

Μοντελοποίηση βλάστησης κατά
τον υπολογισμό τυρβωδών ροών
σε αστικές περιοχές

Τομέας: Ρευστών

Επιβλέπων: Δημήτριος Μπούρης, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα 2020



Vegetation modeling in turbulent
flow field calculations in urban
areas

Section: Fluids

Supervisor: Demetri Bouris, Associate Professor NTUA

Athens 2020



Υπεύθυνη δήλωση για λογοκλοπή και για κλοπή πνευματικής ιδιοκτησίας:

Έχω διαβάσει και κατανοήσει τους κανόνες για τη λογοκλοπή και τον τρόπο σωστής αναφοράς των πηγών που περιέχονται στον οδηγό συγγραφής Διπλωματικών Εργασιών. Δηλώνω ότι, από όσα γνωρίζω, το περιεχόμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι προϊόν δικής μου εργασίας και υπάρχουν αναφορές σε όλες τις πηγές που χρησιμοποίησα.

Γαλίκας Μάρκος

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Μπούρη, για την άριστη συνεργασία και καθοδήγηση που μου πρόσφερε, απόλυτα σημαντική για την περάτωση της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, θερμές ευχαριστίες στο διδακτικό προσωπικό του Ε.Μ.Π. που με βοήθησε στην πορεία μου ως φοιτητής και στους οικείους μου ανθρώπους για την στήριξή τους.

Contents

Ευχαριστίες.....	4
Σύνοψη – Περίληψη	6
Abstract.....	7
1 Εισαγωγή.....	8
2 Μαθηματική μοντελοποίηση.....	11
2.1 Εξισώσεις κίνησης.....	11
2.2 Μεταφορά ενέργειας.....	13
2.3 Μοντέλα τύρβης	16
2.4 Μοντέλο k-ε	17
2.5 Προτάσεις βελτίωσης k-ε.....	19
2.6 Εισαγωγή όρων βλάστησης	20
2.7 Υπολογισμός LAD και Cd	23
3 Επικύρωση υπολογιστικού εργαλείου.....	26
4 Μοντέλα βλάστησης και σύγκρισή τους	29
5 Εφαρμογή τροποποιήσεων Durbin Timescale Limiter και RNG	41
6 Αριθμητική προσομοίωση σε αστική περιοχή.....	52
7 Εφαρμογή σε περιοχή του Ε.Μ.Π.	57
8 Συμπεράσματα.....	64
9 Κατάλογος Σχημάτων	66
10 Κατάλογος Πινάκων	69
11 Appendix I.....	70
11.1 Εξισώσεις.....	70
11.2 Περιγραφή της μεθόδου επίλυσης.....	72
11.3 Ολοκλήρωση των εξισώσεων.....	73
11.4 Εξίσωση πίεσης	78
11.5 Αντιμετώπιση στα όρια του υπολογιστικού χώρου	81
11.6 Οριακές συνθήκες.....	83
11.7 Οριακές συνθήκες ταχυτήτων παράλληλων σε τοίχωμα, συναρτήσεις τοιχώματος (wall functions).	85
11.8 Διαδικασία επίλυσης	87
12 Αναφορές – Βιβλιογραφία.....	91

Σύνοψη – Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται το θέμα της προσομοίωσης βλάστησης στην υπολογιστική ρευστομηχανική, όπως αποτυπώνεται από τη θεωρία τύρβης και τη συμβολή των ερευνητών για την ενσωμάτωση σε αυτή. Έμφαση δίνεται στις διαφορετικές μοντελοποιήσεις και στα αποτελέσματα της κάθε μίας.

Με την εργασία αυτή, διερευνήθηκε η ακρίβεια των διαφορετικών προσεγγίσεων, βασιζόμενη σε πειραματικά δεδομένα από προηγούμενες μελέτες, ενώ παράλληλα αποτυπώθηκε και το υπολογιστικό κόστος τους. Σκοπός ήταν να βρεθεί αποδεκτός συνδυασμός ακρίβειας υπολογισμών και υπολογιστικού κόστους.

Το παραπάνω υλοποιήθηκε στο αρχικό του στάδιο με κατάλληλη βιβλιογραφική ανασκόπηση, όπου έγινε η αναζήτηση των σχημάτων μοντελοποίησης. Στη συνέχεια, αυτά εφαρμόστηκαν σε δύο περιπτώσεις μελέτης για την εύρεση της καλύτερης προσέγγισης στο πρόβλημα της βλάστησης και σε μία εφαρμογή της. Έγινε χρήση του υπολογιστικού εργαλείου CAFFCA3D για τον υπολογισμό των παραμέτρων του προβλήματος, ενώ η σχηματική τους αναπαράσταση έγινε με τη βοήθεια προγράμματος εργαλείου αναπαράστασης δεδομένων υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Για την περίπτωση της πρακτικής εφαρμογής έγινε χρήση του σχεδιαστικού εργαλείου SketchUp.

Στην περιοχή της βλάστησης, η επίδραση του φυλλώματος στη ροή δημιουργεί επιπλέον διεργασίες παραγωγής και καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας σε ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών μεγεθών εξαιτίας της ετερογενούς γεωμετρίας, με την μοντελοποίηση της να απαιτεί τροποποίηση των εξισώσεων για την ενσωμάτωση των φυσικών αυτών διεργασιών. Στην εργασία αυτή γίνεται ξεκάθαρο ότι το πρόβλημα της μοντελοποίησης της βλάστησης είναι περίπλοκο και δεν μπορούμε να πούμε σε ασφάλεια ποια από τις μεθόδους υπερέχει αδιαμφισβήτητα έναντι των υπολοίπων.

Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής είναι σίγουρο ότι μπορούν να δώσουν για γενική εποπτεία του προβλήματος της βλάστησης και μια ενδιαφέρουσα σύγκριση των συνηθισμένων τεχνικών που χρησιμοποιούνται. Επιπλέον δίνεται να δώσουν μια πρώτη κατεύθυνση για την περαιτέρω ανάπτυξη των υπολογιστικών διαδικασιών είτε αυτή αφορά την γενική κατανόηση γύρω από τη θεωρία της τύρβης είτε αυτή αφορά το κομμάτι της βλάστησης και της επίδρασής της.

Abstract

In the current thesis the topic of vegetation representation in computational fluid mechanics is presented, as described by the turbulence theory and the contribution of researchers to its integration. Emphasis is placed on the different modeling and the results of each.

With this work, the accuracy of the different schemes was investigated, based on experimental data from previous studies, while at the same time their computational cost was recorded. The aim was to find an acceptable combination of calculation accuracy and computational cost.

The above was approached in its initial stage with an appropriate literature review, where the search for modeling schemes was done. These were then applied in two case studies to find the best approach to the vegetation problem and in one application. The CFD tool CAFFCA3D was used to calculate the parameters of the problem, while their visual representation was done with the help of a CFD Post Processor Tool. In the case of the practical application, the design tool SketchUp was used.

In the vegetation area, the effect of foliage on flow creates additional processes of production and destruction of turbulent kinetic energy in a wide range of different sizes due to the heterogeneous geometry, with its modeling requiring modification of the equations to incorporate these physical processes. In this work it becomes clear that the problem of vegetation modeling is complex and we cannot say with certainty which of the methods is unquestionably superior to the others.

The results of this work are sure to give an overview of the vegetation problem and an interesting comparison of the usual techniques used. In addition, they give a first direction for the further development of computational processes, whether it concerns the general understanding around the theory of turbulence or it concerns the part of vegetation and its effect.

1 Εισαγωγή

Η ατμοσφαιρική ρύπανση επηρεάζει την ανθρώπινη υγεία, τη βλάστηση, τα δομικά υλικά, καθώς έχει και επιπτώσεις στο παγκόσμιο κλίμα. Ο Οργανισμός Υγείας (ΠΟΥ) και άλλοι διεθνείς οργανισμοί έχουν από καιρό προσδιορίσει την αστική ατμοσφαιρική ρύπανση ως κρίσιμο για την δημόσια υγεία πρόβλημα(αλλεργίες, καρδιοαναπνευστικά προβλήματα κλπ.), με πολλούς θανάτους να συνδέονται με αυτή. Όσο αυξάνεται η κατανάλωση ενέργειας, είναι πιθανό ότι η ποιότητα του αέρα στις αστικές περιοχές θα συνεχίσει να επιδεινώνεται.

Η βλάστηση δεσμεύει αέρια, σωματίδια(PM) και αερολύματα από το ατμόσφαιρα πιο αποτελεσματικά από άλλες επιφάνειες που βρίσκονται στην πόλη. Σε αυτή τη βάση επιστημονικές μελέτες έχουν διεξαχθεί για τη δυνατότητα της αστικής βλάστησης να λειτουργήσει ως εργαλείο βελτίωσης της ποιότητας του αέρα σε συνδυασμό και με τις άλλες δυνατότητες που προσφέρει. Αλλαγές το μικροκλίμα της περιοχής με μείωση θερμοκρασιών και μετρίαση ριπών ανέμων, μείωση θορύβου, αποχέτευση υδάτων, ψυχολογικές επιπτώσεις είναι μερικές από αυτές. Επίσης η βλάστηση παίζει βασικό ρόλο και στην αιφόρο ανάπτυξη του υδάτινου περιβάλλοντος και είναι αντικείμενο μελέτης της μηχανικής παράκτιων περιοχών. Παρέχει βιότοπο και τροφή σε διάφορα είδη υδρόβιων ζώων μειώνει την ταχύτητα ροής, μειώνει την ενέργεια κύματος και βελτιώνει εναπόθεση ιζημάτων, προσφέροντας προστασία στις ακτές και κοίτες ποταμών από πλημμύρες και κυματομορφές. Ορισμένες μελέτες υποδεικνύουν και την αρνητική πλευρά της βλάστησης μέσα στην πόλη. Γενικά, η βλάστηση βρέθηκε να μειώνει την ταχύτητα του ανέμου, προκαλώντας αναστολή του αερισμού και κατά συνέπεια την αύξηση των συγκεντρώσεων σωματιδίων. Το πρόβλημα αυτό εξαρτάται από την πυκνότητα τοποθέτησης της βλάστησης, την απόσταση από το δρόμο και τα κτήρια, από το είδος των φυτών, το λόγο ύψους βλάστησης-κτηρίων(Wania et al., 2012; Chen et al., 2016; Janhäll, 2015; 2007; Buccolieri et al., 2011). Επιπλέον πρέπει να ληφθούν υπόψη παράγοντες, όπως η γύρη που προκαλεί εποχιακές αλλεργίες, εκπομπές VOCs(biogenic Volatile Compounds) από τα ίδια τα φυτά. Βλέπουμε λοιπόν ότι το πρόβλημα της βλάστησης είναι αρκετά περίπλοκο και τα αποτελέσματα να μην είναι ξεκάθαρα, με τις μελέτες να δείχνουν προς το παρόν γενικές κατευθύνσεις για τον αστικό σχεδιασμό.

Η σοβαρή ατμοσφαιρική ρύπανση στις αστικές περιοχές προκαλείται συνήθως από τις συνδυασμένες επιπτώσεις της κυκλοφορίας, βιομηχανικών εκπομπών και μετεωρολογικών συνθηκών. Οι περιβαλλοντολογικές συνθήκες επηρεάζονται από πολύπλοκη χωρική και χρονική ροή, με διακυμάνσεις και αλληλεπιδράσεις διασποράς, με τη βλάστηση λόγω της πολύπλοκης γεωμετρίας και τραχύτητάς της να προσθέτει επιπλέον τυρβώδες συνθήκες. Η τύρβη είναι ένα φαινόμενο μεγάλης σημασίας της μηχανικής των ρευστών. Σχεδόν όλες οι ροές που απαντώνται στη φύση μπορούν να χαρακτηριστούν ως τυρβώδες ροές με τις εφαρμογές να εκτείνονται σε ένα ευρύ φάσμα και μεγέθους. Από στροβιλομηχανές και Μ.Ε.Κ. μέχρι την μελέτη ατμοσφαιρικών και θαλάσσιων ροών χιλιομέτρων.

Η τύρβη ορίζεται δύσκολα κάτω από έναν ορισμό. Όμως είναι δόκιμο να περιγράψουν ορισμένες γενικές ιδιότητες που την χαρακτηρίζουν (Τσαγγάρης, 2015).

- Διακυμάνσεις: Οι τυρβώδης ροές περιέχουν ακανόνιστες διακυμάνσεις στις ποσότητες πεδίου (ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία κ.λπ.) .
- Στροβιλότητα (Vorticity): Βασικός τρόπος για να γίνει διάκριση της ροής από στρωτή ή τυρβώδη είναι η στροβιλότητα. Οι αταξίες στο πεδίο ταχυτήτων δημιουργούν χωρικές δομές-δίνες (eddys), εκτεινόμενες σε ένα ευρύ συνεχές φάσμα μεγεθών.
- Διάχυση (Diffusivity): Οι τυχαίες, στοχαστικές κινήσεις του ρευστού προκαλούν ιξώδη διάχυση, θερμική διάχυση, διάχυση ορμής. Οι δίνες μεταφέρουν ρευστό από μια περιοχή σε μία άλλη, αναμιγνύοντάς το δίνοντας χαρακτήρα διάχυσης.
- Η τύρβη είναι διεισδυτική, επομένως η τυρβώδη περιοχή αυξάνεται.
- Κατατροφή (Dissipation): Μεταφέρεται ενέργεια από τις μεγάλες στις μικρές δίνες μέσω μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων, έως κάποιο όριο. Πέρα από αυτό, γίνεται συνεκτική καταστροφή και έκλυση θερμότητας. Συνεπώς απαιτεί συνεχή παροχή ενέργειας.

Πολλοί επιφανείς επιστήμονες με πρωτεργάτη την O.Reynolds προσπάθησαν να περιγράψουν την χαώδη κίνηση των σωματιδίων. Τα πειράματά του σε ροές μέσα σε σωλήνες έδειξαν ότι η ροή γίνεται τυρβώδης όταν η αδιάστατη ποσότητα $Re = UL/v$ υπερβαίνει μια συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή. Αν και οι ακανόνιστες διακυμάνσεις των μεταβλητών ροής είναι ντετερμινιστικές στη φύση τους, η προσομοίωση των τυρβώδους ροών εξακολουθεί να παρουσιάζει σημαντικό πρόβλημα. Οι προσομοιώσεις υπολογιστών μπορούν να είναι ισχυρά εργαλεία για την εκτίμηση των επιπτώσεων διαφορετικών παραμέτρων. Με την αλματώδη βελτίωση της υπολογιστικής δύναμης των σύγχρονων Η/Υ υπάρχει πλέον η δυνατότητα επίλυσης (Direct Numerical Solution), που όμως περιορίζεται σε πολύ απλές περιπτώσεις, μιας και απαιτείται μεγάλη ακρίβεια, απαγορευτική για πρακτικές εφαρμογές. Προς το παρόν οι προσπάθειες έχουν επικεντρωθεί στην διαμόρφωση προσεγγιστικών μοντέλων. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε μοντέλο συνοδεύεται από δυνατά σημεία αλλά και αδυναμίες. Για την επιλογή τους λοιπόν, σε κάποια πραγματική εφαρμογή, πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν αυτό, καθώς και η σχέση υπολογιστικού κόστους και ακρίβειας που προσφέρουν. Όσο αφορά την ένταξη της επίδρασης της βλάστησης στη θεωρία των τυρβωδών ροών, η δυσκολία έγκειται στην προσομοίωση της πολύπλοκης μεταφοράς ενέργειας που συμβαίνει μέσα και γύρω από αυτή. Αυτό γίνεται με προσθήκη επιπλέον όρων πηγής και καταβόθρας στις εξισώσεις (Green, 1992; Liu et al.;1996), αλλά δεν υπάρχει συμφωνία για την προσομοίωση των όρων αυτών. Οι διαφορικές προτάσεις μοντελοποίησης αφορούν την αλλαγή των συντελεστών που τις περιγράφουν (Sanz, 2003; Katul et al.,2004; Svensson and Häggkvist, 1990) και η διπλωματική σκοπό έχει να παρουσιάσει μια λεπτομερή σύγκριση των μοντέλων αυτών. Δυσκολίες εντοπίζονται και στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών που περιγράφουν της βλάστησης, όπως για παράδειγμα ο συντελεστής αντίστασης του φυλλώματος.

Η διπλωματική εργασία ξεκινάει με την περιγραφή της μαθηματικής μοντελοποίησης που χρησιμοποιήθηκε και αποτελεί το κεφάλαιο 2. Πιο συγκεκριμένα περιγράφονται οι εξισώσεις κίνησης, το μοντέλο τύρβης και οι επιπλέον όροι του αντιπροσωπεύουν τη βλάστηση στις εξισώσεις. Γίνεται αναφορά στην μεταφορά ενέργειας που πραγματοποιείται σε αυτή και στις δύο γεωμετρικές παραμέτρους που περιγράφουν τη βλάστηση. Επίσης περιγράφονται και δύο τροποποιήσεις του μοντέλου τύρβης που χρησιμοποιήθηκαν με σκοπό βελτίωση των αποτελεσμάτων. Το κεφάλαιο 3 αποτελείται από την επικύρωση του υπολογιστικού εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε και το κεφάλαιο 4 από τη σύγκριση των μοντέλων βλάστησης και την επιλογή του καλύτερου. Το επόμενο, κεφάλαιο 5, αφορά την εφαρμογή των τροποποιήσεων του μοντέλου τύρβης σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 4. Στο κεφάλαιο 6 γίνεται η εφαρμογή και επιλογή του πλέον κατάλληλου μοντέλου για τη βλάστηση. Ακολουθεί το κεφάλαιο 7 για να δούμε την επίδραση της χωροταξίας της βλάστησης με μια πρακτική εφαρμογή.

2 Μαθηματική μοντελοποίηση

2.1 Εξισώσεις κίνησης

Η κίνηση των ρευστών, τυρβώδη ή μη, διέπεται από τις γνωστές εξισώσεις Navier – Stokes, που για ασυμπίεστο ρευστό παίρνουν την μορφή.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Η πρώτη περιγράφει τη διατήρησης μάζα και η δεύτερη τη διατήρηση της ορμής.

Ωστόσο, είναι σχεδόν αδύνατο να προβλεφθεί λεπτομερώς η ροή σε υψηλούς αριθμούς Reynolds, καθώς υπάρχουν δίνες με τεράστιο εύρος κλιμάκων μήκους και χρόνου. Έτσι η βασική ιδέα για την περιγραφή της τύρβης υλοποιείται με στατιστική προσέγγιση, μέσω κανόνων μέσης τιμής στις εξισώσεις N-S (Blazek, 2005, Kundu et al., 2016, Durbin and Pettersson-Reif, 2011, Τσαγγάρης, 2015). Γίνεται λοιπόν διαχωρισμός των μεγεθών της ροής σε δύο μέρη. Στη μέση τιμή με σύμβολο \bar{A} και τη διακύμανση A' γύρω από αυτή (Reynolds decomposition). Αναφέρεται ότι η μέση τιμή της διακύμανσης είναι μηδενική και επιπλέον η μέση τιμή του γινομένου δύο κυμαινόμενων ποσοτήτων δεν είναι μηδέν. Τα μέσα μεγέθη έχουν χρονική και χωρική εξάρτηση. Στις παρούσες εφαρμογές όμως θεωρείται ότι αυτά δεν εξαρτώνται από τον χρόνο, αλλά μόνο από τη θέση ως ροές αμετάβλητες για μεγάλο διάστημα.

$$u = \bar{u} + u' \quad \bar{u}' = 0$$

$$p = \bar{p} + p' \quad \bar{p}' = 0$$

$$\overline{u'_i u'_j} \neq 0$$

Προκύπτουν έτσι οι λεγόμενες εξισώσεις RANS με χρονική ολοκλήρωση. Για παράδειγμα οι συνιστώσες της ταχύτητας ορίζονται ως:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \overline{u(\vec{r})} dt$$

Βασικό είναι να τονιστεί ότι το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης T θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο ως προς τη χρονική περίοδο των τυρβωδών διακυμάνσεων, αλλά και αρκετά μικρότερο από τη χρονική διάρκεια των μη τυρβωδών διακυμάνσεων της ροής.

Σε αυτό το στάδιο οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους. Οι εξισώσεις που προέκυψαν λόγω του διαχωρισμού των μεγεθών είναι ίδιες με τις N-S εκτός από τον επιπλέον όρο στην εξίσωση της ορμής.

(2.1.1α)

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0$$

(2.1.1β)

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2}$$

Με εφαρμογή κανόνων μέσης τιμής οι εξισώσεις RANS παίρνουν την μορφή:

(2.1.2α)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

(2.1.2β)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

Οι επιπλέον άγνωστοι ονομάζονται τυρβώδεις διατμητικές τάσεις(Reynolds stress tensor) και μπορούν να ερμηνευτούν ως τον ρυθμό μεταφοράς μέσης ορμής λόγω των διακυμάνσεων στο μέσο πεδίο. Είναι γενικά μεγαλύτερες από τις τάσεις προκαλούμενες από το ιξώδες $\nu \partial^2 \bar{u}_i / \partial x_j^2$, εκτός από περιοχές πάνω σε στερεά όρια όπου μηδενίζονται λόγω επιβολής συνθηκών μηδενισμού της ταχύτητας ή κοντά σε αυτά λόγω μεγάλων κλίσεων της μέσης ροής. Οι επιπλέον άγνωστοι για το τρισδιάστατο πρόβλημα είναι έξι, αφού υπάρχει συμμετρία των τάσεων. Συνολικά έχουμε 4 εξισώσεις ($N - S$, $i = 1,2,3$) και 10 άγνωστες ποσότητες (p , u_i , $\overline{u'_i u'_j}$, $i = 1,2,3$, $j \leq i$)

$$\tau_{ij}^R = -\overline{u'_i u'_j} = \begin{bmatrix} \overline{u_1'^2} & \overline{u_1' u_2'} & \overline{u_1' u_3'} \\ \overline{u_2' u_1'} & \overline{u_2'^2} & \overline{u_2' u_3'} \\ \overline{u_3' u_1'} & \overline{u_3' u_2'} & \overline{u_3'^2} \end{bmatrix}$$

Οδηγούμαστε έτσι στη δημιουργία μοντέλων τύρβης για τη κατασκευή κλειστού συστήματος εξισώσεων(closure problem). Η πιο διαδεδομένη οδός είναι η σύνδεση των παραπάνω επιπλέον όρων-αγνώστων με τους όρους της μέσης ταχύτητας μέσω της υπόθεσης J. Boussinesq.

2.2 Μεταφορά ενέργειας

Η επίδραση της βλάστησης στη ροή συνεπάγεται πολύπλοκη μεταφορά τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Λόγω των στοιχείων που αποτελούν τη βλάστηση (κλαδιά, φύλλα, κορμός) και βρίσκονται σε αφθονία μεγεθών, σχημάτων και κατευθύνσεων, κάθε ένα από αυτά δημιουργεί στοιχεία ροής (δίνες) διαφορετικών μεγεθών.

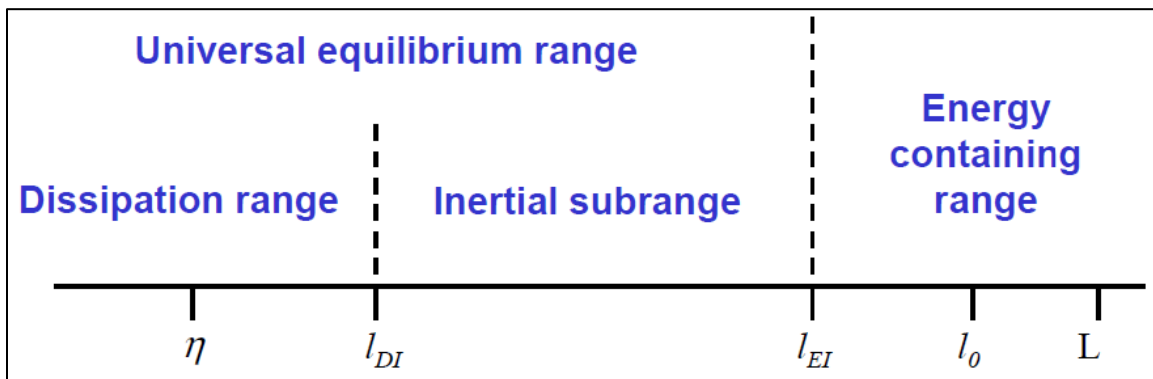
Θεωρούμε πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδη ροή. Σε αυτή παρουσιάζονται δίνες διαφορετικών μεγεθών. Καθώς πλησιάζουμε την μεγαλύτερη σε μήκος l_0 , που δίνετε να περιοριστεί μόνο από τα φυσικά όρια του πεδίου L , λόγω του μεγάλου αριθμού Reynolds οι δυνάμεις συνεκτικότητας είναι μικρές. Αυτές είναι οι δίνες που ευθύνονται για τον κύριο όγκο μεταφοράς ενέργεια και ορμής. Αντίθετα καθώς πλησιάζουμε τη μικρότερη μεγέθους η , συχνά αναφερόμενη και ως Kolmogorov scale, έχουμε ισχυρή εξάρτηση από το ιξώδες και εκεί είναι που η ενέργεια καταστρέφεται και μετατρέπεται σε θερμότητα. Έτσι έχουμε την κατάσταση στην οποία οι μεγάλες κλίμακες δημιουργούνται από τη μέση διάτμηση και οι μικρές κλίμακες διασκορπίζονται από το ιξώδες. Ο Kolmogoroff διατύπωσε ότι αυτό απαιτεί ένα ενδιάμεσο εύρος κλιμάκων (energy cascade) στις οποίες μεταφέρεται η ενέργεια, χωρίς να παράγεται ή καταστρέφεται. Η παραγωγή ενέργεια στις ασταθές μεγάλες κλίμακες δινών ισούται με το ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια διαχέεται σε μικρές κλίμακες. Βέβαια έχει παρατηρηθεί και μεταφορά ενέργειας προς την αντίστροφη κατεύθυνση, αν και πολύ μικρή για να ληφθεί υπόψιν.

Οι υποθέσεις που έγιναν, για τη συμπεριφορά των μικροδινών είναι ότι εξαρτώνται μόνο από δύο παράγοντες, ενώ ακόμα είναι ομογενείς και ισότροπες. Οι παράγοντες αυτοί είναι το ιξώδες και ο ρυθμός καταστροφή της κινηματικής ενέργειας ε (ίσος με το ρυθμό παραγωγής k). Από διαστατική ανάλυση η μικρότερη δίνη περιγράφεται από τις $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, $u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$, $Re_\eta = 1$. Βλέπουμε ότι η καταστροφή της ενέργειας 'ε' δεν εξαρτάται από το ιξώδες και μια μείωση σε αυτό θα επιφέρει μόνο μείωση του μεγέθους της μικροδίνης στην οποία η ιξώδες καταστροφή παίζει σημαντικό ρόλο. Παράλληλα ο αριθμός Reynolds είναι τέτοιος που ενισχύει την υπόθεση ότι η ενέργεια μεταφέρεται σε μικρότερες κλίμακες έως ότου αρχίζει η μετατροπή της ενέργειας σε θερμότητα (Kundu et al., 2016, Durbin and Pettersson-Reif, 2011, Bakker, 2002).

Μια πρώτη προσέγγιση για να συνδέσουμε την μικρότερη κλίμακα μήκους με την μεγαλύτερη μπορεί να γίνει διαστατικά, υποθέτοντας ότι η καταστροφή της ενεργείας είναι συνάρτηση των l_0, U_{l_0} . Τότε ο μόνος ικανός συνδυασμός μεγεθών δίνει τις $\varepsilon = U_l^3/l_0$ και $\eta = (\nu^3 l_0/U_{l_0}^3)^{1/4}$. Επαναλαμβάνοντας, βλέπουμε ότι το ιξώδες δεν επηρεάζει το 'ε' αλλά καθορίζει το μέγεθος στο οποίο θα συμβεί. Η αναλογία της μικρότερης με τη μεγαλύτερη δίνη είναι $\eta/l \sim Re_l^{-3/4}$ (Kundu et al., 2016, Durbin and Pettersson-Reif, 2011, Bakker, 2002). Αυτό δείχνει ότι απαιτείται υψηλή χωρική ανάλυση πλέγμα για την προσομοίωση τυρβωδών ροών μεγάλου αριθμού Reynolds.

Ορίζοντας τώρα την χρονική κλίμακα των δινών, για τις μεν μεγάλες έχουμε ότι $\tau_{l_0} = U_{l_0}/l_0$ και για τις μικρές $\tau_\eta = \sqrt{\nu/\varepsilon} = \sqrt{\nu l_0/U^3}$. Ο λόγος αυτών των δύο $\tau_{l_0}/\tau_\eta = Re_{l_0}^{0.5}$ μας δείχνει ότι οι μικροδίνες ‘σβήνουν’ πιο γρήγορα και παράλληλα αυξανόμενου του αριθμού Reynolds το φάσμα χρόνων διευρύνεται (Kundu et al., 2016, Durbin and Pettersson-Reif, 2011, Bakker, 2002). Οδηγούμαστε έτσι σε δυσκολία πρόβλεψης των τυρβωδών ροών, παρόμοιο με το πρόβλημα της απαιτούμενης μεγάλης χωρικής ανάλυσης.

Στις μεγάλες μη ισότροπες κλίμακες δινών η ισορροπία ανάμεσα στην παραγωγή και καταστροφή μπορεί να μην ισχύει πάντα. Ορίζουμε επιπλέον δύο όρια μεγέθους l_{EI}, l_{DI} που διαμορφώνουν μια ενδιάμεση ζώνη (inertial subrange). Το l_{EI} είναι το άνω όριο που διαχωρίζει τις ανισότροπες από τις ισότροπες δίνες κάτω από το οποίο ισχύει η ισορροπία k, ε και το άλλο ορίζει τη ζώνη που συμβαίνει η καταστροφή της ενέργειας (Σχήμα 1). Στην ενδιάμεση ζώνη αυτή, τα μεγέθη είναι αρκετά μικρά για να είναι ισότροπα και να μην εξαρτώνται από την γεωμετρική εξαρτώμενη μέση διάτμηση της ροής, όπως εξαρτώνται οι μεγαλύτερες δίνες, αλλά και επαρκώς μεγάλα για να μην εξαρτώνται από τις δυνάμεις του ιξώδους, όπως οι μικρότερες. Η μόνη παράμετρος που τα χαρακτηρίζει είναι το ‘ε’. Η ζώνη αυτή μπορεί να περιγραφεί και από τον κυματικό αριθμό $\kappa = 2\pi/l$. Η κατανομή της ενέργειας σε αυτήν δίνει τον περίφημο νόμο των $-5/3$ του Kolmogorov. (Kundu et al., 2016, Durbin and Pettersson-Reif, 2011, Bakker, 2002).



Σχήμα 1: Φάσμα μεγέθους δινών (Bakker, 2002, τροποποιημένο)

Εξ ορισμού τυρβώδης κινητική ενέργεια k είναι το ολοκλήρωμα του ενεργειακού φάσματος E σε όλο το φάσμα των κυματικών αριθμών και εξαρτάται μόνο από αυτούς και το ‘ε’ σύμφωνα με τα παραπάνω.

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa$$

Για μια ακόμα φορά από διαστατική ανάλυση (Bakker, 2002) το ενεργειακό φάσμα περιγράφεται:

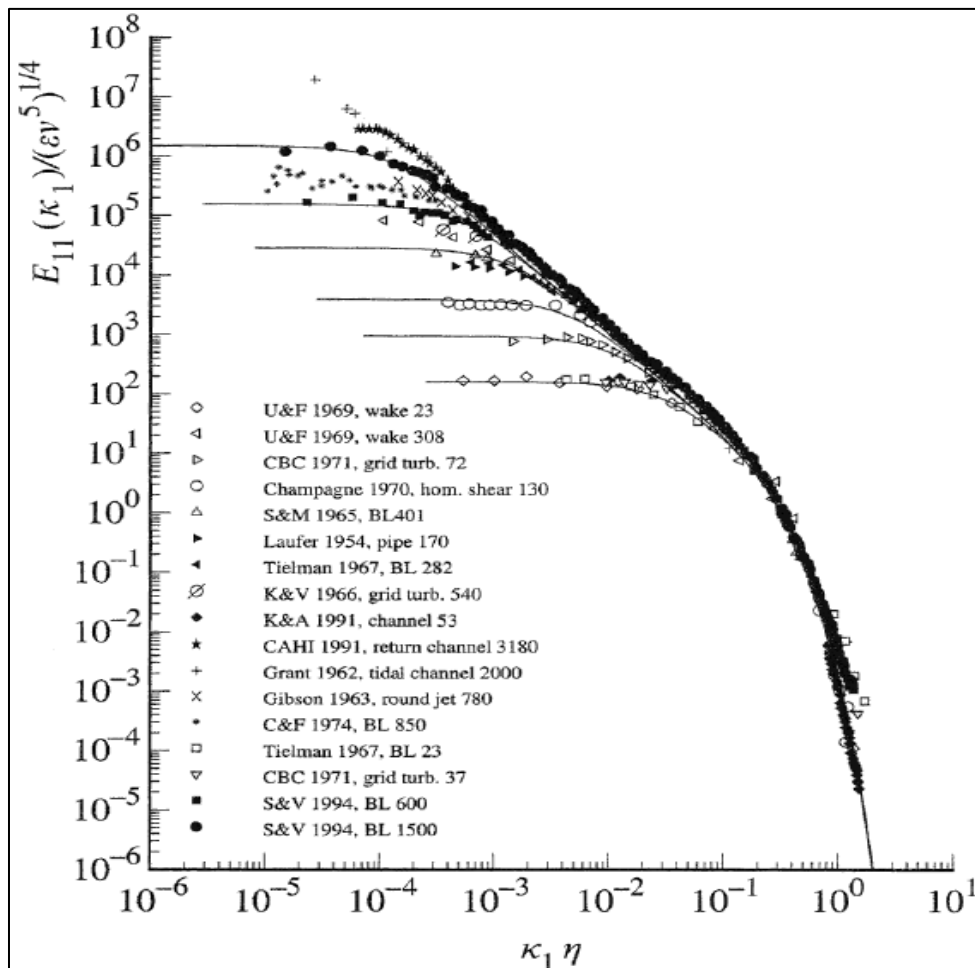
$$k = [m^2/s^2], \varepsilon = [m^2/s^3], \kappa = [m^{-1}]$$

$$E(\kappa) = [m^3/s^2]$$

$$E(\kappa) \sim \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$$

$$E(\kappa) = C \cdot \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$$

Η σταθερά C ονομάζεται σταθερά Kolmogorov και λαμβάνει την τιμή $C = 1.5$. Η θεωρία αυτή έχει επιβεβαιωθεί και από πειραματικά δεδομένα και είναι ένα σημαντικό κομμάτι για την δημιουργία κλειστών μοντέλων τύρβης.



Σχήμα 2: Μονοδιάστατο ενεργειακό φάσμα $E_{11}(\kappa_1)$ (Bakker, 2002).

Για μικρό κυματικό αριθμό έχουμε μεγάλες κλίμακες και αντίστροφα. Βλέπουμε η ενέργεια μειώνεται μειούμενη του μεγέθους των δινών. Μαθηματικά μοντέλα έχουν αναπτυχθεί και για τις περιοχές που βρίσκονται στα δυο άκρα, δεξιά και αριστερά, της καμπύλης κλίσεως $-5/3$ (Σχήμα 2).

2.3 Μοντέλα τύρβης

Έχοντας μια γενική εποπτεία για τις τυρβώδης ροές μπορούμε να δούμε πώς η ενέργεια διαχέεται όρο-όρο (Kundu et al., 2016, Durbin and Pettersson-Reif, 2011, Τσαγγάρης, 2015).

Αφαιρώντας την (2.1.2β) από την (2.1.1β) παίρνουμε την εξίσωση για τις τάσεις Reynolds

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial (u'_k u'_i - \overline{u'_k u'_i})}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u'_i \quad (2.3.1)$$

Η μη γραμμικότητα του προβλήματος για την μέση τιμή απαιτεί γνώση στατιστικών χαρακτηριστικών δεύτερης τάξης. Οι δεύτερης τάξης εμπεριέχουν τρίτης τάξης και ούτω καθεξής. Το πρόβλημα παραμένει σε όλα τα επίπεδα συσχέτισης και είναι γνωστό ως πρόβλημα κλεισίματος. Προς το παρόν υπάρχουν τρεις προσεγγίσεις στο πρόβλημα κλεισίματος. Η πρώτη, γνωστή και ως μοντελοποίηση κλεισίματος μέσω RANS, περιλαμβάνει τον τερματισμό της ιεραρχίας εξισώσεων στο ένα δεδομένο επίπεδο και κλείνοντας το προκύπτον σύστημα εξισώσεων με εξισώσεις μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί από διαστατική ανάλυση, διαίσθηση, απαιτήσεις συμμετρίας και πειραματικά αποτελέσματα. Κατά τη διαδικασία αυτή χάνεται σημαντική πληροφορία από τη φύση της ροής. Η δεύτερη, γνωστή ως άμεσες αριθμητικές προσομοιώσεις (DNS) συνεπάγεται αριθμητική επίλυση του χρόνο-εξαρτώμενου πεδίου και στη συνέχεια εφαρμογή κανόνων μέσης τιμής. Η τρίτη, γνωστή ως προσομοίωση μεγάλου δινών (LES), συνδυάζει στοιχεία των άλλων δύο και περιλαμβάνει κάποια μοντελοποίηση και κάποια αριθμητική προσομοίωση. Μόνο μέχρι το δεύτερο επίπεδο της ιεραρχίας εξετάζεται στο μοντέλο k-epsilon.

Πολλαπλασιάζοντας την (2.3.1) με την ποσότητα u'_i , εφαρμόζοντας κανόνες μέσης τιμής και προσθέτοντας το αποτέλεσμα στην ίδια εξίσωση αλλάζοντας τη σειρά των δεικτών i, j έχουμε την εξίσωση μεταφοράς των τάσεων (Reynolds stress transport equation).

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right) - 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_k u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} - \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} + \nu \nabla^2 \overline{u'_i u'_j}$$

Ορίζουμε την μέση τυρβώδη κινητική ενέργεια ως $\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$, $i = 1, 2, 3$ και προκύπτει από την παραπάνω ως το ένα δεύτερο του ίχνους.

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} + 2\nu \overline{u'_i S'_{ij}} - \overline{k u'_j} \right)}_{2,3,4} - \underbrace{2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}}_5 - \underbrace{\overline{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}}_6$$

$$S'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\varepsilon = 2\nu \overline{S'_{ij}S'_{ij}}$$

Κινούμενοι από τα αριστερά προς τα δεξιά έχουμε:

- Χρονική μεταβολή της μέσης τυρβώδους κινητικής ενέργειας του στοιχείου του ρευστού.
- Ισχύς τυρβώδους διακύμανσης της πίεσης.
- Ισχύς που παράγει η τύρβη με τις ιξώδεις τάσεις.
- Μεταφορά της τυρβώδους κινητικής ενέργειας με την τύρβη.
- Ισχύς καταστροφής τύρβης με τις ιξώδεις τάσεις και μετατροπή σε θερμότητα. Είναι πάντα θετικός αριθμός (Turbulent dissipation $\varepsilon > 0$).
- Ισχύς καταστροφής των τυρβωδών διατμητικών τάσεων με τη μέση ταχύτητα, που μετατρέπεται στην μέση τυρβώδη κινητική ενέργεια. Γενικά λέγεται παραγωγή τυρβώδους ισχύος P.

Οι τρεις πρώτοι όροι στη δεξιά πλευρά αντιπροσωπεύουν τη χωρική μεταφορά τυρβώδους κινητικής ενέργειας μέσω διακυμάνσεων πίεσης, ιξώδους διάχυσης, και τυρβωδών τάσεων και δεν προσθέτουν ούτε αφαιρούν ενέργεια.

Η ενέργεια προσφερόμενη στις μεγάλες δίνες από μέση διάτμηση είναι ανάλογη (Kundu et al., 2016):

$$\dot{W} \sim \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \sim \frac{U^3}{L}$$

Επειδή η ενέργεια μέχρι το σημείο μετατροπής της στις μικρότερες κλίμακες δεν παράγεται ούτε καταστρέφεται προκύπτει ότι $\dot{W} = \varepsilon \sim U^3/L$. Το ε συνεπώς όπως προαναφέρθηκε είναι συνδυασμός των U, L και οδηγούμαστε στα συμπεράσματα για τη αναλογία των δινών στο φάσμα μήκους τους και του προβλήματος στη χωρική και χρονική ανάλυση.

2.4 Μοντέλο k-ε

Η ροή μέσα και γύρω από τη βλάστηση είναι πολύ περίπλοκη και η προσομοίωση μιας τέτοιας ροής απαιτεί προηγμένα μοντέλα τύρβης. Έχει αποδειχτεί ότι ένα μοντέλο κλεισίματος δεύτερης τάξης είναι μια ελάχιστη απαίτηση για μια ακριβή περιγραφή αυτής της ροής (Ayotte et al., 1999).

Η ιδέα για τη διαμόρφωση του μοντέλου βασίζεται στην υπόθεση Boussinesq. Γίνεται η υπόθεση ότι η τυρβώδης διατμητική τάση εξαρτάται γραμμικά από τον μέσο ρυθμό

καταπόνησης (mean rate of strain S_{ij}). Ο παράγοντας αναλογικότητας είναι η τυρβώδη συνεκτικότητα (Eddy viscosity). Το ιξώδες μ_t (ή ν_t η τυρβώδη κινηματική συνεκτικότητα) δεν είναι ιδιότητα του υγρού, αλλά προκύπτει από την τοπική κατάσταση της τύρβης στη ροή. Υπάρχουν και μοντέλα διαμορφούμενα χωρίς την υπόθεση της γραμμικότητας του τυρβώδους ιξώδους.

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Η τιμή της είναι άγνωστη και χρειάζεται μοντελοποίηση. Prandtl και Kolmogorov πρότειναν ανεξάρτητα τη σχέση:

$$\nu_t = C l_m u_t = C \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \sqrt{k} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και από διαστατική ανάλυση. Από πειραματικές παρατηρήσεις η σταθερά αυτή παίρνει την τιμή $C_\mu \approx 0.09$.

Με την επιπλέον υπόθεση ότι οι όροι 2,3 της εξίσωσης για την μέση τυρβώδη κινητική ενέργεια μεταφέρονται με τον ίδιο περίπου συντελεστή μεταφοράς όπως οι τυρβώδεις τάσεις, τελικά οι εξισώσεις για την τυρβώδη κινητική ενέργεια και της καταστροφή της γράφονται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \\ T &= \frac{k}{\varepsilon}, S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ P &= 2\nu_t S_{ij} S_{ji} \end{aligned}$$

Η εξίσωση για την καταστροφή τη κινητικής ενέργειας προκύπτει από μια διαστατική αναλογία της εξίσωσης για το k.

Οι συνήθεις τιμές για τις σταθερές που εμφανίζονται στις δύο αυτές εξισώσεις (Launder and Spalding, 1974) φαίνονται στον Πίνακα 1:

Πίνακας 1: Συντελεστές μοντέλου τύρβης k-ε

C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
0.09	0.9 ÷ 1.0	1.3	1.44	1.92

Επιλύοντας τις εξισώσεις συνέχειας, ορμής και τις διαφορικές για την τυρβώδη ενέργεια και την καταστροφή της που παρουσιάστηκαν πιο πάνω παίρνουμε τις χρονικές μέσες τιμές των μεταβλητών και με αυτές το πεδίο ροής θεωρείται γνωστό.

Τα παραδοσιακά μοντέλα RANS γραμμικού-ιξώδους μπορούν να χωριστούν στις ακόλουθες τέσσερις κύριες κατηγορίες: α) αλγεβρικά μοντέλα (μηδενικής εξίσωσης), β) μοντέλα μισής εξίσωσης, γ) μοντέλα μίας εξίσωσης και δ) μοντέλα δύο εξισώσεων. Τα μοντέλα ιξώδους δύο εξισώσεων είναι η πρώτη επιλογή για γενικούς υπολογισμούς CFD, με το τυπικό μοντέλο k-ε και k-ω να είναι τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα. Δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος αυτής της προτίμησης, αλλά αυτά τα μοντέλα έχουν εφαρμοστεί ευρέως, ώστε να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά τους εκ των προτέρων (Argyropoulos and Markatos, 2014).

2.5 Προτάσεις βελτίωσης k-ε

Παρόλο που το τυπικό μοντέλο k-ε έχει επικυρωθεί για πολλές περιπτώσεις, έχει επίσης ελλείψεις σε πολλές άλλες. Επομένως, διάφορες προτάσεις έχουν προταθεί για τη βελτίωση αυτού του μοντέλου προκειμένου να υπάρξουν καλύτερες συμφωνίες με πειραματικά δεδομένα.

Μια τροποποίηση του μοντέλου k-ε είναι το Durbin Timescale Limiter (DLT). Όπως αναφέρθηκε πριν, το τυπικό μοντέλο k-ε έχει τις ελλείψεις του και ένα από τα κύρια προβλήματα είναι η υπερβολική πρόβλεψη της τυρβώδους κινητικής ενέργειας 'k' σε σημεία στασιμότητας (stagnation point anomaly) όπως συνήθως απαντάται σε ροές γύρω από αστικές περιοχές. Ακόμη και όταν η περιοχή σημείου στασιμότητας δεν ενδιαφέρει καθ' εαυτή, αυτή η συμπεριφορά μπορεί να επηρεάσει τους υπόλοιπους του υπολογισμού ροής (Durbin, 1996, Durbin and Pettersson-Reif, 2011). Ο Durbin (1996) έδωσε τη δική του λύση για αυτό το ζήτημα με την εφαρμογή περιορισμού χρονικής κλίμακας που προέκυψε από ιδιοδιανυσματική ανάλυση του S_{ij} και ορίζεται ως:

(2.5.1)

$$T = \min \left(\frac{k}{\varepsilon}, \frac{\alpha}{C_\mu \sqrt{6} |S|} \right), |S| = \sqrt{S_{ij} S_{ji}}$$

Οποιαδήποτε εναλλακτική λύση $\alpha \leq 1$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξασφαλιστεί συμφωνία με πειραματικά δεδομένα. Με μια πρώτη ματιά, αναλύοντας τους όρους της εξίσωσης της καταστροφής της κινητικής ενέργειας βλέπουμε ότι ο ρόλος τους περιορισμού είναι να αυξήσει τον ρυθμό καταστροφής του 'ε', που με τη σειρά του θα αυξήσει την παραγωγή του 'k', πράγμα οξύμωρο με αυτό που θέλουμε να πετύχουμε.

$$P = 2\nu_t S_{ij} S_{ji}, \nu_t = C_\mu k T \rightarrow$$

$$\frac{C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon}{T} = 2C_{\mu} C_{\varepsilon 1} k |S| - \frac{C_{\varepsilon 2} \varepsilon}{T}$$

Ο λόγος που ο περιορισμός αυτός επιτελεί την λειτουργεί για την οποία σχεδιάστηκε είναι ότι ο όρος παραγωγής P εμφανίζεται και στην εξίσωση του 'κ' και σχετίζεται με την χρονική παράμετρο T ως:

$$P = 2\nu_t S_{ij} S_{ji} = 2C_{\mu} k T |S|$$

Μια μείωση του T θα μειώσει την παραγωγή κινητικής ενέργειας. Δηλαδή ο περιορισμός λειτουργεί ως ένα είδος καταστολέα των ψευδώς μεγάλων τιμών του 'κ' και του 'ν_t' (Sveningsson, 2003).

Επίσης είναι γνωστό ότι το μοντέλο k-ε μοντέλο δεν είναι σε θέση να προβλέψει με ακρίβεια τις ροές με μεγάλες κλίσεις πίεσης, τάσεων και καταρρέει σε περιοχές κοντά σε τοίχωμα (χρειάζονται εξισώσεις τοίχου ή εξισώσεις damping). Γι' αυτό δημιουργήθηκε το μοντέλο με βάση τη μαθηματική τεχνική ReNormalization Group για βελτιωμένες προβλέψεις σε ροές πλησίον τοιχώματος, αποκολλημένες, ροές σε καμπύλες γεωμετρίας και ροές με σημεία στασιμότητας. Στο τυπικό μοντέλο k-ε, το ιξώδες κατά eddy προσδιορίζεται από μία κλίμακα μήκους τύρβης, ενώ στην πραγματικότητα όλες οι κλίμακες θα συμβάλλουν. Βασισμένο σε αυτή την ιδέα προκύπτει το τροποποιημένο μοντέλο (Yakhot et al., 1991) που ουσιαστικά περιγράφεται από τις ίδιες εξισώσεις με διαφορετικό και μεταβαλλόμενο πλέον όρο $C_{\varepsilon 2}$, ενώ επιπλέον αλλάζουν και οι τιμές των υπόλοιπων σταθερών (Πίνακας 2).

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2}^* \varepsilon}{T} + \frac{\partial y}{\partial x} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$$

$$C_{\varepsilon 2}^* = C_{\varepsilon 2} + \frac{C_{\mu} \eta^3 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right)}{1 + \beta \eta^3}$$

Πίνακας 2: Συντελεστές μοντέλου τύρβης RNG

C_{μ}	σ_k	σ_{ε}	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	η_0	β
0.0845	0.7194	0.7194	1.42	1.68	4.38	0.012

2.6 Εισαγωγή όρων βλάστησης

Η ύπαρξη βλάστησης αποτελούμενη από κορμούς διαφορετικών μεγεθών, φύλλα, κλαδιά σε κάθε μέγεθος και προσανατολισμό που αλλάζουν συνεχώς τον άνεμο, δημιουργεί σύνθετη ροή

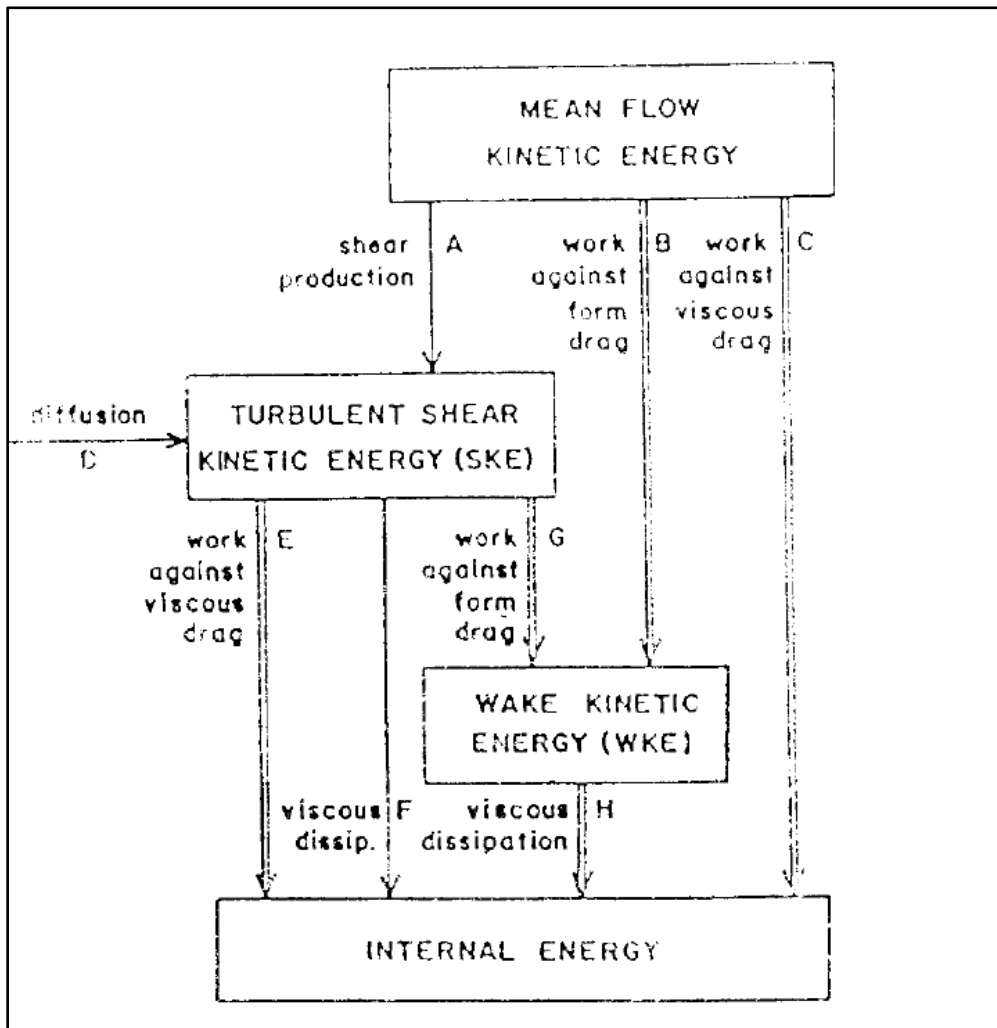
γύρω από αυτά. Η ύπαρξη αυτών των διαφορετικών μεγεθών μας κάνει να υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο τμήματα της τυρβώδης κινητικής ενέργειας (Svensson and Häggkvist, 1990). Τα μικρά στοιχεία θα παράγουν μικρότερης κλίμακας δίνες σε σχέση με το συνολικό μέγεθος της βλάστησης (Σχήμα 3). Η αεροδυναμική αντίσταση πάνω στα στοιχεία της βλάστησης είναι ο κύριος παράγοντας που δίνει σε αυτήν την περιοχή τα χαρακτηριστικά την περιγράφουν από άποψη μοντελοποίησης (Finnigan, 2000). Η ροή επιβραδύνεται μέσα στη βλάστηση, λόγω της αντίστασης και δημιουργούνται μεγάλες κλίσεις ταχύτητας που παράγουν μια σημαντική πηγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Αυτό τα φαινόμενο μπορεί επίσης να οδηγήσει στο σχηματισμό περιοχών ανακυκλοφορίας (wakes). Από την άλλη πλευρά, μέσα στην περιοχή της βλάστησης, τα φύλλα ενεργούν ως καταστολείς τύρβης - αυξάνοντας τον ρυθμό διάχυσής της. Αυτό επιτυγχάνεται δημιουργώντας μικρές κλίμακες, χωρίς να υποβληθεί σε ολόκληρη τη διαδικασία της διάσπασης από μεγάλες σε μικρές κλίμακες (short-circuiting of energy cascade) (Finnigan, 2000, Raupach and Shaw, 1982, Wilson and Shaw, 1977).

Αναφέραμε ήδη ότι η ροή της ενέργειας γίνεται από τις μεγάλες ασταθές δίνες που περιέχουν το σύνολό της, αφαιρώντας από τη μέση ροή με τη μέση διάτμηση και μετατρέποντας την σε τυρβώδη κινητική ενέργεια (Σχήμα 3, σημείο A). Ακολούθως αυτή μεταφέρεται μέσω την αδρανειακής ζώνης, όπου δεν υπάρχει παραγωγή ούτε καταστροφή της ενέργειας, από τους χαμηλούς στους υψηλούς κυματικούς αριθμούς των μικρότερων δινών, εξαρτώμενη μόνο από το 'ε' και τελικά στη καταστροφή της με τη μορφή θερμότητας (Σχήμα 3, σημεία F, H). Αν και αυτή η συμπεριφορά μπορεί να υποτεθεί για την περιοχή πάνω από τη βλάστηση, μέσα σε αυτή πρέπει να ληφθούν υπόψιν δύο επιπλέον διεργασίες.

Καθώς η μέση ροή επιδρά πάνω στην αεροδυναμική αντίσταση των φυλλωμάτων η ενέργεια της ροής (Mean Kinetic Energy) μετατρέπεται απευθείας σε θερμότητα (Σχήμα 3, σημείο C), μέσω ιξώδους αντίστασης (viscous drag) και σε μικρής κλίμακας τυρβώδη κινητική ενέργεια (Σχήμα 3, σημείο B) στον ομόρου της βλάστησης (Wake Kinetic Energy), μέσω αντίστασης σχήματος (pressure/form drag).

Με όμοιες διεργασίες, αλλά αυτή τη φορά με την επίδραση των δυνάμεων αντίστασης ιξώδους και σχήματος στην τυρβώδη κινητική ενέργεια (Shear Kinetic Energy), χάνεται ενέργεια σε μορφή θερμότητας (Σχήμα 3, σημείο E) και επιπλέον έχουμε διάσπαση των δινών σε μικρότερες (Σχήμα 3, σημείο G), παράγοντας WKE (short-circuiting). Ο νόμος των $-5/3$ παραβιάζεται, αφού αφαιρείται συνεχώς ενέργεια από το αδρανειακό φάσμα. Η τυρβώδης ενέργεια WKE, διαχέεται αμέσως στις μικρότερες κλίμακες 'η' και καταστρέφεται γρήγορα, οπότε έχουμε μείωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, παρά την επιπλέον παραγωγή της.

Για λόγους απλότητας αμελούμε την επίδραση τις αντίστασης ιξώδους πάνω στο φύλλωμα, θεωρώντας ότι η αντίσταση διαμορφώνεται από την αντίσταση μορφής, αν και αυτό δεν ισχύει απόλυτα. (Finnigan, 2000, Katul et al. 2004, Wilson and Shaw, 1977)



Σχήμα 3: Σχηματικό διάγραμμα της κινητικής ενέργειας στο εσωτερικό της βλάστησης(Svensson and Häggkvist, 1990).

Συνολικά λοιπόν έχουμε τρεις δρόμους με τους οποίους η ενέργεια φτάνει στις κατώτερες κλίμακες «~η» παρουσία βλάστησης.

- i. Μέσω της δράσης της μέσης ροής πάνω στη μέση αντίστασης μορφής, παράγοντας WKE δια μέσου του Inertial SubRange(ISR).
- ii. Μέσω της δράσης των μεγάλων δινών στη διακύμανση της αντίστασης μορφής παράγοντας WKE «σπάζοντας» τις μεγάλες δίνες σε μικρότερες και προσπερνώντας την ζώνη ISR
- iii. Μέσω της απλής μεταφοράς της από τη ζώνη ενέργειας δια μέσου της ζώνης αδράνειας.

Όσο αφορά τη θερμότητα, έχουμε παραγωγή της στη μέση ροή και στην διαδρομή (ii).

Οι επιπλέον διεργασίες αυτές μοντελοποιούνται ως εξής. Για λόγους ευκολίας και καλύτερης ανάγνωσης οι άνω παύλα \bar{A} δεν αναγράφεται.

Ως ένα επιπλέον όρο στην εξίσωση της ορμής (Wilson and Shaw, 1977) που αναπαριστά την αντίσταση της βλάστησης. Ο όρος αυτός μπορεί να γραφεί με βάση την μορφή μιας γενικής δύναμης αντίστασης, μέσω ενός συντελεστή αντίστασης C_D και του αριθμού πυκνότητας περιοχής φυλλώματος (Leaf Area Density).

$$F_D = C_D LAD |u| u_i$$

Ως έναν επιπλέον όρο στην εξίσωση της μέση κινητικής ενέργειας S_k (Green, 1992).

$$S_k = C_D LAD (\beta_p |u|^3 - \beta_d |u| k)$$

,όπου β_p είναι το ποσό της ενέργεια που μετατρέπεται σε WKE και ο συντελεστής β_d είναι το ποσό που «προσπερνάει» την αδρανειακή ζώνη. Είναι όροι πηγής και καταβόθρας αντίστοιχα.

Ως επιπλέον όρο, που δεν έχει ξεκάθαρο φυσικό νόημα πέρα από συμφωνία διαστάσεων, στην εξίσωση της καταστροφής της μέσης κινητικής ενέργειας (Liu et al. 1996).

$$S_\varepsilon = C_D LAD \left(C_{\varepsilon 4} \beta_p |u|^3 \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 5} \beta_d |u| \varepsilon \right)$$

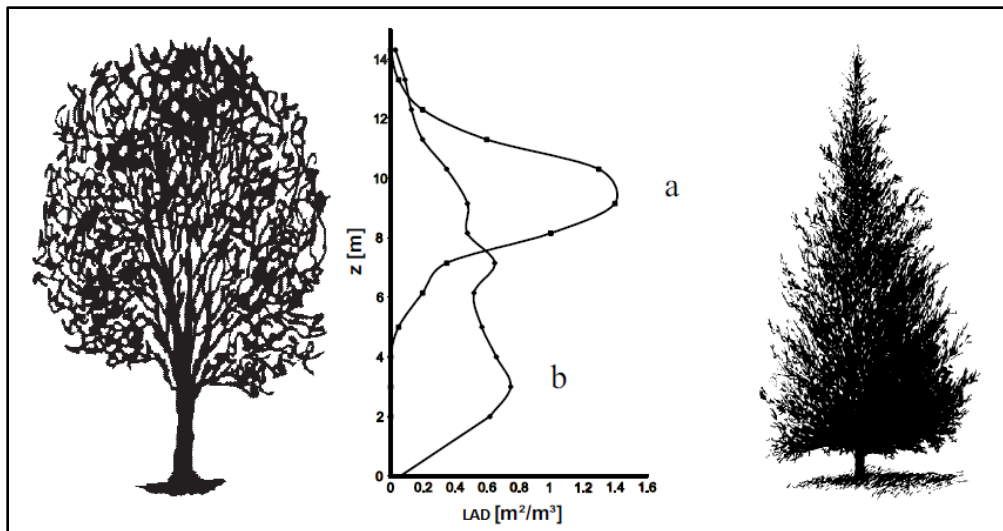
2.7 Υπολογισμός LAD και Cd

Οι κύριες επιπτώσεις της βλάστησης στη ροή είναι μια μείωση της ταχύτητας του ανέμου καθώς και αυξημένη τύρβη εντός της περιοχής της. Μια προσέγγιση για την εισαγωγή της δράσης της αντίστασης είναι η αλλαγή των παραμέτρων τραχύτητας στον λογαριθμικό κανόνα τείχους. Όμως έτσι δεν παρέχεται καμία πληροφορία για τη δομή της ροής μέσα στην περιοχή της βλάστησης ως παραμέτρων που σχετίζονται με αυτή, όπως ο αριθμός LAD που δεν μπορεί να ληφθεί υπόψη. Συνεπώς οι δύο αυτοί σημαντικοί αριθμοί Cd, LAD ενσωματώνονται με εισαγωγή όρων πηγής/καταβόθρας με καλύτερα αποτελέσματα από την πρώτη προσέγγιση (Pattanarol et al., 2007). Και οι δύο προκύπτουν από μετρήσεις που γίνονται είτε σε σήραγγα, είτε σε πραγματικό φυσικό χώρο.

Η πυκνότητα της περιοχής των φύλλων, που ορίζεται ως την επιφάνεια (της μιας πλευράς) φυλλώματος ανά μονάδα όγκου διαμορφώνεται σε κάθετα προφίλ LAD(z). Η βλάστηση σε μια περιοχή συνήθως περιλαμβάνει διαφορετικά είδη δέντρων. Κάθε ένα από αυτά με το δικό του χαρακτηριστικό φύλλωμα και κατανομή που εξαρτάται και από την εποχή. Συνήθως για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα θεωρούμε σταθερή κατανομή κατά το ύψος. Μια άλλη

παράμετρος που μπορούμε να συναντήσουμε είναι ο αθροιστικός δείκτης εμβαδού φύλλων LAI. Είναι αδιάστατος αριθμός και ορίζεται ως την επιφάνεια φυλλώματος προς την επιφάνεια εδάφους. Οι δύο αυτοί συντελεστές συνδέονται. Στην πιο απλοποιημένη περίπτωση πλήρους κάλυψης και ομοιογένειας $LAI = LAD \cdot z$ (Villalobos et al., 1995).

Κύριες μέθοδοι για να υπολογίζουμε την παράμετρο LAD της βλάστησης είναι οπτικοί. Μπορούμε να πάρουμε μετρήσεις μέσω της τεχνικής LIDAR, που βασίζεται στην εκπομπή παλμικής ακτινοβολίας λέιζερ στην ατμόσφαιρα και ακολούθως, στην καταγραφή της οπισθοσκεδαζόμενης ακτινοβολίας (Stadt and Loeffers, 2000). Με μέτρηση διαθέσιμου ηλιακού φωτός κάτω από την ενδιαφερόμενη περιοχή. Με απλές επεξεργασία εικόνας. Γενικά είναι χρονοβόρες και κοστοβόρες και χρειάζονται πολλές μετρήσεις από διαφορετικές οπτικές, μέσα και έξω από τη ζώνη ενδιαφέροντος. Για αυτό υπάρχουν λίγα δεδομένα που αφορούν κυρίως περιοχές που υπάρχουν δάση.



Σχήμα 4: Τυπικά κάθετα προφίλ του συντελεστή LAD για(α) φυλλοβόλα και (β) κωνοφόρα δέντρα (Ries and Eichhorn, 2001, τροποποιημένο).

Σημειώνεται ότι τα προφίλ LAD δεν αντικατοπτρίζουν το φυσικό σχήμα αντικειμένων (Σχήμα 4). Συνήθεις τιμές για τις παραμέτρους αυτές είναι $LAD = 0.1 \div 4 \text{ m}^{-1}$ με συχνά χρησιμοποιούμενη την τιμή 1, σταθερή καθ' ύψος (Buccolieri et al., 2018).

Μια εμπειρική σχέση για τον υπολογισμό του που ακολουθεί τις ακόλουθες συνθήκες (Lalic and Mihailovic, 2004) είναι:

- Να παρουσιάζει μηδενική τιμή στον κορυφή και στο έδαφος.
- Να παρουσιάζει μέγιστο LAD_m στη θέση z_m .

(2.7.1)

$$\begin{aligned}
 & z \rightarrow 0, z \rightarrow h \text{ τότε } LAD(z) \rightarrow 0 \\
 & z = z_m \text{ τότε } LAD(z) = LAD_m \\
 & LAD(z) = L_m \left(\frac{h - z_m}{h - z} \right)^n \exp \left[n \left(1 - \frac{h - z_m}{h - z} \right) \right] \\
 & n = \begin{cases} 6 & 0 \leq z < z_m \\ \frac{1}{2} & z_m \leq z \leq h \end{cases}
 \end{aligned}$$

με h το ύψος του δέντρου, L_m η μέγιστη τιμή του συντελεστή LAD και z_m η θέση που υπάρχει το μέγιστο. Τυπικές τιμές για τη θέση μεγίστου (Lalic and Mihailovic, 2004) είναι :

- $z_m = 0.2h$ για βελανιδιά(oak) και σημουδία(silver birch)
- $0.2 < z_m < 0.4h$ για σφένδαμο(maple)
- $z_m = 0.4h$ για πεύκα(pines)

Η αντίσταση αποτελείται κυρίως από την αντίσταση μορφής. Όμως η συμβολή της αντίστασης ξώδους παραμένει σημαντική. Έτσι αναμένουμε να δούμε σημαντική εξάρτηση του από την ταχύτητα του ανέμου, εκτός από της εξάρτηση από το ύψος $C_d(x)$. Με αυξανόμενο αριθμό Reynolds (αύξηση της μέσης τιμής της ταχύτητας τους ανέμου) έχει παρατηρηθεί οι τιμές μειώνονται (Finnigan, 2000, Gromke and Ruck, 2008). Αυτή η μείωση γενικά αποδίδεται στο φαινόμενο καταφυγίου (shelter effect) και δεν έχει εξηγηθεί πλήρως (Finnigan, 2000). Συνήθεις τιμές είναι $C_d = 0.1 \div 0.3$ με 0.2 μια πιο συχνά χρησιμοποιούμενη (Buccolieri et al., 2018).

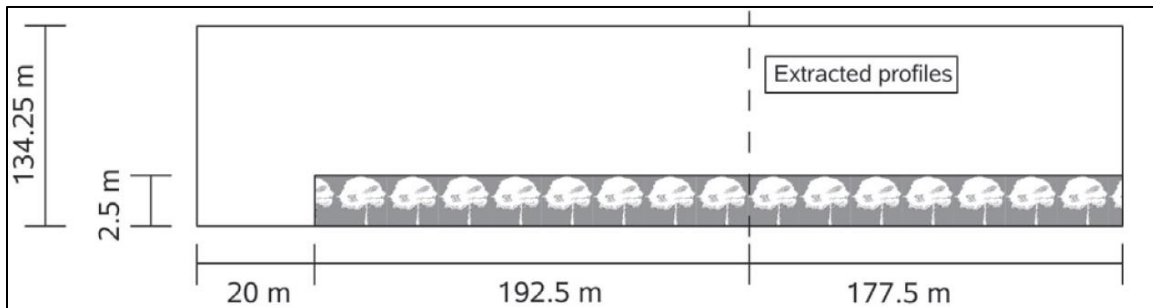
Μια άλλη προσέγγιση είναι θεωρώντας πορώδη μέσο, να αντικατασταθεί το γινόμενο των C_d, LAD που εμφανίζεται στις εξισώσεις από τον συντελεστή απώλειας πίεσης $\lambda = C_d LAD = \frac{\Delta p_{stat}}{p_{dyn l}} = \frac{p_{windward} - p_{leeward}}{0.5 \rho u^2 l}$ (pressure loss coefficient), που δίνει τη διαφορά της στατικής πίεσης, κανονικοποιημένη προς τη δυναμική πίεση και το μήκος του εμποδίου στην κατεύθυνση του ανέμου (CODASC, 2008, Buccolieri et al., 2018).

3 Επικύρωση υπολογιστικού εργαλείου

Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, όταν μπορεί να επιλύσει ένα πεδίο ροής, έχει μεγαλύτερες δυνατότητες από την εναλλακτική λύση της φυσικής προσομοίωσης σε αεροδυναμική σήραγγα. Προς το παρόν, τα δύο αυτά αλληλοσυμπληρώνονται. Για τον υπολογισμό του πεδίου ροής και των μεγεθών του λουπόν, χρησιμοποιήθηκε εργαλείο υπολογιστικής ρευστομηχανικής C.A.F.F.C.A-3d. (Collocated Approach to a Fluid Flow Calculation Algorithm), με ανάπτυξή του από το Εργαστήριο Αεροδυναμικής του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π., βασισμένο πάνω στη μεθοδολογία SIMPLE. Απαραίτητος δε, είναι ο έλεγχος της αξιοπιστίας του.

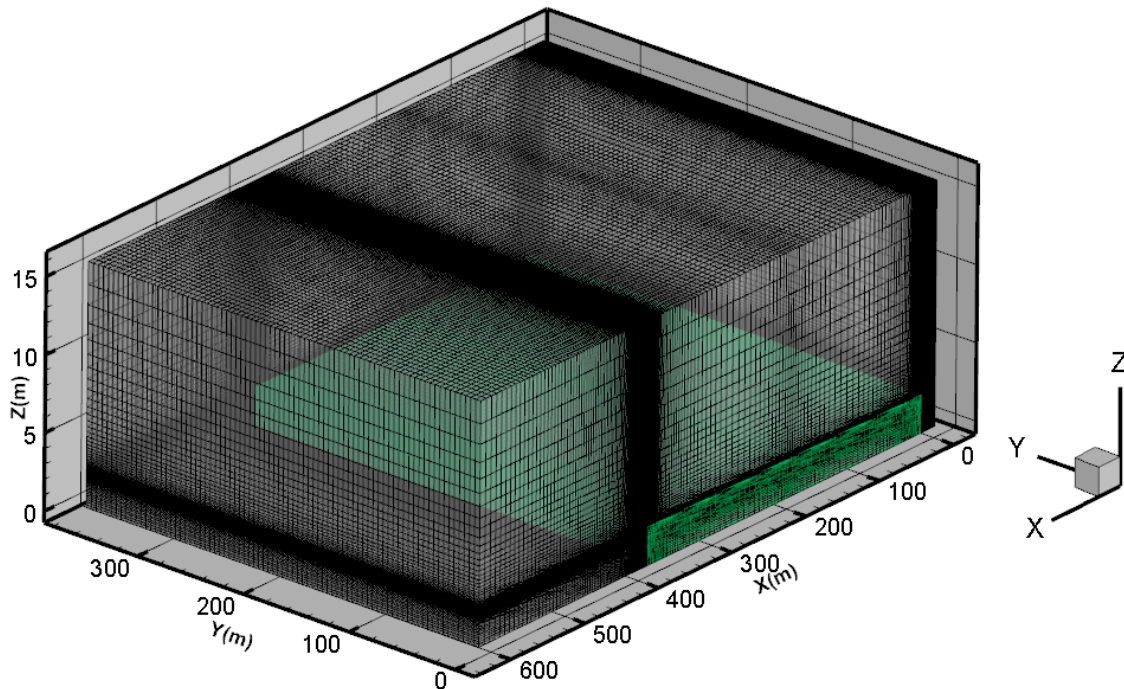
Για την επαλήθευση και έλεγχο του προγράμματος που θα χρησιμοποιήσουμε, αναπαράγουμε το υπολογιστικό παράδειγμα των Svensson and Häggkvist(1990) σε ομογενή περιοχή βλάστησης και χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη για την επαλήθευση της αριθμητικής εφαρμογής των πρόσθετων όρων μοντελοποίησης της βλάστησης.

Το χωρίο που προσομοιώνεται περιέχει βλάστηση με χαρακτηριστικά $Cd = 0.15$ και $LAD = 2.1 m^{-1}$ καταλαμβάνοντας φυσικό χώρο $370 \times 2.5 \times 370 m$ (streamwise X - vertical Z - spanwise Y), ενώ ολόκληρο το πεδίο εκτείνεται στα $1870 \times 134.25 \times 370 m$ πίσω και πάνω από τη βλάστηση (Kenjereš and Kuile, 2013). Η ροή του αέρα γίνεται κατά την θετική φορά του άξονα X (Σχήμα 5).



Σχήμα 5: Επίπεδο XY περιοχής παραδείγματος των Svensson and Häggkvist(1990) και τα σημεία καθ' ύψος(με διακεκομμένη) για τη σύγκριση αξιοπιστίας(Kenjereš and Kuile, 2013)

Η μοντελοποίηση αυτών έγιναν με δημιουργία πλέγματος(Σχήμα 6), για τη μεν βλάστηση ως $100 \times 30 \times 80$ με πυκνωση καθ' ύψος, στην αρχή, στο τέλος της και στο σημείο ενδιαφέροντος στη θέση $x=212.5$ μετρώντας από την αρχή των αξόνων. Οι όγκοι αναφοράς για ολόκληρο το πεδίο είναι $260 \times 80 \times 80$.

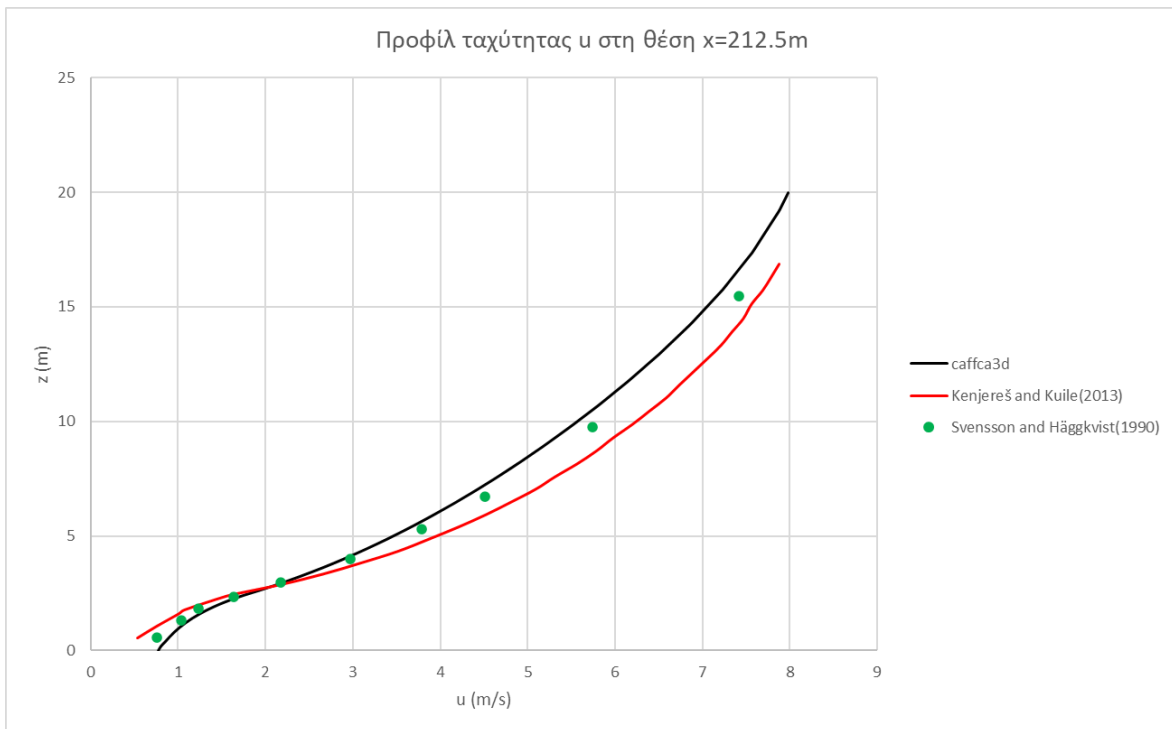


Σχήμα 6: Μέρος πλέγματος 200x60x80 με πύκνωση καθ' ύψος, στην αρχή, στο τέλος της και στο σημείο ενδιαφέροντος στη μέση της βλάστησης. Σε αυτό εμπεριέχεται πλήρως το κομμάτι της(χρώμα πράσινο).

Ως είσοδος στο πρόγραμμα δίνεται:

- Το προφίλ της ταχύτητας κατά την X κατεύθυνση(streamwise) $U_x(z) = U_0 \left(\frac{z}{\delta_0}\right)^{1/7}$, όπου $U_0 = 10 \text{ m/s}$ και $\delta_0 = 110\text{m}$.
- Η τυρβώδης κινητική ενέργεια ως $k(z) = k_0(L_z - z)/L_z$, με $k_0 = 1.5 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ και $L_z = 134.25\text{m}$, το ύψος του υπολογιστικού χώρου.
- Η καταστροφή της τύρβης $\varepsilon(z) = \frac{0.41k(z)^{3/2}}{z}$

Για την δημιουργία δεδομένων των U_x, k, ε στο αρχείο εισόδου επιλέχτηκαν 3 θέσεις κατά Y και 12 κατά Z. Για τη δημιουργία τιμών στις ενδιάμεσες θέσεις γίνεται παρεμβολή. Πρώτα επιλύθηκε η ροή χωρίς την παρουσία βλάστησης για να βοηθηθεί η σύγκληση και είναι πάγια τεχνική που χρησιμοποιήθηκε. Η σύγκριση έγινε για την μεταβλητή U_x , και τα αποτελέσματα είναι άκρως ικανοποιητικά.



Σχήμα 7: Προφίλ ταχύτητας u όπως προέκυψαν από τους Svensson and Häggkvist(1990), Kenjereš and Kuile(2013) και του υπολογιστικού εργαλείου *caffca3d*

Τα αποτελέσματα του παραδείγματος αυτού έχουν επιβεβαιωθεί ως προς την ακρίβειά τους από την ανάλυση των Svensson and Häggkvist(1990). Ποιοτικά βλέπουμε(Σχήμα 7) ότι το προφίλ ταχύτητας που προκύπτει από την παρούσα ανάλυση είναι αρκετά κοντά σε αυτό που περιμένουμε. Μέσα και πάνω από τη περιοχή της βλάστησης υπάρχει σχετική συμφωνία, με την απόκλιση να αυξάνεται καθώς ανεβαίνουμε. Το γεγονός αυτό δεν είναι σημαντικό καθώς η ζώνη ενδιαφέροντος είναι γύρω από τη βλάστηση. Οι διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων ενδεχομένως να οφείλονται στο διαφορετικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε καθώς και στην ενσωμάτωση της συνθήκης DLT στον κώδικα του υπολογιστικού εργαλείου των Kenjereš and Kuile(2013).

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής ήταν απαραίτητη η τροποποίηση μέρους του υπολογιστικού εργαλείου για την μοντελοποίηση της βλάστησης.

- Αλλαγή συντελεστών μοντελοποίησης βλάστησης σύμφωνα με τον Πίνακα 2 και των χαρακτηριστικών LAD, Cd.
- Εφαρμογή της σχέσης DTL (2.5.1) στο μοντέλο k-ε.

Για λεπτομερή ανάλυση λειτουργίας του εργαλείου CFD μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στο κεφάλαιο Appendix I στο τέλος.

4 Μοντέλα βλάστησης και σύγκρισή τους

Λόγος σε αυτή την παράγραφο γίνεται στους συντελεστές των όρων της βλάστησης $\beta_p, \beta_d, C_{\varepsilon 4}, C_{\varepsilon 5}$ και στις τιμές που λαμβάνουν.

$$S_k = C_D LAD (\beta_p |u|^3 - \beta_d |u|k)$$

$$S_\varepsilon = C_D LAD \left(C_{\varepsilon 4} \beta_p |u|^3 \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 5} \beta_d |u| \varepsilon \right)$$

Ο συντελεστής β_p , όπως προαναφέρθηκε αντιπροσωπεύει το κλάσμα της μέσης κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε τυρβώδη κινητική ενέργεια δια μέσω της αντίστασης. Συνεπώς οι τιμές που μπορεί να πάρει κυμαίνονται ανάμεσα στο διάστημα $\beta_p \in [0,1]$. Συνήθως θεωρείται τιμή ίση με την μονάδα και ουσιαστικά υποδηλώνει την πιο αποδοτική μετατροπή ενέργειας ΜΚΕ-SΚΕ (Katul et al., 2004). Για τις υπόλοιπες παραμέτρους δεν υπάρχει συμφωνία μεταξύ των ερευνητών, μιας και δεν έχουν ξεκάθαρή φυσική σημασία και επιλέγονται τέτοιες ώστε τα αριθμητικά αποτελέσματα να ταιριάζουν με αυτά των πειραματικών μετρήσεων της κάθε έρευνας. Οι τιμές αυτές μπορεί να κυμαίνονται $\beta_d = 1 \div 6.5, C_{\varepsilon 4} = 0.9 \div 2, C_{\varepsilon 5} = 0.9 \div 1.8$ (Buccolieri et al, 2018).

Σύμφωνα με την ανάλυση του Sanz (2003), οι σχέσεις που συνδέουν τα παραπάνω μεγέθη είναι:

$$\begin{aligned} \beta_p &= 1 \\ \beta_d &= C_\mu^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \beta_p + \frac{3}{\sigma_k} \\ C_{\varepsilon 4} = C_{\varepsilon 5} &= \sigma_k \left(\frac{2}{\sigma_\varepsilon} - \frac{C_\mu^{\frac{1}{2}}}{6} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \right) (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) \\ a = l_m C_D LAD, l_m &= \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\varepsilon} \rightarrow \alpha = C_D LAD \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\varepsilon} \end{aligned}$$

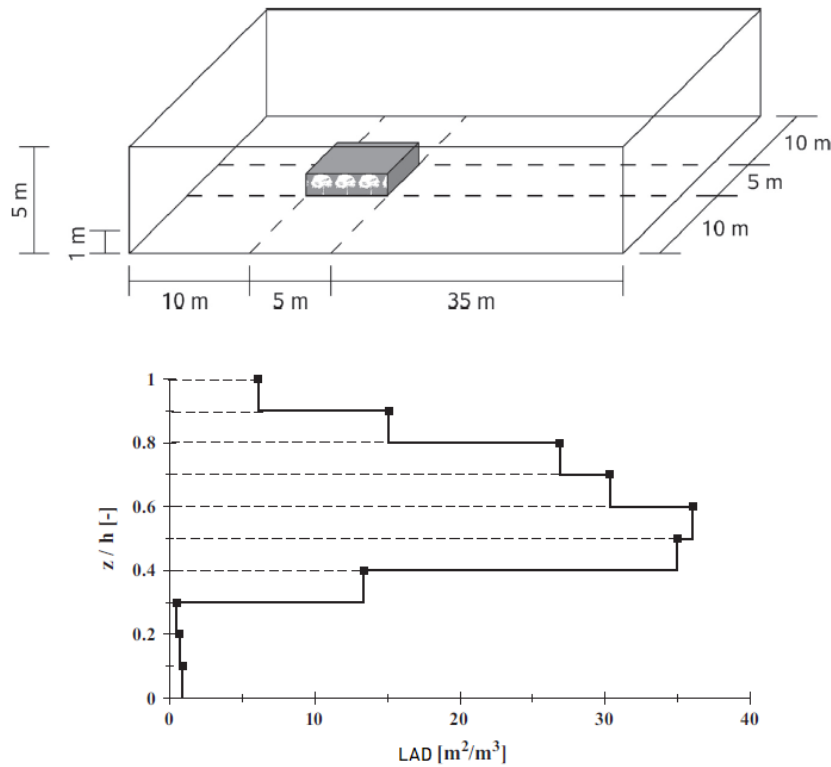
Μπορούμε έτσι να κλείσουμε το μοντέλο χωρίς να απαιτείται ο προσδιορισμός και των τεσσάρων σταθερών ξεχωριστά. Η μέθοδος αυτή δίνει επιπλέον χαρακτηριστικό στις εξισώσεις, να έχουν και μία χωρική εξάρτηση.

Οι περιπτώσεις που ελέγχθηκαν στην παρούσα έκθεση προέχεται από σύνολο τριών ερευνών με τις τιμές των παραπάνω παραμέτρων φαίνονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω Πίνακα 3. Εξετάστηκε επιπλέον και η περίπτωση που συμπεριλαμβάνουμε μόνο τον επιπλέον όρο δύναμης αντίστασης στην εξίσωση της ορμής και τίποτα παραπάνω.

Πίνακας 3: Συντελεστές όρων βλάστησης(Kenjereš and Kuile, 2013)

<i>Model</i>	β_p	β_d	$C_{\varepsilon 4}$	$C_{\varepsilon 5}$
<i>Momentum only</i>	0.0	0.0	0.0	0.0
<i>Svensson and Häggkvist(1990)</i>	1.0	0.0	1.95	0.0
<i>Katul et al.(2004)</i>	1.0	5.1	0.9	0.9
<i>Sanz (2003)</i>	1.0	5.1	$C_{\varepsilon 4}(a)$	$C_{\varepsilon 5}(a)$

Η επόμενη περίπτωση που εξετάστηκε είναι μια «νησίδα» βλάστησης(Kenjereš and Kuile, 2013). Το πεδίο εκτείνεται για 10 μέτρα μπροστά και 35 μέτρα στο πίσω μέρος της περιοχή βλάστησης -με συνολικό μήκος 5m, πλάτος 5m και ύψος $h=1m$ - στην κατεύθυνση της ροής (X) και για 10m από κάθε πλευρά στην κατεύθυνση παραπλεύρως (Y), όπως φαίνεται στο Σχήμα 8-πάνω. Χαρακτηρίζεται δε, από μια μη ομοιόμορφη κατακόρυφη κατανομή της παραμέτρου LAD(Σχήμα 8-κάτω).



Σχήμα 8: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά για την προσομοίωση σε μια νησίδα βλάστησης (πάνω) και η μετρούμενη μη ομογενής χαρακτηριστική πυκνότητα περιοχής φύλλων κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση(κάτω)(Kenjereš and Kuile, 2013).

Τα προφίλ εισόδου της ταχύτητας ορίζεται ως:

$$u_x(z) = 1.25U_0(z/\delta_0)^{1/6}$$

, όπου $U_0 = 6 \text{ m/s}$ και $\delta_0 = 10\text{m}$.

Το προφίλ τυρβώδης κινητικής ενέργειας δίνεται ως:

$$k(z) = 3.33U_f^2(1 - z/\delta_0)^2$$

, όπου $\delta_1 = 5\text{m}$ (gradient height) και $U_f = 0.15 \text{ m/s}$ (friction velocity).

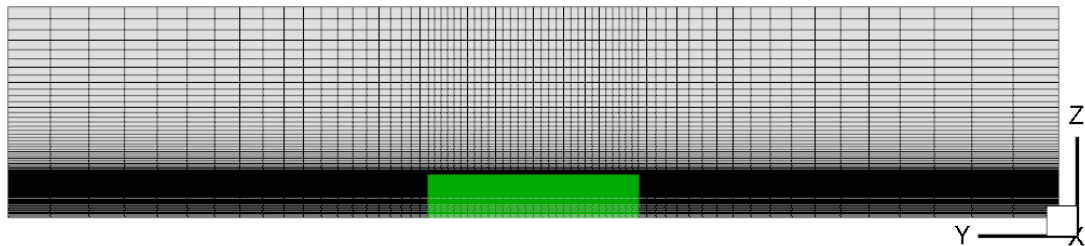
Τέλος, ο ρυθμός καταστροφής της υπολογίζεται ως:

$$\varepsilon = U_f^3(1 - z/\delta_1)^2/\{k(z + z_0)\}$$

, όπου $z_0 = 0.0025\text{m}$ είναι η τραχύτητα της επιφάνειας.

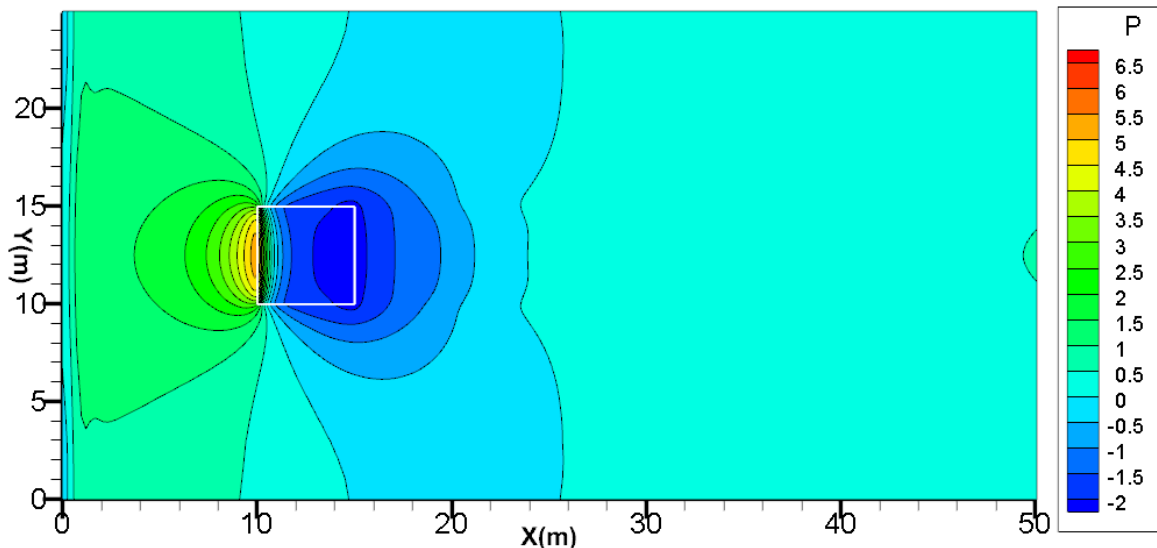
Για την περιοχή των φύλλων η παράμετρος πυκνότητας LAD είναι συνάρτηση του ύψους ($0 \leq LAD(z) \leq 36 \text{ m}^{-1}$). Ξεκινά από μικρές τιμές στο κάτω μέρος, φτάνει σε μέγιστη τιμή στη θέση $z/h = 0.6$ και στη συνέχεια μειώνεται σταδιακά προς το κορυφή βλάστησης. Αυτό προγραμματιστικά πραγματοποιείται τοποθετώντας 10 ομογενή «στρώματα» το ένα πάνω στο άλλο, με το κάθε ένα από τα να έχει τον ίδιο συντελεστή αντίστασης $C_D = 0.1$.

Το υπολογιστικό πλέγμα που δημιουργήθηκε για αυτά τα δεδομένα αποτελείται από συνολικά 250x80x70 κελία. Από αυτά, τα 50x40x30 αντιπροσωπεύουν την περιοχή της βλάστησης και αποτελούνται, συνορεύουν με περιοχές πύκνωσης του πλέγματος(Σχήμα 9).

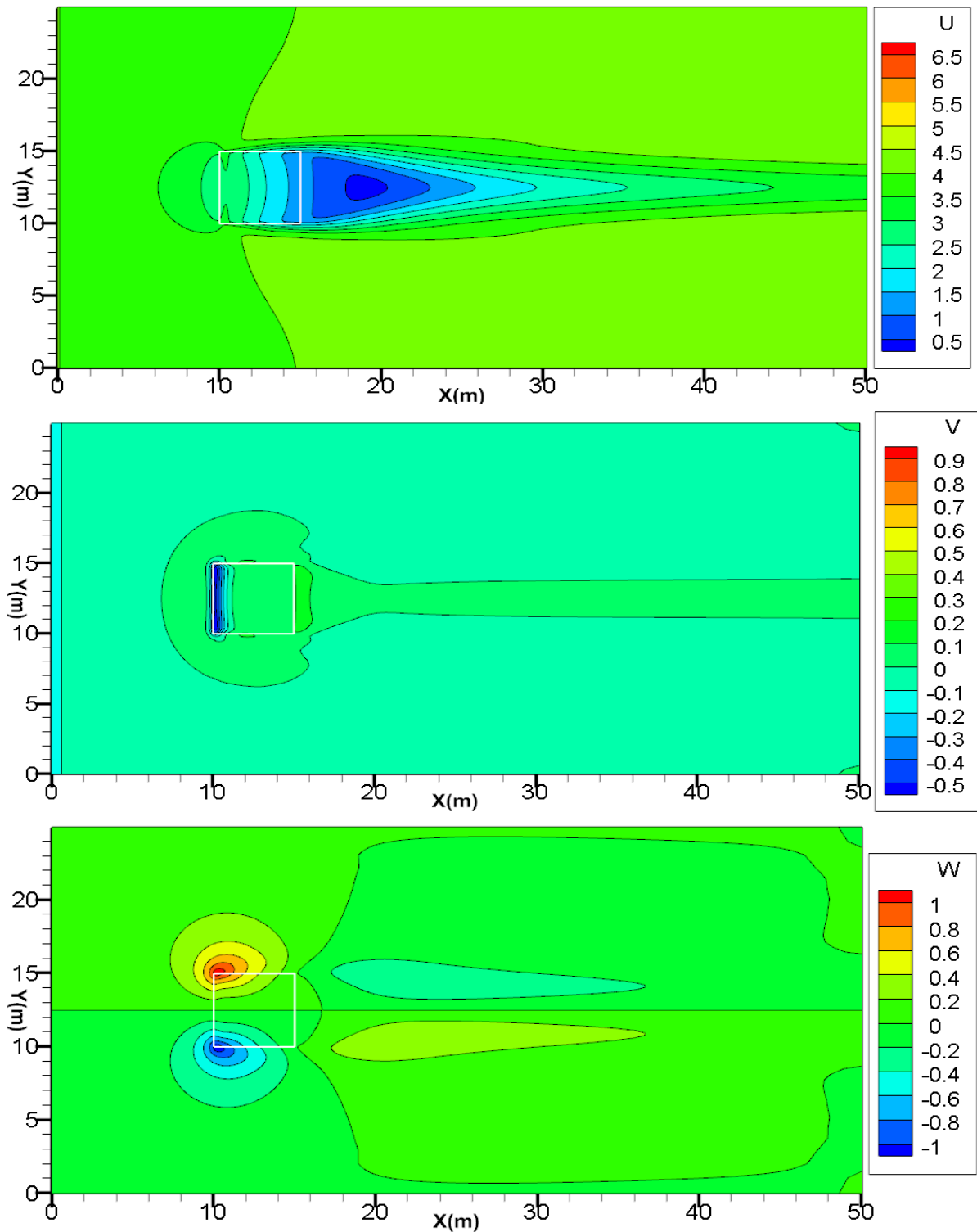


Σχήμα 9: Τομή πλέγματος με περιοχή ανομοιογενούς βλάστησης

Παρατηρούμε τρία κύρια φαινόμενα που εμφανίζονται μελετώντας τα χαρακτηριστικά της ροής γύρω από τη βλάστηση(Σχήματα 10, 11). Μια διαφορά πίεσης εμπρός και πίσω από αυτή, δημιουργία περιοχής κατάντι και δημιουργία περιοχών στα άκρα της. Τα φαινόμενα αυτά εμφανίζονται μόνο λόγω της ύπαρξης βλάστησης και ποιοτικά είναι τα ίδια ανεξάρτητα των μοντέλων που χρησιμοποιούνται. Το μοντέλο του Sanz(2003) χρησιμοποιήθηκε για την απεικόνιση των παρακάτω φαινομένων.



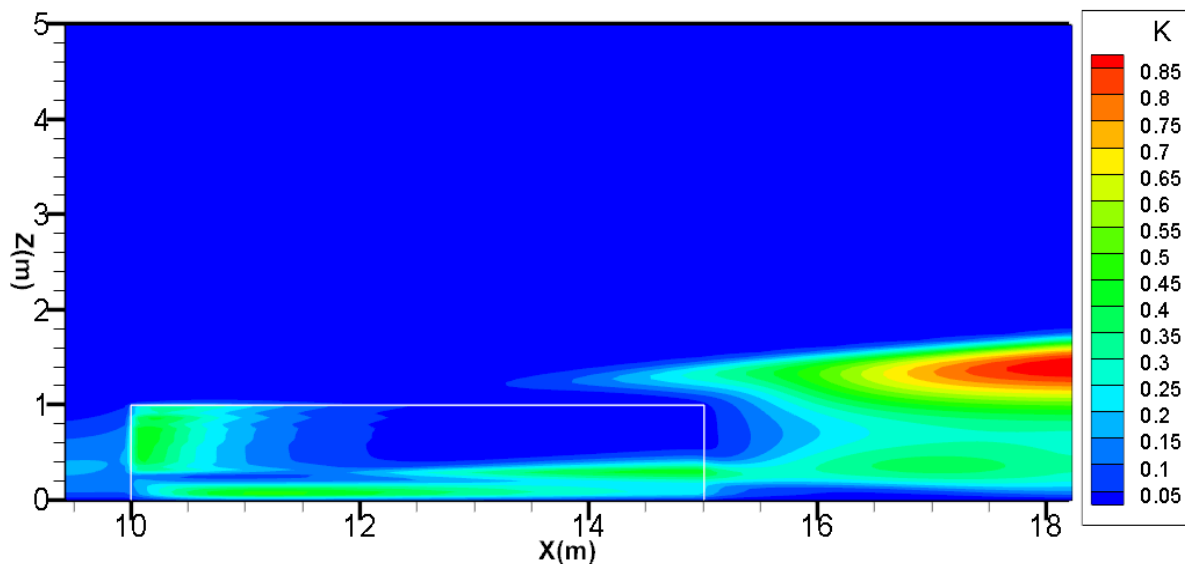
Σχήμα 10: Διακυμάνσεις πίεσης λόγω παρουσίας βλάστησης.



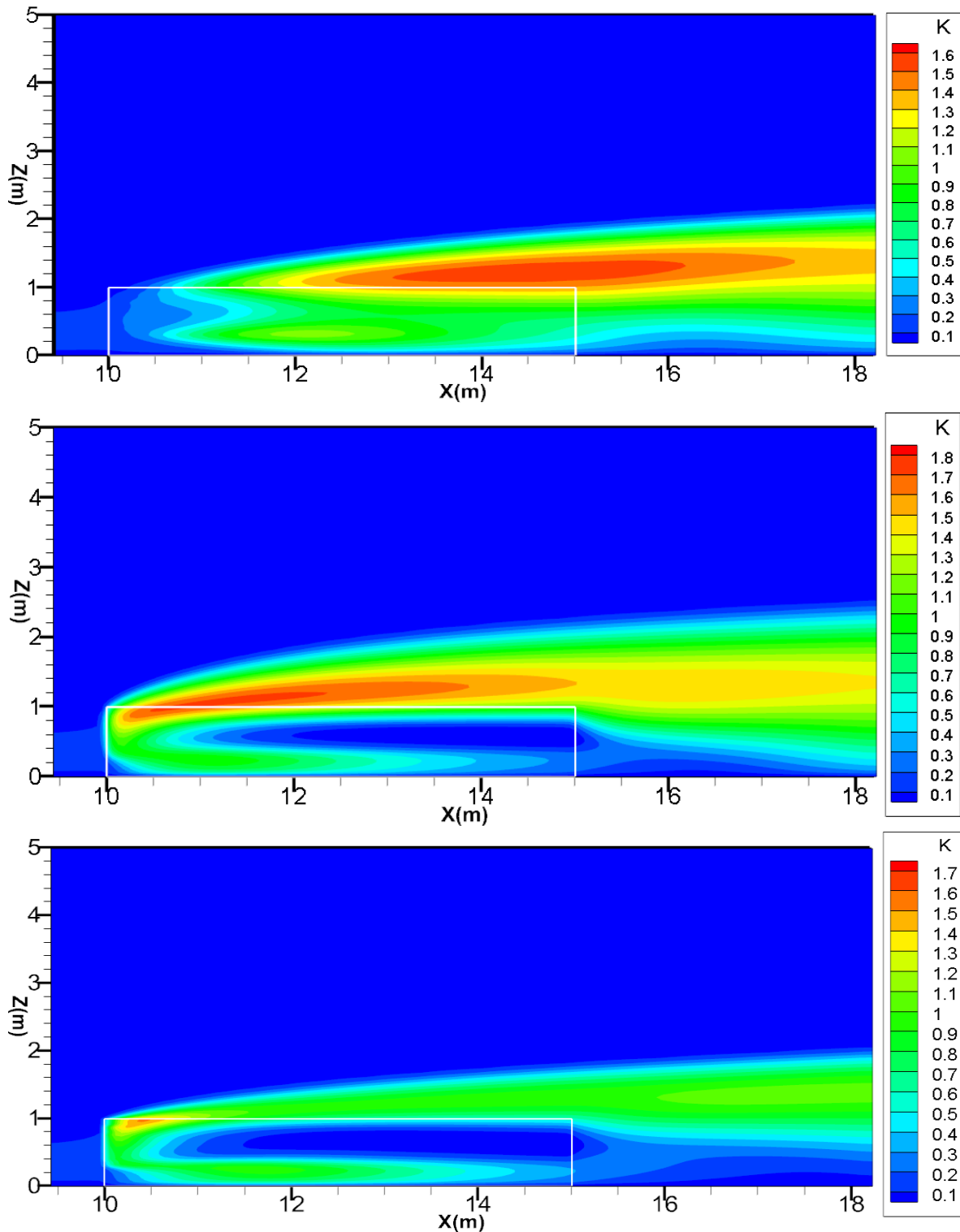
Σχήμα 11: Συνιστώσες ταχύτητας και οι περιοχές που δημιουργούν, στον ομόρου και στα άκρα της βλάστησης.

Όσο αφορά το υπολογιστικό κόστος δεν παρατηρήθηκε ιδιαίτερη διαφορά στο χρόνο ολοκλήρωσης μεταξύ των μοντέλων Svensson and Häggkvist(1990) και Katul(2004), με το μοντέλο Momentum Only να τερματίζει ελάχιστα νωρίτερα. Η μόνη περίπτωση που χρειάστηκε μεγαλύτερη προσοχή είναι το μοντέλο Sanz(2003), που χρειάστηκε διαφορετικούς συντελεστές υποχαλάρωσης, πιθανόν διότι εισάγει μια επιπλέον χωρική εξάρτηση στις εξισώσεις, σχετικά με τις άλλες περιπτώσεις και τερμάτισε πιο αργά λόγω αυτών. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώθηκε με το μοντέλο Katul(2004), όπου ορίστηκαν ίδιοι συντελεστές υποχαλάρωσης. Για τη βοήθεια ως προς τη σύγκλιση ξεκινήσαμε από λύση του πεδίου χωρίς βλάστη.

Επιπλέον παρατηρώντας την παραγωγή της κινητικής ενέργειας, βλέπουμε δύο κυρίαρχες μορφές(Σχήματα 12, 13). Το μοντέλο των Svensson and Häggkvist(1990) καταστέλλει έντονα την ΤΚΕ μέσα στην περιοχή της βλάστησης, ενώ αντίθετα έχουμε μεγάλη παραγωγή για τα μοντέλα Momentum only, Katul(2004), Sanz(2003), με σειρά από την πιο έντονη παραγωγή προς τη λιγότερη. Η προσοχή μας πρέπει να επικεντρωθεί στα μοντέλα Katul(2004) και Sanz(2003), διότι αυτά δίνουν τις πιο ακριβείς προβλέψεις στην πιο λεπτομερή σύγκριση με πειραματικά δεδομένα σε συγκεκριμένες θέσεις μέσα και γύρω από τη βλάστηση που ακολουθεί.



Σχήμα 12: Μοντέλο Svensson and Häggkvist(1990). Βλέπουμε την ισχυρή καταστολή της ΤΚΕ.



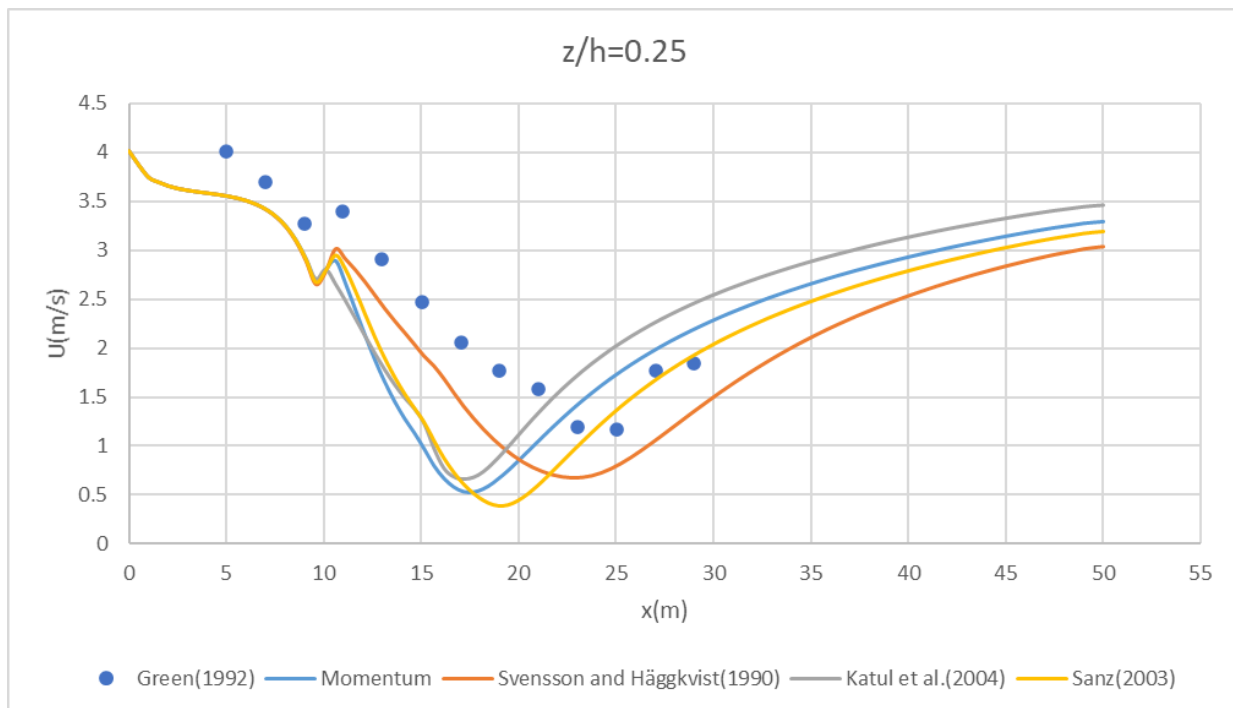
Σχήμα 13: Μοντέλα Momentum only(πάνω), Katul(2004)(μέση), Sanz(2003)(κάτω). Βλέπουμε την μεγάλη παραγωγή ΤΚΕ.

Για να έχουμε όμως μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα ως προς το ποιο μοντέλο αναπαριστά καλύτερα το φυσικό πρόβλημα, απαραίτητο είναι να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του υπολογιστικού μοντέλου με μετρήσεις πειραματικές σε σήραγγα (Green 1992). Έτσι συγκρίνονται τα μεγέθη α) οριζόντια ταχύτητα u_x και β) η κινητική ενέργεια k , σε τρεις διαφορετικές θέσεις. Δύο βρίσκονται μέσα στη βλάστησης ($10m \leq x \leq 15m$) για $z/h = 0.25$ και $z/h = 0.75$, ενώ η τρίτη βρίσκεται λίγο πάνω από αυτή $z/h = 1.25$.

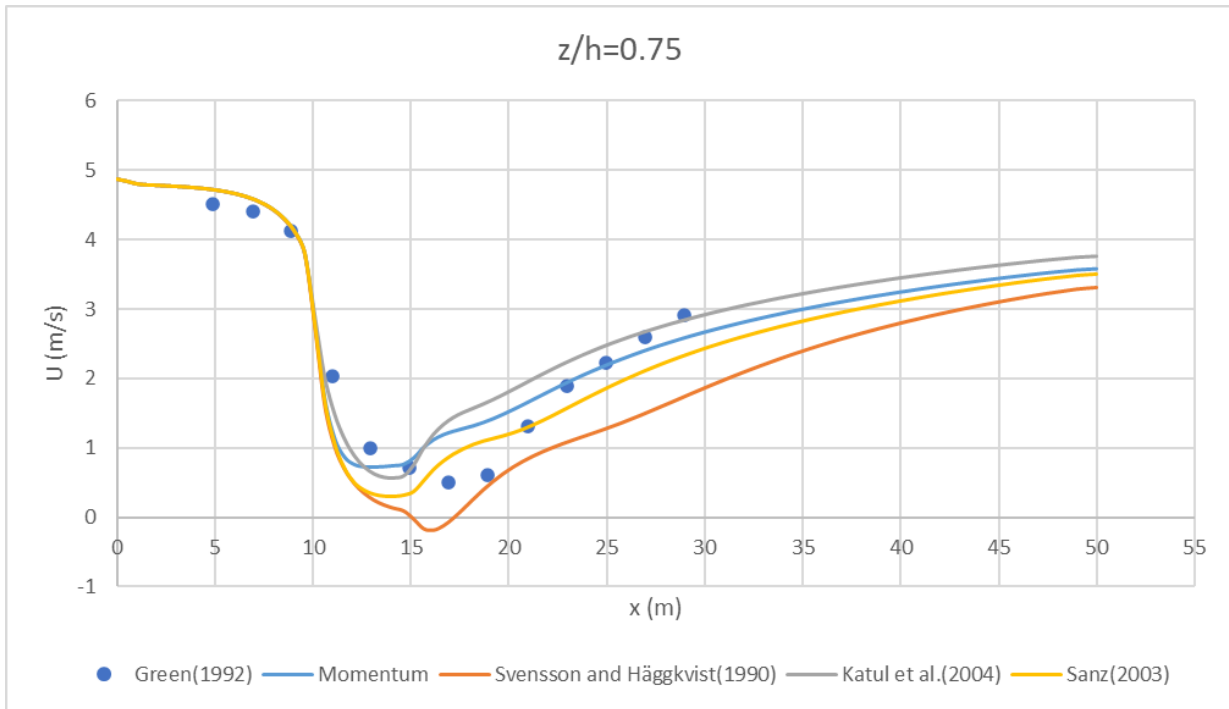
$z/h=1.25$



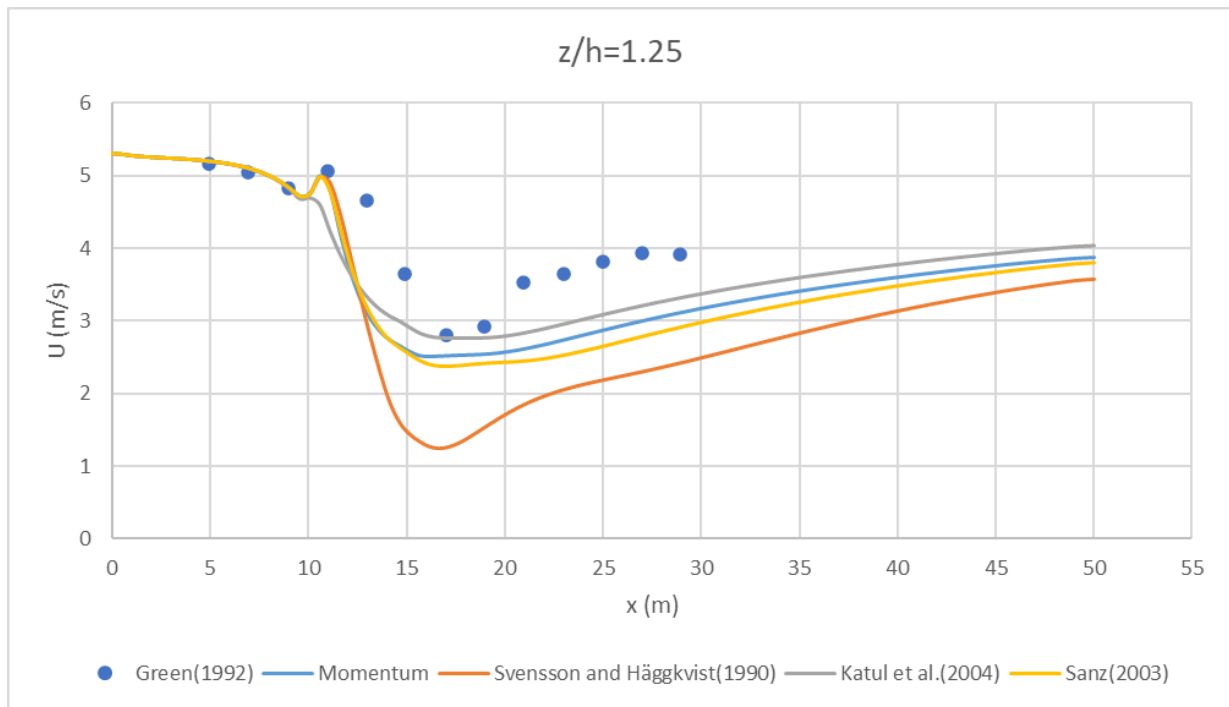
Σχήμα 14: Θέσεις των μετρήσεων κατά μήκος.



Σχήμα 15: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=0.25$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.

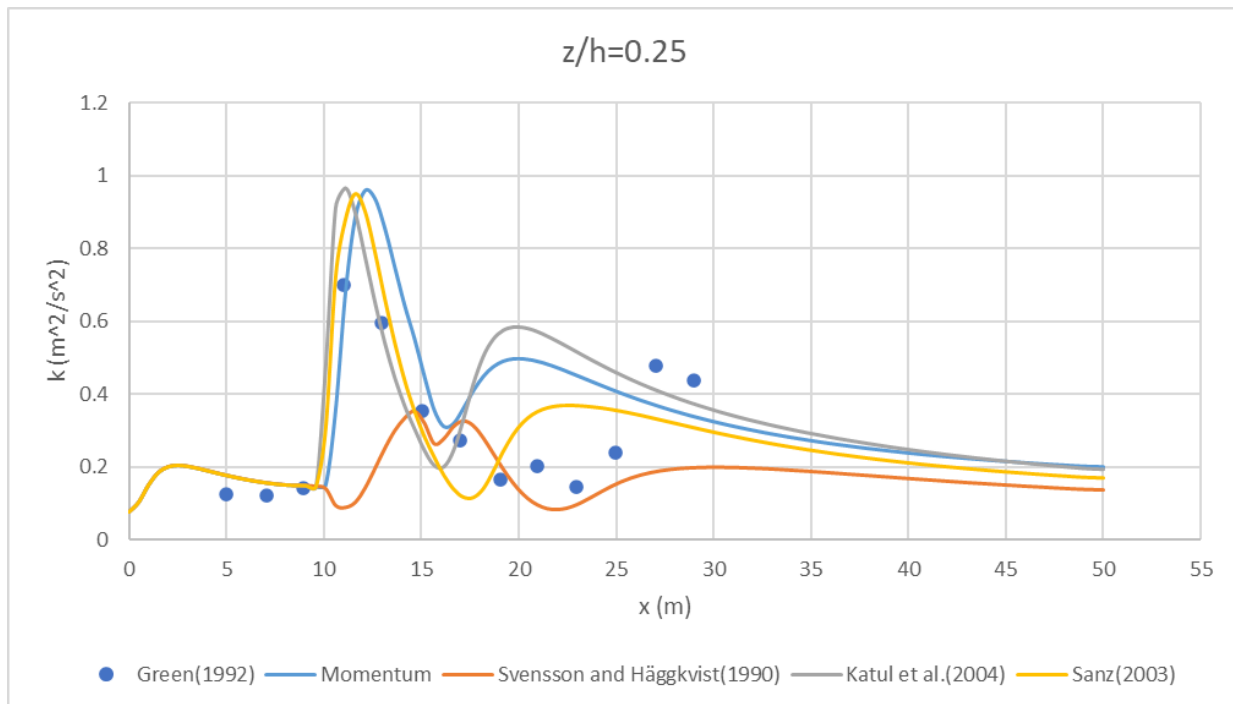


Σχήμα 16: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=0.75$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.

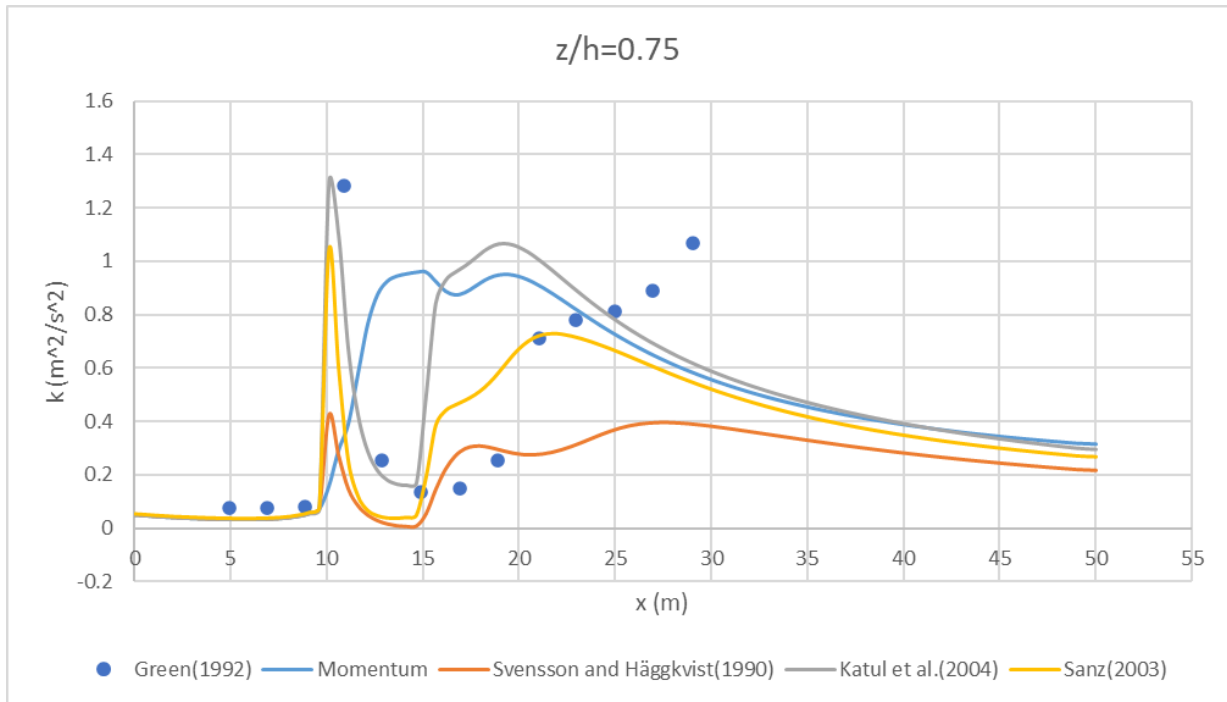


Σχήμα 17: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=1.25$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.

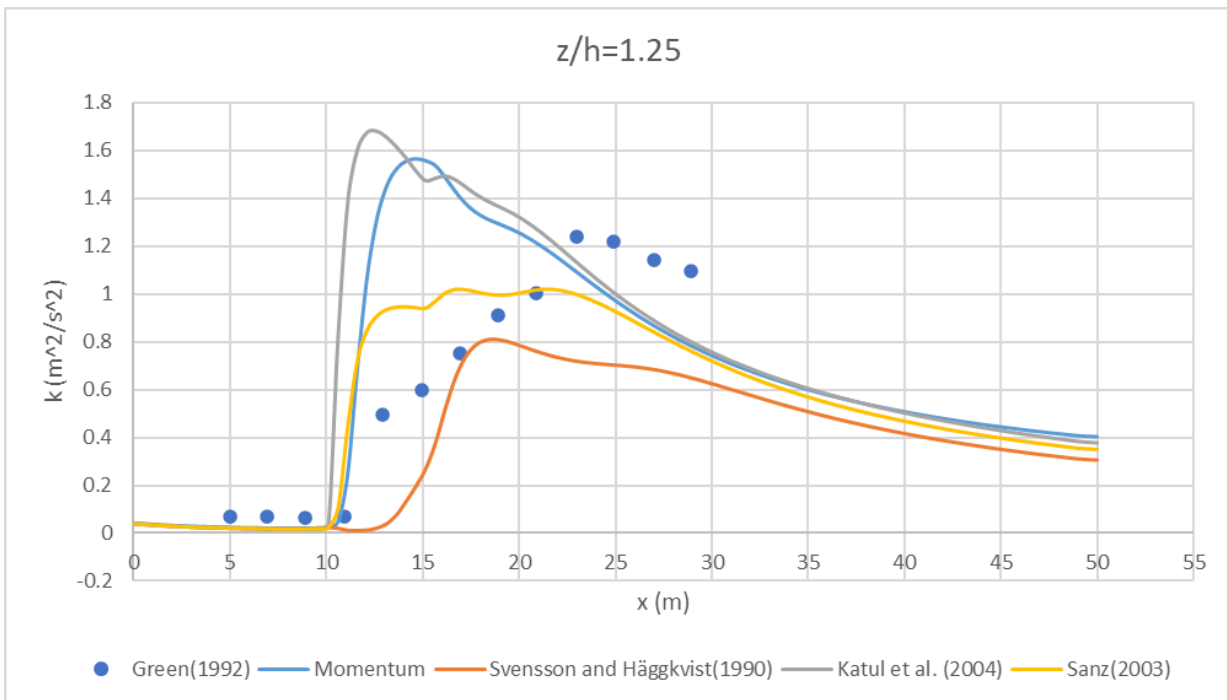
Η οριζόντια ταχύτητα (Σχήματα 15 με 17) παρουσιάζει μια ελαφρά μείωση από την πλήρως αναπτυγμένη κατάσταση μέχρι την αρχή της βλάστησης στη θέση $x/h=10$. Η ροή του αέρα λίγο μετά επιταχύνεται διαμορφώνοντας χαρακτηριστική κορυφή και στη συνέχεια μεγάλη μείωση της λαμβάνει χώρα. Η ροή αρχίζει να ομαλοποιείται μετά την έξοδο από την περιοχή της βλάστησης περίπου στη θέση $x/h=20$. Όλα τα μοντέλα προβλέπουν εύλογα τις εμφανίσεις της κορυφής για $x/h=0.25$ και $x/h=1.25$ και την περιοχή ανάκτησης της ταχύτητας όλες τις τοποθεσίες. Η οριζόντια ταχύτητα εμφανίζει διαφορετική συμπεριφορά κατά μήκος της θέσης $z/h=0.75$. Εδώ, σε αντίθεση με τις άλλες δύο, η κορυφή δεν υπάρχει πλέον, ενώ η ταχύτητα καταστέλεται πιο έντονα σε ολόκληρη την περιοχή της βλάστησης. Είναι σημαντικό να δούμε ότι το μοντέλο των Svensson and Häggkvist (1990) κατά μήκος της θέσης $z/h=0.75$ και 1.25 είναι χειρότερο από το μοντέλο που περιλαμβάνει μόνο τη δύναμη αντίστασης στην εξίσωση της ορμής. Αυτό υποδηλώνει τη σημασία της συμπερίληψης και των δύο μηχανισμών που περιγράφονται από τους όρους $\beta_p, \beta_d, C_{\varepsilon 4}, C_{\varepsilon 5}$ λόγω της παρουσίας βλάστησης.



Σχήμα 18: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=0.25$ συγκρινόμενη με τα πειραματικά.



Σχήμα 19: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=0.75$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.



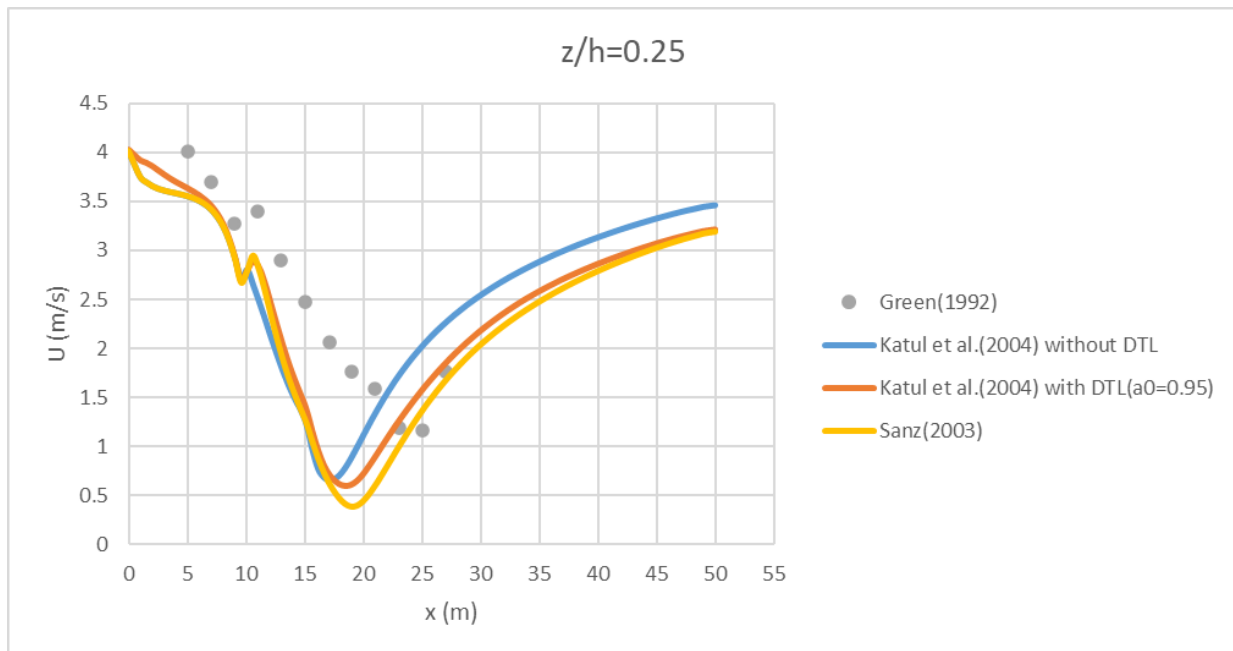
Σχήμα 20: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=1.25$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.

Παρατηρώντας τώρα τα προφίλ της ΤΚΕ(Σχήματα 18 με 20) κατά μήκος πανομοιότυπων γραμμών βλέπουμε σημαντικές διαφορές. Όπως ήδη προαναφέρθηκε(Σχήμα 12), το μοντέλο των Svensson and Häggkvist(1990) καταστέλλει τη ΤΚΕ έντονα εντός της περιοχής βλάστησης και στις τρεις θέσεις και αποτυγχάνει να «πιάσει» την κορυφή στην αρχή της βλάστησης για τη θέση $z/h=0.25$. Το μοντέλο μόνο με τον επιπλέον όρο στην εξίσωση ορμής αποτυγχάνει εντελώς να καταγράψει τη χαρακτηριστική κορυφή της ΤΚΕ στην αρχή της βλάστησης για $z/h=0.75$, ενώ υπερεκτιμά και την ΤΚΕ στη περιοχή πάνω από τη βλάστηση. Τα δύο μοντέλα, Katul(2004) και Sanz(2003) προβλέπουν σωστά όλα τα χαρακτηριστικά. Παρόλα αυτά ενώ το μοντέλο του Katul(2004) προβλέπει την χαρακτηριστική κορυφή πιο κοντά στο πειραματική τιμή για τη θέση $z/h=0.75$, υπερεκτιμά σημαντικά την τιμή της κορυφής στη θέση $z/h=1.25$.

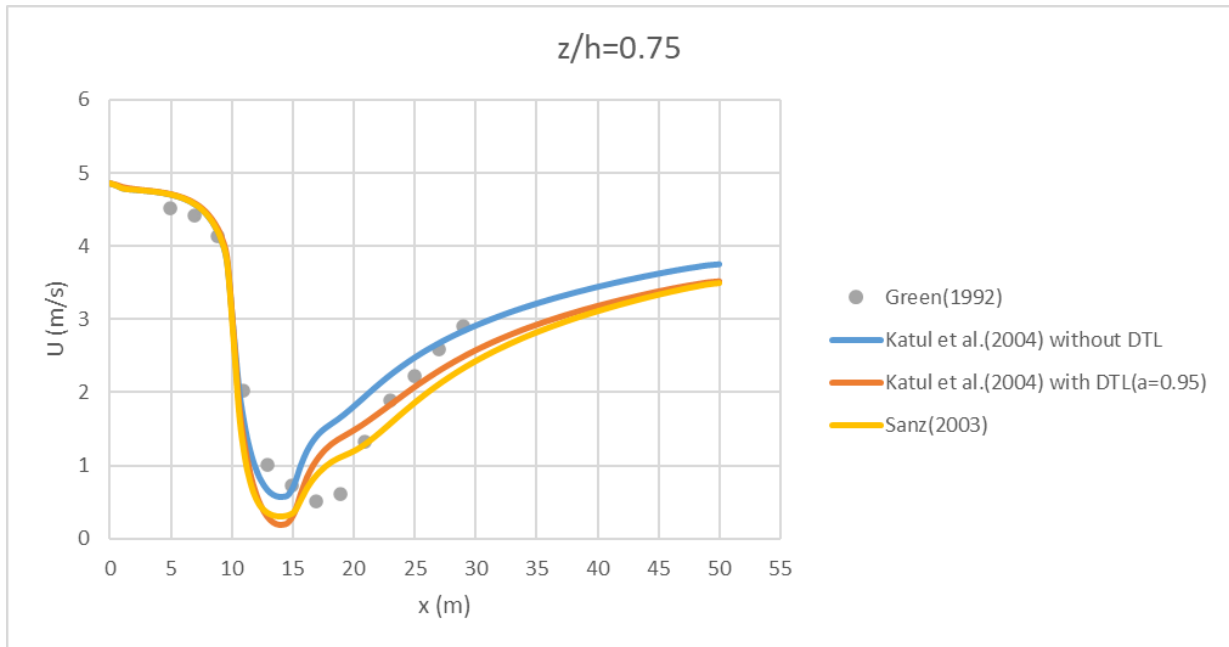
5 Εφαρμογή τροποποιήσεων Durbin Timescale Limiter και RNG

Η ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου έδειξε ότι τα τελικά δύο μοντέλα που αναπαριστούν καλύτερα τις φυσικές διεργασίες είναι αυτά των Katul(2004) και Sanz(2003) λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση χρόνου ολοκλήρωσης- ορθότητα αποτελεσμάτων. Οι επιπλέον όροι με τους αντίστοιχους συντελεστές που ορίζουν, εφαρμόστηκαν πάνω στη μεθοδολογία μοντελοποίησης της τύρβης k-ε. Το μοντέλο αυτό έχει εκ γενετής τις δικές του αδυναμίες. Αυτές προσπαθούμε να αντιμετωπίσουμε με εφαρμογή δύο τροποποιήσεων. Την τροποποίηση DLT μέσω της συνθήκης της Σχέσης 2.5.1 και την τροποποίηση των συντελεστών που διαμορφώνουν τις εξισώσεις σύμφωνα με τον Πίνακα 2. Σκοπός είναι η εφαρμογή στην προηγούμενη γεωμετρία για την επανεξέταση με βάση τα πειραματικά δεδομένα.

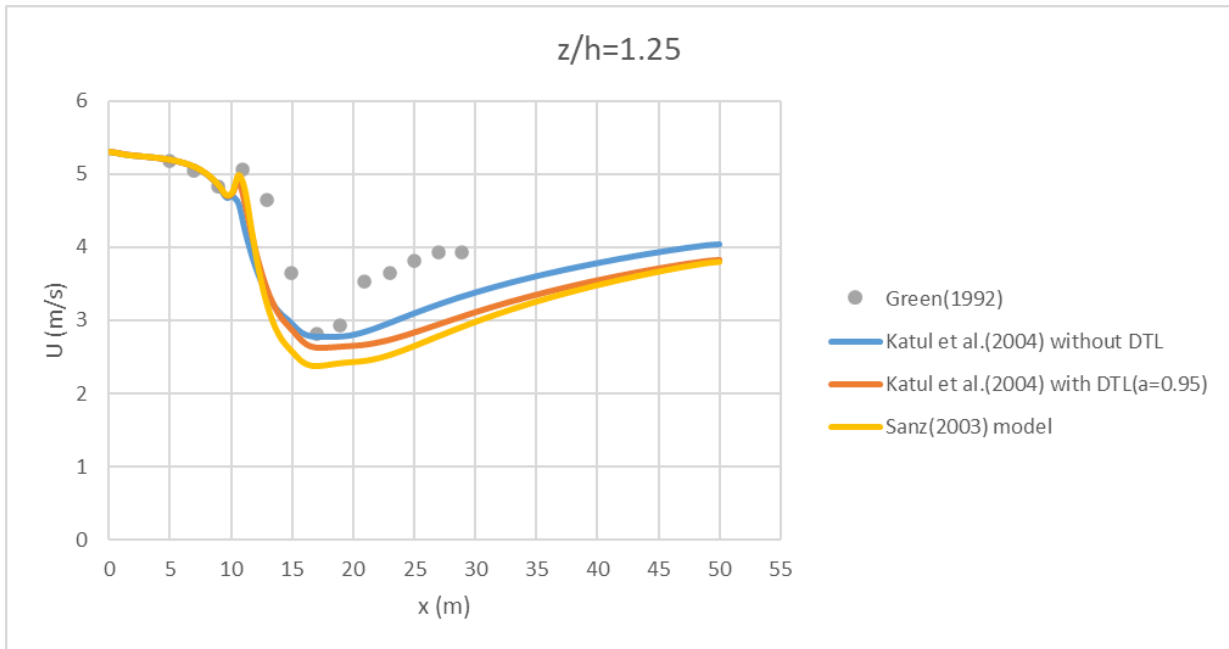
Όσο αφορά τον περιορισμό του Durbin, αυτός εξαρτάται από μία παράμετρο $\alpha \leq 1$. Αυτή μπορεί να διαμορφωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ταιριάζει στα πειραματικά δεδομένα. Συνεπώς έγιναν δοκιμές, τόσο με το μοντέλο του Katul(2004) όσο και του Sanz(2003), σύμφωνα με τη συνθήκη $\alpha = 1 : -0.5 : 0.8$, ξεκινώντας δηλαδή από τη μονάδα και μειώνοντας με βήμα 0.5 μέχρι την τιμή 0.8. Τα καλύτερα αποτελέσματα που συμφωνούν σε μεγαλύτερο βαθμό με τα πειραματικά προέκυψαν για την τιμή $\alpha = 0.95$ εφαρμοζόμενη στο μοντέλο του Katul(2004)(Σχήματα 21 με 26). Για το μοντέλο του Sanz(2003) καμία τιμή δεν φάνηκε ικανοποιητική, με το αρχικό να έχει την καλύτερη συμπεριφορά.



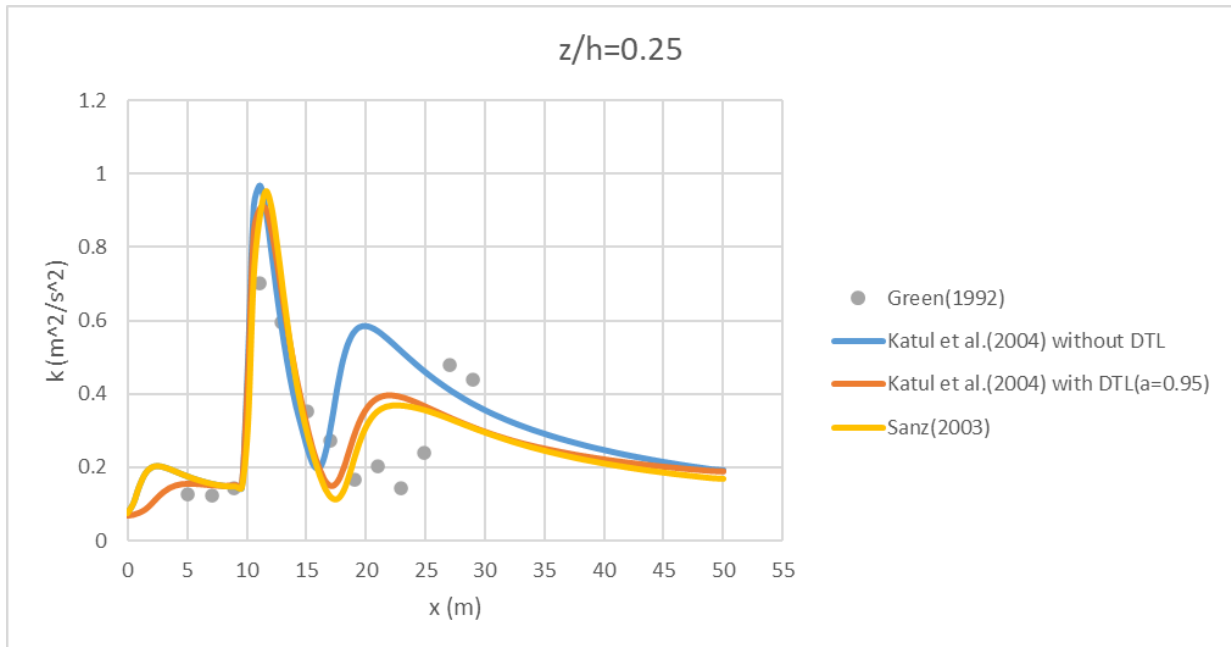
Σχήμα 21: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.25$.



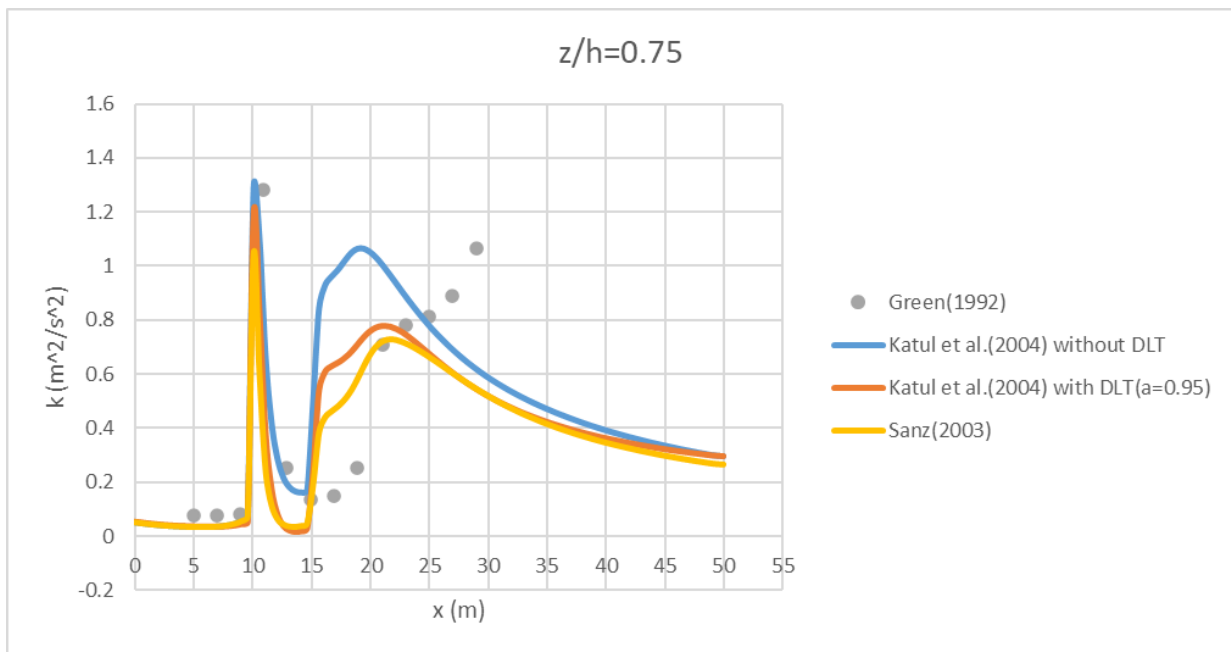
Σχήμα 22: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.75$.



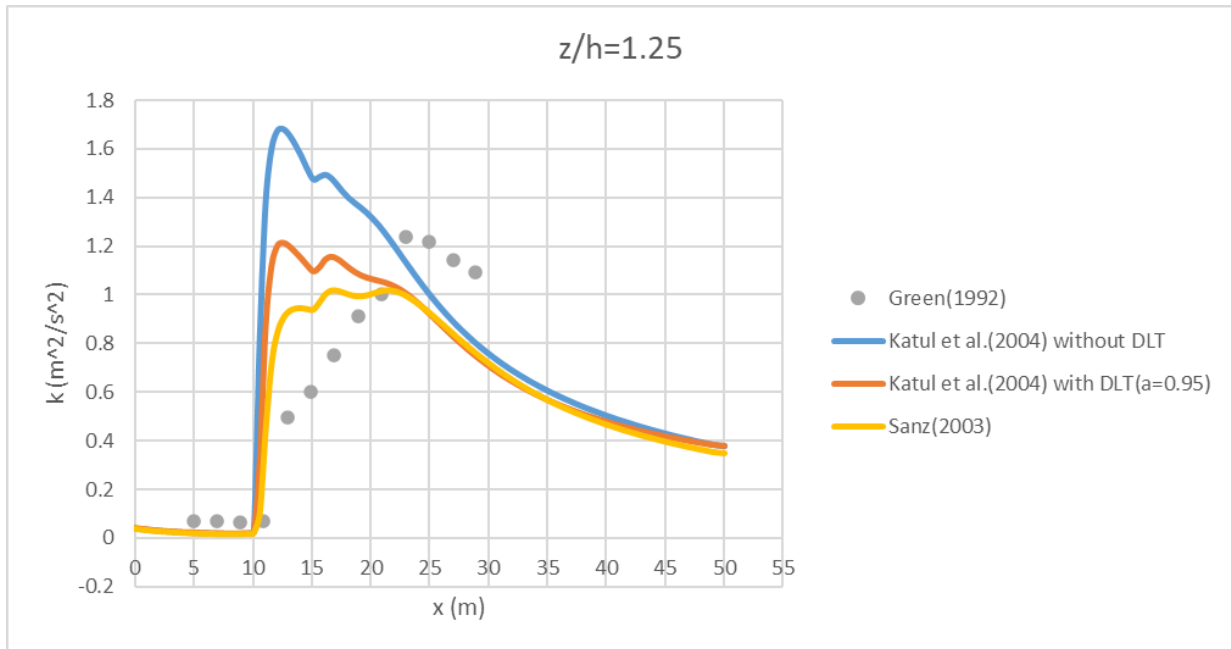
Σχήμα 23: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=1.25$.



Σχήμα 24: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.25$.

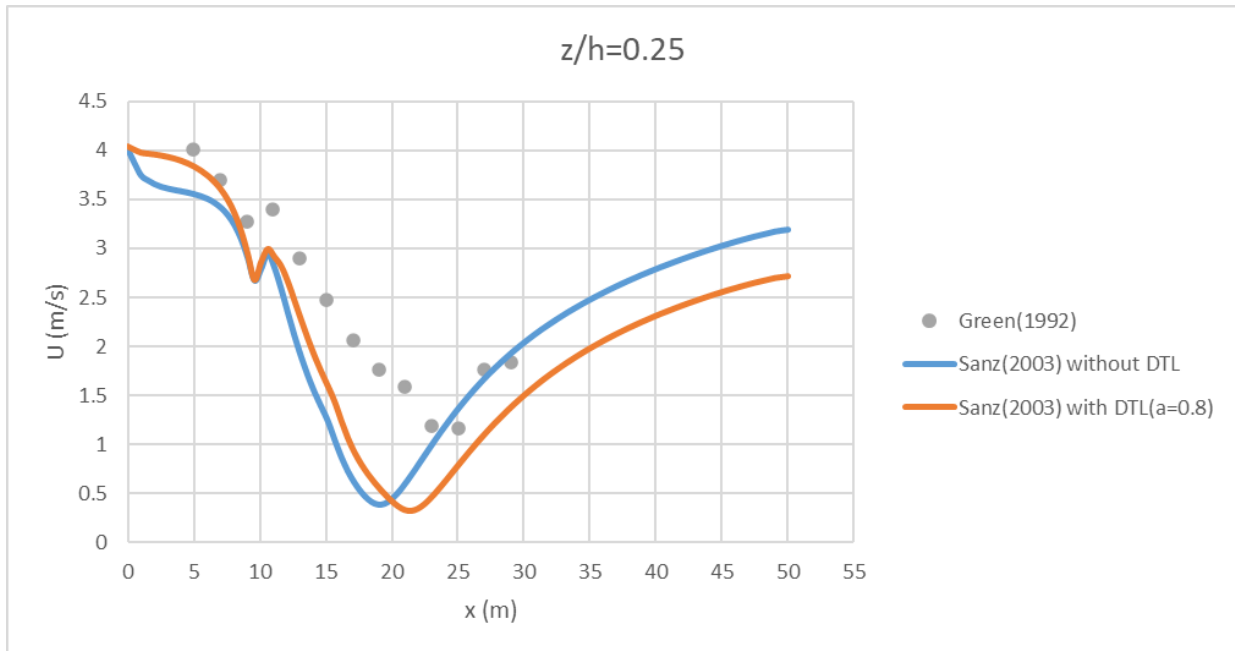


Σχήμα 25: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.75$.

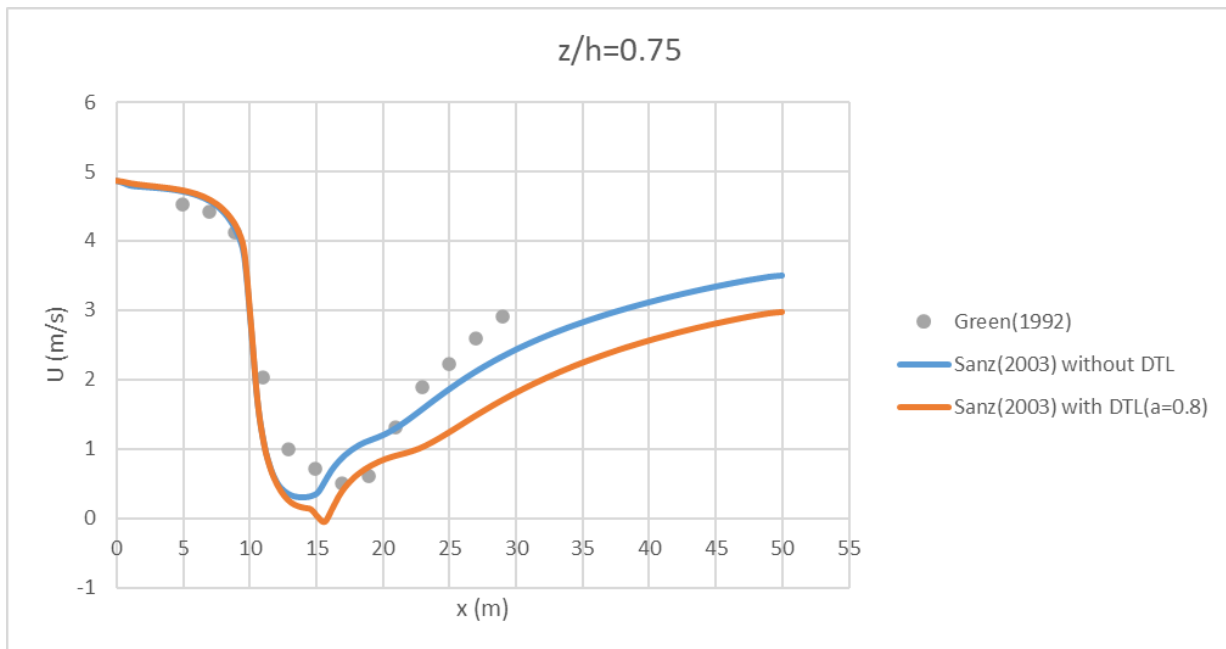


Σχήμα 26: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=1.25$.

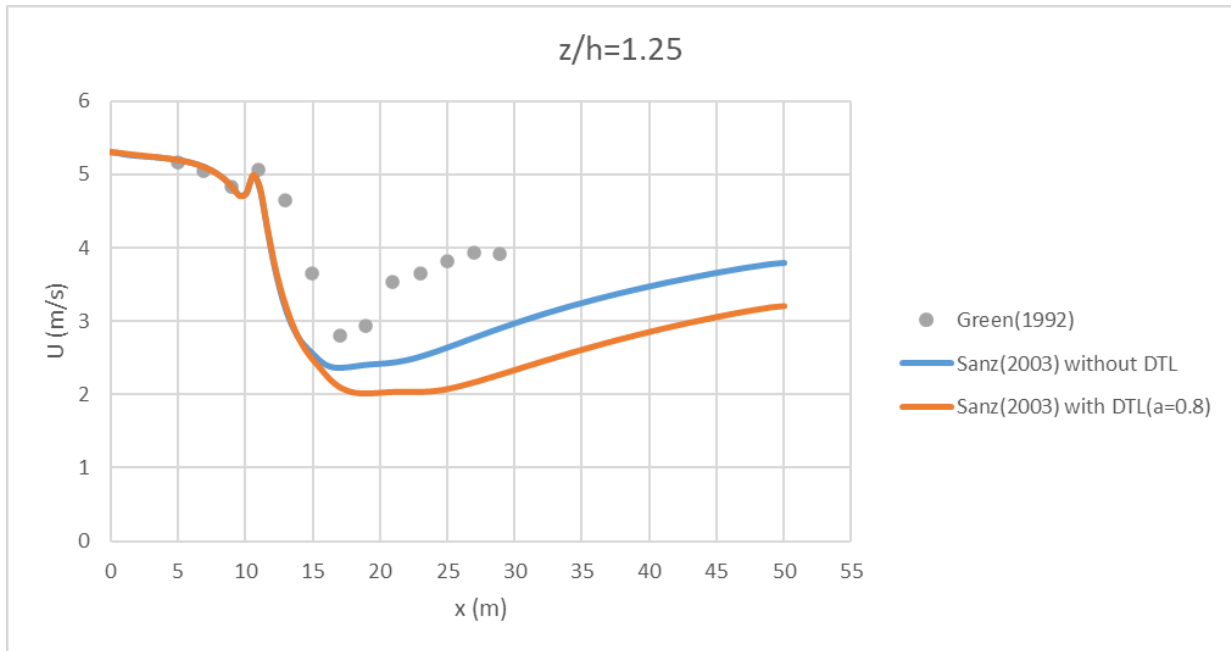
Μια παρατήρηση είναι ότι καθώς ο αριθμός α βαίνει μειούμενος η καταστολή είναι αυξανόμενη, με τα επίπεδα της ΤΚΕ να μειώνονται, πράγμα αναμενόμενο, όπως επίσης βλέπουμε και μια μείωση στην τιμή της ταχύτητας. Οι διαφορές είναι πιο έντονες κατάντι της βλάστησης, ενώ ανάντι και στο εσωτερικό της έχουμε ικανοποιητική αναπαράσταση. Ποιοτικά οι καμπύλες παραμένουν ίδιες Δειγματικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την τιμή $\alpha=0.8$ για το μοντέλο Sanz(2003)(σχήματα 27 με 32).



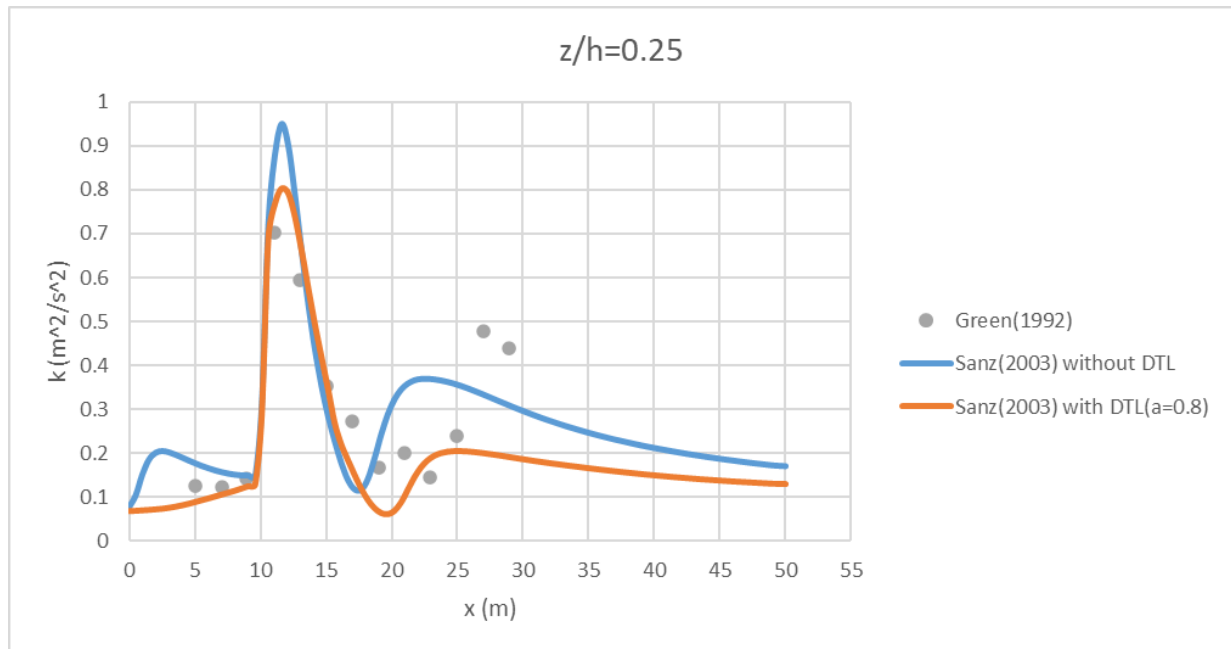
Σχήμα 27: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.25$.



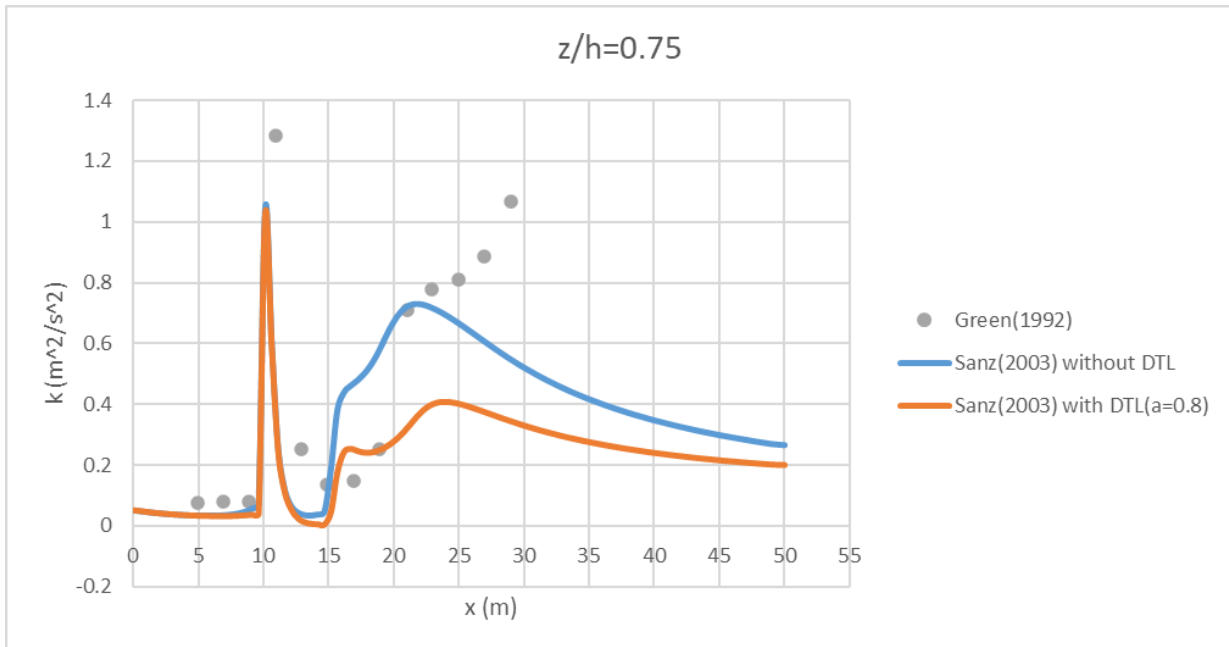
Σχήμα 28: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.75$.



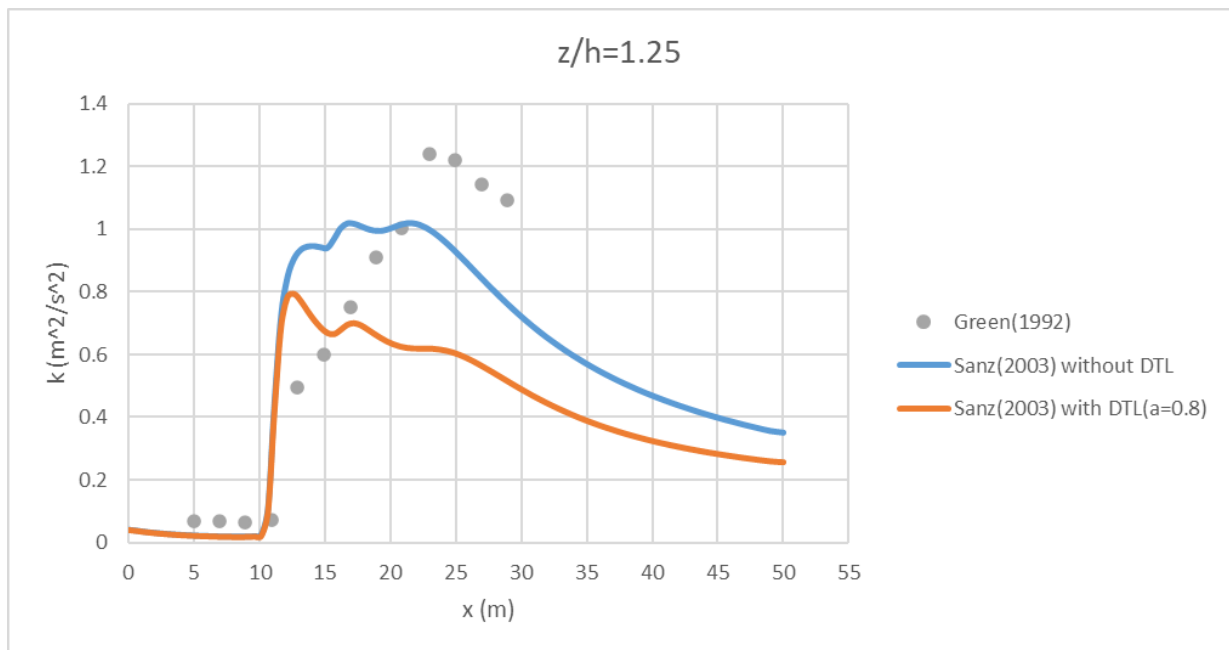
Σχήμα 29: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=1.25$.



Σχήμα 30: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.25$.

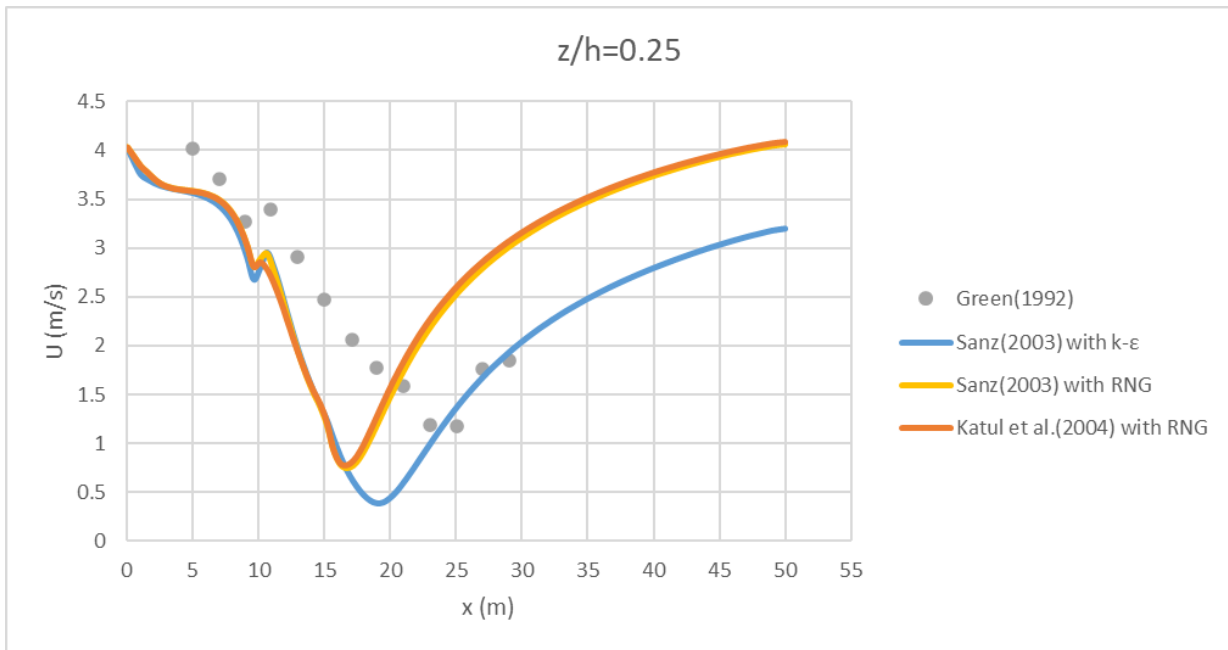


Σχήμα 31: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.75$.

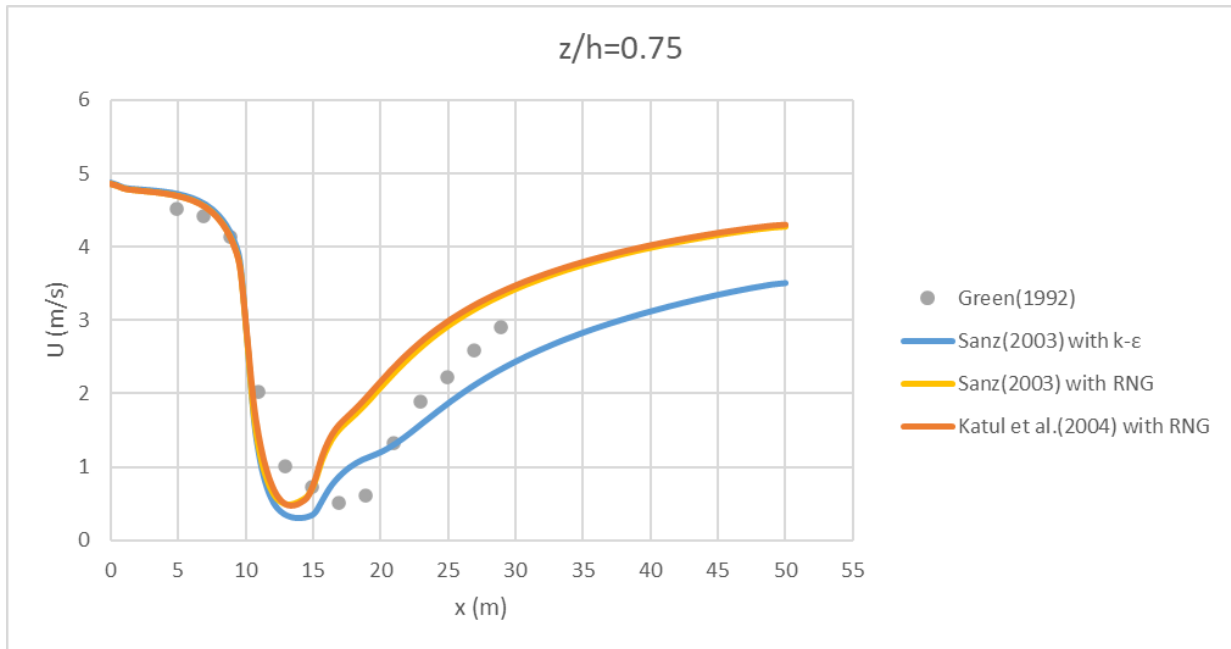


Σχήμα 32: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=1.25$.

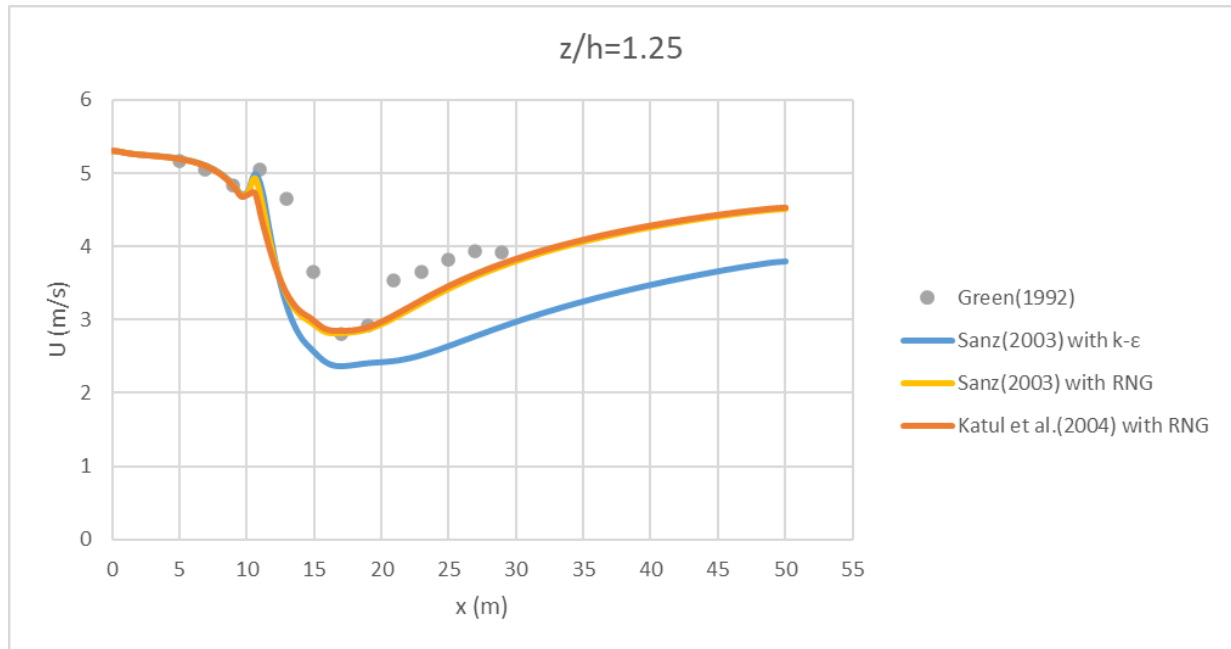
Στο ίδιο πνεύμα δοκιμάστηκε και η συμπεριφορά του μοντέλου RNG(Σχήματα 33 με 38). Τα αποτελέσματα και για τα δύο μοντέλα δεν είναι ικανοποιητικά. Παρουσιάζεται έντονη απόκλιση στην περιοχή μετά τη βλάστηση ενώ μέσα σε αυτήν και πριν από αυτή έχουμε καλά αποτελέσματα. Ποιοτικά οι καμπύλες ακολουθούν αυτές του k-ε. Η διαφορά οφείλεται ξεκάθαρα στους διαφορετικούς συντελεστές του μοντέλου RNG, μιας και έχει προσαρμοστεί για καλύτερα αποτελέσματα σε πιο περίπλοκες ροές.



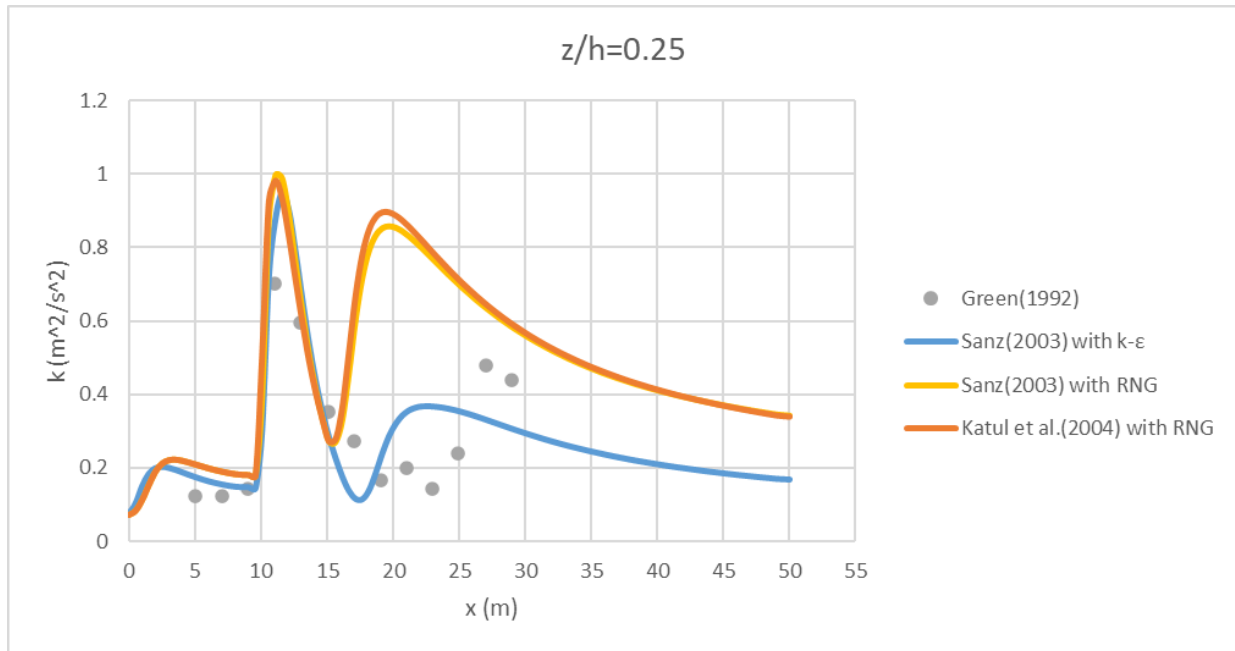
Σχήμα 33: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=0.25$.



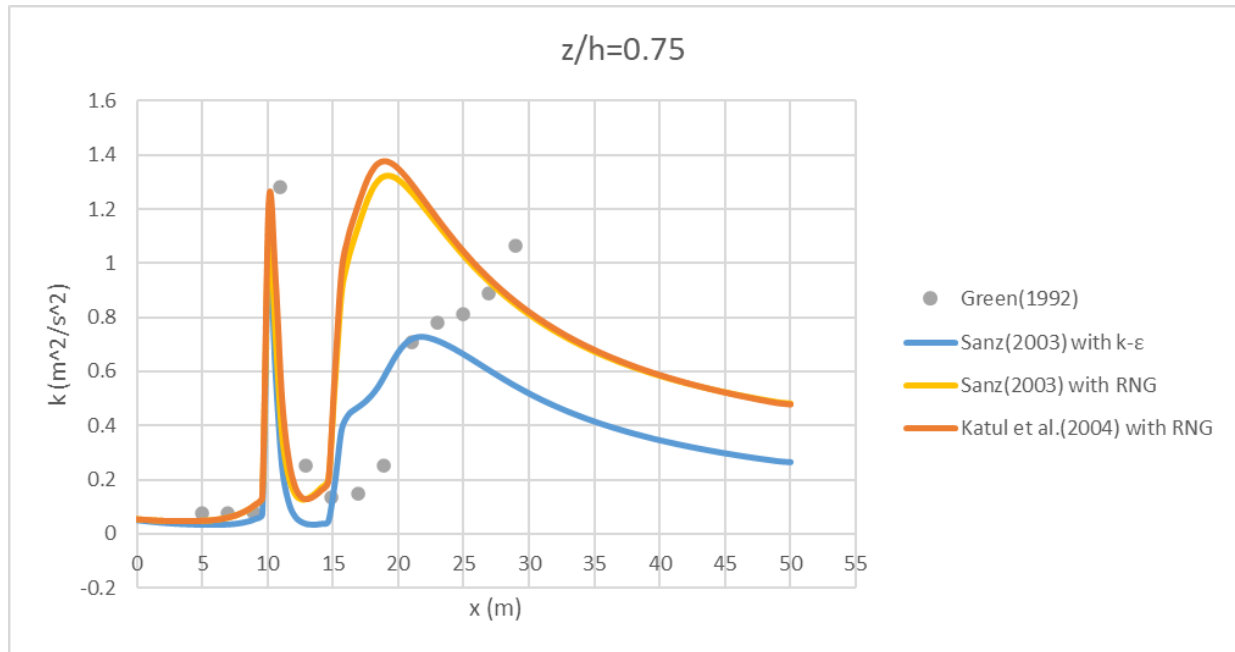
Σχήμα 34: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=0.75$.



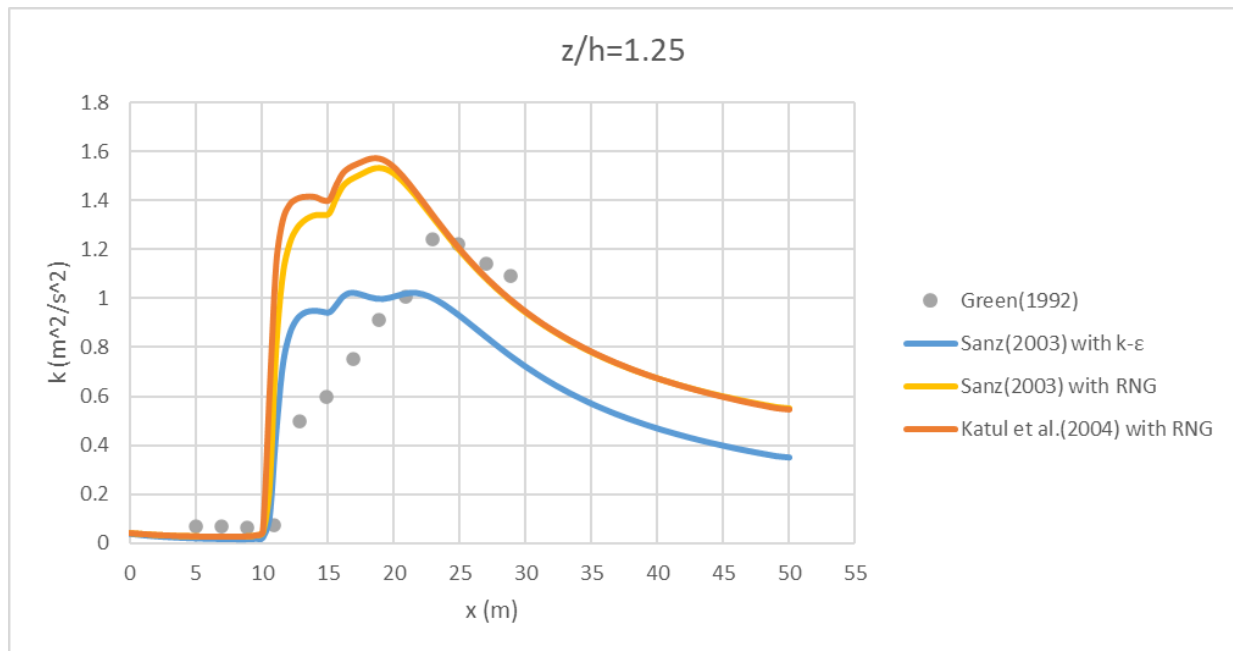
Σχήμα 35: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=1.25$.



Σχήμα 36: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=0.25$.



Σχήμα 37: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=0.75$.



Σχήμα 38: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=1.25$.

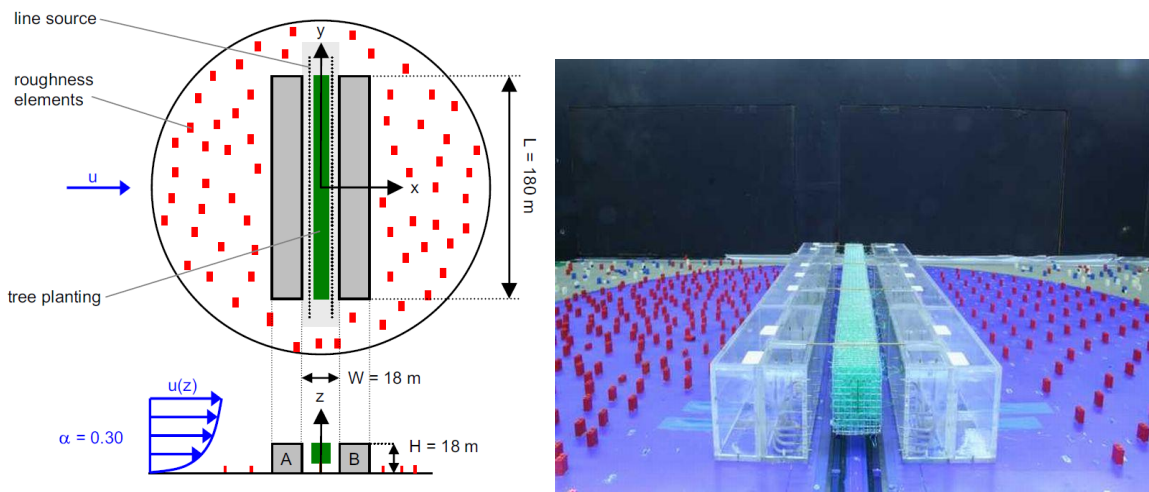
Κάθε δοκιμή εξετάστηκε με αρχική λύση πεδίου χωρίς βλάστηση σε πλήρη σύγκλιση προερχόμενη από την εφαρμογή του $k-\epsilon$. Για το μοντέλο RNG φάνηκε απαραίτητη αυτή η τακτική, μιας και απέκλινε από την πρώτη επανάληψη χωρίς αρχική λύση. Συνεπώς, η σύγκριση του χρόνου ολοκλήρωσης δεν είναι επί ίσων ορών (ο χρόνος ήταν σχεδόν διπλάσιος). Όσο αφορά την εφαρμογή της συνθήκης DTL φάνηκε να μειώνει το χρόνο επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων συγκρίνοντας τους χρόνους του αντίστοιχου μοντέλου βλάστησης με και χωρίς εφαρμογή της συνθήκης.

Επειδή θέλουμε καλή αναπαράσταση και μετά τη περιοχή της βλάστησης, γιατί φυσικά η κατάντι ροή θα επηρεάσει την ορθότητα όλου του πεδίου και είναι σημαντική ειδικά όταν η βλάστηση περιβάλλεται και από άλλα στοιχεία (π.χ. κτήρια), επιλέγονται ως πιο αξιόπιστα τα μοντέλα α) του Katul(2004) σε συνδυασμό με τον περιορισμό DLT ($\alpha=0.95$) και β) του Sanz(2003), ενσωματωμένα στο μοντέλο τύρβης $k-\epsilon$.

6 Αριθμητική προσομοίωση σε αστική περιοχή

Όλο και περισσότεροι άνθρωποι επιλέγουν να ζήσουν στις πόλεις. Με την αύξηση του πληθυσμού οι ίδιες οι πόλεις επεκτείνονται σε περιοχές που άλλοτε υπήρχαν δασικές περιοχές, ενώ παράλληλα η κάλυψη των ενεργειακών αναγκών επιδρά και αυτή αρνητικά στο περιβάλλον. Μέσα στις ίδιες τις πόλεις η ποιότητα του αέρα συνεχώς μειώνεται με τις εκπομπές κυκλοφορίας να είναι ο κύριος παράγοντας ατμοσφαιρικής ρύπανσης, που σε συνδυασμό με την παρεμπόδιση ανανέωσης του αέρα λόγω των πυκνά δομημένων κτηρίων κρατά τους ρύπους στο επίπεδο του δρόμου. Στο παρελθόν, η αστική βλάστηση αξιολογούταν σχεδόν αποκλειστικά με βάση την αισθητική της αξία. Σήμερα, πολλές ερευνητικές μελέτες βρίσκονται σε εξέλιξη για να προσδιοριστεί ο ρόλος της βλάστησης στα αστικά μικροκλίματα.

Συνεχίζοντας την μεθοδολογία της προηγούμενης παραγράφου έγινε προσομοίωση ιδανικής περίπτωσης αστικής περιοχής (Gromke, 2008) αποτελούμενη από δυο αντικριστά κτήρια ύψους $H=18\text{m}$ και μήκος $L=180\text{m}$, σε απόσταση $W=18\text{m}$. Ενδιάμεσα, σε ύψος από το έδαφος $1/3H$, τοποθετήθηκε λωρίδα ομογενούς βλάστησης πλάτους $0.5H$ και ύψους $2/3H$ (Σχήμα 39).



Σχήμα 39: Σχηματική αναπαράσταση(αριστερά) και το πειραματικό μοντέλο σήραγγας της αστικής περιοχής(δεξιά)(CODASC, 2008)

Για να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά στοιχεία της ροής και της βλάστησης πραγματοποιήθηκε πειραματική προσομοίωση σε σήραγγα με κλίμακα $M=1:150$ (Gromke, 2008, CODASC, 2008). Ένα τυπικό αστικό ατμοσφαιρικό οριακό στρώμα με προφίλ μέσης ταχύτητας με εκθέτη 0.3 σύμφωνα με τη διατύπωση του εκθετικού νόμου αναπαράχθηκε ως εξής (Buccolieri et al, 2011, Gromke et al, 2008, Gromke, 2008):

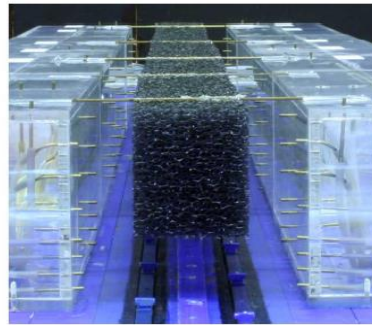
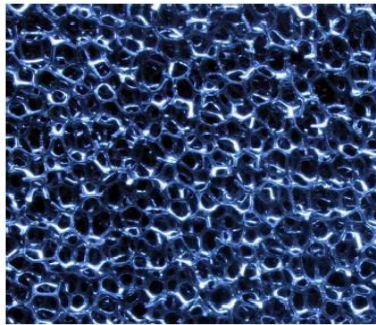
$$\frac{u(z)}{u(z)_{ref}} = \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^{0.3}, u_{ref}(z = H) = 4.7 \frac{m}{s}$$

Τα προφίλ τυρβώδους κινητικής ενέργειας και ρυθμού καταστροφή της ορίστηκαν ως εξής:

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \left(1 - \frac{z}{\delta} \right), \varepsilon = \frac{u_*^2}{\kappa z} \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)$$

, όπου $\delta = 0.96m$ (boundary layer depth), $u_* = 0.52m/s$ (friction velocity) και $\kappa = 0.41$ η σταθερά Von Karman.

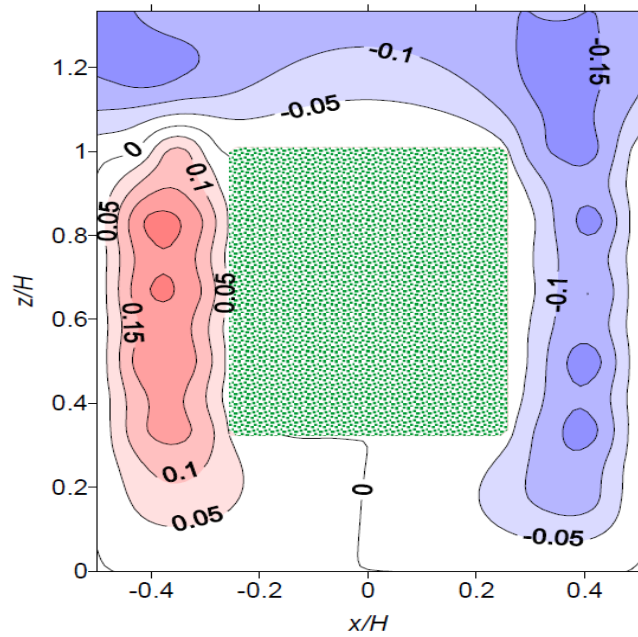
Ο ποιο εύκολος τρόπος για να προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά της βλάστησης είναι ο υπολογισμός του συντελεστή απώλειας πίεσης λ . Αυτό γίνεται παίρνοντας διαπερατό αφρό με συγκεκριμένο αριθμό ppi (pores per inch). Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε αφρός 10 ppi(Σχήμα 40) με κλάσμα όγκου πόρων 97%(pore volume fraction) ο συντελεστής αυτός βρέθηκε $\lambda_{model} = 250m^{-1}$, ενώ μετατροπή του για τη χρήση στην πραγματική γεωμετρία $\lambda_{full\ scale} = M \cdot \lambda_{model} = 1.668m^{-1}$ (Gromke 2008, Gromke et al., 2008, Balczó, et al, 2009)



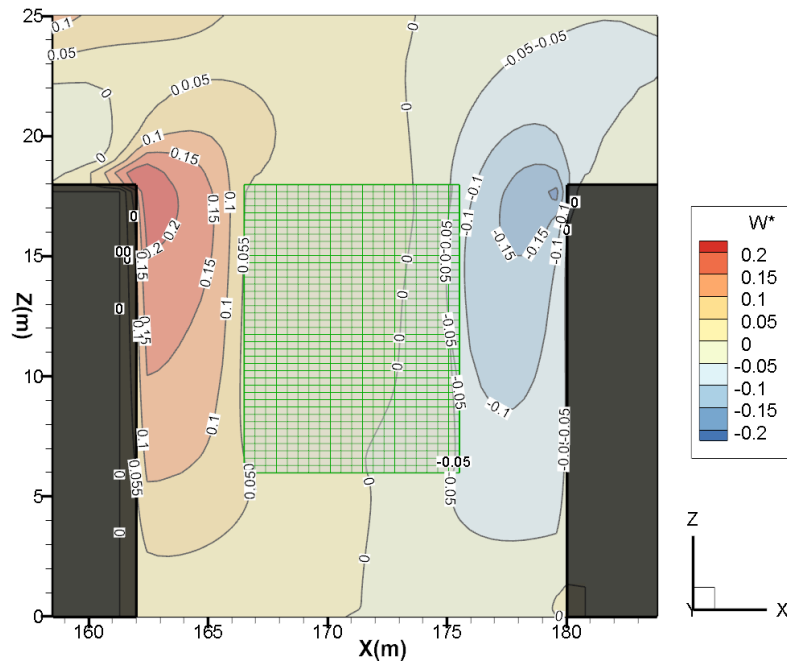
Σχήμα 40: Αφρός 10 ppi(Gromke, 2008)

Το χωρίο που δημιουργήθηκε και περιλαμβάνει τη γεωμετρία εκτείνεται 8H μπροστά από το κτήριο A, 30H πίσω από το κτήριο B, 7H πάνω από την οροφή των κτηρίων και συνολικά αποτελείται από 250x120x100 πλεγματικά κελιά με τοπικές πυκνώσεις σε καίρια σημεία.

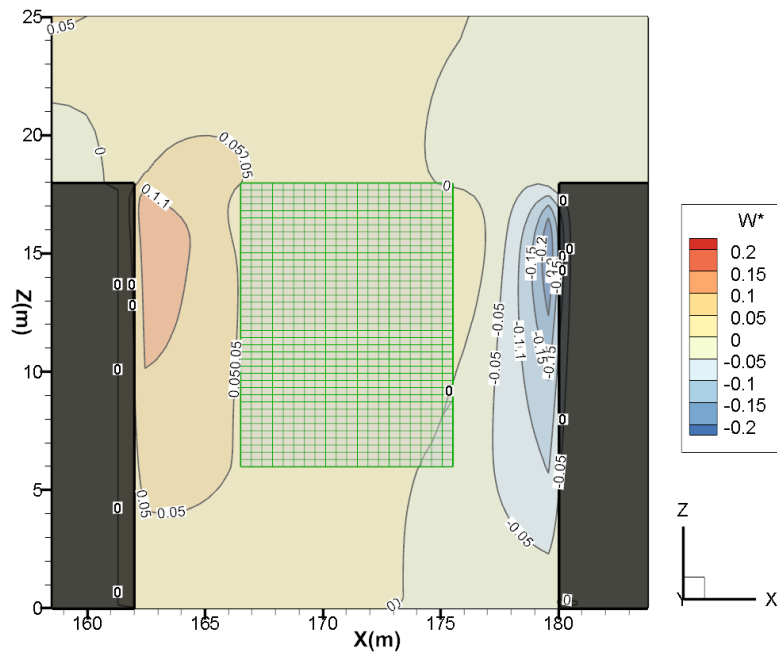
Οι μοντελοποιήσεις που χρησιμοποιήθηκαν, όπως αυτές επιλέχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο δίνουν τα εξής αποτελέσματα για την αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα $w^* = w/u_{ref}$ στη θέση $y/H = 0.5$ (Σχήματα 41 με 44).



Σχήμα 41: Αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα w^* μετρούμενη με ανεμόμετρο Λέιζερ Doppler (Laser Doppler Anemometer)(Gromke, 2008).

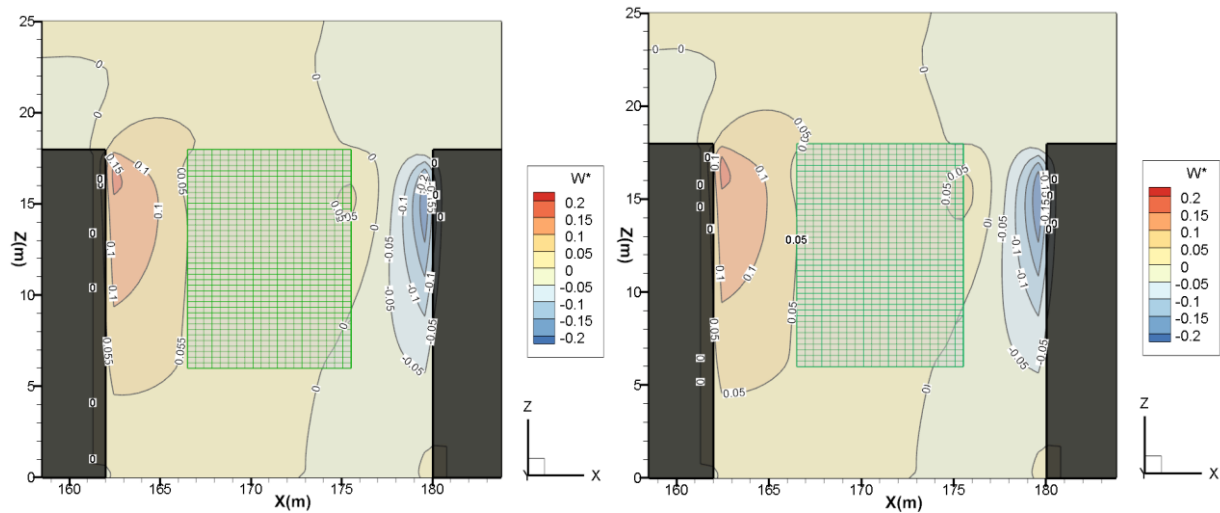


Σχήμα 42: Αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα w^* ανάμεσα στα δύο κτήρια για το μοντέλο Katul(2004) με εφαρμογή της συνθήκης DTL($\alpha=0.95$).



Σχήμα 43: Αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα w^* ανάμεσα στα δύο κτήρια για το μοντέλο Sanz(2003).

Επειδή γνωρίζουμε ότι το RNG βρίσκει καλή εφαρμογή γύρω από κτήρια δοκιμάστηκε και αυτό σε αυτή τη γεωμετρία σε συνδυασμό με το μοντέλο Sanz(2003) για την βλάστηση. Ωστόσο τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά στην περιοχή ενδιαφέροντος.



Σχήμα 44: Αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα w^* ανάμεσα στα δύο κτήρια για τα μοντέλα Sanz(2003)-RNG και Katul(2004)-RNG.

Ο συνδυασμός του μοντέλου Katul(2004) με τη συνθήκη DTL δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα στις τρεις διακριτές περιοχές. Ανάντι, κατάντι και στη μέση της βλάστησης.

Τα μοντέλα Sanz(2003) και Sanz(2003)-RNG δίνουν τα λιγότερα αποδεκτά αποτελέσματα. Κατάντι ακριβέστερα αποτελέσματα δίνει το πρώτο, ενώ ανάντι το δεύτερο. Στη μέση της βλάστησης κανένα δεν δίνει ικανοποιητικές προβλέψεις. Δοκιμές έγιναν και με το συνδυασμό Katul(2004)-RNG, που όμως έδωσε σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα με το Sanz(2003)-RNG και μπορεί να εξηγηθεί από τα Σχήματα 33-38.

Όσο αφορά το υπολογιστικό κόστος οι χρόνοι ολοκλήρωσης ήταν πρακτικά οι ίδιοι. Σε πεδίο με κυρίαρχη παρουσία κτηρίων, η παρουσία σχετικά μικρής περιοχής βλάστησης δεν επηρεάζει το χρόνο. Αυτό που επιδρά παραπάνω, όπως είναι αναμενόμενο, είναι ο αριθμός των υπολογιστικών κελίων.

7 Εφαρμογή σε περιοχή του Ε.Μ.Π.

Η ανάλυση του μικροκλίματος μιας αστικής περιοχής μπορεί να αποτελέσει σημείο ενδιαφέροντος βελτιστοποίησης και ασφάλειας ενεργειακών συστημάτων που βασίζονται στον άνεμο, όπως για παράδειγμα συστήματα εξαερισμού και μικρές ανεμογεννήτριες οροφής. Αυτά βασίζονται σε δεδομένα που παρέχονται από μετρητικές διατάξεις σε κατάλληλο σημείο. Το κτήριο Αεροδυναμικής, Ναυπηγικής και Υδροδυναμικών Μηχανών της σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π. με επιπλέον άλλα 7 κτίρια γύρω του είναι η περιοχή ενδιαφέροντος(Σχήμα 45).



Σχήμα 45: Κάτοψη περιοχής ενδιαφέροντος Ε.Μ.Π.(Nian, 2014)

Η δημιουργία του κατάλληλου πλέγματος βασίστηκε σε διπλωματική εργασία(Nian, 2014), όπου είχε γίνει αναπαράσταση των κτηρίων χωρίς την παρουσία βλάστησης. Σε αυτό έγινε προσθήκη και των συγκεκριμένων περιοχών(Σχήμα 46). Τα δεδομένα για το προφίλ εισόδου ταχύτητας βασίζονται στην ίδια διπλωματική που προέκυψαν από ανάλυση δεδομένων ανέμου. Επιπλέον έγινε υπόθεση επιτεδότητας εδάφους για απλοποίηση της γεωμετρίας.

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία της βλάστησης επιλέγονται ως εξής:

- Θεωρείται τυπικός συντελεστής αντίστασης $C_D = 0.3$.

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.7.1) για το $LAD(z)$, υποθέτοντας είδος δέντρων, πεύκα($z_m = 0.4h$) και ομοιόμορφη κατανομή καθ' ύψος για απλοποίηση, υπολογίζοντας το μέσο όρο των τιμών. Η μέγιστη τιμή που χρειαζόμαστε L_m βρέθηκε από τη βιβλιογραφία(Stadt and Lieffers, 2000).



Σχήμα 46: Κατασκευή γεωμετρίας περιοχής με ύψος περιοχής $A=9.5m$. Τα στοιχεία εξάγονται καταλλήλως για δημιουργία πλέγματος.

Κυρίαρχος άνεμος και πιο αντιπροσωπευτικός για όλο το έτος σε αυτή την περιοχή είναι με κατεύθυνση από τα βορειοανατολικά προς τα νοτιοδυτικά (Nian, 2014), εξαιτίας του βουνού Υμηττός. Τα δεδομένα για το προφίλ εισόδου της ταχύτητας φαίνονται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4: Δεδομένα προφίλ εισόδου ταχύτητας (Nian, 2014, τροποποιημένο)

Υψος (m)	0	1	2	5	10	20	30	45	60	120
Ταχύτητα (m/s)	0	1.54	3.09	5.13	6.67	8.22	9.12	10.02	10.66	12.21

Μία εκτίμηση για τα δεδομένα εισόδου k -ε που χρειαζόμαστε ακολουθούμε την εξής προσέγγιση. Θεωρούμε τυρβώδη ένταση (turbulence intensity) $I = 10\%$ και ταχύτητα αδιατάρακτης ροής $u_\infty(z = 120m) = 12.21 m/s$. Υπολογίζουμε την τιμή εισόδου k ως:

$$k = \frac{3}{2} (u_\infty I)^2 = 2.2363 m^2/s^2$$

Επιπλέον γνωρίζοντας την πυκνότητα του αέρα $\rho = 1.16 \text{ kg/m}^3$, τη συνεκτικότητα $\mu = 0.1818 \cdot 10^{-4} \text{ N s/m}^2$ και υποθέτοντας ένα λόγο τυρβώδης συνεκτικότητας και συνεκτικότητας ρευστού $\mu_t/\mu = 100$ υπολογίζουμε το προφίλ εισόδου του από τη σχέση:

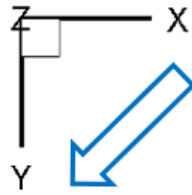
$$\varepsilon = \rho C_\mu \frac{k^2}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu}\right)^{-1} = 287.1883 \text{ m}^2/\text{s}^3$$

Εξετάζονται δύο περιπτώσεις για να δούμε την επίδραση της βλάστησης στην περιοχή και με σκοπό να βρούμε την καλύτερη θέση για την εγκατάσταση μιας μικρής ανεμογεννήτριας στην οροφή(Σχήμα 46):

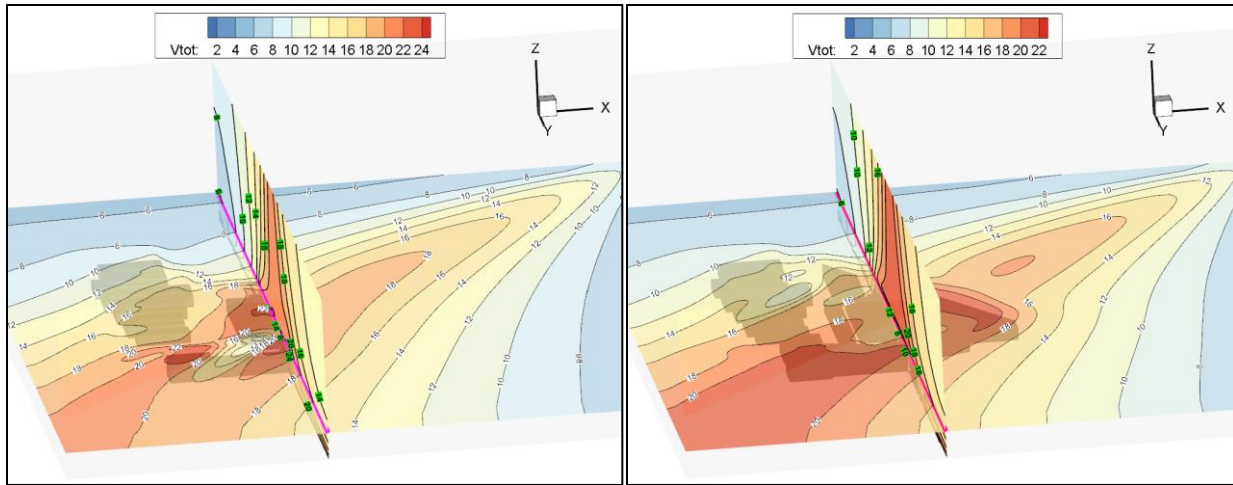
- iv. Ύψος κομματιού βλάστησης $A = 9.5\text{m}$ με χαρακτηριστικά $C_D = 0.3$, $LAD = 1.3591 \text{ m}^{-1}$.
- v. Ύψος κομματιού βλάστησης $A = 13.5\text{m}$ με χαρακτηριστικά $C_D = 0.3$, $LAD = 1.3576 \text{ m}^{-1}$.

Η ενδεικνυόμενη θέση μιας τέτοιας ανεμογεννήτριας είναι στο μέσο της οροφής, σε επαρκή απόσταση από εμπόδια(50% ψηλότερα), με συνθήκες εύρους ταχυτήτων λειτουργίας 3-25m/s. Μετά την συνήθη ονομαστική τιμή 13 m/s, ρυθμίζονται έτσι ώστε να παράγουν σταθερή ισχύ, ίση με την ονομαστική. Προσοχή πρέπει να δίνεται στα επίπεδα τύρβης διότι οι μεταβολές στην ταχύτητα προκαλούν διακυμάνσεις στην παραγόμενη ισχύ, φθείροντας τα ηλεκτρικά στοιχεία και προκαλώντας κόπωση στα δομικά μέρη(Γιαννόπουλος, 2018).

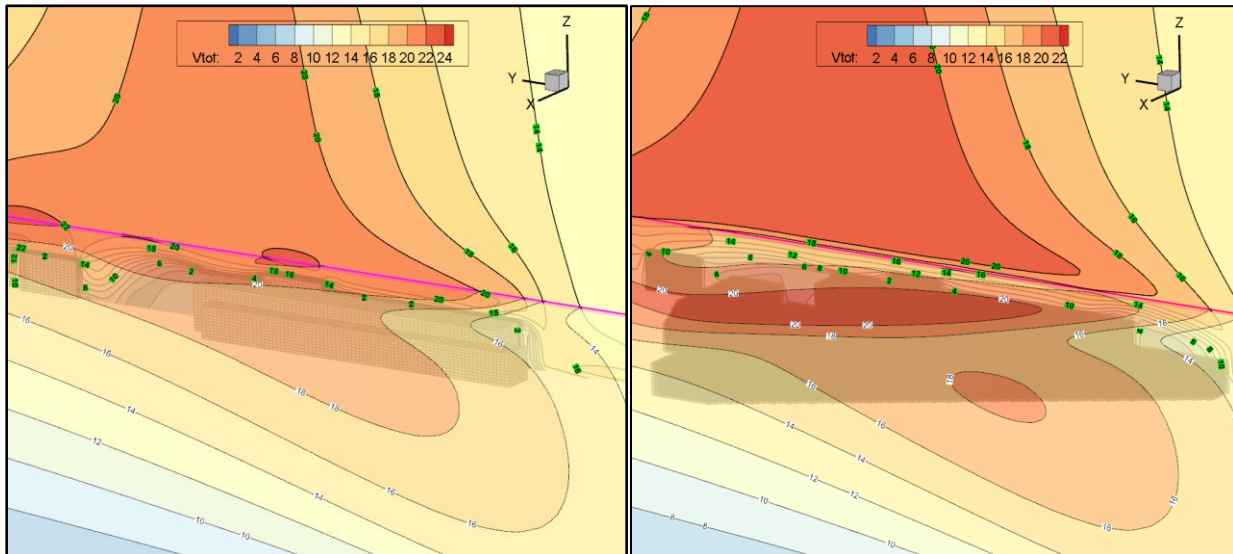
Χρήσιμο είναι να δούμε το πεδίο χωρίς την παρουσία βλάστησης για να έχουμε μια βάση σύγκρισης. Για αυτό το σκοπό έγινε επίλυση της ροής μόνο με τα κτήρια, όπου χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο RNG διότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα έναντι του μοντέλου k-ε για επίλυση ροής γύρω από κτήρια. Το πεδίο συμπληρωμένο με τη βλάστηση επιλύθηκε με το συνδυασμό Katul(2004)-DTL, όπως προέκυψε από την παραπάνω ανάλυση Η τομή των δύο επιπέδων που απεικονίζονται είναι 20m από το έδαφος, στο μέσο του κτηρίου A.N.Y.M., που υψώνεται στα 13.5m.



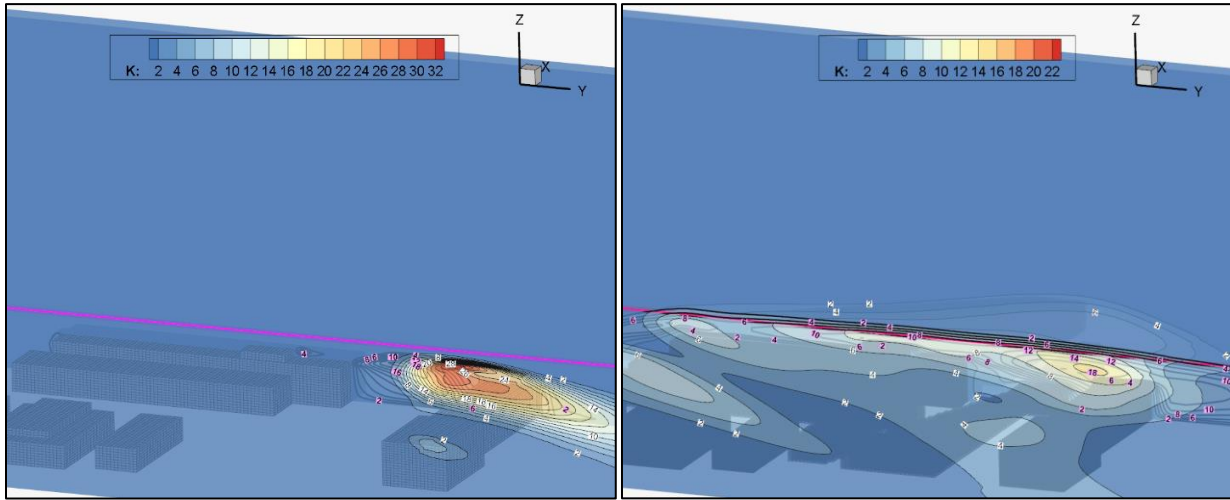
Σχήμα 47: Κατεύθυνση ανέμου βορειοανατολική(northeast) προς νοτιοδυτική(southwest)



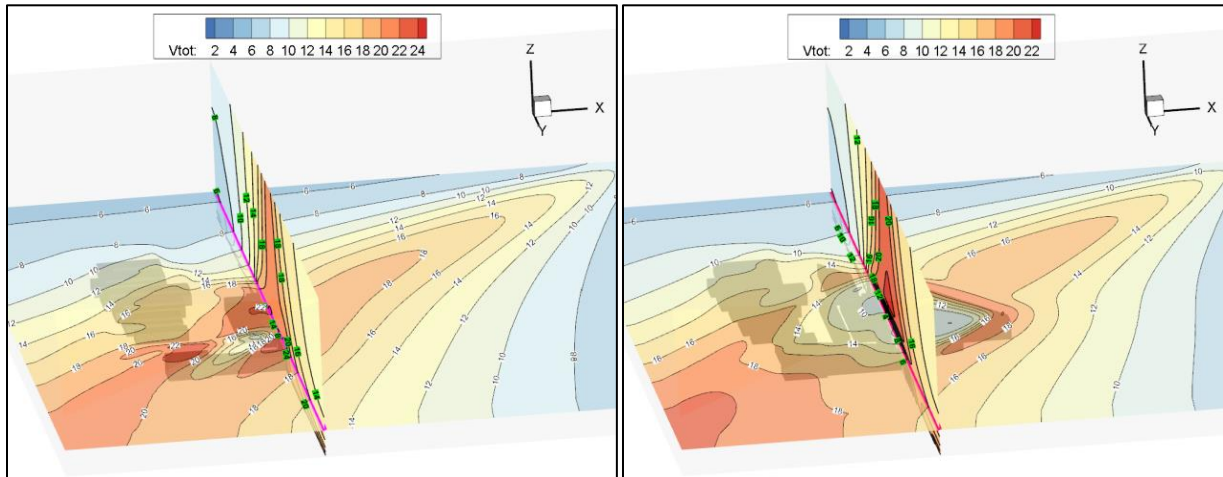
Σχήμα 48: Ισοϋψείς καμπύλες ολικής ταχύτητας περιοχής Ε.Μ.Π. χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (i).



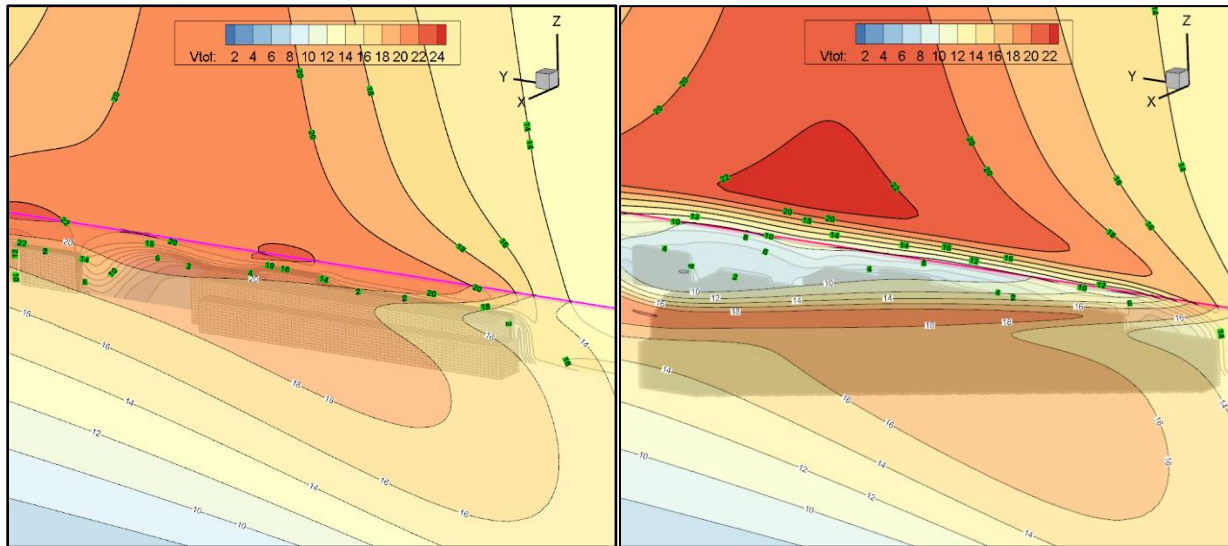
Σχήμα 49: Ισοϋψείς καμπύλες ολικής ταχύτητας χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (i)(δεξιά) κοντά στην οροφή του κτηρίου Α.Ν.Υ.Μ.



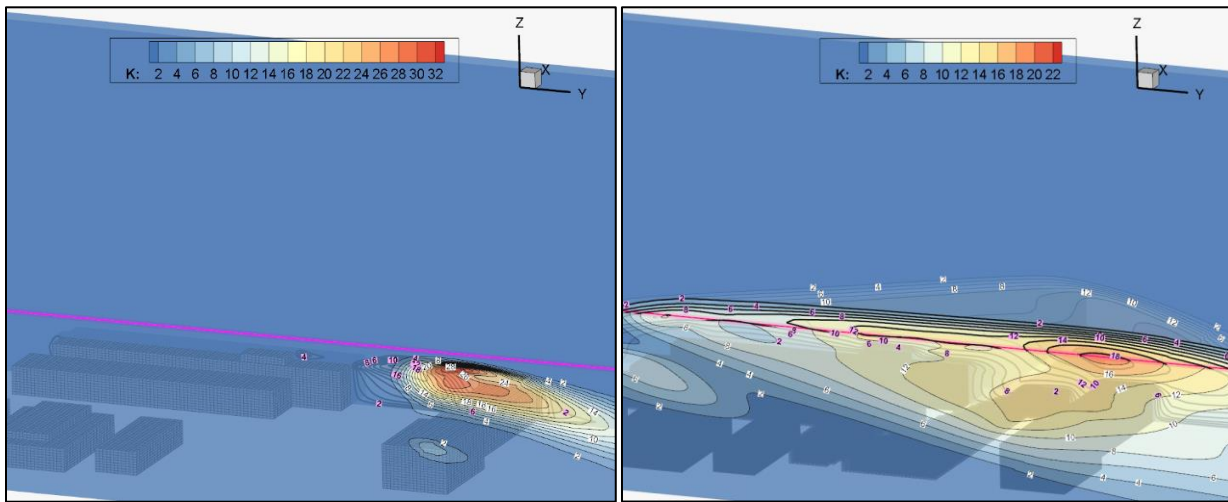
Σχήμα 50: Ισοϋφείς καμπύλες k χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (i)(δεξιά) κοντά στην οροφή του κτηρίου A.N.Y.M.



Σχήμα 51: Ισοϋφείς καμπύλες ολικής ταχύτητας περιοχής E.M.P. χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (ii).



Σχήμα 52: Ισοϋψείς καμπύλες ολικής ταχύτητας χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (ii)(δεξιά) κοντά στην οροφή του κτηρίου A.N.Y.M.



Σχήμα 53: Ισοϋψείς καμπύλες k χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (ii)(δεξιά) κοντά στην οροφή του κτηρίου A.N.Y.M.

Από τα Σχήματα 47 με 53 βλέπουμε ότι η βλάστηση λειτουργεί σαν εμπόδιο με τη ροή να ακολουθεί τη γεωμετρία της και να κινείται γύρω από αυτή. Η ταχύτητα στην περιοχή πάνω και εγγύς της οροφής του κτηρίου A.N.Y.M. είναι μεγαλύτερη όταν δεν υπάρχει βλάστηση, ενώ με αυξανόμενο ύψος των δέντρων, οι ταχύτητες στην περιοχή μειώνονται και συνεπώς έχουμε μικρότερη ηλεκτροπαραγωγή. Επιπλέον, όταν ο άνεμος δεν θα είναι ισχυρός, η Α/Γ μπορεί να μην αποκτήσει την ταχύτητα εκκίνησης. Καθώς το ύψος των δέντρων αυξάνεται, η παραγωγή

της τυρβώδους κινητικής ενέργειας αυξάνεται και αυτή και διαχέεται σε μεγαλύτερη επιφάνεια, οπότε με την πάροδο του χρόνου η Α/Γ θα καταπονείται περισσότερο. Η παραγωγή της είναι ελάχιστη χωρίς βλάστηση, αλλά είναι σε μεγαλύτερα επίπεδα. Αυτό διότι η βλάστηση, περιβάλλει το κτήριο του Α.Ν.Υ.Μ. και η παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας που απεικονίζεται οφείλεται σε αυτή. Σε αντίθεση όμως με την παραγωγή λόγω στερεής δομής(όπως συμβαίνει στη περίπτωση μόνο με τα κτήρια), στο εσωτερικό της βλάστησης πραγματοποιείται μια μείωση ταχύτητας και εκτός από την παραγωγή τύρβης έχουμε και συγχρόνως και τη γρήγορη διάσπαση και διάχυση μέρους αυτής, οπότε και μείωση των επιπέδων στον ομόρου. Σύμφωνα όμως με την ανάλυση του Νικήτα Γιαννόπουλου(2018), παρατηρήθηκε ότι για ταχύτητες μέχρι 8.5m/s η ύπαρξη τύρβης μεγαλώνει την παραγόμενη ισχύ της Α/Γ, ενώ για μεγαλύτερες ταχύτητες την μειώνει. Αυτό ίσως μπορεί να βρει εφαρμογή στην περίπτωση της υψηλής βλάστησης. Η περιοχή που 'βλέπει' σε κάθε περίπτωση αυξημένα επίπεδα 'κ' είναι το κτήριο 2 στον ομόρου του Α.Ν.Υ.Μ. και δεν προτείνεται η εγκατάσταση της Α/Γ σε αυτό το κτήριο. Τα υπόλοιπα κτήρια θα μπορούσαν να θεωρηθούν κατάλληλα για εγκατάσταση. Στο Α.Ν.Υ.Μ. προτείνεται θέση 35m περίπου μετά τη βόρεια πλευρά.

8 Συμπεράσματα

Με τη συνεχή αύξηση του πληθυσμού και τη μετακίνησή τους στις πόλεις είναι επιτακτική ανάγκη σχεδιασμού συστημάτων, παθητικών ή ενεργητικών, για τη βελτίωση της ποιότητας ζωής στην αυτή. Σε αυτό, η βλάστηση μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο και είναι μια δυνατότητα που χρήζει περαιτέρω διερεύνησης, αν αναλογιστεί κανείς όλα τα οφέλη που δύναται να παρουσιάσει σε διάφορους τομείς της καθημερινότητάς. Η εισαγωγή όμως τέτοιων περιοχών είναι αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα και απαιτεί προσεκτική μελέτη.

Στόχος λοιπόν της διπλωματικής εργασίας ήταν να δοθεί μια συγκριτική εικόνα των διάφορων μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μοντελοποίηση της βλάστησης. Μια καλή και συγχρόνως 'οικονομική' λύση κρίνεται απαραίτητη για να γίνει κατανοητή η επίδραση της ενσωμάτωσης πράσινων περιοχών μέσα στην πόλη. Αυτό γίνεται με την επίλυση των εξισώσεων κίνησης των ρευστών και του τομέα της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις διαφορετικές αναπαραστάσεις της βλάστησης, με εισαγωγή επιπλέον όρων στις εξισώσεις, σε περιοχή που περιλαμβάνει μόνο μια μικρή περιοχή βλάστησης. Από αυτές, με βάση πειραματικά δεδομένα και ταυτοχρόνως λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση υπολογιστικού κόστους και χρόνου, δύο κρίθηκαν ικανοποιητικά. Το μοντέλο του Katul(2004) και το μοντέλο του Sanz(2003), με το τελευταίο να είναι λιγότερο ευσταθές και να απαιτεί περισσότερο χρόνο αλλά πιο ακριβές. Όμως το ενδιαφέρον μας στρέφεται κυρίως σε αστικές περιοχές. Έτσι, για τη βελτίωση των προβλέψεων και την απαλοιφή της υπερβολικής εκτίμησης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας που μπορεί να εμφανιστεί σε σημεία στασιμότητας, είτε αυτά βρίσκονται στη βλάστηση είτε σε κτήρια, και είναι εγγενή αδυναμία του μοντέλου τύρβης k-ε που χρησιμοποιείται προτάθηκαν δύο τροποποιήσεις του μοντέλου τύρβης αυτού. Της συνθήκης Durbin Timescale Limiter και του RNG για το συνδυασμό τους με τα καλύτερα μοντέλα βλάστησης όπως επιλέχθηκαν. Η πρώτη τροποποίηση, περιλαμβάνει συντελεστή ελευθερίας για την προσαρμογή του σε πειραματικά δεδομένα. Απαιτούνται έτσι αρκετές και χρονοβόρες δοκιμές για το βέλτιστο αποτέλεσμα. Η εφαρμογή του όμως σε αστικό περιβάλλον έδειξε πολύ καλά αποτελέσματα έναντι της δεύτερης τροποποίησης. Πρέπει όμως να συνυπολογίσουμε τις δοκιμές για την προσαρμογή που προηγήθηκαν της τελικής εφαρμογής, με τον συντελεστή ελευθερίας να μην είναι ο ίδιος για κάθε πρόβλημα. Τέλος παρουσιάστηκε και μια ενεργειακή εφαρμογή βασισμένη στην ανάλυση που προηγήθηκε.

Κατανοούμε ότι το πρόβλημα της μοντελοποίησης της βλάστησης είναι πολύπλοκο και βρίσκεται ακόμα από εξέλιξη. Κάθε παρούσα τεχνική που χρησιμοποιήθηκε έχει τα δικά της προτερήματα αλλά και αδυναμίες. Πρέπει λοιπόν να εξισορροπούνται ανάλογα με τις απαιτήσεις τις κάθε εφαρμογής που εξετάζεται και στην παρούσα διπλωματική δίνεται μια γενική κατεύθυνση. Πέρα όμως από την αναπαράσταση αυτή καθαυτή, η παρουσία της μέσα στην πόλη είναι και αυτό σύνθετο πρόβλημα, με τη θέση και τον όγκο της στο χώρο να επιδρά διαφορετικά στη ροή. Μελλοντική ανάπτυξη μπορεί να γίνει στη μοντελοποίηση της βλάστησης για καλύτερη προσαρμογή της στις εξισώσεις. Ενδιαφέρον θα αποτελούσε και ένας συνδυασμός του Durbin

Timescale Limiter και του RNG. Ο συνδυασμός αυτός θα μπορούσε ενδεχομένως να προσφέρει καινούργιες πληροφορίες και νέα αποτελέσματα, ενώ μια πιο αναλυτική μελέτη των χωροταξικών σχέσεων μεταξύ κτηρίων και βλάστησης μπορεί να κριθεί απαραίτητη στο σύντομο μέλλον.

9 Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1: Φάσμα μεγέθους δινών(Bakker, 2002, τροποποιημένο).....	14
Σχήμα 2: Μονοδιάστατο ενεργειακό φάσμα E11κ1 (Bakker, 2002).....	15
Σχήμα 3: Σχηματικό διάγραμμα της κινητικής ενέργειας στο εσωτερικό της βλάστησης(Svensson and Häggkvist, 1990).....	22
Σχήμα 4: Τυπικά κάθετα προφίλ του συντελεστή LAD για(α) φυλλοβόλα και (β) κωνοφόρα δέντρα(Ries and Eichhorn, 2001, τροποποιημένο).	24
Σχήμα 5: Επίπεδο XY περιοχής παραδείγματος των Svensson and Häggkvist(1990) και τα σημεία καθ' ύψος(με διακεκομμένη) για τη σύγκριση αξιοπιστίας(Kenjereš and Kuile, 2013).....	26
Σχήμα 6: Μέρος πλέγματος 200x60x80 με πύκνωση καθ' ύψος, στην αρχή, στο τέλος της και στο σημείο ενδιαφέροντος στη μέση της βλάστησης. Σε αυτό εμπεριέχεται πλήρως το κομμάτι της(χρώμα πράσινο).	27
Σχήμα 7: Προφίλ ταχύτητας u όπως προέκυψαν από τους Svensson and Häggkvist(1990), Kenjereš and Kuile(2013) και του υπολογιστικού εργαλείου <code>caffca3d</code>	28
Σχήμα 8: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά για την προσομοίωση σε μια νησίδα βλάστησης (πάνω) και η μετρούμενη μη ομογενής χαρακτηριστική πυκνότητα περιοχής φύλλων κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση(κάτω)(Kenjereš and Kuile, 2013).....	31
Σχήμα 9: Τομή πλέγματος με περιοχή ανομοιογενής βλάστησης.....	32
Σχήμα 10: Διακυμάνσεις πίεσης λόγω παρουσίας βλάστησης.....	32
Σχήμα 11: Συνιστώσες ταχύτητας και οι περιοχές που δημιουργούν, στον ομόρου και στα άκρα της βλάστησης.	33
Σχήμα 12: Μοντέλο Svensson and Häggkvist(1990). Βλέπουμε την ισχυρή καταστολή της ΤΚΕ.	34
Σχήμα 13: Μοντέλα Momentum only(πάνω), Katul(2004)(μέση), Sanz(2003)(κάτω). Βλέπουμε την μεγάλη παραγωγή ΤΚΕ.	35
Σχήμα 14: Θέσεις των μετρήσεων κατά μήκος.	36
Σχήμα 15: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=0.25$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.	36
Σχήμα 16: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=0.75$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.	37
Σχήμα 17: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=1.25$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.	37
Σχήμα 18: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=0.25$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.	38
Σχήμα 19: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=0.75$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.	39
Σχήμα 20: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από όλα τα μοντέλα για τη θέση $z/h=1.25$ συγκρινόμενα με τα πειραματικά.	39
Σχήμα 21: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.25$	41

Σχήμα 22: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.75$	42
Σχήμα 23: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=1.25$	42
Σχήμα 24: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.25$	43
Σχήμα 25: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.75$	43
Σχήμα 26: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Katul(2004) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=1.25$	44
Σχήμα 27: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.25$	45
Σχήμα 28: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.75$	45
Σχήμα 29: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=1.25$	46
Σχήμα 30: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.25$	46
Σχήμα 31: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=0.75$	47
Σχήμα 32: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από το μοντέλο Sanz(2003) με ή χωρίς την συνθήκη DTL για τη θέση $z/h=1.25$	47
Σχήμα 33: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=0.25$	48
Σχήμα 34: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=0.75$	49
Σχήμα 35: Οριζόντια ταχύτητα u_x όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=1.25$	49
Σχήμα 36: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=0.25$	50
Σχήμα 37: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=0.75$	50
Σχήμα 38: Κινητική ενέργεια k όπως προέκυψε από τα μοντέλα Sanz(2003) και Katul(2004) με τη μέθοδο RNG για τη θέση $z/h=1.25$	51
Σχήμα 39: Σχηματική αναπαράσταση(αριστερά) και το πειραματικό μοντέλο σήραγγας της αστικής περιοχής(δεξιά)(CODASC, 2008)	52
Σχήμα 40: Αφρός 10 ppi(Gromke, 2008)	53
Σχήμα 41: Αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα w^* μετρούμενη με ανεμόμετρο Λέιζερ Doppler (Laser Doppler Anemometer)(Gromke, 2008).....	54
Σχήμα 42: Αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα w^* ανάμεσα στα δύο κτήρια για το μοντέλο Katul(2004) με εφαρμογή της συνθήκης DTL($a=0.95$).	54

Σχήμα 43: Αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα w * ανάμεσα στα δύο κτήρια για το μοντέλο Sanz(2003).....	55
Σχήμα 44: Αδιαστατοποιημένη κάθετη ταχύτητα w * ανάμεσα στα δύο κτήρια για τα μοντέλα Sanz(2003)-RNG και Katul(2004)-RNG.....	55
Σχήμα 45: Κάτοψη περιοχής ενδιαφέροντος Ε.Μ.Π(Nian, 2014)	57
Σχήμα 46: Κατασκευή γεωμετρίας περιοχής με ύψος περιοχής A=9.5m. Τα στοιχεία εξάγονται καταλλήλως για δημιουργία πλέγματος.	58
Σχήμα 47: Κατεύθυνση ανέμου βορειοανατολική(northeast) προς νοτιοδυτική(southwest)...	60
Σχήμα 48: Ισοϋψείς καμπύλες ολικής ταχύτητας περιοχής Ε.Μ.Π. χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (i).	60
Σχήμα 49: Ισοϋψείς καμπύλες ολικής ταχύτητας χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (i)(δεξιά) κοντά στην οροφή του κτηρίου Α.Ν.Υ.Μ.	60
Σχήμα 50: Ισοϋψείς καμπύλες κ χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (i)(δεξιά) κοντά στην οροφή του κτηρίου Α.Ν.Υ.Μ.	61
Σχήμα 51: Ισοϋψείς καμπύλες ολικής ταχύτητας περιοχής Ε.Μ.Π. χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (ii).	61
Σχήμα 52: Ισοϋψείς καμπύλες ολικής ταχύτητας χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (ii)(δεξιά) κοντά στην οροφή του κτηρίου Α.Ν.Υ.Μ.	62
Σχήμα 53: Ισοϋψείς καμπύλες κ χωρίς(αριστερά) και με βλάστηση περίπτωσης (ii)(δεξιά) κοντά στην οροφή του κτηρίου Α.Ν.Υ.Μ.	62

10 Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Συντελεστές μοντέλου τύρβης k-ε	18
Πίνακας 2: Συντελεστές μοντέλου τύρβης RNG	20
Πίνακας 3: Συντελεστές όρων βλάστησης(Kenjereš and Kuile, 2013)	30
Πίνακας 4: Δεδομένα προφίλ εισόδου ταχύτητας(Nian, 2014, τροποποιημένο).....	58

11 Appendix I

11.1 Εξισώσεις

Οι εξισώσεις που εκφράζουν το ρευστομηχανικό πεδίο ροής είναι οι εξισώσεις Reynolds για τυρβώδη πεδία ροής οι οποίες προκύπτουν από την χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων Navier-Stokes. Θεωρώντας ένα στοιχείο ρευστού που κινείται, οι εξισώσεις Reynolds, με πολύ απλά λόγια, εκφράζουν αφ' ενός τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του στοιχείου αυτού και αφ' ετέρου όλες τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, είτε λόγω πίεσης, είτε λόγω της συνεκτικότητας του ρευστού (μπορεί να προστεθούν, ανάλογα με την περίπτωση, και δυνάμεις άνωσης, Coriolis κ.τ.λ.). Όταν η ροή που εξετάζεται είναι τυρβώδης (υπάρχουν υψηλόσυχνες χρονικές διαταραχές των μεγεθών γύρω από τη μέση τιμή τους), κατά την χρονική ολοκλήρωση προκύπτουν οι λεγόμενες τάσεις Reynolds οι οποίες είναι στατιστικές συσχετίσεις των διαταραχών των ρευστομηχανικών μεγεθών.

Από το πλήθος των προσεγγίσεων που έχουν αναπτυχθεί στη βιβλιογραφία για την αντιμετώπιση των τάσεων Reynolds, ίσως η πιο διαδεδομένη είναι η υπόθεση Boussinesq, η οποία συνδέει τις τάσεις Reynolds με τον τοπικό ρυθμό παραμόρφωσης του μέσου πεδίου μέσω του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας (μ_t):

(11.1.1)

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k$$

όπου $i, j = 1, 2, 3$ και υποδηλώνουν τις τρεις καρτεσιανές κατευθύνσεις ($x_i = x, y, z$) και τις αντίστοιχες συνιστώσες των ταχυτήτων ($u_i = u, v, w$). Το k είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια στην οποία θα γίνει αναφορά και στη συνέχεια. Η τυρβώδης συνεκτικότητα (μ_t) έρχεται να προστεθεί στην συνεκτικότητα του ρευστού (μ_1), η οποία είναι φυσική ιδιότητά του, και εκφράζει την αυξημένη διάχυση που παρατηρείται στα τυρβώδη πεδία ροής. Για τον υπολογισμό όμως της τυρβώδους συνεκτικότητας απαιτείται επίλυση επί πλέον διαφορικών εξισώσεων μιας και δεν είναι ιδιότητα του ρευστού αλλά εξαρτάται από το πεδίο ροής και μεταβάλλεται τοπικά. Οι εξισώσεις που επιλύονται είναι οι διαφορικές εξισώσεις μεταφοράς για την τυρβώδη κινητική ενέργεια (k) (τυρβώδης κινητική ενέργεια μπορεί να θεωρηθεί η συνολική κινητική ενέργεια που αντιπροσωπεύεται από τις υψηλόσυχνες διαταραχές των ταχυτήτων και τον ρυθμό απορρόφησής της (ε)).

Οι εξισώσεις που επιλύονται εκφράζουν την διατήρηση της μάζας, ορμής, τυρβώδους κινητικής ενέργειας (k) και του ρυθμού καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας (ε). Στην παρούσα ανάπτυξη οι εξισώσεις αυτές θα εκφραστούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες για χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο ροής. Οι εξισώσεις έχουν όλες την ίδια μορφή εμφανίζοντας όρους μεταφοράς (συναγωγής) και διάχυσης καθώς και έναν όρο πηγής (S_ϕ) ο οποίος είναι ο

μόνος όρος στην γενική μορφή των εξισώσεων που αλλάζει ανάλογα με την μεταβλητή (Φ). Η γενική μορφή των εξισώσεων φαίνεται παρακάτω:

(11.1.2)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\Phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\Phi) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = S_\Phi$$

όπου (Φ) μπορεί να πάρει τις τιμές 1 -εξ. συνέχειας, u -αξονική συνιστώσα της ταχύτητας, v - ακτινική, k -τυρβώδης κινητική ενέργεια και ε -ρυθμός καταστροφής της (δύο μεταβλητές για το μοντέλο τύρβης). Ο όρος πηγής παίρνει, ανάλογα με την μεταβλητή, τις τιμές που φαίνονται παρακάτω (Πίνακας 11.1-1).

Πίνακας 11.1-1: Τιμές του όρου πηγής(Μπούρης, 2013)

$-\Phi -$	$-S_\Phi -$
1	0
u	$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x}\right)$
v	$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right)$
w	$-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right)$
k	$G - \rho\varepsilon$
ε	$(C_1\varepsilon G - C_2\rho\varepsilon^2)/k$
	$G = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\}$

Επίσης ορίζονται και οι υπόλοιπες μεταβλητές με βάση το μοντέλο τύρβης k - ε :

(11.1.3)

$$\Gamma_\Phi = \frac{\mu}{\sigma_\Phi}, \mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \mu = \mu_t + \mu_1$$

όπου (μ) είναι η ενεργός συνεκτικότητα που ορίζεται ως το άθροισμα της (μ_1) που είναι η δυναμική συνεκτικότητα του ρευστού και της (μ_t) που είναι η τυρβώδης συνεκτικότητα όπως ορίζεται από την υπόθεση του Boussinesq (11.1.1). Οι σταθερές για το μοντέλο τύρβης k-ε είναι:

$$C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, C_\mu = 0.09 \quad (11.1.4)$$

$$\sigma_{u,v} = 1.0, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν πιο πάνω παίρνουμε τις χρονικές μέσες τιμές των μεταβλητών και με αυτές το πεδίο ροής θεωρείται γνωστό. Παρατηρώντας τις εξισώσεις των διαφόρων μεταβλητών, βλέπουμε ότι είναι στενά δεμένες μεταξύ τους (με την εμφάνιση των αγνώστων μεταβλητών σε όλες σχεδόν τις εξισώσεις) προσδίνοντας στο πρόβλημα έναν ισχυρά μη-γραμμικό χαρακτήρα. Φυσικά εκτός από τις εξισώσεις αυτές, για την επίλυση ενός προβλήματος, είναι απαραίτητες και οι αρχικές και οριακές συνθήκες για τις οποίες θα γίνει λόγος σε επόμενη παράγραφο. Η μεγαλύτερη δυσκολία κατά την επίλυση οφείλεται σ' αυτήν ακριβώς την εξάρτηση των εξισώσεων μεταξύ τους και μάλιστα κυρίως όσον αφορά στις εξισώσεις ορμής, τις συνιστώσες της ταχύτητας. Στις εξισώσεις αυτές περιέχεται η άγνωστη κλίση της πίεσης που έχει συγχωνευτεί στους όρους πηγής ($S\Phi$), ενώ οι αντίστοιχες μεταβλητές συνδέονται και μέσω της εξίσωσης της συνέχειας στην οποία δεν εμφανίζεται καν η πίεση. Μία σωστή επίλυση του συστήματος των εξισώσεων θα πρέπει να λαμβάνει υπ' όψη της την αλληλεξάρτηση των μεταβλητών έτσι ώστε κατά την διάρκεια της επίλυσης να γίνονται διαδοχικές διορθώσεις στις μεταβλητές και να οδηγείται το σύστημα στην σύγκλιση (λύση).

11.2 Περιγραφή της μεθόδου επίλυσης

Η μεθοδολογία που θα παρουσιαστεί βασίζεται στην μέθοδο SIMPLE και τον αλγόριθμο TDMA για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. Πιο αναλυτικά η μέθοδος είναι:

(α) Γίνεται χρήση ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών όπου οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι οι ταχύτητες και η πίεση καθώς και οι μεταβλητές (k), (ε) του μοντέλου τύρβης και άλλες μεταβλητές κ.τ.λ.

(β) Η πίεση προκύπτει από μία εξίσωση η οποία είναι συνδυασμός της εξίσωσης της συνέχειας και των εξισώσεων διατήρησης της ορμής (δίνοντας έτσι μία εξίσωση γνωστή στη βιβλιογραφία ως εξίσωση Poisson για την πίεση).

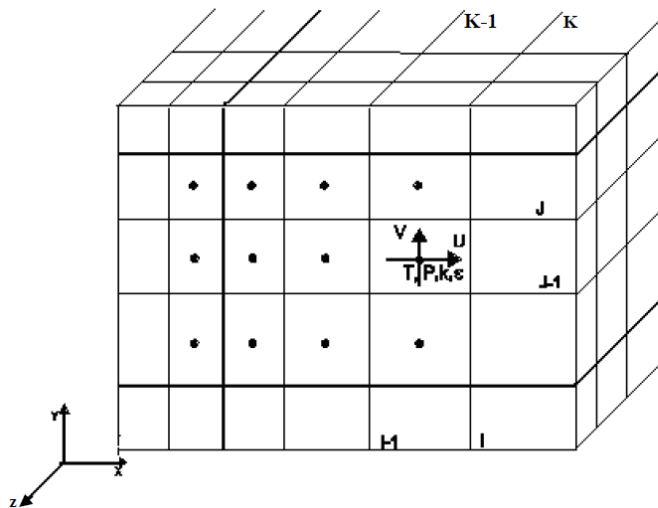
(γ) Το πεδίο της πίεσης αρχικά λαμβάνεται αυθαίρετο και επιλύονται οι εξισώσεις ορμής με το δεδομένο πεδίο πίεσης. Όμως, οι ταχύτητες που υπολογίζονται από τις εξισώσεις ορμής δεν ικανοποιούν την εξίσωση διατήρησης της μάζας (ή την εξίσωση Poisson για την πίεση) και είναι απαραίτητη κάποια διόρθωσή τους. Η διόρθωση του πεδίου των ταχυτήτων γίνεται μέσω μιας αντίστοιχης διόρθωσης στο πεδίο της πίεσης έτσι ώστε τελικά να ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας. Μετά από τις διορθώσεις αυτές, η διαδικασία επαναλαμβάνεται (θα περιγραφεί λεπτομερώς σε επόμενη παράγραφο) μέχρι οι λύσεις πεδίου ταχυτήτων και πίεσης να ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις (ορμής αλλά και συνέχειας).

(δ) Η μεθοδολογία εφαρμόζεται σε ομόθετο (collocated) πλέγμα όπου όλες οι μεταβλητές αποθηκεύονται στο κέντρο των πλεγματικών κυψελών. Εδώ συνίσταται και η διαφορά από τον αλγόριθμο SIMPLE που χρησιμοποιεί μετατοπισμένο (staggered) πλέγμα. Η σημασία του γεγονότος αυτού θα γίνει εμφανής στην επόμενη παράγραφο.

(ε) Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων γίνεται με την επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος (TDMA).

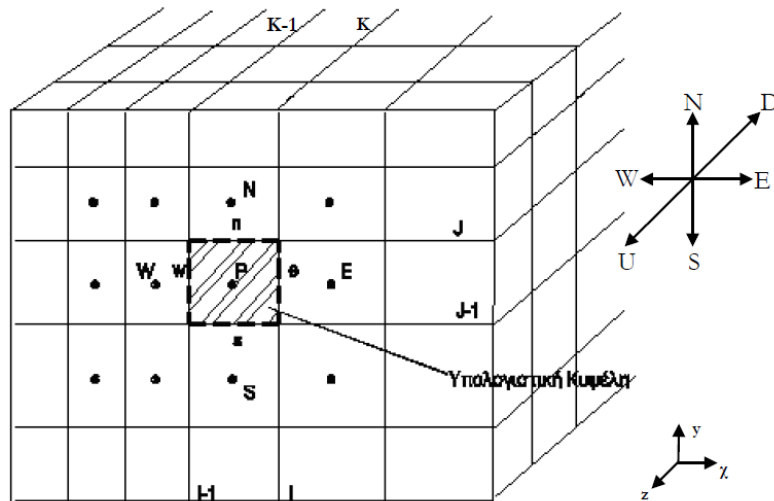
11.3 Ολοκλήρωση των εξισώσεων

Ο τρόπος αποθήκευσης των μεταβλητών φαίνεται στο Σχήμα 11.3-1. Με τον τρόπο αποθήκευσης που προτείνεται τώρα όπου όλα τα μεγέθη αποθηκεύονται στο ίδιο σημείο (ομόθετο πλέγμα), το κέντρο των πλεγματικών κυψελών.



Σχήμα 11.3-1: Θέσεις αποθήκευσης μεταβλητών (Μπούρης, 2013)

Ο προτεινόμενος, ομόθετος, τρόπος αποθήκευσης (collocated grid) θεωρεί ότι όλες οι μεταβλητές αποθηκεύονται στα κέντρα των πλεγματικών κυψελών κατά τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 11.3-1 δηλαδή πίσω και κάτω από τον κόμβο των πλεγματικών γραμμών I,J,K. Τα διάφορα πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα των εναλλακτικών τρόπων αποθήκευσης για το ομόθετο πλέγμα θα αναφέρονται στις αντίστοιχες παραγράφους.



Σχήμα 11.3-2: Όγκος αναφοράς (υπολογιστική κυψέλη)(Μπούρης, 2013)

Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για κάθε μεταβλητή (Φ) προκύπτουν ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (11.1.2) πάνω στον όγκο αναφοράς που ορίζεται από τις πλεγματικές κυψέλες (στην ουσία πρόκειται για εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss ή του Green στο χώρο) και εκφράζοντας το αποτέλεσμα ως συνάρτηση των τιμών της μεταβλητής στα γειτονικά πλεγματικά σημεία. Ο όγκος αναφοράς που χρησιμοποιείται είναι ο ίδιος για όλες τις μεταβλητές και φαίνεται, μαζί με τους απαιτούμενους συμβολισμούς, στο Σχήμα 11.3-2. Οι όροι μεταφοράς και διάχυσης μετατρέπονται σε επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στις έξι επιφάνειες n,s,e,w,u,d που φαίνονται στο Σχήμα 11.3-2 ενώ ο όρος πηγής γραμμικοποιείται έτσι ώστε οι εξισώσεις (11.1.2) να γίνουν:

$$(11.3.1)$$

$$\begin{aligned} & \left(\rho u \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e A_e - \left(\rho u \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w A_w + \left(\rho v \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n A_n - \left(\rho v \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s A_s \\ & + \left(\rho w \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_D A_D - \left(\rho w \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_U A_U = (S_P \Phi_P + S_U) Vol \end{aligned}$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι δείκτες των παρενθέσεων δηλώνουν μέση τιμή της εντός παρενθέσεως ποσότητας πάνω στην αντίστοιχη επιφάνεια που φαίνεται στο Σχήμα 11.3-2 και με (Vol) Συμβολίζεται ο όγκος της υπολογιστικής κυψέλης (όγκος αναφοράς $\delta_x * \delta_y * \delta_z$). οι όροι πηγής έχουν γραμμικοποιηθεί στην (11.3.1) παρακάτω (Πίνακας 11.3-1).

Πίνακας 11.3-1: Γραμμικοποιημένοι όροι πηγής(Μπούρης, 2013).

$-\Phi -$	$-S_p\Phi -$	$-S_U\Phi -$
1	0	$-\frac{\partial\rho}{\partial t}$
u	$-\frac{\rho}{\delta t}$	$\frac{(\rho u)^{n-1}}{\delta t} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)$
v	$-\frac{\rho}{\delta t}$	$\frac{(\rho v)^{n-1}}{\delta t} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)$
w	$-\frac{\rho}{\delta t}$	$\frac{(\rho w)^{n-1}}{\delta t} - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$
k	$-\frac{\rho}{\delta t} + C_\mu\frac{k\rho^2}{\mu_t}$	$\frac{(\rho k)^{n-1}}{\delta t} + G$
ε	$-\frac{\rho}{\delta t} + C_2\frac{\varepsilon\rho}{k}$	$\frac{(\rho\varepsilon)^{n-1}}{\delta t} + C_1C_\mu\frac{\rho k}{\mu_t}G$

Οι χρονικοί όροι έχουν χωριστεί στα S_U και S_p και όταν επιλύεται χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο όλες οι μεταβλητές είναι εκφρασμένες στην προς επίλυση χρονική στιγμή εκτός από τον όρο που εμφανίζεται στο S_U (εκφρασμένος στη προηγούμενη χρονική στιγμή, n-1) για τον οποίο απαιτείται αποθήκευση των μεταβλητών στη προηγούμενη χρονική στιγμή. Αυτή η έκφραση είναι πεπλεγμένη πρώτης τάξης ακρίβειας στο χρόνο και οδηγεί σε σταθερότητα κατά την επίλυση για αρκετά μεγάλα χρονικά βήματα. Για ρητή έκφραση με έκφραση όλων των μεταβλητών εκτός του όρου που εμφανίζεται στο S_p στη προηγούμενη χρονική στιγμή (n-1) θα εμφανιζόταν αλγεβρική μορφή της εξίσωσης με γραμμική λύση για το επόμενο χρονικό βήμα. Οι ρητές εκφράσεις όμως έχουν σχεδόν πάντα περιορισμούς σχετικά με το μέγεθος του χρονικού βήματος ανάλογα με την τοπική ταχύτητα και μέγεθος πλέγματος (αριθμός Courant). Για να αποφευχθεί ασταθής συμπεριφορά στη σύγκλιση της μεθόδου μόνο όροι οι οποίοι είναι πάντα αρνητικοί πρέπει να περιληφθούν στον παράγοντα (S_p) έτσι ώστε να γίνεται πιο ισχυρή η διαγώνια μορφή του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος που επιλύεται σε κάθε επανάληψη (η τριδιαγώνια μορφή της εξίσωσης (11.3.1) εξηγείται στην παράγραφο 11.8). Οι υπόλοιπες σταθερές έχουν ήδη οριστεί στην παράγραφο 11.1. Τέλος γίνεται χρήση και ενός ακόμη όρου στους όρους πηγής ο οποίος δεν φαίνεται πιο πάνω επειδή δεν προκύπτει από τις εξισώσεις. Ο όρος αυτός έχει σταθεροποιητικό ρόλο (για τη σύγκλιση), δεν επιδρά στην τελική λύση και προκύπτει ως το γινόμενο του υπόλοιπου μάζας μέσα από μία υπολογιστική κυψέλη με τη διαφορά της καινούργιας και της παλιάς τιμής της υπολογιζόμενης μεταβλητής

$$(11.3.2)$$

$$S_+ = |\dot{m}_{net}|(\Phi_P^{prev} - \Phi_P)$$

Είναι προφανές ότι και οι δύο πολλαπλασιαζόμενες ποσότητες θα είναι μηδενικές όταν η μέθοδος θα έχει συγκλίνει.

Για την αντιπροσώπευση των όρων μεταφοράς και διάχυσης (αρ. πλευρά της εξ. (11.3.1)) γίνεται χρήση κάποιου σχήματος ανάντι παραγωγίσης, π.χ. του υβριδικού ή του BSOU. Έστω η μεταφορά ποσότητας μέσα από μία από τις τέσσερις επιφάνειες π.χ. της (A_e) η οποία βρίσκεται μεταξύ των κόμβων E και P του πλέγματος (Σχήμα 11.3-2). Η συνεισφορά στο επιφανειακό ολοκλήρωμα στη πλευρά e είναι :

$$\underbrace{(\rho u)_e \Phi_e A_e}_{\text{συναγωγή}} - \underbrace{\Gamma_{\Phi,e} \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_{PE}} A_e}_{\text{διάχυση}} \quad (11.3.3)$$

Αν γίνεται χρήση του υβριδικού σχήματος που είναι συνδυασμός κεντρικής και ανάντι παραγωγίσης και είναι πρώτης τάξης ακρίβειας (O(δx)) θα ισχύει :

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \Phi_P & Pe_e &> 2 \\ \Phi_e &= f\Phi_E + (1-f)\Phi_P & -2 &< Pe_e < 2 \\ \Phi_e &= \Phi_E & Pe_e &< -2 \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

όπου (Pe) είναι ο αριθμός Peclet στην ανατολική πλευρά (επιφάνεια) της υπολογιστικής κυψέλης και (f) είναι συντελεστής που ορίζεται από τη γεωμετρία του πλέγματος για τη γραμμική παρεμβολή:

$$Pe_e = \left(\frac{\rho u \Delta x}{\Gamma_\Phi} \right)_e, f = \frac{\delta x_{Pe}}{\delta x_{PE}} \quad (11.3.5)$$

Συνήθως, όταν |Pe| < 2 ο όρος διάχυσης είναι αμελητέος και λαμβάνεται μόνο η συναγωγή από τις σχέσεις του υβριδικού σχήματος (11.3.4). Με παρόμοιες εκφράσεις αντιμετωπίζονται και οι υπόλοιπες τρεις πλευρές. Η χρήση όμως του υβριδικού σχήματος είναι δυνατόν να εμφανίσει προβλήματα αριθμητικής διάχυσης. Αριθμητική διάχυση εμφανίζεται λόγω των προσεγγιστικών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές, οπότε τυχόν σφάλμα σε κάποιο σημείο του πεδίου μεταφέρεται ανεξάρτητα από το πεδίο ταχυτήτων (αριθμητικά) στους γειτονικούς κόμβους. Για την καλύτερη δε αντιμετώπιση του φαινομένου έχουν αναπτυχθεί στο εργαστήριο Αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π. και πρωτότυπα σχήματα ανώτερης τάξης ακρίβειας όπως το BSOU. Το σχήμα BSOU είναι ένας συνδυασμός της ανάντι παραγωγίσης πρώτης (First Order Upwind) και δεύτερης τάξης (Second Order Upwind) και γενικά εισάγει μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με το υβριδικό ενώ περιορίζει τα προβλήματα αριθμητικής διάχυσης. Γενικά το BSOU κάνει χρήση κάποιων μη γραμμικών συντελεστών ανάμιξης μεταξύ των δύο ανάντι παραγωγίσεων (FOU και SOU). Ορίζονται τα μεγέθη:

$$(11.3.6)$$

$$\widehat{\Phi}_P = (\Phi_P - \Phi_W)/(\Phi_E - \Phi_W), \gamma_e = \frac{(\Phi_E - \Phi_P)/(\Phi_P - \Phi_W)}{\Delta\xi_{Pe}/\Delta\xi_{WP}}$$

και για την επιφάνεια (e) του όγκου ολοκλήρωσης με $u_e > 0$ είναι :

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P & \widehat{\Phi}_P < 0 \\ \Phi_W + (1 + \Delta\xi_{Pe}/\Delta\xi_{WP})(\Phi_P - \Phi_W) & 0 < \widehat{\Phi}_P < \Delta\xi_{WP}/\Delta\xi_{We} \\ \Phi_W + (1 + \gamma_e \Delta\xi_{Pe}/\Delta\xi_{WP})(\Phi_P - \Phi_W) & \Delta\xi_{WP}/\Delta\xi_{We} < \widehat{\Phi}_P < 1 \\ \Phi_P & \widehat{\Phi}_P > 1 \end{cases} \quad (11.3.7)$$

Το σχήμα αυτό κάνει χρήση και των κόμβων που εκτείνονται πέρα από τους αμέσως γειτονικούς όγκους ολοκλήρωσης (για την περίπτωση όπου $u_e < 0$, χρειάζεται και το Φ_{WW} κ.τ.λ.) και επομένως περιπλέκει κάπως την διακριτοποίηση, όμως έχει το πλεονέκτημα της μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας ενώ σε σχέση με άλλα σχήματα ανώτερης τάξης (π.χ. QUICK) είναι επί πλέον φραγμένο.

Όταν όλοι οι όροι αντιμετωπιστούν όπως περιγράφηκε πιο πάνω (είτε με υβριδικό σχήμα ανάντι διαφόρισης είτε με το BSOU) η διακριτοποιημένη μορφή της διαφορικής εξίσωσης γίνεται:

$$\begin{aligned} (\alpha_P^\Phi - S_P^\Phi)\Phi_P &= \alpha_N^\Phi\Phi_N + \alpha_S^\Phi\Phi_S + \alpha_E^\Phi\Phi_E + \alpha_W^\Phi\Phi_W + \alpha_D^\Phi\Phi_D + \alpha_U^\Phi\Phi_U + S_U^\Phi \\ \alpha_P^\Phi &= \alpha_N^\Phi + \alpha_S^\Phi + \alpha_E^\Phi + \alpha_W^\Phi + \alpha_D^\Phi + \alpha_U^\Phi \end{aligned} \quad (11.3.8)$$

συνδέοντας έτσι την μεταβλητή (Φ) σε κάθε σημείο με τις τιμές της στα έξι γειτονικά σημεία N, S, E, W, U, D.

Οι όροι πηγής έχουν ήδη οριστεί (Πίνακας 11.3-1) ενώ οι συντελεστές α_j (j=N,S,E,W,U,D) προκύπτουν από την διακριτοποίηση του αριστερού μέρους των (11.3.1) και εξαρτώνται από το σχήμα διαφόρισης. Ενδεικτικά θα παρουσιαστούν μόνο ορισμένοι συντελεστές με το BSOU όπου όλοι οι όροι που σχετίζονται με τους πιο απομακρυσμένους κόμβους (WW, EE, NN, SS, UU, DD) προστίθενται τελικά στους όρους πηγής S_U . Έτσι θα είναι για τους συντελεστές E, W και για την συμβολή του BSOU στους όρους πηγής από την επιφάνεια (e):

$$\begin{aligned} a_W &= \max\langle 0, (\rho u \delta y)_W \rangle + \frac{\Gamma_{\Phi, W}}{\delta x_{WP}} \delta y_W, a_E = \max\langle 0, -(\rho u \delta y)_e \rangle + \frac{\Gamma_{\Phi, e}}{\delta x_{EP}} \delta y_e \\ S_{U, e}^{BSOU} &= -\max\langle 0, -(\rho u \delta y)_e \frac{\delta x_{eE}}{\delta x_{E-EE}} \gamma_e \rangle (\Phi_{EE} - \Phi_E) + \max\langle 0, -(\rho u \delta y)_W \frac{\delta x_{WP}}{\delta x_{PE}} \gamma_W \rangle (\Phi_E - \Phi_P) \end{aligned} \quad (11.3.9)$$

Παρομοίως προκύπτουν και οι συντελεστές για N, S, U, D και για τις συμβολές στους όρους πηγής από τις επιφάνειες n, s, u, d.

Αν ληφθεί η εξίσωση κατά μήκος μίας l γραμμής τότε θεωρώντας γνωστά τα μεγέθη στην προηγούμενη και επόμενη γραμμή η (11.3.9) παίρνει τη μορφή τριδιαγώνιου συστήματος που επιλύεται με αλγόριθμο TDMA.

11.4 Εξίσωση πίεσης

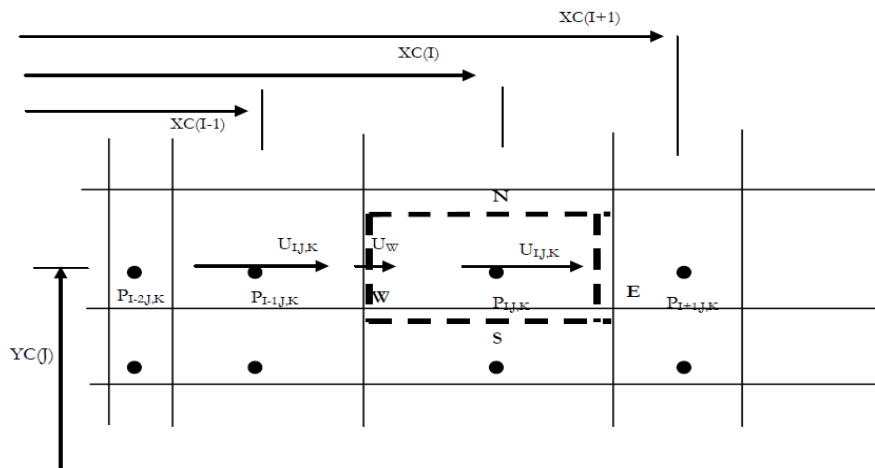
Ο υπολογισμός της πίεσης είναι αυτός που συγκεντρώνει το μεγαλύτερο μέρος της ιδιαιτερότητας κατά τη χρήση ομόθετου πλέγματος. Επειδή οι ταχύτητες και οι πιέσεις αποθηκεύονται στο ίδιο σημείο του πλέγματος, η πρώτη παράγωγος της πίεσης που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος των εξισώσεων ορμής για τις (u) , (v) και (w) ταχύτητες (Πίνακας 11.3-1) θα πρέπει να εκφραστεί, π.χ. για ομοιόμορφο πλέγμα, ως:

$$(11.4.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{(I,J,K)} = \frac{P(I+1,J,K) - P(I-1,J,K)}{XC(I+1) - XC(I-1)}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}\bigg|_{(I,J,K)} = \frac{P(I,J+1,K) - P(I,J-1,K)}{YC(J+1) - YC(J-1)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}\bigg|_{(I,J,K)} = \frac{P(I,J,K+1) - P(I,J,K-1)}{ZC(K+1) - ZC(K-1)}$$

Το Σχήμα 11.4-1 δείχνει την υπολογιστική κυψέλη καθώς και τις βασικές μεταβλητές που θα εμφανίζονται στις εξισώσεις αυτής της παραγράφου. Σημειώνεται ότι τα σημεία του πλέγματος που συμβολίζονταν με E, W στο Σχήμα 11.3-2 συμβολίζονται στο Σχήμα 11.4-1 με P_{IJK} και οι ανάλογοι δείκτες I, J, K υποδηλώνουν τις συντεταγμένες τους ως προς το πλέγμα.



Σχήμα 11.4-1: Ορισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών του πλέγματος και θέσεις μεταβλητών στη βασική υπολογιστική κυψέλη (Μπούρης, 2013)

Η μορφή της (11.4.1) για τις πρώτες παραγώγους μπορεί να οδηγήσει σε ανακριβείς υπολογισμούς της κλίσης της πίεσης π.χ. κατά τη x κατεύθυνση από το $(I-1, J, K)$ στο $(I+1, J, K)$

επειδή χάνονται οι πληροφορίες από το (I-1,J,K) στο (I,J,K) και από το (I,J,K) στο (I+1,J,K). Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι ότι ο προκαταρκτικός υπολογισμός του πεδίου πίεσης έχει σημαντικές διακυμάνσεις και ασυνέχειες λόγω της αποσύζευξης των πιέσεων στα γειτονικά σημεία. Αυτό επηρεάζει αρνητικά και το πεδίο ταχυτήτων. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί κατά τον σχηματισμό της εξίσωσης για την επίλυση της πίεσης. Έτσι η μορφή (11.4.1) επιτρέπεται στις εξισώσεις ορμής και το πρόβλημα που μόλις αναφέρθηκε αντιμετωπίζεται μόνο μέσω της εξίσωσης της πίεσης όπως αυτή θα προκύψει παρακάτω με εφαρμογή της εξίσωσης της συνέχειας.

Επειδή οι εξισώσεις ορμής επιλύονται πρώτες και εξαρτώνται από το πεδίο της πίεσης, αυτό το πεδίο θα πρέπει να θεωρηθεί αρχικά γνωστό. Η αρχική υπόθεση P^* για το πεδίο της πίεσης δεν μπορεί φυσικά να είναι σωστή, οπότε οι ταχύτητες που προκύπτουν ικανοποιούν μεν τις εξισώσεις ορμής αλλά συνήθως δεν ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας, οδηγώντας έτσι σε κάποια υπόλοιπα μάζας. Με σκοπό τον μηδενισμό των υπολοίπων αυτών και τον υπολογισμό του νέου πεδίου πίεσης, ακολουθεί στο τέλος κάθε υπολογισμού ταχυτήτων (επίλυση εξισώσεων ορμής) μία διόρθωση για το αρχικό πεδίο πίεσης (επίλυση εξίσωσης συνέχειας). Φυσικά η διόρθωση αυτή θα επηρεάσει και το πεδίο ταχυτήτων. Συμβολίζοντας τις αρχικές τιμές με εκθέτη (*) και τις διορθώσεις με (') οι διορθωμένες τιμές πίεσης και ταχυτήτων προκύπτουν ως:

(11.4.2)

$$\begin{aligned}
 P(I, J, K) &= P^*(I, J, K) + P'(I, J, K) \\
 u(I, J, K) &= u^*(I, J, K) - DU(I, J, K) \frac{\partial P'}{\partial x} \Big|_{(I, J, K)}, \quad v(I, J, K) = v^*(I, J, K) - DV(I, J, K) \frac{\partial P'}{\partial y} \Big|_{(I, J, K)} \\
 w(I, J, K) &= w^*(I, J, K) - DW(I, J, K) \frac{\partial P'}{\partial z} \Big|_{(I, J, K)} \\
 DU(I, J, K) &= \frac{Vol}{\alpha_p^u(I, J, K) - S_p^u(I, J, K)}, \quad DV(I, J, K) = \frac{Vol}{\alpha_p^v(I, J, K) - S_p^v(I, J, K)} \\
 DW(I, J, K) &= \frac{Vol}{\alpha_p^w(I, J, K) - S_p^w(I, J, K)}
 \end{aligned}$$

όπου $\alpha_p^u(I, J, K)$, $\alpha_p^v(I, J, K)$, $\alpha_p^w(I, J, K)$ και (Vol) έχουν ήδη οριστεί στη παράγραφο 11.3. Με τις σχέσεις της (11.4.2) είναι ευνόητο ότι για την διόρθωση έχει υποτεθεί ότι οι ταχύτητες εξαρτώνται μόνο από τις πιέσεις και έχουν παραληφθεί όλοι οι υπόλοιποι όροι από τις εξισώσεις ορμής. Αν αντικατασταθούν οι σχέσεις (11.4.2) στην εξίσωση της συνέχεις ολοκληρωμένη πάνω στα όρια μια υπολογιστικής κυψέλης:

(11.4.3)

$$-(\rho u \delta z)_e + (\rho u \delta z)_w + (\rho v \delta z)_s - (\rho v \delta z)_n + (\rho w \delta y)_d - (\rho w \delta y)_u$$

θα προκύψει η ακόλουθη εξίσωση υπολογισμού της διόρθωσης της πίεσης:

(11.4.4)

$$\begin{aligned}
 & -\rho_e u_e^* \delta z + \rho_w u_w^* \delta z + \rho_s v_s^* \delta z - \rho_n v_n^* \delta z + \rho_D w_D^* \delta x \delta y - \rho_u v_u^* \delta x \delta y + \\
 & \rho_e D U_e \delta y \delta z \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)_e - \rho_w D U_w \delta y \delta z \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)_w - \rho_s D V_s \delta x \delta z \left(\frac{\partial P'}{\partial y} \right)_s + \rho_n D V_n \delta x \delta z \left(\frac{\partial P'}{\partial y} \right)_n \\
 & - \rho_D D W_D \delta y \delta x \left(\frac{\partial P'}{\partial z} \right)_d + \rho_U D W_U \delta y \delta x \left(\frac{\partial P'}{\partial z} \right)_u = 0
 \end{aligned}$$

Η πρώτη γραμμή της εξίσωσης αυτής αποτελεί και το υπόλοιπο μάζας που προκύπτει από τον αρχικό υπολογισμό των τιμών των ταχυτήτων (αυτό το υπόλοιπο θα μηδενιστεί όταν έχουν βρεθεί τα σωστά πεδία). Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι στην (11.4.4) οι πρώτες παράγωγοι της διόρθωσης της πίεσης υπολογίζονται πάνω στο αντίστοιχο όριο n,s,e,w,d και u και επομένως αποφεύγεται η ανεπιθύμητη και ανακριβής μορφή της (11.4.1). Για το ε.π.χ.:

(11.4.5)

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)_e = \frac{P'(I+1, J, K) - P'(I, J, K)}{XC(I+1) - XC(I)}$$

Για τα υπόλοιπα μεγέθη όπως η πυκνότητα και οι συντελεστές DU και DV γίνονται απλές γραμμικές παρεμβολές με τη βοήθεια κατάλληλων συντελεστών βαρύτητας σε περίπτωση ανομοιόμορφου πλέγματος.

Οι Rhie and Chow (1983) αναφέρουν ότι τα προβλήματα που εισάγονται από την (11.4.1) στα πεδία πίεσεως και ταχυτήτων μπορούν να διορθωθούν εδώ με κατάλληλη προσέγγιση της παρεμβολής των u^* , v^* , w^* στα όρια των κυψελών. Έτσι πρότειναν κατά τον υπολογισμό των ταχυτήτων αυτών να μην γίνει απλή γραμμική παρεμβολή, αλλά συγχρόνως να αφαιρεθούν οι υπολογιζόμενες διαφορές των πιέσεων των εξισώσεων ορμής και να χρησιμοποιηθεί η διαφορά πίεσης πάνω στην εν λόγω πλευρά της κυψέλης. Παρακάτω φαίνεται η εξίσωση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ταχύτητας u_w^* στη δυτική πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης (με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται και οι ταχύτητες στις άλλες πλευρές της κυψέλης):

(11.4.6)

$$\begin{aligned}
 u_w^* = & [1 - WFW(I)] \left\{ u^*(I-1, J, K) - DU(I-1, J, K) \frac{\partial P^*}{\partial x} \Big|_{(I-1, J, K)} \right\} + \\
 & WFW(I) \left\{ u^*(I, J, K) - DU(I, J, K) \frac{\partial P^*}{\partial x} \Big|_{(I, J, K)} \right\} + \{ [1 - WFW(I)] DU(I-1, J, K) + WFW(I) DU(I, J, K) \} \\
 & \frac{P^*(I-1, J, K) - P^*(I, J, K)}{XC(I) - XC(I-1)}
 \end{aligned}$$

όπου WFW είναι συντελεστής βαρύτητας για την γραμμική παρεμβολή υπολογισμένος με βάση την ανομοιομορφία του πλέγματος (ανάλογα υπάρχουν και WFE, WFS, WFN) ενώ τα XC ορίζονται στο Σχήμα 11.4-1. Στην (11.4.6) οι όροι που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες στην πρώτη γραμμή εκφράζουν τις ταχύτητες εκατέρωθεν της επιφάνειας (w) αλλά χωρίς την επίδραση της κλίσης πίεσης (ο όρος που αφαιρείται έχει την έκφραση της (11.4.1)). Στη συνέχεια στη τελευταία γραμμή της (11.4.6) προστίθεται η επίδραση της πίεσης στην τιμή της ελλιπώς (ως προς επίδραση πίεσης) παρεμβληθείσας τιμής της ταχύτητας στην εν λόγω επιφάνεια. Είναι φανερό ότι η επίδραση αυτή υπολογίζεται με πολύ καλύτερη ακρίβεια. Τελικά κατά τα πρότυπα των (11.4.5) και (11.4.6) η (11.4.4) καταλήγει σε μια μορφή:

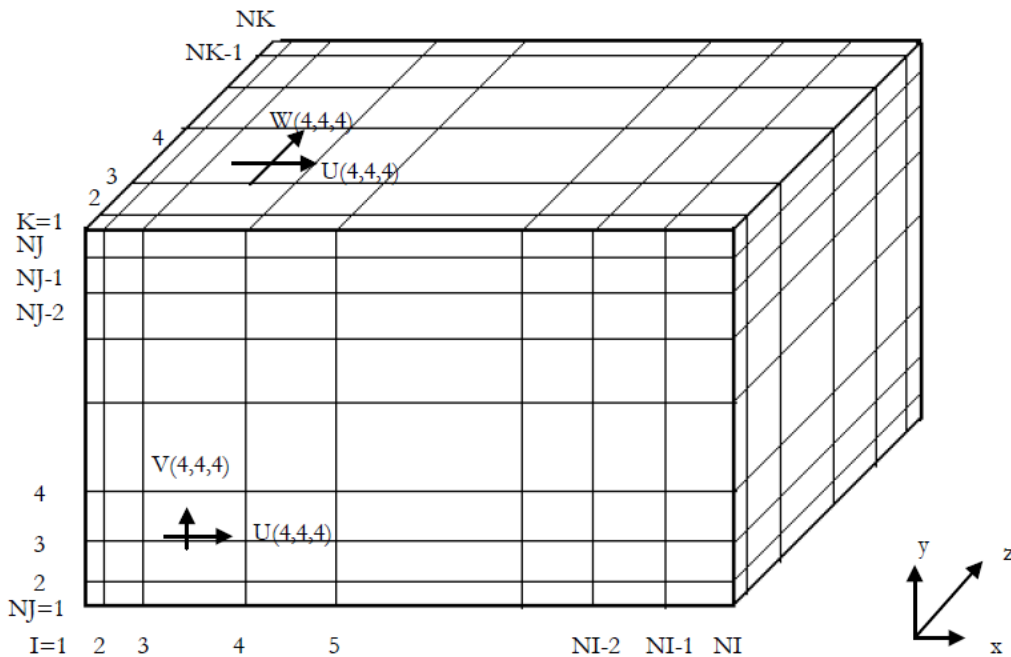
$$\begin{aligned} a_p^{P'} P_p' &= a_N^{P'} P_N' + a_S^{P'} P_S' + a_E^{P'} P_E' + a_W^{P'} P_W' + a_D^{P'} P_D' + a_U^{P'} P_U' + S_U^{P'} \\ a_p^{P'} &= a_N^{P'} + a_S^{P'} + a_E^{P'} + a_W^{P'} + a_D^{P'} + a_U^{P'}, \\ S_U^{P'} &= -\rho_e u_e^* \delta z + \rho_w u_w^* \delta z + \rho_s v_s^* \delta z - \rho_n v_n^* \delta z + \rho_D v_D^* \delta x \delta y - \rho_U v_U^* \delta x \delta y \end{aligned} \quad (11.4.7)$$

οποία είναι ίδια με την μορφή της (11.3.8) και καταλήγει σε επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος. Ο όρος πηγής S_U είναι η πρώτη γραμμή της (11.4.4), δηλαδή το υπόλοιπο μάζας για τον όγκο αναφοράς. Στο εξής η (11.4.4) ή η (11.4.7) θα αναφέρεται ως “εξίσωση της πίεσης”. Τέλος σημειώνεται ότι οι όροι της εξίσωσης (11.4.3) είναι ίδιοι ακριβώς με ένα μέρος των συντελεστών των $\Phi_{N,S,E,W,D,U}$ της εξίσωσης (11.3.1) ή (11.3.8). Αυτό είναι λογικό διότι πρόκειται για τους όρους συναγωγής οι οποίοι είναι και αυτοί που εμφανίζονται στην εξίσωση της συνέχειας. Το γεγονός αυτό μπορεί να εκμεταλλευτεί προγραμματιστικά.

11.5 Αντιμετώπιση στα όρια του υπολογιστικού χώρου

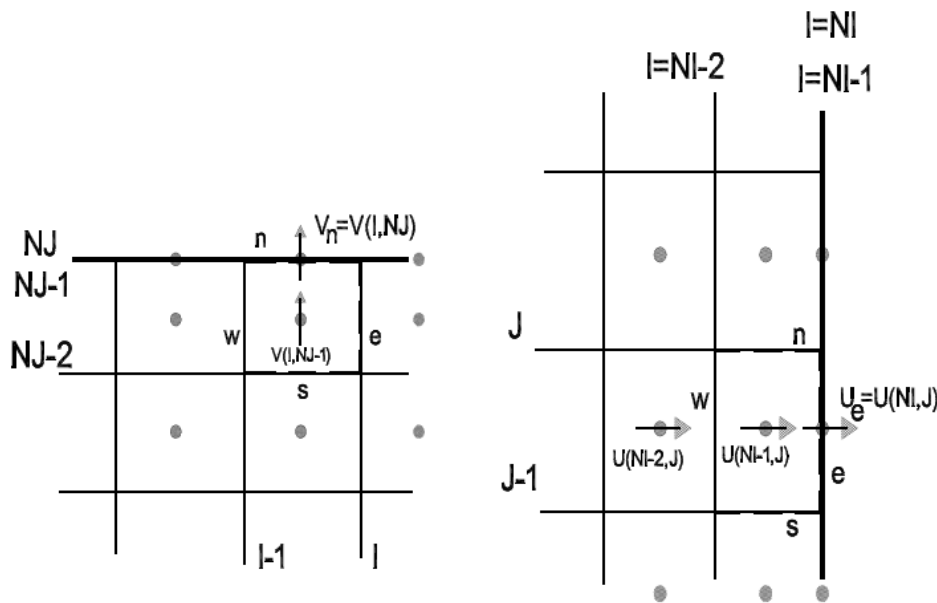
Το υπολογιστικό πλέγμα λαμβάνοντας υπ' όψη τις ιδιαιτερότητες αποθήκευσης που έχουν μέχρι τώρα αναφερθεί, φαίνεται στο Σχήμα 11.5-1. Παρατηρείται μια επιπλέον ιδιαιτερότητα στην αρίθμηση των πλεγματικών γραμμών στα όρια. Με μια προσεκτικότερη ματιά θα δει ο αναγνώστης ότι, εφόσον οι μεταβλητές αποθηκεύονται στα μέσα των πλεγματικών κυψελών, ο αριθμός των μεταβλητών σε μια πλεγματική κατεύθυνση να είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό των πλεγματικών γραμμών που τέμνουν κάθετα την κατεύθυνση αυτή. Αυτό οδηγεί τις οριακές τιμές των μεταβλητών σε αποθήκευση ακριβώς πάνω στις οριακές γραμμές. Έτσι η

μεταβλητή $U(NI-1,J,K)$ θα αποθηκεύεται ακριβώς πάνω στην τελευταία γραμμή (NI-1). Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 11.5-2 για την ακτινική ταχύτητα στο βόρειο όριο.



Σχήμα 11.5-1: Αρίθμηση πλεγματικών γραμμών(Μπούρης, 2013)

Σε όλα τα όρια του υπολογιστικού χώρου δεν γίνεται διαφορετική χρήση των παρεμβολών που περιγράφηκαν στην παράγραφο για την εξίσωση τα πίεσης αλλά αυτές συμπεριφέρονται σωστά χάρη στην ειδική μορφή της υπολογιστικής κυψέλης που γειτονεύει με το όριο. Δίνεται παρακάτω ένα παράδειγμα για το βόρειο και ανατολικό όριο του υπολογιστικού χώρου (τα άλλα όρια αντιμετωπίζονται με ακριβώς ανάλογο τρόπο):



Σχήμα 111.5-2: Αποθήκευση ταχυτήτων σε βόρειο και ανατολικό όριο του υπολογιστικού χώρου(Μπούρης, 2013)

Για το βόρειο όριο στο Σχήμα 11.5-2, οι ταχύτητες στις πλευρές e, w, s υπολογίζονται με τις παρεμβολές που περιγράφηκαν στην παράγραφο 11.4 ενώ για την πλευρά (n) ο υπολογισμός βασίζεται στο γεγονός ότι το πάνω όριο χαρακτηρίζεται από μια υπολογιστική κυψέλη μηδενικού πάχους κατά την J κατεύθυνση οπότε στο όριο αυτό οι τιμές των μεγεθών θα αποθηκεύονται ακριβώς πάνω στην γραμμή NJ και επομένως ακριβώς πάνω στο όριο. Οι παρεμβολές με τους συντελεστές βαρύτητας ($WFN(NJ-1)=0$) οδηγούν στον υπολογισμό της ταχύτητας (V_n) ίσης με την $V(l, NJ, K)$ του ορίου (υπολογίζεται όπως στην (11.4.6)). Για την περίπτωση όμως όπου υπάρχουν στερεά όρια στο εσωτερικό του πλέγματος (όχι στις οριακές γραμμές $l=1$ ή $NI, J=1, NJ$ ή $K=1, NK$) θα πρέπει να μηδενίζονται οι ταχύτητες αυτές με ειδικό τρόπο αφού οι παρεμβολές δεν θα επιφέρουν από μόνες τους το επιθυμητό αποτέλεσμα.

11.6 Οριακές συνθήκες

Μέχρι στιγμής, η μόνη αναφορά που έχει γίνει στις οριακές συνθήκες ήταν ο τρόπος που λειτουργούν οι ειδικές παρεμβολές της εξίσωσης της πίεσης κοντά στα όρια. Όμως, είναι αναγκαία και η τροποποίηση των σχημάτων πεπερασμένων διαφορών για τα σημεία του πλέγματος που είναι κοντά σε κάποιο όριο, είτε αυτό είναι στερεό τοίχωμα, είτε άξονας συμμετρίας κ.τ.λ. Από την (11.3.1) και την (11.3.3) είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι η ολοκλήρωση σε όγκους αναφοράς έχει δώσει για κάθε επιφάνεια του όγκου αναφοράς έναν όρο μεταφοράς ορμής (συναγωγής) και έναν όρο διάχυσης. Ανάλογα με το είδος του ορίου, αυτοί οι όροι θα πρέπει να τροποποιούνται.

Έστω για παράδειγμα η υπολογιστική κυψέλη στο Σχήμα 11.5-2, που βρίσκεται δίπλα στο βόρειο σύνορο. Αν το βόρειο σύνορο είναι αδιαπέραστο τοίχωμα ή άξονας συμμετρίας τότε δεν θα υπάρχει μεταφορά ορμής κάθετα στο τοίχωμα και επομένως ο όρος συναγωγής μέσα από την επιφάνεια αυτή θα είναι μηδενικός. Αυτό όμως, δεν είναι απαραίτητο να ισχύει και για τον όρο διάχυσης ο οποίος, εφόσον είναι μη μηδενικός, θα τεθεί στην επιθυμητή τιμή και θα μεταφερθεί στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (11.3.1) ως ένας πρόσθετος όρος ψευδοπηγής. Γενικά για ένα σύνορο $j=N,S,E,W,D,U$ η αντιμετώπιση είναι η εξής:
Θέτουμε κατ' αρχήν:

$$\alpha_j^\Phi = 0 \quad (11.6.1)$$

το οποίο ουσιαστικά μηδενίζει ολόκληρο τον όρο (11.3.3), δηλαδή την μεταφορά ορμής αλλά και τη διάχυση κάθετα στη j επιφάνεια του όγκου ολοκλήρωσης. Με μόνο την εφαρμογή της (11.6.1) επιτυγχάνεται η επιβολή συνθηκών Neumann που είναι μηδενική κλίση της μεταβλητής στην κατεύθυνση κάθετα στην επιφάνεια. Υπενθυμίζεται όμως ότι έχει μηδενιστεί και η μεταφορά ορμής κάθετα στην επιφάνεια κάτι που μπορεί να μην είναι πάντα επιθυμητό όταν θέλουμε οριακή συνθήκη Neumann.

Στη περίπτωση που η διάχυση είναι μη μηδενική ή οι όροι συναγωγής και διάχυσης παίρνουν κάποια ειδική μορφή, θα πρέπει, σε συνδυασμό με την(11.6.1), να προστεθούν κάποιοι όροι στις εκφράσεις των γραμμικοποιημένων όρων πηγής (S_U και S_P) στο δεξιό μέρος της (11.3.1). Μερικές τέτοιες περιπτώσεις παρουσιάζονται παρακάτω.

Αν είναι απαραίτητο να οριστεί η τιμή της μεταβλητής στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης (Φ_P) σε κάποια τιμή (Φ_F) (όχι η τιμή πάνω στο όριο όπως προηγουμένως) τότε οι αλλαγές είναι:

$$S_U^\Phi = \Phi_F 10^{30}, \quad S_P^\Phi = -10^{30} \quad (11.4.2)$$

έτσι ώστε αυτοί οι όροι να κυριαρχούν στην εξίσωση (11.3.1) και, λόγω ταυτότητας, να δώσουν $\Phi_P = \Phi_F$.

Αν το υπό εξέταση όριο είναι τέτοιο ώστε να μπορεί να υπάρχει μεταφορά ορμής κάθετα σ' αυτό και να έχουμε οριακή συνθήκη εισχώρησης (π.χ. ελεύθερο όριο πάνω από οριζόντια πλάκα όπου η ανάπτυξη του οριακού στρώματος θα "σπρώχνει" ρευστό στην κάθετη στη πλάκα κατεύθυνση) τότε δεν εφαρμόζεται η (11.6.1) αλλά θέτονται οι ταχύτητες πάνω στο όριο ίσες με τις τιμές που υπάρχουν στα αμέσως γειτονικά κελιά. Στην ουσία δηλαδή είναι συνθήκη Neumann αλλά χωρίς τον μηδενισμό της κάθετης στο όριο ταχύτητας. Προσοχή θέλει εδώ ώστε να παρακολουθείται η εισερχόμενη-εξερχόμενη μάζα ρευστού από όλα τα όρια και να γίνεται ισολογισμός του με διόρθωση των οριακών τιμών των ταχυτήτων έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνολική διατήρηση παροχής μάζας ρευστού.

Οι ταχύτητες που είναι παράλληλες σε κάποιο συνοριακό τοίχωμα συνήθως έχουν οριακή συνθήκη όπου η ταχύτητα είναι δεδομένη ή όπου η διατμητική τάση ($\tau_B = \mu \partial u_t / \partial n$) είναι δεδομένη ή όπου (τ_B) είναι γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας. Ο όρος διάχυσης μεταφέρεται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης και προστίθεται στους όρους πηγής. Οι ταχύτητες οι κάθετες σε κάποιο τοίχωμα θα πρέπει να είναι μηδενικές πάνω στο τοίχωμα, όμως αυτό μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στον υπολογισμό της κλίσης της μεταβλητής κατά την κάθετη στο τοίχωμα διεύθυνση. Έτσι για το σημείο του πλέγματος που γειτονεύει με το τοίχωμα εφαρμόζεται επί πλέον και οριακή συνθήκη Neumann μηδενικής κάθετης κλίσης (εφαρμογή της (11.6.1)). Με παρόμοιο τρόπο αντιμετωπίζονται και τα υπόλοιπα συνοριακά σημεία.

Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι Dirichlet για όλες τις μεταβλητές στην είσοδο του πεδίου και Neumann για όλες τις μεταβλητές στην έξοδο. Οι U και V ταχύτητες μπορεί να τίθεται και μηδέν στην έξοδο, εφ' όσον το όριο είναι τέτοιο που να επιτρέπει την θεώρηση πλήρως ανεπτυγμένης ροής. Η (W) ταχύτητα στην έξοδο υφίσταται κάποιον ισολογισμό μάζας ως προς την είσοδο και διορθώνεται αναλόγως σε κάθε επανάληψη. Στον άξονα συμμετρίας θεωρείται Neumann συνθήκη εκτός των ταχυτήτων που είναι κάθετες στο όριο οι οποίες θεωρούνται μηδενικές. Τέλος η πίεση επιλύεται με Neumann συνθήκες παντού εκτός της εισόδου όπου θεωρείται μηδενική (πίεση αναφοράς). Υπενθυμίζεται ότι η μεθοδολογία λύνει σχετικές πιέσεις και επομένως θα μπορούσε να τεθεί οποιαδήποτε τιμή για την πίεση στην είσοδο χωρίς καμία επίδραση στην λύση αφού οι κλίσεις πίεσης θα μείνουν ούτως ή άλλως ανεπηρέαστες.

11.7 Οριακές συνθήκες ταχυτήτων παράλληλων σε τοίχωμα, συναρτήσεις τοιχώματος (wall functions).

Στη τυρβώδη ροή, για την αποφυγή λεπτομερών υπολογισμών στις περιοχές κοντά στα τοιχώματα όπου θα απαιτείται ένας μεγάλος αριθμός πλεγματικών γραμμών, γίνεται μία ειδική θεώρηση για την εξάρτηση των ταχυτήτων, της τυρβώδους κινητικής ενέργειας και του ρυθμού καταστροφής της κοντά στο τοίχωμα με την απόσταση του υπολογιζόμενου σημείου από το τοίχωμα. Οι σχέσεις που ακολουθούν έχουν προκύψει από τις πειραματικά μετρημένες διανομές των μεγεθών σε τυρβώδες οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα. Σύμφωνα με τις μετρήσεις, οι διανομές μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από δύο περιοχές, μία πολύ κοντά στο τοίχωμα η οποία είναι γραμμικού χαρακτήρα και μία πιο μακριά η οποία ακολουθεί λογαριθμικό κανόνα. Αυτές οι εξισώσεις έχουν τη βασική πρακτική σημασία να επιτρέπουν τον σωστό υπολογισμό των κλίσεων των μεγεθών και άρα των όρων διάχυσης δίπλα σε στερεά όρια σε τυρβώδη ροή.

Για βόρειο σύνορο, στο οποίο είναι παράλληλη η (U) ταχύτητα, έχουμε για την διατμητική τάση πάνω στο τοίχωμα ($\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$):

(11.7.1)

$$\tau_w = \mu_{1,P} \frac{u_p}{\delta y_p} \quad y^+ < 11.63$$

$$\tau_w = \left[\frac{\rho C_\mu^{1/4} \kappa \sqrt{k}}{\ln(Ey^+)} \right]_P u_p \quad y^+ > 11.63$$

Για δυτικό σύνορο παράλληλη θα είναι η (ν) οπότε η διατμητική τάση δίνεται και πάλι από την (11.7.1) μόνο που αντί για u_p θα είναι v_p . Γενικότερα, το (κ) είναι η σταθερά του Von Karman (=0.4187) ενώ (E) είναι γενικά συνάρτηση της τραχύτητας του τοιχώματος και συνήθως θεωρούμε λείο τοίχωμα οπότε είναι $E=9.793$. Επίσης, (y^+) είναι η αδιάστατη κάθετη απόσταση του σημείου P του πλέγματος του πλέον γειτονικού στο στερεό όριο (Σχήμα 11.7-1), όπου υπολογίζουμε την ταχύτητα, από το τοίχωμα:

(11.7.2)

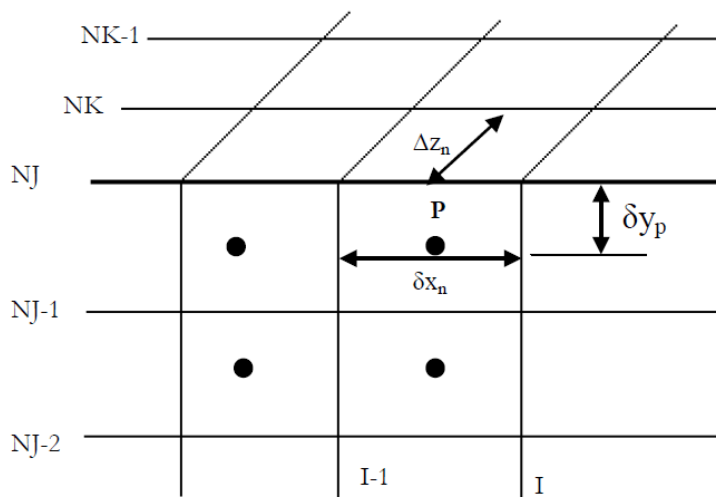
$$y_P^+ = \left(\frac{C_\mu^{1/4} \sqrt{k}}{\nu} \right)_P \delta y_P$$

Η εισαγωγή των συναρτήσεων τοιχώματος γίνεται κατά τον τρόπο που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και είναι (π.χ. για βόρειο σύνορο, η):

(11.7.3)

$$S_P^u = S_P^u - \frac{\tau_w}{u_p} \delta x_n$$

όπου φυσικά θα πρέπει να είναι και $a_N = 0$.



Σχήμα 11.7-1: Θέσεις μεταβλητών για βόρειο τοίχωμα (Μπούρης, 2013)

Ο όρος μπαίνει στο S_P λόγω της γραμμικοποίησης που έχουν υποστεί οι όροι πηγής στην (11.3.1) αφού και η (11.7.1) είναι συνάρτηση της προς επίλυση μεταβλητής στο σημείο P. Στην ειδικότερη περίπτωση όπου το στερεό όριο κινείται με ταχύτητα ($u_{\text{τοιχομ.}}$) θα πρέπει στην (11.7.2) να μπει η σχετική ταχύτητα $u_p = u_p - u_{\text{τοιχομ.}}$.

Σημειώνεται ότι οι σχέσεις αυτές εφαρμόζονται και κατά τον υπολογισμό του (G) (Πίνακας 11.1-1) κοντά σε τοιχώματα ενώ για τον όρο (-ρε) που εμφανίζεται στους όρους πηγής εφαρμόζεται η εξής σχέση:

$$(11.7.4) \quad \int_V \rho \varepsilon dV = \begin{cases} \left(\rho C_\mu^{3/4} k^{3/2} \frac{y^+}{\delta y} \right)_P Vol, & y^+ < 11.63 \\ \left(\rho C_\mu^{3/4} k^{3/2} \frac{\ln(Ey^+)}{\kappa \delta y} \right)_P Vol, & y^+ > 11.63 \end{cases}$$

ο οποίος εισάγεται στο S_P σε αντικατάσταση της συνηθισμένης σχέσης (Πίνακας 11.3-1) (υπενθυμίζεται ότι για να εισαχθεί στο S_P το οποίο ενσωματώνεται στο a_P θα πρέπει, λόγω της γραμμικοποίησης, το $k^{3/2}$ -των (11.7.4) να γραφεί $k^{1/2}$ ως όρος του S_P).

Για την τυρβώδη κινητική ενέργεια (k) εφαρμόζονται Neumann συνθήκες κοντά σε τοιχώματα (οπότε αρκεί το $a_j = 0$) ενώ για το ρυθμό καταστροφής (ε) ισχύει η σχέση:

$$(11.7.5) \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y_P}$$

και εισάγεται προγραμματιστικά ως:

$$(11.7.6) \quad S_U^\varepsilon = 10^{30} \left(\frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y_P} \right)_P \quad S_P^\varepsilon = -10^{30}$$

οπότε η τιμή του (ε) είναι δεδομένη σε σημεία P κοντά σε τοιχώματα.

11.8 Διαδικασία επίλυσης

Η διαδικασία επίλυσης έχει ήδη περιγραφεί συνοπτικά αλλά εδώ θα γίνει πιο αναλυτική περιγραφή για τις εξισώσεις που χρησιμοποιούνται και για τον τρόπο που επιλύονται.

- Γίνεται μία αρχική υπόθεση για όλες τις μεταβλητές σε όλο το πεδίο ροής. Σ' αυτό το στάδιο βοηθάει πολύ η ύπαρξη προηγούμενων υπολογισμών για παρόμοια

προβλήματα οπότε και οι λύσεις αυτές θεωρούνται ως αρχικές τιμές για την υπολογιζόμενη. Μαζί με τις αρχικές τιμές είναι προφανές ότι υποτίθεται και μία αρχική τιμή για το πεδίο πίεσης.

- Λύνονται οι εξισώσεις ορμής για την αξονική και ακτινική ταχύτητα.
- Λύνεται η εξίσωση της πίεσης (11.4.4) για να βρεθεί το διορθωμένο πεδίο της πίεσης που θα ικανοποιεί και την εξίσωση της συνέχειας.
- Γίνονται οι διορθώσεις στην πίεση και στις ταχύτητες σύμφωνα με την (11.4.2).
- Λύνονται ξανά οι εξισώσεις τώρα για τις υπόλοιπες μεταβλητές ($\Phi=k, \epsilon, \dots$).
- Οι νέες τιμές που έχουν βρεθεί για τα πεδία όλων των μεταβλητών θεωρούνται ως νέες βελτιωμένες αρχικές τιμές και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τη σύγκλιση.
- Σε περίπτωση που η επίλυση γίνεται σε μη μόνιμη ροή (χρονική εξέλιξη του φαινομένου) η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται σε κάθε χρονικό βήμα. Όταν έχει επιτευχθεί η μόνιμη κατάσταση τότε η λύση δεν θα αλλάζει από χρονικό βήμα σε χρονικό βήμα.

Κατά την επίλυση όλων των εξισώσεων, εφαρμόζεται η μέθοδος TDMA για την επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος συντεταγμένων με τη μέθοδο εναλλαγής κατεύθυνσης. Θεωρούνται λοιπόν ως άγνωστες οι τιμές της προς επίλυση μεταβλητής κατά μία πλεγματική γραμμή. Φυσικά όπως φαίνεται και από την (11.3.8) οι μεταβλητές αυτές θα εξαρτώνται και από τις αντίστοιχες στην προηγούμενη και επόμενη πλεγματική γραμμή. Αυτές λαμβάνονται ίσες με τις πιο πρόσφατα υπολογισμένες τιμές τους. Κατ' αυτό τον τρόπο βρίσκονται οι νέες τιμές της μεταβλητής κατά μήκος πλεγματικών γραμμών σε μία κατεύθυνση. Στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η επίλυση και στην άλλη κατεύθυνση. Σημειώνεται ότι το σύστημα που επιλύεται σε κάθε γραμμή πλέγματος αποτελείται από όλα τα εσωτερικά σημεία του πεδίου πάνω στη γραμμή αυτή.

Σε κάθε επανάληψη είναι απαραίτητη η εφαρμογή υποχαλάρωσης κατά την επίλυση των εξισώσεων. Έτσι, μόνο ένα ποσοστό της τιμής μίας μεταβλητής που υπολογίστηκε χρησιμοποιείται για αρχική τιμή της επόμενης επανάληψης. Το υπόλοιπο μέρος της τιμής αυτής λαμβάνεται από την προηγούμενη επανάληψη:

(11.8.1)

$$\Phi_p^{νεα} = \omega \widetilde{\Phi}_p + (1 - \omega) \Phi_p^{προηγ.}$$

όπου με (\sim) συμβολίζεται η νέα υπολογισθείσα τιμή πριν εφαρμοστεί η υποχαλάρωση, ενώ οι εκθέτες συμβολίζουν την επανάληψη στην οποία αναφέρονται οι μεταβλητές. Η μεταβλητή (ω) είναι η παράμετρος υποχαλάρωσης και παίρνει τιμές $0 \leq \omega \leq 1$. Όμως η πρακτική εφαρμογή της υποχαλάρωσης την έχει ενσωματώσει στη διαδικασία επίλυσης κάνοντας τις εξής μεταβολές στους συντελεστές της εξίσωσης (11.7.3) :

(11.8.2)

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha_P^\Phi - S_P^\Phi)}{\omega} \Phi_P^{new} &= a_N^\Phi \Phi_N^{old} + a_S^\Phi \Phi_S^{old} + a_E^\Phi \Phi_E^{old} + a_W^\Phi \Phi_W^{old} \\ &+ a_D^\Phi \Phi_D^{old} + a_U^\Phi \Phi_U^{old} + S_U^\Phi + (1 - \omega) \frac{(\alpha_P^\Phi - S_P^\Phi)}{\omega} \Phi_P^{old} \\ a_P^\Phi &= a_N^\Phi + a_S^\Phi + a_E^\Phi + a_W^\Phi + a_D^\Phi + a_U^\Phi \end{aligned}$$

Η επίδραση της παραμέτρου υποχαλάρωσης επιδρά στη σύγκλιση κάνοντάς την πολύ αργή αν η παράμετρος είναι πολύ μικρή ή ακόμη και οδηγώντας τη λύση σε απόκλιση για πολύ μεγάλη τιμή υποχαλάρωσης. Η τελική σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν τα υπόλοιπα που μένουν στις εξισώσεις γίνουν μικρότερα από κάποια συγκεκριμένη τιμή. Τα υπόλοιπα αυτά ορίζονται για κάθε μεταβλητή σε κάθε σημείο του πλέγματος ως εξής:

(11.8.3)

$$R_P^\Phi = (\alpha_P^\Phi - S_P^\Phi) \Phi_P - \alpha_N^\Phi \Phi_N - \alpha_S^\Phi \Phi_S - \alpha_E^\Phi \Phi_E - \alpha_W^\Phi \Phi_W - \alpha_D^\Phi \Phi_D - \alpha_U^\Phi \Phi_U - S_U^\Phi$$

Η ελάχιστη τιμή κάτω από την οποία το πρόβλημα θεωρείται ότι έχει συγκλίνει συνήθως είναι 0.1% του ρυθμού εισόδου της αντίστοιχης μεταβλητής (π.χ. για τις ταχύτητες θεωρείται η ροή εισόδου της ορμής). Έτσι όταν το άθροισμα των υπολοίπων της (11.8.3) για όλα τα σημεία του πλέγματος είναι μικρότερο από την τιμή αυτή για όλες τις μεταβλητές (άλλο υπόλοιπο για κάθε μεταβλητή) θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει συγκλίνει.

Σημειώνεται εδώ ότι η ενσωμάτωση των συντελεστών υποχαλάρωσης στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος εισάγει κάποια εξάρτηση της εξίσωσης της πίεσης από την υποχαλάρωση. Αυτό είναι εύκολο να φανεί μιας και από την (11.8.2) είναι φανερό ότι ο συντελεστής υποχαλάρωσης εισάγεται (και αποθηκεύεται υπολογιστικά) στον συντελεστή α_P της κάθε μεταβλητής, αυτός ο συντελεστής με την σειρά του εισάγεται στην διόρθωση της πίεσης και στην εξίσωση της συνέχειας (ταχύτητες) μέσω των (11.4.2), (11.4.4) και (11.4.6). Το αποτέλεσμα είναι ότι σε οριακές τιμές του συντελεστή υποχαλάρωσης (μικρότερο από 0.3) υπάρχει περίπτωση τα αποτελέσματα του συγκλιμένου πεδίου να είναι διαφορετικά ανάλογα με την τιμή του συντελεστή υποχαλάρωσης. Το πρόβλημα αυτό διορθώνεται αφ' ενός προσαρμόζοντας την (11.4.6) και αφ' ετέρου εισάγοντας μία διόρθωση για τις ταχύτητες στις επιφάνειες των όγκων. Έτσι η (11.4.6) προσαρμόζεται στην:

(11.8.4)

$$\begin{aligned} u_W^* &= [1 - WFW(I)] \left\{ u^*(I-1, J, K) - DU(I-1, J, K) \frac{\partial P^*}{\partial x} \Big|_{(I-1, J, K)} \right\} + \\ &WFW(I) \left\{ u^*(I, J, K) - DU(I, J, K) \frac{\partial P^*}{\partial x} \Big|_{(I, J, K)} \right\} + \\ &\{ [1 - WFW(I)] DU(I-1, J, K) + WFW(I) DU(I, J, K) \} \frac{P^*(I-1, J, K) - P^*(I, J, K)}{XC(I) - XC(I-1)} + \end{aligned}$$

$$(1 - \omega)\{u_w^{*,\text{προηγ.}} - [1 - WFW(I)]u^*(I - 1, J, K) - WFW(I)u^*(I, J, K)\}$$

όπου η τελευταία γραμμή εισάγει την ανεξαρτησία από τον συντελεστή υποχαλάρωσης με το κόστος της επί πλέον αποθήκευσης των επιφανειακών ταχυτήτων της προηγούμενης επανάληψης $u_w^{*,\text{προηγ.}}$. Απαιτείται όμως τώρα και η διόρθωση των ταχυτήτων αυτών με την διόρθωση πίεσης που μόλις υπολογίστηκε:

$$u_w = u_w^* = \{[1 - WFW(I)]DU(I - 1, J, K) + WFW(I)DU(I, J, K)\} \frac{P'(I - 1, J, K) - P'(I, J, K)}{XC(I) - XC(I - 1)} \quad (11.8.5)$$

Οι ταχύτητες που προκύπτουν για τις επιφάνειες του όγκου ολοκλήρωσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στις (11.3.3) (αυτό δεν έχει να κάνει όμως με τη μέθοδο της ανάντι παραγωγής, είναι μόνο για τις ταχύτητες και όχι για την προς επίλυση μεταβλητή).

12 Αναφορές – Βιβλιογραφία

- Finnigan, J., 2000, Turbulence in Plant Canopies, Annual Review of Fluid Mechanics 32, 519-571
- Blazek, J., 2005, Turbulence Modelling, in Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, 2nd edition, 227-270, Elsevier Ltd., Kidlington, Oxford
- Kundu, P., K., Cohen, I., M., Dowling, D., R., 2016, Turbulence, in Fluid Mechanics, 6th edition, 603-697, Academic Press, Kidlington, Oxford
- Bakker, A., 2002, Lecture 9-Kolmogorov's Theory Applied Computational Fluid Dynamics, Educational material, Fluent Inc.
Available from < <http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/09-kolm.pdf> >
- Durbin, P., A., Pettersson-Reif, B., A., 2011, Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flow, 2nd Edition, John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, West Sussex
- Sveningsson, A., 2003, Analysis of the Performance of Different $\overline{v^2} - f$ Turbulence Models in a Stator Vane Passage Flow, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Göteborg
- Raupach, M., R., Shaw, R., H., 1982, Averaging Procedures for Flow Within Vegetation Canopies, Boundary Layer Meteorology 22, 79-90
- Wilson, N., R. and Shaw, R., H., 1977, A Higher Order Closure Model for Canopy Flow, Journal Paper Applied Meteorology 16(11), 1197-1205
- Buccolieri, R., Santiago, J., L., Rivas, E., Sanchez, B., 2018, Review on urban tree modelling in CFD simulations: Aerodynamic, deposition and thermal effects, Urban Forestry & Urban Greening 31, 212-220
- Kenjereš, S., ter Kuile, B., 2013, Modelling and simulations of turbulent flows in urban areas with vegetation, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 123(Part A), 43-55
- Chen, L., Liu, C., Zou, R., Yang, M., Zhang, Z., 2016, Experimental examination of effectiveness of vegetation as bio-filter of particulate matters in the urban environment, Environmental Pollution 208, 198-208
- Pattanapol, W., Wakes S., J., Hilton M., J., Dickinson K., J., M., 2007, Modeling of Surface Roughness for Flow Over a Complex Vegetated Surface, PWASET 26, 273-281

- Ries, K., Eichhorn, J., 2001, Simulation of effects of vegetation on the dispersion of pollutants in street canyons, *Meteorologische Zeitschrift* 10(4), 229-233
- Ayotte, K., W., Finnigan, J., J., Raupach, M., R., 1999, A second-order closure for neutrally stratified vegetation canopy flow, *Boundary-Layer Meteorology* 90, 189-216
- Green, S., R., 1992, Modelling Turbulent Air Flow in a Stand of Widely-Spaced Trees, *Phoenics Journal* 23, 294-312
- Liu J., Chen J. M., Black T. A., and Novak M. D., 1996, $E - \epsilon$ Modelling of Turbulent Air-Flow Downwind of a Model Forest Edge, *Boundary-Layer Meteorology* 77(1), 21-44
- Svensson, U., Häggkvist, K., 1990, A Two-Equation Turbulence Model for Canopy Flows, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 35, 201-211
- Katul, G., G., Mahrt, L., Poggi, D., Sanz, C., 2004, One- and Two-Equation Models for Canopy Turbulence, *Boundary-Layer Meteorology* 113, 81-109
- Sanz, C., 2003, A Note on $k-\epsilon$ Modelling of Vegetation Canopy Air-Flows, *Boundary-Layer Meteorology* 108, 191-197
- Lalic, B., Mihailovic, D., T., 2004, An empirical Relation Describing Leaf-Area Density inside the Forest for Environmental Modeling, *Journal of Applied Meteorology* 43(4), 641-645
- Stadt, K., J., Lieffers, V., J., 2000, MIXLIGHT: a flexible light transmission model for mixed-species forest stands, *Agricultural and Forest Meteorology* 102(4), 235-252
- Wania, A., Bruse, M., Blond, N., Weber, C., 2012, Analysing the influence of different street vegetation on traffic-induced particle dispersion using microscale simulations, *Journal of Environmental Management* 94, 91-101
- Villalobos, F., J., Orgaz, F., Mateos L., 1995, Non-destructive measurement of leaf area in olive (*Olea europaea* L.) trees using a gap inversion method, *Agricultural and Forest Meteorology* 73, 29-42
- Janhäll, S., 2015, Review on urban vegetation and particle air pollution - Deposition and dispersion, *Atmospheric Environment* 105, 130-137
- Durbin, P., A., 1996, On the $k-3$ stagnation point anomaly, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 17, 89-90

- Launder, B., E. and Spalding D., B., 1974, The numerical computation of turbulent flows, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering* 3(2), 269-289
- Argyropoulos C., D., Markatos, N., C., 2014, Recent advances on the numerical modelling of turbulent flows, *Applied Mathematical Modelling* 39(2), 693-732
- Yakhot, V., Thangarm, S., Gatski, T., B., Orszag, S., A., Speziale, C., G., 1991, Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique, Institute for Computer Applications in Science and Engineering NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia
- Gromke C., Ruck B., 2008, Aerodynamic modelling of trees for small-scale wind tunnel studies, *Forestry* 81(3), 243-258
- Gromke, C., Buccolieri, R., Di Sabatino, S., Ruck, B., 2008, Dispersion Study in a Street Canyon with Tree Planting by Means of Wind Tunnel and Numerical Investigations– Evaluation of CFD Data with Experimental Data, *Atmospheric Environment* 42(37), 8640-8650
- Buccolieri, R., Salim, M., S., Leo, L., S., Di Sabatino, S., Chan, A., Ielpo, P., de Gennaro, G., Gromke, C., 2011, Analysis of local scale tree- atmosphere interaction on pollutant concentration in idealized street canyons and application to a real urban junction, *Atmospheric Environment* 45(9), 1702-1713
- Balczó, M., Gromke, C., Ruck, B., 2009, Numerical Modeling of Flow and Pollutant Dispersion in Street Canyons with Tree Planting, *Meteorologische Zeitschrift* 18(2), 197-206
- Gromke, C., 2008, Einfluss von Bäumen auf die Durchlüftung von innerstädtischen Straßenschluchten, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe, Karlsruhe
- CODASC Database, 2008, Laboratory of Building- and Environmental Aerodynamics, Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe
Available from < <https://www.windforschung.de/CODASC.htm> >
- Nian, L., 2014, Analysis of urban wind flow for energy applications in buildings, China EU Institute for Clean and Renewable Energy, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan, Hubei
- Μπούρης, Δ., 2013, Υπολογιστικό Εργαλείο για την Αριθμητική Διερεύνηση Ρευστομηχανικών Προβλημάτων, *Εργ. Καιν. Τεχν. Πρ. Περ., Τομέας Ρευστών, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π., Αθήνα*

Τσαγγάρης, Σ., 2015, Μηχανική των Ρευστών: Θεωρία και Ασκήσεις, Εκδόσεις Τσότρας, Αθήνα

Γιαννόπουλος, Ν., 2018, Ανάλυση μετρήσεων και εκτίμηση αιολικού δυναμικού γύρω από το κτίριο ANYM στη Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Ε.Μ.Π., Αθήνα