



*ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ*

*Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών*

*ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ*

# ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

*ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ*

*ΙΑΣΩΝ ΛΙΑΓΚΑΣ*

*Επιβλέπων Καθηγητής*

*Μιχάλης Λουλάκης*

*Αθήνα, Σεπτέμβρης, 2016*

## Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχάλη Λουλάκη για τις χρήσιμες οδηγίες και κατευθύνσεις που μου παρείχε για την εκπόνηση της διπλωματικής. Καθώς επίσης και τις κ. Έλια Βόντα, κ. Χρησούς Καρώνη ως μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

## Περίληψη

Οι μέθοδοι προσομοίωσης στα χρηματοοικονομικά επικεντρώνονται στην αποτίμηση χρεογράφων καθώς η αναλυτική προσέγγισή τους είναι δυνατή σε ελάχιστες μόνο περιπτώσεις.

Η μέθοδος *Monte Carlo* βασίζεται στην γέννηση τυχαίων μεταβλητών για την επίλυση όλων των θεμάτων προσομοίωσης. Κατά συνέπεια αυτό να είναι ένα κυρίαρχο στοιχείο το οποίο αναπτύσσεται στο πρώτο κεφάλαιο.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται τη δημιουργία στοχαστικών διαδικασιών. Αυτό το κομμάτι είναι χρήσιμο γιατί πολλά μεγέθη που θέλουμε να υπολογίσουμε μοντελοποιούνται ως στοχαστικές διαδικασίες. Βλέπουμε ποια στοχαστική διαδικασία είναι κατάλληλη για την μοντελοποίηση μετοχών, και για ποιους λόγους, θα αποτελέσει βασικό εργαλείο για τα μετέπειτα κεφάλαια.

Στο τρίτο κεφάλαιο αφού έχουμε πάρει τις απαραίτητες προαπαιτούμενες γνώσεις που χρειάζονται αναλύουμε την εφαρμογή της μεθόδου στην αποτίμηση χρεογράφων και περισσότερων εφαρμογών στη χρηματοοικονομική μηχανική.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρουμε κάποια επιπλέον θέματα που αφορούν την προσομοίωσή μας όπως πόσες τιμές πρέπει να προσομοιώσουμε ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εκτίμησή μας είναι αρκετά αντιπροσωπευτική. Επίσης εισάγουμε και την σημασία των διαστημάτων εμπιστοσύνης στις εκτιμήσεις μας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αποσαφηνίζουμε την σημασία της μικρής διασποράς στις εκτιμήσεις μας. Αφηγούμαστε τις πιο σημαντικές τεχνικές ελάττωσης διασποράς και την αντιμετώπιση ακραίων γεγονότων. Αυτός είναι ένας από τους πιο σημαντικούς τομείς έρευνας και καινοτομίας στην χρηματοοικονομική μηχανική τα τελευταία χρόνια. Αποσκοπεί στην βελτίωση της αξιοπιστίας των εκτιμήσεών μας.

Τέλος στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο επεξηγούμε το πόσο ευαίσθητα είναι τα παράγωγα στις μεταβολές των υποκείμενων προ-  
ϊόντων.

*abstract*

*Simulation methods in finance focus on derivative's pricing, since analytical methods are almost possible to work only in a select few examples.*

*Monte Carlo methods depend on random number generation to solve simulation problems. Thus this is a major component that is being developed in the first chapter.*

*In the second chapter stochastic processes generation is being presented. This part is really important because many quantities that we want to compute are modeled as a stochastic process. We present which stochastic process is proper to describe the price of a stock and for which reasons. This will play a significant role on the consequent chapters.*

*In the third chapter since we have the prerequisite knowledge to understand the concept of Monte Carlo from previous chapters, we analyze its application in derivatives pricing and in other financial concepts.*

*In the fourth chapter we analyze some extra issues that concern a typical simulation such as how many values should we simulate in order to have an accurate estimation. Moreover, we introduce confidence intervals to our simulations.*

*In the fifth chapter we make clear how important the small variance is in our estimations. We develop the most usual variance reduction techniques and how to handle extreme events. This is one of the most important fields of research in recent years in Monte Carlo methods, and aims to improve the quality of our estimations.*

*Last, in the sixth chapter we explain the sensitivities of derivative products to the changes of the underlying assets.*

## Εισαγωγή

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να μιλήσουμε τον αναγνώστη στις σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους προσομοίωσης στην χρηματοοικονομική μηχανική, με στόχο την αποτίμηση παραγώγων αλλά και τον υπολογισμό των ευαισθησιών τους. Πολλές από τις τεχνικές που αναπτύσσονται χρησιμοποιούνται επίσης και στη διαχείριση ρίσκου. Η εργασία εστιάζει έντονα στις εφαρμογές των μεθόδων σε κάθε κεφάλαιο. Για την επίλυση αρκετών ασκήσεων προσομοίωσης έχει αναπτυχθεί κώδικας στο στατιστικό πακέτο *R*.

Είναι γνωστό ότι η στατιστική συμπερασματολογία μας βοηθάει να βγάλουμε συμπέρασμα από ένα δείγμα για ένα πληθυσμό. Η θεωρία πιθανοτήτων μας βοηθάει να βγάλουμε συμπεράσματα για ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό και αντιστοιχεί κάθε δυνατή τιμή του συνόλου τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής με μια πιθανότητα. Η μέθοδος *Monte Carlo* κάνει ακριβώς το ανάποδο χρησιμοποιώντας την προσομοίωση.

Ουσιαστικά προσομοιώνει ισοπίθανα τιμές από το σύνολο τιμών και αντιστοιχεί το ποσοστό της κάθε τιμής με την πιθανότητά της. Τα δύο βασικά θεωρήματα που στηρίζουν αυτή τη θεωρία είναι ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών και το κεντρικό οριακό θεώρημα. Ο πρώτος νόμος μας αποδεικνύει πως υπό κατάλληλες προϋποθέσεις ο δειγματικός μέσος μιας ακολουθίας ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν μία κοινή κατανομή συγκλίνει σχεδόν βεβαίως προς τον θεωρητικό μέσο της κατανομής. Ενώ το κεντρικό οριακό θεώρημα αναφέρει ότι αν από έναν πληθυσμό που ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ , επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  και υπολογίσουμε τους μέσους τους, τότε, για μεγάλα  $n \rightarrow \infty$  κατανομή αυτών των μέσων (των δειγματικών) είναι κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ .

Ένας από τους λόγους που αυτή η μέθοδος είναι τόσο χρήσιμη είναι γιατί μπορούμε να υπολογίσουμε αναμενόμενες τιμές. Οι αναμενόμενες τιμές σε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές υπολογίζονται αναλυτικά ως ολοκληρώματα. Με την μέθοδο *Monte Carlo* μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα προσεγγιστικά με πολύ μεγάλη ακρίβεια χωρίς να μας δυσκολεύει η μεγάλη διάστασή τους όπως στις κλασικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων της αριθμητικής ανάλυσης. Στις μεθόδους αυτές γίνεται πολύ μεγάλη έρευνα στον τομέα της εύρεσης ακριβέστερων αποτελεσμάτων μέσα από την ελάττωση της διασποράς των εκτιμήσεων.

Είναι γνωστό ότι η απόδοση ενός παραγώγου ευρωπαϊκού τύπου δίνεται από τη σχέση:  $Payoff = (S(T) - K)^+ = \max(0, S(T))$ . Για να μεταφέρουμε αυτό το χρηματικό ποσό στο παρόν το πολλαπλασιάζουμε με τον συντελεστή  $e^{-rT}$ . Άρα η αναμενόμενη τιμή της απόδοσης ενός τέτοιου παραγώγου δίνεται από:  $E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$ . Για να υπολογίσουμε αυτή τη τιμή ιδανικά θα θέλαμε

να ξέρουμε την καταληκτική τιμή του υποκείμενου προϊόντος  $S(T)$ . Για να την υπολογίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο το *Black Scholes* κατά το οποίο  $S(T) = S(0)exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T))$ . Όπου  $W(T)$  είναι μεταβλητή κανονικής κατανομής με μέση τιμή 0 και διασπορά  $T$ . Έτσι θα πάρουμε πολλά  $S(T)$  κατά συνέπεια πολλές αποδώσεις  $e^{-rT}(S(T) - K)^+$  και έτσι θα βρούμε τον μέσο όρο τους  $E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$  προσεγγιστικά ως το άθροισμα όλων δια το πλήθος.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Γέννηση Τυχαίων Μεταβλητών</b>	<b>9</b>
1.1	Η Μέθοδος της Αντιστροφής . . . . .	9
1.2	Η Μέθοδος της Αποδοχής-Απόρριψης . . . . .	12
1.3	Παραγωγή Μονομεταβλητής Κανονικής Τυχαίας Μεταβλητής . . . . .	20
1.3.1	Ο Αλγόριθμος <i>Box – Muller</i> . . . . .	20
1.3.2	Η Πολική Μέθοδος . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Γέννηση Στοχαστικών Διαδικασιών</b>	<b>23</b>
2.1	Προσομοίωση Διαδικασίας <i>Poisson</i> . . . . .	23
2.2	Προσομοίωση μη Ομογενούς Διαδικασίας <i>Poisson</i> . . . . .	25
2.3	Κίνηση <i>Brown</i> . . . . .	26
2.3.1	Απλή Μονοδιάστατη Κίνηση <i>Brown</i> . . . . .	26
2.3.2	Κίνηση <i>Brown</i> με Τάση . . . . .	27
2.3.3	Γεωμετρική Κίνηση <i>Brown</i> . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Αρχές της Μεθόδου <i>Monte Carlo</i></b>	<b>29</b>
3.1	Η Έννοια της Μεθόδου <i>Monte Carlo</i> . . . . .	29
3.2	Η Εφαρμογή της Μεθόδου στα Χρηματοοικονομικά . . . . .	30
3.2.1	Εισαγωγή στην Αποτίμηση Χρεογράφων . . . . .	31
3.3	Παραγωγή Συσχετιζόμενων T.M. & Κινήσεων <i>Brown</i> . . . . .	33
3.3.1	Παραγωγή Συσχετισμένων Κανονικών Κατανομών . . . . .	34
3.3.2	Η Μέθοδος Αποσύνθεσης του <i>Cholesky</i> για Ένα Θετικά Ορισμένο Πίνακα . . . . .	34
3.3.3	Παραγωγή Συσχετισμένων Κινήσεων <i>Brown</i> . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Έλεγχος Διάρκειας Τρεξίματος</b>	<b>39</b>
4.1	Ανάλυση Εξόδου . . . . .	39
4.1.1	Έλεγχος Διάρκειας Τρεξίματος . . . . .	43
4.1.2	Η Διαδικασία των Δύο Σταδίων . . . . .	44
4.1.3	Η Σειριακή Μέθοδος . . . . .	49



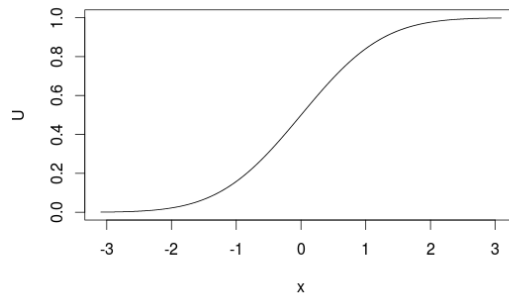
<b>5</b>	<b>Εισαγωγή στην Ελάττωση Διασποράς</b>	<b>53</b>
5.1	Αποδοτικότητα Προσομοίωσης . . . . .	53
5.2	Συνήθη Τυχαία Νούμερα . . . . .	55
5.2.1	Συνήθη Τυχαία Νούμερα στη Χρηματοοικονομική Μη- χανική . . . . .	56
5.3	Τυχαίες Μεταβλητές Ελέγχου . . . . .	57
5.4	Η Μέθοδος της Μεταβλητής Ελέγχου . . . . .	58
5.4.1	Πολλαπλές Μεταβλητές Ελέγχου . . . . .	65
5.5	Αντιθετικές Μεταβλητές . . . . .	66
5.5.1	Αντιθετικές Μεταβλητές Κανονικής Κατανομής . . . . .	70
5.5.2	<i>Monte Carlo</i> Μέθοδος υπό Συνθήκη . . . . .	71
5.6	Δειγματοληψία Σπουδαιότητας . . . . .	72
5.7	Στρωματοποιημένη Δειγματοληψία . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Υπολογισμός Ευαισθησιών Παραγώγων</b>	<b>85</b>
6.1	Η Μέθοδος του Μονοπατιού . . . . .	86
6.2	Η Μέθοδος του Λόγου των Πιθανοφανειών . . . . .	88
6.2.1	Γάμμα . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Μετάφραση Ορολογίας</b>	<b>93</b>

# Κεφάλαιο 1

## Γέννηση Τυχαίων Μεταβλητών

### 1.1 Η Μέθοδος της Αντιστροφής

Έστω ότι θέλουμε να πράξουμε τυχαίους αριθμούς που να ακολουθούν μια συγκεκριμένη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας  $F$ . Ένας τρόπος που θα μπορούσαμε να το πετύχουμε είναι να αντιστρέψουμε την  $F$ . Με αυτόν τον τρόπο θα χρησιμοποιούμε ως όρισμα νούμερα στο διάστημα  $[0, 1]$  τα οποία είναι πιθανότητες και θα παίρνουμε ως αποτέλεσμα το  $x$  στο οποίο αντιστοιχεί αυτή η πιθανότητα, μέσω της  $F^{-1}$ . Αν λοιπόν παράγουμε πάρα πολλά νούμερα στο διάστημα  $[0, 1]$  ισοπίθانا και τα συνδέσουμε με το αντίστοιχο  $x$  η κατανομή που θα προκύψει είναι η  $f(x)$ . Έχουμε λοιπόν ότι  $X = F^{-1}(U)$ , με  $U \sim Unif[0, 1]$ .



Σχήμα 1.1: Μέθοδος αντιστροφής

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση  $F$  πρέπει να είναι συνεχώς αύξουσα. Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε πρέπει να θέσουμε το εξής:  
 $F^{-1} = \inf\{x : F(x) \geq u\}$ . Σε αυτή την περίπτωση αν έχουμε πολλές τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει ότι  $F(x) = u$ , με αυτόν τον κανόνα θα πάρουμε

την μικρότερη. Για να βεβαιωθούμε πως η μέθοδος της αντιστροφής παράγει δείγματα από την  $F$  μπορούμε να ελέγξουμε την κατανομή των  $X$  που παράγει:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(F^{-1}(U) \leq x) \\ &= P(U \leq F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω του τρόπου που ορίζεται η  $F^{-1}$  τα γεγονότα  $\{F^{-1}(u) \leq x\}$  και  $\{u \leq F(x)\}$  συμπίπτουν για όλα τα  $u$  και  $x$ . Η τελευταία ισότητα ισχύει καθώς έχουμε:

$$P(U_i \leq u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ u, & 0 \leq u \leq 1 \\ 1, & u > 1 \end{cases}$$

Για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου παραθέτοντας παραδείγματα συχνά χρησιμοποιούμενων κατανομών

**Παράδειγμα 1.1.1.** Εκθετική κατανομή:  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ , όπου  $\lambda \geq 0$  είναι μια σταθερά. Λύνοντας την εξίσωση  $y = 1 - e^{-\lambda x}$  ως προς  $y \in (0, 1)$  παίρνουμε  $x = F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$ . Αυτό μας δίνει  $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ . Αλλά  $1 - U \sim \text{unif}(0, 1)$  επειδή  $U \sim \text{unif}(0, 1)$ , έτσι μπορούμε να απλοποιήσουμε τον αλγόριθμο αντικαθιστώντας το  $1 - U$  με  $U$ . Άρα ο αλγόριθμος γένεσης εκθετικής τυχαίας μεταβλητής με ρυθμό  $\lambda$  είναι:

1. Παράγω  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ .
2. Θέτω  $X = \frac{1}{\lambda} \ln(U)$

□

**Παράδειγμα 1.1.2.** Διακριτή μέθοδος αντιστροφής: Θεωρήστε μια μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή  $X$  με σ.μ.π.  $p(k) = P(X = k)$ ,  $k \geq 0$ . Σε αυτή την περίπτωση η κατασκευή  $X = F^{-1}(U)$  δίνεται αποκλειστικά από:  $X = 0$  αν  $U \leq p(0)$ ,  $X = k$  αν

$$\sum_{i=0}^{k-1} p(i) < U \leq \sum_{i=0}^k p(i), \quad k \geq 1$$

Ο αλγόριθμος μπορεί εύκολα να επικυρωθεί άμεσα λόγω του ότι ισχύει  $P(a < U \leq b) = b - a$ , για  $0 < a < b \leq 1$ , εδώ χρησιμοποιούμε  $a = \sum_{i=0}^{k-1} p(i) < b = \sum_{i=0}^k p(i)$ , και έτσι  $b - a = p(k)$ . □

**Παράδειγμα 1.1.3.** Κατανομή *Bernouli*( $p$ ): Έστω ότι θέλουμε να γεννήσουμε μια τ.μ.  $X \sim \text{Bern}(p)$  σε αυτή την περίπτωση  $P(X = 0) = 1 - p$  και  $P(X = 1) = p$  για κάποιο  $p \in (0, 1)$ . Τότε η διακριτή μέθοδος αντιστροφής μας δίνει τον ακόλουθο αλγόριθμο:

1. Παράγω  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ .
2. Θέτω  $X = 0$  αν  $U \leq 1 - p$ ;  $X = 1$  αν  $U > 1 - p$ .

□

**Παράδειγμα 1.1.4.** Κατανομή *Poisson* με μέσο  $\alpha$ : Σε αυτή τη περίπτωση  $p(k) = P(X = k) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}$ ,  $k \geq 0$ . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με την διακριτή μέθοδο αντιστροφής. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική λύση. Θυμόμαστε ότι αν  $\{N(t) : t \geq 0\}$  είναι μια διαδικασία που μετράει μια διαδικασία *Poisson* με ρυθμό  $\alpha$ , τότε το  $N(1)$  ακολουθεί κατανομή *Poisson* με μέσο  $\alpha$ . Οπότε αν μπορούμε να προσομοιώσουμε το  $N(1)$  μπορούμε να θέσουμε  $X = N(1)$ . Με  $Y = N(1) + 1$ , και  $t_n = X_1 + \dots + X_n$  να είναι το  $n$  στοιχείο μιας διαδικασίας *Poisson*, τα  $X_i$  είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές, εκθετικής κατανομής με ρυθμό  $\alpha$ . Το  $Y = \min\{n \geq 1 : t_n > 1\} = \min\{n \geq 1 : X_1 + \dots + X_n > 1\}$ , είναι ένας χρόνος διακοπής. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αντιστροφής για να γεννήσουμε ανεξάρτητα και ομοιόμορφα  $X_i$ , της εκθετικής κατανομής από τη σχέση  $X_i = -\frac{1}{\alpha} \ln(U_i)$ . Τότε

$$\begin{aligned} Y &= \min\{n \geq 1 : \ln(U_1) + \dots + \ln(U_n) < -\alpha\} \\ &= \min\{n \geq 1 : \ln(U_1 \dots U_n) < -\alpha\} \\ &= \min\{n \geq 1 : U_1 \dots U_n < e^{-\alpha}\} \end{aligned}$$

Έτσι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να παράγουμε την  $Y$  παράγοντας ανεξάρτητες  $U_i$  παίρνοντας το γινόμενο τους μέχρι αυτό να φτάσει πριν το  $e^{-\alpha}$ . Μετά παίρνουμε  $X = N(1) = Y - 1$  το οποίο ακολουθεί την κατανομή *Poisson*. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος:

1. Θέτω  $X = 0$ ,  $P = 1$
2. Παράγω  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$  και θέτω  $P = UP$
3. Αν  $P < e^{-\alpha}$ , τότε σταματάω. Αλλιώς αν  $P \geq e^{-\alpha}$ , τότε θέτω  $X = X + 1$  και πάω πίσω στο 2.

□

**Παράδειγμα 1.1.5.** Κατανομή γενόμενη υπό όρους. Έστω ότι η μεταβλητή  $X$  έχει κατανομή  $F$  και το πρόβλημα δειγματοληψίας έχει τον όρο:  $a < X \leq b$ , με  $F(a) < F(b)$ . Με την μέθοδο της αντιστροφής δεν παρουσιάζεται παραπάνω δυσκολία σε σχέση με το πρόβλημα χωρίς τον όρο. Με  $U \sim Unif[0, 1]$  η τυχαία μεταβλητή  $V$  που ορίζεται ως  $V = F(a) + [F(b) - F(a)]U$  είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ του  $F(a)$  και  $F(b)$  και η  $F^{-1}$  μας δίνει την επιθυμητή υπό όρους κατανομή. Αυτό διαπιστώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(V) \leq x) &= P(F(a) + [F(b) - F(a)]U \leq F(x)) \\ &= P(U \leq [F(x) - F(a)]/[F(b) - F(a)]) \\ &= [F(x) - F(a)]/[F(b) - F(a)] \end{aligned}$$

Και αυτό είναι ακριβώς η κατανομή του  $X$  δεδομένου  $a < X \leq b$ . Καθένα από τα  $a, b$  θα μπορούσε να είναι  $\infty$ .  $\square$

## 1.2 Η Μέθοδος της Αποδοχής-Απόρριψης

Η μέθοδος της αντιστροφής είναι αποτελεσματική όταν μπορούμε να την εφαρμόσουμε. Όμως υπάρχουν περιπτώσεις που δεν μπορούμε να αντιστρέψουμε την  $F$ . Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της αποδοχής-απόρριψης. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο αν μπορούμε να παράγουμε τ.μ. κατανομής  $g(x)$  τότε με ένα κατάλληλο τρόπο μπορούμε να επιλέξουμε κάποιες από αυτές ώστε να ακολουθούν την κατανομή στόχο  $f(x)$ . Αυτό μπορούμε να το κάνουμε σε κατανομές μιας ή περισσότερων διαστάσεων. Η κατανομή  $g$  ονομάζεται φάκελος γιατί πρέπει να περικλείει την  $f$  σε κάθε σημείο  $x$ . Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε θα πολλαπλασιάσουμε την  $g$  με ένα κατάλληλο σταθερό συντελεστή προσαύξησης  $c$  ώστε πάντα να ισχύει:

$$f(x) \leq cg(x) \quad \forall x \in X$$

Κάθε φορά παράγουμε ένα  $X$  από την  $g$  θα το δεχόμαστε με πιθανότητα  $\frac{f(X)}{cg(X)}$ . Για να υλοποιήσουμε αυτήν την πιθανότητα κάθε φορά, θα παράγουμε μια τιμή  $U \sim unif(0,1)$  και θα δεχόμαστε την τιμή  $X$  ως τιμή της  $f$  με πιθανότητα  $\frac{f(X)}{cg(X)}$ . Αν η  $X$  απορριφθεί τότε θα επαναλάβουμε την διαδικασία με μια νέα τιμή της  $X \sim g(x)$  μέχρι η τιμή που θα παράγουμε να γίνει αποδεκτή. Το σύνολο των τιμών που θα γίνουν δεκτές μέσα από αυτή τη διαδικασία θα ακολουθεί την κατανομή στόχο  $f$ . Συνοπτικά ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

1. Παράγω  $X$  από την κατανομή  $g$

2. Παράγω  $U \sim Unif[0, 1]$

3. Αν  $U \leq f(X)/cg(x)$  επιστρέφω  $X$ ; αλλιώς πάω στο βήμα 1

Για να εξετάσουμε το πόσο έγκυρη είναι η μέθοδος αρκεί να εξετάσουμε ένα δείγμα  $Y$  που επιστρέφει αυτή η μέθοδος. Γνωρίζουμε ότι η  $Y$  έχει την κατανομή της  $X$  υπό την συνθήκη ότι  $U \leq f(X)/cg(X)$ . Έτσι για κάθε  $A \subseteq X$ ,

$$\begin{aligned} P(Y \in A) &= P(X \in A | U \leq f(X)/cg(X)) \\ &= \frac{P(x \in A, U \leq f(X)/cg(X))}{P(U \leq f(X)/cg(X))} \end{aligned}$$

Δεδομένου  $x$ , η πιθανότητα ότι  $U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$  είναι απλά  $f(x)/cg(x)$  επειδή η  $U$  είναι ομοιόμορφη. Έτσι ο παρονομαστής του προηγούμενου κλάσματος δίνεται από την σχέση  $P(U \leq f(X)) = \int_X \frac{f(x)}{cg(x)} g(x) dx = \frac{1}{c}$ . Κάνοντας αυτή την αντικατάσταση στην προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι:

$$P(Y \in A) = cP(X \in A, U \leq f(X)/cg(X)) = c \int_A \frac{f(x)}{cg(x)} g(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

Από τη στιγμή που το  $A$  είναι αυθαίρετο πιστοποιεί ότι η  $Y$  έχει πυκνότητα  $f$ . Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι η πιθανότητα να γίνει αποδεκτή μια προσπάθειά μας είναι  $1/c$ . Ο στόχος μας είναι να είναι μέγιστη αυτή η πιθανότητα, ώστε να είναι όσο το δυνατό πιο αποδοτικός ο αλγόριθμός μας. Άρα πρέπει το  $c$  να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στη μονάδα, χωρίς να επιτρέπεται να γίνει ποτέ μικρότερο της μονάδας.

**Παράδειγμα 1.2.1.** Άσκηση από την εργασία εξαμήνου του μεταπτυχιακού μαθήματος Υπολογιστική Στατιστική και Στοχαστική Βελτιστοποίηση του Δ.Φουσκάκη. «Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή *logistic* με παράμετρο θέσης  $\mu=0$  και παράμετρο μεταβλητότητας  $s=1$ . Η σ.π.π. της εν λόγω κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, X \in \mathbb{R}.$$

Με τη βοήθεια της μεθόδου απόρριψης και χωρίς να χρησιμοποιήσετε καμία έτοιμη συνάρτηση προσομοίωσης τιμών στην  $R$  (πέραν της *runif*) κατασκευάστε αλγόριθμο που να προσομοιώνει τιμές από την παραπάνω κατανομή. Για φάκελο θεωρήστε τη συνάρτηση  $e^{-x}$  για  $x \geq 0$  και λόγω συμμετρίας της κατανομής *logistic* προσομοιώστε με «αυτόματο» τρόπο αρνητικές επίσης τιμές\*. Εκτιμήστε την ολική πιθανότητα αποδοχής του αλγορίθμου σας. Συγκρίνετε το ιστόγραμμα των προσομοιωμένων τιμών με τον μέσο και την τυπική απόκλιση

της θεωρητικής κατανομής.

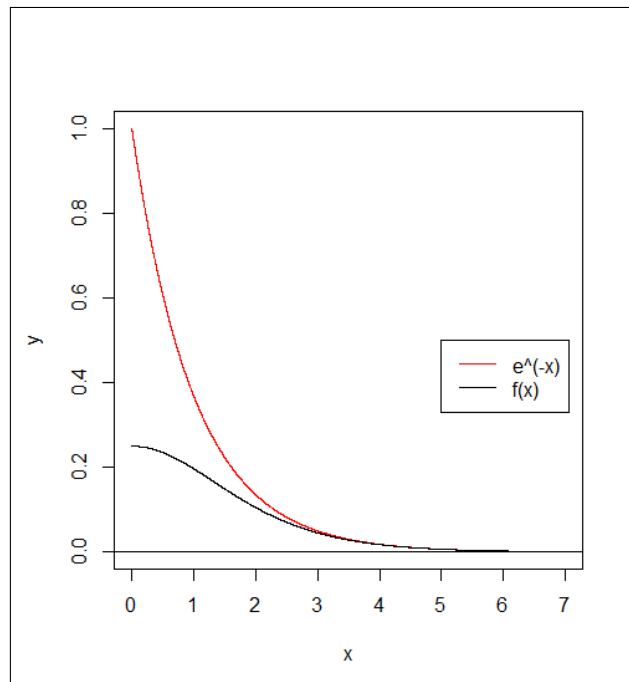
\*Με τον παραπάνω τρόπο στην πραγματικότητα προσομοιώνετε μόνο τις τιμές  $\bar{X}$  στον  $\mathbb{R}_+$ . Μιας και η κατανομή εισήγησης που χρησιμοποιείτε έχει στήριγμα το  $\mathbb{R}_+$ . Για να προσομοιώσετε και αρνητικές τιμές μπορείτε προτού δεχτείτε την τελική τιμή να παράγετε μια τιμή από την ομοιόμορφη στο  $(0,1)$  και ελέγχοντας αν είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη του 0.5 να δίνετε τιμές  $X = -\bar{X}$  ή  $X = \bar{X}$ . Ουσιαστικά δηλαδή χρησιμοποιείτε τη μέθοδο της σύνθεσης».

**Λύση:** Σε αυτήν την περίπτωση είναι σαφές ότι η κατανομή που θα χρησιμοποιήσουμε σαν φάκελο είναι η  $cg(x) = ce^{-x}$ . Η κατανομή στόχος είναι η  $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ . Γνωρίζοντας ότι  $f(x) \leq cg(x) \forall x \in X$  ψάχνουμε να βρούμε το  $c$ . Αρχικά κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$ . Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τον κώδικα:

```
x<-seq(0, 7, length.out = 10000)
length(x)
g<-exp(-x)
plot(x,g,col=2,type="l",ylab="y")
f<-(exp(-x)/(1+exp(-x))^2)
abline(h=0)
lines(x,f,col=9)
legend(5,0.5,legend = c("e^(-x)","f(x)"),col=c(2,9),lty=1)
```

Σχήμα 1.2:

Παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:



Σχήμα 1.3:

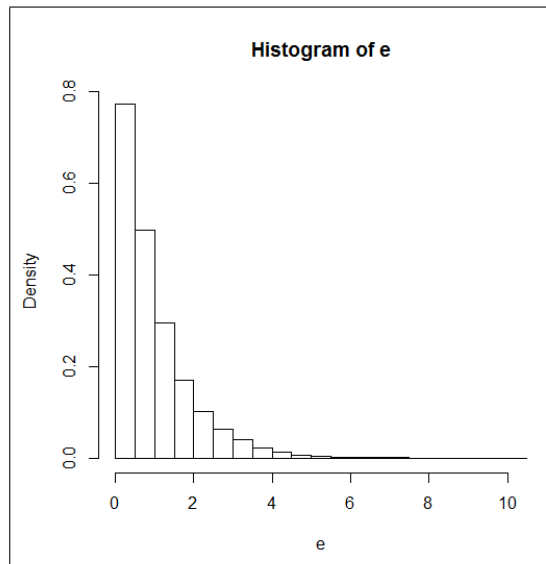
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι όντως μεγαλύτερη της  $f \forall x \in X$ . Καλό θα ήταν να το αποδείξουμε μαθηματικά ως εξής:  $\forall x \in \mathbb{R}_+$  έχουμε ότι:  $e^{-x} \geq 0 \Rightarrow e^{-x} + 1 \geq 1 \Rightarrow (e^{-x} + 1)^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{(e^{-x} + 1)^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} \leq e^{-x} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ . Άρα το  $c = 1$  γιατί όπως είπαμε θέλουμε να προσεγγίζει τη μονάδα για να είναι ο αλγόριθμός μας όσο το δυνατό πιο αποδοτικός. Βάση της εκφώνησης πρέπει να παράγουμε τιμές της  $g$  βάση της *uniform* αυτό θα το πετύχουμε μέσω της μεθόδου της αντιστροφής. Παρατηρούμε ότι η  $g$  είναι η συνάρτηση της εκθετικής κατανομής για  $\lambda=1$ . Με βάση το παράδειγμα 1.1.1 αρκεί να παράγουμε  $U$  και να θέσουμε  $X = \ln(U)$ . Αυτές τις τιμές θα τις δεχόμαστε ή θα τις απορρίπτουμε με την πιθανότητα της μεθόδου αποδοχής απόρριψης. Μπορούμε να ελέγξουμε εμπειρικά το πως δουλεύει η μέθοδος αντιστροφής στην  $R$ , συγκρίνοντας το ιστόγραμμα των δεδομένων που θα παράγει η μέθοδος με το ιστόγραμμα των αυτοματοποιημένων συναρτήσεων στην  $R$ . Αυτό επιτυγχάνεται με τον κώδικα:

```
e<--log(runif(10001,0,1))
plot(x,e)
hist(e,probability=TRUE)
```

Σχήμα 1.4:



και μας δίνει το εξής αποτέλεσμα:



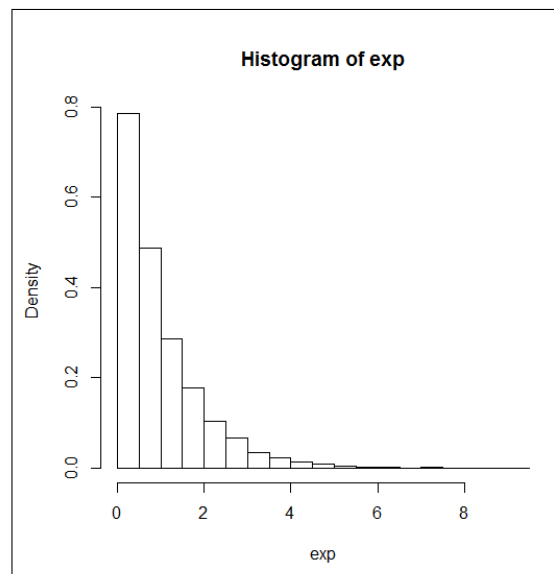
Σχήμα 1.5:

Ενώ το ιστόγραμμα των αυτοματοποιημένων συναρτήσεων θα το πάρουμε με τον ακόλουθο κώδικα:

```
exp<-rexp(10001,1)
hist(exp,probability=TRUE)
```

Σχήμα 1.6:

και μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:



Σχήμα 1.7:

Παρατηρούμε ότι τα δύο ιστογράμματα είναι πάρα πολύ κοντά. Η λογική του συνολικού αλγορίθμου είναι η εξής:

1. Παράγω  $U_1, U_2, U_3$  με  $U \sim Unif[0, 1]$
2.  $X \leftarrow -\log(U_1)$
3. Αν  $U_2 \geq f(X)/cg(x)$  πάω στο βήμα 1
4. Αν  $U_3 \leq 0.5$  Θέτω  $X \leftarrow -X$
5. Επιστρέφω  $X$

Αυτό στην  $R$  επιτυγχάνεται με τον παρακάτω κώδικα:

```

f<-function(x){
  y<-(exp(-x)/((1+exp(-x))^2))
  return(y)
}
g<-function(x){
  y<-exp(-x)
  return(y)
}
fun<-function(n){
  i<-1
  sum<-0
  x<-c()
  while(length(x)!=n){
    un<-runif(3,0,1)
    yp<--log(un[1])
    sum<-sum+1
    if(un[2]<=f(yp)/(1*g(yp))){
      if(un[3]<=0.5){
        x[i]<-yp
        i<-i+1
      }else{
        x[i]<--yp
        i<-i+1
      }
    }
  }
  p<-n/sum
  l<-list(x,p)
  return(l)
}

```

Σχήμα 1.8:

Αρχικά ορίζει τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$ . Έπειτα η συνάρτηση  $fun$  δέχεται ως όρισμα το πλήθος των τιμών που θέλουμε να παράγει, υλοποιεί τα παραπάνω 5 βήματα και επιστρέφει μια λίστα με το πρώτο στοιχείο τις παρατηρήσεις της κατανομής στόχου και δεύτερο στοιχείο το ποσοστό των παρατηρήσεων που έγινε δεκτό. Με τον παρακάτω κώδικα παράγουμε 10.000 τιμές της κατανομής στόχου και παίρνουμε το ποσοστό αποδοχής, τα μέτρα θέσης και διασποράς του παραγμένου δείγματος και το ιστόγραμμα του δείγματος μαζί με την σ.π.π. της λογαριθμικής κατανομής.

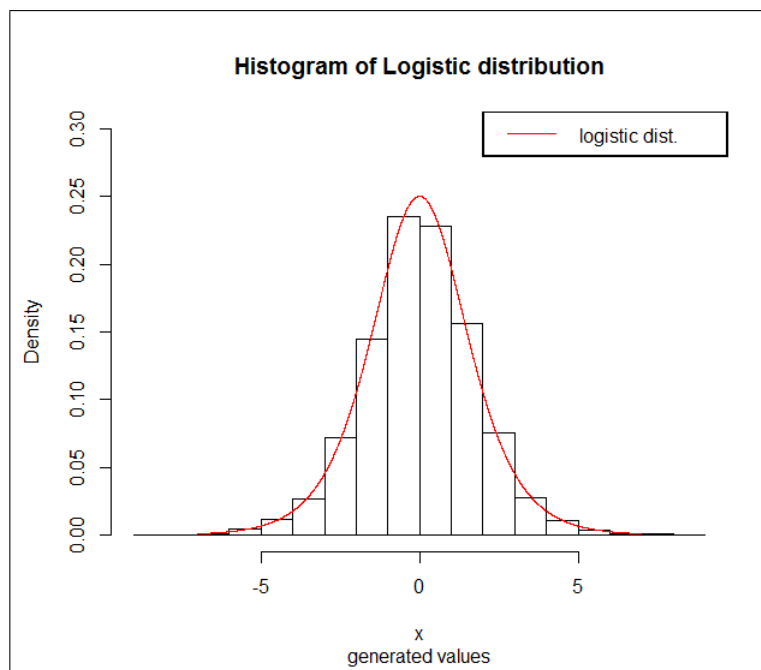
```

res<-fun(10000)
proportion<-fun(10000)[[2]]
summary(res[[1]])
sd(res[[1]])
hist(res[[1]],probability=T,ylim=c(0,0.3),xlab="x",main = "Histogram of Logistic dist")
x1<-seq(-7,7,length.out = 10000)
lines(x1,f(x1),col=c(2))
legend("topright",legend = "logistic dist.",lty=1,col = c(2),box.lwd=2)
sqrt((pi^2)/3)

```

Σχήμα 1.9:

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε για το παραγμένο δείγμα είναι:  $sd = 1.785$ ,  $mean = 0.014$ ,  $proportion = 0.5$  και το ακόλουθο ιστόγραμμα:



Σχήμα 1.10:

Από τη θεωρία της λογιστικής κατανομής είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της κατανομής στόχου είναι  $\sqrt{\frac{\pi^2}{3}} = 1.81$  και η μέση τιμή είναι 0. Από το ιστόγραμμα παρατηρούμε ότι σχηματικά οι παραγμένες τιμές ακολουθούν πιστά την σ.π.π. της κατανομής στόχου. Επίσης έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 P(u \leq \frac{f(y)}{cg(y)}) &= E_Y[P(u \leq \frac{f(y)}{cg(y)} | Y = y)] \\
 &= E_Y[\frac{f(y)}{cg(y)}] = \int_0^\infty \frac{f(y)}{cg(y)} dy = \frac{1}{c} \int_0^\infty f(y) dy \quad (1)
 \end{aligned}$$

Η  $f$  είναι συνεχής σ.π.π. κατά συνέπεια ολοκληρώνει στο 1 και λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα  $y'$  έπεται ότι  $\int_0^\infty f(y)dy = \frac{1}{2}$ . Από τη σχέση (1) συνεπάγεται ότι για  $c = 1$  η θεωρητική πιθανότητα αποδοχής του αλγορίθμου είναι ίση με  $\frac{1}{2c} = 0.5$ , όπως και επαληθεύτηκε από τον αλγόριθμο.  $\square$

### 1.3 Παραγωγή Μονομεταβλητής Κανονικής Τυχαίας Μεταβλητής

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε αναφερθεί στην γέννηση κανονικής τυχαίας μεταβλητής. Αυτή είναι πολύ χρήσιμη για την γέννηση τ.μ. της λογαριθμοκανονικής κατανομής η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη χρηματοοικονομική μηχανική. Από τη στατιστική συμπερασματολογία ξέρουμε ότι αν  $Z \sim N(0, 1)$  τότε  $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Άρα αυτό που μας απασχολεί είναι η γέννηση τ.μ.  $\sim N(0, 1)$ . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με την μέθοδο της αντιστροφής αλλά αυτό δεν θα ήταν αποδοτικό γιατί δεν μπορούμε να βρούμε την  $F^{-1}$  σε κλειστή μορφή. Για αυτό το λόγο θα αναφέρουμε τις εξής μεθόδους:

1. Μέθοδος *Box – Muller*

2. Πολική μέθοδος

#### 1.3.1 Ο Αλγόριθμος *Box – Muller*

Ο αλγόριθμος παράγει δείγμα από τη διμεταβλητή κανονική κατανομή, έτσι το κάθε στοιχείο είναι της μονομεταβλητής κανονικής κατανομής. Βασίζεται στην ιδιότητα της διμεταβλητής κανονικής κατανομής: Αν  $Z \sim N(0, I_2)$ , τότε ισχύει:

$$1. R = Z_1^2 + Z_2^2, \text{ με } P(R \leq x) = 1 - e^{-x/2}$$

2. Δεδομένου του  $R$  το σημείο  $(Z_1, Z_2)$ , είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο γύρω από τον κύκλο ακτίνας  $\sqrt{R}$  με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Έτσι προκύπτει πως για να παράγουμε  $(Z_1, Z_2)$  πρέπει πρώτα να παράγουμε  $R$  και μετά να διαλέξουμε ένα κύκλο ακτίνας  $\sqrt{R}$ . Για να παράγουμε από την εκθετική κατανομή θέτουμε  $R = -\log(U_1)$ , με  $U_1 \sim Unif[0, 1]$ . Για να παράγουμε ένα τυχαίο σημείο από ένα κύκλο παράγουμε μια τυχαία γωνία μεταξύ 0 και  $2\pi$  και μετά να σχεδιάσουμε αυτή τη γωνία σε ένα σημείο στον κύκλο. Η τυχαία γωνία μπορεί να παραχθεί με τον εξής τρόπο:  $V = 2\pi U_2$ , με  $U_2 \sim Unif[0, 1]$ . Το αντίστοιχο σημείο στον κύκλο έχει συντεταγμένες  $(\sqrt{R}\cos(V), \sqrt{R}\sin(V))$ . Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

### 1.3. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ<sup>21</sup>

1. Παράγω 2 ανεξάρτητες  $U_1, U_2 \sim Unif[0, 1]$
2. Θέτω  $R = -2\log(U_1)$
3. Θέτω  $V = 2\pi U_2$
4. Θέτω  $Z_1 = \sqrt{R}\cos(V), Z_2 = \sqrt{R}\sin(V)$
5. Επιστρέφω  $Z_1, Z_2$

#### 1.3.2 Η Πολική Μέθοδος

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου *Box – Muller* είναι ότι ο υπολογισμός του ημιτόνου και συνημίτονου κάνουν τον αλγόριθμο πιο αργό. Οι *Marsaglia* και *Bray* ανέπτυξαν τον παρακάτω αλγόριθμο ο οποίος είναι πιο αποδοτικός.

1. Όσο  $(X > 1)$
2. Παράγω  $U_1, U_2 \sim Unif[0, 1]$
3.  $U_1 \leftarrow 2 * U_1 - 1, U_2 \leftarrow 2 * U_2 - 1$
4.  $X \leftarrow U_1^2 + U_2^2$
5. Τέλος συνθήκης
6.  $Y \leftarrow \sqrt{-2\log(x)/X}$
7.  $Z_1 = U_1Y, Z_2 = U_2Y$
8. Επιστρέφω  $Z_1, Z_2$ .



## Κεφάλαιο 2

# Γέννηση Στοχαστικών Διαδικασιών

### 2.1 Προσομοίωση Διαδικασίας *Poisson*

Μια διαδικασία *Poisson* με ρυθμό  $\lambda$  ώστε  $P(N(t) = r) = \frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!}$  έχει ανεξάρτητο αριθμό αφίξεων σε μη αλληλοκαλυπτόμενα διαστήματα και η κατανομή του αριθμού αφίξεων σε ένα διάστημα εξαρτάται από το διάστημα αυτό μόνο. Το  $i^{\circ}$  διάστημα  $X_i$  μεταξύ δύο παρατηρήσεων, καθορίζεται από την  $i - 1$  και  $i$  άφιξη της διαδικασίας *Poisson*. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι τα  $X_i$  είναι ανεξάρτητα και ταυτόσημα κατανομημένα  $\sim \text{Exp}(\lambda)$ . Στην πραγματικότητα αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσομοιώσουμε μια διαδικασία *Poisson* με ρυθμό άφιξης  $\lambda$ , απλώς γεννώντας διαστήματα μεταξύ αφίξεων  $X_i$ . Όπου  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Ο αλγόριθμος παραγωγής  $T$  χρονομονάδων μιας διαδικασίας *Poisson* έχει ως εξής:

1. Θέτω  $t = 0, I = 0$
2. Παράγω  $U \sim \text{Unif}[0, 1]$
3. Θέτω  $t = t - \log(U)/\lambda$
4. Όσο  $t < T$
5. Θέτω  $I = I + 1, S(I) = t$
6. Παράγω  $U$
7. Θέτω  $t = t - \log(U)/\lambda$
8. Τέλος συνθήκης, επιστρέφω  $S$



Αυτό στην  $R$  επιτυγχάνεται με τον εξής τρόπο:

```

λ=5
t=0
I=0
U=runif(1)
t=t-log(U)/λ
S<-c()

while (t<10) {
  I=I+1
  S[I]<-t
  U1=runif(1)
  t=t-log(U1)/λ
}
S

```

Σχήμα 2.1:

Μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

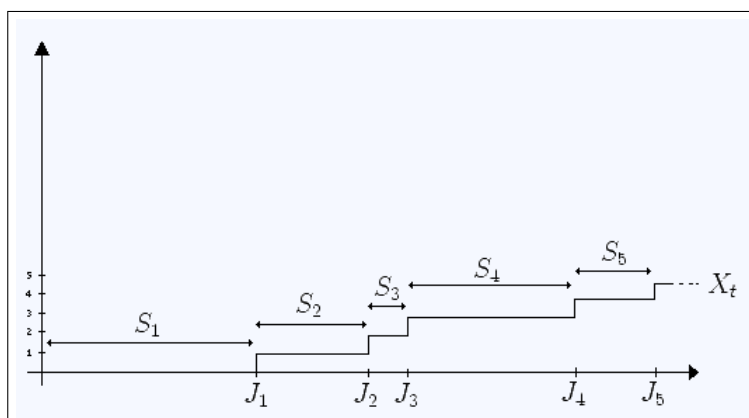
```

[1] 0.1896089 0.3792179 0.5688268 0.7584357 0.9480446 1.1376536 1.3272625 1.5168714 1.7064803
[10] 1.8960893 2.0856982 2.2753071 2.4649160 2.6545250 2.8441339 3.0337428 3.2233518 3.4129607
[19] 3.6025696 3.7921785 3.9817875 4.1713964 4.3610053 4.5506142 4.7402232 4.9298321 5.1194410
[28] 5.3090499 5.4986589 5.6882678 5.8778767 6.0674857 6.2570946 6.4467035 6.6363124 6.8259214
[37] 7.0155303 7.2051392 7.3947481 7.5843571 7.7739660 7.9635749 8.1531838 8.3427928 8.5324017
[46] 8.7220106 8.9116196 9.1012285 9.2908374 9.4804463 9.6700553 9.8596642

```

Σχήμα 2.2:

Ουσιαστικά πράξαμε 10 χρονικές μονάδες ανέλιξης *Poisson* με μέσο ρυθμό αφίξεων  $\lambda = 5$ . Για να αποκτήσει ο αναγνώστης μια καλύτερη κατανόηση παρουσιάζουμε το παρακάτω γράφημα μιας διαδικασίας *Poisson* με μεσοδιαστήματα  $S_i$  στις χρονικές στιγμές  $J_i$ .



Σχήμα 2.3:

## 2.2 Προσομοίωση μη Ομογενούς Διαδικασίας Poisson

Η μη ομογενής *Poisson* διαδικασία  $N(t)$  δίνεται από την υπόθεση ότι ο ρυθμός,  $\lambda$  δεν είναι απόλυτα σταθερός. Δηλαδή ισχύει ότι το  $\lambda$  είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου  $\lambda(t)$ . Έστω  $N(t)$  μια διαδικασία *Poisson* με σταθερό ρυθμό  $\lambda$ . Υποθέτουμε ότι μια άφιξη γίνεται τη χρονική στιγμή  $t$  με πιθανότητα  $p(t)$  ανεξαρτήτως από το τι συνέβη πριν. Τότε η διαδικασία των μετρούμενων αφίξεων είναι μια μη ομογενής διαδικασία με ρυθμό  $\lambda(t) = \lambda p(t)$ . Υποθέτουμε τώρα ότι  $N(t)$  είναι μια μη ομογενής διαδικασία *Poisson* με ρυθμό  $\lambda(t)$  και ότι υπάρχει  $\lambda$  τέτοιο ώστε  $\lambda(t) \leq \lambda \forall t \leq T$ . Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω αλγόριθμο για να προσομοιώσουμε την  $N(t)$ .

1. Θέτω  $t = 0, I = 0$
2. Παράγω  $U_1 \sim Unif[0, 1]$
3. Θέτω  $t = t - \log(U)/\lambda$
4. Όσο  $t < T$
5. Παράγω  $U_2 \sim Unif[0, 1]$
6. Αν  $U_2 \leq \lambda(t)/\lambda$  τότε
7. Θέτω  $I = I + 1, S(I) = t$
8. Τέλος αν

9. Παράγω  $U_1$

10. Θέτω  $t = t - \log(U_1)/\lambda$

11. Τέλος συνθήκης, επιστρέφω  $S$

Τέλος, καλό είναι να αναφέρουμε ότι τα πιστωτικά παράγωγα χρησιμοποιούν τη στοχαστική διαδικασία του *Cox* για να μοντελοποιήσουν την πτώχευση μιας επιχείρησης. Η διαδικασία του *Cox* είναι σαν μια μη ομογενή στοχαστική διαδικασία με τη διαφορά ότι το  $\lambda(t)$  δεν είναι ντετερμινιστικό αλλά μια στοχαστική διαδικασία που η τιμή του εξαρτάται από διάφορες μεταβλητές της οικονομίας όπως τα επιτόκια, οι βαθμολογίες πιστοληπτικής ικανότητας κτλ. Η πτώχευση υλοποιείται ως η πρώτη άφιξη της διαδικασίας *Cox*.

## 2.3 Κίνηση *Brown*

### 2.3.1 Απλή Μονοδιάστατη Κίνηση *Brown*

Μια στοχαστική διαδικασία  $\mathbf{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$  σε συνεχή χρόνο ονομάζεται κίνηση *Brown* αν:

1.  $B(0) = 0$
2. Η  $\mathbf{B}$  έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσauξήσεις
3. Μια προσauξηση  $B(t) - B(s)$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά  $t - s$ , με  $0 \leq s < t$

Ένας πιο πρακτικός τρόπος να αποδώσουμε το 2) και 3) είναι: Αν  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , τότε η προσauξηση  $B(t_i) - B(t_{i-1})$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , είναι ανεξάρτητη του  $B(t_{i-1})$ . Αν θέλουμε να προσομοιώσουμε την  $B(t)$  για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$ , τότε απλά μπορούμε να προσομοιώσουμε μια  $Z \sim N(0, 1)$  και να θέσουμε  $B(t) = \sqrt{t}Z$ . Αλλά συνήθως θα θέλουμε να προσομοιώσουμε  $k$  τέτοιες τιμές σε στιγμές  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ . Μπορούμε να το κάνουμε εύκολα με τον ακόλουθο τρόπο: Παράγουμε ανεξάρτητες, ταυτόσημα κατανεμημένες τιμές κανονικής  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ , τότε κατασκευάζουμε τις ανεξάρτητες προσauξήσεις ως :  $B(t_i) - B(t_{i-1}) = \sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Έτσι για να προσομοιώσουμε τις τιμές  $B(t_1), \dots, B(t_k)$ , παράγουμε διαδοχικά τις τιμές  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ , και χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο  $B(t_{i+1}) = B(t_i) + (B(t_{i+1}) - B(t_i)) = B(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k - 1$ . Τότε αναδρομικά καθορίζουμε:

$$B(t_1) = \sqrt{t_1}Z_1$$

$$\begin{aligned}
B(t_2) &= B(t_1) + \sqrt{t_2 - t_1}Z_2 = \sqrt{t_1}Z_1 + \sqrt{t_2 - t_1}Z_2 \\
&\vdots \\
B(t_k) &= \sum_{i=1}^k \sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i.
\end{aligned}$$

Αλγοριθμικά αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

1. Θέτουμε  $t = 0$ ,  $B_{t_0} = 0$
2. Για  $i = 1$  ως  $n$
3. Παράγουμε  $X \sim N(0, t_i - t_{i-1})$
4. Θέτουμε  $B_{t_i} = B_{t_{i-1}} + X$

Τέλος, καλό θα ήταν να αναφέρουμε ότι η κίνηση *Brown* δεν αποτελεί αντιπροσωπευτικό μοντέλο για την προσομοίωση μετοχών, λόγω της ιδιότητας των ανεξάρτητων προσαυξήσεων. Επίσης λόγω του ότι η κίνηση *Brown* παίρνει και αρνητικές τιμές.

### 2.3.2 Κίνηση *Brown* με Τάση

Η στοχαστική διαδικασία  $X(t) = \sigma B(t) + \mu t$  υποδεικνύει μια κίνηση *Brown*  $BM(\mu, \sigma)$  με τάση  $\mu$  και διασπορά  $\sigma \geq 0$ . Έχει συνεχή μονοπάτια και καθορίζεται από:

1.  $X(0) = 0$
2.  $X$  έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις
3. Η  $X(t) - X(s)$  έχει κανονική κατανομή με μέσο όρο  $\mu(t - s)$  και διασπορά  $\sigma^2(t - s)$ ,  $0 \leq s < t$ .

Τότε η  $X(t) - X(s)$  μπορεί να κατασκευασθεί γεννώντας μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή  $Z$  και θέτοντας  $X(t) - X(s) = \sigma\sqrt{t - s}Z + \mu(t - s)$ . Ξανά, κατά τις ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις μπορούμε να παράγουμε μια κίνηση *Brown* τις χρονικές στιγμές  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , παράγοντας  $k$  ισόνομες και ανεξάρτητες μονάδες κανονικής κατανομής  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  και χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο  $X(t_{i+1}) = X(t_i) + X(t_{i+1}) - X(t_i) = X(t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_i + \mu(t_{i+1} - t_i)$ . Έτσι η παραγωγή ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
X(t_1) &= \sigma\sqrt{t_1}Z_1 + \mu t_1 \\
X(t_2) &= X(t_1) + \sigma\sqrt{t_2 - t_1}Z_2 + \mu(t_2 - t_1) = \sigma\sqrt{t_1}Z_1 + \mu t_1 + \sigma\sqrt{t_2 - t_1}Z_2 + \mu(t_2 - t_1) \\
&\vdots \\
X(t_k) &= \sum_{n=1}^k (\sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i + \mu(t_i - t_{i-1})).
\end{aligned}$$

### 2.3.3 Γεωμετρική Κίνηση *Brown*

Μια στοχαστική διαδικασία,  $\{X_t : t \geq 0\}$ , είναι μια  $(\mu, \sigma)$  γεωμετρική κίνηση *Brown* αν  $\log(X) \sim B(\mu - \sigma^2/2, \sigma)$ . Γράφουμε  $X \sim GBM(\mu, \sigma)$ , με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Για συγκεκριμένα  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Τότε  $\frac{X_{t_2}}{X_{t_1}}, \frac{X_{t_3}}{X_{t_2}}, \frac{X_{t_n}}{X_{t_{n-1}}}$  Είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα.
2. Για  $s > 0$ ,  $\log\left(\frac{X_{t+s}}{X_t}\right) \sim N((\mu - \sigma^2/2)s, \sigma^2 s)$ .
3. Το  $X_t$  είναι συνεχές.

Ξανά ονομάζουμε το  $\mu$  τάση και το  $\sigma$  μεταβλητότητα. Αν  $X \sim GBM(\mu, \sigma)$ , τότε το  $X_t \sim LN((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$ . Ισχύουν τα ακόλουθα: Αν  $X_t > 0$ , τότε  $X_{t+s}$  είναι πάντα θετικό για κάθε  $s$ .

1. Αν  $X_t > 0$ , τότε  $X_{t+s}$  είναι πάντα θετικό για κάθε  $s$ .
2. Η κατανομή του  $\frac{X_{t+s}}{X_t}$  εξαρτάται μόνο από το  $s$ . Έτσι η κατανομή των κερδών από τη μια περίοδο στην επόμενη είναι σταθερή

Αυτό κάνει τη γεωμετρική κίνηση *Brown* μια λογική επιλογή προσομοίωσης τιμών μετοχών. Συγκεκριμένα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη σημειογραφία:  $S_0$  είναι η γνωστή τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .  $S_t$  είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή  $t$  και  $S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}$ . Όπου  $B$  είναι μια τυπική κίνηση *Brown*. Η τάση είναι το  $\mu$ , η κινητικότητα είναι το  $\sigma$  και συνεπώς η στοχαστική διαδικασία  $S$  είναι μια  $GBM(\mu, \sigma)$  η οποία ξεκινά στο  $S_0$ . Έστω ότι θέλουμε να προσομοιώσουμε μια  $S \sim GBM(\mu, \sigma)$ . Τότε όπως πριν θέτουμε  $S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}$  και προσομοιώνουμε την τυπική κίνηση  $B$ .

## Κεφάλαιο 3

# Αρχές της Μεθόδου *Monte Carlo*

### 3.1 Η Έννοια της Μεθόδου *Monte Carlo*

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε μια ποσότητα  $\theta = E[h(X)]$ , όπου  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στο  $\mathbb{R}^n$ , με  $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και  $E[|h(X)|] < \infty$ . Το  $X$  θα μπορούσε να είναι οι τιμές μιας στοχαστικής διαδικασίας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Πιο συγκεκριμένα το  $X_i$  θα μπορούσε να είναι η τιμή μιας μετοχής τη χρονική στιγμή  $i$  και η  $h(\cdot)$  να δίνεται από τον τύπο:  $h(X) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ . Τότε το  $\theta$  είναι η αναμενόμενη τιμή μιας μετοχής. Για να την υπολογίσουμε χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο:

1. Για  $i = 1$  ως  $n$
2. Παράγω  $X_i$
3. Θέτω  $h_i = h(X_i)$
4. Τέλος για
5. Θέτω  $\hat{\theta}_n = \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{n}$

Υπάρχουν 2 λόγοι για τους οποίους το  $\hat{\theta}$  είναι καλός εκτιμητής:

1. Το  $\hat{\theta}_n$  είναι αμερόληπτος. Δηλαδή  $E[\hat{\theta}_n] = \frac{E[\sum_{i=1}^n h_i]}{n} = \frac{E[\sum_{i=1}^n h(X_i)]}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta$
2. Το  $\hat{\theta}_n$  είναι συνεπής. Δηλαδή  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$  με πιθανότητα 1 καθώς το  $n \rightarrow \infty$ . Το οποίο προκύπτει από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.

Τέλος καλό είναι να αναφέρουμε ότι ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε μια πιθανότητα είναι: αν  $\theta = P(X \in A)$ , τότε  $\theta = E[I_A(X)]$  όπου:

$$I_L(X) = \begin{cases} 1, & \text{Αν } X \in A \\ 0, & \text{Αλλιως} \end{cases}$$

## 3.2 Η Εφαρμογή της Μεθόδου στα Χρηματοοικονομικά

**Παράδειγμα 3.2.1.** Θεωρούμε δύο μετοχές, την A και B, και έστω  $S_a(t)$  και  $S_b(t)$  οι τιμές των μετοχών A και B αντίστοιχα τη χρονική στιγμή  $t$ . Έστω ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , αγοράσουμε  $n_a$  μονάδες της A και  $n_b$  μονάδες της B τότε ο αρχικός μας πλούτος είναι  $W_0 = n_a S_a(0) + n_b S_b(0)$ . Υποθέτουμε ότι ο επενδυτικός ορίζοντας είναι  $T$  και τότε ο πλούτος μας θα είναι  $W_T = n_a S_a(T) + n_b S_b(T)$ . Αυτό προϋποθέτει ότι δεν θα κάνουμε εμπόριο στο διάστημα  $[0, T]$ . Υποθέτουμε ότι  $S_a \sim GBM(\mu_a, \sigma_a)$ ,  $S_b \sim GBM(\mu_b, \sigma_b)$ , και ότι τα  $S_a$  και  $S_b$  είναι ανεξάρτητα. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα  $P(\frac{W_T}{W_0} \leq 0.9)$ , Δηλαδή την πιθανότητα η αξία του χαρτοφυλακίου μας να πέσει περισσότερο από 10%. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} S_a(T) &= S_a(0) \exp((\mu_a - \sigma_a^2/2)T + \sigma_a B_a(T)) \\ S_b(T) &= S_b(0) \exp((\mu_b - \sigma_b^2/2)T + \sigma_b B_b(T)) \end{aligned}$$

Όπου  $B_a$  και  $B_b$  είναι ανεξάρτητες απλές κινήσεις Brown. Έστω  $L$  είναι το γεγονός ότι  $W_T/W_0 \leq 0.9$  τότε η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι  $\theta = P(L) = E[I_L]$ . Το πρόβλημα εκτίμησης του  $\theta$  λύνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο *Monte Carlo*. Σε αυτό το παράδειγμα  $X = (S_a(T), S_b(T))$  και

$$I_L(X) = \begin{cases} 1, & \text{Αν } \frac{n_a S_a(0) + n_b S_b(0)}{n_a S_a(T) + n_b S_b(T)} \leq 0.9 \\ 0, & \text{Αλλιως} \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε τις ακόλουθες παραμέτρους:  $T=0.5$  χρόνια,  $\mu_a = 0.15$ ,  $\mu_b = 0.12$ ,  $\sigma_a = 0.2$ ,  $\sigma_b = 0.18$ ,  $S_a(0) = \$100$ ,  $S_b(0) = \$75$  και  $n_a = n_b = 100$ . Αυτό μας δίνει  $W_0 = \$17,500$ . Τότε έχουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο για την εκτίμηση του  $\theta$ :

Για  $i = 1$  ως  $n$

Παράγουμε  $X^i = (S_a^i(T), S_b^i(T))$

Υπολογίζουμε  $I_L(X^i)$

### 3.2. Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ 31

Τέλος για

Θέτουμε  $\hat{\theta}_n = \frac{I_L(X^1)+I_L(X^2)+\dots+I_L(X^n)}{n}$

Η υλοποίηση του κώδικα σε R είναι η ακόλουθη:

```
#Monte Carlo εκτίμηση του θ
n<-1000
T<-0.5
na<-100
nb<-100
S0a<-100
S0b<-75
mua<-0.15
mub<-0.12
sa<-0.2
sb<-0.18

w0<-na*S0a+nb*S0b
bta<-sqrt(T)*rnorm(n)
btb<-sqrt(T)*rnorm(n)
STa<-S0a*exp((mua-sa^2/2)*T+sa*bta)
STb<-S0b*exp((mub-sb^2/2)*T+sb*btb)
WT<-na*STa+nb*STb
theta_n<-sum(WT/w0<0.9)/n
theta_n
```

Σχήμα 3.1:

και το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι:

```
> theta_n
[1] 0.054
```

Σχήμα 3.2:

□

#### 3.2.1 Εισαγωγή στην Αποτίμηση Χρεογράφων

Υποθέτουμε πάλι ότι  $S_t \sim GBM(\mu, \sigma)$  ώστε  $S_T = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma B_T}$ . Επιπλέον πάντα υποθέτουμε ότι αν  $W_0$  επενδυθεί τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , τότε θα αξίζει  $W_0 \exp(rt)$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Θεωρούμε το  $r$  σαν ένα συνεχές συσσωρευόμενο επιτόκιο. Η τιμή του ασφάλιστρου που πληρώνει  $h(X)$  τη χρονική



στιγμή  $T$ , όπου το  $X$  είναι μια τυχαία ποσότητα απεικονίζοντας τις τιμές μιας μετοχής στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ . Θεωρία της τιμολόγησης υπό ουδέτερο ρίσκο μας δίνει ότι η αξία αυτού του ασφάλιστρου τη χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι  $h_0 = E_0^Q[e^{-rT}h(x)]$  όπου

$$E_0^Q[e^{-rT}h(X)]$$

Όπου το  $E_0^Q[\cdot]$  αναφέρεται στην αναμενόμενη τιμή υπό πιθανότητα ουδέτερου μέτρου υποτιθέμενου υπό την διαθέσιμη πληροφορία την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Στο μοντέλο γεωμετρικής κίνησης *Brown* η χρησιμοποίηση του ουδέτερου μέτρου πιθανότητας είναι ισοδύναμο της υπόθεσης ότι:  $S_t \sim GBM(r, \sigma)$ .

**Παράδειγμα 3.2.2.** Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $C_0$ , την τιμή ενός παραγώγου πώλησης ευρωπαϊκού τύπου με τιμή άσκησης  $K$  και χρόνο ωρίμανσης  $T$ , χρησιμοποιώντας προσομοίωση. Η θεωρία αποτίμησης ουδέτερου ρίσκου μας λέει ότι ισχύει:

$$C_0 = e^{-rT} E_0^Q[\max(0, S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma B_T} - K)]$$

Η εκτίμηση της τιμής *Black - Scholes* δίνεται από τον αλγόριθμο:

1. Θέτω  $sum = 0$
2. Για  $i = 1$  έως  $n$
3. Παράγω  $S_T$
4. Θέτω  $sum = sum + \max(0, S_T - K)$
5. Τέλος για
6. Θέτω  $\hat{C}_0 = e^{-rT} sum/n$

□

**Παράδειγμα 3.2.3.** Αποτίμηση ασιατικών παραγώγων. Η απόδοση την ώρα ωρίμανσης είναι:

$$h(X) = \max(0, \frac{\sum_{i=1}^m S_{iT}}{m} - K)$$

Με  $X = (S_{\frac{T}{m}}, S_{\frac{2T}{m}}, \dots, S_T)$ . Με τον παρακάτω αλγόριθμο μπορούμε να εκτιμήσουμε το  $C_0 = E^Q[e^{-rT}h(X)]$ :

1. Θέτω  $sum = 0$
2. Για  $i = 1$  έως  $n$

3. Παράγω  $S_{\frac{1T}{m}}, S_{\frac{2T}{m}}, \dots, S_{\frac{mT}{m}}$
4. Θέτω  $sum = sum + max(0, \frac{\sum_{n=1}^m S_{\frac{iT}{m}}}{m} - K)$
5. Τέλος για
6. Θέτω  $\hat{C}_0 = e^{-rT} sum/n$

□

### 3.3 Παραγωγή Συσχετιζόμενων T.M. & Κινήσεων Brown

Στο παράδειγμα 3.2.1 θεωρήσαμε ότι οι δύο τιμές των μετοχών είναι ασυσχέτιστες. Αυτή η υπόθεση δεν ανταποκρίνεται πάντα στην πράξη. Γι' αυτό θα πρέπει να είμαστε σε θέση να παράγουμε συσχετισμένα τυχαία κέρδη. Τα συσχετισμένα τυχαία κέρδη μετατρέπονται σε συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές. Και επίσης μπορούμε να ασχοληθούμε με περισσότερες από δύο μετοχές. Αλλά πρώτα πρέπει να δούμε την παραγωγή συσχετισμένων κανονικών τυχαίων μεταβλητών και κινήσεων *Brown*.

Κάποια βασικά στοιχεία από τη θεωρία της στατιστικής συμπερασματολογίας που θα πρέπει να αναφέρουμε είναι η συνδιακύμανση μεταξύ των  $X_1$  και  $X_2$  η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$COV(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

Επίσης ως συντελεστή συσχέτισης ορίζουμε:

$$Corr(X_1, X_2) = \rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

Αν οι  $X_1, X_2$  είναι ανεξάρτητες τότε  $\rho=0$ , το αντίθετο δεν ισχύει. Είναι γνωστό πως  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Έστω τώρα ότι  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ένα τυχαίο διάνυσμα. Τότε το  $\Sigma$ , είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης του  $X$ . Έχει διαστάσεις  $(n \times n)$  και το  $(i, j)$  στοιχείο δίνεται από τον τύπο  $\sum_{i,j} = COV(X_i, X_j)$ . Ο πίνακας συνδιακύμανσης έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Είναι συμμετρικός με τρόπο ώστε  $\Sigma^T = \Sigma$
2. Για τα διαγώνια στοιχεία ισχύει  $\sum_{i,j} \geq 0$
3. Είναι θετικά ημιορισμένος με τρόπο ώστε  $x^T \Sigma x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.3.1 Παραγωγή Συσχετισμένων Κανονικών Κατανομών

Ο στόχος μας είναι να πράξουμε  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  όπου  $\mathbf{X} \sim MN(0, \Sigma)$ . Έστω  $C$  ένας  $(n \times m)$  πίνακας και έστω  $Z = (Z_1 Z_2, \dots, Z_n)^T \sim MN(0, I_n)$  όπου  $I_n$  είναι ο  $n \times n$  ταυτοτικός πίνακας. Τότε  $C^T Z \sim MN(0, C^T C)$ . Έτσι το πρόβλημά μας καταλήγει στο να βρούμε  $C$  τέτοιο ώστε  $C^T C = \Sigma$ . Μπορούμε να βρούμε ένα τέτοιο πίνακα  $C$ , χρησιμοποιώντας την μέθοδο αποσύνθεσης του *Cholesky* του πίνακα  $\Sigma$ .

### 3.3.2 Η Μέθοδος Αποσύνθεσης του *Cholesky* για Ένα Θετικά Ορισμένο Πίνακα

Είναι γνωστό από την γραμμική άλγεβρα ότι ένας θετικά ορισμένος πίνακας  $M$ , γράφεται ως  $M = U^T D U$  όπου ο  $U$  είναι άνω διαγώνιος πίνακας και  $D$  ένας διαγώνιος πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία. Για πίνακα συνδιακύμανσης  $\Sigma$  θετικά ορισμένο παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma &= U^T D U \\ &= (U^T \sqrt{D}) (\sqrt{D} U) \\ &= (\sqrt{D} U)^T (\sqrt{D} U). \end{aligned}$$

Ο πίνακας  $C = \sqrt{D} U$  ικανοποιεί την  $C^T C = \Sigma$ . Καλείται πίνακας αποσύνθεσης του  $\Sigma$ .

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε τον πίνακα αποσύνθεσης ενός συμμετρικού θετικά ορισμένου πίνακα στην  $R$  χρησιμοποιώντας την εντολή *chol* του πακέτου *Matrix*. Ο αλγόριθμος παραγωγής εξαρτημένων κανονικών κατανομών έχει ως εξής:

1. Παράγω  $Z \sim MN(0, I)$

2. Υπολογίζω τον πίνακα *Cholesky* του  $\Sigma$

3. Θέτω  $X = C^T Z$

Η υλοποίηση του αλγορίθμου στην  $R$  είναι η εξής:

### 3.3. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΥΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΩΝ Τ.Μ. & ΚΙΝΗΣΕΩΝ BROWN 35

```
install.packages("Matrix")
library(Matrix)
x<-c(1.0,0.5,0.5)
y<-c(0.5,2.0,0.3)
z<-c(0.5,.3,1.5)
sigma<-rbind(x,y,z)
class(sigma)
sigma<-as.data.frame(sigma)
C<-chol(sigma)

n<-rnorm(3000000)
Z<-matrix(n,nrow = 3)
X<-t(C)%*%Z
cov(t(X))
```

Σχήμα 3.3:

Το  $X$  είναι οι συσχετισμένες τ.μ. κανονικής κατανομής με πίνακα συνδιακύμανσης που έχει γραμμές τα  $x, y, z$ . Με την τελευταία γραμμή κάνουμε τον έλεγχο για να δούμε αν όντως ο πίνακας συνδυασφοράς των  $X_1, X_2, X_3$  είναι ίδιος με τον  $\Sigma$ . Καλό είναι να κάνουμε τον παραπάνω έλεγχο καθώς πολλά πακέτα δεν υπολογίζουν τον  $C$  αλλά τον  $C^T$ . Το αποτέλεσμα από την εκτέλεση του παραπάνω αλγορίθμου είναι:

```
> cov(t(X))
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.9991201 0.5008325 0.4977204
[2,] 0.5008325 2.0018884 0.2998410
[3,] 0.4977204 0.2998410 1.4987440
```

Σχήμα 3.4:

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας συνδιακύμανσης που προκύπτει από τις νέες παρατηρήσεις του αλγορίθμου είναι ο επιθυμητός.

#### 3.3.3 Παραγωγή Συσχετισμένων Κινήσεων Brown

**Ορισμός 1** Λέμε τις  $B_t^a$  και  $B_t^b$  δύο τυπικές συσχετισμένες κινήσεις Brown και έχουμε συντελεστή συσχέτισης  $\rho$  αν  $E[B_t^a B_t^b] = \rho t$ . Για δύο τέτοιες τυπικές κινήσεις Brown έχουμε:

$$\text{Corr}(B_t^a, B_t^b) = \frac{\text{Cov}(B_t^a, B_t^b)}{\sqrt{\text{Var}(B_t^a)\text{Var}(B_t^b)}} = \frac{E[B_t^a B_t^b] - E[B_t^a]E[B_t^b]}{t} = \rho.$$

Υποθέτουμε ότι  $S_t^a$  και  $S_t^b$  είναι τιμές μετοχών που ακολουθούν γεωμετρική κίνηση Brown ώστε  $\text{Corr}(B_t^a, B_t^b) = \rho$ . Όπου  $B_t^a, B_t^b$  είναι τυπικές κινήσεις

*Brown* που αντιστοιχούν στις  $S_t^a$  και  $S_t^b$ . Έστω  $r_a$  και  $r_b$  τα συνεχώς προσαυξανόμενα κέρδη των  $S_t^a$  και  $S_t^b$  αντίστοιχα ανάμεσα στις χρονικές περιόδους  $t$  και  $t + s$ . Τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι  $\text{Corr}(r_a, r_b) = \rho$ . Αυτό σημαίνει ότι όταν αναφερόμαστε στην συσχέτιση των συνεχώς προσαυξανόμενων κερδών των μετοχών αναφερόμαστε στη συσχέτιση των τυπικών κινήσεων *Brown* που σχετίζονται με τις τιμές των μετοχών.

**Παράδειγμα 3.3.1.** Ανακαλώντας το παράδειγμα 3.2.1 υποθέτουμε πάλι ότι  $S^a \sim GBM(\mu_a, \sigma_a)$  και  $S^b \sim GBM(\mu_b, \sigma_b)$ . Μόνο που τώρα δεν υποθέτουμε ότι  $S^a$  και  $S^b$  είναι ανεξάρτητα. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι  $\text{Corr}(B_t^a, B_t^b) = \rho$ . Όπου  $B_t^a$  και  $B_t^b$  είναι οι τυπικές κινήσεις *Brown* που αντιστοιχούν στις μετοχές A και B. Αυτό σημαίνει ότι ο συσχετισμός των κερδών των A και B είναι  $\rho$ . Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα  $P(\frac{W_T}{W_0} \leq 0.9)$  δηλαδή την πιθανότητα ότι η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα πέσει χαμηλότερα από 10%. Ξανά έστω  $L$  το γεγονός κατά το οποίο  $\frac{W_T}{W_0} \leq 0.9$  έτσι η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι  $\theta = P(L) = E[I_L]$ , όπου  $\mathbf{X} = (S_T^a, S_T^b)$

$$I_L(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{Αν } \frac{n_a S_s(0) + n_b S_b(0)}{n_a S_a(T) + n_b S_b(T)} \leq 0.9 \\ 0, & \text{Αλλιως} \end{cases}$$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} S_{t+s}^a &= S_t^a e^{((\mu_a - \sigma_a^2/2)s + \sqrt{s}V_a)} \\ S_{t+s}^b &= S_t^b e^{((\mu_b - \sigma_b^2/2)s + \sqrt{s}V_b)} \end{aligned}$$

Όπου  $(V_a, V_b) \sim MN(0, \Sigma)$  με

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_a \sigma_b \rho \\ \sigma_a \sigma_b \rho & \sigma_b^2 \end{bmatrix}$$

### 3.3. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΥΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΩΝ T.M. & ΚΙΝΗΣΕΩΝ BROWN37

Έτσι για να παράγουμε ένα δείγμα του  $(S_{t+s}^a, S_{t+s}^b)$ , πρέπει να παράγουμε ένα δείγμα του  $V = (V_a, V_b)$ . Για να το πετύχουμε πρέπει πρώτα να παράγουμε  $Z \sim MN(0, I)$ , και μετά να θέσουμε  $V = C^T Z$ , όπου  $C$  είναι ο πίνακας αποσύνθεσης *Cholesky* του πίνακα  $\Sigma$ . Για να εκτιμήσουμε το  $\theta$  θέτουμε  $t = 0, s = T$  και παράγουμε  $n$  δείγματα του  $I_L(\mathbf{X})$ .

Ο παραπάνω αλγόριθμος στην *R* υλοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο:

```
#Monte Carlo εκτίμηση του θ
install.packages("Matrix")
library(Matrix)
n<-1000
T<-0.5
na<-100
nb<-100
S0a<-100
S0b<-75
mua<-0.15
mub<-0.12
sa<-0.2
sb<-0.18
rho<-0.5
w0<-na*S0a+nb*S0b
x<-c(sa^2, sa*sb*rho)
y<-c(sa*sb*rho, sb^2)
Sigma<-rbind(x,y)
Sigma<-as.data.frame(Sigma)
C<-chol(Sigma)
bta<-rnorm(n)
btb<-rnorm(n)
B<-rbind(bta, btb)
V<-t(C)%*%B
STa<-S0a*exp((mua-sa^2/2)*T+sqrt(T)*V[1,])
STb<-S0b*exp((mub-sb^2/2)*T+sqrt(T)*V[2,])
WT<-na*STa+nb*STb
theta_n<-sum(WT/w0<0.9)/n
theta_n
```

Σχήμα 3.5:

Και το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι:

```
> theta_n  
[1] 0.076
```

Σχήμα 3.6:

Παρατηρούμε ότι όταν ο συντελεστής συσχέτισης των τιμών των δύο υποκείμενων προϊόντων είναι θετικός  $\rho = 0.5$  πιθανότητα να μειωθεί η συνολική τελική αξία του χαρτοφυλακίου μου σε λιγότερο από το 90% της αρχικής του αξίας αυξάνεται έντονα.  $\square$

# Κεφάλαιο 4

## Έλεγχος Διάρκειας Τρεξίματος

### 4.1 Ανάλυση Εξόδου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε αναφέρει ότι για να εκτιμήσουμε το  $\theta$  θέτουμε  $\theta := E[h(\mathbf{X})]$  όπου  $X \in \mathbb{R}^n$ . Αρχικά παράγουμε  $X_1, \dots, X_n$  ισόνομα και ανεξάρτητα και θέτουμε:

$$\hat{\theta}_n = \frac{h(\mathbf{X}_1) + \dots + h(\mathbf{X}_n)}{n}$$

Λόγο του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών έχουμε  $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Αλλά δεν προσδιορίσαμε πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το  $n$  ώστε να έχουμε μια σιγουριά στο  $\hat{\theta}_n$  ως εκτιμητή του  $\theta$ ; Θα απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θέτοντας  $Y_i = h(\mathbf{X}_i)$

Ένας τρόπος να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα είναι τα διαστήματα εμπιστοσύνης. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta$  και έχουμε ένα τυχαίο διάνυσμα  $\Psi = (Y_1, \dots, Y_n)$  των οποίων η κατανομή εξαρτάται από το  $\theta$ . Τότε φάχνουμε  $L(Y)$  και  $U(Y)$  τέτοια ώστε:

$$P(L(Y) \leq \theta \leq U(Y)) = 1 - a$$

Όπου  $0 \leq a \leq 1$  είναι ένα προκαθορισμένο νούμερο. Τότε λέμε ότι  $[L(Y), U(Y)]$  είναι ένα  $100(1 - a)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για το  $\theta$ . Επισημαίνουμε ότι το  $[L(U), U(Y)]$  είναι ένα τυχαίο διάστημα. Παρόλα αυτά αν αντικαταστήσουμε το  $Y$  με ένα δειγματικό διάνυσμα,  $y$ , τότε το  $[L(y), U(y)]$  γίνεται ένα πραγματικό διάστημα.

Υπενθυμίζουμε ότι η διασπορά του  $\hat{\theta}_n$  δίνεται από  $Var = \frac{\sigma^2}{n}$  όπου



$\sigma^2 = \text{Var}(Y)$ . Είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι μια μικρή τιμή του  $\text{Var}(\hat{\theta}_n)$  φανερώνει ένα ακριβή εκτιμητή του  $\theta$  και αυτό επιβεβαιώνεται από την ανισότητα του *Chebyshev's* η οποία δηλώνει ότι  $P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq k) \leq \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_n)}{k^2}$ . Από τη συνθήκη αυτή παρατηρούμε ότι όσο χαμηλότερη είναι η τιμή του  $\text{Var}(\hat{\theta}_n)$  αυξάνεται η εμπιστοσύνη μας στην  $\hat{\theta}_n$ . Όμως η ανισότητα *Chebyshev* μας δίνει συντηρητικά διαστήματα εμπιστοσύνης. Γι' αυτό θα εξετάσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, για την κατασκευή καλύτερων εκτιμήσεων του  $P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq k)$  ώστε να πάρουμε στενότερα διαστήματα εμπιστοσύνης για το  $\theta$ .

### Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Έστω  $Y_1, \dots, Y_n$  είναι ισόνομα και ανεξάρτητα και  $E[Y_i^2] < \infty$ . Τότε

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1) \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

όπου  $\hat{\theta}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ,  $\theta = E[Y_i]$  και  $\sigma^2 = \text{Var}(Y_i)$ .

Σημειώστε ότι δεν υποθέτουμε τίποτα για την κατανομή των  $Y_i$  εκτός του ότι  $E[Y_i^2] \leq \infty$ . Αν το  $n$  είναι επαρκώς μεγάλο στις προσομοιώσεις μας τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Κ.Ο.Θ. για να κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης για  $\theta = E[Y]$ .

Έστω  $z_{1-a/2}$  ένα  $(1-a/2)$  ποσοστιαίο σημείο της κατανομής  $N(0, 1)$  με τρόπο ώστε  $P(-z_{1-a/2} \leq Z \leq z_{1-a/2}) = 1-a$ . Με  $Z \sim N(0, 1)$ . Έστω ότι θέλουμε να προσομοιώσουμε ομοιόμορφα ανεξάρτητα δείγματα,  $Y_i$ , για  $i = 1, \dots, n$ , και ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα  $100(1-a)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για το  $\theta = E[Y]$ . Άρα θέλουμε  $L(Y)$  και  $U(Y)$  τέτοια ώστε  $P(L(Y) \leq \theta \leq U(Y)) = 1-a$ . Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μας δίνει ότι  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)/\sigma$  προσεγγίζει την  $N(0, 1)$  για μεγάλο  $n$  έχουμε

$$P(-z_{1-a/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma} \leq z_{1-a/2}) \approx 1-a \Rightarrow$$

$$P(-z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma} \leq z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 1-a \Rightarrow$$

$$P(\hat{\theta}_n - z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma} \leq \hat{\theta}_n + z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 1-a$$

Το εκτιμώμενο διάστημα εμπιστοσύνης για το  $\theta$  κατά συνέπεια δίνεται από τον τύπο:

$$[L(U), U(U)] = [\hat{\theta}_n - z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Υπενθυμίζουμε ότι  $\theta_n = (Y_1 + \dots + Y_n)/n$ , οπότε τα  $L$  και  $U$  είναι πραγματικά συναρτήσεις του  $Y$ . Υπάρχει ακόμα το πρόβλημα ότι συνήθως δεν ξέρουμε το  $\sigma^2$ . Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα προσεγγίζουμε το  $\sigma^2$  από  $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\theta}_n)^2}{n-1}$ .

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι  $\hat{\sigma}_n^2$  είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\sigma$  και ότι  $\hat{\sigma}_n^2 \rightarrow \sigma^2$  σχεδόν βεβαίως καθώς το  $n \rightarrow \infty$ . Έτσι τώρα αν αντικαταστήσουμε το  $\sigma$  με  $\hat{\sigma}_n$  παίρνουμε:

$$[L(Y), U(Y)] = [\hat{\theta}_n - z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}]$$

Ως εκτίμηση  $100(1-a)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για το  $\theta$  όταν το  $n$  είναι μεγάλο. Υπενθυμίζουμε πως όταν αποκτήσουμε δειγματικές τιμές του  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , τότε  $[L(y), U(y)]$  γίνεται ένα πραγματικό διάστημα. Τότε δεν μπορούμε να πούμε ότι το  $P(\theta \in [L(y), U(y)]) = 1 - a$ . Αντί αυτού λέμε ότι είμαστε  $100(1-a)\%$  σίγουροι ότι το  $[L(y), U(y)]$  περιλαμβάνει το  $\theta$ . Επίσης όσο μικρότερη η τιμή του  $U(y) - L(y)$ , τόσο πιο σίγουροι θα είμαστε για την εκτίμηση του  $\theta$ .

**Παράδειγμα 4.1.1.** Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή,  $C_0$ , ενός παραγώγου αγοράς για την τιμή μιας μετοχής  $S_t$  είναι μια  $GBM(\mu, \sigma)$ . Οι σχετικές παράμετροι είναι  $r = 0.05$ ,  $T = 0.5$  χρόνια  $\sigma = 0.2$  και τιμή άσκησης  $K = 100\$$ . Τότε ξέρουμε ότι:

$$C_0 = E_0^Q[e^{-rT} \max(S_T - K, 0)]$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $S_t \sim GBM(\mu, \sigma)$  υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου,  $Q$ . Έτσι υποθέτουμε ότι  $S_T = S_0 e^{((r-\sigma^2/2)T + \sigma Z)}$  όπου  $Z \sim N(0, T)$ . Παρόλο που υπάρχει τρόπος να εκτιμήσουμε ακριβώς το  $C_0$  αλλά θα εκτιμήσουμε το  $C_0$  χρησιμοποιώντας προσομοίωση. Θα το υλοποιήσουμε στην  $R$  χρησιμοποιώντας  $n = 10000$  δείγμα για να υπολογίσουμε ένα  $95\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για το  $C_0$ .

Ο κώδικας υπολογισμού της τιμής του παραγώγου και του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι ο ακόλουθος:

```

S0<-100
K<-110
T<-0.5
r<-0.5
sigma<-0.2
n<-10000
Z<-sqrt(T)*rnorm(n)
ST=S0*exp(((r-sigma^2)/2)*T+sigma*Z)
P<-ST-K
for (i in 1:length(P)) {
  if(P[i]<0){P[i]<-0}
}
Payoff=exp(-r*T)*P
C0<-mean(Payoff)
C0

temp<-1.96*sd(Payoff)/sqrt(n)
CI<-c(C0-temp,C0+temp)
CI

```

Σχήμα 4.1:

Και το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι:

```

> Payoff=exp(-r*T)*P
> C0<-mean(Payoff)
> C0
[1] 6.628251
>
> temp<-1.96*sd(Payoff)/sqrt(n)
> CI<-c(C0-temp,C0+temp)
> CI
[1] 6.450672 6.805829

```

Σχήμα 4.2:

□

Το πλάτος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι  $U - L = \frac{2\hat{\sigma}_n z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$ . Παρατηρούμε ότι το πλάτος εξαρτάται από τα  $\alpha$ ,  $\hat{\sigma}_n$  και  $n$ . Παρ' όλα αυτά  $\hat{\sigma}_n \rightarrow \sigma$  σχεδόν πάντα καθώς  $n \rightarrow \infty$ , και το  $\sigma$  σταθερά. Ως εκ τούτου για σταθερό  $\alpha$  πρέπει να αυξήσουμε το  $n$  αν θέλουμε να μειώσουμε το πλάτος του διαστήματος. Στην πραγματικότητα απ' τη στιγμή  $U - L \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$ , μπορούμε

να συμπεράνουμε ότι θα έπρεπε να αυξήσουμε το  $n$  τέσσερις τάξεις μεγέθους για να μειώσουμε το πλάτος ότι διαστήματος εμπιστοσύνης κατά δύο τάξεις μεγέθους.

#### 4.1.1 Έλεγχος Διάρκειας Τρεξίματος

Μέχρι αυτή την στιγμή έχουμε επιλέξει  $n$  στοιχεία εκ των προτέρων και υπολογίζουμε το διάστημα εμπιστοσύνης. Το πλάτος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι τότε ένα μέτρο του σφάλματος της εκτίμησής μας. Τώρα θα κάνουμε το αντίστροφο επιλέγοντας πρώτα το σφάλμα που θα έχουμε και με βάση αυτό θα επιλέξουμε το  $n$  ώστε το κριτήριό μας να ικανοποιείται. Υπάρχουν δύο τύποι σφάλματος το απόλυτο σφάλμα, το οποίο δίνεται από τον τύπο  $E_a = |\hat{\theta}_n - \theta|$  και το σχετικό σφάλμα το οποίο δίνεται από τον τύπο  $E_r = \left| \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\theta} \right|$ . Γνωρίζουμε ότι  $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$  καθώς το  $n \rightarrow \infty$ . Παρ' όλα αυτά στην πράξη το  $n \neq \infty$  και έτσι το σφάλμα θα είναι μη μηδενικό. Γι' αυτό χρειαζόμαστε ένα κριτήριο για να προσδιορίσουμε το  $n$ .

Έστω  $0 \leq a \leq 1$  και  $\epsilon \geq 0$  θέλουμε  $P(E \leq \epsilon) = 1 - a$ . Το  $E$  είναι ο τύπος σφάλματος που έχουμε προσδιορίσει, δηλαδή σχετικό ή απόλυτο. Ο στόχος είναι να διαλέξουμε  $n$  ώστε το κριτήριο σφάλματος να ικανοποιείται προσεγγιστικά. Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να ελέγξουμε το απόλυτο σφάλμα,  $E_a$ . Τότε όπως είδαμε νωρίτερα

$$P(\hat{\theta}_n - z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma} \leq \hat{\theta}_n + z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 1 - a$$

$$\text{Αυτό υπονοεί ότι } P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 1 - a.$$

$$P(E_a \leq z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 1 - a.$$

Αν τότε θέλουμε  $P(E_a \leq \epsilon) \approx 1 - a$ , τότε είναι ικανοποιητικό να πάρουμε

$$n = \frac{\sigma^2 z_{1-a/2}^2}{\epsilon^2}.$$

Αν θέλουμε να δουλεύουμε με σχετικό σφάλμα τότε ένα ίδιο όρισμα που μας δίνει  $P(E_r \leq \epsilon) \approx 1 - a$  είναι

$$n = \frac{\sigma^2 z_{1-a/2}^2}{\theta^2 \epsilon^2}.$$

Υπάρχουν ακόμα κάποια προβλήματα. Όταν ελέγχουμε το  $E_r$ , πρέπει να ξέρουμε εκ των προτέρων το  $\sigma$  και το  $\theta$ . Όταν ελέγχουμε το  $E_a$  πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το  $\sigma$ . Φυσικά δεν είναι πάντα εύκολο να ξέρουμε τα  $\sigma$  και  $\theta$

εξαρχής. Στην πραγματικότητα το  $\theta$  είναι αυτό που θέλουμε να εκτιμήσουμε! Υπάρχουν δύο τρόποι να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα. Η μέθοδος των δύο σταδίων και η σειριακή μέθοδος.

#### 4.1.2 Η Διαδικασία των Δύο Σταδίων

Έστω ότι θέλουμε να ικανοποιήσουμε την συνθήκη  $P(E_a \leq \epsilon) = 1 - a$  με τρόπο ώστε να ελέγξουμε το απόλυτο σφάλμα. Τότε με βάση όσα είδαμε πριν θα θέταμε

$$n = \frac{\sigma^2 z_{1-a/2}^2}{\epsilon^2}$$

Δυστυχώς δεν ξέρουμε το  $\sigma^2$  αλλά μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα κάνοντας πιλοτική προσομοίωση για να το εκτιμήσουμε. Η ιδέα είναι να πάρουμε ένα μικρό νούμερο,  $p$ , αρχικών τρεξιμάτων για να εκτιμήσουμε το  $\sigma^2$ . Μετά χρησιμοποιούμε την εκτίμησή μας  $\hat{\sigma}^2$  για να υπολογίσουμε μια εκτίμηση,  $\hat{n}$  του  $n$ . Τέλος επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αλλά τώρα χρησιμοποιούμε  $\hat{n}$  τρεξίματα. Ο αλγόριθμος προσομοίωσης *MonteCarlo* δύο σταδίων είναι ο εξής:

Κάνουμε την δοκιμαστική προσομοίωση πρώτα:

1. Για  $i$  από 1 έως  $p$

2. Παράγω  $\mathbf{X}^i$

3. Τέλος για

4. Θέτω  $\hat{\theta} = \sum h(\mathbf{X}^i)/p$

5. Θέτω  $\hat{\sigma}^2 = \sum (h(\mathbf{X}^i) - \hat{\theta})^2 / (p - 1)$

6. Θέτω  $n = \frac{\hat{\sigma}^2 z_{1-a/2}^2}{\epsilon^2}$

Βασική προσομοίωση:

7. Για  $i$  από 1 έως  $n$

8. Παράγω  $\mathbf{X}^i$

9. Τέλος για

$$10. \text{Θέτω } \hat{\theta} = \sum h(\mathbf{X}^i)/n$$

$$11. \text{Θέτω } \hat{\sigma}_n^2 = \sum (h(\mathbf{X}^i) - \hat{\theta})^2 / (n - 1)$$

$$12. \text{Θέτω } 100(1 - a)\% \quad CI = [\hat{\theta}_n - z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \hat{\theta}_n + z_{1-a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Για να δουλέψει αυτή η μέθοδος είναι σημαντικό ότι τα  $\hat{\theta}$  και  $\hat{\sigma}^2$  να είναι καλές εκτιμήτριες των  $\theta$  και  $\sigma$ . Κατά συνέπεια είναι σημαντικό να έχουμε  $p$  αρκετά μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιούμε  $p \geq 50$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανάλογη διαδικασία δύο σταδίων αν θέλουμε να ελέγξουμε το σχετικό σφάλμα ώστε να έχουμε  $P(E_a \leq 0.05)$ .

**Παράδειγμα 4.1.2.** Στο παράδειγμα 4.1.2 υπολογίσαμε την τιμή ενός παραγώγου αγοράς και υπολογίσαμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την τιμή. Έστω ότι τώρα θέλουμε να ελέγξουμε το απόλυτο σφάλμα ώστε  $P(E_a \leq 0.05) = 1 - a$ . Ας χρησιμοποιήσουμε την προσομοίωση δύο σταδίων για να διαλέξουμε  $n$  χρησιμοποιώντας  $p = 100$  και  $a = 0.05$ .

Στην  $R$  αυτό υλοποιείται ως ακολούθως:

```

S0<-100
K<-110
T<-0.5
r<-0.5
sigma<-0.2
p<-100
Z<-sqrt(T)*rnorm(p)
ST<-S0*exp((r-(sigma^2)/2)*T+sigma*Z)
P<-ST-K
for (i in 1:length(P)) {
  if(P[i]<0){P[i]<-0}
}
Payoff<-exp(-r*T)*P
n<-(sd(Payoff)^2*1.96^2)/0.05^2
n
n<-ceiling(n)
#βασική προσομοίωση
Z<-sqrt(T)*rnorm(n)
ST<-S0*exp((r-(sigma^2)/2)*T+sigma*Z)
P<-ST-K
for (i in 1:length(P)) {
  if(P[i]<0){P[i]<-0}
}
Payoff<-exp(-r*T)*P
C0<-mean(Payoff)
C0

epsilon<-1.96*sd(Payoff)/sqrt(n)
CI<-c(C0-epsilon,C0+epsilon)
CI

```

Σχήμα 4.3:

Και παίρνουμε ως αποτέλεσμα:

```

> C0
[1] 15.24544
> epsilon<-1.96*sd(Payoff)/sqrt(n)
> CI<-c(C0-epsilon,C0+epsilon)
> CI
[1] 15.19837 15.29252

```

Σχήμα 4.4:

□

**Παράδειγμα 4.1.3.** Θυμηθείτε το παράδειγμα αξιολόγησης χαρτοφυλακίου. Θα θέλαμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = P(L) = E[I_L]$  όπου  $L$  είναι το γεγονός κατά το οποίο  $W_T/W_0 \leq 0.9$ . Έστω ότι θέλαμε να υπολογίσουμε ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης 95% για το  $\theta$  με μισό πλάτος ίσο με 0.01. Τότε με μια πιλοτική μελέτη με  $p = 100$  μπορούμε στην  $R$  να κινηθούμε ως εξής για να κατασκευάσουμε τον κώδικα υπολογισμού της πιθανότητας  $P(W_T/W_0 \leq 0.9)$ :



```

p<-100
ma<-0.15
mb<-0.12
sa<-0.2
sb<-0.17
T<-1
S0a<-100
S0b<-120
na<-100
nb<-100
za<-1.96
e<-0.001
rho<-0.5
w0<-na*S0a+nb*S0b
x<-c(sa^2,sa*sb*rho)
y<-c(sa*sb*rho,sb^2)
Sigma<-rbind(x,y)
Sigma<-as.data.frame(Sigma)
C<-chol(Sigma)
bta<-rnorm(p)
btb<-rnorm(p)
B<-rbind(bta,btb)
V<-t(C)%*%B
STa<-S0a*exp((ma-sa^2/2)*T+sqrt(T)*V[1,])
STb<-S0b*exp((mb-sb^2/2)*T+sqrt(T)*V[2,])
WT<-na*STa+nb*STb
L<-c(WT/w0<0.95)
n<-ceiling((sd(L)^2*(za^2))/e^2)
#main simulation
bta<-rnorm(n)
btb<-rnorm(n)
B<-rbind(bta,btb)
STa<-S0a*exp((ma-sa^2/2)*T+sqrt(T)*V[1,])
STb<-S0b*exp((mb-sb^2/2)*T+sqrt(T)*V[2,])
WT<-na*STa+nb*STb
theta_n<-sum(WT/w0<0.95)/n
theta_n
L<-c(WT/w0<0.9)
epsilon<-za*sd(L)/sqrt(n)
CI<-c(theta_n-epsilon,theta_n+epsilon)
CI

```

Σχήμα 4.5:

Και το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι:

```

> theta_n
[1] 3.067914e-05
> L<-c(WT/W0<0.9)
> epsilon<-za*sd(L)/sqrt(n)
> CI<-c(theta_n-epsilon,theta_n+epsilon)
> CI
[1] -0.0006652909  0.0007266492

```

Σχήμα 4.6:

□

### 4.1.3 Η Σειριακή Μέθοδος

Υποθέτουμε πάλι ότι θέλουμε να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη  $P(E_a \leq \epsilon) = 1 - a$ . Τότε όπως είδαμε νωρίτερα θα θέλαμε να θέσουμε

$$n = \frac{\sigma^2 z_{1-a/2}^2}{\epsilon^2}.$$

Σε αντίθεση με τη δοκιμαστική διαδικασία δεν θα υπολογίσουμε το  $n$  στην σειριακή μέθοδο. Αντί αυτού θα συνεχίσουμε να παράγουμε δείγματα μέχρι

$$\frac{\hat{\sigma}_n z_{1-a/2}}{\sqrt{n}} \leq \epsilon$$

όπου  $\hat{\sigma}_n$  είναι ξανά μια εκτίμηση του  $\sigma$  βασισμένη σε  $n$  δείγματα. Είναι σημαντικό ότι το  $n$  είναι σημαντικά μεγάλο ώστε το  $\hat{\theta}$  και το  $\hat{\sigma}_n^2$ , είναι επαρκώς καλές εκτιμήτριες του  $\theta$  και  $\sigma^2$  αντίστοιχα. Ως αποτέλεσμα, τυπικά θεωρούμε  $n \geq 50$  πριν σταματήσουμε. Προσεγγιστικά τα διαστήματα εμπιστοσύνης υπολογίζονται ως συνήθως. Ο σειριακός αλγόριθμος προσομοίωσης *Monte Carlo* για την εκτίμηση του  $E[h(X)]$  είναι ο ακόλουθος:

1. Θέτω  $check = 0$ ,  $n = 1$ ,  $\hat{\theta}_1 = h(x_1)$ ,  $\sigma_0^2 = 0$
2. Όσο ( $check = 0$ )
  3. Παράγω  $X^n$
  4. Θέτω  $\hat{\theta}_n = \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_{n-1} + \frac{1}{n}X_n$
  5. Θέτω  $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n-1}{n}\hat{\sigma}_{n-1}^2 + \frac{n-1}{n^2}(h(x_n) - \hat{\theta}_{n-1})^2$
  6. Αν ( $n \geq p$ ) και ( $\frac{\hat{\sigma}_n z_{1-a/2}}{\sqrt{n}} \leq \epsilon$ )
    7.  $check = 1$
  8. Αλλιώς
  9.  $n = n + 1$

10.  $v = v + 1$

11. Τέλος αν

12. Τέλος όσο

13. Θέτω  $100(1 - a)\%$  δ.ε. =  $[\hat{\theta}_n - z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}]$

Στην πράξη δεν χρειάζεται να αποθηκεύσουμε κάθε τιμή,  $h(X^i)$  για  $i = 1, \dots, n$ , προκειμένου να ανανεώσουμε τα  $\hat{\theta}_n$  και  $\hat{\sigma}_n$ . Μπορούμε να ανανεώσουμε τα  $\hat{\theta}_n$  και  $\hat{\sigma}_n$  παρατηρώντας ότι:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \frac{h(X^n) - \hat{\theta}_{n-1}}{n}$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \hat{\sigma}_{n-1}^2 + n(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1})^2.$$

Αν θέλουμε να ελέγξουμε το σχετικό σφάλμα και έχουμε  $P(E_r \leq \epsilon) = 1 - a$ , τότε θα παράγουμε δείγματα μέχρι

$$\frac{\hat{\sigma}_n(z_{1-a/2})}{\hat{\theta}_n \sqrt{n}} \leq \epsilon$$

**Παράδειγμα 4.1.4.** Ο κώδικας αποτίμησης ευρωπαϊκού παραγωγού πώλησης χρησιμοποιώντας τη σειριακή μέθοδο είναι ο ακόλουθος:

```

p<-100
e<-0.01
S0<-100
K<-110
T<-0.5
r<-0.5
sigma<-0.2
za<-1.96
old_theta<-0
sig_sq<-0
i<-1
check<-0
con1<-S0*exp((r-(sigma^2)/2)*T)
con2<-exp(-r*T)

while(check==0){
  S<-con1*exp(sigma*sqrt(T)*rnorm(1))
  Payoff<-con2*max(0,S-K)
  new_theta<-old_theta+(Payoff-old_theta)/i
  if(i>1){
    sig_sq<-sig_sq*(i-2)/(i-1)+i*(new_theta-old_theta)^2
  }
  if((i>=p) & (za*sqrt(sig_sq/i)<e)){
    check<-1
  }else{
    i<-i+1
    old_theta<-new_theta
  }
}
CI<-c(new_theta-za*sqrt(sig_sq/i),new_theta+za*sqrt(sig_sq/i))
CI

```

Σχήμα 4.7:

Και το αποτέλεσμα που μας δίνει είναι:

```

> CI<-c(new_theta-za*sqrt(sig_sq/i),new_theta+za*sqrt(sig_sq/i))
> CI
[1] 15.23204 15.25204

```

Σχήμα 4.8:

□



# Κεφάλαιο 5

## Εισαγωγή στην Ελάττωση Διασποράς

### 5.1 Αποδοτικότητα Προσομοίωσης

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E[h(X)]$ . Τότε ο τυπικός αλγόριθμος προσομοίωσης είναι:

1. Παράγω  $X_1, \dots, X_n$

2. Υπολογίζω το  $\theta$  με  $\hat{\theta}_n = \sum_{j=1}^n Y_j/n$  όπου  $Y_i = h(X_j)$ .

3. Προσεγγίζω το  $100(1 - \alpha)\%$  διαστημάτων εμπιστοσύνης τα οποία δίνονται από:

$$[\hat{\theta}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}]$$

όπου  $\hat{\sigma}_n$  είναι συνήθης εκτιμήτρια του  $Var(Y)$  βασιζόμενη στα  $Y_1, \dots, Y_n$ . Ένας τρόπος για να μετρήσουμε την ποιότητα της εκτιμήτριας  $\hat{\theta}_n$  είναι από το ημιπλάτος  $HW$ , του διαστήματος εμπιστοσύνης. Για ένα προκαθορισμένο  $\alpha$ , έχουμε:

$$HW = z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{Var(Y)}{n}}$$

Θα θέλαμε το  $HW$  να είναι μικρό, αλλά κάποιες φορές αυτό είναι δύσκολο να επιτευχθεί. Αυτό συμβαίνει επειδή  $Var(Y)$  είναι πολύ μεγάλο ή γιατί χρειάζεται πολύ μεγάλη υπολογιστική προσπάθεια για να προσομοιωθεί κάθε  $Y_j$  ώστε το  $n$  να είναι απαραίτητα μικρό, ή κάποιος συνδυασμός των δύο. Ως αποτέλεσμα, είναι επιτακτικό να ανατρέξουμε στο θέμα της αποδοτικότητας

της προσομοίωσης. Υπάρχουν κάποια πράγματα που μπορούμε να κάνουμε:

1. Αναπτύσσουμε ένα καλό αλγόριθμο προσομοίωσης
2. Προγραμματίζουμε προσεκτικά για να ελαχιστοποιήσουμε τις απαιτήσεις μνήμης. Για παράδειγμα δεν αποθηκεύουμε όλα τα  $Y_j$ , πρέπει μόνο να αποθηκεύσουμε το  $\sum Y_j$  και  $\sum Y_j^2$  για να υπολογίσουμε το  $\hat{\theta}_n$  για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης.
3. Προγραμματίζουμε προσεκτικά για να ελαχιστοποιήσουμε το χρόνο εκτέλεσης.
4. Μειώνουμε τη διασπορά της προσομοίωσης που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το  $\theta$ . Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται ονομάζονται τεχνικές ελάττωσης της διασποράς.

Τώρα θα δούμε κάποιες από τις πιο απλές τεχνικές ελάττωσης διασποράς αλλά πρώτα πρέπει να περιγράψουμε ένα μέτρο αποδοτικότητας προσομοίωσης.

Έστω έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές,  $W$  και  $Y$ , τέτοια ώστε  $E[W] = E[Y] = \theta$ . Τότε μπορούμε είτε να προσομοιώσουμε  $W_1, \dots, W_n$  ή  $Y_1, \dots, Y_n$  προκειμένου να εκτιμήσουμε το  $\theta$ . Έστω ότι το  $M_w$  υποδεικνύει τη μέθοδο εκτίμησης του  $\theta$  προσομοιώνοντας τα  $W_i$ . Το  $M_y$  καθορίζεται με όμοιο τρόπο. Ποια μέθοδος είναι πιο αποδοτική; Η  $M_w$  ή  $M_y$ ; Για να απαντήσουμε αυτή την ερώτηση θεωρούμε  $n_w$  και  $n_y$  το πλήθος των δειγμάτων  $W$  και  $Y$  αντίστοιχα, τα οποία χρειάζονται για την επίτευξη του ημιπλάτους  $HW$ . Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$n_w = \left(\frac{z_{1-a/2}}{HW}\right)^2 \text{Var}(W)$$

$$n_y = \left(\frac{z_{1-a/2}}{HW}\right)^2 \text{Var}(Y)$$

Έστω  $E_w$  και  $E_y$  υποδεικνύουν την ποσότητα της υπολογιστικής προσπάθειας που χρειάζεται για να παράγουμε ένα δείγμα του  $W$  και  $Y$ , αντίστοιχα. Τότε η συνολική προσπάθεια που χρειάστηκε το  $M_w$  για να πετύχει το ημιδιάστημα  $HW$  είναι

$$TE_w = \left(\frac{z_{1-a/2}}{HW}\right)^2 \text{Var}(W) E_w$$

Όμοια, η προσπάθεια που χρειάστηκε το  $M_y$  για να πετύχει το ημιδιάστημα  $HW$ , δίνεται από

$$TE_y = \left(\frac{z_{1-a/2}}{HW}\right)^2 \text{Var}(Y) E_y$$

Λέμε ότι το  $M_w$  είναι πιο αποδοτικό από το  $M_y$  αν

$$TE_w \leq TE_y.$$

Σημειώνουμε ότι  $TE_W \leq TE_y$  αν και μόνο αν

$$Var(W)E_w < Var(Y)E_y.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα  $Var(W)E_w$  σαν ένα μέτρο αποδοτικότητας της προσομοίωσης,  $M_w$ . Η έκφραση  $Var(W)E_w < Var(Y)E_y$  υπονοεί ότι δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένας αλγόριθμος προσομοίωσης  $M_w$  είναι καλύτερος από έναν άλλο  $M_y$ , απλά επειδή  $Var(W) \leq Var(Y)$ , πρέπει να λάβουμε υπόψη τα  $E_w$  και  $E_y$ . Παρόλα αυτά πολλές φορές έχουμε δύο διαθέσιμες προσομοιώσεις,  $M_w$  και  $M_y$ , με  $E_w \approx E_y$  και  $Var(W) \ll Var(y)$ . Σε αυτή την περίπτωση είναι σαφές ότι η χρήση του  $M_w$  παρέχει υπολογίσιμη βελτίωση σε σχέση με την  $M_y$ .

## 5.2 Συνήθη Τυχαία Νούμερα

Τα συνήθη τυχαία νούμερα είναι μια τεχνική η οποία χρησιμοποιείται όταν δύο ή περισσότερα συστήματα συγκρίνονται. Ο καλύτερος τρόπος για την παρουσίαση αυτής της μεθόδου είναι μέσα από παράδειγμα.

**Παράδειγμα 5.2.1.** Έστω σύστημα αναμονής όπου οι πελάτες φτάνουν ακολουθώντας διαδικασία *Poisson*,  $N(t)$ . Ο διαχειριστής του συστήματος χρειάζεται να εγκαταστήσει έναν εξυπηρετητή για να εξυπηρετήσει τις αφίξεις και έχει την επιλογή δύο διαθέσιμων εξυπηρετητών, Μ και Ν. Σε περίπτωση που ο Μ διαλεχθεί, το  $S_i^m$  υποδεικνύει τον χρόνο εξυπηρέτησης του  $i$  πελάτη, και έστω  $X^m$  ο συνολικός χρόνος αναμονής στο σύστημα όλων των πελατών που καταφθάνουν πριν από τον χρόνο  $T$ . Έστω  $X^m = \sum_{i=1}^{N(t)} W_i^m$  όπου  $W_i^m$  είναι ο συνολικός χρόνος που ο  $i$  πελάτης βρίσκεται μέσα στο σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι  $W_i^m = S_i^m + Q_i^m$  όπου  $Q_i^m$  είναι ο χρόνος αναμονής πριν εξυπηρετηθεί ο  $i$  πελάτης. Τα  $S_i^n$ ,  $X^n$ ,  $W_i^n$  και  $Q_i^n$  είναι καλώς ορισμένα για τον εξυπηρετητή Ν. Ο χειριστής θέλει να εκτιμήσει:

$$\theta = E[X^m] - E[X^n].$$

Ίσως ο προφανής τρόπος να εκτιμήσουμε το  $\theta$  είναι να εκτιμήσουμε το  $\theta_m = E[X^m]$  και  $\theta_n = E[X^n]$  ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και μετά να εκτιμήσουμε  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_m - \hat{\theta}_n$ . Η διασπορά του  $\theta$  τότε δίνεται από:

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}_m) + Var(\hat{\theta}_n) - 2Cov(\hat{\theta}_m, \hat{\theta}_n).$$

Έτσι αν κανονίσουμε με τρόπο ώστε  $Cov = (\hat{\theta}_m, \hat{\theta}_n) > 0$ , τότε μπορούμε να πετύχουμε ελάττωση διασποράς. Κάποιες φορές μπορούμε να πετύχουμε πολύ μεγάλη μείωση χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ιδέα.



Έστω  $X_1^m, \dots, X_r^m$  και  $X_1^n, \dots, X_r^n$  είναι σύνολα από  $r$  δείγματα που χρησιμοποιούμε για να εκτιμήσουμε  $E[X^m]$  και  $E[X^n]$ , αντίστοιχα. Τώρα θέτουμε

$$Z_i = X_i^m - X_i^n, i = 1, \dots, r.$$

Αν τα  $Z_i$  είναι ισόνομα και ανεξάρτητα τότε

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^r Z_i}{r}$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{\text{Var}(X_i^m) + \text{Var}(X_i^n) - 2\text{Cov}(X_i^m, X_i^n)}{r}.$$

Έτσι για να μειώσουμε το  $\text{Var}(\hat{\theta})$ , θα θέλαμε να φτιάξουμε το  $\text{Cov}(X_i^m, X_i^n)$  όσο πιο μεγάλο γίνεται. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε χρησιμοποιώντας τα ίδια σύνολα τυχαίων αριθμών για να παράγουμε  $X_i^m$  και  $X_i^n$ . Συγκεκριμένα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες σειρές άφιξης για κάθε πιθανό εξυπηρετητή. Μπορούμε να κάνουμε επίσης: Ενώ  $S_i^m$  και  $S_i^n$  θα έχουν γενικά διαφορετικές κατανομές μπορούμε να κανονίσουμε να είναι θετικά συσχετισμένο. Για παράδειγμα αν είναι παραγμένα χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αντιστροφής θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο  $U_i \sim U(0, 1)$  για να παράγουμε τα  $S_i^m$  και  $S_i^n$ . Από τη στιγμή που η αντιστροφή συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι μονότονη, αυτό σημαίνει ότι  $S_i^m$  και  $S_i^n$  θα είναι πραγματικά θετικά συσχετισμένα. Χρησιμοποιώντας τα συνήθη τυχαία νούμερα με αυτόν τον τρόπο και συγχρονίζοντας τα σωστά όπως το έχουμε περιγράψει, θα έπρεπε τα  $X_i^m, X_i^n$  να είναι έντονα θετικά συσχετισμένα. Για παράδειγμα, αν τα  $X_i^m$  είναι πολλά, τότε αυτό σημαίνει ότι έχουν υπάρξει πολλές αφίξεις στο  $[0, T]$  και/ή ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι πολύς. Αλλά τότε το ίδιο ισχύει όταν το  $N$  είναι ο εξυπηρετητής, τότε το  $X_i^n$  πρέπει επίσης να είναι μεγάλο.  $\square$

Αυτό το παράδειγμα καταδεικνύει την ιδέα των συνήθων τυχαίων νούμερων. Ενώ γενικά δεν μπορεί πάντα να δουλέψει η μέθοδος δηλαδή να μειώσει τη διασπορά, συνήθως είναι αποτελεσματικό και άλλες φορές μειώνει τη διασπορά τάξεις μεγέθους. Η φιλοσοφία της μεθόδου είναι ότι συγκρίσεις των δύο συστημάτων θα γίνονταν κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

### 5.2.1 Συνήθη Τυχαία Νούμερα στη Χρηματοοικονομική Μηχανική

Τα συνήθη τυχαία νούμερα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του δέλτα ενός παραγώγου όταν δεν μπορεί να υπολογιστεί με σαφή τρόπο. Για

παράδειγμα έστω  $C(S)$  η τιμή ενός συγκεκριμένου παραγώγου όταν η αξία του βασικού χρεογράφου είναι  $S$ . Τότε

$$\Delta := \frac{\partial C}{\partial S}$$

είναι το δέλτα του παραγώγου και μετράει την ευαισθησία του παραγώγου στις αλλαγές της τιμής  $S_t$ , του βασικού χρεογράφου. Για παράδειγμα,  $C$  είναι η αξία του τυπικού ευρωπαϊκού παραγώγου αγοράς στο πλαίσιο του *Black – Scholes* μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\Delta$  με σαφή τρόπο. Υπάρχουν φορές, παρόλα αυτά, όπου δεν είναι δυνατόν κάτι τέτοιο, σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε *Monte Carlo*.

Έστω  $\epsilon > 0$  δεδομένο τότε ο λόγος της πεπερασμένης διαφοράς

$$\Delta_\epsilon = \frac{C(S + \epsilon) - C(S - \epsilon)}{2\epsilon}$$

πρέπει να είναι κοντά στο  $\Delta$  όταν το  $\epsilon$  είναι μικρό. Θα μπορούσαμε επομένως να υπολογίσουμε το  $\Delta$  υπολογίζοντας το  $\Delta_\epsilon$ . Σε αυτή την περίπτωση,  $C(S + \epsilon)$  και  $C(S - \epsilon)$  δεν πρέπει να εκτιμώνται ανεξάρτητα, αλλά πρέπει να εκτιμώνται χρησιμοποιώντας το ίδιο σύνολο συνήθων τυχαίων μεταβλητών.

Παρά τις βελτιώσεις που προκύπτουν από τα συνήθη τυχαία νούμερα, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών που μόλις περιγράψαμε δεν είναι ο καλύτερος τρόπος υπολογισμού του  $\Delta$ . Σημειώνοντας ότι  $C = E[h(S)]$  για κάποια συνάρτηση,  $h(\cdot)$ , βλέπουμε ότι για να υπολογίσουμε το  $\Delta$  καταλήγουμε να υπολογίζουμε το

$$\Delta = E\left[\frac{\partial h(S)}{\partial S}\right]$$

Αν μπορούμε να δικαιολογήσουμε την αλλαγή της σειράς εκτέλεσης της μέσης τιμής και του διαφορικού, στην πράξη μπορούμε να το κάνουμε συχνά αυτό, με αποτέλεσμα να υπολογίζουμε το  $\Delta$  πιο αποδοτικά χωρίς την προκατάληψη της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών.

### 5.3 Τυχαίες Μεταβλητές Ελέγχου

Έστω ότι θέλουμε να καθορίσουμε την θερμοκρασία του μεσημεριού,  $\theta$  και τα δεδομένα μας αποτελούνται από  $\{(T_i, R_i) : i = 1, \dots, n\}$ , Όπου  $T_i$  και  $R_i$  είναι μεσημεριανή θερμοκρασία και ημερήσια βροχόπτωση, αντίστοιχα, για κάποια τυχαία μέρα,  $D_i$ . Τότε  $\theta = E[T]$  είναι η μέση μεσημεριανή θερμοκρασία. Αν οι μέρες  $D_i$  επιλέγονται ομοιόμορφα από το σύνολο  $\{1, \dots, 365\}$ , τότε είναι πρωτοφανή η επιλογή του

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}$$

και τότε ξέρουμε ότι  $E[\hat{\theta}_n] = \theta$ . Έστω τώρα ότι ξέρουμε:

1.  $E[R]$ , η μέση βροχόπτωση
2.  $R_i$  και  $T_i$  είναι εξαρτημένα, συγκεκριμένα, τείνει να βρέχει πιο πολύ την χειμερινή σεζόν.

Υπάρχει κάποιος τρόπος για να αξιοποιήσουμε αυτές τις πληροφορίες για να εκτιμήσουμε καλύτερα το  $\theta$ . Έστω  $\bar{R}_n = \sum_{i=1}^n R_i/n$  και υποθέτουμε ότι  $\bar{R}_n > E[R]$ . Τότε αυτό σημαίνει ότι τα  $D_i$  υπερεκπροσωπούν τις βροχερές μέρες. Αλλά από τη στιγμή που οι βροχερές μέρες συμπίπτουν με τις μέρες της κρύας σεζόν, σημαίνει επίσης ότι τα  $D_i$  υπερεκπροσωπούν την κρύα σεζόν έναντι της θερμής περιόδου. Ως αποτέλεσμα, περιμένουμε  $\hat{\theta}_n < \theta$ . Τότε για να βελτιώσουμε την εκτίμησή μας, πρέπει να αυξήσουμε την  $\hat{\theta}_n$ . Όμοια, αν  $\bar{R}_n < E[R]$ , θα πρέπει να μειώσουμε το  $\hat{\theta}_n$ . Σε αυτό το παράδειγμα, η βροχόπτωση είναι η μεταβλητή ελέγχου από τη στιγμή που μας επιτρέπει να ελέγξουμε καλύτερα την εκτίμησή μας για το  $\theta$ . Η βασική ιδέα πίσω από πολλές τεχνικές ελάττωσης διασποράς (περιλαμβανομένων των μεταβλητών ελέγχου) είναι να χρησιμοποιήσεις ό,τι ξέρεις για το σύστημα. Σε αυτό το παράδειγμα, το σύστημα είναι ένα κλίμα, και αυτό που ξέρουμε είναι το  $E[R]$ , η μέση ημερήσια βροχόπτωση. Τώρα θα μελετήσουμε τις μεταβλητές ελέγχου με μεγαλύτερη ενδελέχεια, και συγκεκριμένα θα καθορίσουμε πόσο μπορούμε να αυξήσουμε ή να μειώσουμε το  $\hat{\theta}_n$ .

## 5.4 Η Μέθοδος της Μεταβλητής Ελέγχου

Έστω ότι θέλουμε πάλι να εκτιμήσουμε το  $\theta = E[Y]$  όπου  $Y = h(X)$  είναι η έξοδος του πειράματος προσομοίωσης. Υποθέτουμε ότι το  $Z$  είναι επίσης μια έξοδος της προσομοίωσης ή ότι μπορούμε εύκολα να το υπολογίσουμε αν θέλουμε. Τέλος υποθέτουμε ότι ξέρουμε το  $E[Z]$ . Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλές αμερόληπτες εκτιμήτριες του  $\theta$ :

1.  $\hat{\theta} = Y$ , ο συνήθης εκτιμητής μας

2.  $\hat{\theta}_c = Y + c(Z - E[Z])$

Όπου το  $c$  είναι ένα πραγματικό νούμερο. Είναι ξεκάθαρο ότι  $E[\hat{\theta}_c] = \theta$ . Το ερώτημα είναι αν το  $\hat{\theta}_c$  έχει μικρότερη διασπορά από το  $\hat{\theta}$ . Για να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα, υπολογίζουμε το  $Var(\hat{\theta}_c)$  και αποκτούμε:

$$Var(\hat{\theta}_c) = Var(Y) + c^2 Var(Z) + 2cov(Y, Z). \quad (1)$$

Από τη στιγμή που είμαστε έτοιμοι να διαλέξουμε  $c$ , θα έπρεπε να ελαχιστοποιήσουμε το  $Var(\hat{\theta}_c)$ . Η απλή ανάλυση υποδεικνύει ότι η βέλτιστη τιμή του  $c$  δίνεται από το

$$c^* = -\frac{Cov(Y, Z)}{Var(Z)}.$$

Αντικαθιστώντας με  $c^*$  στην (1) βλέπουμε ότι

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{c^*}) = \text{Var}(Y) - \frac{\text{Cov}(y, z)^2}{\text{Var}(Z)} \Rightarrow$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{c^*}) = \text{Var}(\theta) - \frac{\text{Cov}(Y, Z)^2}{\text{Var}(Z)}.$$

Έτσι βλέπουμε ότι προκειμένου να πετύχουμε ελάττωση της διασποράς είναι απαραίτητο μόνο ότι  $\text{Cov}(Y, Z) \neq 0$ . Σε αυτή την περίπτωση, το  $Z$  καλείται μεταβλητή ελέγχου του  $Y$ . Για να χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή ελέγχου του  $Z$  θα θέλαμε να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμό μας ώστε αφού παράγουμε τα  $n$  δείγματα του  $Y$  και  $Z$  θέταμε απλά:

$$\hat{\theta}_{c^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i + c^*(Z_i - E[Z]))}{n}.$$

Υπάρχει ένα πρόβλημα, παρόλα αυτά, δεν ξέρουμε το  $\text{Cov}(Y, Z)$ . Ξεπερνάμε αυτό το πρόβλημα θέτοντας

$$\widehat{\text{Cov}}(Y, Z) = \frac{\sum_{i=1}^p (Y_i - \bar{Y}_p)(Z_i - E[Z])}{p-1}$$

Αν το  $\text{Var}(Z)$  είναι άγνωστο, τότε το εκτιμούμε από:

$$\widehat{\text{Var}}(Z) = \frac{\sum_{j=1}^p (Z_j - E[Z])^2}{p-1}$$

και τέλος θέτουμε:

$$\hat{c}^* = -\frac{\widehat{\text{Cov}}(Y, Z)}{\widehat{\text{Var}}(Z)}$$

Υποθέτοντας πως μπορούμε να βρούμε μια μεταβλητή ελέγχου ο αλγόριθμος προσομοίωσης είναι ως ακολούθως. Σημειώστε ότι τα  $V_i$  είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανομημένα, έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης όπως πριν. Αλγόριθμος προσομοίωσης μεταβλητών ελέγχου για τον υπολογισμό του  $E[Y]$ .

#Κάνουμε μια πιλοτική προσομοίωση πρώτα

1. Για  $i = 1$  έως  $p$

2. Παράγω  $(Y_i, Z_i)$

3. Τέλος για

4. Υπολογίζω το  $\hat{c}^*$

#Έπειτα την κυρίως προσομοίωση

5. Για  $i = 1$  έως  $n$

6. Παράγω  $(Y_i, Z_i)$

7. Θέτω  $V_i = Y_i + \hat{c}^*(Z_i - E[Z])$

8. Τέλος για

9. Θέτω  $\hat{\theta}_{\hat{c}^*} = \hat{V}_n = \sum_{i=1}^n V_i/n$

10. Θέτω  $\hat{\sigma}_{n,v}^2 = \sum (V_i - \hat{\theta}_{\hat{c}^*})^2 / (n - 1)$

11. Θέτω  $100(1-a)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης  $= [\hat{\theta}_{\hat{c}^*} - z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,v}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_{\hat{c}^*} + z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,v}}{\sqrt{n}}]$

**Παράδειγμα 5.4.1.** Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E[e^{(U+W)^2}]$  όπου  $U, W \sim U(0, 1)$  ανεξάρτητα και ισόνομα. Με  $Y = e^{(U+W)^2}$ . Η συνήθης μέθοδος είναι:

1. Παράγω  $U_1, \dots, U_n$  και  $W_1, \dots, W_n$  όλα ισόνομα και ανεξάρτητα

2. Υπολογίζω  $Y_1 = e^{(U_1+W_1)^2}, \dots, Y_n = e^{(U_n+W_n)^2}$

3. Εκτιμώ το  $\theta$  με

$$\hat{\theta}_{n,y} = \frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{n}$$

4. Φτιάχνω διάστημα εμπιστοσύνης για το  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_{n,y} \pm z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,y}}{\sqrt{n}}$$

όπου  $\hat{\sigma}_{n,y}^2$  είναι η συνήθης εκτιμήτρια του  $Var(Y)$ .

Έστω ότι χρησιμοποιούμε την τεχνική μεταβλητών ελέγχου. Πρώτα πρέπει να διαλέξουμε μια κατάλληλη μεταβλητή ελέγχου,  $Z$ . Μια πιθανή μεταβλητή ελέγχου είναι η  $Z_1 = U + W$ . Ξέρουμε ότι  $E[U + W] = 1$  και είναι επίσης φανερό ότι σε αυτή την περίπτωση το  $Cov(Y, Z_1)$  έπρεπε να είναι μεγαλύτερο του 0. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το  $Z_2 = (U + W)^2$ . Πάλι θα μπορούσαμε να περιμένουμε ότι  $Cov(Y, Z_2) > 0$  και ξέρουμε το  $E[Z_2]$  επειδή

$$E[Z_2] = E[U^2 + 2UW + W^2] = 1/3 + 1/2 + 1/3 = 7/6.$$

Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το  $Z_2$  σαν μεταβλητή ελέγχου. Συνήθως υπάρχουν πολλές πιθανές συμμεταβλητές. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε  $Z_3 = e^{(U+W)}$ .  $\square$

**Παράδειγμα 5.4.2.** Υπενθυμίζουμε ότι η απόδοση ενός ασιατικού παραγώγου δίνεται από

$$h(X) = \max(0, \frac{\sum_{i=1}^n S_{iT/m}}{m} - K)$$

Όπου  $X = \{S_{iT/m} : i = 1, \dots, m\}$ . Η τιμή του παραγώγου δίνεται από

$$C_a = E_0^Q[e^{-rT}h(X)]$$

Όπου  $r$  είναι το επιτόκιο,  $K$  είναι η τιμή εξάσκησης και  $T$  ο χρόνος λήξης. Υποθέτουμε ότι  $S_t \sim GBM(r, \sigma)$  υπό το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου,  $Q$ . Η συνηθισμένη μέθοδος προσομοίωσης για τον υπολογισμό του  $C_a$  είναι να παράγουμε  $n$  ανεξάρτητα δείγματα της απόδοσης,  $Y_i = e^{-rTh(X_i)}$ , για  $i = 1, \dots, n$ , και να θέσουμε

$$\hat{C}_a = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}.$$

Αλλά μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το  $C_a$  χρησιμοποιώντας μεταβλητές ελέγχου και υπάρχουν πολλές δυνατές επιλογές που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε:

1.  $Z_1 = S_T$
2.  $Z_2 = e^{-rt} \max(0, S_T - K)$
3.  $Z_3 = \sum_{j=1}^m S_{iT/m} / m$

Σε κάθε μια εκ των τριών υποθέσεων είναι εύκολο να υπολογίσουμε το  $E[Z]$ . Πράγματι το  $E[Z_2]$  είναι μια καλά μελετημένη *Black-Scholes* τιμή παραγώγου. Θα περιμέναμε επίσης τα  $Z_1$ ,  $Z_2$  και  $Z_3$  να έχουν μια θετική συνδιακύμανση με το  $Y$ , ώστε η κάθε μια να είναι μια κατάλληλη υποψήφια για χρήση ως μεταβλητή ελέγχου.

Έστω ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ως μεταβλητή ελέγχου τον γεωμετρικό μέσο όρο 30 τιμών σε ένα ασιατικό παράγωγο. Θα το τιμολογήσουμε μια φορά όπως υποδείχθηκε στη σελίδα 32, χωρίς να εφαρμόσουμε τεχνικές ελάττωσης διασποράς, και μια χρησιμοποιώντας ως μεταβλητή ελέγχου την  $Z = e^{-rT}(\bar{S}_G^i - K)^+$  με  $\bar{S}_G^i = (\hat{S}_1^i * \dots * \hat{S}_n^i)^{1/30}$ . Για την υλοποίηση της δεύτερης μεθόδου θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της σελίδας 59. Ο κώδικας στην  $R$  είναι ο ακόλουθος:

```

n<-1000
r<-0.5
T<-0.5 #for 0.5 years
mu<-0.12 #drift
sigma<-0.2 #volatility
S0<-100 #initial stock price
times<-c(1:30)
time<-(times*T)/length(times)
K<-98
suma<-0
p<-400
Y<-c()
Z<-c()
#pilotiki prosomoiosi
for (i in 1:p) {
  BM<-sqrt(time)*rnorm(1)
  GBM<-S0*exp((mu-sigma^2/2)*time+sigma*BM)
  Y[i]<-exp(-r*T)*max(0,(sum(GBM)/length(times))-K)
  Z[i]<-exp(-r*T)*max(0,(prod(GBM))^(1/30)-K)
}
# ypologismos toy c
copt<- -cov(Y,Z)/var(Z)
meanZ<-mean(Z)
Y2<-c()
timologiseis<-c()

```

Σχήμα 5.1:

```

#main simulation
for (j in 1:1000) {
  for (i in 1:n) {
    BM<-sqrt(time)*rnorm(1)
    GBM<-S0*exp((mu-sigma^2/2)*time+sigma*BM)
    Y[i]<-exp(-r*T)*max(0,(sum(GBM)/length(times))-K)
    Z[i]<-exp(-r*T)*max(0,(prod(GBM))^(1/30)-K)
    Y2[i]<-Y[i]+copt*(Z[i]-meanZ)
  }
  timologiseis[j]<-mean(Y)
  timologiseis2[j]<-mean(Y2)
}

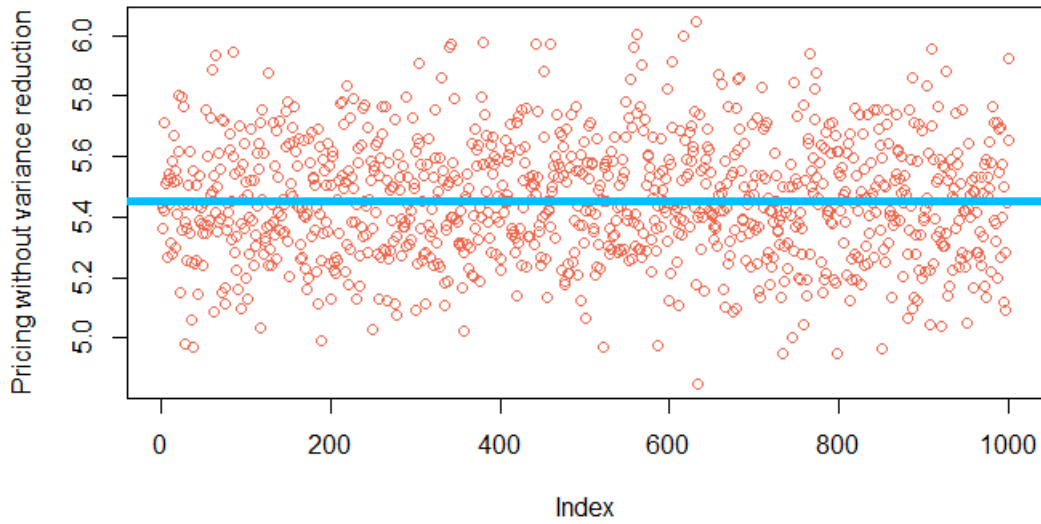
mean(timologiseis)
plot(timologiseis,col="coral2",
      ylab="Pricing without variance reduction")
abline(h=mean(timologiseis),col="deepskyblue",lwd=5)

plot(timologiseis2,col="olivedrab1",ylab = "Prcing with variance reduction")
abline(h=mean(timologiseis2),lwd=5)

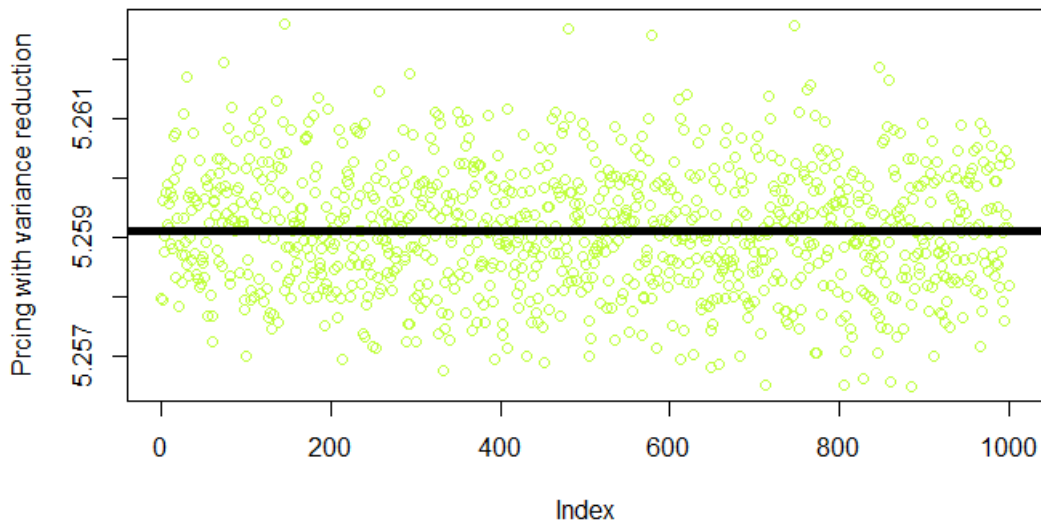
```

Σχήμα 5.2:

Με αποτέλεσμα να πάρουμε τις γραφικές παραστάσεις 1.000 τιμολογήσεων των δύο μεθόδων.



Σχήμα 5.3:



Σχήμα 5.4:

Παρατηρούμε ότι η διασπορά των τιμολογήσεων της δεύτερης μεθόδου είναι κατά πολύ χαμηλότερης της πρώτης. Πιο συγκεκριμένα η διασπορά των



τιμολογήσεων της πρώτης μέθοδος προκύπτει  $\sigma_{nocontrol}^2 = 0.0376$  ενώ η διασπορά της δεύτερης μεθόδου είναι  $\sigma_{control}^2 = 1.17 * e^{-06}$ . Η μεγάλη διαφορά στις διασπορές και το γεγονός ότι  $E_{control} \approx E_{nocontrol}$  μας ωθεί να προτιμήσουμε την δεύτερη μέθοδο έναντι της πρώτης.

□

**Παράδειγμα 5.4.3.** Πολλές εφαρμογές των τεχνικών ελάττωσης διασποράς μπορούν να βρεθούν στη μελέτη των συστημάτων αναμονής. Ένα απλό παράδειγμα, είναι η περίπτωση ενός κουρείου όπου ο κουρέας ανοίγει κάθε μέρα στις 9 και κλείνει στις 6. Έστω ότι είναι ο μόνος κουρέας στο μαγαζί και σκέφτεται να προσλάβει έναν άλλο κουρέα για να μοιραστεί το φόρτο εργασίας. Πρώτα θα πρέπει να υπολογίσει τον μέσο συνολικό χρόνο που οι πελάτες περιμένουν μέσα σε μια μέρα.

Έστω ότι οι πελάτες καταφθάνουν στο κουρείο σύμφωνα με μια διαδικασία *Poisson*  $N(t)$  με ρυθμό  $\lambda(t)$ , και έστω  $W_i$  ο χρόνος που περιμένει ο  $i$  πελάτης. Τότε δεδομένου ότι ο κουρέας δουλεύει 9 ώρες τη μέρα, η ποσότητα που πρέπει να εκτιμήσει είναι  $\theta = E[Y]$  όπου

$$Y = \sum_{j=1}^{N(9)} W_j$$

υποθέτουμε επίσης ότι οι φορές εξυπηρέτησης πελατών είναι ισόνομες και ανεξάρτητες με σ.κ.π.,  $F(\cdot)$ , και επίσης είναι ανεξάρτητες από τη διαδικασία αύξησης  $N(t)$ . Η συνήθης μέθοδος προσομοίωσης για το  $\theta$  θα ήταν να προσομοιώσουμε  $n$  μέρες λειτουργίας στο κουρείο αποκτώντας έτσι  $n$  δείγματα,  $Y_1, \dots, Y_n$ , και μετά θα θέταμε

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{n}$$

Παρόλα αυτά ένας καλύτερος εκτιμητής θα μπορούσε να αποκτηθεί χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή ελέγχου. Συγκεκριμένα, έστω  $Z$  ο συνολικός χρόνος που οι πελάτες ξοδεύουν σε μια δεδομένη μέρα εξυπηρετούμενοι ώστε

$$z = \sum_{j=1}^{N(9)} S_j$$

Όπου  $S_j$  είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης του  $j$  πελάτη. Τότε, από τη στιγμή που οι φορές εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες και ισόνομες της διαδικασίας αύξησης, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$E[Z] = E[S]E[N(9)]$$

Που θα έπρεπε να είναι εύκολα υπολογίσιμο. Διαισθητικά καταλαβαίνουμε ότι το  $Z$  πρέπει να είναι θετικά συνδεδεμένο με το  $Y$  και επομένως θα ήταν μια καλή υποψήφια μεταβλητή ελέγχου.  $\square$

### 5.4.1 Πολλαπλές Μεταβλητές Ελέγχου

Μέχρι στιγμής έχουμε εστιάσει στην περίπτωση χρησιμοποίησης μίας μεταβλητής ελέγχου. Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει λόγος για να μην χρησιμοποιήσουμε πάνω από μία μεταβλητή ελέγχου. Τώρα θα δούμε πως λειτουργεί αυτή η μέθοδος.

Έστω ότι πάλι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E[Y]$  όπου  $Y$  είναι η έξοδος ενός πειράματος προσομοίωσης. Υποθέτουμε επίσης ότι τα  $E[Z_i]$  είναι γνωστά για κάθε  $i = 1, \dots, m$ , όπου  $Z_i$  είναι η έξοδος ή ότι μπορούμε να τα υπολογίσουμε εύκολα αν θελήσουμε. Τέλος υποθέτουμε ότι το  $E[Z_i]$  είναι γνωστό για κάθε  $i$ . Μπορούμε να κατασκευάσουμε αμερόληπτες εκτιμήτριες του  $\theta$  θέτοντας

$$\hat{\theta}_c = Y + c_1(Z_1 - E[Z_1]) + \dots + c_m(Z_m - E[Z_m]).$$

Όπου κάθε  $c_i \in \mathbb{R}$ . Είναι ξεκάθαρο ότι  $E[\hat{\theta}_c] = \theta$ . Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να διαλέξουμε τα  $c_i$  με τρόπο ώστε  $\hat{\theta}_c$  να έχει μικρότερη διασπορά από το  $\hat{\theta}$ , την συνήθη εκτιμήτρια. Φυσικά μπορούμε πάντα να θέσουμε κάθε  $c_i = 0$ , παίρνοντας έτσι το  $\hat{\theta}$ , έτσι αν διαλέξουμε ένα καλό σύνολο από  $c_i$  δεν θα κάνουμε χειρότερα από την  $\theta$ . Για να διαλέξουμε ένα καλό σύνολο  $c_i$  υπολογίζουμε το  $Var(\hat{\theta}_c)$  και παίρνουμε

$$Var(\hat{\theta}_c) = Var(Y) + 2 \sum_{i=1}^m c_i Cov(Y, Z_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j Cov(Z_i, Z_j)$$

Όπως πριν, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση για να βρούμε το βέλτιστο σύνολο των  $c_i$ : παίρνοντας μερικές παραγώγους ως προς κάθε  $c_i$ , θέτοντάς τες ίσες με 0 και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει με  $m$  γραμμικές εξισώσεις και  $m$  αγνώστους. Αυτό είναι εύκολο να γίνει αλλά όπως πριν η βέλτιστη λύση  $c_i^*$  θα περιλάβει άγνωστες ποσότητες ώστε να μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας μια πιλοτική προσομοίωση. Ένας βολικός τρόπος για να υπολογίσουμε τα  $c_i^*$  είναι να παρατηρήσουμε ότι  $\hat{c}_i^* = b_i$  όπου τα  $b_i$  είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων της επόμενης γραμμικής παλινδρόμησης:

$$Y = a + b_1 Z_1 + \dots + b_m Z_m + \epsilon$$

Όπου το  $\epsilon$  είναι ο όρος σφάλματος. Πολλά λογιστικά πακέτα έχουν εντολές που θα δώσουν αυτόματα τα  $b_i$ . Ο αλγόριθμος προσομοίωσης με πολλές

μεταβλητές ελέγχου για τον υπολογισμό του  $E[Y]$  είναι ακριβώς ανάλογος με τον αλγόριθμο προσομοίωσης με μόνο μία μεταβλητή ελέγχου. Έχει ως εξής:

# Δοκιμαστική προσομοίωση πρώτα #

1. Για  $i = 1$  έως  $p$

2. Παράγω  $(Y_i, Z_{1,i}, \dots, Z_{m,i})$

3. Τέλος για

4. Υπολογίζω το  $c_i^*, i = 1, \dots, m$

# Βασική προσομοίωση #

5. Για  $i = 1$  έως  $n$

6. Παράγω  $(Y_i, Z_{1,m}, \dots, Z_{m,i})$

7. Θέτω  $V_i = Y_i + \sum_{j=1}^m \hat{c}_j^* (Z_{j,i} - E[Z_j])$

8. Τέλος για

9.  $\hat{\theta}_{c^*} = \bar{V}_n = \sum_{i=1}^n V_i / n$

10. Θέτω  $\hat{\sigma}_{n,v}^2 = \sum (V_i - \hat{\theta}_{c^*})^2 / (n - 1)$

11. Θέτω  $100(1 - \alpha)\% \delta.ε. = [\hat{\theta}_{c^*} - z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,v}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_{c^*} + z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,v}}{\sqrt{n}}]$

**Παράδειγμα 5.4.4.** Έστω μια επενδυτική εταιρεία με μεγάλη περιουσία. Αυτή η περιουσία μπορεί να περιλαμβάνει μετοχές, ομόλογα και παράγωγα προϊόντα. Έστω  $W_t$  η αξία του κεφαλαίου τη στιγμή  $t$ . Η εταιρεία ενδιαφέρεται να υπολογίσει το

$$\theta = P\left(\frac{W_T}{W_0} \leq q\right)$$

Όπου  $q$  είναι μια σταθερά. Φυσικά θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε το  $\theta$  χρησιμοποιώντας τυπικό αλγόριθμο προσομοίωσης. Πολύ συχνά, παρόλα αυτά το γεγονός υπό ερώτηση δηλ.  $\frac{W_T}{W_0} \leq q$ , μπορεί να είναι ένα σπάνιο γεγονός και ο συνήθης αλγόριθμος προσομοίωσης θα είναι μη αποτελεσματικός.

Μια πιθανή λύση είναι να αναγνωρίσουμε τα πιο σημαντικά περιουσιακά στοιχεία του κεφαλαίου και να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές τους σαν μεταβλητές ελέγχου. Αυτό είναι συχνά δυνατό από τη στιγμή που σε πολλά χρηματοοικονομικά μοντέλα, οι τιμές των βασικών στοιχείων (μετοχών, ομολόγων) καθώς και κάποιων τιμών παραγώγων, είναι γνωστές και θα συσχετισθούν με την αξία του ομολόγου. Όταν υπολογίζουμε την πιθανότητα ενός σπανίου γεγονότος πρακτικά, είναι προτιμότερο να κάνουμε χρήση της δειγματοληψίας σπουδαιότητας, πιθανώς συνδυασμένη με άλλες τεχνικές ελάττωσης διασποράς όπως στρωματοποιημένη δειγματοληψία και μεταβλητές ελέγχου.  $\square$

## 5.5 Αντιθετικές Μεταβλητές

Έστω ως συνήθως ότι θα θέλαμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E[h(X)] = E[Y]$ , και ότι έχουμε παράγει δύο δείγματα,  $Y_1$  και  $Y_2$ . Τότε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια

του  $\theta$  είναι

$$\hat{\theta} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

και

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{\text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) + 2\text{Cov}(Y_1, Y_2)}{4}$$

Αν  $Y_1$  και  $Y_2$  είναι ισόνομες και ανεξάρτητες, τότε  $\text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}(Y)/2$ . Παρόλα αυτά, θα μπορούσαμε να μειώσουμε το  $\text{Var}(\hat{\theta})$  αν μπορούσαμε να το οργανώσουμε με τρόπο ώστε  $\text{Cov}(Y_1, Y_2) < 0$ . Θα περιγράψουμε τη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών για να το κάνουμε αυτό. Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση όπου το  $Y$  είναι μια συνάρτηση από ισόνομες και ανεξάρτητες μεταβλητές  $U(0, 1)$  με τρόπο ώστε

$$\theta = E[h(U)]$$

Όπου  $U = (U_1, \dots, U_m)$  και τα  $U_i$  είναι ανεξάρτητα και ισόνομα  $\sim U(0, 1)$ . Ο συνηθισμένος αλγόριθμος *MonteCarlo* υποθέτοντας ότι χρησιμοποιούμε  $2n$  δείγματα για την εκτίμηση του  $\theta$ , έχει ως εξής:

1. Για  $i = 1$  έως  $2n$
2. Παράγουμε  $U_i$
3. Θέτουμε  $Y_i = h(U_i)$
4. Τέλος για
5. Θέτουμε  $\hat{\theta}_{2n} = \bar{Y}_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} Y_i / 2n$
6. Θέτουμε  $\sigma_{2n}^2 = \sum_{i=1}^{2n} (Y_i - \bar{Y}_{2n})^2 / (2n - 1)$
7. Θέτουμε προσεγγιστικά  $100(1 - a)\%$  δ.ε.  $= \hat{\theta}_{a,n} \pm z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_{2n}}{\sqrt{n}}$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε  $1 - U_i$  για να παράγουμε δείγματα της  $Y$ . Έτσι θέτουμε  $\tilde{Y} = h(1 - U_i)$  με την ιδιότητα  $E[Y_i] = E[\tilde{Y}_i] = \theta$ . Έτσι μπορούμε να πάρουμε τον αλγόριθμο αντιθετικών μεταβλητών προσομοίωσης του  $\theta$ :

1. Για  $i = 1$  ως  $n$
2. Παράγω  $U_i$
3. Θέτω  $Y_i = h(U_i)$  και  $\tilde{Y}_i = h(1 - U_i)$
4. Θέτω  $Z_i = (Y_i + \tilde{Y}_i) / 2$
5. Τέλος για
6. Θέτω  $\hat{\theta}_{n,a} = \bar{Z}_n = \sum_{i=1}^n Z_i / n$
7. Θέτω  $\sigma_{n,a}^2 = \sum_{i=1}^{n,a} (Z_i - \bar{Z}_n)^2 / (n - 1)$
7. Θέτω προσεγγιστικά  $100(1 - a)\%$  δ.ε.  $= \hat{\theta}_{a,n} \pm z_{1-a/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,a}}{\sqrt{n}}$

Ως συνήθως,  $\hat{\theta}_{a,n}$  είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$  και ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών δηλώνει ότι  $\hat{\theta}_{n,a} \rightarrow \theta$  σχεδόν σίγουρα καθώς

$n \rightarrow \infty$ . Καθένας από τους δύο αλγορίθμους που περιγράψαμε παραπάνω χρησιμοποιεί  $2n$  δείγματα έτσι η ερώτηση που δημιουργείται είναι ποιος αλγόριθμος είναι καλύτερος. Οι δύο αλγόριθμοι χρειάζονται σχεδόν το ίδιο μέγεθος προσπάθειας, έτσι συγκρίνοντας τους δύο αλγορίθμους καταλήγουμε να συγκρίνουμε τη διασπορά των εκτιμητριών.

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{2n}) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{2n} Y_i}{2n}\right)$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}_{n,a}) &= \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}\right) \\ &= \frac{\text{Var}(Y + \tilde{Y})}{4n} = \frac{\text{Var}(Y)}{2n} + \frac{\text{cov}(Y, \tilde{Y})}{2n} \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}_{2n}) + \frac{\text{Cov}(Y, \tilde{Y})}{2n} \end{aligned}$$

Οπότε  $\text{Var}(\hat{\theta}) < \text{Var}(\hat{\theta}_{2n})$  αν και μόνο αν  $\text{Cov}(Y, \tilde{Y}) < 0$ . Υπενθυμίζουμε ότι  $Y = h(U)$  και  $\tilde{Y} = h(1 - U)$ , αυτό σημαίνει ότι

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{n,a}) < \text{Var}(\hat{\theta}_{2n}) \Leftrightarrow \text{Cov}(h(U), h(1 - U)) < 0.$$

Αργότερα θα συζητήσουμε τις συνθήκες που αρκούν για να υπάρχει εγγύηση ότι  $\text{Cov}(h(U), h(1 - U)) < 0$

**Παράδειγμα 5.5.1.** Παράδειγμα υπολογισμού ολοκληρώματος. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $\theta = \int_0^1 e^{x^3} dx$ . Ως συνήθως μπορούμε να θεωρήσουμε  $\theta = E[e^{U^3}]$  όπου  $U \sim U(0, 1)$ . Μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα και με τους δύο προαναφερθέντες τρόπους ώστε να συγκρίνουμε τις διασπορές. Ο κώδικας στην *R* έχει ως εξής:

```
#Συνήθης αλγόριθμος προσομοίωσης
n<-1000
u<-runif(2*n)
Y<-exp(u^3)
mean(Y)
sd(Y)^2

#Αλγόριθμος προσομοίωσης αντιθετικών μεταβλητών
u<-runif(n)
v<-1-u
Z<-(exp(u^3)+exp(v^3))/2
mean(Z)
sd(Z)^2

#Ελάττωση διασποράς
variance_reduction<-(sd(Y)^2/(2*n)-sd(Z)^2/n)*100/(sd(Y)/(2*n))
```

Σχήμα 5.5:

Από τον κώδικα παίρνουμε  $mean(Y) = 1.329$ ,  $sd(Y)^2 = 0.1809384$ ,  $mean(Z) = 1.352098$ ,  $sd(Z)^2 = 0.04176286$  και  $Variance\_reduction = 53.83748\%$ . Σε περίπτωση που ζητούταν να μελετήσουμε το  $\theta = E[e^{(u^2)}]$  θα πρόκυπτε ακόμα μεγαλύτερη ελάττωση διασποράς. Κάποιες φορές θα έχουμε μεγάλη ελάττωση διασποράς κάποιες άλλες μικρή και άλλες αύξηση. Αυτό που θέλουμε να ξέρουμε είναι οι συνθήκες που όταν ισχύουν θα έχουμε σίγουρα μια ελάττωση διασποράς.  $\square$

Έστω ότι έχουμε μια περίπτωση όπου  $m = 1$  με  $U \sim Uniform$  και  $\theta = E[h(U)]$ . Έστω ότι  $h(\cdot)$  είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση του  $u$  στο  $[0,1]$ . Αν έχουμε μεγάλο  $U$ , τότε και το  $h(U)$  είναι μεγάλο ενώ τα  $1 - U$  και  $h(1 - U)$  είναι μικρά. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $Cov(h(U), h(1 - U)) < 0$ . Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όταν  $m = 1$  μια ικανή συνθήκη για να έχουμε όντως ελάττωση διασποράς είναι η  $h(\cdot)$  να είναι μονότονη στο  $[0,1]$ .

Έστω τώρα ότι εξετάζουμε το ενδεχόμενο όπου  $m > 1$ , δηλαδή  $U = (U_1, \dots, U_m)$  και  $\theta = E[h(U)]$ . Λέμε ότι η  $h(u_1, \dots, u_m)$  είναι μια μονότονη συνάρτηση αν για κάθε ένα από τα ορίσματά της  $u_i$  είναι μη αύξουσα ή μη φθίνουσα.

**Θεώρημα** Αν  $h(u_1, \dots, u_m)$  είναι μια μονότονη συνάρτηση για κάθε ένα από τα ορίσματά της στο  $[0, 1]^m$ , τότε για ένα σύνολο  $U = (U_1, \dots, U_m)$  ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών  $U(0, 1)$  ισχύει ότι  $Cov(h(U), h(1 - U)) < 0$  όπου  $Cov(h(U), h(1 - U)) = Cov(h(U_1, \dots, U_m), h(1 - U_1, \dots, 1 - U_m))$ .  $\square$

Πρέπει να τονίσουμε πως επειδή οι συνθήκες είναι ικανές και όχι απαραίτητες μπορεί να υπάρξει ελάττωση της διασποράς χωρίς να ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες.

Υπάρχει τρόπος να πετύχουμε ελάττωση της διασποράς χρησιμοποιώντας μη ομοιόμορφες αντιθετικές μεταβλητές. Ως τώρα εξετάζαμε περιπτώσεις με  $\theta = E[h(U)]$  με  $U$  διάνυσμα ισόνομων και ανεξάρτητων  $U(0, 1)$  τυχαίων μεταβλητών. Συμβαίνει πολλές φορές σε προβλήματα να έχουμε την περίπτωση  $\theta = E[Y]$  όπου  $Y = h(X_1, \dots, X_m)$  και όπου  $(X_1, \dots, X_m)$  είναι ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών. Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής για την προσομοίωση  $X_i$  μπορούμε να ελαφρώσουμε τη μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών.

Προκειμένου να γίνουμε πιο σαφείς θεωρούμε την συνάρτηση κατανομής  $F_i(\cdot)$  των  $X_i$ . Με  $U_i \sim U(0, 1)$  η  $F(U_i)_i^{-1}$  έχει την ίδια κατανομή με τα  $X_i$ . Έτσι καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να παράγουμε ένα δείγμα  $Y$  παράγοντας  $U_1, \dots, U_m$  ισόνομα και ανεξάρτητα  $\sim U(0, 1)$  και θέτουμε  $Z = h(F(U_1)_1^{-1}, \dots, F(U_m)_m^{-1})$ . Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής είναι μη φθίνουσα, έτσι συμπεραί-

νουμε ότι η αντίστροφη της  $F_i^{-1}$  είναι επίσης μη φθίνουσα. Έτσι λοιπόν καταλαβαίνουμε ότι αν η  $h(x_1, \dots, x_m)$  είναι μονότονη συνάρτηση για κάθε ένα από τα ορίσματά της τότε και η  $h(F_1(U_1)^{-1}, \dots, F_m(U_m)^{-1})$  θα είναι επίσης μονότονη για τα ορίσματά της έτσι το θεώρημα ισχύει για αυτή.

**Παράδειγμα 5.5.2.** Οι αντιθετικές μεταβλητές είναι εξαιρετικά χρήσιμες στη μελέτη συστημάτων αναμονής. Σε συνέχεια του παραδείγματος με τον κουρέα θεωρούμε ότι ο κουρέας θέλει να υπολογίσει τον συνολικό χρόνο αναμονής,  $\theta$ , των πρώτων 100 εισερχομένων στο κουρείο. Τότε  $\theta = E[Y]$  με  $Y = \sum_{j=1}^{100} W_j$  με  $W_j$  συμβολίζουμε τον χρόνο αναμονής του  $i$  πελάτη. Περαιτέρω για κάθε πελάτη ορίζουμε τον χρόνο μεσοάφιξης  $I_j$  πιο συγκεκριμένα τον χρόνο μεταξύ των  $(j-1)$  και  $j$  αφίξεων. Ο χρόνος που χρειάζεται ένας πελάτης να εξυπηρετηθεί είναι  $S_j$ . Κατά συνέπεια σε αυτή την περίπτωση το  $Y = h(I_1, \dots, I_{100}, S_1, \dots, S_{100})$  για κάποια συνάρτηση  $h()$ . Πρακτικά για αρκετά συστήματα αναμονής η  $h()$  είναι μια μονότονη συνάρτηση αφού περιμένουμε το  $Y$  να αυξάνεται καθώς οι χρόνοι εξυπηρέτησης αυξάνονται και μειώνεται καθώς οι χρόνοι μεσοάφιξης μειώνονται. Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως η χρήση αντιθετικών μεταβλητών θα είναι προτιμότερη για τον υπολογισμό του  $\theta$ .  $\square$

### 5.5.1 Αντιθετικές Μεταβλητές Κανονικής Κατανομής

Η χρησιμοποίηση της μεθόδου της αντιστροφής μπορεί να αποφευχθεί για την παραγωγή κανονικών αντιθετικών τυχαίων μεταβλητών. Για παράδειγμα αν έχουμε  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  και  $\tilde{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$  με  $\tilde{X} = 2\mu - X$ . Είναι προφανές ότι τα  $X$  και  $\tilde{X}$  είναι αρνητικά συνδεδεμένα. Έτσι αν θεωρήσουμε  $\theta = E[h(X_1, \dots, X_m)]$  όπου  $X_i$  είναι ισόνομα και ανεξάρτητα  $\sim N(\mu, \sigma^2)$  και  $h()$  είναι μονότονη ως προς τα ορίσματά της. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πετύχουμε πάλι ελάττωση της διασποράς αν επιλέξουμε την μέθοδο των αντιθετικών μεταβλητών.

**Παράδειγμα 5.5.3.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα  $\theta = E[X^2]$  με  $X \sim N(2, 1)$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντιθετικές μεταβλητές εκτός από την κλασική μέθοδο, και έπειτα να υπολογίσουμε πόση ήταν η ελάττωση της διασποράς. Ο κώδικας στην  $R$  είναι:

```
#τυπική μέθοδος
n<-1000
U<-2+runif(2*n)
h<-U^2
mean(h)
sd(h)^2
#αντιθετικές μεταβλητές
U<-2+runif(n)
V<-4-U
h<-(U^2+V^2)/2
mean(h)
sd(h)^2
```

Σχήμα 5.6:

Με αποτέλεσμα:

```
> sd(h)^2
[1] 2.10028
> #αντιθετικές μεταβλητές
> U<-2+runif(n)
> V<-4-U
> h<-(U^2+V^2)/2
> mean(h)
[1] 4.34542
> sd(h)^2
[1] 0.08956258
```

Σχήμα 5.7:

Παρατηρούμε ότι δημιουργήθηκε μια ελάττωση διασποράς της τάξης 78% □

### 5.5.2 Monte Carlo Μέθοδος υπό Συνθήκη

Πολλές φορές τυχαίνει να θέλουμε να προσομοιώσουμε τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι εξαρτημένες από μια άλλη τυχαία μεταβλητή. Αυτή η εξάρτηση θα επηρεάσει και την προσομοίωση μας. Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το  $\theta = E[h(X)] = E[Y]$ . Αν ξέρουμε μια άλλη μεταβλητή  $Z$  η οποία μπορεί να είναι εύκολα υπολογίσιμη και το  $V = g(Z) = E[Y|Z]$  να μπορεί να υπολογιστεί με μεγάλη ακρίβεια. Δηλαδή ο στόχος μας είναι να προσεγγίσουμε το  $V$  προσεγγίζοντας το  $Z$  και μετά υπολογίζουμε το  $V$ . Έτσι προκύπτει ο αλγόριθμος υπολογισμού του  $\theta$ .

1. Για  $i = 1$  έως  $n$
2. Παράγω  $Z_i$
3. Υπολογίζω  $g(Z_i) = E[Y|Z_i]$
4. Θέτω  $V_i = g(Z_i)$



5. Τέλος για

6. Θέτω  $\hat{\theta}_{n,cm} = \bar{V}_n = \sum_{i=1}^n V_i/n$

7. Θέτω  $100(1 - \alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης  $= \hat{\theta}_{n,cm} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_{n,cm}}{\sqrt{n}}$

Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε ότι η παραπάνω μέθοδος μπορεί να συνδυαστεί με άλλες μεθόδους ελάττωσης διασποράς όπως μεταβλητές ελέγχου, ή και αντιθετικές μεταβλητές σε περίπτωση που η  $g$  είναι μονότονη.

**Παράδειγμα 5.5.4.** Έστω ότι έχουμε  $U \sim Exp(1)$  και  $Z \sim Exp(1/2)$  και θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = P(U + Z > 4)$ . Θέτουμε  $Y = I_{U+Z>4}$  και  $\theta = E[Y]$ . Τότε η κλασική μέθοδος προσομοίωσης είναι:

1. Παράγω  $U_1, \dots, U_n, Z_1, \dots, Z_n$  όλα ανεξάρτητα

2. Θέτω  $Y_i = I_{U_i+Z_i>4}$  για  $i = 1, \dots, n$

3. Θέτω  $\hat{\theta}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$

4. Προσεγγίζω τα δ.ε.

Μπορούμε επιπλέον να εφαρμόσουμε τη μέθοδο υπό συνθήκη. Θέτουμε  $V = E[Y|Z]$ . Τότε  $E[Y|Z = z] = P(U + Z > 4|Z = z) = P(U > 4 - z) = 1 - F_u(4 - z)$  όπου η  $F_u(\cdot)$  είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της  $U$  η οποία έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1. Έτσι παίρνουμε

$$1 - F_u(4 - z) = \begin{cases} e^{-(4-z)}, & \text{Αν } 0 \leq z \leq 4, \\ 1, & \text{Αν } Z > 4. \end{cases}$$

Οπότε συμπεραίνουμε

$$V = E[Y|Z] = \begin{cases} e^{-(4-z)}, & \text{Αν } 0 \leq z \leq 4, \\ 1, & \text{Αν } Z > 4. \end{cases}$$

Οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο *Monte Carlo* υπό συνθήκη για την εκτίμηση του  $\theta = E[V]$ :

Παράγω  $Z_1, \dots, Z_n$  ανεξάρτητα

2. Θέτω  $V_i = E[Y|Z]$  για  $i = 1, \dots, n$

3. Θέτω  $\hat{\theta}_{n,cm} = \sum_{i=1}^n V_i/n$

4. Υπολογίζω τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τα  $V_i$

Είναι δυνατό να συνδυάσουμε και άλλες μεθόδους ελάττωσης διασποράς όταν υπολογίζουμε το  $\hat{\theta}_{n,cm}$ . □

## 5.6 Δειγματοληψία Σπουδαιότητας

Μέχρι στιγμής στα παραδείγματα που είδαμε θέταμε τη μεταβλητή  $I_j = I_{\{.\}}$  η οποία συμβόλιζε την πραγματοποίηση ενός γεγονότος. Τι θα συνέβαινε αν αυτό το γεγονός συμβαίνει πολύ σπάνια; Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι τότε το

$n$ ; Αυτές τις ερωτήσεις καλείται να απαντήσει η δειγματοληψία σπουδαιότητας. Ένα τέτοιο παράδειγμα ακραίου συμβάντος είναι το ακόλουθο

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το  $\theta = P(X > 15) = E[I_{\{x \geq 15\}}]$  με  $X \sim N(1, 1)$ . Η τυπική μέθοδος *Monte Carlo* θα μας έδινε τον εξής αλγόριθμο 1. Παράγω  $X_1, \dots, X_n$  ισόνομα και ανεξάρτητα  $\sim N(1, 1)$

2. Θέτω  $I_j = I_{\{X_j \geq 15\}}$  για  $i = 1, \dots, n$

3. Θέτω  $\hat{\theta}_n = \sum_{j=1}^n I_j/n$

4. Υπολογίζω τα διαστήματα εμπιστοσύνης

Εδώ το ερώτημα που προκύπτει είναι πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το  $n$  για να αποκτήσουμε μια μη μηδενική τιμή για το  $I$ . Ο αριθμός των δοκιμών θα ήταν τεράστιος και αν δεν κάναμε τόσες δοκιμές θα πρόκυπτε  $\hat{\theta}_n = 0$  και κατά συνέπεια τα διαστήματα εμπιστοσύνης θα ήταν και αυτά μηδενικά. Έτσι η εφαρμογή αυτής της μεθόδου δεν θα είχε ιδιαίτερο νόημα.

Πολλές φορές μας αρκεί να πούμε ότι η εκτιμητήριά μας είναι κοντά στο 0. Αλλά υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες πρέπει να υπολογίσουμε αυτή την πιθανότητα με ακρίβεια. Στη χρηματοοικονομική μηχανική εμφανίζεται η ανάγκη τιμολόγησης παραγώγων που έχουν τιμή άσκησης πολύ μακριά από την τωρινή τιμή. Αυτό σημαίνει ότι το φαινόμενο του να αποδώσει το παράγωγο κέρδος είναι πολύ ακραίο. Όμως χρειαζόμαστε ειδικές μεθόδους για την αποτίμηση τους.

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E_f[h(X)]$  όπου  $f$  είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$ . Έστω  $g$  μια άλλη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με το εξής χαρακτηριστικό  $g(x) \neq 0$  όπου  $f(x) \neq 0$ . Τότε

$$\theta = E_f[h(X)] = \int h(x)f(x)dx = \int h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx = E\left[\frac{h(X)f(X)}{g(X)}\right]$$

Όπου  $E_g[\cdot]$  συμβολίζει τη μέση τιμή ως προς την σ.π.π.  $g$ . Εκεί που θέταμε  $\hat{\theta}_{n, is} = \sum h(X)/n$  τώρα θα υπολογίσουμε το  $\hat{\theta}_{n, is} = \sum_{j=1}^n \frac{h(X_j)f(X_j)}{ng(X_j)}$ . Ονομάζουμε το  $\hat{\theta}_{n, is}$  είναι η εκτιμητήρια δειγματοληψίας σπουδαιότητας του  $\theta$ . Ορίζουμε  $h^*(X) = \frac{h(X)f(X)}{g(X)}$  ώστε  $\theta = E_g[h^*(X)]$ . Η  $f$  και η  $g$  ονομάζονται αρχική και δειγματοληπτική σπουδαιότητας συχνότητες. Ο λόγος  $f/g$  είναι ο λόγος πιθανοφάνειας.

**Παράδειγμα 5.6.1.** Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = P(X \geq 15) = E[I_{\{X \geq 15\}}]$  με  $X \sim N(1, 1)$ . Τότε έχουμε:

$$\theta = E[I_{\{X \geq 15\}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\{X \geq 15\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\{X \geq 15\}} \left( \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\{X \geq 15\}} e^{\mu x + \mu^2/2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx \\
&E_{\mu}[I_{\{X \geq 15\}} e^{x(2-2\mu) + \mu^2 + 1}]
\end{aligned}$$

Το  $e^{x(2-2\mu) + \mu^2 + 1}$  είναι ο λόγος πιθανοφανειών.  $\square$

Αυτό που μας απασχολεί είναι να επιλέξουμε την  $g$  με τρόπο ώστε να επιτευχθεί μια ελάττωση διασποράς. Θυμίζουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E_f[h(X)]$  και έστω  $h(X) \geq 0$ . Με  $g$  μια άλλη συνάρτηση με το ίδιο στήριγμα με την  $f$ . Τότε ισχύει  $\theta = E_f[h(X)] = E_g[h^*(X)]$  με την  $h(X)$  το  $X \sim f$  ενώ με την  $h^*(X)$  το  $X \sim g$ . Από τις βασικές αρχές της στατιστικής συμπερασματολογίας προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
Var_g(h^*(X)) &= \int h^*(x)^2 g(x) dx - \theta^2 \\
&= \int \frac{h^2(X) f(X)}{g(X)} f(X) dx - \theta^2
\end{aligned}$$

Ενώ η διασπορά της εκτιμήτριας ως προς  $f$  είναι  $Var_f(h(X)) = \int h(X)^2 (1 - \frac{f(x)}{g(x)}) f(x) dx - \theta^2$ . Η ελάττωση της διασποράς είναι:

$$Var_f(h(X)) - Var_g(h^*(X)) = \int h(X)^2 \left( 1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right) f(x) dx.$$

Για να έχουμε πραγματικά μείωση της διασποράς πρέπει το παραπάνω ολοκλήρωμα να είναι θετικό. Άρα θέλουμε ο λόγος  $f(X)/g(x) < 1$  όταν το  $f(x)h(x)$  είναι μεγάλο. Έστω  $E$  η περιοχή στην οποία το  $f(x)h(x)$  είναι μεγάλο. Σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα θα επιλέξουμε την  $g$  με τρόπο ώστε  $f(X)/g(X)$  είναι μικρό όταν το  $X \in E$ . Άρα θέλουμε η πυκνότητα της  $g$  να δίνει έμφαση στο  $E$ . Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η  $h$  είναι 0 τις περισσότερες φορές γι' αυτό θα πρέπει να διαλέξουμε την  $g$  με τρόπο ώστε να πάρουμε και δείγματα στα οποία η  $h \neq 0$ .

Είμαστε ελεύθεροι να διαλέξουμε μια  $g$  για την οποία ισχύουν τα εξής:  $g(x) \neq 0$  όπου  $f(x) \neq 0$  και επειδή η  $g$  είναι σ.π.π. πρέπει  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$ . Αν διαλέγαμε την  $g(x) = h(x)f(x)/\theta$  τότε προκύπτει ότι  $Var_g(h^*(x)) = \theta^2 - \theta^2 = 0$  έτσι ο εκτιμητής διασποράς μας έχει μηδενική διασπορά. Έτσι αν δημιουργήσαμε ένα δείγμα με αυτόν τον τρόπο κάθε τιμή του θα ήταν ίση με  $\theta$ . Όμως είναι προφανές ότι αυτό δεν είναι εφικτό καθώς το  $\theta$  είναι η παράμετρος

που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Παρόλα αυτά μπορούμε να προσεγγίσουμε αυτό το σκεπτικό για να επιλέξουμε αποτελεσματικά την  $g$ .

Καταλαβαίνουμε ότι αν η  $g(X)$  είναι ανάλογη του  $h(X)f(X)$  περιμένουμε μεγάλη ελάττωση διασποράς. Δηλαδή μας ενδιαφέρει αν η  $g(X)$  και το  $h(X)f(X)$  παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους στα ίδια σημεία. Όταν ικανοποιείται αυτό το κριτήριο και η μορφή της  $g(X)$  είναι πολύ κοντά στη μορφή του  $h(X)f(X)$  λέμε ότι ικανοποιείται ο κανόνας του μεγίστου.

**Παράδειγμα 5.6.2.** Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E[h(X)] = E[X^4 e^{X^2/4} I_{\{X \geq 2\}}]$  όπου  $X \sim N(0, 1)$ . Τώρα θέλουμε να επιλέξουμε την κατάλληλη  $g$  ώστε να έχει κανονική κατανομή για να είναι ανάλογη του  $h(X)f(X)$ . Θεωρούμε ότι η διασπορά είναι 1 και η μέση τιμή είναι  $\mu$ . Τότε αυτό που ξέρουμε είναι ότι η μέγιστη τιμή της  $g$  είναι στο  $x = \mu$ . Η επιλογή του  $\mu$  θα είναι  $\mu = \arg \max_x h(x)f(x) = \arg \max_{x \geq 2} x^4 e^{-x^2/4} = \sqrt{8}$ . Άρα το  $\theta = E_g[X^4 e^{x^2/4} e^{-\sqrt{8}x+4} I_{\{X \geq 2\}}]$  με  $g() \sim N(\sqrt{8}, 1)$ .  $\square$

**Παράδειγμα 5.6.3.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός ασιατικού παραγώγου. Θεωρούμε ότι η τιμή της υποκείμενης μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση  $Brown S_t \sim GBM(r, \sigma^2)$  όπου  $S_t$  είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή  $t$  με κλίση (*drift*) =  $r$  το επιτόκιο μηδενικού ρίσκου. Η απόδοση των Ασιατικών παραγώγων δίνεται από τον τύπο  $h(S) = \max(0, \frac{\sum_{i=1}^m S_{iT/m} - K}{m})$  όπου  $T$  είναι ο χρόνος εξάσκησης και  $K$  η τιμή εξάσκησης. Παρατηρούμε ότι τα ασιατικά παράγωγα ανήκουν στην κατηγορία των εξωτικών παραγώγων, που η απόδοσή τους εξαρτάται από την μέση τιμή του υποκείμενου προϊόντος κατά τη διάρκεια του χρόνου εξάσκησης.

Η τιμή του παραγώγου δίνεται από τον εξής τύπο:  $C_a = E[e^{-rT} h(S)]$ . Ο τύπος της γεωμετρικής κίνησης ως γνωστόν δίνεται από τον τύπο  $S_{iT/m} = S_0 e^{(r-\sigma^2/2) \frac{iT}{m} + \sigma \sqrt{\frac{T}{m}} (X_1 + \dots + X_i)}$  όπου τα  $X_i$  είναι ισόνομα και ανεξάρτητα  $\sim N(0, 1)$ . Τότε  $C_a = E_f[h(X_1, \dots, X_n)]$  όπου  $f$  είναι η από κοινού σ.π.π. του  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ . Σε περίπτωση που το  $K$  είναι αρκετά μεγαλύτερο από το  $S_0$  ώστε το παράγωγο να είναι *out of the money* ενδείκνυται να χρησιμοποιήσουμε δειγματοληψία σπουδαιότητας για να εκτιμήσουμε το  $C_a$ . Για αυτό το λόγο θα πρέπει να επιλέξουμε  $g$  πολυμεταβλητή φυσική κατανομή με πίνακα συνδιακύμανσης  $I_m$  τον ταυτοτικό και διάνυσμα μέσων  $\mu^*$ . Έτσι μεταβάλλουμε την  $f$  κατά  $\mu^*$ . Με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων μπορούμε να βρούμε το  $\mu^* = \arg \max_x h(x)f(x)$ .  $\square$

Πολλές φορές θα τύχει να έχουμε άπειρες συναρτήσεις  $g$  που να ικανοποιούν τον κανόνα του μεγίστου ή μία αλλά να είναι εξαιρετικά δύσκολη η εκτίμησή της. Μια άλλη τεχνική που μπορούμε να εφαρμόσουμε τότε είναι να χρησιμοποιήσουμε ως  $g$  μια κλιμάκωση της  $f$ .

**Παράδειγμα 5.6.4.** Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = P(X_1^2 + X_2^2 \geq 50) = E[I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}}]$  με  $X_1, X_2$  ισόνομα και ανεξάρτητα. Τότε το  $h(\mathbf{X})f(x) = I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}} \frac{e^{-x_1^2/2}}{2\pi} \frac{e^{-x_2^2/2}}{2\pi} = I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}} \frac{e^{-(x_1+x_2)^2/2}}{2\pi}$ . Αυτό σημαίνει ότι εντός του κύκλου  $X_1^2 + X_2^2 \leq 50$  και σε κάθε σημείο του κύκλου παίρνει τη μέγιστη τιμή. Λόγω αυτού του φαινομένου η επιλογή της  $g$  είναι δύσκολη έως αδύνατη. Υπενθυμίζουμε ότι ο στόχος μας είναι η  $g$  να δίνει βάρος όπου μεγιστοποιείται το γινόμενο  $h(x)f(x)$ . Ένας τρόπος να το πετύχουμε αυτό είναι να κλιμακώσουμε την πυκνότητα του  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη διασπορά στο  $\mathbf{X}$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε ως  $g$  την πολυδιάστατη κανονική κατανομή με διάνυσμα μέσων τιμών το μηδενικό και πίνακα διασποράς  $\Sigma_g = I\sigma^2$ . Με  $\sigma^2 \geq 1$ . Με άλλα λόγια η  $g$  μας δίνει  $X_1, X_2$  ισόνομα και ανεξάρτητα  $\sim N(0, 1)$ . Μπορούμε να βρούμε την τιμή του  $\sigma$  με ευριστικές μεθόδους. Μία επιλογή είναι να διαλέξουμε  $\sigma$  με τρόπο ώστε  $E_g[X_1 + X_2] = 50$ . Τότε θα παίρναμε  $\sigma = 5$ . Με

$$\begin{aligned} \theta &= E_f[h(\mathbf{X})] = E[I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}}] = \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} h(X_1, X_2) f(X_1, X_2) I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} h(X_1, X_2) \frac{f(X_1, X_2)}{g(X_1, X_2)} g(X_1, X_2) I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{x_1} \int_{x_2} \frac{e^{-x_1^2/2}}{2\pi} \frac{e^{-x_2^2/2}}{2\pi} I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}} dx_1 dx_2 = \\ &= \sigma^n \int_{x_1} \int_{x_2} \left( \frac{e^{-x_1^2/2}}{e^{-x_1^2/2\sigma^2}} \frac{e^{-x_2^2/2}}{e^{-x_2^2/2\sigma^2}} \right) I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}} dx_1 dx_2 = \\ E_g[h^*(\mathbf{X})] &= E_g \left[ \sigma^2 \exp \left( -\frac{X_1^2}{2} (1 - 1/\sigma^2) - \frac{X_2^2}{2} (1 - 1/\sigma^2) \right) I_{\{X_1^2 + X_2^2 \geq 50\}} \right]. \end{aligned}$$

□

Ένας άλλος τρόπος για να επιλέξουμε μια  $g$  είναι να χρησιμοποιήσουμε τη ροπογεννήτρια της  $f$  για να πάρουμε μια συνάρτηση που θα έχει παρόμοιο γράφημα με την  $f$  αλλά διαφορετική κλίση. Η συνάρτηση ροπογεννήτριας μιας πυκνότητας  $f$  ορίζεται ως  $M_x(t) = E_f[e^{tX}]$ . Η κατανομή της  $f$  υπό κλίση δίνεται από τον τύπο  $f_t = \frac{e^{tX} f(x)}{M_x(t)}$ . Το  $t \in (-\infty, \infty)$ . Αυτό που προκύπτει από την διαδικασία είναι ότι όταν  $t \geq 0$  το δείγμα μας αποτελείται περισσότερο από μεγαλύτερες τιμές του  $X$ . Σε αντίθετη περίπτωση με  $t \leq 0$  στοχεύουμε πιο πολύ τις τιμές που το  $X$  είναι μικρότερο.

**Παράδειγμα 5.6.5.** Έστω  $X_1, \dots, X_n$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου το  $X_i \sim f_i(\cdot)$ . Θεωρούμε  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  και ο στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε το  $\theta = P(S_n \geq a)$  όπου  $a$  μια προκαθορισμένη σταθερά. Σε περίπτωση που το  $a$  είναι μεγάλο θέλουμε και το  $S_n$  να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο γίνεται κατά συνέπεια μπορούμε να πάρουμε δείγματα των  $X_i$  από τις  $f_{i,t}(\cdot)$  με  $t \geq 0$ . Αυτό θα μας δώσει μεγάλες τιμές στην  $S_n$ . Έτσι υπολογίζουμε

$$\theta = E[I_{\{S_n \geq a\}}] = E_t \left[ I_{\{S_n \geq a\}} \prod_{i=1}^n \frac{f_i(X_i)}{f_{i,t}(X_i)} \right] = E_t \left[ I_{\{S_n \geq a\}} \left( \prod_{i=1}^n M_i(t) \right) e^{-tS_n} \right]$$

Αν θέσουμε

$$M(t) = \prod_{i=1}^n M_i(t)$$

για την εκτιμήτρια  $\hat{\theta}_{i,n}$  ισχύει:

$$\hat{\theta}_{n,i} \leq M(t)e^{-ta}$$

. Με αρχή τη βασική στατιστική συμπερασματολογία όταν μπορούμε να διαλέξουμε ανάμεσα σε παραπάνω από μία εκτιμήτριες θέλουμε πάντα να επιλέξουμε την εκτιμήτρια με την ελάχιστη διασπορά. Άρα εδώ θα επιλέξουμε το  $t$  που ελαχιστοποιεί το φράγμα στην προηγούμενη ανίσωση. Άρα θα θέλαμε να ελαχιστοποιήσουμε το  $M(t)e^{-ta}$ . Αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να βρούμε ισοδύναμα που ελαχιστοποιείται το  $\log(M(t)e^{-ta}) = \log(M(t)) - ta$ . Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η τιμή του  $t$  που ψάχνουμε μας δίνει  $\mu_t = a$  με  $\mu_t = E_t[S_n]$   $\square$

Ένας άλλο πεδίο εφαρμογών της δειγματοληψίας σπουδαιότητας είναι ο υπολογισμός των αναμενόμενων τιμών υπό συνθήκη, και ιδιαίτερα στην περίπτωση που το γεγονός αυτό είναι σπάνιο. Πιο συγκεκριμένα αν θέλουμε να υπολογίσουμε το  $\theta = E[h(X)|X \in A]$  με  $A$  ένα σπάνιο γεγονός και το  $X$  είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.  $f$ . Τότε σύμφωνα με την βασική στατιστική συμπερασματολογία η σ.π.π. της  $f$  δεδομένου ότι το  $X \in A$  είναι:

$$f(X|X \in A) = \frac{f(x)}{P(X \in A)}$$

$$\theta = \frac{E[h(X)I_{\{X \in A\}}]}{E[I_{\{X \in A\}}]}$$

Όμως επειδή το  $A$  είναι ένα σπάνιο γεγονός θα χρησιμοποιήσουμε πυκνότητα  $g$  η οποία το κάνει πιο συχνά εμφανιζόμενο. Έτσι προκύπτει:

$$\theta = \frac{E_g[h(X)I_{\{x \in A\}}f(X)/g(X)]}{E_g[I_{\{X \in A\}}f(X)/g(X)]}$$

Κατά συνέπεια η εκτιμήτρια του  $\theta$  θα είναι η

$$\hat{\theta}_{i,n} = \frac{\sum_{i=1}^n h(X_i) I_{\{X_i \in A\}} f(X_i) / g(X_i)}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i \in A\}} f(X_i) / g(X_i)}$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο εκτιμητής  $\hat{\theta}_{n,i}$  δεν είναι ο μέσος όρος κάποιων ανεξάρτητων και ισόνομων  $X_i$  αλλά ένας λόγος δύο μέσων όρων. Αυτό έχει κάποιες επιπτώσεις στον υπολογισμό των διαστημάτων εμπιστοσύνης τα οποία πρέπει να υπολογιστούν με τεχνικές *bootstrap*.

Μια σημαντική πρόκληση που αντιμετωπίζουμε με την μέθοδο της δειγματοληψίας σπουδαιότητας είναι η σωστή επιλογή της  $g$ . Ακόμα και αν πληρείται ο κανόνας του μεγίστου μπορεί να μην έχουμε ελάττωση διασποράς. Αυτό που θα πρέπει να αποφεύγουμε είναι η επιλογή  $g$  η οποία θα δίνει αρκετά λιγότερο βάρος στις ουρές της κατανομής σχετικά με την  $f$ .

## 5.7 Στρωματοποιημένη Δειγματοληψία

Η στρωματοποιημένη δειγματοληψία, είναι η μέθοδος του να κρατάμε ένα ποσοστό του παραγμένου δείγματος από υποσύνολα του χώρου τιμών. Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $E[Y]$  και έχουμε χωρίσει το σύνολο των δυνατών τιμών της στα στρώματα  $A_1, \dots, A_k$ , τα οποία είναι ζένα μεταξύ τους και ισχύει  $P(Y \in U_i A_i) = 1$ . Κατά συνέπεια ισχύει:  $E[Y] = \sum_{i=1}^K P(Y \in A_i) E[Y|Y \in A_i] = \sum_{i=1}^K p_i E[Y|Y \in A_i]$ . Όπου  $p_i = P(Y \in A_i)$ .

Με την στρωματοποιημένη δειγματοληψία μπορούμε να αποφασίσουμε τι ποσοστό θα προσομοιώσουμε από κάθε στρώμα. Ο πιο απλός τρόπος είναι να προσομοιώσουμε τιμές από το κάθε στρώμα ποσοστιαία ίσο με την πιθανότητα που έχει η  $Y$  να ανήκει στο συγκεκριμένο στρώμα. Δηλαδή αν το συνολικό μας δείγμα έχει  $n$  παρατηρήσεις τότε από το κάθε στρώμα θα πάρουμε  $n_i = np_i$  με  $i = 1, \dots, K$ . Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $E[Y]$  είναι:  $\hat{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j}$ .

Μια άλλη αντιμετώπιση είναι να επιλέξουμε αυθαίρετα το μέγεθος που θα τραβήξουμε από κάθε στρώμα με τον μόνο περιορισμό  $n_1 + \dots + n_K = n$ . Αντί να τηρήσω την αναλογία των  $p_1, \dots, p_k$ . Σε αυτή την περίπτωση η αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $E[Y]$  γίνεται:

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{q_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j}$$

Όπου θέσαμε  $q_i = n_i/n$ . Άρα συνολικά τα θέματα που μας απασχολούν σε αυτή την μέθοδο είναι να διαλέξουμε ποια θα είναι η μεταβλητή  $X$ , τα στρώματα  $A_i$

και το μέγεθος του κάθε στρώματος. Τέλος πρέπει να μπορούμε να παράγουμε δείγματα από την κατανομή των  $(X, Y)$  δεδομένου ότι το  $X \in A_i$ .

**Παράδειγμα 5.7.1.** Ένα αρχικό παράδειγμα που βοηθάει στην κατανόηση της μεθόδου είναι με την χρησιμοποίηση της ομοιόμορφης κατανομής. Έστω ότι δουλεύουμε στο διάστημα  $(0,1)$  και θέλουμε να κάνουμε διαμελισμό του σε  $n$  στρώματα. Με  $A_1 = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ ,  $A_2 = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ , ...,  $A_n = \left(\frac{n-1}{n}, 1\right]$ . Προσομοιώνοντας τιμές από την ομοιόμορφη μας δίνει πιθανότητα  $1/n$  για καθένα από αυτά τα στρώματα. Θέτουμε  $V_i = \frac{i-1}{n} + \frac{U_i}{n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Δεδομένου ότι  $U_i \sim Uniform(0, 1)$  τα  $V_i$  που δημιουργούνται είναι ομοιόμορφα κατανομημένα στα διαστήματα  $(i-1)/n$  και  $i/n$ . Από αυτό προκύπτει ότι τα  $V_i$  αποτελούν ένα στρωματοποιημένο δείγμα της ομοιόμορφης κατανομής.  $\square$

Η γενικότερη στρατηγική που θα ακολουθούμε για την στρωματοποιημένη δειγματοληψία έχει ως ακολούθως. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E[Y]$ , όπου το  $Y$  είναι μια τυχαία μεταβλητή και το  $W$  επίσης για την οποία ισχύουν ότι για κάθε  $\Delta \subseteq R$ , το  $P(W \in \Delta)$  μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Δεύτερον είναι δυνατή η παραγωγή του  $(Y|W \in \Delta)$ . Έστω ότι χωρίζουμε το  $R$  σε  $m$  ξένα μεταξύ τους υποδιαστήματα,  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  ώστε  $p_j = P(W \in \Delta_j) > 0$  και  $\sum_{j=1}^m p_j = 1$ . Αν το  $W$  μπορεί να πάρει την οποιαδήποτε τιμή στο  $R$  τότε το  $\Delta_1$  γίνεται  $[-\infty, a]$  ενώ το  $\Delta_m$   $[b, \infty]$ , για  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Συμβολίζουμε με  $\theta_j = E[Y|W \in \Delta_j]$  και  $\sigma^2 = Var(Y|W \in \Delta_j)$ , και θέτουμε  $I = j$  αν το  $W_j \in \Delta_j$ . Έστω ότι συμβολίζουμε με  $Y^j$  μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή  $(Y|I = i)$ . Τότε έχουμε ότι  $\theta_j = E[Y|I = j] = E[Y^j]$  και  $\sigma_j^2 = Var(Y|I = j) = Var(Y^j)$ . Δηλαδή  $\theta = E[Y] = E[E[Y|I]] = p_1 E[Y|I = 1] + \dots + p_m E[Y|I = m] = p_1 \theta_1 + \dots + p_m \theta_m$ . Έτσι μπορούμε να εκτιμήσουμε το  $\theta$  εκτιμώντας τα  $\theta_i$  και η τελική εκτιμήτρια είναι

$$\hat{\theta}_{st,n} = p_1 \hat{\theta}_{1,n_1} + \dots + p_m \hat{\theta}_{m,n_m}.$$

Από τη στιγμή που το κάθε  $\hat{\theta}_{i,n_i}$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta_i$  τότε και το  $\hat{\theta}_{st,n}$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$ .

Ένα πράγμα που μας ενδιαφέρει είναι κατά πόσο πετυχαίνεται η ελάττωση διασποράς. Έστω ότι έχουμε  $m$  στρώματα ώστε  $n_1 + \dots + n_m = n$ . Πρέπει να αποφασίσουμε το μέγεθος του κάθε δείγματος  $n_i$ . Αυτό θα το επιλέξουμε με τρόπο ώστε να μειώσουμε την διασπορά  $Var(\hat{\theta}_{st,n})$  στο ελάχιστο. Έστω ότι ξεκινάμε από ένα καταμερισμό ο οποίος δεν είναι βέλτιστος,  $n_j = np_j$  με  $j = 1, \dots, m$ . Τότε  $Var(\hat{\theta}_{st,n}) = Var(p_1 \hat{\theta}_{1,n_1} + \dots + p_m \hat{\theta}_{m,n_m}) = p_1^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \dots + p_m^2 \frac{\sigma_m^2}{n_m} = \frac{\sum_{j=1}^m p_j \sigma_j^2}{n}$ .

Από το Κ.Ο.Θ. ξέρουμε ότι ένας τυπικός εκτιμητής έχει διασπορά  $\sigma^2/n$  όπου το  $\sigma^2$  προσεγγίζεται από το  $Var(Y)$ . Άρα αυτό που θέλουμε να



ερευνήσουμε είναι αν  $\sum_{j=1}^n p_j \sigma_j^2 < \sigma^2$ . Από την μαθηματική στατιστική συμπερασματολογία ξέρουμε ότι  $Var(Y) = E[Var(Y|I)] + Var(E[Y|I])$ . Από αυτό προκύπτει ότι  $\sigma^2 = Var(Y) \geq E[Var(Y|I)] = \sum_{j=1}^n p_j \sigma_j^2$ .

Όπως είδαμε πριν  $\theta_{st,n} = p_1 \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^1}{n_1} + \dots + \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^m}{n_m}$  όπου για συγκεκριμένο  $j$  τα  $Y^j$  είναι ισόνομα και ανεξάρτητα  $Y^j$ . Έτσι προκύπτει  $Var(\hat{\theta}_{st,n}) = p_1^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \dots + p_m^2 \frac{\sigma_m^2}{n_m} = \sum_{j=1}^m \frac{p_j^2 \sigma_j^2}{n_j}$ . Έτσι αυτό που χρειάζεται για να λυθεί το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της  $Var(\hat{\theta}_{st,n})$  είναι η ελαχιστοποίηση  $\min_{n_j} \sum_{j=1}^m \frac{p_j^2 \sigma_j^2}{n_j}$  υπό τη συνθήκη  $n_1 + \dots + n_m = n$ . Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστή *Lagrange* η βέλτιστη λύση που προκύπτει δίνεται από τον τύπο  $n_j^* = \left( \frac{p_j \sigma_j}{\sum_{j=1}^m p_j \sigma_j} \right) n$  και η ελάχιστη διασπορά είναι  $Var(\hat{\theta}_{st,n}) = \left( \sum_{j=1}^m p_j \sigma_j \right)^2 / n$ . Παρατηρούμε ότι όσο αφορά τα  $n_j$  είναι ανάλογα των  $p_j$ . Όσο μεγαλύτερο το  $p_j$  τόσο περισσότερες τιμές θα πάρουμε απ' το  $n_j$  στρώμα δηλαδή την περιοχή όπου  $W_j \in \Delta_j$ . Με την ίδια λογική όσο μεγαλύτερο είναι το  $\sigma^2$  θέλουμε πιο πολλές τιμές για τον υπολογισμό του  $\theta_j$ .

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας παραλληλισμός ανάμεσα στη δειγματοληψία σπουδαιότητας και στη στρωματοποιημένη δειγματοληψία. Και οι δύο μέθοδοι χωρίζουν το σύνολο τιμών της ποσότητας που θέλουμε να υπολογίσουμε σε υποσύνολα και δίνουν έμφαση στα πιο σημαντικά για την επίλυση του προβλήματος.

Επίσης υπάρχει έντονη σύνδεση στη φιλοσοφία των μεθόδων της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας και της μεθόδου *Monte Carlo* υπό συνθήκη. Και οι δύο μέθοδοι βασίζονται στην διασπορά υπό συνθήκη για να δημιουργήσουν ελάττωση διασποράς. Η διαφορά τους ωστόσο είναι ότι όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $\theta = E[Y]$  μέσω της προσομοίωσης υπό συνθήκη, παράγουμε πρώτα μια τυχαία μεταβλητή  $W$  και ύστερα υπολογίζουμε το  $E[Y|W]$  αναλυτικά. Ενώ στη στρωματοποιημένη δειγματοληψία παράγουμε την  $W$  αναλυτικά και μετά μέσω της προσομοίωσης παράγουμε την  $Y$  δεδομένης της  $W$ .

Κάποια από τα πλεονεκτήματα της μεθόδου της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας είναι ότι δημιουργεί υπολογίσιμη ελάττωση της διασποράς αν η μεταβλητή διαστρωμάτωσης  $W$  είναι μεγάλο ποσοστό στην διασπορά της  $Y$ . Ενώ υπάρχει το μειονέκτημα ότι δεν έχουμε την ακριβή τιμή του  $\sigma^2$ , άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή βέλτιστη τιμή των  $n_j$ . Όπως και σε προηγούμενες υποθέσεις έτσι και εδώ θα κάνουμε πρώτα κάποιες δοκιμαστικές προσομοιώσεις για να υπολογίσουμε την κατανομή  $n_j = np_j$ . Αυτή η τακτική εξακολουθεί να μας δίνει κάποια υπολογίσιμη ελάττωση διασποράς. Αν πιστεύουμε πως τα  $\sigma_j^2$  δεν θα διαφέρουν δραστηρικά μεταξύ τους τότε η βέλτι-

στη και η μη βέλτιστη διανομή των  $n_j$  δεν διαφέρει. Έτσι το να κάνουμε τις δοκιμαστικές προσομοιώσεις δεν έχει μεγάλη αξία. Όταν θεωρούμε πως είναι απαραίτητο μπορούμε να συνδυάσουμε αυτές τις δύο μεθόδους.

Θεωρούμε ότι έχουμε κάνει ήδη τις δοκιμαστικές προσομοιώσεις ή ότι αποφασίσαμε να τις παραλείψουμε. Άρα έχουμε τα  $n_j$ . Αυτό που μας απασχολεί είναι ο υπολογισμός του  $\hat{\theta}_{n,st}$  και της διασποράς  $\hat{\sigma}_{n,st}^2$ . Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι να μην αποθηκεύουμε όλες τις παραγόμενες τιμές. Θέλουμε να κρατήσουμε μόνο τα  $\sum Y_i^{j^2}$  και  $\sum Y_i^j$  για κάθε  $j$  από τη στιγμή που αυτά μας χρειάζονται για τον υπολογισμό των  $\hat{\theta}_{n,st}$  και  $\hat{\sigma}_{n,st}^2$ . Ο αλγόριθμος προσομοίωσης με στρωματοποίηση για τον υπολογισμό του  $\theta$  είναι:

1. Θέτω  $\hat{\theta}_{n,st} = 0$  και  $\sigma_{n,st}^2 = 0$
2. Για  $i$  Από 1 έως  $m$
3. Θέτω  $sum_j = 0$  και  $sum\_squares_j = 0$
4. Για  $i = 1$  έως  $n_j$
5. Παράγω  $Y_i^j$
6. Θέτω  $\sum_j = sum_j + Y_i^j$
7. Θέτω  $sum\_squares_j = sum\_squares_j + Y_i^{j^2}$
8. Τέλος για
9. Θέτω  $\theta_j = sum_j/n_j$
10. Θέτω  $\hat{\sigma}_j^2 = (sum\_squares_j - sum_j^2/n_j)/(n_j - 1)$
11. Θέτω  $\hat{\theta}_{n,st} = \hat{\theta}_{n,st} + p_j\theta_j$
12. Θέτω  $\hat{\sigma}_{n,st}^2 = \hat{\sigma}_{n,st}^2 + \hat{\sigma}_j^2 p_j^2/n_j$
13. Τέλος για
14. Θέτω  $100(1 - a)\% \text{ δ.ε.} = \hat{\theta}_{n,st} \pm z_{(1-a/2)}\hat{\sigma}_{n,st}$

**Παράδειγμα 5.7.2.** Θέλουμε να κάνουμε αποτίμηση ενός παραγώγου αγοράς ευρωπαϊκού τύπου. Θεωρούμε ότι  $S_t \sim GBM(r, \sigma^2)$  και  $C_0 = E[e^{-rT} \max(0, S_T - K)] = E[Y]$  όπου  $Y = h(X) = e^{-rT} \max(0, S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}X} - K)$  με  $X \sim N(0, 1)$ . Θεωρούμε την  $w$  μεταβλητή στρωματοποίησης. Γι' αυτό το λόγο πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα  $P(W \in \Delta)$ . Με  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  η  $P(W \in \Delta)$  μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:  $P(W \in \Delta) = \Phi(b) - \Phi(a)$ , με  $\Phi(\cdot)$  η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της κανονικής κατανομής.

Το επόμενο βήμα είναι να πράξουμε το  $P(Y \in \Delta)$ . Το  $(h(X)|X \in \Delta)$  μπορεί να παραχθεί παράγοντας το  $\tilde{X} = (X|X \in \Delta)$  και παίρνουμε το  $h(\tilde{X})$ . σε περίπτωση που το  $X \in N(0, 1)$  μπορούμε να το παράγουμε χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αντιστροφής θέτοντας  $X \in \Phi(U)^{-1}$ . Με αυτό τον τρόπο μπορεί να δημιουργηθούν τιμές που δεν βρίσκονται στο  $\Delta = [a, b]$ . Ο τρόπος που μπορούμε να αποφύγουμε αυτό το θέμα είναι να πράξουμε  $\tilde{U} \sim U(\Phi(a) - \Phi(b))$  και μετά θέτουμε  $\tilde{U} \sim U(\Phi(a), \Phi(b))$  και μετά υπολογίζουμε το  $\Phi^{-1}(\tilde{U})$ . Έτσι

λοιπόν παίρνουμε  $\tilde{X}(X|X \in [a, b])$ . Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το  $C_0$  με  $X$  μεταβλητή στρωματοποίησης.  $\square$

**Παράδειγμα 5.7.3.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την απόδοση ενός ασιατικού παραγώγου η οποία δίνεται από τον τύπο  $Y = e^{-rT} \max\left(0, \frac{\sum_{i=1}^m S_{iT/m} - K}{m}\right)$  και η τιμή του δίνεται από το  $C_a = E[Y]$ . Ως συνήθως υποθέτουμε ότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος ακολουθεί γεωμετρική κίνηση *Brown*,  $S_t \sim GBM(r, \sigma^2)$ . Όπου  $S_{iT/m} = S_0 \exp\left((r - \sigma^2/2)\frac{iT}{m} + \sigma\sqrt{\frac{T}{m}}(X_1 + \dots + X_i)\right)$  με  $X_i$  ανεξάρτητα ομοιόμορφα κατανοημένα  $\sim N(0, 1)$ . Έτσι μπορούμε να γράψουμε  $C_a = E[h(X_1, \dots, X_m)]$ . Η συνάρτηση  $h$  δίνεται από τις προηγούμενες εξισώσεις. Έτσι για να εκτιμήσουμε το  $C_a$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τυπικό αλγόριθμο *Monte Carlo* προσομοίωσης ώστε να παράγουμε δείγματα του  $h(X_1, \dots, X_m)$ . Ένας άλλος πιο αποδοτικός τρόπος είναι να θεωρήσουμε  $W = \sum_{j=1}^m X_j$ . Πρώτα θα πρέπει να εξετάσουμε κατά πόσο αυτό είναι δυνατό. Πρέπει να ερευνήσουμε αν είναι εφικτό να υπολογίσουμε το  $P(W \in \Delta)$  και αν μπορούμε να παράγουμε το  $(Y|W \in \Delta)$ .

Για να υπολογίσουμε το  $P(W \in \Delta)$  θα πρέπει να παράγουμε ομοιόμορφα και ανεξάρτητα  $X_1, \dots, X_m \sim N(0, 1)$ . Έτσι παίρνουμε ότι  $W \sim N(0, m)$ . Με  $\Delta = [a, b]$  έχουμε  $P(W \in \Delta) = P(N(0, m) \in \Delta) = P(a \leq N(0, m) \leq b) = P\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \leq N(0, 1) \leq \frac{b}{\sqrt{m}}\right) = \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{m}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{m}}\right)$ . Σε περίπτωση που είχαμε  $\Delta = [b, \infty)$ , τότε  $P(W \in \Delta) = 1 - \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{m}}\right)$  και αν  $\Delta = (-\infty, a]$ , τότε  $P(W \in \Delta) = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{m}}\right)$ .

Για να πράξουμε το  $(Y|W \in \Delta)$  χρειαζόμαστε δύο πράγματα από τη θεωρία της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής. Το ένα είναι ότι όταν προσομοιώνουμε τιμές  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) \sim MVN(0, \Sigma)$  πρέπει να προσομοιώσουμε τιμές της  $Z \sim MVN(0, I_m)$  και να θέσουμε  $\mathbf{X} = C^T Z$  όπου  $C^T C = \Sigma$ . Τον πίνακα  $C$  μπορούμε να τον βρούμε με την αποσύνθεση *Cholesky* του  $Z$ .

Το δεύτερο πράγμα είναι ότι με  $\mathbf{a} = (a_1 a_2 \dots a_m)$  για το οποίο ισχύει  $\|\mathbf{a}\| = 1$  δηλαδή  $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_m^2} = 1$ , και  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m) \sim MVN(0, I_m)$ . Τότε

$$\left\{ (Z_1, \dots, Z_m) \mid \sum_{i=1}^m a_i Z_i = w \right\} \sim MVN(w\mathbf{a}^T, I_m - \mathbf{a}\mathbf{a}^T)$$

Ως εκ τούτου για να παράγουμε  $\{(Z_1, \dots, Z_m) \mid \sum_{i=1}^m a_i Z_i = w\}$  το μόνο που χρειάζεται είναι να παράγουμε διάνυσμα,  $V$  το οποίο ακολουθεί  $\sim MVN(w\mathbf{a}^T, \mathbf{I}_m -$

$\alpha^T \alpha) = w\alpha^T + MVN(0, \mathbf{I}_m - \alpha^T \alpha)$ . Η δημιουργία αυτού του  $V$  είναι πολύ εύκολη επειδή  $(\mathbf{I}_m - \alpha^T \alpha)^T (\mathbf{I}_m - \alpha^T \alpha) = \mathbf{I}_m - \alpha^T \alpha$ . Άρα μπορούμε να θέσουμε  $C = \Sigma$ . Έτσι μπορούμε να αναλύσουμε το θέμα της παραγωγής ( $Y|W \in \Delta$ ).

Από τη στιγμή που  $Y = h(X_1, \dots, X_m)$  μπορούμε να παράγουμε ( $Y|W \in \Delta$ ) αν μπορούμε να παράγουμε  $[(X_1, \dots, X_m) | \sum_{i=1}^m X_i \in \Delta]$ . Για να πετύχουμε αυτό υποθέτουμε ότι  $\Delta = [a, b]$ . Έτσι παίρνουμε

$$\left[ (X_1, \dots, X_m) \mid \sum_{i=1}^m X_i \in [a, b] \right] = \left[ (X_1, \dots, X_m) \mid \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m X_i \in \left[ \frac{a}{\sqrt{m}}, \frac{b}{\sqrt{m}} \right] \right]$$

Τώρα η παραγωγή των  $[(X_1, \dots, X_m) | \sum_{i=1}^m X_i \in \Delta]$  εναπόκειται σε δύο στάδια:

Πρώτον να παράγουμε  $\left[ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m X_i \mid \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m X_i = w \right]$ . Αυτό καθίσταται εφικτό από τη στιγμή που  $\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m X_i \sim N(0, 1)$  το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να παράγουμε  $\left( N(0, 1) \mid N(0, 1) \in \left[ \frac{a}{\sqrt{m}}, \frac{b}{\sqrt{m}} \right] \right)$ . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την μέθοδο του παραδείγματος 5.7.2.  $\square$

**Παράδειγμα 5.7.4.** Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο τύπου *Barrier*, του οποίου η απόδοση δίνεται από τον τύπο

$$h(X) = \begin{cases} \max(0, S_T - K_1) & \text{Αν } S_{T/2} \leq L \\ \max(0, S_T - K_2) & \text{Αλλιώς} \end{cases}$$

Με  $X = (S_{T/2}, S_T)$ . Η τιμή του παραγώγου δίνεται από τον τύπο  $C_0 = E[e^{-rT} (\max(0, S_T - K_1) I_{\{S_{T/2} \leq L\}} + \max(0, S_T - K_2) I_{\{S_{T/2} > L\}})]$ . Θεωρούμε ότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος ακολουθεί γεωμετρική κίνηση *Brown*  $S_T \sim GBM(r, \sigma^2)$ . Χρησιμοποιώντας την μέθοδο *Monte Carlo* υπο συνθήκη υπολογίζουμε το  $C_0 = E[Y]$  όπου  $Y = e^{-rT/2} c(S_{T/2}, T/2, K_1, r, \sigma) I_{\{S_{T/2} \leq L\}}$ . Το  $c$  είναι η τιμή του ευρωπαϊκού παραγώγου,  $K$  είναι η τιμή ασκήσεως,  $r$  είναι το επιτόκιο,  $\sigma$  είναι η μεταβλητότητα,  $t$  ο χρόνος ωρίμανσης  $x$  η αρχική τιμή της μετοχής.  $\square$



## Κεφάλαιο 6

# Υπολογισμός Ευαισθησιών Παραγώγων

Μέχρι στιγμής αυτό που έχουμε εξετάσει είναι ο υπολογισμός μέσω των τιμών χρησιμοποιώντας μεθόδους προσομοίωσης. Αυτή η τιμή ανταποκρίνεται στην αξία ενός παραγώγου. Αυτό μας είναι χρήσιμο σε περίπτωση που θέλουμε να κάνουμε αγοραπωλησίες για να βρούμε αν οι τιμές που υπάρχουν στην αγορά είναι δίκαιες. Ένα άλλο πράγμα που πρέπει να υπολογίσουμε το οποίο δεν είναι διαθέσιμο στην αγορά είναι πως μεταβάλλονται αυτές οι τιμές σε σχέση με διάφορες δυνατές μεταβολές στην αγορά όπως για παράδειγμα η τιμή του υποκείμενου προϊόντος. Αυτά τα μεγέθη είναι πολύ χρήσιμα γιατί μας δίνουν αίσθηση για το ρίσκο που αναλαμβάνουμε.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε δύο μεθόδους οι οποίες παράγουν αμερόληπτες εκτιμήσεις για τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν. Η πρώτη είναι η μέθοδος του μονοπατιού η οποία διαφοροποιεί την διαδικασία προσομοίωσης ως προς την παράμετρο της οποίας εξετάζουμε την ευαισθησία. Η δεύτερη μέθοδος που θα εξετασθεί είναι η μέθοδος του λόγου των πιθανοφανειών. Αυτή η μέθοδος εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παρά το αποτέλεσμα της μεθόδου προσομοίωσης.

Έστω ότι έχουμε ένα μοντέλο το αποτίμησης παραγώγων. Η παράμετρος  $\theta$  του μοντέλου είναι η αρχική τιμή του υποκείμενου προϊόντος. Το  $a(\theta)$  είναι η τιμή του παραγώγου και  $Y(\theta)$  είναι η απόδοση του παραγώγου. Τότε το  $a'(\theta)$  ονομάζεται το δέλτα του παραγώγου. Το  $a''(\theta)$  ονομάζεται γάμμα του παραγώγου. Σε περίπτωση που το  $\theta$  είναι η μεταβλητότητα το  $a'(\theta)$  καλείται βέγκα του παραγώγου.

## 6.1 Η Μέθοδος του Μονοπατιού

Σύμφωνα με την μέθοδο του μονοπατιού θέλουμε να υπολογίσουμε το  $a(\theta) = E[Y(\theta)]$  με  $Y'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta+h) - Y(\theta)}{h}$ . Καλούμε το  $Y'$  παράγωγο μονοπατιού του  $\theta$ .

**Παράδειγμα 6.1.1.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το δέλτα στο μοντέλο του *Black Scholes*. Έχουμε  $Y = e^{-rT}[S(T) - K]^+$  όπου  $S(T) = S(0)e^{(r-1/2\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}$  με  $Z \sim N(0, 1)$ . Θεωρούμε ότι το  $S(0) = \theta$ . Με  $r, \sigma, T, K$  θετικές σταθερές. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε  $\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{dS(0)}$ . Για την παραγωγή της  $Y$  ισχύει:  $\frac{d}{dx} \max(0, x - K) = 0$  για  $x < K$  και 1 για  $x > K$ . Άρα η παράγωγος του  $Y$   $\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT} \mathbf{1}\{S(T) > K\}$ . Από την εξίσωση του  $S(T)$  παρατηρούμε ότι το  $S(T)$  είναι γραμμικό ως προς  $S(0)$  με  $dS(T)/dS(0) = S(T)/S(0)$ . Άρα από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε  $\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT} \frac{S(T)}{S(0)} \mathbf{1}\{S(T) > K\}$ , Αυτό μπορεί να υπολογιστεί με την προσομοίωση του  $S(T)$  και παίρνουμε έτσι το δέλτα του *Black Scholes*. Για να υπολογίσουμε το βέγμα του *Black Scholes* κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή στον προηγούμενο κανόνα της αλυσίδας:  $\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{d\sigma}$ . Από τις προηγούμενες εξισώσεις παίρνουμε  $\frac{dY}{d\sigma} = e^{-rT} (-\sigma T + \sqrt{T}Z) S(T) \mathbf{1}\{S(T) > K\} \Rightarrow \frac{dY}{d\sigma} = e^{-rT} \left( \frac{\log(S(T)/S(0)) - (r + \frac{1}{2})}{\sigma} \right) S(T) \mathbf{1}\{S(T) > K\}$ .  $\square$

**Παράδειγμα 6.1.2.** Έστω ότι έχουμε παράγωγο ασιατικού τύπου του οποίου η απόδοση είναι εξαρτώμενη από την πορεία του υποκείμενου προϊόντος. Το υποκείμενο προϊόν ακολουθεί γεωμετρική κίνηση *Brown*. Έστω ότι έχουμε:  $Y = e^{-rT}[\bar{S} - K]^+$ ,  $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i)$ , για κάποιες προκαθορισμένες χρονικές στιγμές  $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$ . Τότε με βάση τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{dS(0)} = e^{-rT} \mathbf{1}\{\bar{S} > K\} \frac{d\bar{S}}{dS(0)}.$$

Όπου  $\frac{d\bar{S}}{dS(0)}$  είναι

$$\frac{d\bar{S}}{dS(0)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{dS(t_i)}{dS(0)} = \frac{\bar{S}}{S(0)}$$

Έτσι ο εκτιμητής μονοπατιού του δέλτα του παραγώγου είναι:

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT} \mathbf{1}\{S(T) > K\} \frac{\bar{S}}{S(0)}$$

$\square$

**Παράδειγμα 6.1.3.** Έστω ότι μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της ευαισθησίας του βέγγκα σε ένα ασιατικό παράγωγο. Έστω

$$S(t_i) = S(t_{i-1})e^{(r-1/2\sigma^2)[t_i-t_{i-1}] + \sigma\sqrt{t_i-t_{i-1}}Z_i}, i = 1, \dots, m$$

Με  $Z_1, \dots, Z_m$  ισόνομες και ανεξάρτητες μεταβλητές  $\sim N(0, 1)$ . Παραγωγίζοντας ως προς  $\sigma$  παίρνουμε έναν αναδρομικό τύπο:

$$\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = \frac{dS(t_{i-1})}{d\sigma} \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} + S(t_i)[- \sigma(t_i - t_{i-1})Z_i].$$

Αν θεωρήσουμε ότι αρχικά δεν υπάρχει ρυθμός μεταβολής ως προς τη μεταβλητότητα  $dS(0)/d\sigma = 0$  παίρνουμε:

$$\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = S(t_i)[- \sigma t_i + \sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}}Z_j] \Rightarrow$$

$$\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = S(t_i)[\log(S(t_i)/S(0)) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t_i]/\sigma$$

Έτσι καταλήγουμε ότι ο εκτιμητής του βέγγκα του ασιατικού παραγώγου είναι

$$e^{-rT} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{dS(t_i)}{d\sigma} \mathbf{1}\{\bar{S} > K\}.$$

□

**Παράδειγμα 6.1.4.** Έστω ότι έχουμε τα υποκείμενα προϊόντα  $S_1, \dots, S_d$  τα οποία ως συνήθως ακολουθούν  $\sim GBM(r, \Sigma)$  κατά τρόπο ώστε

$$S_i(t) = S_i(0)e^{(r-1/2\sigma_i^2)t + \sqrt{t}X_i}, i = 1, \dots, d,$$

με  $X_i \sim N(0, \Sigma)$ . Συμπεραίνουμε ότι όπως και στη μονομεταβλητή εξίσωση εδώ έχουμε  $dS_i(T)/dS_i(0) = S_i(T)/S_i(0)$  και ακόμα  $\frac{dS_i(T)}{dS_j(T)} = 0$  για  $i \neq j$ . Έστω ότι έχουμε ένα παράγωγο τύπου *spread*. Αυτά τα παράγωγα αποδίδουν αναλόγως της διαφοράς της τιμής δύο ή περισσότερων υποκείμενων προϊόντων. Η απόδοση δίνεται από τον τύπο:

$$Y = e^{-rT}[(S_2(T) - S_1(T)) - K]^+$$

Για κάθε μία από τις αποδόσεις των υποκείμενων προϊόντων έχουμε δέλτα:

$$\frac{\partial Y}{\partial S_2(0)} = e^{-rT} \frac{S_2(T)}{S_2(0)} \mathbf{1}\{S_2(T) - S_1(T) > K\}$$



Και για ως προς το  $S_1$  αντίστοιχα:

$$\frac{\partial Y}{\partial S_1(0)} = e^{-rT} \frac{S_1(T)}{S_1(0)} \mathbf{1}\{S_2(T) - S_1(T) > K\}$$

Έτσι και για  $d$  υποκείμενα προϊόντα η απόδοση δίνεται από τον τύπο:

$$Y = e^{-rT} [\max\{S_1(T), \dots, S_d(T) - K\}]$$

Και τα δέλτα της απόδοσης ως προς κάθε υποκείμενο προϊόν  $S_i$  γενικεύοντας δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\partial Y}{\partial S_i(T)} = e^{-rT} \frac{S_i(T)}{S_i(0)} \mathbf{1}\{S_i(T) > \max_{j \neq i} S_j(T), S_i(T) > K\}$$

□

## 6.2 Η Μέθοδος του Λόγου των Πιθανοφαινειών

Η μέθοδος του μονοπατιού που εξετάσαμε πριν έχει το μειονέκτημα ότι χρειάζεται να υπάρχει συνεχής συνάρτηση αποδόσεων ως προς τις τιμές των υποκείμενων προϊόντων. Η μέθοδος του λόγου των πιθανοφαινειών αντίθετα δεν απαιτεί αυτή τη συνέχεια γιατί παραγοντοποιεί πιθανότητες και όχι αποδόσεις.

Κατά τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας θεωρούμε ότι η απόδοση του παραγώγου δίνεται από τον τύπο

$$E_\theta[Y] = E_\theta[f(X_1, \dots, X_m)] = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) g_\theta(x) dx$$

Όπου  $Y$  είναι η απόδοση εκφρασμένη μέσα από μια συνάρτηση  $f(\mathbf{X})$ . Επίσης θεωρούμε ότι η πυκνότητα του  $\mathbf{X}$  είναι η  $g$  και ότι το  $\theta$  είναι μια παράμετρος της πιθανότητας, έτσι γράφουμε  $E_\theta$  για να δηλώσουμε ότι η μέση τιμή υπολογίζεται ως προς  $g_\theta$ . Παραγωγίζοντας τον παραπάνω τύπο ως προς  $\theta$  παίρνουμε

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[Y] = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \frac{d}{d\theta} g_\theta(x) dx \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με  $g_\theta$  παίρνουμε:

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[Y] = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \frac{\dot{g}_\theta(X)}{g_\theta(X)} g_\theta(x) dx = E_\theta \left[ f(X) \frac{\dot{g}_\theta(X)}{g_\theta(X)} \right]$$

Όπου το  $\dot{g}_\theta = dg_\theta/d\theta$ . Άρα καταλαβαίνουμε ότι η

$$f(x) \frac{\dot{g}_\theta(X)}{g_\theta(X)}$$

Είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραγώγου  $E_\theta[Y]$ . Τα ζητήματα που πρέπει να τονίσουμε σε αυτό το σημείο:

Αρχικά η παραδοχή ότι οι συναρτήσεις πυκνότητας είναι συνεχείς ως προς τις παραμέτρους δικαιολογεί τη σχέση (1). Έπειτα ο συμβολισμός  $\dot{g}_\theta/g_\theta$  καλείται και βαθμός συνάρτησης. Η τυχαία μεταβλητή  $\dot{g}_\theta(X)/g_\theta(X)$  είναι ο βαθμός.

**Παράδειγμα 6.2.1.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το δέλτα ενός ευρωπαϊκού παραγώγου αγοράς με τη μέθοδο του λόγου των πιθανοφανειών. Σε αυτή την περίπτωση θα θεωρήσουμε το  $S(0)$  σαν μια παράμετρο της πυκνότητας του  $S(T)$ . Γράφουμε  $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$  αν η τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί την κατανομή  $\exp(\mu, \sigma^2)$  με  $Z \sim N(0, 1)$ . Αυτή η κατανομή δίνεται

$$P(Y \leq y) = P(Z \leq [\log(y) - \mu]/\sigma) = \Phi\left(\frac{\log(y) - \mu}{\sigma}\right)$$

και η πυκνότητά του δίνεται από  $\frac{1}{y\sigma} \Phi\left(\frac{\log(y)-\mu}{\sigma}\right)$ . Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις και θεωρώντας ότι το  $S(0)$  ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή τότε η πυκνότητα του δίνεται από τις σχέσεις

$$g(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} \Phi(\zeta(x)), \quad \zeta(x) = \frac{\log(x/S(0)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{dg(x)/dS(0)}{g(x)} = -\zeta(x) \frac{d\zeta(x)}{dS(0)} = \frac{\log(x/S(0)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{S(0)\sigma^2 T}$$

Έτσι λοιπόν για να πάρουμε το βαθμό της συνάρτησης  $g$  πρέπει να μάθουμε την τιμή της προηγούμενης παράστασης στο  $S(T)$ . Έτσι η αμερόληπτη εκτιμήτρια του δέλτα είναι ο πολλαπλασιασμός της προηγούμενης παράστασης με την συνάρτηση απόδοσης του ευρωπαϊκού παραγώγου  $f$ :

$$e^{-rT}(S(T) - K)^+ = \frac{\log(x/S(0)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{S(0)\sigma^2 T}$$

Το  $S(T)$  μπορούμε να το υπολογίσουμε από το μοντέλο του *Black Scholes* ως  $S(T) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z}$ ,  $Z \sim N(0, 1)$ . Τότε η εκτιμήτρια γίνεται:

$$e^{-rT}(S(T) - K)^+ \frac{Z}{S(0)\sigma\sqrt{T}}$$

Έτσι λοιπόν ο αλγόριθμος υπολογισμού του δέλτα για ένα ευρωπαϊκού τύπου παραγώγου είναι:

1. Παράγω  $n$  ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $\sim N(0, 1)$
2. Θέτω  $Y_i = S_0 e^{(\sigma\sqrt{T}Z_i) + (r - \sigma^2/2)T}$  και  $X_i = (Y_i - K)^+ \frac{Z_i}{S_0\sigma\sqrt{T}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
3. Εκτιμώ  $\frac{dE(Y)}{dS_0} \approx e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  □

**Παράδειγμα 6.2.2.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το δέλτα ενός παραγώγου που είναι εξαρτώμενο από το μονοπάτι της τιμής του υποκείμενου προϊόντος όπως τα ασιατικά παράγωγα. Η εξίσωση  $\frac{dE(Y)}{dS_0} = e^{-rT} E[(S(T) - K)^+ \frac{Z}{S_0\sigma\sqrt{T}}]$  ισχύει για πολλούς τύπους παραγώγων των οποίων η απόδοση δίνεται από συναρτήσεις της μορφής  $h(S(T))$ . Με  $h(S(T)) = I\{S(T) > K\}$ . Το δέλτα τέτοιων παραγώγων δίνεται από την μορφή:

$$\frac{dE(Y)}{dS_0} = e^{-rT} \int_0^\infty h(x) \frac{f(x)}{f(x)} f(x) dx = e^{-rT} E \left[ h(S(T)) \frac{Z}{S_0\sigma\sqrt{T}} \right]$$

Υπενθυμίζουμε ότι για τα ασιατικά παράγωγα έχουμε  $0 < t_1 < t_2 \dots < t_k = T$  και η απόδοση δίνεται από  $(\bar{S} - K)^+$ . Με

$$\bar{S} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S(t_i).$$

Και συνάρτηση  $h(\mathbf{X}) = h(x_1, \dots, x_k) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i - K\right)^+$  δηλαδή  $h(S(t_1), \dots, S(t_k)) = (\bar{S} - K)^+$ . Έτσι παίρνουμε το δέλτα από:

$$\frac{dE(Y)}{dS_0} = e^{-rT} \int_0^\infty h(X) \frac{f(X)}{f(X)} f(X) dX$$

Όπου η  $f$  είναι η από κοινού κατανομή των  $(S(t_1), \dots, S(t_k))$ . Με  $Z_i \sim N(0, 1)$  ισόνομες και ανεξάρτητες μπορούμε αναδρομικά να κατασκευάσουμε:

$$S(t_1) = S_0 e^{\sigma\sqrt{t_1}Z_1 + (r - \sigma^2/2)t_1}$$

$$S(t_2) = S(t_1) e^{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}Z_k + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_{k-1})}$$

...

...

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) e^{\sigma\sqrt{t_k - t_{k-1}}Z_k + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)}$$

Από τη στιγμή που έχουμε ανεξαρτησία των  $S(t_i)$  η από κοινού σ.π.π. είναι το γινόμενο όλων των λογαριθμοκανονικών κατανομών.

$$f(X) = f_1(x_1|S_0) f_2(x_2|x_1) \dots f_k(x_k|x_{k-1})$$

Έτσι προκύπτει ότι  $f_i(x_i|x_{i-1})$  είναι η πυκνότητα υπό συνθήκη του  $S(t_i)$  δεδομένου ότι  $S(t_{k-1}) = x_{k-1}$  με  $f_i(x_i|x_{i-1}) = x_{i-1} e^{\sigma\sqrt{t_k - t_{i-1}}Z_i + (r - \sigma^2/2)(t_i - t_{i-1})}$

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\dot{f}(x)}{f(x)} = \frac{\dot{f}_1(x_1|S_0)f_2(x_2|x_1)\dots f(x_k|x_{k-1})}{f(x)} = \frac{\dot{f}_1(x_1|S_0)}{f_1(x_1|S_0)}$$

Και επειδή ξέρουμε ότι

$$\frac{\dot{f}(S(T))}{f(S(T))} = \frac{z}{s_0\sigma\sqrt{T}}$$

Άρα

$$\frac{\dot{f}(S(t_1), \dots, S(t_k))}{f(S(t_1), \dots, S(t_k))} = \frac{Z_1}{S_0\sigma\sqrt{t_1}}$$

Τελικά λόγω του ότι ισχύει:

$$\frac{dE(Y)}{dS_0} = e^{-rT} \int_0^\infty h(X) \frac{\dot{f}(X)}{f(X)} f(X) dX$$

Το δέλτα δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dE(Y)}{dS_0} = e^{-rT} E\left(\left(\bar{S} - K\right)^+ \frac{Z_1}{S_0\sigma\sqrt{t_1}}\right)$$

Έτσι ο αλγόριθμος που προκύπτει για τον υπολογισμό του δέλτα ( $\frac{dE(Y)}{dS_0}$ ) ενός ασιατικού παραγώγου είναι:

1. Για  $j = 1, \dots, n$  :

2. Παράγω  $k$  ισόνομα και ανεξάρτητα  $Z_i \sim N(0, 1)$

3. Θέτω  $X_j = (\bar{S} - K)^+ \frac{Z_1}{S_0\sigma\sqrt{t_1}}$

4. Τέλος για

5. Εκτιμώ την ποσότητα  $\frac{dE(Y)}{dS_0} \approx e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  □

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το βέγκα ενός παραγώγου. Ισχύει  $\dot{f}(x) = \frac{df(x)}{d\sigma}$ , όπου  $f(x)$  είναι η πυκνότητα της τιμής του υποκείμενου προϊόντος  $S(T)$ . Τότε για ένα παράγωγο με απόδοση  $h(S(T))$  υπολογίζουμε:

$$\frac{dE(Y)}{d\sigma} = e^{-rT} \int_0^\infty h(x) \frac{\dot{f}(x)}{f(x)} f(x) dx = e^{-rT} E\left[h(S(T)) \frac{\dot{f}(S(T))}{f(S(T))}\right].$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{\dot{f}(S(T))}{f(S(T))} = \frac{Z^2 - 1}{\sigma} - Z\sqrt{T}, \quad Z \sim N(0, 1)$$

Τότε για την εκτίμηση του βέγκα ασιατικού παραγώγου με απόδοση  $(\bar{S} - K)^+$  υπολογίζουμε:  $\frac{\dot{f}((S(t_1), \dots, S(t_k)))}{f((S(t_1), \dots, S(t_k)))} = \sum_{i=1}^k \frac{Z_i^2 - 1}{\sigma} - Z\sqrt{t_i - t_{i-1}}$

### 6.2.1 Γάμμα

Η μέθοδος του μονοπατιού σε αντίθεση με τη μέθοδο του λόγου των πιθανοφανειών δεν είναι σε θέση να υπολογίσει το γάμμα ενός παραγώγου. Κατά τη μέθοδο του λόγου των πιθανοφανειών ακολουθούμε την ίδια μέθοδο για να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο του  $E_\theta[f(X)]/d\theta^2$  χρησιμοποιώντας την αμερόληπτη εκτιμήτρια της:

$$f(X) \frac{\ddot{g}_\theta(X)}{g_\theta(X)}$$

Για να υπολογίσουμε το γάμμα παίρνοντας το μοντέλο του *Black Scholes* βρίσκουμε:

$$\frac{d^2 g(S(T))/dS^2(0)}{g(S(T))} = \frac{\zeta(S(T))^2 - 1}{S(0)^2 \sigma^2 T} - \frac{\zeta(S(T))}{S(0)^2 \sigma \sqrt{T}} \quad (1)$$

Για να πάρουμε λοιπόν την αμερόληπτη εκτιμήτρια του γάμμα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω ποσότητα με την απόδοση  $e^{-rT}(S(T) - K)^+$ . Δεδομένου ότι  $S(T) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}$  μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην (1) το  $\zeta(S(T))$  με την τυπική κανονική κατανομή  $Z$

## Κεφάλαιο 7

### Μετάφραση Ορολογίας

Μέθοδος Αντιστροφής = *Inverse Transform Method*

Μέθοδος Αποδοχής Απόρριψης = *Acceptance – Rejection Method*

Μονομεταβλητή Κανονική = *Uni variate Normal*

Μη Ομογενής Διαδικασία = *Non Homogeneous Process*

Κίνηση *Brown* με Τάση = *Brownian Motion with Drift*

Αποτίμηση Χρεογράφων = *Securities Pricing*

Ανάλυση Εξόδου = *Output analysis*

Έλεγχος Διάρκειας Τρεξίματος = *Run Length Control*

Η Διαδικασία των δύο Σταδίων = *The Two Stages Procedure*

Μεταβλητή Ελέγχου = *Control Variate*

Δειγματοληψία Σπουδαιότητας = *Importance Sampling*

Στρωματοποιημένη Δειγματοληψία = *Stratified Sampling*

Μέθοδος του Μονοπατιού = *Path – wise Method*

Μέθοδος του λόγου των Πιθανοφανειών = *Likelihood Ratio Method*



# Βιβλιογραφία

- [1] *Glasserman P, (2003) Monte Carlo Methods in Financial Engineering, New York, Springer.*
- [2] *Sheldon M.Ross, (2012) Simulation, Fifth Edition, Academic Press.*
- [3] *Brandimarte P, (2002) Numerical Methods in Finance and Economics : a Matlab – Based Introduction, Wiley.*
- [4] *Shaw W. (1998) Modeling Financial Derivatives with Mathematica, Cambridge University Press.*
- [5] *Shreve S., (2003) Stochastic Calculus for Finance 1, Pittsburgh, Springer.*
- [6] *Jaekel P., (2002) Monte Carlo Methods in Finance, Wiley*
- [7] *Achdou Y, Pironneau O., (2005) Computational Methods for Option Pricing, Frontiers in Applied Mathematics.*
- [8] *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, (2007) Numerical Recipes in C++ : the Art of Scientific Computing, 3rd edition, Cambridge University Press.*
- [9] *Hull J. (2000) Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall*
- [10] *Bayer C., (2010) Computational Finance.*
- [11] Πολυράκης Ι. (2010) Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία, Αθήνα
- [12] Κοκολάκης Γ., Φουσκάκης Δ. (2009) Στατιστική Θεωρία & Εφαρμογές, Αθήνα, Εκδόσεις Συμεών
- [13] Γιαννακόπουλος Α.Ν. (2004) Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική Τόμος 2.