



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

Σεισμική συμπεριφορά έργων τέχνης που  
εδράζονται σε άκαμπτη βάση

Βλάχος Α. Νέστωρ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΜΙΧΑΗΛ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2020

# Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την παρούσα διπλωματική εργασία αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους οι οποίοι συνέβαλαν σε αυτή την προσπάθεια.

Πρώτον τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Μιχάλη Φραγκιαδάκη, διότι με δέχτηκε και υπήρξε πάντοτε πρόθυμος να μου αφιερώσει λίγο χρόνο όποτε το χρειαζόμουν παρά το βεβαρημένο πρόγραμμά του.

Δεύτερον τον υποψήφιο διδάκτορα, Σπύρο Διαμαντόπουλο, ο οποίος υπήρξε πραγματικός φίλος, πρόθυμος όποτε τον είχα ανάγκη, και χωρίς τη συνδρομή του οποίου η πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη.

Τέλος την οικογένειά μου που με στήριξε όποτε παρουσιάστηκαν δυσκολίες και μου δείχνουν την ανιδιοτελή αγάπη τους κάθε μέρα και με κάθε τρόπο.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>ΛΙΚΝΙΣΜΟΣ ΑΚΑΜΠΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ</b>	<b>1</b>
1.1	Λικνισμός λόγω αρχικής εκτροπής και χωρίς εξωτερική διέγερση . . . . .	1
1.2	Ανατροπή λόγω συνεχούς διέγερσης . . . . .	5
1.3	Ανατροπή λόγω ημιτονοειδούς διέγερσης . . . . .	7
1.4	Λικνισμός λόγω σεισμικής διέγερσης . . . . .	8
<b>2</b>	<b>ΛΙΚΝΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΑΚΑΜΠΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ</b>	<b>10</b>
2.1	Συμμετρικό σώμα εδραζόμενο σε ορθογώνια βάση. . . . .	10
2.2	Ασύμμετρο σώμα εδραζόμενο σε ορθογώνια βάση. . . . .	14
2.3	Απώλειες ενέργειας λόγω κρούσης. . . . .	17
	2.3.1 Συντελεστής απομείωσης για συμμετρικό άνω σώμα. . . . .	17
	2.3.2 Συντελεστής απομείωσης για ασύμμετρο άνω σώμα. . . . .	18
<b>3</b>	<b>ΛΙΚΝΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ-ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ</b>	<b>19</b>
3.1	Συμμετρικό προσομοίωμα . . . . .	20
	3.1.1 Απόκριση προσομοιώματος σε ημιτονοειδή διέγερση της βάσης έδρα- σής του . . . . .	20
	3.1.2 Απόκριση προσομοιώματος σε παλμό <i>Ricker</i> . . . . .	23
	3.1.3 Απόκριση προσομοιώματος σε σεισμό . . . . .	25
3.2	Προσομοίωμα συμμετρικής βάσης και ασύμμετρου άνω σώματος . . . . .	27
	3.2.1 Απόκριση προσομοιώματος σε ημιτονοειδή διέγερση της βάσης έδρα- σής του . . . . .	27
	3.2.2 Απόκριση προσομοιώματος σε σεισμό . . . . .	29
3.3	Συμμετρικό προσομοίωμα με σταθερούς συντελεστές απομείωσης . . . . .	30
	3.3.1 Συμμετρικό προσομοίωμα με συντελεστή απομείωσης άνω σώματος 0.8 . . . . .	31
	3.3.2 Συμμετρικό προσομοίωμα με συντελεστή απομείωσης άνω σώματος 0.85 . . . . .	34
	3.3.3 Συμμετρικό προσομοίωμα με συντελεστή απομείωσης άνω σώματος 0.90 . . . . .	37
3.4	Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων . . . . .	40

4	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	42
5	ΕΥΡΥΤΕΡΟ ΠΕΔΙΟ ΜΕΛΕΤΗΣ	43

# Κατάλογος Σχημάτων

0.1	Ελεύθερα εδραζόμενα εκθέματα . . . . .	x
1.1	Συμμετρικό προσομοίωμα. . . . .	1
1.2	Συμμετρικό προσομοίωμα. . . . .	8
2.1	Γεωμετρικά χαρακτηριστικά. . . . .	11
2.2	Στιγμιότυπα ( <i>modes</i> ) λικνισμού. . . . .	11
2.3	Γεωμετρικά χαρακτηριστικά. . . . .	14
2.4	Στιγμιότυπα ( <i>modes</i> ) λικνισμού. . . . .	14
3.1	Ελεύθερα εδραζόμενη προτομή πάνω σε ορθογωνική βάση, μοντέλο πεπερα- σμένων στοιχείων. . . . .	19
3.2	Συμμετρικό προσομοίωμα. . . . .	20
3.3	Ημιτονοειδής παλμός 0.40g . . . . .	21
3.4	Ημιτονοειδής παλμός 0.45g . . . . .	21
3.5	Απόκριση σε ημιτονοειδή παλμό. . . . .	21
3.6	Ανατροπή του άνω σώματος. . . . .	21
3.7	Απόκριση σε ημιτονοειδή παλμό με το άνω σώμα εδραζόμενο στο έδαφος. . . . .	22
3.8	<i>Ricker</i> παλμός 0.40g . . . . .	23
3.9	<i>Ricker</i> παλμός 0.45g . . . . .	23
3.10	Απόκριση σε παλμό <i>Ricker</i> . . . . .	23
3.11	Ανατροπή του άνω σώματος. . . . .	23
3.12	Απόκριση σε παλμό <i>Ricker</i> με το άνω σώμα εδραζόμενο στο έδαφος. . . . .	24
3.13	Καταγραφή <i>Hollister South and Pine</i> . . . . .	25
3.14	Καταγραφή <i>W A H O</i> . . . . .	25
3.15	Ευστάθεια συστήματος. . . . .	26
3.16	Ανατροπή συστήματος. . . . .	26
3.17	Απόκριση του άνω σώματος εδραζόμενου στο έδαφος. . . . .	26
3.18	Ημιτονοειδής παλμός 0.40g . . . . .	28
3.19	Ημιτονοειδής παλμός 0.45g . . . . .	28
3.20	Ανατροπή του άνω σώματος. . . . .	28
3.21	Ανατροπή του άνω σώματος. . . . .	28
3.22	Καταγραφή <i>Hollister South and Pine</i> . . . . .	29

3.23	Καταγραφή <i>WAHO</i> .	29
3.24	Ευστάθεια συστήματος.	30
3.25	Ευστάθεια συστήματος.	30
3.26	Ημιτονοειδής παλμός 0.40g	31
3.27	Ημιτονοειδής παλμός 0.45g	31
3.28	Ευστάθεια συστήματος.	31
3.29	Ανατροπή του άνω σώματος.	31
3.30	<i>Ricker</i> παλμός 0.40g	32
3.31	<i>Ricker</i> παλμός 0.45g	32
3.32	Απόκριση σε παλμό <i>Ricker</i> .	32
3.33	Ανατροπή του άνω σώματος.	32
3.34	Καταγραφή <i>Hollister South and Pine</i> .	33
3.35	Καταγραφή <i>WAHO</i> .	33
3.36	Ευστάθεια συστήματος.	33
3.37	Ανατροπή συστήματος.	33
3.38	Ημιτονοειδής παλμός 0.40g	34
3.39	Ημιτονοειδής παλμός 0.45g	34
3.40	Ευστάθεια συστήματος.	34
3.41	Ανατροπή του άνω σώματος.	34
3.42	<i>Ricker</i> παλμός 0.40g	35
3.43	<i>Ricker</i> παλμός 0.45g	35
3.44	Απόκριση σε παλμό <i>Ricker</i> .	35
3.45	Ανατροπή του άνω σώματος.	35
3.46	Καταγραφή <i>Hollister South and Pine</i> .	36
3.47	Καταγραφή <i>WAHO</i> .	36
3.48	Ευστάθεια συστήματος.	36
3.49	Ανατροπή συστήματος.	36
3.50	Ημιτονοειδής παλμός 0.40g	37
3.51	Ημιτονοειδής παλμός 0.45g	37
3.52	Ανατροπή του άνω σώματος.	37
3.53	Ανατροπή του άνω σώματος.	37
3.54	<i>Ricker</i> παλμός 0.40g	38
3.55	<i>Ricker</i> παλμός 0.45g	38
3.56	Ανατροπή του άνω σώματος.	38
3.57	Ανατροπή του άνω σώματος.	38
3.58	Καταγραφή <i>Hollister South and Pine</i> .	39
3.59	Καταγραφή <i>WAHO</i> .	39
3.60	Ανατροπή συστήματος.	39
3.61	Ανατροπή συστήματος.	39
3.62	Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων	40

3.63	Ευστάθεια συστήματος. . . . .	40
3.64	Ανατροπή συστήματος. . . . .	40





# Abstract

This thesis investigates the dynamic response of museum artefacts which are freestanding on a solid pedestal. The artefacts examined, include primarily symmetrical and unsymmetrical statues, busts or sculptures. Pedestals are commonly adopted in order to bring up, on the eye-level, the artefacts. This results to a system of two-bodies that may rock or slide under a seismic excitation. Existing pedestals are usually made of marble, but, nowadays, there are pedestals made of steel allowing pedestal designs that differ from the classical rectangular shape and have different geometric properties. This leads to difficulties in the investigation of the dynamic response of the pedestal-artefact system. An additional difficulty that further complicates the problem is the irregular geometry. The paper assumes that there is no bond between the two bodies, hence there is no resistance from any adhesive material. The problem is studied as a two-block system as proposed by Psycharis (1990)[6]. Furthermore it is compared with a single-block problem, assuming that the pedestal is stocky enough and only the artefact will rock. This is the simplest case, usually adopted in practice, which allows to solve the problem using the equation of motion proposed by Housner (1963) [2] or using equivalent solutions that have been proposed in the literature (Diamantopoulos and Fragiadakis 2019) [4]. The paper, examines different variations and systems focusing on asymmetric artefacts. Simpler possible solutions are also discussed and compared; the investigation includes simple Finite Element models pertinent for studying the system of two rocking blocks. The purpose of the study is to provide quick solutions without the need of complicated equations in order to predict if a stacked system starts rocking, remains stable or overturns under a seismic ground motion record.

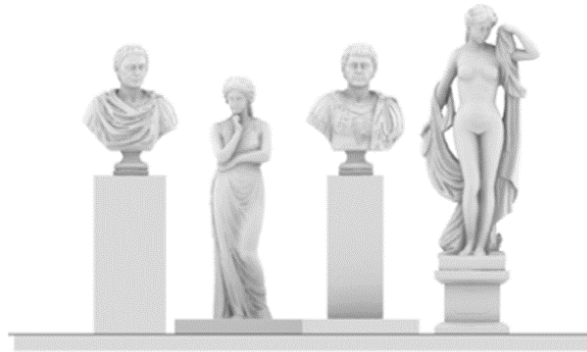
# Εκτενής εισαγωγή

Η εργασία αφορά στη δυναμική συμπεριφορά έργων τέχνης που εδράζονται ελεύθερα σε μια άκαμπτη, λικνιζόμενη βάση. Τέτοια εκθέματα είναι συνήθως αγάλματα, προτομές και γενικά έργα τα οποία τοποθετούνται σε μία βάση (βήμα) ώστε να βρεθούν στο επίπεδο των ματιών του μέσου επισκέπτη. Η απουσία συνδετικού υλικού μεταξύ της βάσης και του εκθέματος, οδηγεί σε ένα σύστημα δύο σωμάτων, το οποίο υπό σεισμική φόρτιση μπορεί να λικνιστεί, να ολισθήσει ή/και να ανατραπεί. Η κύρια δυσκολία στην εκτίμηση της δυναμικής συμπεριφοράς τέτοιων συστημάτων είναι η ασυμμετρία των εκθεμάτων καθώς και η σύνδεση των εκθεμάτων με την βάση τους. Διερευνάται η περίπτωση ενός συμμετρικού και ενός ασύμμετρου προσομοιώματος και συγκρίνεται η λύση με την περίπτωση στην οποία μόνο το έκθεμα υποβάλλεται σε λικνιστική κίνηση καθώς η βάση έχει μεγάλη ραδινότητα. Σε αυτή την απλή περίπτωση, το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα άκαμπτο σώμα με τη θεωρία που προτάθηκε από τον *Housner* (1963) [2] καθώς και από τους *Diamantopoulos and Fragiadakis* (2019) [4]. Το πρόβλημα των δύο σωμάτων επιλύθηκε από τον *Psycharis* (1990) [6] ο οποίος διατύπωσε τις εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος δυο σωμάτων υπό δυναμική φόρτιση και εξέτασε λεπτομερώς την απώλεια ενέργειας αυτών των συστημάτων. Στόχος της εργασίας είναι η σύγκριση προσομοιωμάτων για την δυναμική συμπεριφορά μουσειακών εκθεμάτων που συμπεριφέρονται ως ένα ή δύο άκαμπτα σώματα τα οποία μπορεί να είναι και ασύμμετρα. Επιπροσθέτως, εξετάζεται η δυνατότητα πρόβλεψης της συμπεριφοράς ενός τέτοιου συστήματος (λικνισμός, ανατροπή) χωρίς την ανάγκη για επίλυση μακροσκελών και περίπλοκων εξισώσεων κίνησης χρησιμοποιώντας απλά αλλά ακριβή προσομοιώματα.

Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο και οι εξισώσεις κίνησης για το λικνισμό ενός σώματος. Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής αποκατάστασης εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος.

Στο κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται η θεωρία λικνισμού συστήματος δύο άκαμπτων σωμάτων και παρουσιάζονται οι εξισώσεις κίνησης σε μητρική μορφή. Εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι συντελεστές αποκατάστασης επηρεάζονται από περισσότερες παραμέτρους, όπως η σχετική ταχύτητα των δύο σωμάτων.

Το κεφάλαιο 3 περιλαμβάνει όλες τις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν. Αρχικά εξετάζεται η απόκριση συμμετρικού προσομοιώματος του εκθέματος εδραζόμενου σε ορθογωνική



Σχήμα 0.1: Ελεύθερα εδραζόμενα εκθέματα

βάση. Οι εξωτερικές διεγέρσεις περιλαμβάνουν ημιτονοειδείς παλμούς, *Ricker* και σεισμούς. Οι συντελεστές αποκατάστασης στον κώδικα προγραμματισμού υπολογίζονται με βάση τις εκφράσεις που ανέπτυξε ο *Psycharis* (1990) [6]. Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση της συμπεριφοράς του συστήματος με την περίπτωση λικνισμού του άνω σώματος στο έδαφος. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται με τη διαφοροποίηση ότι το άνω σώμα είναι ασύμμετρο σύμφωνα με την πραγματική θέση του κέντρου μάζας του εκθέματος. Τέλος, πραγματοποιείται ανάλυση λαμβάνοντας σταθερές τιμές για τους συντελεστές αποκατάστασης με σκοπό τη διερεύνηση της επιρροής στην τελική απόκριση του συστήματος, καθώς και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.

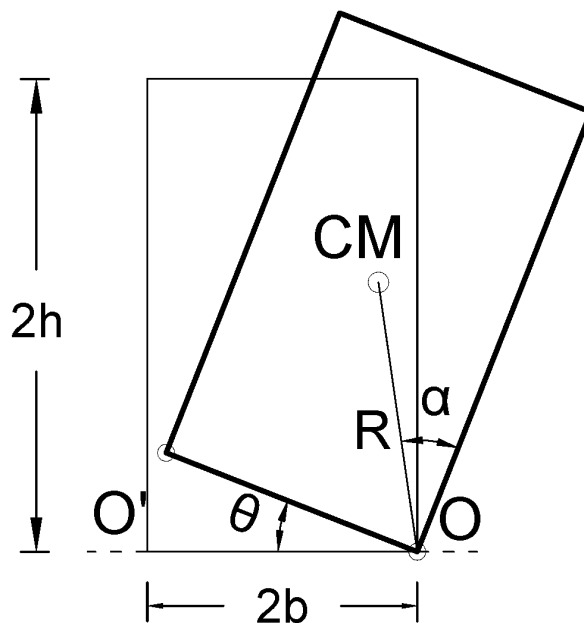
Στο κεφάλαιο 4 καταγράφονται τα συμπεράσματα που εξάχθηκαν από τις αναλύσεις. Συνοψίζονται οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης για το πρόβλημα του λικνισμού και κατά πόσο τα αποτελέσματα που προκύπτουν κρίνονται ικανοποιητικά.

Το κεφάλαιο 5 αναφέρεται στις δυνατότητες μελλοντικής έρευνας στο αντικείμενο δυναμικής συμπεριφοράς συστήματος σωμάτων και τους ορίζοντες που ανοίγονται στο πεδίο μελέτης.

# 1 ΛΙΚΝΙΣΜΟΣ ΑΚΑΜΠΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

## 1.1 Λικνισμός λόγω αρχικής εκτροπής και χωρίς εξωτερική διέγερση

Θεωρείται άκαμπτο σώμα πλάτους  $2b$  και ύψους  $2h$  εδραζόμενο σε οριζόντια βάση στο οποίο δίνεται αρχική απόκλιση από την κατακόρυφο κατά γωνία  $\theta$ , όπως φαίνεται στο Σχ. 1.1. Μόλις το σώμα αφηθεί ελεύθερο θα αρχίσει να λικνίζεται περί τους πόλους  $O$  και  $O'$ . Υποτίθεται ότι ο συντελεστής τριβής είναι αρκετά μεγάλος ώστε να μην επιτρέπεται η



Σχήμα 1.1: Συμμετρικό προσομοίωμα.

ολίσθηση. Καθώς το σώμα λικνίζεται ελεύθερο η μόνη δύναμη που του ασκείται είναι το βάρος του το οποίο τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας, δηλαδή στην αρχική του

θέση, ασκώντας ροπή ίση με  $M_{res} = W \sin(\alpha - \theta)R$ , όπου  $W$  είναι το βάρος του σώματος,  $R = \sqrt{b^2 + h^2}$  η ακτίνα ραδινότητας και  $\alpha$  η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα  $R$  με την κατακόρυφο όταν το σώμα βρίσκεται σε ηρεμία. Έτσι προκύπτει η εξίσωση κίνησης:

$$I_O \ddot{\theta} = -WR \sin(\alpha - \theta) \quad (1.1)$$

όπου  $I_O$  η ροπή αδράνειας του σώματος περί τον πόλο περιστροφής του.

Ισχύει ότι  $I_O = I_{O'} = I + m(\hat{y}^2 + \hat{x}^2) = I + mR^2$  όπου  $I = \frac{1}{12}m[(2b)^2 + (2h)^2] = \frac{1}{3}mR^2$  και άρα  $I_O = I_{O'} = \frac{4}{3}mR^2$

Είναι προφανές ότι η αρχική απόκλιση που δίνεται πρέπει να είναι μικρότερη της γωνίας  $\alpha$  έτσι ώστε το βάρος να δρα ως δύναμη επαναφοράς. Ακόμη όταν η γωνία  $\alpha$  είναι μικρότερη από  $20^\circ$  το ημίτονο στην Εξ. 1.1 μπορεί να προσεγγιστεί από τη γωνία και τελικά προκύπτει:

$$I_O \ddot{\theta} = -WR(\alpha - \theta) \quad (1.2)$$

Θέτοντας τη σταθερή ποσότητα  $\frac{WR}{I_O} = p^2$  η Εξ. 1.2 γίνεται:

$$\ddot{\theta} = -p^2(\alpha - \theta) \quad (1.3)$$

Η άνωθεν εξίσωση με αρχικές συνθήκες  $\theta = \theta_0$  και  $\dot{\theta} = 0$  που αντιπροσωπεύουν το λικνισμό λόγω αρχικής εκτροπής έχει λύση:

$$\theta = \alpha - (\alpha - \theta_0) \cosh pt \quad (1.4)$$

Η Εξ. 1.4 περιγράφει την κίνηση του σώματος καθώς επιστρέφει από την αρχική θέση εκτροπής στην κατακόρυφη θέση. Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στην κατακόρυφη θέση συμβαίνει κρούση με τη βάση και υποθέτοντας ότι αυτή είναι ανελαστική, δηλαδή δε συμβαίνει αναπήδηση, το φαινόμενο του λικνισμού συνεχίζει ομαλά περί τον πόλο  $O'$ , ενώ διατηρείται η στροφορμή του σώματος περί τον  $O'$ .

Στροφορμή ως προς  $O'$ :

$$H_{O'} = -\hat{y}m(u_{O'})_x + \hat{x}m(u_{O'})_y + I_{O'}\dot{\theta} \quad (1.5)$$

όπου  $m$  η μάζα,  $(u_{O'})_x$  και  $(u_{O'})_y$  οι συνιστώσες της ταχύτητας του σημείου  $O'$  και  $\hat{y}$ ,  $\hat{x}$  η κατακόρυφη και οριζόντια απόσταση αντίστοιχα του  $O'$  από το Κ.Β. του σώματος.

Η στροφορμή πριν την κρούση υπολογίζεται ως:

$$H_{O'}^1 = -\hat{y}m(u_{O'}^1)_x + \hat{x}m(u_{O'}^1)_y + I_{O'}\dot{\theta}_1 \quad (1.6)$$

όπου  $(u_{O'}^1)_x = 0$  και  $(u_{O'}^1)_y = -\dot{\theta}_1 2b$

και μετά την κρούση:

$$H_{O'}^2 = -\hat{y}m(u_{O'}^2)_x + \hat{x}m(u_{O'}^2)_y + I_{O'}\dot{\theta}_2 \quad (1.7)$$

όπου  $(u_{O'}^2)_x = 0$  και  $(u_{O'}^2)_y = 0$ .

Με βάση την αρχή διατήρησης της στροφορμής  $H_{O'}^1 = H_{O'}^2$ , και προκύπτει η σχέση

$$I_{O'}\dot{\theta}_1 - 2mRb\dot{\theta}_1\sin\alpha = I_{O'}\dot{\theta}_2 \quad (1.8)$$

λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $b = R\sin\alpha$ .

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την κρούση είναι ίσος με:

$r = \frac{\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}_2^2}{\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}_1^2} = \left(\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1}\right)^2$  και μέσω της Εξ. 1.8 προκύπτει:  $r = \left(1 - \frac{mR^2}{I_0}(1 - \cos 2\alpha)\right)^2$  έχοντας λάβει υπόψιν ότι  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ .

Αντικαθιστώντας την έκφραση της  $I_0$  ο λόγος  $r$  εκφράζεται ως:

$$r = \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right)^2.$$

Το κλάσμα κινητικής ενέργειας που χάνεται μετά την κρούση  $= 1 - r$ .

Ο λόγος αποκατάστασης, όπως ορίζεται στη Δυναμική, είναι ίσος με:  $e = \sqrt{r} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\alpha$ .

Συμπεραίνεται το αξιοσημείωτο ότι δηλαδή ο συντελεστής αποκατάστασης αποτελεί σταθερά και εξαρτάται μόνο από τη ραδινότητα του σώματος, ενώ όσο μεγαλύτερος ο συντελεστής αποκατάστασης τόσο μικρότερη η απώλεια ενέργειας μετά την κρούση.

Για σώματα με  $h \gg b$  ισχύει  $\tan\alpha = \frac{b}{h} \ll 1$  και  $\sin\alpha \approx \alpha$  και άρα  $r = \left(1 - \frac{3}{2}\alpha^2\right)^2$ ,  $e = 1 - \frac{3}{2}\alpha^2$ .

Ο συντελεστής αποκατάστασης κυμαίνεται από τη μονάδα για πολύ ραδινά σώματα έως μηδέν για  $b/h = \sqrt{2}$ . Μεγαλύτερες τιμές του λόγου  $b/h$  δίνουν αρνητικό  $e$ , το οποίο μεταφράζεται σε αλλαγή του προσήμου της ταχύτητας του σώματος μετά την κρούση με αποτέλεσμα την αναπήδηση περί τον πόλο περιστροφής πριν την κρούση.

Ορίζοντας την ανηγμένη απόκλιση από την κατακόρυφο ως προς τη ραδινότητα  $\phi = \theta/\alpha$ ,  $\phi_0 = \theta_0/\alpha$  και αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην Εξ. 1.4 προκύπτει:

$$\phi = 1 - (1 - \phi_0)\cosh pt \quad (1.9)$$

και με παραγωγή

$$\dot{\phi} = -(1 - \phi_0)p\sinh pt \quad (1.10)$$

Κατά τη νιοστή κρούση όπου  $\phi = 0$ ,  $t = t_n$

$$\cosh pt_n = \frac{1}{1 - \phi_{n-1}} \quad (1.11)$$

και από τη σχέση  $\cosh^2 pt_n - 1 = \sinh^2 pt_n$

$$\sinh^2 pt_n = \left(\frac{1}{1 - \phi_{n-1}}\right)^2 - 1 \quad (1.12)$$

Η Εξ. 1.10 μέσω της Εξ. 1.12 δίνει την ταχύτητα αμέσως πριν την κρούση:

$$\dot{\phi}_n = -p\sqrt{1 - (1 - \phi_{n-1})^2} \quad (1.13)$$

όπου  $\phi_n$  είναι το πλάτος λικνισμού μετά την κρούση.

Επομένως η ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με  $\dot{\phi}_{n+1} = \sqrt{r}\dot{\phi}_n$  όπου με αντικατάσταση της Εξ. 1.13 λαμβάνεται η εξίσωση:

$$-p\sqrt{1 - (1 - \phi_n)^2} = -p\sqrt{1 - (1 - \phi_{n-1})^2} \quad (1.14)$$

μέσω της οποίας εξάγεται η τελική σχέση

$$\phi_n = 1 - \sqrt{1 - r^n(1 - (1 - \phi_0)^2)} \quad (1.15)$$

Ο *Housner* [2] εξήγαγε το συμπέρασμα μέσω της τελευταίας σχέσης ότι κατά τον λικνισμό χωρίς εξωτερική διέγερση αρχικά η κινητική ενέργεια φθίνει με ταχύ ρυθμό σε κάθε κρούση με αποτέλεσμα το πλάτος να φθίνει και αυτό πολύ γρήγορα και να οδηγεί το φαινόμενο σε συνεχώς αυξανόμενη συχνότητα λικνισμού ιδανικά προς το άπειρο.

## 1.2 Ανατροπή λόγω συνεχούς διέγερσης

Όταν ένα σώμα βρίσκεται σε ηρεμία και ξαφνικά δέχεται εξωτερική επιτάχυνση σταθερού μέτρου και φοράς  $a_g$  τότε το αν θα ανατραπεί κρίνεται από το μέγεθος και τη διάρκεια της εξωτερικής διέγερσης. Για μικρές γωνίες λικνισμού η επίδραση της  $a_g$  είναι ισοδύναμη με την επίδραση που θα είχε οριζόντια δύναμη  $Wa_g/g$  η οποία ασκείται στο κέντρο βάρους του σώματος. Επομένως στην Εξ. 1.2 προστίθεται ο όρος της ροπής λόγω της εξωτερικής διέγερσης με μοχλοβραχίονα  $R$  και εξάγεται η ακόλουθη εξίσωση κίνησης:

$$I_0\ddot{\theta} = -WR(\alpha - \theta) + WRa_g \cos(\alpha - \theta)/g \quad (1.16)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\cos(\alpha - \theta) \approx 1$  για μικρές γωνίες τελικά:

$$I_0\ddot{\theta} = -WR(\alpha - \theta) + WRa_g/g \quad (1.17)$$

Το συμπέρασμα που εξάγεται από την τελευταία εξίσωση είναι ότι η απαίτηση για έναρξη λικνισμού δίνεται από την ανίσωση:  $a_g/g > \alpha$ , η οποία προσδιορίζει το κλάσμα της επιτάχυνσης  $g$  που οδηγεί στην έναρξη του φαινομένου και επιτρέπει την πρόβλεψη της συμπεριφοράς βάσει της γεωμετρίας του σώματος και μόνο. Η γενική λύση της Εξ. 1.17 για αρχικές συνθήκες  $\theta = 0$  και  $\dot{\theta} = 0$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  υπολογίζεται ως:

$$\frac{\theta}{\alpha} = \left(\frac{\alpha a_g}{g} - 1\right)(\cosh p t - 1) \quad (1.18)$$

όπου  $p = \sqrt{\frac{WR}{I_0}}$

Το σώμα θα ανατραπεί εφόσον  $a_g/g > \alpha$  και η διέγερση δρα για επαρκές χρονικό διάστημα. Αυτό μεταφράζεται ως το συνολικό έργο που απαιτείται από τη συνιστώσα  $Wa_g \cos(\alpha - \theta)/g$  της οριζόντιας εξωτερικής δύναμης και ισούται με τη διαφορά δυναμικής ενέργειας από τη θέση  $\theta = 0$  έως τη θέση  $\theta = \alpha$ . Άρα, με επίπεδο αναφοράς το έδαφος για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας σε κάθε θέση προκύπτει:

$$\int_0^{\alpha} RW(a_g/g)\dot{\theta} dt = WR\cos(\alpha - \alpha) - WR\cos(\alpha - 0) = WR(1 - \cos\alpha) \quad (1.19)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. 1.18 όπου  $\theta = \theta(t_1)$  και θέτοντας  $(1 - \cos\alpha) \approx \alpha^2/2$  η Εξ. 1.19 γράφεται:

$$\frac{a_g}{g} \left(\frac{a_g}{g} \alpha^2 - \alpha\right) (\cosh p t_1 - 1) = \frac{\alpha^2}{2} \quad (1.20)$$



Επιλύοντας την Εξ. 1.20 ως προς  $\cosh pt_1$  προκύπτει η σχέση:

$$\cosh pt_1 = 1 + \frac{1}{2 \frac{a_g}{g\alpha} \left( \frac{a_g}{g\alpha} - 1 \right)} \quad (1.21)$$

η οποία για ένα σώμα με δεδομένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και δεδομένη σταθερή επιτάχυνση  $a_g$  υπολογίζει το χρόνο  $t_1$  που απαιτείται να ασκείται η εξωτερική διέγερση ώστε να οδηγήσει το σώμα σε ανατροπή.

Ωστόσο η διερεύνηση αυτή δεν έχει εφαρμογή σε σεισμική διέγερση καθώς προϋποθέτει σταθερή επιτάχυνση εδάφους.

### 1.3 Ανατροπή λόγω ημιτονοειδούς διέγερσης

Θεωρείται επιτάχυνση εδάφους ημιτονοειδούς μορφής  $-a_g \sin(\omega t + \psi)$ , όπου  $a_g$  είναι το πλάτος του παλμού και το  $\psi$  ορίζεται από τη σχέση  $a_g \sin \psi = g \sin \alpha$ . Η μορφή αυτή εξασφαλίζει ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  θα συμβεί οριακά η έναρξη του λικνισμού καθώς η επιτάχυνση εδάφους γίνεται ίση με  $-a_g \sin \psi = -a_g g \sin \alpha / a_g = -g \sin \alpha$ , όση δηλαδή και η απαιτούμενη επιτάχυνση, όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η εξίσωση κίνησης σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$I_0 \ddot{\theta} = -WR \sin(\alpha - \theta) + WR a_g \sin(\omega t + \psi) / g \quad (1.22)$$

Για μικρές γωνίες έτσι ώστε  $\sin \alpha \approx \alpha$  και  $\sin(\alpha - \theta) \approx \alpha - \theta$  η Εξ. 1.22 δίνεται στη μορφή:

$$\ddot{\theta} - p^2 \theta = \alpha p^2 \left( \frac{\sin(\omega t + \psi)}{\sin \psi} - 1 \right) \quad (1.23)$$

Η γενική λύση της Εξ. 1.23 για αρχικές συνθήκες  $\theta = 0$  και  $\dot{\theta} = 0$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  υπολογίζεται ως:

$$\frac{\theta - \alpha}{\alpha} = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{p})^2} \left[ \frac{\omega}{p} \frac{\sinh p t}{\tan \psi} - \left( \frac{\omega}{p} \right)^2 \cosh p t - \frac{\sin(\omega t + \psi)}{\sin \psi} \right] \quad (1.24)$$

όπου  $\sin \psi = g \alpha / a_g$  και ακολούθως  $\cos \psi = \sqrt{1 - (g \alpha / a_g)^2}$ . Η συνθήκες που πρέπει να τεθούν ώστε το σώμα να ανατραπεί στο ήμισυ του παλμού, δηλ. μόλις μηδενιστεί η τιμή της επιτάχυνσης για πρώτη φορά και χωρίς να έχει αλλάξει πρόσημο είναι οι εξής:

$$\theta = \alpha \text{ και } \omega t + \psi = T/2 = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi - \psi}{\omega}.$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. 1.24 προκύπτει:

$$\tan \psi = \frac{p}{\omega} \tanh \left[ \frac{p}{\omega} (\pi - \psi) \right] \quad (1.25)$$

Η άνωθεν σχέση προσδιορίζει το πλάτος και τη συχνότητα του παλμού έτσι ώστε δεδομένο σώμα να ανατραπεί οριακά σε χρόνο  $t = T/2$ , δηλαδή τη στιγμή που  $\theta = \alpha$  ισχύει και  $\dot{\theta} = 0$ .

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διερεύνηση αναφέρεται στην επίδραση ενός μόνο παλμού. Είναι δυνατόν το σώμα να ανατραπεί με επιτάχυνση μικρότερη από την απαιτούμενη στην περίπτωση που η διέγερση αποτελείται από όχι έναν αλλά από διαδοχικούς παλμούς.

## 1.4 Λικνισμός λόγω σεισμικής διέγερσης

Στην περίπτωση που το σώμα υποβάλλεται σε σεισμική διέγερση με οριζόντια εδαφική επιτάχυνση  $a_g^x$  το φαινόμενο του λικνισμού θα ξεκινήσει μόλις η ροπή ανατροπής ξεπεράσει τη ροπή ευστάθειας που προσφέρει το βάρος του σώματος.

$$M_{res} < M_{ovr} \Rightarrow Wb < Wa_g^x h/g \Rightarrow a_g^x > bg/h \Rightarrow a_g^x > g \tan \alpha.$$

Η εξίσωση κίνησης του σώματος εξάγεται θεωρώντας το ισοζύγιο των ροπών περί τους πόλους περιστροφής. Έτσι προκύπτει:

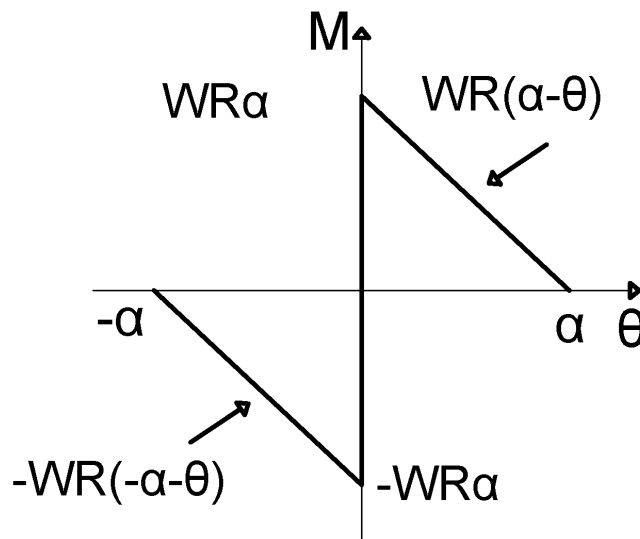
$$I_O \ddot{\theta} = -WR \sin(\alpha - \theta) - WR a_g^x \cos(\alpha - \theta)/g \quad (1.26)$$

όταν το σώμα λικνίζεται περί τον O και

$$I_{O'} \ddot{\theta} = -WR \sin(\alpha + \theta) - WR a_g^x \cos(\alpha + \theta)/g \quad (1.27)$$

όταν το σώμα λικνίζεται περί τον O'.

Οι άνωθεν εξισώσεις χαρακτηρίζονται μη γραμμικές λόγω των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που εμπεριέχουν. Ένα δεύτερο είδος μη γραμμικότητας συνίσταται στο γεγονός ότι ανάλογα με το πρόσημο της γωνίας  $\theta$  χρησιμοποιείται είτε η Εξ. 1.26 (όταν  $\theta > 0$ ) είτε η Εξ. 1.27 (όταν  $\theta < 0$ ) για να περιγραφεί η κίνηση του σώματος.



Σχήμα 1.2: Συμμετρικό προσομοίωμα.

Η γραμμικοποίηση των Εξ. 1.26 και Εξ. 1.27 είναι έγκυρη όταν η γωνία  $\alpha$  είναι μικρότερη από  $20^\circ$  κατά τον *Housner* [2], όπως προαναφέρθηκε, και τότε μπορούν να γίνουν οι προσεγγίσεις  $\sin(\alpha - \theta) \approx \alpha - \theta$  και  $\cos(\alpha - \theta) \approx 1$ .

Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$I_O \ddot{\theta} = -WR(\alpha - \theta) - WRa_g^x/g \quad (1.28)$$

$$I_{O'} \ddot{\theta} = -WR(\alpha + \theta) - WRa_g^x/g \quad (1.29)$$

Θεωρώντας ότι στο σώμα ασκείται στατική ροπή  $M_{st}$ , η σχέση που προκύπτει μεταξύ της ροπής  $M_{st}$  και της γωνίας  $\theta$  δίνεται στο Σχ. 1.2.

Σε όρους στιβαρότητας το σώμα έχει άπειρη στιβαρότητα έως ότου το μέτρο της  $M_{st}$  φτάσει την τιμή  $WRa$ . Στη συνέχεια η στιβαρότητα γίνεται αρνητική, το οποίο σημαίνει ότι η ροπή 'αντοχής' του σώματος μειώνεται και άρα απαιτείται μικρότερη ροπή από την αρχική για να οδηγήσει σε ανατροπή το σώμα όταν αυτό βρίσκεται σε κεκλιμένη θέση.

## 2 ΛΙΚΝΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΑΚΑΜΠΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

### 2.1 Συμμετρικό σώμα εδραζόμενο σε ορθογώνια βάση.

Θεωρείται σύστημα δύο άκαμπτων σωμάτων, στο οποίο το ένα βρίσκεται συμμετρικά τοποθετημένο πάνω στο άλλο. Ορίζεται το άνω σώμα ως σώμα 2 και το κάτω ως σώμα 1. Γίνεται η παραδοχή ότι η τριβή είναι αρκετά μεγάλη στις διεπιφάνειες, ώστε να μην ολισθαίνει το σώμα 2 πάνω στο 1 αλλά ούτε και το 1 στο έδαφος. Τα σώματα θεωρούνται ομογενή με το κέντρο μάζας τους να βρίσκεται στο γεωμετρικό κέντρο τους. Το σύστημα διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή την απόκλιση από την κατακόρυφο κάθε σώματος  $\theta_1$  και  $\theta_2$ .

Το σύστημα μπορεί να λικνίζεται σε τέσσερα διαφορετικά στιγμιότυπα, κάθε ένα εκ των οποίων περιλαμβάνει δύο συμμετρικές, κατά τον κατακόρυφο άξονα, υποπεριπτώσεις. Ο διαχωρισμός αυτός είναι αναγκαίος, διότι σε κάθε υποπερίπτωση διαφορετική εξίσωση κίνησης διέπει τη συμπεριφορά του συστήματος.

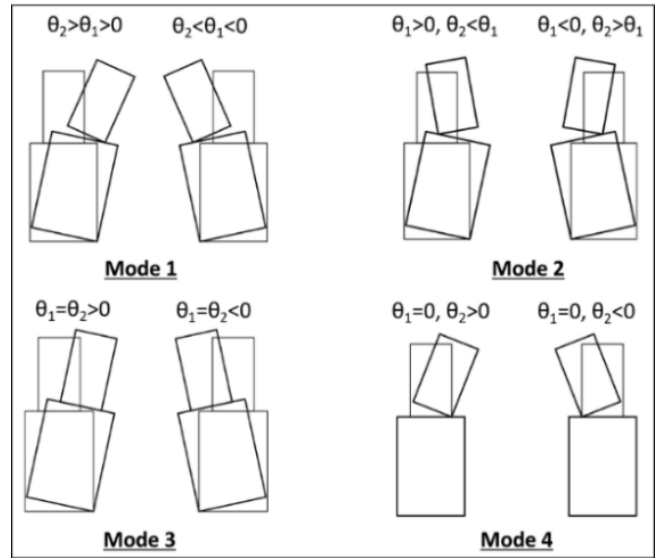
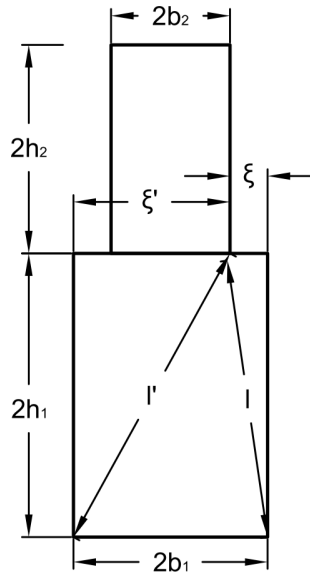
Οι εξισώσεις κίνησης εξάγονται εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, λαμβάνοντας ισοδυναμία ροπών περί τον πόλο περιστροφής του κάθε σώματος ξεχωριστά. Ακόμη πρέπει να ληφθεί υπόψη η συμβατότητα στη μετακίνηση του σημείου επαφής του σώματος 2 σε σχέση με την κίνηση του σώματος 1.

Διατυπώνοντας τις εξισώσεις κίνησης στην τελική τους μορφή αγνοούνται οι όροι δευτέρας τάξης με την παραδοχή ότι η γωνίες εκτροπής είναι αρκετά μικρές ώστε να ισχύουν οι προσεγγίσεις  $\sin(\theta_i) \approx \theta_i$  και  $\cos(\theta_i) \approx 1$ .

Η γένικη σχέση ισοδυναμίας ροπών ευστάθειας και ανατροπής εκφράζεται ως:

$$I_0 \ddot{\theta} + M_{res} = M_{out} \quad (2.1)$$

όπου  $I_0$  η ροπή αδράνειας ως προς πόλο περιστροφής,  $M_{res}$  η ροπή ευστάθειας και  $M_{out}$  η ροπή ανατροπής του συστήματος.



Σχήμα 2.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Σχήμα 2.2: Στιγμιότυπα (*modes*) λικνισμού.

Δεδομένου ότι για το σύστημα των δύο σωμάτων που εξετάζεται οι βαθμοί ελευθερίας είναι δύο η Εξ. 2.1 διατυπώνεται σε μητρική μορφή. Για κάθε ένα από τα τέσσερα ανεξάρτητα στιγμιότυπα κίνησης παρουσιάζονται τα αντίστοιχα μητρώα, στα οποία εμπεριέχονται οι δύο συμμετρικές υποπεριπτώσεις εκφρασμένες με το  $\pm$ .

#### Στιγμιότυπο 1

$$[I_0] = \begin{bmatrix} I_{01} + m_2 l'^2 & m_2(2h_1 h_2 + b_2 \xi) \\ m_2(2h_1 h_2 + b_2 \xi) & I_{02} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$[M_{res}] = \begin{bmatrix} -(m_1 h_1 + 2m_2 h_1)g & 0 \\ 0 & m_2 h_2 g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \pm(m_1 b_1 + m_2 \xi)g \\ \pm m_2 b_2 g \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[M_{out}] = \begin{bmatrix} -(m_1 h_1 + 2m_2 h_1) a_g \\ -m_2 h_2 a_g \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

#### Στιγμιότυπο 2

$$[I_0] = \begin{bmatrix} I_{01} + m_2 l'^2 & m_2(2h_1 h_2 - b_2 \xi') \\ m_2(2h_1 h_2 - b_2 \xi') & I_{02} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$[M_{res}] = \begin{bmatrix} -(m_1 h_1 + 2m_2 h_1)g & 0 \\ 0 & -m_2 h_2 g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \pm(m_1 b_1 + m_2 \xi')g \\ \mp m_2 b_2 g \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[M_{out}] = \begin{bmatrix} -(m_1 h_1 + 2m_2 h_1)a_g \\ -m_2 h_2 a_g \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Στιγμιότυπο 3

$$[I_0] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$[M_{res}] = \begin{bmatrix} -m h g & 0 \\ 0 & -m h g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \pm(m b_1)g \\ \pm(m b_1)g \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$[M_{out}] = \begin{bmatrix} -m h a_g \\ -m h a_g \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Στιγμιότυπο 4

$$[I_0] = [ I_{02} ] \quad (2.11)$$

$$[M_{res}] = [ -m_2 h_2 g ] ( \theta_2 ) \pm [ m_2 b_2 g ] \quad (2.12)$$

$$[M_{out}] = [ -m_2 h_2 a_g ] \quad (2.13)$$

όπου  $m_1$ ,  $m_2$  οι μάζα του κάτω και άνω σώματος αντίστοιχα,  $I_{01}$ ,  $I_{02}$  οι ροπές αδράνειας ως προς τους πόλους περιστροφής,  $m = m_1 + m_2$  η συνολική μάζα του συστήματος,  $h$  το ύψος του κέντρου μάζας του συστήματος, το οποίο υπολογίζεται ως:

$$h = \frac{m_1 h_1 + m_2 (2h_1 + h_2)}{m} \quad (2.14)$$

και  $I_0$  η ροπή αδράνειας του συστήματος η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$I_0 = I_{c1} + I_{c2} + m_1(h_1^2 + b_1^2) + m_2((2h_1 + h_2)^2 + b_1^2) \quad (2.15)$$

Όταν η επιτάχυνση του εδάφους είναι αρκετά μεγάλη το σύστημα τίθεται σε κίνηση και είναι πιθανό να βρεθεί σε περισσότερα από ένα στιγμιότυπα κατά τη διάρκεια του λικνισμού. Η μετάβαση από ένα στιγμιότυπο σε κάποιο άλλο είναι το χαρακτηριστικό που κάνει την απόκριση μη γραμμική.

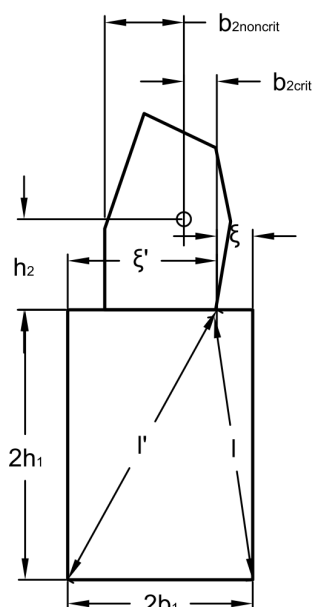


## 2.2 Ασύμμετρο σώμα εδραζόμενο σε ορθογώνια βάση.

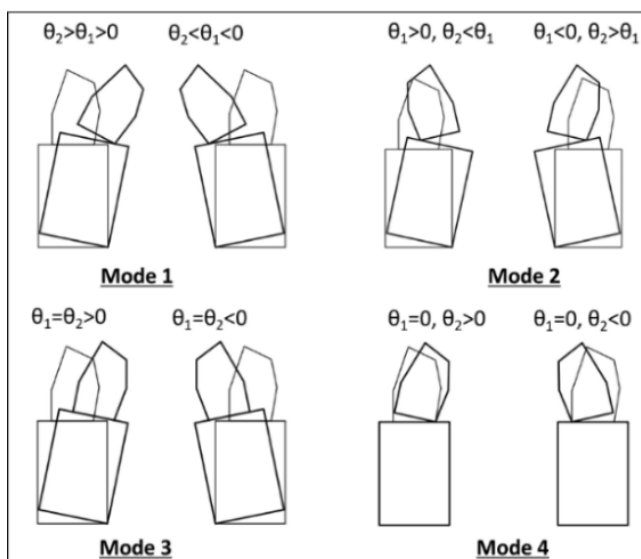
Με σκόπο να γίνει καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος λικνισμού ενός μουσειακού εκθέματος πάνω στη βάση του, η διερεύνηση επεκτείνεται στη θεώρηση ενός ασύμμετρου άνω σώματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του.

Η θεώρηση αυτή απαιτεί τον μετασχηματισμό των μητρώων που παρουσιάστηκαν με σκοπό να οριστεί ένα κρίσιμο και ένα μη κρίσιμο ημιπλάτος για το άνω σώμα. Στο Σχ. 2.3 ορίζονται οι γεωμετρικές παράμετροι που εισάγονται στις εξισώσεις κίνησης.

Όπως απεικονίζεται στο Σχ. 2.4 το σώμα είναι δυνατόν να λικνίζεται σε τέσσερα διαφορετικά στιγμιότυπα, κατά αντιστοιχία με την περίπτωση στην οποία το άνω σώμα είναι συμμετρικό.



Σχήμα 2.3: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά.



Σχήμα 2.4: Στιγμιότυπα (*modes*) λικνισμού.

Ωστόσο, σε κάθε υποπερίπτωση πρέπει να επιλεγθεί το κατάλληλο ημιπλάτος. Με βάση την απεικόνιση του Σχ. 2.3 στις υποπεριπτώσεις 1a, 2a, 4a το ημιπλάτος  $b_2$  αντικαθίσταται με το  $b_{2crit}$ , ενώ στις υποπεριπτώσεις 1b, 2b, 4b το ημιπλάτος  $b_2$  αντικαθίσταται με το  $b_{2noncrit}$ , καθώς το άνω σώμα λικνίζεται περί τον πόλο  $O_2$  και  $O_2'$  αντίστοιχα. Όσον αφορά στο στιγμιότυπο 3, στο οποίο τα δύο σώματα κινούνται ως ένα περί τα σημεία περιστροφής του κάτω σώματος, ορίζεται κατάλληλος μετασχηματισμός του ημιπλάτους του συστήματος σε  $b_{crit}$  και  $b_{noncrit}$ . Ακόμη η ροπή αδράνειας  $I_0$  υπολογίζεται στα μητρώα με τη χρήση της κατάλληλης τιμής του  $b$  σε κάθε περίπτωση.

Παρακάτω συνοψίζονται οι τροποποιήσεις που απαιτούνται στα μητρώα κάθε υποπερίπτωσης για όλα τα στιγμιότυπα ώστε να ληφθεί υπόψη η ασυμμετρία του άνω σώματος.

Στιγμιότυπο 1a

$$b_2 = b_{2crit} \text{ και } I_{02} = I_{cm} + m_2 R_{2crit}^2$$

Στιγμιότυπο 1b

$$b_2 = b_{2noncrit} \text{ και } I_{02} = I_{cm} + m_2 R_{2noncrit}^2$$

Στιγμιότυπο 2a

$$b_2 = b_{2noncrit} \text{ και } I_{02} = I_{cm} + m_2 R_{2noncrit}^2$$

Στιγμιότυπο 2b

$$b_2 = b_{2crit} \text{ και } I_{02} = I_{cm} + m_2 R_{2crit}^2$$

Στιγμιότυπο 3a

$$b = b_{crit} \text{ και } I_0 = I_{0crit}$$

Στιγμιότυπο 3b

$$b = b_{noncrit} \text{ και } I_0 = I_{0noncrit}$$

Στιγμιότυπο 4a

$$b_2 = b_{2crit} \text{ και } I_{02} = I_{cm} + mb_{2crit}$$

Στιγμιότυπο 4b

$$b_2 = b_{2noncrit} \text{ και } I_{02} = I_{cm} + mb_{2noncrit}$$

όπου για το Στιγμιότυπο 3 ισχύουν οι σχέσεις:

$$I_{0noncrit} = I_{c1} + I_{c2} + m_1(h_1^2 + b_{noncrit}^2) + m_2((2h_1 + h_2)^2 + b_{noncrit}^2) \quad (2.16)$$

$$I_{0crit} = I_{c1} + I_{c2} + m_1(h_1^2 + b_{crit}^2) + m_2((2h_1 + h_2)^2 + b_{crit}^2) \quad (2.17)$$

$$b_{crit} = \frac{m_1 b_1 + m_2 b_{2crit}}{m} \quad (2.18)$$

$$b_{noncrit} = \frac{m_1 b_1 + m_2 b_{2noncrit}}{m} \quad (2.19)$$

## 2.3 Απώλειες ενέργειας λόγω κρούσης.

Κατά την μετάβαση από ένα συγμιότυπο σε επόμενο είναι πιθανόν να αλλάξει ο πόλος περιστροφής ενός ή και των δύο σωμάτων. Όταν συμβαίνει αυτό, η μετάβαση συνοδεύεται από απώλεια κινητικής ενέργειας, η οποία πραγματοποιείται λόγω κρούσης μεταξύ των δύο σωμάτων ή του κάτω σώματος και της επιφάνειας έδρασης (έδαφος). Το φαινόμενο αυτό οδηγεί σε ακαριαίες αλλαγές στην ταχύτητα των σωμάτων πριν και μετά την κρούση. Η ποσότητα της απώλειας ενέργειας μπορεί να προσδιορισθεί υπολογίζοντας την κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση. Η γωνιακή ταχύτητα κάθε σώματος μετά την κρούση λειτουργεί ως αρχική συνθήκη για την κίνηση του στο επόμενο στιγμιότυπο, ενώ η τιμές στις γωνίες απόκλισης πριν και μετά την κρούση παραμένουν σταθερές.

Οι παράμετροι που επηρεάζουν το φαινόμενο είναι ο λόγοι  $h_2/b_2$ ,  $h_1/b_1$ , το σχετικό μέγεθος των σωμάτων με βάση το λόγο  $b_2/b_1$ , ο λόγος των μαζών  $m_2/m_1$  και οι σχετικές γωνιακές ταχύτητες πριν και μετά την κρούση με βάση το λόγο  $\dot{\theta}_2/\dot{\theta}_1$ . Παρατηρείται ότι ο συντελεστής αποκατάστασης δεν αποτελεί πάντοτε σταθερά στην περίπτωση λικνισμού συστήματος δύο σωμάτων. Αυτό έρχεται σε αντιδιαστολή με το συμπέρασμα που εξάχθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, ότι δηλαδή ο συντελεστής αποκατάστασης κατά το λικνισμό ενός σώματος εξαρτάται μόνο από τη ραδινότητα του σώματος, άρα παραμένει αμετάβλητος.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο υπολογισμός των συντελεστών αποκατάστασης της ταχύτητας για δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις, με στόχο να δοθεί ένα παράδειγμα μετασχηματισμού από συμμετρικό σε ασύμμετρο άνω σώμα.

### 2.3.1 Συντελεστής απομείωσης για συμμετρικό άνω σώμα.

Οι εξισώσεις που συσχετίζουν τις γωνιακές ταχύτητες πριν και μετά την κρούση, όταν το σύστημα μεταβαίνει από το στιγμιότυπο 1a στο 2b είναι οι εξής:

$$\dot{\theta}'_1 = C\dot{\theta}_1 \text{ και } \dot{\theta}'_2 = \dot{\theta}_2 + D\dot{\theta}_1$$

όπου:

$$C = \frac{J_2/J_1 - J_4/J_3}{J_3/J_1 - J_5/J_3} \text{ και } D = \frac{J_2}{J_1} - \frac{J_3}{J_1} C$$

με:

$$J_1 = I_{O2}, J_2 = m_2(2h_1h_2 + b_2\xi), J_3 = m_2(2h_1h_2 - b_2\xi')$$

$$J_4 = I_{c1} + m_1h_1^2 - m_1b_1^2 + m_2(4h_1^2 - \xi\xi'), J_5 = I_{O1} + m_2l'^2$$

### 2.3.2 Συντελεστής απομείωσης για ασύμμετρο άνω σώμα.

Σε αυτή την περίπτωση το στιγμιότυπο σύμφωνα με το οποίο τροποποιούνται οι άνωθεν σχέσεις είναι αυτό πριν την χρούση. Έτσι όταν το σύστημα μεταβαίνει από το στιγμιότυπο 1a στο 2b εφαρμόζονται οι μετασχηματισμοί:  $b_2 = b_{2crit}$  και  $I_{O2} = I_{cm} + m_2 R_{2crit}^2$ .

$$C = \frac{J_2/J_1 - J_4/J_3}{J_3/J_1 - J_5/J_3} \text{ και } D = \frac{J_2}{J_1} - \frac{J_3}{J_1} C$$

με:

$$J_1 = I_{O2}, J_2 = m_2(2h_1h_2 + b_{2crit}\xi), J_3 = m_2(2h_1h_2 - b_{2crit}\xi')$$

$$J_4 = I_{c1} + m_1h_1^2 - m_1b_1^2 + m_2(4h_1^2 - \xi\xi'), J_5 = I_{O1} + m_2l'^2$$

Η συμμετρική υποπερίπτωση ορίζει τη μετάβαση από το στιγμιότυπο 1b στο 2a και οι μετασχηματισμοί που εφαρμόζονται είναι οι εξής:  $b_2 = b_{2noncrit}$  και  $I_{O2} = I_{cm} + m_2 R_{2noncrit}^2$ .

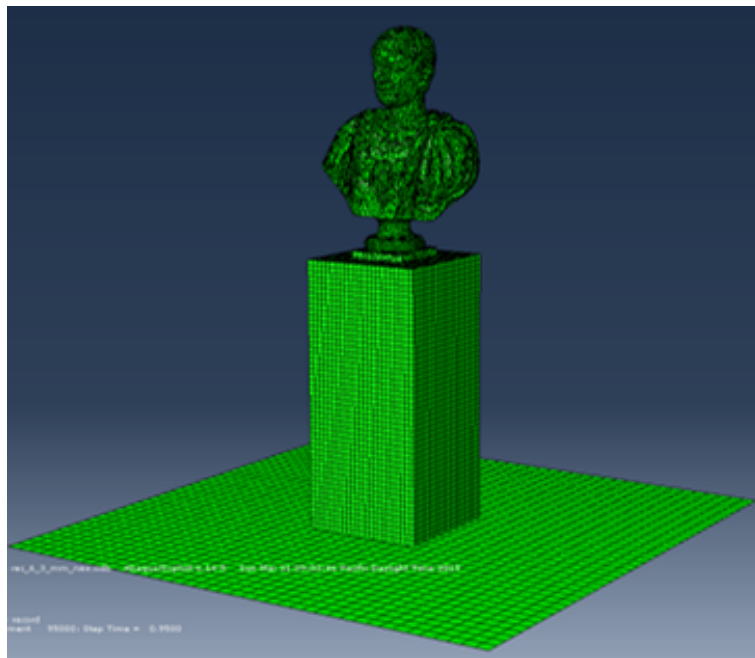
Ως αποτέλεσμα:

$$J_1 = I_{O2}, J_2 = m_2(2h_1h_2 + b_{2noncrit}\xi), J_3 = m_2(2h_1h_2 - b_{2noncrit}\xi')$$

$$J_4 = I_{c1} + m_1h_1^2 - m_1b_1^2 + m_2(4h_1^2 - \xi\xi'), J_5 = I_{O1} + m_2l'^2$$

### 3 ΛΙΚΝΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ-ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

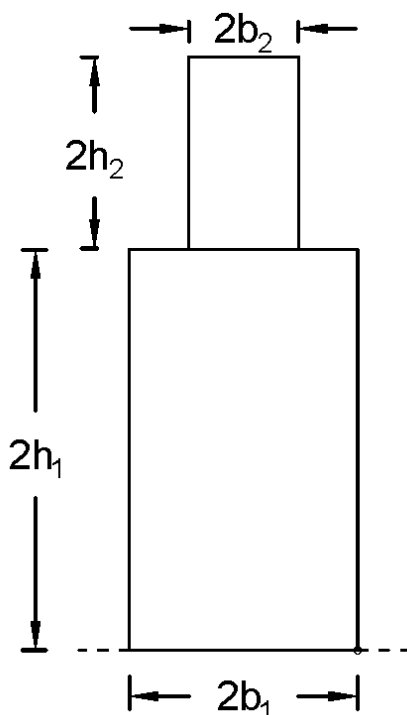
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη δύο προσομοιωμάτων της προτομής, ενός ορθογωνικού συμμετρικού μοντέλου και ενός ασύμμετρου. Οι διεγέρσεις αποτελούνται από ημιτονοειδή παλμό, από παλμό *Ricker* και σεισμούς. Η επίλυση των εξισώσεων κίνησης πραγματοποιήθηκε με την αριθμητική μέθοδο *Newmark* και το λογισμικό *Matlab*.



Σχήμα 3.1: Ελεύθερα εδραζόμενη προτομή πάνω σε ορθογωνική βάση, μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.

### 3.1 Συμμετρικό προσομοίωμα

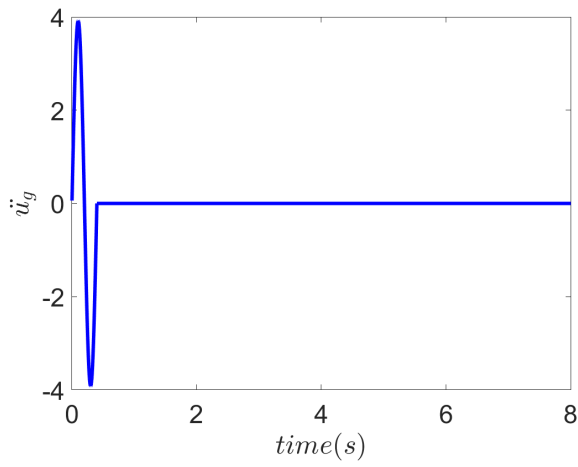
Σε επέκταση της διερεύνησης του προβλήματος λικνισμού συστήματος δύο άκαμπτων σωμάτων θεωρήθηκε η προσέγγιση της προτομής που απεικονίζεται στο Σχ. 3.1 ως ορθογώνιο σώμα συμμετρικά εδραζόμενο στη βάση του. Οι διαστάσεις του άνω σώματος είναι συνολικό πλάτος  $2b_2 = 0.222m$ , όσο δηλαδή και το πραγματικό πλάτος έδρασης της προτομής, και συνολικό ύψος  $2h_2 = 0.778m$ , ενώ η βάση έχει διαστάσεις  $2b_1 = 0.45m$  και  $2h_1 = 1.00m$ . Το  $h$  αναπαριστά το ύψος του κέντρου μάζας κάθε σώματος, το οποίο για την προτομή μετρήθηκε με τη βοήθεια σάρωσης με *laser*. Η μάζα της βάσης και της προτομής είναι  $511kg$  και  $107kg$  αντίστοιχα.



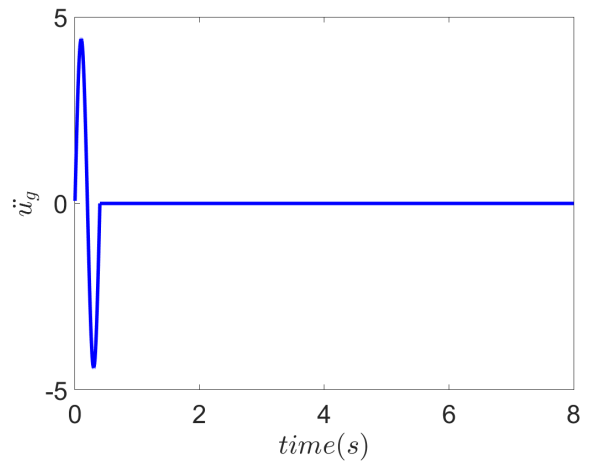
Σχήμα 3.2: Συμμετρικό προσομοίωμα.

#### 3.1.1 Απόκριση προσομοιώματος σε ημιτονοειδή διέγερση της βάσης έδρασής του

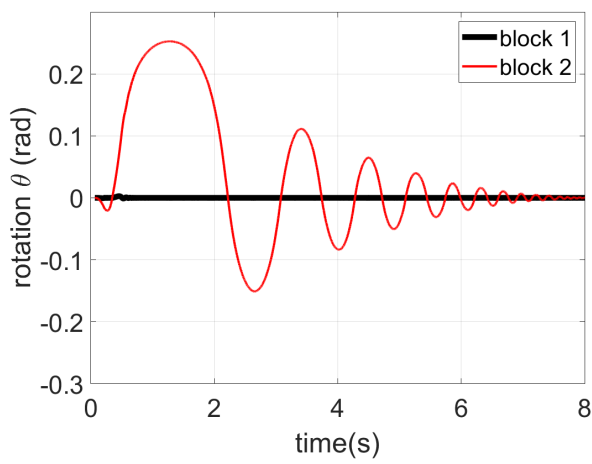
Αρχικά δίνεται ημιτονοειδής διέγερση με πλάτος  $0.4g$  και περίοδο  $T = 0.5s$ . Είναι αναμενόμενο για τη βάση, η οποία έχει ραδινότητα  $\tan(a) = 0.45$ , ότι δε θα ξεκινήσει να λικνίζεται παρά μόνο το άνω σώμα το οποίο έχει ραδινότητα  $\tan(a) = 0.28$ .



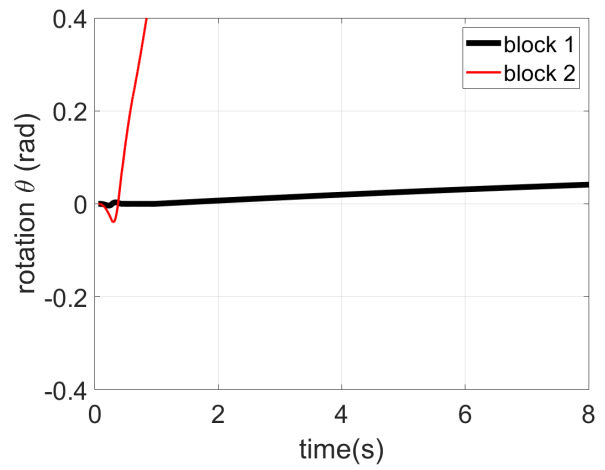
Σχήμα 3.3: Ημιτονοειδής παλμός 0.40g



Σχήμα 3.4: Ημιτονοειδής παλμός 0.45g



Σχήμα 3.5: Απόκριση σε ημιτονοειδή παλμό.



Σχήμα 3.6: Ανατροπή του άνω σώματος.



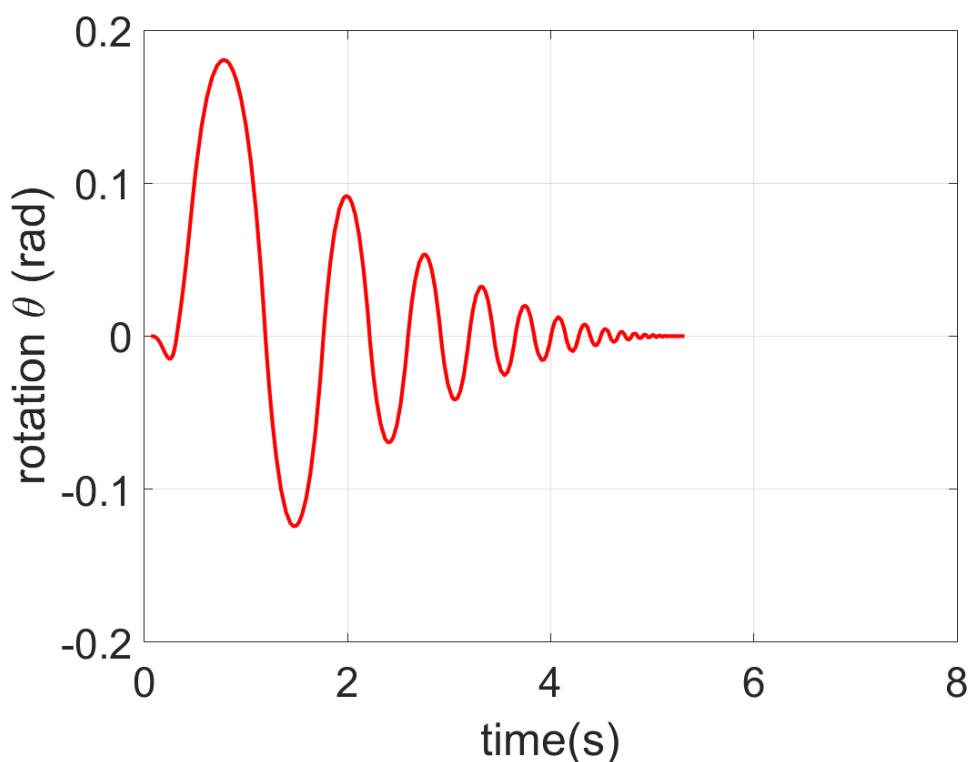
Το σχήμα Σχ. 3.5 απεικονίζει την απόκριση του προσομοιώματος σε παλμό επιβεβαιώνοντας τη θεωρητική πρόβλεψη (αν και λόγω της αλληλεπίδρασης με το άνω σώμα τελικά η βάση λικνίζεται με πολύ μικρές γωνίες, σχεδόν αμελητέες).

Στη συνέχεια αυξάνεται η ένταση της διέγερσης, μεταβάλλοντας το πλάτος του παλμού σε  $0.45g$ , γεγονός το οποίο οδηγεί σε ανατροπή του άνω σώματος, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.6, ενώ η βάση ξεκινά οριακά να λικνίζεται.

Η συμπεριφορά του συστήματος, δηλαδή η αμελητέα απόκριση της βάσης, όπως διακρίνεται στο Σχ. 3.5 οδηγεί στη διερεύνηση της συμπεριφοράς του άνω σώματος στην ίδια διέγερση, αλλά με τη διαφορά ότι βρίσκεται στο έδαφος και όχι εδραζόμενο σε άλλο σώμα.

Εύλογα δημιουργείται το ερώτημα αν σε περιπτώσεις 'σχετικής ηρεμίας' της βάσης η ανάλυση ολόκληρου του συστήματος αξίζει το υπολογιστικό κόστος ή επαρκεί το πρόβλημα να αναχθεί σε πρόβλημα λικνισμού ενός σώματος.

Στο Σχ. 3.7 δίνεται η απόκριση σε ημιτονοειδή παλμό με πλάτος  $0.4g$  και περίοδο  $T = 0.5s$  για το άνω σώμα (πλάτος  $2b_2 = 0.109m$  κα ύψος  $2h_2 = 0.778m$ ) εδραζόμενο στο έδαφος σύμφωνα με τη θεωρία του *Housner*.

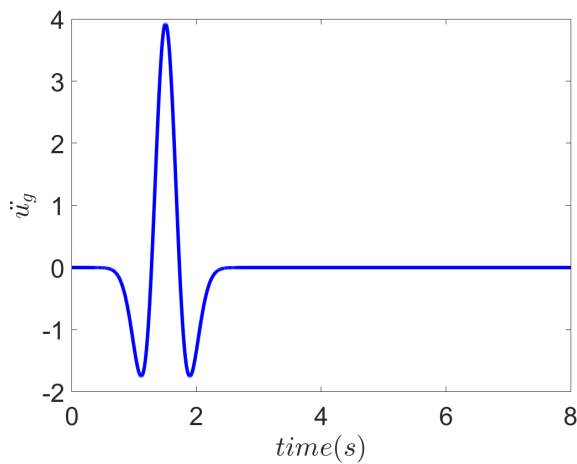


Σχήμα 3.7: Απόκριση σε ημιτονοειδή παλμό με το άνω σώμα εδραζόμενο στο έδαφος.

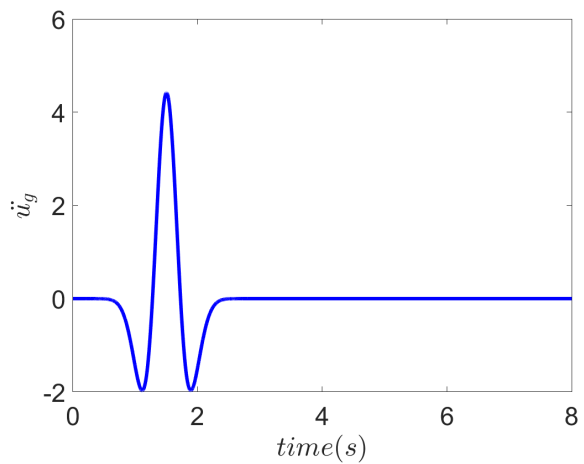
Οι εξισώσεις κίνησης επιλύθηκαν με την αριθμητική μέθοδο *Newmark* και το λογισμικό *Matlab*.

Συμπεραίνεται ότι η απόκριση του άνω σώματος όταν αυτό εδράζεται στο έδαφος διαφέρει σημαντικά από την περίπτωση που αυτό εδράζεται στην ορθογωνική βάση ακόμη και αν η τελευταία λικνίζεται ασθενώς. Πρώτον το πλάτος λικνισμού μειώθηκε από τα  $0.25\text{rad}$  στα  $0.18\text{rad}$  και δεύτερον η ταλάντωση του άνω σώματος ‘σβήνει’ στα  $7.5\text{sec}$  στην πρώτη περίπτωση, ενώ στα  $5\text{sec}$  στη δεύτερη.

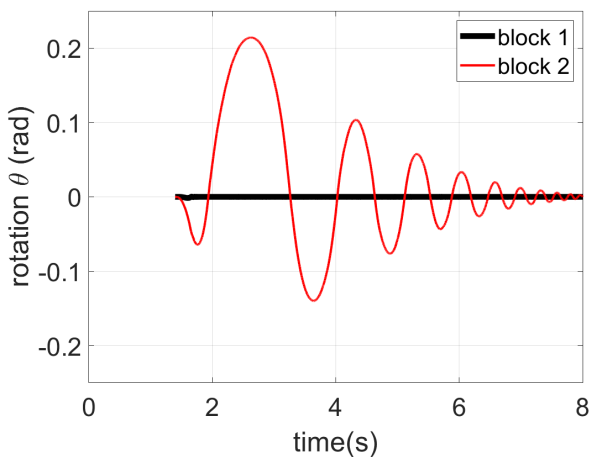
### 3.1.2 Απόκριση προσομοιώματος σε παλμό *Ricker*



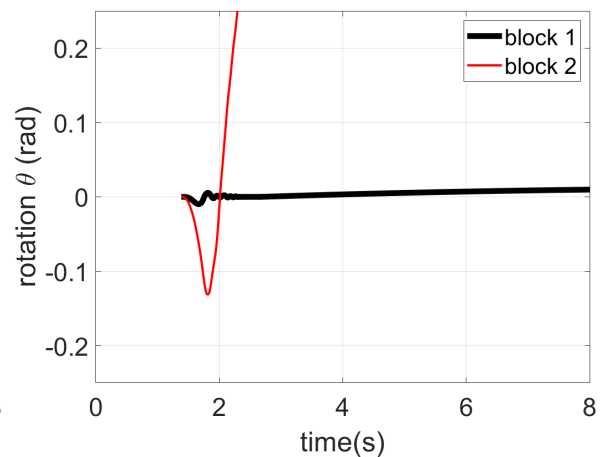
Σχήμα 3.8: *Ricker* παλμός  $0.40g$



Σχήμα 3.9: *Ricker* παλμός  $0.45g$



Σχήμα 3.10: Απόκριση σε παλμό *Ricker*.



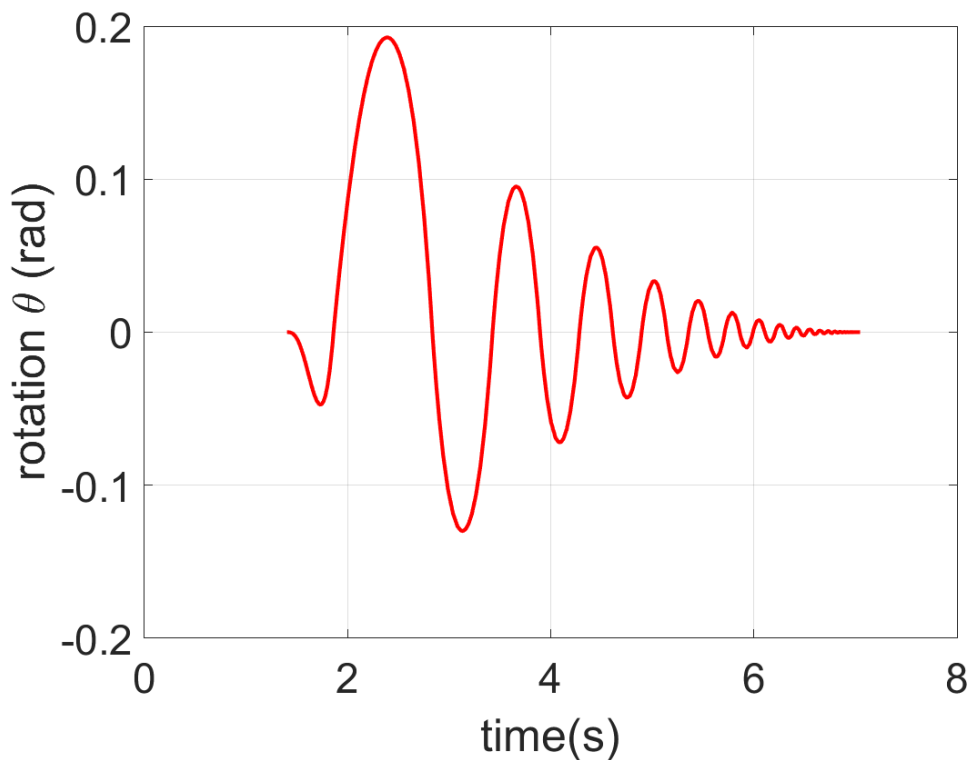
Σχήμα 3.11: Ανατροπή του άνω σώματος.

Δίνεται ως διέγερση παλμός *Ricker* με πλάτος  $0.4g$  και περίοδο  $T = 1s$ . Είναι αναμενόμενο για τη βάση, και σε αυτή την περίπτωση, η οποία έχει ραδινότητα  $\tan(a) = 0.45$ , ότι δε θα ξεκινήσει να λικνίζεται.

Το σχήμα Σχ. 3.10 απεικονίζει την απόκριση του προσομοιώματος σε παλμό επιβεβαιώνοντας τη θεωρητική πρόβλεψη (αν και λόγω της αλληλεπίδρασης με το άνω σώμα τελικά η βάση λικνίζεται με πολύ μικρές γωνίες, σχεδόν αμελητέες).

Στη συνέχεια αυξάνεται η ένταση της διέγερσης, μεταβάλλοντας το πλάτος του παλμού *Ricker* σε  $0.45g$ , γεγονός το οποίο οδηγεί σε ανατροπή του άνω σώματος, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.11, ενώ η βάση ξεκινά να λικνίζεται.

Διερευνάται ακόμη η συμπεριφορά του άνω σώματος στην ίδια διέγερση, αλλά με τη διαφορά ότι βρίσκεται στο έδαφος και όχι εδραζόμενο σε άλλο σώμα σε αντιστοιχία με την προηγούμενη περίπτωση.



Σχήμα 3.12: Απόκριση σε παλμό *Ricker* με το άνω σώμα εδραζόμενο στο έδαφος.

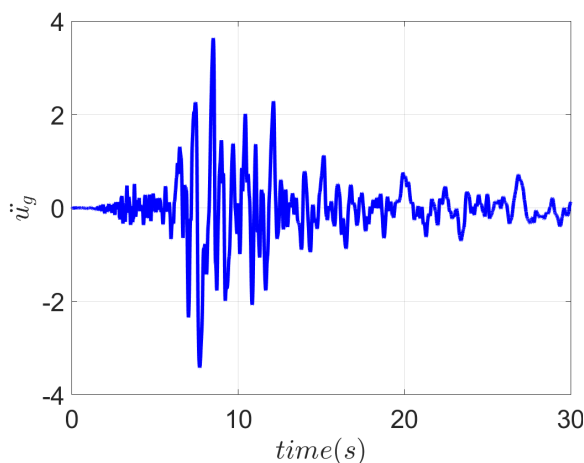
Συμπεραίνεται και σε αυτή την περίπτωση ότι η απόκριση του άνω σώματος όταν αυτό εδράζεται στο έδαφος διαφέρει σημαντικά από την περίπτωση που αυτό εδράζεται στην ορθογωνική βάση ακόμη και αν η τελευταία λικνίζεται ασθενώς.

Εδώ η κύρια διαφορά εντοπίζεται στο πλάτος λικνισμού το οποίο μειώθηκε από τα  $0.22rad$  στα  $0.19rad$ , ενώ μικρή διαφοροποίηση υπήρξε στο χρόνο επαναφοράς στην ηρεμία, καθώς η ταλάντωση του άνω σώματος ‘σβήνει’ στα  $8.0sec$  στην πρώτη περίπτωση, ενώ στα  $7.0sec$  στη δεύτερη.

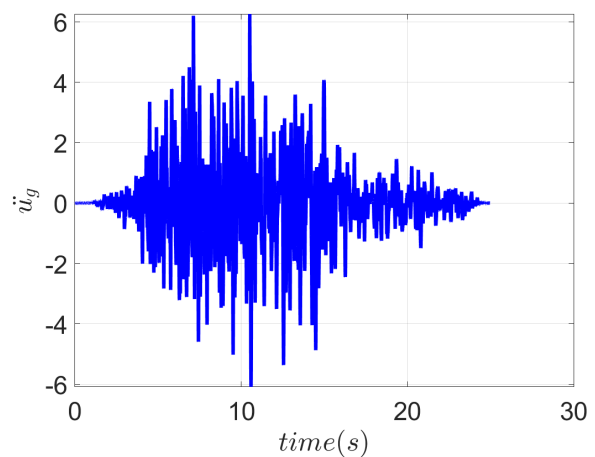
Ως εκ τούτου, θα ήταν άστοχη η προσέγγιση της συμπεριφοράς του συστήματος δύο σωμάτων με τη συμπεριφορά του άνω σώματος εδραζόμενο στο έδαφος, είτε η διέγερση αφορά σε ημιτονοειδή παλμό είτε σε παλμό *Ricker*, ακόμα και όταν η βάση λικνίζεται με πολύ μικρές γωνίες, καθώς η απόκριση εμφανίζεται μειωμένη σε ένταση και διάρκεια.

### 3.1.3 Απόκριση προσομοιώματος σε σεισμό

Ως τρίτο παράδειγμα, υπολογίζεται η απόκριση του προσομοιώματος σε σεισμό που ασκείται στην οριζόντια διεύθυνση. Η πρώτη σεισμική καταγραφή έχει εξαχθεί από το σταθμό *Hollister South and Pine* στο σεισμό *Loma Prieta*, 1989 με  $PGA = 0.371g$  και η δεύτερη έχει εξαχθεί από το σταθμό *WAHO* στο σεισμό *Loma Prieta*, 1989 με  $PGA = 0.638g$ .



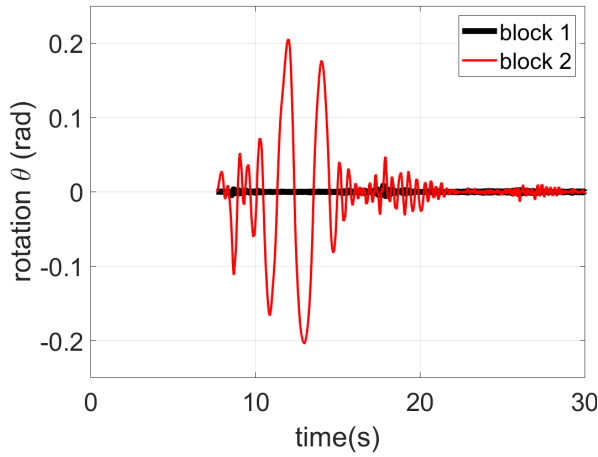
Σχήμα 3.13: Καταγραφή *Hollister South and Pine*.



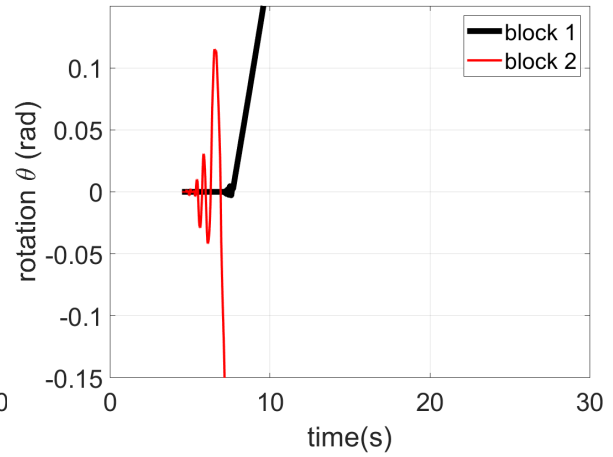
Σχήμα 3.14: Καταγραφή *WAHO*.

Παρατηρείται ότι ο λικνισμός του άνω σώματος και στις δύο περιπτώσεις ξεκινάει περί τα  $0.30g$ , γεγονός το οποίο αιτιολογείται αν αναλογιστεί κανείς ότι η ραδιότητα του είναι  $0.28$ .

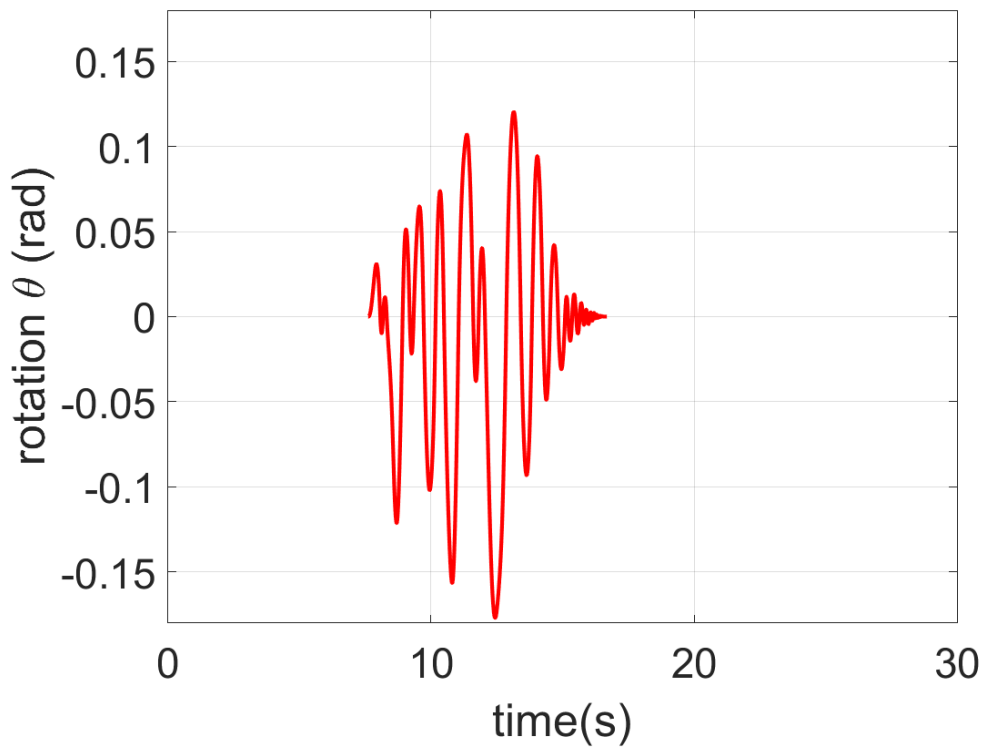
Στην πρώτη περίπτωση, μολονότι δεν πραγματοποιείται ανατροπή του συστήματος, η απόκριση του άνω σώματος είναι πολύ μεγαλύτερη σε διάρκεια και πλάτος σε σχέση με τη βάση του.



Σχήμα 3.15: Ευστάθεια συστήματος.



Σχήμα 3.16: Ανατροπή συστήματος.



Σχήμα 3.17: Απόκριση του άνω σώματος εδραζόμενου στο έδαφος.

Σε αντιστοιχία με τη διερεύνηση που έγινε στις παλμικές διεγέρσεις εξετάζεται η απόκριση το άνω σώματος στο σεισμό του Σχ. 3.13, η οποία απεικονίζεται στο Σχ. 3.17.

Παρατηρείται ότι το συχνοτικό περιεχόμενο του λικνισμού είναι πυκνότερο, το σώμα παραμένει ευσταθές, ενώ η κίνηση του περιλαμβάνει ελαφρώς μικρότερα πλάτη λικνισμού. Η απόκριση υποεκτιμάται, καθώς εμφανίζεται μειωμένη σε ένταση και διάρκεια.

Άρα, και σε αυτή την περίπτωση η προσέγγιση της συμπεριφοράς του συστήματος δύο σωμάτων με τη συμπεριφορά του άνω σώματος εδραζόμενο στο έδαφος είναι άστοχη.

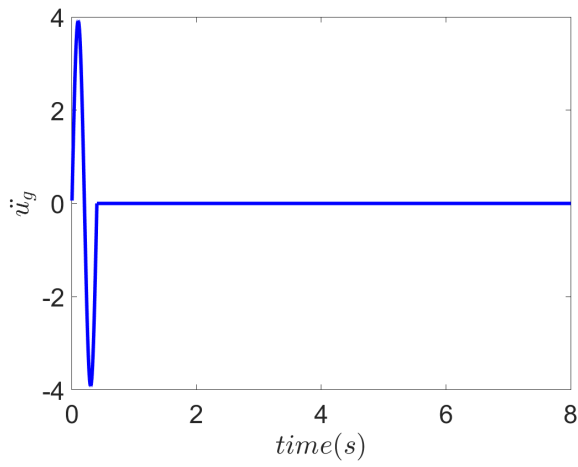
## 3.2 Προσομοίωμα συμμετρικής βάσης και ασύμμετρου άνω σώματος

Η προτομή σε αυτή την περίπτωση προσομοιώθηκε με άκαμπτο σώμα ορθογωνικής βάσης. Το κέντρο βάρους ωστόσο δε βρίσκεται στο μέσο του συνολικού πλάτους  $2b_2$  αλλά απέχει  $b_{2crit} = 0.099m$  και  $b_{2noncrit} = 0.123m$  από τους δύο πόλους περιστροφής του. Το άθροισμα παραμένει σταθερό και ίσο με  $0.222m$ . Οι διαστάσεις (ύψος, πλάτος) και οι μάζες των δύο σωμάτων παραμένουν ίδιες με το συμμετρικό προσομοίωμα.

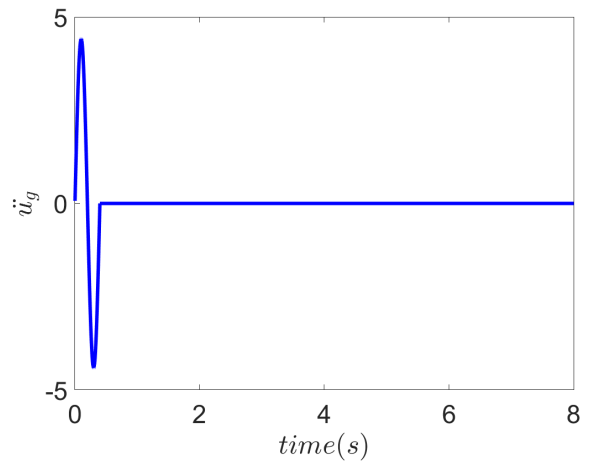
### 3.2.1 Απόκριση προσομοιώματος σε ημιτονοειδή διέγερση της βάσης έδρασής του

Αρχικά δίνεται ημιτονοειδής διέγερση με πλάτος  $0.4g$  και περίοδο  $T = 0.5s$ . Είναι αναμενόμενο για τη βάση, η οποία έχει ραδινότητα  $\tan(a) = 0.45$ , ότι δε θα ξεκινήσει να λικνίζεται. Το άνω σώμα έχει δύο τιμές ραδινότητας  $\tan(a) = 0.25$  για το  $b_{2crit}$  και  $\tan(a) = 0.31$  για το  $b_{2noncrit}$ .

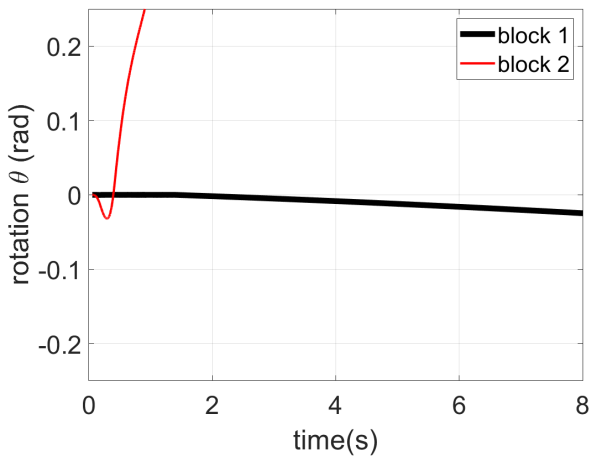
Η ασυμμετρία που δόθηκε στο άνω σώμα, η οποία προκαλεί μικρή οριζόντια μετατόπιση του κέντρου μάζας του, οδηγεί το σύστημα σε ανατροπή από τα  $0.40 g$  σε ημιτονοειδή παλμό.



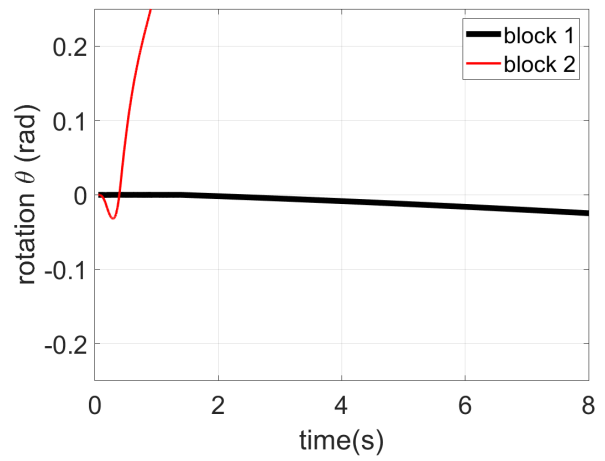
Σχήμα 3.18: Ημιτονοειδής παλμός 0.40g



Σχήμα 3.19: Ημιτονοειδής παλμός 0.45g



Σχήμα 3.20: Ανατροπή του άνω σώματος.

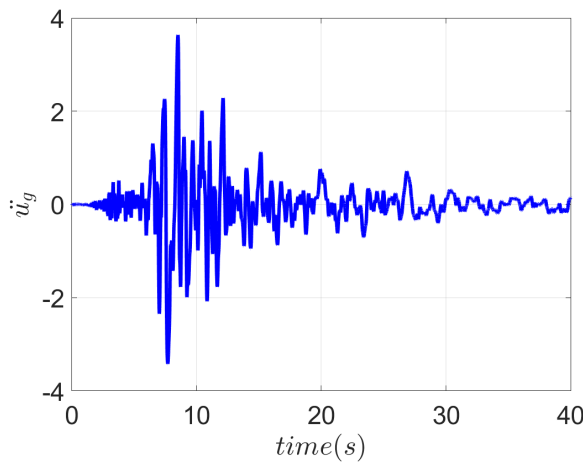


Σχήμα 3.21: Ανατροπή του άνω σώματος.

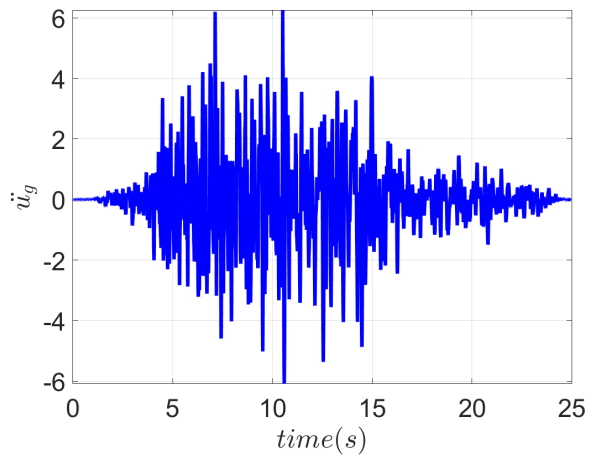
### 3.2.2 Απόκριση προσομοιώματος σε σεισμό

Υπολογίζεται η απόκριση του ασύμμετρου προσομοιώματος σε σεισμό που ασκείται στην οριζόντια διεύθυνση. Η πρώτη σεισμική καταγραφή έχει εξαχθεί από το σταθμό *Hollister South and Pine* με  $PGA = 0.371g$  και η δεύτερη έχει εξαχθεί από το σταθμό *WAHO* για τον ίδιο σεισμό *Loma Prieta*, 1989 με  $PGA = 0.638g$ .

Παρατηρείται ότι ο λικνισμός του άνω σώματος και στις δύο περιπτώσεις ξεκινάει περί τα  $0.30g$ , γεγονός το οποίο αιτιολογείται αν αναλογιστεί κανείς ότι η ραδιότητα του είναι  $0.28$ . Στην περίπτωση, ωστόσο, του ασύμμετρου προσομοιώματος παρατηρούνται μικρότερα πλάτη λικνισμού περί τα  $0.18 \text{ rad}$ , ενώ η κύρια διαφοροποίηση του μοντέλου αφορά στο γεγονός ότι το σύστημα δεν οδηγείται σε ανατροπή σε καμία από τις δύο διεγέρσεις αντίθετα με ότι συνέβη στο συμμετρικό προσομοίωμα.

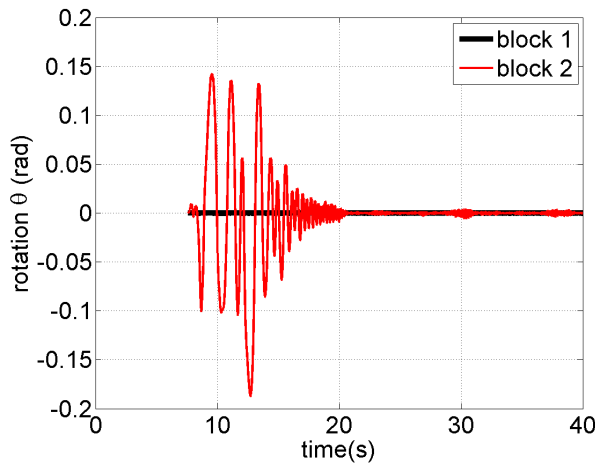


Σχήμα 3.22: Καταγραφή *Hollister South and Pine*.

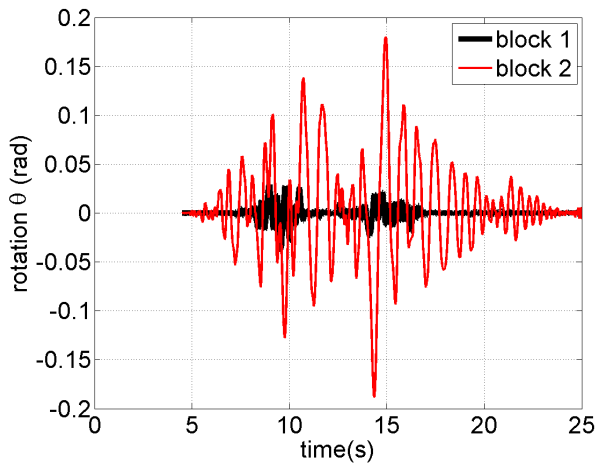


Σχήμα 3.23: Καταγραφή *WAHO*.





Σχήμα 3.24: Ευστάθεια συστήματος.



Σχήμα 3.25: Ευστάθεια συστήματος.

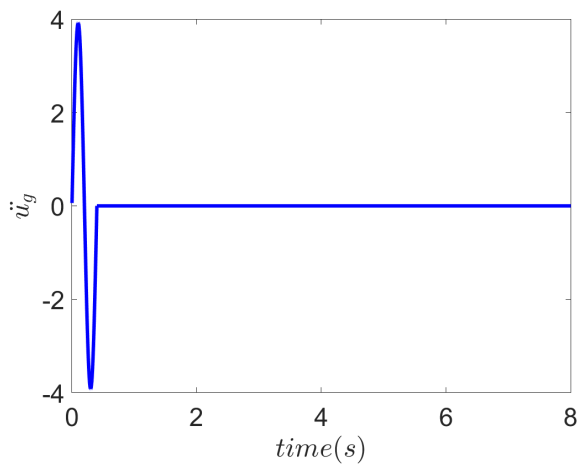
### 3.3 Συμμετρικό προσομοίωμα με σταθερούς συντελεστές απομείωσης

Η ανάλυση που πραγματοποιείται σε αυτή την ενότητα εστιάζει στη συμπεριφορά το εκθέματος. Για αυτό το λόγο δίνονται τρεις διαφορετικές τιμές στο συντελεστή αποκατάστασης του άνω σώματος 0.8, 0.85 και 0.90.

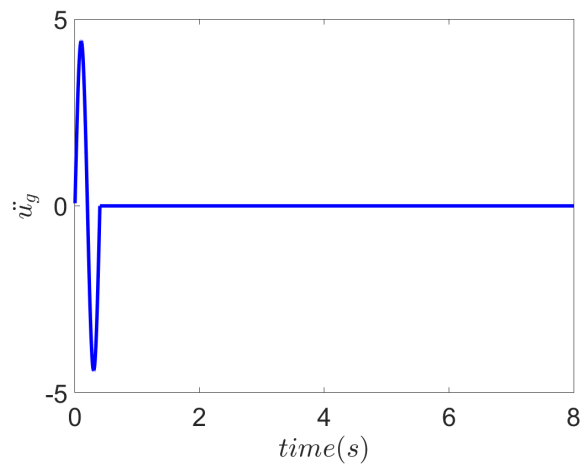
Εξετάζεται η απόκριση του συστήματος και με βάση αυτή την παράμετρο συγκρίνεται η συμπεριφορά του προσομοιώματος σε σχέση με την απόκριση που δίνουν οι σχέσεις του *Psycharis* (1990) [6] για τους συντελεστές απομείωσης σε κάθε στιγμιότυπο.

Με αυτόν τον τρόπο διερευνάται η ευαισθησία του συστήματος σε μεταβολές της τιμής του συντελεστή αποκατάστασης του άνω σώματος και η ορθότητα της προσέγγισης με βάση τη σύγκλιση ή όχι των αποτελεσμάτων.

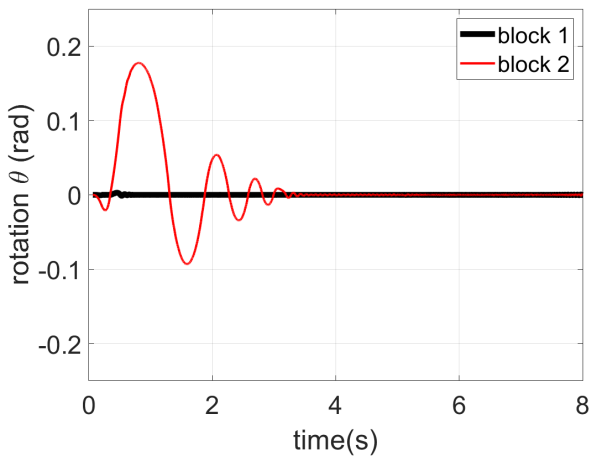
### 3.3.1 Συμμετρικό προσομοίωμα με συντελεστή απομείωσης άνω σώματος 0.8



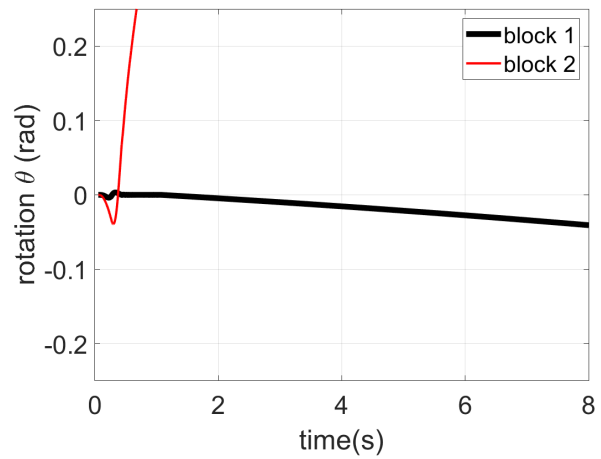
Σχήμα 3.26: Ημιτονοειδής παλμός 0.40g



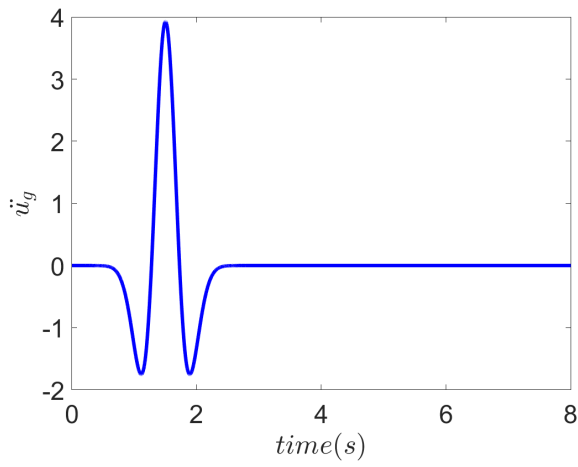
Σχήμα 3.27: Ημιτονοειδής παλμός 0.45g



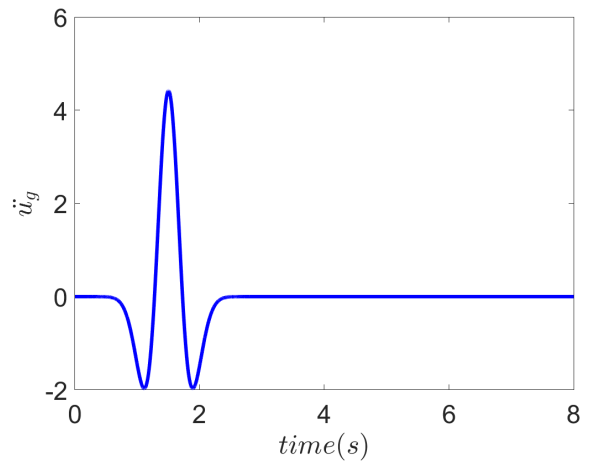
Σχήμα 3.28: Ευστάθεια συστήματος.



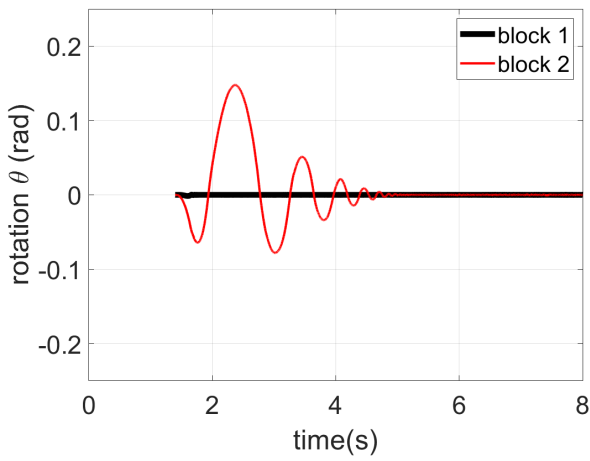
Σχήμα 3.29: Ανατροπή του άνω σώματος.



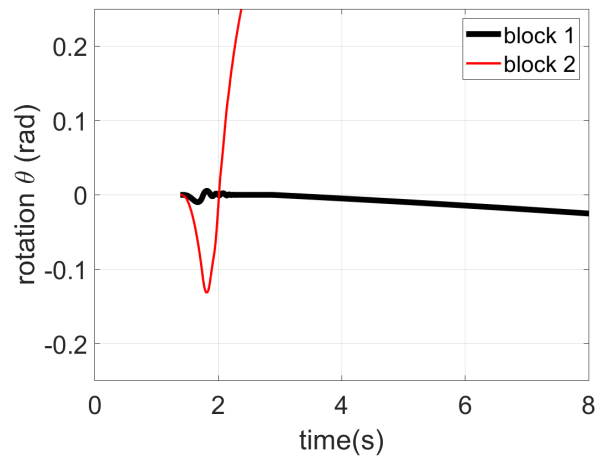
Σχήμα 3.30: *Ricker* παλμός 0.40g



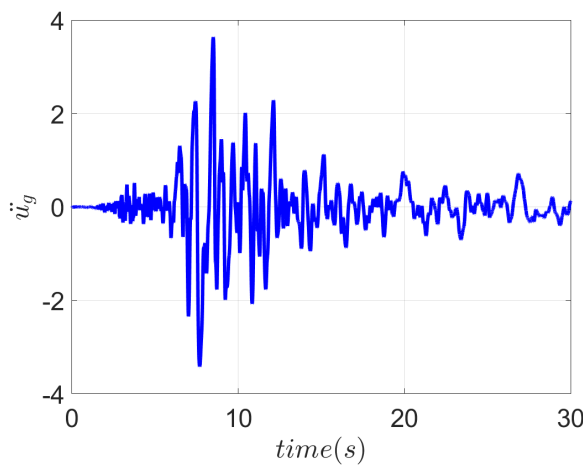
Σχήμα 3.31: *Ricker* παλμός 0.45g



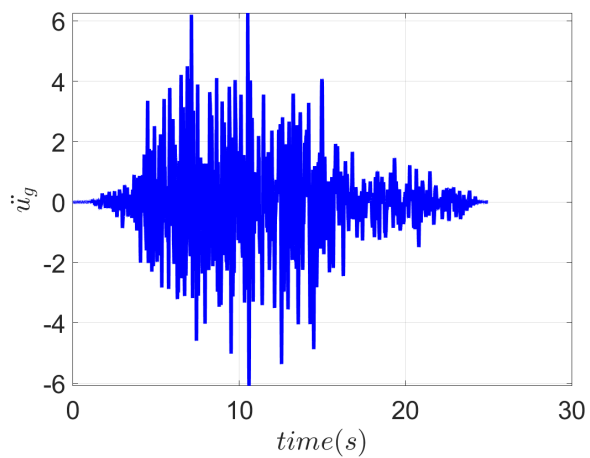
Σχήμα 3.32: Απόκριση σε παλμό *Ricker*.



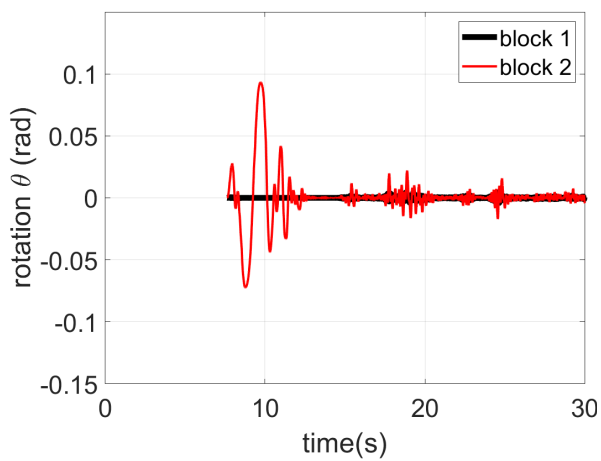
Σχήμα 3.33: Ανατροπή του άνω σώματος.



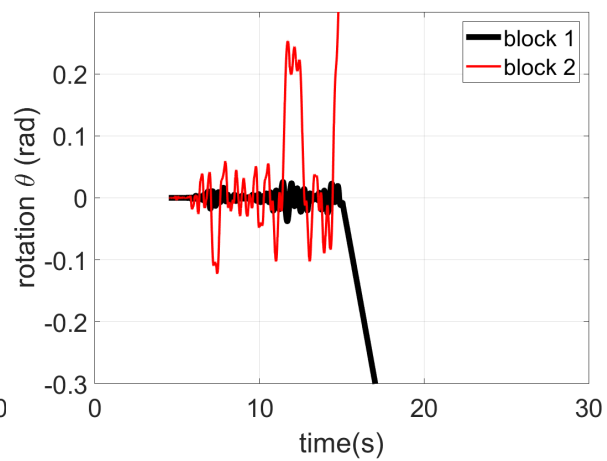
Σχήμα 3.34: Καταγραφή *Hollister South and Pine*.



Σχήμα 3.35: Καταγραφή *WAHO*.

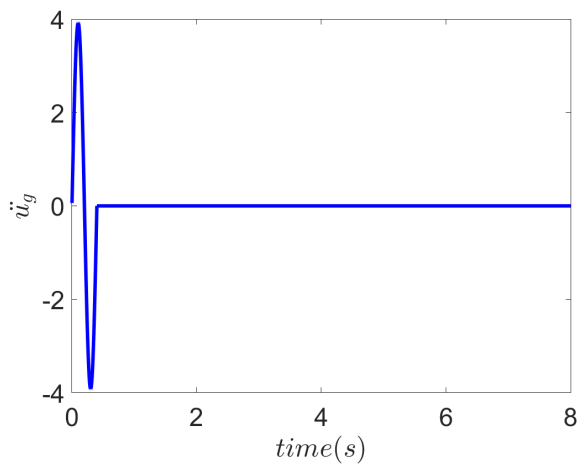


Σχήμα 3.36: Ευστάθεια συστήματος.

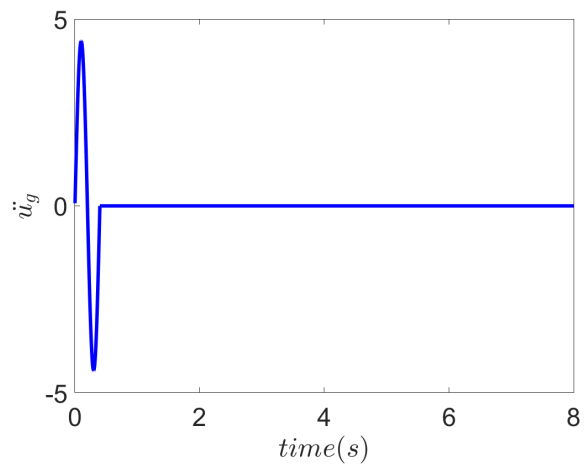


Σχήμα 3.37: Ανατροπή συστήματος.

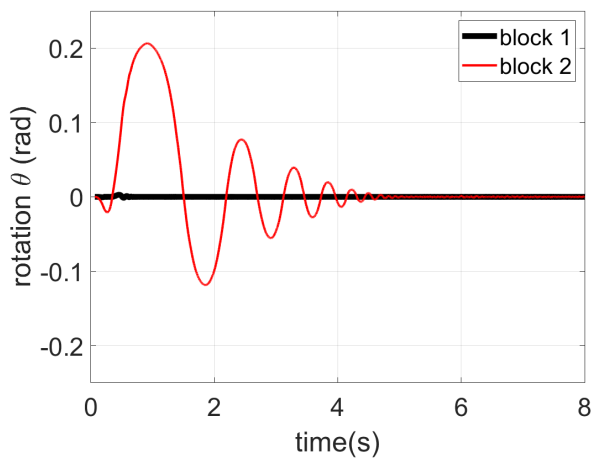
### 3.3.2 Συμμετρικό προσομοίωμα με συντελεστή απομείωσης άνω σώματος 0.85



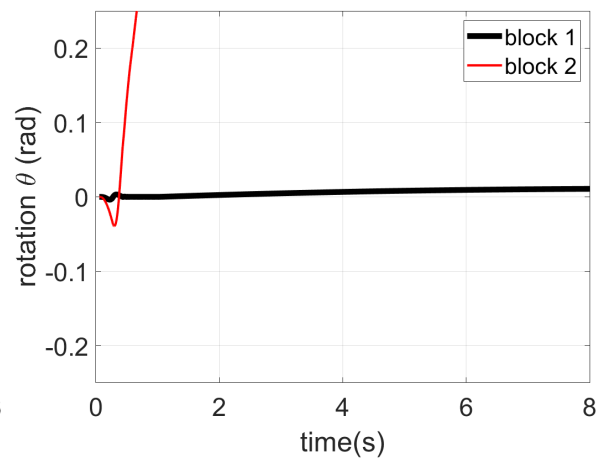
Σχήμα 3.38: Ημιτονοειδής παλμός 0.40g



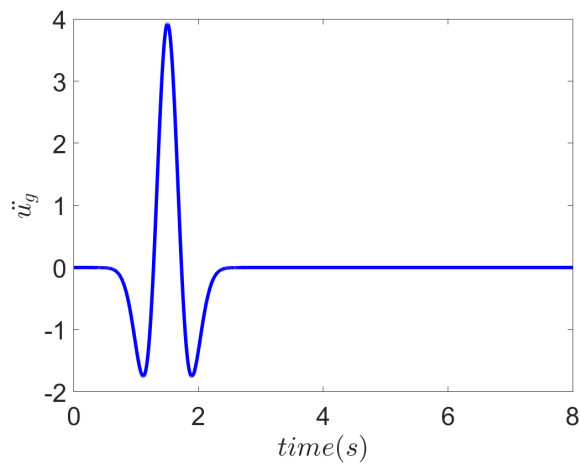
Σχήμα 3.39: Ημιτονοειδής παλμός 0.45g



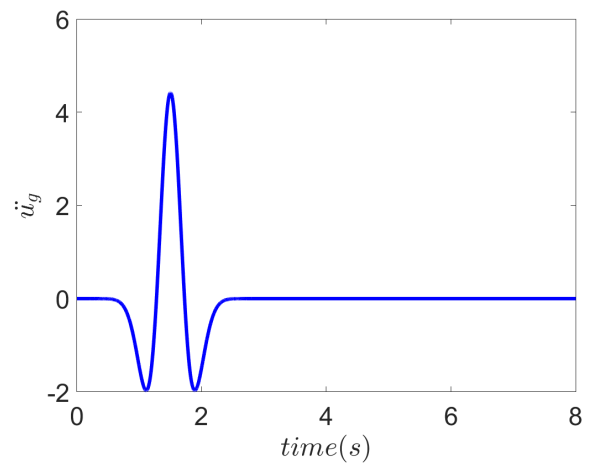
Σχήμα 3.40: Ευστάθεια συστήματος.



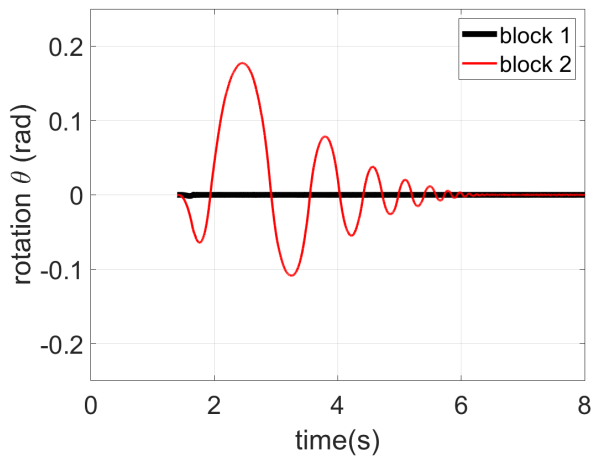
Σχήμα 3.41: Ανατροπή του άνω σώματος.



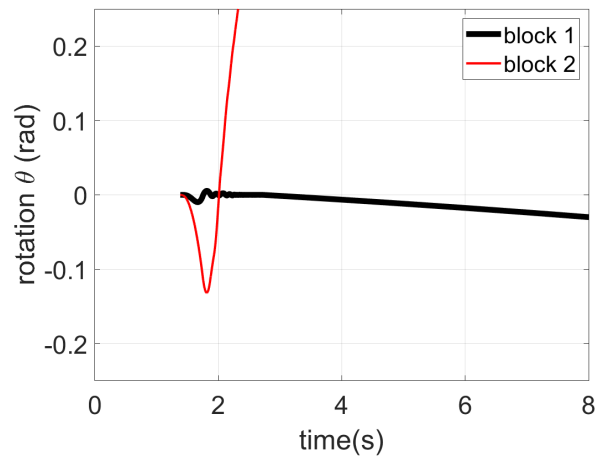
Σχήμα 3.42: *Ricker* παλμός 0.40g



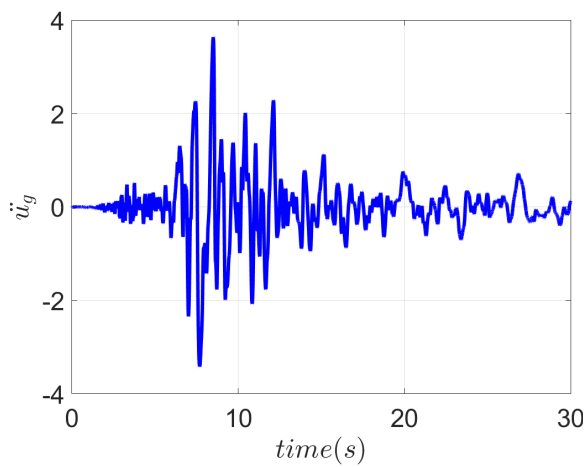
Σχήμα 3.43: *Ricker* παλμός 0.45g



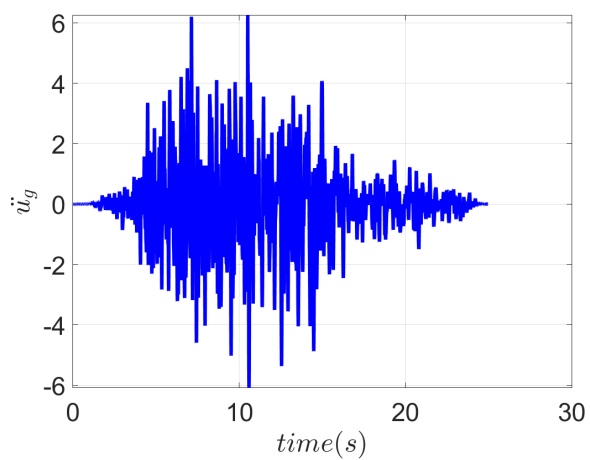
Σχήμα 3.44: Απόκριση σε παλμό *Ricker*.



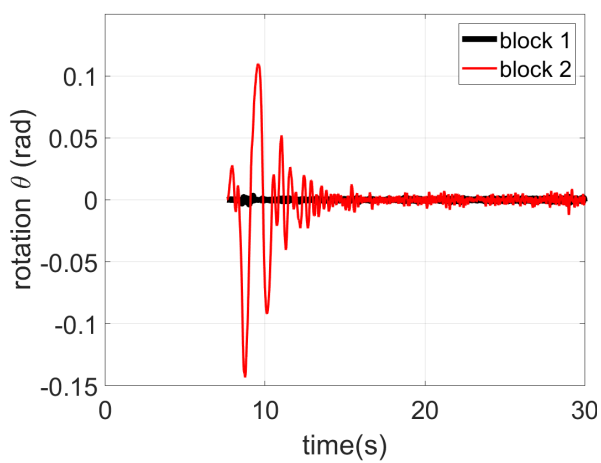
Σχήμα 3.45: Ανατροπή του άνω σώματος.



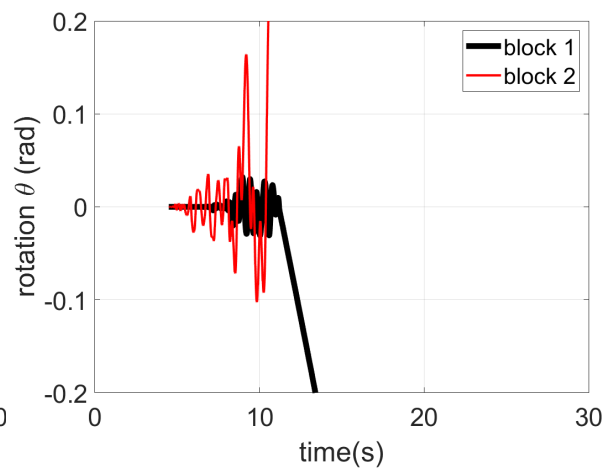
Σχήμα 3.46: Καταγραφή *Hollister South and Pine*.



Σχήμα 3.47: Καταγραφή *WAHO*.

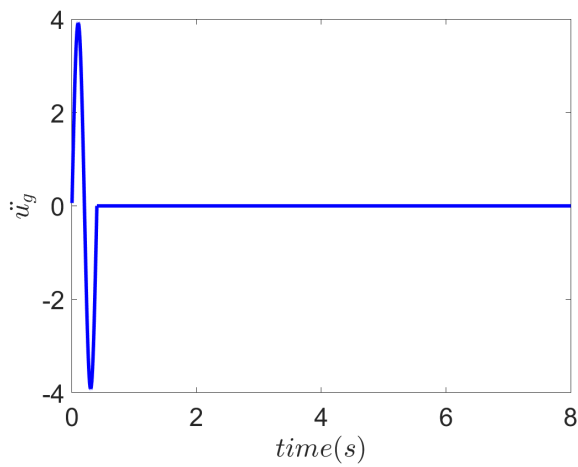


Σχήμα 3.48: Ευστάθεια συστήματος.

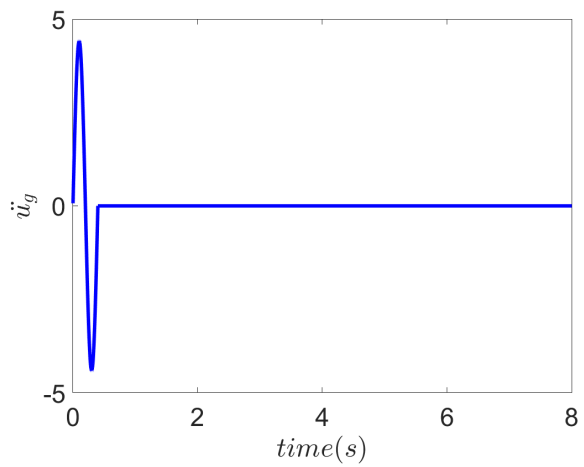


Σχήμα 3.49: Ανατροπή συστήματος.

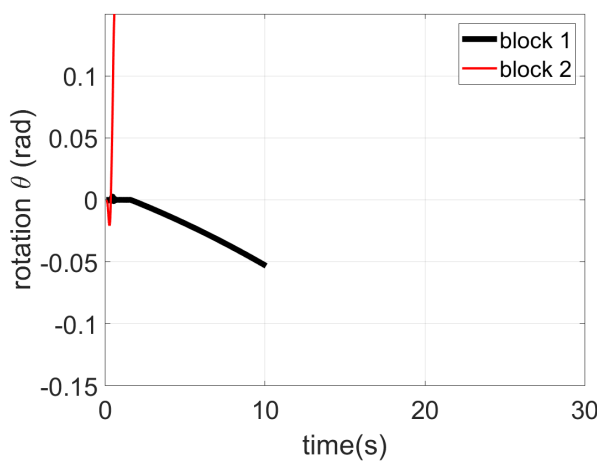
### 3.3.3 Συμμετρικό προσομοίωμα με συντελεστή απομείωσης άνω σώματος 0.90



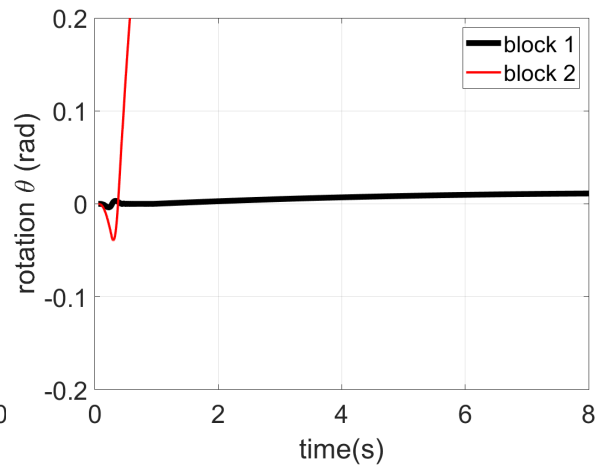
Σχήμα 3.50: Ημιτονοειδής παλμός 0.40g



Σχήμα 3.51: Ημιτονοειδής παλμός 0.45g

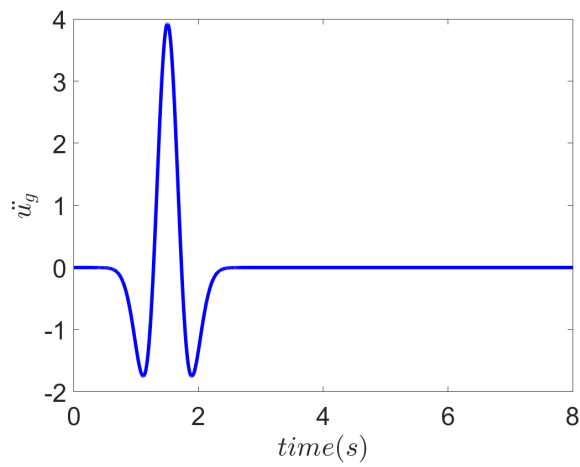


Σχήμα 3.52: Ανατροπή του άνω σώματος.

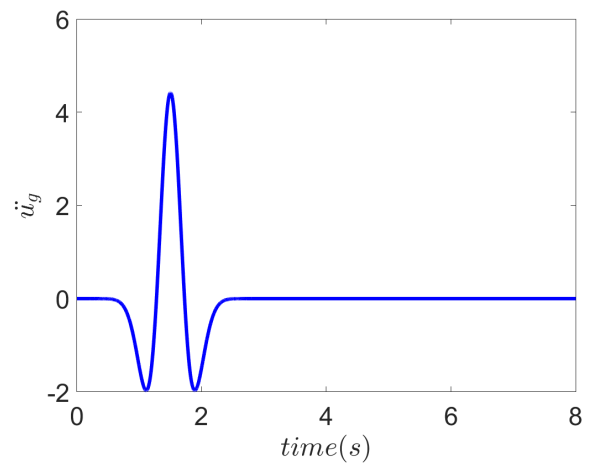


Σχήμα 3.53: Ανατροπή του άνω σώματος.

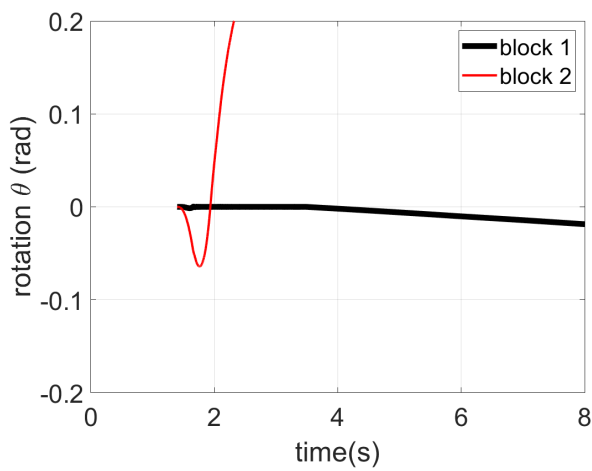




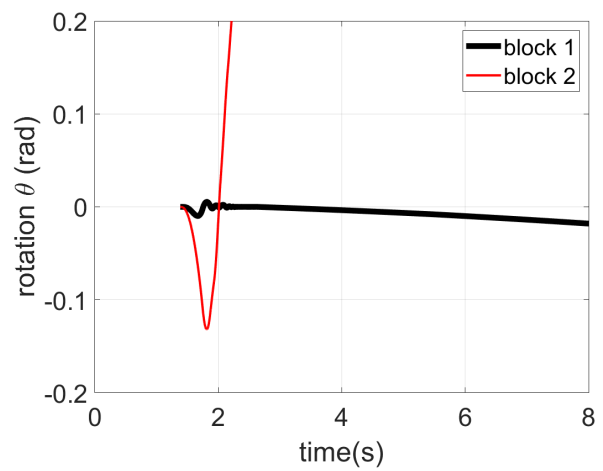
Σχήμα 3.54: *Ricker* παλμός 0.40g



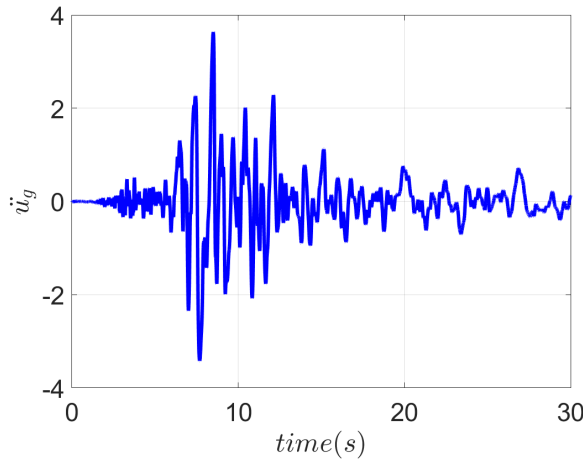
Σχήμα 3.55: *Ricker* παλμός 0.45g



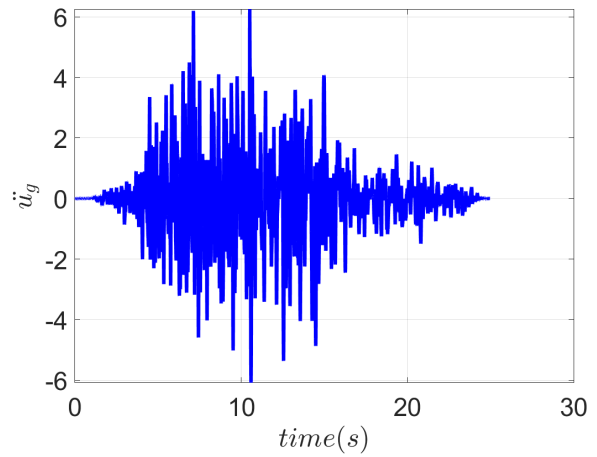
Σχήμα 3.56: Ανατροπή του άνω σώματος.



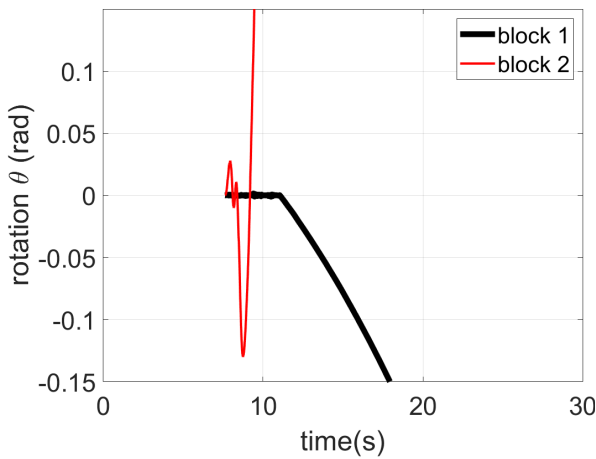
Σχήμα 3.57: Ανατροπή του άνω σώματος.



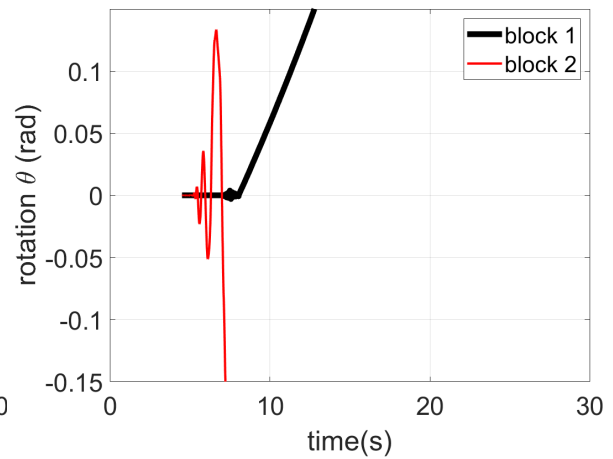
Σχήμα 3.58: Καταγραφή *Hollister South and Pine*.



Σχήμα 3.59: Καταγραφή *WAHO*.



Σχήμα 3.60: Ανατροπή συστήματος.

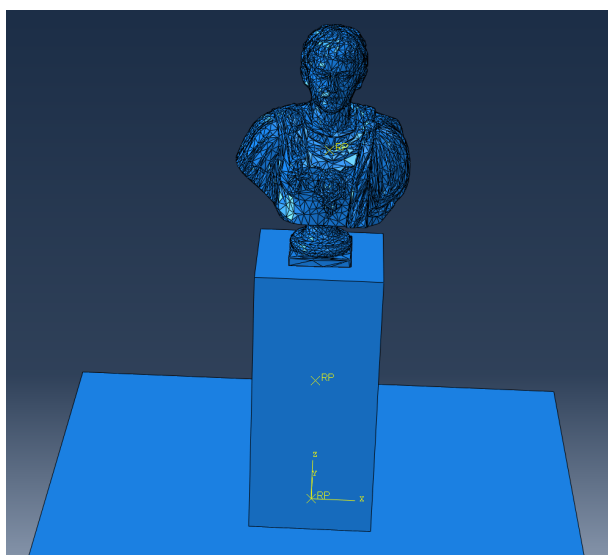


Σχήμα 3.61: Ανατροπή συστήματος.

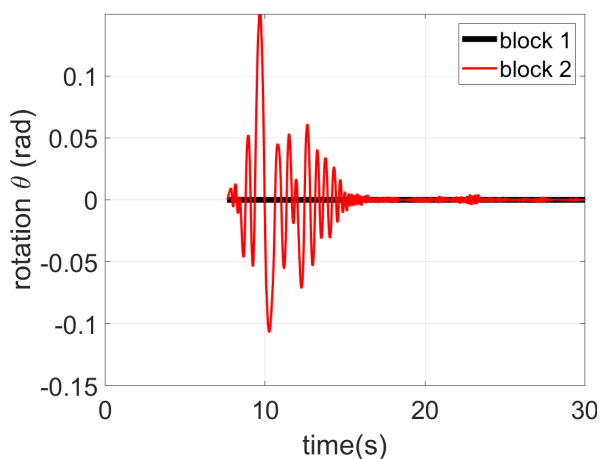
Στην τελευταία περίπτωση ο συντελεστής αποκατάστασης είναι αρκετά υψηλός ώστε να οδηγήσει σε κάθε περίπτωση το σύστημα σε ανατροπή. Όσο πιο χαμηλός είναι ο συντελεστής αποκατάστασης τόσο πιο υψηλός είναι ο ρυθμός απώλειας ενέργειας του συστήματος.

### 3.4 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων

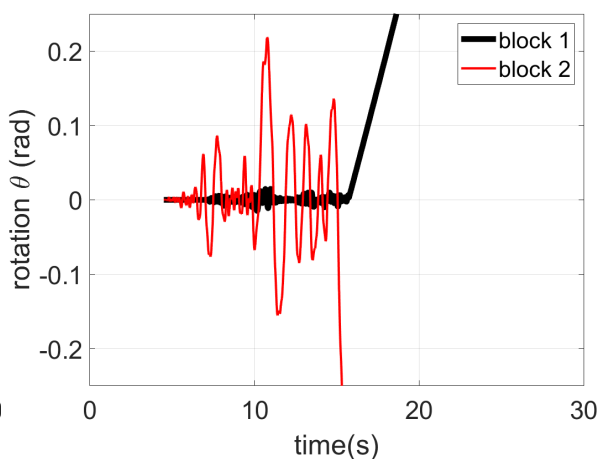
Ως το τελευταίο στάδιο των αναλύσεων εξετάστηκε η απόκριση μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, το οποίο αναπαριστά την προτομή εδραζόμενη στη βάση. Το μοντέλο δόθηκε από τον επιβλέποντα καθηγητή για τις ανάγκες ελέγχου και διασταύρωσης των αποτελεσμάτων από την αναλυτική λύση. Τα Σχ. 3.63 και Σχ. 3.64 παρουσιάζουν τις αποκρίσεις στους δύο σεισμούς που εξετάστηκαν.



Σχήμα 3.62: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων



Σχήμα 3.63: Ευστάθεια συστήματος.



Σχήμα 3.64: Ανατροπή συστήματος.

Στον κάτωθι πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα της απόκρισης των μοντέλων στα δύο επιταχυνσιογράφηματα.

	Καταγραφή <i>Hollister South and Pine</i>	Καταγραφή <i>WAHO</i>
Συμμετρικό προσομοίωμα:	ευστάθεια	ανατροπή
Ασύμμετρο προσομοίωμα:	ευστάθεια	ευστάθεια
Συντελεστής αποκατάστασης: 0.8	ευστάθεια	ανατροπή
Συντελεστής αποκατάστασης: 0.85	ευστάθεια	ανατροπή
Συντελεστής αποκατάστασης: 0.9	ανατροπή	ανατροπή
Πεπερασμένα στοιχεία:	ευστάθεια	ανατροπή

## 4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε μεταξύ άλλων η εγκυρότητα ισοδύναμων λύσεων. Η επίλυση του προβλήματος λικνισμού κρίνεται δυνατή με απλοποιητικές προσεγγίσεις. Το κύριο πλεονέκτημα αφορά στην εξοικονόμηση υπολογιστικού κόστους αλλά και στην εύκολη αντιμετώπιση σωμάτων διαφόρων διαστάσεων. Το *PGA* και το συχνοτικό περιεχόμενο του σεισμού συνιστούν τις σημαντικότερες παραμέτρους για συμμετρικά σώματα. Σε ασύμμετρα σώματα φαίνεται ότι το πρόσημο του επιταχυνσιογραφήματος σε σχέση με την κρίσιμη πλευρά διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην απόκριση. Ωστόσο πρέπει να σημειωθεί ότι δεν κατέστη δυνατό να βρεθεί μια παράμετρος η οποία να κυριαρχεί στην τελική απόκριση. Ακόμη, παρατηρήθηκε κατά το λικνισμό ενός σώματος ένα φαινόμενο κλίμακας το οποίο οδηγεί σε μεγαλύτερη σταθερότητα μεγαλύτερα σε διαστάσεις σώματα σε σύγκριση με μικρότερα σώματα παρόμοιας όμως γεωμετρικής αναλογίας.

Όσον αφορά στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων οι αποκλίσεις στα αποτελέσματα σε σχέση με την αναλυτική λύση χρήζουν βελτίωσης. Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση στις παραμέτρους του προγράμματος (συντελεστής απόσβεσης επαφής, βήμα ολοκλήρωσης, διακριτοποίηση του εκθέματος και της βάσης σε στοιχεία) για τις οποίες ο συντελεστής αποκατάστασης παίρνει την επιθυμητή τιμή και το μοντέλο κρίνεται αξιόπιστο, δηλαδή καμιά παραπάνω μείωση του βήματος ολοκλήρωσης ή πυκνώση της διακριτοποίησης δεν επιφέρει αλλαγές στις υπόλοιπες τιμές. Έγινε αντιληπτό ότι για μία ελάχιστη τιμή του βήματος ολοκλήρωσης, ήταν απαραίτητη η δέσμευση του δοκιμίου ως προς τις στροφές γύρω από τους άξονες του επιπέδου κίνησής του, καθώς παρουσίαζε κίνηση εκτός επιπέδου.

Προς το παρόν φαίνεται ασφαλέστερος ο υπολογισμός απωλειών ενέργειας τη στιγμή της κρούσης σε σύγκριση με τη μέθοδο συνεχούς αποσβεστήρα.

## 5 ΕΥΡΥΤΕΡΟ ΠΕΔΙΟ ΜΕΛΕΤΗΣ

Το πρόβλημα της δυναμικής συμπεριφοράς στερεών σωμάτων σε σεισμό είναι αρκετά πολύπλοκο στην πραγματικότητα και δεν περιορίζεται στο λικνισμό ενός επιπέδου παρά μόνο σε ιδανικές συνθήκες. Ως εκ τούτου, θα έπρεπε κανείς σε μελλοντική έρευνα να λάβει υπόψιν περισσότερα φαινόμενα όπως η ολίσθηση ή η αναπήδηση. Επιπροσθέτως οι γεωμετρικές ατέλειες των διεπιφανειών διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο καθώς και οι παραμορφώσεις της βάσης έδρασης λόγω των διαδοχικών κρούσεων. Σε εύκαμπτα υλικά όπως ο χάλυβας θα έπρεπε να ληφθεί υπόψιν και βαθμός ελευθερίας λόγω κάμψης. Τέλος ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αύξηση του αριθμού λικνιζόμενων σωμάτων.

# Βιβλιογραφία

- [1] Milne J. *Seismic experiments. Transactions of the Seismological Society of Japan 1885*; 8: 1–82.
- [2] Housner HH. *The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. Bulletin of the Seismological Society of America 1963*; 53: 404–417.
- [3] Yim C-S, Chopra A. K., Penzien J. *Rocking response of rigid blocks to earthquakes. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1980*; 8:565-587.
- [4] Diamantopoulos S, Fragiadakis M. *Seismic response assessment of rocking systems using single degree-of-freedom oscillators. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 2019*; 48(7):689–708.
- [5] Spanos PD, Roussis PC, Politis NPA. *Dynamic analysis of stacked rigid blocks. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 2001*; 21:559–578.
- [6] Psycharis I. *Dynamic behavior of rocking two-block assemblies. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1990*; 19:555–575.
- [7] Chatzis MN, García Espinosa M, Needham C, Williams MS. *Energy Loss in Systems of Stacked Rocking Bodies. J. Eng. Mech. 2018*; 144(7): 04018044.
- [8] Anagnostopoulos S., Norman J., Mylonakis G. *Fractal-like overturning maps for stacked rocking blocks with numerical and experimental validation. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 2019*. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2019.04.033>
- [9] Wittich CE, Hutchinson TC, Wood RL, Seracini M, Kuester F. *Characterization of Full-Scale, Human-Form, Culturally Important Statues: Case Study. J. Comput. Civ. Eng. 2015*; 30(3): 05015001.
- [10] Wittich CE, Hutchinson TC. *Shake table tests of unattached, asymmetric, dual-body systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 2017*; 46:1391–1410.
- [11] Gesualdo A, Iannuzzo A, Monaco M, Penta F. *Rocking of a rigid block freestanding on a flat pedestal. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics and Engineering) 2018*; 19(5):331–345.

- [12] Ishiyama Y. (1982). *Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earth-quake excitations*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10, 635-650.
- [13] Vlachos N., Diamantopoulos S., Fragiadakis M. (2019). Seismic response assessment of artefacts freestanding on a solid pedestal, 4th Panhellenic Conference on Earthquake Engineering and Engineering Seismology, 5-7 September 2019. ([http://library.tee.gr/digital/m2658/m2658\\_vlachos.pdf](http://library.tee.gr/digital/m2658/m2658_vlachos.pdf))
- [14] Diamantopoulos S., Fragiadakis M. (2017). Simple models for the seismic response of rigid or flexible blocks, 6th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, COMPDYN 2017, Rhodes, Greece, 15-17 June 2017. (<https://2017.compdyn.org/proceedings/pdf/18500.pdf>)
- [15] Spyridon G. Diamantopoulos (2017). Seismic Response Assessment of Rigid and Flexible Rocking Bodies using Simple Finite Element Models. Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο ( [https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/44989/MSc\\_Thesis\\_Diamantopoulos\\_Spyridon.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/44989/MSc_Thesis_Diamantopoulos_Spyridon.pdf?sequence=1&isAllowed=y))
- [16] ΠΕΤΑΛΑΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ (2012). Αριθμητική διερεύνηση της λικνιστικής απόκρισης συμπαγών σωμάτων. Διπλωματική εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
- [17] OpenSEES *Open System for Earthquake Engineering Simulations*.  
opensees.berkeley.edu
- [18] MATLAB Version 2015b. *The Language of Technical Computing*.