



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Η Ασυνεχής Μέθοδος Galerkin
για συστήματα Μη-Γραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
Παραβολικού Τύπου
και εφαρμογές: Ευστάθεια, και Εκτιμήσεις Σφαλμάτων

Διδακτορική Διατριβή
Κώστας Δημήτριος

Επιβλέπων
Κωνσταντίνος Χρυσάφινος

Φεβρουάριος 2020



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
School of Applied Mathematical And Physical Sciences
Department of Mathematics

**The discontinuous Galerkin method for systems of nonlinear
parabolic PDEs
and applications: stability and error estimates**

Dimitrios Kostas
PhD Thesis

Advisor
Konstantinos Chrysafinos

Athens, February 2020

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Η Ασυνεχής Μέθοδος Galerkin
για συστήματα Μη-Γραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
Παραβολικού Τύπου
και εφαρμογές: Ευστάθεια, και Εκτιμήσεις Σφαλμάτων

Δημήτριος Κώστας
Διδακτορική Διατριβή

Τριμελής Συμβουλευτική επιτροπή:

Κωνσταντίνος Χρυσάφινος
Εμμανουήλ Γεωργούλης
Βασίλειος Κοκκίνης

Επταμελής
Συμβουλευτική
επιτροπή:

Κωνσταντίνος Χρυσάφινος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Εμμανουήλ Γεωργούλης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Βασίλειος Κοκκίνης, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Ιάσων Καραφύλλης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Ιωάννης Κολέτσος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Γεώργιος Σμυρλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2020

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

School of Applied Mathematical and Physical Sciences

Department of Mathematics

**The discontinuous Galerkin method for systems of nonlinear parabolic PDEs
and applications: Stability and Error estimates****Dimitrios Kostas**

PhD Thesis

Advisory Committee: K. Chrysafinos
E. Georgoulis
V. Kokkinis

Examining Committee: Konstantinos Chrysafinos, *Assoc. Professor, NTUA*
Emmanuil Georgoulis, *Assoc. Professor, NTUA*
Vasilios Kokkinis, *Assist. Professor, NTUA*
Panagiotis Psarrakos, *Professor, NTUA*
Iason Karafylis, *Assoc. Professor, NTUA*
John Coletsos, *Assoc. Professor, NTUA*
George Smyrlis, *Assoc. Professor, NTUA*

Athens, February 2020

Ευχαριστίες 1. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κο Κωσταντίνο Χρυσάφινο που με ενέπνευσε και με βοήθησε στην συνεισφορά μου στην επιστήμη. Με υποστήριξε καθόλη τη διάρκεια της διατριβής μου με πολλούς τρόπους. Η καθοδήγησή του και ο ενθουσιασμός του με ωθούν προς υψηλότερους στόχους, με διδάσκουν πώς να γράφω σωστά, με επιστημονικό τρόπο και να ανοίγω νέες ερευνητικές κατευθύνσεις.

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους καθηγητές Εμμανουήλ Γεωργούλη και Βασίλειο Κοκκίνη για την υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια της διατριβής μου. Για τη δέσμευσή τους να με διδάσκουν πώς να αντιμετωπίζω τα δύσκολα προβλήματα και μου έδωσαν την ευκαιρία να επεκτείνω όχι μόνο τις μαθηματικές μου γνώσεις αλλά και τον τρόπο που σκέπτομαι. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές κυρίους Παναγιώτη Ψαρράκο, Ιωάννη Κολέτσο , Γεώργιο Σμυρλή , Ιάσων Καραφύλλη για την πολύτιμη συνδρομή τους καθώς και τον κο Αντώνη Καραμολέγγο για την συμπαράστασή και την στήριξή του. Τέλος ήθελα να ευχαριστήσω και τις γραμματείς του τομέα κ. Έφη Φλωράκη, κ. Ελευθερία Σκούρση καθώς και το κ. Χρήστο Τσουνιά (Ε.Τ.Ε.Π. του τομέα μαθηματικών) για την τεχνική και γενικότερη υποστήριξή τους.

Είμαι ευγνώμων στους γονείς μου Στέφανο και Κωσταντίνα που με υποστήριξαν με κάθε τρόπο ώστε να συνεισφέρω στην επιστήμη και να υλοποιήσω αυτή μου την απόφαση, η οποία ήταν αναμφισβήτητα η σωστή. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αδερφό μου Ιωάννη, τους γνωστούς και φίλους, που με υποστήριξαν στην πορεία μου αυτή.

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Εισαγωγή | 8 |
| 1.1 | Μη γραμμικές παραβολικές εξισώσεις τύπου Θηρευτή-Θηράματος | 8 |
| 1.2 | Σχετική βιβλιογραφία | 10 |
| 1.3 | Κύρια αποτελέσματα | 12 |
| 2 | Προκαταρκτικά | 14 |
| 2.1 | Συμβολισμοί | 14 |
| 2.2 | Η ασθενής μορφή | 15 |
| 3 | Το πλήρως διακριτοποιημένο σύστημα | 16 |
| 3.1 | Διακριτοποίηση | 16 |
| 3.2 | Προσέγγιση με τις διακριτές χαρακτηριστικές συναρτήσεις | 18 |
| 4 | Το σύστημα Predator Prey με ασυνεχείς Galerkin ως προς το χρόνο και συνεχείς ως προς το χώρο | 20 |
| 4.1 | Βασικοί υπολογισμοί ευστάθειας των U_h, V_h | 20 |
| 4.2 | Βοηθητικές Χωρο-Χρονικές Προβολές | 35 |
| 5 | Εκτιμήσεις Σφαλμάτων | 38 |
| 6 | Αριθμητικά Αποτελέσματα | 53 |

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής αφορά τα προβλήματα Αριθμητικής Ανάλυσης για συστήματα μη γραμμικών παραβολικών εξισώσεων τύπου predator prey.

Τα συστήματα αυτά εμφανίζονται στη μελέτη συστημάτων στη Βιολογία.

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε χωρο-χρονικές αριθμητικές μεθόδους που βασίζονται στην ασυνεχή χρονικά μέθοδο για την χρονική διακριτοποίηση Galerkin σε συνδυασμό με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία για την χωρική διακριτοποίηση.

Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τις ιδιότητες ευστάθειας των ανωτέρω διακριτών σχημάτων για ομαλά και μη ομαλά δεδομένα καθώς και την εξάρτηση των εκτιμήσεων αυτών σε σχέση με τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος, και ιδιαίτερα σε σχέση με τις παραμέτρους διάχυσης.

Επίσης μελετώνται εκτιμήσεις σφαλμάτων για τη διαφορά μεταξύ της διακριτής και της συνεχούς λύσης του συστήματος. Οι εκτιμήσεις αυτές επιβεβαιώνονται από τα εκτεταμένα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας.

1 Εισαγωγή

1.1 Μη γραμμικές παραβολικές εξισώσεις τύπου Θηρευτή-Θηράματος

Τα συστήματα μη-γραμμικών παραβολικών εξισώσεων που περιγράφουν βιολογικά μοντέλα, αποτελούν κεντρική ερευνητική περιοχή των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Η προσπάθεια ανάλυσης και υπολογιστικής προσομοίωσης μη-γραμμικών συστημάτων που προέρχονται από μαθηματικά μοντέλα που σχετίζονται με προβλήματα θηρευτή-θηράματος συνιστούν μία ραγδαία αναπτυσσόμενη ερευνητική περιοχή που σχετίζεται τόσο με την κλασσική ανάλυση συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων, όσο και με την αριθμητική ανάλυση διακριτών υπολογιστικών σχημάτων. Η προσπάθεια κατανόησης βιολογικών συστημάτων, ακόμα και αυτών που παρουσιάζονται με σχετικά απλή μαθηματική δομή απαιτεί σύνθετα μαθηματικά εργαλεία τόσο της ανάλυσης όσο των υπολογιστικών μαθηματικών. Το πρόβλημα θηρευτή-θηράματος αποτελεί ένα από τα πλέον κλασσικά προβλήματα. Η μαθηματική του μορφή μπορεί να παρουσιαστεί ως εξής:

Για δοσμένες αρχικές συνθήκες u_0, v_0 που περιγράφουν την αρχική κατάσταση των δύο διαφορετικών πληθυσμών θηρευτή-θηράματος, αναζητούμε λύσεις (u, v) , (δηλαδή την εξέλιξη της συγκέντρωσης των πληθυσμών), οι οποίες ικανοποιούν το ακόλουθο συζευγμένο σύστημα παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u - u(1-u) + vh(au) = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0 & \text{στο } \Omega, \\ \\ v_t - d_2 \Delta v - bvh(au) + cv = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ v(0, x) = v_0 & \text{στο } \Omega. \end{cases}$$

Επισημαίνεται πως $d_1, d_2, b, c, a > 0$, συμβολίζουν θετικές παραμέτρους. Παρατηρούμε πως το παραπάνω σύστημα περιγράφει μοντέλα θηρευτή-θηράματος, είναι συζευγμένο, από το μη-γραμμικό όρο $vh(au)$, όπου η συνάρτηση $h(au)$ αποτελεί την συνάρτηση σύζευξης. Ανάλογα με το μοντέλο που αναμένουμε να ακολουθεί το θήραμα και ο θηρευτής έχουμε διαφορετική συνάρτηση σύζευξης $vh(au)$. Η δυσκολία όμως του μοντέλου, δεν αφορά αποκλειστικά την ύπαρξη του όρου σύζευξης, ούτε την παρουσία του μη-γραμμικού όρου αντίδρασης $-u(1-u)$. Παρατηρούμε πως, η αναγκαία για τη σωστή τεκμηρίωση του μοντέλου, ύπαρξη διαφορετικών σταθερών διάχυσης για το θήραμα και τον θηρευτή, $d_1, d_2 > 0$, δημιουργεί επιπλέον δυσκολίες τόσο στην ανάλυση, όσο στην προσέγγιση λύσεων των προβλημάτων αυτής της μορφής. Επιπλέον, οι αρχικές συνθήκες δεν είναι πάντα ομαλές, καθώς στις περισσότερες (ρεαλιστικές) καταστάσεις για τις οποίες απαιτούνται τεχνικές προσομοίωσης, οι αρχικές συνθήκες δεν μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια. Επίσης είναι σύνηθες οι αρχικοί πληθυσμοί να κατανέμονται με "ασυνεχή" τρόπο μέσα στο χωρίο.

Ανάλογα με την δομή της σύζευξης $vh(au)$, μοντελοποιούνται διαφορετικά συστήματα θηρευτή-θηράματος. Στη παρούσα εργασία θα μελετήσουμε τρεις διαφορετικές μορφές για το

σύστημα, με έναν ενιαίο τρόπο. Είναι σημαντικό τα διακριτά σχήματα που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια, να εφαρμόζονται σε όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις.

Επισημαίνεται ότι ο όρος $vh(au)$ αντιπροσωπεύει τη σχέση μεταξύ κυνηγού θηράματος.

Πιο συγκεκριμένα, ο στόχος της εργασίας είναι η παρουσίαση αποτελεσμάτων και για τις τρεις κύριες μορφές μοντέλων θηρευτή-θηράματος :

1. Συναρτησοειδές του Ivlev:

$$h(au) = 1 - e^{-au}, u > 0, a > 0$$

όπου u αντιπροσωπεύει την πυκνότητα των θηραμάτων, v το πλήθος των κυνηγών.

2. Συναρτησοειδές Holling Type II:

$$h(au) = \frac{au}{1 + au}.$$

Η χρήση της συνάρτησης Holling type II συνήθως υποδηλώνει ότι η πυκνότητα του θηράματος περιορίζεται από τον κορεσμό των κυνηγών. Το παραπάνω συναρτησοειδές χαρακτηρίζεται ως υπερβολικό.

3. Συναρτησοειδές Holling Type III:

$$h(au) = \frac{au^2}{1 + au^2}$$

Αυτό προορίζεται στο να μοντελοποιήσει το σύστημα ώστε για μικρές ποσότητες, αρχικά η λεία να είναι σε θέση να αποφύγει τους κυνηγούς χρησιμοποιώντας καταφύγια. Μια τέτοια απόκριση είναι γνωστή ως σιγμοειδής (sigmoidal).

Επισημαίνεται πως είναι εξαιρετικά δύσκολη η αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος χωρίς να υπάρχει καθορισμός του προσήμου που εμφανίζεται στα συναρτησοειδή καθώς εύκολα διαπιστώνεται πως για κάποιες τιμές των παραμέτρων, είναι δυνατό νά έχουμε μη-φυσικές ιδιάζουσες λύσεις. Στην παρούσα εργασία, και σύμφωνα με τις προηγούμενες μελέτες, θα τροποποιήσουμε τους μη-γραμμικούς συζευγμένους όρους, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων, οι οποίες όμως είναι φυσικές. Επομένως, θα περιοριστούμε στη μελέτη της ακόλουθης μορφής του παραπάνω συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - d_1 \Delta u - u(1 - |u|) + vh(au) = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0 & \text{στο } \Omega \\ v_t - d_2 \Delta v - bv h(au) + cv = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ v(0, x) = v_0 & \text{στο } \Omega \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

όπου το συναρτησοειδές σύζευξης, ορίζεται με μια από τις ακόλουθες μορφές:

Συνάρτηση Ivlev

$$h(au) = 1 - e^{-|au|} \quad (1.1.2)$$

Holling type II συναρτησοειδές

$$h(au) = \frac{au}{1 + a|u|} \quad (1.1.3)$$

Holling type III συναρτησοειδές

$$h(au) = \frac{au^2}{1 + au^2} \quad (1.1.4)$$

όπου το $a > 0$. Επισημαίνεται πως εκτός από την παρουσία του συναρτησοειδούς σύζευξης, η παρουσία των διαφορετικών όρων διάχυσης, αλλά και του μη-γραμμικού όρου αντίδρασης, οδηγεί σε ένα μη-γραμμικό σύστημα παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, χωρίς να υπάρχουν ιδιότητες μονοτονίας.

1.2 Σχετική βιβλιογραφία

Το σύστημα κυνηγού-θηράματος είναι ευρέως γνωστό. Οι μη γραμμικοί όροι που έχει αυτό το σύστημα, καθώς και οι τεχνικές δυσκολίες που περιγράψαμε στην προηγούμενη υποενότητα δυσκολεύουν την μελέτη των αριθμητικών σχημάτων. Αυτός είναι και ο λόγος που ενώ υπάρχουν πολλές αναφορές για γραμμικά συστήματα παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, η βιβλιογραφία σχετικά με την αριθμητική ανάλυση διακριτών σχημάτων για το μη-γραμμικό συζευγμένο πρόβλημα θηρευτή-θηράματος είναι περιορισμένη. Για διακριτοποίηση χρησιμοποιώντας διακριτά σχήματα κατώτερης τάξης, η εργασία [34] μελετά αναλυτικά το πρόβλημα θηρευτή-θηράματος. Συγκεκριμένα ασχολείται με την μελέτη ύπαρξης, μοναδικότητας και ευστάθειας για προβλήματα αυτής της μορφής, χρησιμοποιώντας ημι-διακριτοποίηση στο χώρο με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία. Επίσης παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα σε δύο διαστάσεις, στα οποία η χρονική διακριτοποίηση έχει γίνει με βάση την Implicit Euler. Σχετικά αποτελέσματα αριθμητικής ανάλυσης και μαθηματικής προσομοίωσης γραμμικών αλλά και μη γραμμικών συστημάτων που προέρχονται από βιολογικά προβλήματα και σχετίζονται με το predator prey περιέχονται στις εργασίες των Garvie and J.M. Blowey [32],[33], Συγκεκριμένα στις εργασίες αυτές γίνεται μελέτη ύπαρξης μοναδικότητας και ευστάθειας μη γραμμικών συστημάτων τύπου λ-ω, ενώ παρουσιάζονται αποτελέσματα αριθμητικής ανάλυσης που σχετίζονται με διακριτοποίηση στον χρόνο με βάση την μέθοδο του Euler, σε συνδυασμό με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο. Οι όροι σύζευξης των ανωτέρω συστημάτων διαφέρουν από αυτούς των συστημάτων θηρευτή-θηράματος. Μελέτη κλασικών αποτελεσμάτων ύπαρξης μοναδικότητας λύσης ευστάθειας

που έχουν μη γραμμικούς όρους σύζευξης της μορφής uv^b παρουσιάζεται στην κλασική εργασία του N. Αλικιάκου ([4]) για κατάλληλες τιμές $0 < b \in \mathbb{R}$. Αποτελέσματα αριθμητικής ανάλυσης για συστήματα αυτής της μορφής στην περίπτωση που $b = 2$ (περίπτωση κρίσιμου εκθέτη) ως προς την ευστάθεια, εκτιμήσεις σφαλμάτων, καθώς και αριθμητικοί υπολογισμοί, όταν $b = 2$ παρουσιάζονται στην εργασία [13].

Η εργασία [13] ασχολείται με την μελέτη του προβλήματος για την πλήρη διακριτοποίηση των συστημάτων αυτών, χρησιμοποιώντας την ασυνεχή στον χρόνο μέθοδο Galerkin σε συνδυασμό με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία στον χώρο. Στην εργασία [13] αποδεικνύονται εκτιμήσεις ευστάθειας και εκτιμήσεις σφαλμάτων κάτω από τις ελάχιστες δυνατές υποθέσεις ομαλότητας στις λύσεις, ενώ οι εκτιμήσεις αυτές ισχύουν για σχήματα οποιασδήποτε τάξης. Παραδείγματα ύπαρξης λύσεων για μη γραμμικά προβλήματα αντίστοιχα με το Brusselator στην πιο γενική ωστόσο μορφή μπορεί ο αναγνώστης να δει στην εργασία [43]. Προβλήματα βελτιστοποίησης παραβολικών εξισώσεων μελετούνται στις [19],[52]. Για μελέτη πεπερασμένων στοιχείων Ελλειπτικού τύπου Μερικών Διαφορικών εξισώσεων μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στα βιβλία [45], [23],[55] ενώ ενδεικτικά αναφέρουμε τις νέες δημοσιεύσεις [54], [37],[2]. Για μελέτη Πεπερασμένων Διαφορών Ελλειπτικού τύπου Μερικών Διαφορικών εξισώσεων ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [53],[22] Μη γραμμικά συστήματα όπως FietzHugh-Nagumo έχουν μελετηθεί με Robin συνοριακές συνθήκες στις εργασίες [11],[39] και [40] ενώ έχει μελετηθεί η ευστάθεια του ημιδιακριτού προβλήματος στην εργασία [39]. Ωστόσο, οι όροι σύζευξης στην περίπτωση αυτή είναι απλούστερης δομής.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [47] και στις εργασίες [26], [27],[28] για κλασικές τεχνικές αριθμητικής ανάλυσης που σχετίζονται με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για παραβολικές γραμμικές και μη-γραμμικές εξισώσεις, ενώ επισημαίνεται ότι στο κεφάλαιο 12 του [47] και στην εργασία [29] παρουσιάζεται αναλυτικά η επίλυση της εξίσωσης θερμότητας χρησιμοποιώντας discontinuous Galerkin in time σχήματα. Η μεθοδολογία δηλαδή που χρησιμοποιείται είναι όμοια με την παρούσα εργασία. Ωστόσο η εξίσωση της θερμότητας που μελετάται στο βιβλίο [47] και στη εργασία [29] δεν περιέχουν μη γραμμικούς όρους και δεν είναι σύστημα όπως στην περίπτωσή μας. Το βιβλίο [5] ασχολείται με πεπερασμένα στοιχεία ωστόσο όλα τα βιβλία που αναφέρθηκαν περιορίζονται στη θεωρητική μελέτη και δεν παρουσιάζουν προγράμματα και αλγόριθμους που επιλύουν τέτοια προβλήματα. Στις εργασίες [8],[9] μελετάται το μη γραμμικό σύστημα τύπου Allen Cahn χρησιμοποιώντας Discontinuous Galerkin schemes. Επίσης στην εργασία [7] αναλύονται a-posteriori εκτιμήσεις σφαλμάτων με βάση την ασυνεχή στο χρόνο μέθοδο hp-Discontinuous Galerkin για ημι-γραμμικές παραβολικές εξισώσεις.

Η εργασία [9] ασχολείται με a posteriori error estimates χρησιμοποιώντας Backward Euler μεθόδους. Άλλες δυνατότητες διακριτοποίησης γενικών μη γραμμικών προβλημάτων, συνδυάζοντας Implicit Explicit σχήματα με πολλές εφαρμογές σε προβλήματα όπως Cahn-Hillard και Kuramoto Sivashinsky συστήματα είναι η [1]. Στην εργασία [3] χρησιμοποιούνται συνεχείς και ασυνεχείς μέθοδοι Galerkin για την μελέτη ύπαρξης, μοναδικότητας, ευστάθειας και εκτιμήσεων σφαλμάτων μιας κατηγορίας μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Τέλος, συστήματα Navier Stokes μελετούνται στο βιβλίο [35], ενώ τα συστήματα αυτά με τη χρήση της μεθόδου Discontinuous Galerkin μελετώνται στην εργασία [14],ενώ

ανάλυση και προσεγγίσεις πεπερασμένων στοιχείων βέλτιστου ελέγχου για τα ίδια συστήματα αναλύονται στη [36]. Διάφορα ημιγραμμικά προβλήματα παραβολικού τύπου μελετούνται με Discontinuous Galerkin στην εργασία [24], ασυνεχείς Galerkin για διαφορετικές περιοχές μελετούνται στην [41] ενώ η εργασία [21] και το βιβλίο [38] πραγματεύονται πεπερασμένα στοιχεία. Για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ενώ το σύστημα κυνηγού θηράματος με Holling type II συναρτησοειδές στη περίπτωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων μελετάται στην [42]. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή γίνεται εκτεταμένη χρήση των τεχνικών αυτών, στην ανάλυση σχημάτων ανωτέρας τάξης.

Επισημαίνεται, ότι το μοντέλο προήρθε απο την μελέτη αυξομοιώσεων δύο πληθυσμών που εμφανίζονται σε ένα οικοσύστημα, έτσι υπάρχουν πληθώρα αποτελεσμάτων σχετικά με μελέτη οριακών κύκλων των δυναμικών συστημάτων που ορίζονται από διάφορα συναρτησιακά σύζευξης, χαρακτηριστικές εργασίες είναι [46],[44],[31]. Ενδεικτικά αναφέρεται η μοναδικότητα των οριακών κύκλων στην περίπτωση που $n = 3$ που αποδείχθηκε στο [51] καθώς η σχετική ανάλυση για το ακόλουθο τροποποιημένο συναρτησοειδές, $h(au) = b(1 - e^{-a|u|})$ όπου a, b είναι θετικές παράμετροι. Ευστάθεια για το σύστημα Predator-prey μελετάται στην εργασία [16]. Ωστόσο η εργασία δεν ασχολείται με ασυνεχή Galerkin σχήματα. Το τελευταίο μέρος της παρούσας εργασίας ασχολείται με εκτιμήσεις σφαλμάτων για ασυνεχείς προσεγγίσεις Galerkin. Παρομοίως, για διαφορετικά ωστόσο προβλήματα μπορεί κάποιος να ανατρέξει στις εργασίες [12],[15], η εργασία [20] ασχολείται με υπολογισμούς σφαλμάτων σε ημιγραμμικά παραβολικά προβλήματα, ενώ για υπολογισμούς σφαλμάτων σε συστήματα μπορείτε να ανατρέξετε στην εργασία [25].

1.3 Κύρια αποτελέσματα

Πριν ολοκληρώσουμε την εισαγωγή, θα θέλαμε να παρουσιάσουμε και να σχολιάσουμε τα κύρια αποτελέσματα της διατριβής. Επισημαίνεται πως η τεχνική που παρουσιάζεται εφαρμόζεται σε πλήρως διακριτοποιημένα σχήματα ανώτερης τάξης, δηλαδή δεν εξετάζεται αποκλειστικά η περίπτωση σχημάτων της μορφής Forward / Backward Euler για την χρονική διακριτοποίηση. Παρόλο που η χρήση πλήρως διακριτοποιημένων σχημάτων ανώτερης τάξης, αυξάνει σημαντικά την τεχνική δυσκολία της ανάλυσης, υπολογιστικά αναμένεται πως μετά από την πάροδο ενός μικρού χρονικού διαστήματος, ο παραβολικός χαρακτήρας του προβλήματος δρα ομαλοποιητικά, επιτρέποντας την χρήση πλήρως διακριτών σχημάτων. Παρ' όλα αυτά, οι εκτιμήσεις ευστάθειας που παρουσιάζονται ισχύουν με πολύ χαμηλές υποθέσεις ομαλότητας για τα δεδομένα του προβλήματος. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε πως αν $U_0, V_0 \in L^2(\Omega)$, και d_1, d_2, c, f, a θετικές σταθερές, οι πλήρως διακριτοποιημένες λύσεις (U_h, V_h) ικανοποιούν τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned} & \|V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + 4d_2 \int_0^T \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 2c \int_0^T \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} & \|U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\sum_{n=1}^N \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3d_1}{2} \int_0^T \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) + \int_0^T \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \\ & \leq \tilde{C} \left(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right), \end{aligned}$$

$$\|U_h(t)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \left(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right).$$

Η σταθερά \tilde{C} είναι ανεξάρτητη από τις σταθερές διάχυσης d_1, d_2 , ενώ το μήκος του χρονικού βήματος τ , επιλέγεται ανεξάρτητα από την παράμετρο που περιγράφει το μήκος της διαμέρισης h , και ανεξάρτητα από τις σταθερές διάχυσης. Η απόδειξη στηρίζεται σε τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί στην εργασίες [15, 14] σε συνδυασμό με ένα κατάλληλο boot-strap επιχείρημα ώστε να εξασφαλιστεί η αποσύζευξη των δύο εξισώσεων. Στη συνέχεια κατασκευάζοντας κατάλληλες βοηθητικές χωρο-χρονικές προβολές αποδεικνύουμε κατάλληλες εκτιμήσεις σφάλματος της μορφής:

$$\begin{aligned} & \|\text{point-wise in time error}\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{error}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\text{error jumps}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \mathbf{C} \left(\|\text{best-approximation error}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\text{initial data error}\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση ορίζουμε $\mathbf{C} = \max\{1 + \frac{1}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_1}, 1 + \frac{c}{2}\}$ και υποθέτουμε ότι το βήμα τ ικανοποιεί, $\mathbf{C}(1 + d_1)\tau \leq \frac{d_1}{8}$, $\mathbf{C}(1 + d_2)\tau \leq \frac{d_2}{4}$. Η μοναδική επιπλέον υπόθεση για την ομαλότητα των λύσεων (u, v) είναι η ακόλουθη:

$$(u, v) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)^*) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)).$$

Οι εκτιμήσεις της παραπάνω ανισότητας είναι βέλτιστες ως προς την ενεργειακή νόρμα.

2 Προκαταρκτικά

2.1 Συμβολισμοί

Στη παρούσα εργασία υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις ορίζονται πάνω σε μία φραγμένη ανοικτή κυρτή περιοχή $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ με ομαλό σύνορο που συμβολίζουμε με Γ (τουλάχιστον Lipschitz). Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τους κλασικούς συμβολισμούς για χώρους Sobolev $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$. Για ένα χώρο Banach X συμβολίζουμε με $L^p(0, T, X)$, $L^\infty(0, T, X)$ τους αντίστοιχους χρονο-χωρικούς χώρους, εφοδιασμένους με τις ακόλουθες νόρμες:

$$\|z\|_{L^p(0, T, X)} = \left(\int_0^T \|z\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|z\|_{L^\infty(0, T, X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|z\|_X.$$

Το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $v : [0, T] \rightarrow X$ συμβολίζεται με $C(0, T; X)$, με αντίστοιχη νόρμα $\|z\|_{C(0, T, X)} = \max_{t \in [0, T]} \|z(t)\|_X$. Για τον ορισμό των χώρων $H^s(0, T, X)$ παραπέμπουμε στα βιβλία [30, 50].

Τυπική επιλογή του χώρου X , είναι $X \equiv H^s(\Omega)$, $0 < s \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με $H_0^1(\Omega) \equiv \{z \in H^1(\Omega) : z|_\Gamma = 0\}$. Ο δυϊκός του $H^1(\Omega)$ συμβολίζεται με $H^1(\Omega)^*$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{(H^1(\Omega))^*, H^1(\Omega)}$ για το δυϊκό ζεύγος $(H^1(\Omega)^*, H^1(\Omega))$, ενώ συμβολίζουμε με (\cdot, \cdot) το κλασικό L^2 εσωτερικό γινόμενο.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω χώρο:

$$W(0, T) := L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H^1(\Omega)),$$

εφοδιασμένο με νόρμα,

$$\|\cdot\|_{W(0, T)} = \|\cdot\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|\cdot\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))},$$

ο οποίος περιγράφει τον χώρο των ασθενών λύσεων, όταν τα δεδομένα ικανοποιούν τις ελάχιστες δυνατές υποθέσεις ομαλότητας. Παρόμοια προβλήματα με ελάχιστες συνθήκες ομαλότητας μελετούνται στην [10]. Η διγραμμική μορφή που σχετίζεται με το πρόβλημά μας ορίζεται ως εξής:

$$a(y_1, y_2) = \int_\Omega \nabla y_1 \nabla y_2 dx \quad \forall y_1, y_2 \in H^1(\Omega),$$

και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$a(y, y) = \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$a(y, v) \leq C \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall y, v \in H^1(\Omega),$$

όπου $C > 0$, συμβολίζει τη σταθερά που εξαρτάται από το χωρίο. Τέλος θα αναφέρουμε μερικές χρήσιμες ανισότητες που θα χρησιμοποιηθούν ακολούθως.

Young Inequality [49]: Για $a, b \geq 0$ και $r > 0$ και $m_1, m_2 > 1$ με $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1$ ισχύει:

$$ab \leq r \frac{a^{m_1}}{m_1} + \frac{1}{r} \frac{b^{m_2}}{m_2}.$$

Gagliardo-Nirenberg Inequality [6]: Έστω $1 \leq m \leq n < \infty$. Τότε για $s = 1 - \frac{m}{n}$, ισχύει:

$$\|u\|_{L^n(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^m(\Omega)}^{1-s} \|u\|_{H^1(\Omega)}^s \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Μια χρήσιμη μορφή αυτής της ανισότητας είναι όταν $n = 4$, $m = 2$ και $s = \frac{1}{2}$:

$$\|v\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Discrete Grönwall Lemma: Αν $\alpha^n, \beta^n, \phi^n \geq 0$ ικανοποιούν την ακόλουθη ανισότητα

$$\alpha^n + \beta^n \leq (1 - C\tau_n)\alpha^{n-1} + \phi^n, \quad \forall n = 1, \dots, N$$

και τ_n ώστε $\max_{n=1, \dots, N} C\tau_n < 1$ τότε

$$\alpha^N + \sum_{n=1}^N e^{C(t^N - t^n)} \beta^n \leq (1 + TO(\tau)) (e^{Ct^N} \alpha^0 + \sum_{n=1}^N e^{C(t^N - t^n)} \phi^n),$$

όπου $\tau = \max_{n=1, \dots, N} \tau_n$ και $t^n = \sum_{i=1}^n \tau_i$.

Χρειαζόμαστε επίσης τις ακόλουθες ανισότητες: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}, p \geq 0$ τότε,

$$|v_1|^p v_1 (v_1 - v_2) \geq \frac{|v_1|^{p+2} - |v_2|^{p+2}}{p+2}, \quad (2.1.1)$$

καθώς και

$$2b(b-a) = |b-a|^2 + b^2 - a^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.1.2)$$

2.2 Η ασθενής μορφή

Η ασθενής μορφή του συστήματος (1.1.1) ορίζεται ως εξής: Υποθέτουμε ότι τα αρχικά δεδομένα $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$. Τότε, για όλα τα $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)^*)$ αναζητούμε $u, v \in W(0, T)$ ώστε

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u(T), w(T) \rangle + \int_0^T (-\langle u, w_t \rangle + d_1 a(u, w) - \langle u(1 - |u|), w \rangle + \langle v h(au), w \rangle) ds \\ = \langle u(0), w(0) \rangle, \\ \langle v(T), w(T) \rangle + \int_0^T (-\langle v, w_t \rangle + d_2 a(v, w) - b \langle v h(au), w \rangle + c \langle v, w \rangle) ds \\ = \langle v(0), w(0) \rangle. \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

Λήμμα 1. Έστω αρχικά δεδομένα $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, και d_1, d_2, c, b, a θετικές παράμετρους. Τότε υπάρχει μια ασθενής λύση $(u, v) \in W(0, T)$ του (2.2.1) ώστε

$$\|u\|_{W(0, T)} + \|v\|_{W(0, T)} \leq C (\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}),$$

όπου το C εξαρτάται από το χωρίο και τις σταθερές d_1, d_2, T . Επίσης, ισχύουν:

$$\|u_t\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^*)} + \|v_t\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^*)} \leq C(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}).$$

Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι $u_0, v_0 \in H^1(\Omega)$, τότε,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C(\|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|v_0\|_{H^1(\Omega)}) \\ \|v\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C(\|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|v_0\|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

Τέλος, αν $u_0, v_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, έχουμε πως $u, v \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$.

Απόδειξη. Το θεώρημα αποδεικνύεται ακολουθώντας κλασικές τεχνικές Galerkin, (βλ. [50]). \square

Παρατήρηση 1. Το φραγμένο χωρίο Ω έχει κατάλληλο ομαλό σύνορο ώστε η λύση του κλασικού ελλειπτικού προβλήματος στο σύνολο αυτό να έχει H^2 ομαλότητα.

3 Το πλήρως διακριτοποιημένο σύστημα

3.1 Διακριτοποίηση

Για την κατασκευή του διακριτού συστήματος, διακριτοποιούμε ως προς το χρόνο το σύστημα, χρησιμοποιώντας ασυνεχείς στον χρόνο προσεγγίσεις Galerkin, σε συνδυασμό με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο. Οι προσεγγίσεις θα κατασκευαστούν σε μία διαμέριση $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ του $[0, T]$. Σε κάθε διάστημα της μορφής $(t^{n-1}, t^n]$ μήκους $\tau_n = t^n - t^{n-1}$, ορίζονται οι υπόχωροι X_h του $H^1(\Omega)$, που ικανοποιούν τα κλασικά αποτελέσματα της προσεγγιστικής θεωρίας πεπερασμένων στοιχείων πολυωνυμικού τύπου (δείτε π.χ. [18]), σε μια κανονική τριγωνοποίηση. Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος $\ell \geq 1$ και μία σταθερά $c > 0$ (ανεξάρτητη από τη παράμετρο της διαμέρισης h) ώστε αν $w \in H^{\ell+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\inf_{w_h \in X_h} \|w - w_h\|_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{\ell+1-s} \|w\|_{H^{\ell+1}(\Omega)}, \quad 0 \leq l \leq \ell, \quad s = -1, 0, 1.$$

Επιπλέον, αν οι τριγωνοποιήσεις είναι σχεδόν ομοιόμορφες (*quasi-uniform*), τότε υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ ώστε να ισχύει η ακόλουθη αντίστροφη εκτίμηση

$$\|w_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{h} \|w_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w_h \in X_h.$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η (χρονική) διαμέριση είναι σχεδόν ομοιόμορφη (*quasi-uniform*) ως προς το χρόνο, δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά $0 < \theta \leq 1$ ώστε $\theta\tau \leq \min_{n=1, \dots, N} \tau_n$, όπου $\tau = \max_{n=1, \dots, N} \tau_n$. Στην ασυνεχή (στο χρόνο) μέθοδο Galerkin, αναζητούμε να προσεγγίσουμε τις λύσεις που ανήκουν στο χώρο

$$\mathcal{X}_h = \{w_h \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) : w_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X_h)\}.$$

Εδώ συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X_h)$ τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού k ως προς το χρόνο, που λαμβάνουν (στο χώρο) τιμές στον \mathcal{X}_h . Οι συναρτήσεις του \mathcal{X}_h είναι συνεχείς από αριστερά με δεξιά όρια, συνεπώς γράφουμε w^n για $w_h(t^n) := w_h(t_-^n)$, και w_+^n για $w(t_+^n)$. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $[W_h^{n-1}] := W_{h+}^{n-1} - W_h^{n-1}$ επίσης για τα άλματα στον χρόνο $\forall n = 1, \dots, N$. Θα συμβολίζουμε τις πλήρως διακριτοποιημένες προσεγγίσεις (fully-discrete) των u, v με U_h, V_h αντίστοιχα, και με $E_u = U_h - u$, $E_v = V_h - v$ τα αντίστοιχα σφάλματα. Λόγω των γνωστών αποτελεσμάτων ενσφήνωσης, $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)^*) \subset C(0, T; L^2(\Omega))$ οι λύσεις u, v ανήκουν στο χώρο $C(0, T; L^2(\Omega))$. Αναζητούμε $(U_h, V_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$ ώστε για κάθε $w_h \in \mathcal{X}_h$, και για όλα $n = 1, \dots, N$, το πλήρως διακριτοποιημένο σύστημα fully-discrete ορίζεται ακολούθως:

$$\begin{aligned} \langle U_h^n, w_h^n \rangle &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle U_h, w_{ht} \rangle + d_1 a(U_h, w_h) + \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle \right) ds \\ &= \langle U_h^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|), w_h \rangle ds, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} \langle V_h^n, w_h^n \rangle &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle V_h, w_{ht} \rangle + d_2 a(V_h, w_h) + c \langle V_h, w_h \rangle \right) ds \\ &= \langle V_h^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle ds. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη στο χρόνο, και υπενθυμίζοντας το συμβολισμό $[U_h^{n-1}] = U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1}$, $[V_h^{n-1}] = V_{h+}^{n-1} - V_h^{n-1}$, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} &\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\langle U_{ht}, w_h \rangle + d_1 a(U_h, w_h) + \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle \right) ds \\ &+ \langle [U_h^{n-1}], w_{h+}^{n-1} \rangle = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|), w_h \rangle ds, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} &\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\langle V_{ht}, w_h \rangle + d_2 a(V_h, w_h) \right) + c \langle V_h, w_h \rangle ds \\ &+ \langle [V_h^{n-1}], w_{h+}^{n-1} \rangle = b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle ds. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Μετά από πράξεις και αντικαθιστώντας $w_h = U_h$ και $w_h = V_h$ στις (3.1.1)-(3.1.2) αντίστοιχως, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \|U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \frac{1}{2} \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(d_1 a(U_h, U_h) + \langle V_h h(aU_h), U_h \rangle \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \| U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|), U_h \rangle ds \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(d_2 a(V_h, V_h) + c \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds + \frac{1}{2} \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& = \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h), V_h \rangle ds.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Υπενθυμίζουμε πως συμβολίζουμε με $a(U_h, w_h) = \langle \nabla U_h, \nabla w_h \rangle$. Παρατηρώντας τώρα ότι και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις (1.1.2), (1.1.3), και (1.1.4) ισχύει $|h(aU_h)| \leq 1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle V_h h(aU_h), U_h \rangle| ds \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} |V_h U_h| dx ds.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στις (3.1.5), (3.1.6), λαμβάνουμε τις αρχικές εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned}
& \|U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1 a(U_h, U_h) ds \\
& = \frac{1}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|), U_h \rangle ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} |V_h| |U_h| dx ds,
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(d_2 a(V_h, V_h) + c \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds + \frac{1}{2} \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& = \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} b \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Προφανώς, αν ισχύει $b < c$, τότε οι κλασικές τεχνικές εξασφαλίζουν την βασική εκτίμηση ευστάθειας για την V_h , στα σημεία της διαμέρισης καθώς και στην ενεργειακή νόρμα. Τότε, είναι δυνατό να εφαρμοστούν οι τεχνικές του [15], ώστε να λάβουμε εκτίμηση και στην $\|V_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$. Η υπόθεση αυτή όμως για τις παραμέτρους b, c , δεν είναι πάντα ρεαλιστική ενώ υπάρχουν εξαιρετικά ενδιαφέρουσες καταστάσεις στις οποίες δεν ισχύει. Επομένως, η αποσύζευξη των δύο διακριτών λύσεων, σύμφωνα με την κλασική τεχνική για την V_h σε συνδυασμό με *boot-strap argument* για U_h , δεν είναι προφανής. Επιπλέον, οφείλουμε να λάβουμε υπόψιν, την παρουσία των διαφορετικών σταθερών διάχυσης, σε συνδυασμό με την ύπαρξη του μη-γραμμικού όρου για την U_h .

3.2 Προσέγγιση με τις διακριτές χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Λόγω της μη γραμμικής σύζευξης και της έλλειψης μονοτονίας, θα πρέπει να αναπτυχθούν αποτελέσματα ευστάθειας στα εσωτερικά σημεία χρόνου, υπό ελάχιστες υποθέσεις κανονικότητας. Κάτι τέτοιο δεν είναι τεχνικά εύκολο, όταν χρησιμοποιούμε ασυνεχή μορφή *Galerkin* ως προς το χρόνο, ιδιαίτερα όταν εξετάζουμε συστήματα υψηλότερης τάξης. Για να το επιτύχουμε, χρησιμοποιούμε τη θεωρία της προσέγγισης των διακριτών χαρακτηριστικών

συναρτήσεων (βλ. π.χ. [15]), για το οποίο χρησιμοποιήθηκε μια γενική γραμμική παραβολική μερική διαφορική εξίσωση.

Σημειώνουμε ότι το βασικό πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι η απόδειξη δεν χρειάζεται επιπλέον υποθέσεις κανονικότητας, εκτός από εκείνη που απαιτείται για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη μιας ασθενούς λύσης, δηλαδή, δεν υποθέτουμε ότι $u_t, v_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ που συχνά χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία για την ανάλυση σφάλματος προσεγγίσεων μη-γραμμικών παραβολικών εξισώσεων. Για να λάβουμε εκτιμήσεις ευστάθειας και σφάλματος σε αυθαίρετους χρόνους $t \in [t^{n-1}, t^n)$ θα ήταν επιθυμητό να αντικατασταθεί το $U_h = \chi_{[t^{n-1}, t)} U_h$ (παρόμοια για V_h) στις πλήρως διακριτοποιημένες εξισώσεις. Ωστόσο, αυτή η επιλογή δεν είναι διαθέσιμη καθώς η $\chi_{[t^{n-1}, t)} U_h$ δεν ανήκει στο \mathcal{X}_h , εκτός αν το t συμπίπτει με ένα σημείο διαμέρισης. Επομένως πρέπει να κατασκευαστούν προσεγγίσεις τέτοιων συναρτήσεων. Αυτό γίνεται στο [Παραγρ. 2.3] [15]. Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε τα βασικά αποτελέσματα.

Οι προσεγγίσεις κατασκευάζονται στο διάστημα $[t^{n-1}, t^n)$. Θεωρούμε πολυώνυμα βαθμού k που ανήκουν στο διάστημα $[t^{n-1}, t^n)$ και τα συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n)$. Οπότε για $s \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n)$ συμβολίζουμε τη διακριτή προσέγγιση $\chi_{[t^{n-1}, t)} s$ από τα πολυώνυμα $\tilde{s} \in \{\tilde{s} \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t), \tilde{s}(t^{n-1}) = s(t^{n-1})\}$ που ικανοποιεί

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \tilde{s} q \, dr = \int_{t^{n-1}}^t s q \, dr \quad , \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}(t^{n-1}, t^n).$$

Παρατηρούμε πως αν θέσουμε $q = s'$, λαμβάνουμε

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} s' \tilde{s} \, dr = \int_{t^{n-1}}^t s s' \, dr = \frac{1}{2} (s^2(t) - s^2(t^{n-1})).$$

Είναι σαφές ότι αυτή η κατασκευή μπορεί να επεκταθεί σε προσεγγίσεις των $\chi_{[t^{n-1}, t)} u$ για $u \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X)$ όπου X είναι ένας γραμμικός χώρος. Η διακριτή προσέγγιση των $\chi_{[t^{n-1}, t)} u$ στο $\mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X)$ ορίζεται στη συνέχεια από $\tilde{u} = \sum_{i=0}^k \tilde{s}_i(t) u_i$ και αν το X είναι χώρος ημι-εσωτερικού γινομένου, έχουμε

$$\tilde{u}(t^{n-1}) = u(t^{n-1}), \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\tilde{u}, w)_X \, ds = \int_{t^{n-1}}^t (u, w)_X \, ds \quad , \forall w \in \mathcal{P}_{k-1}(t^{n-1}, t^n; X).$$

Λήμμα 2. Υποθέτουμε ότι το X είναι ένας χώρος (ημι)εσωτερικού γινομένου. Τότε, η απεικόνιση $\sum_{i=0}^k s_i(t) u_i \rightarrow \sum_{i=0}^k \tilde{s}_i(t) u_i$ στο $\mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X)$ είναι συνεχής. Συγκεκριμένα ισχύει,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; X)} &\leq C_k \|u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; X)}, \\ \|\tilde{u} - \chi_{[t^{n-1}, t)} u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; X)} &\leq C_k \|u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; X)} \end{aligned}$$

όπου C_k είναι μια σταθερά εξαρτώμενη από τον βαθμό του πολυωνύμου k .

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [Lemma 2.4] [15]. □

Λήμμα 3. Έστω $t \in [t^{n-1}, t^n]$ σταθερό και $p(\cdot, t) \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n)$ τέτοιο ώστε

$$p(t^{n-1}) = 1, \quad \int_{t^{n-1}}^{t^n} p q ds = \int_{t^{n-1}}^t q ds, \quad q \in \mathcal{P}_{k-1}(t^{n-1}, t^n)$$

Τότε, ισχύει,

$$p(s; t) = 1 + \left(\frac{s - t^{n-1}}{\tau_n} \right) \sum_{i=0}^{k-1} c_i \hat{p}_i \left(\frac{s - t^{n-1}}{\tau_n} \right), \quad c_i = \int_{\frac{t-t^{n-1}}{\tau_n}}^1 \hat{p}_i(\eta) d\eta$$

όπου $\{\hat{p}_i\}_{i=0}^{k-1}$ είναι μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{P}_{k-1}(0, 1)$ στον χώρο $L_w^2(0, 1)$ έχοντας το εσωτερικό γινόμενο

$$(\hat{p}, \hat{q}) = \int_0^1 \eta \hat{p}(\eta) \hat{q}(\eta) d\eta .$$

Ειδικότερα, $\|p(s)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \leq C_k$ όπου C_k είναι ανεξάρτητο από $t \in [t^{n-1}, t^n]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [Section 2] [14]. □

4 Το σύστημα Predator Prey με ασυνεχείς Galerkin ως προς το χρόνο και συνεχείς ως προς το χώρο

4.1 Βασικοί υπολογισμοί ευστάθειας των U_h, V_h

Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη των εκτιμήσεων ευστάθειας με το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 4. Έστω $\phi \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n]$, ορισμένη όπως στο Λήμμα 3, και $Z_h \in X_h \subset H^1(\Omega)$ (ανεξάρτητη από τον χρόνο). Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι υπολογισμοί:

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_{ht}, \phi(s) Z_h \rangle ds + \left(V_{h+}^{n-1} - V_h^{n-1}, \lim_{s \rightarrow t_+^{n-1}} (Z_h \phi(t^{n-1})) \right) \\ & = \langle V_h(t) - V_h^{n-1}, Z_h \rangle \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

και

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_{ht}, \phi(s) Z_h \rangle ds + \left(U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1}, \lim_{s \rightarrow t_+^{n-1}} (Z_h \phi(t^{n-1})) \right) \\ & = \langle U_h(t) - U_h^{n-1}, Z_h \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε την πρώτη σχέση χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των διακριτών χαρακτηριστικών και των προσεγγίσεων και τεχνικές ανάλογες των [48], [14]. Παρατηρούμε

πως, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $V_{ht} \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; X_h]$, δηλαδή $V_{ht} = \sum_{q=0}^{k-1} t^{k-1} V_q$, όπου $V_q \in X_h$, για κάθε $q = 0, \dots, k-1$, τον ορισμό της ϕ και το Λήμμα 3,

$$\begin{aligned}
\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_{ht}, \phi(s) Z_h \rangle ds &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \sum_{q=0}^{k-1} t^q V_q, \phi(s) Z_h \rangle ds \\
&= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \sum_{q=0}^{k-1} t^q \langle V_q, Z_h \rangle \phi(s) ds \\
&= \sum_{q=0}^{k-1} \langle V_q, Z_h \rangle \int_{t^{n-1}}^{t^n} t^q \phi(s) ds \\
&= \sum_{q=0}^{k-1} \langle V_q, Z_h \rangle \int_{t^{n-1}}^t t^q ds \\
&= \int_{t^{n-1}}^t \langle \sum_{q=0}^{k-1} t^q V_q, Z_h \rangle ds = \int_{t^{n-1}}^t \langle V_{ht}, Z_h \rangle ds.
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

όπου στον προηγούμενο υπολογισμό $Z_h, V_q \in X_h \subset H^1(\Omega)$.

Επομένως, από το αποτέλεσμα (4.1.3), και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\phi(t^{n-1}) = 1$, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
&\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_{ht}, Z_h \phi \rangle ds + \langle V_{h+}^{n-1} - V_h^{n-1}, \lim_{s \rightarrow t_{+}^{n-1}} Z_h \phi(s) \rangle \\
&= \int_{t^{n-1}}^t \langle V_{ht}, Z_h \rangle ds + \langle V_{h+}^{n-1} - V_h^{n-1}, \phi(t^{n-1}) Z_h \rangle \\
&= \langle V_h(t) - V_{h+}^{n-1}, Z_h \rangle + \langle V_{h+}^{n-1} - V_h^{n-1}, \phi(t^{n-1}) Z_h \rangle \\
&= \langle V_h(t) - V_{h+}^{n-1}, Z_h \rangle + \langle V_{h+}^{n-1} - V_h^{n-1}, Z_h \rangle \\
&= \langle V_h(t) - V_h^{n-1}, Z_h \rangle
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. \square

Θεώρημα 1. Έστω Ω φραγμένο (ομαλό) χωρίο, $(U_h, V_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$ λύσεις των (3.1.1) και (3.1.2) με αρχικά δεδομένα $U_0, V_0 \in L^2(\Omega)$, και d_1, d_2, c, f, a θετικές σταθερές. Αν ισχύουν οι σχέσεις, $b > c$, και $\tau \leq \min\{\frac{1}{8C_k}, \frac{1}{4(b-c)}\}$, οι (U_h, V_h) ικανοποιούν τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned}
&\|V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + 4d_2 \int_0^T \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 2c \int_0^T \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
&\leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned} & \|U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\sum_{n=1}^N \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3d_1}{2} \int_0^T \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) + \int_0^T \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \\ & \leq \tilde{C} \left(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right), \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\|U_h(t)\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \left(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right). \quad (4.1.8)$$

Στις σχέσεις (4.1.5) και (4.1.6) συμβολίζουμε με \tilde{C} σταθερά που μπορεί να είναι διαφορετική σε κάθε εμφάνιση και η οποία εξαρτάται μόνο από την σταθερά C_k του Λήμματος 3, Ω , T , και τη σταθερά e^{bT} .

Στις σχέσεις (4.1.7) και (4.1.8) συμβολίζουμε με \tilde{C} σταθερά που εξαρτάται από τη σταθερά C_k του Λήμματος 3, Ω , T και τις σταθερές e^{bT} , $\frac{1}{C}$.

Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε την εκτίμηση (4.1.5). Αντικαθιστώντας $w_h = V_h$ στην ασθενή μορφή (3.1.2) και χρησιμοποιώντας την σχέση, $|h(au)| < 1$, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Απομένει να φράξουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα της σχέσης (4.1.9). Γι' αυτό το σκοπό σταθεροποιώντας $t \in (t^{n-1}, t^n]$, θέτουμε στην (3.1.3), $w_h = \phi(t)Z_h$, όπου η ϕ ορίζεται όπως στο Λήμμα 3, και $Z_h \in X_h$ (ανεξάρτητη από το t). Χρησιμοποιώντας τώρα, το Λήμμα 4, και συγκεκριμένα την (4.1.1) παίρνουμε:

$$\langle V_h(t) - V_h^{n-1}, Z_h \rangle \leq - \left(d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \nabla V_h, \nabla Z_h \phi \rangle ds + (b - c) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h, Z_h \rangle \phi ds \right).$$

Επειδή, $\|\phi\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n]} \leq C_k$ (από Λήμμα 3), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \langle V_h(t) - V_h^{n-1}, Z_h \rangle \leq C_k \left(d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} ds \right. \\ & \left. + (b - c) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} ds \right), \end{aligned}$$

όπου C_k είναι η σταθερά που εξαρτάται από το k . Παρατηρώντας τώρα ότι το Z_h είναι ανεξάρτητο από το χρόνο και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder ως προς το χρόνο

λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} \langle V_h(t) - V_h^{n-1}, Z_h \rangle &\leq C_k \tau_n^{1/2} \left(d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ (b-c) \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Θέτοντας τώρα $Z_h = V_h(t)$ για προηγούμενη σταθερά $t \in (t^{n-1}, t^n]$ και ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση (4.1.10) ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder ως προς το χρόνο προκύπτει,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq \frac{\tau_n}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &+ C_k \left(\tau_n d_2 \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + (b-c) \tau_n \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Αν $\tau_n(b-c) < \frac{1}{4}$ έχουμε:

$$\frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{\tau_n}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k \tau_n d_2 \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2. \quad (4.1.12)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (4.1.9) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + b \left(2\tau_n \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4d_2 C_k \tau_n \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

Ισοδύναμα ανακατανέμοντας τους όρους επιλέγοντας $\tau_n(b-c) < \frac{1}{4}$ και $\tau_n < \frac{1}{8C_k}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ + 2c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq \left(1 + 4b\tau_n \right) \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας διακριτό Λήμμα Grönwall λαμβάνουμε τη ζητούμενη σχέση (4.1.5). Τώρα επιστρέφοντας στο (4.1.12) και χρησιμοποιώντας μία κλασική αντίστροφη εκτίμηση, $\|V_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_k}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$, λαμβάνουμε,

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq C_k \left(\frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right). \quad (4.1.13)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (4.1.5) στην (4.1.13) οδηγούμαστε στην (4.1.6).
Θέτοντας $w_h = U_h$ στην (3.1.1), έχουμε :

$$\begin{aligned} & \langle U_h^n, U_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle U_h, U_{ht} \rangle + d_1 a(U_h, U_h) + \langle V_h h(aU_h), U_h \rangle \right) ds \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} U_h^2 (|U_h| - 1) dx ds \leq \langle U_h^{n-1}, U_h^{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε πως στις περιπτώσεις συναρτησοειδών που ορίζονται από: (1.1.2)-(1.1.3)-
(1.1.4) ισχύει ότι $|h(aU_h)| < 1$. Επομένως, εύκολα καταλήγουμε στη σχέση,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[U_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1 \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} U_h^2 (|U_h| - 1) dx ds \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(V_h, U_h)| ds. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young , την ενσφήνωση $L^3(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, και την ανισότητα Hölder,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[U_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \leq \frac{3}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n; L^3(\Omega))}^2 \tau_n^{1/3} + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \left(\frac{2}{3r} \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n; L^3(\Omega))}^3 + \frac{r^2}{3} \tau_n \right) + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Young.

Διαλέγοντας $r > 0$ κατάλληλα, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[U_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \leq C_r \tau_n + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις, και αντικαθιστώντας την εκτίμηση (4.1.5) οδηγούμαστε στην εκτίμηση (4.1.7). Απομένει, η εκτίμηση για την $L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))$ νόρμα της U_h . Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο όπως στην απόδειξη της (4.1.6) και χρησιμοποιώντας τα

Λήμματα 3 και 4, συμπεραίνουμε την ανισότητα:

$$\begin{aligned} \langle U_h(t) - U_h^{n-1}, Z_h \rangle &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1 |\langle \nabla U_h, \nabla Z_h \phi \rangle| ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle U_h, Z_h \phi \rangle| ds \\ &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle V_h, Z_h \phi \rangle| ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle U_h^2, Z_h \phi \rangle| ds. \end{aligned}$$

Εφόσον Z_h είναι ανεξάρτητο από τον χρόνο, εύκολα οδηγούμαστε στην ανισότητα:

$$\begin{aligned} \langle U_h(t) - U_h^{n-1}, Z_h \rangle &\leq C_k \left(d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)} ds \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\left. + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^2 ds \|Z_h\|_{L^3(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Τώρα για τον όρο $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^2 ds$ χρησιμοποιώντας μια ακόμη φορά την ανισότητα Hölder έχουμε:

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^2 ds \leq \tau_n^{\frac{1}{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \right)^{\frac{1}{3}},$$

ισοδύναμα συμπεραίνουμε

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^2 ds \leq \tau_n^{\frac{1}{3}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.1.17)$$

Αντικαθιστώντας την (4.1.17) στην (4.1.16) και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder συμπεραίνουμε ότι,

$$\begin{aligned} \langle U_h(t) - U_h^{n-1}, Z_h \rangle &\leq C_k \left(\tau_n^{\frac{1}{2}} d_1 \|\nabla U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &+ \tau_n^{\frac{1}{2}} \|U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} + \tau_n^{\frac{1}{2}} \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\left. + \tau_n^{\frac{1}{3}} \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n, L^3(\Omega))}^2 \|Z_h\|_{L^3(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Θέτοντας $Z_h = U_h(t)$ για το προηγούμενως σταθεροποιημένο $t \in [t^{n-1}, t^n]$, χρησιμοποιώντας ανισότητες Hölder, Young, και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο την ανισότητα

που προκύπτει από (4.1.18) , παίρνουμε

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{\tau_n}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \\
& + C_k \left(\tau_n^{\frac{1}{2}} \|\nabla U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \right. \\
& + \tau_n^{\frac{1}{2}} \|U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \\
& + \tau_n^{\frac{1}{2}} \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \\
& \left. + C_k \tau_n^{\frac{1}{3}} \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n, L^3(\Omega))}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^3(\Omega)} ds \right).
\end{aligned}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{\tau_n}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C_k \left(d_1 \tau_n \|\nabla U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \tau_n (3/2) \|U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right. \\
& \left. + \tau_n ((1/2) \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \tau_n \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n, L^3(\Omega))}^3) \right).
\end{aligned}$$

έτσι τελικά επιλέγοντας $C_k \frac{3}{2} \tau_n \leq \frac{1}{4}$ λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{\tau_n}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k \tau_n \left(d_1 \|\nabla U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right) + \tau_n C_k \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n, L^3(\Omega))}^3.
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες εκτιμήσεις, οδηγούμαστε στην (4.1.8). \square

Η περίπτωση $c > b$ μπορεί να αντιμετωπιστεί με παρόμοιο τρόπο. Πράγματι, παρατηρούμε πως η εξίσωση (4.1.9) οδηγεί άμεσα σε εκτίμηση της ενεργειακής νόρμας, καθώς και στα σημεία της χρονικής διαμέρισης. Στο παρακάτω θεώρημα συγκεντρώνονται τα σχετικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 2. Έστω Ω φραγμένο (ομαλό) χωρίο, $(U_h, V_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$ λύσεις των (3.1.1) και (3.1.2) με αρχικά δεδομένα $U_0, V_0 \in L^2(\Omega)$, και d_1, d_2, c, f, a θετικές σταθερές. Αν ισχύει η σχέση, $b < c$, τότε οι $(U_h, V_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$ ικανοποιούν τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned}
& \|V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2d_2 \int_0^T \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 2(c-b) \int_0^T \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C}_k \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} & \|U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\sum_{n=1}^N \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3d_1}{2} \int_0^T \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \\ & + \int_0^T \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \leq \frac{\tilde{C}}{c-b} \left(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right), \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\|U_h(t)\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\tilde{C}_k}{c-b} \left(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tilde{C}_k \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (4.1.23)$$

όπου \tilde{C} είναι μία αλγεβρική σταθερά και \tilde{C}_k είναι αλγεβρική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το χωρίο, την σταθερά C_k του Λήμματος 3.

Απόδειξη. Στη περίπτωση που $b < c$ τότε προκύπτει άμεσα από την (4.1.9),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + (c-b) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Αθροίζοντας την σχέση από 1 έως N λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & \|V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + 2d_2 \int_0^T \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + 2(c-b) \int_0^T \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Στη περίπτωση που $b > c$, λαμβάνουμε εύκολα από την (4.1.11),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \tau_n \left(\frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k d_2 \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right) \\ & + (b-c) \tau_n \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Διαιρώντας με τ_n και χρησιμοποιώντας μία αντίστροφη εκτίμηση και το φράγμα (4.1.25) προκύπτει:

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq C_k \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

δηλαδή, η εκτίμηση (4.1.21). Για τον υπολογισμό του φράγματος του U_h , ξεκινώντας από την σχέση (4.1.15) και αντικαθιστώντας το φράγμα $\int_0^T \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$ λαμβάνουμε την (4.1.22).

Για την τελευταία σχέση, παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{\tau_n}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C_k \left(d_1 \tau_n \|\nabla U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{3}{2} \tau_n \|U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \tau_n \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \tau_n \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n, L^3(\Omega))}^3 \right), \end{aligned}$$

συνεπάγεται, χρησιμοποιώντας μία αντίστροφη (στο χρόνο) εκτίμηση,

$$\begin{aligned} & \|U_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{C_k}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C_k \left(d_1 \|\nabla U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{3}{2} \|U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n, L^3(\Omega))}^3 \right), \end{aligned}$$

από την οποία λαμβάνουμε την (4.1.23), μετά από αντικατάσταση των όρων του αριστερού μέλους της ανισότητας από την (4.1.22). \square

Είναι προφανές πως η περίπτωση του Θεωρήματος 2 είναι ευκολότερη. Είναι όμως και λιγότερο ενδιαφέρουσα. Στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην πρώτη και δυσκολότερη περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση που $c \ll b$ στην οποία δεν σχηματίζεται αρκετά ισχυρή $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ νόρμα στο δεξί μέλος. Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζουμε εκτιμήσεις ομαλότητας ανώτερης τάξης. Οι εκτιμήσεις αυτές δεν θα παίξουν ρόλο στην απόδειξη της εκτίμησης σφάλματος, αλλά είναι ενδεικτικές του παραβολικού χαρακτήρα του προβλήματος που εξετάζουμε.

Θεώρημα 3. Έστω ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος 1 ισχύουν. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $U_0, V_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Τότε για $c < b$, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\begin{aligned} & d_1 \int_0^T \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\nabla U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_1^2}\right) \tilde{C}_1, \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_1}\right) \tilde{C}_1, \tag{4.1.27}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \|[U_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_1}\right) \tilde{C}_1, \tag{4.1.28}$$

$$\|\nabla U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_1}\right)\tilde{C}_1. \quad (4.1.29)$$

όπου \tilde{C}_1 είναι μία σταθερά που εξαρτάται από την σταθερά \tilde{C} του Θεωρήματος 1, και από τις νόρμες $\|U_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2$, $(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + T)^2$.

Απόδειξη. Στο διάστημα $(t^{n-1}, t^n]$ ορίζουμε την διακριτή Λαπλασιανή, $w_h = -\Delta_h U_h$, ως εξής: $t \in (t^{n-1}, t^n]$, και $\forall w_h \in X_h$,

$$-(\Delta_h U_h(\cdot), w_h) = a(U_h(\cdot), w_h).$$

Παρατηρούμε πως επειδή $U_h \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X_h)$, έχουμε πως $\Delta_h U_h \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X_h)$. Θέτουμε $w_h = -\Delta_h U_h$ στην ασθενή μορφή (3.1.3) και παρατηρούμε πως έπειτα από ολοκλήρωση κατά μέρος, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} & d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\nabla U_h, \nabla U_{ht}) \right) ds + ([U_h^{n-1}], -\Delta_h U_{h+}^{n-1}) \\ &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_h(1 - |U_h|) - V_h h(aU_h), -\Delta_h U_h) ds, \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} & d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + (\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}, \nabla U_{h+}^{n-1}) \\ &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\nabla U_{ht}, \nabla U_h) ds \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(V_h h(aU_h), \Delta_h U_h)| ds. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ότι $|h(aU_h)| \leq 1$, εύκολα οδηγούμαστε στην σχέση,

$$\begin{aligned} & d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Απο τις ανισότητες Young, Hölder καθώς και την Gagliardo-Nirenberg λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
\end{aligned}$$

Απο τις ανισότητες Young, Hölder και γράφοντας $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}^2$ τελικά λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& - \frac{1}{2} \|\nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& + \frac{1}{d_1} \|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds.
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας την παραπάνω σχέση απο $n = 1$ ως $n = N$ και αντικαθιστώντας τα φράγματα των υπολογισμών (4.1.5), (4.1.7) και (4.1.8) στην παραπάνω σχέση έχουμε τελικά την (4.1.26). Για την ανισότητα (4.1.27), θέτοντας $w_h = (t - t^{n-1})U_{ht}$ στην διακριτή ασθενή μορφή λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left((t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 (t - t^{n-1}) a(U_h, U_{ht}) + (t - t^{n-1}) \langle V_h h(aU_h), U_{ht} \rangle \right) ds \\
& = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \langle U_h(1 - |U_h|), U_{ht} \rangle ds. \tag{4.1.31}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο χώρο,

$$\begin{aligned}
& \left| d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) (\nabla U_h, \nabla U_{ht}) ds \right| \leq \left| -d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) (\Delta_h U_h, U_{ht}) ds \right| \\
& \leq \frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \tau_n d_1^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
\end{aligned}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young την ανισότητα $|h(aU_h)| \leq 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_h(1 - U_h) - V_h h(aU_h), (t - t^{n-1})U_{ht}) ds \right| \\ & \leq \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \\ & \quad + \frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, στην (4.1.31) έχουμε,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C\tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(d_1^2 \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds. \end{aligned}$$

Διαιρώντας με τ_n , τελικά λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\ & \quad + \|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε την δεύτερη εκτίμηση του θεωρήματος και αντικαθιστώντας τις εκτιμήσεις του Θεωρήματος 2 και την εκτίμηση (4.1.26). Για την τρίτη εκτίμηση (4.1.28), θέτουμε $w_h = U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} := [U_h^{n-1}]$,

$$\begin{aligned} & \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_{ht}, U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1}) ds \right| \\ & \quad + d_1 \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\nabla U_h, \nabla (U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1})) ds \right| \\ & \quad + \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_h(1 - U_h) + h(aU_h)V_h, U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1}) ds \right|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη στο χώρο για το δεύτερο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
\| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_{ht} \|_{L^2(\Omega)} \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| \Delta_h U_h \|_{L^2(\Omega)} \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^2(\Omega)} \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^4(\Omega)}^2 \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| V_h \|_{L^2(\Omega)} \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Επειδή το $\| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}$ είναι ανεξάρτητο του χρόνου, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
\| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_{ht} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ d_1 \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| \Delta_h U_h \|_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^2(\Omega)} ds \\
&+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^4(\Omega)}^2 ds \\
&+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| V_h \|_{L^2(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder οδηγούμαστε στην σχέση:

$$\begin{aligned}
\| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_{ht} \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ d_1 \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \| \Delta_h U_h \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\
&+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^4(\Omega)}^4 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \| V_h \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την τοπική αντίστροφη εκτίμηση,

$$\tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

και ανισότητα Young με κατάλληλη σταθερά, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_n} \|[U_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_k \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{t - t^{n-1}}{\tau_n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right. \\ &+ d_1^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\left. + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τους προηγούμενους υπολογισμούς (4.1.5), (4.1.7), (4.1.8), (4.1.26) και (4.1.27), λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για την τελευταία εκτίμηση (4.1.29), θέτουμε $w_h = (t^n - t)U_{ht}$ οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} &\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left((t^n - t) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 (t^n - t) a(U_h, U_{ht}) + (t^n - t) \langle V_h h(aU_h), U_{ht} \rangle \right) ds \\ &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) \langle U_h(1 - |U_h|), U_{ht} \rangle ds. \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Παρατηρούμε ότι ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο χρόνο,

$$\begin{aligned} &d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) (\nabla U_h, \nabla U_{ht}) ds \\ &= -\tau_n \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young, την ανισότητα $|h(aU_h)| \leq 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_h(1 - U_h) - V_h h(aU_h), (t^n - t)U_{ht}) ds \right| \\ &\leq \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας μία αντίστροφη στο χρόνο εκτίμηση λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} &\left| (U_{h+}^{n-1} - U^{n-1}, ((t^n - t)U_{ht})_+^{n-1}) \right| \leq \|[U^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)} \|((t^n - t)U_{ht})_+^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|[U^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)} \frac{C_k}{\tau_n^{1/2}} \|(t^n - t)U_{ht}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \\ &\leq \|[U^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)} C_k \tau_n^{1/2} \|U_{ht}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, στην (4.1.32) έχουμε,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C\tau_n \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|[U^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds. \end{aligned}$$

Διαιρώντας με τ_n , τελικά λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{\tau_n} \|[U^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα μετά από μία αντίστροφη στον χρόνο τοπική εκτίμηση,

$$\begin{aligned} & \|\nabla U_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 \leq C_k \left(\|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{t - t^{n-1}}{\tau_n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{\tau_n} \|[U_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \right). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με τις προηγούμενες εκτιμήσεις (4.1.26), (4.1.27), (4.1.28) λαμβάνουμε την ζητούμενη εκτίμηση. \square

Θεώρημα 4. Έστω ότι οι υποθέσεις των θεωρημάτων 1 και 2 ισχύουν. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $U_0, V_0 \in H_0^1(\Omega)$. Τότε $c < b$, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\begin{aligned} & d_2 \int_0^T \|\Delta_h V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\nabla V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|\nabla V_{h+}^{n-1} - \nabla V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_2}\right) \tilde{C}_1, \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

όπου \tilde{C}_1 είναι μία σταθερά που εξαρτάται από την σταθερά \tilde{C} του Θεωρήματος 2, και από τις νόρμες $\|V_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2$, $(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T)^2$. Επιπλέον ισχύουν οι εκτιμήσεις:

$$\sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\frac{t - t^{n-1}}{\tau_n} \right) \|V_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_2}\right) \tilde{C}_1, \tag{4.1.34}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_2}\right) \tilde{C}_1$$

$$\|\nabla V_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_2}\right) \tilde{C}_1$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια τεχνική με την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος. Επισημαίνεται πως στο δεξί μέλος της διακριτής ασθενούς λύσης υπάρχει μόνο ο όρος $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$, ο οποίος φράσσεται εύκολα από Θεώρημα 2. \square

4.2 Βοηθητικές Χωρο-Χρονικές Προβολές

Για το υπολογισμό του σφάλματος μεταξύ της λύσης του (2.2.1) και των πλήρως διακριτών προσεγγίσεων (3.1.1) και (3.1.2) θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλες χωρο-χρονικές προβολές. Σημειώνουμε ότι δεν θα χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε μορφή ημι-διακριτοποίησης σε χρόνο ή χώρο. Αντίθετα, θα κατασκευάσουμε μια κατάλληλη χωροχρονική (γραμμική) προβολή στον πλήρως διακριτό χώρο \mathcal{X}_h . Έστω $U_p^0 := P_h u_0$ και $V_p^0 := P_h v_0$ όπου P_h η κλασική L^2 προβολή ορισμένη (αντιστοίχως) ως

$$(P_h u_0 - u_0, w_h) = 0, \quad (P_h v_0 - v_0, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in \mathcal{X}_h.$$

Οι προβολές $U_p, V_p \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$ ορίζονται ως λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων: $\forall n = 1, \dots, N$, $\forall w_h \in \mathcal{X}_h$,

$$\begin{aligned} \langle U_p^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle U_p, w_{ht} \rangle + d_1 a(U_p, w_h) + \langle v h(au), w_h \rangle \right. \\ \left. - \langle u(1 - |u|), w_h \rangle \right) ds = \langle U_p^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} \langle V_p^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle V_p, w_{ht} \rangle + d_2 a(V_p, w_h) + c \langle V_p, w_h \rangle \right. \\ \left. - \langle b v h(au), w_h \rangle \right) ds = \langle V_p^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Οι παραπάνω προβολές ικανοποιούν τις κλασικές εκτιμήσεις ευστάθειας, καθώς είναι οι πλήρως διακριτές λύσεις εξισώσεων της θερμότητας με αρχικά δεδομένα u_0, v_0 και δεξί μέλος $-v h(au) + u(1 - |u|) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $b v h(au) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, αντιστοίχως, δηλαδή είναι πλήρως διακριτές λύσεις (με την ασυνεχή στο χρόνο μέθοδο *Galerkin* σε συνδυασμό με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο) των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \xi_t - d_1 \Delta \xi = u(1 - |u|) - v h(au) & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ \xi(0, x) = u_0 & \text{στο } \Omega \end{cases} \quad (4.2.3)$$

$$\begin{cases} \psi_t - d_2 \Delta \psi = bh(au) - cv & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ \psi(0, x) = v_0 & \text{στο } \Omega \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Στο ακόλουθο θεώρημα συλλέγουμε τις βασικές εκτιμήσεις ευστάθειας που αφορούν τις παραπάνω προβολές. Επισημαίνεται πως η κύρια επιδίωξη στις εκτιμήσεις ευστάθειας είναι να εξασφαλιστεί ότι οι εκτιμήσεις θα είναι ανεξάρτητες των σταθερών διάχυσης.

Θεώρημα 5. Έστω U_p, V_p οι προβολές που ορίζονται από τις σχέσεις (4.2.1) και (4.2.2). Έστω, ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\begin{aligned} & \|V_p^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|[V_p^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_0^T \|\nabla V_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + c \int_0^T \|V_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \left(\frac{b^2}{c} \|v\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|V_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\|V_p\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq C_k \left(\frac{b^2}{c} \|v\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|V_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} & \|U_p^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|[U_p^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_0^T \|\nabla U_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \left(\|U_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^4\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \right), \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \|U_p\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq C \left(\frac{1}{2} \|U_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \right), \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

όπου C είναι μία θετική σταθερά που εξαρτάται από το χωρίο και την σταθερά C_k του Λήμματος 1.

Απόδειξη. Η απόδειξη περιλαμβάνεται ουσιαστικά στο [15] καθώς όταν $u \in W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$, εύκολα αποδεικνύεται πως το δεξί μέλος των εξισώσεων (4.2.3)-(4.2.4) ανήκει στον χώρο $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Για πληρότητα, παρουσιάζουμε την απόδειξη. Θέτοντας $w_h = U_p$ και επειδή $|h(au)| \leq 1$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|U_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|U_p^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[U_p^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(U_p, U_p) ds \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle v, U_p \rangle| ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle u(1 - |u|), U_p \rangle| ds. \end{aligned}$$

που οδηγεί στην ακόλουθη σχέση,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|U_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|U_p^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[U_p^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^2\|_{L^2(\Omega)}^2) ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

όπου C συμβολίζει αλγεβρική σταθερά. Απομένει να φράξουμε τον τελευταίο όρο. Θα ακολουθήσουμε την ίδια τεχνική με το Θεώρημα 1. Θέτοντας $w_h = Z_h \phi$ στην ασθενή μορφή, όπου $Z_h \in X_h \subset H^1(\Omega)$ με $\phi(s) \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n]$, κατασκευασμένο όπως στο Λήμμα 1, και δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 1, καταλήγουμε στην σχέση,

$$\begin{aligned} \langle U_p(t) - U_p^{n-1}, Z_h \rangle & \leq C_k \left(d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_p\|_{L^2(\Omega)} ds \right) \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C_k \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u\|_{L^2(\Omega)} ds \right) \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} + C_k \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u^2\|_{L^2(\Omega)} ds \right) \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C_k \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v\|_{L^2(\Omega)} ds \right) \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_p\|_{L^2(\Omega)} ds \right) \|Z_h\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\|\phi\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n]} \leq C_k$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder στην (4.2.10) έχουμε,

$$\begin{aligned} \langle U_p(t) - U_p^{n-1}, Z_h \rangle & \leq C_k d_1 \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\nabla U_p\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C_k \tau_n^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C_k \tau_n^{\frac{1}{2}} \|u^2\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C_k \tau_n^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + C_k \tau_n^{\frac{1}{2}} \|U_p\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Θέτοντας $Z_h = U_p(t)$ για σταθερό $t \in [t^{n-1}, t^n]$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq \frac{\tau_n}{2} \|U_p^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k \tau_n \left(d_1 \|\nabla U_p\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \|U_p\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right) \\ & \quad + C_k \tau_n \left(\|u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^4(t^{n-1}, t^n, L^4(\Omega))}^4 + \|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Επιλέγοντας, $C_k \tau_n \leq 1/4$, προκύπτει,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|U_p\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 & \leq \frac{\tau_n}{2} \|U_p^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k d_1 \tau_n \|\nabla U_p\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \\ & \quad + C_k \tau_n \left(\|u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^4(t^{n-1}, t^n, L^4(\Omega))}^4 + \|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (4.2.13) στην (4.2.9),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|U_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &- \frac{1}{2}\|U_p^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|[U_p^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{2}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|\nabla U_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
&\leq C\left(\int_{t^{n-1}}^{t^n}\left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^2\|_{L^2(\Omega)}^2\right) ds\right. \\
&\quad + \frac{\tau_n}{2}\|U_p^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k d_1 \tau_n \|\nabla U_p\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \\
&\quad \left. + C_k \tau_n \left(\|u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^4(t^{n-1}, t^n, L^4(\Omega))}^4 + \|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2\right)\right). \tag{4.2.14}
\end{aligned}$$

Διαλέγοντας $\frac{d_1}{2} - d_1 \tau_n C_k > \frac{d_1}{4}$, χρησιμοποιώντας το διακριτό Λήμμα Grönwall, έχουμε τελικά το ζητούμενο. Αντικαθιστώντας τώρα το αποτέλεσμα του Λήμματος Grönwall στην (4.2.13) έχουμε ένα άνω φράγμα για την $L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))$ νόρμα. \square

Θεώρημα 6. Έστω $U_0, V_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, και ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5. Τότε οι προβολές U_p, V_p ικανοποιούν τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\|\nabla U_p\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + d_1 \int_0^T \|\Delta_h U_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \tag{4.2.15}$$

$$\leq C_k \frac{1}{d_1} \left(\|\nabla U_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \|u\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right),$$

$$\|\nabla V_p\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + d_2 \int_0^T \|\Delta_h V_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \tag{4.2.16}$$

$$\leq C_k \frac{1}{d_2} \left(\|\nabla V_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right),$$

όπου C μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το χωρίο και το k .

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του Θεωρήματος 5, και ακολουθώντας την απόδειξη [14, Section 4] λαμβάνουμε το ζητούμενο. \square

5 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις σφαλμάτων. Για τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι οι λύσεις $(u, v) \in W(0, T) \times W(0, T)$ των (2.2.1) ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις: Για $n = 1, \dots, N$, $\forall w_h \in \mathcal{X}_h$

$$\begin{aligned}
&\langle u^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle u, w_{ht} \rangle + d_1 a(u, w_h) \right) ds \\
&+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle v h(au) - u(1 - |u|), w_h \rangle ds = \langle u^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \tag{5.0.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle v^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle v, w_{ht} \rangle + d_2 a(v, w_h) + c \langle v, w_h \rangle \right) ds \\ & - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle bvh(au), w_h \rangle ds = \langle v^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

Ορίζουμε ως σφάλμα τη διαφορά των τιμών της ακριβούς από την προσεγγιστική λύση. Συγκεκριμένα στο σύστημά μας αφαιρούμε τις σχέσεις (5.0.2) και (5.0.1) που παριστάνουν την ασθενή μορφή του συστήματος για την ακριβή λύση από τις ασθενείς μορφές των προσεγγιστικών λύσεων (3.1.1) και (3.1.2) αντίστοιχα, συμβολίζοντας $E_u = U_h - u$, $E_v = V_h - v$ οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} & \langle E_u^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle E_u, w_{ht} \rangle + d_1 a(E_u, w_h) + \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle \right) ds \\ & = \langle E_u^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|) - u(1 - |u|), w_h \rangle ds, \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

$$\begin{aligned} & \langle E_v^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle E_v, w_{ht} \rangle + d_2 a(E_v, w_h) + c \langle E_v, w_h \rangle \right) ds \\ & = \langle E_v^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle ds. \end{aligned} \quad (5.0.4)$$

Υπενθυμίζουμε την πλήρως διακριτή μορφή των προβολών του συστήματος U_p, V_p : $\forall n = 1, \dots, N, \forall w_h \in \mathcal{X}_h$,

$$\begin{aligned} & \langle U_p^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle U_p, w_{ht} \rangle + d_1 a(U_p, w_h) \right. \\ & \left. - \langle u(1 - |u|), w_h \rangle + \langle v h(au), w_h \rangle \right) ds = \langle U_p^{n-1}, w_h^{n-1} \rangle, \end{aligned} \quad (5.0.5)$$

$$\begin{aligned} & \langle V_p^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle V_p, w_{ht} \rangle + d_2 a(V_p, w_h) \right. \\ & \left. + c \langle V_p, w_h \rangle - \langle bvh(au), w_h \rangle \right) ds = \langle V_p^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (5.0.6)$$

Αφαιρώντας από τις παραπάνω σχέσεις (5.0.5), (5.0.6) τις (5.0.1) και (5.0.2) αντιστοίχως λαμβάνουμε, για $n = 1, \dots, N, \forall w_h \in \mathcal{X}_h$,

$$\begin{aligned} & \langle U_p^n - u^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle U_p - u, w_{ht} \rangle + d_1 a(U_p - u, w_h) \right) ds \\ & = \langle U_p^{n-1} - u^{n-1}, w_h^{n-1} \rangle, \end{aligned} \quad (5.0.7)$$

$$\begin{aligned} \langle V_p^n - v^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle V_p - v, w_{ht} \rangle + d_2 a(V_p - v, w_h) \right. \\ \left. + c \langle V_p - v, w_h \rangle \right) ds = \langle V_p^{n-1} - v^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (5.0.8)$$

Παρατηρούμε πως τα σφάλματα $E_{up} = U_p - u$, $E_{vp} = V_p - v$ είναι αποσυζευγμένα. Η ορθογωνιότητα, από τις σχέσεις (5.0.3)-(5.0.4), και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $E_u = E_{uh} + E_{up}$, $E_v = E_{vh} + E_{vp}$, όπου, $E_{uh} = U_h - U_p$, $E_{vh} = V_h - V_p$, $E_{up} = U_p - u$, $E_{vp} = V_p - v$ έχουμε $\forall n = 1, \dots, N$, $\forall w_h \in \mathcal{X}_h$,

$$\begin{aligned} \langle E_{uh}^n + E_{up}^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle E_{uh} + E_{up}, w_{ht} \rangle + d_1 a(E_{uh} + E_{up}, w_h) \right) ds \\ + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle ds = \langle E_{uh}^{n-1} + E_{up}^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \\ + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|) - u(1 - |u|), w_h \rangle ds, \end{aligned} \quad (5.0.9)$$

$$\begin{aligned} \langle E_{vh}^n + E_{vp}^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle E_{vh} + E_{vp}, w_{ht} \rangle + d_2 a(E_{vh} + E_{vp}, w_h) \right. \\ \left. + c \langle E_{vh} + E_{vp}, w_h \rangle \right) ds = \langle E_{vh}^{n-1} + E_{vp}^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \\ + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle ds. \end{aligned} \quad (5.0.10)$$

Χρησιμοποιώντας στις παραπάνω σχέσεις τις (5.0.7)-(5.0.8) καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \langle E_{uh}^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle E_{uh}, w_{ht} \rangle + d_1 a(E_{uh}, w_h) \right) ds \\ = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\langle U_h(1 - |U_h|) - u(1 - |u|), w_h \rangle + \langle v h(au) - V_h h(aU_h), w_h \rangle \right) ds \\ + \langle E_{uh}^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle, \end{aligned} \quad (5.0.11)$$

$$\begin{aligned} \langle E_{vh}^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(- \langle E_{vh}, w_{ht} \rangle + d_2 a(E_{vh}, w_h) \right) ds \\ + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle E_{vh}, w_h \rangle ds = \langle E_{vh}^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \\ + \int_{t^{n-1}}^{t^n} b \langle V_h h(au_h) - v h(au), w_h \rangle ds. \end{aligned} \quad (5.0.12)$$

Αρκεί να εκτιμήσουμε τις ποσότητες E_{up} , E_{vp} και E_{uh} , E_{vh} . Ξεκινάμε με την εκτίμηση των E_{up} , E_{vp} . Εδώ εκτιμούμε τα αποτελέσματα υπό ελάχιστες παραδοχές κανονικότητας

στα δεδομένα. Πριν προχωρήσουμε, παραθέτουμε ορισμένα αποτελέσματα για κατάλληλες (τοπικές) σε χρονικές προβολές για ασυνεχείς Galerkin διαμερίσεις ως προς το χρόνο.

Ορισμός 1. (1) Η προβολή $\mathbf{P}_h^{loc} : C(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)) \rightarrow \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X_h)$ ικανοποιεί $(\mathbf{P}_h^{loc} w)^n = P_h w(t^n)$, και

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (w - \mathbf{P}_h^{loc} w, w_h) ds = 0, \quad \forall w_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; X_h].$$

Στο πιο πάνω ορισμό, έχουμε χρησιμοποιήσει $(\mathbf{P}_h^{loc} w)^n \equiv (\mathbf{P}_h^{loc} w)(t^n)$, επίσης $P_h : L^2(\Omega) \rightarrow X_h$ συμβολίζει τον ορθογώνιο τελεστή προβολής στο $X_h \subset H^1(\Omega)$.

(2) Η προβολή $\mathbf{P}_h^{loc} : C(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow \mathcal{X}_h$ ικανοποιεί

$$\mathbf{P}_h^{loc} w \in \mathcal{X}_h \text{ και } (\mathbf{P}_h^{loc} w)|_{(t^{n-1}, t^n]} = \mathbf{P}_h^{loc}(w|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

Λήμμα 5. Έστω $X_h \subset H^1(\Omega)$, και \mathbf{P}_h^{loc} ορίζεται στους ορισμούς 1 αντίστοιχα. Τότε, για κάθε $w \in L^2(0, T; H^{l+1}(\Omega)) \cap H^{k+1}(0, T; L^2(\Omega))$ υπάρχει σταθερά $C \geq 0$ ανεξάρτητη του h, τ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \|w - \mathbf{P}_h^{loc} w\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} &\leq C(h^{l+1} \|w\|_{L^2(0, T; H^{l+1}(\Omega))} + \tau^{k+1} \|w^{(k+1)}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}), \\ \|w - \mathbf{P}_h^{loc} w\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} &\leq C(h^l \|w\|_{L^2(0, T; H^{l+1}(\Omega))} + \tau^{k+1} \|w^{(k+1)}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη περιέχεται αναλυτικά στο [17]. \square

Ο στόχος είναι να εκτιμήσουμε τα σφάλματα των E_{up}, E_{vp} με την βοήθεια των $u - \mathbf{P}_h^{loc} u, v - \mathbf{P}_h^{loc} v$, δηλαδή με την βοήθεια των εκτιμήσεων του Λήμματος 5 ακολουθώντας την τεχνική του [14]. Επισημαίνεται πως ο ορισμός των U_p, V_p επιτρέπει την αναγωγή των αποτελεσμάτων για τα σφάλματα E_{up}, E_{vp} στις τεχνικές του [15, 14].

Θεώρημα 7. Έστω $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, και $u, v \in W(0, T)$ οι λύσεις των (5.0.1)-(5.0.2) και $U_p, V_p \in \mathcal{X}_h$ λύσεις των (4.2.1)- (4.2.2) αντίστοιχα. Έστω $E_{up} = U_p - u, E_{vp} = V_p - v$. Συμβολίζουμε με E_{up}^{loc} και E_{vp}^{loc} , $E_{up}^{loc} \equiv \mathbf{P}_h^{loc} u - u, E_{vp}^{loc} \equiv \mathbf{P}_h^{loc} v - v$ αντιστοίχως. Αν, $E_{up1}^{loc} \equiv U_p - \mathbf{P}_h^{loc} u, E_{vp1}^{loc} \equiv V_p - \mathbf{P}_h^{loc} v$ τότε, υπάρχει μια αλγεβρική σταθερά C και μία σταθερά $C_k > 0$ που εξαρτάται από τη σταθερά του **Λήμματος 2** ώστε:

$$\begin{aligned} 1) \quad & d_1 \|\nabla E_{up1}^{loc}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|[E_{up1}^{loc(n)}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{up1}^{loc(N)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C(\|E_{up1}^{loc(0)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \|\nabla E_{up}^{loc}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2), \\ 2) \quad & d_2 \|\nabla E_{vp1}^{loc}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|[E_{vp1}^{loc(n)}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vp1}^{loc(N)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C(\|E_{vp1}^{loc(0)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \|\nabla E_{vp}^{loc}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2), \\ 3) \quad & \|E_{up1}^{loc}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C_k(\|E_{up1}^{loc0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \|\nabla E_{up}^{loc}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2), \\ 4) \quad & \|E_{vp1}^{loc}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C_k(\|E_{vp1}^{loc0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \|\nabla E_{vp}^{loc}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη περιλαμβάνεται στο [15], τροποποιώντας την κατάλληλα για την χρήση συνοριακών συνθηκών Neumann. Για πληρότητα περιλαμβάνουμε τα βασικά βήματα. Η ορθογωνιότητα Galerkin γράφεται ως:

$$\begin{aligned} & (E_{up}^n, W_h^n) - (E_{up}^{n-1}, W_{h+}^{n-1}) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up}, W_{ht}) ds \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up}, \nabla W_h) ds = 0. \end{aligned} \quad (5.0.13)$$

Αντικαθιστώντας τώρα $E_{up} = E_{up1}^{loc} + E_{up}^{loc}$ στην προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & (E_{up1}^{loc(n)}, W_h^n) + (E_{up}^{loc(n)}, W_h^n) - (E_{up1}^{loc(n-1)}, W_{h+}^{n-1}) - (E_{up}^{loc(n-1)}, W_{h+}^{n-1}) \\ & - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up}, W_{ht}) ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up1}^{loc}, \nabla W_h) ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up}^{loc}, \nabla W_h) ds = 0. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως χρησιμοποιώντας την τοπική προβολή έχουμε $(E_{up}^{loc(n)}, W_h^n) = 0$ και $(E_{up}^{loc(n-1)}, W_{h+}^{n-1})$ και επειδή, $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up}^{loc}, W_{ht}) ds = 0$ λαμβάνουμε:

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up}, W_{ht}) ds = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up1}^{loc}, W_{ht}) ds.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} & (E_{up1}^{loc(n)}, W_h^n) - (E_{up1}^{loc(n-1)}, W_{h+}^{n-1}) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up1}^{loc}, W_{ht}) ds \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up1}^{loc}, \nabla W_h) ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up}^{loc}, \nabla W_h) ds = 0. \end{aligned} \quad (5.0.14)$$

Στην πιο πάνω ανισότητα αντικαθιστούμε $W_h = 2E_{up1}^{loc}$ στο (5.0.14) έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} & 2\|E_{up1}^{loc(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(E_{up1}^{loc(n-1)}, E_{up1+}^{loc(n-1)}) - \|E_{up1}^{loc(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{up1+}^{loc(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} 2d_1(\nabla E_{up1}^{loc}, \nabla E_{up1}^{loc}) ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} 2d_1(\nabla E_{up}^{loc}, \nabla E_{up1}^{loc}) ds = 0. \end{aligned} \quad (5.0.15)$$

Απο την πιο πάνω ανισότητα (5.0.15) και τετριμένες αλγεβρικές πράξεις λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & \|E_{up1}^{loc(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|E_{up1}^{loc(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[E_{up1}^{loc(n-1)}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + d_1\|\nabla E_{up1}^{loc}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 \leq d_1\|\nabla E_{up}^{loc}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (5.0.16)$$

Αθροίζοντας το παραπάνω σχήμα (5.0.16) από $n = 1$ σε $n = N$ λαμβάνουμε την ζητούμενη εκτίμηση. Η δεύτερη ανισότητα του θεωρήματος αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Η απόδειξη της τρίτης και της τέταρτης εκτίμησης γίνεται εφαρμόζοντας την τεχνική του [15] και τα αποτελέσματα της πρώτης και δεύτερης ανισότητας του Θεωρήματος 2. \square

Η παραπάνω εκτίμηση της καλύτερης προσέγγισης "*best approximation estimate*", δηλώνει ότι το σφάλμα είναι τόσο καλό όσο επιτρέπει η θεωρία προσέγγισης και κανονικότητας. Για παράδειγμα, τα σφάλματα E_{up} και E_{vp} αναλύονται σε τοπικά σφάλματα προσέγγισης μέσω των τοπικών ασυνεχών προβολών *Galerkin* που ορίζονται στον ορισμό 1.

Αυτή η προβολή παρουσιάζει τις καλύτερες ιδιότητες προσέγγισης και είναι βέλτιστη. Για να υπολογιστούν τα σφάλματα $E_u = U_h - u$, $E_v = V_h - v$ απομένει να φράξουμε τα $E_{uh} \equiv U_h - U_p$ και $E_{vh} \equiv V_h - V_p$ και $E_u = U_h - u$, $E_v = V_h - v$ από τα $E_{up} = U_p - u$, $E_{vp} = V_p - v$. Με αυτό τον τρόπο θα εξασφαλίσουμε πως το τελικό σφάλμα $E_u = U_h - u$, $E_v = V_h - v$ θα φράσσεται μέσω του Θεωρήματος 7, από τις κλασικές προβολές που ορίζονται στον ορισμό 1 οι οποίες δίνουν ιδιότητες βέλτιστης προσέγγισης διότι είναι βέλτιστες σε όρους της διαθέσιμης κανονικότητας. Τώρα θέτουμε ως *test functions* E_{uh} και E_{vh} στις εξισώσεις (5.0.11) και (5.0.12), λαμβάνοντας:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla(U_h - U_p)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| \langle U_h(1 - |U_h| - u(1 - |u|)), E_{uh} \rangle \right| ds + \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| \langle V_h h(aU_h) - v h(au), E_{uh} \rangle \right| ds + \frac{1}{2} \|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (5.0.17)$$

και

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| \langle b v h(au) - b V_h h(aU_h), E_{vh} \rangle \right| ds - c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (5.0.18)$$

Απομένει να φράξουμε με κατάλληλο τρόπο τους μη-γραμμικούς όρους. Για το λόγο αυτό, στο επόμενο Λήμμα παραθέτουμε ιδιότητες *Lipschitz* για τις μη γραμμικούς όρους των συναρτησοειδών.

Λήμμα 6. Υπάρχει σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από την παράμετρο $a > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$|v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq |v_1 - v_2| + C|v_2||u_1 - u_2| \quad (5.0.19)$$

όταν το $h(\cdot)$ ορίζεται από την (1.1.2)

$$|v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq |v_1 - v_2| + C|v_2|(1 + |u_2|)|u_1 - u_2| \quad (5.0.20)$$

όταν το $h(\cdot)$ ορίζεται από την (1.1.3)

$$|v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq |v_1 - v_2| + C|v_2|(1 + |u_1 + u_2|)|u_1 - u_2| \quad (5.0.21)$$

όταν το $h(\cdot)$ ορίζεται από την (1.1.4).

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την ανισότητα,

$$\begin{aligned} |v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| &= |v_1 h(au_1) - v_2 h(au_1) + v_2 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq \\ &\leq |h(au_1)||v_1 - v_2| + |v_2||h(au_2) - h(au_1)| \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως $|h(au_1)| \leq 1$ και στις τρεις περιπτώσεις λαμβάνουμε,

$$|v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq |v_1 - v_2| + |v_2| |h(au_2) - h(au_1)|. \quad (5.0.22)$$

Στη περίπτωση που ισχύει η (1.1.2) δηλαδή, $h(u) = 1 - e^{-|au|}$ χρησιμοποιώντας ανισότητα $e^{-x} \geq 1 - x, x \in \mathbb{R}, x > 0$, έχουμε $|u_1| \leq |u_2|$,

$$\begin{aligned} |1 - e^{-a|u_1|} - 1 + e^{-a|u_2|}| &= |e^{-a|u_1|} - e^{-a|u_2|}| \\ &= e^{-a|u_1|} (1 - e^{a(|u_1| - |u_2|)}) \leq e^{-a|u_1|} (1 - e^{-a(|u_2| - |u_1|)}) \\ &\leq e^{-a|u_1|} a(|u_2| - |u_1|) \leq a|u_2 - u_1| \end{aligned} \quad (5.0.23)$$

Αντίστοιχα με παρόμοιο τρόπο για $|u_2| < |u_1|$ λαμβάνουμε το ζητούμενο.

Στη περίπτωση που ισχύει η (1.1.3) δηλαδή, $h(au) = \frac{au}{1+a|u|}, a > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{au_1}{1+a|u_1|} - \frac{au_2}{1+a|u_2|} \right| &\leq \left| \frac{au_1(1+a|u_2|) - au_2(1+a|u_1|)}{(1+a|u_1|)(1+a|u_2|)} \right| \\ &\leq |au_1(1+a|u_2|) - au_2(1+a|u_1|)| \\ &= |au_1 + a^2 u_1 |u_2| - au_2 - a^2 u_2 |u_1|| \\ &\leq |a||u_1 - u_2| + a^2 (|u_2||u_1 - u_2| + |u_2| ||u_2| - |u_1||) \\ &\leq |a||u_1 - u_2| + 2a^2 |u_2| |u_1 - u_2|. \end{aligned} \quad (5.0.24)$$

Στη περίπτωση που ισχύει η (1.1.4) δηλαδή, $h(au) = \frac{au^2}{1+au^2}, a > 0$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \left| \frac{au_1^2}{1+au_1^2} - \frac{au_2^2}{1+au_2^2} \right| &\leq \frac{au_1^2(1+au_2^2) - au_2^2(1+au_1^2)}{(1+au_1^2)(1+au_2^2)} \\ &\leq |au_1^2(1+au_2^2) - au_2^2(1+au_1^2)| \leq |a(u_1^2 - u_2^2)| \\ &\leq |a(u_1 + u_2)(u_1 - u_2)| \leq C|u_1 + u_2||u_1 - u_2|. \end{aligned} \quad (5.0.25)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις (5.0.23), (5.0.24) και (5.0.25) στην (5.0.22) λαμβάνουμε το ζητούμενο. \square

Παρατήρηση 2. Η πρώτη περίπτωση είναι η απλούστερη καθώς η συνάρτηση είναι *Lip-schitz*. Για τις άλλες δύο περιπτώσεις, επισημαίνουμε πως η εφαρμογή των σχέσεων θα γίνει για $u_1 = U_h, u_2 = u, v_1 = V_h, v_2 = v$, επομένως αν θεωρήσουμε πως η $u, v \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ τότε οι περιπτώσεις που σχετίζονται με τα συναρτησοειδή (1.1.3) και (1.1.4) είναι παρόμοιες και δυσκολότερες από την περίπτωση (1.1.2). Συνοψίζοντας η χειρότερη κατάσταση, που αφορά τα συναρτησοειδή (1.1.3) και (1.1.4), γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} |V_h h(aU_h) - v h(au)| &\leq |V_h - v| + C|v|(1 + |U_h + u|)|U_h - u| \\ &\leq |V_h - v| + C|U_h||U_h - u|, \end{aligned} \quad (5.0.26)$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από $\|u\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))}, \|v\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))}$ και το $a > 0$.

Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την απόδειξη σφάλματος στην δυσκολότερη περίπτωση, χρησιμοποιώντας την σχέση (5.0.26). Για την απόδειξη, θα χρειαστούμε το ακόλουθο βοηθητικό Λήμμα το οποίο φράζει τις $L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))$ νόρμες, τοπικά στον χρόνο.

Λήμμα 7. Υποθέτουμε ότι $u, v \in W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ και ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 ισχύουν. Τότε ισχύει η εκτίμηση,

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\ & \leq \left(C_k \tau_n \left(\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left((1+d_1)\|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1+d_2)\|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) ds \right. \\ & \quad \left. + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \right). \end{aligned} \quad (5.0.27)$$

όπου συμβολίζουμε με $E_{uh} \equiv U_h - U_p$, $E_{vh} \equiv V_h - V_p$ και $E_{up} = U_p - u$, $E_{vp} = V_p - v$. Η σταθερά C_k εξαρτάται από την σταθερά του Λήμματος 4, την c και τις σταθερές ευστάθειας του Θεωρήματος 1.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε πως για την ορθογωνιότητα (5.0.11),(5.0.12): $\forall n = 1, \dots, N$, $\forall w_h \in \mathcal{X}_h$ ισχύει,

$$\begin{aligned} & \langle E_{uh}^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle E_{uh}, w_{ht} \rangle + d_1 a(E_{uh}, w_h) \right. \\ & \quad \left. + \langle U_h(1 - |U_h|) - u(1 - |u|), w_h \rangle + \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle \right) ds \\ & = \langle E_{uh}^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle, \end{aligned} \quad (5.0.28)$$

$$\begin{aligned} & \langle E_{vh}^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(-\langle E_{vh}, w_{ht} \rangle + d_2 a(E_{vh}, w_h) \right) ds + \\ & \quad + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle E_{vh}, w_h \rangle ds = \langle E_{vh}^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \\ & \quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} b \langle v h(au) - V_h h(aU_h), w_h \rangle ds. \end{aligned} \quad (5.0.29)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο χρόνο, θέτοντας ως test function $w_h = \phi Z_h$, $\phi \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n]$, $\forall Z_h \in X_h$, με ϕ κατασκευασμένη όπως στο Λήμμα 1, και δουλεύοντας με

παρόμοιο τρόπο όπως στο Λήμμα 4, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
(E_{uh}(t) - E_{uh}^{n-1}, Z_h) &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1 |(\nabla E_{uh}, \phi \nabla Z_h)| ds \\
&\quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(vh(au) - V_h h(aU_h), \phi Z_h)| ds \\
&\quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(u(1 - |u|) - U_h(1 - |U_h|), \phi Z_h)| ds, \tag{5.0.30}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
(E_{vh}(t) - E_{vh}^{n-1}, Z_h) &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_2 |(\nabla E_{vh}, \phi \nabla Z_h)| ds + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{vh}, \phi Z_h) ds \\
&\quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} b |(vh(au) - V_h h(aU_h), \phi Z_h)| ds. \tag{5.0.31}
\end{aligned}$$

Θα φράξουμε τους συζευγμένους όρους με την βοήθεια της (5.0.26), την ανισότητα Hölder, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \leq C_k$, από το Λήμμα 4,

$$\begin{aligned}
I_{11} &:= \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(V_h h(|aU_h|) - vh(|au|), Z_h \phi)| ds \\
&\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} (|V_h - v| + C|U_h||U_h - h|) |Z_h| |\phi| dx ds \\
&\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h - v\|_{L^2(\Omega)} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \\
&\quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} C \|U_h\|_{L^2(\Omega)} \|U_h - u\|_{L^4(\Omega)} \|Z_h\|_{L^4(\Omega)} \|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} ds \\
&\leq C_k \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{vh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \\
&\quad + C_k \|U_h\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \|Z_h\|_{H^1(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega))}. \tag{5.0.32}
\end{aligned}$$

Επισημαίνουμε πως στην παραπάνω ανισότητα, έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι το $Z_h \in X_h$ είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Με παρόμοιο τρόπο για τον δεύτερο (μη-γραμμικό)

όρο σύζευξης, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| (u(1 - |u|) - U_h(1 - |U_h|)), \phi Z_h \right| ds \\
&\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} |u - U_h| |\phi| |Z_h| dx ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} |u - U_h| (|u| + |U_h|) |\phi| |Z_h| dx ds \\
&\leq \|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \|Z_h\|_{L^4(\Omega)} \|u + U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \tau_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^4(\Omega))} \\
&\leq C_k \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \\
&\quad + C_k \|Z_h\|_{H^1(\Omega)} \|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \tau_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega))}. \tag{5.0.33}
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην (5.0.30), και αντικαθιστώντας τις (5.0.32), (5.0.33), και χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του Θεωρήματος 1 για την $\|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \leq C$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
(E_{uh}(t) - E_{uh}^{n-1}, Z_h) &\leq C_k d_1 \|\nabla E_{uh}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \tau_n^{1/2} \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_k \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{vh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \\
&\quad + C_k \|Z_h\|_{H^1(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{up}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega))}. \tag{5.0.34}
\end{aligned}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $z_h = E_{uh}(t)$ και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο στο διάστημα (t^{n-1}, t^n) , ακολουθώντας ακριβώς την ίδια τεχνική με Θεώρημα 1, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
&\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
&\leq C_k \left(\tau_n \|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left((1 + d_1) \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \right). \tag{5.0.35}
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην (5.0.31), και αντικαθιστώντας την (5.0.32) και χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του Θεωρήματος 1 για την $\|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \leq C$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
(E_{vh}(t) - E_{vh}^{n-1}, Z_h) &\leq C_k d_2 \|\nabla E_{vh}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \tau_n^{1/2} \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_k \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{vh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \\
&\quad + C_k \|Z_h\|_{H^1(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{up}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega))}. \tag{5.0.36}
\end{aligned}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $z_h = E_{vh}(t)$ και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο στο

διάστημα (t^{n-1}, t^n) , ακολουθώντας ακριβώς την ίδια τεχνική με Θεώρημα 1, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq C_k \left(\tau_n \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left((1+d_2) \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \right. \\
& \quad \left. + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) ds \right). \tag{5.0.37}
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις, (5.0.35) και (5.0.37), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
& \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq C_k \left(\tau_n \left(\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left((1+d_1) \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1+d_2) \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) ds \right. \\
& \quad \left. + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \right). \tag{5.0.38}
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση είναι η ζητούμενη. \square

Λήμμα 8. Έστω $u_0, v_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ και $u, v \in W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$. Επιπλέον έστω ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 ισχύουν. Ορίζουμε $\mathbf{C} = \max\{1 + \frac{1}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_1}, 1 + \frac{c}{2}\}$ και υποθέτουμε ότι το βήμα τ ικανοποιεί, $\mathbf{C}(1+d_1)\tau_n \leq \frac{d_1}{8}$, $\mathbf{C}(1+d_2)\tau_n \leq \frac{d_2}{4}$. Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}
& (1/2) \|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{8} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + (1/2) \|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_2}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq \tilde{\mathbf{C}} \left(\frac{1}{d_1} \int_0^T \|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right. \\
& \quad \left. + \tau_n \int_0^T \left(\|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \right. \\
& \quad \left. + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \right). \tag{5.0.39}
\end{aligned}$$

όπου η σταθερά $\tilde{\mathbf{C}}$ εξαρτάται από την σταθερά \mathbf{C} και την σταθερά C_k .

Απόδειξη. Θέτοντας $w_h = E_{uh}$, στην (5.0.11) και χρησιμοποιώντας την (5.0.26),

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq (1/2)\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} |u - U_h| |u + U_h| |E_{uh}| dx ds \\
& \quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} (|v - V_h| + C|U_h| |u - U_h|) |E_{uh}| dx ds \\
& \leq (1/2)\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)} \|E_{uh} + E_{up}\|_{L^4(\Omega)} \|E_{uh}\|_{L^4(\Omega)} ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh} + E_{vp}\|_{L^2(\Omega)} \|E_{uh} + E_{up}\|_{L^2(\Omega)} ds \\
& \leq (1/2)\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + C \|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{uh}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|E_{uh}\|_{L^4(\Omega)} \|E_{up}\|_{L^4(\Omega)} \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \leq (1/2)\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + C \|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)} \|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)} + \|E_{uh}\|_{L^4(\Omega)} \|E_{up}\|_{L^4(\Omega)} \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds
\end{aligned}$$

Όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Προσθέτοντας στο δεξί και το αριστερό μέρος της παραπάνω ανισότητας $d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$ ώστε να δημιουργηθεί η νόρμα $d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds$, παρατηρώντας πως $\|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \leq C$ από θεώρημα 1, και χρησιμοποιώντας ανισότητα Young με κατάλληλες σταθερές, λαμβιά-

νοουμε,

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \frac{1}{2}\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\left(1 + \frac{1}{d_1}\right) \|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq (1/2)\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\left(1 + \frac{1}{d_1}\right) \|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \tag{5.0.40}
\end{aligned}$$

Απομένει να φράξουμε με ανάλογο τρόπο το E_{vh} . Θέτοντας $w_h = E_{vh}$ στην (5.0.12) και χρησιμοποιώντας την (5.0.26) λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2}\|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq \frac{1}{2}\|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} (|v - V_h| + C|U_h||u - U_h|) |E_{vh}| dx ds \\
& \leq \frac{1}{2}\|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \frac{c}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{b^2}{c} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + C\|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{L^4(\Omega)} \|E_{vh}\|_{L^4(\Omega)} ds. \tag{5.0.41}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά το θεώρημα 1, προσθέτοντας $d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$ στο δεξί και το

αριστερό μέρος, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq \frac{1}{2} \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \frac{c}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{b^2}{c} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + \frac{d_2}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{C}{d_2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{L^4(\Omega)}^2 ds. \tag{5.0.42}
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την συνεχή ενσφήνωση $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ καθώς και ανισότητα Young με κατάλληλη σταθερά. Επομένως απο τη (5.0.42) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_2}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq \frac{1}{2} \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \frac{c}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{b^2}{c} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + \frac{C}{d_2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{L^4(\Omega)}^2 ds. \tag{5.0.43}
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια προσθέτουμε τις (5.0.40) , (5.0.43) και λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& (1/2) \|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + (1/2) \|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_2}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq (1/2) \left(\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\left(1 + \frac{1}{d_1}\right) \|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{c}{2}\right) \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + \frac{C}{d_2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{L^4(\Omega)}^2 ds. \tag{5.0.44}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας άλλη μία φορά, την ανισότητα $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, και την ανι-

σότητα Young με κατάλληλη σταθερά, από τη (5.0.47) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + (1/2)\|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_2}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2}\|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq (1/2) \left(\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\left(1 + \frac{1}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_1}\right) \|E_{uh}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{c}{2}\right) \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds. \tag{5.0.45}
\end{aligned}$$

Θα αντικαταστήσουμε την εκτίμηση του Λήμματος 7, για τις νόρμες $\|E_{uh}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2$ $\|E_{vh}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2$ και θα λάβουμε, για

$$\mathbf{C} = \max\left\{1 + \frac{1}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_1}, 1 + \frac{c}{2}\right\},$$

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + (1/2)\|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_2}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2}\|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq (1/2) \left(\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + \mathbf{C} \left(C_k \tau_n \left(\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\
& \quad + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left((1 + d_1) \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1 + d_2) \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad \left. + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds. \tag{5.0.46}
\end{aligned}$$

Επομένως επιλέγοντας, τ_n τέτοιο ώστε, $\mathbf{C}(1 + d_1)\tau_n \leq \frac{d_1}{8}$, $\mathbf{C}(1 + d_2)\tau_n \leq \frac{d_2}{4}$, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_1}{8} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{uh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + (1/2)\|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d_2}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2}\|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq ((1/2) + \mathbf{C}C_k\tau_n) \left(\|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + \mathbf{C}\tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
& \quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(\|E_{up}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \|E_{vp}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds. \tag{5.0.47}
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Discrete Gronwall Lemma ολοκληρώνεται η απόδειξη αφού παρατηρήσουμε πως $E_{uh}^0 = 0 = E_{vh}^0$, \square

Τα ακόλουθα παραδείγματα επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας παραδείγματα που είναι γραμμένα σε *Freefem++*.

6 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας το ελεύθερο λογισμικό *Freefem++*, (www.freefem.org). Στόχος μας, είναι να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα. Κύρια έμφαση δίνεται στην ύπαρξη διαφορετικών σταθερών διάχυσης. Στα παραδείγματα συμβολίζουμε με $U_h = u_1, V_h = u_2$. Σε όλα τα παραδείγματα εκτός του τελευταίου συμβολίζουμε τις αρχικές τιμές $U_h(0, x) = u_0, V_h(0, x) = v_0$ ενώ το χρονικό διάστημα είναι το $[0, 1]$.

Παράδειγμα 1. Στο πρώτο παράδειγμα, εξετάζουμε το σύστημα *predator prey* με *Ivlev functional response*.

Επιλέγουμε σταθερές $c = 1, b = 1$ και σταθερές τιμές διάχυσης $d_1 = 1, d_2 = 0,0001$ όπου d_1 , ο συντελεστής του u_1 και d_2 , ο συντελεστής του u_2 .

Στο παράδειγμα αυτό, χρησιμοποιούμε ως ακριβείς λύσεις:

$$u_1 = e^{2m_1 t} \sin(2k\pi x) \sin(2k\pi y) + cc$$

και

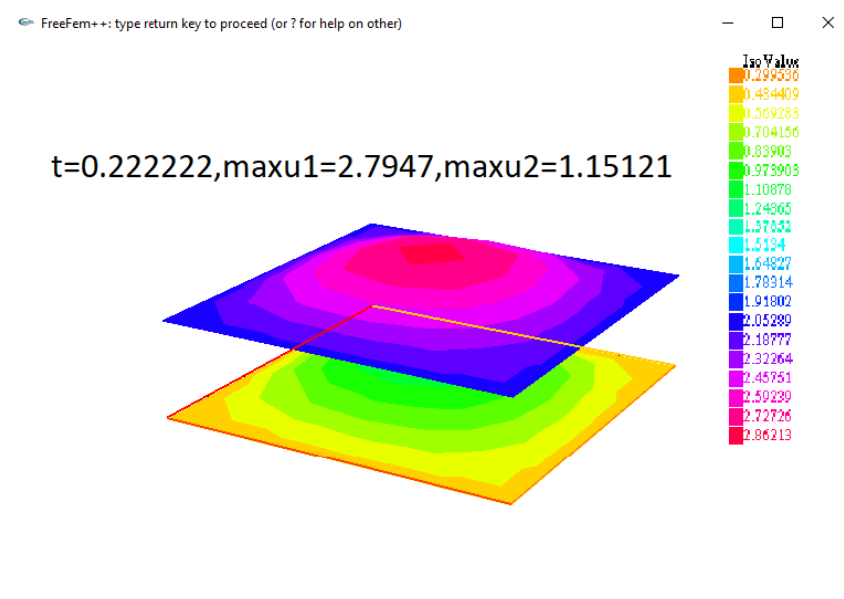
$$u_2 = e^{2rt} \sin(2m\pi x) \sin(2m\pi y) + cc_1$$

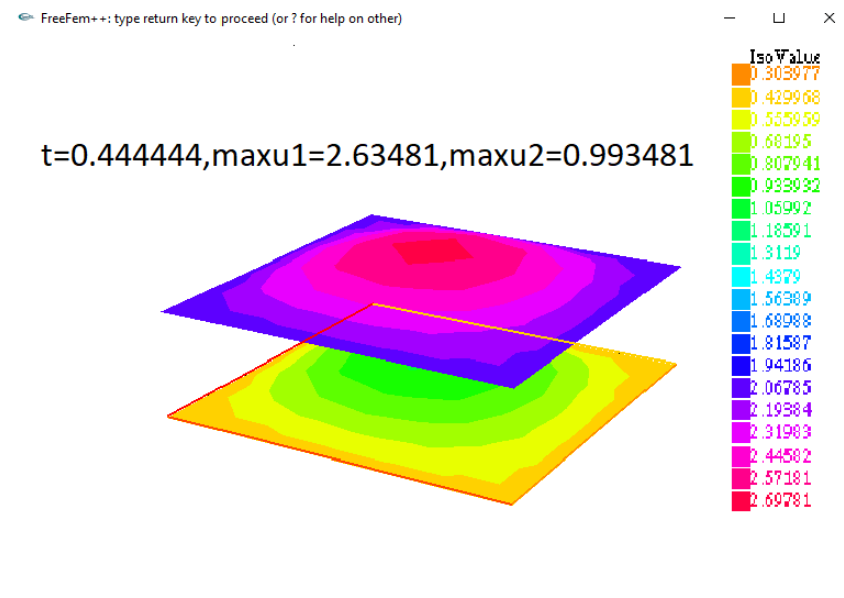
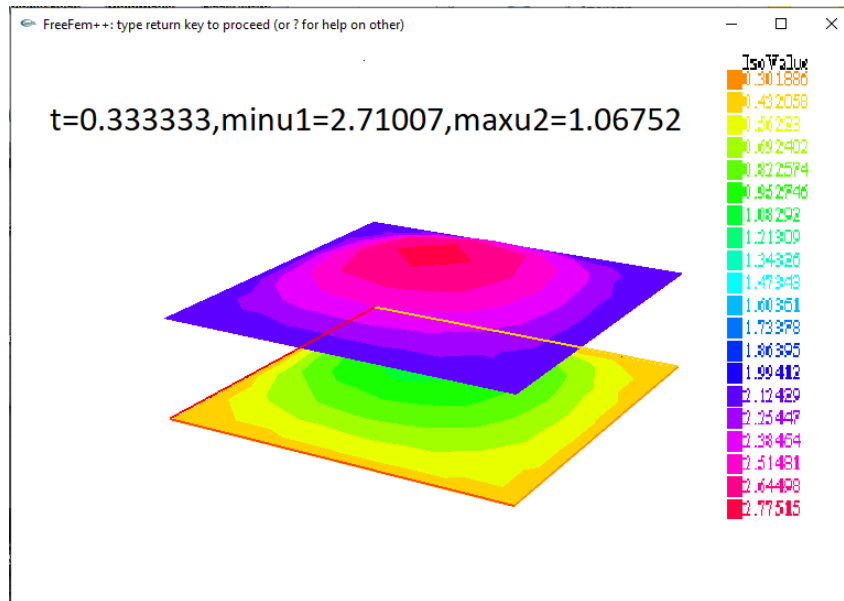
όπου $m_1 = -\frac{1}{2}, k = \frac{1}{2}, cc = 2$ για την λύση u_1 , ενώ για τη u_2 επιλέγουμε $r = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}, cc_1 = \frac{2}{5.45}$. Είναι σαφές, πως η κλασική θεωρία ομαλών λύσεων συστημάτων αυτής της μορφής, αναφέρεται σε λύσεις που παραμένουν φραγμένες σημειακά, δηλαδή αναμένεται πως $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}$, νόρμες των u_1, u_2 παραμένουν φραγμένες.

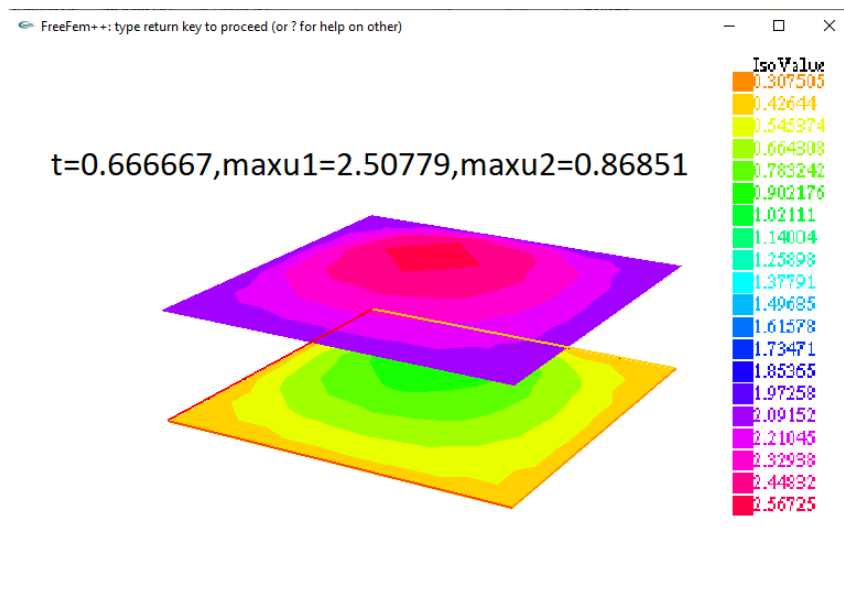
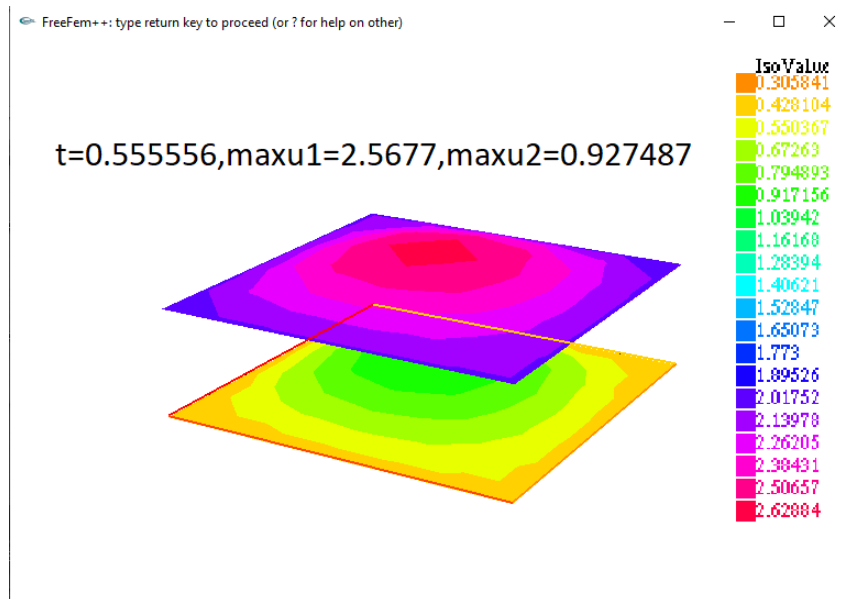
Χρησιμοποιώντας το $dG(0)$ σχήμα, σε συνδυασμό με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται, οι ποσότητες $\max_{x \in \Omega, t \in [0,1]} u_1(t, x) := \max u_1$, $\max_{x \in \Omega, t \in [0,1]} u_2(t, x) := \max u_2$ παραμένουν φραγμένες όπως αυτό απεικονίζεται και στις γραφικές παραστάσεις. Ο παρακάτω πίνακας των αριθμητικών αποτελεσμάτων επαληθεύει τη θεωρία.

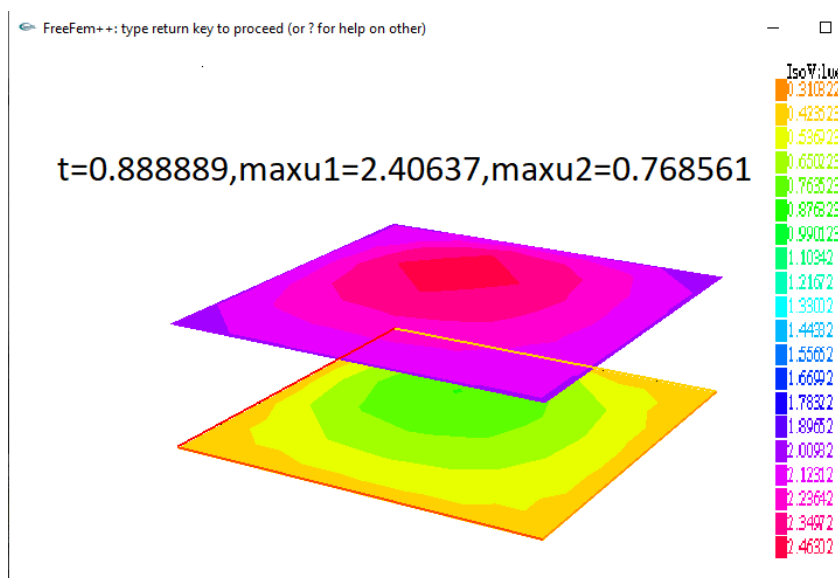
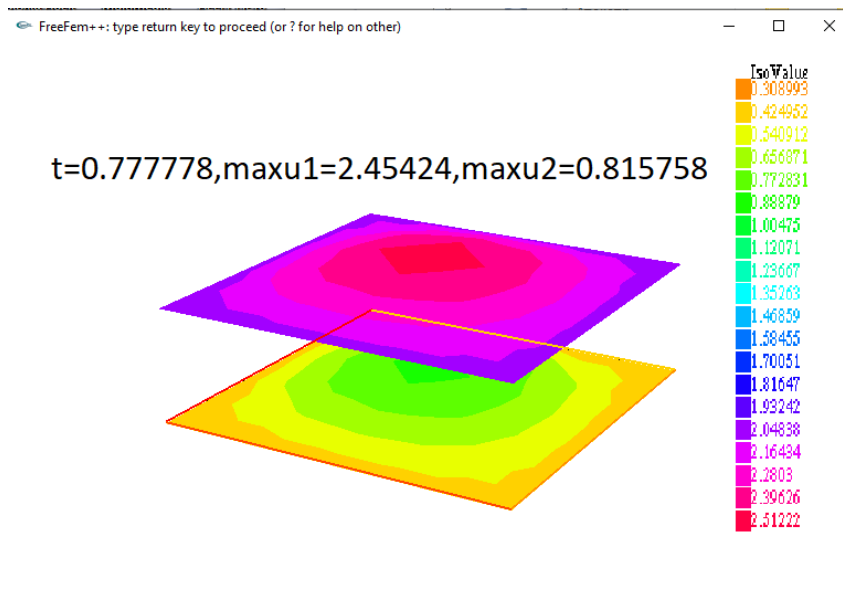
Πράγματι για

$t = 0.2222222, \max u_1 = 2.7947, \max u_2 = 1.15121$
 $t = 0.3333333, \max u_1 = 2.71007, \max u_2 = 1.06752$
 $t = 0.4444444, \max u_1 = 2.63481, \max u_2 = 0.99348$
 $t = 0.5555556, \max u_1 = 2.5677, \max u_2 = 0.927487$
 $t = 0.6666667, \max u_1 = 2.50779, \max u_2 = 0.86851$
 $t = 0.7777778, \max u_1 = 2.45424, \max u_2 = 0.81576$
 $t = 0.8888889, \max u_1 = 2.40637, \max u_2 = 0.76856$



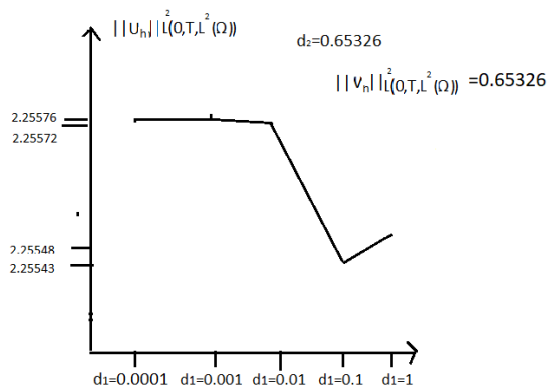




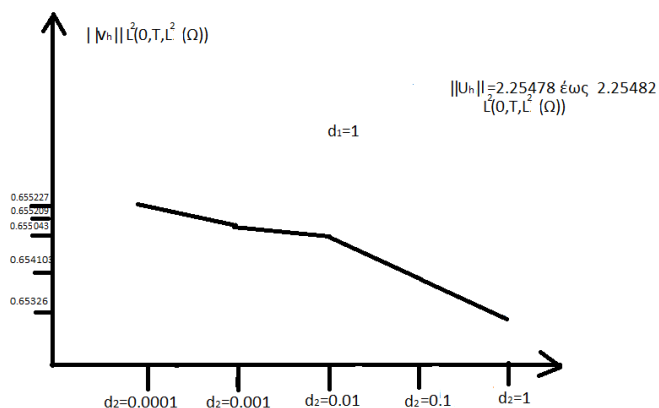


Στο παράδειγμα 1 είδαμε πως μεταβάλλονται οι τιμές $\max u_1, \max u_2$ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Παράδειγμα 2. Στο παράδειγμα αυτό θα επαληθεύσουμε ότι οι u_1, u_2 , δηλαδή οι προσεγγιστικές τιμές των u, v είναι ανεξάρτητες από τις σταθερές διάχυσης στην $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ νόρμα ακόμα και όταν έχουμε μικρές τιμές των συντελεστών διάχυσης $0 < d_1, d_2 \leq 1$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ίδιες αρχικές συνθήκες με αυτές του παραδείγματος 1, αλλά για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου d_2 , για σταθερό d_1 και μια δεδομένη χρονική στιγμή t_k , έχουμε:



Σχήμα 1: Γραφική Παράσταση που δείχνει ότι όταν οι σταθερές διάχυσης παίρνουν τιμές μεταξύ του 0 και του 1, δεν επηρεάζουν ουσιαστικά την νόρμα της προσεγγιστικής λύσης



Σχήμα 2: Γραφική Παράσταση που δείχνει ότι η σταθερά διάχυσης για μικρές τιμές μεταξύ 0 και 1, δεν επηρεάζουν ουσιαστικά την νόρμα

$$\|U_h\|_{L^2(t^0, T, L^2(\Omega))}$$

Το παραπάνω παράδειγμα είναι απολύτως συμβατό με τις εκτιμήσεις ευστάθειας που προηγήθηκαν στο κεφάλαιο 3.

Παράδειγμα 3. Στο παράδειγμα αυτό, υπολογίζουμε εκτιμήσεις σφαλμάτων για το σύστημα κνηγού-θηράματος (1.1.1)-(1.1.2) στις δύο διαστάσεις όταν έχουμε συναρτησοειδές Iv_{lev}

$$h(u_1, u_2) = u_2(1 - \exp(-|u_1|)).$$

Αναμένουμε ότι η τάξη ακρίβειας των εκτιμήσεων σφαλμάτων στην περίπτωση που $\tau \approx h^2$, θα είναι της μορφής $\|E_u\|_{L^2(L^2)} + \|E_v\|_{L^2(L^2)} = O(h^2)$ και $\|E_u\|_{L^2(H^1)} + \|E_v\|_{L^2(H^1)} = O(h)$. Ο ακόλουθος πίνακας επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα που περιμένουμε.

| Υπολογισμός σφάλματος - Πίνακας 1 | | |
|-----------------------------------|---|---|
| $t = 2h^2$ | $\ E_u\ _{L^2(L^2)} + \ E_v\ _{L^2(L^2)}$ | $\ E_u\ _{L^2(H^1)} + \ E_v\ _{L^2(H^1)}$ |
| $h = 0.235702$ | 0.00278302 | 0.0405856 |
| $h = 0.117851$ | 0.00078813 | 0.0206881 |
| $h = 0.0589256$ | 0.000206398 | 0.0101263 |
| $h = 0.0294628$ | 5.21871e-005 | 0.00501671 |
| $h = 0.0147314$ | 1.30849e-006 | 0.00250152 |
| Τάξη σύγκλισης | 1.93315 | 1.005023495 |

Στο παραπάνω παράδειγμα χρησιμοποιούμε κατα τμήματα γραμμικά πολυώνυμα ως προς το χώρο P_1 και σταθερά ως προς το χρόνο.

Σύμφωνα με τη θεωρία για $t = 2h^2$ η τάξη σύγκλισης $\|E_u\|_{L^2(L^2)} + \|E_v\|_{L^2(L^2)}$ θα πρέπει να είναι 1

ενώ η τάξη σύγκλισης $\|E_u\|_{L^2(H^1)} + \|E_v\|_{L^2(H^1)}$ είναι 2.

Πράγματι παρατηρούμε ότι στο παραπάνω παράδειγμα ότι η τάξη σύγκλισης της $\|E_u\|_{L^2(L^2)} + \|E_v\|_{L^2(L^2)}$ είναι 1.93315 (κοντά στο 2) ενώ η τάξη σύγκλισης $\|E_u\|_{L^2(H^1)} + \|E_v\|_{L^2(H^1)}$ είναι 1.005023495 (κοντά στο 1).

Παράδειγμα 4. Το παράδειγμα αυτό, αφορά το σύστημα κυνηγού-θηράματος, σε ένα τρισδιάστατο μοναδιαίο κύβο χρησιμοποιώντας ως ακριβείς λύσεις

$$u1_{exact} = c_{11}e^{-tc_1} \sin(2\pi r y)(\cos(2\pi l x) - 1)(\cos(2\pi n z) - 1)$$

$$u2_{exact} = c_{12}e^{c_2 \sin(ct)} \sin(2\pi r x) \sin(2\pi l y)(\cos(2\pi n z) - 1)$$

όπου $c_{11} = c_{12} = 1, c_1 = c_2 = cl = 1$ με $h(u) = 1 - e^{-|u|}$

Επισημαίνεται πως και στις τρεις διαστάσεις περιμένουμε για τις νόρμες σφαλμάτων

$$\|E_u\|_{L^2(L^2)} + \|E_v\|_{L^2(L^2)} = O(h^2).$$

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία για γραμμικά

παραβολικά προβλήματα αναμένεται πως στους χρονικούς κόμβους εμφανίζεται

$$\|E_u\|_{L^\infty(L^2)} + \|E_v\|_{L^\infty(L^2)} = O(h^4)$$

Τα ακόλουθα παραδείγματα μας δείχνουν αριθμητικά αποτελέσματα που επαληθεύουν την

αναμενόμενη αυξημένη τάξη ακρίβειας στους χρονικούς κόμβους. Ιδιότητες

υπερσύγκλισης σχημάτων αυτών, θα εξεταστούν αναλυτικά σε επόμενη εργασία.

| Υπολογισμός σφάλματος στις 3 διαστάσεις Πίνακας 2 | | |
|---|---|---|
| $dt = 2 * h^2$ | $\ E_u\ _{L^\infty(L^2)} + \ E_v\ _{L^\infty(L^2)}$ | $\ E_u\ _{L^2(L^2)} + \ E_v\ _{L^2(L^2)}$ |
| $h = 0.235702$ | 0.064143 | 0.00686593 |
| $h = 0.117851$ | 0.0173715 | 0.000489076 |
| $h = 0.0589256$ | 0.00423513 | $2.87675 * 10^{-5}$ |
| Τάξης σύγκλισης | 3,949435 | 1,940405 |

Σε αυτό το παράδειγμα βρήκαμε τάξη σύγκλισης στη περίπτωση του κύβου. Παρά τις όποιες τεχνικές δυσκολίες λόγω της ανάγκης για μεγάλη υπολογιστική ισχύ που υπήρχε κατά την υλοποίηση, το πρόγραμμα ολοκληρώθηκε και μας έδωσε ικανοποιητικά

αποτελέσματα για την τάξη σύγκλισης σε 3 διαστάσεις x, y, z καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου.

Στα επόμενα παραδείγματα εκτελούνται υπολογισμοί χρησιμοποιώντας διαφορετικές συναρτήσεις μη-γραμμικής σύζευξης.

Παράδειγμα 5. Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε αποτελέσματα για το σύστημα κυνηγού-θηράματος με *Holling type II* συναρτησοειδές.

Στο επόμενο παράδειγμα θέτουμε $d_1 = 1$ και $d_2 = 0.0001$, και παρατηρούμε ότι η τάξη σύγκλισης του $\|E\|_{L^2(L^2)}$, $\|E_{uh}\|_{L^2(L^2)}$, $\|E_{vh}\|_{L^2(L^2)}$ είναι σχεδόν 2.

| Υπολογισμοί Σφάλματος - Πίνακας 3 - $d_2 = 0.0001$ | | | | |
|--|---------------------------------------|--------------------|--------------------|---------------------------------------|
| $t = 2 * h^2$ | $\ E_u\ _{L^2L^2} + \ E_v\ _{L^2L^2}$ | $\ E_u\ _{L^2L^2}$ | $\ E_v\ _{L^2L^2}$ | $\ E_u\ _{L^2H^1} + \ E_v\ _{L^2H^1}$ |
| $h = 0.235702$ | 0.00313636 | 0.00115665 | 0.0291529 | 0.0413679 |
| $h = 0.117851$ | 0.000863745 | 0.000396566 | 0.000767327 | 0.020775 |
| $h = 0.0589256$ | 0.0002245 | 0.000110387 | 0.000195486 | 0.0101372 |
| $h = 0.029462$ | 5.66598e-005 | 2.83283e-005 | 4.90697e-005 | 0.00501807 |
| $h = 0.0147314$ | 1.41996e-005 | 7.13e-006 | 1.22797e-005 | 0.00250169 |
| Conv.Rate | 1,946775 | 1,8354575 | 1,9728075 | 1,011884 |

Παρατήρηση: Για $dt = 2h^2$ οι μέσες τιμές της τάξης σύγκλισης της $\|E_u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ νόρμας είναι πιο κοντά στο 2 από τη νόρμα του σφάλματος $\|E_v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$.

Αυτό ισχύει επειδή η τάξη σύγκλισης της πρώτης επανάληψης είναι 1,5 που δεν είναι κοντά στο 2.

| Υπολογισμός σφάλματος - Πίνακας 4 στη περίπτωση που $d_1 = 0.01$ | | | | |
|--|---------------------------------------|--------------------|--------------------|---------------------------------------|
| $t = 2 * h^2$ | $\ E_u\ _{L^2L^2} + \ E_v\ _{L^2L^2}$ | $\ E_u\ _{L^2L^2}$ | $\ E_v\ _{L^2L^2}$ | $\ E_u\ _{L^2H^1} + \ E_v\ _{L^2H^1}$ |
| $h = 0.235702$ | 0.00410573 | 0.0028573 | 0.00294837 | 0.045407 |
| $h = 0.117851$ | 0.00107299 | 0.000725671 | 0.000790379 | 0.0212773 |
| $h = 0.0589256$ | 0.000273601 | 0.000183999 | 0.000202489 | 0.010203 |
| $h = 0.029462$ | 6.87004e-005 | 4.61362e-005 | 5.09038e-005 | 0.00502644 |
| Conv.Rate | 1,96706 | 1,984203 | 1,952 | 1,058433.. |

Στους δύο πίνακες (πίνακας 3, πίνακας 4) βλέπουμε την μεταβολή των σφαλμάτων σε σχέση με τη μεταβολή των συντελεστών αντίδρασης διάχυσης. Με μια προσεκτικότερη ματιά βλέπουμε ότι καθώς οι τιμές των συντελεστών διάχυσης αλλάζουν από $d_2 = 0.0001$ σε $d_2 = 0.01$, εξακολουθούμε να έχουμε την αναμενόμενη τάξη σύγκλισης.

Αξίζει επίσης να αναφέρουμε ότι και στα δύο παραπάνω παραδείγματα έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό:

$$\begin{aligned} \|E_u\|_{L^2H^1} + \|E_v\|_{L^2H^1} &= \|E_u\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} + \|E_v\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}, \\ \|E_u\|_{L^2L^2} + \|E_v\|_{L^2L^2} &= \|E_u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|E_v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}, \\ \|E_u\|_{L^2H^1} &= \|E_u\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}, \quad \|E_v\|_{L^2H^1} = \|E_v\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}, \\ \|E_u\|_{L^2L^2} &= \|E_u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}, \quad \|E_v\|_{L^2L^2} = \|E_v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- Τα παραδείγματα 4 και 5 περιγράφουν χαρακτηριστικά, πως μια παράμετρος επηρεάζει μια άλλη παράμετρο όταν όλες οι άλλες τιμές είναι σταθερές.
Συγκεκριμένα, παρατηρούμε πως η αλλαγή ενός συντελεστή διαχυσης επηρεάζει τα αποτελέσματα υποθέτουμε ότι οι μόνες τιμές που μεταβάλλονται είναι η σταθερά διάχυσης d_2 .
- Σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ένα γράφημα που στο άξονα των τετμημένων βλέπουμε διαφορετικές τιμές των σταθερών διάχυσης d_2 και στον άξονα των τεταγμένων τις διαφορετικές τιμές του $\max\{v\}$ και $\min\{v\}$. για σταθερή τιμή του χρόνου $t = 0,4444..$

Παράδειγμα 6. Τώρα ξαναγράφουμε το σύστημα που αποτελείται από δύο παραβολικές Μ.Δ.Ε. Ειδικότερα, για τα αρχικά δεδομένα u_0, v_0 , ψάχνουμε u, v που να ικανοποιούν τη σχέση

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - d_1 \Delta u - u(1-u) + vh(au) = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0 & \text{στο } \Omega \\ v_t - d_2 \Delta v - bvh(au) + cv = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ v(0, x) = v_0 & \text{στο } \Omega \end{array} \right. \quad (6.0.1)$$

Στη περίπτωση μας $h(au) = \frac{au^2}{1+au^2}$ (Holling type III) συναρτησοειδής.

- Στο παράδειγμα αυτό, χρησιμοποιούμε ως ακριβείς λύσεις:

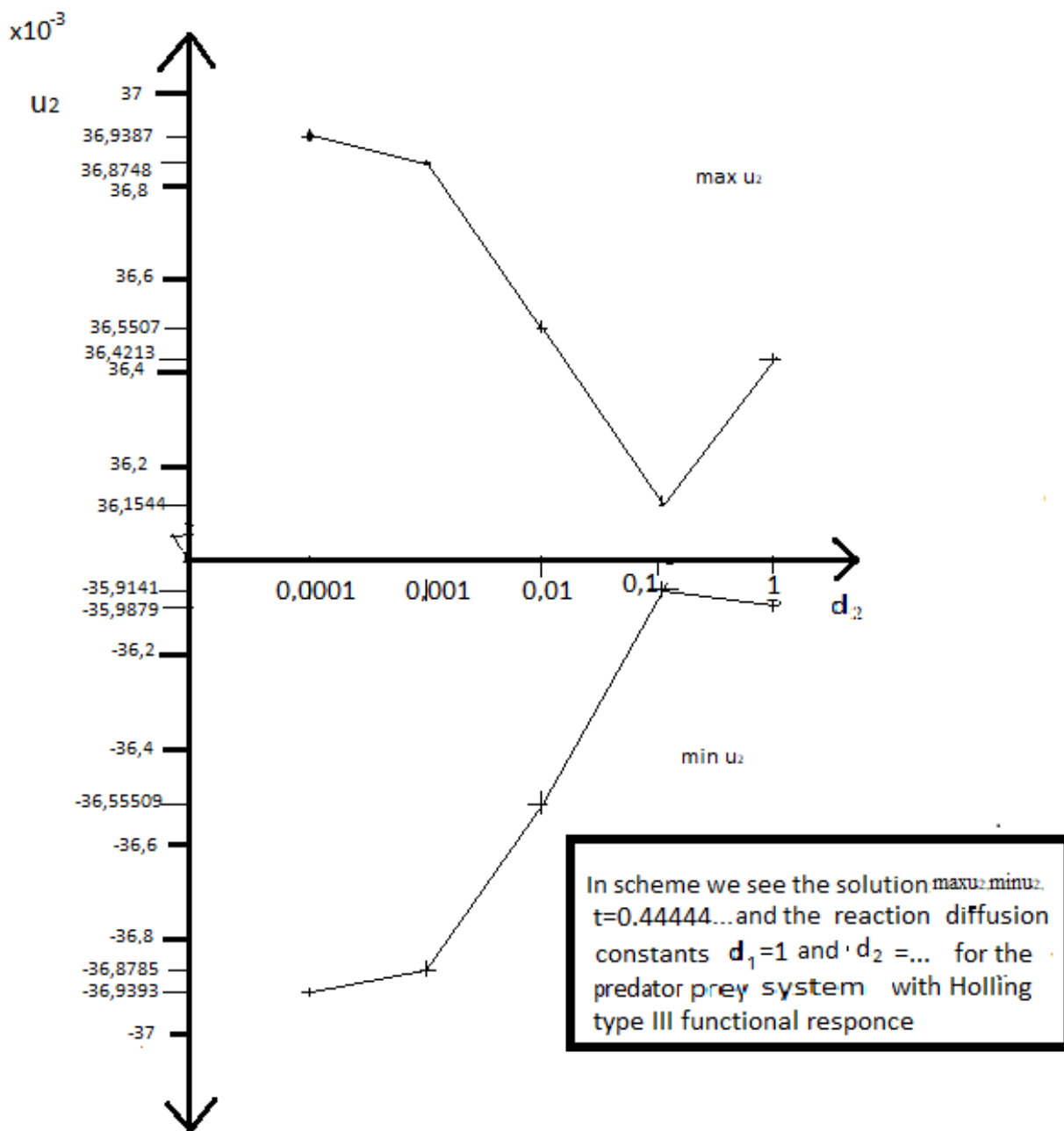
$$u_1 = e^{2m_1 t} \sin(2k\pi x) \sin(2k\pi y)$$

και

$$u_2 = e^{2rt} \sin(2l\pi x) \sin(2l\pi y)$$

όπου $m_1 = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, για την λύση u_1 , ενώ για τη u_2 επιλέγουμε $r = -\frac{1}{2}$, $l = \frac{1}{2}$.

- Χρησιμοποιούμε αρχικές συνθήκες $u_{10} < 0$ και $u_{20} < 0$ αυτό έχει ως συνέπεια η τιμή $\min u_2$ να παίρνει και αρνητικές τιμές όπως θα δούμε παρακάτω.
- Στο ακόλουθο παράδειγμα συμβολίζουμε $u_2 = v$ και $u_1 = u$. Έτσι παίρνουμε το ακόλουθο γράφημα:



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση των σταθερών αντίδρασης διάχυσης για την u στο t_k

- Στο παράδειγμα 6 σχήμα 3 παρατηρούμε ότι οι τιμές των u μοιάζουν να είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των τετμημένων x και πολύ κοντά στο μηδέν.

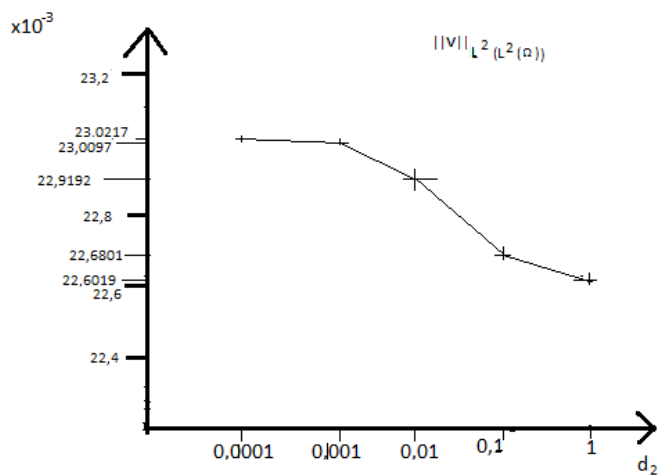
Επιπλέον παρατηρούμε ότι για σταθερές τιμές της $d_1 = 1$ όταν παίρνουμε μικρότερες τιμές d_2 παίρνουμε μεγαλύτερες τιμές του $\max\{v\}$ και μικρότερες τιμές του $\min\{v\}$.

Η μόνη περίπτωση που αυτό δεν ισχύει είναι όταν συγκρίνουμε τις τιμές των v όταν $d_2 = 0.1$ έως το $d_2 = 1$.

- Παρατηρούμε ωστόσο ότι καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των d_2 η αντίστοιχη μεταβολή των $\max\{u_2\}, \min\{u_2\}$ είναι πολύ μικρή. Το παράδειγμα αυτό επαληθεύει τη θεωρία.

Παράδειγμα 7. Το παράδειγμα είναι ανάλογο του παραδείγματος 2. Στο παράδειγμα αυτό ωστόσο παίρνουμε *Holling type III* συναρτησοειδές $h(au) = \frac{au^2}{1+au^2}$. Στο παράδειγμα αυτό, παρατηρούμε τη γραφική παράσταση της νόρμας $\|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ για διαφορετικές τιμές των σταθερών d_2 με $d_1 = 1$. Έτσι στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε στον άξονα των τετμημένων x έχουμε τις διαφορετικές τιμές των συντελεστών διάχυσης d_2 . Ενώ στον άξονα των τεταγμένων y παίρνουμε τιμές της νόρμας $\|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$.

- Συγκρίνοντας το ακόλουθο αποτέλεσμα με αυτό της γραφικής παράστασης του παραδείγματος 2 βλέπουμε ότι έχουμε παρόμοια συμπεριφορά. Όπως παρατηρούμε καθώς παίρνουμε μικρότερες τιμές του d_2 η νόρμα $\|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ παίρνει μεγαλύτερες τιμές και αντιστρόφως, για μεγαλύτερες τιμές του d_2 αντιστοιχούν μικρότερες τιμές της νόρμας. $\|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$. Ωστόσο οι μεταβολές αυτές δεν είναι πολύ μεγάλες. Το d_2 πολλαπλασιάζεται κατά 10 ενώ η νόρμα μένει πρακτικά σταθερή.
- Επιπλέον οι τιμές των νορμών έχουν ίδια τάξη με το παράδειγμα 6 έτσι έχουμε τάξεις $x10^{-3}$. Φυσικά αυτό το γράφημα δείχνει με μεγαλύτερη ακρίβεια τι συμβαίνει με τις τιμές της λύσης, διότι μελετάται η $\|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$.
- Για περισσότερες πληροφορίες για τη μορφή του συστήματος που μελετάμε μπορούμε να δούμε το παράδειγμα 6. Σταθεροποιούμε όλες τις τιμές και οι μόνες τιμές που αλλάζουν είναι της σταθεράς διάχυσης d_2 και η νόρμα $\|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$. Έτσι λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:



The Graph of L^2 norm for different values of reaction diffusion constants of d_2 and standard value of d_1 for the system of predator prey with Holling type III functional response

Γραφική παράσταση L^2 νόρμας για διαφορετικές τιμές d_2 για το σύστημα κυνηγού θηράματος για το συναρτησοειδές Holling type III

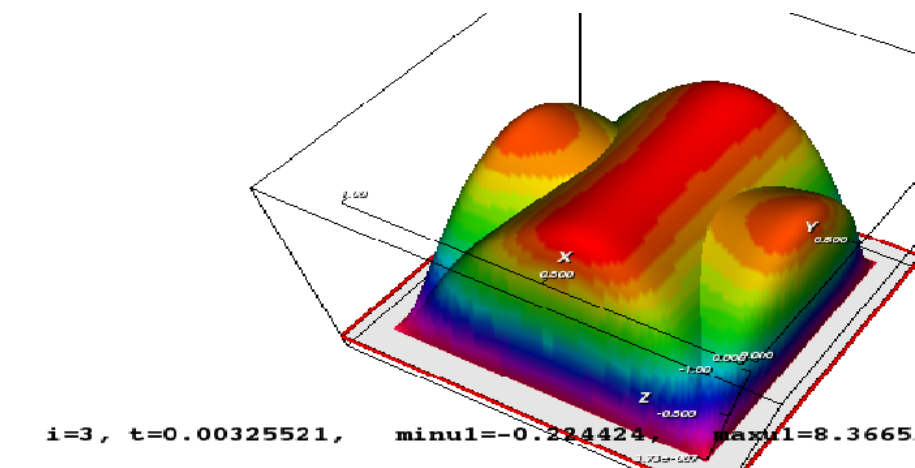
Παράδειγμα 8. Στο παράδειγμα θα δούμε το σχήμα που παριστάνει την μεταβολή των λύσεων του κνηγού θηράματος με *Iu1ev* συναρτησοειδές με αρχικές συνθήκες

$$u_{10} = x * (x - 1) \quad u_{20} = y * (y - 1).$$

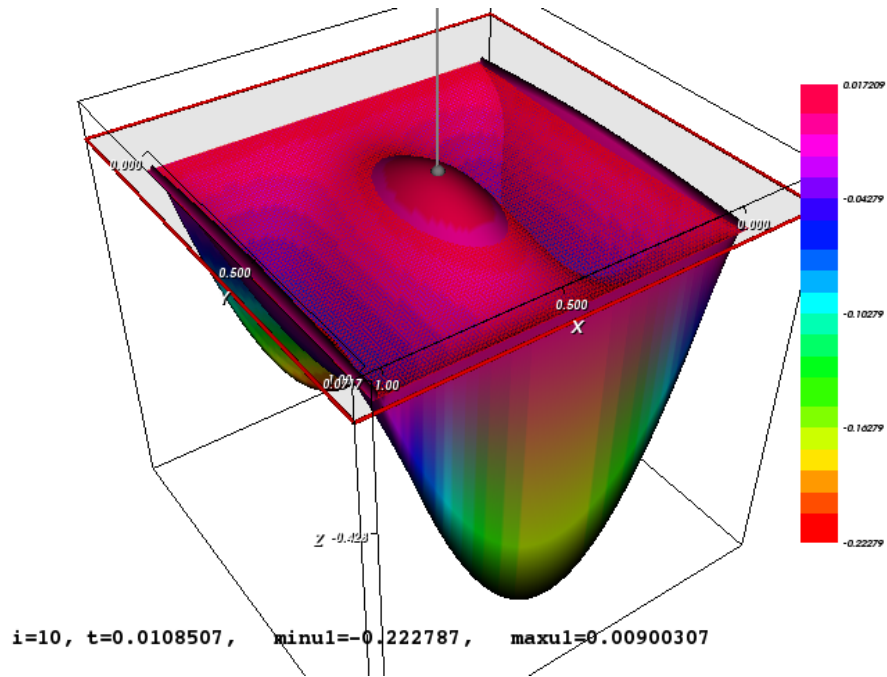
Από το παραπάνω $u_{10} < 0, u_{20} < 0$.

Παρατηρούμε ότι καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται οι τιμές των λύσεων που παριστάνει το σχήμα παρουσιάζει κορυφές και αυλακώσεις, καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Οι γραφικές παραστάσεις σε 3D φαίνονται στα σχήματα 5-10. Ακολουθούν γραφικές παραστάσεις σε δύο διαστάσεις 2D (σχήματα 11-16).

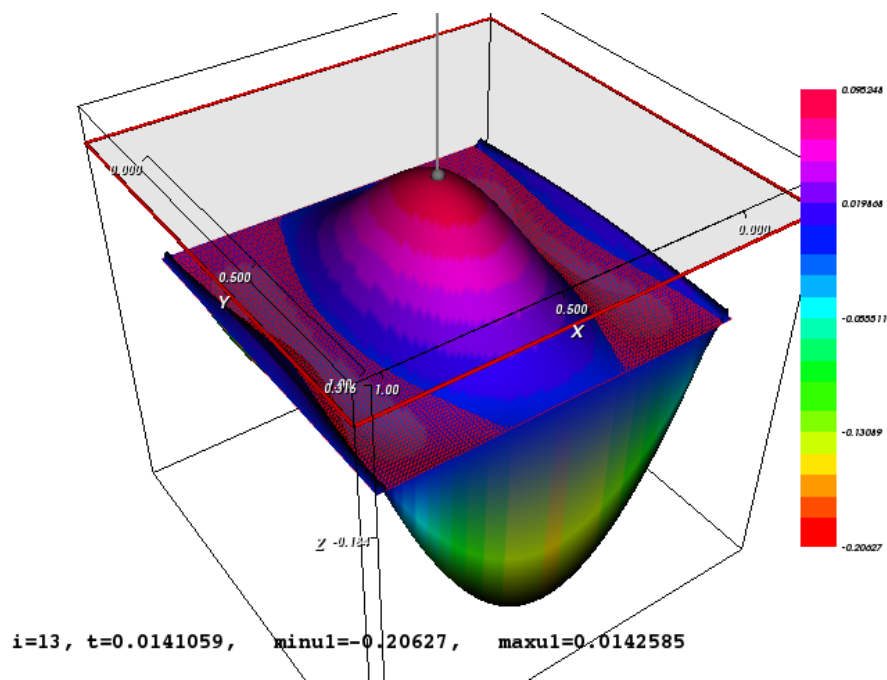
Από τις γραφικές παραστάσεις σε δύο διαστάσεις βλέπουμε ότι καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται δημιουργούνται πτυχώσεις και στις τελευταίες απεικονίσεις βλέπουμε να δημιουργούνται βαθμιαία δύο ξεχωριστές ελλείψεις, ενώ τελικά εμφανίζεται κάποιος κόκκινος κύκλος στη μέση. Αυτές είναι οι αναπαραστάσεις στο επίπεδο (δύο διαστάσεις) για το ίδιο φαινόμενο που εξελίσσεται στις 3 διαστάσεις. Διαπιστώνουμε ότι τελικά οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν άμεσα το πρόβλημα.



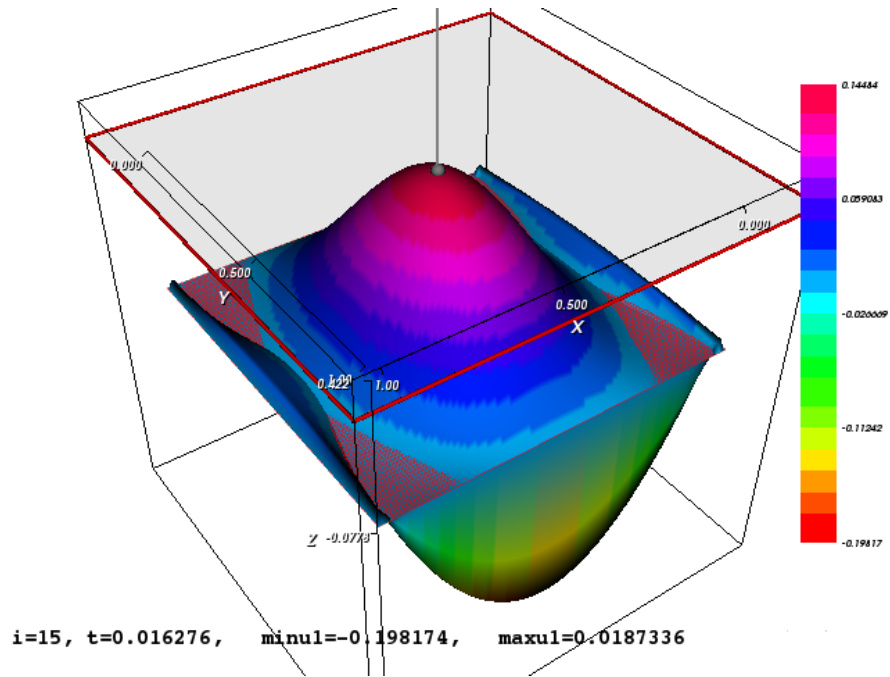
5: 3D-plot1



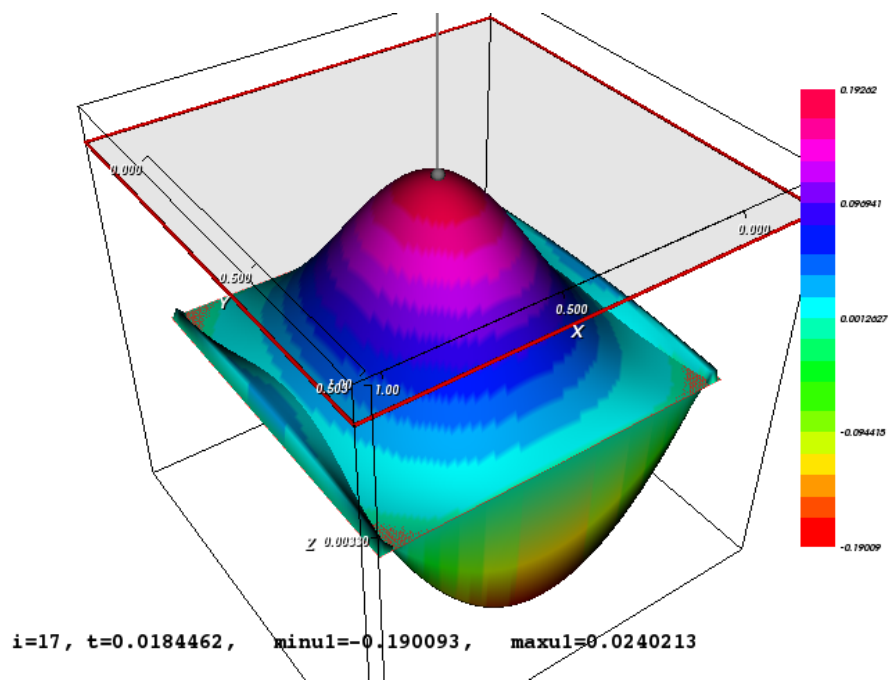
6: 3D-plot2



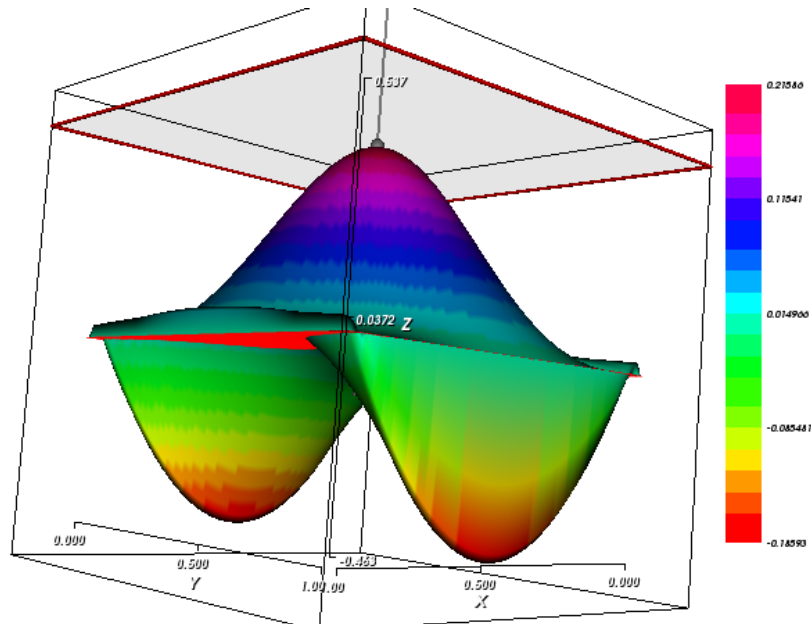
7: 3D-plot1



8: 3D-plot4

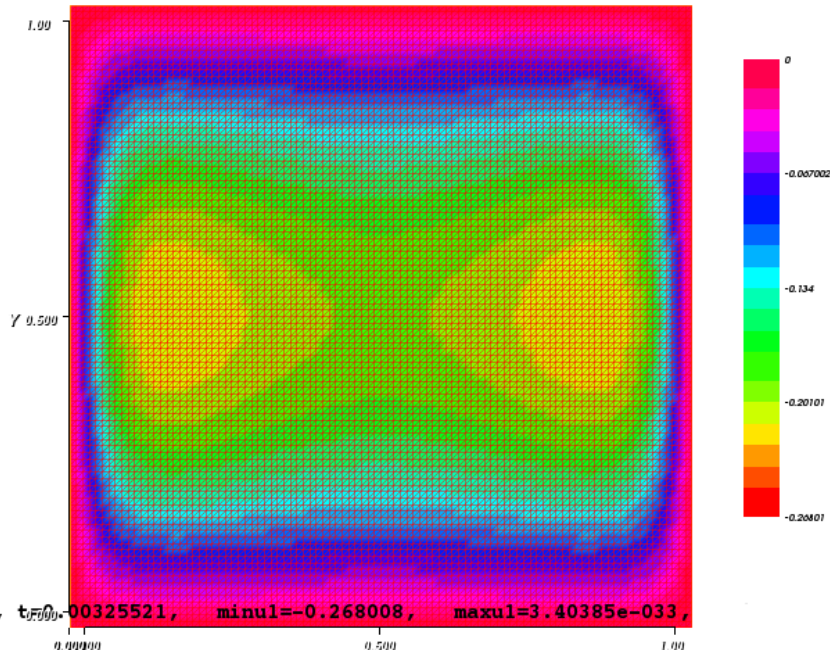


9: 3D-plot5



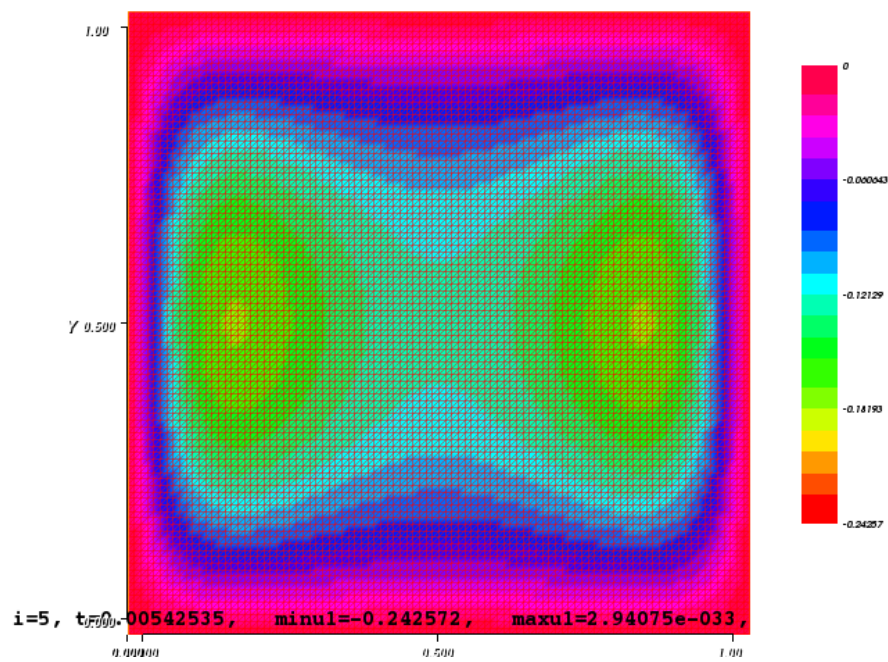
i=18, t=0.0195313, min1=-0.185929, max1=0.0266286

10: 3D-plot6

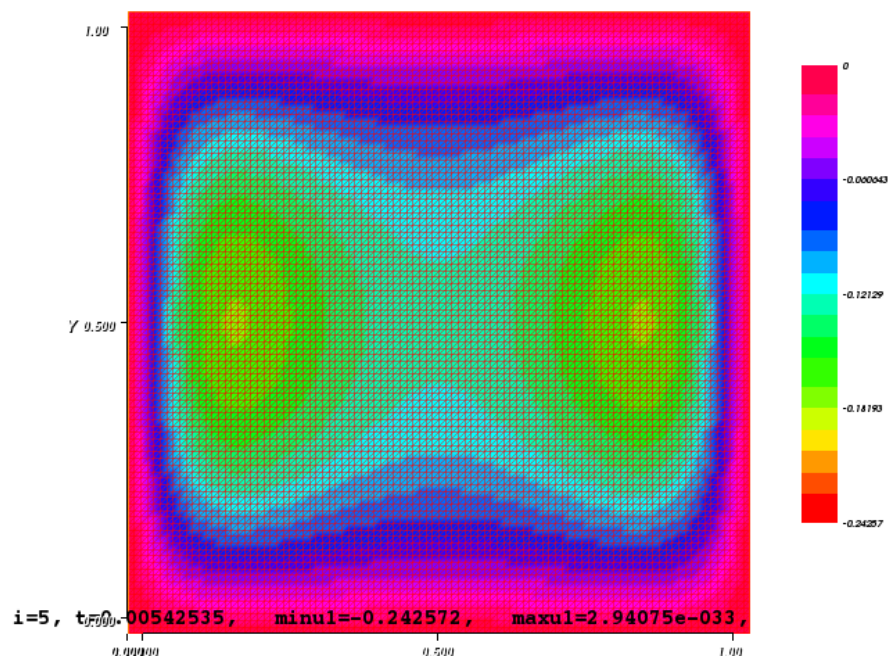


i=3, t=0.00325521, min1=-0.268008, max1=3.40385e-033,

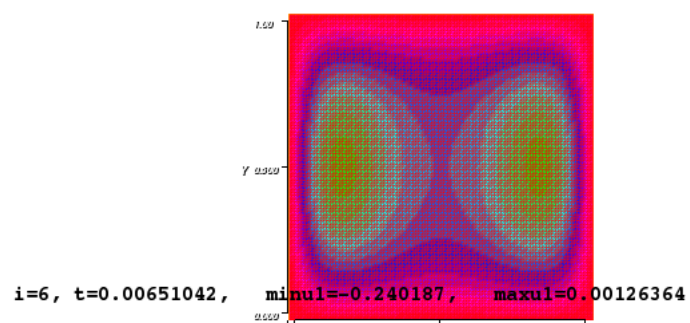
11: 2D-plot 1



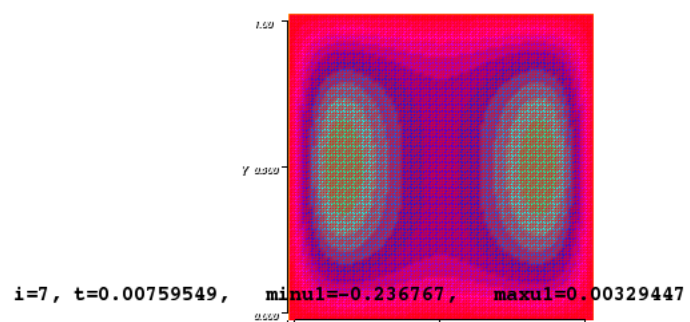
12: 2D-plot2



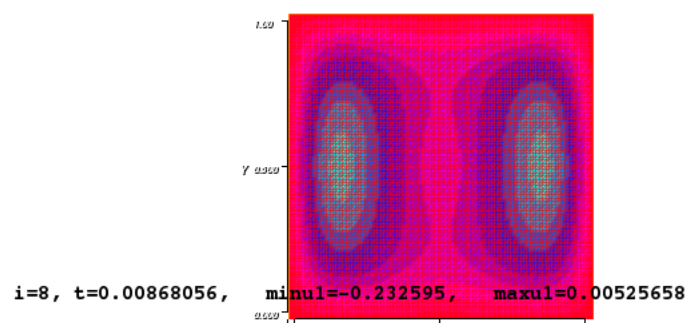
13: 2D-plot3



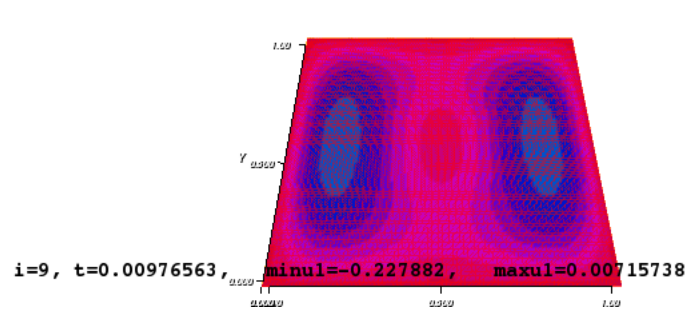
14: 2D-plot4



15: 2D-plot5



16: 2D-plot6



17: 2D-plot7

1. G. AKRIVIS, M. CROUZEIX, AND C. MAKRIDAKIS, *Implicit-explicit multistep finite element methods for nonlinear parabolic problems*, Math. Comp., **67** , pp 457-477.
2. D. ANTONOPOULOS, V. DOUGALIS, G. KOUNADIS, *On the standard Galerkin method with explicit RK4 time stepping for the Shallow Water equations*,(2019) arXiv preprint arXiv:1810.11008.
3. G. AKRIVIS AND C. MAKRIDAKIS, *Galerkin time-stepping methods for nonlinear parabolic equations*, ESAIM: Math. Model. and Numer. Anal.,**38** (2004), pp. 261-289.
4. N. D. ALIKAKOS, *L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations*, Comm. Partial Differential Equations 4 , 827-868
5. S. BRENNER AND L. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag.
6. BREZIS, HAIM , *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science and Business Media,(2011) ISBN 978-0-387-70913-0
7. A. CANGIANI, E. H. GEORGOULIS, AND M. SABAWI, *A-posteriori error analysis for Implicit-Explicit hp-Discontinuous Galerkin Time Stepping Methods for semilinear parabolic problems*, J. Scient. Comput., 2020 (82).
8. K. CHRYSAFINOS, *Stability analysis and best approximation error estimates of Discontinuous time-stepping Schemes for Allen-Cahn equation* ESAIM M2AN., Vol 53(2), 2019 pp 551-583
9. K. CHRYSAFINOS, E H GEORGOULIS, D. PLAKA *A posteriori error estimates for the Allen-Cahn problem* Ar. Xiv.1907.12264v1 (2019)
10. K. CHRYSAFINOS AND L.S. HOU, *Error estimates for semidiscrete finite element approximations of linear and semilinear parabolic equations under minimal regularity assumptions*, SIAM J. Numer. Anal., **40** (2002), pp. 282-306.
11. K. CHRYSAFINOS, S. P. FILOPOULOS, AND TH. K. PAPATHANASIOU, *Error estimates for a FitzHugh-Nagumo parameter dependent reaction diffusion system*, ESAIM M2AN., 2013.
12. K. CHRYSAFINOS, AND E. KARATZAS, *Error estimates for discontinuous Galerkin time-stepping schemes for Robin boundary control problems constrained to parabolic PDEs*, SIAM. J. Numer. Anal., (50) 2014, pp 2837-2862.
13. K. CHRYSAFINOS, E. KARATZAS, D. KOSTAS, *Stability and error estimates of fully-discrete schemes for the Brusselator system*, SIAM J. Numer. Anal. (57) 2019, pp 828-853.

14. K. CHRYSAFINOS AND N.J. WALKINGTON, *Discontinuous Galerkin approximations of the Stokes and Navier-Stokes problem*, Math. Comp., **79** (2010), pp 2135-2167.
15. K. CHRYSAFINOS AND N.J. WALKINGTON, *Error estimates for the discontinuous Galerkin methods for parabolic equations*, SIAM J. Numer. Anal., **44** (No 1) (2006), pp 349-366.
16. K. S. CHENG, S. B. HSU, AND S. S. LIN, *Some results on global stability of a predator-prey model*, J. Math. Biology 12 .
17. K. CHRYSAFINOS AND N.J. WALKINGTON, *Lagrangian and moving mesh methods for the convection diffusion equation*, ESAIM M²AN., **42** (NO 1) (2008), pp. 27-56.
18. P.G. CIARLET, *the finite element method for elliptic problems* ,SIAM Classics in Applied Math,2002
19. I. CHRYSOVERGHI J. COLETOS B. KOKKINIS (2010) *Classical and Relaxed Optimization Methods for Nonlinear Parabolic Optimal Control Problems*. In: Lirkov I., Margenov S., Wa?niewski J. (eds) LSSC 2009. Lecture Notes in Computer Science, vol 5910. Springer, Berlin, Heidelberg.
20. M. CROUZEIX, V. THOMÉE AND L.B. WAHLBIN, *Error estimates for spacially discrete approximations of semilinear parabolic equations with initial data of low regularity*, Math. Comp., **53** (147) , pp. 25-41.
21. M. DELFOUR, W. HAGER AND F. TROCHU, *Discontinuous Galerkin Methods for Ordinary Differential Equations*, Math. Comp, **36**, pp 455-473.
22. V. DOUGALIS ,D.KOSTAS *Finite Difference method for two point problems M Sc University of Athens (2011)*
23. ARNOLD D.N., BREZZI F., COCKBURN B., MARINI D. *Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems*. In: Cockburn B., Karniadakis G.E., Shu CW. (eds) D.G. Methods. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 11. Springer, Berlin, Heidelberg(2000).
24. D. ESTEP AND S. LARSSON, *The discontinuous Galerkin method for semilinear parabolic equations*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., **27** , pp 35-54.
25. D. ESTEP, M. LARSON, AND R. WILLIAMS, *Estimating the error of numerical solutions of systems of reaction-diffusion equations* Mem. Amer. Math. Soc., **146** (2000) No 696, pp viii+109.
26. K. ERIKSSON AND C. JOHNSON, *Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem*, SIAM J. Numer. Anal., **28** , pp. 43-77.
27. K. ERIKSSON AND C. JOHNSON, *Adaptive finite element methods for parabolic problems. II. Optimal error estimates in $L_\infty(L^2)$ and $L_\infty(L_\infty)$* , SIAM J. Numer. Anal., **32** , pp. 706-740.

28. K. ERICKSSON AND C. JOHNSON, *Adaptive finite element methods for parabolic problems IV: Nonlinear problems*, SIAM J. Numer. Anal., **32** (6) , pp. 1729-1749.
29. K. ERICKSSON, C. JOHNSON AND V. THOMÉE, *Time discretization of parabolic problems by the discontinuous Galerkin method*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., **29**, pp 611-643.
30. L. EVANS, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence RI.
31. P. FIFE, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, *Lecture Notes in Biomathematics Vol 28*, Springer-Verlag, Berlin.
32. M.R GARVIE AND J.M. BLOWEY, *Blowey, J. F. and Garvie, M. R. A reaction-diffusion system of $\lambda\omega$ type. Part I:Mathematical analysis. Euro. J. Appl. Math. 16(1) (2005), 1•19.*
33. M.R GARVIE AND J.M. BLOWEY, *A reaction-diffusion system of $\lambda - \omega$ type Part II: Numerical Analysis*, Euro Jnl of Applied Mathematics, **16** (2005), pp 621-646.
34. M.R. GARVIE AND C. TRENCH, *Finite element approximation of spatially extended predator interactions with the Holling type II functional response*, Numer. Math., **107** (2008), pp 641-667.
35. V. GIRAULT AND P-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes*, Springer-Verlag, New York.
36. M. D. GUNZBURGER, L. S. HOU AND T. SVOBODNY, *Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationary Navier-Stokes equations with Dirichlet controls*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numer., **25** , pp. 711-748.
37. HUANG, AIMIN AND TEMAM, ROGER. *The 2d Nonlinear Fully Hyperbolic Inviscid Shallow Water Equations in a Rectangle. Journal of Dynamics and Differential Equations 2015.*
38. W. HUNDSDORFER, AND J. VERWER, *Numerical solution for time-dependent advection-diffusion-reaction equations*, Springer Verlag, Berlin, 2003.
39. D. JACKSON, *Existence and regularity for the FitzHugh-Nagumo equations with inhomogeneous boundary conditions*, Nonl. Analysis; Theory. Meth. Appl., **14** No. 3 pp. 201-216.
40. D. JACKSON, *Error estimates for the semidiscrete Galerkin approximations of the FitzHugh-Nagumo equations*, Appl. Math. Comput., **50** , pp. 93-114.
41. P. JAMET, *Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain*, SIAM J. Numer. Anal. **15**, pp 912-928.
42. KOOIJ AND A.ZEGLING, *A Predator•Prey Model with Ivlev's Functional Response*, Elsevier Volume 198, Issue 2, ,pp.473-489

43. K. MASUDA, *On the global existence and asymptotic behavior of reaction-diffusion equations*, *Hokkaido Math. J.* 12 , 360-370
44. R. MAY, *Limit cycles in predator prey communities*, *Science* 177 , 900-902.
45. PHILIPPE G. CIARLET *The Finite Element Method for Elliptic Problems* 2002 Pages: 552
46. M. L. ROSENZWEIG, *Paradox of enrichment: Destabilization of exploitation ecosystems in ecological time*, *Science* 171 . , 385-387.
47. V. THOMÉE, *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, Springer-Verlag, Berlin.
48. N. J. WALKINGTON, *Compactness properties of CG and DG schemes*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **47** (2010), pp 4680-4710.
49. YOUNG, W. H. , *On classes of summable functions and their Fourier series"*, *Proceedings of the Royal Society A*, 87 (594):pp 225•229 , doi:10.1098/rspa.1912.0076, *JFM* 43.1114.12, *JSTOR* 93236
50. E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications, II/B Nonlinear monotone operators*, Springer-Verlag, New York.
51. JITSURO SUGIE, RIE KOHNO AND RINGO MIYAZANI, *On a predator prey system of Holling type*, *American Mathematical Society Vol.125*, 2041-2058
52. J.KOLETSOS *Optimal control of non-linear parabolic partial differential equations; Theory and numerical analysis*, National Technical University of Athens.
53. PANDEY, PRAMOD AND JABOOB, *A finite difference method for a numerical solution of elliptic boundary value problems. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences S.S.A.* (2018).. 3. 311-320. 10.21042/AMNS.2018.1.00024.
54. SHIPENG XU, WEIBING DENG, HAIJUN WU, *A combined finite element method for elliptic problems posed in domains with rough boundaries*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 336, 2018, Pages 235-248
55. XING Y. *Numerical methods for the nonlinear shallow water equations* Abgrall R., Shu C.-W. (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 18, Elsevier (2017), pp. 361-384