

# Η ασυνεχής Μέθοδος Galerkin για συστήματα Μη-γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων Παραβολικού τύπου και εφαρμογές: Ευστάθεια και εκτιμήσεις Σφαλμάτων

Dimitrios Kostas

February 19, 2020

- 1 Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey
  - Περιγραφή του μοντέλου, εφαρμογές - Ορισμοί - Κύρια αποτελέσματα
- 2 Το πλήρες διακριτό μοντέλο
  - Η ασθενής μορφή του συστήματος
- 3 Εκτιμήσεις Ευστάθειας
  - Διατύπωση Θεωρήματος I
  - Διατύπωση Θεωρήματος II
  - Διατύπωση Θεωρήματος III
- 4 Εκτιμήσεις Σφάλματος
  - Ορισμός προβολών
  - εκτιμήσεις για τη διαφορά  $U_p - u$
  - Φράγματα για τους μη γραμμικούς όρους
  - Χρήση των προηγούμενων φραγμ. και τελικές εκτιμήσεις
- 5 Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί

- Ορίζουμε το πρόβλημα μας ώστε  $u, v$  να είναι οι λύσεις του
 
$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - d_1 \Delta u - u(1 - |u|) + vh(au) = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } (0, T) \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0 & \text{in } \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_t - d_2 \Delta v - bvh(au) + cv = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{in } (0, T) \times \Gamma \\ v(0, x) = v_0 & \text{in } \Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

- Αρχικά, θα γράψουμε ορισμένες χρήσιμες ανισότητες που θα χρειαστούμε στην απόδειξή μας. Ακολουθώντας, θα γράψουμε το πρόβλημά μας σε ασθενή μορφή και τελικά θα περιγράψουμε με λίγα λόγια την ευστάθεια και τα Error estimates του σχήματός μας. Επισημαίνεται πως  $d_1, d_2, b, c, a > 0$ .

## Δυσκολίες που αντιμετωπίζουμε

- Το παραπάνω σύστημα που περιγράφει μοντέλα θηράματος-θηρευτή, είναι συζευγμένο. Η συνάρτηση  $h(au)$  καθώς και  $u(1 - |u|)$  είναι μη γραμμικά συναρτησοειδή .
- Επιπλέον, η ύπαρξη διαφορετικών σταθερών διάχυσης,  $d_1, d_2 > 0$ , δημιουργούν επιπλέον δυσκολίες στην ανάλυση και κυρίως στην προσέγγιση λύσεων των προβλημάτων αυτής της μορφής. Ανάλογα, από την δομή της σύζευξης  $vh(au)$ , μοντελοποιούνται διαφορετικά συστήματα θηράματος-θηρευτή.
- οι αρχικές συνθήκες όχι πάντα ομαλές, καθώς στις περισσότερες ρεαλιστικές καταστάσεις που απαιτούνται τεχνικές προσομοίωσης οι αρχικές συνθήκες δεν μετρούνται με ακρίβεια.

- Επισημαίνεται πως η τεχνική που παρουσιάζεται εφαρμόζεται σε πλήρως διακριτοποιημένα σχήματα ανώτερης τάξης, δηλαδή να εξετάζεται αποκλειστικά η περίπτωση σχημάτων της μορφής Forward / Backwards Euler
- Για την χρονική διακριτοποίηση. Η χρήση πλήρως διακριτοποιημένων σχημάτων ανώτερης τάξης, αυξάνει σημαντικά την τεχνική δυσκολία της ανάλυσης.
- Υπολογιστικά αναμένεται πως μετά από την πάροδο ενός μικρού χρονικού διαστήματος, ο παραβολικός χαρακτήρας του προβλήματος δρα ομαλοποιητικά, επιτρέποντας την χρήση πλήρως διακριτών σχημάτων.

- Οι εκτιμήσεις ευστάθειας που παρουσιάζονται ισχύουν με πολύ χαμηλές υποθέσεις ομαλότητας για τα δεδομένα του προβλήματος.
- Συγκεκριμένα, για  $U_0, V_0 \in L^2(\Omega)$ , και  $d_1, d_2, c, a$  θετικές σταθερές, αποδεικνύουμε ότι οι νόρμες των πλήρους διακριτοποιημένων λύσεων  $(U_h, V_h)$  φράσσονται από τις νόρμες των αρχικών δεδομένων.

$$\|V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + 4d_2 \int_0^T \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

$$+ 2c \int_0^T \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\|U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \sum_{n=1}^N \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3d_1}{2} \int_0^T \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)$$

$$+ \int_0^T \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 dt \leq \tilde{C} \left( \|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right),$$

$$\|U_h(t)\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \left( \|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right).$$

- Η σταθερά  $\tilde{C}$  είναι ανεξάρτητη από τις σταθερές διάχυσης  $d_1, d_2$ , ενώ το μήκος του χρονικού βήματος  $\tau$ , επιλέγεται ανεξάρτητα από την παράμετρο που περιγράφει το μήκος της διαμέρισης  $h$ , και ανεξάρτητα από τις σταθερές διάχυσης. Η απόδειξη στηρίζεται σε τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί στις εργασίες
- Stability and error estimates of fully-discrete schemes for the Brusselator system Chrysafinos and all
- Error estimates for the discontinuous Galerkin methods for parabolic equations Chrysafinos Willington.



- Discontinuous Galerkin approximations of the Stokes and Navier-Stokes problem, Chrysafinos Willington(2010)
- A posteriori error estimates for the Allen-Cahn problem Georgoulis Chrysafinos Plaka (29 Jul 2019)
- Stability Analysis and best approximation error estimates of Discontinuous Time-Stepping Schemes for the Allen-Cahn equation Chrysafinos (2019)  
κ.α. Οι τεχνικές αυτές σε συνδυασμό με ένα κατάλληλο boot-strap επιχείρημα εξασφαλίζουν τη αποσύζευξη των δύο εξισώσεων.

Στη συνέχεια κατασκευάζοντας κατάλληλες βοηθητικές χωρο-χρονικές προβολές αποδεικνύουμε κατάλληλες εκτιμήσεις σφάλματος την μορφή:

$$\begin{aligned} & \| \text{point-wise in time error} \|_{L^2(\Omega)} + \| \text{error} \|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \| [\text{err}] \|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \mathbf{C} (\| \text{best- approximation err.} \|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \| \text{init. data err.} \|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση ορίζουμε  $\mathbf{C} = \max\{1 + \frac{1}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_1}, 1 + \frac{c}{2}\}$  και υποθέτουμε ότι το βήμα  $\tau$  ικανοποιεί,  $\mathbf{C}(1 + d_1)\tau \leq \frac{d_1}{8}$ ,  $\mathbf{C}(1 + d_2)\tau \leq \frac{d_2}{4}$ . Είναι μοναδική επιπλέον υπόθεση για την ομαλότητα των λύσεων  $(u, v)$  είναι η ακόλουθη:

$$(u, v) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)^*) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)).$$

Οι εκτιμήσεις της παραπάνω ανισότητας είναι βέλτιστες ως προς την ενεργειακή νόρμα.

## “Η Φυσική σημασία του συστήματος”

Στη παρούσα εργασία θα μελετήσουμε διάφορες μορφές για το σύστημα κυνηγού θηράματος. Πιο συγκεκριμένα, ο στόχος της εργασίας είναι η παρουσίαση αποτελεσμάτων και για τρεις κύριες μορφές μοντέλων θηράματος-θηρευτή: Στο μοντέλο αυτό, ο μη γραμμικός όρος υποδηλώνει το γεγονός ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ κυνηγού και θήραματος.

- Ενδεικτικά, η κατανάλωση θήραματος περιορίζεται από τον κορεσμό των κυνηγών καθώς και του του χρόνου που δαπανάται για την καταδίωξη και το χρόνο κατανάλωση του θηράματος.
- Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τρεις εναλλακτικές περιπτώσεις συναρτησοειδών.

- Συναρτησοειδές του Ivlev:

$$h(au) = 1 - e^{-a|u|}, u > 0, a > 0$$

όπου  $u$  αντιπροσωπεύει την πυκνότητα των θηραμάτων.

- Συναρτησοειδές Holling Type II:

$$h(au) = \frac{au}{1 + a|u|}.$$

- Συναρτησοειδές Holling Type III:

$$h(au) = \frac{au^2}{1 + au^2}$$

Αυτό προορίζεται στο να μοντελοποιήσει το σύστημα ώστε για μικρές ποσότητες, αρχικά η λεία να είναι σε θέση να αποφύγει τους κυνηγούς χρησιμοποιώντας καταφύγια. Μια τέτοια απόκριση είναι γνωστή ως σιγμοειδής (sigmoidal).

[▶ Main Results](#)[▶ Useful inequalities](#)[▶ Existence-Uniqueness](#)[▶ Stability-Error Estimates](#)[▶ The Projection  \$P\_h\$](#) [▶ Lemma 1](#)



## Young and Hölder inequalities

Η ανισότητα *Young* :

Για κάθε  $a, b, r \geq 0$  και  $m_1, m_2 > 1$  ισχύει ότι:

$$ab \leq r \frac{m_1}{m_2} a^{m_1} + \frac{1}{r} \frac{b^{m_2}}{m_2}$$

Η ανισότητα του *Hölder* :

$$\int |fg| ds \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Η μορφή bilinear που σχετίζεται με το πρόβλημα, ορίζεται από τη σχέση:  $a(y_1, y_2) = \int_{\Omega} \nabla y_1 \nabla y_2 ds$  για κάθε  $y_1, y_2 \in H^1(\Omega)$  και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$a(y, y) = \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad a(y, v) \leq C\eta \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$



# The Grönwall lemma

Το λήμμα του Grönwall:

Εάν τα  $a^n, b^n > 0$  ικανοποιούν τις ανισότητες:

$a^n + b^n \leq (1 + C\tau_n)a^{n-1} + \phi^n$  και  $\max_n C\tau_n < 1$  τότε

$$a^N + \sum_{k=2}^N b^{k-1} \leq e^{\sum_{k=1}^N C_k \tau_k} (a^0 + \sum_{k=1}^N f_k)$$

Θα χρειαστούμε επίσης τη ισότητα

$$2b(b - a) = |b - a|^2 + b^2 - a^2$$

## Writing the weak form

Υποθέτουμε ότι έχουμε τα αρχικά δεδομένα:  $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ .  
Τότε για κάθε  $w \in L^2(0, T, H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T, H^{1*}(\Omega))$   
ισχύει ότι:

$$\langle u(T), w(T) \rangle + \int_0^T -\langle u, w_t \rangle + d_1 a(u, w) - \langle u(1 - |u|), w \rangle + \langle v h(au), w \rangle ds = \langle u(0), w(0) \rangle$$

και

$$\langle v(T), w(T) \rangle + \int_0^T -\langle v, w_t \rangle + d_2 a(v, w) + c \langle v, w \rangle - b \langle v h(au), w \rangle ds = \langle v(0), w(0) \rangle$$

## Writing the weak form

Υποθέτουμε ότι έχουμε τα αρχικά δεδομένα:  $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ .  
Τότε για κάθε  $w \in L^2(0, T, H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T, H^1(\Omega))$   
ισχύει ότι:

$$\langle u(T), w(T) \rangle + \int_0^T -\langle u, w_t \rangle + d_1 a(u, w) - \langle u(1 - |u|), w \rangle \\ + \langle v h(au), w \rangle ds = \langle u(0), w(0) \rangle$$

και

$$\langle v(T), w(T) \rangle + \int_0^T -\langle v, w_t \rangle + d_2 a(v, w) + c \langle v, w \rangle \\ - b \langle v h(au), w \rangle ds = \langle v(0), w(0) \rangle$$

## Γράφοντας την ασθενή μορφή για τη διακριτή περίπτωση

Οι προσεγγίσεις που θα κατασκευαστούν σε μια διαμέριση  $0 < t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  του  $[0, T]$ . Σε κάθε διάστημα της μορφής  $(t^{n-1}, t^n]$  μήκους  $\tau_n = t^n - t^{n-1}$  υπόχωροι  $X_h$  του  $H^1(\Omega)$  που ικανοποιούν τα κλασσικά αποτελέσματα της προσεγγιστικής θεωρίας πεπερασμένων στοιχείων πολυωνυμικού τύπου. Οι τριγωνοποιήσεις είναι σχεδόν ομοιόμορφες quasi uniform ως προς το χρόνο υπάρχει  $0 < \theta \leq 1$  ώστε  $\theta \tau < \min_{n=1 \dots N} \tau_n$  όπου  $\tau = \max_{n=1 \dots N} \tau_n$ . Αρχικά ορίζουμε:  $\mathcal{X}_h = \{W_h \in L^2(0, T, H^1(\Omega)) : W_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in P_k(t^{n-1}, t^n, X_h)\}$  όπου  $X_h$  υπόχωρος του χώρου  $H^1(\Omega)$ .

Το σύστημα fully-discrete ορίζεται ως ακολούθως:

Αναζητούμε  $U_h, V_h \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$  τέτοια ώστε για κάθε  $w_h \in \mathcal{X}_h$ , και για όλα τα  $n = 1, \dots, N$ , να ισχύει:

$$\begin{aligned} & \langle U_h^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle U_h, w_{ht} \rangle + d_1 a(U_h, w_h) \right) \\ & - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle U_h(1 - |U_h|), w_h \rangle + \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle \right) ds \\ & = \langle U_h^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \langle V_h^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle V_h, w_{ht} \rangle + d_2 a(V_h, w_h) \right. \\ & \left. + c \langle V_h, w_h \rangle - b \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle \right) ds = \langle V_h^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \end{aligned}$$

$\forall (U_h, V_h) \in \mathcal{X}_h, n = 1 \dots N$

Ισοδύναμα οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle U_{ht}, w_h \rangle + d_1 a(U_h, w_h) + \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle \right) ds \quad (3)$$

$$+ \langle [U_h^{n-1}], w_{h+} \rangle = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|), w_h \rangle ds$$

και

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle V_{ht}, w_h \rangle + d_2 a(V_h, w_h) \right) ds + \langle [V_h^{n-1}], w_{h+} \rangle \quad (4)$$

$$+ c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h, w_h \rangle ds = b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle ds$$

Ισοδύναμα οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle U_{ht}, w_h \rangle + d_1 a(U_h, w_h) + \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle \right) ds \quad (3)$$

$$+ \langle [U_h^{n-1}], w_{h+} \rangle = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|), w_h \rangle ds$$

και

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle V_{ht}, w_h \rangle + d_2 a(V_h, w_h) \right) ds + \langle [V_h^{n-1}], w_{h+} \rangle \quad (4)$$

$$+ c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h, w_h \rangle ds = b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h), w_h \rangle ds$$

Θέτοντας  $w_h = U_h$  μετά απο πράξεις η ασθενή μορφή τελικά παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( d_1 a(U_h, U_h) + \langle V_h h(aU_h), U_h \rangle \right) ds \\ & = \frac{1}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|), U_h \rangle ds \end{aligned}$$

και θέτοντας επίσης  $w_h = V_h$  στη δεύτερη σχέση του συστήματος

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(V_h, V_h) + c \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & = \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h), V_h \rangle ds \end{aligned}$$



Χρησιμοποιώντας τώρα ότι  $|h(aU_h)| \leq 1$  έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[U_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( d_1 a(U_h, U_h) - \langle U_h(1 - |U_h|), U_h \rangle \right) ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle |V_h|, |U_h| \rangle ds \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)} + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(V_h, V_h) ds \\ & + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned}$$

## The characteristic functions

- Λόγω της μη γραμμικής σύζευξης και της έλλειψης μονοτονίας, θα πρέπει να αναπτυχθούν αποτελέσματα ευστάθειας στα εσωτερικά σημεία χρόνου, υπό ελάχιστες υποθέσεις κανονικότητας. Κάτι τέτοιο δεν είναι τεχνικά εύκολο, όταν χρησιμοποιούμε ασυνεχή μορφή Galerkin ως προς το χρόνο, ιδιαίτερα όταν εξετάζουμε συστήματα υψηλότερης τάξης high order schemes.
- Για να το επιτύχουμε, χρησιμοποιούμε τη θεωρία της προσέγγισης των διακριτών χαρακτηριστικών συναρτήσεων για το οποίο χρησιμοποιήθηκε μια γενική γραμμική παραβολική μερική διαφορική εξίσωση.

- Σημειώνουμε ότι το βασικό πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι η απόδειξη δεν χρειάζεται επιπλέον υποθέσεις κανονικότητας, εκτός από εκείνη που απαιτείται για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη μιας ασθενούς λύσης, δηλαδή, δεν υποθέτουμε ότι  $u_t, v_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$
- Για να λάβουμε εκτιμήσεις ευστάθειας και σφάλματος σε αυθαίρετους χρόνους  $t \in [t^{n-1}, t^n)$  θα ήταν επιθυμητό να αντικατασταθεί το  $U_h = \chi_{[t^{n-1}, t)} U_h$  (παρόμοια για  $V_h$ ) στις πλήρως διακριτοποιημένες εξισώσεις. Ωστόσο, αυτή η επιλογή δεν είναι διαθέσιμη καθώς η  $\chi_{[t^{n-1}, t)} U_h$  δεν ανήκει στο  $\mathcal{X}_h$ , εκτός αν το  $t$  συμπίπτει με ένα σημείο διαμέρισης.
- Επομένως πρέπει να κατασκευαστούν προσεγγίσεις τέτοιων συναρτήσεων. Για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε τα βασικά αποτελέσματα.

Οι προσεγγίσεις κατασκευάζονται στο διάστημα  $(t^{n-1}, t^n)$ .

# The characteristic functions

Θεωρίστε τα πολυώνυμα :  $s \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n)$ , και σημειώνουμε τη διακριτή προσέγγιση του:  $\chi[t^{n-1}, t]s$  με τα πολυώνυμα  $\tilde{s} \in \{\tilde{s} \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t), \tilde{s}(t^{n-1}) = s(t^{n-1})\}$  που ικανοποιούν

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \tilde{s} q dr = \int_{t^{n-1}}^{t^n} s q dr \quad \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}(t^{n-1}, t^n).$$

Είναι προφανές ότι αυτή η εξίσωση μπορεί να επεκταθεί σε προσεγγίσεις του  $\chi[t^{n-1}, t]u$  για  $u \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X_h)$  όπου το  $X_h$  είναι γραμμικός χώρος.

## The characteristic functions

Η διακριτή προσέγγιση του  $\chi_{[t^{n-1}, t]} u$  στο  $\mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; Q)$  ορίζεται από το  $\tilde{u} = \sum_{i=0}^k \tilde{s}_i(t) u_i$  και αν  $X$  είναι χώρος ημiesωτερικού γινομένου συμπεραίνουμε,

$$\tilde{u}(t^{n-1}) = u(t^{n-1}), \quad \text{και} \quad \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\tilde{u}, w)_X ds = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (u, w)_X ds$$
$$\forall w \in \mathcal{P}_{k-1}(t^{n-1}, t^n; X).$$

Λήμμα: Υποθέτουμε ότι το  $X$  είναι ένας χώρος (ημ)esωτερικού γινομένου. Τότε, η απεικόνιση  $\sum_{i=0}^k s_i(t) u_i \rightarrow \sum_{i=0}^k \tilde{s}_i(t) u_i$  στο  $\mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; U)$  είναι συνεχής. Συγκεκριμένα ισχύει,

$$\|\tilde{u}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; X)} \leq C_k \|u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; X)},$$

$\|\tilde{u} - \chi_{[t^{n-1}, t]} u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; X)} \leq C_k \|u\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; X)}$  όπου  $C_k$  είναι μια σταθερά εξαρτώμενη από τον βαθμό του πολυωνύμου  $k$ .

Έστω  $t \in [t^{n-1}, t^n]$  και θέτουμε  $\rho(\cdot, t) \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n)$  με τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\rho(t^{n-1}) = 1, \quad \int_{t^{n-1}}^t \rho q ds = \int_{t^{n-1}}^t q ds \quad q \in \mathcal{P}_{k-1}(t^{n-1}, t^n)$$

Τότε ισχύει

$$\rho(s; t) = 1 + \left(\frac{s-t^{n-1}}{\tau_n}\right) \sum_{i=0}^{k-1} c_i \hat{\rho}_i\left(\frac{s-t^{n-1}}{\tau_n}\right), \quad c_i = \int_{\frac{t-t^{n-1}}{\tau_n}}^1 \rho_i(\eta) d\eta$$

όπου  $\{\hat{\rho}_i\}_{i=0}^{k-1}$  είναι ορθοκανονική βάση του  $\mathcal{P}_{k-1}(0, 1)$  εντός του (σταθμισμένου) χώρου  $L_w^2(0, 1)$  με εσωτερικό γινόμενο

$$(\hat{\rho}, \hat{q}) = \int_0^1 \eta \hat{\rho}(\eta) \hat{q}(\eta) d\eta.$$

Εν προκειμένω,  $\|\rho(s)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \leq C_k$ , όπου το  $C_k$  είναι ανεξάρτητο του  $t \in [t^{n-1}, t^n]$ .

Λήμμα

Έστω  $\phi \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n]$  και  $Z_h \in X_h \subset H^1(\Omega)$  τότε ισχύει

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_{ht}, Z_h \phi \rangle ds + \langle V_{h+}^{n-1} - V_h^{n-1}, \lim_{s \rightarrow t_+^{n-1}} Z_h \phi(s) \rangle = \\ & = \langle V_h(t) - V_h^{n-1}, Z_h \rangle \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_{ht}, Z_h \phi \rangle ds + \langle U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1}, \lim_{s \rightarrow t_+^{n-1}} Z_h \phi(s) \rangle = \\ & = \langle U_h(t) - U_h^{n-1}, Z_h \rangle \end{aligned}$$

# Stability

## Θεώρημα 1

Έστω  $\Omega$  μια φραγμένο ομαλό χωρίο  $(U_h, V_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$  λύσεις της ασθενούς μορφής του συστήματος predator-prey και τα αρχικά δεδομένα

$$U_0, V_0 \in L^2(\Omega)$$

και  $d_1, d_2 > 0$  (συντελεστές διαχυσης) και  $c > 0$  τότε για

$$b > c, \quad \tau \leq \min\left\{\frac{1}{8C_k}, \frac{1}{4(b-c)}\right\}$$

τότε οι  $(U_h, V_h)$  παίρνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις:



## Εκτίμηση 1

$$\begin{aligned} \|V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \| [V_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + 4d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\ + 2c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

## Εκτίμηση 2

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

## Εκτίμηση 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \sum_{n=1}^N \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3d_1}{2} \int_0^T \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \\ + \int_0^T \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \leq \tilde{C} \left( \|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right) \end{aligned}$$

## Εκτίμηση 4

$$\|U_h(t)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \left( \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right)$$

Όπου  $\tilde{C}$  σταθερά που εξαρτάται από τις  $C_k$ ,  $\Omega$ ,  $T$  και  $e^{bT}$

Απόδειξη

Αρχικά θα υπολογίσουμε την Εκτίμηση 1.

Αντικαθιστώντας  $W_h = V_h^n$  στην ασθενή μορφή (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\ & + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h), V_h \rangle ds \end{aligned}$$

Σημειώνοντας τώρα ότι:  $|h(\cdot)| < 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \quad (5) \\ & + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h, V_h \rangle ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα στην ασθενή μορφή  $W_h = \phi(s)Z_h$  Παρατηρούμε τώρα ότι το  $Z_h$  είναι ανεξάρτητο του χρόνου που μας χρειάζεται

$$\begin{aligned} \langle V_h(t) - V_h^{n-1}, Z_h \rangle &\leq C_k (d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)} ds \|\nabla Z_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ (b - c) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)} ds \|Z_h\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned} \quad (6)$$

όπου  $\|\phi\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n]} \leq C_k$

Θέτουμε τώρα  $Z_h = V_h(t)$  για προηγούμενα σταθερές  $t \in [t^{n-1}, t^n)$  και ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση (6) ως προς το χρόνο με τη χρήση ανισότητας Hölder έχουμε:

$$\frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{\tau_n}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k \left( \tau_n d_2 \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + (b - c) \tau_n \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right)$$

Η Ισοδύναμα για  $\frac{1}{2} - \tau_n(b - c) > \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq \frac{\tau_n}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C_k \left( \tau_n d_2 \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω ανισότητα στην (5) χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young και με ανακατανομή των όρων, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + 2b\tau_n\right) \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b4d_2 C_k \tau_n \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \end{aligned}$$



Ισοδύναμα ανακατανέμοντας τους όρους και επιλέγοντας  $d_2 - 4bd_2 C_k \tau_n > \frac{1}{4}$  με μεταφορά των όρων αριστερά, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & + \frac{3d_2}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + 2b\tau_n\right) \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το διακριτό Grönwall lemma ολοκληρώνεται η απόδειξη της εκτίμησης 1

Επιστρέφοντας τώρα (7) και χρησιμοποιώντας τον υπολογισμό του αντιστρόφου  $\|V_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_k}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2$  και τους προηγούμενους υπολογισμούς παίρνουμε

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C} \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

## Θεώρημα 2

Έστω  $\Omega$  ένα φραγμένο ομαλό χωρίο και  $(U_h, V_h)$  λύσεις της πλήρως διακριτής μορφής του συστήματος predator-prey και τα αρχικά δεδομένα  $U_0, V_0 \in L^2(\Omega)$  και  $d_1, d_2, c$  θετικές σταθερές,

Εάν ισχύει η ανισότητα  $b < c$

Τότε οι  $(U_h, V_h)$  ικανοποιούν τις ακόλουθες εκτιμήσεις

## Εκτίμηση 1\*

$$\|V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2d_2 \int_0^T \nabla \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ + 2(c-b) \int_0^T \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

## Εκτίμηση 2\*

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq \tilde{C}_k \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Εκτίμηση 3\*

$$\begin{aligned} & \|U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \sum_{n=1}^N \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3d_1}{2} \int_0^T \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \\ & + \int_0^T \|U_h\|_{L^3(\Omega)}^3 ds \leq \frac{\tilde{C}}{c-b} \left( \|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \right) \end{aligned}$$

Εκτίμηση 4\*

$$\|U_h(t)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\tilde{C}}{c-b} \left( \|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tilde{C}_k \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

Όπου  $\tilde{C}_k$  σταθερά που εξαρτάται από το χωρίο

**Θεώρημα 3** Έστω ότι οι υποθέσεις των θεωρημάτων 1 και 2 ισχύουν. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι  $U_0, V_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Τότε για  $c \leq b$ , ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

Υπολογισμός 1

$$d_1 \int_0^T \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\nabla U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq O\left(\frac{1}{d_1^2}\right) \widetilde{C}_1 \quad (8)$$

Υπολογισμός 2

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq O\left(\frac{1}{d_1}\right) \widetilde{C}_1 \quad (9)$$

Υπολογισμός 3

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \| [U_h^{n-1}] \|^2_{L^2(\Omega)} \leq O\left(\frac{1}{d_1}\right) \widetilde{C}_1$$

Υπολογισμός 4

$$\| \nabla U_h \|^2_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))} \leq O\left(\frac{1}{d_1}\right) \widetilde{C}_1 \text{ όπου } \widetilde{C}_1 \text{ είναι μία σταθερά}$$

που εξαρτάται από τη σταθερά  $\widetilde{C}$  του θεωρήματος 2 και από τις νόρμες  $\|V_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2, (\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T)^2$ .

Στη περίπτωση που  $b < c$  τότε προκύπτει άμεσα από την (5)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + (c - b) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Αθροίζοντας την σχέση απο 1 έως  $n$  λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \|V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2d_2 \int_0^T \|\nabla V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + 2(c - b) \int_0^T \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (11)$$



Στη περίπτωση που  $b > c$ , λαμβάνουμε εύκολα απο την (7)

$$\frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \tau_n \left( \frac{1}{2} \|V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k d_2 \|\nabla V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + (b - c) \tau_n \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right).$$

Διαιρώντας με  $\tau_n$  και χρησιμοποιώντας μία αντίστροφη εκτίμηση και το φράγμα (11) προκύπτει

$$\|V_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \leq C_k \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

Ο υπολογισμός του φράγματος του  $U_h$  υπολογίζεται ανάλογα. Για την τελευταία σχέση, παρατηρούμε πως η σχέση,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{\tau_n}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \\
& + C_k \left( d_1 \tau_n \|\nabla U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{3}{2} \tau_n \|U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right) \\
& + \tau_n \left( \frac{1}{2} \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \tau_n \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n, L^3(\Omega))}^3 \right),
\end{aligned}$$

συνεπάγεται, χρησιμοποιώντας μία αντίστροφη (στο χρόνο) εκτίμηση,

$$\begin{aligned} \|U_h(t)\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 &\leq \frac{C_k}{2} \|U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C_k \left( d_1 \|\nabla U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{3}{2} \|U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{2} \|V_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 + \|U_h\|_{L^3(t^{n-1}, t^n, L^3(\Omega))}^3 \right) \right), \end{aligned}$$

από την οποία λαμβάνουμε το αποτέλεσμα αντικαθιστώντας το ανω φραγμα απο τις προηγούμενες σχέσεις

Έστω ότι οι υποθέσεις των θεωρημάτων 1 και 2 ισχύουν.  
Επιπλέον, υποθέτουμε ότι  $U_0, V_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Τότε για  $c \leq b$ ,  
ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$d_1 \int_0^T \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\nabla U_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \sum_{n=1}^N \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_1^2}\right) \tilde{C}_1,$$

όπου  $\tilde{C}_1$  είναι μία σταθέρα που εξαρτάται από την σταθερά  $\tilde{C}$  του Θεωρήματος 2, και  $\mathbf{C}$  σταθερά που εξαρτάται από τις νόρμες  $\|U_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2$ ,  $(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + T)^2$ . Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_1}\right) \tilde{C}_1 \mathbf{C}, \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_1}\right) \tilde{C}_1, \quad (13)$$

$$\|\nabla U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_1}\right) \tilde{C}_1. \quad (14)$$

Στο διάστημα  $(t^{n-1}, t^n]$  ορίζουμε την διακριτή Λαπλασιανή,  $w_h = -\Delta_h U_h$ , ως εξής:  $a \cdot t \in (t^{n-1}, t^n]$ , και  $\forall w_h \in X_h$ ,

$$-(\Delta_h U_h(\cdot), w_h) = a(U_h(\cdot), w_h).$$

Παρατηρούμε πως επειδη  $U_h \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X_h)$ , έχουμε πως  $\Delta_h U_h \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n; X_h)$ . Θέτουμε  $w_h = -\Delta_h U_h$  στην ασθενή μορφή και παρατηρούμε πως έπειτα από ολοκλήρωση κατά μέρη, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + (\nabla U_h, \nabla U_{ht}) ds + ([U_h^{n-1}], -\Delta_h U_{h+}^{n-1}) \\ = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_h(1 - |U_h|) - V_h h(a U_h), -\Delta_h U_h) ds, \end{aligned} \quad (15)$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
& d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + (\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}, \nabla U_{h+}^{n-1}) \\
& + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\nabla U_{ht}, \nabla U_h) ds \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \\
& + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(V_h h(aU_h), \Delta_h U_h)| ds.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ότι  $|h(aU_h)| \leq 1$ , εύκολα οδηγούμαστε στην σχέση,

$$\begin{aligned}
 & d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & + \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds \\
 & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)} ds.
 \end{aligned}$$

Απο τις ανισότητες Young, Hölder καθώς και την Gagliardo-Nirenberg λαμβάνουμε,



$$\begin{aligned}
& d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& + \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds
\end{aligned}$$

Απο τις ανισότητες Young, Hölder και γράφοντας  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\cdot\|_{L^2(\Omega)}^2$  τελικά λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} & \frac{d_1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & - \frac{1}{2} \|\nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla U_{h+}^{n-1} - \nabla U_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{d_1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\ & + \frac{1}{d_1} \|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας την παραπάνω σχέση απο  $n = 1$  ως  $n = N$  και αντικαθιστώντας τους τα φράγματα των υπολογισμών (8) και (8) στην παραπάνω σχέση έχουμε τελικά την (12). Για την ανισότητα (12), θέτοντας  $w_h = (t - t^{n-1})U_{ht}$  στην διακριτή ασθενή μορφή λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + d_1(t - t^{n-1}) a(U_h, U_{ht}) \right) \\ & + (t - t^{n-1}) \langle V_h h(aU_h), U_{ht} \rangle \Big) ds \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \langle U_h(1 - |U_h|), U_{ht} \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Παρατηρούμε ότι ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο χώρο,

$$\begin{aligned}
 & \left| d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1})(\nabla U_h, \nabla U_{ht}) ds \right| \leq \\
 & \left| -d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1})(\Delta_h U_h, U_{ht}) ds \right| \\
 & \leq \frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau_n d_1^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds
 \end{aligned}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young και ότι  $|h(aU_h)| \leq 1$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_h(1 - |U_h|) - V_h h(aU_h), (t - t^{n-1})U_{ht}) ds \right| \\ & \leq \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \\ & \quad + \frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, στην (16) έχουμε,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq C\tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( d_1^2 \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds
\end{aligned}$$

(17)

Διαιρώντας με  $\tau_n$ , τελικά λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} (d_1^2 \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \\
& + \|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2) ds.
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε την δεύτερη εκτίμηση του θεωρήματος. Για την τρίτη εκτίμηση (13), θέτουμε

$$w_h = U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} := [U_h^{n-1}],$$

$$\begin{aligned} \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_{ht}, U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1}) ds \right| \\ &+ d_1 \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\nabla U_h, \nabla (U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1})) ds \right| \\ &+ \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_h(1 - |U_h|) + h(aU_h)V_h, U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1}) ds \right| \end{aligned}$$



Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη στο χώρο για το δεύτερο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
 \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_{ht} \|_{L^2(\Omega)} \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &+ d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| \Delta_h U_h \|_{L^2(\Omega)} \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^2(\Omega)} \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^4(\Omega)}^2 \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds \\
 &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| V_h \|_{L^2(\Omega)} \| U_{h+}^{n-1} - U_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} ds.
 \end{aligned}$$

Επειδή το  $\| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}$  είναι ανεξάρτητο του χρόνου, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned} \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_{ht} \|_{L^2(\Omega)} ds \\ &+ d_1 \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| \Delta_h U_h \|_{L^2(\Omega)} ds \\ &+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^2(\Omega)} ds \\ &+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^4(\Omega)}^2 ds \\ &+ \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| V_h \|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder οδηγούμαστε στην σχέση:

$$\begin{aligned}
 & \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_{ht} \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & + d_1 \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| \Delta_h U_h \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & + \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\
 & \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| U_h \|_{L^4(\Omega)}^4 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & + \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t^{n-1}}^{t^n} \| V_h \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} .
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την τοπική αντίστροφη εκτίμηση

$$\tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t - t^{n-1}) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

και ανισότητα Young με κατάλληλη σταθερά, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_n} \| [U_h^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_k \left( \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{t - t^{n-1}}{\tau_n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right. \\ &+ d_1^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\Delta_h U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\left. + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 ds \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τους προηγούμενους υπολογισμούς λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. Για την τελευταία εκτίμηση (14), θέτουμε  $w_h = (t^n - t)U_{ht}$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (t^n - t) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + d_1 (t^n - t) a(U_h, U_{ht}) \right. \quad (18)$$

$$\left. + (t^n - t) \langle V_h h(aU_h), U_{ht} \rangle \right) ds = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) \langle U_h (1 - |U_h|), U_{ht} \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο χρόνο,

$$d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) (\nabla U_h, \nabla U_{ht}) ds$$

$$= -\tau_n \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

Απο την ανισότητα Young, την ανισότητα  $|h(aU_h)| \leq 1$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} (U_h(1 - |U_h|) - V_h h(aU_h), (t^n - t)U_{ht}) ds \right| \\ & \leq \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \\ & \quad + \frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας μία αντίστροφη στο χρόνο εκτίμηση ,

$$\begin{aligned}
 & \left| (U_{h+}^{n-1} - U^{n-1}, ((t^n - t)U_{ht})_+^{n-1}) \right| \leq \\
 & \leq \| [U^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \| ((t^n - t)U_{ht})_+^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} \\
 & \leq \| [U^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} \frac{C_k}{\tau_n^{1/2}} \| (t^n - t)U_{ht} \|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \\
 & \leq \| [U^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)} C_k \tau_n^{1/2} \| U_{ht} \|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}.
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, στην 16 έχουμε,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C\tau_n \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + C_k \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|[U^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds. \end{aligned}$$

Διαιρώντας με  $\tau_n$ , τελικά λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + \frac{1}{\tau_n} \|[U^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds, \end{aligned}$$



ή ισοδύναμα μετά από μία αντίστροφη στον χρόνο τοπική εκτίμηση,

$$\begin{aligned} & \|\nabla U_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 ds \leq C_k \left( \|\nabla U_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{t - t^{n-1}}{\tau_n} \|U_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{\tau_n} \|[U_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \left. + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \right). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με τις προηγούμενες εκτιμήσεις, λαμβάνουμε την ζητούμενη εκτίμηση.

Έστω ότι οι υποθέσεις των θεωρημάτων 1 και 2 ισχύουν. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι  $U_0, V_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Τότε  $c \leq b$ , ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$d_2 \int_0^T \|\Delta_h V_h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\nabla V_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \|\nabla V_{h+}^{n-1} - \nabla V_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_2}\right) \tilde{C}_1, \quad (19)$$

όπου  $\tilde{C}_1$  είναι μία σταθερά που εξαρτάται από την σταθερά  $\tilde{C}$  του Θεωρήματος 2, και από τις νόρμες  $\|V_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2$ ,  $(\|U_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + T)^2$ . Επιπλέον ισχύουν οι εκτιμήσεις

$$\sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{t - t^{n-1}}{\tau_n} \right) \|V_{ht}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_2}\right) \tilde{C}_1, \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\tau_n} \|[V_h^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_2}\right) \tilde{C}_1$$

$$\|\nabla V_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_2}\right) \tilde{C}_1$$

Ορίζουμε κατάλληλη χωροχρονική (γραμμική) προβολή στον πλήρη διακριτό χώρο  $\mathcal{X}_h$ . Έστω  $U_p^0 = P_h u_0$  και  $V_p^0 = P_h v_0$  όπου  $P_h$  η κλασική  $L^2$  προβολή ορισμένη ως

$$(P_h u_0 - u_0, w_h) = 0, (P_h v_0 - v_0, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in \mathcal{X}_h.$$

Οι προβολές  $U_p, V_p \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h$  ορίζονται ως λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων:  $\forall n = 1, \dots, N, w_h \in \mathcal{X}_h$ , είναι:

$$\begin{aligned} \langle U_p^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle U_p, w_{ht} \rangle + d_1 a(U_p, w_h) + \langle v h(a u), w_h \rangle \right. \\ \left. - \langle u(1 - |u|), w_h \rangle \right) ds = \langle U_p^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle V_p^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle V_p, w_{ht} \rangle + d_2 a(V_p, w_h) + c \langle V_p, w_h \rangle \right. \\ \left. - \langle b v h(a u), w_h \rangle \right) ds = \langle V_p^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Οι παραπάνω προβολές ικανοποιούν τις κλασικές εκτιμήσεις ευστάθειας, καθώς είναι οι πλήρες διακριτές λύσεις εξισώσεων της θερμότητας με αρχικά δεδομένα  $u_0, v_0$  και δεξί μέλος  $-vh(au) + u(1 - |u|)$ ,  $bvh(au)$ , αντιστοίχως, δηλαδή είναι πλήρως διακριτές λύσεις (με την ασυνεχή στο χρόνο μέθοδο Galerkin σε συνδυασμό με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο) των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \xi_t - d_1 \Delta \xi = u(1 - |u|) - vh(au) & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ \xi(0, x) = u_0 & \text{στο } \Omega \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \psi_t - d_2 \Delta \psi = bvh(au) - cv & \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ \psi(0, x) = v_0 & \text{στο } \Omega \end{cases} \quad (24)$$

Θεώρημα Έστω  $U_p, V_p$  οι προβολές που ορίζονται από τις σχέσεις (21) και (22). Έστω, ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\|V_p^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \| [V_p^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_0^T \|\nabla V_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ + c \int_0^T \|V_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C \left( \frac{b^2}{c} \|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|V_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

$$\|V_p\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq C_k \left( \frac{b^2}{c} \|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|V_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

$$\begin{aligned} & \|U_p^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \| [U_p^{n-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_0^T \|\nabla U_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \left( \|U_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^4\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \right), \\ & \frac{1}{4} \|U_p\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq C \left( \frac{1}{2} \|U_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^4\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) ds \right), \end{aligned}$$

όπου  $C$  είναι μία θετική σταθερά

## Θεώρημα

Έστω  $U_0, V_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , και ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5. Τότε οι προβολές  $U_p, V_p$  ικανοποιούν την ακόλουθές εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned} & \|\nabla U_p\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + d_1 \int_0^T \|\Delta_h U_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds & (25) \\ & \leq C_k \frac{1}{d_1} \left( \|\nabla U_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\nabla V_p\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + d_2 \int_0^T \|\Delta_h V_p\|_{L^2(\Omega)}^2 ds & (26) \\ & \leq C_k \frac{1}{d_2} \left( \|\nabla V_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$



Ορίζουμε ως σφάλμα τη διαφορά της ακριβούς από την προσεγγιστική λύση.

Αν κάνουμε την αφαίρεση των δύο αυτών σχέσεων τότε προκύπτουν οι ισότητες.

$$\langle E_u^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle E_u, w_{ht} \rangle + d_1 a(E_u, w_h) + \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle \right) ds = \langle E_u^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \quad (27)$$

$$+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|) - u(1 - |u|), w_h \rangle$$

$$\langle E_v^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle E_v, w_{ht} \rangle + d_2 a(E_v, w_h) \right) + c \langle E_v, w_h \rangle ds =$$

$$\langle E_v^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle ds. \quad (28)$$

Αφαιρώντας την πλήρως διακριτή μορφή των προσεγγιστικών λύσεων από τη διακριτή μορφή των προβολών των  $U_p, V_p$  έχουμε

$$\begin{aligned} & \langle U_p^n - u^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle U_p - u, w_{ht} \rangle + d_1 a(U_p - u, w_h) \right) ds \\ & = \langle U_p^{n-1} - u^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \langle V_p^n - v^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle V_p - v, w_{ht} \rangle + d_2 a(V_p - v, w_h) \right. \\ & \left. + c \langle V_p - v, w_h \rangle \right) ds = \langle V_p^{n-1} - v^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (30)$$

Οι σχέσεις (27) και (28) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα

$$\langle E_{uh}^n + E_{up}^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle E_{uh} + E_{up}, w_{ht} \rangle + d_1 a(E_{uh} + E_{up}, w_h) \right. \\ \left. + \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle \right) ds = \langle E_{uh}^{n-1} + E_{up}^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle \quad (31)$$

$$+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|) - u(1 - |u|), w_h \rangle ds$$

$$\langle E_{vh}^n + E_{vp}^n, w_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle E_{vh} + E_{vp}, w_{ht} \rangle + d_2 a(E_{vh} + E_{vp}, w_h) \right) \\ + c \langle E_{vh} + E_{vp}, w_h \rangle ds =$$

$$\langle E_{vh}^{n-1} + E_{vp}^{n-1}, w_{h+}^{n-1} \rangle + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h) - v h(au), w_h \rangle ds. \quad (32)$$

Απομένει να εκτιμήσουμε τις ποσότητες  $E_{up}, E_{vp}, E_{uh}, E_{vh}$

## Definition of Projection $\mathbf{P}_h^{loc}$

(1) Η προβολή  $\mathbf{P}_h^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; X_h]$   
ικανοποιεί  $(\mathbf{P}_h^{loc} w)^n = P_h w(t^n)$ , και

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (w - \mathbf{P}_h^{loc} w, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; X_h].$$

Στο πιο πάνω ορισμό, έχουμε χρησιμοποιήσει τη σύμβαση  
 $(\mathbf{P}_h^{loc} w)^n \equiv (\mathbf{P}_h^{loc} w)(t^n)$ , και  $P_h : L^2(\Omega) \rightarrow X_h$  είναι ο τελεστής  
της ορθογώνιας προβολής πάνω στο  $X_h \subset H^1(\Omega)$ .

(2) Η προβολή  $\mathbf{P}_h^{loc} : C[0, T; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{X}_h$  που ικανοποιεί  
 $\mathbf{P}_h^{loc} w \in \mathcal{X}_h$  και  $(\mathbf{P}_h^{loc} w)|_{(t^{n-1}, t^n]} = \mathbf{P}_h^{loc}(w|_{[t^{n-1}, t^n]})$ .

Έστω  $X_h \subset H^1(\Omega)$ , και  $\mathbf{P}_h^{loc}$  ορίζεται στους προηγούμενους ορισμούς. Τότε, για κάθε  $w \in L^2(0, T; H^{l+1}(\Omega)) \cap H^{k+1}(0, T; L^2(\Omega))$  υπάρχει σταθερά  $C \geq 0$  ανεξάρτητη του  $h, \tau$  τέτοια ώστε

$$\|w - \mathbf{P}_h^{loc} w\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C(h^{l+1} \|w\|_{L^2(0, T; H^{l+1}(\Omega))} + \tau^{k+1} \|w^{(k+1)}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}),$$

$$\|w - \mathbf{P}_h^{loc} w\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C(h^l \|w\|_{L^2(0, T; H^{l+1}(\Omega))} + \tau^{k+1} \|w^{(k+1)}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}).$$

## Error estimates

Θέτοντας  $E_{up} = U_p - u$  και  $E_{vp} = V_p - v$  αντίστοιχα Για  $n = 1, \dots, N$ , για κάθε  $W_h \in \mathcal{X}_h$  έχουμε,

$$\langle E_{up}^n, W_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle E_{up}, W_{ht} \rangle + d_1 a(E_{up}, W_h) \right) ds = \langle E_{up}^{n-1}, W_{h+}^{n-1} \rangle,$$

$$\langle E_{vp}^n, W_h^n \rangle + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle E_{vp}, W_{ht} \rangle + d_2 a(E_{vp}, W_h) \right) ds \quad (33)$$

$$+ c \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle E_{vp}, W_h \rangle ds = \langle E_{vp}^{n-1}, W_{h+}^{n-1} \rangle.$$

Στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε τα σφάλματα των  $E_{up}$ ,  $E_{vp}$  με την βοήθεια των  $u - \mathbf{P}_h^{loc} u$ ,  $v - \mathbf{P}_h^{loc} v$ , ακολουθώντας κατάλληλη τεχνική.

## Θεώρημα

• Εστω  $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ , και  $u, v \in W(0, T)$  οι ακριβείς λύσεις και  $U_p, V_p \in \mathcal{X}_h$  λύσεις των (21)- (22) αντίστοιχα. Έστω  $E_{up} = U_p - u$ ,  $E_{vp} = V_p - v$ . Συμβολίζουμε με  $E_{up}^{loc}$  και  $E_{vp}^{loc}$   $E_{up}^{loc} \equiv \mathbf{P}_h^{loc} u - u$ ,  $E_{vp}^{loc} \equiv \mathbf{P}_h^{loc} v - v$  αντιστοίχως. Αν,  $E_{up1}^{loc} \equiv U_p - \mathbf{P}_h^{loc} u$ ,  $E_{vp1}^{loc} \equiv V_p - \mathbf{P}_h^{loc} v$  τότε, υπάρχει μια αλγεβρική σταθερά  $C > 0$  ώστε:

$$\begin{aligned} 1) d_1 \|\nabla E_{up1}^{loc}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|[E_{up1}^{loc(n)}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{up1}^{loc(N)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C(\|E_{up1}^{loc(0)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \|\nabla E_{up}^{loc}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) & d_2 \|\nabla E_{vp1}^{loc}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N \| [E_{vp1}^{loc(i)}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| E_{vp1}^{loc(N)} \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C (\| E_{vp1}^{loc(0)} \|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \|\nabla E_{vp}^{loc}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2), \\
 3) & \| E_{up1}^{loc} \|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq \\
 & \leq C_k (\| E_{up1}^{loc0} \|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \|\nabla E_{up}^{loc}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2), \\
 4) & \| E_{vp1}^{loc} \|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq \\
 & \leq C_k (\| E_{vp}^{loc0} \|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \|\nabla E_{vp}^{loc}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2) \dots
 \end{aligned}$$



Η ορθογωνιότητα Galerkin γράφεται ως:

$$\begin{aligned} & (E_{up}^n, W_h^n) - (E_{up}^{n-1}, W_{h+}^{n-1}) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up}, W_{ht}) ds \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up}, \nabla W_h) ds = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Αντικαθιστώντας τώρα  $E_{up} = E_{up1}^{loc} + E_{up}^{loc}$  από την προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & (E_{up1}^{loc(n)}, W_h^n) + (E_{up}^{loc(n)}, W_h^n) - (E_{up1}^{loc(n-1)}, W_{h+}^{n-1}) \\ & - (E_{up}^{loc(n-1)}, W_{h+}^{n-1}) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up}, W_{ht}) ds \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up1}^{loc}, \nabla W_h) ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up}^{loc}, \nabla W_h) ds = 0. \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την τοπική προβολή έχουμε

$(E_{up}^{loc(n)}, W_h^n) = 0$  και  $(E_{up}^{loc(n-1)}, W_{h+}^{n-1}) = 0$  και επειδή,  
 $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up}^{loc}, W_{ht}) ds = 0$  λαμβάνουμε:

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up}, W_{ht}) ds = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up1}^{loc}, W_{ht}) ds$$

## Επομένως

$$\begin{aligned}
 & (E_{up1}^{loc(n)}, W_h^n) - (E_{up1}^{loc(n-1)}, W_{h+}^{n-1}) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{up1}^{loc}, W_{ht}) ds \quad (35) \\
 & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up1}^{loc}, \nabla W_h) ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1(\nabla E_{up}^{loc}, \nabla W_h) ds = 0.
 \end{aligned}$$

Στην πιο πάνω ανισότητα αντικαθιστούμε  $W_h = 2E_{up1}^{loc}$  στο (35) έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 & 2\|E_{up1}^{loc(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(E_{up1}^{loc(n-1)}, E_{up1+}^{loc(n-1)}) \\
 & - \|E_{up1}^{loc(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_{up1+}^{loc(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (36) \\
 & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} 2d_1\|\nabla E_{up1}^{loc}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} 2d_1(\nabla E_{up}^{loc}, \nabla E_{up1}^{loc}) ds = 0.
 \end{aligned}$$

Απο την πιο πάνω ανισότητα (36) και τετριμμένες αλγεβρικές πράξεις λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & \|E_{up1}^{loc(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|E_{up1}^{loc(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[E_{up1}^{loc(n-1)}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + d_1 \|\nabla E_{up1}^{loc}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 \leq d_1 \|\nabla E_{up}^{loc}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (37)$$

Αθροίζοντας το παραπάνω σχήμα (37) από  $n = 0$  σε  $n = N$  λαμβάνουμε την ζητούμενη εκτίμηση. Η δεύτερη ανισότητα του θεωρήματος αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο.

Τώρα θέτουμε ως test functions  $E_{uh}$  και  $E_{vh}$  στις ασθενείς μορφές του συστήματος, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|E_{uh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_1 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla(U_h - U_p)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|[E_{uh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle U_h(1 - |U_h|) - u(1 - |u|), E_{uh} \rangle ds + \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle V_h h(aU_h) - v h(au), E_{uh} \rangle ds + \frac{1}{2} \|E_{uh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|E_{vh}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d_2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|[E_{vh}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \frac{1}{2} \|E_{vh}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \int_{t^{n-1}}^{t^n} (v h(au) - V_h h(aU_h), E_{vh}) ds - \int_{t^{n-1}}^{t^n} c \|E_{vh}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned}$$

Αν  $h(au)$  μη γραμμικό συναρτησοειδές τότε υπάρχει σταθερά  $C > 0$  που εξαρτάται μόνο από την παράμετρο  $a > 0$  τέτοια ώστε να ισχύει:

$$|v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq |v_1 - v_2| + C|v_2||u_1 - u_2| \quad (39)$$

όταν το  $h(\cdot)$  ορίζεται από το συναρτησοειδές Ivlev

$$|v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq |v_1 - v_2| + C|v_2|(1 + |u_2|)|u_1 - u_2| \quad (40)$$

όταν το  $h(\cdot)$  ορίζεται από το συναρτησοειδές Holling type II

$$|v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq |v_1 - v_2| + C|v_2|(1 + |u_1 + u_2|)|u_1 - u_2|$$

όταν το  $h(\cdot)$  ορίζεται από το συναρτησοειδές Holl. type III

## Απόδειξη

Αφαιρώντας και προσθέτοντας  $v_1 h(au_2)$  και χρησιμοποιώντας  $|h(au_2)| < 1$  προκύπτει

$$|v_1 h(au_1) - v_2 h(au_2)| \leq |v_1 - v_2| + |v_2| |h(au_2) - h(au_1)|$$

Τώρα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

Περίπτωση 1  $|v_1| \leq |v_2|$

Για  $|u_1| < |u_2|$

$$|1 - e^{-a|u_1|} - 1 + e^{-a|u_2|}| \leq e^{-a|u_1|} (1 - e^{-a(|u_2| - |u_1|)})$$

Χρησιμοποιώντας τώρα  $1 - x \leq e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$  Παίρνουμε τελικά την επιθυμητή ανισότητα Η απόδειξη είναι όμοια για  $|u_2| < |u_1|$

## Περίπτωση 2 Holling type II συναρτησοειδές

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{au_1}{1+a|u_1|} - \frac{au_2}{1+a|u_2|} \right| \leq \\
& \leq |au_1(1+a|u_2|) - au_2(1+a|u_1|)| \\
& \leq |a||u_1 - u_2| + a^2 \left( |u_2||u_1 - u_2| + |u_2| \left| |u_2| - |u_1| \right| \right) \quad (39) \\
& \leq |a||u_1 - u_2| + 2a^2|u_2||u_1 - u_2| \leq (|a| + 2a^2|u_2|)|u_1 - u_2|
\end{aligned}$$



## Περίπτωση 3 Holling type III συναρτησοειδές

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{au_1^2}{1+au_1^2} - \frac{au_2^2}{1+au_2^2} \right| &\leq \frac{au_1^2(1+au_2^2) - au_2^2(1+au_1^2)}{(1+au_1^2)(1+au_2^2)} \\
 &\leq |au_1^2(1+au_2^2) - au_2^2(1+au_1^2)| \leq |a(u_1^2 - u_2^2)| \\
 &\leq |a(u_1 + u_2)(u_1 - u_2)| \leq C|u_1 + u_2||u_1 - u_2| \quad (40)
 \end{aligned}$$

Αν στις παραπάνω σχέσεις θέσουμε

$u_1 = u, u_2 = U_h, v_1 = V_h, v_2 = v$  τότε προκύπτουν:

Περίπτωση1:

$$\begin{aligned} |V_h h(aU_h) - v h(au)| &\leq |V_h - v| + |v| |h(au) - h(aU_h)| \\ &\leq |V_h - v| + |v| e^{-a|u|} |U_h - u| \end{aligned} \quad (41)$$

Περίπτωση2:

$$\begin{aligned} |V_h h(aU_h) - v h(au)| &\leq |V_h - v| + |v| (|a| \\ &+ 2a^2 |u|) |U_h - u| \end{aligned} \quad (42)$$

Περίπτωση3:

$$|V_h h(aU_h) - v h(au)| \leq |V_h - v| + a |U_h + u| |U_h - u| \quad (43)$$

## Αντικατάσταση στη ασθενή μορφή του προβλήματος

$$\begin{aligned}
 (E_{uh}(t) - E_{uh}^{n-1}, Z_h) &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_1 |(\nabla E_{uh}, \phi \nabla Z_h)| ds \\
 &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| (vh(au) - V_h h(aU_h), \phi Z_h) \right| ds \\
 &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| (u(1 - |u|) - U_h(1 - |U_h|)), \phi Z_h \right| ds \quad (44)
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 (E_{vh}(t) - E_{vh}^{n-1}, Z_h) &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} d_2 |(\nabla E_{vh}, \phi \nabla Z_h)| ds \quad (45) \\
 &+ c \int_{t^{n-1}}^{t^n} (E_{vh}, \phi Z_h) ds + \int_{t^{n-1}}^{t^n} b \left| (vh(au) - V_h h(aU_h), \phi Z_h) \right| ds.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11} &:= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| (V_h h(|aU_h|) - v h(|au|), Z_h \phi) \right| ds \\
 &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} (|V_h - v| + C|U_h| |U_h - u|, |Z_h| |\phi|) dx ds \\
 &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|V_h - v\|_{L^2(\Omega)} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \\
 &\quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} C \|U_h\|_{L^2(\Omega)} \|U_h - u\|_{L^4(\Omega)} \|Z_h\|_{L^4(\Omega)} \|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} ds \\
 &\leq C_k \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{vh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \\
 &\quad + C_k \|U_h\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \|Z_h\|_{H^1(\Omega)} \tau_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{vp}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega))}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$I_{12} = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| (u(1 - |u| - U_h(1 - |U_h|)), \phi Z_h) \right| ds$$

$$\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} |u - U_h| |\phi| |Z_h| dx ds + \quad (47)$$

$$+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\Omega} |u - U_h| (|u| + |U_h|) |\phi| |Z_h| dx ds$$

$$\leq \|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \mathcal{T}_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{up}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}$$

$$+ \|\phi\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)} \|Z_h\|_{L^4(\Omega)} \|u + U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \mathcal{T}_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{up}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^4(\Omega))} \quad (48)$$

$$\leq \left( C_k \|Z_h\|_{L^2(\Omega)} \mathcal{T}_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{up}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \right)$$

$$+ C_k \|Z_h\|_{H^1(\Omega)} \|U_h\|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))} \mathcal{T}_n^{1/2} \|E_{uh} + E_{up}\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega))}.$$

Αποτελέσματα σε Freefem++

Στα ακόλουθα Παραδείγματα συμβολίζουμε

$U_h = u_1, V_h = u_2$ . Σε όλα τα παραδείγματα εκτός του τελευταίου παίρνουμε αρχικές τιμές

$u(0, x) = u_0, v(0, x) = v_0$  για το αρχικό σημείο  $t_0 = 0$

**Παράδειγμα 1**, Στο πρώτο παράδειγμα, εξετάζουμε το σύστημα predator prey με Ivlev functional response. Επιλέγουμε σταθερές  $c = 1, b = 1$  και σταθερές τιμές αντίδρασης διάχυσης  $d_1 = 1, d_2 = 0,0001$  όπου  $d_1$ , ο συντελεστής του  $u_1$  και  $d_2$ , ο συντελεστής του  $u_2$ .

Στο παράδειγμα αυτό, προσθέτουμε τις ακριβείς λύσεις της μορφής:

$$u_1 = e^{2mt} \sin(2k\pi x) \sin(2k\pi y) + cc \text{ και}$$

$$u_2 = e^{2rt} \sin(2m\pi x) \sin(2m\pi y) + cc_1 \text{ όπου}$$

$m = \frac{-1}{2}$ ,  $k = \frac{1}{2}$ ,  $cc = 2$  ενώ για τη  $u_2$  λύση του συστήματος έχουμε θέσει

$r = \frac{-1}{2}$ ,  $m = \frac{1}{2}$ ,  $cc_1 = \frac{2}{5.45}$ . Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται, οι ποσότητες  $maxu_1$ ,  $maxu_2$  μειώνονται, όπως αυτό απεικονίζεται και στις γραφικές παραστάσεις.

Έτσι παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των λύσεων σταδιακά, με την πάροδο του χρόνου,

ομαλοποιούνται. Αυτό που φαίνεται λογικό είναι ότι καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται μειώνονται οι συγκεντρώσεις κυνηγών και θηραμάτων. Πράγματι για

$$t = 0.2222222, \max u_1 = 2.7947, \max u_2 = 1.15121$$

$$t = 0.3333333, \max u_1 = 2.71007, \max u_2 = 1.06752$$

$$t = 0.4444444, \max u_1 = 2.63481, \max u_2 = 0.99348$$

$$t = 0.5555556, \max u_1 = 2.5677, \max u_2 = 0.927487$$

$$t = 0.6666667, \max u_1 = 2.50779, \max u_2 = 0.86851$$

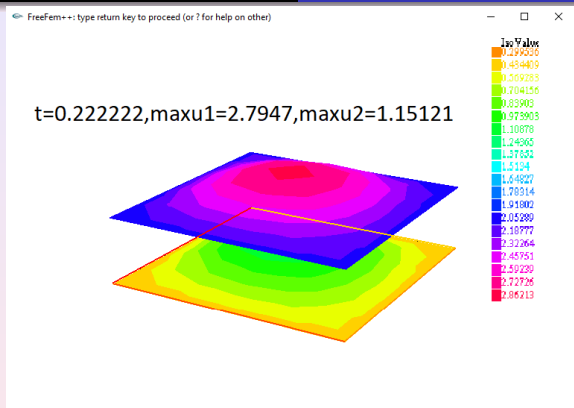
$$t = 0.7777778, \max u_1 = 2.45424, \max u_2 = 0.81576$$

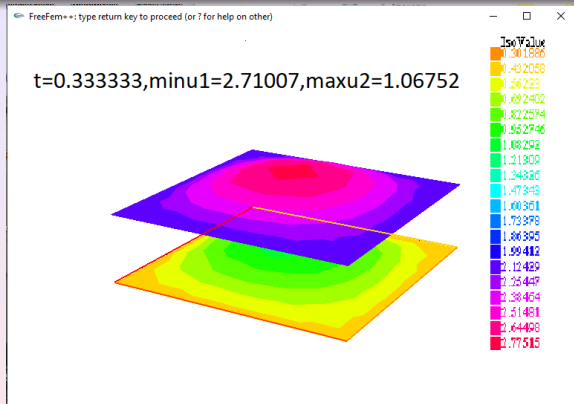
$$t = 0.8888889, \max u_1 = 2.40637, \max u_2 = 0.76856$$



# The Problem

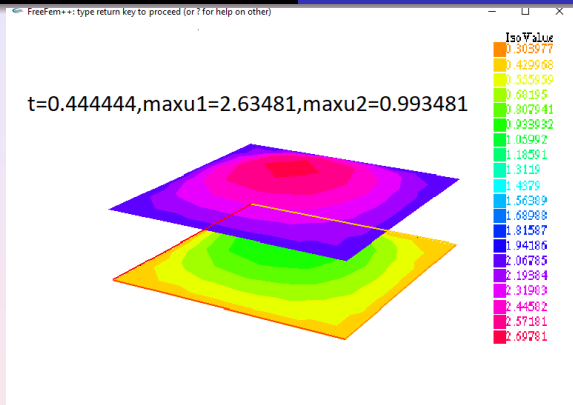
Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
Εκτιμήσεις Ενστάθεις  
Εκτιμήσεις Σφάλματος  
Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί



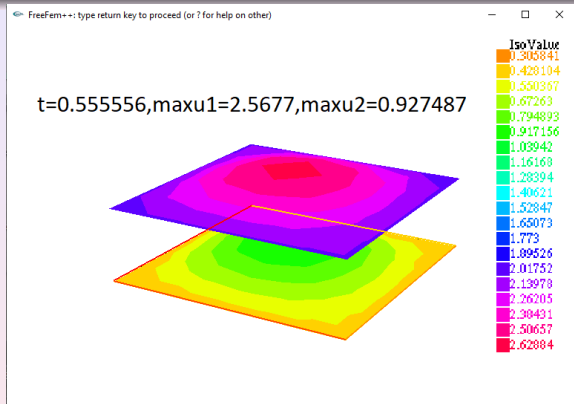


# The Problem

Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
Εκτιμήσεις Ευστάθειας  
Εκτιμήσεις Σφάλματος  
Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί

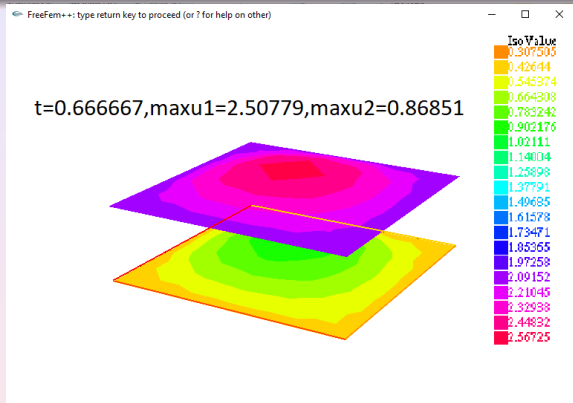


The Problem  
Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
Εκτιμήσεις Ευστάθειας  
Εκτιμήσεις Σφάλματος  
Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί

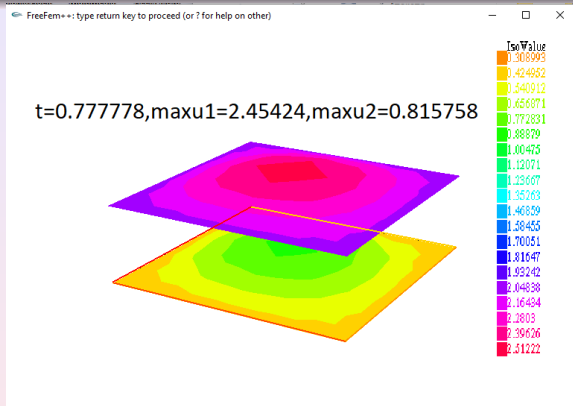


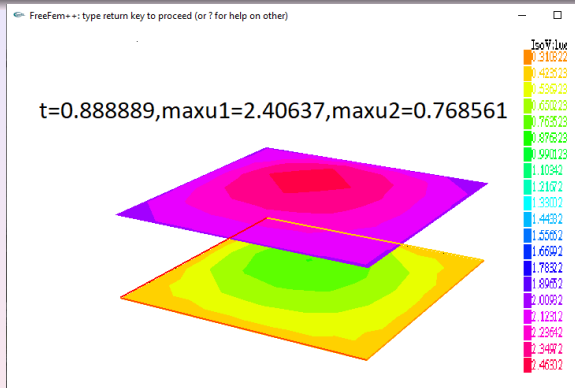
# The Problem

Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
Εκτιμήσεις Ευστάθειας  
Εκτιμήσεις Σφάλματος  
Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί



The Problem  
Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
Εκτιμήσεις Ευστάθειας  
Εκτιμήσεις Σφάλματος  
Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί

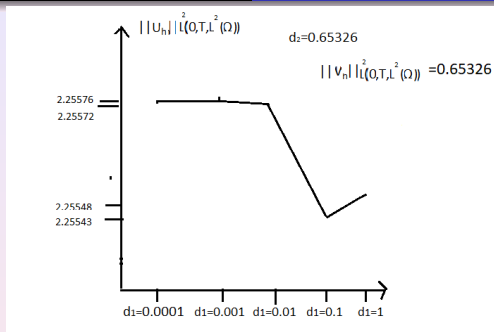




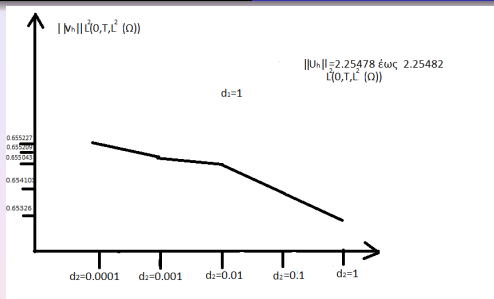
Στο παράδειγμα 1 είδαμε πως μεταβάλλονται οι τιμές  $maxu_1$ ,  $maxu_2$  σε συνάρτηση με το χρόνο.

**Παράδειγμα 2**, Στο παράδειγμα αυτό θα επαληθεύσουμε ότι οι  $U_h, V_h$ , δηλαδή οι προσεγγιστικές τιμές των  $u, v$  είναι ανεξάρτητες από  $d_1, d_2$  όταν έχουμε μικρές τιμές των συντελεστών διάχυσης  $0 < d_1, d_2 \leq 1$ . Πράγματι, χρησιμοποιώντας το ίδιο παράδειγμα όπως στο παράδειγμα 1, για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $d_2$ , για σταθερό  $d_1$  και μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t_k$ , έχουμε:





**Figure:** Γραφική Παράσταση που δείχνει ότι όταν οι σταθερές διάχυσης παίρνουν τιμές μεταξύ του 0 και του 1, δεν επηρεάζουν ουσιαστικά την νόρμα της προσεγγιστικής λύσης



**Figure:** Γραφική Παράσταση που δείχνει ότι η σταθερά διάχυσης για μικρές τιμές μεταξύ 0 και 1, δεν επηρεάζουν ουσιαστικά την νόρμα

$$\|U_h\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}$$

**Παράδειγμα 3,** Στο παράδειγμα αυτό, βλέπουμε σφάλματα για το σύστημα κυνηγού-θηράματος (1.1.1)-(1.1.2) στις δύο διαστάσεις όταν έχουμε συναρτησοειδές  $|u| \leq h$   $h(u_1, u_2) = u_2(1 - \exp(-|u_1|))$ .

Περιμένουμε  $\|E_u\|_{L^2(L^2)} + \|E_v\|_{L^2(L^2)} = O(h^2)$  και  $\|E_u\|_{L^2(H^1)} + \|E_v\|_{L^2(H^1)} = O(h)$ .

Ο ακόλουθος πίνακας επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα που περιμένουμε.

## Υπολογισμός σφάλματος - Πίνακας 1

| $t = 2h^2$      | $\ E_u\ _{L^2(L^2)} + \ E_v\ _{L^2(L^2)}$ | $\ E_u\ _{L^2(H^1)} + \ E_v\ _{L^2(H^1)}$ |
|-----------------|---|---|
| $h = 0.235702$  | 0.00278302                                | 0.0405856                                 |
| $h = 0.117851$  | 0.00078813                                | 0.0206881                                 |
| $h = 0.0589256$ | 0.000206398                               | 0.0101263                                 |
| $h = 0.0294628$ | 5.21871e-005                              | 0.00501671                                |
| $h = 0.0147314$ | 1.30849e-006                              | 0.00250152                                |
| Τάξη σύγκλισης  | 1.93315                                   | 1.005023495                               |

**Παράδειγμα 4** Το παράδειγμα αυτό, αφορά το σύστημα κυνηγού-θηράματος, σε ένα τρισδιάστατο κύβο χρησιμοποιώντας ως ακριβείς λύσεις

$$u1_{ex} = c_{11} e^{-tc_1} \sin(2\pi ry) (\cos(2\pi rx) - 1) (\cos(2\pi rz) - 1)$$

$$u2_{ex} = c_{12} e^{c_2 \sin(ct)} \sin(2\pi nx) \sin(2\pi ny) (\cos(2\pi nz) - 1)$$

όπου  $c_{11} = c_{12} = 1$ ,  $c_1 = c_2 = cl = 1$ ,  $r = 1$ ,  $n = 1$   
με  $h(u) = 1 - e^{-|u|}$

Στις τρεις διαστάσεις περιμένουμε για τις νόρμες σφαλμάτων  $\|E_u\|_{L^2(L^2)} + \|E_v\|_{L^2(L^2)} = O(h^2)$  και  $\|E_u\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \|E_v\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} = O(h^4)$ .

Οι ακόλουθοι πίνακες μας δείχνουν τα αναμενόμενα αποτελέσματα και επαληθεύουν την θεωρία.

| Υπολογισμός σφάλματος στις 3 διαστάσεις Πίνακας 2 |   |   |
|---|---|---|
| $dt = 2 * h^2$                                    | $\ E_u\ _{L^\infty(L^2)} + \ E_v\ _{L^\infty(L^2)}$ | $\ E_u\ _{L^2(L^2)} + \ E_v\ _{L^2(L^2)}$ |
| $h = 0.235702$                                    | 0.064143  | 0.00686593                                |
| $h = 0.117851$                                    | 0.0173715   | 0.000489076                               |
| $h = 0.0589256$                                   | 0.00423513  | $2.87675 * 10^{-5}$                       |
| Conv. Rate  | 3,949435  | 1,940405                                  |

Σε αυτό το παράδειγμα βρήκαμε τάξη σύγκλισης στη περίπτωση του κύβου.

- Αξίζει να σημειωθεί ότι λίγα προβλήματα έχουν επιλυθεί με Freefem++ στο τρισδιάστατο χώρο, ενώ δεν υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές που να μελετούν την τάξη σύγκλισης σε 3 διαστάσεις. Αυτό το γεγονός είναι αρκετά σημαντικό, όσον αφορά την πρωτοτυπία της παρούσας εργασίας.

- Παρά τις όποιες τεχνικές δυσκολίες λόγω της ανάγκης για μεγάλη υπολογιστική ισχύ που υπήρχε κατά την υλοποίηση, το πρόγραμμα ολοκληρώθηκε και μας έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα για την τάξη σύγκλισης σε 3 διαστάσεις  $x, y, z$  καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου.



**Παράδειγμα 5**, Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε αποτελέσματα για το σύστημα κυνηγού-θηράματος με Holling type II συναρτησοειδές. Στο επόμενο παράδειγμα θέτουμε  $d_1 = 1$  και  $d_2 = 0.0001$ , και παρατηρούμε ότι η τάξη σύγκλισης του  $\|E_u\|_{L^2(L^2)} + \|E_v\|_{L^2(L^2)}$ ,  $\|E_u\|_{L^2(L^2)}$ ,  $\|E_v\|_{L^2(L^2)}$  είναι σχεδόν 2.

| Υπολογισμοί Σφάλματος - Πίνακας 3 - $d_2 = 0.0001$ |   |                     |                     |
|--|---|---------------------|---------------------|
| $t = 2 * h$  | $\ E_u\ _{L^2 L^2} + \ E_v\ _{L^2 L^2}$ | $\ E_u\ _{L^2 L^2}$ | $\ E_v\ _{L^2 L^2}$ |
| $h = 0.235702$                                     | 0.00313636                              | 0.00115665          | 0.0291529           |
| $h = 0.117851$                                     | 0.000863745                             | 0.000396566         | 0.000767327         |
| $h = 0.0589256$                                    | 0.0002245                               | 0.000110387         | 0.000195486         |
| $h = 0.029462$                                     | 5.66598e-005                            | 2.83283e-005        | 4.90697e-005        |
| $h = 0.0147314$                                    | 1.41996e-005                            | 7.13e-006           | 1.22797e-005        |
| Conv.Rate  | 1,946775                                | 1,8354575           | 1,9728075           |

Παρατήρηση: Για  $dt = 2h$  οι μέσες τιμές της τάξης σύγκλισης της  $\|E_u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$  νόρμα είναι πιο κοντά στο 2 από τη νόρμα του σφάλματος  $\|E_v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ .

Αυτό ισχύει επειδή η τάξη σύγκλισης της πρώτης επανάληψης είναι 1,5 που δεν είναι κοντά στο 2.

Υπολογισμός σφάλματος - Πίνακας 4 στη περίπτωση που  $d_1 = 0.01$

| $t = 2 * h$     | $\ E_u\ _{L^2L^2} + \ E_v\ _{L^2L^2}$ | $\ E_u\ _{L^2L^2}$ | $\ E_v\ _{L^2L^2}$ |
|-----------------|---------------------------------------|--------------------|--------------------|
| $h = 0.235702$  | 0.00410573                            | 0.0028573          | 0.00294837         |
| $h = 0.117851$  | 0.00107299                            | 0.000725671        | 0.000790379        |
| $h = 0.0589256$ | 0.000273601                           | 0.000183999        | 0.000202489        |
| $h = 0.029462$  | 6.87004e-005                          | 4.61362e-005       | 5.09038e-005       |
| Conv.Rate       | 1,96706                               | 1,984203           | 1,952              |

Στους δύο πίνακες ( πίνακας 3, πίνακας 4) βλέπουμε την μεταβολή των σφαλμάτων σε σχέση με τη μεταβολή των συντελεστών αντίδρασης διάχυσης. Με μια προσεκτικότερη ματιά βλέπουμε ότι καθώς οι τιμές των συντελεστών αντίδρασης διάχυσης μικραίνουν, έχουμε τάξη σύγκλισης κοντά στην αναμενόμενη τιμή 2 για τη νόρμα  $\| \cdot \|_{L^2(L^2(\Omega))}$ .

Αξίζει επίσης να αναφέρουμε ότι και στα δύο παραπάνω παραδείγματα έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό:

$$\|E_u\|_{L^2 H^1} + \|E_v\|_{L^2 H^1} =$$

$$\|E_u\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))} + \|E_v\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))},$$

$$\|E_u\|_{L^2 L^2} + \|E_v\|_{L^2 L^2} =$$

$$\|E_u\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))} + \|E_v\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))},$$

$$\|E_u\|_{L^2 H^1} = \|E_u\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))},$$

$$\|E_v\|_{L^2 H^1} = \|E_v\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))},$$

$$\|E_u\|_{L^2 L^2} = \|E_u\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))},$$

$$\|E_v\|_{L^2 L^2} = \|E_v\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}$$

**Παράδειγμα 6**, Τώρα ξαναγράφουμε το σύστημα που αποτελείται από δύο παραβολικές Μ.Δ.Ε. Ειδικότερα, για τα αρχικά δεδομένα  $u_0, v_0$ , ψάχνουμε  $u, v$  που να ικανοποιούν τη σχέση

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u - u(1-u) + vh(au) = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} v_t - d_2 \Delta v - bvh(au) + cv = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma \\ v(0, x) = v_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (50)$$

Στη περίπτωση μας  $h(au) = \frac{au^2}{1+au^2}$  (Holling type III) συναρτησοειδές.

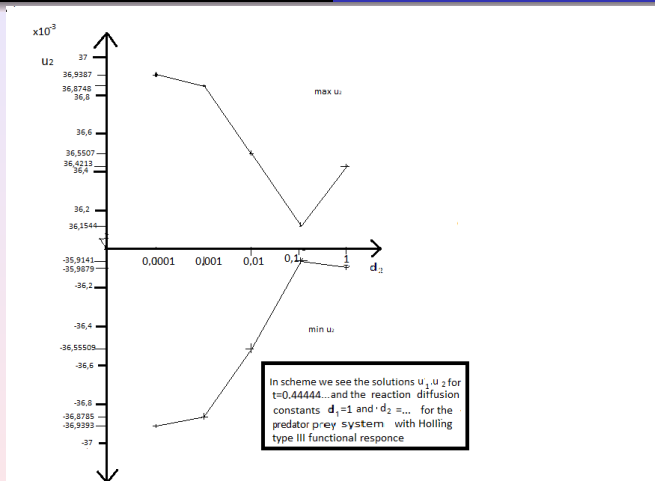
- Τα παραδείγματα 4 και 5 περιγράφουν χαρακτηριστικά πως μια παράμετρος επηρεάζει μια άλλη παράμετρο όταν όλες οι άλλες τιμές είναι σταθερές. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι οι μόνες τιμές που μεταβάλλονται είναι η λύση  $v$  και η σταθερά διάχυσης  $d_2$  και η άλλη σταθερά διάχυσης μένει σταθερή  $d_1 = 1$ .
- Σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ένα γραφημα που στο άξονα των τετμημένων βλέπουμε διαφορετικές τιμές των σταθερών διάχυσης  $d_2$  και στον άξονα των τεταγμένων τις διαφορετικές τιμές του  $\max\{v\}$  και  $\min\{v\}$ . για σταθερή τιμή του χρόνου  $t = 0,4444..$

Απο αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι οι τιμές των  $v$  μοιάζουν να είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των τετμημένων  $x$  και πολύ κοντά στο μηδέν. Επιπλέον παρατηρούμε ότι για σταθερές τιμές της  $d_1 = 1$  όταν παίρνουμε μικρότερες τιμές  $d_2$  παίρνω μεγαλύτερες τιμές του  $\max\{v\}$  και μικρότερες τιμές  $\min\{v\}$ . Η μόνη περίπτωση που αυτό δεν ισχύει είναι όταν συγκρίνουμε τις τιμές των  $v$  όταν  $d_2 = 0.1$  έως το  $d_2 = 1$

- Για μια πιο ακριβή εικόνα των παρατηρήσεων μας, θα δούμε το παράδειγμα 5. Εκεί υπολογίζουμε την νόρμα  $L^2$  ως προς το χρόνο και παίρνουμε περισσότερες τιμές για τον υπολογισμό της νόρμας. Ενώ εδώ παίρνουμε τιμές για μόνο μια σταθερή χρονική στιγμή. Η μεταβολή ωστόσο που έχουμε για τη νόρμα  $\|u_2\|_{L^2}$  είναι μικρή δεδομένου ότι η μεταβολή του συντελεστή είναι κατά 10 αυτό μας επιτρέπει να υποστηρίξουμε ότι η νόρμα είναι πρακτικά ανεξάρτητη του  $d_2$ .

Στο ακόλουθο παράδειγμα συμβολίζουμε  $u_2 = v$  και  $u_1 = u$ . Έτσι παίρνουμε το ακόλουθο γράφημα:

The Problem  
 Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
 Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
 Εκτιμήσεις Ευστάθειας  
 Εκτιμήσεις Σφάλματος  
 Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί



Φιγυρε: γ.π. των σταθερών αντίδρασης διάχυσης για την  $u$  στο  $t_k$ .



**Παράδειγμα 7** Το παράδειγμα μοιάζει με το παράδειγμα 4. Παίρνουμε Holling type III συναρτησοειδές  $h(au) = \frac{au^2}{1+au^2}$ . και παρατηρούμε τα αποτελέσματα για ίσες τιμές των παραμέτρων συγκέντρωσης διάχυσης με το παραπάνω παράδειγμα  $d_2$ . Ομοίως με το παράδειγμα 4, παρατηρούμε ότι οι τιμές των νορμών  $\|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}$  για διαφορετικές τιμές των σταθερών  $d_2$  με  $d_1 = 1$ , στον άξονα των τετμημένων  $x$  έχουμε τις διαφορετικές τιμές των συντελεστών συγκέντρωσης διάχυσης  $d_2$ . Ενώ στον άξονα των τεταγμένων  $y$  παίρνουμε τιμές της νόρμας  $\|v\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}$ .

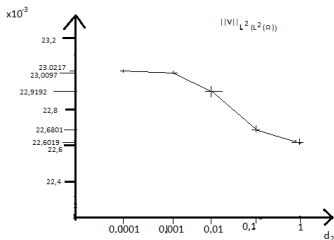
- Συγκρίνοντας το ακόλουθο αποτέλεσμα με αυτό της γραφικής παράστασης (3) βλέπουμε ότι έχουμε παρόμοια μονοτονία. Όπως παρατηρούμε καθώς παίρνουμε μικρότερες τιμές του  $d_2$  η νόρμα  $\|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}$  παίρνει μεγαλύτερες τιμές και αντιστρόφως. για μεγαλύτερες τιμές του  $d_2$  αντιστοιχούν μικρότερες τιμές της νόρμας  $\|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}$ .

- Επιπλέον οι τιμές των νορμών έχουν ίδια τάξη σε αυτό και στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε τάξεις  $\times 10^{-3}$ .

Φυσικά αυτό το γράφημα δείχνει με μεγαλύτερη ακρίβεια τι συμβαίνει με τις τιμές της λύσης, διότι μελετάται η

$$\|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}.$$

Για περισσότερες πληροφορίες για την μορφή του συστήματος που μελετάμε μπορούμε να δούμε το παράδειγμα 4. Σταθεροποιούμε όλες τις τιμές και οι μόνες τιμές που αλλάζουν είναι η σταθερά διαχυσης  $d_2$  και η νόρμα  $\|v\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\Omega))}$ . Έτσι παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:



The Graph of  $L^2$  norm for different values of reaction diffusion constants of  $d_2$  and standard value of  $d_1$  for the system of predator prey with Holling type III functional response

Figure:  $L^2$  νόρμα με διαφορετικές τιμές  $d_2$  για το σύστημα κνηγού θηράματος με Holling type III συναρτησοειδές

**Παράδειγμα 8** Στο παράδειγμα θα δούμε το σχήμα που παριστάνει την μεταβολή των λύσεων του κυνηγού θηράματος με  $lvlev$  συναρτησοειδές με αρχικές συνθήκες  $u_0 = x * (x - 1)$   $v_0 = y * (y - 1)$ . Παρατηρούμε ότι καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται οι τιμές των λύσεων που παριστάνει το σχήμα παρουσιάζει κορυφές και αυλακώσεις. Η εξίσωση που προσεγγίζει αρκετά αυτό το σχήμα είναι της μορφής  $Z = \sin(X) + \cos(Y)$ , καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου.

Οι γραφικές παραστάσεις σε 3D φαίνονται στα σχήματα 5-9.

Ακολουθούν γραφικές παραστάσεις σε δύο διαστάσεις 2D (σχήματα 10-16).

Απο τις γραφικές παραστάσεις σε δύο διαστάσεις βλέπουμε ότι καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται δημιουργούνται πτυχώσεις και στις τελευταίες απεικονίσεις βλέπουμε να δημιουργούνται βαθμιαία δύο ξεχωριστες ελλείψεις, ενώ τελικά εμφανίζεται κάποιος κόκκινος κύκλος στη μέση. Αυτές είναι οι αναπαραστάσεις στο επίπεδο (δύο διαστάσεις) για το ίδιο φαινόμενο που εξελίσσεται στις 3 διαστάσεις.

- Με όλα αυτά διαπιστώνουμε ότι τελικά ότι οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν άμεσα το προβλήμα μου. Αυτό φυσικά φαίνεται και αν κάποιος δει τη σύγκλιση. Εδώ δεν επιλέξαμε να δείξουμε σύγκλιση, αν ωστόσο βλέπαμε την τάξη σύγκλισης θα παρατηρούσαμε ότι θα παρουσιάζονταν μεγάλα σφάλματα.
- Γενικά όταν θέλουμε σύγκλιση θα πρέπει να επιλέγουμε αρχικές συνθήκες με μεγάλη προσοχή. Η επιλογή αρχικών συνθηκών βλέπουμε ότι επηρεάζει την λύση του προβλήματος.

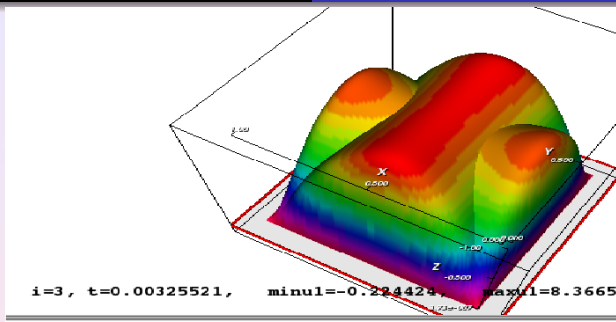


Figure: 3D – plot1

The Problem  
Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
Εκτιμήσεις Ευστάθειας  
Εκτιμήσεις Σφάλματος  
Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί

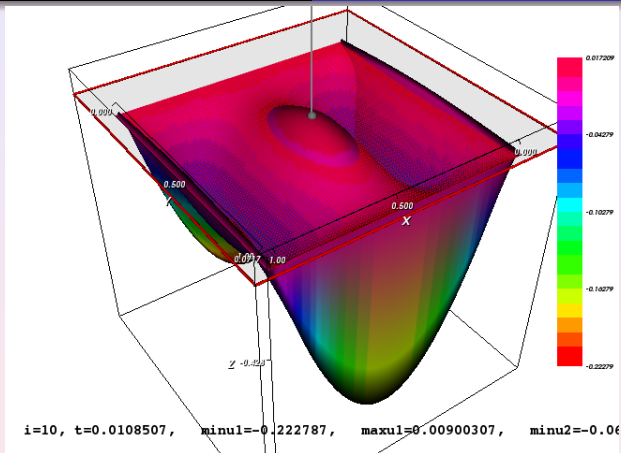


Figure: 3D – plot2

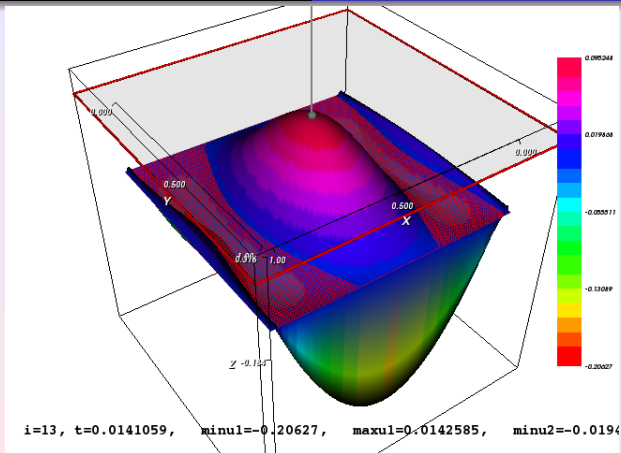


Figure: 3D – plot1



The Problem  
Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
Εκτιμήσεις Ευστάθειας  
Εκτιμήσεις Σφάλματος  
Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί

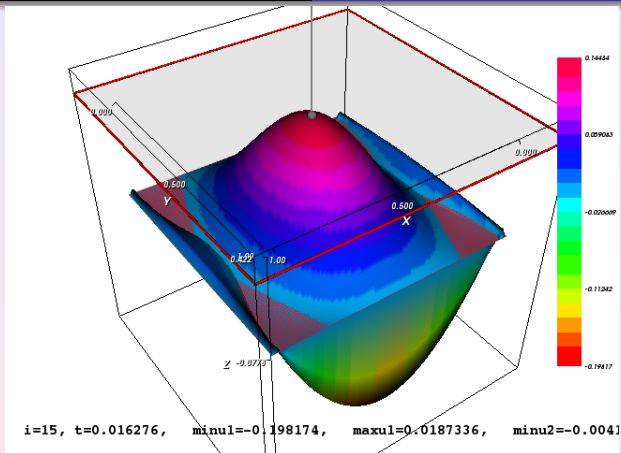


Figure: 3D – plot4

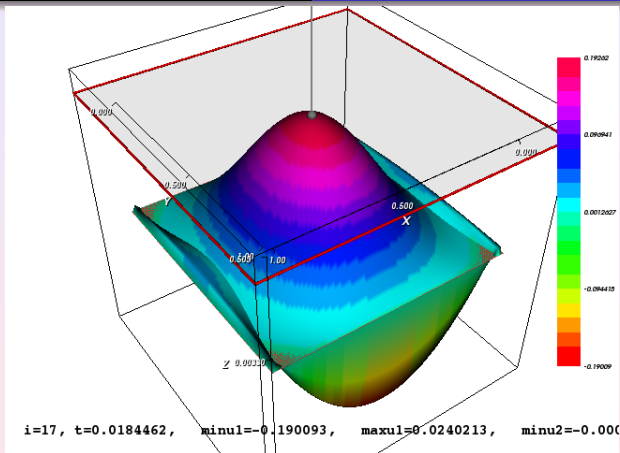


Figure: 3D – plot5

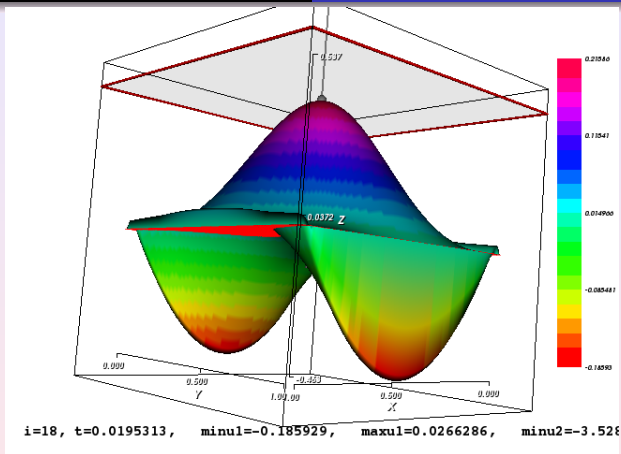


Figure: 3D – plot6



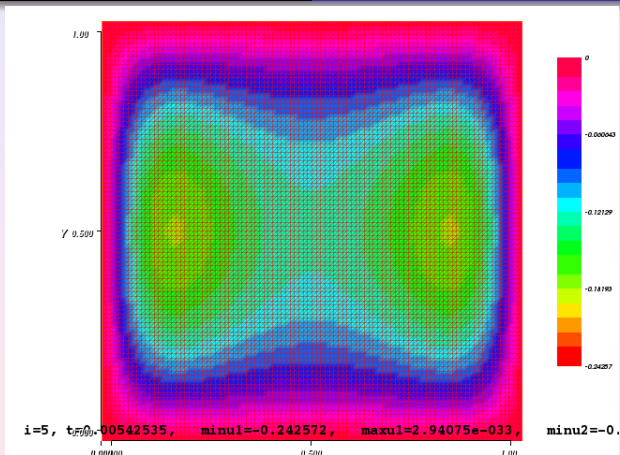


Figure: 2D – plot2



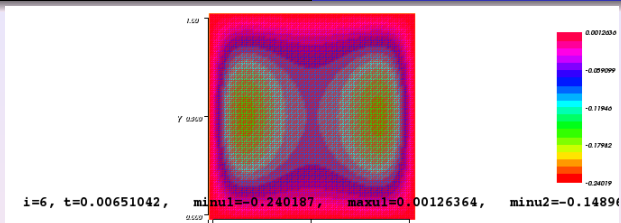


Figure: 2D – plot4

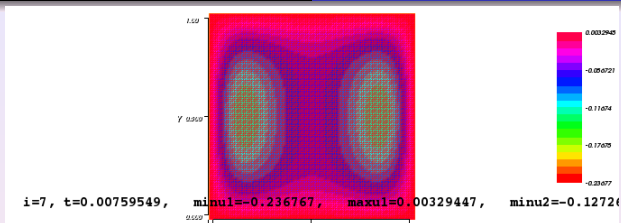


Figure: 2D – plot5



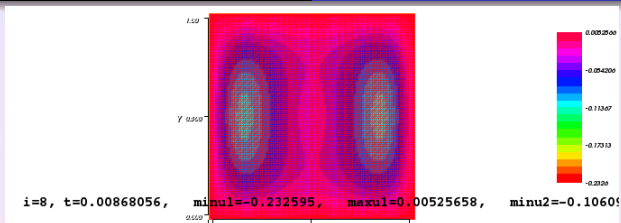


Figure: 2D – plot6

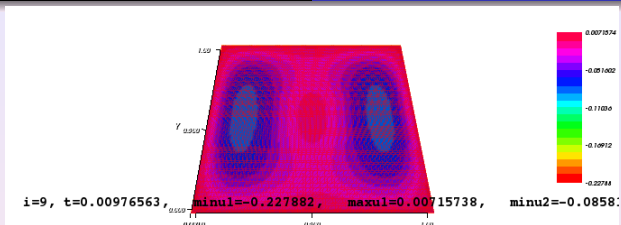
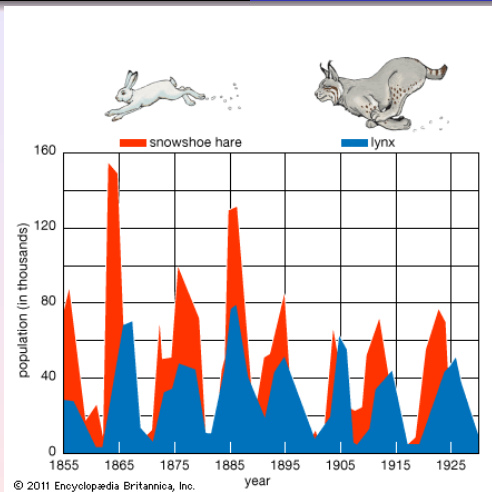


Figure: 2D – plot7

# The Problem

Εισαγωγή στο μοντέλο predator prey  
Το πλήρες διακριτό μοντέλο  
Εκτιμήσεις Ευστάθειας  
Εκτιμήσεις Σφάλματος  
Αριθμητικά αποτελέσματα-υπολογισμοί



Ευχαριστώ για την ακρόαση