



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου & Υπολογιστών

**Σθεναρός Έλεγχος Προκαθορισμένης Ποιότητας
και Προσαρμοστική Μάθηση της διαμήκους
δυναμικής Μη-επανδρωμένων Αεροσκαφών
σταθερής πτέρυγας**

Διπλωματική Εργασία
Σπυρίδων Τζεράνης

Επιβλέπων Καθηγητής
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβρης 2020



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου & Υπολογιστών

**Σθεναρός Έλεγχος Προκαθορισμένης Ποιότητας
και Προσαρμοστική Μάθηση της διαμήκους
δυναμικής Μη-επανδρωμένων Αεροσκαφών
σταθερής πτέρυγας**

Διπλωματική Εργασία
Σπυρίδων Τζεράνης

Επιβλέπων Καθηγητής
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 21^η Οκτωβρίου 2020

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Λέκτορας Ε.Μ.Π. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβρης 2020

.....

Σπυρίδων Τζεράνης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Σπυρίδων Τζεράνης, 2020

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Κατά την πάροδο των τελευταίων ετών, μεγάλο μέρος της παγκόσμιας ακαδημαϊκής, αλλά και επιχειρηματικής κοινότητας αφιερώνει πόρους για την μελέτη και κατασκευή αυτόνομων συστημάτων. Η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει στα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα (Unmanned Aerial Vehicles-UAVs), οι εφαρμογές των οποίων είναι πλέον ποικίλες. Ενδεικτικά αναφέρονται η χαρτογράφηση δυσπρόσιτων περιοχών, η μετεωρολογία, η αεροφωτογραφία, η αναζήτηση/διάσωση και η μεταφορά εμπορευμάτων.

Εν γένει, η ακριβής μοντελοποίηση εναέριων συστημάτων αλλά και του περιβάλλοντος λειτουργίας τους αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα, αλλά καθώς οι απαιτήσεις ολοένα και αυξάνονται, καθίσταται επιτακτικό. Η έννοια της μηχανικής μάθησης απασχολεί την επιστημονική κοινότητα για πάνω από μισό αιώνα και έχει χρησιμοποιηθεί στην θεωρία του αυτόματου ελέγχου από πολλές εργασίες που ανέπτυξαν μεθόδους μάθησης για εκτίμηση παραμέτρων ή για προσέγγιση μη γραμμικών συναρτήσεων εμπλεκόμενες σε άγνωστη δυναμική συστημάτων. Ο προσαρμοστικός έλεγχος, παρέχοντας βελτιωμένη απόδοση σε συνθήκες αβεβαιότητας των μοντέλων, έχει αναδυθεί σε μια προσπάθεια για ταυτόχρονη αναγνώριση και έλεγχο συστημάτων. Παρ'όλα τα σημαντικά αποτελέσματα που έχουν επιτευχθεί στον προσαρμοστικό έλεγχο, το πρόβλημα της επιτυχούς μάθησης και ελέγχου άγνωστης δυναμικής συστημάτων σε ένα προκαθορισμένο περιβάλλον λειτουργίας, παραμένει ακόμα ανοιχτό στο πεδίο της μη γραμμικής αναγνώρισης συστημάτων. Επιπλέον, ο προσαρμοστικός έλεγχος δεν αποδίδει αποτελεσματικά σε περιπτώσεις ισχυρά συζευγμένων, μη γραμμικών συστημάτων, όπως τα UAVs. Όμως, ένα γρήγορο προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου είναι απαραίτητο την σύγχρονη εποχή, όπου πλήθος εργοστασιακών αλλά και κατά παραγγελία κατασκευασμένων UAVs είναι σε πτήση κάθε μέρα, το καθένα με διαφορετικές παραμέτρους.

Κύριος στόχος της παρούσας εργασίας είναι η online αναγνώριση των μη γραμμικών συναρτήσεων που εμπλέκονται στην μη γραμμική διαμήκη δυναμική των UAVs, αλλά και η ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας ελέγχου που δεν βασίζεται στην γνώση του μοντέλου, ικανή να εφαρμοστεί σε οχήματα με διαφορετικές παραμέτρους το καθένα. Βασικά στοιχεία αυτής της έρευνας αποτελούν τα Radial Basis Function Νευρωνικά Δίκτυα, που είναι κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για καθολική προσέγγιση συναρτήσεων, η πρόσφατα ανεπτυγμένη Dynamic Regression Extension and Mixing τεχνική, που αποτελεί μια μέθοδο σχεδίασης εκτιμητών παραμέτρων με βελτιωμένη απόδοση σε σχέση με κλασικούς εκτιμητές, αλλά και η Prescribed Performance Control μεθοδολογία, που επιτρέπει παρακολούθηση τροχιάς με προκαθορισμένη ποιότητα, ακόμα και υπό πλήρη άγνοια της δυναμικής του συστήματος.

Λέξεις-Κλειδιά

Μη-επανδρωμένα Αεροσκάφη, Radial Basis Function Νευρωνικά Δίκτυα, Διαρκής Διέγερση, Dynamic Regression Extension and Mixing, Εκτίμηση Παραμέτρων, Αεροδυναμικά Μοντέλα και Έλεγχος.

Abstract

During the last years, a big part of the academic and industrial community, is devoting resources for the research and construction of autonomous systems. This study focuses on Unmanned Aerial Vehicles(UAVs), the applications of which are now various. To name a few, the cartography of remote areas, meteorology, aerophotography, search and rescue and cargo transportation.

In general, accurate modelling of aerial vehicles and of the environment they operate is a difficult task, but while demands are growing, has become imperative. The concept of learning concerns the scientific community for over half a century and has been approached in the control literature by many works that developed learning methods to estimate parameters or approximate nonlinear functions involved in unknown system dynamics. Towards this direction, adaptive control, which is an established methodology, providing improved performance under model uncertainty, has emerged in an attempt to simultaneously identify and control the system dynamics. Despite the significant results that have been achieved so far on adaptive control, the problem of successful learning and control of unknown system dynamics in a certain pre-defined domain of operation remains still open in nonlinear system identification. Moreover, adaptive control does not perform satisfactorily under strongly coupled, nonlinear systems, such as UAVs. Still, a quickly adaptable control scheme is needed in a modern world, where a multitude of factory- and custom-built UAVs take flight each day, each with slightly different model parameters.

Main goal of this study is the online identification of the nonlinear functions involved in the longitudinal UAV dynamics and the development of a control scheme that is not based in the knowledge of the model, capable of being applied to vehicles with different parameters. The basic components of this study comprise RBF Neural Networks, which are appropriate mathematical models for universal function approximation, alongside with the recently developed Dynamic Regression Extension and Mixing(DREM) technique, a new procedure for designing parameter estimators with enhanced performance, as well as a novel control design for the longitudinal UAV dynamics utilizing the Prescribed Performance Control(PPC) methodology, which enables trajectory tracking with predetermined quality even under complete lack of knowledge of the system dynamics.

Keywords

UAVs, Radial Basis Function Neural Networks, Persistency of Excitation, Dynamic Regression Extension and Mixing Technique, Parameter Identification, Aerodynamic Modelling and Control.

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με τη βοήθειά τους έπαιξαν ένα σημαντικό ρόλο στην ολοκλήρωση αυτής της διαδρομής. Πρώτα, την οικογένειά μου για την αγάπη, την στήριξη, την υπομονή και τις θυσίες τους. Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Κυριακόπουλο για την πρόσβαση στις υποδομές του Control Systems Lab και για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο, καθώς και τον μετα-διδακτορικό ερευνητή Χ.Μπεχλιουλή για την πολύτιμη καθοδήγηση και εποπτεία του κατά την διάρκεια όλων αυτών των μηνών, η συμβολή του στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας ήταν μεγάλης αξίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τις φίλες και τους φίλους μου για τα υπέροχα χρόνια που περάσαμε παρέα και για την αμέριστη στήριξή τους στις δύσκολες στιγμές.

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Εισαγωγή | 17 |
| 2 | Βασικές Έννοιες Αεροπλοΐας | 21 |
| 2.1 | Πλαίσια Συντεταγμένων | 21 |
| 2.1.1 | Μητρώα Περιστροφής και Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων | 23 |
| 2.2 | Το διάλυμα κατάστασης και οι μεταβλητές ελέγχου | 24 |
| 2.3 | Ατμοσφαιρικές Διαταραχές | 25 |
| 2.3.1 | Μοντελοποίηση του Ανέμου | 27 |
| 3 | Εξισώσεις Κίνησης | 29 |
| 3.1 | Κινηματικές Εξισώσεις | 29 |
| 3.2 | Δυναμικές Εξισώσεις | 30 |
| 3.2.1 | Μεταφορική Κίνηση | 30 |
| 3.2.2 | Περιστροφική Κίνηση | 31 |
| 3.3 | Ανάλυση Δυνάμεων και Ροπών | 32 |
| 3.3.1 | Βαρυτικές Δυνάμεις | 32 |
| 3.3.2 | Αεροδυναμικές Δυνάμεις και Ροπές | 33 |
| 3.3.3 | Δυνάμεις και Ροπές Έλικας | 36 |
| 3.4 | Συγκεντρωτικές Εξισώσεις Κινηματικού και Δυναμικού Μοντέλου | 37 |
| 4 | Radial Basis Function Νευρωνικά Δίκτυα & Αναγνώριση Παραμέτρων | 39 |
| 4.1 | Δομή RBF Νευρωνικού Δικτύου | 39 |
| 4.1.1 | Οι συναρτήσεις Ενεργοποίησης | 40 |
| 4.1.2 | Τα κέντρα και οι διασπορές των συναρτήσεων | 41 |
| 4.1.3 | Προσδιορισμός των Βέλτιστων Βαρών | 42 |
| 4.2 | Αναγνώριση Παραμέτρων | 43 |
| 4.3 | Διαρκής Διέγερση - Persistency of Excitation | 43 |
| 4.3.1 | Διαρκής Διέγερση σε RBF δίκτυα | 44 |
| 5 | Σχήμα Ελέγχου Αεροσκάφους | 47 |
| 5.1 | Προκαθορισμένης Ποιότητας Έλεγχος - Prescribed Performance Control | 47 |
| 5.1.1 | Δυναμικά Συστήματα | 47 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.1.2 | Προκαθορισμένη Ποιότητα - Συναρτήσεις Απόδοσης | 48 |
| 5.1.3 | Διατύπωση του Γενικού Προβλήματος και Υποθέσεις | 49 |
| 5.1.4 | Μεθοδολογία Ελέγχου | 49 |
| 5.1.5 | Ανάλυση Ευστάθειας | 50 |
| 5.2 | Εφαρμογή στην διαμήκη δυναμική του Αεροσκάφους | 54 |
| 5.2.1 | Μοντέλο εκφρασμένο στο πλαίσιο Ευστάθειας | 54 |
| 5.2.2 | Μεθοδολογία και Στόχος Ελέγχου | 55 |
| 5.2.3 | Ανάλυση Ευστάθειας | 57 |
| 5.3 | Αισθητηριακό Σύστημα και Εκτίμηση Κατάστασης | 58 |
| 5.3.1 | Οι Αισθητήρες | 59 |
| 5.3.2 | Εκτίμηση Κατάστασης αντιστρέφοντας Μοντέλα Αισθητήρων | 60 |
| 5.3.3 | Εκτίμηση Κατάστασης με Extended Kalman Filter | 61 |
| 5.4 | Αποτελέσματα Προσομοιώσεων | 62 |
| 5.4.1 | Η ιδανική περίπτωση - Ανατροφοδότηση πραγματικής κατάστασης | 62 |
| 5.4.2 | Ευρωστία σε θόρυβο μετρήσεων και εξωτερικές διαταραχές | 64 |
| 5.4.3 | Σύγκριση με ελεγκτή έπειτα απο γραμμικοποίηση του μοντέλου | 65 |
| 6 | Online Σχήμα Αναγνώρισης Παραμέτρων | 69 |
| 6.1 | Dynamic Regression Extension and Mixing | 69 |
| 6.2 | Μη Γραμμικές Συναρτήσεις Προς Αναγνώριση | 71 |
| 6.2.1 | Off-line Διαδικασία | 71 |
| 6.3 | Τελική Δομή Online Αναγνώρισης Παραμέτρων | 72 |
| 6.4 | Αποτελέσματα Προσομοιώσεων | 73 |
| 6.4.1 | Η ιδανική περίπτωση | 73 |
| 6.4.2 | Η επίδραση του θορύβου στη διαδικασία αναγνώρισης | 75 |
| 6.5 | Η επίδραση διάφορων παραμέτρων στο σχήμα αναγνώρισης | 78 |
| 6.5.1 | Τα Γ.Χ.Α φίλτρα της τεχνικής DREM | 78 |
| 6.5.2 | Τα κέρδη προσαρμογής | 81 |
| 6.5.3 | Το σφάλμα προσέγγισης του Νευρωνικού Δικτύου | 81 |
| 6.5.4 | Οι παράμετροι του Νευρωνικού Δικτύου | 82 |
| 7 | Επίλογος και Μελλοντική Εργασία | 83 |
| | Βιβλιογραφία | 85 |

Λίστα Σχημάτων

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | North-East-Down Reference Frame | 22 |
| 2.2 | Body Frame | 22 |
| 2.3 | Stability Frame | 22 |
| 2.4 | Wind Frame | 23 |
| 2.5 | Control Surfaces | 24 |
| 2.6 | Wind Triangle | 26 |
| 2.7 | Flight-Path Angle γ και Course Angle χ | 26 |
| 2.8 | Οι τιμές των παραμέτρων για τις Dryden συναρτήσεις μεταφοράς ανάλογα το υψόμετρο και την ένταση. | 27 |
| 2.9 | Η συνολική αρχιτεκτονική για την μοντελοποίηση του ανέμου | 28 |
| 3.1 | Κατανομή Πίεσης | 33 |
| 3.2 | Longitudinal Plane | 34 |
| 3.3 | Το φαινόμενο stall | 35 |
| 3.4 | Οι συντελεστές Lift & Drag συναρτήσει της γωνίας προσβολής | 35 |
| 4.1 | Η δομή ενός RBF Νευρωνικού Δικτύου | 40 |
| 4.2 | Οι πιο συνήθεις ακτινικές συναρτήσεις | 41 |
| 4.3 | Εικονική Αναπαράσταση της PE ιδιότητας για RBF με κέντρα $c_i, i = 1, 2, 3$. [3] | 45 |
| 5.1 | Παρακολούθηση σε Ταχύτητα Αέρος και Ύψος με ημιτονοειδείς επιθυμητές τροχίες $V_d = 50 + 5 \sin 2\pi 0.01t$, $h_d = 100 + 100 \sin 2\pi 0.01t$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες | 63 |
| 5.2 | Οι υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος και οι είσοδοι ελέγχου σε ημιτονοειδή τροχιά | 63 |
| 5.3 | Η εξέλιξη των σφαλμάτων μέσα στα όρια των συναρτήσεων απόδοσης σε ημιτονοειδή τροχιά | 64 |
| 5.4 | Διατήρηση σταθερού ύψους και ταχύτητας | 64 |
| 5.5 | Οι υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος και οι είσοδοι ελέγχου με σταθερή ταχύτητα και ύψος | 65 |
| 5.6 | Η εξέλιξη των σφαλμάτων μέσα στα όρια των συναρτήσεων απόδοσης με σταθερή ταχύτητα και ύψος | 65 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.7 | Παρακολούθηση σε Ταχύτητα Αέρος και Ύψος με ημιτονοειδείς επιθυμητές τροχιές $V_d = 35 + 5 \sin 2\pi 0.01t$, $h_d = 100 + 100 \sin 2\pi 0.01t$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες παρουσία θορύβου και διαταραχών | 66 |
| 5.8 | Οι υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος και οι είσοδοι ελέγχου σε ημιτονοειδή τροχιά παρουσία θορύβου και διαταραχών | 66 |
| 5.9 | Η εξέλιξη των σφαλμάτων μέσα στα όρια των συναρτήσεων απόδοσης σε ημιτονοειδή τροχιά παρουσία θορύβου και διαταραχών | 67 |
| 5.10 | Η απόκριση του βασισμένου στο μοντέλου ελεγκτή σε μια αργή ημιτονοειδή τροχιά | 67 |
| 5.11 | Η απόκριση του βασισμένου στο μοντέλου ελεγκτή σε μια γρήγορη ημιτονοειδή τροχιά | 68 |
| 5.12 | Η υπεροχή του προτεινόμενου ελεγκτή σε μια γρήγορη τροχιά | 68 |
| 6.1 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_V(x)$ | 74 |
| 6.2 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_V(x)$ | 75 |
| 6.3 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_q(x)$ | 76 |
| 6.4 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_q(x)$ | 76 |
| 6.5 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_\gamma(x)$ | 77 |
| 6.6 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_\gamma(x)$ | 77 |
| 6.7 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_V(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου | 78 |
| 6.8 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_V(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου | 78 |
| 6.9 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_q(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου | 79 |
| 6.10 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_q(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου | 79 |
| 6.11 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_\gamma(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου | 80 |
| 6.12 | Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_\gamma(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου | 80 |

Λίστα Πινάκων

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Διάνυσμα Κατάστασης | 25 |
| 2.2 | Διάνυσμα Ελέγχου | 25 |
| 6.1 | Οι παράμετροι για την προσέγγιση της δυναμικής της ταχύτητας αέρος | 75 |
| 6.2 | Οι παράμετροι για την προσέγγιση της δυναμικής της γωνιακής ταχύτητας | 77 |
| 6.3 | Οι παράμετροι για την προσέγγιση της δυναμικής της ταχύτητας αέρος υπό την παρουσία θορύβου | 81 |
| 6.4 | Οι παράμετροι για την προσέγγιση της δυναμικής της γωνιακής ταχύτητας υπό την παρουσία θορύβου | 81 |

1

Εισαγωγή

Κατά την πάροδο των τελευταίων ετών, μεγάλο μέρος της παγκόσμιας ακαδημαϊκής, αλλά και επιχειρηματικής κοινότητας αφιερώνει πόρους για την μελέτη και κατασκευή αυτόνομων συστημάτων. Η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει στα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα (Unmanned Aerial Vehicles-UAVs), οι εφαρμογές των οποίων είναι πλέον ποικίλες. Ενδεικτικά αναφέρονται η χαρτογράφηση δυσπρόσιτων περιοχών, η μετεωρολογία, η αεροφωτογραφία, η αναζήτηση/διάσωση, η μεταφορά εμπορευμάτων μέχρι και η απλή ψυχαγωγία.

Τα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

1. Με σταθερές πτέρυγες (fixed-wing), όπως τα αεροπλάνα
2. Με έλικες (quadcopter,hexacopter, κλπ), όπως τα ελικόπτερα

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με μικρής/μεσαίας κλίμακας σταθερής πτέρυγας εναέρια οχήματα. Οι αρχιτεκτονικές αυτές είναι πολύ δημοφιλείς, με τα βασικά τους πλεονεκτήματα να είναι:

1. Η βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά ακόμα και κατά τη διάρκεια περίπλοκων ελιγμών.
2. Η δυνατότητα μεταφοράς αυξημένου ωφέλιμου φορτίου.
3. Η αρκετά μεγαλύτερη εμβέλεια σε σχέση με άλλες αρχιτεκτονικές.
4. Η δυνατότητα ενσωμάτωσης εξελιγμένων αισθητηριακών συστημάτων.

Καθώς οι απαιτήσεις αυξάνουν, η ανάγκη για μοντελοποίηση, αλλά και για δημιουργία προσομοιωτών υψηλής ακρίβειας και ελεγκτών υψηλών προδιαγραφών φαντάζει ολοένα και πιο επιτακτική. Τα παραπάνω όμως βασίζονται άμεσα στην ακρίβεια και προβλεψιμότητα των εκτιμώμενων μοντέλων της δυναμικής συμπεριφοράς της κάθε πλατφόρμας. Παρ'όλα αυτά όμως, οι περιορισμοί κόστους, χρόνου και πόρων καθιστούν την χρήση Αεροσύραγγας (wind-tunnel tests) και άλλων μεθόδων για τον προσδιορισμό διάφορων αεροδυναμικών παραγόντων απαγορευτική για πολλές ερευνητικές ομάδες. Πιο συγκεκριμένα, στο Control Systems Lab, έγινε μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα προσέγγιση για

εκτίμηση του δυναμικού μοντέλου της πλατφόρμας UnATRaP (Unmanned Aerial Testbed for Rapid Prototyping) από real-time δεδομένα πτήσης [1].

Ενώ στην παραπάνω εργασία έγινε μια προσπάθεια για εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών, το σύνολο των οποίων ονομάζονται παράγωγοι ευστάθειας και ελέγχου (stability & control derivatives), θεωρώντας προσεγγιστικά γνωστή την δομή των συναρτήσεων στις οποίες εμπλέκονται οι συντελεστές αυτοί, στην παρούσα μελέτη εστιάζουμε και αναλύουμε το πρόβλημα υπό μια διαφορετική οπτική γωνία. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τελείως άγνωστη την δομή των συναρτήσεων αυτών, και υποθέτουμε απλά ότι το σύστημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1.1)$$

όπου x η κατάσταση του συστήματος και u οι μεταβλητές ελέγχου.

Τα παραπάνω συστήματα ονομάζονται affine (linear) ως προς τις μεταβλητές ελέγχου. Έτσι, χρησιμοποιούμε Radial Basis Function Νευρωνικά Δίκτυα (Radial Basis Function Neural Networks-RBF-NNs), τα οποία είναι κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για μη γραμμική προσέγγιση συναρτήσεων, προκειμένου να προσεγγίσουμε όσο καλύτερα γίνεται τις μη γραμμικές συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ που εμπλέκονται στην διαμήκη δυναμική των UAVs. Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιείται εκτός σύνδεσης(offline) και βασίζεται σε ταίριασμα(fitting) των συναρτήσεων έπειτα απο εκπαίδευση του δικτύου με ζευγάρια εισόδων/εξόδων. Με τον όρο offline στην παραπάνω διαδικασία εννοείται ότι γίνεται για σκοπούς επαλήθευσης προκειμένου να αποκτήσουμε κάποιες ονομαστικές(nominal) τιμές για τις παραμέτρους του νευρωνικού δικτύου, ώστε να αξιολογήσουμε όσο καλύτερα γίνεται το online σχήμα αναγνώρισης παραμέτρων (υπό την έννοια ότι σε πραγματικές εφαρμογές δεν γίνεται να αποκτήσουμε πρόσβαση σε τιμές που παίρνουν οι μη γραμμικές συναρτήσεις, προκειμένου να τις τροφοδοτήσουμε στο νευρωνικό δίκτυο). Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε ένα online σχήμα εκτίμησης παραμέτρων, με σήματα τα οποία είναι διαθέσιμα και μετρήσιμα κατά τη διάρκεια μιας πτήσης, χρησιμοποιώντας την προσφάτως ανεπτυγμένη τεχνική Dynamic Regression Extension and Mixing (DREM) [2]. Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια τεχνική για σχεδίαση εκτιμητών παραμέτρων με βελτιωμένη απόδοση σε σχέση με κλασσικές μεθόδους εκτίμησης παραμέτρων, όπως οι gradient descend και least squares αλγόριθμοι. Τέλος, απαραίτητη είναι μια μεθολογία ελέγχου, η οποία δεν βασίζεται στην γνώση του μοντέλου (model-free control design). Προς τον σκοπό αυτό κάνουμε χρήση της Prescribed Performance Control μεθοδολογίας[3], η οποία επιτρέπει παρακολούθηση τροχιάς με προκαθορισμένη ποιότητα, ακόμα και υπό πλήρη άγνοια της δυναμικής του συστήματος.

Συνοπτικά λοιπόν, η συνεισφορά της διπλωματικής εργασίας αυτής είναι:

- Η ανάπτυξη μιας καινοτόμας μεθοδολογίας ελέγχου προκαθορισμένης ποιότητας για την διαμήκη δυναμική μη-επανδρωμένων αεροσκαφών σταθερής πτέρυγας, η οποία δεν βασίζεται στην γνώση του μοντέλου(model-free control design).
- Η κατάλληλη επιλογή δομής RBF νευρωνικών δικτύων για την προσέγγιση των μη γραμμικών συναρτήσεων.
- Η εφαρμογή της πρόσφατα ανεπτυγμένης τεχνικής Dynamic Regression Extension and Mix-

ing για την εκτίμηση των παραμέτρων του Νευρωνικού Δικτύου αλλά και η διερεύνηση της απόδοσής της υπό την παρουσία :

- (a) θορύβου στα σήματα του σχήματος αναγνώρισης(τις καταστάσεις του συστήματος).
- (b) σφάλματος προσέγγισης στην εξίσωση πρόβλεψης.

2

Βασικές Έννοιες Αεροπλοΐας

2.1 Πλαίσια Συντεταγμένων

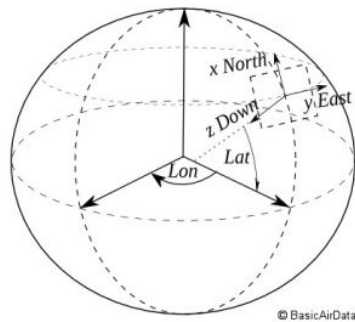
Μελετώντας τα μη επανδρωμένα εναέρια συστήματα, σημαντικό είναι να ξέρουμε πώς διαφορετικά σώματα είναι προσανατολισμένα μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, είναι κρίσιμο να ξέρουμε πού το αεροσκάφος βρίσκεται σε σχέση με την Γη, πώς μια κάμερα(ή και άλλοι αισθητήρες) είναι τοποθετημένη σε σχέση με το σώμα του αεροσκάφους και πώς μια κεραία σε σχέση με ένα πομπό σήματος που βρίσκεται στο έδαφος. Γενικά, είναι απαραίτητο να γίνεται χρήση διαφόρων πλαισίων συντεταγμένων για λόγους όπως:

1. Οι εξισώσεις κίνησης του Νεύτωνα εκφράζονται σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ενώ η κίνηση περιγράφεται πιο εύκολα σε ένα πλαίσιο προσαρτημένο πάνω στο αεροσκάφος.
2. Οι αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές εκφράζονται πιο εύκολα σε πλαίσιο πάνω στο αεροσκάφος.
3. Ενώ κάποιοι αισθητήρες παρέχουν πληροφορία σε σχέση με το πλαίσιο του αεροσκάφους, το GPS παρέχει πληροφορία σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα.

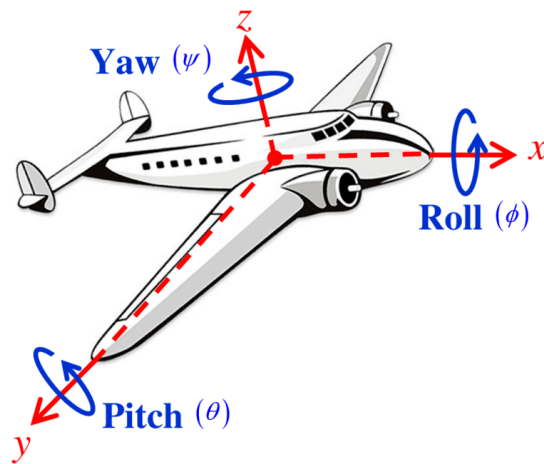
Τα πιο βασικά πλαίσια συντεταγμένων που εξυπηρετούν την ανάλυση στην παρούσα εργασία είναι τα εξής :

1. Το αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς, τοποθετημένο σε ένα σταθερό σημείο πάνω στη γη και προσανατολισμένο κατά το πρότυπο NED (x -North, y -East, z -Down)(Σχ.2.1).
2. Το σωματόδετο πλαίσιο αναφοράς(body frame), τοποθετημένο στο σώμα του αεροσκάφους. Ο προσανατολισμός καθορίζεται με βάση τις γωνίες Euler ϕ, θ, ψ (Σχ.2.2).
3. Το πλαίσιο ευστάθειας (stability frame). Ο προσανατολισμός του πλαισίου αυτού καθορίζεται από το διάνυσμα της ταχύτητας αέρος του αεροσκάφους V (Airspeed) και από την γωνία προσβολής α (angle-of-attack)(Σχ.2.3).

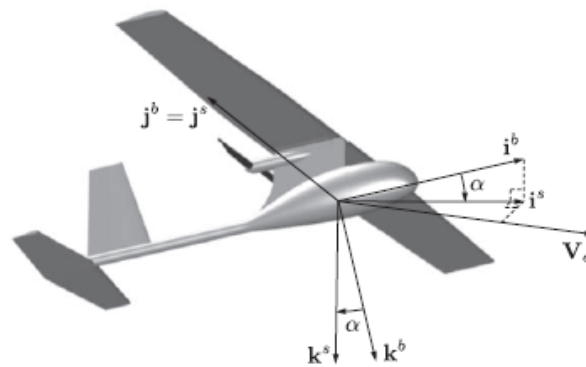
Στο εξής, η αναφορά στα πλαίσια θα γίνεται με χρήση της αγγλικής ορολογίας(NED Frame, Body Frame, Stability Frame) και με τους αντίστοιχους δείκτες (i, b, s).



Σχήμα 2.1: North-East-Down Reference Frame



Σχήμα 2.2: Body Frame



Σχήμα 2.3: Stability Frame

2.1.1 Μητρώα Περιστροφής και Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων

Όπως αναφέρθηκε, στην ανάλυση της κίνησης ενός αεροσκάφους, διανύσματα που αφορούν θέσεις, ταχύτητες, προσανατολισμούς κλπ είναι εκφρασμένα σε διαφορετικά πλαίσια συντεταγμένων. Για τον σκοπό αυτό είναι απαραίτητο να ορίσουμε κάποια μητρώα περιστροφής και κάποιες σχέσεις μετασχηματισμού. Στην γενική περίπτωση, ένα διάνυσμα x εκφρασμένο σε ένα πλαίσιο αναφοράς A, μπορεί να εκφραστεί σε ένα πλαίσιο αναφοράς B ως:

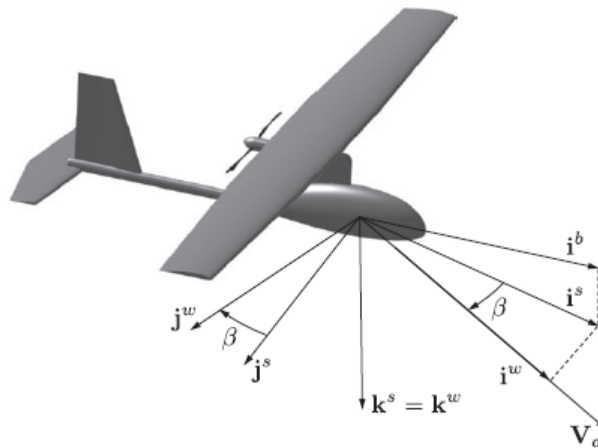
$$x^B = T + R_A^B x^A \quad (2.1)$$

όπου $T \in \mathbb{R}^3$ ένας μετασχηματισμός θέσης και $R_A^B \in SO(3)$ το μητρώο στροφής από το πλαίσιο A στο πλαίσιο B. Για τον σκοπό της συγκεκριμένης μελέτης και με βάση τα πλαίσια συντεταγμένων που αναφέρθηκαν παραπάνω, ορίζουμε τα παρακάτω μητρώα στροφής :

$$R_i^b = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_b^s = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Για λόγους πληρότητας, ορίζουμε και ένα ακόμα πλαίσιο, το πλαίσιο ανέμου(wind frame), του οποίου ο άξονας x ταυτίζεται με το διάνυσμα της ταχύτητας αέρος και ο προσανατολισμός περιστρέφοντας δεξιά το πλαίσιο ευστάθειας κατά την γωνία πλαγιολίσθησης β (side-slip angle)(Σχ.2.4)



Σχήμα 2.4: Wind Frame

Το αντίστοιχο μητρώο στροφής όσον αφορά και το πλαίσιο ανέμου :

$$R_w^b = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

2.2 Το διάνυσμα κατάστασης και οι μεταβλητές ελέγχου

Αναζητώντας στην διεθνή βιβλιογραφία, μπορεί κανείς να βρει διάφορους τρόπους αναπαράστασης της κατάστασης του συστήματος (άλλες μεταβλητές, άλλα πλαίσια κ.ο.κ). Για την παρούσα εργασία και για τις ανάγκες προσομοίωσης του αεροσκάφους, επιλέχθηκε η μοντελοποίηση όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.1, βασισμένη στην ανάλυση [4].

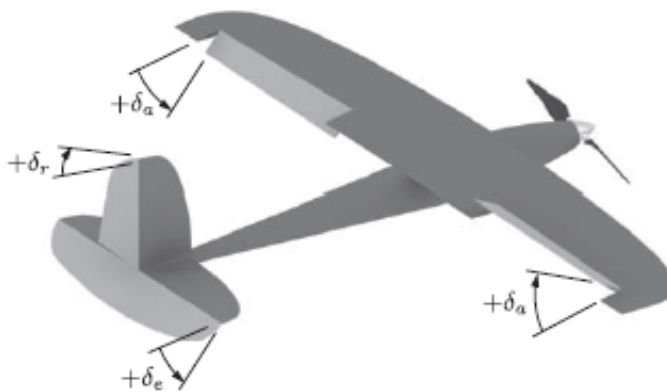
Όσο για τις μεταβλητές ελέγχου, αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες :

1. Τον μοχλό ισχύος (throttle)
2. Τις εκτροπές των πτερυγίων (control surfaces)

Για αεροσκάφη σταθερής πτέρυγας, οι συμβατικές επιφάνειες ελέγχου περιλαμβάνουν :

1. Το πτερύγιο ανόδου-καθόδου (elevator- δ_e) για τον χειρισμό της γωνίας θ (pitch angle).
2. Το πτερύγιο εκτροπής (rudder- δ_r) για τον χειρισμό της γωνίας ψ (yaw angle).
3. Το πτερύγιο κλίσης (aileron- δ_a) για τον χειρισμό της γωνίας ϕ (roll angle).

Μια εικονική αναπαράσταση φαίνεται στο Σχ.2.5, ενώ το συνολικό διάνυσμα ελέγχου συνοψίζεται στον Πίνακα 2.2.



Σχήμα 2.5: Control Surfaces

Πίνακας 2.1: Διάνυσμα Κατάστασης

| Μεταβλητή Κατάστασης | Περιγραφή |
|----------------------|---|
| p_n | Αδρανειακή Θέση στον άξονα x |
| p_e | Αδρανειακή Θέση στον άξονα y |
| p_d | Αδρανειακή Θέση στον άξονα z |
| u | Ταχύτητα ως προς άξονα x - Body Frame |
| v | Ταχύτητα ως προς άξονα y - Body Frame |
| w | Ταχύτητα ως προς άξονα z - Body Frame |
| ϕ | Roll Angle |
| θ | Pitch Angle |
| ψ | Yaw Angle |
| p | Γωνιακή Ταχύτητα roll -Roll Rate |
| q | Γωνιακή Ταχύτητα pitch -Pitch Rate |
| r | Γωνιακή Ταχύτητα yaw -Yaw Rate |

Πίνακας 2.2: Διάνυσμα Ελέγχου

| Μεταβλητή Ελέγχου | Αγγλική Ορολογία |
|-------------------|------------------|
| δ_t | Throttle |
| δ_e | Elevator |
| δ_r | Rudder |
| δ_a | Aileron |

2.3 Ατμοσφαιρικές Διαταραχές

Για αεροσκάφη μικρής και μεσαίας κλίμακας, η ταχύτητα του ανέμου κυμαίνεται από 20% έως 50% της ταχύτητας αέρος του αεροσκάφους V_a . Οπότε, είναι πολύ σημαντικό να ληφθεί υπ'όψιν κατά την δημιουργία μοντέλων και προσομοιωτών καθώς η επίδρασή της μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την ευστάθεια της πτήσης, περισσότερο από συμβατικά αεροσκάφη όπου συνήθως η ταχύτητά τους είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ανέμου.

Στο σημείο αυτό, είναι απαραίτητο να γίνει διάκριση μεταξύ της ταχύτητας εδάφους, της ταχύτητας αέρος του αεροσκάφους και της ταχύτητας του ανέμου. Οι παραπάνω ταχύτητες σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της παρακάτω εξίσωσης :

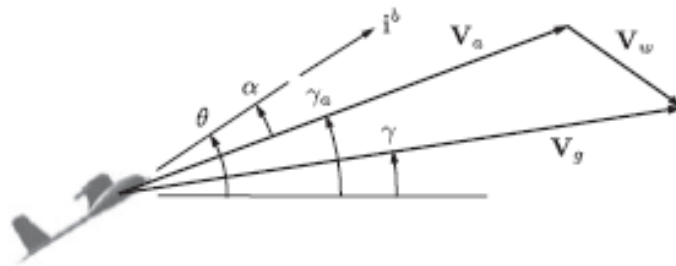
$$\vec{V}_g = \vec{V}_a + \vec{V}_w \quad (2.5)$$

όπου :

1. V_g η ταχύτητα εδάφους όπως καταγράφεται από έναν αδρανειακό παρατηρητή.
2. V_a η ταχύτητα αέρος του αεροσκάφους, η ταχύτητα δηλαδή σχετικά με τον περιβαλλόμενο αέρα.

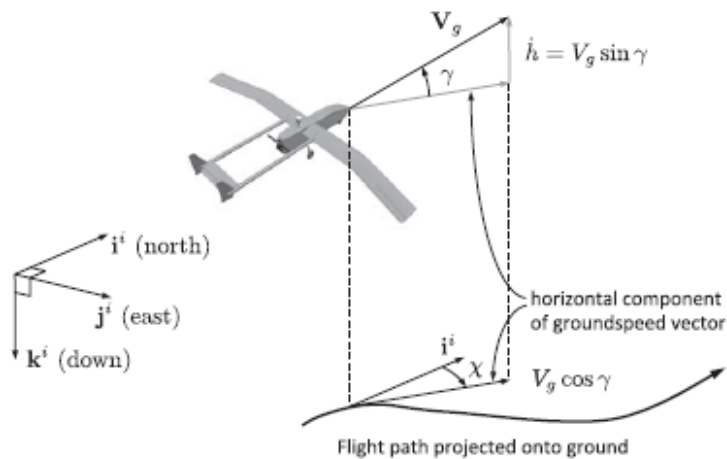
3. V_w η ταχύτητα του ανέμου.

Η εξίσωση (2.5) εκφράζει το λεγόμενου τρίγωνο του ανέμου (wind triangle), το οποίο απεικονίζεται στο Σχ.2.6



Σχήμα 2.6: Wind Triangle

Η κατεύθυνση της ταχύτητας εδάφους καθορίζεται με βάση δύο γωνίες, την γωνία διαδρομής γ (flight-path angle) και την γωνία κατεύθυνσης χ (course angle). Το πώς σχετίζονται αυτές οι δύο γωνίες απεικονίζεται στο Σχ.2.7.



Σχήμα 2.7: Flight-Path Angle γ και Course Angle χ

Η γωνία γ ορίζεται ως η γωνία μεταξύ του οριζόντιου επιπέδου και της ταχύτητας εδάφους (Σχ.2.6), ενώ η γωνία χ είναι η γωνία μεταξύ της προβολής της ταχύτητας εδάφους στο οριζόντιο επίπεδο και του πραγματικού βορρά.

2.3.1 Μοντελοποίηση του Ανέμου

Για την δημιουργία ρεαλιστικών προσομοιώσεων πτήσης, οι ατμοσφαιρικές διαταραχές πρέπει οπωσδήποτε να λαμβάνονται υπ' όψη, ιδιαίτερα σε μικρής/μεσαίας κλίμακας αεροσκάφη. Μια τυπική μοντελοποίηση του ανέμου αποτελείται από έναν σταθερό άνεμο περιβάλλοντος και απο ριπές ανέμου (wind gusts) ως :

$$V_w = V_{ws} + V_{wg} \quad (2.6)$$

Ο σταθερός άνεμος συνήθως εκφράζεται στο αδρανειακό πλαίσιο συντεταγμένων ενώ οι ριπές ανέμου αποτελούν έναν στοχαστικό όρο εκφρασμένο συνήθως στο σωματόδετο (body) πλαίσιο του αεροσκάφους. Εμπειρικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι ένα καλό μοντέλο για το μη-σταθερό μέρος του ανέμου αποκτάται περνώντας λευκό θόρυβο από Γραμμικά Χρονικώς Ανεξάρτητα (Γ.Χ.Α) φίλτρα[4]. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται Dryden Transfer Functions και έχουν την εξής μορφή :

$$H_u(s) = \sigma_u \sqrt{\frac{2Va}{L_u}} \frac{1}{s + \frac{Va}{L_u}} \quad (2.7)$$

$$H_v(s) = \sigma_v \sqrt{\frac{3Va}{L_v}} \frac{s + \frac{Va}{\sqrt{3}L_u}}{(s + \frac{Va}{L_u})^2} \quad (2.8)$$

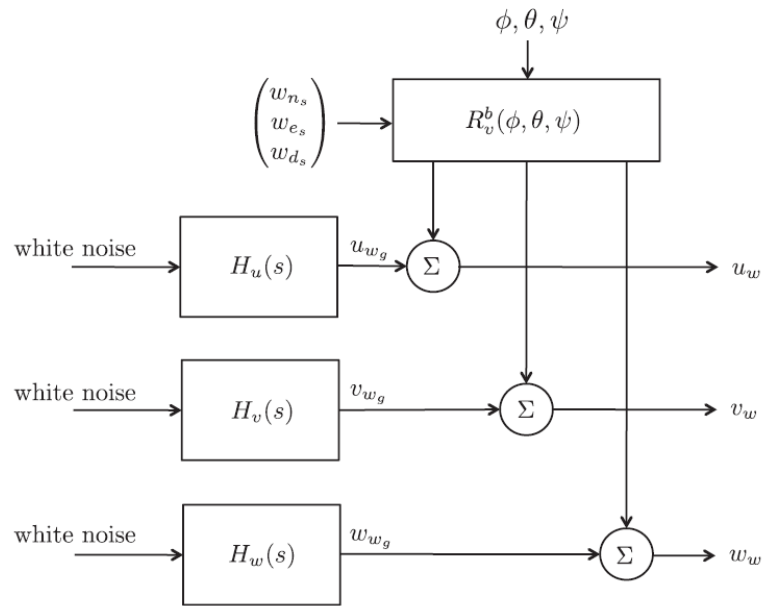
$$H_w(s) = \sigma_w \sqrt{\frac{3Va}{L_w}} \frac{s + \frac{Va}{\sqrt{3}L_w}}{(s + \frac{Va}{L_w})^2} \quad (2.9)$$

όπου οι $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$ είναι οι εντάσεις των ριπών και L_u, L_v, L_w τα χωρικά μήκη κύματος. Κατάλληλες παράμετροι για χαμηλά και μεσαία ύψη και ήπιες και μέτριες αναταράξεις παρουσιάστηκαν στο [5], και οι τιμές τους φαίνονται στο Σχ.2.8, ενώ η συνολική αρχιτεκτονική για την παραγωγή του ανέμου και τον συνυπολογισμό του στις εξισώσεις κίνησης που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται στο Σχ.2.9.

Dryden gust model parameters [24]

| <i>gust description</i> | <i>altitude</i> (m) | $L_u = L_v$ (m) | L_w (m) | $\sigma_u = \sigma_v$ (m/s) | σ_w (m/s) |
|--------------------------------------|------------------------|--------------------|--------------|--------------------------------|---------------------|
| low altitude, light turbulence | 50 | 200 | 50 | 1.06 | 0.7 |
| low altitude, moderate turbulence | 50 | 200 | 50 | 2.12 | 1.4 |
| medium altitude, light turbulence | 600 | 533 | 533 | 1.5 | 1.5 |
| medium altitude, moderate turbulence | 600 | 533 | 533 | 3.0 | 3.0 |

Σχήμα 2.8: Οι τιμές των παραμέτρων για τις Dryden συναρτήσεις μεταφοράς ανάλογα το υψόμετρο και την ένταση.



Σχήμα 2.9: Η συνολική αρχιτεκτονική για την μοντελοποίηση του ανέμου

3

Εξισώσεις Κίνησης

Το πρώτο βήμα κατά την ανάπτυξη αλγορίθμων πλοήγησης και σχημάτων ελέγχου για ένα μη επανδρωμένο εναέριο όχημα είναι η κατασκευή κατάλληλων δυναμικών μοντέλων.

3.1 Κινηματικές Εξισώσεις

Η αδρανειακή θέση του αεροσκάφους εκφράζεται όπως είδαμε στο NED πλαίσιο συντεταγμένων, ενώ οι συνιστώσες της ταχύτητας στους άξονες όπως ορίζονται από το προσαρτημένο στο αεροσκάφος, σωματόδετο (body) πλαίσιο. Συνδυάζοντας τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας το μητρώο στροφής της Εξ.2.2, καταλήγουμε στις εξισώσεις :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_n \\ p_e \\ p_d \end{pmatrix} = R_b^v \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (R_b^v)^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

όπου με το σύμβολο v , συμβολίζεται το πλαίσιο οχήματος (vehicle frame), το οποίο έχει ίδιο προσανατολισμό με το NED αλλά έχει την αρχή του στο κέντρο μάζας του αεροσκάφους.

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν απλά μια κινηματική σχέση ανάμεσα σε θέση και ταχύτητα. Αντίστοιχα, οι σχέσεις των γωνιακών ταχυτήτων p, q, r με τις γωνίες Euler ϕ, θ, ψ περιπλέκονται επίσης λόγω της έκφρασης σε διαφορετικά πλαίσια. Πιο συγκεκριμένα :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^b(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^b(\phi) R_{v1}^{v2}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

όπου $v1, v2$ τα πλαίσια όπου είναι ορισμένες οι γωνίες ψ, θ αντίστοιχα.

Αναπτύσσοντας και αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στην παρακάτω κινηματική εξίσωση για τις γωνιακές ταχύτητες :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

3.2 Δυναμικές Εξισώσεις

Το αεροσκάφος μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν ένα στερεό σώμα 6 βαθμών ελευθερίας (6-DoF movement). Για να εξάγουμε τις δυναμικές εξισώσεις θα εφαρμόσουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, αρχικά για την μεταθετική κίνηση του αεροσκάφους και έπειτα για την περιστροφική. Θα χρησιμοποιηθεί μοντέλο επίπεδης Γης, καθώς είναι αποδεκτό για μικρής κλίμακας εναέρια οχήματα[4]. Παρ'όλο που οι εξισώσεις του Νεύτωνα αναλύονται ως προς αδρανειακά πλαίσια αναφοράς, μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας διανύσματα συσχετισμένα με άλλα πλαίσια, όπως το body frame.

3.2.1 Μεταφορική Κίνηση

Ο νόμος του Νεύτωνα εφαρμοσμένος σε ένα σώμα το οποίο βιώνει μεταθετική κίνηση ορίζεται ως :

$$m \frac{dV_g}{dt_i} = f \quad (3.5)$$

όπου m η μάζα του αεροσκάφους, V_g η ταχύτητα εδάφους, $\frac{d}{dt_i}$ είναι η χρονική παράγωγος στο αδρανειακό πλαίσιο και f η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο αεροσκάφος.

Η χρονική παράγωγος στο αδρανειακό πλαίσιο μπορεί να εκφραστεί με τους όρους της χρονικής παραγωγού ως προς το body frame και της γωνιακής ταχύτητας σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση :

$$m \left(\frac{dV_g}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V_g \right) = f \quad (3.6)$$

όπου $\omega_{b/i}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς το αδρανειακό πλαίσιο.

Εκφράζοντας την παραπάνω σχέση ως προς το body frame, καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$m \left(\frac{dV_g^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times V_g^b \right) = f^b \quad (3.7)$$

όπου $V_g^b = (u, v, w)^T$ και $\omega_{b/i}^b = (p, q, r)^T$. Το διάνυσμα f^b αναπαριστά το σύνολο των εξωτερικών ασκούμενων δυνάμεων στο αεροσκάφος και αναλύεται σε $f^b = (f_x, f_y, f_z)^T$. Επεκτείνοντας το εξωτερικό γινόμενο της παραπάνω εξίσωσης και αναδιατάσσοντας τους όρους, καταλήγουμε στο εξής δυναμικό μοντέλο για την μεταφορική κίνηση:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3.2.2 Περιστροφική Κίνηση

Για την περιστροφική κίνηση, από τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι :

$$\frac{dh}{dt_i} = m \quad (3.9)$$

όπου h η στροφορμή του συστήματος και m το σύνολο των εξωτερικών ροπών που ασκούνται στο αεροσκάφος. Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία με πριν καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\left(\frac{dh^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times h^b \right) = m^b \quad (3.10)$$

όπου για στερεά σώματα, η στροφορμή ορίζεται ως το γινόμενο του μητρώου ροπών αδρανείας και της γωνιακής ταχύτητας ως $h^b = J\omega_{b/i}^b$.

Το μητρώο ροπών αδρανείας δίνεται από τη σχέση:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Στην πραγματικότητα, το μητρώο αδρανείας υπολογίζεται είτε αριθμητικά από ιδιότητες της μάζας χρησιμοποιώντας μοντέλα CAD, είτε μετράται πειραματικά χρησιμοποιώντας εξοπλισμό όπως διπλό εκκρεμές (bifilar pendulum)[4]. Τα αεροσκάφη είναι συνήθως συμμετρικά ως προς το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα i^b και k^b , οπότε $J_{xy} = J_{yz} = 0$.

Από την Εξ.(3.12), αντικαθιστώντας και αναδιατάσσοντας τους όρους καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b} = J^{-1}(-\omega_{b/i}^b \times (J\omega_{b/i}^b) + m^b) \quad (3.12)$$

όπου $\omega_{b/i}^b = (p, q, r)^T$. Χρησιμοποιώντας την Εξ.(3.11) και επεκτείνοντας το εξωτερικό γινόμενο, καταλήγουμε στο δυναμικό μοντέλο για την περιστροφική κίνηση του αεροσκάφους :

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \frac{m}{J_y} \\ \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

όπου

$$\begin{aligned}\Gamma &= J_x J_z - J_{xz}^2 \\ \Gamma_1 &= \frac{J_{xz}(J_x - J_y + J_z)}{\Gamma} \\ \Gamma_2 &= \frac{J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma} \\ \Gamma_3 &= \frac{J_z}{\Gamma} \\ \Gamma_4 &= \frac{J_{xz}}{\Gamma} \\ \Gamma_5 &= \frac{J_z - J_x}{J_y} \\ \Gamma_6 &= \frac{J_{xz}}{J_y} \\ \Gamma_7 &= \frac{J_z(J_x - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma} \\ \Gamma_8 &= \frac{J_x}{\Gamma}\end{aligned}$$

3.3 Ανάλυση Δυνάμεων και Ροπών

Οι δυνάμεις και οι ροπές που ασκούνται σε ένα αεροσκάφος οφείλονται σε τρεις κυρίως πηγές, και πιο συγκεκριμένα, στην βαρύτητα, την αεροδυναμική και την ώθηση από τους κινητήρες. Συνολικά λοιπόν, έχουμε :

$$f = f_g + f_a + f_p \quad (3.14)$$

$$m = m_a + m_p \quad (3.15)$$

Οι βαρυτικές δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας και δεν παράγουν κάποια ροπή.

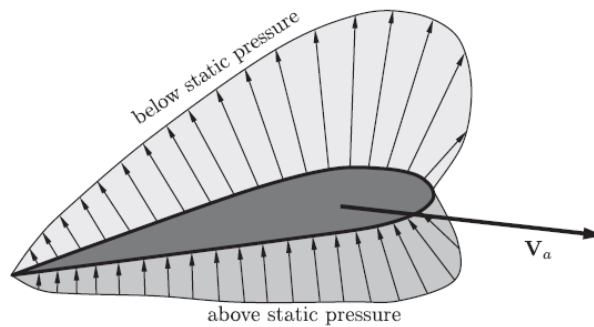
3.3.1 Βαρυτικές Δυνάμεις

Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου της Γης σε ένα αεροσκάφος μοντελοποιείται ως μια δύναμη ανάλογη της μάζας του που δρα όπως είπαμε στο κέντρο μάζας. Χρησιμοποιώντας τις γωνίες Euler, εκφράζουμε τις βαρυτικές δυνάμεις στο σωματόδετο πλαίσιο ως:

$$f_g^b = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

3.3.2 Αεροδυναμικές Δυνάμεις και Ροπές

Καθώς το αεροσκάφος κινείται μέσα στον αέρα, μια κατανομή πίεσης δημιουργείται στο σώμα του όπως φαίνεται στο Σχ.3.1. Η δύναμη και η κατανομή της πίεσης που δρα στο αεροσκάφος είναι μια συνάρτηση της ταχύτητας αέρος, της πυκνότητας του αέρα καθώς και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του.



Σχήμα 3.1: Κατανομή Πίεσης

Αντί για μια προσπάθεια να χαρακτηριστεί το φαινόμενο της κατανομής της πίεσης γύρω από τα φτερά, μια κοινή προσέγγιση για να συλλάβουμε την επίδραση της πίεσης είναι με ένα συνδυασμό δυνάμεων και ροπών. Αν θεωρήσουμε το διαμήκες ($i^b - k^b$) επίπεδο, στο εξής longitudinal plane, το αποτέλεσμα της πίεσης που δρα στο αεροσκάφος μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

1. Με μια δύναμη άντωσης (Lift-L), που οφείλεται στην διαφορική πίεση που παράγεται από τις αεροδυναμικά διαμορφωμένες επιφάνειες του αεροσκάφους (κυρίως τις πτέρυγες).
2. Με μια δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του αεροσκάφους και οφείλεται στην τριβή της ατράχτου και της πτέρυγας με την αέρια μάζα (Drag-D).
3. Με μια ροπή (Pitching Moment- m) που εξαρτάται από ποικίλους παράγοντες που επηρεάζουν την αεροδυναμική.

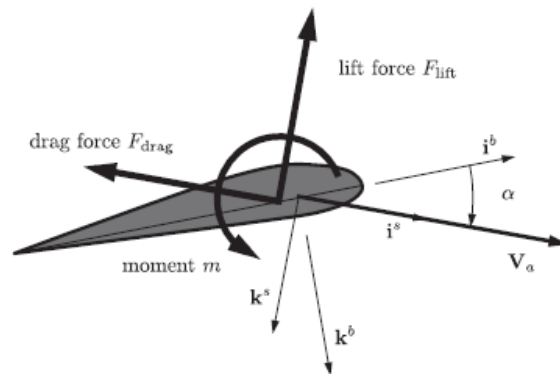
Οι δυνάμεις και η ροπή αυτή δρουν στο αεροδυναμικό κέντρο, με αγγλική ορολογία quarter-chord point, και απεικονίζονται στο Σχ.3.2. Σε μορφή εξισώσεων, έχουν την μορφή :

$$F_{lift} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_L \quad (3.17)$$

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_D \quad (3.18)$$

$$m = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c C_m \quad (3.19)$$

όπου : ρ η πυκνότητα του αέρα, S η επιφάνεια της πτέρυγας, c η μέση χορδή της πτέρυγας και V_a η ταχύτητα αέρος.



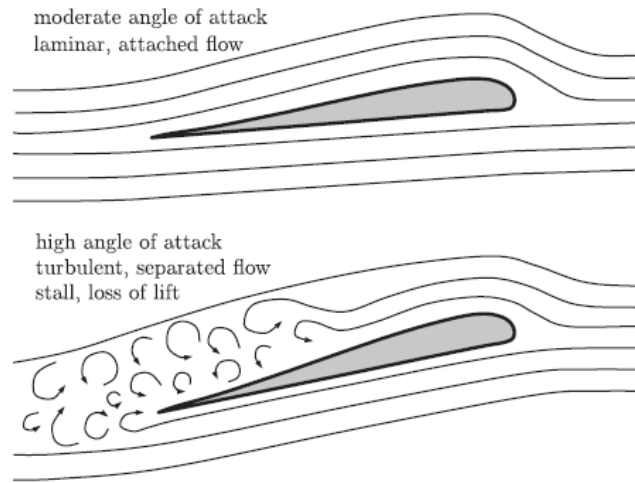
Σχήμα 3.2: Longitudinal Plane

Οι συντελεστές C_L, C_D, C_m είναι αδιάστατοι αεροδυναμικοί συντελεστές που εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την γωνία προσβολής (angle-of attack) α . Επίσης εξαρτώνται και από την γωνιακή ταχύτητα q (pitch rate), καθώς και από την εκτροπή του πτερυγίου δ_e . Εν γένει, η εξάρτηση αυτή είναι μη γραμμική και άγνωστη. Παρ'όλα αυτά, σε περιπτώσεις στρωτής και αργά μεταβαλλόμενης ροής (quasi-steady flow) μπορούν να προσεγγιστούν με μια 1ης τάξης Σειρά Taylor. Για παράδειγμα, όσον αφορά τον συντελεστή της άντωσης :

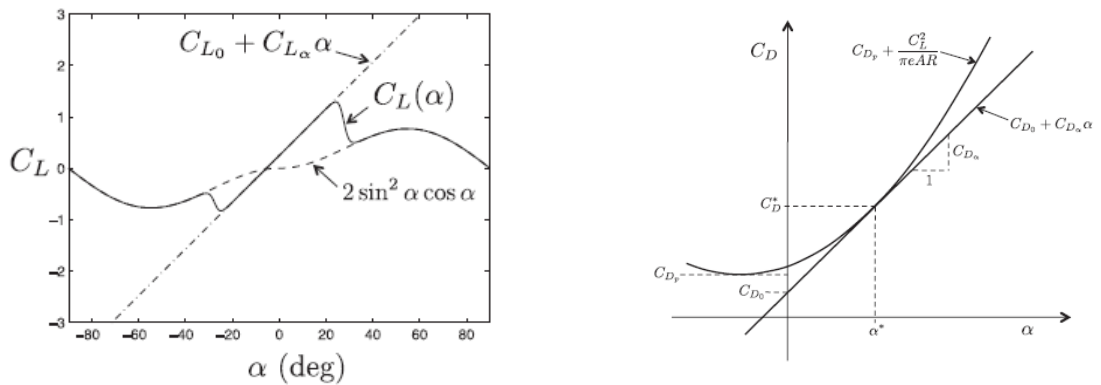
$$\begin{aligned} C_{lift} &= C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial q} q + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \delta_e \\ &= C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \end{aligned} \quad (3.20)$$

Αντίστοιχα, προκύπτουν και οι συντελεστές C_D, C_m . Παρ'όλα αυτά, όπως είπαμε οι συντελεστές αυτοί εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την γωνία α , όταν η γωνία αυτή είναι μικρή, η παραπάνω προσέγγιση είναι μια αρκετά καλή αναπαράσταση. Όταν όμως, το αεροσκάφος πετάει υπό υψηλή γωνία προσβολής, τα μοντέλα αυτά αποτυγχάνουν. Ο λόγος είναι ότι σε τέτοιες γωνίες, η ροή του αέρα διαχωρίζεται από το φτερό με αποτέλεσμα δραστική μείωση της άντωσης (Lift). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται stall, και απεικονίζεται σχηματικά στο Σχ.3.3. Η κύρια αδυναμία των γραμμικών μοντέλων είναι ότι δεν μπορούν να προβλέψουν την δραστική μείωση άντωσης όταν η γωνία προσβολής είναι μεγάλη, και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης δεν αντανακλούν καθόλου την πραγματικότητα. Για τον λόγο αυτό, θα συμπεριλάβουμε μη γραμμικά μοντέλα στους συντελεστές C_{L_α} και C_{D_α} . Τα μοντέλα αυτά απεικονίζονται στο Σχ.3.4.

Τέλος, για λόγους συμβατότητας, πρέπει να μετατρέψουμε τις δυνάμεις Lift & Drag, όπως αυτές είναι εκφρασμένες στο πλαίσιο ευστάθειας, στο body frame. Αυτό επιβάλλει μια περιστροφή ως προς τη γωνία προσβολής, όπως φαίνεται στην Εξ.3.21.



Σχήμα 3.3: Το φαινόμενο stall



Σχήμα 3.4: Οι συντελεστές Lift & Drag συναρτήσε της γωνίας προσβολής

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_{drag} \\ -F_{lift} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Τώρα, θεωρώντας τον εγκάρσιο άξονα, δυνάμεις και ροπές παράγουν μια πλάγια δύναμη στον άξονα y , αλλά και περιστροφικές κινήσεις σε roll, yaw. Συνοψίζονται παρακάτω :

1. Μια πλάγια δύναμη (Lateral Force- Y) που ασκείται στο body frame του αεροσκάφους.
2. Μια ροπή, Rolling Moment (l), που τείνει να προκαλεί περιστροφή ως προς τον άξονα x του body frame.
3. Μια ροπή, Yawing Moment (n), που τείνει να προκαλεί περιστροφή ως προς τον άξονα z του body frame.

Η εγκάρσια αεροδυναμική (lateral aerodynamics) επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την γωνία πλαγιολίσθησης β , αλλά και από τις δύο μεταβλητές ελέγχου δ_r και δ_a , όπως και από τις γωνιακές ταχύτητες, p, r . Συνοψίζονται στις εξισώσεις :

$$F_y = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_Y(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (3.22)$$

$$l = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_l(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (3.23)$$

$$n = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b C_n(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (3.24)$$

όπου b το άνοιγμα των φτερών του αεροσκάφους. Όπως και στην περίπτωση των longitudinal aerodynamics, οι εκφράσεις αυτές είναι μη γραμμικές και εν γένει δύσκολο να προσδιοριστούν. Παρ'όλα αυτά, τα γραμμικά αεροδυναμικά μοντέλα έχουν αρκετά καλή ακρίβεια και παράγουν αποτελέσματα ικανά για να προσδιοριστεί η δυναμική ευστάθεια του αεροσκάφους στις περισσότερες εφαρμογές. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, προσεγγίζουμε τους αεροδυναμικούς συντελεστές με μια 1ης τάξης σειρά Taylor, όπως ακριβώς στην Εξ.3.20.

3.3.3 Δυνάμεις και Ροπές Έλικας

Ένα απλό μοντέλο για την ώθηση (Thrust) που παράγεται από μία έλικα-κινητήρα, μπορεί να αναπτυχθεί εφαρμόζοντας την αρχή του Bernoulli για να υπολογίσουμε την πίεση μπροστά και πίσω από την έλικα και μετά εφαρμόζοντας την διαφορά πίεσης στην επιφάνεια της έλικας. Παρ'όλο που είναι κάπως αισιόδοξο για την ώθηση που παράγει, είναι ένα μοντέλο αποδεκτό για τις ανάγκες αυτής της προσομοίωσης.

Παραδεχόμαστε πως η Ώθηση-Thrust που παράγεται από τον κινητήρα δρα μόνο στον άξονα x του body frame, και έπειτα από την αρχή του Bernoulli και ένα απλό μοντέλο για τον κινητήρα, έχουμε ότι :

$$F_p = \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} \begin{pmatrix} (k_{motor} \delta_t)^2 - V_a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

όπου S_{prop} η επιφάνεια που καλύπτεται από την έλικα.

Όσο η έλικα γυρνάει, ασκεί δύναμη στον αέρα που περνάει από μέσα της, αυξάνοντας την ροπή του αέρα ενώ παράλληλα παράγει την ώθηση. Έτσι, ίσες και αντίθετες δυνάμεις παράγονται από τον αέρα στην έλικα, και αυτό εκφράζεται με μια ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της. Σαν αποτέλεσμα, έχουμε μια ροπή αντίδρασης (αντι-ροπή) η οποία είναι πάλι ως προς άξονα x του body frame :

$$m_p = \begin{pmatrix} -k_{T_p}(k_{\Omega}\delta_t)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

όπου $\Omega = k_{\Omega}\delta_t$ είναι η ταχύτητα της έλικας και k_{T_p} μια σταθερά που προσδιορίζεται από πειράματα. Η επίδραση αυτής της ροπής είναι συνήθως αμελητέα αλλά παρουσιάζεται για λόγους πληρότητας.

3.4 Συγκεντρωτικές Εξίσωσεις Κινηματικού και Δυναμικού Μοντέλου

Το 6 βαθμών ελευθερίας (6-DoF), 12-διασταστο μοντέλο για ένα μη επανδρωμένο αεροσκάφος μικρής κλίμακας συγκεντρώνεται στις παρακάτω υψηλά μη γραμμικές, υψηλά συζευγμένες, διαφορικές εξισώσεις :

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \sin\phi \cos\theta \\ \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \frac{m}{J_y} \\ \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

με τις δυνάμεις και ροπές να που δρουν στις Εξ.3.29-3.30, να συνοψίζονται ως :

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg \sin\theta \\ mg \cos\theta \sin\phi \\ mg \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \begin{pmatrix} C_x(\alpha, q, \delta_\epsilon) \\ C_y(\beta, p, r, \delta_\alpha, \delta_r) \\ C_z(\alpha, q, \delta_\epsilon) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\rho S_{prop} C_{prop} \begin{pmatrix} (k_{motor}\delta_t)^2 - V_a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \begin{pmatrix} bC_l(\beta, p, r, \delta_\alpha, \delta_r) \\ cC_m(\alpha, q, \delta_\epsilon) \\ bC_n(\beta, p, r, \delta_\alpha, \delta_r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_{T_p} (k_\Omega \delta_t)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

και τους αδιάστατους συντελεστές $C_L, C_D, C_m, C_Y, C_l, C_n$ να αναπτύσσονται όπως αναφέρθηκε με μια 1ης τάξης σειρά Taylor συμπεριλαμβάνοντας μη γραμμικά μοντέλα ικανά να συλλάβουν το φαινόμενο του stall για τους συντελεστές του Lift & Drag.

4

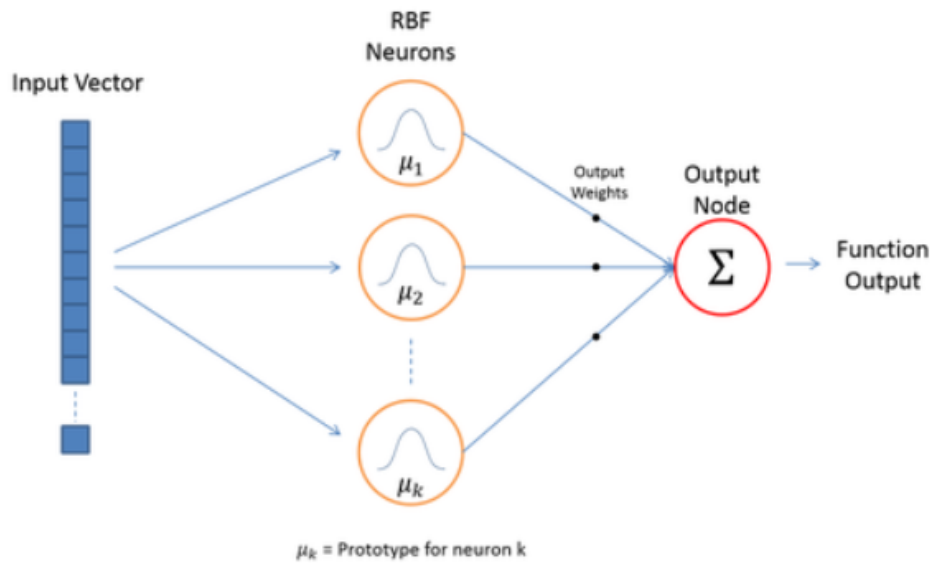
Radial Basis Function Νευρωνικά Δίκτυα & Αναγνώριση Παραμέτρων

Η έλευση των Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων (Artificial Neural Networks) και ειδικότερα των Radial Basis Function Νευρωνικών Δικτύων (RBF-NNs) έχει αποδειχθεί ένα ισχυρό εργαλείο στο πεδίο της προσαρμοστικής μη γραμμικής αναγνώρισης συστημάτων. Λόγω της καθολικής τους ικανότητας να προσεγγίζουν συναρτήσεις (universal function approximation)[6], τα RBF-NNs έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως σε πολλές εφαρμογές όσον αφορά το κομμάτι των άγνωστων μη-γραμμικοτήτων. Παρ'όλα αυτά, ο στόχος της επιτυχούς προσαρμοστικής αναγνώρισης μη γραμμικών συστημάτων με RBF-NNs είναι πολύ δύσκολος να επιτευχθεί, χωρίς την ικανοποίηση της συνθήκης της Διαρκούς Διέγερσης (Persistence of Excitation- στο εξής PE). Η έννοια PE έχει εμφανιστεί ευρέως στο πεδίο της αναγνώρισης συστημάτων και έχει αποδειχθεί ότι η ικανοποίηση της είναι στενά συνδεδεμένη με την ευρωστία (robustness) και την σύγκλιση (convergence) πολλών αλγορίθμων ελέγχου[7],[8].

4.1 Δομή RBF Νευρωνικού Δικτύου

Τα RBF νευρωνικά δίκτυα είναι κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για προσέγγιση συναρτήσεων. Σε αντίθεση με άλλες δομές νευρωνικών δικτύων που αποτελούνται από πολλαπλά κρυφά στρώματα και κατάλληλες διασυνδέσεις μεταξύ τους (MLPs, Recurrent Neural Networks, etc), τα δίκτυα αυτά αποτελούνται από ένα μόνο κρυφό στρώμα- το στρώμα των νευρώνων-, το οποίο συνδέεται με το στρώμα της εξόδου με τη βοήθεια συναπτικών βαρών (synaptic weights- ή απλώς weights). Μια σχηματική αναπαράσταση ενός τέτοιου δικτύου φαίνεται στο Σχ.4.1.

Το διάνυσμα εισόδου τροφοδοτείται στους νευρώνες του δικτύου, υφίσταται έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό ο οποίος εξαρτάται από τις παραμέτρους της συνάρτησης ενεργοποίησης του νευρώνα, και στη συνέχεια συνεισφέρει με ένα βάρος στην έξοδο του δικτύου, η τιμή του οποίου προσδιορίζεται με μια διαδικασία βελτιστοποίησης (optimization) κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης του δικτύου.



Σχήμα 4.1: Η δομή ενός RBF Νευρωνικού Δικτύου

4.1.1 Οι συναρτήσεις Ενεργοποίησης

Όπως υποδηλώνει και το όνομα των δικτύων, οι συναρτήσεις ενεργοποίησης είναι Radial Functions (Ακτινικές Συναρτήσεις). Το κύριο χαρακτηριστικό αυτών των συναρτήσεων είναι ότι η έξοδός τους αυξάνεται ή μειώνεται μονότονα ανάλογα την απόσταση από ένα σημείο αναφοράς, το οποίο ονομάζεται το κέντρο του νευρώνα. Το κέντρο, η διασπορά, αλλά και το σχήμα των συναρτήσεων αυτών είναι παράμετροι προς σχεδίαση.

Τυπικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται είναι :

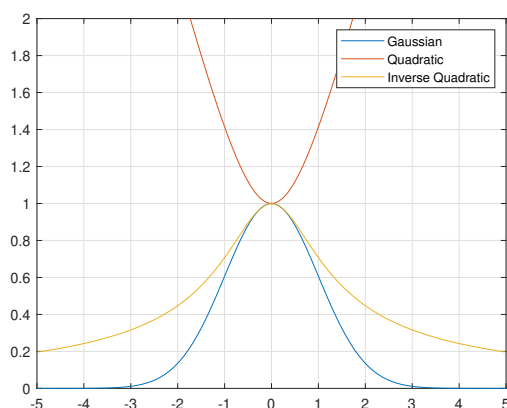
1. Γκαουσιανές(Gaussians) της μορφής $z(r) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$.
2. Τετραγωνικές(Quadratics) της μορφής $z(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$.
3. Αντίστροφες Τετραγωνικές(Inverse Quadratics) της μορφής $z(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}^{-1}$.

Ενδεικτικές αποκρίσεις με $\sigma = 1$ για τις συναρτήσεις αυτές φαίνονται στο Σχ.4.2.

Για τους σκοπούς της συγκεκριμένης μελέτης επιλέχθηκαν γκαουσιανές συναρτήσεις της μορφής:

$$z(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.1)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^d$ η είσοδος στο νευρωνικό δίκτυο, $c \in \mathbb{R}^d$ τα κέντρα των γκαουσιανών και σ η διασπορά τους.



Σχήμα 4.2: Οι πιο συνήθεις ακτινικές συναρτήσεις

4.1.2 Τα κέντρα και οι διασπορές των συναρτήσεων

Οι παράμετροι αυτοί των συναρτήσεων παίζουν πολύ μεγάλο ρόλο στις προσεγγιστικές ικανότητες του δικτύου, με διάφορες μεθοδολογίες να έχουν αναπτυχθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για τον τρόπο επιλογής τους. Ενδεικτικά αναφέρονται για τα κέντρα :

1. Μη επιβλεπόμενες μέθοδοι ομαδοποίησης (Unsupervised Clustering Methods)[9].
2. Επιβλεπόμενη Κβαντοποίηση Διανύσματος (Supervised Vector Quantization - LVQ algorithms)[10].
3. Επιβλεπόμενη Μάθηση με δέντρα αποφάσεων (Supervised Training of Decision Trees)[11],[12].

Για τον σκοπό της εργασίας αυτής επιλέχθηκε ο αλγόριθμος ομαδοποίησης k -means, ο οποίος εξηγείται συνοπτικά παρακάτω:

- (i) Αρχικά, επιλέγεται ένας αριθμός k , ο οποίος αναπαριστά τον επιθυμητό αριθμό πυρήνων(clusters), και στη δικιά μας περίπτωση αντιπροσωπεύει επίσης τον αριθμό νευρώνων του κρυφού στρώματος του δικτύου.
- (ii) Τυχαία αρχικοποίηση των κέντρων των πυρήνων απο το δοσμένο σύνολο δεδομένων(dataset).
- (iii) Με βάση μια επιλεγμένη μετρική απόστασης- στην περίπτωση μας Squared Euclidean - κάθε σημείο κατατάσσεται σε έναν πυρήνα με βάση την απόστασή του από το κέντρο του.
- (iv) Υπολογισμός των καινούριων κέντρων ως το μέσο σημείο του πυρήνα.
- (v) Επανάληψη βήματος iii), μέχρι τα κέντρα να μην αλλάζουν πια ή να έχουμε φτάσει σε έναν μέγιστο-καθορισμένο απ'τον χρήστη- αριθμό επαναλήψεων.

Όσον αφορά τις διασπορές, αυτές επιλέχθηκαν έτσι ώστε γειτονικοί νευρώνες να έχουν 75% επικάλυψη. Η συγκεκριμένη επιλογή είχε να κάνει όχι τόσο με τις προσεγγιστικές ικανότητες του δικτύου, αλλά περισσότερο με το online σχήμα αναγνώρισης που θα αναπτυχθεί σε παρακάτω κεφάλαιο και απαιτεί κάθε νευρώνας να έχει αποσυμπλεγμένη έξοδο από τους υπόλοιπους. Επικάλυψη 75% σημαίνει ότι όταν η έξοδος ενός νευρώνα είναι 1, η μέγιστη έξοδος άλλων νευρώνων θα είναι 0.75.

4.1.3 Προσδιορισμός των Βέλτιστων Βαρών

Τα RBF νευρωνικά δίκτυα μπορούν να αναπαρασταθούν μαθηματικά ως :

$$y(x) = \sum_{i=1}^k z_i(x)^T w_i = Z(x)^T W \quad (4.2)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}$ δηλώνουν την είσοδο και την έξοδο του δικτύου αντίστοιχα. $W = [w_1 \cdots w_k]^T$ είναι το διάστασης k διάνυσμα συναπτικών βαρών μεταξύ νευρώνων και εξόδου και $Z(x) = [z_1(x) \cdots z_k(x)]^T$ είναι το διάστασης k διάνυσμα της μη γραμμικής απεικόνισης της εισόδου μέσω των νευρώνων.

Ιδιότητα Πυκνότητας (Density Property)[6]: Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένας ακέραιος k και ένα βέλτιστο διάνυσμα βαρών W^* , έτσι ώστε:

$$\sup_{x \in \Omega_x} |f(x) - Z(x)^T W^*| < \epsilon \quad (4.3)$$

όπου $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο, και k το μέγεθος του Νευρωνικού Δικτύου.

Έχοντας πλέον καθορίσει τα κέντρα και τις διασπορές, τα συναπτικά βάρη του δικτύου μπορούν να υπολογιστούν[13]. Έστω (x^μ, y^μ) , $\mu = 1 \dots M$ το σύνολο των σημείων προς εκπαίδευση, με $x^\mu \in \mathbb{R}^d$ το διάνυσμα εισόδου και $y^\mu \in \mathbb{R}^m$ το επιθυμητό διάνυσμα εξόδου. Έστω οι πίνακες $Z_{\mu j} = z_j(x^\mu)$ η έξοδος του j νευρώνα με το μ διάνυσμα εισόδου x^μ και $Y_{\mu j}$ το j στοιχείο του μ επιθυμητού διανύσματος εξόδου y^μ . Έχοντας ορισμένους τους πίνακες $\mathbf{Z} = Z_{\mu j}$ και $\mathbf{Y} = Y_{\mu j}$, ο πίνακας των βαρών είναι το αποτέλεσμα μιας ελαχιστοποίησης του κριτηρίου :

$$E(W) = \|\mathbf{Z}\mathbf{W} - \mathbf{Y}\|^2 \quad (4.4)$$

Η λύση του παραπάνω γίνεται αποκλειστικά στην μορφή $W = Z^+ Y$, όπου Z^+ , ο Moore-Penrose ψευδοαντίστροφος πίνακας, ορισμένος ως :

$$Z^+ = (Z^T Z)^{-1} Z^T \quad (4.5)$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική και παρουσιάζεται στην παρακάτω εξίσωση για λόγους πληρότητας :

$$W^* = ((Z^T Z)^{-1} Z^T) Y \quad (4.6)$$

Στην παρούσα εργασία για τους σκοπούς της online αναγνώρισης παραμέτρων, τα κέντρα και οι διασπορές θεωρούνται ως σταθερές (fixed), με αποτέλεσμα τα χρησιμοποιούμενα RBF δίκτυα να είναι γραμμικώς παραμετροποιημένα (linearly parameterized) ως προς τα συναπτικά βάρη μοντέλα.

4.2 Αναγνώριση Παραμέτρων

Το βασικό πρόβλημα online εκτίμησης παραμέτρων μπορεί να εκφραστεί μέσω της παρακάτω γραμμικής παλινδρόμησης (στο εξής linear regression):

$$y(t) = m(t)^T \theta \quad (4.7)$$

όπου $y \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{R}^q$ είναι γνωστές, φραγμένες συναρτήσεις του χρόνου και $\theta \in \mathbb{R}^q$ είναι ένα διάστημα q διάνυσμα αποτελούμενο από άγνωστες, αλλά σταθερές, παραμέτρους.

Ο κλασικός αλγόριθμος gradient descend, μπορεί να εφαρμοστεί για να δώσει μια εκτίμηση της λύσης σε γραμμικά συστήματα της παραπάνω μορφής ως εξής :

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma m(y - m^T \hat{\theta}) \quad (4.8)$$

όπου $\hat{\theta}$ είναι η εκτίμηση των παραμέτρων και $\Gamma \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ο πίνακας κερδών προσαρμογής (adaptation gains).

Ορίζοντας ως $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ το σφάλμα εκτίμησης, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής :

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma m(t)m(t)^T \tilde{\theta} \quad (4.9)$$

Είναι ευρέως γνωστό [7],[14] ότι το μηδενικό σημείο ισορροπίας του παραπάνω γραμμικώς χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος 4.9 είναι (ομοιομόρφως) καθολικά ευσταθές - (uniformly) globally stable -, εάν και μόνο εάν το διάνυσμα του προβλέπτη m (στο εξής regressor vector ή απλά regressor) είναι υπό Διαρκή Διέγερση (στο εξής Persistently Exciting ή απλά PE).

4.3 Διαρκής Διέγερση - Persistency of Excitation

Η έννοια της διαρκούς διέγερσης είναι μεγάλης σημασίας στο πεδίο της αναγνώρισης συστημάτων και του προσαρμοστικού ελέγχου. Εισηγήθηκε για πρώτη φορά για αναγνώριση γραμμικών συστημάτων [15], ενώ αργότερα, χρησιμοποιήθηκε για ανάλυση ευστάθειας γραμμικώς μεταβαλλόμενων συστημάτων (Linear Time Varying Systems), η οποία εμφανίζεται συχνά στη διεθνή βιβλιογραφία του προσαρμοστικού ελέγχου. Ορίζεται και εκφράζεται μαθηματικά ως :

PE ιδιότητα [16] : Έστω μ μία θετική Σ -πεπερασμένη Borel μετρική στο διάστημα $(0, \infty)$. Μια συνεχής, ομοιόμορφα φραγμένη διανυσματική συνάρτηση $Z : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^q$ είναι διαρκώς διεργούμενη, εάν υπάρχουν θετικές σταθερές α_1, α_2 και T , έτσι ώστε οι ανισότητες :

$$\alpha_1 \|c\|^2 \leq \int_{t_0}^{t_0+T} |c^T Z(\tau)|^2 d\mu(\tau) \leq \alpha_2 \|c\|^2 \quad (4.10)$$

να ισχύουν για κάθε $t_0 \geq 0$ και κάθε σταθερό διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^q$. Η φυσική ερμηνεία της ιδιότητας PE είναι ότι η διανυσματική ακολουθία του προβλέπτη (regressor) καλύπτει ολόκληρη την διάσταση της εισόδου. Μια άλλη φυσική ερμηνεία δοσμένη στο [17], είναι ότι ένας διαρκώς διεργούμενος προβλέπτης (persistently exciting regressor) έχει κάποιες ιδιότητες που εξασφαλίζουν ότι τα σήματα που οδηγούν τον νόμο προσαρμογής (adaptation law) περιέχουν αρκετή πληροφορία για τις άγνωστες παραμέτρους.

Στην περίπτωση που ο προβλέπτης αποτελείται από γραμμικούς συνδυασμούς της εισόδου και της κατάστασης, η PE ιδιότητα μπορεί να εξασφαλιστεί επιλέγοντας κατάλληλα την είσοδο. Πιο συγκεκριμένα, ένα σήμα εισόδου $u \in \mathbb{R}$ καλείται ικανώς πλούσιο (sufficiently rich) τάξης n εάν περιέχει τουλάχιστον $\frac{n}{2}$ διακριτές μεταξύ τους μη μηδενικές συχνότητες. Εν γένει, για κάθε n άγνωστες παραμέτρους προς εκτίμηση, χρειαζόμαστε τουλάχιστον $\frac{n}{2}$ μη μηδενικές συχνότητες για να εγγυηθεί η PE ιδιότητα. [17]

Παρ'όλα αυτά, το παραπάνω αφορά μια γραμμική εξάρτηση του προβλέπτη από την είσοδο. Για μη γραμμικά συστήματα η εξασφάλιση a priori της PE ιδιότητας είναι εν γένει ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα, το οποίο έχει απασχολήσει την διεθνή κοινότητα και παρ'όλα τα πολλά έργα πάνω σε προσαρμοστική μη γραμμική αναγνώριση συστημάτων, πολύ λίγα εξασφαλίζουν την a priori εξασφάλισή της. Στην συγκεκριμένη εργασία, τα αποτελέσματα για τις ικανές συνθήκες για ικανοποίηση της PE ιδιότητας σε RBF νευρωνικά δίκτυα θα μας δώσουν το θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη του online σχήματος αναγνώρισης.

4.3.1 Διαρκής Διέγερση σε RBF δίκτυα

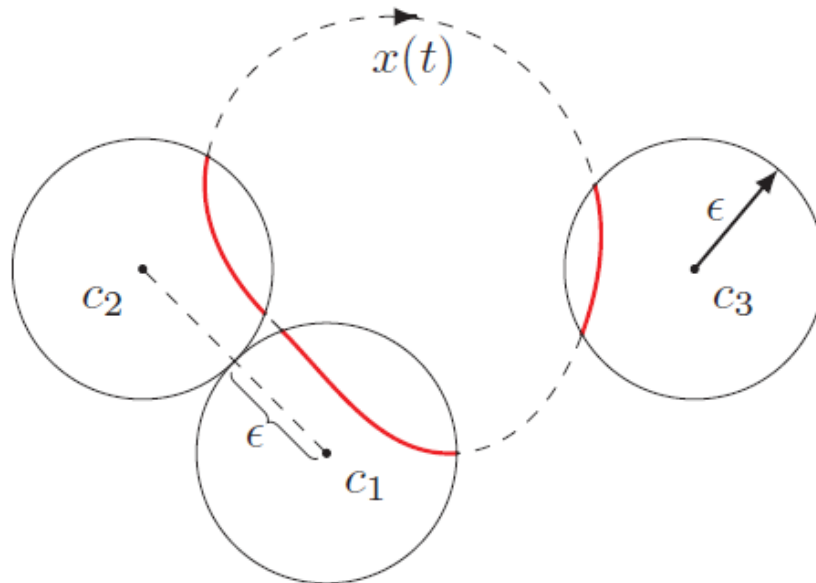
Οι άγνωστες μη γραμμικότητες που σχηματίζουν τις δομικές αβεβαιότητες ενός μη γραμμικού συστήματος, αντικαθίστονται από μια δομή νευρωνικού δικτύου όπως αυτή αναφέρθηκε στην Ενότητα 4.1 και περιγράφεται μαθηματικά από την Εξ.4.2, με άγνωστες αλλά σταθερές παραμέτρους (βάρη) συν ένα μικρό-σε μια συμπαγή περιοχή- σφάλμα προσέγγισης, του οποίου το μέγεθος σχετίζεται συνήθως με το μέγεθος του δικτύου. Οπότε, το πρόβλημα της μη γραμμικής προσέγγισης συναρτήσεων μετατοπίζεται σε ένα πρόβλημα επιμόησης ενός μηχανισμού για να οδηγήσουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων σε μια μικρή περιοχή των βέλτιστων τιμών τους, με το μέγεθος αυτής της περιοχής να καθορίζει μια μετρική της ποιότητας μάθησης.

Όπως αναφέρθηκε, η ικανοποίηση της PE ιδιότητας σε μη γραμμικά συστήματα παραμένει ακόμα ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Όσον αφορά τα RBF νευρωνικά δίκτυα, η ικανοποίηση της ιδιότητας αυτής έχει απασχολήσει αρκετά την διεθνή κοινότητα [16],[18],[19],[20], [21].

Στο [18], οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι εάν οι εισοδοί του δικτύου συμπίπτουν ακριβώς με τα κέντρα του, τότε ο προβλέπτης είναι PE, μια συνθήκη αρκετά περιοριστική, καθώς για έναν τυχαίο συνδυασμό εισόδων, αυτές σχεδόν ποτέ δεν θα συμπίπτουν με τα κέντρα. Στα [19],[20] δείχθηκε ότι, για κέντρα τοποθετημένα σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα, ο αντίστοιχος προβλέπτης θα είναι PE, δεδομένου ότι οι εισοδοί ανήκουν σε κάποιες περιοχές των κέντρων αυτών. Παρ'όλα αυτά, θεωρητική

απόδειξη για το μέγεθος αυτών των περιοχών δεν δόθηκε. Οι συγγραφείς στο [16] απέδειξαν ότι εάν το μέγεθος ϵ αυτών των περιοχών είναι μικρότερο από το μισό της απόστασης μεταξύ οποιωνδήποτε δύο νευρώνων, τότε ο προβλέπτης είναι PE. Επιπλέον, μια κλάση ιδανικών τροχιών εισόδου, οι οποίες εξασφαλίζουν την PE ιδιότητα, χαρακτηρίζεται ως περιοδικές τροχιές που επισκέπτονται τα κέντρα αυτά-ή αλλιώς ένα είδος εργοδικής συνθήκης στην τροχιά του συστήματος είναι ικανό για ικανοποίηση της συνθήκης. Στο [21], οι συγγραφείς επέκτειναν τα παραπάνω αποτελέσματα και έδειξαν, ότι για κέντρα τοποθετημένα σε ομοιόμορφο πλέγμα, **οποιαδήποτε** περιοδική τροχιά η οποία παραμένει στο πλέγμα αυτό, είναι ικανή να οδηγήσει σε μια μερική ικανοποίηση της PE ιδιότητας για τον προβλέπτη, προχωρώντας στην άρση του περιορισμού για το ϵ κρίνοντάς το ως μη αναγκαίο.

Για τον σκοπό της συγκεκριμένης εργασίας και λαμβάνοντας υπ' όψη όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, και ιδιαίτερα αυτά των [16],[18], σχεδιάζουμε μια τροχιά για το αεροσκάφος, εξαναγκάζοντάς το να περάσει αρκούντως κοντά από τα κέντρα όλων των RBF νευρώνων περιοδικά, με αποτέλεσμα την ικανοποίηση της PE ιδιότητας για ολόκληρο το διάνυσμα του προβλέπτη, και εξασφαλίζοντας εν τέλει ακριβή μάθηση. Μια ενδεικτική εικονική αναπαράσταση μιας τέτοια τροχιάς φαίνεται στο Σχ.4.3.



Σχήμα 4.3: Εικονική Αναπαράσταση της PE ιδιότητας για RBF με κέντρα $c_i, i = 1, 2, 3$. [3]

Τα αποτελέσματα του [16] συνοψίζονται στο εξής θεώρημα :

Θεώρημα 1[16]: Έστω $I = [t_0, t_0 + T]$ με $t, T > 0$ και $I_i = \{t \in I : \|x(t) - c_i\| \leq \epsilon\}$, $i = 1, \dots, q$ με $\epsilon \leq \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \|c_i - c_j\|$. Εάν υπάρχει ένα T , έτσι ώστε όλες οι Borel-μετρικές $\mu(I)$, $i = 1, \dots, q$ είναι φραγμένες από κάτω από μία θετική σταθερά τ_0 ανεξάρτητη από το t_0 και το i , τότε η συνάρτηση $Z(x(t))$ είναι διαρκώς διεγυόμενη (persistently exciting) υπό την έννοια της Εξ.4.10.

Το παραπάνω θεώρημα υποδηλώνει ότι για μια περιοδική τροχιά $x(t)$ με περίοδο T , εάν σε κάθε χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, η τροχιά επισκέπτεται μια ϵ -περιοχή κάθε κέντρου c_i του RBF δικτύου για έναν ελάχιστο χρόνο $\tau > 0$ ανεξάρτητο από το t_0 , όπου $\epsilon \leq \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \|c_i - c_j\|$, τότε ο προβλέπτης $Z(x(t))$ είναι PE. Ο περιορισμός του ϵ εξασφαλίζει ότι οι ϵ -περιοχές των κέντρων δεν τέμνονται, έτσι ώστε για κάθε φραγμένο μ -μετρήσιμο σύνολο I , τα υποσύνολα I_i (ορισμένα στο Θεώρημα 1) είναι διαχωριστικά, και επομένως η ακόλουθη ανισότητα ισχύει για κάθε σταθερό διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^q$:

$$\sum_{i=1}^q \int_{I_i} |c^T Z(\tau)|^2 d\mu(\tau) \leq \int_{t_0}^{t_0+T} |c^T Z(\tau)|^2 d\mu(\tau) \quad (4.11)$$

5

Σχήμα Ελέγχου Αεροσκάφους

Θεωρώντας άγνωστη τη δυναμική του αεροπλάνου(αεροδυναμικοί συντελεστές, μοντέλο κινητήρα κλπ), στόχος μας είναι να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή, ο οποίος δεν βασίζεται στην γνώση του μοντέλου (model-free controller), να παρουσιάζει ευρωστία (robustness) ως προς τις αβεβαιότητές του, αλλά και ως προς τον θόρυβο μέτρησης των αισθητήρων και τις εξωτερικές διαταραχές. Η μεθοδολογία Prescribed Performance Control(PPC), που προτάθηκε αρχικά στο [22], θα αποτελέσει την βάση για το σχήμα ελέγχου το οποίο παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο.

5.1 Προκαθορισμένης Ποιότητας Έλεγχος - Prescribed Performance Control

Η μεθοδολογία αυτή, που προτάθηκε αρχικά στο [22], και έχει εφαρμοστεί έκτοτε με διάφορες παραλλαγές [3],[23],[24],[25], αποτελεί τη βάση για το σχήμα ελέγχου του αεροσκάφους. Προκαθορισμένη ποιότητα(Prescribed Performance) σημαίνει ότι το σφάλμα παρακολούθησης της εξόδου, συγκλίνει σε μια προκαθορισμένη περιοχή, με ταχύτητα σύγκλισης όχι μικρότερη από μία επίσης προκαθορισμένη τιμή. Ο ελεγκτής αυτός, με ανατροφοδότηση κατάστασης (state-feedback controller) απομονώνει την απόκριση της εξόδου από εκτεταμένη διαδικασία δοκιμής και λάθους(trial-and-error) για τον καθορισμό των κερδών, ενώ επιδεικνύει μεγάλη ευρωστία σε αβεβαιότητες του μοντέλου, αποφεύγοντας επίσης την μεγάλη πολυπλοκότητα του σχήματος ελέγχου, σε σχέση με άλλες backstepping-like τεχνικές που χρησιμοποιούνται συνήθως για τον έλεγχο συστημάτων με ανατροφοδότηση κατάστασης.

5.1.1 Δυναμικά Συστήματα

Έστω το πρόβλημα αρχικών συνθηκών :

$$\dot{\xi}(t) = h(t, \xi(t)), \quad \xi(0) = \xi^0 \in \Omega_\xi \quad (5.1)$$

με $h : \mathbb{R}_+ \times \Omega_\xi \rightarrow \mathbb{R}^n$, όπου $\Omega_\xi \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο.

Ορισμός 1[26]. Μια λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών 5.1 ονομάζεται σε αγγλική

ορολογία maximal, εάν δεν υπάρχει δεξιά επέκτασή της που είναι επίσης λύση του 5.1.

Για παράδειγμα, έστω το πρόβλημα αρχικών συνθηκών $\dot{\xi}(t) = \xi^2(t)$, $\xi(0) = 1$, του οποίου η λύση είναι $\xi(t) = \frac{1}{1-t}$, $\forall t \in [0, 1)$. Η λύση είναι maximal, αφού δεν μπορεί να οριστεί για $t > 1$. Δηλαδή, δεν υπάρχει κατάλληλη επέκταση του $\xi(t) \forall t \in [0, 1)$ προς τα δεξιά του $t = 1$, που να είναι επίσης λύση του αρχικού προβλήματος αρχικών συνθηκών.

Θεώρημα 1[26]. Έστω το πρόβλημα αρχικών συνθηκών 5.1. Υποθέτοντας ότι:

1. Η h είναι τοπικά Lipschitz ως προς το ξ .
2. Συνεχής στο t για κάθε $\xi \in \Omega_\xi$
3. Τοπικά ολοκληρώσιμη στο t για κάθε $\xi \in \Omega_\xi$.

Τότε, υπάρχει μοναδική maximal λύση $\xi : [0, \tau_{max}] \rightarrow \Omega_\xi$ του 5.1 στο διάστημα $[0, \tau_{max})$ με $\tau_{max} \in \{\mathbb{R}_+^*, \infty\}$ έτσι ώστε $\xi(t) \in \Omega_\xi, \forall t \in [0, \tau_{max})$

Πρόταση 1[26]. Έστω ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 ισχύουν. Τότε, για μια maximal λύση $\xi : [0, \tau_{max})$ στο διάστημα $[0, \tau_{max})$ με $\tau_{max} < \infty$, και για κάθε συμπαγές σύνολο $\Omega'_\xi \subset \Omega_\xi$, υπάρχει μια χρονική στιγμή $t' \in [0, \tau_{max})$ έτσι ώστε $\xi(t') \notin \Omega'_\xi$.

5.1.2 Προκαθορισμένη Ποιότητα - Συναρτήσεις Απόδοσης

Λέγοντας προκαθορισμένη ποιότητα, εννοείται ότι το σφάλμα παρακολούθησης εξόδου συγκλίνει σε ένα προκαθορισμένο αυθαίρετα μικρό υπολειπόμενο σύνολο(residual set), με ταχύτητα σύγκλισης όχι μικρότερη από μία προκαθορισμένη τιμή. Έστω ένα γενικό βαθμωτό σφάλμα εξόδου $e(t)$. Η προκαθορισμένη ποιότητα επιτυγχάνεται εάν το σφάλμα αυτό εξελίσσεται αυστηρά μέσα σε ένα προκαθορισμένο πεδίο, φραγμένο από φθίνουσες συναρτήσεις του χρόνου. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται συναρτήσεις απόδοσης(performance functions) και η μαθηματική έκφραση της προκαθορισμένης ποιότητας ορίζεται ως :

$$-\rho(t) < e(t) < \rho(t), \quad t \geq 0 \quad (5.2)$$

όπου $\rho(t)$ μια ομαλή, φραγμένη, θετική και φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου που ικανοποιεί $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) > 0$. Στην ανάλυση μας, θεωρούμε συναρτήσεις απόδοσης της μορφής $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty$ με ρ_0 , λ και ρ_∞ κατάλληλα επιλεγμένες, αυστηρά θετικές σταθερές. Πιο συγκεκριμένα, το $\rho_0 = \rho(0)$ επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί $\rho_0 > |e(0)|$, ενώ η παράμετρος ρ_∞ αφορά το μέγιστο επιτρεπόμενο μέγεθος του σφάλματος $e(t)$ σε σταθερή κατάσταση(steady state). Τέλος, το λ αναπαριστά τον φθίνοντα ρυθμό της $\rho(t)$, επιβάλλοντας έτσι ένα κάτω φράγμα στην ταχύτητα σύγκλισης του $e(t)$.

Για να επιτευχθεί μεταβατική αλλά και σταθερή κατάσταση με ένα προκαθορισμένο τρόπο απόδοσης, ορίζεται και ο αμφιμονοσήματος μετασχηματισμός $(-1, 1) \rightarrow (-\infty, \infty)$:

$$T(\star) = \ln \left(\frac{1 + \star}{1 - \star} \right) \quad (5.3)$$

που διατηρεί το πρόσημο του ορίσματός του και η παράγωγός του είναι πάντα θετική.

5.1.3 Διατύπωση του Γενικού Προβλήματος και Υποθέσεις

Έστω ένα n τάξης σύστημα με δυνατότητα ανατροφοδότησης κατάστασης που περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

όπου $x_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ είναι οι καταστάσεις του συστήματος με αρχικές συνθήκες $x_i(0) = x_i^0, i = 1, \dots, n, u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ η είσοδος ελέγχου, y η έξοδος και $f_i : \mathbb{R}^{i+1} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ είναι άγνωστες μη γραμμικές συναρτήσεις.

Διατύπωση του Προβλήματος

Έστω το άγνωστο σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις 5.4. Το πρόβλημα έγκειται στον σχεδιασμό ενός συνεχούς, χρονικά μεταβαλλόμενου, ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης $u(t) = \phi(x_1(t), \dots, x_n(t), t)$ έτσι ώστε για κάθε αρχική συνθήκη, όλα τα σήματα του κλειστού συστήματος (closed-loop) να παραμένουν φραγμένα και επιπλέον, η έξοδος να ακολουθεί μια επιθυμητή τροχιά με προκαθορισμένη ποιότητα. Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό, κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

Υπόθεση 1. Οι συναρτήσεις $f_i : \mathbb{R}^{i+1} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ είναι συνεχώς παραγοντοποιήσιμες και υπάρχουν άγνωστε θετικές σταθερές $b_i, i = 1, \dots, n$, έτσι ώστε :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| &\geq b_i > 0, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \left| \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u} \right| &\geq b_n > 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Υπόθεση 2. Το πρόσημο του $\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}}, i = 1, \dots, n-1$ θεωρείται γνωστό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποτίθεται θετικό.

Υπόθεση 3. Οι καταστάσεις του συστήματος $x_i, i = 1, \dots, n$ είναι διαθέσιμες για μέτρηση.

Υπόθεση 4. Η επιθυμητή τροχιά $y_d : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστή, συνεχώς παραγοντοποιήσιμη και φραγμένη συνάρτηση του χρόνου με φραγμένη αλλά άγνωστη πρώτη παράγωγο.

5.1.4 Μεθοδολογία Ελέγχου

Δοσμένων των αρχικών συνθηκών:

I-a Επιλέγουμε μια συνάρτηση απόδοσης εξόδου ρ_1 που (i) ικανοποιεί $\rho_1(0) > |x_1(0) - y_d(0)|$ και (ii) συμπεριλαμβάνει την επιθυμητή απόκριση σχετικά με το σφάλμα σταθερής κατάστασης και την ταχύτητα σύγκλισης.

I-b. Σχεδιάζουμε το πρώτο ενδιάμεσο σήμα ελέγχου :

$$\bar{a}_1(x_1, t) = -k_1 T \left(\frac{x_1 - y_d(t)}{\rho_1(t)} \right) \quad (5.6)$$

II. Επιλέγουμε μια δεύτερη συνάρτηση απόδοσης ρ_2 που ικανοποιεί μόνο $\rho_2(0) > |x_2(0) - \bar{a}_1(x_1(0), 0)|$ και σχεδιάζουμε το δεύτερο ενδιάμεσο σήμα ελέγχου ως :

$$\bar{a}_2(x_1, x_2, t) = -k_2 T \left(\frac{x_2 - \bar{a}_1(x_1, t)}{\rho_2(t)} \right) \quad (5.7)$$

III. Επαναλαμβάνουμε το βήμα II για όλα τα υπόλοιπα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου:

$$\bar{a}_i(x_1, \dots, x_i, t) = -k_i T \left(\frac{x_i - \bar{a}_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})}{\rho_i(t)} \right) \quad (5.8)$$

με k_i θετικές σταθερές και συναρτήσεις απόδοσης ρ_i να ικανοποιούν $\rho_i(0) > |x_i(0) - \bar{a}_{i-1}(x_1(0), \dots, x_{i-1}(0), 0)|$ για $i = 3, \dots, n-1$.

IV. Τέλος, σχεδιάζουμε την είσοδο ελέγχου ως :

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_n, t) = -k_n T \left(\frac{x_n - \bar{a}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}{\rho_n(t)} \right) \quad (5.9)$$

με k_n θετική σταθερά και συνάρτηση απόδοσης ρ_n να ικανοποιεί $\rho_n(0) > |x_n(0) - \bar{a}_{n-1}(x_1(0), \dots, x_{n-1}(0), 0)|$.

5.1.5 Ανάλυση Ευστάθειας

Θεώρημα 2 . Έστω το σύστημα (5.4) για το οποίο ισχύουν οι Υποθέσεις (1-3). Δοσμένων οποιωνδήποτε αρχικών συνθηκών $x_i(0) = x_i^0, i = 1, \dots, n$ και οποιαδήποτε επιθυμητή τροχιά y_d για την οποία ισχύει η Υπόθεση (4), η μεθοδολογία ελέγχου (5.6-5.9) με $k_i > 0, i = 1, \dots, n$ λύνει το πρόβλημα.

Απόδειξη

Ορίζουμε τα κανονικοποιημένα σφάλματα :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_1 - y_d(t)}{\rho_1(t)} \\ \xi_i &= \frac{x_i - \bar{a}_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})}{\rho_i(t)}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Έτσι, τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου, καθώς και η είσοδος ελέγχου μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των σφαλμάτων αυτών ως :

$$\bar{a}_i(x_1, \dots, x_i, t) = a_i(\xi_i) = -k_i \ln \left(\frac{1 + \xi_i}{1 - \xi_i} \right), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.11)$$

και

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_n, t) = u(\xi_n) = -k_n \ln \left(\frac{1 + \xi_n}{1 - \xi_n} \right) \quad (5.12)$$

Παραγοντοποιώντας τα κανονικοποιημένα σφάλματα (5.10) ως προς τον χρόνο και αντικαθιστώντας το σύστημα (5.4), αλλά και τις εξισώσεις :

$$x_1 = \xi_1 \rho_1(t) + y_d(t) \quad (5.13)$$

$$x_i = \xi_i \rho_i(t) + a_{i-1}(\xi_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.14)$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= h_1(t, \xi_1, \xi_2) \\ &= \frac{1}{\rho_1(t)} (f_1(\xi_1 \rho_1(t) + y_d(t), \xi_2 \rho_2(t) + a_1(\xi_1)) - \dot{y}_d(t) - \xi_1 \dot{\rho}_1(t)) \\ \dot{\xi}_2 &= h_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= \frac{1}{\rho_2(t)} \left(f_2(\xi_1 \rho_1(t) + y_d(t), \xi_2 \rho_2(t) + a_1(\xi_1), \xi_3 \rho_3(t) + a_2(\xi_2)) - \frac{d a_1}{d \xi_1} h_1(t, \xi_1, \xi_2) - \xi_2 \dot{\rho}_2(t) \right) \\ \dot{\xi}_i &= h_i(t, \xi_1, \dots, \xi_{i+1}) \\ &= \frac{1}{\rho_i(t)} \left(f_i(\xi_1 \rho_1(t) + y_d(t), \dots, \xi_{i+1} \rho_{i+1}(t) + a_i(\xi_i)) - \frac{d a_{i-1}}{d \xi_{i-1}} h_{i-1}(t, \xi_1, \dots, \xi_i) - \xi_i \dot{\rho}_i(t) \right), \\ \dot{\xi}_n &= h_n(t, \xi_1, \dots, \xi_n) \\ &= \frac{1}{\rho_n(t)} \left(f_n(\xi_1 \rho_1(t) + y_d(t), \dots, \xi_n \rho_n(t) + a_{n-1}(\xi_{n-1}), u(\xi_n)) - \frac{d a_{n-1}}{d \xi_{n-1}} h_{n-1}(t, \xi_1, \dots, \xi_n) - \xi_n \dot{\rho}_n(t) \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

για $i = 3, \dots, n-1$

Σε συμπαγή μορφή, το δυναμικό σύστημα των κανονικοποιημένων σφραγμάτων μπορεί να γραφεί ως :

$$\dot{\xi} = h(t, \xi) = \begin{bmatrix} h_1(t, \xi_1, \xi_2) \\ \vdots \\ h_n(t, \xi_1, \dots, \xi_n) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Ορίζουμε επίσης το ανοιχτό σύνολο :

$$\Omega_\xi = (-1, 1) \times \dots \times (-1, 1) \quad (5.17)$$

Στη συνέχεια, προχωράμε σε δύο φάσεις. Αρχικά, η ύπαρξη μοναδικής maximal λύσης $\xi : [0, \tau_{max}) \rightarrow \Omega_\xi$ του συστήματος (5.17) πάνω στο σύνολο Ω_ξ στο χρονικό διάστημα $[0, \tau_{max})$ αποδεικνύεται, δηλαδή ότι $\xi(t) \in \Omega_\xi, \forall t \in [0, \tau_{max})$. Έπειτα, αποδεικνύουμε ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία ελέγχου εξασφαλίζει για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$: (a) ότι όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου του 5.19 είναι φραγμένα και (b): ότι το $\xi(t)$ παραμένει αυστηρά στο συμπαγές σύνολο Ω_ξ για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$, το οποίο οδηγεί με αντίφαση στο ότι $\tau_{max} = \infty$ και κατά συνέπεια στη λύση του προβλήματος.

Φάση Α

Το σύνολο Ω_ξ είναι μη κενό και ανοιχτό. Επιπλέον, οι συναρτήσεις απόδοσης ρ_i έχουν επιλεγθεί έτσι ώστε να ικανοποιούν $\rho_1(0) > |x_1(0) - y_d(0)|$ και $\rho_i(0) > |x_i(0) - \bar{a}_{i-1}(x_1(0), \dots, x_{i-1}(0), 0)|, i = 2, \dots, n$. Σαν συνέπεια, $\xi_i(0) < 1, i = 1, \dots, n$, άρα $\xi(0) \in \Omega_\xi$. Επιπλέον, η h είναι φραγμένη και συνεχώς παραγοντοποιήσιμη στον χρόνο καθώς και τοπικά Lipschitz στο ξ πάνω στο σύνολο Ω_ξ ,

χρωστώντας το στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις απόδοσης και η επιθυμητή τροχιά εξόδου είναι φραγμένες, συνεχώς παραγοντοποιήσιμες συναρτήσεις του χρόνου, οι μη γραμμικότητες f_i είναι συνεχώς παραγοντοποιήσιμες συναρτήσεις και ότι τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου και η είσοδος ελέγχου είναι ομαλές πάνω στο Ω_ξ . Έτσι, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 στέχουν και η ύπαρξη και μοναδικότητα maximal λύσης $\xi : [0, \tau_{max}) \rightarrow \Omega_\xi$ σε χρονικό διάστημα $[0, \tau_{max})$ έτσι ώστε $\xi(t) \in \Omega_\xi, \forall t \in [0, \tau_{max})$ επιβεβαιώνεται.

Φάση Β

Έχουμε αποδείξει ότι τα κανονικοποιημένα σφάλματα $\xi(t) \in \Omega_\xi, \forall t \in [0, \tau_{max})$, ή ισοδύναμα ότι :

$$\xi_i(t) \in (-1, 1), i = 1, \dots, n \forall t \in [0, \tau_{max}). \quad (5.18)$$

Έτσι, τα σήματα:

$$\epsilon_i(t) = \ln \left(\frac{1 + \xi_i(t)}{1 - \xi_i(t)} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.19)$$

είναι καλά ορισμένα για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$.

Βήμα 1. Έστω η θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη (radially unbounded) Lyapunov υποψήφια συνάρτηση $V_1 = \frac{1}{2}\epsilon_1^2$. Παραγοντοποιώντας ως προς τον χρόνο, χρησιμοποιώντας την (5.19) και αντικαθιστώντας την (5.15), έχουμε :

$$\dot{V}_1 = \frac{2\epsilon_1}{(1 - \xi_1^2)\rho_1(t)} (f_1(\xi_1\rho_1(t) + y_d(t), \xi_2\rho_2(t) + a_1(\xi_1)) - \dot{y}_d(t) - \xi_1\dot{\rho}_1(t)) \quad (5.20)$$

Η Υπόθεση 1 και το Θεώρημα Μέσης Τιμής οδηγούν σε:

$$f_1(\xi_1\rho_1(t) + y_d(t), \xi_2\rho_2(t) + a_1(\xi_1)) = f_1(\xi_1\rho_1(t) + y_d(t), \xi_2\rho_2(t) + a_1(\xi_1)) \frac{\partial f_1(\xi_1\rho_1(t) + y_d(t), z)}{\partial z} \Big|_{z=z^*} \quad (5.21)$$

όπου $z^* = \lambda(\xi_2\rho_2(t) + a_1(\xi_1)) + (1 - \lambda)\xi_2\rho_2(t)$ για κάποιο $\lambda \in (0, 1)$. Αντικαθιστώντας τις (5.11), (5.21) και χρησιμοποιώντας την (5.19), η (5.20) γίνεται:

$$\dot{V}_1 = \frac{2\epsilon_1}{(1 - \xi_1^2)\rho_1(t)} \left(f_1(\xi_1\rho_1(t) + y_d(t), \xi_2\rho_2(t)) - \dot{y}_d(t) - \xi_1\dot{\rho}_1(t) - k_1\epsilon_1 \frac{\partial f_1(\xi_1\rho_1(t) + y_d(t), z)}{\partial z} \Big|_{z=z^*} \right) \quad (5.22)$$

Χρησιμοποιώντας την (5.18) και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $\rho_1, \dot{\rho}_1, \rho_2, y_d, \dot{y}_d$ είναι φραγμένες εκ κατασκευής και εκ Υποθέσεως (4), και με βάση το Θεώρημα Ακράιας Τιμής και την συνέχεια της $f_1(\cdot, \cdot)$:

$$|f_1(\xi_1\rho_1(t) + y_d(t), \xi_2\rho_2(t)) - \dot{y}_d(t) - \xi_1\dot{\rho}_1(t)| \leq \bar{F}_1 \quad (5.23)$$

για μία άγνωστη σταθερά $\bar{F}_1, \forall t \in [0, \tau_{max})$. Επιπλέον, με βάση τις Υποθέσεις (1-2) :

$$\left. \frac{\partial f_1(\xi_1 \rho_1(t) + y_d(t), z)}{\partial z} \right|_{z=z^*} \geq b_1. \quad (5.24)$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.23,5.24) και το γεγονός ότι $\frac{1}{1-\xi_1^2} \geq 1$, αλλά και ότι $\rho_1(t) > \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_1(t) > 0, \forall t \geq 0$ εκ κατασκευής, έχουμε για την \dot{V}_1 :

$$\dot{V}_1 \leq \frac{2\epsilon_1}{(1-\xi_1^2)\rho_1(t)} (\bar{F}_1 |\epsilon_1| - k_1 b_1 |\epsilon_1|^2), \forall t \in [0, \tau_{max}). \quad (5.25)$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η παράγωγος της Lyapunov είναι αρνητική όταν $|\epsilon_1| > \frac{\bar{F}_1}{k_1 b_1}$ και ακολούθως ότι :

$$|\epsilon_1(t)| \leq \bar{\epsilon}_1 = \max\{|\epsilon(0)|, \frac{\bar{F}_1}{k_1 b_1}\}, \forall t \in [0, \tau_{max}) \quad (5.26)$$

Σαν αποτέλεσμα, το πρώτο ενδιάμεσο σήμα ελέγχου παραμένει φραγμένο ($|a_1| \leq k_1 \bar{\epsilon}_1$) για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$. Επιπλέον, θεωρώντας την (5.14) για $i = 2$, καταλήγουμε στο ότι και το x_2 είναι φραγμένο για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$. Επιπλέον, από την (5.19), και παίρνοντας την αντίστροφη λογαριθμική συνάρτηση :

$$-1 < \frac{e^{-\bar{\epsilon}_1} - 1}{e^{-\bar{\epsilon}_1} + 1} = \xi_1 \leq \xi_1(t) \leq \bar{\xi}_1 = \frac{e^{\bar{\epsilon}_1} - 1}{e^{\bar{\epsilon}_1} + 1} \quad (5.27)$$

για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$. Τέλος, παραγοντοποιώντας το σήμα a_1 ως προς τον χρόνο και αντικαθιστώντας την (5.15), έχουμε :

$$\dot{a}_1 = \frac{da_1}{d\xi_1} h_1(t, \xi_1, \xi_2) = -\frac{2k_1}{(1-\xi_1^2)\rho_1(t)} (f_1(\xi_1 \rho_1(t) + y_d(t), \xi_2 \rho_2(t) + a_1(\xi_1)) - \dot{y}_d(t) - \xi_1 \dot{\rho}_1(t)) \quad (5.28)$$

από την οποία, και χρησιμοποιώντας την (5.27), είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι το \dot{a}_1 είναι φραγμένο $\forall t \in [0, \tau_{max})$.

Βήμα i ($2 \leq i \leq n$): Επαναλαμβάνοντας διαδοχικά την ίδια διαδικασία για τα υπόλοιπα βήματα, θεωρώντας συναρτήσεις $V_i = \frac{1}{2} \epsilon_i^2$, συμπεραίνουμε ότι :

$$|\epsilon_i(t)| \leq \bar{\epsilon}_i = \max\{|\epsilon_i(0)|, \frac{\bar{F}_i}{k_i b_i}\}, \forall t \in [0, \tau_{max}) \quad (5.29)$$

όπου οι σταθερές $\bar{F}_i, i = 2, \dots, n$ ικανοποιούν :

$$\left| f_i(\xi_1 \rho_1(t) + y_d(t), \dots, \xi_{i+1} \rho_{i+1}(t)) - \xi_i \dot{\rho}_i - \frac{da_i - 1}{d\xi_i - 1} h_{i-1}(t, \xi_1, \dots, \xi_i) \right| \leq \bar{F}_i, i = 2, \dots, n-1 \quad (5.30)$$

$$\left| f_n(\xi_1 \rho_1(t) + y_d(t), \dots, \xi_n \rho_n(t) + a_{n-1}(\xi_{n-1}, 0) - \xi_n \dot{\rho}_n - \frac{dan-1}{d\xi n-1} h_{n-1}(t, \xi_1, \dots, \xi_n) \right| \leq \bar{F}_n \quad (5.31)$$

για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$. Σε πλήρη αντιστοιχία, έχουμε :

$$-1 < \frac{e^{-\bar{\epsilon}_i} - 1}{e^{-\bar{\epsilon}_i} + 1} = \underline{\xi}_i \leq \xi_i(t) \leq \bar{\xi}_i = \frac{e^{\bar{\epsilon}_i} - 1}{e^{\bar{\epsilon}_i} + 1} \quad (5.32)$$

για $i = 2, \dots, n \forall t \in [0, \tau_{max})$. Σαν συνέπεια, όλα τα ενδιάμεσα σήματα ελέγχου a_i και όλες οι καταστάσεις του συστήματος $x_{i+1}, i = 2, \dots, n-1$, όπως επίσης και η είσοδος ελέγχου u παραμένουν φραγμένα για κάθε $t \in [0, \tau_{max})$. Μέχρι αυτό το σημείο, το μόνο που μένει να αποδειχθεί είναι ότι $\tau_{max} = \infty$.

Από τις (5.27,5.32) έχουμε ότι $\xi(t) \in \Omega'_\xi, \forall t \in [0, \tau_{max})$, όπου το σύνολο $\Omega'_\xi = [\underline{\xi}_1, \bar{\xi}_1] \times \dots \times [\underline{\xi}_n, \bar{\xi}_n]$ είναι μη κενό και συμπαγές. Είναι εύκολο να δούμε ότι $\Omega'_\xi \subset \Omega_\xi$. Οπότε, υποθέτοντας $\tau_{max} < \infty$ και επειδή $\Omega'_\xi \subset \Omega_\xi$, η Πρόταση 1 υποδεικνύει την ύπαρξη μιας χρονικής στιγμής $t' \in [0, \tau_{max})$ κατά την οποία $\xi(t') \notin \Omega'_\xi$, που είναι μια καθαρή αντίφαση. Επομένως, $\tau_{max} = \infty$, και όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου παραμένουν φραγμένα και επιπλέον $\xi(t) \in \Omega'_\xi \subset \Omega_\xi, \forall t \geq 0$. Τέλος, από τη (5.13) καταλήγουμε ότι

$$-\rho_1 < \frac{e^{-\bar{\epsilon}_i} - 1}{e^{-\bar{\epsilon}_i} + 1} \rho_1(t) \leq x_1 - y_d(t) \leq \frac{e^{\bar{\epsilon}_i} - 1}{e^{\bar{\epsilon}_i} + 1} \rho_1(t) < \rho_1(t) \quad (5.33)$$

για κάθε $t \geq 0$ και επομένως η έξοδος του συστήματος ακολουθεί την επιθυμητή τροχιά με προκαθορισμένη ποιότητα, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

5.2 Εφαρμογή στην διαμήκη δυναμική του Αεροσκάφους

Στην συγκεκριμένη εργασία, τόσο για τον έλεγχο, όσο και για την διαδικασία αναγνώρισης, θα ασχοληθούμε με την διαμήκη κίνηση του αεροσκάφους (Longitudinal Movement).

5.2.1 Μοντέλο εκφρασμένο στο πλαίσιο Ευστάθειας

Οι εξισώσεις κίνησης για την διαμήκη κίνηση του αεροσκάφους, όπως αυτές εκφράζονται στο πλαίσιο ευστάθειας (stability frame) είναι :

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (5.34)$$

$$\dot{V} = \frac{T(\alpha, \Phi) \cos \alpha - D(\alpha)}{m} - g \sin \gamma \quad (5.35)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L(\alpha) + T(\alpha, \Phi) \sin \alpha}{mV} - \frac{g}{V} \cos \gamma \quad (5.36)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (5.37)$$

$$\dot{q} = \frac{M(\alpha, \delta\epsilon)}{J_{yy}} \quad (5.38)$$

όπου V η ταχύτητα αέρος του αεροσκάφους, h το ύψος, θ και γ είναι οι γωνίες pitch και flight-path αντίστοιχα, $\alpha = \theta - \gamma$ η γωνία προσβολής (angle-of-attack), q είναι η γωνιακή ταχύτητα ως προς το pitch (pitch rate) και τα σήματα ελέγχου είναι το Φ και η εκτροπή του πτερυγίου $\delta\epsilon$. Η άντωση, η αντιστέκουσα δύναμη Drag, η Ω θηση και η pitch ροπή συμβολίζονται με $L(\alpha)$, $D(\alpha)$, $T(\alpha, \Phi)$ and $M(\alpha, \delta\epsilon)$ αντίστοιχα, και οι εκφράσεις τους είναι όπως αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Παρατήρηση 1. Χρησιμοποιούμε το γράμμα Φ αντί του throttle σαν είσοδο ελέγχου, καθώς θέλουμε να αποφύγουμε να κάνουμε χρήση του μοντέλου του κινητήρα κατά την ανάπτυξη της μεθοδολογίας ελέγχου.

5.2.2 Μεθοδολογία και Στόχος Ελέγχου

Καθώς οι βασικές μανούβρες για ένα αεροσκάφος κατά την διαμήκη κίνηση είναι επιτάχυνση/επιβράδυνση και άνοδος/κάθοδος κατά τις οποίες το ύψος h δεν εμπλέκεται στην δυναμική του συστήματος (για ύψη κοινά σε μικρής κλίμακας αεροσκάφη, η πυκνότητα του αέρα παραμένει ουσιαστικά σταθερή, οπότε το ύψος δεν επηρεάζει την δυναμική του συστήματος [4]), θεωρούμε επιθυμητές τροχιές σε ταχύτητα αέρος $V_d(t)$ και flight-path γωνία $\gamma_d(t)$ που ανήκουν σε ένα προκαθορισμένο σύνολο παραμετρικών καμπυλών στο κάθετο επίπεδο. Παρ'όλα αυτά, επειδή το ύψος ενός αεροσκάφους αποτελεί σημαντικό παράγοντα για κάθε πτήση, θα συμπεριλάβουμε στην ανάλυση μας και μια ανατροφοδότηση ύψους. Το επιθυμητό προφίλ κίνησης δίνεται από επιθυμητές τροχιές σε ταχύτητα αέρος V και ύψος h , ενώ η επιθυμητή γωνία γ_d θα υπολογίζεται από την κινηματική εξίσωση (5.34).

Ακολουθώντας λοιπόν την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας, και δοσμένης μια επιθυμητής τροχιάς για την ταχύτητα που ικανοποιεί την Υπόθεση (4), αλλά και μιας αρχικής συνθήκης $V(0)$:

- (i) Επιλέγουμε μια κατάλληλη συνάρτηση απόδοσης ρ_V , που ικανοποιεί $\rho_{0_V} > |e_V(0)|$ και εμπεριέχει την επιθυμητή μεταβατική αλλά και σταθερής κατάστασης απόκριση.
- (ii) Ορίζουμε το κανονικοποιημένο σφάλμα $\xi_V(t) = \frac{V(t) - V_d(t)}{\rho_V(t)}$, όπως στην (5.10).
- (iii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της (5.3), ορίζουμε το σήμα $e_V = \ln \left(\frac{1 + \xi_V(t)}{1 - \xi_V(t)} \right)$.

Δοσμένης μιας επιθυμητής τροχιάς στο ύψος h_d , χρησιμοποιώντας την κινηματική εξίσωση (5.34) και συμπεριλαμβάνοντας μια ανατροφοδότηση ύψους, έχουμε :

$$\dot{h}_d(t) - k_h(h - h_d) = V_d(t) \sin(\gamma_d(t)) \quad (5.39)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την παραπάνω εξίσωση (5.39), εξάγουμε την επιθυμητή τροχιά για το flight-path ως :

$$\gamma_d(t) = \arcsin \left(\frac{\dot{h}_d(t) - k_h(h - h_d)}{V_d(t)} \right) \quad (5.40)$$

Ακολουθώντας πάλι την ίδια διαδικασία και δοσμένης μιας αρχικής συνθήκης $\gamma(0)$:

- (i) Επιλέγουμε μια κατάλληλη συνάρτηση απόδοσης ρ_γ , που ικανοποιεί $\rho_{0,\gamma} > |e_\gamma(0)|$ και εμπεριέχει την επιθυμητή μεταβατική αλλά και σταθερής κατάστασης απόκριση.
- (ii) Ορίζουμε το κανονικοποιημένο σφάλμα $\xi_\gamma(t) = \frac{\gamma(t) - \gamma_d(t)}{\rho_\gamma(t)}$, όπως στην (5.10).
- (iii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της (5.3), ορίζουμε το σήμα $\epsilon_\gamma = \ln \left(\frac{1 + \xi_\gamma(t)}{1 - \xi_\gamma(t)} \right)$.

Επιλέγουμε το ακόλουθο διάνυσμα ελέγχου :

$$\begin{bmatrix} T(\alpha, \Phi) \cos \alpha_d \\ T(\alpha, \Phi) \sin \alpha_d \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_V & 0 \\ 0 & k_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_V & 0 \\ 0 & r_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_V \\ \epsilon_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Phi \\ \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{A^2 + B^2} \\ \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

όπου $A = -k_V \epsilon_V$, $B = -\frac{k_\gamma \epsilon_\gamma}{V}$ και r_V, r_γ οι αντίστοιχες Ιακωβιανές $r_V = \frac{\partial \epsilon_V}{\partial \xi_V}$ και $r_\gamma = \frac{\partial \epsilon_\gamma}{\partial \xi_\gamma}$.

Κατασκευάζουμε την επιθυμητή γωνία pitch ως εξής :

$$\theta_d(t) = \alpha_d(t) + \gamma_d(t) \quad (5.43)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (5.37-5.38), μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας 2ης τάξης σύστημα σε αντιστοιχία με το (5.4) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (5.44)$$

όπου $[x_1, x_2] = [\theta, q]$, $y = x_1 = \theta$ και $u = \delta_\epsilon$ η είσοδος.

Η Υπόθεση (1) της προηγούμενης ενότητας αποτελεί μια ικανή συνθήκη ελεγχιμότητας του συστήματος[27], και γνωρίζουμε λόγω μη ύπαρξης αβεβαιότητας στην κινηματική εξίσωση (5.37) ότι $\left| \frac{\partial f_1(x_2)}{\partial x_2} \right| = b_1 = 1 > 0$, αλλά και ότι $\left| \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial u} \right| \geq b_2 > 0$, αλλιώς η είσοδος δεν θα επηρρέαζε καθόλου το σύστημα.

Όσον αφορά το πρόσημο του $\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial u}$, αυτό θεωρείται γνωστό και αρνητικό, καθώς σχετίζεται με την εκτροπή του elevator, και απο σύμβαση[4] θεωρούμε ότι θετική εκτροπή του elevator προκαλεί μια pitching ροπή προς τα κάτω-αρνητική ως προς τον άξονα περιστροφής.

Η Υπόθεση (3) βασίζεται στο αισθητηριακό σύστημα του αεροσκάφους και με αλγορίθμους εκτίμησης κατάστασης που αναπτύσσονται στην επόμενη ενότητα, ενώ η Υπόθεση(4) είναι εύκολο να επαληθευτεί.

Έτσι, ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης ενότητας, σχεδιάζουμε την είσοδο ελέγχου δ_ϵ έτσι ώστε το $\theta(t)$ να ακολουθεί σθεναρά το $\theta_d(t)$ με προκαθορισμένη ποιότητα:

I-a. Επιλέγουμε μια συνάρτηση απόδοσης εξόδου ρ_θ που ικανοποιεί $\rho_\theta(0) > |\theta(0) - \theta_d(0)|$ και συμπεριλαμβάνει την επιθυμητή απόκριση μεταβατικής αλλά και σταθερής κατάστασης.

I-b. Σχεδιάζουμε το ενδιάμεσο σήμα ελέγχου ως :

$$\bar{a}_1(\theta, t) = -k_\theta \ln \left(\frac{\theta - \theta_d(t)}{\rho_\theta(t)} \right) \quad (5.45)$$

με k_θ μια θετική σταθερά.

II. Επιλέγουμε μια δεύτερη συνάρτηση απόδοσης ρ_q με μόνο περιορισμό $\rho_q(0) > |q(0) - \bar{a}_1(\theta(0), 0)|$ και σχεδιάζουμε την είσοδο ελέγχου $u \equiv \delta_\epsilon$ ως :

$$u(\theta, q, t) = k_q \ln \left(\frac{q - \bar{a}_1(\theta(t), t)}{\rho_q(t)} \right) \quad (5.46)$$

με k_q μια θετική σταθερά.

Παρατήρηση 1. Το γεγονός ότι το σήμα ελέγχου υπεισέρχεται χωρίς αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο αρνητικό πρόσημο του $\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial u}$.

Παρατήρηση 2. Η μεθοδολογία ελέγχου ανατροφοδότησης κατάστασης που προτείνεται σε αυτήν την ενότητα δεν συμπεριλαμβάνει καμία a priori γνώση των μη γραμμικοτήτων του συστήματος, ούτε κάποια αντίστοιχα άνω/κάτω φράγματα, χαλαρώνοντας ουσιαστικά πολλές υποθέσεις-κλειδιά που έχουν προταθεί στην διεθνή βιβλιογραφία. Επιπλέον, συγκρινόμενος με άλλες backstepping-like τεχνικές που χρησιμοποιούνται για να χειριστούν τέτοιου είδους προβλήματα, το συγκεκριμένο σχήμα ελέγχου αποφεύγει τελείως την έκρηξη πολυπλοκότητας, με το αντίτιμο της δυνατότητας για μέτρηση κατάστασης, καταλήγοντας σε ένα σχήμα με μειωμένη πολυπλοκότητα, ενώ κάνει και την υλοποίηση του σήματος ελέγχου straight-forward, καθώς δεν χρειάζονται σκληροί υπολογισμοί, ούτε αναλυτικοί ούτε αριθμητικοί.

Παρατήρηση 3. Από τη στιγμή που η εξέλιξη της εξόδου καθορίζεται μονάχα από την συνάρτηση απόδοσης $\rho(t)$ και σε αντίθεση με κοινές πρακτικές της σχετικής βιβλιογραφίας, η επιλογή κρίσιμων τιμών για τα κέρδη απλοποιείται σημαντικά, καθώς αρκεί απλά να υιοθετηθούν τιμές που οδηγούν σε αποδεκτή εξέλιξη του σφάλματος παρακολούθησης μέσα στα όρια που επιβάλλονται από τις συναρτήσεις απόδοσης με λογική προσπάθεια ελέγχου.

5.2.3 Ανάλυση Ευστάθειας

Όσον αφορά το σύστημα της γωνίας pitch θ και της γωνιακής ταχύτητας q , η σχετική απόδειξη ευστάθειας πραγματοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα κατά τη διατύπωση του γενικού προβλήματος κατά πλήρη αντιστοιχία και για $n = 2$.

Τώρα, όσον αφορά τα σφάλματα της ταχύτητας αέρος V και της flight-path γωνίας γ , θεωρούμε την εξής υποψήφια Lyapunov Συνάρτηση :

$$L = \frac{1}{2} m (k_V \epsilon_V^2 + k_\gamma \epsilon_\gamma^2) \quad (5.47)$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις όπως στην (5.15), χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.35-5.36), έχουμε :

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= m \left(k_V \epsilon_V r_V \left(\frac{\dot{V} - \dot{V}_d - \dot{\rho}_V \xi_V}{\rho_V(t)} \right) + k_\gamma \epsilon_\gamma r_\gamma \left(\frac{\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_d - \dot{\rho}_\gamma \xi_\gamma}{\rho_\gamma(t)} \right) \right) \\
&= m \begin{bmatrix} \epsilon_V \\ \epsilon_\gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{r_V}{\rho_V} & 0 \\ 0 & \frac{r_\gamma}{\rho_\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_V & 0 \\ 0 & k_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} - \dot{V}_d - \dot{\rho}_V \xi_V \\ \dot{\gamma} - \dot{\gamma}_d - \dot{\rho}_\gamma \xi_\gamma \end{bmatrix} \\
&= m \begin{bmatrix} \epsilon_V \\ \epsilon_\gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{r_V}{\rho_V} & 0 \\ 0 & \frac{r_\gamma}{\rho_\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_V & 0 \\ 0 & k_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T \cos \alpha - D}{m} - g \sin \gamma - \dot{V}_d - \dot{\rho}_V \xi_V \\ \frac{L + T \sin \alpha}{mV} - \frac{g}{V} \cos \gamma - \dot{\gamma}_d - \dot{\rho}_\gamma \xi_\gamma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon_V \\ \epsilon_\gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{r_V}{\rho_V} & 0 \\ 0 & \frac{r_\gamma}{\rho_\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_V & 0 \\ 0 & k_\gamma \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos e_a & -\sin e_a \\ \frac{1}{V} \sin e_a & \frac{1}{V} \cos e_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \cos \alpha_d \\ T \sin \alpha_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D - mg \sin \gamma - m\dot{V}_d - m\dot{\rho}_V \xi_V \\ L - \frac{mg}{V} \cos \gamma - m\dot{\gamma}_d - m\dot{\rho}_\gamma \xi_\gamma \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \epsilon_V \\ \epsilon_\gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{r_V}{\rho_V} & 0 \\ 0 & \frac{r_\gamma}{\rho_\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_V & 0 \\ 0 & k_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos e_a & -\sin e_a \\ \sin e_a & \cos e_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \cos \alpha_d \\ T \sin \alpha_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D - mg \sin \gamma - m\dot{V}_d - m\dot{\rho}_V \xi_V \\ L - \frac{mg}{V} \cos \gamma - m\dot{\gamma}_d - m\dot{\rho}_\gamma \xi_\gamma \end{bmatrix} \right) \\
&\leq -\bar{k} \left\| \begin{bmatrix} \epsilon_V \\ \epsilon_\gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{r_V}{\rho_V} & 0 \\ 0 & \frac{r_\gamma}{\rho_\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V} \end{bmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{bmatrix} \epsilon_V \\ \epsilon_\gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{r_V}{\rho_V} & 0 \\ 0 & \frac{r_\gamma}{\rho_\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V} \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} -D - mg \sin \gamma - m\dot{V}_d - m\dot{\rho}_V \xi_V \\ LV - mg \cos \gamma - mV\dot{\gamma}_d - mV\dot{\rho}_\gamma \xi_\gamma \end{bmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

όπου r_V και r_γ συμβολίζουν τις Ιακωβιανές των μετασχηματισμένων σφαλμάτων ϵ_V και ϵ_γ , και εκφράζονται ως $r_V = \frac{\partial \epsilon_V}{\partial \xi_V}$ και $r_\gamma = \frac{\partial \epsilon_\gamma}{\partial \xi_\gamma}$.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, για μια θετική επιλογή του \bar{k} ο τετραγωνικός όρος θα είναι πάντα κυρίαρχος, έτσι ώστε η \dot{V} να είναι αρνητική, και έτσι, η Lyapunov συνάρτηση είναι άνω φραγμένη διασφαλίζοντας ότι τα σφάλματα $\epsilon_V(t)$ και $\epsilon_\gamma(t)$ είναι επίσης φραγμένα.

5.3 Αισθητηριακό Σύστημα και Εκτίμηση Κατάστασης

Κριτικής σημασίας για τη κατασκευή μικρών μη επανδρωμένων αεροσκαφών έχει αποδειχθεί η ανάπτυξη μικρών, ελαφριών, αλλά και σταθερών αισθητήρων. Βασισμένοι σε μικροηλεκτρομηχανική (MEMS) τεχνολογία, μικροί αλλά ακριβείς αισθητήρες όπως επιταχυνσιόμετρα, γυροσκόπια και αισθητήρες πίεσης έχουν διευκολύνει την ανάπτυξη εμφανώς μικρότερων, αλλά και πιο ικανών αυτόνομων αεροσκαφών. Ενισχύμενα επίσης με την ανάπτυξη μικρών συστημάτων GPS, υπολογιστικά ισχυρούς μικροελεγκτές, αλλά και καλύτερες μπαταρίες, οι δυνατότητες των μη επανδρωμένων αεροσκαφών έχουν εκτοξευθεί τα τελευταία χρόνια. Η συγκεκριμένη ενότητα στοχεύει στην περιγραφή των on-board αισθητήρων που βρίσκονται τυπικά σε αυτά με έμφαση σε αισθητήρες που χρησιμοποιούνται για πλοήγηση και έλεγχο του αεροσκάφους.

Ταυτόχρονα, απαραίτητη είναι η ανάπτυξη αλγορίθμων για εκτίμηση κατάστασης με βάση τις μετρήσεις των αισθητήρων ώστε να χρησιμοποιηθούν για ανατροφοδότηση στον ελεγκτή. Ενώ κάποιες καταστάσεις μπορούν να ανακτηθούν απευθείας με ένα φιλτράρισμα των εξόδων των αισθητήρων, όπως η γωνιακή ταχύτητα από το γυροσκόπιο, για άλλες δεν είναι δυνατό κάτι τέτοιο. Για το σκοπό

της συγκεκριμένης εργασίας, θα χρησιμοποιήσουμε μια παραλλαγή του φίλτρου Kalman για μη γραμμικά συστήματα, και συγκεκριμένα το Extended Kalman Filter(EKF).

5.3.1 Οι Αισθητήρες

Επιταχυνσιόμετρα

Το επιταχυνσιόμετρο καταγράφει το διάνυσμα επιταχύνσεων(συμπεριλαμβανομένων και των όρων Coriolis) του αεροσκάφους ως προς το σωματόδετο πλαίσιο(body frame). Στην περίπτωση των επιταχυνσιόμετρων τύπου MEMS, οι καταγραφόμενες ποσότητες είναι :

$$\begin{bmatrix} y_{accel_x} \\ y_{accel_y} \\ y_{accel_z} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \beta_{accel} + \eta_{accel} \quad (5.48)$$

όπου β_{accel} είναι ένας όρος πόλωσης του αισθητήρα, εξαρτάται από τη θερμοκρασία και πρέπει να βαθμονομείται(calibration) πριν από κάθε πτήση, ενώ ο όρος η_{accel} αποτελεί λευκό γκαουσιανό θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής.

Γυροσκόπια

Τα γυροσκόπια μετράνε απευθείας τις γωνιακές ταχύτητες ως προς το σωματόδετο πλαίσιο του αεροσκάφους(body frame) και μοντελοποιούνται ως :

$$\begin{bmatrix} y_{gyro_x} \\ y_{gyro_y} \\ y_{gyro_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \beta_{gyro} + \eta_{gyro} \quad (5.49)$$

Για φτηνού κόστους MEMS γυροσκόπια, η επίδραση του όρου πόλωσης μπορεί να είναι σημαντική και πρέπει να τίθεται στο 0 περιοδικά κατά τη διάρκεια μιας πτήσης.

Αισθητήρες Πίεσης

Μετρήσεις πίεσης χρησιμοποιούνται για να δώσουν ενδείξεις για το ύψος και την ταχύτητα αέρος του αεροσκάφους. Για το ύψος χρησιμοποιείται ένας απόλυτος αισθητήρας πίεσης, ο οποίος μετράει διαφορά πίεσης απο το ύψος του αεροσκάφους σχετικά με το έδαφος και μοντελοποιείται ως εξής :

$$\begin{aligned} y_{abs_{press}} &= (P_{ground} - P) + \beta_{abs_{press}} + \eta_{abs_{press}} \\ &= \rho g h_{AGL} + \beta_{abs_{press}} + \eta_{abs_{press}} \end{aligned} \quad (5.50)$$

όπου ρ η πυκνότητα του αέρα(υποτίθεται σταθερή), g η σταθερά της βαρύτητας και h_{AGL} είναι το ύψος πάνω από το έδαφος(Above Ground Level). Οι όροι β, η ορίζονται όπως πριν.

Όσον αφορά την ταχύτητα αέρος, χρησιμοποιείται το σύστημα pitot-static μαζί με έναν διαφορικό μετρητή πίεσης. Η πίεση μπορεί να συσχετισθεί με την ταχύτητα αέρος με βάση την αρχή του Bernoulli, και ο διαφορικός αισθητήρας μοντελοποιείται ως εξής :

$$y_{diff_{press}} = \frac{\rho V^2}{2} + \beta_{diff_{press}} + \eta_{diff_{press}} \quad (5.51)$$

Μαγνητόμετρο

Το μαγνητόμετρο (ψηφιακή πυξίδα) καταγράφει την κατεύθυνση του αεροσκάφους ως προς τον μαγνητικό βορρά. Χρησιμοποιείται για να παρέχει μια ένδειξη για τη γωνία yaw ψ του αεροσκάφους και μοντελοποιείται ως εξής :

$$y_{mag} = \psi + \beta_{mag} + \eta_{mag} \quad (5.52)$$

GPS Το GPS είναι ένα βασισμένο σε δορυφόρους σύστημα πλοήγησης που δίνει πληροφορίες για την 3-D θέση αντικειμένων πάνω ή κοντά στη Γη. Για μη επανδρωμένα αεροσκάφη, χρησιμοποιείται το GPS για να παρέχει ενδείξεις για τη θέση ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $[p_n, p_e, p_d]^T$, αλλά και για την ταχύτητα εδάφους V_g και τη γωνία course χ . Για συστήματα GPS κοινά σε UAV, παρέχονται πληροφορίες με ρυθμό δειγματοληψίας 1Hz.

Wind Vanes

Οι ανεμοδείκτες γωνιών ευστάθειας -Wind Vanes- παρέχουν πληροφορίες για τις γωνίες προσβολής α (angle-of-attack) και πλαγιολίσθησης β (sideslip angle).

5.3.2 Εκτίμηση Κατάστασης αντιστρέφοντας Μοντέλα Αισθητήρων

Το πιο απλό σχήμα εκτίμησης κατάστασης είναι βασισμένο στην αντιστροφή των μοντέλων των αισθητήρων, το οποίο είναι αρκετά αποδοτικό για γωνιακές ταχύτητες, ύψος και ταχύτητα αέρος. Περνώντας την έξοδο των αισθητήρων από χαμηλοπερατά φίλτρα (Low-Pass Filters-LPFs), μπορούμε να έχουμε μια ακριβή εκτίμηση για τα παραπάνω μεγέθη :

Γωνιακές Ταχύτητες

$$\begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \\ \hat{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LPF(y_{gyro_x}) \\ LPF(y_{gyro_y}) \\ LPF(y_{gyro_z}) \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Ύψος

$$\hat{h} = \frac{LPF(y_{abspress})}{\rho g} \quad (5.54)$$

Ταχύτητα Αέρος

$$\hat{V} = \sqrt{\frac{2}{\rho} LPF(y_{diffpress})} \quad (5.55)$$

Γωνία yaw

$$\hat{\psi} = LPF(y_{mag}) \quad (5.56)$$

Όσον αφορά τις γωνίες Euler ϕ, θ αλλά και τις μετρήσεις από το GPS, που λόγω αργής δειγματοληψίας υπάρχει αρκετή καθυστέρηση, θα χρησιμοποιήσουμε πιο εξειδικευμένες τεχνικές για εκτίμηση κατάστασης, όπως το Extended Kalman Filter (EKF)

5.3.3 Εκτίμηση Κατάστασης με Extended Kalman Filter

Ο Γενικός Αλγόριθμος

Θεωρούμε ότι εξετάζουμε ένα σύστημα με δυναμική συνεχούς χρόνου και εξισώσεις κατάστασης που περιγράφονται από την παρακάτω σχέση :

$$\dot{x} = f(x, u) + \xi(t) \quad (5.57)$$

όπου $\xi(t)$ είναι μια μηδενικής μέσης τιμής στοχαστική διαδικασία με $\xi \sim \mathcal{N}(0, Q)$ που αντιστοιχεί σε αβεβαιότητες και διαταραχές του μοντέλου.

Η κατάσταση του συστήματος παρατηρείται μη-γραμμικά σε διακριτό χρόνο ως :

$$y[k] = h_k(x_k, u_k) + \eta(k) \quad (5.58)$$

όπου $\eta(k)$ είναι μια μηδενικής μέσης τιμής στοχαστική διαδικασία με $\eta \sim \mathcal{N}(0, R)$ που αντιστοιχεί σε θόρυβο από τις μετρήσεις των αισθητήρων.

Η συνδιακύμανση (covariance) R μπορεί συνήθως να προσδιοριστεί από βαθμονόμηση των αισθητήρων (calibration), αλλά η συνδιακύμανση Q είναι εν γένει άγνωστη και συνεπώς είναι μια παράμετρος που μπορεί να προσδιοριστεί για να βελτιωθεί η απόκριση του αλγορίθμου.

Βήμα 1-Αρχικοποίηση

Η αρχική κατάσταση του συστήματος μπορεί να εκτιμηθεί σε ένα επίπεδο αβεβαιότητας που εκφράζεται από την αρχικοποιημένη τιμή των διανυσμάτων κατάστασης και της αντίστοιχης μήτρας συνδιακύμανσης:

$$\begin{aligned} \hat{x}(0)^+ &= E\{x(0)\} \\ P(0) &= E\{(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T\} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Βήμα 2- Πρόβλεψη

Η δυναμική του συστήματος προβλέπεται σε συνεχή χρόνο από τις εξισώσεις του μοντέλου. Κάθε χρονική στιγμή, η πρόβλεψη πραγματοποιείται βάση των εξισώσεων :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= f(\hat{x}, u, t) \\ A &= \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u) \\ P &= P + AP + PA^T + Q \end{aligned} \quad (5.60)$$

Βήμα 3- Διόρθωση Πρόβλεψης από διαθέσιμη μέτρηση

Κάθε χρονική στιγμή όπου είναι διαθέσιμη μια μέτρηση από τους αισθητήρες, γίνεται διόρθωση των προβλέψεων :

$$\begin{aligned}
C_i &= \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}, u[n]) \\
L_i &= PC_i^T (R_i + C_i PC_i^T)^{-1} \\
P &= (I - L_i C_i) P \\
\hat{x} &= \hat{x} + L_i (y_i[n] - h(\hat{x}, u[n]))
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Με βάση αυτόν τον αλγόριθμο, μπορούμε να έχουμε μια ικανοποιητική εκτίμηση κατάστασης για τις γωνίες Euler ϕ, θ , χρησιμοποιώντας τις 3.4 προσθέτοντας τους όρους $\xi(t)$ που αντιστοιχούν στις αβεβαιότητες του μοντέλου και τις εξισώσεις από τις εξόδους των επιταχυνσιόμετρων 5.48. Αντίστοιχα, μπορούμε να έχουμε και μια εκτίμηση για τη γωνία προσβολής χρησιμοποιώντας σαν εξίσωση μοντέλου την :

$$\dot{\alpha} = \dot{\theta} - \dot{\gamma} \tag{5.62}$$

όπως αυτές είναι ορισμένες από τις εξισώσεις (5.36-5.37) και χρησιμοποιώντας την έξοδο του ανεμοδείκτη.

Τέλος, χρησιμοποιώντας πάλι τον αλγόριθμο αυτό και τις μετρήσεις από το GPS, μπορούμε να έχουμε εκτίμηση των καταστάσεων $[p_n, p_e, V_g, \chi]$ χρησιμοποιώντας τις εξής εξισώσεις για το μοντέλο :

$$\begin{aligned}
\dot{p}_n &= V_g \cos \chi \\
\dot{p}_e &= V_g \sin \chi \\
\dot{V}_g &= \frac{(V \cos \psi + w_n)(-V \dot{\psi} \sin \psi) + (V \sin \psi + w_e)(V \dot{\psi} \cos \psi)}{V_g} \\
\dot{\chi} &= \frac{g}{V_g} \tan \phi \cos(\chi - \psi)
\end{aligned} \tag{5.63}$$

όπου $\psi := \hat{\psi}$ από το μαγνητόμετρο, $\dot{\psi}$ από την κινηματική εξίσωση (3.4) χρησιμοποιώντας τις εκτιμώμενες καταστάσεις από τα LPF και το EKF, και $w_n = \hat{V}_g \cos \hat{\chi} - \hat{V} \cos \hat{\psi}$ και $w_e = \hat{V}_g \sin \hat{\chi} - \hat{V} \sin \hat{\psi}$ οι ψευδο-εκτιμώμενες ταχύτητες του ανέμου. Σαν έξοδοι χρησιμοποιούνται οι έξοδοι από το GPS.

5.4 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

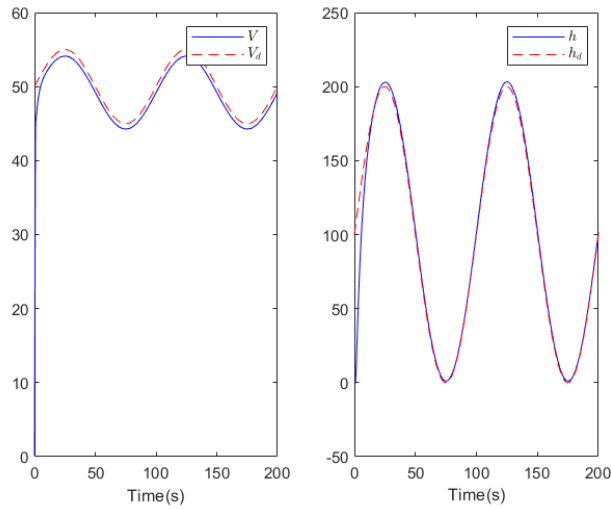
Στην ενότητα της εργασίας αυτής παρουσιάζονται τα αποτελέσματα δυναμικών προσομοιώσεων σε Matlab/Simulink, έπειτα από την μοντελοποίηση της κίνησης του αεροσκάφους όπως αυτή περιγράφηκε στα Κεφάλαια 2-3 και την ανάπτυξη της μεθοδολογίας ελέγχου του Κεφαλαίου αυτού.

5.4.1 Η ιδανική περίπτωση - Ανατροφοδότηση πραγματικής κατάστασης

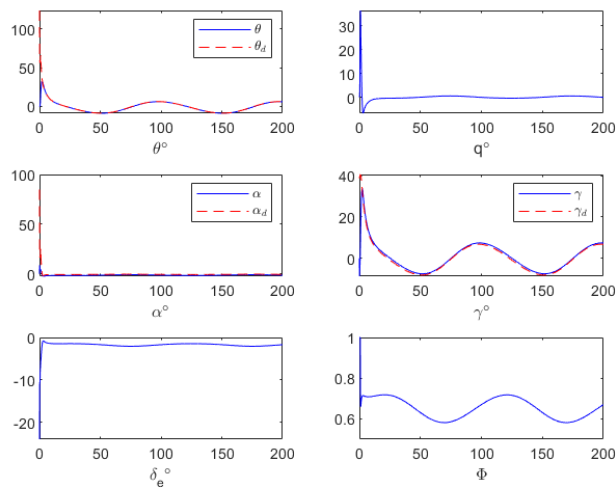
Στο σημείο αυτό παρουσιάζονται αποτελέσματα προσομοιώσεων στην ιδανική περίπτωση κατά την οποία η κατάσταση που ανατροφοδοτείται στον ελεγκτή είναι η πραγματική κατάσταση του

αεροσκάφους όπως αυτή υπολογίζεται αριθμητικά σύμφωνα με τις κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3.

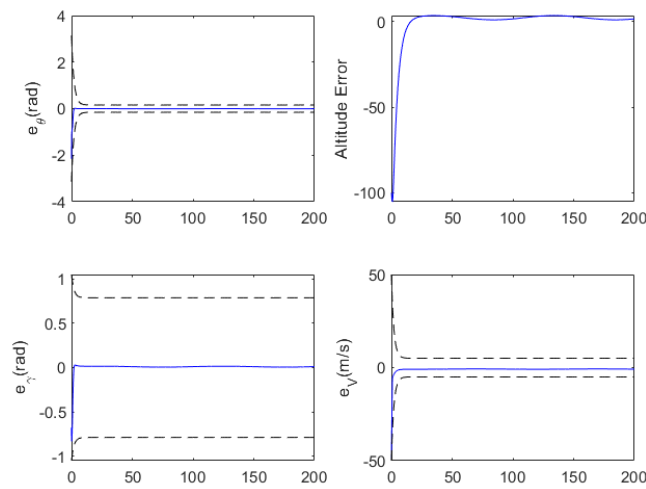
Τα σχήματα (5.1-5.3) δείχνουν την απόκριση του συστήματος σε ημιτονοειδείς τροχιές ενώ τα σχήματα (5.4-5.6) σε διατήρηση σταθερού ύψους και ταχύτητας. Οι αρχικές συνθήκες ήταν οι μηδενικές για όλες τις καταστάσεις και οι συναρτήσεις απόδοσης επιλέχθηκαν κατάλληλα ώστε να ικανοποιούν τις απαραίτητες προϋποθέσεις και να επιβάλλουν μια επιθυμητή απόκριση.



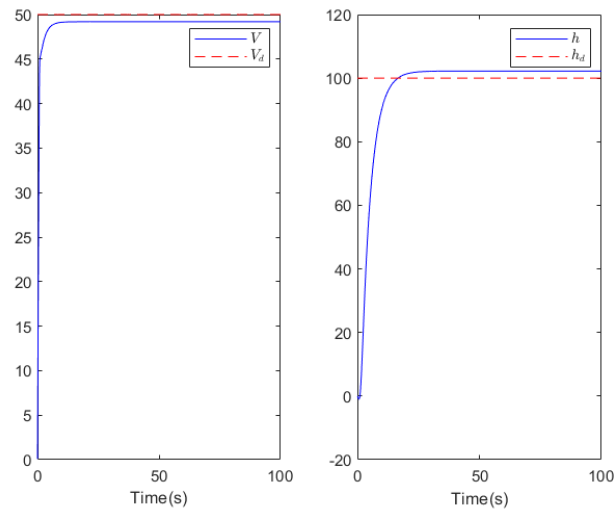
Σχήμα 5.1: Παρακολούθηση σε Ταχύτητα Αέρος και Ύψος με ημιτονοειδείς επιθυμητές τροχιές $V_d = 50 + 5 \sin 2\pi 0.01t$, $h_d = 100 + 100 \sin 2\pi 0.01t$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες



Σχήμα 5.2: Οι υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος και οι είσοδοι ελέγχου σε ημιτονοειδή τροχιά



Σχήμα 5.3: Η εξέλιξη των σφαλμάτων μέσα στα όρια των συναρτήσεων απόδοσης σε ημιτονοειδή τροχιά

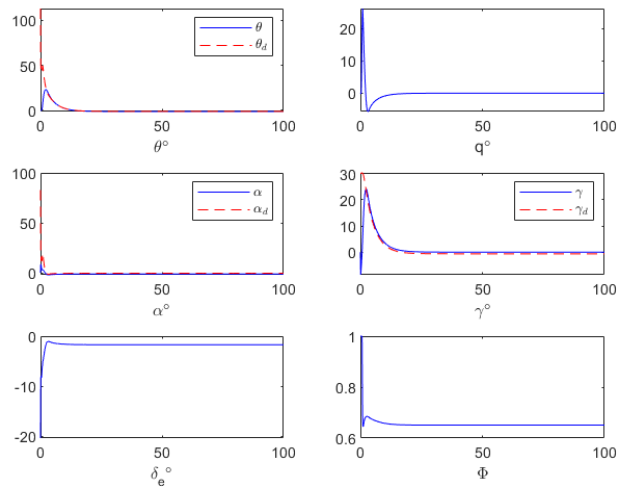


Σχήμα 5.4: Διατήρηση σταθερού ύψους και ταχύτητας

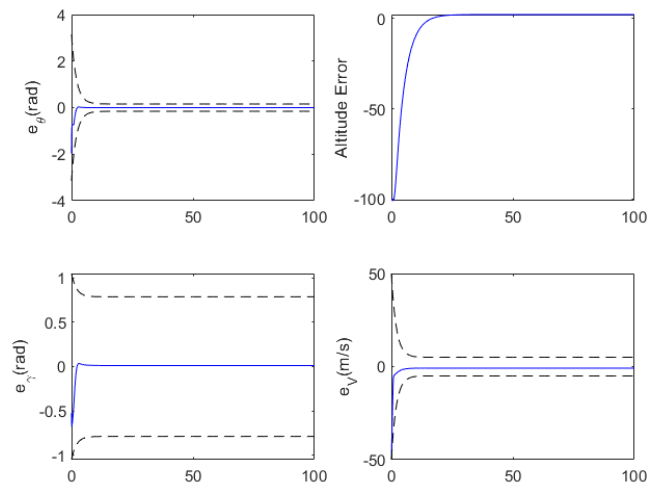
5.4.2 Ευρωστία σε θόρυβο μετρήσεων και εξωτερικές διαταραχές

Προκειμένου να εφαρμόσουμε πιο ρεαλιστικές προσομοιώσεις, προστέθηκαν στο σύστημα μοντέλα αισθητήρων και ένας αλγόριθμος εκτίμησης κατάστασης χρησιμοποιώντας Extended Kalman Filter όπως αυτά περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα, ενώ σταθερός άνεμος αλλά και στοχαστικές ριπές ανέμου αποτελούν τις διαταραχές για το σύστημα.

Τα σχήματα (5.7-5.9) δείχνουν την απόκριση του συστήματος υπό τις νέες αυτές συνθήκες.



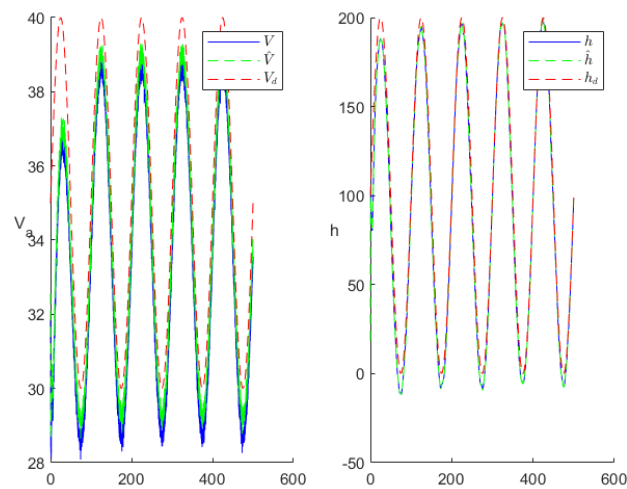
Σχήμα 5.5: Οι υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος και οι είσοδοι ελέγχου με σταθερή ταχύτητα και ύψος



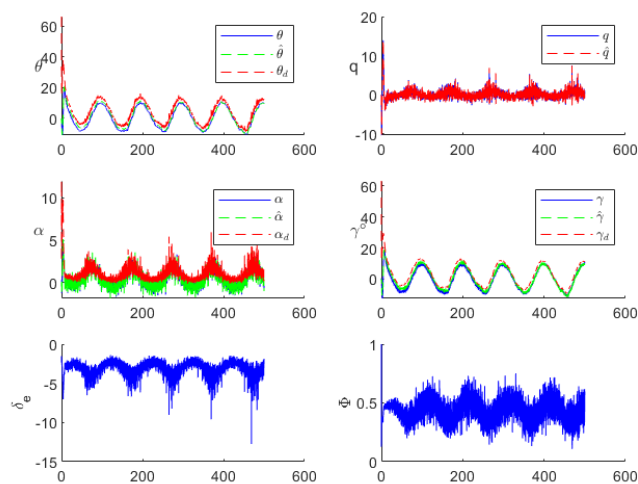
Σχήμα 5.6: Η εξέλιξη των σφαλμάτων μέσα στα όρια των συναρτήσεων απόδοσης με σταθερή ταχύτητα και ύψος

5.4.3 Σύγκριση με ελεγκτή έπειτα απο γραμμικοποίηση του μοντέλου

Προκειμένου να έχουμε και συγκριτικά αποτελέσματα, αναπτύχθηκε και μια άλλη μεθοδολογία ελέγχου η οποία βασίζεται σε γνώση του μοντέλου. Έγινε γραμμικοποίηση γύρω από πτήση με σταθερή ταχύτητα και σταθερά φτερά και το σύστημα αναπαρίσταται απο γραμμικές συναρτήσεις μεταφοράς μεταξύ εισόδων και εξόδων. Χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία Διαδοχικού Κλείσιμου Βρόγχου(Successive Loop Closure) και διάφοροι PD και PI ελεγκτές, τα κέρδη των οποίων



Σχήμα 5.7: Παρακολούθηση σε Ταχύτητα Αέρος και Ύψος με ημιτονοειδείς επιθυμητές τροχιές $V_d = 35 + 5 \sin 2\pi 0.01t$, $h_d = 100 + 100 \sin 2\pi 0.01t$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες παρουσία θορύβου και διαταραχών

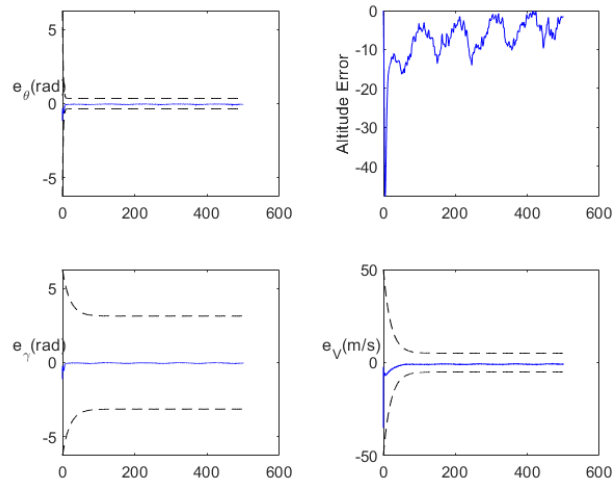


Σχήμα 5.8: Οι υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος και οι είσοδοι ελέγχου σε ημιτονοειδή τροχιά παρουσία θορύβου και διαταραχών

προσδιορίστηκαν έπειτα απο fine-tuning.

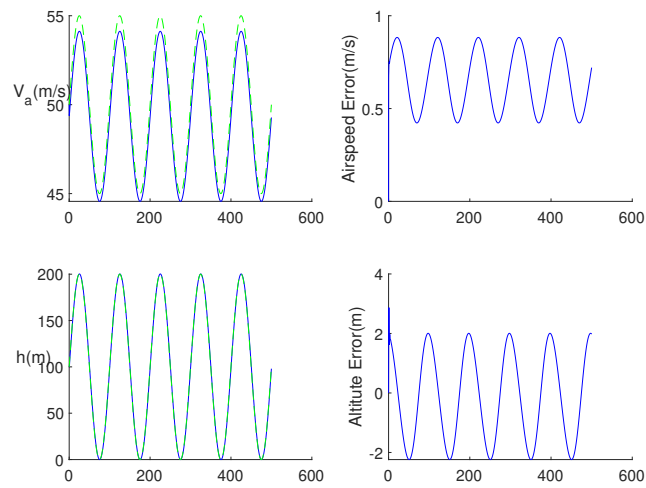
Ενώ ο ελεγκτής αυτός ανταποκρίνεται καλά σε αργές τροχιές, όταν επιβάλλουμε ένα πιο επιθετικό προφίλ κίνησης με μεγαλύτερα πλάτη και συχνότητες, αδυνατεί να ακολουθήσει την τροχιά, ενώ ο ελεγκτής που προτάθηκε στο Κεφάλαιο αυτό ανταποκρίνεται αρκετά ικανοποιητικά.

Το γράφημα 5.10 δείχνει την σχετικά καλή απόκριση του ελεγκτή στην αργή τροχιά, ενώ τα γραφήματα (5.11-5.12) δείχνουν την απόκριση των ελεγκτών σε μια γρήγορα τροχιά, όπου φαίνεται

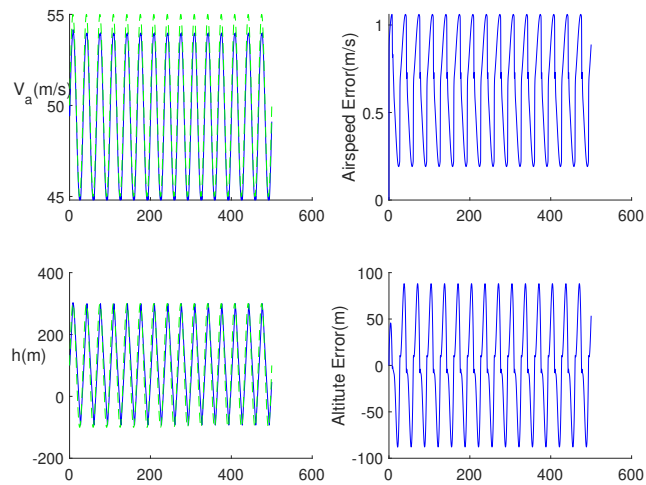


Σχήμα 5.9: Η εξέλιξη των σφαλμάτων μέσα στα όρια των συναρτήσεων απόδοσης σε ημιτονοειδή τροχιά παρουσία θορύβου και διαταραχών

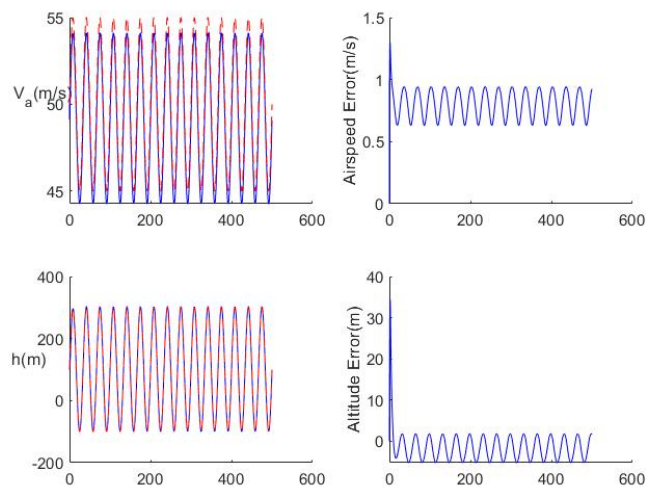
η υπεροχή του προτεινόμενου ελεγκτή.



Σχήμα 5.10: Η απόκριση του βασισμένου στο μοντέλου ελεγκτή σε μια αργή ημιτονοειδή τροχιά



Σχήμα 5.11: Η απόκριση του βασισμένου στο μοντέλου ελεγκτή σε μια γρήγορη ημιτονοειδή τροχιά



Σχήμα 5.12: Η υπεροχή του προτεινόμενου ελεγκτή σε μια γρήγορη τροχιά

6

Online Σχήμα Αναγνώρισης Παραμέτρων

Το online σχήμα αναγνώρισης που χρησιμοποιήθηκε σε αυτήν την εργασία βασίζεται στην πρόσφατα ανεπτυγμένη τεχνική Dynamic Regression Extension and Mixing[2]. Η τεχνική αυτή έχει ήδη εφαρμοστεί σε διάφορες εργασίες αναγνώρισης και ελέγχου[28],[29],[30],[31]. Οι DREM εκτιμητές έχουν καλύτερη απόδοση από κλασικούς εκτιμητές παραμέτρων όπως gradient descend και least squares υπό την έννοια ότι, ανεξάρτητα από συνθήκες διέγερσης όπως αυτές ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 4, εγγυούνται μονότονη σύγκλιση για κάθε στοιχείο του διανύσματος σφάλματος εκτίμησης, σε αντίθεση με την νόρμα του σφάλματος εκτίμησης που πετυχαίνουν οι άλλοι εκτιμητές. Επιπλέον, η σύγκλιση αποδεικνύεται χωρίς την απαίτηση για την περιοριστική συνθήκη της Διαρκούς Διέγερσης (Persistency of Excitation) για το διάνυσμα του προβλέπτη. Αντίθετα, μια συνθήκη μη τετραγωνικής ολοκληρωσιμότητας στην ορίζουσα ενός πίνακα επελεγμένου από τον σχεδιαστή κατά την εκτέλεση της μεθόδου αρκεί.

6.1 Dynamic Regression Extension and Mixing

Έστω μια κλασική εξίσωση πρόβλεψης παραμέτρων(regression form):

$$y(t) = m(t)^T \theta \quad (6.1)$$

όπου $y \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{R}^q$ είναι γνωστές, φραγμένες συναρτήσεις του χρόνου και $\theta \in \mathbb{R}^q$ είναι ένα διάστασης q διάνυσμα άγνωστων, αλλά σταθερών παραμέτρων.

Το πρώτο βήμα της τεχνικής DREM είναι να εισάγουμε $q - 1$ γραμμικούς, L_∞ -ευσταθείς τελεστές $H_i : L_\infty \rightarrow L_\infty, i \in 1, 2, \dots, q - 1$. Στο [2] αναφέρεται πως αυτοί οι τελεστές μπορεί να είναι είτε απλά Γ.Χ.Α φίλτρα είτε απλά κάποιο τελεστές καθυστέρησης(delay operators). Στη συγκεκριμένα εργασία, επιλέξαμε να δουλέψουμε με τα Γ.Χ.Α φίλτρα της μορφής $H_i(s) = \frac{a_i}{s + b_i}$, με $a_i \neq 0$ και $b_i > 0$.

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε τα φίλτρα αυτά στην αρχική εξίσωση πρόβλεψης (6.1) και να δημιουργήσουμε τις καινούριες, φιλτραρισμένες εξισώσεις:

$$y_{f_i}(t) = m_{f_i}^T \theta, i = 1 \dots q - 1 \quad (6.2)$$

Τώρα, συνδυάζοντας τις εξισώσεις αυτές με την αρχική της (6.1), παίρνουμε το εκτεταμένο σύστημα της μορφής :

$$Y_e = M_e^T \theta \quad (6.3)$$

με $Y_e \in \mathbb{R}^q$ ορισμένο ως $Y_e = [y_{f_1} \dots y_{f_{q-1}}]^T$ και $M_e \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ένας τετραγωνικός πίνακας, ορισμένος ως $M_e^T = [m \ m_{f_1} \dots m_{f_{q-1}}]$.

Το τελευταίο βήμα είναι να πολλαπλασιάσουμε από αριστερά την (6.3) με τον προσαρτημένο πίνακα (adjugate matrix) του M_e , για να αποκτήσουμε τις τελικές, βαθμωτές εξισώσεις πρόβλεψης:

$$Y_i(t) = \phi(t)\theta_i \quad (6.4)$$

με $i = 1 \dots q$ και τον κοινό προβλέπτη για όλες τις παραμέτρους:

$$\phi(t) = \det(M_e(t)) \quad (6.5)$$

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης (6.5) αποτελείται από το διάνυσμα $Y \in \mathbb{R}^q$, ορισμένο ως $Y = \text{adj}(M_e)Y_e$.

Τώρα, ο νόμος προσαρμογής για τις άγνωστες παραμέτρους θ_i είναι :

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(Y_i - \phi \hat{\theta}_i) \quad (6.6)$$

με $\gamma_i > 0$ τα κέρδη προσαρμογής.

Παρατήρηση 1. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι για οποιονδήποτε τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, η ισότητα $\text{adj}(A)A = \det(A)I_n$ ισχύει, ακόμα και όταν ο A δεν είναι πλήρους τάξης.

Παρατήρηση 2. Αντικαθιστώντας την (6.4) στην (6.6), και λύνοντας την διαφορική εξίσωση του σφάλματος εκτίμησης, προκύπτει το ακόλουθο :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0 \iff \phi(t) \notin L_2 \quad (6.7)$$

όπου $\tilde{\theta}_i$, το σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων. Η παραπάνω ισοδυναμία υποδηλώνει ότι η σύγκλιση επιβεβαιώνεται χωρίς την χρήση της περιοριστικής συνθήκης PE, αλλά αντίθετα απαιτεί απλά ο καινούριος προβλέπτης να μην ανήκει στην L_2 νόρμα, να μην είναι δηλαδή τετραγωνικά ολοκληρώσιμος με την μαθηματική έκφραση να είναι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau)^2 d\tau = \infty \quad (6.8)$$

6.2 Μη Γραμμικές Συναρτήσεις Προς Αναγνώριση

Για την προσέγγιση των συναρτήσεων, επιλέχθηκε το μοντέλο δυναμικής του αεροσκάφους όπως αυτό είναι εκφρασμένο στο πλαίσιο ευστάθειας για να αποφύγουμε μετασχηματισμούς από διαφορετικά πλαίσια, γεγονός που θα έκανε πιο περίπλοκες τις συναρτήσεις, το οποίο συγκεντρώνεται και εδώ:

$$\dot{V} = \frac{T(\alpha, \Phi) \cos \alpha - D(\alpha)}{m} - g \sin \gamma \quad (6.9)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L(\alpha) + T(\alpha, \Phi)}{mV} - \frac{g}{V} \cos \gamma \quad (6.10)$$

$$\dot{q} = \frac{M(\alpha, \delta e)}{J_{yy}} \quad (6.11)$$

Το επόμενο βήμα είναι να φέρουμε το παραπάνω σύστημα στη μορφή :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= f_V(V, \gamma, \alpha) + g_V(\alpha)u \\ \dot{\gamma} &= f_\gamma(V, \gamma, \alpha) + g_\gamma(V, \alpha)u \\ \dot{q} &= f_q(V, \alpha, q) + g_q(V)u \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ο στόχος μας λοιπόν είναι να χρησιμοποιήσουμε RBF νευρωνικά δίκτυα, που όπως αναφέρθηκε είναι κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για καθολική προσέγγιση συναρτήσεων, προκειμένου να αποκτήσουμε γνώση για τις παραπάνω μη γραμμικές συναρτήσεις που εμπλέκονται στην διαμήκη δυναμική μη-επανδρωμένων αεροσκαφών,

6.2.1 Off-line Διαδικασία

Προκειμένου να αποκτήσουμε κάποιες βέλτιστες τιμές για διαδικασίες επαλήθευσης της αποτελεσματικότητας του online σχήματος αναγνώρισης, μια offline διαδικασία ήταν απαραίτητη.

Έστω το πρόβλημα προσέγγισης μιας ομαλής μη γραμμικής απεικόνισης $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$Y = f(x), \quad Y \in R, x \in R^n \quad (6.13)$$

όπου x είναι το διάνυσμα εισόδου, όπου στην περίπτωση μας αποτελεί τις καταστάσεις του αεροσκάφους, και Y είναι η έξοδος, που αντιπροσωπεύει τις μη γραμμικές συναρτήσεις όπως αυτές είναι εκφρασμένες στην 6.12.

Η διαδικασία έγκειται στην συλλογή κατάλληλων ζευγαριών εισόδου-εξόδου προκειμένου να εκπαιδευτεί το RBF δίκτυο. Έτσι, πραγματοποιήσαμε διάφορες μανούβρες για το αεροσκάφος δειγματοληπτώντας κατάλληλα τις καταστάσεις του αεροσκάφους αλλά και τις μη γραμμικότητες της 6.12 δημιουργώντας ένα σύνολο δεδομένων :

$$\{Y^j = f(x^j), x^j\}, \quad j = 1, \dots, N \quad (6.14)$$

όπου N ο συνολικός αριθμός των δειγμάτων που συλλέχθηκαν για εκπαίδευση του δικτύου.

Το επόμενο βήμα ήταν να τροφοδοτήσουμε με τις καταστάσεις που συλλέχθηκαν τον αλγόριθμο k -means, όπως αυτός περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4, προκειμένου να καθοριστούν τα κέντρα των RBFs. Αφού καθορίστηκαν τα κέντρα, οι διασπορές επιλέχθηκαν έτσι ώστε γειτονικοί νευρώνες να έχουν επικάλυψη 75%. Η συγκεκριμένη επιλογή έγινε έτσι ώστε όταν η κατάσταση του συστήματος περνάει από κάποιο RBF κέντρο, να υπάρχει απόλυτη διέγερση μόνο ενός νευρώνα δίνοντας έτσι αποσυμπλεγμένη πληροφορία για το βάρος που συνδέει τον νευρώνα αυτό με την έξοδο.

Τέλος, προσδιορίστηκαν οι βέλτιστες τιμές των συναπτικών βαρών με βάση την 4.6, προκειμένου να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την αποτελεσματικότητα του online σχήματος αναγνώρισης με την τεχνική DREM που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

6.3 Τελική Δομή Online Αναγνώρισης Παραμέτρων

Παρατηρώντας την εξίσωση πρόβλεψης 6.1, έχουμε κάνει την υπόθεση ότι το σήμα $y(t)$ είναι ένα μετρήσιμο σήμα. Όμως, αυτό δεν ισχύει στην πραγματικότητα καθώς το σήμα αυτό θα έπρεπε να είναι οι τιμές των μη γραμμικών συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. Προφανώς, κατά τη διάρκεια μιας πτήσης δεν μπορούμε να έχουμε πρόσβαση στις τιμές αυτές, καθώς έτσι δεν θα χρειαζόμασταν κάποιο σχήμα αναγνώρισης, απλά θα τις μετρούσαμε. Έτσι, πρέπει να καταφύγουμε στην κλασική τεχνική φιλτραρίσματος[32], και να ορίσουμε τα σήματα :

$$(\cdot)_f = \frac{1}{s+a}(\cdot) \quad (6.15)$$

Αντικαθιστώντας τις μη γραμμικότητες των εξισώσεων 6.12 με τις δομές των RBF δικτύων, έχουμε :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Z_V(x)^T W_{f_V} + Z_V(x)^T W_{g_V} u \\ \dot{\gamma} &= Z_\gamma(x)^T W_{f_\gamma} + Z_\gamma(x)^T W_{g_\gamma} u \\ \dot{q} &= Z_q(x)^T W_{f_q} + Z_q(x)^T W_{g_q} u \end{aligned} \quad (6.16)$$

Τώρα, εφαρμόζοντας τα φίλτρα της 6.15, στις εξισώσεις 6.18, καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις πρόβλεψης για την διαμήκη δυναμική του αεροσκάφους :

Ταχύτητα Αέρος

$$y_V := \left(1 - \frac{a}{s+a}\right) V = \begin{bmatrix} z_{f_1}(x) \dots z_{f_q}(x) & z_{u_{f_1}}(x) \dots z_{u_{f_q}}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{f_1} \\ \vdots \\ w_{f_q} \\ w_{g_1} \\ \vdots \\ w_{g_q} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Flight-Path Γωνία

$$y_\gamma := \left(1 - \frac{a}{s+a}\right) \gamma = \begin{bmatrix} z_{f_1}(x) \dots z_{f_q}(x) z_{u_{f_1}}(x) \dots z_{u_{f_q}}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{f_1} \\ \vdots \\ w_{f_q} \\ w_{g_1} \\ \vdots \\ w_{g_q} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Pitch Rate

$$y_q := \left(1 - \frac{a}{s+a}\right) q = \begin{bmatrix} z_{f_1}(x) \dots z_{f_q}(x) z_{u_{f_1}}(x) \dots z_{u_{f_q}}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{f_1} \\ \vdots \\ w_{f_q} \\ w_{g_1} \\ \vdots \\ w_{g_q} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Έχουμε λοιπόν τρεις, ανεξάρτητες μεταξύ τους, συζευγμένες ως προς $f(x)$ και $g(x)$ εξισώσεις πρόβλεψης για την διαμήκη δυναμική του αεροσκάφους όπου ο προβλέπτης (regressor) αποτελείται πλέον από τις φιλτραρισμένες εξόδους των RBFs όσον αφορά τις $f(x)$ και από το φιλτραρισμένο προϊόν πολλαπλασιασμού των εξόδων των RBFs με την είσοδο ελέγχου για τις $g(x)$.

Έχουμε χρησιμοποιήσει 3 διαφορετικά δίκτυα για κάθε μία από τις μεταβλητές κατάσταση του αεροσκάφους, αλλά με κοινό κρυφό στρώμα νευρώνων για τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$. Το τελικό μοντέλο αποτελείται δηλαδή από 3 RBF δίκτυα με 2 εξόδους το καθένα.

Θεωρώντας την βασική εξίσωση πρόβλεψης 6.1 με τα σήματα $y(t) := y_V(t), y_\gamma(t), y_q(t)$ και $m_i(t)^T = [z_f z_u]$, $i = V, \gamma, q$ όπως αυτά είναι ορισμένα στις εξισώσεις 6.17-6.19, εφαρμόζουμε την τεχνική DREM όπως αυτή αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα και καταλήγουμε στους εξής νόμους προσαρμογής για τις άγνωστες παραμέτρους :

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(Y_i - \phi \hat{\theta}_i) \quad (6.20)$$

με $\hat{\theta}_i = [w_{f_1} \dots w_{f_q} w_{g_1} \dots w_{g_q}]$, $\gamma_i > 0$ τα κέρδη προσαρμογής και τα σήματα Y_i, ϕ όπως αυτά είναι ορισμένα στις 6.4-6.5, έπειτα από την εφαρμογή του DREM στις εξισώσεις 6.17-6.19.

6.4 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

6.4.1 Η ιδανική περίπτωση

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του σχήματος αναγνώρισης παραμέτρων.

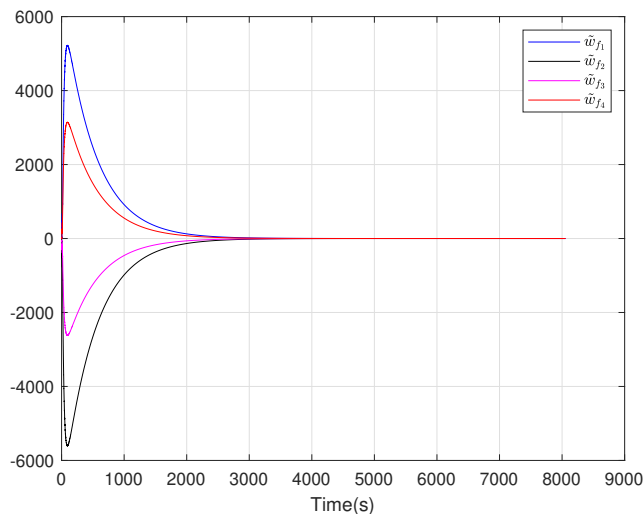
Αφού τα κέντρα και οι διασπορές των γκαουσιανών συναρτήσεων έχουν επιλεγεί κατά την

off-line διαδικασία, και δεδομένου ότι με τον προτεινόμενο ελεγκτή μπορούμε να έχουμε αυθαίρετα καλή παρακολούθηση, διαλέγουμε τροχιές οι οποίες περνάνε από τα κέντρα των RBF περιοδικά, ώστε να εξασφαλίσουμε την ικανοποίηση της συνθήκης της Διαρκούς Διέγερσης και να επιτύχουμε ακριβή εκτίμηση των παραμέτρων.

Δεδομένου ότι έχουμε διαφορικές δομές δικτύων για την δυναμική κάθε μεταβλητής κατάστασης, επιλέξαμε και διαφορετικές τροχιές έπειτα από μια διαδικασία δοκιμής και λάθους, λαμβάνοντας υπόψη την Διαρκή Διέγερση, την απόκλιση από τις πραγματικές τιμές, αλλά και το σφάλμα προσέγγισης του Νευρωνικού Δικτύου σε κάθε μια από αυτές καθώς παίζει σημαντικό ρόλο στην διαδικασία της αναγνώρισης όπως εξηγείται στην επόμενη ενότητα.

Δυναμική Ταχύτητας Αέρος

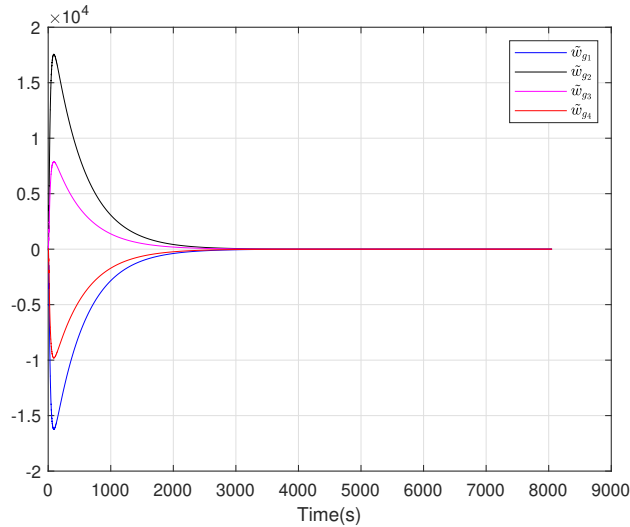
Η τροχιά που επιλέχθηκε για την αναγνώριση των παραμέτρων σχετικά με την δυναμική της ταχύτητας αέρος ήταν $V_d = 50 + 5 \sin 2\pi 0.5t$ και $h_d = 100$. Η τόσο υψηλή συχνότητα τροχιάς έχει να κάνει με την συνθήκη της Διαρκούς Διέγερσης και έπειτα από πειράματα αποδείχθηκε ότι μεγαλύτερες συχνότητες στην τροχιά οδηγούν σε καλύτερη σύγκλιση, ενώ η διατήρηση σταθερού ύψους επιλέχθηκε έτσι ώστε να αποσυμπλεχθούν οι μη γραμμικές συναρτήσεις από την επίδραση της γωνίας προσβολής α και της γωνίας διαδρομής γ , γεγονός που οδήγησε σε καλύτερο σφάλμα προσέγγισης και σύγκλιση των παραμέτρων σε περιοχές πολύ κοντά στις πραγματικές όπως φαίνεται στον Πίνακα 6.3. Η εξέλιξη των σφαλμάτων εκτίμησης για τις παραμέτρους φαίνεται στα σχήματα (6.1-6.2).



Σχήμα 6.1: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_V(x)$

Δυναμική Γωνιακής Ταχύτητας

Η τροχιά που επιλέχθηκε για την αναγνώριση των παραμέτρων σχετικά με την δυναμική της γωνιακής ταχύτητας ήταν $V_d = 50 + 5 \sin 2\pi 0.025t$ και $h_d = 200 + 200 \sin 2\pi 0.025t$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση μια "πλούσια" τροχιά στο ύψος ήταν απαραίτητη καθώς δίνει την απαραίτητη διέγερση στην μεταβλητή της γωνιακής ταχύτητας αλλά και στο σήμα εισόδου. Η εξέλιξη των σφαλμάτων



Σχήμα 6.2: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_V(x)$

Πίνακας 6.1: Οι παράμετροι για την προσέγγιση της δυναμικής της ταχύτητας αέρος

| w_f^* | \hat{w}_f | $\tilde{w}_f\%$ | w_g^* | \hat{w}_g | $\tilde{w}_g\%$ |
|---------|-------------|-----------------|---------|-------------|-----------------|
| -19.54 | -19.43 | 0.59% | 60.92 | 61.49 | -0.93% |
| -31.72 | -31.7 | 0.06% | 60.90 | 60.02 | 1.44% |
| -39.39 | -39.67 | -0.71% | 60.89 | 60.69 | 0.32% |
| -14.02 | -13.89 | 0.92% | 60.93 | 61.59 | -1.08% |

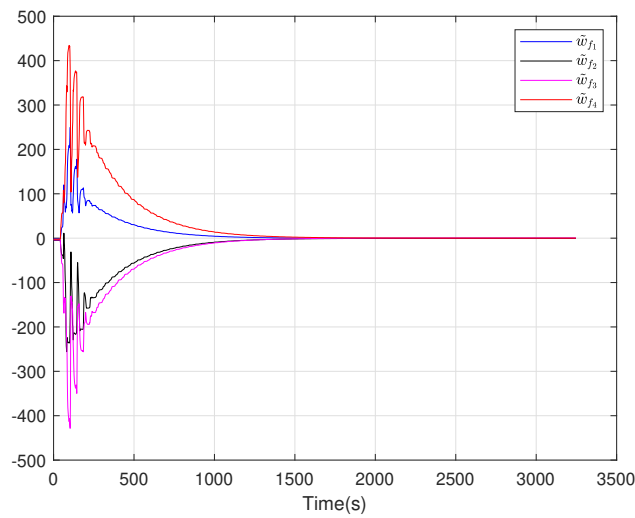
εκτίμησης φαίνεται στα σχήματα (6.3-6.4) , ενώ οι εκτιμήσεις και οι πραγματικές τιμές στον Πίνακα 6.4.

Δυναμική Γωνίας Διαδρομής

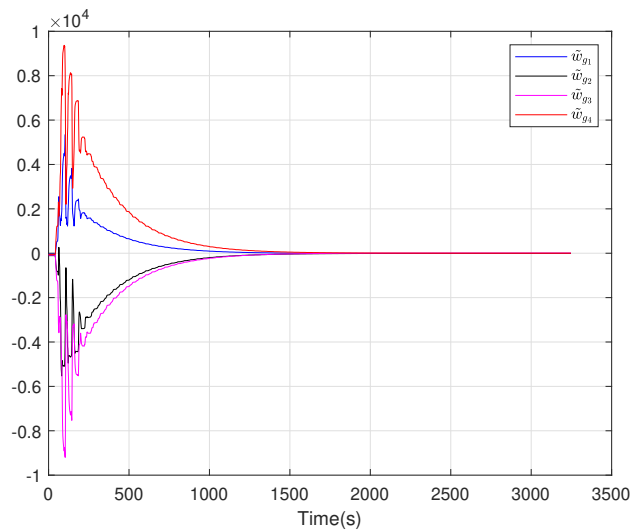
Η τροχιά που επιλέχθηκε για την αναγνώριση των παραμέτρων σχετικά με την δυναμική της γωνίας διαδρομής ήταν $V_d = 50 + 5 \sin 2\pi 0.01t$ και $h_d = 300 + 300 \sin 2\pi 0.01t$. Η εξέλιξη των σφαλμάτων εκτίμησης φαίνεται στα σχήματα (6.5-6.6).

6.4.2 Η επίδραση του θορύβου στη διαδικασία αναγνώρισης

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας αφορούν την ιδανική περίπτωση κατά την οποία οι καταστάσεις του συστήματος αλλά και οι είσοδοι που εμπλέκονται στο σχήμα αναγνώρισης είναι διαθέσιμα από τις αντίστοιχες λύσεις των διαφορικών εξισώσεων. Στην πραγματικότητα όμως, κατά τη διάρκεια μιας πτήσης όλα τα σήματα αυτά συμπεριλαμβάνουν και θόρυβο από τις μετρήσεις των αισθητήρων. Έτσι, προκειμένου να εξετάσουμε την επίδραση του θορύβου στην τεχνική DREM, οι είσοδοι πλέον στο RBF δίκτυο είναι προϊόν εκτίμησης κατάστασης (αντιστροφή αισθητήρων και EKF) όπως αυτή περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 5.



Σχήμα 6.3: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_q(x)$

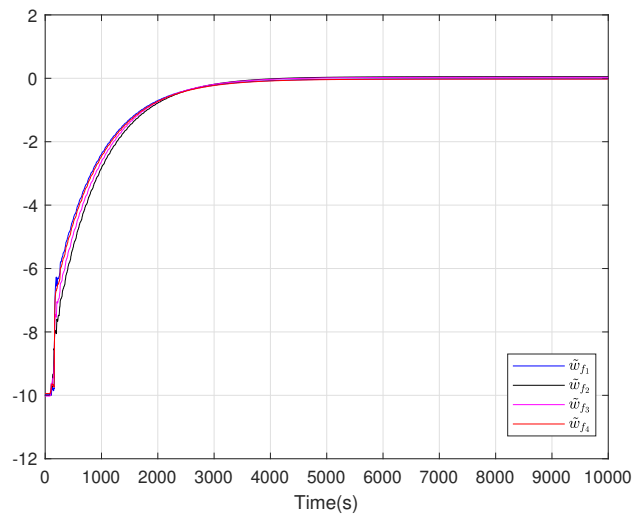


Σχήμα 6.4: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_q(x)$

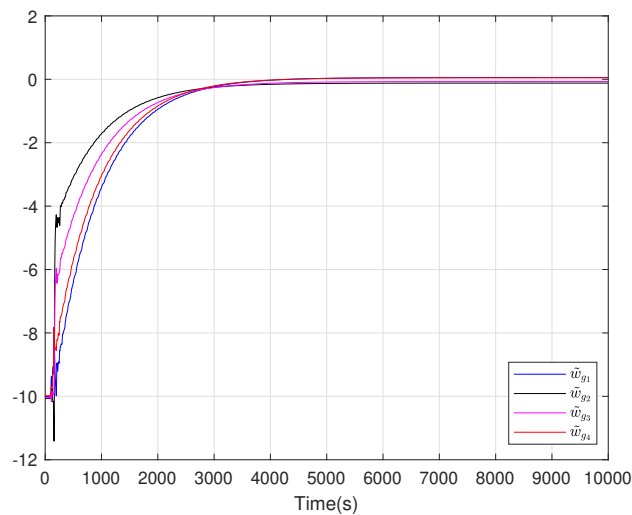
Όπως φαίνεται από τα παρακάτω σχήματα (6.7-6.12), η μορφή σύγκλισης είναι η ίδια αλλά η ύπαρξη θορύβου είναι εμφανής. Σε αυτήν την περίπτωση, οι τελικές τιμές για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων υπολογίζονται ως ο μέσος όρος σε ένα παράθυρο χρόνου από όπου έχει ξεκινήσει η σύγκλιση. Ενδεικτικά παρουσιάζονται οι πίνακες για τις τιμές των παραμέτρων που αφορούν την δυναμική της ταχύτητας αέρος και της γωνιακής ταχύτητας.

Πίνακας 6.2: Οι παράμετροι για την προσέγγιση της δυναμικής της γωνιακής ταχύτητας

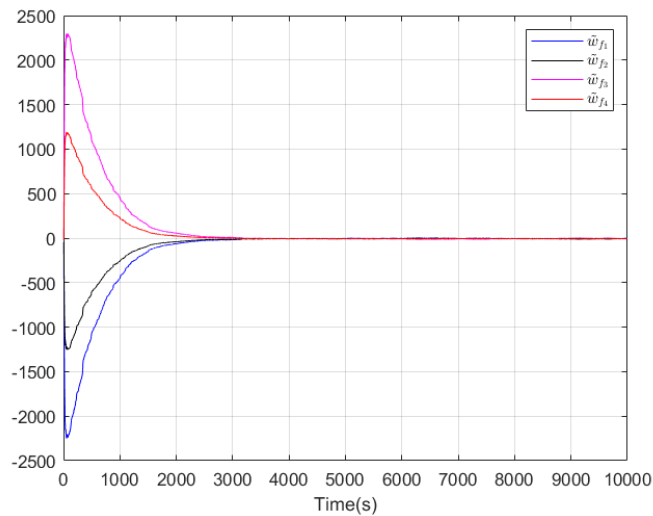
| w_f^* | \hat{w}_f | $\tilde{w}_f\%$ | w_g^* | \hat{w}_g | $\tilde{w}_g\%$ |
|---------|-------------|-----------------|---------|-------------|-----------------|
| -1.804 | -1.3 | -27% | -38.41 | -26.95 | 29.8% |
| -5.017 | -4.71 | 6.11% | -108.05 | -101.5 | 6.06% |
| -4.02 | -4.4 | -9.45% | -86.63 | -94.4 | -8.96% |
| -2.48 | -2.82 | -2.82% | -31.42 | -55.67 | -4.7% |



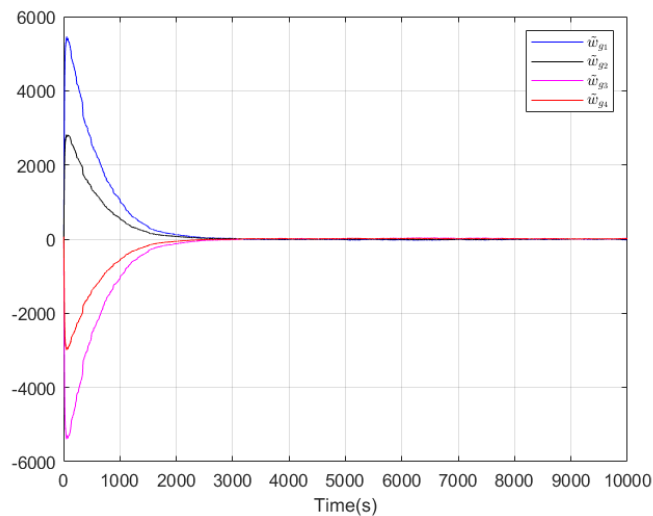
Σχήμα 6.5: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_\gamma(x)$



Σχήμα 6.6: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_\gamma(x)$



Σχήμα 6.7: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_V(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου

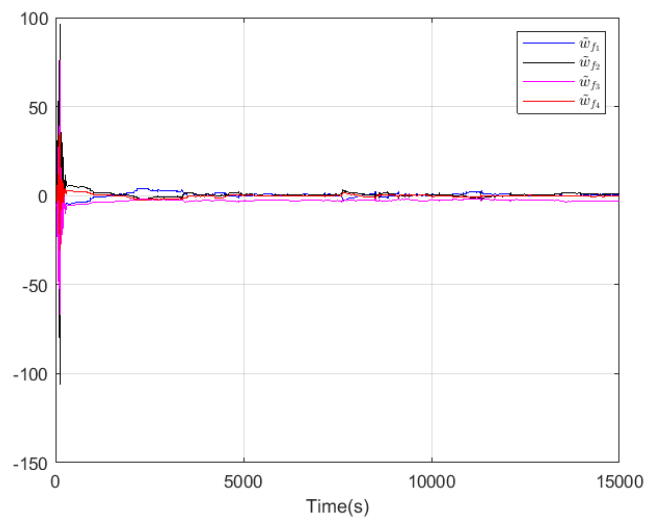


Σχήμα 6.8: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_V(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου

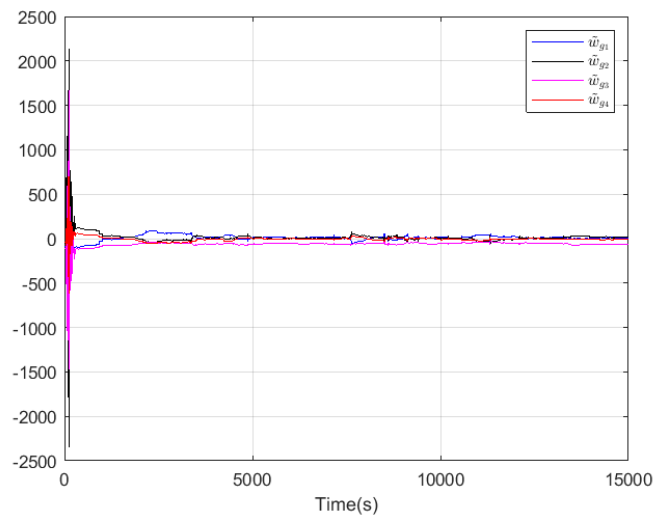
6.5 Η επίδραση διάφορων παραμέτρων στο σχήμα αναγνώρισης

6.5.1 Τα Γ.Χ.Α φίλτρα της τεχνικής DREM

Η επιλογή των Γ.Χ.Α φίλτρων H_i ήταν κριτικής σημασίας για την διαδικασία αναγνώρισης των παραμέτρων. Οι τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων μεταφοράς τους βρέθηκαν έπειτα από μια εκτεταμένη διαδικασία (trial-and-error), καθώς δεν υπάρχουν ενδείξεις για το πώς να επιλεγθούν



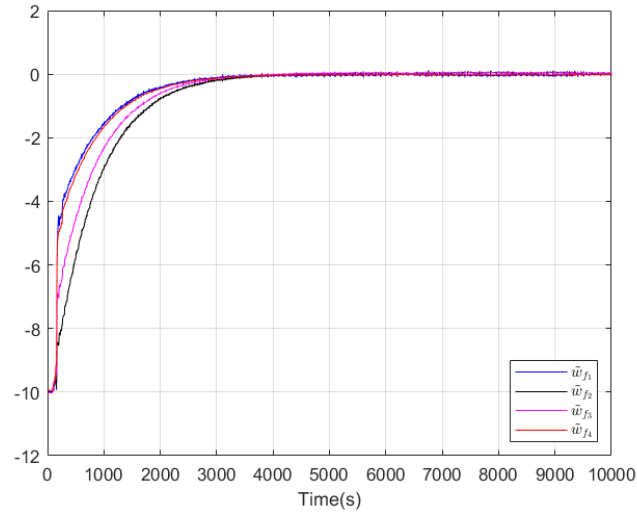
Σχήμα 6.9: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_q(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου



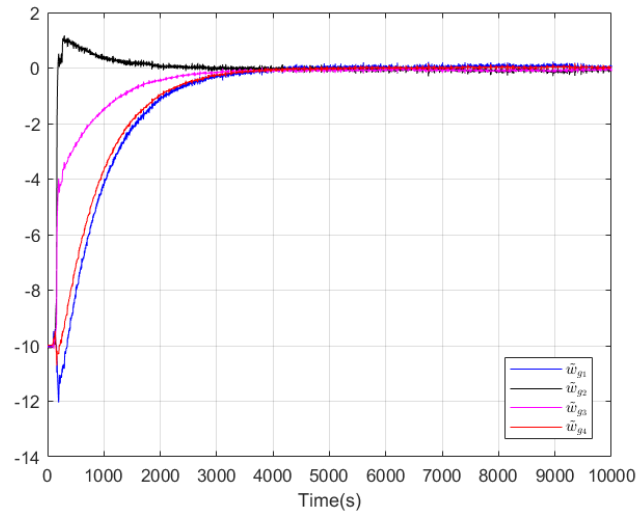
Σχήμα 6.10: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_q(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου

με συστηματικό τρόπο[33].

Παρ'όλα αυτά, μια παρατήρηση ήταν ότι καθώς ο αριθμός των παραμέτρων προς εκτίμηση μεγάλωνε, μεγαλύτερες τιμές για τους συντελεστές α_i (δηλαδή και μεγαλύτερο κέρδος DC) ήταν απαραίτητες προκειμένου να αποκτήσουμε μια τιμή για τον προβλέπτη $\phi = \det(M_e)$ που να δίνει την δυνατότητα για αναγνώριση. Έτσι, ήταν απαραίτητο να διαλέξουμε μια μικρή δομή δικτύου με $q = 4$ νευρώνες για κάθε έξοδο, καθώς ένα μεγάλο DC κέρδος στους $2q - 1$ τελεστές από το DREM, θα ενίσχυε και το σφάλμα προσέγγισης του νευρωνικού δικτύου, με αποτέλεσμα κακή



Σχήμα 6.11: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $f_\gamma(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου



Σχήμα 6.12: Η εξέλιξη του σφάλματος των βαρών για την προσέγγιση της $g_\gamma(x)$ ύπο την παρουσία θορύβου

απόκριση του σχήματος αναγνώρισης. Όσον αφορά τους πόλους β_i , η μόνη παρατήρηση που έγινε ήταν ότι όσο μεγαλύτερο σε συχνότητα ήταν το σήμα παρακολούθησης, μεγαλύτερες τιμές για τους συντελεστές αυτούς οδηγούσαν σε ευκολότερη μεγιστοποίηση του ϕ . Οι επιλογές των φίλτρων όμως, δεν παίζουν κάποιο ρόλο στην περιοχή σύγκλισης των παραμέτρων, εκτός από την περίπτωση που ένα μεγάλο κέρδος θα χαλούσε το σχήμα προκαλώντας αυξημένες ταλαντώσεις.

Τέλος, η επιλογή των φίλτρων είναι πλήρως εξαρτώμενη από το πρόβλημα (problem dependent). Για παράδειγμα, στην αναγνώριση των παραμέτρων της flight-path γωνίας, οι τιμές των a_i

Πίνακας 6.3: Οι παράμετροι για την προσέγγιση της δυναμικής της ταχύτητας αέρος υπό την παρουσία θορύβου

| w_f^* | \hat{w}_f | $\tilde{w}_f\%$ | w_g^* | \hat{w}_g | $\tilde{w}_g\%$ |
|---------|-------------|-----------------|---------|-------------|-----------------|
| -40.26 | -27.2 | 31.19% | 60.75 | 56.7 | 6.6% |
| -45.35 | -34.16 | 24.6% | 60.88 | 53.5 | 12.12% |
| -20.45 | -23.13 | -13.1% | 60.99 | 64.3 | -5.4% |
| -16.26 | -14 | -13.8% | 61.02 | 57.55 | 5.6% |

Πίνακας 6.4: Οι παράμετροι για την προσέγγιση της δυναμικής της γωνιακής ταχύτητας υπό την παρουσία θορύβου

| w_f^* | \hat{w}_f | $\tilde{w}_f\%$ | w_g^* | \hat{w}_g | $\tilde{w}_g\%$ |
|---------|-------------|-----------------|---------|-------------|-----------------|
| -4.34 | -4.72 | -8.7% | -93.02 | -103.08 | -11.5% |
| -2.13 | -2.58 | -21.1% | -46.71 | -53.9 | -15.3% |
| -5.16 | -3.5 | -32.17% | -111.7 | -87.4 | 21.7% |
| -1.67 | -1.39 | 16.7% | -35.17 | -30.73 | 12.6% |

συντελεστών ήταν της τάξης του 10, ενώ για την δυναμική της ταχύτητας αέρος και της γωνιακής ταχύτητας της τάξης του 1000. Η διαφοροποίηση αυτή φαίνεται και στην σύγκλιση των παραμέτρων, όπου στα σχήματα (6.1-6.4) έχουμε μια μεγάλη υπερύψωση(overshoot) στην αρχή, ενώ στα σχήματα (6.5-6.6) παρατηρούμε την σχεδόν μονότονη σύγκλιση των παραμέτρων.

6.5.2 Τα κέρδη προσαρμογής

Τα κέρδη προσαρμογής γ_i , ενώ στην ιδανική περίπτωση(μηδενικό σφάλμα προσέγγισης) ,έχοντας εξασφαλίσει τις συνθήκες διέγερσης, μια αύξηση στις τιμές τους θα οδηγούσε σε ταχύτερη σύγκλιση, τώρα πετυχαίνουμε μεν ταχύτερη σύγκλιση αλλά με κόστος μεγαλύτερη υπερύψωση(overshoot) και περισσότερες ταλαντώσεις.

6.5.3 Το σφάλμα προσέγγισης του Νευρωνικού Δικτύου

Το σφάλμα προσέγγισης του Νευρωνικού Δικτύου ήταν μείζονος σημασίας για την απόκριση του σχήματος αναγνώρισης. Καθώς το σφάλμα αυτό εν γένει μικραίνει όσο μεγαλώνει-ως προς τον αριθμό νευρώνων- η δομή του RBF δικτύου, ένα trade-off ήταν απαραίτητο, καθώς έπρεπε να επιλεγεί ένα δίκτυο με σχετικά μικρό αριθμό νευρώνων, $q = 4$ στην περίπτωση μας, προκειμένου να μην χρειαζόμαστε μεγάλο DC κέρδος στα Γ.Χ.Α φίλτρα, αλλά με καλές δυνατότητες προσέγγισης συναρτήσεων.

6.5.4 Οι παράμετροι του Νευρωνικού Δικτύου

Η επίδραση των διάφορων παραμέτρων ενός RBF δικτύου και οι μέθοδοι για την επιλογή τους ως προς τις δυνατότητες προσέγγισης είναι καλά τεκμηριωμένα στην διεθνή βιβλιογραφία και δεν αποτελούν σκοπό της συγκεκριμένης εργασίας. Ωστόσο, σχετικά με την επιλογή των κέντρων, έπρεπε να διασφαλιστεί ότι αυτά αντιστοιχούν σε συνδυασμούς καταστάσεων που ένα αεροσκάφος μπορεί να αποκτήσει κατά τη διάρκεια μιας πτήσης, έτσι ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη της Διαρκούς Διέγερσης. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι συμπεριλαμβάνοντας έναν όρο πόλωσης (bias term) στις εξόδους των RBF, μια κοινή επιλογή στη διεθνή βιβλιογραφία, δυσκόλευε την διαδικασία της αναγνώρισης, γεγονός που σχετίζεται μάλλον με την γραμμική ανεξαρτησία μεταξύ των διανυσμάτων του εκτεταμένου πίνακα M_e , οπότε παραλείφθηκε.

7

Επίλογος και Μελλοντική Εργασία

Στην εργασία αυτή, αναπτύχθηκε μια εύρωστη μεθοδολογία ελέγχου για την διαμήκη κίνηση μη-επανδρωμένων αεροσκαφών σταθερής πτέρυγας, υποθέτοντας πλήρη άγνοια της δυναμικής του μοντέλου. Ο ελεγκτής αυτός, χρησιμοποιήθηκε έπειτα προκειμένου το αεροσκάφος να μπορεί να ακολουθεί τροχιές σε ταχύτητα και ύψος, ικανές να διεγείρουν το σύστημα κατάλληλα ώστε να πετύχουμε αναγνώριση παραμέτρων.

Αποτελέσματα της διεθνούς βιβλιογραφίας για την ικανοποίηση της συνθήκης της Διαρκούς Διέγερσης (Persistency of Excitation) για δομές RBF δικτύων χρησιμοποιήθηκαν και επαληθεύτηκαν, και η πρόσφατα ανεπτυγμένη τεχνική Dynamic Regression Extension and Mixing εφαρμόστηκε με επιτυχία για την αναγνώριση της μη γραμμικής δυναμικής της διαμήκους κίνησης αεροσκαφών, σε ένα δεδομένο περιβάλλον λειτουργίας. Επιπλέον, διερευνήθηκε η επίδραση των φίλτρων που εισάγει η τεχνική DREM στην περίπτωση που η εξίσωση πρόβλεψης περιλαμβάνει έναν επιπλέον όρο σφάλματος, γεγονός που δεν έχει αναφερθεί ξανά στην σχετική βιβλιογραφία.

Έτσι, η προτεινόμενη μεθοδολογία ελέγχου και το online σχήμα αναγνώρισης που αναπτύχθηκε σε αυτήν την εργασία μπορεί να εφαρμοστεί σε μια πληθώρα μη-επανδρωμένων αεροσκαφών σταθερής πτέρυγας, ανεξάρτητα των διαφορετικών παραμέτρων που σχετίζονται με την αεροδυναμική τους.

Παρ'όλα αυτά, ενδιαφέρον θα έχει η εφαρμογή των παραπάνω σε μια πραγματική πλατφόρμα αεροσκάφους ώστε να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων. Επιπλέον, μια μελλοντική εργασία θα μπορούσε να είναι η επέκταση του περιβάλλοντος λειτουργίας του αεροσκάφους, για παράδειγμα προσγειώσεις/απογειώσεις ή/και η εγκάρσια κίνηση του αεροσκάφους, προκειμένου να έχουμε μια πλήρη περιγραφή του συστήματος.

Βιβλιογραφία

- [1] P. Vaiopoulos, G. Zogopoulos-Papaliakos, and K. J. Kyriakopoulos. “Online Aerodynamic Model Identification on Small Fixed-Wing UAVs with Uncertain Flight Data”. In: *2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2018, pp. 6587–6592.
- [2] S. Aranovskiy, A. Bobtsov, R. Ortega, and A. Pyrkin. “Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing*”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 62.7 (2017), pp. 3546–3550.
- [3] Charalampos P. Bechlioulis and George A. Rovithakis. “A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems”. In: *Automatica* 50.4 (2014), pp. 1217 –1226. ISSN: 0005-1098. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.02.020>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109814000582>.
- [4] Randal W. Beard and Timothy W. McLain. *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. USA: Princeton University Press, 2012. ISBN: 0691149216.
- [5] Jack Langelaan, Nicholas Alley, and James Neidhoefer. “Wind Field Estimation for Small Unmanned Aerial Vehicles”. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 34 (July 2011), pp. 1016–1030. DOI: 10.2514/1.52532.
- [6] J. Park and I. W. Sandberg. “Universal Approximation Using Radial-Basis-Function Networks”. In: *Neural Computation* 3.2 (1991), pp. 246–257.
- [7] Shankar Sastry and Marc Bodson. *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1989. ISBN: 0130043265.
- [8] Petros Ioannou and Simone Baldi. “Robust Adaptive Control”. In: Dec. 2010, pp. 1–22. DOI: 10.1201/b10384-41.
- [9] J. Moody and C. J. Darken. “Fast Learning in Networks of Locally-Tuned Processing Units”. In: *Neural Computation* 1.2 (1989), pp. 281–294.
- [10] F. Schwenker, H. A. Kestler, G. Palm, and M. Hoher. “Similarities of LVQ and RBF learning—a survey of learning rules and the application to the classification of signals from high-resolution electrocardiography”. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. Vol. 1. 1994, 646–651 vol.1.

-
- [11] M. Kubat. “Decision trees can initialize radial-basis function networks”. In: *IEEE Transactions on Neural Networks* 9.5 (1998), pp. 813–821.
- [12] Günther Palm, Hans Kestler, and Friedhelm Schwenker. “3-D Visual Object Classification with Hierarchical Radial Basis Function Networks”. In: 67 (Jan. 2001). DOI: 10.1007/978-3-7908-1826-0_8.
- [13] J. Hertz, John, Krough, Anders Flisberg, Palmer, and Richard G. *Introduction To The Theory Of Neural Computation*. Vol. 44. Jan. 1991. DOI: 10.1063/1.2810360.
- [14] Lennart Ljung. *System Identification: Theory for the User*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1986. ISBN: 0138816409.
- [15] Karl Johan Åström and Torsten Bohlin. “Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records”. English. In: *Theory of Self-Adaptive Control Systems*. Ed. by P. H. Hammond. Plenum Press, 1966.
- [16] A. J. Kurdila, F. J. Narcowich, and J. D. Ward. “Persistence of excitation, identification, and radial basis functions”. In: *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 3. 1994, 2273–2278 vol.3.
- [17] Petros Ioannou. *Adaptive Control Tutorial (Advances in Design and Control)*. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. ISBN: 0898716152.
- [18] R. M. Sanner and J. E. Slotine. “Stable Recursive Identification Using Radial Basis Function Networks”. In: *1992 American Control Conference*. 1992, pp. 1829–1833.
- [19] D. Gorinevsky. “On the persistency of excitation in radial basis function network identification of nonlinear systems”. In: *IEEE Transactions on Neural Networks* 6.5 (1995), pp. 1237–1244.
- [20] Songwu Lu and T. Basar. “Robust nonlinear system identification using neural-network models”. In: *IEEE Transactions on Neural Networks* 9.3 (1998), pp. 407–429.
- [21] Cong Wang and D. J. Hill. “Persistence of excitation, RBF approximation and periodic orbits”. In: *2005 International Conference on Control and Automation*. Vol. 1. 2005, 547–552 Vol. 1.
- [22] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis. “Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53.9 (2008), pp. 2090–2099.
- [23] Charalampos P. Bechlioulis and George A. Rovithakis. “Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems”. In: *Automatica* 45.2 (2009), pp. 532–538. ISSN: 0005-1098. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.08.012>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109808004676>.

- [24] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis. “Prescribed Performance Adaptive Control for Multi-Input Multi-Output Affine in the Control Nonlinear Systems”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 55.5 (2010), pp. 1220–1226.
- [25] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis. “Robust Partial-State Feedback Prescribed Performance Control of Cascade Systems With Unknown Nonlinearities”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56.9 (2011), pp. 2224–2230.
- [26] Eduardo D. Sontag. “Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems”. In: *of Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, 1990.
- [27] Jang-Hyun Park, Sung-Hoe Huh, Seong-Hwan Kim, Sam-Jun Seo, and Gwi-Tae Park. “Direct adaptive controller for nonaffine nonlinear systems using self-structuring neural networks”. In: *IEEE Transactions on Neural Networks* 16.2 (2005), pp. 414–422.
- [28] Stanislav Aranovskiy, Alexey Bobtsov, Romeo Ortega, and Anton Pyrkin. “Improved Transients in Multiple Frequencies Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing”. In: *IFAC-PapersOnLine* 49.13 (2016). 12th IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing ALCOSP 2016, pp. 99 –104. ISSN: 2405-8963. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.934>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896316312228>.
- [29] Alexey A. Bobtsov, Anton A. Pyrkin, Romeo Ortega, Slobodan N. Vukosavic, Aleksandar M. Stankovic, and Elena V. Panteley. “A robust globally convergent position observer for the permanent magnet synchronous motor”. In: *Automatica* 61 (2015), pp. 47 –54. ISSN: 0005-1098. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.07.032>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109815003179>.
- [30] Alexey Bobtsov, Dmitry Bazylev, Anton Pyrkin, Stanislav Aranovskiy, and Romeo Ortega. “A robust nonlinear position observer for synchronous motors with relaxed excitation conditions”. In: *International Journal of Control* 90.4 (2017), pp. 813–824. DOI: 10.1080/00207179.2016.1230229. eprint: <https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1230229>. URL: <https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1230229>.
- [31] J. Choi, K. Nam, A. A. Bobtsov, A. Pyrkin, and R. Ortega. “Robust Adaptive Sensorless Control for Permanent-Magnet Synchronous Motors”. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 32.5 (2017), pp. 3989–3997.
- [32] R.H. Middleton and G.C. Goodwin. “Adaptive computed torque control for rigid link manipulations”. In: *Systems Control Letters* 10.1 (1988), pp. 9 –16. ISSN: 0167-6911. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(88\)90033-3](https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90033-3). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167691188900333>.
- [33] Dmitry N. Gerasimov, Romeo Ortega, and Vladimir O. Nikiforov. “Relaxing the high-frequency gain sign assumption in direct model reference adaptive control”. In: *European Journal of Control* 43 (2018), pp. 12 –19. ISSN: 0947-3580. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2018.03.001>.

1016/j.ejcon.2018.06.002. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0947358017302364>.