



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής
Διπλωματική Εργασία

ΔΕΣΜΙΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΚΟΤΕΙΝΗΣ ΥΛΗΣ

Δέσποινα Φαράκου

09115065

Επιβλέπων: Καθ. Χριστόφορος Κούβαρης

Αθήνα
Οκτώβρης 2020

*Ευχαριστώ τον καθηγητή Χριστόφορο Κούβαρη,
για την συνεχή βοήθεια σε όλη την διάρκεια της χρονιάς.
Ευχαριστώ ακόμα την οικογένεια και τους φίλους μου,
για την στήριξή τους όλες τις στιγμές που την χρειαζόμουν.*

Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή :

Χ. Κούβαρης
Καθηγητής (ΣΕΜΦΕ)

Α. Κεχαγιάς
Καθηγητής (ΣΕΜΦΕ)

Γ. Κουτσούμπας
Καθηγητής (ΣΕΜΦΕ)

Περίληψη

Ο στόχος αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι πρώτον να αναλύσει την διαδικασία δημιουργίας δέσμιων καταστάσεων σκοτεινής ύλης και δεύτερον να εξετάσει τις κοσμολογικές επιπτώσεις που θα είχε η δημιουργία αλλά και η διάσπαση αυτών των δέσμιων καταστάσεων.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι μία εισαγωγή στην σκοτεινή ύλη, το πρώτο μέρος επανεξετάζει τα αποδεικτικά στοιχεία που οδηγούν στην ύπαρξη της σκοτεινής ύλης, ενώ το δεύτερο μέρος παρουσιάζει τους τρόπους ανίχνευσής της.

Το δεύτερο κεφάλαιο χωρίζεται σε δύο μέρη, αρχικά παρουσιάζει περιληπτικά τις βασικές κοσμολογικές αρχές και έπειτα την εξέλιξη του σύμπαντος.

Το τρίτο κεφάλαιο επικεντρώνεται στην σκοτεινή ύλη, συγκεκριμένα στο freeze-out και την εξέλιξη της αφθονίας των σωματιδίων (θερμή και κρύα σκοτεινή ύλη).

Το τέταρτο κεφάλαιο εξετάζει την διαδικασία δημιουργίας δέσμιων καταστάσεων σκοτεινής ύλης και ερευνά τις κοσμολογικές επιπτώσεις της διάσπασης των δέσμιων καταστάσεων σε μερικές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις.

Το πέμπτο κεφάλαιο έχει σκοπό την εύρεση μίας πιθανής λύσης στο πρόβλημα της σταθεράς του Hubble. Το κεφάλαιο ερευνά το ενδεχόμενο το 5% και το 10% της σκοτεινής ύλης να βρισκόταν σε μορφή δέσμιων καταστάσεων και να διασπάρτηκαν λίγα χρόνια μετά την επανασύνδεση. Για να γίνει αυτό θεωρείται ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο συν-υπάρχοντα είδη σκοτεινής ύλης στο σύμπαν μας.

Το έκτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τον επίλογο.

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to firstly analyse bound state formation of dark matter and secondly examine the cosmological effects of the formation and the decay of the bound states.

Chapter 1 is an introduction to dark matter, the first part reviews the evidence of the existence of dark matter while the second part describes the ways of detecting it.

Chapter 2 is subdivided into two parts, the first one is aimed to summarise the main cosmological principles, and the second one is a brief review of the evolution of the universe.

Chapter 3 focuses on dark matter, specifically on the freeze-out and the evolution of the abundance of dark matter particles (hot and cold relics).

Chapter 4 examines the bound state formation of dark matter and it investigates the cosmological effects of the decay of the bound state in some interesting cases.

Chapter 5 is aimed to find a possible solution of the Hubble constant problem. It investigates the cases in which 5% and 10% of the DM in our universe was in the form of bound states and decayed some years after the recombination. In order for this to happen we have to consider at least two co-existing types of DM in our universe.

Conclusions are drawn in Chapter 6.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	7
1 Εισαγωγή	9
1.1 Σκοτεινή Ύλη στους γαλαξίες	9
1.2 Σκοτεινή Ύλη σε συμπλέγματα γαλαξιών	11
1.2.1 Κίνηση των γαλαξιών	11
1.2.2 Ακτίνες-X	11
1.2.3 Gravitational lensing	12
1.2.4 Bullet Cluster	13
1.3 Cosmic Microwave Background	14
1.4 Ανίχνευση Σκοτεινής Ύλης	16
1.4.1 Άμεση Ανίχνευση	16
1.4.2 Έμμεση Ανίχνευση	17
1.4.3 Colliders	18
2 Εισαγωγή στην Κοσμολογία	21
2.1 Standard Cosmology	21
2.2 Εξισώσεις Friedmann	22
2.2.1 Ακτινοβολία-Ύλη	23
2.2.2 Ύλη-Σκοτεινή ενέργεια	24
2.3 Big Bang Nucleosynthesis	24
2.3.1 Αφθονία νετρονίων	25
2.3.2 Αφθονία ελαφριών πυρήνων	26
2.4 Recombination	26
3 Σκοτεινή Ύλη	29
3.1 Εξίσωση Boltzman	29
3.2 Freeze-out	32
3.2.1 Θερμή σκοτεινή ύλη	33
3.2.2 Κρύα σκοτεινή ύλη	33
4 Δέσμιες καταστάσεις	37
4.1 Sommerfeld effect	37
4.1.1 Εξαύλωση, $X\bar{X} \rightarrow \gamma\gamma$	38
4.1.2 Δέσμιες καταστάσεις, $X\bar{X} \rightarrow (X\bar{X})_{bound} + \gamma$	39

4.2	Εξισώσεις Boltzmann	41
4.2.1	Decay δέσμιων καταστάσεων	41
4.2.2	Διαφορικές εξισώσεις	42
4.2.3	Αποτελέσματα	43
4.3	Επιρροή δέσμιων καταστάσεων	46
4.3.1	$\tau_{BSF} < \tau_{BBN}$	46
4.3.2	$\tau_{BSF} > \tau_{BBN}$	46
4.3.3	$\tau_{BSF} \gg \tau_{BBN}$	49
5	Παραμετρος του Hubble και δέσμιες καταστάσεις	51
5.1	CMB spectrum	51
5.2	Supernovae	53
5.3	Περιπτώσεις	55
5.3.1	Δέσμιες καταστάσεις : 5/100	56
5.3.2	Δέσμιες καταστάσεις : 10/100	59
6	Συμπεράσματα	63
	Βιβλιογραφία	65

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Με αφετηρία την δημοσίευση του Ισαάκ Νεύτωνα “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” όπου έδωσε την βάση για μία θεωρία βαρύτητας, ξεκίνησε ένα κίνημα παρατήρησης τροχιών αστροφυσικών αντικειμένων και σύγκριση αυτών με προβλέψεις της θεωρίας.

Πράγματι, το 1846 στην μελέτη της ανώμαλης κίνησης του Ουρανού, οδήγησε στην ανακάλυψη της ύπαρξης του πλανήτη Ποσειδώνα. Αντίστοιχες απόπειρες συνεχίστηκαν για την εξήγηση τροχιών που απέκλιναν από την πρόβλεψη της θεωρίας, όμως απέτυχαν. Έτσι ξεκίνησαν να αναδύονται άλλα ερωτήματα : μία τέτοια ανωμαλία πρέπει να ερμηνευθεί ως λάθος στους νόμους της βαρύτητας ή ως μία ένδειξη της ύπαρξης κάποιου αντικειμένου που δεν μπορούμε να δούμε (‘σχοτεινού’ θα λέγαμε σήμερα) ;

Έπειτα από παρατηρήσεις συμπεραίνεται ότι η βαρυονική ύλη , είναι μόλις ένα πολύ μικρό ποσοστό του κόσμου μας.

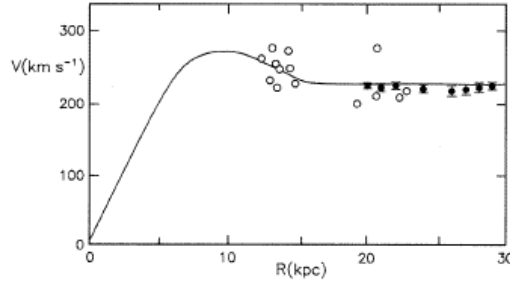
$$\Omega_{B,0} = 0.004 \pm 0.01$$

Επομένως, από τι αποτελείται το υπόλοιπο Σύμπαν μας ;

1.1 Σκοτεινή Ύλη στους γαλαξίες

Ένας τρόπος για την ανίχνευση είναι παρατηρώντας τα αποτελέσματα που επιφέρει η σκοτεινή ύλη στην βαρυονική ύλη. Μία μέθοδος είναι μέσω της παρατήρησης της τροχιακής κίνησης των αστεριών σε έναν σπειροειδή γαλαξία, όπως ο δικός μας και ο M31. Οι σπειροειδής γαλαξίες περιέχουν έναν επίπεδο δίσκο από αστέρια, μέσα στον δίσκο τα αστέρια εκτελούν σχεδόν κυκλικές τροχιές γύρω από το κέντρο του γαλαξία. Θεωρώντας ένα αστέρι σε κυκλική τροχιά γύρω από το κέντρο του γαλαξία του, σε ακτίνα R και με ταχύτητα v , αντιστοιχίζεται μία κεντρομόλος επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{v^2}{R} \tag{1.1}$$



Σχήμα 1.1: Τροχική ταχύτητα συναρτήσει της ακτίνας στον M31. Οι λευκοί κύκλοι δείχνουν τα αποτελέσματα του 1970 της Rubin και Ford. Οι μαύροι κύκλοι δείχνουν τα αποτελέσματα του Roberts και Whitehursts το 1975. [1]

με διεύθυνση προς το κέντρο του γαλαξία. Εάν η επιτάχυνση οφείλεται σε βαρυτική έλξη των γαλαξιών, τότε

$$\alpha = \frac{GM(R)}{R^2} \quad (1.2)$$

όπου $M(R)$ είναι η μάζα που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας R από το κέντρο. Επομένως από τις σχέσεις 1.1 και 1.2 παίρνουμε ότι :

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad (1.3)$$

Επομένως, αναμένεται ότι οι τροχιακή ταχύτητα σε σχέση με την ακτίνα κυμαίνεται με την σχέση $v \propto 1/\sqrt{R}$, η οποία συνήθως αναφέρεται ως 'Keplerian rotation' διότι την βρήκε πρώτος ο Κέπλερ.

Το 1970 ήρθαν τα πρώτα αποτελέσματα από μετρήσεις τροχιακής ταχύτητας στον γαλαξία M31, από την Vera Rubin και Kent Ford, όπου βασίστηκαν στον προσδιορισμό του redshift της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από καυτό ιονισμένο αέριο στον M31 (Σχήμα 1.1). Αργότερα από μετρήσεις του redshift της ακτινοβολίας αποδιέγερσης του ατόμου του υδρογόνου με χαρακτηριστικό μήκος κύματος $\lambda = 21\text{cm}$, ο M. Roberts και R. Whitehurst έλαβαν τα δεδομένα στο Σχήμα 1.1.

Παρατηρώντας το διάγραμμα στο Σχήμα 1.1 δεν φαίνεται κάποια μείωση της ταχύτητας σε μεγάλες ακτίνες όπως αναμενόταν από την σχέση 1.3. Εφόσον η ταχύτητα που παρατηρείται είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή που θα αντιστοιχούσε σε γαλαξία μόνο με την ορατή ύλη, οι επιστήμονες εξήγησαν το φαινόμενο με την παρουσία του dark halo, σκοτεινό στεφάνι, όπου περιβάλλει την ορατή ύλη.

$$M(R) = \frac{v^2 R}{G} \quad (1.4)$$

Η μάζα του dark halo πρέπει να είναι τόσο ώστε να εξηγεί το φαινόμενο που παρατηρείται, δηλαδή την σταθερότητα της ταχύτητας.

1.2 Σκοτεινή Ύλη σε συμπλέγματα γαλαξιών

1.2.1 Κίνηση των γαλαξιών

Ο Fritz Zwicky την δεκαετία του 1930, μελετούσε το σύμπλεγμα Coma όταν παρατήρησε ότι οι ταχύτητες των γαλαξιών είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτό που αναμενόταν. Συγκεκριμένα φαινόταν ότι η βαρυτική έλξη δεν είναι αρκετή για να συγκρατήσει ενωμένους τους γαλαξίες, για να έχουμε παρόλα αυτά όμως αυτό το αποτέλεσμα έπρεπε να συμπεριληφθεί κάποια ύλη που δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε, η λεγόμενη "σκοτεινή ύλη". Αυτό το απέδειξε με βάση το Virial theorem

$$\ddot{I} = 2W + 4K \quad (1.5)$$

Όπου I είναι η ροπή αδράνειας, K η κινητική ενέργεια και W η δυναμική ενέργεια λόγω βαρυτικής έλξης μεταξύ των γαλαξιών. Η εξίσωση 1.5 απλοποιείται αν το σύστημα που μελετάται βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση δηλαδή χρησιμοποιείται σύστημα συντεταγμένων όπου το κέντρο μάζας του γαλαξία είναι ακίνητο. Άρα η 1.5 γίνεται

$$K = -W/2 \quad (1.6)$$

Επομένως προσδιορίζεται η μάζα ενός συμπλέγματος γαλαξιών, με βάση την παραπάνω εξίσωση, να είναι

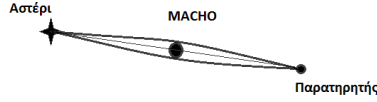
$$M = \frac{\langle v^2 \rangle r_h}{\alpha G} \quad (1.7)$$

Με $\langle v^2 \rangle$ την μέση ταχύτητα των γαλαξιών, r_h την ακτίνα όπου βρίσκεται η μισή μάζα του συμπλέγματος και α μία αριθμητική σταθερά όπου αφορά το προφίλ της πυκνότητας του συμπλέγματος.

Τα συμπεράσματα του Fritz Zwicky υποστήριξαν και οι επόμενες μελέτες στο σύμπλεγμα Coma όπου εξετάζαν το πρόβλημα από άλλη οπτική γωνία.

1.2.2 Ακτίνες-X

Με βάση την εκπομπή ακτίνων-X από εσωτερικό αέριο, συμπεραίνεται ότι εάν δεν υπήρχε σκοτεινή ύλη να συγκρατεί βαρυτικά το αέριο, αυτό θα είχε εκτοξευθεί έξω από το σύμπλεγμα. Προσδιορίζοντας την θερμοκρασία και πυκνότητα αυτού το αερίου δημιουργείται και πάλι ένα προφίλ της μάζας που περιέχεται στο σύμπλεγμα, ώστε να δημιουργεί τα φαινόμενα που παρατηρούμε. Εάν γίνει η υπόθεση ότι το καυτό αέριο μέσω της πίεσής του αντιτίθεται στην βαρυτική κατάρρευση, πρέπει να υπακούει στην



Σχήμα 1.2: Αριστερή εικόνα : Τροχιές των φωτονίων όταν ανάμεσα σε πομπό και δέκτη μεσολαβεί ένα MACHO. Δεξιά εικόνα : Εικόνα του συμπλέγματος Abell 2218 από το Hubble space telescope ([2],[3])

εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (1.8)$$

όπου P η πίεση του αερίου, ρ η πυκνότητα του αερίου και M είναι η συνολική μάζα που βρίσκεται σε σφαίρα ακτίνας r .

Χρησιμοποιώντας και την υπόθεση ότι το αέριο είναι ιδανικό, ισχύει ότι

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_p} \quad (1.9)$$

όπου T είναι η θερμοκρασία του αερίου και μ είναι η μάζα του σε μονάδες μάζας πρωτονίου. Συνδιάζοντας λοιπόν την 1.8 και 1.9 υπολογίζεται ότι η μάζα συναρτηθεί της απόστασης από το κέντρο του γαλαξία είναι :

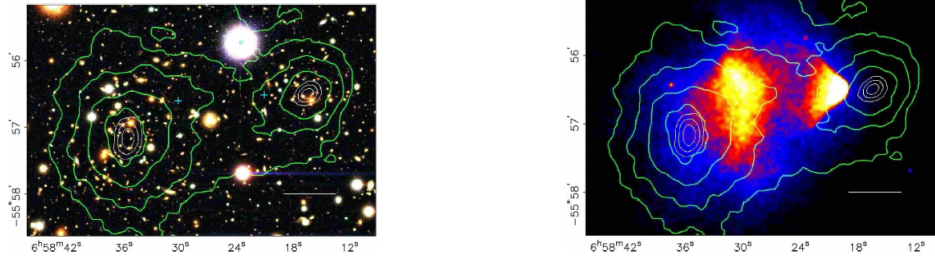
$$M(r) = \frac{kT(r)r}{G\mu m_p} \left(-\frac{d \ln \rho}{d \ln r} - \frac{d \ln T}{d \ln r} \right) \quad (1.10)$$

Συγκρίνοντας την ορατή ύλη στο σύμπλεγμα, με αυτό που προβλέπει η παραπάνω σχέση μπορεί κανείς να προσδιορίσει το ποσοστό της σκοτεινής ύλης.

1.2.3 Gravitational lensing

Μέχρι τώρα εξετάστηκαν οι περιπτώσεις όπου παρατηρείται η επίδραση της σκοτεινής ύλης στην τροχιά της 'φωτεινής' ύλης ή βαρυονικής ύλης, όμως όπως υπέδειξε ο Einstein θα επηρεάζει και την τροχιά των φωτονίων. Επομένως, η ύπαρξη σκοτεινής ύλης μπορεί να λυγίσει την τροχιά του φωτός, λειτουργώντας δηλαδή σαν 'βαρυτικός φακός', Σχήμα 1.2.

Βασιζόμενοι στα συμπεράσματα των προηγούμενων παραγράφων, θεωρείται ότι ο γαλαξίας μας περιβάλλεται από σκοτεινή ύλη, το λεγόμενο dark halo. Ένα κομμάτι της σκοτεινής ύλης γύρω από τον γαλαξία μπορεί να είναι διαμορφωμένο σε συμπαγή αντικείμενα, με την μορφή δηλαδή καφέ νάνων, λευκών νάνων, αστέρων νετρονίων και σκοτεινών σπών. Αυτά τα αντικείμενα καλούνται MACHOs (MASSive COMPACT Halo).



Σχήμα 1.3: *Bullet Cluster* : οι πράσινες γραμμές προέρχονται από προσδιορισμό της μάζας από *gravitational lensing*. Η φωτεινότητα σε ακτίνες-*X* φαίνεται με τα χρώματα κίτρινο, κόκκινο και μπλε. ([4])

Objects).

Στην Σχήμα 1.2 φαίνεται το σύμπλεγμα γαλαξιών Abell 2218, αυτό που παρατηρείται είναι πολλαπλά είδωλα από γαλαξίες που βρίσκονται στο υπόβαθρο. Υπολογίζοντας την κλίση της τροχιάς του φωτός (όπως φαίνεται στο Σχημα 1.2) μπορεί να υπολογιστεί και πάλι η μάζα που χρειάζεται στο σύμπλεγμα ώστε να προκληθεί αυτή η αλλαγή της τροχιάς. Το αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού θα μας δείξει ποιο είναι το ποσοστό της σκοτεινής ύλης σε αυτό το σύμπλεγμα.

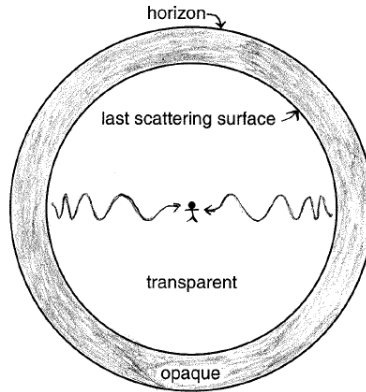
1.2.4 Bullet Cluster

Για κάποια χρόνια οι επιστήμονες εξέταζαν το ενδεχόμενο κάποιας τροποποίησης στην θεωρία βαρύτητας του Einstein. Η ανακάλυψη που απέρριψε αυτό το ενδεχόμενο ήταν η παρατήρηση του Bullet Cluster 1E 0657-56 [4].

Το Bullet Cluster αποτελείται από δύο συγκρουόμενους γαλαξίες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Με πράσινο χρώμα φαίνεται το που αποδείχτηκε ότι βρίσκεται η μάζα των δύο γαλαξιών, τα αποτελέσματα προέκυψαν από τον προσδιορισμό μέσω *gravitational lensing*, επομένως στο σχήμα παρατηρούνται τα δύο βαρυτικά κέντρα. Συλλέγοντας δεδομένα εκπομπής ακτίνων-*X* από το καυτό αέριο των δύο γαλαξιών, λαμβάνεται η σκιαγράφηση του αερίου στο σύμπλεγμα με χρώματα κίτρινο,κόκκινο και μπλε.

Επομένως, το βαρύονικό κέντρο βρίσκεται σε διαφορετικό σημείο από εκεί που υποδεικνύει το *gravitational lensing*. Παρατηρείται ότι το καυτό αέριο, δηλαδή η περισσότερη βαυονική ύλη στον γαλαξία, καθυστέρησε να προχωρήσει λόγω των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, σε αντίθεση με τα αστέρια και την σκοτεινή ύλη όπου αλληλεπιδρούν μόνο βαρυτικά.

Αν δεν υπήρχε η σκοτεινή ύλη δεν θα είχε παρατηρηθεί αυτό το φαινόμενο διαχωρισμού.



Σχήμα 1.4: Ο παρατηρητής περιβάλλεται από την σφαιρική επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης. Τα φωτόνια του CMB μετατοπίζονται προς το ερυθρό λόγω της διαστολής του σύμπαντος. [1]

1.3 Cosmic Microwave Background

Η πιο σημαντική πηγή πληροφοριών για την φύση του Σύμπαντός μας προήλθε από μετρήσεις του φάσματος του λεγόμενου Cosmic Microwave Background Radiation, δηλαδή από κοσμικά φωτόνια με χαρακτηριστικά ακτινοβολίας μέλαν σώματος.

Η ανακάλυψη προήλθε τυχαία, παρόλα αυτά είχε ήδη προβλεφθεί από πολλούς κοσμολόγους. Τα φωτόνια ταξιδεύουν ελεύθερα και σχεδόν ανενόχλητα από την εποχή του recombination (η περίοδος όπου αρχίζει να δημιουργείται το ουδέτερο υδρογόνο $T_{rec} = 3740K$, $t_{rec} = 240,00yr$ [1]), όπου αποχώρισαν από την θερμική ισορροπία που βρίσκονταν με τα βαρυόνια. Λόγω της διαστολής του σύμπαντος το φάσμα που λαμβάνουμε είναι μετατοπισμένο προς το ερυθρό σε σχέση με την στιγμή της τελευταίας σκέδασής τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4, και τελικά η μέση θερμοκρασία είναι

$$\langle T \rangle = 2.725K$$

Οι διαταράξεις στην θερμοκρασία είναι κατά μέσο όρο της τάξης

$$\left\langle \left(\frac{\delta T}{T} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 1.1 \times 10^{-5} \quad (1.11)$$

Σχήμα 1.5 φαίνεται το φάσμα του CMB, παρατηρούνται διακυμάνσεις στην θερμοκρασία οι οποίες τελικά είναι αυτές που μας υποδεικνύουν την δομή του σύμπαντος όταν ήταν μόλις 240,000 χρόνων.

Κάθε διατάραξη της θερμοκρασίας στο CMB την οποία παρατηρούμε με γωνιακό άνοιγμα $\delta\theta$, αντιστοιχεί σε ένα φυσικό μήκος l στην επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης.

Αυτό το μήκος υπολογίζεται αν θεωρηθεί ότι

$$\delta\theta \simeq \tan(\delta\theta) = \frac{l}{d_A} \quad (1.12)$$

όπου το d_A είναι η ακτινική απόσταση από την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης. Γνωρίζοντας ότι η τελευταία σκέδαση έγινε σε ένα redshift $z = 1100 \gg 1$, μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι ([1])

$$d_A = \frac{d_{hor}(t_0)}{z_{ls}} \quad (1.13)$$

με $d_{hor}(t_0) \approx 14,000 Mpc$, προκύπτει ότι

$$d_A \approx 13 Mpc \quad (1.14)$$

Ακόμα υπολογίζεται η απόσταση Hubble την περίοδο της τελευταίας σκέδασης, όπου προσδιορίζει την απόσταση όπου μπορούσε να διανύσει το φως στο last scattering.

$$\frac{c}{H_{z_{ls}}} \approx 0.2 Mpc \quad (1.15)$$

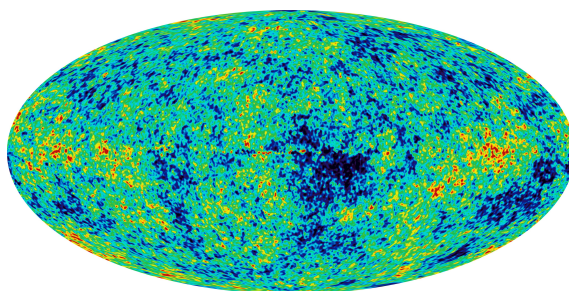
Επομένως, μία διακύμανση με αυτό το φυσικό μήκος αντιστοιχεί σε γωνιακό άνοιγμα

$$\theta_H = \frac{c/H_{z_{ls}}}{d_A} \approx 1^\circ \quad (1.16)$$

Γνωρίζοντας την πυκνότητα ενέργειας της σκοτεινής, της ακτινοβολίας και της βαρυονικής ύλης σήμερα, βρίσκεται εύκολα ότι η σκοτεινή ύλη είχε στις εποχή της τελευταίας σκέδασης την περισσότερη πυκνότητα ενέργειας, ως εκ τούτου διαταραχές στην πυκνότητα ενέργειας της σκοτεινής ύλης δημιουργούν διακυμάνσεις στα βαρυτικά πηγάδια δυναμικού και ακολούθως διακυμάνσεις στη θερμοκρασία των φωτονίων.

Στην περίπτωση όπου ένα φωτόνιο του CMB την στιγμή της τελευταίας σκέδασης βρίσκεται σε τοπικό ελάχιστο του βαρυτικού πηγαδιού, θα χάσει ενέργεια φεύγοντας από το πηγάδι. Επομένως τα πιο κρύα σημεία είναι αυτά που δείχνουν την συσσώρευση της σκοτεινής ύλης (μπλέ κομμάτια του Σχήματος 1.5) τότε, ενώ όσο πιο ρηχό είναι το πηγάδι, τόση παραπάνω ενέργεια θα έχει το φωτόνιο και αντιστοίχως πιο ζεστό. Αν ένα φωτόνιο βρίσκεται στην κορυφή την στιγμή που το σύμπαν γίνεται διαφανές, και κυλάει προς το ελάχιστο τότε κερδίζει ενέργεια, άρα είναι καυτό (κόκκινα κομμάτια Σχήματος 1.5). Επομένως η παρατήρηση των διακυμάνσεων με $\theta > \theta_H$ σκιαγραφεί έναν χάρτη των βαρυτικών πηγαδιών και ακολούθως της σκοτεινής ύλης.

Οι διακυμάνσεις θερμοκρασίας των φωτονίων του CMB για $\theta < \theta_H$, αντιστοιχούν σε ένα πιο ιδιαίτερο φαινόμενο λόγω της συμπεριφοράς του ρευστού ακτινοβολίας-βαρυονίων, όπου ήταν ακόμα σε θερμική ισορροπία. Εάν το ρευστό ακτινοβολίας-βαρυονίων βρεθεί σε δυναμικό σκοτεινής ύλης, η βαρύτητα το συμπιέζει και έτσι η πίε-



Σχήμα 1.5: Το CMB από το WMAP, τα χρώματα υποδηλώνουν την θερμοκρασία με το σκούρο μπλε να δείχνει χαμηλή θερμοκρασία και το κόκκινο υψηλή.

ση του ανεβαίνει μέχρι που υπερσχύει της βαρύτητας και ξεκινά να μην συγκρατείται από αυτή. Καθώς λοιπόν, διαστέλλεται προς τα έξω ξεκινά η πίεσή του να πέφτει λόγω της διαστολής του σύμπαντος, επομένως η βαρύτητα το ξανατραβάει και συμπιέζεται. Αυτή η διαδικασία συμπίεσης και αποσυμπίεσης του ρευστού ακτινοβολίας-βαρυονίων ονομάστηκε "ακουστική ταλάντωση" ("acoustic oscillations"). Η διαταράξεις αυτές της θερμοκρασίας που οφείλονται σε acoustic oscillations, ταξιδεύουν με ταχύτητα μικρότερη του φωτός, και υπολογίζεται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του σύμπαντος τότε [5]. Τα φωτόνια όπου βρίσκονταν στην διαδικασία συμπίεσης την στιγμή που το Σύμπαν έγινε διαφανές, έχουν περισσότερη πυκνότητα ενέργειας και επομένως μεγαλύτερη θερμοκρασία ($T \propto \epsilon^{1/4}$) από την μέση θερμοκρασία, ενώ το αντίθετο ισχύει για φωτόνια που βρίσκονται σε διαδικασία αποσυμπίεσης.

1.4 Ανίχνευση Σκοτεινής Ύλης

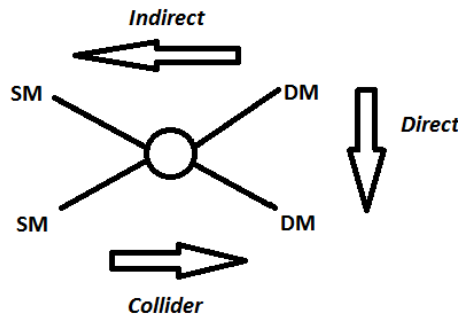
Με βάση τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί από παρατηρήσεις και παρουσιάστηκαν παραπάνω, μεγάλο μέρος της επιστημονικής κοινότητας στράφηκε προς την εξακρίβωση αυτών των ενδείξεων, δηλαδή σε πειράματα ανίχνευσης σκοτεινής ύλης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6.

1.4.1 Άμεση Ανίχνευση

Η ιδέα της άμεσης ανίχνευσης βασίζεται στο γεγονός ότι η σκοτεινή ύλη έχει μεγάλη αφθονία και περιτριγυρίζει τον γαλαξία μας με πολλά σωματίδια να διέρχονται και από την Γη. Επομένως η σύγκρουση αυτών των σωματιδίων με την ύλη είναι κάτι πολύ πιθανό, άρα και ανιχνεύσιμο.

Για παράδειγμα στην αλληλεπίδραση σωματιδίων σκοτεινής ύλης (πχ, WIMPS, Weakly Interacting Massive Particle) με έναν πυρήνα, ο ρυθμός αντίδρασης είναι [6] :

$$R \approx \sum_i N_i n_x \langle \sigma_{ix} \rangle \quad (1.17)$$



Σχήμα 1.6: Ανίχνευση σωματιδίων σκοτεινής ύλης: άμεσα, έμμεσα και μέσα από συγκρούσεις σωματιδίων του Standard Model

όπου ο δείκτης i , υποδηλώνει το κάθε πυρήνα που βρίσκεται στον ανιχνευτή.

$$N_i = \frac{\text{Detector mass}}{\text{Atomic mass of species } i} \quad (1.18)$$

δηλαδή ο αριθμός των στόχων,

$$n_x \equiv \frac{\text{WIMP energy density}}{\text{WIMP mass}} \quad (1.19)$$

είναι η πυκνότητα των WIMPs και $\langle \sigma_{ix} \rangle$ είναι η ενεργός διατομή της αλληλεπίδρασης WIMP-πυρήνα i , υπολογισμένη στον μέσο όρο όλων σχετικών ταχυτήτων του WIMP ως προς τον πυρήνα.

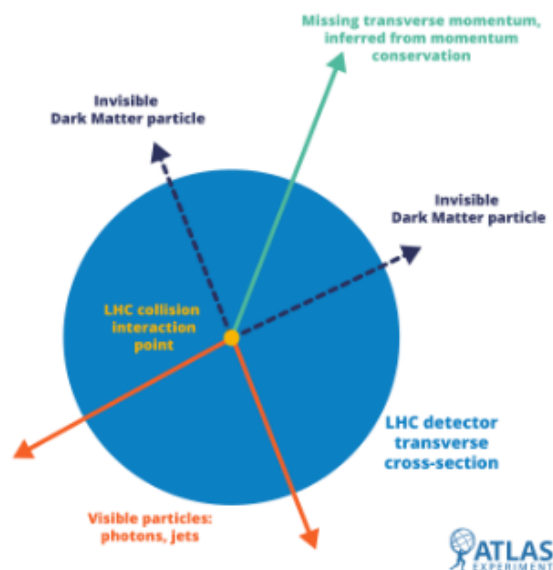
Το είδος της σκέδασης αυτής, χαρακτηρίζεται απο το αν είναι ελαστική, οπότε το WIMP σχεδιάζει τον πυρήνα και πειραματικά παρατηρείται αλλαγή στην ενέργεια του. Για ανελαστική σκέδαση, το σωματίδιο DM αλληλεπιδρά με τα τροχιακά ηλεκτρόνια που διεγείρονται ή ακόμα και ιονίζονται, εναλλακτικά διεγείρει τον πυρήνα, και στη συνέχεια παρατηρείται εκπομπή ακτινοβολίας.

Επίσης σημαντικό χαρακτηριστικό είναι η εξάρτηση ή όχι από το σπιν του πυρήνα. Η ενεργός διατομή με εξάρτηση από το σπιν είναι ανάλογη του $J(J+1)$ αντί για τον αριθμό των νουκλεονίων. Σε αντίθεση με την περίπτωση που η ενεργός διατομή είναι ανεξάρτητη και συνδέεται σημαντικά με την μάζα του πυρήνα.

1.4.2 Έμμεση Ανίχνευση

Η έμμεση ανίχνευση αφορά το προϊόν της εξαύλωσης ενός σωματιδίου και αντί-σωματιδίου σκοτεινής ύλης. Το προϊόν αυτής της αλληλεπίδρασης μπορεί να παρατηρηθεί είτε από τηλεσκόπια στο διάστημα είτε στην Γη, παρόλα αυτά προτιμάται η πειραματική διάταξη να βρίσκεται στο διάστημα ώστε να αποφευχθεί η αλληλεπίδραση των ακτίνων με την ύλη, κάτι που κάνει την ανίχνευση ακόμη πιο δύσκολη.

Όταν τα φωτόνια εισέρχονται στην ατμόσφαιρα της Γης, δημιουργείται μια ηλεκτρομα-



Σχήμα 1.7: Διάγραμμα προσδιορισμού σωματιδίων DM στο πείραμα ATLAS

γνητική καταιγίδα και επομένως πολλά δευτερεύοντα σωματίδια. Αυτά και η ακτινοβολία Cherenkov καθώς διασχίζουν την ατμόσφαιρα της Γης, μπορούν να ανιχνευθούν πια έμμεσα από τα τηλεσκόπια εδάφους. Για αυτή την παρατήρηση πρέπει να απομονωθεί το φαινόμενο που ερευνάται από το σήμα που οφείλεται στις κοσμικές ακτίνες.

Ο ρυθμός της εξαύλωσης είναι ανάλογος της ενεργούς διατομής άρα και ανάλογος του τετραγώνου της πυκνότητας ενέργειας της σκοτεινής ύλης, $\Gamma_A \propto \rho_{DM}^2$. Επομένως είναι πιο πιθανό να παρατηρήσουμε το φαινόμενο σε μέρη που συσσωρεύεται μεγάλη πυκνότητα σκοτεινής ύλης. Τέτοιες περιοχές είναι το κέντρο του γαλαξία ή ο Ήλιος και η Γη. Το κέντρο του γαλαξία λόγω της μεγάλης πυκνότητάς δεν επιτρέπει τα σωματίδια σκοτεινής ύλης που περνάνενα ξεφύγουν, όσο για τα άλλα δύο παραδείγματα, δεν είναι το ίδιο πυκνά παρόλα αυτά λόγω των αλληλεπιδράσεων με τα νουκλεόνια χάνουν ενέργεια και τελικά ξεφεύγουν πιο δύσκολα.

1.4.3 Colliders

Η ανίχνευση σκοτεινής ύλης προσπαθεί να επιτευχθεί και στο LHC στο CERN στην Γενεύη. Τα χαρακτηριστικά της σκοτεινής ύλης δεν επιτρέπουν την άμεση παρατήρησή τους, παρόλα αυτά στα πειράματα συγκρούσεων σωματιδίων του SM δεν επιδιώκεται η άμεση παρατήρηση DM αλλά η απουσία ενέργειας των σωματιδίων του SM, Σχήμα 1.7. Αν σε κάποια πείραμα παρατηρηθεί αλλαγή στην ορμή των σωματιδίων που μπορούν να παρατηρηθούν, χωρίς να μπορεί να εξηγηθεί από κάποιο άλλο φαινόμενο, τότε έχει επιτευχθεί η δημιουργία σωματιδίων DM.

Με βάση όλα τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι τα σωματίδια σκοτεινής ύλης αλληλε-

πιδρούν μόνο βαρύτικά με τα σωματίδια του Standard Model, υπολογίζεται ότι το ποσοστό της πυκνότητας ενέργειας σκοτεινής ύλης σήμερα είναι

$$\Omega_{DM,0} \simeq 0.26 \quad (1.20)$$

το υπόλοιπο ποσοστό πυκνότητας ενέργειας οφείλεται στην σκοτεινή ενέργεια ή ενέργεια κενού.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στην Κοσμολογία

2.1 Standard Cosmology

Ξεκινώντας από την εξίσωση του Einstein σε μετρική FRW

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

όπου $T_{\mu\nu}$ είναι ο ταυστής ενέργειας-τάσης για τα παρόντα πεδία (ύλη ακτινοβολία κτλ) [17]. Η παράμετρος $G_N = 6.674 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} s^{-2}$ είναι η σταθερά του Newton για βαρύτητα. Για να είναι ο ταυστής συνεπής με τις συμμετρίες της μετρικής, επιλέγεται αυτός του ιδανικού ρευστού, άρα

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, P, P, P) \quad (2.2)$$

μία συνεπή υπόθεση είναι ότι η σχέση που συνδέει πίεση και πυκνότητα ενέργειας είναι γραμμική

$$P = w\rho \quad (2.3)$$

Επομένως πχ για την συνιστώσα της ύλης (μη-σεχτισιστικά σωματίδια) όπου δεν έχει πίεση $P_m = 0$ πρέπει $w_m = 0$. Για την περίπτωση της ακτινοβολίας προκειμένου ο πίνακας να είναι άϊχνος, τελικά προκύπτει ότι

$$P_r = \frac{1}{3}\rho_r \quad (2.4)$$

και για την συνιστώσα της σκοτεινής ύλης επιλέγεται $w_{\Lambda} = -1$.

Ακόμα σημαντικό σημείο είναι η εξέλιξη αυτών των συνιστωσών κατά την διαστολή του σύμπαντος, αυτή η λύση έρχεται από τους νόμους διατήρησης που σχετίζονται με τον ταυστή ενέργειας-τάσης [17]. Η τελική εξίσωση που προσδιορίζει την εξέλιξη αυτή είναι

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (2.5)$$

όπου σε συνδυασμό με την εξίσωση 2.3, τελικά

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{constant} \quad (2.6)$$

συνεπώς για κάθε συνιστώσα ανάλογα ισχύει

$$\rho_m a^3 = \text{constant} \quad (2.7)$$

$$\rho_r a^4 = \text{constant} \quad (2.8)$$

$$\rho_\Lambda = \text{constant} \quad (2.9)$$

για ύλη, ακτινοβολία και σκοτεινή ενέργεια ή ενέργεια κενού αντίστοιχα.

2.2 Εξισώσεις Friedmann

Συνεχίζοντας τώρα με την εξίσωση του Einstein, η εξίσωση 2.1 μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_N (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda) + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

και λύνοντας χρονικά και χωρικά προκύπτουν δύο ανεξάρτητες εξισώσεις

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.11)$$

και

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G_N}{3} (\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.12)$$

με H να συμβολίζει τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος (Hubble parameter), a το scale factor, k η καμπυλότητα και Λ η λεγόμενη κοσμολογική σταθερά. Η εξίσωση 2.11 είναι η λεγόμενη εξίσωση Friedmann.

Για ένα επίπεδο σύμπαν το $k = 0$, και ορίζεται η μεταβλητή $\Omega = \sum^i \Omega_i$ όπου

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G_N} \quad (2.13)$$

με δείκτη i δηλώνεται η κάθε συνιστώσα (ύλη, ακτινοβολία κλπ) και το ρ_c συμβολίζει την κρίσιμη πυκνότητα ενέργειας σήμερα ώστε το σύμπαν να είναι επίπεδο. Το σύνολο όλων των συνιστωσών στο σύμπαν πρέπει λοιπόν από την εξίσωση 2.11 να είναι

$$\Omega = 1 \quad (2.14)$$

Η εξίσωση 2.11 σε συνδυασμό με την 2.13 και 2.6 μπορεί να γραφεί ως

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0}) \quad (2.15)$$

όπου με δείκτη 0 εννοείται η τιμή σήμερα και έχει θεωρηθεί $a_0 = 1$.

Παρατηρώντας την εξίσωση 2.15 φαίνεται ότι όσο πιο μικρό είναι το a τόσο πιο σημαντικοί γίνονται κάποιοι όροι, για παράδειγμα για πολύ μικρό a , (δηλαδή τα πρώτα χρόνια του σύμπαντος) ο όρος της ακτινοβολίας φαίνεται να κυριαρχεί, έπειτα ο όρος της ύλης και τέλος ο όρος της ενέργειας του κενού.

2.2.1 Ακτινοβολία-Ύλη

Ξεκινώντας λοιπόν από τα πρώτα χρόνια του σύμπαντος όπου το scale factor ήταν πολύ μικρότερο από ότι σήμερα οι εξίσωση του Friedmann γράφεται ως

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{H_0^2\Omega_{r,0}a^{-4}} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} = \frac{H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}}{a} &\implies \int da \cdot a = \int dt H_0\sqrt{\Omega_{r,0}} \implies a^2 = 2tH_0\sqrt{\Omega_{r,0}} \\ &\implies a(t) = (2tH_0\sqrt{\Omega_{r,0}})^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

και δείχνει την εξέλιξη του scale factor συναρτήσει του χρόνου. Κάποια στιγμή καθώς το a μεγαλώνει ο όρος της ύλης προσεγγίζει την ακτινοβολία μέχρι που εξισώνονται και από εκεί και πέρα το κύριο συστατικό είναι η ύλη καθώς η πυκνότητα της ακτινοβολίας πια μειώνεται πολύ γρήγορα.

$$\frac{\Omega_{r,0}}{a_{rm}^4} = \frac{\Omega_{m,0}}{a_{rm}^3} \implies a_{rm} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \quad (2.18)$$

Υπολογίζεται ότι η κυριαρχία της ύλης ξεκίνησε όταν το σύμπαν ήταν μόλις 47.000 χρόνων [1]. Για τον προσδιορισμό του scale factor στην κυριαρχία της ύλης ξαναλύεται η εξίσωση του Friedmann 2.11, αυτή τη φορά κρατώντας μόνο τον όρο της ύλης,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{H_0^2\Omega_{m,0}a^{-3}} \quad (2.19)$$

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{H_0^2\Omega_{m,0}}{a}} \implies \int da \cdot a^{1/2} = \int dt H_0\sqrt{\Omega_{m,0}} \implies a^{3/2}\frac{2}{3} = tH_0\sqrt{\Omega_{m,0}}$$

$$\implies a(t) = \left(\frac{3}{2}tH_0\sqrt{\Omega_{m,0}}\right)^{2/3} \quad (2.20)$$

2.2.2 Ύλη-Σκοτεινή ενέργεια

Καθώς το a αυξάνεται ο όρος της σκοτεινής ενέργειας ξεκινά να είναι συγκρίσιμος με τον όρο συνεισφοράς της ύλης μέχρι που στο

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} \quad (2.21)$$

ο όρος της σκοτεινής ενέργειας γίνεται μεγαλύτερος από αυτόν της ύλης, δηλαδή η πυκνότητα της ύλης είναι πολύ μικρότερη από την σταθερή πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας και επομένως δεν έχει πια μεγάλη επιρροή στην εξέλιξη του σύμπαντος. Επομένως είναι μία καλή προσέγγιση η θεώρηση από αυτό το a και πέρα μόνο την ύπαρξη αυτής της συνιστώσας. Με την εξίσωση του Friedmann 2.11 να δίνει τελικά την συνάρτηση του a και του χρόνου t να είναι [1]

$$a(t) \approx a_{m,\Lambda} \cdot e^{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0 t} \quad (2.22)$$

2.3 Big Bang Nucleosynthesis

Καθώς η θερμοκρασία πέφτει στο 1MeV το κοσμικό πλάσμα αποτελείται από

- Σχετικιστικά σωματίδια που βρίσκονται σε ισορροπία: φωτόνια, ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια. Αυτά συγκρατούνται σε ισορροπία από ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις $e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$
- Decoupled σχετικιστικά σωματίδια: Σε αυτή τη θερμοκρασία ο ρυθμός της αλληλεπίδρασης των νετρίνων για παράδειγμα με τα ηλεκτρόνια πέφτει κάτω από τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος, επομένως τα νετρίνα αποχωρούν από το πλάσμα και έχουν την ίδια θερμοκρασία με τα άλλα σχετικιστικά σωματίδια.
- Μη-σχετικιστικά σωματίδια: Βαρυόνια.
Η αναλογία βαρυονίων και ακτινοβολίας σε αυτή την θερμοκρασία είναι περίπου

$$\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} \approx 2.7 \cdot 10^{-7} \Omega_b h^2 \quad (2.23)$$

όπου φαίνεται ότι εκείνη την περίοδο υπήρχαν πολύ λίγα βαρυόνια.[17, 21]

Από την εξίσωση του Boltzmann για μία αλληλεπίδραση της μορφής $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ προκύπτει ότι για να παραμείνει η αλληλεπίδραση σε ισορροπία πρέπει

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} = \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \quad (2.24)$$

όπου $n^{(0)}$ συμβολίζει την πυκνότητα όταν βρίσκεται αυτό το είδος σωματιδίων σε ισορροπία. Η σχέση αυτή στην πυρηνοσύνθεση συνήθως αναφέρεται ως nuclear statistical equilibrium (NSE)

Επομένως για την περίπτωση της αλληλεπίδρασης $n + p \leftrightarrow D + \gamma$ η NSE γράφεται ως

$$\frac{n_D^{(0)}}{n_n^{(0)} n_p^{(0)}} = \frac{n_D}{n_n n_p} \quad (2.25)$$

αντικαθιστώντας τώρα στο αριστερό μέλος τις κατανομές της ισορροπίας για μη-σχετικιστικά σωματίδια

$$\frac{n_D^{(0)}}{n_n^{(0)} n_p^{(0)}} = \frac{3}{4} \left(\frac{4\pi}{m_p T} \right)^{3/2} e^{B_D/T} \quad (2.26)$$

όπου B_D είναι η ενέργεια σύνδεσης του Δευτερίου, άρα τελικά η εξίσωση 2.25 γίνεται

$$\frac{n_D}{n_b} \approx \eta \left(\frac{T}{m_p} \right)^{3/2} e^{B_D/T} \quad (2.27)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι το $n_n \sim n_p \sim n_b$ και ότι το $n_\gamma \sim T^3$.

Όσο το B_D/T δεν είναι πολύ μεγάλο το και το η είναι τόσο μικρό, η πυκνότητα του Δευτερίου παραμένει πολύ μικρή. Γι' αυτό το φαινόμενο της δημιουργίας ξεκινά όταν πέφτει η θερμοκρασία πολύ πιο κάτω από την ενέργεια σύνδεσης.

2.3.1 Αφθονία νετρονίων

Όσο τα πρωτόνια και τα νετρόνια παραμένουν σε ισορροπία μέσα από την αλληλεπίδραση $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ από τη NSE ότι

$$\frac{n_p}{n_n} \approx e^{Q/T} \quad (2.28)$$

όπου $Q = m_n - m_p$. Επομένως όσο πέφτει η θερμοκρασία μένουν λιγότερα νετρόνια και αν έμενε σε ισορροπία για πάντα δεν θα έμενε κανένα. Όμως δεν μένει σε ισορροπία για τόσο μεγάλο διάστημα, αρχικά ορίζουμε το πηλίκο

$$X_n = \frac{n_n}{n_n + n_p} \quad (2.29)$$

και γράφοντας την εξίσωση Boltzmann για την $n + l \rightarrow p + l$ όπου l είναι λεπτόνια

$$a^{-3} \frac{d(n_n a^3)}{dt} = n_l^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left(\frac{n_p n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} - n_n \right) \quad (2.30)$$

Χρησιμοποιώντας ότι προκειται για περίοδο που κυριαρχεί η ακτινοβολία, αλλάζοντας την μεταβλητή του χρόνου με την μεταβλητή $x = Q/T$ και ορίζοντας ως $\Gamma = n_l^{(0)} < \sigma v >$, προκύπτει ότι

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{x\Gamma}{H(x=1)} [e^{-x} - X_n(1 + e^{-x})] \quad (2.31)$$

με

$$H(x=1) = 1.66g^{*1/2} Q^2 \quad (2.32)$$

και αποδεικνύεται ότι τελικά $\Gamma < H$ για $T < 1MeV$

2.3.2 Αφθονία ελαφριών πυρήνων

Για να μελετηθεί πότε αρχίζει τελικά η δημιουργία του Δευτερίου, χρησιμοποιείται η εξίσωση 2.27 για το όριο όπου όλα τα βαρυόνια είναι σε μορφή δευτερίου. Επομένως

$$\ln\eta + \frac{3}{2}\ln(T_{nuc}/m_p) \sim -B_D/T_{nuc} \quad (2.33)$$

Οι θερμοκρασία που ξεκινά η Πυρηνοσύνθεσ είναι $T_{D,nuc} = 0.07MeV$.

Λόγω του ότι η ενέργεια σύνδεσης του 4He είναι μεγαλύτερη από αυτή του D, η δημιουργία του ξεκινάει απευθείας μετά την αφετηρία της δημιουργίας του δευτερίου. Τελικά όλα τα υπολειπόμενα νετρόνια όταν $T = T_{nuc}$ ενώνονται σε μορφή 4He , άρα η αφθονία του 4He θα είναι η μισή των νετρονίων σε αυτή την θερμοκρασία. Παρ' όλα αυτά δεν μετατρέπεται όλο το δευτέριο σε ήλιο, κάποιο ποσοστό παραμένει.

2.4 Recombination

Η επόμενη σημαντική χρονική στιγμή στην ιστορία του σύμπαντος έρχεται σε χαμηλότερες ενέργειες, $T < 1eV$, όταν ξεκινά η δημιουργία του ουδέτερου Υδρογόνου. Όταν οι θερμοκρασία είναι ακόμα $T \approx 1eV$ τα φωτόνια είναι στενά συνδεδεμένα με τα ηλεκτρόνια μέσω του φαινομένου Compton και εκείνα με την σειρά τους μέσω σκέδασης Coulomb με τα πρωτόνια.

Αν και η ενέργεια σύνδεσης του υδρογόνου είναι $E_0 = 13.6eV$ το φαινόμενο δεν παρατηρείται μέχρι που η θερμοκρασία πέφτει πολύ χαμηλά, λόγω του υψηλής αναλογίας φωτονίων προς βαρυόνια. [17, 21]. Όσο λοιπόν η αλληλεπίδραση $e^- + p \rightarrow H + \gamma$ είναι σε ισορροπία, δηλαδή ισχύει

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{n_e^{eq} n_p^{eq}}{n_H^{eq}} \quad (2.34)$$

δεν μπορεί να δημιουργηθεί το ουδέτερο υδρογόνο. Ορίζεται επίσης για ευκολία το

$$X_e = \frac{n_e}{n_H + n_e} = \frac{n_e}{n_H + n_p} \quad (2.35)$$

και εισάγοντάς το στην εξίσωση 2.34, βρίσκεται ότι

$$\frac{X_e^2}{1 + X_e} = \frac{1}{n_e + n_H} \left[\left(\frac{m_3 T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m_e + m_p - m_H)/T} \right] \quad (2.36)$$

θεωρώντας ότι ο παρανομαστής στο δεξί μέλος είναι ανάλογος της πυκνότητας των βαρυονίων άρα είναι $n_b n_\gamma \approx 10^{-9} T^3$. Αν εξεταστεί η αφθονία του υδρογόνου όταν οι θερμοκρασία είναι κοντά στην ενέργεια σύνδεσης, φαίνεται ότι ο όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης 2.36, $10^9 (m_e/T)^{3/2} \approx 10^{15}$. Αυτό σημαίνει ότι για να βρίσκεται σε ισορροπία αυτή η σχέση πρέπει ο παρανομαστής του αριστερού μέλους να είναι πολύ μικρός, άρα $X_e \rightarrow 1$, το οποίο υποδεικνύει ότι όλο το υδρογόνο είναι ιονισμένο, 2.35. Επομένως μόνο όταν η θερμοκρασία πέφτει πολύ χαμηλά η ισορροπία αδυνατεί να διατηρηθεί.

Για πιο ακριβή προσέγγιση πρέπει κανείς να λύση την εξίσωση Boltzmann , όπου θα αναλυθεί περαιτέρω στο επόμενο κεφάλαιο, παρόλα αυτά το αποτέλεσμα που δίνετε είναι η σχέση

$$\frac{dX_e}{dt} = [(1 - X_e)\beta - X_e^2 n_b a_2] \quad (2.37)$$

όπου

$$\beta \equiv \langle \sigma v \rangle \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\epsilon_0/T} \quad (2.38)$$

και

$$a_2 \equiv \langle \sigma v \rangle = 9.78 \frac{a^2}{m_e^2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right)^{1/2} \ln(\epsilon_0/T) \quad (2.39)$$

, ώστε το ηλεκτρόνιο να ενωθεί με το πρωτόνιο σε μία διεγερμένη κατάσταση.

Συγκρίνοντας τον ρυθμό αλληλεπίδρασης των φωτονίων με τα ηλεκτρόνια (Compton) και τον ρυθμό που αυξάνεται το σύμπαν, $n_e \sigma_T = X_e n_b \sigma_T$, μπορεί να υπολογιστεί το redshift όταν τα φωτόνια σταμάτησαν να είναι σε ισορροπία με την υπόλοιπη ύλη, z_{dec} . Από αυτή τη σύγκριση προκύπτει ότι

$$\frac{n_e \sigma_T}{H} = 113 X_e \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.02} \right) \left(\frac{.15}{\Omega_m h^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1+z}{1000} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{(1+z)0.15}{3600 \Omega_m h^2} \right]^{-1/2} \quad (2.40)$$

και παρατηρείται ότι καθώς το X_e πέφτει (recombination), τα φωτόνια σταματούν να αλληλεπιδρούν συνεχόμενα με την ύλη (decoupling).

Κεφάλαιο 3

Σκοτεινή Ύλη

Τα πρώτα χρόνια του σύμπαντος όλα τα σωματίδια ήταν σε θερμική ισορροπία, η λεγόμενη 'κοσμική σούπα'. Με το πέρασμα του χρόνου, δηλαδή με την πτώση της θερμοκρασίας καθώς το σύμπαν διαστέλλεται, κάποια σωματίδια εξέρχονται από την θερμική ισορροπία με τα υπόλοιπα, αυτές οι αποχωρήσεις είναι ο λόγος που ο κόσμος είναι έτσι όπως τον γνωρίζουμε σήμερα.

Σημαντικά γεγονότα στην ιστορία του σύμπαντος είναι η βαρυογένεση, νουκλεοσύνθεση, recombination και άλλα. Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με την αποχώρηση των σωματιδίων σκοτεινής ύλης από την θερμική ισορροπία, καθώς και με τον μηχανισμό αυτής της διαδικασίας.

3.1 Εξίσωση Boltzman

Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν συνεχόμενα με αποτέλεσμα να παραμένουν σε θερμική ισορροπία με το πλάσμα για όσο ο ρυθμός αλληλεπίδρασης, Γ , είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό που αυξάνεται το σύμπαν, H . Καθώς το σύμπαν αυξάνεται, τα σωματίδια δεν βρίσκουν το ένα το άλλο τόσο συχνά, μέχρι που $\Gamma \leq H$ και τα σωματίδια αποχωρούν από την κοσμική σούπα και ο αριθμός τους παραμένει σταθερός.

Έστω μία συνάρτηση $f(p^\mu, x^\mu)$ όπου περιγράφει την κατανομή των τετατραορμών ενός σωματιδίου στον τετραδιάστατο χώρο. Αν υποθέσουμε ότι ο μόνος τρόπος που αλλάζει η κατανομή είναι από την δημιουργία και την εξαύλωση των σωματιδίων, τότε

$$\hat{L}[f] = \hat{C}[f] \quad (3.1)$$

όπου το \hat{L} παριστάνει τον τελεστή Liouville ο οποίος δείχνει πως αλλάζει η κατανομή στο πέρασμα του χρόνου. Για μη-σχετικιστικό σωματίδιο με μάζα m σε δύναμη $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, [7]

$$\hat{L} = \frac{d}{dt} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_x + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_v = \frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v \quad (3.2)$$

$$\hat{L} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \quad (3.3)$$

Στο μοντέλο FRW με a το scale factor, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ τα σύμβολα Christoffel, η κατανομή είναι χωρικά ομογενής και ισοτροπική: $f(E, t)$,

$$\hat{L} = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E} \quad (3.4)$$

Η πυκνότητα για κάποια χρονική στιγμή μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$n(t) = \int \frac{g}{(2\pi)^3} d^3p f(E, t) \quad (3.5)$$

όπου g είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του είδους του σωματιδίου. Αντικαθιστώντας την 3.5 και 3.4 στην 3.1 αποδεικνύεται ότι

$$\frac{dn}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3p}{E} \quad (3.6)$$

Με την υπόθεση ότι ο αριθμός ενός είδους σωματιδίων ψ αλλάζει μόνο μέσα απο την αντίδραση $\psi + a + b + \dots \longleftrightarrow i + j + \dots$ τότε ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3p_\psi}{E_\psi} &= - \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \\ &\times (2\pi)^4 \delta(p_\psi + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j \dots) \\ &\times [|M|_{\psi+a+b+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 f_\psi f_a f_b \dots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \dots \\ &- |M|_{i+j+\dots \rightarrow \psi+a+b+\dots}^2 f_i f_j \dots (1 \pm f_\psi)(1 \pm f_a) \dots] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Αρχικά ορίζεται το $d\Pi \equiv g \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2E}$, η δεύτερη σειρά της 3.7 υποδηλώνει την διατήρηση ενέργειας στην αλληλεπίδραση. Η τρίτη σειρά περιγράφει την αλληλεπίδραση $\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots$ με το M να περιγράφει την φυσική της αλληλεπίδρασης, τα f_a, f_b, f_ψ είναι οι κατανομές των ειδών a, b, ψ όπου εκεί έχουμε σωματίδια, ενώ οι f_i, f_j είναι οι κατανομές των προϊόντων που θα δημιουργηθούν, το (+) μπαίνει στην περίπτωση των μποζονίων ενώ το (-) στην περίπτωση των φερμιονίων επειδή αυξάνει και μειώνει την πιθανότητα να βρεθεί εκεί το σωματίδιο. Εάν πχ το είδος σωματιδίων ψ υπάρχει, η πιθανότητα να παραχθεί το σωματίδιο ψ είναι μεγαλύτερη αν είναι μποζόνιο και μικρότερη αν είναι φερμιόνιο. Ο τέταρτος όρος περιγράφει την αντίθετη αλληλεπίδραση $i + j + \dots \rightarrow \psi + a + b + \dots$, δηλαδή την δημιουργία του ψ και θεωρούμε ότι $|M|_{i+j+\dots \rightarrow \psi+a+b+\dots}^2 = |M|_{\psi+a+b+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 \equiv |M|^2$. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει κάποιο ακραίο φαινόμενο (Bose condensation, Fermi degeneracy) οι όροι $1 \pm f \approx 1$ και το $f_i(E_i) = e^{-(E_i - \mu_i)/T}$, με μ το χημικό δυναμικό, για σωματίδια

που βρίσκονται σε ισορροπία. Επομένως η 3.7 γράφεται ως

$$n_\psi + 3Hn_\psi = - \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \cdots d\Pi_i d\Pi_j \cdots (2\pi)^4 |M|^2 \times \delta(p_\psi + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j \dots) [f_a f_b \dots f_\psi - f_i f_j \dots] \quad (3.8)$$

με $H = \dot{a}/a$ η λεγόμενη παράμετρος του Hubble.

Ουσιαστικά ο πρώτος όρος στο αριστερό μέρος της Σχέσης 3.8 δείχνει την αλλαγή της πυκνότητας στον χρόνο, ο δεύτερος όρος δείχνει πως αλλάζει η πυκνότητα εξαιτίας της διαστολής του σύμπαντος και το δεξί μέρος δείχνει πως επηρεάζουν οι αλληλεπιδράσεις την πυκνότητα.

Η πυκνότητα των σωματιδίων ψ πέφτει όσο αυξάνεται το σύμπαν ($n_\psi \propto a^{-3}$), επομένως δεν είναι ένα βολικό μέγεθος για να βρίσκεται στην διαφορική εξίσωση. Γι' αυτόν τον λόγο ορίζεται μία καινούργια μεταβλητή,

$$Y \equiv \frac{n_\psi}{s} \quad (3.9)$$

το οποίο επειδή η εντροπία πέφτει με τον ίδιο τρόπο όσο διαστέλλεται το σύμπαν, τελικά το μέγεθος Y είναι σταθερό και αλλάζει μόνο από τις αλληλεπιδράσεις.

Επομένως

$$n_\psi + 3Hn_\psi = s\dot{Y} \quad (3.10)$$

σε αυτό το σημείο εισάγουμε την μεταβλητή $x \equiv m/T$, διότι είναι πιο χρήσιμο να γνωρίζουμε την εξάρτηση από την θερμοκρασία παρά από τον χρόνο. Όπου m είναι η μάζα και επειδή η περίοδος που μας ενδιαφέρει είναι εποχή όπου κυριαρχεί ακόμα η ύλη, ο χρόνος σε σχέση με την θερμοκρασία είναι

$$t = 0.301 g_*^{-1/2} \frac{m_{pl}}{T^2} = 0.301 g_*^{-1/2} \frac{m_{pl}}{m^2} x^2 \quad (3.11)$$

όπου g_* είναι οι βαθμοί ελευθερίας σε θερμοκρασία T και m_{pl} η μάζα του Planck. Άρα για η εξίσωση Boltzmann γράφεται

$$\frac{dY}{dx} = - \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \cdots d\Pi_i d\Pi_j \cdots |M|^2 \times \delta^4(p_\psi + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j \dots) [f_a f_b \dots f_\psi - f_i f_j \dots] \quad (3.12)$$

όπου $H(x) = H(m)x^{-2}$ την εποχή της κυριαρχίας της ακτινοβολίας με $H(m) = 1.67 g_*^{-1/2} \frac{m^2}{m_{pl}}$.

3.2 Freeze-out

Έστω ένα είδος σωματιδίων ψ , θεωρείται ότι η αφθονία του αλλάζει μόνο από διαδικασίες εξαύλωσης και δημιουργίας. Πχ $\psi\bar{\psi} \longleftrightarrow X\bar{X}$, με σωματίδια X του Standard Model, τα σωματίδια ψ και X είναι σε θερμική ισορροπία, δηλαδή αυτή η αλληλεπίδραση γίνεται με μεγάλο ρυθμό και έστω τα X έχουν κατανομές με μηδενικό χημικό δυναμικό. Η δεύτερη σειρά της εξίσωσης 3.12 στην περίπτωση αυτής της αλληλεπίδρασης γίνεται $[f_\psi f_{\bar{\psi}} - f_X f_{\bar{X}}]$ και επειδή έχει θεωρηθεί ότι τα X είναι σε μηδενικό χημικό δυναμικό και θερμική ισορροπία

$$f_X = e^{-E_X/T}$$

$$f_{\bar{X}} = e^{-E_{\bar{X}}/T} \quad (3.13)$$

Επίσης λόγω του όρου διατήρησης ενέργειας ισχύει ότι $E_\psi + E_{\bar{\psi}} = E_X + E_{\bar{X}}$, άρα φαίνεται ότι

$$f_X f_{\bar{X}} = f_\psi^{eq} f_{\bar{\psi}}^{eq} \quad (3.14)$$

όπου $f_\psi^{eq} = e^{-E_\psi/T}$, $f_{\bar{\psi}}^{eq} = e^{-E_{\bar{\psi}}/T}$, το φυσικό νόημα αυτής της εξίσωσης είναι ακριβώς αυτό της ισορροπίας μεταξύ των $X, \bar{X}, \psi, \bar{\psi}$. Συνεπώς η δεύτερη σειρά της 3.12 γίνεται $[f_\psi f_{\bar{\psi}} - f_\psi^{eq} f_{\bar{\psi}}^{eq}]$, και δείχνει πως αλλάζει η κατανομή των ψ σε σχέση με την κατανομή των ψ όταν ήταν σε ισορροπία.

Ορίζεται η μέση ενεργός διατομή επί την ταχύτητα

$$\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v\rangle \equiv (n_\psi^{eq})^{-2} \int d\Pi_\psi d\Pi_{\bar{\psi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} (2\pi)^4$$

$$\times \delta^4(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |M|^2 e^{-E_\psi/T} e^{-E_{\bar{\psi}}/T} \quad (3.15)$$

όπου το n_ψ^{eq} είναι η πυκνότητα των ψ όταν αυτά βρίσκονται σε ισορροπία. Επομένως η 3.12 γράφεται ως

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-x \langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v\rangle s}{H(m)} (Y^2 - Y_{eq}^2) \quad (3.16)$$

το $\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v\rangle$ μπορεί να αντικατασταθεί από $\langle \sigma_A |v\rangle$ για τις περιπτώσεις όπου η τελική κατάσταση δεν είναι δύο σωματίδια. Η 3.16 μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\frac{x}{Y_{eq}} \frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma_A}{H} \left[\left(\frac{Y}{Y_{eq}} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.17)$$

με $\Gamma \equiv n_{eq} \langle \sigma_A |v\rangle$ και $H(T) = x^{-2} H(m)$ σε σύμπαν που κυριαρχεί η ακτινοβολία ακόμα. Στην 3.17 παρατηρείται ότι για $\Gamma > H$ η αφθονία των ψ (dY_ψ) αλλάζει πολύ ενώ για $\Gamma < H$ η μεταβολή γίνεται όλο και πιο μικρή. Αυτό είναι το λεγόμενο freeze out, όταν δηλαδή τα σωματίδια αλληλεπιδρούν σπάνια πια λόγω της διαστολής του σύμπαντος, αδυνατούν δηλαδή να βρουν το ένα το άλλο.

Ακόμα στην 3.17 φαίνεται ότι όταν το $\Gamma \gg H$, ο μόνος τρόπος να διατηρηθεί η ισορροπία σε αυτή την εξίσωση είναι το $Y = Y_{eq}$, άρα βρίσκεται σε ισορροπία όταν το $\Gamma \gg H$. Αυτό οδηγεί στο ότι όσο μεγαλύτερη ενεργό διατομή έχει η αλληλεπίδραση, τόσο περισσότερο μένει σε ισορροπία, και όσο περισσότερο μένει σε ισορροπία τόσο μειώνεται η αφθονία του.

Δύο είναι η περιπτώσεις που επηρεάζουν διαφορετικά την αφθονία της σκοτεινής ύλης στο σύμπαν μας : αν το είδος των σωματιδίων ψ ήταν σχετικιστικό στην φάση του freeze out ή μη-σχετικιστικό.

3.2.1 Θερμή σκοτεινή ύλη

Για ένα σχετικιστικό είδος σωματιδίων, η αφθονία όταν αυτό βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το πλάσμα ακολουθεί την κατανομή

$$Y_{eq}(x) = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{eff}}{g_*s} = 0.278 \frac{g_{eff}}{g_*s} \quad (x \ll 3) \quad (3.18)$$

όπου $g_{eff} = g$ για μποζόνια ενώ $g_{eff} = 3g/4$ για φερμιόνια, με g οι βαθμοί ελευθερίας του σωματιδίου X .

Ο όρος θερμή σκοτεινή ύλη αναφέρεται στο ότι τα σωματίδια ήταν μη- σχετικιστικά κατά την διάρκεια του freeze out. Επομένως η αφθονία τους εξαρτάται από την αφθονία στο freeze out και έπειτα παραμένει σταθερή.

$$Y_\infty = Y_{eq}(x_f) = 0.278 g_{eff}/g_*s(x_f) \quad (x_f \leq 3) \quad (3.19)$$

με $Y_\infty \equiv Y(x \rightarrow \infty)$ και $x_f = m/T_f$ δηλαδή στην θερμοκρασία του freeze out.

Έπειτα από την αποχώρηση από την ισορροπία η πυκνότητα του σωματιδίου πέφτει όσο αυξάνεται το σύμπαν.

Αν και ενδιαφέρουσα περίπτωση, ένα τέτοιο είδος σωματιδίου δεν ανταποκρίνεται σε όλες τις κοσμολογικές προβλέψεις της σκοτεινής ύλης. Το κύριο μη συμβατό χαρακτηριστικό, είναι ότι ένα σχετικιστικό σωματίδιο αδυνατεί να συμβάλει στο large scale structure[1], κάτι που εξαρχής έκανε την αναζήτηση της σκοτεινής ύλης τόσο σημαντική.

3.2.2 Κρύα σκοτεινή ύλη

Αντίστοιχα με την προηγούμενη υποενοότητα ο όρος προκύπτει από το γεγονός ότι η σκοτεινή ύλη ήταν μη-σχετικιστική στο freeze out ($x_f \leq 3$).

Αρχικά παραμετροποιείται η ενεργός διατομή συναρτήσει του x ώστε να μπει στην εξίσωση 3.17. Η ενεργός διατομή επί την ταχύτητα πρέπει να είναι $sv \sim v^p$, με $p = 0$ για s-wave και $p=2$ για p-wave, δηλαδή η συνολική στροφορμή να είναι μηδέν και ένα

αντίστοιχα. Ακόμα $m \langle v \rangle^2 / 2 = 3kT/2$ άρα $\langle v \rangle \sim \sqrt{T/m}$

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \sigma_0 (T/m)^n = \sigma_0 x^{-n} \quad x \leq 3 \quad (3.20)$$

όπου $n = 0$ για s-wave και $n = 1$ για p-wave. Η εξίσωση 3.16 γράφεται ως,

$$\frac{dY}{dx} = -\lambda x^{-n-2} (Y^2 - Y_{eq}^2) \quad (3.21)$$

όπου

$$\lambda = 0.264 \frac{g_* s}{g_*^{1/2}} m_{pl} m \sigma_0$$

$$Y_{eq} = 0.145 \frac{g}{g_* s} x^{3/2} e^{-x} \quad (3.22)$$

Για την εύρεση μίας προσεγγιστικής λύσης μπορούν να γίνουν κάποιες μικρές παραδοχές, πρώτον η εξίσωση μπορεί να γραφεί ορίζοντας $\Delta \equiv Y - Y_{eq}$, άρα

$$\Delta' = -Y'_{eq} - \lambda x^{-n-2} \Delta (2Y_{eq} + \Delta) \quad (3.23)$$

όπου ο τόνος υποδεικνύει την παράγωγο ως προς x . Για $x \ll x_f$ το Y είναι περίπου ίσο με το Y_{eq} άρα το Δ και το Δ' είναι πολύ μικρά, επομένως

$$\Delta \simeq -\lambda^{-1} x^{n+2} \frac{Y'_{eq}}{2Y_{eq} + \Delta} \simeq \frac{x^{n+2}}{2\lambda} \quad (3.24)$$

Παίρνοντας τώρα το όριο για $x \gg x_f$ το Y δεν ακολουθεί πια το Y_{eq} , $\Delta \simeq Y \gg Y_{eq}$ και όροι της μορφής Y'_{eq}, Y_{eq} μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι.

$$\Delta' = -\lambda x^{-n-2} \Delta^2 \quad (3.25)$$

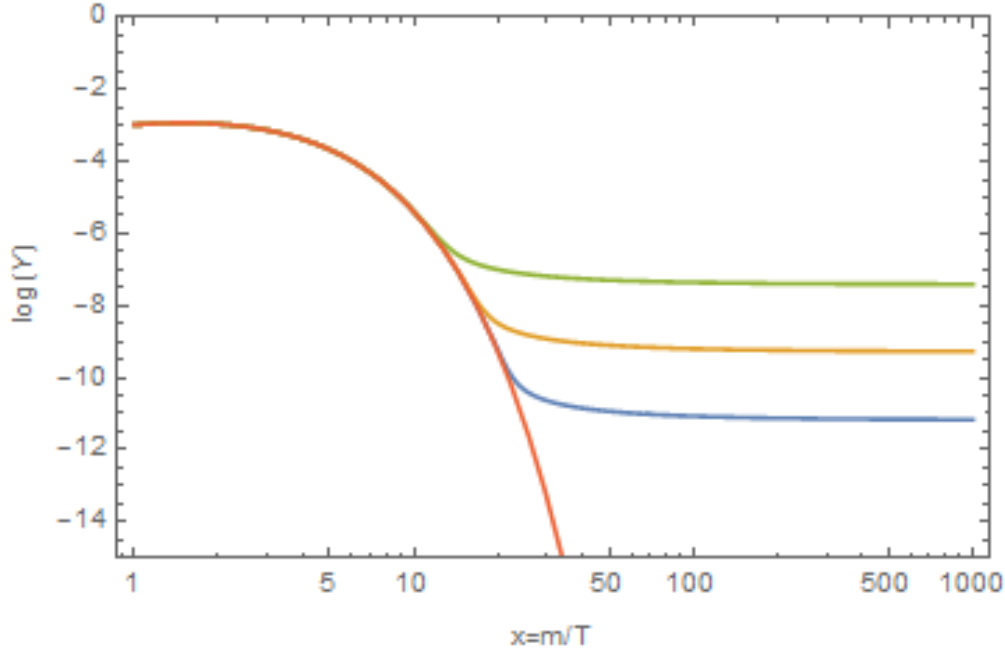
με ολοκλήρωση από x_f μέχρι ∞ , τελικά

$$Y_\infty = \Delta_\infty = \frac{n+1}{\lambda} x_f^{n+1} \quad (3.26)$$

όσον αφορά το x_f , την στιγμή του freeze out το Y σταματά να ακολουθεί το Y_{eq} και το Δ μπορεί να γραφεί ως $\Delta(x_f) = c Y_{eq}(x_f)$ όπου c μία σταθερά, συνδυάζοντας με την λύση της 3.25 για πριν το freeze out, $\Delta \simeq x_f^{n+2} / (2+c)$, τελικά

$$x_f \simeq \ln[(2+c)ac] - (n + \frac{1}{2}) \ln[\ln[(2+c)\lambda ac]] \quad (3.27)$$

με $a = 0.145(g/g_* s)$ και διαλέγοντας $c(c+2) = n+1$, γίνεται



Σχήμα 3.1: Με κόκκινο χρώμα σκιαγραφείται το $Y_{eq}(x)$ ενώ με πράσινο, πορτοκαλί και μπλε η αφθονία $Y(x)$ για διάφορες τιμές της ενεργού διατομής.

$$x_f = \ln[0.038(n+1)(g/g_*^{1/2})m_{pl}m\sigma_0]$$

$$-(n+1/2)\ln[\ln[0.038(n+1)(g/g_*^{1/2})m_{pl}m\sigma_0]] \quad (3.28)$$

και

$$Y_\infty = \frac{3.79(n+1)x_f^{n+1}}{(g_*s/g_*^{1/2})m_{pl}m\sigma_0} \quad (3.29)$$

Η προσεγγιστική αυτή λύση είναι πράγματι κοντά στην ακριβή λύση.

Για την ακριβή λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Mathematica για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1 για s-wave δηλαδή $n=1$.

Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται η αφθονία Y συναρτήσει του x , όπως ήταν αναμενόμενο η κατανομή Y ταυτίζεται με την Y_{eq} μέχρι το x_f όπου αποχωρεί από την ισορροπία. Στο διάγραμμα έχει κρατηθεί σταθερή η μάζα της σκοτεινής ύλης, $m = 100\text{GeV}$ και αλλάζει μόνο η ενεργός διατομή, με πράσινο χρώμα φαίνεται η αφθονία με $\sigma_0 = 10^{-13}\text{GeV}^{-2}$, με πορτοκαλί χρώμα $\sigma_0 = 10^{-11}\text{GeV}^{-2}$ και μπλε χρώμα $\sigma_0 = 10^{-9}\text{GeV}^{-2}$.

Παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται η ενεργός διατομή, μειώνεται η αφθονία της σκοτεινής ύλης, αυτό γίνεται διότι μένει για μεγαλύτερο διάστημα σε ισορροπία (άρα ακολουθεί την Y_{eq} που μειώνεται γρήγορα), το $\Gamma = H$ γίνεται όλο και αργότερα.

Κεφάλαιο 4

Δέσμιες καταστάσεις

Έστω ότι τα σωματίδια σκοτεινής ύλης είναι φερμιόνια Dirac X , και αλληλεπιδρούν με μία σκοτεινή βαθμωτή δύναμη $U(1)_D$, με Lagrangian

$$L = \bar{X}(-i\not{D} - m)X - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

όπου $D^\mu = \partial^\mu + igA^\mu$, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, με A^μ το πεδίο του σκοτεινού φωτονίου και $a \equiv g^2/4\pi$ η αντίστοιχη σκοτεινή λεπτή ύφη.

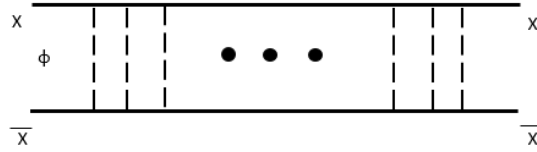
Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε η διαδικασία παραμονής της σκοτεινής ύλης σε θερμική ισορροπία με την κοσμική σούπα και η αποχώρηση από αυτήν, το λεγόμενο freeze out.

Μέσα από την συνεχόμενη εξαύλωση και δημιουργία η σκοτεινή ύλη παραμένει σε ισορροπία, παρ' όλα αυτά υπάρχει η πιθανότητα το σωματίδιο και αντί-σωματίδιο σκοτεινής ύλης να μην εξαυλωθούν κατευθείαν αλλά να δημιουργήσουν μία δέσμια κατάσταση για κάποιο χρονικό διάστημα και έπειτα να εξαυλωθούν, αντίστοιχο με το positronium. Ακόμα, μπορεί να δημιουργηθεί δέσμια κατάσταση και έπειτα να ιονιστεί από κάποιο "σκοτεινό φωτόνιο". Η αφθονία της σκοτεινής ύλης εξαρτάται άμεσα από τον συνδυασμό και των τριών διαδικασιών, αν και σε αυτό το κεφάλαιο δεν μελετήθηκε ο ιονισμός λόγω του ότι αυτή η διαδικασία σταματάει να είναι σημαντική πολύ νωρίς.

4.1 Sommerfeld effect

Η δημιουργία δέσμιων καταστάσεων ευνοείται σε χαμηλές ταχύτητες, παράλληλα όμως με αυτή τη διαδικασία, λόγω του Sommerfeld effect, ενισχύεται και η ενεργός διατομή. Πρόκειται για ένα μη-σχετικιστικό αποτέλεσμα της παρουσίας κάποιας δύναμης μακράς εμβέλειας μεταξύ των εισερχόμενων σωματιδίων. Θεωρείται ένα δυναμικό τύπου Yukawa

$$V = \frac{ae^{-m_\phi r}}{r} \quad (4.2)$$



Σχήμα 4.1: *Sommerfeld Enhancement (SE)*, δύο σωματίδια σκοτεινής ύλης χ αλληλεπιδρούν ανταλλάσσοντας ένα μποζόνιο ϕ , άπειρες φορές [9].

, που διαταράσσει την κυματοσυνάρτησή τους $\psi(\vec{r})$ μέσα από την ανταλλαγή μποζονίου με μάζα, Σχήμα 4.1.

Ορίζεται ο συντελεστής Sommerfeld, όπου μεταφράζει αυτό το φαινόμενο, ως το πηλίκο της κυματοσυνάρτησης όταν τα σωματίδια είναι ελεύθερα ($r \rightarrow \infty$), προς την κυματοσυνάρτηση όταν εξαυλώνονται ($r = 0$)

$$S = \frac{|\psi(\infty)|^2}{|\psi(0)|^2} \quad (4.3)$$

, ουσιαστικά δείχνει πως αλλάζει η κυματοσυνάρτηση από αυτό το φαινόμενο [10]. Αυτό το φαινόμενο ενισχύει την ενεργό διατομή κατά αυτόν το παράγοντα, άρα

$$\sigma_{full} = S \cdot \sigma_0 \quad (4.4)$$

Το κατά πόσο αυτή η ενίσχυση θα είναι σημαντική εξαρτάται από κάποιους περιορισμούς [10]

- Το φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί ότι συμβαίνει στην διαδικασία της δημιουργίας δέσμιας κατάστασης, επομένως πρέπει η ενέργεια του Bohr να είναι μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια, στο όριο που το $m_\phi = 0$, $a^2 m_x \geq v^2 m_x$ άρα τελικά

$$v \leq a \quad (4.5)$$

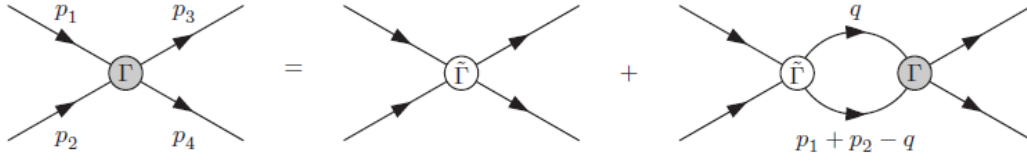
- Ο δεύτερος περιορισμός προέρχεται από το ότι η εμβέλεια αυτής της δύναμης πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την ακτίνα του Bohr,

$$\frac{1}{m_\phi} \geq \frac{1}{am_x} \quad (4.6)$$

Στα πλαίσια αυτών των περιορισμών μπορεί αυτή η ενίσχυση της ενεργούς διατομής να γίνει διακριτή.

4.1.1 Εξαύλωση, $X\bar{X} \rightarrow \gamma\gamma$

Ο τρόπος εύρεσης ενεργών διατομών ή άλλων μετρήσιμων ποσοτήτων είναι η Θεωρία διαταραχών, επομένως ένας τρόπος για να προσεγγιστεί το Sommerfeld enhancement



Σχήμα 4.2: *Sommerfeld Enhancement (SE)*, ως άθροισμα διαταρακτικών διαγραμμάτων [11]

είναι θεωρώντας διαταρακτικά διαγράμματα Feynman με άπειρες ανταλλαγές μποζονίων. Στο Σχήμα 4.3 φαίνεται διαγραμματικά αυτή η διαδικασία, και γράφεται ως

$$i\Gamma(p_1, p_2; p_3, p_4) = i\tilde{\Gamma}(p_1, p_2; p_3, p_4) + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{\Gamma}G(q)G(p_1 + p_2 - q)\Gamma \quad (4.7)$$

,όπου η μη-διαταρακτική κορυφή Γ γράφεται ως το άθροισμα ενός διαγράμματος με διαταρακτική κορυφή $\tilde{\Gamma}$ και μίας μη-διαταρακτικής κορυφής. Για παράδειγμα για μία αλληλεπίδραση τύπου $gm_{xx} * \phi$, g είναι το coupling constant

$$\tilde{\Gamma} \sim \frac{-g^2 m_x^2}{(p_1 - q)^2 - m_\phi^2} \quad (4.8)$$

Γράφοντας την εξίσωση 4.7 και την μη-σχετικιστική περίπτωση, οδηγεί στην εξίσωση Schrodinger σε ολοκληρωτική μορφή, με ένα δυναμικό Yukawa. Για την περίπτωση εξάυλωσης, υπολογίζεται ο συντελεστής Sommerfeld από

$$\sigma_{ann} v_{rel} = \sigma_0 S_{ann}(\zeta) \quad (4.9)$$

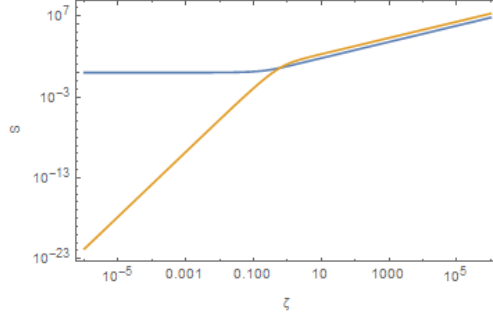
με $(\sigma_{ann} v_{rel})_0 \equiv \sigma_0 = \pi a^2 / m^2$. Οπου τελικά υπολογίζεται

$$S_{ann} = \frac{2\pi\zeta}{1 - e^{-2\pi\zeta}} \quad (4.10)$$

με $\zeta \equiv a/v_{rel}$, για $s - wave$ [11, 14], όπου v_{rel} είναι η σχετική τους ταχύτητα και βρίσκεται αν θεωρηθεί ότι η κινητική ενέργεια είναι ίση με την εσωτερική ενέργεια $\frac{mv^2}{2} = \frac{3kT}{2}$ άρα $v_{rel} \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$.

4.1.2 Δέσμιες καταστάσεις, $X\bar{X} \rightarrow (X\bar{X})_{bound} + \gamma$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το σωματίδιο σκοτεινής ύλης X και το άντι-σωματίδιο \bar{X} πρώτου εξάυλωθού μπορούν να εγκλωβιστούν σε μία δέσμια κατάσταση (σαν positronium) με συγκεκριμένο χρόνο ζωής και στη συνέχεια να εξάυλωθούν ή να ιονιστούν.



Σχήμα 4.3: Με μπλε σχεδιάζεται ο συντελεστής S_{ann} και με πορτοκαλί ο συντελεστής S_{BSF} .

Έχοντας θεωρήσει ότι τα σκοτεινά σωματίδια είναι φερμιόνια με σπιν $1/2$, το σπιν της δέσμιας κατάστασης μπορεί να είναι είτε $s=0$, $m_s = 0$ (para-), είτε $s=1$, $m_s = -1, 0, 1$ (ortho-).

Οι μάζες των δέσμιων καταστάσεων είναι ίσες και αντιστοιχούν στο άθροισμα των μαζών των δύο φερμιονίων μείον την ενέργεια σύνδεσης, δηλαδή $m_{\uparrow\downarrow}^{(n)} = m_{\uparrow\uparrow}^{(n)} = 2m - \Delta_n$. Η ενέργεια σύνδεσης για το n -οστό επίπεδο είναι $\Delta_n = \mu a^2 / (2n)^2$, με $\mu = m/2$ και για ευκολία στο υπόλοιπο της εργασίας χρησιμοποιείται η απλούστερη περίπτωση με $n = 1$.

Αντίστοιχα με την προηγούμενη υποενοότητα, που μελετήθηκε η εξαύλωση, η ενίσχυση Sommerfeld έχει τον ίδιο ρόλο στην ενεργό διατομή και διαστρέβλωση εισερχόμενων σωματιδίων.

$$\sigma_{BSF} v_{rel} = \sigma_0 \cdot S_{BSF}(\zeta) \quad (4.11)$$

με S_{BSF} έναν συντελεστή λόγω της ενίσχυσης Sommerfeld συνδυασμένο με τον παράγοντα που αλλάζει την ενεργό διατομή για bound state formation [8].

Ο συντελεστής S_{BSF} υπολογίζεται με αντίστοιχο τρόπο όπου η αρχική κυματοσυνάρτηση είναι αυτή του επιπέδου κύματος όταν τα σωματίδια είναι πολύ μακριά και ελεύθερα και η τελική κυματοσυνάρτηση είναι αυτή της βασικής κατάστασης, άρα τελικά να είναι [12, 13],

$$S_{BSF} = \frac{2^{10}\pi}{3} \frac{\zeta^5}{(1+\zeta^2)^2} \frac{e^{-4\zeta \operatorname{arccot}\zeta}}{1 - e^{-2\pi\zeta}} \quad (4.12)$$

με $\zeta = a/v$. Επειδή υπάρχουν τρεις καταστάσεις για την ortho-κατάσταση και μία για την para-κατάσταση η ενεργός διατομή είναι αντίστοιχα $\sigma_{BSF,\uparrow\uparrow} = 3\sigma_{BSF}/4$ και $\sigma_{BSF,\uparrow\downarrow} = \sigma_{BSF}/4$.

Το διάγραμμα στο Σχήμα 4.3, παριστάνει την συνάρτηση των συντελεστών Sommerfeld για εξαύλωση και δέσμια κατάσταση που φαίνονται στις σχέσεις 4.10 αντίστοιχα, συναρτήσει του ζ . Παρατηρείται ότι για μικρά, $\zeta \ll 1$, ο συντελεστής που πολλαπλασιάζει την ενεργό διατομή για δέσμιες καταστάσεις, S_{BSF} , τείνει στο μείον άπειρο.

Κάτι που δεν είναι καθόλου απρόσμενο, καθώς σε αυτή τη περίπτωση για να είναι τόσο μικρό το ζ σημαίνει ότι η σχετική ταχύτητα των σωματιδίων είναι πολύ μεγάλη, άρα η δημιουργία δέσμιων καταστάσεων είναι σχεδόν αδύνατη. Ακόμα το φαινόμενο Sommerfeld δείχνει να μην επηρεάζει ούτε την ενεργό διατομή της εξαύλωσης, $S_{ann} \simeq 1$, για τους ίδιους λόγους με πριν και φυσικά αυτό φαίνεται και από τους περιορισμούς προκειμένου να υπάρχει διακριτή ενίσχυση (4.5).

Όταν το $\zeta > 1$ αρχίζει να φαίνεται η ενίσχυση Sommerfeld, οι συντελεστές αυξάνονται, κάτι που επίσης αναμενόταν από το γεγονός ότι για μεγάλο ζ η σχετική ταχύτητα μικραίνει άρα εμφανίζονται αυτά τα μη σχετικιστικά φαινόμενα.

4.2 Εξισώσεις Boltzmann

Με βάση την εξίσωση Boltzmann 3.21 που φτιάχτηκε στο 2ο κεφάλαιο, αντίστοιχες εξισώσεις βρίσκονται και για την περίπτωση που δημιουργούνται δέσμιες καταστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση θα υπάρχουν 3 διαφορετικές εξισώσεις (μία για την συνολική αφθονία της σκοτεινής ύλης και δύο για τις δέσμιες καταστάσεις), που συνδέονται μεταξύ τους από μια αλληλο-εξάρτηση. Οι λεπτομέρειες για την δημιουργία αυτών των διαφορικών εξισώσεων μελετούνται παρακάτω .

4.2.1 Decay δέσμιων καταστάσεων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι δέσμιες καταστάσεις που μπορούν να προκύψουν από τα δύο φερμιόνια σκοτεινής ύλης διακρίνονται σε δύο καταστάσεις, σε κατάσταση με σπιν 0 και σε καταστάσεις με σπιν 1. Το ενδιαφέρον στις δέσμιες καταστάσεις, δεν είναι μόνο η δημιουργία τους αλλά και η διάσπασή τους τελικά σε φωτόνια.

Ας γίνει η υπόθεση ότι η δέσμια κατάσταση βρίσκεται στην βασική κατάσταση (ground state), άρα $l = 0$, το ολικό σπιν βρίσκεται ανάλογα με την περίπτωση που θα διαλεχθεί *ortho* ή *para*. Επομένως από διατήρηση C-parity προκύπτει η εξίσωση

$$(-1)^{l+s} = (-1)^n \quad (4.13)$$

με $s = 0$ ο αριθμός των φωτονίων πρέπει να είναι ζυγός, επομένως δύο φωτόνια. Ενώ για $s = 1$, ο αριθμός των φωτονίων πρέπει να είναι μονός αριθμός, άρα τελικά τρία (από νόμους διατήρησης δεν γίνεται να είναι 1) [15, 16]. Οι δύο καταστάσεις φαίνονται στα διαγράμματα Feynmann στο Σχήμα 4.4.

Όσον αφορά τον χρόνο ζωής των καταστάσεων, υπολογίζεται ότι ο ρυθμός διάσπασης $\Gamma = \sigma v$, είναι

$$\Gamma_{\uparrow\downarrow} = a^5 \mu \quad \text{και} \quad \Gamma_{\uparrow\uparrow} = c_a a^5 \mu \quad (4.14)$$

με $c_a \simeq 0.12a$ [15, 8] άρα αντίστοιχους χρόνους ζωής

$$\tau_{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{a^5 \mu} \quad \text{και} \quad \tau_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{c_a a^5 \mu} \quad (4.15)$$



Σχήμα 4.4: Αριστερή εικόνα : *Para-darkonium* που διασπάται σε δύο φωτόνια. Δεξιά εικόνα : *Ortho-darkonium* που διασπάται σε τρία φωτόνια.

4.2.2 Διαφορικές εξισώσεις

Αρχικά ορίζονται οι αφθονίες για τις αντίστοιχες συνιστώσες, $Y_X \equiv n_X/s$, $Y_{\uparrow\downarrow} \equiv n_{\uparrow\downarrow}/s$ και $Y_{\uparrow\uparrow} \equiv n_{\uparrow\uparrow}$, όπως στο Κεφάλαιο 2 τα $n_X n_{\uparrow\downarrow}$ και $n_{\uparrow\uparrow}$ είναι οι πυκνότητες των ελεύθερων σωματιδίων X και των δύο τύπων δέσμιων καταστάσεων, ενώ η πυκνότητα εντροπίας συμβολίζεται με $s = (2\pi^2/45)g_*sT^3$.

Ακόμα ορίζεται μία μεταβλητή για την διευκόλυνση λύσης και γραφής των εξισώσεων Boltzmann

$$z_x \equiv \frac{\Delta}{T_X} = \frac{a^2 x_X}{4} \quad (4.16)$$

όπου ο δείκτη X δείχνει την ανάλογη συνιστώσα που μελετάται και όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 2, $x \equiv m/T$.

Οι πεπλεγμένες εξισώσεις Boltzmann σε αυτή τη περίπτωση γράφονται ως εξής

$$\frac{dY_X}{dz} = -\frac{c_1 S_{ann}(z)}{z^2} (Y_x^2 - Y_{eq}^2) - \frac{c_1 S_{BSF}(z)}{z^2} Y_X^2 \quad (4.17)$$

$$\frac{dY_{\uparrow\downarrow}}{dz} = \frac{c_1 S_{BSF}(z)}{4z^2} Y_x^2 - c_2 z Y_{\uparrow\downarrow} \quad (4.18)$$

$$\frac{dY_{\uparrow\uparrow}}{dz} = \frac{3c_1 S_{BSF}(z)}{4z^2} Y_x^2 - c_2 z c_a Y_{\uparrow\uparrow} \quad (4.19)$$

όπου

$$c_1 \equiv \sqrt{\frac{\pi}{45}} m_{pl} \Delta \sigma_0 \left(\frac{g_* s}{\sqrt{g_*}} \right) \quad (4.20)$$

$$c_2 \equiv \sqrt{\frac{45}{4\pi^3 g_*}} \frac{m_{pl}}{\Delta^2} (a^5 \mu) \quad (4.21)$$

και το Y_{eq} δίνεται από την σχέση 3.22. Η εξίσωση 4.17 δείχνει την αλλαγή της αφθονίας όσο πέφτει η θερμοκρασία, αντίστοιχα με την εξίσωση 3.21 με έναν παραπάνω όρο που εκφράζει το ποσοστό των X που μπαίνουν σε δέσμιες καταστάσεις οπότε αφαιρούνται από την αφθονία των X, με τον συντελεστή S_{BSF} να ρυθμίζει να ρυθμίζει αυτό το

ποσοστό.

Η εξίσωση 4.18 δείχνει την εξέλιξη της αφθονίας των *para*-καταστάσεων, ο πρώτος όρος εκφράζει το ποσοστό των ελεύθερων X που μπαίνει σε δέσμια κατάσταση, με συντελεστή $1/4$ λόγω του ότι αυτή είναι η μία από τις 4 πιθανές δέσμιες καταστάσεις. Ο δεύτερος όρος εισέρχεται από ρυθμό διάσπασης. Αντίστοιχα και η εξίσωση 4.19 δείχνει την εξέλιξη των *ortho*-καταστάσεων με τους αντίστοιχους όρους και συντελεστή $3/4$ επειδή έχει τρεις καταστάσεις.

Ως αρχικές τιμές μπορούν να δωθούν για τα X η τιμή τις $Y_{eq}(x=1)$ και για τις δέσμιες καταστάσεις μηδενικές αρχικές τιμές εφόσον το φαινόμενο των δέσμιων καταστάσεων εμφανίζεται όταν το σωματίδιο είναι μη-σχετικιστικό άρα μετά από το $x=1$.

4.2.3 Αποτελέσματα

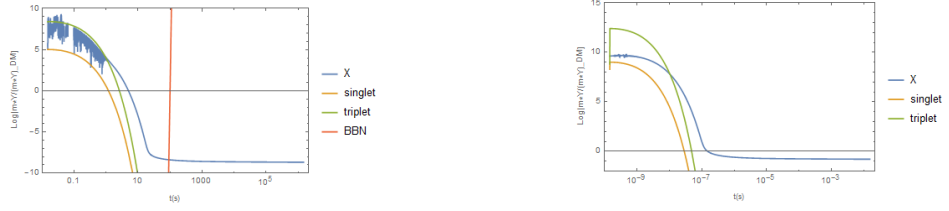
Οι πεπλεγμένες εξισώσεις 4.17, 4.18 και 4.19 μπορούν να λυθούν αριθμητικά στην Mathematica, μερικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.5, 4.6, 4.7 και 5.3. Κάποιες διαταραχές σε μερικά διαγράμματα οφείλονται σε errors του προγράμματος, όχι σε πραγματική φυσική.

Στα σχήματα αυτά, με μπλε χρώμα σχεδιάζεται η αφθονία των ελεύθερων σωματιδίων X , Y_x , με πορτοκαλί χρώμα η αφθονία των δέσμιων καταστάσεων με $s_{\text{pins}} = 0$ (singlet), Y_s , με πράσινο χρώμα η αφθονία για $s_{\text{pins}} = 1$ (triplet), Y_t και με κόκκινο χρώμα η περίοδος του Big Bang Nucleosynthesis.

Στα τα διαγράμματα εξετάζεται η συμπεριφορά των μεταβλητών για ίδιο α με διαφορετικές τιμές της μάζας (0.01 GeV και 100 GeV), με $\alpha=10^{-2}$, 10^{-3} , 10^{-4} και 10^{-5} . Όταν διατηρείται σταθερό το α και αλλάζει η μάζα η πρώτη μεταβλητή που θα αλλάξει σημαντικά είναι η ενεργός διατομή, όσο αυξάνεται η μάζα μικραίνει η ενεργός διατομή και επομένως

1. Τα X μένουν για λιγότερη διάρκεια σε ισορροπία με την κοσμική σούπα άρα θα έχουν μεγαλύτερη αφθονία
2. Μειώνεται το ποσοστό που φτιάχνει δέσμιες καταστάσεις (εξίσωση 4.17 δεύτερος όρος). Τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά παρατηρούνται πράγματι σε όλα τα διαγράμματα.

Ακόμα αν συγκριθούν τα διαγράμματα κάθετα με σταθερή μάζα και αλλαγή στην σκοτεινή λεπτή υφή και στην ενεργό διατομή αυτό που παρατηρείται είναι ότι, πρώτον όταν μικραίνει το α και η μάζα είναι σταθερή, αντίστοιχα μειώνεται και η ενεργός διατομή επομένως τα σωματίδια αποχωρούν από την κοσμική σούπα νωρίς και η αφθονία τους είναι περισσότερη. Το δεύτερο χαρακτηριστικό είναι ότι με την μείωση του α , μειώνεται και η ενέργεια σύνδεσης και η ενεργός διατομή άρα ο συντελεστής c_1 μειώνεται πολύ γρήγορα, επομένως πολύ λιγότερες δημιουργίες δέσμιων καταστάσεων. Ξανά αυτά τα δύο χαρακτηριστικά παρατηρούνται στα διαγράμματα.



Σχήμα 4.5: Αριστερή εικόνα : $a = 10^{-2}, m = 0.01\text{GeV}$. Δεξιά εικόνα : $a = 10^{-2}, m = 100\text{GeV}$.



Σχήμα 4.6: Αριστερή εικόνα : $a = 10^{-3}, m = 0.01\text{GeV}$. Δεξιά εικόνα : $a = 10^{-3}, m = 100\text{GeV}$.



Σχήμα 4.7: Αριστερή εικόνα : $a = 10^{-4}, m = 0.01\text{GeV}$. Δεξιά εικόνα : $a = 10^{-4}, m = 100\text{GeV}$.



Σχήμα 4.8: Αριστερή εικόνα : $a = 10^{-5}, m = 0.01\text{GeV}$. Δεξιά εικόνα : $a = 10^{-5}, m = 100\text{GeV}$.

Τέλος, κάτι που παρατηρείται σε όλα τα σχήματα είναι ότι η αφθονία των triplet είναι μεγαλύτερη από των singlet, αυτό γίνεται λόγω του συντελεστή 3 στις διαφορικές εξισώσεις.

Τα παραπάνω διαγράμματα αποτελούν ένα μέρος των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων, δεν αντιπροσωπεύουν την σκοτεινή ύλη του σύμπαντος μας καθώς σε όλες τις περιπτώσεις φαίνεται να υπάρχει περισσότερη η λιγότερη σκοτεινή ύλη από όσο χρειάζεται ώστε το σύμπαν να είναι επίπεδο.

- Για παράδειγμα στο Σχήμα 4.6 στο διάγραμμα της Αριστερής εικόνας με σκοτεινή λεπτή υφή $a = 10^{-4}$ και μάζα $m = 0.01 GeV$, οι δέσιμες καταστάσεις διασπώνται πριν το freeze out της σκοτεινής ύλης και πολύ πριν την Πυρηνοσύνθεση, επομένως δεν επηρεάζουν τα δεδομένα. Η πυκνότητα των ελεύθερων σωματιδίων σκοτεινής ύλης, $\frac{\rho'_{DM}}{s}$, είναι επτά τάξεις μικρότερη από την πυκνότητα της σκοτεινής ύλης που παρατηρείται στο σύμπαν μας, $\frac{\rho'_{DM}}{s} = 10^{-7} \cdot \frac{\rho_{DM}}{s}$. Αυτό σημαίνει ότι αν υπολογιζόταν το ποσοστό της αφθονίας της σκοτεινής ύλης σήμερα, θα ήταν επτά τάξεις μεγέθους μικρότερο από το πραγματικό, άρα

$$\Omega'_{DM,0} = 10^{-7} \cdot \Omega_{DM,0} = 10^{-7} \cdot 0.2606 \quad (4.22)$$

Αν υπολογιστεί τώρα η αναλογία του συνολικού ποσοστού των πυκνοτήτων των συστατικών του σύμπαντος ως προς την κρίσιμη πυκνότητα που χρειάζεται το σύμπαν για να είναι επίπεδο [19], αποδεικνύεται ότι

$$\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega'_{DM,0} + \Omega_{baryons,0} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (4.23)$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\Omega_0 \approx \Omega_{\Lambda,0} = 0.679 \ll 1 \quad (4.24)$$

αυτό σημαίνει ότι το σύμπαν έχει πολύ μικρότερη πυκνότητα από όση χρειάζεται για να είναι επίπεδο, δηλαδή να έχει μηδενική καμπυλότητα. Στην περίπτωση αυτή το σύμπαν θα διαστέλλεται εκθετικά με κυρίαρχο συστατικό τη σκοτεινή ενέργεια, με αποτέλεσμα η θερμοκρασία να μειώνεται μονοτονικά όσο περνάει ο χρόνος. Η κατάληξη ενός τέτοιου μοντέλου συχνά αναφέρεται ως "Big Chill".

- Αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα, στο Σχήμα 4.6 στο διάγραμμα της Δεξιάς εικόνας, η σκοτεινή λεπτή υφή παραμένει ίδια ενώ η μάζα τώρα είναι $m = 100 GeV$. Φαίνεται ότι οι δέσιμες καταστάσεις διασπώνται και πάλι πολύ νωρίς χρονικά άρα και πάλι δεν επηρεάζουν κατά πολύ το σύστημα. Η πυκνότητα των ελεύθερων σωματιδίων της σκοτεινής ύλης δια την εντροπία προκύπτει να είναι μία τάξη μεγέθους παραπάνω από αυτήν που παρατηρείται στο σύμπαν μας. Ένα

τέτοιο φαινόμενο θα είχε ως αποτέλεσμα να αλλάξει κατά πολύ το Ω_0 , δηλαδή

$$\Omega'_{DM,0} = 10 \cdot \Omega_{DM,0} = 10 \cdot 0.2606 = 2.606 \quad (4.25)$$

άρα,

$$\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega'_{DM,0} + \Omega_{baryons,0} + \Omega_{\Lambda,0} \approx \Omega'_{DM,0} \quad (4.26)$$

$$\Omega_0 \approx 3.285 \gg 1 \quad (4.27)$$

το οποίο σημαίνει ότι το σύμπαν έχει παραπάνω ύλη από όση χρειάζεται για να είναι επίπεδο. Ένα σύμπαν αυτού του μοντέλου θα καταλήξει μετά από πεπερασμένο χρόνο να καταρρεύσει, αυτό το φαινόμενο αναφέρεται ως "Big crunch".

4.3 Επιρροή δέσμιων καταστάσεων

Σε αυτή την εποενοότητα η περίπτωση όπου τα ελεύθερα σκοτεινά σωματίδια X αντιπροσωπεύουν ολόκληρο το ποσοστό της σκοτεινής ύλης του σύμπαντός μας, με ένα ποσοστό αυτών να είναι σε μορφή δέσμιων καταστάσεων.

Αν θεωρηθεί ενεργός διατομή $\sigma_0 \approx 3 \cdot 10^{-9} GeV^{-2}$ και διαφορετική σκοτεινή λεπτή υφή, προκύπτουν διαφορετικές μάζες και χρόνος ζωής για τις δέσμιες καταστάσεις. Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά αυτά επηρεάζουν ανάλογα το σύμπαν μας.

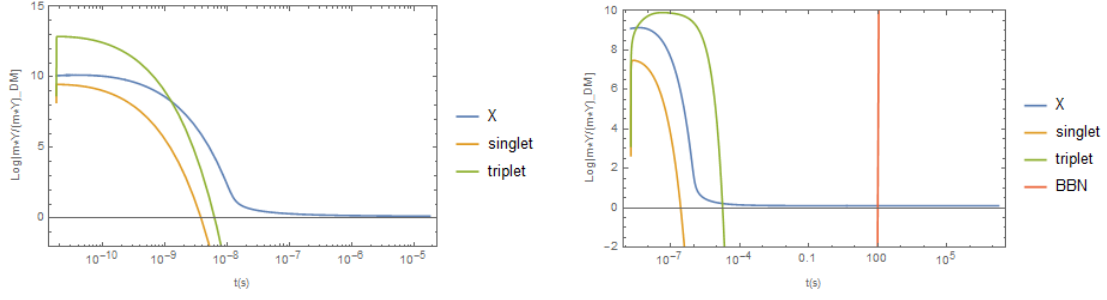
4.3.1 $\tau_{BSF} < \tau_{BBN}$

Στην περίπτωση που επιλεγεί $a = 10^{-2}$, $m = 288 GeV$ και $\sigma_0 = 3.78 \cdot 10^{-9} GeV^{-2}$, ο χρόνος ζωής προκύπτει να είναι $10^{-14} sec$, που όπως φαίνεται στην αριστερή φωτογραφία στο Σχήμα 4.9, οι δέσμιες καταστάσεις διασπώνται πριν το freeze out της σκοτεινής ύλης. Τα χαρακτηριστικά αυτού του διαγράμματος αντιστοιχούν σε WIMPs, weakly interacting massive particles.

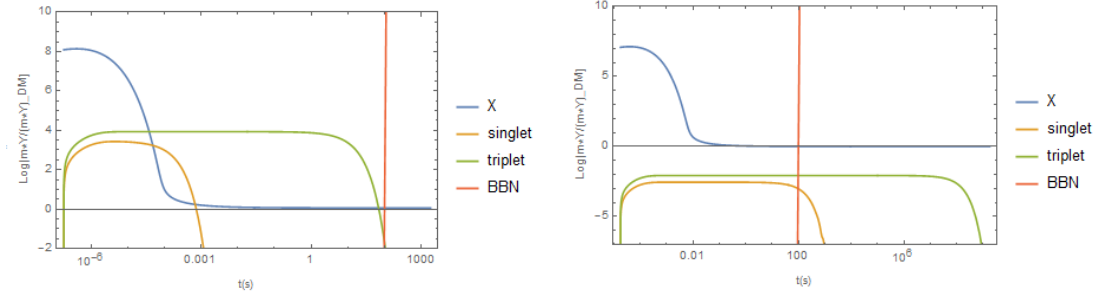
Το δεξί διάγραμμα απεικονίζει σκοτεινή ύλη με $a = 10^{-3}$, $m = 288 GeV$ και $\sigma_0 = 3.78 \cdot 10^{-9} GeV^{-2}$, με χρόνο ζωής της ortho-κατάστασης ίσο με $10^{-7} sec$. Η αφθονία των δέσμιων καταστάσεων φαίνεται να είναι έξι τάξεις μεγέθους παραπάνω από την αφθονία των ελεύθερων X , αλλά επειδή έχει τόσο μικρό χρόνο ζωής τελικά δεν επηρεάζει για παράδειγμα την Πυρηνοσύνθεση.

4.3.2 $\tau_{BSF} > \tau_{BBN}$

Το αριστερό διάγραμμα του σχήματος 4.10 απεικονίζει την κατανομή των ελεύθερων σωματιδίων σκοτεινής ύλης και των δέσμιων καταστάσεων με χαρακτηριστικά $a = 10^{-4}$, $m = 2.88 GeV$ και $\sigma_0 = 3.78 \cdot 10^{-9} GeV^{-2}$, με χρόνο ζωής της ortho-κατάστασης ίσο με $3.79 sec$. Οι δέσμιες καταστάσεις διασπώνται προς το τέλος της



Σχήμα 4.9: Με μπλε σχεδιάζεται η ποσότητα $Y \cdot m / (Y \cdot m)_{DM}$ των ελεύθερων σωματιδίων X της σκοτεινής ύλης, με πράσινο των δέσμιων καταστάσεων με $s = 1$, με πορτοκαλί των δέσμιων καταστάσεων με $s = 0$ και με κόκκινο η περίοδος του BBN . Αριστερή εικόνα: $a = 10^{-2}$, $m = 288 \text{ GeV}$. Δεξιά εικόνα: $a = 10^{-3}$, $m = 28.8 \text{ GeV}$.



Σχήμα 4.10: Με μπλε σχεδιάζεται η ποσότητα $Y \cdot m / (Y \cdot m)_{DM}$ των ελεύθερων σωματιδίων X της σκοτεινής ύλης, με πράσινο των δέσμιων καταστάσεων με $s = 1$, με πορτοκαλί των δέσμιων καταστάσεων με $s = 0$ και με κόκκινο η περίοδος του BBN . Αριστερή εικόνα: $a = 10^{-4}$, $m = 2.88 \text{ GeV}$. Δεξιά εικόνα: $a = 10^{-5}$, $m = 0.288 \text{ GeV}$.

Πυρηνosύνθεσης.

Ένα τέτοιο σενάριο θα οδηγούσε σε απότομη αύξηση της ακτινοβολίας κατά την διάρκεια της Πυρηνosύνθεσης και επομένως θα μπορούσε να επηρεάσει την αφθονία των πυρήνων στο σύμπαν μας. Όπως φαίνεται στο Κεφάλαιο 2, η αφθονία των νετρονίων εξαρτάται άμεσα από τον ρυθμό που αυξάνεται το σύμπαν και ως εκ τούτου και από τους σχετικιστικούς βαθμούς ελευθερίας, σχέση 2.32.

Ας θεωρηθεί χρονική στιγμή t_{dec} η στιγμή που οι δέσμιες καταστάσεις εξαϋλώνονται. Στο διάγραμμα 4.10 φαίνεται ότι

$$\frac{\rho_{BSF,dec}}{s_{dec}} \approx 10^4 \frac{\rho_{DM,0}}{s_0} \quad (4.28)$$

γνωρίζοντας ότι,

$$\frac{\rho_{DM,0}}{s_0} = 2,27 \cdot 10^{-10} \text{ GeV} \quad (4.29)$$

και τελικά

$$\frac{\rho_{BSF,dec}}{s_{dec}} = 1.955 \cdot 10^{-6} GeV \quad (4.30)$$

Επομένως το ποσοστό της ενέργειας που ήταν σε μορφή δέσμιων καταστάσεων απελευθερώνεται σε μορφή σκοτεινής ακτινοβολίας. Άρα

$$\rho_{BSF,dec} = 1.955 \cdot 10^{-6} GeV \cdot s_{dec} \quad (4.31)$$

$$\rho_{BSF,dec} = \rho_{dark-rad,dec} \quad (4.32)$$

$$1.9 \cdot 10^{-6} \cdot GeV \cdot 2 \frac{\pi^2}{45} g_{*s} T_{SM}^3 = \frac{\pi^2}{30} T_{DR}^4 g'_* \quad (4.33)$$

$$g'_* = 18.7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{T_{SM}^3}{T_{DR}^4} GeV \quad (4.34)$$

Για να φανεί αν αυτοί οι σχετικιστικοί βαθμοί ελευθερίας που αναδύονται είναι επιτρεπτοί στην φάση της Νουκλεοσύνθεσης, χρησιμοποιείται η εξίσωση [22]

$$g_*^h \left(\frac{T_{BBN}^h}{T_{BBN}} \right)^4 \leq 2.52 \quad (95\%CL) \quad (4.35)$$

όπου με τον όρο g_*^h αναφέρεται στους βαθμούς ελευθερίας της σκοτεινής συνιστώσας, αντίστοιχα T_{BBN}^h στην θερμοκρασία της σκοτεινής συνιστώσας και γνωρίζοντας ότι $T_{BBN} \approx 1 MeV$.

Επομένως χρησιμοποιώντας την σχέση 4.34 και 4.36, βρίσκεται ότι

$$\frac{2 \cdot 10^{-5} GeV}{10^{-3} GeV} = 0.02 \leq 2.52 \quad (4.36)$$

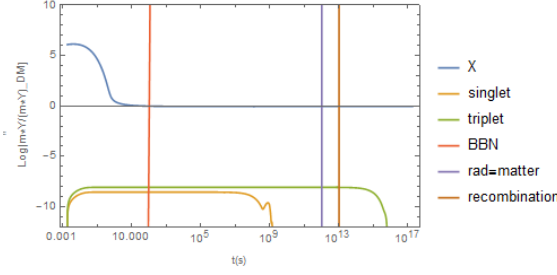
που ισχύει.

Συνεπώς αυτό φαίνεται να είναι ένα αποδεκτό σενάριο.

Το δεξί διάγραμμα του σχήματος 4.10 απεικονίζει την κατανομή των ελεύθερων σωματιδίων σκοτεινής ύλης και των δέσμιων καταστάσεων με χαρακτηριστικά $a = 10^{-5}$, $m = 0.288 GeV$ και $\sigma_0 = 3.78 \cdot 10^{-9} GeV^{-2}$, με χρόνο ζωής της ortho-κατάστασης ίσο με $3.7 \cdot 10^7 sec$.

Ένα τέτοιο σενάριο δεν θα επηρέαζε την Πυρηνοσύνθεση, αφού δεν έχουν διασπαστεί οι δέσμιες καταστάσεις ακόμα, και είναι αρκετά πριν το Recombination οπότε ενδεχομένως να μην επηρέαζε αισθητά ούτε την διαδικασία αυτή. Παρ' όλα αυτά επειδή η διάσπαση δεν έγινε πολύ μακριά χρονικά από το σήμερα, μπορεί να υπολογιστεί η ενέργεια που θα λαμβάναμε αυτά τα σκοτεινά φωτόνια σε μία διαδικασία για direct detection.

Από το διάγραμμα 4.10 παρατηρείται ότι η εξαύλωση γίνεται σε χρόνο $t_{dec} \approx 10^9 sec$



Σχήμα 4.11: Με μπλε σχεδιάζεται η ποσότητα $Y \cdot m / (Y \cdot m)_{DM}$ των ελεύθερων σωματιδίων X της σκοτεινής ύλης με πράσινο των δέσμιων καταστάσεων με $s = 1$ και με πορτοκαλί των δέσμιων καταστάσεων με $s = 0$. Ακόμα με καφέ η περίοδος του BBN, με κόκκινο η ισότητα ύλης ακτινοβολίας και με μοβ το recombination. Με χαρακτηριστικά: $a = 10^{-6}$, $m = 0.0288 GeV$.

και επειδή το σύμπαν κυριαρχείται από την ακτινοβολία ακόμα, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί το scale factor $a_{dec} = 6.45 \cdot 10^{-6}$.

Είναι γνωστό ότι το ποσοστό πυκνότητας της σκοτεινής ύλης σήμερα είναι $\Omega_{DM,0} = 0.2607$ [19], άρα την στιγμή της εξαύλωσης θα ήταν

$$\Omega_{DM,dec} = \frac{\Omega_{DM,0}}{a_{dec}^3} \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,dec}} = 9.7 \cdot 10^{14} \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,dec}} \quad (4.37)$$

και

$$\Omega_{DR,dec} = \Omega_{DM,dec} \cdot 10^{-2} \quad (4.38)$$

άρα

$$\Omega_{DR,0} = \Omega_{DR,dec} \cdot a^4 \cdot \frac{\rho_{c,dec}}{\rho_{c,0}} \quad (4.39)$$

και τελικά

$$\rho_{DR,0} = \Omega_{DR,0} \cdot \rho_{c,0} = 8.2 \cdot 10^{-14} \cdot GeV \cdot cm^{-3} \quad (4.40)$$

4.3.3 $\tau_{BSF} \gg \tau_{BBN}$

Το διάγραμμα του σχήματος 4.11 απεικονίζει την κατανομή των ελεύθερων σωματιδίων σκοτεινής ύλης και των δέσμιων καταστάσεων με χαρακτηριστικά $a = 10^{-6}$, $m = 0.0288 GeV$, $\sigma_0 = 3.78 \cdot 10^{-9} GeV^{-2}$ και με χρόνο ζωής της ortho-κατάστασης ίσο με $3.6 \cdot 10^{14} sec$.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.11 το ποσοστό των δέσμιων καταστάσεων σκοτεινής ύλης είναι $\rho_{BSF,dec} = 10^{-8} \rho_{DM,dec}$. Αυτό το ποσοστό είναι αρκετά μικρό για να επηρεάσει αισθητά κάποια κοσμολογική παράμετρο, π.χ. την σταθερά του Hubble.

Θα μπορούσε όμως να παίζει κάποιο μικρό ρόλο στο re-ionisation μετά το recombination, μέσω του kinetic mixing. Παρ' όλα αυτά λόγω του ότι η πυκνότητας της

σκοτεινής ακτινοβολίας είναι πολύ μικρή, και το ποσοστό που θα αλληλεπίδραση τελικά με την βαρυονική ύλη είναι τελικά ακόμη μικρότερο, δεν θα ήταν δυνατό να παρατηρηθεί η επιρροή τελικά.

Κεφάλαιο 5

Παραμετρος του Hubble και δέσμιες καταστάσεις

Αυτό το κεφάλαιο εστιάζεται στις συνέπειες που έχει η δημιουργία δέσμιων καταστάσεων σε διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με τα χαρακτηριστικά. Θα μπορούσε να επηρεάσει την εξέλιξη κάποιων παραμέτρων, για παράδειγμα της παραμέτρου του Hubble που μετράμε σήμερα. Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος επιρροής πρέπει πρώτα να μελετηθεί (σύντομα) ο τρόπος που γίνεται η έρευνα για τον προσδιορισμό κάποιων κοσμολογικών παραμέτρων.

5.1 CMB spectrum

Αυτή η υπό-ενότητα είναι η συνέχεια της υπό-ενότητας 1.3, όπου εξετάζεται το CMB αυτή τη φορά με περισσότερη προσοχή. Τα φαινόμενα που περιγράφηκαν στην υπό-ενότητα 1.3 είναι αυτά που θα απασχολήσουν και αυτή την υπό-ενότητα.

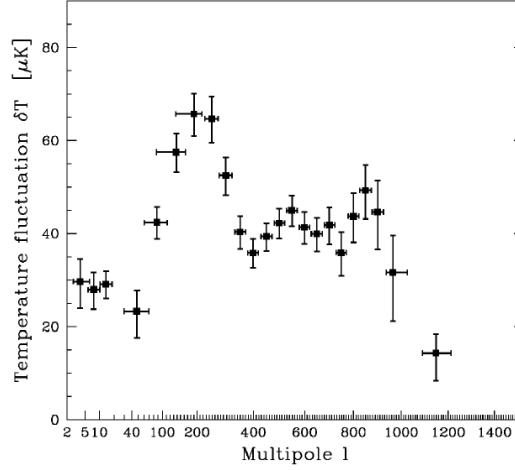
Οι ανισοτροπίες που φαίνονται στο φάσμα της θερμοκρασίας των φωτονίων του CMB μπορούν να αναλυθούν σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.1)$$

όπου $Y_{lm}(\theta, \phi)$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές. Αυτό που είναι πιο ενδιαφέρον όμως είναι η σχέση των θερμοκρασιών μεταξύ τους, δηλαδή πως αλλάζει η θερμοκρασία από το ένα σημείο στο άλλο, έτσι ώστε να φαίνεται πιο εύκολα πόσο μεγάλη είναι μια ανισοτροπία που παρατηρείται και σε τι διαταραχή αντιστοιχεί. Επομένως, ορίζεται η συνάρτηση

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}), \frac{\delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle_{\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos\theta} \quad (5.2)$$

η οποία μας δείχνει την σχέση των θερμοκρασιών σε ένα διάνυσμα \hat{n} , σε σχέση με την



Σχήμα 5.1: Οι ανισotropίες του CMB της θερμοκρασίας εκφρασμένες σε multipole l [1].

θερμοκρασία σε ένα σημείο που δείχνει το διάνυσμα \hat{n}' [1]. Σε σφαιρικές αρμονικές αυτή η συνάρτηση γράφεται ως

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta) \quad (5.3)$$

όπου το P_l είναι τα πολυώνυμα Legendre. Γενικά η τιμή του C_l δίνει την διαταραχή της θερμοκρασίας για ένα γωνιακό άνοιγμα $\theta \approx 180^\circ/l$

Στο διάγραμμα 5.1 σχεδιάζονται οι πειραματικές τιμές των διαταραχών της θερμοκρασίας των φωτονίων του CMB, η συνάρτηση που σχεδιάζεται είναι η

$$\Delta_T \equiv \left(\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \right)^{1/2} \langle T \rangle \quad (5.4)$$

συναρτήσει του l .

Παρατηρείται στο διάγραμμα 5.1 η πρώτη και μεγαλύτερη κορυφή για $l \approx 200$, αυτή η τιμή του l αντιστοιχεί σε γωνιακό άνοιγμα $\theta = 1^\circ$. Επομένως το peak του φάσματος είναι καλά καθορισμένο από τα πειραματικά δεδομένα και συνοδεύεται από όλο το θεωρητικό υπόβαθρο που το υποστηρίζει.

Ουσιαστικά αυτή η κορυφή διαμορφώνεται από τα acoustic oscillations που έγινε η περιγραφή τους στο πρώτο κεφάλαιο. Με λίγο παραπάνω λεπτομέρεια μπορεί να υπολογιστεί η ταχύτητα όπου μπορούσε να ταξιδέψει το ακουστικό κύμα στην περίοδο του recombination και συνεπώς ο 'ακουστικός ορίζοντας', η αλλιώς μέχρι που μπορούσε να ταξιδέψει το κύμα. Αν υπολογιστεί αυτός ο ορίζοντας τότε υπολογίζεται το αντίστοιχο πραγματικό μήκος της διαταραχής, l .

Η ακουστική ταχύτητα εξαρτάται από τις συνιστώσες του σύμπαντος εκείνη την περίο-

δο, καθώς επηρεάζουν το μέσο το οποίο διαδίδεται το κύμα. Συγκεκριμένα η ταχύτητα είναι

$$c_s^2 = \frac{\delta p_\gamma + \delta p_b}{\delta \rho_\gamma \delta \rho_b} \quad (5.5)$$

όπου δείχνει αυτή την εξάρτηση, τα φωτόνια, ηλεκτρόνια και βαρυόνια εκείνη την περίοδο θεωρούνται ένα ενιαίο ρευστό καθώς ακόμα δεν είχαν σταματήσει να αλληλεπιδρούν [5]. Με περαιτέρω υπολογισμούς αποδεικνύεται ότι

$$c_s^2 = \frac{1}{3(1+R)}, \quad R \equiv \frac{4\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_\gamma} \quad (5.6)$$

Στη συνέχεια για να υπολογιστεί η απόσταση που έχει διαδοθεί η διαταραχή μέχρι το recombination, υπολογίζεται το comoving distance

$$d_s \equiv \int_{ini}^t \frac{c_s dt}{a} \quad (5.7)$$

όπου t_{ini} είναι μία αρχική χρονική στιγμή που ξεκινά να διαδίδεται το κύμα μέχρι την χρονική στιγμή t όπου τώρα θα είναι το $t_{recombination}$ [5].

Εφόσον λοιπόν έχει υπολογιστεί το πραγματικό μήκος της διαταραχής, για να υπολογιστεί η αντίστοιχη γωνία που παρατηρείται πειραματικά αυτή η ανισοτροπία στην θερμοκρασία, πρέπει να υπολογιστεί και η απόσταση μας από την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης. Με αντίστοιχο τρόπο με το κεφάλαιο 1 μπορεί να βρεθεί αυτή η απόσταση αλλά αυτή τη φορά με έναν πιο ακριβή υπολογισμό. Άρα

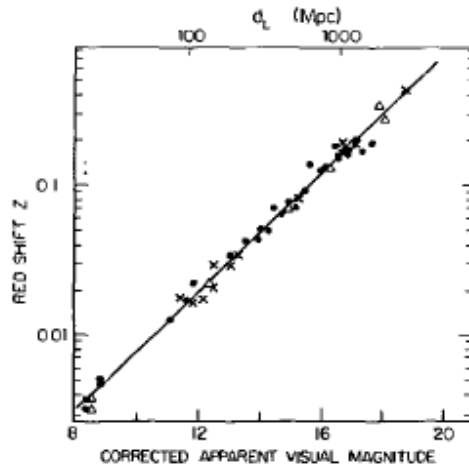
$$d_a(z) = \int_{t(z)}^{t_0} \frac{c \cdot dt}{a} \quad (5.8)$$

όπου αντίστοιχα με την σχέση 5.7 υπολογίζεται η comoving distance από την επιφάνεια, και με t_0 συμβολίζεται η στιγμή σήμερα [5].

Με αυτούς τους υπολογισμούς η γωνία θ πράγματι καταλήγει να είναι περίπου 1° . Το φάσμα των φωτονίων του CMB δεν δίνει ένα αποτέλεσμα απόλυτο για την σύσταση του σύμπαντος, αλλά θεωρώντας κάποιο κοσμολογικό μοντέλο και εισάγοντας τις μεταβλητές βρίσκεται αν το μοντέλο προβλέπει ή όχι το φάσμα που παίρνουμε. Για παράδειγμα το μοντέλο που προτείνεται από το CMB, προβλέπει την σταθερά του Hubble να είναι σήμερα $H_0 = 67.66 \text{Mpc}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{km}$ [19].

5.2 Supernovae

Άλλες πειραματικές μετρήσεις που έχουν δώσει φως στην κοσμολογία τα τελευταία χρόνια, προέρχονται από πειράματα που μελετάνε την φωτεινότητα των supernovae type 1a. Αυτά τα πειράματα παρέχουν δεδομένα για την παράμετρο του Hubble και για την επιτάχυνση του σύμπαντος.



Σχήμα 5.2: Το διάγραμμα Hubble[7].

Ο τρόπος που επιτυγχάνονται τα παραπάνω βασίζεται στο ότι υπολογίζεται η φωτεινότητα του supernovae όταν εκπέμπεται το φως και έπειτα συγκρίνεται με την φωτεινότητα που λαμβάνεται όταν το φως φτάνει στην γη.

Αρχικά, είναι γνωστόν ότι η φωτεινότητα l μίας πηγής που βρίσκεται σε απόσταση d με απόλυτη φωτεινότητα L συνδέονται με τον τύπο

$$l = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (5.9)$$

όπου ουσιαστικά θεωρείται μία σφαίρα με ακτίνα d , επειδή η φωτεινότητα απλώνεται σε όλη την σφαίρα γύρω της αλλά ο παρατηρητής λαμβάνει μόνο ένα κομμάτι της. Κάποια χαρακτηριστικά που πρέπει να συμπεριληφθούν υπόψη σε αυτή τη σχέση ώστε να αναφέρεται σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν είναι [18, 17] :

- Η απόσταση μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή είναι $d = ra_{t_0}$ όπου r είναι η co-moving απόσταση τους
- Ο ρυθμός που φθάνουν τα φωτόνια είναι μικρότερος από αυτόν που εκπέμπονται, δηλαδή δύο φωτόνια που εκπέμφθηκαν με ενδιάμεσο διάστημα δt όταν θα ανιχνευτούν θα απέχουν χρονικά $\delta t(1+z)$
- Η ενέργεια του κάθε φωτονίου είναι χαμηλότερη από αυτή που εκπέμφθηκε, λόγω του redshift, κατά $1/(1+z)$

Επομένως

$$l = \frac{L}{4\pi r^2 a^2(t_0)(1+z)^2} \quad (5.10)$$

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (5.11)$$

όπου ορίζεται η απόσταση $d_L = r \cdot a(t_0) \cdot (1 + z)$ η λεγόμενη luminosity distance. Επειδή τα supernovae είναι πολύ πιο κοντά χρονικά σε εμάς άρα $z \ll 1$ μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \frac{1}{2}(q_0 + 2)H_0^2(t_0 - t_1)^2 + \dots \quad (5.12)$$

όπου q_0 είναι η επιτάχυνση του σύμπαντος σήμερα [18]. άρα η luminosity distance τελικά γράφεται ως

$$d_L = H_0^{-1}(z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots) \quad (5.13)$$

η σχέση 5.13 είναι αυτή που τελικά προσδιορίζει τις μεταβλητές. Συλλέγοντας πειραματικά δεδομένα για την luminosity distance και το redshift για supernovae type 1a μπορεί να δημιουργηθεί ένα αντίστοιχο διάγραμμα με το Σχήμα 5.2 και να βρεθεί η προσεγγιστική κλίση της ευθείας που προβλέπει τα αποτελέσματα, δηλαδή η σταθερά του Hubble.

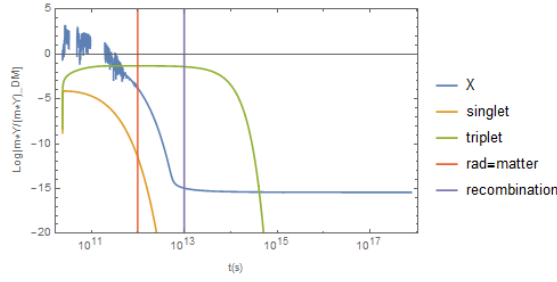
Το αποτέλεσμα αυτών των πειραματικών μετρήσεων προβλέπει ότι η σταθερά του Hubble σήμερα είναι $H_0 = 72.8 Mpc^{-1} \cdot s^{-1} \cdot km$ [20].

5.3 Περιπτώσεις

Στις δύο παραπάνω υπό-ενότητες αναφέρθηκαν οι τιμές της σταθεράς του Hubble σήμερα, από δύο διαφορετικά πειράματα και φαίνονται διαφορετικές μεταξύ τους. Ο ένας υπολογισμός βασίζεται σε μετρήσεις με redshift $z \approx 1100$ και ο άλλος για $z \ll 1$, θα μπορούσε να έχει συμβεί κάποιο φαινόμενο που να αλλάζει τον τρόπο ανάπτυξης του σύμπαντος και επομένως την παράμετρο του Hubble ;

Το σκεπτικό αυτού του κεφαλαίου είναι ότι η σκοτεινή ύλη ξεκίνησε να δημιουργεί δέσμιες καταστάσεις, positronium-like, οι οποίες σε κάποια χρονική στιγμή μετά το recombination, διασπάστηκαν σε ακτινοβολία. Το φαινόμενο αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αλλάζουν οι πυκνότητες ενέργειας των συστατικών του σύμπαντος σε κάποια χρονική στιγμή και επομένως από τις εξισώσεις Friedmann να αλλάξει και η παράμετρος του Hubble σήμερα. Όλα αυτά με τον περιορισμό να μην παρατηρηθεί κάποια αλλαγή στα καθορισμένα πειραματικά δεδομένα, για παράδειγμα η κορυφή της ανισοτροπιών του CMB, Σχήμα 5.1, πρέπει να παραμείνει στην $\theta = 1^\circ$, συνεπώς δεν πρέπει να αλλάξει ούτε το d_s ούτε το d_a .

Η απόσταση d_s δεν αλλάζει ούτως ή άλλως διότι το φαινόμενο της διάσπασης συμβαίνει μετά το recombination, το σημαντικό μέρος είναι το d_a όπου οφείλει να διατηρηθεί σταθερό με την ήδη καθορισμένη τιμή. Επομένως με τα νέα δεδομένα αλλάζει η σταθερά του Hubble σήμερα ώστε να διατηρηθεί σταθερό το d_a .



Σχήμα 5.3: 5% της σκοτεινής ύλης σε δέσμιες καταστάσεις. Με μπλε σχεδιάζεται η ποσότητα $Y \cdot m / (Y \cdot m)_{DM}$ των ελεύθερων σωματιδίων X της σκοτεινής ύλης, με πράσινο των δέσμιων καταστάσεων με $s = 1$ και με πορτοκαλί των δέσμιων καταστάσεων με $s = 0$. Οι κάθετες γραμμές συμβολίζουν την στιγμή ισότητας ύλης-ακτινοβολίας και την στιγμή του *recombination*. Θεωρήθηκε ότι κατά προσέγγιση ο χρόνος κυλάει όπως στην κυριαρχία της ύλης.

5.3.1 Δέσμιες καταστάσεις : 5/100

Η πρώτη περίπτωση που μελετάται είναι το 5/100 της σκοτεινής ύλης να βρίσκεται σε δέσμιες καταστάσεις, ortho-state. Ισχύει ότι

$$\Omega_X = 2mY_X s_0 / \rho_c \quad (5.14)$$

όπου $\rho_c \approx 4.9 \times 10^{-6} \text{GeV} \cdot \text{cm}^{-3}$, $s_0 \approx 2795 \text{cm}^{-3}$ και $\Omega_X \approx 0.26$ [1]. Τότε προκύπτει ότι το

$$Y_X \cdot m_X = \frac{\rho_X}{s} = 2.279069 \cdot 10^{-10} \quad (5.15)$$

αν λοιπόν αυτή είναι η πυκνότητα ολόκληρου του ποσοστού της σκοτεινής ύλης, τότε το 5% είναι

$$\frac{\rho_{BSF,1}}{s} = 1.1395 \cdot 10^{-11} \quad (5.16)$$

καί ένα μικρότερο ποσοστό γίνεται δέσμια κατάσταση με spin 0 ($\rho_{BSF,0}/s = 1.65 \cdot 10^{-12}$, αυτό προκύπτει από το διάγραμμα 5.3).

Για να δημιουργηθεί πυκνότητα δέσμιων καταστάσεων που να ικανοποιεί την σχέση 5.16, χρειάζεται μία αλληλεπίδραση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 1.96 \cdot 10^7 \cdot \text{GeV}^{-2} \\ m_X &= 5.3 \cdot 10^{-9} \text{GeV} \\ a &= 1.3 \cdot 10^{-5} \\ \Delta &= 2.4 \cdot 10^{-19} \text{GeV} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων Boltzman 4.17, 4.18 και 4.19 με αυτές τις μεταβλητές οδηγούν στο διάγραμμα 5.3. Παρατηρείται ότι, οι δέσμιες καταστάσεις έχουν την αφθονία που είχε προβλεφθεί, και η αφθονία/πυκνότητα των ελεύθερων X είναι πολύ μικρότερη από των δέσμιων καταστάσεων.

Ουσιαστικά θεωρείται ένα είδος σκοτεινής ύλης, διαφορετικό από τα WIMPs που είναι το πιο διαδεδομένο προβλεπόμενο είδος, που αλληλεπιδρά με αυτά τα χαρακτηριστικά και διαμορφώνει δέσμιες καταστάσεις. Έπειτα αυτές εξαυλώνονται και ένα ποσοστό των ελεύθερων σωματιδίων σκοτεινής ύλης παραμένει, όμως επειδή είναι πολύ μικρό, δεν επηρεάζει κάπως τις προβλέψεις για την σκοτεινή ύλη. Τώρα μπορεί να εξεταστεί με λεπτομερής υπολογισμούς το πως τελικά ένα τέτοιο φαινόμενο θα επηρεάσει την εξέλιξη του σύμπαντος.

- **Υπολογισμός scale factor**

Το πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός του scale factor a , την στιγμή του recombination και την στιγμή που δίνεται η διάσπαση των δέσμιων καταστάσεων. Γράφοντας την εξίσωση του Friedman 2.15 για ένα σύμπαν που κυριαρχεί η ύλη, από τη εξίσωση 2.20 για προσεγγιστική συνάρτηση του scale factor, με τιμές $\Omega_{m,0} = 0.3111$ και $H_0 = 67.66$ [19], βρίσκειται ότι

$$a(t_{decay}) = 0.00476484 \quad (5.18)$$

Η συνάρτηση που προκύπτει, γνωρίζοντας ότι το $a(t_{rec}) = 1/(1+z_{rec}) = 0.0009082$ είναι

το recombination γίνεται όταν το σύμπαν είναι ο 10^{13} δευτερόλεπτα και οι δέσμιες καταστάσεις διασπώνται όταν το σύμπαν είναι 10^{14} δευτερόλεπτα.

- **Υπολογισμός d_a**

Στη συνέχεια υπολογίζεται η απόσταση από την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης, όπου συνδυάζεται η εξίσωση 5.8 και 2.15. Η εξίσωση 2.15 μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= a \cdot H_0 \cdot \sqrt{(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0})} \\ \frac{dt}{a} &= c \frac{da}{a^2 \cdot H_0 \cdot \sqrt{(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0})}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

άρα το ολοκλήρωμα ως προς τον χρόνο στην εξίσωση 5.8, μπορεί να γραφεί ως προς το scale factor a για ευκολία με χρήση της εξίσωσης 5.19

$$d_a = \int_{a_{rec}}^1 c \cdot \frac{da}{a^2 \cdot H_0 \cdot \sqrt{(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0})}} \quad (5.20)$$

Η απόσταση αυτή προκύπτει να είναι

$$d_a = 13889.2 \cdot Mpc \quad (5.21)$$

όπου και εδώ έχουν χρησιμοποιηθεί οι ίδιες μεταβλητές για τα Ω των συνιστωσών και την παράμετρο Hubble όπως προβλέπεται από δεδομένα από το CMB [19].

- **Υπολογισμός ποσοστών Ω μετά την διάσπαση**

Γνωρίζουμε ότι το ποσοστό αφθονίας της σκοτεινής ύλης σήμερα είναι $\Omega_X = 0.26066$ και το ποσοστό της αφθονίας της ακτινοβολίας σήμερα είναι $\Omega_r = 8.4 \cdot 10^{-5}$, άρα μπορεί εύκολα να βρεθεί πόσο ήταν το ποσοστό της σκοτεινής ύλης και της ακτινοβολίας λίγο πριν γίνει η διάσπαση των δέσμιων καταστάσεων

$$\begin{aligned}\Omega_{X,before-decay} &= \frac{\Omega_{X,0}}{a_{decay}^3} \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}} = 335 \cdot 10^6 \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}} \\ \Omega_{r,before-decay} &= \frac{\Omega_{r,0}}{a_{decay}^4} \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}} = 174602 \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}}\end{aligned}\quad (5.22)$$

αφού είναι γνωστά τα ποσοστά λίγο πριν το decay των δέσμιων καταστάσεων, μπορεί να υπολογιστεί πως θα αλλάξουν αυτά τα ποσοστά αν έχουμε το 5% του ποσοστού σκοτεινής ύλης να γίνεται ακτινοβολία.

$$\Omega_{X,after-decay} = \Omega_{X,before-decay} \cdot 0.95 = 2.28 \cdot 10^6 \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}}$$

$$\Omega_{r,after-decay} = \Omega_{r,before-decay} + \Omega_{X,before-decay} \cdot 0.05 = 294772 \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}}\quad (5.23)$$

και τώρα αν ξανά υπολογιστεί το ποσοστό αφθονίας που υπάρχει σήμερα για την κάθε συνιστώσα βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned}\Omega_{X,o,new} &= \Omega_{X,after-decay} \cdot a_{decay}^3 \cdot \frac{\rho_{c,before-decay}}{\rho_{c,0}} = 0.95\Omega_{m,0} = 0.2476 \\ \Omega_{r,o,new} &= \Omega_{r,after-decay} \cdot a_{decay}^4 \cdot \frac{\rho_{c,before-decay}}{\rho_{c,0}} = 0.0001519\end{aligned}\quad (5.24)$$

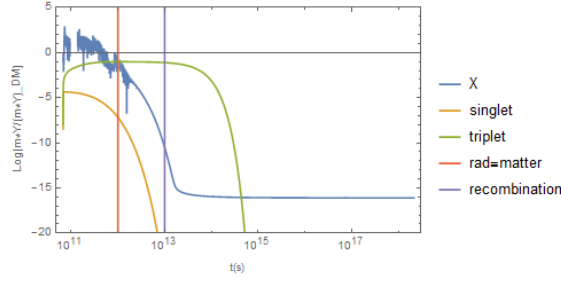
- **Προσδιορισμός παραμέτρου του Hubble**

Για να προσδιοριστεί η παράμετρος, υπολογίζεται την απόσταση μας από την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης και μεταβάλλεται η τιμή του H_0 ώστε η απόσταση να διατηρείται σταθερή και ίση με την τιμή της εξίσωσης 5.21.

Αρχικά προσδιορίζεται η απόσταση που έχουν ταξιδέψει τα φωτόνια από την στιγμή του recombination μέχρι την στιγμή της διάσπασης των δέσμιων καταστάσεων,

$$d_{a,1} = \int_{a_{rec}}^{a_{decay}} c \cdot \frac{da}{a^2 \cdot H_0 \cdot \sqrt{(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0})}}\quad (5.25)$$

$$d_{a,1} = 579.445 \cdot Mpc\quad (5.26)$$



Σχήμα 5.4: 10% της σκοτεινής ύλης σε δέσμιες καταστάσεις. Με μπλε σχεδιάζεται η ποσότητα $Y \cdot m / (Y \cdot m)_{DM}$ των ελεύθερων σωματιδίων X της σκοτεινής ύλης, με πράσινο των δέσμιων καταστάσεων με $s = 1$ και με πορτοκαλί των δέσμιων καταστάσεων με $s = 0$. Οι κάθετες γραμμές συμβολίζουν την στιγμή ισότητας ύλης-ακτινοβολίας και την στιγμή του *recombination*. Θεωρήθηκε ότι κατά προσέγγιση ο χρόνος κυλάει όπως στην κυριαρχία της ύλης.

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές που λαμβάνονται από το CMB, αφού ακόμα δεν έχει γίνει η διάσπαση. Ακόμα προσδιορίζεται η απόσταση που έχουν διανύσει τα φωτόνια από την στιγμή της διάσπασης μέχρι σήμερα

$$d_{a,2} = \int_{a_{decay}}^1 c \cdot \frac{da}{a^2 \cdot H'_0 \cdot \sqrt{(\Omega_{m,0,new} a^{-3} + \Omega_{r,0,new} a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0})}} \quad (5.27)$$

όπου τώρα χρησιμοποιούνται οι καινούργιες τιμές για τις αφθονίες και το d_a πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$d_{a,2} = d_a - d_{a,1} = 13309.8 \cdot Mpc \quad (5.28)$$

για να προκύψει αυτό το αποτέλεσμα η τιμή της σταθεράς του Hubble σήμερα πρέπει να είναι

$$H'_0 = 68.8 \cdot km/s/Mpc \quad (5.29)$$

5.3.2 Δέσμιες καταστάσεις : 10/100

Αντίστοιχα με την προηγούμενη υπό-ενότητα μπορεί να θεωρηθεί μία αλληλεπίδραση και ένα είδος σκοτεινής ύλης όπου η αφθονία των δέσμιων καταστάσεων είναι το 10% του ποσοστού αφθονία της σκοτεινής ύλης. Δηλαδή ότι

$$\frac{\rho_{BSF,1}}{s} = 2.279069 \cdot 10^{-11} \quad (5.30)$$

για να γίνει αυτό πρέπει το σωματίδιο X και η αλληλεπίδραση να έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= 9.7 \cdot 10^7 \cdot \text{GeV}^{-2} \\
 m_X &= 2.7 \cdot 10^{-9} \text{Gev} \\
 a &= 1.5 \cdot 10^{-5} \\
 \Delta &= 1.5 \cdot 10^{-19} \text{GeV}
 \end{aligned}
 \tag{5.31}$$

έπειτα λύνονται οι διαφορικές εξισώσεις Boltzmann 4.17, 4.18 και 4.19 για αυτές τις μεταβλητές και προκύπτει το διάγραμμα 5.4. Στο διάγραμμα 5.4 φαίνεται ότι παραμένει ένα μικρό ποσοστό σκοτεινής ύλης ελεύθερων σωματιδίων αυτού του είδους αλλά επειδή είναι τόσο μικρό το ποσοστό δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα.

Σε αντιστοιχία με τους υπολογισμούς της προηγούμενης ενότητας η μόνη αλλαγή που χρειάζεται να γίνουν είναι στα ποσοστά που θα έχουν οι αφθονίες αν το 10% της σκοτεινής ύλης γίνει ακτινοβολία. Επομένως περαιτέρω υπολογισμοί που χρειάζονται να γίνουν είναι οι εξής

- **Υπολογισμός ποσοστών Ω μετά την διάσπαση**

Γνωρίζουμε ότι το ποσοστό αφθονίας της σκοτεινής ύλης σήμερα είναι $\Omega_X = 0.26066$ και το ποσοστό της αφθονίας της ακτινοβολίας σήμερα είναι $\Omega_r = 8.4 \cdot 10^{-5}$, άρα μπορεί εύκολα να βρεθεί πόσο ήταν το ποσοστό της σκοτεινής ύλης και της ακτινοβολίας λίγο πριν γίνει η διάσπαση των δέσμιων καταστάσεων

$$\begin{aligned}
 \Omega_{X,before-decay} &= \frac{\Omega_{X,0}}{a_{decay}^3} \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}} = 2.403 \cdot 10^6 \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}} \\
 \Omega_{r,before-decay} &= \frac{\Omega_{r,0}}{a_{decay}^4} \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}} = 174602 \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}}
 \end{aligned}
 \tag{5.32}$$

αφού είναι γνωστά τα ποσοστά λίγο πριν το decay των δέσμιων καταστάσεων, μπορεί να υπολογιστεί πως θα αλλάξουν αυτά τα ποσοστά αν έχουμε το 5% του ποσοστού σκοτεινής ύλης να γίνεται ακτινοβολία.

$$\Omega_{X,after-decay} = \Omega_{X,before-decay} \cdot 0.90 = 2.163 \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}} \cdot 10^6$$

$$\Omega_{r,after-decay} = \Omega_{r,before-decay} + \Omega_{X,before-decay} \cdot 0.1 = 414943 \cdot \frac{\rho_{c,0}}{\rho_{c,before-decay}}
 \tag{5.33}$$

και τώρα αν ξανά υπολογιστεί το ποσοστό αφθονίας που υπάρχει σήμερα για την

κάθε συνιστώσα βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned}\Omega_{X,o,new} &= \Omega_{X,after-decay} \cdot a_{decay}^3 \cdot \frac{\rho_{c,before-decay}}{\rho_{c,0}} = 0.9\Omega_{m,0} = 0.2346 \\ \Omega_{r,o,new} &= \Omega_{r,after-decay} \cdot a_{decay}^4 \cdot \frac{\rho_{c,before-decay}}{\rho_{c,0}} = 0.000214\end{aligned}\quad (5.34)$$

- **Προσδιορισμός παραμέτρου του Hubble**

Αντίστοιχα με τους προηγούμενους υπολογισμούς προσδιορίζεται η απόσταση που έχουν ταξιδέψει τα φωτόνια από την στιγμή του recombination μέχρι την στιγμή της διάσπασης των δέσμιων καταστάσεων,

$$d_{a,1} = \int_{a_{rec}}^{a_{decay}} c \cdot \frac{da}{a^2 \cdot H_0 \cdot \sqrt{(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0})}} \quad (5.35)$$

$$d_{a,1} = 579.445 \cdot Mpc \quad (5.36)$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές που λαμβάνονται από το CMB, αφού ακόμα δεν έχει γίνει η διάσπαση. Ακόμα προσδιορίζεται η απόσταση που έχουν διανύσει τα φωτόνια από την στιγμή της διάσπασης μέχρι σήμερα

$$d_{a,2} = \int_{a_{decay}}^1 c \cdot \frac{da}{a^2 \cdot H'_0 \cdot \sqrt{(\Omega_{m,0,new}a^{-3} + \Omega_{r,0,new}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0})}} \quad (5.37)$$

όπου τώρα χρησιμοποιούνται οι καινούργιες τιμές για τις αφθονίες και το d_a πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$d_{a,2} = d_a - d_{a,1} = 13309.8 \cdot Mpc \quad (5.38)$$

για να προκύψει αυτό το αποτέλεσμα η τιμή της σταθεράς του Hubble σήμερα πρέπει να είναι

$$H'_0 = 70.05 \cdot km/s/Mpc \quad (5.39)$$

Με την παραπάνω διαδικασία κατορθώνεται να εξηγηθεί ένα μόνο μέρος του σφάλματος της διαφοράς της προβλεπόμενης τιμής της σταθεράς του Hubble σήμερα. Όπως φαίνεται η τιμή της 5.29 και 5.39 είναι σχεδόν στο ενδιάμεσο του εύρους μεταξύ της προβλεπόμενης τιμής από το CMB και τα Supernovae Type Ia.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Η διπλωματική αυτή εργασία επικεντρώνεται στην φύση της σκοτεινής ύλης του σύμπαντός μας και στις διαδικασίες που συνοδεύουν την ύπαρξή της. Μια τέτοια διαδικασία είναι η δημιουργία δέσμιων καταστάσεων, αντίστοιχες με αυτές του ποζιτρονίου, καθώς μελετούνται περιπτώσεις όπου τα σωματίδια σκοτεινής ύλης είναι μη-σχετικιστικά. Μελετώντας αυτή τη διαδικασία φαίνεται ότι η διάσπαση αυτών των καταστάσεων μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την εξέλιξη του σύμπαντός μας.

Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση όπου η σκοτεινή ύλη στο σύμπαν μας αποτελείται από ένα μόνο είδος σωματιδίων. Σε αυτή την περίπτωση μελετήθηκαν σενάρια όπου άλλαζαν οι τιμές της λεπτής υφής και της μάζας των σωματιδίων, με σκοπό η ενεργός διατομή της εξάυλωσης για τα ελεύθερα σωματίδια να διατηρείται σταθερή και κατάλληλη ώστε να προκύπτει η σωστή αφθονία της σκοτεινής ύλης στο σύμπαν μας. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι καθώς μεγαλώνει ο χρόνος ζωής των δέσμιων καταστάσεων, μειώνεται το ποσοστό δημιουργίας τους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μικρότερη τιμή λεπτής υφής οδηγεί σε μικρότερη διάσπαση, παράλληλα όμως σημαίνει και μικρότερη πιθανότητα δημιουργίας δέσμιων καταστάσεων.

Αν θεωρηθεί όμως ότι δεν υπάρχει μόνο ένα είδος σκοτεινού σωματιδίου, αλλά δύο, τότε μπορεί να προκύψουν διαφορετικές κοσμολογικές επιπτώσεις.

Το δεύτερο κομμάτι της εργασίας μελετά την ασυμφωνία μέτρησης της σταθεράς του Hubble, H_0 , από το κοσμικό υπόβαθρο ακτινοβολίας και από τα Supernovae Type 1A. Τα δύο πειράματα που υπολογίζουν διαφορετική τιμή για το H_0 βασίζονται σε μετρήσεις από το Cosmic Microwave Background με $z \approx 1100$ και από Supernovae Type 1A με $z \approx 1$.

Ουσιαστικά αυτό που μελετήθηκε είναι η περίπτωση όπου κάποιες δέσμιες καταστάσεις μετατρέπουν ποσοστό της ύλης σε ακτινοβολία. Συγκεκριμένα θεωρήθηκε ότι το σύμπαν αποτελείται από τουλάχιστον δύο είδη σκοτεινής ύλης, το ένα είδος αντιστοιχεί

στο 95% (ή 90%) του συνολικού ποσοστού και είναι σε μορφή ελεύθερων σωματιδίων. Ενώ το δεύτερο καλύπτει υπόλοιπο 5% (ή 10%) και είναι σε μορφή δέσμιων καταστάσεων που εξαυλώνονται κάποια χρόνια μετά την περίοδο του recombination.

Αρχικά μελετήθηκαν ποια θα είναι τα χαρακτηριστικά των σωματιδίων ενός τέτοιου μοντέλου και έπειτα πως θα επηρέαζε η διάσπαση αυτή, την σταθερά του Hubble. Για να υπολογιστεί η σταθερά του Hubble, θεωρείται ότι το comoving distance από την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης είναι αυτό που μετράται από το πείραμα Planck (ώστε να μην επηρεαστούν οι κορυφές του CMB Power Spectrum), και αλλάζοντας σε κάποια χρονική στιγμή τις κοσμολογικές παραμέτρους, εφόσον πια θα έχει γίνει η διάσπαση των δέσμιων καταστάσεων και θα υπάρχει λιγότερη ύλη, προκύπτει ότι η σταθερά του Hubble πρέπει να είναι διαφορετική. Συγκεκριμένα προκύπτει να είναι $68.8 \cdot km/s/Mpc$ (ή $70.05 \cdot km/s/Mpc$), ανάλογα την περίπτωση. Το οποίο μειώνει την διαφορά της τιμής του H_0 από τα δύο πειράματα κατά 23% (ή 47%) .

Σε μελλοντική εργασία θα μπορούσε να μελετηθεί η περίπτωση που οι διασπάσεις των δέσμιων καταστάσεων γίνονται πριν το recombination. Κάτι τέτοιο θα επηρέαζε το comoving sound horizon αλλά και το comoving distance από την επιφάνεια της τελευταίας σκέδασης, και κατά συνέπεια τις κορυφές του CMB Power Spectrum . Ακόμα θα μπορούσε να μελετηθεί πως αυτή η διάσπαση επηρεάζει τα Baryon Acoustic Oscillations.

Βιβλιογραφία

- [1] Barbara Sue Ryden. *Introduction to Cosmology*. New York, Ny, Cambridge University Press, 2017.
- [2] Kneib, J. [U+2010]P., et al. “Hubble Space Telescope Observations of the Lensing Cluster Abell 2218.” *The Astrophysical Journal*, vol. 471, no. 2, 10 Nov. 1996, pp. 643–656, 10.1086/177995.
- [3] Tkachev, Igor. “Cosmology and Dark Matter.” *CERN Yellow Reports: School Proceedings*, vol. 1, no. 1, 18 Dec. 2017, p. 259 Pages, arxiv.org/abs/1802.02414, 10.23730/CYRSP-2017-005.259.
- [4] Clowe, Douglas, et al. “A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter.” *The Astrophysical Journal*, vol. 648, no. 2, 30 Aug. 2006, pp. L109–L113, 10.1086/508162.
- [5] Lesgourgues, Julien. “TASI Lectures on Cosmological Perturbations.” *ArXiv:1302.4640 [Astro-Ph]*, 19 Feb. 2013, arxiv.org/abs/1302.4640.
- [6] Bertone, Gianfranco, et al. “Particle Dark Matter: Evidence, Candidates and Constraints.” *Physics Reports*, vol. 405, no. 5–6, Jan. 2005, pp. 279–390, www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157304003515, 10.1016/j.physrep.2004.08.031.
- [7] Kolb, Edward W. *The Early Universe*. [Suppl.]. Redwood City, Calif., Addison-Wesley, 1988.
- [8] von Harling, Benedict, and Kalliopi Petraki. “Bound-State Formation for Thermal Relic Dark Matter and Unitarity.” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2014, no. 12, 16 Dec. 2014, pp. 033–033, arxiv.org/abs/1407.7874, 10.1088/1475-7516/2014/12/033.
- [9] Lu, Bo-Qiang, et al. “Constraints on the Sommerfeld-Enhanced Dark Matter Annihilation from the Gamma Rays of Subhalos and Dwarf Galaxies.” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, no. 04, 10 Apr. 2018, pp. 035–035, arxiv.org/abs/1711.00749, 10.1088/1475-7516/2018/04/035.

- [10] Hryczuk, Andrzej, et al. “Relic Densities Including Sommerfeld Enhancements in the MSSM.” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2011, no. 3, 1 Mar. 2011, p. 69, arxiv.org/abs/1010.2172, 10.1007/JHEP03(2011)069.
- [11] Cassel, S. “Sommerfeld Factor for Arbitrary Partial Wave Processes.” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 37, no. 10, 1 Oct. 2010, p. 105009, arxiv.org/abs/0903.5307, 10.1088/0954-3899/37/10/105009.
- [12] Akhiezer, A I, and N P Merenkov. “The Theory of Lepton Bound-State Production.” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 29, no. 10, 28 May 1996, pp. 2135–2140, 10.1088/0953-4075/29/10/021.
- [13] Hans Albrecht Bethe, and Edwin E Salpeter. *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*. Berlin Goettingen Heidelberg Springer, 1957.
- [14] Jiménez Arranz, Óscar, and Federico Mescia. *The Role of the Sommerfeld Enhancement in Dark Matter Physics*. 2018.
- [15] Stroschio, M. “Positronium: A Review of the Theory.” *Physics Reports*, vol. 22, no. 5, Dec. 1975, pp. 215–277, 10.1016/0370-1573(75)90029-0.
- [16] Morrison, John C. *Modern Physics for Scientists and Engineers*. Amsterdam[U+202F]; Boston[U+202F]; Paris, Elsevier, 2015.
- [17] Riotto, Antonio. *Lecture Notes on Cosmology*. 2013.
- [18] Weinberg, Steven. *Cosmology*. Oxford[U+202F]; New York, Oxford University Press, 2008.
- [19] Planck Collaboration, et al. “Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters.” *ArXiv:1807.06209 [Astro-Ph]*, 20 Sept. 2019, arxiv.org/abs/1807.06209.
- [20] Dhawan, Suhail, et al. “Measuring the Hubble Constant with Type Ia Supernovae as Near-Infrared Standard Candles.” *Astronomy Astrophysics*, vol. 609, Jan. 2018, p. A72, www.aanda.org/articles/aa/pdf/2018/01/aa31501-17.pdf, 10.1051/0004-6361/201731501.
- [21] Dodelson, Scott. *Modern Cosmology*. Amsterdam[U+202F]; London, Academic Press, 2003.
- [22] Feng, Jonathan L., et al. “Thermal Relics in Hidden Sectors.” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2008, no. 10, 30 Oct. 2008, p. 043, arxiv.org/abs/0808.2318, 10.1088/1475-7516/2008/10/043.