



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**Το διάγραμμα ελέγχου με κινητούς μέσους και γενικευμένα βάρη για
δεδομένα που ακολουθούν την Γάμμα κατανομή και η μελέτη της
ευρωστίας του**

ΑΡΒΑΝΙΤΗ ΜΑΡΙΑ ΕΛΕΝΗ

ΑΜ: 09113104

Επιβλέπων:

X. Κουκουβίνος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2020



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Thesis

**The generally weighted moving average control chart based on
gamma distribution and its robustness study**

ARVANITI MARIA ELENI

Supervisor: Koukouvinos Christos,
Professor NTUA

Athens, 2020

Περίληψη

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ) είναι μία συλλογή από στατιστικές τεχνικές για την επίβλεψη της σταθερότητας της παραγωγικής διαδικασίας και τον εντοπισμό των ειδικών αιτιών που ευθύνονται για τη μεταβλητότητά της. Τα Διαγράμματα Ελέγχου αποτελούν το σημαντικότερο κομμάτι του ΣΕΔ για την παρακολούθηση της παραγωγικής διαδικασίας και της ποιότητας των προϊόντων. Η παρακολούθηση του χρόνου μεταξύ της εμφάνισης των γεγονότων, αντί του αριθμού των γεγονότων χρησιμοποιείται για τις υψηλής ποιότητας διεργασίες, όπου τα γεγονότα συμβαίνουν σπάνια. Η παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζει ένα μονόπλευρο Γενικευμένο Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Γενικευμένα Βάρη, το οποίο βασίζεται στη Γάμμα κατανομή για την παρακολούθηση του χρόνου μεταξύ των γεγονότων (TBE) και καλείται GWMA-TBE διάγραμμα ελέγχου.

Στο 1^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα κύρια χαρακτηριστικά του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών (ΣΕΔ), καθώς και των διαγραμμάτων ελέγχου. Το 2^ο Κεφάλαιο περιλαμβάνει τη γενική θεωρία και το υπόβαθρο του GWMA-TBE διαγράμματος, καθώς και τη μελέτη της κατανομής του μήκους ροής όταν οι παράμετροι είναι γνωστές, τόσο σε έναν εντός ελέγχου (IC), όσο και σε εκτός ελέγχου (OOC) σχεδιασμό. Επιπροσθέτως, παρουσιάζεται το GWMA-TBE διάγραμμα όταν οι παράμετροι είναι άγνωστες, συμπεριλαμβανομένων και των συνεπειών από την εκτίμησή τους στην απόδοση του διαγράμματος. Επιπλέον, παρουσιάζουμε τον σχεδιασμό της Φάσης II του GWMA-TBE διαγράμματος. Στο 3^ο Κεφάλαιο, μελετάται η ευρωστία του GWMA-TBE διαγράμματος, στην περίπτωση που η κατανομή είναι η Εκθετική, όταν οι χρόνοι (TBE) ακολουθούν την Weibull ή την λογαριθμοκανονική κατανομή. Στο 4^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο εφαρμογές του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου, η μία με χρήση προσομοιωμένων δεδομένων και η άλλη με πραγματικά δεδομένα. Τέλος, στο 5^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από την παρούσα διπλωματική εργασία, καθώς και, προτάσεις για μελλοντική εργασία.

Λέξεις – κλειδιά: στατιστικός έλεγχος ποιότητας, διαγράμματα ελέγχου, average run length, GWMA,TBE, ευρωστία, EWMA, Shewhart.

Abstract

Statistical process control (SPC) is a collection of statistical techniques for overseeing the stability of the production process and identifying the specific causes responsible for its variability. Control Charts are the most important part of the SPC, to monitor the production process and product quality. Monitoring of time between events (TBE) instead of the number of events is used in high-quality processes where the events occur rarely. This thesis presents a one-sided Generally Weighted Moving Average control chart based on the gamma distribution to monitor the time between events (TBE); regarded as the GWMA-TBE chart.

In 1st Chapter, the main features of Statistical Quality Control (SQC), Statistical Process Control (SPC) and control charts are presented. Chapter 2 includes the general theory and background on the GWMA-TBE chart, as well as, a study of the run-length distribution for the scenario when the parameters are known, in which the in-control (IC) design and the out-of-control (OOC) performance are included. In addition to this, the GWMA-TBE chart when the parameters are unknown is presented, including the effects of parameter estimation on the performance of the chart. Also, we present the design of the Phase II of GWMA-TBE chart. In Chapter 3, a robustness study of the exponential GWMA-TBE chart is presented for TBE observations that follow a Weibull or a lognormal distribution. In Chapter 4, two applications of the GWMA-TBE control chart are presented; an example with simulated data and one with real data. Finally, in 5th Chapter conclusions of this thesis, as well as, proposals for future research are presented.

Key - words: statistical quality control, control charts, average run length, GWMA, TBE, robustness, EWMA, Shewhart.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Κουκουβίνο, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας για την υποστήριξη και την καθοδήγησή του τόσο καθ' όλη τη διάρκεια της εν λόγω εργασίας, όσο και της ακαδημαϊκής μου πορείας.

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον υποψήφιο διδάκτορα Βασίλειο Αλεβιζάκο για τον χρόνο, την υπομονή και τις πολύτιμες συμβουλές του.

Τέλος, επιθυμώ να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους ανθρώπους που υπήρξαν δίπλα μου όλο αυτό το διάστημα.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	ii
Abstract	iii
Ευχαριστίες	iv
Περιεχόμενα.....	vi
Κατάλογος Συντομογραφιών	viii
Λίστα Πινάκων.....	ix
Λίστα Σχημάτων	x
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή	12
1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας	12
1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών	15
1.3 Διαγράμματα Ελέγχου	17
1.3.1 Βασικές αρχές Διαγραμμάτων Ελέγχου	17
1.3.2 Όρια Ελέγχου.....	19
1.3.3 Μέτρα απόδοσης.....	20
1.3.4 Φάσεις I και II.....	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Το GWMA-TBE διάγραμμα ελέγχου.....	24
2.1 Εισαγωγή.....	24
2.2 Ο σχεδιασμός του GWMA – TBE	25
2.3 Ο σχεδιασμός του εντός ελέγχου GWMA-TBE διαγράμματος.....	31
2.4 Ο σχεδιασμός του εκτός ελέγχου GWMA-TBE διαγράμματος.....	34
2.5 Βέλτιστος σχεδιασμός του GWMA-TBE	39
2.6 ARL μηδενικής και σταθερής κατάστασης.....	41
2.7 Η Φάση II του GWMA-TBE διαγράμματος.....	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Μελέτη της Ευρωστίας του GWMA-TBE	50
3.1 Η έννοια της Ευρωστίας.....	50

3.2 Η Weibull κατανομή	51
3.3 Η λογαριθμοκανονική κατανομή	57
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Εφαρμογές	64
4.1 Εφαρμογή 1	64
4.2 Εφαρμογή 2	67
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Συμπεράσματα-Προτάσεις.....	70
Βιβλιογραφία.....	72

Κατάλογος Συντομογραφιών

α	Σφάλμα Τύπου I	Error Type I
ARL	Μέσο Μήκος Ροής	Average Run Length
ARL_0	Εντός Ελέγχου Μέσο Μήκος Ροής	In Control Average Run Length
ARL_1	Εκτός Ελέγχου Μέσο Μήκος Ροής	Out of Control Average Run Length
CL	Κεντρική γραμμή	Center Line
CUSUM	Συσσωρευμένα Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου	Cumulative Sum (Control Charts)
EWMA	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη	Exponentially Weighted Moving Average (Control Charts)
GWMA	Γενικευμένα Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Γενικευμένα Βάρη	Generally Weighted Moving Average (Control Charts)
LCL	Κάτω Όριο Ελέγχου	Lower Control Limit
LSL	Κάτω Όρια Προδιαγραφών	Lower Specification Limits
OCAP	Εκτός ελέγχου πρόγραμμα δράσης	Out of Control Action Plan
RL	Μήκος Ροής	Run Length
SDRL	Τυπική Απόκλιση του Μήκους Ροής	Standard Deviation of the Run Length
SPC (ΣΕΔ)	Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών	Statistical Process Control
TBE	Χρόνος Μεταξύ Γεγονότων	Time Between Events
UCL	Άνω Όριο Ελέγχου	Upper Control Limit
USL	Άνω Όρια Προδιαγραφών	Upper Specification Limits

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 2-1 Q_t για διαφορετικούς συνδυασμούς (q, a)	29
Πίνακας 2-2 Τιμές L για συνδυασμούς (q, a) όταν $k = 1, 2, 3$ και $ARL_0^* = 370$	32
Πίνακας 2-3 Απόδοση του GWMA-TBE διαγράμματος για $k = 1$	35
Πίνακας 2-4 Απόδοση του GWMA-TBE διαγράμματος για $k = 2$	36
Πίνακας 2-5 Απόδοση του GWMA-TBE διαγράμματος για $k = 3$	37
Πίνακας 2-6 Βέλτιστοι συνδυασμοί των (q, a, L) και οι αντίστοιχες τιμές του ARL_1 του GWMA-TBE.....	40
Πίνακας 2-7 Οι zero-state και steady-state τιμές του ARL του GWMA-TBE....	42
Πίνακας 2-8 Παράμετροι σχεδιασμού της Φάσης II του GWMA-TBE στην Case U.....	48
Πίνακας 3-1 Τιμές της παραμέτρου κλίμακας α για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου σχήματος β για να αποδοθούν οι προσδοκώμενες μέσες τιμές των TBE παρατηρήσεων.....	52
Πίνακας 3-2 Τιμές ARL του GWMA-TBE διαγράμματος υπό την Εκθετική και τη Weibull κατανομή.....	53
Πίνακας 3-3 Τιμές της παραμέτρου θέσης m για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου σχήματος s για να αποδοθούν οι προσδοκώμενες μέσες τιμές των TBE παρατηρήσεων.....	57
Πίνακας 3-4 Τιμές ARL του GWMA-TBE διαγράμματος υπό την Εκθετική και τη Λογαριθμοκανονική κατανομή.....	58
Πίνακας 4-1 Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών σεισμών άνω των 6 Ρίχτερ (1/1/1900-12/31/2018) και οι τιμές των στατιστικών G_t και Z_t της Εφαρμογής 1.....	65
Πίνακας 4-2 Τιμές των στατιστικών G_t και Z_t της Εφαρμογής 2.....	68

Λίστα Σχημάτων

Σχήμα 0-1 Οι Φάσεις της Διαδικασίας Παραγωγής.....	15
Σχήμα 0-2 Τυπικό Διάγραμμα Ελέγχου.....	17
Σχήμα 0-3 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και οι ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου.....	19
Σχήμα 2-1 Τιμές <i>ARL</i> του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου για άγνωστο θ όταν ($k = 1, q = 0.95, a = 0.5, L = 1.555$).....	45
Σχήμα 2-2 Τιμές <i>ARL</i> του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου για άγνωστο θ όταν ($k = 1, q = 0.95, a = 1, L = 1.858$).....	46
Σχήμα 2-3 Τιμές <i>ARL</i> του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου για άγνωστο θ όταν ($k = 2, q = 0.95, a = 0.5, L = 1.711$).....	46
Σχήμα 2-4 Τιμές <i>ARL</i> του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου για άγνωστο θ όταν ($k = 2, q = 0.95, a = 1, L = 1.942$).....	47
Σχήμα 4-1 GWMA-TBE διάγραμμα για την Εφαρμογή 1.....	66
Σχήμα 4-2 EWMA-TBE διάγραμμα για την Εφαρμογή 1.....	66
Σχήμα 4-3 GWMA-TBE διάγραμμα για την Εφαρμογή 2.....	69
Σχήμα 4-4 EWMA-TBE διάγραμμα για την Εφαρμογή 2.....	69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

Στα πλαίσια της ανταγωνιστικότητας μεταξύ των επιχειρήσεων, ο έλεγχος και η βελτίωση της ποιότητας των προϊόντων ή υπηρεσιών που προσφέρονται αποτελεί σημαντικό τομέα τον οποίο μπορεί να εκμεταλλευτεί στρατηγικά η κάθε επιχείρηση προκειμένου να ενισχύσει τη θέση της στη αγορά.

Ωστόσο, η έννοια της ποιότητας ορίζεται ποικιλοτρόπως, σύμφωνα με τον Montgomery(2013). Η πλειοψηφία των ανθρώπων συνδέει την ποιότητα με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά – διαστάσεις που οφείλει να έχει ένα προϊόν ή μία υπηρεσία. Αποτελεί, επίσης, ένα από τους κυριότερους παράγοντες για τη λήψη αποφάσεων που αφορούν την επιλογή των ανταγωνιστικών προϊόντων και υπηρεσιών, ανεξάρτητα από το αν ο καταναλωτής είναι άτομο ή βιομηχανικός οργανισμός, κατάστημα, τράπεζα, χρηματοπιστωτικό ίδρυμα.

Κατά συνέπεια, η κατανόηση και η βελτίωση της ποιότητας αποτελούν βασικούς παράγοντες που συμβάλλουν στην επιτυχία των επιχειρήσεων, την ανάπτυξη και την ενίσχυση της ανταγωνιστικότητας.

Οι διαστάσεις, με τις οποίες ο καταναλωτής περιγράφει και αξιολογεί τα προϊόντα ή τις υπηρεσίες, σύμφωνα με τον Garvin (1987) είναι οι εξής: απόδοση, αξιοπιστία, διάρκεια, επισκευή, αισθητική, δυνατότητες, φήμη επιχείρησης και συμμόρφωση με τις προδιαγραφές.

Κατά τον Joseph Juran, ποιότητα σημαίνει καταλληλότητα στη χρήση και αφορά στον σχεδιασμό της ποιότητας (quality of design) και στην προσαρμογή της ποιότητας (quality of performance). Ο όρος, σχεδιασμός της ποιότητας, περιλαμβάνει τις διακυμάνσεις στον βαθμό και τα επίπεδα της ποιότητας μεταξύ των διαφόρων αγαθών

και υπηρεσιών. Πιο συγκεκριμένα, όλα τα αυτοκίνητα έχουν ως βασικό σκοπό την παροχή ασφαλούς μετακίνησης στους επιβαίνοντες. Ωστόσο, ανάλογα με τα υλικά με τα οποία έχουν κατασκευαστεί, την μηχανική ανάπτυξη των κινητήρων και άλλων εξαρτημάτων, διαφέρουν ως προς το μέγεθος, την εμφάνιση και την απόδοσή τους.

Ο όρος, προσαρμογή της ποιότητας, αφορά στο πόσο καλά το προϊόν συμμορφώνεται με τις προδιαγραφές του. Η ποιότητα της συμμόρφωσης επηρεάζεται από ποικίλους παράγοντες, όπως την παραγωγική διαδικασία, την εκπαίδευση και την εποπτεία του εργατικού δυναμικού, τους ελέγχους διεργασίας κλπ. Ωστόσο, ο ορισμός αυτός συνδέεται περισσότερο με την πτυχή συμμόρφωσης της ποιότητας από ό,τι με το σχεδιασμό, γεγονός που πηγάζει από την έλλειψη τυπικής εκπαίδευσης των σχεδιαστών και μηχανικών.

Προτιμάται, ένας πιο σύγχρονος ορισμός της ποιότητας, σύμφωνα με τον οποίο, η ποιότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της διασποράς. Πιο συγκεκριμένα, είναι αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητότητας των χαρακτηριστικών της παραγωγικής διαδικασίας που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Έτσι, όταν ένα προϊόν ικανοποιεί ή αναμένεται να ξεπεράσει τις προσδοκίες των καταναλωτών, είναι καλό να παρουσιάζει μικρή μεταβλητότητα γύρω από τις ονομαστικές διαστάσεις του. Όμως, αναφερόμαστε σε ανεπιθύμητη ή επιβλαβή μεταβλητότητα, καθώς υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η μεταβλητότητα είναι κερδοφόρα.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελεί την παλαιότερη μέθοδο ελέγχου της παραγωγικής διαδικασίας για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων, στοχεύοντας στην έγκαιρη ανακάλυψη μη συμμορφωμένων με τις προδιαγραφές προϊόντων. Εν συνεχεία, λαμβάνονται διορθωτικές ενέργειες για την απομάκρυνση των αιτιών που ευθύνονται για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων στατιστικής ανάλυσης δεδομένων, με τρεις συνιστώσες, καθεμία από τις οποίες περιέχει στατιστικές μεθόδους προσανατολισμένες σε διαφορετικές φάσεις της παραγωγικής διαδικασίας (Montgomery, 2013). Οι τρεις συνιστώσες είναι οι ακόλουθες:

- Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (Design of Experiments)
- Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control)
- Δειγματοληψία Αποδοχής (Acceptance Sampling)

Αναλυτικότερα, ο Σχεδιασμός και η Ανάλυση Πειραμάτων περιλαμβάνει τις στατιστικές τεχνικές προκειμένου να προσδιοριστεί η επίδραση που έχουν οι διάφοροι παράγοντες (μεταβλητές) που επηρεάζουν τις ποιοτικές παραμέτρους του προϊόντος και συνεπώς είναι αρκετά χρήσιμος στην ανάπτυξη των διαδικασιών και την αντιμετώπιση των προβλημάτων, συμβάλλοντας έτσι στη βελτίωση του σχεδιασμού της παραγωγικής διεργασίας.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών είναι μία συλλογή από εργαλεία για την επίβλεψη της σταθερότητας της παραγωγικής διαδικασίας και τον εντοπισμό των ειδικών αιτιών που ευθύνονται για τη μεταβλητότητά της. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται παρέχουν τη δυνατότητα βελτίωσης της ικανότητάς της (capability) μέσω της μείωσης της μεταβλητότητάς της, έτσι ώστε η διαδικασία να παράγει σύμφωνα με τις απαιτούμενες προδιαγραφές.

Σημαντικό πλεονέκτημα της μεθοδολογίας αυτής είναι ότι πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια της παραγωγής των προϊόντων και μπορεί να εντοπίσει γρήγορα την ύπαρξη ειδικών αιτιών που επιφέρουν μεταβλητότητα στη διαδικασία.

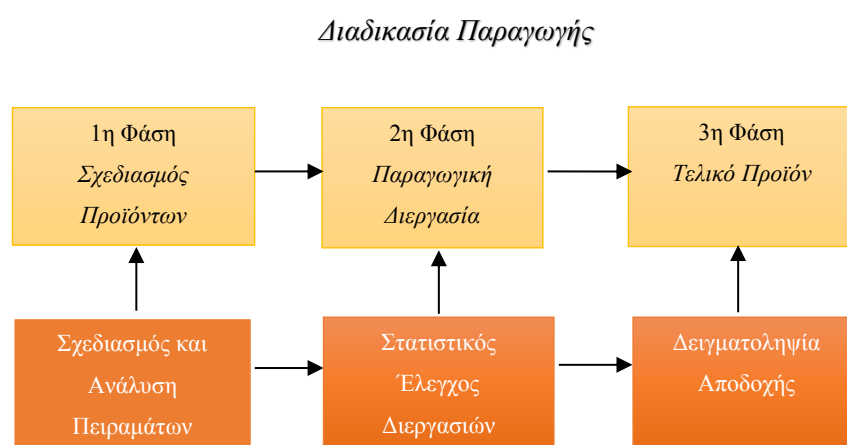
Τα επτά κυριότερα εργαλεία για τον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών, γνωστά ως, “the magnificent seven” , είναι τα ακόλουθα:

- Ιστόγραμμα (Histogram) ή το Διάγραμμα Μίσχου-Φύλλων (Stem-and-Leaf Plot)
- Φύλλο Ελέγχου (Check Sheet)
- Διάγραμμα Pareto (Pareto Chart)
- Διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος (Cause-and-Effect Diagram)
- Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ατελειών (Defect Concentration Diagram)
- Διάγραμμα Συσχετισμού (Scatter Plot)
- Διάγραμμα Ελέγχου (Control Chart)

Το πιο διαδεδομένο και εύχρηστο εργαλείο από τα παραπάνω, είναι τα διαγράμματα ελέγχου, για την παρακολούθηση της πορείας των παραγωγικών διεργασιών και τη βελτίωση της αποδοτικότητάς τους και κάποια από αυτά εξετάζονται στην παρούσα εργασία.

Τέλος, η Δειγματοληψία Αποδοχής περιλαμβάνει τις δειγματοληπτικές στατιστικές τεχνικές προκειμένου να αποφανθούμε για το αν μια συγκεκριμένη παρτίδα προϊόντων θα γίνει δεκτή ή θα απορριφθεί.

Οι φάσεις της διαδικασίας της παραγωγής φαίνονται και στο επόμενο σχεδιάγραμμα.



Σχήμα 0-4 Οι Φάσεις της Διαδικασίας Παραγωγής

1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών εστιάζει, όπως είδαμε και παραπάνω, στην έγκαιρη ανίχνευση μετατοπίσεων και κατ' επέκταση των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας της διεργασίας, προκειμένου να διερευνηθεί η διαδικασία και να ληφθούν, εγκαίρως, οι απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες, προτού επηρεαστεί αρνητικά η παραγωγική διαδικασία και κατασκευαστεί μεγάλος αριθμός προϊόντων που δεν πληροί τις προδιαγραφές.

Ωστόσο, κάθε παραγωγική διεργασία συνοδεύεται από μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας, ανεξάρτητα από το πόσο καλά έχει σχεδιαστεί, επιβλεφθεί και συντηρηθεί, εξαιτίας μικρών αιτιών, γνωστών ως κοινές ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (*common or chance causes of variation*). Επομένως, δύο προϊόντα δεν θα είναι ποτέ ίδια, αλλά η μεταβλητότητα αυτή είναι μικρή σε μέγεθος και δεν αποδίδεται σε ελέγξιμους παράγοντες. Μια διεργασία στην οποία υπάρχει μόνο φυσική μεταβλητότητα καλείται εντός ελέγχου διεργασία (*in control process*) και λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (*stable state*).

Στις διεργασίες όπου εμφανίζεται συστηματική αλλαγή στο επίπεδο ενός ή περισσότερων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος, η μεταβλητότητα είναι πολύ μεγαλύτερη σε μέγεθος από την φυσική και καλείται ειδική μεταβλητότητα (Αντζουλάκος, 2009). Οι αιτίες που οδηγούν σε αυτή, καλούνται ειδικές ή προσδιορισμένες αιτίες μεταβλητότητας (*special or assignable causes of variation*) και αφορούν συνήθως ελαττωματική πρώτη ύλη, λάθη των χειριστών των μηχανών ή ακόμη και λανθασμένα ρυθμισμένες μηχανές. Η ύπαρξη της ειδικής μεταβλητότητας οδηγεί συνήθως σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διαδικασίας και τότε η διεργασία χαρακτηρίζεται ως εκτός ελέγχου (*out of control process*) και λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (*unstable state*).

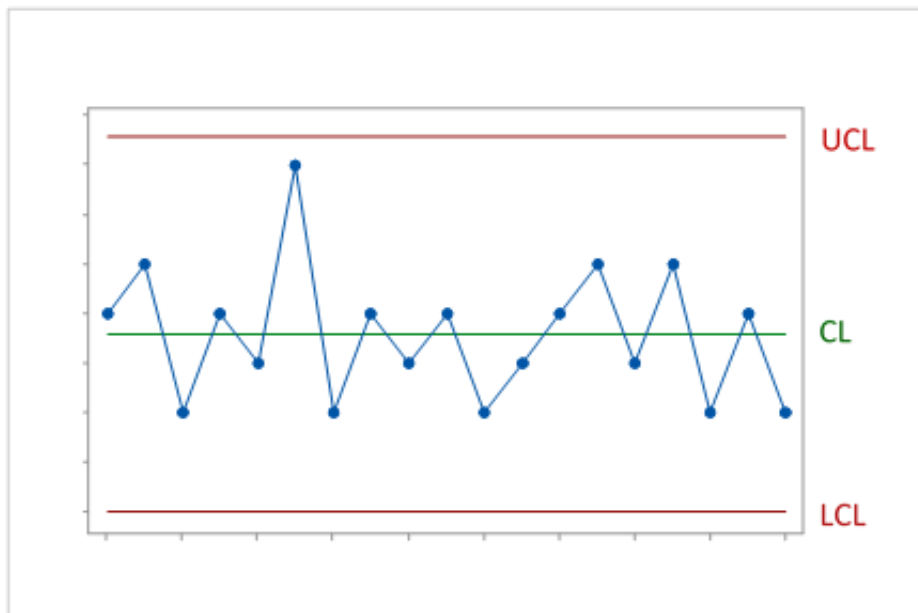
Στη φάση σχεδιασμού ενός προϊόντος, καθορίζεται το κάτω και άνω όριο προδιαγραφών (*lower and upper specification limits*), τα οποία συμβολίζονται ως *LSL* και *USL*, αντιστοίχως και αποτελούν τα όρια προδιαγραφών των ποιοτικών χαρακτηριστικών του προϊόντος. Όταν η τιμή ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού βρεθεί εκτός των ορίων αυτών, τότε το προϊόν κρίνεται ποιοτικά μη αποδεκτό. Ακόμη, ορίζεται η τιμή στόχος (*target value*), η οποία αποτελεί την επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό και συνήθως βρίσκεται στο μέσο του διαστήματος που ορίζεται από τα *LSL* και *USL*.

Απαραίτητη κρίνεται η χρήση ενός εκτός ελέγχου προγράμματος δράσης (*out-of-control action plan, OCAP*), το οποίο θα ενεργοποιείται όταν το διάγραμμα ελέγχου παρέχει ενδείξεις εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Πιο συγκεκριμένα, το *OCAP* περιγράφει τις ενέργειες που πρέπει να πραγματοποιηθούν έτσι ώστε να εξαλειφθούν οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας και σχεδιάζεται από τα διάφορα τμήματα της εκάστοτε επιχείρησης (Αλεβιζάκος, 2018).

1.3 Διαγράμματα Ελέγχου

1.3.1 Βασικές αρχές Διαγραμμάτων Ελέγχου

Τα διαγράμματα ελέγχου (control charts) χρησιμοποιούνται ευρέως για την ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία, σε πραγματικό χρόνο. Πρόκειται για την γραφική παράσταση ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Όπως βλέπουμε και στο επόμενο διάγραμμα τύπου Shewhart, περιέχει μια κεντρική γραμμή (central line, **CL**) η οποία αναπαριστά τη μέση τιμή (mean value) του ποιοτικού χαρακτηριστικού, όπως αυτή προκύπτει από την εντός ελέγχου διεργασία ή την τιμή στόχο. Επίσης, εμφανίζονται δύο ακραίες οριζόντιες γραμμές, το άνω (**UCL**) και κάτω (**LCL**) όριο ελέγχου. Αν κάποιο από τα σημεία βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, υπάρχει ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου και προχωράμε σε κατάλληλες ενέργειες για την εύρεση των αιτιών μεταβλητότητας (Κουκουβίνος, 2017).



Σχήμα 0-5 Τυπικό Διάγραμμα Ελέγχου

Όσο τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, δηλαδή μεταξύ των δύο ακραίων γραμμών και η συμπεριφορά τους είναι τυχαία, η διαδικασία χαρακτηρίζεται ως εντός στατιστικού ελέγχου.

Παρόλα αυτά, ακόμη κι αν όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο, τότε η διεργασία κρίνεται ως εκτός ελέγχου. Οι συχνότερες μορφές προτύπων ή μοτίβων (patterns) είναι τα πρότυπα κύκλων (cycles), τα πρότυπα τάσεων (trends), τα πρότυπα έλλειψης μεταβλητότητας (stratification), τα μικτά πρότυπα (mixtures) και τα πρότυπα αλμάτων (shifts in the process level).

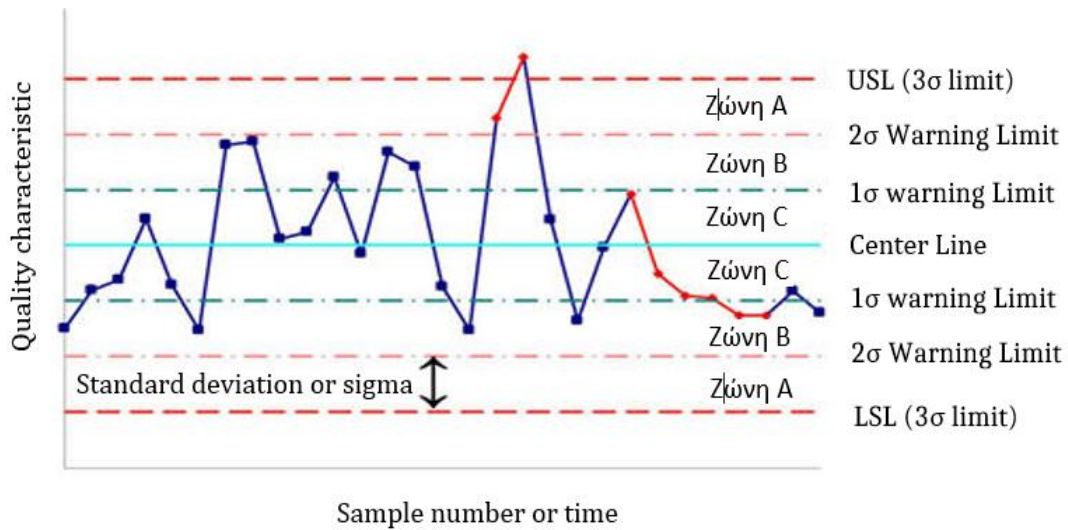
Επιπλέον, γίνεται χρήση των προειδοποιητικών ορίων (warning limits), η σχεδίαση των οποίων προϋποθέτει την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας το μοντέλο των ορίων 3σ , όπως θα δούμε στη συνέχεια, προκειμένου το διάγραμμα να είναι πιο ευαίσθητο ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει μετατοπίσεις στη διεργασία.

Τα προειδοποιητικά όρια, σε συνδυασμό με τους παρακάτω “κανόνες” που περιγράφουν την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου μας βοηθούν να αποφανθούμε για το αν μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου όταν δεν έχουμε κάποιο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου (*UCL* και *LCL*).

Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου, σύμφωνα με τον Montgomery(2013), είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία σε μία από τις Ζώνες A.
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C.
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C.
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”.

8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C.
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.



Σχήμα 0-6 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και οι ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου

1.3.2 Όρια Ελέγχου

Αρχικά, ο Shewhart (1931), όρισε το μοντέλο ορίων σίγμα (sigma limits model) για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου

Μοντέλο ορίων L σίγμα

$$UCL = \mu_w + L\sigma_w$$

$$CL = \mu_w$$

$$LCL = \mu_w - L\sigma_w$$

Το μ_w και το σ_w αποτελούν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, του ποιοτικού χαρακτηριστικού που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, ενώ ο αριθμός

L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Όταν $L = 3$, κατασκευάζονται τα όρια ελέγχου τριών σίγμα (three sigma control limits). Ωστόσο, χρειάζεται προσοχή, η επιλογή του L καθώς για μεγάλες τιμές του L , η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει, κι άρα μειώνεται η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Επομένως, μειώνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I (ή ρίσκο α), αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II (ή ρίσκο β), δηλαδή τα σημεία φαίνεται να είναι εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός. Για μικρές τιμές του L έχουμε τα αντίθετα αποτελέσματα.

1.3.3 Μέτρα απόδοσης

Το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος (average run length, ARL) που ορίζεται από την σχέση:

$$ARL = \frac{1}{p}, \quad (1.1)$$

όπου p η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου, δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. (Κουκουβίνος, 2017). Για μια διεργασία που βρίσκεται υπό έλεγχο και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου με κανονική κατανομή αποδεικνύεται (Κουκουβίνος, 2017) ότι η πιθανότητα ένα σημείο να ξεπεράσει τα όρια είναι ίση με $p = \alpha = 0.0027$. Τότε, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ARL_0 (in control average run length) είναι:

$$ARL_0 = \frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0027} = 370. \quad (1.2)$$

Έτσι, αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, ένα σημείο θα βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου κάθε 370 δείγματα. Στην πράξη επιθυμούμε να έχουμε μεγάλο ARL_0 , καθώς

σε μια εντός ελέγχου διαδικασία θέλουμε μεγάλο αριθμό δειγμάτων μέχρι την εσφαλμένη ένδειξη ότι η διαδικασία βρίσκεται εκτός ελέγχου.

Για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας, η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου είναι ίση με β (σφάλμα τύπου II), οπότε θα βρίσκεται πράγματι εκτός ορίων ελέγχου με πιθανότητα $1 - \beta$. Το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής, ARL_1 (out of control average run length) ορίζεται:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (1.3)$$

και δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν προκειμένου να εντοπιστεί η μετατόπιση στον μέσο της διεργασίας, από τη στιγμή που θα συμβεί η μετατόπιση αυτή. Επιθυμούμε, όπως είναι λογικό, μικρό ARL_1 , καθώς σε μια εκτός ελέγχου διεργασία θέλουμε μικρό αριθμό δειγμάτων μέχρι την (ορθή) ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου.

Είναι γεγονός ότι το μέσο μήκος ροής ARL που παρατηρείται στην πράξη, διαφέρει συνήθως αρκετά από το «θεωρητικό» ARL . Ως εκ τούτου, εγείρεται προβληματισμός γύρω από την αποτελεσματικότητά του. Η διαφοροποίησή του οφείλεται στην ασυμμετρία που εμφανίζει η κατανομή του μήκους ροής με αποτέλεσμα η μέση τιμή του να μη θεωρείται αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής, ιδιαίτερα για μικρές τιμές του p .

Μία τυπική μέθοδος σύγκρισης διαγραμμάτων ελέγχου βασίζεται στον υπολογισμό των μέσων μηκών ροών τους ARL . Θεωρούμε δύο διεργασίες A και B. Εάν $ARL_0(A) > ARL_0(B)$ και επιπλέον $ARL_1(A) < ARL_1(B)$, τότε η διεργασία A θεωρείται καλύτερη της B (Αλεβιζάκος, 2018).

Επιπλέον, η απόδοση ενός διαγράμματος μπορεί να εκφραστεί με την τυπική απόκλιση του μήκους ροής (standard deviation of run length, $SDRL$), η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$SDRL = \sqrt{Var(RL)} \quad (1.4)$$

1.3.4 Φάσεις I και II

Ο έλεγχος της παραγωγικής διεργασίας με χρήση διαγραμμάτων ελέγχου περιλαμβάνει δύο φάσεις, με διαφορετικές εφαρμογές και στόχους.

Αρχικά, η Φάση I (Phase I) περιλαμβάνει τον έλεγχο δειγμάτων που έχουν συλλεχθεί στο παρελθόν με σκοπό να ελεγχθεί αν η διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου. Η χρήση αυτή των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (retrospective). Στόχος είναι να φέρουμε τη διεργασία εντός ελέγχου και να χρησιμοποιήσουμε τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας. Συγκεκριμένα, αρχικά εξετάζουμε αν υπάρχει ένα ή περισσότερα δείγματα τα οποία βρίσκονται εκτός ελέγχου. Ο έλεγχος αυτός θα γίνει εξετάζοντας αν υπάρχει κάποιο σημείο στο διάγραμμα ελέγχου που βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Σε περίπτωση που συμβεί αυτό, εξαιρούμε το σημείο αυτό και υπολογίζουμε ξανά την κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου. Αν τα υπάρχουν περισσότερα από ένα δείγματα (σημεία) εκτός ελέγχου, τότε τα εξαιρούμε διαδοχικά ξεκινώντας από το πιο απομακρυσμένο σημείο από τα όρια ελέγχου, και στη συνέχεια υπολογίζουμε την κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου, μετά από κάθε εξαίρεση σημείου. Με τα νέα, στενότερα όρια είναι πιθανό να προκύψουν δείγματα που ήταν αρχικά εντός ελέγχου και πλέον έχουν βγει εκτός ορίων. Σε τέτοια περίπτωση εξαιρούμε και αυτά τα σημεία μέχρις ότου μείνουν μόνο εντός ελέγχου σημεία. Τα τελικά όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της ποσότητας, μελλοντικά, και αποτελούν πλέον τα όρια ελέγχου Φάσης II (Αντζουλάκος, 2009 & Κουκουβίνος, 2017).

Στη Φάση II (Phase II), τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγξουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Ο διαχειριστής έχει τη δυνατότητα να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως κάποια αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος, ενώ αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το GWMA-TBE διάγραμμα ελέγχου

2.1 Εισαγωγή

Προκειμένου να παρακολουθούνται διαδικασίες υψηλής ποιότητας για την έγκαιρη ανίχνευση της υποβάθμισης της διαδικασίας και, συνεπώς, για την παραγωγή λιγότερων μη συμμορφούμενων προϊόντων, έχουν προταθεί διάφορα γραφήματα ελέγχου, καθώς τα επίπεδα ποιότητας έξι σίγμα (sigma limits model) οδηγούσαν σε εσφαλμένες εκτιμήσεις. Υποθέτουμε ότι το ποσοστό εμφάνισης ελαττωματικών προϊόντων σε μια διεργασία είναι πολύ μικρό ή κοντά στο μηδέν. Έτσι, θα υπάρχουν μεγάλες χρονικές περιόδους μεταξύ της εμφάνισης ελαττωματικών προϊόντων, κι άρα οι μετρήσεις τους που εντοπίζονται σε πολλά σταθερά χρονικά διαστήματα θα είναι μηδέν. Δεδομένου ότι τα συμβατικά διαγράμματα ελέγχου των μετρήσεων, όπως ένα C διάγραμμα ή ένα CUSUM, συσχετίζονται σταθερά με το μηδέν υπό τέτοιες συνθήκες, η αποτελεσματικότητα της παρακολούθησης θα είναι ανησυχητική λόγω των πολύ περιορισμένων ορίων ελέγχου που οδηγούν σε συχνούς ψευδείς συναγερμούς.

Για την αποτελεσματική παρακολούθηση της διαδικασίας υψηλής ποιότητας, οι Xie, Goh και Lu (1998) πρότειναν την παρακολούθηση των αθροιστικών μετρήσεων των συμμορφούμενων προϊόντων μεταξύ δύο μη συμμορφούμενων αντικειμένων, ενώ οι Chan, Xie και Goh (2000) πρότειναν την παρακολούθηση της ποσότητας του επιθεωρούμενου προϊόντος για να παρατηρήσουν ένα ελάττωμα, δηλαδή τη δημιουργία ενός συσσωρευμένου διαγράμματος ελέγχου της ποσότητας. Επίσης, θα μπορούσε να εξεταστεί ο χρόνος μεταξύ των διαδοχικών εμφανίσεων μη συμμορφούμενων προϊόντων (TBE). Για να μοντελοποιήσουμε την εμφάνιση των συμβάντων, ένα φυσικό θεωρητικό μοντέλο είναι η ομοιογενής διαδικασία Poisson.

Συγκεκριμένα, αυτό συνεπάγεται ότι οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Ως εκ τούτου, έχουν προταθεί διάφορα διαγράμματα ελέγχου υπό την προϋπόθεση της εκθετικής κατανομής. Ουσιαστικά, η παρακολούθηση του εκθετικού TBE μέσου είναι ένας εναλλακτικός τρόπος παρακολούθησης του ρυθμού Poisson των συμβάντων σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα. Η ανίχνευση μιας αύξησης του εκθετικού TBE μέσου θα συνεπάγεται μείωση του ρυθμού Poisson, δηλαδή μια πιθανή βελτίωση της διαδικασίας, ενώ μια μείωση του μέσου TBE θα υποδεικνύει πιθανή επιδείνωση της διαδικασίας. Ο Gan (1998) δηλώνει ότι τα εκθετικά CUSUM και τα Poisson CUSUM διαγράμματα έχουν παρόμοιες ARL επιδόσεις στην ανίχνευση μικρών και μέτριων μεταβολών στον ρυθμό Poisson, ενώ η εκθετική CUSUM εκτελεί καλύτερα υπό μεγάλες αυξήσεις του ρυθμού Poisson.

2.2 Ο σχεδιασμός του GWMA – TBE

Το διάγραμμα ελέγχου με κινητούς μέσους και γενικευμένα βάρη για το χρόνο μεταξύ των γεγονότων (GWMA-TBE) αποτελεί ένα διάγραμμα ελέγχου το οποίο κατασκευάζεται από τον σταθμισμένο μέσο μιας ακολουθίας από τυχαίες μεταβλητές $\{X_i\}$, όπου $i = 1, 2, \dots$. Ο ορισμός της τυχαίας μεταβλητής X θα δοθεί με τη χρήση των τυχαίων μεταβλητών Y_j , $j = 1, 2, \dots$. Υποθέτουμε ότι Y_1, Y_2, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες, τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο θ . Επιπλέον, δηλώνουν τον χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών αποτυχιών σε ομογενή Poisson διαδικασία με παράμετρο $1/\theta$. Έτσι, η συνεχής μεταβλητή $X = \sum_{j=1}^k Y_j$, αποτελεί το άθροισμα των χρόνων k διαδοχικών αποτυχιών και δηλώνει το χρόνο μέχρι την εμφάνιση της k -οστής αποτυχίας. Ακόμη, ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους k και θ , δηλαδή τη $Gamma(k, \theta)$ (Chakraborty et al, 2017).

Η Γάμμα κατανομή με παραμέτρους k και θ , δηλαδή η $Gamma(k, \theta)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την:

$$f(x; k, \theta) = \frac{e^{-x/\theta} x^{k-1}}{\Gamma(k)\theta^k}, x > 0, \theta > 0 \text{ και } k > 0. \quad (2.1)$$

Προκύπτει, επομένως, ότι η μέση ή αναμενόμενη τιμή της X είναι $\mu = k\theta$ και η διασπορά της $\sigma^2 = k\theta^2$. Για $k = 1$, η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Επιπλέον, δίνεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για ακέραιο $k > 0$

$$F(x; k, \theta) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{x}{\theta}\right)^i e^{-x/\theta} \quad (2.2)$$

Η Γάμμα κατανομή για $k = 1$, δίνει την Εκθετική κατανομή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως

$$f(x|\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), x > 0, \quad (2.3)$$

όπου η παράμετρος $\lambda > 0$ δηλώνει την αναμενόμενη χρονική διάρκεια μεταξύ δύο γεγονότων (αποτυχιών) με $\lambda = 1/\theta$. Προκύπτει, επομένως, ότι η μέση τιμή είναι ίση με $\mu = \lambda$ και η διασπορά $\sigma^2 = \lambda^2$.

Όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια, η θ_0 δηλώνει την εντός ελέγχου (IC) ή γνωστή τιμή της παραμέτρου θ , η οποία υποδηλώνεται από την Case K. Στις περιπτώσεις που η παράμετρος θ είναι άγνωστη, εκτιμάται από ένα εντός ελέγχου δείγμα αναφοράς από τη Φάση I, πριν ξεκινήσει η παρακολούθηση στη Φάση II. Η τελευταία περίπτωση υποδηλώνεται από την Case U.

Η κατασκευή του διαγράμματος αυτού έγινε με σκοπό την παρακολούθηση της παραμέτρου θ και τον εντοπισμό μικρών ή πολύ μικρών μετατοπίσεων, όσο γρηγορότερα γίνεται.

Έστω N η διακεκριμένη τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των δειγμάτων μέχρι την επόμενη εμφάνιση ενός συμβάντος από την τελευταία του εμφάνιση. Τότε, αθροίζοντας όλες τις τιμές του N , προκύπτει:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(N = i) = \sum_{i=1}^t P(N = i) + P(N > t) = 1.$$

Στην παραπάνω ισότητα η πιθανότητα $\Pr(N = i)$ θεωρείται ως το βάρος w_i για την i -οστή πιο πρόσφατη παρατήρηση X_{t-i+1} μεταξύ των t τελευταίων X_i στατιστικών. Πιο συγκεκριμένα, η πιθανότητα $P(N = 1)$ είναι το βάρος w_1 για την τελευταία

παρατήρηση (πιο πρόσφατη) X_t , ενώ η πιθανότητα $P(N = t)$ αποτελεί το βάρος w_t για την πιο απαρχαιωμένη παρατήρηση X_1 .

Η πιθανότητα $P(N > t)$ αποτελεί το βάρος της αρχικής τιμής Z_0 , η οποία συνήθως λαμβάνεται ως η εντός ελέγχου (IC) αναμενόμενη τιμή του στατιστικού, δηλαδή $Z_0 = E(X_t|IC) = k\theta_0$. Επομένως, το GWMA-TBE διάγραμμα ορίζεται από τις τιμές του στατιστικού

$$Z_t = \sum_{i=1}^t P(N = i) X_{t-i+1} + P(N > t) Z_0 \text{ για } t = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Οι Sheu και Lin (2003), θεωρούν για την κατανομή του N ότι

$$P(N = i) = q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha},$$

όπου $0 \leq q < 1$ και $\alpha > 0$ είναι οι δύο παράμετροι, η οποία αποτελεί την διακριτή Weibull κατανομή με δύο παραμέτρους.

Έτσι, τα βάρη των παρατηρήσεων θα είναι $w_i = q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}$. Αντικαθιστώντας, επίσης, ότι $Z_0 = k\theta_0$ και τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της παραπάνω κατανομής, το στατιστικό για το GWMA-TBE διάγραμμα απλοποιείται ως εξής:

$$Z_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) X_{t-i+1} + q^{t\alpha} k\theta_0 \text{ για } t = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Δίνοντας στις παραμέτρους τις τιμές $\alpha = 1$ και $q = 1 - \lambda$, με $0 < \lambda \leq 1$, το GWMA-TBE ανάγεται στο EWMA διάγραμμα με συντελεστή βαρύτητας λ , το οποίο για $q = 0$ δίνει το Shewhart διάγραμμα. Καθίσταται σαφές ότι το διάγραμμα GWMA αποτελεί τη γενίκευση των EWMA και Shewhart διαγραμμάτων με την πρόσθετη παράμετρο α , η οποία προσδίδει ευκαμψία στη σχεδίαση του διαγράμματος. Στη συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, τα EWMA και Shewhart διαγράμματα, θα εξεταστούν ως ειδικές περιπτώσεις.

Από τον ορισμό των βαρών του GWMA διαγράμματος, $w_i = q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}$, παρατηρούμε ότι το βάρος μειώνεται καθώς οι παρατηρήσεις είναι πιο παλιές. Με αυτόν τον τρόπο, το διάγραμμα αντικατοπτρίζει την σπουδαιότητα της πληροφορίας στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις της ακολουθίας των $\{X_i\}$.

Η αναμενόμενη τιμή των στατιστικών μιας εντός ελέγχου διαδικασίας (IC), καθώς και η διασπορά θα είναι:

$$E(Z_t|IC) = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)^a} - q^{i^a}) E(X_{t-i+1}) + q^{t^a} k\theta_0 = k\theta_0 \quad (2.6)$$

$$Var(Z_t|IC) = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)^a} - q^{i^a})^2 var(X_{t-i+1}) = Q_t k\theta_0^2 \quad (2.7)$$

όπου $Q_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)^a} - q^{i^a})^2$.

Τα χρονικώς μεταβαλλόμενα συμμετρικά όρια ελέγχου, καθώς και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$UCL_e/LCL_e = k\theta_0 \pm L\sqrt{Q_t k\theta_0^2} \text{ και } CL_e = k\theta_0,$$

όπου $L > 0$ είναι η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή.

Σημειώνουμε ότι εάν το LCL στα παραπάνω όρια ελέγχου προκύψει αρνητικό, τότε θέτουμε την τιμή ίση με μηδέν. Αυτό συμβαίνει καθώς το στατιστικό του διαγράμματος είναι μη αρνητική ποσότητα, κι άρα δεν μπορεί να λάβει τιμές μικρότερες του μηδέν.

Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (steady-state), τα οποία χρησιμοποιούνται όταν η διαδικασία έχει εκτελεστεί για πολλές χρονικές περιόδους και βασίζονται στην ασυμπτωτική διασπορά των στατιστικών του διαγράμματος (Lucas και Saccucci, 1990), καθώς και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$UCL_s/LCL_s = k\theta_0 \pm L\sqrt{Q k\theta_0^2} \text{ και } CL_s = k\theta_0, \quad (2.8)$$

όπου $Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t$.

Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε, όπως για παράδειγμα, μια μείωση στο χρόνο μεταξύ των αποτυχιών, θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το κάτω όριο ελέγχου LCL_s . Αν κάποια τιμή του στατιστικού Z_t , ισούται με το LCL ή βρίσκεται κάτω από αυτό, η διαδικασία χαρακτηρίζεται ως εκτός ελέγχου (OOC) και οδηγούμαστε στην αναζήτηση των αιτιών που οδήγησαν την διαδικασία εκτός ελέγχου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ποσότητα Q_t αυξάνεται μονοτονικά, ενώ στον Πίνακα 2-1, φαίνονται οι τιμές της για διάφορες τιμές των παραμέτρων q και a , αλλά και του t .

Πίνακας 2-1 Q_t για διαφορετικούς συνδυασμούς (q, a)

	q=0.8				
t	a=0.5	a=0.7	a=0.9	a=1	a=1.3
10	0.052749	0.070012	0.095246	0.109830	0.156986
50	0.055326	0.073636	0.097486	0.111111	0.157025
100	0.055539	0.073659	0.097486	0.111111	0.157025
500	0.055593	0.073659	0.097486	0.111111	0.157025
1000	0.055593	0.073659	0.097486	0.111111	0.157025

	q=0.9				
t	a=0.6	a=0.8	a=0.9	a=1.1	a=1.3
10	0.017333	0.027868	0.036001	0.058397	0.086626
50	0.020373	0.033967	0.042721	0.063666	0.088751
100	0.020813	0.034113	0.042747	0.063666	0.088751
500	0.020965	0.034116	0.042747	0.063666	0.088751
1000	0.020965	0.034116	0.042747	0.063666	0.088751

	q=0.95				
t	a=0.6	a=0.8	a=0.9	a=1.1	a=1.3
10	0.004696	0.008429	0.011739	0.022901	0.041857
50	0.006129	0.013205	0.018797	0.033097	0.051189
100	0.006539	0.013905	0.019249	0.033118	0.051189
500	0.006893	0.014036	0.019271	0.033118	0.051189
1000	0.006908	0.014036	0.019271	0.033118	0.051189

Λόγω της γρήγορης σύγκλισης της τιμής της Q_t σε μία τιμή, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου συγκλίνουν στα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (steady-state). Ως εκ τούτου, εφαρμόζουμε το διάγραμμα με ασυμπτωτικά όρια ελέγχου για καλύτερη κατανόηση και απλοποίηση της εφαρμογής του. Στην παρούσα διπλωματική εργασία ως *LCL* θεωρούμε το κάτω όριο ελέγχου σταθερής κατάστασης (steady-state).

Για να αξιολογήσουμε ένα διάγραμμα ελέγχου χρειάζεται να βρούμε την κατανομή του μήκους ροής και τα χαρακτηριστικά της. Το μήκος ροής είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των δειγμάτων που πρέπει να συλλεχθούν, έτσι ώστε το διάγραμμα να εντοπίσει κάποια μετατόπιση ή να δώσει κάποιο σήμα. Για τη μελέτη της απόδοσης των διαγραμμάτων γίνεται, συνήθως, χρήση του μέσου μήκους ροής (ARL), το οποίο δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου (Montgomery, 2013).

Για τον σχεδιασμό του διαγράμματος $GWMA-TBE$, χρησιμοποιούμε διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων q , a και L , έτσι ώστε να αποκτήσουμε ένα προκαθορισμένο ARL_0^* , για δεδομένη τιμή του k .

Στην παρούσα εργασία, το ARL υπολογίστηκε με τη χρήση Monte Carlo προσομοιώσεων.

Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. Για δεδομένη τιμή του k , και θέτοντας $\theta_0 = 1$, ένας συνδυασμός των παραμέτρων q , a και L επιλέγεται.
2. Παράγουμε 20.000 τυχαίους αριθμούς από την $Gamma(k, \theta)$ κατανομή, με $\theta = \delta\theta_0$, όπου $0 < \delta \leq 1$. Ο αλγόριθμος υπολογίζει το LCL_s βάσει του τύπου $LCL_s = k\theta_0 - L\sqrt{Qk\theta_0^2}$
3. Υπολογίζουμε το στατιστικό $Z_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)a} - q^{ia})X_{t-i+1} + q^{ta}k\theta_0$, $t = 1, \dots, 20.000$, θεωρώντας ως $Z_0 = k$.
4. Αν για κάθε t έχουμε $Z_t > LCL$, τότε η διαδικασία χαρακτηρίζεται ως εντός ελέγχου. Αν προκύψει $Z_t \leq LCL$, τότε η διαδικασία κρίνεται εκτός ελέγχου, η προσομοίωση σταματά και το μήκος ροής RL καταγράφεται.
5. Τα βήματα (2) έως (4) επαναλαμβάνονται 10.000 φορές. Μια προσέγγιση του ARL δίνεται από τον τύπο

$$ARL = \frac{\sum_{t=1}^N RL_t}{N},$$

όπου N ο αριθμός των δοκιμών της προσομοίωσης, δηλαδή $N = 10.000$ για την συγκεκριμένη εργασία. Επιπλέον, η τυπική απόκλιση του μήκους ροής ($SDRL$) δίνεται από τον τύπο

$$SDRL = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (RL_t - ARL)^2}{N-1}}.$$

2.3 Ο σχεδιασμός του εντός ελέγχου GWMA-TBE διαγράμματος

Για δεδομένο αριθμό k , δοκιμάζουμε διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων q και a , εντός συγκεκριμένου εύρους. Για κάθε συνδυασμό (q, a) , κάνοντας δοκιμές, εντοπίζουμε το κατάλληλο $L > 0$ όπου το ARL_0 θα πλησιάζει την καθορισμένη τιμή του ARL_0^* . Σύμφωνα με τα τυπικά βιομηχανικά πρότυπα, η τιμή του ARL_0^* θεωρείται συνήθως ως το 370 ή το 500. Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιούμε $ARL_0 = 370$.

Για το διάγραμμα EWMA συνίσταται η επιλογή της παραμέτρου $0 < \lambda \leq 1$ να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη, για τον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων στον μέσο της διεργασίας. Δεδομένου ότι για $q = 1 - \lambda$ και $a = 1$, το GWMA διάγραμμα, δίνει το EWMA μια μεγάλη τιμή στο q (δηλαδή κοντά στο 1), θα ήταν λογική επιλογή για τον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων. Σύμφωνα με τους Sheu and Yang (2006), οι συνδυασμοί των παραμέτρων q, a για $0.5 \leq q \leq 0.9$ και $0.5 \leq a < 1$ ενισχύουν την ευαισθησία των διαγραμμάτων GWMA- \bar{X} και EWMA- \bar{X} για μικρές μετατοπίσεις στον μέσο της διεργασίας.

Στις προσομοιώσεις, εξετάζουμε την ευαισθησία του GWMA-TBE για $k = 1, 2, 3$ και παραμέτρους $q = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$ και $a = 0.5, 0.7, 0.9, 1.0, 1.3$. Έτσι, θέτοντας στον αλγόριθμό μας τους συνδυασμούς που προκύπτουν από τις παραπάνω τιμές εντοπίζουμε το κατάλληλο $L > 0$ για το οποίο το ARL_0 , θα πλησιάζει την τιμή 370.

Ο Πίνακας 2-2 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας, καθώς και το $SDRL$. Οι τιμές του L που προκύπτουν μας βοηθούν στο σχεδιασμό και την

εκτέλεση του GWMA-TBE διαγράμματος. Ο βέλτιστος συνδυασμός των (q, a, L) είναι εκείνος που δίνει το μικρότερο ARL_1 , για δεδομένη μετατόπιση δ , κάτι το οποίο θα εξετάσουμε στη συνέχεια της εργασίας.

Πίνακας 2-2 Τιμές L για συνδυασμούς (q, a) όταν $k = 1, 2, 3$ και $ARL_0^* = 370$

k	q	a	L	ARL	SDRL
1	0.7	0.5	1.515	369.79	363.14
		0.7	1.637	370.30	363.45
		0.9	1.685	370.58	367.22
		1	1.689	369.60	366.34
		1.3	1.657	370.53	365.16
	0.8	0.5	1.594	370.28	374.01
		0.7	1.754	369.27	360.38
		0.9	1.810	370.71	364.98
		1	1.812	369.67	368.62
		1.3	1.773	370.13	366.76
	0.9	0.5	1.620	370.03	398.17
		0.7	1.810	369.67	365.03
		0.9	1.896	369.93	362.13
		1	1.909	370.45	359.94
		1.3	1.879	369.27	363.67
	0.95	0.5	1.555	370.96	461.21
		0.7	1.694	369.83	380.89
		0.9	1.819	370.21	361.64
		1	1.858	369.88	361.22
		1.3	1.889	369.89	359.87
2	0.7	0.5	1.759	369.27	361.38
		0.7	1.873	369.58	365.00
		0.9	1.925	370.78	368.17
		1	1.934	370.51	363.12
		1.3	1.920	370.05	367.92
	0.8	0.5	1.815	369.73	368.70
		0.7	1.953	369.84	363.58
		0.9	2.011	370.85	364.82
		1	2.018	370.09	363.74
		1.3	1.996	370.48	367.60
	0.9	0.5	1.804	369.75	398.65
		0.7	1.955	369.85	366.69
		0.9	2.029	369.72	363.84
		1	2.043	369.85	359.48
		1.3	2.037	369.85	361.64
	0.95	0.5	1.711	370.21	453.10
		0.7	1.792	369.47	386.63
		0.9	1.894	369.09	362.19
		1	1.942	371.55	373.12
		1.3	1.990	369.47	356.98

k	q	a	L	ARL	SDRL
3	0.7	0.5	1.893	370.25	366.60
		0.7	1.997	370.08	361.69
		0.9	2.045	369.12	365.12
		1	2.055	370.91	365.22
		1.3	2.051	370.49	366.62
	0.8	0.5	1.933	370.14	370.11
		0.7	2.056	369.90	363.97
		0.9	2.107	369.72	363.32
		1	2.115	370.12	370.35
		1.3	2.103	370.60	367.38
	0.9	0.5	1.908	370.27	399.64
		0.7	2.032	370.65	361.45
		0.9	2.089	369.47	360.00
		1	2.101	370.26	361.97
		1.3	2.107	369.70	367.56
	0.95	0.5	1.803	370.43	453.04
		0.7	1.846	370.34	382.55
		0.9	1.932	370.12	360.72
		1	1.967	369.64	357.54
		1.3	2.031	369.94	360.87

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται πως για δεδομένο q , καθώς το a αυξάνεται από $a = 0.5$ έως $a = 1$ η τιμή του L αυξάνεται. Αλλά, για $a = 1.3$, η τιμή του L μειώνεται αρκετά. Αυτό παρατηρείται για όλες τις τιμές του k , με εξαίρεση την περίπτωση όπου $k = 3$ και $q = 0.9$ και 0.95 , όπου το L έχει ανοδική πορεία.

Επίσης, για δεδομένη τιμή του a , καθώς το q αυξάνεται η τιμή του L μεγαλώνει μέχρι το $q = 0.9$, και στη συνέχεια για $q = 0.95$, μικραίνει. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση όπου $k = 3$, καθώς η τιμή του L μικραίνει από $q = 0.8$ προς $q = 0.9$ για δεδομένο a .

2.4 Ο σχεδιασμός του εκτός ελέγχου GWMA-TBE διαγράμματος

Για τη μελέτη του GWMA-TBE διαγράμματος, όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, θα χρησιμοποιήσουμε τους συνδυασμούς των παραμέτρων του Πίνακα 2-2. Για τις τιμές αυτές γνωρίζουμε ότι το ARL_0^* είναι πολύ κοντά στο 370, κι έτσι εξασφαλίζουμε την ισοτιμία των διαγραμμάτων. Για την περίπτωση που δεν υπάρχει κάποια μετατόπιση στο μέσο έχουμε $\delta = 1$ και $\theta = \theta_0$ και η διεργασία χαρακτηρίζεται ως εντός ελέγχου. Όταν η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου, τότε $\theta = \delta\theta_0$ όπου $\delta < 1$, καθώς ενδιαφερόμαστε να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις της μέσης τιμής μ_0 προς τα κάτω. Συγκεκριμένα, εκτελούμε τις προσομοιώσεις για $\delta = 1, 0.975, 0.95, 0.925, 0.9, 0.85, 0.8, 0.7, 0.5, 0.25$.

Στους Πίνακες 2-3, 2-4, 2-5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις για την εκτός ελέγχου εκτέλεση, και για τιμές του $k = 1, 2, 3$ και μερικούς συνδυασμούς των (q, a, L) . Ειδικότερα, τα κελιά απεικονίζουν τα ARL , καθώς και τα $SDRL$. Στη δεξιά στήλη απεικονίζονται τα αποτελέσματα από το Shewhart-TBE διάγραμμα, ενώ τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στο EWMA-TBE είναι τα κελιά που αντιστοιχούν σε $\alpha = 1$.

Πίνακας 2-3 Απόδοση του GWMA-TBE διαγράμματος για $k = 1$

Shift	q=0.7					q=0.8					q=0
	a=0.5 L=1.515	0.7	0.9	1	1.3	0.5	0.7	0.9	1	1.3	a=1 0.997
1	369.79	370.30	370.58	369.60	370.53	370.28	369.27	370.71	369.67	370.13	369.95
	363.14	363.45	367.22	366.34	365.16	374.01	360.38	364.98	368.62	366.76	366.82
0.975	284.42	301.08	318.07	321.14	329.43	275.12	292.67	302.63	309.53	322.87	360.62
	274.34	296.30	313.32	317.31	325.84	268.86	285.97	294.99	308.70	318.89	358.78
0.95	224.66	249.03	274.47	280.69	294.17	209.01	233.75	253.70	260.51	281.13	352.91
	213.02	242.32	271.44	278.31	294.53	197.91	225.91	249.66	256.88	278.50	352.91
0.925	178.63	206.42	234.74	244.30	262.75	161.37	186.92	210.43	219.22	246.14	343.28
	168.89	200.24	230.61	243.82	263.79	149.39	177.24	205.06	213.66	241.43	344.28
0.9	145.28	172.38	200.15	211.73	232.36	128.82	151.95	174.44	185.27	215.67	334.51
	133.71	163.94	196.33	207.81	229.66	112.16	142.55	167.53	181.78	211.75	335.20
0.85	98.82	120.77	147.24	157.73	181.68	88.01	102.90	122.98	131.53	164.39	316.86
	83.83	111.18	141.88	152.26	177.04	70.24	90.03	114.97	124.07	160.72	316.29
0.8	70.90	86.53	107.51	117.88	143.61	63.18	73.09	88.68	96.70	123.90	298.68
	55.88	77.44	101.41	112.08	138.65	46.26	60.46	80.01	89.24	118.56	298.08
0.7	40.17	47.07	58.89	65.85	87.08	37.14	40.30	47.35	51.81	70.66	260.74
	27.03	37.97	51.46	59.62	82.67	22.41	27.88	37.90	43.90	64.98	259.13
0.5	17.79	18.26	20.34	22.18	29.30	17.48	17.37	17.86	18.56	23.49	185.06
	8.55	10.28	14.10	16.53	25.97	7.50	8.09	10.08	11.64	18.49	185.42
0.25	8.55	8.04	7.70	7.61	8.11	8.91	8.60	8.00	7.73	7.52	91.56
	2.28	2.24	2.52	2.78	4.41	2.08	1.93	1.95	2.04	2.87	91.78

Shift	q=0.9					q=0.95					q=0
	a=0.5 L=1.620	0.7	0.9	1	1.3	0.5	0.7	0.9	1	1.3	a=1 0.997
1	370.03	369.67	369.93	370.45	369.27	370.96	369.83	370.21	369.88	369.89	369.95
	398.17	365.03	362.13	359.94	363.67	461.21	380.89	361.64	361.22	359.87	366.82
0.975	254.83	271.70	288.17	296.96	310.29	239.89	258.87	274.61	282.67	299.50	360.62
	259.13	261.80	281.31	288.89	302.77	262.04	257.54	264.57	271.07	291.28	358.78
0.95	185.80	208.05	229.43	239.31	263.18	168.72	187.26	208.35	218.43	244.33	352.91
	179.35	196.37	221.03	233.06	258.78	170.30	175.60	195.71	209.26	238.48	352.91
0.925	141.39	159.23	182.32	193.72	220.68	127.88	141.82	159.23	169.22	196.26	343.28
	127.73	144.40	172.74	188.47	218.14	118.96	126.96	143.83	155.63	188.91	344.28
0.9	111.68	125.69	144.81	155.30	184.02	100.84	111.87	126.09	135.05	161.04	334.51
	94.14	108.14	131.85	146.52	182.34	85.99	94.16	108.20	119.83	153.84	335.20
0.85	76.79	85.04	98.24	106.08	131.89	69.19	72.93	84.46	89.99	110.65	316.86
	58.89	67.45	85.15	95.53	125.57	51.84	56.43	66.29	74.55	101.42	316.29
0.8	56.00	60.71	69.21	75.06	95.30	51.04	55.53	60.54	63.52	78.11	298.68
	38.37	43.47	55.97	63.90	87.16	34.50	36.80	42.66	47.28	67.27	298.08
0.7	34.16	36.04	38.49	40.73	51.49	31.87	34.22	35.98	36.79	41.85	260.74
	18.97	20.70	25.89	29.71	44.22	17.07	17.65	19.97	22.03	31.48	259.13
0.5	17.10	17.55	17.21	17.13	18.22	16.43	17.83	18.16	17.87	17.02	185.06
	6.62	6.55	7.12	7.80	11.29	6.07	5.90	5.94	6.10	7.72	185.42
0.25	9.20	9.59	9.21	8.88	7.89	9.09	10.22	10.59	10.40	9.23	91.56
	1.89	1.72	1.60	1.56	1.72	1.78	1.61	1.47	1.41	1.31	91.78

Πίνακας 2-4 Απόδοση του GWMA-TBE διαγράμματος για $k = 2$

Shift	q=0.7					q=0.8					q=0
	a=0.5 L=1.759	0.7 1.873	0.9 1.925	1 1.934	1.3 1.920	0.5 1.815	0.7 1.953	0.9 2.011	1 2.018	1.3 1.996	a=1 1.361
1	369.27	369.58	370.78	370.51	370.05	369.73	369.84	370.85	370.09	370.48	369.51
	361.38	365.00	368.17	363.12	367.92	368.70	363.58	364.82	363.74	367.60	368.82
0.975	261.49	283.21	295.30	302.37	313.04	248.17	264.98	284.31	292.08	301.58	352.12
	252.62	276.22	290.64	298.70	312.60	238.31	255.74	280.32	290.48	296.87	351.81
0.95	191.93	214.66	237.37	245.42	263.36	175.68	197.62	221.09	229.71	248.68	335.77
	182.01	207.33	232.01	239.76	260.85	161.51	187.60	215.36	226.52	242.23	336.17
0.925	144.84	168.62	190.73	199.72	220.65	128.45	148.24	171.26	181.13	204.82	317.32
	132.61	161.87	184.79	192.67	216.61	111.71	136.65	163.69	175.79	198.77	319.17
0.9	111.64	133.32	155.08	164.33	186.39	98.14	113.04	135.03	144.14	168.53	302.19
	98.13	126.24	149.35	158.51	180.89	81.95	101.44	128.05	138.70	161.92	304.55
0.85	70.26	83.26	102.09	110.65	131.91	62.16	70.09	84.80	92.66	114.12	271.07
	57.39	74.60	97.10	105.58	127.47	46.94	58.59	77.00	86.18	108.83	273.00
0.8	47.54	55.23	68.13	74.87	92.39	42.83	46.49	84.80	60.72	78.49	240.06
	35.68	47.01	62.71	69.97	88.12	29.15	35.17	77.00	54.47	71.14	243.73
0.7	25.82	27.76	32.74	36.01	46.49	24.23	24.78	27.14	29.14	37.53	186.22
	16.23	20.00	26.94	31.02	42.74	13.81	15.39	19.74	22.67	32.79	186.19
0.5	11.13	10.78	10.98	11.33	13.29	11.11	10.76	10.48	10.46	11.33	97.31
	4.91	5.04	5.99	6.72	9.82	4.40	4.27	4.63	4.98	6.97	95.31
0.25	5.26	5.03	4.77	4.64	4.36	5.55	5.48	5.22	5.06	4.67	27.24
	1.35	1.18	1.12	1.13	1.29	1.25	1.09	0.99	0.95	0.95	26.57

Shift	q=0.9					q=0.95					q=0
	a=0.5 L=1.804	0.7 1.955	0.9 2.029	1 2.043	1.3 2.037	0.5 1.711	0.7 1.792	0.9 1.894	1 1.942	1.3 1.990	a=1 1.361
1	369.75	369.85	369.72	369.85	369.85	370.21	369.47	369.09	371.55	369.47	369.51
	398.65	366.69	363.84	359.48	361.64	453.10	386.63	362.19	373.12	356.98	368.82
0.975	223.61	245.83	264.98	271.13	287.02	204.88	224.74	242.99	259.05	272.82	352.12
	220.54	235.93	255.34	261.50	280.43	216.41	217.91	228.31	246.33	262.55	351.81
0.95	151.70	170.29	191.83	201.77	228.57	135.61	151.63	168.66	181.42	203.92	335.77
	138.83	156.16	180.11	190.86	221.29	128.07	137.25	153.02	167.02	192.07	336.17
0.925	110.04	123.86	141.00	151.57	178.69	97.97	108.07	122.12	132.44	157.09	317.32
	93.50	107.45	128.04	140.96	171.18	84.51	92.30	106.33	117.10	146.22	319.17
0.9	83.90	93.10	107.34	116.10	140.48	74.30	82.06	91.60	99.50	120.60	302.19
	67.46	76.26	95.27	106.60	133.31	58.85	63.51	74.71	84.14	110.40	304.55
0.85	54.18	58.52	65.99	71.51	90.37	48.87	52.57	57.29	60.94	74.70	271.07
	38.46	42.93	53.41	60.61	83.95	33.77	35.27	41.02	46.07	64.88	273.00
0.8	38.29	40.26	43.47	46.00	58.89	35.12	37.41	39.79	41.55	47.47	240.06
	24.11	26.05	31.75	35.53	52.74	21.54	21.94	24.86	27.84	37.73	243.73
0.7	22.60	23.26	23.59	24.09	28.25	21.21	22.61	23.25	23.48	24.25	186.22
	11.74	11.96	13.37	14.88	22.03	10.65	10.45	10.86	11.58	15.31	186.19
0.5	11.00	11.31	10.97	10.71	10.31	10.65	11.68	12.04	11.93	10.89	97.31
	3.97	3.70	3.61	3.66	4.52	3.72	3.44	3.25	3.20	3.34	95.31
0.25	5.76	6.25	6.22	6.08	5.54	5.72	6.72	7.26	7.31	6.76	27.24
	1.18	1.01	0.88	0.84	0.74	1.12	0.97	0.86	0.81	0.71	26.57

Πίνακας 2-5 Απόδοση του GWMA-TBE διαγράμματος για $k = 3$

Shift	q=0.7					q=0.8					q=0
	a=0.5 L=1.893	0.7 1.997	0.9 2.045	1 2.055	1.3 2.051	0.5 1.933	0.7 2.056	0.9 2.107	1 2.115	1.3 2.103	a=1 1.576
1	370.25 366.60	370.08 361.69	369.12 365.12	370.91 365.22	370.49 366.62	370.14 370.11	369.90 363.97	369.72 363.32	370.12 370.35	370.60 367.38	370.08 365.77
0.975	245.93 236.31	267.80 266.33	278.67 272.35	282.81 277.41	298.24 293.33	229.03 219.85	249.87 243.64	266.94 261.43	274.17 268.83	287.10 282.47	344.74 342.02
0.95	170.34 161.43	194.42 188.00	209.76 205.63	219.31 215.15	242.76 240.52	153.00 140.70	174.32 166.57	191.85 186.98	200.28 194.95	223.76 219.69	319.65 314.01
0.925	123.41 112.10	143.84 138.65	162.81 159.29	171.21 168.51	196.31 195.40	107.55 92.88	122.86 111.69	142.59 135.51	151.52 144.54	174.62 170.95	297.59 294.34
0.9	91.20 78.99	107.54 99.34	126.66 121.70	135.59 131.77	157.29 156.68	80.07 64.96	90.67 79.34	106.49 99.02	114.64 108.27	138.60 134.42	275.27 272.54
0.85	55.65 44.12	64.00 55.99	76.84 71.26	83.64 77.75	103.63 99.82	49.02 35.69	53.49 43.18	62.27 55.13	67.95 61.61	86.76 82.44	236.48 234.99
0.8	37.13 27.08	41.38 34.09	49.15 44.29	53.92 49.61	68.24 64.37	33.42 22.05	35.12 25.46	39.69 32.65	43.29 37.65	56.14 52.19	200.93 199.55
0.7	19.68 11.78	20.21 13.64	22.66 17.61	24.56 20.18	31.34 27.98	18.61 10.04	18.48 10.51	19.37 12.88	20.29 14.50	25.15 21.16	139.25 138.14
0.5	8.34 3.51	7.98 3.40	7.83 3.70	7.90 4.03	8.62 5.53	8.38 3.17	8.14 2.93	7.81 2.97	7.70 3.09	7.81 4.02	56.35 56.00
0.25	3.95 0.97	3.86 0.84	3.69 0.75	3.61 0.72	3.43 0.68	4.17 0.93	4.25 0.79	4.14 0.68	4.07 0.65	3.78 0.64	10.21 9.83

Shift	q=0.9					q=0.95					q=0
	a=0.5 L=1.908	0.7 2.032	0.9 2.089	1 2.101	1.3 2.107	0.5 1.803	0.7 1.846	0.9 1.932	1 1.967	1.3 2.031	a=1 1.576
1	370.27 399.64	370.65 361.45	369.47 360.00	370.26 361.97	369.70 367.56	370.43 453.04	370.34 382.55	370.12 360.72	369.64 357.54	369.94 360.87	370.08 365.77
0.975	204.60 196.84	224.76 213.98	241.95 233.09	249.27 243.80	269.23 267.78	185.87 188.39	202.66 192.92	221.85 208.34	231.09 220.76	254.32 248.27	344.74 342.02
0.95	132.24 118.76	147.25 132.46	163.87 154.20	171.88 163.23	196.78 192.00	118.47 107.95	129.67 115.65	144.97 130.99	152.05 137.80	178.28 170.81	319.65 314.01
0.925	93.12 76.84	102.22 86.68	115.61 104.65	123.27 114.85	147.50 142.18	82.62 67.90	89.50 72.17	100.02 83.85	106.06 92.59	126.83 117.76	297.59 294.34
0.9	69.09 52.16	75.29 59.48	84.37 73.20	89.84 79.46	111.56 105.50	61.53 45.63	65.98 48.37	72.84 56.79	77.01 63.30	93.17 84.86	275.27 272.54
0.85	43.45 29.66	45.87 32.11	49.39 38.28	52.35 42.68	65.79 59.07	39.56 26.17	41.83 26.94	44.63 30.35	46.05 33.09	54.12 44.80	236.48 234.99
0.8	30.46 18.55	31.33 19.07	32.60 22.20	34.04 25.01	41.56 35.56	28.07 16.42	29.46 16.24	30.63 17.49	31.07 18.77	34.64 25.69	200.93 199.55
0.7	17.68 8.71	17.95 8.42	17.69 8.91	17.76 9.65	19.62 13.74	16.77 7.99	17.73 7.53	18.15 7.55	18.04 7.83	17.94 9.72	139.25 138.14
0.5	8.42 2.90	8.76 2.62	8.51 2.44	8.30 2.41	7.76 2.64	8.22 2.73	9.11 2.48	9.52 2.28	9.43 2.19	8.70 2.10	56.35 56.00
0.25	4.39 0.90	4.89 0.76	4.99 0.66	4.94 0.63	4.61 0.58	4.39 0.86	5.27 0.74	5.85 0.66	5.94 0.62	5.71 0.57	10.21 9.83

Καθίσταται σαφές από τα διαγράμματα ότι τόσο το GWMA-TBE, όσο και το EWMA-TBE είναι αποδοτικότερα από το Shewhart-TBE για όλες τις τιμές του k και όλες τις μετατοπίσεις δ , ακόμη και για $\delta = 0.25$. Επιπλέον, παρατηρούμε πως το GWMA-TBE μπορεί να σχεδιαστεί ώστε να είναι αποδοτικότερο από το EWMA-TBE για πολύ μικρές μετατοπίσεις για κατάλληλα επιλεγμένο συνδυασμό των (q, a, L) . Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 2-3, δηλαδή για $k = 1$, όταν $q = 0.8$ και για $a = 0.5, 0.7, 0.9$ το GWMA δίνει μικρότερο ARL_1 από το EWMA ($a = 1$).

Επομένως, αποδεικνύεται το όφελος από την επιπρόσθετη παράμετρο a στην κατασκευή του GWMA διαγράμματος. Ακόμη, όσο η τιμή του k αυξάνεται, η επίδοση των GWMA-TBE και EWMA-TBE διαγραμμάτων, κι άρα η ευαισθησία τους, βελτιώνεται. Για παράδειγμα, όταν το $k = 1$ και $\delta = 0.9$, το ARL_1 για το GWMA-TBE διάγραμμα όταν $q = 0.9, a = 0.7, L = 1.810$ είναι ίσο με 125.69, ενώ όταν το $k = 2$, για τις ίδιες παραμέτρους q, a και $L = 1.955$ είναι ίσο με 93.10.

Παρόλα αυτά, μια μεγαλύτερη τιμή στο k , σημαίνει ότι θα χρειαστούν περισσότερες παρατηρήσεις και αποτυχίες πριν αποφανθούμε για το αν μια διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου.

2.5 Βέλτιστος σχεδιασμός του GWMA-TBE

Ο βέλτιστος σχεδιασμός του GWMA-TBE διαγράμματος αποτελείται από τον καθορισμό των προσδοκώμενων ARL_0 και ARL_1 , καθώς και το μέγεθος της μετατόπισης της διαδικασίας (δ) που προβλέπεται και στη συνέχεια η επιλογή του κατάλληλου συνδυασμού των (q, a, L) που δίνει το επιθυμητό ARL .

Παρόλα αυτά, οι Chan και Zang (2000), θεώρησαν απαραίτητη την εισαγωγή του $SDRL$ για τον σχεδιασμό του EWMA διαγράμματος. Συγκεκριμένα, πρόσθεσαν τον περιορισμό $SDRL \leq ARL$, έτσι ώστε να αποφευχθεί μεγάλη απόκλιση στην κατανομή του ARL . Η παραπάνω προσθήκη γίνεται και στη μελέτη του GWMA-TBE διαγράμματος.

Έτσι, ο βέλτιστος σχεδιασμός του GWMA-TBE αποτελείται από τον προσδιορισμό των επιθυμητών ARL_0 και ARL_1 , αλλά και της μετατόπισης της διαδικασίας δ που αναμένονται και στη συνέχεια η επιλογή του κατάλληλου συνδυασμού των (q, a, L) που δίνει το επιθυμητό ARL , υπό τον περιορισμό $SDRL \leq ARL$.

Ο “near optimal” σχεδιασμός επιτυγχάνεται από τους συνδυασμούς των (q, a, L) οι οποίοι δίνουν μικρότερο ARL_1 , για προκαθορισμένη μετατόπιση δ , δοθέντος $ARL_0 = 370$, με ή χωρίς τον περιορισμό $SDRL \leq ARL$.

Βασιζόμενοι στους Πίνακες 2-3, 2-4 και 2-5, συμπληρώνουμε τον Πίνακα 2-6, ο οποίος περιλαμβάνει τους “near optimal” συνδυασμούς των παραμέτρων (q, a, L) , και τις αντίστοιχες τιμές του ARL_1 , για $k = 1, 2, 3$.

Συμπεραίνουμε ότι, για μικρότερες μετατοπίσεις στη διεργασία, δηλαδή για τιμές του δ κοντά στο 1, μια μεγαλύτερη τιμή στο q , δηλαδή κοντά στο 1, και μια μικρότερη τιμή στο a , δηλαδή κοντά στο 0.5 θα αποτελούσαν τον βέλτιστο συνδυασμό. Ενώ, για μεγαλύτερες μετατοπίσεις είναι προτιμότερη μικρότερη τιμή στο q , δηλαδή κοντά στο 0.5, και μεγαλύτερη τιμή στο a , δηλαδή κοντά στο 1.

Αναφορικά με το EWMA-TBE διάγραμμα, δηλαδή όταν η παράμετρος $\alpha = 1$, ο βέλτιστος σχεδιασμός εμφανίζεται μόνο για $\delta \leq 0.7$. Με αυτόν τον τρόπο, ενισχύεται το γεγονός ότι το GWMA διάγραμμα σχεδιάζεται για να ξεπεράσει την αποδοτικότητα του EWMA για μικρές ή όσο το δυνατόν μικρότερες μετατοπίσεις.

Πίνακας 2-6 Βέλτιστοι συνδυασμοί των (q, a, L) και οι αντίστοιχες τιμές του ARL_1 του GWMA-TBE

Χωρίς περιορισμό	k=1				k=2				k=3			
	ARL	q	a	L	ARL	q	a	L	ARL	q	a	L
0.975	239.89	0.95	0.5	1.555	204.88	0.95	0.5	1.711	185.87	0.95	0.5	1.803
0.95	168.72	0.95	0.5	1.555	135.61	0.95	0.5	1.711	118.47	0.95	0.5	1.803
0.925	127.88	0.95	0.5	1.555	97.97	0.95	0.5	1.711	82.62	0.95	0.5	1.803
0.9	100.84	0.95	0.5	1.555	74.30	0.95	0.5	1.711	61.53	0.95	0.5	1.803
0.85	69.19	0.95	0.5	1.555	48.87	0.95	0.5	1.711	39.56	0.95	0.5	1.803
0.8	51.04	0.95	0.5	1.555	35.12	0.95	0.5	1.711	28.07	0.95	0.5	1.803
0.7	31.87	0.95	0.5	1.555	21.21	0.95	0.5	1.711	16.77	0.95	0.5	1.803
0.5	16.43	0.95	0.5	1.555	10.31	0.9	1.3	2.037	7.7	0.8	1	2.115
0.25	7.52	0.8	1.3	1.773	4.67	0.8	1.3	1.996	4.07	0.8	1	2.115
SDRL	k=1				k=2				k=3			
≤ ARL	ARL	q	a	L	ARL	q	a	L	ARL	q	a	L
0.975	271.70	0.9	0.7	1.810	223.61	0.9	0.5	1.804	221.85	0.95	0.9	1.932
0.95	208.05	0.9	0.7	1.810	151.70	0.9	0.5	1.804	144.97	0.95	0.9	1.932
0.925	159.23	0.9	0.7	1.810	110.04	0.9	0.5	1.804	100.02	0.95	0.9	1.932
0.9	125.69	0.9	0.7	1.810	83.90	0.9	0.5	1.804	72.84	0.95	0.9	1.932
0.85	84.46	0.95	0.9	1.819	54.18	0.9	0.5	1.804	44.63	0.95	0.9	1.932
0.8	60.54	0.95	0.9	1.819	38.29	0.9	0.5	1.804	30.63	0.95	0.9	1.932
0.7	35.98	0.95	0.9	1.819	22.60	0.9	0.5	1.804	17.69	0.9	0.9	2.089
0.5	17.02	0.95	1.3	1.889	10.31	0.9	1.3	2.037	7.76	0.9	1.3	2.107
0.25	7.52	0.8	1.3	1.773	4.67	0.8	1.3	1.996	3.78	0.8	1.3	2.103

2.6 ARL μηδενικής και σταθερής κατάστασης

Τα ARL_1 των προηγούμενων ενοτήτων ονομάζονται ARL μηδενικής κατάστασης (zero-state) και βασίζονται στην υπόθεση ότι η μετατόπιση του μέσου συμβαίνει στην αρχή της διαδικασίας, δηλαδή για $t = 1$.

Επίσης, υπάρχει και το ARL σταθερής κατάστασης (steady-state), για το οποίο υποθέτουμε ότι η μετατόπιση του μέσου συμβαίνει αφότου η διεργασία έχει ξεκινήσει. Υπολογίσαμε το ARL σταθερής κατάστασης για κάποιους συνδυασμούς (q, a, L) όταν $k = 1, 2$ και τα συγκρίναμε με τα αντίστοιχα ARL μηδενικής κατάστασης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2-7.

Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα του Πίνακα 2-7, τα ARL μηδενικής και σταθερής κατάστασης είναι τα ίδια. Οι πιθανές διαφορές έγκεινται στην ενυπάρχουσα μεταβλητότητα της προσομοίωσης. Επιπλέον, το GWMA-TBE λειτουργεί καλύτερα από το EWMA-TBE, όταν $\delta \geq 0.7$. Αντιθέτως, για $\delta \leq 0.7$ το EWMA-TBE διάγραμμα προτιμάται. Και στις δύο περιπτώσεις, τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα από τη χρονική στιγμή που πραγματοποιήθηκε η μετατόπιση στον μέσο.

Επίσης, διαπιστώνεται ότι τα δύο προηγούμενα διαγράμματα είναι αποδοτικότερα από το Shewhart-TBE, στο οποίο οι τιμές του στατιστικού είναι ανεξάρτητες από το χρόνο που πραγματοποιείται η μετατόπιση κι άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την $t = 1$, όταν αναζητούμε το ARL_1 .

Πίνακας 2-7 Οι zero-state και steady-state τιμές του ARL του GWMA-TBE

					theta								
k	t	q	a	L	0.975	0.95	0.925	0.9	0.85	0.8	0.7	0.5	0.25
k=1	t=1	0.9	0.7	1.810	271.70	208.05	159.23	125.69	85.04	60.71	36.04	17.55	9.59
		0.9	1	1.909	296.96	239.31	193.72	155.30	106.08	75.06	40.73	17.13	8.88
	t=50	0.9	0.7	1.810	258.27	196.51	150.64	118.93	80.85	57.85	34.10	16.89	9.35
		0.9	1	1.909	287.26	230.01	186.35	150.00	101.91	70.79	38.17	16.05	8.43
	t=100	0.9	0.7	1.810	256.85	196.94	152.17	119.75	80.42	57.92	34.48	16.87	9.39
		0.9	1	1.909	289.75	230.97	187.01	150.82	101.86	71.15	38.36	16.04	8.43
	t=150	0.9	0.7	1.810	256.81	195.28	151.77	120.05	79.59	57.19	34.16	16.95	9.40
		0.9	1	1.909	288.66	232.17	187.43	151.85	101.70	70.89	38.55	16.10	8.45
	t=300	0.9	0.7	1.810	257.20	197.68	153.32	121.47	80.99	57.79	34.50	16.91	9.39
		0.9	1	1.909	288.71	233.79	189.68	154.43	103.31	71.58	38.51	16.07	8.62
					theta								
k	t	q	a	L	0.975	0.95	0.925	0.9	0.85	0.8	0.7	0.5	0.25
k=2	t=1	0.9	0.7	1.955	245.83	170.29	123.86	93.10	58.52	40.26	23.26	11.31	6.25
		0.9	1	2.043	271.13	201.77	151.57	116.10	71.51	46.00	24.09	10.71	6.08
	t=50	0.9	0.7	1.955	233.70	161.34	117.67	88.19	55.90	38.97	22.47	11.06	6.20
		0.9	1	2.043	261.45	192.82	145.26	110.51	67.36	44.13	23.19	10.21	5.88
	t=100	0.9	0.7	1.955	233.50	160.84	116.22	87.52	55.76	38.85	22.65	11.09	6.21
		0.9	1	2.043	261.34	192.93	144.59	109.75	67.07	44.30	23.01	10.24	5.88
	t=150	0.9	0.7	1.955	234.73	161.70	117.79	88.54	55.71	38.99	22.71	11.13	6.22
		0.9	1	2.043	262.07	193.97	145.71	110.86	68.27	44.84	23.11	10.27	5.88
	t=300	0.9	0.7	1.955	234.49	162.59	117.17	88.97	56.23	39.05	22.65	11.18	6.24
		0.9	1	2.043	261.81	192.42	144.37	110.71	68.83	44.64	23.16	10.32	5.89

2.7 Η Φάση II του GWMA-TBE διαγράμματος

Στις περιπτώσεις που η εντός ελέγχου παράμετρος θ είναι άγνωστη, εκτιμάται από ένα εντός ελέγχου δείγμα αναφοράς από τη Φάση I, πριν ξεκινήσει η παρακολούθηση στη Φάση II. Η τελευταία περίπτωση αναφέρεται ως “standard unknown” και υποδηλώνεται από την Case U.

Το δείγμα αναφοράς από τη Φάση I, εκλαμβάνεται όσο η διαδικασία θεωρούνταν ότι λειτουργούσε εντός ελέγχου. Το εκτιμώμενο θ , συμβολίζεται $\hat{\theta}$ και χρησιμοποιείται ώστε να υπολογιστεί η αρχική τιμή Z_0 και το κατώτερο όριο ελέγχου του GWMA-TBE στη Φάση II. Και στις δύο περιπτώσεις, το $\hat{\theta}$ αντικαθιστά τη γνωστή παράμετρο θ_0 . Το στατιστικό βάσει του οποίου σχεδιάζεται το διάγραμμα, καθώς και το εκτιμώμενο κατώτερο όριο ελέγχου του GWMA-TBE στην Case U ορίζονται από τις σχέσεις:

$$Z_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)^a} - q^{i^a}) X_{t-i+1} + q^{t^a} k \hat{\theta} \text{ για } t = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

$$\widehat{LCL} = k \hat{\theta} - L \sqrt{Q k \hat{\theta}^2} \quad (2.10)$$

και αποτελούν τυχαίες μεταβλητές (Chakraborty et al, 2017).

Το GWMA-TBE διάγραμμα για τη Φάση II λειτουργεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως η Case K. Τα σημεία που προκύπτουν από το στατιστικό Z_t και το κατώτερο όριο ελέγχου \widehat{LCL} σχεδιάζονται σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Αν κάποιο σημείο του διαγράμματος ισούται με το \widehat{LCL} ή είναι κάτω από αυτό, το διάγραμμα μας ενημερώνει και η διεργασία χαρακτηρίζεται ως εκτός ελέγχου.

Ο υπολογισμός της άγνωστης τιμής της θ , θα γίνει με την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE). Έτσι, αν τα X_1, X_2, \dots, X_m δηλώνουν τα στοιχεία ενός εντός ελέγχου δείγματος Φάσης I, με μέγεθος $m \geq 1$, τα οποία αποτελούν ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες, τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Γάμμα κατανομή με παραμέτρους k, θ ($Gamma(k, \theta)$), τότε η εκτιμήτρια του θ , ακολουθεί την Γάμμα κατανομή με παραμέτρους km και θ/km ($Gamma(km, \theta/km)$), και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^m X_i / km.$$

Δεδομένου ότι η αρχική τιμή του στατιστικού Z_0 , καθώς και το κατώτερο όριο ελέγχου $L\widehat{CL}$ αποτελούν τυχαίες μεταβλητές, μας ενδιαφέρει να ερευνήσουμε τις συνέπειες της αντικατάστασης του θ , από το $\hat{\theta}$ στο ARL της Φάσης II. Κατ' επέκταση, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις συνέπειες στην απόδοση του GWMA-TBE αν χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους της Case K. Η μελέτη αυτή γίνεται με σκοπό να δούμε κατά πόσο οι παράμετροι της Case K μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη Φάση II του GWMA-TBE διαγράμματος της Case U.

Αξίζει να τονισθεί ότι λαμβάνοντας μία εκτίμηση της $\hat{\theta}$, μέσω ενός δείγματος εντός ελέγχου από τη Φάση I, λαμβάνουμε την κατανομή του μήκους ροής της Φάσης II και την εκτέλεση του GWMA-TBE διαγράμματος, που αφορούν το συγκεκριμένο εντός ελέγχου Φάσης I δείγμα.

Προκειμένου να αποκτήσουμε μια συνολική εικόνα και ιδέα για τις συνέπειες της εκτίμησης της παραμέτρου θ , μελετάμε την απόλυτη (“unconditional”) κατανομή του μήκους ροής, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως η μέση κατανομή του μήκους ροής για όλες τις πιθανές τιμές των εκτιμήσεων της παραμέτρου θ . Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας θα εστιάσουμε στο μέσο μήκος ροής. Το απόλυτο (“unconditional”) μέσο μήκος ροής ($UARL$), δίνεται από την επόμενη σχέση,

$$UARL = E_{\hat{\theta}} \left(E(R|\hat{\theta}) \right) = \int_0^{\infty} E(R|\hat{\theta}) f(\hat{\theta}) d\hat{\theta},$$

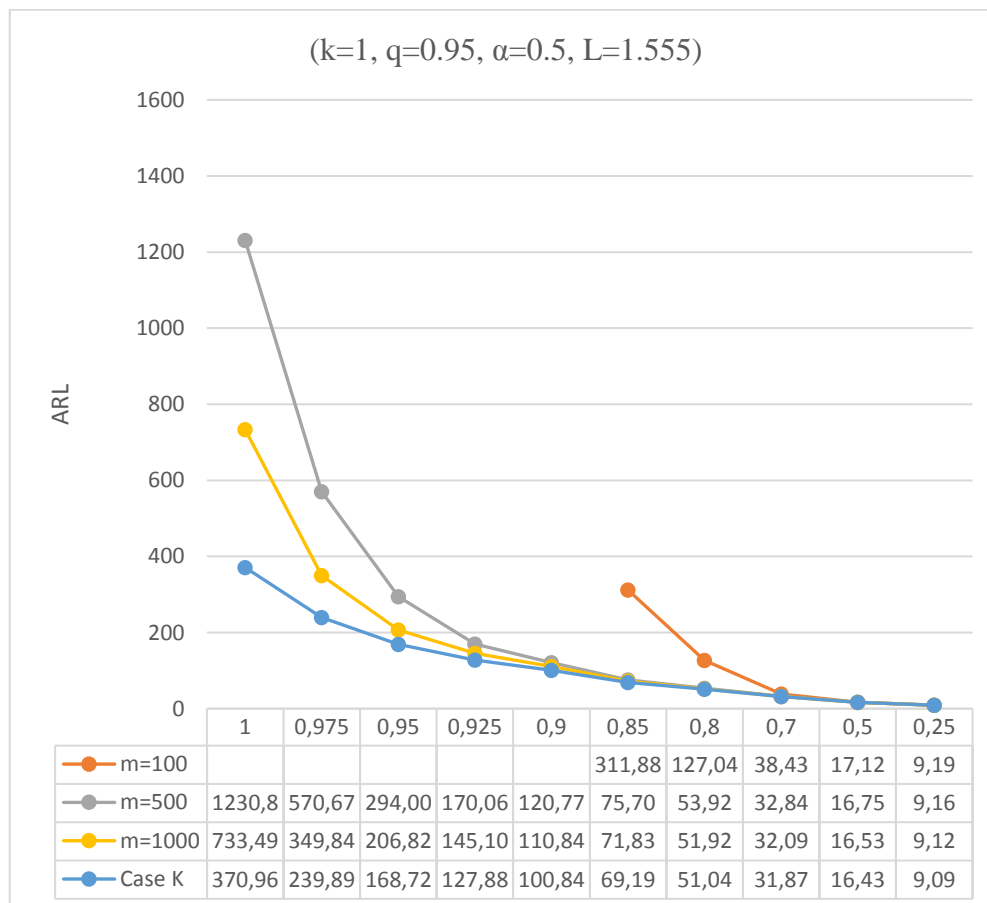
όπου το $E(R|\hat{\theta})$ δηλώνει το υπό όρους μέσο μήκος ροής ARL , δηλαδή το προσδοκώμενο μήκος ροής (R) που προκύπτει για την εκτίμηση $\hat{\theta}$. Με $f(\hat{\theta})$, δηλώνεται η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της $\hat{\theta}$ (Chakraborty et al, 2017).

Για να εκτιμήσουμε αν οι παράμετροι σχεδιασμού για την Case K του GWMA-TBE διαγράμματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη Φάση II του διαγράμματος στην Case U, εκτελέσαμε προσομοιώσεις στις οποίες υπολογίζονταν τα ARL_0 και ARL_1 της Φάσης II. Οι προσομοιώσεις έγιναν για δείγμα εντός ελέγχου Φάσης I που ακολουθεί την $Gamma(k, 1)$ κατανομή, χωρίς απώλεια της γενικότητας.

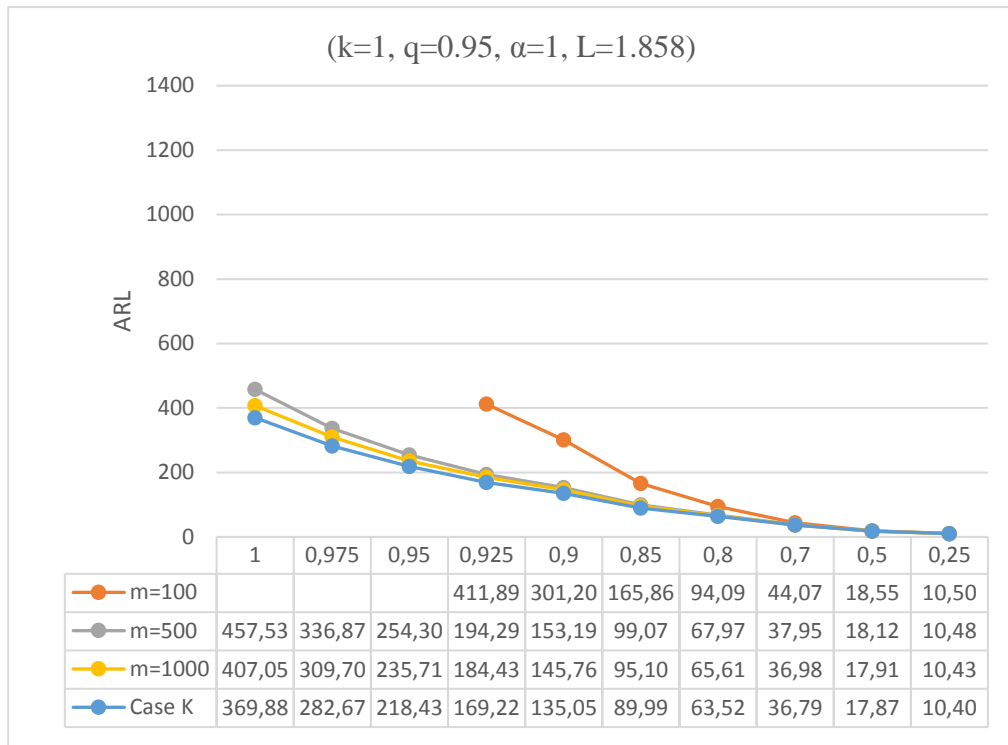
Χρησιμοποιήθηκαν δείγματα με μέγεθος $m = 100, 500, 1000$ και τα εξής σετ παραμέτρων:

1. ($k = 1, q = 0.95, a = 0.5, L = 1.555$)
2. ($k = 1, q = 0.95, a = 1, L = 1.858$)
3. ($k = 2, q = 0.95, a = 0.5, L = 1.711$)
4. ($k = 2, q = 0.95, a = 1, L = 1.942$).

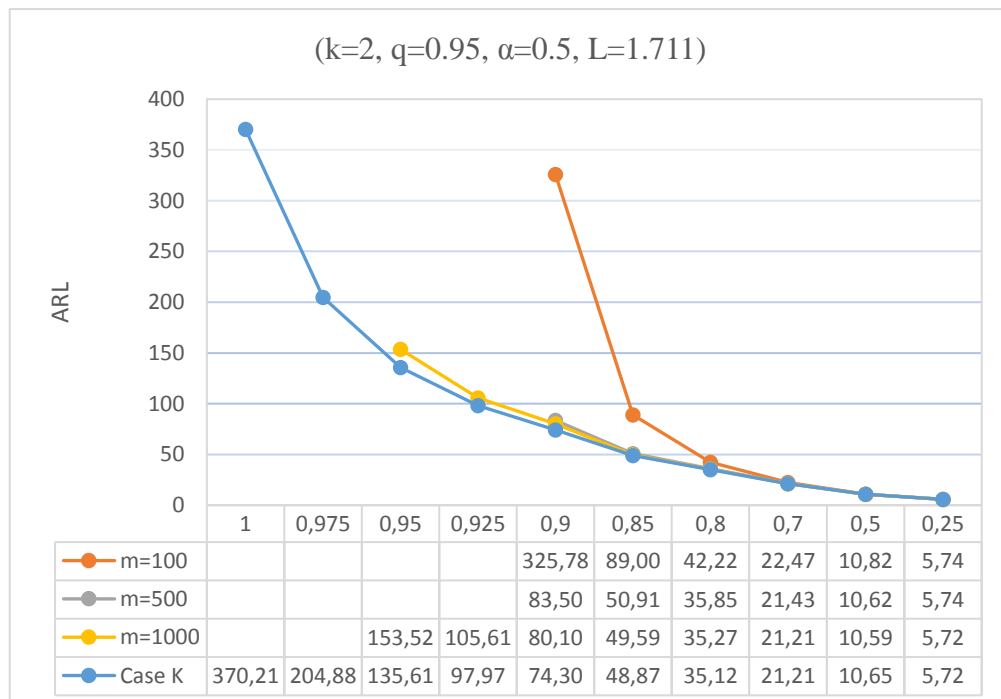
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω. Τα γραφήματα απεικονίζουν τις καμπύλες του ARL για τις παραπάνω περιπτώσεις, καθώς και την καμπύλη του ARL της Case K, την οποία τις συγκρίνουμε. Στον οριζόντιο άξονα βρίσκονται οι διάφορες μετατοπίσεις (δ) και στον κατακόρυφο τα ARL . Οι τιμές των ARL παρατίθενται, επίσης, κάτω από κάθε γράφημα. Στα κελιά τα οποία είναι κενά δεν πραγματοποιήθηκαν υπολογισμοί καθώς ήταν αρκετά χρονοβόροι.



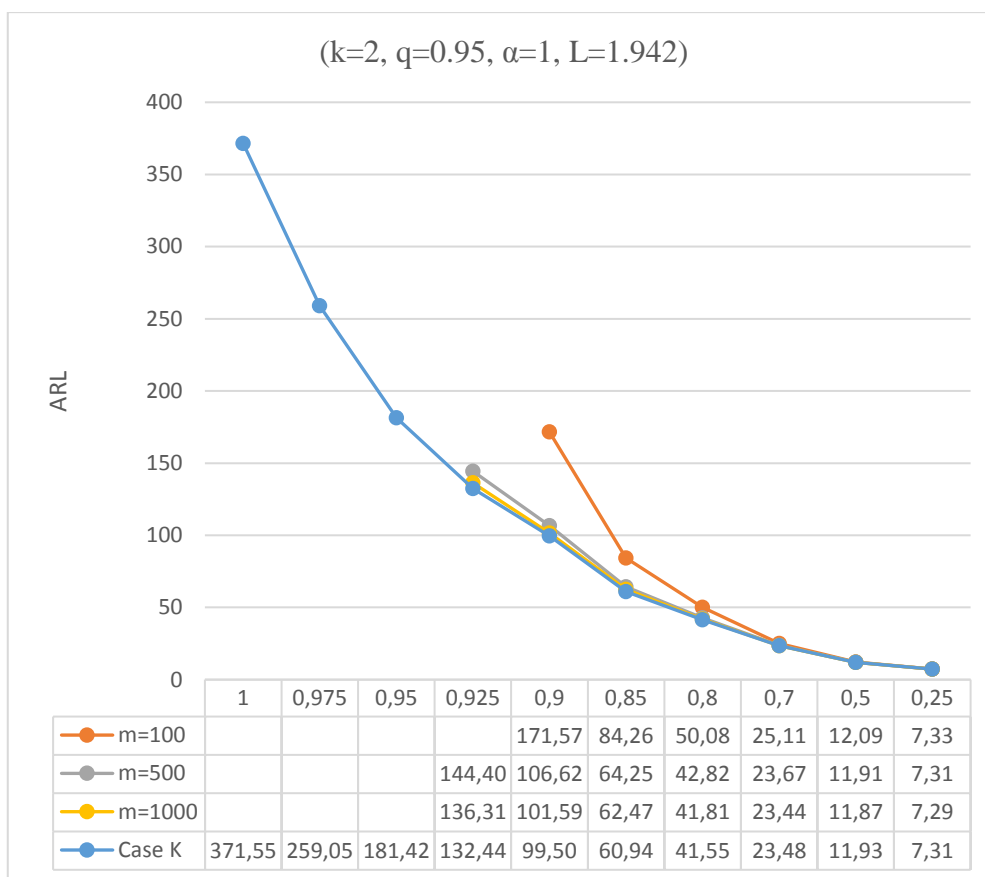
Σχήμα 2-1 Τιμές ARL του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου για άγνωστο θ όταν ($k = 1, q = 0.95, a = 0.5, L = 1.555$)



Σχήμα 2-2 Τιμές *ARL* του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου για άγνωστο θ όταν ($k = 1, q = 0.95, \alpha = 1, L = 1.858$)



Σχήμα 2-3 Τιμές *ARL* του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου για άγνωστο θ όταν ($k = 2, q = 0.95, \alpha = 0.5, L = 1.711$)



Σχήμα 2-4 Τιμές ARL του GWMA-TBE διαγράμματος ελέγχου για άγνωστο θ όταν ($k = 2, q = 0.95, \alpha = 1, L = 1.942$)

Παρατηρούμε από τα παραπάνω γραφήματα ότι το ARL_0 στην Case U είναι σημαντικά μεγαλύτερο από εκείνο της Case K, ενώ σε μερικές περιπτώσεις ξεπερνά το 1.000. Το ίδιο συμβαίνει και για το εκτός ελέγχου ARL . Μόνο για μετατοπίσεις $\delta \leq 0.5$ παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα έχουν παρόμοια αποτελέσματα. Ακόμη, όσο μικρότερο είναι το μέγεθος του εντός ελέγχου δείγματος της Φάσης I, δηλαδή όσο μικρότερη η τιμή του m , τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά των ARL των Case U και Case K. Προκειμένου να πετύχουμε ίδια ή παρόμοια εκτέλεση πρέπει να συλλεχθούν περισσότερες από 1.000 παρατηρήσεις στη Φάση I. Επιπλέον, αναφορικά με το EWMA-TBE διάγραμμα ($\alpha = 1$), δηλαδή το 2^ο και το 4^ο διάγραμμα, παρατηρούμε ότι επηρεάζεται λιγότερο από την εκτίμηση του θ από τη Φάση I.

Επομένως, δεδομένου ότι είναι μη ρεαλιστική και χρονοβόρα η συλλογή τόσο μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων στη Φάση I, θα πρέπει να βρούμε κάποιον άλλο τρόπο, δεδομένου ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους της Case

Κ. Η λύση θα έρθει προσαρμόζοντας τα όρια ελέγχου, και ειδικότερα, συρρικνώνοντάς τα.

Ο σχεδιασμός, λοιπόν, του διαγράμματος GWMA-TBE της Φάσης II, προϋποθέτει τη χρήση του απόλυτου ορίου ελέγχου

$$UARL = E_{\hat{\theta}} \left(E(R|\hat{\theta}) \right) = \int_0^{\infty} E(R|\hat{\theta}) f(\hat{\theta}) d\hat{\theta}$$

και την προσαρμογή του εύρους του κατώτερου ορίου ελέγχου (L), προκειμένου $UARL_0 = 370$. Δηλαδή, θα χρειαστεί να βρούμε το L , έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση

$$UARL_0 = E_{\hat{\theta}} \left(E(R|\hat{\theta}, IC) \right) = \int_0^{\infty} E(R|\hat{\theta}, IC) f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} = 370.$$

Το ολοκλήρωμα στην προηγούμενη σχέση μπορεί να προσεγγιστεί με προσομοίωση και υπολογισμό του του μέσου όρου ενός αρκετά μεγάλου αριθμού από εντός ελέγχου μέσων μήκος ροής που προέρχονται από διαφορετικές εκτιμήσεις της $\hat{\theta}$.

Στην πράξη, μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E(R|\hat{\theta}, IC)$, με το N να δηλώνει τον αριθμό των επαναλήψεων της προσομοίωσης. Οι τιμές του L που ικανοποιούν τη σχέση για κάποιους συνδυασμούς των (q, a) παρουσιάζονται στον Πίνακα 2-8, μαζί με τις τιμές του στην Case K (Chakraborty et al, 2017).

Καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων αυξάνεται, βλέπουμε πως το L , συγκλίνει στο αντίστοιχο της Case K. Επομένως, όσο μικρότερο το μέγεθος του δείγματος (m), τόσο στενότερα πρέπει να είναι τα όρια ελέγχου για να αντισταθμίσουν τις μεγάλες τιμές του ARL .

Πίνακας 2-8 Παράμετροι σχεδιασμού της Φάσης II του GWMA-TBE στην Case U

k	q	a	100	500	1000	Case K
1	0.95	0.5	1.103	1.237	1.391	1.555
1	0.95	1	1.471	1.784	1.822	1.858
2	0.95	0.5	*	1.403	1.556	1.711
2	0.95	1	1.549	1.860	1.898	1.942

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μελέτη της Ευρωστίας του GWMA-TBE

3.1 Η έννοια της Ευρωστίας

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το GWMA-TBE διάγραμμα ελέγχου με δεδομένα που προέρχονται από την Εκθετική κατανομή ($k = 1$), ενδείκνυται για την παρακολούθηση διαδικασιών υψηλής ποιότητας, για την έγκαιρη ανίχνευση αλλοιώσεων στη διεργασία. Παρόλα αυτά, μπορεί να υπάρξουν αποκλίσεις στην κατανομή των TBE παρατηρήσεων από την Εκθετική κατανομή. Σκοπός του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι η διερεύνηση της ευαισθησίας του GWMA διαγράμματος στην ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου, όταν υπάρχει παρέκκλιση από την εκθετική κατανομή.

Για τον σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι ο μέσος όρος TBE είναι γνωστός, αλλά η υπόθεση ότι τα δεδομένα μου ακολουθούν την εκθετική κατανομή είναι εσφαλμένη. Στο παρελθόν έχουν γίνει πολλές δημοσιεύσεις που επικεντρώνονται στη μελέτη της ευρωστίας διαγραμμάτων ελέγχου. Για παράδειγμα, η μελέτη της ευρωστίας του εκθετικού CUSUM διαγράμματος (Borror et al, 2003), του εκθετικού EWMA διαγράμματος (Pehlivan and Testik, 2010), του PM διαγράμματος (Alevizakos and Koukouninos, 2019) και του DGWMA (Alevizakos et al, 2019) όταν οι χρόνοι (TBE) ακολουθούν την Weibull ή τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Οι προσομοιώσεις μας γίνονται λαμβάνοντας δεδομένα από την Weibull και στη συνέχεια από τη λογαριθμοκανονική κατανομή, ενώ το διάγραμμα ελέγχου είναι σχεδιασμένο υπό την προϋπόθεση ότι τα δεδομένα (χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων) ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η μελέτη θα γίνει προσαρμόζοντας τον αλγόριθμο που χρησιμοποιήσαμε στην Ενότητα 2.2 στα νέα δεδομένα, δηλαδή στην εκάστοτε κατανομή που εξετάζουμε με σκοπό να καθοριστούν οι βέλτιστες παράμετροι.

3.2 Η Weibull κατανομή

Η κατανομή Weibull χρησιμοποιείται σε εφαρμογές στο χώρο της βιομηχανίας, της ιατρικής και των βιολογικών επιστημών για την περιγραφή των χρόνων ζωής, ενώ αποτελεί μία από τις σημαντικότερες κατανομές στην ανάλυση της αξιοπιστίας και της επιβίωσης. Έτσι, αν X μια τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το χρόνο μεταξύ δύο γεγονότων, στην περίπτωση μας αποτυχιών, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Weibull κατανομής με δύο παραμέτρους ορίζεται ως

$$f(x; \beta, \alpha) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{(\beta-1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right), x > 0, \beta > 0, \alpha > 0, \quad (3.1)$$

όπου β και α είναι οι παράμετροι σχήματος και κλίμακας, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα για την παράμετρο σχήματος β , στην ανάλυση των αποτυχιών, αν $\beta < 1$, το ποσοστό των αποτυχιών μειώνεται με τον χρόνο, ενώ αν $\beta > 1$, το ποσοστό των αποτυχιών αυξάνεται με τον χρόνο. Ακόμη, για $\beta = 1$, το ποσοστό των αποτυχιών είναι σταθερό και η Weibull κατανομή δίνει την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta = \alpha$.

Η μέση ή αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής X ορίζεται ως

$$\mu = \alpha \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right],$$

$$\text{ενώ η διασπορά της ως } \sigma^2 = \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2.$$

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις με $\beta = 0.75, 0.9, 1.1, 1.2, 1.5$. Ελέγχουμε μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας με τιμές $\delta = 0.975, 0.95, 0.925, 0.9, 0.85, 0.8, 0.7, 0.5, 0.25$, και αντιστοιχεί σε αύξηση στο ποσοστό των γεγονότων από 1 σε 1.03, 1.05, 1.08, 1.11, 1.18, 1.25, 1.43, 2, 4 αντιστοίχως.

Η παράμετρος κλίμακας α προσαρμόζεται προκειμένου να δώσει το προσδοκώμενο εντός ελέγχου μ_0 και εκτός ελέγχου μ_1 μέσω των TBE παρατηρήσεων, όπου

$$\mu_0 = \theta_0 = 1 \text{ και } \mu_1 = \theta = \delta \theta_0.$$

Στον Πίνακα 3-1, παρατίθενται οι τιμές της παραμέτρου κλίμακας α , για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου β προκειμένου να λάβουμε τις καθορισμένες τιμές μ_0

και μ_1 . Συγκεκριμένα, για $\beta = 0.75$, για να πετύχουμε $\mu_0 = 1$ και $\mu_1 = 0.975$, οι αντίστοιχες τιμές των α_0 και α_1 δίνονται από:

$$\mu_0 = \alpha_0 \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{0.75} \right) \right] = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 0.8399$$

$$\mu_1 = \alpha_1 \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{0.75} \right) \right] = 0.975 \Rightarrow \alpha_1 = 0.8189$$

Πίνακας 3-1 Τιμές της παραμέτρου κλίμακας α για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου σχήματος β για να αποδοθούν οι προσδοκώμενες μέσες τιμές των TBE παρατηρήσεων

β	Μέσες Τιμές των TBE παρατηρήσεων									
	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
1	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.75	0.8399	0.8189	0.7979	0.7769	0.7559	0.6719	0.5879	0.5039	0.4199	0.2100
0.9	0.9504	0.9266	0.9029	0.8791	0.8554	0.7603	0.6653	0.5702	0.4752	0.2376
1.1	1.0364	1.0105	0.9845	0.9586	0.9327	0.8291	0.7255	0.6218	0.5182	0.2591
1.2	1.0631	1.0365	1.0099	0.9834	0.9568	0.8505	0.7442	0.6379	0.5315	0.2658
1.5	1.1077	1.0800	1.0523	1.0247	0.9970	0.8862	0.7754	0.6646	0.5539	0.2769

Στη συνέχεια παρατίθενται τα αποτελέσματα των εντός και εκτός ελέγχου ARL του GWMA-TBE διαγράμματος, όταν η πραγματική κατανομή των TBE παρατηρήσεων είναι η Weibull. Οι πολύ χρονοβόροι υπολογισμοί, που αντιστοιχούν σε εξαιρετικά μεγάλες τιμές του ARL παραλείφθηκαν. Οι περιπτώσεις αυτές συμβολίζονται με “****”. Επίσης, τα κελιά που φέρουν “*” αντιστοιχούν σε προσομοιώσεις των 5.000 επαναλήψεων, “**” σε 2.000 επαναλήψεις και “***” σε 1.000 επαναλήψεις. Η μείωση των επαναλήψεων από 10.000 σε 5.000, 2.000, 1.000 ήταν αναπόφευκτη, καθώς η διαδικασία υπολογισμού ήταν εξαιρετικά χρονοβόρα. Παρόλα αυτά, δεν επηρεάζεται η αξιοπιστία των συμπερασμάτων μας.

Πίνακας 3-2 Τιμές ARL του GWMA-TBE διαγράμματος υπό την Εκθετική και τη Weibull κατανομή

q	a	L	Distribution	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.8	0.5	1.594	Weibull($\beta=0.75$)	132.60	111.43	94.89	81.07	70.71	54.50	43.02	28.59	15.44	8.55
			Weibull($\beta=0.9$)	247.37	192.26	151.76	122.45	101.84	73.99	55.05	33.90	16.68	8.80
			Exponential	370.28	275.12	209.01	161.37	128.82	88.01	63.18	37.14	17.48	8.91
			Weibull($\beta=1.1$)	595.06	411.86	294.69	218.55	166.04	105.37	73.25	41.04	18.19	9.06
			Weibull($\beta=1.2$)	953.10	614.59	418.56	292.97	214.62	126.33	83.50	44.49	18.88	9.17
			Weibull($\beta=1.5$)	4870.38***	2479.85**	1306.35	745.19	461.15	216.17	121.23	54.92	20.66	9.42
0.8	0.7	1.754	Weibull($\beta=0.75$)	116.37	101.89	88.96	78.85	69.74	55.02	43.97	29.41	15.37	8.38
			Weibull($\beta=0.9$)	231.20	190.40	157.96	130.85	109.86	79.97	59.98	35.92	16.59	8.55
			Exponential	369.27	292.67	233.75	186.92	151.95	102.90	73.09	40.30	17.37	8.60
			Weibull($\beta=1.1$)	635.63	475.87	359.73	276.23	216.13	134.84	89.68	45.81	18.08	8.72
			Weibull($\beta=1.2$)	1093.36	779.27	570.24	417.10	307.62	179.12	109.69	51.57	18.76	8.78
			Weibull($\beta=1.5$)	6605.90***	4250.66***	2616.67***	1622.29	1028.53	449.50	218.24	71.59	20.46	8.90
0.8	0.9	1.810	Weibull($\beta=0.75$)	102.89	91.61	81.91	73.28	65.83	53.95	43.99	29.95	15.16	7.87
			Weibull($\beta=0.9$)	217.95	185.93	158.31	136.52	116.81	87.76	65.94	39.65	16.74	8.00
			Exponential	370.71	302.63	253.70	210.43	174.44	122.98	88.68	47.35	17.86	8.00
			Weibull($\beta=1.1$)	657.07	521.41	413.27	333.54	270.52	178.19	118.67	57.93	18.85	8.10
			Weibull($\beta=1.2$)	1192.04	914.59	705.17	545.56	419.90	260.38	162.15	69.95	19.92	8.14
			Weibull($\beta=1.5$)	****	5539.38***	3891.30***	2686.58**	1884.91	921.76	454.01	130.30	22.90	8.22
0.8	1	1.812	Weibull($\beta=0.75$)	96.70	87.59	78.97	71.29	64.35	53.54	44.14	30.28	15.16	7.63
			Weibull($\beta=0.9$)	211.14	183.25	158.41	137.42	119.64	90.91	69.47	42.18	17.20	7.76
			Exponential	369.67	309.53	260.51	219.22	185.27	131.53	96.70	51.81	18.56	7.73
			Weibull($\beta=1.1$)	657.24	532.06	434.58	359.39	293.40	198.64	135.16	66.09	20.00	7.86
			Weibull($\beta=1.2$)	1224.21	957.05	756.55	598.68	471.81	302.77	193.00	83.58	21.51	7.89
			Weibull($\beta=1.5$)	****	5940.13***	4348.43***	3204.34***	2321.39	1200.96	621.28	181.89	26.31	7.93
0.8	1.3	1.773	Weibull($\beta=0.75$)	89.06	81.90	75.15	69.51	63.85	54.08	45.57	32.13	16.24	7.26
			Weibull($\beta=0.9$)	206.70	184.59	164.69	146.48	131.13	104.19	82.31	51.68	20.27	7.47
			Exponential	370.13	322.87	281.13	246.14	215.67	164.39	123.90	70.66	23.49	7.52
			Weibull($\beta=1.1$)	690.05	591.93	507.24	432.65	366.79	268.49	193.88	99.71	27.52	7.65
			Weibull($\beta=1.2$)	1316.06	1100.96	915.21	767.79	636.92	441.63	304.39	143.27	32.28	7.72
			Weibull($\beta=1.5$)	****	****	6198.65***	4873.45***	2197.60**	2156.08*	1289.18	440.68	52.09	7.86

Πίνακας 3-2 (Συνέχεια)

q	a	L	Distribution	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.9	0.5	1.620	Weibull($\beta=0.75$)	159.01	125.70	102.55	85.04	72.99	55.01	42.64	28.43	15.56	8.93
			Weibull($\beta=0.9$)	270.39	196.93	149.29	117.72	95.75	68.38	51.07	32.05	16.52	9.13
			Exponential	370.03	254.83	185.80	141.39	111.68	76.79	56.00	34.16	17.10	9.20
			Weibull($\beta=1.1$)	543.54	348.58	238.81	173.94	133.41	87.04	61.95	36.61	17.60	9.32
			Weibull($\beta=1.2$)	787.05	458.90	298.73	209.57	154.61	96.70	67.29	38.59	18.05	9.39
			Weibull($\beta=1.5$)	****	1093.58	570.52	346.78	234.50	128.48	83.17	44.11	19.26	9.57
0.9	0.7	1.810	Weibull($\beta=0.75$)	147.34	122.73	104.18	88.10	76.57	58.91	46.02	30.33	16.40	9.47
			Weibull($\beta=0.9$)	257.64	200.96	157.85	127.40	104.58	74.65	55.37	34.18	17.13	9.57
			Exponential	369.67	271.70	208.05	159.23	125.69	85.04	60.71	36.04	17.55	9.59
			Weibull($\beta=1.1$)	560.18	395.67	280.25	207.40	156.58	98.46	68.26	38.35	17.92	9.67
			Weibull($\beta=1.2$)	859.87	558.06	377.80	265.36	191.92	112.38	74.79	40.42	18.24	9.70
			Weibull($\beta=1.5$)	****	1827.78	984.62	577.87	359.51	168.59	95.73	45.66	18.98	9.77
0.9	0.9	1.896	Weibull($\beta=0.75$)	129.13	110.60	96.42	84.05	74.25	58.40	46.34	30.67	16.06	9.17
			Weibull($\beta=0.9$)	240.71	196.08	161.93	133.47	110.94	80.17	59.94	35.66	16.82	9.23
			Exponential	369.93	288.17	229.43	182.32	144.81	98.24	69.21	38.49	17.21	9.21
			Weibull($\beta=1.1$)	601.30	447.30	337.05	257.18	198.91	122.18	81.72	41.95	17.53	9.26
			Weibull($\beta=1.2$)	977.83	703.39	500.73	364.05	270.18	154.32	95.32	45.37	17.82	9.27
			Weibull($\beta=1.5$)	5058.44**	3119.16**	1868.66**	1159.09	728.57	320.10	156.81	55.97	18.41	9.28
0.9	1	1.909	Weibull($\beta=0.75$)	119.96	105.40	92.35	81.67	72.60	57.51	46.16	30.78	15.78	8.89
			Weibull($\beta=0.9$)	233.94	194.37	162.88	135.95	114.89	83.34	62.72	36.70	16.63	8.91
			Exponential	370.45	296.96	239.31	193.72	155.30	106.08	75.06	40.73	17.13	8.88
			Weibull($\beta=1.1$)	614.40	473.45	363.00	284.39	221.43	139.48	92.57	45.96	17.47	8.92
			Weibull($\beta=1.2$)	1051.23	766.05	564.70	417.38	315.05	185.23	111.88	51.05	17.77	8.91
			Weibull($\beta=1.5$)	****	3728.03**	2396.78	1551.91	1020.18	449.19	220.13	68.89	18.50	8.90
0.9	1.3	1.879	Weibull($\beta=0.75$)	101.90	91.37	82.10	74.53	67.47	56.02	46.02	31.19	15.59	7.97
			Weibull($\beta=0.9$)	214.99	186.40	161.40	139.85	121.95	92.20	70.23	42.57	17.22	7.97
			Exponential	369.27	310.29	263.18	220.68	184.02	131.89	95.30	51.49	18.22	7.89
			Weibull($\beta=1.1$)	645.22	524.94	426.05	349.39	287.62	192.81	132.09	63.84	19.24	7.94
			Weibull($\beta=1.2$)	1136.87	904.76	716.61	571.24	454.73	287.05	183.19	78.92	20.25	7.93
			Weibull($\beta=1.5$)	****	5204.98**	3764.36**	2739.16**	1994.04**	1021.99	534.32	156.47	23.37	7.87

Πίνακας 3-2 (Συνέχεια)

q	a	L	Distribution	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.95	0.5	1.555	Weibull($\beta=0.75$)	174.89	132.64	103.16	83.85	71.47	52.88	40.91	27.43	15.17	8.88
			Weibull($\beta=0.9$)	287.82	194.22	143.52	110.67	89.14	63.30	47.55	30.20	15.97	9.03
			Exponential	370.96	239.89	168.72	127.88	100.84	69.19	51.04	31.87	16.43	9.09
			Weibull($\beta=1.1$)	527.85	312.31	208.17	150.09	115.22	76.84	55.66	33.65	16.88	9.20
			Weibull($\beta=1.2$)	706.32	384.97	245.65	172.61	129.36	83.16	59.28	35.22	17.22	9.26
			Weibull($\beta=1.5$)	****	704.65	380.94	245.41	173.71	102.66	69.63	39.20	18.16	9.41
0.95	0.7	1.694	Weibull($\beta=0.75$)	180.10	142.45	115.20	94.66	80.58	60.16	46.50	30.73	16.98	10.14
			Weibull($\beta=0.9$)	286.58	209.23	157.78	123.61	99.72	70.21	52.59	33.15	17.54	10.21
			Exponential	369.83	258.87	187.26	141.82	111.87	72.93	55.53	34.22	17.83	10.22
			Weibull($\beta=1.1$)	519.63	336.44	230.85	169.04	128.14	83.13	59.65	35.61	18.06	10.29
			Weibull($\beta=1.2$)	701.82	424.95	277.09	193.26	143.06	89.43	62.59	36.69	18.26	10.31
			Weibull($\beta=1.5$)	****	863.73	462.66	285.47	193.19	107.54	70.86	39.22	18.71	10.36
0.95	0.9	1.819	Weibull($\beta=0.75$)	160.01	133.18	112.73	95.59	82.03	62.84	48.89	32.16	17.60	10.60
			Weibull($\beta=0.9$)	268.83	209.15	164.29	131.84	108.22	76.43	56.58	34.69	17.98	10.62
			Exponential	370.21	274.61	208.35	159.23	126.09	84.46	60.54	35.98	18.16	10.59
			Weibull($\beta=1.1$)	542.99	382.25	274.24	203.05	153.79	95.68	66.01	37.43	18.25	10.64
			Weibull($\beta=1.2$)	797.58	521.85	355.44	248.60	182.31	106.86	70.84	38.48	18.37	10.64
			Weibull($\beta=1.5$)	2792.89**	1469.12*	824.64	488.38	307.36	145.22	84.20	40.99	18.57	10.64
0.95	1	1.858	Weibull($\beta=0.75$)	148.27	126.18	108.95	93.29	81.17	62.78	49.07	32.19	17.36	10.44
			Weibull($\beta=0.9$)	259.79	205.82	166.55	134.60	111.35	78.78	58.55	35.25	17.70	10.44
			Exponential	369.88	282.67	218.43	169.22	135.05	89.99	63.52	36.79	17.87	10.40
			Weibull($\beta=1.1$)	564.62	409.34	300.24	224.75	171.75	105.22	71.32	38.62	17.95	10.44
			Weibull($\beta=1.2$)	864.03	583.48	409.32	291.78	212.45	120.96	77.83	40.02	18.01	10.43
			Weibull($\beta=1.5$)	3490.02**	1933.85**	1118.45	675.68	426.77	190.56	101.17	43.50	18.16	10.42
0.95	1.3	1.889	Weibull($\beta=0.75$)	121.31	106.65	94.10	83.85	75.00	59.60	48.15	31.84	16.26	9.32
			Weibull($\beta=0.9$)	233.55	195.68	163.96	139.00	118.56	86.33	64.79	38.21	16.77	9.29
			Exponential	369.89	299.50	244.33	196.26	161.04	110.65	78.11	41.85	17.02	9.23
			Weibull($\beta=1.1$)	604.01	469.83	364.91	286.46	229.15	145.10	95.82	47.10	17.22	9.25
			Weibull($\beta=1.2$)	1010.36	752.64	562.12	423.49	321.83	192.94	118.02	52.29	17.42	9.23
			Weibull($\beta=1.5$)	****	3425.73**	2258.66**	1496.71**	1022.12	464.26	229.46	70.74	17.62	9.20

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του ARL_0 είναι μικρότερες του 370 όταν $\beta < 1$, ενώ ξεπερνούν το 370 για $\beta > 1$. Αυτό εξηγείται καθώς η διασπορά της Weibull κατανομής για δεδομένο TBE μέσο μειώνεται καθώς η παράμετρος σχήματος β αυξάνεται. Καθώς οι TBE παρατηρήσεις διακυμαίνονται με μικρότερη διασπορά σε μια εντός ελέγχου κατάσταση, η πιθανότητα μια παρατήρηση να βρίσκεται κάτω από το κατώτερο όριο ελέγχου LCL μειώνεται, κι έτσι το ARL_0 αυξάνεται.

Επιπλέον, όσο η παράμετρος σχήματος β πλησιάζει την τιμή 1, το GWMA-TBE είναι πιο εύρωστο για μεγαλύτερο φάσμα μετατοπίσεων του μέσου. Άλλωστε, γνωρίζουμε ότι για $\beta = 1$, η $Weibull(1,1)$ κατανομή δίνει την εκθετική κατανομή. Ακόμη, για δεδομένη τιμή του q , το GWMA-TBE εμφανίζεται πιο εύρωστο, δηλαδή, οι τιμές του ARL_1 πλησιάζουν τις προβλεπόμενες, καθώς η τιμή του a μειώνεται. Συγκεκριμένα, όταν $\mu_1 = 0.925$ και τα δεδομένα ακολουθούν την Weibull κατανομή με $\beta = 0.9$, το ARL_1 για το GWMA-TBE για $q = 0.9$ και $a = 0.5$ είναι ίσο με 117.72, το οποίο είναι 16.74% μικρότερο από το προσδοκώμενο αντίστοιχο $ARL_1 = 141.39$. Ενώ, για το ίδιο q , όσο το a αυξάνεται, οι τιμές του ARL_1 όταν η πραγματική κατανομή των δεδομένων είναι η Weibull, είναι κατά 19.99%, 26.79%, 29.82%, 36.63% μικρότερες από τις προσδοκώμενες τιμές του ARL_1 , για $a = 0.7, 0.9, 1, 1.3$ αντιστοίχως.

Επιπλέον, για δεδομένη τιμή της παραμέτρου a , όσο το q αυξάνεται, οι τιμές του ARL_1 πλησιάζουν τις προσδοκώμενες. Έτσι, όσο μεγαλύτερη τιμή έχει το q , τόσο πιο εύρωστο είναι το GWMA-TBE διάγραμμα.

Για παράδειγμα, όταν $\mu_1 = 0.9$ και η πραγματική κατανομή είναι η Weibull με $\beta = 1.2$, το ARL_1 για το GWMA-TBE για $q = 0.8$ και $a = 0.7$ είναι ίσο με 307.62, το οποίο είναι 102.4% μεγαλύτερο από το προσδοκώμενο αντίστοιχο $ARL_1 = 151.95$. Ενώ, για το ίδιο a , όσο το q αυξάνεται, οι τιμές του ARL_1 όταν η πραγματική κατανομή των δεδομένων είναι η Weibull, είναι κατά 52.70%, 27.88% μεγαλύτερες από τις προσδοκώμενες τιμές του ARL_1 , για $q = 0.9, 0.95$ αντιστοίχως. Εξαιρέση εμφανίζεται μόνο για $\beta = 0.9$ και $\mu_1 = 0.975, 0.95$ όπου οι τιμές δεν έχουν φθίνουσα πορεία καθώς το q αυξάνεται. Οι παραπάνω παρατηρήσεις ικανοποιούν και τις τιμές του $SDRL$, οι οποίες έχουν υπολογισθεί αλλά δεν έχουν συμπεριληφθεί στους πίνακες της εργασίας, καθώς δεν παρουσιάζουν κάποια επιπρόσθετη πληροφορία.

3.3 Η λογαριθμοκανονική κατανομή

Η λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή χρησιμοποιείται συνήθως σε περιπτώσεις που εξετάζουμε τους χρόνους που εμφανίζεται μια αποτυχία. Συνήθως, συναντάται στην ανάλυση αξιοπιστίας, στη βιολογία, την ιατρική και τη χημεία. Έτσι, αν X μια τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το χρόνο μεταξύ δύο γεγονότων, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμοκανονική κατανομής με ορίζεται ως

$$f(x; m, s) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2s^2}\right), x > 0, s > 0, m \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

όπου s και m είναι οι παράμετροι σχήματος και θέσης, αντιστοίχως. Η παράμετρος κλίμακας δίνεται από το e^m , το οποίο αποτελεί και τη διάμεσο. Η μέση ή αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής X ορίζεται ως $\mu = \exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right)$, ενώ η διασπορά της ως $\sigma^2 = [\exp(s^2 - 1)] \exp(2m + s^2)$.

Στην παρούσα εργασία η εργασία εξετάζει τις περιπτώσεις με παραμέτρους σχήματος $s = 0.94, 0.974, 1.092$ και 1.182 . Η παράμετρος θέσης m προσαρμόζεται προκειμένου να δώσει το προσδοκώμενο εντός ελέγχου μ_0 και εκτός ελέγχου μ_1 μέσο των TBE παρατηρήσεων, όπου $\mu_0 = \theta_0 = 1$ και $\mu_1 = \theta = \delta\theta_0$. Στον Πίνακα 3-3, παρατίθενται οι τιμές της παραμέτρου κλίμακας m , για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου s προκειμένου να λάβουμε τις καθορισμένες τιμές μ_0 και μ_1 .

Πίνακας 3-3 Τιμές της παραμέτρου θέσης m για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου σχήματος s για να αποδοθούν οι προσδοκώμενες μέσες τιμές των TBE παρατηρήσεων

Μέσες Τιμές των TBE παρατηρήσεων										
s	1.0	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.940	-0.4418	-0.4671	-0.4931	-0.5198	-0.5472	-0.6649	-0.7985	-0.9526	-1.1349	-1.8281
0.974	-0.4743	-0.4997	-0.5256	-0.5523	-0.5797	-0.6975	-0.8310	-0.9852	-1.1675	-1.8606
1.092	-0.5962	-0.6215	-0.6475	-0.6742	-0.7016	-0.8194	-0.9529	-1.1071	-1.2894	-1.9825
1.182	-0.6986	-0.7239	-0.7499	-0.7765	-0.8039	-0.9217	-1.0552	-1.2094	-1.3917	-2.0849

Στη συνέχεια παρατίθενται τα αποτελέσματα των εντός και εκτός ελέγχου ARL του GWMA-TBE διαγράμματος, όταν η πραγματική κατανομή των TBE παρατηρήσεων είναι η λογαριθμοκανονική.

Πίνακας 3-4 Τιμές ARL του GWMA-TBE διαγράμματος υπό την Εκθετική και τη Λογαριθμοκανονική κατανομή

q	a	L	Distribution	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.7	0.5	1.515	Exponential	369.79	284.42	224.66	178.63	145.28	98.82	70.90	40.17	17.79	8.55
			logn(s=0.94)	709.16	504.42	368.15	275.57	210.06	131.37	87.69	45.87	18.57	8.53
			logn(s=0.974)	513.58	379.56	287.15	221.83	172.87	113.52	78.29	42.87	18.06	8.46
			logn(s=1.092)	221.65	179.67	148.59	122.43	103.07	75.21	56.59	34.06	16.28	8.21
			logn(s=1.182)	140.56	118.37	101.06	87.59	75.82	58.36	45.64	29.58	15.16	8.00
0.7	0.7	1.637	Exponential	370.30	301.08	249.03	206.42	172.38	120.77	86.53	47.07	18.26	8.04
			logn(s=0.94)	828.45	622.75	471.27	365.01	281.73	173.41	113.74	54.56	18.52	7.96
			logn(s=0.974)	571.16	444.02	348.26	272.68	217.05	142.48	95.80	48.77	17.85	7.90
			logn(s=1.092)	215.80	179.74	151.60	128.45	108.96	80.83	60.52	35.55	15.86	7.70
			logn(s=1.182)	127.43	110.71	97.18	85.69	74.74	58.30	45.56	29.31	14.66	7.55
0.7	0.9	1.685	Exponential	370.58	318.07	274.47	234.74	200.15	147.24	107.51	58.89	20.34	7.70
			logn(s=0.94)	1136.26	886.07	690.20	546.83	428.96	270.31	171.50	76.61	20.87	7.54
			logn(s=0.974)	751.26	598.56	481.78	383.98	310.70	203.48	136.07	65.27	19.67	7.48
			logn(s=1.092)	243.11	207.04	175.84	150.32	128.89	96.14	71.90	41.19	16.58	7.28
			logn(s=1.182)	132.51	116.76	102.65	91.22	80.88	63.66	49.66	31.69	14.85	7.12
0.7	1	1.689	Exponential	369.60	321.14	280.69	244.30	211.73	157.73	117.88	65.85	22.18	7.61
			logn(s=0.94)	1370.75	1069.39	851.27	677.33	536.22	340.59	216.80	93.36	23.14	7.43
			logn(s=0.974)	877.17	710.60	571.84	464.09	375.20	246.76	164.93	78.06	21.44	7.35
			logn(s=1.092)	266.90	227.71	194.84	168.09	144.45	106.93	79.92	45.34	17.41	7.12
			logn(s=1.182)	140.35	124.30	109.61	96.79	85.76	67.28	52.86	33.53	15.21	6.94
0.7	1.3	1.657	Exponential	370.53	329.43	294.17	262.75	232.36	181.68	143.61	87.08	29.30	8.11
			logn(s=0.94)	2362.51	1888.35	1505.24	1214.85	987.50	648.93	426.18	180.40	36.00	7.63
			logn(s=0.974)	1392.07	1155.25	951.69	789.37	652.08	445.96	299.53	135.85	31.58	7.47
			logn(s=1.092)	374.25	323.78	278.23	240.77	206.10	152.53	115.47	65.01	21.72	7.07
			logn(s=1.182)	171.72	153.65	137.21	121.64	108.10	85.27	67.68	42.45	17.45	6.76

Πίνακας 3-4 (Συνέχεια)

q	a	L	Distribution	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.8	0.5	1.594	Exponential	370.28	275.12	209.01	161.37	128.82	88.01	63.18	37.14	17.48	8.91
			logn(s=0.94)	515.94	360.12	264.18	198.28	155.32	100.58	70.45	39.67	17.85	8.87
			logn(s=0.974)	403.65	293.99	220.84	171.07	136.85	91.09	65.67	37.80	17.51	8.81
			logn(s=1.092)	207.54	165.37	134.47	111.15	93.44	68.34	51.74	32.23	16.26	8.60
			logn(s=1.182)	141.87	118.37	100.58	85.64	73.76	56.09	44.12	29.03	15.38	8.45
0.8	0.7	1.754	Exponential	369.27	292.67	233.75	186.92	151.95	102.90	73.09	40.30	17.37	8.60
			logn(s=0.94)	533.47	397.50	299.64	230.66	179.44	116.25	79.04	41.58	17.30	8.50
			logn(s=0.974)	402.86	308.38	238.88	188.53	150.74	101.12	71.12	39.27	16.98	8.46
			logn(s=1.092)	187.68	155.27	129.65	109.34	92.92	69.32	52.29	32.10	15.77	8.32
			logn(s=1.182)	122.96	106.09	92.03	80.19	70.51	54.49	42.88	28.27	14.92	8.22
0.8	0.9	1.810	Exponential	370.71	302.63	253.70	210.43	174.44	122.98	88.68	47.35	17.86	8.00
			logn(s=0.94)	629.74	486.42	378.29	298.62	234.12	150.50	100.23	49.29	17.33	7.89
			logn(s=0.974)	453.42	362.07	286.13	229.46	185.18	124.33	86.33	44.76	16.85	7.87
			logn(s=1.092)	185.03	157.76	134.21	115.15	99.05	73.98	56.28	33.82	15.32	7.76
			logn(s=1.182)	115.73	101.59	89.07	78.42	69.32	54.56	43.03	28.33	14.37	7.67
0.8	1	1.812	Exponential	369.67	309.53	260.51	219.22	185.27	131.53	96.70	51.81	18.56	7.73
			logn(s=0.94)	712.61	515.94	436.49	343.29	273.36	176.13	116.70	55.81	17.95	7.63
			logn(s=0.974)	499.35	398.41	319.60	257.78	209.84	140.64	97.12	49.53	17.27	7.60
			logn(s=1.092)	192.71	163.60	140.12	120.21	103.65	78.22	59.24	35.14	15.43	7.48
			logn(s=1.182)	114.69	101.55	89.60	79.38	70.78	55.58	44.20	28.95	14.25	7.39
0.8	1.3	1.773	Exponential	370.13	322.87	281.13	246.14	215.67	164.39	123.90	70.66	23.49	7.52
			logn(s=0.94)	1184.73	943.47	767.61	616.75	495.29	321.51	209.70	94.64	23.32	7.26
			logn(s=0.974)	780.80	638.59	523.02	429.88	351.82	234.47	160.42	78.11	21.56	7.22
			logn(s=1.092)	245.91	211.99	184.36	159.12	137.48	104.64	78.69	45.37	17.48	7.07
			logn(s=1.182)	132.66	118.98	105.55	93.08	83.18	65.73	51.90	33.69	15.26	6.94

Πίνακας 3-4 (Συνέχεια)

q	a	L	Distribution	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.9	0.5	1.620	Exponential	370.03	254.83	185.80	141.39	111.68	76.79	56.00	34.16	17.10	9.20
			logn(s=0.94)	414.52	278.27	202.07	155.70	121.14	81.26	59.04	35.30	17.24	9.15
			logn(s=0.974)	347.32	241.42	180.63	140.14	112.13	76.44	56.26	34.13	16.97	9.10
			logn(s=1.092)	207.42	159.43	127.87	104.16	86.73	62.42	47.76	30.62	16.12	8.94
			logn(s=1.182)	151.74	123.36	101.55	84.43	72.09	54.28	42.33	28.37	15.50	8.82
0.9	0.7	1.810	Exponential	369.67	271.70	208.05	159.23	125.69	85.04	60.71	36.04	17.55	9.59
			logn(s=0.94)	372.14	270.58	203.84	159.02	125.26	85.08	60.52	35.71	17.33	9.51
			logn(s=0.974)	304.20	230.23	179.50	140.71	114.58	78.78	57.44	34.46	17.12	9.48
			logn(s=1.092)	180.71	147.16	120.69	101.87	85.72	63.44	48.51	31.23	16.48	9.40
			logn(s=1.182)	132.28	112.29	96.18	81.59	70.93	54.54	43.08	29.00	16.00	9.33
0.9	0.9	1.896	Exponential	369.93	288.17	229.43	182.32	144.81	98.24	69.21	38.49	17.21	9.21
			logn(s=0.94)	387.66	293.72	226.19	177.36	141.98	94.81	66.37	36.67	16.73	9.14
			logn(s=0.974)	306.58	238.23	188.44	152.92	123.76	85.91	61.32	35.23	16.55	9.12
			logn(s=1.092)	164.72	138.00	116.06	98.88	84.82	63.80	48.63	30.89	15.90	9.07
			logn(s=1.182)	115.81	99.91	87.09	76.87	67.41	52.51	41.81	28.15	15.43	9.03
0.9	1	1.909	Exponential	370.45	296.96	239.31	193.72	155.30	106.08	75.06	40.73	17.13	8.88
			logn(s=0.94)	409.95	316.26	245.70	193.80	154.99	103.39	71.57	38.42	16.44	8.81
			logn(s=0.974)	319.17	251.71	200.54	162.32	132.66	91.35	65.32	36.53	16.24	8.80
			logn(s=1.092)	160.81	137.01	116.78	99.21	85.56	64.34	48.99	31.03	15.53	8.77
			logn(s=1.182)	111.16	96.49	84.74	74.92	66.05	51.78	41.41	27.83	15.00	8.74
0.9	1.3	1.879	Exponential	369.27	310.29	263.18	220.68	184.02	131.89	95.30	51.49	18.22	7.89
			logn(s=0.94)	534.96	429.24	339.11	271.57	220.51	146.14	99.36	49.78	16.97	7.82
			logn(s=0.974)	392.45	317.11	260.15	212.27	174.52	120.17	85.08	44.88	16.54	7.82
			logn(s=1.092)	168.23	144.07	124.52	107.94	93.50	71.28	55.15	33.64	15.19	7.79
			logn(s=1.182)	105.65	93.13	82.98	74.20	65.98	53.02	42.29	28.33	14.29	7.77

Πίνακας 3-4 (Συνέχεια)

q	a	L	Distribution	1	0.975	0.95	0.925	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.25
0.95	0.5	1.555	Exponential	370.96	239.89	168.72	127.88	100.84	69.19	51.04	31.87	16.43	9.09
			logn(s=0.94)	392.89	250.51	178.61	134.92	106.53	72.33	53.17	32.52	16.50	9.05
			logn(s=0.974)	339.81	223.84	162.30	124.78	100.18	68.97	51.05	31.71	16.29	9.01
			logn(s=1.092)	215.04	157.74	122.65	98.55	80.66	58.68	44.45	29.03	15.61	8.87
			logn(s=1.182)	161.73	125.82	100.42	82.20	69.79	51.59	40.25	27.06	15.09	8.76
0.95	0.7	1.694	Exponential	369.83	258.87	187.26	141.82	111.87	72.93	55.53	34.22	17.83	10.22
			logn(s=0.94)	335.64	235.23	175.61	136.44	109.61	74.32	54.61	33.79	17.58	10.17
			logn(s=0.974)	293.28	211.84	161.12	127.18	102.92	71.26	52.94	33.18	17.46	10.15
			logn(s=1.092)	193.60	153.31	122.70	101.12	84.16	62.19	47.36	31.05	16.98	10.08
			logn(s=1.182)	150.95	123.80	102.04	86.36	73.51	55.71	43.61	29.45	16.64	10.02
0.95	0.9	1.819	Exponential	370.21	274.61	208.35	159.23	126.09	84.46	60.54	35.98	18.16	10.59
			logn(s=0.94)	316.14	236.06	182.69	143.67	116.24	78.89	57.17	34.63	17.80	10.55
			logn(s=0.974)	269.59	207.72	163.09	130.95	107.57	74.72	55.10	33.96	17.70	10.54
			logn(s=1.092)	172.23	140.52	117.87	99.32	84.26	63.01	48.36	31.77	17.34	10.51
			logn(s=1.182)	131.03	111.24	95.84	82.55	71.84	55.77	44.23	30.14	17.06	10.47
0.95	1	1.858	Exponential	369.88	282.67	218.43	169.22	135.05	89.99	63.52	36.79	17.87	10.40
			logn(s=0.94)	321.17	245.12	189.91	150.40	121.27	82.63	59.07	34.92	17.45	10.37
			logn(s=0.974)	268.03	210.23	165.49	134.54	110.34	77.22	56.31	34.08	17.36	10.37
			logn(s=1.092)	163.24	136.51	114.17	97.41	83.32	62.61	48.23	31.53	17.03	10.34
			logn(s=1.182)	122.50	104.98	91.45	79.59	69.49	54.47	43.58	29.63	16.76	10.32
0.95	1.3	1.889	Exponential	369.89	299.50	244.33	196.26	161.04	110.65	78.11	41.85	17.02	9.23
			logn(s=0.94)	362.20	284.82	227.70	183.06	147.62	100.26	69.70	38.03	16.30	9.22
			logn(s=0.974)	286.61	231.34	188.04	154.07	127.30	88.90	63.92	36.20	16.16	9.23
			logn(s=1.092)	151.87	129.58	111.11	95.99	83.54	63.18	48.55	31.01	15.68	9.23
			logn(s=1.182)	105.67	93.27	82.26	72.47	64.32	50.94	41.21	28.10	15.26	9.23

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του ARL_0 είναι μικρότερες του 370 για $s = 1.182$, για όλους τους συνδυασμούς των q και a . Ξεπερνούν το 370 για $s = 1.092$ μόνο όταν $q = 0.7$ και $a = 1.3$, για $s = 0.974$ όταν $q = 0.7$ και $q = 0.8$ για όλες τις τιμές του a . Ενώ, όταν $s = 0.94$ το ARL_0 δεν ξεπερνά την προσδοκώμενη τιμή του 370 μόνο για $q = 0.95$ και $a = 0.7, 0.9, 1, 1.3$.

Αυτό εξηγείται καθώς η διασπορά της λογαριθμοκανονική κατανομής για δεδομένο TBE μέσο αυξάνεται καθώς η παράμετρος σχήματος s αυξάνεται. Καθώς οι TBE παρατηρήσεις διακυμαίνονται με μεγαλύτερη διασπορά σε μια εντός ελέγχου κατάσταση, η πιθανότητα μια παρατήρηση να βρίσκεται κάτω από το κατώτερο όριο ελέγχου LCL αυξάνεται, κι έτσι το ARL_0 μειώνεται.

Επιπλέον, όσο η παράμετρος σχήματος s μεγαλώνει, το GWMA-TBE είναι πιο εύρωστο για μεγαλύτερο φάσμα μετατοπίσεων του μέσου. Συγκεκριμένα, οι τιμές του ARL_1 είναι πιο κοντά στις προσδοκώμενες για $s = 1.182$ και $s = 1.092$, απ' ότι για $s = 0.974$ και $s = 0.94$.

Ακόμη, για δεδομένη τιμή του q και για μικρές μετατοπίσεις ($\delta > 0.9$) το GWMA-TBE εμφανίζεται πιο εύρωστο καθώς η τιμή του a μειώνεται. Συγκεκριμένα, όταν ο μέσος $\mu_1 = 0.95$ και τα δεδομένα ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή με $s = 1.182$, το ARL_1 για το GWMA-TBE για $q = 0.8$ και $a = 0.5$ είναι ίσο με 100.58, το οποίο είναι 51.88% μικρότερο από το προσδοκώμενο αντίστοιχο $ARL_1 = 209.01$.

Ενώ, για το ίδιο q , όσο το a αυξάνεται, οι τιμές του ARL_1 όταν η πραγματική κατανομή των δεδομένων είναι η λογαριθμοκανονική, είναι κατά 60.63%, 64.89%, 65.61%, 62.45% μικρότερες από τις προσδοκώμενες τιμές του ARL_1 , για $a = 0.7, 0.9, 1, 1.3$ αντιστοίχως.

Παρόλα αυτά, η διαπίστωση αυτή δεν αληθεύει πάντα, καθώς όπως θα δούμε και παρακάτω, υπάρχουν αρκετές εξαιρέσεις. Συγκεκριμένα, όταν $\mu_1 = 0.925$ και τα δεδομένα ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή με $s = 0.974$, το ARL_1 για το GWMA-TBE για $q = 0.8$ και $a = 0.5$ είναι ίσο με 171.07 το οποίο είναι 6.01% μεγαλύτερο από το προσδοκώμενο αντίστοιχο $ARL_1 = 161.37$. Ενώ, για το ίδιο q , όσο το a αυξάνεται, οι τιμές του ARL_1 όταν η πραγματική κατανομή των δεδομένων είναι η λογαριθμοκανονική, είναι κατά 9.05%, 17.59%, 74.65% μεγαλύτερες από τις

προσδοκώμενες τιμές του ARL_1 , για $\alpha = 0.9, 1, 1.3$ αντιστοίχως, ενώ είναι κατά 0.86% μεγαλύτερη όταν $\alpha = 0.7$.

Επιπλέον, για δεδομένη τιμή της παραμέτρου α , όσο το q αυξάνεται, οι τιμές του ARL_1 πλησιάζουν τις προσδοκώμενες. Έτσι, όσο μεγαλύτερη τιμή έχει το q , τόσο πιο εύρωστο είναι το GWMA-TBE διάγραμμα.

Για παράδειγμα, όταν $\mu_1 = 0.9$ και η πραγματική κατανομή είναι η λογαριθμοκανονική με $s = 1.092$, το ARL_1 για το GWMA-TBE για $q = 0.7$ και $\alpha = 0.5$ είναι ίσο με 103.07, το οποίο είναι 29.05% μικρότερο από το προσδοκώμενο αντίστοιχο $ARL_1 = 145.28$. Ενώ, για το ίδιο α , όσο το q αυξάνεται, οι τιμές του ARL_1 όταν η πραγματική κατανομή των δεδομένων είναι η λογαριθμοκανονική, είναι κατά 27.46%, 28.34%, 20.01% μικρότερες από τις προσδοκώμενες τιμές του ARL_1 , για $q = 0.8, 0.9, 0.95$ αντιστοίχως.

Ωστόσο, υπάρχουν και αρκετές εξαιρέσεις, όπως για $s = 1.092$ και $\mu_1 = 0.925$ όπου οι τιμές δεν έχουν φθίνουσα πορεία καθώς το q αυξάνεται. Ειδικότερα, το ARL_1 για το GWMA-TBE για $q = 0.7$ και $\alpha = 0.7$ είναι ίσο με 128.45, το οποίο είναι 37.77% μικρότερο από το προσδοκώμενο αντίστοιχο $ARL_1 = 206.42$.

Για $q = 0.8$ και 0.9 οι τιμές είναι κατά 41.51% και 41.99% μικρότερες από τις προσδοκώμενες τιμές του ARL_1 , αντιστοίχως, δηλαδή το ποσοστό μεγαλώνει, ενώ για $q = 0.95$ το παραπάνω ποσοστό μειώνεται σε 28.70%. Οι παραπάνω παρατηρήσεις ικανοποιούν και τις τιμές του $SDRL$.

Συμπερασματικά, λοιπόν, μπορούμε να συνάγουμε το συμπέρασμα ότι το GWMA-TBE διάγραμμα ελέγχου είναι πολύ εύρωστο για μικρές ή εξαιρετικά μικρές μετατοπίσεις του μέσου ($\delta > 0.9$) και για μεγάλη τιμή της παραμέτρου σχεδιασμού $q = 0.9$ ή 0.95 και μικρή τιμή της παραμέτρου $\alpha = 0.5$ ή 0.7 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές

4.1 Εφαρμογή 1

Η εφαρμογή αφορά δεδομένα από σεισμούς που σημειώθηκαν στην Ελλάδα, τον περασμένο αιώνα (Alevizakos and Koukouninos, 2019). Συγκεκριμένα, καταγράφεται ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών σεισμών μεγέθους άνω των 6 Ρίχτερ και χρησιμοποιούνται διαγράμματα ελέγχου για την αναζήτηση αλλαγών στη σεισμική δραστηριότητα.

Σύμφωνα με τους Alevizakos και Koukouninos (2019), μέσω του X^2 τεστ καλής προσαρμογής, παρατηρήθηκε ότι χρόνος σε ημέρες των σεισμών που πραγματοποιήθηκαν από την 1η Ιανουαρίου 1900 έως τις 31 Δεκεμβρίου 2018 ακολουθεί την κατανομή $Gamma(1,1245)$, με $p - τιμή = 0.2209$. Ακόμη, χρησιμοποιήθηκαν το τεστ Kolmogorov-Smirnov ($p - τιμή = 0.5629$) και το κριτήριο Cramer-von Misser ($p - τιμή = 0.1518$) προκειμένου να επιβεβαιωθεί η προσαρμογή των δεδομένων στην κατανομή $Gamma(1,1245)$. Επιπλέον, θεωρήθηκε ότι $\theta_0 = 1779$, δηλαδή, ότι η σεισμική δραστηριότητα είναι ικανή, αν πραγματοποιηθεί σεισμός μεγέθους μεγαλύτερου των 6 Ρίχτερ, κάθε περίπου 5 χρόνια.

Στον Πίνακα 4-1 παρουσιάζονται οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών σεισμών που ξεπερνούν τα 6 Ρίχτερ, από την 1η Ιανουαρίου 1900, έως την 31η Δεκεμβρίου 2018 διαιρούμενοι με 1779 (X_t). Επίσης, φαίνονται τα στατιστικά του διαγράμματος GWMA-TBE για $q = 0.95, a = 0.5, L = 1.555$, στην στήλη G_t , καθώς ο συνδυασμός αυτός των παραμέτρων έχει την καλύτερη επίδοση ($ARL_1 = 31.87$). Πράγματι, για μετατόπιση του μέσου $\delta = 1245 / 1779 = 0.7$, οι τιμές του ARL_1 για το GWMA-TBE διάγραμμα με παραμέτρους ($q = 0.95, a = 0.7, L = 1.694$), ($q = 0.95, a = 0.9, L = 1.819$), ($q = 0.95, a = 1, L = 1.858$) και ($q = 0.95, a = 1.3, L = 1.889$) είναι 34.22, 35.98, 36.79 και 41.85, αντιστοίχως. Για $a = 1, q = 0.95, L = 1.858$ το GWMA-TBE ανάγεται στο EWMA-TBE με $\lambda = 0.05$, τα στατιστικά Z_t του οποίου φαίνονται επίσης στον Πίνακα 4-1.

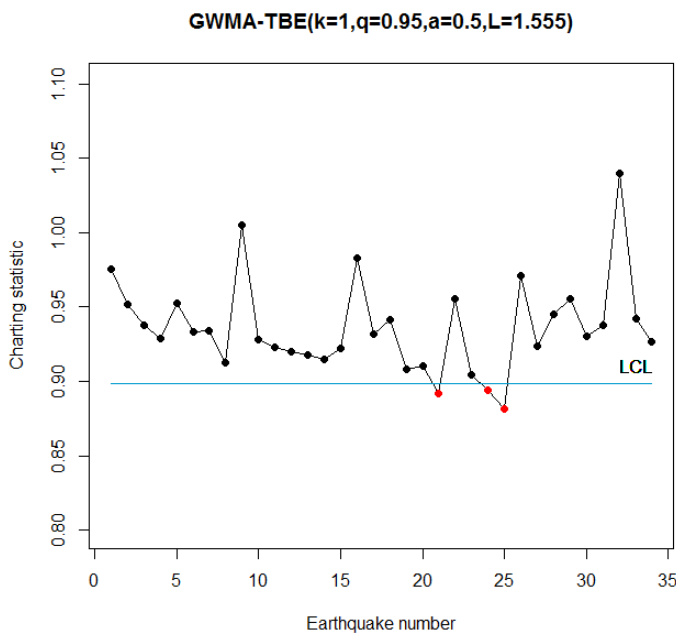
Πίνακας 4-1 Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών σεισμών άνω των 6 Ρίχτερ (1/1/1900-12/31/2018) και οι τιμές των στατιστικών G_t και Z_t της Εφαρμογής 1

t	Xt	GWMA-	EWMA-
		TBE	TBE
		Gt	Zt
1	0.515	0.976	0.976
2	0.226	0.952	0.938
3	0.206	0.938	0.902
4	0.255	0.929	0.869
5	0.879	0.952	0.870
6	0.396	0.933	0.846
7	0.560	0.934	0.832
8	0.165	0.912	0.798
9	2.235	0.101	0.870
10	0.037	0.928	0.829
11	0.338	0.923	0.804
12	0.424	0.920	0.785
13	0.485	0.918	0.770
14	0.496	0.915	0.756
15	0.698	0.922	0.753
16	1.892	0.983	0.810
17	0.386	0.932	0.789
18	0.815	0.941	0.790
19	0.147	0.908	0.758
20	0.450	0.910	0.743
21	0.163	0.892	0.714
22	1.628	0.955	0.760
23	0.175	0.904	0.730
24	0.253	0.894	0.706
25	0.165	0.882	0.679
26	2.121	0.971	0.751
27	0.551	0.924	0.741
28	1.139	0.945	0.761
29	1.215	0.956	0.784
30	0.582	0.930	0.774
31	0.868	0.937	0.779
32	2.894	0.104	0.884
33	0.126	0.942	0.846
34	0.305	0.927	0.819

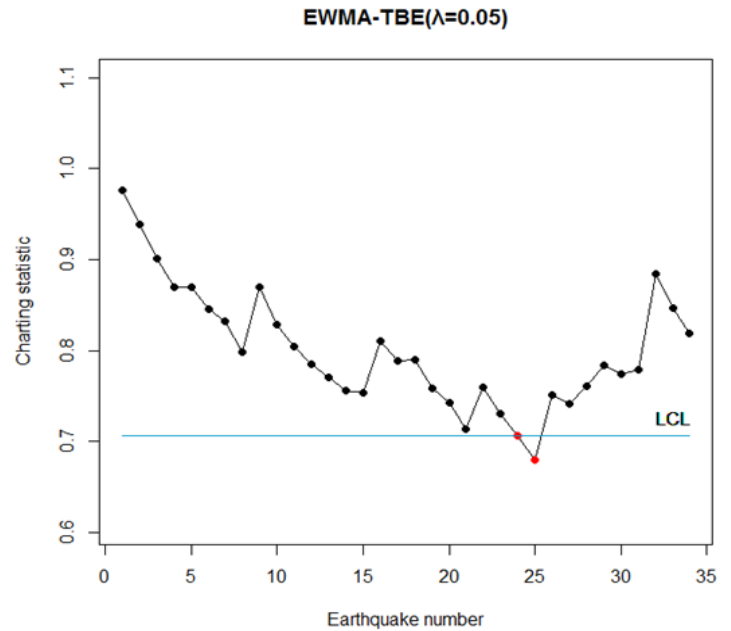
Γίνεται χρήση των ασυμπτωτικών κάτω ορίων ελέγχου, κι έτσι τα κάτω όρια ελέγχου του GWMA-TBE όταν $q = 0.95$, $a = 0.5$, $L = 1.555$ είναι $LCL = 0.8984877$, ενώ του EWMA-TBE διαγράμματος είναι $LCL = 0.7070638$.

Τα γραφήματα ελέγχου εμφανίζονται στα Σχήματα 4-1, 4-2. Οι κόκκινες κουκκίδες αντιστοιχούν στα στατιστικά που βρίσκονται κάτω από το LCL .

Καθίσταται σαφές από τα παρακάτω διαγράμματα ότι το διάγραμμα GWMA-TBE ανιχνεύει τη μετατόπιση μετά από 21 παρατηρήσεις, ενώ το διάγραμμα EWMA-TBE μετά από 24 παρατηρήσεις. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με αυτά που προέκυψαν μέσω των προσομοιώσεων, σύμφωνα με τα οποία το διάγραμμα GWMA-TBE εντοπίζει τη μετατόπιση στον μέσο της διεργασίας νωρίτερα από το EWMA-TBE.



Σχήμα 4-1 GWMA-TBE διάγραμμα για την Εφαρμογή 1



Σχήμα 4-2 EWMA-TBE διάγραμμα για την Εφαρμογή 1

4.2 Εφαρμογή 2

Η εφαρμογή αυτή αφορά μια εντός ελέγχου IC Poisson διαδικασία με παράμετρο $1/\theta_0 = 1/1000 = 0.001$. Έτσι, ο χρόνος μέχρι την k -οστή εμφάνιση του γεγονότος, ακολουθεί την κατανομή $Gamma(k, 1000)$. Λαμβάνουμε 50 τυχαίες παρατηρήσεις της $Gamma$ κατανομής με $k = 2$ και $\theta_1 = 800$. Έτσι, εξετάζουμε τον χρόνο μέχρι την εμφάνιση 2 ελαττωματικών προϊόντων. Δεδομένου ότι η γνωστή τιμή του θ_0 είναι 1000, το προσομοιωμένο σύνολο δεδομένων μπορεί να θεωρηθεί ως σύνολο παρατηρήσεων από μια διαδικασία εκτός στατιστικού ελέγχου OOC όπου η μετατόπιση του μέσου είναι ίση με $\delta = 800/1000 = 0.8$.

Το προσομοιωμένο σύνολο δεδομένων διαιρέθηκε με $\theta_0 = 1000$, για να συμβαδίζει με την υπόθεση που κάναμε στη μελέτη του μονόπλευρου GWMA-TBE διαγράμματος, ότι $\theta_0 = 1$.

Ο Πίνακας 4-2 απαριθμεί αυτές τις 50 προσομοιωμένες παρατηρήσεις διαιρούμενες με 1000. Επίσης, φαίνονται οι τιμές του στατιστικού G_t του διαγράμματος GWMA-TBE για $q = 0.9, a = 0.5, L = 1.804$, καθώς ο συνδυασμός αυτός των παραμέτρων έχει την καλύτερη επίδοση ($ARL_1=38.29$).

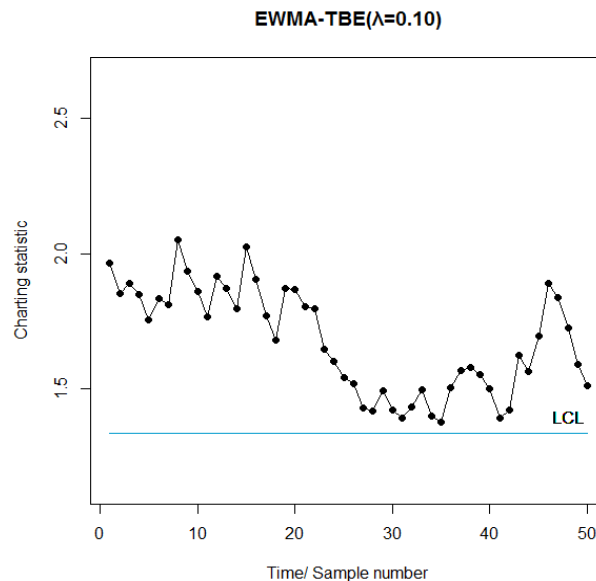
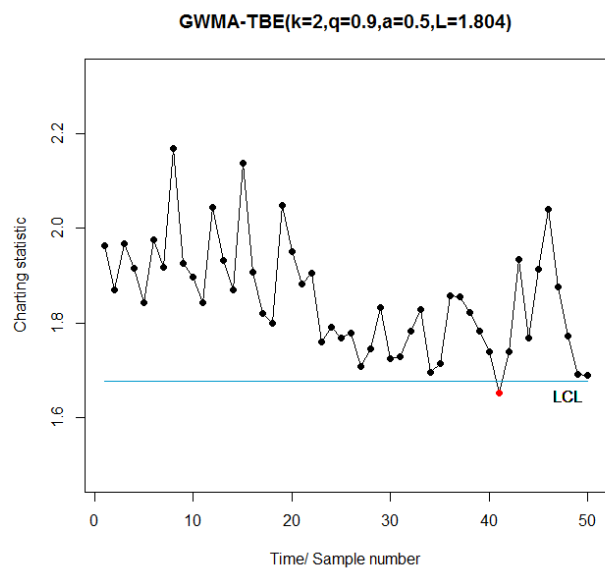
Πράγματι, για μετατόπιση του μέσου $\delta = 0.8$, οι τιμές του ARL_1 για το GWMA-TBE διάγραμμα με παραμέτρους $(q = 0.9, a = 0.7, L = 1.955)$, $(q = 0.9, a = 0.9, L = 2.029)$, $(q = 0.9, a = 1, L = 2.043)$ και $(q = 0.9, a = 1.3, L = 2.037)$ είναι 40.26, 43.47, 46.00 και 58.89 αντιστοίχως. Για $a = 1$, το GWMA-TBE ανάγεται στο EWMA-TBE ($\lambda = 0.10$), οι τιμές του στατιστικού Z_t του οποίου φαίνονται επίσης στον Πίνακα 4-2.

Γίνεται χρήση των ασυμπτωτικών ορίων ελέγχου, κι έτσι το κάτω όριο ελέγχου του μονόπλευρου διαγράμματος GWMA-TBE όταν $q = 0.9, a = 0.5, L = 1.804$ προκύπτουν να είναι $LCL = 1.677682$, ενώ του EWMA-TBE διαγράμματος υπολογίζεται ως $LCL = 1.337172$.

Τα γραφήματα ελέγχου εμφανίζονται στα Σχήματα 4-3, 4-4. Οι κόκκινες κουκκίδες αντιστοιχούν στα στατιστικά που βρίσκονται κάτω από το LCL .

Πίνακας 4-2 Τιμές των στατιστικών G_t και Z_t της Εφαρμογής 2

		GWMA- TBE	EWMA- TBE			GWMA- TBE	EWMA- TBE
t	Xt	Gt	Zt	t	Xt	Gt	Zt
1	1.640	1.964	1.964	26	1.300	1.779	1.519
2	0.837	1.870	1.851	27	0.632	1.708	1.430
3	2.228	1.968	1.889	28	1.317	1.745	1.419
4	1.486	1.916	1.849	29	2.169	1.832	1.494
5	0.905	1.843	1.754	30	0.780	1.724	1.422
6	2.553	1.974	1.834	31	1.143	1.728	1.394
7	1.610	1.918	1.812	32	1.784	1.783	1.433
8	4.219	2.167	2.052	33	2.082	1.829	1.498
9	0.874	1.926	1.935	34	0.533	1.695	1.402
10	1.184	1.896	1.860	35	1.158	1.714	1.377
11	0.930	1.843	1.767	36	2.670	1.857	1.507
12	3.257	2.044	1.916	37	2.142	1.855	1.570
13	1.481	1.931	1.872	38	1.668	1.822	1.580
14	1.115	1.871	1.796	39	1.323	1.782	1.554
15	4.066	2.137	2.023	40	1.040	1.738	1.503
16	0.855	1.907	1.906	41	0.399	1.652	1.392
17	0.556	1.819	1.771	42	1.684	1.739	1.422
18	0.865	1.800	1.681	43	3.457	1.933	1.625
19	3.602	2.048	1.873	44	1.040	1.769	1.567
20	1.814	1.951	1.867	45	2.841	1.913	1.694
21	1.232	1.882	1.804	46	3.644	2.039	1.889
22	1.746	1.906	1.798	47	1.376	1.877	1.838
23	0.299	1.761	1.648	48	0.709	1.773	1.725
24	1.177	1.792	1.601	49	0.369	1.691	1.589
25	1.023	1.767	1.543	50	0.837	1.690	1.514



Σχήμα 4-3 GWMA-TBE διάγραμμα για την Εφαρμογή 2 Σχήμα 4-4 EWMA-TBE διάγραμμα για την Εφαρμογή 2

Καθίσταται σαφές ότι, το διάγραμμα GWMA-TBE ανιχνεύει τη μετατόπιση μετά από 41 παρατηρήσεις, ενώ το διάγραμμα EWMA-TBE δεν μπορεί να ανιχνεύσει τη μετατόπιση. Τα αποτελέσματα αυτά είναι αναμενόμενα, καθώς όπως είδαμε παραπάνω το GWMA-TBE ανιχνεύει γρηγορότερα μια μετατόπιση στο μέσο από το EWMA-TBE.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα-Προτάσεις

Τα διαγράμματα ελέγχου είναι ζωτικής σημασίας προκειμένου να βελτιωθεί η ποιότητα μιας διαδικασίας. Για το σκοπό αυτό, ένα διάγραμμα ελέγχου θα πρέπει να ανιχνεύει οποιαδήποτε αλλαγή όσο το δυνατόν γρηγορότερα, έτσι ώστε να λαμβάνονται κατάλληλα διορθωτικά μέτρα. Ωστόσο, τα παραδοσιακά γραφήματα τύπου Shewhart έχουν κριθεί ανεπαρκή για την ανίχνευση μικρών αλλαγών στην ποιότητα ενός προϊόντος.

Στην παρούσα εργασία εξετάσαμε το μονοδιάστατο GWMA διάγραμμα, για την παρακολούθηση του TBE (χρόνου μεταξύ των αποτυχιών), όταν οι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων ακολουθούν την Γάμμα κατανομή. Το GWMA-TBE φέρει μεγάλη ευαισθησία για την αποτελεσματική ανίχνευση μικρών αλλαγών και τα μονόπλευρα γραφήματα EWMA και Shewhart, εμφανίζονται ως ειδικές περιπτώσεις του.

Στο 2^ο Κεφάλαιο δίνεται η γενική θεωρία γύρω από το GWMA-TBE, καθώς και ο σχεδιασμός του. Επίσης, εξετάζεται η κατανομή του μήκους ροής όταν οι παράμετροι είναι γνωστές, τόσο σε μία εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία, όσο και σε μία εκτός ελέγχου. Ακόμη, παρατίθεται ο βέλτιστος σχεδιασμός του διαγράμματος, ύστερα από εκτεταμένη ανάλυση της απόδοσης και εξετάζονται τα μέσα μήκη ροής στη μηδενική και τη σταθερή κατάσταση. Επιπλέον, το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τη μελέτη και τον σχεδιασμό του GWMA-TBE στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι άγνωστες. Οι υπολογισμοί των μέσων μήκους ροής γίνονται με τη χρήση προσομοιώσεων Monte Carlo.

Στο 3^ο Κεφάλαιο, μελετάται η ευρωστία του GWMA-TBE διαγράμματος, στην περίπτωση που η κατανομή είναι η Εκθετική, όταν οι χρόνοι (TBE) ακολουθούν την Weibull ή την λογαριθμοκανονική κατανομή. Έτσι, οι προσομοιώσεις μας γίνονται λαμβάνοντας δεδομένα από την Weibull και στη συνέχεια από την λογαριθμοκανονική κατανομή, ενώ το διάγραμμα ελέγχου είναι σχεδιασμένο υπό την προϋπόθεση ότι τα δεδομένα (χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων) ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Από την παραπάνω μελέτη, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το GWMA-TBE

διάγραμμα ελέγχου είναι πολύ εύρωστο για μικρές ή εξαιρετικά μικρές μετατοπίσεις του μέσου ($\delta > 0.9$) και για μεγάλη τιμή της παραμέτρου σχεδιασμού $q = 0.9$ ή 0.95 και μικρή τιμή της παραμέτρου $\alpha = 0.5$ ή 0.7 .

Στο 4^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο εφαρμογές του GWMA-TBE, η μία με χρήση προσομοιωμένων δεδομένων και η άλλη με πραγματικά δεδομένα.

Συνοψίζοντας, το GWMA-TBE διάγραμμα υπερέχει των γνωστών διαγραμμάτων EWMA, Shewhart για την ανίχνευση πολύ μικρού μεγέθους ή μέτριων αλλαγών και είναι εξαιρετικά εύρωστο στις περιπτώσεις που η κατανομή του χρόνου είναι η Weibull ή η λογαριθμοκανονική, με την κατάλληλη επιλογή παραμέτρων.

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώθηκε στην μελέτη του διαγράμματος GWMA για δεδομένα που ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή. Παρόλα αυτά, θεωρώ πως θα είχε ενδιαφέρον η μελέτη της ευρωστίας του GWMA-TBE για δεδομένα που ακολουθούν κατανομές όπως η Λογιστική, Gumbel και EMG (Exponentially Modified Gaussian).

Βιβλιογραφία

1. Αλεβιζάκος Β. (2018) “Διαγράμματα Ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη για δεδομένα που ακολουθούν Poisson και Γεωμετρική Poisson κατανομή και Εφαρμογές τους”, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
2. Αντζουλάκος Δ. (2009) “Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας” Β΄ Έκδοση. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
3. Κουκουβίνος Χ. (2017) “Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.
4. Alevizakos V, Koukouvinos C. (2019) “A progressive mean control chart for monitoring time between events”, *Quality and Reliability Engineering International*, DOI: 10.1002/qre.2565.
5. Alevizakos V, Koukouvinos C. (2019) “A double exponentially weighted moving average chart for time between events”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, DOI:10.1080/03610918.2018.1532516.
6. Alevizakos V, Koukouvinos C, Lappa A. (2019) “Monitoring of time between events with a double generally weighted moving average control chart”, *Quality and Reliability Engineering International*, 35(2):685-710.
7. Borror CM, Keats JB, Montgomery DC. (2003) “Robustness of the time between events CUSUM”, *International and Journal of Production Research*, 41(15):3435-3444.
8. Chakraborty N, Human SW, Balakrishnan N. (2017) “A generally weighted moving average chart for time between events”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(10):7790-7817.
9. Chan LY, Xie M, Goh TN. (2000) “Cumulative quantity control charts for monitoring production processes”, *International and Journal of Production Research*, 38(2):397-408.

10. Chan, L. K., Zhang, J. (2000) "Some issues in the design of EWMA charts", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 29(1):201–217.
11. Gan FF. (1998) "Designs of one- and two-sided exponential EWMA charts", *Journal of Quality Technology*, 30(1):55-769.
12. Garvin D.A. (1987) "Competing on the Eight Dimensions of Quality", *Harvard Business Review*, 101-109.
13. Lucas J.M. and Saccucci M.S. (1990) "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements", *Technometrics*, 32(1):1-12.
14. Montgomery D.C. (2013) "Introduction to Statistical Quality Control", *John Wiley and Sons*, New York.
15. Pehlivan C, Testik MC. (2010) "Impact of model misspecification on the exponential EWMA charts: a robustness study when the time between events are not exponential", *Quality and Reliability Engineering International*, 26(2):177-190.
16. Sheu, S. H., Lin, T. C. (2003). "The generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean", *Quality Engineering*, 16:209–231.
17. Sheu, S. H., Yang, L. (2006). "The generally weighted moving average control chart for monitoring the process median", *Quality Engineering*, 18(3):333–344.
18. Shewhart W.A. (1931) "Economic control of quality of manufactures product", London: Macmillan.
19. Xie, M., Goh, T.N. and Lu, X.S. (1998) "A comparative study of CCC and CUSUM charts", *Quality and Reliability Engineering International*, 14: 339-345.

20. Zhang CW, Xie M, Liu JY, Goh TN. (2007) “A control chart for the gamma distribution as a model of time between events”, *International and Journal of Production Research*, 45(23):5649-5666.