ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Γεωμετρίες Cayley-Klein του επιπέδου

Καρκαλάκης Πασχάλης

Επιβλέπων:
Κοντοκώστας Δημήτριος (Επίκουρος Καθηγητής)

Τριμελής Επιτροπή:
Κοντοκώστας Δημήτριος (Επίκουρος Καθηγητής)
Σμυρλής Γεώργιος (Αναπληρωτής Καθηγητής)
Ψαρράκος Παναγιώτης (Καθηγητής)

Αθήνα, Ιούλιος 2020

Ευχαριστίες

Πρώτα και κύρια θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Δ. Κοντοκώστα για την ανάληψη της επίβλεψης της διπλωματικής μου εργασίας και για τον χρόνο που αφιέρωσε. Η καθοδήγηση του ήταν ταυτόχρονα ακριβής και διακριτική, με αποτέλεσμα να ολοκληρωθεί η συγγραφή χωρίς να νιώσω ουσιαστικά αγχωμένος. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή Γ. Σμυρλή και τον καθηγητή Π.Ψαρράκο για την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την άνευ όρων στήριξη που μου παρείχαν σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Κατά τη διάρκεια του 19ου η γεωμετρία αναπτύχθηκε ευρύτατα. Το πιο γνωστό παράδειγμα είναι η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, και ειδικά της υπερβολικής γεωμετρίας. Την ίδια περίοδο άρχισε να φαίνεται η επεξηγηματική δύναμη της προβολικής γεωμετρίας. Το 1859 ο Arthur Cayley περιέγραψε έναν τρόπο να επανακτήσουμε την Ευκλείδεια από την προβολική γεωμετρία, χρησιμοποιώντας δύο μιγαδικά σημεία στο άπειρο. Το 1871 ο Felix Klein, γενικεύοντας την εργασία του Cayley, παρείχε έναν τρόπο για να εγκαθιδρύσουμε στο προβολικό επίπεδο όχι μόνο την Ευκλείδεια, αλλά και την υπερβολική και την ελλειπτική γεωμετρία. Η μέθοδος του βασίζεται στην εισαγωγή μιας μετρικής, η οποία ορίζεται στο συμπλήρωμα μιας κωνικής στο προβολικό επίπεδο. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε μια σειρά νέων γεωμετριών, η οποίες σήμερα καλούνται γεωμετρίες Cayley-Klein.

Το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη των γεωμετριών Cayley-Klein του επιπέδου. Αρχίζουμε το πρώτο κεφάλαιο υπενθυμίζοντας μερικές βασικές έννοιες της προβολικής γεωμετρίας, όπως οι ομογενείς συντεταγμένες και ο διπλός λόγος. Το κύριο μέρος του κεφαλαίου είναι η εισαγωγή της μετρικής Cayley-Klein και η ακόλουθη κατηγοριοποίηση των γεωμετριών Cayley-Klein. Κάθε γεωμετρία παρουσιάζεται ξεχωριστά στο δεύτερο κεφάλαιο. Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με επιμέρους θέματα, όπως η αρχή του δυϊσμού, τα διδιάστατα μοντέλα του Klein και του Poincaré, καθώς και μια σύγκριση των γεωμετριών στη βάση του παραλληλισμού σημείων και ευθειών. Στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγουμε τους γενικευμένους μιγαδικούς αριθμούς: πρόκειται για τρία σύνολα αριθμών που επεκτείνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι ένα από αυτά. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε αυτούς τους αριθμούς με σκοπό να περιγράψουμε τα σημεία μιας γεωμετρίας Cayley-Klein.

Abstract

During 19th century geometry underwent great development. The most famous example is the discovery of non-Euclidean geometries, particularly hyperbolic geometry. At the same time, the explanatory power of projective geometry began to emerge. In 1859 Arthur Cayley described a way of recovering Euclidean from projective geometry, by using two complex points at infinity. In 1871, Felix Klein, generalising the work of Cayley, provided a way of establishing in the projective plane not only Euclidean, but also hyperbolic and elliptic geometry. His method is based on the introduction of a metric, defined on the complement of a conic section in the projective plane. In fact, this approach leads to a whole new class of geometries, which are now called Cayley-Klein geometries.

This diploma thesis is about the study of Cayley-Klein geometries on the plane. We begin the first chapter by reminding a few basic projective notions, such as homogeneous coordinates and cross ratio. The main part of the first chapter is the introduction of the Cayley-Klein metric and the subsequent classification of Cayley-Klein geometries. Each one of the these geometries is presented separately in the second chapter. In the third chapter we discuss more specific topics, such as the principle of duality, the two-dimensional models of Klein and Poincaré and a comparison on the basis of parallelism of points and lines. In the fourth chapter we introduce generalized complex numbers: these are three sets of numbers which extend the set of real numbers $\mathbb{R}$. The set of complex numbers $\mathbb{C}$ is one of them. In the fifth, and final, chapter we use these types of numbers in order to describe the points of a Cayley-Klein geometry.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μετρική Cayley-Klein

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως οι γεωμετρίες Cayley-Klein προκύπτουν από την εισαγωγή μιας μετρικής στο πραγματικό προβολικό επίπεδο. Οι δύο πρώτες ενότητες έχουν περισσότερο εισαγωγικό χαρακτήρα. Στην πρώτη ενότητα θα αναφερθούμε στις ομογενείς συντεταγμένες, και στην επόμενη ενότητα θα μιλήσουμε για τις κωνικές τομές στο προβολικό επίπεδο. Το κύριο μέρος του κεφαλαίου βρίσκεται στις δύο τελευταίες ενότητες, στις οποίες θα αναφερθούμε στους διαφορετικούς τρόπους μέτρησης αποστάσεων και γωνιών, καθώς και στην κατηγοριοποίηση των γεωμετριών Cayley-Klein.

1.1 Ομογενείς συντεταγμένες

Είναι γνωστό ότι τα σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου μπορούν να αναπαρασταθούν από δυάδες πραγματικών αριθμών $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Στην ενότητα αυτή θα δούμε ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα σημεία, αλλά κα τις ευθείες, του πραγματικού προβολικού επιπέδου με τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z). Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης σημείων και ευθειών ενός προβολικού επιπέδου ονομάζεται ομογενείς συντεταγμένες.

Έστω ο τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$, θεωρούμενος ως διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{R}$. Η γενική ιδέα είναι να δούμε τους μονοδιάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^3$ ως τα σημεία και τους διδιάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^3$ ως τις ευθείες του προβολικού επιπέδου. Πιο αναλυτικά, αρχίζουμε διαιρώντας τα μη μηδενικά στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ σε κλάσεις ισοδυναμίας, ταυτίζοντας τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ που διαφέρουν μόνο ως προς ένα μη μηδενικό βαθμωτό πολλαπλάσιο. Δηλαδή, αν $p \in \mathbb{R}^3$, με $p \neq (0, 0, 0)$, η κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει το p είναι το σύνολο

$$[p] = \{p' \in \mathbb{R}^3 : p' = \lambda \cdot p, \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

Τονίζουμε εδώ ότι το μηδενικό διάνυσμα εξαιρείται ρητά από αυτήν την διαδικασία. Το σύνολο αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας αποτελεί το σύνολο των σημείων του πραγματικού προβολικού επιπέδου. Κάθε μία τέτοια κλάση ισοδυναμίας αντιπροσωπεύει ένα σημείο. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $[p]$ είναι ακριβώς ο μονοδιάστατος υπόχωρος που παράγεται από το p, από τον οποίο έχει αφαιρεθεί το μηδενικό διάνυσμα. Και ακριβώς επειδή κάθε στοιχείο του $[p]$ παράγει τον ίδιο υπόχωρο, μπορούμε να πούμε ότι κάθε σημείο του προβολικού επιπέδου αντιπροσωπεύεται από ένα οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου $[p]$. Με άλλα λόγια, κάθε σημείο του προβολικού επιπέδου μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^3$, ή, ισοδύναμα, από οποιοδήποτε μη μηδενικό βαθμωτό πολλαπλάσιο του στοιχείου αυτού. Θα συμβολίζουμε το πραγματικό προβολικό επίπεδο με $\mathbb{RP}^2$, και το τυχαίο σημείο του θα το συμβολίζουμε ως p.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε και τις ευθείες του προβολικού επιπέδου. Όπως αναφέραμε και πριν, θα χρειαστεί να θεωρήσουμε τους διδιάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^3$. Η γενική μορφή ενός διδιάστατου υποχώρου είναι η $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$, με $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Παρατηρούμε ότι ένα τέτοιο σύνολο καθορίζεται πλήρως από το μη μηδενικό διάνυσμα (a, b, c). Ακόμα, βαθμωτά πολλαπλάσια αυτού του διανύσματος περιγράφουν τον ίδιο υπόχωρο. Επομένως, μπορούμε και εδώ να αντιστοιχήσουμε τις ευθείες του προβολικού επιπέδου με μη μηδενικά στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, ταυτίζοντας στοιχεία που διαφέρουν μόνο ως προς ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο. Θα συμβολίζουμε μια ευθεία του $\mathbb{RP}^2$ με l.

Ας δούμε τώρα την γεωμετρική ερμηνεία όσων είπαμε. Αρχίζουμε από το Ευκλείδειο επίπεδο, το οποίο ως συνήθως ταυτίζουμε με το $\mathbb{R}^2$. Κάθε σημείο του επιπέδου περιγράφεται από ένα στοιχείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Εμφυτεύουμε τώρα το Ευκλείδειο επίπεδο στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ ως αφφινικό υπόχωρο. Μια βολική επιλογή είναι το επίπεδο $z = 1$. Το σημείο που αντιστοιχούσε στο στοιχείο (x, y) αντιπροσωπεύεται τώρα από την τριάδα $(x, y, 1)$. Όσον αφορά τώρα τα υπόλοιπα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, παρατηρούμε τα εξής: για ένα μη μηδενικό στοιχείο $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, με $z \neq 0$, θεωρούμε τον μονοδιάστατο υπόχωρο που παράγεται από το p. Γεωμετρικά ο υπόχωρος αυτός αντιστοιχεί σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει διεύθυνση παράλληλη με το διάνυσμα p. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $z \neq 0$, ο υπόχωρος αυτός θα τέμνει το επίπεδο $z = 1$ σε ένα μοναδικό σημείο, το $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$. Ο υπόχωρος αυτός αποτελεί ακριβώς την κλάση ισοδυναμίας $[p]$ (με την προσθήκη του μηδενικού διανύσματος), και παράγεται από οποιοδήποτε στοιχείο της. Επομένως, μπορούμε να αντιστοιχήσουμε στο διάνυσμα p, καθώς και σε κάθε βαθμωτό πολλαπλάσιο του p (δηλαδή σε κάθε στοιχείο της $[p]$) το ίδιο σημείο. Μένουν τώρα τα διανύσματα p της μορφής $(x, y, 0)$. Η ευθεία που παράγεται από ένα τέτοιο διάνυσμα δεν τέμνει το επίπεδο $z = 1$. Θεωρούμε λοιπόν ότι αυτά τα διανύσματα αντιπροσωπεύουν τα σημεία στο άπειρο με τα οποία είναι εφοδιασμένο το $\mathbb{RP}^2$. Και σε αυτήν την περίπτωση αγνοούμε τα βαθμωτά πολλαπλάσια και θεωρούμε ότι οποιοδήποτε στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας $[(x, y, 0)]$ αναπαριστά το ίδιο σημείο στο άπειρο.

Η συζήτηση που αφορά τις ευθείες του $\mathbb{RP}^2$ είναι πανομοιότυπη. Προηγουμένως αντιστοιχήσαμε τις ευθείες του προβολικού επιπέδου με τους διδιάστατους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$. Είδαμε ότι μια ευθεία του $\mathbb{RP}^2$ αντιπροσωπεύεται από την τριάδα (a,b,c) της εξίσωσης $ax+by+cz=0$. (Σημειώνουμε ότι αν (x,y,z) είναι μια τριάδα που ικανοποιεί την εξίσωση, τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η τριάδα $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ ικανοποιεί κι αυτή την εξίσωση· αυτό δείχνει ότι αυτή η αναπαράσταση της ευθείας είναι συμβατή με την αναπαράσταση σημείων από κλάσεις ισοδυναμίας). Γεωμετρικά, ο διδιάστατος υπόχωρος που αντιστοιχεί στην ευθεία αυτή είναι ένα επίπεδο που περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων και έχει κάθετο διάνυσμα το (a,b,c). Αν τμήσουμε το επίπεδο αυτό με το επίπεδο $z=1$, παίρνουμε μια ευθεία. Η ευθεία αυτή αντιστοιχεί στην τριάδα (a,b,c) (ή ορθότερα στην κλάση ισοδυναμίας $[(a,b,c)]$). Υπάρχει μόνο μία περίπτωση που πρέπει να εξεταστεί χωριστά. Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $(0,0,1)$, το επίπεδο στο οποίο αντιστοιχεί είναι το xy επίπεδο, το οποίο είναι παράλληλο στο $z=1$. Ωστόσο, επειδή όλα τα σημεία στο άπειρο (δηλαδή τα σημεία της μορφής $(x,y,0)$) ανήκουν σε αυτό το επίπεδο, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα $(0,0,1)$ αντιπροσωπεύει την ευθεία στο άπειρο. Η ευθεία διέρχεται από όλα τα σημεία στο άπειρο του $\mathbb{RP}^2$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε σε αυτήν την ενότητα μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε οποιαδήποτε διάσταση. Θα δείξουμε εδώ εν συντομία πως μπορούμε να αποκτήσουμε ομογενείς συντεταγμένες για τα σημεία της προβολικής ευθείας. Θα χρειαστούμε αυτήν την πληροφορία στην τρίτη ενότητα. Μια προβολική ευθεία l είναι μια Ευκλείδεια ευθεία (που μπορεί να θεωρηθεί ισομορφική με το $\mathbb{R}$) στην οποία έχει προστεθεί ένα μοναδικό σημείο στο άπειρο. Οι ομογενείς συντεταγμένες ενός πεπερασμένου σημείου p της l θα είναι $(p,1)$ (ή οποιοδήποτε βαθμωτό πολλαπλάσιο αυτού του διανύσματος). Το σημείο στο άπειρο αντιπροσωπεύεται από το διάνυσμα $(1,0)$ (ή οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του). Γεωμετρικά, μπορούμε να εμφυτεύσουμε την Ευκλείδεια ευθεία στην ευθεία $y=1$ του $\mathbb{R}^2$. Όπως και στην τρισδιάστατη περίπτωση βλέπουμε ότι το σημείο στο άπειρο αντιστοιχεί στον μοναδικό μονοδιάστατο υπόχωρο που δεν τέμνει την ευθεία $y=1$. Συμβολίζουμε την πραγματική προβολική ευθεία με $\mathbb{RP}^1$.

Ένα άλλο στοιχείο της προβολικής γεωμετρίας το οποίο θα μας χρειαστεί παρακάτω είναι ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων ή ευθειών. Αν $a,b \in \mathbb{R}^2$ με $a=(a_1,a_2), b=(b_1,b_2)$, θα συμβολίζουμε $[a,b] = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, και όμοια αν $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ με $a=(a_1,a_2,a_3), b=(b_1,b_2,b_3), c=(c_1,c_2,c_3)$ θα συμβολίζουμε $[a,b,c] = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Αν $a,b,c,d \in \mathbb{RP}^1$, τότε ο διπλός λόγος $(a,b;c,d)$ ορίζεται ως:

$$(a,b;c,d) = \frac{[a,c][b,d]}{[a,d][b,c]}$$

Στην περίπτωση του πραγματικού προβολικού επιπέδου $\mathbb{RP}^2$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον διπλό λόγο τεσσάρων συνευθειακών σημείων a, b, c, d ως εξής: επιλέγουμε ένα σημείο o μη συνευθειακό με τα υπόλοιπα, και ορίζουμε τον διπλό λόγο των a, b, c, d ως:

$$(a, b; c, d) = \frac{[o, a, c][o, b, d]}{[o, a, d][o, b, c]}$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τον διπλό λόγο τεσσάρων συντρεχουσών ευθειών.

Μια τελευταία πρακτική επισήμανση. Στην συνέχεια του κεφαλαίου δε θα αναφερόμαστε ρητά στις κλάσεις ισοδυναμίας, αλλά θα χρησιμοποιούμε κατευθείαν αντιπροσώπους των κλάσεων. Θα δούμε ότι όλες οι πράξεις μπορούν να γίνουν στο επίπεδο των αντιπροσώπων. Έτσι, θα γράφουμε p αντί για $[p]$, αλλά θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι τα στοιχεία p και $\lambda \cdot p$ με $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ αντιπροσωπεύουν το ίδιο σημείο.

1.2 Κωνικές

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε μερικά βασικά αποτελέσματα που αφορούν τις κωνικές τομές στην προβολική γεωμετρία. Οι κωνικές τομές, ή,απλούστερα, κωνικές, βρίσκονται στον πυρήνα των γεωμετριών Cayley-Klein. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν εδώ είναι ακριβώς όσα θα μας χρειαστούν στην συνέχεια του κεφαλαίου.

Μια κωνική C ορίζεται ως το σύνολο των σημείων p του $\mathbb{RP}^2$ που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $p^T A p = 0$, οπου A ένας 3×3 πίνακας. Καθ'όλη τη διάρκεια του κεφαλαίου θεωρούμε ότι τα στοιχεία του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί. Παρατηρούμε ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί (π.χ. αν ο A είναι διαγώνιος με μονάδες στην διαγώνιο, η αντίστοιχη εξίσωση είναι η $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ και δεν έχει πραγματικές λύσεις). Μια έκφραση της μορφής $p^T A p$ ονομάζεται τετραγωνική μορφή. Αναπτύσσοντας την τετραγωνική μορφή, βλέπουμε εύκολα ότι αυτή εξαρτάται μόνο από τα διαγώνια στοιχεία του A και από τα αθροίσματα της μορφής $A_{ij} + A_{ji}$. Επομένως, για κάθε πίνακα A, ο πίνακας $\dfrac{A^T + A}{2}$, δηλαδή το συμμετρικό μέρος του A, οδηγεί στην ίδια τετραγωνική μορφή. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο A είναι εξαρχής συμμετρικός. Να σημειώσουμε επίσης ότι, μιας και η εξίσωση $p^T A p = 0$ παραμένει σε ισχύ αν αντικαταστήσουμε το p με οποιοδήποτε βαθμωτό πολλαπλάσιο του, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον απλουστευμένο συμβολισμό και να γράφουμε «το σημείο p» αντί για το ορθότερο «το σημείο $[p]$».

Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις κωνικών ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών του A. Εφόσον υποθέσαμε ότι ο A είναι συμμετρικός, οι ιδιοτιμές του A θα είναι πραγματικές. Επιπλέον, οι πίνακες A

και $-A$ δίνουν την ίδια κωνική, και άρα μπορούμε να ταυτίσουμε κάθε διάνυσμα προσήμων των ιδιοτιμών με το αντίθετο του. Καταλήγουμε τότε σε 5 διαφορετικές περιπτώσεις για τις ιδιοτιμές του A, τις οποίες παραθέτουμε αμέσως, μαζί με το είδος της κωνικής που προκύπτει:

- Τρείς ομόσημες ιδιότιμες: $(+,+,+)$. Εδώ η κωνική είναι μιγαδική μη εκφυλισμένη.
- Δύο ομόσημες ιδιοτιμές και μία ετερόσημη: $(+,+,-)$. Πρόκειται για πραγματική μη εκφυλισμένη κωνική (η έλλειψη,η υπερβολή και η παραβολή περιλαμβάνονται σε αυτήν την περίπτωση).
- Δύο ομόσημες ιδιοτιμές και μία μηδενική: $(+,+,0)$. Η κωνική εδώ εκφυλίζεται σε δύο μιγαδικές ευθείες που τέμνονται σε ένα πραγματικό σημείο.
- Δύο ετερόσημες ιδιοτιμές και μία μηδενική: $(+,-,0)$. Η κωνική εδώ εκφυλίζεται σε δύο πραγματικές ευθείες που τέμνονται σε ένα πραγματικό σημείο.
- Δύο μηδενικές ιδιοτιμές: $(+,0,0)$. Η κωνική εδώ εκφυλίζεται σε μία διπλή πραγματική ευθεία.

Κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις δεν μπορεί να αναχθεί στις υπόλοιπες μέσω προβολικών μετασχηματισμών. Οι δύο πρώτες περιπτώσεις περιγράφουν μη εκφυλισμένες κωνικές, για τις οποίες δηλαδή ισχύει $\det(A) \neq 0$. Οι τρεις τελευταίες αφορούν εκφυλισμένες κωνικές, για τις οποίες ισχύει ότι $\det(A) = 0$, και οι οποίες ανάγονται σε μία ή δύο ευθείες. Τέλος, να αναφέρουμε ότι οποιαδήποτε κωνική είναι προβολικά ισοδύναμη με μια κωνική της μορφής $\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = 0$, με $\sigma_i \in \{-1, 0, +1\}$ για $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα της προβολικής γεωμετρίας είναι η αρχή του δυϊσμού. Η αρχή του δυϊσμού σημαίνει πρακτικά ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τούς ρόλους σημείων και ευθειών και, έπειτα από τις κατάλληλες μετατροπές, να λάβουμε ένα καινούριο αποτέλεσμα. Τέτοιες έννοιες, όπως τις σημείο/ευθεία, τις ονομάζουμε δυϊκές. Σε ό,τι μας αφορά εδώ, μπορούμε να πούμε πως αυτή η συμμετρία υποδεικνύεται από το γεγονός ότι χρησιμοποιήσαμε τριάδες πραγματικών αριθμών για να περιγράψουμε τόσο τα σημεία, όσο και τις ευθείες του προβολικού επιπέδου. Αναμένουμε, λοιπόν, ότι θα υπάρχει κάποια έννοια που θα αποτελεί την δυϊκή μιας κωνικής. Πράγματι, μια τέτοια έννοια υπάρχει, και μπορούμε να την κατανοήσουμε καλύτερα αν ασχοληθούμε πρώτα με μία μη εκφυλισμένη κωνική. Σε μια τέτοια περίπτωση, η δυϊκή της κωνικής που δίνεται από την $p^T A p = 0$ περιγράφεται από την $l^T B l = 0$, με $B = adj(A)$. Το σύμβολο l υπονοεί ότι η σχέση ορισμού της δυϊκής κωνικής αφορά ευθείες και όχι σημεία. Πράγματι, στις μη εκφυλισμένες περιπτώσεις, μπορούμε να φανταστούμε την δυϊκή κωνική ως το σύνολο των εφαπτομένων ευθειών της κύριας κωνικής. Στις ακραία εκφυλισμένες περιπτώσεις η προσέγγιση της δυϊκής κωνικής μέσω του προσαρτημένου πίνακα $adj(A)$ δεν είναι πλέον δυνατή.

Ωστόσο, αν παραμορφώσουμε με συνεχή τρόπο μια μη εκφυλισμένη κωνική, παρατηρώντας τις εφαπτόμενες βλέπουμε ότι η δυϊκή κωνική περιέχει γεωμετρική πληροφορία για την κύρια κωνική. Για παράδειγμα, αν παραμορφώσουμε μια υπερβολή μέχρι να εκφυλιστεί σε δύο τεμνόμενες ευθείες, βλέπουμε ότι στο όριο η δυϊκή κωνική (δηλαδή το σύνολο των εφαπτομένων της υπερβολής) αποτελείται από την δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο τομής των ευθειών της κύριας κωνικής. Θα συμβολίζουμε με B τον πίνακα που δίνει την δυϊκή κωνική, ανεξάρτητα από το αν αυτός είναι ο προσαρτημένος πίνακας του A ή όχι.

Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις πιθανές περιπτώσεις για μια δυϊκή κωνική ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα B, όπως κάναμε και για την κύρια κωνική. Γεωμετρικά, οι καταστάσεις που προκύπτουν για την δυϊκή κωνική μπορούν να βρεθούν εύκολα, αν εφαρμόσουμε την αρχή του δυϊσμού στην αντίστοιχη κατάσταση της κύριας κωνικής. Για παράδειγμα, αν ο πίνακας B έχει δύο ετερόσημες και μία μηδενική ιδιοτιμή (αν δηλαδή βρισκόμαστε σε μια κατάσταση της μορφής $(+,-,0)$), τότε η δυϊκή κωνική αντιστοιχεί σε δύο διακριτά πραγματικά σημεία (θυμηθείτε ότι η κύρια κωνική σε μια τέτοια περίπτωση αποτελείται από δύο διακριτές πραγματικές ευθείες). Αφού η δυϊκή κωνική αφορά ευθείες, σημειώνουμε ότι όταν χρησιμοποιούμε την λέξη σημείο για να χαρακτηρίσουμε γεωμετρικά μια δυϊκή κωνική εννοούμε πάντα τη δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο αυτό.

Η ως τώρα συζήτηση φαίνεται να οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια κωνική C του προβολικού επιπέδου περιγράφεται ικανοποιητικά από ένα ζεύγος πινάκων (A, B), το οποίο αντιστοιχεί στο ζεύγος κύριας/δυϊκής κωνικής. Μια κατάλληλη περιγραφή πρέπει να περιλαμβάνει του πιθανούς συνδυασμούς των περιπτώσεων για τις ιδιοτιμές των A και B, καθώς και την γεωμετρική ερμηνεία αυτών των συνδυασμών. Δεν θα μπούμε εδώ σε λεπτομέρειες για την εξάντληση των πιθανών συνδυασμών, αλλά απλώς θα αναφέρουμε το τελικό αποτέλεσμα. Η κατηγοριοποίηση που θα παρουσιάσουμε εδώ είναι πολύ σημαντική για την συνέχεια του κεφαλαίου, και ιδίως για την τελευταία ενότητα.

Οι πιθανές περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν ως ζεύγη κύριας/δυϊκής κωνικής δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

	A	B	τύπος
I	$(+,+,+)$	$(+,+,+)$	μιγαδική μη εκφυλισμένη
II	$(+,+,-)$	$(+,+,-)$	πραγματική μη εκφυλισμένη
III	$(+,+,0)$	$(+,0,0)$	δύο μιγαδικές ευθείες και ένα διπλό πραγματικό σημείο σε αυτές
IV	$(+,-,0)$	$(+,0,0)$	δύο πραγματικές ευθείες και ένα διπλό πραγματικό σημείο σε αυτές
V	$(+,0,0)$	$(+,+,0)$	δύο μιγαδικά σημεία και μια πραγματική διπλή ευθεία που διέρχεται από αυτά
VI	$(+,0,0)$	$(+,-,0)$	δύο πραγματικά σημεία και μια πραγματική διπλή ευθεία που διέρχεται από αυτά
VII	$(+,0,0)$	$(+,0,0)$	μία διπλή πραγματική ευθεία και ένα διπλό πραγματικό σημείο σε αυτήν

1.3 Οι τρείς τρόποι μέτρησης

Προχωράμε τώρα στο κύριο μέρος του κεφαλαίου. Για να ορίσουμε μια γεωμετρία Cayley-Klein χρειαζόμαστε μια κωνική, δοσμένη ως ένα ζεύγος πινάκων (A, B), καθώς και δύο σταθερές c_{dist}, c_{ang}, οι οποίες θα επιλεγούν ώστε οι μετρήσεις αποστάσεων και γωνιών να δίνουν αποδεκτά αποτελέσματα. Το σημαντικότερο συστατικό όμως είναι η κωνική C. Αφού η κωνική C δίνεται ως ζεύγος κύριας/δυϊκής κωνικής, ο υπολογισμός των εφαπτομένων της C που διέρχονται από σημείο p, καθώς και η τομή της C με μια ευθεία l, είναι καλώς ορισμένες διαδικασίες.

Έχοντας στα χέρια μας την τριάδα (C, c_{dist}, c_{ang}), η μετρήσεις αποστάσεων και γωνιών γίνοντας ως εξής:

- μέτρηση αποστάσεων: για να μετρήσουμε την απόσταση δύο σημείων p, q, θεωρούμε την ευθεία l που διέρχεται από αυτά τα σημεία. Έστω X, Y τα σημεία τομής της l με την C. Η απόσταση των p, q ορίζεται να είναι:

  $$\mathrm{dist}(p,q) = c_{dist} \cdot \ln\left((p,q;X,Y)\right)$$

  όπου $(p, q; X, Y)$ ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων p, q, X, Y. Καταστάσεις με $p = X = Y$ ή $q = X = Y$ εξαιρούνται ρητά.

- μέτρηση γωνιών: για να μετρήσουμε την γωνιά δύο ευθειών l, m, θεωρούμε το σημείο τομής τους p, και φέρουμε τις εφαπτόμενες X, Y της C

από το p. Η γωνία των ευθειών l, m ορίζονται από την:

$$\text{ang}(l, m) = c_{ang} \cdot \ln((l, m; X, Y))$$

όπου $(l, m; X, Y)$ ο διπλός λόγος των ευθειών l, m, X, Y. Καταστάσεις με $l = X = Y$ ή $m = X = Y$ εξαιρούνται ρητά.

Θα προχωρήσουμε τώρα σε κάποιες παρατηρήσεις για τις μετρήσεις που ορίσαμε. Πριν από αυτό, όμως, να κάνουμε το εξής σημαντικό σχόλιο: βλέπουμε ότι οι μετρήσεις αποστάσεων και γωνιών είναι απολύτως δυϊκές. Για αυτό τον λόγο, απο'δω και πέρα θα ασχοληθούμε κυρίως με την μελέτη της μέτρησης των αποστάσεων, έχοντας στο μυαλό μας ότι ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για την μέτρηση των γωνιών.

Κατάρχάς, η μέτρηση αποστάσεων παραμένει καλώς ορισμένη και στην περίπτωση που $p = q$. Κάθε ευθεία που διέρχεται από αυτό το σημείο δίνει $\text{dist}(p, p) = c_{dist} \cdot ln((p, p; X, Y)) = 0$, που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ωστόσο, το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε και σε μία άλλη περίπτωση: αν τα σημεία X, Y ταυτίζονται. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν η C είναι εκφυλισμένη κωνική. Σε μια τέτοια περίπτωση, για κάθε ζεύγος σημείων p, q παίρνουμε ότι $\text{dist}(p, q) = 0$. Θα δούμε παρακάτω πως θα λύσουμε αυτό το πρόβλημα. Το πιο σημαντικό σημείο της μέτρησης αποστάσεων βρίσκεται στο είδος των σημείων X, Y. Τα σημεία τομής της l με την κωνική προκύπτουν ως λύση μιας τετραγωνικής εξίσωσης. Επομένως, τα X, Y μπορεί να είναι πραγματικά και διακριτά, μιγαδικά συζυγή ή να συμπίπτουν. Για παράδειγμα, τα σημεία X, Y είναι μιγαδικά συζυγή όταν η ευθεία l δεν τέμνει την κωνική C, ενώ συμπίπτουν όταν η ευθεία l εφάπτεται στην κωνική. Κάθε μία από αυτές τις τρεις περιπτώσεις οδηγεί σε έναν ποιοτικά διαφορετικό τρόπο μέτρησης αποστάσεων[1].

Ξεκινάμε από την περίπτωση που τα X, Y είναι πραγματικά και διακριτά. Επειδή όλες οι μετρήσεις αφορούν την προβολική ευθεία l που ενώνει τα p και q, μπορούμε να εισαγάγουμε ομογενείς συντεταγμένες θεωρώντας τα X, Y ως σημεία της ευθείας, και, μάλιστα, υποθέτουμε ότι $X = (-1, 1)$ και $Y = (1, 1)$ (αλλιώς εφαρμόζουμε έναν κατάλληλο προβολικό μετασχηματισμό). Εφόσον εργαζόμαστε αποκλειστικά στην ευθεία l, μπορούμε απλά να ταυτίσουμε το σημείο με συντεταγμένες $(x, 1)$ με τον πραγματικό αριθμό x, και να υπολογίσουμε τον διπλό λόγο ως λόγο διαφορών πραγματικών αριθμών.Έστω, λοιπόν, ότι τα σημεία p, q έχουν συντεταγμένες $(p, 1), (q, 1)$ αντίστοιχα. Θα μελετήσουμε τώρα την ποιοτική συμπεριφορά του τύπου που δίνει την απόσταση των p, q.

Η απόσταση δύο σημείων p, q δίνεται από την σχέση

$$\text{dist}(p, q) = c_{dist} \cdot \ln\left(\frac{(p+1)(q-1)}{(p-1)(q+1)}\right)$$

Αν θέσουμε $p = 0$ να είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων, παίρνουμε την παρακάτω συνάρτηση, η οποία μετρά την απόσταση του σημείου q από την

[1] Παρόμοια είναι η κατάσταση και για την μέτρηση των γωνιών. Για παράδειγμα, αν οι ευθείες l, m τέμνονται εντός της κωνικής προκύπτουν μιγαδικές εφαπτόμενες ευθείες.

αρχή: $\mathrm{dist}(0, q) = c_{dist} \cdot \ln\left(\frac{1-q}{1+q}\right)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\mathrm{dist}(0, q)$ είναι θετική όταν το q βρίσκεται στο διάστημα $(-1, 1)$. Ο τρόπος συμπεριφοράς αυτής της μέτρησης γίνεται καλύτερα κατανοητός, αν υπολογίσουμε μια σειρά απο σημεία στο διάστημα $(-1, 1)$, ώστε η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων να παραμένει σταθερή. Η ακολουθία των σημείων δεν θα βρεθεί ποτέ έξω από το διάστημα $(-1, 1)$. Αυτό το μάλλον αντιδιαισθητικό αποτέλεσμα δείχνει ότι μπορούμε να εργαζόμαστε μόνο στο ευθύγραμμο τμήμα $(-1, 1)$, καθώς το μήκος του (όπως αυτό μετράται με τον παραπάνω τύπο) είναι άπειρο. Πράγματι, αν προσπαθήσουμε να βρούμε την απόσταση δύο σημείων p, q εκατέρωθεν του σημείου -1, παίρνουμε ως αποτέλεσμα έναν μιγαδικό αριθμό, πράγμα το οποίο υποδεικνύει ότι τα δύο σημεία είναι απείρως μακριά. Επίσης, η $\mathrm{dist}(p, q)$ παίρνει πραγματικές τιμές μόνο όταν, κατά μήκος της l, τα p, q δεν χωρίζονται από το -1 ή το 1.

Για να επιλέξουμε την σταθερά c_{dist} απαιτούμε για τα σημεία q κοντά στην αρχή, η συνάρτηση $\mathrm{dist}(0, q)$ να είναι ασυμπτωτικά κοντά στην q. Παίρνοντας την παράγωγο, βρίσκουμε εύκολα ότι μια κατάλληλη τιμή της c_{dist} είναι η $c_{dist} = -\frac{1}{2}$. Συνεπώς, ο τελικός τύπος που προκύπτει είναι ο

$$\mathrm{dist}(p, q) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{(p+1)(q-1)}{(p-1)(q+1)}\right)$$

Αυτός ο τρόπος μέτρησης ονομάζεται υπερβολικός.

Πάμε τώρα στην περίπτωση που τα X, Y είναι μιγαδικά συζυγή. Και πάλι μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρήσουμε ότι $X = (-i, 1)$ και $Y = (i, 1)$. Η απόσταση δύο σημείων p, q θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{dist}(p, q) = c_{dist} \cdot \ln\left(\frac{(p+i)(q-i)}{(p-i)(q+i)}\right)$$

Αφού τα p, q έχουν υποτεθεί πραγματικοί αριθμοί, το όρισμα του λογαρίθμου είναι ένας μιγαδικός αριθμός z με μέτρο την μονάδα. Ο λογάριθμος ενός τέτοιου αριθμού είναι ένας φανταστικός αριθμός $i\theta$, όπου θ η γωνία που ο διπλός λόγος (ως μιγαδικός αριθμός) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα. Επομένως, είναι λογικό να επιλέξουμε την σταθερά c_{dist} να είναι φανταστικός αριθμός. Παίρνοντας την παράγωγο, βλέπουμε ότι θέτοντας $c_{dist} = \frac{1}{2i}$ αποκτούμε και εδώ την επιθυμητή συμπεριφορά κοντά στην αρχή (όπως και στην προηγούμενη περίπτωση). Ορίζουμε, λοιπόν, τον ελλειπτικό τρόπο μέτρησης των αποστάσεων ως:

$$\mathrm{dist}(p, q) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{(p+i)(q-i)}{(p-i)(q+i)}\right)$$

Ο ελλειπτικός τρόπος μέτρησης έχει πολύ διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά από τον υπερβολικό. Προς επίρρωσιν τούτου, φανταζόμαστε το εξής σενάριο: ξεκινάμε από το σημείο $q = 0$ και κινούμαστε προς τη μία κατεύθυνση της l με σταθερό ελλειπτικό βήμα. Καθώς προχωράμε, τα βήματα γίνονται (από Ευκλείδεια σκοπιά) όλο και μεγαλύτερα, ώσπου τελικά ξεπερνούν το σημείο στο άπειρο της l και γυρίζουν από την άλλη μεριά. Σημειώνουμε μια πολύ ενδιαφέρουσα ερμηνεία του ελλειπτικού τρόπου μέτρησης. Αν θεωρήσουμε ότι τα σημεία της l αντιστοιχούν σε ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων του μοναδιαίου κύκλου, τότε η ελλειπτική απόσταση δύο σημειων αντιστοιχεί στο μήκος του τόξου που διανύουμε αν αρχίσουμε από έναν αντιπρόσωπο του ενός σημείου και προχωρήσουμε αντιωρολογιακά μέχρι να συναντήσουμε έναν αντιπρόσωπο του άλλου σημείου.

Η τρίτη περίπτωση είναι εκείνη στην οποία τα X, Y συμπίπτουν. Είδαμε ότι σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $\mathrm{dist}(p, q) = 0$ για οποιαδήποτε σημεία p, q. Αυτό φαίνεται να αποτελεί πρόβλημα, καθώς δεν μπορούμε να ορίσουμε απόλυτες αποστάσεις. Ωστόσο, θα δούμε τώρα ότι μπορούμε να συγκρίνουμε αποστάσεις με έναν καλώς ορισμένο τρόπο. Η κατάσταση αυτή είναι γνώριμη από την Ευκλείδεια γεωμετρία, όπου θεωρούμε ένα ευθυγράμμο τμήμα ως μοναδιαίο και μετράμε όλες τις αποστάσεις σε σχέση με αυτό.

Προκειμένου να μελετήσουμε αυτήν περίπτωση, αφήνουμε προς στιγμήν την υπόθεση ότι τα X, Y είναι σταθερά, και τα προσεγγίζουμε ως μέλη ενός μεγαλύτερου συνόλου. Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $\alpha x^2 - y^2 = 0$, τότε μπορούμε να δούμε τα X, Y ως τις ομογενείς συντεταγμένες των λύσεων αυτής της εξίσωσης. Στην γενική περίπτωση, παίρνουμε τις λύσεις $(1, \pm\sqrt{\alpha})^T$. Για $\alpha = 1$ παίρνουμε τον υπερβολικό τρόπο μέτρησης και για $\alpha = -1$ παίρνουμε τον ελλειπτικό τρόπο. Για $\alpha = 0$ τα σημεία X, Y συμπίπτουν στο σημείο στο άπειρο της l. Θεωρούμε τώρα την απόσταση των σημείων $(0, 1)$ και $(q, 1)$, η οποία δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{dist}(0, q) = c_{dist} \cdot \ln((0, q; X, Y)) = c_{dist} \cdot \left[\ln(q\sqrt{\alpha} - 1) - \ln(-q\sqrt{\alpha} - 1)\right]$$

Θέλουμε τώρα να συγκρίνουμε την απόσταση αυτή με την απόσταση από το σημείο $(0, 1)$ εως το σταθερό σημείο $(b, 1)$. Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για το σημείο $(b, 1)$ και παίρνοντας το πηλίκο των δύο εκφράσεων προκύπτει η εξής σχέση των αποστάσεων:

$$f_b(\alpha, q) := \frac{\ln(q\sqrt{\alpha} - 1) - \ln(-q\sqrt{\alpha} - 1)}{\ln(b\sqrt{\alpha} - 1) - \ln(-b\sqrt{\alpha} - 1)}$$

Παρατηρήστε ότι η σταθερά c_{dist} απλοποιείται και δεν υπεισέρχεται στην παραπάνω σχέση. Αυτό δείχνει ότι η επιλογή της σταθεράς δεν παίζει κανένα ρόλο στον τρόπο μέτρησης.

Για $\alpha = 0$ η παραπάνω σχέση παίρνει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ωστόσο, θεωρώντας το όριο καθώς $\alpha \to 0$, βρίσκουμε ότι: $\lim_{\alpha \to 0} f_b(\alpha, q) = \frac{q}{b}$. Στο όριο, λοιπόν, παίρνουμε το πηλίκο δύο Ευκλείδειων αποστάσεων. Με άλλα λόγια, η μέτρηση αποστάσεων σε σχέση με ένα καθορισμένο μοναδιαίο μήκος τείνει στον συνήθη Ευκλείδειο τρόπο μέτρησης αποστάσεων. Αυτός ο τρόπος μέτρησης ονομάζεται παραβολικός, για να δοθεί έμφαση στο ότι πρόκειται για μια ενδιάμεση οριακή περίπτωση ανάμεσα στον υπερβολικό και τον ελλειπτικό τρόπο μέτρησης.

1.4 Γεωμετρίες Cayley-Klein

Πόσες διαφορετικές γεωμετρίες Cayley-Klein υπάρχουν; Προφανώς υπάρχουν άπειρες επιλογές για την τριάδα (C, c_{dist}, c_{ang}). Αλλαγές στις σταθερές c_{dist}, c_{ang} οδηγούν ουσιαστικά στην ίδια γεωμετρία. Ακόμα και αλλαγές στην ίδια την κωνική C ενδέχεται να οδηγήσουν στην ίδια γεωμετρία. Δύο γεωμετρίες Cayley-Klein είναι ισόμορφες, αν οι αντίστοιχες κωνικές είναι προβολικά ισοδύναμες. Επομένως, το ερώτημα «πόσες γεωμετρίες Cayley-Klein υπάρχουν;» ανάγεται στο ερώτημα «πόσες μη ισοδύναμες κωνικές υπάρχουν;».

Στην δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου ταξινομήσαμε τις διάφορες κωνικές του $\mathbb{RP}^2$, θεωρώντας τις σαν ζεύγη κύριας/δυϊκής κωνικής. Κάθε μία τέτοια κωνική οδηγεί σε μια διαφορετική γεωμετρία Cayley-Klein μη ισομορφική με τις υπόλοιπες. Θα παρουσιάσουμε τώρα τις διάφορες περιπτώσεις. Χρησιμοποιούμε την αρίθμηση του πίνακα της προηγούμενης ενότητας.

I. Στην περίπτωση αυτή, τόσο η κύρια όσο και η δυϊκή κωνική έχουν την μορφή $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Προφανώς η κωνική που δίνεται από μια τέτοια εξίσωση δεν έχει πραγματικά σημείο στο προβολικό επίπεδο, ούτε δέχεται πραγματικές εφαπτόμενες. Δηλαδή, τα σημεία (αλλά και οι ευθείες) X, Y είναι πάντα μιγαδικά συζυγή, και άρα, τόσο για τις αποστάσεις όσο και για τις γωνίες, προκύπτει ο ελλειπτικός τρόπος μέτρησης. Σε αναλογία με όσα είπαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να επιλέξουμε $c_{dist} = c_{ang} = \dfrac{1}{2i}$. Αν η κύρια κωνική δίνεται από την σχέση $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, μπορούμε να δώσουμε την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία αυτής της κατάστασης: αν ταυτίσουμε τα σημεία του προβολικού επιπέδου με ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων της μοναδιαίας σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, τότε η απόσταση δύο σημείων p και q ισούται με την σφαιρική απόσταση κατά μήκος του μεγίστου κύκλου που διέρχεται από αυτά τα σημεία, ενώ η γωνία δύο ευθειών ισούται με την δίεδρη γωνία των επιπέδων που αντιστοιχούν στις ευθείες αυτές. Η γεωμετρία που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται ελλειπτική γεωμετρία.

II. Εδώ η κύρια κωνική έχει την μορφή $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, και περιγράφει τον πραγματικό μοναδιαίο κύκλο. Στην περίπτωση αυτή μπορούν να προκύψουν πολλοί διαφορετικοί συνδυασμοί μετρήσεων. Η επιλογή των σταθερών σχετίζεται με το ποιές μετρήσεις θέλουμε να είναι πραγματικές.

   Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει αν περιοριστούμε στο εσωτερικό του κύκλου. Η μέτρηση των αποστάσεων θα γίνεται πάντα με τον υπερβολικό τρόπο. Αν τώρα θεωρήσουμε μόνο ευθείες που τέμνονται στο εσωτερικό του κύκλου, προκύπτει ο ελλειπτικός τρόπος μέτρησης των γωνιών. Η γεωμετρία που προκύπτει ονομάζεται υπερβολική γεωμετρία. Θα πρέπει όμως να θυμόμαστε ότι από την σκοπιά των Cayley-Klein γεωμετριών, η υπερβολική γεωμετρία είναι μόνο μία υποπερίπτωση μιας γενικότερης κατάστασης. Στην πραγματικότητα η ίδια κωνική μπορεί να μας οδηγήσει και σε άλλες γεωμετρίες: αν ασχοληθούμε με σημεία εκτός της κωνικής και ευθείες που τέμνουν την κωνική παίρνουμε την διπλά υπερβολική γεωμετρία· αν, τέλος, θεωρήσουμε σημεία εκτός της κωνικής και ευθείες που δεν τέμνουν την κωνική προκύπτει η συνυπερβολική γεωμετρία.

V. Σε αυτήν την περίπτωση η δυϊκή κωνική αποτελείται από δύο μιγαδικά συζυγή σημεία και η κύρια κωνική από την διπλή ευθεία που ενώνει τα δύο αυτά σημεία. Η δυϊκή κωνική θα έχει την μορφή $a^2 + b^2 = 0$ ενώ η κύρια κωνική θα δίνεται από την $z^2 = 0$. Με αυτήν την επιλογή, τα σημεία που αποτελούν την δυϊκή κωνική είναι τα $\mathtt{I} = (-i, 1, 0)^T$ και $\mathtt{J} = (i, 1, 0)^T$, ενώ η κύρια κωνική γίνεται η ευθεία στο άπειρο. Στην γεωμετρία αυτή προκύπτουν ο ελλειπτικός τρόπος μέτρησης των γωνιών και ο παραβολικός τρόπος μέτρησης των αποστάσεων. Μπορούμε να επιλέξουμε $c_{ang} = \dfrac{1}{2i}$, ενώ η επιλογή της c_{dist} δεν έχει καμία σημασία, μιας και το μόνο που χρειάζεται είναι να συγκρίνουμε αποστάσεις μεταξύ τους. Η γεωμετρία που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι η Ευκλείδεια γεωμετρία.

VI. Η περίπτωση αυτή μοιάζει αρκετά με την προηγούμενη. Η κωνική αποτελείται από δύο διακριτά σημεία πάνω σε μια διπλή ευθεία. Η ειδοποιός διαφορά είναι ότι εδώ τα σημεία είναι πραγματικά. Η κύρια κωνική δίνεται από την $z^2 = 0$, όπως και πριν, αλλά η δυϊκή κωνική δίνεται από την $a^2 - b^2 = 0$. Τα σημεία στα οποία εκφυλίζεται η δυϊκή κωνική είναι τα $\mathtt{I}' = (-1, 1, 0)^T$ και $\mathtt{J}' = (1, 1, 0)^T$. Σημειώνουμε ότι τα σημεία $\mathtt{I}', \mathtt{J}'$ είναι τα σημεία στο άπειρο κατά την κατεύθυνση των διχοτόμων των αξόνων x, y. Η κύρια κωνική είναι η ευθεία στο άπειρο. Ως σημεία της γεωμετρίας αυτής θεωρούμε όλα τα σημεία που δεν περιέχονται στην ευθεία στο άπειρο, και ως ευθείες της γεωμετρίας θεωρούμε εκείνες τις ευθείες που τέμνουν την ευθεία στο άπειρο σε σημεία εντός του τμήματος που ορίζουν τα $\mathtt{I}', \mathtt{J}'$. Η μέτρηση των αποστάσεων γίνεται με τον παραβολικό τρόπο, ενώ η μέτρηση των γωνιών γίνεται με τον υπερβολικό τρόπο. Η γεωμετρία αυτή έχει πολλές και βαθιές ομοιότητες με την Ευκλείδεια γεωμετρία. Εξαιτίας αυτής της ομοιότητας, η γεωμετρία αυτή ονομάζεται ψευδοευκλείδεια. Στην φυσική η γεωμετρία αυτή είναι γνωστή με το όνομα γεωμετρία του Minkowski , εξαιτίας του ρόλου που διαδραματίζει στο πλαίσιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Στο υπόλοιπο της εργασίας αυτής θα χρησιμοποιούμε αυτό το όνομα.

III. Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει η συνευκλείδεια γεωμετρία. Η κύρια κωνική δίνεται από την $x^2 + y^2 = 0$ και περιγράφει δύο μιγαδικές ευθείες που τέμνονται σε ένα (πραγματικό) σημείο. Το σημείο και όλες οι ευθείες που διέρχονται από αυτό εξαιρούνται. Ο τρόπος μέτρησης των αποστάσεων είναι ελλειπτικός και ο τρόπος μέτρησης των γωνιών είναι παραβολικός.

IV. Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει η συνminkowski γεωμετρία. Η κύρια κωνική δίνεται από την $x^2 - y^2 = 0$ και περιγράφει δύο πραγματικές τεμνόμενες ευθείες. Τα σημεία της γεωμετρίας είναι οσα βρίσκονται εντός ενός καθορισμένου ζεύγους κατακορυφήν γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες, ενώ οι ευθείες της γεωμετρίας είναι όλες οι ευθείες που δεν διέρχονται από το σημείο τομής των ευθιών της κωνικής. Ο τρόπος μέτρησης των αποστάσεων είναι ο υπερβολικός, ενώ ο τρόπος μέτρησης των γωνιών είναι παραβολικός.

VII. Σε αυτήν την περίπτωση τόσο η κύρια, όσο και η δυϊκή κωνική δίνεται από την $z^2 = 0$. Η κωνική της γεωμετρίας αυτής είναι μια ευθεία και ένα διπλό σημείο σε αυτήν. Τα σημεία της γεωμετρίας είναι όλα τα σημεία που δεν ανήκουν στην κωνική, ενώ οι ευθείες είναι όλες οι ευθείες που δεν διέρχονται από το διπλό σημείο της κωνικής. Η μέτρηση τόσο των αποστάσεων όσο και των γωνιών γίνεται με παραβολικό τρόπο. Οι επιλογές των σταθερών c_{dist}, c_{ang} δεν παίζουν κανένα ρόλο. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ένα μοναδιαίο μήκος και μια μοναδιαία γωνία προκειμένου να κάνουμε τις συγκρίσεις. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι και αυτή η γεωμετρία έχει φυσική σημασία: περιγράφει την μονοδιάστατη κίνηση ενός σώματος στην κλασική φυσική, όταν η ταχύτητα του φωτός θεωρείται άπειρη. Εξαιτίας της σχέσης της με τη φυσική, η γεωμετρία αυτή ονομάζεται γεωμετρία του Γαλιλαίου.

Κεφάλαιο 2

Μοντέλα των γεωμετριών **Cayley-Klein**

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε εκτενέστερα τις γεωμετρίες Cayley-Klein. Θα μελετήσουμε κάθε γεωμετρία ξεχωριστά. Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε μοντέλα για τις γεωμετρίες, στα οποία θα αναδεικνύονται οι διαφορετικοί τρόποι μέτρησης αποστάσεων και γωνιών.

2.1 Μέτρηση αποστάσεων και γωνιών

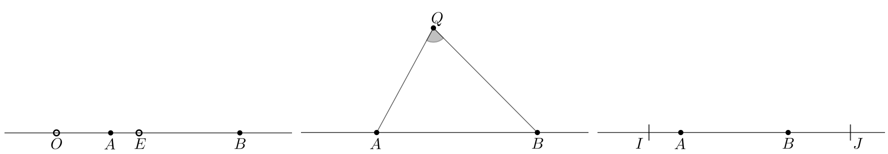
Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως οι διαφορετικοί τρόποι μέτρησης αποστάσεων και γωνιών μπορούν να προκύψουν από την εισαγωγή μιας μετρικής στο προβολικό επίπεδο. Πριν αρχίσουμε την αναλυτικη παρουσίαση των γεωμετριών Cayley-Klein, θεωρούμε σκόπιμο να παρουσιάσουμε τους τρόπους μέτρησης αποστάσεων και γωνιών από μια πιο στοιχειώδη γεωμετρική σκοπιά. Αυτή η οπτική γωνία θα μας φανεί χρήσιμη στην συνέχεια του κεφαλαίου.

Θεωρούμε μια ευθεία στο επίπεδο, και θέλουμε να μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ δυο σημείων της ευθείας. Μπορούμε να διακρίνουμε τρείς διαφορετικούς τρόπους για να το πετύχουμε αυτό:

- Ο πρώτος, και πιο γνωστός, είναι ο παραβολικός τρόπος και είναι αυτός που χρησιμοποιείται στην Ευκλείδεια γεωμετρία (Σχήμα 2.1-(α)). Ξεκινάμε από την επιλογή ενός τμήματος OE, το οποίο θεωρούμε ότι έχει μοναδιαίο μήκος, και τότε η απόσταση μεταξύ δυο σημείων A και B ορίζεται να είναι ίση με τον λόγο: $\dfrac{(AB)}{(OE)}$: $d^{(P)}_{AB} = \dfrac{(AB)}{(OE)}$

- Ο δεύτερος τρόπος είναι ο ελλειπτικός (Σχήμα 2.1-(β)). Ξεκινάμε από την επιλογή ενός σημείου Q εκτός της ευθείας, και ορίζουμε την απόσταση των A και B να είναι ίση με το Ευκλείδειο μέτρο της γωνίας AOB: $d^{(E)}_{AB} = \widehat{AOB}$. Το μήκος ολόκληρης της ευθείας θεωρείται ίσο με π.

- Ο τρίτος τρόπος είναι ο υπερβολικός (Σχήμα 2.1-(γ)). Αρχικά, σταθεροποιούμε δύο σημεία I, J της ευθείας, και ορίζουμε την υπερβολική απόσταση δύο σημείων A, B μέσω της σχέσης: $d_{AB}^{(H)} = k \log \dfrac{AI/AJ}{BI/BJ}$, όπου k μια σταθερά. Η επιλογή της βάσης του λογαρίθμου είναι αυθαίρετη, καθώς ενδεχόμενη αλλαγή της βάσης θα οδηγήσει σε πολλαπλασιασμό όλων των αποστάσεων με τον ίδιο αριθμό, χωρίς να επιφέρει αλλαγή στα σχετικά μεγέθη. Προκειμένου ο λόγος $(A, B; I, J) = \dfrac{AI/AJ}{BI/BJ}$ να είναι θετικός, και ο λογάριθμος να ορίζεται, είναι χρήσιμο να θεωρούμε τα τμήματα που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς ως προσανατολισμένα. Ένας τρόπος να βεβαιωθούμε για το πρόσημο του παραπάνω λόγου είναι να θεωρήσουμε μόνο σημεία εντός του τμήματος IJ. Τότε, το τμήμα IJ αποτελεί ολόκληρη την υπερβολική ευθεία. Αυτό μπορεί να φαίνεται παράξενο, καθώς διαισθητικά αναμένουμε το μήκος του τμήματος IJ να είναι πεπερασμένο. Ωστόσο, το υπερβολικό μήκος του IJ είναι άπειρο. Πράγματι, ο λόγος $(A, B; I, J)$ παραμένει αναλλοίωτος κάτω από κεντρικές προβολές του τμήματος IJ στον εαυτό του (όπου το IJ αρχικά προβάλλεται, μέσω ενός σημείου O, σε κάποιο τμήμα IJ_1, και στην συνέχεια το τμήμα IJ_1 προβάλλεται στο IJ μέσω ενός σημείου P της ευθείας J_1J). Συνεπώς, μπορούμε, ξεκινώντας από ένα σημείο A της υπερβολικής ευθείας IJ, να κατασκευάσουμε, μέσω τέτοιων προβολών, μια σειρά από ίσα (υπερβολικά) τμήματα $AB = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = ...$, χωρίς όμως να βγαίνουμε εκτός του τμήματος IJ. Άρα, η υπερβολική ευθεία IJ έχει άπειρο υπερβολικό μήκος (Σχήμα 2.2).

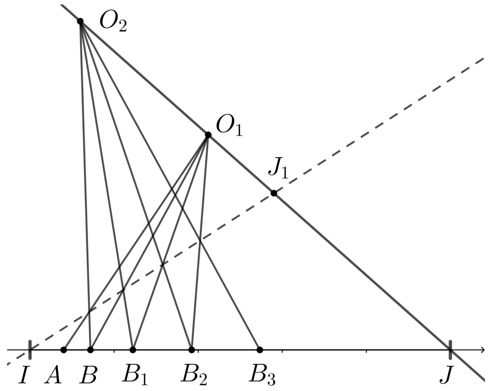


(α′) Παραβολικός. (β′) Ελλειπτικός. (γ′) Υπερβολικός.

Σχήμα 2.1: Οι τρεις τρόποι μέτρησης αποστάσεων.

Τώρα θεωρούμε ένα σημείο O του επιπέδου και το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από αυτό. Θέλουμε να μετρήσουμε την γωνία μεταξύ δύο τέτοιων ευθειών α και β. Μπορούμε και εδώ να διακρίνουμε τρείς τρόπους για να το επιτύχουμε αυτό:

- Ο πρώτος, και πιο συνηθισμένος, είναι αυτός που χρησιμοποιείται στην Ευκλείδεια γεωμετρία και ονομάζεται ελλειπτικός (Σχήμα 2.3-(α)). Η γωνία μεταξύ των α και β ορίζεται ως: $\delta_{\alpha\beta}^{(E)} = \widehat{\alpha O \beta}$, όπου $\widehat{\alpha O \beta}$ η Ευκλείδεια γωνία των $O\alpha, O\beta$.

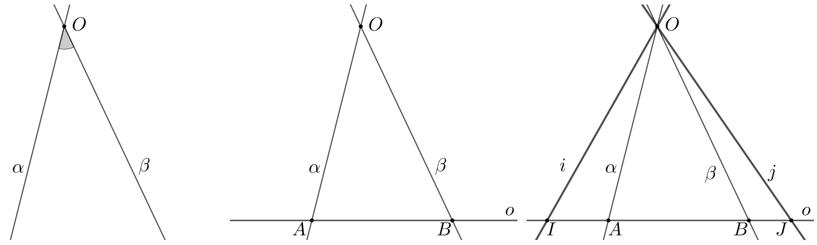


Σχήμα 2.2: Η υπερβολική ευθεία IJ έχει άπειρο μήκος.

- Ο δεύτερος τρόπος είναι ο παραβολικός (Σχήμα 2.3-(β)). Σε αυτόν, σταθεροποιούμε μια ευθεία o η οποία δεν διέρχεται από το O, και ορίζουμε την γωνία των α και β να ισούται με την (προσανατολισμένη) παραβολική απόσταση AB, όπου $A = \alpha \cap o$ και $B = \beta \cap o$. Δηλαδή $\delta^{(P)}_{\alpha\beta} = AB = d^{(P)}_{AB}$.

- Ο τρίτος τρόπος είναι ο υπερβολικός (Σχήμα 2.3-(γ)). Για να τον ορίσουμε, σταθεροποιούμε δυο ευθείες i και j, οι οποίες διέρχονται από το O, και ορίζουμε τον παρακάτω λόγο: $(\alpha, \beta; i, j) = \dfrac{\sin(\widehat{\alpha, i}) / \sin(\widehat{\alpha, j})}{\sin(\widehat{\beta, i}) / \sin(\widehat{\beta, j})}$. Η γωνία μεταξύ των α και β ορίζεται να είναι $\delta^{(H)}_{\alpha\beta} = k \cdot \log{(\alpha, \beta; i, j)}$ όπου k μια σταθερά. Η επιλογή της βάσης του λογαρίθμου είναι αυθαίρετη, όπως και στην περίπτωση του υπερβολικού τρόπου μέτρησης των αποστάσεων. Για να έχει νόημα αυτός ο ορισμός, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το όρισμα του λογαρίθμου είναι θετικό. Ένας τρόπος να το πετύχουμε αυτό είναι να υποθέσουμε ότι οι ευθείες με τις οποίες ασχολούμαστε βρίσκονται εντός του ζεύγους των κατακορυφήν γωνιών που σχηματίζουν οι i και j. Επίσης, ο λόγος $(\alpha, \beta; i, j)$ ισούται με τον λόγο $(A, B; I, J)$ των τεσσάρων σημείων A, B, I, J στα οποία οι ευθείες α, β, i, j αντίστοιχα τέμνουν μια άλλη αυθαίρετη ευθεία o, η οποία δεν διέρχεται από το O. Οπότε, θα μπορούσαμε ισοδύναμα να ορίσουμε την γωνία μεταξύ ευθειών με τον εξής τρόπο: $\delta^{(H)}_{\alpha\beta} = d^{(H)}_{AB}$.

Έχουμε τώρα στα χέρια μας τρείς τρόπους μέτρησης των αποστάσεων και τρείς τρόπους μέτρησης των γωνιών. Αυτή η προσέγγιση μας δίνει την δυνατότητα να δημιουργήσουμε νέες γεωμετρίες, επιλέγοντας έναν τρόπο μέτρησης των αποστάσεων και έναν των γωνιών. Προφανώς, αυτή η διαδικασία μπορεί να μας δώσει 9 γεωμετρίες στο επίπεδο. Πρόκειται ακριβώς για τις γεωμετρίες Cayley-Klein. Το υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού είναι αφιερώμενο στην εκτενέστερη παρουσίαση αυτών των γεωμετριών.



(α′) Ελλειπτικός. (β′) Παραβολικός. (γ′) Υπερβολικός.

Σχήμα 2.3: Οι τρεις τρόποι μέτρησης γωνιών.

2.2 Μετασχηματισμοί και γεωμετρία

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τρείς από τις γεωμετρίες Cayley-Klein: την Ευκλείδεια γεωμετρία, την γεωμετρία του Γαλιλαίου και την γεωμετρία του Minkowski. Η προσέγγιση μας θα είναι ελαφρώς διαφορετική. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια των μετασχηματισμών, έτσι όπως αυτή εμφανίζεται στον ορισμό που έδωσε ο Felix Klein για την γεωμετρία. Σύμφωνα με αυτόν, αν έχουμε στα χέρια μας ένα σύνολο σημείων και μια ομάδα μετασχηματισμών (δηλαδή 1-1 απεικονίσεις του συνόλου επί του εαυτού του), τότε μπορούμε να ορίσουμε την γεωμετρία ως *την μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των σχημάτων* (των υποσυνόλων του αρχικού συνόλου) *που παραμένουν αναλλοίωτες από αυτούς τους μετασχηματισμούς*. Αυτός ο ορισμός είναι αρκετά γενικός και μας επιτρέπει να εισάγουμε και να μελετήσουμε πολλές και διαφορετικές γεωμετρίες. Ο λόγος που υιοθετούμε αυτήν την τακτική και θέλουμε να αφιερώσουμε λίγο περισσότερο χρόνο σε αυτές τις γεωμετρίες, είναι ότι οι γεωμετρίες του Γαλιλαίου και του Minkowski έχουν ένα σημαντικό φυσικό ανάλογο. Πιστεύουμε, λοιπόν, ότι αυτή η προσέγγιση φωτίζει και αυτή την πλευρά των γεωμετριών.

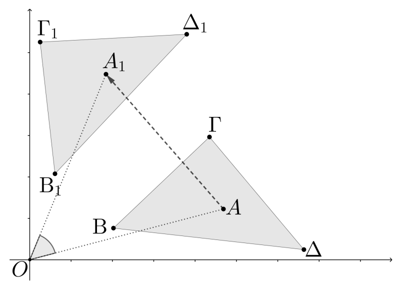
Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την παραπάνω ιδέα των μετασχηματισμών για να παρουσιάσουμε τις τρεις γεωμετρίες. Στο πρώτο παράδειγμα θα επιχειρήσουμε να δούμε την Ευκλείδεια γεωμετρία υπό αυτή τη σκοπιά, ενώ στα δυο επόμενα θα ξεκινήσουμε από διαφορετικά σύνολα μετασχηματισμών, τα οποία μάλιστα θα έχουν μια άμεση φυσική σημασία, και θα περιγράψουμε τη γεωμετρία που θα προκύψει από αυτούς. Στα παραδείγματα αυτά θα χρησιμοποιήσουμε τεχνικές της αναλυτικής γεωμετρίας. Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αυτό είναι ότι μπορούμε να δούμε την προαναφερθείσα ιδέα των μετασχηματισμών με ένα διαφορετικό τρόπο. Η ιδέα είναι ότι εάν επιλέξουμε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων xOy στο επίπεδο, και ταυτίσουμε τα σημεία του επιπέδου με τις αντίστοιχες συντεταγμένες τους ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων, τότε μια γεωμετρική ιδιότητα θα πρέπει ασφαλώς να είναι ανεξάρτητη από τις συντεταγμένες των σημείων.

Παράδειγμα 2.2.1. (Ευκλείδεια Γεωμετρία)
Σε όλη τη διάρκεια του παραδείγματος, σταθεροποιούμε ένα δεξιόστροφο καρ-

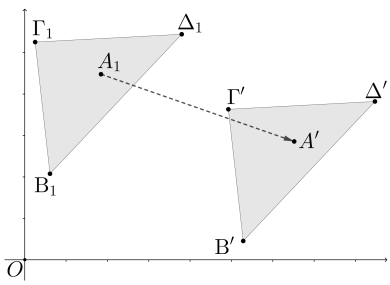
τεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy στο επίπεδο. Γνωρίζουμε ότι αν $x'O'y'$ είναι ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, για το οποίο ισχύουν ότι οι συντεταγμένες του O' στο xOy είναι (a, b) και η γωνία μεταξύ των Ox και $O'x'$ είναι θ (θετική φορά θεωρείται ως συνήθως η αντιωρολογιακή), τότε οι συντεταγμένες (x, y) και (x', y') ενός τυχαίου σημείου ως προς τα xOy και $x'O'y'$ αντίστοιχα συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta + a \\ y' &= -x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta + b \end{aligned} \tag{E}$$

Εν γένει αυτές οι σχέσεις περιγράφουν, ως γνωστόν, μεταφορές και στροφές του αρχικού συστήματος συντεταγμένων. Ωστόσο, μπορούμε να δούμε τις παραπάνω σχέσεις με έναν διαφορετικό τρόπο. Συγκεκριμένα, μπορούμε να δούμε τις (Ε) ως μετασχηματισμούς του επιπέδου. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε τις (Ε) ως 1-1 και επί συναρτήσεις, οι οποίες απεικονίζουν το σημείο $A(x, y)$ του επιπέδου στο σημείο $A'(x', y')$, με τις συντεταγμένες των σημείων να ορίζονται ως προς το ίδιο σύστημα συντεταγμένων xOy. Με αυτή την οπτική, οι σχέσεις (Ε) περιγράφουν μεταφορές και στροφές των γεωμετρικών σχημάτων στο επίπεδο (Σχήμα 2.4). Οπότε, οι γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων θα πρέπει να διατηρούνται από τους παραπάνω μετασχηματισμούς[1]. Το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών χαρακτηρίζουν την Ευκλείδεια γεωμετρία, προσδιορίζοντας όλες τις ιδιότητες που την ενδιαφέρουν. Έχουμε στα χέρια μας



(α′) Περιστροφή γύρω από το O.



(β′) Μεταφορά.

Σχήμα 2.4: Οι μετασχηματισμοί (Ε)

ένα αναλυτικό σύνολο μετασχηματισμών του επιπέδου (το οποίο περιλαμβάνει μεταφορές, στροφές και ανακλάσεις σχημάτων ως προς μία ευθεία, καθώς και

[1] Οι μετασχηματισμοί (Ε) περιγράφουν μόνο στροφές και μεταφορές των σχημάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί έχουμε θεωρήσει μόνο δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων. Για να πάρουμε και τις ανακλάσεις ως προς ευθεία μπορούμε να θεωρήσουμε και αριστερόστροφα συστήματα. Τότε, η γενική μορφή των μετασχηματισμών (Ε) θα γίνει:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta + a \\ y' &= \pm x\sin\theta \pm (-y)\cos\theta + b \end{aligned}$$

πεπερασμένες συνθέσεις αυτών), και σύμφωνα με όσα έχουμε πει, όλα τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που μας ενδιαφέρουν θα πρέπει να διατηρούνται κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς. Είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δυο σημείων $A(x, y)$ και $A_1(x_1, y_1)$, που ως γνωστόν ορίζεται από τον τύπο: $d_{AA_1} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$ μένει αναλλοίωτη από τους μετασχηματισμούς (Ε). Δηλαδή, αν η εικόνα του A μέσω των (Ε) είναι το $A'(x', y')$ και του A_1 είναι το $A'_1(x'_1, y'_1)$, τότε $d_{AA_1} = d_{A'A'_1}$. Οπότε, η απόσταση μεταξύ δυο σημείων, όπως την έχουμε ορίσει, έχει γεωμετρική σημασία. Με παρόμοιους συλλογισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι και άλλες γνωστές ιδιότητες που μελετά η Ευκλείδεια γεωμετρία, όπως η γωνία μεταξύ δυο τεμνόμενων ευθειών, έχουν γεωμετρικό νόημα, ακριβώς επειδή παραμένουν αναλλοίωτες από τους μετασχηματισμούς (Ε).

Παράδειγμα 2.2.2. Σε αυτό και στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε πως μπορούν να προκύψουν διαφορετικές γεωμετρίες, αν αλλάξουμε τους διαθέσιμους μετασχηματισμούς. Μάλιστα, οι γεωμετρίες που θα αναφέρουμε θα έχουν και ένα άμεσο φυσικό ανάλογο.

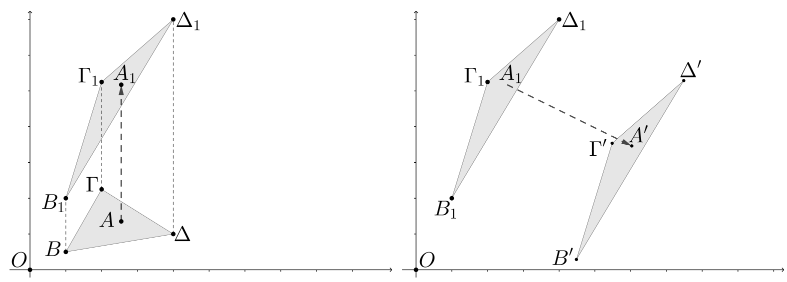
Ας θεωρήσουμε την μονοδιάστατη κίνηση ενός σημείου πάνω σε μια ευθεία, και ας επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων (με αρχή O), το οποίο και θα δηλώνουμε ως Ox. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου, αν είχαμε επιλέξει ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς $O'x'$, το οποίο θα κινούταν με σταθερή ταχύτητα ως προς το Ox – ή, όπως λέγεται στην φυσική, ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς -, τότε όλες οι μηχανικές ιδιότητες της κίνησης του σημείου θα πρέπει να διατηρούνται. Έτσι, αν είχαμε ένα άλλο σύστημα αναφοράς $O'x'$, το οποίο κινείται ως προς το Ox με σταθερή ταχύτητα v, και η συντεταγμένη του O' στο αρχικό σύστημα είναι b, τότε οι συντεταγμένες x και x' τυχόντος σημείου της ευθείας ως προς τα Ox και Ox' αντίστοιχα συνδέονται μέσω των σχέσεων: $x' = x + v \cdot t + b$, όπου t δηλώνει τον χρόνο. Επιπλέον, είναι προφανές ότι η επιλογή της αρχικής χρονικής στιγμής δεν επηρεάζει την κίνηση του σημείου. Μπορούμε λοιπόν να συμπεριλάβουμε μια μετατόπιση της αρχικής χρονικής στιγμής $t = 0$, που δίνεται από την σχέση: $t' = t + a$. Καταλήξαμε λοιπόν στους εξής μετασχηματισμούς, οι οποίοι θα πρέπει να διατηρούν τις μηχανικές ιδιότητες της κίνησης:

$$\begin{aligned} t' &= t + a \\ x' &= v \cdot t + x + b \end{aligned} \tag{Γ}$$

Πριν προχωρήσουμε, για να είναι πιο εύκολη η σύγκριση με τα προηγούμενα, θα αλλάξουμε τα ονόματα των μεταβλητών ως εξής: $x \leftrightarrow y$ και $t \leftrightarrow x$. Έτσι, οι μετασχηματισμοί (Γ) πλέον γράφονται:

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= v \cdot x + y + b \end{aligned} \tag{Γ}$$

Θεωρούμε τώρα ένα δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy στο επίπεδο. Και σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να δούμε τις σχέσεις (Γ) ως μετασχηματισμούς του επιπέδου, οι οποίοι απεικονίζουν το σημείο με συντεταγμένες (x, y) στο σημείο με συντεταγμένες (x', y'). Συγκεκριμένα, οι (Γ) εν γένει περιγράφουν την σύνθεση ενός πλαγιάσματος στην κατεύθυνση του άξονα y (δηλαδή μια απεικόνιση στην οποία κάθε σημείο του άξονα y παραμένει σταθερό, ενώ κάθε άλλο σημείο μετατοπίζεται σε διεύθυνση παράλληλη με τον άξονα y) και μιας μεταφοράς (Σχήμα 2.5).

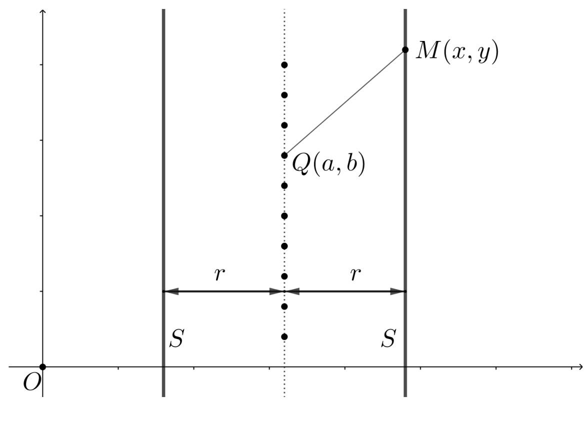


(α′) Πλάγιασμα με v=1.5 (β′) Μεταφορά.

Σχήμα 2.5: Οι μετασχηματισμοί (Γ)

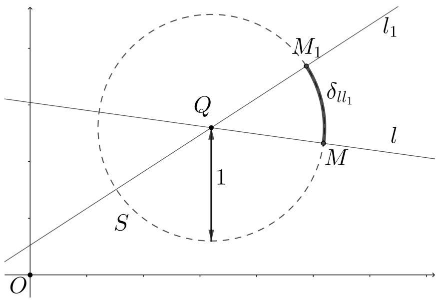
Σύμφωνα με όσα έχουμε πει προηγουμένως, με βάση τους παραπάνω μετασχηματισμούς μπορεί να προκύψει μια νέα γεωμετρία, η οποία θα μελετά τις ιδιότητες που παραμένουν αναλλοίωτες από τους μετασχηματισμούς (Γ). Η γεωμετρία αυτή ονομάζεται γεωμετρία του Γαλιλαίου, ενώ το επίπεδο στο οποίο αυτή εκτυλίσσεται το ονομάζουμε επίπεδο του Γαλιλαίου. Σημειώνουμε ότι όπως ορίστηκε η γεωμετρία του Γαλιλαίου, οι ιδιότητες που αυτή μελετά θα έχουν ένα σαφές φυσικό ανάλογο. Ας δώσουμε μερικά παραδείγματα. Η απόσταση μεταξύ δυο σημείων $A(x, y)$ και $A_1(x_1, y_1)$ στην γεωμετρία του Γαλιλαίου ορίζεται ως: $d_{AA_1} = x_1 - x$. Παρατηρούμε ότι η απόσταση μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή και μηδενική. Αν η παραπάνω απόσταση είναι μηδενική, που σημαίνει ότι τα δυο σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία παράλληλη με τον άξονα των y, τότε ορίζουμε ως απόσταση των σημείων την $d_{AA_1} = y_1 - y$. Αυτή η απόσταση ονομάζεται ειδική, ενώ οι ευθείες παράλληλες με τον άξονα των y, που έχουν έναν ειδικό ρόλο στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, ονομάζονται ειδικές ευθείες. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι και στις δυο περιπτώσεις, η απόσταση μεταξύ δυο σημείων μένει αναλλοίωτη από τους μετασχηματισμούς (Γ). Επιπλέον, αν θυμηθούμε σε τι αντιστοιχούν οι συντεταγμένες x και y, μπορούμε να δούμε ποιο είναι το φυσικό ανάλογο της απόστασης δυο σημείων. Η τετμημένη x αντιστοιχεί στον χρόνο t, ενώ η τεταγμένη y αντιστοιχεί στην θέση του σημείου x στην ευθεία. Το μηχανικό ανάλογο ενός σημείου του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) είναι ένα συμβάν της κίνησης, καθορισμένο από τη χρονική στιγμή t και τη θέση x. Έτσι, η απόσταση δυο σημείων στην γεωμετρία του Γαλιλαίου αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα μεταξύ δυο συμβάντων. Αν τώρα τα συμβάντα είναι ταυτόχρονα, δηλαδή έχουν μηδενική απόσταση, τότε ορίζεται η ειδική απόσταση, που αντιστοιχεί στην απόσταση των συμβάντων στην ευθεία. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δυο είδη αποστάσεων δεν είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους, καθώς μετριούνται σε διαφορετικές μονάδες.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι αυτό της γωνίας μεταξύ δυο τεμνόμενων ευθειών. Καταρχάς, οι (Γ) μεταφέρουν ευθείες σε ευθείες, οπότε η έννοια της ευθείας έχει νόημα στην γεωμετρία του Γαλιλαίου. Θυμίζουμε ότι στην Ευκλείδεια γεωμετρία, αν δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο, τότε η γωνία που σχηματίζουν ισούται με το μήκος του τόξου που αποκόπτουν οι ευθείες από τον μοναδιαίο κύκλο που έχει κέντρο το σημείο τομής τους (Σχήμα 2.7-(α)). Ορμώμενοι από αυτήν την παρατήρηση, μπορούμε να ορίσουμε την γωνία μεταξύ δυο ευθειών στην γεωμετρία του Γαλιλαίου ως το μήκος του τμήματος που αποκόπτουν οι ευθείες από τον μοναδιαίο κύκλο που έχει κέντρο το σημείο τομής τους. Μένει βέβαια δούμε τι συνιστά κύκλο στην γεωμετρία του Γαλιλαίου. Ο κύκλος ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από ένα σταθερό σημείο $Q(a, b)$ έχουν σταθερή τιμή, ίση με r. Το σημείο Q ονομάζεται κέντρο του κύκλου, ενώ η τιμή r ονομάζεται ακτίνα. Με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω, η εξίσωση του κύκλου θα είναι $d_{MQ} = r \Rightarrow (x - a) = r^2 \Rightarrow x - a = r$ ή $x - a = -r$. Η εξίσωση αυτή περιγράφει δυο ευθείες γραμμές παράλληλες με τον άξονα y, εκατέρωθεν του σημείου Q και σε (Ευκλείδεια) απόσταση r από αυτό (Σχήμα 2.6). Σημειώνουμε ότι με βάση τον ορισμό μας, ο κύκλος θα έχει άπειρα σημεία ως κέντρα, συγκεκριμένα όλα τα σημεία της ειδικής ευθείας που διέρχεται από το Q.

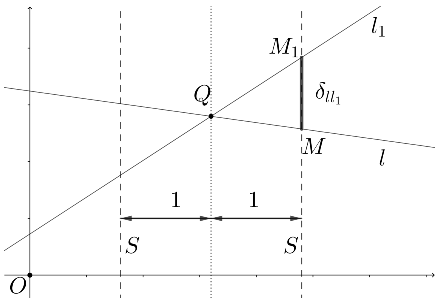


Σχήμα 2.6: Κύκλος S στην γεωμετρία του Γαλιλαίου

Τώρα, αν φέρουμε τον μοναδιαίο κύκλο (δηλαδή τον κύκλο με ακτίνα ίση με 1) με κέντρο το σημείο τομής Q των ευθειών, τότε ως γωνία μεταξύ των ευθειών ορίζεται να είναι το μήκος του τμήματος του κύκλου (δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος πάνω στην ειδική ευθεία) που αποκόπτουν οι δυο ευθείες (Σχήμα 2.7-(β)). Αν οι δύο ευθείες l και l_1 έχουν εξισώσεις $y = k \cdot x + s$ και $y = k_1 \cdot x + s_1$ αντίστοιχα, τότε με χρήση της αναλυτικής γεωμετρίας, μπορούμε να βρούμε ότι η γωνία αυτών των ευθειών θα δίνεται από τη σχέση $\delta = k_1 - k$. Πράγματι, έστω ότι οι συντεταγμένες του σημείου Q είναι (x_0, y_0). Η μία από τις δύο ειδικές ευθείες που απαρτίζουν τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το Q θα έχει εξίσωση $x = x_0 + 1$. Έστω ότι οι ευθείες l, l_1 τέμνουν τον κύκλο στα σημεία M, M_1 αντίστοιχα. Τα M, M_1 θα έχουν συντεταγμένες $(x_0+1, k(x_0+1)+s)$ και $(x_0+1, k_1(x_0+1)+s_1)$ αντίστοιχα. Οπότε, το ειδικό τμήμα MM_1 θα έχει μήκος $\delta_{MM_1} = k_1(x_0+1)+s_1-k(x_0+1)-s = k_1-k$ (αφού το $Q=(x_0,y_0)$ ανήκει και στις δύο ευθείες). Επίσης, μπορούμε να δείξουμε ότι αυτός ο ορισμός της γωνίας έχει νόημα στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, δείχνοντας ότι παραμένει αναλλοίωτη από τους μετασχηματισμούς (Γ). Ειδικότερα, οι (Γ) μεταφέρουν το σημείο τομής των ευθειών στο σημείο τομής των εικόνων των ευθειών, ενώ επίσης μεταφέρουν τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των ευθειών στον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των εικόνων των ευθειών.



(α΄) Ευκλείδεια Γεωμετρία.



(β΄) Γεωμετρία του Γαλιλαίου .

Σχήμα 2.7: Γωνία των ευθειών l και l_1.

Η γωνία μεταξύ δυο ευθειών έχει ένα σημαντικό φυσικό ανάλογο. Μια ευθεία γραμμή στο επίπεδο του Γαλιλαίου αναλογεί στην ομαλή ευθύγραμμη κίνηση ενός σημείου πάνω σε μια ευθεία. Έτσι, η κλίση k της ευθείας αντιστοιχεί στην ταχύτητα του υλικού σημείου, η οποία εξαρτάται άμεσα από το σύστημα αναφοράς, οπότε δεν θα μπορούσε να είναι αναλλοίωτη από τους (Γ). Όμως, στην περίπτωση δυο ευθειών, που όπως είπαμε αντιστοιχούν σε δυο ομοιόμορφες κινήσεις, η ποσότητα $\delta = k_1 - k$ έχει φυσικό νόημα: πρόκειται για την σχετική ταχύτητα των δυο σημείων, δηλαδή την ταχύτητα που έχει το ένα υλικό σημείο ως προς ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το άλλο υλικό σημείο είναι ακίνητο. Με αυτόν τον τρόπο φαίνεται ξεκάθαρα η αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στις ιδιότητες της γεωμετρίας του Γαλιλαίου και τις μηχανικές ιδιότητες της κίνησης ενός υλικού σημείου σε μια ευθεία γραμμή.

Παράδειγμα 2.2.3. Στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου υπέστησαν μια μεγάλη μετατροπή. Στα πλαίσια της θεωρίας της σχετικότητας του Albert Einstein, πλάι στην αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου, δηλαδή την ισοδυναμία όλων των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς, ήρθε να προστεθεί μια δεύτερη αρχή, ως αποτέλεσμα κυρίως του πειράματος των Michelson-Morley: η σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Η δεύτερη αρχή είναι ασυμβίβαστη με την αρχή του Γαλιλαίου, και έτσι προέκυψε η ανάγκη για αλλαγή των υποκείμενων μετασχηματισμών. Οι νέοι μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της θεωρίας του Einstein ονομάζονται μετασχηματισμοί Lorentz. Για την περίπτωση της μονοδιάστατης κίνησης ενός υλικού σημείου σε μια ευθεία, οι μετασχηματισμοί παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot t - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot x + a \\ x' &= -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot t + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot x + b \end{aligned} \tag{M}$$

Και εδώ έχουμε δηλώσει με x τη θέση του υλικού σημείου στην ευθεία ως προς ένα προκαθορισμένο σύστημα αναφοράς, και με t τον χρόνο. Δηλαδή έχουμε συσχετίσει κάθε συμβάν της μονοδιάστατης κίνησης με ένα σημείο που έχει συντεταγμένες (t, x). Θα κάνουμε και εδώ την αλλαγή στα ονόματα των μεταβλητών, για ευθεία σύγκριση με τα προηγούμενα παραδείγματα. Έτσι, η τελική μορφή των παραπάνω μετασχηματισμών θα είναι:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot x - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot y + a \\ y' &= -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot y + b \end{aligned} \tag{M}$$

Οι μετασχηματισμοί (M) μπορούν να πάρουν μία ακόμα ισοδύναμη μορφή. Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ και $-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ συνδέονται μέσω της σχέσης: $\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 - \left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 = 1$. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(x) = \sinh x$ είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $\sinh\theta = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ και $\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Με αυτόν τον τρόπο, οι μετασχηματισμοί (M) γράφονται ισοδύναμα στην μορφή:

$$\begin{aligned} x' &= x\cosh\theta + y\sinh\theta + a \\ y' &= x\sinh\theta + y\cosh\theta + b \end{aligned} \tag{M}$$

Η τελευταία μορφή των μετασχηματισμών (M) προσφέρεται για σύγκριση με τους μετασχηματισμούς (E) του πρώτου παραδείγματος. Η γεωμετρία η οποία μελετά τις ιδιότητες των σχημάτων που μένουν αναλλοίωτες από τους μετασχηματισμούς (M) ονομάζεται γεωμετρία του Minkowski.

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, έχουμε επιλέξει ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων xOy, και βλέπουμε τις σχέσεις (M) ως μετασχηματισμούς που απεικονίζουν το σημείο με συντεταγμένες (x, y) στο σημείο με συντεταγμένες $(x'y')$. Στην γεωμετρία του Minkowski χρησιμοποιούμε συχνά και ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο έχει κοινή αρχή με το xOy, αλλά έχει περιστραφεί σε σχέση με αυτό κατά $45°$ (Σχήμα 2.8). Οι νέες συντεταγμένες θα συμβολίζονται με (X, Y) και, σύμφωνα με όσα είπαμε στο παράδειγμα 2.2.1, θα συνδέονται με τις (x, y) μέσω των σχέσεων:

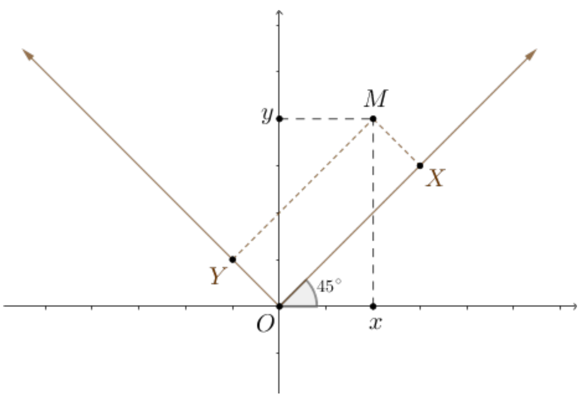
$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$
$$Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

Στις νέες συντεταγμένες, οι μετασχηματισμοί (M) παίρνουν την μορφή:

$$X' = \lambda \cdot X + A$$
$$Y' = \frac{1}{\lambda} \cdot Y + B$$

όπου $A = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}, B = \dfrac{b-a}{\sqrt{2}}$ και $\lambda = \sqrt{\dfrac{1-v}{1+v}}$.

Οι μετασχηματισμοί (M) απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες, και, μάλιστα, παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες. Άρα, αυτές οι έννοιες έχουν νόημα στην γεωμετρία του Minkowski. Επιπλέον, μια ευθεία παράλληλη στον άξονα OX ή στον άξονα OY, απεικονίζεται σε μια ευθεία με την ίδια διεύθυνση. Οι ευθείες που είναι παράλληλες στον OX ή παράλληλες στον OY παίζουν έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην γεωμετρία του Minkowski, καθώς αποτελούν το ανάλογο των ειδικών ευθειών της γεωμετρίας του Γαλιλαίου. Έτσι, στην γεωμετρία του Minkowski υπάρχουν δυο διαφορετικοί τύποι ειδικών ευθειών, οι παράλληλες προς τον OX και οι παράλληλες προς τον OY. Προφανώς, από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχεται ένα μοναδικό ζεύγος ειδικών ευθειών.



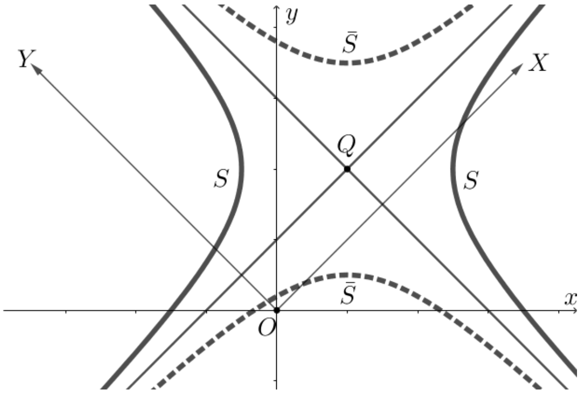
Σχήμα 2.8: Άξονες X και Y.

Μια άλλη διάκριση που γίνεται στην γεωμετρία του Minkowski είναι αυτή μεταξύ ευθειών και ευθυγράμμων τμημάτων πρώτου και δεύτερου είδους. Η διάκριση αυτή γίνεται για μη ειδικές ευθείες και τμήματα. Λέμε ότι μια ευθεία ή ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι του πρώτου (αντίστοιχα δεύτερου) είδους, αν είναι παράλληλη σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και βρίσκεται εντός του ζεύγους των κατακορυφήν γωνιών που σχηματίζονται από τους άξονες OX και OY και περιλαμβάνει τον άξονα Ox (αντίστοιχα Oy). Τα δύο είδη τμημάτων και ευθειών δεν είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους. Αυτή η διάκριση έχει νόημα, μιας και οι μετασχηματισμοί (Μ) απεικονίζουν ευθείες ενός είδους σε ευθείες του ίδιου είδους.

Περνάμε τώρα στον ορισμό της απόστασης μεταξύ δυο σημείων στο επίπεδο του Minkowski.Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $A(x, y)$ και $A_1(x_1, y_1)$ δίνεται από την σχέση: $d_{AA_1} = \sqrt{(x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2}$. Η απόσταση αυτή διατηρείται από τους μετασχηματισμούς (Μ). Προφανώς η απόσταση αυτή μπορεί να είναι πραγματικός ή ακόμα και φανταστικός αριθμός. Ειδικότερα, αν τα σημεία ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα πρώτου είδους, η απόσταση θα είναι πραγματικός αριθμός, ενώ αν ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα δεύτερου είδους, η απόσταση θα είναι μιγαδικός αριθμός. Αυτό τονίζει ακόμα περισσότερο την διαφορά μεταξύ των τμημάτων πρώτου και δεύτερου είδους. Μάλιστα, στην θεωρία της σχετικότητας, οι ευθείες του πρώτου είδους καλούνται χρονικές, ενώ αυτές του δεύτερου είδους καλούνται χωρικές. Μια σημαντική επισήμανση σχετικά με την ισότητα δύο τμημάτων στην γεωμετρία του Minkowski είναι ότι δυο ευθύγραμμα τμήματα θα θεωρούνται ίσα, όχι μόνο αν είναι ισομήκη, αλλά και αν είναι του ίδιου είδους.

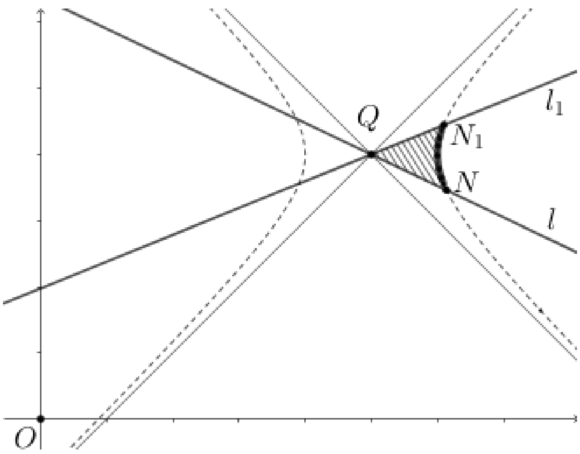
Ο τρόπος με τον οποίο ορίζουμε την γωνία στην γεωμετρία του Minkowski είναι ανάλογος με αυτόν της γεωμετρία του Γαλιλαίου. Θα χρειαστεί κι εδώ να εξετάσουμε την έννοια του κύκλου σ' αυτήν την γεωμετρία. Ο κύκλος με κέντρο το σημείο Q και ακτίνα r ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ των οποίων η απόσταση από το Q ισούται με r. Στην γεωμετρία του Minkowski η απόσταση δύο σημείων μπορεί να είναι φανταστικός αριθμός. Επομένως προκύπτουν και κύκλοι με φανταστική ακτίνα. Για να βρούμε την αναλυτική εξίσωση του κύκλου, θεωρούμε ότι οι συντεταγμένες του Q είναι (a, b). Στην περίπτωση που η ακτίνα r είναι πραγματικός αριθμός (όταν το τμήμα QM είναι του πρώτου είδους) η εξίσωση του κύκλου θα δίνεται από την: $(x-a)^2-(y-b)^2 = r^2$. Στην περίπτωση που η ακτίνα του κύκλου είναι φανταστικός αριθμός της μορφής ir με $r \in \mathbb{R}$ (όταν το τμήμα QM είναι του δεύτερου είδους), τότε η εξίσωση του κύκλου δίνεται από την:$(x-a)^2-(y-b)^2 = -r^2$. Από την σκοπιά της ευκλείδειας γεωμετρίας, οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν υπερβολές με κέντρο το σημείο Q και ασύμπτωτες το ζεύγος των ειδικών ευθειών που διέρχονται από το Q. Στην περίπτωση πραγματικής ακτίνας ο άξονας της υπερβολής είναι παράλληλος με τον άξονα Ox, ενώ στην περίπτωση φανταστικής ακτίνας ο άξονας της υπερβολής είναι παράλληλος με τον άξονα Oy (Σχήμα 2.9).

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την γωνία μεταξύ δυο τεμνόμενων ευθειών l και l_1 ως το μήκος (μετρημένο στην γεωμετρία του Minkowski) του τμήματος που αποκόπτουν οι ευθείες από τον «μοναδιαίο κύκλο» (κύκλος με ακτίνα ίση με 1 ή i) με κέντρο το σημείο τομής των ευθειών. Αυτός ο ορισμός έχει νόημα μόνο αν οι δυο ευθείες είναι του ίδιου είδους, καθώς μόνο τότε οι ευθείες τέμνουν τον ίδιο κύκλο και άρα προσδιορίζουν τμήμα αυτού του κύκλου. Το μήκος του



Σχήμα 2.9: Κύκλοι στην Γεωμετρία του Minkowski. Ο S έχει ακτίνα 3 ενώ ο $\bar{S}$ έχει ακτίνα $3i$.

τμήματος του κύκλου μπορεί να βρεθεί με την μέθοδο της εξάντλησης, αλλά χρησιμοποιώντας μεθόδους της ανάλυσης, μπορεί να δειχθεί ότι αν το σημείο τομής των ευθειών είναι το Q, και αν οι ευθείες l και l_1 τέμνουν τον κύκλο (τον έναν κλάδο της Ευκλείδειας υπερβολής) στα σημεία N και N_1 αντίστοιχα, τότε το μέτρο της γωνίας των ευθειών ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού (υπολογισμένο στην Ευκλείδεια γεωμετρία) του χωρίου NQN_1, όπου NN_1 το τόξο του μοναδιαίου κύκλου στην γεωμετρία του Minkowski (Σχήμα 2.10). Αυτός ο ορισμός της γωνίας έχει νόημα, καθώς οι μετασχηματισμοί (M) απεικονίζουν τους κύκλους στην γεωμετρία του Minkowski στον εαυτό τους.



Σχήμα 2.10: Γωνία στην Γεωμετρία του Minkowski.

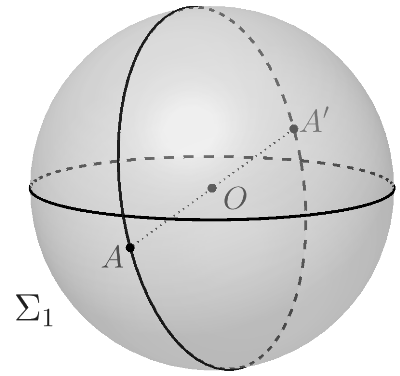
Ας δούμε μια συνοπτική απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού για την εύρεση της γωνίας δύο ευθειών στην γεωμετρία του Minkowski. Θεωρούμε ότι οι ευθείες είναι του πρώτου είδους (η περίπτωση που οι ευθείες είναι του δεύτερου είδους είναι εντελώς πανομοιότυπη). Έπειτα από έναν κατάλληλο μετασχηματισμό, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι το σημείο τομής των ευθειών είναι το (0,0) και ότι η ευθεία l ταυτίζεται με τον άξονα Ox. Ο μοναδιαίος κύκλος σε αυτήν την περίπτωση είναι η Ευκλείδεια υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Ορμώμενοι από την Ευκλείδεια γεωμετρία, για να ορίσουμε το μήκος μιας καμπύλης της μορφής $y = f(x)$ στην γεωμετρία του Minkowski ξεκινάμε με την σχέση: $\Delta s^2 = |\Delta x^2 - \Delta y^2| = |1 - \dfrac{\Delta y^2}{\Delta x^2}|\Delta x^2$, οπότε και καταλήγουμε σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής: $\displaystyle\int_a^b \sqrt{|1 - y'^2|}dx$. Το σημείο τομής της l με τον μοναδιαίο κύκλο είναι το $N = (1, 0)$, ενώ έστω ότι το σημείο τομής N_1 της l_1 με τον κύκλο έχει συντεταγμένες (x_1, y_1). Έτσι, το μήκος του τόξου NN_1 στην γεωμετρία του Minkowski θα δίνεται από την σχέση: $L = \displaystyle\int_1^{x_1} \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 - 1}\, dx = \int_1^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1}\right)$. Από την άλλη, το διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου NON_1 θα δίνεται από την σχέση: $E = 2\left(\dfrac{x_1 y_1}{2} - \displaystyle\int_1^{x_1} y\, dx\right) = 2\left(\dfrac{x_1\sqrt{x_1^2-1}}{2} - \displaystyle\int_1^{x_1} \sqrt{x^2-1}\, dx\right) = \log(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1})$. Επομένως ισχύει $L = E$.

Οι τρεις γεωμετρίες που παρουσιάσαμε σε αυτήν την ενότητα έχουν κοινό τρόπο μέτρησης των αποστάσεων. Και στις τρείς η μέτρηση γίνεται με παραβολικό τρόπο. Ωστόσο, διαφέρουν στον τρόπο μέτρησης των γωνιών. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, στην Ευκλείδεια γεωμετρία χρησιμοποιείται ο συνήθης ελλειπτικός τρόπος. Στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, ορίσαμε την γωνία δυο ευθειών ως το μήκος του τμήματος που αποκόπτουν οι ευθείες από τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των ευθειών. Θυμούμενοι ότι ο κύκλος στη γεωμετρία του Γαλιλαίου συνιστά ένα ζεύγος ειδικών ευθειών, βλέπουμε καθαρά ότι ο τρόπος μέτρησης των γωνιών είναι παραβολικός. Τέλος, στην γεωμετρία του Minkowski,ορίσαμε την γωνία δυο ευθειών που τέμνονται στο O και τέμνουν τον «μοναδιαίο κύκλο» (το ένα σκέλος της Ευκλείδειας υπερβολής) στα σημεία A, B αντίστοιχα, ως το διπλάσιο του εμβαδού του τμήματος AOB. Με εργαλεία ανάλυσης, βρίσκουμε ότι αυτή ακριβώς η ποσότητα ισούται με $k \cdot \log\left(\dfrac{\sin(\widehat{\alpha, i}))/\sin(\widehat{\alpha, j})}{\sin(\widehat{\beta, i})/\sin(\widehat{\beta, j})}\right)$, όπου i και j οι ασύμπτωτες της υπερβολής και k μια σταθερά. Ισοδύναμα, η γωνία των ευθειών α, β μπορεί να οριστεί ως $k \cdot \log\left(\dfrac{A_0I_0/A_0J_0}{B_0I_0/B_0J_0}\right)$, όπου A_0, B_0, I_0, J_0 τα σημεία στα οποία οι ευθείες α, β, i, j τέμνουν μια σταθερή ευθεία o (π.χ. την εφαπτόμενη της υπερβολης στην κορυφή της). Έτσι, βλέπουμε ότι ο τρόπος μέτρησης των γωνιών στην γεωμετρία του Minkowski είναι ο υπερβολικός.

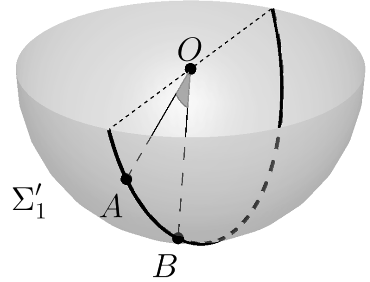
2.3 Τρισδιάστατα μοντέλα των γεωμετριών

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τρισδιάστατα μοντέλα των Cayley-Klein γεωμετριών. Η βασική ιδέα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η εξής: θα θεωρήσουμε κατάλληλες τετραγωνικές επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$, οι οποίες θα σχετίζονται άμεσα με την τετραγωνική μορφή της κύριας κωνικής της εκάστοτε γεωμετρίας· τα σημεία και οι ευθείες κάθε γεωμετρίας θα προκύπτουν ως κατάλληλες τομές της επιφάνειας αυτής. Θα δούμε ότι τα μοντέλα που θα παρουσιάσουμε εδώ ενσωματώνουν με πολύ φυσιολογικό τρόπο τις διαφορές στην μέτρηση αποστάσεων και γωνιών.

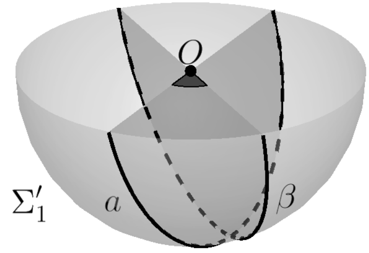
Παράδειγμα 2.3.1. (Ελλειπτική Γεωμετρία)
Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι η κύρια κωνική της ελλειπτικής γεωμετρίας δίνεται σε ομογενείς συντεταγμένες από μια εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. 'Οπως είπαμε και στην αρχή της ενότητας, θέλουμε να δούμε μια τέτοια σχέση όχι από την σκοπιά των ομογενών συντεταγμένων του προβολικού επιπέδου, αλλά από την σκοπιά των συντεταγμένων των σημείων του $\mathbb{R}^3$. Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή της κύριας κωνικής θα μας οδηγήσει τότε σε μια κατάλληλη επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Στην προκειμένη περίπτωση, το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε την μοναδιαία σφαίρα $\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2 = 1$ στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Οι μέγιστοι κύκλοι της Σ_1 είναι ακριβώς οι τομές της Σ_1 με επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας, την αρχή των αξόνων O. Ορίζουμε μια ευθεία στην ελλειπτική γεωμετρία να είναι ένας μέγιστος κύκλος της Σ_1 (Σχήμα 2.11-(α)). Επιπλέον, ονομάζουμε σημείο της ελλειπτικής γεωμετρίας ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων της Σ_1 (αν ορίζαμε ως σημείο της γεωμετρίας μόνο ένα σημείο της Σ_1, τότε η τομή δυο ευθειών θα αποτελούταν από δύο σημεία, αντί για ένα, και θέλουμε να το αποφύγουμε αυτό). Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι το ελλειπτικό επίπεδο αντιπροσωπεύεται από το ένα ημισφαίριο Σ_1', με ταυτισμένα κάθε δύο αντιδιαμετρικά σημεία του κυκλικού συνόρου.
Θεωρούμε δυο σημεία A και B στο ελλειπτικό επίπεδο. Τα σημεία A, B, O ορίζουν ένα μοναδικό (Ευκλείδειο) επίπεδο, και προφανώς η τομή αυτού του επιπέδου με την σφαίρα είναι ένας μέγιστος κύκλος. Ορίζουμε ως απόσταση των A και B στο ελλειπτικό επίπεδο το μήκος του τόξου AB αυτού του κύκλου (Σχήμα 2.11-(β)). Προφανώς, αυτός ο τρόπος μέτρησης της απόστασης είναι ελλειπτικός, καθώς η απόσταση των A και B ισούται με το μέτρο της γωνίας $\widehat{AOB}$. Τώρα, ας θεωρήσουμε δυο ευθείες α και β στο ελλειπτικό επίπεδο. Οι ευθείες αυτές είναι εξ' ορισμού τομές της Σ_1' με επίπεδα διερχόμενα από το O. Ορίζουμε την γωνία των ευθειών a και b να είναι ίση με την δίεδρη γωνία των αντίστοιχων επιπέδων, όπως αυτή μετράται στην Ευκλείδεια γεωμετρία (Σχήμα 2.11-(γ)). Αυτός ο τρόπος μέτρησης των γωνιών είναι ο συνήθης, ελλειπτικός τρόπος. Συνεπώς, στην ελλειπτική γεωμετρία εφαρμόζεται ο ελλειπτικός τρόπος τόσο στην μέτρηση των αποστάσεων, όσο και στην μέτρηση των γωνιών.



(α′) Οι ευθείες της ελλειπτικής γεωμετρίας.



(β′) Μέτρηση αποστάσεων

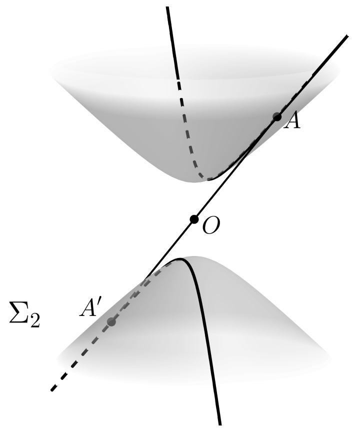


(γ′) Γωνία δύο ευθειών.

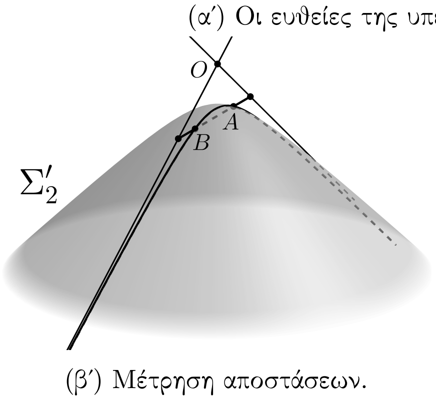
Σχήμα 2.11

Παράδειγμα 2.3.2. (Υπερβολική Γεωμετρία)
Στην ενότητα 1.4, όταν ασχοληθήκαμε με την κατηγοριοποίηση των γεωμετριών Cayley-Klein του επιπέδου, αναφέραμε ότι στην περίπτωση που η κύρια κωνική είναι πραγματική και μη εκφυλισμένη μπορούν να προκύψουν διάφοροι τρόποι μέτρησης αποστάσεων και γωνιών. Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή (περίπτωση II της ενότητας 1.4) η κύρια κωνική δινόταν από την σχέση $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ η οποία, στις ομογενείς συντεταγμένες, περιγράφει έναν κύκλο. Ακόμα είχαμε πει ότι αν περιοριστούμε στο εσωτερικό του κύκλου και θεωρήσουμε μόνο τις ευθείες που τέμνουν τον κύκλο, τότε προκύπτει η υπερβολική γεωμετρία. Με αυτήν την γεωμετρία θα ασχοληθούμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα.

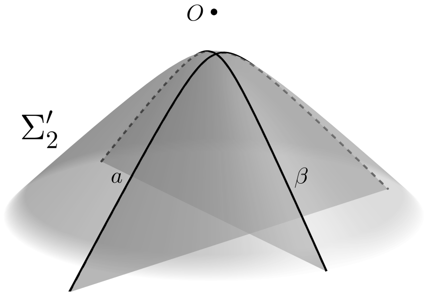
Τα εσωτερικά σημεία του κύκλου χαρακτηρίζονται από την ανισότητα $x^2 + y^2 - z^2 < 0$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια στην οποία εργαζόμαστε είναι η $\Sigma_2 : x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Από την σκοπιά της Ευκλείδειας γεωμετρίας, η Σ_2 είναι ένα δίχωνο υπερβολοειδές. Και εδώ, όπως και στην ελλειπτική γεωμετρία, ταυτίζουμε τα αντιδιαμετρικά σημεία (το αντιδιαμετρικό σημείο A' ενός σημείου A του υπερβολοειδούς είναι το δεύτερο σημείο τομής του υπερβολοειδούς με την ευθεία OA). Έτσι, ορίζουμε ένα σημείο του υπερβολικού επιπέδου ως ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων της Σ_2. Επομένως, το υπερβολικό επίπεδο ουσιαστικά αντιπροσωπεύεται μόνον από τον κλάδο της Σ_2, έστω τον κλάδο Σ_2' που βρίσκεται στον κάτω ημιχώρο $z < 0$. Οι ευθείες στην υπερβολική γεωμετρία ορίζονται ως οι τομές του υπερβολοειδούς με τα επίπεδα που διέρχονται από το O (Σχήμα 2.12-(α)). Και πάλι, από την Ευκλείδεια σκοπιά, πρόκειται απλώς για υπερβολές (ή μάλλον για τον ένα κλάδο της υπερβολής, μιας και τα αντιδιαμετρικά σημεία ταυτίζονται). Εργαζόμενοι στο επίπεδο που ορίζει την υπερβολική ευθεία (την Ευκλείδεια υπερβολή), μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση δύο σημείων με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε την γωνία δυο ευθειών στο πλαίσιο της γεωμετρίας του Minkowski. Δηλαδή, η απόσταση των σημείων A και B του Σ_2' ορίζεται να είναι ίση με την γωνία των ευθειών OA και OB, όπως αυτή μετράται στην γεωμετρία του Minkowski (Σχήμα 2.12-(β)). Θυμίζουμε ότι, σύμφωνα και με όσα ειπώθηκαν στο παράδειγμα 2.3.1, αυτός ο τρόπος μέτρησης των αποστάσεων είναι ο υπερβολικός. Επίσης, η μέτρηση της γωνίας δύο υπερβολικών ευθειών ανάγεται στην μέτρηση της (Ευκλείδειας) δίεδρης γωνίας των επιπέδων που ορίζουν τις ευθείες αυτές (Σχήμα 2.12-(γ)). Επομένως, όπως και στην ελλειπτική γεωμετρία, η μέτρηση των γωνιών γίνεται με τον συνήθη ελλειπτικό τρόπο.



(α′) Οι ευθείες της υπερβολικής γεωμετρίας.



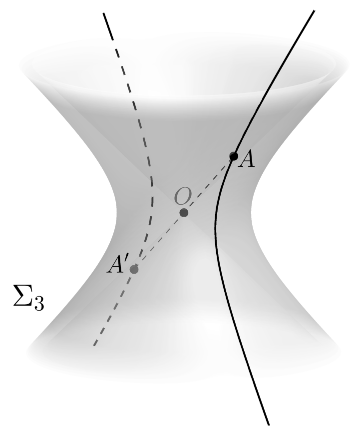
(β′) Μέτρηση αποστάσεων.



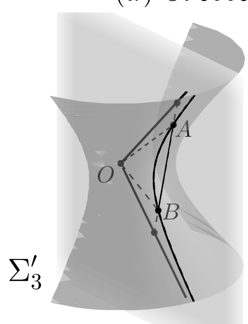
(γ′) Μέτρηση γωνιών.

Σχήμα 2.12

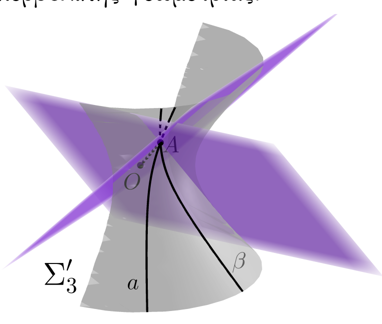
Παράδειγμα 2.3.3. (Διπλά υπερβολική Γεωμετρία)
Στο προηγούμενο παράδειγμα περιγράψαμε την γεωμετρία που προκύπτει αν περιοριστούμε στο εσωτερικό της κύριας κωνικής που δίνεται, σε ομογενείς συντεταγμένες, από την $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Αν τώρα θεωρήσουμε τα σημεία έξω από την κωνική και τις ευθείες που τέμνουν την κωνική θα προκύψει η διπλά υπερβολική γεωμετρία. Σε αντιδιαστολή με το προηγούμενο παράδειγμα, μιας και ασχολούμαστε μόνο με τα σημεία εκτός του κύκλου, η συνθήκη που χαρακτηρίζει τα σημεία είναι η $x^2 + y^2 - z^2 > 0$. Επομένως, η επιφάνεια στην οποία εργαζόμαστε είναι η $\Sigma_3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Από Ευκλείδεια σκοπιά, πρόκειται για ένα μονόχωνο υπερβολοειδές. Όπως κάναμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, ταυτίζουμε τα αντιδιαμετρικά σημεία της Σ_3, οπότε και εδώ ουσιαστικά εργαζόμαστε στην επιφάνεια Σ_3', με ταυτισμένα τα αντιδιαμετρικά σημεία του συνόρου του (χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι επιλέγουμε το τμήμα της Σ_3 για τα σημεία του οποίου ισχύει $y > 0$). Έτσι, τα σημεία της διπλά υπερβολικής γεωμετρίας μπορούν να ειδωθούν ως ζεύγη σημείων της Σ_3.



(α′) Οι ευθείες της διπλά υπερβολικής γεωμετρίας.



(β′) Μέτρηση αποστάσεων.

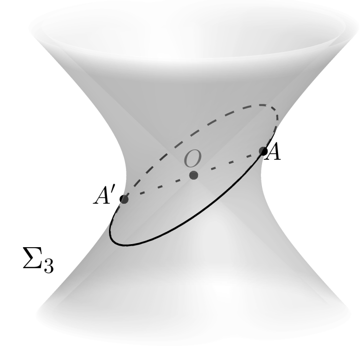


(γ′) Μέτρηση γωνιών.

Σχήμα 2.13

Οι ευθείες της διπλά υπερβολικής γεωμετρίας ορίζονται να είναι εκείνες οι τομές της Σ_3 από επίπεδα διερχόμενα από το O, οι οποίες καταλήγουν να δίνουν Ευκλείδειες υπερβολές (Σχήμα 2.13-(α)). Πάνω σε μια τέτοια ευθεία, μπορούμε να εισαγάγουμε τον υπερβολικό τρόπο μέτρησης των αποστάσεων, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση της υπερβολικής γεωμετρίας (Σχήμα 2.13-(β)). Όσον αφορά τον τρόπο μέτρησης των γωνιών, θεωρούμε το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο A της Σ_3'. Τα Ευκλείδεια επίπεδα που ορίζουν τις ευθείες αυτές είναι εκείνα που περιέχουν το τμήμα OA και τέμνουν την Σ_3 κατά μήκος υπερβολών. Παρατηρούμε ότι μεταξύ όλων αυτών των επιπέδων υπάρχουν δύο «ακραία» επίπεδα, έστω i και j, και είναι ακριβώς εκείνα τα επίπεδα που εφάπτονται στον κώνο K που δίνεται από την $x^2+y^2-z^2=0$. Οπότε, τα επίπεδα που μας ενδιαφέρουν βρίσκονται εντός της δίεδρης γωνίας που σχηματίζουν τα i και j. Έτσι, για τις ευθείες της διπλά υπερβολικής γεωμετρίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον υπερβολικό τρόπο μέτρησης των γωνιών, μιας και όλες αυτές οι ευθείες βρίσκονται εντός της δίεδρης γωνίας των i και j (Σχήμα 2.13-(γ)). Αν δύο ευθείες που διέρχονται από το A προκύπτουν ως τομές των Ευκλείδειων επιπέδων α και β, τότε η γωνία των ευθειών αυτών θα δίνεται από την σχέση: $\delta = \dfrac{\sin(\widehat{\alpha,i}))/\sin(\widehat{\alpha,j})}{\sin(\widehat{\beta,i})/\sin(\widehat{\beta,j})}$, όπου οι γωνίες που υπεισέρχονται στην έκφραση δηλώνουν τις δίεδρες γωνίες των Ευκλείδειων επιπέδων. Το επίπεδο που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο είναι το επίπεδο της διπλά υπερβολικής γεωμετρίας.

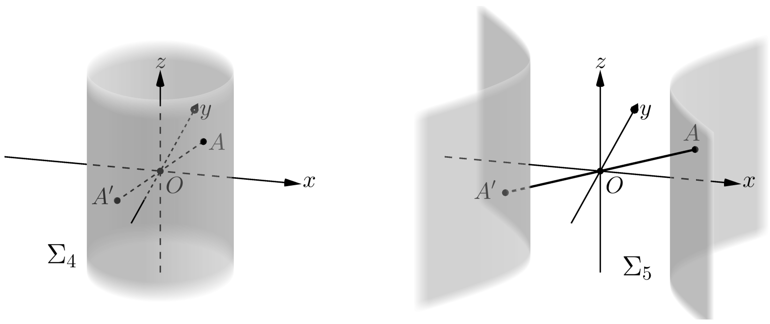
Παράδειγμα 2.3.4. (Συνυπερβολική γεωμετρία)
Η τελευταία περίπτωση που μπορεί να προκύψει από την κύρια κωνική $x^2+y^2-z^2=0$ είναι η συνυπερβολική γεωμετρία. Τα σημεία της συνυπερβολικής γεωμετρίας είναι τα σημεία που βρίσκονται έξω από την κωνική και οι ευθείες είναι εκείνες που δεν τέμνουν την κωνική. Εφόσον έχουμε θεωρήσει σημεία εκτός της κωνικής, όπως κάναμε και στην διπλά υπερβολική γεωμετρία, θα εργαστούμε στην επιφάνεια Σ_3. Εδώ, οι ευθείες της συνυπερβολικής γεωμετρίας ορίζονται να είναι εκείνες οι τομές της Σ_3 από επίπεδα διερχόμενα εκ του O που δίνουν ελλείψεις αντί για υπερβολές (Σχήμα 2.14). Για να συμβεί αυτό, τα επίπεδα αυτά δεν θα πρέπει να τέμνουν τον κώνο Κ (εκτός φυσικά από το σημείο O). Ο τρόπος μέτρησης των αποστάσεων είναι ελλειπτικός, δηλαδή η απόσταση δύο σημείων A, B της Σ_3 ισούται με την Ευκλείδεια γωνία $\widehat{AOB}$. Όσον αφορά τον τρόπο μέτρησης των γωνιών, παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ακραίες περιπτώσεις επιπέδων τα οποία τέμνουν την Σ_3 κατά μήκος ελλείψεων. Τα επίπεδα που μας ενδιαφέρουν στην συνυπερβολική γεωμετρία, δηλαδή εκείνα τα οποία «δίνουν» ελλείψεις, βρίσκονται εντός της δίεδρης γωνίας των δύο παραπάνω επιπέδων. Έτσι, μπορούμε να εισαγάγουμε και εδώ τον υπερβολικό τρόπο μέτρησης των γωνιών, όπως κάναμε και στην διπλά υπερβολική γεωμετρία.



Σχήμα 2.14: Οι ευθείες της συνυπερβολικής γεωμετρίας

Παράδειγμα 2.3.5. Οι δύο γεωμετρίες που απομένουν είναι η συνευκλείδεια και συνminkowski γεωμετρία. Σύμφωνα με όσα είπαμε στην ενότητα 1.4, η κύρια κωνική της συνευκλείδειας γεωμετρίας περιγράφεται σε ομογενείς συντεταγμένες από την $x^2 + y^2 = 0$, και είναι μιγαδική και εκφυλισμένη. Σε αναλογία με τα προηγούμενα παραδείγματα, θα θεωρήσουμε την επιφάνεια $\Sigma_4 : x^2 + y^2 = 1$. Η εξίσωση αυτή περιγράφει, από Ευκλείδεια σκοπιά, έναν κυκλικό κύλινδρο (Σχήμα 2.15-(α)). Ταυτίζουμε και εδώ τα αντιδιαμετρικά σημεία του κυλίνδρου, οπότε και τα σημεία της συνευκλείδειας γεωμετρίας αντιπροσωπεύονται από ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων του κυλίνδρου. Συνεπώς, το μοντέλο της γεωμετρίας είναι στην ουσία ο μισός κύλινδρος Σ_4', έστω αυτός που βρίσκεται στον ημιχώρο $x > 0$, με τα αντιδιαμετρικά σημεία του συνόρου να θεωρούνται ταυτόσημα. Ο τρόπος μέτρησης των αποστάσεων είναι ελλειπτικός, δηλαδή η απόσταση δύο σημείων A και B ισούται με το μέτρο της Ευκλείδειας γωνίας $\widehat{AOB}$. Οι ευθείες της Συνευκλείδειας γεωμετρίας ορίζονται να είναι οι ελλείψεις που προκύπτουν ως τομές του Σ_4' με επίπεδα διερχόμενα από το O. Ο τρόπος μέτρησης των γωνιών είναι παραβολικός.

Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και την Συνminkowski γεωμετρία. Η κύρια κωνική της συνminkowski γεωμετρίας δίνεται από την: $x^2 - y^2 = 0$. Θεωρούμε την επιφάνεια $\Sigma_5 : x^2 - y^2 = 1$ που από Ευκλείδεια σκοπιά παριστάνει έναν υπερβολικό κύλινδρο (Σχήμα 2.15-(β)). Ακριβώς όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, ταυτίζουμε τα αντιδιαμετρικά σημεία του κυλίνδρου, και θεωρούμε ότι αυτό το ζεύγος σημείων αντιπροσωπεύει ένα σημείο της Συνminkowski γεωμετρίας. Άρα, και εδώ αρκεί να περιοριστούμε στον έναν κλάδο του κυλίνδρου, έστω τον Σ_5' που βρίσκεται στον ημιχώρο $x > 0$. Ο τρόπος μέτρησης των αποστάσεων είναι υπερβολικός (τα σημεία που μας ενδιαφέρουν βρίσκονται στο εσωτερικό της δίεδρης γωνίας που σχηματίζουν τα επίπεδα $y = x$ και $y = -x$). Σε αναλογία με την συνευκλείδεια γεωμετρία, οι ευθείες της γεωμετρίας ορίζονται να είναι οι υπερβολές που προκύπτουν ως τομές του Σ_5' με επίπεδα που διέρχονται από το O. Ο τρόπος μέτρησης των γωνιών είναι παραβολικός.



(α′) Η επιφάνεια Σ_4 της συνευκλείδειας γεωμετρίας

(β′) Η επιφάνεια Σ_5 της συνminkowskiγεωμετρίας

Σχήμα 2.15

Οι εννιά γεωμετρίες Cayley-Klein που παρουσιάσαμε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2.1: Γεωμετρίες Cayley-Klein

Τρόπος μέτρησης γωνιών	Τρόπος μέτρησης αποστάσεων		
	Ελλειπτικός	Παραβολικός	Υπερβολικός
Ελλειπτικός	Ελλειπτική Γεωμετρία	Ευκλείδεια Γεωμετρία	Υπερβολική Γεωμετρία
Παραβολικός	Συνευκλείδεια Γεωμετρία	Γεωμετρία του Γαλιλαίου	Συνminkowski Γεωμετρία
Υπερβολικός	Συνυπερβολική Γεωμετρία	Γεωμετρία του Minkowski	Διπλά υπερβολική Γεωμετρία

Κεφάλαιο 3

Ειδικά θέματα

Έπειτα από την γενική περιγραφή όλων των γεωμετριών Cayley-Klein που κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα εξετάσουμε τώρα μερικά επιμέρους θέματα. Θα δούμε πως η αρχή του δυϊσμού συνδέει τις γεωμετρίες Cayley-Klein. Στη συνέχεια θα κάνουμε μια ενδιαφέρουσα σύγκριση των γεωμετριών στη βάση του παραλληλισμού ευθειών. Θα κλείσουμε το κεφάλαιο παρουσιάζοντας δύο τρόπους για να αποκτήσουμε διδιάστατα μοντέλα των Cayley-Klein γεωμετριών.

3.1 Αρχή του Δυϊσμού

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέραμε την αρχή του δυϊσμού στην προβολική γεωμετρία. Είδαμε ότι οι τρόποι μέτρησης αποστάσεων και γωνιών, όπως προκύπτουν από την μετρική Cayley-Klein, είναι δυϊκοί μεταξύ τους. Γεννιέται λοιπόν το ερώτημα: πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα;

Σε ότι μας αφορά, η αρχή του δυϊσμού μπορεί να εφαρμοστεί σε όσα έχουμε πει με σκοπό να συσχετίσει τις γεωμετρίες που μελετάμε (και εν μέρει να δικαιολογήσει τα ονόματα τους). Αν εναλλάξουμε τις έννοιες «σημείο» και «ευθεία» (με την ανάλογη μετατροπή στις έννοιες της απόστασης και της γωνίας· η «απόσταση σημείων» γίνεται «γωνία ευθειών» και αντίστροφα), μπορούμε να πάρουμε μια νέα γεωμετρία, η οποία συνδέεται στενά με την αρχική. Η καινούρια αυτή γεωμετρία ονομάζεται δυϊκή της αρχικής. Η δυϊκή μιας γεωμετρίας Cayley-Klein είναι και η ίδια γεωμετρία Cayley-Klein. Βέβαια, σε κάποιες γεωμετρίες, όπως η ελλειπτική, η διπλά υπερβολική και η γεωμετρία του Γαλιλαίου, η διαδικασία αυτή μεταφέρει κάθε γεωμετρία στον εαυτό της. Οι υπόλοιπες έξι γεωμετρίες συνδέονται στενά με δεσμούς δυϊκότητας. Ωστόσο, πριν προχωρήσουμε στην μελέτη αυτών των σχέσεων, θα δώσουμε μια σύντομη απόδειξη του ισχυρισμού μας ότι η αρχή του δυϊσμού ισχύει στο πλαίσιο της γεωμετρίας του Γαλιλαίου. Η απόδειξη θα γίνει χρησιμοποιώντας την αναλυτική μορφή των μετασχηματισμών που χαρακτηρίζουν την γεωμετρία του Γαλιλαίου, οι οποίοι εισήχθησαν στο πρώτο κεφάλαιο.

Θυμίζουμε ότι στην γεωμετρία του Γαλιλαίου έχουμε θεωρήσει τους θεμελιώδεις μετασχηματισμούς που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= v \cdot x + y + b \end{aligned} \tag{Γ}$$

Αυτοί οι μετασχηματισμοί απεικονίζουν το σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) στο σημείο με συντεταγμένες (x', y'). Η γενικότερη εξίσωση μιας ευθείας l του επιπέδου του Γαλιλαίου (δηλαδή μιας μη ειδικής ευθείας) είναι της μορφής $y = k \cdot x + s$ (*). Επομένως, κάθε ευθεία l καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από τους συντελεστές της, δηλαδή από το ζεύγος (k, s). Έτσι, οι μετασχηματισμοί (Γ) επάγουν ένα μετασχηματισμό, ο οποίος απεικονίζει τις «συντεταγμένες» (k, s) μιας ευθείας l στις «συντεταγμένες» (k', s') μια άλλης ευθείας l'. (Σημειώνουμε εδώ ότι ο παραπάνω ισχυρισμός, πέραν της χρήσης του στην παρούσα απόδειξη, δείχνει ότι η έννοια της ευθείας έχει νόημα στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, μιας και οι (Γ) απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες). Για να δείξουμε ότι η εικόνα της l είναι όντως ευθεία, μπορούμε να λύσουμε τις σχέσεις (Γ) ως προς x, y και έπειτα να αντικαταστήσουμε τις προκύπτουσες σχέσεις στην εξίσωση της ευθείας. Με αυτήν την διαδικασία, βλέπουμε ότι οι (Γ) απεικονίζουν το σύνολο των σημείων (x, y) που ικανοποιούν την $y = k \cdot x + s$, στο σύνολο των σημείων (x', y') που ικανοποιούν την $y' = (k+v) \cdot x' + (-a \cdot k + s + b - a \cdot v)$. Προφανώς η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί στην μορφή $y' = k' \cdot x + s'$, που είναι της μορφής (*), αρκεί να θέσουμε $k' = k + v$ και $s' = -a \cdot k + s + b - a \cdot v$. Οι τελευταίες σχέσεις μπορούν, λοιπόν, να ειδωθούν ως οι μετασχηματισμοί που απεικονίζουν μια ευθεία l με «συντεταγμένες» (k, s) σε μια ευθεία l' με «συντεταγμένες» (k', s'). Επιπλέον, οι σχέσεις αυτές δεν διαφέρουν από τους μετασχηματισμούς (Γ), καθώς θέτοντας $A = -a, B = v$ και $C = b - a \cdot v$, οι σχέσεις αυτές γράφονται στην μορφή:

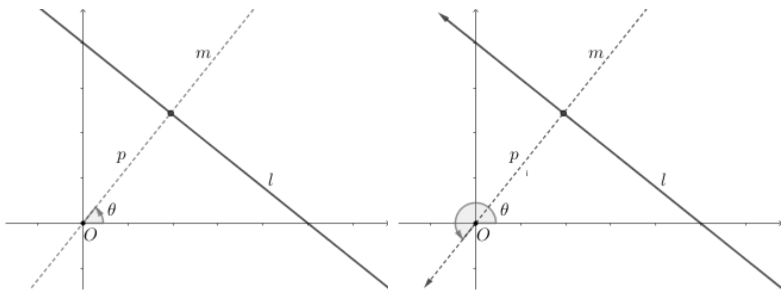
$$\begin{aligned} k' &= k + B \\ s' &= A \cdot k + s + C \end{aligned} \tag{Γ'}$$

και η μορφή αυτή είναι ακριβώς ίδια με τους μετασχηματισμούς (Γ), εκτός βέβαια από την ονοματολογία. Έτσι, βρήκαμε ότι οι μετασχηματισμοί που ορίζουν την γεωμετρία του Γαλιλαίου είναι ίδιοι με αυτούς της δυϊκής της γεωμετρίας του Γαλιλαίου. Επομένως, πέρα από τα ζητήματα της ονοματολογίας, η δυϊκή της γεωμετρίας του Γαλιλαίου ταυτίζεται με την ίδια την γεωμετρία του Γαλιλαίου.

Πάμε τώρα στις υπόλοιπες έξι γεωμετρίες. Όπως είπαμε και παραπάνω, αυτές οι γεωμετρίες μπορούν να ειδωθούν ως ζεύγη, συνδεόμενα από την αρχή του δυϊσμού: η συνευκλείδεια είναι η δυϊκή της Ευκλείδειας, η συνυπερβολική η δυϊκή της υπερβολικής και η συνminkowski γεωμετρία είναι η δυϊκή της γεωμετρίας του Minkowski .

Θα προσπαθήσουμε τώρα να μελετήσουμε λίγο βαθύτερα μια από τις παραπάνω γεωμετρίες, την Συνευκλείδεια, με σκοπό αφενός να τονίσουμε την δυϊκή της σχέση με την Ευκλείδεια γεωμετρία, και αφετέρου να συνδυάσουμε την αρχή του δυϊσμού με όσα ειπώθηκαν στο παράδειγμα 2.3.6.

Καταρχάς, σύμφωνα με την αρχή του δυϊσμού, τα σημεία της Συνευκλείδειας γεωμετρίας θα είναι οι ευθείες της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Η πιο γενική εξίσωση μιας τέτοιας ευθείας l έχει την μορφή $ax+by+c=0$, με $a^2+b^2 \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η παραπάνω εξίσωση της ευθείας μπορεί να γραφτεί στην μορφή: $x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta - p = 0$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει η κάθετη στην ευθεία l με τον θετικό ημιάξονα των x, και p η απόσταση της αρχής των αξόνων O από την ευθεία. Στα επόμενα, βολεύει να θεωρήσουμε την ευθεία l ως προσανατολισμένη ευθεία (Σχήμα 3.1). Τότε, η κάθετη στην l, έστω m, θα θεωρείται κι αυτή προσανατολισμένη, και θα προκύπτει από την περιστροφή της l κατά $\dfrac{\pi}{2}$ γύρω από το σημείο τομής της με την κάθετο m (θετική φορά θεωρείται η αντιωρολογιακή), μεταφέροντας έτσι την θετική κατεύθυνση της l στην m. Επιπλέον, βολεύει να θεωρήσουμε ότι η απόσταση p μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές. Αυτό μπορεί να γίνει αν θεωρήσουμε ότι στην σχέση που δίνει την απόσταση σημείου από ευθεία, ο αριθμητής θα είναι προσημασμένος, χωρίς απόλυτη τιμή. Οπότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, σε ότι ακολουθεί, η θ μπορεί να πάρει όλες τις τιμές μεταξύ 0 και 2π, ενώ η p μπορεί να πάρει τιμές σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.



(α′) Μη προσανατολισμένη ευθεία. (β′) Προσανατολισμένη ευθεία.

Σχήμα 3.1

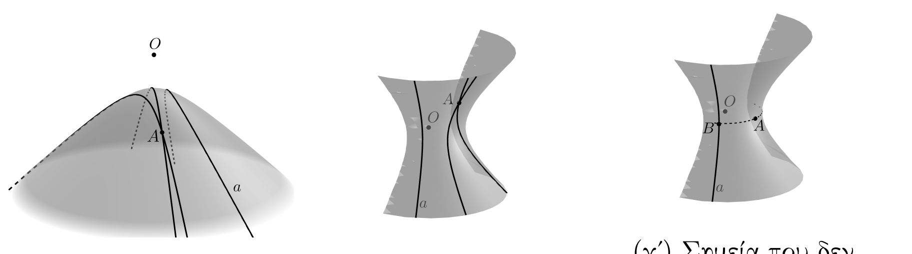
Τώρα, θυμίζουμε ότι στο παράδειγμα 2.3.6,η Συνευκλείδεια γεωμετρία ορίστηκε στην επιφάνεια $\Sigma_4: \; x^2+y^2=1$, η οποία παριστάνει έναν κυκλικό κύλινδρο. Παρατηρούμε ότι κάθε τριάδα της μορφής $(\cos\theta, \sin\theta, p)$ (1) μπορεί να ειδωθεί ως ένα σημείο της επιφάνειας Σ_4. Αντίστροφα, κάθε σημείο της επιφάνειας μπορεί να γραφτεί στην παραπάνω μορφή. (Πράγματι, η τομή του κυλίνδρου με ένα επίπεδο της μορφής $z=p$ είναι ένας μοναδιαίος κύκλος, ο οποίος μπορεί να παραμετρικοποιηθεί από ένα $\theta \in [0, 2\pi)$, και έτσι να έρθει στην παραπάνω μορφή). Επομένως, μπορούμε να αντιστοιχήσουμε τις τριάδες της μορφής (1), που όπως είπαμε αντιπροσωπεύουν το σύνολο των προσανατολισμένων ευθειών στο Ευκλείδειο επίπεδο, στα σημεία του κυκλικού κυλίνδρου Σ_4. Παρατηρούμε ότι αν έχουμε μια δεύτερη ευθεία, που διαφέρει από την l μόνον ως προς τον προσανατολισμό, τότε αυτή θα περιγράφεται από μια τριάδα της μορφής

$(\cos(\pi+\theta), \sin(\pi+\theta), p) = (-\cos\theta, -\sin\theta, p)$. Συνεπώς, οι δύο ευθείες θα αντιστοιχούν σε αντιδιαμετρικά σημεία του κυλίνδρου. Καταλήγουμε στο γεγονός ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σημεία της Συνευκλείδειας γεωμετρίας, δηλαδή οι (μη προσανατολισμένες) Ευκλείδειες ευθείες, αντιστοιχούν ακριβώς σε ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων του κυλίνδρου. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε πλέον να συνδέσουμε τις διαφορετικές εικόνες που είχαμε ως τώρα για την Συνευκλείδεια γεωμετρία: αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του παραδείγματος 2.3.6, και αυτή που προκύπτει από την εφαρμογή της αρχή του δυϊσμού στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

3.2 Σύγκριση των Γεωμετριών

Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε μια ακόμα ενδιαφέρουσα σύγκριση των Cayley-Klein γεωμετριών που μελετάμε.

Μία από τις πιο γνωστές ιδιότητες που αφορούν την υπερβολική γεωμετρία είναι η άρνηση του αξιώματος των παραλλήλων. Ως γνωστόν, στην Ευκλείδεια γεωμετρία, δεχόμαστε ότι από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλη προς αυτήν την ευθεία. Στην υπερβολική γεωμετρία, ενθυμούμενοι και το μοντέλο που παρουσιάσαμε, βλέπουμε ότι αν έχουμε μια δεδομένη υπερβολική ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, υπάρχουν άπειρες ευθείες που διέρχονται από το σημείο και δεν τέμνουν την ευθεία (Σχήμα 3.2-(α)). Αυτό συμβαίνει επειδή υπάρχουν άπειρα επίπεδα που περιέχουν το σημείο αυτό και τέμνουν το υπερβολοειδές, χωρίς όμως να τέμνουν πάνω στο υπερβολοειδές το επίπεδο που ορίζει την υπερβολική ευθεία. Αυτή η ιδιότητα ισχύει και στην διπλά υπερβολική γεωμετρία (Σχήμα 3.2-(β)). Αντίθετα, στην ελλειπτική γεωμετρία, ισχύει ότι από σημείο εκτός ευθείας δεν άγεται καμία παράλληλη προς την ευθεία· δύο ευθείες του ελλειπτικού επιπέδου τέμνονται πάντα. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να θυμηθούμε ότι οι ευθείες του ελλειπτικού επιπέδου είναι οι μέγιστοι κύκλοι της μοναδιαίας σφαίρας του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου, και προφανώς αυτοί οι κύκλοι τέμνονται πάντα σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας, δηλαδή σε ένα σημείο του ελλειπτικού επιπέδου.



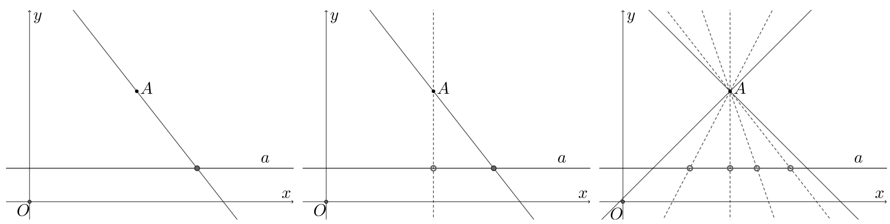
(α′) Παράλληλες ευθείες στην υπερβολικής γεωμετρία

(β′) Παράλληλες ευθείες στην διπλά υπερβολική γεωμετρία

(γ′) Σημεία που δεν ενώνονται με ευθεία στην διπλά υπερβολική γεωμετρία

Σχήμα 3.2

Μια άλλη ιδιότητα της Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι ότι δύο σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου καθορίζουν μια μοναδική Ευκλείδεια ευθεία (Σχήμα 3.3-(α)). Αυτό παραμένει σωστό τόσο για την ελλειπτική, όσο και για την υπερβολική γεωμετρία. Ωστόσο, δεν ισχύει στο πλαίσιο της διπλά υπερβολικής γεωμετρίας, καθώς κάθε δοθείσα ευθεία περιέχει άπειρα σημεία, για τα οποία δεν υπάρχει ευθεία που να τα συνδέει με ένα δεδομένο σημείο εκτός της δοθείσης ευθείας. Είναι εύκολο να το δούμε αυτό, καθώς αν A το δοθέν σημείο και B ένα μεταβλητό σημείο της ευθείας, τότε εν γένει τα επίπεδα AOB δεν τέμνουν την επιφάνεια Σ_3 (το μονόχωνο υπερβολοειδές) κατά μήκος μιας υπερβολής (Σχήμα 3.2-(γ)). Στο ίδιο πνεύμα βρίσκεται και η γεωμετρία του Minkowski, καθώς αν θεωρήσουμε ότι το επίπεδο του Minkowski αποτελείται από τα σημεία του (συνηθισμένου) επιπέδου μαζί με τις ευθείες του ενός είδους, έστω του πρώτου, τότε για μία δεδομένη ευθεία του πρώτου είδους υπάρχουν άπειρα σημεία σε αυτήν την ευθεία, τα οποία δεν μπορούν να ενωθούν με ένα σημείο εκτός αυτής μέσω ευθειών του πρώτου είδους (Σχήμα 3.3-(γ)). Αντίθετα, στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, αν ορίσουμε το επίπεδο του Γαλιλαίου ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου μαζί με τις μη ειδικές ευθείες, τότε αν έχουμε μια ευθεία και ένα σημείο A εκτός αυτής, το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει την ειδική ευθεία που διέρχεται από το A δεν μπορεί να ενωθεί με το A μέσω μιας μη ειδικής ευθείας (Σχήμα 3.3-(β)).



(α′) Ευκλείδεια γεωμετρία (β′) Γεωμετρία του Γαλιλαίου (γ′) Γεωμετρία του Minkowski

Σχήμα 3.3: Σημεία που δεν ενώνονται με ευθεία

Τα παραπάνω συνοψίζονται στους πίνακες 3.1 και 3.2, οι οποίοι χαρακτηρίζουν τις γεωμετρίες Cayley-Klein από την άποψη του παραλληλισμού των ευθειών και της ένωσης των σημείων.

Πίνακας 3.1: Αριθμός σημείων σε δεδομένη ευθεία που δεν μπορούν να ενωθούν με σημείο εκτός της ευθείας

Τρόπος μέτρησης γωνιών	Τρόπος μέτρησης αποστάσεων		
	Ελλειπτικός	Παραβολικός	Υπερβολικός
Ελλειπτικός	0	0	0
Παραβολικός	1	1	1
Υπερβολικός	∞	∞	∞

Πίνακας 3.2: Αριθμός ευθειών που διέρχονται από σημείο εκτός δεδομένης ευθείας και δεν τέμνουν την ευθεία αυτή

Τρόπος μέτρησης γωνιών	Τρόπος μέτρησης αποστάσεων		
	Ελλειπτικός	Παραβολικός	Υπερβολικός
Ελλειπτικός	0	1	∞
Παραβολικός	0	1	∞
Υπερβολικός	0	1	∞

3.3 Διδιάστατα μοντέλα

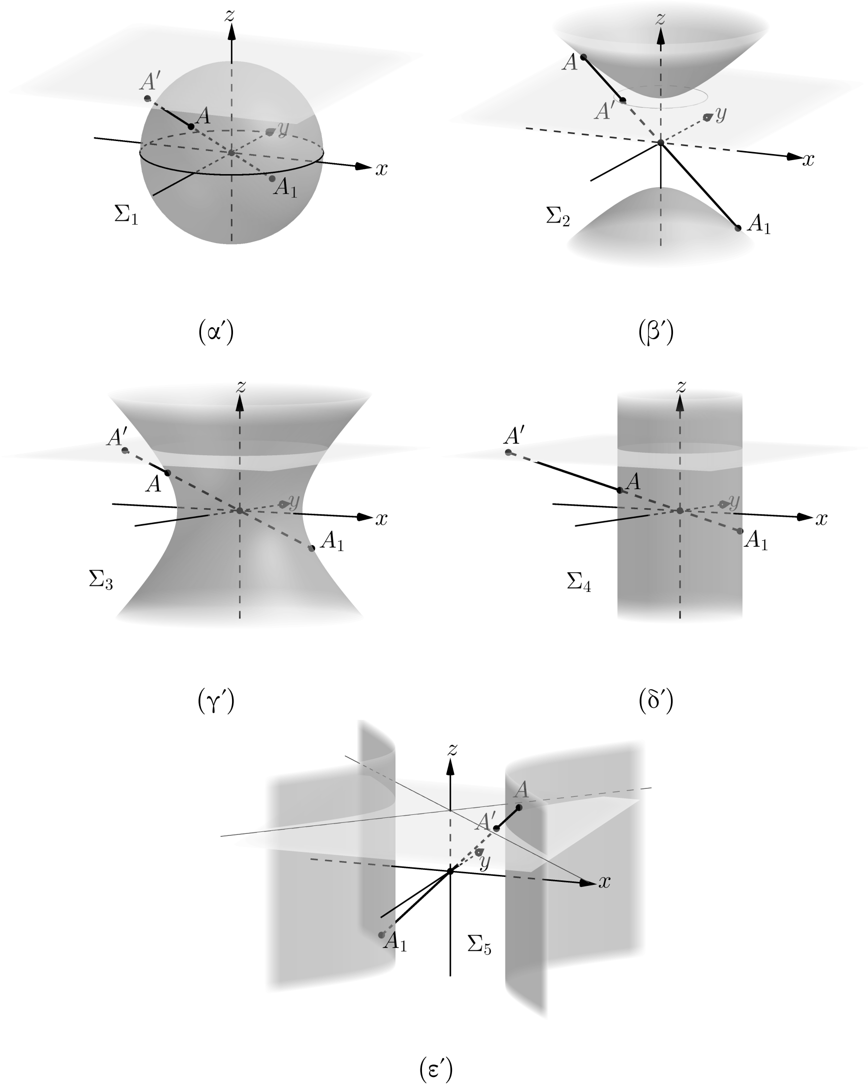
Η τελευταία ενότητα είναι αφιερωμένο στην απόκτηση επίπεδων μοντέλων των Cayley-Klein γεωμετριών. Δεν θα ασχοληθούμε με τις τρείς γεωμετρίες που συζητήσαμε στην ενότητα 2.2, δηλαδή την Ευκλείδεια, την γεωμετρία του Γαλιλαίου και την γεωμετρία του Minkowski. Θα δούμε πως μπορούμε να περάσουμε από τα τρισδιάστατα μοντέλα του προηγούμενου κεφαλαίου σε επίπεδα μοντέλα. Μάλιστα, θα το επιτύχουμε αυτό με δύο τρόπους, παράγοντας δύο διαφορετικά επίπεδα μοντέλα για κάθε γεωμετρία.

Το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η κεντρική προβολή μιας σφαίρας σε ένα επίπεδο. Για να προβάλλουμε μια σφαίρα σε ένα επίπεδο, εργαζόμαστε ως εξής: επιλέγουμε ένα σημείο Q, το οποίο ονομάζουμε κέντρο προβολής, και ένα επίπεδο π, το οποίο ονομάζουμε επίπεδο προβολής και αποτελεί την εικόνα της απεικόνισης που κατασκευάζουμε· τότε, η εικόνα του τυχαίου σημείου A της σφαίρας είναι το σημείο τομής A' της ευθείας QA και του επιπέδου π. Σημειώνουμε ότι το επίπεδο π συνήθως επιλέγεται να είναι εφαπτόμενο στην σφαίρα. Η επιλογή του κέντρου Q είναι σημαντική, καθώς διαφορετικές επιλογές δίνουν απεικονίσεις με πολύ διαφορετικές ιδιότητες, γεγονός που θα φανεί καλύτερα στα παρακάτω παραδείγματα.

Προχωράμε τώρα στο κύριο μέρος του κεφαλαίου. Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω τεχνική για να προβάλλουμε κάθε μία από τις επιφάνειες Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 (τις οποίες εισαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) σε ένα δεδομένο επίπεδο της επιλογής μας. Η διαφορά των απεικονίσεων που θα δούμε έγκειται, επομένως, στην διαφορετική επιλογή του κέντρου προβολής Q. Αυτή η διαδικασία θα μας δώσει δυο διαφορετικές συλλογές επίπεδων μοντέλων.

3.3.1 Μοντέλα του Klein

Σε αυτήν την ενότητα, το σημείο που θα επιλέξουμε ως κέντρο προβολής είναι η αρχή των αξόνων O. Η απεικόνιση που προκύπτει ονομάζεται γνωμονική προβολή. Τα μοντέλα που θα προκύψουν ονομάζονται μοντέλα του Klein. Το επίπεδο προβολής π είναι, σε όλη την διάρκεια αυτής της ενότητας, το επίπεδο $z = 1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το τυχαίο σημείο A της επιφάνειας απεικονίζεται στο σημείο τομής A' της ευθείας OA και του επιπέδου π (Σχήμα 3.4). Είναι φανερό ότι τα αντιδιαμετρικά σημεία κάθε σφαίρας απεικονίζονται στο ίδιο σημείου του επιπέδου π. Έτσι, σε συμφωνία με όσα ειπώθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να πούμε ότι τα σημεία κάθε γεωμετρίας αντιπροσωπεύονται από σημεία του επιπέδου π. Ακόμα, οι ευθείες κάθε γεωμετρίας, δηλαδή οι τομές της επιφάνειας με επίπεδα διερχόμενα από το O, απεικονίζονται σε ευθείες του επιπέδου π, και, πιο συγκεκριμένα, στην τομή του επιπέδου π με το επίπεδο που ορίζει την ευθεία. Συνεπώς, στα μοντέλα αυτά οι ευθείες κάθε γεωμετρίας αντιπροσωπεύονται από ευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα του επιπέδου π.



Σχήμα 3.4: Γνωμονική προβολή

Προφανώς, κάθε μία επιφάνεια εκ των Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 απεικονίζεται σε διαφορετικό υποσύνολο του επιπέδου π. Εύκολα βλέπουμε ποια είναι η εικόνα της απεικόνισης για κάθε επιφάνεια. Για παράδειγμα, το ελλειπτικό επίπεδο αντιπροσωπεύεται από ολόκληρο το (προβολικό) επίπεδο π. Το υπερβολικό επίπεδο αντιπροσωπεύεται από το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του (προβολικού) επιπέδου π με κέντρο το $(0,0,1)$, ενώ αντίστοιχα τα επίπεδα της συνυπερβολικής και της διπλά υπερβολικής γεωμετρίας από το εξωτερικό του παραπάνω κύκλου. Το επίπεδο της συνευκλείδειας γεωμετρίας αντιπροσωπεύεται από το (προβολικό) επίπεδο π χωρίς το σημείο $(0,0,1)$, και τέλος το επίπεδο της συνminkowski γεωμετρίας από το εσωτερικό εκείνου του χωρίου του π που σχηματίζεται από τις διχοτόμους των τεταρτημορίων και περιλαμβάνει ολόκληρη την ευθεία του π που είναι παράλληλη στον άξονα των x.

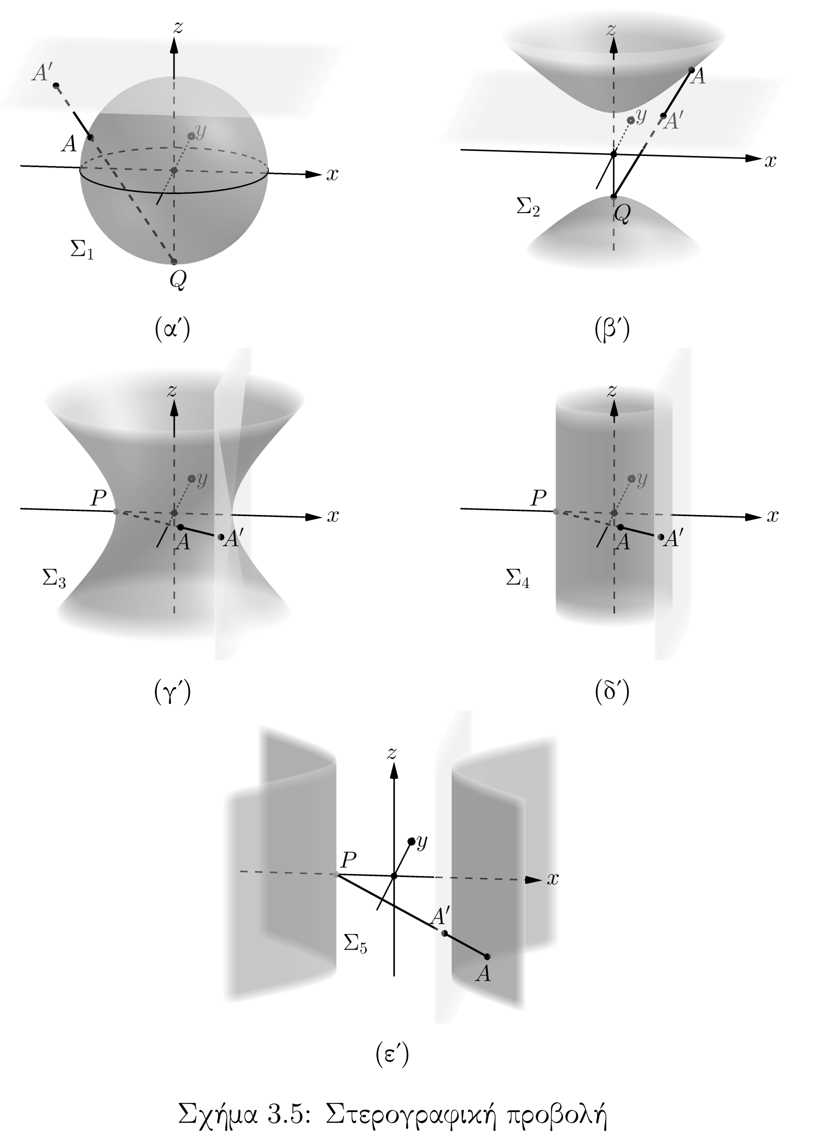
3.3.2 Μοντέλα του Poincaré

Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε την στερεογραφική προβολή. Στην στερεογραφική προβολή, το κέντρο προβολής επιλέγεται να είναι ένα σημείο της επιφάνειας, και όχι ένα σημείο εκτός αυτής. Τα μοντέλα που θα προκύψουν ονομάζονται μοντέλα του Poincaré.

Πριν προχωρήσουμε, σημειώνουμε ότι μια πολύ σημαντική ιδιότητα της στερεογραφικής προβολής που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η το γεγονός ότι απεικονίζει τις επίπεδες τομές κάθε επιφάνειας σε ευθείες και κύκλους του επιπέδου προβολής π. Αυτή η ιδιότητα θα μας βοηθήσει να δούμε σε τι συνίστανται οι ευθείες κάθε γεωμετρίας στα επίπεδα μοντέλα του Poincaré. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα πούμε περισσότερα σχετικά με αυτήν την ιδιότητα.

Ξεκινάμε από την ελλειπτική και την υπερβολική γεωμετρία. Παρατηρούμε ότι τόσο η Σ_1 όσο και η Σ_2 περιέχουν το σημείο $Q(0,0,-1)$. Έτσι, μπορούμε να προβάλλουμε κάθε μία από τις δύο επιφάνειες στο επίπεδο π, το οποίο εδώ επιλέγουμε να είναι το $z=1$. Το επίπεδο π εφάπτεται και στις δύο «σφαίρες» στο, αντιδιαμετρικό του Q, σημείο $Q'(0,0,1)$ (Σχήμα 3.5-(α)). Στην περίπτωση της ελλειπτικής γεωμετρίας η εικόνα της Σ_1 είναι ολόκληρο το επίπεδο π. Θυμούμενοι όσα είπαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο σχετικά με τα σημεία του ελλειπτικού επιπέδου και την ουσιαστική ταύτιση αντιδιαμετρικών σημείων της επιφάνειας, μπορούμε να περιορίσουμε την απεικόνιση στο ημισφαίριο Σ_1'. Αλλά τότε η εικόνα της απεικόνισης θα είναι εκείνο το χωρίο του π που απαρτίζεται από το εσωτερικό του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=4$, μαζί με τα μισά σημεία του συνόρου(δηλαδή τα αντιδιαμετρικά σημεία του συνόρου θεωρούνται ταυτόσημα). Σύμφωνα με την ιδιότητα της στερεογραφικής προβολής που αναφέραμε παραπάνω, οι ευθείες της ελλειπτικής γεωμετρίας αντιπροσωπεύονται στο μοντέλο αυτό από Ευκλείδειες ευθείες και κύκλους. Για την ακρίβεια, πρόκειται για Ευκλείδειους κύκλους του επιπέδου π που τέμνουν τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=4$ σε αντιδιαμετρικά σημεία.

Παρόμοια είναι η κατάσταση και στην υπερβολική γεωμετρία. Η εικόνα του «ημισφαιρίου» Σ_2' (του ενός εκ των δύο κλάδων του Ευκλείδειου υπερβολοειδούς Σ_2) μέσω της στερεογραφικής προβολής από το Q είναι το εσωτερικό του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ (Σχήμα 3.2-(β)). Όπως και στην περίπτωση της ελλειπτικής γεωμετρίας, οι υπερβολικές ευθείες αντιπροσωπεύονται από Ευκλείδειες ευθείες και κύκλους του επιπέδου π. Πιο συγκεκριμένα, στο μοντέλο αυτό οι ευθείες αντιπροσωπεύονται από τις διαμέτρους του κύκλου, καθώς και όλα τα κυκλικά τόξα που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου και είναι ορθογώνια προς αυτόν.



Σχήμα 3.5: Στερογραφική προβολή

Για τις υπόλοιπες τέσσερις γεωμετρίες, μπορούμε να προβάλλουμε κάθε μια εκ των Σ_3, Σ_4, Σ_5 από το σημείο $P(-1, 0, 0)$, το οποίο άλλωστε ανήκει και στις τρείς αυτές επιφάνειες (Σχήμα 3.5-(γ-ε)). Το επίπεδο προβολής της απεικόνισης επιλέγεται εδώ να είναι το επίπεδο π_1: $x = 1$, το οποίο εφάπτεται σε κάθε επιφάνεια στο, αντιδιαμετρικό του P, σημείο $P'(1, 0, 0)$. Επιπλέον, η στερεογραφική προβολή πηγαίνει τις επίπεδες τομές της Σ_3 σε Ευκλείδειες υπερβολές του π_1, και τις επίπεδες τομές των Σ_4 και Σ_5 σε Ευκλείδειες παραβολές. Συνεπώς, οι ευθείες στα μοντέλα της διπλά υπερβολικής και της Συνυπερβολικής γεωμετρίας αντιστοιχούν σε Ευκλείδειες υπερβολές, ενώ οι ευθείες στα μοντέλα της Συνευκλείδειας και Συνminkowski γεωμετρίας σε παραβολές.

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι τα παραπάνω μοντέλα ορίζονται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Αντίθετα, η στερεογραφική προβολή, όπως αυτή χρησιμοποιήθηκε παραπάνω, απεικονίζει τις Σ_1, Σ_2 στο αντιστροφικό Ευκλείδειο επίπεδο, την Σ_4 στο αντιστροφικό επίπεδο του Minkowski,και τις Σ_4, Σ_5 στο αντιστροφικό επίπεδο του Γαλιλαίου. Θα κάνουμε τώρα μία σύντομη επισκόπηση της φύσης αυτών των επιπέδων, όπου θα φανεί η θεμελιώδης διαφορά τους.

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, ονομάζουμε αντιστροφή ως προς κύκλο με κέντρο Q και ακτίνα $r = \sqrt{k}$ μια απεικόνιση που στέλνει κάθε σημείο A του Ευκλείδειου επιπέδου στο σημείο A', το οποίο βρίσκεται στην ημιευθεία QA και είναι τέτοιο ώστε να ισχύει $QA \cdot QA' = k$. Είναι φανερό ότι ο παραπάνω ορισμός είναι ελλιπής, γιατί αποτυγχάνει να δώσει την εικόνα του σημείου που απέχει μηδενική απόσταση από το Q, δηλαδή το ίδιο το Q. Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, εφοδιάζουμε το Ευκλείδειο επίπεδο με ένα ακόμη σημείο, έστω Ω, το οποίο ονομάζεται σημείο στο άπειρο, και θεωρούμε ότι η αντιστροφή εναλλάσσει το Ω με το Q. Το επίπεδο που προκύπτει τότε, δηλαδή το Ευκλείδειο επίπεδο μαζί με το σημείο στο άπειρο, αποτελεί το αντιστροφικό Ευκλείδειο επίπεδο. Έτσι, η αντιστροφή μπορεί πλέον να οριστεί σε ολόκληρο το νέο επίπεδο. Αναφέρουμε επιπλέον πως θεωρούμε ότι κάθε ευθεία του παλιού επιπέδου «περνάει» από το Ω (επεκτείνουμε δηλαδή κάθε ευθεία του Ευκλείδειου επιπέδου με το Ω). Ένας τρόπος να δούμε το αντιστροφικό Ευκλείδειο επίπεδο είναι να χρησιμοποιήσουμε την στερεογραφική προβολή. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, η στερεογραφική προβολή δεν ορίζεται στο σημείο Q από το οποίο προβάλλουμε την σφαίρα. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι αν, στο επίπεδο προβολής π, κινηθούμε κατά μήκος μιας ευθείας ή καμπύλης «προς το άπειρο», τα σημεία της σφαίρας που απεικονίζονται σε αυτήν την ευθεία τείνουν προς το σημείο Q. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τιμή της στερεογραφικής προβολής στο σημείο Q είναι ακριβώς το σημείο Ω. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μια 1-1 απεικόνιση της σφαίρας επί του αντιστροφικού Ευκλείδειου επιπέδου.

Παρόμοια εικόνα ισχύει και για την γεωμετρία του Γαλιλαίου. Εδώ, η αντιστροφή ορίζεται ακριβώς όπως και στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Ωστόσο, εδώ υπάρχουν άπειρα σημεία τα οποία απέχουν μηδενική (μη ειδική) απόσταση από το Q, όλα τα σημεία της ειδικής ευθείας που διέρχεται από το Q. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα, θεωρούμε το αντιστροφικό επίπεδο του Γαλιλαίου, το οποίο αποτελείται από το σύνηθες επίπεδο του Γαλιλαίου, εφοδιασμένο με μια «ειδική ευθεία στο άπειρο» Ω_ρ, τα σημεία της οποίας θεωρούνται ότι αποτελούν την εικόνα της ειδικής ευθείας από το Q, μέσω της αντιστροφής. Όπως και πριν, ο κύλινδρος Σ_4 αποτελεί ένα καλό μοντέλο αυτού του εκτεταμένου επιπέδου, αν θεωρήσουμε ότι η γενέτειρα του κυλίνδρου που διέρχεται από το σημείο προβολής Π απεικονίζεται, μέσω της στερεογραφικής απεικόνισης, στην ειδική ευθεία στο άπειρο Ω_ρ. Τέλος, ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και στην γεωμετρία του Minkowski. Εδώ, για κάθε σημείο Q που λειτουργεί ως κέντρο αντιστροφής, υπάρχουν άπειρα σημεία που βρίσκονται σε μηδενική απόσταση από το Q: τα σημεία του ζεύγους των ειδικών ευθειών που διέρχονται από το Q. Έτσι, το αντιστροφικό επίπεδο του Minkowski είναι εφοδιασμένο με ένα ζεύγος «ειδικών ευθειών στο άπειρο» Ω_1 και Ω_2, που θεωρούμε ότι είναι οι εικόνες των ειδικών ευθειών που διέρχονται από το Q, μέσω της αντιστροφής. Η στερεογραφική προβολή του μονόχωνου υπερβολοειδούς Σ_3 μπορεί να παράσχει ένα καλό μοντέλο για το επεκταμένο αυτό το επίπεδο. Με αυτή την διερεύνηση, ελπίζουμε ότι κατέστη περισσότερο σαφές το γεγονός ότι οι διάφορες γεωμετρίες δεν ορίζονται στο ίδιο επίπεδο, αλλά σε γεωμετρικές κατασκευές οι οποίες διαφέρουν σε κρίσιμα σημεία.

Κεφάλαιο 4

Γενικευμένοι μιγαδικοί αριθμοί

Στα επόμενα κεφάλαια αλλάζουμε τελείως την προσέγγιση μας. Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε και να μελετήσουμε τις γεωμετρίες Cayley-Klein χρησιμοποιώντας ως εργαλεία τρία διαφορετικά σύνολα αριθμών: τους μιγαδικούς, τους δυϊκούς και τους διπλούς αριθμούς. Ξεκινώντας από το αρκετά γνωστό παράδειγμα των μιγαδικών αριθμών, θα δούμε πως μπορούμε να ταυτίσουμε τα σημεία ενός επιπέδου με τέτοιους αριθμούς, κάτι που στη συνέχεια θα μας επιτρέψει να αποκτήσουμε αναλυτικές εκφράσεις για διάφορες γεωμετρικές ιδιότητες, και κυρίως για τους μετασχηματισμούς που χαρακτηρίζουν κάθε γεωμετρία. Η προσέγγιση αυτή θα αποδειχθεί πολύ προσοδοφόρα.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα σύνολα αριθμών που θα χρησιμοποιήσουμε. Θα αρχίσουμε υπενθυμίζοντας κάποιες ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών, προκειμένου να γίνει καλύτερα η σύγκριση με τα άλλα δύο, λιγότερα γνωστά, σύνολα αριθμών. Έπειτα, θα εισαγάγουμε τους δυϊκούς και τους διπλούς αριθμούς. Θα εξετάσουμε κάποιες αλγεβρικές ιδιότητες αυτών των αριθμών, πάντα σε σύγκριση με τους μιγαδικούς αριθμούς. Η σύνδεση με την γεωμετρία θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.

4.1 Μιγαδικοί αριθμοί

Ως γνωστόν, οι μιγαδικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί z της μορφής $z = x + iy$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και i η φανταστική μονάδα, για την οποία ισχύει ότι $i^2 = -1$. Οι πραγματικοί αριθμοί x και y ονομάζονται πραγματικό και φανταστικό μέρος του z αντίστοιχα, και συμβολίζονται με $x = \mathrm{Re}(z)$ και $y = \mathrm{Im}(z)$. Οι μιγαδικοί αριθμοί με $\mathrm{Im}(z) = 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ εκείνοι με $\mathrm{Re}(z) = 0$ ονομάζονται φανταστικοί. Αν ο μιγαδικός αριθμός z είναι διάφορος του 0, μπορεί να γράφει στην μορφή $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου το $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού αριθμού z και το θ ονομάζεται όρισμα του μιγαδικού αριθμού z (συμβολισμός $\theta = \arg z$).

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το θ είναι το πρωτεύον όρισμα του z, δηλαδή παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Σημειώνουμε ότι δεν ορίζεται όρισμα για τον μιγαδικό αριθμό $z = 0$.

Μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών. Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z = x + iy$ και $z_1 = x_1 + iy_1$. Το άθροισμα των z και z_1 δίνεται από την σχέση: $z + z_1 = (x + x_1) + i(y + y_1)$. Ο πολλαπλασιασμός των z και z_1 γίνεται ως εξής: $z \cdot z_1 = (x + iy)(x_1 + iy_1) = = xx_1 + i(xy_1) + i(yx_1) + i^2(yy_1) = (xx_1 - yy_1) + i(xy_1 + yx_1)$. Δηλαδή, βλέπουμε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς ισχύει $\mathrm{Re}(zz_1) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z_1)$ και $\mathrm{Im}(zz_1) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z_1)$. Κάποιες αλγεβρικές ιδιότητες που αφορούν το μέτρο και το όρισμα του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών, και θα φανούν χρήσιμες παρακάτω, είναι οι:

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \arg z \cdot w = \arg z + \arg w$
- $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}, \quad \arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$ (με $w \neq 0$)

Αλγεβρικά, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αποκτά δομή σώματος.

Ορίζουμε τον συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ να είναι ο αριθμός $\overline{z} = x - iy$. Εύκολα βλέπουμε ότι για τον συζυγή $\overline{z}$ ισχύει $|\overline{z}| = |z|$ και $\arg \overline{z} = -\arg z$. Επιπλέον, το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z μπορεί να γραφεί, με την βοήθεια του συζυγή του, ως: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Το άθροισμα ενός μιγαδικού z με τον συζυγή του z είναι πραγματικός αριθμός: $z + \overline{z} = 2Re(z)$, ενώ η διαφορά τους είναι φανταστικός αριθμός: $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$. Επίσης, ισχύει ότι $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ πραγματικός$\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow \arg z = 0$ ή π, και όμοια $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ φανταστικός$\Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \arg z = \dfrac{\pi}{2}$ ή $\dfrac{3\pi}{2}$. Τέλος, για δύο μιγαδικούς αριθμούς z, z_1 ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (η τελευταία σχέση απαιτεί επιπλέον $z_1 \neq 0$):

$$\overline{z + z_1} = \overline{z} + \overline{z_1}, \quad \overline{z - z_1} = \overline{z} - \overline{z_1}, \quad \overline{z \cdot z_1} = \overline{z} \cdot \overline{z_1}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z_1}}$$

4.2 Δυϊκοί αριθμοί

Οι μιγαδικοί αριθμοί δεν είναι το μοναδικό σύνολο αριθμών που μπορεί επεκτείνει τους πραγματικούς αριθμούς. Για να δημιουργήσουμε νέα σύνολα αριθμών, αρκεί να κρατήσουμε το πλαίσιο των μιγαδικών αριθμών, και να αντικαταστήσουμε την φανταστική μονάδα i με μια νέα, διαφορετική οντότητα, η οποία θα ικανοποιεί κάποια επιθυμητή ιδιότητα. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε έναν δυϊκό αριθμό z ως τον αριθμό της μορφής $z = x + \varepsilon y$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και ε ικανοποιεί την $\varepsilon^2 = 0$. Στα επόμενα, η οντότητα ε θα ονομάζεται δυϊκή μονάδα, σε αντιδιαστολή προς την φανταστική μονάδα i. Όπως και στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών, οι πραγματικοί αριθμοί x και y ονομάζονται πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα, και συμβολίζουμε $x = \mathrm{Re}(z)$ και $y = \mathrm{Im}(z)$. Όταν $\mathrm{Im}(z) = 0$ ο αριθμός z είναι πραγματικός, ενώ όταν $\mathrm{Re}(z) = 0$ ο αριθμός z θα ονομάζεται φανταστικός. Προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι, παρά την ισχύ της σχέσης $\varepsilon^2 = 0$, η δυϊκή μονάδα ε δεν ισούται με το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}$· αντίθετα, η ε, όπως και η φανταστική μονάδα i, δεν ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η πρόσθεση δύο δυϊκών αριθμών γίνεται με τον προφανή τρόπο, ακριβώς όπως και η πρόσθεση δύο μιγαδικών αριθμών: το πραγματικό (αντίστοιχα φανταστικό) μέρος του αθροίσματος δύο αριθμών ισούται με το άθροισμα των πραγματικών (αντίστοιχα φανταστικών) μερών των αριθμών αυτών. Ο πολλαπλασιασμός δύο δυϊκών αριθμών $z = x + \varepsilon y$ και $z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$ γίνεται ως εξής: $zz_1 = (x+\varepsilon y)(x_1+\varepsilon y_1) = xx_1+\varepsilon(xy_1)+\varepsilon(yx_1)+\varepsilon^2(yy_1) = xx_1+\varepsilon(xy_1+yx_1)$. Βλέπουμε ότι για τους δυϊκούς αριθμούς ισχύει $\mathrm{Re}(zz_1) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z_1)$ και $\mathrm{Im}(zz_1) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z_1)$. Συγκρίνετε αυτές τις σχέσεις με τις αντίστοιχες για τους μιγαδικούς αριθμούς.

Ανάλογα με τον συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού ορίζουμε και το συζυγή ενός δυϊκού αριθμού z. Αν $z = x + \varepsilon y$,τότε ο συζυγής του ορίζεται να είναι ο $\overline{z} = x - \varepsilon y$. Δηλαδή $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ και $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο ενός δυϊκού αριθμού με τον συζυγή του είναι πραγματικός αριθμός: $z\overline{z} = x^2 = (\mathrm{Re}(z))^2$. Αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε το μέτρο του δυϊκού αριθμού z να είναι το $|z| = x = \mathrm{Re}(z)$. Η κρίσιμη διαφορά με τους μιγαδικούς αριθμούς είναι ότι το μέτρο ενός δυϊκού αριθμού μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, ενώ το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού είναι μη αρνητικό.

Στο σημείο αυτό να τονίσουμε μια αλγεβρική διαφορά των δυϊκών και των μιγαδικών αριθμών. Ως γνωστόν, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελεί σώμα. Αντίθετα, παρά την φαινομενική ομοιότητα τους, οι δυϊκοί αριθμοί αποτυγχάνουν να σχηματίσουν σώμα. Ο λόγος είναι ότι οι φανταστικοί δυϊκοί αριθμοί είναι διαιρέτες του μηδενός. Αυτό έπεται από την παρατήρηση ότι το γινόμενο δύο φανταστικών αριθμών είναι ίσο με 0. Έτσι, το σύνολο των δυϊκών αριθμών δεν έχει δομή σώματος. Η δομή που σχηματίζεται με τις πράξεις της πρόθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος.

Για τους δυϊκούς αριθμούς μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια αντίστοιχη με το όρισμα μιγαδικού αριθμού. Για έναν δυϊκό αριθμό $z = x + \varepsilon y$, με $|z| = x \neq 0$, μπορούμε να γράψουμε τον z ως εξής: $z = x + \varepsilon y = x\left(1 + \varepsilon\dfrac{y}{x}\right) = |z|(1 + \varepsilon\theta)$, όπου $\theta = \dfrac{y}{x}$. Η ποσότητα θ καλείται όρισμα του δυϊκού αριθμού z και συμβολίζεται με $\arg z$. Επομένως, κάθε δυϊκός αριθμός μη μηδενικού μέτρου μπορεί να γραφεί στην παραπάνω μορφή. Δεν ορίζουμε το όρισμα δυϊκών αριθμών μηδενικού μέτρου. Προσέξτε την αναλογία με την περίπτωση των μιγαδικών αριθμών, όπου δεν ορίσαμε το όρισμα του $z = 0$ (που είναι και ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός με μηδενικό μέτρο).

Εύκολα βλέπουμε ότι και στην περίπτωση των δυϊκών αριθμών ισχύουν οι σχέσεις που συνδέουν το μέτρο και το όρισμα συζυγών αριθμών: $|z| = |\overline{z}|$ και

$\arg \overline{z} = -\arg z$. Ακόμα, παραμένουν σε ισχύ και οι σχέσεις που αφορούν το μέτρο και το όρισμα του γινομένου και του πηλίκου δύο δυϊκών αριθμών z, w:

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \arg z \cdot w = \arg z + \arg w$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$ (με $w \neq 0$)

Κλείνοντας αυτήν την ενότητα, τονίζουμε ξανά μια σημαντική ιδιότητα: στο σύνολο των δυϊκών αριθμών ισχύει $\arg z = 0$ για τους πραγματικούς αριθμούς, ενώ το όρισμα δεν ορίζεται για φανταστικούς αριθμούς. Αυτή η ιδιότητα θα φανεί χρήσιμη παρακάτω, όταν ασχοληθούμε με την γεωμετρία.

4.3 Διπλοί αριθμοί

Το τρίτο, και τελευταίο, σύνολο αριθμών που θα μας απασχολήσει είναι οι διπλοί αριθμοί. Οι διπλοί αριθμοί ορίζονται ως οι αριθμοί της μορφής $z = x + ey$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και e μια οντότητα που ικανοποιεί την $e^2 = +1$ και την ονομάζουμε διπλή μονάδα. Σημειώνουμε εμφατικά ότι ούτε η διπλή μονάδα e ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Οι αριθμοί x και y καλούνται και εδώ πραγματικό και φανταστικό μέρος του z αντίστοιχα, και συμβολίζουμε $x = \mathrm{Re}(z)$ και $y = \mathrm{Im}(z)$. Όταν $\mathrm{Im}(z) = 0$ ο αριθμός z είναι πραγματικός, ενώ όταν $\mathrm{Re}(z) = 0$ ο αριθμός z θα ονομάζεται φανταστικός.

Μπορούμε να ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό δύο διπλών αριθμών. Η πρόσθεση διπλών αριθμών γίνεται με τον ίδιο τρόπο που γίνεται η πρόσθεση μιγαδικών και δυϊκών αριθμών: το πραγματικό (αντίστοιχα φανταστικό) μέρος του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των πραγματικών (αντίστοιχα φανταστικών) μερών. Ο πολλαπλασιασμός δύο διπλών αριθμών $z = x + ey$ και $z_1 = x_1 + ey_1$ γίνεται ως εξής: $zz_1 = (x + ey)(x_1 + ey_1) = xx_1 + e(xy_1) + e(yx_1) + e^2(yy_1) = (xx_1 + yy_1) + e(xy_1 + yx_1)$. Δηλαδή, για τους διπλούς αριθμούς ισχύει $\mathrm{Re}(zz_1) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z_1)$ και $\mathrm{Im}(zz_1) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z_1)$. Συγκρίνετε αυτές τις σχέσεις με τις αντίστοιχες για τους μιγαδικούς και τους δυϊκούς αριθμούς.

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ορίζουμε τον συζυγή ενός διπλού αριθμού $z = x + ey$ να είναι ο $\overline{z} = x - ey$. Δηλαδή ισχύει και εδώ $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$. Το άθροισμα ενός διπλού αριθμού με τον συζυγή του είναι πραγματικός αριθμός, ενώ η διαφορά τους είναι φανταστικός αριθμός. Επιπλέον, το γινόμενο δύο συζυγών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός, και συγκεκριμένα $z\overline{z} = x^2 - y^2$. Θέλουμε να ορίσουμε το μέτρο ενός διπλού αριθμού σε αναλογία με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Δηλαδή, εν γένει, θα θέλαμε το τετράγωνο του μέτρου ενός διπλού αριθμού να ισούται με το γινόμενο του αριθμού αυτού με τον συζυγή του. Παρατηρούμε ότι αυτό το γινόμενο μπορεί να είναι αρνητικό ή θετικό. Επομένως, προκειμένου να ικανοποιήσουμε αυτήν την απαίτηση, διακρίνουμε περιπτώσεις.

Ορίζουμε το μέτρο ενός διπλού αριθμού ως:

$$|z| = \begin{cases} \pm\sqrt{x^2 - y^2}, & \text{αν } |x| \geq |y| \\ \pm\sqrt{y^2 - x^2}, & \text{αν } |x| < |y| \end{cases}$$

Όσον αφορά το πρόσημο του μέτρου του διπλού αριθμού z, θα κάνουμε της εξής σύμβαση: το πρόσημο του μέτρου του z θα είναι το πρόσημο του x όταν $|x| > |y|$ και το πρόσημο του y όταν $|x| < |y|$. Έτσι, το μέτρο ενός διπλού αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικό.

Αλγεβρικά, το σύνολο των διπλών αριθμών με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού σχηματίζει έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο χαρακτηριστικής 0. Ωστόσο, η δομή αυτή δεν είναι σώμα. Τα στοιχεία της μορφής $z = x + ex$ ή $z = x - ex$, με $x \neq 0$, είναι διαιρέτες του μηδενός. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία αυτά (και το 0) είναι ακριβώς εκείνοι οι διπλοί αριθμοί που έχουν μηδενικό μέτρο. Με άλλα λόγια, στον δακτύλιο των διπλών αριθμών, οι διαιρέτες του μηδενός είναι ακριβώς εκείνοι οι αριθμοί που έχουν μηδενικό μέτρο. Ονομάζουμε αυτούς τους αριθμούς μηδενικούς αριθμούς.

Όπως και στις δύο προηγούμενες ενότητες, μπορούμε να ορίσουμε το όρισμα ενός διπλού αριθμού. Σημειώνουμε εξαρχής ότι το όρισμα έχει νόημα μόνο για αριθμούς μη μηδενικού μέτρου. Δεν θα ορίσουμε όρισμα για αριθμούς της μορφής $z = x \pm ex$ (παρατηρήστε την αναλογία με τους μιγαδικούς και τους δυϊκούς αριθμούς). Έστω, λοιπόν, ένας διπλός αριθμός $z = x + ey$ με $|z| \neq 0$. Χρειάζεται να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $|x| > |y|$ και $|x| < |y|$ χωριστά. Αν $|x| > |y|$, τότε $r = |z| = \pm\sqrt{x^2 - y^2}$, και το πρόσημο του r είναι ίδιο με το πρόσημο του x. Ισχύει τότε: $\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$. Συνεπώς, θα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός ϑ τέτοιος ώστε $\frac{x}{r} = \cosh\theta$ και $\frac{y}{r} = \sinh\theta$. Παρόμοια, αν $|x| < |y|$ είναι $r = |z| = \pm\sqrt{y^2 - x^2}$ και το πρόσημο του r είναι ίδιο με το πρόσημο του y. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει: $\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$. Επομένως, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός θ τέτοιος ώστε $\frac{x}{r} = \sinh\theta$ και $\frac{y}{r} = \cosh\theta$. Και στις δύο περιπτώσεις ο αριθμός θ ονομάζεται όρισμα του διπλού αριθμού z, και συμβολίζεται με $\arg z$. Προκύπτει, λοιπόν, ότι κάθε διπλός αριθμός $z = x + ey$ με $|z| \neq 0$ μπορεί να γραφεί με μία από τις δύο παρακάτω μορφές:

- $z = r(\cosh\theta + e\sinh\theta)$ (αν $|x| > |y|$) (1)
- $z = r(\sinh\theta + e\cosh\theta)$ (αν $|x| < |y|$) (2)

με $r = |z|$. Θα ονομάζουμε τους διπλούς αριθμούς της μορφής (1) αριθμούς του πρώτου είδους, και τους αριθμούς της μορφής (2) αριθμούς του δεύτερου είδους.

Η διάκριση αυτή είναι σημαντική. Για τους αριθμούς z του πρώτου είδους ισχύει η σχέση $|\overline{z}| = |z|$. Έχουμε ήδη δει ότι αυτή η σχέση ισχύει τόσο για μιγαδικούς αριθμούς, όσο και για δυϊκούς αριθμούς. Ωστόσο, για τους διπλούς αριθμούς του δεύτερου είδους η σχέση αυτή γίνεται $|\overline{z}| = -|z|$. Αντίθετα, η σχέση $\arg \overline{z} = -\arg z$ ισχύει για όλους τους διπλούς αριθμούς, πρώτου και δεύτερου είδους.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο του αθροίσματος δυο αριθμών, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι σχέσεις που δίνουν το μέτρο και το όρισμα του γινομένου και του πηλίκου διπλών αριθμών, δηλαδή οι σχέσεις:

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \arg z \cdot w = \arg z + \arg w$
- $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}, \quad \arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$ (με $w \neq 0$)

παραμένουν σε ισχύ και στην περίπτωση των διπλών αριθμών. Σχετικά με το γινόμενο και το πηλίκο διπλών αριθμών, πρέπει να σημειώσουμε το εξής: το γινόμενο και το πηλίκο δύο διπλών αριθμών του ίδιου (πρώτου ή δεύτερου) είδους είναι ένας διπλός αριθμός του πρώτου είδους, ενώ το γινόμενο και το πηλίκο δύο διπλών αριθμών διαφορετικού είδους είναι ένας διπλός αριθμός του δεύτερου είδους.

Μια τελευταία επισήμανση: στο σύνολο των διπλών αριθμών ισχύει η σχέση $\arg z = 0$ τόσο για τους πραγματικούς αριθμούς (που είναι του πρώτου είδους) όσο και για τους φανταστικούς αριθμούς (που είναι του δεύτερου είδους). Αυτή η παρατήρηση θα φανεί χρήσιμη στην προσπάθεια μας να συνδέσουμε την γεωμετρία με όσα είπαμε παραπάνω. Ακριβώς αυτό θα επιχειρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 5

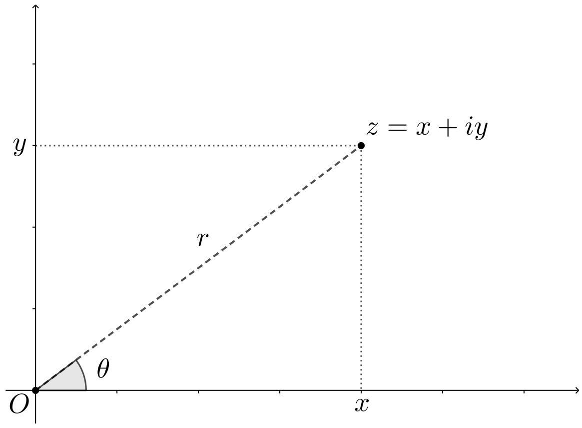
Γενικευμένοι μιγαδικοί και γεωμετρία

Στρεφόμαστε τώρα στην γεωμετρία. Θα ξεκινήσουμε και εδώ από τους μιγαδικούς αριθμούς, και έπειτα θα δείξουμε πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι δυϊκοί και οι διπλοί αριθμοί στην γεωμετρία.

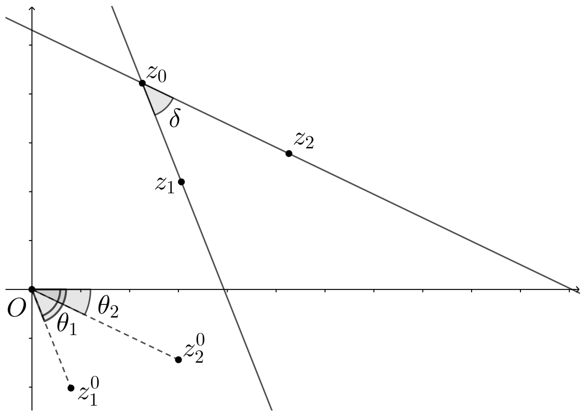
5.1 Μιγαδικοί αριθμοί στην Γεωμετρία

Είναι γνωστό ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τα σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου με τους μιγαδικούς αριθμούς. Αρκεί να αντιστοιχήσουμε στο σημείο M, που έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων xOy, τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$. Αν γράψουμε τον (μη μηδενικό) μιγαδικό αριθμό z στην μορφή $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, με $r = |z|$ και $\theta = \arg z$, τότε μπορούμε να δούμε ότι το μέτρο του z αντιστοιχεί στο Ευκλείδειο μήκος του τμήματος OM και το όρισμα θ στην (προσανατολισμένη) Ευκλείδεια γωνία που σχηματίζει ο θετικός ημιάξονας των x με το OM (Σχήμα 5.1). Επομένως, το μέτρο και το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού αποκτά ξεκάθαρη γεωμετρική σημασία. Σε ότι ακολουθεί, θα παραμερίσουμε την διάκριση σημείων-αριθμών, και θα μιλάμε ελεύθερα για το «σημείο z».

Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημείων z και z_1 δίνεται από την σχέση: $d = |z - z_1|$. Η γωνία δύο ευθειών μπορεί κι αυτή να γραφεί με όρους μιγαδικών αριθμών. Θεωρούμε τρία σημεία z_0, z_1, z_2 του Ευκλείδειου επιπέδου. Η γωνία δ μεταξύ των ευθειών που ενώνουν το z_1 με το z_0 και το z_2 με το z_0 (ή, σε έναν πιο βολικό συμβολισμό, η γωνία των ευθειών (z_0, z_1) και (z_0, z_2), δίνεται από την σχέση: $\delta = \arg\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ (Σχήμα 5.2). Η ποσότητα $(z_2, z_1; z_0) = \dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ ονομάζεται απλός λόγος των τριών σημείων z_0, z_1, z_2. Σημειώνουμε ότι η γωνία δ είναι προσανατολισμένη· είναι η γωνία την οποία πρέπει να περιστρέψουμε την ημιευθεία (z_0, z_1) γύρω από το σημείο z_0, με θετική φορά, προκειμένου να συμπέσει με την ημιευθεία (z_0, z_2).



Σχήμα 5.1



Σχήμα 5.2

Η ευθεία του Ευκλείδειου επιπέδου, η οποία διέρχεται από τα σημεία z_1 και z_2, ορίζεται ως το σύνολο των σημείων z τα οποία ικανοποιούν την $\arg(z, z_1; z_2) = 0$ ή π. Ισοδύναμα, η παραπάνω σχέση απαιτεί να ισχύει $\mathrm{Im}(z, z_1; z_2) = 0$. Δηλαδή απαιτούμε ο απλός λόγος των τριών σημείων z, z_1, z_2 να είναι πραγματικός αριθμός, και άρα να ισούται με τον συζυγή του. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών, βρίσκουμε ότι η ευθεία (z_1, z_2) δίνεται από την εξίσωση:

$$Bz - \overline{B}\overline{z} + C = 0, \mathrm{Re}(C) = 0 \tag{5.1.1}$$

Οι συντελεστές B, C εξαρτώνται από τους αριθμούς z_1, z_2 μέσω των σχέσεων

$$B = \overline{z_1} - \overline{z_2}, C = z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 \tag{5.1.2}$$

. Ισχύει και το αντίστροφο: μια εξίσωση της μορφής (5.1.1) περιγράφει μια ευθεία που διέρχεται από τα σημεία z_1, z_2, τα οποία είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούν τις σχέσεις (5.1.2).

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο z_0 και ακτίνα r ορίζεται ως το σύνολο των σημείων z για τα οποία ισχύει $|z - z_0| = r \Leftrightarrow (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2$. Αναπτύσσοντας την τελευταία σχέση, μπορούμε να φέρουμε την εξίσωση ενός κύκλου στην μορφή:

$$az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0, \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(c) = 0 \tag{5.1.3}$$

Οι συντελεστές a, b, c εξαρτώνται από τα z_0, r μέσω των σχέσεων

$$a = 1, b = -\overline{z_0}, c = z_0\overline{z_0} - r^2 \tag{5.1.4}$$

Αντίστροφα, μια εξίσωση της μορφής (5.1.3), με $a \neq 0$, περιγράφει έναν κύκλο με κέντρο το σημείο z_0 και ακτίνα r, όπου τα z_0 και r ικανοποιούν τις σχέσεις (5.1.4). Οι εξισώσεις της ευθείας και του κύκλου είναι στενά συνδεδεμένες. Αν πολλαπλασιάσουμε την (5.1.1) με την φανταστική μονάδα i, μπορούμε να δούμε ότι η εξίσωση αυτή αποτελεί μια ειδική περίπτωση της (5.1.3), στην οποία $a = 0$. Παρόμοια, πολλαπλασιάζοντας την (5.1.3) με i, μπορούμε να την φέρουμε στην μορφή:

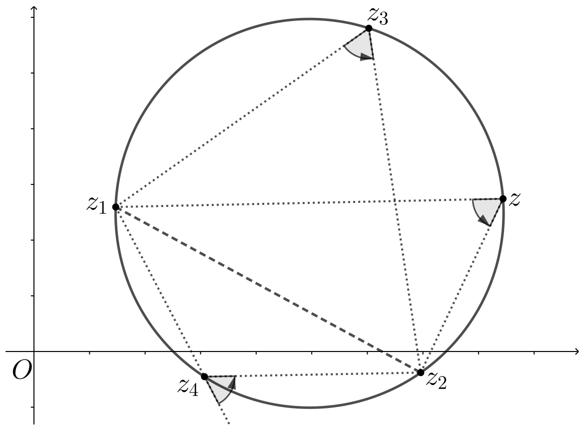
$$Az\overline{z} + Bz - \overline{B}\overline{z} + C = 0, \mathrm{Re}(A) = \mathrm{Re}(C) = 0 \tag{5.1.5}$$

Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε την (5.1.1) ως μια ειδική περίπτωση της (5.1.5) στην οποία $A = 0$.

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, τρία (μη συνευθειακά) σημεία ορίζουν έναν μοναδικό κύκλο. (Αν τα σημεία είναι συνευθειακά, ο κύκλος εκφυλίζεται στην ευθεία που διέρχεται από αυτά τα σημεία). Επιπλέον, ο κύκλος στην Ευκλείδεια γεωμετρία μπορεί να οριστεί με τρόπο διαφορετικό από εκείνον που δώσαμε πρωτύτερα, αλλά πλήρως ισοδύναμο. Δεδομένου ενός ευθύγραμμου τμήματος, ο κύκλος μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των σημείων τα οποία «βλέπουν» το συγκεκριμένο τμήμα υπό σταθερή (προσανατολισμένη) γωνία. Επομένως, ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία z_1, z_2, z_3 μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των σημείων z τα οποία ικανοποιούν την ιδιότητα: $\delta_1 - \delta_2 = 0$, όπου δ_1 η γωνία των (z_3, z_1), (z_3, z_2) και δ_2 η γωνία των (z, z_1), (z, z_2) (Σχήμα 5.3). Σύμφωνα με όσα έχουμε πει παραπάνω, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως: $\arg(z_1, z_2; z_3) - \arg(z_1, z_2; z) = 0$ ή π. Ισοδύναμα, η εξίσωση του κύκλου παίρνει την μορφή: $Im\dfrac{(z_1, z_2; z_3)}{(z_1, z_2; z)} = 0$. Η ποσότητα $(z_1, z_2; z_3, z) = \dfrac{(z_1, z_2; z_3)}{(z_1, z_2; z)}$ ονομάζεται διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων z_1, z_2, z_3, z. Καταλήγουμε, λοιπόν, ότι θα πρέπει ο διπλός λόγος των z_1, z_2, z_3, z να είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή να ισούται με τον συζυγή του. Από αυτήν την τελευταία ιδιότητα έπεται ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα z_1, z_2, z_3 γράφεται ως:

$$Az\overline{z} + Bz - \overline{B}\overline{z} + C = 0, \mathrm{Re}(A) = \mathrm{Re}(C) = 0 \tag{5.1.6}$$

Προφανώς, η (5.1.6) είναι της μορφής (5.1.5), με τους συντελεστές εδώ να δίνονται ως συνάρτηση των z_1, z_2, z_3. Τέλος, ένα συμπέρασμα που προκύπτει από την παραπάνω συζήτηση είναι ότι η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τέσσερα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 προκειμένου να ανήκουν στον ίδιο κύκλο (ή στην ίδια ευθεία, ως οριακή περίπτωση) είναι η $\mathrm{Im}(z_1, z_2; z_3, z_4) = 0$ (ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός).



Σχήμα 5.3

Οι μετασχηματισμοί του Ευκλείδειου επιπέδου μπορούν και αυτοί να γραφούν με την βοήθεια μιγαδικών αριθμών. Οι μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το σημείο ζ στο σημείο ζ′ έχουν μία από τις παρακάτω μορφές:

(α) $z' = pz + q, \; p\overline{p} = 1$

(β) $z' = p\overline{z} + q, \; p\overline{p} = 1$ (5.1.7)

Εύκολα βλέπουμε ότι η απόσταση διατηρείται από τους μετασχηματισμούς (5.1.7). Ειδικές περιπτώσεις των (5.1.7) είναι οι $z' = -z$ και $z' = \overline{z}$: ο πρώτος περιγράφει μια στροφή κατά $180°$ γύρω από την αρχή των αξόνων O, ενώ ο δεύτερος μια ανάκλαση ως προς την ευθεία $\mathrm{Im}(z) = 0$ (τον άξονα των x). Γενικότερα, οι μετασχηματισμοί (5.1.7) έχουν μια ξεκάθαρη γεωμετρική ερμηνεία: ο (α) περιγράφει μια στροφή γύρω από το O κατά γωνία $\arg p$ ακολουθούμενη από μια μεταφορά στην κατεύθυνση του q· ο (β) περιγράφει μια ανάκλαση ως προς την ευθεία που διέρχεται από το O και σχηματίζει γωνία $\arg \dfrac{p}{2}$ με τον θετικό ημιάξονα των x, ακολουθούμενη από μια μεταφορά στην κατεύθυνση του q.

Ένα άλλο σημαντικό σύνολο μετασχηματισμών είναι οι:

(α) $z' = \dfrac{az + b}{cz + d}, \; |ad - bc| \neq 0$

(β) $z' = \dfrac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}, \; |ad - bc| \neq 0$ (5.1.8)

Όταν $c = 0$, οι (5.1.8) ανάγονται στους (5.1.7). Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί έχουν μια σημαντική ιδιότητα: είτε διατηρούν τον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων (αυτό κάνουν οι (α)) ή τον απεικονίζουν στον μιγαδικό συζυγή του (αυτό κάνουν οι (β)). Συνεπώς, αν ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων είναι πραγματικός αριθμός, τότε και ο διπλός λόγος των εικόνων τους θα είναι πραγματικός. Αυτό σημαίνει ότι οι μετασχηματισμοί (5.1.8) απεικονίζουν τέσσερα ομοκυκλικά (ή συνευθειακά) σημεία σε τέσσερα ομοκυκλικά (ή συνευθειακά) σημεία, δηλαδή είναι κυκλικοί μετασχηματισμοί. Μπορεί να δειχθεί και το αντίστροφο: κάθε κυκλικός μετασχηματισμός του Ευκλείδειου επιπέδου είναι της μορφής (5.1.8).

Ωστόσο, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η παραπάνω συζήτηση είναι ατελής. Εν γένει, οι μετασχηματισμοί (5.1.8) δεν αποτελούν μετασχηματισμούς του Ευκλείδειου επιπέδου. Κι αυτό, διότι αν $c \neq 0$, τότε οι (5.1.8) δεν ορίζονται σε όλο το επίπεδο: οι (α) δεν ορίζονται στο σημείο $z = -\frac{d}{c}$, ενώ οι (β) δεν ορίζονται στο σημείο $z = -\frac{\overline{d}}{\overline{c}}$. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί, αν θεωρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού των (5.1.8) δεν είναι το σύνηθες Ευκλείδειο επίπεδο, αλλά το αντιστροφικό Ευκλείδειο επίπεδο. Εφοδιάζοντας, δηλαδή, το Ευκλείδειο επίπεδο με ένα ιδεατό σημείο στο άπειρο, το οποίο θα συμβολίζουμε $z = \infty$, και θεωρώντας ότι μπορούμε να χειριστούμε αλγεβρικά το ∞ με έναν αρκετά λογικό τρόπο (για παράδειγμα, απαιτούμε να ισχύουν σχέσεις όπως $\frac{1}{0} = \infty$), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι μετασχηματισμοί (5.1.8) ορίζονται στο αντιστροφικό Ευκλείδειο επίπεδο. Οι μετασχηματισμοί της μορφής (α) απεικονίζουν το σημείο $z = -\frac{d}{c}$ στο σημείο $z' = \frac{-a\frac{d}{c} + b}{0} = \frac{\frac{-(ad-bc)}{c}}{0} = \infty$ και το σημείο $z = \infty$ στο σημείο $z' = \frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} = \frac{a+0}{c+0} = \frac{a}{c}$. Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για τους μετασχηματισμούς της μορφής (β). Επομένως, οι μετασχηματισμοί (5.1.8) μπορούν πλέον να θεωρηθούν κυκλικοί μετασχηματισμοί του αντιστροφικού Ευκλείδειου επιπέδου.

Η χρήση των μιγαδικών αριθμών στην γεωμετρία δεν περιορίζεται μόνο στο Ευκλείδειο επίπεδο. Τα σημεία της ελλειπτικής γεωμετρίας μπορούν να αντιστοιχηθούν με μιγαδικούς αριθμούς. Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την στερεογραφική προβολή της μοναδιαίας σφαίρας από το σημείο $P(0,0,1)$ στο επίπεδο $\pi\colon z = 0$, το οποίο ταυτίζουμε με το μιγαδικό επίπεδο. Λόγω της ταύτισης των αντιδιαμετρικών σημείων, αρκεί να περιοριστούμε στο νότιο ημισφαίριο (δηλαδή για $z < 0$). Έστω M ένα τυχαίο σημείο του νότιου ημισφαιρίου και έστω επίσης ότι $Q(0,0,-1)$ είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του P. Συμβολίζουμε με r την γωνία $\widehat{QOM}$ και με θ την γωνία που σχηματίζει η ελλειπτική ευθεία που διέρχεται από τα Q, M με την ελλειπτική ευθεία που περιέχεται στο επίπεδο $y = 0$. Τότε, το σημείο M απεικονίζεται μέσω της στερεογραφικής προβολής στον μιγαδικό αριθμό $z = \tan\frac{r}{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$. Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρη την μοναδιαία σφαίρα, τότε το αντιδιαμετρικό του M θα αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό $z_1 = -\frac{1}{\overline{z}}$. Το σημείο P θα αντιστοιχίζεται στον αριθμό ∞.

Τα σημεία του υπερβολικού επιπέδου μπορούν κι αυτά να ταυτιστούν με μιγαδικούς αριθμούς. Εμείς εδώ θα δουλέψουμε με το μοντέλο του Poincaré για το υπερβολικό επίπεδο. Στο μοντέλο του Poincaré ολόκληρο το υπερβολικό επίπεδο αντιπροσωπεύεται από το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου Σ. Η αντιστοίχιση των σημείων του υπερβολικού επιπέδου με μιγαδικούς αριθμούς γίνεται ως εξής: στο σημείο του υπερβολικού επιπέδου με πολικές συντεταγμένες (r, θ) αντιστοιχίζουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = \tanh\dfrac{r}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ισοδύναμα, στον μιγαδικό αριθμό $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ αντιστοιχεί το σημείο με πολικές συντεταγμένες (r, θ), όπου $r = 2\mathrm{arctanh}\rho$. Ολόκληρο το υπερβολικό επίπεδο αντιπροσωπεύεται από τους μιγαδικούς αριθμούς z με $|z| < 1$. Ωστόσο, μπορούμε να επεκτείνουμε αυτήν την αντιστοιχία μεταξύ μιγαδικών αριθμών και σημείων του υπερβολικού επιπέδου σε ολόκληρο το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, αν συμφωνήσουμε να θεωρούμε τα σημεία ως προσανατολισμένα. Κάθε σημείο θα είναι εφοδιασμένο με μια ένδειξη για το ποιά φορά περιστροφής θα θεωρείται θετική. Θα θεωρούμε ότι η απόσταση δύο σημείων A, B είναι ίση με το (υπερβολικό) μήκος r του τμήματος AB μόνο αν τα A, B έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Ειδάλλως, θα θεωρούμε ότι η απόσταση τους ισούται με $r + i\pi$. Επομένως, δύο σημεία A, A_1 που διαφέρουν μόνο ως προς τον προσανατολισμό θα αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς z, z_1, όπου $z_1 = \tanh\dfrac{r + i\pi}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \dfrac{1}{\bar{z}}$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα σημεία z, z_1 του μιγαδικού επιπέδου προκύπτουν από αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο Σ. Το κέντρο του κύκλου O και το σημείο O_1, που διαφέρει από το O μόνο στον προσανατολισμό, αντιστοιχούν στους αριθμούς 0 και ∞. Τέλος, αν συμφωνήσουμε να θεωρούμε τα σημεία του Σ (δηλαδή τα σημεία για τα οποία $|z| = 1$) ως τα σημεία στο άπειρο του υπερβολικού επιπέδου, τότε αποκτούμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ όλων των (προσανατολισμένων) σημείων του υπερβολικού επιπέδου (εφοδιασμένο με τα σημεία στο άπειρο) και του συνόλου των μιγαδικών αριθμών (στο οποίο έχουμε προσθέσει τον αριθμό ∞).

5.2 Δυϊκοί και διπλοί αριθμοί στην Γεωμετρία

Προχωράμε τώρα να δούμε τι συμβαίνει με τις υπόλοιπες γεωμετρίες Cayley-Klein που μελετάμε. Θα αρχίσουμε την ενότητα μελετώντας την εφαρμογή των δυϊκών και των διπλών αριθμών στην γεωμετρία του Γαλιλαίου και την γεωμετρία του Minkowski. Παρουσιάζουμε αυτές τις δύο γεωμετρίες μαζί, καθώς πολλές από τις σχέσεις που θα παρουσιάσουμε ισχύουν εν γένει και στις δύο γεωμετρίες. Όποτε χρειάζεται, θα γίνεται σαφής αναφορά στην διάκριση μεταξύ αυτών των δύο. Έπειτα θα δούμε πως αυτοί οι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο πλαίσιο της συνευκλείδειας και της συνυπερβολικής γεωμετρίας.

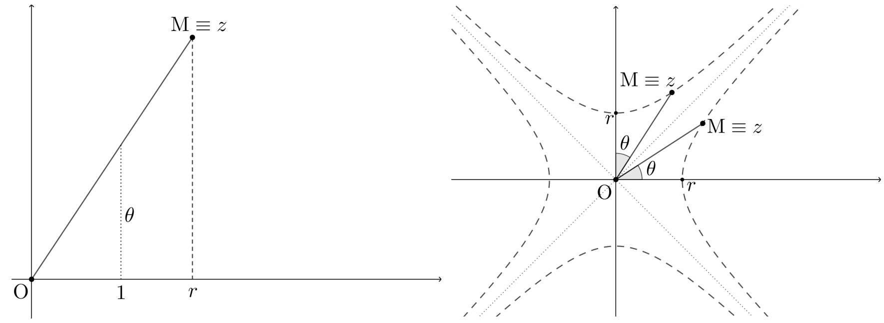
Ξεκινάμε από την γεωμετρία του Γαλιλαίου. Θεωρούμε ένα σημείο M του επιπέδου του Γαλιλαίου, με συντεταγμένες (x, y) ως προς κάποιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy. Θυμίζουμε ότι στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OM ισούται με $r = OM = x$, ενώ η γωνία $\widehat{xOM}$ δίνεται από την $\theta = \dfrac{y}{x}$. Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε στο σημείο M τον δυϊκό αριθμό $z = x + \varepsilon y = r(1 + \varepsilon\theta)$, όπου πλέον τα r, θ έχουν μια γεωμετρική σημασία (Σχήμα 5.4-(α)). Αν $x = r = 0$, δηλαδή αν το M είναι ένα σημείο του άξονα y, τότε πάλι αντιστοιχούμε τον M στον αντίστοιχο δυϊκό αριθμό $z = \varepsilon y$, αλλά θυμίζουμε εδώ ότι δεν αποδώσαμε όρισμα για τους φανταστικούς δυϊκούς αριθμούς. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τα σημεία του επιπέδου του Γαλιλαίου με δυϊκούς αριθμούς, με τρόπο ανάλογο με αυτόν που εφαρμόσαμε για να ταυτίσουμε τα σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου με μιγαδικούς αριθμούς. Στο εξής, θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα εκφράσεις όπως «το σημείο z».

Θεωρούμε τώρα ένα σημείο M του επιπέδου του Minkowski, με συντεταγμένες (x, y) ως προς κάποιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Συμβολίζουμε με r το προσημασμένο μήκος (στην γεωμετρία του Minkowski) του OM. Σύμφωνα με όσα είπαμε στο πρώτο κεφάλαιο σχετικά με την απόσταση σημείων στην γεωμετρία του Minkowski, το προσημασμένο μήκος θα δίνεται από:

$$r = \begin{cases} \pm\sqrt{x^2 - y^2}, & \text{αν } |x| \geq |y| \\ \pm\sqrt{y^2 - x^2}, & \text{αν } |x| < |y| \end{cases}$$

Επιπλέον, κάνουμε την εξής διάκριση. Αν η ευθεία OM είναι του πρώτου είδους, συμβολίζουμε με θ την γωνία (στην γεωμετρία του Minkowski) που σχηματίζει η OM με τον ημιάξονα Ox. Αντίστοιχα, αν η OM είναι του δεύτερου είδους, συμβολίζουμε με θ την γωνία που σχηματίζει η OM με τον ημιάξονα Oy. Έτσι, αντιστοιχίζουμε το σημείο M, ανάλογα με το είδος της ευθείας OM, με έναν από τους δύο παρακάτω διπλούς αριθμούς: $z = x + ey = r(\cosh\theta + e\sinh\theta)$ ή $z = x + ey = r(\sinh\theta + e\cosh\theta)$. Ο πρώτος αριθμός είναι του πρώτου είδους και ο τελευταίος είναι του δεύτερου είδους. Το όρισμα θ μπορεί να θεωρηθεί ως η γωνία (στην γεωμετρία του Minkowski) που σχηματίζει η OM με τον ημιάξονα Ox ή Oy, ανάλογα με το είδος της (Σχήμα 5.4-(β)). Βέβαια, αν το σημείο M ανήκει στο ζεύγος των ειδικών ευθειών που διέρχονται από το O, δηλαδή τις $y = x$ και $y = -x$, δεν ορίζεται η γωνία της OM με τους άξονες (οι ειδικές ευθείες δεν τέμνουν τους κύκλους της γεωμετρίας του Minkowski). Αυτό δεν μας εμποδίζει να αντιστοιχήσουμε στα σημεία των ειδικών αυτών ευθειών του διαιρέτες του μηδενός: σε ένα σημείο $M(x, x)$ της ευθείας $y = x$ αντιστοιχούμε τον διπλό αριθμό $z = x + ex$, και σε ένα σημείο $M(x, -x)$ της ευθείας $y = -x$ αντιστοιχούμε τον διπλό αριθμό $z = x - ex$. Έτσι, καταλήγουμε ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τα σημεία του επιπέδου του Minkowski με τους διπλούς αριθμούς. Και στην περίπτωση της γεωμετρίας του Minkowski, θα μιλάμε ελεύθερα για «το σημείο z», όπου z διπλός αριθμός.

Έχουμε δει μέχρι στιγμής ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τα σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου με μιγαδικούς αριθμούς, του επιπέδου του Γαλιλαίου με δυϊκούς αριθμούς, και του επιπέδου του Minkowski με διπλούς αριθμούς. Σε ότι ακολουθεί, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για μιγαδικούς,



(α′) (β′)

Σχήμα 5.4

δυϊκούς και διπλούς αριθμούς. Η ενασχόληση μας με μια συγκεκριμένη γεωμετρία θα καθορίζει τον τύπο του αριθμού που δηλώνει αυτό το σύμβολο. Για παράδειγμα, θα λέμε «το σημείο z», όπου το z θα είναι δυϊκός ή διπλός αριθμός, ανάλογα με το αν εργαζόμαστε στην γεωμετρία του Γαλιλαίου ή του Minkowski αντίστοιχα. Όποτε χρειαστεί μια πιο σαφής διάκριση, θα αναφέρεται ρητά.

Η απόσταση μεταξύ των σημείων z και w στην γεωμετρία του Γαλιλαίου ή του Minkowski δίνεται από την σχέση: $d = |z - w| \Leftrightarrow d^2 = (z - w)(\overline{z} - \overline{w})$. Αυτή η σχέση έχει την ίδια μορφή με την απόσταση σημείων του Ευκλείδειου επιπέδου. Επίσης, αυτός ο ορισμός της απόστασης βρίσκεται σε συμφωνία με τις σχέσεις που δώσαμε στο πρώτο κεφάλαιο για την απόσταση σημείων στα επίπεδα του Γαλιλαίου και του Minkowski.

Μπορούμε να περιγράψουμε και την γωνία μεταξύ δύο ευθειών με χρήση δυϊκών και διπλών αριθμών. Συγκεκριμένα, η (προσανατολισμένη) γωνία των ευθειών (z_0, z_1) και (z_0, z_2) δίνεται από την σχέση $\delta = \arg(z_2, z_1; z_0) = \arg \dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$, όπου $(z_2, z_1; z_0)$ ο απλός λόγος των τριών αριθμών. Προκειμένου να ισχύει η σχέση, πρέπει να ορίζονται οι δύο αυτές ευθείες στο εκάστοτε επίπεδο. Θυμίζουμε ότι στο επίπεδο του Γαλιλαίου έχουμε αφαιρέσει τις ειδικές ευθείες, ενώ στο επίπεδο του Minkowski θεωρούμε ευθείες μόνο του ενός είδους, έστω του πρώτου. Αν δύο από τα παραπάνω σημεία δεν ορίζουν μια ευθεία του αντίστοιχου επιπέδου, η σχέση για την γωνία παύει να ισχύει. Για παράδειγμα, στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, αν μία από τις δύο ευθείες που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση είναι μια ειδική ευθεία, τότε ο αριθμητής ή ο παρονομαστής του απλού λόγου των τριών σημείων είναι φανταστικός δυϊκός αριθμός. Και στις δύο πιθανές περιπτώσεις, δεν ορίζεται το όρισμα αυτού του απλού λόγου.

Όπως και στην Ευκλείδεια γεωμετρία, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία z_1, z_2 (όταν αυτή ορίζεται) μπορεί να περιγραφεί ως το σύνολο των σημείων z που ικανοποιούν την $\mathrm{Im}(z, z_1; z_2) = 0$. Δηλαδή, ο απλός λόγος των τριών σημείων z, z_1, z_2 πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός, άρα να ισούται με τον συζυγή του. Από την τελευταία ιδιότητα, βρίσκουμε πως μια ευθεία του επιπέδου του Γαλιλαίου ή του επιπέδου του Minkowski δίνεται από την σχέση:

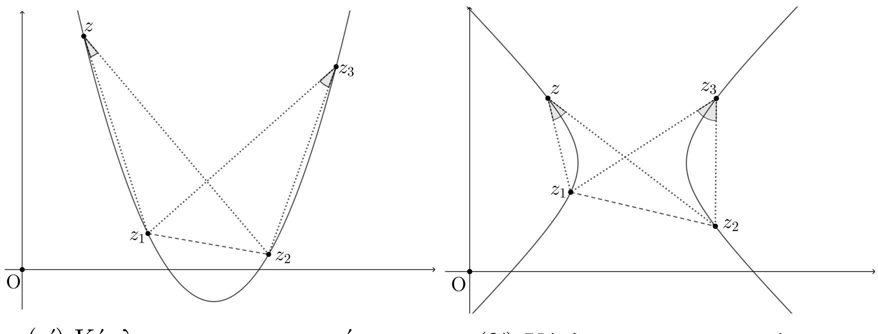
$$Bz - \overline{B}\overline{z} + C = 0, \mathrm{Re}(C) = 0 \tag{5.2.1}$$

Αντίστροφα, μια εξίσωση της μορφής (5.2.1) είναι μια ευθεία του επιπέδου του Γαλιλαίου ή του Minkowski, ανάλογα με το αν χρησιμοποιούμε δυϊκούς ή διπλούς αριθμούς. Η ευθεία αυτή θα ενώνει τα σημεία z_1, z_2, τα οποία είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούν τις: $B = \overline{z_1} - \overline{z_2}, C = z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$

Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο z_0 και τετράγωνο της ακτίνας ρ. Στην γεωμετρία του Γαλιλαίου μπορούμε να γράψουμε $\rho = r^2$ για κάποιο $r > 0$. Στην γεωμετρία του Minkowski έχουμε δει ότι μπορεί να ισχύει $\rho > 0$ ή $\rho < 0$, οπότε και γράφουμε αντίστοιχα $\rho = r^2$ ή $\rho = -r^2$. Σε κάθε περίπτωση, είναι απολύτως λογικό να θεωρήσουμε τον κύκλο ως το σύνολο των σημείων ζ τα οποία ικανοποιούν την: $(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = \rho$. Από αυτήν την σχέση, μετά από πράξεις βλέπουμε ότι η εξίσωση του κύκλου παίρνει την μορφή:

$$az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0, \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(c) = 0 \tag{5.2.2}$$

Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής (5.2.2) περιγράφει έναν κύκλο του επιπέδου του Γαλιλαίου ή του Minkowski, με κέντρο το σημείο z_0 και ακτίνα r, όπου $\overline{z_0} = -\dfrac{b}{a}$, $z_0\overline{z_0} - r^2 = \dfrac{c}{a}$. Σε αυτό το σημείο θα μιλήσουμε για τον



(α′) Κύκλωση στην γεωμετρία του Γαλιλαίου

(β′) Κύκλος στην γεωμετρία του Minkowski

Σχήμα 5.5

κύκλο που ορίζουν τρία σημεία. Προκειμένου να το κάνουμε, είναι αναγκαίο να διακρίνουμε μεταξύ της γεωμετρίας του Γαλιλαίου και της γεωμετρίας του Minkowski. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία μπορούμε να περιγράψουμε έναν κύκλο με δύο διαφορετικούς τρόπους: είτε ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο, είτε ως το σύνολο των σημείων που «βλέπουν» ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα υπό σταθερή προσανατολισμένη γωνία. Η ισοδυναμία αυτών των ορισμών παραμένει σε ισχύ και στην γεωμετρία του Minkowski: οι δύο ορισμοί περιγράφουν την ίδια καμπύλη, έναν κύκλο του επιπέδου του Minkowski (μια Ευκλείδεια υπερβολή) (Σχήμα 5.5-(β)). Στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, ωστόσο, οι δύο περιγραφές αντιστοιχούν σε διαφορετικές καμπύλες. Η πρώτη αντιστοιχεί, όπως έχουμε ήδη δει, σε ένα ζεύγος ειδικών ευθειών. Η δεύτερη αντιστοιχεί σε μια Ευκλείδεια παραβολή (Σχήμα 5.5-(α)). Ονομάζουμε την τελευταία καμπύλη κύκλωση, για να την ξεχωρίσουμε από την πρώτη, που αποτελεί τον κύκλο της γεωμετρίας αυτής. Αυτή η διάκριση είναι πολύ χρήσιμη, καθώς θα θέλαμε η ιδιότητα που ισχύει στην Ευκλείδεια γεωμετρία, δηλαδή ότι τρία σημεία του επιπέδου ορίζουν έναν μοναδικό κύκλο (ή ευθεία, ως οριακή περίπτωση κύκλου), να μεταφέρεται αυτούσια και στην γεωμετρία του Γαλιλαίου. Αλλά υπάρχει περίπτωση τρία σημεία του επιπέδου του Γαλιλαίου να μην ορίζουν έναν κύκλο. Με την έννοια της κύκλωσης εξασφαλίζουμε την ισχύ αυτής της ιδιότητας, και μπορούμε πλέον να λέμε ότι τρία σημεία του επιπέδου του Γαλιλαίου ορίζουν μια μοναδική καμπύλη, η οποία μπορεί να είναι κύκλος ή κύκλωση (ή ευθεία, ως οριακή περίπτωση μιας κύκλωσης).

Θεωρούμε τώρα τρία σημεία z_1, z_2, z_3. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν δ_1 η γωνία των $(z_3, z_1), (z_3, z_2)$ και δ_2 η γωνία των $(z, z_1), (z, z_2)$, τότε η κύκλωση στην γεωμετρία του Γαλιλαίου ή ο κύκλος στην γεωμετρία του Minkowski που διέρχεται από τα σημεία αυτά, αποτελείται από εκείνα τα σημεία z για τα οποία ισχύει $\delta_1 = \delta_2$. Όπως και στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών, η σχέση αυτή ισοδυναμεί με την $\operatorname{Im} \dfrac{(z_1, z_2; z_3)}{(z_1, z_2; z)} = 0$, όπου $(z_1, z_2; z_3, z) = \dfrac{(z_1, z_2; z_3)}{(z_1, z_2; z)}$ ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων z_1, z_2, z_3, z. Αυτό σημαίνει ότι ο διπλός λόγος αυτών των σημείων πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός, και άρα να ισούται με τον συζυγή του. Τελικά, η εξίσωση τής κύκλωσης ή του κύκλου παίρνει την μορφή:

$$Az\overline{z} + Bz - \overline{B}\overline{z} + C = 0, \operatorname{Re}(A) = \operatorname{Re}(C) = 0 \tag{5.2.3}$$

Παρά την εξωτερική ομοιότητα της παραπάνω σχέσης με την σχέση (5.1.6), υπάρχει μια σημαντική διαφορά. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία (δηλαδή όταν δουλεύουμε με μιγαδικούς αριθμούς), οι σχέσεις (5.1.3) και (5.1.5) είναι ισοδύναμες. Το ίδιο ισχύει και στην γεωμετρία του Minkowski, καθώς οι αντίστοιχες σχέσεις (5.2.2) και (5.2.3) είναι ισοδύναμες. Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε μία από τις δύο σχέσεις με την διπλή μονάδα e και θα προκύψει η άλλη. Στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, όμως, οι (5.2.2) και (5.2.3) δεν είναι ισοδύναμες. Αυτό συμβαίνει επειδή η δυϊκή μονάδα ε είναι διαιρέτης του μηδενός, και άρα δεν δικαιούμαστε να διαιρέσουμε τους όρους μιας σχέσης με το ε. Αυτή η διαφορά αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι ο κύκλος και η κύκλωση είναι δύο διαφορετικές καμπύλες του επιπέδου του Γαλιλαίου: η (5.2.2) περιγράφει έναν κύκλο, ενώ η (5.2.3) περιγράφει (εν γένει) μια κύκλωση.

Στην περίπτωση της γεωμετρίας του Minkowski μπορούμε να δούμε την εξίσωση (5.2.1) της ευθείας ως μια ειδική περίπτωση των σχέσεων (5.2.2) και (5.2.3), στις οποίες έχουν τεθεί $a = 0$ και $A = 0$ αντίστοιχα. Στην γεωμετρία του Γαλιλαίου μπορούμε να δούμε την εξίσωση της ευθείας (5.2.1) ως μια ειδική περίπτωση της (5.2.3) για την οποία $A = 0$, αλλά όχι της (5.2.2). Ο λόγος είναι ότι η (5.2.3), με $a = 0$, προσδιορίζει μόνο μια ειδική ευθεία του επιπέδου του Γαλιλαίου.

Όσον αφορά τα ομοκυκλικά σημεία, η παραπάνω συζήτηση μας οδηγεί να δούμε ότι, τόσο στην γεωμετρία του Γαλιλαίου, όσο και στην γεωμετρία του Minkowski, η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τέσσερα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 προκειμένου να ανήκουν στον ίδιο κύκλο (ή στην ίδια ευθεία, ως οριακή περίπτωση) είναι η $\mathrm{Im}(z_1, z_2; z_3, z_4) = 0$ (ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός).

Οι μετασχηματισμοί των επιπέδων του Γαλιλαίου και του Minkowski, οι οποίοι απεικονίζουν το σημείο z στο σημείο z', δίνονται από τις σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha)\;\; z' = pz + q,\;\; p\overline{p} = 1 \\
&(\beta)\;\; z' = p\overline{z} + q,\;\; p\overline{p} = 1
\end{aligned} \tag{5.2.4}
$$

Ειδικές περιπτώσεις είναι οι μετασχηματισμοί $z' = -z$ και $z' = \overline{z}$: ο πρώτος περιγράφει μια στροφή κατά 180° γύρω από την αρχή των αξόνων O, ενώ ο δεύτερος μια ανάκλαση ως προς την ευθεία $\mathrm{Im}(z) = 0$ (τον άξονα των x). Οι μετασχηματισμοί (5.2.4) διατηρούν την απόσταση δύο σημείων των επιπέδων του Γαλιλαίου και του Minkowski.

Πολύ σημαντικοί είναι και οι παρακάτω μετασχηματισμοί:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha)\;\; z' = \frac{az + b}{cz + d},\;\; |ad - bc| \neq 0 \\
&(\beta)\;\; z' = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d},\;\; |ad - bc| \neq 0
\end{aligned} \tag{5.2.5}
$$

Όταν $c = 0$, οι (5.2.5) ανάγονται στους (5.2.4). Οι (α),(β) είναι και εδώ κυκλικοί μετασχηματισμοί: απεικονίζουν τέσσερα σημεία ενός κύκλου (Minkowski) ή μιας κύκλωσης (Γαλιλαίου) σε τέσσερα σημεία ενός κύκλου (Minkowski) ή μιας κύκλωσης (Γαλιλαίου). Αυτός ο ισχυρισμός είναι εύκολο να αποδειχθεί, καθώς, όπως και στην Ευκλείδεια γεωμετρία, οι (5.2.5) είτε διατηρούν τον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων είτε τον απεικονίζουν στον συζυγή του. Ειδική περίπτωση είναι ο μετασχηματισμός $z' = \frac{1}{\overline{z}}$, ο οποίος προκύπτει από την (5.2.5-β) για $a = d = 0, c = b = 1$, και περιγράφει μια αντιστροφή του επιπέδου με κέντρο το O και συντελεστή 1.

Μια τελευταία σημείωση, ανάλογη με αυτήν που κάναμε στην περίπτωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Όταν $c \neq 0$, οι (5.2.5-α) δεν ορίζονται για εκείνα τα z για τα οποία ο $cz + d$ είναι διαιρέτης του μηδενός, και οι (5.2.5-β) δεν ορίζονται όταν ο $c\overline{z} + d$ είναι διαιρέτης του μηδενός. Αυτό δημιουργεί την ανάγκη να επεκτείνουμε τα σύνολα των δυϊκών και των διπλών αριθμών. Στην περίπτωση του συνόλου των δυϊκών αριθμών, χρειάζεται να το εφοδιάσουμε με τους αριθμούς $\lambda\omega$ και ∞, οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\lambda\varepsilon} = \frac{1}{\lambda}\omega$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ και

$\infty = \frac{1}{0}$. Οι κανόνες για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αυτών των αριθμών είναι οι εξής:

$$(a+\varepsilon b)+\lambda\omega=\lambda\omega,\ (a+\varepsilon b)\lambda\omega=(a\lambda)\omega,\ (\lambda\omega)\cdot(\mu\omega)=\infty$$

Τέλος, θέτουμε $\overline{\lambda\omega}=-\lambda\omega$ και $\overline{\infty}=\infty$. Τότε, οι (5.2.5) περιγράφουν 1-1 απεικονίσεις του εκτεταμένου αυτού συνόλου των δυϊκών αριθμών επί του εαυτού του. Γεωμετρικά, το πεδίο ορισμού των μετασχηματισμών αυτών είναι το αντιστροφικό επίπεδο του Γαλιλαίου, δηλαδή επίπεδο του Γαλιλαίου εφοδιασμένο με τα ιδεατά σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς $\lambda\omega$ και ∞.

Παρόμοια, πρέπει να εφοδιάσουμε το σύνολο των διπλών αριθμών με τους ιδεατούς αριθμούς $\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \sigma_1, \sigma_2$ και ∞, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και θεωρούμε ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\omega_1=\frac{1}{1+e},\ \omega_2=\frac{1}{1-e},\ \sigma_1=\frac{1-e}{1+e},\ \sigma_2=\frac{1+e}{1-e},\ \infty=\frac{1}{0}$$

Οι κανόνες για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αυτών των αριθμών είναι οι εξής:

$$(a+eb)+\lambda\omega_1=\lambda\omega_1,\ (a+eb)\cdot\lambda\sigma_2=(a+b)\lambda\sigma_2$$

$$(\lambda\omega_1)\cdot(\mu\omega_2)=\infty,\ (\lambda\omega_1)\cdot(\mu\sigma_2)=(\lambda\mu)\omega_2,\ (\lambda\omega_1)\cdot(\mu\omega_1)=\frac{\lambda\mu}{2}\omega_1$$

Τέλος, θέτουμε $\overline{\lambda\omega_1}=\lambda\omega_2$, $\overline{\lambda\omega_2}=\lambda\omega_1$, $\overline{\sigma_1}=\sigma_2$, $\overline{\sigma_2}=\sigma_1$, $\overline{\infty}=\infty$. Τότε, οι μετασχηματισμοί (5.2.5) γίνονται 1-1 απεικονίσεις του επεκταμένου συνόλου των διπλών αριθμών επί του εαυτού του. Η γεωμετρική σημασία των (5.2.5) είναι ότι αποτελούν κυκλικούς μετασχηματισμούς του αντιστροφικού επιπέδου του Minkowski, το οποίο προκύπτει από το επίπεδο του Minkowski αν προσθέσουμε τα ιδεατά σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς $\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \sigma_1, \sigma_2$ και ∞.

Η χρήση των δυϊκών αριθμών δεν περιορίζεται μόνο στην γεωμετρία του Γαλιλαίου. Αμέσως τώρα θα δείξουμε πως μπορούμε να αντιστοιχήσουμε τις (προσανατολισμένες) ευθείες της Ευκλείδειας γεωμετρίας με δυϊκούς αριθμούς. Αν θυμηθούμε ότι οι ευθείες της Ευκλείδειας γεωμετρίας αποτελούν τα σημεία της συνευκλείδειας γεωμετρίας, τότε βλέπουμε ότι έχουμε αυτόματα αντιστοιχήσει (προσανατολισμένα) σημεία της συνευκλείδειας γεωμετρίας με δυϊκούς αριθμούς.

Για να ορίσουμε τις πολικές συντεταγμένες μιας ευθείας του Ευκλείδειου επιπέδου χρειαζόμαστε μια (προσανατολισμένη) ευθεία o, την οποία ονομάζουμε πολικό άξονα, και ένα σημείο O πάνω στην o, το οποίο ονομάζουμε πόλο. Οι συντεταγμένες μιας ευθείας l είναι η γωνία θ που σχηματίζει με τον αξόνα o και η (προσανατολισμένη) απόσταση s του O από το σημείο τομής της l και του o. Προφανώς η s μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$, ενώ η θ παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 2π. Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι $\theta=0$ για ευθείες παράλληλες με τον o και $\theta=\pi$ για ευθείες αντιπαράληλλες (παράλληλες και με αντίθετο προσανατολισμό) με τον o. Αν η l δεν τέμνει τον άξονα o, δεν ορίζουμε συντεταγμένη s.

Αντιστοιχίζουμε στην ευθεία l που έχει συντεταγμένες (θ, s) τον δυϊκό αριθμό $z = \tan\dfrac{\theta}{2}(1+\varepsilon s)$. Οι ευθείες παράλληλες στον άξονα o αντιστοιχούν σε αριθμούς μηδενικού μέτρου, δηλαδή στους διαιρέτες του μηδενός $z = \lambda\varepsilon$. Συγκεκριμένα, σε μια ευθεία l η οποία είναι παράλληλη με τον άξονα o και απέχει απόσταση d από αυτόν αντιστοιχίζουμε τον δυϊκό αριθμό $z = \dfrac{d}{2}\varepsilon$. Παρατηρούμε ότι δύο ευθείες l και l_1 οι οποίες διαφέρουν μόνο στον προσανατολισμό, και άρα έχουν συντεταγμένες (θ, s) και $(\theta+\pi, s)$ αντίστοιχα, παριστάνονται από τους αριθμούς $z = \tan\dfrac{\theta}{2}(1+\varepsilon s)$ και $z_1 = \tan\dfrac{\theta+\pi}{2}(1+\varepsilon s) = -\dfrac{1}{\overline{z}}$. Αν τώρα απαιτήσουμε να ισχύει η σχέση αυτή και για ευθείες που δεν τέμνουν τον άξονα o, θα πρέπει να αντιστοιχήσουμε σε μια ευθεία l_1 αντιπαράλληλη με τον o και απέχει απόσταση d από αυτόν τον δυϊκό αριθμό: $z = -\dfrac{1}{\frac{d}{2}\varepsilon} = \dfrac{2}{d}\omega$. Στην ευθεία o_1, που διαφέρει από τον άξονα o μόνο στον προσανατολισμό, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $z = \infty$. Με αυτόν τον τρόπο αποκτούμε μια 1-1 αντιστοιχία του συνόλου των (προσανατολισμένων) ευθειών του Ευκλείδειου επιπέδου με το σύνολο των δυϊκών αριθμών, συμπεριλαμβανομένων και των αριθμών $\lambda\omega$ και ∞.

Αν θέλουμε να αντιστοιχίσουμε τις (προσανατολισμένες) ευθείες του επιπέδου του Minkowski με δυϊκούς αριθμούς, εργαζόμαστε παρόμοια. Στις ευθείες που είναι παράλληλες με τον άξονα o και έχουν ίδιο προσανατολισμό αντιστοιχίζουμε τους διαιρέτες του μηδενός $\mu\varepsilon$· στις ευθείες που έχουν διαφορετικό προσανατολισμό αντιστοιχίζουμε τους ιδεατούς αριθμούς $\lambda\omega$. Στις ειδικές ευθείες $y = x$ και $y = -x$ αντιστοιχίζουμε τους δυϊκούς αριθμούς με μοναδιαίο μέτρο. Οι ευθείες αυτές δεν έχουν προσανατολισμό. Στον αντιάξονα o_1 αντιστοιχεί ο αριθμός ∞.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι οι (προσανατολισμένες) ευθείες του υπερβολικού επιπέδου αντιστοιχίζονται σε διπλούς αριθμούς. Θυμίζουμε ότι στο μοντέλο του δίσκου Poincaré, οι ευθείες του υπερβολικού επιπέδου αντιπροσωπεύονται από τις διαμέτρους του μοναδιαίου κύκλου Σ, καθώς και από τα κυκλικά τμήματα που περιέχονται στον Σ και τέμνουν τον Σ ορθογώνια. Κάνουμε την εξής διάκρισης μεταξύ των ευθειών του Σ: δύο ευθείες θα ονομάζονται παράλληλες αν οι φορείς τους (οι κύκλοι ή οι ευθείες στην περίπτωση διαμέτρων) τέμνονται στο Σ. Αν οι φορείς τους δεν τέμνονται στο Σ οι ευθείες θα ονομάζονται υπερπαράληλλες. Περιγράφουμε τώρα συνοπτικά πως γίνεται η αντιστοίχιση ευθειών και διπλών αριθμών. Στις ευθείες l που τέμνουν τον πολικό άξονα o αντιστοιχίζουμε τους διπλούς αριθμούς $z = x + ey$ για τους οποίους ισχύει $z\overline{z} = x^2 - y^2 > 0$. Στις ευθείες που είναι υπερπαράλληλες με τον άξονα o και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό αντιστοιχούν οι αριθμοί z με $-1 < z\overline{z} < 0$, ενώ στις ευθείες που είναι υπερπαράλληλες με τον o και έχουν αντίθετο προσανατολισμό αντιστοιχούν οι διπλοί αριθμοί z με $z\overline{z} < -1$. Οι ευθείες που είναι παράλληλες με τον o και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό αντιστοιχούν στους διπλούς αριθμούς μηδενικού μέτρου, δηλαδή τους αριθμούς της μορφής: $z = x \pm ex$, ενώ οι ευθείες που είναι αντιπαράλληλες (παράλληλες και με αντίθετο προσανατολισμό) με τον o αντιστοιχούν στους αριθμούς $\lambda\omega_1, \lambda\omega_2$. Προκειμένου να επεκτείνουμε την αντιστοιχία σε όλους τους διπλούς αριθμούς, εισάγουμε τις ευθείες στο άπειρο του υπερβολικού επιπέδου, οι οποίες μπορούν να αναπαρασταθούν από τις εφαπτόμενες του Σ. Οι ευθείες αυτές δεν έχουν προσανατολισμό. Οι ευθείες στο άπειρο αντιστοιχίζονται στους διπλούς αριθμούς z με $z\overline{z} = -1$, καθώς και στους αριθμούς σ_1, σ_2 (στους αριθμούς σ_1, σ_2 αντιστοιχούν οι εφαπτόμενες του Σ στα σημεία τομής του με τον άξονα o). Με αυτόν τον τρόπο αποκτούμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των (προσανατολισμένων) ευθειών του υπερβολικού επιπέδου και του συνόλου των διπλών αριθμών (εφοδιασμένο με τους αριθμούς $\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \sigma_1, \sigma_2, \infty$.

Αν θυμηθούμε ότι οι ευθείες της υπερβολικής γεωμετρίας αποτελούν τα σημεία της συνυπερβολικής γεωμετρίας, βλέπουμε ότι από την παραπάνω συζήτηση έχουμε αποκτήσει έναν τρόπο για να ταυτίσουμε τα (προσανατολισμένα) σημεία της συνυπερβολικής γεωμετρίας με διπλούς αριθμούς.

5.3 Γενική θεώρηση

Η τακτική που χρησιμοποιήσαμε στις προηγούμενες ενότητες μπορεί να εφαρμοστεί για όλες τις Cayley-Klein γεωμετρίες που μελετάμε. Τα σημεία του υπερβολικού και του ελλειπτικού επιπέδου μπορούν να αναπαρασταθούν από μιγαδικούς αριθμούς, τα σημεία των επιπέδων της συνευκλείδειας και συνminkowski γεωμετρίας από δυϊκούς αριθμούς, και τα σημεία των επιπέδων της διπλά υπερβολικής και συνυπερβολικής γεωμετρίας από διπλούς αριθμούς.

Η χρήση διαφορετικών συνόλων αριθμών για κάθε γεωμετρία σχετίζεται άμεσα με τον εκάστοτε τρόπο μέτρησης των γωνιών. Παρατηρούμε πως τα σημεία των γεωμετριών με ελλειπτικό τρόπο μέτρησης των γωνιών (ελλειπτική, Ευκλείδεια, υπερβολική) αναπαρίστανται από μιγαδικούς αριθμούς, τα σημεία των γεωμετριών με παραβολικό τρόπο μέτρησης των γωνιών (συνευκλείδεια, Γαλιλαίου, συνminkowski) από δυϊκούς αριθμούς, και τα σημεία των γεωμετριών με υπερβολικό τρόπο μέτρησης γωνιών (συνυπερβολική,Minkowski, διπλά υπερβολική) από διπλούς αριθμούς.

Οι διαφορετικοί τρόποι μέτρησης των αποστάσεων μπορούν κι αυτοί να ενταχθούν στην γενική εικόνα. Στα επίπεδα που εφαρμόζεται ο ελλειπτικός τρόπος μέτρησης των αποστάσεων (ελλειπτικό, συνευκλείδειο, συνυπερβολικό), η απόσταση d δύο σημείων z, w του επιπέδου δίνεται από την σχέση:

$$\tan^2\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{(z-w)(\overline{z}-\overline{w})}{(1+z\overline{w})(1+\overline{z}w)} \tag{5.3.1}$$

Στα επίπεδα με παραβολικό τρόπο μέτρησης των αποστάσεων (Ευκλείδειο, Γαλιλαίου, Minkowski) η απόσταση d δύο σημείων z, w δίνεται από την σχέση:

$$d^2 = (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) \tag{5.3.2}$$

Στα επίπεδα με υπερβολικό τρόπο μέτρησης των αποστάσεων (υπερβολική, συνminkowski , διπλά υπερβολική) η απόσταση d των σημείων z, w θα δίνεται από την:

$$\tanh^2\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{(z - w)(\overline{z} - \overline{w})}{(1 - z\overline{w})(1 - \overline{z}w)} \tag{5.3.3}$$

Οι μετασχηματισμοί κάθε επιπέδου μπορούν να γραφούν με χρήση των μιγαδικών, δυϊκών και διπλών αριθμών. Στα επίπεδα με τον ελλειπτικό τρόπο μέτρησης των αποστάσεων, οι μετασχηματισμοί του επιπέδου δίνονται από τις σχέσεις:

$$z' = \frac{pz + q}{\overline{q}z - \overline{p}},\ z' = \frac{p\overline{z} + q}{\overline{q}\overline{z} - \overline{p}},\ (|p\overline{p} - q\overline{q}| \neq 0) \tag{5.3.4}$$

Στα επίπεδα με παραβολικό τρόπο μέτρησης των αποστάσεων, οι μετασχηματισμοί δίνονται από την σχέση:

$$z' = pz + q,\ z' = p\overline{z} + q,\ (p\overline{p} = 1) \tag{5.3.5}$$

Στα επίπεδα με υπερβολικό τρόπο μέτρησης των αποστάσεων, οι μετασχηματισμοί δίνονται από τις σχέσεις

$$z' = \frac{pz + q}{\overline{q}z + \overline{p}},\ z' = \frac{p\overline{z} + q}{\overline{q}\overline{z} + \overline{p}},\ (|p\overline{p} + q\overline{q}| \neq 0) \tag{5.3.6}$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τις ευθείες κάθε επιπέδου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με τον τρόπο μέτρησης των αποστάσεων. Σε επίπεδο με ελλειπτικό τρόπο, οι ευθείες δίνονται από την σχέση:

$$Az\overline{z} + Bz + B\overline{z} - A = 0, \mathrm{Re}(A) = 0 \tag{5.3.7}$$

Σε επίπεδο με παραβολικό τρόπο, οι ευθείες δίνονται από την σχέση:

$$Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0, \mathrm{Re}(C) = 0 \tag{5.3.8}$$

Σε επίπεδο με υπερβολικό τρόπο μέτρησης αποστάσεων, οι ευθείες δίνονται από την σχέση:

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + A = 0, \mathrm{Re}(A) = 0 \tag{5.3.9}$$

Σε όλες τις γεωμετρίες, η εξίσωση ενός κύκλου (ή μιας κύκλωσης, σε περιπτώσεις όπως η γεωμετρία του Γαλιλαίου) είναι η ίδια:

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0, \mathrm{Re}(A) = \mathrm{Re}(C) = 0 \tag{5.3.10}$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου ο κύκλος να ανάγεται σε ευθεία είναι:

- $A + C = 0$, αν ισχύει η (5.3.1)
- $A = 0$, αν ισχύει η (5.3.2)
- $A - C = 0$, αν ισχύει η (5.3.3)

Μια άλλη ιδιότητα που παραμένει ίδια σε όλες τις γεωμετρίες, ανεξάρτητα από τον τρόπο μέτρησης αποστάσεων και γωνιών, είναι η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τέσσερα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 προκειμένου να ανήκουν στον ίδιο κύκλο (ή κύκλωση). Η συνθήκη αυτή είναι η $\mathrm{Im}(z_1, z_2; z_3, z_4) = 0$. Ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός. Οι κυκλικοί μετασχηματισμοί κάθε γεωμετρίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},\ z' = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} \ \ (|ad - bc| \neq 0) \tag{5.3.11}$$

Βιβλιογραφία

[1] H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt, & H. Kunle, (eds.) ,*Fundamentals of Mathematics Vol. 2, Geometry*, MIT Press, 1974.

[2] J. Richter-Gebert.*Perspectives on projective geometry. A guided tour through real and complex geometry.* Springer, Heidelberg, 2011.

[3] I. M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press Inc., 1968.

[4] I.M. Yaglom,*A simple non-Euclidean geometry and its physical basis : an elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity*, Abe Shenitzer (trans.), Springer-Verlag New York, 1979.