



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ PERRON-FROBENIUS
ΣΕ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Πολίτη Σεβαστή

Επιβλέπων Καθηγητής:
Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ PERRON-FROBENIUS
ΣΕ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Πολίτη Σεβαστή

Τριμελής Επιτροπή:

Ν. Γιαννακάκης, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Π. Στεφανέας, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2020

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τον κύκλο των προπτυχιακών σπουδών μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω:

Αρχικά, τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, Καθηγητή Ε.Μ.Π., ο οποίος μου πρότεινε το συγκεκριμένο θέμα, με καθοδήγησε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας και ήταν διαθέσιμος κάθε φορά που χρειαζόμουν τη βοήθεια του.

Τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, Ν. Γιαννακάκη, Αναπλ. Καθηγητή Ε.Μ.Π., και Π. Στεφανέα, Επίκ. Καθηγητή Ε.Μ.Π., για τη συμμετοχή τους σε αυτή. Επίσης τους ευχαριστώ διότι μέσα από τα μαθήματά τους μου πρόσφεραν μερικές πολύ χρήσιμες γνώσεις που αναμφίβολα θα αξιοποιήσω στο μέλλον.

Τους γονείς μου Δημήτρη και Αναστασία, καθώς και την αδερφή μου Αντωνία, για τη στήριξη και την αγάπη τους καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής μου.

Τέλος, τους φίλους μου που είναι πάντα δίπλα μου και που μου χάρισαν μια αξέχαστη φοιτητική ζωή.

© (2020) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Το κύριο μέλημα κάθε ζωντανού οργανισμού είναι η επιβίωση. Υπάρχουν ποικίλα μοντέλα πρόβλεψης της ανάπτυξης των διάφορων πληθυσμών. Η απλούστερη μορφή πληθυσμιακού μοντέλου είναι το εκθετικό μοντέλο ανάπτυξης, το οποίο υποθέτει ότι ο πληθυσμός αυξάνεται εκθετικά χωρίς όρια στην ανάπτυξή του (αθάνατος πληθυσμός). Ενώ τα εκθετικά μοντέλα ανάπτυξης λειτουργούν καλά για ορισμένους οργανισμούς όπως τα βακτήρια που συνεχώς αναπτύσσονται και διαιρούνται, γίνονται λιγότερο ακριβή όταν εξετάζουμε άλλους οργανισμούς που περνούν διαφορετικά στάδια καθώς μεγαλώνουν. Με αυτά τα είδη, είναι βιολογικά πρέπον να εξεταστεί η δυναμική του πληθυσμού με ένα ηλικιακά δομημένο τρόπο, και εδώ είναι αναγκαία η γραμμική άλγεβρα. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της Θεωρίας Perron-Frobenius και πώς αυτή εφαρμόζεται σε πληθυσμιακά μοντέλα.

Λέξεις Κλειδιά. Θεωρία Perron-Frobenius, μη αρνητικός πίνακας, φασματική ακτίνα, Δημογραφία, πληθυσμιακό μοντέλο, πολυωνυμικός πίνακας

Abstract

The main concern of every living organism is its survival. There are various models for predicting the growth of different populations. The simplest form of population model is the exponential growth model, which assumes that the population is growing exponentially with no limits placed on its growth (immortal population). While exponential growth models work well for certain organisms like bacteria that continually grow and divide, they become less accurate when we consider other organisms that go through different stages as they age. With these species, it can be biologically relevant to consider population dynamics in an age-structured manner, and it is here that linear algebra comes in. The purpose of this thesis is to study the Perron-Frobenius Theory and demonstrate how it can be applied to population models.

Keywords. Perron-Frobenius Theory, nonnegative matrix, spectral radius, Demography, population model, polynomial matrix

Κατάλογος Σχημάτων

3.1	Γραφική παράσταση της αύξησης του πληθυσμού των βατράχων προς το άπειρο με την πάροδο 20 χρόνων.	44
3.2	Γραφική παράσταση του πληθυσμού των βατράχων, ο οποίος μετά την πάροδο 5 χρόνων παραμένει στάσιμος.	45
3.3	Γραφική παράσταση της συρρίκνωσης του πληθυσμού των θαλάσσιων χελωνών προς το 0 με την πάροδο 100 χρόνων.	51
3.4	Γραφική παράσταση του πληθυσμού των θαλάσσιων χελωνών, ο οποίος μετά την πάροδο περίπου 20 χρόνων παραμένει στάσιμος.	52
3.5	Γραφική παράσταση της αύξησης του πληθυσμού των αρκούδων grizzly με την πάροδο 100 χρόνων.	55
3.6	Γραφική παράσταση του πληθυσμού των αρκούδων grizzly, ο οποίος μετά την πάροδο περίπου 8 χρόνων παραμένει στάσιμος.	57

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	iii
Περίληψη	v
Abstract	vii
Κατάλογος Σχημάτων	ix
Εισαγωγή	1
0.1 Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας	1
1 Βασικές Έννοιες της Ανάλυσης Πινάκων	3
1.1 Χαρακτηριστικά Ποσά Ενός Τετραγωνικού Πίνακα	3
1.1.1 Ορίζουσες	3
1.1.2 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	4
1.2 Νόρμες	8
1.2.1 Νόρμες Διανυσμάτων	8
1.2.2 Νόρμες Πινάκων	9
1.2.3 Φασματική Ακτίνα και Νόρμες Πινάκων	12
2 Θεωρία Perron-Frobenius	15
2.1 Μη Αρνητικοί Πίνακες	15
2.2 Θετικοί Πίνακες	22
2.3 Μη Υποβιβάσιμοι, μη Αρνητικοί Πίνακες	28
3 Ένα Μοντέλο Πινάκων στη Δημογραφία	35
3.1 Το Μοντέλο	35
3.2 Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας	37
3.3 Ο Καθαρός Ρυθμός Αναπαραγωγής	38
3.4 Δημογραφική Ερμηνεία με τη Βοήθεια Παραδειγμάτων	41
4 Επέκταση της Θεωρίας Perron-Frobenius σε Πολυωνυμικούς Πίνακες	59
4.1 Μία Εισαγωγή στους Πολυωνυμικούς Πίνακες	59
4.2 Θεωρία Perron-Frobenius για Πολυωνυμικούς Πίνακες	62
4.3 Γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Δημογραφίας	64
5 Συμπεράσματα	67

Βιβλιογραφία	69
A' Σχετικά με τη Χρήση του Στατιστικού Προγράμματος R	71
B' Σύντομες Βιογραφίες των Oscar Perron και Ferdinand Georg Frobenius	73

Εισαγωγή

Η Δημογραφία είναι η επιστήμη της μελέτης των πληθυσμών και εκτιμάται ότι ξεκίνησε στο Λονδίνο γύρω στα μέσα του 17ου αιώνα. Εντάσσεται στις κοινωνικές επιστήμες, καθώς έχει ως επίκεντρο τον άνθρωπο. Οι τεχνικές και οι μέθοδοι ανάλυσής της όμως, απαιτούν περισσότερες από τις στοιχειώδεις γνώσεις μαθηματικών και στατιστικής.

Οι δημογράφοι με στόχο τη μελέτη της μεταβολής ενός πληθυσμού κατασκευάζουν διάφορα πληθυσμιακά μοντέλα. Οι γεννήσεις, οι θάνατοι και οι μετακινήσεις αποτελούν τις βασικές δημογραφικές συνιστώσες της μεταβολής του πληθυσμού και συμβάλλουν στη διαμόρφωση της δυναμικής του. Διαφορετικοί δείκτες μέτρησης της γονιμότητας, θνησιμότητας και μετανάστευσης προσφέρουν χρήσιμα και συμπληρωματικά μεταξύ τους εργαλεία για την αποτύπωση των φαινομένων και τη μελέτη των διαφοροποιήσεων τους μεταξύ πληθυσμιακών ομάδων. Ένας τέτοιος δείκτης είναι ο *καθαρός ρυθμός αναπαραγωγής* (net reproductive rate). Ένα από αυτά τα μοντέλα, το οποίο αφορά τον καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής και μελετάται σε αυτή τη διπλωματική, απαιτεί γνώσεις της Ανάλυσης Πινάκων.

Η εξέλιξη της Ανάλυσης Πινάκων υπήρξε ραγδαία και αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο της Γραμμικής Άλγεβρας, ο οποίος μελετά τους πίνακες και τις αλγεβρικές τους ιδιότητες, με πολλές εφαρμογές στις φυσικές, τεχνολογικές και οικονομικές επιστήμες. Το μοντέλο που θα μελετήσουμε βασίζεται στη Θεωρία Perron-Frobenius. Η θεωρία αυτή αναπτύχθηκε από τους Γερμανούς μαθηματικούς Oscar Perron(1907) και Ferdinand Georg Frobenius(1912) και έχει πολλές εφαρμογές και σε άλλους τομείς, όπως στη θεωρία πιθανοτήτων, στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων, στα οικονομικά κ.α.

0.1 Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας

Η εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιό της αριθμείται και υποδιαιρείται σε ενότητες οι οποίες επίσης αριθμούνται και κάποιες υποδιαιρούνται. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποδιαίρεση της ενότητας. Οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, τα πορίσματα, τα λήμματα, οι τύποι, τα σχήματα και τα παραδείγματα επίσης αριθμούνται, ανάλογα με το κεφάλαιο, την ενότητα και την υποενότητα που ανήκουν.

Στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες της Ανάλυσης Πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, στην Ενότητα 1.1 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ποσά ενός τετραγωνικού πίνακα, οι ορίζουσες, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα καθώς και οι σημαντικότερες ιδιότητές τους και στην Ενότητα 1.2 η φασματική ακτίνα και οι νόρμες τους. Οι έννοιες αυτές θα είναι αρκετά χρήσιμες στα επόμενα κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 2 της εργασίας, αρχικά εισάγονται βασικοί ορισμοί (μη αρνητικός πίνακας, θετικός πίνακας, μη υποβιβάσιμος πίνακας) και θεωρήματα σχετικά με τους μη αρνητικούς και θετικούς πίνακες. Στη συνέχεια διατυπώνεται η Θεωρία Perron-Frobenius

που αναφέρεται σε θετικούς και κατόπιν σε μη αρνητικούς πίνακες, όπου αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα είναι θετική πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της είναι θετικό ή μη αρνητικό. Στην περίπτωση θετικού πίνακα ή μη αρνητικού και μη υποβιβάσιμου πίνακα η φασματική ακτίνα έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με ένα.

Το Κεφάλαιο 3, το οποίο είναι βασισμένο στο άρθρο των Chi-Kwong Li και Hans Schneider, Applications of Perron-Frobenius Theory To Population Dynamics, αφιερώνεται στο πληθυσμιακό μοντέλο (μη αρνητικών) πινάκων που θα μελετηθεί, όπου οι πίνακες σχηματίζονται με βάση τις ηλικιακές κλάσεις ενός πληθυσμού, και στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός του πρωταρχικού πίνακα και σύμφωνα με τη Θεωρία Perron-Frobenius διατυπώνονται το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας καθώς και θεωρήματα που αφορούν τον καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής ενός πληθυσμού. Επιπλέον στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου γίνεται δημογραφική ερμηνεία των όσων διατυπώθηκαν μέσα από τρία παραδείγματα. Το πρώτο παράδειγμα είναι υποθετικό και αφορά τον πληθυσμό των βατράχων, ενώ τα επόμενα δύο αφορούν τους πληθυσμούς των θαλάσσιων χελωνών και των αρκούδων grizzly, των οποίων οι πίνακες προέρχονται από άλλα άρθρα.

Το Κεφάλαιο 4 ξεκινάει με μια εισαγωγή στους πολυωνυμικούς πίνακες, με ορισμούς και θεωρήματα, τα οποία αποτελούν βάση για την επέκταση της Θεωρίας Perron-Frobenius για πολυωνυμικούς πίνακες καθώς και για τη γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος Της Δημογραφίας.

Τέλος στο Κεφάλαιο 5 παρατίθενται τα συμπεράσματα.

Σε όλα τα κεφάλαια ορισμένες έννοιες, θεωρήματα, προτάσεις και πορίσματα, για την καλύτερη κατανόηση τους, συνοδεύονται από παραδείγματα. Τόσο για τον υπολογισμό των πράξεων όσο και για τη δημιουργία των σχημάτων έγινε χρήση του στατιστικού προγράμματος R.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες της Ανάλυσης Πινάκων

1.1 Χαρακτηριστικά Ποσά Ενός Τετραγωνικού Πίνακα

1.1.1 Ορίζουσες

Ορισμός 1.1.1. Ορίζουσα (determine) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(K)$ είναι μια απεικόνιση:

$$\det : M_n(K) \rightarrow K, A \rightarrow \det A,$$

για την οποία ισχύει:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, όπου A_{ij} είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας, ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A , αν διαγράψουμε τα στοιχεία της i -γραμμής και της j -στήλης. Η ορίζουσα του πίνακα A συμβολίζεται με $|A|$, $\det(A)$ ή $\det A$. Για $n = 2$ η τιμή της ορίζουσας είναι $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Ο υπολογισμός της ορίζουσας

του (αναπτύσσοντας ως προς την 1η γραμμή) γίνεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2[2 \cdot (-4) - 3 \cdot 4] - (-1)[3 \cdot (-4) - 1 \cdot (-4)] + 2(3 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = -42.$$

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των οριζουσών είναι οι ακόλουθες:

1. Αν κάνουμε μία μετάθεση των στηλών ενός πίνακα A , τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει, ισούται με την ορίζουσα του A πολλαπλασιασμένη επί το πρόσημο της μετάθεσης ($\varepsilon(\sigma) = 1$, αν η σ είναι άρτια ή $\varepsilon(\sigma) = -1$), αν η σ είναι περιττή), δηλαδή με $\varepsilon(\sigma)\det A$.

2. Αν μια στήλη ενός πίνακα A πολλαπλασιαστεί επί $\lambda \in K$, τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει ισούται με $\lambda \det A$.
3. Η ορίζουσα ενός πίνακα δεν μεταβάλλεται, αν αντικαταστήσουμε μία στήλη του με το άθροισμα αυτής συν κάποιο πολλαπλάσιο μιας άλλης στήλης του, δηλαδή:

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n).$$

4. Για κάθε $A, B \in M_n(K)$ ισχύει ότι:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

5. Αν ένας πίνακας A είναι τριγωνικός άνω, τριγωνικός κάτω ή διαγώνιος, τότε:

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

6. Ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$.
7. Αν ένας πίνακας A έχει μηδενική στήλη, τότε $\det A = 0$.
8. Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα ισούται με 1.
9. Για κάθε πίνακα A ισχύει $\det(A^k) = (\det A)^k$.
10. Όταν δύο στήλες ενός πίνακα A ταυτίζονται, $\det A = 0$.
11. Η ορίζουσα του ανάστροφου πίνακα A^T ενός πίνακα A , ισούται με την ορίζουσα του πίνακα A .

Βάσει της τελευταίας ιδιότητας, όλες οι ιδιότητες που αναφέρονται στις στήλες του πίνακα A , ισχύουν και για τις γραμμές του.

1.1.2 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Έστω $M_n(K)$ το σύνολο των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία στο σώμα K και ένας πίνακας $A \in M_n(K)$.

Ορισμός 1.1.2. Αν A ο πίνακας που ορίστηκε παραπάνω, τότε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in M_{n \times 1}$ ονομάζεται *ιδιοδιάνυσμα* του A αν το $A\mathbf{x}$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του \mathbf{x} , δηλαδή αν:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \tag{1.1}$$

για κάποιο μιγαδικό αριθμό (βαθμωτό) λ . Ο αριθμός λ ονομάζεται *ιδιοτιμή* του A και λέμε ότι το \mathbf{x} είναι ένα *ιδιοδιάνυσμα* του A που αντιστοιχεί στην λ .

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A λέγονται και *χαρακτηριστικά ποσά* του A .

Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A συμβολίζεται $\sigma(A)$ και ονομάζεται *φάσμα* (spectrum) του πίνακα.

Από όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα, το μεγαλύτερο μέτρο τους ονομάζεται *φασματική ακτίνα* (spectral radius) και συμβολίζεται με $\rho(A)$, δηλαδή:

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}. \tag{1.2}$$

Αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή λ είναι εύκολο να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα λύνοντας την εξίσωση (1.1), για $\mathbf{x} \neq 0$. Η (1.1) γράφεται αναλυτικά:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Το σύστημα (1.3) είναι ομογενές με n εξισώσεις και n αγνώστους τις συνιστώσες του \mathbf{x} .

Θεώρημα 1.1.1. Ένα ομογενές σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ με m εξισώσεις και n αγνώστους και A ένα $m \times n$ πίνακα που έχει βαθμό $\beta(A)$, έχει τις εξής λύσεις:

1. Μόνο τη μηδενική λύση, αν $n = \beta(A)$.
2. Μη μηδενικές λύσεις αν $\beta(A) < n$ ή $m < n$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν $n - \beta(A)$ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.1 το σύστημα (1.3) θα έχει και μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν $\beta(A - \lambda I) < n$, ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{1.4}$$

Η (1.4) γράφεται αναλυτικά:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5}$$

Η (1.4) ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* του πίνακα A . Το a μέλος της (1.4) πολλαπλασιασμένο επί $(-1)^n$ (ώστε ο συντελεστής του λ^n να είναι η μονάδα), δηλαδή το:

$$X_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) \tag{1.6}$$

λέγεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του A . Από την (1.4) προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές λ του πίνακα A . Αντικαθιστώντας στο σύστημα (1.3) τις ιδιοτιμές, παίρνουμε για κάθε μία από αυτές και ένα σύστημα που οι μη μηδενικές λύσεις του είναι τα ιδιοδιάνυσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή αυτή.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να αναλυθεί πάντοτε σε (πιθανά επαναλαμβανόμενους) πρωτοβάθμιους παράγοντες στο \mathbb{C} και να γραφεί στη μορφή:

$$X_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i},$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, είναι οι διακεκριμένες ρίζες του $X_A(\lambda)$ στο \mathbb{C} και n_1, n_2, \dots, n_i , η πολλαπλότητα κάθε ρίζας, η οποία ονομάζεται *αλγεβρική πολλαπλότητα*. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας για έναν πίνακα $A \in M_n(K)$ ισχύει $n_1 + n_2 + \dots + n_i = n$.

Αντικαθιστώντας κάθε μια διακεκριμένη ιδιοτιμή, $\lambda = \lambda_i$ στο σύστημα (1.1) παίρνουμε ως γενική λύση του ομογενούς συστήματος ένα σύνολο διανυσμάτων που το συμβολίζουμε με $V(\lambda_i)$ ονομάζεται *ιδιόχωρος*, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $M_{n \times 1}(K)$.

Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda_i)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i , και η διάσταση του υποχώρου $V(\lambda_i)$ είναι:

$$\dim(V(\lambda_i)) = n - \beta(A - \lambda_i I).$$

Ο αριθμός $\dim(V(\lambda_i))$ ονομάζεται *γεωμετρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής λ_i και δηλώνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i .

Θεώρημα 1.1.2. Έστω λ ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_n(K)$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\alpha(\lambda)$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $\gamma(\lambda)$. Τότε ισχύει ότι:

$$\gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda).$$

Δηλαδή σε αυτή αντιστοιχούν το πολύ $\alpha(\lambda)$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπετε [5, Θεώρημα 11.1.4]. □

Θεώρημα 1.1.3. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, $k \leq n$ είναι διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_n(K)$ και \mathbf{x}_i είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, τότε τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπετε [5, Θεώρημα 11.1.5]. □

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda - 2)^2.$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι $X_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 0$, οι οποίες αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα A . Η $\lambda_1 = 0$ είναι απλή ιδιοτιμή, ενώ η $\lambda_{2,3} = 0$ είναι διπλή ιδιοτιμή του πίνακα A .

- $\lambda_1 = 0$:

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1 = 0$ ιδιοτιμή επιλύουμε το σύστημα:

$$(A - \lambda I_3)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow (A - 0I_3)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην λ_1 έχουν τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -k \\ k \end{bmatrix}, \quad k \neq 0 \in \mathbb{R}$$

και αποτελούν τον ιδιοχώρο $V(\lambda_1)$.

Για $k = 1$, το διάνυσμα:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει το χώρο, επομένως αποτελεί βάση του $V(\lambda_1)$ και επομένως η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_1 θα είναι $\dim(V(\lambda_1))$, ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

- $\lambda_{2,3} = 2$:

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_{2,3} = 2$ ιδιοτιμή επιλύουμε το σύστημα:

$$(A - \lambda I_3)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow (A - 2I_3)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_{2,3}$ έχουν τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}, \quad k \neq 0 \in \mathbb{R}$$

και αποτελούν τους ιδιοχώρους $V(\lambda_2), V(\lambda_3)$.

Για $k = 1$, το διάνυσμα:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει το χώρο, επομένως αποτελεί βάση των $V(\lambda_2), V(\lambda_3)$ και επομένως η γεωμετρική πολλαπλότητα της διπλής ιδιοτιμής $\lambda_{2,3}$ θα είναι $\dim(V(\lambda_2)) = \dim(V(\lambda_3)) = 1$, μικρότερη την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

Για τα χαρακτηριστικά ποσά ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(K)$ οι βασικότερες ιδιότητες διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, όπως αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Πρόταση 1.1.1. Έστω πίνακας $A \in M_n(K)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, οι ιδιοτιμές του.

1. Οι ιδιοτιμές ενός άνω (κάτω) τριγωνικού πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

2. Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
3. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν δεν έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή.
4. Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.
5. $\text{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, δηλαδή το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών του A ισούται με το ίχνος του, $\text{tr}A$, και $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.
6. Ο πίνακας $\mu I_n + A$ έχει ιδιοτιμές $\mu + \lambda_1, \mu + \lambda_2, \dots, \mu + \lambda_n$.
7. Αν ο A είναι θετικά ορισμένος, όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί, ενώ αν είναι μη-αρνητικά ορισμένος, τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του είναι ίση με μηδέν και οι υπόλοιπες είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
8. Αν λ, \mathbf{x} είναι χαρακτηριστικά ποσά του $A \in M_n(K)$, τότε για τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^k ισχύει $A^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$, όπου $k \in \mathbb{N}$.

1.2 Νόρμες

1.2.1 Νόρμες Διανυσμάτων

Ορισμός 1.2.1. Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται *νόρμα* διανυσμάτων αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.
2. $\|\mathbf{x}\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$.
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Βασικά παραδείγματα νορμών διανυσμάτων στο \mathbb{C}^n είναι τα εξής:

- Η l_p -νόρμα, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $p \geq 1$, ορίζεται ως:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \|[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}. \quad (1.7)$$

Κάθε l_p νόρμα ($1 \leq p < +\infty$) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Ορισμού 1.2.1. Ειδικότερα, η τριγωνική ανισότητα:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$$

είναι γνωστή και ως ανισότητα Minkowski.

- Η Ευκλείδεια νόρμα (l_2 -νόρμα) ορίζεται ως:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \|[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} \quad (1.8)$$

και αποτελεί μία ειδική μορφή της l_p νόρμας (για $p = 2$).

- Η αθροιστική νόρμα (l_1 -νόρμα) ορίζεται ως:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \|[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \quad (1.9)$$

- Η μεγιστική νόρμα (l_∞ -νόρμα) ορίζεται ως

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \|[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}. \quad (1.10)$$

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω το διάνυσμα $\mathbf{x} = (2, 1, -3, 5)$. Σύμφωνα με τις (1.8)-(1.10) οι αντίστοιχες νόρμες $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_1$ και $\|\mathbf{x}\|_\infty$ είναι:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|2|^2 + |1|^2 + |-3|^2 + |5|^2} = \sqrt{39},$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |2| + |1| + |-3| + |5| = 11,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|2|, |1|, |-3|, |5|\} = \max\{2, 1, 3, 5\} = 5.$$

1.2.2 Νόρμες Πινάκων

Ορισμός 1.2.2. Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται *νόρμα πινάκων* αν για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

1. $\|A\| \geq 0$.
2. $\|A\| = 0$ αν και μόνο αν $A = \mathbf{0}$.
3. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$.
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (τριγωνική ανισότητα).
5. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (υπο-πολλαπλασιαστική ιδιότητα).

Για κάθε νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ και για το μοναδιαίο πίνακα $\|I_n\|$, ισχύει:

$$\|I_n\| = \|I_n^2\| \leq \|I_n\|^2 \Rightarrow \|I_n\| \geq 1.$$

Επομένως, για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$$1 \leq \|I_n\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \Rightarrow \|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}.$$

Αν και κάποιες από τις νόρμες διανυσμάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω αποτελούν νόρμες πινάκων όταν εφαρμόζονται στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{n \times n}$, για κάποιες άλλες δεν ισχύει το ίδιο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα παρακάτω:

- Η l_1 -νόρμα ενός πίνακα $A = a_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως:

$$\|A\|_{l_1} = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|. \quad (1.11)$$

- Η νόρμα Frobenius (l_2 -νόρμα) ενός πίνακα $A = a_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.12)$$

- Η l_∞ -νόρμα ορίζεται ως:

$$\|A\|_{l_\infty} = \max\{|a_{ij}| : i, j = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.13)$$

Με μια απλή επαλήθευση οι $\|\cdot\|_{l_1}$ και $\|\cdot\|_F$ αποτελούν πράγματι νόρμες πινάκων. Αντίθετα η $\|\cdot\|_{l_\infty}$ δεν ικανοποιεί το (5) του Ορισμού 1.2.2 και άρα δεν είναι νόρμα πινάκων. Για παράδειγμα,

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_{l_\infty}^2 = \left\| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\| = 2 \geq 1 = 1^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_{l_\infty}^2.$$

Ορισμός 1.2.3. Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα διανυσμάτων στο \mathbb{C}^n . Η επαγόμενη από την $\|\cdot\|$ νόρμα στο $\mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως:

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|A\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Θεώρημα 1.2.1. Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα διανυσμάτων στο \mathbb{C}^n και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη από την $\|\cdot\|$ νόρμα στο $\mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα πινάκων.
2. $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$ για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.
3. $\|I_n\| = 1$.

Απόδειξη. (1) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|$ είναι νόρμα πινάκων, αρκεί να επαληθεύσουμε τον Ορισμό 3.2.2. Τα (1)–(4) του ορισμού προκύπτουν άμεσα από τη σχέση:

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \quad (A \in \mathbb{C}^{n \times n}).$$

Για το (5) του Ορισμού 1.2.2, θεωρούμε δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \max_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|B\mathbf{x}\| \neq 0} \left(\frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right) \\ &\leq \max_{\|B\mathbf{x}\| \neq 0} \left(\frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \right) \max_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \left(\frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right) = \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

(2) Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, ισχύει:

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\|,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο για $\mathbf{x} = 0$.

(3) Προφανώς, έχουμε ότι $\|I_n\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|I_n\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{x}\| = 1$. □

Το Θεώρημα 1.2.1 παρέχει την αναγκαία, αλλά όχι ικανή, συνθήκη $\|I_n\| = 1$ για μία νόρμα πινάκων στο $\mathbb{C}^{n \times n}$ ώστε να επάγεται από κάποια νόρμα διανυσμάτων στο \mathbb{C}^n .

Πόρισμα 1.2.1. Έστω $\|\cdot\|$ μία επαγόμενη (φυσική) νόρμα στο $\mathbb{C}^{n \times n}$.

1. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, $k = 1, 2, \dots$
2. Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει $\|A^{-1}\| \leq \|A\|^{-1}$.

Στη συνέχεια αναφέρονται τα σημαντικότερα παραδείγματα νορμών πινάκων που επάγονται από τις γνωστές l_p -νόρμες και οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν χωρίς να απαιτείται η χρήση του Ορισμού 1.1.5. Σε κάθε περίπτωση θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- Η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά στήλη στο $\mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

- Η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά γραμμή στο $\mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- Η φασματική (τελεστική) νόρμα πινάκων στο $\mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως:

$$\|A\|_2 = \max\{\rho(A^*A)^{1/2}\},$$

όπου $\rho(A^*A)$ η φασματική ακτίνα του πίνακα A^*A .

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, για τον οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τις παραγόμενες νόρμες $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ και $\|A\|_2$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 1.2.1 είναι:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^3 |a_{ij}| = \max\{|a_{11} + a_{21} + a_{31}|, |a_{12} + a_{22} + a_{32}|, |a_{13} + a_{23} + a_{33}|\} \\ &= \max\{|0 + 2 + 1|, |1 + 1 + 2|, |2 + 0 - 2|\} = \max\{3, 4, 0\} = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = \max\{|a_{11} + a_{12} + a_{13}|, |a_{21} + a_{22} + a_{23}|, |a_{31} + a_{32} + a_{33}|\} \\ &= \max\{|0 + 1 + 2|, |2 + 1 + 0|, |1 + 2 - 2|\} = \max\{3, 3, 1\} = 3. \end{aligned}$$

Τέλος για τη νόρμα $\|A\|_2$ θα χρησιμοποιήσουμε τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα

$A^T A$. Από τον ανάστροφο πίνακα $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ προκύπτει:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα $A^T A$ είναι $\sigma(A^T A) = \{\lambda_1 = 11,692, \lambda_2 = 5,845, \lambda_3 = 1,463\}$. Επομένως ισχύει:

$$\rho(A^T A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{11.692, 5.845, 1.463\} = 11.692.$$

Άρα $\|A\|_2 = \max\{\rho(A^* A)^{1/2}\} = \sqrt{11.692}$.

1.2.3 Φασματική Ακτίνα και Νόρμες Πινάκων

Θεώρημα 1.2.2. Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα πινάκων στο $\mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει $\rho(A) \leq \|A\|$.

Απόδειξη. Για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A , ισχύει $|\lambda| \leq \rho(A)$. Επιπλέον, υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \sigma(A)$ τέτοια ώστε $|\lambda_0| = \rho(A)$. Θεωρούμε ακόμα ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $|\lambda_0|$ και τον $n \times n$ πίνακα $X_0 = [x_0 \ x_0 \ \cdots \ x_0]$ (δηλαδή με όλες τις στήλες του ίσες με x_0). Τότε έχουμε:

$$AX_0 = \lambda_0 X_0 \text{ και } |\lambda_0| \|X_0\| = \|\lambda_0 X_0\| = \|AX_0\| \leq \|A\| \|X_0\|.$$

Επομένως, $\rho(A) = |\lambda_0| \leq \|A\|$. □

Η φασματική ακτίνα δεν αποτελεί νόρμα πινάκων. Επιπλέον η σχέση $\rho(A) = 0$ δεν συνεπάγεται ότι $A = 0$, ενώ μπορούν να βρεθούν δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$.

Απαραίτητο για το θεώρημα που ακολουθεί είναι το Λήμμα Schur.

Λήμμα 1.2.1. (Schur) Έστω ένας τυχαίος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε υπάρχουν ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ένας άνω τριγωνικός πίνακας $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A (λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες), τέτοιοι ώστε:

$$A = UTU^*.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπετε [9, Λήμμα 1.4.2]. □

Θεώρημα 1.2.3. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ένας πραγματικός αριθμός $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει μία νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.2.1 του Schur, υπάρχουν ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ένας άνω τριγωνικός πίνακας $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $A = UTU^*$. Τα διαγώνια στοιχεία του T , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A , λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες.

Θεωρούμε ένα διαγώνιο πίνακα $D_t = \text{diag}\{t, t^2, \dots, t^n\}$ για κάποιον πραγματικό αριθμό $t \neq 0$. Ο αντίστροφος του D_t είναι ο $D_t^{-1} = \text{diag}\{t^{-1}, t^{-2}, \dots, t^{-n}\}$. Υπολογίζουμε τον πίνακα:

$$D_t T D_t^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t^{-1*} & t^{-2*} & \dots & t^{-n+1*} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1*} & \dots & t^{-n+2*} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & t^{-n+3*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

όπου με “*” συμβολίζουμε (μιγαδικούς) αριθμούς ανεξάρτητους του t . Για $t > 0$ αρκετά μεγάλο, το άθροισμα των μέτρων όλων των μη διαγώνιων στοιχείων του $D_t T D_t^{-1}$ είναι μικρότερο ή ίσο με $\varepsilon > 0$ και συνεπώς, $\|D_t T D_t^{-1}\|_1 \leq \rho(A) + \varepsilon$.
 Ας ορίσουμε τώρα τη συνάρτηση $\|\circ\|_{UD_t^{-1}} : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$, με:

$$\|M\|_{UD_t^{-1}} = \|D_t U^* M U D_t^{-1}\|_1 = \|(UD_t^{-1})^{-1} M U D_t^{-1}\|_1, \quad \forall M \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι, αφού ο πίνακας UD_t^{-1} είναι αντιστρέψιμος, η συνάρτηση $\|\circ\|_{UD_t^{-1}}$, είναι μία νόρμα πινάκων, για την οποία προφανώς ισχύει ότι $\|A\|_{UD_t^{-1}} = \|D_t T D_t^{-1}\|_1 \leq \rho(A) + \varepsilon$. \square

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Perron-Frobenius

2.1 Μη Αρνητικοί Πίνακες

Οι μη αρνητικοί τετραγωνικοί πίνακες είναι όλοι εκείνοι των οποίων τα στοιχεία τους είναι μη αρνητικά.

Έστω $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Γράφουμε:

- $A > 0$ αν $a_{ij} > 0$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$,
- $A \geq 0$ αν $a_{ij} \geq 0$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$,
- $A > B$ αν $A - B > 0$,
- $A \geq B$ αν $A - B \geq 0$.

Ανάλογα ορίζονται οι αντίστροφες σχέσεις “ $<$ ” και “ \leq ”. Ονομάζουμε τον πίνακα A μη αρνητικό αν $A \geq 0$, ενώ αν $A > 0$, τότε λέμε ότι ο A είναι θετικός πίνακας. Άμεσα προκύπτουν οι ιδιότητες της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 2.1.1. Έστω $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $|A| \geq 0$, ενώ $|A| = 0$ αν και μόνο αν $A = 0$.
2. $|\alpha A| = |\alpha| |A|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. $|A + B| \leq |A| + |B|$.
4. Αν $A, B \geq 0$ και $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\alpha A + \beta B \geq 0$.
5. Αν $A \geq B$ και $C \geq D$, τότε $A + C \geq B + D$.
6. Αν $A \geq B$ και $B \geq C$, τότε $A \geq C$.
7. Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, τότε $|A\mathbf{x}| \leq |A| |\mathbf{x}|$.
8. $|AB| \leq |A| |B|$.
9. $|A^k| \leq |A|^k$, για κάθε $k = 1, 2, \dots$
10. Αν $0 \leq A \leq B$ και $0 \leq C \leq D$, τότε $0 \leq AC \leq BD$.

11. Αν $0 \leq A \leq B$, τότε $0 \leq A^k \leq B^k$ για κάθε $k = 1, 2, \dots$
12. Αν $A \geq 0$, τότε $A^k \geq 0$, και αν $A > 0$, τότε $A^k > 0$ για κάθε $k = 1, 2, \dots$
13. Αν $A > 0$, $\mathbf{x} \geq 0$ και $\mathbf{x} \neq 0$, τότε $A\mathbf{x} > 0$.
14. Αν $A \geq 0$, $\mathbf{x} > 0$ και $A\mathbf{x} = 0$, τότε $A = 0$.
15. Αν $|A| \leq |B|$, τότε $\|A\|_F \leq \|B\|_F$.
16. $\|A\|_F = \||A|\|_F$.
17. $\lim \|A^k\|_F^{1/k} = \rho(A)$.

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί ένα πρώτο αποτέλεσμα της Πρότασης 2.1.1.

Θεώρημα 2.1.1. Έστω πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $|A| \leq B$. Τότε:

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

Απόδειξη. Για κάθε $k = 1, 2, \dots$, ισχύει ότι $|A^k| \leq |A|^k \leq B^k$ (απο τις ιδιότητες (9) και (11) της Πρότασης 2.1.1). Έτσι από τις ιδιότητες (15) και (16) έχουμε ότι $\|A^k\|_F \leq \||A|^k\|_F \leq \|B^k\|_F$ και $\|A^k\|_F^{1/k} \leq \||A|^k\|_F^{1/k} \leq \|B^k\|_F^{1/k}$, για όλα τα $k = 1, 2, \dots$. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι $k \rightarrow +\infty$ και εφαρμόσουμε την ιδιότητα (17) συμπεραίνουμε ότι $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$. \square

Επειδή για $A \geq 0 \Rightarrow |A| = A$, άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.1 είναι το ακόλουθο πόρισμα, το οποίο δίνει συμπέρασμα για τη διάταξη των φασματικών ακτίνων δύο μη αρνητικών πινάκων A, B , που σχετίζονται με τη διάταξη των στοιχείων των αντίστοιχων πινάκων.

Πόρισμα 2.1.1. Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $0 \leq A \leq B$, τότε $\rho(A) \leq \rho(B)$.

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $B =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Τότε:}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$$

$$A - B \geq 0 \Rightarrow A \geq B,$$

οπότε εφαρμόζεται το Πόρισμα 2.1.1 και αναμένεται να ισχύει $\rho(B) < \rho(A)$. Πράγματι, οι ιδιοτιμές του πίνακα A που υπολογίζονται από την ισότητα $\det(A - \lambda I) = 0$ είναι οι $\lambda_1 = 9.167$, $\lambda_2 = 1.762$, $\lambda_3 = -0.929$ και κατά συνέπεια η φασματική ακτίνα του A είναι:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{|9.167|, |1.762|, |-0.929|\} = 9.167.$$

Όμοια, οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι οι $\lambda_1 = 3.236$, $\lambda_2 = -1.236$, $\lambda_3 = 1$ και η φασματική ακτίνα του B είναι:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{|3.236|, |-1.236|, |1|\} = 3.236.$$

Τελικά καταλήγουμε στο γεγονός ότι $\rho(B) < \rho(A)$ επαληθεύοντας το συμπέρασμα του Πορίσματος 2.1.1.

Πόρισμα 2.1.2. Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας και \hat{A} ένας οποιοσδήποτε κύριος υποπίνακας του A , τότε $\rho(\hat{A}) \leq \rho(A)$. Ειδικότερα, για τα διαγώνια στοιχεία του A , $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, ισχύει $\max_{i=1,2,\dots,n} \{a_{ii}\} \leq \rho(A)$.

Απόδειξη. Έστω $1 \leq r \leq n$ και έστω \hat{A} ένας $r \times r$ κύριος υποπίνακας του A . Συμβολίζουμε με \tilde{A} τον $n \times n$ πίνακα που σχηματίζεται από τα στοιχεία του \hat{A} (στις ίδιες θέσεις που είχαν στον πίνακα A) και στις υπόλοιπες θέσεις συμπληρώνουμε μηδενικά. Τότε $\rho(\hat{A}) = \rho(\tilde{A})$ (διότι οι \hat{A} και \tilde{A} έχουν τις ίδιες ακριβώς μη μηδενικές ιδιοτιμές) και $0 \leq \hat{A} \leq \tilde{A}$. Επομένως $\rho(\hat{A}) = \rho(\tilde{A}) \leq \rho(A)$ από το Πόρισμα 2.1.1. \square

Το φράγμα a_{ii} στο Πόρισμα 2.1.2 είναι το πρώτο κάτω φράγμα που βρίσκουμε για τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$.

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. Κύριος υπο-

πίνακας είναι ο $\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, όταν $r = 2$. Ο πίνακας \hat{A} έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 6.193$ και

$\lambda_2 = 0.807$, ενώ ο πίνακας $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ έχει τις $\lambda_1 = 6.193$, $\lambda_2 = 0.807$ και $\lambda_3 = 0$.

Προφανώς οι φασματικές ακτίνες είναι $\rho(\hat{A}) = \rho(\tilde{A}) = 6.193$. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 9.755$ και $\lambda_{2,3} = -0.877477 - 4.043456i$, οπότε $\rho(A) = 9.755$. Έτσι επαληθεύεται το Πόρισμα 2.1.2, δηλαδή $\rho(\hat{A}) \leq \rho(A)$ και επιπλέον ισχύει ότι

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \{a_{ii}\} = \max\{4, 3, 1\} = 4 \leq 9.755 = \rho(A).$$

Λήμμα 2.1.1. Αν οι γραμμές ενός τετραγωνικού πίνακα $A \geq 0$ έχουν σταθερό άθροισμα ξ , τότε $\rho(A) = \|A\|_\infty = \xi$. Αν οι στήλες του πίνακα A έχουν σταθερό άθροισμα ξ , τότε $\rho(A) = \|A\|_1 = \xi$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.2.2 γνωρίζουμε ότι $\rho(A) \leq \|A\|$ για κάθε νορμα πίνακα $\|\cdot\|$. Αν όμως το άθροισμα των γραμμών είναι σταθερό, τότε αυτό είναι ίσο με $\|A\|_\infty$. Έτσι για το διάνυσμα $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$, ισχύει $A\mathbf{x} = \|A\|_\infty \mathbf{x}$. Δηλαδή η νόρμα $\|A\|_\infty$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το \mathbf{x} , και $\rho(A) = \|A\|_\infty$. Όμοια εργαζόμαστε για τις στήλες, εφαρμόζοντας τα παραπάνω για τον πίνακα A^T . \square

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ και $B =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία κάθε γραμμής του πίνακα A αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό 5. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από την ισότητα $\det(A - \lambda I) = 0$ οι οποίες είναι οι $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1.732$, $\lambda_3 = 1.732$ και κατά συνέπεια η φασματική ακτίνα του A είναι $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{5, 1.732, 1.732\} = 5$.

Αν υπολογίσουμε τη $\|A\|_\infty$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = \max\{|a_{11} + a_{12} + a_{13}|, |a_{21} + a_{22} + a_{23}|, |a_{31} + a_{32} + a_{33}|\} \\ &= \max\{5, 5, 5\} = 5. \end{aligned}$$

Προφανώς $\rho(A) = \|A\|_\infty = 5$, επαληθεύοντας έτσι το πρώτο σκέλος του Λήμματος 2.1.1.

Επιπλέον για τον πίνακα B παρατηρούμε ότι τα στοιχεία κάθε στήλης του αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό 6. Οι ιδιοτιμές του πίνακα B υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(B - \lambda I) = 0$ οι οποίες είναι οι $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ και κατά συνέπεια η φασματική ακτίνα του B είναι $\rho(B) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{6, 2, 1\} = 6$.

Αν υπολογίσουμε τη $\|B\|_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|B\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^3 |b_{ij}| = \max\{|b_{11} + b_{21} + b_{31}|, |b_{12} + b_{22} + b_{32}|, |b_{13} + b_{23} + b_{33}|\} \\ &= \max\{6, 6, 6\} = 6. \end{aligned}$$

Προφανώς $\rho(B) = \|B\|_1 = 6$, επαληθεύοντας και το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 2.1.1.

Στο Πρόσλημα 2.1.1 δόθηκε ένα κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα ενός πίνακα, το οποίο εξαρτάται από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα. Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζεται ένα διάστημα μέσα στο οποίο κυμαίνεται η φασματική ακτίνα, τα άκρα του οποίου είναι τα άνω και κάτω φράγματα της φασματικής ακτίνας και εξαρτώνται από τα στοιχεία ενός μη αρνητικού πίνακα.

Θεώρημα 2.1.2. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας. Τότε:

$$\min_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

και

$$\min_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha = \min_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$ και κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα $B = [b_{i,j}]$

με $A \geq B \geq 0$ και $\sum_{j=1}^n b_{ij} = \alpha$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, n$. Για παράδειγμα αν $\alpha = 0$, τότε

θέτουμε $B = 0$, και αν $\alpha > 0$, τότε μπορούμε να θέσουμε $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^{-1}$. Από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε $\rho(B) = \alpha$, και από το Πρόρισμα 2.1.1, $\rho(B) \leq \rho(A)$. Το άνω φράγμα εξασφαλίζεται παρόμοια.

Για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, εργαζόμαστε ομοίως επί του αναστρέφου πίνακα A^T . \square

Παράδειγμα 2.1.4. Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Αρχικά υπο-

λογίζουμε τις ποσότητες $\min_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 a_{ij}$ και $\max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 a_{ij}$:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 a_{ij} &= \min\{a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33}\} \\ &= \min\{4, 4, 3\} = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 a_{ij} &= \max\{a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33}\} \\ &= \max\{4, 4, 3\} = 4. \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$, οι οποίες είναι $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3.643$ και $\lambda_3 = 1.382$. Άρα η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{2, 3.643, 1.382\} = 3.643$. Έτσι προκύπτει η ανισότητα

$$3 < 3.643 < 4,$$

η οποία επαληθεύει την πρώτη ανισότητα του Θεωρήματος 2.1.2.

Για να επαληθεύσουμε τη δεύτερη ανισότητα του Θεωρήματος 2.1.2, υπολογίζουμε τις ποσότητες $\min_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^n a_{ij}$ και $\max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^n a_{ij}$:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^3 a_{ij} &= \min\{a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{13} + a_{23} + a_{33}\} \\ &= \min\{3, 4, 4\} = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^3 a_{ij} &= \max\{a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{13} + a_{23} + a_{33}\} \\ &= \max\{3, 4, 4\} = 4. \end{aligned}$$

Πράγματι, ισχύει $3 < 3.643 < 4$.

Πόρισμα 2.1.3. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας. Αν $\sum_{j=1}^n a_{ij} \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε $\rho(A) > 0$.

Θεώρημα 2.1.3. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας. Τότε για κάθε θετικό διάνυσμα $\mathbf{x} = [x_i] \in \mathbb{R}^n$, έχουμε:

$$\min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}$$

και

$$\min_{j=1,2,\dots,n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{1}{x_i} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{j=1,2,\dots,n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{1}{x_i} \right\}.$$

Το παραπάνω θεώρημα παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού ενός διαστήματος στο οποίο κυμαίνεται η τιμή της φασματικής ακτίνας του A , $\rho(A)$, σχετικά με τα στοιχεία ενός διανύσματος. Κατά συνέπεια με τη βοήθεια ενός οποιουδήποτε θετικού διανύσματος $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα στο οποίο ανήκει η φασματική ακτίνα.

Παράδειγμα 2.1.5. Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ και το θετικό

διάνυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Αρχικά υπολογίζουμε τις ποσότητες $\min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}$ και

$$\max_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}:$$

$$\begin{aligned} & \min_{0 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{x_1} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \frac{1}{x_2} (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \frac{1}{x_3} (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{2} (2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2), \frac{1}{1} (1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2), \frac{1}{2} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2) \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{7}{2}, 9, 2 \right\} = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{x_1} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \frac{1}{x_2} (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \frac{1}{x_3} (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{2} (2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2), \frac{1}{1} (1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2), \frac{1}{2} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{7}{2}, 9, 2 \right\} = 9. \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$, οι οποίες είναι $\lambda_1 = 3.534$, $\lambda_2 = -2.051$ και $\lambda_3 = 1.517$. Άρα η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{3.534, 2.051, 1.517\} = 3.534$. Έτσι προκύπτει η

ανισότητα:

$$2 < 3.534 < 9,$$

η οποία επαληθεύει την πρώτη ανισότητα του Θεωρήματος 2.1.3.

Για να επαληθεύσουμε τη δεύτερη ανισότητα του Θεωρήματος 2.1.3, υπολογίζουμε τις ποσότητες $\min_{j=1,2,\dots,n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{1}{x_i} \right\}$ και $\max_{j=1,2,\dots,n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{1}{x_i} \right\}$:

$$\begin{aligned} & \min_{1 \leq j \leq 3} \left\{ x_j \sum_{i=1}^3 a_{ij} \frac{1}{x_i} \right\} \\ &= \min \left\{ x_1 \left(\frac{a_{11}}{x_1} + \frac{a_{12}}{x_2} + \frac{a_{13}}{x_3} \right), x_2 \left(\frac{a_{21}}{x_1} + \frac{a_{22}}{x_2} + \frac{a_{23}}{x_3} \right), x_3 \left(\frac{a_{31}}{x_1} + \frac{a_{32}}{x_2} + \frac{a_{33}}{x_3} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ 2 \left(\frac{2}{2} + \frac{0}{1} + \frac{1}{2} \right), 1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{3}{2} \right), 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{0}{2} \right) \right\} \\ &= \min \{3, 3, 5\} = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ x_j \sum_{i=1}^3 a_{ij} \frac{1}{x_i} \right\} \\ &= \max \left\{ x_1 \left(\frac{a_{11}}{x_1} + \frac{a_{12}}{x_2} + \frac{a_{13}}{x_3} \right), x_2 \left(\frac{a_{21}}{x_1} + \frac{a_{22}}{x_2} + \frac{a_{23}}{x_3} \right), x_3 \left(\frac{a_{31}}{x_1} + \frac{a_{32}}{x_2} + \frac{a_{33}}{x_3} \right) \right\} \\ &= \max \left\{ 2 \left(\frac{2}{2} + \frac{0}{1} + \frac{1}{2} \right), 1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{3}{2} \right), 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{0}{2} \right) \right\} \\ &= \max \{3, 3, 5\} = 5. \end{aligned}$$

Πράγματι, $3 < 3.534 < 5$.

Πόρισμα 2.1.4. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα θετικό διάνυσμα. Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $a\mathbf{x} \leq A\mathbf{x} \leq b\mathbf{x}$, τότε $a \leq \rho(A) \leq b$. Αν $a\mathbf{x} < A\mathbf{x}$ τότε $a < \rho(A)$, και αν $A\mathbf{x} < b\mathbf{x}$ τότε $\rho(A) < b$.

Απόδειξη. Αν $a\mathbf{x} \leq A\mathbf{x}$, τότε:

$$a \leq \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}.$$

Από το Θεώρημα 2.1.3 παρατηρούμε ότι $a \leq \rho(A)$. Αν τώρα $a\mathbf{x} < A\mathbf{x}$, τότε υπάρχει ένας $\hat{a} > a$ τέτοιος ώστε $\hat{a}\mathbf{x} \leq A\mathbf{x}$. Έτσι $\rho(A) \geq \hat{a} > a$, δηλαδή $\rho(A) > a$. Όμοια επαληθεύεται το άνω φράγμα. \square

Πόρισμα 2.1.5. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας. Αν ο A έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα, τότε η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι η $\rho(A)$. Δηλαδή, αν $A \geq 0$, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ και $\mathbf{x} > 0$, τότε $\lambda = \rho(A)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάποια ιδιοποσά λ , \mathbf{x} ισχύει $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ με $\mathbf{x} > 0$. Επειδή $A \geq 0$ και $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ προφανώς ισχύει $A\mathbf{x} \geq 0$. Άρα και $\lambda\mathbf{x} \geq 0$. Επειδή υποθέσαμε $\mathbf{x} > 0$, $\lambda\mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$. Η ισότητα $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ μπορεί να γραφεί $\lambda\mathbf{x} \leq A\mathbf{x} \leq \lambda\mathbf{x}$, όπου $\lambda \geq 0$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5.1.4 προκύπτει ότι $\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda$, άρα $\lambda = \rho(A)$. \square

Παράδειγμα 2.1.6. Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Για να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του οι οποίες προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$ και είναι οι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 5$. Η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{-1, 1, 5\} = 5$.

Για κάθε ιδιοτιμή του A υπάρχει ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x} , που υπολογίζεται από τη λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$. Έτσι για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ βρέθηκε ότι αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και τέλος για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 5$ το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι από τα τρία ιδιοδιανύσματα, μόνο αυτό που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα είναι θετικό.

Στη συνέχεια με τη βοήθεια της Δυναμικής Μεθόδου, η οποία δεν εξετάζεται στην παρούσα εργασία, μπορεί να αποδειχθεί ότι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα $\rho(A) = 5$ είναι το $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, το οποίο είναι θετικό και η αντίστοιχη ιδιοτιμή του είναι η $\lambda = 5$, δηλαδή η φασματική ακτίνα, επαληθεύοντας έτσι το Πόρισμα 2.1.5.

Πόρισμα 2.1.6. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας. Αν ο A έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} = x_i \in \mathbb{R}^n$, τότε:

$$\rho(A) = \max_{\mathbf{x} > 0} \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} = \min_{\mathbf{x} > 0} \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{1}{x_i} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}.$$

Πόρισμα 2.1.7. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας. Αν ο A έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} = x_i \in \mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $s = 1, 2, \dots$ και $1 = 1, 2, \dots, n$, ισχύει

$$\frac{\min_{k=1,2,\dots,n} x_k}{\max_{k=1,2,\dots,n} x_k} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(s)} \right\} \leq \rho(A)^{(s)} \leq \frac{\max_{k=1,2,\dots,n} x_k}{\min_{k=1,2,\dots,n} x_k} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(s)} \right\},$$

όπου $A^s = [a_{ij}^s]$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπετε [9, Πόρισμα 7.2.12]. □

2.2 Θετικοί Πίνακες

Όπως ορίσαμε και στην ενότητα παράγραφο, θετικός λέγεται ο πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι αυστηρώς θετικά. Το σύνολο των θετικών πινάκων αποτελεί υποσύνολο των μη αρνητικών πινάκων. Η θεωρία των μη αρνητικών πινάκων θεμελιώθηκε και μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον O. Perron στις αρχές του 20ου αιώνα.

Λήμμα 2.2.1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας. Αν $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ για κάποιο $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ και $|\lambda| = \rho(A)$, τότε $A|\mathbf{x}| = \rho(A)|\mathbf{x}|$ και $|\mathbf{x}| > 0$.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε $\rho(A)|\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |A\mathbf{x}| \leq A|\mathbf{x}|$ και ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{y} = A|\mathbf{x}| - \rho(A)|\mathbf{x}| \geq 0$. Από το Πρόρισμα 2.1.3 έχουμε ότι $\rho(A) > 0$. Έτσι αν $\mathbf{y} = 0$, τότε $A|\mathbf{x}| = \rho(A)|\mathbf{x}|$ και $|\mathbf{x}| = \rho(A)^{-1}A|\mathbf{x}| > 0$. Αν $\mathbf{y} \neq 0$, θέτουμε $\mathbf{z} = A|\mathbf{x}| > 0$ και εφαρμόζουμε την ιδιότητα (13) της Πρότασης 2.1.1. Τότε θα έχουμε $0 < A\mathbf{y} = A\mathbf{z} - \rho(A)\mathbf{z}$, και συνεπώς, $A\mathbf{z} > \rho(A)\mathbf{z}$. Όμως από το Πρόρισμα 2.1.4, προκύπτει ότι $\rho(A) > \rho(A)$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\mathbf{y} = 0$. \square

Κάνοντας χρήση του Λήμματος 2.2.1, στο επόμενο θεώρημα λαμβάνουμε την πληροφορία ότι σε ένα θετικό πίνακα, η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα καθώς και ότι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της είναι θετικό.

Θεώρημα 2.2.1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας. Τότε $\rho(A) > 0$, η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του A και υπάρχει θετικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της φασματικής ακτίνας, υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ τέτοια ώστε $|\lambda| = \rho(A)$ και αντίστοιχο (μη μηδενικό) ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x} . Από το Λήμμα 2.2.1, το ζητούμενο θετικό ιδιοδιάνυσμα είναι το $|\mathbf{x}|$. \square

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω ο θετικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 \approx 4.957$, $\lambda_2 \approx 1.512$ και $\lambda_3 \approx -1.468$. Η φασματική ακτίνα ισούται με $\rho(A) \approx 4.957$ και μάλιστα είναι η μεγαλύτερη θετική ιδιοτιμή του πίνακα A .

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα είναι το $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.72911 \cdot z \\ 0.88415 \cdot z \\ z \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{R}^*$, και για οποιοδήποτε z το ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x} παραμένει θετικό.

Λήμμα 2.2.2. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq 0$ και $|\lambda| = \rho(A)$. Τότε για κάποιο $\theta \in [0, 2\pi]$, ισχύει $e^{-i\theta}\mathbf{x} = |\mathbf{x}| > 0$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση του λήμματος, έχουμε ότι $|A\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = \rho(A)|\mathbf{x}|$, ενώ από το Λήμμα 2.2.1, γνωρίζουμε ότι $A|\mathbf{x}| = \rho(A)|\mathbf{x}|$ και $|\mathbf{x}| > 0$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές και την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \rho(A)|x_i| &= |\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j| \\ &= \rho(A)|x_i|, \end{aligned}$$

άρα θα πρέπει $\left| \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \right| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$. Για να ισχύει όμως κάτι τέτοιο, θα πρέπει οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί $a_{ij}x_j$ $j = 1, 2, \dots, n$ να βρίσκονται πάνω στην ίδια ημιευθεία του μιγαδικού επιπέδου με αρχή το 0. Αν συμβολίσουμε με θ το κοινό όρισμα των σημείων αυτών, έχουμε ότι $e^{-i\theta}a_{ij}x_j > 0$, για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$. Αφού όμως $A > 0$, έπεται ότι $e^{-i\theta}\mathbf{x} > 0$. \square

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι σε ένα θετικό πίνακα όλες οι ιδιοτιμές που δεν έχουν μέτρο όσο η φασματική ακτίνα βρίσκονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα.

Θεώρημα 2.2.2. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας. Τότε $|\lambda| < \rho(A)$, για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(A)$ του A .

Απόδειξη. Από τον ορισμό της φασματικής ακτίνας, έχουμε ότι $|\lambda| \leq \rho(A)$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$. Υποθέτουμε ότι $\lambda \in \sigma(A)$ με $|\lambda| = \rho(A)$, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ και $\mathbf{x} \neq 0$. Από το Λήμμα 2.2.2, υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{w} = e^{-i\theta}\mathbf{x} > 0$ για το οποίο $\theta \in [0, 2\pi]$, άρα $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Αλλά τότε $\lambda = \rho(A)$ από το Πρόσχημα 2.1.5. \square

Θεώρημα 2.2.3. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας και $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ δύο μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε $A\mathbf{w} = \rho(A)\mathbf{w}$ και $A\mathbf{z} = \rho(A)\mathbf{z}$. Τότε τα \mathbf{w}, \mathbf{z} είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.2.2, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί θ_1, θ_2 τέτοιοι ώστε τα διανύσματα $\mathbf{p} = e^{-i\theta_1}\mathbf{z}$ και $\mathbf{q} = e^{-i\theta_2}\mathbf{w}$ να είναι θετικά. Θέτουμε $\beta = \min_{i=1,2,\dots,n} \left(\frac{q_i}{p_i}\right)$ και ορίζουμε $\mathbf{r} = \mathbf{q} - \beta\mathbf{p}$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{r} \geq 0$ και τουλάχιστον μία συντεταγμένη του \mathbf{r} είναι ίση με 0, δηλαδή το διάνυσμα \mathbf{r} δεν είναι θετικό. Ταυτόχρονα ισχύει:

$$A\mathbf{r} = A\mathbf{q} - \beta A\mathbf{p} = \rho(A)\mathbf{q} - \beta\rho(A)\mathbf{p} = \rho(A)\mathbf{r}.$$

Έτσι αν $\mathbf{r} \neq 0$, τότε από την ιδιότητα (13) της Πρότασης 2.1.1 έχουμε ότι $\mathbf{r} = \rho(A)^{-1}A\mathbf{r} > 0$. Αυτό όμως δεν ισχύει, άρα $\mathbf{r} = 0$. Επομένως $\mathbf{q} = \beta\mathbf{p}$ και $\mathbf{w} = \beta e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\mathbf{z}$. \square

Πρόσχημα 2.2.1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας. Τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$, $\mathbf{x} > 0$ και $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι για κάθε θετικό πίνακα A , υπάρχει θετικό ιδιοδιάνυσμα $\hat{\mathbf{x}}$ της ιδιοτιμής $\rho(A)$ με $A\hat{\mathbf{x}} = \rho(A)\hat{\mathbf{x}}$. Για το διάνυσμα $\mathbf{x} = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\|\hat{\mathbf{x}}\|}$, έχουμε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$ και $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$. Η μοναδικότητα του \mathbf{x} προκύπτει από το Θεώρημα 2.2.3 και το γεγονός ότι $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$. \square

Το αποτέλεσμα του Προσχήματος 2.2.1 μας πληροφορεί ότι η $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή γεωμετρικής πολλαπλότητας 1 (δηλαδή, ο ιδιόχωρος που της αντιστοιχεί έχει διάσταση 1).

Το μοναδικό κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα του προηγούμενου προσχήματος συχνά καλείται *διάνυσμα Perron* του πίνακα A , ενώ η ιδιοτιμή $\rho(A)$ καλείται *ρίζα Perron* του A . Αν τώρα έχουμε ότι $A > 0$, είναι προφανές ότι $A^T > 0$ και άρα όλα τα προηγούμενα ισχύουν και για τον ανάστροφο πίνακα A^T . Το διάνυσμα Perron του A^T καλείται *αριστερό διάνυσμα Perron* του A .

Από το Θεώρημα 2.2.3 προκύπτει ότι ο ιδιόχωρος του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\rho(A)$ είναι μονοδιάστατος, συνεπώς ο χώρος αυτός παράγεται από το διάνυσμα Perron του πίνακα A . Άρα κάθε μη αρνητικό διάνυσμα $0 \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με $A\mathbf{y} = \rho(A)\mathbf{y}$, θα είναι πολλαπλάσιο του διανύσματος Perron του πίνακα A .

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει η συμπεριφορά των δυνάμεων A^k καθώς $k \rightarrow +\infty$. Το επόμενο λήμμα δίνει τις απαραίτητες προϋποθέσεις για διάφορα θεωρήματα που συμβάλλουν στην μελέτη τέτοιων οριακών καταστάσεων για μη αρνητικούς πίνακες.

Λήμμα 2.2.3. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε:

1. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$,
2. $A^T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$,
3. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 1$.

Ορίζουμε τον πίνακα $L = \mathbf{xy}^T$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- a. $L\mathbf{x} = \mathbf{x}$ και $L\mathbf{y}^T = \mathbf{y}^T$.
- b. $L^k = L$, για κάθε $k = 1, 2, \dots$
- c. $A^k L = L A^k = \lambda^k L$, για κάθε $k = 1, 2, \dots$
- d. $L(A - \lambda L) = 0$.
- e. $(A - \lambda L)^k = A^k - \lambda^k L$, για κάθε $k = 1, 2, \dots$
- f. Κάθε μη μηδενική ιδιοτιμή του $A - \lambda L$ είναι επίσης ιδιοτιμή του A .

Αν επιπλέον υποθέσουμε:

4. $\lambda \neq 0$,
5. ο λ είναι ιδιοτιμή του A με γεωμετρική πολλαπλότητα 1,

τότε:

- g. ο λ δεν είναι ιδιοτιμή του $A - \lambda L$.

Τέλος, αν επιπλέον υποθέσουμε ότι:

6. $|\lambda| = \rho(A) > 0$,
7. ο λ είναι η μοναδική ιδιοτιμή του A με μέτρο $\rho(A)$ και έχουμε διατάξει τις ιδιοτιμές του A έτσι ώστε $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| = |\lambda| = \rho(A)$,

τότε:

- h. $\rho(A - \lambda L) \leq |\lambda_{n-1}| < \rho(A)$,
- i. $(\lambda^{-1}A)^k = L + (\lambda^{-1}A - L)^k \rightarrow L$ για $k \rightarrow +\infty$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπετε [9, Λήμμα 7.3.7]. □

Θεώρημα 2.2.4. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας. Τότε:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k = L,$$

όπου $L = \mathbf{xy}^T$, $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$, $A^T\mathbf{y} = \rho(A)\mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} > 0$ και $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 1$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις (1)-(7) του προηγούμενου λήμματος, με $\lambda = \rho(A)$ και $\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T \mathbf{z})^{-1} \mathbf{z}$, όπου \mathbf{x} το δεξιό και \mathbf{z} το αριστερό διάνυσμα Perron του πίνακα A . Το ζητούμενο προκύπτει από το (i) του λήμματος. \square

Πόρισμα 2.2.2. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας. Τότε το όριο:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k = L$$

είναι ένας θετικός πίνακας βαθμού 1.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι η μοναδική ιδιοτιμή ενός θετικού πίνακα, η οποία βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα, είναι αυτή που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα.

Θεώρημα 2.2.5. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικός πίνακας. Τότε η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας 1 (δηλαδή είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A).

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας κ . Από το Λήμμα 1.2.1 του Schur, έχουμε ότι $A = UTU^*$ για κάποιον ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και κάποιον άνω τριγωνικό πίνακα $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με στοιχεία στην κύρια διαγώνιοτα $\rho(A), \dots, \rho(A), \lambda_{\kappa+1}, \dots, \lambda_n$. Επιπλέον, τα μέτρα των ιδιοτιμών $\lambda_{\kappa+1}, \lambda_{\kappa+2}, \dots, \lambda_n$ είναι μικρότερα της $\rho(A)$. Έτσι έχουμε

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} U \begin{bmatrix} 1 & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda_{\kappa+1}}{\rho(A)} & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n}{\rho(A)} \end{bmatrix}^k U^*$$

$$= U \begin{bmatrix} 1 & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

Όπου το στοιχείο 1 εμφανίζεται στην κύρια διαγώνιο κ φορές και το 0 εμφανίζεται $n - \kappa$ φορές. Ο άνω τριγωνικός πίνακας στην τελευταία ισότητα έχει βαθμό τουλάχιστον κ . Αφού όμως ο πίνακας L είναι βαθμού 1, συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατό $\kappa > 1$. \square

Συνοψίζοντας, διατυπώνουμε τα βασικά συμπεράσματα της παραγράφου στο επόμενο θεώρημα, γνωστό ως Θεώρημα Perron, το οποίο θα αποτελέσει σημείο αναφοράς για πολλά από τα αποτελέσματα που θα ακολουθήσουν.

Θεώρημα 2.2.6. (Perron) Έστω ένας θετικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\rho(A) > 0$.
2. Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A .
3. Υπάρχει θετικό διάνυσμα \mathbf{x} με $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.
4. Η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A .
5. Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(A)$ του A , ισχύει $|\lambda| < \rho(A)$, δηλαδή η $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου.
6. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k = L$, όπου $L = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$, $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$, $A^T\mathbf{y} = \rho(A)\mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} > 0$ και $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 1$.

Παράδειγμα 2.2.2. Έστω ο θετικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ του Παραδείγματος

2.2.1 στο οποίο επαληθεύσαμε τα (1),(2) και (3) του Θεωρήματος 2.2.6. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η $\rho(A) \approx 4.957$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A και για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(A)$ του A , ισχύει $|\lambda| < \rho(A)$, δηλαδή η $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου, επαληθεύοντας και τα (4),(5).

Ο ανάστροφος πίνακας του A είναι ο $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, του οποίου οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 \approx 4.95567$, $\lambda_2 \approx 1.51218$ και $\lambda_3 \approx -1.46785$. Η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) \approx 4.95567$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.16790 \cdot z \\ 1.61985 \cdot z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}^*$$

και για οποιοδήποτε z το ιδιοδιάνυσμα \mathbf{y} παραμένει θετικό.

Κανονικοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{x} και \mathbf{y} προκύπτουν τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.4793781 \\ 0.5813112 \\ 0.6574754 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0.5229348 \\ 0.7252970 \\ 0.4477538 \end{bmatrix},$$

για τα οποία ισχύει $\mathbf{x}_1^T\mathbf{y}_1 \approx 1$.

Επιπλέον, θέτουμε να είναι:

$$L = \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^T = \begin{bmatrix} 0.25068349084788 & 0.3476914977957 & 0.21464336591178 \\ 0.30398785610976 & 0.4216232694264 & 0.26028429878256 \\ 0.34381676680392 & 0.4768649351938 & 0.29438710875652 \end{bmatrix},$$

και υπολογίζουμε το $\left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k$, για $k = 10, 20, 50$:

- $k = 10$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^{10} &= \begin{bmatrix} 0.201789 & 0.201789 & 0.403578 \\ 0.201789 & 0.605367 & 0.201789 \\ 0.605367 & 0.403578 & 0.201789 \end{bmatrix}^{10} \\ &= \begin{bmatrix} 0.259325 & 0.359668 & 0.222038 \\ 0.314459 & 0.436153 & 0.26925 \\ 0.355661 & 0.493291 & 0.304534 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

- $k = 20$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^{20} &= \begin{bmatrix} 0.201789 & 0.201789 & 0.403578 \\ 0.201789 & 0.605367 & 0.201789 \\ 0.605367 & 0.403578 & 0.201789 \end{bmatrix}^{20} \\ &= \begin{bmatrix} 0.25932 & 0.35967 & 0.222038 \\ 0.314461 & 0.436149 & 0.269252 \\ 0.355662 & 0.493294 & 0.304529 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

- $k = 50$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^{50} &= \begin{bmatrix} 0.201789 & 0.201789 & 0.403578 \\ 0.201789 & 0.605367 & 0.201789 \\ 0.605367 & 0.403578 & 0.201789 \end{bmatrix}^{50} \\ &= \begin{bmatrix} 0.25932 & 0.359669 & 0.222038 \\ 0.31446 & 0.436148 & 0.269251 \\ 0.355661 & 0.493293 & 0.304529 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τελικά ότι καθώς $k \rightarrow \infty$, $\left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k \rightarrow L$.

2.3 Μη Υποβιβάσιμοι, μη Αρνητικοί Πίνακες

Συνήθως, σε προβλήματα που μας παρουσιάζονται έχουμε να κάνουμε με μη αρνητικούς πίνακες παρά με θετικούς. Για αυτό το λόγο είναι απαραίτητο να επεκτείνουμε τη θεωρία που έχουμε αναπτύξει, στη γενικότερη περίπτωση όπου τα στοιχεία ενός μη αρνητικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μπορούν να είναι μηδενικά.

Στο ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού πίνακα αποτελεί πραγματική θετική ιδιοτιμή του και επιπλέον το διάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι μη αρνητικό διάνυσμα.

Θεώρημα 2.3.1. Αν $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ένας μη αρνητικός πίνακας, τότε η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του A και υπάρχει αντίστοιχο μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα $0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ορίζουμε τον πίνακα $A(\varepsilon) = [a_{ij} + \varepsilon]$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{x}(\varepsilon)$ το διάνυσμα Perron του $A(\varepsilon)$, άρα $\mathbf{x}(\varepsilon) > 0$ και $\|\mathbf{x}(\varepsilon)\|_1 = 1$. Αν θεωρήσουμε το σύνολο $\{\mathbf{x}(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, τότε αυτό περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\}$ και άρα θα υπάρχει μία μονότονα φθίνουσα ακολουθία $\varepsilon_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) με $\lim \varepsilon_k = 0$

τέτοια ώστε να υπάρχει το όριο $\lim \mathbf{x}(\varepsilon_k) = \mathbf{x}$. Επίσης, αφού $\mathbf{x}(\varepsilon_k) > 0$ ($k = 1, 2, \dots$), έχουμε $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}(\varepsilon_k) \geq 0$ και $\mathbf{x} \neq 0$ επειδή $\|\mathbf{x}\|_1 = \lim \|\mathbf{x}(\varepsilon_k)\|_1 = 1$.

Από το Θεώρημα 2.1.1, έχουμε ότι $\rho(A(\varepsilon_1)) \geq \rho(A(\varepsilon_2)) \geq \dots \geq \rho(A)$, για κάθε $k = 1, 2, \dots$. Άρα η ακολουθία $\rho(A(\varepsilon_k))$ ($k = 1, 2, \dots$) είναι μονότονα φθίνουσα. Έτσι, το όριο $\rho = \lim \rho(A(\varepsilon_k))$ υπάρχει και είναι μεγαλύτερο ή ίσο της $\rho(A)$. Ομως από το γεγονός ότι:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lim(A(\varepsilon_k)\mathbf{x}(\varepsilon_k)) = \lim(\rho(A(\varepsilon_k))\mathbf{x}(\varepsilon_k)) \\ &= \lim(\rho(A(\varepsilon_k)) \lim \mathbf{x}(\varepsilon_k)) = \rho\mathbf{x}, \end{aligned}$$

και επειδή $\mathbf{x} \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A . Τότε όμως $\rho \leq \rho(A)$ και άρα $\rho = \rho(A)$. \square

Το Θεώρημα 2.3.1, που εφαρμόζεται σε μη αρνητικούς πίνακες, μια ευρύτερη κατηγορία πινάκων από τους θετικούς, αποτελεί γενίκευση των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 2.2.1 και μας πληροφορεί ότι η $\rho(A)$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A και όχι απλά η απόλυτη τιμή μιας από τις ιδιοτιμές του. Συνεπώς οι τιμές $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ δεν μπορεί να αποτελούν ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού πίνακα A , καθώς στην περίπτωση αυτή έχουμε $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3\} = \max\{5, 2, 4\} = 5$, όπου η τιμή της φασματικής ακτίνας είναι η απόλυτη τιμή της λ_1 και όχι η ίδια η λ_1 .

Οι ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού πίνακα μπορεί να είναι και μιγαδικοί αριθμοί, ωστόσο η φασματική ακτίνα αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή-πραγματικό θετικό αριθμό.

Θεώρημα 2.3.2. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας και $0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα μη αρνητικό διάνυσμα. Αν, $A\mathbf{x} \geq a\mathbf{x}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, τότε $\rho(A) \geq a$.

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ορίζουμε τον πίνακα $A(\varepsilon) = [a_{ij} + \varepsilon]$, ο οποίος έχει θετικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα Perron $\mathbf{y}(\varepsilon)$, δηλαδή $\mathbf{y}(\varepsilon)^T A = \rho(A(\varepsilon))\mathbf{y}(\varepsilon)^T$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $A\mathbf{x} - a\mathbf{x} \geq 0$, άρα $A(\varepsilon)\mathbf{x} - a\mathbf{x} > A\mathbf{x} - a\mathbf{x} \geq 0$, και έτσι $\mathbf{y}(\varepsilon)^T [A(\varepsilon)\mathbf{x} - a\mathbf{x}] = [\rho(A(\varepsilon)) - a]\mathbf{y}(\varepsilon)^T \mathbf{x} \geq 0$. Αφού $\mathbf{y}(\varepsilon)^T \mathbf{x} > 0$, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, $\rho(A(\varepsilon)) - a \geq 0$. \square

Παράδειγμα 2.3.1. Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, το μη αρνητικό

διάνυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και ένας πραγματικός αριθμός $a = 2$. Τότε:

$$A\mathbf{x} = A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

και $a\mathbf{x} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, άρα $A\mathbf{x} \geq a\mathbf{x}$.

Το φάσμα του πίνακα A είναι $\sigma(A) = \{\lambda_1 \approx 5.064, \lambda_2 \approx 1.828, \lambda_3 \approx 0.108\}$, επομένως η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) \approx 5.064$.

Συνεπώς, $\rho(A) \geq 2 = a$ όπως ήταν αναμενόμενο, επαληθεύοντας το Θεώρημα 2.3.2.

Πόρισμα 2.3.1. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας. Τότε ισχύει ότι:

$$\rho(A) = \max_{\substack{\mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{x} \neq 0}} \min_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ x_i \neq 0}} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

Απόδειξη. Έστω $A \geq 0$ και $\mathbf{x} \geq 0$ με $\mathbf{x} \neq 0$. Αν θεωρήσουμε την ποσότητα:

$$a = \min_{x_i \neq 0} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} x_j}{x_i},$$

τότε $A\mathbf{x} > a\mathbf{x}$, και από το Θεώρημα 2.3.2, $a \leq \rho(A)$. Αλλά από το Θεώρημα 2.3.1, υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} \geq 0$. Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα αυτό εξασφαλίζουμε στο άνω φράγμα, την ισότητα $a = \rho(A)$. \square

Προσθέτοντας μία επιπλέον προϋπόθεση, το Θεώρημα 2.3.2 μπορεί να μας δώσει πληροφορίες και για το διάνυσμα \mathbf{x} .

Θεώρημα 2.3.3. Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας που έχει ένα θετικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα. Αν $0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα μη αρνητικό διάνυσμα με $A\mathbf{x} \geq \rho(A)\mathbf{x}$, τότε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.

Απόδειξη. Έστω ένα θετικό διάνυσμα \mathbf{y} τέτοιο ώστε $A^T \mathbf{y} = \rho(A)\mathbf{y}$. Τότε:

$$\mathbf{y}^T (A\mathbf{x} - \rho(A)\mathbf{x}) = \rho(A)\mathbf{y}^T \mathbf{x} - \rho(A)\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0$$

και επομένως $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$. \square

Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ένας μη αρνητικός πίνακας, τότε η μη αρνητική ιδιοτιμή $\rho(A)$ καλείται επίσης ρίζα Perron του A . Είναι δύσκολο να καθορίσουμε το διάνυσμα Perron του πίνακα A , αφού το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα δεν είναι απαραίτητα μοναδικό. Αν για παράδειγμα, θεωρήσουμε το μη αρνητικό πίνακα $A = I_n$, τότε η ιδιοτιμή $\rho(A) = 1$ έχει αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα όλα τα μη αρνητικά διανύσματα.

Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε και να γενικεύσουμε το Θεώρημα Perron για μη αρνητικούς πίνακες χρειαζόμαστε επιπλέον προϋποθέσεις. Γί αυτό το λόγο θα μελετήσουμε μία κατηγορία πινάκων οι οποίοι παρουσιάζονται σε πολλές εφαρμογές. Οι μη υποβιβάσιμοι (irreducible), μη αρνητικοί πίνακες παρουσιάζουν πολλές ιδιαιτερότητες τις οποίες μπορούμε να εκμεταλλευτούμε αν γνωρίζουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες τους.

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται *πίνακας μετάθεσης* αν έχει ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε στήλη και κάθε γραμμή ίσο 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του μηδενικά. Για παράδειγμα, ο πίνακας:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ένας 3×3 πίνακας μετάθεσης. Προφανώς, ένας πίνακας μετάθεσης προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα με μεταθέσεις γραμμών και στηλών.

Ορισμός 2.3.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n \geq 2$) καλείται υποβιβάσιμος (reducible) αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης P και φυσικός αριθμός $r \leq n$ τέτοιοι ώστε:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

όπου $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ και $0 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n \geq 2$) καλείται μη υποβιβάσιμος (irreducible) αν δεν είναι υποβιβάσιμος.

Οι υποπίνακες B , C , D δεν είναι απαραίτητο να έχουν όλα τα στοιχεία τους μη μηδενικά. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $|A| > 0$ τότε ο A είναι μη υποβιβάσιμος, ενώ αν ο A είναι υποβιβάσιμος τότε θα πρέπει να έχει τουλάχιστον $n - 1$ μηδενικά στοιχεία. Επιπλέον ένας πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν ο ανάστροφος του είναι μη υποβιβάσιμος.

Θεώρημα 2.3.4. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν ο πίνακας $(I_n + |A|)^{n-1}$ είναι θετικός.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο πίνακας A είναι υποβιβάσιμος αν και μόνο αν ο $(I_n + |A|)^{n-1}$ έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο. Υποθέτουμε ότι ο A είναι υποβιβάσιμος και άρα για κάποιο πίνακα μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ θα έχουμε ότι:

$$A = P \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} P^T = P \hat{A} P^T,$$

όπου οι B , C , D και 0 είναι υποπίνακες όπως στον Ορισμό 2.3.1. Παρατηρούμε ότι $|A| = P|\hat{A}|P^T$ αφού ο πίνακας P απλά μεταθέτει τις γραμμές και τις στήλες. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι πίνακες $|\hat{A}|^2, |\hat{A}|^3, \dots, |\hat{A}|^{n-1}$ έχουν όλοι τον ίδιο υποπίνακα $0 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ όπως ο \hat{A} . Έτσι

$$\begin{aligned} (I_n + |A|)^{n-1} &= (I_n + P|A|P^T)^{n-1} = [P(I_n + |A|)P^T]^{n-1} = P(I_n + |A|)^{n-1}P^T \\ &= P \left(I_n + \binom{n-1}{1}|\hat{A}| + \binom{n-1}{2}|\hat{A}|^2 + \dots + \binom{n-1}{n-1}|\hat{A}|^{n-1} \right) P^T, \end{aligned}$$

όπου όλοι οι όροι στη τελευταία παράσταση έχουν το ίδιο υποπίνακα $0 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$. Συνεπώς, ο πίνακας $(I_n + |A|)^{n-1}$ είναι υποβιβάσιμος και άρα δεν μπορεί να έχει όλα του τα στοιχεία μη μηδενικά.

Το αντίστροφο αποδεικνύεται με τη βοήθεια της θεωρίας γραφημάτων και για το λόγο αυτό παραλείπεται. \square

Λήμμα 2.3.1. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε οι $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1$ είναι ιδιοτιμές του πίνακα $I_n + A$ και $\rho(I_n + A) \leq \rho(A) + 1$. Αν $A \geq 0$, τότε $\rho(I_n + A) = \rho(A) + 1$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπετε [4, Lemma 8.4.2]. \square

Λήμμα 2.3.2. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας, με $A^k > 0$ για κάποιο $k \geq 1$. Τότε η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A .

Απόδειξη. Αν οι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές του A , τότε οι $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ είναι ιδιοτιμές του A^k . Γνωρίζουμε επίσης ότι η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A . Έτσι, αν η $\rho(A)$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του A , τότε και η $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ θα είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του A^k . Αυτό όμως είναι άτοπο από το Θεώρημα 2.2.5. \square

Οι γενικεύσεις των αποτελεσμάτων του Perron για μη αρνητικούς πίνακες είναι άμεσα συνδεδεμένες με το όνομα του F.G. Frobenius και τις βλέπουμε στο επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.5. (O. Perron - F.G. Frobenius) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας, μη υποβιβάσιμος πίνακας. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\rho(A) > 0$.
2. Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A .
3. Η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A .
4. Υπάρχει μοναδικό θετικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.
5. Υπάρχει μοναδικό θετικό διάνυσμα $\mathbf{y}^T \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{y}^T A = \rho(A)\mathbf{y}^T$.

Απόδειξη. Το Πρόσχημα 2.1.3 δίνει άμεσα το (1). Από το Θεώρημα 2.2.1, το (2) ισχύει για κάθε μη αρνητικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Για το (3), εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.3.1 και δείχνουμε ότι αν η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του A , τότε η $1 + \rho(A) = \rho(I_n + A)$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του $I_n + A$. Αλλά, $I_n + A \geq 0$ και $(I_n + A)^{n-1} > 0$ από το Θεώρημα 2.3.4. Συνεπώς, η $1 + \rho(A)$ θα πρέπει, σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.2, να είναι απλή ιδιοτιμή του $I_n + A$. Επίσης, για το (4), από το Θεώρημα 2.2.1, υπάρχει ένα μη αρνητικό διάνυσμα $\mathbf{x} \neq 0$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$. Αλλά τότε $(I_n + A)^{n-1}\mathbf{x} = (1 + \rho(A))^{n-1}\mathbf{x}$ και έτσι ο πίνακας $(I_n + A)^{n-1}$ είναι θετικός σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.4, άρα το διάνυσμα $(1 + \rho(A))^{n-1}\mathbf{x}$ είναι θετικό. Επομένως, το διάνυσμα $\mathbf{x} = (1 + \rho(A))^{n-1}(I_n + A)^{n-1}\mathbf{x}$ είναι επίσης θετικό. Αν εφαρμόσουμε την κανονικοποίηση $\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1$, το (3) μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα του \mathbf{x} .

Το (5) επαληθεύεται αν εφαρμόσουμε το (4) στον πίνακα A^T . \square

Το προηγούμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι ο ιδιόχωρος ενός μη αρνητικού, μη υποβιβάσιμου πίνακα που αντιστοιχεί στη ρίζα Perron, είναι μονοδιάστατος και περιέχει ένα μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα που τα στοιχεία του έχουν άθροισμα 1, το οποίο καλείται διάνυσμα Perron του πίνακα. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν ο A^T είναι μη υποβιβάσιμος. Επομένως, κάθε μη αρνητικός, μη υποβιβάσιμος πίνακας έχει ένα θετικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα. Έτσι, το Θεώρημα 2.3.3 ισχύει για κάθε μη αρνητικό, μη υποβιβάσιμο πίνακα.

Παράδειγμα 2.3.2. Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Εφαρμόζοντας

το Θεώρημα 2.3.4 προκύπτει ότι:

$$(I_3 + |A|)^{3-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 11 \\ 6 & 11 & 13 \\ 4 & 7 & 11 \end{bmatrix} > 0,$$

Άρα ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος.

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 \approx 4.0996477$, $\lambda_2 \approx -2.3831847$, $\lambda_3 \approx -0.7164631$, επομένως η φασματική ακτίνα ισούται με $\rho(A) \approx 4.0996477 > 0$ και είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A . Συνεπώς επαληθεύονται τα (1), (2), (3) του Θεωρήματος 2.3.5.

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι τα:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.6087603 \\ 0.6443544 \\ 0.4628371 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.8060699 \\ -0.2410352 \\ 0.5405121 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.90068401 \\ 0.43116381 \\ 0.05353575 \end{bmatrix}.$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι ισχύει το (4) του Θεωρήματος 2.3.5, αφού το μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x}_1 αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα.

Ο ανάστροφος πίνακας του A είναι ο $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι επίσης μη υποβιβάσιμος (προκύπτει άμεσα από τον ορισμό). Οι ιδιοτιμές του A^T είναι οι $\lambda_1 \approx 4.0996477$, $\lambda_2 \approx -2.3831847$, $\lambda_3 \approx -0.7164631$, επομένως η φασματική ακτίνα ισούται με $\rho(A) \approx 4.0996477 > 0$ και είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A^T .

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ του A^T είναι τα:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0.3240252 \\ 0.5845117 \\ 0.7438775 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -0.1702825 \\ -0.4636740 \\ 0.8694886 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} -0.5007438 \\ 0.7645744 \\ -0.4058099 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσουμε ότι επαληθεύεται το (5) του Θεωρήματος 2.3.5, αφού το μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα \mathbf{y}_1 αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα του πίνακα A^T .

Κεφάλαιο 3

Ένα Μοντέλο Πινάκων στη Δημογραφία

Τα πληθυσμιακά μοντέλα πινάκων χρησιμοποιούνται ευρέως από τους ερευνητές για τη μελέτη της δημογραφίας ενός πληθυσμού και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως για την κατασκευή ενός πληθυσμιακού μοντέλου.

3.1 Το Μοντέλο

Ένα πρότυπο μοντέλο δίνεται από μία ακολουθία μη αρνητικών διανυσμάτων $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ μήκους n τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{x}_k = P\mathbf{x}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

για ένα δοσμένο \mathbf{x}_0 όπου P είναι ένας $n \times n$ πίνακας με μη αρνητικά στοιχεία. Υποθέτουμε τώρα ότι:

$$P = T + F, \quad (3.2)$$

όπου T και F είναι μη αρνητικοί μη μηδενικοί πίνακες τέτοιοι ώστε όλα τα αθροίσματα των στοιχείων των στηλών του T να μην είναι μεγαλύτερα της μονάδας:

$$\sum_{i=1}^n t_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Το m στοιχείο του διανύσματος \mathbf{x}_k αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό της m κλάσης την χρονική στιγμή k . Ο πίνακας $P = T + F$ λέγεται *πίνακας προβολής*, οι πίνακες T και F ονομάζονται *πίνακας μετάβασης* και *πίνακας γονιμότητας* αντίστοιχα. Το (i, j) στοιχείο του πίνακα T αντιπροσωπεύει το ποσοστό των ατόμων της j κλάσης που θα επιβιώσουν και θα μετακινηθούν στην i κλάση σε μία μονάδα χρόνου. Το (i, j) στοιχείο του πίνακα F αντιπροσωπεύει τον αριθμό των νεογέννητων στην i κλάση που κατάγονται από ένα άτομο στην j κλάση σε μία μονάδα χρόνου. Είναι προφανές πως τα αθροίσματα των ποσοστών των στηλών του πίνακα T είναι μικρότερα ή ίσα της μονάδας αφού δεν μπορούν να υπερβούν το συνολικό ποσοστό του πληθυσμού (100%).

Είναι σημαντικό για το μοντέλο να αποκλειστεί το ενδεχόμενο ο πληθυσμός να είναι αθάνατος, για αυτό το λόγο θα υποθέτουμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k \mathbf{x}_0 = 0$ για όλους τους

αρχικούς πληθυσμούς \mathbf{x}_0 . Καθώς το διάνυσμα \mathbf{x}_0 είναι μη μηδενικό καταλήγουμε στο $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$.

Λήμμα 3.1.1. Έστω μη αρνητικός πίνακας $T \in M_n$. Τότε $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$ αν και μόνο αν

$$\rho(T) < 1. \quad (3.4)$$

Απόδειξη. Εάν $T^k \rightarrow 0$ και εάν το $\mathbf{x} \neq 0$ είναι ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, τότε $T^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x} \rightarrow 0$ μόνο όταν $|\lambda| < 1$. Αφού η ανισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε ιδιοτιμή του πίνακα T , καταλήγουμε στο $\rho(T) < 1$.

Αντίστροφα, εάν $\rho(T) < 1$ τότε υπάρχει κάποια νόρμα του πίνακα $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|T\| < 1$. Τότε $T^k \rightarrow 0$ καθώς $k \rightarrow \infty$. \square

Στο εξής θα θεωρούμε ότι το μοντέλο ικανοποιεί ταυτόχρονα τις (3.1), (3.2) και (3.4).

Πόρισμα 3.1.1. Έστω μη αρνητικός πίνακας $T \in M_n$. Εάν $\rho(T) < 1$ τότε ο πίνακας $(I - T)$ αντιστρέφεται και

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \dots + T^{k-1} = e_{i,j} \geq 0. \quad (3.5)$$

Απόδειξη. Θεωρώ τον πίνακα $B := I + T + \dots + T^{k-1}$ και υπολογίζω το γινόμενο πινάκων $(I - T)B$:

$$\begin{aligned} (I - T)B &= (I - T)(I + T + \dots + T^{k-1}) \\ &= I + T + \dots + T^{k-1} - T(I + T + \dots + T^{k-1}) \\ &= I + T + \dots + T^{k-1} - T - T^2 - \dots - T^{k-1} - T^k = B(I - T). \end{aligned}$$

Κάνοντας τις απαλοιφές και καθώς $T^k \rightarrow 0$ όταν $k \rightarrow \infty$, αφού $\rho(T) < 1$, τότε $(I - T)B = B(I - T) = I$, δηλαδή ο πίνακας $(I - T)$ αντιστρέφεται και ο $B := I + T + \dots + T^{k-1}$ είναι ο αντίστροφος. \square

Το πόρισμα προϋποθέτει όλα τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα T να είναι αυστηρά μικρότερα της μονάδας. Γί αυτό το λόγο δεν θα χρησιμοποιηθεί η υπόθεση (3.3) η οποία συνεπάγεται την ασθενέστερη συνθήκη $\rho(T) \leq 1$. Τα στοιχεία $e_{i,j}$ δηλώνουν τον προσδοκώμενο χρόνο που θα καταναλώσει ένα άτομο που ξεκίνησε από την κλάση j στην κλάση i κατά τη διάρκεια της ζωής του.

Έστω τώρα ο πίνακας $Q = F(I - T)^{-1}$. Τότε έχουμε:

$$Q\mathbf{x}_0 = F\mathbf{x}_0 + FT\mathbf{x}_0 + FT^2\mathbf{x}_0 + \dots,$$

το οποίο αντιπροσωπεύει την κατανομή, λαμβάνοντας υπ' όψιν την κατάσταση γέννησης, όλων των νεογέννητων απογόνων που συσσωρεύτηκαν καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του πληθυσμού \mathbf{x}_0 , όπου ο πίνακας Q λέγεται *πίνακας επόμενης γενιάς*. Ορίζουμε τη φασματική ακτίνα $\rho(Q)$ του πίνακα Q ως *καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής*, δηλαδή το μέσο αριθμό των θυγατέρων που θα γεννούσε μια ομάδα θηλυκών καθ' όλη τη διάρκεια της αναπαραγωγικής τους περιόδου, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα ποσοστά γονιμότητας και θνησιμότητας μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου. Συνήθως συμβολίζεται R_0 . Όταν $R_0 < 1$, οι αναπαραγωγικές επιδόσεις του πληθυσμού είναι κάτω από το επίπεδο αντικατάστασης, δηλαδή το θηλυκό δεν αντικαθιστά τον εαυτό του. Όταν $R_0 = 1$ το θηλυκό αντικαθιστά τον εαυτό του και όταν $R_0 > 1$ αφήνει επιπλέον θυγατέρες.

3.2 Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας

Το σημαντικότερο ίσως αποτέλεσμα της θεωρίας Perron-Frobenius είναι η ύπαρξη του ορίου $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k$. Το όριο αυτό υπάρχει για κάθε θετικό πίνακα. Σε αυτή τη παράγραφο, θα δούμε ότι κάτι ανάλογο ισχύει για μη αρνητικούς, μη υποβιβάσιμους πίνακες.

Ορισμός 3.2.1. Ένας μη αρνητικός πίνακας P λέγεται *πρωταρχικός* εάν είναι μη υποβιβάσιμος και έχει μόνο μία μη μηδενική ιδιοτιμή μέγιστου μέτρου.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω ένας πρωταρχικός, μη αρνητικός πίνακας P με φασματική ακτίνα $\rho(P) = r$ με δεξιό και αριστερό Perron ιδιοδιανύσματα \mathbf{u}^T και \mathbf{v} κανονικοποιημένα τέτοια ώστε $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 1$. Τότε:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{P}{r} \right)^k = \mathbf{v} \mathbf{u}^T.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.4 καθώς ισχύουν όλες οι απαραίτητες προϋποθέσεις: η $\rho(P)$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα P , με θετικά αντίστοιχα δεξιό και αριστερό Perron ιδιοδιανύσματα \mathbf{u}^T και \mathbf{v} , τέτοια ώστε $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 1$. \square

Πλέον έχουμε γενικεύσει όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος Perron από τους θετικούς πίνακες στους πρωταρχικούς, μη αρνητικούς πίνακες.

Θεώρημα 3.2.2. Εάν ο πίνακας P είναι μη αρνητικός, τότε είναι και πρωταρχικός αν και μόνο αν $P^k > 0$ για οποιοδήποτε $k \geq 1$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπετε [4, Theorem 8.5.2]. \square

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.1 προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα γνωστό ως το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας.

Θεώρημα 3.2.3. (Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας) Έστω P ο πίνακας προβολής ενός πρότυπου πληθυσμιακού μοντέλου \mathbf{x}_k , $k = 1, 2, \dots$, όπως τον ορίσαμε στη σχέση (3.1). Υποθέτουμε ότι ο P είναι πρωταρχικός με φασματική ακτίνα $\rho(P) = r$ με αριστερό και δεξιό Perron ιδιοδιανύσματα \mathbf{u}^T και \mathbf{v} αντίστοιχα, κανονικοποιημένα, τέτοια ώστε $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 1$. Τότε:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{x}_k}{r^k} \right) = (\mathbf{u}^T \mathbf{x}_0) \mathbf{v}.$$

Συνεπώς, εάν $|\mathbf{w}|$ δηλώνει το άθροισμα των στοιχείων του διανύσματος \mathbf{w} ώστε στο πληθυσμιακό μοντέλο το $|\mathbf{x}_k|$ να δηλώνει το συνολικό πληθυσμό σε χρόνο k , τότε:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_k| = \begin{cases} 0 & \text{αν } r < 1, \\ |(\mathbf{u}^T \mathbf{x}_0) \mathbf{v}| & \text{αν } r = 1, \\ \infty & \text{αν } r > 1. \end{cases}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπετε [11, Theorem 1.1.2]. \square

Οι ευσταθείς (stable) πληθυσμοί είναι θεωρητικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται ευρέως από τους δημογράφους για να αναπαραστήσουν και να καταλάβουν τη δομή, την ανάπτυξη και την εξέλιξη των ανθρωπίνων πληθυσμών. Εξ ορισμού, οι ευσταθείς πληθυσμοί έχουν καθορισμένους ρυθμούς ηλικίας, γονιμότητας και θνησιμότητας που παραμένουν σταθεροί με την πάροδο του χρόνου.

Μαθηματικά, ένας πληθυσμός είναι ένα διάνυσμα που είναι μη αρνητικό και μη μηδενικό. Αν, για κάποιο θετικό r , $P\mathbf{x} = r\mathbf{x}$, τότε καλούμε τον πληθυσμό \mathbf{x} *στάσιμο* (stationary) εάν $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Καλούμε τον πληθυσμό *ευσταθή* εάν υπάρχει το $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{x}_k}{r^k}\right)$ και είναι μη μηδενικό, ενώ καλούμε τον πληθυσμό *τελικά στάσιμο* εάν υπάρχει το $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$ και είναι μη μηδενικό. Η φασματική ακτίνα $\rho(P) = r$ καλείται *ρυθμός ανάπτυξης* του μοντέλου.

Άμεσα από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας προκύπτει ότι, ανεξάρτητα από τον αρχικό πληθυσμό \mathbf{x}_0 , ο αριθμός των ατόμων στο \mathbf{x}_k αυξάνεται προς το άπειρο αν $r > 1$, συρρικνώνεται στο 0 αν $r < 1$ και παραμένει πεπερασμένος αν $r = 1$. Σε όλες τις περιπτώσεις, υπάρχει ένας μοναδικός σταθερός πληθυσμός, που είναι στάσιμος αν $r = 1$. Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση, το Θεμελιώδες Θεώρημα δείχνει ότι κάθε πληθυσμός τελικά είναι στάσιμος.

Για τον πρωταρχικό πίνακα P , ο αντίστροφος του παράγοντα ανάπτυξης r του P μπορεί επίσης να ερμηνευτεί ως παράγοντας σταθερότητας για το μοντέλο, δηλαδή εάν και οι δύο T και F έχουν κλιμακωθεί από τον ίδιο παράγοντα $1/r$, τότε το προκύπτον μοντέλο με τον πίνακα $P' = (T + F)/r$ έχει την ιδιότητα ότι κάθε πληθυσμός είναι τελικά στάσιμος. Ωστόσο, μας ενδιαφέρει ιδιαίτερος η κλιμάκωση (scaling) του πίνακα γονιμότητας F χωρίς κλιμάκωση του πίνακα μετάβασης T έτσι ώστε στο προκύπτον μοντέλο κάθε πληθυσμός τελικά να έχει ένα προκαθορισμένο ρυθμό ανάπτυξης.

3.3 Ο Καθαρός Ρυθμός Αναπαραγωγής

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το επόμενο θεώρημα το οποίο θα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Θεωρίας Perron-Frobenius.

Θεώρημα 3.3.1. Έστω ένα πρότυπο μοντέλο πινάκων που ικανοποιεί τις (3.1) και (3.2), και υποθέτουμε ότι ο πίνακας προβολής $P = T + F$ είναι μη υποβιβάσιμος με τον πίνακα T να είναι μη μηδενικός και να ικανοποιεί την (3.4). Θέτουμε τον ρυθμό ανάπτυξης $\rho(P) = r$ και τον καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής $\rho(Q) = R_0$, όπου $Q = F(I - T)^{-1}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $R_0 > 0$. Τότε:

$$\rho\left(T + \frac{F}{R_0}\right) = 1 \quad (3.6)$$

και θα ισχύει ένα από τα επόμενα:

$$r = R_0 = 1 \quad \text{ή} \quad 1 < r < R_0 \quad \text{ή} \quad 0 < R_0 < r < 1. \quad (3.7)$$

Απόδειξη. Αφού $\rho(T) < 1$, από το Πρόσχημα 3.1.1 ο πίνακας $(I - T)^{-1}$ είναι μη αρνητικός, οπότε και ο $Q = F(I - T)^{-1}$ είναι μη αρνητικός. Είναι φανερό ότι $F \neq 0$ αφού $\rho(Q) > 0$.

Για να αποδείξουμε την ισότητα (3.7), το Θεώρημα 2.3.5.(5) μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα μη αρνητικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα \mathbf{y}^T του $F(I - T)^{-1}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή R_0 , τέτοιο ώστε $\mathbf{y}^T F(I - T)^{-1} = R_0 \mathbf{y}^T$. Τότε $\mathbf{y}^T F = R_0 \mathbf{y}^T (I - T)$ και έτσι $\mathbf{y}^T \left(T + \frac{F}{R_0}\right) = \mathbf{y}^T$. Επιπλέον $R_0 > 0$, οπότε ο πίνακας $T + \frac{F}{R_0}$ είναι μη υποβιβάσιμος και από το Θεώρημα 2.3.5.(3) προκύπτει ότι $\rho\left(T + \frac{F}{R_0}\right) = 1$.

Για να αποδείξουμε την κάθε συνθήκη στη (3.8) θεωρούμε τρεις περιπτώσεις.

1. Αν $R_0 = 1$, τότε $1 = \rho(T + F) = r$.

2. Αν $R_0 > 1$, τότε:

$$T + \frac{F}{R_0} \leq T + F \leq R_0 T + F$$

και αφού ο F είναι μη μηδενικός οι ισότητες αποκλείονται. Τότε:

$$1 = \rho\left(T + \frac{F}{R_0}\right) < \rho(T + F) = r < \rho(R_0 T + F) = R_0.$$

3. Αν $0 < R_0 < 1$, όμοια με το (2):

$$1 = \rho\left(T + \frac{F}{R_0}\right) > \rho(T + F) = r > \rho(R_0 T + F) = R_0.$$

□

Πόρισμα 3.3.1. Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.1, θεωρούμε το τροποποιημένο μοντέλο $P'' = T + \frac{F}{R_0}$ με αριστερό και δεξιό διανύσματα Perron \mathbf{u}''^T και \mathbf{v}'' τέτοια ώστε $\mathbf{u}''^T \mathbf{v}'' = 1$. Αν ο P είναι μη αρνητικός και πρωταρχικός, τότε για κάθε αρχικό πληθυσμό \mathbf{x}_0 ισχύει:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(T + \frac{F}{R_0}\right)^k \mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}''^T \mathbf{x}_0) \mathbf{v}''.$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο από το Θεώρημα 3.3.1 και το Θεώρημα 3.2.3, αφού ο πίνακας P'' είναι επίσης μη αρνητικός και πρωταρχικός. □

Πρόταση 3.3.1. Έστω T και F μη αρνητικοί πίνακες με $\rho(T) < 1$ και $F \neq 0$. Υποθέτουμε ότι ο $T + F$ είναι μη υποβιβάσιμος και $Q = F(I - T)^{-1}$. Τότε, μετά από μετασχηματισμό ομοιότητας,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου ο Q_{11} είναι ένας μη τετριμμένος μη υποβιβάσιμος μη αρνητικός πίνακας, ο Q_{12} είναι ένας μη αρνητικός πίνακας του οποίου κάθε στήλη έχει ένα θετικό στοιχείο και οι μηδενικές γραμμές του Q αντιστοιχούν στις μηδενικές γραμμές του πίνακα F , αν υπάρχουν.

Με τη χρήση της παραπάνω πρότασης, το Θεώρημα 3.3.1 μπορεί να βελτιωθεί ως εξής:

Θεώρημα 3.3.2. Έστω ένα πρότυπο μοντέλο πινάκων, το οποίο ικανοποιεί τις (3.1) και (3.2), και υποθέτουμε ότι ο πίνακας προβολής $P = T + F$ είναι μη υποβιβάζσιμος με τον πίνακα T να είναι μη μηδενικός και να ικανοποιεί την (3.4). Θέτουμε τον ρυθμό ανάπτυξης $\rho(P) = r$ και τον καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής $\rho(Q) = R_0$, όπου $Q = F(I - T)^{-1}$. Τότε (α) θα ισχύει η εξίσωση (3.7), καθώς και μία από τις συνθήκες (3.8). Επιπλέον, (β) ο πίνακας Q είναι μη υποβιβάζσιμος αν και μόνο αν κάθε γραμμή του πίνακα F περιέχει ένα θετικό στοιχείο.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\rho(Q) = \rho(Q_{11})$ και αφού ο Q_{11} είναι μη υποβιβάζσιμος, $\rho(Q_{11}) > 0$ από το Θεώρημα 2.3.5. Το πρώτο συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 3.3.1 και το δεύτερο από την Πρόταση 3.3.1. \square

Παράδειγμα 3.3.1. Έστω ένα υποθετικό μοντέλο πινάκων, με πίνακα γονιμότητας

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και πίνακα μετάβασης } T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Το φάσμα του πίνακα T είναι $\sigma(T) = \{\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.6, \lambda_3 = 0\}$, συνεπώς η φασματική ακτίνα είναι $\rho(T) = 0.8 < 1$ και έτσι ικανοποιείται η (5.4).

Ο πίνακας προβολής είναι:

$$P = T + F = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 2 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$

ο οποίος είναι μη αρνητικός και αφού:

$$(I_3 + |P|)^{3-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 2 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 2.20 & 4.2 & 5.2 \\ 1.12 & 3.84 & 0.8 \\ 0.78 & 0.45 & 3.16 \end{bmatrix} > 0,$$

από το Θεώρημα 2.3.4 είναι και μη υποβιβάζσιμος.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα P είναι $\lambda_1 \approx 1.5080857$, $\lambda_2 \approx -0.8023196$ και $\lambda_3 \approx 0.6942340$, οπότε ο ρυθμός ανάπτυξης είναι $r = \rho(A) \approx 1.5080857$.

Ο πίνακας επόμενης γενιάς είναι ο:

$$\begin{aligned} Q = F(I - T)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0.75 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 & 7.5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Σε αυτή τη περίπτωση ο πίνακας Q είναι μη αρνητικός, αλλά υποβιβάσιμος αφού ο πίνακας γονιμότητας F δεν έχει σε κάθε γραμμή του τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο, επιβεβαιώνοντας το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 3.3.2.

Το φάσμα του Q είναι $\sigma(Q) = \lambda_1 = 4.5, \lambda_{2,3} = 0$, επομένως ο καθαρός ρυθμός αναπαραγωγής είναι $R_0 = \rho(Q) = 4.5$.

Έστω ο πίνακας:

$$\begin{aligned} P'' = T + \frac{F}{R_0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.33333 & 0.44444 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.33333 & 0.44444 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ο οποίος είναι πρωταρχικός. Το φάσμα του P'' είναι $\sigma(P'') = \{\lambda_1 \approx 0.9999981, \lambda_2 \approx 0.6760950, \lambda_3 \approx -0.2760931\}$.

Τελικά, επαληθεύεται και το πρώτο σκέλος του Θεωρήματος 3.3.2, καθώς $\rho(P'') = \rho(T + \frac{F}{R_0}) \approx 0.9999981 \approx 1$ και $0 < r < R_0$.

3.4 Δημογραφική Ερμηνεία με τη Βοήθεια Παραδειγμάτων

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν τρία παραδείγματα με σκοπό την ερμηνεία των θεωρημάτων που διατυπώθηκαν παραπάνω.

Παράδειγμα 3.4.1. Έστω ότι έχουμε συλλέξει δεδομένα για ένα πληθυσμό (θηλυκών) βατράχων. Ο πληθυσμός χωρίζεται σε τρία στάδια: ανήλικοι βάτραχοι, νέοι ενήλικοι βάτραχοι και ενήλικοι βάτραχοι. Έστω τώρα ότι ένας νέος ενήλικος βάτραχος γεννά κατά μέσο όρο 95 αυγά, ενώ ένας ενήλικος βάτραχος γεννά κατά μέσο όρο 150 αυγά. Επίσης, υπολογίζεται ότι κατά μέσο όρο κάθε χρόνο 30% των ανήλικων βατράχων επιβιώνουν και γίνονται νέοι ενήλικοι βάτραχοι, το 45% των νέων ενήλικων βατράχων επιβιώνουν κάθε χρόνο, 50% των νέων ενήλικων βατράχων γίνονται ενήλικοι και το 74% των ενήλικων βατράχων επιβιώνουν κάθε χρόνο.

Με βάση αυτά τα δεδομένα παίρνουμε τους ακόλουθους πίνακες γονιμότητας και μετάβασης:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 95 & 150 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.74 \end{bmatrix}.$$

Η φασματική ακτίνα του πίνακα T είναι $\rho(T) = 0.74 < 1$, άρα ο πληθυσμός δεν είναι αιθέριος.

Ο πίνακας προβολής είναι:

$$P = F + T = \begin{bmatrix} 0 & 95 & 150 \\ 0.3 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.74 \end{bmatrix}.$$

Ο αρχικός πληθυσμός αποτελείται από 150 ανήλικους βατράχους, 280 νέους ενήλικους και 140 ενήλικους. Τότε το αρχικό διάνυσμα είναι:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 150 \\ 280 \\ 140 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας προβολής P είναι μη αρνητικός και πρωταρχικός και ο ρυθμός ανάπτυξης ισούται με $r = \rho(P) \approx 5.9576203 > 1$. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας, το $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$ ισούται με ∞ και επομένως ανεξάρτητα από τον αρχικό πληθυσμό \mathbf{x}_0 , ο αριθμός των βατράχων αυξάνεται συνεχώς.

Ο πίνακας επόμενης γενιάς είναι:

$$\begin{aligned} Q = F(I - T)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 95 & 150 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.74 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 95 & 150 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0.55 & 0 \\ 0 & -0.55 & 0.26 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 95 & 150 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5454545 & 1.818182 & 0 \\ 1.0489510 & 3.496503 & 3.846154 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 209.1608 & 697.2028 & 576.9231 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας Q είναι μη αρνητικός, αλλά υποβιβασίμος αφού νεογέννητοι βάτραχοι υπάρχουν μόνο στη πρώτη πληθυσμιακή κλάση του πίνακα F .

Ο καθαρός ρυθμός αναπαραγωγής είναι $R_0 = \rho(Q) = 209.1608$, με $0 < r < R_0$. Ουσιαστικά σε κάθε αρχικό πληθυσμό $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ οι βάτραχοι κατά τη διάρκεια της ζωής τους θα παράγουν περισσότερους απογόνους από όσους χρειάζονται για να τους αντικαταστήσουν και ο πληθυσμός των βατράχων θα αυξάνεται απεριόριστα.

Προκειμένου να έχουμε ένα μοντέλο του οποίου ο πληθυσμός παραμένει τελικά στάσιμος με την πάροδο των χρόνων, θα κλιμακώσουμε τον πίνακα γονιμότητας F με τον καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής R_0 .

Έστω ο νέος πίνακας προβολής είναι:

$$P'' = T + \frac{F}{R_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.74 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.454196 & 0.7171516 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.454196 & 0.7171516 \\ 0.3 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.74 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας P'' είναι μη αρνητικός και πρωταρχικός και ο νέος ρυθμός ανάπτυξης ισούται με $r'' = \rho(P'') = 1.00000003$, καθιστώντας το πληθυσμό στάσιμο με την πάροδο των χρόνων (Θεώρημα 3.2.2).

Υλοποίηση με το στατιστικό πρόγραμμα R:

α) Χωρίς κλιμάκωση του πίνακα γονιμότητας

```
> local((pkg <- select.list(sort(.packages(all.available = TRUE)), graphics=TRUE)
+ if(nchar(pkg)) library(pkg, character.only=TRUE)))
> stages<-c("juvenile","young adult","adult")
> P<-matrix(c(0,95,150,0.3,0.45,0,0,0.50,0.74), nrow=3, byrow=TRUE, dimnames=list(stages,stages))
> P
      juvenile young adult  adult
juvenile    0.0    95.00 150.00
young adult  0.3    0.45   0.00
adult        0.0    0.50   0.74
> x0<-c(150,280,140)
> x0
[1] 150 280 140
> p<-pop.projection(P,x0,20)
> p
$lambda
[1] 6.109993

$stable.stage
      juvenile young adult      adult
0.944906689 0.050159923 0.004933388

$stage.vectors
      0      1      2      3      4      5      6
juvenile 150 47600.0 52785.000 1403774.85 3224403.17 43451592.8 144508482.0
young adult 280 171.0 14356.950 22296.13 431165.71 1161345.5 13558083.3
adult 140 243.6 265.764 7375.14 16605.67 227871.1 749297.3
      7      8      9      10      11
juvenile 1400412517 5798128053 46548948707 220683703480 1.581933e+12
young adult 49453682 442377912 1938508476 14837013426 7.288177e+10
adult 7333522 30153647 243502655 1149446203 8.269097e+09
      12      13      14      15      16
juvenile 8.164132e+12 5.458479e+13 2.971455e+14 1.902605e+15 1.071076e+16
young adult 5.073768e+11 2.677559e+12 1.758034e+13 9.705482e+13 6.144560e+14
adult 4.256002e+10 2.851828e+11 1.549815e+12 9.937033e+12 5.588081e+13
      17      18      19
juvenile 6.675544e+16 3.838117e+17 2.352139e+18
young adult 3.489734e+15 2.159701e+16 1.248622e+17
adult 3.485798e+14 2.002816e+15 1.228059e+16

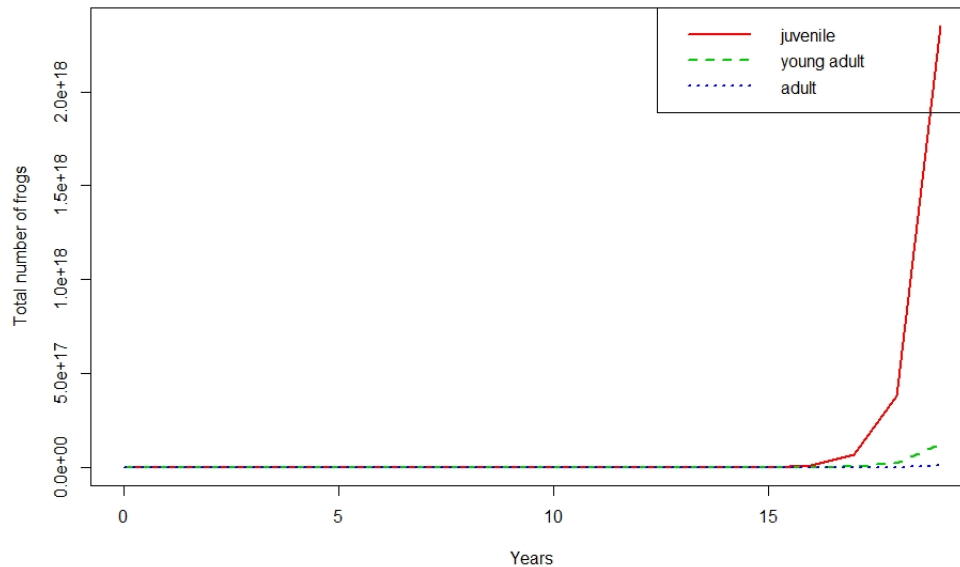
$pop.sizes
[1] 5.700000e+02 4.801460e+04 6.740771e+04 1.433446e+06 3.672175e+06
[6] 4.484081e+07 1.588159e+08 1.457200e+09 6.270660e+09 4.873096e+10
[11] 2.366702e+11 1.663084e+12 8.714069e+12 5.754754e+13 3.162757e+14
[16] 2.009596e+15 1.138110e+16 7.059376e+16 4.074115e+17 2.489281e+18

$pop.changes
[1] 84.236140 1.403900 21.265313 2.561781 12.210969 3.541771 9.175404
[8] 4.303226 7.771265 4.856669 7.027012 5.239705 6.603980 5.495903
[15] 6.353939 5.663376 6.202719 5.771212 6.109993

> stage.vector.plot(p$stage.vectors,prop=FALSE, col=2:4,ylab="Total number of frogs")
```

Φαίνεται και από την εκτίμηση του ρυθμού ανάπτυξης $\lambda = 6.109993 > 1$, αλλά και από τον πίνακα (stage.vectors) του πληθυσμού των θηλυκών βατράχων (ανά χρόνο) ότι το πλήθος τους με την πάροδο των χρόνων θα αυξάνεται.

Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της αύξησης του πληθυσμού των βατράχων προς το άπειρο με την πάροδο 20 χρόνων.



β) Με κλιμάκωση του πίνακα γονιμότητας

```
> local({pkg <- select.list(sort(.packages(all.available = TRUE)),graphics=TRUE)
+ if(nchar(pkg)) library(pkg, character.only=TRUE)})
> stages<-c("juvenile","young adult","adult")
> P2<-matrix(c(0,0.454196,0.7171516,0.3,0.45,0,0,0.50,0.74), nrow=3, byrow=TRUE, dimnames=list(stages,stages))
> P2
      juvenile young adult  adult
juvenile    0.0   0.454196 0.7171516
young adult  0.3   0.450000 0.0000000
adult        0.0   0.500000 0.7400000
> x0<-c(150,280,140)
> x0
[1] 150 280 140
> p2<-pop.projection(P2,x0,20)
> p2
$lambda
[1] 1

$stable.stage
      juvenile young adult  adult
0.3854448  0.2102426  0.4043126

$stage.vectors
      0      1      2      3      4      5      6      7
juvenile 150 227.5761 252.3656 256.5527 257.1811 257.2723 257.2854 257.2873
young adult 280 171.0000 145.2228 141.0600 140.4428 140.3536 140.3408 140.3390
adult      140 243.6000 265.7640 269.2768 269.7948 269.8695 269.8803 269.8818
      8      9      10     11     12     13     14
juvenile 257.2876 257.2876 257.2876 257.2877 257.2877 257.2877 257.2877
young adult 140.3387 140.3387 140.3387 140.3387 140.3387 140.3387 140.3387
adult      269.8820 269.8821 269.8821 269.8821 269.8821 269.8821 269.8821
      15     16     17     18     19
juvenile 257.2877 257.2877 257.2877 257.2877 257.2877
young adult 140.3387 140.3387 140.3387 140.3387 140.3387
adult      269.8821 269.8821 269.8822 269.8822 269.8822

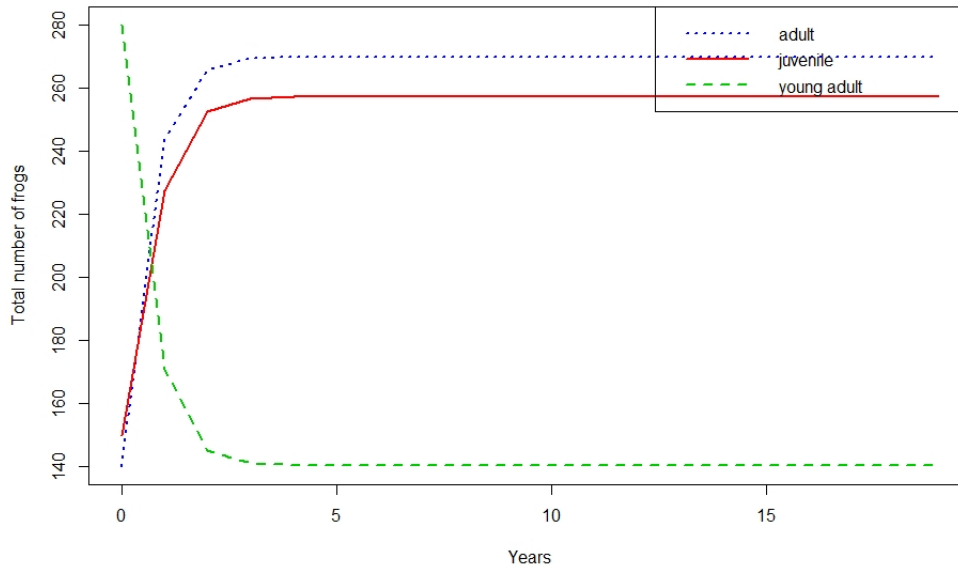
$pop.sizes
[1] 570.0000 642.1761 663.3525 666.8895 667.4187 667.4955 667.5065 667.5081
[9] 667.5084 667.5084 667.5084 667.5085 667.5085 667.5085 667.5085 667.5086
[17] 667.5086 667.5086 667.5086 667.5086

$pop.changes
[1] 1.126625 1.032976 1.005332 1.000794 1.000115 1.000017 1.000002 1.000000
[9] 1.000000 1.000000 1.000000 1.000000 1.000000 1.000000 1.000000 1.000000
[17] 1.000000 1.000000 1.000000

> stage.vector.plot(p2$stage.vectors,prop=FALSE, col=2:4,ylab="Total number of frogs")
```

Σε αυτή τη περίπτωση, βλέπουμε από τον πίνακα του πληθυσμού των θηλυκών βατράχων (ανά χρόνο) πως για 5 χρόνια ο πληθυσμός των βατράχων αυξάνεται και στη συνέχεια παραμένει στάσιμος. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον εκτιμητή του ρυθμού ανάπτυξης $\lambda = 1$.

Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση του πληθυσμού των βατράχων, ο οποίος μετά την πάροδο 5 χρόνων παραμένει στάσιμος.



Παράδειγμα 3.4.2. Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε τον 5-σταδίων πίνακα προβολής για τον πληθυσμό των θηλυκών θαλάσσιων χελωνών (*Caretta*), που ζουν στις νοτιοανατολικές ΗΠΑ, από το άρθρο των Crowder κ.α. [3], ο οποίος είναι:

	egg/hatchling	small juvenile	large juvenile	sub-adult	adult
egg/hatchling	0	0	0	4.665	61.896
small juvenile	0.675	0.703	0	0	0
large juvenile	0	0.047	0.657	0	0
sub-adult	0	0	0.019	0.682	0
adult	0	0	0	0.061	0.8091

και θα τον συμβολίζουμε στο εξής P . Οι πίνακες γονιμότητας και μετάβασης αντίστοιχα είναι:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4.665 & 61.896 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.675 & 0.703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.657 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.019 & 0.682 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.061 & 0.8091 \end{bmatrix},$$

με $F + T = P$. Η φασματική ακτίνα του πίνακα μετάβασης T είναι $\rho(T) = 0.8091 < 1$, δηλαδή ο πληθυσμός δεν είναι αθάνατος.

Έστω ότι ο αρχικός πληθυσμός δίνεται από το διάνυσμα:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 615 \\ 540 \\ 515 \\ 405 \\ 195 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας προβολής P είναι μη αρνητικός και πρωταρχικός και ο ρυθμός ανάπτυξης ισούται με $r = \rho(P) \approx 0.9515 < 1$. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας, το $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$ ισούται με μηδέν και επομένως ανεξάρτητα από τον αρχικό πληθυσμό \mathbf{x}_0 , ο αριθμός των θαλάσσιων χελωνών συρρικνώνεται.

Ο πίνακας επόμενης γενιάς είναι:

$$Q = F(I - T)^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4.665 & 61.896 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.675 & 0.703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.657 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.019 & 0.682 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.061 & 0.8091 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4.665 & 61.896 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.675 & 0.297 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.047 & 0.343 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.019 & 0.318 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.061 & 0.1909 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4.665 & 61.896 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.2727273 & 3.3670034 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3114233 & 0.4613678 & 2.9154519 & 0 & 0 \\ 0.0186071 & 0.0275660 & 0.1741937 & 3.1446541 & 0 \\ 0.0059457 & 0.0088084 & 0.0556617 & 1.0048397 & 5.2383447 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4548172 & 0.6738001 & 4.2578501 & 76.8653694 & 324.2325836 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, ο πίνακας Q είναι μη αρνητικός, αλλά υποβιβάζσιμος αφού νεογέννητες θαλάσσιες χελώνες υπάρχουν μόνο στη πρώτη πληθυσμιακή κλάση του πίνακα F .

Ο καθαρός ρυθμός αναπαραγωγής είναι $R_0 = \rho(Q) = 0.4548172$, με $0 < R_0 < r$. Ουσιαστικά σε κάθε αρχικό πληθυσμό $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ οι θαλάσσιες χελώνες δεν παράγουν αρκετούς απογόνους ώστε να τις αντικαταστήσουν.

Προκειμένου να έχουμε ένα μοντέλο του οποίου ο πληθυσμός παραμένει τελικά στάσιμος με την πάροδο των χρόνων, θα κλιμακώσουμε τον πίνακα γονιμότητας F με τον καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής R_0 .

Έστω ο νέος πίνακας προβολής:

$$\begin{aligned} P'' &= T + \frac{F}{R_0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.675 & 0.703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.657 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.019 & 0.682 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.061 & 0.8091 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10.256868 & 136.08984 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10.256868 & 136.08984 \\ 0.675 & 0.703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.657 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.019 & 0.682 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.061 & 0.8091 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας P'' είναι μη αρνητικός και πρωταρχικός και ο νέος ρυθμός ανάπτυξης ισούται με $r'' = \rho(P'') = 1$, καθιστώντας το πληθυσμό στάσιμο με την πάροδο των χρόνων (Θεώρημα 3.2.2).

Υλοποίηση με το στατιστικό πρόγραμμα R:

α) Χωρίς κλιμάκωση του πίνακα γονιμότητας

```

> local({pkg <- select.list(sort(.packages(all.available = TRUE)),graphics=TRUE)
+ if(nchar(pkg)) library(pkg, character.only=TRUE)})
> stages<-c("egg/hatchling","small juvenile","large juvenile","sub-adult","adult")
> P<-matrix(c(0,0,0,4.665,61.896,0.675,0.703,0,0,0,0,0.047,0.657,0,0,0,0,0.019,0.682,0,0,0,0,0.061,0.8091), nrow=5, byrow=TRUE, dimnames=list(stages,stages))
> P
      egg/hatchling small juvenile large juvenile sub-adult  adult
egg/hatchling      0.000          0.000          0.000      4.665 61.8960
small juvenile      0.675          0.703          0.000      0.000 0.0000
large juvenile      0.000          0.047          0.657      0.000 0.0000
sub-adult           0.000          0.000          0.019      0.682 0.0000
adult               0.000          0.000          0.000      0.061 0.8091
> x0<-c(615,540,515,405,195)
> x0
[1] 615 540 515 405 195
> pl<-pop.projection(P,x0,100)
> pl
$lambda
[1] 0.9515817

$stable.stage
egg/hatchling small juvenile large juvenile sub-adult adult
0.238535412 0.647720163 0.103342617 0.007283541 0.003118266

$stage.vectors
      0      1      2      3      4      5
egg/hatchling 615 13959.0450 12628.9178 11160.5432 9697.2714 8358.82170
small juvenile 540 794.7450 9981.0611 15541.2055 18458.8341 19522.21857
large juvenile 515 363.7350 276.3269 650.6567 1157.9181 1628.31738
sub-adult      405 285.9950 201.9596 142.9866 109.8794 96.93816
adult          195 182.4795 165.0899 145.8937 126.7648 109.26805
      6      7      8      9     10
egg/hatchling 7215.47153 6290.89236 5574.99361 5037.9718 4641.89921
small juvenile 19366.32430 18484.96927 17241.28574 15883.7446 14566.90340
large juvenile 1987.34879 2215.90540 2324.64340 2337.6311 2282.35966
sub-adult      97.04986 103.94763 112.99449 121.2305 127.09417
adult          94.32200 82.23598 72.87793 65.8582 60.68093
      11     12     13     14     15
egg/hatchling 4348.80097 4125.4188 3945.36144 3789.45030 3644.98429
small juvenile 13373.81506 12337.2326 11457.73224 10717.90473 10092.56598
large juvenile 2184.15475 2063.5590 1935.60818 1810.20799 1693.04817
sub-adult      130.04306 130.1883 127.99604 124.06986 119.00959
adult          56.84968 53.9297 51.57601 49.53791 47.64938
      16     17     18     19     20     21
egg/hatchling 3504.4860 3364.31889 3223.41321 3082.21984 2941.92922 2803.94108
small juvenile 9555.4383 9083.00116 8656.26506 8261.15826 7888.09264 7531.13135
large juvenile 1586.6833 1491.55650 1406.85367 1331.14732 1262.83823 1200.42507
sub-adult      113.3325 107.43972 101.61346 96.03060 90.78467 85.90907
adult          45.8127 43.98034 42.13831 40.29253 38.45855 36.65468
      22     23     24     25     26
egg/hatchling 2669.54389 2539.75340 2415.26101 2296.45001 2183.44728
small juvenile 7187.04556 6854.43516 6533.00146 6223.00121 5924.87360
large juvenile 1142.64244 1088.50723 1037.30770 988.56223 941.96644
sub-adult      81.39806 77.22368 73.34819 69.73231 66.34012
adult          34.89775 33.20106 31.57362 30.02045 28.54322

```

	27	28	29	30	31
egg/hatchling	2076.18785	1974.47777	1878.04785	1786.59490	1699.81056
small juvenile	5639.01306	5365.65298	5104.82654	4856.37536	4619.98343
large juvenile	897.34101	854.58666	813.64912	774.49432	737.09241
sub-adult	63.14132	60.11186	57.23344	54.49254	51.87930
adult	27.14107	25.81146	24.55087	23.35535	22.22086
	32	33	34	35	36
egg/hatchling	1617.39930	1539.08801	1464.62941	1393.80176	1326.40621
small juvenile	4395.22048	4181.58453	3978.53833	3785.53730	3602.04891
large juvenile	701.40894	667.40103	635.01695	604.19744	574.87797
sub-adult	49.38644	47.00832	44.74030	42.57820	40.51809
adult	21.14354	20.11981	19.14644	18.22055	17.33951
	37	38	39	40	41
egg/hatchling	1262.26342	1201.20995	1143.09509	1087.77826	1035.12701
small juvenile	3427.56458	3261.60571	3103.72553	2953.50824	2810.56661
large juvenile	546.99113	520.46870	495.24341	471.25002	448.42615
sub-adult	38.55602	36.68803	34.91014	33.21834	31.60866
adult	16.50100	15.70288	14.94317	14.22004	13.53175
	42	43	44	45	46
egg/hatchling	985.01568	937.32441	891.93861	848.74855	807.64924
small juvenile	2674.53906	2545.08654	2421.88982	2304.64710	2193.07218
large juvenile	426.71261	406.05352	386.39623	367.69115	349.89150
sub-adult	30.07720	28.62019	27.23399	25.91511	24.66024
adult	12.87667	12.25322	11.65991	11.09531	10.55804
	47	48	49	50	51
egg/hatchling	768.54021	731.32550	695.913506	662.216899	630.152492
small juvenile	2086.89298	1985.85041	1889.697550	1798.198995	1711.130300
large juvenile	332.95311	316.83416	301.495013	286.898008	273.007344
sub-adult	23.46622	22.33007	21.248957	20.220194	19.241234
adult	10.04678	9.56029	9.097365	8.656865	8.237701
	52	53	54	55	56
egg/hatchling	599.641095	570.607357	542.979597	516.689638	491.672632
small juvenile	1628.277533	1549.436845	1474.414068	1403.024318	1335.091601
large juvenile	259.788949	247.210384	235.240754	223.850636	213.012011
sub-adult	18.309661	17.423179	16.579605	15.776865	15.012984
adult	7.838839	7.459294	7.098129	6.754452	6.427416
	57	58	59	60	61
egg/hatchling	467.866901	445.21377	423.657428	403.144765	383.625255
small juvenile	1270.448422	1208.93540	1150.400882	1094.700584	1041.697227
large juvenile	202.698197	192.88379	183.544614	174.657653	166.201006
sub-adult	14.286083	13.59437	12.936156	12.309806	11.713783
adult	6.116214	5.82008	5.538284	5.270131	5.014961
	62	63	64	65	66
egg/hatchling	365.050818	347.375704	330.556376	314.551404	299.321361
small juvenile	991.260198	943.265221	897.594051	854.134172	812.778520
large juvenile	158.153830	150.496296	143.209532	136.275583	129.677364
sub-adult	11.146619	10.606917	10.093347	9.604644	9.139603
adult	4.772146	4.541087	4.321215	4.111989	3.912894
	67	68	69	70	71
egg/hatchling	284.828731	271.037809	257.914622	245.426839	233.543694
small juvenile	773.425219	735.977322	700.342579	666.433203	634.165658
large juvenile	123.398619	117.423878	111.738422	106.328244	101.180017
sub-adult	8.697079	8.275982	7.875273	7.493966	7.131122
adult	3.723438	3.543156	3.371602	3.208355	3.053012
	--	--	--	--	--

	72	73	74	75	76
egg/hatchling	222.235912	211.475635	201.236351	191.492837	182.221087
small juvenile	603.460451	574.241938	546.438136	519.980547	494.803989
large juvenile	96.281057	91.619296	87.183248	82.961987	78.945111
sub-adult	6.785845	6.457287	6.144636	5.847124	5.564016
adult	2.905190	2.764526	2.630673	2.503300	2.382095
	77	78	79	80	81
egg/hatchling	173.398259	165.002617	157.013477	149.411158	142.176929
small juvenile	470.846438	448.048871	426.355123	405.711748	386.067890
large juvenile	75.122725	71.485413	68.024213	64.730599	61.596456
sub-adult	5.294616	5.038260	4.794316	4.562184	4.341291
adult	2.266758	2.157005	2.052567	1.953185	1.858615
	82	83	84	85	86
egg/hatchling	135.292969	128.742319	122.508839	116.577174	110.932710
small juvenile	367.375154	349.587487	332.661069	316.554198	301.227193
large juvenile	58.614062	55.776071	53.075491	50.505668	48.060271
sub-adult	4.131093	3.931073	3.740737	3.559617	3.387266
adult	1.768624	1.682991	1.601503	1.523961	1.450174
	87	88	89	90	91
egg/hatchling	105.561540	100.450434	95.586798	90.958652	86.554592
small juvenile	286.642296	272.763574	259.556835	246.989544	235.030739
large juvenile	45.733276	43.518950	41.411838	39.406749	37.498743
sub-adult	3.223261	3.067196	2.918688	2.773730	2.642895
adult	1.379959	1.313143	1.249563	1.189062	1.131489
	92	93	94	95	96
egg/hatchling	82.363769	78.375858	74.5810351	70.9699510	67.5337092
small juvenile	223.650959	212.822168	202.5176885	192.7121337	183.3813469
large juvenile	35.683119	33.955404	32.3113424	30.7468833	29.2581726
sub-adult	2.514930	2.393162	2.2772889	2.1670266	2.0621029
adult	1.076705	1.024572	0.9749644	0.9277583	0.8828379
	97	98	99		
egg/hatchling	64.2638443	61.1523006	58.1914124		
small juvenile	174.5023406	166.0532403	158.0132308		
large juvenile	27.8415427	26.4935036	25.2107341		
sub-adult	1.9622595	1.8672503	1.7768412		
adult	0.8400924	0.7994166	0.7607102		

\$pop.sizes

[1]	2270.0000	15585.9995	23253.3552	27641.2857	29550.6677	29715.5639
[7]	28760.5165	27177.9506	25326.7952	23446.4362	21678.9374	20093.6635
[13]	18710.3284	17518.2739	16491.1708	15597.2574	14805.7527	14090.2966
[19]	13430.2837	12810.8485	12222.1033	11658.0612	11115.5277	10593.1205
[25]	10090.4920	9607.7662	9145.1707	8702.8243	8280.6407	7878.3078
[31]	7495.3125	7130.9866	6784.5587	6455.2017	6142.0714	5844.3352
[37]	5561.1907	5291.8761	5035.6753	4791.9173	4559.9749	4339.2602
[43]	4129.2212	3929.3379	3739.1186	3558.0972	3385.8312	3221.8993
[49]	3065.9004	2917.4524	2776.1910	2641.7691	2513.8561	2392.1371
[55]	2276.3122	2166.0959	2061.2166	1961.4158	1866.4474	1776.0774
[61]	1690.0829	1608.2522	1530.3836	1456.2852	1385.7745	1318.6778
[67]	1254.8297	1194.0731	1136.2581	1081.2425	1028.8906	979.0735
[73]	931.6685	886.5587	843.6330	802.7858	763.9163	726.9288
[79]	691.7322	658.2397	626.3689	596.0412	567.1819	539.7199
[85]	513.5876	488.7206	465.0576	442.5403	421.1133	400.7237
[91]	381.3214	362.8585	345.2895	328.5712	312.6623	297.5238
[97]	283.1182	269.4101	256.3657	243.9529		

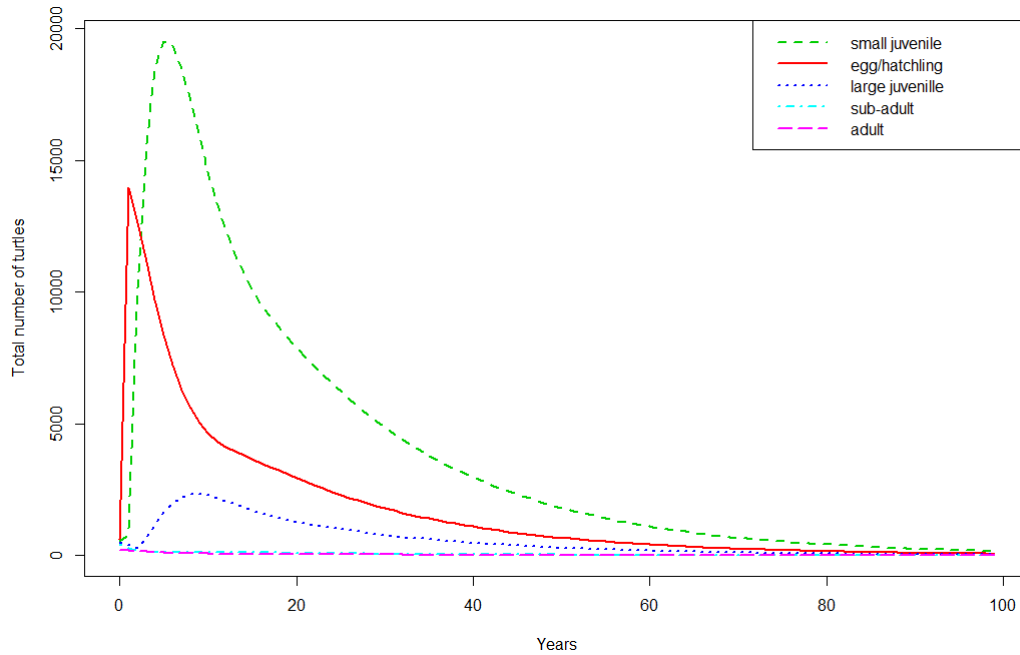
\$pop.changes

[1]	6.8660791	1.4919387	1.1887010	1.0690772	1.0055801	0.9678604	0.9449744
[8]	0.9318876	0.9257561	0.9246155	0.9268749	0.9311557	0.9362890	0.9413696
[15]	0.9457944	0.9492536	0.9516772	0.9531583	0.9538777	0.9540432	0.9538507
[22]	0.9534628	0.9530020	0.9525514	0.9521603	0.9518519	0.9516306	0.9514889
[29]	0.9514128	0.9513861	0.9513928	0.9514194	0.9514549	0.9514918	0.9515251
[36]	0.9515523	0.9515725	0.9515860	0.9515938	0.9515972	0.9515974	0.9515957
[43]	0.9515930	0.9515900	0.9515872	0.9515848	0.9515830	0.9515817	0.9515809
[50]	0.9515806	0.9515805	0.9515806	0.9515808	0.9515810	0.9515812	0.9515814
[57]	0.9515816	0.9515817	0.9515818	0.9515818	0.9515818	0.9515818	0.9515818
[64]	0.9515818	0.9515818	0.9515818	0.9515818	0.9515818	0.9515817	0.9515817
[71]	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817
[78]	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817
[85]	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817
[92]	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817	0.9515817
[99]	0.9515817						

```
> stage.vector.plot(pl$stage.vectors,prop=FALSE, col=2:6, ylab="Total number of turtles")
```

Όπως προκύπτει και από την εκτίμηση του ρυθμού ανάπτυξης $\lambda = 0.9515817 < 1$, αλλά και από τον πίνακα του πληθυσμού των θηλυκών θαλάσσιων χελωνών (ανά χρόνο) ότι το πλήθος τους με την πάροδο πολλών χρόνων συρρικνώνεται.

Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της συρρίκνωσης του πληθυσμού των θαλάσσιων χελωνών προς το 0 με την πάροδο 100 χρόνων.



β) Με κλιμάκωση του πίνακα γονιμότητας

```
R> local((pkg <- select.list(sort(.packages(all.available = TRUE))),graphics=TRUE)
+ if(nchar(pkg) > 1) library(pkg, character.only=TRUE))
> stages<-c("egg/hatchling","small juvenile","large juvenile","sub-adult","adult")
> P2<-matrix(c(0,0,0,0,10.256868,136.08984,0.675,0.703,0,0,0,0,0.047,0.657,0,0,0,0,0.019,0.682,0,0,0,0,0.061,0.8091), nrow=5, byrow=TRUE, dimnames=list(stages,stage)
> P2
      egg/hatchling small juvenile large juvenile sub-adult  adult
egg/hatchling  0.000      0.000      0.000 10.25687 136.0898
small juvenile  0.675      0.703      0.000 0.00000  0.0000
large juvenile  0.000      0.000      0.047 0.65700  0.0000
sub-adult       0.000      0.000      0.019 0.68200  0.0000
adult           0.000      0.000      0.000 0.06100  0.8091
> x0<-c(615,540,515,405,195)
> x0
[1] 615 540 515 405 195
> P2<-pop.projection(P2,x0,100)
> P2
$lambda
[1] 0.9999998

$stable.stage
egg/hatchling small juvenile large juvenile sub-adult  adult
0.277107670  0.629790658  0.086257905  0.005156168  0.001647599

$stage.vectors
      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10     11     12
egg/hatchling 615 30691.5503 27767.0189 24538.5249 21321.2503 18481.8705 16253.11879 14707.6179 13793.9206 13388.21322 13340.60987 13506.25963 13774.37741
small juvenile 540 794.7450 21275.5022 33699.4158 40254.1936 42690.5421 42486.71369 40839.0149 38637.4695 36473.03749 34677.58928 33383.25693 32586.50501
large juvenile 515 363.7350 276.3269 1181.4954 2360.1150 3442.5427 4268.20601 4801.0869 5073.7478 5149.41337 5097.39734 4978.83675 4840.10882
sub-adult      405 285.9950 201.9596 142.9866 119.9653 126.6585 151.78942 184.6163 217.1290 244.48316 264.57637 277.29163 283.71079
adult          195 182.4795 165.0899 145.0937 126.7648 109.8533 96.63274 87.4447 82.0131 79.60167 79.31918 80.31631 81.89872
      13      14      15      16      17      18      19      20      21      22      23      24
egg/hatchling 14055.56728 14300.9628 14486.64285 14608.14363 14673.03062 14694.67355 14687.70465 14665.17473 14637.14760 14610.35448 14588.52026 14573.02940
small juvenile 32206.01777 32128.3384 32239.37181 32442.76231 32667.75885 32869.73014 33026.32493 33131.70707 33190.58301 33213.05448 33210.76657 33194.42009
large juvenile 4711.51723 4609.1497 4538.24323 4496.87628 4479.25754 4478.25687 4487.09208 4500.25677 4513.85893 4525.56272 4534.30827 4539.94656
sub-adult      285.45283 284.1977 281.39665 278.13913 275.13154 272.74560 271.09938 270.14453 269.74345 269.72835 269.94043 270.25123
adult          83.57061 85.0296 86.13351 86.85582 87.24153 87.37014 87.32867 87.19469 87.02804 86.86873 86.73952 86.64683
      25      26      27      28      29      30      31      32      33      34      35      36
egg/hatchling 14563.68415 14559.39664 14558.73277 14560.28379 14562.8787 14565.6703 14568.13400 14570.01629 14571.26150 14571.93804 14572.17577 14572.11977
small juvenile 33172.47216 33150.73473 33132.55925 33119.33377 33111.0832 33107.0346 33106.07276 33107.05960 33109.02389 33111.24531 33113.26363 33114.84297
large juvenile 4542.88263 4543.78008 4543.34805 4542.20995 4540.8406 4539.5532 4538.51708 4537.75114 4537.36058 4537.17002 4537.14524 4537.12044
sub-adult      270.57032 270.84973 271.04725 271.17783 271.24553 271.2652 271.26441 271.22793 271.19507 271.16489 271.14069 271.12378
adult          86.59127 86.56579 86.56185 86.57107 86.58665 86.6031 86.61775 86.62894 86.63634 86.64036 86.64178 86.64144
      37      38      39      40      41      42      43      44      45      46      47      48
egg/hatchling 14571.90103 14571.62160 14571.50500 14571.12662 14570.96513 14570.86500 14570.81591 14570.80377 14570.81453 14570.83638 14570.86069 14570.88204
small juvenile 33115.91545 33116.52176 33116.75937 33116.74943 33116.58109 33116.35797 33116.13353 33115.94261 33115.80020 33115.70735 33115.65682 33115.63771
large juvenile 4537.35802 4537.49224 4537.60893 4537.69676 4537.75371 4537.78350 4537.79258 4537.78900 4537.77602 4537.76196 4537.74752 4537.73659
sub-adult      271.11380 271.10941 271.10897 271.11089 271.11386 271.11698 271.11966 271.12167 271.12295 271.12360 271.12376 271.12361
adult          86.64014 86.63848 86.63687 86.63554 86.63458 86.63398 86.63369 86.63362 86.63362 86.63368 86.63381 86.63396 86.63400
      49      50      51      52      53      54      55      56      57      58      59      60
egg/hatchling 14570.89774 14570.90713 14570.91081 14570.91004 14570.90626 14570.9008 14570.89464 14570.88854 14570.88269 14570.87785 14570.87342 14570.86951
small juvenile 33115.63868 33115.64597 33115.66424 33115.67676 33115.68504 33115.68983 33115.69091 33115.68179 33115.67406 33115.66482 33115.65492 33115.64497
large juvenile 4537.72752 4537.72200 4537.71890 4537.71754 4537.71723 4537.7174 4537.71769 4537.71781 4537.71764 4537.71717 4537.71643 4537.71548
sub-adult      271.12328 271.12290 271.12254 271.12223 271.12199 271.1218 271.12172 271.12165 271.12160 271.12157 271.12154 271.12150
adult          86.63418 86.63423 86.63426 86.63425 86.63423 86.6342 86.63416 86.63412 86.63409 86.63406 86.63403 86.63401
```

```

        e1      e2      e3      e4      e5      e6      e7      e8      e9      70      71      72
egg/hatchling 14570.86597 14570.86267 14570.85949 14570.85634 14570.85316 14570.84992 14570.84663 14570.84327 14570.83988 14570.83645 14570.83300 14570.82954
small juvenile 33115.63533 33115.62617 33115.61750 33115.60926 33115.60134 33115.59362 33115.58602 33115.57844 33115.57086 33115.56323 33115.55555 33115.54783
large juvenile 4537.71438 4537.71321 4537.71201 4537.71081 4537.70964 4537.70850 4537.70738 4537.70629 4537.70522 4537.70416 4537.70311 4537.70205
sub-adult      271.12146 271.12141 271.12135 271.12129 271.12122 271.12116 271.12109 271.12102 271.12096 271.12089 271.12083 271.12076
adult          86.63395 86.63397 86.63395 86.63393 86.63391 86.63389 86.63387 86.63385 86.63383 86.63381 86.63379 86.63377
        73      74      75      76      77      78      79      80      81      82      83      84
egg/hatchling 14570.82609 14570.82264 14570.81919 14570.81576 14570.81232 14570.80889 14570.80547 14570.80204 14570.79862 14570.79519 14570.79176 14570.78834
small juvenile 33115.54006 33115.53227 33115.52447 33115.51666 33115.50885 33115.50104 33115.49323 33115.48543 33115.47764 33115.46984 33115.46205 33115.45426
large juvenile 4537.70100 4537.69994 4537.69888 4537.69781 4537.69674 4537.69568 4537.69461 4537.69354 4537.69247 4537.69140 4537.69033 4537.68927
sub-adult      271.12070 271.12064 271.12057 271.12051 271.12045 271.12038 271.12032 271.12025 271.12019 271.12013 271.12006 271.12000
adult          86.63375 86.63373 86.63371 86.63369 86.63367 86.63365 86.63363 86.63361 86.63359 86.63357 86.63355 86.63353
        85      86      87      88      89      90      91      92      93      94      95      96
egg/hatchling 14570.78491 14570.78148 14570.77805 14570.77463 14570.77120 14570.76778 14570.76434 14570.76091 14570.75748 14570.75406 14570.75064 14570.74722
small juvenile 33115.44447 33115.43669 33115.42890 33115.42111 33115.41332 33115.40553 33115.39773 33115.39194 33115.38415 33115.37636 33115.36856 33115.36077
large juvenile 4537.68220 4537.68113 4537.68006 4537.67899 4537.67792 4537.67685 4537.67578 4537.67471 4537.67364 4537.67257 4537.67150 4537.67043
sub-adult      271.11994 271.11987 271.11981 271.11974 271.11968 271.11962 271.11956 271.11950 271.11944 271.11938 271.11932 271.11926
adult          86.63351 86.63349 86.63347 86.63345 86.63343 86.63341 86.63339 86.63337 86.63335 86.63333 86.63331 86.63329
        97      98      99
egg/hatchling 14570.74377 14570.74034 14570.73692
small juvenile 33115.35299 33115.34520 33115.33741
large juvenile 4537.67539 4537.67432 4537.67325
sub-adult      271.11917 271.11911 271.11904
adult          86.63326 86.63324 86.63322

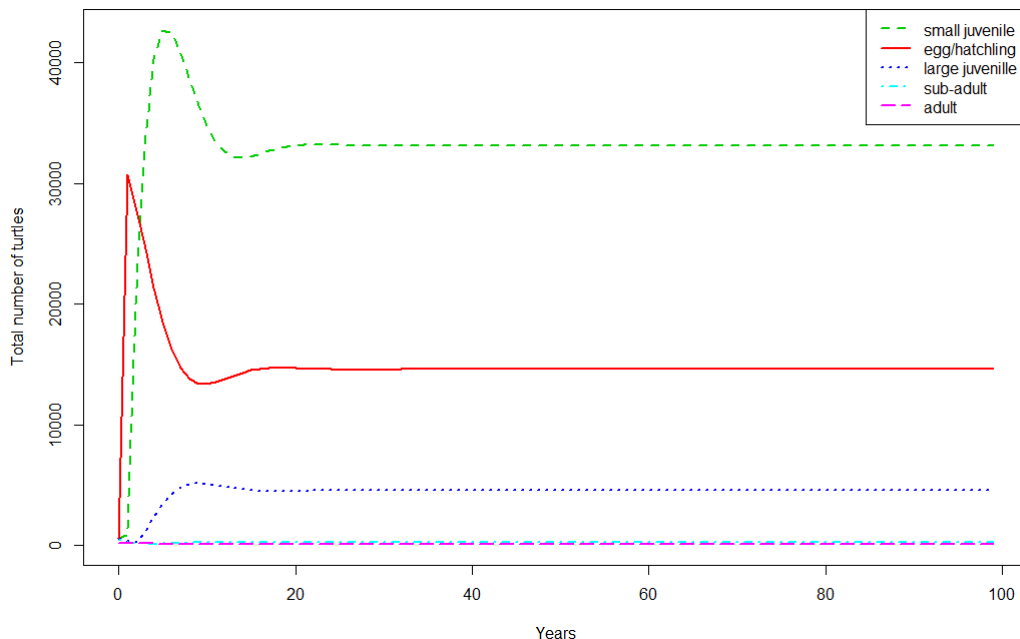
Spop.sizes
[1] 2270.00 32318.50 49685.50 59708.32 64182.29 64851.50 63256.46 60619.78 57804.28 55334.75 53459.49 52227.96 51566.60 51342.13 51407.68 51631.79 51912.78
[18] 52182.42 52402.78 52559.55 52654.48 52698.36 52705.57 52690.27 52664.29 52636.20 52611.32 52592.25 52579.58 52572.63 52570.13 52570.60 52572.72 52575.48
[35] 52578.16 52580.37 52581.96 52582.93 52583.38 52583.46 52583.31 52583.05 52582.76 52582.50 52582.29 52582.15 52582.06 52582.01 52582.02 52582.04 52582.04
[52] 52582.05 52582.06 52582.06 52582.06 52582.04 52582.03 52582.02 52582.00 52581.99 52581.97 52581.96 52581.94 52581.93 52581.92 52581.91 52581.89
[69] 52581.88 52581.87 52581.86 52581.85 52581.83 52581.82 52581.81 52581.80 52581.78 52581.77 52581.76 52581.75 52581.73 52581.72 52581.71 52581.70 52581.69
[86] 52581.67 52581.66 52581.65 52581.64 52581.62 52581.61 52581.60 52581.59 52581.57 52581.56 52581.55 52581.54 52581.52 52581.51 52581.50

Spop.changes
[1] 14.2372268 1.5373823 1.2017156 1.0749305 1.0104267 0.9754048 0.9583176 0.9535548 0.9572777 0.9661107 0.9769633 0.9873370 0.9956469 1.0012768
[15] 1.008395 1.0054422 1.0051942 1.0042228 1.0029517 1.0018061 1.0008334 1.0001368 0.9997098 0.9995065 0.9994666 0.9995273 0.9996375 0.9997590
[29] 0.9998680 0.9999523 1.0000089 1.0000405 1.0000524 1.0000510 1.0000421 1.0000302 1.0000184 1.0000087 0.9999971 0.9999950 0.9999945
[43] 0.9999950 0.9999961 0.9999973 0.9999984 0.9999982 0.9999989 1.0000002 1.0000003 1.0000003 1.0000002 1.0000001 1.0000000 0.9999999 0.9999998
[57] 0.9999997 0.9999997 0.9999997 0.9999997 0.9999997 0.9999997 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998
[71] 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998
[85] 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998 0.9999998
[99] 0.9999998
> stage.vector.plot(p2$stage.vectors,prop=FALSE, col=2:6, ylab="Total number of turtles")

```

Μετά την κλιμάκωση του πίνακα προβολής P , βλέπουμε από τον πίνακα (stage.vectors) του πληθυσμού των θηλυκών θαλάσσιων χελωνών (ανά χρόνο) πως για περίπου 20 χρόνια ο πληθυσμός τους αυξάνεται και στη συνέχεια παραμένει στάσιμος. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον εκτιμητή του ρυθμού ανάπτυξης $\lambda = 0.9999998$.

Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση του πληθυσμού των θαλάσσιων χελωνών, ο οποίος μετά την πάροδο περίπου 20 χρόνων παραμένει στάσιμος.



Παράδειγμα 3.4.3. Τέλος, θα μελετήσουμε τον 3-σταδίων πίνακα προβολής για τον πληθυσμό των θηλυκών αρκούδων grizzly, από το άρθρο των Boyce κ.α. [12], ο οποίος είναι:

	juvenile	sub-adult	adult
juvenile	0	0	0.312
sub-adult	0.84	0.592	0
adult	0	0.212	0.938

και θα τον συμβολίζουμε, όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, P . Οι πίνακες γονιμότητας και μετάβασης αντίστοιχα είναι:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.312 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.84 & 0.592 & 0 \\ 0 & 0.212 & 0.938 \end{bmatrix},$$

με $F + T = P$. Η φασματική ακτίνα του πίνακα μετάβασης T είναι $\rho(T) = 0.938 < 1$, δηλαδή ο πληθυσμός δεν είναι αθάνατος.

Έστω ότι ο αρχικός πληθυσμός δίνεται από το διάνυσμα:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 65 \\ 57 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας προβολής P είναι μη αρνητικός και πρωταρχικός και ο ρυθμός ανάπτυξης ισούται με $r = \rho(P) \approx 1.0526 > 1$. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας, το $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$ υπάρχει και ανεξάρτητα από τον αρχικό πληθυσμό \mathbf{x}_0 , ο αριθμός των αρουσίων αυξάνεται αλλά με πολύ αργό ρυθμό.

Ο πίνακας επόμενης γενιάς είναι:

$$\begin{aligned} Q &= F(I - T)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.312 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.84 & 0.592 & 0 \\ 0 & 0.212 & 0.938 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.312 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.84 & 0.408 & 0 \\ 0 & -0.212 & 0.062 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.312 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.058824 & 2.45098 & 0 \\ 7.039848 & 8.380772 & 16.12903 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.196433 & 2.614801 & 5.032258 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, ο πίνακας Q είναι μη αρνητικός, αλλά υποβιβασίμος καθώς νεογέννητες αρουσίδες υπάρχουν μόνο στη πρώτη πληθυσμιακή κλάση του πίνακα F .

Ο καθαρός ρυθμός αναπαραγωγής είναι $R_0 = \rho(Q) = 2.1964$, με $0 < r < R_0$. Συνεπώς, σε κάθε αρχικό πληθυσμό $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ οι αρκούδες grizzly θα παράγουν περισσότερους απογόνους από όσους χρειάζονται για να τις αντικαταστήσουν.

Για να καταστήσουμε τον πληθυσμό στάσιμο με την πάροδο των χρόνων, θα κλιμακώσουμε και πάλι τον πίνακα γονιμότητας F με τον καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής R_0 .

Έστω ο νέος πίνακας προβολής:

$$P'' = T + \frac{F}{R_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.84 & 0.592 & 0 \\ 0 & 0.212 & 0.938 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.142051 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.142051 \\ 0.84 & 0.592 & 0 \\ 0 & 0.212 & 0.938 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας P'' είναι μη αρνητικός και πρωταρχικός και ο νέος ρυθμός ανάπτυξης ισούται με $r'' = \rho(P'') = 1$, καθιστώντας το πληθυσμό στάσιμο με την πάροδο των χρόνων (Θεώρημα 3.2.2).

Υλοποίηση με το στατιστικό πρόγραμμα R :

α) Χωρίς κλιμάκωση του πίνακα γονιμότητας

```
> stages<-c("juvenile","sub-adult","adult")
> P<-matrix(c(0,0,0.312,0.84,0.592,0,0,0.212,0.938),nrow=3, byrow=TRUE, dimnames=list(stages,stages))
> F
      juvenile sub-adult adult
juvenile  0.00      0.000 0.312
sub-adult  0.84      0.592 0.000
adult      0.00      0.212 0.938
> x0<-c(65,57,40)
> x0
[1] 65 57 40
> p<-pop.projection(F,x0,100)
> p
$lambda
[1] 1.0526

$stable.stage
  juvenile sub-adult  adult
0.1613573 0.2942689 0.5443738

$stage.vectors
  0      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
juvenile  65 12.480 15.47645 20.36033 23.25070 25.12745 26.66521 28.13644 29.63777 31.20328 32.84657
sub-adult  57 88.344 62.78285 50.16766 46.80194 47.23734 49.07156 51.44914 54.09250 56.91848 59.90650
adult      40 49.604 65.25748 74.52148 80.53669 85.46543 90.18089 94.99284 100.01050 105.27746 110.81698
juvenile  34.57490 36.39371 38.30806 40.32306 42.44405 44.67659 47.02656 49.50013 52.10382 54.84446
sub-adult  63.05576 66.37193 69.86290 73.53760 77.40564 81.47713 85.76280 90.27388 95.02225 100.02038
adult      116.64650 122.78224 129.24059 136.03861 143.19419 150.72614 158.65427 166.99942 175.78352 185.02966
juvenile  57.72925 60.76579 63.96204 67.32642 70.86776 74.59537 78.51906 82.64913 86.99644 91.57241
sub-adult  105.28141 110.81917 116.64821 122.78386 129.24223 136.04032 143.19598 150.72803 158.65626 167.00152
adult      194.76214 205.00655 215.78980 227.14026 239.08774 251.66365 264.90105 278.83474 293.50133 308.93937
juvenile  96.38908 101.4591 106.7958 112.4132 118.3261 124.5500 131.1013 137.9972 145.2558 152.8962 160.9384
sub-adult  175.78573 185.0320 194.7646 205.0091 215.7925 227.1431 239.0907 251.6668 264.9044 278.8382 293.5050
adult      325.18945 342.2943 360.2988 379.2504 399.1988 420.1965 442.2986 465.5634 490.0518 515.8283 542.9607
juvenile  169.4037 178.3143 187.6935 197.5661 207.9580 218.8965 230.4104 242.5299 255.2869 268.7149 282.8491
sub-adult  308.9432 325.1935 342.2986 360.3033 379.2551 399.2038 420.2017 442.3042 465.5692 490.0579 515.8348
adult      571.5202 601.5819 633.2248 666.5322 701.5915 738.4949 777.3394 818.2272 861.2656 906.5678 954.2529
juvenile  297.7269 313.3872 329.8712 347.2223 365.4861 384.7105 404.9461 426.2461 448.6664 472.2661
sub-adult  542.9675 571.5273 601.5894 633.2328 666.5406 701.6003 738.5042 777.3492 818.2374 861.2764
adult      1004.4461 1057.2796 1112.8921 1171.4297 1233.0464 1297.9041 1366.1733 1438.0335 1513.6734 1593.2920
juvenile  497.1071 523.2547 550.7777 579.7484 610.2429 642.3414 676.1283 711.6924 749.1271 788.5309
sub-adult  906.5791 954.2648 1004.4587 1057.2929 1112.9060 1171.4444 1233.0619 1297.9204 1366.1905 1438.0515
adult      1677.0985 1765.3132 1858.1679 1955.9067 2058.7866 2167.0779 2281.0653 2401.0484 2527.3425 2660.2796
juvenile  830.0072 873.6653 919.6197 967.9913 1018.907 1072.501 1128.914 1188.295 1250.799 1316.590 1385.842
sub-adult  1513.6924 1593.3120 1677.1195 1765.3353 1858.191 1955.931 2058.812 2167.105 2281.094 2401.078 2527.374
adult      2800.2092 2947.4990 3102.5362 3265.7283 3437.504 3618.316 3808.637 4008.970 4219.840 4441.802 4675.439
```

```

      84      85      86      87      88      89      90      91      92      93      94
juvenile 1458.737 1535.466 1616.231 1701.244 1790.729 1884.920 1984.066 2088.427 2198.278 2313.906 2435.616
sub-adult 2660.313 2800.244 2947.536 3102.575 3265.769 3437.547 3618.361 3808.685 4009.020 4219.893 4441.858
adult     4921.365 5180.227 5452.705 5739.515 6041.411 6359.186 6693.677 7045.761 7416.365 7806.463 8217.080

      95      96      97      98      99
juvenile 2563.729 2698.580 2840.524 2989.934 3147.204
sub-adult 4675.498 4921.427 5180.292 5452.773 5739.587
adult     8649.295 9104.244 9583.123 10087.191 10617.773

$pop.sizes
 [1] 162.0000 150.4280 143.5168 145.0495 150.5893 157.8302 165.9177 174.5784 183.7408
[10] 193.3992 203.5700 214.2772 225.5479 237.4115 249.8993 263.0439 276.8799 291.4436
[19] 306.7734 322.9096 339.8945 357.7728 376.5915 396.4001 417.2505 439.1977 462.2993
[28] 486.6161 512.2119 539.1540 567.5133 597.3643 628.7854 661.8592 696.6727 733.3174
[37] 771.8896 812.4907 855.2273 900.2119 947.5627 997.4041 1049.8671 1105.0897 1163.2170
[46] 1224.4017 1288.8047 1356.5953 1427.9516 1503.0613 1582.1216 1665.3406 1752.9368 1845.1405
[55] 1942.1941 2044.3527 2151.8848 2265.0730 2384.2149 2509.6236 2641.6287 2780.5773 2926.8345
[64] 3080.7847 3242.8327 3413.4044 3592.9480 3781.9355 3980.8637 4190.2555 4410.6611 4642.6601
[73] 4886.8620 5143.9089 5414.4763 5699.2755 5999.0550 6314.6027 6646.7482 6996.3643 7364.3701
[82] 7751.7328 8159.4707 8588.6554 9040.4151 9515.9371 10016.4713 10543.3335 11097.9084 11681.6537
[91] 12296.1037 12942.8736 13623.6632 14340.2622 15094.5539 15888.5211 16724.2505 17603.9390 18529.8988
[100] 19504.5636

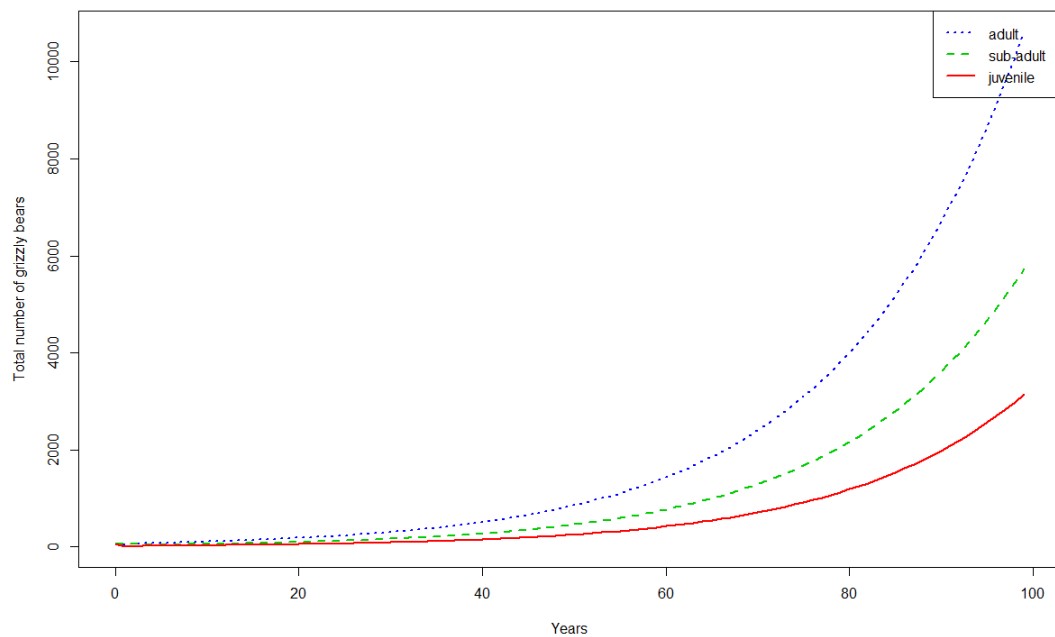
$pop.changes
 [1] 0.9285679 0.9540563 1.0106796 1.0381929 1.0480836 1.0512414 1.0521992 1.0524827 1.0525657 1.0525898
[11] 1.0525967 1.0525988 1.0525993 1.0525995 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996
[21] 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996
[31] 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996
[41] 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996
[51] 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996
[61] 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996
[71] 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996
[81] 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996
[91] 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996 1.0525996

> stage.vector.plot(p$stage.vectors,prop=FALSE, col=2:4, ylab="Total number of grizzly bears")

```

Όπως προκύπτει και από την εκτίμηση του ρυθμού ανάπτυξης $\lambda = 1.0526 > 1$, αλλά και από τον πίνακα του πληθυσμού των θηλυκών αρκούδων (ανά χρόνο) ότι το πλήθος τους αυξάνεται με αργούς ρυθμούς.

Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση της αύξησης του πληθυσμού των αρκούδων grizzly με την πάροδο 100 χρόνων.



Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να σημειωθεί πως παρ' ότι το μοντέλο δείχνει πως ο πληθυσμός των αρκούδων grizzly αυξάνεται σε βάθος χρόνου, υπάρχουν παράγοντες (κλιματική αλλαγή, κυνηγοί κ.α.) που μπορούν να έχουν άμεση επίπτωση στον πλη-

θυσμό τους και να οδηγήσουν σε αντίθετα αποτελέσματα. Επιπλέον, δεδομένου ότι ο πίνακας προβολής προέρχεται από άρθρο του 2001, 19 χρόνια μετά λαμβάνοντας υπ' όψη μόνο το ότι η κλιματική αλλαγή έχει επέλθει εξαιρετικά γρήγορα και πολλά είδη φυτών και ζώων αγωνίζονται να αντιμετωπίσουν την κατάσταση, δεν θα είναι πλέον ο ίδιος.

β) Με κλιμάκωση του πίνακα γονιμότητας

```
> stages<-c("juvenile","sub-adult","adult")
> P2<-matrix(c(0,0,0,0.142051,0.84,0.592,0,0,0.212,0.938),nrow=3, byrow=TRUE, dimnames=list(stages,stages))
> P2
      juvenile sub-adult  adult
juvenile  0.00    0.000 0.142051
sub-adult  0.84    0.592 0.000000
adult      0.00    0.212 0.938000
> x0<-c(65,57,40)
> x0
[1] 65 57 40
> p2<-pop.projection(P2,x0,100)
> p2
$lambda
[1] 1.000001

$stable.stage
      juvenile sub-adult  adult
0.09902411 0.20387273 0.69710316

$stage.vectors
      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11      12      13      14
juvenile 65 5.68204 7.046298 9.26989 10.41389 10.96396 11.22656 11.35183 11.41159 11.44010 11.45370 11.46019 11.46329 11.46478 11.46549
sub-adult 57 88.34400 57.072562 39.70585 31.29257 27.27287 25.35526 24.44063 24.00439 23.79634 23.69711 23.64980 23.62724 23.61649 23.61138
adult     40 49.60400 65.257480 73.31090 77.18326 79.03193 79.91379 80.33445 80.53513 80.63088 80.67659 80.69843 80.70889 80.71391 80.71634
      15      16      17      18      19      20      21      22      23      24      25      26      27      28
juvenile 11.46584 11.46601 11.46609 11.46614 11.46617 11.46619 11.46620 11.46621 11.46622 11.46623 11.46625 11.46626 11.46627 11.46628
sub-adult 23.60895 23.60780 23.60726 23.60702 23.60691 23.60687 23.60687 23.60687 23.60689 23.60691 23.60693 23.60695 23.60697 23.60699
adult     80.71754 80.71815 80.71848 80.71867 80.71880 80.71890 80.71899 80.71907 80.71914 80.71922 80.71929 80.71936 80.71943 80.71951
      29      30      31      32      33      34      35      36      37      38      39      40      41      42
juvenile 11.46629 11.46630 11.46631 11.46632 11.46633 11.46634 11.46635 11.46636 11.46637 11.46638 11.46639 11.46640 11.46641 11.46642
sub-adult 23.60701 23.60703 23.60705 23.60707 23.60709 23.60711 23.60714 23.60716 23.60718 23.60720 23.60722 23.60724 23.60726 23.60728
adult     80.71958 80.71965 80.71972 80.71979 80.71987 80.71994 80.72001 80.72008 80.72015 80.72023 80.72030 80.72037 80.72044 80.72051
      43      44      45      46      47      48      49      50      51      52      53      54      55      56
juvenile 11.46643 11.46644 11.46645 11.46646 11.46647 11.46648 11.46649 11.46650 11.46651 11.46652 11.46653 11.46654 11.46655 11.46656
sub-adult 23.60730 23.60732 23.60735 23.60737 23.60739 23.60741 23.60743 23.60745 23.60747 23.60749 23.60751 23.60754 23.60756 23.60758
adult     80.72059 80.72066 80.72073 80.72080 80.72087 80.72095 80.72102 80.72109 80.72116 80.72124 80.72131 80.72138 80.72145 80.72152
      57      58      59      60      61      62      63      64      65      66      67      68      69      70
juvenile 11.46657 11.46658 11.46659 11.46660 11.46661 11.46662 11.46663 11.46664 11.46665 11.46667 11.46668 11.46669 11.46670 11.46671
sub-adult 23.60760 23.60762 23.60764 23.60766 23.60768 23.60770 23.60773 23.60775 23.60777 23.60779 23.60781 23.60783 23.60785 23.60787
adult     80.72160 80.72167 80.72174 80.72181 80.72188 80.72196 80.72203 80.72210 80.72217 80.72224 80.72232 80.72239 80.72246 80.72253
      71      72      73      74      75      76      77      78      79      80      81      82      83      84
juvenile 11.46672 11.46673 11.46674 11.46675 11.46676 11.46677 11.46678 11.46679 11.46680 11.46681 11.46682 11.46683 11.46684 11.46685
sub-adult 23.60789 23.60791 23.60794 23.60796 23.60798 23.60800 23.60802 23.60804 23.60806 23.60808 23.60810 23.60813 23.60815 23.60817
adult     80.72260 80.72268 80.72275 80.72282 80.72289 80.72296 80.72304 80.72311 80.72318 80.72325 80.72332 80.72340 80.72347 80.72354
      85      86      87      88      89      90      91      92      93      94      95      96      97      98
juvenile 11.46686 11.46687 11.46688 11.46689 11.46690 11.46691 11.46692 11.46693 11.46694 11.46695 11.46696 11.46697 11.46698 11.46699
sub-adult 23.60819 23.60821 23.60823 23.60825 23.60827 23.60829 23.60832 23.60834 23.60836 23.60838 23.60840 23.60842 23.60844 23.60846
adult     80.72361 80.72368 80.72376 80.72383 80.72390 80.72397 80.72404 80.72412 80.72419 80.72426 80.72433 80.72441 80.72448 80.72455
      99
juvenile 11.46700
sub-adult 23.60848
adult     80.72462

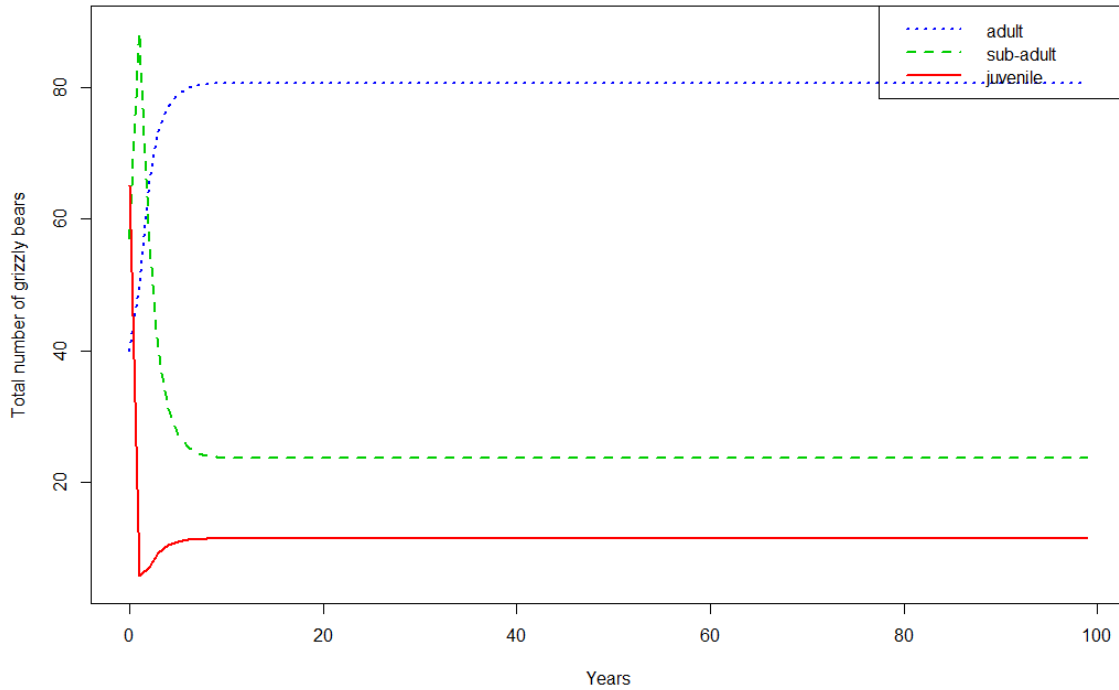
$pop.sizes
 [1] 162.0000 143.6300 129.3763 122.2866 118.8897 117.2688 116.4956 116.1269 115.9511 115.8673 115.8274 115.8084 115.7994 115.7952 115.7932
[16] 115.7923 115.7920 115.7918 115.7918 115.7919 115.7920 115.7921 115.7922 115.7923 115.7924 115.7925 115.7926 115.7927 115.7928 115.7929
[31] 115.7930 115.7931 115.7932 115.7933 115.7934 115.7935 115.7936 115.7937 115.7938 115.7939 115.7940 115.7941 115.7942 115.7943 115.7944
[46] 115.7945 115.7946 115.7947 115.7948 115.7949 115.7950 115.7951 115.7952 115.7953 115.7954 115.7955 115.7956 115.7957 115.7958 115.7959 115.7960
[61] 115.7961 115.7962 115.7963 115.7964 115.7965 115.7966 115.7967 115.7968 115.7969 115.7970 115.7971 115.7972 115.7973 115.7974 115.7975
[76] 115.7976 115.7977 115.7978 115.7979 115.7980 115.7981 115.7982 115.7983 115.7984 115.7985 115.7986 115.7987 115.7988 115.7989 115.7990
[91] 115.7992 115.7993 115.7994 115.7995 115.7996 115.7997 115.7998 115.7999 115.8000 115.8001

$pop.changes
 [1] 0.8866052 0.9007610 0.9452009 0.9722217 0.9863658 0.9934072 0.9968351 0.9984861 0.9992773 0.9996555 0.9998361 0.9999223 0.9999634 0.9999830
[15] 0.9999924 0.9999968 0.9999990 1.0000000 1.0000005 1.0000007 1.0000008 1.0000008 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009
[29] 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009
[43] 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009
[57] 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009
[71] 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009
[85] 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009 1.0000009
[99] 1.0000009

> stage.vector.plot(p2$stage.vectors,prop=FALSE, col=2:4, ylab="Total number of grizzly bears")
.
```

Μετά την κλιμάκωση του πίνακα προβολής P , βλέπουμε από τον πίνακα (stage.vectors) του πληθυσμού των αρκούδων (ανά χρόνο) πως μετά από περίπου 8 χρόνια ο πληθυσμός τους παραμένει στάσιμος. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον εκτιμητή του ρυθμού ανάπτυξης $\lambda = 1.000001$.

Σχήμα 3.6: Γραφική παράσταση του πληθυσμού των αρκούδων grizzly, ο οποίος μετά την πάροδο περίπου 8 χρόνων παραμένει στάσιμος.



Κεφάλαιο 4

Επέκταση της Θεωρίας Perron-Frobenius σε Πολυωνυμικούς Πίνακες

4.1 Μία Εισαγωγή στους Πολυωνυμικούς Πίνακες

Πολυωνυμικός λέγεται κάθε $n \times m$ πίνακας της μορφής:

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{12}(\lambda) & \cdots & p_{1m}(\lambda) \\ p_{21}(\lambda) & p_{22}(\lambda) & \cdots & p_{2m}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1}(\lambda) & p_{n2}(\lambda) & \cdots & p_{nm}(\lambda) \end{bmatrix},$$

του οποίου τα στοιχεία $p_{ij}(\lambda)$ είναι (μιγαδικά) πολυώνυμα της μεταβλητής λ . Ένα απλό παράδειγμα πολυωνυμικού πίνακα αποτελεί η γνωστή παράσταση $I_n\lambda - A$ που εμφανίζεται στην κατασκευή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Ένας τετραγωνικός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ λέγεται *ομαλός* (regular) αν η ορίζουσα του, $\det(P(\lambda))$, δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Ο βαθμός ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι ο μεγαλύτερος βαθμός των πολυωνύμων που εμφανίζονται ως στοιχεία του $P(\lambda)$ και συμβολίζεται με $\deg(P(\lambda))$, δηλαδή $\deg(I_n\lambda - A) = 1$ και $\deg(A) = 0$.

Κάθε πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ βαθμού m γράφεται και στη μορφή:

$$P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \quad \text{με } A_m \neq 0.$$

Παράδειγμα 4.1.1. Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας:

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 + \lambda & \lambda^3 - \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 4 & 3\lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Ο βαθμός του πίνακα $P(\lambda)$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 2\lambda^2 + \lambda & \lambda^3 - \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 4 & 3\lambda - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},$$

δηλαδή $\deg(P(\lambda)) = 3$.

Τετραγωνικοί πολυωνυμικοί πίνακες ίδιων διαστάσεων μπορούν να προστεθούν και να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους με το συνήθη τρόπο, και σε κάθε περίπτωση το αποτέλεσμα είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας. Ειδικότερα, ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ λέγεται αντιστρέψιμος αν υπάρχει ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda)$ τέτοιος ώστε $P(\lambda)Q(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) = I_n$.

Πρόταση 4.1.1. Ένας τετραγωνικός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσα $\det(P(\lambda))$ είναι σταθερή και μη μηδενική.

Απόδειξη. Αν $\det(P(\lambda)) = c \neq 0$ ($c \in \mathbb{C}$), τότε ο $P(\lambda)^{-1} = c^{-1} \text{adj}(P(\lambda))$ είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας. Αντίστροφα, αν ο $P(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε η ισότητα $P(\lambda)Q(\lambda) = I_n$ οδηγεί στη σχέση:

$$\det(P(\lambda)Q(\lambda)) = \det(P(\lambda))\det(Q(\lambda)) = 1.$$

Επομένως, το γινόμενο των πολυωνύμων $\det(P(\lambda))$ και $\det(Q(\lambda))$ ταυτίζεται με το σταθερό πολυώνυμο $p(\lambda) = 1$. Αυτό είναι δυνατό αν και μόνο αν τα δύο πολυώνυμα είναι σταθερά. \square

Παράδειγμα 4.1.2. Οι πολυωνυμικοί πίνακες:

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 2 & \lambda^2 + 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 & 3\lambda^3 \\ 1 & \lambda^3 + 2 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμοι, αφού $\det(P(\lambda)) = -2$ και $\det(Q(\lambda)) = 6$.

Ορισμός 4.1.1. Ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$ βαθμού m λέγεται *μονικός* (monic) αν $A_m = I_n$. Δηλαδή:

$$P(\lambda) = I \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0.$$

Αν $B(\lambda) = B_l \lambda^l + B_{l-1} \lambda^{l-1} + \dots + B_1 \lambda + B_0$ είναι ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας βαθμού l , τότε ο βαθμός του γινομένου

$$P(\lambda)B(\lambda) = A_m B_{l+m} + \dots + (A_1 B_0 + A_0 B_1) \lambda + A_0 B_0$$

δεν υπερβαίνει το $l+m$. Προφανώς, αν ο A_m ή ο B_l είναι αντιστρέψιμος, τότε ο βαθμός του γινομένου είναι ακριβώς $l+m$.

Ορισμός 4.1.2. Ένας $n \times n$ μονικός πολυωνυμικός πίνακας:

$$P(\lambda) = I \lambda^m - A_{m-1} \lambda^{m-1} - \dots - A_1 \lambda - A_0, \quad (4.1)$$

με τους πίνακες A_j (με $A_m = I_n$ και $j = 0, 1, \dots, m$) να είναι μη αρνητικοί, λέγεται $n \times n$ Perron πολυωνυμικός πίνακας βαθμού m .

Ορισμός 4.1.3. Καλούμε έναν $n \times n$ πίνακα A *k-κυκλικό* (ή απλά *κυκλικό*) εάν υπάρχει πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1,k} \\ A_{k,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

όπου τα μηδενικά μπλοκ κατά μήκος της διαγωνίου είναι τετράγωνα.

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς πως ένας k -κυκλικός πίνακας είναι επίσης m -κυκλικός για κάθε διαίρετη m του k . Ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k για τον οποίο ο πίνακας A είναι k -κυκλικός ορίζεται ως *κυκλικός δείκτης* του πίνακα A .

Πρόταση 4.1.2. Έστω ένας μη αρνητικός, μη υποβιβάζσιμος πίνακας A . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Ο πίνακας A είναι πρωταρχικός.
2. Ο κυκλικός δείκτης του πίνακα A ισούται με 1.
3. $A^n > 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο n .

Συνεχίζουμε μελετώντας τα χαρακτηριστικά ποσά των πολυωνυμικών πινάκων. Ένας μιγαδικός αριθμός λ_0 ονομάζεται *ιδιοτιμή* του μονικού πίνακα $P(\lambda)$ εάν το σύστημα $P(\lambda_0)\mathbf{u} = 0$ έχει μία μη μηδενική λύση $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^n$. Το διάνυσμα \mathbf{u}_0 καλείται *δεξιό ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα $P(\lambda)$ και αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 . Ορίζουμε ως *αριστερό ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα $P(\lambda)$ το μη μηδενικό διάνυσμα \mathbf{v}_0 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 εάν $L(\lambda_0)^T \mathbf{v}_0 = 0$. Το φάσμα του $P(\lambda)$ αποτελείται από το σύνολο των ιδιοτιμών του, $\sigma(P) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det P(\lambda) = 0\}$.

Ορισμός 4.1.4. Ένας γραμμικός πολυωνυμικός πίνακας $I\lambda - A$ μεγέθους $(n+p) \times (n+p)$ (όπου $n \times n$ είναι το μέγεθος του μονικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και $p \geq 0$ κάποιος ακέραιος) καλείται *γραμμικοποίηση* του μονικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ εάν

$$I\lambda - A \sim \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

όπου \sim σημαίνει ισοδυναμία πολυωνυμικών πινάκων.

Κάνοντας κατάχρηση της γλώσσας μπορούμε να καλούμε τον πίνακα A από την (4.2) μία *γραμμικοποίηση* του πίνακα $P(\lambda)$. Συγκρίνοντας και τις δύο πλευρές της (4.2) προκύπτει ότι η ορίζουσα $\det(I\lambda - A)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού nk , όπου k είναι ο βαθμός του $P(\lambda)$. Επομένως το μέγεθος της γραμμικοποίησης A είναι απαραίτητα nk .

Θεώρημα 4.1.1. Για ένα μονικό πολυωνυμικό πίνακα $P(\lambda) = I\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_1\lambda + A_0$ μεγέθους $n \times n$ ορίζουμε τον *συνοδεύοντα πίνακα* (companion matrix) του $P(\lambda)$,

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \dots & -A_{k-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nm \times nm}. \quad (4.3)$$

Τότε:

$$I\lambda - C_P \sim \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Απόδειξη. Έστω οι $nm \times nm$ πολυωνυμικοί πίνακες:

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda I & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda I & I \end{bmatrix},$$

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} E_{m-1}(\lambda) & E_{m-2}(\lambda) & \cdots & E_1(\lambda) & E_0(\lambda) \\ -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I & 0 \end{bmatrix},$$

όπου $E_0(\lambda) = I$ και $E_{r+1}(\lambda) = \lambda E_r(\lambda) + A_{m-r-1}$ με $r = 0, 1, \dots, m-2$. Απευθείας μπορεί να δει κανείς πως $\det F(\lambda) = 1$ και $\det E(\lambda) = \pm 1$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισοδυναμίας (4.4) προκύπτει ότι:

$$E(\lambda)(I\lambda - C_P) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} F(\lambda), \quad (4.5)$$

αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό του Θεωρήματος 4.1.1. \square

Από την ισότητα (4.5) συνεπάγεται ότι:

$$E(\lambda)(I\lambda - C_P)F(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

δηλαδή το φάσμα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ συμπίπτει με αυτό της γραμμικοποίησης του, $\sigma(P) = \sigma(C_P)$. Άμεσα προκύπτει ότι και οι φασματικές τους ακτίνες θα είναι ίσες, $\rho(P) = \rho(C_P)$.

4.2 Θεωρία Perron-Frobenius για Πολυωνυμικούς Πίνακες

Πριν προχωρήσουμε στην Θεωρία Perron-Frobenius για πολυωνυμικούς πίνακες είναι σημαντικό να δούμε πως σχετίζονται τα ιδιοδιανύσματα ενός μονικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ (4.1) με τα ιδιοδιανύσματα του συνοδεύοντά του πίνακα C_P (4.3). Η σχέση αυτή προκύπτει από την εξίσωση (4.6) όπως θα δούμε στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.2.1. Έστω μ μία ιδιοτιμή του μονικού πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ (4.1) και C_P ο συνοδεύοντας πίνακάς του. Τότε:

1. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ είναι δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\mu \in \sigma(P)$, αν και μόνο αν το διάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mu \mathbf{v} \\ \vdots \\ \mu^{m-1} \mathbf{v} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nm}$$

είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα του C_P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ .

2. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\mu \in \sigma(P)$, αν και μόνο αν το διάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} E_{m-1}(\mu)^T \mathbf{u} \\ E_{m-2}(\mu)^T \mathbf{u} \\ \vdots \\ E_1(\mu)^T \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nm}$$

είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του C_P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ .

Με τη βοήθεια του Λήμματος 4.2.1 μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το Θεώρημα Perron-Frobenius και για τους πολυωνυμικούς πίνακες.

Θεώρημα 4.2.1 (Perron-Frobenius, Μέρος 1ο). Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ Perron πολυωνυμικός πίνακας όπως ορίστηκε στην (4.1). Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η φασματική ακτίνα $\rho(P)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $P(\lambda)$.
2. Ο πίνακας $P(\lambda)$ έχει ένα μη αρνητικό δεξιό ιδιοδιάνυσμα και ένα μη αρνητικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν στη φασματική ακτίνα $\rho(P)$.
3. Η φασματική ακτίνα $\rho(P)$ είναι μία μη φθίνουσα συνάρτηση των στοιχείων των A_j ($j = 0, 1, \dots, m-1$).

Εάν, επιπλέον, ο συνοδεύοντας πίνακας C_P είναι μη υποβιβάζσιμος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i Η φασματική ακτίνα $\rho(P)$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα $P(\lambda)$.
- ii Ο πίνακας $P(\lambda)$ έχει ένα μη αρνητικό δεξιό ιδιοδιάνυσμα και ένα μη αρνητικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν στη φασματική ακτίνα $\rho(P)$.
- iii Η φασματική ακτίνα $\rho(P)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση των στοιχείων των A_j ($j = 0, 1, \dots, m-1$).

Θεώρημα 4.2.2 (Perron-Frobenius, Μέρος 2ο). Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ Perron πολυωνυμικός πίνακας όπως ορίστηκε στην (4.1) και υποθέτουμε ότι ο συνοδεύοντάς του πίνακας C_P είναι μη υποβιβάζσιμος. Τότε υπάρχει ένας ακέραιος $1 \leq l \leq nm$ τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές μεγίστου μέτρου (περιφερειακές) του $P(\lambda)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $\lambda^l - \rho(P)^l = 0$. Επιπλέον, $\sigma(P) = e^{i(2t\pi/l)\sigma(P)}$ ($t = 0, 1, \dots, l-1$) και ο C_P είναι κυκλικός με δείκτη l . Όταν $l = 1$, ο C_P είναι πρωταρχικός πίνακας.

Πρόταση 4.2.1. Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας όπως ορίστηκε στην (4.1) και C_P ο συνοδεύοντάς του πίνακας. Αν ο A_0 είναι μη υποβιβάζσιμος, ο C_P είναι μη υποβιβάζσιμος.

Η Πρόταση 4.2.1 είναι αρκετά χρήσιμη καθώς θα μπορούμε εύκολα να δείξουμε αν ένας συνοδεύοντας πίνακας είναι μη υποβιβάζσιμος. Βέβαια αν ένας συνοδεύοντας πίνακας είναι μη υποβιβάζσιμος δεν συνεπάγεται ότι είναι και πρωταρχικός.

4.3 Γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Δημογραφίας

Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε το πρότυπο μοντέλο:

$$\mathbf{x}_j = A\mathbf{x}_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

όπου τα διανύσματα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ είναι μη αρνητικά, όπως και ο πίνακας A , και διατυπώσαμε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Δημογραφίας 3.2.3.

Η γενίκευση από πίνακες σε πολυωνυμικούς πίνακες $P(\lambda)$ σχετίζεται με το μοντέλο πινάκων της μορφής:

$$\mathbf{x}_{j+m-1} = A_{m-1}\mathbf{x}_{j+m-2} + \dots + A_1\mathbf{x}_j + A_0\mathbf{x}_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.7)$$

όπου τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ είναι αρχικές καταστάσεις που καθορίζουν τη λύση $\{\mathbf{x}_{j-1}\}_{j=1}^\infty$.

Με τη χρήση των πολυβηματικών διαφορικών εξισώσεων (4.7) θα δημιουργήσουμε μία γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Δημογραφίας.

Έστω C_P ο συνοδεύοντας πίνακας του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$, τότε η σχέση (4.7) είναι ισοδύναμη με την:

$$\mathbf{y}_j = C_P\mathbf{y}_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

όπου,

$$\mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{j-1} \\ \mathbf{x}_j \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{j+m-2} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Δοθέντος ενός αρχικού διανύσματος \mathbf{y}_0 , η (4.7) έχει τη μοναδική λύση:

$$\mathbf{x}_{j-1} = [I \ 0 \ \dots \ 0] C_P^j \mathbf{y}_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Από [2] ο $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ (4.1) είναι Perron αν και μόνο αν $\mathbf{y}_{j-1} \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots$) όταν $\mathbf{y}_0 \geq 0$.

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στην εξής γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Δημογραφίας:

Θεώρημα 4.3.1. Έστω $P(\lambda)$ ένας $n \times n$ Perron πολυωνυμικός πίνακας όπως ορίστηκε στην (4.1) και έστω ότι ο συνοδεύοντας του πίνακας C_P είναι πρωταρχικός. Υποθέτουμε ότι τα κανονικοποιημένα \mathbf{u}^T και \mathbf{v} , είναι αντίστοιχα το αριστερό και δεξιό ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$ που αντιστοιχούν στη φασματική του ακτίνα $\rho(P)$, τέτοια ώστε:

$$[\mathbf{u}^T E_1(\rho) \ \dots \ \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) \ \mathbf{u}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \rho\mathbf{v} \\ \vdots \\ \rho^{m-1}\mathbf{v} \end{bmatrix} = 1$$

και θεωρώντας ένα μη αρνητικό αρχικό διάνυσμα:

$$\mathbf{y}_0 = [\mathbf{x}_0 \ \mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_{m-1}] \in \mathbb{C}^{nm}$$

με τα $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}\}$ να είναι η λύση της (4.7) τα οποία υπολογίζονται με χρήση της (4.8), τότε αν $E_m(\lambda) = I$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\rho^j} \mathbf{x}_j \right) = \left[\mathbf{u}^T \left(\sum_{k=1}^m E_k(\rho) \mathbf{x}_{k-1} \right) \right] \mathbf{v}. \quad (4.9)$$

και

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_j\| = \begin{cases} 0 & \text{αν } \rho < 1, \\ \left\| \left[\mathbf{u}^T \left(\sum_{k=1}^m E_k(\rho) \mathbf{x}_{k-1} \right) \right] \mathbf{v} \right\| & \text{αν } \rho = 1, \\ \infty & \text{αν } \rho > 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Απόδειξη. Αφού ο μη αρνητικός συνοδεύοντας πίνακας C_P είναι πρωταρχικός, από τα [2, Lemma 3.1] και [4, Theorem 8.5.1]:

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\rho(C_P)} C_P \right]^j \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \\ \dots \\ \rho^{m-1} \mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T E_1(\rho) & \dots & \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) & \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_1(\rho) & \dots & \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) & \mathbf{v} \mathbf{u}^T \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_1(\rho) & \dots & \rho \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) & \rho \mathbf{v} \mathbf{u}^T \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho^{m-1} \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_1(\rho) & \dots & \rho^{m-1} \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) & \rho^{m-1} \mathbf{v} \mathbf{u}^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\rho^j} \mathbf{x}_j \right) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{C}^{n \times nm}} \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\rho^j} C_P^j \right] \mathbf{y}_0 \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_1(\rho) & \dots & \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) & \mathbf{v} \mathbf{u}^T \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_1(\rho) & \dots & \rho \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) & \rho \mathbf{v} \mathbf{u}^T \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho^{m-1} \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_1(\rho) & \dots & \rho^{m-1} \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) & \rho^{m-1} \mathbf{v} \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \dots \\ \mathbf{x}_{m-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_1(\rho) & \dots & \mathbf{v} \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) & \mathbf{v} \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \dots \\ \mathbf{x}_{m-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{v} (\mathbf{u}^T E_1(\rho) \mathbf{x}_0 + \dots + \mathbf{u}^T E_{m-1}(\rho) \mathbf{x}_{m-2} + \mathbf{u}^T \mathbf{x}_{m-1}), \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Όπως αναφέρθηκε και στην Εισαγωγή, η Γραμμική Άλγεβρα αποτελεί έναν κλάδο των Μαθηματικών που εφαρμόζεται ευρέως. Οι πίνακες που μελετώνται σε πολλά πρακτικά προβλήματα συνήθως είναι μη αρνητικοί και οι ιδιοτιμές τους είναι αρκετά χρήσιμες, αν και αρκετές φορές μας ενδιαφέρει μόνο η ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου. Τα μαθηματικά ερωτήματα που τίθενται όμως είναι: αρχικά πώς γνωρίζουμε αν η ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου ενός πίνακα είναι θετική και στη συνέχεια, αν θα μπορούσαν ποτέ να υπάρχουν θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές του ίδιου μεγέθους. Εάν συμβαίνει κάτι τέτοιο, η συμπεριφορά του σχετικού συστήματος μπορεί να είναι πολύ διαφορετική. Σε αυτά τα ερωτήματα απαντάει το Θεώρημα Perron-Frobenius για μη αρνητικούς πίνακες. Το Θεώρημα Perron-Frobenius, λοιπόν, αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για το μοντέλο που αναλύθηκε για την μελέτη των πληθυσμών στη Δημογραφία, και συγκεκριμένα για τη διατύπωση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Δημογραφίας, καθώς ο πίνακας προβολής είναι μη αρνητικός και ανάλογα με την τιμή της φασματικής του ακτίνας επιθυμούμε να συμπεράνουμε αν ο κάθε πληθυσμός αυξάνεται, συρρικνώνεται ή παραμένει στάσιμος με την πάροδο των χρόνων.

Μελετώντας τα παραδείγματα του Κεφαλαίου 3, είδαμε πως μπορούμε να καταστήσουμε έναν πληθυσμό στάσιμο θεωρητικά, εάν αυτός δεν είναι, κλιμακώνοντας τον πίνακα γονιμότητάς του. Η κλιμάκωση μπορεί όντως να εφαρμοστεί για διευκόλυνση σε διάφορα προβλήματα, όπως τη σύγκριση της παροδικής δυναμικής μεταξύ πληθυσμών με διαφορετικά μεγέθη και με διαφορετικές μακροπρόθεσμες δυναμικές, αλλά στην πραγματικότητα δεν θα αλλάξει το γεγονός πως ο πληθυσμός είτε θα αυξάνεται είτε θα συρρικνώνεται. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι σε κανένα από τα παραδείγματα ο πίνακας επόμενης γενιάς δεν είναι μη υποβιβάζσιμος. Αυτό είναι λογικό αφού για να είναι μη υποβιβάζσιμος είναι απαραίτητο ο πίνακας γονιμότητας να έχει τουλάχιστον μία θετική τιμή σε κάθε γραμμή, κάτι που είναι αδύνατο καθώς δεν μπορούν να υπάρχουν γεννήσεις σε κάθε πληθυσμιακή κλάση.

Στο Κεφάλαιο 4, είδαμε πως η Θεωρία Perron-Frobenius μπορεί να επεκταθεί και σε πολυωνυμικούς πίνακες, δίνοντας τη δυνατότητα γενίκευσης του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Δημογραφίας σε πολυβηματικά μοντέλα.

Τέλος, αν και χρησιμοποιήθηκαν πίνακες προβολής στα παραδείγματα, τόσο για τις θαλάσσιες χελώνες όσο και για τις αρκούδες grizzly, παλαιότερων ετών, δεν συνεπάγεται πως αντιπροσωπεύουν την παρούσα κατάσταση των πληθυσμών. Πέρα από τα μαθηματικά μοντέλα, λαμβάνοντας υπ' όψην τη μόλυνση του πλανήτη από το ανθρώπινο είδος καθώς και την απότομη κλιματική αλλαγή που αυτή έχει επιφέρει τα τελευταία χρόνια, όλο και περισσότερα είδη φυτών και ζώων τείνουν προς εξαφάνιση.

Βιβλιογραφία

- [1] C.-K. Li and H. Schneider, Applications of Perron–Frobenius Theory to Population Dynamics, *Journal of Mathematical Biology*, 44: 450–462, 2002.
- [2] P. J. Psarrakos and M. J. Tsatsomeros, a Primer of Perron–Frobenius Theory for Matrix Polynomials, *Linear Algebra and its Applications*, 393: 333–351, 2004.
- [3] L. B. Crowder, D. T. Crouse, S. S. Heppell, and T. H. Martin. Predicting the Impact of Turtle Excluder Devices on Loggerhead Sea Turtle Populations. 1994 *Ecological Applications* 4:437–445.
- [4] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1995.
- [5] Α.Γ. Φελούρης, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, 2010.
- [6] Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, 2011.
- [7] O. Perron, Zur Theorie der Matrices, *Mathematische Annalen*, 64: 248–263, 1907.
- [8] F. G. Frobenius, Ueber Matrizen aus Nicht Negativen Elementen, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 456–477, 1912.
- [9] Π. Ι. Ψαρράκος, *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, Σημειώσεις*, 2019.
- [10] Α. Τραγάκη, Χ. Μπάγκαβος και Δ. Ντούνας, *Περί Δημογραφίας και Πληθυσμιακών Εξελίξεων*, 2015.
- [11] J.M. Cushing, *An Introduction to Structured Population Dynamics*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [12] M. S. Boyce, B. M. Blanchard, R. R. Knight and Ch. Servheen, *Population Viability for Grizzly Bears: A Critical Review*, International Association for Bear Research and Management (IBA), Monograph Series Number 4, 2001.
- [13] MacTutor History of Mathematics Archive, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>.

Παράρτημα Α΄

Σχετικά με τη Χρήση του Στατιστικού Προγράμματος R

Τα υπολογιστικά πακέτα που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα `popbio`, `expm` και `matlib`.

Για τα Παραδείγματα 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3:

- `lambda`: Εκτίμηση του ρυθμού ανάπτυξης r χρησιμοποιώντας τη μεταβολή μεταξύ των δύο τελευταίων μετρήσεων του πληθυσμού.
- `stage.vectors`: Πίνακας με το πλήθος των μονάδων κάθε προβολής σε κάθε ηλικιακή κλάση.
- `stable.stage`: Εκτίμηση της κατανομής του σταθερού πληθυσμού κάθε κλάσης χρησιμοποιώντας τα ποσοστά του τελευταίου stage vector.
- `pop.sizes`: Συνολικό πλήθος των μονάδων σε κάθε προβολή.
- `pop.changes`: Ποσοστιαία αλλαγή στο μέγεθος του πληθυσμού.

Παράρτημα Β΄

Σύντομες Βιογραφίες των Oscar Perron και Ferdinand Georg Frobenius

Oscar Perron

Ο Oskar Perron (7 Μαΐου 1880 – 22 Φεβρουαρίου 1975), ήταν μαθηματικός γερμανικής καταγωγής, γνωστός για τη συμβολή του στις συνήθειες και μερικές διαφορικές εξισώσεις, καθώς και στα ανάγωγα κλάσματα.

Γεννήθηκε στο Frankenthal, με γονείς τον Valentin Perron, έμπορος δέρματος, και την Katharina Schaaff. Ο Oskar ξεκίνησε τη σχολική του εκπαίδευση στο Volksschule το 1886 προτού μεταγραφεί στο Λατινικό Σχολείο το 1889. Στη συνέχεια πέρασε δύο-όμισι χρόνια σπουδάζοντας κυρίως στο Humanist Gymnasium στο Worms και, παρά το γεγονός ότι ο πατέρας του ήθελε να συνεχίσει στην οικογενειακή επιχείρηση, σπούδαζε μαθηματικά στον ελεύθερο χρόνο του. Το 1898 του απονεμήθηκε το Abitur και ξεκίνησε τις σπουδές του στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου, ωστόσο σπούδασε και σε άλλα Πανεπιστήμια όπως το Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Ο Perron επηρεάστηκε περισσότερο από τους καθηγητές του στο Μόναχο. Τον εντυπωσίασαν οι διαλέξεις του Pringsheim, η επιρροή του οποίου φαίνεται στην εργασία του «Die Lehre von den Kettenbrüchen», που πρωτοεκδόθηκε το 1913. Το θέμα της διδακτορικής του διατριβής, υπό την επίβλεψη του Ferdinand von Lindemann, ήταν στη Γεωμετρία και το 1906 διορίστηκε στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου ως Λέκτορας. Το 1910 ο Perron δέχτηκε θέση Καθηγητή (χωρίς έδρα) στο Tübingen και το 1914 έγινε Καθηγητής στη Heidelberg. Ωστόσο, ο Α΄ Παγκόσμιος Πόλεμος διέκοψε την καριέρα του. Το 1915 έλαβε μέρος στον πόλεμο κερδίζοντας το Σιδηρούν Σταυρό. Με το τέλος του πολέμου, επέστρεψε στη Heidelberg, όπου δίδασκε μέχρι το 1922, οπότε και διορίστηκε στο Μόναχο.

Οι 218 δημοσιεύσεις του καλύπτουν αρκετές θεματικές περιοχές των Μαθηματικών, στη μαθηματική ανάλυση είναι γνωστό το ολοκλήρωμα Perron (Perron integral), στις συνήθειες διαφορικές εξισώσεις, στην άλγεβρα με τα ανάγωγα κλάσματα (continued fractions), αλλά και στη γεωμετρία (είναι ο πρώτος που απέδειξε ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός) και στη θεωρία αριθμών. Ο Perron εξέδωσε μια σειρά πρωτοποριακών κειμένων. Εκτός από την εργασία του στα ανάγωγα κλάσματα, «Die Lehre von den Kettenbrüchen», η οποία επανεκδόθηκε τρεις φορές, το 1921 παρουσίασε ένα κείμενο που αφορούσε τους άρρητους αριθμούς και είχε ως προαπαιτούμενο μαθηματικές

γνώσεις σχολικού επιπέδου. Και το κείμενο αυτό είχε μεγάλη απήχηση αφού ο ίδιος ο Perron ανέλαβε την επιμέλειά του σε ηλικία 80 ετών. Παρότι συνταξιοδοτήθηκε το 1951, συνέχισε να διδάσκει επιλεγμένα μαθήματα στο Μόναχο μέχρι το 1960. Ωστόσο, ακόμα και όταν σταμάτησε να διδάσκει σε ηλικία 80 ετών, συνέχισε το ερευνητικό του έργο, εκδίδοντας 18 άρθρα κατά την περίοδο 1964-1973.

Ferdinand Georg Frobenius

Ο Ferdinand Georg Frobenius (26 Οκτωβρίου 1849 – 3 Αυγούστου 1917), ήταν Μαθηματικός γερμανικής καταγωγής, γνωστός για τη συνεισφορά του στη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τη θεωρία ομάδων και τη θεωρία αριθμών. Επιπλέον έδωσε την πρώτη πλήρη απόδειξη του θεωρήματος Cayley – Hamilton.

Γεννήθηκε στο Charlottenburg, ένα προάστιο του Βερολίνου, και γονείς του ήταν ο Christian Ferdinand Frobenius και η Christine Elizabeth Friedrich. Εισήχθη στο γυμνάσιο του Joachimsthal το 1860, σε ηλικία 11 ετών. Μετά την αποφοίτησή του, το 1867, ξεκίνησε τις σπουδές του στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Εκεί φοίτησε μόνο ένα εξάμηνο και κατόπιν επέστρεψε πίσω στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, όπου παρακολούθησε μαθήματα από τους Leopold Kronecker, Ernst Kummer και Karl Weierstrass. Το 1870 ολοκλήρωσε το διδακτορικό του με θέμα σχετικό με την επίλυση διαφορικών εξισώσεων (βραβευμένο με διάκριση) υπό την επίβλεψη του Weierstrass.

Το 1874, διορίστηκε στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου ως Καθηγητής (χωρίς έδρα) στα Μαθηματικά. Ο Frobenius παρέμεινε για ένα χρόνο στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου και κατόπιν αναχώρησε για τη Ζυρίχη, όπου διορίστηκε ως Καθηγητής στο Eidgenössische Polytechnikum. Για δεκαεφτά χρόνια, μεταξύ 1875 και 1892, ο Frobenius δούλεψε στη Ζυρίχη. Εκεί παντρεύτηκε, έκανε οικογένεια και ταυτόχρονα ασχολήθηκε ερευνητικά με αρκετές θεματικές περιοχές των μαθηματικών. Στα τέλη Δεκέμβρη του 1891 ο Kronecker πέθανε και η έδρα του στο Βερολίνο έμεινε κενή. Ο Weierstrass, που πίστευε σε μεγάλο βαθμό ότι ο Frobenius ήταν ο σωστός άνθρωπος για να κρατήσει το Βερολίνο στο προσκήνιο των Μαθηματικών, χρησιμοποίησε την αξιοσημείωτη επιρροή του για να διορίσει τον Frobenius. Το 1893 ο Frobenius επέστρεψε στο Βερολίνο, όπου εκλέχτηκε στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών.