ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΑΔΡΑΝΕΙΑ

Διπλωματική Εργασία

ΜΠΑΦΑΤΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Αριθμός Μητρώου: 09109123

Επιβλέπων Καθηγητής: Ψαρράκος Παναγιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2020

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΑΔΡΑΝΕΙΑ

Διπλωματική Εργασία

ΜΠΑΦΑΤΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Αριθμός Μητρώου: 09109123

Τριμελής Επιτροπή: Ν. Γιαννακάκης, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Κ. Παυλοπούλου, Ε.ΔΙ.Π. Ε.Μ.Π.
Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Αθήνα, Ιούλιος 2020

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ Σελ.

Συμβολισμοί

R	Το σύνολο των πραγματικών αριθμών
C	Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
N	Το σύνολο των φυσικών αριθμών
Z	Το σύνολο των ακέραιων αριθμών
I, I_n	Μοναδιαίος (ταυτοτικός) $n \times n$ πίνακας
A^{-1}	Αντίστροφος του πίνακα *A*
$\bar{A}$	Συζυγής του πίνακα *A*
A^T	Ανάστροφος του πίνακα *A*
A^*	Αναστροφοσυζυγής του πίνακα *A*
x^T	Ανάστροφος του διανύσματος *x*
H(n)	Σύνολο ερμιτιανών $n \times n$ πινάκων
Adj(*A*)	Συμπληρωματικός του πίνακα *A*
A[α]	Κύριος υποπίνακας ενός πίνακα *A*
tr*A*	Ίχνος ενός πίνακα *A*
det(*A*)	Ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα
rank(*A*)	Ο βαθμός ενός πίνακα *A*
Range(*A*)	Η εικόνα ενός πίνακα *A*
Null(*A*)	Ο πυρήνας ενός πίνακα *A*
$diag\ \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa\}$	Ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa$
$Argz$	Το όρισμα ενός αριθμού $z \in C$
λ	Μια ιδιοτιμή ενός πίνακα *A*
σ(A)	Το φάσμα ενός τετραγωνικού πίνακα *A*
ρ(A)	Η φασματική ακτίνα ενός πίνακα *A*

$\circ$	Γινόμενο Handamard για πίνακες
$\|\cdot\|$	Διανυσματική νόρμα
$\|\circ\|$	Νόρμα πινάκων
$P_n(R)$	Το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών P-πινάκων
$P_n(C)$	Το σύνολο των $n \times n$ μιγαδικών P-πινάκων
P^2	Το σύνολο των πινάκων όπου ο A και ο A^2 είναι P-πίνακες
$GL_n(R)$	Το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών αντιστρέψιμων πινάκων
$GL_n(C)$	Το σύνολο των $n \times n$ μιγαδικών αντιστρέψιμων πινάκων
$B(n)$	Το σύνολο των $n \times n$ θετικά ορισμένων πινάκων
$< n >$	Υποσύνολο του $\{1,2, \dots, n\}$

<u>Πρόλογος</u>

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του Προγράμματος Προπτυχιακών Σπουδών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Το θέμα που αναπτύσσεται στη παρούσα εργασία αφορά τη μελέτη των (θετικά) ευσταθών πινάκων. Ευσταθείς χαρακτηρίζονται οι πίνακες των οποίων οι ιδιοτιμές έχουν μη αρνητικά πραγματικά μέρη. Το κύριο κίνητρο για τη μελέτη των ευσταθών πινάκων πηγάζει από την επιθυμία να κατανοηθούν οι ιδιότητες ευστάθειας της ισορροπίας των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Οι ερωτήσεις για μια τέτοια λύση ισορροπίας προκύπτουν σε μια μεγάλη γκάμα επιστημών όπως είναι τα μαθηματικά, οι φυσικές επιστήμες, η μηχανική, η οικονομία, οι βιολογικές επιστήμες κ.λπ. Σε κάθε έναν από αυτούς τους τομείς είναι απαραίτητο να μελετηθεί η δυναμική των συστημάτων των οποίων η κατάσταση αλλάζει, σύμφωνα με ορισμένους κανόνες, με την πάροδο του χρόνου και, ειδικότερα, να απαντηθούν ερωτήματα σχετικά με τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του συστήματος. Έτσι, η ευστάθεια ενός πίνακα, ένα πρώιμο εργαλείο στη μελέτη τέτοιων ερωτήσεων, είναι ένα σημαντικό θέμα που υπήρξε ένας σημαντικός τομέας αλληλεπίδρασης μεταξύ των εφαρμογών και της εξέλιξης της θεωρίας πινάκων.

Το Κεφάλαιο 1, έχει εισαγωγικό και βοηθητικό χαρακτήρα. Σε αυτό παρουσιάζουμε βασικούς ορισμούς της Γραμμικής Άλγεβρας, της Ανάλυσης Πινάκων και της Πραγματικής και Συναρτησιακής Ανάλυσης. Επίσης, υπενθυμίζουμε βασικές παρατηρήσεις και θεωρήματα, τα οποία μας χρειάζονται στην εργασία μας.

Στο Κεφάλαιο 2, εισάγεται η έννοια των ευσταθών πινάκων, καθώς και η έννοια της αδράνειας των πινάκων. Επίσης, σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μία βασική εκδοχή ενός θεμελιώδους θεωρήματος σχετικά με τους θετικά ευσταθείς πίνακες. Συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στο θεώρημα Lyapunov και σε πολλές γενικεύσεις του ιδίου θεωρήματος.

Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζεται το κριτήριο ευστάθειας Routh -Hurwitz,το οποίο είναι μία ειδική περίπτωση των πιο γενικών και σύνθετων συνθηκών για τον προσδιορισμό της αδράνειας ενός πίνακα $A \in M_n(R)$ σε συγκεκριμένες συνθήκες. Επίσης, το συγκεκριμένο κριτήριο δύναται να καταστεί σαν ένα test «θετικής ευστάθειας» για ένα δεδομένο πολυώνυμο.

Στο Κεφάλαιο 4, αναφέρονται πολλές γενικεύσεις του Θεωρήματος Lyapunov. Οι γενικεύσεις περιέχουν:

α) Συνθήκες κάτω από τις οποίες η θετική ευστάθεια μπορεί να επιτευχθεί όταν η λύση G είναι θετικά ορισμένη, αλλά το δεξί μέλος H είναι μόνο θετικά ημιορισμένο.

β) Το αποτέλεσμα της γενικής αδράνειας όταν το δεξί μέλος H της σχέσης $GA + A^*G = H$ είναι θετικά ορισμένο, αλλά η λύση G είναι ερμιτιανός πίνακας της γενικής αδράνειας.

γ) Συνθήκες θετικής ευστάθειας, οι οποίες πιθανώς περιλαμβάνουν θετικά ορισμένα πολλαπλάσια του πίνακα A.

Στο Κεφάλαιο 5, αναφέρεται μια πολύ σημαντική ειδική κατηγορία των πραγματικών θετικών ευσταθών πινάκων που εμφανίζονται σε πολλούς τομείς εφαρμογών. Αυτοί είναι οι M –πίνακες . Αυτοί συνδυάζουν τους μη αρνητικούς πίνακες με τους θετικούς ευσταθείς πίνακες. Τέλος, παρουσιάζονται κι οι P-πίνακες.

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια σπουδών της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της όμως, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, συνεργάστηκα μαζί τους, και στάθηκαν σημαντικοί αρωγοί στην προσπάθειά μου για την εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Αρχικά, θα ήθελα να απευθύνω θερμές ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, Καθηγητή του Τομέα των Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, ο οποίος με τις ουσιώδεις παρατηρήσεις του και με τη θερμή του υποστήριξη, με βοήθησε να φέρω εις πέρας την παρούσα εργασία. Θα ήθελα, ακόμη, να τον ευχαριστήσω για την επιλογή του συγκεκριμένου ενδιαφέροντος θέματος, καθώς και για την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής εργασίας. Η αμέριστη κατανόηση του και η πολύτιμη βοήθειά του αποτέλεσαν θεμελιώδη βάση για την εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Τις ευχαριστίες μου εκφράζω και στα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, Ν. Γιαννακάκη, Αν. Καθηγητή Ε.Μ.Π. και Κ. Παυλοπούλου, Ε.ΔΙ.Π. Ε.Μ.Π., που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους.

Επιπλέον, οφείλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Ευάγγελο και Αριστέα, για την αμέριστη αγάπη τους, τις πολύτιμες συμβουλές τους, καθώς και για όλα όσα μου έχουν προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια της ζωής αλλά και των σπουδών μου.

Επίσης, δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω την αδερφή μου, Αρετή, αλλά και τον φίλο μου και σύζυγό της, Μανώλη, που με υπομονή και επιμονή προσέφεραν την απαραίτητη ηθική συμπαράστασή για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους προπτυχιακούς φοιτητές για την ανταλλαγή απόψεων και το ειλικρινές ενδιαφέρον που υπέδειξαν, όμως ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να δώσω στον επί δώδεκα χρόνια φίλο μου, Βαγγέλη, ο οποίος με υποστήριξε σε κάθε φάση της ζωής μου και με βοήθησε καθοριστικά στην πραγματοποίηση αυτής της εργασίας.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω, καθώς και να αφιερώσω αυτήν τη διπλωματική εργασία σε έναν πολύ ξεχωριστό άνθρωπο για εμένα, την Κατερίνα, για την αγάπη της και την κατανόηση της, για την ψυχολογική της υποστήριξη κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, για την ψυχική ηρεμία και τη συμπαράσταση που μου προσέφερε σε κάθε δύσκολη στιγμή, καθώς και για την εξαιρετικά μεγάλη βοήθεια της ως προς την ηλεκτρονική επεξεργασία αυτής της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μία υπενθύμιση βασικών εννοιών και συμπερασμάτων, που είναι απαραίτητα για την κατανόηση της εργασίας. Αυτές οι έννοιες προέρχονται από τα πεδία της Γραμμικής Άλγεβρας και της Ανάλυσης Πινάκων.

1.1 Γενικοί ορισμοί.

1.1.1 Τετραγωνικοί πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ένας πίνακας με το ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών. Ένας πίνακας διαστάσεων $n \times n$ λέμε ότι είναι τάξης n και μερικές φορές καλείται και n - τετραγωνικός πίνακας. Όπως γνωρίζουμε δεν είναι δυνατή η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός κάθε ζεύγους πινάκων, ενώ είναι δυνατή η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός σε όλους τους $n \times n$ τετραγωνικούς πίνακες και το αποτέλεσμα είναι τετραγωνικός πίνακας ίδιων διαστάσεων.

1.1.2 Ανάστροφος ενός πίνακα

Ο ανάστροφος ενός πίνακα A ο οποίος γράφεται A^T, είναι ο πίνακας που λαμβάνεται γράφοντας την στήλη του A σε διάταξη γραμμών.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, τότε ο ανάστροφος του πίνακα A είναι ο

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες ανάστροφων πινάκων:

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$.
ii) $(kA)^T = kA^T$.
iii) $(A^T)^T = A$.
iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

1.1.3 Ίχνος ενός πίνακα

Το ίχνος ενός πίνακα A , το οποίο γράφεται tr$A$, είναι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του. Δηλαδή, $trA = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$.

Για παράδειγμα θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Τότε $tr(A) = 1 + 4 = 5$.

Έστω ότι $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ είναι n-τετραγωνικοί πίνακες και k είναι ένας αριθμός, τότε ισχύουν τα εξής:

i) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
ii) $tr(kA) = k\, tr(A)$.
iii) $tr(A^T) = trA$.
iv) $tr(AB) = tr(BA)$.

1.1.4 Ταυτοτικός πίνακας

Ο n - τετραγωνικός ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας, ο οποίος δηλώνεται με I_n είναι ο n - τετραγωνικός πίνακας που περιέχει μονάδες στην κύρια διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού. Ο ταυτοτικός πίνακας I λειτουργεί ανάλογα με τον αριθμό 1.

1.1.5 Βαθμωτός πίνακας

Για κάθε αριθμό k, ο πίνακας kI που περιέχει k στην διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού, ονομάζεται βαθμωτός πίνακας που αντιστοιχεί στον αριθμό (βαθμωτό στοιχείο) k. Ισχύει ότι $(kI)A = k(IA) = kA$. Με άλλα λόγια αν πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα A με το βαθμωτό πίνακα kI, είναι σαν να πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A με τον αριθμό k.

1.1.6 Αντιστρέψιμοι ή μη ιδιάζοντες πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται αντιστρέψιμος ή μη ιδιάζων αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε $AB = BA = I$, όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Ένας τέτοιος πίνακας B είναι μοναδικός, δηλαδή αν $AB_1 = B_1A = I$ και $AB_2 = B_2A = I$, τότε ισχύει ότι

$$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2.$$

Ο πίνακας B ονομάζεται αντίστροφος του A και γράφεται A^{-1}. Η παραπάνω σχέση είναι συμμετρική, δηλαδή αν ο B είναι ο αντίστροφος του A τότε και ο A είναι ο αντίστροφος του B.

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, οι πίνακες A και B είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου.

1.1.7 Όμοιοι πίνακες

Έστω A,B δύο $n \times n$ πίνακες. Οι A,B λέγονται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$.

Ιδιότητες όμοιων πινάκων.

1) Οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και επομένως τις ίδιες ιδιοτιμές, με την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν δύο πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητο να είναι όμοιοι.
2) Αν A, B είναι όμοιοι πίνακες τότε ισχύει ότι $\det(A) = \det(B)$.
3) Αν A, B είναι όμοιοι πίνακες τότε οι πίνακες A^T, B^T είναι και αυτοί όμοιοι.
4) Αν A, B είναι όμοιοι πίνακες τότε $tr(A) = tr(B)$.
5) Αν A, B είναι όμοιοι πίνακες και $A^2 = A$, τότε $B^2 = B$.
6) Αν A, B είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν την ίδια κανονική μορφή Jordan.
7) Αν A, B είναι όμοιοι πίνακες, το ίδιο ισχύει και για τους A^k, B^k για κάθε $k \in N$.

1.1.8 Διαγώνιοι πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας $D = [d_{ij}]$ είναι διαγώνιος αν οι μη διαγώνιες καταχωρήσεις του είναι όλες ίσες με 0. Αυτός ο πίνακας συχνά δηλώνεται και ως $D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$, όπου ορισμένα από τα d_{ii} να είναι ίσα με 0.

Παράδειγμα:

$$diag(3, -7, 4) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.1.9 Τριγωνικοί πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ είναι άνω τριγωνικός αν όλες οι καταχωρήσεις που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι ίσες με 0, δηλαδή αν $a_{ij} = 0$ για $i > j$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ είναι κάτω τριγωνικός αν όλες οι καταχωρήσεις που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι ίσες με 0 , δηλαδή αν $a_{ij} = 0$ για $i < j$.

Για παράδειγμα, από τους τετραγωνικούς πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, καθώς όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά, ενώ ο πίνακας B είναι κάτω τριγωνικός καθώς όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

1.1.10 Συμμετρικοί πίνακες

Ένας πίνακας A καλείται συμμετρικός όταν είναι ίσος με τον ανάστροφό του, δηλαδή όταν ισχύει ότι $A^T = A$. Ισοδύναμα, ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ είναι συμμετρικός όταν τα συμμετρικά στοιχεία (τα στοιχεία που καθρεπτίζονται στη διαγώνιο) είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή όταν $a_{ij} = a_{ji}$.

Για παράδειγμα, για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, εύκολα υπολογίζουμε ότι $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, άρα $A = A^T$. Δηλαδή, ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

1.1.11 Ορθογώνιοι πίνακες

Ένας πραγματικός πίνακας A είναι ορθογώνιος αν $A^T = A^{-1}$, δηλαδή αν $AA^T = A^T A = I$. Επομένως ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος.

Για παράδειγμα θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Συνεπώς ο A είναι ορθογώνιος πίνακας.

1.1.12 Μιγαδικοί πίνακες

Έστω A ένας μιγαδικός πίνακας, δηλαδή ένας πίνακας με μιγαδικές καταχωρήσεις. Ο συζυγής ενός πίνακα A ο οποίος γράφεται $\bar{A} = [\overline{\alpha_{ij}}]$, είναι ο πίνακας που λαμβάνουμε από τον A αν βρούμε το συζυγές κάθε στοιχείου του A. Ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα A συμβολίζεται με $A^* = \bar{A}^T$. Αν ισχύει ότι $A = A^*$ τότε ο πίνακας ονομάζεται ερμιτιανός . Επίσης αν $A^* = A$ τότε ο πίνακας ονομάζεται αντι-ερμιτιανός. Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες τότε ισχύει ότι $(AB)^* = A^* B^*$.Ένας μιγαδικός πίνακας A καλείται ορθομοναδιαίος αν ισχύει $A^* A = AA^{*\prime} <=> A^* = A^{-1}$. Κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας είναι υποχρεωτικά τετραγωνικός και αντιστρέψιμος. Ένας μιγαδικός πίνακας A είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν οι γραμμές του σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύνολο ως προς το εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών διανυσμάτων. Ένας μιγαδικός πίνακας A καλείται κανονικός όταν αντιμετατίθεται με τον αναστροφοσυζυγή του, δηλαδή όταν ικανοποιείται η σχέση $AA^* = A^* A$.

1.1.13 Πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A, τότε η ελάσσονα ορίζουσα του, στην i-γραμμή και j-στήλη είναι η ορίζουσα του υποπίνακά του, ο οποίος αποτελείται από τα στοιχεία του πίνακα A , αν διαγράψουμε την i-γραμμή και τη j-στήλη. Αυτός ο αριθμός, συνήθως συμβολίζεται ως $M_{i,j}$. Το αλγεβρικό συμπλήρωμα του $(i,j) - στοιχείου$ προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την ελάσσονα ορίζουσα με το $(-1)^{i+j}$. Ο πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων (cofactor matrix) του A συμβολίζεται με C_{ij} και είναι ο $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.1.14 Συμπληρωματικός πίνακας

Ο συμπληρωματικός ενός πίνακα $A \in C^{n \times n}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ισχύει ότι $\boldsymbol{A(adjA) = \det(A)I}$.

1.1.15 Θετικά ορισμένος πίνακας

Έστω A μιγαδικός ερμιτιανός, ή πραγματικός συμμετρικός, $n \times n$ πίνακας. Σε αυτή την περίπτωση καλείται θετικά ορισμένος πίνακας αν $x^* A x > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Ένας ερμιτιανός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Παράδειγμα:

Θα δείξουμε ότι ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι, $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$. Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 1$ (διπλή ιδιοτιμή) και $\lambda_2 = 4$. Εφόσον όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος και για $x \neq 0$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 > 0. \end{aligned}$$

1.1.16 Ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα

Έστω A είναι ένας $n \times n$ πίνακας . Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in C^n$ ονομάζεται δεξί ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του λ, δηλαδή είναι ένα διάνυσμα στήλη που πρέπει να τοποθετηθεί δεξιά από τον πίνακα A στην χαρακτηριστική εξίσωση $Ax = \lambda x$. Αντίστοιχα ένα μη μηδενικό διάνυσμα y που ικανοποιεί την εξίσωση $Ay = \lambda y$ καλείται αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του λ.

1.1.17 Φάσμα ενός πίνακα

Η εξίσωση $m_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$ καλείται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα $A \in C^n \to R$, ενώ το πολυώνυμο p(λ) ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Το σύνολο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οι οποίες και αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα A, ονομάζεται φάσμα και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5 \text{ ή } \lambda_2 = -2.$$

Συνεπώς, το φάσμα του πίνακα A είναι $\sigma(A) = \{-2{,}5\}$.

1.1.18 Κανονική μορφή Jordan

Εάν ένας πίνακας δεν διαγωνοποιείται, τότε ο στόχος μας είναι υπολογίσουμε μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας, έναν απλούστερο πίνακα, «σχεδόν διαγώνιο» όπως ο παρακάτω πίνακας. Αυτός θα έχει τις ιδιοτιμές του στην διαγώνιο, στην δευτερεύουσα διαγώνιο τα στοιχεία θα είναι 0 ή 1, και τα υπόλοιπα στοιχεία 0.

$$[T]_\beta = J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός λέγεται κανονική μορφή Jordan και είναι μοναδική για κάθε πίνακα. Τα διαγώνια block που εμφανίζονται (ένα για κάθε ιδιοτιμή) λέγονται Jordan blocks. Το κάθε block έχει εσωτερικά block, όσα και η γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής.

Ο πίνακας A θα είναι όμοιος με μια κανονική μορφή Jordan J αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $J = P^{-1}AP$.

Θεώρημα: Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο

$$h_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r},$$

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r},$$

αντίστοιχα, όπου λ_i οι ιδιοτιμές. (Υποθέτουμε πως έχει η πραγματικές ιδιοτιμές.) Τότε για την κανονική μορφή Jordan έχουμε:

Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

Α) Ο πίνακας Jordan αποτελείται από r το πλήθος Jordan blocks.

Β) Κάθε Jordan block είναι τύπου $n_i \times n_i$.

Από το ελάχιστο πολυώνυμο:

Γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένας υποπίνακας J_{ij} τάξης m_i. Οι άλλοι έχουν τάξη$\leq m_i$.

Δ) Ο αριθμός των J_{ij} ισούται με την γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο

$$h_A(x) = p_A(x) = (x-1)^2(x-5).$$

Επομένως θα έχουμε 2 Jordan block (2 ιδιοτιμές) και 1 υποπίνακα 2×2. Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Η ιδιοτιμή $\lambda = 5$ έχει ιδιοδιάνυσμα το $X_1 = (-4, -3, 9)^T$. Η ιδιοτιμή $\lambda = 1$ έχει ιδιοδιάνυσμα το $X_2 = (0, 1, 1)^T$.

Το $3^{ο}$ ιδιοδιάνυσμα που «λείπει» (γενικευμένο) θα το βρούμε ως εξής:

$$(A - I)\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_2} \text{, και βρίσκουμε το } X_3 = (-1, 1, 0)^T.$$

Επομένως, $P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $P^{-1}AP = J$.

1.2 Στοιχεία Ανάλυσης Πινάκων.

Στην ενότητα αυτή θα επεκταθούμε στην έννοια της νόρμας πίνακα στο $C^{n\times n}$, η οποία είναι βασικό κομμάτι της μελέτης μας.

Ορισμός 1.2.1. Μια συνάρτηση $\|\cdot\|: C^n \to R$ ονομάζεται νόρμα διανυσμάτων αν για κάθε $x, y \in C^n$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

i) $\|x\| \geq 0$.

ii) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν x=0.

iii) $\|ax\| = |a|\|x\|$ για κάθε $\alpha \in C$.

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Μία συνάρτηση $\|\cdot\|$: $C^n \to R$ που ικανοποιεί τα (i), (iii), (iv) του παραπάνω ορισμού καλείται ημι-νόρμα διανυσμάτων. Η ημι-νόρμα αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας της νόρμας, η οποία επιτρέπει σε μη μηδενικά διανύσματα να έχουν μηδενικό μέτρο.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα νορμών διανυσμάτων στο C^n είναι τα εξής:

i) Η $I_p - νόρμα$ (ή p-νόρμα), για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $p \geq 1$, ορίζεται ως

$$||x||p = ||[x_1 x_2 \cdots x_n]^T||p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

ii) Η ευκλείδεια νόρμα (ή $I_2 - νόρμα$) ορίζεται ως εξής:

$$\|x\|_2 = \|[x_1 x_2 \cdots x_n]^T\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Αποτελεί μια ειδική περίπτωση της p-νόρμας (για p=2) , είναι ίσως η πιο γνωστή νόρμα διανυσμάτων, κι επάγεται από το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

iii) Η αθροιστική νόρμα (ή $I_1 - νόρμα$) ορίζεται ως:

$$\|x\|_1 = \|[x_1 x_2 \cdots x_n]^T\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

iv) Η μέγιστη νόρμα (ή max-νόρμα ή $\infty - νόρμα$) ορίζεται ως:

$$\|x\|_\infty = \|[x_1 x_2 \cdots x_n]^T\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Το σύνολο $C^{n\times n}$ των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n^2, ο οποίος είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο C^{n^2}.

Συνεπώς είναι δυνατό να ορίσουμε νόρμες πινάκων με τρόπο ανάλογο με αυτόν που ορίσαμε τις νόρμες διανυσμάτων.

Ορισμός 1.2.2. Μία συνάρτηση $\|°\|$: $C^n \to R$ ονομάζεται νόρμα πινάκων αν για κάθε $A, B \in C^{n\times n}$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

i) $\|A\| \geq 0$.

ii) $\|A\| = 0$, αν και μόνο αν A=0.

iii) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ για κάθε $\alpha \in C$.

iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (τριγωνική ανισότητα).

v) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (υπο-πολλαπλασιαστική).

Ειδικότερα, για κάθε νόρμα πινάκων $\|°\|$ και για το μοναδιαίο πίνακα I_n, ισχύει

$$\|I_n\| = \|I_n^2\| \leq \left|\left|I_n\right|\right|^2 \Rightarrow \ \|I_n\| \geq 1.$$

Συνεπώς, για κάθε $A \in C^{n\times n}$, $1 \leq \|I_n\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| \Rightarrow \|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$.

Κάποιες από τις νόρμες διανυσμάτων αποτελούν νόρμες πινάκων, όταν εφαρμόζονται στο διανυσματικό χώρο $C^{n\times n}$, ενώ κάποιες άλλες όχι.

Ορισμός 1.2.3. Έστω ένας πίνακας $A \in C^{n\times n}$ με φάσμα $\sigma(A) = \{\lambda \in C : \det(\lambda I_n - A) = 0\}$. Η φασματική ακτίνα του A ορίζεται ως $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Η φασματική ακτίνα δεν αποτελεί νόρμα πινάκων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ LYAPUNOV

Θετικά ευσταθείς χαρακτηρίζονται οι πίνακες των οποίων οι ιδιοτιμές έχουν μη αρνητικά πραγματικά μέρη. Το κύριο κίνητρο για τη μελέτη των (θετικά) ευσταθών πινάκων πηγάζει από την επιθυμία να κατανοηθούν οι ιδιότητες ευστάθειας της λύσης ισιρροπίας των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Οι ερωτήσεις για μια τέτοια λύση ισορροπίας προκύπτουν σε μια μεγάλη γκάμα επιστημών όπως είναι τα μαθηματικά, οι φυσικές επιστήμες, η μηχανική, η οικονομία, οι βιολογικές επιστήμες κ.λπ. Σε κάθε έναν από αυτούς τους τομείς είναι απαραίτητο να μελετηθεί η δυναμική των συστημάτων των οποίων η κατάσταση αλλάζει, σύμφωνα με ορισμένους κανόνες, με την πάροδο του χρόνου και, ειδικότερα, να απαντηθούν ερωτήματα σχετικά με τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του συστήματος. Έτσι, η ευστάθεια ενός πίνακα, ένα πρώιμο εργαλείο στη μελέτη τέτοιων ερωτήσεων, είναι ένα σημαντικό θέμα που υπήρξε ένας σημαντικός τομέας αλληλεπίδρασης μεταξύ των εφαρμογών και της εξέλιξης της θεωρίας πινάκων.

2.1 Ευστάθεια λύσης της ισορροπίας για συστήματα γραμμικών σταθερών συντελεστών συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Θεωρούμε το σύστημα που αποτελείται από n συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

$$\frac{dx}{dt} = A[x(t) - \hat{x}], \quad \text{όπου } A \in M_n(R) \text{ και } x(t), \hat{x} \in R^n. \qquad (2.1.1).$$

Είναι σαφές ότι αν $x(\hat{t}) = \hat{x}$ κάποια στιγμή $\hat{t}$, τότε το $x(t)$ θα σταματήσει να μεταβάλλεται σε χρόνο $t = \hat{t}$. Έτσι, το $\hat{x}$ ονομάζεται λύση ισορροπίας γι' αυτό το σύστημα. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, το $x(t)$ θα σταματήσει να αλλάζει μόνο όταν έχει φτάσει στην λύση ισορροπίας $\hat{x}$.

Βασικές ερωτήσεις που σχετίζονται με ένα τέτοιο σύστημα είναι:

α) Θα συγκλίνει η $x(t)$ στο $\hat{x}$ καθώς το $t \to \infty$, δεδομένου ενός αρχικού σημείου $x(0)$,

β) Θα συγκλίνει η $x(t)$ στο $\hat{x}$ για όλες τις επιλογές των αρχικών δεδομένων $x(0)$.

Αν η $x(t)$ συγκλίνει στο $\hat{x}$ καθώς το $t \to \infty$ για κάθε επιλογή των αρχικών δεδομένων $x(0)$, τότε η λύση ισορροπίας λέγεται ότι είναι ολικά ευσταθής (globally stable). Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η λύση ισορροπίας είναι ευσταθής αν και μόνο αν κάθε ιδιοτιμή του A έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Ένας πίνακας A που ικανοποιεί αυτή τη σχέση ονομάζεται ευσταθής πίνακας. Αν ορίσουμε το e^{At} από τη δυναμοσειρά $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$, τότε το e^{At} είναι καλά ορισμένο (η σειρά συγκλίνει) για κάθε t και για κάθε A και $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$. Η μοναδική λύση $x(t)$ της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$x(t) = e^{At}[x(0) - \hat{x}] + \hat{x}\ . \qquad (2.1.2)$$

2.2 Τοπική ευστάθεια λύσης της ισορροπίας για ένα μη γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Οι ευσταθείς πίνακες είναι επίσης σχετικοί με τη μελέτη γενικότερων συστημάτων n εξισώσεων, οι οποίες δεν ανήκουν απαραίτητα στην κατηγορία των γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων $\frac{dx}{dt} = f[x(t) - \hat{x}]$, όπου κάθε στοιχείο της $f: R^n \to R^n$ θεωρούμε ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και f(x) = 0 αν και μόνο αν x = 0. Και πάλι, η x(t) σταματά να μεταβάλλεται όταν και μόνο όταν φτάσει στην λύση ισορροπίας $\hat{x}$ κι έτσι προκύπτουν φυσιολογικά οι ερωτήσεις σχετικά με την ευστάθεια αυτής της λύσης ισορροπίας. Τώρα, όμως, υπάρχουν πολλές πιθανές έννοιες ευστάθειας, οι οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν μόνο με τη θεωρία των πινάκων. Αυτό που μπορεί να αντιμετωπιστεί είναι μια έννοια τοπικής ευστάθειας. Αναρωτιόμαστε αν όταν το x(t) συγκλίνει στο $\hat{x}$ για κάθε επιλογή της αρχικής τιμής x(0) που είναι αρκετά κοντά στο $\hat{x}$, τότε το σύστημα θα συγκλίνει στη λύση ισορροπίας μετά από μερικές μικρές διαταραχές γύρω από την λύση ισορροπία;

Οι έννοιες του "μικρού" και του "αρκετά κοντά" μπορούν να γίνουν ακριβείς, κι εφαρμόζοντας το θεώρημα του Taylor, το σύστημα (1) μπορεί να αντικατασταθεί από το ακόλουθο γραμμικό σύστημα $\frac{dx}{dt} = J_f[x(t) - \hat{x}]$ σε κάποια γειτονική περιοχή του $\hat{x}$, χωρίς να μεταβάλλουμε τις ποιοτικές δυναμικές ιδιότητες του αρχικού συστήματος. Εδώ $J_f \equiv \frac{df_i}{dx_j}(0)$ είναι η Ιακωβιανή της f υπολογισμένη στην αρχή των αξόνων. Έτσι, $x(t) \to \hat{x}$ για όλες τις αρχικές τιμές x(0) σε αυτήν την γειτονιά ($\text{το}\ \hat{x}$ καλείται τοπικά ευσταθές σημείο ισορροπίας) αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής J_f έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, δηλαδή η J_f είναι ένας ευσταθής πίνακας.

2.3 Θεμελιώδεις ορισμοί

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των ευσταθών πινάκων εξετάζοντας τη γενική έννοια της αδράνειας των πινάκων στο M_n .

Για τυχαίο πίνακα $A \in M_n$, ορίζουμε:

$i_+(A)$: τον αριθμό των ιδιοτιμών του A, συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων με θετικό πραγματικό μέρος.

$i_-(A)$: τον αριθμό των ιδιοτιμών του A συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων, με αρνητικό πραγματικό μέρος.

$i_0(A)$: τον αριθμό των ιδιοτιμών του A, συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων, με μηδενικό πραγματικό μέρος.

Τότε i_+ (A) + i_-(A) + i_0 (A) = n και το διάνυσμα γραμμή i (A) = [i_+(A), i_- (A), i_0 (A)] καλείται αδράνεια του A. Αυτό γενικεύει την έννοια της αδράνειας ενός ερμιτιανού πίνακα.

Για τους ερμιτιανούς πίνακες *A, B*∈ M_n, ο νόμος της αδράνειας, τον οποίο διατύπωσε ο Sylvester, αναφέρει ότι ο *B* είναι ισοδύναμος (congruent) με τον *A* αν και μόνο αν *i*(*A*) = *i*(*B*).

Ένας πίνακας *A*∈ M_n, λέγεται ότι είναι θετικά ευσταθής αν i(A) = [n,0,0], δηλαδή αν i_+ (A) = n. Αν ο A είναι θετικά ευσταθής τότε υπάρχουν πολλοί πίνακες που σχετίζονται απλά με τον πίνακα A. Επίσης, αν ο πίνακας A∈M_n είναι θετικά ευσταθής, τότε κάθε πίνακας από τους παρακάτω είναι θετικά ευσταθής:

α) aA + bI, $a \geq 0, b \geq 0$, a+$b > 0$,

β) A^{-1},

γ) A^*,

δ) A^T.

Θεώρημα 2.3.1. Αν *A*∈ M_n (R) είναι θετικά ευσταθής, τότε η ορίζουσα του *A* είναι θετική (det *A*>0).

Απόδειξη. Δεδομένου ότι ο *A* είναι πραγματικός, όποιες μιγαδικές ιδιοτιμές προκύπτουν είναι συζυγείς, των οποίων το γινόμενο συνεισφέρει θετικά στην ορίζουσα, κι εφόσον ο *A* είναι θετικά ευσταθής, οι πραγματικές ιδιοτιμές είναι θετικές. Συνεπώς, το γινόμενο τους συνεισφέρει θετικά στην ορίζουσα. ■

Πρόταση 2.3.2. Έστω A∈ M_n (R) είναι θετικά ευσταθής, τότε ο πίνακας A^k έχει θετική ορίζουσα για κάθε ακέραιο k.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.3.1 έχουμε ότι $detA > 0$. Οπότε $det(\ A^k\ ) = \ det(\ A\ )^k > 0$.■

Παρατήρηση: Το αντίστροφο του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, τότε det$A = 1 > 0$.

Ωστόσο det$|A - \lambda I|$ = $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 = 0$, άρα $\lambda = -1$. Οπότε το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό και άρα ο πίνακας A δεν είναι θετικά ευσταθής. ■

Παρατήρηση: Αν A∈ M_n (R) είναι θετικά ευσταθής, τότε ο πίνακας A^2 δεν είναι απαραίτητα θετικά ευσταθής.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, τότε $\det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 5 = 0$ άρα $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Λύνοντας την εξίσωση, έχουμε ότι $\lambda_1 = 1 + 2i$ και $\lambda_2 = 1 - 2i$, επομένως ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής.

Για τον πίνακα $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ έχουμε ότι $\det|A^2 - \lambda I| =$ $= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -10 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5+\lambda)(1+\lambda) + 20 = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$. Λύνοντας την εξίσωση έχουμε ότι $\lambda_1 = -3 + 4i$ και $\lambda_2 = -3 - 4i$. Οπότε, ενώ ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής, ο πίνακας A^2 δεν είναι. ■

Πρόταση 2.3.3. Εάν ένας πίνακας $A \in M_n$ είναι θετικά ευσταθής, τότε $Re(trA) > 0$.

Απόδειξη. Επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής έπεται ότι όλες οι ιδιοτιμές του έχουν θετικό πραγματικό μέρος, οπότε $Re(trA) > 0$. ■

Πρόταση 2.3.4. Εάν ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ είναι θετικά ευσταθής, τότε $trA > 0$.

Απόδειξη. Αν $A \in M_n(R)$, όλες οι μιγαδικές ιδιοτιμές που δεν είναι πραγματικές είναι ζεύγη συζυγών. Οπότε αθροίζοντάς τες, όλα τα μιγαδικά μέρη απαλείφονται, ενώ όλα τα πραγματικά μέρη είναι θετικά επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής. Άρα $trA > 0$. ■

Όπως το φάσμα των ιδιοτιμών $\sigma(\cdot)$, το πεδίο τιμών $F(\cdot)$ είναι ένα σύνολο μιγαδικών αριθμών το οποίο αντιστοιχίζεται με έναν $n \times n$ πίνακα A.

$$F(A) \equiv \{x^*Ax : x \in C^n, x^*x = 1\}.$$

Το φάσμα ενός πίνακα A είναι ένα διακριτό σύνολο, ενώ το πεδίο τιμών μπορεί να είναι ένα συνεχές σύνολο, πάντοτε όμως είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο. Όπως το φάσμα, το πεδίο τιμών είναι ένα σύνολο που μπορεί να μας φανεί χρήσιμο για να μάθουμε κάτι που αφορά τον πίνακα A και μπορεί συχνά να μας δώσει πληροφορίες που το φάσμα από μόνο του δεν μπορεί να μας δώσει. Οι ιδιοτιμές των ερμιτιανών και των κανονικών πινάκων έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες και το πεδίο τιμών αποτυπώνει συγκεκριμένες πτυχές αυτής της πλούσιας δομής για γενικούς πίνακες.

Λήμμα 2.3.5.(ιδιότητα προβολής). Για κάθε $A \in M_n$ ισχύει ότι $F(H(A)) = ReF(A)$.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε

$$x^*H(A)x = x^*\frac{1}{2}(A + A^*)x = \frac{1}{2}(x^*Ax + x^*A^*x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^*Ax + (x^*Ax)^*) = \frac{1}{2}\left(x^*Ax + \overline{x^*Ax}\right)$$

$$= Rex^*Ax.$$

Οπότε, κάθε σημείο στο $F(H(A))$ είναι της μορφής Rez για κάποιο $z \in F(A)$ και αντίστροφα. ■

Λήμμα 2.3.6. Για κάθε $A \in M_n$ ισχύει ότι $\sigma(A) \subset F(A)$.

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \sigma(A)$. Τότε υπάρχει κάποιο μη μηδενικό $x \in C^n$ το οποίο μπορούμε να το θεωρήσουμε μοναδιαίο διάνυσμα, για το οποίο $Ax = \lambda x$, συνεπώς έχουμε

$$\lambda = \lambda x^* x = x^*(\lambda x) = x^* A x \in F(A).$$ ■

Λήμμα 2.3.7. Για κάθε $A, U \in M_n$ με τον U να είναι ορθομοναδιαίος, $F(U^*AU) = F(A)$.

Απόδειξη. Επειδή ένας ορθομοναδιαίος μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτη την επιφάνεια της Ευκλείδιας μοναδιαίας σφαίρας, οι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι αποτελούν τα σύνολα $F(U^*AU)$ και $F(A)$ είναι οι ίδιοι. Αν $x \in C^n$ και $x^*x = 1$ έχουμε ότι $x^*(U^*AU)x = y^*Ay \in F(A)$ όπου $y = Ux$, άρα $y^*y = x^*U^*Ux = x^*x = 1$ άρα $F(U^*AU) = F(A)$. ■

Λήμμα 2.3.8. Αν $A \in M_n$ είναι κανονικός πίνακας, τότε $F(A) = Co\big(\sigma(A)\big)$.

Απόδειξη. Αν ο A είναι κανονικός, τότε $A = U^*\Lambda U$, όπου $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ είναι διαγώνιος πίνακαςκαι ο U είναι ορθομοναδιαίος πίνακας. Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι $F(A) = F(\Lambda)$ και άρα

$$x^*\Lambda x = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \lambda_i.$$

Ωστόσο $F(\Lambda)$ είναι ακριβώς το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των διαγώνιων στοιχείων του Λ $(x^*x = 1 \Rightarrow \sum_i |x_i|^2 = 1 \; και \; |x_i|^2 \geq 0$. Επειδή τα διαγώνια στοιχεία του Λ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A έπεται ότι $F(A) = Co\big(\sigma(A)\big)$. ■

Πρόταση 2.3.9. Αν $A \in M_n$ και $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ είναι θετικά ορισμένος τότε ο A είναι θετικά ευσταθής. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη. Αν ο $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ είναι θετικά ορισμένος τότε από το Λήμμα 2.3.6. έχουμε ότι $Re\sigma(A) \subset ReF(A)$ και από το Λήμμα 2.3.5 έχουμε ότι $ReF(A) = F(H(A))$. Όμως από την στιγμή που ο $H(A)$ είναι θετικά ορισμένος τότε από το Λήμμα 2.3.8 το $F(\frac{1}{2}(A + A^*))$ εμπεριέχεται στον πραγματικό άξονα και κατά συνέπεια κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A θα έχει θετικό πραγματικό μέρος, οπότε ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής. Για να δείξουμε ότι το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, τότε $\det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$ και επομένως έχουμε μια διπλή ιδιοτιμή την $\lambda = 3$, οπότε ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής. Ωστόσο $\frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ και $\det|H(A) - \lambda I|$

$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda^2) - 16 = 0$, άρα $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 7$. Οπότε δεν είναι ένας θετικά ευσταθής πίνακας. ■

Πρόταση 2.3.10. Αν ο $A \in M_n(R)$ είναι θετικά ορισμένος τότε είναι θετικά ευσταθής.

Απόδειξη. Επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές και κατά συνέπεια το πραγματικό τους μέρος είναι θετικό, δηλαδή ικανοποιείται ο ορισμός του θετικά ευσταθούς πίνακα. ■

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι θετικά ορισμένοι πίνακες είναι ειδική περίπτωση των θετικά ευσταθών πινάκων.

Πρόταση 2.3.11. Αν ο $A \in M_n(R)$ είναι θετικά ευσταθής, τότε $\sigma(A^*) \cap \sigma(-A) = \emptyset$.

Απόδειξη. Αν ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής γνωρίζουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Ως γνωστόν, οι ιδιοτιμές του πίνακα A^* είναι οι συζυγείς ιδιοτιμές του πίνακα A, ενώ οι ιδιοτιμές του πίνακα $-A$ είναι οι αρνητικές ιδιοτιμές του πίνακα A. Οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα A^* έχουν θετικό πραγματικό μέρος, ενώ οι ιδιοτιμές του πίνακα $-A$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Άρα $\sigma(A^*) \cap \sigma(-A) = \emptyset$. ■

2.4 Το θεώρημα Lyapunov

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια βασική εκδοχή ενός θεμελιώδους θεωρήματος σχετικά με τους θετικά ευσταθείς πίνακες. Συγκεκριμένα, θα γίνει αναφορά στο θεώρημα Lyapunov, καθώς και σε πολλές ενδιαφέρουσες γενικεύσεις του ιδίου θεωρήματος. Οι θετικά ορισμένοι πίνακες είναι μια ειδική περίπτωση θετικών ευσταθών πινάκων, αλλά το θεώρημα Lyapunov δείχνει ότι είναι στενά συνδεμένοι με όλους τους θετικά ευσταθείς πίνακες. Ακριβώς όπως μπορούμε να σκεφτούμε τους ερμιτιανούς πίνακες ως ένα φυσικό πίνακα ανάλογο πραγματικών αριθμών και τους θετικά ορισμένους ερμιτιανούς πίνακες ως ένα ανάλογο των θετικών πραγματικών αριθμών, οι θετικά ευσταθείς πίνακες είναι ένας φυσικός πίνακας ανάλογος των μιγαδικών αριθμών με θετικό πραγματικό μέρος. Αυτή η έννοια είναι μερικές φορές χρήσιμη, αλλά όχι πάντα. Μπορεί να είναι χρήσιμη για να θυμηθούμε το θεώρημα του Lyapunov, γιατί αν g$\in R$ είναι θετικό και α ∈ C, τότε 2Re (ag) = [ag + (ag)*] > 0 αν και μόνο αν Re(a) > 0.

Το θεώρημα Lyapunov διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 2.4.1. Έστω $A\in M_n$. Τότε ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής αν και μόνο αν υπάρχει ένας θετικά ορισμένος πίνακας G$\in M_n$ τέτοιος ώστε:

$$GA + A^* G = H, \qquad (2.1.3),$$

όπου H είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας.

Επιπροσθέτως, υποθέτοντας ότι υπάρχουν ερμιτιανοί πίνακες $G, H \in M_n$, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (3) και υποθέτοντας ότι ο πίνακας H είναι θετικά ορισμένος, τότε ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής αν και μόνο αν ο πίνακας G είναι θετικά ορισμένος.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι η εξής:

Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $S \in M_n$ μπορούμε να επιτύχουμε μία συζυγή ισοδυναμία της σχέσης (3) και να καταλήξουμε ότι

$$S^*GSS^{-1}AS + S^*A^*S^{*-1}S^*GS = S^*HS,$$

η οποία θα μπορούσε να γίνει

$$\hat{G}\hat{A} + \hat{A}^*\hat{G} = \widehat{H}, \qquad (2.1.4),$$

όπου $\hat{G} = S^*GS$, $\hat{A} = S^{-1}AS$ και $\widehat{H} = S^*HS$.

Δηλαδή, η ισοδυναμία εφαρμόζεται στις αντικαταστάσεις των G και H από τους συζυγείς ισοδύναμους ερμιτιανούς πίνακες $\hat{G}$ και $\widehat{H}$ και στην αντικατάσταση του A από τον πίνακα $\hat{A}$ (Α και $\hat{A}$ είναι αντιστρέψιμοι). Η ισοδυναμία διατηρεί την αδράνεια των ερμιτιανών πινάκων και η ομοιότητα διατηρεί σταθερές τις ιδιοτιμές.

Επίσης, υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι θετικά σταθερός και ότι βρίσκεται στην τροποποιημένη κανονική μορφή Jordan στην οποία όλα τα μη μηδενικά υπερ-διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με το $\varepsilon > 0$. Το ε επιλέγεται να είναι μικρότερο από το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής του πίνακα A.

Κατόπιν ορίζουμε $\hat{G} = I \in M_n$ και παρατηρούμε ότι πίνακας που προκύπτει $\hat{G}\hat{A} + \hat{A}^*G = \hat{A} + \hat{A}^* = 2H(\hat{A}) = \widehat{H} \in M_n$ στη σχέση (4) είναι ερμιτιανός και τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι θετικά. Έτσι πίνακας H είναι γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος. Επομένως οι $\hat{G}$ και $\widehat{H}$ είναι θετικά ορισμένοι και αποδεικνύεται ο πρώτος ισχυρισμός του θεωρήματος Lyapunov.

Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι θετικά ορισμένοι πίνακες G και H οι οποίοι ανήκουν στο M_n που ικανοποιούν την σχέση (4). Εν συνεχεία, γράφουμε $GA = B$ έτσι ώστε $B + B^* = H$, όπου ο H είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας.

Έστω ότι ο $G^{1/2}$ είναι η μοναδική θετικά ορισμένη τετραγωνική ρίζα του G και ότι ο $G^{-1/2}$ είναι ο αντίστροφός του. Πολλαπλασιάζουμε και από αριστερά και από δεξιά με $G^{-1/2}$, οπότε έχουμε

$$G^{1/2}AG^{-1/2} = G^{-1/2}BG^{-1/2} ,$$

όπου

$$G^{-1/2}BG^{-1/2} + (G^{-1/2}BG^{-1/2})^* = G^{-1/2}HG^{-1/2}\ .$$

Ο $G^{-1/2}HG^{-1/2}$ είναι θετικά ευσταθής.

Εφόσον $G^{-1/2}AG^{-1/2}$ έχει θετικά ορισμένο ερμιτιανό μέρος, τότε ο $G^{-1/2}AG^{-1/2}$ κι ο A είναι θετικά ευσταθείς πίνακες. Αυτό επαληθεύει την ισοδυναμία και των δύο ισχυρισμών.

Για να επαληθεύσουμε την τελευταία απαραίτητη προϋπόθεση, θεωρούμε τους πίνακες A, G_1, όπου ο A είναι θετικά ευσταθής και ο G_1 είναι ερμιτιανός. Επίσης ισχύει ότι $G_1A + A^*G_1 = H_1$, όπου ο H_1 είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας.

Υποθέτουμε ότι ο G_1 δεν είναι θετικά ορισμένος. Από τον αρχικό ισχυρισμό έχει ήδη αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας θετικά ορισμένος πίνακας $G_2 \in M_n$ τέτοιος ώστε $G_2A + A^*G_2 = H_2$, όπου ο H_2 είναι επίσης θετικά ορισμένος. Ορίζουμε $G_1A = B_1$ και $G_2A = B_2$, τέτοιοι ώστε $B_1 = \frac{1}{2}(H_1 + S_1)$ και $B_2 = \frac{1}{2}(H_2 + S_2)$ με $S_1, S_2 \in M_n$ και οι S_1, S_2 είναι αντι-ερμιτιανοί πίνακες.

Θεωρούμε τον ερμιτιανό πίνακα $G(a) = aG_1 + (1-a)G_2$, για $\alpha \in [0,1]$. Όλες οι ιδιοτιμές του G(0)=G(2) είναι θετικές , ενώ τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του $G(1) = G_1$ δεν είναι θετική. Εφόσον οι ιδιοτιμές του G(α) είναι πάντοτε θετικές και εξαρτώνται συνεχώς από το α, υπάρχει κάποιο $\alpha \in [0,1]$ τέτοιο ώστε τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του $G(a_0)$ είναι μηδενική. Συνεπώς ο πίνακας *G* είναι μη αντιστρέψιμος.

Ο πίνακας $G(a_0)A = a_0B_1 + (1-a_0)B_2$ έχει θετικά ορισμένο ερμιτιανό μέρος. Αυτό είναι μία αντίφαση. Ένας πίνακας με θετικά ορισμένο ερμιτιανό μέρος είναι αντιστρέψιμος, ενώ ο *A* είναι μη αντιστρέψιμος διότι ο $G(a_0)$ είναι μη αντιστρέψιμος. Επομένως, ο γνήσιος ερμιτιανός πίνακας G_1 είναι αδιαμφισβήτητα θετικά ορισμένος. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Η εξίσωση (4) αναφέρεται συχνά ως εξίσωση Lyapunov και ένας πίνακας *G* για τον οποίο ισχύει ότι $GA + A^*G$ είναι θετικά ορισμένος καλείται λύση Lyapunov της εξίσωσης αυτής.

Το βασικό θεώρημα Lyapunov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποδείξει τους εφικτούς όρους στο δεξί μέλος της εξίσωσης (4) και να ελέγξει καλύτερα την ευστάθεια του $A \in M_n$. ■

Θεώρημα 2.4.2. Έστω ότι ο $A \in M_n$. είναι θετικά ευσταθής. Για κάθε δεδομένο $H \in M_n$ υπάρχει μία μοναδική λύση *G* της εξίσωσης (4) . Αν ένα δοσμένο δεξιό μέλος *H* είναι ερμιτιανό τότε η αντίστοιχη λύση *G* είναι απαραιτήτως ερμιτιανή. Αν ο *H* είναι θετικά ορισμένος, τότε ο πίνακας G είναι και αυτός θετικά ορισμένος.

Πόρισμα 2.4.3. Έστω ότι ο $A \in M_n$. Ο *A* είναι θετικά ευσταθής αν και μόνο αν υπάρχει θετικά ορισμένος πίνακας *G*, ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση

$$GA + A^*G = I. \tag{2.1.5}$$

Απόδειξη. Αν υπάρχει θετικά ορισμένος πίνακας G τέτοιος ώστε $GA + A^*G = I$ τότε επειδή προφανώς ο πίνακας I είναι θετικά ορισμένος από το θεώρημα Lyapunov έπεται ότι ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθείς. Αντίστροφα από το Θεώρημα 2.4.2 αν ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής τότε υπάρχει μια μοναδική λύση G της εξίσωσης $GA + A^*G = I$ και επιπλέον επειδή ο πίνακας I είναι θετικά ορισμένος τότε και ο πίνακας G θα είναι θετικά ορισμένος. Η μοναδικότητα της λύσης εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 2.4.2. ■

Αν ο A είναι θετικά ευσταθής, τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση G στην εξίσωση (5). Ο G είναι θετικά ορισμένος. Αντιστρόφως, αν για ένα δεδομένο πίνακα $A \in M_n$ υπάρχει μία θετικά ορισμένη λύση G, τότε ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής και ο G είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (5).

Ένας σίγουρος έλεγχος για την θετική ευστάθεια ενός δοσμένου πίνακα $A \in M_n$ είναι ο εξής:

Επιλέγουμε ένα θετικά ορισμένο πίνακα H και προσπαθούμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (4) ως προς G. Αν υπάρχει μία λύση, ελέγχουμε αν ο G είναι θετικά ορισμένος.

Ο πίνακας A είναι ευσταθής, αν και μόνο αν υπάρχει μία λύση G τέτοια ώστε ο G να είναι θετικά ορισμένος.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Θα δείξουμε ότι ο A είναι θετικά ευσταθής χρησιμοποιώντας το θεώρημα Lyapunov. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι υπάρχει θετικά ορισμένος πίνακας G, τέτοιος ώστε $GA + A^*G = I$.

Θεωρούμε τη γενική μορφή του $G = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ και λύνουμε ως προς τα α, b, d.

Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης, κάνοντας τις πράξεις, είναι ίση με

$$\begin{bmatrix} 2(-a+2b) & 2(-a+b+d) \\ 2(b+d-a) & 2(-2b+3d) \end{bmatrix}.$$

Εξισώνοντας,

$$\begin{bmatrix} 2(-a+2b) & 2(-a+b+d) \\ 2(b+d-a) & 2(-2b+3d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε μοναδική λύση $a = \frac{7}{2}$, $b = 2$, $d = \frac{3}{2}$.

Οπότε

$$G = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 2 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Τώρα αφού ο G έχει θετικές ιδιοτιμές, είναι θετικά ορισμένος. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Lyapunov ο A είναι θετικά ευσταθής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Η ΣΥΝΘΗΚΗ RUTH-HURWITZ

Υπάρχει ακόμη ένα σημαντικό κριτήριο ευστάθειας, το οποίο επικεντρώνεται στο άθροισμα κύριων υπο-οριζουσών, ή χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A \in M_n$.

Ορισμός 3.1. Έστω $A \in M_n$ και $E_k(A)$ είναι το άθροισμα των $\binom{n}{k}$ κύριων υπο-οριζουσών του πίνακα A τάξης k, όπου $k = 1, 2, \dots, n$. Δηλαδή $\pm E_k$ είναι ο συντελεστής του όρου t^{n-k} στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α . Για παράδειγμα, $trA = E_1(A)$ και $detA = E_n(A)$. Αυτό οφείλεται στην διατήρηση του γωνιακού αριθμητικού πεδίου υπό τη σχέση της ισοτιμίας.

Έστω ένας πίνακας $A \in M_n$ κι ένας αντιστρέψιμος πίνακας $C \in M_n$. Τότε $F'(C^*AC) = F'(A)$. Πράγματι, αν $x \in C^n$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, τότε για $y = Cx \neq 0$, ισχύει $x^*C^*ACx = y^*Ay$. Επομένως, $F'(C^*AC) \subset F'(A)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $F'(A) \subset F'(C'AC)$ εφόσον $A = (C^{-1})^*C^*AC(C^{-1})$.

Ορισμός 3.2. Ο πίνακας Routh-Hurwitz $\Omega(A) \in M_n(R)$ συναρτήσει του πίνακα A είναι ο εξής:

$$\begin{bmatrix} E_1(A) & E_3(A) & E_5(A) & \cdots & 0 \\ 1 & E_2(A) & E_4(A) & \cdots & 0 \\ 0 & E_1(A) & E_3(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & E_n(A) \end{bmatrix}.$$

Τα στοιχεία της διαγωνίου του $\Omega(A) = [\omega_{\ ij}]$ είναι $\omega_{ii} = E_i(A)$. Στη στήλη πάνω από τα ω_{ii} είναι τα στοιχεία $\omega_{i-1,i} = E_{i+1}(A)$, $\omega_{i-2,i} = E_{i+2}(A)$ μέχρι την πρώτη γραμμή ω_{1i} ή μέχρι το $E_n(A)$ ανάλογα με το ποιο θα προκύψει πρώτο. Όλα τα στοιχεία που εισάγονται πάνω από το $E_n(A)$ είναι μηδενικά. Στη στήλη κάτω από τα ω_{ii} είναι τα στοιχεία $\omega_{i+k,i} = E_{i-k}(A)$, για $1 \leq k \leq n - i$, όπου ορίζουμε $E_0(A) = 1$ και $E_\alpha(A) = 0$ για α αρνητικό.

Σύμφωνα με το κριτήριο Routh -Hurwitz, ο πίνακας $A \in M_n$ είναι θετικά ευσταθής αν όλες οι αρχικές κύριες υπο-ορίζουσες του *Ω(A)* είναι θετικές.

Επίσης, αξιοσημείωτο είναι ότι:

α) Το κριτήριο ευστάθειας Routh -Hurwitz είναι μία ειδική περίπτωση των πιο γενικών και σύνθετων συνθηκών για τον προσδιορισμό της αδράνειας του πίνακα $A \in M_n(R)$ σε συγκεκριμένες συνθήκες.

β) Το κριτήριο Routh -Hurwitz δύναται να καταστεί ισοδύναμα σαν ένα test «θετικής ευστάθειας» για ένα δεδομένο πολυώνυμο, δηλαδή. ένα test για το αν όλα τα μηδενικά στοιχεία του βρίσκονται στο θετικό ημιεπίπεδο .

Θεώρημα 3.3. (Κριτήριο ευστάθειας των Routh -Hurwitz) Ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ είναι θετικά ευσταθής αν και μόνο αν οι αρχικές κύριες υπο-ορίζουσες του πίνακα *Ω (A)* είναι θετικές.

Μια σύγχρονη τεχνική απόδειξης είναι η παρακάτω.

Απόδειξη. Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A σε όρους των $E_k(A)$ και κατασκευάζουμε έναν πίνακα, ο οποίος έχει αυτό το πολυώνυμο σαν χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Κατόπιν, εφαρμόζουμε το θεώρημα Lyapunov (πραγματοποιώντας πολλές αλγεβρικές πράξεις) για να αποκτήσει τις συνθήκες Routh -Hurwitz. ■

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ και $k \in <4>$. Υπολογίζοντας τα αθροίσματα των κύριων υποοριζουσών του πίνακα A έχουμε το εξής

$$E_1(A) = 12, \quad E_2(A) = 25, \quad E_3(A) = 39, \quad E_4(A) = 60.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι όλα τα παραπάνω αθροίσματα εμφανίζονται και στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, το οποίο είναι το εξής

$$\rho(\lambda) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 25\lambda^2 - 39\lambda + 60.$$

Τώρα ο πίνακας Routh-Hurwitz συναρτήσει του πίνακα *A* είναι ο εξής:

$$\Omega(A) = \begin{bmatrix} 12 & 39 & 0 & 0 \\ 1 & 25 & 60 & 0 \\ 0 & 12 & 39 & 0 \\ 0 & 1 & 25 & 60 \end{bmatrix},$$

και $\Omega_k(A)$ είναι όλοι οι αρχικοί κύριοι υποπίνακες του $\Omega(A)$, για κάθε k. Τώρα υπολογίζοντας τις ορίζουσες των αρχικών κύριων υποπινάκων του $\Omega(A)$ έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

$$det\Omega_1(A) = 12, \quad det\Omega_2(A) = 261, \quad det\Omega_3(A) = 1.539, \quad det\Omega_4(A) = 92.340.$$

Επειδή είναι όλες θετικές, από το Θεώρημα 3.3 έχουμε ότι ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ LYAPUNOV

Το θεμελιώδες θεώρημα Lyapunov μπορεί να γενικευθεί με πολλούς τρόπους. Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε μία επιλογή πολλών γενικεύσεων.

Οι γενικεύσεις περιέχουν:

α) Συνθήκες κάτω από τις οποίες η θετική ευστάθεια μπορεί να επιτευχθεί όταν η λύση G είναι θετικά ορισμένη, αλλά το δεξί μέλος H είναι μόνο θετικά ημιορισμένο.

β) Το αποτέλεσμα της γενικής αδράνειας όταν το δεξί μέλος H της σχέσης $GA + A^*G = H$ είναι θετικά ορισμένο, αλλά η λύση G είναι ερμιτιανός πίνακας της γενικής αδράνειας.

γ) Συνθήκες θετικής ευστάθειας, οι οποίες πιθανώς περιλαμβάνουν θετικά ορισμένα πολλαπλάσια του πίνακα A.

Θεωρούμε την εξίσωση Lyapunov

$$GA + A^*G = H \;, \quad \text{όπου } A\,, G\,, H \in M_n \tag{4.1.1}$$

στην οποία θεωρούμε ότι ο πίνακας G είναι ερμιτιανός. Για αυτό το λόγο κι ο πίνακας H είναι ερμιτιανός.

Ορίζουμε τον πίνακα $S = GA - A^*G$ (4.1.2), έτσι ώστε ο S να είναι αντι-ερμιτιανός.

Έτσι προκύπτει ότι

$$2GA = H + S\,. \tag{4.1.3}$$

Ορισμός 4.1. Ένας πίνακας $A \in M_n$ καλείται θετικά ημιευσταθής αν $i_-(A) = 0$, δηλαδή αν κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A έχει μη αρνητικό πραγματικό μέρος.

Λήμμα 4.2. Έστω ο πίνακας $A \in M_n$. Αν $GA + A^*G = H$ για κάποιους θετικά ορισμένους πίνακες $G \in M_n$ και κάποιους θετικά ημιορισμένους πίνακες $H \in M_n$, τότε ο πίνακας Α είναι θετικά ημιευσταθής.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lambda \in \sigma(A)$ και Ax=λx, $x \neq 0$.

Τότε $2GAx = 2\lambda Gx$ κι από τη σχέση (4.1.3) προκύπτει ότι $(H + S)x = 2\lambda Gx$. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με x^* προκύπτει ότι:

$$x^*(H + S)x = 2\lambda x^*Gx\,.$$

Η εξαγωγή των πραγματικών μερών δίνει:

$$2(Re\lambda)x^*Gx = x^*Hx \tag{4.1.4}$$

Εφόσον $x^*Gx > 0$ και $x^*Hx \geq 0$, προκύπτει ότι $Re\lambda \geq 0$. ■

Θεώρημα 4.3. Έστω ο πίνακας $A \in M_n$. Υποθέτουμε ότι $GA + A^*G = H$ για κάποιους θετικά ορισμένους πίνακες $G \in M_n$ και κάποιους θετικά ημιορισμένους πίνακες $H \in M_n$. Έστω $S = GA - A^*G$, τότε ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής αν και μόνο αν κανένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $G^{-1}S$ δεν ανήκει στον μηδενοχώρο του H.

Απόδειξη. Έστω ότι $x \neq 0$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $G^{-1}S$, το οποίο ανήκει στο μηδενοχώρο του Η. Τότε για κάποια $\lambda \in C$ ισχύει ότι $\lambda Gx = Sx = (H + S)x = 2GAx$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $Ax = \frac{1}{2}\lambda x$. Εφόσον $\frac{1}{2}\lambda$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα Α και από την σχέση(4.1.4), προκύπτει ότι $2Re\lambda = \frac{x^*Hx}{x^*Gx} = 0$ (διότι το διάνυσμα x ανήκει στον πυρήνα του H), τότε ο πίνακας A δεν είναι θετικά ευσταθής. Αυτό σημαίνει ότι η θετική ευστάθεια του A συνεπάγεται ότι κανένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $G^{-1}S$ δεν ανήκει στον πυρήνα του H.

Εξαιτίας του λήμματος 4.2, όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν μη αρνητικό πραγματικό μέρος. Αν ο πίνακας A δεν είναι θετικά ευσταθής, τότε υπάρχει ένα $\lambda \in \sigma(A)$ με $Re\lambda = 0$. Από την σχέση (Γ4), συμπεραίνουμε ότι $x^*Hx = 0$ αν $x \neq 0$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A συναρτήσει του λ. Εφόσον ο πίνακας Η είναι θετικά ημιορισμένος, αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $Hx=0$, δηλαδή αν το x ανήκει στον πυρήνα του H. Αφού το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα συναρτήσει του λ ισχύει ότι $(H + S)x = 2\lambda Gx$ κι αφού $Hx=0$, συμπεραίνουμε ότι $Sx = 2\lambda Gx$, δηλαδή ότι το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $G^{-1}S$, το οποίο ανήκει στον πυρήνα του H. Αυτό σημαίνει ότι η κατάσταση που προκύπτει συνεπάγεται τη θετική ευστάθεια του πίνακα A. ■

Ορισμός 4.4. Θεωρούμε τους πίνακες $A \in M_n$ και $B \in M_n$. Το ζευγάρι των πινάκων (A,B) λέγεται ότι είναι ελέγξιμο, αν $rank[B\ AB\ A^2B \ldots A^{n-1}B] = n$.

Η σύλληψη της ιδέας της ελεγξιμότητας προκύπτει από την θεωρία του γραμμικού ελέγχου των συστημάτων των διαφορικών εξισώσεων. Έστω $A \in M_n(R)$ και $B \in M_n(R)$.

Για κάθε δοσμένη συνεχή διανυσματική συνάρτηση $u(t) \in R^m$ το πρόβλημα των αρχικών τιμών $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$ έχει μία μοναδική λύση x(t) για κάθε δοσμένο $x_0 \in R^n$. Η διανυσματική συνάρτηση $u(\cdot)$ είναι ο έλεγχος.

Για κάθε $\hat{x}, x_0 \in R^n$ υπάρχει $\hat{t} < \infty$ και διάνυσμα ελέγχου $u(\cdot)$ τέτοια ώστε η λύση να ικανοποιεί την σχέση $x(\hat{t}) = \hat{x}$ αν και μόνο αν το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο σύμφωνα με τον ορισμό 4.4 .

Παρατήρηση 4.5. Αν ένας θετικά ορισμένος πίνακας $G \in M_n$ κι ένα θετικά ημιορισμένος πίνακας $H \in M_n$ ικανοποιεί την σχέση (4.1.1), τότε ο πίνακας $A \in M_n$ είναι θετικά ευσταθής αν και μόνο αν το ζεύγος (A^*, H) είναι ελέγξιμο.

Θεώρημα 4.6. Έστω ο δοσμένος πίνακας $A \in M_n$. Υπάρχουν ένας ερμιτιανός πίνακας $G \in M_n$ κι ένας θετικά ορισμένος πίνακας $H \in M_n$ τέτοιος ώστε $GA + A^*G = H$ αν και μόνο αν $i_0(A) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση $i(A) = i(G)$.

Απόδειξη. Αν $i_0(A) = 0$, ανακαλούμε την σχέση (2) στην οποία παίρνουμε τον $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}]$ στην κανονική μορφή Jordan με κάποια μη μηδενικά υπερδιαγώνια στοιχεία $\varepsilon > 0$ κι επιλέγουμε $\varepsilon < min\{|Re\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Επιλέγουμε $\hat{G} = E = diag(e_1, \dots, e_n)$, όπου

$$e_i = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ Re\hat{a}_{ii} > 0 \\ -1, & \alpha\nu\ Re\hat{a}_{ii} < 0 \end{cases}, \quad i=1,2,\dots,k.$$

Ο ερμιτιανός πίνακας $\hat{H} = E\hat{A} + A^*E$ έχει θετικά διαγώνια στοιχεία και είναι αυστηρά διαγώνια dominant κι έτσι ο H είναι θετικά ορισμένος. Από την άλλη πλευρά, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ερμιτιανός πίνακας G τέτοιος ώστε ο πίνακας $H = GA + A^*G$ να είναι θετικά ορισμένος κι υποθέτουμε ότι $i_0(A) \neq 0$. Επικαλούμαστε την ισοδύναμη μορφή (4.1.3) και παίρνουμε το $\hat{A}$, ώστε να είναι στην κανονική μορφή Jordan με ένα καθαρά φανταστικό στοιχείο στη θέση (1,1). Εφόσον το στοιχείο (1,1) του πίνακα $\hat{G}$ είναι πραγματικός αριθμός και όλα τα άλλα στοιχεία κάτω από τη θέση (1,1) στην πρώτη στήλη του $\hat{A}$ είναι μηδενικά, αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο στη θέση (1,1) του πίνακα $\hat{H}$ στη μορφή (4.1.3) είναι μηδενικό. Τότε ο πίνακας $\hat{H}$ δεν μπορεί να είναι θετικά ορισμένος διαψεύδοντας την υπόθεση μας ότι $i_0(A) \neq 0$. Έτσι καταλήγουμε ότι $i_0(A) = 0$, γεγονός το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού του συγκεκριμένου θεωρήματος.

Αν ένας ερμιτιανός πίνακας G (απαραίτητα αντιστρέψιμος) κι ένας θετικά ορισμένος πίνακας H ικανοποιεί τη σχέση (4.1.1), επαληθεύουμε ότι $i(A) = i(G)$ με επαγωγή στη διάσταση n. Για n=1 ο ισχυρισμός είναι σαφής: Αν $Rega > 0$ κι ο g είναι πραγματικός αριθμός, τότε Rea και g έχουν ίδιο πρόσημο. Τώρα υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός επαληθεύεται για τιμές διάστασης έως την n-1 και επικαλούμαστε πάλι την ισοδύναμη μορφή (4.1.3). Ισχυριζόμαστε ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_n$ μπορεί να επιλεχθεί έτσι ώστε

$$\hat{G} = S^*GS = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{G}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{a}_{12} \\ 0 & \hat{a}_{22} \end{bmatrix},$$

όπου $\hat{G}_{11} \in M_{n-1}$ είναι ερμιτιανός και $A_{11} \in M_{n-1}$. Αυτό γίνεται φανερό αν επιλέξουμε τον S_1 έτσι ώστε ο πίνακας $S_1^{-1}AS_1$ να είναι στην κανονική μορφή Jordan και μετά επιλέξουμε τον πίνακα S_2 στην ακόλουθη μορφή:

$$S_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } x = -G_{11}^{-1} \cdot g_{12} \quad \text{και} \quad S_1^*GS_1 = \begin{bmatrix} G_{11} & g_{12} \\ g_{12}^* & g_{22} \end{bmatrix},$$

όπου $G_{11} \in M_{n-1}, g_{12} \in C^{n-1}$.

Αν ο πίνακας G_{11} είναι μη αντιστρέψιμος, τότε ο γνήσιος πίνακας G μπορεί να διαταραχθεί λίγο, $G \to G + \varepsilon I$, όπου ε > 0 επαρκώς μικρό ώστε ο πίνακας H να παραμείνει θετικά ορισμένος και να μην αλλάξει η αδράνεια του πίνακα G. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο G_{11} είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

Κατόπιν, υποθέτουμε ότι $S = S_1 \cdot S_2$.

Η επαγωγή συνεχίζεται ως εξής:

Εφόσον $\hat{G}\hat{A} + \hat{A}^*\hat{G} = \hat{H}$ είναι θετικά ορισμένος κι εφόσον οι κύριοι υποπίνακες των θετικά ορισμένων πινάκων είναι θετικά ορισμένοι, τότε ο πίνακας $\hat{G}_{11}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{11}\hat{G}_{11} = \hat{H}_{11}$ είναι θετικά ορισμένος.

Εφαρμόζοντας τις υποθέσεις επαγωγής, μαζί με την παρατήρηση ότι η αδράνεια ενός σύνθετου τριγωνικού πίνακα είναι το άθροισμα των αδρανειών των υποπινάκων, κατόπιν παράγεται το επιθυμητό βήμα της επαγωγής.

Σημειώνουμε ότι $Re\hat{g}_{22}\hat{a}_{22}$ Είναι το τελευταίο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα $\hat{H}$ κι ο H είναι θετικά ορισμένος. Έτσι ο πραγματικός αριθμός $\hat{g}_{22}$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $Re\hat{a}_{22}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού του παραπάνω θεωρήματος. ■

Θεώρημα 4.7. Έστω ο δοσμένος πίνακας $A \in M_n$. Ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής αν και μόνο αν για κάθε μη μηδενικό $z \in C^n$υπάρχει ένας θετικά ορισμένος πίνακας G τέτοιος ώστε $Re(x^*GAx) > 0$.

Απόδειξη. Έστω $x \in C^n$ ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A συναρτήσει ενός $\lambda \in \sigma(A)$ κι έστω $G \in M_n$ ένας οποιοσδήποτε θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε $Re(x^*GAx) = Rex^*G(\lambda x) = Rex^*Gx\lambda = (x^*Gx)Re\lambda$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $Re\lambda$ εφόσον $x^*Gx > 0$.

Καταλήγουμε ότι αν για κάθε μη μηδενικό $x \in C^n$ υπάρχει ένας θετικά ορισμένος πίνακας $G \in M_n$ με $Re(x^*GAx) > 0$, τότε ο πίνακας A πρέπει να είναι θετικά ευσταθής. Αντιστρόφως, αν ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής, εφαρμόζουμε το θεώρημα Lyapunov για να παράγουμε ένα πίνακα G ικανοποιώντας τη σχέση (4.1.3), με τον πίνακα Η να είναι θετικά ευσταθής. Τότε για όποιο μη μηδενικό $x \in C^n$,

$$Re(x^*GAx) = \frac{1}{2}(x^*GAx + x^*A^*Gx) = \frac{1}{2}x^*Hx \ . \qquad ■$$

Ορισμός 4.8. Έστω $A \in M_n$ κι ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in C^n$. Ορίζουμε

$$L(Ax) = \{G \in M_n : G \text{ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας και } Re(x^*GAx) > 0 \}.$$

Θεώρημα 4.9. Αν οι πίνακες $H, K \in M_n$ είναι ερμιτιανοί και αντιστρέψιμοι με $i_+\ (H)$=p και με $i_+\ (K)$=q τότε $i_+\ (HK) \in S\ (p, q, n), i_-\ (HK) \in S\ (n - p, q, n)$ και

$i_0\ (HK) \in \{0,2,4, \ldots., n - |p+q-n| - |p-q|\}$, όπου

$$S\ (p,q,n) \equiv \{|p+q-n|, |p+q-n|+2, |p+q-n|+4, \ldots, n-|p-q|\},$$

για μη αρνητικούς ακέραιους $p, q \leq n$.

Αντιστρόφως, αν $i_1 \in S\ (p,q,n),\ i_2 \ \in S\ (n-p,q,n)$ και

$$i_3 \in \{0,2,4, \ldots, n - |p+q-n| - |p-q|\}$$

Ικανοποιούν τη σχέση $i_1 + i_2 + i_3 = n$, τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι ερμιτιανοί πίνακες $H, K \in M_n$ τέτοιοι ώστε $i_+\ (H) = p, i_+\ (K) = q, i(AK) = i_1 + i_2 + i_3$.

Πόρισμα 4.10. Έστω οι ερμιτιανοί πίνακες $H, K \in M_n$. Τότε:

α) Αν $i_+(HK) = n$, δηλαδή αν ο πίνακας HK είναι θετικά ευσταθής, τότε οι πίνακες H και K είναι αντιστρέψιμοι και ισχύει ότι $i(H) = i(K)$.

β) Αν οι πίνακες H και K είναι αντιστρέψιμοι και $i_+(HK) = 0$, δηλαδή αν -HK είναι θετικά ευσταθής, τότε ισχύει ότι $i_+(H) + i_+(K) = n$ και $i_-(H) + i_-(K) = n$.

Θεώρημα 4.11. Έστω $A, B \in M_n$ με τον πίνακα B ερμιτιανό και τον πίνακα $A + A^*$ θετικά ορισμένο, τότε ισχύει ότι $i(AB) = i(B)$.

Απόδειξη. Αρχικά, υποθέτουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Εφόσον είναι αντιστρέψιμος συνεπάγεται ότι διατηρείται θετικά ορισμένος. Επίσης ισχύει ότι $B^*(A + A^*)B = BAB + BA^*B = B(AB) + (AB)^*B$ είναι θετικά ορισμένος και τότε προκύπτει ότι $i(AB) = i(B)$. Αν ο πίνακας B είναι μη αντιστρέψιμος με $i_0(B) = k,\ U^*BU = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,όπου $U \in M_n$, ένας μοναδιαίος πίνακας και $\Lambda \in M_{n-k}$ ένας αντιστρέψιμος διαγώνιος.

Έστω ότι $U^*AU = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ και $A_{11} \in M_{n-k}$ είναι μια συμβατή διαμέριση με τον UBU^* και παρατηρούμε ότι το φάσμα κι ως εκ τούτου κι η αδράνεια του AB είναι το ίδιο με το φάσμα του πίνακα

$$U^*(AB)U = (U^*AU)(U^*BU) = \begin{bmatrix} A_{11}\Lambda & 0 \\ A_{21}\Lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι το φάσμα του AB αποτελείται από k μηδενικά μαζί με το φάσμα του $A_{11}\Lambda$. Συγκεκριμένα, $i_0(AB) = k + i_0(A_{11}\Lambda), i_+(AB) = i_+(A_{11}\Lambda)$ και $i_-(AB) = i_-(A_{11}\Lambda)$.

Εφόσον $A_{11} + A_{11}^*$ είναι θετικά ευσταθής κι ο Λ είναι ένας αντιστρέψιμος ερμιτιανός πίνακας, τότε ισχύει ότι $i(A_{11}\Lambda) = i(\Lambda)$.

Εφόσον $i_0(\Lambda) = 0$, τότε $i_+(\Lambda) = i_+(B)$ και $i_-(\Lambda) = i_-(B)$, τότε $i(AB) = i(B)$. ■

Παράδειγμα. Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Τότε οι A, B ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος 4.11.

Πράγματι, αφού ο $A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, ο $A + A^T$ είναι θετικά ορισμένος. Τέλος, αφού $B = B^*$, ο B είναι ερμιτιανός.

Μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι οι ιδιοτιμές του B είναι οι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ άρα $i(B) = (2{,}0{,}0)$. Επίσης, ο $AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = \frac{12+\sqrt{24}}{12}$, $\lambda_2 = \frac{12-\sqrt{24}}{12}$, οι οποίες είναι θετικές. Συνεπώς $i(B) = i(AB)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{o}

Μ-ΠΙΝΑΚΕΣ, Ρ-ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποιες καινούργιες κατηγορίες πινάκων οι οποίες σχετίζονται στενά με τους ευσταθείς πίνακες παρόλο που δεν υπάρχει γνήσιος εγκλεισμός μεταξύ αυτών. Αυτή η σύνδεση θα γίνει πιο ξεκάθαρη με τα θεωρητικά αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά, θα αναλύσουμε τους Μ-πίνακες, των οποίων οι εφαρμογές συμπεριλαμβάνουν, εκτός από την ποιοτική ανάλυση δυναμικών συστημάτων, ποσοτικά φράγματα σε ιδιοτιμές πινάκων αλλά και σύγκλιση αναδρομικών μεθόδων. Μετέπειτα θα ασχοληθούμε με μια γενίκευση της κατηγορίας των Μ-πινάκων, τους λεγόμενους Ρ-πίνακες. Θα δούμε τις ιδιότητες αυτών καθώς και εφαρμογές σε διάφορα ερευνητικά προβλήματα.

5.1 Μ-πίνακες

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε μια πολύ σημαντική ειδική κατηγορία των πραγματικών θετικών ευσταθών πινάκων που εμφανίζονται σε πολλούς τομείς εφαρμογών. Αυτοί είναι οι M –πίνακες . Αυτοί συνδυάζουν τους μη αρνητικούς πίνακες με τους θετικούς ευσταθείς πίνακες. Αν $X, Y \in M_{m,n}(R)$, γράφουμε $X \geq Y$ αν όλα τα στοιχεία του πίνακα X-Y είναι μη αρνητικά . Συγκεκριμένα $X \geq 0$ σημαίνει ότι ο πίνακας X περιέχει μόνο μη αρνητικά στοιχεία. Για $X \in M_n$ συμβολίζουμε τη φασματική ακτίνα του πίνακα X ως $\rho(X)$.

Ορισμός 5.1.1. Το σύνολο $Z_n \subset M_n$(R) ορίζεται ως

$$Z_n = \{A = [a_{ij}] \in M_n(R): a_{ij} \leq 0 \; αν \; i \neq j, όπου \; i, j = 1,2,3, \dots, n\}.$$

Το απλό μοτίβο των πινάκων που ανήκουν στο σύνολο Z_n έχει πολλές εντυπωσιακές συνέπειες. Επίσης ένας πίνακας $A = [a_{ij}]$ ανήκει στο σύνολο Z_n αν και μόνο αν ο πίνακας $A \in M_n(R)$ και $A = aI - P$, όπου ο πίνακας $P \in M_n(R)$ με $P \geq 0$ και $a \in R$. Η αναπαράσταση ενός πίνακα A στη μορφή $A = aI - P$, όπου ο $A \in Z_n$, είναι συνήθως βολική διότι τον συνδέει με τη θεωρία των μη αρνητικών πινάκων των Perron –Frobenius.

Ορισμός 5.1.2. Ένας πίνακας A καλείται Μ-πίνακας όταν $A \in Z_n$ κι ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής.

Λήμμα 5.1.3. Έστω ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in Z_n$ κι υποθέτουμε ότι $A = aI - P$ με $\alpha \in R$ και $P \geq 0$. Τότε $\alpha - \rho\,(P)$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A κάθε ιδιοτιμή του A ανήκει στο δίσκο $\{z \in C: |z - a| \leq \rho(P)\}$ και συνεπώς κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A ικανοποιεί τη σχέση $Re\lambda \geq \alpha - \rho(A)$. Συγκεκριμένα ο πίνακας A είναι ένας Μ-πίνακας αν και μόνο αν $\alpha > \rho(P)$. Αν ο A είναι ένας M-πίνακας, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι $A = \gamma I - P$ με

$$\gamma = \max\{a_{ii}: i = 1,2,3, \dots, n\} \text{ κι υποχρεωτικά ισχύει ότι } \gamma > \rho(P).$$

Απόδειξη. Αν $A = \alpha I - P$ με $P \geq 0$ και $\alpha \in R$, τότε κάθε ιδιοτιμή του A είναι της μορφής $\alpha - \lambda(P)$ όπου $\lambda(P)$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα P. Τότε κάθε ιδιοτιμή του A ανήκει σε ένα δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο με ακτίνα $\rho(P)$ και κέντρο $z = \alpha$. Εφόσον $\rho(P)$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα P τότε $\alpha - \rho(P)$ είναι μία πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα A.

Αν ο A είναι ένας Μ –πίνακας, τότε είναι θετικά ευσταθής και συνεπάγεται ότι $\alpha - \rho(P) > 0$. Αντιστρόφως αν $\alpha - \rho(P) > 0$ τότε ο δίσκος $\{z \in C: |z - a| \leq \rho(P)\}$ ανήκει στο θετικό ημιεπίπεδο. Συνεπώς, ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής. ■

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα της κατηγορίας των Μ-πινάκων είναι ότι οι κύριοι υποπίνακες και τα άμεσα αθροίσματα των Μ-πινάκων είναι Μ- πίνακες . Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι υπάρχουν πάρα πολλές αναλογίες μεταξύ των θετικά ορισμένων πινάκων και των *M*-πινάκων.

Από μαθηματική σκοπιά, προκαλεί ενδιαφέρον το γεγονός ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές συνθήκες (όχι φανερά ισοδύναμες), οι οποίες είναι απαραίτητες και επαρκείς για ένα πίνακα που ανήκει στο σύνολο Z_n ώστε να είναι Μ-πίνακας. Προκειμένου να αναγνωρίζουμε τους Μ-πίνακες στην τεράστια ποικιλία τρόπων που εμφανίζονται είναι χρήσιμο να απαριθμήσουμε αρκετούς από αυτούς.

Θεώρημα 5.1.4. Αν ο πίνακας $A \in Z_n$, τότε οι επόμενες καταστάσεις είναι ισοδύναμες:

5.1.4.1. Όταν ο πίνακας *A* είναι θετικά ευσταθής τότε είναι και *M*- πίνακας.

5.1.4.2. $A = \alpha I - P$, $P \geq 0$, αν $\alpha > \rho(P)$.

5.1.4.3. Κάθε πραγματική ιδιοτιμή του *A* είναι θετική.

5.1.4.4. Ο πίνακας $A + tI$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $t \geq 0$.

5.1.4.5. Ο πίνακας $A + D$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε μη αρνητικό διαγώνιο πίνακα D.

5.1.4.6. Όλες οι κύριες υποορίζουσες του πίνακα *A* είναι θετικές .

5.1.4.7. Το άθροισμα όλων των $k \times k$ κυρίων υποοριζουσών του πίνακα *A* είναι θετικό για $k = 1,2, \ldots, n$.

5.1.4.8 Οι αρχικές κύριες υποορίζουσες του πίνακα *A* είναι θετικές.

5.1.4.9. $A = LU$, όπου ο πίνακας L είναι κάτω τριγωνικός και ο πίνακας *U* είναι άνω τριγωνικός και όλα τα διαγώνια τους είναι θετικά.

5.1.4.10. Για κάθε μη μηδενικό $x \in R^n$ υπάρχει ένας θετικός διαγώνιος πίνακας *D* τέτοιος ώστε $x^T ADx > 0$.

5.1.4.11. Για κάθε μη μηδενικό $x \in R^n$ υπάρχει ένας δείκτης $1 \leq i \leq n$ τέτοιος ώστε $x_i(Ax)_i > 0$.

5.1.4.12. Υπάρχει ένα θετικό διάνυσμα $x \in R^n$ με $Ax > 0$.

5.1.4.13. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A είναι θετικά και ο πίνακας $A \cdot D$ είναι κατά γραμμή διαγώνια κυριαρχημένος για κάποιους θετικούς διαγώνιους πίνακες D.

5.1.4.14. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A είναι θετικά και ο πίνακας $D^{-1}AD$ είναι κατά γραμμή διαγώνια κυριαρχημένος για κάποιους θετικούς διαγώνιους πίνακες D.

5.1.4.15. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A είναι θετικά και υπάρχουν θετικοί διαγώνιοι πίνακες D, E τέτοιοι ώστε ο πίνακας DAE να είναι και κατά γραμμή διαγώνια κυριαρχημένος και κατά στήλη διαγώνια κυριαρχημένος.

5.1.4.16. Υπάρχει ένας θετικός διαγώνιος πίνακας D, τέτοιος ώστε ο πίνακας $DA + A^T D$ να είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή υπάρχει μία θετική διαγώνια λύση Lyapunov.

5.1.4.17. Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $A^{-1} \geq 0$.

5.1.4.18. $Ax \geq 0$ συνεπάγεται ότι $x \geq 0$.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι περισσότερες από τις καταστάσεις του θεωρήματος (5.1.4.) δεν είναι ισοδύναμες όταν οι πίνακες δεν ανήκουν στο σύνολο Z_n. Η δομή επιβάλλεται από το σύνολο Z_n, κυρίως εξαιτίας της σχέσης του Z_n με τους μη αρνητικούς πίνακες.

Επιπροσθέτως υπάρχουν αξιοσημείωτοι παραλληλισμοί μεταξύ των Μ –πινάκων και των θετικά ορισμένων πινάκων. Αυτές οι συσχετίσεις επεκτείνονται σε μερικούς από τους κλασικούς πίνακες και σε ανισότητες οριζουσών για θετικά ορισμένους πίνακες.

Παρακάτω, παρουσιάζεται ένα επιλεγμένο δείγμα συνεπαγωγών κι όχι ολοκληρωμένων αποδείξεων των 18 καταστάσεων της ενότητας (5.1.4). Οι αναφέρονται στα τελικά ψηφία της λίστας στην ενότητα (5.1.4).

(1 $\Leftrightarrow$ 2) Βλέπε Λήμμα 5.1.3.

(3 $\Rightarrow$ 2) Εφόσον $A \in Z_n$ μπορεί να γραφτεί ότι $A = \alpha I - P$, $P \geq 0$ και $\alpha - \rho(P) \in \sigma(A)$, η σχέση (3) σημαίνει ότι $\alpha - \rho(P) > 0$ ή $\alpha > \rho(P)$.

(2 $\Rightarrow$ 4) Δεδομένης της σχέσης (2), $A + tI = (a + t)I - P$ και $(a + t) > \rho(P)$ για $t \geq 0$. Έτσι στη σχέση (2) ο πίνακας A αντικαθίσταται από το $A + tI$ κι εφόσον η (2) συνεπάγεται από την (1), ο πίνακας $A + tI \in M_n(R)$ είναι θετικά ευσταθής. Εφόσον οι θετικά ευσταθείς πραγματικοί πίνακες έχουν θετική ορίζουσα, τότε ο πίνακας $A + tI$ είναι αντιστρέψιμος αν $t \geq 0$.

(2 $\Rightarrow$ 6) Εφόσον η σχέση (2) προκύπτει από τους κύριους υποπίνακες του A κι αφού η (2) συνεπάγεται την (1), τότε συνεπάγεται ότι κάθε κύριος υποπίνακας του A είναι θετικά

ευσταθής. Αλλά εφόσον $A \in M_n(R)$, ο καθένας από τους κύριους υποπίνακες έχει θετική ορίζουσα.

(7 ⇒ 4) Η επέκταση της ορίζουσας $\det(A + tI)$ σαν ένα πολυώνυμο του t δίνει ένα μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n, του οποίου οι συντελεστές είναι οι $E_k(A)$, οι οποίοι είναι σίγουρα θετικοί εξαιτίας της σχέσης (7). Επομένως αυτό το πολυώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε μη αρνητικό αριθμό t. Εφόσον ο πίνακας $(A + tI)$ έχει θετική ορίζουσα για $t \geq 0$, τότε αυτός είναι αντιστρέψιμος για κάθε $t \geq 0$.

(8 ⇒ 9) Αυτό προκύπτει από το ανάπτυγμα της παραγοντοποίησης του πίνακα LU. Οι πίνακες L και U είναι M-πίνακες, αν ο πίνακας A είναι M-πίνακας.

(2 ⇒ 17) Εφόσον η διαίρεση με ένα θετικό αριθμό α δεν αλλάζει κάτι σημαντικά στην κατάσταση (17), υποθέτουμε ότι α=1. Η δυναμοσειρά $1 + P + P^2 + \cdots$ συγκλίνει εφόσον $\rho(P) < 1$. Αφού $P \geq 0$, το όριο $(I - P)^{-1} = A^{-1}$ της σειράς είναι μη αρνητικός.

(17 ⇒ 18) Υποθέτουμε ότι $Ax = y \geq 0$. Τότε $x = A^{-1}y \geq 0$, διότι ισχύει ότι $A^{-1} \geq 0$.

(18 ⇒ 2) Γράφουμε $A = \alpha I - P$ για κάποια $P \geq 0$ και $\alpha > 0$ κι έστω v ένα διάνυσμα Perron για τον πίνακα P, έτσι ώστε $0 \neq v \geq 0$ και $Pv = \rho(P)v$. Αν $\alpha \leq \rho(P)$, τότε $A(-v) = [\rho(P) - a]v \geq 0$, το οποίο αντιμετατίθεται στη σχέση (18), τότε $\alpha > \rho(P)$.

(2 ⇒ 12) Αν ο πίνακας $P \geq 0$ είναι αναλλοίωτος, έστω $x > 0$ ένα κάθετο ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του πίνακα P. Αν ο P δεν είναι αναλλοίωτος, τον διαταράσσουμε τοποθετώντας κατάλληλες μικρές τιμές $\varepsilon > 0$ στις θέσεις τις οποίες ο πίνακας P έχει μηδενικά στοιχεία κι έστω x ένα κάθετο ιδιοδιάνυσμα Perron-Frobenius του αποτελέσματος. Τότε οι πίνακες $Ax = ax - Px$ και Px είναι κι οι δύο ίσοι με $\rho(P)x$ ή είναι τόσο κοντά όσο επιθυμούμε. Και στις δύο περιπτώσεις, ο πίνακας Ax είναι ικανοποιητικά κοντά στο $[\alpha - \rho(P)]x > 0$, έτσι ώστε $Ax > 0$.

(12 ⇒ 13) Έστω D=diag(x) και σημειώνουμε ότι το άθροισμα των γραμμών του πίνακα AD είναι τα στοιχεία του πίνακα $ADe = Ax > 0$, όπου $e = [1\ 1\ 1\ \ldots 1]^T \in R^n$. Εφόσον όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα $A \in Z_n$ είναι μη θετικά, τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα AD και συνεπώς κι εκείνα του πίνακα A πρέπει να είναι θετικά κι ο πίνακας AD πρέπει να είναι κατά γραμμή διαγώνια κυριαρχημένος.

(15 ⇒ 16) Αν ισχύει η (15), τότε ο πίνακας DAE+$(DAE)^T$ έχει θετικά τα στοιχεία της διαγωνίου του κι είναι αυστηρά διαγώνια κυριαρχημένος και συνεπώς είναι θετικά ορισμένος. Μια αναλογία του E^{-1} δείχνει ότι ο πίνακας $E^{-1}[DAE + (DAE)^T]E^{-1} = (E^{-1}D)A + A^T(E^{-1}D)$ είναι επίσης θετικά ορισμένος. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας $E^{-1}D$ είναι μια θετική διαγώνια λύση Lyapunov.

(16 ⇒ 6) Σημειώνουμε ότι η κατάσταση (16) προκύπτει από τους κύριους υποπίνακες του A κι ότι η (16) εκφράζει τη θετική ευστάθεια από το θεώρημα Lyapunov. Τότε, κάθε κύριος

υποπίνακας του A είναι ένας πραγματικός θετικά ευσταθής πίνακας κι επομένως έχει θετική ορίζουσα. Τότε ισχύει η κατάσταση (6).

(11 ⇒ 1) Αυτό συνεπάγεται άμεσα από τη τοπική έκδοση του θεωρήματος Lyapunov.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι καταστάσεις του (5.1.4.) δεν ισοδύναμες έξω από το σύνολο του Z_n.

Θεώρημα 5.1.5. Έστω οι πίνακες $A, B \in Z_n$ κι υποθέτουμε ότι ο $A = [a_{ij}]$ είναι ένας Μ-πίνακας και $B \geq A$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(α) ο πίνακας B είναι ένας Μ-πίνακας.

(β) $A^{-1} \geq B^{-1} \geq 0$.

(γ) $detB \ \geq detA > 0$.

Επιπροσθέτως, ο πίνακας A ικανοποιεί τις ανισότητες των οριζουσών για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(δ) Hadamard: $detA \leq a_{11} \cdot \ a_{22} \cdots a_{nn}$,

(ε) Fischer: $detA \leq \det A(a) \cdot detA(a')$ για κάθε $a \subseteq \{1,2,\dots,n\}$, και

(στ) Szasz: $P_{k+1}^{\binom{n-1}{k}^{-1}} \leq P_k^{\binom{n-1}{k-1}^{-1}}$, όπου k =1,2,…,n-1.

Στην ανισότητα Szasz, P_k είναι το γινόμενο όλων των $k \times k$ κυρίων υποοριζουσών του πίνακα A.

Απόδειξη. Έστω ότι οι πίνακες A και $B = [b_{ij}]$ ικανοποιούν τις δηλωμένες συνθήκες. Τότε:

- Η πρόταση (α) αποδεικνύεται από την ιδιότητα (5.1.4.2). Αν $x>0$ και $Ax > 0$, τότε $Bx \ \geq Ax > 0$.

- Η ανισότητα (β) αποδεικνύεται από την ιδιότητα (5.1.4.17), εφόσον $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$, όπου $A^{-1}(B - A)B^{-1}$ είναι το γινόμενο τριών μη αρνητικών πινάκων.

- Για να αποδειχθεί η ανισότητα (γ) προβαίνουμε στην επαγωγή διάστασης n. Η ισχυριζόμενη ανισότητα είναι ασήμαντη για $n \ = 1$. Γι' αυτό υποθέτουμε ότι ισχύει για όλες τις διαστάσεις k, όπου $k \ = 1, \dots, n-1$.

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, με $A_{11}, B_{11} \in Z_{n-1}$. Οι κύριοι υποπίνακες A_{11} $και$ B_{11} είναι Μ –Πίνακες κι ισχύει ότι $B_{11} > A_{11}$. Έτσι ισχύει ότι $detB_{11} > detA_{11}$ από την υπόθεση της επαγωγής .

Επίσης , ισχύει ότι $A^{-1} \gg B^{-1} \gg 0, detA > 0$ $και$ $\det B > 0$

Το (*n*,*n*) στοιχείο του μη αρνητικού πίνακα $A^{-1} - B^{-1}$ είναι $\frac{detA_{11}}{detA} - \frac{detB_{11}}{detB} \geq 0$

Έτσι ισχύει ότι $detB \geq \frac{detB_{11}}{detB} \cdot detA \geq detA > 0$.

- Η ανισότητα Hadamard (δ) αποδεικνύεται από την ανισότητα Fischer (ε), η οποία αποδεικνύεται εύκολα από την ανισότητα (γ) ως εξής:

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\alpha = \{1,2,3,\ldots,k\}, 1 \leq k \leq n$ κι ότι $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ με $A_{11} \in M_k, A_{22} \in M_{n-k}$.

Ορίζουμε τον πίνακα $\Lambda = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ τέτοιο ώστε $\Lambda \in Z_n$, $με$ $\Lambda \geq A$. Αποδεικνύεται από την ανισότητα (γ) ότι $detA \leq det\Lambda = (detA_{11}) \cdot (detA_{22})$ που είναι η ανισότητα (ε). ■

Εντός του συνόλου Z_n οι Μ-πίνακες είναι φυσικά ανάλογα των θετικών ορισμένων πινάκων Τα αντίστοιχα φυσικά ανάλογα των θετικά ορισμένων πινάκων είναι οι θετικά ημιευσταθείς πίνακες που ανήκουν στο σύνολο Z_n. Σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.3. κάθε πίνακας $A \in Z_n$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή *A =αI-P* με $\alpha \in R$ και $P \geq 0$, τότε $\alpha - \rho(P)$ είναι μία ιδιοτιμή του Α ανήκει σε ένα δίσκο με ακτίνα *ρ(P)* και κέντρο στο *z=α*. Γι' αυτό το λόγο, αν ένας θετικά ημιευσταθής πίνακας $A \in Z_n$ γράφεται στη μορφή *A=αI-P*, πρέπει να ισχύει $\alpha \geq \rho(P)$. Η μόνη αιτία να μην είναι ο πίνακας *A* θετικά ευσταθής είναι όταν ισχύει $\alpha = \rho(P)$, δηλαδή αν ο πίνακας *A* είναι μη αντιστρέψιμος. Συνεπώς, ένας θετικά ημιευσταθής πίνακας $A \in Z_n$ είναι ένας *M*- πίνακας αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος. Η παρατήρηση αυτή δικαιολογεί την ορολογία όταν ένα πίνακας $A \in Z_n$ είναι Μ-πίνακας και μη αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας *A* είναι θετικά ημιευσταθής και όχι θετικά ευσταθής. Όπως ισχύει για τους *M*-πίνακες έτσι υπάρχουν μία σειρά από ισοδύναμες δηλώσεις για έναν πίνακα $A \in Z_n$ να είναι μη αντιστρέψιμος Μ –πίνακας.

Ορισμός 5.1.6. Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $B \in M_n$ λέγεται ότι είναι ένας αντίστροφος Μ-πίνακας αν ο πίνακας B^{-1} είναι ένας Μ-πίνακας.

Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι οι αντίστροφοι Μ-πίνακες κληρονομούν πολλά χαρακτηριστικά από τους Μ- πίνακες.

5.2. P-πίνακες

Ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ καλείται P-πίνακας αν όλες οι κύριες υποορίζουσές του είναι θετικές. Για παράδειγμα, $\det(A[a]) > 0$ για όλα τα σύνολα $a \subseteq <n>$ όπου $A[a]$ είναι ένας κύριος υποπίνακας του A. Υπενθυμίζουμε ότι ένας κύριος υποπίνακας του A είναι απλά ένας τετραγωνικός πίνακας όπου του έχουμε αφαιρέσει τις αντίστοιχες γραμμές και στήλες. Η ορίζουσα του κύριου υποπίνακα του A καλείται κύρια υποορίζουσα του πίνακα A. Το πρόβλημα της ανίχνευσης αν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ή όχι P-πίνακας είναι γνωστό ως P-πρόβλημα. Υπολογίζοντας όλες τις $2^n - 1$ κύριες υποορίζουσες απαιτεί $n^3 2^n$ πράξεις. Μερικές υποκατηγορίες των P-πινάκων συμπεριλαμβάνουν τους ερμιτιανούς θετικά ορισμένους πίνακες, τους αντιστρέψιμους M-πίνακες, τους ολικά θετικούς πίνακες και τους πραγματικούς διαγώνια κυριαρχημένους πίνακες με θετικά διαγώνια στοιχεία. Οι P-πίνακες βρίσκουν εφαρμογή σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών περιοχών, όπως η φυσική, τα οικονομικά, τα δίκτυα τηλεπικοινωνιών και η βιολογία. Πιο συγκεκριμένα, οι P-πίνακες παίζουν σημαντικό ρόλο στην επίλυση των γραμμικών διαφορίσιμων προβλημάτων εγκλεισμού (LDI problems) και στους πίνακες διαστήματος (interval matrix).

Ορισμός 5.2.1. Ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ λέγεται P-πίνακας αν όλες οι $k \times k$ κύριες υποορίζουσες του πίνακα A είναι θετικές για $k = 1,2,3, \dots, n$. Αντίστοιχα ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ καλείται P_0-πίνακας ή P_0^+-πίνακας, αν όλες οι $k \times k$ κύριες υποορίζουσες του πίνακα A είναι μη αρνητικές ή είναι μη αρνητικές με τουλάχιστον μία θετική για $k = 1, \dots, n$.

Όπως για τους M-πίνακες έτσι και στην περίπτωση των P-πινάκων υπάρχουν αρκετές διαφορετικές ισοδύναμες δηλώσεις, οι οποίες χαρακτηρίζουν ένα πίνακα ως P-πίνακα. Κάποιες εξ αυτών φαίνονται παρακάτω.

Έστω $A \in M_n(R)$ τότε:

5.2.2. Αν όλες οι κύριες υποορίζουσες του πίνακα A είναι θετικές τότε ο πίνακας A είναι ένα P-πίνακας .

5.2.3. Για κάθε μη μηδενικό $x \in R^n$ κάποια στοιχεία του γινομένου Hadamard $x \circ (Ax)$ .. είναι θετικά, δηλαδή για κάθε μη μηδενικό $x = [x_i] \in R^n$ υπάρχει $k \in \{1,2,3, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $x_k(Ax)_k > 0$.

5.2.4. Για κάθε μη μηδενικό $x \in R^n$, υπάρχει κάποιος θετικός διαγώνιος πίνακας

$$D = D(x) \in M_n(R) \text{ τέτοιος ώστε } x^T(D(x)A)x > 0.$$

5.2.5. Για κάθε μη μηδενικό $x \in R^n$, υπάρχει κάποιος μη μηδενικός διαγώνιος πίνακας

$$E = E(x) \in M_n(R) \text{ τέτοιος ώστε } x^T(E(x)A)x > 0.$$

5.2.6. Κάθε πραγματική ιδιοτιμή, κάθε κύριου υποπίνακα του A είναι θετική.

Οι αποδείξεις των συνεπαγωγών (5.2) δίνονται παρακάτω. Οι αριθμοί αναφέρονται στα τελικά ψηφία των καταστάσεων της λίστας (5.2).

(1⇒2) Έστω $0 \neq x \in R^n$, υποθέτουμε ότι $x^\circ(Ax) \leq 0$ και $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, n\}$ είναι το σύνολο των δεικτών για τους οποίους $x_i \neq 0,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k \leq n$. Έστω $x(J) = [x_{J1}, x_{J2}, \dots, x_{Jk}]^T \in R^k$ και θεωρούμε ότι ο κύριος υποπίνακας $A(J) \in M_k$. Σημειώνουμε ότι $[A(J)x(J)]_i = (Ax)_{J_i}$, $i = 1,2,3, \dots, k$. Τότε $x(J)^\circ[A(J)x(J)] \leq 0$ κι υπάρχει ένας μη αρνητικός διαγώνιος πίνακας $D \in M_k$ τέτοιος ώστε $A(J)x(J) = -Dx(J)$. Τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα D είναι απλά το πηλίκο Hadamard του πίνακα $A(J)x(J)$ με το $x(J)$. Τότε $[A(J) + D]x(J) = 0$, πράγμα που είναι αδύνατο αφού $\det[A(J) + D] \geq \det[A(J)] > 0$ κι έτσι $A(J) + D$ είναι αντιστρέψιμος.

(2⇒3) Έστω ότι δίνεται $0 \neq x \in R^n$ κι έστω ότι $k \in \{1,2, \dots, n\}$ είναι ένας δείκτης για τον οποίο ισχύει $x_k(Ax)_k > 0$. Τότε

$$x_k(Ax)_k + \varepsilon \sum_{i \neq k} x_i\,(Ax)_i > 0,$$

για κάποιο ε>0 και παίρνουμε ότι $D(x) \equiv diag(d_1, \dots, d_n)$ με $d_k = 1$, $d_i = \varepsilon$ αν $i \neq k$.

(3⇒4) Προφανές.

(4⇒5) Έστω ότι δίνεται $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, n\}$ με $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k \leq n$ και $1 \leq k \leq n$ κι υποθέτουμε ότι $A(J)\xi = \lambda\xi$ με $\lambda \in R$ και $0 \neq \xi \in R^k$. Έστω ότι το $x = [x_i] \in R^n$ ορίζεται για $x_{ji} = \xi_i, i = 1, \dots, k$ και $x_i = 0$, αν $i \neq J$, ώστε $\xi = x(J)$. Έστω $E = E(x) \in M_n$ είναι ένας μη αρνητικός διαγώνιος πίνακας τέτοιος ώστε $x^T(EA)x > 0$. Τότε

$$0 < x^T(EA)x = (Ex)^T(Ax) = [E(J)x(J)]^T[A(J)x(J)] = [E(J)\xi]^T(\lambda\xi) = \lambda[\xi^T E(J)\xi],$$

Απ’ όπου συνεπάγεται ότι και οι αριθμοί λ και $\xi^T E(J)\xi$ είναι θετικοί.

(5⇒1) Εφόσον ο πίνακας A είναι πραγματικός, τότε οι μιγαδικές μη πραγματικές ιδιοτιμές προκύπτουν σε συζυγή ζεύγη, των οποίων το γινόμενο είναι θετικό. Αλλά η ορίζουσα $detA$ είναι ένα γινόμενο των μιγαδικών μη πραγματικών ιδιοτιμών του A κι οι πραγματικές ιδιοτιμές είναι όλες θετικές από την κατάσταση (5). Συνεπώς $detA > 0$. Το ίδιο επιχείρημα ισχύει για κάθε κύριο υποπίνακα του A. ■

Θεώρημα 5.2.7. Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in M_n(C)$ ο οποίος είναι ένας P-πίνακας. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς.

5.2.7.1. $A^T \in P_n(C)$.

5.2.7.2. $QAQ^T \in P_n(C)$ για κάθε πίνακα μετάθεσης Q.

5.2.7.3. $SAS \in P_n(C)$, όπου ο S είναι ένας διαγώνιος πίνακας, με τα στοιχεία της διαγωνίου του να αποτελούνται με ± 1.

5.2.7.4. $DAE \in P_n(C)$ για όλους τους διαγώνιους πίνακε D και E, τέτοιοι ώστε ο πίνακας DE να έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία του θετικά.

5.2.7.5. $A + D \in P_n(C)$ για όλους τους διαγώνιους πίνακες D, οι οποίοι αποτελούνται από μη αρνητικά στοιχεία.

5.2.7.6. $A[\alpha] \in P_n(C)$ για όλα τα $a \subseteq < n >$.

Απόδειξη. Όλες οι ιδιότητες εκτός της (5.2.7.5) προκύπτουν άμεσα από τις ιδιότητες των οριζουσών.

Για την (5.2.7.5), θεωρούμε έναν πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$, ο οποίος είναι ένας P-πίνακας, και έναν διαγώνιο πίνακα $D = [d_{ij}]$ του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι μη αρνητικά. Τότε για τον πίνακα $A + D$ ισχύει ότι $\alpha_{ii} + d_{ii} > \alpha_{ii} > 0$ για όλα τα $i = 1, \dots, n$. Δηλαδή τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα $A + D$ είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα A. Άρα $\det\big((A + D)[a]\big) \geq \det(A[a]) > 0$ για κάθε $a \subseteq < n >$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι ο πίνακας $A + D$ είναι P-πίνακας. ■

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν ο A είναι ένας P-πίνακας, τότε ο A^2 δεν είναι απαραίτητο να είναι και αυτός P-πίνακας.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Όλες οι κύριες υποορίζουσες του πίνακα A είναι θετικές. Όμως:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A^2 έχει δύο μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, και επειδή τα διαγώνια στοιχεία του A είναι κύριοι υποπίνακες συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A^2 δεν είναι P-πίνακας.

Επίσης, το γινόμενο δύο διαφορετικών P-πινάκων δεν είναι απαραίτητα P-πίνακας.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τους παρακάτω πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες A, B αποδεικνύεται ότι είναι P-πίνακες. Ωστόσο,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα το γινόμενο των πινάκων A, B δεν είναι P-πίνακας.

Θεώρημα 5.2.8. Έστω ότι ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ είναι ένας P-πίνακας. Τότε οι ανισότητες $Ax \leq 0$, $x \geq 0$ έχουν μόνο την τετριμμένη λύση.

Πόρισμα 5.2.9 Αν ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ είναι ένας P-πίνακας, τότε υπάρχει $x > 0$ τέτοιο ώστε $Ax > 0$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι P-πίνακας αφού όλες οι κύριες υποορίζουσές του είναι θετικές. Επίσης θεωρούμε $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, τότε $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} > 0$.

Παρατήρηση. Αν ένας πίνακας A είναι ένας P-πίνακας, τότε είναι ημιθετικός. Το αντίστροφο του πορίσματος 5.2.9 δεν ισχύει πάντα.

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Αν $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, τότε $Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$. Όμως ο A δεν είναι ένας P-πίνακας.

Ορισμός 5.2.10. Ένας πίνακας A λέγεται ότι είναι ημιθετικός αν υπάρχει $x > 0$ τέτοιο ώστε $Ax > 0$.

Εν συνεχεία, θα αναφέρουμε το θεώρημα Ville, το οποίο είναι ένα θεμελιώδες θεώρημα που συνδέει τους P-πίνακες με τους ημιθετικούς πίνακες.

Θεώρημα 5.2.11. Έστω $A \in M_n(R)$. Τότε ένας από τους ακόλουθους ισχυρισμούς είναι αληθής:

5.2.11.1. Υπάρχει $x \geq 0$, $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $A^T x \leq 0$.
5.2.11.2. Υπάρχει $y \geq 0$ τέτοιο ώστε $Ay > 0$.

Ορισμός 5.2.12. Ένας πίνακας προσήμων είναι ένας διαγώνιος πίνακας $S = diag(s_1, \dots, s_n)$ του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι είτε $+1$ είτε -1.

Θεώρημα 5.2.13. Έστω $A \in M_n(R)$. Τότε A είναι ένας P-πίνακας αν και μόνο αν για κάθε πίνακα προσήμων $S \in M_n(R)$, τότε ο πίνακας SAS είναι ημιθετικός.

Απόδειξη. Έστω $A \in M_n(R)$ είναι ένας P-πίνακας και $S \in M_n(R)$ είναι ένας πίνακας προσήμων. Τότε ο SAS είναι ένας P-πίνακας και σύμφωνα με το Πόρισμα 5.2.9, ο πίνακας SAS είναι ένας ημιθετικός πίνακας. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ο πίνακας SAS είναι ημιθετικός για κάθε πίνακα προσήμων $S \in M_n(R)$. Τότε από το Θεώρημα 5.2.7.3, προκύπτει ότι $(SAS)_x^T = SA^T Sx = y \nleq 0$.

Εφόσον ισχύει ότι $A^T(Sx) = Sy$, τότε υπάρχει $j \in < n >$ τέτοιο ώστε $(Sx)_j(Sy)_j > 0$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 5.2.3, συμπεραίνουμε ότι ο A^T είναι ένας P-πίνακας. ∎

Θεώρημα 5.2.14. Αν ο πίνακας $A \in M_n(C)$ είναι ένας P-πίνακας, τότε οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A εναλλάσσονται σε πρόσημα.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας A έχει $2^4 - 1 = 15$ κύριες υποορίζουσες, οι οποίες είναι όλες θετικές. Επομένως, ο A είναι ένας P-πίνακας. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$P(t) = t^4 - 15t^3 + 92t^2 - 312t + 430,$$

το οποίο έχει συντελεστές οι οποίοι εναλλάσσονται σε πρόσημο.

Παρατήρηση. Το αντίστροφο του θεωρήματος γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, οι συντελεστές του οποίου έχουν πρόσημο το οποίο εναλλασσεται. Ωστόσο ο πίνακας A δεν είναι ένας P-πίνακας.

Θεώρημα 5.2.15. Έστω $A \in M_n(R)$. Τότε ο πίνακας A είναι ένας P-πίνακας αν και μόνο αν ο A καθώς και όλοι οι κύριοι υποπίνακες του έχουν θετικές ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι ένας P-πίνακας για κάποιο μη κενό $a \subseteq < n >$, και ότι ο $A[\alpha]$ έχει τουλάχιστον μία αρνητική ιδιοτιμή λ. Τότε ο πίνακας $A[\alpha] + |\lambda| I$ δεν είναι αντιστρέψιμος, επομένως από την Πρόταση 5.2.7.5 του Θεωρήματος 5.2.7 ο πίνακας $A[\alpha]$ δεν είναι P-πίνακας το οποίο είναι άτοπο. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι κάθε κύριος υποπίνακας του A καθώς και ο πίνακας A έχουν θετικές ιδιοτιμές. Τώρα η ορίζουσα ενός τυχαίου κύριου υποπίνακα είναι το γινόμενο των πραγματικών και των μιγαδικών ιδιοτιμών του οι οποίες πάνε σε ζεύγη. Καθώς όλες οι πραγματικές ιδιοτιμές είναι θετικές καταλήγουμε στο ότι η ορίζουσα του τυχαίου υποπίνακα είναι θετική. Συνεπώς ο πίνακας A είναι P-πίνακας.

Παρατήρηση. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα αν έχουμε έναν P-πίνακα $A \in M_n(R)$ τότε όλες οι πραγματικές ιδιοτιμές του είναι θετικές. Παρ' όλα αυτό το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί ο πίνακας A να έχει θετικές ιδιοτιμές και να μην είναι P-πίνακας. Πράγματι αν θεωρήσουμε τον πίνακα της παρατήρησης του Θεωρήματος 5.2.14,

$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι έχει θετικές ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$, ωστόσο ο A δεν είναι P-πίνακας.

Ορισμός 5.2.16. Ένας πίνακας $A \in M_n(C)$ θα λέγεται Q - πίνακας αν το άθροισμα όλων των $k \times k$, $(k = 1,2,3,\ldots,n)$ κύριων υποοριζουσών του είναι θετικό.

Παρατήρηση. Είναι προφανές από τον προηγούμενο ορισμό ότι κάθε P-πίνακας είναι και Q-πίνακας.

Ορισμός 5.2.17. Ένας πίνακας $A \in M_n$ καλείται D-ευσταθής αν ο πίνακας DA είναι θετικά ευσταθής για όλους τους θετικούς διαγώνιους πίνακες $D \in M_n$.

Ορισμός 5.2.18. Ο πίνακας $A \in M_n(R)$ είναι σταθεροποιήσιμος αν υπάρχει διαγώνιος πίνακας D με θετικά τα στοιχεία της διαγωνίου του τέτοιος ώστε ο πίνακας DA να είναι θετικά ευσταθής. Επίσης ένας τέτοιος πίνακας D αν υπάρχει, καλείται πίνακας σταθεροποίησης του A.

Κάποια παραδείγματα D-ευσταθών πινάκων είναι οι ερμιτιανοί θετικά ορισμένοι πίνακες αλλά και οι ολικά θετικοί πίνακες, δηλαδή οι πίνακες που κάθε τετραγωνικός υποπίνακάς τους έχει θετική ορίζουσα. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε το γεγονός ότι ένας P-πίνακας δεν είναι αναγκαία και D-ευσταθής για $n \geq 3$. Πράγματι αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ένας P-πίνακας δεν είναι απαραίτητα θετικά ευσταθής. Ωστόσο υπάρχουν δουλειές που βρίσκουν κριτήρια για το πότε ένας P-πίνακας είναι D-ευσταθής (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [8]). Οι D-ευσταθής πίνακες είναι πολύ σημαντικοί για την μελέτη των διαφορικών εξισώσεων και πιο συγκεκριμένα για την ανάλυση της ευστάθειας ενός συστήματος. Για παράδειγμα υπάρχουν συστήματα τα οποία δεν είναι σίγουρο ότι είναι ευσταθή, και σε αυτές τις περιπτώσεις εξετάζουμε αν το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο. Σύμφωνα με τους Fisher και Fuller (βλέπε [9]) ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ είναι σταθεροποιήσιμος αν όλες οι κύριες υποορίζουσές του είναι θετικές.

Θεώρημα 5.2.19. Έστω ο πίνακας $A \in M_n(R)$.

(α) Αν ο πίνακας A είναι D-ευσταθής, τότε ο A είναι P_0^+-πίνακας.

(β) Αν ο πίνακας A έχει μία θετική διαγώνια λύση Lyapunov τότε ο πίνακας A είναι D-ευσταθής.

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $A \in M_n$ είναι D-ευσταθής, αλλά δεν είναι P_0^+. Θεωρούμε τους κύρους υποπίνακες $A(a) \in M_k$. Αν ένας από αυτούς έχει αρνητική ορίζουσα, αυτό θα ερχόταν σε αντίθεση με το γεγονός ότι κάθε ένας πρέπει να είναι D-ημιευσταθής. Για αυτό το λόγο όλοι οι $k \times k$ κύριοι υποπίνακες είναι μη αρνητικοί. Εφόσον $E_k(A)$ είναι η k-οστή στοιχειώδης συμμετρική συνάρτηση των ιδιοτιμών του πίνακα A, τότε δεν είναι δυνατόν να είναι όλες οι $k \times k$ κύριες υποορίζουσες μηδενικές, διότι ο πίνακας A είναι πραγματικός και θετικά ευσταθής. Συνεπώς $A \in P_0^+$.

(β) Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας θετικός διαγώνιος πίνακας $E \in M_n$ τέτοιος ώστε $EA + A^T E = B$, όπου ο πίνακας B είναι θετικά ορισμένος. Έστω ότι ο πίνακας $D \in M_n$ είναι θετικός διαγώνιος. Θεωρούμε τον πίνακα DA. Ισχύει ότι

$$(ED^{-1})(DA) + (DA)^T(ED^{-1}) = EA + A^T E = B.$$

Έτσι ο θετικά ορισμένος πίνακας ED^{-1} είναι μία λύση Lyapunov για τον πίνακα DA. Τότε ο πίνακας DA είναι θετικά ευσταθής για κάθε θετική διαγώνιο πίνακα D. Συνεπώς, προκύπτει ότι ο πίνακας A είναι D-ευσταθής. ■

Θεώρημα 5.2.20. Έστω ο πίνακας $A \in M_n(R)$ με $n \geq 2$.

(α) Υποθέτουμε ότι $E_k(A) > 0$ για κάθε $k = 1, \dots . n$, όπου $E_k(A)$ είναι το άθροισμα όλων των κυρίων υποοριζουσών του πίνακα A τάξης k. Συγκεκριμένα, αυτή η κατάσταση ικανοποιείται αν ο πίνακας A είναι ένας P-πίνακας ή ένας P_0^+-πίνακας. Τότε κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A ανήκει στην $w_n \equiv \{z = r \cdot e^{i\theta}: |\theta| < \pi - \frac{\pi}{n}, r > 0\}$.

Επιπροσθέτως κάθε σημείο της w_n είναι μία ιδιοτιμή κάποιου $n \times n$ P-πίνακα.

(β) Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι ένας M-πίνακας . Τότε κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A ανήκει στην $w_n \equiv \{z = r \cdot e^{i\theta}: |\theta| < \pi - \frac{\pi}{n}, r > 0\}$. Επιπροσθέτως κάθε σημείο της w_n είναι μία ιδιοτιμή κάποιου $n \times n$ M-πίνακα.

Ορισμός 5.2.21. Ο πίνακας σύγκρισης $M(A) = [m_{ij}]$ ενός δεδομένου πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_n$ ορίζεται ως εξής:

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ij}|, \alpha\nu\ j = i, \\ -|a_{ij}|, \alpha\nu\ \neq i. \end{cases}$$

Ορισμός 5.2.22. Ένας δοσμένος πίνακας $A \in M_n(R)$ καλείται H-πίνακας αν ο πίνακας σύγκρισης του *M(A)* είναι ένας M- πίνακας.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι:

- Πάντοτε υπάρχει $M(A) \in Z_n$.

- $M(A) = A$ αν και μόνο αν $A \in Z_n$.

- $M(A) = |I \circ A| - (|A| - |I \circ A|)$ είναι η διαφορά μεταξύ ενός μη αρνητικού διαγώνιου πίνακα και ενός μη αρνητικού πίνακα με μηδενική διαγώνιο.

Επιπροσθέτως, ένας δοσμένος πίνακας $A \in M_n$ είναι ένας Μ- πίνακας αν και μόνο αν *M(A)=A* κι ο A είναι ένας Η –πίνακας .

Η αναπαράσταση $A = |I \circ A| - (|A| - |I \circ A|)$ για ένα Μ- πίνακα είναι ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της σχέσης *A=αI-P* .

Ορισμός 5.2.23. Ένας πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in M_n$ λέγεται γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος των στοιχείων των γραμμών αν $|a_{ii}| > |a_{ij}|$, για κάθε $i = 1,2, \dots, n \; και \; j \neq i$.

Λήμμα 5.2.24. Έστω πίνακας $A \in M_n(R)$ με $A = [\alpha_{ij}]$. Θωρούμε $R_i = \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}|$. Για κάθε γραμμή αντιστοιχίζουμε τον γρηγοριανό δίσκο $C_i = \{z \in C: |z - \alpha_{ii} \leq R_i\}$. Τότε το φάσμα του πίνακα A είναι υποσύνολο της ένωσης $\cup \, C_i$.

Λήμμα 5.2.25. Έστω $A \in M_n(R)$ με $A = [\alpha_{ij}]$, με θετικά διαγώνια στοιχεία. Τότε ο A είναι γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος κατά γραμμή αν και μόνο αν $\alpha_{ii} + \sum_{i \neq j} \pm \alpha_{ij} > 0$ για κάθε πιθανή 2^{n-1} επιλογή $\pm$ προσήμων, για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Λήμμα 5.2.26. Έστω $A \in M_n(R)$ με $A = [\alpha_{ij}]$. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος των γραμμών ή των στηλών του. Τότε η $\det(A)$ και το γινόμενο $\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Θεώρημα 5.2.27. Αν ο πίνακας $A \in M_n(R)$ είναι γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος τότε ο πίνακας A^{-1} είναι γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος των στοιχείων των στηλών του.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για τον αντίστροφο πίνακα, αν $A = [\alpha_{ij}]$ και $A^{-1} = [\beta_{ij}]$, τότε $|[\beta_{ij}]| = |\frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}|$ όπου ο A_{ji} είναι ο υποπίνακας του A του οποίου έχουμε διαγράψει την j γραμμή και την i στήλη. Άρα για να δείξουμε ότι ο πίνακας A^{-1} είναι γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος των στοιχείων των στηλών του αρκεί να δείξουμε ότι $|detA_{ii}| > |detA_{ji}|$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και για κάθε $j \neq i$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $i = 1$ και $j = 2$, επίσης υποθέτουμε ότι $\alpha_{ii} > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Από το Λήμμα 5.2.26, έχουμε ότι $\det(A_{11}) > 0$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\det(A_{11}) + \varepsilon \det(A_{12}) > 0 \text{ για } \varepsilon = \pm 1.$$

Ωστόσο,

$$\det(A_{11}) + \varepsilon \det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} \varepsilon\alpha_{21} & \alpha_{23} & \dots \\ \varepsilon\alpha_{31} & \alpha_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$= det \begin{bmatrix} \alpha_{22} + \varepsilon\alpha_{21} & \alpha_{23} & \dots \\ \alpha_{32} + \varepsilon\alpha_{31} & \alpha_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Από τα προαναφερθέντα λήμματα ο παραπάνω πίνακας είναι γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος κατά γραμμή για $\varepsilon = \pm 1$, και η ορίζουσά του είναι θετική, αφού όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικά. ■

Ορισμός 5.2.28. Ένας πίνακας $B = [b_{ij}] \in M_n$ λέγεται κατά μέτρο ισοδύναμος με ένα πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_n$ αν $|b_{ij}| = |a_{ij}|$ για κάθε $i, j = 1,2,3, \dots, n$.

Θεώρημα 5.2.29. Έστω ένας πίνακας $A \in M_n$. Κάθε πίνακας $B \in M_n$ που είναι ισοδύναμος με τον A, είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A μπορεί να γραφτεί στη μορφή $A = PMD$, όπου ο $P \in M_n(R)$ είναι ένας πίνακας μετάθεσης, ο $D \in M_n(R)$ είναι ένας θετικός διαγώνιος πίνακας και ο $M \in M_n$ είναι ένας γνήσια διαγώνια κυριαρχημένος πίνακας.

Πρόταση 5.2.30. Έστω πίνακας $A \in M_n(R)$, ο οποίος είναι διαγώνια κυριαρχημένος κατά γραμμή. Υποθέτουμε ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A είναι θετικά, τότε ο A είναι θετικά ευσταθής P-πίνακας.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο πίνακας A καθώς και κάθε κύριος υποπίνακάς του $A[\alpha]$ με $a \subseteq < n >$ είναι θετικά ευσταθής. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πίνακας $B = [B_{ij}]$ με θετικά διαγώνια στοιχεία και διαγώνια κυριαρχημένος κατά γραμμή είναι θετικά ευσταθής. Σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.24. το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα B περιέχεται στην ένωση των $C_k = \{z \in C \mid |z - B_{kk}| < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |B_{ki}|\}$. Θα δείξουμε ότι το C_k περιέχεται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο, δηλαδή ότι για κάθε $z \in C_k$ τότε $Re(z) > 0$. Ωστόσο επειδή το κέντρο B_{kk} του κύκλου είναι πραγματικό και θετικό αρκεί να δείξουμε ότι όλα τα πραγματικά $z \in C_k$ είναι θετικά. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε το εξής $B_{kk} - z \leq |z - B_{kk}|$ όμως $|z - B_{kk}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |B_{ki}|$. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι $B_{kk} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |B_{ki}| \leq z$. Άρα, αφού ο πίνακας B είναι διαγώνια κυριαρχημένος κατά γραμμή, $B_{kk} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |B_{ki}| > 0$ και άρα $z > 0$. Επομένως πράγματι ο πίνακας B είναι θετικά ευσταθής. Άρα, για κάθε $a \subseteq < n >$, ο $A[\alpha]$ είναι θετικά ευσταθής. Επομένως όλες οι πραγματικές ιδιοτιμές του $A[\alpha]$ είναι θετικές. Τώρα από το γεγονός ότι η ορίζουσα του $A[\alpha]$ είναι το γινόμενο των πραγματικών ιδιοτιμών που είναι θετικές, και των μιγαδικών ιδιοτιμών που πάνε σε ζεύγη συζυγών, καταλήγουμε στο ότι η ορίζουσα του $A[\alpha]$ είναι θετική. Άρα ο A είναι P-πίνακας. ■

Παράδειγμα. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Παρατηρούμε ότι ο A ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης 5.2.30.

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 13) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \tfrac{8 \pm \sqrt{12}}{2}.$$

Άρα ο πίνακας A έχει θετικές ιδιοτιμές και θετικές κύριες υποορίζουσες. Επομένως είναι P-πίνακας.

Πρόταση 5.2.31. Έστω πίνακας $A \in M_n(R)$, τέτοιος ώστε ο $A + A^T$ να είναι θετικά ορισμένος. Τότε ο A είναι θετικά ευσταθής P-πίνακας.

Απόδειξη. Θεωρούμε $A \in M_n(R)$ ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες τις παραπάνω πρότασης. Επειδή ο $A + A^T$ είναι θετικά ορισμένος τότε ο $A[\alpha] + A^T[\alpha]$ είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο $A[\alpha]$ αποτελείται από τις πρώτες k στήλες και γραμμές του πίνακα A. Τότε για $x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, όπου $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ έχουμε ότι $x^*(A + A^T)x$ $= \tilde{x}^*(A[a] + A^T[\alpha])\tilde{x}$. Παρατηρούμε ότι

$$A[a] = \frac{A[a]+A^T[\alpha]}{2} + \frac{A[a]-A^T[\alpha]}{2}.$$

Άρα για $x \in C^k$, έχουμε ότι

$$x^*A[a]x = x^* \left(\frac{A[a]+A^T[\alpha]}{2}\right) x + x^* \left(\frac{A[a]-A^T[\alpha]}{2}\right) x.$$

Συνεπώς το $Re(x^*A[a]x) > 0$. Άρα το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι θετικό, το οποίο συνεπάγεται ότι ο A είναι θετικά ευσταθής P-πίνακας. ■

Πρόταση 5.2.32. Έστω A M-πίνακας. Τότε ο A είναι θετικά ευσταθής P-πίνακας.

Απόδειξη. Από συνέπεια του Λήμματος 5.1.3, έχουμε ότι ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής. Τώρα επειδή κάθε κύριος υποπίνακας $A[a]$ του A είναι και αυτός M-πίνακας προκύπτει ότι ο A είναι P-πίνακας. Άρα ο A είναι θετικά ευσταθής P-πίνακας. ■

Ορισμός 5.2.33. Θα συμβολίζουμε με P^2 το σύνολο των πινάκων $A \in M_n(R)$, τέτοιοι ώστε οι πίνακες A και A^2 να είναι P-πίνακες.

Παρατήρηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλοι οι 3×3 P^2-πίνακες είναι θετικά ευσταθείς. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε πίνακα $A \in M_3(R)$ τέτοιον ώστε να είναι P^2-πίνακας. Τώρα υποθέτουμε ότι ο πίνακας A δεν είναι θετικά ευσταθής. Έστω $\lambda = e^{i\theta}$ να είναι μια ιδιοτιμή του A, όπου $\theta = Arg\lambda$. Επειδή ο A είναι ένας P-πίνακας ο οποίος δεν είναι θετικά ευσταθής θα πρέπει $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$. Συνεπώς, κάθε ιδιοτιμή του A^2 έχει τη μορφή $\lambda^2 = |\lambda|^2 \, e^{i(2\theta)}$ και άρα $\pi \leq 2\theta \leq \frac{4\pi}{2}$, άτοπο από Θεώρημα 5.2.20. Όμως αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση που έχουμε κάνει ότι ο A^2 είναι P-πίνακας. Άρα ο A είναι θετικά ευσταθής.

Πρόταση 5.2.34. Έστω $A \in P^2$. Τότε οι παρακάτω πίνακες ανήκουν επίσης στο P^2:

α) A^T.

β) A^{-1}.

γ) DAD^{-1}, όπου ο D είναι ένας αντιστρέψιμος διαγώνιος πίνακας.

δ) PAP^{-1}, όπου ο P είναι ένας πίνακας μετάθεσης.

Ως γνωστόν, το γινόμενο Hadamard δύο θετικά ορισμένων πινάκων είναι και αυτό θετικά ορισμένος πίνακας. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι γνωστό ως θεώρημα γινομένου του Schur. Τώρα μπορούμε εύκολα να βρούμε δύο πίνακες A, B οι οποίοι είναι P-πίνακες αλλά το $A \circ B$ δεν είναι P-πίνακας. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τους πίνακες: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Για τους πίνακες A, B μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι είναι P-πίνακας. Ωστόσο $A \circ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, ο οποίος δεν είναι P-πίνακας.

<u>5.3. Κυρτοί συνδυασμοί και P-πίνακες</u>

Θεώρημα 5.3.1. Θεωρούμε πίνακα A τέτοιον ώστε $A = BC^{-1}$, για κάποιον C αντιστρέψιμο πίνακα. Τότε ο πίνακας A είναι P-πίνακας αν και μόνο αν ο $TB + (I - T)C$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε πίνακα $T \in [0, I]$.

Το προηγούμενο θεώρημα έχει ως άμεση συνέπεια το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πόρισμα 5.3.2. Έστω πίνακας $A \in M_n(R)$. Τότε ο A είναι P-πίνακας αν και μόνο αν ο πίνακας $TA + I - T$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε πίνακα $T \in [0, I]$.

Απόδειξη. Πράγματι, αφού $A = AI^{-1}$ όπου ο I είναι μοναδιαίος πίνακας, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.3.1 για $B = A$ και $C = I$, προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Παράδειγμα. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ και τον πίνακα $T = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$, με $T \in [0, I]$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι P-πίνακας. Τώρα, $TA + I - T = \begin{bmatrix} 1 + d_1 & d_1 \\ 2d_2 & 4d_2 + 1 \end{bmatrix}$ ο οποίος έχει θετική ορίζουσα και άρα είναι αντιστρέψιμος.

Στην προσπάθειά μας να γενικεύσουμε το προηγούμενο πόρισμα θα χρειαστούμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.3.3. Θεωρούμε C_T^2 την κλάση των πινάκων $A \in M_n(R)$ οι οποίοι ικανοποιούν το εξής: $A \in C_T^2$ αν ο πίνακας $T_0A^2 + T_1A + T_2$ είναι αντιστρέψιμος για όλους τους πίνακες T_0, T_1, $T_2 \in [0, I]$ τέτοιοι ώστε $T_0 + T_1 + T_2 = I$.

Τώρα μπορούμε να κάνουμε την επέκταση του Πορίσματος 5.3.2.

Θεώρημα 5.3.4. Έστω ο πίνακας $A \in C_T^2$. Τότε ο πίνακας $t_1A + t_0A^2$ είναι P-πίνακας για κάθε $t_0, t_1 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $t_0 + t_1 = 1$.

Απόδειξη. Έστω $A \in C_T^2$ και $t_0, t_1 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $t_0 + t_1 = 1$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 5.3.2. για να είναι ο $B = t_1 A + t_0 A^2$ P-πίνακας αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας $TB + I - T$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε πίνακα $T \in [0, I]$. Έστω $T \in [0, I]$, και θέτουμε

$$T_0 = t_0 T,\ T_1 = t_1 T,\ T_2 = I - T.$$

Τώρα επειδή $A \in C_T^2$ και $T_0 + T_1 + T_2 = (t_0 + t_1)T + I - T = I$ έχουμε ότι

$$TB + I - T = t_0 TA^2 + t_1 TA + T_2.$$

Επομένως, από τον ορισμό της C_T^2 κλάσης, έπεται ότι ο πίνακας $TB + I - T$ είναι αντιστρέψιμος. ■

Είναι φυσιολογικό τώρα να εξετάσουμε την επόμενη κλάση πινάκων η οποία γενικεύει την έννοια της C_T^2 κλάσης.

Ορισμός 5.3.5. Λέμε ότι ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ είναι μέλος της κλάσης P_t^2 αν για κάθε $t_0, t_1 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $t_0 + t_1 = 1$, ο $t_0 A^2 + t_1 A$ είναι P-πίνακας.

Παρατηρούμε ότι για τους $A \in C_T^2$ ισχύει ότι και ο $A + \alpha I$ ανήκει στην κλάση C_T^2 για κάθε $\alpha \geq 0$. Στο επόμενο θεώρημα, θα αποδείξουμε ότι και η κλάση P_t^2 ικανοποιεί αυτήν την ιδιότητα.

Θεώρημα 5.3.6. Έστω $A \in P_t^2$. Τότε για κάθε $\alpha \geq 0$ ο $A + \alpha I \in P_t^2$.

Απόδειξη. Έστω $A \in P_t^2$. Για να διευκολύνουμε την διεκπεραίωση των πράξεων ορίζουμε τον βοηθητικό πίνακα $B = t_0(A + \alpha I)^2 + t_0(A + \alpha I)$. Αρκεί να δείξουμε ο πίνακας B είναι P-πίνακας για κάθε $t_0, t_1 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $t_0 + t_1 = 1$ και για όλα τα $\alpha \geq 0$. Για να το δείξουμε αυτό θα αναπτύξουμε την έκφραση για τον B και θα τον φέρουμε σε κατάλληλη μορφή για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.3.4.

$$B = t_1 A + a t_1 I + t_0 A^2 + 2a t_0 A + a^2 t_0 I = (t_1 + 2a t_0)A + t_0 A^2 + (a t_1 + a^2 t_0)I$$

$$= (t_1 + 2at_0 + t_0)\left(\frac{t_1 + 2at_0}{t_1 + 2at_0 + t_0} A + \frac{t_0}{t_1 + 2at_0 + t_0} A^2\right) + (at_1 + a^2 t_0)I = BC + \gamma I,$$

όπου $\beta = (t_1 + 2at_0 + t_0)$, $C = \frac{t_1 + 2at_0}{t_1 + 2at_0 + t_0} A + \frac{t_0}{t_1 + 2at_0 + t_0} A^2$ και $\gamma = at_1 + a^2 t_0$.

Από το Θεώρημα 5.3.4, έχουμε ότι ο C είναι P-πίνακας. Επειδή $\beta > 0$ και $\gamma \geq 0$ για κάθε $t_0, t_1 \in [0,1]$ με $t_0 + t_1 = 1$ και για όλα τα $\alpha \geq 0$ έχουμε ότι ο B είναι P-πίνακας. Άρα ο $A + \alpha I \in P_t^2$ για όλα τα $\alpha \geq 0$. ■

Στην συνέχεια θα συνδέσουμε την κλάση P_t^2 με τους θετικά ευσταθής πίνακες.

Πρόταση 5.3.7. Έστω $A \in P_t^2$. Τότε ο πίνακας A είναι θετικά ευσταθής.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή με μη θετικό πραγματικό μέρος, τότε δεν ανήκει στην P_t^2. Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ τέτοιο ώστε $\alpha = -Re\lambda \geq 0$. Τότε ο πίνακας $(A+\alpha I)^2$ έχει μία μη θετική πραγματική ιδιοτιμή, το οποίο συνεπάγεται ότι δεν είναι ένας P-πίνακας. Άρα $(A+\alpha I)^2 \notin P_t^2$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.6, ο $A \notin P_t^2$. ■

5.4. Εφαρμογές των P-πινάκων

5.4.1. Linear Complementarity Problem (LCP)

Έστω $A \in M_n(R)$ και $q \in R^n$, βρίσκουμε $z \in R^n$ τέτοιο ώστε $z \geq 0, q + Mz \geq 0$ και $z^T(q+Mz) = 0$.

Το LCP(q,M) μπορεί να μορφοποιηθεί σαν το τετραγωνικό πρόγραμμα κατά το οποίο ελαχιστοποιούμε την ποσότητα $z^T(q+Mz)$ δεδομένου ότι $q+Mz > 0$ και $z \geq 0$.

Το LCP εμφανίζεται σε εφαρμογές συμπεριλαμβανομένων κυρτού προγραμματισμού δευτέρας τάξης, στην ρευστομηχανική καθώς και στην θεωρία παιγνίων.

Έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι για την επίλυση των LPC προβλημάτων. Η πιο γνωστή απ' αυτές είναι μια μέθοδος γνωστή ως ο Αλγόριθμος του Lemke.

Θεώρημα 5.4.1.1. Το πρόβλημα LCP(q,M) έχει μία μοναδική λύση για κάθε διάνυσμα $q \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν ο $M \in M_n(R)$ είναι ένας P-πίνακας.

5.4.2. Διαστήματα Πινάκων (Interval Matrices)

Στα πλαίσια του δυναμικού προγραμματισμού, καθώς και σε άλλες ερευνητικές περιοχές, η ανάλυση του προβλήματος των διαστημάτων με πίνακες αλλά και των διαστημάτων με εξισώσεις παίζει σημαντικό ρόλο. Πιο συγκεκριμένο το πρόβλημα του διαστήματος $[A,B]$ με A,B πίνακες εξετάζει κάτω από ποιες συνθήκες κάθε πίνακας $C \in [A,B]$ είναι αντιστρέψιμος. Το παραπάνω πρόβλημα είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με τους P-πίνακες και ιδιαίτερα το αντίστοιχο πρόβλημα για τους P-πίνακες. Το πρόβλημα διαστήματος για $[A,B]$ έχει λύση αν και μόνον αν για κάθε πίνακα $T \in [0,I]$ με διαγώνια στοιχεία 0 ή 1 ο πίνακας $TA + (I-T)B$ είναι αντιστρέψιμος. Το αντίστοιχο πρόβλημα για P-πίνακες ρωτάει πότε ένα διάστημα πινάκων αποτελείται μόνον από P-πίνακες και η απάντηση είναι καταφατική αν και μόνον αν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα υπάρχει δείκτης έτσι ώστε η ποσότητα $x_j(C\,x)_j$ είναι θετικό για κάθε πίνακα C του διαστήματος $[A,B]$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, 1991.

[2] Π. Ψαρράκος, Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, 2015.

[3] Α. Γ. Φελλούρης, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, 2006

[4] Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές, 2006.

[5] Ι. Β. Μαρουλάς, Σημειώσεις Ανάλυσης Πινάκων, Αθήνα 2005.

[6] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, Matrix Analysis, 1990.

[7] Patrick Scott Kisa Torres, Stability Analysis, Convex Hulls of Matrix Powers and their Relations to P-Matrices, 2018.

[8] O. Y. Kushel. On a criterion of D-stability for P-matrices. Special Matrices, 4: 181-188, 2016.

[9] M. E. Fischer and A. T. Fuller. On the stabilization of matrices and the convergence of linear iterative processes. Proc. Cambridge Philos. Soc., 54: 417-425, 1958.