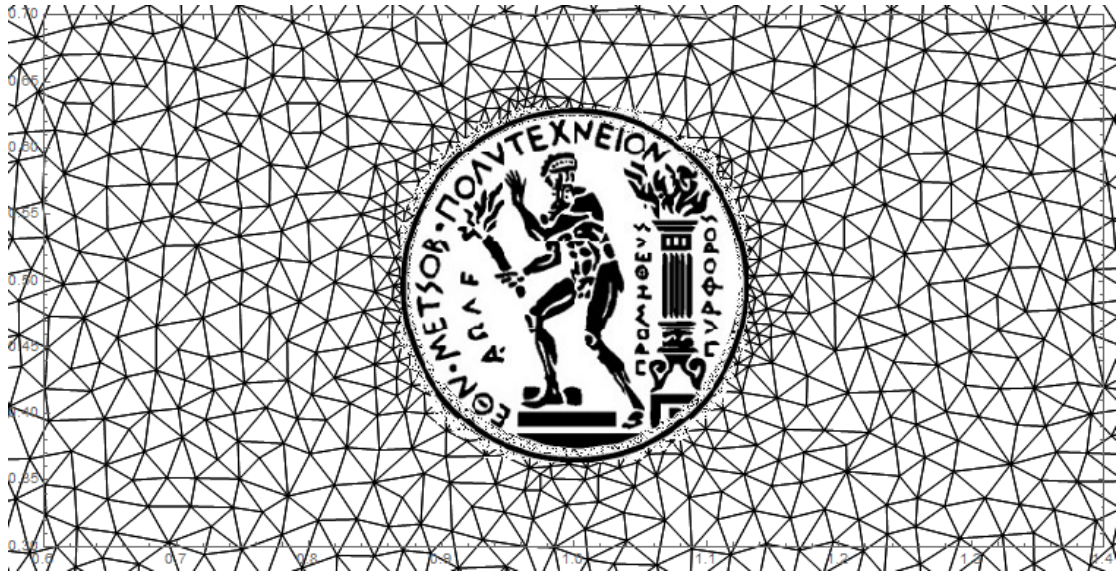


ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



**ΜΕΙΚΤΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΪΩΝ ΓΙΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΞΪΣΩΣΗ STOKES.**

**MIXED FINITE ELEMENT METHOD FOR ELLIPTIC
EQUATIONS AND APPLICATIONS TO STOKES
EQUATION.**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τόπσιος Αθανάσιος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κωνσταντίνος Χρυσάφινος

Ευχαριστίες

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με κάθε τρόπο να υλοποιηθεί αυτή η εργασία και πρώτα απ'όλους τον καθηγητή μου Χρυσάφινο Κωνσταντίνο για την υπομονή, την επίβλεψη της εργασίας καθώς και για τις πολύτιμες γνώσεις του όπου σε συνδυασμό με την σωστή καθοδήγηση κατάφερα να φέρω εις πέρας το έργο που μου ανέθεσε. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους μου Μωραΐτη Κωνσταντίνο και Τζαμουράνη Ελένη για την σημαντική βοήθεια και την ενθάρρυνσή τους, ώστε να καταφέρω να ολοκληρώσω με επιτυχία την εργασία. Τέλος, θα ήθελα εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για όλη τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόησή τους, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τόπτσιος Αθανάσιος

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία θα παρουσιάσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για ελλειπτικές εξισώσεις και συγκεκριμένα για τις εξισώσεις Navier-Stokes. Αρχικά παρουσιάζουμε το μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων δηλαδή τους χώρους Sobolev οι οποίοι παίζουν σημαντικό ρόλο στη μέθοδο αυτή, καθώς και κάποια εργαλεία από την συναρτησιακή ανάλυση. Ύστερα αναφερόμαστε στο κίνητρο που μας οδήγησε στον ορισμό του μεταβολικού προβλήματος και της ασθενούς λύσης. Επίσης γίνεται αναφορά στη μέθοδο Ritz-Galerkin, με την οποία καταφέρνουμε να μετατρέψουμε το μεταβολικό πρόβλημα σε ένα σύστημα $Ax=b$. Ακολουθεί ο ορισμός των πεπερασμένων στοιχείων και πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε εκ των προτέρων το σφάλμα της ταχύτητας και την τάξη ακρίβειας της μεθόδου, με τη βοήθεια των αντίστοιχων νορμών στους χώρους που μελετάμε. Τέλος εξετάζουμε το πρόβλημα της εξίσωσης Stokes για ρευστά όπου περιγράφουμε κατάλληλα πεπερασμένα στοιχεία, για τη μελέτη τέτοιου είδους προβλημάτων και γίνεται παρουσίαση κώδικα και αριθμητικών αποτελεσμάτων ώστε να τα συγκρίνουμε με τις θεωρητικές εκτιμήσεις.

Abstract

In this paper we will present the finite element method for elliptic equations with an emphasis to elliptic Stokes equation. First, we present the mathematical background of finite elements method, i.e. the metric spaces and the Sobolev spaces which play an important role in this method, as well as some tools from functional analysis. Reference is also made to the Ritz-Galerkin method, with which we manage to transform the variational problem into an $Ax = b$ system. The definition of finite spaces is presented and various a-priori error estimates are established. Special emphasis is given to mixed variational formulations. Finally, we examine the problem of the Stokes equation for fluids where we describe appropriate with finite elements to study those kinds of problems and present code and numerical results to compare them with theoretical estimates.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1.1 Μετρικοί χώροι με νόρμα.....σελ.	8
1.2 Χώροι Sobolev	σελ. 12
1.3 Εργαλεία από τη Συναρτησιακή ανάλυση.....σελ.	15
1.4 Μεταβολική μορφή προβλημάτων συνοριακών τιμών.....σελ.	18
1.5 Η μέθοδος Ritz-Galerkin.....σελ.	25
1.6 Πεπερασμένα Στοιχεία.....σελ.	31

Κεφάλαιο 2

2.1 Ιδιότητες προσέγγισης.....σελ.	37
2.2 Αντίστροφες Εκτιμήσεις.....σελ.	42
2.3 Φράγματα σφάλματος ελλειπτικού προβλήματος 2 ^{ου} βαθμού.....σελ.	42
2.4 L_2 Εκτίμηση.....σελ.	44
2.5 L_2 -Προβολή.....σελ.	47
2.6 Απλή προσέγγιση συνόρου.....σελ.	48
2.7 Αρνητικές Νόρμες, Συζυγείς τελεστές.....σελ.	52
2.8 Προβλήματα Σημείου Σέλλας.....σελ.	56
2.9 Μεικτές Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων.....σελ.	59

Κεφάλαιο 3

3.1 Η εξίσωση Stokes.....σελ.	62
3.2 Η συνθήκη inf-sup.....σελ.	64
3.3 Αποτελέσματα σύγκλισης της προσεγγιστικής ταχύτητας και πίεσης.....σελ.	66
3.4 Πεπερασμένα στοιχεία για το πρόβλημα Stokes.....σελ.	67
3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα για τις εξισώσεις Navier-Stokes.....σελ.	69

Βιβλιογραφία.....σελ. 80

Εισαγωγή

Στα μαθηματικά μία μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) είναι μια διαφορική εξίσωση η οποία περιέχει άγνωστες συναρτήσεις πολλαπλών μεταβλητών και τις μερικές παραγώγους αυτών. Οι ΜΔΕ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν πληθώρα φαινομένων, όπως ήχο, θερμότητα, ηλεκτροστατική, ηλεκτροδυναμική, ροή του υγρού, ή ελαστικότητα. Στην εργασία αυτή μελετάμε την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους χρησιμοποιώντας τις **Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ)**. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος (δηλ. μέθοδος υπολογισμού με χρήση Η/Υ) για τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Οι μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων έχουν αναπτυχθεί συστηματικά τα τελευταία 50 περίπου χρόνια για τη λύση εφαρμοσμένων προβλημάτων, αρχικά κυρίως από τους μηχανικούς. Ταξινομούμε μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης ως **ελλειπτικές, υπερβολικές και παραβολικές**. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με την επίλυση ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων και κυρίως των εξισώσεων Stokes. Τόσο η θεωρητική όσο και η αριθμητική επεξεργασία διαφέρουν σημαντικά για τους τρεις τύπους. Οι μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές για προβλήματα με περίπλοκη γεωμετρία. Για την θεωρητική μελέτη ΜΔΕ καθώς και για προσεγγίσεις αυτών, με την ΜΠΣ χρησιμοποιούνται εκτεταμένα χώροι Sobolev. Με την βοήθεια αυτών ορίζεται η έννοια της ασθενούς λύσης καθώς και της διακριτής ασθενούς λύσης που ορίζεται με βάση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Επισημαίνεται πως στη ΜΠΣ γίνεται αναγωγή του προβλήματος σε ένα αλγεβρικό σύστημα $Ax=b$ όπου ο πίνακας A έχει κατάλληλη (αραιή) δομή. Η δομή του πίνακα A είναι τέτοια ώστε να εξασφαλιστεί η όσο το δυνατό ευκολότερη και ταχύτερη επίλυση του συστήματος και επομένως της προσεγγιστικής λύσης u_h . Με τη βοήθεια εργαλείων συναρτησιακής ανάλυσης αποδεικνύονται αποτελέσματα ευστάθειας καθώς και a -priori εκτιμήσεων σφαλμάτων που είναι ο κύριος στόχος της εργασίας αυτής.

Κεφάλαιο 1

Οι χώροι Hilbert, σύμφωνα με [13, Κεφάλαιο 4], αποτελούν μια ιδιαίτερη κλάση χώρων Banach. Αποτελούν τη γενίκευση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Όπως και στον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ η νόρμα στους χώρους Hilbert ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο. Έτσι η γεωμετρία των χώρων Hilbert είναι όμοια με τον Ευκλείδειο χώρο. Για παράδειγμα ορίζεται η καθετότητα μεταξύ δύο στοιχείων τους. Η απλή γεωμετρική δομή των χώρων Hilbert (ορθογωνιότητα, καθετότητα, κλπ.) δίνει πολλές χρήσιμες πληροφορίες για τους διάφορους χώρους συναρτήσεων. Οι χώροι αυτοί έχουν πολλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους των Μαθηματικών και της Φυσικής.

1.1 Μετρικοί χώροι με νόρμα.

Ορισμός 1.1.1 (βλ [14, Κεφάλαιο 8, Σελίδα 191]): Έστω ένα μη κενό σύνολο V και K ένα σώμα. Το σύνολο V θα λέγεται **διανυσματικός χώρος** ή **γραμμικός χώρος** πάνω στο σώμα K αν έχουν οριστεί δύο πράξεις:

Μια εσωτερική $V \times V \xrightarrow{(+)} V: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$ η οποία λέγεται **πρόσθεση** και μια εξωτερική πράξη με συντελεστές από το σώμα K ,

το **βαθμωτό πολλαπλασιασμό** $K \times V \xrightarrow{(\cdot)} V: (\lambda, \mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{y}$.

Έτσι ώστε για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $\lambda, \mu \in K$ να ισχύουν

- i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- ii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- iii) Υπάρχει $0 \in V$ τέτοιο ώστε: $\mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$ (ουδέτερο στοιχείο)
- iv) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ υπάρχει $-\mathbf{x} \in V$: $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$ (αντίθετο στοιχείο)
- v) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$
- vi) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$
- vii) $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$
- viii) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Μια έκφραση της μορφής $\sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{v}_i$ όπου $\mathbf{v}_i \in V$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ καλείται **γραμμικός συνδυασμός** των \mathbf{v}_i .

Στην εργασία αυτή η τυπική επιλογή είναι $V = \mathbb{R}^n$.

Αν για κάθε γραμμικό συνδυασμό στοιχείων του V , ισχύει

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Τότε λέμε ότι τα στοιχεία v_i είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** στο V , αλλιώς λέμε είναι **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Γενικεύουμε τώρα την έννοια του μήκους ενός διανύσματος και εισάγουμε την έννοια της νόρμας.

Ορισμός 1.1.2 (βλ [11, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 22]): Έστω ένας διανυσματικός χώρος V . Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται **νόρμα** και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
- ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n$
- iv) $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$ (τριγωνική ανισότητα)

Θα προχωρήσουμε τώρα στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου ενός διανυσματικού χώρου.

Ορισμός (βλ [11, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 23]): Ένα **εσωτερικό γινόμενο** (\cdot, \cdot) στο \mathbb{R}^n είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ και τιμές στο \mathbb{R} με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) $(v, v) \geq 0 \quad v \in \mathbb{R}^n$
- ii) $(u, v) = (v, u) \quad u, v \in \mathbb{R}^n$
- iii) $(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$
- iv) $(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u, w) + \mu(v, w) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad u, v, w \in \mathbb{R}^n$

Δύο στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου λέμε ότι είναι **ορθογώνια** αν

$$(u, v) = 0.$$

Ένα εσωτερικό γινόμενο επάγει πάντα μια αντίστοιχη νόρμα με την έκφραση $\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}$.

Παραδείγματα νορμών.

Στον \mathbb{R}^n έχουμε τις νόρμες

$$1) \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2) \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$3) \|x\|_\infty = \max |x_i| \quad \text{με } 1 \leq i \leq n$$

Έστω $X = \{p = p(t) : p \text{ πολυώνυμο οποιουδήποτε βαθμού}\}$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον X ως εξής, $\|p\| = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|$. Τότε ο X είναι ένας απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος με νόρμα.

Ορισμός (μετρική) (βλ [12, Κεφάλαιο 4, Σελίδα 45]): Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μετρική στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\rho(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $\rho(x, y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$

(η ρ είναι μη αρνητική).

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα).

(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Αν ρ είναι μια μετρική στο X τότε το ζεύγος (X, ρ) λέγεται μετρικός χώρος.

Παρατήρηση Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε η συνάρτηση

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

με $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$ (βλ [12, Κεφάλαιο 4, Σελίδα 45]), είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα).

Ένας χώρος V με νόρμα, καλείται **πλήρης χώρος** αν κάθε ακολουθία Cauchy του V συγκλίνει σε στοιχείο του V .

Ένα υποσύνολο S του χώρου V με νόρμα είναι **κλειστό** αν το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας του S ανήκει στο S .

Ορισμός 1.1.4 (βλ [13, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 21]): Ένας χώρος με νόρμα λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα.

Ορισμός 1.1.5 (βλ [13, Κεφάλαιο 4, Σελίδα 43]): Ένας χώρος Banach $(H, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Hilbert αν η νόρμα του ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H , δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο στον H ώστε $\|x\| = (u, u)^{1/2}$ για κάθε $x \in H$. Θα συμβολίζουμε με H τους χώρους Hilbert.

Ορισμός 1.1.6 (βλ [7, Κεφάλαιο 4, Σελίδα 79]): Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$. Θέτουμε

$$L_p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη και } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Συμβολίζουμε με L_1 τον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων πάνω στο Ω με τιμές στον \mathbb{R} .

Θέτουμε

$$\|f\|_{L_1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ είναι νόρμα και καλείται L_p -νόρμα.

Ο **L_2 χώρος** είναι το σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Δηλαδή ο χώρος συναρτήσεων f με $\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Ο χώρος αυτός εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$(u, v)_0 = (u, v)_{L_2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ είναι ένας χώρος Hilbert με την

αντίστοιχη νόρμα $\|u\|_0 = \sqrt{(u, u)_0}$.

1.2 Χρήση χώρων Sobolev/Hilbert

Στη συνέχεια, Ω ας είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n με ομαλό σύνορο. Για να δείξουμε την σημασία των χώρων Sobolev και Hilbert μελετάμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Κίνητρο

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα. Για δεδομένη $f \in C[a,b]$, αναζητούμε μια συνάρτηση $u(x)$ που ικανοποιεί

$$(1) \quad \begin{cases} -u'' + u = f & \text{στο } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Κλασική λύση του προβλήματος (1) είναι μια συνάρτηση u τάξεως C^2 στο $[a,b]$ που ικανοποιεί την (1). Πολλαπλασιάζουμε την (1) με $\varphi \in C^1[a,b]$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη, οπότε βρίσκουμε.

$$(2) \quad \int_a^b u' \varphi' + \int_a^b u \varphi = \int_a^b f \varphi \quad \forall \varphi \in C^1[a, b], \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Παρατηρούμε πως στη (2) δεν χρειάζεται να υποθέσουμε $u'' \in C^2[a,b]$. Επίσης η (2) έχει νόημα αν $u, u' \in L_1(a,b)$, όπου το u' πρέπει να οριστεί με κάποιο τρόπο. Λέμε (προσωρινά) ότι μια συνάρτηση u που ικανοποιεί την (2) είναι **ασθενής λύση** της (1).

Γενικεύουμε το παραπάνω σκεπτικό για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Παρατηρούμε πως ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες έχουμε για όλες τις $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ και $u \in C^k(\Omega)$ όπου k θετικός ακέραιος, και $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ με $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις.

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha u \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx,$$

$$(\varphi, v)_0 = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi, u)_0.$$

όπου $\partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial^{\alpha_1} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n} \varphi}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right)$ και $\varphi \in C_0^\infty$

Έτσι καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1.2.1 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 28]): $u \in L_2$ έχει (ασθενή) παράγωγο $v = \partial^a u$ στο $L_2(\Omega)$ υπό την προϋπόθεση $v \in L_2(\Omega)$ και

$$(\varphi, v)_0 = (-1)^{|\alpha|} (\partial^a \varphi, u)_0 \text{ για όλες τις } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να πούμε ότι το C_0^∞ δηλώνει το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα και είναι απείρως παραγωγίσιμες. Η έννοια της ασθενούς παραγώγου μεταφέρεται και σε άλλους διαφορικούς τελεστές. Για παράδειγμα $u \in L_2(\Omega)^n$ διανυσματικό πεδίο. Τότε η $v \in L_2(\Omega)$ είναι η απόκλιση της u , με ασθενή έννοια, $v = \operatorname{div} u$, υπό την προϋπόθεση ότι $(\varphi, v)_0 = -(\operatorname{grad} \varphi, u)_0$ για όλες τις $\varphi \in C_0^\infty$.

Ορισμός 1.2.2 (Χώρος Sobolev) (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 29]):

Δοσμένου ενός ακεραίου $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ να είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $u \in L_2(\Omega)$ με ασθενή παράγωγο $\partial^a u$ για όλα τα $|\alpha| \leq m$. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $H^m(\Omega)$

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^a u, \partial^a v)_0,$$

όπου $H^m(\Omega) := \{ u \in L_2(\Omega) : \partial^a u \in L_2 \text{ για } |\alpha| \leq m \}$.

Με αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_m := \sqrt{(u, u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^a u\|_{L_2(\Omega)}^2}.$$

Επίσης ορίζουμε την ημι-νόρμα

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^a u\|_{L_2(\Omega)}^2}.$$

Θεώρημα 1.2.3 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 29]): Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο με τμηματικά λείο σύνορο και $m \geq 0$. Τότε $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ είναι πυκνό σύνολο στον $H^m(\Omega)$.

Για $m \geq 2$ οι χώροι $H_0^m(\Omega)$ αποτελούνται από στοιχεία του $H^m(\Omega)$. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι

$$H_0^m(\Omega) = \{ u \in H^m(\Omega) : u = \partial u = \dots = \partial^{m-1}u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \}$$

Ορισμός 1.2.4 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 29]): Ορίζουμε ως $H_0^m(\Omega)$ την πλήρωση του $C_0^\infty(\Omega)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_m$.

Έστω τώρα Ω φραγμένο χωρίο. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε συνάρτηση u στο $C^{m-1}(\bar{\Omega})$ με κλασική παράγωγο $u^{(m)}$ τμηματικά συνεχή στο $\bar{\Omega}$, έχει ασθενή παράγωγο τάξης m , η οποία συμπίπτει με τη $u^{(m)}$, και η u ανήκει στον $H^m(\Omega)$. Σε όλα τα παρακάτω παραδείγματα θεωρούμε πως το σύνολο Ω έχει ομαλό σύνορο.

Παραδείγματα χώρων $H_0^m(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_\Gamma = 0 \} \quad \text{όπου } \Gamma \text{ σύνορο του } \Omega.$$

Ο χώρος Sobolev $H_0^2(\Omega)$ ορίζεται ως

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \mid u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma \right\}.$$

Προφανώς ο χώρος $H_0^m(\Omega)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $H^m(\Omega)$. Επιπλέον έχουμε $H_0^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Συμπέρασμα: $L_2(\Omega) = H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \dots$

$$\parallel \quad \cup \quad \cup$$

$$H_0^0(\Omega) \supset H_0^1(\Omega) \supset H_0^2(\Omega) \supset \dots$$

Οι παραπάνω χώροι Sobolev βασίζονται στην L_2 -νόρμα. Ανάλογα μπορούν να οριστούν χώροι Sobolev με μια αυθαίρετη L_p -νόρμα με $p \neq 2$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε τους χώρους Sobolev με $W^{m,p}(\Omega)$ και $W_0^{m,p}(\Omega)$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 1.2.5: Οι χώροι $H^m(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H_0^2(\Omega)$ κλπ είναι χώροι Hilbert.

Ανισότητα Poincare-Friedrich: Υποθέτουμε ότι το Ω περιέχεται σε έναν n -διάστατο κύβο με ακμή μήκους s . Τότε

$$\|v\|_0 \leq s|v|_1 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Θεώρημα (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 31]): Αν το Ω είναι φραγμένο τότε η $|\cdot|_m$ ορίζει νόρμα στον $H_0^m(\Omega)$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_m$. Αν το Ω περιέχεται σε ένα κύβο μήκους ακμής s , τότε

$$|v|_m \leq \|v\|_m \leq (1 + s)^m |v|_m \quad \text{για όλα τα } v \in H_0^m(\Omega).$$

1.3 Εργαλεία από την Συναρτησιακή Ανάλυση

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να υπενθυμίσει στον αναγνώστη μερικά χρήσιμα θεωρήματα και ορισμούς που αναφέρονται παρακάτω από το μάθημα της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Ακόμα θα δούμε κάποια επιπλέον θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων.

Τελεστές

Οι γραμμικοί τελεστές μεταξύ γραμμικών χώρων είναι απεικονίσεις που διατηρούν τις πράξεις

Ορισμός 1.3.1: Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $T: X \rightarrow Y$ λέγεται γραμμικός τελεστής αν διατηρεί τις πράξεις. Δηλαδή:

$$i) T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

$$ii) T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Θα συμβολίζουμε με $\text{Im}T$ το σύνολο $T[X] = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ με } T(x) = y\}$ το οποίο είναι υποσύνολο του Y και με $\text{Ker}T$ το σύνολο των $x \in X$ για τα οποία $T(x) = 0$ ή αλλιώς το σύνολο $T^{-1}(\{0\})$.

Ιδιότητες γραμμικών τελεστών. Αν $T: X \rightarrow Y$ είναι γραμμικός τελεστής, τότε:

α) $T(0_x) = 0_y$, όπου $0_x, 0_y$ δηλώνουν τα ουδέτερα στοιχεία των X και Y αντίστοιχα.

β) Το σύνολο $\text{Im}T$ είναι υπόχωρος του Y .

γ) Το σύνολο $\text{Ker}T$ είναι υπόχωρος του X .

Έστω U και V γραμμικοί χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_U$ και $\|\cdot\|_V$ αντίστοιχα, ένας γραμμικός τελεστής $T: U \rightarrow V$ καλείται **φραγμένος (συνεχής)**, αν υπάρχει σταθερά $c \geq 0$, έτσι ώστε $\|T(u)\|_V \leq c\|u\|_U$.

Θεώρημα 1.3.2 (βλ [11, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 26]): Προβολή σε χώρο Hilbert

Έστω U ένας χώρος Hilbert και V κλειστός υπόχωρος του U . Για κάθε $u \in U$ υπάρχει ένα μοναδικό $\bar{v} \in V$ τέτοιο ώστε

$$(u - \bar{v}, v) = 0 \quad v \in V$$

ή ισοδύναμα

$$\|u - \bar{v}\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$$

Το \bar{v} καλείται **προβολή** του u στο V ή **βέλτιστη προσέγγιση** του u στο V .

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε το Θεώρημα στην περίπτωση ενός υποχώρου V πεπερασμένης διάστασης n . Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μία βάση του V . Οι σχέσεις

$$\begin{aligned} (u - \bar{v}, v) &= 0 & v \in V. \\ (u - \bar{v}, v_i) &= 0 & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$u = \sum_{j=1}^n c_j v_j, \text{ προκύπτει } \left(\sum_{j=1}^n c_j v_j, v_i \right) = (u, v_i) \quad i = 1, \dots, n.$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί ένα σύστημα $Ac=b$. Για να δείξουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, αρκεί να δείξουμε ότι για $d \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$Ad=0 \implies d=0.$$

Αν $Ad=0$, τότε για $i=1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n (v_j, v_i) d_j = \left(\sum_{j=1}^n d_j v_j, v_i \right) = 0$$

$$\text{άρα } \left\| \sum_{j=1}^n d_j v_j \right\|^2 = \left(\sum_{j=1}^n d_j v_j, \sum_{i=1}^n d_i v_i \right) = 0 \implies \sum_{j=1}^n d_j v_j = 0$$

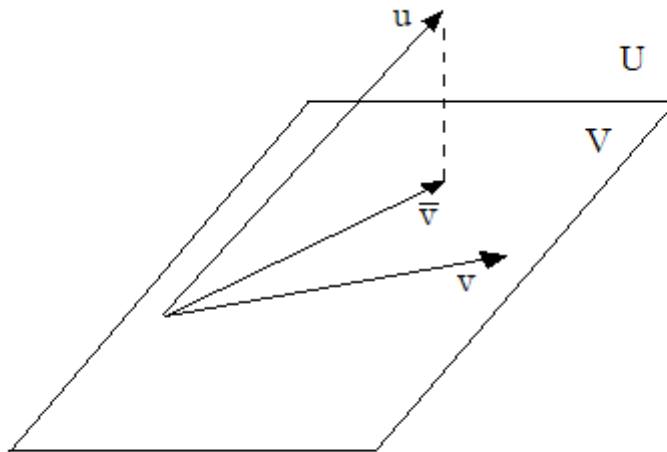
και αφού τα v_j είναι ανεξάρτητα, $d=0$.

Τέλος για κάθε v στο V

$$\begin{aligned}\|u - v\|^2 &= (u - v, u - v) = (u - \bar{v} + \bar{v} - v, u - \bar{v} + \bar{v} - v) \\ &= \|u - \bar{v}\|^2 + 2(u - \bar{v}, \bar{v} - v) + \|\bar{v} - v\|^2 \geq \|u - \bar{v}\|^2\end{aligned}$$

επειδή από τον ορισμό της προβολής $(u - \bar{v}, \bar{v} - v) = 0$.

Δηλαδή η προβολή \bar{v} του u στο V είναι το μοναδικό στοιχείο του V που έχει την ελάχιστη απόσταση από το u στο V .



Σχηματική αναπαράσταση της προβολής σε χώρο Hilbert

Με τον όρο **γραμμικό συναρτησοειδές** εννοούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ όπου X διανυσματικός χώρος.

Το σύνολο των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y συμβολίζεται με $B(X, Y)$. Επίσης ο $B(X, Y)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Ο χώρος $X' = B(X, \mathbb{R})$ λέγεται **συζυγής** ή **δυϊκός** του X .

1.4 Μεταβολική μορφή ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών.

Ακολουθούμε την παρουσίαση του [5, Κεφάλαιο 2, §2]. Όπως περιγράψαμε στην αρχή σκοπός της εργασίας είναι η περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων. Πριν ορίσουμε τη ΜΠΣ είναι αναγκαίο να μελετηθεί το γενικό ελλειπτικό πρόβλημα στη μεταβολική του διατύπωση.

Ορισμός 1.4.1: Έστω V γραμμικός χώρος. Μία συνάρτηση $\alpha(\cdot, \cdot)$ από $V \times V$ και τιμές στον \mathbb{R} καλείται **διγραμμική μορφή** όταν είναι γραμμική ως προς και τις δύο μεταβλητές, δηλαδή

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \lambda_1 \alpha(u_1, v) + \lambda_2 \alpha(u_2, v) \\ \alpha(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) &= \mu_1 \alpha(u, v_1) + \mu_2 \alpha(u, v_2)\end{aligned}$$

για κάθε $u, v, u_i, v_i \in V$ $i=1,2$ και $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$ $j=1,2$.

Θεώρημα 1.4.2 (βλ [2, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 35]): Έστω V γραμμικός χώρος και υποθέτουμε

$$\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

να είναι μία συμμετρική θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή δηλαδή $\alpha(v, v) > 0$ για όλα τα $v \in V, v \neq 0$.

Επιπλέον, έστω $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$

γραμμικό συναρτησιακό.

Τότε το συναρτησοειδές

$$J(v) := \frac{1}{2} \alpha(v, v) - \langle \ell, v \rangle$$

παίρνει ελάχιστη τιμή στο V στο u αν και μόνο αν

$$\alpha(u, v) = \langle \ell, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in V \quad (1.4.1)$$

Επιπλέον υπάρχει το πολύ μία λύση για τη παραπάνω σχέση.

Παρατήρηση 1: Το σύνολο των γραμμικών συναρτησιακών είναι γραμμικός χώρος. Επίσης αντί για $\ell(v)$ προτιμούμε να γράφουμε $\langle \ell, v \rangle$.

Παρατήρηση 2 Μία διγραμμική μορφή καλείται συμμετρική αν $a(u,v)=a(v,u), \forall u,v \in V$. Η μελέτη στη συμμετρική περίπτωση είναι αφενός απλούστερη και αφετέρου ορισμένα αποτελέσματα ισχύουν μόνο για συμμετρικές διγραμμικές μορφές.

Απόδειξη: Για $u,v \in V$ και $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2} a(u + tv, u + tv) - \langle l, u + tv \rangle \\ &= J(u) + t[a(u, v) - \langle l, u \rangle] + \frac{1}{2} t^2 a(v, v) \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Αν $u \in V$ ικανοποιεί τις σχέσεις (1.4.1), τότε από (1.4.2) για $t=1$ προκύπτει

$$J(u + v) = J(u) + \frac{1}{2} a(v, v) \geq J(u) \quad \forall v \in V, \forall v \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.4.3)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το u είναι σημείο ελαχίστου. Αντιστρόφως, αν J έχει ελάχιστο στο u , τότε για κάθε $v \in V$, η παράγωγος της συνάρτησης $t \rightarrow J(u+tv)$ πρέπει να μηδενίζεται για $t=0$. Από την σχέση (1.4.2) η παράγωγος είναι $a(u, v) - \langle \ell, v \rangle$ και έτσι προκύπτει η σχέση (1.4.1). \square

Ιδιότητα Ελαχίστου: Έστω L να είναι τελεστής δεύτερης τάξης ελλειπτικής ΜΔΕ

$$Lu := - \sum_{i,k=1}^n \partial_i (a_{ik} \partial_k u) + a_0 u \quad (1.4.4)$$

όπου $a_0(x) \geq 0$ για $x \in \Omega$, και $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$

Εξετάζουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} Lu &= f \text{ στο } \Omega \\ u &= 0 \text{ στο } \partial\Omega \end{aligned}$$

Εύκολα αποδεικνύεται το ακόλουθο Θεώρημα.

$$\text{Συμβολίζουμε με } a(u, v) := \int_{\Omega} [\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \partial_i u \partial_k v + a_0 uv] dx \quad (1.4.6)$$

και $\langle \ell, v \rangle := \int_{\Omega} f v dx$

Θεώρημα 1.4.3 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 36]): Κάθε κλασική λύση του παραπάνω συνοριακού προβλήματος είναι λύση του μεταβολικού προβλήματος

$$J(v) := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \partial_i v \partial_k v + \frac{1}{2} a_0 v^2 - f v \right] dx \rightarrow \min \quad (1.4.5)$$

για όλες τις συναρτήσεις στο $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Απόδειξη:

Αρχικά για την απόδειξη της σχέσεις θα χρειαστούμε τον τύπο του Green

$$\int_{\Omega} v \partial_i w dx = - \int_{\Omega} w \partial_i v dx + \int_{\partial\Omega} v w n_i ds \quad (1.4.7)$$

με u, v να είναι C^1 συναρτήσεις και n_i να είναι i -στη συνιστώσα του προς τα έξω μοναδιαίου διανύσματος n . Θέτοντας $w := a_{ik} \partial_k u$ στην (1.4.7) προκύπτει

$$\int_{\Omega} v \partial_i (a_{ik} \partial_k u) dx = - \int_{\Omega} a_{ik} \partial_i v \partial_k u dx \quad (1.4.8)$$

υπό την προϋπόθεση $v=0$ στο $\partial\Omega$.

Αθροίζοντας την (1.4.8) για όλα τα i και k έχουμε για κάθε $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ με $v=0$ στο $\partial\Omega$,

$$a(u, v) - \langle \ell, v \rangle = \int_{\Omega} v [- \sum_{i,k} \partial_i (a_{ik} \partial_k u) + a_0 u - f] dx = \int_{\Omega} v [Lu - f] dx = 0.$$

Όμως $Lu=f$ επειδή η u είναι κλασική λύση και έτσι καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση. \square

Ορισμός 1.4.5: Έστω H ένας χώρος Hilbert. Μια διγραμμική μορφή $\alpha : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνεχής** υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει $C > 0$ έτσι ώστε $|\alpha(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$ για όλα τα $u, v \in H$.

Μια συμμετρική συνεχής διγραμμική μορφή a καλείται **H-ελλειπτική** για συντομία **ελλειπτική** ή **πιστική** αν υπάρχει $\alpha > 0$

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \text{ για όλα τα } v \in H.$$

Προφανώς κάθε H-ελλειπτική διγραμμική μορφή επάγει μία νόρμα

$$\|v\|_a := \sqrt{a(v, v)},$$

η οποία καλείται **ενεργειακή νόρμα**.

Γενικά, ένα συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα τοποθετείται ως εξής:

- (1) $(H, (\cdot, \cdot))$ είναι χώρος Hilbert.
- (2) V να είναι κλειστός υπόχωρος του H .
- (3) $a(\cdot, \cdot)$ φραγμένη διγραμμική μορφή να είναι πιστική στο V .

Θεώρημα 1.4.6 (Lax-Milgram) (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 38])

(για κυρτά σύνολα): Έστω V να είναι ένα κλειστό και κυρτό σύνολο σε ένα χώρο Hilbert και $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ελλειπτική διγραμμική μορφή. Τότε για κάθε $\ell \in H'$ το μεταβολικό πρόβλημα

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \ell, v \rangle \rightarrow \min$$

έχει μοναδική λύση στο V .

Απόδειξη:

Η J είναι φραγμένη αφού

$$J(v) \geq \frac{1}{2} a \|v\|^2 - \|\ell\| \|v\| = \frac{1}{2a} (a \|v\| - \|\ell\|)^2 - \frac{\|\ell\|^2}{2a} \geq -\frac{\|\ell\|^2}{2a}$$

Έστω $c_1 := \inf \{ J(v) : v \in V \}$ και v_n ακολουθία προς ελαχιστοποίηση.

Τότε $\alpha \|v_n - v_m\|^2 \leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) =$

$$\begin{aligned} & 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - a(v_n + v_m, v_n + v_m) \\ & = 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \\ & \leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8c_1, \end{aligned}$$

Επειδή V κυρτό και $\frac{v_n+v_m}{2} \in V$. Επιπλέον $J(v_n), J(v_m) \rightarrow c_1$ προκύπτει $\|v_n - v_m\| \rightarrow 0$ καθώς τα $n, m \rightarrow \infty$, δηλαδή η v_n είναι ακολουθία Cauchy στο H , και $u = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ υπάρχει. Όμως το V είναι κλειστό επομένως το $u \in V$. Η J είναι συνεχής δηλαδή $J(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \inf_{u \in V} J(v)$.

Μοναδικότητα: Υποθέτουμε u_1 και u_2 να είναι λύσεις του προβλήματος. Η ακολουθία $u_1, u_2, u_1, u_2, \dots$ είναι ακολουθία που ελαχιστοποιείται. Όπως δείξαμε παραπάνω κάθε ακολουθία που ελαχιστοποιείται είναι Cauchy. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν $u_1 = u_2$. □

Παρατήρηση: Κάθε εσωτερικό γινόμενο (u, v) στον H ορίζει μια διγραμμική μορφή.

Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση καταλήγουμε στο γνωστό θεώρημα Riesz.

Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 39]):
 Δοσμένου συναρτησιακού $\ell \in H'$ υπάρχει $u \in H$ έτσι ώστε $(u, v) = \langle \ell, v \rangle$ για όλα τα $v \in H$.

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση $H' \rightarrow H, \ell \rightarrow u$ η οποία καλείται **κανονική ενσφήνωση** του H' στο H .

Στην παράγραφο 1.2 είχαμε δώσει τον ορισμό της ασθενούς λύσης ενός προβλήματος. Εξοικειωμένοι πλέον με τους παραπάνω ορισμούς θα ορίσουμε την ασθενή λύση ενός ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet.

Ορισμός 1.4.6: Μία συνάρτηση $u \in H_0^1$ καλείται **ασθενής λύση**, ενός ελλειπτικού προβλήματος δευτέρου βαθμού

$$\begin{cases} Lu = f \text{ στο } \Omega \\ u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$$

με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet, αν και μόνον αν ισχύει

$$a(u, v) = (f, v)_0 \text{ για όλες τις } v \in H_0^1(\Omega)$$

όπου L και $a(\cdot, \cdot)$ έχουν οριστεί στις (1.4.4), (1.4.5)

Παράδειγμα

Το κλασσικό πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ στο } \Omega \\ u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Εντάσσεται στον παραπάνω φορμαλισμό αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέρος με μια συνάρτηση $v \in H_0^1(\Omega)$ και ολοκληρώσουμε θα καταλήξουμε στην ακόλουθη μορφή

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$
$$a(u, v) = (f, v)_0$$

όπου εδώ $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$.

Για να παρουσιάσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών με φυσικές συνοριακές συνθήκες χρειαζόμαστε το ακόλουθο θεώρημα ίχνους.

Θεώρημα Ίχνους (βλ [1, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 44]): : Έστω Ω φραγμένο και υποθέτουμε ότι το Ω έχει τμηματικά λείο σύνορο με $\partial\Omega$ να είναι C^1 . Τότε υπάρχει φραγμένος τελεστής

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma)$$

$$\|\gamma(v)\|_{0,\Gamma} \leq c \|v\|_{1,\Omega}$$

Έτσι ώστε $\gamma v = v|_{\Gamma}$ για όλα τα $v \in C^1(\bar{\Omega})$.

Προφανώς γv είναι το ίχνος της v στο σύνορο, δηλαδή ο περιορισμός της v πάνω στο σύνορο Γ . Τότε ορίζουμε το ακόλουθο συνοριακό πρόβλημα με φυσικές συνοριακές συνθήκες ως ελάχιστο συναρτησοειδούς.

Θεώρημα (βλ [1, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 45]): : Υποθέτουμε το Ω ικανοποιεί το θεώρημα ίχνους. Τότε το μεταβολικό πρόβλημα

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v)_{0, \Omega} - (g, v)_{0, \Omega} \rightarrow \min$$

Έχει ακριβώς μία λύση $u \in H^1(\Omega)$. Η λύση του μεταβολικού προβλήματος ανήκει στο $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ αν και μόνο αν υπάρχει η κλασική λύση του συνοριακού προβλήματος.

$$Lu=f \text{ στο } \Omega$$

$$\sum_{i,k} n_i a_{ik} \partial_k u = g \text{ στο } \Gamma$$

Στην οποία περίπτωση και οι δύο λύσεις ταυτίζονται. Το n είναι το μοναδιαίο διάνυσμα προς τα έξω το οποίο ορίζεται σχεδόν παντού στο Γ .

1.5 Η μέθοδος Ritz-Galerkin

Ακολουθεί η περιγραφή του [5, Κεφάλαιο 5, §4]. Υπάρχει μια απλή φυσική προσέγγιση της αριθμητικής επίλυσης ενός ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών. Αντί να ελαχιστοποιούμε το συναρτησιακό J του αντίστοιχου μεταβολικού προβλήματος πάνω σε όλο το χώρο $H_0(\Omega)$ ή $H_0^m(\Omega)$, το ελαχιστοποιούμε πάνω σε κάποιο κατάλληλο πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο. Αυτός ο υπόχωρος θα τον συμβολίζουμε με S_h . Το h συμβολίζει ένα κατάλληλο μέγεθος διακριτοποίησης το οποίο θα οριστεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο. Θα λέμε ότι η λύση συγκλίνει στην πραγματική λύση του δοσμένου (συνεχούς) προβλήματος, αν ισχύει $\|u - u_h\|$ καθώς το $h \rightarrow 0$, όπου u_h η λύση που προκύπτει μετά την ελαχιστοποίηση πάνω στο S_h .

Η λύση του μεταβολικού προβλήματος

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \ell, v \rangle \rightarrow \min_{v \in S_h}. \quad (1.5.1)$$

Σε έναν υπόχωρο S_h μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού θεωρήματος της προηγούμενης παραγράφου. Συγκεκριμένα u_h αποτελεί λύση του προβλήματος υπό την προϋπόθεση ότι

$$a(u_h, v) = \langle \ell, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in S_h. \quad (1.5.2)$$

Υποθέτουμε $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ συναρτήσεις βάσης του S_h . Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$a(u_h, \psi_i) = \langle \ell, \psi_i \rangle \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Επειδή $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ βάση του S_h , η λύση u_h μπορεί να γραφεί

$$u_h = \sum_{k=1}^n z_k \psi_k. \quad (1.5.3)$$

Επομένως έχουμε

$$a(u_h, \psi_i) = a(\sum_{k=1}^n z_k \psi_k, \psi_i) = \sum_{k=1}^n a(\psi_k, \psi_i) z_k = \langle \ell, \psi_i \rangle \quad (1.5.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Η τελευταία σχέση είναι ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια πινάκων

$$Az = b. \quad (1.5.5)$$

Με $A_{ik} := a(\psi_k, \psi_i)$ και $b_i := \langle \ell, \psi_i \rangle$. Η a είναι μια H^m -ελλειπτική διγραμμική μορφή και ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

Πράγματι

$$z'Az = \sum_{i,k} z_i A_{ik} z_k = a\left(\sum_k z_k \psi_k, \sum_k z_i \psi_i\right) = a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_m^2$$

που σημαίνει ότι $z'Az > 0$ για $z \neq 0 \forall z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0$.

Παρατήρηση: (Ευστάθεια) Ανεξάρτητα από την επιλογή του υποχώρου S_h του V η λύση του $a(u_h, v) = \langle \ell, v \rangle$ ικανοποιεί πάντα

$$\|u_h\|_m \leq \alpha^{-1} \|\ell\|$$

Απόδειξη:

Έστω u_h λύση της (1.5.2). Θέτοντας $v = u_h$ προκύπτει

$$\alpha \|u_h\|_m^2 \leq a(u_h, u_h) = \langle \ell, u_h \rangle \leq \|\ell\| \|u_h\|_m$$

Διαιρώντας με $\|u_h\|_m$ ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι τα προβλήματα διατυπώνονταν στους χώρους $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$. Για τους σκοπούς της εργασίας υποθέτουμε πάντα ότι $V \subset H^m(\Omega)$ και η διγραμμική μορφή θα είναι πάντα V -ελλειπτική δηλαδή $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_m^2$ και $|a(u, v)| \leq C \|u\|_m \|v\|_m$ για όλα τα u, v στο V . Επίσης η νόρμα $\|\cdot\|_m$ είναι ισοδύναμη με την ενεργειακή νόρμα.

Λήμμα του Céa 1.5.1 (βλ [1, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 55]): Υποθέτουμε ότι η διγραμμική μορφή a είναι V -ελλειπτική με $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$.

Επιπλέον υποθέτουμε u και u_h είναι λύσεις του μεταβολικού προβλήματος στο V και $S_h \subset V$. Τότε

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_m$$

Απόδειξη: Εξ ορισμού του u και u_h ,

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in V$$

$$a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in S_h$$

Αφού $S_h \subset V$, έχουμε

$$a(u - u_h, v) = 0 \text{ για όλα τα } v \in S_h$$

Έστω $v_h \in S_h$, με $v = v_h - u_h \in S_h$ από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$a(u - u_h, v_h - u_h) = 0, \text{ και}$$

$$\begin{aligned} a\|u - u_h\|_m^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &\leq C\|u - u_h\|_m\|u - v_h\|_m \end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\|u - u_h\|_m$ προκύπτει ο παραπάνω ισχυρισμός.

□

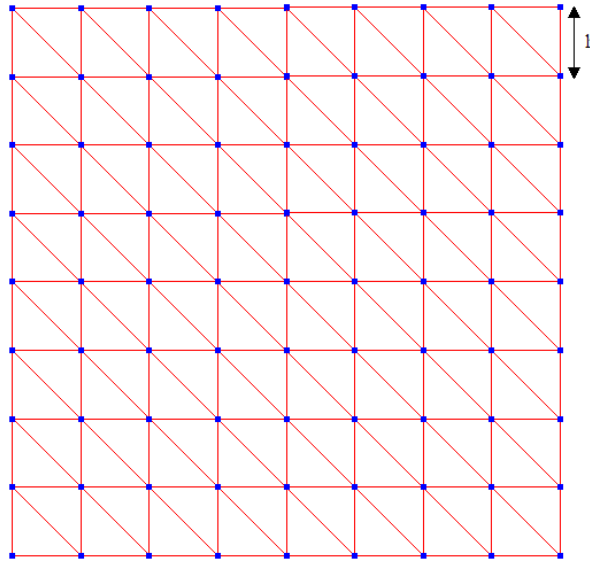
Σύμφωνα με το Λήμμα του Céa η ακρίβεια της αριθμητικής λύσης εξαρτάται από την επιλογή χώρου συναρτήσεων που είναι σε θέση να προσεγγίσουν καλά την πραγματική λύση u . Για πολυώνυμα ο βαθμός προσέγγισης προσδιορίζεται από την ομαλότητα της λύσης. Ωστόσο για προβλήματα συνοριακών τιμών η ομαλότητα της λύσης μειώνεται καθώς πλησιάζουμε στο σύνορο. Έτσι δεν έχει σημασία να χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμα που ορίζονται σε όλο το χώρο και να απαιτούμε μεγάλη ακρίβεια.

Εφαρμογή της μεθόδου Galerkin στο πρόβλημα Poisson.

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα Poisson στο μοναδιαίο τετράγωνο (γενικά θα δουλεύουμε με χωρία τα οποία θα μπορούν να τριγωνοποιηθούν, δηλαδή θα προσεγγίζονται με τριγωνικά στοιχεία)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ στο } \Omega = (0,1)^2 \\ u &= 0 \text{ στο } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Θεωρούμε τη διαμέριση του $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ με ομοιόμορφο τριγωνισμό και πλεγματική παράμετρο h που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



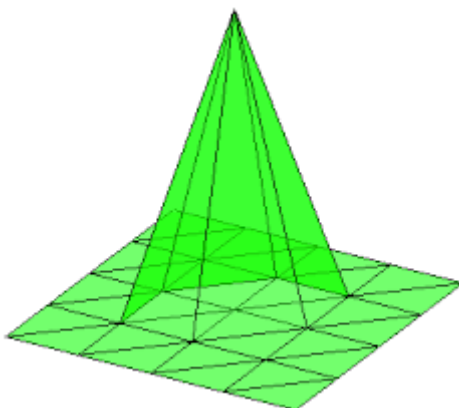
1. Ομοιόμορφο πλέγμα

Διαλέγουμε

$$S_h := \{v \in C(\bar{\Omega}): \text{ γραμμική σε κάθε τρίγωνο και } v=0 \text{ στο } \partial\Omega\}$$

Για κάθε τρίγωνο, $v \in S_h$ έχει τη μορφή $v(x,y) = a + bx + cy$ μοναδικά ορισμένη από τις τιμές στις τρεις πλευρές του τριγώνου. Επίσης η v είναι συνεχής σε όλη την περιοχή του $\bar{\Omega}$ και μηδενίζεται στο σύνορο. Το σύνολο S_h είναι σύνολο προσεγγιστικών συναρτήσεων. Θεωρούμε για κάθε κορυφή $P_j = (x_j, y_j)$ $j=1, \dots, n$ του τριγωνισμού του Ω που δεν ανήκει στο σύνορο του Ω τις συναρτήσεις **πυραμίδα** ψ_j $j=1, \dots, n$ που ανήκει στο χώρο S_h και παίρνει τη τιμή 1 στην αντίστοιχη κορυφή P_j και την τιμή 0 σε όλες τις άλλες κορυφές του τριγωνισμού, δηλαδή $\psi_j(x_i, y_i) = \delta_{ij}$ όπου δ_{ij} συμβολίζει το δέλτα του Kronecker.

Οι συναρτήσεις ψ_i αποδεικνύεται ότι αποτελούν βάση του χώρου S_h και καλούνται **συναρτήσεις βάσης**.



2. Απεικόνιση της συνάρτησης πυραμίδας

Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς της ασθενούς και διακριτής ασθενούς λύσης

Ολοκληρώνοντας την (1.5.3) έχουμε $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} -\Delta u v \, dx dy = \iint_{\Omega} f v \, dx dy.$$

Μέσω του τύπου Green (που ισχύει αν η λύση u είναι αρκετά ομαλή)

$$\iint_{\Omega} -\Delta u v \, dx dy = - \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy + \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds.$$

Επειδή $v=0$ στο σύνορο, καταλήγουμε στο εξής πρόβλημα: Αναζητούμε $u \in H_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\iint_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy = \iint_{\Omega} f v \, dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$u = 0 \text{ στο } \Gamma.$$

Τώρα για να βρούμε την αριθμητική λύση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Galerkin.

Έστω \bar{u} προσεγγιστική συνάρτηση της λύσης u και \bar{v} προσεγγιστική συνάρτηση της v και $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ βάση του χώρου S_h .

Τότε έχουμε τον ορισμό της διακριτούς ασθενούς λύσης. Αναζητούμε $\bar{u} \in S_h$ τέτοια ώστε για κάθε $\bar{v} \in S_h$ να ισχύει

$$\iint_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla \bar{v} \, dx dy = \iint_{\Omega} f \bar{v} \, dx dy$$

Επομένως αναζητούμε κατάλληλους συντελεστές u_i στο \mathbb{R} τέτοιους ώστε αν συμβολίσουμε με

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i, \quad \bar{v} = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j$$

να ισχύει

$$\iint_{\Omega} \nabla \left(\sum_{i=1}^n u_i \psi_i \right) \nabla \left(\sum_{j=1}^n v_j \psi_j \right) dx dy = \iint_{\Omega} f \left(\sum_{j=1}^n v_j \psi_j \right) dx dy$$

Από τον ορισμό των βασικών συναρτήσεων εύκολα καταλήγουμε

$$\sum_{i=1}^n \alpha(\psi_i, \psi_j) u_i = \langle \ell, \psi_j \rangle. \quad (1.5.4)$$

Η (1.5.4) ορίζει ένα γραμμικό σύστημα $Au=b$ όπου

$$A=(a_{ij})= \iint_{\Omega} \nabla(\psi_i) \nabla(\psi_j) dx dy,$$

$$b=(b_i)= \iint_{\Omega} f \psi_j dx dy,$$

u_j οι συντελεστές του u .

1.6 Πεπερασμένα Στοιχεία

Στην υποενότητα αυτή ακολουθούμε την παρουσίαση βλ [5, Κεφάλαιο 5, §5]. Οι χώροι στους οποίους λύνουμε το μεταβολικό πρόβλημα, που σχετίζεται με το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών, καλούνται χώροι πεπερασμένων στοιχείων. Διαμερίζουμε το δοσμένο χώρο Ω σε πεπερασμένο αριθμό μικρότερων τμημάτων τα οποία καλούμε πεπερασμένα στοιχεία. Για επίπεδα προβλήματα μπορεί να είναι τριγωνικά στοιχεία ή τετραγωνικά. Για προβλήματα τριών διαστάσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τετράεδρα, κύβους, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κλπ. Για απλότητα θα περιοριστούμε σε προβλήματα δύο διαστάσεων.

Θα ξεκινήσουμε από μερικές σημαντικές ιδιότητες πεπερασμένων στοιχείων.

i) Το είδος της διαμέρισης που χρησιμοποιούμε αποτελείται από τριγωνικά ή τετραγωνικά στοιχεία. Αν όλα τα στοιχεία είναι ισοδύναμα τότε η διαμέριση καλείται **κανονική**.

ii) Σε δύο διαστάσεις ορίζουμε

$$P_t := \{ u(x, y) = \sum_{\substack{i+k \leq t \\ i, k \geq 0}} c_{ik} x^i y^k \}$$

να είναι το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού $\leq t$. Αν όλα τα πολυώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου με t έχουν χρησιμοποιηθεί τότε καλούμε τα στοιχεία αυτά **στοιχεία με πλήρη πολυώνυμα**. Οι περιορισμοί των πολυωνύμων στις πλευρές των τριγώνων ή των τετραγώνων είναι πολυώνυμα μίας μεταβλητής.

iii) Ένα στοιχείο καλείται **C^k στοιχείο** υπό την προϋπόθεση ότι ανήκει στο $C^k(\Omega)$.

Χρησιμοποιούμε την ορολογία **σύμμορφα πεπερασμένα στοιχεία** αν οι συναρτήσεις πεπερασμένων στοιχείων που ανήκουν στον χώρο Sobolev οπότε είναι ορισμένο το μεταβολικό πρόβλημα.

Ορισμός 1.6.1: Μία διαμέριση $T = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ του Ω σε τριγωνικά ή τετραγωνικά στοιχεία καλείται **αποδεικτή** αν ικανοποιεί τα εξής:

- i. $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M T_i$
- ii. Αν $T_i \cap T_j$ αποτελείται από ακριβώς ένα σημείο, τότε είναι η κοινή κορυφή του T_i με το T_j .
- iii. Αν για $i \neq j$, η $T_i \cap T_j$ περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε η $T_i \cap T_j$ είναι η κοινή πλευρά του T_i και T_j .

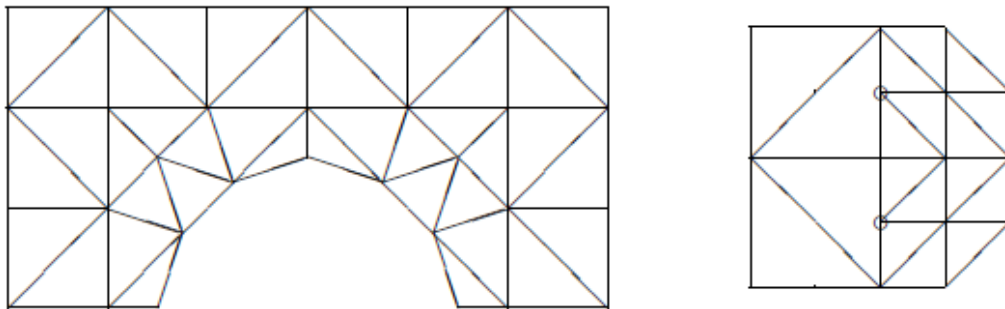
Θα γράφουμε T_h αντί για T όταν κάθε στοιχείο έχει διάμετρο το πολύ $2h$. Διάμετρος ενός τριγώνου είναι η μεγαλύτερη πλευρά του.

Μία οικογένεια διαμερίσεων $\{T_h\}$ καλείται **κανονικού σχήματος (shape regular)** υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε T στο T_h περιέχει κύκλο ακτίνας ρ_T με

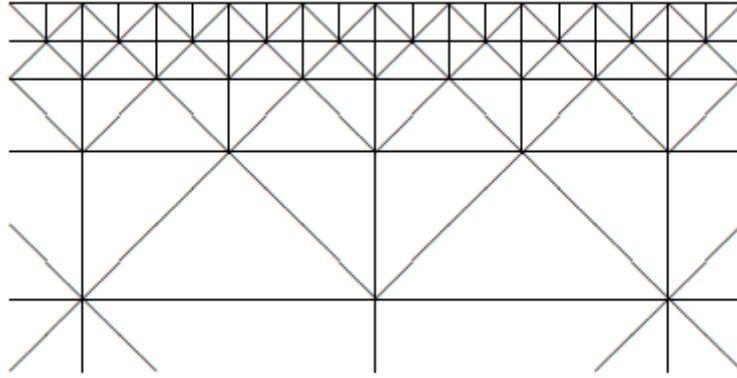
$$\rho_T \geq h_T/k$$

όπου h_T το μισό της διαμέτρου του T .

Μία οικογένεια διαμερίσεων $\{T_h\}$ καλείται **ομοιόμορφη** αν υπάρχει αριθμός $k > 0$ έτσι ώστε για κάθε στοιχείο T στο T_h περιέχει κύκλο ακτίνας ρ_T με $\rho_T \geq h_T/k$. Συνήθως χρησιμοποιούμε την ορολογία k -κανονικό.



3. Η αριστερή τριγωνοποίηση είναι αποδεικτή ενώ η δεξιά δεν είναι εξαιτίας των δύο κόμβων που σημειώνονται με \circ .



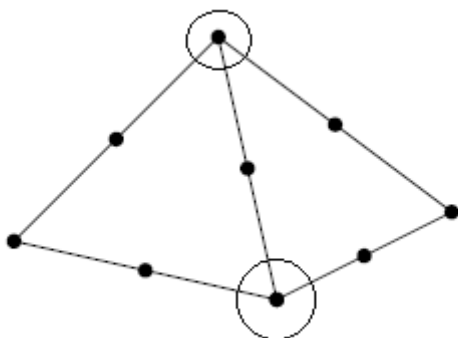
4. Τριγωνοποίηση κανονικού σχήματος (shape regular) αλλά όχι ομοιόμορφη.

Παρατήρηση: Επειδή $h = \max h_T$ η ομοιόμορφη είναι πιο ισχυρή απαίτηση από την κανονικότητα σχήματος. Πράγματι στην εικόνα 4 η τριγωνοποίηση είναι κανονικού σχήματος (shape regular) ανεξαρτήτως από τον αριθμό βημάτων της λεπτότητας σε μία γειτονιά του συνόρου. Ωστόσο αν ο αριθμός βημάτων εξαρτάται από το h η διαμέριση δεν είναι πλέον ομοιόμορφη. Στην πράξη χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντα διαμέριση κανονικού σχήματος (shape regular) και πολύ συχνά ομοιόμορφες.

Στην αντιμετώπιση ελλειπτικών προβλημάτων δεύτερης τάξης με σύμμορφα στοιχεία επιλέγουμε στοιχεία που ανήκουν στον χώρο H^1 . Θα δείξουμε με το παρακάτω θεώρημα ότι είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς αλλά όχι απαραίτητα συνεχώς διαφορίσιμες. Έτσι οι συναρτήσεις είναι λιγότερο ομαλές από την απαιτούμενη κλασική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών. Γενικά ομαλή συνάρτηση σημαίνει ότι είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη ως προς όλες τις μεταβλητές.

Θεώρημα 1.6.2 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 62]): Έστω $k \geq 1$ και υποθέτουμε Ω φραγμένο. Τότε μια τμηματικά απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκει στο $H^k(\Omega)$ αν και μόνο αν $v \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$.

Αν δεν απαιτούνται επιπλέον συνθήκες τότε μπορούν να κατασκευαστούν εύκολα συνεχή πεπερασμένα στοιχεία. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η λύση, του προβλήματος συνοριακών τιμών με σύμμορφα στοιχεία, έχει σπουδαίο πλεονέκτημα.



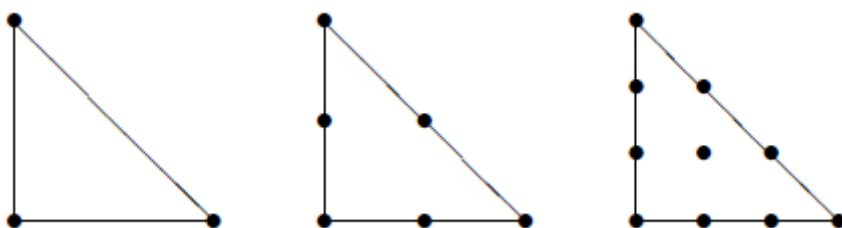
5. Τμηματικά τετραγωνικό πολυώνυμο που παρεμβάλλει τα σημεία (●) είναι συνεχής στα σημεία που σημειώνονται με κύκλο.

Τα πιο απλά τριγωνικά στοιχεία που μπορούμε να κατασκευάσουμε είναι C^0 στοιχεία αποτελούμενα από πλήρη πολυώνυμα.

Παρατήρηση 1: Έστω u να είναι πολυώνυμο βαθμού t . Αν εφαρμόσουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό και εκφράσουμε το u σε νέες συντεταγμένες θα πάρουμε ένα πολυώνυμο βαθμού t . Έτσι το σύνολο των πολυωνύμων P_t είναι αναλλοίωτο σε γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Παρατήρηση 2: Έστω $t \geq 0$. Δεδομένου τριγώνου T , υποθέτουμε z_1, z_2, \dots, z_s να είναι τα $s = 1+2+\dots+(t+1)$ σημεία στο T τα οποία ανήκουν σε $t+1$ ευθείες (βλέπε εικόνα 6). Τότε για κάθε $f \in C(T)$ υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο p βαθμού $\leq t$ που να ικανοποιεί τη συνθήκη παρεμβολής

$$p(z_i) = f(z_i), \quad i=1,2,\dots,s$$



6. Κόμβοι της κομβικής βάσης για γραμμικά, τετραγωνικά και κυβικά στοιχεία M_0^1, M_0^2, M_0^3 αντίστοιχα.

Για την απόδειξη αυτής της παρατήρησης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [5, σελ. 64].

Ορισμός 1.6.3: Υποθέτουμε ότι για δοσμένο χώρο πεπερασμένων στοιχείων υπάρχει σύνολο σημείων τα οποία ορίζουν μοναδικά κάθε συναρτηση στο χώρο από τις τιμές σε αυτά τα σημεία. Τότε το σύνολο των συναρτήσεων στο χώρο στον οποίο παίρνουν μη μηδενικές τιμές σε ακριβώς ένα από αυτά τα σημεία αποτελεί μία βάση για το χώρο που καλείται **κομβική βάση**.

Κομβική βάση για C^0 στοιχείο. Έστω $t \geq 1$ και υποθέτουμε μας δίνεται η τριγωνοποίηση του Ω . Σε κάθε τρίγωνο τοποθετούμε $s := (t+1)(t+2)/2$ σημεία όπως φαίνεται στην εικόνα 6. έτσι ώστε να υπάρχουν $t+1$ σημεία σε κάθε πλευρά. Από την Παρατήρηση 2 σε κάθε τρίγωνο ορίζεται πολυώνυμο βαθμού $\leq t$ επιλέγοντας τιμές σε αυτά τα σημεία. Ο περιορισμός κάθε τέτοιου πολυώνυμου βαθμού $\leq t$ σε κάθε πλευρά είναι πολυώνυμο μίας μεταβλητής. Δοσμένης μίας πλευράς τα δύο πολυώνυμα εκατέρωθεν του σημείου παρεμβάλουν την ίδια τιμή στα $t+1$ σημεία της πλευράς. Αυτό μας διαβεβαιώνει ότι τα στοιχεία μας είναι παντού συνεχή.

Παρακάτω ορίζουμε μερικά σύνολα στοιχείων.

$$M^k := M_k(\mathcal{T}) := \{v \in L_2(\Omega) : v|_T \in P_k \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

$$M_0^k := M^k \cap C^0(\Omega) = M^k \cap H^1(\Omega).$$

$$M_{0,0}^k := M^k \cap H_0^1(\Omega).$$

M_0^k καλείται επίσης σύμμορφο P_1 στοιχείο ή τρίγωνο Courant.

Ορισμός 1.6.4: Ένα πεπερασμένο στοιχείο είναι μία τριάδα (Γ, Π, Σ) με τις ακόλουθες ιδιότητες.

- i) Γ είναι ένα πολύεδρο στον \mathbb{R}^d . (Τα τμήματα της επιφάνειας $\partial\Gamma$ τα οποία ανήκουν στο υπερεπίπεδο καλούνται πλευρές.)
- ii) Π είναι ένα υποσύνολο του $C(\Gamma)$ με πεπερασμένη διάσταση s . (Οι συναρτήσεις στο Π καλούνται συναρτήσεις σχήματος αν αποτελούν βάση του Π). Το s είναι οι τοπικοί βαθμοί ελευθερίας.
- iii) Σ είναι ένα σύνολο των s γραμμικώς ανεξαρτητών συναρτησοειδών στο Π .

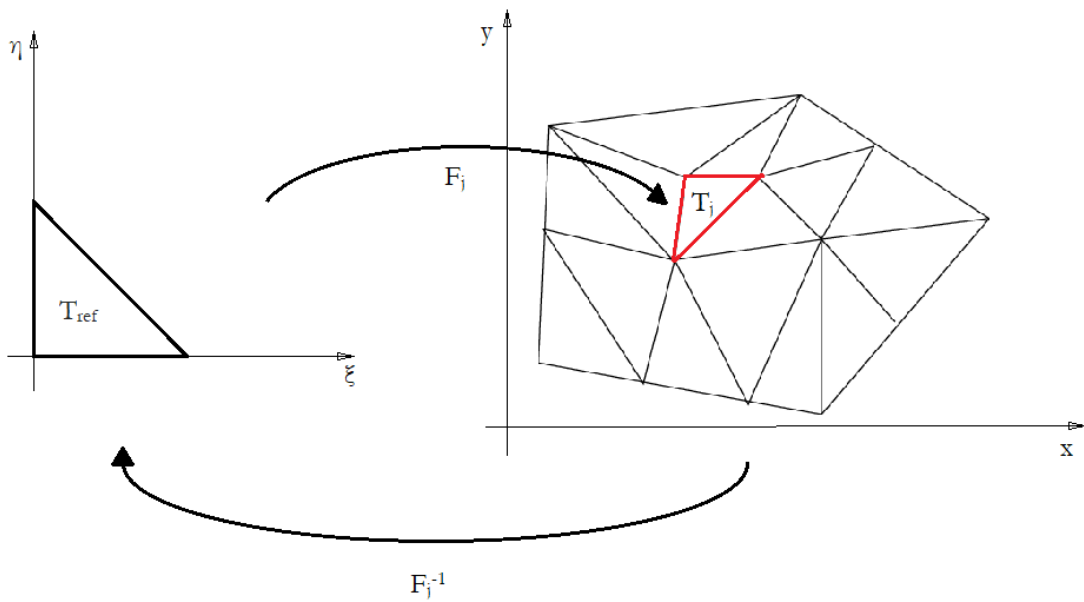
Κάθε $p \in \Pi$ είναι μοναδικώς ορισμένο από τις τιμές των s συναρτησιακών στο Σ .

Ο παραπάνω ορισμός αναφέρεται σε ένα μόνο στοιχείο. Η ανάλυση χώρων πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να γίνει μέσω μετασχηματισμού σ'ένα στοιχείο αναφοράς.

Ορισμός 1.6.5: Μία οικογένεια πεπερασμένων στοιχείων S_h μίας διαμέρισης T_h του $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ καλείται **συγγενής οικογένεια** υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει πεπερασμένο στοιχείο $(T_{\text{ref}}, \Pi_{\text{ref}}, \Sigma)$ που καλείται στοιχείο αναφοράς (reference element) με τις ακόλουθες ιδιότητες.

iv) Για κάθε $T_j \in T_h$ υπάρχει συγγενής απεικόνιση $F_j : T_{\text{ref}} \rightarrow T_j$ τέτοια ώστε για κάθε $v \in S_h$ περιορισμένη πάνω στο T_j έχει τη μορφή

$$v(x) = p(F_j^{-1}x) \text{ με } p \in \Pi_{\text{ref}}$$



7. Συγγενής απεικόνιση στέλνει το T_{ref} στο T_j .

Κεφάλαιο 2

Σφάλματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Ακολουθούμε την παρουσίαση του [5, Κεφάλαιο 2, §6]. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετάμε το πρόβλημα εκτίμησης σφάλματος της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, δηλαδή πόσο διαφέρει η προσεγγιστική λύση από την ακριβή λύση. Επίσης θα δώσουμε φράγματα για τα σφάλματα για συγκεκριμένες προσεγγίσεις των πεπερασμένων στοιχείων. Από το Λήμμα του Cέα η ενεργειακή νόρμα αρκεί για να γνωρίζουμε πόσο καλά μπορεί να προσεγγιστεί η λύση από πεπερασμένα στοιχεία στον αντίστοιχο χώρο πεπερασμένων στοιχείων $S_h = S_h(\Gamma_h)$. Για γενικές μεθόδους ένα κατάλληλο πλαίσιο παρέχεται από τη θεωρία συγγενών οικογενειών. Δεν εξάγουμε αποτελέσματα από κάθε μεμονωμένο στοιχείο, αλλά εξετάζουμε το στοιχείο αναφοράς και χρησιμοποιούμε μετασχηματισμούς για να το μεταφέρουμε πάνω στο πλέγμα κανονικού σχήματος (shape regular). Θα επικεντρωθούμε σε συγγενείς οικογένειες τριγωνικών στοιχείων. Θεωρούμε C^0 στοιχείο το οποίο σύμφωνα με το Θεώρημα της σελίδας 32 δεν ανήκει στον H^m για $m > 1$ και επομένως οι νόρμες Sobolev μεγαλύτερης τάξης ($m > 1$) δεν είναι εφαρμόσιμες. Υπενθυμίζουμε ότι για $m \geq 2$ ισχύει $H^m(\Omega) \subset C(\Omega)$. Έτσι θα τις αντικαταστήσουμε από νόρμες που εξαρτώνται από το πλέγμα (mesh-dependent norms).

2.1 Ιδιότητες προσέγγισης

Σημείωση: Δεδομένης μιας διαμέρισης $T_h = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ του Ω και $m \geq 1$. Ορίζουμε για v στο S_h

$$\|v\|_{m,h} := \sqrt{\sum_{T_j \in T_h} \|v\|_{m,T_j}^2}$$

Προφανώς $\|v\|_{m,h} = \|v\|_{m,\Omega}$ για κάθε $v \in H^m(\Omega)$.

Η παραπάνω ποσότητα είναι καλώς ορισμένη καθώς η συνάρτηση $v \in S_h$ είναι πολυώνυμο σε κάθε T_j .

Για κάθε $v \in H^m(\Omega)$ υπάρχει μοναδικά ορισμένη παρεμβολής στο $S_h = S_h(T_h)$ σχετική με τα σημεία της κομβικής βάσης του C^0 στοιχείου (σελ. 32). Συμβολίζουμε την παρεμβολή με $I_h v$.

Στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε

$$\|v - I_h v\|_{m,h} \text{ από } \|v\|_{t,\Omega} \text{ για } m < t.$$

Ορισμός 2.1.1: Λέμε ότι ένα σύνολο ικανοποιεί την συνθήκη κώνου όταν για κάθε σημείο του συνόλου, ένας κώνος με κορυφή στο σημείο αυτό πρέπει να περιέχεται στο ίδιο το υποσύνολο.

Υπενθυμίζουμε πως ο πυρήνας γραμμικής απεικόνισης L συμβολίζεται με $\ker L$, ενώ η νόρμα του τελεστή L ορίζεται ως

$$\|L\| := \sup \{\|Lv\| : \|v\| = 1\}.$$

Λήμμα 2.1.2 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 77]): Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ με Lipschitz συνεχές σύνορο που ικανοποιεί τη συνθήκη κώνου. Επιπλέον, έστω $t \geq 2$ και υποθέτουμε z_1, z_2, \dots, z_s να είναι τα $s := t(t+1)/2$ σημεία του $\bar{\Omega}$ τέτοια ώστε ο τελεστής παρεμβολής $I: H^t \rightarrow P_{t-1}$ να είναι καλά ορισμένος για πολυώνυμα βαθμού $\leq t-1$. Τότε υπάρχει σταθερά $c = c(\Omega, z_1, z_2, \dots, z_s)$ τέτοια ώστε

$$\|u - Iu\|_t \leq c|u|_t \text{ για όλα τα } u \in H^t(\Omega).$$

Λήμμα 2.1.3 Bramble-Hilbert (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 77]): Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ να είναι χωρίο με Lipschitz συνεχές σύνορο. Υποθέτουμε $t \geq 2$ και L φραγμένη γραμμική απεικόνιση από $H^t(\Omega)$ σε ένα γραμμικό χώρο Y με νόρμα. Αν $P_{t-1} \subset \ker L$ τότε υπάρχει σταθερά $c = c(\Omega) \|L\| \geq 0$ τέτοια ώστε

$$\|Lv\| \leq c|v|_t \text{ για όλα τα } v \in H^t(\Omega).$$

Πράγματι. Έστω $I: H^t(\Omega) \rightarrow P_{t-1}$ να είναι τελεστής παρεμβολής. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.1. επειδή $Iv \in \ker L$ έχουμε

$$\|Lv\| = \|L(v - Iv)\| \leq \|L\| \|v - Iv\|_t \leq c \|L\| |v|_t$$

Όπου c η σταθερά του Λήμματος 2.1.2.

Επικεντρώνουμε την προσοχή μας τώρα σε C^0 στοιχεία αποτελούμενα από τμηματικά πολυώνυμα βαθμού $t-1$. Υποθέτουμε $t \geq 2$ και δοσμένης μιας τριγωνοποίησης T_h με τη σχετιζόμενη οικογένεια $S_h = \mathbf{M}_0^{t-1}(T_h)$ και από την προηγούμενη παράγραφο υπάρχει καλώς ορισμένος τελεστής παρεμβολής $I_h : H^t(\Omega) \rightarrow S_h$. Επιπλέον από τον ορισμό για την αποδεκτή τριγωνοποίηση η T_h σχετική παράμετρο σχήματος k .

Θεώρημα 2.1.4 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 79]): Έστω $t \geq 2$ και υποθέτουμε T_h μια τριγωνοποίηση κανονικού σχήματος (shape regular) του Ω . Τότε υπάρχει σταθερά $c = c(\Omega, k, t)$ τέτοια ώστε

$$\|u - I_h u\|_{m,h} \leq ch^{t-m} |u|_{t,\Omega} \text{ για } u \in H^t(\Omega), 0 \leq m \leq t$$

Όπου I_h δηλώνει παρεμβολή από τμηματικά πολυώνυμα $t-1$ βαθμού.

Παρατήρηση: Έστω $t \geq 2$ και υποθέτουμε

$$T_h := hT_1 = \{x = hy : y \in T_1\}$$

με $h \leq 1$. Τότε

$$\|u - Iu\|_{m,T_h} \leq ch^{t-m} |u|_{t,T_h}.$$

Για $0 \leq m \leq t$ όπου Iu είναι πολυώνυμο στο P_{t-1} που παρεμβάλλει τη u (στα μετασχηματισμένα σημεία). Για την απόδειξη της παραπάνω ανισότητας παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην [5, σελ. 79].

Τύπος μετασχηματισμού: Έστω Ω και $\widehat{\Omega}$ να είναι ισοδύναμα, δηλαδή να υπάρχει μια απεικόνιση 1-1 και επί τέτοια ώστε

$$F: \widehat{\Omega} \rightarrow \Omega$$

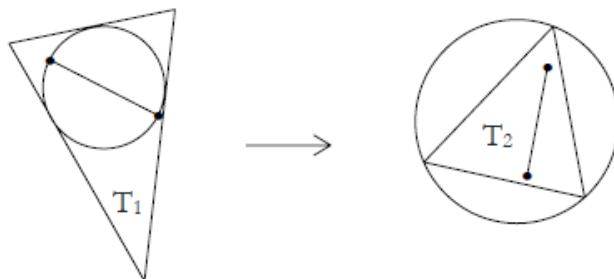
$$F\hat{x} = x_0 + B\hat{x}$$

Όπου B μη-ιδιάζον πίνακας (ανν $\det \neq 0$). Αν $v \in H^m(\Omega)$ τότε

$\hat{v} := v \circ F \in H^m(\widehat{\Omega})$ και υπάρχει $c = c(\widehat{\Omega}, m)$ τέτοιο ώστε

$$|\hat{v}|_{m,\widehat{\Omega}} \leq c \|B\|^m |\det B|^{-\frac{1}{2}} |v|_{m,\Omega}.$$

Μία τέτοια απεικόνιση από ένα τρίγωνο T_1 σε ένα τρίγωνο T_2 στέλνει ένα ζευγάρι σημείων από έναν εγγεγραμμένο κύκλο σε έναν περιγεγραμμένο κύκλο.



8. Απεικόνιση από το T_1 στο T_2 .

Το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί από και προς τα πλέγματα κανονικού σχήματος (shape regular) δεν παράγουν επιπλέον δυνάμεις του h μπορεί επίσης να φανεί και γεωμετρικά. Έστω $F: T_1 \rightarrow T_2: \hat{x} \rightarrow B\hat{x} + x_0$ να είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση. Συμβολίζουμε με ρ_i την μέγιστη ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου στο T_i και με r_i την μικρότερη ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο T_i . Δεδομένου $x \in \mathbb{R}^2$ με $\|x\| \leq 2\rho_1$ βρίσκουμε δύο σημεία $y_1, z_1 \in T_1$ με

$x = y_1 - z_1$ όπως στη εικόνα 8. Επειδή $F(y_1), F(z_1) \in T_2$, έχουμε $\|Bx\| \leq 2r_2$.

Τότε

$$\|B\| \leq \frac{r_2}{\rho_1}$$

Τώρα αλλάζουμε το T_1 με το T_2 και βλέπουμε ότι ο αντίστροφος πίνακας B^{-1} ικανοποιεί την σχέση $\|B^{-1}\| \leq \frac{r_1}{\rho_2}$.

Πράγματι $|x| = |y_1 - z_1| \leq 2r_1$ για y_1, z_1 στο T_1

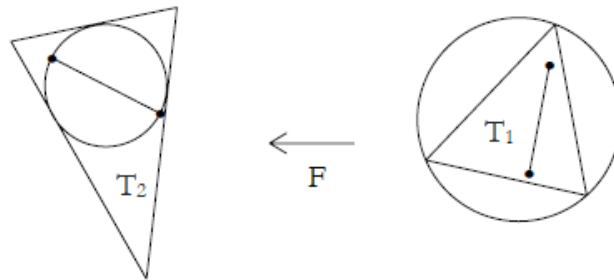
άρα $\|B^{-1}F(y_1) - B^{-1}F(z_1)\| \leq 2r_1$ με $F(y_1), F(z_1)$ στο T_2 . Επίσης

$|F(y_1) - F(z_1)| \leq 2\rho_2$. Επομένως έχουμε $\|B^{-1}(F(y_1) - F(z_1))\| \leq 2r_1 \Rightarrow$

$$\|B^{-1}\|2\rho_2 \leq 2r_1 \Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{r_1}{\rho_2}$$

Έτσι έχουμε

$$\|B\| \|B^{-1}\| \leq \frac{r_1 r_2}{\rho_2 \rho_1}.$$



9. Αντιστροφή των T_1 και T_2

Διγραμμικά Τετραγωνικά Στοιχεία

Θεώρημα (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 82]): Έστω T_h να είναι μια σχεδόν ομοιόμορφη διαμέριση του Ω σε παραλληλόγραμμα. Τότε υπάρχει σταθερά $c = c(\Omega, \kappa)$ τέτοια ώστε

$$\|u - I_h u\|_{m,\Omega} \leq c h^{2-m} |u|_{2,\Omega} \text{ για όλα τα } u \text{ στο } H^2(\Omega)$$

Όπου $I_h u$ παρεμβάλει τη u χρησιμοποιώντας διγραμμικά στοιχεία.

2.2 Αντίστροφες εκτιμήσεις

Τα παραπάνω θεωρήματα προσέγγισης είχαν τη μορφή

$$\|u - Iu\|_{m,h} \leq ch^{t-m} |u|_t$$

όπου m μικρότερο από το t . Σε αυτή την παράγραφο αναφερόμαστε στο [5, Κεφάλαιο 6, §6.8]. Προς το παρόν αγνοούμε το γεγονός ότι στο δεξί μέλος η νόρμα $\|\cdot\|_t$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ημι-νόρμα $|\cdot|_t$. Έτσι το προσεγγιστικό σφάλμα μετριέται σε μία πιο “χονδροειδή” νόρμα από τη δεδομένη συνάρτηση. Στις αντίστροφες εκτιμήσεις συμβαίνει το αντίστροφο. Μία πιο “λεπτή” νόρμα των συναρτήσεων πεπερασμένων στοιχείων θα εκτιμηθεί από μία πιο “χονδροειδή” νόρμα (προφανώς, αυτό δεν ισχύει για όλες τις συναρτήσεις στους χώρους Sobolev αλλά στους χώρους πεπερασμένων στοιχείων).

Αντίστροφη εκτίμηση: Έστω (S_h) να είναι μια συγγενής οικογένεια πεπερασμένων στοιχείων αποτελούμενο από τμηματικά πολυώνυμα βαθμού k που σχετίζονται με ομοιόμορφες διαμερίσεις. Τότε υπάρχει σταθερά $c=c(k, t)$ τέτοια ώστε για όλα τα $0 \leq m \leq t$.

$$\|u_h\|_{t,h} \leq ch^{m-t} \|u_h\|_{m,h} \text{ για όλα τα } u_h \in S_h$$

2.3 Φράγματα σφάλματος ελλειπτικών προβλημάτων δευτέρου βαθμού.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να εξάγουμε εκτιμήσεις σφάλματος για λύσεις πεπερασμένων στοιχείων σύμφωνα με [5, Κεφάλαιο 2, §7]. Ψάχνουμε για φράγματα της μορφής

$$\|u - u_h\| \leq ch^p.$$

Εδώ το p καλείται τάξη προσέγγισης. Γενικά εξαρτάται από την ομαλότητα της λύσης, το βαθμό των πολυωνύμων του χώρου των πεπερασμένων στοιχείων και τη νόρμα στους χώρους Sobolev όπου μετράμε το σφάλμα.

Παρατηρήσεις για την ομαλότητα.

Ορισμός 2.3.1: Έστω $m \geq 1$ $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ και υποθέτουμε $\alpha(\cdot, \cdot)$ V -ελλειπτική διγραμμική μορφή. Τότε το μεταβολικό πρόβλημα

$$\alpha(u, v) = (f, v)_0 \text{ για όλα τα } v \in V$$

καλείται H^s -ομαλό υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει σταθερά $c = c(\Omega, \alpha, s)$ τέτοια ώστε για κάθε $f \in H^{s-2m}(\Omega)$, υπάρχει λύση $u \in H^s$ με

$$\|u\|_s \leq c \|f\|_{s-2m} \quad (2.3.1).$$

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στο βασικό θεώρημα ομαλότητας για το γενικό ελλειπτικό πρόβλημα που ορίζεται από τις (1.4.6) [βλ. σελ. 20].

Θεώρημα Ομαλότητας 2.3.2 (βλ [1, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 89]): Έστω $\alpha(\cdot, \cdot)$ να είναι μία H_0^1 -ελλειπτική διγραμμική μορφή με επαρκώς λείες συναρτήσεις συντελεστών.

(1) Αν το Ω είναι κυρτό, τότε το πρόβλημα Dirichlet είναι H^2 -ομαλό.

(2) Αν Ω έχει ένα C^s σύνορο με $s \geq 2$, τότε το πρόβλημα Dirichlet είναι H^s -κανονικό.

Θεώρημα 2.3.3 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 90]): Υποθέτουμε T_h οικογένεια από τριγωνισμό κανονικού σχήματος (shape regular) του Ω . Τότε η προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία $u_h \in S_h = M_0^k$ ($k \geq 1$) ικανοποιεί

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch \|u\|_2 \leq ch \|f\|_0 \quad (2.3.2)$$

Απόδειξη:

Από την κυρτότητα του Ω το πρόβλημα είναι H^2 -ομαλό, και $\|u\|_2 \leq c_1 \|f\|_0$.

Από το Θεώρημα (2.1.4) υπάρχει v_h στο S_h με

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} = \|u - u_h\|_{1,h} \leq c_2 h \|u\|_{2,\Omega}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με το Λήμμα Cέα παίρνουμε την σχέση (2.3.2) με $c := (1 + c_1)c_2c_3/\alpha$. \square

Παρατήρηση: Η παραπάνω εκτίμηση ισχύει για κάθε συγγενή οικογένεια τριγωνικών στοιχείων τα οποία περιέχουν P_1 στοιχεία σαν υποσύνολο. Επιπλέον από το Θεώρημα για τα διγραμμικά τετραγωνικά στοιχεία ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα αν χρησιμοποιήσουμε διγραμμικά τετραγωνικά στοιχεία αντί για γραμμικά τρίγωνα. Έτσι σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα έχουμε:

Θεώρημα 2.3.4 (βλ [1, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 91]): Έστω $f \in L_2(\Omega)$.

Υποθέτουμε ότι μας δίνεται ένα σύνολο από διαμερίσεις κανονικού σχήματος (shape regular) του Ω σε παραλληλόγραμμα. Τότε η προσεγγιστική πεπερασμένη λύση u_h από τετραγωνικά διγραμμικά στοιχεία στο S_h ικανοποιεί

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch\|f\|_0 \quad (2.3.3)$$

2.4 L_2 Εκτίμηση.

Αν το σφάλμα πολυωνυμικής προσέγγισης υπολογίζεται με την L_2 -νόρμα, τότε από το Θεώρημα 2.1.4, ο βαθμός της προσέγγισης είναι καλύτερος από μία δύναμη του h . Δεν είναι καθόλου προφανές ότι αυτή η ιδιότητα μεταφέρεται σε λύσεις πεπερασμένων στοιχείων.

Λήμμα 2.4.1 (Aubin-Nitsche) (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 91]): Έστω H να είναι χώρος Hilbert με νόρμα $|\cdot|$ και εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) . Έστω V υπόχωρος ο οποίος είναι επίσης χώρος Hilbert με νόρμα $\|\cdot\|$. Επιπλέον η συνεχής ενσφήνωση V στο H . Τότε η λύση πεπερασμένου στοιχείου στο $S_h \subset V$ ικανοποιεί

$$|u - u_h| \leq C\|u - u_h\| \sup_{g \in H} \left(\frac{1}{|g|} \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\| \right) \quad (2.3.4)$$

Όπου για κάθε $g \in H$, $\varphi_g \in V$ δηλώνει την αντίστοιχη μοναδική (ασθενή) λύση της εξίσωσης

$$a(w, \varphi_g) = (g, w) \text{ για όλα τα } w \in V. \quad (2.3.4a)$$

Συμπέρασμα: Αν ισχύουν οι υποθέσεις των Θεωρημάτων από τις σχέσεις (2.3.2 ή 2.3.3) αν $u \in H^1(\Omega)$ είναι λύση του αντίστοιχου μεταβολικού προβλήματος τότε

$$\|u - u_h\|_0 \leq cCh\|u - u_h\|_1 \quad (2.3.5)$$

Αν επιπλέον $f \in L_2(\Omega)$ και $u \in H^2(\Omega)$ τότε

$$\|u - u_h\|_0 \leq cC^2h^2\|f\|_0 \quad (2.3.6)$$

Απόδειξη: Λόγω του δυϊσμού, η νόρμα ενός στοιχείου σε ένα χώρο Hilbert μπορεί να υπολογιστεί από

$$|w| = \sup_{g \in H} \frac{(g, w)}{|g|} \quad (2.3.7)$$

Εδώ, όπως και στην σχέση (2.3.4) το supremum το παίρνουμε μόνο για εκείνα τα g για τα οποία ισχύει $g \neq 0$.

Ανακαλούμε τα u και u_h που δίνονται από,

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in V,$$

$$a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in S_h.$$

Έτσι $a(u - u_h, v) = 0$ για όλα τα $v \in S_h$. Επιπλέον αν θέσουμε $w := u - u_h$ στην (2.3.4α), παίρνουμε

$$\begin{aligned} (g, u - u_h) &= a(u - u_h, \varphi_g) = a(u - u_h, \varphi_g - v) \\ &\leq C\|u - u_h\| \|\varphi_g - v\|. \end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της διγραμμικής μορφής $a(\cdot, \cdot)$.

Έτσι έχουμε

$$(g, u - u_h) \leq C\|u - u_h\| \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\|.$$

και από την (2.3.7) καταλήγουμε

$$\begin{aligned} |u - u_h| &= \sup_{g \in H} \frac{(g, u - u_h)}{|g|} \\ &\leq C\|u - u_h\| \sup_{g \in H} \left\{ \inf_{v \in S_h} \frac{\|\varphi_g - v\|}{|g|} \right\}. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} H &:= H^0(\Omega) = L_2(\Omega), \quad |\cdot| := \|\cdot\|_0. \\ V &:= H_0^1(\Omega), \quad \|\cdot\| := \|\cdot\|_1. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι $V \subset H$, και από συνέχεια της ενσφήνωσης είναι ξεκάθαρο ότι $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1$. Από την σχέση 2.3.2 ή 2.3.3. έχω $\|\varphi_g - v\| \leq ch|g|$ άρα ο όρος $\left(\frac{1}{|g|} \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\|\right)$ είναι το πολύ ch . Έτσι έχω το ζητούμενο αποτέλεσμα (2.3.3). Για την (2.3.6) αντικαθιστούμε την εκτίμηση

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch\|u\|_2 \leq ch\|f\|_0.$$

□

2.5 Η L_2 -Προβολή

Μία L_2 -προβολή $P_h v$ είναι μία προβολή συνάρτησης v από ένα χώρο συναρτήσεων A σε έναν χώρο συναρτήσεων B . Μπορούμε να ορίσουμε την L_2 -προβολή ως εξής:

$$(P_h v - v, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in S_h, \forall v \in H^1(\Omega).$$

Η L_2 -προβολή είναι η καλύτερη δυνατή προσέγγιση. Όντως

$$\begin{aligned} \|v - P_h v\|_{L_2(\Omega)}^2 &= (v - P_h v, v - P_h v) \\ &= (v - P_h v, v - v_h) + (v - P_h v, v_h - P_h v) \\ &= (v - P_h v, v - v_h) \leq \|v - P_h v\|_{L_2(\Omega)} \|v - v_h\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Επομένως $\|v - P_h v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|v - v_h\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall v_h \in S_h, \forall v \in H^1(\Omega)$

Θεώρημα 2.5.1 (βλ [5, Κεφάλαιο 2, Σελίδα 94]): Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις των σχέσεων 2.3.2 (ή 2.3.3) και $\{T_h\}$ μια οικογένεια από ομοιόμορφους τριγωνισμούς του Ω . Έστω P_h να είναι L_2 -προβολή στο $S_h \subset H^1(\Omega)$. Τότε

$$\|P_h v\|_1 \leq c \|v\|_1 \quad \text{για όλα τα } v \in H^1(\Omega)$$

όπου c σταθερά εξαρτημένη από το h .

Ιδιαίτερα στην περίπτωση γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων, η L_2 -προβολή ικανοποιεί την ακόλουθη εκτίμηση ευστάθειας.

Λήμμα: Έστω T_h τριγωνισμός κανονικού σχήματος (shape regular) του Ω και P_h να είναι L_2 -προβολή στο M_0^1 . Τότε

$$\|P_h v\|_1 \leq c \|v\|_1 \quad \text{για όλα τα } v \in H_0^1(\Omega)$$

Όπου c σταθερά εξαρτημένη από το h .

2.6 Απλή προσέγγιση συνόρου

Ακολουθεί η παρουσίαση του [5, Κεφάλαιο 3, §1]. Εάν οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός ελλειπτικού προβλήματος H^m δεν ανήκουν στο χώρο Sobolev τότε τα ονομάζουμε μη σύμμορφα στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή, η σύγκλιση δεν είναι καθόλου προφανής. Επιπλέον, εκτός από το σφάλμα προσέγγισης, υπάρχει τώρα ένα σφάλμα που ονομάζεται σφάλμα συνέπειας. Χρειαζόμαστε ορισμένες γενικεύσεις του λήμματος του Cέα. Θα τις εφαρμόσουμε σε ένα απλό μη συμβατό στοιχείο.

Γενίκευση του λήμματος Cέα (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 106]):

Ως συνήθως έχουμε $H_0^m \subset V \subset H^m$. Αντικαθιστούμε το δοσμένο μεταβολικό πρόβλημα

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in V \quad (2.6.1)$$

Από μία ακολουθία προβλημάτων πεπερασμένης διάστασης στην οποία αναζητούμε τα u_h στο S_h τέτοια ώστε

$$a_h(u_h, v) = \langle l_h, v \rangle \text{ για όλα τα } v \text{ στο } S_h \quad (2.6.2)$$

Παρατηρούμε ότι η διγραμμική μορφή του διακριτού προβλήματος είναι μια “προσέγγιση” της διγραμμικής μορφής $a(u, v)$. Ομοίως και το l_h είναι μία “προσέγγιση” του l . Εδώ η διγραμμική μορφή a_h υποθέτουμε ότι είναι ομοιόμορφα ελλειπτική δηλαδή υπάρχει σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια ώστε

$$a_h(v, v) \geq \alpha \|v\|_{m, \Omega}^2 \text{ για όλα τα } v \in S_h \quad (2.6.3)$$

Οι εκτιμήσεις μας για το σφάλμα για μη-σύμμορφες μεθόδους βασίζεται στην παρακάτω γενίκευση του λήμματος Cέα. Αρχικά στη γενίκευση αυτή, δεν απαιτούμε η διγραμμική μορφή a_h να ορίζεται για όλες τις συναρτήσεις στο V . Ωστόσο απαιτούμε το S_h να είναι υποσύνολο του V .

Λήμμα 2.6.1 (Πρώτο Λήμμα του Strang)(βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 106]): Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις υπάρχει σταθερά c εξαρτημένη από το h τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| \leq c & \left(\inf_{v_h \in S_h} \left\{ \|u - v_h\| \right. \right. \\ & \left. \left. + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right\} \right. \\ & \left. + \sup_{w_h \in S_h} \left\{ \frac{|\langle l, w_h \rangle - \langle l_h, w_h \rangle|}{\|w_h\|} \right\} \right). \end{aligned}$$

Απόδειξη: Έστω $v_h \in S_h$. Για ευκολία θέτουμε $u_h - v_h \equiv w_h \in S_h$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια και από τις σχέσεις (2.6.2)-(2.6.3), έχουμε

$$\begin{aligned} a\|u_h - v_h\|^2 & \leq a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) = a_h(u_h - v_h, w_h) \\ & = a(u - v_h, w_h) + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)] \\ & + [a_h(u_h, w_h) - a(u, w_h)] \\ & = a(u - v_h, w_h) + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h) - [\langle l, w_h \rangle - \langle l_h, w_h \rangle]] \end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\|u_h - v_h\| = \|w_h\|$ και χρησιμοποιώντας την συνέχεια του $a(\cdot, \cdot)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|u_h - v_h\| \leq C & \left(\|u - v_h\| + \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right. \\ & \left. + \frac{|\langle l_h, w_h \rangle - \langle l, w_h \rangle|}{\|w_h\|} \right) \end{aligned}$$

Αφού v_h αυθαίρετο στοιχείο στο S_h , ο ισχυρισμός προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα

$$\|u - u_h\| \leq \|u - v_h\| + \|u_h - v_h\|.$$

□

Χωρίς τη συνθήκη $S_h \subset V$ έχουμε αρκετές συνέπειες. Συγκεκριμένα η H^m -νόρμα ίσως να μην ορίζεται για όλα τα στοιχεία στο S_h και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη νόρμα που εξαρτάται από τη διαμέριση h (mesh-dependent norm).

Θεωρούμε ότι η διγραμμική μορφή a_h ορίζεται για συναρτήσεις στο V και στο S_h και ότι έχουμε ελλειπτικότητα και συνέχεια, δηλαδή:

$$a_h(v, v) \geq a \|v\|_h^2 \text{ για όλα τα } v \text{ στο } S_h. \quad (2.6.4)$$

$$|a_h(u, v)| \leq C \|u\|_h \|v\|_h \text{ για όλα τα } u \in V \oplus S_h, v \in S_h. \quad (2.6.5)$$

Με μερικές θετικές σταθερές a και C εξαρτημένες από το h .

Λήμμα 2.6.2 (Berger, Scott και Strang) (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 107]):

Σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει μία σταθερά c που εξαρτάται από το h τέτοια ώστε

$$\|u - u_h\|_h \leq c \left(\inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - \langle l_h, w_h \rangle|}{\|w_h\|_h} \right)$$

Σημείωση: Ο πρώτος όρος ονομάζεται σφάλμα προσέγγισης και ο δεύτερος όρος ονομάζεται σφάλμα συνέπειας. Χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή του δεύτερου λήμματος του Strang δεν χρειαζόμαστε πλέον την απαίτηση για τη διγραμμική μορφή a_h να ορίζεται στο V . Η επέκταση του S_h σε $S_h \oplus V$ περιέχει παγίδες, αρκεί να εκτιμήσουμε τη γραμμική μορφή

$$a_h(v_h, w_h) - \langle l_h, w_h \rangle \text{ για όλα τα } w_h \in S_h$$

για στοιχεία $v_h \in S_h$ τα οποία η απόστασή τους από το u είναι μικρή.

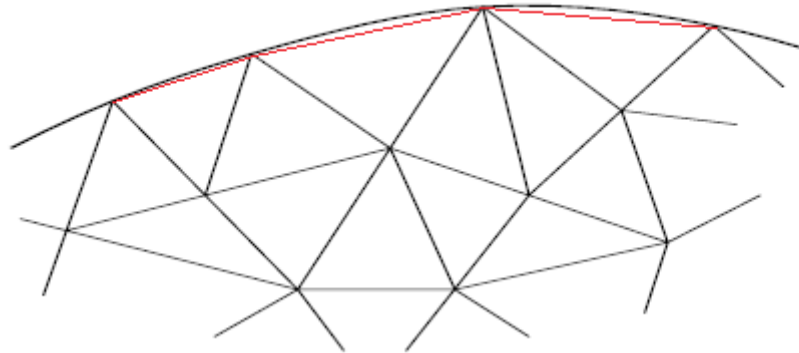
Λήμμα 2.6.3 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 108]): Υποθέτουμε οι χώροι H, V είναι χώροι Hilbert και ικανοποιούν τις υποθέσεις από το λήμμα Aubin-Nitche. Επιπλέον υποθέτουμε $S_h \subset H$ και ότι η διγραμμική μορφή a_h ορίζεται στο $V \cup S_h$ και ότι ταυτίζεται με την διγραμμική μορφή a στο V . Τότε η λύση u_h ικανοποιεί

$$\|u - u_h\| \leq \sup_{g \in H} \frac{1}{|g|} \left\{ c \|u - u_h\|_h \|\varphi_g - \varphi_{g,h}\|_h + |a_h(u - u_h, \varphi_g) - (u - u_h, g)| + |a_h(u, \varphi_g - \varphi_{g,h}) - \langle l, \varphi_g - \varphi_{g,h} \rangle| \right\}$$

Όπου $\varphi_g \in V$ και $\varphi_{g,h} \in S_h$ είναι η ασθενή λύση και η διακριτή ασθενή λύση αντιστοίχως του διακριτού μεταβολικού προβλήματος $a_h(w,\varphi)=(w,g)$ για δοσμένη $g \in H$.

Μια απλή προσέγγιση σε καμπύλο σύνορο.

Θεωρούμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης στο Ω με λείο σύνορο. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο του $\Gamma=\partial\Omega$ υπάρχει ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων (ξ,η) έτσι ώστε σε μια γειτονιά το σύνορο να περιγραφεί σαν γράφημα C^2 -συνάρτησης. Υποθέτουμε ότι το Ω χωρίζεται σε στοιχεία έτσι ώστε κάθε στοιχείο T να έχει τρεις κορυφές όπου τουλάχιστον οι δύο να βρίσκονται στο εσωτερικό του Ω . Αν δυο κορυφές του T βρίσκονται στο Γ τότε το τμήμα ανάμεσα σ'αυτά τα δύο σημεία είναι πλευρά του στοιχείου.



10. Χωρίο Ω με καμπύλο σύνορο.

Αν αντικαταστήσουμε την καμπυλωμένη πλευρά του τριγωνικού στοιχείου που ανήκει στο $\partial\Omega$ με ένα ευθύγραμμο τμήμα τότε θα έχουμε μία προσέγγιση Ω_h του Ω .

Η διαμέριση T_h του Ω επιφέρει έναν τριγωνισμό του Ω_h . Διαλέγουμε πεπερασμένα στοιχεία να είναι γραμμικά τριγωνικά στοιχεία όπου οι μηδενικές συνοριακές συνθήκες εφαρμόζονται στις κορυφές των τριγώνων στο Γ .

$$S_h := \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_T \text{ είναι γραμμικό για κάθε } T \in T_h, v(z)=0 \forall \text{ κορυφή } z \in \Gamma\}$$

Το ακόλουθο Λήμμα εκτιμά την συνοριακή L_2 -νόρμα με τη βοήθεια της ημι-νόρμας $|\cdot|_t$ σε όλο το χωρίο.

Λήμμα 2.6.4 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 112]): Έστω χωρίο Ω με C^2 σύνορο και T_h ακολουθία από τριγωνοποιήσεις κανονικού σχήματος (shape regular). Τότε

$$\|v\|_{0,\Gamma} \leq ch^{\frac{3}{2}}|v|_{1,\Omega} \text{ για όλα τα } v \in S_h.$$

Θεώρημα (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 114]): Έστω Ω να είναι χωρίο με C^2 σύνορο και υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούμε γραμμικά τριγωνικά στοιχεία σε τριγωνοποιήσεις κανονικού σχήματος (shape regular). Τότε η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq ch\|u\|_{2,\Omega} \leq ch\|f\|_{0,\Omega}.$$

2.7 Αρνητικές Νόρμες, Αντίστροφοι τελεστές

Ορισμός 2.7.1: Έστω $m \geq 1$. Επίσης $u \in L_2(\Omega)$ ορίζεται η νόρμα

$$\|u\|_{-m,\Omega} := \sup_{v \in H_0^m(\Omega)} \frac{(u, v)_{0,\Omega}}{\|v\|_{m,\Omega}}$$

Ορίζουμε επίσης $H^{-m}(\Omega)$ να είναι το συμπλήρωμα του $L_2(\Omega)$ σύμφωνα με τη νόρμα $\|\cdot\|_{-m,\Omega}$.

Σημείωση: Έστω a να είναι μία $H_0^m(\Omega)$ –ελλειπτική διγραμμική μορφή. Τότε από το θεώρημα ύπαρξης έχουμε

$$\|u\|_m \leq a^{-1}\|f\|_{-m} \quad (2.7.1)$$

Σημείωση: Έστω $V \subset U$ να είναι χώροι Hilbert και υποθέτουμε η ενσφήνωση V στο U είναι συνεχής και πυκνή. Επιπλέον υποθέτουμε ότι ταυτίζουμε το U' με το U μέσω της αναπαράστασης Riesz. Τότε ισχύει,

$$V \subset U \subset V'$$

Συζυγείς τελεστές

Έστω X, Y χώροι Banach και X', Y' οι δυικοί χώροι. Μία διπλή αντιστοιχία θα συμβολίζεται με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ χωρίς αναφορά σε χώρους.

Έστω $L: X \rightarrow Y$ φραγμένος τελεστής. Για δοσμένο y^* στον Y'

η απεικόνιση

$$x \rightarrow l_{y^*}(x) := \langle y^*, Lx \rangle$$

ορίζει ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον X .

Η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση

$$L': Y' \rightarrow X'$$

$$y^* \rightarrow l_{y^*} \text{ δηλαδή } \langle L'y^*, x \rangle := \langle y^*, Lx \rangle$$

Καλείται συζυγής απεικόνιση του L . Η συζυγής απεικόνιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της εικόνας του L .

Έστω V κλειστό υποσύνολο του X . Τότε

$$V^0 = \{l \in X': \langle l, v \rangle = 0 \text{ για όλα τα } v \in V\}$$

καλείται πολικό σύνολο του V .

Επισημαίνεται πως δεν μπορούμε πάντα να ταυτοποιήσουμε το χώρο X' με τον X . Επομένως πρέπει να ξεχωρίσουμε το πολικό σύνολο του V από το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V το οποίο ορίζεται ως

$$V^\perp := \{x \in X: (x, v) = 0 \ \forall v \in V\}$$

Θεώρημα 2.7.2 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 124]): Έστω X και Y να χώροι Banach και $L: X \rightarrow Y$ να είναι φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- i) Η εικόνα $L(X)$ είναι κλειστή στον Y .
- ii) $L(X) = (\ker L')^0$.

Θεώρημα 2.7.3 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 124]): Έστω U και V χώροι Hilbert. Τότε η γραμμική απεικόνιση

$L: U \rightarrow V'$ να είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν η σχετιζόμενη μορφή

$a: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τα ακόλουθα:

i) (Συνέχεια) Υπάρχει $C \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_U \|v\|_V \quad (2.7.2)$$

ii) (Συνθήκη inf-sup). Υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u\|_U \text{ για όλα τα } u \in U \quad (2.7.3)$$

iii) Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $u \in U$ με

$$a(u, v) \neq 0. \quad (2.7.4)$$

Το όνομα της συνθήκης inf-sup προέρχεται από την ισοδύναμη μορφή ii)

$$\inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq \alpha > 0 \quad (2.7.5)$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $a(u, v) = \langle f, v \rangle$ αριθμητικά οδηγούμαστε στη μέθοδο Galerkin. Έστω $U_h \subset U$ και $V_h \subset V$ χώροι πεπερασμένης διάστασης. Τότε για δοσμένη $f \in V'$ αναζητούμε u_h στο U_h τέτοιο ώστε

$$a(u_h, v) = \langle f, v \rangle \text{ για όλα τα } v \text{ στο } V_h$$

Σημείωση: Αν η iii) δεν ισχύει τότε ο

$L: U \rightarrow \{v \in V: a(u, v) = 0 \forall u \in U\}^0 \subset V'$ είναι ισομορφισμός.

Λήμμα 2.7.4 (Babuska-Aziz): Υποθέτουμε η διγραμμική μορφή $a: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την υπόθεση του παραπάνω θεωρήματος. Επιλέγουμε $U_h \subset U$ και $V_h \subset V$ ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (2.7.4) (2.7.5) όταν U και V αντικατασταθούν από U_h και V_h . Τότε

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{c}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\| \quad (2.7.6)$$

Σημείωση: Λέμε ότι οι υπόχωροι U_h και V_h ικανοποιούν τη συνθήκη Babuska ή την συνθήκη inf-sup υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση (2.7.4) για τους συγκεκριμένους υποχώρους.

Απόδειξη: Για να λύσουμε την εξίσωση $a(u, v) = \langle f, v \rangle$ οδηγούμαστε με φυσικό τρόπο στη μέθοδο Galerkin. Έστω $U_h \subset U$ και $V_h \subset V$ να είναι χώροι πεπερασμένων στοιχείων που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος. Τότε δοσμένης $f \in V'$, ψάχνουμε u_h στο U_h τέτοια ώστε

$$a(u_h, v) = \langle f, v \rangle.$$

Έτσι έχουμε $a(u, v) - a(u_h, v) = a(u - u_h, v) = 0$ για όλα τα $v \in V_h$.

Για $\langle l, v \rangle := a(u - w_h, v)$, έχουμε $\|l\| \leq C\|u - w_h\|$. Από την υπόθεση η απεικόνιση $L_h : U_h \rightarrow V_h'$ που παράγεται από την $a(u - w_h, \cdot)$ ικανοποιεί $\|(L_h)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$

Έτσι

$$\|u_h - w_h\| \leq \alpha^{-1}\|l\| \leq \alpha^{-1}C\|u - w_h\|$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με τη χρήση της τριγωνικής ανισότητας

$$\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|u_h - w_h\|.$$

□

2.8 Προβλήματα Σαγματικού Σημείου

Επιστρέφουμε στο μεταβολικό πρόβλημα με περιορισμούς. Έστω X και M χώροι Hilbert και υποθέτουμε

$$a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad b: X \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι συνεχείς διγραμμικές μορφές. Έστω $f \in X'$ και $g \in M'$. Συμβολίζουμε τους δυϊκούς χώρους των X, M με τον X', M' αντιστοίχως, και χωρίς βλάβη της γενικότητας με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ τα αντίστοιχα δυϊκά ζεύγη. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Πρόβλημα (I): Ελαχιστοποιούμε πάνω στον X την συνάρτηση

$$J(u) := \frac{1}{2} a(u, u) - \langle f, u \rangle \quad (2.8.0)$$

Υπό τον περιορισμό

$$b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle \text{ για όλα τα } \mu \in M$$

Αρχικά θα αναφερθούμε στις συναρτήσεις Lagrange. Η Λαγκραντζιανή του παραπάνω προβλήματος ορίζεται ως

$$\mathcal{L}(u, \lambda) := J(u) + [b(u, \lambda) - \langle g, \lambda \rangle]. \quad (2.8.1)$$

Παρατηρούμε πως λαμβάνει τις ίδιες τιμές στο σύνολο των σημείων όπου ικανοποιούνται οι περιορισμοί. Επομένως αντί να βρούμε το ελάχιστο για το J , ψάχνουμε να βρούμε ελάχιστο του $\mathcal{L}(\cdot, \lambda)$ με σταθερό λ . Θα δείξουμε πως το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λάβει τη μορφή προβλήματος σαγματικού σημείου. Γι' αυτό το λόγο ορίζουμε το ακόλουθο:

Πρόβλημα (II): Εύρεση $(u, \lambda) \in X \times M$ με

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= \langle f, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in X \quad (2.8.2) \\ b(u, \mu) &= \langle g, \mu \rangle \text{ για όλα τα } \mu \in M \quad (2.8.2') \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \nabla_u \mathcal{L} &= Au - f + B\lambda = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L} &= Bu - g = 0 \end{aligned}$$

όπου $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$ και $b(u, \lambda) = \langle Bu, \lambda \rangle$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε λύση (u, λ) του Προβλήματος (II) ικανοποιεί την ιδιότητα του σημείου σέλλας

$$\mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \text{ για όλα τα } (v, \mu) \in X \times M$$

Οι σχέσεις (2.8.2), (2.8.2') ορίζουν μια γραμμική απεικόνιση

$$L : X \times M \rightarrow X' \times M'$$

$$(u, \lambda) \rightarrow (f, g).$$

Για να δείξουμε ότι ο L είναι ισομορφισμός χρειαζόμαστε την συνθήκη inf-sup. Χωρίζουμε την συνθήκη inf-sup σε ιδιότητες των διγραμμικών μορφών a και b . Εισάγουμε μια ειδική σημειογραφία για ένα συγγενή χώρο αποδεικτών στοιχείων και για τους αντίστοιχους γραμμικούς χώρους:

$$V(g) := \{v \in X : b(v, \mu) = \langle g, \mu \rangle \text{ για όλα τα } \mu \in M\}$$

$$V := \{v \in X : b(v, \mu) = 0 \text{ για όλα τα } \mu \in M\}$$

Αφού η διγραμμική μορφή b είναι συνεχής, ο V είναι κλειστός υπόχωρος του X . Συχνά είναι πιο εύκολο να μεταχειριστούμε την εξίσωση σαγματικού σημείου (2.8.2), (2.8.2') αν την αναδιατυπώσουμε σαν μια εξίσωση τελεστών.

Για αυτό το λόγο σχετίζουμε την απεικόνιση

$$A : X \rightarrow X'$$

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \text{ για όλα τα } v \in X$$

με την διγραμμική μορφή a . Ομοίως σχετίζουμε την απεικόνιση B και την συζυγή της απεικόνιση B' με την διγραμμική μορφή b , δηλαδή ορίζουμε

$$B : X \rightarrow M'$$

$$\langle Bu, \mu \rangle = b(u, \mu) \text{ για όλα τα } \mu \in M$$

καθώς και την αντίστοιχη δυϊκή

$$B' : M \rightarrow X'$$

$$\langle B'\lambda, v \rangle = b(v, \lambda) \text{ για όλα τα } v \in X.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι (2.8.2), (2.8.2') ισοδυναμούν με

$$Au + B'\lambda = f \quad (2.8.9)$$

$$Bu = g \quad (2.8.9')$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & X' \\ B \downarrow & & \uparrow B' \\ M' & & M \end{array}$$

11. Ο τελεστής A , B και ο συζυγής του B' .

Το ακόλουθο Λήμμα συνδέει την συνθήκη inf-sup με ιδιότητες ισομορφισμών των B , B'

Λήμμα 2.8.1 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 131]): Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

i) Υπάρχει σταθερά $\beta > 0$ με

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta.$$

ii) Ο τελεστής $B : V^\perp \rightarrow M'$ είναι ισομορφισμός και

$$\|Bv\| \geq \beta \|v\| \text{ για όλα τα } v \in V^\perp.$$

iii) Ο τελεστής $B' : M \rightarrow V^0 \subset X'$ είναι ισομορφισμός και

$$\|B'\mu\| \geq \beta \|\mu\| \text{ για όλα τα } \mu \in M.$$

Το ακόλουθο θεώρημα παρουσιάζει το βασικό θεώρημα ισομορφισμού για τον τελεστή L .

Θεώρημα 2.8.2 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 132]):

(Brezzi's splitting theorem).

Για προβλήματα σαγματικού σημείου η απεικόνιση L ορίζει έναν ισομορφισμό $L: X \times M \rightarrow X' \times M'$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι δύο παρακάτω συνθήκες:

i) Η διγραμμική μορφή $a(\cdot, \cdot)$ είναι V -ελλειπτική

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \text{ για όλα τα } v \in V$$

Για κάποια $\alpha > 0$, και V ορισμένο ως

$$V := \{v \in X: b(v, \mu) = 0 \text{ για όλα τα } \mu \in M\}$$

ii) Η διγραμμική μορφή $b(\cdot, \cdot)$ ικανοποιεί την συνθήκη inf-sup του παραπάνω λήμματος.

2.9 Μεικτές Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων.

Δουλεύοντας παρόμοια με το [5, Κεφάλαιο 3, §4], θα μελετήσουμε το διακριτό ανάλογο του προβλήματος σαγματικού σημείου. Διαλέγουμε υποχώρους πεπερασμένης διάστασης $X_h \subset X$ και $M_h \subset M$. Τότε το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα ορίζεται ως:

Πρόβλημα (S_h). Να βρούμε $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} a(u_h, v) + b(v, \lambda_h) &= \langle f, v \rangle \text{ για όλα τα } v \in X_h \\ b(u_h, \mu) &= \langle g, \mu \rangle \text{ για όλα τα } \mu \in M_h \end{aligned}$$

Αυτή η μέθοδος καλείται μεικτή μέθοδος.

Είναι χρήσιμο να εισάγουμε σημειογραφία ανάλογης με το χώρο V που ορίσαμε παραπάνω, επομένως το διακριτό ανάλογο V_h είναι

$$V_h := \{v \in X_h: b(v, \mu) = 0 \text{ για όλα τα } \mu \in M_h\}.$$

Ορισμός 2.9.1 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 135]): Μια οικογένεια χώρων πεπερασμένων στοιχείων X_h, M_h λέμε ότι ικανοποιεί την συνθήκη Babuska-Brezzi (inf-sup συνθήκη) υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν σταθερές $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ εξαρτημένες από το h τέτοιες ώστε:

i) Η διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot, \cdot)$ να είναι V_h -ελλειπτική με ελλειπτική σταθερά $\alpha > 0$.

ii)

$$\sup_{v \in X_h} \frac{b(v, \lambda_h)}{\|v\|} \geq \beta \|\lambda_h\| \text{ για όλα τα } \lambda_h \in M_h.$$

Θεώρημα 2.9.2 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 135]): Θεωρούμε ότι ισχύει η υπόθεση του θεωρήματος (Brezzi's splitting theorem) και υποθέτουμε ότι οι $X_h \subset X, M_h \subset M$ ικανοποιούν την συνθήκη inf-sup. Τότε

$$\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\| \leq c \{ \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\| + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\| \}.$$

Ορισμός 2.9.3 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 135]): Οι χώροι $X_h \subset X$ και $M_h \subset M$ λέμε ότι ικανοποιούν την συνθήκη (C) υπό την προϋπόθεση $V_h \subset V$ δηλαδή αν για κάθε $v_h \in X_h, b(v_h, \mu_h) = 0$ για όλα τα $\mu_h \in M_h$ συνεπάγεται $b(v_h, \mu) = 0$ για όλα τα $\mu \in M$.

Θεώρημα 2.9.4 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 135]): Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος μαζί με την συνθήκη (C). Τότε η λύση του προβλήματος (S_h) ικανοποιεί

$$\|u - u_h\| \leq c \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|.$$

Απόδειξη:

Έστω $v_h \in V_h(g)$. Τότε

$$\alpha(u_h - v_h, v) = \alpha(u_h, v) - \alpha(u, v) + \alpha(u - v_h, v) = b(v, \lambda - \lambda_h) + \alpha(u - v_h, v) \leq C \|u - v_h\| \|v\| \text{ για όλα τα } v \text{ στο } V$$

Το $b(v, \lambda - \lambda_h) = 0$ λόγω της συνθήκης (C) (βλ. Ορισμός 2.9.3).

Για $v = u_h - v_h$ έχουμε

$$\|u_h - v_h\|^2 \leq a^{-1}C \|u_h - v_h\| \|u - v_h\|$$

Διαιρώντας με $\|u - v_h\|$ ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί. \square

Θεώρημα 2.9.5 (βλ [3, Κεφάλαιο 12, Σελίδα 337]): Έστω $X_h \subset X$, $M_h \subset M$ και V όπως έχει οριστεί παραπάνω. Υποθέτουμε ότι $a(\cdot, \cdot)$ πιεστική (ελλειπτική) για κάθε z στο $V \cup V_h$. Τότε

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{c}{a}\right) \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_X + \frac{c}{a} \inf_{q \in M_h} \|p - q\|_M \quad (2.9.1)$$

Θεώρημα 2.9.6 (βλ [3, Κεφάλαιο 12, Σελίδα 344]): Έστω ότι ισχύει το παραπάνω θεώρημα και επιπλέον το διγραμμικό b ικανοποιεί την συνθήκη inf-sup. Τότε υπάρχει μοναδική λύση (u_h, p_h) στο $X_h \times M_h$ και ισχύει

$$\|p - p_h\|_M \leq c \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_X + (1 + c) \inf_{q \in M_h} \|p - q\|_M$$

$$c := \frac{c}{\beta} \left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων για τις εξισώσεις Stokes.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes περιγράφουν την κίνηση ενός ρευστού με ιξώδες. Οι εξισώσεις αυτές είναι πολύ χρήσιμες και εφαρμόζονται σε πολλές επιστήμες καθώς μπορούν να περιγράψουν καιρικά φαινόμενα. Οι εξισώσεις Stokes έχουν επίσης μεγάλο ενδιαφέρον από μαθηματικής άποψης. Πάρα το ευρύ φάσμα πρακτικών εφαρμογών τους, δεν έχει αποδειχθεί εάν οι λύσεις υπάρχουν πάντοτε σε τρεις διαστάσεις και αν είναι ομαλές δηλαδή να είναι άπειρες φορές διαφορίσιμες σε όλα τα σημεία του χωρίου Ω που μελετάμε.

3.1 Η εξίσωση Stokes

Η εξίσωση Stokes που περιγράφει την κίνηση ενός ρευστού με ιξώδες σε έναν n -διάστατο χώρο είναι η εξής

$$-\Delta u + \text{grad} p = -F \text{ στο } \Omega \quad (3.1.1\alpha)$$

$$\text{div} u = 0 \text{ στο } \Omega \quad (3.1.1\beta)$$

$$u = u_0 \text{ στο } \partial\Omega \quad (3.1.1\gamma)$$

όπου $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η ταχύτητα του ρευστού και $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ η πίεσή του. Επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη έχουμε $\text{div} u = 0$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss (2.8.0')

$$\int_{\partial\Omega} u_0 \cdot n ds = \int_{\partial\Omega} u \cdot n ds = \int_{\Omega} \text{div} u \, dx = 0$$

Η συνθήκη συμβατότητας στο u_0 προφανώς ικανοποιείται όταν $u_0 = 0$.

Θεωρούμε ότι το ρευστό έχει ιξώδες 1.

Αν οι (3.1.1) ικανοποιούνται για κάποιες συναρτήσεις $u \in [C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})]^n$ και $p \in C^1(\Omega)$, τότε οι u, p καλούνται κλασσικές λύσεις του προβλήματος Stokes.

Παρατηρούμε ότι μια οικογένεια λύσεων της πίεσης επαληθεύουν τις (3.1.1), δηλαδή αν (u, p) είναι λύση των παραπάνω εξισώσεων τότε $(u, p+c)$ επίσης είναι λύση των (3.1.1) για οποιαδήποτε σταθερά c .

Για να αποκτήσουμε μοναδική πίεση εισάγουμε έναν επιπλέον περιορισμό

$$\int_{\Omega} p dx = 0.$$

Ο περιορισμός $\operatorname{div} u = 0$ στην ασθενή μορφή της εξίσωσης Stokes (3.1.1) μας οδηγεί σε ένα πρόβλημα σαγματικού σημείου.

Θέτουμε

$$X = H_0^1(\Omega)^n, M = L_{2,0}(\Omega) := \{q \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0\}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.1.1α) με $v \in X$ και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, και πολλαπλασιάζοντας με $q \in M$ οδηγούμαστε στην ακόλουθη μορφή προβλήματος σημείο σέλλας.

$$(\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) = (f, v) \quad \forall v \in X \quad (3.1.2\alpha)$$

$$(q, \operatorname{div} u) = 0 \quad \forall q \in M \quad (3.1.2\beta)$$

ή ισοδύναμα

$$a(u, v) - b(v, p) = (f, v)_0$$

$$b(u, q) = 0$$

$$\text{όπου } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx, b(u, q) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} u dx$$

$$\text{και } (f, v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Παρατήρηση. Για v στο H_0^1 και q στο H^1 από την ταυτότητα Green έχουμε

$$\begin{aligned} b(v, q) &= \int_{\Omega} q \operatorname{div} v dx = - \int_{\Omega} v \operatorname{grad} q dx + \int_{\Omega} v \cdot q n ds \\ &= - \int_{\Omega} v \operatorname{grad} q dx. \end{aligned}$$

Έτσι μπορούμε να σχετίσουμε div και $-\operatorname{grad}$ σαν συζυγείς τελεστές.

Παρατήρηση. Κάθε κλασική λύση του προβλήματος σαγματικού σημείου (3.1.2) είναι και λύση των εξισώσεων (3.1.1).

3.2 Η συνθήκη inf-sup.

Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε τη γενική θεωρία που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Έστω $V := \{v \in V: (\operatorname{div} v, q)_{0,\Omega} = 0 \text{ για όλα τα } q \in L_2(\Omega)\}$.

Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος Stokes, απομένει να επαληθεύσουμε τη συνθήκη inf-sup.

Από Λήμμα 2.8.1 που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συνθήκη inf-sup μπορεί να εκφραστεί και με τελεστές B και B' .

$$V^\perp := \{u \in X: (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)_{0,\Omega} = 0 \text{ για όλα τα } v \in V\}$$

είναι H^1 -ορθογώνιο συμπλήρωμα του V .

Από την ανισότητα Friedrich $\|u\|_{1,\Omega} = \|\operatorname{grad} u\|_{0,\Omega} = a(u, u)^{1/2}$ είναι νόρμα στον X . Έτσι η διγραμμική μορφή a είναι H_0^1 -ελλειπτική. Επομένως δεν είναι ελλειπτική μόνο σε έναν υπόχωρο V , αλλά σε όλο τον χώρο X . Για να διαβεβαιώσουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα της λύσης για το πρόβλημα Stokes απομένει να επαληθεύσουμε την συνθήκη Brezzi (βλ. Ορισμός 2.9.1 ii) σελ 59). Από τη γενίκευση του Λήμματος Céa η συνθήκη inf-sup μπορεί να εκφραστεί από τις ιδιότητες των τελεστών B και B' . Στην συγκεκριμένη περίπτωση για την εξίσωση Stokes με $b(v, p) = (\operatorname{div} v, q)_{0,\Omega} = - (v, \operatorname{grad} q)_{0,\Omega}$, οι συνθήκη θα πρέπει να γίνει κατανοητή ως ιδιότητες των τελεστών div και grad .

Στην συνέχεια παραθέτουμε δύο θεωρήματα που αναφέρονται στις ιδιότητες των τελεστών div και grad .

Θεώρημα 3.2.1 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 159]): : Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ να είναι φραγμένος συνεκτικός χώρος με Lipschitz συνεχές σύνορο. Τότε η απεικόνιση

$$\operatorname{div} : V^\perp \rightarrow L_{2,0}(\Omega)$$

$$v \rightarrow \operatorname{div} v$$

είναι ισομορφισμός. Επιπλέον για κάθε q στο $L_2(\Omega)$ με $\int_{\Omega} q dx = 0$ υπάρχει συνάρτηση $v \in V^{\perp} \subset H_0^1(\Omega)^n$ με $\operatorname{div} v = q$ και $\|v\|_{1,\Omega} \leq c \|q\|_{0,\Omega}$ (3.1.3)

όπου c σταθερά.

Θεώρημα 3.2.2 (βλ [5, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 160]): : Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ να είναι φραγμένος συνεκτικός χώρος με Lipschitz συνεχές σύνορο.

1) Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης

$$\operatorname{grad} : L_2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)^n$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $H^{-1}(\Omega)^n$.

2) Έστω $f \in H^{-1}(\Omega)^n$. Αν

$$\langle f, v \rangle = 0 \text{ για όλα τα } v \in V$$

Τότε υπάρχει μοναδικό q στο $L_{2,0}(\Omega)$ με $f = \operatorname{grad} q$.

3) Υπάρχει σταθερά $c=c(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\text{i) } \|q\|_{0,\Omega} \leq c(\|\operatorname{grad} q\|_{-1,\Omega} + \|q\|_{-1,\Omega}) \text{ για όλα τα } q \in L_2(\Omega)$$

$$\text{ii) } \|q\|_{0,\Omega} \leq c\|\operatorname{grad} q\|_{-1,\Omega} \text{ για όλα τα } q \in L_{2,0}(\Omega)$$

Παρατήρηση: Από τα δύο παραπάνω θεωρήματα 3.2.1, 3.2.2 προκύπτει η συνθήκη inf-sup για το πρόβλημα Stokes.

Απόδειξη:

Για q στο $L_{2,0}$ από την 3 ii) του Θεωρήματος 3.2.2 έχουμε

$$\|\operatorname{grad} q\|_{-1} \geq c^{-1} \|q\|_0$$

Από τον ορισμό της αρνητικής νόρμας, υπάρχει v στο $H_0^1(\Omega)^n$ με $\|v\|_1 = 1$

$$\text{και } (v, \operatorname{grad} q)_{0,\Omega} \geq \frac{1}{2} \|v\|_1 \|\operatorname{grad} q\|_{-1} \geq \frac{1}{2c} \|q\|_0.$$

Από την Παρατήρηση στην σελίδα 63 για την ταυτότητα Green

$$\frac{b(-v, q)}{\|v\|_1} = (v, \text{grad } q)_{0, \Omega} \geq \frac{1}{2c} \|q\|_0$$

Από την οποία προκύπτει η συνθήκη Brezzi. \square

Έτσι συνδυάζοντας τα παραπάνω αποδεικνύεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης για το πρόβλημα Stokes.

3.3 Αποτελέσματα σύγκλισης της προσεγγιστικής ταχύτητας και πίεσης.

Συμβολίζουμε με X_h^k τα C^0 τμηματικά πολυώνυμα βαθμού k μίας μη-εκυβλισμένης διαμέρισης πολυγωνικού χωρίου $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ με μέγιστη διάμετρο τριγώνου να είναι h .

Έστω

$$X_h = \{v \in X_h^k \times X_h^k : v = 0 \text{ στο } \partial\Omega\} \quad (3.3.1)$$

και M_h να είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του

$$M = \{q \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}$$

το οποίο ικανοποιεί

$$\inf_{q \in M_h} \|p - q\|_{L^2} \leq \|p - I_h p\|_{L^2} \leq Ch^s \|p\|_s, \forall p \in M \cap H^s(\Omega) \quad (3.3.2)$$

για όλα τα $0 \leq s \leq k$.

Λήμμα 3.3.1(βλ [3, Κεφάλαιο 12, Σελίδα 346]): Η συνθήκη (3.3.2) ισχύει για

$$M_h = \left\{ q \in X_h^{k-1} : \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\}$$

Θεώρημα 3.3.2 (βλ [3, Κεφάλαιο 12, Σελίδα 346]): Έστω X_h όπως ορίστηκε στην (3.3.1) και M_h να ικανοποιεί την (3.3.2). Έστω u και u_h να ικανοποιούν την σχέση από το λήμμα Scott, Burger και Strang. Υποθέτουμε ότι $k \geq 4$. Τότε για $0 \leq s \leq k$

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^s (\|u\|_{s+1} + \|p\|_s)$$

υπό την προϋπόθεση η λύση $(u, p) \in H^{s+1}(\Omega) \times H^s(\Omega)$.

Επίσης για την εκτίμηση

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C'h^{s+1}(\|u\|_{s+1} + \|p\|_s)$$

για (u,p) στο $H^{s+1} \times H$.

Θεώρημα 3.3.3 (βλ [3, Κεφάλαιο 12, Σελίδα 361]): Η λύση του προβλήματος (3.3.1) ικανοποιεί

$$\|p - p_h\|_0 \leq Ch(\|u\|_2 + \|p\|_1).$$

3.4 Πεπερασμένα στοιχεία για το πρόβλημα Stokes

Το στοιχείο Taylor-Hood.

Το στοιχείο Taylor-Hood είναι ένα τριγωνικό στοιχείο που χρησιμοποιείται συχνά όπου το πολυώνυμο της ταχύτητας είναι μεγαλύτερου βαθμού από το αυτό της πίεσης. Η πίεση θεωρείται ότι είναι συνεχής.

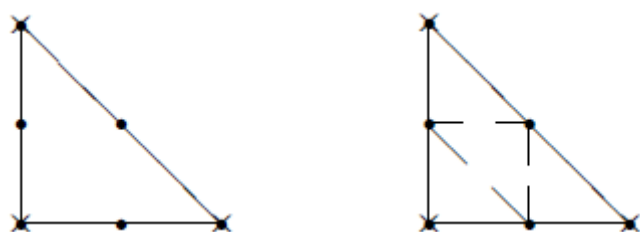
$$X_h := (M_{0,0}^2)^d = \{v_h \in C(\bar{\Omega})^d \cap H_0^1(\Omega)^d : v_h|_T \in P_2 \text{ για } T \in T_h\}$$

$$M_h := M_0^1 \cap L_{2,0} = \{q_h \in C(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega) : q_h|_T \in P_1 \text{ για } T \in T_h\}$$

Ένα άλλο ευσταθές στοιχείο μπορεί να προκύψει από μία απλή τροποποίηση. Για τις ταχύτητες χρησιμοποιούμε τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις και διαιρώντας το υπάρχων τρίγωνο σε 4 μικρότερα τρίγωνα:

$$X_h := M_{0,0}^2(T_{h/2})^2 = \{v_h \in C(\bar{\Omega})^2 \cap H_0^1(\Omega)^2 : v_h|_T \in P_2 \text{ για } T \in T_{h/2}\}$$

$$M_h := M_0^1 \cap L_{2,0} = \{q_h \in C(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega) : q_h|_T \in P_1 \text{ για } T \in T_h\}$$



12. Το στοιχείο Taylor-Hood (αριστερά) και μία παραλλαγή του (δεξιά). Όπου με ● συμβολίζεται η ταχύτητα u και με × η πίεση p πάνω στο τρίγωνο.

Αν $u \in H^2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2$ έχουμε τη θεωρητική εκτίμηση σφάλματος.

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch(\|u\|_2 + \|p\|_1)$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C'h^2(\|u\|_2 + \|p\|_1)$$

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch\|p\|_1.$$

Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε πως η τάξη ακριβείας είναι τουλάχιστον ένα για τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_0$ για την ταχύτητα και την πίεση αντίστοιχα. Ενώ για την νόρμα $\|\cdot\|_0$ της ταχύτητας, η τάξη ακριβείας είναι τουλάχιστον δύο.

Το στοιχείο MINI.

Το μειονέκτημα του στοιχείου Taylor-Hood είναι ότι οι κομβικές τιμές της ταχύτητας και της πίεσης προκύπτουν από διαφορετικές τριγωνοποιήσεις.

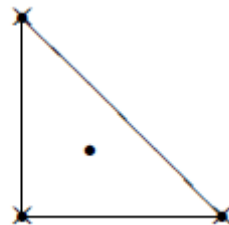
Η κύρια ιδέα του στοιχείου MINI είναι να συμπεριλάβουμε μία συνάρτηση "φούσκα" στο χώρο X_h για τις ταχύτητες. Έστω λ_1, λ_2 και λ_3 να είναι οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες ενός τριγώνου (π.χ. x_1, x_2 και $(1-x_1-x_2)$ για το μοναδιαίο τρίγωνο). Τότε

$$b(x) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

μηδενίζεται στις πλευρές του τριγώνου. Η προσθήκη μιας τέτοιας συνάρτησης φούσκας δεν επηρεάζει τη συνέχεια των στοιχείων:

$$X_h := [M_{0,0}^1 \oplus B_3]^2, \quad M_h := M_0^1 \cap L_{2,0}(\Omega)$$

$$B_3 := \{ v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in \text{span}[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] \text{ για } T \in T_h \}$$



13. Το στοιχείο MINI, η ταχύτητα u υπολογίζεται στους κόμβους (•) και η πίεση στα σημεία (x).

Θεώρημα (βλ [1, Κεφάλαιο 3, Σελίδα 169]): Θεωρούμε Ω είναι κυρτό ή έχει λείο σύνορο. Τότε το στοιχείο MINI ικανοποιεί την συνθήκη inf-sup.

Το στοιχείο Raviart-Thomas.

Τα στοιχεία Raviart-Thomas είναι ιδανικά για προβλήματα σημείου σέλλας. Έστω $k \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, και υποθέτουμε T_h να είναι τριγωνοποίηση κανονικού σχήματος (shape regular) και

$$X_h := RT_k := \left\{ \tau \in L_2(\Omega)^2 : \tau|_T = \begin{pmatrix} a_T \\ b_T \end{pmatrix} + c_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \in P_k \text{ για } T \in T_h \text{ τ.η συνεχής στο εσωτερικό των συνόρων του στοιχείου} \right\}$$

$$M_h := M^k(T_h) = \{v \in L_2(\Omega) : v|_T \in P_k \text{ για } T \in T_h\}.$$

3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα για τις εξισώσεις Navier-Stokes

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις εξισώσεις N-S καθώς και την τάξη σύγκλισης για το σφάλμα της ταχύτητας και της πίεσης για τις νόρμες H^0 , H^1 και H^0 αντίστοιχα. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε το FreeFem το οποίο είναι ένα ιδίωμα της γλώσσας προγραμματισμού C++. Έτσι διαμορφώσαμε το διακριτό πρόβλημα των εξισώσεων N-S σε μορφή κώδικα και με τη μέθοδο Galerkin που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα καταφέρνουμε να έχουμε μια προσέγγιση της ταχύτητας και της πίεσης. Πρώτα θα παρουσιάσουμε τα βήματα που ακολουθήσαμε ώστε να μπορέσουμε να εξάγουμε τα αποτελέσματα για τα σφάλματα και στην συνέχεια να παρουσιάσουμε γραφήματα με την τάξη σύγκλισης για κάθε πεπερασμένο στοιχείο που χρησιμοποιήσαμε. Αρχικά αφού ξέρουμε τις ακριβείς λύσεις του προβλήματος (3.1.1 α) για την ταχύτητα και την πίεση, που ικανοποιούν τον περιορισμό (3.1.1 β) και (3.1.1 γ), βρίσκουμε αναλυτικά την δύναμη $\mathbf{F}=(F_x, F_y)$.

$$-\Delta \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{F} \Leftrightarrow -\Delta(u_1, u_2) - \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) = (F_x, F_y) \Leftrightarrow$$

$$-(\Delta u_1, \Delta u_2) - \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) = (F_x, F_y).$$

Άρα έχουμε

$$F_x = -\Delta u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} \text{ και } F_y = -\Delta u_2 - \frac{\partial p}{\partial y}$$

Με αυτόν τον τρόπο καταφέραμε και έχουμε τις συνιστώσες της δύναμης \mathbf{F} . Αυτές τις συνιστώσες θα εισάγουμε μέσα στο πρόγραμμα έτσι ώστε να υπολογιστούν οι προσεγγιστικές συναρτήσεις ταχύτητας u_h και πίεσης p_h . Τέλος αφού έχουμε τις ακριβείς και τις προσεγγιστικές τιμές για τη ταχύτητα και την πίεση μπορούμε να βρούμε τα αντίστοιχα σφάλματα. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήσαμε, ο κώδικας που κατασκευάσαμε αλλά και γραφήματα με τα αποτελέσματα για την τάξη σύγκλισης.

Παράδειγμα 1.

Σε αυτό το παράδειγμα έγινε χρήση των στοιχείων Taylor-Hood (P2/P1), Mini Element (P1b/P1) και Mini Element (P2b/P2) πάνω στο $\Omega=[0,1] \times [0,1]$. Οι ακριβείς συναρτήσεις για την ταχύτητα και την πίεση είναι οι ακόλουθες:

$$u_x(x, y) = x^2(1-x)^2 2y(1-y)(2y-1).$$

$$u_y(x, y) = y^2(1-y)^2 2x(1-x)(1-2x).$$

$$p(x, y) = x(1-x)(1-y) - \frac{1}{12}.$$

$$F_x(x, y) = -4y(1-y)(2y-1)[(1-2x)^2 - 2x(1-x)] \\ - 12x^2(1-x)^2(1-2y) + (1-2x)(1-y).$$

$$F_y(x, y) = -4x(1-x)(2x-1)[(1-2y)^2 - 2y(1-y)] \\ - 12y^2(1-y)^2(2x-1) - x(1-x).$$

Οι u_1, u_2 ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη: $u_1=0, u_2=0$ στο $\partial\Omega$ καθώς και την συνθήκη $\text{div}\mathbf{u}=0$ στο Ω . Λύνουμε τις εξισώσεις για κάθε διαμέριση $h=1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32$ και σε ορισμένα μέχρι $1/64$. Ο κώδικας που κατασκευάσαμε παρουσιάζεται παρακάτω:

```

1 real [int] errorH1(7);
2 real [int] errorH0(7);
3 real [int] errorP(7);
4 real [int] h(7);
5 real epsilon=1.0e-6;
6
7
8 func u1=x^2*(1.0-x)*(1.0-x)*2.0*y*(1.0-y)*(2.0*y-1);
9 func u2=y^2*(1.0-y)*(1.0-y)*2.0*x*(1.0-x)*(1-2.0*x);
10 func p=x*(1.0-x)*(1.0-y)-1.0/12.0;
11
12
13 func fx=-4.0*y*(1.0-y)*(2.0*y-1)*((1.0-2.0*x)^2-2.0*x*(1.0-x))-12.0*x^2*(1.0-x)^2*(1.0-2.0*y)+(1.0-2.0*x)*(1.0-y);
14 func fy=-4.0*x*(1.0-x)*(1.0-2.0*x)*((1.0-2.0*y)^2-2.0*y*(1.0-y))-12.0*y^2*(1.0-y)^2*(2.0*x-1.0)-x*(1.0-x);
15
16
17 int n=1;
18
19 for(int i=0; i<7; i++){
20
21
22 mesh Th = square(n,n);
23 plot(Th,wait=true);
24
25 fespace Vh(Th, P2);
26 Vh uh1,uh2;
27 Vh w1, w2;
28
29 fespace Xh(Th, P1);
30 Xh ph, qh;
31

```

Στις γραμμές 8 έως 14 ορίζονται οι συναρτήσεις της ταχύτητας, της πίεσης και της δύναμης F.

```

37 problem Stokes(uh1,uh2,ph,w1,w2,qh, solver=CG)
38 =int2d(Th) (
39   dx(uh1)*dx(w1)
40 +dy(uh1)*dy(w1)
41 +dx(uh2)*dx(w2)
42 +dy(uh2)*dy(w2))
43 -int2d(Th) (ph*(dx(w1)+dy(w2)))
44 -int2d(Th) (qh*(dx(uh1)+dy(uh2)))
45 +int2d(Th) (epsilon*ph*qh)
46
47 +int2d(Th) (
48   -fx*w1-fy*w2
49 )
50
51 +on(1,2,3,4, uh1=u1,uh2=u2);
52
53
54 Stokes;
55
56
57 plot([uh1,uh2],ph,wait=true);
58
59 errorH0[i]=sqrt(int2d(Th) ((u1-uh1)^2+(u2-uh2)^2));
60 errorH1[i]=sqrt(int2d(Th) ((u1-uh1)*(u1-uh1)+(u2-uh2)*(u2-uh2))
61 +int2d(Th) ((dx(uh1)-sol1x)*(dx(uh1)-sol1x)+(dy(uh2)-sol2y)*(dy(uh2)-sol2y)));
62 errorP[i]=sqrt(int2d(Th) ((ph-p)*(ph-p)));
63

```

Στις γραμμές 37 έως 45 ορίζουμε το μεταβολικό πρόβλημα και στη γραμμή 54 λύνουμε το πρόβλημα.

Σημείωση: Επειδή θέλουμε μοναδική πίεση εισάγουμε έναν επιπλέον περιορισμό $\int p dx = 0$ ο οποίος βρίσκεται στη γραμμή 45.

Στην συνέχεια στις γραμμές 58 έως 60 υπολογίζουμε τα σφάλματα της ταχύτητας με τις H^0 , H^1 νόρμες και της πίεσης με την H^0 νόρμα.

```

68 for(int i=0; i<5; i++){
69 cout<<"error for u with H0-norm = "<<errorH0[i]<<endl;
70 }
71 cout<<"-----"<<endl;
72 for(int i=0; i<6; i++){
73 cout<<"error for u with H1-norm = "<<errorH1[i]<<endl;
74 }
75 cout<<"-----"<<endl;
76 for(int i=0; i<6; i++){
77 cout<<"error for p with H0-norm = "<<errorP[i]<<endl;
78 }
79 cout<<"-----"<<endl;
80 for(int i=1; i<6; i++){
81
82 cout<<"error order for u with H0-norm = "<<log(errorH0[i]/errorH0[i+1])/log(2.)<<endl;
83 cout<<"error order for u with H1-norm = "<<log(errorH1[i]/errorH1[i+1])/log(2.)<<endl;
84 cout<<"error order for p with H0-norm = "<<log(errorP[i]/errorP[i+1])/log(2.)<<endl;
85 cout<<"-----"<<endl;
86 }

```

Τέλος από τις γραμμές 68 έως 85 υπολογίζεται και εμφανίζεται με ανάλογο μήνυμα στην οθόνη η τάξη σύγκλισης για τις αντίστοιχες νόρμες. Στους παρακάτω πίνακες βλέπουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα όσον αφορά τη τάξη σύγκλισης των σφαλμάτων.

Taylor-Hood P2/P1		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
2.72237	1.57E+00	1.84162
3.0205	1.87419	2.24924
3.02311	1.96037	2.05485
3.00407	1.98843	2.00752
2.96145	1.99684	2.00089

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η τάξη του σφάλματος της ταχύτητας με την H^0 νόρμα συγκλίνει στο 3, ενώ για τη νόρμα H^1 συγκλίνει στο 2. Η πίεση ωστόσο με τη νόρμα H^0 συγκλίνει στον αριθμό 2. Την ίδια διαδικασία ακολουθήσαμε και για το στοιχείο Mini Element. Με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για την τάξη σύγκλισης των σφαλμάτων.

Mini P1b/P1		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
1.15264	5.87E-01	0.201113
1.75051	0.841673	1.19302
1.99053	0.984971	1.564
2.01417	1.00974	1.56537
2.01063	1.00857	1.52667

Εδώ παρατηρούμε ότι η τάξη σύγκλισης του σφάλματος της ταχύτητας συγκλίνει στο 2 για τη νόρμα H^0 , ενώ για τη νόρμα H^1 συγκλίνει στο 1. Η τάξη του σφάλματος της πίεσης από το γράφημα βλέπουμε ότι συγκλίνει στο 1.5. Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες με τα αριθμητικά αποτελέσματα του στοιχείου Mini με συναρτήσεις P2b (P2 bubble functions) για την ταχύτητα και P2 για την πίεση.

Mini P2b/P2		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
2.88063	1.57E+00	1.41708
2.94491	1.74768	1.64098
2.93645	1.83308	1.69108
2.96055	1.91979	1.83249

Παράδειγμα 2.

Έστω οι ακριβείς λύσεις για την ταχύτητα και την πίεση να είναι οι ακόλουθες:

$$u_x = \sin(2\pi y) (1 - \cos(2\pi x)).$$

$$u_y = \sin(2\pi x) (1 - \cos(2\pi y) - 1).$$

$$p = 2\pi(\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x)).$$

και οι συνιστώσες της δύναμης F

$$F_x = -4\pi^2 \sin(2\pi y)(2\cos(2\pi x) - 1) + 4\pi^2 \sin(2\pi x).$$

$$F_y = 4\pi^2 \sin(2\pi x)(2\cos(2\pi y) - 1) - 4\pi^2 \sin(2\pi y).$$

Όπως και πριν, έτσι και τώρα παρουσιάζουμε την τάξη σύγκλισης για τα στοιχεία Taylor-Hood P2/P1, Mini element P1b/P1, αλλά και για το στοιχείο Taylor-Hood P3/P2.

Taylor-Hood P2/P1		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
2.50652	1.63E+00	0.733641
3.10751	1.98385	2.31415
2.99959	1.98395	2.08204
2.99585	1.99448	2.02033
3	1.99847	2.00503

Παρατηρούμε ότι η τάξη σύγκλισης του σφάλματος της ταχύτητας με την H^0 νόρμα είναι 3, ενώ για τη νόρμα H^1 συγκλίνει στο 2. Η τάξη του σφάλματος της πίεσης από το γράφημα βλέπουμε και εδώ ότι συγκλίνει στο 2.

Taylor-Hood P3/P2		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
3.03614	2.83E+00	3.01951
3.98312	2.84717	2.74853
4.02853	2.94314	2.99717
3.88776	2.98361	2.99717

Mini P1b/P1		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
1.26232	6.39E-01	-2.23764
1.78012	0.857173	1.602
1.96837	0.972542	1.65892
1.99888	0.99859	1.58206
2.003	1.00218	1.52891

Παράδειγμα 3.

Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε μη μηδενική συνοριακή συνθήκη για την ταχύτητα, σε ένα τμήμα του συνόρου (lid-driven cavity).

$$u_x(x, y) = (x^4 - 2x^3 + x)(2y^3 - y).$$

$$u_y(x, y) = -(2x^3 - 3x^2 + x)(y^4 - y^2).$$

$$p(x, y) = (4x^3 - 6x^2 + 2x) + 0.4(6x^5 - 15x^4 + 10x^3)y - 0.1.$$

$$F_x(x, y) = 0$$

$$F_y(x, y) = (12x - 6)(y^4 - y^2) + (8x^3 - 12x^2 + 4x)(6y^2 - 1) + 0.4(6x^5 - 15x^4 + 10x^3).$$

Με συνοριακή συνθήκη

$$u_x(x, 1) = (x^4 - 2x^3 + x^2).$$

$$u_y(x, 1) = 0.$$

Τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για την τάξη του σφάλματος φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.

Taylor-Hood P2/P1		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
2.47019	1.69E+00	2.54451
3.08407	1.94944	2.47083
3.05395	1.99963	2.29897
3.0178	2.00249	2.12142
2.96367	2.00103	2.03735

Mini P1b/P1		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
1.46152	8.08E-01	0.797895
1.89887	1.09326	1.46784
2.01625	1.10956	1.73093
2.03285	1.05874	1.77361
2.02083	1.02677	1.74957

Taylor-Hood P3/P2		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
3.62399	2.85E+00	3.55747
3.89042	2.88147	3.08725
3.90239	2.88922	2.97268
3.31306	2.92563	2.97225

Mini P2b/P2		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
2.50309	1.74E+00	2.61533
2.82088	1.87174	1.95297
2.87428	1.96481	1.79116
2.93494	2.02041	1.87357

Παράδειγμα 4.

Επίσης ένα επιπλέον παράδειγμα στο οποίο έχουμε μη μηδενική συνοριακή συνθήκη για την ταχύτητα, σε δύο τμήματα του συνόρου (corner flow).

$$u_x(x, y) = -\sin(xy) x.$$

$$u_y(x, y) = \sin(xy) y.$$

$$p(x, y) = \cos(xy) - 0.9460830703671845.$$

$$F_x(x, y) = -\sin(xy) x(x^2 + y^2) + 2 \cos(xy) y - \sin(xy) y.$$

$$F_y(x, y) = \sin(xy) y(x^2 + y^2) - 2 \cos(xy) x - \sin(xy) x.$$

Με συνοριακές συνθήκες

$$u_x(x, 1) = -x \sin(x), \quad u_y(x, 1) = \sin(x).$$

$$u_x(1, y) = -\sin(y), \quad u_y(1, y) = y \sin(y).$$

και τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για την τάξη σύγκλισης.

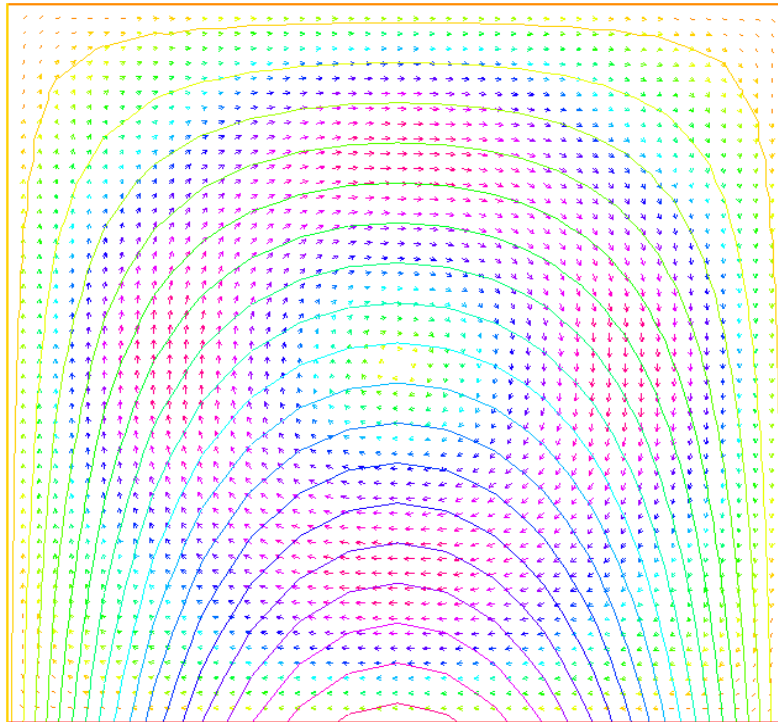
Taylor-Hood P2/P1		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
2.93044	1.91E+00	2.41608
2.97257	1.9713	2.06276
2.98804	1.99177	2.00801
2.99531	1.99778	2.00105
2.94739	1.99942	1.99986

Mini P1b/P1		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
2.03932	1.24E+00	1.7321
2.08513	1.11839	1.87034
2.0555	1.04637	1.81943
2.03113	1.01885	1.74727
2.01699	1.00824	1.67017

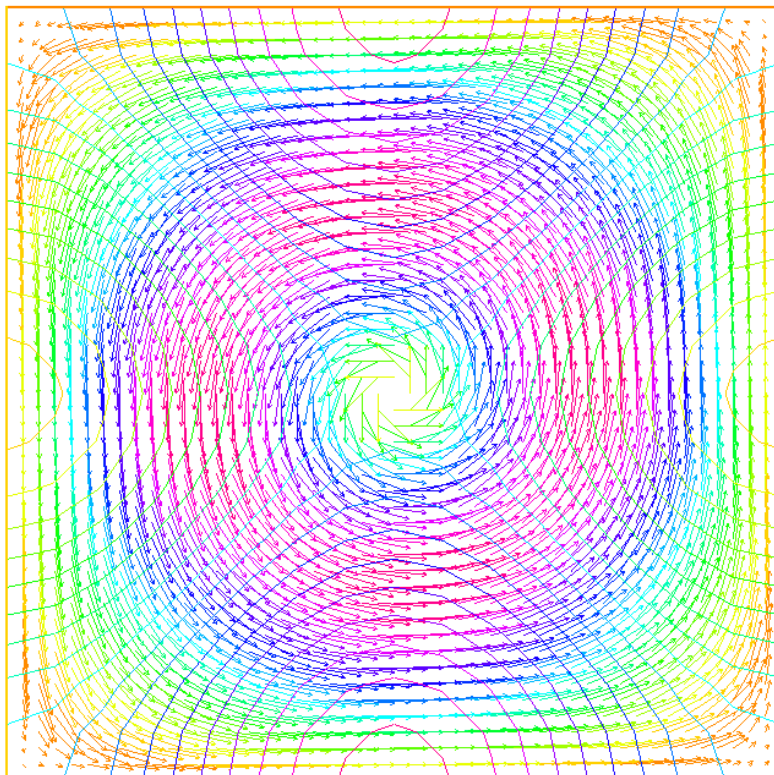
Mini P2b/P2		
H0 norm u	H1 norm u	H0 norm p
2.68703	1.78E+00	1.44516
2.84306	1.93429	1.61004
2.92889	1.99859	1.82985
2.9741	2.00911	1.93012

Στην συνέχεια παραθέτουμε εικόνες των παραπάνω παραδειγμάτων με τα αποτελέσματα για την πίεση και το πεδίο ταχύτητας.

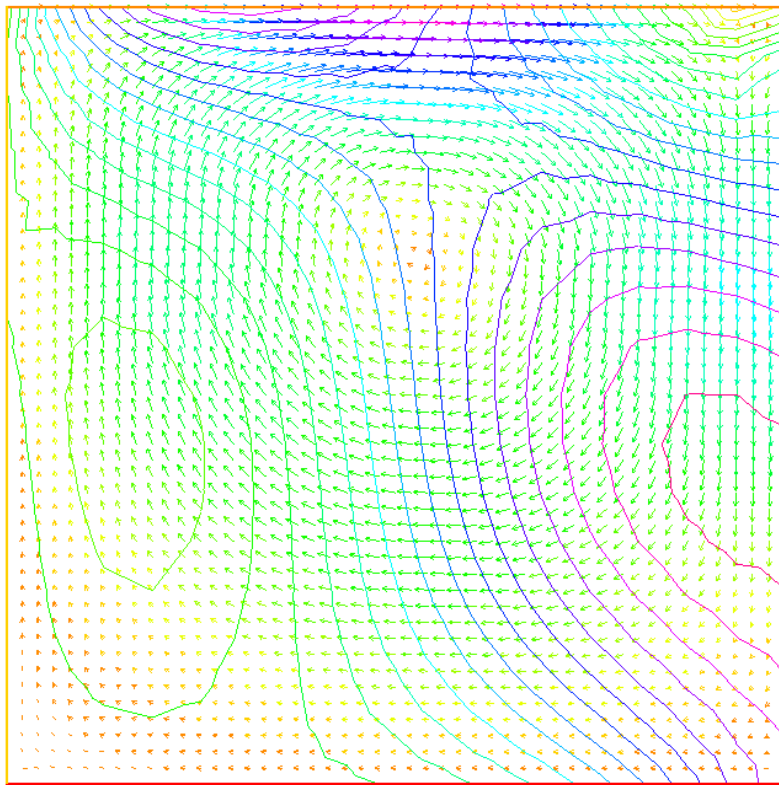
Παράδειγμα 1.



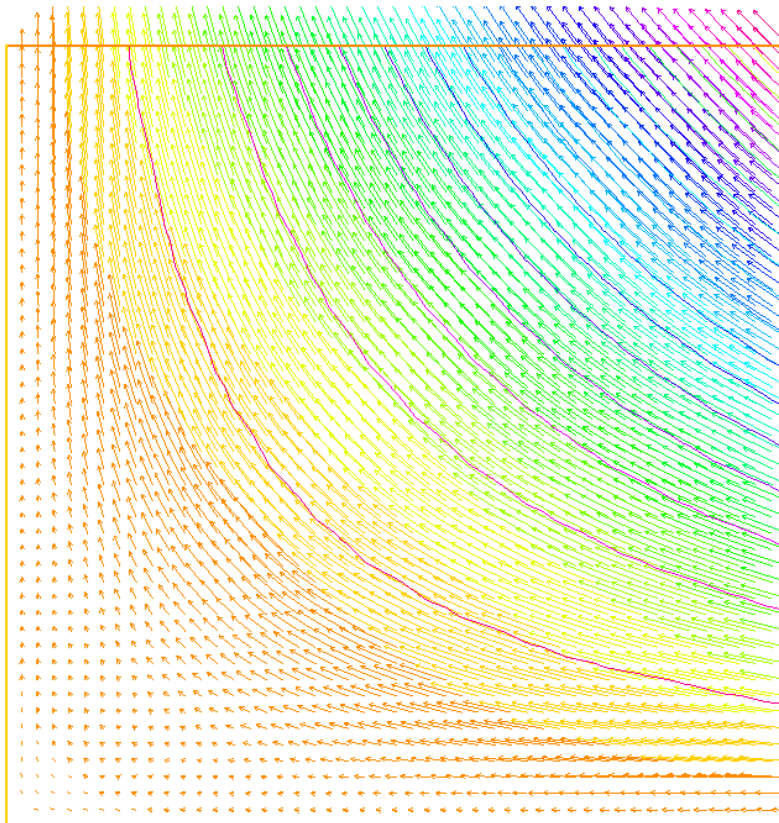
Παράδειγμα 2.



Παράδειγμα 3 (lid-driven cavity).



Παράδειγμα 4 (corner flow).



Βιβλιογραφία

- [1] Andrea Cioncolini. Article: Daniele Boffi, The MINI mixed finite element for the Stokes problem: An experimental investigation. (2019).
- [2] Atsushi Suzuki. Introduction to finite element computation by FreeFem++- towards numerical simulation of fluid flow problems. (2015).
- [3] Susanne C. Brenner & L. Ridgway Scott. The mathematical Theory of Finite Element Methods. Third Edition. (2000).
- [4] Daniele Boffi, Franco Brezzi, and Michel Fortin. Finite elements for the Stokes problem. (2013).
- [5] Dietrich Braess, Finite-elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics. Third Edition. (2017).
- [6] Frederic Hecht. FreeFEM Documentation. (2020).
- [7] Haim Brezis. Συναρτησιακή Ανάλυση, θεωρία και εφαρμογές. (1997).
- [8] Michele Benzi. Introduction to Saddle Point Problems. Department of Mathematics and Computer Science. (2012).
- [9] Ακριβης Δ. Γεώργιος. Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων (πανεπιστημιακές παραδόσεις). (2005).
- [10] Λιαντράκη Σοφία. Πτυχιακή εργασία: Μελέτη Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων σε Χώρους Sobolev. (2014).
- [11] Μπακόπουλος Κ. Αλέξανδρος & Χρυσοβέργης Ίων. Αριθμητικές Μέθοδοι ΜΔΕ. (2003).
- [12] Σπύρος Αργυρός. Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης (Τρίτη έκδοση). (2011).
- [13] Σπύρος Αργυρός. Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης (Δεύτερη έκδοση). (2004).
- [14] Φελλούρης Ανάργυρος. Αναλυτική Γεωμετρία & Γραμμική Άλγεβρα (Δεύτερη έκδοση). (2009).