ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σχεδιασμός βέλτιστων πολιτικών συναλλαγής για παραγωγούς αιολικής ενέργειας

Διπλωματική Εργασία του:
Άγγελου Λυμπέρη

Επιβλέπων:
Αντώνιος Παπαπαντολέων
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, 6 Οκτωβρίου 2020

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων

Σχεδιασμός βέλτιστων πολιτικών συναλλαγής για παραγωγούς αιολικής ενέργειας

Διπλωματική Εργασία του:
Άγγελου Λυμπέρη

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 6 Οκτωβρίου 2020.

....
Αντώνιος
Παπαπαντολέων
Επίκουρος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

....
Λουλάκης
Μιχαήλ
Αναπληρωτής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

....
Παπανικολάου
Βασίλης
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 6 Οκτωβρίου 2020

....
Άγγελος Λυμπέρης
Μαθηματικός Εφαρμογών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Ο ραγδαίος ρυθμός αύξησης της χρήσης των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας τα τελευταία χρόνια, καθώς και ο στόχος της Ευρωπαϊκής Ένωσης για πλήρη απελευθέρωση των αγορών ενέργειας όλων των ευρωπαϊκών κρατών, σε συνδυασμό με την έτσι και αλλιώς εξέχουσα σημασία του κλάδου της ενέργειας για την επιβίωση των ανθρώπων συνιστούν παράγοντες για την ύπαρξη ενδελεχών μελετών της μαθηματικής κοινότητας πάνω σε ζητήματα που αφορούν τον εν λόγω κλάδο.

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη βέλτιστων στρατηγικών για έναν παραγωγό αιολικής ενέργειας, ο οποίος αποσκοπεί στην πώληση της μελλοντικής παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, που θα προκύψει μέσω της αιολικής, στις ανοιχτές αγορές ενέργειας. Ο παραγωγός, προκειμένου να καθορίσει τη στρατηγική του, λαμβάνει κατά νου ενδεχόμενες προβλέψεις για την μελλοντική παραγωγή. Αρχικά, μελετούμε τη μεταβλητή της ταχύτητας του ανέμου και το πως μέσω εκείνης βγάζουμε συμπεράσματα για την παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας. Καθώς οι προβλέψεις για τη μελλοντική παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας ενδεχομένως να ανανεώνονται διαρκώς, προβαίνουμε στη δημιουργία ενός στοχαστικού μοντέλου που σχετίζεται με αυτήν την εξέλιξη των προβλέψεων και εν συνεχεία μελετούμε τα σφάλματα του εν λόγω μοντέλου.

Έτσι, λοιπόν, διακρίνοντας τους παραγωγούς σε μικρούς και μεγάλους, από τη μία, ανάλογα με την επίδραση που έχουν οι συναλλαγές τους στις αγορές και από την άλλη σε παραγωγούς που αδιαφορούν για το ρίσκο ή που αποστρέφονται το ρίσκο, είμαστε σε θέση κάτω από διαφορετικές προϋποθέσεις κάθε φορά να μελετούμε αντίστοιχα προβλήματα βελτιστοποίησης. Στη συγκεκριμένη εργασία θα μελετηθούν ζητήματα βελτιστοποίησης που αφορούν τους παραγωγούς μικρής εμβέλειας.

Ευχαριστίες

Η παρουσίαση της διπλωματικής εργασίας σηματοδοτεί το τέλος της φοιτητικής μου σταδιοδρομίας, τα χρόνια της οποίας πέρασα πολύ όμορφες στιγμές,γνώρισα πολλούς καλούς φίλους και διεύρυνα σε μεγάλο βαθμό τους ορίζοντές μου.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω πολλούς ανθρώπους. Αρχικά θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου Αντώνιο Παπαπαντολέων για την καθοδήγηση και υποστήριξη σε όλα τα στάδια εκπόνησης της εργασίας. Οι συμβουλές που μου έδωσε ήταν καθοριστικές και η διάθεση του να βοηθήσει αξιοσημείωτη.

Σε προσωπικό επίπεδο δεν υπάρχουν λόγια για να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όλα τα μέλη της οικογενείας μου που όλα αυτά τα χρόνια είναι δίπλα μου, με στηρίζουν σε κάθε μου επιλογή και ο,τιδήποτε είμαι σήμερα το οφείλω σε εκείνους. Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους καρδιακούς μου φίλους Τίρσι, Τιόνα, Αθηνά, Γιώργο, Θάνο και Παναγιώτα για τη στήριξή τους και τις υπέροχες στιγμές που πέρασα μαζί τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι σύγχρονες κοινωνίες καταναλώνουν τεράστιες ποσότητες ενέργειας για χρήσεις όπως για παράδειγμα είναι η θέρμανση, τα μέσα μεταφοράς και η λειτουργία βιομηχανικών μονάδων, ενώ η ενεργειακή ζήτηση όλο και αυξάνεται. Ένα μεγάλο ποσοστό ενέργειας που χρησιμοποιείται είναι από συμβατικές πηγές ενέργειας, όπως για παράδειγμα η καύση του λιγνίτη αξιοποιείται για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Ωστόσο, οι συμβατικές πηγές ενέργειας πέραν του ότι δεν είναι ανεξάντλητες, είναι γεγονός πως προκαλούν σοβαρές περιβαλλοντικές επιπτώσεις, με μία από τις σημαντικότερες να είναι το γνωστό σε όλους φαινόμενο του θερμοκηπίου.

Άμεσο επακόλουθο είναι ο ραγδαίος ρυθμός αύξησης της χρήσης των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Σημειωτέον είναι πως το 2018 οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας αντιπροσώπευαν το 18,9 τοις εκατό της ενέργειας που καταναλώθηκε στην Ευρωπαϊκή Ένωση, πλησίαζοντας το στόχο του 20 τοις εκατό που έχει τεθεί για το 2020. Ένα παράδειγμα ανανεώσιμης ενέργειας είναι η αιολική.Αιολική ενέργεια ονομάζεται η ενέργεια που παράγεται από την εκμετάλλευση του πνέοντος ανέμου. Για την αξιοποίηση της αιολικής ενέργειας χρησιμοποιούμε σήμερα τις ανεμογεννήτριες, οι οποίες μετατρέπουν την κινητική ενέργεια του ανέμου σε ηλεκτρική.

Πέραν της αύξησης της χρήσης των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας, στρατηγικός στόχος της Ευρωπαϊκής Ένωσης είναι και η πλήρης απελευθέρωση των αγορών ενέργειας σε όλα τα ευρωπαϊκά κράτη με απώτερο σκοπό τη δημιουργία μια ενιαίας αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία , σύμφωνα με τους θεσμούς, θα συμβάλλει στην ανταγωνιστικότητα και σε καλύτερες τιμές για τους καταναλωτές. Ένας από τους βασικούς πυλώνες για την εκπλήρωση του λεγόμενου "μοντέλου-στόχου" της Ευρωπαϊκής Ένωσης στην Ελλάδα είναι το Ελληνικό Χρηματιστήριο Ενέργειας(Ε.Χ.Ε). Το Χρηματιστήριο Ενέργειας αποτελεί προϋπόθεση για την αναδιοργάνωση της χονδρεμπορικής αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας και στοχεύει στη σύζευξη της ελληνικής αγοράς με τις υπόλοιπες ευρωπαϊκές αγορές, στην εξασφάλιση της ασφάλειας του ενεργειακού εφοδιασμού και στη διαφοροποίηση των πηγών ενέργειας στο ενεργειακό μίγμα, ενώ η πρώτη συναλλαγή σε αυτό πραγματοποιήθηκε το 2020.

Είναι γεγονός πως βάσει των στοιχείων που απορρέουν από τη βιβλιογραφία, η ηλεκτρική ενέργεια παρουσιάζει δύο βασικά χαρακτηριστικά, τα οποία εγείρουν θεωρητικά και πρακτικά προβλήματα. Πρώτον, δεν είναι εφικτή η αποθήκευσή της (ή τουλάχιστον σε λογικό κόστος) και δεύτερον η μεταφορά της ικανοποιεί συγκεκριμένους νόμους. Αν αναλογιστούμε, λοιπόν, τα αιολικά πάρκα, τα παραπάνω σε συνδυασμό με την απρόβλεπτη φύση της παραγωγής της ηλεκτρικής ενέργειας σε αυτήν την περίπτωση οδήγησαν στη δημιουργία των ενδοημερήσιων αγορών, όπου μπορεί να πραγματοποιηθεί συναλλαγή ακόμη και σαρανταπέντε λεπτά πριν την παράδοση, με αποτέλεσμα την ύπαρξη συνολικά τεσσάρων τύπων αγορών ηλεκτρικής ενέργειας σε πολλές χώρες. Τα τέσσερα αυτά είδη αγορών είναι τα εξής: η προθεσμιακή αγορά ($forward\ market$), η αγορά της επόμενης ημέρας (*spot market*) ,η ενδοημερήσια αγορά (*intraday market*) και η αγορά εξισορρόπησης (*adjustment market*).

ΠΡΟΘΕΣΜΙΑΚΕΣ ΑΓΟΡΕΣ

Όταν κάποιος παραγωγός ενέργειας πραγματοποιεί πωλήσεις στην προθεσμιακή αγορά, είναι γεγονός πως μειώνει σε σημαντικό βαθμό το ρίσκο που σχετίζεται με τη μεταβλητότητα της τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία μεταβλητότητα παρουσιάζεται ως επί το πλείστον στις βραχυπρόθεσμες περιπτώσεις. Άμεσο επακόλουθο αυτού είναι η σταθεροποίηση των ταμειακών ροών, ενώ ταυτόχρονα είναι σαφές πως οι προθεσμιακές αγορές ειναι συμφέρουσες όταν υπάρχει επιθυμία για πώληση μεγάλων ποσοτήτων ηλεκτρικής ενέργειας. Οι συναλλαγές οφείλουν να πραγματοποιούνται τουλάχιστον μία μέρα πριν τη διανομή του τελικού προϊόντος, ενώ οι περίοδοι παράδοσης είναι η ημέρα,η εβδομάδα, ο μήνας, το τρίμηνο και ο χρόνος.

ΕΝΔΟΗΜΕΡΗΣΙΕΣ ΑΓΟΡΕΣ

Με την αύξηση της χρήσης των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και λόγω της απρόβλεπτης φύσης της παραγωγής που οφείλεται σε αυτές, οι ενδοημερήσιες αγορές είναι ένα υψίστης σημασίας εργαλείο που δίνει τη δυνατότητα στους συμμετέχοντες στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας να λαμβάνουν κατά νου απρόβλεπτες αλλαγές είτε στην παραγωγή είτε στην κατανάλωση. Μία ενδοημερήσια αγορά είναι συνεχής αγορά που δίνει τη δυνατότητα για συναλλαγές από μία μέρα πριν το χρόνο ωρίμανσης μέχρι και σαρανταπέντε λεπτά μόλις πριν την τελική παράδοση, ενώ επιτρέπεται η πραγμάτωση συναλλαγών ανά δεκαπέντε λεπτά.

ΑΓΟΡΕΣ ΤΗΣ ΕΠΟΜΕΝΗΣ ΗΜΕΡΑΣ

Εαν κάποιος παραγωγός γνωρίζει εκ των προτέρων το πόσο ηλεκτρική ενέργεια θα παράξει, τότε η αγορά της επόμενης ημέρας είτε η προθεσμιακή αγορά συνιστούν τις καλύτερες επιλογές για εκείνον. Σημειωτέον πως η αγορά της επόμενης ημέρας δίνει δυνατότητα για συναλλαγές μέχρι μία ημέρα πριν το χρόνο της τελικής παράδοσης, ενώ επιτρέπεται η πραγματοποίηση συναλλαγών είτε ανά μία ώρα είτε ανά τριάντα λεπτά.

ΑΓΟΡΕΣ ΕΞΙΣΟΡΡΟΠΗΣΗΣ

Έχουν ρυθμιστικό ρόλο γενικότερα σε σχέση με τους συμμετέχοντες και τις συναλλαγές τους, ενώ οι παραγωγοί ενέργειας που θα προβούν στη χρήση αυτής της αγοράς πληρώνουν κάποιο χρηματικό τίμημα. Για παράδειγμα το RTE στη Γαλλία που συνιστά το διαχειριστή του δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας της χώρας σχετίζεται άμεσα με τη λεγόμενη αγορά εξισορρόπησης της εν λόγω χώρας.

Κεφάλαιο 2

Ταχύτητα του Ανέμου και Παραγωγή Αιολικής Ενέργειας

2.1 Μεταβλητή της ταχύτητας του ανέμου.

Είναι γεγονός πως η μεταβλητή που περιγράφει την ταχύτητα του ανέμου είναι ιδιαιτέρως σημαντική για αρκετές εφαρμογές που σχετίζονται με την αιολική ενέργεια. Προφανώς η μεταβλητή της ταχύτητας του ανέμου είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή και μας απασχολεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που την περιγράφει.

Ένας μεγάλος αριθμός μελετών, σχετιζόμενος με τις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας που προτείνει τη χρήση συγκεκριμένων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας για την περιγραφή των καμπύλων συχνοτήτων της ταχύτητας του ανέμου, έχει δημοσιευθεί στην επιστημονική βιβλιογραφία. Τέτοιες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι οι: 3-παραμετρική Γάμμα κατανομή, 2-παραμετρική Γάμμα κατανομή, η μονοπαραμετρική *Rayleigh* κατανομή, η 2-παραμετρική *Weibull* κατανομή και η 2-παραμετρική λογαριθμική κανονική κατανομή.

Στο επιστημονικό άρθρο [2] , η *Weibull* κατανομή και η λογαριθμική κατανομή χρησιμοποιούνται προκειμένου να μοντελοποιήσουν τα δεδομένα της ταχύτητας του ανέμου, τα οποία αποτυπώνονται σε μορφή καμπύλων συχνότητας. Το εν λόγω άρθρο πραγματεύεται δεδομένα έρευνας που διεξήχθη σε είκοσι διαφορετικές περιοχές της Ναβάρρας(αυτόνομης περιοχής της Ισπανίας), όπου έχουν τοποθετηθεί ανεμογεννήτριες. Τα δύο προτεινόμενα μοντέλα με βάση τα οποία θα πραγματοποιηθεί η προσαρμογή των δεδομένων είναι αυτά της 2-παραμετρικής *Weibull* και της λογαριθμικής κανονικής κατανομής.

Σε σχέση με τη *Weibull* έχουμε τα εξής:
Τύπος Σ.π.π : $\rho(x) = (\frac{k}{c})(\frac{x}{c})^{k-1} exp\left(-(\frac{x}{c})^k\right)$, με $x \geq 0$ και
$\rho(x) = 0$, διαφορετικά,

όπου c (*scale parameter*) έχει τιμή κοντά στη μέση ταχύτητα, ενώ η k εντοπίζεται στη βιβλιογραφία ως η λεγόμενη *shape parameter*.

Σε σχέση με τη λογαριθμική κανονική κατανομή:
Τύπος : $\rho_x(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\nu_x} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x}\right)^2\right)$
Ορίζεται για $x > 0$ και μ_x συνιστά τη μέση τιμή της $Y = ln(X)$, ενώ η ν_x^2 συνιστά τη διασπορά της $Y = ln(X)$

Με βάση τις μεθόδους που ο ερευνητής αξιοποιεί προκειμένου να πραγματοποιήσει την προσαρμογή των 2 μοντέλων ξεχωριστά στα δεδομένα, το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ότι στις δύο τοποθεσίες που παρατηρείται η χαμηλότερη μέση ταχύτητα ανέμου η λογαριθμική κανονική κατανομή προσαρμόζεται καλύτερα, ενώ στις υπόλοιπες τοποθεσίες η καλύτερη προσαρμογή αφορά τη *Weibull* κατανομή, χωρίς ωστόσο αυτό να αναιρεί και την καλή προσαρμογή της λογαριθμικής κανονικής. Οι μέθοδοι που αξιοποιήθηκαν για την εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων είναι η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας και η μέθοσος ελάχιστων τετραγώνων. Η καταλληλότητα του κάθε μοντέλου αξιολογήθηκε από το γνωστό συντελεστή R^2.

Ωστόσο, οι *Tan* και *Tankov* στο επιστημονικό άρθρο τους[1] επιλέγουν τη λογαριθμική κανονική κατανομή για να περιγράψουν την τυχαία μεταβλητή της ταχύτητας του ανέμου, αναλογιζόμενοι πως η λογαριθμική κατανομή, όντας έτσι και αλλιώς μια καλή κατανομή για αυτήν την περιγραφή, μοιάζει και σε σημαντικό βαθμό με την *Weibull* κατανομή, όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ρίχνοντας μία ματιά στους τύπους αυτών των δύο κατανομών. Καθοριστικός παράγοντας για τη συγκεκριμένη τους επιλογή αποτέλεσε το γεγονός πως η λογαριθμική κανονική κατανομή είναι αναλυτικά πιο εύχρηστη και πως ταυτόχρονα εισαγάγει μια δυναμική πτυχή στο μοντέλο της κίνησης *Brown*.

Εν κατακλείδει, συμβολίζουμε με X_T την τυχαία μεταβλητή που αφορά την ταχύτητα του ανέμου τη χρονική στιγμή Τ(παρακάτω θα είναι ο τελικός χρόνος παράδοσης) η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\rho_x(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\nu_x} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x}\right)^2\right) \tag{2.1}$$

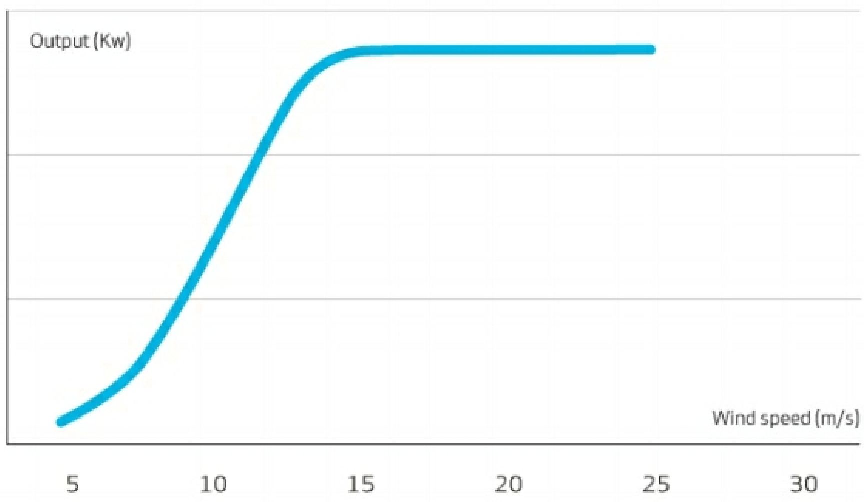
Η μ_x συνιστά τη μέση τιμή του λογάριθμου της ταχύτητας του ανέμου, ενώ ν_x^2 συνιστά τη διασπορά του λογάριθμου της εν λόγω μεταβλητής.

2.2 Τελική παραγωγή αιολικού πάρκου.

Παραπάνω παρουσιάσαμε σημαντικά στοιχεία που αφορούν την τυχαία μεταβλητή X_T που περιγράφει την ταχύτητα του ανέμου. Καθώς,η ανεμογεννήτρια είναι μια αιολική μηχανή που μετατρέπει τον άνεμο από κινητική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια και καθώς ένα αιολικό πάρκο αποτελείται απο διαφορετικά είδη ανεμογεννητριών, σε αυτήν την ενότητα κρίνεται σκόπιμο να ασχοληθούμε με στοιχεία που αφορούν τη μεταβλητή που περιγράφει την παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας ενός αιολικού πάρκου στον τελικό χρόνο παράδοσης, αλλά και το πως αυτή συνδέεται με την ταχύτητα του ανέμου.

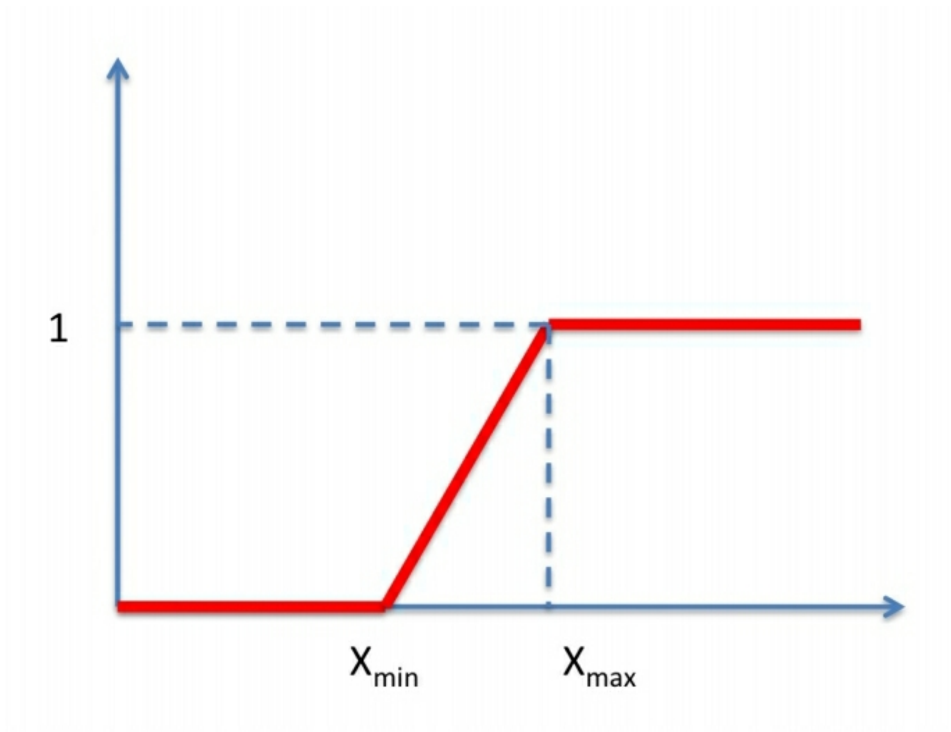
Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε σε κάποιες χρήσιμες ποσότητες. Αρχικά, συμβολίζουμε με P_T την ακριβή ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται από το αιολικό πάρκο ενδιαφέροντός μας τη χρονική στιγμή T. Για να είμαστε πιο σαφείς, αυτή η ποσότητα, επί της ουσίας, θα είναι ο μέσος όρος της ενέργειας που παράχθηκε στο αιολικό πάρκο το δεκάλεπτο που εμπεριέχει τη χρονική στιγμή T. Εν συνεχεία, συμβολίζουμε με P_{max} την ονομαστική ισχύ του αιολικόυ πάρκου,δηλαδή τη μέγιστη ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας που δύναται να παράξει. Είναι προφανές πως, επειδή προκειμένου να επιτελέσει τη λειτουργία του το αιολικό πάρκο χρειάζεται ενέργεια για τον εξοπλισμό του, κάποιες φορές ενδέχεται η ποσότητα P_T να έχει αρνητικές τιμές.Για να αποφευχθεί αυτό το ενδεχόμενο εισάγουμε στο παιχνίδι τη λεγόμενη κανονικοποιημένη ποσότητα της ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται από το αιολικό πάρκο ενδιαφέροντός μας που συμβολίζεται με F_T και ισούται με $F_T = max(0, \frac{P_T}{P_{max}})$. Είναι προφανές πως κατά αυτόν τον τρόπο που ορίσαμε τη συγκεκριμένη ποσότητα, θα ισχύει πως $0 \leq F_T \leq 1$. Ωστόσο, δεδομένου ότι γνωρίζουμε ένα σημαντικό αριθμό στοιχείων για τη μεταβλητή που περιγράφει την ταχύτητα του ανέμου, είναι εύκολο να κατανοήσουμε πως αν εντοπίζαμε έναν τρόπο να συνδέσουμε την F_T με την X_T, θα ήταν ιδιαιτέρως ευτυχές για τη συνέχεια της μελέτης μας.

Λαμβάνουμε υπ'όψιν τη μορφή της γραφικής παράστασης που περιγράφει την ποσότητα της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας που απορρέει από την ανεμογεννήτρια τύπου $Vestas\ V90\ 3MW$, όπως παρουσιάζεται και στο επιστημονικό άρθρο [1]. Η εν λόγω γραφική παράσταση έχει την εξής μορφή:



Σχήμα 2.1: Από επιστημονικό άρθρο[1]

Εμείς, ωστόσο, θα θεωρήσουμε πως η συνάρτηση που περιγράφει τη σχέση μεταξύ F_T και X_T είναι η f_{prod}, με τύπο $f_{prod}(x) = \frac{(x-x_{min})^+-(x-x_{max})^+}{x_{max}-x_{min}}$. Το γράφημα της συγκεκριμένης συνάρτησης, όπως βλέπουμε αμέσως παρακάτω, μοιάζει σε σημαντικό βαθμό με το παραπάνω γράφημα, ενώ παράλληλα η θεώρηση της συγκεκριμένης συνάρτησης διευκολύνει ιδιαιτέρως τη μελέτη μας.



Σχήμα 2.2: [1]

Θεωρούμε, λοιπόν, ότι:

$$F_T = f_{prod}(X_T) = \frac{(X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+}{x_{max} - x_{min}} \tag{2.2}$$

Έχουμε ότι x_{min} είναι η ταχύτητα του ανέμου πάνω από την οποία οι ανεμογεννήτριες ξεκινούν να παράγουν ηλεκτρική ενέργεια, ενώ x_{max} είναι η ταχύτητα του ανέμου παραπάνω από την οποία οι ανεμογεννήτριες δεν παράγουν ηλεκτρική ενέργεια προκειμένου να αποφευχθούν σημαντικές φθορές.

Με βάση τον παραπάνω τύπο (2.2), επαληθεύεται εκ νέου ότι για τη μεταβλητή που περιγράφει την κανονικοποιημένη ποσότητα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας στο χρόνο T ισχύει ότι: $0 \leq F_T \leq 1$.

Έχουμε ότι $(X_T - x_{min})^+ = max(0, X_T - x_{min})$
και επίσης ότι $(X_T - x_{max})^+ = max(0, X_T - x_{max})$.

Άρα, λοιπόν:

$(X_T - x_{min})^+ = 0, \qquad X_T \leq x_{min}$
$(X_T - x_{min})^+ = X_T - x_{min}, \qquad X_T > x_{min}.$
$(X_T - x_{max})^+ = 0, \qquad X_T \leq x_{max},$
$(X_T - x_{max})^+ = X_T - x_{max}, \qquad X_T > x_{max}.$

Οπότε με βάση τα προαναφερθέντα,αλλά και τον τύπο (2.2) προκύπτουν τα εξής:
-Για $X_T \leq x_{min}$: $F_T = 0$

-Για $x_{min} < X_T < x_{max}$: $F_T = \frac{X_T - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$

-Για $X_T \geq x_{max}$: $F_T = \frac{X_T - x_{min} - (X_T - x_{max})}{x_{max} - x_{min}} = 1$

Σε αυτό το σημείο θα επιδιώξω να εντοπίσω τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής που περιγράφει την κανονικοποιημένη ποσότητα της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας του αιολικού πάρκου, όταν ισχύει ότι $F_T \in (0,1)$. Με βάση τα παραπάνω, στην περίπτωση όπου $F_T \in (0,1)$, έχουμε ότι $x_{min} < X_T < x_{max}$ και κατά συνέπεια ότι $F_T = \frac{X_T - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$.

Στην παρούσα φάση κρίνεται σκόπιμη η αναφορά ενός θεωρήματος που αφορά στην εύρεση της κατανομής πιθανότητας ενός μετασχηματισμού μιας τυχαίας μεταβλητής, για την οποία γνωρίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Θεώρημα: Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνεχή (εκτός ενδεχομένως πεπερασμένου πλήθους σημείων) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_x(x)$, η οποία είναι θετική για $x \in S$ και 0 για όλα τα υπόλοιπα x.
Έστω $g : S \to T$ μία αμφιμονοσήμαντη και επί συνάρτηση. Υποθέτουμε, ακόμη, πως η (υπάρχουσα) αντίστροφη συνάρτηση: $g^{-1} : T \to S$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο.
Εαν ορίσουμε $Y = g(X)$, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y δίνεται από τον εξής τύπο:
$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y))\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}$, για $y \in T$, ενώ $f_y(y) = 0$, για $y \in T^c$

Είναι προφανές ότι η περίπτωση που μας αφορά στη συγκεκριμένη εργασία εμπίπτει στην εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.
Πράγματι, η συνάρτηση $g(x) = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$ είναι "1-1" και 'επί", ενώ $\rho_x(x) > 0$, για κάθε $x > 0$.
Εφ'όσον η $g(x)$ είναι "1-1", αυτό σημαίνει ότι έχει αντίστροφη συνάρτηση,

έστω $h = g^{-1}$. Με βάση αυτά που γνωρίζουμε για τις αντίστροφες συναρτήσεις, έχουμε ότι η g έχει ως πεδίο ορισμόυ, το σύνολο τιμών της $g(x) = \frac{x-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}$ και ως πεδίο τιμών, το πεδίο ορισμού της g. Αυτό σημαίνει πως η h έχει πεδίο ορισμού το (0,1) και πεδίο τιμών το (x_{min}, x_{max}).
Μένει ο υπολογισμός του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης g.
Θέτω $g(x) = y$.
Άρα, $g(x) = y \iff \frac{x-x_{min}}{x_{max}-x_{min}} = y \iff x = y(x_{max} - x_{min}) + x_{min}$
Συνεπώς $g^{-1}(y) = h(y) = y(x_{max} - x_{min}) + x_{min}$
Προφανώς, $h(y)$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(y) = x_{max} - x_{min}$ και όντως, όπως φαίνεται η h έχει και συνεχή πρώτη παράγωγο, κάτι το οποίο εμπεριέχεται στις προϋποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος.

Αξιοποιώντας, λοιπόν , το αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος, αλλά και λαμβάνοντας υπ'όψιν και τη συνάρτηση πυκνότητας (2.1) πιθανότητας προκύπτει:
$\rho_{F_T}(y) = \rho_x(h(y))\dfrac{dh(y)}{dy} =$
$\left(\frac{1}{y(x_{max}-x_{min})+x_{min}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_x} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(ln(y(x_{max}-x_{min})+x_{min})-\mu_x)^2}{\nu_x^2}\right)(x_{max} - x_{min})$.

Σε αυτό το σημείο θέτω:
$\zeta = -\frac{x_{min}}{x_{max}-x_{min}}$
$\mu = \mu_x - ln(x_{max} - x_{min})$
$\nu = \nu_x$

Μπορώ να αποδείξω τα εξής:

$$\frac{1}{y-\zeta} = \frac{x_{max} - x_{min}}{y(x_{max} - x_{min}) + x_{min}} \tag{2.3}$$

$$ln(y-\zeta) - \mu = ln\{y(x_{max} - x_{min}) + x_{min}\} - \mu_x \tag{2.4}$$

Απόδειξη της σχέσης (2.3):
Παίρνω:
$\frac{1}{y-\zeta} = \frac{1}{y+\frac{x_{min}}{x_{max}-x_{min}}} = \frac{x_{max}-x_{min}}{y(x_{max}-x_{min})+x_{min}}$, που συνιστά το ζητούμενο.

Απόδειξη της σχέσης (2.4):
Έστω ότι ισχύει: $ln(y-\zeta) - \mu = ln\,(y(x_{max} - x_{min}) + x_{min}) - \mu_x \iff ln(y-\zeta) - \mu = ln\,(y(x_{max} - x_{min}) + x_{min}) - \mu - ln(x_{max} - x_{min}) \iff ln(y-\zeta) =$

$ln\left(y(x_{max}-x_{min})+x_{min}\right)-ln(x_{max}-x_{min}) \iff ln(y-\zeta)=ln\left(\frac{y(x_{max}-x_{min})+x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\right) \iff$
$y-\zeta=\frac{y(x_{max}-x_{min})+x_{min}}{x_{max}-x_{min}} \iff \frac{1}{y-\zeta}=\frac{x_{max}-x_{min}}{y(x_{max}-x_{min})+x_{min}}$

κάτι που βάσει της εξίσωσης (2.3) ισχύει και άρα ισχύει και το ισοδύναμο αρχικό και συνεπώς προκύπτει η ζητούμενη απόδειξη.

Έχουμε, λοιπόν, βάσει των εξισώσεων (2.3) και (2.4) ότι:

$$\rho_{F_T}(y)=\left(\frac{1}{y-\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu}exp\left(-\frac{(ln(y-\zeta)-\mu)^2}{2\nu^2}\right) \tag{2.5}$$

Αυτή είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για $F_T \in (0,1)$.

Συνεπώς, έχουμε ότι η μεταβλητή F_T που περιγράφει την κανονικοποιημένη ποσότητα της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας τη χρονική στιγμή T ακολουθεί μία λογαριθμική κανονική κατανομή με σ.π.π, όπως περιγράφεται στην παραπάνω εξίσωση (2.5) και παραμέτρους:

$$\zeta=-\frac{x_{min}}{x_{max}-x_{min}} \tag{2.6}$$

$$\mu=\mu_x-ln(x_{max}-x_{min}) \tag{2.7}$$

$$\nu=\nu_x \tag{2.8}$$

Εν συνεχεία, εξετάζουμε τις περιπτώσεις, όπου $F_T=0$ και $F_T=1$.Έχουμε:
$P[F_T=0]=P[X_T\leq x_{min}]=P\left(ln(X_T)\leq ln(x_{min})\right)=$
$P\left(\frac{ln(X_T)-\mu_x}{\nu_x}\leq\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}\right)=\Phi\left(\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}\right)$
Ισχύει ότι : $ln(-\zeta)-\mu=ln\left(\frac{x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\right)-\mu_x+ln\left(x_{max}-x_{min}\right)=$
$=ln(x_{min})-ln(x_{max}-x_{min})-\mu_x+ln(x_{max}-x_{min})=ln(x_{min})-\mu_x$

Συνεπώς για την $P[F_T=0]$ ισχύει ότι:

$$P[F_T=0]=\Phi\left(\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}\right)=\Phi\left(\frac{ln(-\zeta)-\mu}{\nu}\right)=P_0(\mu,\nu,\zeta) \tag{2.9}$$

Έχουμε:
$P[F_T = 1] = P[X_T > x_{max}] = 1 - P[X_T \leq x_{max}] = 1 - P\left(ln(X_T) \leq ln(x_{max})\right) =$
$P\left(\frac{ln(X_T)-\mu_x}{\nu_x} \leq \frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}\right)$
Ισχύει ότι:
$ln(1-\zeta) - \mu = ln\left(1 + \frac{x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\right) - \mu_x + ln(x_{max} - x_{min}) =$
$ln\left(\frac{x_{max}-x_{min}}{x_{max}-x_{min}} + \frac{x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\right) - \mu_x + ln(x_{max} - x_{min}) =$
$ln\left(\frac{x_{max}}{x_{max}-x_{min}}\right) - \mu_x + ln(x_{max} - x_{min}) = ln(x_{max}) - \mu_x$

Συνεπώς για την $P[F_T = 1]$ ισχύει ότι:

$$P[F_T = 1] = 1 - \Phi\left(\frac{ln(x_{max}) - \mu_x}{\nu_x}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{ln(1-\zeta) - \mu}{\nu}\right) = P_1(\mu, \nu, \zeta) \tag{2.10}$$

Σε αυτό το σημείο, μιας και βλέπουμε ότι η λογαριθμική κανονική κατανομή χρησιμοποιείται για την περιγραφή των μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν και δεδομένου ότι ενδεχομένως η κανονική κατανομή να μας είναι πιο οικεία από όσο η λογαριθμική κατανομή, παραθέτουμε στοιχεία της θεωρίας σε σχέση με το πως συνδέονται οι παράμετροι των δύο αυτών κατανομών μεταξύ τους.
Θέτω $Y = ln(X)$ και υποθέτω πως η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και ν^2. Αυτό σημαίνει ότι $E[ln(X)] = \mu$ και $Var(ln(X)) = \nu^2$, δηλαδή $E[Y] = \mu$ και $Var(Y) = \nu^2$. Μας ενδιαφέρουν οι ποσότητες $E[X] = \mu_x$ και $Var(X) = \nu_x^2$.

Ισχύει ότι :

$$\mu_x = exp\left(\mu + \frac{1}{2}\nu^2\right) \tag{2.11}$$

$$\nu^2 = ln\left(1 + \frac{\nu_x^2}{\mu_x^2}\right) \tag{2.12}$$

Παρατηρούμε πως για την περιγραφή της τυχαίας μεταβλητής που περιγράφει την ταχύτητα του ανέμου χρειάζονται 4 παράμετροι: $(\mu_x, \nu_x, x_{min}, x_{max})$, ενώ η κατανομή της μεταβλητής που περιγράφει την κανονικοποιημένη ποσότητα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας προσδιορίζεται, όπως δείξαμε, με 3 παραμέτρους (μ, ν, ζ) που σημαίνει ότι η μία παράμετρος είναι περιττή. Για να αποκαταστήσουμε τον εν λόγω πλεονασμό, μπορούμε να θέσουμε: $\mu_x = -\frac{1}{2}\nu_x^2$, κάτι που εξασφαλίζει ότι $E[X_T] = 1$.Πράγματι, με βάση την εξίσωση (2.11), έχουμε πως $E[X_T] = exp\left(\mu_x + \frac{1}{2}\nu_x^2\right) = exp\left(-\frac{1}{2}\nu_x^2 + \frac{1}{2}\nu_x^2\right) = 1$.

2.3 Προσαρμογή του μοντέλου λογαριθμικής κανονικής κατανομής.

Έχοντας λάβει υπ΄όψιν για τη μεταβλητή της ταχύτητας του ανέμου ότι $X_T \sim logN(\mu_x, \nu_x^2)$, για τη μεταβλητή της ποσότητας της παραγωγής της ηλεκτρικής ενέργειας τη χρονική στιγμή T ότι $F_T \sim logN(\mu, \nu^2)$, αλλά και γενικότερα τα στοιχεία που αναπτύξαμε παραπάνω, θα μελετήσουμε την προσαρμογή του μοντέλου της λογαριθμικής κανονικής κατανομής σε δεδομένα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από αιολικά πάρκα. Αξιοσημείωτο είναι να αναφερθούμε στο ότι η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από ένα αιολικό πάρκο διαφέρει ανάλογα με την εποχή και ανάλογα με την ώρα της ημέρας, και αυτό οφείλεται στο ότι η ταχύτητα του ανέμου διαφοροποιείται ανά εποχή του χρόνου ή ανά στάδιο της ημέρας.

Ένα παράδειγμα προσαρμογής του μοντέλου λογαριθμικής κατανομής σε δεδομένα που αφορούν την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας παρουσιάζεται στο επιστημονικό άρθρο [1]. Οι υπεύθυνοι, λοιπόν, άντλησαν δεδομένα από την εταιρία *Maia Eolis*, μια εταιρία που ιδρύθηκε το 2006 και ειδικεύεται στην ανάπτυξη, κατασκευή, λειτουργία και διατήρηση αιολικών πάρκων στη χώρα της Γαλλίας. Πιο συγκεκριμένα, ασχολήθηκαν με δεδομένα 3 αιολικών πάρκων, τα οποία δεδομένα αφορούν την τετραετία: 1η Ιανουαρίου του 2011 εως την 1η Ιανουαρίου του 2015, ενώ η καταγραφή πραγματοποιούταν ανά χρονικό διάστημα 10 λεπτών της ώρας.

Η μέθοδος, η οποία επέλεξαν, προκειμένου να προσαρμόσουν το εν λόγω θεωρητικό μοντέλο στα συγκεκριμένα δεδομένα, είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των πειραματικών αποτελεσμάτων και των αντίστοιχών τους θεωρητικών ποσοτήτων. Χώρισαν την τετραετία από όπου αντλούσαν δεδομένα σε N δεκάλεπτα διαστήματα και τοιουτοτρόπως η τιμή F_T^k αφορά την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας στο $k-$οστό δεκάλεπτο της προαναφερθείσας χρονικής περιόδου.

Δεδομένου ενός a, για το οποίο : $0 \leq a \leq 1$, ορίζουμε την πειραματική τιμή ως:

$$q_{emp}^a = max\left(F_T^k : \frac{k}{N} \leq a\right) \tag{2.13}$$

και για $P_0(\mu,\nu,\zeta) \leq a \leq 1 - P_1(\mu,\nu,\zeta)$, την αντίστοιχη θεωρητική τιμή ως:

$$q^a(\mu,\nu,\zeta) = max\left(x : \Phi\left(\frac{ln(x-\zeta)-\mu}{\nu}\right) \leq a\right) \tag{2.14}$$

Οπότε, οι παράμετροι, σχετικοί με την εν λόγω προσαρμογή, για την οποία ακολουθείται η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, προκύπτουν μέσω της ελαχιστοποίσης της ποσότητας:

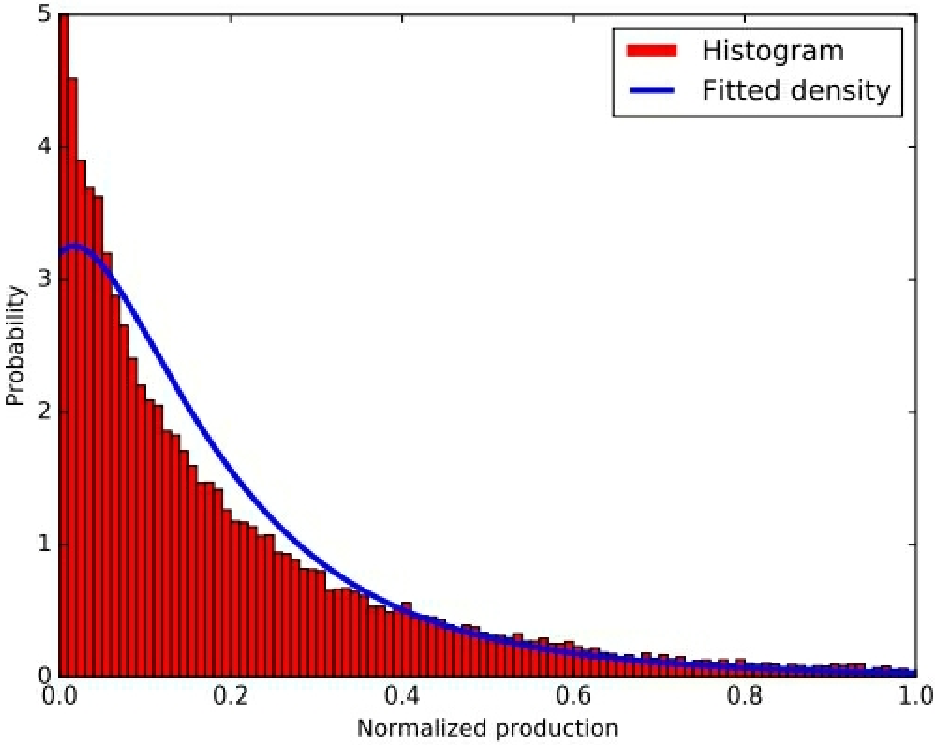
$$\sum_{l=1}^{L}\left(q_{emp}^{\alpha_l(\mu,\nu,\zeta)} - q_{(\mu,\nu,\zeta)}^{\alpha_l(\mu,\nu,\zeta)}\right)^2 \tag{2.15}$$

Τα $(a_l)_{l=1}^{L}$ κατανέμονται ομοιόμορφα μεταξύ $P_0(\mu,\nu,\zeta)$ και $1 - P_1(\mu,\nu,\zeta)$ και για τα προαναφερθέντα ισχύει ο εξής τύπος:

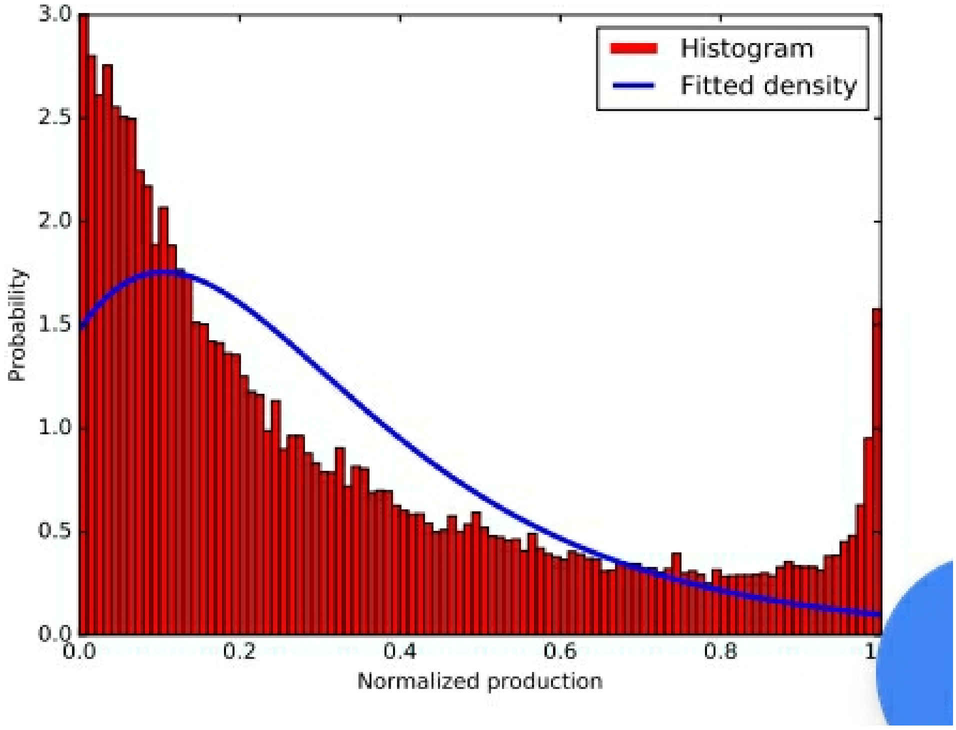
$$a_l = P_0(\mu,\nu,\zeta) + \frac{l-1}{L}\left(1 - P_1(\mu,\nu,\zeta) - P_0(\mu,\nu,\zeta)\right) \tag{2.16}$$

Parameters	Plant 1	Plant 2	Plant 3
μ	-1.46551	-0.60213	-0.76199
σ	0.66020	0.46158	0.48778
ζ	-0.13248	-0.33757	-0.26449
x_{min}	0.46129	0.55412	0.50312
x_{max}	3.94322	2.19561	2.40534
μ_{X_T}	-0.21793	-0.10653	-0.11896
σ_{X_T}	0.66020	0.46158	0.48778

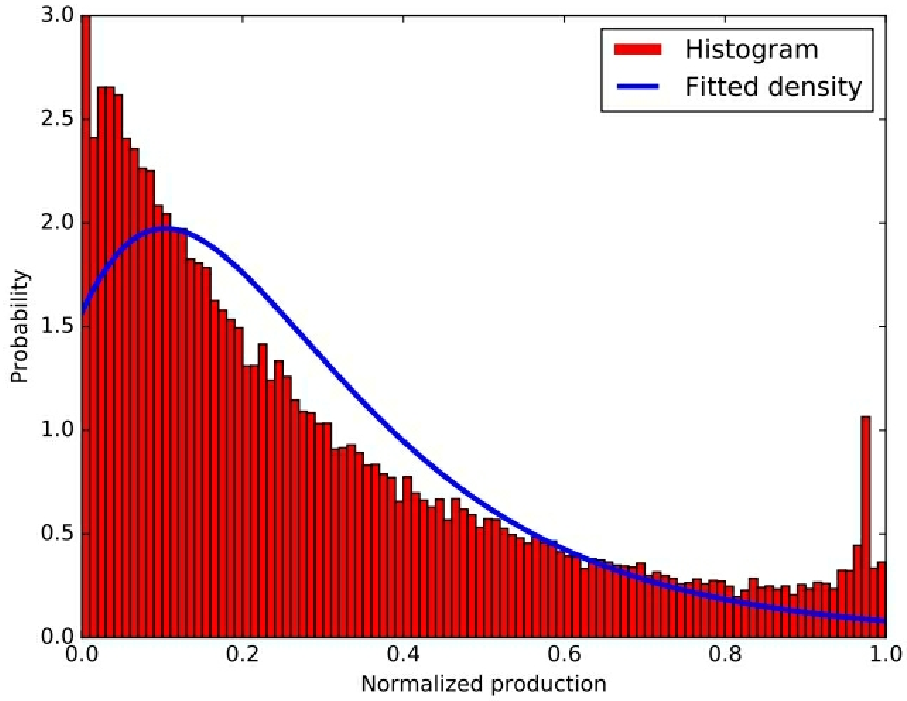
Σχήμα 2.3: Προσαρμοσμένες παράμετροι και αντίστοιχοι παράμετροι κάθε εργοστασίου: $x_{min}, x_{max}, \mu_{X_T}, \sigma_{X_T}$ [1]



Σχήμα 2.4: Προσαρμοσμένη και εμπειρική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για Εργοστάσιο 1 [1]



Σχήμα 2.5: Προσαρμοσμένη και εμπειρική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για Εργοστάσιο 2 [1]



Σχήμα 2.6: Προσαρμοσμένη και εμπειρική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για Εργοστάσιο 3 [1]

- Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να εξακριβώσουμε αν οι μετρήσεις που έχουμε από την εν λόγω έρευνα και συγκεκριμένα στο Σχήμα (2.3) επαληθεύουν τα όσα έχουμε υποστηρίξει παραπάνω.
Παραπάνω είδαμε ότι για $F_T \in (0,1)$ η μεταβλητή F_T ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, ν^2. Αυτό σημαίνει ότι $E[ln(F_T)] = \mu$. Αφού γενικά $F_T \in [0,1]$ και ισχύει και το παραπάνω, έχοντας ότι $ln(F_T) < 0$, θα ισχύει ότι: $E[ln(F_T)] = \mu < 0$. Όπως παρατηρούμε, αυτό επαληθεύεται στις μετρήσεις καθενός από τα τρία εργοστάσια.

  Επιπροσθέτως, παραπάνω είχαμε θέσει $\mu_x = -\frac{\nu_x^2}{2}$. Όπως παρατηρούμε, σε κάθε μία από τις μετρήσεις των εργοστασίων επαληθεύεται ότι $\mu_{X_T} = -\frac{\sigma_{X_T}^2}{2}$.

  Τέλος, έχοντας θέσει $\zeta = -\frac{x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$, συμπεραίνουμε ότι $\zeta < 0$, κάτι το οποίο επαληθεύεται στις παραπάνω μετρήσεις.

Κεφάλαιο 3

Στοχαστικό Μοντέλο Πρόβλεψης Της Τελικής Παραγωγής

3.1 Χρήσιμοι Μαθηματικοί Ορισμοί

Ορισμός 3.1: Έστω Ω ένα σύνολο με $\Omega \neq \emptyset$. Μία κλάση $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται $\sigma-$ άλγεβρα(υποσυνόλων του Ω), όταν ικανοποιεί τα παρακάτω:
(i) $\Omega \in \mathcal{F}$
(ii) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $A^c \in \mathcal{F}$
(iii) Αν $[A_n : n = 1, 2, ...] \subset \mathcal{F}$, τότε: $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Παράδειγμα 1: Έστω Ω ένα σύνολο με $\Omega \neq \emptyset$. Τότε, η κλάση $\mathcal{P}(\Omega)$ των υποσυνόλων του Ω είναι $\sigma-$ άλγεβρα(η ευρύτερη με την έννοια του εγκλεισμού). Επίσης, η κλάση υποσυνόλων $[\Omega, \emptyset]$ είναι $\sigma-$ άλγεβρα (η ελάχιστη με την έννοια του εγκλεισμού).

Παράδειγμα 2: Έστω Ω ένα σύνολο με $\Omega \neq \emptyset$. Έστω, επίσης σύνολο A μη κενό και τέτοιο ώστε: $A \subset \Omega$. Τότε, η κλάση $[\emptyset, \Omega, A, A^c]$ είναι $\sigma-$ άλγεβρα υποσυνόλων του Ω.

Πρόταση 1: Αν $F_i, i \in I$ είναι οικογένεια $\sigma-$ αλγεβρών υποσυνόλων του Ω, τότε η κλάση $\mathcal{F} = \cap_{i \in I} F_i$ είναι $\sigma-$ άλγεβρα υποσυνόλων του Ω.

Ορισμός 3.2: Έστω $\mathcal{C}$ μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω και $\mathcal{F}$ η τομή όλων των $\sigma-$αλγεβρών που περιέχουν την $\mathcal{C}$. Η $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$ ονομάζεται παραγόμενη από την σ και συμβολικά γράφουμε: $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$.

Ορισμός 3.3: Μέτρο πιθανότητας $\mathcal{P}$ ορίζεται μία συνολοσυνάρτηση από μία $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$ στο $\Re$, όταν ικανοποιούνται τα παρακάτω:
(i) $\mathcal{P}(A) \geq 0$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$
(ii) $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
(iii) Αν $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$, για κάθε $i \neq j$,τότε:

$$\mathcal{P}\left[\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n)$$

Ορισμός 3.4: Χώρος πιθανότητας ονομάζεται μία τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, όπου $\Omega \neq \emptyset$ και $\mathcal{F}$ είναι $\sigma-$άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to \Re$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας που ικανοποιεί τις υποθέσεις $(i), (ii), (iii)$ του Ορισμού 3.3. Το σύνολο Ω ονομάζεται δειγματοχώρος και τα υποσύνολα του Ω που ανήκουν στην $\mathcal{F}$ ονομάζονται ενδεχόμενα

Ορισμός 3.5: Ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ λέμε ότι είναι πλήρης αν για όλα τα ενδεχόμενα $B \in \mathcal{F}$ για τα οποία ισχύει: $\mathcal{P}(B) = 0$, έχουμε ότι:
για κάθε $A \subset B$ $A \in \mathcal{F}$

Ορισμός 3.6: Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Μία διύληση στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ είναι μία αύξουσα οικογένεια $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\sigma-$αλγεβρών που περιέχονται στην $\mathcal{F}$. Με άλλα λόγια, για κάθε t $\mathcal{F}_t$ είναι $\sigma-$άλγεβρα που περιέχεται στην $\mathcal{F}$ και για κάθε $s \leq t$ έχουμε ότι: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Ένας χώρος πιθανότητας που του ενσωματώνουμε μία διαδικασία διύλησης $\mathcal{F}_{t\geq 0}$ ονομάζεται χώρος πιθανότητας με διύληση.

Ορισμός 3.7: Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P})$ χώρος πιθανότητας με διύληση. Λέμε ότι η διύληση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ εαν $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ πλήρης και επίσης $\mathcal{F}_0$ να περιέχει όλα τα $\mathcal{P}-$κενά σύνολα.

Ορισμός 3.8: Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P})$ χώρος πιθανότητας με διύληση. Λέμε ότι η διύληση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ικανοποιεί τις συνήθεις υποθέσεις(*usual conditions*) εαν είναι πλήρης και επίσης δεξιά συνεχής, δηλαδή: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_+}$, όπου $\mathcal{F}_{t_+} = \cap_{u>t} F_n$

Ορισμός 3.9: Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P})$ χώρος πιθανότητας με διύληση. Μία στοχαστική διαδικασία $(B_t)_{t\in[0,T]}$, για την οποία ισχύουν:
(i) $B_0 = 0$
(ii) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή $B_t - B_s \perp B_s - B_u$ για $0 \leq u \leq s \leq t$
(iii) έχει ομοιόμορφα κατανεμημένες προσαυξήσεις, δηλαδή $B_{t+h} - B_t \sim B_h - B_0$ για $t, h \geq 0$
(iv) έχει κανονικά κατανεμημένες προσαυξήσεις.
(v) οι τροχιές της είναι συνεχείς, δηλαδή: $t \to B_t$ συνεχής συνάρτηση

ονομάζεται τυπική κίνηση *Brown*.

Επισήμανση 1: Το ό,τι θα συμβεί μέχρι τη χρονική στιγμή s είναι ανεξάρτητο με το ο,τιδήποτε συμβεί μετά τη χρονική στιγμή s.

Επισήμανση 2: Με βάση τις παραπάνω ιδιότητες συμπεραίνουμε το εξής:
$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

3.2 Στοχαστικό μοντέλο πρόβλεψης της ταχύτητας του ανέμου.

Μπαίνοντας στη θέση ενός παραγωγού ηλεκτρικής ενέργειας από ενα αιολικό πάρκο, είναι εύκολο να κατανοήσουμε πως βασικό ζητούμενο για εκείνον θα είναι η εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής, με βάση τα δικά του κριτήρια. Λόγω του ότι, όπως αναδείξαμε στο Κεφάλαιο 2, η παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας είναι συνυφασμένη με την ταχύτητα του ανέμου που έχει απρόβλεπτο χαρακτήρα, είναι σαφές πως ο παραγωγός της ενέργειας δε θα γνωρίζει ακριβώς το πόση ηλεκτρική ενέργεια θα παράξει και άρα η δημιουργία ενός μοντέλου, που θα κάνει πρόβλεψη για την κανονικοποιημένη ποσότητα της ηλεκτρικής ενέργειας που θα παραχθεί, είναι ιδιαιτέρως καθοριστική. Η εν λόγω πρόβλεψη θα βασίζεται κάθε χρονική στιγμή στις πληροφορίες και στα δεδομένα, όπου έχει διαθέσιμα ο παραγωγός τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Προφανώς, λοιπόν,η δημιουργία του στοχαστικού αυτού μοντέλου που θα περιγράφει το πως εξελίσσονται οι προβλέψεις για την τελική ποσότητα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι αναπόφευκτη και ταυτοχρόνως σημαντική για τη χάραξη των στρατηγικών των επιχειρηματιών.

Πιο συγκεκριμένα, κάθε χρονική στιγμή t θέλουμε την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την τελική παραγωγή και θα τη συμβολίζουμε με F_t. Ορίζουμε μία διαδικασία διύλησης $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, η οποία περιγράφει τα δεδομένα και τις πληροφορίες που έχει διαθέσιμα ο παραγωγός τη χρονική στιγμή t και με βάση αυτά θα πραγματοποιήσει την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την τελική ποσότητα παραγωγής.

Ορίζουμε, συνεπώς, την στοχαστική διαδικασία $(F_t)_{0 \le t \le T}$ που θα περιγράφει αυτήν την προαναφερθείσα καλύτερη δυνατή πρόβλεψη ως εξής: $F_t = E[F_T|\mathcal{F}_t]$.

Πρόταση 3.1: Η στοχαστική διαδικασία F είναι $\mathcal{F}$-*martingale*.
Απόδειξη:
Για κάθε χρονική στιγμή t έχουμε:
$E[|F_t|] = E\left[|E[F_T|\mathcal{F}_t]|\right] < \infty$.
Για κάθε $t > s$ έχουμε ότι:
$E[F_t|\mathcal{F}_s] = E\left[E(F_T|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s\right]$.
Από ιδιότητα του πύργου προκύπτει ότι:
$E[F_t|\mathcal{F}_s] = F_s$
Πληρούνται οι ιδιότητες *martingale* για τη συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία και άρα επαληθεύεται ο παραπάνω ισχυρισμός.

Εφόσον, όπως προαναφέραμε, η τελική κανονικοποιημένη ποσότητα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας σχετίζεται άμεσα με την ταχύτητα του ανέμου και εν τέλει είναι συνάρτηση αυτής, σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε τη στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη της πρόβλεψης της τελικής ταχύτητας του ανέμου. Έστω W μία τυπική κίνηση *Brown* και Z μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή και είναι ανεξάρτητη από την W. Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία $(X_t)_{0 \le t \le T}$ ως εξής:

$$X_t = \exp\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right), t < T \tag{3.1}$$

$$X_T = \exp\left(\int_0^T \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(s)ds\right) e^{bZ-\frac{b^2}{2}} \tag{3.2}$$

όπου $\sigma(s)_{0 \le t \le T}$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ντετερμινιστική συνάρτηση και $b \ge 0$.

Πρόταση 3.2: Για κάθε καθορισμένο t ισχύει ότι:

$$X_T \stackrel{d}{=} X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}$$

δηλαδή X_T είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ίδια κατανομή με την $X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}$,όπου η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή , $\theta(t) = \int_t^T \sigma^2(s)ds + b^2$ και N ανεξάρτητη της X_t.
Απόδειξη:
Έχουμε ότι, αφού Z ανεξάρτητη της W, με $Z \sim N(0,1)$ και W να είναι τυπική κίνηση *Brown*,η lnX_T θα ακολουθεί κανονική κατανομή. Ταυτόχρονα, αφού N

ανεξάρτητη της X_t και άρα της W, έχουμε ότι η $ln\left(X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N-\frac{\theta(t)}{2}}\right)$ ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή. Συνεπώς, X_T και $X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N-\frac{\theta(t)}{2}}$ ακολουθούν το ίδιο είδος κατανομής.Υπολογίζουμε:

$$\bullet E\left[ln(X_T)\right] = -\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(s)ds - \frac{b^2}{2} \qquad (1)$$

.

$$\bullet E\left[ln\left(X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N-\frac{\theta(t)}{2}}\right)\right] = -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds - \frac{\theta(t)}{2} =$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)ds - \frac{b^2}{2} = -\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(s)ds - \frac{b^2}{2}$$

$$E\left[ln\left(X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N-\frac{\theta(t)}{2}}\right)\right] = -\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(s)ds - \frac{b^2}{2} \qquad (2)$$

Αρα, όπως βλέπουμε, από σχέσεις (1) και (2):

$$E\left[ln(X_T)\right] = E\left[ln\left(X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N-\frac{\theta(t)}{2}}\right)\right]$$

$$\bullet Var\left(ln(X_T)\right) = Var\left(\int_0^T \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(s)ds + bZ - \frac{b^2}{2}\right) =$$

$$Var\left(\int_0^T \sigma(s)dW_s\right) + Var(bZ) = \int_0^T \sigma^2(s)ds + b^2 Var(Z) = \int_0^T \sigma^2(s)ds + b^2$$

.

$$Var\left(ln(X_T)\right) = \int_0^T \sigma^2(s)ds + b^2 \qquad (3)$$

$$\bullet Var\left(ln\left(X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N-\frac{\theta(t)}{2}}\right)\right) =$$

$$Var\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds + \sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}\right) =$$

$$Var\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s + \sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds + b^2 N}\right) =$$

$$Var\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s\right) + \left(\int_t^T \sigma^2(s)ds + b^2\right) Var(N) =$$

$$\int_0^t \sigma^2(s)ds + \int_t^T \sigma^2(s)ds + b^2 = \int_0^T \sigma^2(s)ds + b^2$$

$$Var\left(ln\left(X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}\right)\right) = \int_0^T \sigma^2(s)ds + b^2 \tag{4}$$

Άρα, αυτό που προκύπτει από τις σχέσεις (3) και (4) είναι ότι:

$$Var\left(ln(X_T)\right) = Var\left(ln\left(X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}\right)\right)$$

και κάπως έτσι αποδείχθηκε το ζητούμενο. $\square$

Θεωρούμε την $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ να είναι η φυσική διύληση της κίνησης $Brown$ W και έχουμε $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(Z) \vee \sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$.

Ισχυρισμός 3.1 : Η στοχαστική διαδικασία X είναι $(\mathcal{F}_t)$ - *martingale* και μπορούμε να δούμε την τυχαία μεταβλητή X_t ως την καλύτερη πρόβλεψη της τυχαίας μεταβλητής X_T.
Απόδειξη: Αρχικά, έχουμε ότι $E[|X_T|] < \infty$.
Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι $E[X_T|\mathcal{F}_t] = X_t$.
Με βάση την πρόταση (3.2) που δείξαμε αμέσως παραπάνω έχουμε ότι:

$$X_T \stackrel{d}{=} X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$E[X_T|\mathcal{F}_t] = E[X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}|\mathcal{F}_t] = X_t E[e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}|\mathcal{F}_t]$$

.

Σε αυτό το σημείο επιδιώκουμε να υπολογίσουμε την $E[e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}|\mathcal{F}_t]$.
Για δική μας βολή θέτω:

$$\alpha = E[e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}|\mathcal{F}_t]$$

$$\beta = E[ln\left(e^{\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}}\right)|\mathcal{F}_t]$$

$$\gamma^2 = Var\left(ln\left(e^{\sqrt{\theta(t)}N-\frac{\theta(t)}{2}}\right)|\mathcal{F}_t]\right)$$

Με βάση τη σχέση (2.11) διατυπώνουμε ότι θα ισχύει: $\alpha = e^{\beta+\frac{\gamma^2}{2}}$.
Υπολογίζω $\beta = E[\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}|\mathcal{F}_t] = -\frac{\theta(t)}{2}$.

Υπολογίζω $\gamma^2 = Var\left(\sqrt{\theta(t)}N - \frac{\theta(t)}{2}|\mathcal{F}_t\right) = \theta(t)$.
Άρα: $\alpha = e^{\beta+\frac{\gamma^2}{2}} = e^{-\frac{\theta(t)}{2}+\frac{\theta(t)}{2}} = e^0 = 1$.
Συμπερασματικά: $E[X_T|\mathcal{F}_t] = X_t e^{\sqrt{\theta(t)}N-\frac{\theta(t)}{2}}|\mathcal{F}_t] = X_t\alpha = X_t$.

3.3 Στοχαστικό μοντέλο πρόβλεψης της τελικής παραγωγής.

Καθώς η φόρμουλα $Black - Scholes$ θα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη μίας σημαντικής προτάσεως της εν λόγω υποενότητας, σε αρχικό στάδιο θα αναφερθούμε στο πως η συγκεκριμένη φόρμουλα χρησιμοποιείται σε γενικές γραμμές στην επιστημονική βιβλιογραφία. Όπως παρατηρούμε, λοιπόν, η φόρμουλα $Black - Scholes$, ως επί το πλείστον αξιοποιείται για την αποτίμηση Ευρωπαϊκών Παραγώγων.

Προκειμένου να καταστήσουμε την κατανόηση εφικτή, αναλογιζόμαστε την περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς(*Call Option*). Ορίζουμε με $(S_t)_{t\geq 0}$ τη στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την τιμή της μετοχής κάθε χρονική στιγμή, ενώ η δυναμική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής της μετοχής στο χρόνο είναι η εξής $Black - Scholes$ εξίσωση:

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t S_t dW_t \tag{3.3}$$

$$S_0 = s_0 > 0 \tag{3.4}$$

Συνεπώς, S_T συνιστά την τιμή της μετοχής στη χρονική στιγμή T, ενώ T είναι ο λεγόμενος χρόνος ωρίμανσης, όποτε ο κάτοχος του δικαιώματος θα αποφασίσει αν το εξασκήσει είτε όχι. Ως K ορίζεται η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, ως r ορίζεται το επιτόκιο, ενώ με σ_t η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής κάθε χρονική στιγμή.

Η τιμή, στην οποία κάποιος θα αγοράσει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς ισούται με την εξής αναμενόμενη τιμή: $E[(S_T - K)^+]$ και η φόρμουλα $Black - Scholes$ πραγματεύεται τον υπολογισμό της εν λόγω αναμενόμενης τιμής.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τη φόρμουλα $Black - Scholes$ έχουμε:

$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \tag{3.5}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.6}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.7}$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Επανερχόμενοι στους στόχους της συγκεκριμένης εργασίας, λοιπόν,υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει τη διαδικασία πρόβλεψης της παραγωγής της ηλεκτρικής ενέργειας ως εξής:

$$F_t = E\left[f_{prod}(X_T)|\mathcal{F}_t\right] \tag{3.8}$$

και αμέσως παρακάτω θα παραθέσουμε την ακριβή μορφή, με την οποία ισούται η εν λόγω διαδικασία.

Πρόταση 3.3: Η διαδικασία πρόβλεψης δίνεται ακριβώς όπως φαίνεται παρακάτω:
$F_t = g\left(\theta(t), X_t\right)$, για $t < T$, όπου:

$$\begin{aligned} g(\theta, x) = \frac{1}{x_{max} - x_{min}} &\left(x\left(\Phi\left(d_+^{min}(x,\theta)\right) - \Phi\left(d_+^{max}(x,\theta)\right)\right)\right. \\ &\left. - x_{min}\Phi\left(d_-^{min}(x,\theta)\right) + x_{max}\Phi\left(d_-^{max}(x,\theta)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

όπου:

$$d_-^{min} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\left(ln\left(\frac{x}{x_{min}}\right) - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$d_-^{max} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\left(ln\left(\frac{x}{x_{max}}\right) - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$d_+^{min} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\left(ln\left(\frac{x}{x_{min}}\right) + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$d_+^{max} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\left(ln\left(\frac{x}{x_{max}}\right) + \frac{\theta}{2}\right)$$

και Φ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Απόδειξη:
Έστω χρονική στιγμή $t < T$ και μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής: $E[f_{prod}(X_T)|\mathcal{F}_t]$. Έχουμε ότι:

$$E[f_{prod}(X_T)|\mathcal{F}_t] = E\left(\frac{(X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+}{x_{max} - x_{min}}|\mathcal{F}_t\right) =$$

$$\frac{1}{x_{max} - x_{min}}\left(E\left[(X_T - x_{min})^+|\mathcal{F}_t\right] - E\left[(X_T - x_{max})^+|\mathcal{F}_t\right]\right)$$

.

Έχουμε δει παραπάνω ότι: $X_t = exp\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right)$.
Ο υπολογισμός των αναμενόμενων τιμών:
$E\left[(X_T - x_{min})^+|\mathcal{F}_t\right]$ και $E\left[(X_T - x_{max})^+|\mathcal{F}_t\right]$ μας παραπέμπει στη χρήση της φόρμουλας $Black - Scholes$, έχοντας ότι $r = 0$ και θεωρώντας κάθε χρονική στιγμή t την X_t ως αρχική τιμή. Επιπροσθέτως, τη χρονική στιγμή t έχουμε: $\theta(t) = \int_t^T \sigma^2(s)ds + b^2$.
Αναλογιζόμενοι τη φόρμουλα $Black - Scholes$, όπως τη μελετήσαμε παραπάνω, προβαίνουμε στους εξής υπολογισμούς:

$$E\left[(X_T - x_{min})^+|\mathcal{F}_t\right] = X_t\Phi(d_1) - x_{min}\Phi(d_2)$$
$$E\left[(X_T - x_{max})^+|\mathcal{F}_t\right] = X_t\Phi(d_3) - x_{max}\Phi(d_4),$$

όπου:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{X_t}{x_{min}}\right) + \frac{\theta(t)}{2}}{\sqrt{\theta(t)}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{X_t}{x_{min}}\right) - \frac{\theta(t)}{2}}{\sqrt{\theta(t)}}$$

$$d_3 = \frac{ln\left(\frac{X_t}{x_{max}}\right) + \frac{\theta(t)}{2}}{\sqrt{\theta(t)}}$$

$$d_4 = \frac{ln\left(\frac{X_t}{x_{max}}\right) - \frac{\theta(t)}{2}}{\sqrt{\theta(t)}}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι :
$E[f_{prod}(X_T)|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{x_{max}-xmin}\left[X_t\Phi(d_1) - x_{min}\Phi(d_2) - X_t\Phi(d_3) + x_{max}\Phi(d_4)\right]=$
$\frac{1}{x_{max}-x_{min}}\left[X_t\left(\Phi(d_1) - \Phi(d_3)\right) - x_{min}\Phi(d_2) - \Phi(d_3) + x_{max}\Phi(d_4)\right].$

Επειδή $d_1 = d_+^{min}$, $d_3 = d_+^{max}$, $d_2 = d_-^{min}$ $d_4 = d_+^{max}$,
επακόλουθο είναι η απόδειξη της παραπάνω πρότασης. □

Πράγματι, το συγκεκριμένο μοντέλο επιτελεί το σκοπό του και περιγράφει ολοκληρωτικά το πως εξελίσσεται στο χρόνο η πρόβλεψη για την κανονικοποιημένη ποσότητα παραγωγής της ηλεκτρικής ενέργειας που προκύπτει από το αιολικό πάρκο.

Ταυτοχρόνως είναι απαραίτητο να δείξουμε ότι ικανοποιεί και μία προϋπόθεση που είναι ιδιαιτέρως σημαντική. Σε προηγούμενα σημεία της συγκεκριμένης εργασίας έχουμε κάνει αναφορά στο ότι η κανονικοποιημένη ποσότητα παραγωγής της ηλεκτρικής ενέργειας θέλουμε να κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1, δηλαδή $0 \leq F_T \leq 1$. Βάσει αυτού θέλουμε προφανώς και η πρόβλεψη της εν λόγω κανονικοποιημένης ποσότητας να κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1.

Ισχυρισμός 3.2: $F_t(T) \in [0, 1]$.
Απόδειξη:
Με βάση τα επιχειρήματα που αξιοποιήθηκαν στην απόδειξη της προτάσεως (3.3), βλέπουμε ότι:F_t= $\frac{1}{x_{max}-x_{min}}\left(E\left[(X_T - x_{min})^+|\mathcal{F}_t\right] - E\left[(X_T - x_{max})^+|\mathcal{F}_t\right]\right).$
Συνεπώς, προκειμένου να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι:
$0 \leq E\left[(X_T - x_{min})^+|\mathcal{F}_t\right] - E\left[(X_T - x_{max})^+|\mathcal{F}_t\right] \leq x_{max} - x_{min} \iff$
$0 \leq E\left[(X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+|\mathcal{F}_t\right] \leq x_{max} - x_{min}.$
Επομένως,αρκεί να αποδείξω ότι:
$0 \leq (X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+ \leq x_{max} - x_{min}$
1η περίπτωση($X_T < x_{min}$):
$(X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+ = 0 - 0 = 0$
2η περίπτωση($x_{min} \leq X_T \leq x_{max}$):
$(X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+ = X_T - x_{min} - 0 = X_T - x_{min},$
όπου όντως σε αυτήν την περίπτωση: $X_T - x_{min} \geq 0$ και $X_T - x_{min} \leq X_T - x_{max}$.
3η περίπτωση($X_T > x_{max}$):
$(X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+ = X_T - x_{min} - X_T + x_{max} = x_{max} - x_{min}.$
Τοιουτοτρόπως, επαληθεύεται ο εν λόγω σημαντικός ισχυρισμός.

3.4 Σφάλματα και Μοντέλο Πρόβλεψης.

Ο συγκεκριμένος τρόπος, με τον οποίο ορίσαμε τη στοχαστική διαδικασία πρόβλεψης της τελικής παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι ο καλύτερος δυνατός, αν αναλογιστούμε τετραγωνικά κριτήρια απώλειας, όπως αυτό της μέσης τιμής του τετραγώνου της διαφοράς των ποσοτήτων της πρόβλεψης και της τελικής παραγωγής, ενώ αν αναλογιστούμε διαφορετικά κριτήρια ενδεχομένως ο καλύτερος δυνατός τρόπος ορισμού της πρόβλεψης να είναι διαφορετικός.

Παρατηρούμε ότι για κάθε χρονική στιγμή t, η τυχαία μεταβλητή F_t, που συνιστά την πρόβλεψη κατά τη χρονική στιγμή t για την τελική κανονικοποιημένη ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας που θα παραχθεί, παραμετροποιείται από τον αριθμό $\theta(t)$.

Καθώς το σφάλμα της προβλέψεως συνιστά καθοριστική ποσότητα για την επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής από τον παραγωγό ενέργειας, παρακάτω θα αντιστοιχήσουμε τιμές του συγκεκριμένου σφάλματος για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες με τιμές της παραμέτρου $\theta(t)$.

Έχουμε, λοιπόν:
$E\left[(F_t - F_T)^2\right] = E\left[\left(g(\theta(t), X_t) - f_{prod}(X_T)\right)^2\right]=$
$E\left[g\left(\theta(t), X_t\right)^2\right]$ $-2E\left[g\left(\theta(t), X_t\right) f_{prod}(X_T)\right] + E\left[f_{prod}(X_T)^2\right]=$
$E\left[f_{prod}(X_T)^2\right]$ $+E\left[g\left(\theta(t), X_t\right)^2\right]$ -2$E\left[g\left(\theta(t), X_t\right) E\left[f_{prod}(X_T)\right]\right]=$
$E\left[f_{prod}(X_T)^2\right]$ $+E\left[g\left(\theta(t), X_t\right)^2\right]$ -2$E\left[g\left(\theta(t), X_t\right)^2\right]=$
$E\left[f_{prod}(X_T)^2\right]$ -$E\left[g\left(\theta(t), X_t\right)^2\right]$
Δηλαδή:

$$E\left[(F_t - F_T)^2\right] = E\left[f_{prod}(X_T)^2\right] - E\left[g\left(\theta(t), X_t\right)^2\right] \tag{3.10}$$

και σε αμέσως επόμενη φάση θα υπολογίσω τον πρώτο και δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3.10). Σε σχέση με το δεύτερον όρο:

Πρόταση 3.4:

$$E[g(\theta(t), X_t)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g\left(\theta(t), exp\left(\sqrt{\nu_X^2 - \theta(t)}z - \frac{\nu_X^2 - \theta(t)}{2}\right)\right)^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Απόδειξη:
Έχουμε ως δεδομένα ότι X_t ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή και ότι $\theta(t) = \int_t^T \sigma^2(s)ds + b^2$, όπου $b \geq 0$. Στην προκειμένη περίπτωση θεωρούμε $b = 0$ και άρα $\theta(t) = \int_t^T \sigma^2(s)ds$.
Λαμβάνοντας κατά νου την εξίσωση (3.1) έχουμε ότι:

$ln(X_t) = \int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds.$
Επίσης: $\int_0^T \sigma^2(s)ds = \int_0^t \sigma^2(s)ds + \int_t^T \sigma^2(s)ds$
$\iff \int_0^t \sigma^2(s)ds = \int_0^T \sigma^2(s)ds - \int_t^T \sigma^2(s)ds$
$\iff \int_0^t \sigma^2(s)ds = \nu_x^2 - \int_t^T \sigma^2(s)ds$
$\iff \int_0^t \sigma^2(s)ds = \nu_x^2 - \theta(t)$
Υπολογίζω $E\left[ln(X_t)\right] = E\left[\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right] = -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds.$
Επομένως $E\left[ln(X_t)\right] = -\frac{1}{2}\nu_x^2 + \frac{1}{2}\theta(t).$
Υπολογίζω $Var\left(ln(X_t)\right) = Var\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right) = Var\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s\right)$
Επομένως $Var\left(ln(X_t)\right) = \int_0^t \sigma^2(s)ds = \nu_x^2 - \theta(t).$
Σε αυτό το σημείο προχωρώ θέτοντας: $\mu = E\left[ln(X_t)\right]$ και $\nu^2 = Var\left(ln(X_t)\right)$.

Με βάση τον τρόπο, με τον οποίον ορίζεται η αναμενόμενη τιμή,και με βάση το ότι η X_t ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή έχουμε ότι:

$$E[g(\theta(t), X_t)^2] = \int_{\mathbb{R}} g\left(\theta(t), X_t\right)^2 \frac{1}{X_t\sqrt{2\pi}\nu} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{lnX_t - \mu}{\nu}\right)^2\right) dX_t$$

Θέτω: $Z = \frac{lnX_t - \mu}{\nu}$

Οπότε: $dZ = \frac{1}{X_t\nu}dX_t \iff dX_t = \nu X_t dZ$
Όταν $X_t \to -\infty$, έχουμε ότι: $Z \to -\infty$.
Όταν $X_t \to +\infty$, έχουμε ότι: $Z \to +\infty$.

Επιπροσθέτως, αφού $Z = \frac{lnX_t - \mu}{\nu} \iff lnX_t = \nu Z + \mu$
$\iff lnX_t = \sqrt{\nu_x^2 - \theta(t)}Z - \frac{1}{2}\nu_x^2 + \frac{1}{2}\theta(t).$
Οπότε: $X_t = exp\left(\sqrt{\nu_x^2 - \theta(t)}Z - \frac{1}{2}\nu_x^2 + \frac{1}{2}\theta(t)\right)$. Επομένως:

$$E[g(\theta(t), X_t)^2] = \int_{\mathbb{R}} g\left(\theta(t), X_t\right)^2 \frac{1}{X_t\sqrt{2\pi}\nu} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{lnX_t - \mu}{\nu}\right)^2\right) dX_t =$$

$$\int_{\mathbb{R}} g\left(\theta(t), exp\left(\sqrt{\nu_x^2 - \theta(t)}Z - \frac{1}{2}\nu_x^2 + \frac{1}{2}\theta(t)\right)\right)^2 \frac{1}{X_t\sqrt{2\pi}\nu} exp\left(\frac{-Z^2}{2}\right)\nu X_t dZ =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g\left(\theta(t), exp\left(\sqrt{\nu_X^2 - \theta(t)}z - \frac{\nu_X^2 - \theta(t)}{2}\right)\right)^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

και τοιουτοτρόπως αποδείχθηκε το ζητούμενο.

□

Σε σχέση με τον πρώτον όρο:

Πρόταση 3.5: Ισχύει ότι:

$$E\left[f_{prod}(X_T)^2\right] = \Phi(d_-^{max}) + \frac{e^{v_x^2}}{(x_{max}-x_{min})^2}\left[\Phi(d_0^{min}) - \Phi(d_0^{max})\right]$$
$$-\frac{2x_{min}}{(x_{max}-x_{min})^2}\left[\Phi(d_+^{min}) - \Phi(d_+^{max})\right]$$
$$+\frac{x_{min}^2}{(x_{max}-x_{min})^2}\left[\Phi(d_-^{min}) - \Phi(d_-^{max})\right]$$

όπου:

$$d_0^{max} = \frac{-ln(x_{max}) + \frac{3\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$$

$$d_0^{min} = \frac{-ln(x_{min}) + \frac{3\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$$

$$d_+^{max} = \frac{-ln(x_{max}) + \frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$$

$$d_-^{max} = \frac{-ln(x_{max}) - \frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$$

$$d_+^{min} = \frac{-ln(x_{min}) + \frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$$

$$d_-^{min} = \frac{-ln(x_{min}) - \frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$$

Απόδειξη: Έχουμε με βάση τον τύπο της συνάρτησης f_{prod} ότι:

$$E\left[f_{prod}(X_T)^2\right] = E\left[\frac{\left((X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+\right)^2}{(x_{max} - x_{min})^2}\right] =$$

$$\frac{E\left[\left((X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+\right)^2\right]}{(x_{max} - x_{min})^2}$$

Διερευνώ για διάφορες περιπτώσεις τη συνάρτηση $\left((X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+\right)^2$.

- Για $X_T \leq x_{min}$: $(X_T - x_{min})^+ = 0$ και $(X_T - x_{max})^+ = 0$
  Άρα: $\left((X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+\right)^2 = 0$

- Για $x_{min} < X_T < x_{max}$: $(X_T - x_{min})^+ = X_T - x_{min}$ και $(X_T - x_{max})^+ = 0$
  Άρα: $\left((X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+\right)^2 = (X_T - x_{min})^2$

- Για $X_T \geq x_{max}$: $(X_T - x_{min})^+ = X_T - x_{min}$ και $(X_T - x_{max})^+ = X_T - x_{max}$
  Άρα: $\left((X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+\right)^2 = (X_{max} - x_{min})^2$

Με βάση τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής και με βάση του ότι η τυχαία μεταβλητή X_T ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή με παραμέτρους μ_x και ν_x^2 με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας , όπως φαίνεται στο (2.1), έχουμε:

$$E\left[\left((X_T - x_{min})^+ - (X_T - x_{max})^+\right)^2\right] = \int_0^\infty \left((x - x_{min})^+ - (x - x_{max})^+\right)^2 \rho_x(x)dx$$

$$= \int_0^{x_{min}} \left((x - x_{min})^+ - (x - x_{max})^+\right)^2 \rho_x(x)dx$$

$$+ \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left((x - x_{min})^+ - (x - x_{max})^+\right)^2 \rho_x(x)dx$$

$$+ \int_{x_{max}}^\infty \left((x - x_{min})^+ - (x - x_{max})^+\right)^2 \rho_x(x)dx$$

$$= \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - x_{min})^2 \rho_x(x)dx + \int_{x_{max}}^\infty (x_{max} - x_{min})^2 \rho_x(x)dx$$

$$= \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 \rho_x(x)dx - 2x_{min} \int_{x_{min}}^{x_{max}} x\rho_x(x)dx + x_{min}^2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \rho_x(x)dx$$

$$+ (x_{max} - x_{min})^2 \int_{x_{max}}^\infty \rho_x(x)dx$$

•Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{x_{min}}^{x_{max}} \rho_x(x)dx$:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \rho_x(x)dx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\nu_x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x})^2}$$

Θέτω $y = \frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x}$. Οπότε: $dy = \frac{1}{\nu_x x}dx$. Επίσης:
Καθώς $x \to x_{min}$, έχουμε: $y \to \frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}$
Καθώς $x \to x_{max}$, έχουμε: $y \to \frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \rho_x(x)dx = \int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\nu_x} e^{\frac{-y^2}{2}} x\nu_x dy = \int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy =$$

$$\Phi\left(\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}\right) - \Phi\left(\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}\right) = \Phi\left(\frac{ln(x_{max})+\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right) - \Phi\left(\frac{ln(x_{min})+\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right)$$

Φ συνιστά τη συνάρτηση της κανονικής κατανομής, ενώ από τη θεωρία γνωρίζουμε την εξής χρήσιμη ιδιότητα: $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$. Βάσει αυτής συνεπώς:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \rho_x(x)dx = 1 - \Phi\left(\frac{-ln(x_{max})-\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{-ln(x_{min})-\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right)$$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \rho_x(x)dx = \Phi(d_-^{min}) - \Phi(d_-^{max}) \qquad \mathbf{(1)}$$

• Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{x_{max}}^{\infty} \rho_x(x)dx$
Δρώντας ακριβώς όπως παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\int_{x_{max}}^{\infty} \rho_x(x)dx = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{ln(x_{max})+\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right)$$

$$\int_{x_{max}}^{\infty} \rho_x(x)dx = \Phi(d_-^{max}) \qquad \mathbf{(2)}$$

- Υπολογισμός του ολοκληρώματος: $\int_{x_{min}}^{x_{max}} x\rho_x(x)dx$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x\rho_x(x)dx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\nu_x}e^{-\frac{1}{2}(\frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x})^2}dx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_x}e^{-\frac{1}{2}(\frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x})^2}dx$$

Θέτω $y = \frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x}$. Οπότε: $dy = \frac{1}{\nu_x x}dx \Rightarrow dx = \nu_x e^{\nu_x y+\mu_x}dy$. Επίσης:
Καθώς $x \to x_{min}$, έχουμε: $y \to \frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}$
Καθώς $x \to x_{max}$, έχουμε: $y \to \frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x\rho_x(x)dx = \int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_x}\nu_x e^{\frac{-y^2}{2}}e^{\nu_x y+\mu_x}dy = e^{\mu_x}\int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}+\nu_x y}dy$$

Γενικά, από τη θεωρία γνωρίζουμε πως ένα τριώνυμο ax^2+bx+c μπορούμε να το γράψουμε ως $a\left((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}\right)$. Στην προκειμένη περίπτωση θα ασχοληθούμε με το: $-\frac{y^2}{2}+\nu_x y+0$. Προφανώς: $a=-\frac{1}{2}$, $b=\nu_x$, $c=0$.
Με βάση τα παραπάνω:

$$\frac{-y^2}{2}+\nu_x y = -\frac{1}{2}\left((y-\nu_x)^2-\nu_x^2\right) = -\frac{1}{2}(y-\nu_x)^2+\frac{\nu_x^2}{2}$$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x\rho_x(x)dx = e^{\mu_x}e^{\frac{\nu_x^2}{2}}\int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-\nu_x)^2}dy = \int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-\nu_x)^2}dy$$

Θέτω $z = y-\nu_x$ και οπότε $dy = dz$.
Καθώς $y \to \frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}$, έχουμε ότι: $z \to \frac{ln(x_{max})-\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$
Καθώς $y \to \frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}$, έχουμε ότι: $z \to \frac{ln(x_{min})-\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x\rho_x(x)dx = \int_{\frac{ln(x_{min})-\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \Phi\left(\frac{ln(x_{max})-\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right)-\Phi\left(\frac{ln(x_{min})-\frac{\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right) =$$

$$1-\Phi(d_+^{max})-1+\Phi(d_+^{min}) \iff \int_{x_{min}}^{x_{max}} x\rho_x(x)dx = \Phi(d_+^{min})-\Phi(d_+^{max}) \qquad \mathbf{(3)}$$

• Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2\rho_x(x)dx$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2\rho_x(x)dx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\nu_x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x})^2} dx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x})^2} dx$$

Θέτω $y = \frac{ln(x)-\mu_x}{\nu_x}$. Οπότε: $dy = \frac{1}{\nu_x x}dx \Rightarrow dx = \nu_x e^{\nu_x y+\mu_x}dy$. Επίσης:
Καθώς $x \to x_{min}$, έχουμε: $y \to \frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}$
Καθώς $x \to x_{max}$, έχουμε: $y \to \frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2\rho_x(x)dx = \int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu_x} e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{2\nu_x y+2\mu_x} \nu_x dy =$$

$$e^{2\mu_x} \int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2+2\nu_x y} dy$$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2\rho_x(x)dx = e^{2\mu_x} e^{2\nu_x^2} \int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-2\nu_x)^2} dy =$$

$$e^{\nu_x^2} \int_{\frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-2\nu_x)^2} dy$$

Θέτω $z = y - 2\nu_x$ και οπότε $dy = dz$.
Καθώς $y \to \frac{ln(x_{max})-\mu_x}{\nu_x}$, έχουμε ότι: $z \to \frac{ln(x_{max})-\frac{3\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$
Καθώς $y \to \frac{ln(x_{min})-\mu_x}{\nu_x}$, έχουμε ότι: $z \to \frac{ln(x_{min})-\frac{3\nu_x^2}{2}}{\nu_x}$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2\rho_x(x)dx = \int_{\frac{ln(x_{min})-\frac{3\nu_x^2}{2}}{\nu_x}}^{\frac{ln(x_{max})-\frac{3\nu_x^2}{2}}{\nu_x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$e^{\nu_x^2}\left[\Phi\left(\frac{ln(x_{max})-\frac{3\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right) - \Phi\left(\frac{ln(x_{min})-\frac{3\nu_x^2}{2}}{\nu_x}\right)\right]$$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2\rho_x(x)dx = e^{\nu_x^2}\left[\Phi(d_0^{min}) - \Phi(d_0^{max})\right] \qquad \textbf{(4)}$$

Συνεπώς, με βάση τις **(1)**,**(2)**,**(3)**,**(4)** προκύπτει ότι:

$$E\left[f_{prod}(X_T)^2\right] = \left(\frac{1}{x_{max} - x_{min}}\right)^2 e^{\nu_x^2}\left[\Phi(d_0^{min}) - \Phi(d_0^{max})\right]$$

$$-\frac{2x_{min}}{(x_{max} - x_{min})^2}\left[\Phi(d_+^{min}) - \Phi(d_+^{max})\right]$$

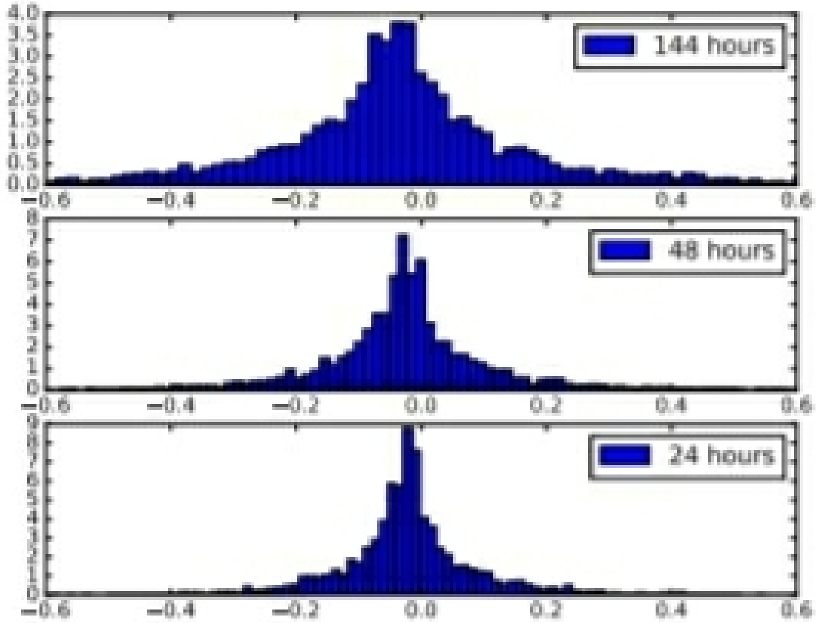
$$+\frac{x_{min}^2}{(x_{max} - x_{min})^2}\left[\Phi(d_-^{min}) - \Phi(d_-^{max})\right]$$

$$+\left(\frac{1}{x_{max} - x_{min}}\right)^2 (x_{max} - x_{min})^2 \Phi(d_-^{max}) \qquad \square$$

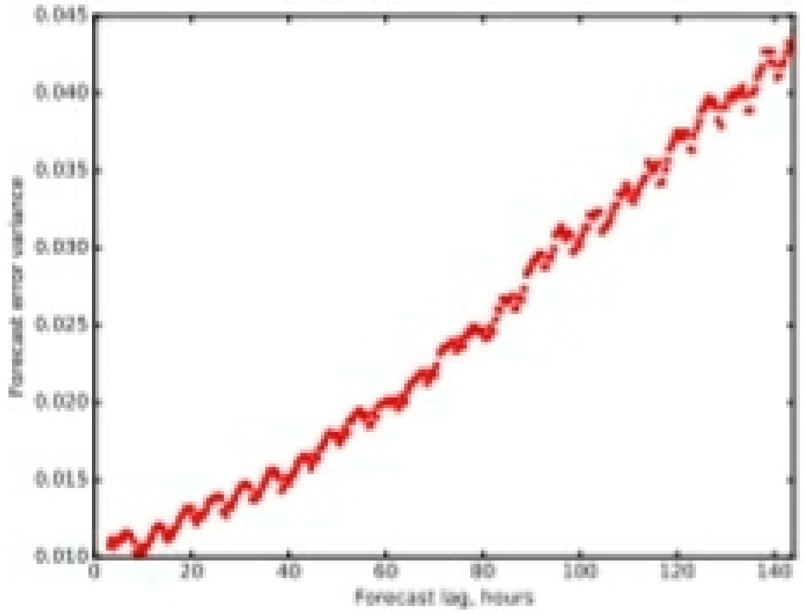
Παρατηρήσεις:

• Τα παρακάτω γραφήματα σχετίζονται με τα αποτελέσματα των μετρήσεων που αφορούν το εργοστάσιο 1.

• Και στα δύο γραφήματα αναδεικνύεται το ότι για βραχυπρόθεσμους ορίζοντες οι προβλέψεις είναι αρκετά ακριβείς, ενώ όσο μεγαλώνει ο χρονικός ορίζοντας του συμβολαίου (δηλαδή όσο πιο μακροπρόθεσμα τοποθετείται χρονικά ο τελικός χρόνος ωρίμανσης), τόσο χειροτερεύουν οι προβλέψεις. Αυτό το συμπεραίνουμε, διότι παρατηρούμε πως όσο μεγαλώνει ο χρονικός ορίζοντας, τόσο αυξάνεται η διασπορά του σφάλματος της πρόβλεψης.



Σχήμα 3.1: Ιστόγραμμα για το σφάλμα της πρόβλεψης για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες [1]



Σχήμα 3.2: Διασπορά του σφάλματος πρόβλεψης συναρτήσει του λογαρίθμου του χρονικού ορίζοντα [1]

Κεφάλαιο 4

Προβλήματα Βελτιστοποίησης για Παραγωγούς Αιολικής Ενέργειας

4.1 Εισαγωγή Κεφαλαίου

Στο Κεφάλαιο 4, ο σκοπός μας αφορά τον προσδιορισμό βέλτιστων στρατηγικών για διαφορετικά είδη παραγωγών ενέργειας, όπου ο χρόνος ωρίμανσης(τελικός χρόνος παράδοσης) είναι καθορισμένος. Σε αρχικό χρόνο, κρίνεται σκόπιμο να πραγματοποιηθεί μία αναφορά με γενικό τρόπο σε ορισμένες σημαντικές έννοιες, μαθηματικές και μη, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω. Κάποια από τα βασικά δεδομένα είναι πως ο παραγωγός πρέπει να πουλήσει εκ των προτέρων την ηλεκτρική ενέργεια, ενώ ταυτοχρόνως οφείλει να πουλήσει ολόκληρη την ενέργεια που θα παράξει,αλλά και να καταβάλλει ολόκληρη την ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας που έχει συμφωνήσει με τον πελάτη του . Κάποιες φορές, με σκοπό τα παραπάνω ο παραγωγός ενέργειας καταλήγει να χρησιμοποεί την αγορά εξισορρόπησης και να πληρώνει προφανώς κάποιο αντίτιμο για τη χρήση της. Θεωρούμε πως ο παραγωγός δε γνωρίζει επάκριβώς πόσο θα παράξει, αλλά έχει διαθέσιμες ορισμένες προβλέψεις.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, ορίζουμε μία διαδικασία διύλησης $G = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, η οποία περιγράφει πλήρως τις πληροφορίες που διατίθενται στον παραγωγό ενέργειας την κάθε χρονική στιγμή. Θεωρούμε πως η εν λόγω διύληση ικανοποιεί τις λεγόμενες " κανονικές συνθήκες " και ορίζουμε μία $F = (F_t)_{0\leq t\leq T}$, η οποία είναι $G-$ προσαρμοσμένη. Ταυτόχρονα απαιτείται ο ορισμός μίας $G-$ κίνησης $Brown$ (W, B) που έχει δύο διαστάσεις, ενώ υπάρχει συσχέτιση ρ. Η κίνηση $Brown$ W θα έχει να κάνει με τη στοχαστική διαδικασία της προβλέψεως της ταχύτητας του, όπως παρουσιάστηκε στο παραπάνω κεφάλαιο, τη στιγμή που η κίνηση $Brown$ B θα αφορά τη στοχαστική διαδικασία, η οποία θα περιγράφει την τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας κάθε χρονική στιγμή.

Σε περίπτωση που δεν υπάρχει κάποια άλλη επισήμανση, ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία (X_t) που περιγράφει την πρόβλεψη της ταχύτητας του ανέμου, όπως την ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, απλά όμως με $b = 0$, αγνοώντας δηλαδή το άλμα στον τελικό χρόνο. Έχουμε συνεπώς:

$$X_t = \exp\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right) \tag{4.1}$$

$$X_T = \exp\left(\int_0^T \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(s)ds\right) \tag{4.2}$$

Σε αυτό το σημείο, με απώτερο σκοπό την ύπαρξη ενός σαφούς και ξεκάθαρου περιεχομένου στην εργασία, αναφέρω πως δεν θα εμπλακούμε με όλα τα διαφορετικά είδη των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας και θα γίνει η υπόθεση πως οποιοσδήποτε παραγωγός ενέργειας έχει τη δυνατότητα οποιαδήποτε χρονική στιγμή να εμπλακεί σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο που του επιτρέπει την αγορά/πώληση ηλεκτρικής ενέργειας στον χρόνο ωρίμανσης T, στην τιμή $P_t(T)$. Οι μέθοδοι και τα αποτελέσματα, που θα παρουσιάσουμε, μπορούν ευκόλως να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση πιο σύνθετων σχημάτων αγορών ηλεκτρικής ενέργειας. Υποθέτουμε, επομένως, πως η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας στα πλαίσια ενός προθεσμιακού συμβολαίου ικανοποιεί την εξής δυναμική εξίσωση:

$$dP_t = \mu_t dt + \beta_t dB_t \tag{4.3}$$

Τα μ και β συνιστούν ντετερμινιστικές διαδικασίες, τέτοιες ώστε να ικανοποιούν και την εξής συνθήκη: $\int_0^T (|\mu_t| + \beta_t^2)dt < \infty$ Ο συντελεστής μ αφορά τη μέση τάση των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας, όσο πλησιάζουμε στον τελικό χρόνο παράδοσης. Συνήθως, ο εν λόγω συντελεστής είναι αρνητικός, κάτι το οποίο παραπέμπει σε πραγματοποίηση συναλλαγών σε προγενέστερο χρόνο του χρόνου ωρίμανσης. Λογική φαντάζει, άλλωστε, μία προγενέστερη συναλλαγή, εαν η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας τείνει να μειωθεί.

Παραπάνω αναφέραμε πως ένας παραγωγός ενέργειας υποχρεούται να πουλήσει εκ των προτέρων την ηλεκτρική ενέργεια, αλλά και πως έχει την υποχρέωση να πουλήσει και όλη την ενέργεια που παράγει. Σε αυτό το σημείο, ορίζουμε με ϕ_t τη συνολική θέση του παραγωγού τη χρονική στιγμή t. Έχουμε, λοιπόν, πως αν στο χρόνο ωρίμανσης T ισχύει ότι: $\phi_T \neq F_T$, τότε ο παραγωγός οφείλει είτε να πουλήσει την επιπλέον ενέργεια που πάραξε στην τιμή P_T , είτε να αγοράσει επιπλεόν ενέργεια σε τιμή P_T προκειμένου να είναι στο ακέραιο εντάξει με τις υποχρεώσεις που απορρέουν από το προθεσμιακό συμβόλαιο που τον αφορά.

Ταυτοχρόνως, θα οφείλει να πληρώσει μία "ποινή" (ένα αντίτιμο), το οποίο ισούται με $u(F_T - \phi_T)$. Η u είναι μία συνάρτηση, για την οποία εκείνα που ισχύουν είναι τα εξής: $u(0) = 0$, $u(x)$ αύξουσα για $x > 0$ και $u(x)$ φθίνουσα για $x < 0$.

Στην παρούσα φάση θα προβούμε στην πραγμάτωση μίας διάκρισης των διαφορετικών ειδών των παραγωγών ηλεκτρικής ενέργειας.Ένας διαχωρισμός των παραγωγών είναι αυτός σε μικρούς και μεγάλους. Συγκεκριμένα, ως μεγάλους παραγωγούς ενέργειας ορίζουμε εκείνους, των οποίων οι συναλλαγές έχουν επίδραση στην αγορά (*market impact*) και εμπλέκονται σε ιδιοκτησιακές συναλλαγές. Αντιθέτως, οι μικροί παραγωγοί είναι εκείνοι, των οποίων οι συναλλαγές δεν έχουν επίδραση στην αγορά και δεν εμπλέκονται σε συναλλαγές ιδιοκτησιακού τύπου.

Η επόμενη διάκριση των παραγωγών ηλεκτρικής ενέργειας που μας αφορά στην εν λόγω εργασία είναι εκείνη σε παραγωγούς ουδέτερου κινδύνου ($risk-$ *neutral agents*) και σε παραγωγούς που αποστρέφονται το ρίσκο ($risk-$ *averse agents*).

Παραγωγοί ουδέτεροι κινδύνου

Οι παραγωγοί ηλεκτρικής ενέργειας αυτού του τύπου ενδιαφέρονται για τη μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους τους, αδιαφορώντας για το ρίσκο, το οποίο λαμβάνουν.Η αδιαφορία ως προς τον κίνδυνο είναι μία έννοια που, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στην επιστημονική βιβλιογραφία και στις επιστημονικές μελέτες, είναι μία έννοια που χρησιμοποιείται εκτενώς στη θεωρία παιγνίων και στα χρηματοοικονομικά. Η ιδέα της ουδετερότητας ως προς τους κινδύνους αναφέρεται στο σκεπτικό ενός ατόμου που αδιαφορεί ολοκληρωτικά για το ρίσκο, όταν λαμβάνει μία επιχειρηματική απόφαση. Η ιδέα αυτή που υιοθετείται από κάποιον επιχειρηματία δεν πηγάζει από υπολογισμούς ή κάποιον ενδεχόμενο επαγωγικό συλλογισμό. Πηγάζει αποκλειστικά και μόνο από τις συναισθηματικές προτιμήσεις του επιχειρηματία.Ένας επιχειρηματίας που δρα αδιαφορώντας για τους κινδύνους θα μπορούσε να αναλογιστεί μία επιλογή, η οποία θα του έδινε πιθανότητα για 50 ευρώ κέρδος, παρά το γεγονός ότι θα προϋπόθετε ρίσκο 1000 ευρώ. Τέλος, για να καταλάβουμε εκτενέστερα το σκεπτικό του, ένας επιχειρηματίας που αγνοεί τους κινδύνους, μεταξύ δύο επιχειρηματικών δραστηριοτήτων, θα επέλεγε εκείνη που θα είχε πιθανότητα μεγαλύτερου κέρδους, αγνοώντας τους κινδύνους που σχετίζονται με την κάθε μία δραστηριότητα.

Παραγωγοί που αποστρέφονται το ρίσκο

Οι παραγωγοί ηλεκτρικής ενέργειας αυτού του τύπου ενδιαφέρονται για τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας, όπου στην στην περίπτωση που θα μελετήσουμε εμείς η χρησιμότητα θα περιγράφεται με μία συνάρτηση εκθετικού τύπου. Η ιδέα της αποστροφής του ρίσκου περιγράφει το σκεπτικό ενός επενδυτή που προτιμά τη διατήρηση των κεφαλαίων του, σε σχέση με μία επενδυτική δραστηριότητα που ναι μεν θα του απέφερε μεγάλο κέρδος, αλλά θα είχε πολύ μεγάλο κίνδυνο για απώλεια σημαντικού μέρους των κεφαλαίων του. Η ιδέα αυτή περιγράφει έναν επενδυτή που που με συντηρητικό τρόπο, αργά και σταθερά , επιδιώκει να μεγαλώσει τα κεφάλαιά του.Ένας επιχειρηματίας που αποστρέφεται το ρίσκο δε θα αναλογιζόταν σε καμία περίπτωση μία επιλογή που θα είχε πιθανότητα για 50 ευρώ κέρδος, αλλά πιθανότητα απώλειας 1000 ευρώ. Προσπερνά την πιθανότητα μεγάλου κέρδους στο βωμό της ασφάλειας που επιδιώκει να έχει. Τέτοιοι επιχειρηματίες ήθισται να επενδύουν σε ασφαλείς λογαριασμούς, σε CDS ή σε εταιρικά ομόλογα.

Όπως θα δούμε παρακάτω, απόρροια των παραπάνω είναι ότι στα προβλήματα βελτιστοποίησης που αφορούν τους παραγωγούς ουδέτερου κινδύνου δε θα λαμβάνεται κατά νου η μεταβλητότητα των τιμών που μαθηματικά περιγράφεται με την αντίστοιχη κίνηση $Brown$, σε αντίθεση με τις περιπτώσεις των προβλημάτων βελτιστοποίσης που αφορούν τους παραγωγούς ενέργειας που αποστρέφονται το ρίσκο, όπου λαμβάνουμε υπ΄όψιν τη μεταβλητότητα των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας.

Επιτρεπόμενες Στρατηγικές

Σε αυτό το σημείο ενδιαφερόμαστε για τις επιτρεπόμενες στρατηγικές που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις κατηγορίες των μικρών και μεγάλων παραγωγών ηλεκτρικής ενέργειας, ξεχωριστά. Την ίδια στιγμή πραγματοποιούμε και μία διάκριση που δεν την έχουμε κάνει παραπάνω, σε παραγωγούς που έχουν το δικαίωμα μονάχα να πουλήσουν ηλεκτρική ενέργεια και σε εκείνους τους παραγωγούς που έχουν τη δυνατότητα και να πουλήσουν, αλλά και να αγοράσουν ηλεκτρική ενέργεια.

• Συμβολίζουμε με A την κλάση όλων των επιτρεπόμενων στρατηγικών για ένα μικρό παραγωγό ενέργειας, ο οποίος έχει την ευχέρεια και να πουλά και να αγοράζει ηλεκτρική ενέργεια. Η κλάση αυτή εμπεριέχει όλες τις $G-$ προσαρμοσμένες διαδικασίες ϕ , για τις οποίες ισχύει ότι $\phi_0 = 0$ και ικανοποιούν την εξής συνθήκη: $E[\int_0^T (\phi_t|\mu_t| + \phi_t^2 \beta_t^2) d_t] < \infty$

• Συμβολίζουμε με A_+ την κλάση όλων των επιτρεπόμενων στρατηγικών για ένα μικρό παραγωγό ηλεκτρικής ενέργειας, ο οποίος έχει δικαίωμα μόνο για πώληση. Η κλάση A_+ εμπεριέχει όλες εκείνες τις διαδικασίες που ανήκουν στην κλάση A και είναι αύξουσες. Συγκεκριμένα, δηλαδή, έχουμε ότι:
A_+= [$\phi : \phi \in A$ και (ϕ_t) αύξουσα]

• Συμβολίζουμε με A_+^{ac} την κλάση όλων των επιτρεπόμενων στρατηγικών για

ένα μεγάλο παραγωγό ηλεκτρικής ενέργειας, ο οποίος έχει την ευχέρεια μόνο για πωλήσεις. Η συγκεκριμένη κλάση εμπεριέχει όλες εκείνες τις διαδικασίες, οι οποίες ανήκουν στην κλάση A_+ και είναι απόλυτα συνεχείς. Συγκεκριμένα :
$A_+^{ac} = [\ \phi : \phi \in A_+$ και ϕ απόλυτα συνεχής $]\ \Longleftrightarrow$
$A_+^{ac} = [\ \phi : \phi \in A$ και (ϕ_t) αύξουσα και απόλυτα συνεχής $]$

• Συμβολίζουμε με A^{ac} την κλάση όλων των επιτρεπόμενων στρατηγικών για ένα μεγάλο παραγωγό, ο οποίος έχει τη δυνατότητα και για αγορά και για πώληση ηλεκτρικής ενέργειας. Η συγκεκριμένη κλάση περιέχει όλες εκείνες τις διαδικασίες ϕ που είναι της μορφής:
$\phi = \phi^+ - \phi^-$, όπου $\phi^+ \in A_+^{ac}$ και $\phi^- \in A_+^{ac}$. Συγκεκριμένα, δηλαδή, έχουμε ότι:
A^{ac}= $[\ \phi : \phi = \phi^+ - \phi^-$, με $\phi^+, \phi^- \in A$ και ϕ^+, ϕ^- αύξουσες, απόλυτα συνεχείς$]$

Σε αυτό το σημείο κάνουμε λόγο για το πως υπολογίζεται το κέρδος για μικρούς και μεγάλους παραγωγούς ηλεκτρικής ενέργειας.

Κέρδος για μικρό παραγωγό ενέργειας

$$G = F_T P_T - \int_0^T \phi_t dP_t(T) - u(F_T - \phi_T) \tag{4.4}$$

Κέρδος για μεγάλο παραγωγό ενέργειας

$$G = F_T P_T - \int_0^T \phi_t dP_t(T) - u(F_T - \phi_T) - \frac{\gamma}{2}\int_0^T \psi_s^2 ds \tag{4.5}$$

Παρατήρηση:Όπως βλέπουμε, στον τύπο για το κέρδος του μικρού παραγωγού ενέργειας έχουμε 3 όρους, ενώ στον τύπο για το κέρδος του μεγάλου παραγωγού ενέργειας έχουμε 4 όρους. Οι 3 από τους 4 όρους του κέρδους του μεγάλου παραγωγού είναι ίδιοι με την περίπτωση του μικρού παραγωγού, ενώ ο παραπάνω όρος αφορά την επίδραση στην αγορά. Ο πρώτος όρος εκφράζει την ποσότητα της ηλεκτρικής ενέργειας που παράχθηκε πολλαπλασιασμένη με την τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας στο χρόνο ωρίμανσης, ο δεύτερος όρος αφορά τις αναμενόμενες απώλειες εξαιτίας προγενέστερων του τελικού χρόνου παράδοσης συναλλαγών, ενώ ο τρίτος όρος αφορά την ποινή που καταβάλλει ο παραγωγός για τη χρησιμοποίηση της αγοράς εξισορρόπησης.

Τέλος, θα κάνουμε μία συνοπτική αναφορά στα ζητήματα βελτιστοποίησης ξεχωριστών κατηγοριών παραγωγών ηλεκτρικής ενέργειας μέσω αιολικού πάρκου.

1) Πρόβλημα βελτιστοποίησης για μικρό παραγωγό ηλεκτρικής ενέργειας που δε λαμβάνει υπ΄όψιν του το ρίσκο(δικαίωμα μόνο για πώληση):

$$\min_{\Phi \in A_+} E\left[\int_0^T \phi_t \mu_t dt + u(F_T - \phi_T)\right]$$

2) Πρόβλημα βελτιστοποίησης για μικρό παραγωγό ηλεκτρικής ενέργειας που αποστρέφεται το ρίσκο(μόνο πώληση) με συνάρτηση χρησιμότητας $U(x) = 1 - e^{-ax}$:

$$\min_{\Phi \in A_+} E\left[e^{-a\left(f_{prod}(X_T)P_T - \int_0^T \phi_s dP_s - u(f_{prod}(X_T) - \phi_T)\right)}\right]$$

3) Πρόβλημα βελτιστοποίησης για μικρό παραγωγό ηλεκτρικής ενέργειας που αποστρέφεται το ρίσκο(δικαίωμα για πώληση και αγορά) με συνάρτηση χρησιμότητας $U(x) = 1 - e^{-ax}$:

$$\min_{\Phi \in A_+} E\left[e^{-a\left(f_{prod}(X_T)P_T - \int_0^T \phi_s dP_s\right)}\right]$$

4) Πρόβλημα βελτιστοποίησης για μεγάλο παραγωγό ηλεκτρικής ενέργειας που δε λαμβάνει υπ΄όψιν του το ρίσκο(δικαίωμα μόνο για πώληση):

$$\min_{\Phi \in A_+^{ac}} E\left[\int_0^T \phi_t \mu_t dt + u(F_T - \phi_T) + \frac{\gamma}{2}\int_0^T \psi_s^2 ds\right]$$

Παρατήρηση: Το πώς προκύπτει το κάθε ζήτημα βελτιστοποίησης θα αναλυθεί στις υπόλοιπες υποενότητες του τέταρτου κεφαλαίου, ενω επισημαίνουμε πως στην εν λόγω διπλωματική εργασία θα μελετηθούν μαθηματικά τα ζητήματα βελτιστοποίησης που αφορούν τους μικρούς παραγωγούς ηλεκτρικής ενέργειας μέσω αιολικού πάρκου.

4.2 Ουδέτεροι Κινδύνου - Ακριβής Πρόβλεψη

Η συγκεκριμένη υποενότητα αφορά την περίπτωση ενός μικρού παραγωγού ενέργειας (οι συναλλαγές του δεν έχουν επίδραση στην αγορά), με ενδιαφέρον για μεγιστοποίηση του κέρδους του, αδιαφορώντας για το ρίσκο που θα λαμβάνει, ενώ έχει στη διάθεσή του ακριβή πρόβλεψη για το πόσο ηλεκτρική ενέργεια θα παράξει στον τελικό χρόνο ωρίμανσης T και δικαίωμα αποκλειστικά για πώληση ενέργειας.

Αρχικά, ορίζουμε τις εξής ποσότητες:

$$t^* = arg \min_{0 \leq t \leq T} \int_t^T \mu_s ds \tag{4.6}$$

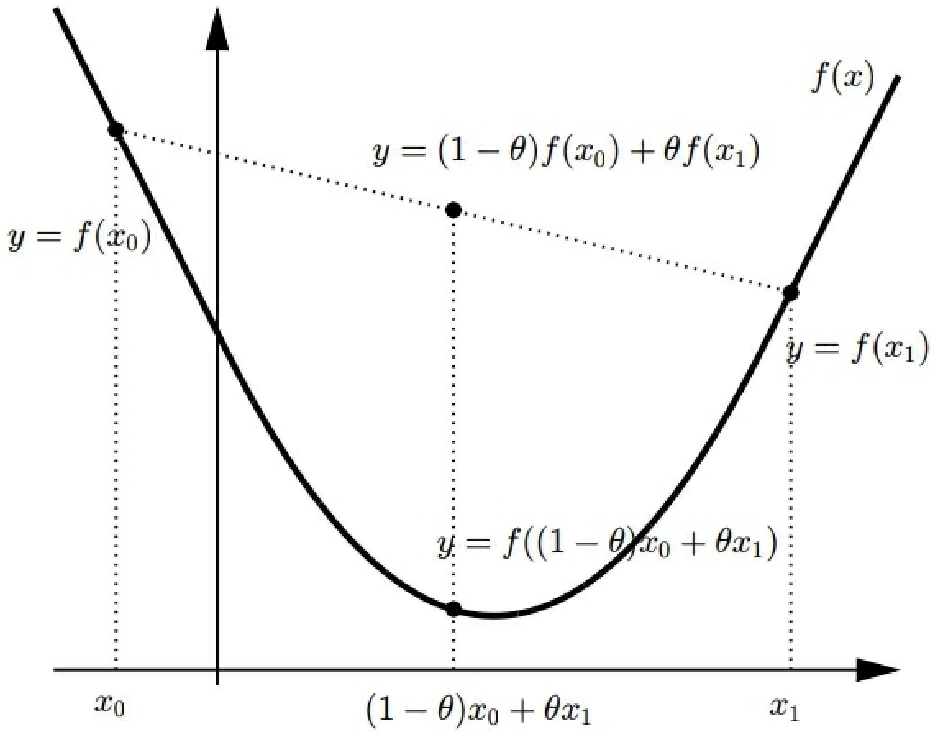
$$m^* = m_t^* = \int_{t^*}^T \mu_s ds \tag{4.7}$$

Αναλογιζόμενοι πως η ποσότητα $\int_t^T \mu_s ds$ εκφράζει το πόσο τείνει να μεταβληθεί η τιμή από τη χρονική στιγμή t έως τον τελικό χρόνο ωρίμανσης T, προκύπτει ότι το t^* είναι η χρονική στιγμή, από την οποία και μετά, μέχρι το χρόνο ωρίμανσης, σημειώνεται η μικρότερη τάση μεταβολής της τιμής μεταξύ όλων των χρονικών στιγμών t, τέτοιες ώστε: $t \in [0, T)$. Συνεπώς, το m^* εκφράζει την αντίστοιχη του t^* τάση μεταβολής της τιμής.

Προτού παραθέσουμε την πρόταση, η οποία θα ξεδιαλύνει το τοπίο της περίπτωσης που μελετούμε στην εν λόγω υποενότητα, κρίνεται χρήσιμο να παρουσιαστούν συνοπτικά ορισμένοι χρήσιμοι ορισμοί.

Ορισμός 4.1: Ένα σύνολο λέγεται κυρτό, όταν για οποιαδήποτε δύο σημεία του συνόλου, όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος που τα ενώνει, ανήκουν εντός του συνόλου.

Ορισμός 4.2: Μία συνάρτηση $f : A \mapsto \Re$ λέγεται κυρτή, αν το πεδίο ορισμού της είναι κυρτό σύνολο και για κάθε $x, y \in A$ και $\theta \in [0, 1]$, έχουμε:
$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$ Σχηματικά, η κυρτότητα αποτυπώνεται όπως παρακάτω:



Ορισμός 4.3: Μία συνάρτηση $f : A \mapsto \Re$ λέμε ότι είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, εαν η f είναι παραγωγίσιμη στο A και f' συνεχής στο A.

Ορισμός 4.4: Ο μετασχηματισμός *Fenchel* της συνάρτησης u ορίζεται ως εξής: $\upsilon(y) = \sup_x\{xy - u(x)\}$.

Καθώς πραγματευόμαστε την περίπτωση μικρού παραγωγού ηλεκτρικής ενέργειας, η εξίσωση που περιγράφει το ολικό κέρδος του είναι η (4.4), όπου υποδεικνύει ότι το ολικό κέρδος του ισούται με:
$G = F_T P_T - \int_0^T \phi_t dP_t(T) - u(F_T - \phi_T)$.
Έχουμε ότι: $G = F_T P_T - \int_0^T \phi_t dP_t(T) - u(F_T - \phi_T) =$
$\overset{(4.3)}{=} F_T P_T - \int_0^T \phi_t \mu_t dt - \int_0^T \phi_t \beta_t dB_t - u(F_T - \phi_T)$.

Σκοπός είναι ο εντοπισμός της βέλτιστης στρατηγικής, η οποία θα επέλθει αν αναλογιστούμε τη ζήτημα μεγιστοποίησης του κέρδους του μικρού παραγωγού ενέργειας. Δεδομένου ότι ο πρώτος όρος του ολικού κέρδους δεν εμπλέκει καθόλου τη στρατηγική του επενδυτή και δεδομένου ότι εν προκειμένω πραγματευόμαστε την περίπτωση του επενδυτή που αδιαφορεί για τους κινδύνους και άρα δεν παίζει κανένα ρόλο ο όρος του ολικού κέρδους που εμπεριέχει το στοχαστικό μέρος, το προβλημά βελτιστοποίησης που καλείται να επιλύσει είναι το εξής:

$$\min_{\phi \in A_+} E\left[\int_0^T \phi_t \mu_t dt + u(F_T - \phi_T)\right] \tag{4.8}$$

Πρόταση 4.1: Έστω ότι η συνάρτηση ποινής u είναι κυρτή και συνεχώς παραγωγίσιμη, καθώς επίσης ισχύει ότι: $u^{'}(0) = 0$ και $\lim_{x \mapsto -\infty} u^{'}(x) = -\infty$. Επίσης ορίζουμε ως I την αντίστροφη της $u^{'}$.
Η συνάρτηση αξίας($value\ function$) του συγκεκριμένου προβλήματος βελτιστοποίησης είναι η εξής:
$F_T m^* - v(m^*), m^* < 0$
$-v(0) \equiv u(0)$, αλλιώς,

με $v(y) = \sup_x\{xy - u(x)\}$ να είναι ο $Fenchel$ μετασχηματισμός της συνάρτησης ποινής.

Η βέλτιστη στρατηγική που αφορά στο συγκεκριμένο ζήτημα βελτιστοποίησης:
- Πώληση της ποσότητας $\phi = F_T - I(m^*)$ τη χρονική στιγμή t^*, αν $m^* \leq 0$.
- Πώληση της ποσότητας F_T τη χρονική στιγμή T, αν $m^* > 0$.

Απόδειξη:
Στην προκειμένη περίπτωση, όπου θεωρούμε ότι ο παραγωγός ενέργειας γνωρίζει ακριβώς πόση ηλεκτρική ενέργεια θα παράξει στον τελικό χρόνο ωρίμανσης T, άμεσο επακόλουθο είναι ότι η στοχαστική διαδικασία που αφορά την πρόβλεψη της τελικής ποσότητας ηλεκτρικής ενέργειας θα έχει τιμή σταθερή σε κάθε χρονική στιγμή και μάλιστα ίση με $F_t = F_T$.

Εφ'όσον, λοιπόν, F_t είναι σταθερό, το προαναφερθέν πρόβλημα ελαχιστοποίησης: $\min_{\phi \in A_+} E\left[\int_0^T \phi_t \mu_t dt + u(F_T - \phi_T)\right]$ στην προκειμένη περίπτωση είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης: $\min_{\phi \in A_+}\left[\int_0^T \phi_t \mu_t dt + u(F_T - \phi_T)\right]$.

Σε αυτό το σημείο παίρνω το ολοκλήρωμα $\int_0^T \phi_t \mu_t dt$ και θα εφαρμόσω σε αυτό

τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης. Με βάση τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης ισχύει ο εξής τύπος: $\int ud\nu = u\nu - \int \nu du$. Προκειμένου να είμαστε σε θέση να τον εφαρμόσουμε για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που προαναφέραμε δρούμε ως εξής: θέτουμε $u = \phi_t$ και $d\nu = \mu_t dt$.
Έχοντας ότι $u = \phi_t$, αυτό σημαίνει ότι $du = d\phi_t$.
Έχοντας ότι $d\nu = \mu_t dt$ και αναλογιζόμενοι το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού, μπορούμε να γράψουμε ότι: $\nu = \int_T^t \mu_s ds$
Σε αυτό το σημείο εφαρμόζοντας τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης :

$$\int_0^T \phi_t \mu_t dt = \left[\phi_t \int_T^t \mu_s ds\right]_0^T - \int_0^T \left(\int_T^t \mu_s ds\right) d\phi_t \iff$$

$$\int_0^T \phi_t \mu_t dt = \phi_T \int_T^T \mu_s ds - \phi_0 \int_0^T \mu_s ds + \int_0^T \left(\int_t^T \mu_s ds\right) d\phi_t \iff$$

$$\int_0^T \phi_t \mu_t dt = \int_0^T \left(\int_t^T \mu_s ds\right) d\phi_t$$

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\min_{\phi \in A_+} \left[\int_0^T \phi_t \mu_t dt + u(F_T - \phi_T)\right]$ είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίσης: $\min_{\phi \in A_+} \left[\int_0^T \left(\int_t^T \mu_s ds\right) d\phi_t + u(F_T - \phi_T)\right]$
Αναλογιζόμενοι τις ποσότητες που έχουμε ορίσει νωρίτερα στις εξισώσεις:(4.6) και (4.7) θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης:
$\min_{\phi \in A_+} \left[\int_0^T \left(\int_{t^*}^T \mu_s ds\right) d\phi_t + u(F_T - \phi_T)\right]$.

Είναι ξεκάθαρο πλέον πως για καθορισμένο ϕ_T, η βέλτιστη λύση $(\phi_t)_{0 \le t \le T}$ είναι τέτοια ώστε το μέτρο $d\phi$ να υποστηρίζεται από το t^*, δηλαδή $\phi_t = \phi 1_{t \ge t^*}$, με ϕ σταθερό.
• Αν $m^* > 0$, σημαίνει ότι μεταξύ της t^* και της T, η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας αναμένεται να αυξηθεί και άρα είναι βέλτιστο να επιλέξουμε $t^* = T$, καθώς συναλλαγή σε προγενέστερο χρόνο δε θα ήταν συμφέρουσα. Σε αυτήν την περίπτωση η ϕ, η οποία ελαχιστοποιεί την ποσότητα $u(F_T - \phi)$ είναι προφανώς η $\phi = F_T$.

• Σε αντίθετη περίπτωση, επειδή η τιμή αναμένουμε να μειωθεί μεταξύ t^* και T, κρίνεται σκόπιμο ο επενδυτής να δράσει με πώληση ηλεκτρικής ενέργειας τη χρονική στιγμή t^*. Συγκεκριμένα, στην εν λόγω περίπτωση ο παραγωγός επιλύει το εξής πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min_{\phi\geq 0}\left[\int_0^T\left(\int_{t^*}^T \mu_s ds\right)d\phi_t + u(F_T-\phi)\right]$$
$$=\min_{\phi\geq 0}\left[\int_0^T m^* d\phi_t + u(F_T-\phi)\right]$$
$$=\min_{\phi\geq 0}\left[m^*\phi + u(F_T-\phi)\right]$$

.

Για να βρω υποψήφιες βέλτιστες στρατηγικές στην περίπτωση αυτή παίρνω:

$$\frac{\partial\left(\phi m^* + u(F_T-\phi)\right)}{\partial\phi} = 0 \iff$$

$m^* - u^{'}(F_T-\phi) = 0 \iff u^{'}(F_T-\phi) = m^*$.
Έχοντας κατά νου ότι η συνάρτηση I είναι η αντίστροφη της $u^{'}$, προκύπτει ότι:
$F_T-\phi = I(m^*) \iff \phi = F_T - I(m^*)$,
που συνιστά τον υποψήφιο βελτιστοποιητή.

Με βάση τις υποθέσεις μας ότι ο παραγωγός έχει δυνατότητα μόνο για πώληση ενέργειας και καθόλου για αγορά και άρα μπορούμε να πούμε ότι η παραπάνω ποσότητα ϕ είναι θετική. Συνεπώς έχουμε ότι:
$\min_{\phi\geq 0}\{m^*\phi + u(F_T-\phi)\} = \min_{\phi\in\Re}\{m^*\phi + u(F_T-\phi)\}$.

Θέτω: $\phi^{'} = F_T - \phi \iff \phi = F_T - \phi^{'}$.
Επίσης, αφού $\phi\in\Re$, αυτό σημαίνει και ότι: $\phi^{'}\in\Re$.

Οπότε: $\min_{\phi\in\Re}\left[m^*\phi + u(F_T-\phi)\right] = \min_{\phi^{'}\in\Re}\left[(F_T-\phi^{'})m^* + u(\phi^{'})\right] =$
$\min_{\phi\in\Re}\left[(F_T-\phi)m^* + u(\phi)\right] = \min_{\phi\in\Re}\left[F_T m^* - \phi m^* + u(\phi)\right] =$
$F_T m^* + \min_{\phi\in\Re}\{-\phi m^* + u(\phi)\} = F_T m^* - \min_{\phi\in\Re}\{-\left(-\phi m^* + u(\phi)\right)\}$

Αφού γενικά έχουμε ότι: $max\{f\} = -min\{-f\}$, αυτό σημαίνει ότι:
$-\min_{\phi\in\Re}\left[-\left(-\phi m^* + u(\phi)\right)\right] = \max_{\phi\in\Re}\left[(-\phi m^* + u(\phi)\right]$.
Επίσης γνωρίζουμε ότι όταν το $maximum$ ορίζεται, τότε είναι ίσο με το $supremum$ και με βάση αυτό τότε:
$\max_{\phi\in\Re}\left[(-\phi m^* + u(\phi)\right] = \sup_{\phi\in\Re}\left[(-\phi m^* + u(\phi)\right]$.
Συνεπώς $\min_{\phi\in\Re}\left[m^*\phi + u(F_T-\phi)\right] = F_T m^* + \sup_{\phi\in\Re}\left[(-\phi m^* + u(\phi)\right]$
Οπότε με βάση τον ορισμό 3 που αφορά το μετασχηματισμό $Fenchel$ προκύπτει:

$$\min_{\phi \in \Re} [m^*\phi + u(F_T - \phi_T)] = F_T m^* - \upsilon(m^*)$$

που συνιστά τη συνάρτηση αξίας για κάθε $t \geq t^*$,όταν $m^* < 0$. □

Συμπέρασμα:

$$\max_{\phi \in A_+} [E[G]] = E[F_T P_T] + u(0), \qquad m^* > 0$$

$$\max_{\phi \in A_+} [E[G]] = E[F_T P_T] + F_T m^* - \upsilon(m^*), \qquad m^* \leq 0$$

4.3 Ουδέτεροι Κινδύνου - Επίγνωση Κατανομής της Τελικής Παραγωγής

Η συγκεκριμένη υποενότητα αφορά την περίπτωση ενός μικρού παραγωγού ενέργειας (οι συναλλαγές του δεν έχουν επίδραση στην αγορά), με ενδιαφέρον για μεγιστοποίηση του κέρδους του, αδιαφορώντας για το ρίσκο που θα λαμβάνει, ενώ δεν έχει στη διάθεσή του ακριβή πρόβλεψη για το πόσο ηλεκτρική ενέργεια θα παράξει στον τελικό χρόνο ωρίμανσης T, αλλά ούτε και πρόσβαση σε πληροφορίες εντός του διαστήματος $[0, T)$ που θα συνέβαλαν στην πραγματοποίηση κάποια πρόβλεψης με βάση αυτές για την τελική παραγωγή.Το μόνο που υποθέτουμε πως γνωρίζει ο παραγωγός ενέργειας είναι η κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την τελική κανονικοποιημένη ποσότητα της παραγωγής και πως έχει δικαίωμα αποκλειστικά για πώληση ενέργειας.

Στην προκειμένη περίπτωση, όπου θεωρούμε ότι ο παραγωγός ενέργειας γνωρίζει μόνο την κατανομή της τελικής παραγωγής , άμεσο επακόλουθο είναι ότι η στοχαστική διαδικασία που αφορά την πρόβλεψη της τελικής ποσότητας ηλεκτρικής ενέργειας θα έχει τιμή σταθερή σε κάθε χρονική στιγμή και μάλιστα ίση με $F_t = E[F_T]$.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που θα επιλύσουμε σε αυτήν την περίπτωση θα είναι πάλι το (4.8), απλά λαμβάνοντας κατά νου τη διαφοροποίηση των δεδομένων που πραγματοποιείται σε αυτήν την υποενότητα σε σχέση με την αμέσως παραπάνω.

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε κάποιες συναρτήσεις, οι οποίες θα αξιοποιηθούν στην παρακάτω βασική πρόταση της εν λόγω υποενότητας:
$\widetilde{u}(x) = E[\bar{u}(F_T - E[F_T] + x)]$
$\bar{u}(x) = u(x)$, για $x \leq 0$ $\bar{u}(x) = 0$, για $x > 0$.

Πρόταση 4.2: Έστω ότι $E[|F_T|] < \infty$ και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση u ικανοποιεί τις εξής προϋποθέσεις:
• u κυρτή και συνεχώς παραγωγίσιμη
• $u^{'}(0) = 0$
• $\lim_{x \mapsto -\infty} u^{'}(x) = -\infty$
• $E\left[u(F_T + x)\right] < \infty$, για κάθε $x \in \Re$
• $E\left[|u^{'}(F_T + x)|\right] < \infty$, για κάθε $x \in \Re$

Τότε, η συνάρτηση αξίας($value\ function$) του προβλήματος βελτιστοποίησης (4.8) με βάση τα δεδομένα της συγκεκριμένης περίπτωσης δίνεται από:
• $E[F_T]m^* - \widetilde{v}(m^*)$, για $m^* < 0$
• $u(0)$, διαφορετικά,

όπου $\widetilde{v}(y) = \sup_x\{xy - \widetilde{u}(x)\}$ ο μετασχηματισμός $Fenchel$ της συνάρτησης $\widetilde{u}(x)$. Ορίζω ως $\widetilde{I}$ την αντίστροφη συνάρτηση της $\widetilde{u}^{'}$(αν υπάρχει).

Η βέλτιστη στρατηγική, λοιπόν, σε αυτήν την περίπτωση υπολογίζεται ως εξής:
• Εαν $m^* \leq 0$, πώληση της ποσότητας $\phi = E[F_T] - \widetilde{I}(m^*)$ τη χρονική στιγμή t^* και μετά πώληση της ποσότητας $F_T - E[F_T] + \widetilde{I}(m^*)$ (αν η ποσότητα αυτή είναι θετική) τη χρονική στιγμή T.
• Αν $m^* > 0$, πώληση της ποσότητας F_T τη χρονική στιγμή T.

Απόδειξη:
- Αρχικά, αναφέρουμε ότι στο επιστημονικό άρθρο [1] σημειώνεται ότι, βάσει του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, η συνάρτηση $\widetilde{u}$ είναι κυρτή και συνεχώς παραγωγίσιμη, αν η u ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις.
• Αν $m^* > 0$, σημαίνει ότι μεταξύ της t^* και της T, η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας αναμένεται να αυξηθεί και δεν κρίνεται σώφρον ο παραγωγός να πουλήσει ηλεκτρική ενέργεια προγενέστερα του χρόνου ωρίμανσης T. Σε αυτήν την περίπτωση, με βάση και το σκεπτικό της πρότασης (4.1), κρίνεται βέλτιστο να πουλήσει ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας $\phi = F_T$ στη χρονική στιγμή T. Άμεσο επακόλουθο αυτής της επιλογής είναι ότι η συνάρτηση αξίας ισούται στο χρόνο ωρίμανσης T με $u(0)$, όπου u η λεγόμενη συνάρτηση ποινής και 0 τις χρονικές στιγμές προγενέστερα, καθώς δεν υπήρξε καμία συναλλαγή λόγω του ότι δε συνέφερε.

• Σε αντίθετη περίπτωση, επειδή η τιμή αναμένουμε να μειωθεί μεταξύ t^* και T, κρίνεται σκόπιμο ο επενδυτής να δράσει με πώληση ηλεκτρικής ενέργειας τη χρονική στιγμή t^* .Συγκεκριμένα, όταν $m^* < 0$,έστω ότι η βέλτιστη στρατηγική έχει τη μορφή: $\phi\mathbf{1}_{t \geq t^*} + (F_T - \phi)^+\mathbf{1}_{t \geq T}$.

Αυτό εκφράζεται ως το ότι, στην περίπτωση που κρίνονται συμφέρουσες προγενέστερες συναλλαγές. λόγω της αναμενόμενης μείωσης της τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας από τη χρονική στιγμή t^* και μετά, τότε κρίνεται σκόπιμο για τον παραγωγό να πουλά ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας ίση με ϕ στη χρονική στιγμή t^* και τη χρονική στιγμή T να πουλήσει ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας ίση με $F_T - \phi$, εαν η ποσότητα αυτή είναι θετική, ειδάλλως δε θα πουλήσει. Η κατάλληλη ποσότητα ϕ θα βρεθεί μέσω του ζητήματος ελαχιστοποίησης:

$$\min_{\phi \geq 0} \left[\phi m^* + \widetilde{u}(E[F_T] - \phi)\right]$$

Ο υποψήφιος βελτιστοποιητής θα βρεθεί ως εξής:

$$\frac{\partial \left(\phi m^* + \widetilde{u}(E[F_T] - \phi)\right)}{\partial \phi} = 0 \iff$$

$m^* - \widetilde{u}^{'}(E[F_T] - \phi) = 0 \iff m^* = \widetilde{u}^{'}(E[F_T] - \phi)$
Αφού $\widetilde{I}$ αντίστροφη συνάρτηση της $\widetilde{u}^{'}$, τότε προκύπτει:
$\widetilde{I}(m^*) = E[F_T] - \phi \iff \phi = E[F_T] - \widetilde{I}(m^*)$.

Σε αυτό το σημείο θα ανατρέξουμε για τον υπολογισμό της συνάρτησης αξίας ($value - function$) στην περίπτωση $m^* < 0$. Με βάση την υπόθεσή μας ότι πραγματευόμαστε την περίπτωση παραγωγού που έχει το δικαίωμα μόνο να πουλήσει ηλεκτρική ενέργεια και όχι να αγοράσει προκύπτει ότι η ποσότητα ϕ θα είναι μη αρνητική και βάσει αυτού θα έχουμε :
$\min_{\phi \geq 0} \left[\phi m^* + \widetilde{u}(E[F_T] - \phi)\right] = \min_{\phi \in \Re} \left[\phi m^* + \widetilde{u}(E[F_T] - \phi)\right]$.
Σε αυτό το σημείο θέτουμε: $\phi^{'} = E[F_T] - \phi \Rightarrow \phi = E[F_T] - \phi^{'}$. Οπότε:
$\min_{\phi \in \Re} \left[\phi m^* + \widetilde{u}(E[F_T] - \phi)\right] = \min_{\phi^{'} \in \Re} \left[(E[F_T] - \phi^{'})m^* + \widetilde{u}(\phi^{'})\right] =$
$\min_{\phi \in \Re} \left[(E[F_T] - \phi)m^* + \widetilde{u}(\phi)\right] = \min_{\phi \in \Re} \left[E[F_T]m^* - \phi m^* + \widetilde{u}(\phi)\right] =$
$E[F_T]m^* + \min_{\phi \in \Re}[-\phi m^* + \widetilde{u}(\phi)] = E[F_T]m^*$ - $\max_{\phi \in \Re} \left[-(-\phi m^* + \widetilde{u}(\phi))\right] =$
$E[F_T]m^*$ - $\max_{\phi \in \Re} \left[\phi m^* - \widetilde{u}(\phi)\right] = E[F_T]m^*$ - $\sup_{\phi \in \Re} \left[\phi m^* - \widetilde{u}(\phi)\right]$.
Με βάση τον ορισμό του $Fenchel$ μετασχηματισμού, συνεπώς, προκύπτει ότι η συνάρτηση αξίας σε αυτήν την περίπτωση ισούται με: $E[F_T]m^*$ - $\widetilde{v}(m^*)$. □

Συμπέρασμα:

$$\max_{\phi \in A_+} \left[E[G]\right] = E[F_T P_T] + u(0), \qquad m^* > 0$$

$$\max_{\phi \in A_+} \left[E[G]\right] = E[F_T P_T] + E[F_T]m^* - \widetilde{v}(m^*), \qquad m^* \leq 0$$

Παράδειγμα 1:
Προκειμένου να κατανοήσουμε την παραπάνω πρόταση προβαίνουμε στη χρήση του παρακάτω παραδείγματος. Έστω ότι έχουμε τετραγωνική συνάρτηση $u(x) = \frac{k}{2}x^2$ και έστω ότι η τυχαία μεταβλητή, που περιγράφει την κανονικοποιημένη ποσότητα της ηλεκτρικής ενέργειας που παράγεται στον τελικό χρόνο ωρίμανσης και συμβολίζεται με F_T, ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$.

Αρχικά, καθώς η F_T κατανέμεται ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, με βάση τους τύπους της ομοιόμορφης κατανομής για την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά, ισχύει ότι:
• $E[F_T] = \frac{1}{2}(1 - 0) \iff E[F_T] = \frac{1}{2}$.
• $Var(F_T) = \frac{1}{12}(1 - 0)^2 \iff Var(F_T) = \frac{1}{12}$.

Σύμφωνα με την πρόταση (4.2), ο τρόπος που θα ορίζεται η συνάρτηση $\bar{u}$ είναι:
$\bar{u}(x) = u(x)\mathbf{1}_{x<0} + u(0)\mathbf{1}_{x\geq 0} \iff$
$\bar{u}(x) = \frac{k}{2}x^2\mathbf{1}_{x<0} + \frac{k}{2}0^2\mathbf{1}_{x\geq 0} \iff$
$\bar{u}(x) = \frac{k}{2}x^2\mathbf{1}_{x<0}$

Σύμφωνα επίσης με τα παραπάνω:
$\widetilde{u}(x) = E\left[\bar{u}(F_T - E[F_T] + x)\right]$,
οπότε σε αρχικό στάδιο μελετούμε την $\bar{u}(F_T - E[F_T] + x)$.
Έχουμε ότι: $\bar{u}(F_T - E[F_T] + x) = u\left(F_T - E[F_T] + x\right)\mathbf{1}_{F_T - E[F_T] + x<0}$

Μας ενδιαφέρει, συνεπώς, πότε $F_T - E[F_T] + x < 0 \iff F_T - \frac{1}{2} + x < 0$.
Γνωρίζοντας ότι η F_T κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$, καταλήγουμε στο ότι η ποσότητα $F_T - \frac{1}{2}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του x και άρα προκύπτουν τα εξής:
• Για $x > \frac{1}{2}$ ισχύει ότι $F_T - E[F_T] + x \geq 0$.
• Για $x < -\frac{1}{2}$ ισχύει ότι $F_T - E[F_T] + x < 0$.
• Για $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ισχύει ότι είτε $F_T - E[F_T] + x \geq 0$ είτε $F_T - E[F_T] + x < 0$.

Εν συνεχεία θα μελετήσουμε τον τύπο της συνάρτησης $\widetilde{u}$ για τις διάφορες τιμές του x.

Περίπτωση 1($x > \frac{1}{2}$):
$\widetilde{u}(x) = 0$.

Περίπτωση 2($x < -\frac{1}{2}$):
$\widetilde{u}(x) = E\left[\bar{u}(F_T - E[F_T] + x)\mathbf{1}_{F_T - E[F_T] + x<0}\right] \iff$

$\widetilde{u}(x)= E\left[\frac{k}{2}\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right)^2\right]= \frac{k}{2}E\left[\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right)^2\right].$
Λαμβάνοντας υπ' όψιν το γνωστό τύπο που συνδέει τη διασπορά και την αναμενόμενη τιμή μίας οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής X:
$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ έχουμε ότι:
$E\left[\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right)^2\right] = Var\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right) + \left(E\left[\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right)\right]\right)^2.$
• Υπολογίζουμε: $E\left[\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right)\right] = E[F_T]-\frac{1}{2}+x= x$
Οπότε: $\left(E\left[\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right)\right]\right)^2 = x^2$
• Υπολογίζουμε $Var\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right)= Var(F_T) = \frac{1}{12}.$

Επομένως: $\widetilde{u}(x)= \frac{k}{2}E\left[\left(F_T-\frac{1}{2}+x\right)^2\right]= \frac{k}{2}(\frac{1}{12}+x^2)$

Περίπτωση 3$(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2})$:

$$\widetilde{u}(x) = E\left[\bar{u}\left(F_T - E[F_T] + x\right)\right] = E\left[u\left(F_T - E[F_T] + x\right)\mathbf{1}_{F_T - E[F_T] + x < 0}\right] =$$

$$E[u\left(F_T - E[F_T] + x\right)\mathbf{1}_{F_T<\frac{1}{2}-x}] = E\left[u\left(F_T - E[F_T] + x\right)|F_T < \frac{1}{2} - x\right] =$$

$$E\left[\frac{k}{2}(F_T - \frac{1}{2} + x)^2 | F_T < \frac{1}{2} - x\right] = \frac{k}{2}\int_0^{\frac{1}{2}-x}\left(y - \frac{1}{2} + x\right)^2 dy =$$

$$\frac{k}{6}\left[\left(y-\frac{1}{2}+x\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}-x} = \frac{k}{6}\left[\left(\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+x\right)^3 - \left(0-\frac{1}{2}+x\right)^3\right] \Longleftrightarrow$$

$$\widetilde{u}(x) = \frac{k}{6}\left(\frac{1}{2}-x\right)^3$$

Συνοψίζοντας, λοιπόν, έχουμε:
$\widetilde{u}(x) = \frac{k}{2}\left(x^2+\frac{1}{12}\right)$, για $x < -\frac{1}{2}$.
$\widetilde{u}(x) = \frac{k}{6}\left(\frac{1}{2}-x\right)^3$, για $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.
$\widetilde{u}(x) = 0$, για $x > \frac{1}{2}$.

Αξιοποιώντας το εργαλείο των δεικτριών, μπορούμε να γράψουμε ως εξής:
$\widetilde{u}(x) = \frac{k}{2}\left(x^2+\frac{1}{12}\right)\mathbf{1}_{x<-\frac{1}{2}} + \frac{k}{6}\left(\frac{1}{2}-x\right)^3\mathbf{1}_{-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}}$

Συνεχίζουμε με σκοπό τον υπολογισμό της $\widetilde{I}$, την οποία έχουμε ορίσει ως αντίστροφη συνάρτηση της $\widetilde{u}'$.

- Για $x < -\frac{1}{2}$, έχουμε: $\widetilde{u}'(x) = kx$.
- Για $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, έχουμε: $\widetilde{u}'(x) = -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)^2$.

Σε αυτό το σημείο πραγματευόμαστε τον υπολογισμό της αντίστροφης συνάρτησης, όταν $x < -\frac{1}{2}$. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως είδαμε $\widetilde{u}'(x) = kx$ και εύκολα εντοπίζουμε το πεδίο τιμών να είναι το $(-\infty, \frac{k}{2})$.

Έστω x_1, x_2, τέτοια ώστε: $x_1 < -\frac{1}{2}$ και $x_2 < -\frac{1}{2}$, για τα οποία:
$\widetilde{u}'(x_1) = \widetilde{u}'(x_2) \Rightarrow kx_1 = kx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
Συνεπώς $\widetilde{u}'$ είναι "$1-1$" και άρα αντιστρέψιμη και οπότε μπορούμε να βρούμε την αντίστροφη $\widetilde{I}$. Το πεδίο ορισμού της $\widetilde{u}'$ γίνεται σύνολο τιμών της $\widetilde{I}$ και το σύνολο τιμών της $\widetilde{u}'$ είναι το πεδίο ορισμού της $\widetilde{I}$.

Θέτοντας: $\widetilde{u}'(x) = z \Rightarrow kx = z \Rightarrow x = \frac{z}{k}$.
Άρα $\widetilde{I}(z) = \frac{z}{k}$, για $z < -\frac{k}{2}$.

Συνεχίζοντας, σε αυτό το σημείο πραγματευόμαστε τον υπολογισμό της αντίστροφης συνάρτησης, όταν $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Όπως είδαμε σε αυτήν την περίπτωση $\widetilde{u}'(x) = -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)^2$ και εύκολα δείχνουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $[-\frac{k}{2}, 0]$.

Έστω x_1, x_2, τέτοια ώστε: $-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{1}{2}$, για τα οποία:
$\widetilde{u}'(x_1) = \widetilde{u}'(x_2) \Rightarrow -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 = -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2 \Rightarrow x_1^2 - x_1 = x_2^2 - x_2 \Rightarrow$
$x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0$.
0πότε ή $x_1 - x_2 = 0$ ή $x_1 + x_2 = 1$.
Αφού $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ έχουμε στην πρώτη περίπτωση $x_1 = x_2$ και στη δεύτερη περίπτωση $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.
Σε κάθε περίπτωση πάντως $x_1 = x_2$ που μας εξασφαλίζει ότι $\widetilde{u}'$ είναι "$1-1$" και άρα αντιστρέψιμη.
$\widetilde{I}$ είναι η αντίστροφή της με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της $\widetilde{u}'$, δηλαδή το $[-\frac{k}{2}, 0]$ και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της $\widetilde{u}'$, δηλαδή το $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Θέτω $\widetilde{u}'(x) = z \Rightarrow -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = z$
$\Rightarrow \frac{1}{2} - x = \pm\sqrt{\frac{-2z}{k}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-2z}{k}}$.
Η αποδεκτή τιμή είναι $x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-2z}{k}}$.
Οπότε, για $-\frac{k}{2} \leq z \leq 0$, $\widetilde{I}(z) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-2z}{k}}$.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, έχουμε ότι:
• $\widetilde{I}(z) = \frac{z}{k}$, για $z < -\frac{k}{2}$.
• $\widetilde{I}(z) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-2z}{k}}$, για $-\frac{k}{2} \leq z \leq 0$
• $\widetilde{I}(z) = 0$, διαφορετικά.

Βρήκαμε, επομένως , σε αυτό το παράδειγμα τον τύπο της $\widetilde{I}$ και άρα είμαστε σε ετοιμότητα να αξιοποιήσουμε την πρόταση (4.2) και να εντοπίσουμε βέλτιστη στρατηγική σε κάθε περίπτωση.

4.4 Ουδέτεροι Κινδύνου - Επικαιροποίηση Προβλέψεων ανά διακριτούς χρόνους

Η συγκεκριμένη υποενότητα αφορά την περίπτωση ενός μικρού παραγωγού ενέργειας (οι συναλλαγές του δεν έχουν επίδραση στην αγορά), με ενδιαφέρον για μεγιστοποίηση του κέρδους του, αδιαφορώντας για το ρίσκο που θα λαμβάνει, ενώ δεν έχει στη διάθεσή του ακριβή πρόβλεψη για το πόσο ηλεκτρική ενέργεια θα παράξει στον τελικό χρόνο ωρίμανσης T, αλλά ούτε και απλά γνώση για την κατανομή της τελικής κανονικοποιημένης ποσότητας της παραγωγής. Συγκεκριμένα, πραγματευόμαστε την πιο ρεαλιστική περίπτωση από όλες, όπου η πρόβλεψη επικαιροποιείται σε ένα πεπερασμένο σύνολο από διακριτούς χρόνους και ταυτόχρονα έχουμε υπ΄ όψιν πως ο παραγωγός έχει δικαίωμα αποκλειστικά για πώληση ενέργειας.

Έστω, λοιπόν $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$ μία πεπερασμένη διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$. Εισάγουμε στη μελέτη μας μία διύληση διακριτού χρόνου $\widehat{\mathcal{G}}_i = \mathcal{G}_{t_i}$, η οποία έχει ως απώτερο σκοπό την περιγραφή των πληροφοριών και των δεδομένων που είναι διαθέσιμα στον παραγωγό σε κάθε ένα από τους διακριτούς χρόνους και με βάση τα εν λόγω δεδομένα πραγματοποιεί προβλέψεις και διαμορφώνει στρατηγικές.

Σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία πρόβλεψης της τελικής κανονικοποιημένης ποσότητας της παραγωγής της ενέργειας έχουμε ότι :

$$F_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbf{1}_{t_i \leq t < t_{i+1}} + F_n \mathbf{1}_{t_n \leq t} \tag{4.9}$$

με $F_{t_i} = E[F_{i+1}|\widehat{\mathcal{G}}_i]$. F_t δηλώνει την πρόβλεψη για την τελική παραγωγή που πραγματοποιείται στη χρονική στιγμή t, ενώ F_i είναι η πρόβλεψη που πραγματοποιείται για την τελική παραγωγή στη χρονική στιγμή t_i. Επιπροσθέτως, πραγματοποιούμε την υπόθεση ότι $\mu_t \leq 0$, το οποίο το ερμηνεύουμε σαν ότι η αναμενόμενη τιμή της ενέργειας ενδεχομένως μόνο να πέφτει, καθώς ο τελικός χρόνος ωρίμανσης T πλησιάζει. Ορίζουμε, επίσης, την εξής ποσότητα:

$$m_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu_s ds \tag{4.10}$$

όπου περιγράφει το πόσο αναμένεται να πέσει η τιμή της ενέργειας μεταξύ των χρονικών στιγμών t_k και t_{k+1}. Επισημαίνουμε, συνεπώς , πως ο παραγωγός πάλι σε αυτήν την περίπτωση καλείται να επιλύσει το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.8), απλά λαμβάνοντας κατά νου τη διαφοροποίηση των δεδομένων που πραγματοποιείται σε αυτήν την υποενότητα σε σχέση με τις παραπάνω.

Η εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής από τον παραγωγό ενέργειας σε αυτήν την περίπτωση περιγράφεται από την αμέσως παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.3:
Έστω η συνάρτηση ποινής u ότι ικανοποιεί τις εξής προϋποθέσεις:
• u κυρτή και συνεχώς παραγωγίσιμη
• $u^{'}(0) = 0$
• $\lim_{x \mapsto -\infty} u^{'}(x) = -\infty$
• $u^{'}$ αύξουσα συνάρτηση
• $E\left[u(F_T + x)\right] < \infty$, για κάθε $x \in \Re$
• $E\left[|u^{'}(F_T + x)|\right] < \infty$, για κάθε $x \in \Re$
• $E\left[|u^{'}\left(x - c(F_0 + ... + F_n)\right)|\right] < \infty$, για κάθε $x \in \Re$ και για κάποιο $c > 1$
Τότε, υπάρχει μια διαδικάσια διακριτού χρόνου $(\xi_k)_{0 \leq k \leq n}$, η οποία είναι $(\widehat{\mathcal{G}_k})$-προσαρμοσμένη, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\sum_{i=k}^{n-1} m_i = E\left[u^{'}\left(x - c(F_n - \max_{k \leq i \leq n} \xi_i)\right)\right] \tag{4.11}$$

για $k = 0, ..., n$.
Έτσι, λοιπόν, η βέλτιστη στρατηγική δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\phi_t = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbf{1}_{t_i \leq t < t_{i+1}} + \phi_n \mathbf{1}_{t_n \leq t} \tag{4.12}$$

όπου $\phi_k = \max_{0 \leq i \leq k} \xi_i$,για $0 \leq k \leq n$.

Απόδειξη:
Σε αρχικό στάδιο θα αποδείξουμε την ύπαρξη της διαδικασίας (ξ_k) με τρόπο επαγωγικό. Συγκεκριμένα, μπορούμε να επιλέξουμε $\xi_n = F_n$.
Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \leq n$ έχουμε κατασκευάσει μία διαδικασία $(\xi_k)_{m \leq k \leq n}$,

η οποία ικανοποιεί τα εξής:

$$\sum_{i=k}^{n-1} m_i = E\left[u'\left(F_n - \max_{k\leq i\leq n} \xi_i\right) |\widehat{\mathcal{G}}_k\right] \tag{4.13}$$

για $m \leq k \leq n$
και επιπλέον:

$$0 \leq \xi_k \leq cF_k - I\left(\frac{c}{c-1}\sum_{i=k}^{n-1} m_i\right) \tag{4.14}$$

Για να εφαρμοστεί το επιχείρημα της αντίστροφης επαγωγής, αρκεί να δείξω ότι: $\sum_{i=k}^{n-1} m_i = E\left[u'\left(F_n - \max_{k\leq i\leq n} \xi_i\right) |\widehat{\mathcal{G}}_k\right]$, για $m-1 \leq k \leq n$ και επίσης ότι: $0 \leq \xi_k \leq cF_k - I\left(\frac{c}{c-1}\sum_{i=k}^{n-1} m_i\right)$, για $m-1 \leq k \leq n$.

Τα παραπάνω σημαίνουν πως αρκεί να δείξω ότι:
$\sum_{i=m-1}^{n-1} m_i = E\left[u'\left(F_n - \max_{k\leq i\leq n} \xi_i\right) |\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}\right]$ και επίσης ότι:
$0 \leq \xi_{m-1} \leq cF_{m-1} - I\left(\frac{c}{c-1}\sum_{i=m-1}^{n-1} m_i\right)$

Θεωρούμε μία τυχαία συνάρτηση:
$\xi \mapsto f_m(\xi) = E\left[u'\left(F_n - max\left(\xi, \max_{m\leq i\leq n} \xi_i\right)\right) |\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}\right]$.
• Αρχικά, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f_m(\xi)$ είναι καλά ορισμένη.
Με βάση τη θεωρία, προκειμένου να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση $f : A \mapsto B$ είναι καλά ορισμένη, πρέπει να δείξουμε ότι αν $f(a) \neq f(a') \Rightarrow a \neq a'$, δηλαδή δύο τιμές της συνάρτησης που είναι διαφορετικές, να μην αντιστοιχούν παρά σε διαφορετικά ορίσματα. Το παραπάνω είναι ισοδύναμο με το να δείξω ότι αν $a = a' \Rightarrow f(a) = f(a')$.
Συνεπώς, σε σχέση με τη δική μας περίπτωση, έστω $\xi_1 = \xi_2 \Rightarrow f_m(\xi_1) = f_m(\xi_2)$, που σημαίνει ότι η $f_m(\xi)$ είναι καλά ορισμένη.

• Εν συνεχεία, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f_m(\xi)$ είναι συνεχής. Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής, βάσει ορισμού συνέχειας, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\xi_0 \in \Re$ ισχύει ότι: $\lim_{\xi\to\xi_0} = f_m(\xi_0)$, για κάθε $\xi_0 \in \Re$.

Έστω τυχαίο $\xi_0 \in \Re$. Παίρνω:
$\lim_{\xi\to\xi_0} f_m(\xi) = \lim_{\xi\to\xi_0}\left(E\left[u'\left(F_n - max\left(\xi, \max_{m\leq i\leq n} \xi_i\right)\right) |\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}\right]\right) =$
$E\left[\lim_{\xi\to\xi_0}\left(u'\left(F_n - \max(\xi, \max_{m\leq i\leq n} \xi_i)\right)\right) |\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}\right]$.
Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης $u'\left(F_n - \max(\xi, \max_{m\leq i\leq n} \xi_i)\right)$.

Ορίζω $f(\xi) = F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n})$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι συνεχής για κάθε $\xi \in \Re$. Επίσης, η συνάρτηση $u^{'}$, με βάση τις προϋποθέσεις που έχουμε παραθέσει στη συγκεκριμένη πρόταση, είναι είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και άρα είναι συνεχής σε κάθε $f(\xi)$.
Αναλογιζόμενοι ένα σημαντικό θεώρημα της μαθηματικής ανάλυσης που σχετίζεται με την έννοια της συνέχειας, γνωρίζουμε ότι αν μία συνάρτηση f είναι στο x_0 και μία συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση αυτών $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0. Με βάση το εν λόγω θεώρημα:

$u^{'}(F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)$ συνεχής για κάθε $\xi \in \Re$. Ισοδύναμα:
$\lim_{\xi \to \xi_0} u^{'}(F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i) = u^{'}(F_n - \max(\xi_0, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)$.
Άρα $\lim_{\xi \to \xi_0} f_m(\xi) = E\left[u^{'}(F_n - \max(\xi_0, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)\right] = f_m(\xi_0)$.
Τοιουτοτρόπως, αποδείχθηκε το ζητούμενο της συνέχειας της $f_m(\xi)$.

• Σε αυτό το σημείο θα αποδείξουμε ότι:
$E\left[u^{'}(F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)\right] \leq E\left[u^{'}(F_n - \ max(\xi, F_n))\right]$

Πράγματι, έχοντας θέσει $F_n = \xi_n$, έχουμε:
$\max(\xi, F_n) \leq \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i) \iff -\max(\xi, F_n) \geq -\max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)$
$\iff F_n - \max(\xi, F_n) \geq F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)$
Με βάση τις υποθέσεις τις πρότασης (4.3) $u^{'}$ αύξουσα και άρα:
$u^{'}(F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)) \leq u^{'}(F_n - \max(\xi, F_n))$ και πράγματι :
$E\left[u^{'}(F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)\right] \leq E\left[u^{'}(F_n - \ max(\xi, F_n))\right]$.

• Σε αυτό το σημείο θα αποδείξουμε ότι:
$E\left[u^{'}(F_n - \ max(\xi, F_n))\right] \leq E\left[u^{'}(\min(F_n - \xi, 0))\, \mathbf{1}_{F_n \leq cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}}\right]$
1η περίπτωση($\xi > F_n$):
$\max(\xi, F_n) = \xi \Rightarrow F_n - \max(\xi, F_n) = F_n - \xi < 0$
$\min(F_n - \xi, 0) = F_n - \xi < 0$
Οπότε, ισχύει ότι:
$F_n - \ max(\xi, F_n) \leq \min(F_n - \xi, 0)$

2η περίπτωση($\xi \leq F_n$):
$F_n - \max(\xi, F_n) = 0$
$\min(F_n - \xi, 0) = 0$
Οπότε, πάλι ισχύει ότι:
$F_n - \ max(\xi, F_n) \leq \min(F_n - \xi, 0)$
Αφού με βάση τις υποθέσεις της προτάσεως (4.3) $u^{'}$ αύξουσα, τότε:
$u^{'}(F_n - \ max(\xi, F_n)) \leq u^{'}(min(F_n - \xi, 0))$ και άρα:
$E\left[u^{'}(F_n - \ max(\xi, F_n))\right] \leq E\left[u^{'}(min(F_n - \xi, 0))\right]$

Εφ'όσον το παραπάνω ισχύει για κάθε τιμή του F_n, θα ισχύει και όταν $F_n \leq cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}]$ και άρα αυτό σημαινει ότι:
$E\left[u^{'}\left(F_n - \ max(\xi, F_n)\right)\right] \leq E\left[u^{'}\left(\min(F_n - \xi, 0)\right)\mathbf{1}_{F_n \leq cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}}\right]$

• Στο επιστημονικό άρθρο [1], αναγράφεται ότι αξιοποιώντας την ανισότητα $Markov$:
$E\left[u^{'}\left(\min(F_n - \xi, 0)\right)\mathbf{1}_{F_n \leq cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}}\right] \leq \frac{c-1}{c}u^{'}\left(\min\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1} - \xi, 0\right)\right)$.

• Εν συνεχεία, καθώς $\min(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi, 0) \leq cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi$ και ότι $u^{'}$ αύξουσα, έχουμε ότι:
$u^{'}\left(\min(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi, 0)\right) \leq u^{'}\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi\right)$
$\iff \frac{c-1}{c}u^{'}\left(\min(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi, 0)\right) \leq \frac{c-1}{c}u^{'}\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi\right)$.

Μέχρι στιγμής έχουμε δείξει, λοιπόν, ότι:

$$
\begin{aligned}
&E\left[u^{'}\left(F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i\right)\right]\\
&\leq E\left[u^{'}\left(F_n - \ max(\xi, F_n)\right)\right]\\
&\leq E\left[u^{'}\left(\min(F_n - \xi, 0)\right)\mathbf{1}_{F_n \leq cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}}\right]\\
&\leq \frac{c-1}{c}u^{'}\left(\min\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1} - \xi, 0\right)\right)\\
&\leq \frac{c-1}{c}u^{'}\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi\right)
\end{aligned}
$$

για κάθε $\xi \in \Re$

• Σε αυτό το σημείο θα αποδείξουμε ότι:

$$\xi_{m-1} \leq cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - I\left(\frac{c-1}{c}\sum_{i=m-1}^{n-1} m_i\right)$$

Αφού $E\left[u^{'}\left(F_n - \max(\xi, \max_{m \leq i \leq n} \xi_i)\right]\right] \leq \frac{c-1}{c}u^{'}\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi\right)$, για κάθε

$\xi \in \Re$ και άρα ισχύει και για ξ_{m-1}. Αυτό σημαίνει ότι:
$E\left[u^{'}\left(F_n - \max(\xi_{m-1}, \max_{m\leq i\leq n}\xi_i)\right]\leq \frac{c-1}{c}u^{'}\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi_{m-1}\right)\Rightarrow\right.$
$\sum_{i=m-1}^{n-1} m_i \leq \frac{c-1}{c}u^{'}\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi_{m-1}\right)\Rightarrow$
$\frac{c}{c-1}\sum_{i=m-1}^{n-1} m_i \leq u^{'}\left(cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}] - \xi_{m-1}\right)$.
Καθώς $u^{'}$ αύξουσα και I η αντίστροφή της, η οποία είναι επίσης αύξουσα :
$I\left(\frac{c}{c-1}\sum_{i=m-1}^{n-1} m_i\right)\leq cE[F_n|\widehat{\mathcal{G}}_{m-1}]-\xi_{m-1}$ Έτσι, αφού έχει προκύψει η ζητούμενη ανισότητα, ολοκληρώνεται η απόδειξη του επαγωγικού συλλογισμού.

Απομένει να δειχθεί ότι η στρατηγική που προτείνεται στην πρόταση (4.3) με τον τύπο (4.12) είναι πράγματι η βέλτιστη στρατηγική. Αρχικά, επισημαίνουμε πως, αφού έχουμε υποθέσει ότι $\mu_t \leq 0$ για κάθε $t \in [0, T]$, φαντάζει να κρίνεται βέλτιστη η πώληση ηλεκτρικής ενέργειας όσο το δυνατό νωρίτερα και για αυτό άλλωστε η βέλτιστη στρατηγική θα έχει τη μορφή (4.12).

Θα θέλαμε, συνεπώς, η βέλτιστη στρατηγική να πετυχαίνει την ελάχιστη τιμή, μεταξύ όλων των αυξουσών,προσαρμοσμένων, διακριτού χρόνου διαδικασιών $(\phi_k)_{0\leq k\leq n}$, στη συνάρτηση:

$$J(\phi) = E\left[\sum_{k=0}^{n-1}\phi_k m_k + u(F_n - \phi_n)\right] \tag{4.15}$$

Έστω, λοιπόν, $\phi_k^* = \max_{0\leq i\leq k}\xi_i$ και (ϕ_k) μία άλλη επιτρεπόμενη στρατηγική. Ορίζουμε:

$$\Delta\phi_i = \phi_i - \phi_{i-1} \tag{4.16}$$

$$\Delta\phi_0 = \phi_0 \tag{4.17}$$

$$\Delta\phi_i^* = \phi_i^* - \phi_{i-1}^* \tag{4.18}$$

$$\Delta\phi_0^* = \phi_0^* \tag{4.19}$$

όπου οι τύποι (4.16) και (4.18) ισχύουν για κάθε $i = 1, ..., n$.
Εκείνο που επιδιώκουμε να δείξουμε είναι ότι $J(\phi) - J(\phi^*) \geq 0$, το οποίο θα σημαίνει ότι η ϕ^* θα συνιστά τη βέλτιστη στρατηγική.

Παίρνουμε, λοιπόν , με βάση τον τύπο (4.15):

$J(\phi) - J(\phi^*) = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} \phi_k m_k + u(F_n - \phi_n)\right] - E\left[\sum_{k=0}^{n-1} \phi_k^* m_k + u(F_n - \phi_n^*)\right]$
$= E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k + u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*)\right]$

• Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι:

$$E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k + u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*)\right] \geq$$
$$\geq E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*)\right]$$

Όπως εύκολα παρατηρούμε, αρκεί να δείξουμε ότι:
$u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*) \geq -u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*)$
Επειδή δε γνωρίζουμε ακόμη αν το ϕ_n ή το ϕ_n^* είναι μεγαλύτερο, θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

-1η περίπτωση($\phi_n^* \geq \phi_n$):
Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $F_n - \phi_n^* \leq F_n - \phi_n$ και άρα εφαρμόζω θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση u στο διάστημα $[F_n - \phi_n^*, F_n - \phi_n]$.
Συγκεκριμένα, έχοντας ότι u είναι συνεχής στο $[F_n - \phi_n^*, F_n - \phi_n]$ και παραγωγίσιμη στο $(F_n - \phi_n^*, F_n - \phi_n)$ προκύπτει ότι:
Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (F_n - \phi_n^*, F_n - \phi_n)$, τέτοιο ώστε:
$u^{'}(\xi) = \frac{u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*)}{\phi_n^* - \phi_n}$
Καθώς, λοιπόν , $F_n - \phi_n^* < \xi$ και έχουμε υποθέσει ότι $u^{'}$ αύξουσα προκύπτει ότι:
$u^{'}(F_n - \phi_n^*) \leq u^{'}(\xi) \iff u^{'}(F_n - \phi_n^*) \leq \frac{u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*)}{\phi_n^* - \phi_n} \iff$
$u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*) \geq u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n^* - \phi_n) \iff$
$u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*) \geq -u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*)$,
άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο στην 1η περίπτωση.

-2η Περίπτωση($\phi_n \geq \phi_n^*$):
Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $F_n - \phi_n \leq F_n - \phi_n^*$ και άρα θα εφαρμόσω το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση u στο διάστημα $[F_n - \phi_n, F_n - \phi_n^*]$.
Συγκεκριμένα, έχοντας ότι u είναι συνεχής στο $[F_n - \phi_n, F_n - \phi_n^*]$ και παραγωγίσιμη στο $(F_n - \phi_n, F_n - \phi_n^*)$ προκύπτει ότι:
Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (F_n - \phi_n, F_n - \phi_n^*)$, τέτοιο ώστε:
$u^{'}(\xi) = \frac{u(F_n - \phi_n^*) - u(F_n - \phi_n)}{\phi_n - \phi_n^*}$
Καθώς $\xi < F_n - \phi_n^*$ και έχουμε υποθέσει ότι $u^{'}$ αύξουσα προκύπτει ότι:
$u^{'}(\xi) \leq u^{'}(F_n - \phi_n^*) \iff \frac{u(F_n - \phi_n^*) - u(F_n - \phi_n)}{\phi_n - \phi_n^*} \leq u^{'}(F_n - \phi_n^*) \iff$

$u(F_n - \phi_n^*) - u(F_n - \phi_n) \leq u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*) \iff$
$u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*) \geq -u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*)$
και άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο και στη 2η περίπτωση.
Δείξαμε, επομένως , ότι:
$E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k + u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*)\right] \geq$
$E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*)\right].$

- Σε αυτό το στάδιο θα αποδείξουμε ότι:

$$E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*)\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{n}(\Delta\phi_i - \Delta\phi_i^*)E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]\right]$$

Αναπτύσσουμε το δεξιό μέλος και έχουμε:
$E\left[\sum_{i=0}^{n}(\Delta\phi_i - \Delta\phi_i^*)E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]\right] =$
$E\left[(\phi_0 - \phi_0^*)E\left[\sum_{k=0}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_0\right]\right] +$
$E\left[(\phi_1 - \phi_0 + \phi_0^* - \phi_1^*)E\left[\sum_{k=1}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_1\right]\right] +$
$E\left[(\phi_2 - \phi_1 + \phi_1^* - \phi_2^*)E\left[\sum_{k=2}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_2\right]\right] +$
....
.... +
$E\left[(\phi_{n-1} - \phi_{n-2} + \phi_{n-2}^* - \phi_{n-1}^*)E\left[m_{n-1} - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_{n-1}\right]\right] +$
$E\left[(\phi_n - \phi_{n-1} + \phi_{n-1}^* - \phi_n^*)E\left[-u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_n\right]\right]$

Εφαρμόζοντας τη λεγόμενη ιδιότητα του πύργου στους όρους του δεξιού μέλους:
$E\left[\sum_{i=0}^{n}(\Delta\phi_i - \Delta\phi_i^*)E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]\right] =$
$E\left[(\phi_0 - \phi_0^*)(\sum_{k=0}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*))\right] +$
$E\left[(\phi_1 - \phi_0 + \phi_0^* - \phi_1^*)(\sum_{k=1}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*))\right] +$
$E\left[(\phi_2 - \phi_1 + \phi_1^* - \phi_2^*)(\sum_{k=2}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*))\right] +$
....
.... +
$E\left[(\phi_{n-1} - \phi_{n-2} + \phi_{n-2}^* - \phi_{n-1}^*)(m_{n-1} - u^{'}(F_n - \phi_n^*))\right] +$
$E\left[(\phi_n - \phi_{n-1} + \phi_{n-1}^* - \phi_n^*)(-u^{'}(F_n - \phi_n^*))\right].$

Τώρα, αναπτύσσουμε τους όρους που βρίσκονται εντός της αναμενόμενης τιμής:

$\phi_0 m_0 + \phi_0(m_1 + ... + m_{n-1}) - \phi_0 u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$-\phi_0^* m_0 - \phi_0^*(m_1 + ... + m_{n-1} + \phi_0^* u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$+\phi_1 m_1 + \phi_1(m_2 + ... + m_{n-1}) - \phi_1 u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$-\phi_0(m_1 + ... + m_{n-1}) + \phi_0 u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$+\phi_0^*(m_1 + ... + m_{n-1}) - \phi_0^* u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$-\phi_1^* m_1 - \phi_1^*(m_2 + ... + m_{n-1}) + \phi_1^* u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$+\phi_2 m_2 + \phi_2(m_3 + ... + m_{n-1}) - \phi_2 u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$-\phi_1(m_2 + ... + m_{n-1}) + \phi_1 u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$+\phi_1^*(m_2 + ... + m_{n-1}) - \phi_1^* u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$-\phi_2^* m_2 - \phi_2^*(m_3 + ... + m_{n-1}) + \phi_2^* u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
....
....
$+\phi_{n-1} m_{n-1} - \phi_{n-2} m_{n-1} + \phi_{n-2}^* m_{n-1} - \phi_{n-1}^* m_{n-1}$
$-\phi_{n-1} u^{'}(F_n - \phi_n^*) + \phi_{n-2} u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$-\phi_{n-2}^* u^{'}(F_n - \phi_n^*) + \phi_{n-1}^* u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$-\phi_n u^{'}(F_n - \phi_n^*) + \phi_{n-1} u^{'}(F_n - \phi_n^*)$
$-\phi_{n-1}^* u^{'}(F_n - \phi_n^*) + \phi_n^* u^{'}(F_n - \phi_n^*)$

Όπως βλέπουμε, πολλοί όροι απαλοίφονται και άρα προκύπτει το παρόν ζητούμενο:
$E\left[\sum_{i=0}^{n}(\Delta\phi_i - \Delta\phi_i^*)E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]\right] =$
$E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*)\right].$

Μέχρι στιγμής, λοιπόν, έχουμε:

$$\begin{aligned}
J(\phi) - J(\phi^*) &= E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k + u(F_n - \phi_n) - u(F_n - \phi_n^*)\right] \\
&\geq E\left[\sum_{k=0}^{n-1}(\phi_k - \phi_k^*)m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)(\phi_n - \phi_n^*)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{n}(\Delta\phi_i - \Delta\phi_i^*)E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]\right]
\end{aligned}$$

• Τώρα θα μελετήσουμε σε σχέση με την ποσότητα: $E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]$.

- 1η περίπτωση:
Για όλα τα k να ισχύει ότι:
$\phi_n^* = \max_{0\leq i\leq n}\xi_i > \max_{k\leq i\leq n}\xi_i \iff -\phi_n^* < -\max_{k\leq i\leq n}\xi_i \iff$
$F_n - \phi_n^* < F_n - \max_{k\leq i\leq n}\xi_i \iff u^{'}(F_n - \phi_n^*) \leq u^{'}(F_n - \max_{k\leq i\leq n}\xi_i) \iff$
$-u^{'}(F_n - \phi_n^*) \geq -u^{'}(F_n - \max_{k\leq i\leq n}\xi_i) \iff$
$E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right] \geq E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \max_{k\leq i\leq n}\xi_i)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]$ =0

-2η περίπτωση:
Αν για κάποιο k ισχύει ότι $\Delta\phi_k^* > 0$,έπειτα $\phi_k^* = \xi_k$ και άρα:
$\phi_n^* = \max_{k\leq i\leq n}\xi_i$ και συνεπώς:
$E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right] = E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \max_{k\leq i\leq n}\xi_i)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]$ =0

Σε κάθε περίπτωση αποδείξαμε ότι:
$E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right] \geq 0$, οπότε:
$E\left[\sum_{i=0}^{n}(\Delta\phi_i - \Delta\phi_i^*)E\left[\sum_{k=i}^{n-1} m_k - u^{'}(F_n - \phi_n^*)|\hat{\mathcal{G}}_k\right]\right] \geq 0$, οπότε:
$J(\phi) - J(\phi^*) \geq 0$ και άρα ϕ^* συνιστά τη βέλτιστη στρατηγική.
$\square$

Παράδειγμα για κατανόηση:
Έστω ένα προθεσμιακό συμβόλαιο που ένας παραγωγός ηλεκτρικής ενέργειας μέσω ενός αιολικού πάρκου συντάσσει στη χρονική στιγμή $t = 0$ (θεωρούμε ότι είναι 12 το μεσημέρι), με το χρόνο ωρίμανσης του συμβολαίου να είναι $T = 400$ ημέρες.
Υποθέτουμε ότι ανά πέντε ημέρες, κάθε φορά στις 12 το μεσημέρι, επικαιροποιούνται τα δεδομένα στα οποία έχει πρόσβαση ο παραγωγός της ηλεκτρικής ενέργειας και με βάση αυτά πραγματοποιεί τις προβλέψεις του και διαμορφώνει την καλύτερη δυνατή στρατηγική. Συνεπώς, η διαμέριση που πραγματοποιούμαι στο χρονικό διάστημα [0 , 400 ημέρες] είναι η εξής:
$0 = t_0 < t_1 = 5$ ημέρες $< t_2 = 10$ ημέρες $< .... < t_{79} = 395$ ημέρες $< t_{80} = T = 400$ ημέρες.
Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει η πρόβλεψη, αλλά και η στρατηγική, όπως διαμορφώνεται, τη χρονική στιγμή $t = 37$ ημέρες 2 ώρες και 30 δευτερόλεπτα από τη στιγμή που συντάχθη το προθεσμιακό συμβόλαιο.
Με βάση τον τύπο (4.9) που προαναφέρθηκε στην εν λόγω υποενότητα, έχουμε:

$$F_t = \sum_{i=0}^{79} F_i \mathbf{1}_{t_i \le t < t_{i+1}} + F_n \mathbf{1}_{t_{80} \le t}$$

Παρατηρώντας ότι: $t_7 = 35$ ημέρες $\le t < t_8 = 40$ ημέρες, προκύπτει ότι $F_t = F_{t_7}$. Άρα, η πρόβλεψη που θα πραγματοποιήσει ο παραγωγός ηλεκτρικής ενέργειας τη χρονική στιγμή $t = 37$ ημέρες 2 ώρες και 30 δευτερόλεπτα από τότε που συνετάχθη το συμβόλαιο, για το πόσο ηλεκτρική ενέργεια θα παραχθεί στον τελικό χρόνο ωρίμανσης των 400 ημερών, ισούται με την πρόβλεψη που προκύπτει τη χρονική στιγμή $t_7 = 35$ ημέρες, με βάση τα δεδομένα που επικαιροποιήθηκαν την εν λόγω χρονική στιγμή.

Τώρα, θα πραγματευτούμε σε σχέση με τη διαμορφώμενη στρατηγική του παραγωγού ηλεκτρικής ενέργειας στη χρονική στιγμή ενδιαφέροντός μας. Με βάση τον τύπο (4.12) προκύπτει ότι:

$$\phi_t = \sum_{i=0}^{79} \phi_i \mathbf{1}_{t_i \le t < t_{i+1}} + \phi_n \mathbf{1}_{t_{80} \le t}$$

Έχοντας παρατηρήσει ότι $t_7 = 35$ ημέρες $\le t < t_8 = 40$ ημέρες, προκύπτει ότι $\phi_t = \phi_{t_7}$. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας που θα πουλήσει ο παραγωγός τη χρονική στιγμή $t = 37$ ημέρες 2 ώρες και 30 δευτερόλεπτα από τότε που συνετάχθη το συμβόλαιο θα ισούται με την ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας που θα πουλήσει στη χρονική στιγμή $t = 35$ ημέρες. Το ίδιο θα ισχύει για την ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας προς πώληση μεταξύ της χρονικής στιγμής $t = 35$ ημέρες μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πρίν από την $t = 40$ ημέρες.

Σε σχέση τώρα με την ποσότητα $\phi_{t_7} = \phi_7$, έχουμε ότι $\phi_7 = \max_{0 \le i \le 7} \xi_i$.
Τα $\xi_1, ..., \xi_{80}$ θα βρεθούν με αντίστροφα επαγωγικό τρόπο μέσω του τύπου (4.11).

4.5 Αποστροφή στο ρίσκο – Πωλητής

Αρχικά, θα παραθέσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς για τη συνέχεια.
Αναλογιζόμαστε το διάστημα $[0, t]$.
Έστω μία διαμέριση αυτού $\mathcal{P}$:
$0 = t_0 < t_1 < ..... < t_n = t$.
Η νόρμα αυτής της διαμέρισης συμβολίζεται με $||\mathcal{P}||$ και ισούται με:
$||\mathcal{P}|| = \max\left[|t_i - t_{i-1}| : i = 1, ...n\right]$

Ορισμός 4.5: Υποθέτουμε ότι μία στοχαστική διαδικασία $(X_t)_{t \ge 0}$ που παίρνει πραγματικές τιμές είναι ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Η τετραγωνική κύμανση της διαδικασίας αυτής ορίζεται ως εξής:

$$[X]_t = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

Ορισμός 4.6: Έστω δύο στοχαστικές διαδικασίες $(X_t)_{t \geq 0}$ και $(Y_t)_{t \geq 0}$ με πραγματικές τιμές και ορισμένες σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.
Η τετραγωνική συνδιακύμανση των δύο αυτών διαδικασιών ορίζεται ως εξής:

$$[X, Y]_t = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})$$

Παρατήρηση 1: Ισχύει η εξής ιδιότητα που συνδέει τις τετραγωνικές κυμάνσεις των δύο στοχαστικών διαδικασιών X, Y με την τετραγωνική συνδιακύμανσή τους:

$$[X, Y]_t = \frac{1}{2} \left([X + Y]_t - [X]_t - [Y]_t \right)$$

Παρατήρηση 2: Η τετραγωνική κύμανση μίας τυπικής κίνησης $Brown$ υπάρχει και δίνεται από τον τύπο: $[B]_t = t$

Ορισμός 4.7: Έστω $(X_t)_{t \geq 0}$ μία συνεχής στοχαστική διαδικασία που παίρνει πραγματικές τιμές, ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας με διύληση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$.
Λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία X είναι $martingale$, εαν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:
$i)$ $E[|X_t|] < \infty$, για κάθε t
$ii)$ $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$, για κάθε $t \geq s$

Παρατήρηση 3: Όσον αφορά τη στοχαστική διαδικασία που τη χαρακτηρίζουμε ως $local\ martingale$, είναι εκείνη που ικανοποιεί τοπικά τις ιδιότητες $martingale$.

Ορισμός 4.8: Έστω (M, d) ένας μετρικός χώρος και έστω $E \subseteq \Re$.
Μία συνάρτηση $f : E \to M$ καλείται $cadlag$, εαν για κάθε $t \in E$ ισχύει:
$i)$ το αριστερό όριο $f(t_-) = \lim_{s \to t_-} f(t)$ υπάρχει.
$ii)$ το δεξιό όριο $f(t_+) = \lim_{s \to t_+} f(t)$ υπάρχει και ισούται με $f(t)$.

Ορισμός 4.9: Μία συνεχής στοχαστική διαδικασία X με πραγματικές τιμές και ορισμένη σε ένα ΄χωρο πιθανότητα με διύληση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ λέγεται *semimartingale*, αν μπορεί να γραφεί ως εξής: $X_t = M_t + A_t$, όπου M είναι *local martingale* και A είναι *cadlag* με πεπερασμένη κύμανση.

Ορισμός 4.10: Έστω X, Y *semimartingales*. Η τετραγωνική συν - κύμανση $[X, Y]$ των X, Y ορίζεται ως:

$$[X, Y] = XY - \int X_{-}dY - \int Y_{-}dX - X_0Y_0$$

Ορισμός 4.11: Έστω M, N δύο στοχαστικές διαδικασίες που είναι *martingale*. Η προβλέψιμη τετραγωνική συν - κύμανση ορίζεται ως μία προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία με πεπερασμένη κύμανση, τέτοια ώστε:

$$[M, N] - < M, N > \in \mathcal{H}^2$$

Σε περίπτωση που M, N συνεχή *martingales* ισχύει ότι: $[M, N] = < M, N >$

Ορισμός 4.12: Έστω X μία στοχαστική διαδικασία ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας με διύληση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Λέμε ότι η X είναι $(\mathcal{F}_t)$-προσαρμοσμένη, αν $X_t \in \mathcal{F}_t$, για κάθε t.

Ορισμός 4.13: Έστω X μία στοχαστική διαδικασία ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας με διύληση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Λέμε ότι η X είναι $(\mathcal{F}_t)$- προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία, αν η συνάρτηση: $X(s, \omega) : [0, t] \times \Omega \to \Re$ είναι $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.

Παρατήρηση 4: Εαν μία στοχαστική διαδικασία είναι δεξιά συνεχής και αριστερά συνεχής, τότε η έννοια της προσαρμοσμένης και της προοδευτικά μετρήσιμης είναι το ίδιο ακριβώς πράγμα.

Ορισμός 4.14: Έστω X μία στοχαστική διαδικασία που είναι *martingale*΄και ορισμένη στο χώρο πιθανότητας με διύληση$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Ορίζουμε: $\mathcal{L}^2(X)$= [a : a $\mathcal{F}_t$ -προοδευτικά μετρήσιμη, τ.ω: $\int_0^t |a_s^2| d < M >_s < \infty$]

Ιδιότητα 4.1: Έστω X στοχαστική διαδικασία *semimartingale* και θεωρώ $\theta \in \mathcal{L}^2(X)$. Τότε ισχύει το εξής: $\left[\int \theta dX\right] = \int \theta^2 d[X]$

Ιδιότητα 4.2: Έστω X, Y στοχαστικές διαδικασίες *semimartingales* και θεωρώ $\theta \in \mathcal{L}^2(X)$. Τότε ισχύει το εξής: $\left[\int \theta dX, Y\right] = \int \theta d[X, Y]$

Ορισμός 4.16 (Φόρμουλα του *Itô* για πολυδιάστατες στοχαστικές διαδικασίες) Έστω $f \in C^{1,2}([0,\infty)\times\Re^d)$ και θεωρούμε ένα συνεχές d- διάστατο *semimartingale* $X = (X^1, ...X^d)$. Τότε, η στοχαστική διαδικασία $(f(t, X_t))_{t\geq 0}$ είναι επίσης *semimartingale* και ισχύει:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f(u, X_u)}{\partial t} du +$$

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f(u, X_u)}{\partial x_i} dX_u^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f(u, X_u)}{\partial x_i \partial x_j} d[X^i, X^j]_u$$

όπου $[X_i, X_j]$ είναι η τετραγωνική συν-κύμανση των *semimartingales* X_i, X_j.

Ορισμός 4.17: Έστω (X_t) *semimartingale* και $f \in C^{1,2}([0,\infty)\times\Re)$. Πολλές φορές θα δούμε τη φόρμουλα του *Itô* γραμμένη ως εξής:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial X_t^2}$$

Η συγκεκριμένη υποενότητα αφορά την περίπτωση πάλι ενός μικρού παραγωγού ενέργειας που όμως δεν αδιαφορεί για τους κινδύνους και στοχεύει σε μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας του τελικού κέρδους. Η χρησιμότητα γενικά περιγράφεται με μία συνάρτηση και στη δική μας περίπτωση η συνάρτηση χρησιμότητας θεωρούμε ότι έχει τον εξής τύπο: $U(x) = 1 - e^{-ax}$ με $a > 0$. Τέλος, στη συγκεκριμένη υποενότητα μελετάμε την περίπτωση, όπου ο παραγωγός έχει δικαίωμα αποκλειστικά και μόνο για πώληση ενέργειας.

Αναλογιζόμενοι τον τύπο (4.4) που αφορά το κέρδος για έναν παραγωγό μικρής εμβέλειας και τα μόλις προαναφερθέντα, είναι σαφές πως στην εν λόγω υποενότητα ϑα μας απασχολήσει το εξής ζήτημα βελτιστοποίησης:

$$\max\left[E[U(G)] = \max_{\phi\in\mathcal{A}_+} E\left[1 - e^{-a\left(f_{prod}(X_T)P_T - \int_0^T \phi_s dP_s - u(f_{prod}(X_T)-\phi_T)\right)}\right]\right.$$

Άρα ισοδύναμα ϑα μελετήσουμε το εξής ζήτημα βελτιστοποίησης:

$$\min_{\phi\in\mathcal{A}_+} E\left[e^{-a\left(f_{prod}(X_T)P_T - \int_0^T \phi_s dP_s - u(f_{prod}(X_T)-\phi_T)\right)}\right]$$

Παρατηρούμε πως μας ενδιαφέρει και το στοχαστικό μέρος της διαδικασίας P, διότι σε αυτήν την περίπτωση ο επενδυτής δεν αγνοεί το ρίσκο και άρα η κίνηση $Brown$ που περιγράφει τη μεταβλητότητα των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας υπεισέρχεται στη μελέτη του προβλήματος.

Καθώς εντός της αναμενόμενης τιμής παρατηρούμε την ύπαρξη των X_T, P_T, ϕ_T, έχουμε ότι οι X_t, P_t, ϕ_t συνιστούν τις μεταβλητές κατάστασης.

Σύμφωνα με το επιστημονικό άρθρο [1] η συνάρτηση αξίας στην εν λόγω περίπτωση ισούται με:

$$\upsilon(t,X,P,\phi) = \min_{\phi_s, t\le s\le T} E^{(t,X,P,\phi)}\left[e^{-a\left(f_{prod}(X_T)P_T - \int_t^T \phi_s dP_s - u(f_{prod}(X_T)-\phi_T)\right)}\right]$$

Η HJB εξίσωση που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η εξής:

$$\min\left[\mathcal{L}\upsilon, \frac{\partial\upsilon}{\partial\phi}\right] = 0$$

$$\mathcal{L}\upsilon = \frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \mu_t\frac{\partial\upsilon}{\partial P} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 x^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\beta_t^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial P^2} + \sigma_t\beta_t\rho x\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x\partial P}$$
$$+\alpha\phi\mu_t\upsilon + \frac{a^2}{2}\phi^2\beta_t^2\upsilon + \alpha\phi\beta_t^2\frac{\partial\upsilon}{\partial P} + \alpha\phi\beta_t\sigma_t x\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial x}$$

Όσον αφορά την τελική συνθήκη, ισχύει ότι:

$$\upsilon(T, X, P, \phi) = e^{-a\left(f_{prod}(X)P - u\left(f_{prod}(X)-\phi\right)\right)}$$

• Σε αυτό το σημείο, θα αναλύσουμε για το πως προέκυψε ο τύπος του απειροστικού γεννήτορα, όπως διατυπώθηκε παραπάνω. Ως δεδομένα έχουμε τα εξής:

$$X_t = \exp\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right)$$

$$X_T = \exp\left(\int_0^T \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right)$$

$$dP_t = \mu_t dt + \beta_t dB_t$$

Οι στοχαστικές διαδικασίες $(X_t), (P_t)$ και το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int \phi_s dP_s$ είναι *martingales*. Θεωρούμε την εξής παρακάτω συνάρτηση:

$$g\left(t, X_t, P_t, \int \phi_s dP_s\right) = e^{-a\left(f_{prod}(X_T)P_T - \int \phi_s dP_s - u(f_{prod}(X_T)-\phi_T)\right)}$$

Αρχικά, θα θέλαμε να φέρουμε τη στοχαστική διαδικασία (X_t) σε μορφή δυναμικής εξίσωσης. Θέτουμε, λοιπόν, $X_t = h(t, W_t)$ και υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial h(t, W_t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 X_t$$

$$\frac{\partial X}{\partial W_t} = \frac{\partial h(t, W_t)}{\partial W_t} = X_t \sigma_t$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial W_t^2} = \frac{\partial^2 h(t, W_t)}{\partial W_t^2} = X_t \sigma_t^2$$

Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα του *Itô*, όπως τη διατυπώσαμε στον ορισμό (4.17), προκύπτει το εξής:

$$dX_t = dh(t, W_t) = \frac{\partial X}{\partial t}dt + \frac{\partial X}{\partial W_t}dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial W_t^2}(dW_t)^2 =$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_t^2 X_t dt + X_t\sigma_t dW_t + \frac{1}{2}X_t\sigma_t^2 \iff dX_t = X_t\sigma_t dW_t$$

Σε αυτό το σημείο θα προβούμε στην εφαρμογή της φόρμουλας του *Itô* για τη συνάρτηση $g\left(t, X_t, P_t, \int \phi_s dP_s\right)$, με βάση το πως τη διατυπώσαμε στον ορισμό (4.16). Έχουμε, λοιπόν, το εξής:

$$g\left(t, X_t, P_t, \int \phi_s dP_s\right) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}dX_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}dP_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial(\int \phi_s dP_s)}d\left(\int \phi_s dP_s\right) +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}d[X]_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial P^2}d[P]_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial^2(\int \phi_s dP_s)}d\left[\int \phi_s dP_s\right]_s +$$

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial P}d[X,P]_s + \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial(\int \phi_s dP_s)}d\left[X, \int \phi_s dP_s\right]_s + \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial P\partial(\int \phi_s dP_s)}d\left[P, \int \phi_s dP_s\right]_s (*)$$

- $d\left(\int \phi_s dP_s\right) = \phi_s dP_s = \phi_s\mu_s ds + \phi_s\beta_s dB_s$

- $\dfrac{\partial g}{\partial(\int \phi_s dP_s)} = ag\left(s, X_s, P_s, \int \phi_s dP_s\right)$

- $\dfrac{\partial^2 g}{\partial^2(\int \phi_s dP_s)} = a^2 g\left(s, X_s, P_s, \int \phi_s dP_s\right)$

- $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial(\int \phi_s dP_s)} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial(\int \phi_s dP_s)}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(ag) = a\dfrac{\partial g}{\partial x}$

- $$\frac{\partial^2 g}{\partial P \partial(\int \phi_s dP_s)} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial g}{\partial(\int \phi_s dP_s)}\right) = \frac{\partial}{\partial P}(ag) = a\frac{\partial g}{\partial P}$$

- $$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} dX_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}\sigma_s X_s dW_s$$

- $$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial P} dP_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}(\mu_s ds + \beta_s dB_s) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}\mu_s ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P} dB_s$$

- $$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial(\int \phi_s dP_s)} d\left(\int \phi_s dP_s\right) = \int_0^t ag(\phi_s\mu_s ds + \phi_s\beta_s dB_s) = \int_0^t ag\phi_s\mu_s ds + \int_0^t ag\phi_s\beta_s dB_s$$

Στους παρακάτω υπολογισμούς θα γίνει χρήση της ιδιότητας (4.1).

- $$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} d[X]_s = \left[\int_0^t \sqrt{|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|} dX_s\right] = \left[\int_0^t \sqrt{|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|}\sigma_s X_s dW_s\right] = \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\sigma_s^s X_s^2 ds$$

- $$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial P^2} d[P]_s = \left[\int_0^t \sqrt{|\frac{\partial^2 g}{\partial P^2}|} dP_s\right] = \left[\int_0^t \sqrt{|\frac{\partial^2 g}{\partial P^2}|}(\mu_s ds + \beta_s dB_s)\right] = \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial P^2}\beta_s^2 ds$$

- $$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial^2(\int \phi_s dP_s)} d\left[\int \phi_s dP_s\right]_s = \int_0^t a^2 g d\left[\int \phi_s dP_s\right]_s = a^2\left[\int_0^t \sqrt{g} d\left(\int \phi_s dP_s\right)\right] =$$

$$= a^2\left[\int_0^t \sqrt{g}(\phi_s\mu_s ds + \phi_s\beta_s dB_s)\right] = \int_0^t a^2 g\phi_s^2\beta_s^2 ds$$

Για τους παρακάτω υπολογισμούς θα αξιοποιήσουμε την ιδιότητα (4.2).

- $\displaystyle\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial P} d[X,P]_s = \left[\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial P} dX_s, dP_s\right] = \left[\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial P}\sigma_s X_s dW_s \ , \ \mu_s ds + \beta_s dB_s\right] =$

$$\left[\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial P}\sigma_s X_s dW_s \ , \ \beta_s dB_s\right] = \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial P}\sigma_s X_s \beta_s \rho ds$$

- $\displaystyle\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial (\int \phi_s dP_s)} d\left[X, \int \phi_s dP_s\right] = \int_0^t a\frac{\partial g}{\partial x} d\left[X, \int \phi_s dP_s\right] =$

$$\left[\int_0^t a\frac{\partial g}{\partial x} dX_s, d\left(\int \phi_s dP_s\right)\right] = \left[\int_0^t a\frac{\partial g}{\partial x}\sigma_s X_s dW_s \ , \ \phi_s \beta_s dB_s\right] = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} a\sigma_s X_s \phi_s \beta_s \rho ds$$

- $\displaystyle\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial P \partial (\int \phi_s dP_s)} d\left[P \ , \ \int \phi_s dP_s\right]_s = \int_0^t a\frac{\partial g}{\partial P} d\left[P, \int \phi_s dP_s\right]_s = \left[\int_0^t a\frac{\partial g}{\partial P} dP, d\left(\int \phi_s dP_s\right)\right]$

$$= \left[\int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}\mu_s ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}\beta_s dB_s \ \ , \ \ \phi_s \mu_s ds + \phi_s \beta_s dB_s\right] = \left[\int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}\beta_s dB_s \ \ , \ \ \phi_s \beta_s dB_s\right] =$$

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial P} a\beta_s^2 \phi_s ds$$

Ανατρέχοντας εκ νέου στην σχέση (∗), λαμβάνοντας υπ'όψιν τους παραπάνω υπολογισμούς προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$g\left(t, X_t, P_t, \int \phi_s dP_s\right) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s} ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}\sigma_s X_s dW_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}\mu_s ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P} dB_s +$$

$$\int_0^t ag\phi_s \mu_s ds + \int_0^t ag\phi_s \beta_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\sigma_s^s X_s^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial P^2}\beta_s^2 ds +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t a^2 g\phi_s^2 \beta_s^2 ds + \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial P}\sigma_s X_s \beta_s \rho ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} a\sigma_s X_s \phi_s \beta_s \rho ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P} a\beta_s^2 \phi_s ds$$

Θα προκύψει, συνεπώς:

$$\int_0^t \left[\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial P}\mu_s + ag\phi_s\mu_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\sigma_s^s X_s^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial P^2}\beta_s^2 + \frac{1}{2}a^2 g\phi_s^2\beta_s^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial P}\sigma_s X_s\beta_s\rho\right] ds+$$

$$\int_0^t \left[\frac{\partial g}{\partial x}a\sigma_s X_s\phi_s\beta_s\rho + \frac{\partial g}{\partial P}a\beta_s^2\phi_s\right] ds+$$

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}\sigma_s X_s dW_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}dB_s + \int_0^t ag\phi_s\beta_s dB_s$$

Συμπέρασμα: Ο,τιδήποτε βρίσκεται μπροστά από το ds συνιστά τον απειροστικό γεννήτορα της εν λόγω συνάρτησης των θεωρημένων στοχαστικών διαδικασιών. Ο,τι απομένει, δηλαδή $\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}\sigma_s X_s dW_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial P}dB_s + \int_0^t ag\phi_s\beta_s dB_s$ συνιστά *martingale.*

4.6 Αποστροφή στο ρίσκο – Αγοραστής και Πωλητής

Η συγκεκριμένη υποενότητα αφορά την πάλι την περίπτωση ενός μικρού παραγωγού ενέργειας που δεν αδιαφορεί για τους κινδύνους και στοχεύει σε μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας του τελικού κέρδους. Η συνάρτηση χρησιμότητας θεωρούμε ότι έχει τον εξής τύπο: $U(x) = 1 - e^{-ax}$ με $a > 0$. Τέλος, στη συγκεκριμένη υποενότητα, όμως, μελετάμε την περίπτωση, όπου ο παραγωγός έχει δικαίωμα και για αγορά, αλλά και για πώληση ενέργειας.

Το ζήτημα βελτιστοποίησης που θα μας απασχολήσει στην εν λόγω υποενότητα:

$$\min_{\phi\in\mathcal{A}_+} E\left[e^{-a\left(f_{prod}(X_T)P_T - \int_0^T \phi_s dP_s\right)}\right]$$

Η διαφοροποίηση σε αυτό το σημείο σε σχέση με την αμέσως προηγούμενη υποενότητα είναι ότι η συνάρτηση ποινής δεν παίζει κανέναν απολύτως ρόλο, καθώς ένα ενδεχόμενο άλμα στη στρατηγική δε μεταβάλλει το κέρδος από τις συναλλαγές. Εφ'όσον ο παραγωγός έχει το δικαίωμα και για πραγματοποίηση αγοράς ενέργειας, δε θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσει την αγορά εξισορρόπησης.

Καθώς εντός της αναμενόμενης τιμής παρατηρούμε την ύπαρξη των X_T, P_T, έχουμε ότι οι X_t, P_t συνιστούν τις μεταβλητές κατάστασης.

Σύμφωνα με το επιστημονικό άρθρο [1], η συνάρτηση αξίας σε αυτήν την περίπτωση θα δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\upsilon(t, X, P) = \min_{\phi_s, t \leq s \leq T} E^{(t,X,P)} \left[e^{-a\left(f_{prod}(X_T)P_T - \int_t^T \phi_s dP_s\right)} \right]$$

Η σχετιζόμενη HJB εξίσωση με το εν λόγω ζήτημα βελτιστοποίησης είναι η εξής:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \min_{\phi} \mathcal{L}^{\phi} \upsilon = 0$$

$$\mathcal{L}^{\phi}\upsilon = \mu_t \frac{\partial \upsilon}{\partial P} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 x^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\beta_t^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial P^2} + \sigma_t \beta_t \rho x \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial P}$$
$$+\alpha\phi\mu_t\upsilon + \frac{a^2}{2}\phi^2\beta_t^2\upsilon + \alpha\phi\beta_t^2\frac{\partial \upsilon}{\partial P} + \alpha\phi\beta_t\sigma_t x\rho\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

Τέλος, όσον αφορά την τελική συνθήκη ισχύει: $\upsilon(T, X, P) = e^{-af_{prod}(X)P}$.

Κεφάλαιο 5

Βιβλιογραφία

[1] *Zongjun Tan and Peter Tankov - Optimal Trading Policies for Wind Energy Producer - SIAM J.Financial MATH. - Vol.*9, *No.*1 *p.p* 315-346

[2] *A. Garcia, J. Torres, E. Prieto, and A. De Francisco, Fitting wind speed distributions: A case study, Solar Energy*, 62 (1998), *pp.* 139–144

[3]*Nizar Touzi- Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, And Backward SDE - Chapter* 12 *by Agnes TOURIN - May* 2010

[4] *H. Pham, Continuous−Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications, Stoch. Model Appl. Probab.* 61, *Springer, Berlin,* 2009

[5] *Rene Aid - Electricity Derivatives - Springer Briefs In Quantitative Finance*

[6] *Andrea Pascucci Wolfgang J. Runggaldier - Financial Mathematics - Theory and Problems for Multi - period Models - Springer*

[7] *www.enexgroup.gr*

[8] Σημειώσεις του Επίκουρου Καθηγητή Ε.Μ.Π κ. Αντώνιου Παπαπαντολέων στο μάθημα της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε: Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές