



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Καμπύλες Χωροπλήρωσης

Βασίλης Μ. Καρανικόλας

Επιβλέπων: Κοντοκώστας Δημήτρης
Επ. Καθηγητής ΕΜΠ

Καμπύλες Χωροπλήρωσης

Βασίλης Μ. Καρανικόλας

13 Σεπτεμβρίου 2020

Η τριμελής επιτροπή απαρτίζεται από:

- Κοντοκώστας Δημήτρης, Επ. Καθηγητής ΕΜΠ
- Σμυρλής Γεώργιος, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
- Δούκα Ευανθία, Επ. Καθηγήτρια ΕΜΠ

Περιεχόμενα

1	Γενικά	5
1.1	Τοπολογία	5
1.1.1	Συμπάγεια, συνεκτικότητα	5
1.1.2	Το σύνολο του Cantor	13
2	Χώροι Peano	23
3	Η καμπύλη του Hilbert	27
4	Καμπύλες Lebesgue	35
4.0.1	Προσεγγιστικά Πολύγωνα	38
5	Αριθμητικό μοντέλο	43
5.1	Καμπύλη του Hilbert	43
5.2	Καμπύλη του Lebesgue	48

Περίληψη

Το 1890, ο Peano ανακάλυψε μία συνεχή καμπύλη, που είναι τώρα γνωστή ως “Καμπύλη Peano”, που διέρχεται από κάθε σημείο του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$. Η αρχική ιδέα για τον Peano, ήταν το αποτέλεσμα του Georg Cantor ότι τόσο το ευθύγραμμο τμήμα, όσο και το τετράγωνο περιέχουν το ίδιο πλήθος σημείων. Ο Peano κατασκεύασε μία καμπύλη που ήταν συνεχής και επί του τετραγώνου. Φυσικά αυτή η καμπύλη δε μπορεί να είναι 1–1.

Ήταν συνηθισμένη η συσχέτιση των ασαφών εννοιών της λεπτότητας και του μονοδιάστατου μιας καμπύλης. Μέχρι τότε όλες οι συνηθέστερες καμπύλες ήταν κατά τμήματα διαφορίσιμες, και τέτοιες καμπύλες δεν μπορούν να γεμίσουν το μοναδιαίο τετράγωνο. Επομένως, η καμπύλη πλήρωσης χώρου του Peano βρέθηκε να είναι εξαιρετικά περίεργη.

Από το παράδειγμα του Peano, ήταν εύκολο να παράγει κανείς καμπύλες που γεμίζουν οποιοδήποτε n –διάστατο μοναδιαίο κύβο ή και ακόμη ολόκληρο τον ευκλείδειο n –διάστατο χώρο.

Οι περισσότερες γνωστές καμπύλες που γεμίζουν τον χώρο κατασκευάζονται αναδρομικά ως το όριο κάποιας ακολουθίας πολυγωνικών γραμμών, έкаστη ολοένα και πιο κοντά στην οριακή καμπύλη.

Το πρωτοποριακό άρθρο του Peano, δεν περιείχε κανένα σχήμα της κατασκευής του, και η καμπύλη που κατασκεύασε βασίστηκε σε τριαδικά αναπτύγματα και γραμμικούς τελεστές ανάκλασης. Αλλά η γραφική κατασκευή ήταν σαφέστατη σε αυτόν –έκανε ένα διακοσμητικό που δείχνει μια εικόνα της καμπύλης στο σπίτι του στο Τορίνο. Το άρθρο του Peano τελειώνει επίσης παρατηρώντας ότι η τεχνική μπορεί προφανώς να επεκταθεί σε άλλες βάσεις αριθμών εκτός από τη βάση 3. Η επιλογή του να αποφύγει οποιαδήποτε γραφική απεικόνιση ήταν, χωρίς

αμφιβολία, κίνητρο μιας επιθυμίας για μια καλά τεκμηριωμένη, εντελώς αυστηρή απόδειξη που δεν βασίζεται ούτε στο ελάχιστο στις εικόνες. Την εποχή εκείνη (που θεμελιωνόταν η γενική τοπολογία), τα γραφικά επιχειρήματα εξακολουθούσαν να περιλαμβάνονται σε αποδείξεις, αλλά συχνά οδηγούσαν σε προβλήματα τις αποδείξεις τους.

Σε αυτό το κείμενο παρουσιάζουμε στον αναγνώστη δύο βασικές κατασκευές καμπύλων χωροπλήρωσης. Η μία που αναφέραμε πιο πάνω – του Peano, και η άλλη, που εμπλέκει το σύνολο Cantor και την τριαδική αναπαράσταση των αριθμών του μοναδιαίου διαστήματος. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει μία απείρως επαναλαμβανόμενη διαδικασία που διαμερίζει τον χώρο και προσπαθεί να κατασκευάσει μία καμπύλη που διέρχεται από κάθε τμήμα. Στο όριο, η επιθυμητή καμπύλη παράγεται.

Η ίδια η μέλετη του συνόλου Cantor, αποδείχθηκε θεμελιώδης, από μόνη της, καθώς το σύνολο αυτό, αποτελεί “αρχικό” αντικείμενο στην κατηγορία των συμπαγών τοπολογικών χώρων, υπό την έννοια ότι κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff είναι η συνεχής εικόνα του. Κάποιος θα περίμενε ότι αυτό θα συνέβαινε και με το ίδιο το μοναδιαίο διάστημα· αυτό όμως δεν ισχύει. Το μοναδιαίο διάστημα έχει πολλές περισσότερες ιδιότητες: είναι συνεκτικό, τοπικά συνεκτικό, και δεύτερο αριθμήσιμο. Αν περιοριστούμε βέβαια στους τοπολογικούς χώρους που είναι συνεκτικοί, τοπικά συνεκτικοί και δεύτεροι αριθμήσιμοι, παίρνουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα (θεώρημα Hahn-Mazurkiewicz). Σε αυτό το κείμενο παρουσιάζουμε τις βασικές αφηρημένες κατασκευές και δείχνουμε ότι η καμπύλη του Lebesgue είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος Hahn-Mazurkiewicz.

Δείχνουμε επίσης πως να κατασκευάσουμε προσεγγιστικές καμπύλες για τις καμπύλες χωροπλήρωσης και να οπτικοποιήσουμε τα πρώτα λιγα βήματα των προσεγγίσεων αυτών. Προτιμήσαμε τη γλώσσα προγραμματισμού C έναντι της Fortran, γιατί η πρώτη εγγενώς παρέχει τη δυνατότητα ελέγχου του κώδικα σε χαμηλό επίπεδο, και αυτό επιτρέπει την εισαγωγή βελτιώσεων σε κάθε υλοποιούμενο αλγόριθμο.

Abstract

In 1890, Peano discovered a continuous curve, now called the Peano curve, that passes through every point of the unit square (Peano (1890)). His purpose was to construct a continuous mapping from the unit interval onto the unit square. Peano was motivated by Georg Cantor's earlier counterintuitive result that the infinite number of points in a unit interval is the same cardinality as the infinite number of points in any finite-dimensional manifold, such as the unit square. The problem Peano solved was whether such a mapping could be continuous; i.e., a curve that fills a space. Peano's solution does not set up a continuous one-to-one correspondence between the unit interval and the unit square, and indeed such a correspondence does not exist.

It was common to associate the vague notions of thinness and 1-dimensionality to curves; all normally encountered curves were piecewise differentiable (that is, have piecewise continuous derivatives), and such curves cannot fill up the entire unit square. Therefore, Peano's space-filling curve was found to be highly counterintuitive.

From Peano's example, it was easy to deduce continuous curves whose ranges contained the n -dimensional hypercube (for any positive integer n). It was also easy to extend Peano's example to continuous curves without endpoints, which filled the entire n -dimensional Euclidean space (where n is 2, 3, or any other positive integer).

Most well-known space-filling curves are constructed iteratively as the limit of a sequence of piecewise linear continuous curves, each one more closely approximating the space-filling limit.

Peano's ground-breaking article contained no illustrations of his construction, which is defined in terms of ternary expansions and

a mirroring operator. But the graphical construction was perfectly clear to him—he made an ornamental tiling showing a picture of the curve in his home in Turin. Peano’s article also ends by observing that the technique can be obviously extended to other odd bases besides base 3. His choice to avoid any appeal to graphical visualization was, no doubt, motivated by a desire for a well-founded, completely rigorous proof owing nothing to pictures. At that time (the beginning of the foundation of general topology), graphical arguments were still included in proofs, yet were becoming a hindrance to understanding often counterintuitive results.

In this text, we will present to the reader two main constructions of space filling curves: The one mentioned just above, due to Peano and the other one which involves the Cantor set and the ternary number representation. In both cases, there is an infinitely repeating process which partitions the space and tries to construct a curve passing from each set of the partition. In the limit, the desired result is extracted. The investigation of the Cantor set, was proven to be fundamental, as on its own, is a kind of “initial” object in the category of compact spaces, in the sense that every compact set is the continuous image of the Cantor set. One would expect that the unit interval would have this property too; but this is not true, as the unit interval is a Hausdorff topological space furnished with rich separation and countability properties: connectedness, local connectedness and second countability. It was proven (Hahn-Mazurkiewicz theorem) that if we restrict to connected, local connected and second countable spaces, any such space is the continuous image of the unit interval. In this text we present the basic abstract constructions and we show that the case of the Lebesgue curve is essentially a very special case of the Hahn-Mazurkiewicz theorem.

We also prove how to construct approximating curves, and try to visualize how a space filling curve is generated, at least in its first steps. We prefer the C programming language over Fortran for this purpose as the former enables us to fine tune the low-level code flow.

Κεφάλαιο 1

Γενικά

Ορισμός 1.1. Ας είναι (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος. Μία συνεχής απεικόνιση

$$f : [0, 1] \longrightarrow X$$

ονομάζεται **καμπύλη (curve)**

Στο κείμενο αυτό θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ οπότε ο X δέχεται μέτρο. Γράφουμε με J_n, λ_n , το n -διάστατο μέτρο Jordan και Lebesgue αντίστοιχα στον \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε $I = [0, 1]$, $Q = I \times I$.

Ορισμός 1.2. Ας είναι N κάποιος θετικός φυσικός. Μία καμπύλη $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι **καμπύλη χωροπλήρωσης (space filling curve)** αν η εικόνα της, $f(I)$ είναι Jordan-μετρήσιμη και $J_n(f(I)) > 0$

1.1 Τοπολογία

1.1.1 Συμπάγεια, συνεκτικότητα

Ορισμός 1.3. Ας είναι X σύνολο. Μία οικογένεια συνόλων \mathcal{U} , με την ιδιότητα $\bigcup \mathcal{U} \supseteq X$ ονομάζεται **κάλυμμα (cover)** του X . Αν $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ είναι επίσης κάλυμμα, τότε η \mathcal{F} ονομάζεται υποκάλυψη της \mathcal{U} .

Ας είναι (X, τ) τοπολογικός χώρος. Ένα κάλυμμα \mathcal{U} του X ονομάζεται ονομάζεται **ανοιχτή κάλυψη (open cover)** αν $\mathcal{U} \subseteq \tau$.

Ορισμός 1.4. Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) ονομάζεται **συμπαγής (compact)** αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του X έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Είναι άμεσο από τον ορισμό (το αντιθετοαντίστροφο και συμπληρώματα των ανοιχτών του καλύμματος) ότι

Πρόταση 1.1 *Ο τοπολογικός χώρος (X, τ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε οικογένεια $\mathcal{F} = \{F_i | i \in I\}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα ότι $\bigcap \mathbf{F} \neq \emptyset$ για κάθε $\mathbf{F} \subseteq \mathcal{F}$ πεπερασμένο, ικανοποιεί την $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Πρόταση 1.2 *Ας είναι $a < b \in \mathbb{R}$. Τότε το $X = [a, b]$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Ας είναι \mathcal{U} μία ανοιχτή κάλυψη του X . Ορίζουμε

$$I = \{x \in X : \forall a \leq t \leq x, [a, t] \text{ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη}\}.$$

Προφανώς $a \in I$, το I είναι άνω φραγμένο από το b , και άρα έχει supremum. Γράφουμε $m = \sup I$. Δείχνουμε ότι $m = b$. Αν $m < b$, τότε υπάρχει κάποιο $U_m \in \mathcal{U}$ ώστε $m \in U_m$. Όμως το U_m είναι ανοιχτό και υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $(m - \epsilon, m + \epsilon) \subseteq U_m$. Από τον χαρακτηρισμό του supremum μπορούμε να βρούμε $x \in I$ ώστε $m - \epsilon < x \leq m$ και επομένως το $[a, x]$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη \mathcal{F}_x . Τότε το $\mathcal{F}_x \cup \{U_m\}$ είναι πεπερασμένη υποκάλυψη του $[a, y]$ για όλα τα $x \leq y < m + \epsilon$ που μας δείχνει ότι $\sup I \geq m + \epsilon$, άτοπο. Άρα $m = b$. \square

Λήμμα 1.3 *Ας είναι X, Y δύο τοπολογικοί χώροι, ο Y συμπαγής, $G \subseteq X \times Y$ κάποιο ανοιχτό σύνολο στην τοπολογία γινόμενο, ώστε για κάποιο $x \in X$, $\{x\} \times Y \subseteq G$. Τότε μπορούμε να βρούμε $U \subseteq X$ ανοιχτή περιοχή του x ώστε $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq G$.*

Απόδειξη. Για κάθε $y \in Y$ μπορούμε να βρούμε $V_y \subseteq Y$ και $U_y \subseteq X$ ανοιχτά ώστε $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq G$. Η οικογένεια συνόλων $(V_y)_{y \in Y}$ είναι μία ανοιχτή κάλυψη του Y και λόγω συμπαγείας μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος $y_1, y_2, \dots, y_m \in Y$ ώστε $\bigcup_{k=1}^m V_{y_k} = Y$. Γράφουμε $U = \bigcap_{k=1}^m U_{y_k}$ και παρατηρούμε ότι το U είναι ανοιχτό μη κενό –γιατί περιέχει το x . Τότε

$$\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq \bigcup_{k=1}^m U \times V_{y_k} \subseteq \bigcup_{k=1}^m U_{y_k} \times V_{y_k} \subseteq G$$

□

Πρόταση 1.4 Αν X, Y είναι δύο συμπαγείς τοπολογικοί χώροι, τότε η τοπολογία γινόμενο $X \times Y$ είναι συμπαγής επίσης.

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{G} = (G_a)_{a \in A}$ μία ανοιχτή κάλυψη του $X \times Y$. Παίρνουμε $x \in X$ τυχόν αλλά σταθερό. Επειδή ο Y είναι συμπαγής (και κατά μείζονα λόγο ο $\{x\} \times Y$), μπορούμε να βρούμε $N_x \subseteq \mathcal{G}$ πεπερασμένο που αποτελεί και κάλυμμα του $\{x\} \times Y$, γράφουμε δε την ένωση $N_x = \bigcup \mathcal{N}_x$. Επικαλούμαστε το λήμμα 1.3 για να βρούμε ένα ανοιχτό $U_x \subseteq X$ που περιέχει το x και $\{x\} \times Y \subseteq U_x \times Y \subseteq N_x$. Τα $(U_x)_{x \in X}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του X και λόγω συμπάγειας μπορούμε να βρούμε $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ ώστε τα $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_m}$ καλύπτουν τον X . Κάθε $U_{x_i} \times Y$ περιέχεται στο N_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, m$ και επομένως και τα $N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_m}$ καλύπτουν τον $X \times Y$. Η πεπερασμένη οικογένεια $\bigcup_{i=1}^m N_{x_i}$ είναι μία πεπερασμένη υποκάλυψη που ικανοποιεί το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.5. Είναι γνωστό ότι οποιοδήποτε γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων, είναι επίσης συμπαγές. Η απόδειξη αυτού απαιτεί την ισχύ του αξιώματος την επιλογής. Το θεώρημα, είναι γνωστό ως θεώρημα Tychonoff και αποδεικνύεται ισοδύναμο προς το αξίωμα της επιλογής. Εδώ παρουσιάζουμε την πιο απλουστευμένη του εκδοχή που αφορά στην περίπτωση των πεπερασμένων γινομένων.

Πρόταση 1.6 Αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι, ο X συμπαγής και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής, τότε το $f(X)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $(V_i)_{i \in I}$ είναι ενα ανοιχτή κάλυψη του $f(X)$, τότε το $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του X , και μπορούμε να βρούμε πεπερασμένη υποκάλυψη $f^{-1}(V_{i_1}), f^{-1}(V_{i_2}), \dots, f^{-1}(V_{i_m})$. Τότε
$$\bigcup_{k=1}^m V_{i_k} \supseteq \bigcup_{k=1}^m f(f^{-1}(V_{i_k})) = f\left(\bigcup_{k=1}^m f^{-1}(V_{i_k})\right) = f(X). \quad \square$$

Πρόταση 1.7 Ας είναι X τοπολογικός χώρος Hausdorff και $K \subseteq X$ συμπαγής. Τότε το K είναι κλειστό.

Απόδειξη. Ας είναι $G = X \setminus K$ και $y \in G$. Τότε για κάθε $x \in K$ βρίσκουμε περιοχές U_x, V_x του x και του y αντίστοιχα ώστε $U_x \cap V_x = \emptyset$.

Το σύνολο των περιοχών $\{U_x \mid x \in K\}$ είναι ανοιχτή κάλυψη για το K και επομένως βρίσκουμε πεπερασμένα το πλήθος $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_m}$ που αποτελούν κάλυμμα του K . Τότε όμως η $V = \bigcap_{k=1}^m V_{x_k}$ είναι ανοιχτή περιοχή του y και επιπλέον $V \cap K \subseteq \bigcup_{k=1}^m V \cap U_{x_k} \subseteq \bigcup_{k=1}^m V_{x_k} \cap U_{x_k} = \emptyset$. Επομένως $V \subseteq K^c = G$ και άρα G είναι ανοιχτό και το K κλειστό. \square

Πρόταση 1.8 *Ας είναι X, Y δύο τοπολογικοί χώροι με τον X συμπαγή και τον Y Hausdorff. Αν η $f : X \rightarrow Y$ είναι 1-1 και επί συνεχής τότε είναι τοπολογικός ομοιομορφισμός¹*

Απόδειξη. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι η f μεταφέρει κλειστά σε κλειστά σύνολα. Αν όμως $F \subseteq X$ είναι κλειστό, τότε είναι συμπαγές και άρα συμπαγές είναι και το $f(F)$ στον Y , επομένως είναι κλειστό. \square

Ιδιαίτερος για τους μετρικούς χώρους έχουμε χρήσιμες εναλλακτικές ισοδύναμες διατυπώσεις της συμπαγείας. Αλλά πριν προχωρήσουμε δίνουμε μετρικούς ορισμούς:

Ορισμός 1.5. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος

- (μονο για μετρικούς χώρους) **ολικά φραγμένος (totally bounded)** αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $F_\epsilon \subseteq X$ ώστε $\bigcup_{x \in F_\epsilon} B(x; \epsilon) \supseteq X$
- **ακολουθιακά συμπαγής (sequentially compact)** αν κάθε ακολουθία στοιχείων $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στον X
- **αριθμήσιμα συμπαγής (countably compact)** αν κάθε αριθμήσιμο ανοιχτό κάλυμμα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.
- (μόνο για μετρικούς χώρους) **πλήρης (complete)** αν κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα.

Πρόταση 1.9 *Για έναν μετρικό χώρο (X, ρ) τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

¹τοπολογικός ομοιομορφισμός μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων X, Y είναι μία απεικόνιση 1-1 και επί που είναι συνεχής και έχει επίσης συνεχή αντίστροφη

1. Ο X είναι συμπαγής
2. Κάθε άπειρο υποσύνολο του X έχει σημείο συσσώρευσης
3. Ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής
4. ο X είναι ολικά φραγμένος και πλήρης

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο ??

Παρατήρηση 1.10. Ιδιαίτερος, στον $X = \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ τα συμπαγή υποσύνολα είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα.

Στο σημείο αυτό, υπενθυμίζουμε τον χαρακτηρισμό του Cantor για τους πλήρεις μετρικούς χώρους:

Πρόταση 1.11 Για έναν μετρικό χώρο (X, ρ) τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1. Ο X είναι πλήρης
2. Για κάθε φθίνουσα ακολουθία² $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από μη κενά κλειστά υποσύνολα του X τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam } C_n = 0$, υπάρχει (ακριβώς) ένα $x \in X$ ώστε $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Απόδειξη. Για το ευθύ, ας είναι $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία όπως στο (2). Αν $x, x' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x, x' \in C_n$ και άρα $\rho(x, x') \leq \text{diam } C_n$, επομένως $\rho(x, x') \leq \inf \text{diam } C_n = 0$. Άρα $x = x'$ και η τομή είναι το πολύ μονοσύνολο. Για την ύπαρξη: Ας είναι $x_n \in C_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εφόσον όλα τα C_n είναι μη κενά, $n \in \mathbb{N}$). Η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy: πράγματι, αν $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει ένα $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για όλα τα $n \geq N_0$ να ισχύει $\text{diam } C_n < \epsilon$. Αν $m \geq n \geq N_0$ τότε $x_m \in C_n$ και άρα $\rho(x_n, x_m) \leq \text{diam } C_n < \epsilon$. Επομένως η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγλίνουσα προς κάποιο $x \in X$. Όμως τα C_n είναι όλα κλειστά και επομένως το $x \in C_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Αντιστρόφως, ας είναι $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία Cauchy. Γράφουμε $A_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ και $C_n = \overline{A_n}$. Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq n \geq N_0$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\epsilon$. Επομένως για

²Μία ακολουθία συνόλων $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται φθίνουσα αν $C_{n+1} \subseteq C_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$k \geq N_0$ έχουμε $\text{diam } C_k = \text{diam } A_k = \sup_{m \geq n \geq k} \rho(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$ και έτσι η ακολουθία $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του (2) και άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x \in X$ ώστε $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Είναι φανερό ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ αφού $\rho(x, x_n) \leq \text{diam}(C_n)$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(C_n) = 0$. \square

Ορισμός 1.6. Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος. Ο X ονομάζεται **συνεκτικός (connected)** αν δε μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση δύο μη τετριμμένων ανοικτών υποσυνόλων του. Δηλαδή ο X είναι συνεκτικός αν και μόνον αν τα μοναδικά σύνολα που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά είναι το X και το \emptyset .

Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **οδικά συνεκτικός (path connected)** αν για κάθε δύο του σημεία $a, b \in X$ υπάρχει μια συνεχής $f : [0, 1] \rightarrow X$ ώστε $f(0) = a, f(1) = b$.

Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **κατά τόξα συνεκτικός (arc connected)** αν για κάθε δύο του σημεία $a, b \in X$ υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f : [0, 1] \rightarrow X$ ώστε $f(0) = a, f(1) = b$.

Ο τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **τοπικά συνεκτικός (locally connected)** αν κάθε σημείο του δέχεται τοπική βάση από ανοικτά και συνεκτικά σύνολα.

Παρατήρηση 1.12. Είναι φανερό ότι κάθε οδικά συνεκτικός τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Όμως για τα ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}$ οι δύο έννοιες ταυτίζονται. Κάθε κατά τόξα συνεκτικός χώρος είναι και οδικά συνεκτικός, βέβαια δεν ισχύει το αντίστροφο εκτός αν ισχύουν περαιτέρω υποθέσεις.

Πρόταση 1.13 Η εικόνα ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι συνεκτική.

Απόδειξη. Ας είναι $f : X \rightarrow Y$ συνεχής και ο X συνεκτικός. Εργαζόμαστε στη σχετική τοπολογία του $f(X)$. Αν $A, B \subseteq Y$ ξένα ανοικτά στη σχετική τοπολογία ώστε $f(X) = A \cup B$ τότε οι αντίστροφές τους εικόνες $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ είναι ανοικτά, ξένα και επιπλέον $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(f(X)) = X$ επομένως αναγκαστικά ένα από τα $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ είναι το κενό και το άλλο είναι το X . \square

Πρόταση 1.14 *Ας είναι X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση επί, με την ιδιότητα “ $\forall U \subseteq Y$ το V είναι ανοικτό αν και μόνο αν το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό”. Αν ο X είναι τοπικά συνεκτικός, τότε και ο Y είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Ας είναι $y \in Y$ και $V \subseteq Y$ περιοχή του y . Γράφουμε με C τη συνεκτική συνιστώσα του V που περιέχει το y . Αρκεί να δείξουμε ότι το $f^{-1}(C)$ είναι ανοικτό, ώστε να συμπεράνουμε ότι το C είναι ανοικτό. Το $U = f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό και για κάθε $x_1 \in f^{-1}(C) \subseteq U$ βρίσκουμε μία ανοικτή και συνεκτική U_1 περιοχή του x_1 , ώστε $x_1 \in U_1 \subseteq U$. Τότε $y_1 = f(x_1) \in f(U_1) \subseteq f(U) = V$. Το σύνολο $f(U_1)$ όμως είναι συνεκτικό και περιέχεται στο C (αφού $y_1 \in f(U_1) \cap C$). Άρα $f(U_1) \subseteq C$. Συνεπώς $x_1 \in U_1 \subseteq f^{-1}(f(U_1)) \subseteq f^{-1}(C)$. \square

Παρατήρηση 1.15. Απεικονίσεις με την ιδιότητα της προηγούμενης πρότασης ονομάζονται απεικονίσεις πηλίκια. Είναι προφανώς συνεχείς. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ανοικτές και κλειστές συνεχείς και επί απεικονίσεις είναι απεικονίσεις πηλίκια. Ιδιαίτερος αν ένας τοπολογικός χώρος είναι εικόνα ενός συμπαγούς τοπικά συνεκτικού χώρου, τότε είναι και αυτός τοπικά συνεκτικός και συμπαγής.

Πόρισμα 1.16 (Netto) *Μία αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία*

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^N,$$

$N \geq 2$ δε μπορεί να είναι συνεχής.

Απόδειξη. Αν f ήταν συνεχής, τότε η συμπαγεια του $[0, 1]$ επιβάλλει (πρόταση 1.8) ότι η f είναι τοπολογικός ομοιομορφισμός. Είναι δυνατό να βρούμε ένα σημείο $t \in (0, 1)$ ώστε $q = f(t) \in \text{int } [0, 1]^N = (0, 1)^N$. Γράφουμε $X = [0, 1]^N \setminus \{q\}$ και παρατηρούμε ότι είναι δρομοσυνεκτικό (καθώς $N \geq 2$), επομένως συνεκτικό σύνολο. Θα ισχύει $f^{-1}(X) = [0, t) \cup (t, 1]$ που δεν είναι συνεκτικό, άτοπο. \square

Ορισμός 1.7. Ας είναι X τοπολογικός χώρος και $a, b \in X$. Μία **απλή αλυσίδα** (**simple chain**) που συνδέει τα a, b είναι μια πεπερασμένη ακολουθία από ανοικτά σύνολα U_1, U_2, \dots, U_n , για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a \in U_1$ μόνον, $b \in U_n$ μόνον και $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ αν και μόνον αν $|j - i| \leq 1$.

Πρόταση 1.17 Αν X είναι τοπολογικός συνεκτικός χώρος, \mathcal{U} ένα ανοιχτό του κάλυμμα, τότε οποιοδήποτε δύο σημεία του $a, b \in X$ μπορούν να ενωθούν με μια απλή αλυσίδα, που αποτελείται από ανοιχτά του \mathcal{U} .

Απόδειξη. Ας είναι $a \in X$ τυχόν και $A \subseteq X$ το σύνολο των σημείων που μπορούν να ενωθούν με το a με μια απλή αλυσίδα, χρησιμοποιώντας ανοιχτά από το \mathcal{U} . Το A είναι προφανώς ανοιχτό και μη κενό αφού $a \in A$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι και κλειστό, ώστε να συμπεράνουμε ότι $A = X$. Έστω λοιπόν $z \in \bar{A}$. Τότε $z \in U$ για κάποιο $U \in \mathcal{U}$ και βρίσκουμε $b \in U \cap A$. Τα a, b συνδέονται με μια απλή αλυσίδα $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{U}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: α) $\exists k \in \{1, \dots, n\} : z \in U_k$ και ο μικρότερος k με την ιδιότητα $z \in U_k$ ορίζει μια απλή αλυσίδα που ενώνει το a και το z . β) $z \notin U_k$ για όλα τα k . Σε αυτή την περίπτωση το U τέμνει κάποιο(α) από τα U_1, \dots, U_n —οπωσδήποτε το U_n . Ας είναι k ο μικρότερος δείκτης ώστε $U_k \cap U \neq \emptyset$. Τότε η ακολουθία U_1, U_2, \dots, U_n, U είναι μια απλή αλυσίδα από το a στο z . \square

Ορισμός 1.8. Ας είναι X ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος που είναι και T_1 . Ένα σημείο $p \in X$ ονομάζεται **σημείο τομής (cutting point)** αν το σύνολο $X \setminus \{p\}$ δεν είναι συνεκτικό. Μία τριάδα (p, U, V) όπου $U, V \subseteq X$ ανοιχτά ονομάζεται **τομή (cutting)** του X αν το p είναι σημείο τομής και τα U, V αποτελούν μια αποσύνδεση του $X \setminus \{p\}$.

Πρόταση 1.18 Αν X είναι συνεκτικός και συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff και (p, U, V) είναι τομή τότε τα σύνολα $V \cup \{p\}$ και $U \cup \{p\}$ είναι συνεκτικά (και συμπαγή)

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο ότι το $U \cup \{p\}$ είναι συνεκτικό. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : X \longrightarrow X : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & x \in U \cup \{p\} \\ p & x \in V \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής. Τότε $U \cup \{p\} = f(X)$, το ζητούμενο έπεται άμεσα. \square

Πρόταση 1.19 Ας είναι X ένας μετρικός συμπαγής και συνεκτικός χώρος του οποίου όλα τα σημεία εκτός από δύο είναι σημεία τομής, τότε ο X είναι ισομορφικός προς το $[0, 1]$.

Απόδειξη. Ας είναι $a \neq b \in X$ τα μόνα δύο σημεία που δεν είναι σημεία τομής. Θα παρουσιάσουμε μόνο την ιδέα της απόδειξης. Στο X εισάγουμε μία διάταξη ώστε $x \leq y \in X$ αν και μόνον αν $x = y$ ή $x = a$ ή $y = b$ ή το x ορίζει μία τομή (x, U, V) που αφήνει τα a, y στα U, V αντίστοιχα. Επαληθεύεται ότι $\eta \leq$ είναι ολική διάταξη συμβατή με την αρχική τοπολογία.

Τα σημεία a, b είναι σημεία συσσώρευσης του X και μπορούμε να βρούμε ένα πυκνό $D \subseteq X$ που δεν τα περιέχει. Το σύνολο D δεν έχει πρώτο ούτε τελευταίο στοιχείο και για κάθε $x < y \in D$ υπάρχει $r \in D : x < r < y$. Αποδεικνύεται ότι το D είναι ισομορφικό ως προς τη διάταξη και τοπολογικά ομοιομορφικό με τους ρητούς του $(0, 1)$, ας είναι $f : D \rightarrow Q \cap (0, 1)$ ο ισομορφισμός. Αν $p \in X \setminus \{a, b\}$, τότε αυτό διαμερίζει το X σε δύο σύνολα $U < V$ ($x < y \forall x \in U, y \in V$). Τότε το $f(U)$ ορίζει μία τομή Dedekind στο σύνολο των ρητών του $(0, 1)$ και επομένως ορίζει μοναδικά έναν πραγματικό $F(p)$. Ορίζουμε ακόμα $F(0) = a, F(1) = b$. Ο F είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός. \square

1.1.2 Το σύνολο του Cantor

Ορισμός 1.9. Ορίζουμε $C = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^m-1} \left(\frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}} \right) \right)$

Το σύνολο C ονομάζεται το **σύνολο του Cantor (the Cantor set)**.

Παρατήρηση 1.20. Ο ορισμός αυτός, είναι ισοδύναμος με την εξής κατασκευή: Παίρνουμε το διάστημα $C_0 = I$, το διαιρούμε σε 3 ισομήκη υποδιαστήματα (το πρώτο και το τρίτο κλειστά και το μεσαίο ανοιχτό) και από αυτά αφαιρούμε το μεσαίο, δηλαδή το $A_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Αυτό που απομένει είναι δύο (2^1) διαστήματα $C_1 = C_0 \setminus A_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ μήκους $\frac{1}{3}$.

Ας υποθέσουμε ότι στο n -οστό βήμα έχουμε κατασκευάσει 2^n κλειστά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$, ας είναι αυτά $C_n^k = \left[c_n^k, c_n^k + \frac{1}{3^n} \right]$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$ (τα c_k διατεταγμένα αύξοντα). Καθένα από αυτά τα διαιρούμε σε 3 ισομήκη υποδιαστήματα και αφαιρούμε το μεσαίο $A_n^k = \left(c_n^k + \frac{1}{3^{n+1}}, c_n^k + \frac{2}{3^{n+1}} \right)$, έτσι παίρνουμε 2^{n+1} υποδιαστήματα

μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$: $C_{n+1}^k = \left[c_{n+1}^k, c_{n+1}^k + \frac{1}{3^n} \right]$, $k = 0, \dots, 2^{n+1} - 1$. Ισχύει δε ότι

$$c_{n+1}^{2k} = c_n^k \text{ και } c_{n+1}^{2k+1} = c_n^k + \frac{2}{3^{n+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

Γράφουμε δε τις ξένες ενώσεις $C_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{2^{n+1}-1} C_{n+1}^k$ και $A_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} A_n^k$ και παρατηρούμε ότι $C_{n+1} = C_n \setminus A_n = I \setminus \bigcup_{m=0}^n A_m$. Τα A_n , $n \geq 0$, είναι ανά δύο ξένα, γιατί αν $0 \leq n < m$, τότε $A_m \cap A_n \subseteq C_m \cap A_n \subseteq C_{n+1} \cap A_n = \emptyset$. Επιπλέον $\lambda(A_n) = \frac{2^n}{3^{n+1}}$. Έχουμε κατασκευάσει επαγωγικά: (α) μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων $(C_n)_{n=0}^\infty$, (β) μία ακολουθία ξένων ανά δύο ανοιχτών συνόλων $(A_n)_{n=0}^\infty$ ώστε $C_{n+1} = C_n \setminus A_n = I \setminus \bigcup_{m=0}^n A_m$, $n \geq 0$. Είναι σχεδόν άμεσο ότι οι δείκτες c_n^k είναι ακριβώς τα στοιχεία του συνόλου

$$P_n = \left\{ \sum_{m=1}^n d_m 3^{-m} \mid d_m \in \{0, 2\}, m = 1, \dots, n \right\}$$

και ότι $3^n \cdot c_n^k \in \mathbb{Z}$, επομένως κάθε διάστημα A_n^k είναι της μορφής $\left(\frac{3r+1}{3^{m+1}}, \frac{3r+2}{3^{m+1}} \right)$ για $r = 3^n \cdot c_n^k$. Από την άλλη κάθε διάστημα της μορφής $\left(\frac{3r+1}{3^{m+1}}, \frac{3r+2}{3^{m+1}} \right)$ περιέχεται σε κάποιο A_n^k για $n \geq m$ και κατάλληλο k : Γράφουμε το r στο τριαδικό σύστημα και ολισθαίνουμε δεξιά (διαγράφοντας) d το πλήθος ψηφία ώστε το αριστερό τμήμα που απομένει να έχει μόνο τα ψηφία 0 και 2, σημειώνουμε με r_1 το εναπομείναν τμήμα και τότε για $n = m - d$, ο αριθμός $\frac{3^{-d} r_1}{3^{m-d}}$ είναι κάποιος από τους C_n^k και επομένως βρήκαμε n και k ώστε $\left(\frac{3r+1}{3^{m+1}}, \frac{3r+2}{3^{m+1}} \right) \subseteq A_n^k$.

Επομένως $\bigcup_{m=0}^N \bigcup_{k=0}^{3^m-1} \left(\frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}} \right) = \bigcup_{m=0}^N \bigcup_{k=0}^{2^m-1} A_m^k$, $N \geq 0$. Και

δείξαμε ότι το σύνολο Cantor ικανοποιεί

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = I \setminus \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^m-1} A_m^k \right)$$

Το σύνολο Cantor περιέχει ακριβώς εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς μεταξύ 0 και 1 οι οποίοι έχουν τριαδικό ανάπτυγμα που δεν περιέχει το ψηφίο 1: Από την κατασκευή των C_n , προκύπτει ότι $x \in C_n$ αν και μόνο αν ο x έχει τριαδικό ανάπτυγμα που το n -οστό ψηφίο του δεν είναι 1, $n \in \mathbb{N}$. Το ζητούμενο έπεται.

Το σύνολο Cantor δεν περιέχει κανένα διάστημα καθώς οποιοδήποτε (α, β) θα περιείχε κάποιο $\left(\frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}}\right)$ για κατάλληλο m και k , άτοπο εξ' ορισμού. Ακόμα δε περισσότερο $\lambda(C) = 0$. Ισχύει ότι $\lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $\epsilon > 0$, τότε μπορούμε να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left(\frac{2}{3}\right)^N < \epsilon$, τότε $C_N = \bigcup_{k=0}^{2^N-1} C_N^k$ και $\sum_{k=0}^{2^N-1} \lambda(C_N^k) = \left(\frac{2}{3}\right)^N < \epsilon$.

Όλα του τα σημεία είναι σημεία συσσώρευσης: πράγματι αν κάποιο $x \in C$ και S οποιοδήποτε ανοιχτό διάστημα με $x \in S$, τότε για αρκετά μεγάλο n μπορούμε να βρούμε κάποιο C_n^k που περιέχει το x και περιέχεται στο S . Τότε από την κατασκευή του C , τα άκρα του C_n^k ανήκουν στο C και επομένως περιέχονται στο S . Επομένως το σύνολο Cantor είναι υπεραριθμήσιμο (συνεπεία του θεωρήματος Baire, ως πλήρης μετρικός χώρος που αποτελείται από σημεία συσσώρευσης).

Λήμμα 1.21 *Αν ο αριθμός $x \in [0, 1]$ έχει τριαδική αναπαράσταση που δεν περιέχει το ψηφίο 1, τότε αυτή είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Πράγματι αν $x = \sum_{m=1}^{\infty} d_m 3^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m 3^{-m}$ είναι δύο τριαδικές αναπαραστάσεις του x με $d_m, b_m \in \{0, 2\}$ για όλα τα $m \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $c_m = d_m - b_m$ ικανοποιεί $|c_m| \in \{0, 2\}$ επίσης και ταυτόχρονα $\sum_{m=1}^{\infty} c_m 3^{-m} = 0$. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε κάποιο c_m θα είναι μη μηδενικό, και ας είναι M ο πρώτος δείκτης ώστε

$C_M \neq 0$. Τότε προκύπτει ότι $-C_M = \sum_{k=1}^{\infty} c_{M+k} 3^{-k}$ και επομένως

$$|C_M| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_{M+k}| 3^{-k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k} = 1, \text{ άτοπο.} \quad \square$$

Ορισμός 1.10. Βασιζόμενοι στο λήμμα 1.21, είναι δυνατό να ορίσουμε μία συνάρτηση από το σύνολο Cantor C στο σύνολο των δυαδικών ακολουθιών

$$B = \{(d_m)_{m=1}^{\infty} \mid d_m \in \{0, 1\}, m \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

ως εξής

$$b : C \longrightarrow B : x = \sum_{m=1}^{\infty} 2d_m \cdot 3^{-m} \longmapsto b(x) = (d_m)_{m=1}^{\infty}$$

είναι φανερό από τον ορισμό της, ότι η συνάρτηση b είναι επί και 1-1. Η συνάρτηση αυτή στην πραγματικότητα ομοιομορφισμός

Πρόταση 1.22 Η συνάρτηση b του ορισμού 1.10 είναι ομοιομορφισμός από το C στο $B = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ όταν το B έχει τη μετρική

$$\rho((a_m)_{m=1}^{\infty}, (b_m)_{m=1}^{\infty}) = \sum_{m=1}^{\infty} |a_m - b_m| \cdot 2^{-m}, \quad (a_m)_{m=1}^{\infty}, (b_m)_{m=1}^{\infty} \in B$$

Απόδειξη. Η b είναι συνεχής:

Ας είναι $\epsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $2^{-N} < \epsilon$. Επιλέγουμε $\delta < 3^{-N}$. Αν $x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m 3^{-m}, y = \sum_{m=1}^{\infty} b_m 3^{-m} \in C$ ώστε $|x - y| < \delta$, τότε διαπιστώνουμε ότι $a_m = b_m$ για $1 \leq m \leq N$. Επομένως $\rho(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} |a_m - b_m| 2^{-m} = \frac{1}{2} \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m - b_m| 2^{-m} \leq \frac{1}{2} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-m} < 2^{-N} < \epsilon$.

Εφόσον η b είναι συνεχής 1-1 και επί στον B που είναι μετρικός χώρος (και άρα χώρος Hausdorff), και το C είναι συμπαγές, προκύπτει αμέσως ότι η b είναι ομοιομορφισμός. \square

Παρατήρηση 1.23. Ο μετρικός χώρος (B, ρ) είναι ομοιομορφικός με την τοπολογία γινόμενο $\prod_{m \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$ και αυτό που δείξαμε ουσιαστικά είναι ότι το σύνολο Cantor είναι ισομορφικό με το γινόμενο $\prod_{m \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$. Το γεγονός αυτό, αποδεικνύεται και άμεσα δείχνοντας ότι οι προβολές της n -οστής συντεταγμένης $\text{pr}_n : \prod_{m \in \mathbb{N}} \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ είναι συνεχείς. Το συμπέρασμα του θεωρήματος 1.22 έπεται αφού η τοπολογία γινόμενο εδώ είναι μετριοποιήσιμη και η μετρική είναι ακριβώς αυτή που αναφέρεται στο θεώρημα.

Μπορούμε στη συνέχεια να ορίσουμε την $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R} : x = (a_m)_{m=1}^{\infty} \mapsto \sigma(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m 2^{-m}$ και να παρατηρήσουμε αμέσως ότι η σ είναι Lipschitz-συνεχής με σταθερά 1. Επομένως ομοιόμορφα συνεχής είναι και η $\sigma \circ b$. Όμως η $\sigma \circ b$ δεν είναι διαφορίσιμη:

Πρόταση 1.24 Η απεικόνιση $\sigma \circ b : C \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Ας είναι $x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m 3^{-m} \in C$ (άρα $a_m \in \{0, 2\}$, $m \in \mathbb{N}$).

Σχηματίζουμε την ακολουθία $x_n = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} a_m 3^{-m} + (2 - a_n) \cdot 3^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε

$$\left| \frac{\sigma \circ b(x_n) - \sigma \circ b(x)}{x_n - x} \right| = \frac{1}{2} 2^{-n} \cdot 3^n \rightarrow +\infty$$

και η αρχή της μεταφοράς επιβεβαιώνει ότι το όριο δεν υπάρχει, επομένως η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο x . Το x ήταν τυχαίο, άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη πουθενά στο C . \square

Πρόταση 1.25 Η απεικόνιση $\sigma \circ b : C \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αύξουσα.

Απόδειξη. Ας είναι $x = \sum_{m=1}^{\infty} (2 \cdot a_m) \cdot 3^{-m} < y = \sum_{m=1}^{\infty} (2 \cdot b_m) \cdot 3^{-m} \in C$, $a_m, b_m \in \{0, 1\}$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε μπορούμε να βρούμε κάποιο $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$1 = a_N > b_N = 0$ και $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{N-1} = b_{N-1}$. Τότε

$$\sigma \circ b(y) - \sigma \circ b(x) = 2^{-N} \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m+N} - b_{m+N}) 2^{-m} \right) \geq 0$$

που επιβεβαιώνει το ζητούμενο \square

Είναι δυνατό να επεκτείνουμε την συνάρτηση $\sigma \circ b$ σε ολόκληρο το I , αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν εκτιμήσουμε την τιμή της σε κάθε άκρο του διαστήματος A_n^k , $n = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ (βλέπε παρατήρηση 1.20), τότε αυτή παραμένει σταθερή. Πράγματι

$$\begin{aligned} \sigma \circ b \left(c_n^k + \frac{1}{3^{n+1}} \right) &= \sigma \circ b \left(\sum_{m=1}^n (2 \cdot a_m(k)) 3^{-m} + 3^{-n-1} \right) \\ &= \sigma \circ b \left(\sum_{m=1}^n (2 \cdot a_m(k)) 3^{-m} + \sum_{m=n+2}^{\infty} 2 \cdot 3^{-m} \right) \\ &= \sum_{m=1}^n a_m(k) 2^{-m} + \sum_{m=n+2}^{\infty} 2^{-m} \\ &= \sum_{m=1}^n a_m(k) 2^{-m} + 2^{-n-1} \\ &= \sigma \circ b \left(\sum_{m=1}^n (2 \cdot a_m(k)) 3^{-m} + 2 \cdot 3^{-n-1} \right) \\ &= \sigma \circ b \left(c_n^k + \frac{2}{3^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

και έτσι είναι δυνατό να επεκτείνουμε την συνάρτηση $\sigma \circ b$ και στα διαστήματα A_n^k , ορίζοντάς την ίση με την κοινή τιμή στα άκρα τους.

Σημειώνουμε με $\gamma : I \rightarrow I$ αυτή τη συνάρτηση και την ονομάζουμε **συνάρτηση Cantor (Cantor function)**.

Συνοψίζοντας έχουμε

Πρόταση 1.26 Η συνάρτηση $\gamma : I \rightarrow I$ είναι αύξουσα, [ομοιόμορφα] συνεχής, επί, σταθερά σχεδόν παντού (στο σύνολο $I \setminus C$)

Απόδειξη. προφανής από τα προηγούμενα. \square

Συνεχίζουμε με μερικές ακόμα ιδιότητες του συνόλου Cantor:

Πρόταση 1.27 Το σύνολο Cantor C είναι ομοιομορφικό με το γινόμενο $C^{\mathbb{N}}$

Απόδειξη. Από την παρατήρηση 1.23, ισχύει ότι $C \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ και επομένως $C^{\mathbb{N}} \cong \left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$. Όμως καθώς $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (συνολοθεωρητικά) ισχύει περαιτέρω $C^{\mathbb{N}} \cong \left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ \square

Πρόταση 1.28 Αν (X, d) είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος τότε αυτός είναι ισομορφικός προς κάποιο υποσύνολο του γνωμένου $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η μετρική d είναι φραγμένη από το 1 (αλλιώς αντικαθιστούμε με την ισοδύναμη $\frac{d}{1+d}$). Ας είναι $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ένα πυκνό υποσύνολο στον X . Ορίζουμε

$$f : X \longrightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}} : x \longmapsto f(x) = (d(x, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

Η f είναι 1-1: πράγματι, αν $x, y \in X$ ώστε $f(x) = f(y)$, τότε $d(x, x_n) = d(y, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ας είναι $\epsilon > 0$. Βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x, x_N) < \frac{1}{2}\epsilon$. Τότε $d(x, y) \leq d(x, x_N) + d(y, x_N) < 2d(x, x_N) < \epsilon$. Το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν και άρα $d(x, y) = 0$.

Η f^{-1} είναι συνεχής. Φυσικά το γινόμενο $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ είναι μετριοποιήσιμο και επομένως αρκεί να χρησιμοποιηθεί η αρχή της μεταφοράς. Ας είναι $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον X , και $y \in X$ ώστε $f(y_m) \rightarrow f(y)$.

Ας είναι $\epsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, y) < \frac{1}{3}\epsilon$. Ακόμα μπορούμε να βρούμε ένα $M \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq M$ να ισχύει $|d(y_m, x_n) - d(y, x_n)| < \frac{1}{3}\epsilon$. Τότε για $m \geq M$, $d(y, y_m) \leq d(y, x_n) + d(y_m, x_n) < \epsilon$. \square

Παρατήρηση 1.29. Είναι δυνατό να δειχθεί περαιτέρω ότι αν ο X είναι και πλήρης, τότε η εικόνα του μέσα στο $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ είναι σύνολο G_δ .

Πρόταση 1.30 Για έναν τοπολογικό χώρο Hausdorff τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- Ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος και ομαλός (regular)
- Ο X είναι διαχωρίσιμος και μετριοποιήσιμος.

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο ??

Πόρισμα 1.31 Αν X είναι χώρος συμπαγής μετρικός χώρος, Y είναι χώρος Hausdorff και $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής επί, τότε το Y είναι μετριοποιήσιμο

Απόδειξη. Το Y είναι επίσης συμπαγές και κανονικό (normal) ως χώρος Hausdorff, άρα και ομαλό. Δείχνουμε ότι είναι και δεύτερο αριθμήσιμο. Καθώς ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος και άρα δεύτερος αριθμήσιμος. Ας είναι \mathcal{B} μία αριθμήσιμη βάση περιοχών και \mathcal{U} το σύνολο που προκύπτει αν στο \mathcal{B} πάρουμε πεπερασμένες ενώσεις. Ισχυριζόμαστε ότι το αριθμήσιμο $\mathcal{V} = \{Y \setminus f(X \setminus U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ είναι βάση για τον Y . Πράγματι, αν $y \in Y$ και $V \in \mathcal{N}(y)$ είναι περιοχή του y , τότε το $f^{-1}(\{y\})$ είναι συμπαγές στον X και $f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(V)$. Τότε μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος B_1, B_2, \dots, B_m σύνολα της \mathcal{B} ώστε $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_k \subseteq f^{-1}(U)$. Φανερά, $\bigcup_{k=1}^m B_k \in \mathcal{U}$ και $y \in Y \setminus f(X \setminus C) \subseteq U$. □

Λήμμα 1.32 Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος, $K \subseteq X$ συμπαγές υποσύνολο με την ιδιότητα “Για κάθε $x \in X$, $\exists! k_x \in K$ ώστε $d(x, k_x) = \text{dist}(x, K)$.” τότε η απεικόνιση $r : X \rightarrow K : x \mapsto r(x) = k_x$ είναι συστολή (retraction).

Απόδειξη. Πράγματι, ας είναι $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X ώστε $x_n \rightarrow x \in X$. Θα δείξουμε ότι $r(x_n) \rightarrow r(x)$. Είναι γνωστό ότι

$$|\text{dist}(x, K) - \text{dist}(y, K)| \leq d(x, y).$$

Ας είναι $y_n = r(x_{k_n})$ μια τυχούσα υπακολουθία. Καθώς η $y_n \in K$, και το K είναι συμπαγές, υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή $y_{m_n} \rightarrow y \in K$. Τότε

$$d(x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{k_{m_n}}, r(x_{k_{m_n}})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(x_{k_{m_n}}, K) = \text{dist}(x, K)$$

και η υπόθεση για τη μοναδικότητα επιβάλλει $y = r(x)$.

Δηλαδή κάθε υπακολουθία της $r(x_n)$, έχει μια περαιτέρω συγκλίνοσα υπακολουθία που συγκλίνει στο $r(x)$. Άρα ολόκληρη η $r(x_n)$ συγκλίνει στο x . \square

Πρόταση 1.33 *Ας είναι $K \subseteq C$ ένα κλειστό υποσύνολο του συνόλου Cantor, τότε αυτό είναι συνεχής εικόνα του C*

Απόδειξη. Στον χώρο $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ βάζουμε τη μετρική:

$$d : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}_+ :$$

$$(x = (a_m)_{m=1}^{\infty}, y = (b_m)_{m=1}^{\infty}) \longmapsto d(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_m - b_m|}{3^m}$$

της οποίας η τοπολογία είναι συμβατή με την τοπολογία γινόμενο. Αυτή η μετρική έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $x = (a_m)_{m=1}^{\infty}$, $x' = (a'_m)_{m=1}^{\infty}$, $y = (b_m)_{m=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ισχύει η συνεπαγωγή $d(x, y) = d(x', y) \longrightarrow x = x'$.

Πράγματι, ας είναι $A = \{m \in \mathbb{N} : a_m \neq a'_m\}$. Αν $A \neq \emptyset$ τότε αυτό έχει πρώτο στοιχείο, ας είναι αυτό $M = \min A$. Τότε για όλα τα $m < M$ ισχύει $|a_m - b_m| = |a'_m - b_m|$ ενώ $|a_M - b_M| = 1$ και $|a'_M - b_M| = 0$ (ή αντίστροφα· δε βλάπτεται η γενικότητα). Από την υπόθεση $d(x, y) = d(x', y)$ συμπαιρνούμε λοιπόν ότι

$$1 \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_{M+m} - b_{M+m}|}{3^m}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a'_{M+m} - b_{M+m}|}{3^m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} 3^{-m} = \frac{1}{2}$$

που είναι φυσικά άτοπο. Επομένως $A = \emptyset$ και $x = x'$.

Τώρα γράφουμε $K_1 = b(K)$ (b είναι ο ομοιομορφισμός μεταξύ συνόλου Cantor και $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$) που είναι συμπαγές. Συμπαιρνούμε ότι για κάθε $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ υπάρχει ακριβώς $k_x \in K_1$ ώστε $\text{dist}(x, K_1) = d(x, k_x)$. Αν υπήρχε και άλλο ένα $k'_x \in K_1$ ώστε $\text{dist}(x, K_1) = d(x, k'_x)$, τότε $k_x = k'_x$. Επομένως το στοιχείο που επιτυγχάνει την ελάχιστη απόσταση είναι μοναδικό και το προηγούμενο λήμμα επιβεβαιώνει ότι η απεικόνιση $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \ni x \longmapsto r(x) = k_x \in K_1$ είναι πράγματι συστολή. Μένει να μεταφέρουμε αυτή την απεικόνιση μέσω της b πίσω στο σύνολο C : $b^{-1} \circ r \circ b$. \square

Πρόταση 1.34 $O [0, 1]^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής εικόνα του C

Απόδειξη. Καθώς $C \cong C^{\mathbb{N}}$ (πρόταση 1.27) μέσω μιας συνάρτησης

$$\varphi : C \longrightarrow C^{\mathbb{N}} : x \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

χρησιμοποιούμε την συνάρτηση $g = \sigma \circ b$ για να ορίσουμε

$$f : C \longrightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}} : x \longmapsto f(x) = (g(\varphi_n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$$

η συνάρτηση f είναι επί. □

Πρόταση 1.35 (Hausdorff) *Αν (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος τότε αυτός είναι συνεχής εικόνα του συνόλου Cantor.*

Απόδειξη. Καθώς ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε αυτός είναι ισομορφικός προς κάποιο υποσύνολο του $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ μέσω μιας απεικόνισης $g : X \longrightarrow g(X) = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Το $g(X)$ είναι συμπαγές μέσα στον $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ και επομένως κλειστό. Χρησιμοποιούμε την f του προηγούμενης πρότασης (1.34) για να πάρουμε ότι το $K = f^{-1}(g(X))$ είναι κλειστό υποσύνολο του C , και επομένως υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $h : C \longrightarrow K$ επί του K . Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $g^{-1} \circ f \circ h : C \longrightarrow X$. Η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς συνεχής, ακόμα $h(C) = K$ και $f(K) = f(f^{-1}(g(X))) = g(X)$ (και αυτό ισχύει γιατί η f είναι επί). □

Κεφάλαιο 2

Χώροι Peano

Ορισμός 2.1. Ένας μετρικός χώρος συμπαγής, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός ονομάζεται **χώρος Peano (Peano space)**

Πρόταση 2.1 Ένας χώρος Peano X είναι κατά τόξα συνεκτικός.

Απόδειξη. Ας είναι $a, b \in X$ δύο σημεία του X . Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία από απλές αλυσίδες $(U_n = (U_n^k)_{k=1}^{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$, ώστε (α) έκαστη από αυτές να συνδέει τα a, b , (β) $\text{diam } U_n^k < 2^{-n+1}$ και επιπλέον (γ) $\exists p \in U_{n+1}^k$ ώστε $\forall k' (p \in U_n^{k'} \rightarrow \overline{U_{n+1}^k} \subseteq U_n^{k'})$, $n \in \mathbb{N}$, $k, k' = 1, \dots, m_n$.

Για $n = 1$, μπορούμε από την πρόταση 1.17 να βρούμε μία απλή αλυσίδα που να συνδέει τα a, b για οποιοδήποτε ανοιχτή κάλυψη με ανοιχτά συνεκτικά σύνολα διαμέτρου έως 1

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει την n -οστή απλή αλυσίδα $U_n = (U_n^1, U_n^2, \dots, U_n^{m_n})$. Σχηματίζουμε το ανοιχτή κάλυψη από συνεκτικά σύνολα $\{U_p\}_{p \in X}$, ώστε για $p \in X$ η διάμετρος να είναι επαρκώς μικρή για να ισχύει το (β) και το (γ). Παίρνουμε επίσης σημεία $x_0 = a, x_1, \dots, x_{m_n} = b$, ώστε $x_i \in U_n^i \cap U_n^{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, m_n - 1$. Επικαλούμαστε για κάθε i και πάλι την πρόταση 1.17 ώστε να πάρουμε μία απλή αλυσίδα που να συνδέει το x_{i-1} με το x_i . Θέλουμε να ενώσουμε καταλλήλως τις επιμέρους αλυσίδες που πήραμε ώστε να σχηματίσουμε μια απλή αλυσίδα. Για να γίνει αυτό πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι κάθε σύνολο της αλυσίδας τέμνει τουλάχιστον ένα και το πολύ δύο σύνολα: το προηγούμενο και το επόμενο του. Οι διαδοχικές αλυσίδες αλληλο-

καλύπτονται, οπωσδήποτε στο πρώτο και το τελευταίο τους στοιχείο, αλλά μπορεί και σε ενδιάμεσα στοιχεία, έτσι αφαιρούμε τα ανοιχτά της πρώτης μετά το πρώτο σύνολο V_1 που εμφανίζει κοινά στοιχεία με την επόμενη σε κάποιο ανοιχτό της V_2 (V_2 είναι το τελευταίο σύνολο της επόμενης που τέμνει το V_1) και τα ανοιχτά της δεύτερης έως και το V_2 .

Έτσι δημιουργήσαμε επαγωγικά μια ακολουθία απο αλυσίδες. Γρά-

φουμε τώρα $C_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} \overline{U_n^k}$ που είναι κλειστό και επομένως συμπαγές.

Γράφουμε $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ που είναι συμπαγές συνεκτικό μη κενό και πε-

ριέχει τα a, b . Ισχυριζόμαστε ότι όλα τα σημεία του K εκτός του a, b είναι σημεία τομής. Πράγματι αν $x \in K \setminus \{a, b\}$, τότε για κάθε n γράφουμε A_n, B_n τα τμήματα της αλυσίδας U_n πριν και μετά αντίστοιχα

του x . Η τριάδα (p, U, V) , όπου $U = K \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $V = K \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

είναι μια τομή του K □

Παρατήρηση 2.2. Μία προσεκτική ανάγνωση στην παραπάνω απόδειξη αποκαλύπτει ότι κάθε ανοιχτό G συνεκτικό υποσύνολο ενός χώρου Peano X είναι κατά τόξα συνεκτικό επίσης. Πράγματι, αρκεί να προσθέσουμε μια αρχική τετριμμένη αλυσίδα $U_0 = (U_0^1 = G)$ στην ακολουθία. (το ίδιο το G είναι κι αυτό τοπικά συνεκτικό).

Παρατήρηση 2.3. Το θεώρημα 2.1 εξασφαλίζει μεν την ύπαρξη συνεχών καμπυλών (για την ακρίβεια τόξων) μέσα στον X αλλά δεν δίνει καμία πληροφορία για τη διάμετρό τους. Μπορεί αυτές οι καμπύλες να ταλαντώνονται υπερβολικά πολύ ώστε να είναι χρήσιμες εκεί που χρειάζεται ομοιόμορφη συνέχεια, όπως στο θεώρημα Hahn–Mazurkiewicz

Πρόταση 2.4 *Ας είναι X ένας χώρος Peano. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ οποτεδήποτε $d(x, y) < \delta$, υπάρχει ένα τόξο A που συνδέει τα x, y με διάμετρο $\text{diam } A < \epsilon$.*

Απόδειξη. Ας είναι $\{U_p | p \in X\}$ μία ανοιχτή κάλυψη από συνεκτικά υποσύνολα του X , με $\text{diam } U_p < \epsilon$. Για αυτό το ανοιχτή κάλυψη μπορούμε να βρούμε τον αριθμό δ -Lebesgue και να συμπεράνουμε ότι οποτεδήποτε $d(x, y) < \delta$, τότε υπάρχει κάποιο U_p του καλύμματος ώστε $x, y \in U_p$. Το U_p είναι ανοιχτό και συνεκτικό και επομένως βάσει της προηγούμενης παρατήρησης, είναι κατά τόξα συνεκτικό. □

Πρόταση 2.5 Ένας χώρος Hausdorff X είναι χώρος Peano αν και μόνον αν είναι η συνεχής εικόνα του $[0, 1]$.

Απόδειξη. Για το **ευθύ**, αν ο X είναι συνεχής εικόνα του $[0, 1]$, τότε είναι μετριοποιήσιμος, συνεκτικός συμπαγής και τοπικά συνεκτικός.

Αντίστροφα, αν ο X είναι χώρος Peano, δηλαδή μετριοποιήσιμος, συμπαγής συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός τότε αυτός είναι συνεχής εικόνα του συνόλου Cantor μέσω μιας απεικόνισης $f : C \rightarrow X$. Καθώς το C είναι το συμπλήρωμα μιας αριθμήσιμης ένωσης ανοικτών $\{A_m^k | m, k\}$ (βλέπε 1.20) αρκεί να επεκτείνουμε την f σε κάθε ένα από τα ανοικτά διαστήματα αυτά.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $\delta_n > 0$ ώστε οποτεδήποτε δύο διαφορετικά σημεία στον X απέχουν λιγότερο από δ_n , να μπορούν να ενωθούν με ένα τόξο διαμέτρου $< \frac{1}{n}$. Μπορούμε να περιορίσουμε περαιτέρω τα δ_n ώστε να είναι κι αυτά μικρότερα από $\frac{1}{n}$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$ σχηματίζουμε ένα τόξο με άκρα $f(c_m^k), f(d_m^k)$, ως εξής: Γράφουμε $\rho = d(f(c_m^k), f(d_m^k))$. Αν $\rho \geq \delta_1$, τότε δεν υπάρχει περιορισμός και παίρνουμε το ένα τόξο $f_m^k : \overline{A_m^k} \rightarrow X$ από την πρόταση 2.1. Αν $\rho \in [\delta_{n+1}, \delta_n)$ για κάποιο (μοναδικό n), τότε παίρνουμε ένα τόξο $f_m^k : \overline{A_m^k} \rightarrow X$ από την πρόταση 2.4 με διάμετρο $< \frac{1}{n}$. Αν $\rho = 0$, τότε $f_m^k : \overline{A_m^k} \rightarrow X$ είναι η σταθερά συνάρτηση. Επεκτείνουμε την f σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μόνο πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα από τα $\{A_m^k = (c_m^k, d_m^k) | m, k\}$ ικανοποιούν ότι $d(f(c_m^k), f(d_m^k)) \geq \delta_n$. Γιατί λόγω ομοιόμορφης συνέχειας βρίσκουμε ένα $M_n \in \mathbb{N}$ ώστε οποτεδήποτε $d(f(c_m^k), f(d_m^k)) \geq \delta_n$ να ισχύει $|d_m^k - c_m^k| \geq 3^{-M}$.

Μπορεί ναδειχθεί ότι η επέκταση που σχηματίσαμε είναι συνεχής. Η ιδέα της απόδειξης είναι ότι η συνέχεια χρειάζεται ναδειχθεί μόνο στα σημεία του συνόρου των ανωτέρω διαστημάτων. Ας είναι x ένα σημείο στο σύνορο και $\epsilon > 0$. Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Μόνο πεπερασμένα το πλήθος “μεγάλα” διαστήματα από τα A_m^k αντιστοιχούν σε $d(f(c_m^k), f(d_m^k)) \geq \delta_n$. Αν κάποιο από τα “μεγάλα” διαστήματα εφάπτονται στο x , τότε εκεί η (πλευρική) συνέχεια είναι άμεση. Αν κανένα από αυτά δεν εφάπτεται στο x , τότε περιορίζοντας την περιοχή

$J = (x - \delta, x + \delta)$ μπορούμε να έχουμε μόνο διαστήματα A_m^k μέσα σε αυτή με την ιδιότητα $d(f(c_m^k), f(d_m^k)) < \delta_n$. Όμως καθενός διαστήματος τα άκρα ανήκουν στο σύνολο Cantor και η συνέχεια της αρχικής f στο x επιβάλλει ότι η f στα άκρα απέχει από την $f(x)$ το πολύ $\epsilon/2$. Ενώ η κατασκευή των τόξων προσθέτει ακόμα $\epsilon/2$.

□

Πόρισμα 2.6 Αν $X \subseteq \mathbb{R}^\tau$, $\tau \in \mathbb{N}$, είναι μη κενό συμπαγές, συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό Jordan-μετρήσιμο υποσύνολο, με θετικό μέτρο Jordan. Τότε υπάρχει μία καμπύλη χωροπλήρωσης $f : [0, 1] \rightarrow X$ επί. Μια τέτοια καμπύλη ονομάζεται καμπύλη Peano.

Κεφάλαιο 3

Η καμπύλη του Hilbert

Σε όλο το κεφάλαιο $I = [0, 1]$ είναι το μοναδιαίο διάστημα και $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ το μοναδιαίο τετράγωνο.

Ας είναι $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη διαμέριση \mathcal{J}_n του I σε 4^n ισομήκη τμήματα (διαδοχικά, μήκους 4^{-n})

$$\mathcal{J}_n = \left\{ I_{n_k} = \left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n} \right] \mid 0 \leq k < 4^n \right\}$$

Θεωρούμε και τη διαμέριση \mathcal{Q}_n του Q

$$\mathcal{Q}_n = \left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \times \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n} \right] \mid 0 \leq k, m < 2^n \right\}$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία 1-1 αντιστοίχιση $\delta_n : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n$ ώστε

- (QΔ1) τα τετράγωνα $\delta_n(I_{n_{k-1}})$ και $\delta_n(I_{n_k})$ έχουν κοινή πλευρά για όλα τα $0 \leq k < 4^n$ και $n \in \mathbb{N}$
- (QΔ2) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $0 \leq k < 4^n$, τα τετράγωνα $\delta_{n+1}(I_{n+1_{4k}})$, $\delta_{n+1}(I_{n+1_{4k+1}})$, $\delta_{n+1}(I_{n+1_{4k+2}})$, $\delta_{n+1}(I_{n+1_{4k+3}})$ αποτελούν διαμέριση του $\delta_n(I_{n_k})$.

Κατ' αρχήν δείχνουμε μερικά αποτελέσματα, που ισχύουν, εφόσον είναι ήδη γνωστό ότι υπάρχει ακολουθία με τις ιδιότητες (QΔ1) και (QΔ2).

Πρόταση 3.1 Αν $(\delta_n : J_n \rightarrow Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία απο 1-1 αντιστοιχίες που ικανοποιεί τις ιδιότητες (QΔ1) και (QΔ2) τότε ορίζεται μια συνεχής καμπύλη $f : I \rightarrow Q$ επί του Q που είναι και μοναδική ως προς την ιδιότητα

$$f(J) \subseteq \delta_n(J), \quad \forall J \in \mathcal{J}_n, n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Ας είναι $t \in I$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις (α) Το t δεν είναι άκρο κανενός υποδιαστήματος και επομένως υπάρχει μια μοναδική φθίνουσα ακολουθία από υποδιαστήματα $J_n \in \mathcal{J}_n$ και $t \in \text{int } J_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$. Καθώς $\text{diam } \delta_n(J_n) = \sqrt{2} \cdot 2^{-n}$ και λόγω της ιδιότητας (QΔ2), η ακολουθία $S_n = \delta_n(J_n)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών με διαμετρο που συγκλίνει στο 0, υπάρχει ακριβώς ένα $q \in Q$ ώστε $\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \delta_n(J_n)$. Ορίζουμε $f(t) = q$.

(β) Το t είναι άκρο δύο διαδοχικών υποδιαστημάτων $J_n, K_n \in \mathcal{J}_n$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και επομένως για όλα τα $n \geq m$ το t είναι κοινό άκρο δύο διαδοχικών υποδιαστημάτων $J_n, K_n \in \mathcal{J}_n$. Συνεπώς βρίσκουμε ακριβώς δύο φθίνουσες ακολουθίες κλειστών διαστημάτων $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $J_1 = K_1, J_2 = K_2, \dots, J_{m-1} = K_{m-1}$ και για $n \geq m$ τα J_n, K_n είναι διαδοχικά. Αλλά τα τετράγωνα $S_n = \delta_n(J_n), T_n = \delta_n(K_n)$ για $n \geq m$ έχουν κοινή πλευρά. Ισχύει οτι $\text{diam}(\delta_n(J_n) \cup \delta_n(K_n)) \leq \sqrt{5} \cdot 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ και επομένως υπάρχει μοναδικό $q \in Q$ ώστε $\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\delta_n(J_n) \cup \delta_n(K_n))$. Καθώς και οι δύο τομές $\bigcap_{n=1}^{\infty} \delta_n(J_n)$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} \delta_n(K_n)$ είναι μη κενές, αναγκαστικά συμπίπτουν. Και μπορούμε να ορίσουμε $f(t) = q$.

Δείχνουμε τώρα ότι η συνάρτηση $f : I \rightarrow Q$ είναι συνεχής. Ας είναι $\epsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt{5} \cdot 2^{-n} < \epsilon$. Τότε για $\delta = 4^{-n}$ οποτεδήποτε $|t_1 - t_2| < \delta$, τα σημεία t_1, t_2 ανήκουν είτε στο ίδιο υποδιάστημα είτε σε διαδοχικά υποδιαστήματα της διαμέρισης I_n . Τότε τα σημεία $f(t_1), f(t_2)$ ανήκουν είτε στο ίδιο ή σε εφαιπόμενα τετράγωνα της διαμέρισης Q_n και επομένως απέχουν το πολύ όσο η διάμετρος δύο διαδοχικών τετραγώνων στη διαμέριση Q_n , δηλαδή $\sqrt{5} \cdot 2^{-n} < \epsilon$. Για την ακρίβεια δείξαμε απευθείας ότι η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι επί. Αν $q \in Q$ είναι τυχόν, τότε μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον μια φθίνουσα ακολουθία από τετράγωνα $S_n \in Q_n$ των οποίων η τομή είναι το $\{q\}$. Τότε τα $J_n = \delta_n^{-1}(S_n)$

είναι μια φθίνουσα ακολουθία διαστημάτων από τις J_n και επομένως υπάρχει ακριβώς ένα $t \in I$ ώστε $\{t\}$ να είναι η τομή τους. Τότε $f(t) = q$.

Δείχνουμε τώρα τη χαρακτηριστική ιδιότητα της f : Ας είναι $n \in \mathbb{N}$ κάποιος σταθερός φυσικός και $J \in \mathcal{J}_n$. Παίρνουμε $t \in J$ τυχόν. Με βάση τα προηγούμενα υπάρχει μία τουλάχιστον ακολουθία $(J_m)_{m \in \mathbb{N}}$ με $J_m \in \mathcal{J}_m$, $m \in \mathbb{N}$ ώστε $J_n = J$ και $\{t\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} J_m$, όμως έχει οριστεί $\{f(t)\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \delta_m(J_m) \subseteq \delta_n(J)$. Το $t \in J$ ήταν τυχόν, άρα η f ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα. Αν τώρα $f_1 : I \rightarrow Q$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα παίρνουμε $t \in I$ τυχόν. Ας είναι $\epsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt{2} \cdot 2^{-n} < \epsilon$ και κάποιο $J \in \mathcal{J}_n$ ώστε $t \in J$. Τότε $\{f(t), f_1(t)\} \subseteq f(J) \cup f_1(J) \subseteq \delta_n(J)$. Επομένως $|f(t) - f_1(t)| \leq \text{diam } \delta_n(J) = \sqrt{2} \cdot 2^{-n} < \epsilon$. Όμως το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν. Άρα $f(t) = f_1(t)$. Και το $t \in I$ ήταν τυχόν άρα $f = f_1$. \square

Έχοντας κατασκευάσει μια συνεχή καμπύλη από το I επί του Q ξαναβρίσκουμε ότι το γινόμενο $I \times I$ είναι συμπαγές:

Πόρισμα 3.2 Το Q είναι ως συνεχής εικόνα του I , συμπαγές.

Πρόταση 3.3 Η καμπύλη της πρότασης 3.1 δεν είναι 1-1.

Απόδειξη. Ας είναι $m \in \mathbb{N}$ τυχόν, $0 \leq k < 4^m$ και $I_{m_k} \in \mathcal{J}_m$, και $T = \delta_n(I_{m_k})$. Ας είναι P το κέντρο του τετραγώνου T . Στη διαμέριση \mathcal{Q}_{m+1} υπάρχουν τέσσερα υποτετράγωνα T_1, T_2, T_3, T_4 του S_n και το P που ανήκει σε όλα μπορεί να προσεγγιστεί από δυο φθίνουσες ακολουθίες υποτετραγώνων S_n^1, S_n^3 , $n \in \mathbb{N}$, που βρίσκονται τελικά μέσα στα T_1 και T_3 αντίστοιχα (που δεν είναι εφαπτόμενα). Όμως τα διαστήματα $\delta_n^{-1}(S_n^1)$ και $\delta_n^{-1}(S_n^3)$ δεν είναι διαδοχικά από το n και μετά και επομένως οι τομές $\delta_n^{-1}(S_n^1)$ και $\delta_n^{-1}(S_n^3)$ προσεγγίζουν διαφορετικά σημεία t_1, t_3 αντίστοιχα ενώ $f(t_1) = f(t_3) = P$. \square

Παρατήρηση 3.4. το αποτέλεσμα αυτής της πρότασης το περιμέναμε και ως συνέπεια του θεωρήματος Netto (πρόταση 1.16)

Η καμπύλη που εξασφαλίσαμε είναι εξαιρετικά μη-λεία:

Πρόταση 3.5 Η καμπύλη της πρότασης 3.1 δεν έχει πουθενά διαφορίσιμες συνιστώσες.

Απόδειξη. Δείχνουμε το ζητούμενο για την $x = \text{pr}_1 \circ f$. Ας είναι $t \in I$. Για κάθε $n \geq 2$ είναι δυνατό να βρεθεί ένα $t_n \in I$ ώστε $|t - t_n| \leq 16 \cdot 4^{-n}$ και τα $x(t)$ και τα $x(t_n)$ να χωρίζονται από ένα τουλάχιστον τετράγωνο μήκους 2^{-n} . Αυτό είναι πάντα εφικτό καθώς το $f(t)$ περιέχεται σε κάποιο τετράγωνο της διαμέρισης \mathcal{Q}_{n-2} που περιέχει 16 υποτετράγωνα της διαμέρισης \mathcal{Q}_n με μήκος 2^{-n} που αντιστοιχούν σε υποδιαστήματα συνολικού μήκους $16 \cdot 4^{-n}$. Συνεπώς

$$\frac{|x(t) - x(t_n)|}{t - t_n} \geq \frac{2^{-n}}{16 \cdot 4^{-n}} = 2^{n-4} \rightarrow +\infty \quad \text{καθώς} \quad n \rightarrow +\infty$$

□

Πρόταση 3.6 *Αν $(\delta_n : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από 1-1 αντιστοιχίες που ικανοποιεί τις ιδιότητες (QΔ1) και (QΔ2), και $(f_n : I \rightarrow \mathcal{Q})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από συναρτήσεις με την ιδιότητα*

$$f_n(J) \subseteq \delta_n(J) \quad n \in \mathbb{N}, J \in \mathcal{J}_n$$

τότε $f_n \rightarrow f$, ομοιόμορφα, όπου f είναι η οριακή καμπύλη της πρότασης 3.1.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Είναι δυνατό να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt{2} \cdot 2^{-N} < \epsilon$. Ας είναι $t \in I$. Υπάρχει μία φθίνουσα ακολουθία $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από διαστήματα $J_n \in \mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\{t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$, και $\{f(t)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(J_n)$. Συνεπώς $f(t), f_n(t) \in \delta_n(J_n)$, και άρα $|f(t) - f_n(t)| \leq \text{diam } \delta_n(J_n) = \sqrt{2} \cdot 2^{-n} < \epsilon$, αρκεί $n \geq N$. □

Παρατήρηση 3.7. Κατά συνέπεια, με το συμβολισμό και τα επιχειρήματα της απόδειξης της πρότασης 3.6, αν επιλέξουμε την ακολουθία σημείων που ορίζει τα άκρα των διαστημάτων της διαμέρισης \mathcal{J}_n , $(\frac{k}{4^n})_{k=0}^{4^n}$ και πάρουμε την πολυγωνική γραμμή f_n που ενώνει τα σημεία $f(\frac{k}{4^n})$, $0 \leq k \leq 4^n$ τότε παρατηρούμε ότι $[f(\frac{k-1}{4^n}), f(\frac{k}{4^n})]$ περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο τετράγωνο $\delta_n([\frac{k-1}{4^n}, \frac{k}{4^n}])$ της διαμέρισης \mathcal{Q}_n (γιατί είναι κυρτό). Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για όλα τα n και η ακολουθία συναρτήσεων που προκύπτει ικανοποιεί την προϋπόθεση της πρότασης 3.6.

Οι καμπύλες f_n ορίζονται να είναι τα n -οστά **προσεγγιστικά πολύγωνα (approximating polygons)** της οριακής καμπύλης f του θεωρήματος 3.1 και συγκλίνουν ομοιόμορφα σε αυτήν.

Τώρα θα δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια αντιστοιχία μεταξύ \mathcal{J}_n και \mathcal{Q}_n , $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 3.8 Υπάρχει μία ακολουθία $(\delta_n : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιεί τις (QΔ1) και (QΔ2).

Απόδειξη. Γράφουμε $I_0 = [0, \frac{1}{4}]$, $I_1 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $I_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $I_3 = [\frac{3}{4}, 1]$. Ας είναι Q το τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$. Διαιρούμε σε 4 μικρότερα τετράγωνα Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ως εξής

$$\begin{aligned} Q_0 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ Q_1 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ Q_2 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ Q_3 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

και εισάγουμε τέσσερις γεωμετρικούς μετασχηματισμούς T_0, T_1, T_2, T_3 ως εξής. Γράφουμε με S τη γραμμική ισομετρία με πίνακα $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου), με R τη γραμμική ισομετρία με πίνακα $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ανάκλαση ως προς τον άξονα των τετμημένων), t_v την παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ και m_r την ομοιοθεσία με συντελεστή $r \neq 0$.

$$T_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \quad T_1 = S + t_{(0, \frac{1}{2})}, \quad T_2 = S + t_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}, \quad T_3 = -\text{Id}_{\mathbb{R}^2} + t_{(1, \frac{1}{2})}$$

αναλυτικά για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T_0(x, y) &= (x, y), \\ T_1(x, y) &= \left(y, x + \frac{1}{2}\right), \\ T_2(x, y) &= \left(y + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right), \\ T_3(x, y) &= \left(1 - x, \frac{1}{2} - y\right) \end{aligned}$$

Και ως παρατηρηθεί ότι για κάθε $P \in \mathcal{Q}_n$, $n \in \mathbb{N}$, λόγω συμμετρίας, $T_i(P) \in \mathcal{Q}_n$, $i = 0, 1, 2, 3$, επιπλέον η T_i είναι μια 1-1 απεικόνιση από τα υποσύνολα της διαμέρισης του \mathcal{Q}_1 στο \mathcal{Q}_i .

Θα κατασκευάσουμε αναδρομικά μια ακολουθία $(\delta_n : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιεί τις (QΔ1) και (QΔ2) και επιπλέον

$$\begin{aligned} \delta_n \left(\left[0, \frac{1}{4^n} \right] \right) &= \left[0, \frac{1}{2^n} \right] \times \left[0, \frac{1}{2^n} \right], \\ \delta_n \left(\left[\frac{4^n - 1}{4^n}, 1 \right] \right) &= \left[\frac{2^n - 1}{2^n}, 1 \right] \times \left[\frac{2^n - 1}{2^n}, 1 \right] \end{aligned} \quad (*)$$

Ορίζουμε $\delta_1(I) = Q$.

Αν έχει οριστεί η $\delta_n : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n$ και ικανοποιεί τις (QΔ1), (QΔ2) και την (*) τότε ορίζουμε

$$\delta_{n+1} : \mathcal{J}_{n+1} \rightarrow \mathcal{Q}_{n+1} :$$

$$J \mapsto \delta_{n+1}(J) = \begin{cases} T_0 \circ S \circ m_{\frac{1}{2}}(\delta_n(4J)) & J \subseteq I_0 \\ T_1 \circ S \circ m_{\frac{1}{2}}(\delta_n(-1 + 4J)) & J \subseteq I_1 \\ T_2 \circ S \circ m_{\frac{1}{2}}(\delta_n(-2 + 4J)) & J \subseteq I_2 \\ T_3 \circ S \circ m_{\frac{1}{2}}(\delta_n(-3 + 4J)) & J \subseteq I_3 \end{cases}$$

ο ορισμός αυτός εξασφαλίζει ότι η συγκόλληση που πραγματοποιήσαμε, ικανοποιεί τις (QΔ1), (QΔ2) και την (*). Και η ακολουθία έχει καλώς οριστεί. \square

Η πρόταση 3.8 επιβεβαιώνει την ύπαρξη μίας αντιστοιχίας διαμερίσεων, και η πρόταση 3.1 με δεδομένη πλέον την (δ_n) οδηγεί στην ύπαρξη μίας μοναδικής συνεχούς $f : I \rightarrow Q$ και επί του Q συνάρτησης με την χαρακτηριστική ιδιότητα $f(J) \subseteq \delta_n(J)$, $n \in \mathbb{N}$, $J \in \mathcal{J}_n$. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **καμπύλη του Hilbert (Hilbert curve)**.

Παρατήρηση 3.9. Η καμπύλη του Hilbert εξαρτάται αποκλειστικά από την ακολουθία $(\delta_n : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Πρόταση 3.10 *Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(\delta_n : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις $(Q\Delta 1)$, $(Q\Delta 2)$ και ορίζεται αναδρομικά ως εξής*

$$\delta_{n+1} : \mathcal{J}_{n+1} \rightarrow \mathcal{Q}_{n+1} :$$

$$J \mapsto \delta_{n+1}(J) = \begin{cases} H_0(\delta_n(4J)) & J \subseteq I_0 \\ H_1(\delta_n(-1+4J)) & J \subseteq I_1 \\ H_2(\delta_n(-2+4J)) & J \subseteq I_2 \\ H_3(\delta_n(-3+4J)) & J \subseteq I_3 \end{cases}$$

για κάποιες 1-1 απεικονίσεις $H_0, H_1, H_2, H_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, τότε η οριακή συνάρτηση που αντιστοιχεί στην $(\delta_n)_n$ ικανοποιεί

$$f\left(\frac{i+t}{4}\right) = H_i \circ f(t), \quad t \in I, i = 0, 1, 2, 3$$

Απόδειξη. Η ύπαρξη της οριακής συνάρτησης f εξασφαλίζεται από την πρόταση 3.1. Ας είναι $t \in I_i$ για κάποιο $i = 0, 1, 2, 3$ –το I_i όπως στην πρόταση 3.8. Τότε μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $\{t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ με $J_n \in \mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$ και $J_n \subseteq I_i$ για όλα τα $n \geq 2$. Τότε θα ισχύει για κάθε $n \geq 1$

$$f(J_{n+1}) \subseteq \delta_{n+1}(J_{n+1}) = H_i(\delta_n(-i+4J_{n+1}))$$

Γράφοντας $K_n = -i+4J_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι $K_n \in \mathcal{J}_n$ και $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = -i+4t$. Συνεπώς (αφού η H_i είναι 1-1)

$$\begin{aligned} f(\{t\}) &= f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_{n+1}\right) \\ &\subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(J_{n+1}) \\ &\subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_i(\delta_n(-i+4J_{n+1})) \\ &= H_i\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(K_n)\right) \\ &= H_i(\{f(-i+4t)\}) = \{H_i \circ f(-i+4t)\} \end{aligned}$$

Όμως τα $t \in I_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ ήταν τυχόντα και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Παρατήρηση 3.11. Βεβαίως οι H_i της προηγούμενης πρότασης είναι ακριβώς οι $T_i \circ S \circ m_{\frac{1}{2}}$ της πρότασης 3.8, όμως αυτό δε χρειάζεται κατά την απόδειξη. Η μόνη αναγκαία ιδιότητα των H_i είναι το 1-1.

Πρόταση 3.12 *Με τον συμβολισμό της πρότασης 3.10, αν για κάποια $t_1, t_2, \dots, t_m \in \{0, 1, 2, 3\}$,*

$$t = \sum_{i=1}^m t_i \cdot 4^{-i},$$

τότε

$$f(t) = H_{t_1} \circ H_{t_2} \circ \dots \circ H_{t_m} \circ f(0).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι επαγωγική στο m . Το αρχικό βήμα ($m=1$) είναι τετριμμένο και είναι η πρόταση 3.10, ενώ αν το αποτέλεσμα ισχύει

για m και $t = \sum_{i=1}^{m+1} t_i \cdot 4^{-i}$, για κάποια $t_1, t_2, \dots, t_{m+1} \in \{0, 1, 2, 3\}$ τότε

$$t = \frac{t_1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m t_{i+1} 4^{-i} \text{ και επομένως}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(\frac{t_1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m t_{i+1} 4^{-i}\right) = H_{t_1} \circ f\left(\sum_{i=1}^m t_{i+1} 4^{-i}\right) \\ &= H_{t_1} \circ H_{t_2} \circ \dots \circ H_{t_{m+1}} \circ f(0) \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Παρατήρηση 3.13. Ιδιαίτερος το $f(0)$ είναι το σταθερό σημείο του μετασχηματισμού H_0 .

Πόρισμα 3.14 *Με τον συμβολισμό της πρότασης 3.10, αν $t = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \cdot 4^{-i}$, για κάποια $t_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i \in \mathbb{N}$ τότε*

$$f(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} H_{t_1} \circ H_{t_2} \circ \dots \circ H_{t_m} \circ f(0)$$

Απόδειξη. Η συνέχεια της f : Αν $s_m = \sum_{i=1}^m t_i \cdot 4^{-i}$, τότε $s_m \rightarrow t$ και η αρχή της μεταφοράς για την f δίνει $f(s_m) \rightarrow f(t)$. Η πρόταση 3.12 δίνει ότι $f(s_m) = H_{t_1} \circ H_{t_2} \circ \dots \circ H_{t_m} \circ f(0)$. \square

Κεφάλαιο 4

Καμπύλες Lebesgue

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε καμπύλες που γεμίζουν το χώρο και προέρχονται από συνεχείς απεικονίσεις του συνόλου Cantor C . Το σύνολο Cantor όπως είδαμε στην εισαγωγή, είναι το “αρχικό” πρότυπο κάθε συμπαγούς μετρικού χώρου, δηλαδή έχει την εξής καθολική (universal) ιδιότητα: Για κάθε συμπαγή μετρικό χώρο X , υπάρχει μία συνεχής επί απεικόνιση $f : C \rightarrow X$. Φυσικά το σύνολο Cantor είναι ένας ιδιόμορφος χώρος που δεν περιέχει κανένα ανοιχτό διάστημα, περιέχεται στο $[0, 1]$ και είναι υπεραριθμήσιμο (ισοδύναμα: έχει πληθάνημο όσο και το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών, που είναι ακριβώς ο πληθάνημος του δυναμοσυνόλου του \mathbb{N})

Τα θεωρήματα που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαν κατασκευές αφηρημένες. Στην ειδική περίπτωση που τα συμπαγή σύνολα είναι τα I^τ , τ είναι κάποιος φυσικός ή το \mathbb{N} , οι κατασκευές μπορούν να γίνουν πιο συγκεκριμένες. Ακόμα δε, το ίδιο το θεώρημα Hahn–Mazurkiewicz μπορεί να γίνει πολύ πιο εύκολο όταν εργαζόμαστε μέσα σε ένα συμπαγές κυρτό σύνολο σε ένα διανυσματικό χώρο.

Πρόταση 4.1 *Ας είναι τ κάποιος θετικός φυσικός¹ ή \mathbb{N} . Τότε υπάρχει συνεχής επί απεικόνιση $f : C \rightarrow I^\tau$.*

Απόδειξη. Το I^τ είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο. Καθώς $\tau \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$, υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία από το

¹Εδώ υπονοείται η συνολοθεωρητική κατασκευή των φυσικών όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n^+ = n \cup \{n\}$, οπότε και $n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$

$\tau \times \mathbb{N}$ στο \mathbb{N} , ας είναι αυτή $\varphi_\tau : \tau \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$f : C \rightarrow I^\tau :$$

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} 2a_m \cdot 3^{-m} \mapsto f(x) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{\varphi_\tau(i,m)} 2^{-m} \right)_{i \in \tau}$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f συνεχής, είναι για κάθε $i \in \tau$ η $\text{pr}_i \circ f$ να είναι συνεχής, δηλαδή η

$$C \ni x = \sum_{m=1}^{\infty} 2a_m \cdot 3^{-m} \mapsto \text{pr}_i \circ f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{\varphi_\tau(i,m)} 2^{-m}$$

Ας είναι $x = \sum_{m=1}^{\infty} 2a_m \cdot 3^{-m} \in C$ ($a_m \in \{0, 1\}$) και $\epsilon > 0$ θα βρούμε κάποιον $M \in \mathbb{N}$ ώστε $2^{-M} < \epsilon$. Ας είναι $N = \max_{1 \leq m \leq M} \varphi_\tau(i, m)$ Για

$\delta < 3^{-N}$ και $y = \sum_{m=1}^{\infty} 2b_m \cdot 3^{-m} \in C$ ώστε $|x - y| < \delta$ θα πρέπει να ισχύει ότι $a_n = b_n$ για $n = 1, 2, \dots, N$. Επομένως $a_{\varphi_\tau(i,m)} = b_{\varphi_\tau(i,m)}$ για $m = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} |\text{pr}_i \circ f(x) - \text{pr}_i \circ f(y)| &\leq \sum_{m=M+1}^{\infty} |a_{\varphi_\tau(i,m)} - b_{\varphi_\tau(i,m)}| \cdot 2^{-m} \\ &\leq 2^{-M} < \epsilon \end{aligned}$$

Ότι η απεικόνιση f είναι επί, είναι προφανές. \square

Παρατήρηση 4.2. Ιδιαίτερος, για $\tau = \mathbb{N}$ ξαναβρίσκουμε την πρόταση 1.34 και αποδεικνύουμε (ξανά) χωρίς το αξίωμα της επιλογής, ότι το $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές στην τοπολογία γινόμενο.

Πρόταση 4.3 Οι απεικονίσεις της πρότασης 4.1 δεν έχουν πούθενά διαφορίσιμες συντεταγμένες

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι η 1-1 και επί αντιστοιχία $\varphi_\tau : \tau \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ έχει την εξής ιδιότητα: "Για κάθε $i \in \tau$, $\varphi_\tau(i, m) \geq m$ για άπειρες τιμές του m ". Αν δεν ίσχυε αυτή η ιδιότητα τότε για κάποιον $i \in \tau$ και για κάποιον $M \in \mathbb{N}$ θα ίσχυε για κάθε $m > M$:

$\varphi_\tau(i, m) < m$ (και για τα $m \leq M$ θα ίσχυε η αντίστροφη ανισότητα). Για $N > \max_{1 \leq m \leq M} \varphi_\tau(i, m) \geq M$ παρατηρούμε ότι το σύνολο των θετικών ακεραίων $\{\varphi_\tau(i, m) \mid 1 \leq m \leq N\}$ έχει N το πλήθος διαφορετικά στοιχεία και όλα αυτά είναι μικρότερα από N (άτοπο).

Ας είναι τώρα $i \in \tau$ και $x = \sum_{m=1}^{\infty} 2a_m \cdot 3^{-m} \in C$ τυχόντα αλλά σταθερά. Μπορούμε να βρούμε μία γνήσια αύξουσα ακολουθιά $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών ώστε $\varphi_\tau(i, m_k) \geq m_k$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_k = \sum_{m=1}^{\infty} 2b_m \cdot 3^{-m} \in C$ τέτοιο ώστε $b_m = a_m$ για όλα τα m εκτός από $m = \varphi_\tau(i, m_k)$ που θέτουμε $b_{\varphi_\tau(i, m_k)} = 1 - a_{\varphi_\tau(i, m_k)}$. Τότε

$$\left| \frac{\text{pr}_i \circ f(x_k) - \text{pr}_i \circ f(x)}{x_k - x} \right| = 2^{-m_k-1} \cdot 3^{\varphi_\tau(i, m_k)} \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{m_k} \rightarrow +\infty$$

Είναι βεβαίως φανερό ότι $|x_k - x| = 2 \cdot 3^{-\varphi_\tau(i, m_k)} < 2 \cdot 3^{-m_k} \rightarrow 0$. \square

Πρόταση 4.4 (και ορισμός των καμπυλών Lebesgue) *Ας είναι X ένας Hausdorff τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό συμπαγές. Ας είναι $f : C \rightarrow K$ μία συνεχής συνάρτηση από το σύνολο Cantor C στο K . Τότε υπάρχει συνεχής επέκταση της f σε ολόκληρο το I ώστε $f(I) \subseteq C$. Η f ονομάζεται καμπύλη Lebesgue.*

Απόδειξη. Έχουμε υπόψιν $C = I \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^m-1} A_m^k$, όπου τα είναι ανοιχτά διαστήματα μήκους 3^{-m} : $A_m^k = (c_m^k, d_m^k)$ και $d_m^k - c_m^k = 3^{-m}$. Η κυρτότητα του K επιτρέπει να συνδέσουμε κάθε δύο άκρα $f(c_m^k), f(d_m^k)$ με ένα ευθύγραμμο τμήμα:

$$f_m^k : \overline{A_m^k} \rightarrow K : \\ t \mapsto f_m^k(t) = \frac{(d_m^k - t) \cdot f(c_m^k) + (t - c_m^k) \cdot f(d_m^k)}{d_m^k - c_m^k}$$

και μπορούμε να επεκτείνουμε την f έτσι, σε ολόκληρο το I , σε μία $\bar{f} : I \rightarrow K$.

Ας είναι $x_0 \in I$. Αν $x_0 \in I \setminus C$, τότε το x_0 ανήκει στο εσωτερικό κάποιου από τα διαστήματα A_m^k και η \bar{f} είναι συνεχής στο x_0 .

Αν $x_0 \in C$: Ας είναι V κάποια περιοχή του 0 . Βρίσκουμε συμμετρική και ισορροπημένη $U \subseteq V$ περιοχή του 0 , ώστε $U + U \subseteq V$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο C υπάρχει $\delta > 0$ ώστε οποτεδήποτε $|t - s| < \delta$ να ισχύει $f(t) - f(s) \in U$. Θα υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα A_m^k ώστε $f(c_m^k) - f(d_m^k) \notin U$ (1), γιατί οποτεδήποτε συμβαίνει αυτό θα ισχύει αναγκαστικά και $|c_m^k - d_m^k| \geq \delta$.

Το x_0 μπορεί να εφάπτεται μόνο στη μία πλευρά με ένα διάστημα από τα A_m^k , γιατί αλλιώς θα ήταν μεμονωμένο στο C , που δεν ισχύει. Δείχνουμε ότι τα πλευρικά όρια της \bar{f} καθώς $x \rightarrow x_0$ υπάρχουν και είναι ίσα με $f(x_0)$. Εργαζόμαστε δεξιά του x_0 . Αν το x_0 είναι αριστερό άκρο κάποιου από τα A_m^k , τότε δε χρειάζεται να δειχθεί κάτι. Αν το x_0 δεν είναι αριστερό άκρο κανενός από τα A_m^k , τότε καθώς μόνο πεπερασμένα το πλήθος από αυτά ικανοποιούν την (1), μπορούμε να επιλέξουμε επαρκώς μικρό $\delta_1 < \delta$ ώστε το $(x_0, x_0 + \delta_1)$ να μην περιέχει κανένα από αυτά. Επομένως το $(x_0, x_0 + \delta_1)$ περιέχει μόνο εκείνα τα A_m^k που ικανοποιούν $f(d_m^k) - f(c_m^k) \in U$. Καθώς το $f(c_m^k) + U$ είναι κυρτό και περιέχει τα $f(c_m^k), f(d_m^k)$, περιέχει και το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει, επομένως $f_m^k(\overline{A_m^k}) \subseteq f(c_m^k) + U$ ή ισοδύναμα $-f(c_m^k) + f_m^k(\overline{A_m^k}) \subseteq U$. Όμως $f(c_m^k) - f(x_0) \in U$ και επομένως $-f(x_0) + f_m^k(\overline{A_m^k}) \subseteq U + U$, δηλαδή $f(t) - f(x_0) \in U + U \subseteq V$. Έχουμε λοιπόν το ζητούμενο.

Και ομοίως για αριστερά του x_0 . □

Πόρισμα 4.5 *Ας είναι τ κάποιος φυσικός ή \mathbb{N} . Τότε υπάρχει συνεχής επί απεικόνιση $f : I \rightarrow I^\tau$.*

Παρατήρηση 4.6. Ειδικά στην περίπτωση που $\tau = 1$, έχουμε την συνάρτηση Cantor (σελίδα 1.1.2). Ενώ για $\tau \geq 2$ πεπερασμένο, παίρνουμε καμπύλες χρωοπλήρωσης στον \mathbb{R}^τ .

Οι καμπύλες του προηγούμενου θεωρήματος έχουν διαφορισμικές συνιστώσες ακριβώς στο $I \setminus C$, ως γραμμικές συναρτήσεις σε κάθε A_m^k .

4.0.1 Προσεγγιστικά Πολύγωνα

Πρόταση 4.7 *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση φ_τ , στην απόδειξη της πρότασης 4.1 είναι αύξουσα ως προς m : $\varphi_\tau(i, m+1) > \varphi_\tau(i, m)$ για κάθε $i \in \tau$ και $m \in \mathbb{N}$. Τότε, με τον συμβολισμό της ίδιας πρότασης, υπάρχουν:*

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}, i \in \tau$, μία διαμέριση $D_n^i = \{J_{i,n}^1, J_{i,n}^2, \dots, J_{i,n}^{2^{k(i,n)}}\}$ του I σε $2^{k(i,n)}$, $k(i,n) \geq 0$, ισομήκη (διαδοχικά) κλειστά διαστήματα ώστε $\prod_{i \in \tau} 2^{k(i,n)} = 2^n$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} k(i,n) = +\infty$. Γράφουμε

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \prod_{i \in \tau} J_{i,n}^{k_i} \mid 1 \leq k_i \leq 2^{k(i,n)} \right\}$$

2. Αν $\mathcal{C}_n = \{C_n^l \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq l < 2^n\}$, μία ακολουθία αμφιμονοσήματων και επί αντιστοιχιών διαμερίσεων $(\delta_n : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ώστε $\delta_{n+1}(C_{n+1}^{2l}), \delta_{n+1}(C_{n+1}^{2l+1})$ να αποτελούν διαμέριση του $\delta_n(C_n^l)$ και $f(C \cap C_n^l) \subseteq \delta_n(C_n^l)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}, 0 \leq l < 2^n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}, i \in \tau$, το σύνολο $N(i,n) = \{m \in \mathbb{N} : \varphi_\tau(i,m) \leq n\}$. Αν $m \in N(i,n)$ και $m > 1$, τότε και το $m-1 \in N(i,n)$, αφού $\varphi_\tau(i,m-1) < \varphi_\tau(i,m) \leq n$. Επομένως, όταν $N(i,n) \neq \emptyset$, μπορούμε να ορίσουμε $n(i,n) = \max N(i,n)$, και θα ισχύει $N(i,n) = \{1, 2, \dots, k(i,n)\}$. Αν $N(i,n) = \emptyset$, τότε ορίζουμε $k(i,n) = 0$. Η υπόθεση για τη μονοτονία της φ_τ , συνεπάγεται ότι $k(i,n+1) \geq k(i,n)$, $i \in \tau$, αφού $N(i,n) \subseteq N(i,n+1)$. Επίσης είναι σαφές ότι $\sum_{i \in \tau} |N(i,n)| = \sum_{i \in \tau} k(i,n) = n$ και $k(i, \varphi_\tau(i,n)) = n$. Αρκεί

τώρα να ορίσουμε D_n^i , τη διαμέριση του I σε $2^{k(i,n)}$ ισομήκη κλειστά υποδιαστήματα, ώστε $J_{i,n}^k = \frac{k}{2^{k(i,n)}} + \left[0, \frac{1}{2^{k(i,n)}}\right] = \left[\frac{k}{2^{k(i,n)}}, \frac{k+1}{2^{k(i,n)}}\right]$ και έτσι δείξαμε το (1). Είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι

$$\varphi_\tau \left(\bigcup_{i \in \tau} \{i\} \times N(i,n) \right) = \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Έχοντας υπόψιν ότι (σύμφωνα με την σημείωση 1.20), για $n \in \mathbb{N}$, όταν $l = \sum_{r=1}^n b_r \cdot 2^{n-r} \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ τότε

$$C_n^l = \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} d_r \cdot 3^{-r} \mid d_r = 2b_r, r \leq n, d_r \in \{0, 1, 2\}, r > n \right\}$$

και ότι η αντιστοιχία

$$\begin{array}{ccc} l & \in & \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \left(l_i = \sum_{m=1}^{k(i,n)} b_{\varphi_\tau(i,m)} \cdot 2^{k(i,n)-m} \right)_{i \in \tau} & \in & \prod_{i \in \tau} \{0, 1, \dots, 2^{k(i,n)}\} \end{array}$$

είναι 1-1 και επί, ορίζουμε $\delta(C_n^l) = \prod_{i \in \tau} J_{i,n}^{l_i}$, αντιστοιχώντας ουσιαστικά το C_n^l στο γινόμενο των $J_{i,n}^{l_i}$ όπου έκαστο γράφεται:

$$J_{i,n}^{l_i} = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} d_m \cdot 2^{-m} \mid \begin{array}{ll} d_m = b_{\varphi_\tau(i,m)} & m \leq k(i,n) \\ d_m \in \{0, 1\} & m > k(i,n) \end{array} \right\}$$

Μπορεί να επαληθευτεί ότι η $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες □

Πρόταση 4.8 Με το συμβολισμό και τις υποθέσεις της πρότασης 4.7, αν $(f_n : C \rightarrow I^\tau)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ώστε

$$f_n(C_n^l) \subseteq \delta_n(C_n^l), \quad n \in \mathbb{N}, l = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f της πρότασης 4.1

Απόδειξη. Ας είναι $\epsilon > 0$ και $i \in \tau$. Μπορούμε να βρούμε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $2^{-m} < \epsilon$. Ας είναι $N = \varphi_\tau(i, m)$. Ας είναι $x = \sum_{r=1}^{\infty} (2a_r) \cdot 3^{-r} \in C$, με

$a_r \in \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{N}$. Γράφουμε $L = \sum_{r=1}^N a_r \cdot 2^{N-r}$ και τότε $x \in C_N^L$. Αν

$n > N$, τότε $x \in C_n^l$, όπου $l = \sum_{r=1}^n a_r \cdot 2^{n-r}$ και θα ισχύει $L = \left\lfloor \frac{l}{2^d} \right\rfloor$.

Από την υπόθεση $f(x), f_n(x) \subseteq \delta_n(C_n^s)$.

Όμως $\text{pr}_i(\delta_n(C_n^l)) = J_{i,n}^l$ που είναι ένα διάστημα με μήκος $2^{-k(i,n)}$. Ισχύει ότι $k(i, n) \geq k(i, N)$ και βέβαια

$$k(i, N) = \max \{m' : \varphi_\tau(i, m') \leq \varphi_\tau(i, m)\} = m.$$

Επομένως $|\text{pr}_i \circ f(x) - \text{pr}_i \circ f_n(x)| < 2^{-m} < \epsilon$.

Δείξαμε ότι για τυχόν $i \in \tau$ η $(\text{pr}_i \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\text{pr}_i \circ f$. Καθώς το I^τ είναι μετριοποιήσιμο και η τοπολογία του είναι η τοπολογία γινόμενο, αυτό συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση στον χώρο γινόμενο. \square

Στην επόμενη πρόταση έχουμε υπόψιν ότι το σύνολο Cantor προέκυψε αφαιρώντας από το I , ένα αριθμήσιμο πλήθος ανοιχτών διαστημάτων A_n^l , $n \geq 0$, $l = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, που είναι ακριβώς τα μεσαία κομμάτια των C_n^l . Γράφουμε $A_n = \bigcup_{l=0}^{2^n-1} A_n^l$ και για τις ανάγκες της επόμενης πρότασης $B_n = \bigcup_{m=0}^n A_m$

Πρόταση 4.9 Με το συμβολισμό και τις υποθέσεις της πρότασης 4.7, αν $h : I \setminus C \rightarrow I^\tau$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, $(f_n : I \rightarrow I^\tau)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, ώστε $f_n|_{\overline{B_{n-1}}} = h|_{\overline{B_{n-1}}}$ και

$$h(A_n^l), f_n(C_n^l) \subseteq \delta_n(C_n^l), \quad n \in \mathbb{N}, l = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή $\bar{f} : I \rightarrow I^\tau$ που επεκτείνει την f της πρότασης 4.1

Απόδειξη. Ας είναι $\epsilon > 0$ και $i \in \tau$. Μπορούμε να βρούμε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $2^{-m} < \epsilon$. Ας είναι $N = \varphi_\tau(i, m)$. Παίρνουμε $x \in I$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $x \in C$. Ας είναι $x = \sum_{r=1}^{\infty} (2a_r) \cdot 3^{-r} \in C$ όπου $a_r \in \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{N}$. Ας είναι τώρα $n' > n \geq N$ και έστω $d = n' - n \in \mathbb{N}$. Θα ισχύει ότι $x \in C_n^l$, όπου $l = \sum_{r=1}^n a_r \cdot 2^{n-r}$, επίσης $x \in C_{n'}^{l'}$ και το l' είναι τέτοιος ακέραιος ώστε $l = \left\lfloor \frac{l'}{2^d} \right\rfloor$, τότε $f_{n'}(\{x\}) \subseteq \delta_n(C_{n'}^{l'}) \subseteq \delta_{n'-1}(C_{n'-1}^{\lfloor l'/2 \rfloor}) \subseteq \delta_{n'-2}(C_{n'-2}^{\lfloor l'/2^2 \rfloor}) \subseteq \dots \subseteq \delta_{n'-d}(C_{n'-d}^{\lfloor l'/2^d \rfloor}) = \delta_n(C_n^l)$, δηλαδή $f_n(x), f_{n'}(x) \in \delta_n(C_n^l)$ και ακριβώς όπως και στην προηγούμενη πρόταση δείχνουμε ότι $|\text{pr}_i \circ f_{n'}(x) - \text{pr}_i \circ f_n(x)| < 2^{-m} < \epsilon$.

(β) $x \in I \setminus C$. Τότε αναγκαστικά $x \in A_{N'}^{L'}$, για κάποιο $N' \in \mathbb{N}$ και $0 \leq L' < 2^{N'}$. Σίγουρα για όλα $n > N'$ θα ήταν το $f_n(x)$ σταθερό, αλλά αυτή η επιλογή του N' δε μπορεί να γίνει ομοιόμορφη γιατί το N' εξαρτάται από το x . Επομένως χρειάζεται διαφορετική διαδικασία. Αν το $N' < N$, τότε δε χρειάζεται να δειχθεί κάτι. Αν $N' \geq N$, παίρνουμε $n', n > N$. Αν και τα δύο $n', n > N'$, τότε τα $f_n(x), f_{n'}(x)$ ταυτίζονται. Αν $n', n \leq N'$, τότε επαναλαμβάνουμε το (α) μέρος της απόδειξης. Αν $N \leq n \leq N' < n'$, τότε $x \in A_{N'}^{L'} \cap C_n^s$ και $f_{n'}(x) = h(x) \in \delta(C_{N'}^{L'}) \subseteq \delta(C_n^l)$. Επίσης $f_n(x) \in \delta(C_n^l)$. Όπως και πριν $|\text{pr}_i \circ f_{n'}(x) - \text{pr}_i \circ f_n(x)| < 2^{-m} < \epsilon$.

Δείξαμε ότι για τυχόν $i \in \tau$ η $(\text{pr}_i \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy. Καθώς το I^τ είναι μετριοποιήσιμο και η τοπολογία του είναι η τοπολογία γινόμενο, αυτό συνεπάγεται ότι ολοκληρη η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy. Είναι σαφές ότι συγκλίνει σημειακά στην h στο $I \setminus C$, ενώ από την προηγούμενη πρόταση συγκλίνει (ομοιόμορφα) στην f της πρότασης 4.1. Επομένως το όριο είναι ομοιόμορφο παντού και η οριακή συνάρτηση είναι συνεχής. \square

Παρατήρηση 4.10. Ξαναβρίσκουμε ιδιαίτερος το πόρισμα 4.5, με διαφορετική απόδειξη. Η τελευταία πρόταση μας δίνει και έναν υπολογιστικό τρόπο να προσεγγίσουμε την καμπύλη του Lebesgue. Η συνάρτηση h είναι πάντα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν εξωτερικά, τα διαδοχικά άκρα $f(c_n^l + 3^{-n-1}), f(c_n^l + 2 \cdot 3^{-n-1})$ του συνόλου Cantor, ενώ στο n -οστό βήμα, τα εσωτερικά διαδοχικά άκρα $f(c_n^l), f(c_n^l + 3^{-n-1})$ επίσης ενώνονται με μια ευθεία, που παραμένει μέσα στο $\delta(C_n^l)$ αφού είναι κυρτό παραλληλεπίπεδο

Κεφάλαιο 5

Αριθμητικό μοντέλο

5.1 Καμπύλη του Hilbert

Αναπτύξαμε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα C για να υπολογίσουμε ακριβώς τις συντεταγμένες της καμπύλης του Hilbert με βάση την πρόταση 3.12. Μας αρκεί να γνωρίζουμε τους μετασχηματισμούς H_0, H_1, H_2, H_3 που είναι ακριβώς οι

$$\begin{aligned}H_0(x, y) &= \left(\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right) \\H_1(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1+y}{2}\right) \\H_2(x, y) &= \left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) \\H_3(x, y) &= \left(1 - \frac{y}{2}, \frac{1-x}{2}\right)\end{aligned}$$

Καθώς οι υπολογισμοί εμπλέκουν αρχικά ρητές συντεταγμένες $(x, y) = \left(\frac{p_0}{a}, \frac{q_0}{a}\right)$, $0 \leq p_0, q_0 \leq a$ ακέραιοι, όλα τα αποτελέσματα είναι κλάσματα με παρονομαστές δυνάμεις του 2 επί τη σταθερά a . Αντι να χρησιμοποιήσουμε αριθμητική κινητής υποδιαστολής και ενδεχομένως απώλεια δεκαδικών ψηφίων, εκμεταλευόμαστε το γεγονός ότι εργαζόμαστε με ρητές συντεταγμένες και υπολογίζουμε μόνο τους αριθμητές από τα κλάσματα τα οποία στο n -οστό βήμα είναι της μορφής $x_n = \frac{p_n}{a2^n}, y_n = \frac{q_n}{a2^n}$. Αν γράψουμε

```
1 #define RANGE(scale) ( init_steps * (1 << (scale)))
```

τότε αυτή η μακροεντολή δίνει τον παρονομαστή του κλάσματος όπου $init_steps = a$, $scale = n$. Το μόνο που χρειάζεται είναι να υπολογίσουμε τους αριθμητές $(p_{n+1}, q_{n+1}) = h_i(p_n, q_n) = a^{2^{n+1}} H_i \left(\frac{p_n}{a^{2^n}}, \frac{q_n}{a^{2^n}} \right)$ οπότε οδηγούμαστε στους μετασχηματισμούς μεταξύ των αριθμητών

$$\begin{aligned} h_0(x, y) &= (y, x) \\ h_1(x, y) &= (x, a^{2^n} + y) \\ h_2(x, y) &= (a^{2^n} + x, a^{2^n} + y) \\ h_3(x, y) &= (a^{2^{n+1}} - y, a^{2^n} - x) \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές $f(t)$, γράφουμε και το t στη μορφή $\frac{r}{4^N}$, όπου N είναι ο μέγιστος αριθμός βημάτων, και 4^N είναι το πλήθος των υποσυνόλων της διαμέρισης του I , οπότε υπολογίζουμε το $f(t)$ για συνολικά $4^N + 1$ τιμές. Αποφασίσαμε να υλοποιήσουμε την αριθμητική στον φυσικό τύπο WORD του επεξεργαστή που στις μέρες μας είναι 64bit. Αυτή η υλοποίηση θεωρούμε ότι είναι αρκετή για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας καθώς μπορεί να υπολογίσει διαμερίσεις του I μήκους $4^{-32} = 2^{-64}$, που αντιστοιχούν σε τετράγωνα πλευράς 2^{-32} στο Q . Ένα τρέξιμο του προγράμματος για $n=14$ βήματα έδωσε σε έναν τετραπύρηνο Intel(R) Core(TM) i5-4570 CPU @ 3.20GHz με 32Gb RAM χρόνους

```
$ time ./genhcurve -p 14 | wc
./genhcurve: Argument -p detected, computing partition
./genhcurve: steps=14 max steps: 268435455
268435457 1073741828 6417749075
```

```
real 1m20.990s
user 2m24.840s
sys 0m3.632s
```

ενώ η έξοδος δεδομένων ήταν 268 εκατομμύρια γραμμές ή περίπου 6Gb

Την ίδια στιγμή η ακεραία αριθμητική στο φυσικό τύπο ακεραίου του επεξεργαστή είναι η γρηγορότερη πράξη, ενώ ο υπολογισμός των

παρονομαστών γίνεται με αριστερές ολισθήσεις (που είναι επίσης αρκετά γρήγορες). Οι υλοποιούμενες συναρτήσεις σε C έχουν 5 ορίσματα που σε αρχιτεκτονικές όπως η 80_86x ή x86_64 ή ARMEL θα χρησιμοποιήσουν τους καταχωρητές του επεξεργαστή και θα οδηγήσουν σε ωφέλεια υπολογιστικού χρόνου. Οι δηλώσεις των συναρτήσεων h_i ακολουθούν το εξής μοτίβο

```

1  __UWORD_TYPE transformation(
2      __UWORD_TYPE scale,
3      __UWORD_TYPE x, __UWORD_TYPE y,
4      __UWORD_TYPE *x1, __UWORD_TYPE *y1
5  ) {
6      *x1 = ...; *y1 = ...;
7      return scale + 1;
8  }
```

Οι τέσσερις μετασχηματισμοί αποθηκεύονται σε έναν πίνακα 4 θέσεων, ώστε να είναι εύκολη η κλίση τους ανάλογα με το τετραδικό ψηφίο του αριθμού r , ο οποίος είναι ήδη αποθηκευμένος σε δυαδική αναπαράσταση. Τα τετραδικά ψηφία ανακτώνται διαδοχικά με δεξιές ολισθήσεις των 2 bit.

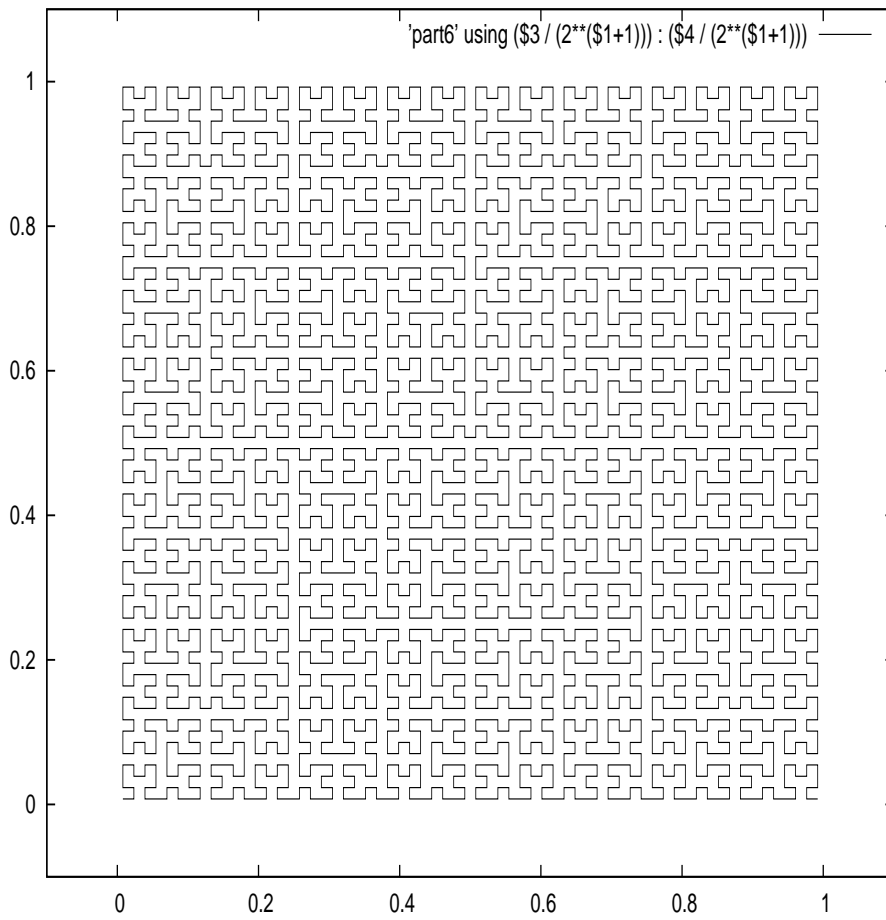
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το σύνολο του κώδικα:

genhcurve.c

```

1
2  #include <stdio.h>
3  #include <inttypes.h>
4
5  #define INIT_STEPS 1
6  #define MAX_STEPS ((__WORDSIZE / 2) - INIT_STEPS)
7  #define PRUF      "%" __PRIPTR_PREFIX "u"
8
9  #define __T_ARGS(scale, x, y, x1, y1) \
10     __UWORD_TYPE scale, __UWORD_TYPE x, __UWORD_TYPE y, \
11     __UWORD_TYPE *x1, __UWORD_TYPE *y1
12 #define TRANSFORM(name, scale, x, y, fx, fy) \
13     __UWORD_TYPE name(__T_ARGS(scale, x, y, x1, y1)) { \
14     *x1 = (fx); *y1 = (fy); return scale + 1; }
15
16 typedef __UWORD_TYPE (* step_transformation)
17     (__T_ARGS(scale, x, y, x1, y1));
18
19 __UWORD_TYPE init_steps = 1<<INIT_STEPS;
20 #define RANGE(scale) (init_steps * (1 << (scale)))
21
22 /* transformations */
```

Σχήμα 5.1: Οι διαμερίσεις στο 6ο βήμα



```

23 TRANSFORM(h0, scale, x, y, y, x)
24 TRANSFORM(h1, scale, x, y, x, RANGE(scale) + y)
25 TRANSFORM(h2, scale, x, y, RANGE(scale) + x, RANGE(scale) + y)
26 TRANSFORM(h3, scale, x, y, RANGE(scale + 1) - y, RANGE(scale) - x)
27
28 step_transformation h[4] = {h0, h1, h2, h3};
29
30
31 int print_partition(int steps, __UWORD_TYPE x0, __UWORD_TYPE y0) {
32
33     __UWORD_TYPE scale;
34     __UWORD_TYPE t, ct, x, y;
35     int i;
36     __UWORD_TYPE maxt = 0;
37     for(i = 0; i < steps; i++) maxt = (maxt<<2) + 3;
38     fprintf(stderr, "max steps: " PRUW "\n", maxt);
39
40     printf("#n\tt*4^n\tx*2^n" PRUW "\ty*2^n" PRUW "\n",
41           init_steps, init_steps
42           );
43     for(t = 0; t <= maxt; t++) {
44
45         scale = 0; x = x0; y = y0; ct = t;
46         for(i = 0; i < steps; i++) {
47             scale = h[ct & 0x3](scale, x, y, &x, &y);
48             ct >>= 2;
49         }
50         printf(
51             PRUW "\t" PRUW "\t" PRUW "\t" PRUW "\n",
52             scale, t, x, y
53         );
54
55         if (t == maxt) break; /* avoid overflow */
56     }
57     if (x0 == 0 && y0 == 0) {
58         printf("0\t1\t" PRUW "\t0\n", init_steps);
59     }
60 }
61
62 int main(int argc, char** argv) {
63
64     int steps = -1;
65     int i;
66     __UWORD_TYPE x0 = 0, y0 = 0;
67     for (i = 1; i < argc; i++) {
68         if (argv[i][0] == '-') {
69
70             switch(argv[i][1]) {
71
72                 case 'p':
73                     fprintf(stderr,
74                         "%s: Argument -p detected, computing partition\n",
75                         argv[0]
76                     );
77                     x0 = 1; y0 = 1;
78                     break;

```

```

79         default:
80             fprintf(stderr,
81                 "%s: Unknown switch detected `-%c'\n",
82                 argv[0], argv[i][1]
83             );
84             return 1;
85             break;
86         }
87     } else {
88         steps = atoi(argv[i]);
89         fprintf(stderr, "%s: steps=%d ", argv[0], steps);
90     }
91 }
92 if (steps < 0 || steps > MAX_STEPS) {
93     fprintf(stderr,
94         "%s: needs a numeric integer argument between 0 .. %u\n",
95         argv[0], MAX_STEPS
96     );
97     return 1;
98 }
99
100 print_partition(steps, x0, y0);
101 return 0;
102 }

```

5.2 Καμπύλη του Lebesgue

Αυτό είναι ένα πρόγραμμα που σχεδιάζει απευθείας σε ένα EPS αρχείο τα προσεγγιστικά πολύγωνα για την καμπύλη του Lebesgue.

Η συνάρτηση φ_τ της πρότασης 4.1 είναι αυτή που διαχωρίζει τις περιττές από τις άρτιες συντεταγμένες, για το x και το y αντίστοιχα. Το πρόγραμμα είναι γραμμένο για υπολογιστή $x86$, 32 ή 64 bit και μπορεί να απεικονίσει ακολουθίες μέχρι και μήκους 32 ή 64 bit αναλόγως την πλατφόρμα του επεξεργαστή. Ο διαχωρισμός των άρτιων από τα περιττά bits γίνεται με την ενσωματωμένη εντολή PEXT των επεξεργαστών (μεταγλώττιση για bmi2).

Το ακριβές κομμάτι της καμπύλης είναι το τμήμα της παρεμβολής για τα ευθύγραμμα τμήματα A_m^k που αφαιρούνται από το $I = [0, 1]$ και σχεδιάζεται με συμπαγή μαύρη γραμμή, ενώ το προσεγγιστικό τμήμα της καμπύλης σχεδιάζεται με διακεκομμένες γραμμές. Οι καμπύλες έχουν σχεδιαστεί παραπλανητικά με ελαφρώς μετατοπισμένα άκρα προς το εσωτερικό των τετραγώνων της διαμέρισης ώστε να φαίνεται καθαρά η πορεία της καμπύλης μέσα στο $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

genlaplace.c

```

1
2 #include <stdio.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #include <inttypes.h>
5 #include <x86intrin.h>
6
7 #define MAX_STEPS    __WORDSIZE - 1
8
9
10 #define coord2word(c) ((c).xy)
11 #define word2coord(w) ((coord)(w))
12
13 #if __WORDSIZE == 32
14
15     typedef union {
16         struct {
17             uint16_t x;
18             uint16_t y;
19         };
20         uint32_t xy;
21     } coord;
22
23 #define pext _pext_u32
24 #define ODDBITS = (__WORD_TYPE)0x55555555UL
25 #define EVNBITS = (__WORD_TYPE)0xAAAAAAAAUL
26
27 #else
28
29     typedef union {
30         struct {
31             uint32_t x;
32             uint32_t y;
33         };
34         uint64_t xy;
35     } coord;
36
37 #define pext _pext_u64
38 #define ODDBITS  (__WORD_TYPE)0x5555555555555555ULL
39 #define EVNBITS  (__WORD_TYPE)0xAAAAAAAAAAAAAAAAULL
40
41 #endif
42
43 #define demultiplex_bits(t, c) \
44     c.y = pext(t, ODDBITS); \
45     c.x = pext(t, EVNBITS)
46
47 inline void intervals(int steps, coord xy, coord *n, int i) {
48
49     n->xy = xy.xy;
50     if (i) {
51         if (steps & 1) {
52             n->x ++;
53             n->y += 2;

```

```

54     } else {
55         n->y ++;
56         n->x ++;
57     }
58 }
59 }
60
61 inline void fine_print(coord *c, coord *d) {
62
63     char *sub = "2 s div sub", *add = "2 s div add", *nop = "";
64
65     printf(" %%% (%u, %u) -> (%u, %u) \n",
66         (unsigned int)c->x, (unsigned int)c->y,
67         (unsigned int)d->x, (unsigned int)d->y
68     );
69
70     printf(" %u %s %u %s moveto\n",
71         (unsigned int)c->x, (c->x < d->x) ? add : sub,
72         (unsigned int)c->y, (c->y < d->y) ? add : sub
73     );
74
75     printf(" %u %s %u %s lineto\n",
76         (unsigned int)d->x, (c->x < d->x) ? sub : add,
77         (unsigned int)d->y, (c->y < d->y) ? sub : add
78     );
79 }
80
81 void print_grid(int steps) {
82
83     unsigned int ns = 1 << ((steps + 1) / 2);
84
85     printf("1 s div setlinewidth\n"
86         "1 0 0 setrgbcolor\n"
87         " newpath\n 0 12 s div sub 0 moveto\n %u 12 s div add 0 lineto\n"
88         " 0 0 12 s div sub moveto\n 0 %u 12 s div add lineto\n stroke\n"
89         "0.5 s div setlinewidth\n "
90         "[2 s div] 0 setdash\n",
91     ns, ns);
92
93     int i, j;
94
95     printf("\nnewpath\n");
96     for(i = 1; i <= ns; i++)
97         printf(" %u 0 moveto %u %u lineto\n", i, i, ns);
98     for(i = 1; i <= ns; i++)
99         printf(" 0 %u moveto %u %u lineto\n", i, ns, i);
100
101     printf("stroke\n");
102
103     printf("/Times-Roman findfont\n"
104         "12 s div scalefont\n"
105         "setfont\n"
106     );
107     printf("0 setgray\nnewpath\n"

```

```

108         " 0 12 s div sub 0 12 s div sub moveto (0) show \n"
109         " %u 0 12 s div sub moveto (.5) show\n"
110         " %u 0 12 s div sub moveto (1) show\n"
111         " 0 12 s div sub %u moveto (.5) show\n"
112         " 0 12 s div sub %u moveto (1) show\n"
113         " stroke\n",
114         ns/2, ns, ns/2, ns
115     );
116 }
117
118 void out(int steps) {
119
120     printf("%%!PS-Adobe-3.0 EPSF-3.0\n");
121     printf("%%BoundingBox: 0 0 396 396 \n");
122     __UWORD_TYPE i, t, maxt;
123     coord c, d, e; c.xy = d.xy = 0;
124     int s;
125     maxt = ((__UWORD_TYPE)1) << steps;
126     printf("/s %f def\n"
127           "s s scale\n"
128           "72 s div 72 s div translate \n",
129           ((float)256.0 / (float)(1 << ((1+steps) >> 1)))
130     );
131
132     print_grid(steps);
133
134     printf("0.5 s div setlinewidth\n"
135           "0 setgray \n"
136           "[1 s div] 0 setdash\n"
137           "newpath\n"
138     );
139
140     for (i = 0; i < maxt; i++) {
141
142         t = i << (steps & 1); // even number of bits used
143         demultiplex_bits(t, c);
144
145         intervals(steps, c, &d, 0);
146         intervals(steps, c, &e, 1);
147
148         fine_print(&d, &e);
149     }
150     printf("stroke\n\n");
151
152     for (s = 1; s <= steps; s++) {
153
154         if (s == 1)
155             printf("[ ] 0 setdash\n"
156                   " newpath\n" ) ;
157
158         maxt = ((__UWORD_TYPE)1) << s;
159
160         for (i = 0; (i+1) < maxt; i++) {
161
162             t = i << ((s) & 1); // even number of bits used
163             demultiplex_bits(t, c);

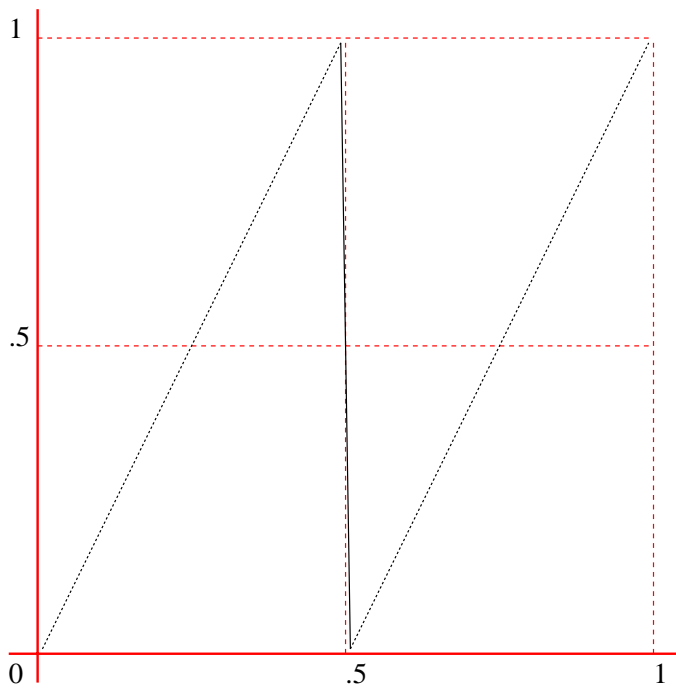
```

```

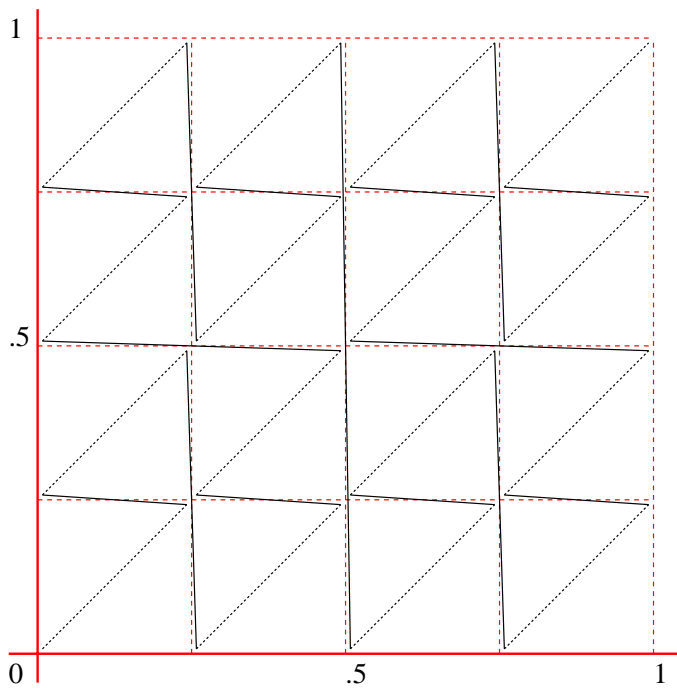
164         intervals(s, c, &d, 1);
165         d.xy <= (steps + 1)/2 - (s + 1)/2;
166
167         i++; t = i << ((s) & 1); // even number of bits used
168         demultiplex_bits(t, c);
169         intervals(s, c, &e, 0);
170         e.xy <= (steps + 1)/2 - (s + 1)/2;
171
172         fine_print(&d, &e);
173
174     }
175     if (s == steps )
176         printf(" stroke\n", maxt, maxt );
177 }
178
179 printf("%%showpage\n");
180 printf("%%EOF\n");
181 }
182
183 int main(int argc, char **argv) {
184
185     int steps = -1;
186     int i;
187     for (i = 1; i < argc; i++) {
188         if (argv[i][0] == '-') {
189
190             switch(argv[i][1]) {
191
192                 default:
193                     fprintf(stderr,
194                         "%s: Unknown switch detected `-%c'\n",
195                         argv[0], argv[i][1]
196                     );
197                     return 1;
198                     break;
199             }
200         } else {
201             steps = atoi(argv[i]);
202             fprintf(stderr, "%s: steps=%d \n", argv[0], steps);
203         }
204     }
205
206     if (steps < 0 || steps > MAX_STEPS) {
207         fprintf(stderr,
208             "%s: needs a numeric integer argument between 0 .. %u\n",
209             argv[0], MAX_STEPS
210         );
211         return 1;
212     }
213
214     out(steps);
215 }

```

Σχήμα 5.2: Οι διαμερίσεις στο 2ο βήμα



Σχήμα 5.3: Οι διαμερίσεις στο 5ο βήμα



Ευρετήρια

Index

approximating polygons of Hilbert
curve, 27

Cantor, set, 10

Cantor, the, function, 15

compact, 2

complete space, 5

connected, 6

conver, 2

countably compact, 5

curve, 1

open cover, 2

sequentially compact, 5

space filling curve, 1

totally bounded, 5

Ορολογία

Cantor, συνάρτηση, 15

Cantor, το σύνολο, 10

ακολουθιακά συμπαγής, 5

ανοιχτό κάλυμμα, 2

απλή αλυσίδα, 8

αριθμήσιμα συμπαγής, 5

δρομοσυνεκτικός, 7

κάλυμμα, 2

καμπύλη, 1

καμπύλη που γεμίζει τον χώρο, 1

κατά τόξα συνεκτικός, 7

ολικά φραγμένος, 5

πλήρης μετρικός χώρος, 5

προσεγγιστικά πολύγωνα της κα-
μπύλης του Hilbert, 27

σημείο τομής, 9

συμπαγής, 2

συνεκτικός, 6

τομή, 9

τοπικά συνεκτικός, 7

χώρος Peano, 19

Βιβλιογραφία

- [1] Hans Sagan. *Space-Filling Curves (Universitext)*. Springer, softcover reprint of the original 1st ed. 1994 edition, 9 1994.
- [2] Stephen Willard. *General Topology (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, 2 2004.