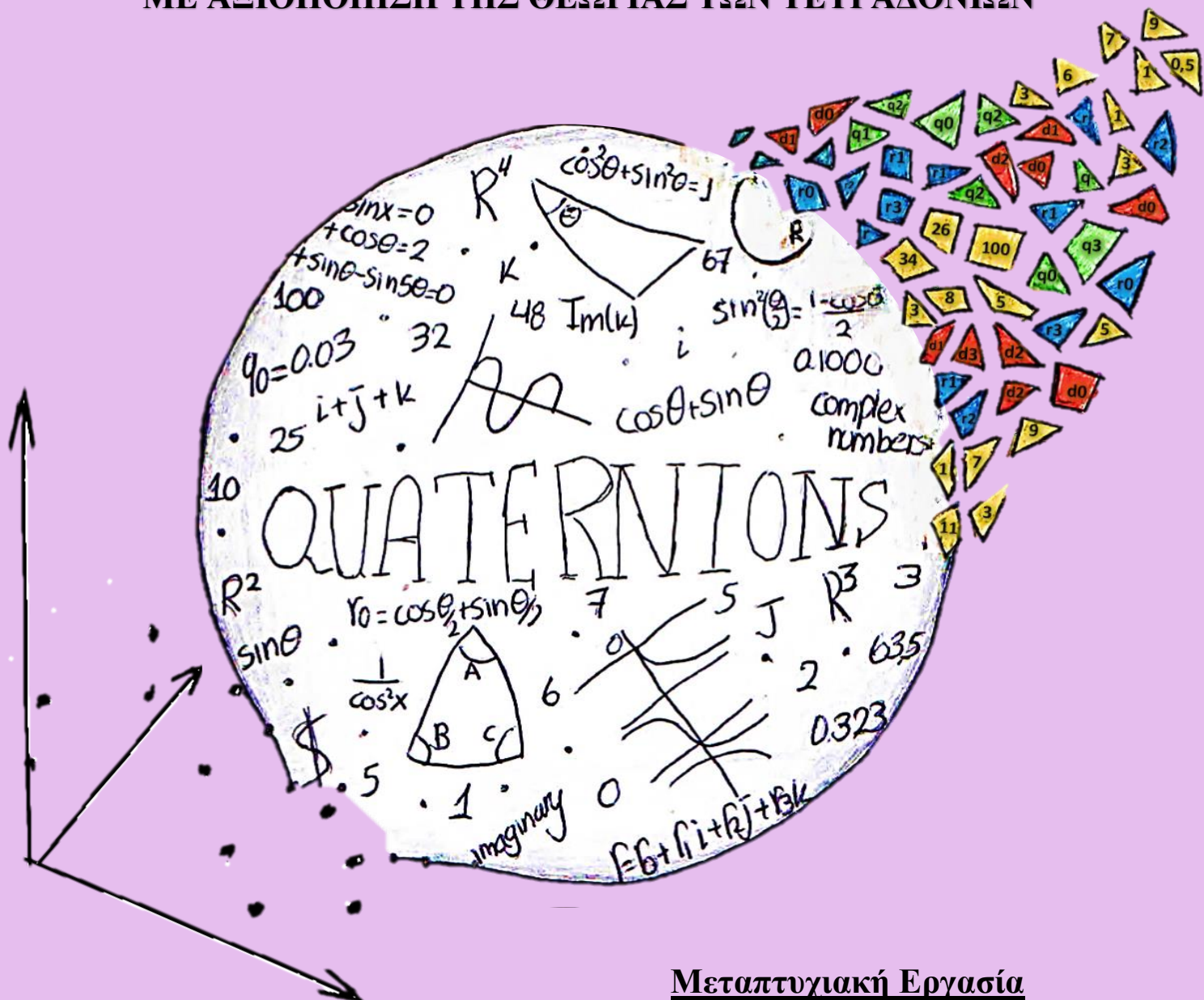




## ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΕ ΔΕΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΔΟΝΙΩΝ



Μεταπτυχιακή Εργασία  
Ιωαννίδου Στεφανία

Επιβλέπων:  
Γεώργιος Πανταζής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ ΙΟΥΝΙΟΣ 2020





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

**ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ  
ΜΕ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΔΟΝΙΩΝ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

της

**ΙΩΑΝΝΙΔΟΥ ΣΤΕΦΑΝΙΑΣ**

**Επιβλέπων :** Γεώργιος Πανταζής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή:

*(Υπογραφή)*

.....  
Μαρία Τσακίρη  
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

*(Υπογραφή)*

.....  
Γεώργιος Πανταζής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
(επιβλέπων)

*(Υπογραφή)*

.....  
Βασίλειος Γκίκας  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

**ΑΘΗΝΑ ΙΟΥΝΙΟΣ 2020**

(Υπογραφή)



.....  
**ΙΩΑΝΝΙΔΟΥ ΣΤΕΦΑΝΙΑ**

Διπλωματούχος Αγρονόμος και Τοπογράφος Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωαννίδου Στεφανία, 2020

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Μετά το τέλος της εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες και ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον Καθηγητή της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του ΕΜΠ κ. Γιώργο Πανταζή για τη διατύπωση και την ανάθεση ενός τόσο ενδιαφέροντος, απαιτητικού και παράλληλα σπάνιου θέματος, το οποίο λάμβανε υπόψιν τα ενδιαφέροντα και τις ανησυχίες μου για τον κλάδο της Γεωδαισίας.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, την καθοδήγηση, αλλά και τη συνεχή βοήθειά του σε όλη τη σύνταξη της εργασίας, μα και στην επίλυση αποριών όπου ήταν απαραίτητο.

Επιπλέον θέλω να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του ΕΜΠ κ. Ευαγγελία Λάμπρου, που δυστυχώς δεν είναι πλέον στη ζωή και είχε προβληματιστεί ιδιαίτερα με το συγκεκριμένο θέμα. Ακόμα και αν δεν κατάφερε να το μελετήσει περαιτέρω όσο ζούσε, με ενέπνευσε ιδιαίτερα, προκειμένου να πειστώσω και να έχω το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Ακόμη την ευχαριστώ θερμά, που σε συνεργασία με τον κ. Πανταζή με έκαναν να αγαπήσω τον κλάδο της Γεωδαισίας και να θελήσω να τον εξελίξω στο μέλλον.

Ένα ακόμα μεγάλο ευχαριστώ θέλω να το εκφράσω τόσο στον παιδικό μου φίλο Κων/νο που διαβάζαμε παρέα όλον αυτόν το καιρό, καθώς και στους φοιτητές της σχολής μας Νίκη και Άρη που με βοήθησαν να συγκροτήσω την σκέψη μου, όταν χρειαζόταν, και να μην αποπροσανατολιστώ από το στόχο μου ακόμα και αν προκύπταν σημαντικές δυσκολίες. Τέλος ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου τους γονείς μου Νατάσα και Ισαάκ, αλλά και την αδερφή μου Ιουλία, που χωρίς την αμέριστη υποστήριξή τους αλλά και την κατανόησή τους στα άγχη και τις αγωνίες μου, δεν θα ήμουν σε θέση να ολοκληρώσω τις μεταπτυχιακές μου σπουδές μου και να επιτύχω τους στόχους μου.

Ιωαννίδου Στεφανία



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συνεχής ανάπτυξη της τεχνολογίας, τόσο σε επίπεδο συλλογής όσο και επεξεργασίας δεδομένων, οδήγησε στην καθολική χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, για την επίλυση σημαντικών προβλημάτων της επιστήμης των μηχανικών. Πολυσύνθετες διαδικασίες μπορούν να πραγματοποιηθούν σε πολύ λίγο χρόνο και χωρίς ιδιαίτερα αυξημένους υπολογιστικούς πόρους.

Από την άλλη, η ανάγκη δημιουργίας μιας ενιαίας βάσης δεδομένων στη γεωχωρική πληροφορία αποτελεί σημαντικό πρόβλημα τόσο στην επιστήμη του τοπογράφου μηχανικού όσο και σε άλλους κλάδους.

Έτσι οι υπολογιστές συμβάλουν σημαντικά στον μετασχηματισμό συστημάτων αναφοράς για τη δημιουργία μιας κοινής βάσης. Σύνθετες μαθηματικές πράξεις επιλύονται με μεγάλη ευκολία και χωρίς ιδιαίτερη συνεισφορά του χρήστη. Το ερώτημα όμως είναι, αν επιλύονται με τον πιο ορθό τρόπο και αν τα αποτελέσματα ανταποκρίνονται πλήρως στην πραγματικότητα με την απαιτούμενη ακρίβεια.

Έχει παρατηρηθεί, πως πολλές φορές η μη ορθότητα προκύπτει από τον τρόπο του υπολογισμού των στροφών των συστημάτων. Ο λεγόμενος πίνακας στροφής, απασχολεί τους επιστήμονες από πολύ παλιά, καθώς οι υπολογισμοί του είναι ιδιαίτερα σύνθετοι, κυρίως αν περιλαμβάνουν τριγωνομετρία. Για το σκοπό αυτό και για μεγαλύτερη ευκολία χρησιμοποιήθηκαν οι μιγαδικοί αριθμοί σε στροφές σημείων του επιπέδου. Με την ανάγκη μελέτης στροφών σημείων στο χώρο και τη μη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών, δημιουργήθηκε μία νέα αλγεβρική δομή, αυτή των τετραδονίων.

Με την πάροδο των χρόνων, και εξαιτίας της τεχνολογία, η επίλυση αυτή εγκαταλείφθηκε. Ο τριγωνομετρικός υπολογισμός, με τη χρήση των γωνιών Euler, επικράτησε, όμως το βασικό ερώτημα διατηρήθηκε, καθώς οι επιλύσεις πολλές φορές αποκλίνουν.

Έτσι το ενδιαφέρον εστιάσθηκε στο ποια μέθοδος είναι καλύτερη, αλλά και ποια ανταποκρίνεται περισσότερο στην πραγματικότητα ανάλογα την περίπτωση.





# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ .....	I
ΠΡΟΛΟΓΟΣ .....	III
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	V
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ.....	IX
ΕΙΚΟΝΕΣ .....	XII
ΠΙΝΑΚΕΣ.....	XII
ΣΧΗΜΑΤΑ.....	XIII
ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ.....	XV
ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	XIX
ABSTRACT.....	XIX

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>1</b>
-----------------------	----------

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

### **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ**

1.1 Γενικά.....	3
1.2 Μιγαδικοί αριθμοί.....	3
1.2.1 Οι μιγαδικοί ως ζεύγη αριθμών .....	4
1.2.2 Γεωμετρική αναπαράσταση δυάδων .....	5
1.2.3 Περιστροφή επιπέδων με τη χρήση δυάδων.....	6
1.3 Τετραδόνια.....	7
1.3.1 Βασικές ιδιότητες των τετράδων .....	9
1.3.2 Γεωμετρική ερμηνεία τετραδονίων .....	10
1.4 Μέθοδοι περιστροφών στο χώρο.....	11
1.4.1 Πίνακες στροφής.....	11
1.4.2 Γωνίες Euler (Euler Angle Sequence) .....	13
1.4.3 Περιστροφή με τη χρήση τετραδονίων.....	14
1.4.4 Σύγκριση μεθόδων .....	17

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

### **ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

2.1 Γενικά.....	19
2.2 Μετασχηματισμός Helmert.....	19
2.2.1 Επίλυση με τη χρήση τετραδονίων.....	21
2.3 Μετασχηματισμοί και χρήση Διπλών Τετραδονίων.....	22
2.3.1 Εισαγωγή στους διπλούς αριθμούς (Dual Numbers) .....	22
2.3.2 Διπλά τετραδόνια (Dual Quaternions).....	23
2.3.3 Εφαρμογή στον μετασχηματισμό Helmert .....	24
2.4 Σύγκριση μεθόδων προσδιορισμού παραμέτρων Helmert .....	26

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

### **ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕΘΟΔΩΝ**

3.1 Γενικά.....	29
3.2 Εντοπισμός οριακών γωνιών στροφής .....	30
3.3 Δόμηση σεναρίων .....	34
3.3.1 Επιλογή συντεταγμένων στο παλιό σύστημα.....	35
3.3.2 Επιλογή παραμέτρων μετασχηματισμού .....	36
3.4 Μεθοδολογία επίλυσης σεναρίων.....	38
3.4.1 Επιλογή μεθόδου συνόρθωσης .....	38
3.4.2 Συνόρθωση για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	40
3.4.3 Συνόρθωση για τη μέθοδο απλών τετραδονίων .....	42
3.4.4 Συνόρθωση για τη μέθοδο διπλών τετραδονίων .....	44
3.5 Αποτελέσματα επίλυσης σεναρίων.....	46
3.5.1 Αποτελέσματα κλασσικής μεθόδου.....	46
3.5.2 Αποτελέσματα μεθόδου απλών τετραδονίων .....	51
3.5.3 Αποτελέσματα μεθόδου διπλών τετραδονίων .....	56
3.6 Ανάλυση μεθόδων ανά σύνολο δεδομένων .....	61
3.6.1 Ανάλυση για το πρώτο σύνολο δεδομένων .....	61
3.6.2 Ανάλυση για το δεύτερο σύνολο δεδομένων .....	63
3.6.3 Ανάλυση για το τρίτο σύνολο δεδομένων .....	65
3.7 Σύγκριση μεθόδων .....	67

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

### **ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

4.1 Γενικά.....	69
4.2 Μετασχηματισμός συντεταγμένων για την μελέτη μετακινήσεων .....	69
4.2.1 Εφαρμογή κλασσικής μεθόδου.....	71
4.2.2 Εφαρμογή μεθόδου απλών τετραδονίων .....	72
4.2.3 Εφαρμογή μεθόδου διπλών τετραδονίων .....	73
4.2.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων .....	74
4.3 Μετασχηματισμός συντεταγμένων για την παρακολούθηση ταλαντώσεων γέφυρας.....	74
4.3.1 Εφαρμογή κλασσικής μεθόδου.....	76
4.3.2 Εφαρμογή μεθόδου απλών τετραδονίων .....	76
4.3.3 Εφαρμογή μεθόδου διπλών τετραδονίων .....	77
4.3.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων .....	78
4.4 Μετασχηματισμός συντεταγμένων για την αυτοβαθμονόμηση φωτομηχανών.....	78
4.4.1 Εφαρμογή κλασσικής μεθόδου.....	80
4.4.2 Εφαρμογή μεθόδου απλών τετραδονίων .....	80
4.4.3 Εφαρμογή μεθόδου διπλών τετραδονίων .....	81
4.4.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων .....	81

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5**

### **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ**

5.1 Συμπεράσματα .....	83
5.2 Προτάσεις .....	88

<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	91
<b>ΙΣΤΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	93

### **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ**

Π1: Αριθμητικές σχέσεις για την κλασσική μέθοδο .....	97
Π1.1 Πρόβλημα προσδιορισμού παραμέτρων μετασχηματισμού.....	97
Π1.2 Πρόβλημα μετασχηματισμού συντεταγμένων.....	101
Π2: Αριθμητικές σχέσεις για τη μέθοδο απλών τετραδονίων .....	103
Π2.1 Πρόβλημα προσδιορισμού παραμέτρων μετασχηματισμού.....	103
Π2.2 Πρόβλημα μετασχηματισμού συντεταγμένων.....	107
Π3: Αριθμητικές σχέσεις για τη μέθοδο διπλών τετραδονίων .....	111
Π3.1 Πρόβλημα προσδιορισμού παραμέτρων μετασχηματισμού.....	111
Π3.2 Πρόβλημα μετασχηματισμού συντεταγμένων.....	113
Π4: Αποτελέσματα επίλυσης σεναρίων για κάθε μέθοδο .....	117
Π4.1: Αποτελέσματα επίλυσης για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	117
Π4.2: Αποτελέσματα επίλυσης για τη μέθοδο απλών τετραδονίων.....	122
Π4.3: Αποτελέσματα επίλυσης για τη μέθοδο διπλών τετραδονίων.....	127



## ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Διάγραμμα 3.1: Μεταβολή συντεταγμένων με εφαρμογή στροφής του άξονα x .....	30
Διάγραμμα 3.2: Μεταβολή συντεταγμένων με εφαρμογή στροφής του άξονα y .....	31
Διάγραμμα 3.3: Μεταβολή συντεταγμένων με εφαρμογή στροφής του άξονα z .....	31
Διάγραμμα 3.4: Μεταβολή συντεταγμένων με εφαρμογή στροφής και στους τρεις άξονες .....	32
Διάγραμμα 3.5: Επιμέρους μεταβολή συντεταγμένων για γωνία $0^{\circ}$ - $20^{\circ}$ .....	33
Διάγραμμα 3.6: Επιμέρους μεταβολή συντεταγμένων για γωνία $90^{\circ}$ - $120^{\circ}$ .....	33
Διάγραμμα 3.7: Επιμέρους μεταβολή συντεταγμένων για γωνία $160^{\circ}$ - $180^{\circ}$ .....	34
Διάγραμμα 3.8: Ποσοστά ορθών και λανθασμένων επιλύσεων συνολικά και ανά παράμετρο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	47
Διάγραμμα 3.9: Αποκλίσεις διανύσματος μετάθεσης ανά σενάριο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	48
Διάγραμμα 3.10: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων του διανύσματος μετάθεσης για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	48
Διάγραμμα 3.11: Απόκλιση κλίμακας ανά σενάριο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης.....	49
Διάγραμμα 3.12: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα x ανά σενάριο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	49
Διάγραμμα 3.13: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα y ανά σενάριο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	50
Διάγραμμα 3.14: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα z ανά σενάριο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	50
Διάγραμμα 3.15: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά άξονα για την κλασσική μέθοδο επίλυσης .....	50
Διάγραμμα 3.16: Ποσοστά ορθών και λανθασμένων επιλύσεων συνολικά και ανά παράμετρο για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων .....	52
Διάγραμμα 3.17: Αποκλίσεις διανύσματος μετάθεσης ανά σενάριο για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων .....	53

Διάγραμμα 3.18: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων του διανύσματος μετάθεσης για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων.....	53
Διάγραμμα 3.19: Απόκλιση κλίμακας ανά σενάριο για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων.....	54
Διάγραμμα 3.20: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για τις αποκλίσεις κλίμακας για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων.....	54
Διάγραμμα 3.21: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα x ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων.....	55
Διάγραμμα 3.22: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα y ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων.....	55
Διάγραμμα 3.23: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα z ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων.....	55
Διάγραμμα 3.24: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά άξονα για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων.....	56
Διάγραμμα 3.25: Ποσοστά ορθών και λανθασμένων επιλύσεων συνολικά και ανά παράμετρο για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων.....	57
Διάγραμμα 3.26: Αποκλίσεις διανύσματος μετάθεσης ανά σενάριο για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων.....	58
Διάγραμμα 3.27: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων του διανύσματος μετάθεσης για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων.....	58
Διάγραμμα 3.28: Απόκλιση κλίμακας ανά σενάριο για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων.....	59
Διάγραμμα 3.29: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων κλίμακας για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων.....	59
Διάγραμμα 3.30: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα x ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων.....	60
Διάγραμμα 3.31: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα y ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων.....	60
Διάγραμμα 3.32: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα z ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων.....	60

Διάγραμμα 3.33: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά άξονα για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων .....	61
Διάγραμμα 3.34: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά μέθοδο για το πρώτο σύνολο δεδομένων .....	62
Διάγραμμα 3.35: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των μεταθέσεων ανά μέθοδο για το πρώτο σύνολο δεδομένων .....	62
Διάγραμμα 3.36: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων της κλίμακας ανά μέθοδο για το πρώτο σύνολο δεδομένων .....	62
Διάγραμμα 3.37: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των στροφών για το πρώτο σύνολο δεδομένων .....	63
Διάγραμμα 3.38: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των μεταθέσεων για το πρώτο σύνολο δεδομένων.....	63
Διάγραμμα 3.39: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά μέθοδο για το δεύτερο σύνολο δεδομένων .....	64
Διάγραμμα 3.40: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των μεταθέσεων ανά μέθοδο για το δεύτερο σύνολο δεδομένων .....	64
Διάγραμμα 3.41: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων της κλίμακας ανά μέθοδο για το δεύτερο σύνολο δεδομένων .....	64
Διάγραμμα 3.42: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των στροφών για το δεύτερο σύνολο δεδομένων.....	65
Διάγραμμα 3.43: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των μεταθέσεων για το δεύτερο σύνολο δεδομένων .....	65
Διάγραμμα 3.44: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά μέθοδο για το τρίτο σύνολο δεδομένων .....	66
Διάγραμμα 3.45: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των μεταθέσεων ανά μέθοδο για το τρίτο σύνολο δεδομένων .....	66
Διάγραμμα 3.46: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων της κλίμακας ανά μέθοδο για το τρίτο σύνολο δεδομένων .....	66
Διάγραμμα 3.47: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των στροφών για το τρίτο σύνολο δεδομένων .....	67
Διάγραμμα 3.48: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των μεταθέσεων για το τρίτο σύνολο δεδομένων .....	67
Διάγραμμα 5.1: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων και αβεβαιότητάς όλων των παραμέτρων μετασχηματισμού για το σύνολο των σεναρίων.....	86

## EΙΚΟΝΕΣ

Εικόνα 1.1: Πλάκα Quaternion στη γέφυρα Brougham του Δουβλίνου .....	8
Εικόνα 1.2: Περιστροφή γύρω από τον άξονα y-άξονας 1 (α), τον άξονα z-άξονας 3 (β) και τον άξονα x-άξονας 2 (γ) και ευθυγράμμιση αξόνων 1 και 3 (δ) .....	14
Εικόνα 3.1: Τριγωνομετρικός κύκλος και συμμετρία γωνιών .....	51
Εικόνα 4.1: Δίκτυο ανίχνευσης μετακινήσεων στη Ζάκυνθο. ....	69
Εικόνα 4.2: Η γέφυρα του Ευρίπου και οι στάσεις μέτρησης της .....	74
Εικόνα 4.3: Προσημασμένος τοίχος πεδίου ελέγχου ΣΑΤΜ .....	78
Εικόνα 4.4: Κατακόρυφοι στύλοι πεδίου ελέγχου ΣΑΤΜ .....	79

## ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας 2.1: Συνοπτική παρουσίαση μεθόδων .....	27
Πίνακας 3.1: Εύρος τιμών παραμέτρων μετασχηματισμού .....	37
Πίνακας 3.2: Σενάρια διερεύνησης .....	37
Πίνακας 4.1: Μεταβολές των σημείων στο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς .....	70
Πίνακας 4.2: Παράμετροι μετασχηματισμού για το δίκτυο της Ζακύνθου .....	71
Πίνακας 4.3: Γεωδαιτικές συντεταγμένες κορυφών του δικτύου .....	71
Πίνακας 4.4: Μεταβολή συντεταγμένων και αβεβαιότητες κάθε κορυφής στο σύστημα E, N, Up, όπως υπολογίστηκαν με τη κλασσική μέθοδο .....	72
Πίνακας 4.5: Μεταβολή συντεταγμένων και αβεβαιότητες κάθε κορυφής στο σύστημα E, N, Up, όπως υπολογίστηκαν με τη μέθοδο απλών τετραδονίων .....	73
Πίνακας 4.6: Μεταβολή συντεταγμένων και αβεβαιότητες κάθε κορυφής στο σύστημα E, N, Up, όπως υπολογίστηκαν με τη μέθοδο διπλών τετραδονίων .....	73
Πίνακας 4.7: Αρχικές συντεταγμένες σημείων σε τοπικό σύστημα αναφοράς .....	75
Πίνακας 4.8: Παράμετροι μετασχηματισμού για τη γέφυρα του Ευρίπου .....	75
Πίνακας 4.9: Συντεταγμένες σημείων στο σύστημα αναφοράς της γέφυρας όπως προέκυψαν από την κλασσική μέθοδο .....	76
Πίνακας 4.10: Συντεταγμένες σημείων στο σύστημα αναφοράς της γέφυρας όπως προέκυψαν από τη μέθοδο απλών τετραδονίων .....	77
Πίνακας 4.11: Συντεταγμένες σημείων στο σύστημα αναφοράς της γέφυρας όπως προέκυψαν από τη μέθοδο διπλών τετραδονίων .....	77



Πίνακας 4.12: Αρχικές συντεταγμένες ορισμένων στόχων φωτοπεδίου στο τοπικό σύστημα αναφοράς .....	79
Πίνακας 4.13: Παράμετροι μετασχηματισμού για το πεδίο ελέγχου της ΣΑΤΜ .....	80
Πίνακας 4.14: Συντεταγμένες σημείων στο φωτογραμμετρικό σύστημα όπως προέκυψαν από την κλασσική μέθοδο.....	80
Πίνακας 4.15: Συντεταγμένες σημείων στο φωτογραμμετρικό σύστημα όπως προέκυψαν από τη μέθοδο απλών τετραδονίων .....	81
Πίνακας 4.16: Συντεταγμένες σημείων στο φωτογραμμετρικό σύστημα όπως προέκυψαν από τη μέθοδο διπλών τετραδονίων .....	81

## ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού ως διανυσματική ακτίνα .....	5
Σχήμα 1.2: Αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού σε πολική μορφή.....	5
Σχήμα 1.3: Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί .....	6
Σχήμα 1.4: Περιστροφή επιπέδου.....	7
Σχήμα 1.5: Περιστροφή στο μιγαδικό επίπεδο .....	7
Σχήμα 1.6: Οι άξονες $i, j, k$ .....	9
Σχήμα 1.7: Quaternion Rotation Operator.....	11
Σχήμα 1.8: Κανόνας του δεξιού χεριού .....	12
Σχήμα 3.1: Αρχικά δεδομένα για το μικρόκοσμο.....	35
Σχήμα 3.2: Αρχικά δεδομένα για το μακρόκοσμο.....	35
Σχήμα 3.3: Αρχικά δεδομένα για μέσες αποστάσεις.....	36



## ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$\frac{\partial f y}{\partial a}$	Μερική παράγωγος της σχέσης $f y$ ως προς το στοιχείο $a$
$\alpha, \beta, \gamma$	Γωνίες Euler γύρω από τους άξονας $x, y, z$ αντίστοιχα
$\mathbf{a}$	Διάνυσμα του χώρου $R^3$
$a$	Πραγματικός αριθμός
$A$	Πίνακας συντελεστών των παραμέτρων που ενδιαφέρουν από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$A_4^{10}$	Πίνακας διαστάσεων $4 \times 10$
$b$	Πραγματικός αριθμός
$B$	Πίνακας συντελεστών των μετρημένων στοιχείων από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$c$	Πραγματικός αριθμός
$c$	Πλήθος εξισώσεων συνθήκης από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$C$	Σύνολο μιγαδικών αριθμών
$C'$	Συμμετρικός πίνακας για τον υπολογισμό του πίνακα στροφής
$C(q)$	Συμμετρικός πίνακας για τον υπολογισμό του πίνακα στροφής με τη χρήση του τετραδονίου $q$
$d$	Τετραδόνιο σύνθεσης διπλών τετραδονίων
$diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ στη κύρια διαγώνιο
$det R$	Ορίζουσα του πίνακα $R$
$d$	Πραγματικός αριθμός
$d$	Διπλός αριθμός
$\varepsilon$	Διπλός τελεστής με την ιδιότητα $\varepsilon^2 = 0$ και $\varepsilon \neq 0$
$E, N, U_p$	Συντεταγμένες σε αυθαίρετο τοπικό σύστημα αναφοράς
$\varphi, \lambda$	Γεωδαιτικές συντεταγμένες σημείου
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Γωνίες Euler γύρω από τους άξονας $x, y, z$ αντίστοιχα (αντίστοιχες των $\alpha, \beta, \gamma$ )
$i, j, k$	Φανταστικές μονάδες, Ορθοκανονικές συντεταγμένες του χώρου $R^3$
$i$	Πραγματικός ακέραιος θετικός αριθμός
$I$	Μοναδιαίος πίνακας
$Im(z)$	Φανταστικό μέρος του $z$
$Im$	Σύνολο φανταστικών αριθμών
$J$	Ιακωβιανός πίνακας από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$\theta$	Γωνία που σχηματίζει ο άξονας του $x$ με την εικόνα του μιγαδικού $z$

$k$	Το διάνυσμα των σταθερών όρων από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Συντελεστές κλίμακας
$l$	Πίνακας συντελεστών των μετρημένων στοιχείων από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$L_q(\mathbf{v})$	Τελεστής περιστροφής τετραδονίου $q$ (Quaternion Rotation Operator)
$m$	Συνολικός αριθμός των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$m_0$	Αριθμός των παραμέτρων $x$ που ενδιαφέρουν από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$M(z)$	Εικόνα του μιγαδικού $z$ στο καρτεσιανό επίπεδο
$\mathbf{n}$	Διάνυσμα του χώρου $R^3$
$n$	Αριθμός των μετρημένων στοιχείων από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$P$	Πίνακας βαρών από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$p$	Τετραδόνιο
$p_0$	Βαθμωτή συνιστώσα τετραδονίων $p$
$\mathbf{p}$	Διανυσματική συνιστώσα τετραδονίου $p$
$p_1, p_2, p_3$	Στοιχεία διανύσματος $\mathbf{p}$ (πραγματικοί αριθμοί)
$p_i'$	Σημείο του χώρου $R^3$ με άξον αριθμό $i$
$p_i$	Σημείο του χώρου $R^3$ με άξον αριθμό $i$
$Q(\mathbf{r})$	Ορισμένος πίνακας για το τετραδόνιο $r$
$Q_{xyz}$	Τετραδόνιο που χρησιμοποιείται για στροφή κατά $x, y, z$
$Q^{\text{norm}}$	Κανονικοποιημένο τετραδόνιο
$q$	Τετραδόνιο
$q_0$	Βαθμωτή συνιστώσα τετραδονίου $q$
$\mathbf{q}$	Διανυσματική συνιστώσα τετραδονίου $q$
$q_1, q_2, q_3$	Στοιχεία διανύσματος $\mathbf{q}$ (πραγματικοί αριθμοί)
$q^*, \bar{q}$	Συζυγής του τετραδονίου $q$
$ q , N(q)$	Μέτρο τετραδονίου $q$
$\bar{q}$	Διπλό τετραδόνιο
$\bar{q}^*, \bar{\bar{q}}$	Συζυγής διπλού τετραδονίου $\bar{q}$
$ \bar{q} , N(\bar{q})$	Μέτρο διπλού τετραδονίου $\bar{q}$
$\mathbf{r}$	Μοναδιαίο τετραδόνιο που αναπαριστά τη στροφή στη θεωρία των διπλών τετραδονίων
$r$	Βαθμός ελευθερίας από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$r$	Πραγματικός αριθμός
$\text{Re}(z)$	Πραγματικό μέρος του $z$
$\text{Re}$	Σύνολο πραγματικών αριθμών
$R$	Μαθηματικός χώρος μίας διάστασης

$R^2$	Μαθηματικός χώρος δύο διαστάσεων
$R^3$	Μαθηματικός χώρος τριών διαστάσεων
$R^4$	Μαθηματικός χώρος τεσσάρων διαστάσεων
$R$	Πίνακας στροφής
$R_{xyz}$	Πίνακας στροφής για περιστροφή κατά τον άξονα $x$ , μετά κατά τον άξονα $y$ και τέλος κατά τον άξονα $z$
$R_x, R_y, R_z$	Πίνακας στροφής για στροφή μόνο στον άξονα άξονας $x$ στροφή μόνο στον άξονα $y$ και στροφή μόνο στον άξονα $z$ αντίστοιχα
$R^Q$	Γενικός πίνακας στροφής τετραδονίων
$\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'}$	Σφάλμα συντεταγμένων $x', y', z'$ ενός σημείου
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Σφάλμα συντεταγμένων $x, y, z$ ενός σημείου
$\widehat{\sigma}_0^2$	a posteriori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$S_{12}$	Απόσταση μεταξύ των σημείων 1 και 2
$\mathbf{t}$	Τετραδόνιο που αναπαριστά τη μετάθεση και είναι της μορφής $\mathbf{t} = (0, t_x, t_y, t_z)$
$t$	Διάνυσμα του χώρου $R^3$
$\mathbf{t}$	Διάνυσμα μετάθεσης στο χώρο $R^3$
$t_x, t_y, t_z$	Στοιχεία σύνθεσης διανύσματος μετάθεσης $\mathbf{t}$
$\vec{u}$	Διάνυσμα του χώρου $R^3$
$\hat{u}$	Μοναδιαίο διάνυσμα του χώρου $R^3$ ( $\hat{u} = (i, j, k)$ )
$u$	Το διάνυσμα των υπολοίπων των μετρήσεων από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$\widehat{V}_{\hat{x}}$	Πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$\mathbf{v}$	Διάνυσμα του χώρου $R^3$
$W(\mathbf{r})^T$	Ανάστροφος του πίνακα $W(\mathbf{r})$
$W(\mathbf{r})$	Ορισμένος πίνακας για το τετραδόνιο $\mathbf{r}$
$\vec{w}$	Διάνυσμα του χώρου $R^3$
$X, Y, Z$	Συντεταγμένες στο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς
$x, y, z$	Άξονες τρισσορθογώνιου συστήματος
$\hat{x}$	Το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των παραμέτρων από τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων
$\vec{x}$	Διάνυσμα του χώρου $R^3$
$x_i', y_i', z_i'$	Συντεταγμένες σημείου $p_i'$ του χώρου $R^3$
$x_i, y_i, z_i$	Συντεταγμένες σημείου $p_i$ του χώρου $R^3$
$\vec{y}$	Διάνυσμα του χώρου $R^3$
$z$	Μιγαδικός αριθμός
$ z $	Μέτρο του μιγαδικού $z$
$\bar{z}$	Συζυγής του μιγαδικού $z$



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η διερεύνηση των μεθόδων μετασχηματισμού τριδιάστατων συντεταγμένων από ένα σύστημα σε ένα άλλο, δίνοντας έμφαση στη χρήση των τετραδονίων όσο και στις διαφορές τους με τους ήδη γνωστούς τρόπους των γωνιών Euler. Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκε διερεύνηση κατά το ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα μετασχηματισμού για τρεις διαφορετικές μεθόδους.

Πιο συγκεκριμένα, η εργασία αυτή, χωρίζεται στα παρακάτω κεφάλαια:

- **Στο πρώτο κεφάλαιο** μελετάται το μαθηματικό υπόβαθρο που χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό του πίνακα στροφής σε ένα σύστημα τριών διαστάσεων. Πραγματοποιείται βιβλιογραφική ανάλυση σχετικά με τη χρήση των μιγαδικών αριθμών σε περιστροφές σημείων στο επίπεδο και την επέκτασή τους στο χώρο  $R^4$ , δημιουργώντας τα τετραδόνια και υλοποιώντας στροφές στον τριδιάστατο χώρο. Επιπλέον δίνονται κάποια παραδείγματα σχετικά με τις διαφοροποιήσεις του πίνακα στροφής όταν αυτός υπολογίζεται από τις γωνίες Euler και από τα τετραδόνια αντίστοιχα.
- **Στο δεύτερο κεφάλαιο** γίνεται αναφορά στην αναγκαιότητα των μετασχηματισμών συστημάτων, ενώ ορίζεται ο μετασχηματισμός Helmholtz, που αποτελεί και τον βασικό μετασχηματισμό της συγκεκριμένης εργασίας. Παρουσιάζεται η επίλυσή του με τη μέθοδο των γωνιών Euler καθώς και με τη χρήση απλών και διπλών τετραδονίων, αφού οριστούν πρώτα οι διπλοί αριθμοί και η σχέση τους με τα τετραδόνια.
- **Στο τρίτο κεφάλαιο** εντοπίζονται οι οριακές γωνίες στροφής ενώ μελετάται το αντίστροφο πρόβλημα μετασχηματισμού. Για τον σκοπό αυτό δημιουργούνται τρία διαφορετικά σύνολα δεδομένων, τα οποία εξαναγκάζονται σε συγκεκριμένους μετασχηματισμούς προκειμένου να εντοπισθεί η ευαισθησία και τα προβλήματα κάθε μεθόδου. Ακόμη πραγματοποιείται στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων τόσο ανά μέθοδο, όσο και ανά σύνολο δεδομένων.
- **Στο τέταρτο κεφάλαιο** μελετάται το ευθύ πρόβλημα μετασχηματισμού για κάθε μέθοδο, υλοποιώντας τρεις διαφορετικές εφαρμογές. Αυτές αφορούν σε μετασχηματισμούς συντεταγμένων για μελέτη μετακινήσεων, παρακολούθηση ταλαντώσεων κατασκευών αλλά και μετρήσεις ακριβείας σε πεδίο ελέγχου βαθμονόμησης φωτομηχανών.
- **Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο** πραγματοποιείται μια ανασκόπηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας αναφέροντας συμπεράσματα που

προέκυψαν από τη μελέτη των διαφορετικών μεθόδων επίλυσης του μετασχηματισμού Helmert τόσο για το ευθύ όσο και για το αντίστροφο πρόβλημα. Επιπλέον δίνονται προτάσεις για την εξέλιξη των μεθόδων αυτών προκειμένου να βελτιστοποιηθούν τόσο σε ακρίβεια όσο και σε ορθότητα.



# ABSTRACT

## Processing of geodetic data with capitalisation on the theory of quaternions

The subject of this postgraduate thesis is to investigate the methods of transforming three-dimensional coordinates from one system to another, emphasizing the use of quaternions and their differences with the already known ways of Euler angles. To this end, a direct and reverse transformation problem has been investigated using three different methods.

More specifically, this work is divided into the following chapters:

- The first chapter studies the mathematical background which is used when calculating the rotation matrix in a three-dimensional system. A bibliographic analysis is performed on the use of complex numbers in point rotations in the plane and their extension in  $R^4$  space, creating the quaternions and implementing rotations in the three-dimensional space. In addition, some examples of the variations of the rotation matrix are given, when calculated using the Euler angles and quaternions.
- In the second chapter, reference is made to the necessity of system transformations. The Helmert Transformation Problem, which is the basic transformation problem of this thesis, is defined. It is solved both using the method of Euler angles and the simple and dual quaternions, after first defining the double numbers and their relation to them.
- In the third chapter the boundary turning angles are identified while the reverse transformation problem is studied. To this end, three different data sets are created, which are forced into specific transformations in order to identify the sensitivity and problems of each method. Statistical analysis of the results is also performed both by method and by data set.
- The fourth chapter studies the direct transformation problem for each method, implementing three different applications. These include network transformations for movement study, deformation monitoring of construction fluctuations and precision measurements in a control field for calibration of cameras.
- The fifth and final chapter provides an overview of this postgraduate thesis, indicating the conclusions of the implementation of the different solving methods of the Helmert Transformation Problem for the direct and reverse problem. In addition, suggestions are made for the development of these methods in order to optimize both accuracy and correctness.

More specifically, it was found that:

- When calculating the rotation matrix using the Euler angle method, different angles can bring about the same results resulting in the frequent occurrence of the Gimbal Lock problem. This problem is solved by using the quaternions as the rotation table is unambiguous.
- The “dangerous” angles between  $0^\circ$  - $180^\circ$ , are those that are less than  $5^\circ$ , between  $90^\circ$  and  $120^\circ$  and above  $170^\circ$ .
- When investigating the scenarios and the reverse problem, the classical method results in erroneous angles due to the symmetry of the trigonometric cycle. The result is significantly improved when these are calculated using quaternions. The dual quaternion method brings the best results for determining the rotation matrix, but it shows significant deviations when calculating the displacements.
- In the case of the direct problem, there are no differences depending on the solution method. The calculation through Euler angles and simple and dual quaternions, brings the same results with the same accuracy.

Based on the above, it is proposed to create a new method for determining the transformation parameters, which will optimize both the rotation matrix (such as that of dual quaternions) and also the displacements and the scale.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μετασχηματισμοί συστημάτων συντεταγμένων, είναι μια πολύ γνωστή μαθηματική διαδικασία που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στη Γεωδαισία, προκειμένου σημεία να έχουν κοινή αναφορά στο χώρο. Μετασχηματισμοί σημείων για παρακολούθηση μετακινήσεων, κινηματική συμπεριφορά κατασκευών αλλά και δημιουργία τριδιάστατων μοντέλων αντικειμένων είναι μόνο μερικές από τις εφαρμογές των μετασχηματισμών αυτών.

Στις περισσότερες εφαρμογές, μετασχηματισμός γίνεται σε δύο διαστάσεις καθώς η υψομετρική αναφορά μένει αμετάβλητη, με αποτέλεσμα την εφαρμογή του απλού μετασχηματισμού ομοιότητας. Κατά τον μετασχηματισμό αυτό, πραγματοποιείται παράλληλη μετατόπιση των αξόνων, στροφή και αλλαγή κλίμακας η οποία συνήθως είναι ενιαία στο επίπεδο εφαρμογής.

Τα πράγματα όμως γίνονται πιο περίπλοκα όταν απαιτείται μετασχηματισμός σημείων σε τρεις διαστάσεις. Στροφές και στους τρεις άξονες, διάνυσμα μετατόπισης της αρχής των αξόνων καθώς και αλλαγή κλίμακας, υπολογίζονται προκειμένου σημεία να μεταφερθούν από το ένα σύστημα στο άλλο.

Όπως είναι γνωστό η ακρίβεια σε όλα τα παραπάνω μεγέθη επιφέρει και το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ο υπολογισμός του πίνακα στροφής αποτελεί την πιο σύνθετη διαδικασία και αυτή που κατά πλειοψηφία παρουσιάζει τα περισσότερα προβλήματα. Ο γνωστότερος τρόπος υπολογισμού είναι με τη χρήση των γωνιών Euler, αλλά δεν είναι ο μοναδικός.

Παλαιότερα, την εποχή που οι υπολογιστές δεν είχαν κάνει ακόμα την εμφάνισή τους, για την αποφυγή των τριγωνομετρικών υπολογισμών χρησιμοποιήθηκαν οι μιγαδικοί αριθμοί και η επέκτασή τους, τα τετραδόνια.

Αντικείμενο λοιπόν της συγκεκριμένης εργασίας είναι η μελέτη και η χρήση τόσο των γωνιών Euler όσο και των τετραδονίων, στους μετασχηματισμούς συντεταγμένων στον τριδιάστατο χώρο. Σκοπός είναι η εξοικείωση με αυτή τη διαφορετική αλγεβρική δομή κατά τον μετασχηματισμό Helmert, ενώ πραγματοποιείται διερεύνηση των μεθόδων τόσο στο ευθύ όσο και στο αντίστροφο πρόβλημα.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

### 1.1 Γενικά

Τα μαθηματικά, τα οποία αποτελούν μία από τις αρχαιότερες επιστήμες, μελετούν θέματα που αφορούν την ποσότητα (αριθμούς), τη δομή (γεωμετρικά σχήματα), το χώρο, τη μεταβολή και τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητα και της φαντασίας. Πιο συγκεκριμένα, τα εργαλεία, που αυτά παρέχουν, αξιοποιούνται από όλες τις θετικές επιστήμες αλλά και από τις επιστήμες του μηχανικού, όπου αποτελούν κύρια εφαρμογή τους. [1]

Οι κλάδοι των μαθηματικών ποικίλουν ανά πεδίο εφαρμογής, ενώ πολλές φορές υπάρχουν αλληλοεπικαλύψεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών. Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται ο κλάδος της μαθηματικής ανάλυσης, δίνοντας έμφαση στο χώρο των μιγαδικών και των τετραδονίων. [1]

Είναι απαραίτητο, λοιπόν, να πραγματοποιηθεί αναλυτική παρουσίαση των βασικών μαθηματικών εννοιών που χρησιμοποιούνται, ώστε να αποσαφηνιστεί πλήρως η χρησιμότητα και η εφαρμογή τους στη συγκεκριμένη εργασία.

### 1.2 Μιγαδικοί αριθμοί

Η αδυναμία των μαθηματικών να κατανοήσουν τη μη ύπαρξη πραγματικής λύσης της εξίσωσης  $x^2 + 1 = 0$ , και γενικά ορισμένων δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων, τους ώθησε στην επινόηση των μιγαδικών αριθμών.

Στην πραγματικότητα ο Έρων ο Αλεξανδρεύς ο οποίος ήταν γεωμέτρης και μηχανικός ήταν ο πρώτος που συνέλαβε την ιδέα αυτών των αριθμών. Μέχρι το 1545, οι προσπάθειες επίλυσης περίπλοκων εξισώσεων δεν απέδιδαν πάντα πραγματικές λύσεις με αποτέλεσμα το 1572, να δοθεί φως από τον Ιταλό μηχανικό Raffaele Bombelli, ο οποίος χρησιμοποίησε νέους κανόνες και συμβολισμούς για την επίλυσή τους, θέτοντας τα θεμέλια του μιγαδικού λογισμού.

Με το ίδιο ζήτημα ασχολήθηκε και ο René Descartes, όπου παραδέχτηκε ότι μια αλγεβρική εξίσωση εκτός από πραγματικές μπορεί να έχει και άλλες ρίζες οι οποίες δεν εντάσσονται σε κάποια γνωστή

κατηγορία αριθμών, και τις ονόμασε φανταστικές (imaginaires), μία ονομασία που διατηρείται μέχρι και σήμερα. [Πολυμέρου Δ.,2015]

Οι τρεις μαθηματικοί οι οποίοι χρησιμοποίησαν ευρύτερα τους μιγαδικούς ήταν ο Leonhard Euler (1707-1783) που όρισε για πρώτη φορά το σύμβολο  $i = \sqrt{-1}$ , ο Joseph Louis Lagrange (1736-1813), καθώς και ο Γερμανός μαθηματικός Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Όσον αφορά στη γεωμετρική αναπαράστασή τους, η πρώτη δημοσίευση έγινε το 1799, από τον Νορβηγό Gaspar Wessel (1745-1818), ενώ το 1837 ο Rowan Hamilton (1805-1865) κατάφερε να μείνει στην ιστορία περιγράφοντας τους μιγαδικούς σε διατεταγμένα ζεύγη εδραιώνοντας τη θεωρία τους.

Κάθε αριθμός της μορφής  $z = b \cdot i$ , με  $b$  πραγματικός αριθμός και  $i^2 = -1$ , ονομάζεται φανταστικός, ενώ κάθε αριθμός της μορφής  $z = a + bi$ , όπου  $a, b$  πραγματικοί αριθμοί, ονομάζεται μιγαδικός και συμβολίζεται με  $C$ . [Ξένος Θ.,2008]

Ο αριθμός  $a$  λέγεται πραγματικό μέρος του  $z$ , ενώ ο αριθμός  $b$  φανταστικό μέρος του, και συμβολίζονται με  $\text{Re}(z)$  και  $\text{Im}(z)$  αντίστοιχα. Το σύμβολο  $i$  λέγεται φανταστική μονάδα. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι μιγαδικοί αριθμοί  $a + bi$  με  $b = 0$  ταυτίζονται με τους πραγματικούς αριθμούς. [Σουρλάς Δ., 2012]

### 1.2.1 Οι μιγαδικοί ως ζεύγη αριθμών

Όπως αναφέρθηκε, οι αριθμοί αυτοί υπήρχαν ως λύσεις εξισώσεων, και ο Hamilton είναι ο πρώτος που τους είδε ως συστήματα διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, τα οποία ονόμασε δυάδες της μορφής  $(a, b)$ . [2]

Δύο τέτοια πραγματικά ζεύγη  $(a, b)$  και  $(c, d)$  είναι ίσα μόνο όταν  $a = c$  και  $b = d$ . Ακόμη, ορίστηκε η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός αυτών ως εξής:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1.1)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (1.2)$$

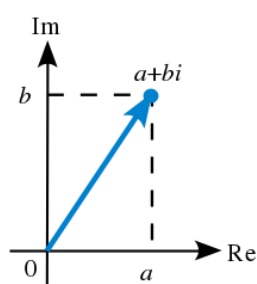
Παρατηρώντας, λοιπόν, τις σχέσεις αυτές, διαπιστώνεται πως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των δυάδων αυτών είναι πράξεις αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές, ενώ ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση. [2]

## 1.2.2 Γεωμετρική αναπαράσταση δυάδων

Για την αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών, αρκεί η δυάδα  $(a, b)$  του χώρου  $R^2 = R \times R$ , η οποία αντιστοιχίζεται με το σημείο  $M(a, b)$  του καρτεσιανού ή αλλιώς μιγαδικού επιπέδου ή επιπέδου Gauss, ή επιπέδου του Argand. Το σημείο αυτό ονομάζεται αλλιώς και εικόνα του μιγαδικού  $z$  στο επίπεδο και συμβολίζεται με  $M(z)$ . [Σουρλάς Δ., 2012]

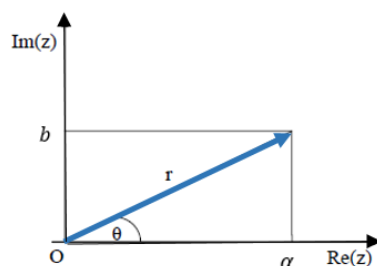
Οι πραγματικοί αριθμοί (Re) έχουν τις εικόνες τους στον άξονα  $xx'$ , ενώ οι φανταστικοί (Im) στον άξονα  $yy'$ . [Ξένος Θ., 2008]

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή διανυσματικής ακτίνας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. [Ξένος Θ., 2008]



Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού ως διανυσματική ακτίνα  
[<https://el.wikipedia.org>]

Επιπλέον, χρήσιμη είναι η αναπαράστασή τους και με την πολική-τριγωνομετρική μορφή  $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού σε πολική μορφή

Σ' αυτήν την παράσταση το  $r$  είναι μοναδικό αλλά όχι και το  $\theta$ . Συνήθως αυτό μεταβάλλεται σ' ένα διάστημα εύρους  $2\pi$  και ως τέτοιο χρησιμοποιείται το  $I = [0, 2\pi)$ . [Σουρλάς Δ., 2012]

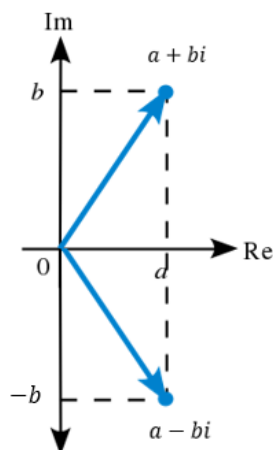
Το  $r$  ονομάζεται μέτρο ή απόλυτη τιμή του μιγαδικού αριθμού  $z$ , συμβολίζεται με  $|z|$ , και προκύπτει από τη σχέση:

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.3)$$

Αντίστοιχα το  $\theta$  προκύπτει ως εξής:

$$\tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}, \quad \cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad (1.4)$$

Τέλος, οι μιγαδικοί αριθμοί  $a + bi$  και  $a - bi$ , με  $a, b \in \mathbb{R}$ , ονομάζονται συζυγείς μιγαδικοί. Ο συζυγής του  $z$  συμβολίζεται με  $\bar{z}$ , ενώ οι εικόνες του είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί  
[<https://el.wikipedia.org>]

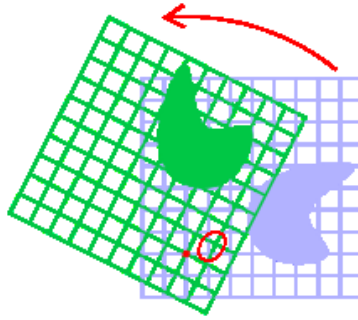
### 1.2.3 Περιστροφή επιπέδων με τη χρήση δυάδων

Ο Hamilton, αναλύοντας τη γεωμετρία των δυάδων, κατάφερε να χρησιμοποιήσει τα παραπάνω διανύσματα για να μελετήσει τις περιστροφές των επιπέδων. Γνώριζε ότι οι περιστροφές στο χώρο  $\mathbb{R}^2$  μπορούσαν να υπολογιστούν, επαρκώς, θεωρώντας το  $\mathbb{R}^2$  ως την εικόνα των μιγαδικών αριθμών.

Η περιστροφή στο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4, είναι η κίνηση ενός σχήματος, γύρω από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Οι περιστροφές σχετίζονται με ένα σύστημα αναφοράς, γιατί τελικά ο υπολογισμός τους έγκειται στον υπολογισμό των νέων συντεταγμένων των σημείων του σχήματος μετά την περιστροφή του. [2]

Για να υπολογιστεί η περιστροφή στις δύο διαστάσεις ακολουθείται η μέθοδος των πινάκων και αυτή των μιγαδικών. Στη συγκεκριμένη εργασία μελετάται ο δεύτερος τρόπος, και για μεγαλύτερη κατανόηση δίνεται, παρακάτω, ένα παράδειγμα.

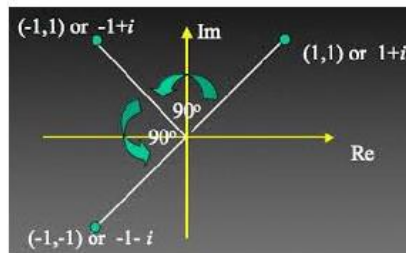




Σχήμα 1.4: Περιστροφή επιπέδου [2]

Αν για έναν πραγματικό αριθμό  $a$  ζητείται ο γεωμετρικός εντοπισμός του αντίθετου του, τότε περιστρέφοντας την εικόνα του, κατά θετική γωνία  $\theta = 180^\circ$ , από το σημείο  $A(a, 0)$  προκύπτει το σημείο  $A'(-a, 0)$ . Αν ο αριθμός αυτός γραφεί με τη μορφή  $a + 0i$ , τότε το νέο σημείο που προκύπτει γράφεται ως  $-a + 0i$ , και στην ουσία ισοδυναμεί αν πραγματοποιηθεί πολλαπλασιασμός με το  $-1$ . Αντίστοιχα, για να προκύψει ο αριθμός  $0 + ai$ , αρκεί ο πολλαπλασιασμός με το  $i$ . [2]

Στο σχήμα 1.5, που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα περιστροφής της εικόνας του μιγαδικού  $1 + 1i$  για γωνία  $90^\circ$  και  $180^\circ$ .



Σχήμα 1.5: Περιστροφή στο μιγαδικό επίπεδο [2]

Αναλύοντας, λοιπόν, τα παραπάνω, οι μιγαδικοί αριθμοί-τελεστές της περιστροφής, πληρούν τη μεταθετική ιδιότητα και έτσι το ίδιο συμβαίνει και με τις περιστροφές στο επίπεδο. Η σειρά δύο διαδοχικών περιστροφών δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα της τελικής περιστροφής.

Έτσι, οι δυάδες μετρούν τα διανύσματα και τις στροφές τους στο επίπεδο. Το ζητούμενο, όμως τις εργασίας, είναι να διερευνηθεί το πρόβλημα στον χώρο των τριών διαστάσεων.

### 1.3 Τετραδόνια

Ο Hamilton, αφού αποσαφήνισε πλήρως τη χρήση των δυάδων στις περιστροφές των επιπέδων, θέλησε να γενικεύσει το πρόβλημα και στον τριδιάστατο χώρο. Το πρώτο του βήμα ήταν να επεκτείνει τους σύνθετους

μιγαδικούς αριθμούς, σε μία νέα αλγεβρική δομή, όπου κάθε στοιχείο θα αποτελείται από ένα πραγματικό και δύο φανταστικά μέρη. Έτσι συνέλαβε την ιδέα των τριάδων, όπου είχαν την μορφή  $z = a + b \cdot i + c \cdot j$  και γραφόταν ως σύνολο διατεταγμένων πραγματικών αριθμών  $(a, b, c)$ . [Günaştı G., 2016]

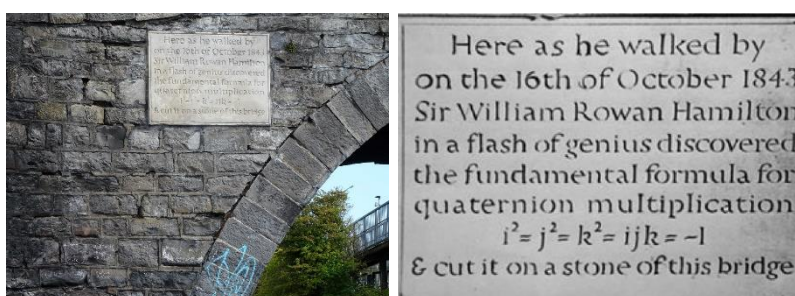
Ωστόσο, η διαδικασία δημιουργίας αυτής της άλγεβρας δεν ήταν επιτυχής, καθώς δεν κατάφερε να κάνει τους συγκεκριμένους αριθμούς να πληρούν τις ιδιότητες των δυάδων, ενώ δυσκολεύτηκε αρκετά να υπολογίσει το πηλίκο δύο σημείων στο χώρο. [2] [Πολυμέρου Δ., 2015]

Μετά από 10 χρόνια προσπάθειας, και καθώς βρισκόταν για βόλτα με τη σύζυγό του στο Βασιλικό Κανάλι στο Δουβλίνο, στις 16 Οκτωβρίου του 1843, ανακάλυψε πως η νέα άλγεβρα που ήθελε να δημιουργήσει, απαιτούσε αριθμούς με τρία φανταστικά μέρη, έναντι των δύο. [Günaştı G., 2016]

Έτσι όρισε μία νέα αλγεβρική δομή, τα τετραδόνια (Quaternions), που αποτελούνται από ένα πραγματικό και τρία φανταστικά μέρη  $i$ ,  $j$  και  $k$ . Πιο συγκεκριμένα, αυτά έχουν τη μορφή  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ , ενώ οι νέες φανταστικές μονάδες πληρούν την εξής προϋπόθεση:

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1 \quad (1.5)$$

Από τον ενθουσιασμό της ανακάλυψης αυτής, χάραξε στη γέφυρα Brougham (σημερινή Broom), τον τύπο της σχέσης 1.5, όπως φαίνεται στην εικόνα 1.1, ενώ ασχολήθηκε με αυτά για το υπόλοιπο της ζωής του. [Günaştı G., 2016]



Εικόνα 1.1: Πλάκα Quaternion στη γέφυρα Brougham του Δουβλίνου  
[<https://www.researchgate.net>, <https://www.flickr.com>]

Επιπλέον, η φόρμουλα αυτή, επεκτάθηκε στους παρακάτω κανόνες, οι οποίοι αργότερα ονομάστηκαν Κανόνες του Hamilton, προς τιμή του δημιουργού τους. [Günaştı G., 2016]

$$i \cdot j = -j \cdot i = k \quad (1.6)$$

$$j \cdot k = -k \cdot j = i \quad (1.7)$$

$$k \cdot i = -i \cdot k = j \quad (1.8)$$

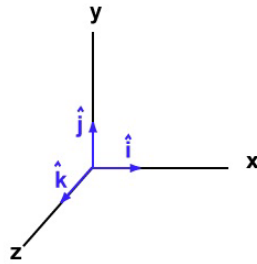
### 1.3.1 Βασικές ιδιότητες των τετραδών

Τα τετραδόνια, όπως αναφέρθηκε, έχουν τη μορφή  $q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$  με  $q_0, q_1, q_2$  και  $q_3$  πραγματικούς αριθμούς, ενώ μπορούν να αναπαρασταθούν και ως διατεταγμένες τετράδες του  $R^4$  χώρου της μορφής [Kuipers J., 1999]:

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = (q_0, \mathbf{q}) \quad (1.9)$$

όπου  $q_0$  η βαθμωτή συνιστώσα του  $q$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  η διανυσματική συνιστώσα του, και  $i, j$  και  $k$  οι ορθοκανονικές συντεταγμένες του χώρου  $R^3$ , όπως δίνονται στη σχέση 1.10 και φαίνονται στο σχήμα 1.6

$$i = (1,0,0) \quad j = (0,1,0) \quad k = (0,0,1) \quad (1.10)$$



Σχήμα 1.6: Οι άξονες  $i, j, k$   
[Günaşti G., 2016]

Ο Hamilton, ορίζοντας τις βασικές ιδιότητες τους, όπως την ισότητα και τον πολλαπλασιασμό, φρόντισε τόσο οι πραγματικοί, όσο και οι μιγαδικοί αριθμοί να μετατρέπονται σε τετραδόνια της μορφής  $\alpha = (\alpha, 0,0,0)$  και  $a + b \cdot i = (a, b, 0,0)$  αντίστοιχα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για να επιλυθεί το πρόβλημα των στροφών, η πρόσθεση τετραδονίων αποτελεί μια αντιμεταθετική και προσεταιριστική πράξη, ενώ ο πολλαπλασιασμός μια προσεταιριστική και επιμεριστική πράξη ως προς την πρόσθεση, που όμως ο αντιμεταθετικός νόμος, παύει να ισχύει. [2]

Πιο συγκεκριμένα ισχύουν οι εξής σχέσεις [Günaşti G., 2016]:

$$\begin{aligned} q + p &= (q_0 + \mathbf{q}) + (p_0 + \mathbf{p}) = (q_0, q_1, q_2, q_3) + (p_0, p_1, p_2, p_3) \\ &= (q_0 + p_0, q_1 + p_1, q_2 + p_2, q_3 + p_3) = p + q \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
p \cdot q &= (p_0, p_1, p_2, p_3)(q_0, q_1, q_2, q_3) \\
&= \begin{pmatrix} p_0 \cdot q_0 - p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2 - p_3 \cdot q_3 \\ p_1 \cdot q_0 + p_0 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ p_2 \cdot q_0 + p_0 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3 \\ p_3 \cdot q_0 + p_0 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{pmatrix}^T \\
&= p_0 \cdot q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q}, p_0 \cdot \vec{q} + q_0 \cdot \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Όπως και στις δυάδες, έτσι και εδώ ορίζονται το συζυγές καθώς και το μέτρο ένας τετραδονίου. [Kuipers J., 1999] [Günaşti G., 2016]

Το συζυγές τετραδόνιο, που συμβολίζεται με  $q^*$  ή  $\bar{q}$ , δίνεται από τη σχέση:

$$q^* = \bar{q} = q_0 - q_1 \cdot i - q_2 \cdot j - q_3 \cdot k, = (q_0, -\mathbf{q}) \tag{1.13}$$

Αντίστοιχα το μέτρο του τετραδονίου συμβολίζεται με  $|q|$  ή  $N(q)$  και ορίζεται από τη σχέση:

$$|q| = N(q) = \sqrt{\bar{q} \cdot q} = \sqrt{q^* \cdot q} \tag{1.14}$$

Ακόμη ιδιαίτερης σημασίας είναι και ο ανάστροφος ενός τετραδονίου, που συμβολίζεται με  $q^{-1}$ , και ορίζεται από τη σχέση:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{N^2(q)} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \tag{1.15}$$

Τέλος, μοναδιαίο τετραδόνιο είναι αυτό που το μέτρο του είναι ίσο με τη μονάδα, ενώ ο αντίστροφος του είναι ίσος με τον συζυγές του. Δηλαδή:

$$|q| = |q^*| = 1 \quad \text{και} \quad q^{-1} = q^* \tag{1.16}$$

### 1.3.2 Γεωμετρική ερμηνεία τετραδονίων

Η γεωμετρική ερμηνεία για μία φανταστική τριάδα της μορφής  $b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ , ορίζεται θεωρώντας τους συντελεστές  $b, c, d$  ως τις ορθογώνιες συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο. Σύμφωνα με τον Hamilton, αυτό ονομάστηκε καθαρό τετραδόνιο, και είναι ένα διάνυσμα της μορφής  $q = (0, \vec{u})$ , ενώ διαπιστώθηκε πως το διανυσματικό μέρος ενός τετραδονίου είναι διάνυσμα στον  $R^3$ , ενώ η γεωμετρία του  $R^3$  ανακλάται στην αλγεβρική δομή των τετραδονίων [2]

Έτσι αποδείχθηκε πως για έναν δοθέντα άξονα και μια δοθείσα γωνία περιστροφής, κατασκευάζεται πολύ εύκολα ένα τετραδόνιο, αλλά και το αντίστροφο. [2]

Πιο συγκεκριμένα, με βάση γνωστό θεώρημα [Jia YB, 2015], ένα μοναδιαίο τετραδόνιο  $q$ , της μορφής:

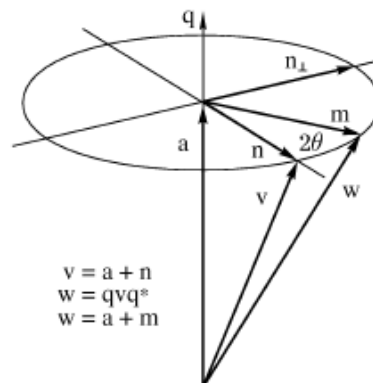
$$q = q_0 + \mathbf{q} = \cos\theta + \hat{\mathbf{u}} \cdot \sin\theta \quad (1.17)$$

και για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , ορίζεται ο τελεστής (Quaternion Rotation Operator)  $L_q(\mathbf{v})$  επί του  $\mathbf{v}$ , όπου:

$$L_q(\mathbf{v}) = q \cdot \mathbf{v} \cdot q^* = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2) \cdot \mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{q} + 2 \cdot q_0 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \quad (1.18)$$

και ισοδυναμεί με τη γεωμετρική περιστροφή του διανύσματος κατά γωνία  $2\theta$ , με άξονα περιστροφής τη διεύθυνση του  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Αν το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  γραφεί με τη μορφή  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{n}$ , και το διάνυσμα  $\vec{w} = q \cdot \mathbf{v} \cdot q^*$  ισχύει η περιστροφή όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα [Kuipers J., 1999]:



Σχήμα 1.7: Quaternion Rotation Operator [Jia YB, 2015]

## 1.4 Μέθοδοι περιστροφών στο χώρο

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σκοπός της εργασίας είναι η μετατροπή σημείων του τριδιάστατου χώρου από το ένα σύστημα στο άλλο, με τη χρήση των τετραδονίων. Είναι γνωστό πως για την περιστροφή σημείων στον χώρο χρησιμοποιούνται συνήθως οι πίνακες στροφής, οι γωνίες Euler, και τα τετραδόνια. Παρακάτω παρουσιάζονται οι μέθοδοι αυτοί, ενώ στο τέλος πραγματοποιείται και σύγκρισή τους.

### 1.4.1 Πίνακες στροφής

Ένας πίνακας στροφής στον  $\mathbb{R}^3$  χώρο, είναι ένας πίνακας  $3 \times 3$ , που παρουσιάζει την περιστροφή γύρω από έναν συγκεκριμένο άξονα κατά μία συγκεκριμένη γωνία. Ο πίνακας στροφής αυτός καλείται

$R$  και αποτελεί έναν ορθογώνιο πίνακα με ορίζουσα ίση με 1 ( $\det R = 1$  και  $R^{-1} = R^T$ ) και μορφή της σχέσης 1.19. [Diebel J., 2006]

$$R = [r_1 \quad r_2 \quad r_3] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Κατά την περιστροφή ενός διανύσματος  $\vec{x} \in R^3$ , αυτό μετατρέπεται σε ένα διάνυσμα  $\vec{y} = R \cdot \vec{x}$ , περιστρέφοντας το γύρω από έναν άξονα για μία συγκεκριμένη γωνία ώστε  $|\vec{x}| = |\vec{y}|$ . [Günaşti G., 2016]

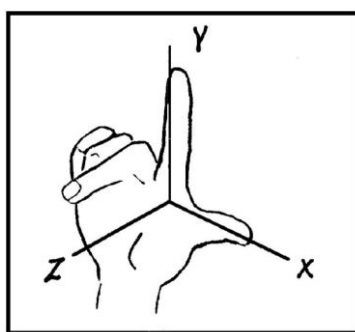
Οι περιστροφές περί κάθε άξονα  $x, y, z$  και για γωνίες  $\alpha, \beta, \gamma$ , αντίστοιχα, γράφονται με την μορφή  $R_x(\alpha), R_y(\beta), R_z(\gamma)$ , και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι γωνίες αυτές περί άξονες  $x, y, z$  ονομάζονται γωνίες Euler, μετρούνται ωρολογιακά και το σύστημα αναφοράς τους καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. [Günaşti G., 2016]



Σχήμα 1.8: Κανόνας του δεξιού χεριού  
[Günaşti G., 2016]

### 1.4.2 Γωνίες Euler (Euler Angle Sequence)

Η ακολουθία γωνιών Euler, είναι ένας πίνακας στροφής, ο οποίος καθορίζεται από τρεις παραμέτρους, τις γωνίες Euler  $(\alpha, \beta, \gamma)$  όπως περιγράφηκαν παραπάνω. [Günaşti G., 2016]

Η σειρά των αξόνων με την οποία θα γίνει η περιστροφή, καθορίζει σημαντικά το τελικό αποτέλεσμα, καθώς υπάρχουν 27 διαφορετικοί συνδυασμοί. Ένας από τους πιο γνωστούς, είναι ο συνδυασμός "xyz", όπου γίνεται πρώτα περιστροφή περί τον άξονα  $x$ , ύστερα περί τον  $y$  και τέλος περί τον  $z$ , ενώ ο τελικός πίνακας στροφής δίνεται από τη σχέση [Perumal L., 2011]:

$$R_{xyz} = R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha) \Rightarrow \quad (1.23)$$

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} \cos\beta \cdot \cos\gamma & \cos\beta \cdot \sin\gamma & -\sin\beta \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \sin\gamma & \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma & \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\gamma & \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \cos\gamma & \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{bmatrix}$$

Επομένως αν για κάποιο διάνυσμα  $\vec{u}$  του  $R^3$  χώρου πραγματοποιηθεί η παραπάνω περιστροφή με τις γωνίες Euler, προκύπτει ένα διάνυσμα  $\vec{u}'$  που δίνεται από τη σχέση 1.24.

$$\vec{u}' = R(\alpha, \beta, \gamma)\vec{u} = [R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha)] \cdot \vec{u} \quad (1.24)$$

Λόγω των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης που επιφέρουν οι τριγωνομετρικές σχέσεις, πολλές φορές χρησιμοποιείται μία κανονικοποιημένη δομή που δίνεται από την εξής σχέση.

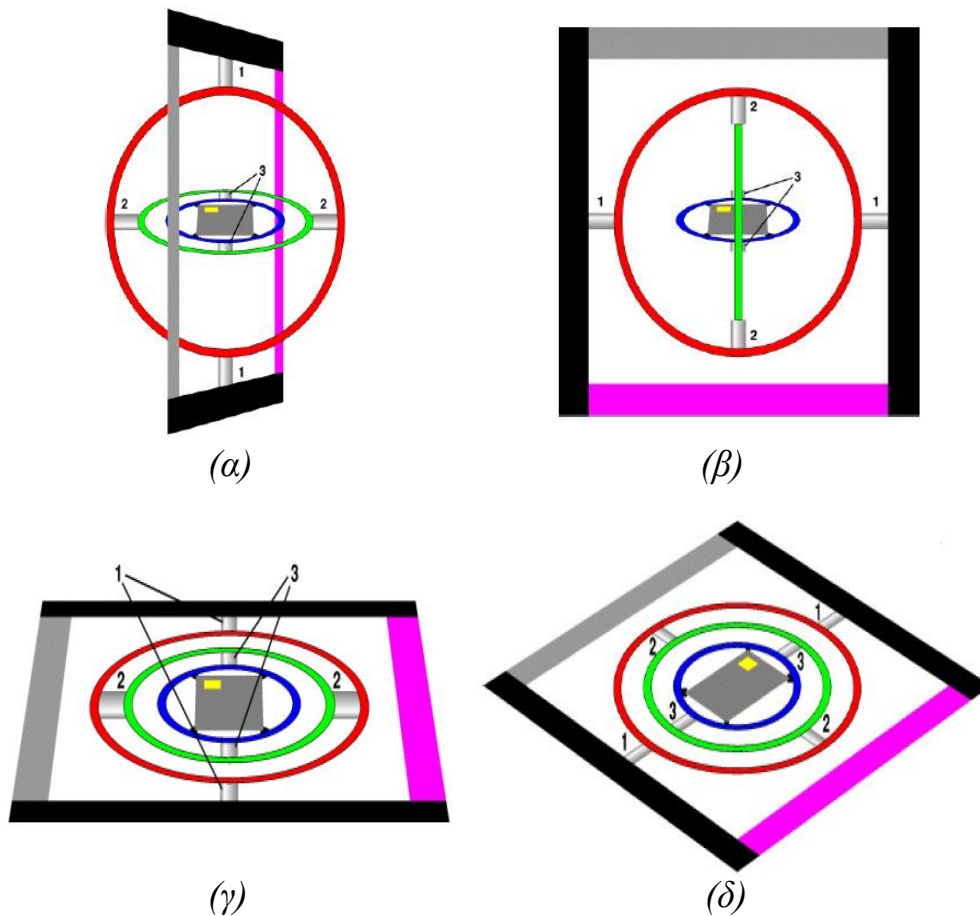
$$R_{\alpha\beta\gamma}^{norm} = R_{\alpha\beta\gamma} \cdot (R_{\alpha\beta\gamma}^T \cdot R_{\alpha\beta\gamma})^{-1/2} \quad (1.25)$$

Αν και η μέθοδος αυτή είναι η πιο γνωστή, παρουσιάζει κάποια προβλήματα. Το πιο γνωστό από αυτά ονομάζεται Gimbal Lock, και στην ουσία πρόκειται για ένα φαινόμενο κατά το οποίο η διεύθυνση ενός άξονα περιστροφής ταυτίζεται με τη διεύθυνση κάποιου άλλου και έτσι χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας, με συνέπεια διαφορετικές στροφές να επιφέρουν λανθασμένα το ίδιο αποτέλεσμα. [Günaşti G., 2016]

Για παράδειγμα, με περιστροφή ενός αντικειμένου γύρω από τον άξονα  $y$  (άξονας 2) κατά  $90^\circ$ , και εν συνεχεία περιστροφή γύρω από τον  $x$



(άξονας 1) και z (άξονας 3), οι άξονες 1 και 3 ευθυγραμμίζονται όπως φαίνεται στην εικόνα 1.2 και χάνεται έτσι ένας βαθμός ελευθερίας.



Εικόνα 1.2: Περιστροφή γύρω από τον άξονα y-άξονας 1 (α), τον άξονα z-άξονας 3 (β) και τον άξονα x-άξονας 2 (γ) και ευθυγράμμιση αξόνων 1 και 3 (δ)  
[Günaşti G., 2016]

### 1.4.3 Περιστροφή με τη χρήση τετραδονίων

Λόγω του προβλήματος που αναπτύχθηκε παραπάνω, διαπιστώθηκε πως τα τετραδόνια είναι τα πλέον ιδανικά για την περιστροφή αντικειμένων στο χώρο των τριών διαστάσεων, καθώς χρησιμοποιούν ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων και όχι ένα σύστημα μικτών αξόνων περιστροφής, όπως περιγράφονται από τις γωνίες Euler. [Perumal L., 2011]

Η γεωμετρική ερμηνεία τους, που περιγράφηκε στην παράγραφο 1.3.2 αποτελεί το βασικό κορμό για την περιστροφή στο χώρο. Έτσι για ένα τετραδόνιο της μορφής [Perumal L., 2011]:



$$Q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \hat{\mathbf{u}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.26)$$

$$\text{όπου } \hat{\mathbf{u}} = \begin{cases} i \\ j \\ k \end{cases} \text{ και } \theta = \begin{cases} \alpha, \alpha\mathbf{n} \hat{\mathbf{u}} = i \\ \beta, \alpha\mathbf{n} \hat{\mathbf{u}} = j \\ \gamma, \alpha\mathbf{n} \hat{\mathbf{u}} = k \end{cases}$$

αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot i + \sin \frac{\beta}{2} \cdot j + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot k \quad (1.27)$$

ενώ το συζυγές του από τη σχέση:

$$Q^* = \bar{Q} = \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot i - \sin \frac{\beta}{2} \cdot j - \sin \frac{\gamma}{2} \cdot k \quad (1.28)$$

Έτσι για την περιστροφή ενός διανύσματος  $t$  του  $R^3$ , γύρω από έναν συγκεκριμένο άξονα, και με βάση τον τελεστή της σχέσης 1.18, προκύπτει το διάνυσμα  $t'$  ως εξής [Perumal L., 2011]:

$$t' = Q_u \cdot t \cdot Q_u^* \quad (1.29)$$

όπου  $u$  ο άξονας γύρω από τον οποίο γίνεται η περιστροφή του διανύσματος. Με βάση τον άξονα αυτόν δημιουργούνται οι παρακάτω σχέσεις ανά περίπτωση:

$$Q_i = Q_X = \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot i + \sin \frac{0}{2} \cdot j + \sin \frac{0}{2} \cdot k = \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot i \quad (1.30)$$

$$Q_j = Q_Y = \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{0}{2} \cdot i + \sin \frac{\beta}{2} \cdot j + \sin \frac{0}{2} \cdot k = \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cdot j \quad (1.31)$$

$$Q_k = Q_Z = \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{0}{2} \cdot i + \sin \frac{0}{2} \cdot j + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot k = \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot k \quad (1.32)$$

Προκειμένου η σχέση αυτή να γενικευτεί, χρησιμοποιείται η αρχική φόρμουλα του Hamilton για τις σχέσεις μεταξύ  $i, j, k$  (σχέση 1.5) και προκύπτει ότι το διάνυσμα  $t'$  μπορεί να προσδιοριστεί και από τη σχέση:

$$t' = R^Q \cdot t \quad (1.33)$$

όπου  $R^Q$  ο γενικός πίνακας στροφής τετραδονίων (General Quaternion Rotation Matrix) που δίνεται από τη σχέση 1.34. [Perumal L., 2011]

$$R^Q = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot q_1 \cdot q_2 - 2 \cdot q_0 \cdot q_3 & 2 \cdot q_1 \cdot q_3 + 2 \cdot q_0 \cdot q_2 \\ 2 \cdot q_0 \cdot q_3 + 2 \cdot q_1 \cdot q_2 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & -2 \cdot q_0 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 \cdot q_3 \\ -2 \cdot q_0 \cdot q_2 + 2 \cdot q_1 \cdot q_3 & 2 \cdot q_0 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 \cdot q_3 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Ωστόσο, οι παραπάνω σχέσεις περιγράφουν την περιστροφή γύρω από έναν μόνο άξονα. Συνεπώς σκόπιμο είναι να μελετηθεί το τι συμβαίνει αν πραγματοποιηθούν παραπάνω από μια στροφές.

Όπως και στη μέθοδο των γωνιών Euler, έχει σημασία με ποια σειρά εκτελούνται οι περιστροφές καθώς υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί συνδυασμοί. Έτσι το  $Q_u$  της σχέσης 1.29 αλλάζει σε  $Q_{abc}$ , όπου  $abc$  είναι η σειρά των αξόνων όπου θα πραγματοποιηθεί περιστροφή. [Perumal L., 2011] [Günaşti G., 2016]

Αν πραγματοποιηθεί περιστροφή περί  $xyz$ , τότε  $Q_{xyz} = Q_z \cdot Q_y \cdot Q_x$ , με:

$$Q_{xyz} = q_0^{xyz} + q_1^{xyz} \cdot i + q_2^{xyz} \cdot j + q_3^{xyz} \cdot k \quad (1.35)$$

όπου:

$$q_0^{xyz} = \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (1.36)$$

$$q_1^{xyz} i = \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad (1.37)$$

$$q_2^{xyz} j = \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (1.38)$$

$$q_3^{xyz} k = \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (1.39)$$

Συνεπώς, αν το διάνυσμα  $t$  περιστραφεί γύρω από κάθε άξονα κατά συγκεκριμένη γωνία κάθε φορά, με βάση τις σχέσεις 1.33 και 1.36-1.39, υπολογίζεται το τελικό  $t'$ , και έτσι έχει πραγματοποιηθεί η περιστροφή του στον χώρο.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι πολλές φορές λόγω των υπολογισμών των τριγωνομετρικών σχέσεων υπάρχει συσσώρευση σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, επομένως γίνεται χρήση του κανονικοποιημένου τετραδονίου, που δίνεται από την σχέση:

$$Q^{norm} = \frac{Q}{|Q|} = \frac{q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \quad (1.40)$$

Έτσι ο πίνακας στροφής τετραδονίων  $R^Q$  της σχέσης 1.34 τροποποιείται και παίρνει την εξής μορφή:

$$R^{Q^{norm}} = \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2 \cdot q_1 \cdot q_2 - 2 \cdot q_0 \cdot q_3 & 2 \cdot q_1 \cdot q_3 + 2 \cdot q_0 \cdot q_2 \\ 2 \cdot q_0 \cdot q_3 + 2 \cdot q_1 \cdot q_2 & 1 - 2 \cdot q_1^2 - 2 \cdot q_3^2 & -2 \cdot q_0 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 \cdot q_3 \\ -2 \cdot q_0 \cdot q_2 + 2 \cdot q_1 \cdot q_3 & 2 \cdot q_0 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 \cdot q_3 & 1 - 2 \cdot q_1^2 - 2 \cdot q_2^2 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

#### 1.4.4 Σύγκριση μεθόδων

Παρατηρώντας τις παραπάνω μεθόδους, διαπιστώνεται ότι τόσο η μέθοδος Euler όσο και αυτή των τετραδονίων έχουν σημαντικά μειονεκτήματα αλλά και πλεονεκτήματα που πρέπει να ληφθούν υπόψιν. Έτσι στη συγκεκριμένη παράγραφο πραγματοποιείται σύγκριση των δύο μεθόδων προκειμένου να επιλεγεί η καταλληλότερη.

Όπως είναι ήδη γνωστό, η μέθοδος υπολογισμού με τη χρήση των γωνιών Euler, είναι η πιο διαδεδομένη καθώς γίνεται εύκολα κατανοητή στους χρήστες. Ωστόσο παρουσιάζει σημαντικά προβλήματα και πολλές φορές είναι ανεπαρκής στο να αντιπροσωπεύει όλες τις περιστροφές. Επιπλέον είναι δύσκολη η μαθηματική τους αναπαράσταση, καθώς πρέπει να ορισθούν σωστά οι ακολουθίες των γωνιών περιστροφής ανά άξονα. [Günaşti G., 2016]

Αντίθετα η αναπαράσταση των περιστροφών με τετραδόνια επιζητά μόνο μία γωνία και έναν άξονα (φορέα) περιστροφής, και όχι μία σύνθεση τριών ανεξάρτητων περιστροφών γύρω από τους άξονες των συντεταγμένων.

Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ένα κλασικό πρόβλημα των γωνιών Euler είναι το πρόβλημα του Gimbal Lock, το οποίο δύσκολα μπορεί να αποφευχθεί. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα, κατά το οποίο γίνεται εμφανές το πρόβλημα αυτό, ενώ πραγματοποιείται και επίλυση με τη μέθοδο των τετραδονίων προκειμένου να αποσαφηνιστούν και να γίνουν πιο κατανοητές οι βασικές διαφορές τους. [Günaşti G., 2016]

Έστω ότι πρόκειται να πραγματοποιηθεί στροφή  $0^\circ$  κατά τον άξονα  $x$ , μετέπειτα στροφή  $90^\circ$  κατά τον άξονα  $y$  και τέλος στροφή γωνίας  $\gamma$  κατά τον άξονα  $z$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.24 προκύπτει ο πίνακας στροφής κατά Euler:

$$R_{xyz} = R(0,90,\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, έστω ότι πρόκειται να πραγματοποιηθεί στροφή γωνίας  $\alpha$  περί τον άξονα  $x$ , μετέπειτα στροφή  $90^\circ$  περί τον άξονα  $y$  και τέλος στροφή  $0^\circ$  περί τον άξονα  $z$ , προκύπτει ο νέος πίνακας:

$$R_{xyz} = R(-\alpha,90,0) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρώντας τους δύο πίνακες, διαπιστώνεται πως με στροφή  $90^\circ$  κατά τον άξονα  $y$ , οι άξονες  $x$  και  $z$  ευθυγραμμίζονται μεταξύ τους και έτσι προκύπτει το πρόβλημα του Gimbal Lock. Έτσι παρακάτω πραγματοποιείται υπολογισμός και με τη μέθοδο των τετραδονίων προκειμένου να διαπιστωθεί η αποφυγή του συγκεκριμένου προβλήματος. Για κάθε περίπτωση θα υπολογιστούν οι συντελεστές  $q_0, q_1, q_2, q_3$  σύμφωνα με τις σχέσεις 1.36-1.39.

Συνεπώς για  $\alpha = 0, \beta = 90^\circ, \gamma = \gamma$  προκύπτουν:

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), q_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Ενώ για  $\alpha = -\alpha, \beta = 90^\circ, \gamma = 0$  προκύπτουν:

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), q_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Παρατηρείται λοιπόν πως τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά, συνεπώς με τα τετραδόνια αποφεύγεται το πρόβλημα της ευθυγράμμισης, επομένως αποτελούν μία πιο αξιόπιστη λύση χωρίς προβλήματα. [Günaşti G., 2016]

Έτσι τα τετραδόνια παρουσιάζουν τα εξής πλεονεκτήματα:

- i. Είναι πιο συμπαγή καθώς απαιτούν μόλις 4 στοιχεία έναντι των 9 που απαιτούν οι ακολουθίες των γωνιών Euler, όπως φαίνεται στις εξισώσεις 1.21-1.23 και 1.27.
- ii. Απαιτούν λιγότερο χρόνο υπολογισμού.
- iii. Η εξαγωγή της γωνίας και του άξονα περιστροφής είναι απλούστερη.
- iv. Αποφεύγεται η εμφάνιση του προβλήματος ευθυγράμμισης (Gimbal Lock).

Για όλους τους παραπάνω λόγους, τα τετραδόνια χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές παγκοσμίως, ενώ υπερτερούν σημαντικά των γωνιών Euler. Στο επόμενο κεφάλαιο πραγματοποιείται μία παρουσίαση κάποιων εφαρμογών, προκειμένου να αποκτηθεί οικειότητα με τη χρήση τους.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

#### 2.1 Γενικά

Τα τετραδόνια, λοιπόν, αποτελούν έναν από τους πιο εύκολους τρόπους για τον υπολογισμό των περιστροφών σημείων στον τριδιάστατο χώρο, καθώς ενισχύουν τη μοναδικότητα.

Στη σημερινή εποχή, η χρήση τους είναι ευρεία σε πολλούς κλάδους των επιστημών και όχι μόνο. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται στη μοριακή μοντελοποίηση, στη ρομποτική, στην επεξεργασία σημάτων αλλά κυρίως στην ανάπτυξη τριδιάστατων εικονικών κόσμων για ηλεκτρονικά παιχνίδια.

Ωστόσο, λόγω του αδρανειακού συστήματος που χρησιμοποιούν κατά τις περιστροφές, εφαρμόζονται και στη γυροσκοπική πυξίδα καθώς και σε ποικίλες εφαρμογές στη γεωδαισία και την πλοήγηση.

Στη συγκεκριμένη εργασία μελετάται η μετατροπή συντεταγμένων από ένα σύστημα σε ένα άλλο, επομένως το παρόν κεφάλαιο εστιάζεται στον μετασχηματισμό Helmert και πως αυτός μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο των τετραδονίων.

#### 2.2 Μετασχηματισμός Helmert

Ο μετασχηματισμός αυτός είναι ένας από τους πιο γνωστούς παγκοσμίως, τόσο στον τομέα της γεωδαισίας όσο και της φωτογραμμετρίας. Αφορά στη μετατροπή των συντεταγμένων ενός συνόλου σημείων από ένα σύστημα σε ένα άλλο, όταν αυτά δεν έχουν την ίδια αρχή, κλίμακα και προσανατολισμό. [Sansò, 2018]

Έτσι, το πρόβλημα αυτό, έχει 7 παραμέτρους μετασχηματισμού: τρεις μεταθέσεις, τρεις στροφές περί άξονες  $x$ ,  $y$ , και  $z$ , αντίστοιχα, και μία κλίμακα. [Sansò, 2018]

Πιο συγκεκριμένα, για δύο συστήματα (P) και (P'), και για κάθε σημείο  $p_i = (x_i, y_i, z_i)^T$  και  $p_i' = (x_i', y_i', z_i')^T$ , αντίστοιχα, ισχύει η σχέση: [Watson G.A, 2006]

$$p_i' = t + \lambda \cdot R(\varphi) \cdot p_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

Όπου:  $t = [t_x, t_y, t_z]^T$ : το διάνυσμα μετάθεσης,  $\lambda$ : ο συντελεστής κλίμακας και  $R(\varphi) = R_1(\alpha) \cdot R_2(\beta) \cdot R_3(\gamma)$  ο πίνακας στροφής των αξόνων κατά  $xyz$ .

Αν δίνονται οι παράμετροι μετασχηματισμού, τότε είναι πολύ εύκολο να μετατραπούν σημεία από το ένα σύστημα στο άλλο. Ωστόσο τις περισσότερες φορές ζητούμενο είναι το ακριβώς αντίθετο πρόβλημα. Με γνωστές τις συντεταγμένες κάποιων σημείων και στα δύο συστήματα επιζητείται ο υπολογισμός των 7 παραμέτρων του μετασχηματισμού. [Watson G.A, 2006]

Αξίζει να σημειωθεί ότι για τον ευκολότερο υπολογισμό του πίνακα στροφής, οι Awange και Grafarend εισήγαγαν τον συμμετρικό πίνακα  $C'$  όπου έχει την ιδιότητα [Závoti J., Kalmár J., 2016]:

$$R = (I - C')^{-1} \cdot (I + C') \quad (2.2)$$

με  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας  $3 \times 3$  και ο  $C'$  (με παραμέτρους  $a, b, c \in R$ ) δίνεται από τη σχέση:

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Συνεπώς η σχέση 2.2 του μετασχηματισμού, λαμβάνοντας υπόψιν τον πίνακα  $C'$ , παίρνει τη μορφή:

$$R = \frac{1}{1+a^2+b^2+c^2} \cdot \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2 \cdot (a \cdot b - c) & 2 \cdot (a \cdot c + b) \\ 2 \cdot (a \cdot b + c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2 \cdot (b \cdot c - a) \\ 2 \cdot (a \cdot c - b) & 2 \cdot (b \cdot c + a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ο πίνακας στροφής, λοιπόν, έχει τρεις αγνώστους, που όμως δεν είναι οι άγνωστες γωνίες, αλλά οι παράμετροι  $a, b, c$ , δηλαδή τρεις πραγματικοί αριθμοί, προκειμένου το πρόβλημα να είναι ευκολότερο. Έτσι, οι άγνωστοι παράμετροι του μετασχηματισμού παραμένουν 7, ενώ απαιτούνται τουλάχιστον δύο σημεία πλήρη και ένα με μια γνωστή συντεταγμένη, ώστε το σύστημα να επιλυθεί.

Αν τα σημεία που διατίθενται  $(p_i', p_i, i = 1, \dots, m)$  είναι παραπάνω από τα απαιτούμενα ( $m > 3$ ), τότε προσδιορίζεται η λύση με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. [Watson G.A, 2006]

Επομένως το πρόβλημα των 7 παραμέτρων του Helmert μπορεί να επιλυθεί, ενώ παράλληλα προκύπτει και η αβεβαιότητα τους.

Στην περίπτωση που η κλίμακα είναι διαφορετική σε κάθε άξονα, τότε το πρόβλημα μετασχηματίζεται σε εύρεση 9 παραμέτρων, καθώς το  $\lambda$  παύει να είναι ένας αριθμός, αλλά ένα διάνυσμα της μορφής:

$$\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Τότε, η επίλυση πραγματοποιείται με τον διαχωρισμό των παραμέτρων, τα γνωστά σημεία πρέπει να είναι τουλάχιστον τέσσερα, ενώ στη περίπτωση των ελαχίστων τετραγώνων οι υπολογισμοί είναι πιο σύνθετοι. [Watson G.A, 2006]

### 2.2.1 Επίλυση με τη χρήση τετραδονίων

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 1, ο πίνακας στροφής, κατά Euler, παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα. Συνεπώς ο υπολογισμός με τη χρήση τετραδονίων είναι πιο ακριβής και καταλληλότερος για την επίλυση του μετασχηματισμού Helmert. Στην ουσία, πρόκειται για το ίδιο μοντέλο με τη μόνη διαφορά, πως ο πίνακας R προσδιορίζεται με τη χρήση απλών τετραδονίων.

Και σε αυτή τη περίπτωση ορίζεται ο πίνακας  $C(q)$ , όπου τα στοιχεία του είναι τα στοιχεία ενός τετραδονίου της μορφής  $q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k = q_0 + \mathbf{q}$ , όπως παρουσιάζεται στην παρακάτω σχέση:

$$C(q) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Συνεπώς με βάση την άλγεβρα των τετραδονίων που αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, καθώς και τον ορισμό του πίνακα στροφής προκύπτει η επέκταση της σχέσης 2.2 ως εξής [Závoti J., Kalmár J., 2016]:

$$R = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q}) \cdot I_3 + 2 \cdot (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T + q_0 \cdot C(\mathbf{q})) \quad (2.7)$$

όπου  $I_3$  ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων 3x3

Έτσι στη περίπτωση αυτή ο πίνακας στροφής παίρνει τη μορφή της σχέσης 2.8 (αντίστοιχη της 1.34), και εφαρμόζεται στη σχέση 2.1 για την υλοποίηση του μετασχηματισμού.

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot (q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & 2 \cdot (q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) \\ 2 \cdot (q_0 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot (q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) \\ 2 \cdot (q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) & 2 \cdot (q_0 \cdot q_1 + q_2 \cdot q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Σε αυτή τη περίπτωση, ο πίνακας στροφής δεν έχει τρεις αγνώστους, αλλά τέσσερεις, όσα και τα στοιχεία ενός τετραδονίου. Συνεπώς, προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα Helmert, ζητείται ο προσδιορισμός των 8 παραμέτρων, ενώ και σε αυτή τη περίπτωση απαιτούνται οι συντεταγμένες σε τουλάχιστον δύο σημεία πλήρη και ένα με δύο γνωστές συντεταγμένες. Αν αυτά είναι παραπάνω, εφαρμόζεται και εδώ η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για τον προσδιορισμό και της αβεβαιότητας των παραμέτρων.

### 2.3 Μετασχηματισμοί και χρήση Διπλών Τετραδονίων

Όπως αναφέρθηκε, η άλγεβρα των τετραδονίων είναι η πλέον κατάλληλη για την περιγραφή στροφών στο χώρο και συνεπώς χρησιμοποιείται κυρίως στον μετασχηματισμό Helmert αλλά και σε άλλους μετασχηματισμούς, προκειμένου να υπολογιστεί ο πίνακας στροφής.

Ωστόσο, το 1882, ο Clifford έμπλεξε τη θεωρία των διπλών αριθμών με αυτή των τετραδονίων, δημιουργώντας τα διπλά τετραδόνια (Dual Quaternions) προκειμένου να περιγράψει τόσο την περιστροφή, όσο και τη μετάθεση ενός αντικειμένου με μία μόνο μαθηματική σχέση. [Kenwright B., 2012]

Παρακάτω παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των διπλών αριθμών και τετραδονίων, ενώ γίνεται και αναφορά στη χρήση τους κατά τον μετασχηματισμό Helmert.

#### 2.3.1 Εισαγωγή στους διπλούς αριθμούς (Dual Numbers)

Οι διπλοί αριθμοί, ή αλλιώς Dual Numbers, επίσης εμπνευσμένοι από τον Clifford, αποτελούν σύνθετους αριθμούς δύο σκελών, του πραγματικού και του πολύπλοκου.

Πιο συγκεκριμένα, αυτοί ορίζονται ως:

$$z = r + d \cdot \varepsilon \quad \text{με} \quad \varepsilon^2 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon \neq 0 \quad (2.9)$$

όπου το  $\varepsilon$  είναι ο διπλός τελεστής, το  $r$  είναι το πραγματικό μέρος και το  $d$  το διπλό μέρος. [Jia YB, 2013]



Όπως όλοι οι αριθμοί, έτσι και αυτοί, παρουσιάζουν κάποιες βασικές ιδιότητες, οι οποίες δίνονται στις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \text{Πρόσθεση: } & (r_A + d_A \cdot \varepsilon) + (r_B + d_B \cdot \varepsilon) \\ & = (r_A + r_B) + (d_A + d_B) \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Πολλαπλασιασμός: } & (r_A + d_A \cdot \varepsilon)(r_B + d_B \cdot \varepsilon) \\ & = r_A \cdot r_B + r_A \cdot d_B \cdot \varepsilon + r_B \cdot d_A \cdot \varepsilon + d_A \cdot d_B \cdot \varepsilon^2 \\ & = r_A \cdot r_B + (r_A \cdot d_B + r_B \cdot d_A) \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Διαίρεση: } & \frac{(r_A + d_A \cdot \varepsilon)}{(r_B + d_B \cdot \varepsilon)} = \frac{(r_A + d_A \cdot \varepsilon) \cdot (r_B - d_B \cdot \varepsilon)}{(r_B + d_B \cdot \varepsilon) \cdot (r_B - d_B \cdot \varepsilon)} \\ & = \frac{r_A \cdot r_B + (r_B \cdot d_A - r_A \cdot d_B) \cdot \varepsilon}{(r_B)^2} \\ & = \frac{r_A \cdot r_B}{r_B^2} + \frac{(r_B \cdot d_A - r_A \cdot d_B)}{r_B^2} \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (2.12)$$

### 2.3.2 Διπλά τετραδόνια (Dual Quaternions)

Τα διπλά τετραδόνια (Dual Quaternions), όπως αναφέρθηκε, αποτελούν διπλούς αριθμούς με τα στοιχεία τους να είναι τετραδόνια. Πιο συγκεκριμένα, ορίζονται ως εξής:

$$\bar{q} = \mathbf{r} + \mathbf{d} \cdot \varepsilon \quad \text{με } \mathbf{r} \text{ και } \mathbf{d} \text{ τετραδόνια} \quad (2.13)$$

Αποτελούν στοιχεία 8 παραμέτρων, όπως φαίνεται και στη σχέση 2.14 παρακάτω, και διαθέτουν ένα βαθμωτό μέγεθος ( $q_{d0}$ : dual number) και ένα διανυσματικό ( $q_{d1}, q_{d2}, q_{d3}$ : dual number vector). [Zeng H., Frang X., Chang G., Yang R., 2018]

$$\begin{aligned} \mathbf{q} & = (r_1 + d_1 \cdot \varepsilon) \cdot i + (r_2 + d_2 \cdot \varepsilon) \cdot j + (r_3 + d_3 \cdot \varepsilon) \cdot k + (r_0 + d_0 \cdot \varepsilon) \\ & = q_{d1} \cdot i + q_{d2} \cdot j + q_{d3} \cdot k + q_{d0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Επιπλέον, και αυτοί οι αριθμοί, έχουν κάποιες ιδιότητες, όπως φαίνονται παρακάτω και αποτελούν σύνθεση των βασικών ιδιοτήτων της άλγεβρας των τετραδονίων και των διπλών αριθμών. [Jia YB, 2013]

$$\begin{aligned} \text{Πρόσθεση: } & (r_{(1)} + d_{(1)} \cdot \varepsilon) + (r_{(2)} + d_{(2)} \cdot \varepsilon) \\ & = (r_{(1)} + r_{(2)}) + (d_{(1)} + d_{(2)}) \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Πολλαπλασιασμός: } & (r_{(1)} + d_{(1)} \cdot \varepsilon) \cdot (r_{(2)} + d_{(2)} \cdot \varepsilon) \\ & = (r_{(1)} \cdot r_{(2)}) + (r_{(1)} \cdot d_{(2)} + d_{(1)} \cdot r_{(2)}) \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\text{Συζυγής: } \bar{q}^* = \bar{q} = \mathbf{r}^* + \mathbf{d}^* \cdot \varepsilon = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{d}} \cdot \varepsilon \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Μέτρο: } |\bar{q}| = N(\bar{q}) &= \sqrt{\bar{q} \cdot \bar{q}} = \sqrt{\bar{q}^* \cdot \bar{q}} \\ &= \sqrt{q_{d1}^2 + q_{d2}^2 + q_{d3}^2 + q_{d0}^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Όσον αφορά στο μοναδιαίο διπλό τετραδόνιο ισχύουν τα εξής:

$$|\bar{q}| = 1 \quad , \quad \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r} = 1 \quad , \quad \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{d} = 0 \quad , \quad \mathbf{r}^* \cdot \mathbf{d} + \mathbf{d}^* \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (2.19)$$

Προκειμένου να προσδιοριστεί νέα θέση ενός σημείου, μέσω των διπλών τετραδονίων, ορίστηκαν οι ιδιότητες μετάθεσης και στροφής για το μοναδιαίο διπλό τετραδόνιο ως εξής:

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{r} \quad \text{και} \quad \mathbf{d} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{r} \quad (2.20)$$

με  $\mathbf{r}$ : μοναδιαίο τετραδόνιο που αναπαριστά την στροφή και  $\mathbf{t}$ : τετραδόνιο που αναπαριστά την μετάθεση και είναι της μορφής  $\mathbf{t} = (0, t_x, t_y, t_z)$ . [Kenwright B., 2012]

Αντίστοιχα με τα απλά τετραδόνια, έτσι και στα διπλά, ορίζεται η απλή στροφή θέτοντας το διπλό μέρος ίσο με το μηδέν (σχέση 2.21), καθώς και η απλή μετάθεση χωρίς στροφή θέτοντας το πραγματικό μέρος μοναδιαίο (σχέση 2.22). Δηλαδή:

$$\mathbf{q}_r = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, u_x \cdot \sin \frac{\theta}{2}, u_y \cdot \sin \frac{\theta}{2}, u_z \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] \cdot [0,0,0,0] \quad (2.21)$$

$$\mathbf{q}_t = [1,0,0,0] \left[ 0, \frac{t_x}{2}, \frac{t_y}{2}, \frac{t_z}{2} \right] \quad (2.22)$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις σε μία, προσδιορίζεται ένα μοναδιαίο τετραδόνιο που αναπαριστά ταυτόχρονα την περιστροφή και τη μετάθεση, το οποίο δίνεται από τη σχέση 2.23. [Kenwright B., 2012]

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_r \times \mathbf{q}_t \quad (2.23)$$

Έτσι, για ένα σημείο  $\mathbf{p}$ , με τη χρήση διπλών τετραδονίων μετασχηματίζεται σε  $\mathbf{p}'$ , μέσω της εξής σχέσης:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^* \quad (2.24)$$

### 2.3.3 Εφαρμογή στον μετασχηματισμό Helmert

Όπως αναφέρθηκε, ο μετασχηματισμός Helmert ή αλλιώς ο μετασχηματισμός 7 παραμέτρων είναι από τους πιο γνωστούς στην γεωδαισία. Παραπάνω παρουσιάστηκαν αναλυτικά όλα τα στοιχεία του,

ενώ δόθηκε έμφαση στην επίλυσή του με τη μέθοδο των απλών τετραδονίων.

Στην συγκεκριμένη παράγραφο, ωστόσο, πραγματοποιείται παρουσίαση της διαδικασίας επίλυσής του μέσω διπλών τετραδονίων, μιας και η μετάθεση και η στροφή των σημείων υπολογίζονται ταυτόχρονα.

Αξιοποιώντας όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ο πίνακας στροφής  $R$ , [Zeng H., Yi Q., 2011] [Jitka P.,2011] μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση 2.25:

$$R = (r_0^2 - \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r}) \cdot I + 2 \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T + r_0 \cdot C(\mathbf{r})) \quad (2.25)$$

Για μεγαλύτερη ευκολία ορίζονται επίσης οι  $Q(\mathbf{r})$  και  $W(\mathbf{r})$  αντίστοιχα:

$$Q(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_0 \cdot I + C(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & r_0 \end{bmatrix}, \quad W(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_0 \cdot I - C(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & r_0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας.

Έτσι η σχέση του μετασχηματισμού Helmert, μετασχηματίζεται σε αυτή της σχέσης 2.27 (αντίστοιχη της 2.1) με την μόνη διαφορά ότι τα στοιχεία των πινάκων  $p_i$  και  $p_i'$  είναι διαστάσεων  $4 \times 1$ , όπου το τελευταίο στοιχείο είναι μηδενικό.

$$p_i' = 2 \cdot \mathbf{t} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \cdot p_i = 2 \cdot \mathbf{t} + \lambda \cdot W(\mathbf{r})^T \cdot Q(\mathbf{r}) \cdot p_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.27)$$

Αξίζει να σημειωθεί, ότι παρατηρώντας τη σχέση 2.20, προκύπτουν κάποιες ιδιότητες μεταξύ του  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{t}$  και  $\mathbf{d}$ , όπως φαίνονται παρακάτω. [Zeng H., Frang X., Chang G., Yang R., 2018]

$$\mathbf{t} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}^{-1} = \mathbf{d} \cdot \frac{\mathbf{r}^*}{\|\mathbf{r}\|} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}^* = W(\mathbf{r}^*) \cdot \mathbf{d} = W(\mathbf{r})^T \cdot \mathbf{d} \quad (2.28)$$

Έτσι αντικαθιστώντας τη σχέση 2.28 στη 2.27 προκύπτει η τελική σχέση μετασχηματισμού, όπου υπάρχουν τα ζητούμενα τετραδόνια  $r$  και  $d$ .

$$p_i' = 2 \cdot W \cdot (\mathbf{r})^T \cdot \mathbf{d} + \lambda \cdot W(\mathbf{r})^T \cdot Q(\mathbf{r}) \cdot p_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.29)$$

Συνοψίζοντας λοιπόν, για τον μετασχηματισμό Helmert, στην συγκεκριμένη περίπτωση, απαιτείται ο προσδιορισμός 9 παραμέτρων. Ένας συντελεστής κλίμακας και τα στοιχεία των τετραδονίων  $d$  και  $r$ . Έτσι για την επίλυση απαιτούνται τουλάχιστον 3 πλήρη σημεία, με γνωστές συντεταγμένες και στα δύο συστήματα.

## 2.4 Σύγκριση μεθόδων προσδιορισμού παραμέτρων Helmert

Στις προηγούμενες παραγράφους περιγράφηκαν αναλυτικά τα στοιχεία του μετασχηματισμού Helmert, καθώς και διάφοροι τρόποι προσδιορισμού αυτών, τόσο με την κλασσική μέθοδο, όσο και με αυτή των απλών και διπλών τετραδονίων.

Στον πίνακα 2.1 δίνεται μια συνοπτική παρουσίαση της κάθε μεθόδου, ενώ αξίζει να σημειωθεί, πως ανάλογα την περίπτωση απαιτείται και διαφορετικό πλήθος σημείων για τον προσδιορισμό των άγνωστων παραμέτρων.

Αν και ο μετασχηματισμός αυτός έχει μείνει στην ιστορία ως μετασχηματισμός 7 παραμέτρων, ανά μέθοδο το πλήθος των στοιχείων προσδιορισμού αλλάζει, ενώ στην συγκεκριμένη εργασία μελετώνται τόσο οι αβεβαιότητες ανά μέθοδο αλλά και η καταλληλότητα κάθε μεθόδου ανά περίπτωση.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	ΓΝΩΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	ΤΕΛΙΚΟΙ ΑΓΝΩΣΤΟΙ
ΚΛΑΣΣΙΚΗ (ΓΩΝΙΕΣ EULER)	Συντεταγμένες στο παλιό σύστημα $p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$p' = t + \lambda \cdot R \cdot p$	Πίνακας Στροφής $R = (I - C')^{-1}(I + C')$	$C' = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$	<u>7 παράμετροι</u>  Για πίνακα στροφής: $a, b, c$ Για διάνυσμα μετάθεσης: $t_x, t_y, t_z$ Για συντελεστή κλίμακας: $\lambda$
	Διάνυσμα μετάθεσης $t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$				
	Συντελεστής κλίμακας $\lambda$				
ΧΡΗΣΗ ΔΙΠΛΩΝ ΤΕΤΡΑΔΟΝΙΩΝ (QUATERNIONS)	Συντεταγμένες στο παλιό σύστημα $p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$p' = t + \lambda \cdot R \cdot p$	Πίνακας Στροφής $R = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q})I + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 C(q))$	Τετραδόνιο της μορφής: $\mathbf{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ $\Rightarrow \mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q})$  $C(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$	<u>8 παράμετροι</u>  Για πίνακα στροφής: $q_0, q_1, q_2, q_3$ Για διάνυσμα μετάθεσης: $t_x, t_y, t_z$ Για συντελεστή κλίμακας: $\lambda$
	Διάνυσμα μετάθεσης $t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$				
	Συντελεστής κλίμακας $\lambda$				
ΧΡΗΣΗ ΔΙΠΛΩΝ ΤΕΤΡΑΔΟΝΙΩΝ (DUAL QUATERNIONS)	Συντεταγμένες στο παλιό σύστημα $p = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$p' = t + \lambda \cdot R \cdot p$  $\downarrow$ $p' = 2W(r)^T d + \lambda \cdot w(r)^T Q(r) \cdot p$	Πίνακας Στροφής $R = w(r)^T Q(r)$	Τετραδόνια της μορφής: $r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k = (r_0, \mathbf{r})$  $w(r) = \begin{bmatrix} r_0 I - C(r) & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & r_0 \end{bmatrix}$ $Q(r) = \begin{bmatrix} r_0 I + C(r) & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & r_0 \end{bmatrix}$  $C(r) = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$	<u>9 παράμετροι</u>  Για πίνακα στροφής: $r_0, r_1, r_2, r_3$ Για διάνυσμα μετάθεσης: $d_0, d_1, d_2, d_3$ Για συντελεστή κλίμακας: $\lambda$
	Διάνυσμα μετάθεσης $t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = W(r)^T d$				
	Συντελεστής κλίμακας $\lambda$				

Πίνακας 2.1: Συνοπτική παρουσίαση μεθόδων



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕΘΟΔΩΝ

#### 3.1 Γενικά

Αφού περιγράφηκαν οι μέθοδοι εφαρμογής του μετασχηματισμού Helmert, σκόπιμο είναι να διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα τους για ποικίλες περιπτώσεις.

Για τον σκοπό αυτό δημιουργήθηκαν τρία διαφορετικά σύνολα δεδομένων. Ένα σύνολο αφορά στο μικρόκοσμο, με τις αποστάσεις των σημείων να απέχουν το πολύ 50-70cm, ένα άλλο αφορά στο μακρόκοσμο με αποστάσεις 200-500m, και τέλος υπάρχει ένα ενδιάμεσο σύνολο με αποστάσεις της τάξης των 10-100m. Αξίζει να σημειωθεί ότι ανά περίπτωση αλλάζει και η αβεβαιότητα των συντεταγμένων, με αυτή να κυμαίνεται από 0.05mm-1cm.

Για καθένα από τα παραπάνω σύνολα, δημιουργήθηκαν σενάρια τα οποία υπολογίζουν τις συντεταγμένες των σημείων στο νέο σύστημα, εφαρμόζοντας κάθε φορά συγκεκριμένη μετάθεση, κλίμακα και στροφή των αξόνων.

Προκειμένου να εντοπιστούν οι πιο επικίνδυνες γωνίες στροφής, ώστε να συμπεριληφθούν στα παραπάνω σενάρια, πραγματοποιήθηκε μια επιπλέον διερεύνηση, όπως περιγράφεται παρακάτω. Είναι σημαντικό να επιλεγούν σωστά οι γωνίες αυτές, καθώς ο πίνακας στροφής είναι και αυτός που διαχωρίζει τις μεθόδους που μελετώνται στη συγκεκριμένη εργασία.

Έτσι με γνωστές τις συντεταγμένες των σημείων σε παλιό και νέο σύστημα καθώς και τις αβεβαιότητάς τους, υπολογίζονται οι παράμετροι μετασχηματισμού σε κάθε περίπτωση και εξετάζεται τόσο η αξιοπιστία των μεθόδων όσο και η ακρίβειά τους. Στην ουσία, υπολογίζονται, εκ νέου, γνωστά μεγέθη προκειμένου να εντοπιστούν τυχόν αποκλίσεις.

Κάθε σύνολο δεδομένων αποτελείται από δέκα (10) σημεία, ώστε να πραγματοποιηθεί συνόρθωση παρατηρήσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και έτσι να προκύψει και η αβεβαιότητα των παραμέτρων μετασχηματισμού ανά περίπτωση.

Στις παρακάτω παραγράφους περιγράφεται αναλυτικά η διερεύνηση των γωνιών καθώς και η μέθοδος συνόρθωσης που επιλέγεται. Επιπλέον δομούνται τα σενάρια επίλυσης, ενώ γίνεται και σύγκριση των

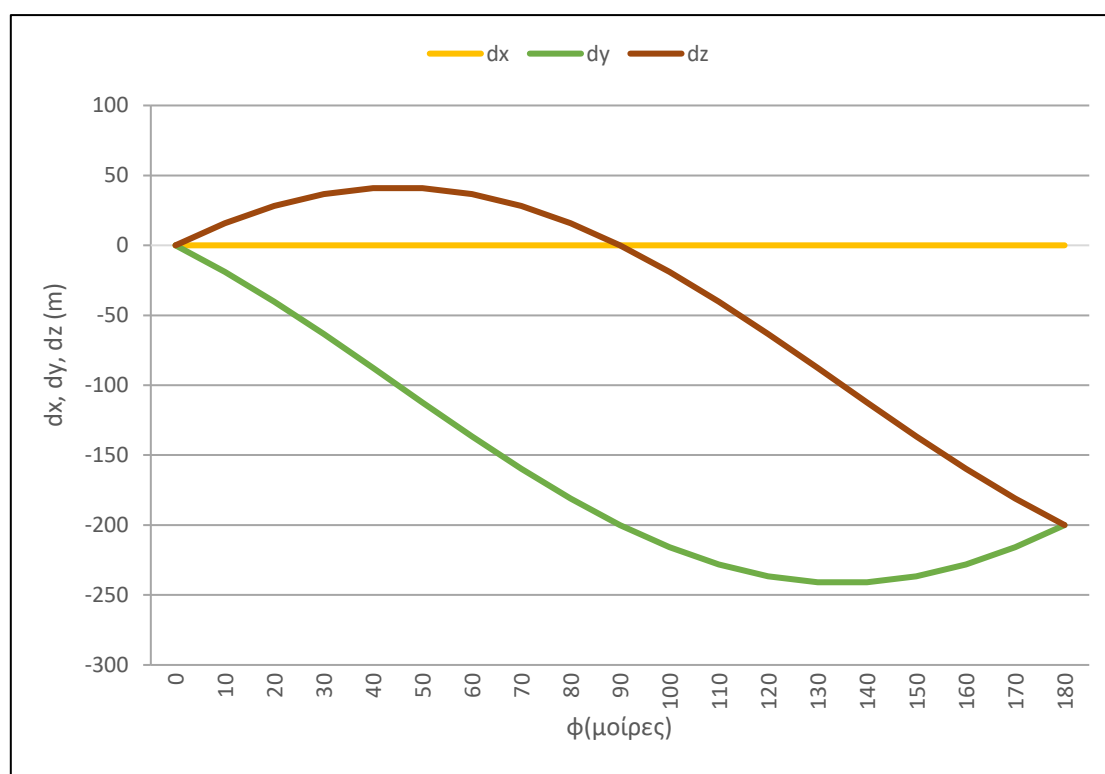
αποτελεσμάτων τους τόσο μεμονωμένα όσο και σε σχέση με τις άλλες μεθόδους.

### 3.2 Εντοπισμός οριακών γωνιών στροφής

Το μεγαλύτερο πρόβλημα κατά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων, έγκειται στον πίνακα στροφής, και πιο συγκεκριμένα στις γωνίες κατά τις οποίες κάθε άξονας θα περιστραφεί. Στις περισσότερες περιπτώσεις, πραγματοποιείται ίδια στροφή και για τους τρεις άξονες, με αποτέλεσμα το σύστημα να στρίβει ολόκληρο, υπό μια συγκεκριμένη γωνία.

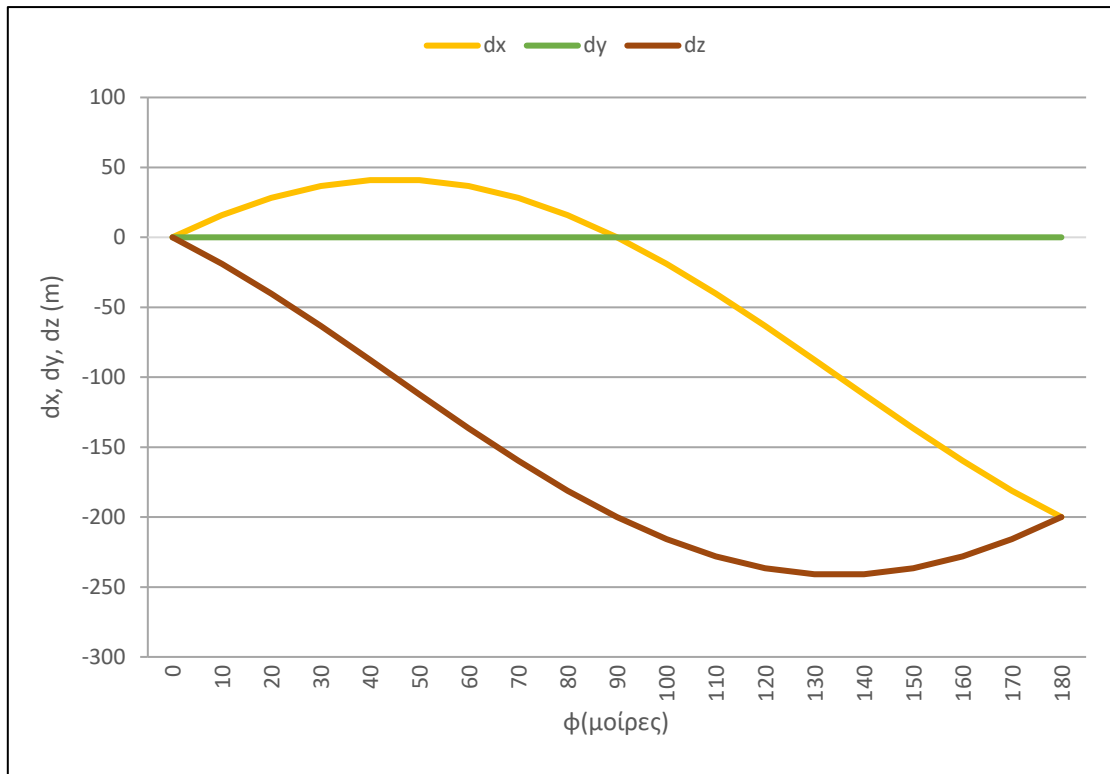
Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο, πραγματοποιείται διερεύνηση των διαφοροποιήσεων των συντεταγμένων ενός σημείου, όταν σε αυτό έχει πραγματοποιηθεί στροφή 0-180°. Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε για στροφή σε κάθε άξονα ξεχωριστά αλλά και για την ίδια στροφή και στους τρεις άξονες (κατά x-y-z).

Έτσι για ένα αρχικό σημείο P(100,100,100) και μετασχηματισμό μόνο για στροφή, χωρίς κλίμακα και μετάθεση, από την σχέση  $P' = R \cdot P$  προκύπτουν τα αποτελέσματα, που απεικονίζονται στα παρακάτω διαγράμματα.

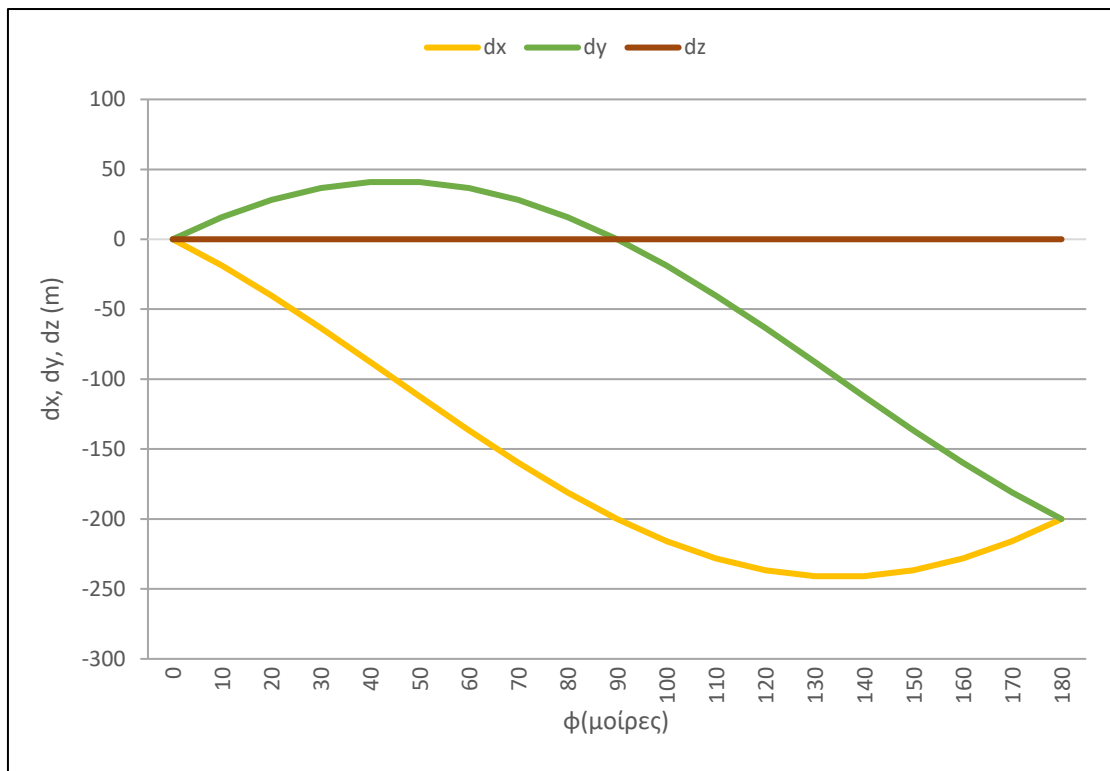


Διάγραμμα 3.1: Μεταβολή συντεταγμένων με εφαρμογή στροφής του άξονα x





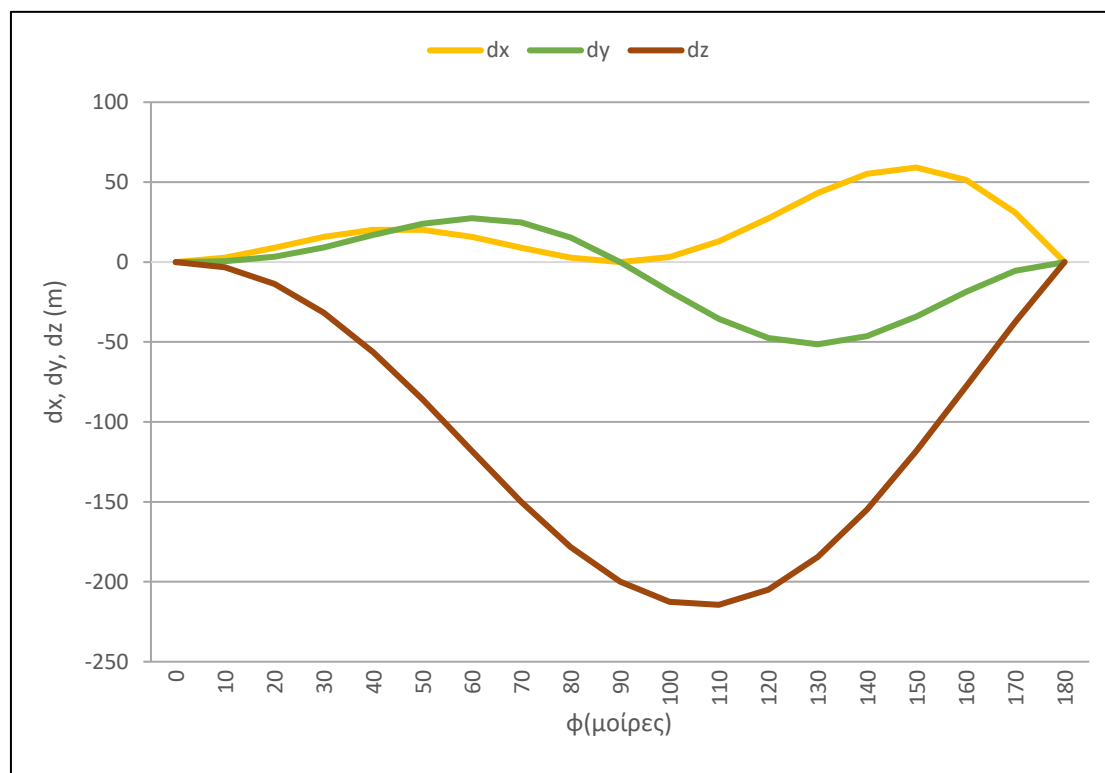
Διάγραμμα 3.2: Μεταβολή συντεταγμένων με εφαρμογή στροφής του άξονα  $y$



Διάγραμμα 3.3: Μεταβολή συντεταγμένων με εφαρμογή στροφής του άξονα  $z$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η συντεταγμένη στον άξονα όπου γίνεται η στροφή, μένει αναλλοίωτη, ενώ οι συντεταγμένες στους υπόλοιπους άξονες παρουσιάζουν διαφορές από 50m έως 250m.

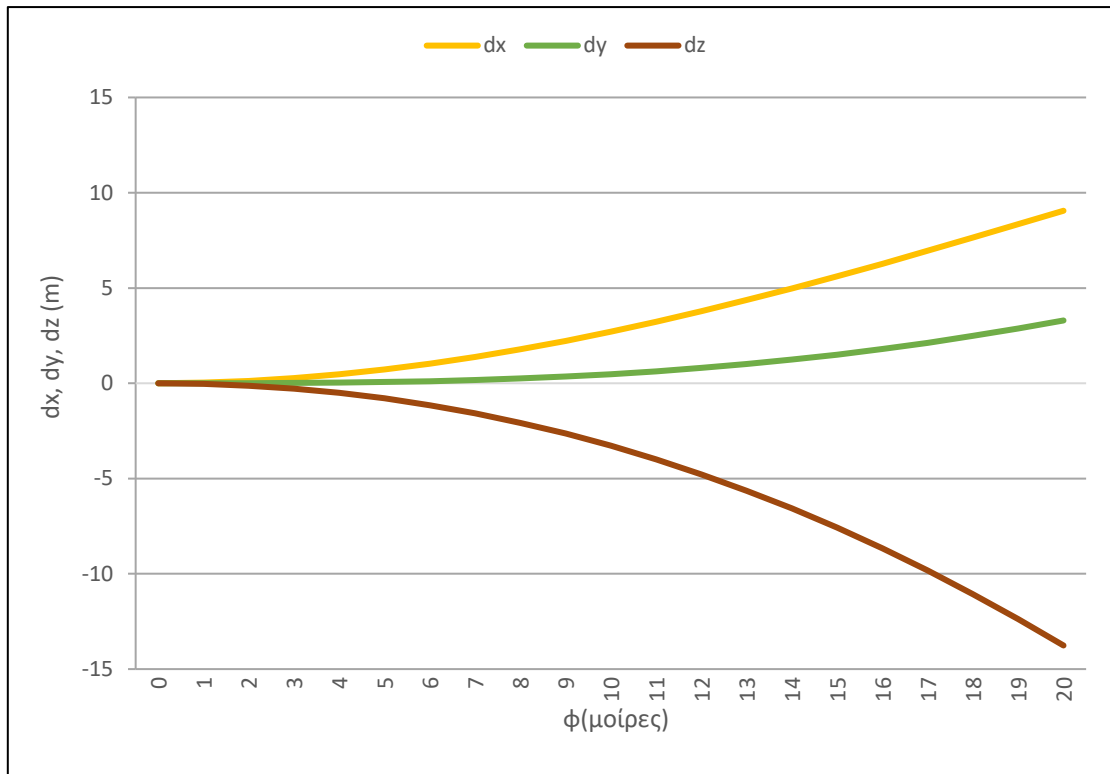
Στην περίπτωση της ίδιας στροφής και των τριών αξόνων, τα αποτελέσματα απεικονίζονται στο διάγραμμα 3.4.



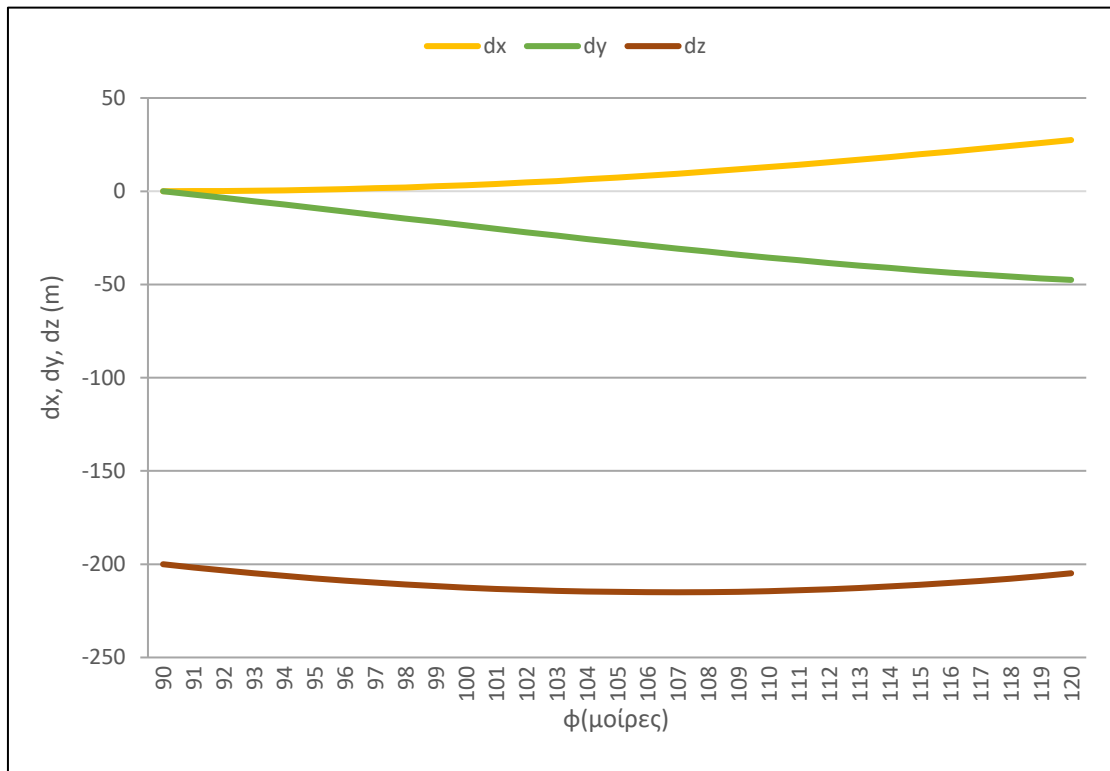
Διάγραμμα 3.4: Μεταβολή συντεταγμένων με εφαρμογή στροφής και στους τρεις άξονες

Παρατηρείται, πως για γωνίες 0°-20° οι μεταβολές είναι πολύ μικρές. Αντίστοιχα για γωνίες 80°-120° υπάρχει η μεγαλύτερη απόκλιση κυρίως στον άξονα z. Τέλος για γωνίες 160°-180°, οι ευθείες του παραπάνω διαγράμματος παρουσιάζουν έντονη κλίση, συγκριτικά με το υπόλοιπο διάγραμμα.

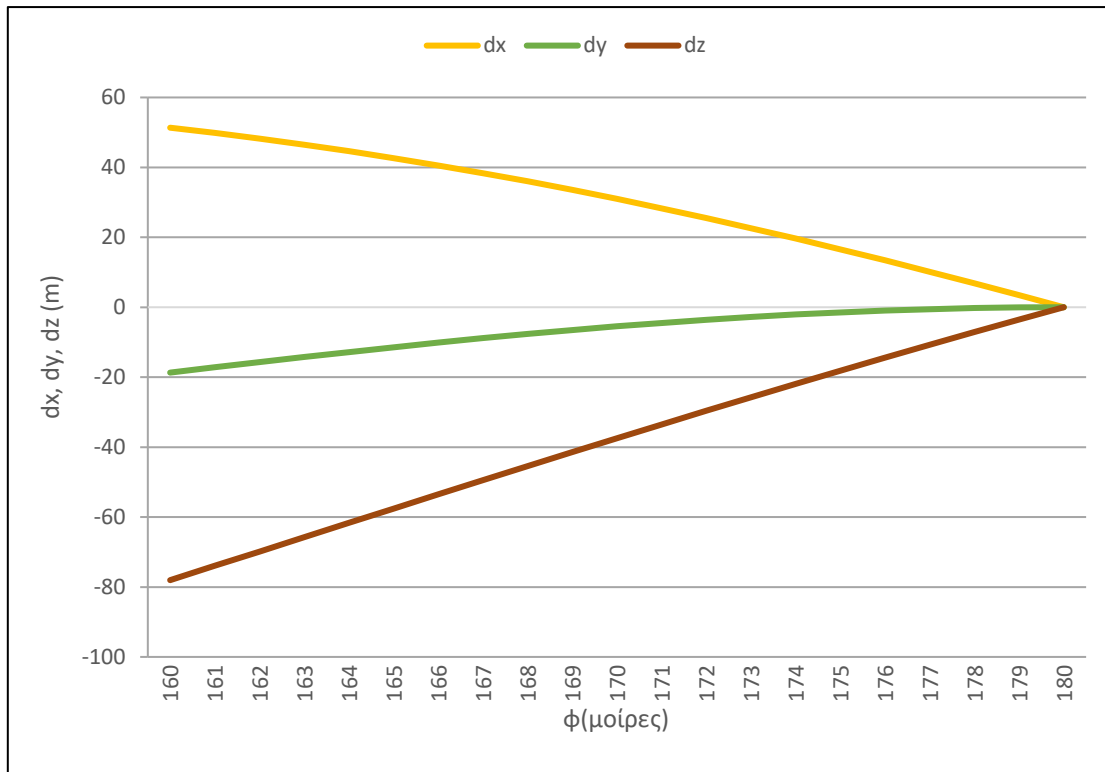
Έτσι οι περιοχές αυτές θεωρούνται «οριακές και ύποπτες» και απαιτούν μεγαλύτερη διερεύνηση. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν και τα διαγράμματα μεταβολών των συντεταγμένων ανά 1°, όπως φαίνονται παρακάτω, εστιάζοντας στις συγκεκριμένες περιοχές.



Διάγραμμα 3.5: Επιμέρους μεταβολή συντεταγμένων για γωνία 0°-20°



Διάγραμμα 3.6: Επιμέρους μεταβολή συντεταγμένων για γωνία 90°-120°



Διάγραμμα 3.7: Επιμέρους μεταβολή συντεταγμένων για γωνία 160°-180°

Έτσι διαπιστώνεται, πως για πολύ μικρές γωνίες η μεταβολή των συντεταγμένων είναι της τάξης των 10-15m, ενώ για γωνίες 90° -120° μπορεί να φτάσει και τα 220m. Τέλος, όσον αφορά στην περιοχή 160°-180° αυτή έχει μεταβολή από 0-80m. Συνεπώς, οι περιοχές αυτές αξίζει να μελετηθούν και να δοκιμαστούν σε μετασχηματισμούς που έχουν και μετάθεση αλλά και αλλαγή κλίμακας, όπως διερευνάται στα επόμενα σενάρια.

### 3.3 Δόμηση σεναρίων

Όπως αναφέρθηκε, δημιουργήθηκαν τρία διαφορετικά σύνολα δεδομένων, στα οποία εφαρμόστηκαν ποικίλες μεταθέσεις, στροφές και κλίμακες, ώστε να μελετηθούν σε βάθος οι διαφορές των μεθόδων επίλυσης του μετασχηματισμού Helmert.

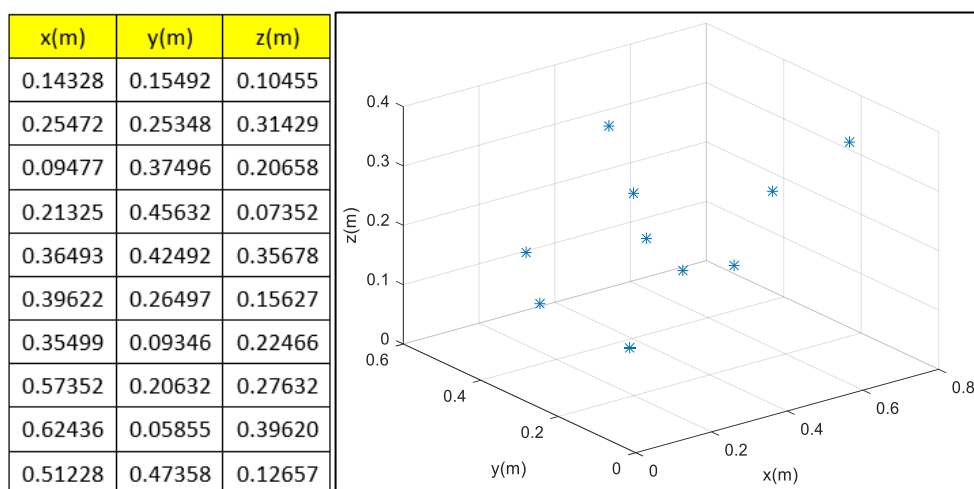
Αρχικά δομήθηκαν τα δεδομένα σε τρεις κατηγορίες, προσδιορίζοντας έτσι τις συντεταγμένες στο παλιό σύστημα αναφοράς. Έπειτα, με προσοχή, επιλέχθηκαν οι παράμετροι μετασχηματισμού οι οποίοι εφαρμόστηκαν για κάθε σύνολο δεδομένων, προκειμένου να επιλυθούν τα συστήματα με την κλασσική μέθοδο αλλά και με αυτές των τετραδονίων.

### 3.3.1 Επιλογή συντεταγμένων στο παλαιό σύστημα

Παρακάτω δίνονται τα σημεία στο παλαιό σύστημα σε κάθε σύνολο δεδομένων, με αντίστοιχο διάγραμμα, προκειμένου να είναι κατανοητή πλήρως η θέση τους στον χώρο.

➤ Σύνολο δεδομένων 1 (μικρές αποστάσεις μεταξύ των σημείων)

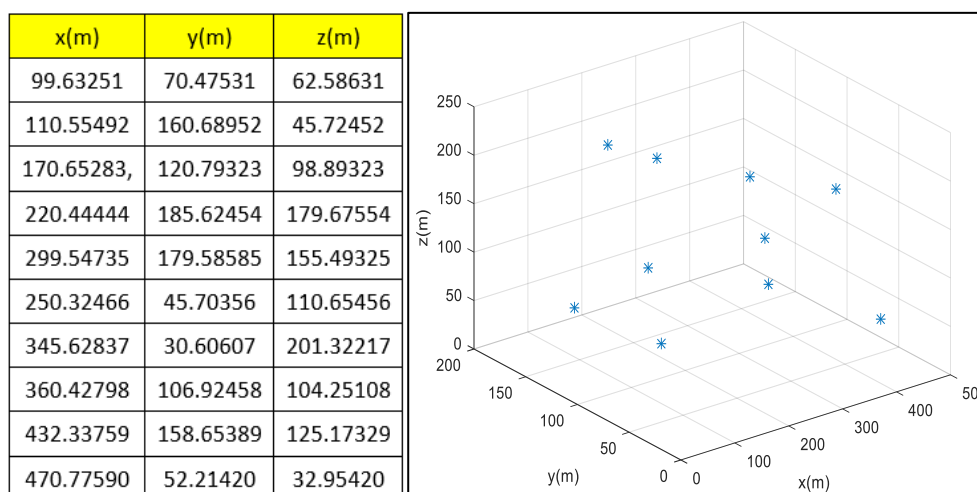
Τα δεδομένα αυτά (περίπτωση μικρόκοσμου), αποτελούν σημεία τα οποία απέχουν μεταξύ τους πολύ μικρές αποστάσεις. Θα μπορούσαν να αποτελούν σημεία ενός αντικειμένου, με τις τιμές των συντεταγμένων τους να κυμαίνονται μεταξύ των 0.10-0.70m.



Σχήμα 3.1: Αρχικά δεδομένα για το μικρόκοσμο

➤ Σύνολο δεδομένων 2 (μεγάλες αποστάσεις μεταξύ των σημείων)

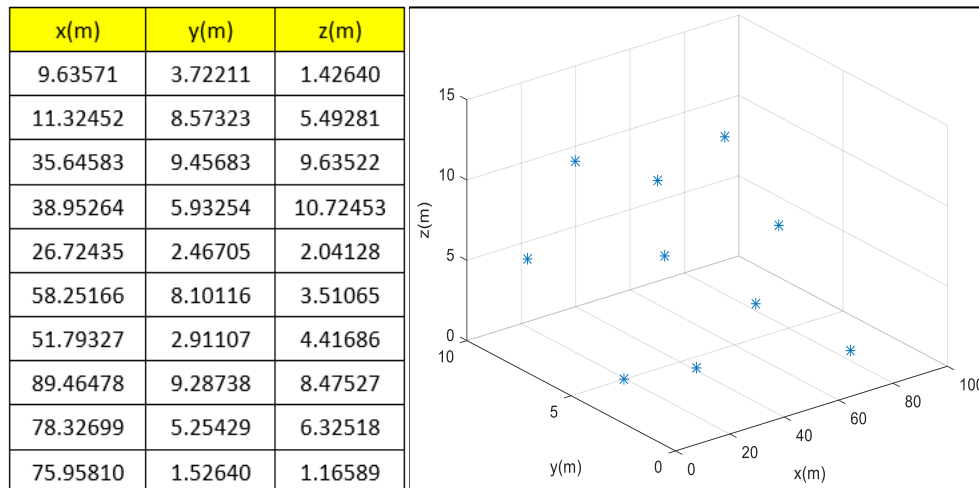
Σε αυτή την περίπτωση (περίπτωση μακρόκοσμου) τα σημεία απέχουν αρκετά μεγάλες αποστάσεις. Θα μπορούσαν να αποτελούν σημεία ενός πρανούς, με τις τιμές των συντεταγμένων τους να κυμαίνονται από 30.0-220.0m.



Σχήμα 3.2: Αρχικά δεδομένα για το μακρόκοσμο

➤ Σύνολο δεδομένων 3 (μέσες αποστάσεις μεταξύ των σημείων)

Το τελευταίο σύνολο αποτελεί μια ενδιάμεση κατηγορία σημείων τα οποία μπορεί να αποτελούν στοιχεία της πρόσοψης ενός κτηρίου, και στην ουσία πρόκειται για σημεία που οι τιμές των συντεταγμένων τους κυμαίνονται από 5.0-100.0m



Σχήμα 3.3: Αρχικά δεδομένα για μέσες αποστάσεις

### 3.3.2 Επιλογή παραμέτρων μετασχηματισμού

Όπως στην επιλογή των σημείων, έτσι και εδώ, επιλέγονται οι παράμετροι μετασχηματισμού να κυμαίνονται από δύο έως τρεις τιμές.

Όσον αφορά στις μεταθέσεις των αξόνων αυτές επιλέγονται να είναι της τάξης των 0.50m, των 10m και των 100m, ταυτόχρονα και στους τρεις άξονες αλλά και ξεχωριστά στον καθένα.

Επιπλέον, με βάση τη διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, οι τιμές των γωνιών στροφής επιλέγονται να είναι μεταξύ 0°-20°, 90°-120° και 160° -180°. Η στροφή αυτή γίνεται με τη σειρά x-y-z, ενώ είναι είτε ίση και στους τρεις άξονες, είτε όχι.

Ο συντελεστής κλίμακας επιλέγεται είτε μεγεθύνοντας το σύστημα είτε προκαλώντας σμίκρυνση. Έτσι για τα συγκεκριμένα σενάρια επιλέγεται  $\lambda=0.5$ ,  $\lambda=1$  και  $\lambda=1.5$ .

Τέλος για τις αβεβαιότητες των σημείων, αυτές είναι της τάξης των  $\pm 0.05\text{mm}$ ,  $\pm 1\text{mm}$  και  $\pm 1\text{cm}$ . Επειδή ο προσδιορισμός των συντεταγμένων θεωρείται ότι έγινε με τη μέθοδο των πολικών συντεταγμένων, η αβεβαιότητα αυτή είναι ίδια για όλες τις συντεταγμένες, δηλαδή:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \sigma_{z'} \quad (3.1)$$

Στον πίνακα 3.1 δίνονται συνοπτικά οι τιμές που λαμβάνουν οι παράμετροι μετασχηματισμού, ενώ στον πίνακα 3.2 παρουσιάζονται όλα τα σενάρια τα οποία θα επιλυθούν. Στην ουσία χρησιμοποιώντας αυτές τις παραμέτρους υπολογίζονται οι συντεταγμένες των σημείων στο νέο σύστημα, ώστε να υπάρχουν γνωστά σημεία και στα δύο συστήματα.

Μετάθεση (m)			Στροφή (ο)			Κλίμακα			Αβεβαιότητα συντεταγμένων		
0.50	10	100	5	100	170	0.5	1	1.5	±0.05mm	±1mm	±1cm

Πίνακας 3.1: Εύρος τιμών παραμέτρων μετασχηματισμού

Μελετώνται 9 σενάρια για κάθε σύνολο δεδομένων, επομένως 27 σενάρια συνολικά. Προκειμένου να διαχωρίζονται, παρέχεται και ένας αύξον αριθμός για κάθε σενάριο.

	A/A	Μετάθεση (m)			Στροφή (ο)			Κλίμακα	
		tx	ty	tz	φx	φy	φz	λ	
Μικρές αποστάσεις μεταξύ των σημείων	Σύνολο Δεδομένων 1 ( $\sigma = \pm 0.05\text{mm}$ )	1	0.50	0.50	0.50	5	5	5	0.5
		2	0.50	0.50	0.50	5	5	5	1.5
		3	10	10	10	100	100	100	0.5
		4	10	10	10	100	100	100	1.5
		5	100	100	100	170	170	170	0.5
		6	100	100	100	170	170	170	1.5
		7	0.50	100	10	5	100	170	0.5
		8	100	0.50	100	100	5	100	1
		9	10	100	0.50	170	100	5	1.5
Μεγάλες αποστάσεις μεταξύ των σημείων	Σύνολο Δεδομένων 2 ( $\sigma = \pm 1\text{cm}$ )	10	0.50	0.50	0.50	5	5	5	0.5
		11	0.50	0.50	0.50	5	5	5	1.5
		12	10	10	10	100	100	100	0.5
		13	10	10	10	100	100	100	1.5
		14	100	100	100	170	170	170	0.5
		15	100	100	100	170	170	170	1.5
		16	0.50	100	10	5	100	170	0.5
		17	100	0.50	100	100	5	100	1
		18	10	100	0.50	170	100	5	1.5
Μέσες αποστάσεις μεταξύ των σημείων	Σύνολο Δεδομένων 3 ( $\sigma = \pm 1\text{mm}$ )	19	0.50	0.50	0.50	5	5	5	0.5
		20	0.50	0.50	0.50	5	5	5	1.5
		21	10	10	10	100	100	100	0.5
		22	10	10	10	100	100	100	1.5
		23	100	100	100	170	170	170	0.5
		24	100	100	100	170	170	170	1.5
		25	0.50	100	10	5	100	170	0.5
		26	100	0.50	100	100	5	100	1
		27	10	100	0.50	170	100	5	1.5

Πίνακας 3.2: Σενάρια διερεύνησης

### 3.4 Μεθοδολογία επίλυσης σεναρίων

Αφού δομήθηκαν τα σενάκια και υπολογίστηκαν οι συντεταγμένες των σημείων και στα δύο συστήματα, πραγματοποιείται η ακριβώς αντίθετη διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, με γνωστά σημεία πριν και μετά τον μετασχηματισμό, προσδιορίζονται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων οι παράμετροι μετασχηματισμού.

Ο προσδιορισμός αυτός πραγματοποιείται με την κλασσική μέθοδο καθώς και με τη μέθοδο των απλών και διπλών τετραδονίων αντίστοιχα. Σκοπός είναι να εντοπιστούν τυχόν αποκλίσεις από τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων μετασχηματισμού, ενώ ταυτόχρονα εντοπίζεται η χρησιμότητα, η αξιοπιστία και τα προβλήματα κάθε μεθόδου ανά περίπτωση.

#### 3.4.1 Επιλογή μεθόδου συνόρθωσης

Προκειμένου να υπολογιστούν τόσο οι παράμετροι μετασχηματισμού, όσο και η αβεβαιότητά τους, και καθώς τα διαθέσιμα σημεία είναι περισσότερα από τα απαιτούμενα, σε κάθε περίπτωση, πραγματοποιείται συνόρθωση με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Αφού τα σημεία πριν και μετά τον μετασχηματισμό έχουν σφάλμα, επιλέγεται η Γενική Μέθοδος Συνόρθωσης, η οποία επιλύεται χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση [Αγάτζα-Μπαλοδήμου Α. Μ., 2009] :

$$A \cdot \hat{x} + B \cdot (l + u) = k \quad (3.2)$$

όπου:  $A$ : ο πίνακας συντελεστών των παραμέτρων που ενδιαφέρουν.

$B$ : ο πίνακας των συντελεστών των μετρημένων στοιχείων

$\hat{x}$ : το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των παραμέτρων.

$l$ : το διάνυσμα των μετρήσεων.

$u$ : το διάνυσμα των υπολοίπων των μετρήσεων.

$k$ : το διάνυσμα των σταθερών όρων.

Αν  $n$  ο αριθμός των μετρημένων στοιχείων,  $m$  ο συνολικός αριθμός των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων και  $m_0$  ο αριθμός των παραμέτρων  $x$  που ενδιαφέρουν, ο βαθμός ελευθερίας θα είναι  $r = n - m$ , ενώ ο αριθμός των εξισώσεων συνθήκης θα είναι  $c = r + m_0$ .

Έτσι οι διαστάσεις των πινάκων είναι:

$$A_c^{m_0}, B_c^n, \hat{x}_{m_0}^1, l_n^1, u_n^1, k_c^1$$



Η σχέση 3.2 μπορεί να γραφτεί, επίσης:

$$A \cdot \widehat{x} + B \cdot u = w \quad (3.3)$$

με  $w = k - B \cdot l$  το διάνυσμα των σφαλμάτων κλεισίματος.

Η λύση, είναι αυτή που ικανοποιεί τη σχέση 3.3 καθώς και την αρχή των Ελαχίστων Τετραγώνων ( $u^T \cdot P \cdot u = \min$  με  $P$ : ο πίνακας βαρών των μετρήσεων) και παρουσιάζεται στην σχέση 3.4.

$$\widehat{x} = (A^T \cdot P_a \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P_a \cdot w \quad \text{με} \quad P_a = (B \cdot P^{-1} \cdot B^T)^{-1} \quad (3.4)$$

Όσον αφορά στον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας, καθώς και στην a posteriori μεταβλητότητα της μονάδας βάρους  $\widehat{\sigma}_o^2$  ισχύει:

$$\widehat{\sigma}_o^2 = \frac{w^T \cdot P_a \cdot w - \widehat{x}^T \cdot N_a \cdot \widehat{x}}{n-m}, \quad \text{όπου} \quad N_a = A^T \cdot P_a \cdot A \quad (3.5)$$

$$\widehat{V}_x = \widehat{\sigma}_o^2 \cdot N_a^{-1} \quad (3.6)$$

Στην περίπτωση που οι συνθήκες μεταξύ των μετρήσεων και των παραμέτρων δεν είναι γραμμικές, όπως στη συγκεκριμένη εργασία, και έχουν τη μορφή  $y_i = f_i(\widehat{x}, \widehat{l}) = k_i$  δίνονται προσωρινές τιμές στις παραμέτρους  $x$  και αναπτύσσονται οι σχέσεις κατά Taylor στη θέση  $x_o, l$ , οπότε:

$$A = J_{y\widehat{x}}^o = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \widehat{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \widehat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \widehat{x}_{m_o}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \widehat{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \widehat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \widehat{x}_{m_o}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_c}{\partial \widehat{x}_1} & \frac{\partial f_c}{\partial \widehat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_c}{\partial \widehat{x}_{m_o}} \end{bmatrix} \quad B = J_{y\widehat{l}}^o = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \widehat{l}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \widehat{l}_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \widehat{l}_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \widehat{l}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \widehat{l}_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \widehat{l}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_c}{\partial \widehat{l}_1} & \frac{\partial f_c}{\partial \widehat{l}_2} & \cdots & \frac{\partial f_c}{\partial \widehat{l}_n} \end{bmatrix}$$

Έτσι το σύστημα παίρνει τη μορφή  $A \cdot \delta x + B \cdot u = w$  με:

$$w = \begin{bmatrix} k_1 - f_1(x^o, l) \\ k_2 - f_2(x^o, l) \\ \vdots \\ k_c - f_c(x^o, l) \end{bmatrix}$$

Πραγματοποιείται συνόρθωση για κάθε μέθοδο ξεχωριστά προκειμένου να υπολογιστούν οι παράμετροι μετασχηματισμού, όπως περιγράφεται στις επόμενες παραγράφους.

### 3.4.2 Συνόρθωση για την κλασική μέθοδο επίλυσης

Κατά την κλασική μέθοδο επίλυσης η εξίσωση μετασχηματισμού έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \lambda \cdot R \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

με  $R = (I - C')^{-1} \cdot (I + C')$ ,  $C' = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$  και  $I$  μοναδιαίος πίνακας.

Αντικαθιστώντας τα διάφορα μεγέθη σε αυτή τη σχέση, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις παρατήρησης για καθένα από τα 10 σημεία ( $i = 1, \dots, 10$ ).

$$f_{x_i} = x'_i - t_x + \frac{\lambda \cdot x_i \cdot (b^2 - a^2 + c^2 - 1) + \lambda \cdot y_i \cdot 2(c - ab) - \lambda \cdot z_i \cdot 2(b + ac)}{a^2 + b^2 + c^2 + 1} \quad (3.8)$$

$$f_{y_i} = y'_i - t_y + \frac{-\lambda \cdot x_i \cdot 2(c + ab) + \lambda \cdot y_i \cdot (a^2 - b^2 + c^2 - 1) + \lambda \cdot z_i \cdot 2(a - bc)}{a^2 + b^2 + c^2 + 1} \quad (3.9)$$

$$f_{z_i} = z'_i - t_z + \frac{\lambda \cdot x_i \cdot 2(b - a \cdot c) - \lambda \cdot y_i \cdot 2 \cdot (a + b \cdot c) + \lambda \cdot z_i \cdot (a^2 - c^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2 + c^2 + 1} \quad (3.10)$$

Έτσι υπάρχουν  $n = 6 \cdot 10 = 60$  «μετρημένα» μεγέθη, τα οποία είναι οι συντεταγμένες των 10 σημείων και στα δύο συστήματα, συνολικά  $m_o = 7$  άγνωστοι (παράμετροι μετασχηματισμού:  $a, b, c, t_x, t_y, t_z, \lambda$ ) και συνολικά  $m = m_o + 3_{(\text{συντεταγμένες})} \cdot 10_{(\text{σημεία})} = 37$  ανεξάρτητες καθοριστικοί παράμετροι. Συνεπώς ο βαθμός ελευθερίας σε αυτή τη περίπτωση είναι  $r = n - m = 60 - 37 = 23$ , και οι εξισώσεις συνθήκης είναι  $c = r + m_o = 23 + 7 = 30$ .

Αξίζει να σημειωθεί, ότι εφόσον οι σχέσεις είναι μη γραμμικές θα πραγματοποιηθεί γραμμικοποίηση κατά Taylor, ενώ δίνονται οι αρχικές

τιμές επιλύοντας το σύστημα των σχέσεων 3.8-3.10 για τα δύο πρώτα σημεία αφού απαιτούνται 6 σχέσεις για 6 αγνώστους. Η αρχική τιμή της κλίμακας δίνεται από το πηλίκο της απόστασης των δύο σημείων πριν και μετά τον μετασχηματισμό και παρουσιάζεται στη σχέση 3.11.

$$\lambda^0 = \frac{S'_{12}}{S_{12}} = \frac{\sqrt{(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \quad (3.11)$$

Συνεπώς κατά τη συνόρθωση δημιουργούνται οι εξής πίνακες:

$$A_{30}^7 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{x_1}}{\partial a} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial b} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial c} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial t_x} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial t_y} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial t_z} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{y_1}}{\partial a} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial b} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial c} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial t_x} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial t_y} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial t_z} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{z_1}}{\partial a} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial b} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial c} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial t_x} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial t_y} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial t_z} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial a} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial b} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial c} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial t_x} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial t_y} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial t_z} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

$$B_{30}^{60} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x'_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial y'_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial z'_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_{y_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial x'_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial y'_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial z'_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_{z_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial x'_1} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial y'_1} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial z'_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{x_2}}{\partial y_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial z'_{10}} \end{bmatrix}$$

$$w_{30}^1 = \begin{bmatrix} 0-f_{x_1} \\ 0-f_{y_1} \\ 0-f_{z_1} \\ 0-f_{x_2} \\ \vdots \\ 0-f_{z_{10}} \end{bmatrix}$$

Κατά την επίλυση αυτού του συστήματος, προκύπτει το διάνυσμα μετάθεσης και η κλίμακα, ενώ προσδιορίζονται και οι παράμετροι του πίνακα στροφής. Ωστόσο για τον υπολογισμό των γωνιών, ανά άξονα, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha = \varphi_x = \arctan \frac{R_{(2,3)}}{R_{(3,3)}} = \arctan \frac{2 \cdot (b \cdot c - a)}{1 - a^2 - b^2 + c^2} \quad (3.12)$$

$$\beta = \varphi_y = -\arcsin R_{(1,3)} = -\arcsin \frac{2 \cdot (a \cdot c + b)}{1 + a^2 + b^2 + c^2} \quad (3.13)$$

$$\gamma = \varphi_z = \arctan \frac{R_{(1,2)}}{R_{(1,1)}} = \arctan \frac{2 \cdot (a \cdot b - c)}{1 + a^2 - b^2 - c^2} \quad (3.14)$$

Σημαντικό είναι να πραγματοποιηθεί διερεύνηση στις συγκεκριμένες γωνίες και έτσι να υπολογιστούν οι τελικές τους τιμές. Επιπλέον για την αβεβαιότητά τους, πραγματοποιείται νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων από τα στοιχεία  $a, b, c$  στα  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  με βάση τη σχέση  $V_{\varphi_x \varphi_y \varphi_z} = J \cdot V_{abc} \cdot J^T$  και τον αντίστοιχο Ιακωβιανό πίνακα.

$$J_3^3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial a} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial b} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial a} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial b} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial a} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial b} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial c} \end{bmatrix}$$

### 3.4.3 Συνόρθωση για τη μέθοδο απλών τετραδονίων

Κατά τη μέθοδο επίλυσης με τη χρήση απλών τετραδονίων, η εξίσωση μετασχηματισμού έχει την μορφή:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \lambda \cdot R \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

με  $R = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q}) \cdot I_3 + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T + q_0 \cdot C_q)$ , όπου  $I_3$  μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων  $3 \times 3$ , και  $\mathbf{q} = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k = (q_0, \mathbf{q})$

Αντικαθιστώντας τα διάφορα μεγέθη σε αυτή τη σχέση, προκύπτουν οι αντίστοιχες εξισώσεις παρατήρησης για καθένα από τα 10 σημεία ( $i = 1, \dots, 10$ ), όπως και παραπάνω.

$$f_{x_i} = x'_i - t_x - \lambda \cdot x_i \cdot (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + 2 \cdot \lambda \cdot y_i \cdot (q_0 \cdot q_3 - q_1 \cdot q_2) - 2 \cdot \lambda \cdot z_i \cdot (q_0 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3) \quad (3.16)$$

$$f_{y_i} = y'_i - t_y - 2 \cdot \lambda \cdot x_i \cdot (q_0 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2) - \lambda \cdot y_i \cdot (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) + 2 \cdot \lambda \cdot z_i \cdot (q_0 \cdot q_1 - q_2 \cdot q_3) \quad (3.17)$$

$$f_{z_i} = z'_i - t_z + 2 \cdot \lambda \cdot x_i \cdot (q_0 \cdot q_2 - q_1 \cdot q_3) - 2 \cdot \lambda \cdot y_i \cdot (q_0 \cdot q_1 + q_2 \cdot q_3) - \lambda \cdot z_i \cdot (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \quad (3.18)$$

Έτσι, και εδώ υπάρχουν  $n = 6 \cdot 10 = 60$  «μετρημένα» μεγέθη, τα οποία είναι οι συντεταγμένες των 10 σημείων και στα δύο συστήματα, συνολικά  $m_o = 8$  άγνωστοι (παράμετροι μετασχηματισμού:  $q_0, q_1, q_2, q_3, t_x, t_y, t_z, \lambda$ ) και συνολικά  $m = m_o + 3_{(\text{συντεταγμένες})} \cdot 10_{(\text{σημεία})} = 38$  ανεξάρτητες καθοριστικοί παράμετροι. Συνεπώς ο βαθμός ελευθερίας σε αυτή τη περίπτωση είναι  $r = n - m = 60 - 38 = 22$ , και οι εξισώσεις συνθήκης είναι  $c = r + m_o = 22 + 8 = 30$ .

Και σε αυτή τη περίπτωση απαιτείται γραμμικοποίηση κατά Taylor με τις αρχικές τιμές των άγνωστων να προκύπτουν από την επίλυση των σχέσεων 3.16-3.18 για τα δύο πρώτα σημεία και τη σχέση 3.16 για το τρίτο σημείο, καθώς απαιτούνται 7 σχέσεις για τους 7 αγνώστους του συστήματος. Και σε αυτή τη περίπτωση η αρχική τιμή της κλίμακας δίνεται από την σχέση 3.11.

Για τη συνόρθωση σε αυτή τη περίπτωση δημιουργείται ο παρακάτω πίνακας σχεδιασμού A.

Αντίστοιχα οι πίνακες B και w, δεν τροποποιούνται σε μορφή, απλώς υπολογίζονται εκ νέου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.16-3.18.

$$A_{30}^8 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{x_1}}{\partial q_0} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial q_2} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial q_3} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial t_x} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial t_y} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial t_z} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{y_1}}{\partial q_0} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial q_2} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial q_3} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial t_x} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial t_y} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial t_z} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{z_1}}{\partial q_0} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial q_2} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial q_3} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial t_x} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial t_y} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial t_z} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial q_0} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial q_2} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial q_3} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial t_x} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial t_y} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial t_z} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

Με την επίλυση αυτού του συστήματος, προσδιορίζεται το τετραδόνιο που εμπεριέχεται στον πίνακα στροφής, καθώς και το διάνυσμα μετάθεσης και ο συντελεστής κλίμακας.

Προκειμένου να γίνει μετάβαση από το υπολογισμένο τετραδόνιο στις γωνίες στροφής, ανά άξονα, πραγματοποιείται εκ νέου συνόρθωση με τις εξής εξισώσεις παρατήρησης:

$$g_0 = q_0 - \cos \frac{\varphi_z}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_y}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_x}{2} - \sin \frac{\varphi_z}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_y}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_x}{2} \quad (3.19)$$

$$g_1 = q_1 - \cos \frac{\varphi_z}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_y}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_x}{2} + \sin \frac{\varphi_z}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_y}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_x}{2} \quad (3.20)$$

$$g_2 = q_2 - \cos \frac{\varphi_z}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_y}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_x}{2} - \sin \frac{\varphi_z}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_y}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_x}{2} \quad (3.21)$$

$$g_3 = q_3 - \sin \frac{\varphi_z}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_y}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_x}{2} + \cos \frac{\varphi_z}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_y}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_x}{2} \quad (3.22)$$

Υλοποιώντας, έτσι, τον παρακάτω πίνακα σχεδιασμού  $A$  και τους αντίστοιχους  $B$  και  $w$ , με τη γενική μέθοδο συνόρθωσης υπολογίζονται τόσο οι τιμές των γωνιών, όσο και η αβεβαιότητα τους.

$$A_4^3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial \varphi_x} & \frac{\partial g_0}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial g_0}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial \varphi_x} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \varphi_x} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \varphi_x} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi_z} \end{bmatrix} B_4^4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial q_0} & \frac{\partial g_0}{\partial q_1} & \frac{\partial g_0}{\partial q_2} & \frac{\partial g_0}{\partial q_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial q_0} & \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \frac{\partial g_1}{\partial q_2} & \frac{\partial g_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q_0} & \frac{\partial g_2}{\partial q_1} & \frac{\partial g_2}{\partial q_2} & \frac{\partial g_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial q_0} & \frac{\partial g_3}{\partial q_1} & \frac{\partial g_3}{\partial q_2} & \frac{\partial g_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} w_4^1 = \begin{bmatrix} 0-g_0 \\ 0-g_1 \\ 0-g_2 \\ 0-g_3 \end{bmatrix}$$

### 3.4.4 Συνόρθωση για τη μέθοδο διπλών τετραδονίων

Κατά τη συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης, η εξίσωση μετασχηματισμού έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 2 \cdot W(r)^T \cdot d + \lambda \cdot W(r)^T \cdot Q(r) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

με  $d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = (d_0, \mathbf{d})$  και  $r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = (r_0, \mathbf{r})$  τετραδόνια τα οποία ορίζουν τους πίνακες, όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας.

$$w(r) = \begin{bmatrix} r_0 \cdot I - C(r) & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & r_0 \end{bmatrix}, Q(r) = \begin{bmatrix} r_0 \cdot I + C(r) & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & r_0 \end{bmatrix}, (r) = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να προσδιοριστούν οι παράμετροι μετασχηματισμού πρέπει να υπολογιστούν τα τετραδόνια  $d$  και  $r$  και ο συντελεστής κλίμακας  $\lambda$ , και αντικαθιστώντας τις σχέσεις, προκύπτουν οι αντίστοιχες εξισώσεις παρατήρησης για καθένα από τα 10 σημεία ( $i = 1, \dots, 10$ ).

$$f_{o_i} = 2 \cdot d_0 \cdot r_0 - 2 \cdot d_3 \cdot r_1 - 2 \cdot d_1 \cdot r_3 + 2 \cdot d_2 \cdot r_2 \quad (3.24)$$

$$f_{x_i} = 2 \cdot d_1 \cdot r_0 - 2 \cdot d_3 \cdot r_2 + 2 \cdot d_0 \cdot r_3 - 2 \cdot d_2 \cdot r_1 + \lambda \cdot x_i \cdot (r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) - 2 \cdot \lambda y_i \cdot (r_0 r_3 - r_1 r_2) + 2 \lambda z_i (r_0 r_2 + r_1 r_3) - x_i' \quad (3.25)$$

$$f_{y_i} = 2 \cdot d_1 \cdot r_1 - 2 \cdot d_3 \cdot r_3 - 2 \cdot d_0 \cdot r_2 + 2 \cdot d_2 \cdot r_0 + 2 \cdot \lambda x_i \cdot (r_0 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2) - 2 \cdot \lambda \cdot y_i \cdot (-r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 + r_3^2) - 2 \cdot \lambda z_i \cdot (r_0 \cdot r_1 - r_2 \cdot r_3) - y_i' \quad (3.26)$$

$$f_{z_i} = 2 \cdot d_0 \cdot r_1 + 2 \cdot d_1 \cdot r_2 + 2 \cdot d_3 \cdot r_0 + 2 \cdot d_2 \cdot r_3 - 2 \cdot \lambda \cdot x_i \cdot (r_0 \cdot r_2 - r_3 \cdot r_1) + 2 \cdot \lambda \cdot y_i \cdot (r_0 \cdot r_1 + r_2 \cdot r_3) - \lambda \cdot z_i \cdot (-r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) - z_i' \quad (3.27)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν  $n = 6 \cdot 10 = 80$  «μετρημένα» μεγέθη οι συντεταγμένες των 10 σημείων και στα δύο συστήματα, συμπεριλαμβανομένου και του πρώτου μηδενικού στοιχείου ανά σημείο. Συνολικά  $m_o = 9$  άγνωστοι (παράμετροι μετασχηματισμού:  $r_0, r_1, r_2, r_3, d_0, d_1, d_2, d_3, \lambda$ ) και συνολικά  $m = m_o + 4_{(\text{συντεταγμένες})} \cdot 10_{(\text{σημεία})} = 49$  ανεξάρτητες καθοριστικοί παράμετροι. Συνεπώς ο βαθμός ελευθερίας σε αυτή τη περίπτωση είναι  $r = n - m = 80 - 49 = 31$ , και οι εξισώσεις συνθήκης είναι  $c = r + m_o = 31 + 9 = 40$ .

Οι αρχικές τιμές των άγνωστων τετραδονίων, δίνονται με την επίλυση των σχέσεων 3.24-3.27 για τα δυο πρώτα σημεία, ενώ η αρχική τιμή της κλίμακας από την σχέση 3.11.

Επιπλέον δίνεται και σε αυτή τη περίπτωση η μορφή του πίνακα σχεδιασμού που εμπλέκεται την συνόρθωση.

$$A_{40}^9 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{o_1}}{\partial r_0} & \frac{\partial f_{o_1}}{\partial r_1} & \frac{\partial f_{o_1}}{\partial r_2} & \frac{\partial f_{o_1}}{\partial r_3} & \frac{\partial f_{o_1}}{\partial d_0} & \frac{\partial f_{o_1}}{\partial d_1} & \frac{\partial f_{o_1}}{\partial d_2} & \frac{\partial f_{o_1}}{\partial d_3} & \frac{\partial f_{o_1}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{x_1}}{\partial r_0} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial r_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial r_2} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial r_3} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial d_0} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial d_1} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial d_2} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial d_3} & \frac{\partial f_{x_1}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{y_1}}{\partial r_0} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial r_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial r_2} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial r_3} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial d_0} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial d_1} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial d_2} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial d_3} & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_{z_1}}{\partial r_0} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial r_1} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial r_2} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial r_3} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial d_0} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial d_1} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial d_2} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial d_3} & \frac{\partial f_{z_1}}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial r_0} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial r_1} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial r_2} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial r_3} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial d_0} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial d_1} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial d_2} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial d_3} & \frac{\partial f_{z_{10}}}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες B και w είναι αντίστοιχοι με τις προηγούμενες περιπτώσεις, μόνο που προστίθεται η εξίσωση παρατήρησης  $f_{o_i}$ . Με τη συνόρθωση προκύπτουν τα τετραδόνια και ο συντελεστής κλίμακας, καθώς και η αβεβαιότητα τους.

Προκειμένου να γίνει μετάβαση από το τετραδόνιο  $r$  στην στροφή του κάθε άξονα χρησιμοποιούνται και εδώ οι σχέσεις 3.19-3.22. Αντίστοιχα το διάνυσμα μετάθεσης προκύπτει από την σχέση  $t = 2 \cdot W(r)^T \cdot d$  ενώ απαιτείται νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας του.

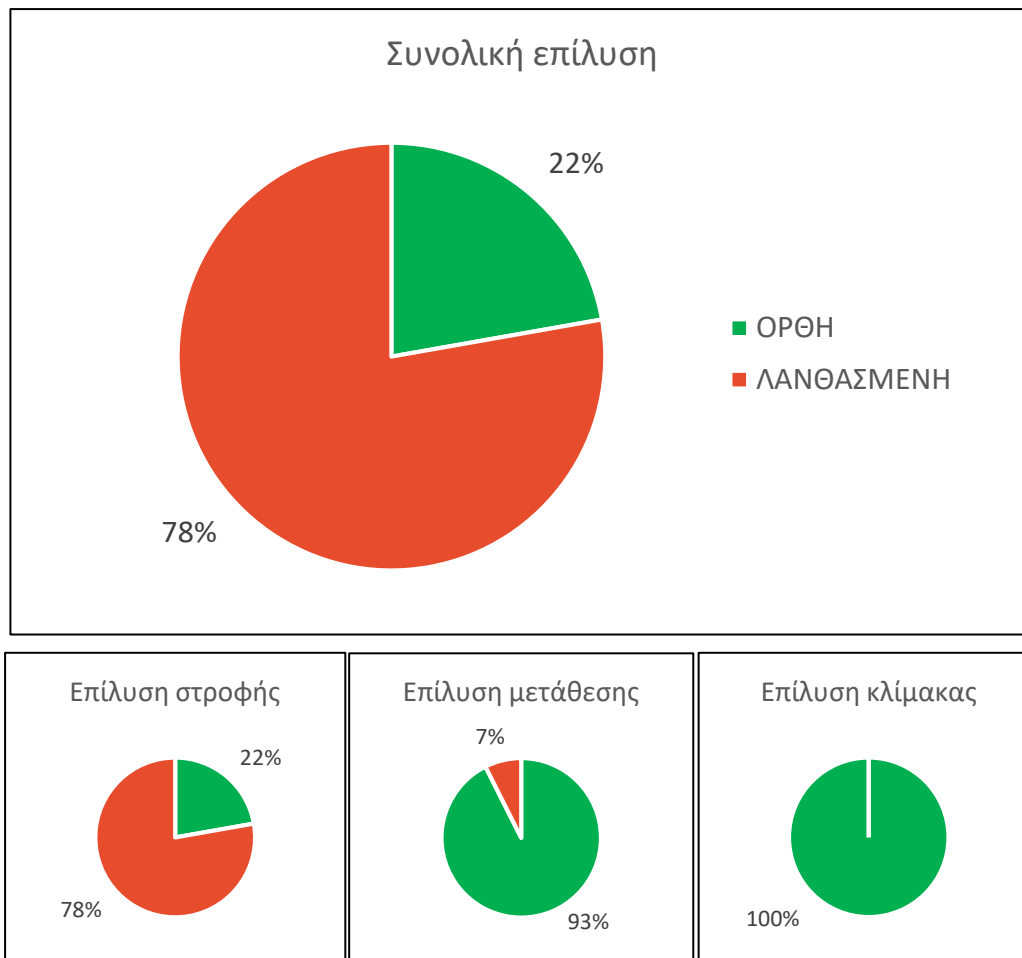
### 3.5 Αποτελέσματα επίλυσης σεναρίων

Για τη σύγκριση των παραπάνω επιλύσεων δημιουργήθηκαν διαγράμματα που παρουσιάζουν τα αποτελέσματα ανά μέθοδο. Υπολογίστηκαν οι αποκλίσεις των υπολογισμένων μεγεθών από τις πραγματικές τιμές ενώ πραγματοποιήθηκε έλεγχος για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

#### 3.5.1 Αποτελέσματα κλασσικής μεθόδου

Στην περίπτωση της κλασσικής μεθόδου το ποσοστό ορθής επίλυσης είναι μόλις 22%, ενώ αυτό της λανθασμένης είναι 78%. Παρατηρείται στα διαγράμματα παρακάτω, πως σε όλα τα σενάρια η κλίμακα έχει υπολογιστεί σωστά, ενώ οι περισσότερες αστοχίες εντοπίζονται στον υπολογισμό γωνιών, όπως ήταν αναμενόμενο.





Διάγραμμα 3.8: Ποσοστά ορθών και λανθασμένων επιλύσεων συνολικά και ανά παράμετρο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης

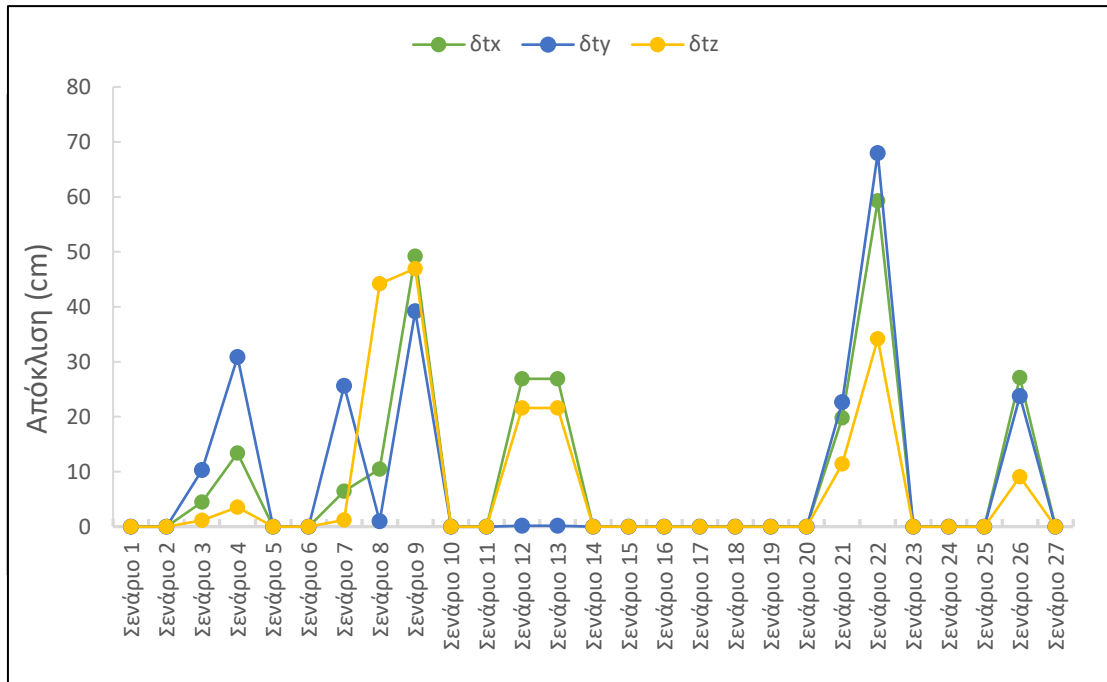
Για να προσδιοριστούν τα σενάρια με τις μεγαλύτερες αστοχίες, παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα αποκλίσεων για κάθε μέγεθος.

Όσον αφορά στις μεταθέσεις αυτές παρουσιάζονται στο διάγραμμα 3.9 και οι αποκλίσεις κυμαίνονται από μερικά δέκατα mm, έως μερικά cm. Η μεγαλύτερη απόκλιση αγγίζει τα 67 cm για το σενάριο 22, ενώ το 63% των σεναρίων, με βάση το διάγραμμα 3.10, εμφανίζει αποκλίσεις μικρότερες από 1mm.

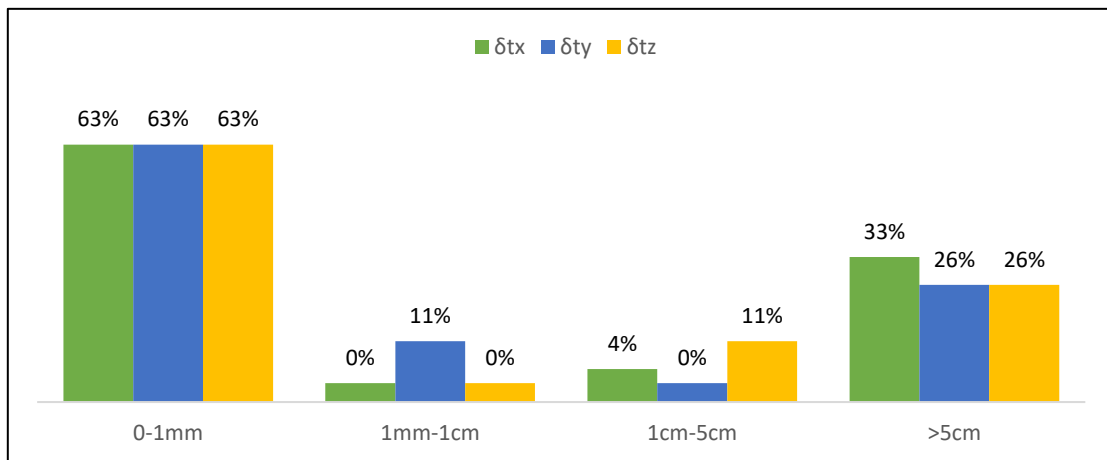
Αξίζει να σημειωθεί ότι στην πλειοψηφία του, το δεύτερο σύνολο δεδομένων (μεγάλες αποστάσεις μεταξύ των σημείων) εμφανίζει πολύ μικρές αποκλίσεις, αντίθετα με το πρώτο (μικρές αποστάσεις μεταξύ των σημείων), που παρουσιάζει έντονες αυξομειώσεις, κυρίως στα σενάρια με διαφορετική μετάθεση ανά άξονα (Σενάρια 7-9), ή σε αυτά όπου η μετάθεση είναι της τάξης των 10m (Σενάρια 3-4).

Όσον αφορά στην αβεβαιότητα των υπολογισμένων μεταθέσεων αυτή είναι της τάξης του  $10^{-6}$ , με αποτέλεσμα πολλές φορές να μην

επαληθεύεται ο έλεγχος για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, όμως να θεωρούνται αποδεκτές.

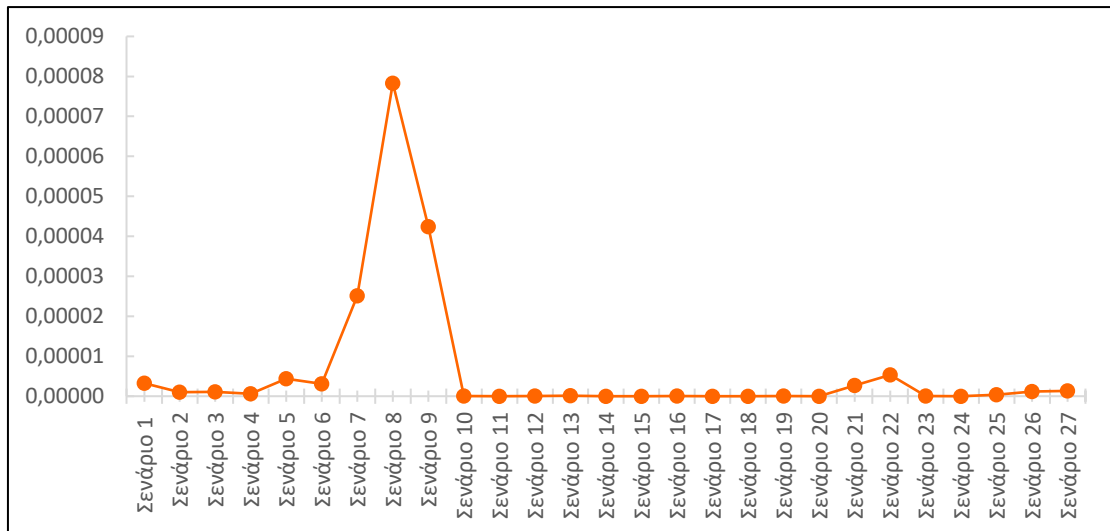


Διάγραμμα 3.9: Αποκλίσεις διανύσματος μετάθεσης ανά σενάριο για την κλασική μέθοδο επίλυσης



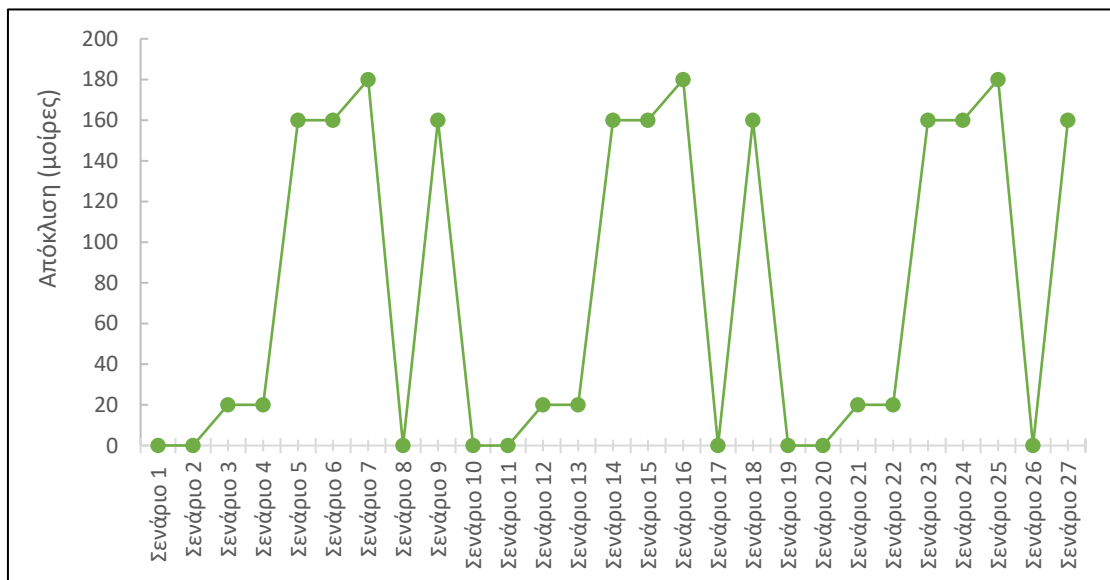
Διάγραμμα 3.10: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων του διανύσματος μετάθεσης για την κλασική μέθοδο επίλυσης

Σχετικά με την κλίμακα, με βάση το διάγραμμα 3.8 παρουσιάζει αποδεκτές αποκλίσεις σε ποσοστό 100% για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Στο διάγραμμα 3.11 δίνονται οι αποκλίσεις, ενώ παρατηρείται πως είναι της τάξης του  $10^{-5}$ .

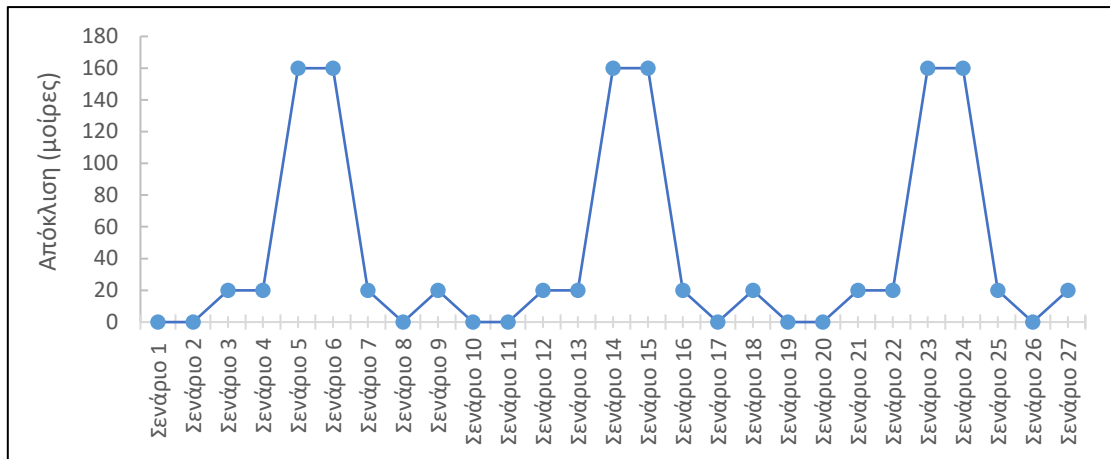


Διάγραμμα 3.11: Απόκλιση κλίμακας ανά σενάριο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης

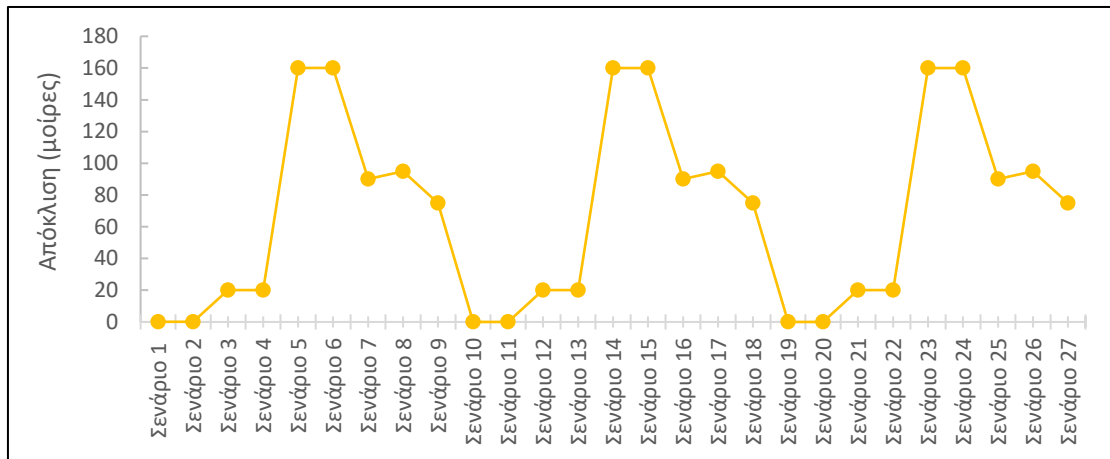
Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω οι μεγαλύτερες αποκλίσεις παρατηρούνται στον υπολογισμό των γωνιών στροφής ανά άξονα. Όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζεται μία περιοδικότητα, καθώς σενάρια με τις ίδιες παραμέτρους μετασχηματισμού επιφέρουν και ίδιες αποκλίσεις ανεξαρτήτως της μορφής των δεδομένων. Ακόμη δίνεται και σε αυτήν την περίπτωση το ιστόγραμμα των αποκλίσεων ανά στροφή ώστε να είναι εμφανής η ποσοστιαία συχνότητα τους.



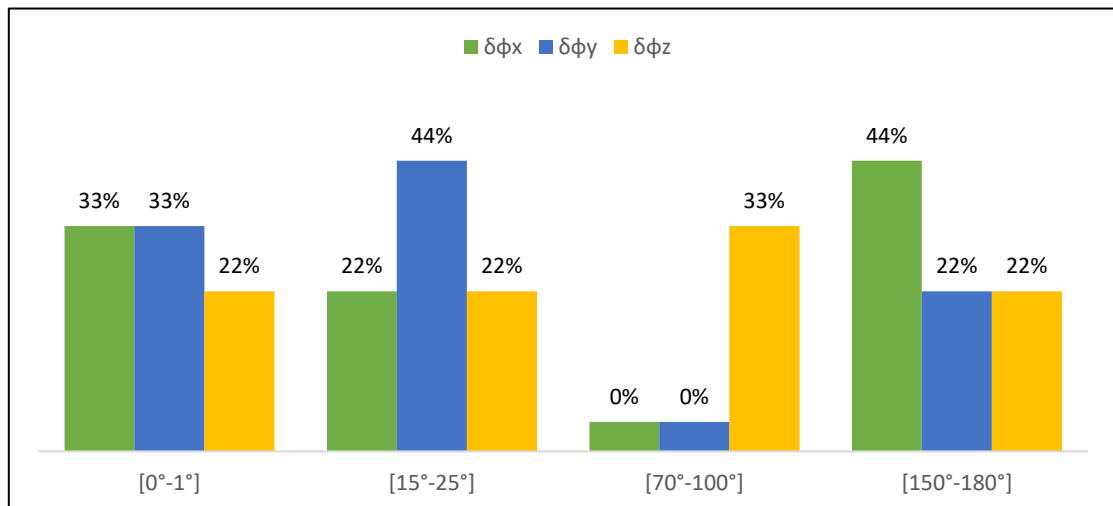
Διάγραμμα 3.12: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα x ανά σενάριο για την κλασσική μέθοδο επίλυσης



Διάγραμμα 3.13: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα y ανά σενάριο για την κλασική μέθοδο επίλυσης

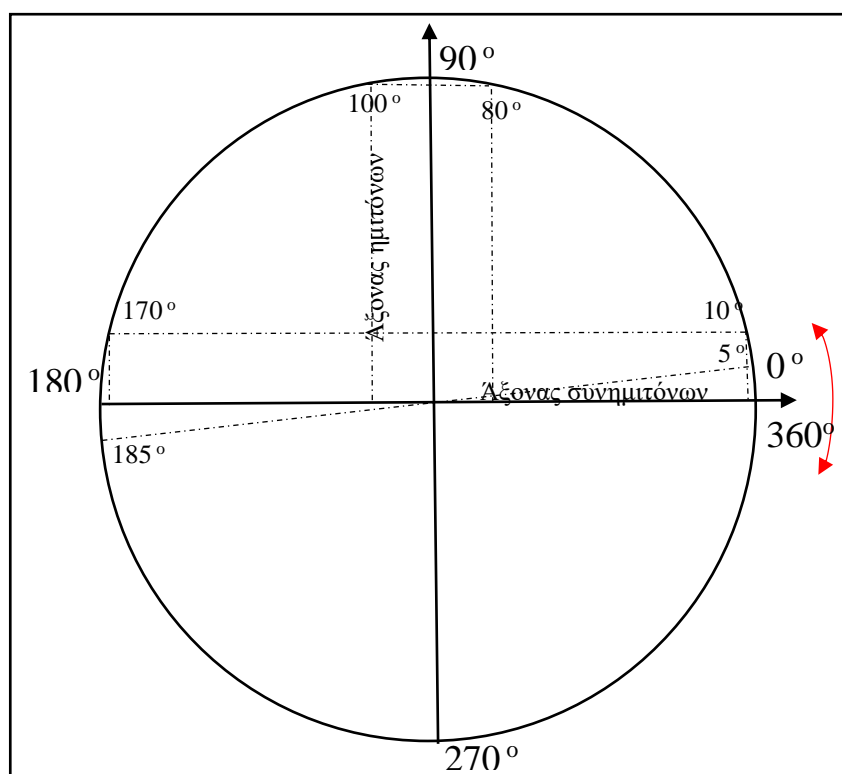


Διάγραμμα 3.14: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα z ανά σενάριο για την κλασική μέθοδο επίλυσης



Διάγραμμα 3.15: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά άξονα για την κλασική μέθοδο επίλυσης

Παρατηρώντας τις τιμές των υπολογισμένων γωνιών σε σχέση με τις πραγματικές, διαπιστώνεται πως παρά τις διαφορές τους, προκύπτει ο ίδιος πίνακας στροφής. Αυτό συμβαίνει για γωνίες συμμετρικές στον τριγωνομετρικό κύκλο όπως φαίνεται στην εικόνα 3.1, καθώς ο συνδυασμός ίδιων τριγωνομετρικών αριθμών με αντίθετο πρόσημο επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα. Για γωνίες  $100^\circ$ , η τιμή που προκύπτει από τη συνόρθωση είναι  $80^\circ$ , για  $170^\circ$  αντίστοιχα  $10^\circ$ , αλλά και για  $185^\circ$ ,  $5^\circ$ .

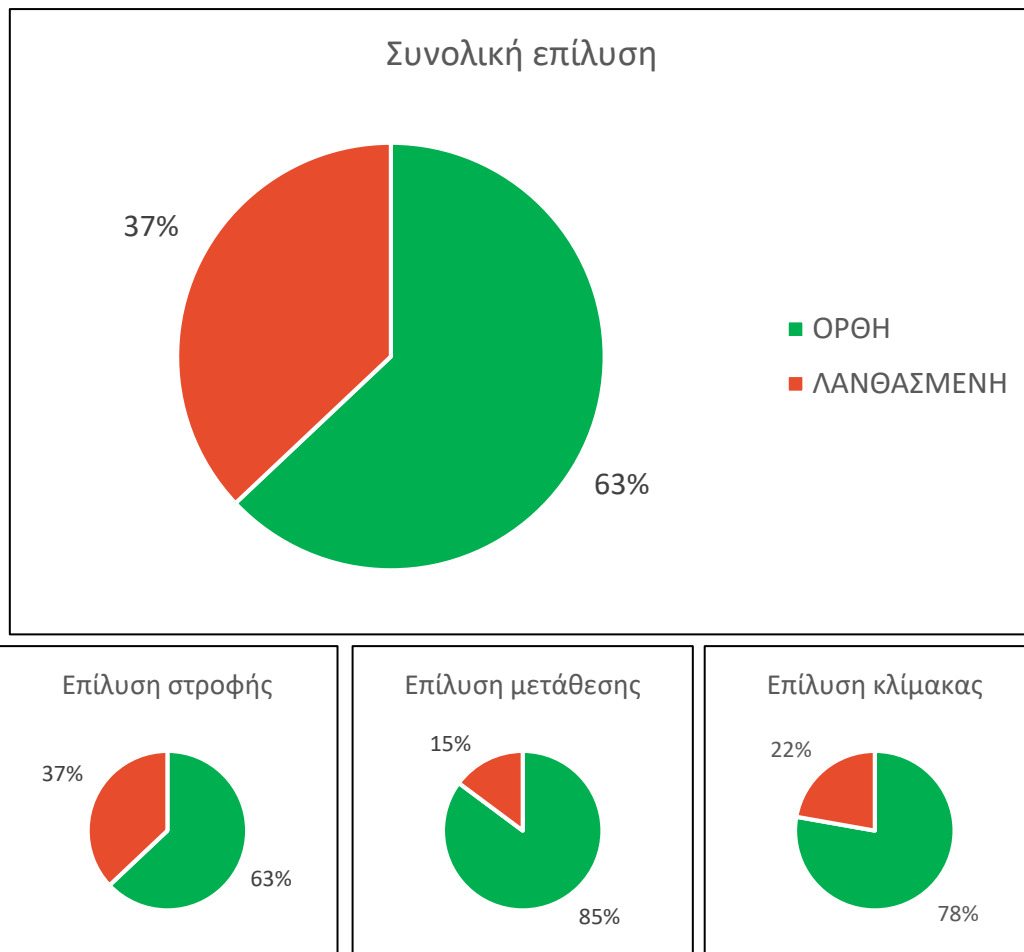


Εικόνα 3.1: Τριγωνομετρικός κύκλος και συμμετρία γωνιών

### 3.5.2 Αποτελέσματα μεθόδου απλών τετραδονίων

Στη περίπτωση της μεθόδου των απλών τετραδονίων το ποσοστό ορθής επίλυσης αυξήθηκε σημαντικά σε 63%, ενώ αυτό της λανθασμένης είναι μόλις 37%. Παρατηρείται, στο διάγραμμα 3.16, πως στη συγκεκριμένη μέθοδο υπάρχουν κάποιες αστοχίες στη κλίμακα, ενώ παρουσιάζονται εμφανώς βελτιωμένες οι επιλύσεις των γωνιών στροφής.

Και σε αυτή τη μέθοδο δίνονται τα διαγράμματα των αποκλίσεων ώστε να εντοπιστούν οι προβληματικές περιπτώσεις τόσο στις αποκλίσεις των μεταθέσεων όσο και σε αυτές της κλίμακας και των στροφών.

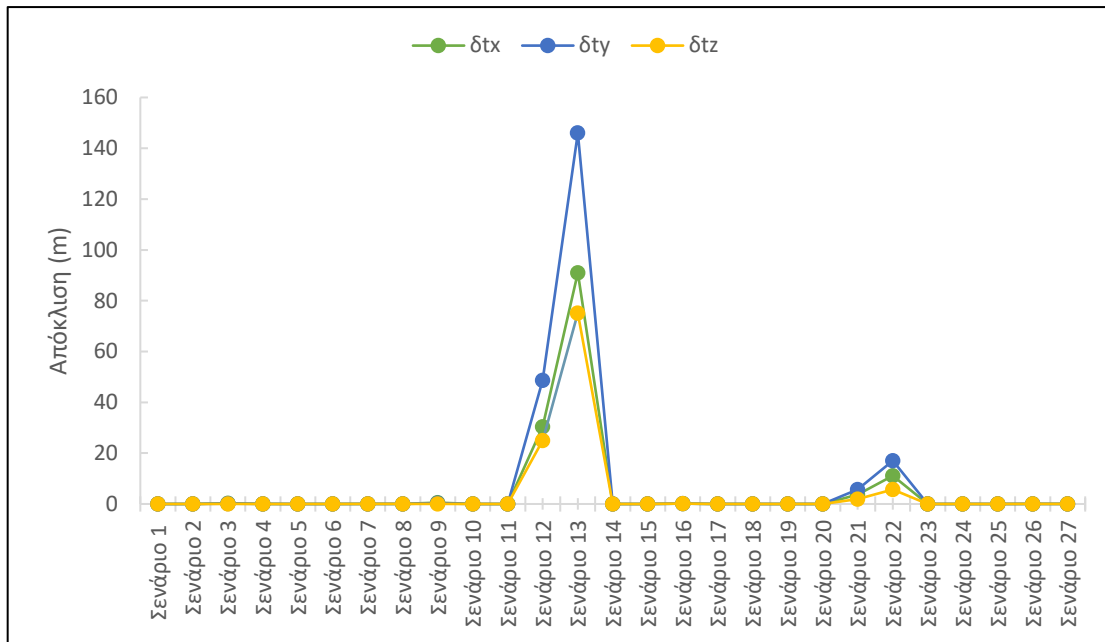


Διάγραμμα 3.16: Ποσοστά ορθών και λανθασμένων επιλύσεων συνολικά και ανά παράμετρο για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων

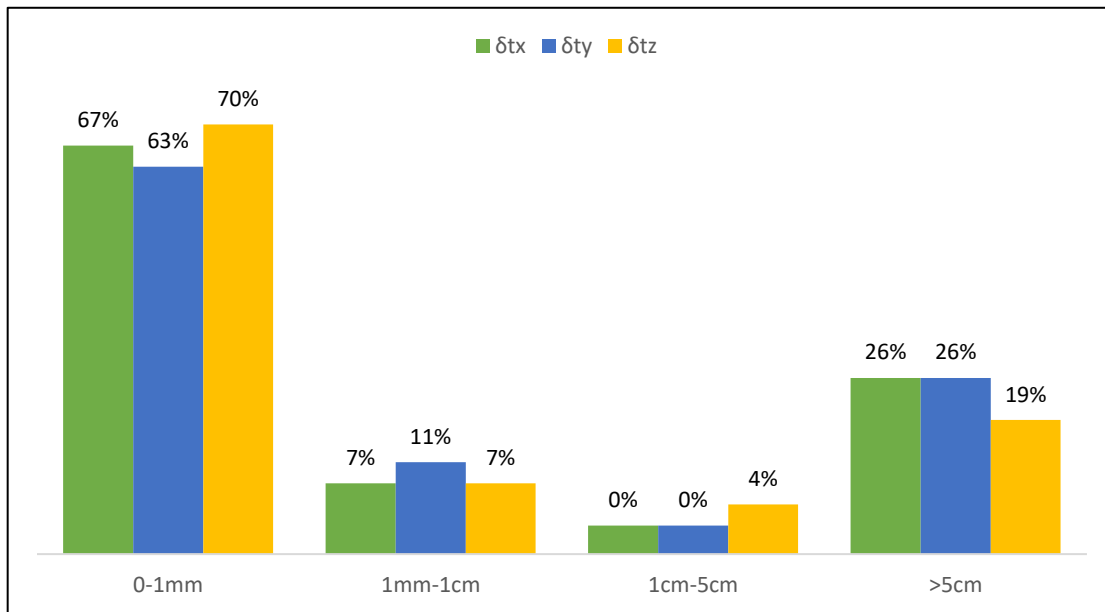
Παρατηρώντας τα στοιχεία των μεταθέσεων στα διαγράμματα 3.17 και 3.18, διαπιστώνεται πως υπάρχουν 4 σενάρια που εμφανίζουν αποκλίσεις της τάξεως των μερικών m. Η μεγαλύτερη απόκλιση αγγίζει τα 145m για το σενάριο 13, ενώ το 63-70 % των σεναρίων έχει αποκλίσεις μικρότερες από 1mm.

Με διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε διαπιστώνεται πως τα σενάρια 12-13 και 21-22, που έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά και εμφανίζουν τις ακραίες τιμές, είχαν επιλυθεί λάθος κατά τη διαδικασία εύρεσης των αρχικών τιμών, με αποτέλεσμα την τεράστια απόκλιση τους από τις πραγματικές τιμές. Το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται για κάθε παράμετρο μετασχηματισμού και διαπιστώνεται και στα διαγράμματα στροφών και κλίμακας παρακάτω.

Όσον αφορά στην αβεβαιότητα των υπολογισμένων μεταθέσεων αυτή είναι της τάξης του  $10^{-5}$  ή και μερικών cm, με εξαίρεση τα προβληματικά σενάρια, που μπορεί να αγγίζει και τα 20m.

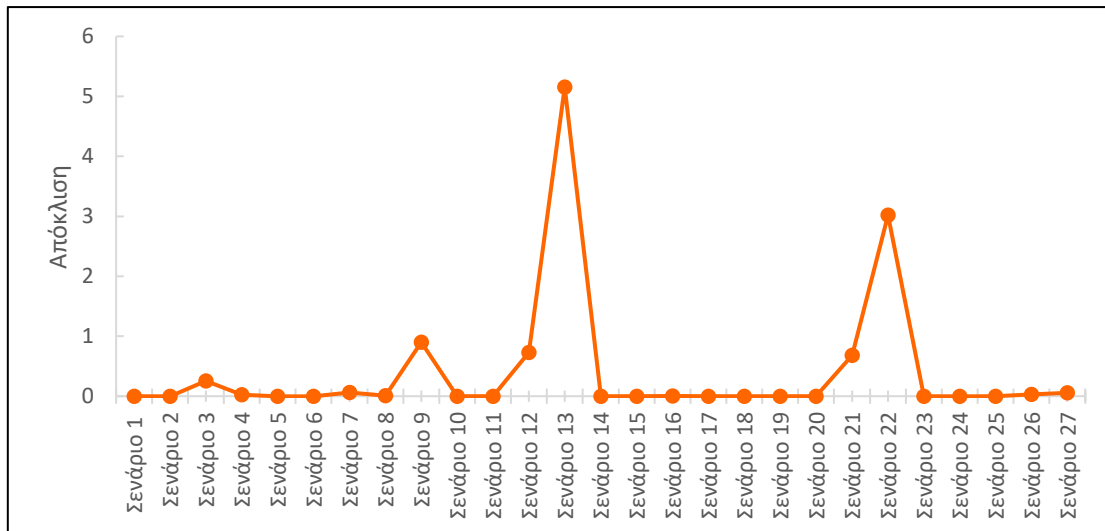


Διάγραμμα 3.17: Αποκλίσεις διανύσματος μετάθεσης ανά σενάριο για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων

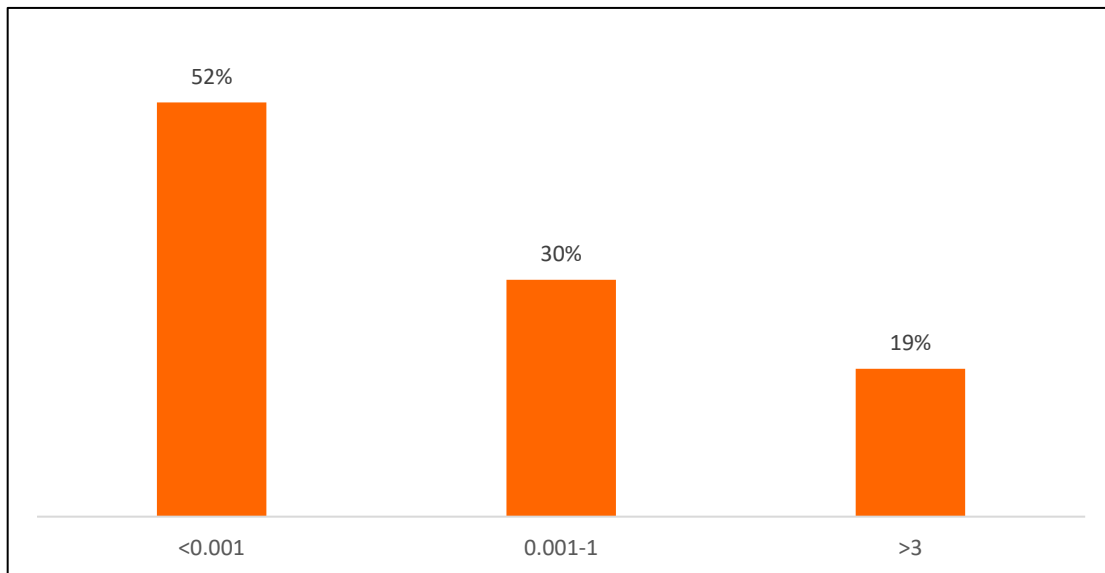


Διάγραμμα 3.18: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων του διανύσματος μετάθεσης για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων

Σχετικά με τη κλίμακα, και ακολουθώντας τα διαγράμματα 3.19 και 3.20, παρατηρείται πως στη πλειοψηφία τους οι αποκλίσεις είναι μικρότερες από 0.001, ενώ οι μέγιστες εμφανίζονται στα προβληματικά σενάρια 13 και 22.



Διάγραμμα 3.19: Απόκλιση κλίμακας ανά σενάριο για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων

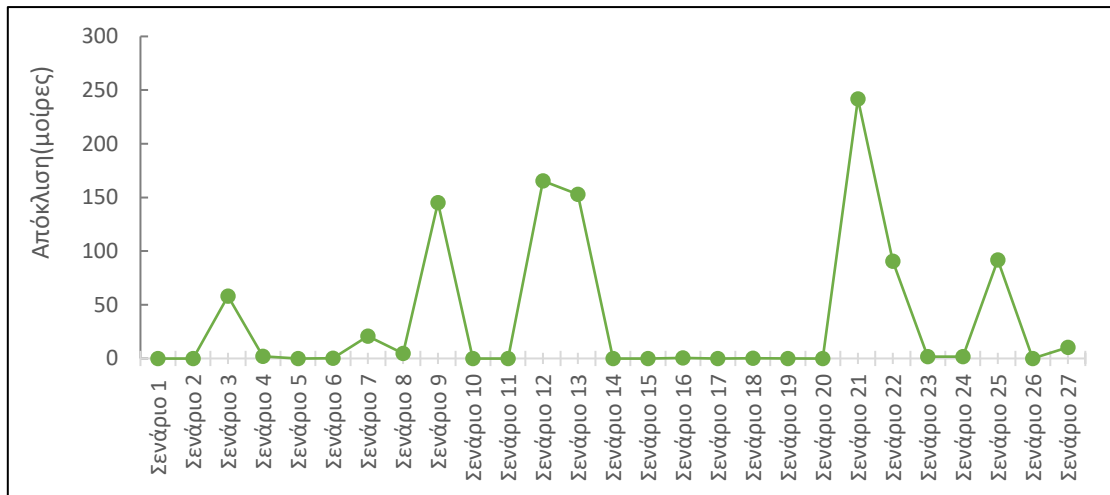


Διάγραμμα 3.20: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για τις αποκλίσεις κλίμακας για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων

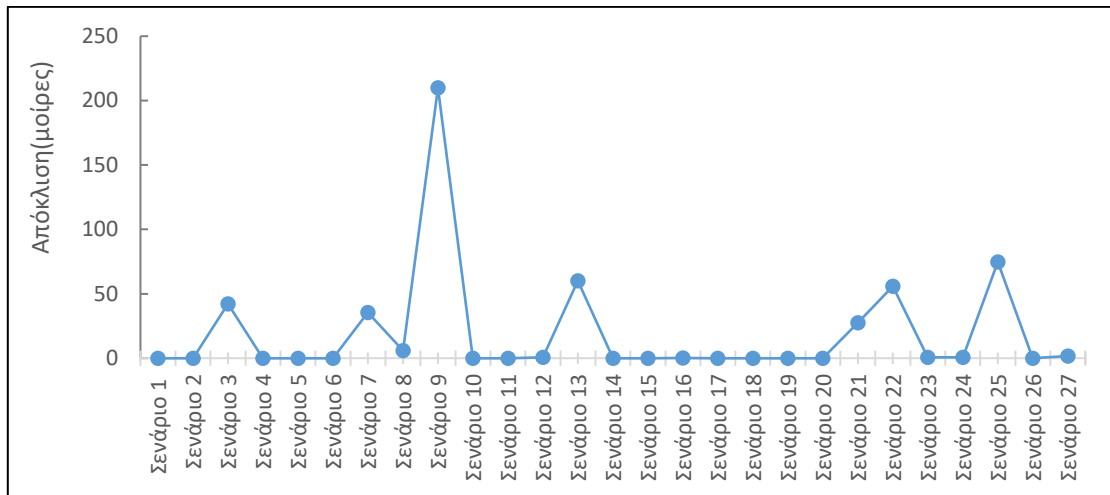
Όσον αφορά στις γωνίες στροφής, αυτές υπολογίστηκαν με την εφαρμογή συνόρθωσης των στοιχείων του τετραδονίου  $q$  και έτσι προσδιορίστηκε τόσο η τιμή τους όσο και η αβεβαιότητα τους. Παρατηρώντας τα παρακάτω διαγράμματα, διαπιστώνεται πως υπάρχουν σημαντικές αστοχίες, τόσο στα προβληματικά σενάρια όσο και στα μη.

Αξίζει να σημειωθεί πως ακόμα και ένα από τα 4 στοιχεία του τετραδονίου να υπολογιστεί λάθος κατά τον μετασχηματισμό Helmert, τότε οι τελικές γωνίες στροφής υπολογίζονται με σημαντικές αποκλίσεις στην πλειοψηφία τους.

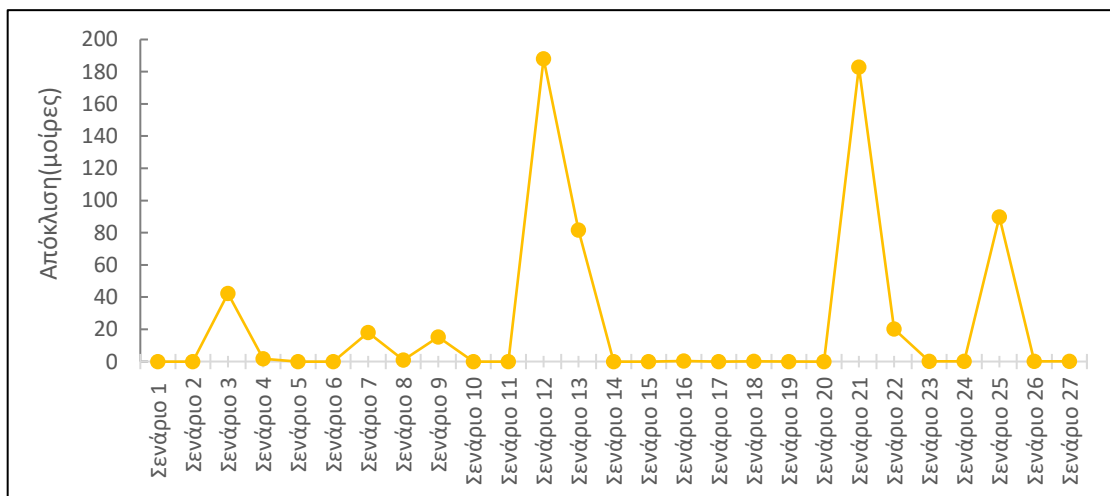




Διάγραμμα 3.21: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα x ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων



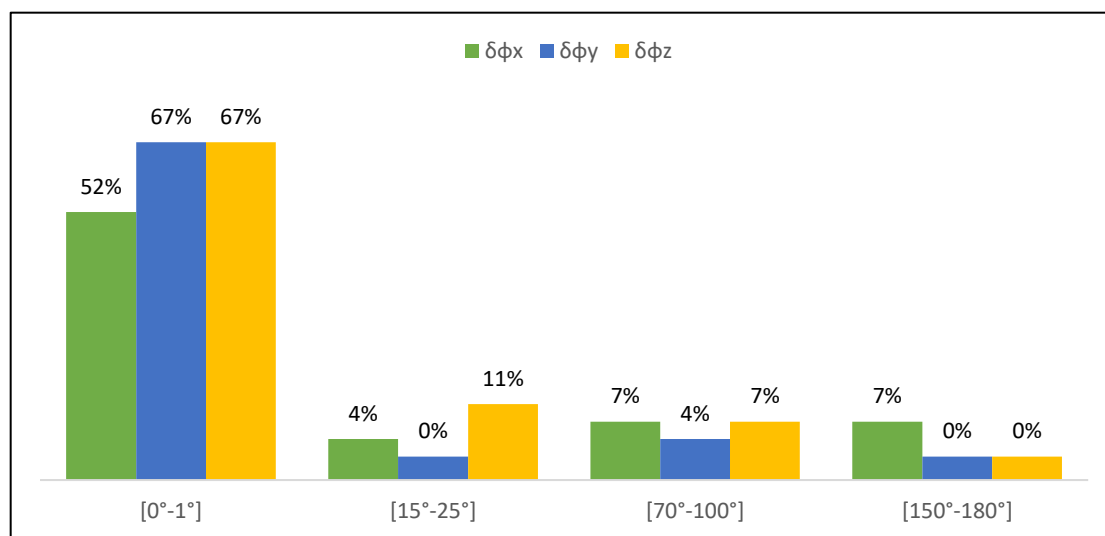
Διάγραμμα 3.22: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα y ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων



Διάγραμμα 3.23: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα z ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων

Στη περίπτωση της συγκεκριμένης διερεύνησης, τα σενάρια 3, 7 και 9 παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις στους συντελεστές του τετραδονίου με αποτέλεσμα να επηρεάζεται σημαντικά και ο υπολογισμός των στροφών. Αντίστοιχα και τα προβληματικά σενάρια 12-13 και 21-22. Τέλος όσον αφορά στο σενάριο 25 μόνο ένας συντελεστής είναι υπολογισμένος λάθος, ενώ η απόκλιση είναι μεγάλη και στις τρεις στροφές.

Στο διάγραμμα 3.24 παρουσιάζονται τα ποσοστά αποκλίσεων των γωνιών, ταξινομημένα σε κλάσεις, προκειμένου να κατανοηθεί η τάξη μεγέθους τους αλλά και η συχνότητα τους.

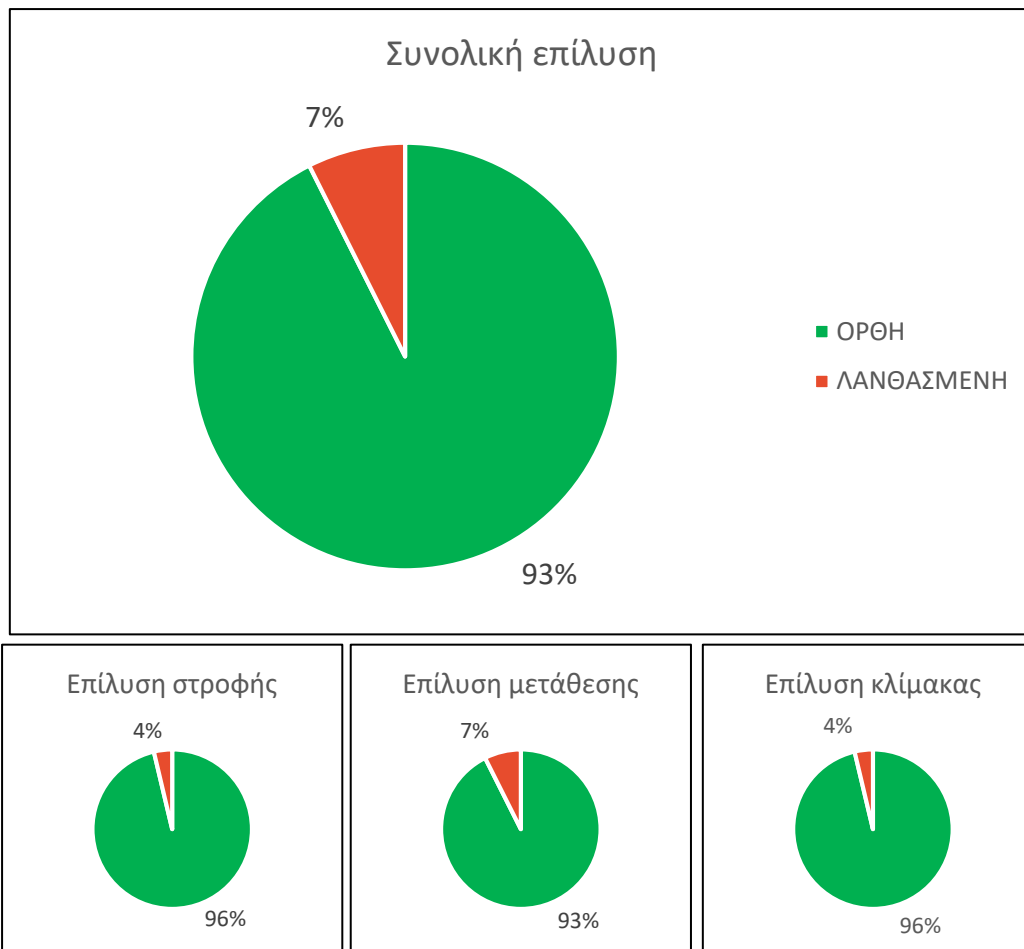


Διάγραμμα 3.24: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά άξονα για τη μέθοδο επίλυσης των απλών τετραδονίων

### 3.5.3 Αποτελέσματα μεθόδου διπλών τετραδονίων

Στη περίπτωση της μεθόδου των διπλών τετραδονίων το ποσοστό ορθής επίλυσης αγγίζει το 93%, υψηλότερο συγκριτικά με τις δύο προηγούμενες μεθόδους. Στο διάγραμμα 3.25 παρατηρείται πως οι αστοχίες είναι πολύ μικρές τόσο στη κλίμακα και τη στροφή, όσο και στη μετάθεση. Πιο συγκεκριμένα τα ποσοστά ορθής επίλυσης κυμαίνονται από 93% έως 96% για κάθε περίπτωση.

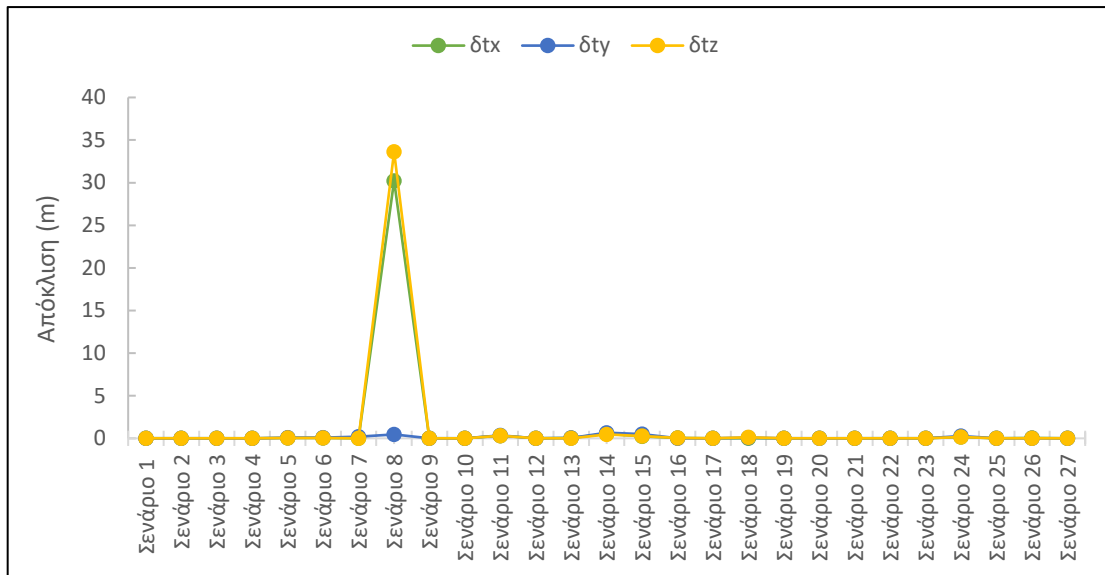
Προκειμένου να εντοπιστούν αυτές οι μικρές αστοχίες δημιουργήθηκαν και εδώ τα διαγράμματα αποκλίσεων για κάθε στοιχείο, τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω.



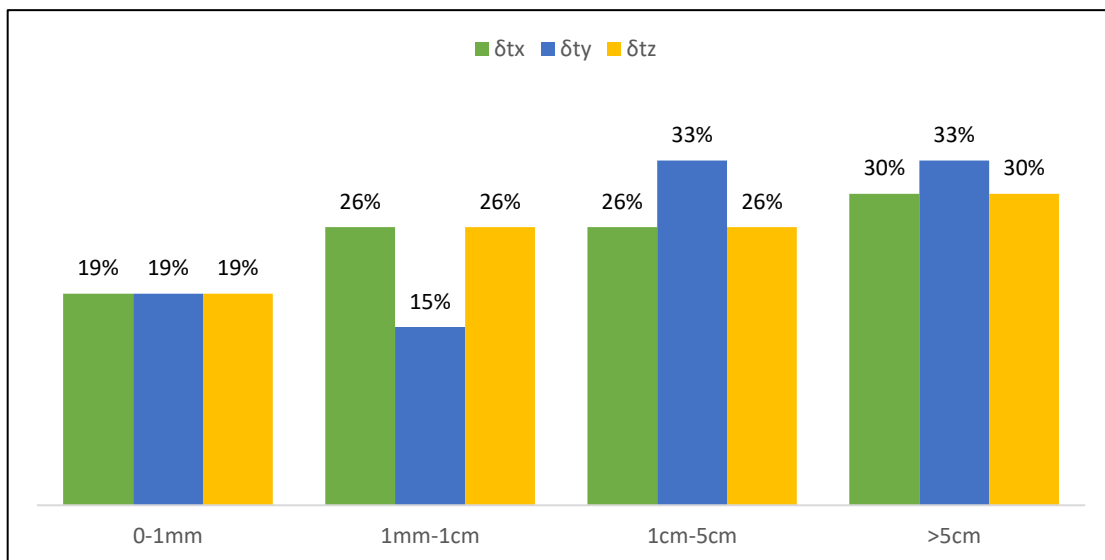
Διάγραμμα 3.25: Ποσοστά ορθών και λανθασμένων επιλύσεων συνολικά και ανά παράμετρο για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων

Όσον αφορά στις μεταθέσεις, αυτές υπολογίστηκαν με σημαντικές αποκλίσεις σε μόλις δυο από τα 27 σενάρια, και συγκεκριμένα στο σενάριο 8 και 14. Αυτά εμφάνισαν αποκλίσεις της τάξης των 35m και 65cm, αντίστοιχα. Στο διάγραμμα 3.26 και 3.27 δίνονται αναλυτικά στοιχεία για κάθε σενάριο. Διαπιστώνεται ότι είναι αισθητά μεγαλύτερες, στη πλειοψηφία τους, σε σχέση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μεταθέσεις υπολογίζονται εκ νέου με τη χρήση δύο τετραδονίων, ενώ δεν συνορθώνονται αυτές καθ' αυτές όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Αντίστοιχα η αβεβαιότητά τους εξαρτάται από την αβεβαιότητα των δύο τετραδονίων, με αυτή να κυμαίνεται από μερικά δέκατα του χιλιοστού, έως και 6cm.

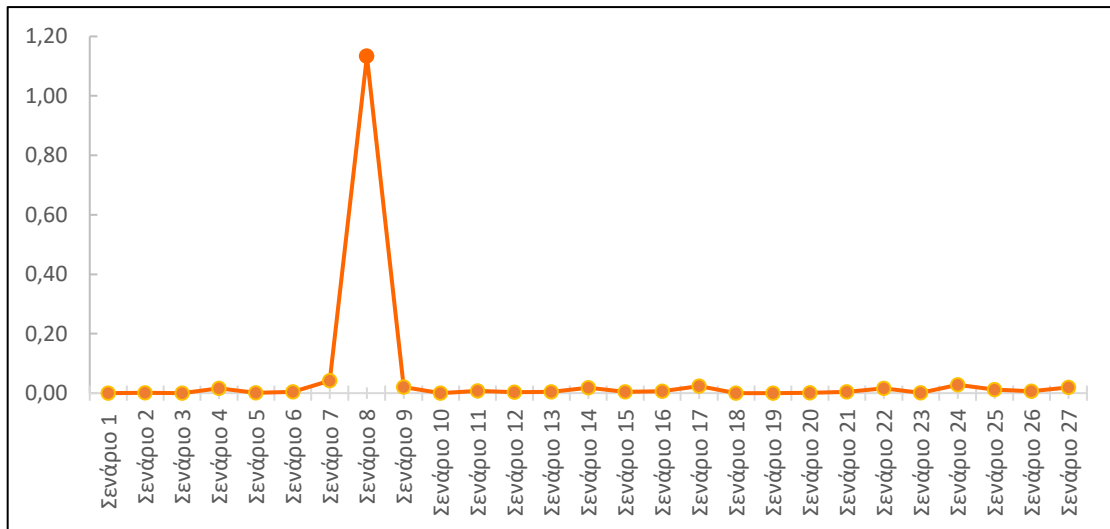


Διάγραμμα 3.26: Αποκλίσεις διανύσματος μετάθεσης ανά σενάριο για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων

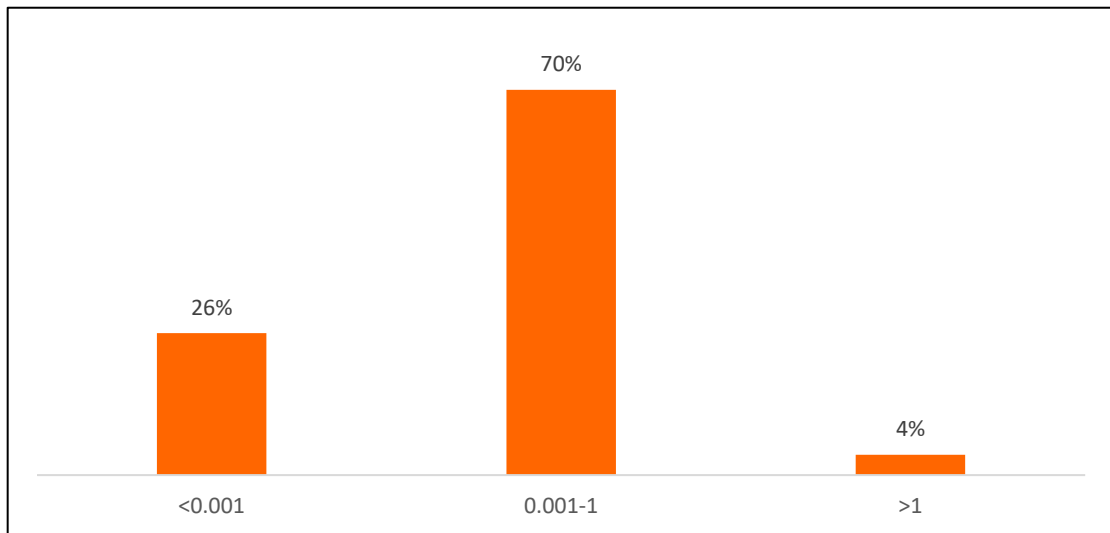


Διάγραμμα 3.27: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων του διανύσματος μετάθεσης για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων

Όσον αφορά στις αποκλίσεις της κλίμακας, όπως φαίνεται στα διαγράμματα 3.28 και 3.29, αυτές είναι πολύ μικρές, της τάξης του  $10^{-2}$  με  $10^{-6}$ , με αβεβαιότητα της τάξης του  $10^{-6}$ . Και σε αυτή τη παράμετρο, το σενάριο 8 παρουσιάζει μέγιστη διαφορά από την πραγματική τιμή ίση με 1.13.



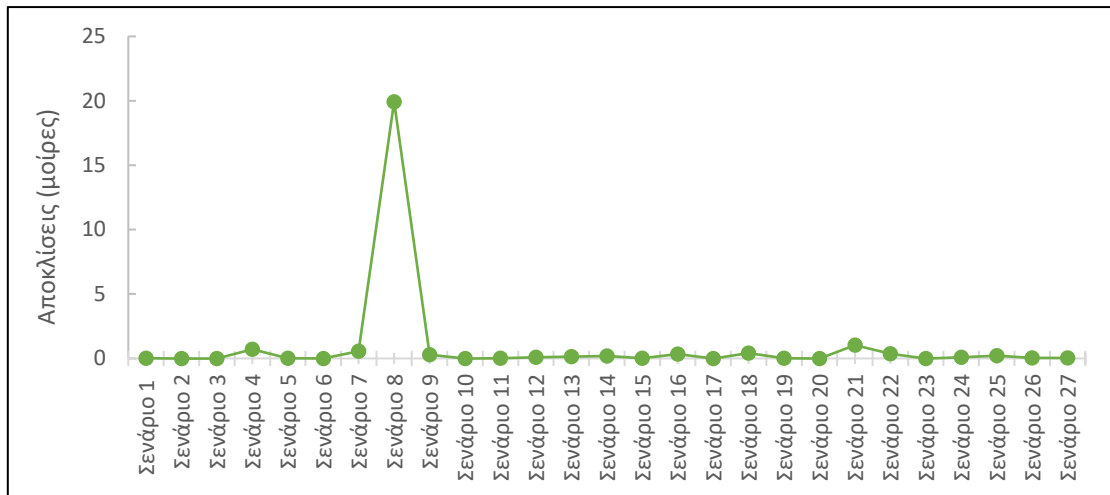
Διάγραμμα 3.28: Απόκλιση κλίμακας ανά σενάριο για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων



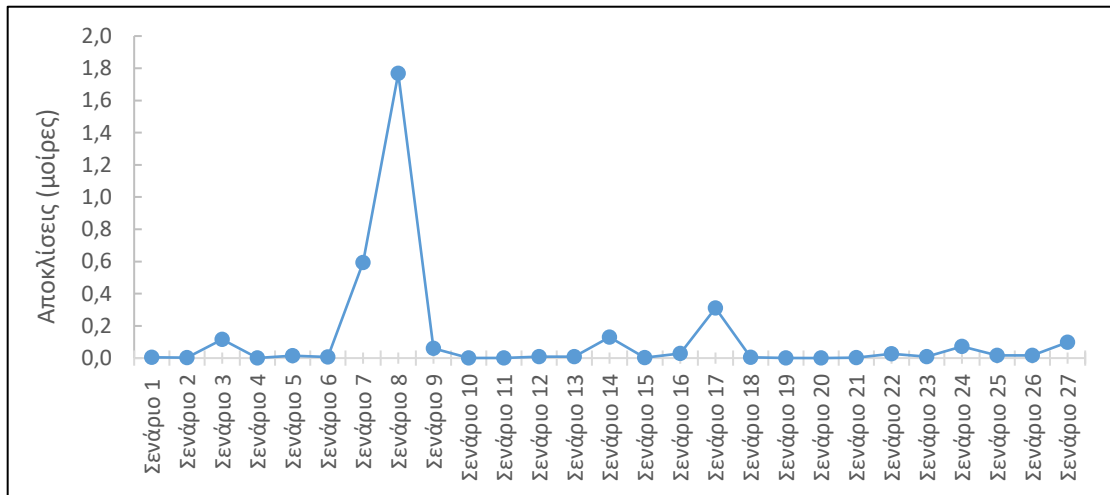
Διάγραμμα 3.29: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων κλίμακας για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων

Τέλος, όσον αφορά στην επίλυση των στροφών, αυτή είχε μηδαμινές αποκλίσεις στην πλειοψηφία της. Και εδώ το σενάριο 8 παρουσιάζει μέγιστη διαφορά με την πραγματική τιμή, ενώ αποκλίσεις, της τάξης της  $1^\circ$  εμφανίζει και το σενάριο 21. Αναλυτικές πληροφορίες για αυτές δίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.

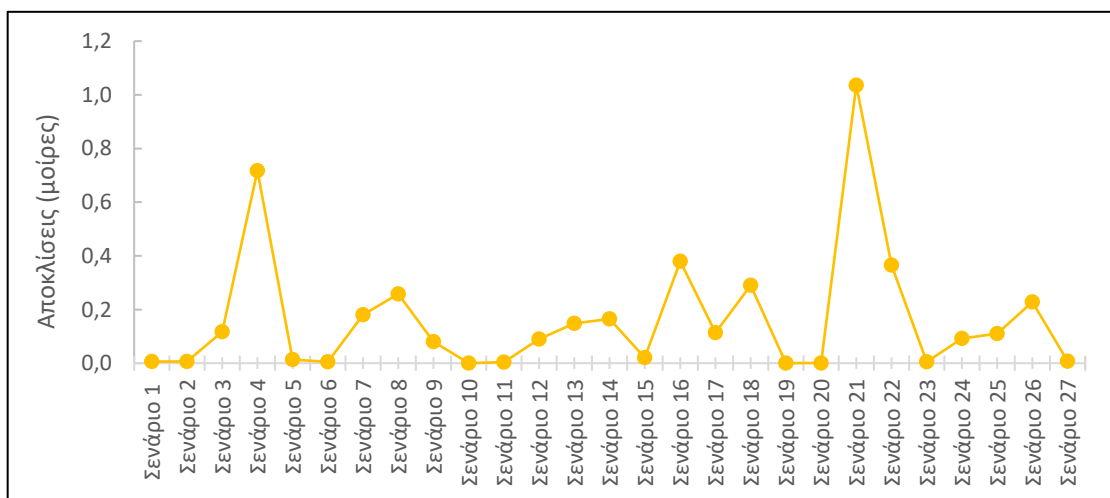
Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή αποδεικνύεται η πιο αποτελεσματική για τον προσδιορισμό των στροφών καθώς με τον υπολογισμό των δύο τετραδονίων, με το ένα να εξαρτάται από το άλλο, «σφραγίζεται» η ορθή λύση τους.



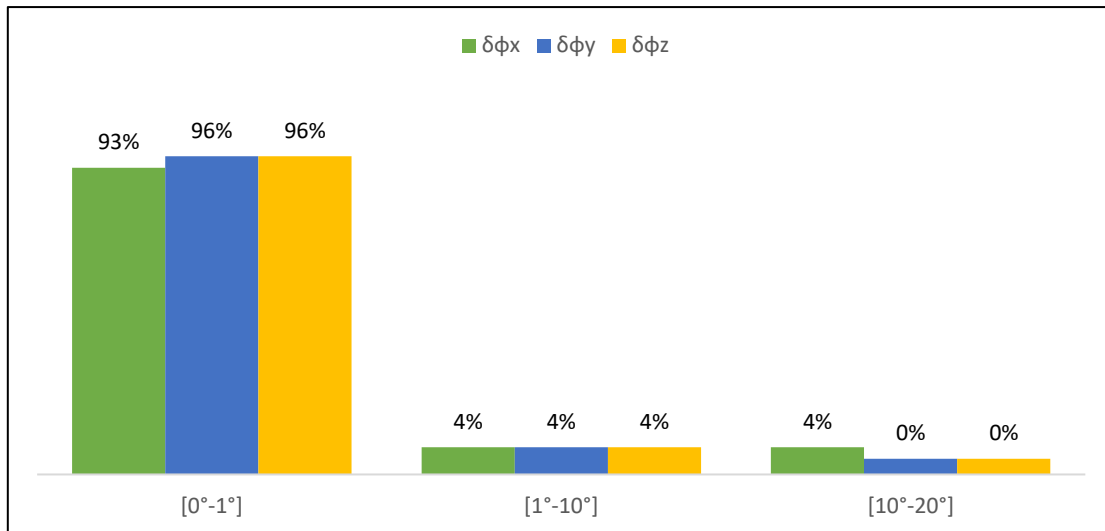
Διάγραμμα 3.30: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα x ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων



Διάγραμμα 3.31: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα y ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων



Διάγραμμα 3.32: Απόκλιση στροφής κατά τον άξονα z ανά σενάριο για την για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων



Διάγραμμα 3.33: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά άξονα για τη μέθοδο επίλυσης των διπλών τετραδονίων

### 3.6 Ανάλυση μεθόδων ανά σύνολο δεδομένων

Αφού μελετήθηκε η κάθε μέθοδος ξεχωριστά για όλο το σύνολο των σεναρίων, σκόπιμο είναι να συγκριθούν οι μέθοδοι μεταξύ τους για κάθε σύνολο δεδομένων ξεχωριστά, ως προς τις αποκλίσεις ανά παράμετρο μετασχηματισμού, αλλά και ως προς την αβεβαιότητα τους.

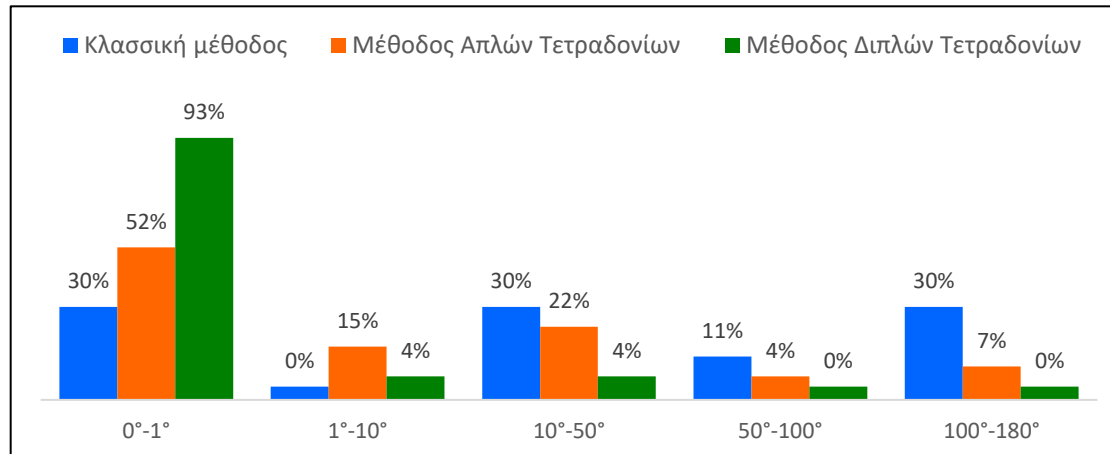
Έτσι για κάθε σύνολο υπολογίστηκε το ιστόγραμμα συχνοτήτων των τιμών των αποκλίσεων και της αβεβαιότητας τους, ώστε να εντοπιστεί ποιος συνδυασμός δεδομένων και μεθόδου είναι ο πιο αποτελεσματικός.

#### 3.6.1 Ανάλυση για το πρώτο σύνολο δεδομένων

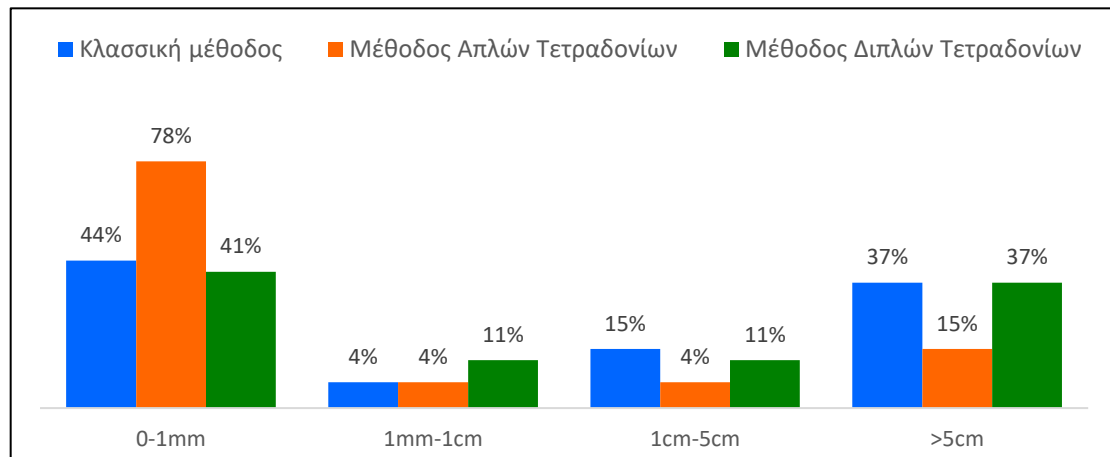
Όσον αφορά στο πρώτο σύνολο δεδομένων, δηλαδή σημεία με μικρές αποστάσεις μεταξύ τους, τα οποία περιγράφονται από τα Σενάρια 1 έως 9, δημιουργήθηκαν τα παρακάτω διαγράμματα. Διαπιστώνεται πως για τον υπολογισμό των στροφών η μέθοδος των διπλών τετραδονίων επιφέρει τις μικρότερες αποκλίσεις (0-1° σε ποσοστό 92.6%), ενώ για τον υπολογισμό των μεταθέσεων η βέλτιστη μέθοδος είναι αυτή των απλών τετραδονίων με αποκλίσεις μικρότερες από 1mm για ποσοστό 77.8%. Αντίστοιχα, οι αποκλίσεις της κλίμακας είναι πολύ μικρές για όλες τις μεθόδους με μέγιστη βελτιστοποίηση την κλασσική.

Σχετικά με την αβεβαιότητα των στροφών η μέθοδος των διπλών τετραδονίων επιφέρει σφάλμα μικρότερο του 1" (3<sup>cc</sup>) σε ποσοστό 100% των σεναρίων. Στο ίδιο ποσοστό κυμαίνονται και τα αποτελέσματα της

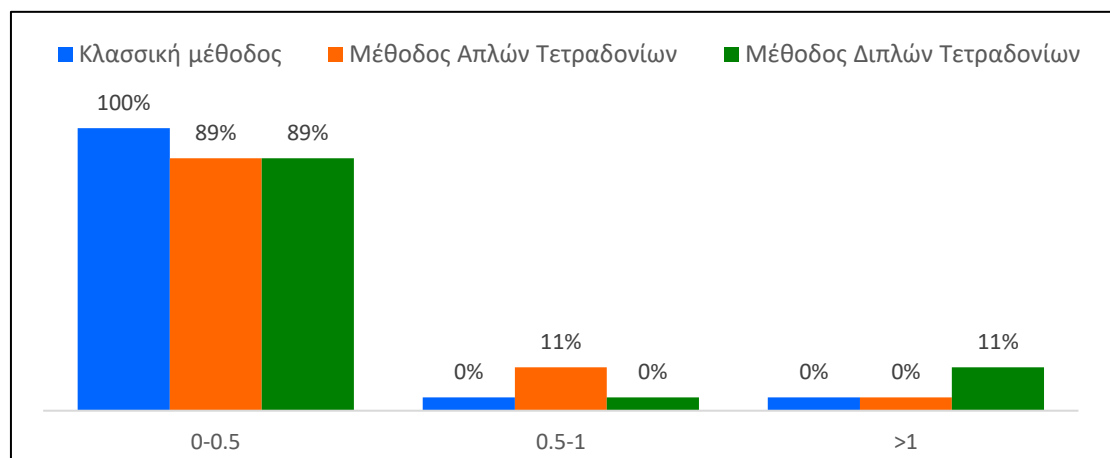
αβεβαιότητας των μεταθέσεων για σφάλμα μικρότερο του 1mm, στην κλασσική μέθοδο αλλά και σε αυτήν των διπλών τετραδονίων.



Διάγραμμα 3.34: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά μέθοδο για το πρώτο σύνολο δεδομένων

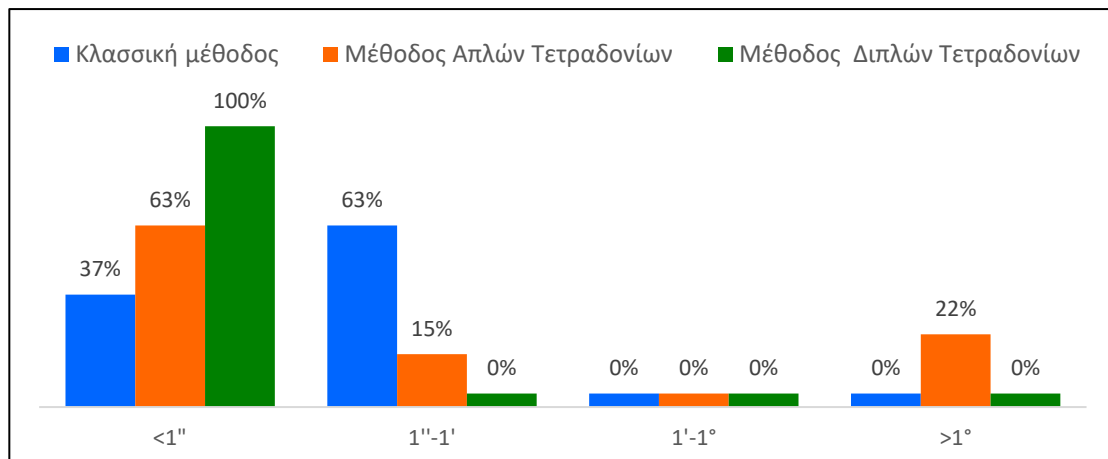


Διάγραμμα 3.35: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των μεταθέσεων ανά μέθοδο για το πρώτο σύνολο δεδομένων

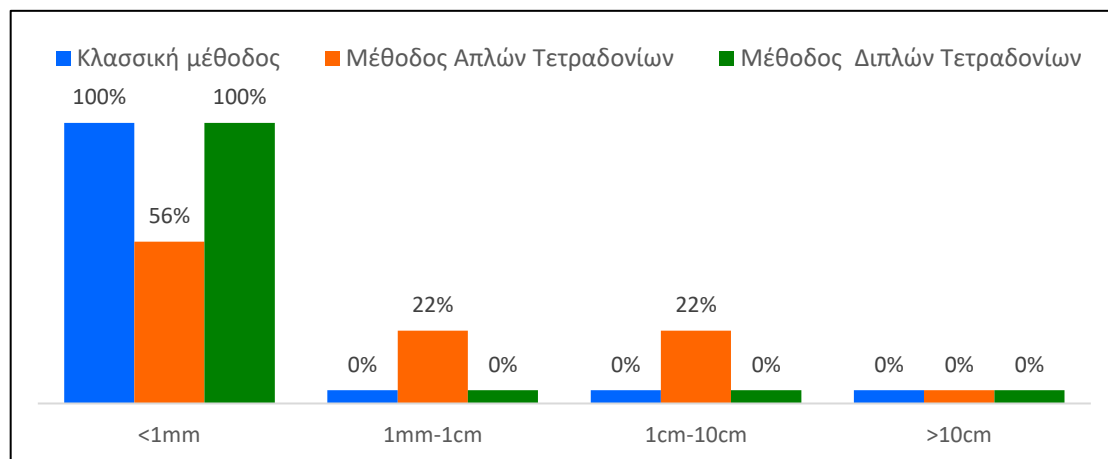


Διάγραμμα 3.36: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων της κλίμακας ανά μέθοδο για το πρώτο σύνολο δεδομένων





Διάγραμμα 3.37: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των στροφών για το πρώτο σύνολο δεδομένων

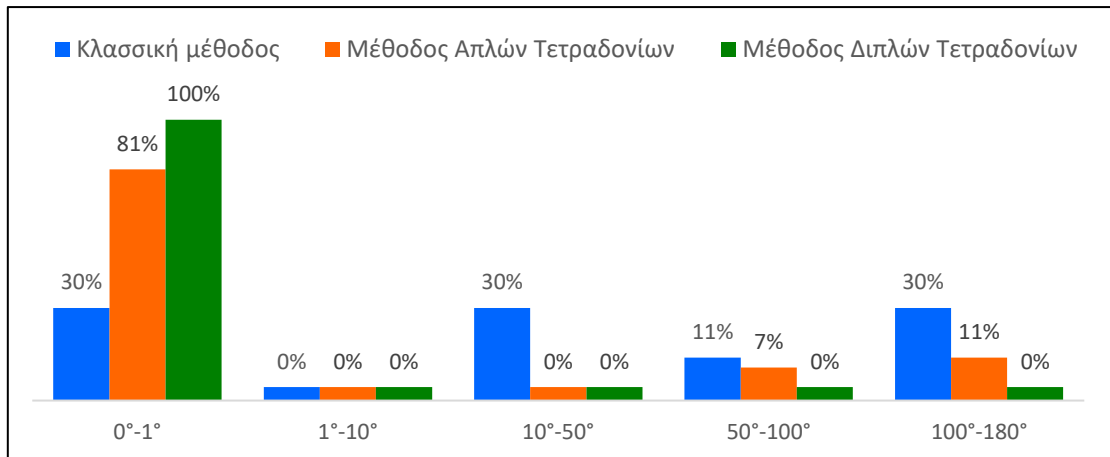


Διάγραμμα 3.38: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των μεταθέσεων για το πρώτο σύνολο δεδομένων

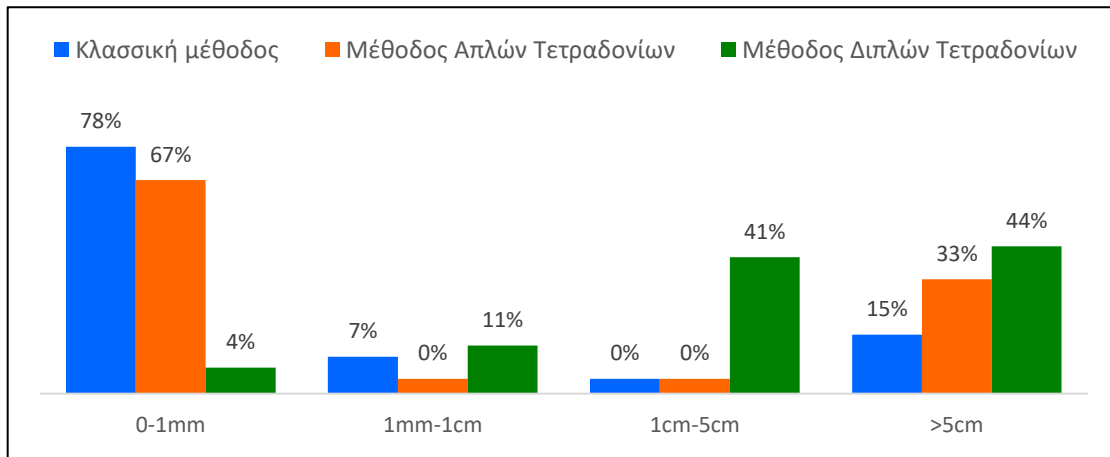
### 3.6.2 Ανάλυση για το δεύτερο σύνολο δεδομένων

Το δεύτερο σύνολο δεδομένων, όπου τα σημεία απέχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, και περιγράφονται από τα Σενάρια 10 έως 18, παρουσιάζουν, σύμφωνα με τα διαγράμματα 3.39-3.43, τις μικρότερες αποκλίσεις γωνιών και εδώ με τη μέθοδο των διπλών τετραδονίων σε ποσοστό 100%. Αντίστοιχα για τις μεταθέσεις, η κλασσική μέθοδος επιφέρει αποκλίσεις μικρότερες του 1mm σε ποσοστό περίπου 78%, ενώ στη περίπτωση της κλίμακας κλασσική και μέθοδος διπλών τετραδονίων, σε ποσοστό 100% εμφανίζει αποκλίσεις μικρότερες του 0.5.

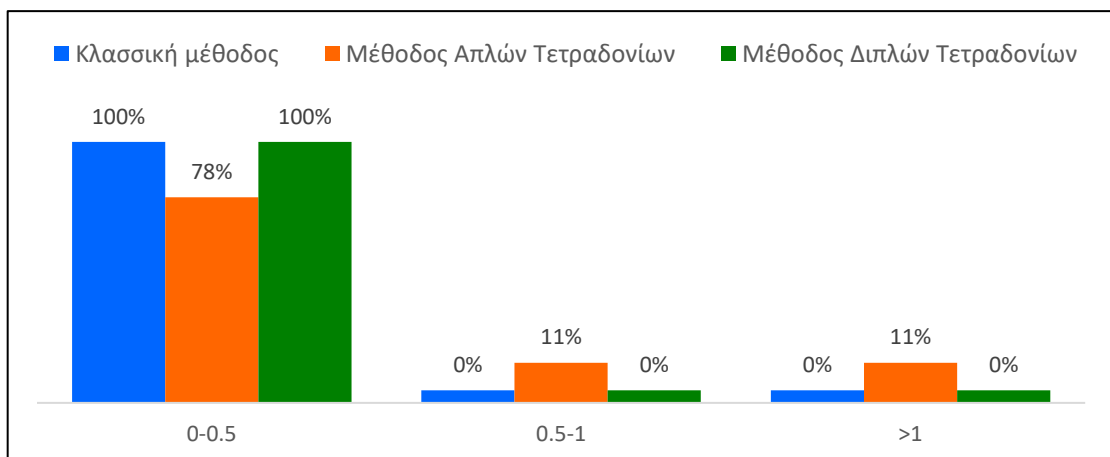
Η αβεβαιότητα για τις γωνίες αγγίζει το 1'' σε ποσοστό 100% των σεναρίων, στη κλασσική μέθοδο επίλυσης. Αντίστοιχα και η αβεβαιότητα των μεταθέσεων όπου είναι μικρότερη του 1mm στην ίδια μέθοδο.



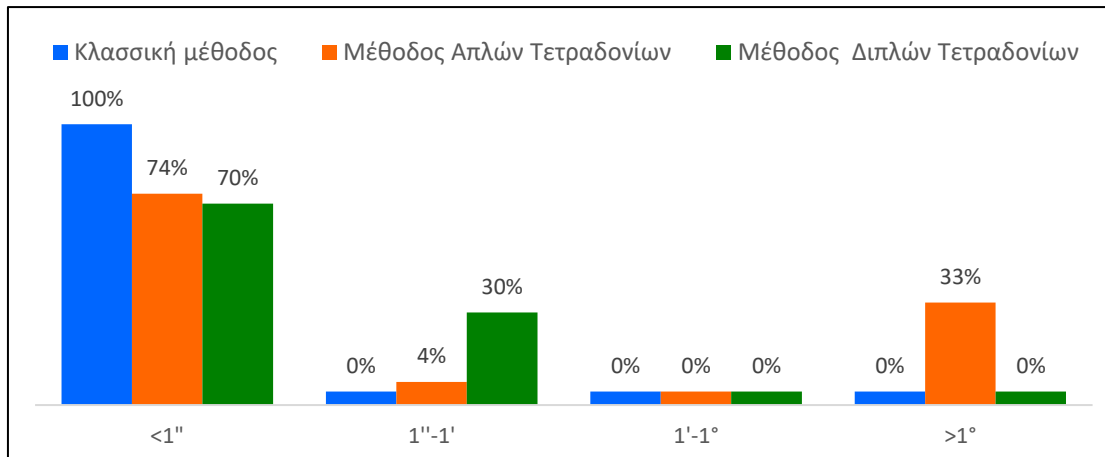
Διάγραμμα 3.39: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά μέθοδο για το δεύτερο σύνολο δεδομένων



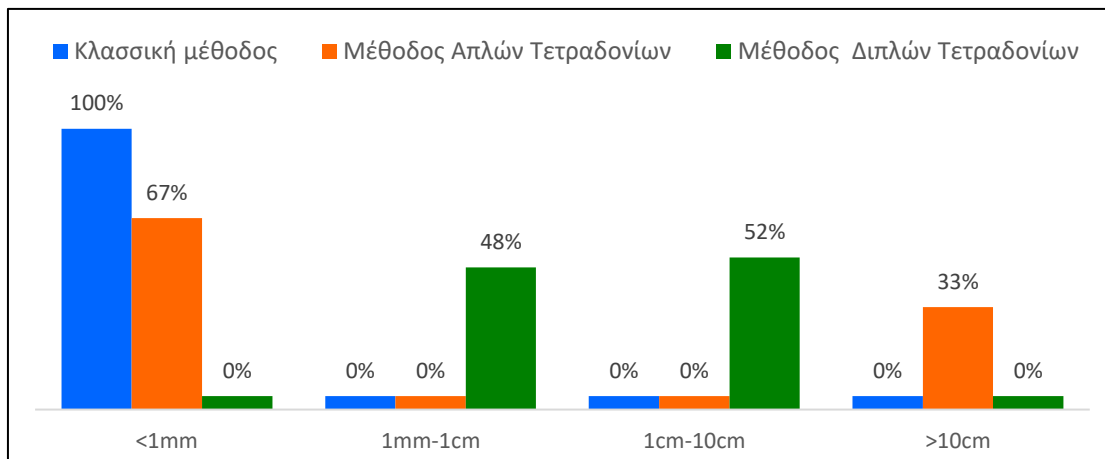
Διάγραμμα 3.40: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των μεταθέσεων ανά μέθοδο για το δεύτερο σύνολο δεδομένων



Διάγραμμα 3.41: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων της κλίμακας ανά μέθοδο για το δεύτερο σύνολο δεδομένων



Διάγραμμα 3.42: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των στροφών για το δεύτερο σύνολο δεδομένων

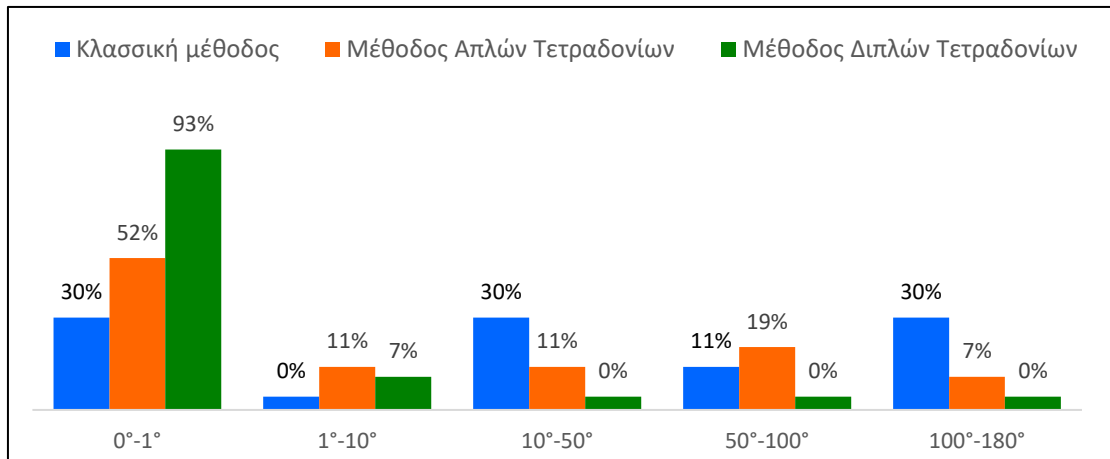


Διάγραμμα 3.43: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των μεταθέσεων για το δεύτερο σύνολο δεδομένων

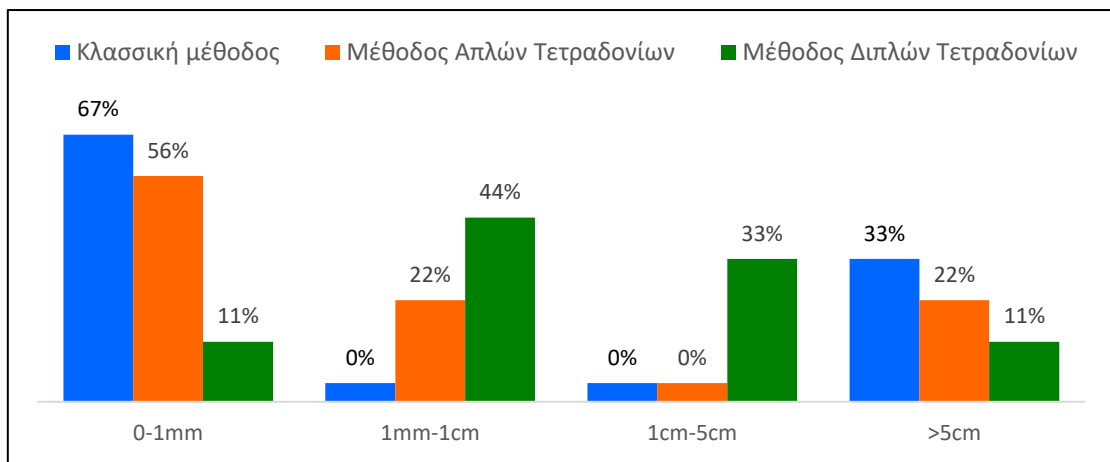
### 3.6.3 Ανάλυση για το τρίτο σύνολο δεδομένων

Σχετικά με το τρίτο σύνολο δεδομένων, που περιγράφονται από τα Σενάρια 19 έως 27 και τα διαγράμματα 3.45-3.49, οι μικρότερες αποκλίσεις των γωνιών εμφανίζονται με τη μέθοδο των διπλών τετραδονίων και αγγίζουν το 92.6% των σεναρίων. Αντίστοιχα για τις μεταθέσεις, μικρότερες αποκλίσεις είναι με τη κλασική μέθοδο σε ποσοστό 66.7%. Τέλος η κλίμακα σε ποσοστό 100% εμφανίζει αποκλίσεις μικρότερες του 0.5 με τη κλασική μέθοδο αλλά και με αυτή των διπλών τετραδονίων.

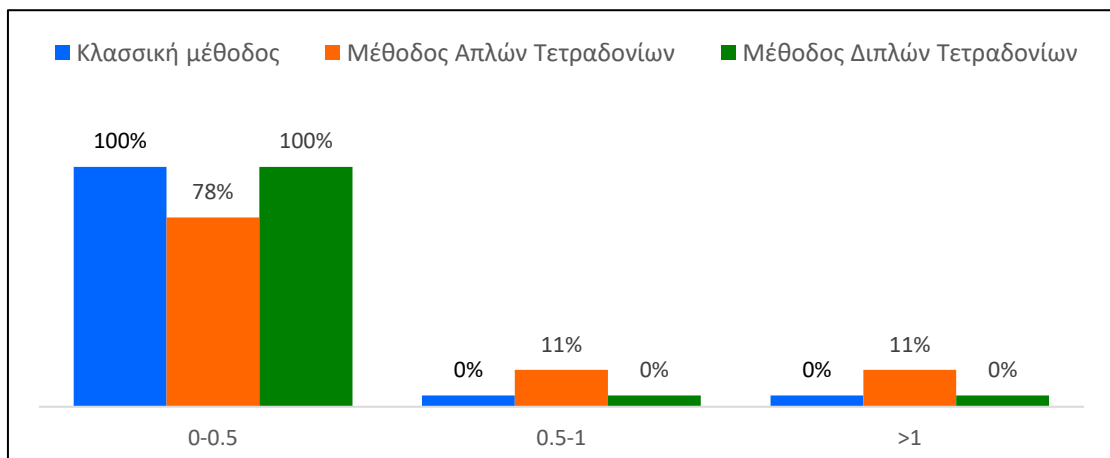
Όσον αφορά στην αβεβαιότητα για τις γωνίες αγγίζει το 1'' σε ποσοστό 100% των σεναρίων, στη κλασική μέθοδο αλλά και σε αυτή των διπλών τετραδονίων. Τέλος η αβεβαιότητα των μεταθέσεων αγγίζει το 100% στη κλασική μέθοδο για σφάλμα μικρότερο του 1mm.



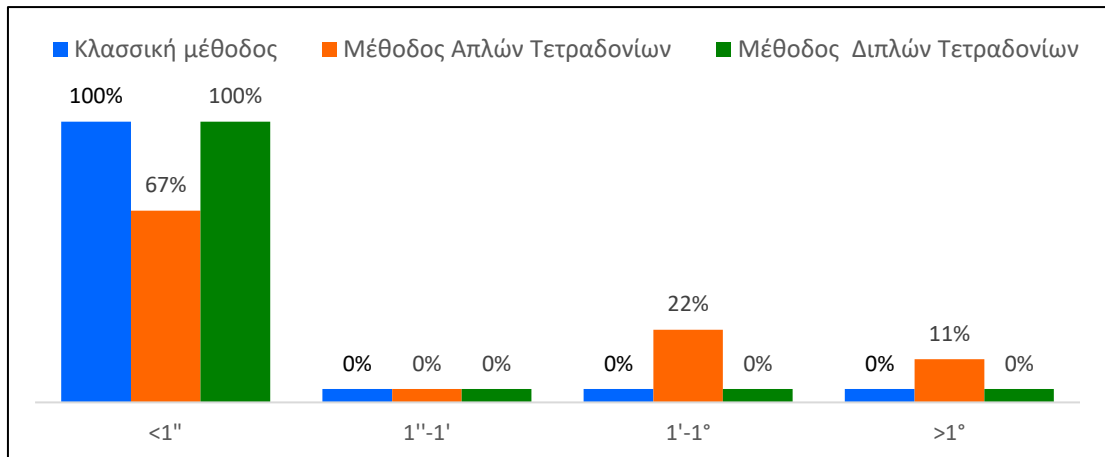
Διάγραμμα 3.44: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των γωνιών στροφής ανά μέθοδο για το τρίτο σύνολο δεδομένων



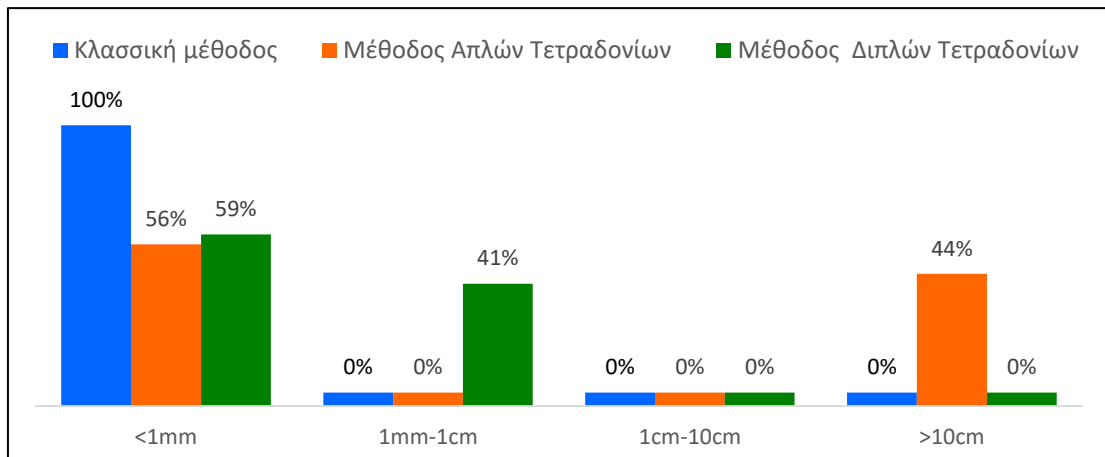
Διάγραμμα 3.45: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων των μεταθέσεων ανά μέθοδο για το τρίτο σύνολο δεδομένων



Διάγραμμα 3.46: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων της κλίμακας ανά μέθοδο για το τρίτο σύνολο δεδομένων



Διάγραμμα 3.47: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των στροφών για το τρίτο σύνολο δεδομένων



Διάγραμμα 3.48: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα για την αβεβαιότητα των μεταθέσεων για το τρίτο σύνολο δεδομένων

### 3.7 Σύγκριση μεθόδων

Αφού παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν τα αποτελέσματα της διερεύνησης τόσο για όλα τα σενάρια, όσο και για κάθε σύνολο δεδομένων χωριστά, προκύπτουν κάποια βασικά συμπεράσματα σχετικά με τη καταλληλότητα των μεθόδων ανά περίπτωση.

Διαπιστώνεται πως η μέθοδος διπλών τετραδονίων είναι βέλτιστη όταν πρόκειται για τον υπολογισμό γωνιών στροφής σε ένα σύστημα μετασχηματισμού. Αντίθετα η κλασσική μέθοδος, αν και εμφανίζει τις μικρότερες αποκλίσεις στις μεταθέσεις, μπορεί να επιφέρει τον ίδιο πίνακα στροφής με διαφορετικές γωνίες. Τέλος η κλίμακα δεν επηρεάζεται σημαντικά από την επιλογή της μεθόδου επομένως μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητη.

Όσον αφορά στην αβεβαιότητα του προσδιορισμού, για την μετάθεση η βέλτιστη μέθοδος είναι η κλασσική. Στην περίπτωση που τα σημεία έχουν πολύ μικρές αποστάσεις μεταξύ τους το σφάλμα είναι πολύ μικρό και για την μέθοδο των διπλών τετραδονίων. Αντίθετα, σχετικά με τις στροφές, στα δύο από τα τρία σύνολα δεδομένων, αβεβαιότητα κάτω του 1" υπάρχει με την μέθοδο διπλών τετραδονίων. Έτσι αυτή επιφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

#### 4.1 Γενικά

Με την ολοκλήρωση της διερεύνησης, σκόπιμο είναι η πραγματοποίηση εφαρμογών με πραγματικά δεδομένα. Στη συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιούνται τρεις εφαρμογές, όπου δεδομένα μετασχηματίζονται από ένα σύστημα σε ένα άλλο, τόσο με τη κλασσική μέθοδο, όσο και με τις μεθόδους των απλών αλλά και των διπλών τετραδονίων.

Πιο συγκεκριμένα οι τρεις αυτές εφαρμογές, χρησιμοποιούν δεδομένα παλαιότερων εφαρμογών του εργαστηρίου Γεωδαισίας και Φωτογραμμετρίας, και αφορούν μετρήσεις για μελέτη μετακινήσεων, ταλαντώσεων κατασκευών αλλά και σημείων με στόχο την αυτοβαθμονόμηση μηχανών.

Παρακάτω δίνονται αναλυτικά πληροφορίες για κάθε μία από αυτές ξεχωριστά, ενώ μελετώνται σχολαστικά και τα αποτελέσματα μετασχηματισμών ανά μέθοδο και εφαρμογή.

#### 4.2 Μετασχηματισμός συντεταγμένων για την μελέτη μετακινήσεων

Το πρώτο πεδίο εφαρμογής που παρουσιάζεται σε αυτή την εργασία, αφορά στην μελέτη ενός τριδιάστατου δικτύου ανίχνευσης μετακινήσεων στη Ζάκυνθο, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.1.



Εικόνα 4.1: Δίκτυο ανίχνευσης μετακινήσεων στη Ζάκυνθο.

Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για ένα δίκτυο τριγωνομετρικών σημείων, με πέντε κορυφές, το οποίο μετρήθηκε με δορυφορικές μεθόδους σε δύο διαφορετικές εποχές. Κατά την επίλυση τους, προέκυψαν οι συντεταγμένες των κορυφών στο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς WGS '84, μαζί με τις αβεβαιότητές τους. [Κατσαρός Δ., 2015]

Για την ανίχνευση ύπαρξης ή όχι μετακινήσεων υπολογίστηκαν οι μεταβολές των σημείων μεταξύ των δύο φάσεων κατά X, Y και Z, όπως φαίνονται στον πίνακα παρακάτω.

ΣΗΜΕΙΟ	δX (mm)	δY (mm)	δZ (mm)	σδX (mm)	σδY (mm)	σδZ (mm)
ΛΙΜΝΕΣ	-1	9	-2	±4.5	±5.0	±5.7
ΑΚΡΩΤΗΡΙ	-2	6	7	±5.2	±5.8	±6.7
ΜΥΛΟΙ	0	9	0	±4.5	±5.0	±5.7
ΚΑΣΙΔΙΑΡΗΣ	5	6	5	±4.5	±5.0	±5.7
ΘΕΡΙΟ	6	8	10	±5.2	±5.8	±6.7

Πίνακας 4.1: Μεταβολές των σημείων στο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς

Αυτές οι αποκλίσεις, για μεγαλύτερη κατανόηση, σκόπιμο είναι να μετασχηματιστούν σε ένα τοπικό αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων (E, N, Up), μέσω της σχέσης 4.1. [Φωτίου Α. Ι., 2007]

$$\begin{pmatrix} \delta E \\ \delta N \\ \delta Up \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός περιλαμβάνει μόνο στροφή, όπως αυτή ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα στροφής, όπου φ και λ οι γεωδαιτικές συντεταγμένες κάθε σημείου i. [Φωτίου Α. Ι., 2007]

$$R = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_i & \cos\lambda_i & 0 \\ -\sin\varphi_i \cdot \cos\lambda_i & -\sin\varphi_i \cdot \sin\lambda_i & \cos\varphi_i \\ \cos\varphi_i \cdot \cos\lambda_i & \cos\varphi_i \cdot \sin\lambda_i & \sin\varphi_i \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Στη συγκεκριμένη εργασία, όμως, είναι απαραίτητη η αποκωδικοποίηση του συγκεκριμένου πίνακα σε γωνίες στροφής κατά άξονα x, y και z, ώστε να εφαρμοστούν οι μετασχηματισμοί με κάθε μέθοδο. Έτσι πραγματοποιείται στροφή κατά z-y-x, και ορίζονται οι παράμετροι μετασχηματισμού όπως φαίνεται στον πίνακα 4.2.



Μετάθεση			Στροφή			Κλίμακα
$t_x$	$t_y$	$t_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$	$\lambda$
0m	0m	0m	$-(90^\circ - \varphi_i)$	0	$-(90^\circ + \lambda_i)$	1
$\sigma t_x$	$\sigma t_y$	$\sigma t_z$	$\sigma \varphi_x$	$\sigma \varphi_y$	$\sigma \varphi_z$	$\sigma \lambda$
$\pm 0m$	$\pm 0m$	$\pm 0m$	$\pm 0''.0003$	$\pm 0$	$\pm 0''.0002$	$\pm 0$

Πίνακας 4.2: Παράμετροι μετασχηματισμού για το δίκτυο της Ζακύνθου

Για κάθε σημείο  $i$  δίνονται, επίσης, οι γεωδαιτικές συντεταγμένες  $\varphi$  και  $\lambda$  στον πίνακα 4.3. [Κατσαρός Δ., 2015]

i	ΣΗΜΕΙΟ	$\varphi$	$\lambda$
1	ΛΙΜΝΕΣ	$37^\circ 44' 52''.460$	$20^\circ 52' 28''.302$
2	ΑΚΡΩΤΗΡΙ	$37^\circ 45' 35''.313$	$20^\circ 56' 23''.292$
3	ΜΥΛΟΙ	$37^\circ 42' 25''.819$	$20^\circ 46' 23''.807$
4	ΚΑΣΙΔΙΑΡΗΣ	$37^\circ 43' 23''.466$	$20^\circ 59' 19''.260$
5	ΘΕΡΙΟ	$37^\circ 40' 24''.825$	$20^\circ 49' 36''.086$

Πίνακας 4.3: Γεωδαιτικές συντεταγμένες κορυφών του δικτύου

Στις παρακάτω παραγράφους, παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί με κάθε μέθοδο, ενώ υπολογίζονται εκ νέου οι αβεβαιότητες των σημείων στο καινούριο σύστημα.

#### 4.2.1 Εφαρμογή κλασσικής μεθόδου

Κατά τη κλασσική μέθοδο επίλυσης, αρχικά υπολογίστηκε ο πίνακας στροφής με βάση τους πίνακες των σχέσεων 1.20-1.21. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η στροφή γίνεται κατά  $z-y-x$ , επομένως ο τελικός πίνακας στροφής δίνεται από τη σχέση:

$$R_{zyx} = R_x(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\gamma) = R_x(\varphi_{x_i}) \cdot R_y(\varphi_{y_i}) \cdot R_z(\varphi_{z_i}) \quad (4.3)$$

Η εξίσωση μετασχηματισμού είναι αυτή που αναφέρετε στην σχέση 2.1, με:

$$t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, \quad R(\varphi) = R_{zyx}$$

ενώ τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού δίνονται στον πίνακα 4.4 παρακάτω.

ΣΗΜΕΙΟ	δE (mm)	δN (mm)	δUp (mm)	σδE (mm)	σδN (mm)	σδUp (mm)
ΛΙΜΝΕΣ	8.8	-3.0	0.6	±4.9	±5.3	±5.0
ΑΚΡΩΤΗΡΙ	6.3	5.4	4.5	±5.8	±6.2	±5.9
ΜΥΛΟΙ	8.4	-2.0	2.5	±4.9	±5.3	±5.0
ΚΑΣΙΔΙΑΡΗΣ	3.8	-0.2	8.5	±4.9	±5.3	±5.1
ΘΕΡΙΟ	5.3	2.7	12.8	±5.8	±6.2	±5.9

Πίνακας 4.4: Μεταβολή συντεταγμένων και αβεβαιότητες κάθε κορυφής στο σύστημα E, N, Up, όπως υπολογίστηκαν με την κλασσική μέθοδο

Για τον υπολογισμό της αβεβαιότητάς τους, εφαρμόστηκε ο νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων στη σχέση 2.1. Αρχικά δημιουργήθηκε ο πίνακας  $V_x$  για κάθε σημείο καθώς και ο Ιακωβιανός πίνακας  $J$ , έτσι υπολογίστηκαν οι αβεβαιότητες των νέων σημείων στο σύστημα E, N, Up, από τη σχέση 4.4.

$$V_{ENU p_i} = J_i \cdot V_x \cdot J_i^T \quad (4.4)$$

Ο πίνακας  $V_x$  αποτελείται από τη συνένωση του πίνακα  $V_{dx}$  για κάθε σημείο αλλά με τον πίνακα μεταβλητότητας συμμεταβλητότητας των παραμέτρων μετασχηματισμού. Τέλος ο Ιακωβιανός πίνακας αποτελείται από τις μερικές παραγώγους των σχέσεων για τον υπολογισμό των νέων συντεταγμένων, ως προς κάθε στοιχείο .

#### 4.2.2 Εφαρμογή μεθόδου απλών τετραδονίων

Στη περίπτωση των απλών τετραδονίων, αντικαθίσταται ο πίνακας στροφής με τον αντίστοιχο πίνακα τετραδονίων. Όπως αναφέρθηκε η στροφή γίνεται κατά z-y-x και έτσι το τετραδόνιο που χρησιμοποιείται ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο  $Q_{xyz} = Q_x \times Q_y \times Q_z$  και υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις, για  $\alpha = \varphi_x$ ,  $\beta = \varphi_y$  και  $\gamma = \varphi_z$ .

$$q_0^{zyx} = \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (4.5)$$

$$q_1^{zyx} i = \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad (4.6)$$

$$q_2^{zyx} j = \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (4.7)$$

$$q_3^{zyx} k = \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (4.8)$$

Με βάση λοιπόν τη σχέση 2.1, εφαρμόζοντας τον πίνακα στροφής της σχέσης 2.7 προκύπτουν οι συντεταγμένες του παρακάτω πίνακα. Και σε

αυτή τη περίπτωση πραγματοποιείται νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων για τη τελική αβεβαιότητα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αρχικά πραγματοποιείται νομός μετάδοσης στις σχέσεις 4.5-4.8 ώστε να υπολογιστεί το σφάλμα του τετραδονίου και κατόπιν υπολογίζεται όπως προηγουμένως η τελική αβεβαιότητα των μεταβολών στο σύστημα E, N, Up.

ΣΗΜΕΙΟ	δE (mm)	δN (mm)	δUp (mm)	σδE (mm)	σδN (mm)	σδUp (mm)
ΛΙΜΝΕΣ	8.8	-3.0	0.6	±4.9	±5.3	±5.0
ΑΚΡΩΤΗΡΙ	6.3	5.4	4.5	±5.8	±6.2	±5.9
ΜΥΛΟΙ	8.4	-2.0	2.5	±4.9	±5.3	±5.0
ΚΑΣΙΔΙΑΡΗΣ	3.8	-0.2	8.5	±4.9	±5.3	±5.0
ΘΕΡΙΟ	5.3	2.7	12.8	±5.8	±6.2	±5.9

*Πίνακας 4.5: Μεταβολή συντεταγμένων και αβεβαιότητες κάθε κορυφής στο σύστημα E, N, Up, όπως υπολογίστηκαν με τη μέθοδο απλών τετραδονίων*

#### 4.2.3 Εφαρμογή μεθόδου διπλών τετραδονίων

Όσον αφορά στην επίλυση με την χρήση διπλών τετραδονίων εφαρμόζεται η σχέση 2.30. Στη περίπτωση αυτή, τόσο η μετάθεση, όσο και η στροφή εκφράζονται με τα τετραδόνια  $r$  και  $d$ .

Το τετραδόνιο  $r$  υπολογίζεται και εδώ από τις σχέσεις 4.5 έως 4.8, ενώ οι συντελεστές του  $d$  προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης  $t = W(r)^T d$ .

Έτσι προκύπτουν τα αποτελέσματα του πίνακα 4.6, ενώ και εδώ είναι απαραίτητη η αβεβαιότητα των τετραδονίων ώστε να υπολογιστούν τα τελικά σφάλματα στο νέο σύστημα.

ΣΗΜΕΙΟ	δE (mm)	δN (mm)	δUp (mm)	σδE (mm)	σδN (mm)	σδUp (mm)
ΛΙΜΝΕΣ	8.8	-3.0	0.6	±4.9	±5.3	±5.0
ΑΚΡΩΤΗΡΙ	6.3	5.4	4.5	±5.8	±6.2	±5.9
ΜΥΛΟΙ	8.4	-2.0	2.5	±4.9	±5.3	±5.0
ΚΑΣΙΔΙΑΡΗΣ	3.8	-0.2	8.5	±4.9	±5.3	±5.0
ΘΕΡΙΟ	5.3	2.7	12.8	±5.8	±6.2	±5.9

*Πίνακας 4.6: Μεταβολή συντεταγμένων και αβεβαιότητες κάθε κορυφής στο σύστημα E, N, Up, όπως υπολογίστηκαν με τη μέθοδο διπλών τετραδονίων*

#### 4.2.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση διαπιστώνεται πως και στις τρεις μεθόδους οι τελικές μεταβολές συντεταγμένων είναι ίδιες. Αντίστοιχα και οι αβεβαιότητες τους. Αυτό συμβαίνει καθώς η αβεβαιότητα των γωνιών στροφής ισομοιάζεται στους συντελεστές του τετραδονίου και έτσι δεν αλλάζει σημαντικά το αποτέλεσμα μεταξύ των μεθόδων. Τα αποτελέσματα πιθανόν να είναι διαφορετικά αν εμπλακεί και η μετάθεση, μιας και αυτή μετασχηματίζεται σε τετραδόνια με έξτρα σφάλμα. Επομένως, αν και αναμένεται η τρίτη μέθοδος να έχει μεγαλύτερη αβεβαιότητα, αυτό δεν ισχύει όταν πρόκειται μόνο για μετασχηματισμό στροφής.

### 4.3 Μετασχηματισμός συντεταγμένων για την παρακολούθηση ταλαντώσεων γέφυρας

Ένα ακόμα πεδίο εφαρμογής των μετασχηματισμών συντεταγμένων είναι η παρακολούθηση κατασκευών για την ύπαρξη ή όχι ταλαντώσεων και παραμορφώσεων.

Πιο συγκεκριμένα, στη παρούσα εργασία μελετάται ένα σύνολο δεδομένων παρακολούθησης της γέφυρας του Ευρίπου, που συνδέει τη Βοιωτία με τη Χαλκίδα. Στην εικόνα 4.2 δίνεται η κάτοψη της γέφυρας αυτής, καθώς και οι στάσεις μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. [Σπυράκης Β, 2011]



Εικόνα 4.2: Η γέφυρα του Ευρίπου και οι στάσεις μέτρησης της

Αξίζει να σημειωθεί, πως για ευκολία χρησιμοποιήθηκε ένα υποσύνολο των δεδομένων προκειμένου να διερευνηθούν οι μετασχηματισμοί με κάθε

μέθοδο. Το σύνολο αυτό αποτελείται από 20 σημεία, των οποίων οι συντεταγμένες δίνονται στον πίνακα παρακάτω και έχουν αβεβαιότητα  $\pm 5\text{mm}$ .

ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)	ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)
1010	687.253	635.421	91.748	1020	687.252	635.422	91.748
1011	687.253	635.421	91.748	1021	687.254	635.422	91.748
1012	687.254	635.423	91.749	1022	687.252	635.421	91.746
1013	687.252	635.422	91.749	1023	687.253	635.423	91.747
1014	687.253	635.422	91.748	1024	687.252	635.422	91.749
1015	687.253	635.421	91.748	1025	687.253	635.423	91.749
1016	687.252	635.421	91.747	1026	687.251	635.421	91.748
1017	687.255	635.423	91.748	1027	687.253	635.422	91.748
1018	687.253	635.422	91.748	1028	687.252	635.421	91.747
1019	687.254	635.423	91.748	1029	687.254	635.424	91.749

Πίνακας 4.7: Αρχικές συντεταγμένες σημείων σε τοπικό σύστημα αναφοράς

Τα σημεία αυτά μετρήθηκαν από το σημείο Σ1 σε τοπικό σύστημα αναφοράς. Ωστόσο για μεγαλύτερη ευκολία καλό ήταν να μετασχηματιστούν σε ένα σύστημα, όπου ο άξονας των x να συμπίπτει με τον κατά μήκος άξονα της γέφυρας, ο άξονας των y να συμπίπτει με τον εγκάρσιο άξονα της γέφυρας και τέλος ο άξονας των z να συμπίπτει με τον κατακόρυφο άξονα της γέφυρας. [Σπυράκης Β, 2011]

Συνεπώς οι παράμετροι μετασχηματισμού, όπως υπολογίστηκαν ακολουθούν στροφή κατά z-y-x, και παρουσιάζονται στον πίνακα 4.8.

Μετάθεση			Στροφή			Κλίμακα
$t_x$	$t_y$	$t_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$	$\lambda$
790.727m	-371.595m	0m	0	0	51° .41556	1
$\sigma_{t_x}$	$\sigma_{t_y}$	$\sigma_{t_z}$	$\sigma\varphi_x$	$\sigma\varphi_y$	$\sigma\varphi_z$	$\sigma\lambda$
$\pm 0.007\text{m}$	$\pm 0.007\text{m}$	$\pm 0\text{m}$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0'' .0024$	$\pm 0$

Πίνακας 4.8: Παράμετροι μετασχηματισμού για τη γέφυρα του Ευρίπου

Αξίζει να σημειωθεί πως με δεδομένη την αβεβαιότητα των συντεταγμένων προσδιορίστηκαν και οι αβεβαιότητες των παραμέτρων μετασχηματισμού μέσω των σχέσεων 4.9 και 4.10.

$$\sigma\varphi_z = \sqrt{2\sigma_\alpha^2} \text{ με } \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x\sqrt{2}}{S_{\Sigma 1-1010}} \quad (4.9)$$

$$\sigma_{t_x} = \sqrt{2\sigma_x^2} \text{ και } \sigma_{t_y} = \sqrt{2\sigma_y^2} \quad (4.10)$$

### 4.3.1 Εφαρμογή κλασσικής μεθόδου

Κατά τη κλασσική μέθοδο μετασχηματισμού και την χρήση της σχέσης 2.1, υπολογίζονται οι συντεταγμένες στο νέο σύστημα αναφοράς, αυτό της γέφυρας και παρουσιάζονται στον πίνακα 4.7. Όπως ήταν αναμενόμενο το Z δεν τροποποιήθηκε καθώς δεν υπήρχε στροφή κατά  $x$  και  $y$  ή μετάθεση κατά  $z$ .

Αξίζει να σημειωθεί, ότι η εξίσωση μετασχηματισμού που προέκυψε ακολουθεί τελικά το μετασχηματισμό ομοιότητας στο επίπεδο που δεν παραμορφώνει το σχήμα των αντικειμένων που περιέχει.

Όσον αφορά στην αβεβαιότητα των νέων σημείων, αυτή προέκυψε μέσω νόμου μετάδοσης μεταβλητοτήτων, όπως και στη προηγούμενη εφαρμογή, και είναι  $\pm 9\text{mm}$  κατά  $x, y$  και  $\pm 5\text{mm}$  για  $z$ .

ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)	ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)
1010	722.642	561.915	91.748	1020	722.641	561.915	91.748
1011	722.642	561.915	91.748	1021	722.642	561.916	91.748
1012	722.641	561.917	91.749	1022	722.641	561.914	91.746
1013	722.641	561.915	91.749	1023	722.641	561.916	91.747
1014	722.641	561.916	91.748	1024	722.641	561.915	91.749
1015	722.642	561.915	91.748	1025	722.641	561.916	91.749
1016	722.641	561.914	91.747	1026	722.641	561.913	91.748
1017	722.642	561.918	91.748	1027	722.641	561.916	91.748
1018	722.641	561.916	91.748	1028	722.641	561.914	91.747
1019	722.641	561.917	91.748	1029	722.640	561.918	91.749

Πίνακας 4.9: Συντεταγμένες σημείων στο σύστημα αναφοράς της γέφυρας όπως προέκυψαν από την κλασσική μέθοδο

### 4.3.2 Εφαρμογή μεθόδου απλών τετραδονίων

Κατά τη μέθοδο των απλών τετραδονίων και τη χρήση της σχέσης 2.7 υπολογίζονται εκ νέου οι συντεταγμένες στο σύστημα της γέφυρας. Και σε αυτή την εφαρμογή, όπως και πριν, η στροφή ακολουθεί την σειρά  $z$ - $y$ - $x$  με αποτέλεσμα να ορίζεται το τετραδόνιο με βάσει τις σχέσεις 4.5-4.8.

Στο πίνακα 4.10 δίνονται τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού. Και εδώ η αβεβαιότητα, υπολογίστηκε με νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων στο τετραδόνιο στροφής, και κατόπιν νόμο μετάδοσης, μαζί με το σφάλμα μετάθεσης και κλίμακας στο τελικό αποτέλεσμα. Έτσι προέκυψε  $\sigma_x = \sigma_y = \pm 9\text{mm}$  και  $\sigma_z = \pm 5\text{mm}$ .

ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)	ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)
1010	722.642	561.915	91.748	1020	722.641	561.915	91.748
1011	722.642	561.915	91.748	1021	722.642	561.916	91.748
1012	722.641	561.917	91.749	1022	722.641	561.914	91.746
1013	722.641	561.915	91.749	1023	722.641	561.916	91.747
1014	722.641	561.916	91.748	1024	722.641	561.915	91.749
1015	722.642	561.915	91.748	1025	722.641	561.916	91.749
1016	722.641	561.914	91.747	1026	722.641	561.913	91.748
1017	722.642	561.918	91.748	1027	722.641	561.916	91.748
1018	722.641	561.916	91.748	1028	722.641	561.914	91.747
1019	722.641	561.917	91.748	1029	722.640	561.918	91.749

Πίνακας 4.10: Συντεταγμένες σημείων στο σύστημα αναφοράς της γέφυρας όπως προέκυψαν από τη μέθοδο απλών τετραδονίων

### 4.3.3 Εφαρμογή μεθόδου διπλών τετραδονίων

Τέλος για τη μέθοδο των διπλών τετραδονίων δημιουργήθηκαν δύο τετραδόνια, ένα για τη στροφή, με βάσει τις σχέσεις 4.5-4.8, και ένα το οποίο σε συνδυασμό με αυτό τις στροφής εκφράζει τη μετάθεση. Πιο συγκεκριμένα αφού υπολογίστηκε το τετραδόνιο στροφής  $r$ , επιλύοντας τη εξίσωση  $t = W(r)^T d$ , προσδιορίζεται το τετραδόνια  $d$ , και έτσι με τη σχέση 2.30 υπολογίζονται οι συντεταγμένες των σημείων στο σύστημα αναφοράς της γέφυρας. Αυτές δίνονται στο παρακάτω πίνακα.

ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)	ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)
1010	722.642	561.915	91.748	1020	722.641	561.915	91.748
1011	722.642	561.915	91.748	1021	722.642	561.916	91.748
1012	722.641	561.917	91.749	1022	722.641	561.914	91.746
1013	722.641	561.915	91.749	1023	722.641	561.916	91.747
1014	722.641	561.916	91.748	1024	722.641	561.915	91.749
1015	722.642	561.915	91.748	1025	722.641	561.916	91.749
1016	722.641	561.914	91.747	1026	722.641	561.913	91.748
1017	722.642	561.918	91.748	1027	722.641	561.916	91.748
1018	722.641	561.916	91.748	1028	722.641	561.914	91.747
1019	722.641	561.917	91.748	1029	722.640	561.918	91.749

Πίνακας 4.11: Συντεταγμένες σημείων στο σύστημα αναφοράς της γέφυρας όπως προέκυψαν από τη μέθοδο διπλών τετραδονίων

Σχετικά με την αβεβαιότητα τους, υπολογίστηκαν αρχικά τα σφάλματα των συντελεστών των τετραδονίων  $r$  και  $d$  με νόμο μετάδοσης σφαλμάτων, ενώ στην συνέχεια, σε συνδυασμό με το σφάλμα κλίμακας αλλά και των αρχικών σημείων υπολογίστηκε η αβεβαιότητα στο νέο σύστημα αναφοράς με τιμές  $\pm 8\text{mm}$  κατά  $x, y$  και  $\pm 5\text{mm}$  κατά  $z$ .



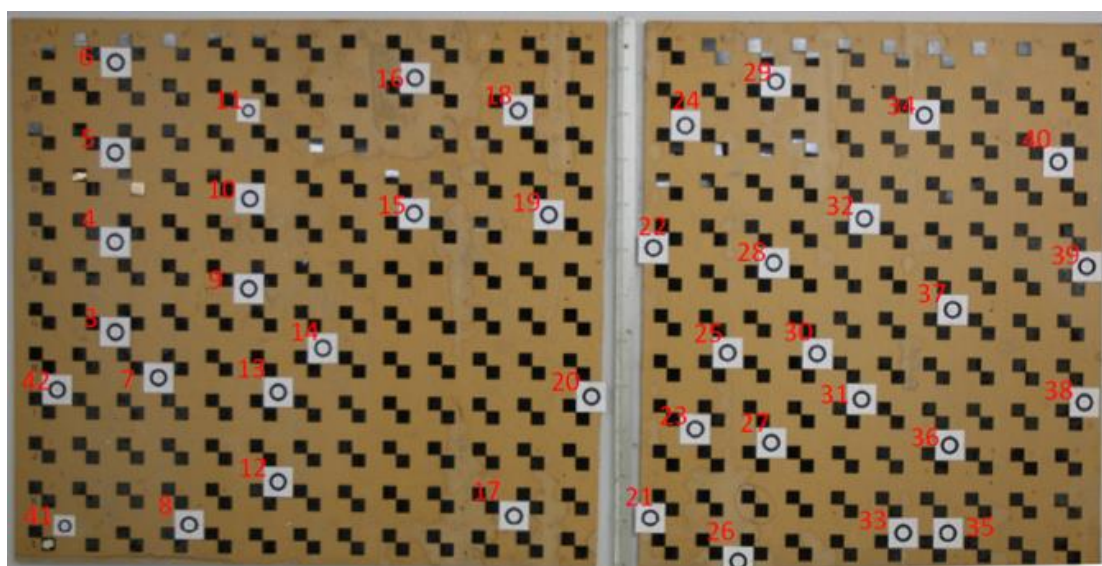
#### 4.3.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα και των τριών μεθόδων διαπιστώνεται ότι σε κάθε περίπτωση προκύπτουν οι ίδιες συντεταγμένες. Όσον αφορά στην αβεβαιότητα τους τόσο η κλασική μέθοδος όσο και αυτή των απλών τετραδονίων επιφέρουν τα ίδια αποτελέσματα καθώς επηρεάζονται το ίδιο από την αβεβαιότητα γωνιών και μετάθεσης.

Αντίθετα στη περίπτωση των διπλών τετραδονίων, που το ένα τετραδόνιο εξαρτάται από το άλλο, παρουσιάζεται μικρότερη αβεβαιότητα. Αυτό συμβαίνει καθώς το πολύ μικρό σφάλμα των γωνιών λειτουργεί αναλογικά με το πολύ μικρό σφάλμα των μεταθέσεων, και έτσι το μέγεθος της τελικής αβεβαιότητας των συντελεστών μειώνεται σημαντικά. Συνεπώς οι τελικές συντεταγμένες υπολογίζονται με μικρότερη αβεβαιότητα έναντι των άλλων μεθόδων.

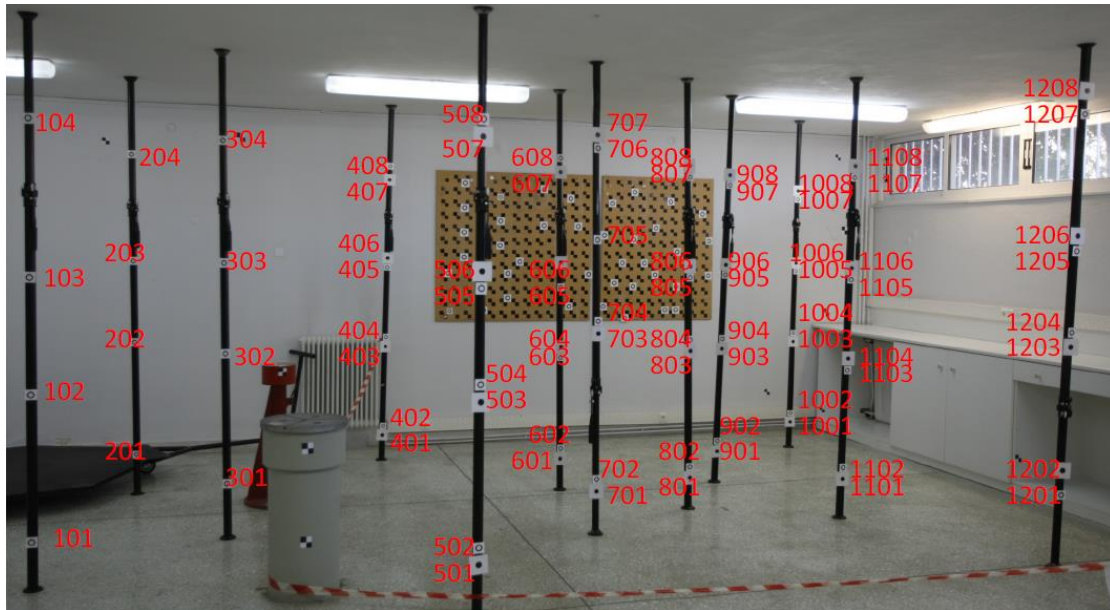
#### 4.4 Μετασχηματισμός συντεταγμένων για την αυτοβαθμονόμηση φωτομηχανών

Στη τρίτη και τελευταία εφαρμογή, μετρήθηκαν και υπολογίστηκαν οι συντεταγμένες ενός τριδιάστατου πεδίου ελέγχου, όπως αυτό δημιουργήθηκε στη Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων με στόχο τη δραστηριότητα σε θεωρητικά, ερευνητικά και πρακτικά θέματα διακρίβωσης επίγειων, αναλογικών και ψηφιακών φωτομηχανών. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στις εικόνες 4.3 και 4.4, το συγκεκριμένο πεδίο αποτελείται από 83 στόχους τοποθετημένους σε 12 κατακόρυφους στύλους και 40 στόχους σε τοίχο στο βάθος του πεδίου. [Γεωργόπουλος Α., Ιωαννίδης Χ., Λάμπρου Ε., Πανταζής Γ., Νικολίτσας Κ., 2010]



Εικόνα 4.3: Προσημασμένος τοίχος πεδίου ελέγχου ΣΑΤΜ





Εικόνα 4.4: Κατακόρυφοι στύλοι πεδίου ελέγχου ΣΑΤΜ

Ο προσδιορισμός των αρχικών γεωδαιτικών συντεταγμένων ( $x, y, z$ ) των στόχων, έγινε σε τοπικό σύστημα αναφοράς, όπως αυτό ορίστηκε από δύο σημεία υλοποιημένα με κατάλληλα βάρη που φέρουν κεφαλή με εξαναγκασμένη κέντρωση. Με τη μέθοδο της εμπροσθοτομίας υπολογίστηκαν οι τελικές συντεταγμένες, με αβεβαιότητα  $\pm 0.3\text{mm}$  κατά  $x$  και  $\pm 0.1\text{mm}$  κατά  $y$  και  $z$ . Για τις ανάγκες της παρούσας διερεύνησης μελετήθηκε ένα τμήμα των συντεταγμένων. Αυτές δίνονται στον πίνακα 4.12

ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)	ΣΗΜΕΙΟ	x(m)	y(m)	z(m)
3	32.3084	18.5593	10.3355	701	29.5325	18.3733	9.0652
4	32.3057	18.5602	10.5366	702	29.5334	18.373	9.1326
5	32.3029	18.5596	10.7351	703	29.538	18.3739	9.9489
6	32.2995	18.5573	10.9352	704	29.5386	18.3763	10.0176
7	32.3094	18.4618	10.2337	705	29.5409	18.3867	10.4697
8	32.3101	18.3923	9.9031	706	29.5445	18.389	10.9753
9	32.3102	18.2587	10.4343	707	29.5458	18.3924	11.049
10	32.3072	18.2568	10.6342	801	29.9312	17.6217	9.0144
41	32.307	18.6746	9.8978	802	29.9305	17.6231	9.081
42	32.3087	18.6908	10.2051	803	29.9238	17.6376	9.8003

Πίνακας 4.12: Αρχικές συντεταγμένες ορισμένων στόχων φωτοπεδίου στο τοπικό σύστημα αναφοράς

Προκειμένου να χρησιμοποιηθούν τα σημεία αυτά για την αυτοβαθμονόμηση μηχανών, σκόπιμος είναι ο μετασχηματισμός τους στο φωτογραμμετρικό σύστημα. Έτσι ορίζονται οι παράμετροι μετασχηματισμού του πίνακα 4.13. Και σε αυτή τη περίπτωση επιλέγεται να γίνει στροφή κατά  $z-y-x$

Μετάθεση			Στροφή			Κλίμακα
$t_x$	$t_y$	$t_z$	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$	$\lambda$
0m	0m	0m	$-90^\circ$	0	$90^\circ$	1
$\sigma t_x$	$\sigma t_y$	$\sigma t_z$	$\sigma \varphi_x$	$\sigma \varphi_y$	$\sigma \varphi_z$	$\sigma \lambda$
$\pm 0m$	$\pm 0m$	$\pm 0m$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$	$\pm 0$

Πίνακας 4.13: Παράμετροι μετασχηματισμού για το πεδίο ελέγχου της ΣΑΤΜ

#### 4.4.1 Εφαρμογή κλασσικής μεθόδου

Κατά τη κλασσική μέθοδο μετασχηματισμού και την χρήση της σχέσης 2.1, υπολογίζονται οι συντεταγμένες στο φωτογραμμετρικό σύστημα και και παρουσιάζονται στον πίνακα 4.14. Η αβεβαιότητα τους, ύστερα από νόμο μετάδοσης σφαλμάτων είναι  $\pm 0.1mm$  κατά  $x$ ,  $y$  και  $\pm 0.3mm$  για  $z$ .

ΣΗΜΕΙΟ	$x_{\text{φωτ}}(m)$	$y_{\text{φωτ}}(m)$	$z_{\text{φωτ}}(m)$	ΣΗΜΕΙΟ	$x_{\text{φωτ}}(m)$	$y_{\text{φωτ}}(m)$	$z_{\text{φωτ}}(m)$
3	-18.5593	10.3355	-32.3084	701	-18.3733	9.0652	-29.5325
4	-18.5602	10.5366	-32.3057	702	-18.373	9.1326	-29.5334
5	-18.5596	10.7351	-32.3029	703	-18.3739	9.9489	-29.538
6	-18.5573	10.9352	-32.2995	704	-18.3763	10.0176	-29.5386
7	-18.4618	10.2337	-32.3094	705	-18.3867	10.4697	-29.5409
8	-18.3923	9.9031	-32.3101	706	-18.389	10.9753	-29.5445
9	-18.2587	10.4343	-32.3102	707	-18.3924	11.049	-29.5458
10	-18.2568	10.6342	-32.3072	801	-17.6217	9.0144	-29.9312
41	-18.6746	9.8978	-32.3070	802	-17.6231	9.0810	-29.9305
42	-18.6908	10.2051	-32.3087	803	-17.6376	9.8003	-29.9238

Πίνακας 4.14: Συντεταγμένες σημείων στο φωτογραμμετρικό σύστημα όπως προέκυψαν από την κλασσική μέθοδο

#### 4.4.2 Εφαρμογή μεθόδου απλών τετραδονίων

Κατά τη μέθοδο των απλών τετραδονίων και τη χρήση της σχέσης 2.7 υπολογίζονται εκ νέου οι συντεταγμένες στο φωτογραμμετρικό σύστημα. Και σε αυτή την εφαρμογή, η στροφή ακολουθεί την σειρά Z-Y-X ορίζοντας το τετραδόνιο με βάσει τις σχέσεις 4.5-4.8.

Στο πίνακα 4.15 δίνονται τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού. Η αβεβαιότητα που προέκυψε, ύστερα από νόμο μετάδοσης σφαλμάτων, είναι και εδώ  $\pm 0.1mm$  κατά  $x$ ,  $y$  και  $\pm 0.3mm$  για  $z$ .

ΣΗΜΕΙΟ	x <sub>φωτ</sub> (m)	y <sub>φωτ</sub> (m)	z <sub>φωτ</sub> (m)	ΣΗΜΕΙΟ	x <sub>φωτ</sub> (m)	y <sub>φωτ</sub> (m)	z <sub>φωτ</sub> (m)
3	-18.5593	10.3355	-32.3084	701	-18.3733	9.0652	-29.5325
4	-18.5602	10.5366	-32.3057	702	-18.373	9.1326	-29.5334
5	-18.5596	10.7351	-32.3029	703	-18.3739	9.9489	-29.538
6	-18.5573	10.9352	-32.2995	704	-18.3763	10.0176	-29.5386
7	-18.4618	10.2337	-32.3094	705	-18.3867	10.4697	-29.5409
8	-18.3923	9.9031	-32.3101	706	-18.389	10.9753	-29.5445
9	-18.2587	10.4343	-32.3102	707	-18.3924	11.049	-29.5458
10	-18.2568	10.6342	-32.3072	801	-17.6217	9.0144	-29.9312
41	-18.6746	9.8978	-32.3070	802	-17.6231	9.0810	-29.9305
42	-18.6908	10.2051	-32.3087	803	-17.6376	9.8003	-29.9238

Πίνακας 4.15: Συντεταγμένες σημείων στο φωτογραμμετρικό σύστημα όπως προέκυψαν από τη μέθοδο απλών τετραδονίων

#### 4.4.3 Εφαρμογή μεθόδου διπλών τετραδονίων

Τέλος για τη μέθοδο των διπλών τετραδονίων δημιουργήθηκαν τα δυο τετραδόνια r, d, με βάσει τις σχέσεις 4.5-4.8 και την εξίσωση  $t = W(r)^T d$ , αντίστοιχα. Οι τελικές συντεταγμένες δίνονται στον πίνακα παρακάτω με την αβεβαιότητα τους να κυμαίνεται και εδώ στο  $\pm 0.1\text{mm}$  κατά x, y και στα  $\pm 0.3\text{mm}$  για z.

ΣΗΜΕΙΟ	x <sub>φωτ</sub> (m)	y <sub>φωτ</sub> (m)	z <sub>φωτ</sub> (m)	ΣΗΜΕΙΟ	x <sub>φωτ</sub> (m)	y <sub>φωτ</sub> (m)	z <sub>φωτ</sub> (m)
3	-18.5593	10.3355	-32.3084	701	-18.3733	9.0652	-29.5325
4	-18.5602	10.5366	-32.3057	702	-18.373	9.1326	-29.5334
5	-18.5596	10.7351	-32.3029	703	-18.3739	9.9489	-29.538
6	-18.5573	10.9352	-32.2995	704	-18.3763	10.0176	-29.5386
7	-18.4618	10.2337	-32.3094	705	-18.3867	10.4697	-29.5409
8	-18.3923	9.9031	-32.3101	706	-18.389	10.9753	-29.5445
9	-18.2587	10.4343	-32.3102	707	-18.3924	11.049	-29.5458
10	-18.2568	10.6342	-32.3072	801	-17.6217	9.0144	-29.9312
41	-18.6746	9.8978	-32.3070	802	-17.6231	9.0810	-29.9305
42	-18.6908	10.2051	-32.3087	803	-17.6376	9.8003	-29.9238

Πίνακας 4.16: Συντεταγμένες σημείων στο φωτογραμμετρικό σύστημα όπως προέκυψαν από τη μέθοδο διπλών τετραδονίων

#### 4.4.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα και των τριών μεθόδων διαπιστώνεται ότι σε κάθε περίπτωση προκύπτουν οι ίδιες συντεταγμένες με τις ίδιες αβεβαιότητες. Επίσης διαπιστώνεται ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των αρχικών και τελικών συντεταγμένων:

$$x_{\text{φωτ}} = -y \quad (4.11)$$

$$y_{\text{φωτ}} = z \quad (4.12)$$

$$z_{\text{φωτ}} = -x \quad (4.13)$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

#### 5.1 Συμπεράσματα

Το πρόβλημα του μετασχηματισμού συντεταγμένων από ένα σύστημα σε ένα άλλο αποτελεί ένα πολύ γνωστό πρόβλημα τόσο στον κλάδο της γεωδαισίας, όσο και σε πολλούς άλλους κλάδους των μηχανικών. Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε ως ευθύ πρόβλημα, είτε ως αντίστροφο. Στην πρώτη περίπτωση τα σημεία μεταφέρονται από το ένα σύστημα στο άλλο, γνωρίζοντας τη σχέση μεταξύ των δύο συστημάτων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, δίνονται σημεία και στα δύο συστήματα και ζητείται η σχέση του ενός συστήματος με το άλλο.

Στην παρούσα εργασία, πραγματοποιήθηκε μελέτη του μετασχηματισμού Helmert ή αλλιώς του 7-παραμετρικού μετασχηματισμού. Πρόκειται για ένα τριδιάστατο μετασχηματισμό, όπου αποτελείται από τρεις στροφές μεταξύ των αξόνων, ορίζοντας τον πίνακα στροφής ( $R$ ), ένα διάνυσμα μετάθεσης της αρχής τους ( $t_x, t_y, t_z$ ) καθώς και την ενιαία κλίμακα ( $\lambda$ ) του ενός σε σχέση με το άλλο.

Πραγματοποιώντας μία βιβλιογραφική διερεύνηση, διαπιστώθηκε πως ο υπολογισμός του πίνακα στροφής πολλές φορές δημιουργεί σημαντικά προβλήματα. Στη σημερινή εποχή, ο πιο κλασσικός τρόπος προσδιορισμού είναι χρησιμοποιώντας τις γωνίες Euler, όπου αυτός ορίζεται με τη χρήση ημιτόνων και συνημιτόνων των γωνιών που «στρίβει» ο κάθε άξονας. Έτσι συμπληρωματικές ή παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις ίδιες τιμές τριγωνομετρικών αριθμών, με αποτέλεσμα από διαφορετικές γωνίες να προκύπτει ο ίδιος πίνακας στροφής.

Για την αντιμετώπιση της περιστροφής σημείων του επιπέδου, στη μαθηματική κοινότητα, χρησιμοποιούνται οι δυνάδες, όπου τα σημεία δίνονται με τη μορφή μιγαδικών, ακολουθώντας όλες τις ιδιότητές τους. Το πρόβλημα όμως γίνεται πιο περίπλοκο όταν τα σημεία αυτά απεικονίζονται στο χώρο, καθώς οι απλές δυνάδες δεν αρκούν. Έτσι η λύση δόθηκε από τον Hamilton, ο οποίος δημιούργησε μια νέα αλγεβρική δομή, τα τετραδόνια (Quaternions) που αποτελούνται από ένα πραγματικό και τρία φανταστικά μέρη  $i$ ,  $j$  και  $k$ .

Η διαφορετικότητα των τετραδονίων έγκειται στον τρόπο που ερμηνεύονται γεωμετρικά, αλλά και στον τρόπο που πραγματοποιούν περιστροφές στον χώρο. Έτσι με τη χρήση τους, ο τελικός πίνακας

στροφής είναι μονοσήμαντος και αποτελείται από τους συντελεστές ενός τετραδονίου της μορφής  $q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ . Το τετραδόνιο αυτό ορίζεται ως εξωτερικό γινόμενο επιμέρους τετραδονίων, ανάλογα με τη σειρά με την οποία περιστρέφονται οι άξονες, ενώ λαμβάνει υπόψη τη δεξιόστροφη γωνία ανά άξονα.

Στο πρόβλημα των 7 παραμέτρων (Helmert Transformation Problem), που αναφέρθηκε παραπάνω, χρησιμοποιούνται, εκτός από τις γωνίες Euler, τόσο τα απλά όσο και τα διπλά τετραδόνια, τα οποία συνδυάζουν τη θεωρία των διπλών αριθμών με αυτή των τετραδονίων.

Έτσι ορίζονται τρεις μέθοδοι μετασχηματισμού:

Η κλασική μέθοδος: όπου γίνεται χρήση των γωνιών Euler για τον ορισμό του πίνακα στροφής, χρήση του διανύσματος  $t$  για τη μετάθεση και χρήση του συντελεστή  $\lambda$  για τη κλίμακα.

Η μέθοδος των απλών τετραδονίων: όπου ο πίνακα στροφής ορίζεται από τους συντελεστές ενός τετραδονίου ενώ και εδώ ορίζεται το διάνυσμα  $t$  για τη μετάθεση, και ο συντελεστής  $\lambda$  για τη κλίμακα.

Η μέθοδος των διπλών τετραδονίων: όπου ο πίνακας στροφής ορίζεται από ένα τετραδόνιο, η μετάθεση δίνεται ως συνάρτηση του τετραδονίου του πίνακα στροφής και ενός ακόμα τετραδονίου, ενώ και εδώ ορίζεται ο συντελεστής  $\lambda$  για τη κλίμακα.

Αντικείμενο της εργασίας είναι η μελέτη εφαρμογής των μεθόδων αυτών τόσο στο ευθύ όσο και στο αντίστροφο πρόβλημα, προκειμένου να εντοπιστεί η καταλληλότητα τους ανά περίπτωση.

Αφού ο πίνακας στροφής είναι αυτός που διαχωρίζει τις μεθόδους μεταξύ τους, πραγματοποιήθηκε ειδική μελέτη ώστε να εντοπιστούν οι «ύποπτες» γωνίες στροφής που επιφέρουν μεγάλες διαφορές των νέων και παλιών συντεταγμένων. Η μελέτη έγινε στο διάστημα  $[0^\circ, 180^\circ]$ , ενώ εντοπίστηκαν οι προβληματικές περιοχές να είναι για γωνίες μικρότερες των  $5^\circ$ , γωνίες μεταξύ  $90^\circ$  και  $120^\circ$ , αλλά και μεγαλύτερες από  $160^\circ$ .

Στη διερεύνηση του αντίστροφου προβλήματος, δημιουργήθηκαν τρία διαφορετικά σύνολα δεδομένων, τα οποία αποτελούνται από 10 σημεία το καθένα, στο χώρο των τριών διαστάσεων. Η διαφοροποίηση του κάθε συνόλου έγκειται στον τρόπο που αυτά είναι δομημένα, διαφοροποιώντας τόσο τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων από τα οποία αποτελούνται, όσο και την τάξη μεγέθους της αβεβαιότητας τους. Έτσι σε κάθε σύνολο τα σημεία απέχουν μεταξύ τους μικρές, μέσες και μεγάλες αποστάσεις, ενώ η αβεβαιότητά τους κυμαίνεται από 0.1mm-1cm, αντίστοιχα.

Τα σύνολα αυτά υποβλήθηκαν σε συγκεκριμένους μετασχηματισμούς, λαμβάνοντας υπόψιν τα αποτελέσματα των «προβληματικών» γωνιών, προκειμένου να είναι γνωστές οι συντεταγμένες τους στο παλιό και νέο σύστημα. Με αποκλειστικά τα δεδομένα πριν και μετά την αλλαγή συστήματος, πραγματοποιήθηκε προσδιορισμός των παραμέτρων μετασχηματισμού εφαρμόζοντας τη γενική μέθοδο συνόρθωσης σε κάθε μία από τις παραπάνω μεθόδους. Έτσι αν και ουσιαστικά είναι γνωστές οι τιμές των παραμέτρων, υπολογίζονται εκ νέου προκειμένου να εντοπιστούν πιθανές σημαντικές αποκλίσεις και προβλήματα.

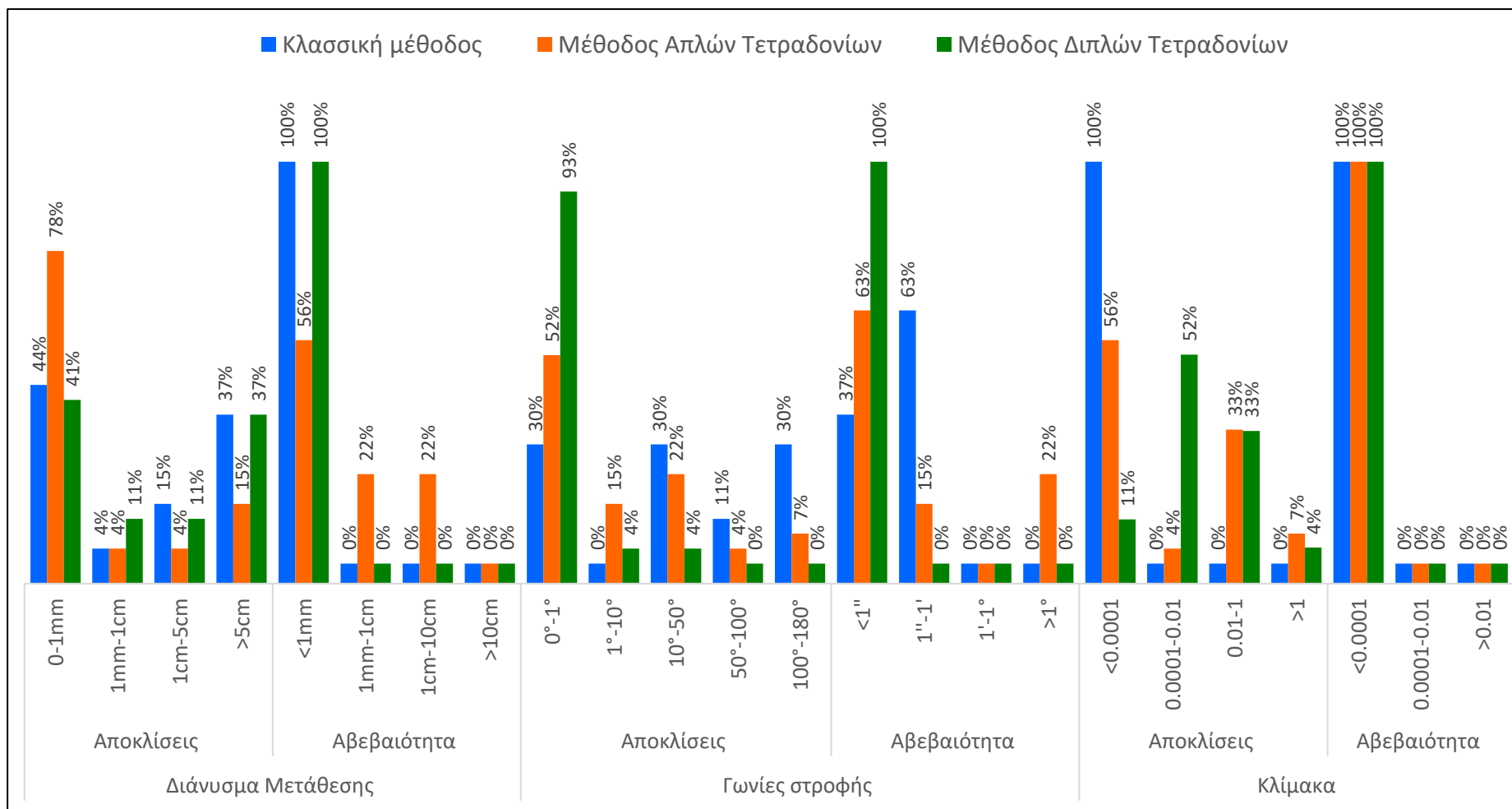
Δομήθηκαν και υπολογίστηκαν 9 σενάρια για κάθε σύνολο δεδομένων και 27 συνολικά ανά μέθοδο, τα οποία ελέγχθηκαν για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Αξίζει να σημειωθεί, πως στις περισσότερες περιπτώσεις ο έλεγχος αυτός ήταν μη αληθής καθώς η υπολογισμένη αβεβαιότητα των παραμέτρων ήταν πολύ μικρή.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα της κλασσικής μεθόδου, οι γωνίες της τάξης των  $100^\circ$ ,  $170^\circ$  και  $5^\circ$  υπολογίζονταν ως  $80^\circ$ ,  $10^\circ$  και  $185^\circ$  αντίστοιχα σε ποσοστό 78%. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς αυτές παρουσιάζουν κάποια συμμετρία στον τριγωνομετρικό κύκλο και έτσι προκύπτει ο ίδιος πίνακας στροφής ακόμα και αν οι γωνίες είναι διαφορετικές. Αντίστοιχα, η κλίμακα υπολογίζεται σωστά σε όλα τα σενάρια, ενώ οι αποκλίσεις του διανύσματος μετάθεσης είναι στην πλειοψηφία τους μικρότερες του 1mm.

Αντίθετα στην περίπτωση των απλών τετραδονίων οι γωνίες υπολογίζονται σωστά σε ποσοστό 63%, ενώ 4 από τα 27 σενάρια με τα ίδια χαρακτηριστικά, για διαφορετικά σύνολα δεδομένων, παρουσιάζουν προβλήματα.

Όσον αφορά στη μέθοδο των διπλών τετραδονίων ο υπολογισμός των γωνιών είναι ορθός στο 93% των σεναρίων, ενώ οι τιμές των αποκλίσεων για τις μεταθέσεις είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Αυτό, πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι το διάνυσμα μετάθεσης δεν συνορθώνεται κατευθείαν, προκειμένου να υπολογιστεί η καλύτερη τιμή του, όπως στις άλλες δύο περιπτώσεις, αλλά προκύπτει συναρτήσει των δύο επιμέρους τετραδονίων, τα οποία προφανώς και έχουν σφάλμα.

Παρατηρώντας, λοιπόν, και τις τρεις μεθόδους, στο σύνολο των σεναρίων, όπως φαίνεται και στο επόμενο διάγραμμα, διαπιστώνεται πως η μέθοδος των διπλών τετραδονίων επιφέρει τις καλύτερες τιμές στον υπολογισμό γωνιών, ενώ οι άλλες δύο μέθοδοι βελτιστοποιούν τις τιμές του διανύσματος μετάθεσης. Τέλος, η κλασσική μέθοδος οδηγεί στην ορθή επίλυση της κλίμακας για ποσοστό 100%.



Διάγραμμα 5.1: Ποσοστιαίο ιστόγραμμα αποκλίσεων και αβεβαιότητας όλων των παραμέτρων μετασχηματισμού για το σύνολο των σεναρίων



Μελετώντας τα σενάρια ως προς το σύνολο το δεδομένων, διαπιστώνεται πως για σημεία που απέχουν μικρές αποστάσεις μεταξύ τους, η μέθοδος διπλών τετραδονίων επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα στον υπολογισμό γωνιών, ενώ η μέθοδος των απλών τετραδονίων καλύτερα αποτελέσματα στη μετάθεση. Επιπροσθέτως, για το δεύτερο και τρίτο σύνολο δεδομένων, με μεγάλες και μέσες αποστάσεις μεταξύ των σημείων, αντίστοιχα, μικρές αποκλίσεις γωνιών υπάρχουν και εδώ στη μέθοδο διπλών τετραδονίων, ενώ οι μεταθέσεις υπολογίζονται καλύτερα στην κλασσική μέθοδο.

Σχετικά με την αβεβαιότητα των υπολογισμένων μεγεθών, για τα σημεία που απέχουν μικρές αποστάσεις μεταξύ τους, η μέθοδος διπλών τετραδονίων επιφέρει, αβεβαιότητες μικρότερες του 1" για τις γωνίες και του 1mm για τις μεταθέσεις. Αντίστοιχες αβεβαιότητες επιφέρει και η κλασσική μέθοδος στις γωνίες και στις μεταθέσεις των δύο άλλων συνόλων.

Από την ανάλυση λοιπόν προκύπτει ότι για να είναι μια μέθοδος πλήρως ικανοποιητική πρέπει να έχει τις μικρότερες δυνατές αποκλίσεις με τη μέγιστη ακρίβεια. Το ποσό αυτών των μεγεθών ποικίλει ανάλογα με το πεδίο εφαρμογής και τη δομή των δεδομένων.

Κατά το στάδιο της εφαρμογής μελετήθηκε το ευθύ πρόβλημα, όπου με γνωστές τις παραμέτρους μετασχηματισμού υπολογίστηκαν οι νέες συντεταγμένες των σημείων. Διερευνήθηκαν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις με δεδομένα να δομούνται για τρεις διαφορετικούς σκοπούς.

Η πρώτη περίπτωση αφορούσε τον μετασχηματισμό των σημείων ενός γεωδαιτικού δικτύου ελέγχου μετακινήσεων από το WGS'84 σε ένα τοπικό σύστημα E, N, Up. Η δεύτερη περιλαμβάνει μετρήσεις για την παρακολούθηση των ταλαντώσεων μίας κατασκευής, ενώ η τρίτη και τελευταία περίπτωση, αφορά σημεία ενός πεδίου ελέγχου για την βαθμονόμηση φωτομηχανών.

Επιπλέον, οι εφαρμογές αυτές διακρίνονται ανάλογα με τις παραμέτρους μετασχηματισμού που χρησιμοποιούν. Η πρώτη αποτελείται μόνο από στροφή των δύο αξόνων, με γωνίες που έχουν σφάλμα, η δεύτερη από μια στροφή και δύο μεταθέσεις με αντίστοιχες αβεβαιότητες, ενώ η τρίτη περιλαμβάνει στροφή δύο αξόνων που όμως το σφάλμα είναι μηδενικό.

Πραγματοποιήθηκε μετασχηματισμός και με τις τρεις μεθόδους ενώ διαπιστώθηκε πως τα αποτελέσματα δεν παρουσιάζουν αποκλίσεις,

συνεπώς ο υπολογισμός συντεταγμένων είναι μονοσήμαντος και ανεξάρτητος μεθόδου.

Σχετικά με την αβεβαιότητα των νέων συντεταγμένων, δεν παρατηρούνται διαφοροποιήσεις, με εξαίρεση τη δεύτερη εφαρμογή και τη μέθοδο διπλών τετραδονίων, όπου αυτή βελτιώθηκε κατά 1mm σε  $x$  και  $y$ .

Αξίζει να σημειωθεί πως για τη συγκεκριμένη εργασία, δημιουργήθηκαν τρία προγράμματα στο MatLab. Το πρώτο αφορούσε στον υπολογισμό των νέων συντεταγμένων ανά σενάριο, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν ως δεδομένα στη διερεύνηση του αντίστροφου προβλήματος. Το δεύτερο υπολογίζει τις παραμέτρους μετασχηματισμού με κάθε μέθοδο χωριστά, ενώ το τρίτο και τελευταίο χρησιμοποιείται για την επίλυση του ευθύ προβλήματος σε κάθε μια από τις τρεις εφαρμογές. Τα αποτελέσματα κάθε διαδικασίας αποθηκεύτηκαν μέσω του προγράμματος σε αρχείο .txt, ενώ περάστηκαν μετέπειτα στο Excel προκειμένου να πραγματοποιηθεί ο στατιστικός έλεγχος και να δημιουργηθούν τα κατάλληλα διαγράμματα.

Συνοψίζοντας λοιπόν, οι περισσότερες διαφορές εμφανίζονται κατά το αντίστροφο πρόβλημα και όχι κατά το ευθύ. Αυτές αφορούν κυρίως τις γωνίες στροφής και λιγότερο στις μεταθέσεις και στην κλίμακα. Έτσι ανάλογα την εκάστοτε εφαρμογή επιλέγεται η καταλληλότερη εκ των τριών, δίνοντας έμφαση σε αυτές με τα τετραδόνια, και εφαρμόζεται από τον μηχανικό με μεγάλη προσοχή καθώς ακόμα και ένα στοιχείο του τετραδονίου να είναι λάθος, και οι τρεις γωνίες θα αποκλίνουν σημαντικά από την πραγματική τιμή.

## 5.2 Προτάσεις

Μελετώντας τα αποτελέσματα του αντίστροφου προβλήματος, διαπιστώνεται πως δεν υπάρχει μία μέθοδος η οποία να επιφέρει τη βέλτιστη λύση και στον υπολογισμό γωνιών, αλλά και μεταθέσεων και κλίμακας ταυτόχρονα, με μεγάλη ακρίβεια.

Στη μέθοδο των διπλών τετραδονίων η εύρεση των γωνιών στροφής βελτιστοποιείται στο έπακρο. Αυτό συμβαίνει καθώς το τετραδόνιο  $r$  του πίνακα στροφής χρησιμοποιείται και για τον υπολογισμό της μετάθεσης με αποτέλεσμα να έχει μεγαλύτερο βάρος στην επίλυση και έτσι να «κλειδώνει» η λύση του.

Το ίδιο δεν συμβαίνει όμως και με τις μεταθέσεις. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, οι συντελεστές  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_z$  του διανύσματος μετάθεσης, στη συγκεκριμένη μέθοδο δεν υπολογίζονται μεμονωμένα αλλά προκύπτουν ως συνδυασμός των δύο υπολογισμένων τετραδονίων. Έτσι οποιοδήποτε σφάλμα υπάρχει στις υπολογισμένες τους τιμές, μεταφέρεται στο τελικό διάνυσμα μετάθεσης με αποτέλεσμα να μεγαλώνει η απόκλιση του από την πραγματική τιμή.

Συμπερασματικά, λοιπόν, προτείνεται η δημιουργία μίας μεθόδου όπου θα διαθέτει τα χαρακτηριστικά αυτής των διπλών τετραδονίων, αλλά θα βελτιστοποιεί και τις μεταθέσεις, προκειμένου η επίλυση να είναι ορθή και ακριβής σε όλο της το φάσμα.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αγάτζα-Μπαλοδήμου Α. Μ., *Θεωρία σφαλμάτων και συνορθώσεις II*, Έντυπες σημειώσεις για το μάθημα Θεωρία σφαλμάτων και συνορθώσεις II, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ, Αθήνα 2009.
2. Βασιλάκη Μ., *Μιγαδικοί αριθμοί και Γεωμετρία*, Διπλωματική Εργασία, Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και μεθοδολογία των μαθηματικών», ΕΚΠΑ, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Αθήνα 2012.
3. Γεωργόπουλος Α., Ιωαννίδης Χ., Λάμπρου Ε., Πανταζής Γ., Νικολίτσας Κ., *Πρόταση μεθοδολογίας βαθμονόμησης της ψηφιακής κάμερας Εικονογεωδαιτικού Σταθμού*, 3<sup>ο</sup> Τακτικό Εθνικό Συνέδριο Μετρολογίας, Λάρνακα, Κύπρος 2010.
4. Κατσαρός Δ., *Σύγκριση μεθόδων επεξεργασίας μετρήσεων GNSS για την ανίχνευση μετακινήσεων. Εφαρμογή στον Κόλπο Λαγανά στη Ζάκυνθο*, Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ, Αθήνα 2015.
5. Ξένος Θ., *Τυπολόγιο Μαθηματικών*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2008.
6. Πολυμέρου Δ., *Πολυωνυμικές Εξισώσεις Quaternions*, Διπλωματική Εργασία, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, Αθήνα 2015.
7. Σουρλάς Δ., *Μιγαδική Ανάλυση*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Φυσικής, Πάτρα 2012.
8. Σπυράκης Β., *Παρακολούθηση ταλαντώσεων τεχνικών έργων με χρήση συγχρονισμένων ρομποτικών γεωδαιτικών σταθμών. Εφαρμογή στην Υψηλή Γέφυρα του Ευρίπου*, Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ, Αθήνα 2011.
9. Φωτίου Α. Ι., *Γεωμετρική γεωδαισία, Θεωρία και πράξη*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη 2007.
10. Diebel J., *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*, Stanford University, California 2006.

11. Güunaşti G., *Quaternions Algebra, Their Applications in Rotations and Beyond Quaternions*, Linnaeus University, Faculty of Science and Engineering, School of Computer Science, Physics and Mathematics, Sweden 2016.
12. Jia YB, *Dual Quaternions*, Department of Computer Science, Iowa State University, Ames, USA 2013.
13. Jia YB, *Quaternions and Rotations\**, Com S 477/577 Notes, Department of Computer Science, Iowa State University, Ames, USA 2015.
14. Jitka P., *Application of dual quaternions algorithm for geodetic datum transformation*, Journal of Applied Mathematics, Vol 4, 2011, pp 225-236.
15. Kenwright B., *A beginners guide to dual-quaternions: what they are, how they work, and how to use them for 3D character hierarchies*, School of Computing Science, Newcastle University, United Kingdom, 2012.
16. Kuipers J., *Quaternions and Rotation Sequences*, Department of Mathematics, Calvin College USA, Coral Press, Sofia 2000.
17. Perumal L., *Quaternion and Its Application in Rotation Using Sets of Regions*, International Journal of Engineering and Technology Innovation, vol. 1, no. 1, 2011, pp. 35-52.
18. Sanso F., *Helmert's Transform by Quaternions. A Revisitation*, Politecnico di Milano, Dipartimento DICA, represented as a Special issue for Professor Emeritus Athanasiow Dermanis, School of Rural and Surveying Engineering, ATh, 2018.
19. Watson G.A, *Computing Helmert transformations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 197, 2006, pp.387-394.
20. Závoti J., Kalmár J., *A comparison of different solutions of the Bursa-Wolf model and the 3D, 7-parameter datum transformation*, Acta Geod Geophys 51, 2016, pp 245–256.

21. Zeng H., Frang X., Chang G., Yang R., *A dual quaternion algorithm of the Helmert transformation problem*, Earth, Planets and Space 70, Article number: 26, 2018.
22. Zeng H., Yi Q., *Quaternion-Based Iterative Solution Of Three-Dimensional Coordinate Transformation Problem*, Journal of Computers, Vol 6, No 7, 2011, pp 1361–1368.

## ΙΣΤΟΓΡΑΦΙΑ

1. <https://el.wikipedia.org> (Τελευταία πρόσβαση: 10/2019 )
2. <http://www.mpantes.gr> (Τελευταία πρόσβαση: 10/2019)





## **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ**



## Π1: Αριθμητικές σχέσεις για την κλασσική μέθοδο

Παρακάτω δίνονται οι αριθμητικές σχέσεις για το πρόβλημα προσδιορισμού των παραμέτρων μετασχηματισμού με τη κλασσική μέθοδο επίλυσης, όπως, άλλωστε, περιγράφηκαν και στο κεφάλαιο 3 (αντίστροφο πρόβλημα). Επιπλέον δίνονται και οι σχέσεις για το ευθύ πρόβλημα, όπου σημεία μετασχηματίζονται από το ένα σύστημα στο άλλο, με γνωστές τις παραμέτρους μετασχηματισμού, όπως περιγράφηκαν, αντίστοιχα, στο κεφάλαιο 4.

### Π1.1 Πρόβλημα προσδιορισμού παραμέτρων μετασχηματισμού

Όπως δίνονται και στις σχέσεις 3.8-3.10 υπάρχουν οι εξής εξισώσεις παρατήρησης για στροφή αξόνων  $x - y - z$ :

$$f_{x_i} = x'_i - t_x + \frac{\lambda \cdot x_i \cdot (b^2 - a^2 + c^2 - 1) + \lambda \cdot y_i \cdot 2(c - ab) - \lambda \cdot z_i \cdot 2(b + ac)}{a^2 + b^2 + c^2 + 1}$$
$$f_{y_i} = y'_i - t_y + \frac{-\lambda \cdot x_i \cdot 2(c + ab) + \lambda \cdot y_i \cdot (a^2 - b^2 + c^2 - 1) + \lambda \cdot z_i \cdot 2(a - bc)}{a^2 + b^2 + c^2 + 1}$$
$$f_{z_i} = z'_i - t_z + \frac{\lambda \cdot x_i \cdot 2(b - ac) - \lambda \cdot y_i \cdot 2(a + bc) + \lambda \cdot z_i \cdot (a^2 - c^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2 + c^2 + 1}$$

Για τον προσδιορισμό των πινάκων  $A$  και  $B$  υπολογίζονται τα στοιχεία ως εξής:

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{x_i}$

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_{x_i}}{\partial a} = 0 & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial t_y} = -c & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial z'_i} = -b \\ \frac{\partial f_{x_i}}{\partial b} = -z'_i + t_z - \lambda z_i & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial t_z} = b & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_i} = -\lambda \\ \frac{\partial f_{x_i}}{\partial c} = y'_i - t_y + \lambda y_i & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x'_i} = 1 & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial y_i} = \lambda c \\ \frac{\partial f_{x_i}}{\partial \lambda} = -x_i + c y_i - b z_i & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial y'_i} = c & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial z_i} = -\lambda b \\ \frac{\partial f_{x_i}}{\partial t_x} = 1 & & \end{array}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{y_i}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{y_i}}{\partial a} &= z_i' - t_z + \lambda z_i & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial t_y} &= -1 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial z_i'} &= \alpha \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial b} &= 0 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial t_z} &= -a & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial x_i} &= -\lambda c \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial c} &= -x_i' + t_x - \lambda x_i & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial x_i'} &= -c & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial y_i} &= -\lambda \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial \lambda} &= -c x_i - y_i + a z_i & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial y_i'} &= 1 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial z_i} &= \lambda \alpha \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial t_x} &= c \end{aligned}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{z_i}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{z_i}}{\partial a} &= -y_i' + t_y - \lambda y_i & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial t_y} &= a & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial z_i'} &= 1 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial b} &= x_i' - t_x + \lambda x_i & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial t_z} &= -1 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial x_i} &= \lambda b \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial c} &= 0 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial x_i'} &= b & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial y_i} &= -\lambda \alpha \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial \lambda} &= b x_i - a y_i - z_i & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial y_i'} &= -a & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial z_i} &= -\lambda \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial t_x} &= -b \end{aligned}$$

Με τον προσδιορισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού πραγματοποιείται νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων από τις παραμέτρους  $a, b, c$  στις  $\varphi_x, \varphi_y$  και  $\varphi_z$ . Τα στοιχεία του Ιακωβιανού πίνακα προκύπτουν υπολογίζοντας τις σχέσεις:

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $\varphi_x$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial a} = \frac{[4a(a+bc) - 2(a^2 + b^2 + c^2 + 1)](a^2 + b^2 - c^2 - 1) + 8a(a+bc)(c^2 + 1)}{[(2(a+bc))^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - 1)^2](a^2 + b^2 + c^2 + 1)}$$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial b} = \frac{[4ab - 2c(a^2 + b^2 + c^2 + 1)](a^2 + b^2 - c^2 - 1) + 8b(a + bc)(1 + c^2)}{[4(a + bc)^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - 1)^2](a^2 + b^2 + c^2 + 1)}$$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial c} = -\frac{[-4c(a + bc) + 2b(a^2 + b^2 + c^2 + 1)](a^2 + b^2 - c^2 - 1) + 8c(a + bc)(a^2 + b^2)}{[4(a + bc)^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - 1)^2](a^2 + b^2 + c^2 + 1)}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $\varphi_y$

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial a} = -\frac{2c(a^2 + b^2 + c^2 + 1) + 4a(b - ac)}{(a^2 + b^2 + c^2 + 1)\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - (2(b - ac))^2}}$$

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial b} = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 + 1) - 4b(a + bc)}{(a^2 + b^2 + c^2 + 1)\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - (2(b - ac))^2}}$$

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial c} = -\frac{2a(a^2 + b^2 + c^2 + 1) - 4c(ca - b)}{(a^2 + b^2 + c^2 + 1)\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 - (2(b - ac))^2}}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $\varphi_z$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial a} = \frac{[4a(ab + c) - 2b(a^2 + b^2 + c^2 + 1)](-\alpha^2 + b^2 + c^2 - 1) - 8a(c + ab)(c^2 + b^2)}{(2(c + ab))^2 + (-\alpha^2 + b^2 + c^2 - 1)^2(a^2 + b^2 + c^2 + 1)}$$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial b} = -\frac{[4b(c + ab) + 2a(a^2 + b^2 + c^2 + 1)](-\alpha^2 + b^2 + c^2 - 1) - 8b(c + ab)(a^2 + 1)}{[(2(c + ab))^2 + (-\alpha^2 + b^2 + c^2 - 1)^2](a^2 + b^2 + c^2 + 1)}$$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial c} = \frac{[4c(c + ab) - 2(a^2 + b^2 + c^2 + 1)](-\alpha^2 + b^2 + c^2 - 1) + 8c(c + ab)(a^2 + 1)}{[(2(c + ab))^2 + (-\alpha^2 + b^2 + c^2 - 1)^2](a^2 + b^2 + c^2 + 1)}$$



## Π1.2 Πρόβλημα μετασχηματισμού συντεταγμένων

Στη περίπτωση του ευθύ προβλήματος, με δεδομένα τα αρχικά σημεία και τις παραμέτρους μετασχηματισμού υπολογίζονται οι νέες συντεταγμένες και η αβεβαιότητα τους με τη χρήση του νόμου μετάδοσης μεταβλητοτήτων. Για τον Ιακωβιανό πίνακα που δημιουργείται, καθώς και για στροφή  $z - y - x$ , υπολογίζονται οι παρακάτω σχέσεις για κάθε σημείο.

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $x_i'$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_i} = \lambda \cos\varphi_y \cos\varphi_z \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial t_x} = 1$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial y_i} = -\lambda \cos\varphi_y \sin\varphi_z \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial t_y} = 0$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial z_i} = \lambda \sin\varphi_y \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial t_z} = 0$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \lambda} = z_i \sin\varphi_y + x_i \cos\varphi_y \cos\varphi_z - y_i \cos\varphi_y \sin\varphi_z$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \varphi_x} = 0$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \varphi_y} = \lambda z_i \cos\varphi_y - \lambda x_i \cos\varphi_z \sin\varphi_y + \lambda y_i \sin\varphi_y \sin\varphi_z$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \varphi_z} = -\lambda y_i \cos\varphi_y \cos\varphi_z - \lambda x_i \cos\varphi_y \sin\varphi_z$$

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $y_i'$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial x_i} = \lambda (\cos\varphi_x \sin\varphi_z + \cos\varphi_z \sin\varphi_x \sin\varphi_y) \qquad \frac{\partial y_i'}{\partial t_x} = 0$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial y_i} = \lambda (\cos\varphi_x \cos\varphi_z - \sin\varphi_x \sin\varphi_y \sin\varphi_z) \qquad \frac{\partial y_i'}{\partial t_y} = 1$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial z_i} = -\lambda \cos\varphi_y \sin\varphi_x \qquad \frac{\partial y_i'}{\partial t_z} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i'}{\partial \lambda} = & x_i (\cos\varphi_x \sin\varphi_z + \cos\varphi_z \sin\varphi_x \sin\varphi_y) \\ & + y_i (\cos\varphi_x \cos\varphi_z - \sin\varphi_x \sin\varphi_y \sin\varphi_z) - z_i \cos\varphi_y \sin\varphi_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_i'}{\partial \varphi_x} &= -\lambda x_i (\sin\varphi_x \sin\varphi_z - \cos\varphi_x \cos\varphi_z \sin\varphi_y) \\ &\quad -\lambda y_i (\cos\varphi_z \sin\varphi_x + \cos\varphi_x \sin\varphi_y \sin\varphi_z) - \lambda z_i \cos\varphi_x \cos\varphi_y \\ \frac{\partial y_i'}{\partial \varphi_y} &= \lambda z_i \sin\varphi_x \sin\varphi_y + \lambda x_i \cos\varphi_y \cos\varphi_z \sin\varphi_x \\ &\quad -\lambda y_i \cos\varphi_y \sin\varphi_x \sin\varphi_z \\ \frac{\partial y_i'}{\partial \varphi_z} &= \lambda x_i (\cos\varphi_x \cos\varphi_z - \sin\varphi_x \sin\varphi_y \sin\varphi_z) - \lambda y_i (\cos\varphi_x \sin\varphi_z \\ &\quad + \cos\varphi_z \sin\varphi_x \sin\varphi_y)\end{aligned}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $z_i'$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_i'}{\partial x_i} &= \lambda (\sin\varphi_x \sin\varphi_z - \cos\varphi_x \cos\varphi_z \sin\varphi_y) & \frac{\partial z_i'}{\partial t_x} &= 0 \\ \frac{\partial z_i'}{\partial y_i} &= \lambda (\cos\varphi_z \sin\varphi_x + \cos\varphi_x \sin\varphi_y \sin\varphi_z) & \frac{\partial z_i'}{\partial t_y} &= 0 \\ \frac{\partial z_i'}{\partial z_i} &= \lambda \cos\varphi_x \cos\varphi_y & \frac{\partial z_i'}{\partial t_z} &= 1 \\ \frac{\partial z_i'}{\partial \lambda} &= x_i (\sin\varphi_x \sin\varphi_z - \cos\varphi_x \cos\varphi_z \sin\varphi_y) + y_i (\cos\varphi_z \sin\varphi_x \\ &\quad + \cos\varphi_x \sin\varphi_y \sin\varphi_z) + z_i \cos\varphi_x \cos\varphi_y \\ \frac{\partial z_i'}{\partial \varphi_x} &= \lambda x_i (\cos\varphi_x \sin\varphi_z + \cos\varphi_z \sin\varphi_x \sin\varphi_y) + \lambda y_i (\cos\varphi_x \cos\varphi_z \\ &\quad - \sin\varphi_x \sin\varphi_y \sin\varphi_z) - \lambda z_i \cos\varphi_y \sin\varphi_x \\ \frac{\partial z_i'}{\partial \varphi_y} &= \lambda y_i \cos\varphi_x \cos\varphi_y \sin\varphi_z - \lambda x_i \cos\varphi_x \cos\varphi_y \cos\varphi_z \\ &\quad - \lambda z_i \cos\varphi_x \sin\varphi_y \\ \frac{\partial z_i'}{\partial \varphi_z} &= \lambda x_i (\cos\varphi_z \sin\varphi_x + \cos\varphi_x \sin\varphi_y \sin\varphi_z) - \lambda y_i (\sin\varphi_x \sin\varphi_z \\ &\quad - \cos\varphi_x \cos\varphi_z \sin\varphi_y)\end{aligned}$$



## Π2: Αριθμητικές σχέσεις για τη μέθοδο απλών τετραδονίων

Στο συγκεκριμένο παράρτημα δίνονται όλες οι σχέσεις για τη μέθοδο των απλών τετραδονίων. Αυτές περιλαμβάνουν τις σχέσεις για τον υπολογισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού αλλά και των στοιχείων για το ευθύ πρόβλημα όπου σημεία μετασχηματίζονται από το ένα σύστημα στο άλλο.

### Π2.1 Πρόβλημα προσδιορισμού παραμέτρων μετασχηματισμού

Στη μέθοδο των απλών τετραδονίων για τον υπολογισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού για στροφή  $x - y - z$ , όπως αναφέρεται και στις σχέσεις 3.16-3.18, οι εξισώσεις παρατήρησης είναι:

$$f_{x_i} = x'_i - t_x - \lambda x_i (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + 2\lambda y_i (q_0 q_3 - q_1 q_2) - 2\lambda z_i (q_0 q_2 + q_1 q_3)$$

$$f_{y_i} = y'_i - t_y - 2\lambda x_i (q_0 q_3 + q_1 q_2) - \lambda y_i (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) + 2\lambda z_i (q_0 q_1 - q_2 q_3)$$

$$f_{z_i} = z'_i - t_z + 2\lambda x_i (q_0 q_2 - q_1 q_3) - 2\lambda y_i (q_0 q_1 + q_2 q_3) - \lambda z_i (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)$$

Για τα στοιχεία των πινάκων της συνόρθωσης υπολογίστηκαν τα παρακάτω στοιχεία.

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{x_i}$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial q_0} = -2\lambda x_i q_0 + 2\lambda y_i q_3 - 2\lambda z_i q_2 \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial t_x} = -1$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial q_1} = -2\lambda x_i q_1 - 2\lambda y_i q_2 - 2\lambda z_i q_3 \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial t_y} = 0$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial q_2} = 2\lambda q_2 - 2\lambda y_i q_1 - 2\lambda z_i q_0 \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial t_z} = 0$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial q_3} = 2\lambda x_i q_3 + 2\lambda y_i q_0 - 2\lambda z_i q_1$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial \lambda} = -x_i (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) - 2y_i (q_1 q_2 - q_0 q_3) - 2z_i (q_1 q_3 + q_0 q_2)$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_i} = -\lambda (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x'_i} = 1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{x_i}}{\partial y_i} &= -2\lambda q_1 q_2 + 2\lambda q_0 q_3 & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial y'_i} &= 0 \\ \frac{\partial f_{x_i}}{\partial z_i} &= -2\lambda q_1 q_3 - 2\lambda q_0 q_2 & \frac{\partial f_{x_i}}{\partial z'_i} &= 0\end{aligned}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{y_i}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{y_i}}{\partial q_0} &= -2\lambda x_i q_3 - 2\lambda y_i q_0 + 2\lambda z_i q_1 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial t_x} &= 0 \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial q_1} &= -2\lambda x_i q_2 + 2\lambda y_i q_1 + 2\lambda z_i q_0 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial t_y} &= -1 \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial q_2} &= -2\lambda x_i q_1 - 2\lambda y_i q_2 - 2\lambda z_i q_3 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial t_z} &= 0 \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial q_3} &= -2\lambda x_i q_0 + 2\lambda y_i q_3 - 2\lambda z_i q_2 \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial \lambda} &= -y_i(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) - 2x_i(q_1 q_2 + q_0 q_3) - 2z_i(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial x_i} &= -2\lambda q_1 q_2 - 2\lambda q_0 q_3 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial x'_i} &= 0 \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial y_i} &= -\lambda(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial y'_i} &= 1 \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial z_i} &= -2\lambda q_2 q_3 + 2\lambda q_0 q_1 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial z'_i} &= 0\end{aligned}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{z_i}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{z_i}}{\partial q_0} &= 2\lambda x_i q_2 - 2\lambda y_i q_1 - 2\lambda z_i q_0 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial t_x} &= 0 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial q_1} &= -2\lambda x_i q_3 - 2\lambda y_i q_0 + 2\lambda z_i q_1 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial t_y} &= 0 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial q_2} &= 2\lambda x_i q_0 - 2\lambda y_i q_3 + 2\lambda z_i q_2 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial t_z} &= -1 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial q_3} &= -2\lambda x_i q_1 - 2\lambda y_i q_2 - 2\lambda z_i q_3\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_{z_i}}{\partial \lambda} = -z_i(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) - 2x_i(q_1q_3 - q_0q_2) - 2y_i(q_2q_3 + q_0q_1)$$

$$\frac{\partial f_{z_i}}{\partial x_i} = -2\lambda q_1q_3 + 2\lambda q_0q_2 \quad \frac{\partial f_{z_i}}{\partial x'_i} = 0$$

$$\frac{\partial f_{z_i}}{\partial y_i} = -2\lambda q_2q_3 - 2\lambda q_0q_1 \quad \frac{\partial f_{z_i}}{\partial y'_i} = 0$$

$$\frac{\partial f_{z_i}}{\partial z_i} = -\lambda(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \quad \frac{\partial f_{z_i}}{\partial z'_i} = 1$$

Για τον προσδιορισμό τόσο των γωνιών όσο και της αβεβαιότητας τους από τα στοιχεία του τετραδονίου, πραγματοποιήθηκε εκ νέου συνόρθωση με τις εξής εξισώσεις παρατήρησης:

$$g_0 = q_0 - \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)$$

$$g_1 = q_1 - \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)$$

$$g_2 = q_2 - \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)$$

$$g_3 = q_3 - \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)$$

Έτσι τα στοιχεία των πινάκων για την εφαρμογή της συνόρθωσης υπολογίζονται με βάση τις παρακάτω σχέσεις.

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $g_0$

$$\frac{\partial g_0}{\partial q_0} = 1 \quad \frac{\partial g_0}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial g_0}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial g_0}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial \varphi_x} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial \varphi_y} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial \varphi_z} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $g_1$

$$\frac{\partial g_1}{\partial q_0} = 0 \quad \frac{\partial g_1}{\partial q_1} = 1 \quad \frac{\partial g_1}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial g_1}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varphi_x} = \frac{-\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varphi_y} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varphi_z} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $g_2$

$$\frac{\partial g_2}{\partial q_0} = 0 \quad \frac{\partial g_2}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial g_2}{\partial q_2} = 1 \quad \frac{\partial g_2}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \varphi_x} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \varphi_y} = \frac{-\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \varphi_z} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $g_3$

$$\frac{\partial g_3}{\partial q_0} = 0 \quad \frac{\partial g_3}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial g_3}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial g_3}{\partial q_3} = 1$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \varphi_x} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \varphi_y} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \varphi_z} = \frac{-\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}$$

## Π2.2 Πρόβλημα μετασχηματισμού συντεταγμένων

Κατά την εφαρμογή του ευθύ προβλήματος συντεταγμένες μετασχηματίζονται από το ένα σύστημα στο άλλο. Έτσι με βάση τις παραμέτρους μετασχηματισμού για στροφή  $z - y - x$  καθώς και για την αβεβαιότητα τους προκύπτουν οι συντεταγμένες στο νέο σύστημα, αλλά και το σφάλμα τους.

Αρχικά υπολογίζεται το σφάλμα του τετραδονίου δεδομένου των γωνιών στροφής και της αβεβαιότητας τους, ενώ υπολογίζονται και το τελικό σφάλμα από εκ νέου νόμο μετάδοσης. Για τους υπολογισμούς αυτούς είναι απαραίτητο να υπολογιστούν τα παρακάτω στοιχεία.

➤ Μερικές παράγωγοι για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας του τετραδονίου  $q$

$$\frac{\partial q_0}{\partial \varphi_x} = -\frac{\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial \varphi_y} = -\frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial \varphi_z} = -\frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_x} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_y} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_z} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_x} = -\frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_y} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2} + \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_z} = -\frac{\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial \varphi_x} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial \varphi_y} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial \varphi_z} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_z}{2}\right)}{2}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $x_i'$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_i} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial y_i} = 2 q_1 q_2 - 2 q_0 q_3$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial z_i} = 2 q_0 q_2 + 2 q_1 q_3$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_0} = 2 q_0 x_i - 2 q_3 y_i + 2 q_2 z_i$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_1} = 2 q_1 x_i + 2 q_2 y_i + 2 q_3 z_i$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_2} = 2 q_1 y_i + 2 q_0 z_i - 2 q_2 x_i$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_3} = 2 q_1 z_i - 2 q_0 y_i - 2 q_3 x_i$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial t_x} = 1$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial t_y} = 0$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial t_z} = 0$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \lambda} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $y_i'$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial x_i} = 2 q_0 q_3 + 2 q_2 q_1$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial y_i} = q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial z_i} = 2 q_2 q_3 - 2 q_0 q_1$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_0} = 2 q_3 x_i + 2 q_0 y_i - 2 q_1 z_i$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_1} = 2 q_2 x_i - 2 q_0 z_i - 2 q_1 y_i$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_2} = 2 q_2 y_i + 2 q_1 x_i + 2 q_3 z_i$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_3} = 2 q_0 x_i + 2 q_2 z_i - 2 q_3 y_i$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial t_x} = 0$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial t_y} = 1$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial t_z} = 0$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial \lambda} = 2 q_0 q_3 + 2 q_2 q_1$$

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $z_i'$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial x_i} = 2 q_3 q_1 - 2 q_0 q_2$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial y_i} = 2 q_0 q_1 + 2 q_3 q_2$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial z_i} = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial q_0} = 2 q_1 y_i - 2 q_2 x_i + 2 q_0 z_i$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial q_1} = 2 q_3 x_i + 2 q_0 y_i - 2 q_1 z_i$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial q_2} = 2 q_3 y_i - 2 q_0 x_i - 2 q_2 z_i$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial q_3} = 2 q_3 z_i + 2 q_1 x_i + 2 q_2 y_i$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial t_x} = 0$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial t_y} = 0$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial t_z} = 1$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial \lambda} = 2 q_3 q_1 - 2 q_0 q_2$$





### Π3: Αριθμητικές σχέσεις για τη μέθοδο διπλών τετραδονίων

Τέλος στο παράρτημα αυτό δίνονται όλες οι σχέσεις για τη μέθοδο των διπλών τετραδονίων τόσο στο ευθύ όσο και στο αντίστροφο πρόβλημα. Έτσι και εδώ παρουσιάζονται σχέσεις για τον υπολογισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού αλλά και των διαφορών στοιχείων για τον μετασχηματισμό σημείων από το ένα σύστημα στο άλλο.

#### Π3.1 Πρόβλημα προσδιορισμού παραμέτρων μετασχηματισμού

Στη μέθοδο των διπλών τετραδονίων για στροφή  $x - y - z$ , υπολογίζονται οι παράμετροι μετασχηματισμού συνορθώνοντας τις εξής εξισώσεις παρατήρησης.

$$f_{o_i} = 2d_0r_0 - 2d_3r_1 - 2d_1r_3 + 2d_2r_2$$

$$f_{x_i} = 2d_1r_0 - 2d_3r_2 + 2d_0r_3 - 2d_2r_1 + \lambda x_i(r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) - 2\lambda y_i(r_0r_3 - r_1r_2) + 2\lambda z_i(r_0r_2 + r_1r_3) - x_i'$$

$$f_{y_i} = 2d_1r_1 - 2d_3r_3 - 2d_0r_2 + 2d_2r_0 + 2\lambda x_i(r_0r_3 + r_1r_2) - 2\lambda y_i(-r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 + r_3^2) - 2\lambda z_i(r_0r_1 - r_2r_3) - y_i'$$

$$f_{z_i} = 2d_0r_1 + 2d_1r_2 + 2d_3r_0 + 2d_2r_3 - 2\lambda x_i(r_0r_2 - r_3r_1) + 2\lambda y_i(r_0r_1 + r_2r_3) - \lambda z_i(-r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) - z_i'$$

Για τη συγκεκριμένη συνορθωση και τα στοιχεία των πινάκων  $A$  και  $B$ , υπολογίζονται οι παρακάτω σχέσεις.

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{o_i}$

$$\frac{\partial f_{o_i}}{\partial r_0} = 2d_0 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial r_1} = -2d_3 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial r_2} = 2d_2 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial r_3} = -2d_1$$

$$\frac{\partial f_{o_i}}{\partial d_0} = 2r_0 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial d_1} = -2r_3 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial d_2} = 2r_2 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial d_3} = -2r_1$$

$$\frac{\partial f_{o_i}}{\partial \lambda} = 0 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial y_i} = 0 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial z_i} = 0$$

$$\frac{\partial f_{o_i}}{\partial x_i'} = 0 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial y_i'} = 0 \quad \frac{\partial f_{o_i}}{\partial z_i'} = 0$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{x_i}$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial r_0} = 2d_1 + 2\lambda x_i r_0 - 2\lambda y_i r_3 + 2\lambda z_i r_2 \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial d_0} = 2r_3$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial r_1} = -2d_2 + 2\lambda x_i r_1 + 2\lambda y_i r_2 + 2\lambda z_i r_3 \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial d_1} = 2r_0$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial r_2} = -2d_3 - 2\lambda x_i r_2 + 2\lambda y_i r_1 + 2\lambda z_i r_0 \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial d_2} = -2r_1$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial r_3} = 2d_0 - 2\lambda x_i r_3 - 2\lambda y_i r_0 + 2\lambda z_i r_1 \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial d_3} = -2r_2$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial \lambda} = x_i(r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) - 2y_i(r_0 r_3 - r_1 r_2) + 2z_i(r_0 r_2 + r_1 r_3)$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_i} = \lambda(r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial y_i} = -2\lambda(r_0 r_3 - r_1 r_2)$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial z_i} = 2\lambda(r_0 r_2 + r_1 r_3) \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_i'} = -1$$

$$\frac{\partial f_{x_i}}{\partial y_i'} = 0 \quad \frac{\partial f_{x_i}}{\partial z_i'} = 0$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{y_i}$

$$\frac{\partial f_{y_i}}{\partial r_0} = 2d_2 + 2\lambda x_i r_3 + 2\lambda y_i r_0 - 2\lambda z_i r_1 \quad \frac{\partial f_{y_i}}{\partial d_0} = -2r_2$$

$$\frac{\partial f_{y_i}}{\partial r_1} = 2d_1 + 2\lambda x_i r_2 - 2\lambda y_i r_1 - 2\lambda z_i r_0 \quad \frac{\partial f_{y_i}}{\partial d_1} = 2r_1$$

$$\frac{\partial f_{y_i}}{\partial r_2} = -2d_0 + 2\lambda x_i r_1 + 2\lambda y_i r_2 + 2\lambda z_i r_3 \quad \frac{\partial f_{y_i}}{\partial d_2} = 2r_0$$

$$\frac{\partial f_{y_i}}{\partial r_3} = -2d_3 + 2\lambda x_i r_0 - 2\lambda y_i r_3 + 2\lambda z_i r_2 \quad \frac{\partial f_{y_i}}{\partial d_3} = -2r_3$$

$$\frac{\partial f_{y_i}}{\partial \lambda} = 2x_i(r_0 r_3 + r_2 r_1) - y_i(-r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 + r_3^2) - 2z_i(r_0 r_1 - r_2 r_3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{y_i}}{\partial x_i} &= 2\lambda(r_0 r_3 + r_1 r_2) & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial y_i} &= -\lambda(-r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 + r_3^2) \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial z_i} &= -2\lambda(r_0 r_1 - r_2 r_3) & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial x_i'} &= 0 \\ \frac{\partial f_{y_i}}{\partial y_i'} &= -1 & \frac{\partial f_{y_i}}{\partial z_i'} &= 0 \end{aligned}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για την  $f_{z_i}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{z_i}}{\partial r_0} &= 2d_3 - 2\lambda x_i r_2 + 2\lambda y_i r_1 + 2\lambda z_i r_0 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial d_0} &= 2r_1 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial r_1} &= 2d_0 + 2\lambda x_i r_3 + 2\lambda y_i r_0 - 2\lambda z_i r_1 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial d_1} &= 2r_2 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial r_2} &= 2d_1 - 2\lambda x_i r_0 + 2\lambda y_i r_3 - 2\lambda z_i r_2 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial d_2} &= 2r_3 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial r_3} &= 2d_2 + 2\lambda x_i r_1 + 2\lambda y_i r_2 + 2\lambda z_i r_3 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial d_3} &= 2r_0 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial \lambda} &= -2x_i(r_0 r_2 - r_3 r_1) + 2y_i(r_0 r_1 + r_2 r_3) - z_i(-r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial x_i} &= -2\lambda(r_0 r_2 - r_1 r_3) & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial y_i} &= 2\lambda(r_0 r_1 + r_2 r_3) \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial z_i} &= -\lambda(-r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial x_i'} &= 0 \\ \frac{\partial f_{z_i}}{\partial y_i'} &= 0 & \frac{\partial f_{z_i}}{\partial z_i'} &= -1 \end{aligned}$$

### Π3.2 Πρόβλημα μετασχηματισμού συντεταγμένων

Σχετικά με το ευθύ πρόβλημα, οι συντεταγμένες μεταφέρονται από το ένα σύστημα στο άλλο με γνωστές τις παραμέτρους μετασχηματισμού και στροφή κατά  $z - y - x$ .

Για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας των νέων συντεταγμένων, πρώτα υπολογίζονται οι αβεβαιότητες των δύο τετραδονίων. Από αυτές με νόμο μετάδοσης μεταβλητοτήτων προκύπτει το ζητούμενο σφάλμα των

νέων σημείων. Αξίζει να σημειωθεί πως η αβεβαιότητα του τετραδονίου  $r$  προκύπτει αντίστοιχα με αυτή του τετραδονίου  $q$  της προηγούμενης μεθόδου. Επομένως οι σχέσεις είναι ίδιες με αυτές του παραρτήματος Π2.2 για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας του τετραδονίου  $q$ .

Όσον αφορά στο σφάλμα του τετραδονίου  $d$  αυτό υπολογίζεται με βάση τις παρακάτω σχέσεις.

➤ Μερικές παράγωγοι για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας του τετραδονίου  $d$

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{\partial d_0}{\partial r_0} = 0 & \frac{\partial d_1}{\partial r_0} = 0 & \frac{\partial d_2}{\partial r_0} = 0 & \frac{\partial d_3}{\partial r_0} = 0 \\
 \frac{\partial d_0}{\partial r_1} = 0 & \frac{\partial d_1}{\partial r_1} = t_z & \frac{\partial d_2}{\partial r_1} = -t_y & \frac{\partial d_3}{\partial r_1} = 0 \\
 \frac{\partial d_0}{\partial r_2} = -t_z & \frac{\partial d_1}{\partial r_2} = 0 & \frac{\partial d_2}{\partial r_2} = t_x & \frac{\partial d_3}{\partial r_2} = 0 \\
 \frac{\partial d_0}{\partial r_3} = t_y & \frac{\partial d_1}{\partial r_3} = -t_x & \frac{\partial d_2}{\partial r_3} = 0 & \frac{\partial d_3}{\partial r_3} = 0 \\
 \frac{\partial d_0}{\partial t_x} = 0 & \frac{\partial d_1}{\partial t_x} = -r_3 & \frac{\partial d_2}{\partial t_x} = r_2 & \frac{\partial d_3}{\partial t_x} = 0 \\
 \frac{\partial d_0}{\partial t_y} = r_3 & \frac{\partial d_1}{\partial t_y} = 0 & \frac{\partial d_2}{\partial t_y} = -r_1 & \frac{\partial d_3}{\partial t_y} = 0 \\
 \frac{\partial d_0}{\partial t_z} = -r_2 & \frac{\partial d_1}{\partial t_z} = -r_1 & \frac{\partial d_2}{\partial t_z} = 0 & \frac{\partial d_3}{\partial t_z} = 0
 \end{array}$$

Τέλος για την αβεβαιότητα των νέων συντεταμένων υπολογίζονται οι εξής σχέσεις :

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $0_i'$

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{\partial 0_i'}{\partial r_0} = 2d_0 & \frac{\partial 0_i'}{\partial r_1} = 2d_1 & \frac{\partial 0_i'}{\partial r_2} = 2d_2 & \frac{\partial 0_i'}{\partial r_3} = 2d_3 \\
 \frac{\partial 0_i'}{\partial d_0} = 2r_0 & \frac{\partial 0_i'}{\partial d_1} = 2r_1 & \frac{\partial 0_i'}{\partial d_2} = 2r_2 & \frac{\partial 0_i'}{\partial d_3} = 2r_3 \\
 \frac{\partial 0_i'}{\partial \lambda} = 0 & \frac{\partial 0_i'}{\partial x_i} = 0 & \frac{\partial 0_i'}{\partial y_i} = 0 & \frac{\partial 0_i'}{\partial z_i} = 0
 \end{array}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $x_i'$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i'}{\partial r_0} &= 2d_0 + 2\lambda x_i r_0 - 2\lambda y_i r_3 + 2\lambda z_i r_2 & \frac{\partial x_i'}{\partial d_0} &= 2r_0 \\ \frac{\partial x_i'}{\partial r_1} &= -2d_3 + 2\lambda x_i r_1 + 2\lambda y_i r_2 + 2\lambda z_i r_3 & \frac{\partial x_i'}{\partial d_1} &= -2r_3 \\ \frac{\partial x_i'}{\partial r_2} &= 2d_2 - 2\lambda x_i r_2 + 2\lambda y_i r_1 + 2\lambda z_i r_0 & \frac{\partial x_i'}{\partial d_2} &= 2r_2 \\ \frac{\partial x_i'}{\partial r_3} &= -2d_1 - 2\lambda x_i r_3 - 2\lambda y_i r_0 + 2\lambda z_i r_1 & \frac{\partial x_i'}{\partial d_3} &= -2r_1 \\ \frac{\partial x_i'}{\partial \lambda} &= x_i(r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) - y_i(2r_0 r_3 - 2r_1 r_2) + z_i(2r_0 r_2 + 2r_1 r_3) \\ \frac{\partial x_i'}{\partial x_i} &= \lambda(r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) & \frac{\partial x_i'}{\partial y_i} &= 2\lambda r_1 r_2 - 2\lambda r_3 r_0 \\ \frac{\partial x_i'}{\partial z_i} &= 2\lambda r_0 r_2 + 2\lambda r_1 r_3 \end{aligned}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $y_i'$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i'}{\partial r_0} &= 2d_1 + 2\lambda x_i r_3 + 2\lambda y_i r_0 - 2\lambda z_i r_1 & \frac{\partial y_i'}{\partial d_0} &= 2r_0 \\ \frac{\partial y_i'}{\partial r_1} &= -2d_2 + 2\lambda x_i r_2 - 2\lambda y_i r_1 - 2\lambda z_i r_0 & \frac{\partial y_i'}{\partial d_1} &= -2r_1 \\ \frac{\partial y_i'}{\partial r_2} &= -2d_3 + 2\lambda x_i r_1 + 2\lambda y_i r_2 + 2\lambda z_i r_3 & \frac{\partial y_i'}{\partial d_2} &= -2r_1 \\ \frac{\partial y_i'}{\partial r_3} &= 2d_0 + 2\lambda x_i r_0 - 2\lambda y_i r_3 + 2\lambda z_i r_2 & \frac{\partial y_i'}{\partial d_3} &= -2r_2 \\ \frac{\partial y_i'}{\partial \lambda} &= x_i(2r_0 r_3 + 2r_2 r_1) + y_i(r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) - z_i(2r_0 r_1 - 2r_2 r_3) \\ \frac{\partial y_i'}{\partial x_i} &= 2\lambda r_0 r_3 + 2\lambda r_2 r_1 & \frac{\partial y_i'}{\partial y_i} &= \lambda(r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) \\ \frac{\partial y_i'}{\partial z_i} &= 2\lambda r_2 r_3 - 2\lambda r_1 r_0 \end{aligned}$$

➤ Μερικές παράγωγοι για τη συντεταγμένη  $z_i'$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial r_0} = 2d_2 - 2\lambda x_i r_2 + 2\lambda y_i r_1 + 2\lambda z_i r_0 \quad \frac{\partial z_i'}{\partial d_0} = -2r_2$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial r_1} = 2d_1 + 2\lambda x_i r_3 + 2\lambda y_i r_0 - 2\lambda z_i r_1 \quad \frac{\partial z_i'}{\partial d_1} = 2r_1$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial r_2} = -2d_0 - 2\lambda x_i r_0 + 2\lambda y_i r_3 - 2\lambda z_i r_2 \quad \frac{\partial z_i'}{\partial d_2} = 2r_0$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial r_3} = -2d_3 + 2\lambda x_i r_1 + 2\lambda y_i r_2 + 2\lambda z_i r_3 \quad \frac{\partial z_i'}{\partial d_3} = -2r_3$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial \lambda} = -x_i(2r_0 r_2 - 2r_3 r_1) + y_i(2r_0 r_1 + 2r_3 r_2) + z_i(r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial x_i} = 2\lambda r_3 r_1 - 2\lambda r_2 r_0 \quad \frac{\partial z_i'}{\partial y_i} = 2\lambda r_0 r_1 + 2\lambda r_3 r_2$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial z_i} = \lambda(r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)$$

#### Π4: Αποτελέσματα επίλυσης σεναρίων για κάθε μέθοδο

Στο συγκεκριμένο παράρτημα δίνονται τα αποτελέσματα των σεναρίων ανά μέθοδο προσδιορισμού

##### Π4.1: Αποτελέσματα επίλυσης για την κλασσική μέθοδο επίλυσης

	Πραγματικές τιμές		Υπολογισμένες τιμές		Έλεγχος ανοχής		
	Παράμετρος	Τιμή	Τιμή	Σφάλμα	Απόκλιση (dr)	$\sigma \cdot z$ (95%)	Έλεγχος (95%)
Σενάριο 1	$t_x$	0.50	0.500001	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.499996	0.000001	0.000004	0.00000	YES
	$t_z$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500003	0.000002	0.000003	0.00000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.000297	0.000253	0.000297	0.00050	YES
	$\varphi_y$	5.00	4.999695	0.000328	0.000305	0.00064	YES
	$\varphi_z$	5.00	4.999695	0.000487	0.000305	0.00095	YES
Σενάριο 2	$t_x$	0.50	0.500003	0.000001	0.000003	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.499997	0.000001	0.000003	0.00000	YES
	$t_z$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500001	0.000002	0.000001	0.00000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.000116	0.000083	0.000163	0.00016	YES
	$\varphi_y$	5.00	4.999837	0.000108	0.000163	0.00021	YES
	$\varphi_z$	5.00	4.999837	0.000160	0.000163	0.00031	YES
Σενάριο 3	$t_x$	10.00	9.955442	0.000001	0.044559	0.00000	NO
	$t_y$	10.00	10.102896	0.000000	0.102896	0.00000	NO
	$t_z$	10.00	9.988234	0.000000	0.011766	0.00000	NO
	$\lambda$	0.50	0.499999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$\varphi_x$	100.00	80.003597	0.002050	20.000617	0.00074	NO
	$\varphi_y$	100.00	79.999383	0.000376	20.000617	0.00640	NO
	$\varphi_z$	100.00	79.999383	0.003266	20.000617	0.00000	NO
Σενάριο 4	$t_x$	10.00	9.866321	0.000001	0.133679	0.00000	NO
	$t_y$	10.00	10.308700	0.000000	0.308700	0.00000	NO
	$t_z$	10.00	9.964694	0.000000	0.035306	0.00000	NO
	$\lambda$	1.50	1.500001	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$\varphi_x$	100.00	80.001866	0.001299	19.998134	0.00255	NO
	$\varphi_y$	100.00	80.000882	0.000238	19.999118	0.00047	NO
	$\varphi_z$	100.00	80.000882	0.002068	19.999118	0.00405	NO

Σενάριο 5	$t_x$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_z$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$\lambda$	0.50	0.499996	0.000002	0.000004	0.000000	YES
	$\varphi_x$	170.00	9.999043	0.000302	160.000957	0.00059	NO
	$\varphi_y$	170.00	10.000216	0.000169	159.999784	0.00033	NO
	$\varphi_z$	170.00	10.000216	0.000330	159.999784	0.00065	NO
Σενάριο 6	$t_x$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_z$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$\lambda$	1.50	1.499997	0.000002	0.000003	0.000000	YES
	$\varphi_x$	170.00	9.999908	0.000103	160.000092	0.00020	NO
	$\varphi_y$	170.00	10.000352	0.000058	159.999648	0.00011	NO
	$\varphi_z$	170.00	10.000352	0.000112	159.999648	0.00022	NO
Σενάριο 7	$t_x$	0.50	0.564428	0.000001	0.064428	0.000000	NO
	$t_y$	100.00	99.743885	0.000002	0.256115	0.000000	NO
	$t_z$	10.00	9.987988	0.000001	0.012012	0.000000	NO
	$\lambda$	0.50	0.500025	0.000002	0.000025	0.000000	NO
	$\varphi_x$	5.00	184.992910	0.001140	179.992910	0.00223	NO
	$\varphi_y$	100.00	79.997971	0.001838	20.002029	0.00360	NO
	$\varphi_z$	170.00	79.997971	0.000660	90.002029	0.00129	NO
Σενάριο 8	$t_x$	100.00	99.895283	0.000003	0.104717	0.000001	NO
	$t_y$	0.50	0.490487	0.000002	0.009513	0.000000	NO
	$t_z$	100.00	100.441840	0.000002	0.441840	0.000000	NO
	$\lambda$	1.00	1.000078	0.000006	0.000078	0.000001	NO
	$\varphi_x$	100.00	100.000550	0.000384	0.000550	0.00075	YES
	$\varphi_y$	5.00	4.998137	0.000153	0.001863	0.00030	NO
	$\varphi_z$	100.00	4.998137	0.000313	95.001863	0.00061	NO
Σενάριο 9	$t_x$	10.00	10.492302	0.000002	0.492302	0.000000	NO
	$t_y$	100.00	99.607944	0.000002	0.392056	0.000000	NO
	$t_z$	0.50	0.030508	0.000002	0.469492	0.000000	NO
	$\lambda$	1.50	1.500042	0.000003	0.000042	0.000001	NO
	$\varphi_x$	170.00	10.001850	0.003327	159.998150	0.00652	NO
	$\varphi_y$	100.00	79.999636	0.000488	20.000364	0.00096	NO
	$\varphi_z$	5.00	79.999636	0.002378	74.999636	0.00466	NO
Σενάριο 10	$t_x$	0.50	0.500001	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_y$	0.50	0.500006	0.000001	0.000006	0.000000	NO
	$t_z$	0.50	0.500000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.000002	0.000001	0.000002	0.000000	YES
	$\varphi_y$	5.00	5.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_z$	5.00	5.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES



Σενάριο 11	$t_x$	0.50	0.499999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_y$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.000000	YES
	$t_z$	0.50	0.500000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.000000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_y$	5.00	5.000000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_z$	5.00	5.000000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
Σενάριο 12	$t_x$	10.00	9.731013	0.000001	0.268987	0.000000	NO
	$t_y$	10.00	10.001680	0.000001	0.001680	0.000000	NO
	$t_z$	10.00	9.784195	0.000001	0.215805	0.000000	NO
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	100.00	80.000037	0.000005	19.999963	0.000001	NO
	$\varphi_y$	100.00	80.000001	0.000002	19.999999	0.000000	NO
	$\varphi_z$	100.00	80.000001	0.000008	19.999999	0.000002	NO
Σενάριο 13	$t_x$	10.00	9.731009	0.000002	0.268991	0.000000	NO
	$t_y$	10.00	10.001689	0.000002	0.001689	0.000000	NO
	$t_z$	10.00	9.784205	0.000002	0.215795	0.000000	NO
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	100.00	79.999989	0.000004	20.000011	0.000001	NO
	$\varphi_y$	100.00	80.000000	0.000001	20.000000	0.000000	NO
	$\varphi_z$	100.00	80.000000	0.000005	20.000000	0.000001	NO
Σενάριο 14	$t_x$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_z$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	170.00	9.999998	0.000001	160.000002	0.000000	NO
	$\varphi_y$	170.00	10.000001	0.000000	159.999999	0.000000	NO
	$\varphi_z$	170.00	10.000001	0.000000	159.999999	0.000000	NO
Σενάριο 15	$t_x$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_y$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_z$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	170.00	10.000000	0.000000	160.000000	0.000000	NO
	$\varphi_y$	170.00	10.000000	0.000000	160.000000	0.000000	NO
	$\varphi_z$	170.00	10.000000	0.000000	160.000000	0.000000	NO
Σενάριο 16	$t_x$	0.50	0.499997	0.000001	0.000003	0.000000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_z$	10.00	10.000006	0.000001	0.000006	0.000000	NO
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	5.00	185.000000	0.000004	180.000000	0.000001	NO
	$\varphi_y$	100.00	79.999998	0.000001	20.000002	0.000000	NO
	$\varphi_z$	170.00	79.999998	0.000003	90.000002	0.000001	NO

Σενάριο 17	$t_x$	100.00	99.999994	0.000001	0.000006	0.000000	NO
	$t_y$	0.50	0.500000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_z$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$\lambda$	1.00	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	100.00	100.000000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_y$	5.00	5.000000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_z$	100.00	5.000000	0.000000	95.000000	0.000000	NO
Σενάριο 18	$t_x$	10.00	10.000002	0.000001	0.000002	0.000000	YES
	$t_y$	100.00	99.999997	0.000001	0.000003	0.000000	YES
	$t_z$	0.50	0.500006	0.000001	0.000006	0.000000	NO
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	170.00	10.000003	0.000001	159.999997	0.000000	NO
	$\varphi_y$	100.00	80.000000	0.000000	20.000000	0.000000	NO
	$\varphi_z$	5.00	80.000000	0.000001	75.000000	0.000000	NO
Σενάριο 19	$t_x$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.000000	YES
	$t_y$	0.50	0.500000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_z$	0.50	0.500003	0.000001	0.000003	0.000000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	5.00	4.999993	0.000010	0.000007	0.000002	YES
	$\varphi_y$	5.00	5.000005	0.000006	0.000005	0.000001	YES
	$\varphi_z$	5.00	5.000005	0.000008	0.000005	0.000001	YES
Σενάριο 20	$t_x$	0.50	0.499999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_y$	0.50	0.499999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_z$	0.50	0.500002	0.000001	0.000002	0.000000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.000002	0.000004	0.000002	0.000001	YES
	$\varphi_y$	5.00	5.000001	0.000002	0.000001	0.000000	YES
	$\varphi_z$	5.00	5.000001	0.000003	0.000001	0.000001	YES
Σενάριο 21	$t_x$	10.00	9.802318	0.000001	0.197682	0.000000	NO
	$t_y$	10.00	9.773461	0.000001	0.226539	0.000000	NO
	$t_z$	10.00	9.886157	0.000001	0.113843	0.000000	NO
	$\lambda$	0.50	0.500003	0.000000	0.000003	0.000000	YES
	$\varphi_x$	100.00	80.001218	0.000035	19.998782	0.000007	NO
	$\varphi_y$	100.00	80.000214	0.000013	19.999786	0.000003	NO
	$\varphi_z$	100.00	80.000214	0.000038	19.999786	0.000007	NO
Σενάριο 22	$t_x$	10.00	9.406986	0.000001	0.593014	0.000000	NO
	$t_y$	10.00	9.320386	0.000001	0.679614	0.000000	NO
	$t_z$	10.00	9.658454	0.000001	0.341546	0.000000	NO
	$\lambda$	1.50	1.499995	0.000000	0.000005	0.000000	NO
	$\varphi_x$	100.00	79.999188	0.000017	20.000812	0.000003	NO
	$\varphi_y$	100.00	79.999851	0.000006	20.000149	0.000001	NO
	$\varphi_z$	100.00	79.999851	0.000018	20.000149	0.000004	NO

Σενάριο 23	$t_x$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_z$	100.00	99.999998	0.000001	0.000002	0.000000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	170.00	9.999982	0.000028	160.000018	0.000005	NO
	$\varphi_y$	170.00	9.999997	0.000012	160.000003	0.000002	NO
	$\varphi_z$	170.00	9.999997	0.000050	160.000003	0.000010	NO
Σενάριο 24	$t_x$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.000000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.000000	YES
	$t_z$	100.00	99.999997	0.000001	0.000003	0.000000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	170.00	9.999997	0.000008	160.000003	0.000002	NO
	$\varphi_y$	170.00	9.999998	0.000003	160.000002	0.000001	NO
	$\varphi_z$	170.00	9.999998	0.000015	160.000002	0.000003	NO
Σενάριο 25	$t_x$	0.50	0.500015	0.000001	0.000015	0.000000	NO
	$t_y$	100.00	99.999997	0.000001	0.000003	0.000000	YES
	$t_z$	10.00	9.999982	0.000001	0.000018	0.000000	NO
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	YES
	$\varphi_x$	5.00	184.999980	0.000014	179.999980	0.000003	NO
	$\varphi_y$	100.00	80.000037	0.000002	19.999963	0.000000	NO
	$\varphi_z$	170.00	80.000037	0.000024	89.999963	0.000005	NO
Σενάριο 26	$t_x$	100.00	99.728476	0.000002	0.271524	0.000000	NO
	$t_y$	0.50	0.737199	0.000002	0.237199	0.000000	NO
	$t_z$	100.00	100.090800	0.000002	0.090800	0.000000	NO
	$\lambda$	1.00	0.999999	0.000000	0.000001	0.000000	YES
	$\varphi_x$	100.00	100.000000	0.000004	0.000000	0.000001	YES
	$\varphi_y$	5.00	5.000020	0.000003	0.000020	0.000001	NO
	$\varphi_z$	100.00	5.000020	0.000004	94.999980	0.000001	NO
Σενάριο 27	$t_x$	10.00	9.999946	0.000009	0.000054	0.000002	NO
	$t_y$	100.00	100.000020	0.000009	0.000020	0.000002	YES
	$t_z$	0.50	0.500007	0.000009	0.000007	0.000002	YES
	$\lambda$	1.50	1.500001	0.000000	0.000001	0.000000	YES
	$\varphi_x$	170.00	10.000052	0.000004	159.999948	0.000001	NO
	$\varphi_y$	100.00	80.000015	0.000001	19.999985	0.000000	NO
	$\varphi_z$	5.00	80.000015	0.000004	75.000015	0.000001	NO

## Π4.2: Αποτελέσματα επίλυσης για τη μέθοδο απλών τετραδονίων

	Πραγματικές τιμές		Υπολογισμένες τιμές		Έλεγχος ανοχής		
	Παράμετρος	Τιμή	Τιμή	Σφάλμα	Απόκλιση (dr)	$\sigma \cdot z$ (95%)	Έλεγχος (95%)
Σενάριο 1	$t_x$	0.50	0.500001	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.499996	0.000001	0.000004	0.00000	YES
	$t_z$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500010	0.000002	0.000010	0.00000	NO
	$\varphi_x$	5.00	5.008143	0.000112	0.008143	0.00022	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.010456	0.000157	0.010456	0.00031	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.005483	0.000135	0.005483	0.00027	NO
Σενάριο 2	$t_x$	0.50	0.500003	0.000001	0.000003	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.499997	0.000001	0.000003	0.00000	YES
	$t_z$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500010	0.000002	0.000010	0.00000	NO
	$\varphi_x$	5.00	5.006749	0.000037	0.009578	0.00007	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.009578	0.000052	0.004289	0.00010	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.004289	0.000044	0.004289	0.00009	NO
Σενάριο 3	$t_x$	10.00	10.247552	0.018858	0.247552	0.03696	NO
	$t_y$	10.00	10.136468	0.018858	0.136468	0.03696	NO
	$t_z$	10.00	9.953079	0.018858	0.046921	0.03696	NO
	$\lambda$	0.50	0.751538	0.033796	0.251538	0.06624	NO
	$\varphi_x$	100.00	42.859720	3.288869	57.913050	3.96013	NO
	$\varphi_y$	100.00	157.913050	2.020476	42.194510	4.09890	NO
	$\varphi_z$	100.00	142.194510	2.091278	42.194510	0.01296	NO
Σενάριο 4	$t_x$	10.00	9.999566	0.006610	0.000434	0.01296	YES
	$t_y$	10.00	9.998901	0.006610	0.001099	0.01296	YES
	$t_z$	10.00	10.000022	0.006610	0.000022	0.01296	YES
	$\lambda$	1.50	1.477546	0.011846	0.022454	0.02322	YES
	$\varphi_x$	100.00	98.018622	0.000156	1.981378	0.00031	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.047160	0.000253	0.047160	0.00050	NO
	$\varphi_z$	100.00	98.264031	0.000159	1.735969	0.00031	NO
Σενάριο 5	$t_x$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_z$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$\lambda$	0.50	0.499961	0.000002	0.000039	0.00000	NO
	$\varphi_x$	170.00	169.974440	0.000097	0.025560	0.00019	NO
	$\varphi_y$	170.00	169.986480	0.000150	0.013520	0.00029	NO
	$\varphi_z$	170.00	169.983620	0.000114	0.016380	0.00022	NO

Σενάριο 6	$t_x$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_z$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$\lambda$	1.50	1.499989	0.000002	0.000011	0.00000	NO
	$\varphi_x$	170.00	169.955740	0.000033	0.044260	0.00006	NO
	$\varphi_y$	170.00	169.984080	0.000051	0.015920	0.00010	NO
	$\varphi_z$	170.00	169.971200	0.000039	0.028800	0.00008	NO
Σενάριο 7	$t_x$	0.50	0.500271	0.000233	0.000271	0.00046	YES
	$t_y$	100.00	100.000350	0.000233	0.000350	0.00046	YES
	$t_z$	10.00	10.000235	0.000233	0.000235	0.00046	YES
	$\lambda$	0.50	0.563947	0.000418	0.063947	0.00082	NO
	$\varphi_x$	5.00	25.879391	0.000275	20.879391	0.00054	NO
	$\varphi_y$	100.00	135.448600	0.000277	35.448600	0.00054	NO
	$\varphi_z$	170.00	188.023300	0.000448	18.023300	0.00088	NO
Σενάριο 8	$t_x$	100.00	99.999853	0.001654	0.000147	0.00324	YES
	$t_y$	0.50	0.500080	0.001654	0.000080	0.00324	YES
	$t_z$	100.00	100.000140	0.001654	0.000140	0.00324	YES
	$\lambda$	1.00	1.010173	0.002963	0.010173	0.00581	NO
	$\varphi_x$	100.00	95.452356	0.000641	4.547644	0.00126	NO
	$\varphi_y$	5.00	10.864931	0.000409	5.864931	0.00080	NO
	$\varphi_z$	100.00	100.866650	0.000404	0.866650	0.00079	NO
Σενάριο 9	$t_x$	10.00	9.490271	0.037868	0.509729	0.07422	NO
	$t_y$	100.00	99.733008	0.037868	0.266992	0.07422	NO
	$t_z$	0.50	0.500477	0.037868	0.000477	0.07422	YES
	$\lambda$	1.50	0.599672	0.067867	0.900328	0.13302	NO
	$\varphi_x$	170.00	24.843450	1.348770	145.156550	2.64359	NO
	$\varphi_y$	100.00	309.856186	1.524525	209.856186	2.98807	NO
	$\varphi_z$	5.00	20.145880	1.590134	15.145880	3.11666	NO
Σενάριο 10	$t_x$	0.50	0.500001	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.500006	0.000001	0.000006	0.00000	NO
	$t_z$	0.50	0.500000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.006339	0.000000	0.006339	0.00000	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.008051	0.000000	0.008051	0.00000	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.003614	0.000000	0.003614	0.00000	NO
Σενάριο 11	$t_x$	0.50	0.499999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$t_z$	0.50	0.500000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.006330	0.000000	0.006330	0.00000	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.008045	0.000000	0.008045	0.00000	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.003610	0.000000	0.003610	0.00000	NO

Σενάριο 12	$t_x$	10.00	-20.338260	6.457410	30.338260	12.65652	NO
	$t_y$	10.00	58.660496	6.457410	48.660496	12.65652	NO
	$t_z$	10.00	-15.018181	6.457410	25.018181	12.65652	NO
	$\lambda$	0.50	-0.228644	0.018508	0.728644	0.03628	NO
	$\varphi_x$	100.00	265.427580	1.061169	165.427580	2.07989	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.673580	1.631309	0.673580	3.19737	YES
	$\varphi_z$	100.00	288.044950	1.219898	188.044950	2.39100	NO
Σενάριο 13	$t_x$	10.00	-81.014784	19.372231	91.014784	37.96957	NO
	$t_y$	10.00	155.981490	19.372231	145.981490	37.96957	NO
	$t_z$	10.00	-65.054552	19.372231	75.054552	37.96957	NO
	$\lambda$	1.50	6.655202	0.055525	5.155202	0.10883	NO
	$\varphi_x$	100.00	252.960100	1.061169	152.960100	2.07989	NO
	$\varphi_y$	100.00	160.115140	1.631309	60.115140	3.19737	NO
	$\varphi_z$	100.00	181.604900	1.219898	81.604900	2.39100	NO
Σενάριο 14	$t_x$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_z$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	170.00	169.962770	0.000000	0.037230	0.00000	NO
	$\varphi_y$	170.00	169.994520	0.000000	0.005480	0.00000	NO
	$\varphi_z$	170.00	169.978930	0.000000	0.021070	0.00000	NO
Σενάριο 15	$t_x$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_y$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_z$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	170.00	169.962710	0.000000	0.037290	0.00000	NO
	$\varphi_y$	170.00	169.994520	0.000000	0.005480	0.00000	NO
	$\varphi_z$	170.00	169.978890	0.000000	0.021110	0.00000	NO
Σενάριο 16	$t_x$	0.50	0.641959	0.153687	0.141959	0.30123	YES
	$t_y$	100.00	100.121600	0.153687	0.121600	0.30123	YES
	$t_z$	10.00	10.093127	0.153687	0.093127	0.30123	YES
	$\lambda$	0.50	0.498788	0.000440	0.001212	0.00086	NO
	$\varphi_x$	5.00	5.373603	0.000191	0.373603	0.00037	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.095340	0.000173	0.095340	0.00034	NO
	$\varphi_z$	170.00	170.395530	0.000301	0.395530	0.00059	NO
Σενάριο 17	$t_x$	100.00	99.999996	0.000001	0.000004	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.500000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_z$	100.00	99.999998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$\lambda$	1.00	1.000000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	100.00	99.993287	0.000000	0.006713	0.00000	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.011318	0.000000	0.011318	0.00000	NO
	$\varphi_z$	100.00	99.992175	0.000000	0.007825	0.00000	NO

Σενάριο 18	$t_x$	10.00	10.000002	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$t_y$	100.00	99.999996	0.000001	0.000004	0.00000	YES
	$t_z$	0.50	0.500003	0.000001	0.000003	0.00000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	170.00	170.080360	0.000000	0.080360	0.00000	NO
	$\varphi_y$	100.00	99.995636	0.000000	0.004364	0.00000	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.081482	0.000000	0.081482	0.00000	NO
Σενάριο 19	$t_x$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.500000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_z$	0.50	0.500003	0.000001	0.000003	0.00000	YES
	$\lambda$	0.50	0.499998	0.000000	0.000002	0.00000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.002172	0.000001	0.002172	0.00000	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.008863	0.000005	0.008863	0.00001	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.000442	0.000001	0.000442	0.00000	NO
Σενάριο 20	$t_x$	0.50	0.499999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	0.50	0.499999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_z$	0.50	0.500002	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$\lambda$	1.50	1.500000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	5.00	5.002464	0.000000	0.002464	0.00000	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.009276	0.000002	0.009276	0.00000	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.000617	0.000000	0.000616	0.00000	NO
Σενάριο 21	$t_x$	10.00	13.714384	0.811269	3.714384	1.59009	NO
	$t_y$	10.00	15.699270	0.811269	5.699270	1.59009	NO
	$t_z$	10.00	8.093237	0.811269	1.906763	1.59009	NO
	$\lambda$	0.50	-0.180251	0.014688	0.680251	0.02879	NO
	$\varphi_x$	100.00	341.674460	1.215617	241.674460	2.38261	NO
	$\varphi_y$	100.00	72.375674	0.908886	27.624326	1.78142	NO
	$\varphi_z$	100.00	282.820400	0.849632	182.820400	1.66528	NO
Σενάριο 22	$t_x$	10.00	21.143154	2.433808	11.143154	4.77026	NO
	$t_y$	10.00	27.097806	2.433808	17.097806	4.77026	NO
	$t_z$	10.00	4.279714	2.433808	5.720286	4.77026	NO
	$\lambda$	1.50	-1.521392	0.044065	3.021392	0.08637	NO
	$\varphi_x$	100.00	190.504050	1.215618	90.504050	2.38261	NO
	$\varphi_y$	100.00	44.018089	0.908888	55.981911	1.78142	NO
	$\varphi_z$	100.00	120.151960	0.849633	20.151960	1.66528	NO
Σενάριο 23	$t_x$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_z$	100.00	99.999998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	170.00	168.253270	0.000001	1.746730	0.00000	NO
	$\varphi_y$	170.00	170.738060	0.000009	0.738060	0.00002	NO
	$\varphi_z$	170.00	170.134800	0.000001	0.134800	0.00000	NO

Σενάριο 24	$t_x$	100.00	99.999999	0.000001	0.000001	0.00000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_z$	100.00	99.999997	0.000001	0.000003	0.00000	YES
	$\lambda$	1.50	1.499976	0.000000	0.000024	0.00000	NO
	$\varphi_x$	170.00	168.372790	0.000000	1.627210	0.00000	NO
	$\varphi_y$	170.00	170.687210	0.000003	0.687210	0.00001	NO
	$\varphi_z$	170.00	170.126510	0.000000	0.126510	0.00000	NO
Σενάριο 25	$t_x$	0.50	0.499998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$t_y$	100.00	100.000000	0.000001	0.000000	0.00000	YES
	$t_z$	10.00	9.999998	0.000001	0.000002	0.00000	YES
	$\lambda$	0.50	0.500000	0.000000	0.000000	0.00000	YES
	$\varphi_x$	5.00	96.882813	0.000001	91.882813	0.00000	NO
	$\varphi_y$	100.00	174.729020	0.000001	74.729020	0.00000	NO
	$\varphi_z$	170.00	259.874860	0.000001	89.874860	0.00000	NO
Σενάριο 26	$t_x$	100.00	99.996561	0.228630	0.003439	0.44812	YES
	$t_y$	0.50	0.502281	0.228630	0.002281	0.44812	YES
	$t_z$	100.00	99.998719	0.228630	0.001281	0.44812	YES
	$\lambda$	1.00	1.030935	0.004139	0.030935	0.00811	NO
	$\varphi_x$	100.00	99.997919	0.000098	0.002081	0.00019	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.000677	0.000090	0.000677	0.00018	NO
	$\varphi_z$	100.00	100.210380	0.000091	0.210380	0.00018	NO
Σενάριο 27	$t_x$	10.00	9.998956	0.109767	0.001044	0.21514	YES
	$t_y$	100.00	99.995543	0.109767	0.004457	0.21514	YES
	$t_z$	0.50	0.500829	0.109767	0.000829	0.21514	YES
	$\lambda$	1.50	1.553697	0.001987	0.053697	0.00390	NO
	$\varphi_x$	170.00	159.726060	0.956545	10.273940	1.87483	NO
	$\varphi_y$	100.00	101.665550	0.824704	1.665550	1.61642	NO
	$\varphi_z$	5.00	4.814319	1.019562	0.185681	1.99834	YES



### Π4.3: Αποτελέσματα επίλυσης για τη μέθοδο διπλών τετραδονίων

	Πραγματικές τιμές		Υπολογισμένες τιμές		Έλεγχος ανοχής		
	Παράμετρος	Τιμή	Τιμή	Σφάλμα	Απόκλιση (dr)	$\sigma \cdot z$ (95%)	Έλεγχος (95%)
Σενάριο 1	$t_x$	0.50	0.500494	0.000015	0.000494	0.00003	NO
	$t_y$	0.50	0.499496	0.000008	0.000504	0.00002	NO
	$t_z$	0.50	0.500508	0.000010	0.000508	0.00002	NO
	$\lambda$	0.50	0.501316	0.000002	0.001316	0.00000	NO
	$\varphi_x$	5.00	4.993626	0.000049	0.006374	0.00010	NO
	$\varphi_y$	5.00	4.995292	0.000101	0.004708	0.00020	NO
	$\varphi_z$	5.00	4.994184	0.000178	0.005816	0.00035	NO
Σενάριο 2	$t_x$	0.50	0.499345	0.000029	0.000655	0.00006	NO
	$t_y$	0.50	0.500928	0.000028	0.000928	0.00005	NO
	$t_z$	0.50	0.499340	0.000034	0.000660	0.00007	NO
	$\lambda$	1.50	1.500967	0.000004	0.000967	0.00001	NO
	$\varphi_x$	5.00	4.997565	0.000057	0.000493	0.00011	NO
	$\varphi_y$	5.00	4.999507	0.000118	0.003240	0.00023	NO
	$\varphi_z$	5.00	4.996760	0.000153	0.003240	0.00030	NO
Σενάριο 3	$t_x$	10.00	10.000832	0.000024	0.000832	0.00005	NO
	$t_y$	10.00	10.000822	0.000004	0.000822	0.00001	NO
	$t_z$	10.00	10.000644	0.000021	0.000644	0.00004	NO
	$\lambda$	0.50	0.499998	0.000002	0.000002	0.00000	YES
	$\varphi_x$	100.00	100.116000	0.000005	0.002082	0.00001	NO
	$\varphi_y$	100.00	99.997918	0.000005	0.116600	0.00001	NO
	$\varphi_z$	100.00	100.116600	0.000005	0.116600	0.00021	NO
Σενάριο 4	$t_x$	10.00	10.001807	0.000109	0.001807	0.00021	NO
	$t_y$	10.00	9.999885	0.000023	0.000115	0.00004	NO
	$t_z$	10.00	9.999331	0.000107	0.000669	0.00021	NO
	$\lambda$	1.50	1.515780	0.000007	0.015780	0.00001	NO
	$\varphi_x$	100.00	100.713680	0.000013	0.713680	0.00002	NO
	$\varphi_y$	100.00	99.999158	0.000015	0.000842	0.00003	NO
	$\varphi_z$	100.00	100.716750	0.000015	0.716750	0.00003	NO
Σενάριο 5	$t_x$	100.00	99.937621	0.000039	0.062379	0.00008	NO
	$t_y$	100.00	99.901234	0.000021	0.098766	0.00004	NO
	$t_z$	100.00	99.939256	0.000020	0.060744	0.00004	NO
	$\lambda$	0.50	0.501247	0.000008	0.001247	0.00002	NO
	$\varphi_x$	170.00	170.014800	0.000002	0.014800	0.00000	NO
	$\varphi_y$	170.00	169.997170	0.000002	0.002830	0.00000	NO
	$\varphi_z$	170.00	170.013800	0.000002	0.013800	0.00000	NO

Σενάριο 6	$t_x$	100.00	100.052430	0.000080	0.052430	0.00016	NO
	$t_y$	100.00	100.067820	0.000042	0.067820	0.00008	NO
	$t_z$	100.00	100.052600	0.000018	0.052600	0.00004	NO
	$\lambda$	1.50	1.495488	0.000020	0.004512	0.00004	NO
	$\varphi_x$	170.00	169.999890	0.000004	0.000110	0.00001	NO
	$\varphi_y$	170.00	169.992650	0.000005	0.007350	0.00001	NO
	$\varphi_z$	170.00	170.005450	0.000004	0.005450	0.00001	NO
Σενάριο 7	$t_x$	0.50	0.507093	0.000002	0.007093	0.00000	NO
	$t_y$	100.00	99.819734	0.000014	0.180266	0.00003	NO
	$t_z$	10.00	10.021291	0.000010	0.021291	0.00002	NO
	$\lambda$	0.50	0.541522	0.000004	0.041522	0.00001	NO
	$\varphi_x$	5.00	5.555921	0.000001	0.555921	0.00000	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.593550	0.000002	0.593550	0.00000	NO
	$\varphi_z$	170.00	169.819370	0.000001	0.180630	0.00000	NO
Σενάριο 8	$t_x$	100.00	69.773914	0.000049	30.226086	0.00010	NO
	$t_y$	0.50	0.963036	0.000034	0.463036	0.00007	NO
	$t_z$	100.00	66.377086	0.000057	33.622914	0.00011	NO
	$\lambda$	1.00	-0.132931	0.000011	1.132931	0.00002	NO
	$\varphi_x$	100.00	80.066261	0.000003	19.933739	0.00001	NO
	$\varphi_y$	5.00	3.232512	0.000003	1.767488	0.00000	NO
	$\varphi_z$	100.00	100.258110	0.000003	0.258110	0.00000	NO
Σενάριο 9	$t_x$	10.00	9.985583	0.000063	0.014417	0.00012	NO
	$t_y$	100.00	99.980737	0.000033	0.019263	0.00006	NO
	$t_z$	0.50	0.498513	0.000071	0.001487	0.00014	NO
	$\lambda$	1.50	1.479474	0.000009	0.020526	0.00002	NO
	$\varphi_x$	170.00	170.292080	0.000002	0.292080	0.00000	NO
	$\varphi_y$	100.00	99.939143	0.000006	0.060857	0.00001	NO
	$\varphi_z$	5.00	4.919353	0.000002	0.080647	0.00000	NO
Σενάριο 10	$t_x$	0.50	0.502309	0.005169	0.002309	0.01013	YES
	$t_y$	0.50	0.507893	0.001971	0.007893	0.00386	NO
	$t_z$	0.50	0.499786	0.004288	0.000214	0.00840	YES
	$\lambda$	0.50	0.499597	0.000002	0.000403	0.00000	NO
	$\varphi_x$	5.00	4.998915	0.000087	0.001085	0.00017	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.001180	0.000179	0.001180	0.00035	NO
	$\varphi_z$	5.00	4.999230	0.000093	0.000770	0.00018	NO
Σενάριο 11	$t_x$	0.50	0.810748	0.020042	0.310748	0.03928	NO
	$t_y$	0.50	0.172293	0.005836	0.327707	0.01144	NO
	$t_z$	0.50	0.801913	0.019365	0.301913	0.03796	NO
	$\lambda$	1.50	1.492951	0.000004	0.007049	0.00001	NO
	$\varphi_x$	5.00	5.006878	0.000080	0.006878	0.00016	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.000874	0.000181	0.000874	0.00035	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.004121	0.000082	0.004121	0.00016	NO

Σενάριο 12	$t_x$	10.00	10.019606	0.014268	0.019606	0.02796	YES
	$t_y$	10.00	10.019363	0.002404	0.019363	0.00471	NO
	$t_z$	10.00	9.992913	0.014102	0.007087	0.02764	YES
	$\lambda$	0.50	0.496338	0.000002	0.003662	0.00000	NO
	$\varphi_x$	100.00	99.903744	0.000114	0.096256	0.00022	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.009620	0.000232	0.009620	0.00045	NO
	$\varphi_z$	100.00	99.910172	0.000123	0.089828	0.00024	NO
Σενάριο 13	$t_x$	10.00	10.063450	0.062038	0.063450	0.12160	YES
	$t_y$	10.00	10.030827	0.010919	0.030827	0.02140	NO
	$t_z$	10.00	9.989488	0.061815	0.010512	0.12116	YES
	$\lambda$	1.50	1.503943	0.000006	0.003943	0.00001	NO
	$\varphi_x$	100.00	100.151520	0.000110	0.151520	0.00022	NO
	$\varphi_y$	100.00	99.990470	0.000275	0.009530	0.00054	NO
	$\varphi_z$	100.00	100.147900	0.000113	0.147900	0.00022	NO
Σενάριο 14	$t_x$	100.00	99.469456	0.014298	0.530544	0.02802	NO
	$t_y$	100.00	99.335988	0.005951	0.664012	0.01166	NO
	$t_z$	100.00	99.543732	0.007422	0.456268	0.01455	NO
	$\lambda$	0.50	0.517759	0.000005	0.017759	0.00001	NO
	$\varphi_x$	170.00	170.196980	0.000205	0.196980	0.00040	NO
	$\varphi_y$	170.00	170.130860	0.000620	0.130860	0.00122	NO
	$\varphi_z$	170.00	170.165320	0.000421	0.165320	0.00082	NO
Σενάριο 15	$t_x$	100.00	100.237880	0.037336	0.237880	0.07318	NO
	$t_y$	100.00	100.498590	0.009897	0.498590	0.01940	NO
	$t_z$	100.00	100.272030	0.034356	0.272030	0.06734	NO
	$\lambda$	1.50	1.504638	0.000013	0.004638	0.00003	NO
	$\varphi_x$	170.00	170.021460	0.000225	0.021460	0.00044	NO
	$\varphi_y$	170.00	170.002090	0.000681	0.002090	0.00133	NO
	$\varphi_z$	170.00	170.020960	0.000288	0.020960	0.00056	NO
Σενάριο 16	$t_x$	0.50	0.534195	0.009157	0.034195	0.01795	NO
	$t_y$	100.00	100.018870	0.005076	0.018870	0.00995	NO
	$t_z$	10.00	10.027848	0.010107	0.027848	0.01981	NO
	$\lambda$	0.50	0.506050	0.000002	0.006050	0.00000	NO
	$\varphi_x$	5.00	5.343286	0.000142	0.343286	0.00028	NO
	$\varphi_y$	100.00	99.971686	0.000149	0.028314	0.00029	NO
	$\varphi_z$	170.00	170.379030	0.000318	0.379030	0.00062	NO
Σενάριο 17	$t_x$	100.00	99.978448	0.005170	0.021552	0.01013	NO
	$t_y$	0.50	0.477726	0.007822	0.022274	0.01533	NO
	$t_z$	100.00	100.026020	0.009325	0.026020	0.01828	NO
	$\lambda$	1.00	0.976190	0.000008	0.023810	0.00002	NO
	$\varphi_x$	100.00	99.998964	0.000292	0.001036	0.00057	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.309999	0.000226	0.309999	0.00044	NO
	$\varphi_z$	100.00	100.114130	0.000298	0.114130	0.00058	NO

Σενάριο 18	$t_x$	10.00	10.012347	0.037789	0.012347	0.07407	YES
	$t_y$	100.00	100.075790	0.010061	0.075790	0.01972	NO
	$t_z$	0.50	0.631408	0.038181	0.131408	0.07483	NO
	$\lambda$	1.50	1.540592	0.000007	0.040592	0.00001	NO
	$\varphi_x$	170.00	170.418930	0.000177	0.418930	0.00035	NO
	$\varphi_y$	100.00	99.995615	0.000135	0.004385	0.00026	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.289704	0.000302	0.289704	0.00059	NO
Σενάριο 19	$t_x$	0.50	0.495462	0.000364	0.004538	0.00071	NO
	$t_y$	0.50	0.505346	0.000223	0.005346	0.00044	NO
	$t_z$	0.50	0.495013	0.000303	0.004987	0.00059	NO
	$\lambda$	0.50	0.500302	0.000001	0.000301	0.00000	NO
	$\varphi_x$	5.00	4.996068	0.000038	0.003932	0.00007	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.000246	0.000234	0.000246	0.00046	YES
	$\varphi_z$	5.00	4.999205	0.000039	0.000795	0.00008	NO
Σενάριο 20	$t_x$	0.50	0.500436	0.001524	0.000436	0.00299	YES
	$t_y$	0.50	0.499627	0.000365	0.000373	0.00072	YES
	$t_z$	0.50	0.498975	0.001473	0.001025	0.00289	YES
	$\lambda$	1.50	1.498655	0.000002	0.001345	0.00000	NO
	$\varphi_x$	5.00	5.000575	0.000037	0.000574	0.00007	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.000164	0.000234	0.000164	0.00046	YES
	$\varphi_z$	5.00	5.000731	0.000037	0.000731	0.00007	NO
Σενάριο 21	$t_x$	10.00	10.004765	0.000988	0.004765	0.00194	NO
	$t_y$	10.00	9.998472	0.000241	0.001528	0.00047	NO
	$t_z$	10.00	10.004426	0.000966	0.004426	0.00189	NO
	$\lambda$	0.50	0.504099	0.000001	0.004099	0.00000	NO
	$\varphi_x$	100.00	101.037340	0.000042	1.037340	0.00008	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.003470	0.000064	0.003470	0.00013	NO
	$\varphi_z$	100.00	101.036150	0.000058	1.036150	0.00011	NO
Σενάριο 22	$t_x$	10.00	10.006090	0.004018	0.006090	0.00787	YES
	$t_y$	10.00	10.018583	0.000802	0.018583	0.00157	NO
	$t_z$	10.00	9.976922	0.003999	0.023078	0.00784	NO
	$\lambda$	1.50	1.483461	0.000002	0.016539	0.00000	NO
	$\varphi_x$	100.00	99.639080	0.000041	0.360920	0.00008	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.026460	0.000107	0.026460	0.00021	NO
	$\varphi_z$	100.00	99.634920	0.000046	0.365080	0.00009	NO
Σενάριο 23	$t_x$	100.00	99.986959	0.000597	0.013041	0.00117	NO
	$t_y$	100.00	99.980415	0.000493	0.019585	0.00097	NO
	$t_z$	100.00	99.989400	0.000314	0.010600	0.00061	NO
	$\lambda$	0.50	0.498825	0.000001	0.001175	0.00000	NO
	$\varphi_x$	170.00	170.000380	0.000020	0.000380	0.00004	NO
	$\varphi_y$	170.00	169.991380	0.000029	0.008620	0.00006	NO
	$\varphi_z$	170.00	169.994660	0.000035	0.005340	0.00007	NO

Σενάριο 24	$t_x$	100.00	100.171290	0.001577	0.171290	0.00309	NO
	$t_y$	100.00	100.263890	0.001184	0.263890	0.00232	NO
	$t_z$	100.00	100.165090	0.004464	0.165090	0.00875	NO
	$\lambda$	1.50	1.471543	0.000003	0.028457	0.00001	NO
	$\varphi_x$	170.00	169.914060	0.000038	0.085940	0.00007	NO
	$\varphi_y$	170.00	169.927760	0.000082	0.072240	0.00016	NO
	$\varphi_z$	170.00	169.907390	0.000079	0.092610	0.00015	NO
Σενάριο 25	$t_x$	0.50	0.491376	0.000498	0.008624	0.00098	NO
	$t_y$	100.00	99.996097	0.000218	0.003903	0.00043	NO
	$t_z$	10.00	9.993823	0.000522	0.006177	0.00102	NO
	$\lambda$	0.50	0.488297	0.000001	0.011703	0.00000	NO
	$\varphi_x$	5.00	4.784644	0.000019	0.215356	0.00004	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.017250	0.000026	0.017250	0.00005	NO
	$\varphi_z$	170.00	169.889740	0.000022	0.110260	0.00004	NO
Σενάριο 26	$t_x$	100.00	100.032850	0.000788	0.032850	0.00155	NO
	$t_y$	0.50	0.484195	0.001173	0.015805	0.00230	NO
	$t_z$	100.00	100.002240	0.001301	0.002240	0.00255	YES
	$\lambda$	1.00	0.993905	0.000002	0.006095	0.00000	NO
	$\varphi_x$	100.00	99.967102	0.000043	0.032898	0.00009	NO
	$\varphi_y$	5.00	5.075470	0.000034	0.075470	0.00007	NO
	$\varphi_z$	100.00	100.228040	0.000082	0.228040	0.00016	NO
Σενάριο 27	$t_x$	10.00	10.000929	0.002262	0.000929	0.00443	YES
	$t_y$	100.00	99.987016	0.000599	0.012984	0.00117	NO
	$t_z$	0.50	0.508142	0.002303	0.008142	0.00451	NO
	$\lambda$	1.50	1.480535	0.000002	0.019465	0.00000	NO
	$\varphi_x$	170.00	169.962020	0.000055	0.037980	0.00011	NO
	$\varphi_y$	100.00	100.097210	0.000044	0.097210	0.00009	NO
	$\varphi_z$	5.00	5.007801	0.000072	0.007801	0.00014	NO