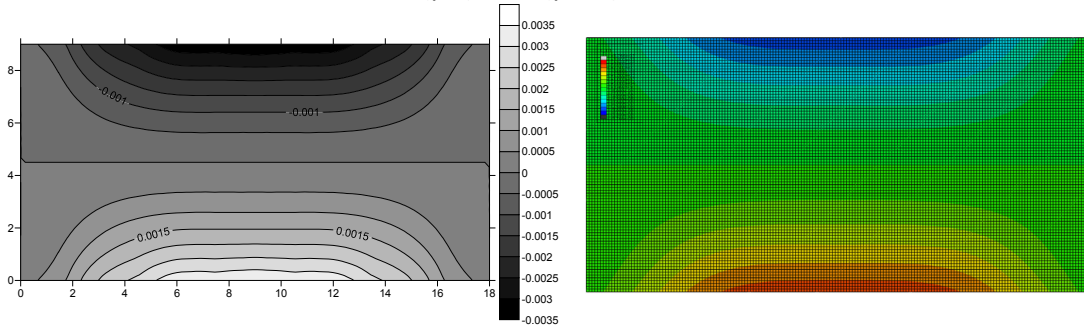
$$(w_{\rho max} = 0.52012 \text{ m})$$

$$v_{\rho max} = 2.52593E - 03 \text{ m}$$

$$(w_{\rho max} = 0.51596 \text{ m})$$

Μη γραμμική ανάλυση-Μερική σύνδεση ($K = 1$)

Πλήρες σύστημα εξισώσεων



$$v_{\rho max} = 3.43386E - 03 \text{ m}$$

$$(w_{\rho max} = 0.53079 \text{ m})$$

$$v_{\rho max} = 2.87100E - 03 \text{ m}$$

$$(w_{\rho max} = 0.51790 \text{ m})$$

(α)

(β)

Σχήμα 5.2.20. Ισοσταθμικές καμπύλες της v_{ρ} της ενισχυμένης πλάκας του 3^{ου} παραδείγματος για $h_b = 0.5 \text{ m}$ με την AEM (α) και τη FEM (β).

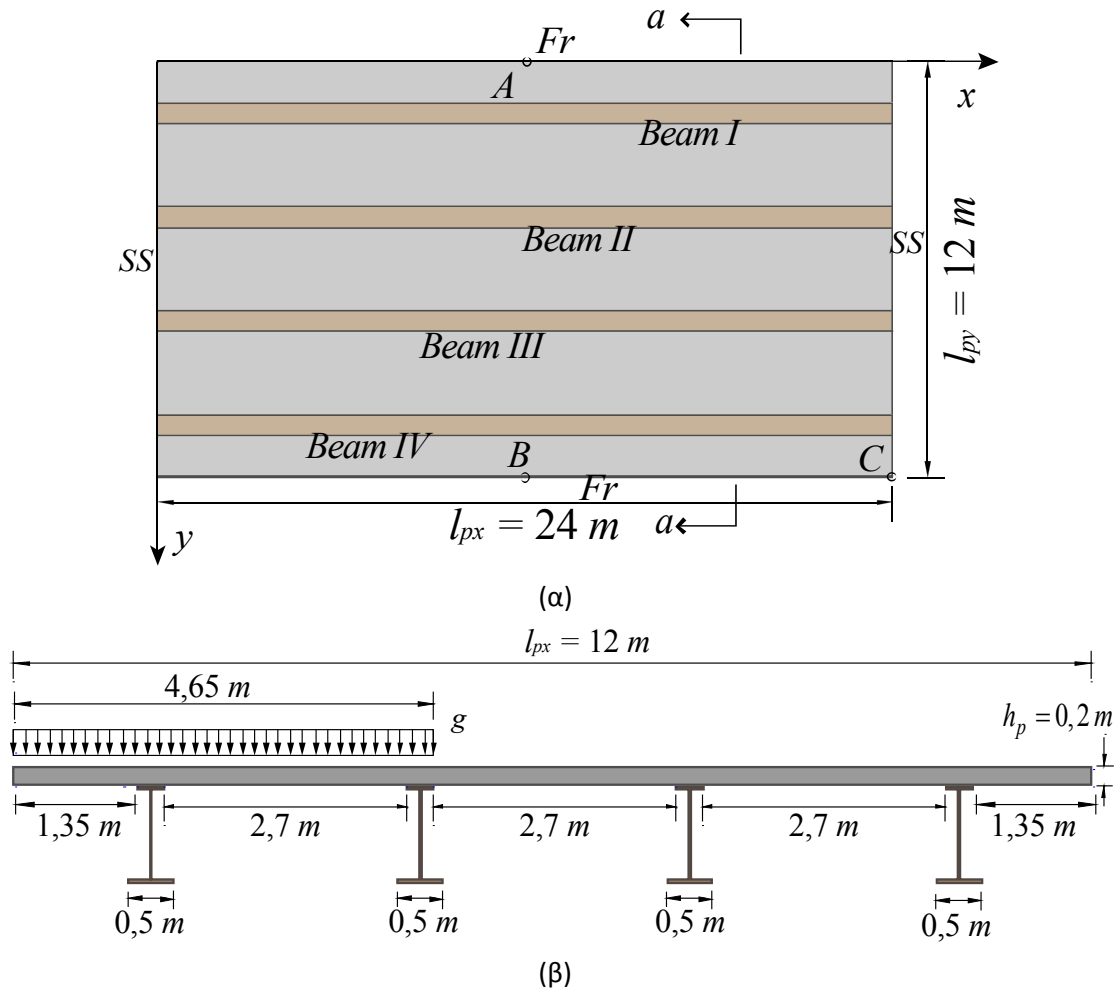
5.2.4 Παράδειγμα 4

Προκειμένου να παρουσιαστεί το εύρος εφαρμογής της παρουσιαζόμενης μεθόδου, ως τελευταίο παράδειγμα, μελετήθηκε ένα κατάστρωμα σύμμικτης γέφυρας, το οποίο αποτελείται από ορθογωνική πλάκα σκυροδέματος ($I_{ρx} \times I_{ρy} = 24 \times 12 \text{ m}^2$, $h_p = 0,2 \text{ m}$, $E_p = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu_p = 0,2$) η οποία υποβάλλεται σε έκκεντρα τοποθετημένη ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση $g = 90 \text{ kN/m}^2$. Η πλάκα ενισχύεται από τέσσερις πανομοιότυπες χαλύβδινες δοκούς μονοσυμμετρικής διατομής μορφής διπλού T ($E_b^i = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu_b^i = 0,3$) (Σχ. 5.2.21). Οι μικρές πλευρές της πλάκας είναι αρθρωμένες ως προς τις κατακόρυφες συνοριακές συνθήκες. Δίνεται η ελευθερία κίνησης κατά τον άξονα x , ενώ δεσμεύεται η αντίστοιχη μετακίνηση κατά τον άξονα y . Οι υπόλοιπες πλευρές της πλάκας είναι εντελώς ελεύθερες. Οι δοκοί ενίσχυσης θεωρούνται αρθρωμένοι στη θέση $x^i = 0$ και απλά εδραζόμενες (αξονικά μεταθετά άκρα) στη θέση $x^i = l^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Για τη σύνδεση μεταξύ πλάκας και δοκών θεωρείται γραμμική κατανομή διατμητικών συνδέσμων με συντελεστές δυσκαμψίας που ακολουθούν τη σχέση (5.2.1) ($K = 100$). Στον Πίνακα 5.2.6 αναγράφονται οι γεωμετρικές σταθερές και οι τιμές της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\varphi_S^P)_{ff}$ ($j = 1, 2$) στις διεπιφάνειες. Στο Σχ. 5.2.22 παρουσιάζονται η επιφάνεια κάμψης και οι ισοσταθμικές καμπύλες της μεμβρανικής μετατόπισης u_p της ενισχυμένης πλάκας, ενώ στον Πίνακα 5.2.7 αναγράφονται οι τιμές του βέλους w_p της ενισχυμένης πλάκας στο κέντρο της και στο μέσον των ελεύθερων πλευρών A και B (Σχ. 5.2.21α). Ακόμη στο Σχ. 5.2.23 παρουσιάζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες των καμπτικών ροπών $M_{ρx}$. Στο Σχ. 5.2.24 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις w_b των δοκών ενίσχυσης. Από τα παραπάνω αποτελέσματα, η ουσιώδης επίδραση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας γίνεται φανερή. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να παρατηρηθεί ότι στις περιπτώσεις ελεύθερων συνόρων κατά τις μεμβρανικές συνοριακές συνθήκες, οι βυθίσεις και τα εντατικά μεγέθη ενδέχεται να προκύψουν αυξημένα σε σχέση με αυτά που προσδιορίζονται από μια γραμμική ανάλυση. Η ύπαρξη μερικής διατμητικής σύνδεσης, όπως παρατηρήθηκε και στο προηγούμενο παράδειγμα, οδηγεί σε περαιτέρω αύξηση των κινηματικών και εντατικών μεγεθών.

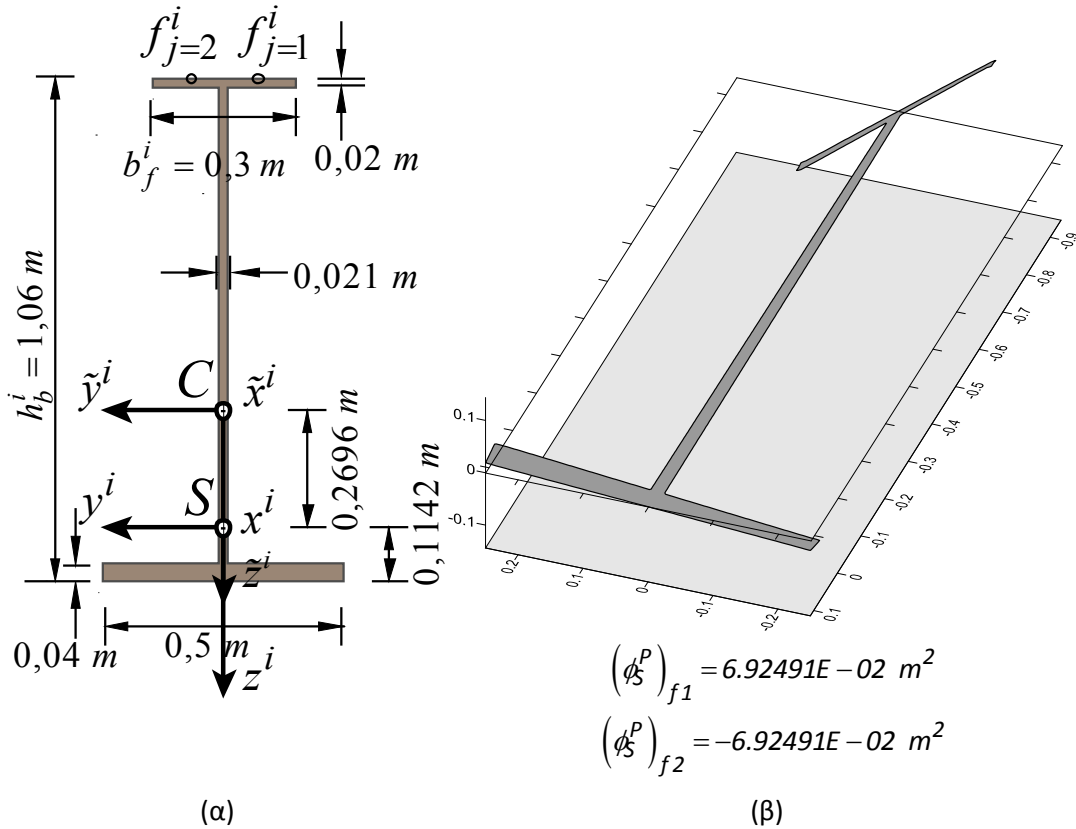
Τέλος, προκειμένου να διαπιστωθεί η επιρροή της δυσκαμψίας των διατμητικών συνδέσμων k_{yy}^i , στο Σχ. 5.2.25 παρουσιάζονται οι κατανομές του βέλους κάμψης της πλάκας κατά μήκος τομής στη θέση $x_0 = 11,33 \text{ m}$ για τις περιπτώσεις της πλήρους και της μερικής σύνδεσης, λαμβάνοντας υπόψη και αμελώντας τους όρους των k_{yy}^i . Επιπλέον, στο Σχ. 5.2.26 παρουσιάζεται η καμπύλη φορτίου-μετατόπισης της μετατόπισης u_p στο σημείο C της πλάκας (Σχ. 5.2.21α). Από τα παραπάνω σχήματα, παρατηρείται ότι η επιρροή της δυσκαμψίας των διατμητικών συνδέσμων στην κατεύθυνση του άξονα y^i εν γένει δεν πρέπει να αμελείται.

Πίνακας 5.2.6 Γεωμετρικές σταθερές και τιμές της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης στις διεπιφάνειες των δοκών του 4^{ου} παραδείγματος.

$A_b = 4.70000E - 02 \text{ m}^2$	$C_S = 4.35203E - 05 \text{ m}^6$
$I_y = 7.57518E - 03 \text{ m}^4$	$\theta_z = -3.74317E - 01 \text{ m}$
$I_z = 4.62438E - 04 \text{ m}^4$	$z_c = -2.69603E - 01 \text{ m}$
$I_p = 1.14538E - 02 \text{ m}^4$	$(\phi_S^P)_{f1} = 6.92491E - 02 \text{ m}^2$
$I_t = 1.73915E - 05 \text{ m}^4$	$(\phi_S^P)_{f2} = -6.92491E - 02 \text{ m}^2$



Σχήμα 5.2.21. Άνοψη (α) και τομή α-α (β) της ενισχυμένης πλάκας του 4^{ου} παραδείγματος.

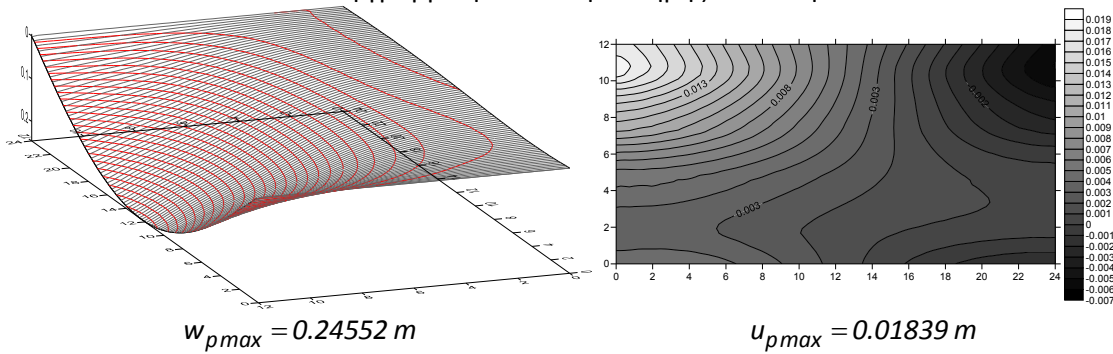


Σχήμα 5.2.21. Διατομή των δοκών ενίσχυσης (α) και κατανομή της συνάρτησης στρέβλωσης στο σύνορο της διατομής (β) της ενισχυμένης πλάκας του 4^{ου} παραδείγματος.

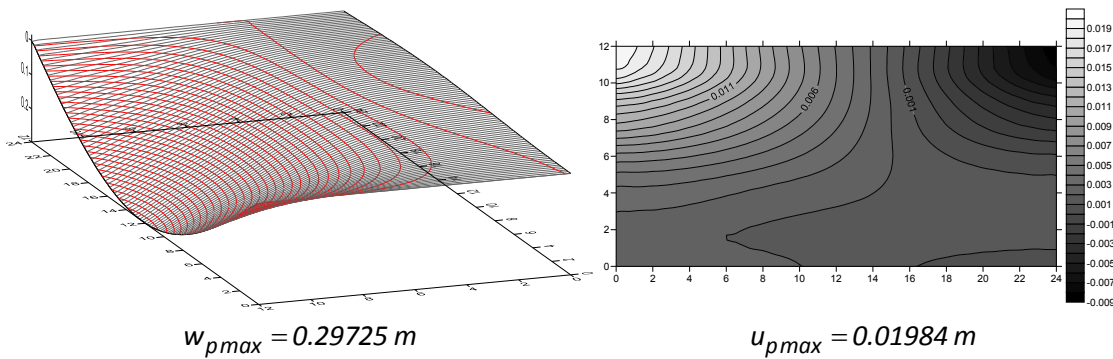
Πίνακας 5.2.7. Βέλη κάμψης w_p (m) της ενισχυμένης πλάκας του 4^{ου} παραδείγματος.

Γραμμική ανάλυση		Μη γραμμική ανάλυση		
Πλήρης σύνδεση	Μερική σύνδεση, Πλήρες σύστημα	Πλήρης σύνδεση	Μερική σύνδεση, Αμελώντας τα k_{yj}^i	Μερική σύνδεση, Πλήρες σύστημα
Κέντρο της πλάκας				
0.10482	0.10653	0.06629	0.07953	0.05273
Μέσον της ελεύθερης πλευράς A				
0.03795	0.02629	-0.00043	-0.00767	-0.01592
Μέσον της ελεύθερης πλευράς B				
0.23400	0.26236	0.24530	0.28011	0.29705

Μη γραμμική ανάλυση - Πλήρης σύνδεση



Μη γραμμική ανάλυση - Μερική σύνδεση



(a)

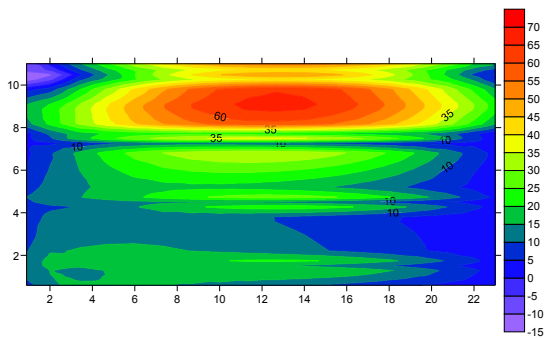
(b)

Σχήμα 5.2.22. Βέλος κάμψης w_p (α) και ισοσταθμικές καμπύλες της μεμβρανικής u_p (β) της ενισχυμένης πλάκας του 4^{ου} παραδείγματος.

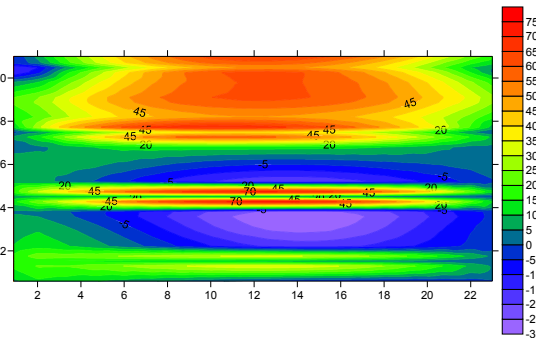
Γραμμική ανάλυση

Μη γραμμική ανάλυση

Πλήρης σύνδεση

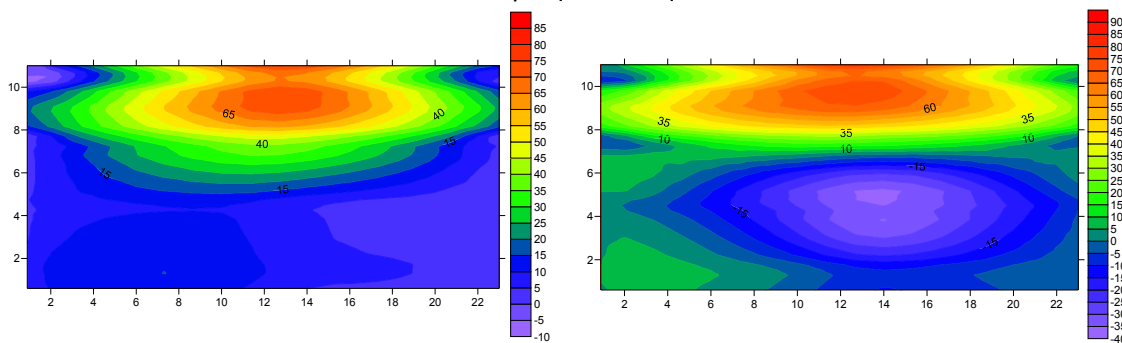


$M_{pxmin} = -14.53030 \text{ kNm/m}$
 $M_{pxmax} = 66.81701 \text{ kNm/m}$



$M_{pxmin} = -29.60119 \text{ kNm/m}$
 $M_{pxmax} = 71.55431 \text{ kNm/m}$

Μερική σύνδεση



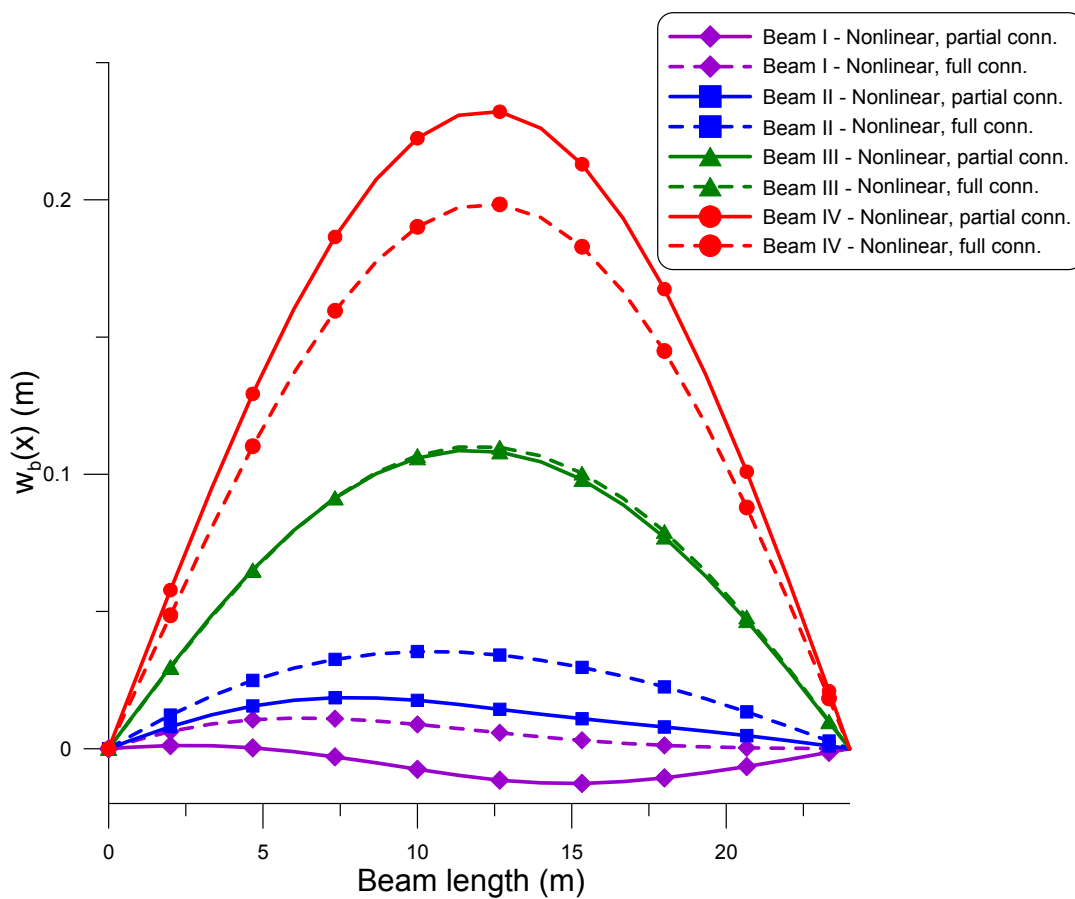
$$M_{px\ min} = -6.70411\ kNm/m$$

$$M_{px\ max} = 80.13843\ kNm/m$$

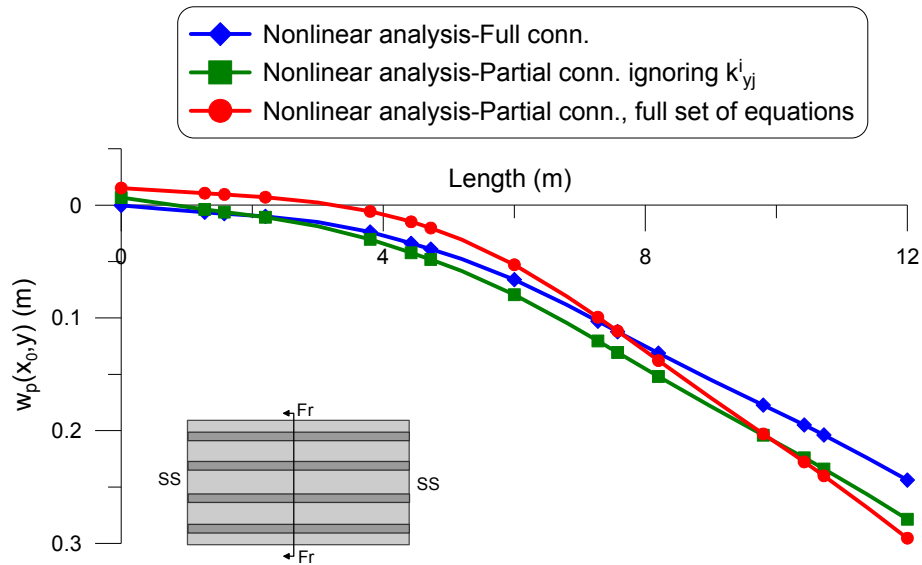
$$M_{px\ min} = -36.05731\ kNm/m$$

$$M_{px\ max} = 85.28878\ kNm/m$$

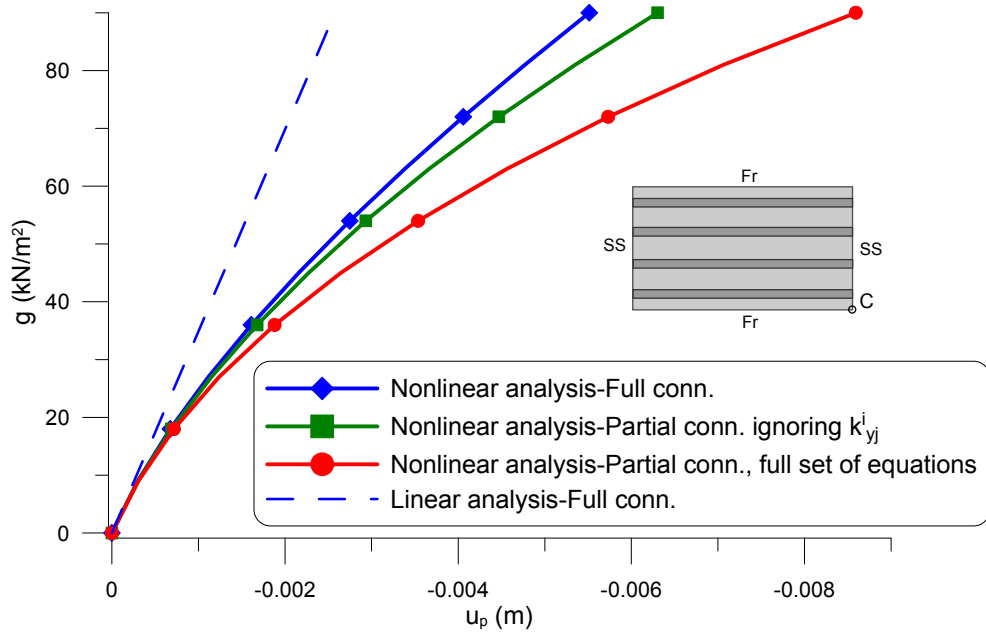
Σχήμα 5.2.23. Καμπτικές ροπές M_{px} της ενισχυμένης πλάκας του 4^{ου} παραδείγματος.



Σχήμα 5.2.24. Βέλη w_b των δοκών ενίσχυσης του 4^{ου} παραδείγματος.



Σχήμα 5.2.25. Βέλος w_p κατά μήκος τομής στη θέση $x_0 = 11.33$ m της ενισχυμένης πλάκας του 4^{ου} παραδείγματος.



Σχήμα 5.2.26. Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης για τη u_p στο σημείο C της ενισχυμένης πλάκας του 4^{ου} παραδείγματος.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και ιδέες για μελλοντική έρευνα

6.1 Συμπεράσματα

Συνοπτικά, μπορούμε να πούμε ότι στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε μια γενική μεθοδολογία για τη γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση πλακών ενισχυμένων από παράλληλες δοκούς τυχούσας μονοσυμμετρικής διατομής με μερική διατμητική σύνδεση, υποβαλλόμενη σε τυχαία κατανεμημένο εξωτερικό φορτίο. Το προτεινόμενο προσομοίωμα λαμβάνει υπόψη την ανομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών δυνάμεων διεπιφάνειας και την ανομοιόμορφη στρεπτική συμπεριφορά των δοκών ενίσχυσης. Τα κυριότερα συμπεράσματα, που μπορούν να εξαχθούν από την παρούσα εργασία είναι τα παρακάτω:

- Το προτεινόμενο προσομοίωμα επιτρέπει την ανάλυση ενισχυμένων πλακών με μερική διατμητική σύνδεση, η οποία υπόκειται σε τυχούσα εξωτερική φόρτιση και στις πλέον γενικές συνθήκες στήριξης. Ο αριθμός των δοκών ενίσχυσης είναι τυχαίος και η θέση τους στο χωρίο της πλάκας είναι επίσης τυχαία.
- Το προτεινόμενο προσομοίωμα, επιτρέπει τον υπολογισμό των διαμήκων και εγκάρσιων διατμητικών δυνάμεων στις διεπιφάνειες μεταξύ της πλάκας και των δοκών στη γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση ενισχυμένων πλακών, λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική ολίσθηση και κατά τις δύο διευθύνσεις x και y .
- Η ανομοιόμορφη στρέψη στην οποία υποβάλλονται οι δοκοί ενίσχυσης, λαμβάνεται υπόψη επιλύοντας το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών και εισάγοντας την αντίστοιχη στρεπτική στροφή και στρέβλωση στις συνθήκες συνέχειας μετατοπίσεων στις γραμμές διεπιφάνειας. Το κατανεμημένο δίρροπο στρέβλωσης, που προκύπτει από την πιθανή ανομοιόμορφη κατανομή των διαμήκων δυνάμεων κατά το πλάτος της διεπιφάνειας, λαμβάνεται επίσης υπόψη.
- Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου, όπως έγινε φανερό από τα παραδείγματα που εξετάστηκαν, είναι αξιοσημείωτη ιδιαίτερα συγκρίνοντας με τρισδιάστατα προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων τα οποία θεωρούνται ως τα πιο ακριβή.
- Η μεθοδολογία επίλυσης που αναπτύχθηκε, παρ' όλο που απαιτεί διακριτοποίηση του χωρίου, διατηρεί τα πλεονεκτήματα της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, σε αντιδιαστολή με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων.
- Η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, στην παραμόρφωση των ενισχυμένων πλακών που εξετάστηκαν είναι φανερή. Στην περίπτωση που τα σύνορα του φορέα είναι μεμβρανικά και αξονικά αμετάθετα, τα κινηματικά μεγέθη παρουσιάζουν μείωση συγκρινόμενα με τη γραμμική ανάλυση, όσο η τιμή του επιβαλλόμενου φορτίου αυξάνεται.
- Η αντίθετη συμπεριφορά παρατηρείται στην περίπτωση που τα σύνορα του φορέα είναι μεταθετά ως προς τις συνεπίπεδες μετακινήσεις. Η αύξηση του φορτίου οδηγεί σε αύξηση των βελών κάμψης, λόγω μεμβρανικών μετακινήσεων των συνόρων, γεγονός που δεν μπορεί να προβλεφθεί από μια γραμμική ανάλυση.

- Όσον αφορά στη μερική διατμητική σύνδεση, παρατηρήθηκε αύξηση των βελών κάμψης με τη μείωση της δυσκαμψίας των διατμητικών συνδέσμων, ενώ η μείωση αυτή οδηγεί σε σημαντική αύξηση της επιρροής της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην συμπεριφορά του φορέα.
- Όπως παρατηρήθηκε στα παραδείγματα που εξετάστηκαν, η επιρροή της δυσκαμψίας των διατμητικών συνδέσμων κατά τη διεύθυνση y δεν είναι αμελητέα.
- Οι τιμές των διατμητικών δυνάμεων στη διεπιφάνεια, μειώνονται σημαντικά με την μείωση της δυσκαμψίας των διατμητικών συνδέσμων.

6.2 Ιδέες για μελλοντική έρευνα

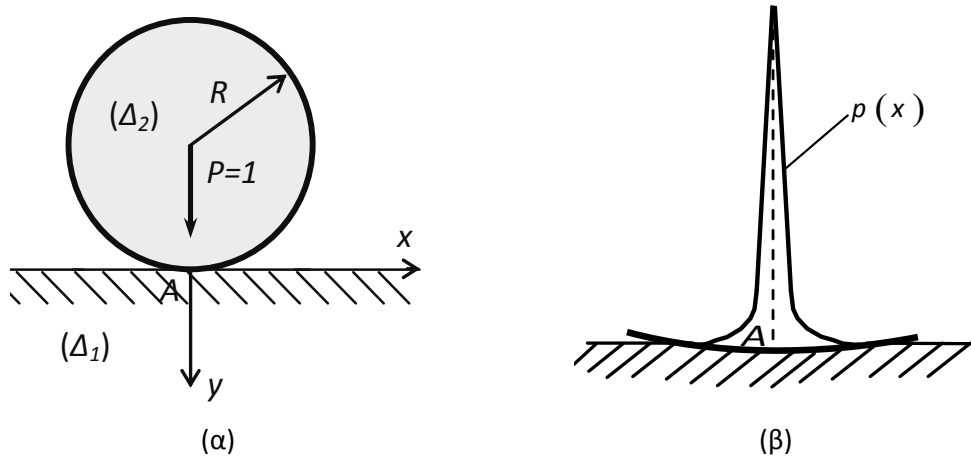
Ιδέες για μελλοντική έρευνα, που προέκυψαν κατά τη συγγραφή της παρούσας εργασίας, αφορούν τα εξής:

- Μελέτη της ελαστικής μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ενισχυμένων πλακών υπό στατικές και δυναμικές συνεπίπεδες φορτίσεις.
- Διερεύνηση φαινομένων διατμητικής υστέρησης (προσδιορισμός ενεργού πλάτους) για την ενισχυμένη πλάκα και διερεύνηση για την επιρροή της διατμητικής σύνδεσης στο εύρος του ενεργού πλάτους. Στους στόχους συγκαταλέγεται το να ληφθεί υπόψη το φαινόμενο της διατμητικής υστέρησης και στη θεωρία δοκού που χρησιμοποιείται για τις δοκούς ενίσχυσης.
- Επέκταση της θεωρίας δοκού που χρησιμοποιείται για τις δοκούς ενίσχυσης, προκειμένου να ληφθούν υπόψη φαινόμενα παραμόρφωσης της διατομής (distortion). Η επέκταση αυτή έχει σημασία ιδιαίτερα σε περιπτώσεις λεπτότοιχων ενισχυμένων πλακών που υφίστανται μεγάλες μετατοπίσεις.
- Εφαρμογή της μεθοδολογίας για τη διεξαγωγή ανελαστικής ανάλυσης ενισχυμένων πλακών.
- Συνδυασμός υλικής και γεωμετρικής μη γραμμικότητας για την ανάλυση ενισχυμένων πλακών.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α: Η συνάρτηση Dirac

Σε προβλήματα μηχανικής συχνά εμφανίζονται περιπτώσεις συγκεντρωμένων φορτίων, δηλαδή δράσεων οι οποίες εντοπίζονται σε πολύ μικρή περιοχή, θεωρητικά σημειακή, του χώρου ή/και του χρόνου. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον ελαστικό δίσκο (Δ_1) σταθερού πάχους h , ο οποίος καταλαμβάνει το ημιεπίπεδο $-\infty < x < +\infty$ και $y \geq 0$. Στο ελεύθερο σύνορο του $y=0$ και συγκεκριμένα στο σημείο $x=0$, εφάπτεται ελαστικός κυκλικός δίσκος (Δ_2) με το ίδιο πάχος h και ακτίνα R . Ο δίσκος (Δ_2) φορτίζεται στο κέντρο του με κατακόρυφο συγκεντρωμένο μοναδιαίο φορτίο P , όπως φαίνεται στο Σχήμα Α.2. Λόγω της παραμορφώσεως των σωμάτων, η επαφή των δίσκων δεν θα είναι σημειακή, αλλά θα εκτείνεται σε κάποια μικρή περιοχή.



Σχήμα Α.1. Παράδειγμα συγκεντρωμένης δύναμης P (α) και κατανομή της δύναμης P ανά μονάδα μήκους (β).

Ας ονομάσουμε $p(x)$ τη συνάρτηση που παριστάνει την κατανομή της δύναμης που εφαρμόζεται στο σύνορο του δίσκου (Δ_1) ανά μονάδα μήκους x . Η συνάρτηση αυτή, η οποία πιθανότατα θα έχει τη μορφή του Σχήματος Α.3, δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Ισχύει ότι θα είναι αρκετά συγκεντρωμένη και ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \tag{A.1}$$

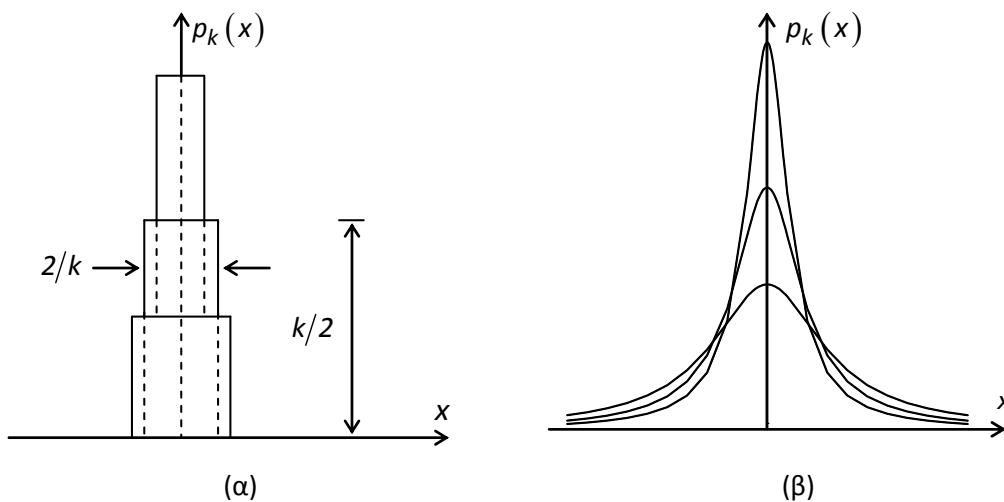
δηλαδή η συνολική δύναμη που ασκείται στο δίσκο είναι μοναδιαία. Παρακάμπτοντας το πρόβλημα του αναλυτικού υπολογισμού της συνάρτησης $p(x)$, μπορεί να υποτεθεί εκ των προτέρων μία καθορισμένη μορφή για τη συνάρτηση αυτή, όπως

$$p_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } |x| \geq 1/k \\ k/2 & \text{όταν } |x| < 1/k \end{cases} \tag{A.2}$$

ή

$$\rho_k(x) = \frac{k}{\pi(1+k^2x^2)} \quad (\text{A.3})$$

όπου k ένας θετικός αριθμός. Και οι δύο προαναφερθείσες μορφές της συνάρτησης $\rho(x)$ είναι αρκετά συγκεντρωμένες για μεγάλες τιμές του k , όπως φαίνεται στα Σχ. Α.1α,β καθώς και στατικά ισοδύναμες με την πραγματική τιμή της $\rho(x)$, όπως προκύπτει αντικαθιστώντας την εξίσωση (Α.2) ή την (Α.3) στη εξίσωση (Α.1).



Σχήμα Α.2. Κατανομή συνάρτησης $\rho(x)$ σύμφωνα με την εξίσωση (Α.2) (α) και κατανομή συνάρτησης $\rho(x)$ σύμφωνα με την εξίσωση (Α.3) (β).

Η κατανομή $\rho(x)$ γίνεται πιο συγκεντρωμένη όσο λιγότερο παραμορφώσιμο είναι το υλικό των δίσκων. Αυτό εκφράζεται με αύξηση της τιμής του k στις εξισώσεις (Α.2) και (Α.3). Η οριακή περίπτωση που οι δίσκοι είναι απαραμόρφωτοι εκφράζεται για $k \rightarrow \infty$, οπότε λαμβάνεται μια ιδεατή κατανομή της δύναμης ανά μονάδα μήκους, την οποία συμβολίζουμε με $\delta(x)$ και την περιγράφουμε ως

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k(x) \quad (\text{A.4})$$

όπου $\rho_k(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση (Α.2) ή (Α.3). Η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι γνωστή ως κρουστική συνάρτηση ή συνάρτηση δ του Dirac. Τα μαθηματικά πραγματεύονται τη συνάρτηση δ στη θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων. Παρατίθεται κατωτέρω ο μαθηματικός ορισμός της συνάρτησης δ ως γενικευμένης συνάρτησης σε μια και δύο διαστάσεις και αναφέρονται μερικές ιδιότητες της, που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών της θεωρίας ελαστικότητας.

Μονοδιάστατη συνάρτηση δ καλούμε τη συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) h(x) dx = h(0) \quad (\text{A.5})$$

για την περίπτωση σημειακής δράσης στη θέση $x=0$, ενώ γενικότερα για δράση στο σημείο $x=x_0$, η συνάρτηση δ ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) h(x) dx = h(x_0) \quad (\text{A.6})$$

Στις σχέσεις (A.5) και (A.6) η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα πεπερασμένο διάστημα, το οποίο περιέχει το σημείο $x=0$ ή $x=x_0$, αντίστοιχα και μηδενική έξω από αυτό. Η μονοδιάστατη συνάρτηση δ μπορεί να περιγραφεί και από τις σχέσεις

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x \neq 0 \\ \infty & \text{όταν } x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7α})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.7β})$$

όπου ε θετικός αριθμός. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι μηδενική παντού εκτός από το σημείο $x=0$ όπου απειρίζεται, ενώ συγχρόνως πληρείται η σχέση (A.7β). Η σχέση (A.5) μπορεί να προκύψει από τη σχέση (A.7β) με εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Έτσι, με βάση το Σχ. A.2α και θέτοντας $\varepsilon = 1/k$ προκύπτει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) h(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} p_{\varepsilon}(x) h(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\varepsilon} h(x^*) \right] 2\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[h(x^*) \right] = h(0) \quad (\text{A.8})$$

Σημειώνεται επίσης ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ ορίζεται και ως η παράγωγος της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης Heaviside, δηλαδή

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx} \quad (\text{A.9})$$

Τονίζεται ότι, η συνάρτηση $\delta(x)$ όταν αναφερόμαστε στο χώρο έχει διαστάσεις $1/L$ (π.χ. m^{-1}), ενώ όταν αναφερόμαστε στο χρόνο έχει διαστάσεις $1/T$ (π.χ. sec^{-1}). Στο χώρο των δύο διαστάσεων, η συνάρτηση $\delta(Q-P)$ ορίζεται ως

$$\iint_{\Omega} \delta(Q-P)h(Q)d\Omega_Q = h(P), \quad P(x_0, y_0), Q(x, y) \in \Omega \quad (\text{A.10})$$

για κάθε συνάρτηση h , η οποία είναι συνεχής στο δισδιάστατο χωρίο Ω , το οποίο περιέχει το σημείο $P(x_0, y_0)$. Η δισδιάστατη συνάρτηση δ μπορεί να περιγραφεί και από τις σχέσεις

$$\delta(Q-P) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } Q \neq P \\ \infty & \text{όταν } Q = P \end{cases} \quad (\text{A.11α})$$

$$\iint_{\Omega} \delta(Q-P)d\Omega_Q = \iint_{\Omega^*} \delta(Q-P)d\Omega_Q = 1 \quad P(x_0, y_0) \in \Omega^* \subseteq \Omega \quad (\text{A.11β})$$

Όπως και στην περίπτωση της μονοδιάστατης συνάρτησης $\delta(x-x_0)$, σημειώνεται ότι και η δισδιάστατη συνάρτηση $\delta(Q-P)$, μπορεί να περιγραφεί ως το όριο σειράς συναρτήσεων, δηλαδή

$$\delta(Q-P) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(r), \quad P(x_0, y_0), Q(x, y) \in \Omega \quad (\text{A.12})$$

όπου

$$r = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.13})$$

Έτσι, για παράδειγμα τα όρια των συναρτήσεων

$$p_k(r) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } r \geq 1/k \\ k^2/\pi & \text{όταν } r < 1/k \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

και

$$p_k(r) = \frac{ke^{-kr^2}}{\pi} \quad (\text{A.15})$$

για $k \rightarrow 0$ είναι διδιάστατες συναρτήσεις δ . Επίσης, η συνάρτηση $\delta(Q-P)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο μονοδιάστατων συναρτήσεων ως

$$\delta(Q-P) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \quad (\text{A.16})$$

Ακολουθως θα αναλύσουμε το μετασχηματισμό της συνάρτησης $\delta(Q-P)$ από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y) σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) μέσω των σχέσεων μετασχηματισμού

$$x = u(\xi, \eta) \quad (\text{A.17}\alpha)$$

$$y = v(\xi, \eta) \quad (\text{A.17}\beta)$$

όπου u και v είναι μονοσήμαντες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους. Έτσι, κατά την αλλαγή των συντεταγμένων η σχέση (A.12)

$$\iint_{\Omega} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)h(x,y)dx dy = h(x_0, y_0) \quad (\text{A.18})$$

Γίνεται

$$\iint_{\Omega} \delta[u(\xi, \eta) - x_0] \delta[v(\xi, \eta) - y_0] h(u, v) |J| d\xi d\eta = h(x_0, y_0) \quad (\text{A.19})$$

όπου

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (\text{A.20})$$

είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Η σχέση (A.19) δηλώνει ότι η συμβολική συνάρτηση

$$\delta[u(\xi, \eta) - x_0] \delta[v(\xi, \eta) - y_0] |J| \quad (\text{A.21})$$

ορίζει την τιμή της συναρτήσεως $h(x, y)$ στο σημείο όπου $u = x_0$ και $v = y_0$, δηλαδή στο σημείο $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$. Κατόπιν τούτου προκύπτει

$$\delta[u(\xi, \eta) - x_0] \delta[v(\xi, \eta) - y_0] |J| = \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0) \quad (\text{A.22})$$

η οποία δίδει

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \frac{\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)}{|J|} \quad (\text{A.23})$$

με την προϋπόθεση ότι $|J| \neq 0$, δηλαδή οι εξισώσεις (A.17) αντιστρέφονται. Τέλος, παρουσιάζονται οι ακόλουθες ιδιότητες των παραγώγων της συνάρτησης δ .

- Για την παράγωγο m τάξης της μονοδιάστατης συνάρτησης δ ισχύει η σχέση

$$\int_a^b h(x) \frac{d^m}{dx^m} [\delta(x-x_0)] dx = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} h(x_0), \quad a < x_0 < b \quad (\text{A.24})$$

- Για την παράγωγο $m+n$ τάξης της δισδιάστατης συνάρτησης δ ισχύει η σχέση

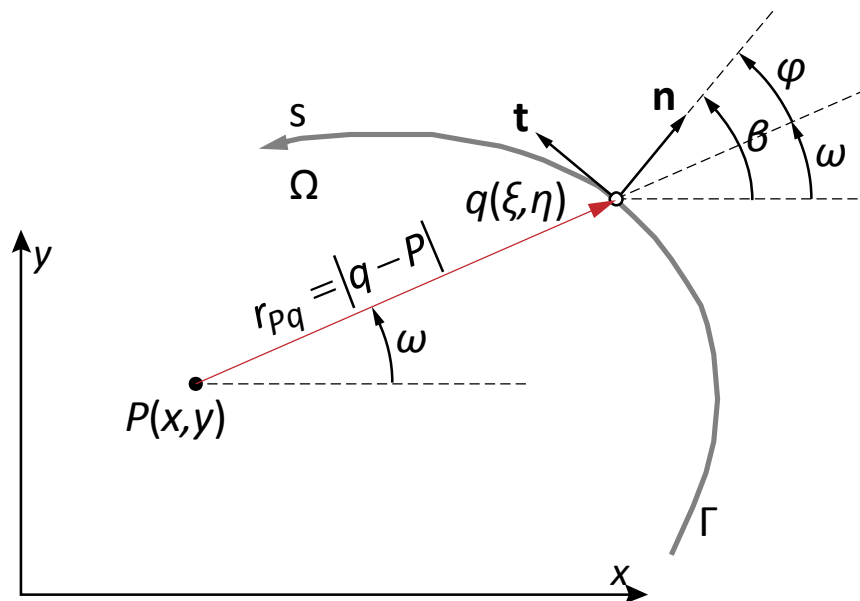
$$\iint_{\Omega} h(Q) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [\delta(Q-P)] d\Omega_Q = (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} h(P) \quad (\text{A.25})$$

όπου $P(x_0, y_0), Q(x, y) \in \Omega$.

Παράρτημα Β: Εκφράσεις των παραγώγων του r

Στα κεφάλαια 2 και 3 οι σχέσεις των πυρήνων των ολοκληρωτικών παραστάσεων και των παραγώγων τους για τα προβλήματα δύο διαστάσεων εκφράστηκαν συναρτήσει της ακτίνας r και των παραγώγων της. Υπενθυμίζεται ότι ισχύει

$$r = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{1/2} \quad (\text{B.1})$$



Σχήμα Β.1. Σχέσεις γωνιών μεταξύ της ακτίνας r και καθέτου διανύσματος \mathbf{n} .

Οι εκφράσεις των παραγώγων αυτών μπορούν να προσδιοριστούν συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων $P(x, y)$, $Q(\xi, \eta)$ ή των γωνιών ω , φ (Σχ. Β.1) με γεωμετρικές θεωρήσεις. Παρατηρώντας το Σχ. Β.1, προκύπτει (Κατσικαδέλης, 1999)

$$\cos \omega = \frac{\xi - x}{r} \quad (\text{B.2}\alpha)$$

$$\sin \omega = \frac{\eta - y}{r} \quad (\text{B.2}\beta)$$

με παραγωγίσεις της (Β.1) προκύπτουν

$$r_{,x} = -\frac{\xi - x}{r} = -\cos \omega \quad (\text{B.3}\alpha)$$

$$r_{,y} = -\frac{\eta - y}{r} = -\sin \omega \quad (\text{B.3}\beta)$$

$$r_{,\xi} = \frac{\xi - x}{r} = \cos \omega = -r_{,x} \quad (\text{B.3}\gamma)$$

$$r_{,\eta} = \frac{\eta - y}{r} = \sin \omega = -r_{,y} \quad (\text{B.3}\delta)$$

$$r_{,n} = r_{,\xi} n_x + r_{,\eta} n_y \quad (\text{B.3}\epsilon)$$

$$r_{,t} = -r_{,\xi} n_y + r_{,\eta} n_x \quad (\text{B.3}\sigma\tau)$$

όπου n_x , n_y τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος \mathbf{n} . Παρατηρώντας το Σχ. Β.1 προκύπτει

$$n_x = \cos \beta \quad (\text{B.4}\alpha)$$

$$n_y = \sin \beta \quad (\text{B.4}\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις (B.3,α-δ) και (B.4) οι (B.3ε,στ) γράφονται ως εξής

$$r_{,n} = \cos \omega \cos \beta + \sin \omega \sin \beta = \cos(\beta - \omega) = \cos \varphi \quad (\text{B.5}\alpha)$$

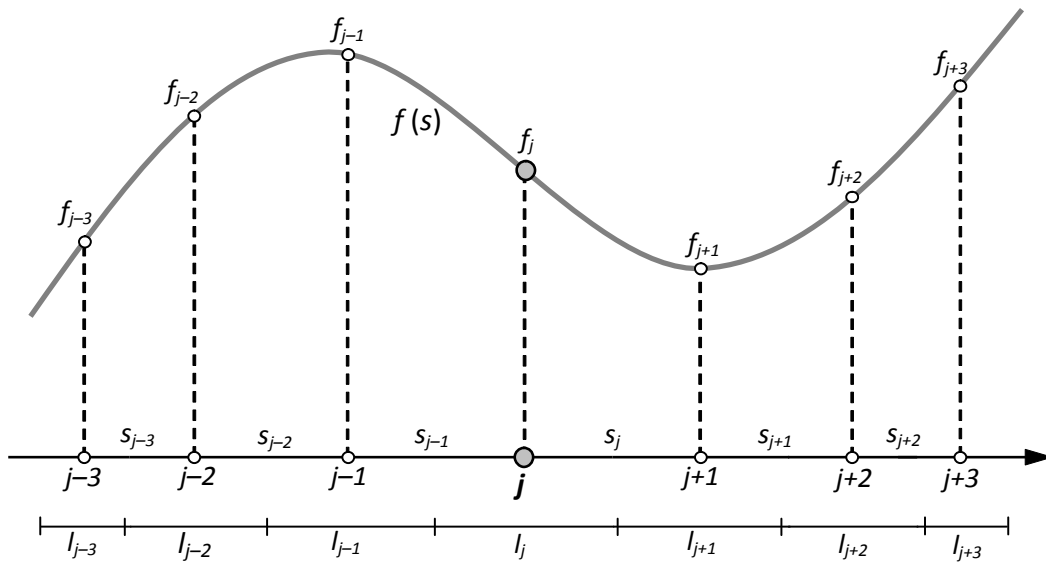
$$r_{,t} = -\cos \omega \sin \beta + \sin \omega \sin \beta = -\sin(\omega - \beta) = -\sin \varphi \quad (\text{B.5}\beta)$$

Παράρτημα Γ: Προσέγγιση παραγώγων συνάρτησης με πεπερασμένες διαφορές

Έστω η πραγματική συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(s)$ ορισμένη σε ανοικτό διάστημα (a, b) με κέντρο το σημείο s , η οποία έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξης n . Έστω ακόμη ο πραγματικός αριθμός Δs , τέτοιος ώστε η τιμή $s + \Delta s$ της μεταβλητής s να ανήκει στο ανοικτό διάστημα στο οποίο είναι ορισμένη η συνάρτηση $f(s)$. Τότε αναπτύσσοντας της συνάρτηση f σε σειρά Taylor θα έχουμε

$$f(s + \Delta s) = f(s) + \frac{1}{1!} \Delta s \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2!} \Delta s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{1}{3!} \Delta s^3 \frac{\partial^3 f}{\partial s^3} + \dots + \frac{1}{n!} \Delta s^n \frac{\partial^n f}{\partial s^n} + R_n \quad (\Gamma.1)$$

όπου οι παράγωγοι της συνάρτησης f έχουν ληφθεί στο σημείο s , ενώ R_n είναι το υπολειπόμενο σφάλμα, το οποίο μειώνεται όσο αυξάνεται το πλήθος των όρων που λαμβάνονται υπόψη στη σειρά. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η ακρίβεια των προσεγγιστικών σχέσεων παραγωγίσης αυξάνεται με τη μείωση των αποστάσεων μεταξύ των κομβικών σημείων, καθώς και με τη μείωση του υπολειπόμενου σφάλματος, δηλαδή με τη θεώρηση περισσότερων όρων στο ανάπτυγμα Taylor. Επίσης τονίζεται ότι, για να είναι η υπολογιζόμενη προσεγγιστική παράγωγος της συνάρτησης f συνεχής θα πρέπει η χρησιμοποιούμενη κεντρική, εμπρόσθια ή οπίσθια διαφορά να έχει της ίδιας τάξης υπολειπόμενο σφάλμα.



Σχήμα Γ.1. Συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Σύμφωνα με το Σχ. Γ.1, με j συμβολίζουμε το σημείο s , με $j-1, j-2, j-3$ τα σημεία όπισθεν του σημείου s , με $j+1, j+2, j+3$ τα σημεία εμπροσθεν του σημείου s , με $f_{j-3}, f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}, f_{j+3}$ τις τιμές της συνάρτησης f στα αντίστοιχα σημεία και με $s_{j-3} = (l_{j-3} + l_{j-2})/2, s_{j-2} = (l_{j-2} + l_{j-1})/2, s_{j-1} = (l_{j-1} + l_j)/2, s_j = (l_j + l_{j+1})/2, s_{j+1} = (l_{j+1} + l_{j+2})/2, s_{j+2} = (l_{j+2} + l_{j+3})/2$ τις αντίστοιχες αποστάσεις μεταξύ των σημείων.

• **Κεντρική διαφορά**

Για την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f με χρήση της κεντρικής διαφοράς, γράφουμε τη σχέση (Γ.1) για τα σημεία $j+1$ και $j-1$ λαμβάνοντας υπόψη όρους μέχρι δεύτερης τάξης. Έτσι, έχουμε

$$f_{j+1} = f_j + s_j \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} s_j^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad (\Gamma.2)$$

$$f_{j-1} = f_j - s_{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad (\Gamma.3)$$

και θέτοντας

$$a_{11} = \frac{1}{2} s_j^2 \quad a_{12} = s_j \quad (\Gamma.4\alpha, \beta)$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \quad a_{22} = -s_{j-1} \quad (\Gamma.4\gamma, \delta)$$

$$b_1 = f_{j+1} - f_j \quad b_2 = f_{j-1} - f_j \quad (\Gamma.4\epsilon, \zeta)$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j \quad (\Gamma.4\eta, \theta)$$

προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ως εξής

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\Gamma.5)$$

Από την επίλυση του συστήματος (Γ.5) προκύπτει η αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{-s_j^2 f_{j-1} + (s_j^2 - s_{j-1}^2) f_j + s_{j-1}^2 f_{j+1}}{s_{j-1} s_j (s_{j-1} + s_j)} \quad (\Gamma.6\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = 2 \frac{s_j f_{j-1} - (s_{j-1} + s_j) f_j + s_{j-1} f_{j+1}}{s_{j-1} s_j (s_{j-1} + s_j)} \quad (\Gamma.6\beta)$$

Οι σχέσεις (Γ.6) διατυπώνονται σε μητρωϊκή μορφή ως εξής

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \lambda_1 \begin{bmatrix} -s_j^2 & (s_j^2 - s_{j-1}^2) & s_{j-1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.7\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = 2\lambda_1 \begin{bmatrix} s_j & -(s_{j-1} + s_j) & s_{j-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.7\beta)$$

όπου

$$\lambda_1 = \frac{1}{s_{j-1} s_j (s_{j-1} + s_j)} \quad (\Gamma.8)$$

Στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, οι σχέσεις (Γ.7) απλοποιούνται ως εξής

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{1}{2h} (-f_{j-1} + f_{j+1}) \quad (\Gamma.9\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) \quad (\Gamma.9\beta)$$

Οι σχέσεις (Γ.9) διατυπώνονται σε μητρωϊκή μορφή ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.10\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.10\beta)$$

Το υπολειπόμενο σφάλμα για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο που προσεγγίζεται με χρήση των σχέσεων (Γ.7) ή (Γ.10) είναι της τάξης του h^2 .

• **Εμπρόσθια διαφορά**

Για την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f με χρήση της εμπρόσθιας διαφοράς, γράφουμε τη σχέση (Γ.1) για τα σημεία $j+1$ και $j+2$ λαμβάνοντας υπόψη όρους μέχρι δεύτερης τάξης. Έτσι, για το σημείο $j+1$ ισχύει η σχέση (Γ.2), ενώ για το σημείο $j+2$ ισχύει

$$f_{j+2} = f_j + (s_j + s_{j+1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} (s_j + s_{j+1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad (\Gamma.11)$$

και θέτοντας

$$a_{11} = \frac{1}{2} s_j^2 \quad a_{12} = s_j \quad (\Gamma.12\alpha, \beta)$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} (s_j + s_{j+1})^2 \quad a_{22} = (s_j + s_{j+1}) \quad (\Gamma.12\gamma, \delta)$$

$$b_1 = f_{j+1} - f_j \quad b_2 = f_{j+2} - f_j \quad (\Gamma.12\epsilon, \zeta)$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j \quad (\Gamma.12\eta, \theta)$$

προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 2×2 , από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{-(2s_j s_{j+1} + s_{j+1}^2) f_j + (s_j + s_{j+1})^2 f_{j+1} - s_j^2 f_{j+2}}{s_j s_{j+1} (s_j + s_{j+1})} \quad (\Gamma.13\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = 2 \frac{s_{j+1} f_j - (s_j + s_{j+1}) f_{j+1} + s_j f_{j+2}}{s_j s_{j+1} (s_j + s_{j+1})} \quad (\Gamma.13\beta)$$

Οι σχέσεις (Γ.13) διατυπώνονται σε μητρική μορφή ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \lambda_2 \left[\begin{array}{ccc} -(2s_j s_{j+1} + s_{j+1}^2) & (s_j + s_{j+1})^2 & -s_j^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{array} \right\} \quad (\Gamma.14\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = 2\lambda_2 \left[\begin{array}{ccc} s_{j+1} & -(s_j + s_{j+1}) & s_j \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{array} \right\} \quad (\Gamma.14\beta)$$

όπου

$$\lambda_2 = \frac{1}{s_j s_{j+1} (s_j + s_{j+1})} \quad (\Gamma.15)$$

Στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, οι σχέσεις (Γ.14) απλοποιούνται ως εξής

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{1}{2h} (-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \quad (\Gamma.16\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = \frac{1}{h^2} (f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2}) \quad (\Gamma.16\beta)$$

Οι σχέσεις (Γ.16) διατυπώνονται σε μητρική μορφή ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.17\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.17\beta)$$

Το υπολειπόμενο σφάλμα για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο που προσεγγίζεται με χρήση των σχέσεων (Γ.14) και (Γ.17) είναι της τάξης του h^2 για την πρώτη παράγωγο και της τάξης του h για την δεύτερη παράγωγο. Για να μειώσουμε το υπολειπόμενο σφάλμα R_n της προσέγγισης της δεύτερης παραγώγου, γράφουμε τη σχέση (Γ.1) για τα σημεία $j+1$, $j+2$ και $j+3$ λαμβάνοντας υπόψη όρους μέχρι τρίτης τάξης. Έτσι, έχουμε

$$f_{j+1} = f_j + s_j \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} s_j^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j + \frac{1}{6} s_j^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3} \right)_j \quad (\Gamma.18\alpha)$$

$$f_{j+2} = f_j + (s_j + s_{j+1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} (s_j + s_{j+1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j + \frac{1}{6} (s_j + s_{j+1})^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3} \right)_j \quad (\Gamma.18\beta)$$

$$f_{j+3} = f_j + (s_j + s_{j+1} + s_{j+2}) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} (s_j + s_{j+1} + s_{j+2})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j$$

$$+\frac{1}{6}(s_j+s_{j+1}+s_{j+2})^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad (\Gamma.18\gamma)$$

και θέτοντας

$$a_{11}=\frac{1}{6}s_j^3 \quad a_{12}=\frac{1}{2}s_j^2 \quad a_{13}=s_j \quad (\Gamma.19\alpha,\beta,\gamma)$$

$$a_{21}=\frac{1}{6}(s_j+s_{j+1})^3 \quad a_{22}=\frac{1}{2}(s_j+s_{j+1})^2 \quad a_{23}=(s_j+s_{j+1}) \quad (\Gamma.19\delta,\epsilon,\sigma\tau)$$

$$a_{31}=\frac{1}{6}(s_j+s_{j+1}+s_{j+2})^3 \quad a_{32}=\frac{1}{2}(s_j+s_{j+1}+s_{j+2})^2 \quad a_{33}=(s_j+s_{j+1}+s_{j+2}) \quad (\Gamma.19\zeta,\eta,\theta)$$

$$b_1=f_{j+1}-f_j \quad b_2=f_{j+2}-f_j \quad b_3=f_{j+3}-f_j \quad (\Gamma.19\iota,\kappa,\lambda)$$

$$x_1=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad x_2=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j \quad x_3=\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j \quad (\Gamma.19\mu,\nu,\xi)$$

προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 3×3 ως εξής

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\Gamma.20)$$

Επιλύοντας το σύστημα λαμβάνουμε την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση άνισων αποστάσεων των κομβικών σημείων, οι αναλυτικές εκφράσεις που προκύπτουν είναι ιδιαίτερα μεγάλες και πολύπλοκες. Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, η αναλυτική έκφραση της δεύτερης παραγώγου είναι απλή και γράφεται ως

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2}(2f_j - 5f_{j+1} + 4f_{j+2} - f_{j+3}) \quad (\Gamma.21)$$

Η σχέσεις (Γ.21) διατυπώνονται σε μητρική μορφή ως

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \\ f_{j+2} \\ f_{j+3} \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.22)$$

Η προσέγγιση (Γ.22) της δεύτερης παραγώγου της f παρουσιάζει υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h^2 .

• **Οπίσθια διαφορά**

Για την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f με χρήση της οπίσθιας διαφοράς, γράφουμε τη σχέση (Γ.1) για τα σημεία $j-1$ και $j-2$ λαμβάνοντας υπόψη όρους μέχρι δεύτερης τάξης. Έτσι, για το σημείο $j-1$ ισχύει η σχέση (Γ.3), ενώ για το σημείο $j-2$ έχουμε

$$f_{j-2} = f_j - (s_{j-2} + s_{j-1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} (s_{j-2} + s_{j-1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad (\Gamma.23)$$

και θέτοντας

$$a_{11} = \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \quad a_{12} = -s_{j-1} \quad (\Gamma.24\alpha, \beta)$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} (s_{j-2} + s_{j-1})^2 \quad a_{22} = -(s_{j-2} + s_{j-1}) \quad (\Gamma.24\gamma, \delta)$$

$$b_1 = f_{j-1} - f_j \quad b_2 = f_{j-2} - f_j \quad (\Gamma.24\epsilon, \zeta)$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j \quad (\Gamma.24\eta, \theta)$$

προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 2×2 , από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε την αριθμητική προσέγγιση της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \frac{s_{j-1}^2 f_{j-2} - (s_{j-2} + s_{j-1})^2 f_{j-1} + (2s_{j-2}s_{j-1} + s_{j-2}^2) f_j}{s_{j-2}s_{j-1}(s_{j-2} + s_{j-1})} \quad (\Gamma.25\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = 2 \frac{s_{j-1} f_{j-2} - (s_{j-2} + s_{j-1}) f_{j-1} + s_{j-2} f_j}{s_{j-2}s_{j-1}(s_{j-2} + s_{j-1})} \quad (\Gamma.25\beta)$$

Οι σχέσεις (Γ.25) διατυπώνονται σε μητρική μορφή ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j = \lambda_3 \begin{bmatrix} s_{j-1}^2 & -(s_{j-2} + s_{j-1})^2 \\ 2s_{j-2}s_{j-1} + s_{j-2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.26\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = 2\lambda_3 \begin{bmatrix} s_{j-1} & -(s_{j-2} + s_{j-1}) & s_{j-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.26\beta)$$

όπου

$$\lambda_3 = \frac{1}{s_{j-2}s_{j-1}(s_{j-2} + s_{j-1})} \quad (\Gamma.27)$$

Στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f προσεγγίζονται από τις σχέσεις

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{1}{2h}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j) \quad (\Gamma.28\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2}(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j) \quad (\Gamma.28\beta)$$

Οι σχέσεις (Γ.28) διατυπώνονται σε μητρώϊκή μορφή ως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.29\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.29\beta)$$

Το υπολειπόμενο σφάλμα για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο που προσεγγίζεται με χρήση των σχέσεων (Γ.26) και (Γ.29) είναι της τάξης του h^2 για την πρώτη παράγωγο και της τάξης του h για την δεύτερη παράγωγο. Για να μειώσουμε το υπολειπόμενο σφάλμα R_n για τη δεύτερη παράγωγο, γράφουμε τη σχέση (Γ.1) για τα σημεία $j-1$, $j-2$ και $j-3$ λαμβάνοντας υπόψη όρους μέχρι τρίτης τάξης. Έτσι, έχουμε

$$f_{j-1} = f_j - s_{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j - \frac{1}{6} s_{j-1}^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad (\Gamma.30\alpha)$$

$$f_{j-2} = f_j - (s_{j-2} + s_{j-1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_j + \frac{1}{2} (s_{j-2} + s_{j-1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_j - \frac{1}{6} (s_{j-2} + s_{j-1})^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right)_j \quad (\Gamma.30\beta)$$

$$f_{j-3} = f_j - (s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1}) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j + \frac{1}{2} (s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j - \frac{1}{6} (s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3} \right)_j \quad (\Gamma.30\gamma)$$

και θέτοντας

$$a_{11} = -\frac{1}{6} s_{j-1}^3 \quad a_{12} = \frac{1}{2} s_{j-1}^2 \quad a_{13} = -s_{j-1} \quad (\Gamma.31\alpha, \beta, \gamma)$$

$$a_{21} = -\frac{1}{6} (s_{j-2} + s_{j-1})^3 \quad a_{22} = +\frac{1}{2} (s_{j-2} + s_{j-1})^2 \quad a_{23} = -(s_{j-2} + s_{j-1}) \quad (\Gamma.31\delta, \epsilon, \sigma\tau)$$

$$a_{31} = -\frac{1}{6} (s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})^3 \quad a_{32} = \frac{1}{2} (s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1})^2 \quad a_{33} = -(s_{j-3} + s_{j-2} + s_{j-1}) \quad (\Gamma.31\zeta, \eta, \theta)$$

$$b_1 = f_{j-1} - f_j \quad b_2 = f_{j-2} - f_j \quad b_3 = f_{j-3} - f_j \quad (\Gamma.31\iota, \kappa, \lambda)$$

$$x_1 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial s^3} \right)_j \quad x_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j \quad x_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j \quad (\Gamma.31\mu, \nu, \xi)$$

προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 3×3 από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου. Συνιστάται, όπως και στην εμπρόσθια διαφορά, στη γενική περίπτωση των άνισων αποστάσεων μεταξύ των κομβικών σημείων, ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου να γίνεται αριθμητικά και όχι αναλυτικά. Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση που τα κομβικά σημεία απέχουν ίσες αποστάσεις h μεταξύ τους, η αναλυτική έκφραση της δεύτερης παραγώγου είναι απλή και γράφεται ως

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = \frac{1}{h^2} (-f_{j-3} + 4f_{j-2} - 5f_{j-1} + 2f_j) \quad (\Gamma.32)$$

Η σχέση (Γ.32) διατυπώνεται σε μητρική μορφή ως

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right)_j = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j-3} \\ f_{j-2} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (\Gamma.33)$$

Η προσέγγιση (Γ.33) της δεύτερης παραγώγου της f παρουσιάζει υπολειπόμενο σφάλμα της τάξης του h^2 .

Βιβλιογραφία

- [1] **ABAQUS**, (2009), *Analysis User's Manual Version 6.9*, Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA.
- [2] **Armenakas A.E.**, (2006), *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*, Taylor & Francis Group, New York.
- [3] **Attard M.M.**, (1986a), Nonlinear Theory of Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Open Beams, *Thin-Walled Structures* **4**, 101-134.
- [4] **Attard M.M.**, (1986b), Nonlinear shortening and bending effect under pure torque of thin-walled open beams, *Thin-Walled Structures* **4**, 165-177.
- [5] **Battini J.M., Nguyen Q.H. and Hjiiaj M.**, (2009), Non-linear finite element analysis of composite beams with interlayer slips, *Computers and Structures* **87**, 904–912.
- [6] **Bleich F.**, (1952), *Buckling strength of metal structures*, McGraw-Hill, New York.
- [7] **Brebbia C.A.**, (2010), In praise of John Katsikadelis – A well deserved eulogy, *Recent Developments in Boundary Element Methods A volume to honour John T. Katsikadelis*, ed. E.J. Sapountzakis, WIT PRESS, 1-15.
- [8] **Broyden C.G.**, (1965), A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations, *Math. Comp.* **19**, 577-593.
- [9] **Caridis P.A. and Frieze P.A.**, (1988), Flexural-Torsional Elasto-plastic Buckling in Flat Stiffened Plating Using Dynamic Relaxation. Part 1: Theory, *Thin-Walled Structures* **6**, 453-481.
- [10] **Čas B., Saje M. and Planinc I.**, (2004), Non-linear finite element analysis of composite planar frames with an interlayer slip, *Computers and Structures* **82**, 1901-1912.
- [11] **Chattopadhyay B. and Sinha P.K.**, (1995), Geometrically nonlinear analysis of composite stiffened plates using finite elements, *Composite Structures* **31** 107-118.
- [12] **Chen G. and Trahair N.S.**, (1992), Inelastic nonuniform torsion of steel I-beams, *Journal of Constructional Steel Research* **23**, 189-207.
- [13] **Cornelius W.**, (1952), Die Berechnung der Ebener Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der Orthogonal Anisotropen Platten, *Der Stahlbau* **2**, 21-26.
- [14] **De Paiva J.B.**, (1996), Boundary Element Formulation of Building Slabs, *Engineering Analysis with Boundary Elements* **17**, 105-110.
- [15] **Deb A. and Booton M.**, (1988), Finite Element Models for Stiffened Plates under Transverse Loading, *Computers & Structures* **28** (3), 361-372.
- [16] **E.J. Sapountzakis and J.T. Katsikadelis**, (2000), Analysis of Plates Reinforced with Beams, *Computational Mechanics* **26**, 66-74.
- [17] **Erkmen R.E. and Bradford M.A.**, (2009), Nonlinear elastic analysis of composite beams curved in-plan, *Engineering Structures* **31**, 1613-1624.
- [18] **FEMAP for Windows**, (2008), Finite element modeling and post-processing software. Help System Index, Version 10.

- [19] **Fernandes G.R. and Venturini W.S.**, (2005), Building Floor Analysis by the Boundary Element Method, *Computational Mechanics* **35**, 277-291.
- [20] **Fernandes G.R. and Venturini W.S.**, (2007), Non-linear boundary element analysis of floor slabs reinforced with rectangular beams, *Engineering Analysis with Boundary Elements* **31**, 721-737.
- [21] **Fujicubo M. and Kaeding P.**, (2002), New simplified approach to collapse analysis of stiffened plates, *Marine Structures* **15**, 251-283.
- [22] **Fujikubo M., Yao T., Khedmatic M.R., Harada M. and Yanagihara D.**, (2005) Estimation of ultimate strength of continuous stiffened panel under combined transverse thrust and lateral pressure Part 1: Continuous plate, *Marine Structures* **18**, 383-410.
- [23] **Girhammar U.A. and Pan D.H.**, (2007) Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns, *International Journal of Mechanical Sciences* **49**, 239-255.
- [24] **Hartmann F. and Katz C.**, (2002), *Statik mit finiten Elementen*, Springer, Berlin-Heidelberg.
- [25] **Hu C. and Hartley G.A.**, (1994), Elastic Analysis of Thin Plates with Beam Supports, *Engineering Analysis with Boundary Elements* **13**, 229-238.
- [26] **Jürges, T.**, (2000), *Die Entwicklung der Biege, Schub und Verformungsbemessung im Stahlbetonbau und ihre Anwendung in der Tragwerklehre*, Von der Fakultät für Architektur der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation.
- [27] **Katsikadelis J.T. and Nerantzaki M.S.**, (1994), Nonlinear analysis of plates by the analog equation method, *Comput. Mech.* **14**, 154-164.
- [28] **Katsikadelis J.T. and Armenakas A.E.**, (1983), Numerical evaluation of double integrals with a logarithmic or Cauchy-type singularity, *Journal of Applied Mechanics (ASME)* **50**, 682-684.
- [29] **Katsikadelis J.T. and Armenakas A.E.**, (1989), A new boundary equation solution to the plate problem, *Journal of Applied Mechanics (ASME)* **56**, 364-374.
- [30] **Katsikadelis J.T. and Babouskos N.G.**, (2010), Postbuckling analysis of viscoelastic plates with fractional derivative models, *Engineering Analysis with Boundary Elements* **34**, 1038-1048.
- [31] **Katsikadelis J.T. and Kandilas C.B.**, (1997), Solving the plane elastostatic problem by the analog equation method, *Computers & Structures*, **64** (1-4), 305-312.
- [32] **Katsikadelis J.T. and Tsiatas G.C.**, (2003), Nonlinear dynamic analysis of heterogeneous orthotropic membranes by the analog equation method, *Engineering Analysis with Boundary Elements* **27**, 115-124.

- [33] **Katsikadelis J.T.**, (1994), The Analog Equation Method: A Powerful BEM–Based Solution Technique for Solving Linear and Non–linear Engineering Problems, *Boundary Element Method XVI*, 167–182.
- [34] **Katsikadelis J.T.**, (2002), The Analog Equation Method. A Boundary – only Integral Equation Method for Nonlinear Static and Dynamic Problems in General Bodies, *Theoretical and Applied Mechanics* **27**, 13-38.
- [35] **Katsikadelis J.T.**, (2008), A generalized Ritz Method for Partial Differential Equations in Domains of Arbitrary Geometry Using Global Shape Functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements* **32** (5), 353–367 (doi:10.1016/j.enganabound.2007.001).
- [36] **Katsikadelis J.T.**, (2009) The meshless analog equation method. – I. Solution of elliptic partial differential equations, *Archive of Applied Mechanics* **79**, 557–578 (DOI 10.1007/s00419-008-0294-6).
- [37] **Khalil M.R., Olson M.D. and Anderson D.L.**, (1988), Nonlinear Dynamic Analysis of Stiffened Plates, *Computers & Structures* **29** (6), 929-941.
- [38] **Kiusalaas J.**, (2009), *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*, Cambridge University Press, New York.
- [39] **Koko T.S. and Olson M.D.**, (1991), Non-Linear Analysis of Stiffened Plates Using Super Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **31**, 319-343.
- [40] **Kolli M. and Chandrashekhara K.**, (1997), Non-Linear Static and Dynamic Analysis of Stiffened Laminated Plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **32** (1) 89-101.
- [41] **Liew K.M., Peng L.X. and Kitipornchai S.**, (2007), Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a meshfree method, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* **196**, 2358–2376.
- [42] **Lohmeyer G.**, (1994), *Stahlbetonbau: Bemessung, Konstruktion, Ausführung*, B.G. Teubner, Stuttgart.
- [43] **Mansfield E.H.**, (1989), *The Bending and Stretching of Plates*, Second Edition, Cambridge University Press.
- [44] **Massonet, C.**, (1950), Method of Calculations for Bridges with Several Longitudinal Beams Taking into Account their Torsional Resistance, *International Association for Bridges and Structural Engineering*, 147-182.
- [45] **Mohri F., Azrar L. and Potier-Ferry M.**, (2001), Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections, *Thin-Walled Structures* **39**, 907-938.
- [46] **Mohri F., Azrar L. and Potier-Ferry M.**, (2002), Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams, *Thin-Walled Structures* **40**, 1013-1036.
- [47] **Mohri F., Azrar L. and Potier-Ferry M.**, (2004), Vibration analysis of buckled thin-walled beams with open sections, *Journal of Sound and Vibration* **275**, 434-446.

- [48] **Moré J.J., Garbow B. and Hillstrom K.**, (1980), *User guide for MINPACK-1*, Argonne National Labs Report ANL-80-74, Argonne, Illinois.
- [49] **Murray N.W.**, (1984), *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures (Oxford Engineering Science Series)*, Oxford University Press, UK.
- [50] **Ng S.F., Cheung M.S. and Xu T.**, (1990), A Combined Boundary Element and Finite Element Solution of Slab and Slab-on-Girder Bridges, *Computers & Structures*, **37** 1069-1075.
- [51] **Nguyen Q.H., Martinelli E. and Hjiat M.**, (2011), Derivation of the exact stiffness matrix for a two-layer Timoshenko beam element with partial interaction, *Engineering Structures* **33**, 298–307.
- [52] **Ojeda R., Prusty B.G., Lawrence N. and Thomas G.**, (2007), A new approach for the large deflection finite element analysis of isotropic and composite plates with arbitrary orientated stiffeners, *Finite elements in Analysis and Design* **43**, 989-1002.
- [53] **Oliveira Neto L. and Paiva J.B.**, (2003), A special BEM for elastostatic analysis of building floor slabs on columns, *Computers and Structures* **81**, 359–372.
- [54] **Oven V.A., Burger I.W., Plankt R.J. and Abdul Wali A.A.**, (1997), An Analytical Model for the Analysis of Composite Beams with Partial Interaction, *Computers & Structures* **62** (3), 493-504.
- [55] **Paik J.K. and Lee M.S.**, (2005), semi-analytical method for the elastic-plastic large deflection analysis of stiffened panels under combined biaxial compression/tension, biaxial in-plane bending, edge shear, and lateral pressure loads, *Thin-Walled Structures* **43** 375–410.
- [56] **Palani G.S., Iyer N.R. and Appa Rao T.V.S.R.**, (1992), An Efficient Finite Element Model for the Static and Vibration Analysis of Eccentrically Stiffened Plates/Shells, *Computers & Structures* **43** (4), 651-661.
- [57] **Partridge P.W. and Brebbia C.A.**, (1991), The dual reciprocity boundary element method for the eigenvalue analysis of Helmholtz problems, *Advances in Engineering Software* **13** (1) 2-16.
- [58] **Powell M.J.D.**, (1970), *A hybrid method for nonlinear equations*, 10 Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, P. Rabinowitz, ed., Gordon and Breach.
- [59] **Prathap G. and Varadan T.K.**, (1978), Large Amplitude Flexural Vibration of Stiffened Plates, *Journal of Sound and Vibration* **57** (4), 583-593.
- [60] **Ramm E. and Hofmann T.J.**, (1995), *Stabtragwerke, Der Ingenieurbau*, Ed.G. Mehlhorn, Band Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn, Berlin,.
- [61] **Ranzi G., Dall'Asta A., Ragni L. and Zona A.**, (2010), A geometric nonlinear model for composite beams with partial interaction, *Engineering Structures* **32**, 1384-1396.
- [62] **Reddy J.N.**, (2004), *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press.

- [63] **Rombach G.**, (2000), *Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau*, Ernst & Sohn, Berlin.
- [64] **Ronagh H.R., Bradford M.A. and Attard M.M.**, (2000a), Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I: Theory, *Computers and Structures* **77**, 285-99.
- [65] **Ronagh H.R., Bradford M.A. and Attard M.M.**, (2000b), Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II: Applications, *Computers and Structures* **77**, 301-313.
- [66] **Rothert H. and Gensichen V.**, (1987), *Nichtlineare Stabstatik*, Springer-Verlag, Berlin.
- [67] **Sapountzakis E.J. and Dikaros I.C.**, (2011), Nonlinear Flexural-Torsional Dynamic Analysis of Beams of Arbitrary Cross section by BEM, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **46**, 782-794.
- [68] **Sapountzakis E.J. and Katsikadelis J.T.**, (1992), Unilaterally supported plates on elastic foundations by the boundary element method, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME* **59**, 580-586.
- [69] **Sapountzakis E.J. and Katsikadelis J.T.**, (2000), Analysis of Plates Reinforced with Beams, *Computational Mechanics* **26**, 66-74.
- [70] **Sapountzakis E.J. and Mokos V.G.**, (2003), Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM, *Computational Mechanics* **30**, 131-142.
- [71] **Sapountzakis E.J. and Mokos V.G.**, (2004), Nonuniform torsion of bars of variable cross section, *Computers and Structures* **82**, 703-715.
- [72] **Sapountzakis E.J. and Mokos V.G.**, (2007), Analysis of Plates Stiffened by Parallel Beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **70**, 1209-1240.
- [73] **Sapountzakis E.J. and Mokos V.G.**, (2008), An Improved Model for the Analysis of Plates Stiffened by Parallel Beams with Deformable Connection, *Computers & Structures* **86**, 2166-2181.
- [74] **Sapountzakis E.J. and Tsipiras V.J.**, (2010), Nonlinear Elastic Nonuniform Torsion of Bars of Arbitrary Cross Section by BEM, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **45**, 63-74.
- [75] **Sapountzakis E.J.**, (2001), Nonuniform Torsion of Multi-Material Composite Bars by the Boundary Element Method, *Computers and Structures* **79**, 2805-2816.
- [76] **Sheikh A.H. and Mukhopadhyay M.**, (2000), Geometric nonlinear analysis of stiffened plates by the spline finite strip method, *Computers and Structures* **76**, 765-785.
- [77] **Sheikh A.H. and Mukhopadhyay M.**, (2002), Linear and nonlinear transient vibration analysis of stiffened plate structures, *Finite Elements in Analysis and Design* **38**, 477-502.
- [78] **Shin D.K.**, (1999), Postbuckling Behavior of Rectangular Stiffened Plates Considering Buckled Pattern Change, *KSCCE Journal of Civil Engineering* **3** (4), 319-330.

- [79] **Siemens PLM Software Inc.**, (2008), NX Nastran User's Guide.
- [80] **Slivker V.**, (2007), *Mechanics of Structural Elements – Theory and Applications*, Springer Berlin Heidelberg New York.
- [81] **Sousa Jr. J.B.M. and da Silva A.R.**, (2007), Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements, *Finite Elements in Analysis and Design* **43**, 954-964.
- [82] **Sousa Jr. J.B.M., Oliveira C.E.M. and da Silva A.R.**, (2010), Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam-columns with partial interaction, *Journal of Constructional Steel Research* **66**, 772-779.
- [83] **Szillard R.**, (2004), *Theories and Applications of Plate Analysis*, John Wiley & Sons, INC, New Jersey.
- [84] **Tanaka M. and Bercin A.N.**, (1997), A Boundary Element Method Applied to the Elastic Bending Problem of Stiffened Plates, *Boundary Element Method XIX*, 203-212.
- [85] **Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S.** (1959) *Theory of plates and shells*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York.
- [86] **Turvey G.J. and Salehi M.**, (1997), Circular Plates with One Diametral Stiffener-An Elastic Large Deflection Analysis, *Computers & Structures* **63** (4), 775-783.
- [87] **Turvey G.J. and Salehi M.**, (1998), Elastic Large Deflection Analysis of Stiffened Annular Sector Plates, *International Journal of Mechanical Sciences* **40**, 51-70.
- [88] **Turvey G.J. and Salehi M.**, (2008), Elasto-plastic large deflection response of pressure loaded circular plates stiffened by a single diametral stiffener, *Thin-Walled Structures* **46**, 991-1002.
- [89] **Turvey G.J. and Salehi M.**, (2010), Cross-Stiffened Circular Plates: An Elasto-Plastic Large Deflection Analysis, *Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology*.
- [90] **Ueda Y., Rashed S.M.H. and Paik J.K.**, (1987), An Incremental Galerkin Method For Plates and Stiffened Plates, *Computers & Structures* **27** 147-156.
- [91] **Varadan T.K. and Pandalai K.A.V.**, (1979), Large Amplitude Flexural Vibration of Eccentrically Stiffened Plates, *Journal of Sound and Vibration* **67** (3), 329-340.
- [92] **Venugopal Rao D., Sheikh A.H. and Mukhopadhyay M.**, (1993), A finite element large displacement analysis of stiffened plates, *Computers & Structures* **47**, 987-993.
- [93] **Vlasov V.**, (1963), *Thin-walled elastic beams*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
- [94] **Vörös G.M.**, (2009), Buckling and free vibration analysis of stiffened panels, *Thin-Walled Structures* **47**, 382-390.
- [95] **Washizu K.**, (1975), *Variation Methods in Elasticity and Plasticity*, Second Edition, Pergamon Press.

- [96] **Wen P.H., Aliabadi M.H. and Young A.**, (2002), Boundary element analysis of shear deformable stiffened plates, *Engineering Analysis with Boundary Elements* **26**, 511-520.
- [97] **Yu K.H., Kadarman A.H. and Djojodihardjo H.**, (2010), Development and implementation of some BEM variants – A critical review, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, doi:10.1016/j.enganabound.2010.05.001.
- [98] **Zona A. and Ranzi G.**, (2011), Finite element models for nonlinear analysis of steel–concrete composite beams with partial interaction in combined bending and shear, *Finite Elements in Analysis and Design* **47**, 98–118.
- [99] **Κατσικαδέλης Ι.Θ.**, (1999), *Συνοριακά Στοιχεία στην Επιστήμη του Μηχανικού – Θεωρία και εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
- [100] **Κατσικαδέλης Ι.Θ.**, (2010), *Συνοριακά Στοιχεία Τομός II: Ανάλυση Πλακών*, Έκδοση 2^η, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [101] **Μπαμπούσκος Ν.Γ.**, (2011), *Ανάλυση και Βελτιστοποίηση Ελαστικών και Βισκοελαστικών Πλακών με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων*, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [102] **Μώκος Β.Γ.**, (2007), *Συμβολή στη Γενικευμένη Θεωρία Σύνθετων Ραβδωτών Φορέων με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων*, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [103] **Νεραντζάκη Μ.Σ.**, (1991), *Μη Γραμμική Ανάλυση Πλακών με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων*, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [104] **Παπαδρακάκης Μ.**, (2001), *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- [105] **Σαπουντζάκης Ε.Ι.**, (1991), *Συμβολή στην Επίλυση Προβλημάτων Στατικής και Δυναμικής Συμπεριφοράς Πλακών με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων*, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [106] **Σαπουντζάκης Ε.Ι.**, (2003), *Θεωρία Πλακών*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα.