

# Υπολογισμός Πιέσεων από Δεδομένα PIV με χρήση του αλγορίθμου SIMPLE

Νικόλαος- Πέτρος Πάλλας



Επιβλέπων: Δημήτριος Μπούρης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ  
Τομέας: Ρευστών, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ

Αθήνα, Αύγουστος, 2020

# Pressure Calculation from PIV Data Using SIMPLE Algorithm

Nikolaos- Petros Pallas



Supervisor: Dimitrios Bouris, Assistant Professor, NTUA  
Section: Fluid Mechanics, School of Mechanical Engineering, NTUA

Athens, August, 2020

# Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε κάποια άτομα τα οποία με βοήθησαν ώστε να καταφέρω να εκπονήσω την παρούσα διπλωματική εργασία. Καταρχάς, θέλω να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή κ.Μπούρη για την αμέριστη βοήθεια σε όλα τα μαθήματα του τα οποία παρακολούθησα, για την συνεχή υποστήριξη του αλλά και για την υπομονή που επέδειξε, καθόλη την διάρκεια της προετοιμασίας της διπλωματικής μου εργασίας. Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτορα κυρία Βασιλική Παππά η οποία ήταν πάντα πρόθυμη να μου απαντήσει σε οποιαδήποτε απορία είχα, όταν άρχισα να έρχομαι πρώτη φορά σε επαφή με την πειραματική μέθοδο PIV. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συμπαράσταση που μου έδειξαν όλα τα χρόνια των σπουδών μου στη σχολή των Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

*Υπεύθυνη δήλωση για λογοκλοπή και για κλοπή πνευματικής ιδιοκτησίας:*

Έχω διαβάσει και κατανοήσει τους κανόνες για τη λογοκλοπή και τον τρόπο σωστής αναφοράς των πηγών που περιέχονται στον οδηγό συγγραφής Διπλωματικών Εργασιών. Δηλώνω ότι, από όσα γνωρίζω, το περιεχόμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι προϊόν δικής μου εργασίας και υπάρχουν αναφορές σε όλες τις πηγές που χρησιμοποίησα.

Όνοματεπώνυμο: Νικόλαος- Πέτρος Πάλλας

# Υπολογισμός Πιέσεων από Δεδομένα PIV με χρήση του αλγορίθμου SIMPLE

Νικόλαος- Πέτρος Πάλλας

**Σύνοψη:** Στην παρούσα εργασία, έγινε η προσπάθεια εξαγωγής του μέσου πεδίου πιέσεων από δεδομένα μέσα πεδία ταχυτήτων σε ένα επίπεδο. Οι συμβατικές τεχνικές μέτρησης πιέσεων δεν επαρκούν για κάτι τέτοιο, αφενός γιατί είναι σημειακές και αφετέρου γιατί λόγω χρονικής απόκρισης των οργάνων και αδυναμίας μέτρησης σε όλο το επίπεδο, καθίσταται αδύνατη η ταυτόχρονη μέτρηση ολόκληρων των πεδίων πίεσης και ταχυτήτων. Πιο συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό των μέσων αυτών πεδίων, εισάγονται ως δεδομένα, πεδία ταχυτήτων που έχουν εξαχθεί με την πειραματική μέθοδο PIV (Particle Image Velocimetry). Μετά την εισαγωγή των δεδομένων πεδίων επιλύεται η εξίσωση διόρθωσης πίεσης κατά την μέθοδο SIMPLE και οι προκύπτουσες διορθώσεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των νέων τιμών της πίεσης καθώς και των νέων ταχυτήτων, σε κάθε σημείο του επιπέδου. Αυτό είναι χρήσιμο, γιατί οι ταχύτητες από το πείραμα δεν ικανοποιούν πάντοτε την εξίσωση συνέχειας. Εδώ, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι το νέο στοιχείο το οποίο είναι επιθυμητό να ληφθεί υπόψιν στην παρούσα εργασία είναι η ύπαρξη τύρβης. Για την εισαγωγή της τύρβης, δοκιμάστηκαν τόσο μοντέλο τύρβης k-ε όσο και η άμεση εισαγωγή των τάσεων Reynolds στις εξισώσεις, υπολογισμένες από την στατιστική του πειράματος όπως προέκυψε από τη μέθοδο PIV. Η προαναφερθείσα διαδικασία εφαρμόστηκε για περίπτωση περιστρεφόμενου κυλίνδρου σε ακίνητο ρευστό αλλά και για κύβο εμβυθισμένο σε ροή οριακού στρώματος με γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες. Για τον μεν κύλινδρο η διαδικασία εφαρμόστηκε σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα συμμετρίας του, για τον δε κύβο σε δύο επίπεδα, ένα ανάντι και ένα κατόντι τα οποία είναι παράλληλα στην διεύθυνση της ροής και μάλιστα είναι και επίπεδα συμμετρίας.

# Pressure Calculation from PIV Data Using SIMPLE Algorithm

Nikolaos-Petros Pallas

**Abstract:** In the present thesis, it is attempted to calculate the time- averaged pressure field from time- averaged planar velocity fields. The conventional measurement techniques are not adequate because on the one hand they are suitable only for point measurements and on the other hand they cannot be used for measuring simultaneously the whole pressure and velocity field. More specifically, for the construction of those time- averaged fields, the needed velocity data have been already extracted via PIV (Particle Image Velocimetry) experimental method. After the input of the velocity fields, the pressure correction equation is solved, as the SIMPLE algorithm dictates, and the derived pressure corrections are used for the calculation of the new pressures as well as for the new planar velocities. The importance of this correction of data is paramount, because the data extracted from the PIV method doesn't always satisfy the continuity equation. Another element which is included in the present thesis is the existence of turbulence. The methods which were introduced to include the turbulence into the problem, were a  $k-\epsilon$  model of turbulence as well as a direct calculation of the Reynolds stresses utilizing the PIV experiments statistics. The forenamed procedure is applied in two separate cases: a rotating cylinder in a quiescent medium and a cube immersed in boundary-layer flow with angle of attack equal to 0 degrees. For the cylinder, the process is implemented to a plane vertical to the cylinder's axis of symmetry, whereas for the cube, the planes where the pressure is calculated are two: one upstream and one downstream. These two planes are parallel to the wind's direction and are also planes of symmetry.

# Σύμβολα

$u$ : Εν γένει η στιγμιαία οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας ρευστού. Έστερα από ένα σημείο συμβολίζει την  $\bar{u}$

$v$ : Εν γένει η στιγμιαία κάθετη συνιστώσα ταχύτητας ρευστού. Έστερα από ένα σημείο συμβολίζει την  $\bar{v}$

$P$ : Εν γένει η στιγμιαία στατική πίεση ρευστού. Έστερα από ένα σημείο συμβολίζει την  $\bar{P}$

$u'$ : Απόκλιση της  $u$  από τη μέση τιμή της

$u'$ : Απόκλιση της  $u$  από τη μέση τιμή της

$\rho$ : Πυκνότητα ρευστού

$\mu$ : Ιξώδες ρευστού

$e$  (δείκτης): Ανατολικό σύνορο πεπερασμένου όγκου

$n$  (δείκτης): Βόρειο σύνορο πεπερασμένου όγκου

$s$  (δείκτης): Νότιο σύνορο πεπερασμένου όγκου

$w$  (δείκτης): Δυτικό σύνορο πεπερασμένου όγκου

$A_e$ : Επιφάνεια ανατολικού συνόρου

$A_w$ : Επιφάνεια δυτικού συνόρου

$A_n$ : Επιφάνεια βόρειου συνόρου

$A_s$ : Επιφάνεια νότιου συνόρου

$S_P, S_U$ : Όροι πηγής εξισώσεων προς επίλυση

$Vol$ : Όγκος υπολογιστικού κελιού

$P$  (δείκτης): Κέντρο εκάστοτε πεπερασμένου όγκου

$N$  (δείκτης): Κέντρο αμέσως βορειότερου πεπερασμένου όγκου

$S$  (δείκτης): Κέντρο αμέσως νοτιότερου πεπερασμένου όγκου

$E$  (δείκτης): Κέντρο αμέσως ανατολικότερου πεπερασμένου όγκου

$W$  (δείκτης): Κέντρο αμέσως δυτικότερου πεπερασμένου όγκου

$\alpha_i^\Phi$ : Συντελεστές της εξίσωσης (2.1.6)

$\alpha_i^{P'}$ : Συντελεστές εξίσωσης διόρθωσης πίεσης

$DU(I, J)$ : Συντελεστής διόρθωσης της συνιστώσας  $u$  στην θέση I,J

$DV(I, J)$ : Συντελεστής διόρθωσης της συνιστώσας  $v$  στην θέση I,J

$P'$ : Διόρθωση πίεσης

$S_U^{P'}$ : Όρος πηγής εξίσωσης διόρθωσης πίεσης

$\delta x_i$  (ή απλά  $\delta x$ ): πλευρά κατά  $x$  πεπερασμένου όγκου,  $i=e,w,n,s$  σύνορα

$\delta y_i$  (ή απλά  $\delta y$ ): πλευρά κατά  $y$  πεπερασμένου όγκου,  $i=e,w,n,s$  σύνορα

$\bar{u}$ : Οριζόντια συνιστώσα μέσης ταχύτητας ρευστού

$\bar{v}$ : Κάθετη συνιστώσα μέσης ταχύτητας ρευστού

$\bar{P}$ : Μέση στατική πίεση ρευστού

$\Delta X$  ή  $\Delta x$ : Διαμέριση κατά  $x$  της μεθόδου PIV

$\Delta Y$  ή  $\Delta y$ : Διαμέριση κατά  $y$  της μεθόδου PIV

$N$ : Αριθμός στιγμιότυπων PIV

$\mu_t$ : Προσαύξηση του ιξώδους του ρευστού. Χρησιμοποιείται στο μοντέλο k-ε

$\mu_l$ : Ιξώδες του ρευστού στη δεδομένη θερμοκρασία ( $l$  εκ του *laminar*)

$k$ : Κινητική ενέργεια της τύρβης

$\epsilon$ : Καταστροφή της κινητικής ενέργειας της τύρβης

$N_{cyl}$ : Γωνιακή ταχύτητα κυλίνδρου

$C_1, C_2, C_\mu, \sigma_\epsilon$ : Εμπειρικοί συντελεστές μοντέλου k-ε

$R_{cyl}$ : ακτίνα κυλίνδρου

$H_c$ : Ύψος κυλίνδρου

$R_l$ : Μήκος αδιαστατοποίησης

$Pe$ : Αδιάστατος αριθμός Peclet

$f$ : Αδιάστατος γεωμετρικός συντελεστής υβριδικού συστήματος

$\Gamma_\Phi$ : Γενική διατύπωση συντελεστή διάχυσης για την εκάστοτε εξίσωση



$U_t$ : Συνισταμένη ταχυτήτων  $u, v$

$CR$ : Υπόλοιπο διαφορικής εξίσωσης συνέχειας για ασυμπιεστη ροή

$CRN$ : Αδιαστατοποιημένο  $CR$

$ICR$ : Υπόλοιπο ολοκληρωματικής εξίσωσης διατήρησης μάζας για ασυμπιεστη ροή

$ICRN$ : Αδιαστατοποιημένο  $ICR$

$CORR$  (δείκτης): Δείκτης διορθωμένων μεταβλητών  $u, v, U_t$  από την επαναληπτική διαδικασία

$PIV$  (δείκτης): Δείκτης μεταβλητών  $u, v, U_t$  ως έχουν από PIV.

$\epsilon_{corr,\Phi}(\%)$ : Σχετικό σφάλμα μεταξύ μεταβλητών  $u_{CORR}, v_{CORR}, U_{t,CORR}$  και  $u_{PIV}, v_{PIV}, U_{t,PIV}$  αντίστοιχα (βλ. παραπάνω)

$u_{anal}$ : Οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας περιστρεφόμενου κυλίνδρου από αναλυτική λύση αστρόβιλου ασυμπιεστού πεδίου

$v_{anal}$ : Κάθετη συνιστώσα ταχύτητας περιστρεφόμενου κυλίνδρου από αναλυτική λύση αστρόβιλου ασυμπιεστού πεδίου

$\Gamma$ : Κυκλοφορία σημειακής δίνης αστρόβιλου και ασυμπιεστού πεδίου

$P_{anal}$ : Πίεση από εξίσωση Bernoulli που προκύπτει από την αναλυτική λύση για περιστρεφόμενο κύλινδρο.

$P_{ref}$ : Πίεση αναφοράς με βάση την οποία υπολογίζεται η  $P_{anal}$  (βλ. παραπάνω)

$U_{anal,t}$ : Συνισταμένη των  $u_{anal}, v_{anal}$

$X_{max}$ : Η μέγιστη συντεταγμένη κατά  $x$  του πεδίου

$Y_{max}$ : Η μέγιστη συντεταγμένη κατά  $y$  του πεδίου

$X_{min}$ : Η ελάχιστη συντεταγμένη κατά  $x$  του πεδίου

$Y_{min}$ : Η ελάχιστη συντεταγμένη κατά  $y$  του πεδίου

# Κεφάλαια

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Στοιχεία Θεωρίας</b>	<b>16</b>
2.1	Βασικές επιλυόμενες εξισώσεις και διακριτοποίηση τους . . . . .	16
2.2	Τύρβη και μέθοδοι εισαγωγής της στο πρόβλημα . . . . .	20
2.3	Απαραίτητα δεδομένα και εισαγωγή τους στον κώδικα . . . . .	25
2.4	Οριακές συνθήκες και διαδικασία επίλυσης . . . . .	27
2.5	Χρήσιμα στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης και λοιπές πληροφορίες . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Αποτελέσματα-Σχόλια</b>	<b>37</b>
3.1	Στρωτό στρώμα διάτμησης(CFD) . . . . .	38
3.2	Περίπτωση περιστρεφόμενου κυλίνδρου (δεδομένα PIV) . . . . .	42
3.3	Περίπτωση κύβου σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης ανέμου (δεδομένα PIV)	55
3.3.1	Επίπεδο A, πειράματα LSO, LSC, HSO, HSC . . . . .	57
3.3.2	Επίπεδο C, πειράματα LSC, HSC . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>86</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>90</b>
	<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>92</b>

# 1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία, επιδιώκεται η εξαγωγή πεδίου πίεσεων υπολογιστικά από δεδομένα πεδία ταχυτήτων με χρήση της πειραματικής μεθόδου PIV. Η πειραματική μέθοδος PIV, είναι μια μη παρεμβατική μέθοδος μέτρησης ροϊκών πεδίων. Όταν λέγεται ότι είναι μη παρεμβατική μέθοδος, πρακτικά εννοείται ότι σε αντίθεση με συμβατικές μεθόδους μέτρησης ταχύτητας (σωλήνας Pitot, θερμό νήμα κ.λπ.), δεν εισάγονται διαταραχές στο πεδίο ταχυτήτων κατά την διάρκεια της μέτρησης. Αφού γίνει η καταγραφή δύο διαδοχικών φωτογραφικών στιγμιότυπων του επιπέδου στο οποίο επιζητείται να γίνει μέτρηση, τότε με την εφαρμογή της μεθόδου της ετεροσυσχέτισης <sup>1</sup> μεταξύ των δύο αυτών στιγμιότυπων, μπορεί να υπολογιστεί το στιγμιαίο πεδίο ταχυτήτων. Επιπλέον, παραδοσιακά η μέθοδος PIV χρησιμοποιείται για την μέτρηση των δύο συνιστωσών της ταχύτητας. Αν επιθυμείται να μετρηθεί και η τρίτη, χρησιμοποιείται η Stereo PIV.

Η πρώτη ερώτηση που μπορεί να έρθει στο μυαλό του αναγνώστη, είναι το κατά πόσο συμφέρει να εξαχθεί το πεδίο πίεσης υπολογιστικά μέσω πειραματικών δεδομένων για την ταχύτητα και όχι απευθείας με κάποια πειραματική μέθοδο. Η απευθείας μέτρηση πεδίου πίεσεως με πειραματική μέθοδο, δεν είναι εφικτή με την παρούσα τεχνολογία γιατί τα περισσότερα πειραματικά μέσα είναι αφενός σημειακής μέτρησης, πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει να μετακινείται το όργανο μέτρησης σε διάφορα σημεία του πεδίου και επομένως δεν είναι δυνατή η εξαγωγή όλου του πεδίου πίεσεως ταυτόχρονα και αφετέρου οι πειραματικές μέθοδοι μετρήσεως της πίεσης είναι παρεμβατικές και έτσι δημιουργούνται διαταραχές στη ροή που αλλοιώνουν την ποιότητα των αποτελεσμάτων. Κατ' αυτό τον τρόπο, γίνεται κατανοητή η σημασία υπολογισμού πεδίου πίεσεως από πειραματικά δεδομένα ταχυτήτων που εξήχθησαν με χρήση της μεθόδου PIV.

Όπως αναφέρει ο van Oudheusden (2013) σε μία σύνοψη των διαφορετικών μεθόδων υπολογισμού πίεσης από PIV δεδομένα, πολλοί ερευνητές έχουν προτείνει απευθείας

---

<sup>1</sup>cross correlation

μέτρηση πιέσεων με χρήση έγχυσης σφαιριδίων αέρα τα οποία λειτουργούν ως αισθητήρες πίεσης με αρχή λειτουργίας την παρατήρηση της αλλαγής του σχήματος τους. Ακόμη όμως και αυτή η μέθοδος, δεν επιτρέπει ταυτόχρονη μέτρηση πεδίων ταχυτήτων και πεδίου πίεσης, τουλάχιστον όχι σε όλες τις περιπτώσεις. Μία άλλη πειραματική μέθοδος μέτρησης πίεσης είναι η χρήση υπερευαίσθητης μπογιάς, όπως αναφέρουν ο van Oudheusden et al.(2007). Ένα από τα μειονεκτήματα όμως αυτής της μεθόδου είναι ότι χρησιμοποιείται μόνο για την μέτρηση πιέσεων σε επιφάνειες και όχι σε ολόκληρο το πεδίο. Τέλος, επισημαίνεται ότι άλλος ένας λόγος που καθιστά την εξαγωγή πιέσεων από δεδομένα PIV τόσο ελκυστική είναι η ίδια η μέθοδος PIV που χρησιμοποιείται ως προκαταρκτικό βήμα. Δηλαδή, το γεγονός ότι πρόκειται για μία μη παρεμβατική μέθοδο (non-intrusive) μέτρησης την καθιστά αξιόπιστη και ανώτερη από οποιαδήποτε άλλη υπάρχει αυτή τη στιγμή.

Δευτερευόντως, μπορεί κάποιος να αναρωτηθεί σχετικά με τα ποια είναι η χρησιμότητα της εξαγωγής πεδίου πιέσεων γύρω από ένα αντικείμενο. Αυτό μπορεί να απαντηθεί πολύ ολοκληρωμένα με ένα παράδειγμα: έστω ότι υπάρχει η επιθυμία να μετρηθούν τα φορτία που δέχεται ένα κτήριο λόγω του ανέμου. Ουσιαστικά, αν ολοκληρωθεί η πίεση χωρικά σε όλα τα τοιχώματα αυτού του κτηρίου μπορούν να βρεθούν και τα φορτία. Αν λοιπόν, μετρηθούν οι ταχύτητες του ανέμου γύρω από κάποια ομοίωμα του κτηρίου αυτού σε κλίμακα, σε μια αεροσήραγγα, μπορεί εν συνεχεία να εξαχθεί το πεδίο πίεσης και με χρήση γεωμετρικών λόγων ομοιότητας, αδιάστατων αριθμών κ.λπ. να διευρυνθούν τα συμπεράσματα και για το κτήριο αυτό καθ' αυτό. Τονίζεται εδώ, ότι τα ανεμοφορτία αποτελούν σπουδαίο παράγοντα για την κατασκευή των ουρανοξυστών Αυτό το παράδειγμα, αποτελεί μόνο μία από τις πάμπολλες εφαρμογές που σχετίζονται με την εργασία.

Με την ίδια λογική που περιεγράφηκε στο παραπάνω παράδειγμα, θα μπορούσε μία άλλη εφαρμογή να σχετίζεται με το κατά πόσο είναι συμφέρουσα η κατασκευή ανεμογεννητριών σε αστικό ή οποιοδήποτε άλλο περιβάλλον. Δηλαδή, μέσω των πιέσεων που δέχεται η ανεμογεννήτρια, θα μπορούσε να εξαχθεί η καμπύλη ισχύος της. Επιπλέον, θα μπορούσε

να εφαρμοστεί η ίδια μέθοδος και για την προπέλα ενός πλοίου αλλά και γενικότερα για οποιαδήποτε εφαρμογή στην οποία απαιτείται μέτρηση πιέσεων και φορτίων. Εν ολίγοις, όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος PIV μπορεί να εφαρμοστεί και η μέθοδος που προτείνεται στο παρόν σύγγραμμα.

Προτού δοθεί μία βιβλιογραφική ανασκόπηση, πρέπει να ειπωθεί ότι οι μέθοδοι κατασκευής πεδίου πίεσης από δεδομένα πεδία ταχυτήτων με την μέθοδο PIV, χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: σε αυτές που στηρίζονται στην επίλυση μίας διαφορικής εξίσωσης Poisson για την πίεση ή στην απευθείας επίλυση των εξισώσεων ορμής για την εξαγωγή του πεδίου πίεσης και σε αυτές που επιστρατεύουν έναν αλγόριθμο της οικογένειας SIMPLE. Διευκρινίζεται ότι η μεθοδολογία της παρούσας εργασίας υπάγεται στη δεύτερη κατηγορία. Η βασική ειδοποιός διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων είναι ότι η πρώτη βασίζεται στην επίλυση απλά μίας εξίσωσης πίεσης (Poisson) ή των δύο εξισώσεων ορμής, ενώ η δεύτερη είναι μία επαναληπτική μέθοδος στην οποία επιλύονται οι εξισώσεις ορμής και η εξίσωση πίεσης (προερχόμενη από την εξίσωση συνέχειας) ως σύστημα εξισώσεων μέχρι συγκλίσεως αυτού.

Επομένως, με αυτή τη μέθοδο, αφενός υπολογίζεται το πεδίο πίεσεως, αφετέρου διορθώνονται τα ίδια τα πειραματικά δεδομένα ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας. Μάλιστα, αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται στη συνέχεια της εργασίας για τρεις ομάδες δεδομένων: για δεδομένα απευθείας από επίλυση μέσω προγράμματος υπολογιστικής ρευστομηχανικής (CFD)<sup>2</sup>, για δεδομένα PIV σε επίπεδο κάθετο στον άξονα συμμετρίας περιστρεφόμενου κυλίνδρου και για δεδομένα PIV σε επίπεδα γύρω από έναν κύβο, του οποίου η γωνία πρόσπτωσης στην ανάντι έδρα του είναι μηδενική. Τέλος, αναφέρεται ότι σε όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις, λαμβάνεται υπόψιν η τύρβη καθώς και ότι η επίλυση αφορά τα μέσα πεδία ταχυτήτων και πίεσης.

Οι Fujisawa, et al.(2005) αφού έφεραν τις εξισώσεις ορμής και συνέχειας σε μορφή

---

<sup>2</sup>Computational Fluid Dynamics

μιας εξίσωσης Poisson για την πίεση για τη περίπτωση κυλίνδρου, ακίνητου και περιστροφικά ταλαντούμενου, εξήγαγαν στιγμιαία πεδία πιέσεων από στιγμιαία πεδία ταχυτήτων υπολογισμένα με τη μέθοδο PIV θεωρώντας όμως τη ροή μόνιμη, μη συνεκτική και ασυμπίεστη. Οι Vanierschot and Van Den Bulck (2008) και αυτοί με εφαρμογή της εξίσωσης Poisson, υπολόγισαν τα μέσα πεδία πίεσης δακτυλιοειδούς δέσμης με θεώρηση μη συνεκτικής, ασυμπίεστης και αξονοσυμμετρικής ροής. Οι de Kat et al. (2008), σε αντίθεση με τους προαναφερθέντες, υπολόγισαν το στιγμιαίο πεδίο πίεσης για στιγμιότυπο ταχυτήτων από Stereo-TR-PIV του μη μόνιμου ομόρρου τετραγωνικού τμήματος με χρήση και της εξίσωσης Poisson αλλά και με απευθείας επίλυση των εξισώσεων ορμής. Μάλιστα διεξήγαγαν και συγκρίσεις ανάμεσα στους δύο τρόπους υπολογισμού. Στην ίδια λογική κινήθηκαν και οι Charonko et al.(2010), οι οποίοι επέλυσαν διάφορες μορφές της εξίσωσης Poisson για την πίεση καθώς και απευθείας τις εξισώσεις ορμής (ουσιαστικά τις Navier-Stokes) με δεδομένα πεδία ταχυτήτων από DPIV<sup>3</sup>.

Οι Suryadi and Obi (2011) με χρήση της τρισδιάστατης εξίσωσης Poisson -και όχι απλώς της διδιάστατης όπως οι προηγούμενοι- και δεδομένα πεδία ταχυτήτων από Stereo PIV, υπολόγισαν τα δυναμικά φορτία επιφάνειας αεροτομής σε flapping κίνηση. Οι Kindere,et al.(2019) και αυτοί με επίλυση εξίσωσης Poisson για την πίεση, αλλά και με χρήση και της υπόθεσης παγωμένης τύρβης του Taylor , για να υποκαταστήσουν την φτωχή χρονική πληροφορία, υπολόγισαν όχι μόνο μέσα πεδία πίεσης αλλά και στιγμιαία, από δεδομένα ταχυτήτων PIV.

Οι δημοσιεύσεις στις οποίες χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος SIMPLE ή κάποια παραλλαγή του για υπολογισμό πεδίου πιέσεων από δεδομένα PIV είναι δύο. Συγκεκριμένα: οι Jaw et al. (2009) με χρήση του αλγορίθμου SIMPLER σε ομόθετο (non-staggered) πλέγμα, εξήγαγαν αποτελέσματα για στιγμιότυπα διδιάστατων, ασυμπίεστων, μόνιμων, στρωτών ροών. Τέλος, οι Gunaydinoglu and Kurtulus (2019), και αυτοί με χρήση του αλγορίθ-

---

<sup>3</sup>Digital Particle Image Velocimetry

μου SIMPLER, εξήγαγαν πεδία πιέσεων τόσο για μόνιμες, ασυμπίεστες, στρωτές ροές όσο και για μη μόνιμες. Το κενό το οποίο είναι επιθυμητό να καλυφθεί με την παρούσα εργασία είναι ο υπολογισμός μέσω πεδίων πίεσης για μέσα πεδία ταχυτήτων τυρβώδους και ασυμπίεστης ροής.

## 2 Στοιχεία Θεωρίας

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα δοθούν όλα τα απαραίτητα στοιχεία ώστε να καταστεί κατανητή η διαδικασία επίλυσης η οποία εφαρμόστηκε. Πιο συγκεκριμένα, θα δοθούν οι βασικές επιλυόμενες εξισώσεις, οι διαφορετικοί τρόποι εισαγωγής της τύρβης στο πρόβλημα καθώς και θα επισημανθούν τα απαραίτητα δεδομένα, ο τρόπος εισαγωγής τους και οι οριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν. Επιπλέον, θα δοθούν και λοιπά στοιχεία θεωρίας τα οποία θεωρούνται χρήσιμα για την κατανόηση της διαδικασίας και τέλος θα παρουσιαστεί η ίδια η αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης.

### 2.1 Βασικές επιλυόμενες εξισώσεις και διακριτοποίηση τους

Όπως έχει ήδη ειπωθεί, οι βασικές εξισώσεις που επιλύονται είναι οι εξισώσεις ορμής και η εξίσωση διόρθωσης πίεσης. Αρχικά θα γραφτούν οι εξισώσεις ορμής ως έχουν. Κατ' αυτό τον τρόπο, αρχικά δίνονται οι εξισώσεις ορμής κατά  $x$  και κατά  $y$  αντίστοιχα:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (2.1.2)$$

Τονίζεται ότι οι άνωθεν εξισώσεις ισχύουν για νευτώνειο ρευστό σε περίπτωση δισδιάστατου, ασυμπίεστου και μόνιμου πεδίου στο οποίο το ιξώδες μεταβάλλεται χωρικά. Σε συνθήκες στρωτής ροής και σταθερής θερμοκρασίας, το ιξώδες γενικά θεωρείται σταθερό. Όπως όμως θα φανεί στη συνέχεια, όταν αυτές οι εξισώσεις λύνονται μαζί με μοντέλο τύρβης  $k$ - $\epsilon$ , το ιξώδες προκύπτει χωρικά μεταβαλλόμενο.

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων για τις εξισώσεις (2.1.1) και (2.1.2). Έτσι, θέτοντας  $\Phi = u, v$  ανά περίπτωση, αυτές οι εξισώσεις



γίνονται:

$$\left(\rho u \Phi - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_e A_e - \left(\rho u \Phi - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_w A_w + \left(\rho v \Phi - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_n A_n - \left(\rho v \Phi - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_s A_s = (S_P \Phi_P + S_U) Vol \quad (2.1.3)$$

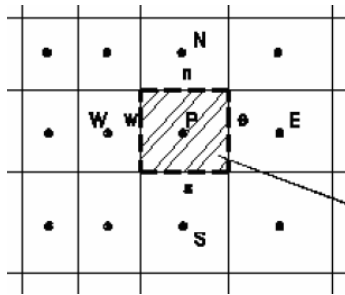
όπου γενικά  $S_P=0$  για μόνιμα πεδία και για  $\Phi = u$ :

$$S_U = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.1.4)$$

και για  $\Phi = v$ :

$$S_U = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (2.1.5)$$

Στο σημείο αυτό, κρίνεται σκόπιμο να γίνει η εξής διευκρίνιση: οι επιφάνειες  $A_e, A_w, A_n, A_s$  στην ουσία δεν είναι επιφάνειες εφόσον η παρούσα διαδικασία ανταποκρίνεται σε δισδιάστατα προβλήματα, αλλά ευθύγραμμα τμήματα. Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι για την τρίτη διάσταση θεωρήθηκε ότι  $\Delta Z=1$ . Παρόμοιο συμπέρασμα ισχύει και για τον όγκο του υπολογιστικού κελιού ( $Vol$ ). Επιπλέον, πρέπει να αναφερθεί ότι οι όροι πηγής που αναγράφονται στις εξισώσεις (2.1.4), (2.1.5) αφορούν το κέντρο του εκάστοτε πεπερασμένου όγκου εξού και ο δείκτης  $P$  στην μεταβλητή  $\Phi$ . Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η γεωμετρία του εκάστοτε πεπερασμένου όγκου, δίνεται το Σχήμα 1.



**Σχήμα 1:** Ενδεικτική αποτύπωση πεπερασμένου όγκου (Πηγή: Μπούρης ,Δ. (2007))

Ο κώδικας ο οποίος χρησιμοποιήθηκε (CAFFCA2D) και τροποποιήθηκε, δίνει εξαρχής δύο επιλογές για σχήματα πεπερασμένων διαφορών: καταρχάς, ένα υβριδικό σχήμα ανάντι παραγωγίσης και κατά δεύτερον το σχήμα BSOU (Bounded Second Order Upwind, Papadakis and Bergeles, 1995). Στην παρούσα φάση, δεν κρίνεται σκόπιμο να δοθούν οι ακριβείς εκφράσεις αυτών των σχημάτων. Αφού γίνει η επιλογή ενός από των δύο σχημάτων διακριτοποίησης, η εξίσωση (2.1.3) λαμβάνει την μορφή της εξίσωσης (2.1.6) η οποία και φαίνεται κάτωθεν. Στην παρούσα εργασία έγινε χρήση του υβριδικού σχήματος, δηλαδή ένας συνδυασμός ανάντι και κεντρικής παραγωγίσης με βάση τον αριθμό Peclet. Το σχήμα αυτό εφαρμόστηκε για την έκφραση των όρων διάχυσης και μεταφοράς της εξίσωσης (2.1.3). Πρέπει να αναφερθεί ότι οι συντελεστές της εξίσωσης (2.1.6),  $\alpha_i^\Phi$ , λαμβάνουν διαφορετική τιμή ανάλογα με το σχήμα παραγωγίσης που επιλέχθηκε. Τέλος, σημειώνεται ότι ο όρος  $S_P$ , παρόλο που είναι μηδενικός σε εσωτερικά σημεία ενός μόνιμου πεδίου, συμπεριλαμβάνεται στην εξίσωση γιατί όπως θα φανεί και στη συνέχεια λαμβάνει τιμή στα όρια λόγω των οριακών συνθηκών που επιβάλλονται.

$$(\alpha_P^\Phi - S_P^\Phi)\Phi_P = \alpha_N^\Phi\Phi_N + \alpha_S^\Phi\Phi_S + \alpha_E^\Phi\Phi_E + \alpha_W^\Phi\Phi_W + S_U^\Phi \quad (2.1.6)$$

$$\alpha_P^\Phi = \alpha_N^\Phi + \alpha_S^\Phi + \alpha_E^\Phi + \alpha_W^\Phi \quad (2.1.7)$$

Εν συνεχεία, πρέπει να δοθεί η εξίσωση διόρθωσης πίεσης η οποία αποτελεί και το βασικό στοιχείο της μεθόδου που θα εφαρμοστεί. Καταρχάς, τονίζεται ότι αυτή εκπορεύεται από την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο και δισδιάστατο πεδίο ροής (εξίσωση (2.1.8)). Εδώ, αναφέρεται ότι παρόλο που αναγράφεται ότι το αριστερό μέλος της (2.1.8) είναι ίσο με μηδέν, στην πραγματικότητα, λόγω σφαλμάτων κατά το πείραμα αλλά και απόκλισης από την ιδανική, δισδιάστατη κατάσταση δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Αυτή άλλωστε είναι και η βασική επιδίωξη αυτής της μεθόδου, δηλαδή να εκμηδενιστεί στο μέτρο του δυνατού το

υπόλοιπο της εξίσωσης συνέχειας.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1.8)$$

Ύστερα, εφαρμόζεται και εδώ η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων και η (2.1.8) λαμβάνει την μορφή της (2.1.9), δηλαδή:

$$-(\rho u \delta y)_e + (\rho u \delta y)_w + (\rho v \delta x)_s - (\rho v \delta x)_n = 0 \quad (2.1.9)$$

Τέλος, πρέπει να εισαχθεί με κάποιο τρόπο η πίεση στην εξίσωση (2.1.9). Αρχικά, η πίεση σε ένα σημείο  $(I, J)$  του προς επίλυση πεδίου ταχυτήτων γράφεται όπως διαφαίνεται στην εξίσωση (2.1.10), όπου  $P^*$  είναι η τιμή της πίεσης από την προηγούμενη επανάληψη,  $P'$  η διόρθωση της πίεσης και  $P$  η τρέχουσα τιμή. Παρακάτω, δίνονται οι σχέσεις που συνδέουν τις κλίσεις του μεγέθους  $P'$  με τις ταχύτητες (εξισώσεις (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14)). Επισημαίνεται ότι και στις εξισώσεις που αφορούν τις ταχύτητες, (\*) αντιστοιχεί στην προηγούμενη λύση.

$$P(I, J) = P^*(I, J) + P'(I, J) \quad (2.1.10)$$

$$u(I, J) = u^*(I, J) - DU(I, J) \frac{\partial P'}{\partial x} \Big|_{(I, J)} \quad (2.1.11)$$

$$v(I, J) = v^*(I, J) - DV(I, J) \frac{\partial P'}{\partial y} \Big|_{(I, J)} \quad (2.1.12)$$

$$DU(I, J) = \frac{Vol}{\alpha_P^{\Phi=u}(I, J) - S_P^{\Phi=u}(I, J)} \quad (2.1.13)$$

$$DV(I, J) = \frac{Vol}{\alpha_P^{\Phi=v}(I, J) - S_P^{\Phi=v}(I, J)} \quad (2.1.14)$$

Αν τώρα αντικατασταθούν οι εξισώσεις (2.1.11) ως (2.1.14) στην (2.1.9) και εκφρα-

στούν οι μεν κλίσεις της  $P'$  με κάποιο σχήμα πεπερασμένων διαφορών και οι δε ταχύτητες στα όρια e,w,n,s με κάποιο τρόπο παρεμβολής, τότε προκύπτουν οι εξισώσεις (2.1.15), (2.1.16) και (2.1.17). Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι δεν θεωρείται απαραίτητο να δοθούν περαιτέρω λεπτομέρειες σχετικά με τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών τα οποία χρησιμοποιήθηκαν και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει παραπάνω λεπτομέρειες από τον Μπούρη (2007) καθώς και στο υποκεφάλαιο (2.5). Τέλος, για λόγους πληρότητας, αναφέρεται ότι επιλογή διαφορετικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών και διαφορετικού τρόπου παρεμβολής απλώς επηρεάζουν τις τιμές των συντελεστών  $\alpha_i^{P'}$  και όχι την μορφή της εξίσωσης αυτής καθ' αυτής.

$$\alpha_P^{P'} P'_P = \alpha_N^{P'} P'_N + \alpha_S^{P'} P'_S + \alpha_E^{P'} P'_E + \alpha_W^{P'} P'_W + S_U^{P'} \quad (2.1.15)$$

$$\alpha_P^{P'} = \alpha_N^{P'} + \alpha_S^{P'} + \alpha_E^{P'} + \alpha_W^{P'} \quad (2.1.16)$$

$$S_U^{P'} = -\rho u_e^* \delta y + \rho u_w^* \delta y + \rho v_s^* \delta x - \rho v_n^* \delta x \quad (2.1.17)$$

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, δόθηκαν οι βασικές εξισώσεις προς επίλυση αλλά δεν έγινε καμία αναφορά στην ύπαρξη τύρβης. Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα δοθούν τα απαραίτητα στοιχεία για την τύρβη. Επίσης, επισημαίνεται ότι στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα δοθεί η αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης, όπου θα γίνει κατανοητός ο τρόπος επίλυσης των εξισώσεων καθώς και η σειρά με την οποία επιλύονται.

## 2.2 Τύρβη και μέθοδοι εισαγωγής της στο πρόβλημα

Η τύρβη εισάγεται στο πρόβλημα και με μοντέλο τύρβης k-ε αλλά και απευθείας από τα στατιστικά του πειράματος. Παρακάτω θα δοθεί ο ακριβής τρόπος με τον οποίο αυτό καθίσταται δυνατό. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά θα δοθούν οι εξισώσεις ορμής (σε μη

συντηρητική μορφή) που διέπουν το μέσο πεδίο ταχυτήτων (Reynolds averaged):

$$\rho\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \rho\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right) \right] = -\frac{\partial\bar{P}}{\partial x} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} \right) \right] - \rho \frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x} - \rho \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} \quad (2.2.1)$$

$$\rho\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \rho\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} \right) \right] = -\frac{\partial\bar{P}}{\partial y} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} \right) \right] - \rho \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x} - \rho \frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} \quad (2.2.2)$$

Όπου:

$$u = \bar{u} + u' \quad (2.2.3)$$

$$v = \bar{v} + v' \quad (2.2.4)$$

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^N \frac{u_k}{N} \quad (2.2.5)$$

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^N \frac{v_k}{N} \quad (2.2.6)$$

$$\overline{u'^2} = \sum_{k=1}^N \frac{u_k'^2}{N} \quad (2.2.7)$$

$$\overline{v'^2} = \sum_{k=1}^N \frac{v_k'^2}{N} \quad (2.2.8)$$

$$\overline{v'u'} = \sum_{k=1}^N \frac{v_k' u_k'}{N} \quad (2.2.9)$$

Τονίζεται ότι για να εξαχθούν οι εξισώσεις (2.2.1), (2.2.2) τα  $u', v'$  επιλέχθηκαν έτσι ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις (2.2.10), (2.2.11). Μπορεί να μην γίνεται εξαρχής κατανοητός ο λόγος παράθεσης των παρακάτω εξισώσεων, αλλά θα γίνει στη συνέχεια όπου θα πρέπει να αξιολογηθεί η στατιστική του πειράματος. Επιπλέον, αναφέρεται ότι οι εξισώσεις (2.2.3) ως (2.2.9) αφορούν μία συγκεκριμένη θέση του προς επίλυση πεδίου, δηλαδή είναι συναρτήσεις της θέσης. Επίσης, επισημαίνεται ότι οι όροι  $[\frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial\bar{v}}{\partial x})]$ ,  $[\frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}) +$

$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y})]$ , δεν υπάρχουν στις προς επίλυση εξισώσεις για ροή σταθερού ιξώδους και ασυμπίεστη. Προστέθηκαν χωρίς βλάβη της γενικότητας, γιατί άλλωστε σε περίπτωση σταθερού ιξώδους και ασυμπίεστου, δισδιάστατου πεδίου καθίστανται μηδενικοί.

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u'(t) dt = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\bar{v}' = \frac{1}{T} \int_0^T v'(t) dt = 0 \quad (2.2.11)$$

όπου  $T$  είναι το συνολικό διάστημα χρονικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων.

Αν συγκριθούν οι εξισώσεις (2.2.1), (2.2.2) με τις (2.1.1), (2.1.2) αντίστοιχα, καθίσταται φανερό ότι η μόνη διαφορά τους έγκειται στην ύπαρξη των τυρβωδών όρων αν προφανώς θεωρηθεί ότι το  $u$  αντιστοιχεί σε  $\bar{u}$ , το  $v$  σε  $\bar{v}$  και το  $P$  σε  $\bar{P}$ . Πρέπει να διευκρινιστεί ότι από εδώ και πέρα όποτε γίνεται αναφορά σε ταχύτητες  $u, v$  ή πεδίο πίεσης  $P$  θα εννοείται το μέσο πεδίο εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι άλλο. Επομένως, γίνεται κατανοητό ότι οι εξισώσεις ορμής αλλά και αυτή της διόρθωσης πίεσης του προηγούμενου υποκεφαλαίου, αφορούν τα μέσα πεδία ταχυτήτων και πιέσεων. Τώρα, αυτοί οι τυρβώδεις όροι μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από τα δεδομένα που προέκυψαν από το πείραμα και πιο συγκεκριμένα από την χρονική πληροφορία. Εφόσον οι υπόλοιποι όροι έχει δειχθεί πώς υπολογίζονται από την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων, το μόνο που μένει είναι να υπολογιστούν με αυτή τη μέθοδο και οι τυρβώδεις όροι. Έτσι, για τους όρους της (2.2.1), (2.2.2) έχουμε αντίστοιχα:

$$-[(\overline{\rho u'^2 \delta y})_e - (\overline{\rho u'^2 \delta y})_w] - [(\overline{\rho u' v' \delta x})_n - (\overline{\rho u' v' \delta x})_s] \quad (2.2.12)$$

$$-[(\overline{\rho u' v' \delta y})_e - (\overline{\rho u' v' \delta y})_w] - [(\overline{\rho v'^2 \delta x})_n - (\overline{\rho v'^2 \delta x})_s] \quad (2.2.13)$$

Επομένως, με βάση όλα τα παραπάνω μπορεί να ειπωθεί ότι οι εξισώσεις (2.1.6), (2.1.7) εξακολουθούν να ισχύουν και τροποποιούνται για να συμπεριληφθεί η τύρβη απλά προσθέτοντας τους όρους των εξισώσεων (2.2.12), (2.2.13) στους όρους πηγής  $S_U^{\Phi=u}$ ,  $S_U^{\Phi=v}$  αντίστοιχα, αφού πρώτα γίνουν κατάλληλες παρεμβολές για τον υπολογισμό αυτών στα όρια  $e, w, n, s$ . Για να γίνουν κατανοητές οι παρεμβολές αυτές, δίνεται ενδεικτικά παρακάτω μόνο μία (βλέπε εξίσωση 2.2.14) και οι υπόλοιπες πραγματοποιούνται με παρόμοιο τρόπο. Παρατηρώντας την εξίσωση (2.2.14) και τις (2.2.12), (2.2.13), πρέπει να γίνουν τα εξής σχόλια: η πυκνότητα θεωρείται σταθερή σε όλο το πεδίο και τα  $\delta y, \delta x$  δεν χρειάζονται κάποια παρεμβολή αφού λόγω του εν γένει ομοιόμορφου πλέγματος της μεθόδου PIV παραμένουν σταθερά στον εκάστοτε πεπερασμένο όγκο. Σχετικά με το είδος του πλέγματος και τα απαραίτητα δεδομένα, θα δοθούν σε επόμενο υποκεφάλαιο και άλλα στοιχεία. Τέλος, αναφέρεται ότι όπως διαφαίνεται από την (2.2.14), πραγματοποιήθηκαν απλά γραμμικές παρεμβολές στα όρια.

$$(\overline{\rho u'^2})_e = \frac{(\overline{\rho u'^2})_E + (\overline{\rho u'^2})_P}{2} \quad (2.2.14)$$

Για την περίπτωση του κυλίνδρου, χρησιμοποιείται μοντέλο τύρβης k-ε. Οι αντίστοιχες εξισώσεις, δηλαδή η εξίσωση της κινητικής ενέργειας της τύρβης και αυτή της καταστροφής της, αναγράφονται παρακάτω.

$$\rho \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu_t / \sigma_k + \mu_l) \frac{\partial k}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu_t / \sigma_k + \mu_l) \frac{\partial k}{\partial y} \right] = G - \rho \epsilon \quad (2.2.15)$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu_t / \sigma_\epsilon + \mu_l) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu_t / \sigma_\epsilon + \mu_l) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] = (\epsilon G C_1 - C_2 \rho \epsilon^2) / k \quad (2.2.16)$$

$$G = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \quad (2.2.17)$$

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.2.18)$$

$$C_1 = 1,44, C_2 = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_\epsilon = 1.3, \sigma_k = 0.9 \quad (2.2.19)$$

$$\mu = \mu_t + \mu_l \quad (2.2.20)$$

Σε αυτή τη φάση, πρέπει να αναφερθεί ότι για τις εξισώσεις (2.2.15), (2.2.16) χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση του Boussinesq. Κατ' αυτό τον τρόπο προέκυψε και όρος  $G$  υπό τη μορφή που φαίνεται στην εξίσωση (2.2.17). Η υπόθεση αυτή φαίνεται στην εξίσωση (2.2.21) σε ταυστική γραφή με  $i, j = 1, 2$  όπου το 1 ή 2 αντιστοιχεί στη κατεύθυνση κατά  $x$  ή κατά  $y$  αντίστοιχα.

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - 2/3 \rho k \quad (2.2.21)$$

Αν τώρα εφαρμοστεί στις εξισώσεις (2.2.15), (2.2.16) η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων με χρήση του ίδιου υβριδικού συστήματος παραγωγίσις που χρησιμοποιήθηκε για  $\Phi = u, v$ , προκύπτουν δύο εξισώσεις ίδιας μορφής με τις (2.1.6), (2.1.7) με  $\Phi = k$  ή  $\epsilon$ . Για παραπάνω λεπτομέρειες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο κεφάλαιο (2.5) και τους Μπούρη (2007) και Μπεργελέ (2012). Οι όροι πηγής που προκύπτουν φαίνονται στις εξισώσεις (2.2.22), (2.2.23), (2.2.24), (2.2.25). Για λόγους πληρότητας, αναφέρεται ότι στους όρους πηγής δεν συμπεριλαμβάνονται χρονικοί όροι γιατί γίνεται επίλυση του μέσου χρονικά πεδίου.

$$S_P^k = -C_\mu \frac{k \rho^2}{\mu_t} \quad (2.2.22)$$

$$S_U^k = G \quad (2.2.23)$$

$$S_P^\epsilon = -C_2 \frac{\epsilon \rho}{k} \quad (2.2.24)$$

$$S_U^\epsilon = C_1 C_\mu \frac{k \rho}{\mu_t} G \quad (2.2.25)$$



### 2.3 Απαραίτητα δεδομένα και εισαγωγή τους στον κώδικα

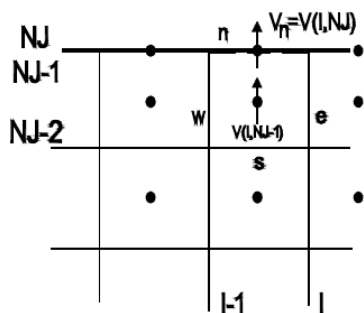
Στο παρόν υποκεφάλαιο, θα δοθούν στοιχεία σχετικά με την διάρθρωση των δεδομένων από την ίδια τη μέθοδο PIV καθώς και σχετικά με την εισαγωγή τους στον κώδικα. Κρίνεται σκόπιμο, αυτά τα στοιχεία να δοθούν πριν το υποκεφάλαιο που αφορά τις οριακές συνθήκες, γιατί έτσι θα υπάρξει ευκολότερη και καλύτερη κατανόηση.

Καταρχάς, όπως ειπώθηκε και στην εισαγωγή, η μέθοδος PIV εν γένει δίνει  $N$  τω αριθμώ στιγμιότυπα, δηλαδή  $N$  στιγμιαία πεδία. Υπάρχει περίπτωση, από το ίδιο το λογισμικό με το οποίο έγινε η μετά-επεξεργασία των δεδομένων (post processing) να παρέχεται και το μέσο πεδίο. Σε περίπτωση που δεν παρέχεται, με τις σχέσεις (2.2.5) ως (2.2.9), εξάγεται αυτό καθώς και τα απαραίτητα στατιστικά της τύρβης από όλα τα στιγμιότυπα. Στην περίπτωση του κύβου, παρέχονται τα μέσα πεδία ταχυτήτων και τα στατιστικά της τύρβης, ενώ σε αυτή του κυλίνδρου εξήχθησαν με τη γραφή ενός απλού προγράμματος.

Με τη μέθοδο PIV το επίπεδο της μέτρησης χωρίζεται με  $NI$  και  $NJ$  πλεγματικές γραμμές σε διαμερίσεις κατά  $x$  και κατά  $y$  αντίστοιχα. Το σημείο τομής των οριζόντιων με τις κάθετες πλεγματικές γραμμές αποτελεί έναν κόμβο του πεδίου στη θέση  $(I, J)$ . Κατά την επίλυση των εξισώσεων ορμής, διόρθωσης πίεσης και ανά περίπτωση και του μοντέλου k-ε, η θέση  $(I, J)$  αντιστοιχεί στο κέντρο του πεπερασμένου όγκου  $P$ , η  $(I+1, J)$  στο  $E$  σημείο, η  $(I, J+1)$  στο  $N$  και ούτω καθεξής. Το σύνορο  $n$  του πεπερασμένου όγκου για παράδειγμα, βρίσκεται στο μισό της απόστασης μεταξύ των σημείων  $P, N$  και γι' αυτό απαιτείται παρεμβολή ώστε να υπολογιστούν οι όροι μεταφοράς στις προς επίλυση εξισώσεις, όπως άλλωστε ειπώθηκε και παραπάνω. Παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν και για τα σύνορα  $s, e, w$ . Επομένως, συμπερασματικά μπορεί να ειπωθεί ότι η ταχύτητα κάθε κόμβου από τη μέθοδο PIV αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο κέντρο κάθε πεπερασμένου όγκου και κατ' αυτό τον τρόπο εισάγονται ως δεδομένα τα πεδία ταχυτήτων στον κώδικα.

Άλλο ένα χρήσιμο συμπέρασμα, είναι ότι το πλέγμα που χρησιμοποιείται από τον κώδικα είναι το ίδιο με αυτό του PIV με μία ιδιαιτερότητα: το πλέγμα του κώδικα, για το

βόρειο σύνορο για παράδειγμα, είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Δηλαδή, θεωρείται ότι για παράδειγμα ο βορειότερος πεπερασμένος έχει μηδενικές διαστάσεις και ως εκ τούτου ότι το σημείο  $n$  ταυτίζεται με το  $N$ . Τονίζεται ότι δεν πραγματοποιείται επίλυση ακριβώς πάνω στα σύνορα. Παρόμοια γεωμετρία πλέγματος απαντάται και στα υπόλοιπα σύνορα και δεν είναι σκόπιμο να δοθεί σχήμα και γι' αυτά. Άλλη μία αλλαγή που εφαρμόζεται είναι η μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων. Δηλαδή, αν το σημείο τομής του συνόρου  $W$  με το σύνορο  $S$  του επιπέδου μέτρησης στο PIV δεν βρίσκεται στο  $(0, 0)$  αλλά κάπου αλλού, μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες ώστε να βρίσκεται στο  $(0, 0)$ . Αυτή η ενέργεια προφανώς δεν επηρεάζει καθόλου την διαδικασία επίλυσης, και γίνεται για λόγους συμβατότητας με τον τρόπο εισαγωγής των δεδομένων στον κώδικα CAFFCA.



**Σχήμα 2:** Ενδεικτική αποτύπωση γεωμετρίας βόρειου συνόρου (Πηγή: Μπούρης, Δ. (2007))

Αναφορικά τώρα με την τύρβη, στην περίπτωση που εισάγονται κατευθείαν οι τάσεις Reynolds όπως προκύπτουν από την πειραματική διαδικασία, ισχύει για το πλέγμα ό,τι ειπώθηκε και για τις ταχύτητες. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζονται οι σχέσεις (2.2.12), (2.2.13) αφού πρώτα γίνουν οι κατάλληλες παρεμβολές όπως υποδεικνύονται από τη σχέση (2.2.14) και προστίθενται τα αποτελέσματα στους όρους πηγής των εξισώσεων ορμής. Για την περίπτωση που χρησιμοποιείται μοντέλο τύρβης, επιλύονται οι εξισώσεις (2.2.15), (2.2.16) με το πλέγμα να είναι όπως προαναφέρθηκε. Εδώ όμως, πρέπει να γίνουν οι εξής διευκρινίσεις: πρώτον, το αρχικό πεδίο κινητικής ενέργειας της τύρβης με το οποίο

τροφοδοτείται ο κώδικας, υπολογίζεται μέσα στον ίδιο τον κώδικα με την σχέση (2.3.1) να εφαρμόζεται σε κάθε θέση του πεδίου και δεύτερον για την καταστροφή της ενέργειας της τύρβης, το αρχικό πεδίο το οποίο εισάγεται είναι μηδενικό σε κάθε θέση. Τονίζεται ότι τα  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$  εισάγονται κατευθείαν από τη στατιστική του πειράματος.

$$k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2}}{2} \quad (2.3.1)$$

Εν συνεχεία, επισημαίνεται ότι και το πεδίο των αρχικών πιέσεων δίνεται και αυτό μηδενικό και προοδευτικά αλλάζει μέχρι να λάβει ικανοποιητική τιμή κατά την διαδικασία επίλυσης. Τέλος, για λόγους πληρότητας δίνονται δύο γεωμετρικές σχέσεις που ισχύουν για το πλέγμα εφ' όσον είναι ομοιόμορφο.

$$\delta x_{n,s} = \frac{\Delta x}{2} \quad (2.3.2)$$

$$\delta y_{e,w} = \frac{\Delta y}{2} \quad (2.3.3)$$

## 2.4 Οριακές συνθήκες και διαδικασία επίλυσης

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, θα δοθούν με ακρίβεια οι οριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν σε όλες τις προς επίλυση εξισώσεις. Δεν θα γίνει αναφορά σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Θα παρουσιαστούν τα διαφορετικά είδη οριακών συνθηκών που επιστρατεύτηκαν και στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει συγκεκριμένη αναφορά στην εκάστοτε περίπτωση.

Καταρχάς, η πίεση στην είσοδο (δυτικό σύνορο) δίνεται πάντα μηδενική και με βάση αυτή υπολογίζονται όλες οι υπόλοιπες πιέσεις. Σε εφαρμογές που χρειάζεται η απόλυτη πίεση, πρέπει να μετράται και η ολική πίεση σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Για την πίεση σε όλα τα υπόλοιπα σύνορα, επιβάλλεται μηδενική κλίση της δηλαδή οριακές συνθήκες Neumann με μία ιδιαιτερότητα: όταν λέγεται ότι επιβάλλεται μηδενική κλίση, στην ουσία

σημαίνει ότι η πίεση ακριβώς στο σύνορο λαμβάνει τιμή ίση με αυτή που είχε το αμέσως πιο εσωτερικό σημείο κατά την προηγούμενη επανάληψη. Γενικότερα, όταν από εδώ και πέρα θα γίνεται μνεία σε οριακές συνθήκες Neumann θα εννοείται αυτό ακριβώς το οποίο περιεγράφηκε παραπάνω. Επιπλέον, οι ταχύτητες  $u, v$  και η μεταβλητή  $k$  σε περίπτωση χρήσης του μοντέλου K-ε, στην είσοδο παραμένουν πάντοτε σταθερές και ίσες με την αρχική τιμή που δίνεται από τη μέθοδο PIV. Για αυτό τον λόγο δεν θα αναφερθεί ξανά τίποτα για τις οριακές συνθήκες εισόδου αλλά ούτε και γι' αυτές της πίεσης, αφού θεωρούνται γνωστές.

Τώρα, θα περιγραφούν δύο διαφορετικοί τρόποι επιβολής οριακών συνθηκών, συγκεκριμένα για περιπτώσεις με δεδομένα πεδία ταχυτήτων από PIV. Θα δοθούν ενδεικτικά για το βόρειο σύνορο του επίπεδου στο οποίο πραγματοποιείται η επίλυση και με παρόμοιο τρόπο επιβάλλονται και όπου αλλού είναι επιθυμητό. Οι σχέσεις (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3), δίνουν τη βασική λογική επιβολής αυτών των οριακών συνθηκών, όπου  $\Phi = u, v$  ή  $k$  σε περίπτωση που χρησιμοποιείται το μοντέλο k-ε.

$$\left( \rho v \Phi - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n A_n = (\rho V)_n^0 \Phi_n A_n - \mu_n^J \frac{\Phi_N^0 - \Phi_P^J}{\Delta Y} A_n \quad (2.4.1)$$

$$S_U^\Phi = S_U^\Phi - (\rho V)_n^0 \Phi_n A_n + \mu_n^J \frac{\Phi_N^0}{\Delta Y} A_n \quad (2.4.2)$$

$$S_P^\Phi = S_P^\Phi - \frac{\mu_n^J}{\Delta Y} A_n \quad (2.4.3)$$

$$\Phi_n = \frac{\Phi_N^0 + \Phi_P^0}{2} \quad (2.4.5)$$

Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι για τις εξισώσεις (2.4.2), (2.4.3) υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι εφαρμογής τους, εξού και οι δύο διαφορετικοί τρόποι επιβολής οριακών συνθηκών PIV όπως ειπώθηκε άνωθεν. Ο πρώτος έγκειται στο ότι οι ταχύτητες και η μεταβλητή  $\Phi$  με δείκτη  $N$  παραμένουν σταθερές και ίσες με τις τιμές που δίνονται απευθείας από το

PIV. Επιπλέον, τα μεγέθη στο σύνορο  $n$  του βορειότερου πεπερασμένου όγκου βρίσκονται με απλές γραμμικές παρεμβολές μεταξύ των δεδομένων τιμών για το κέντρο του όγκου  $P$  και το σημείο  $N$ , όπως προκύπτουν απευθείας από τη μέθοδο PIV. Εννοείται ότι και τα μεγέθη με δείκτη  $n$  παραμένουν και αυτά σταθερά. Αυτό που περιεγράφη περιφραστικά ήδη, εκφράζεται και μαθηματικά με την σχέση (2.4.5), όπου (0) αντιστοιχεί στα δεδομένα ως έχουν από τη μέθοδο PIV και ο μετρητής  $J$  δίνει την τρέχουσα επανάληψη. Επομένως, συμπερασματικά μπορεί να ειπωθεί ότι στον πρώτο τρόπο, επιβάλλεται σταθερός όρος μεταφοράς και όρος διάχυσης που αλλάζει μόνο λόγω της μεταβλητής  $\Phi_P$  η οποία και αλλάζει σε κάθε επανάληψη (και λόγω του ιξώδους σε περίπτωση χρήσης μοντέλου  $k-\epsilon$ ).

Ο δεύτερος τρόπος, ουσιαστικά βασίζεται στην εφαρμογή των ίδιων εξισώσεων, απλά με την διαφορά ότι πλέον τα μεγέθη στο όριο  $n$  (και αντίστοιχα στα  $e, w, s$ ) διέπονται από την σχέση (2.4.6). Το ιξώδες στα σύνορα, για την περίπτωση όπου χρησιμοποιείται μοντέλο  $k-\epsilon$ , δίνεται πάντοτε από τη σχέση (2.4.7), αλλιώς παραμένει σταθερό και ίσο με αυτό του ρευστού. Επομένως, με επιβολή οριακών συνθηκών όπως υπαγορεύεται από τον δεύτερο τρόπο, αλλάζει σε κάθε επανάληψη και ο όρος διάχυσης και ο όρος μεταφοράς.

$$\Phi_n = \frac{\Phi_N^0 + \Phi_P^J}{2} \quad (2.4.6)$$

$$\mu_n^J = \mu_P^J \quad (2.4.7)$$

Σε αυτό το στάδιο, πρέπει να επισημανθεί ότι, παρατηρώντας το σχήμα 2, γίνεται κατανοητό ότι στην ουσία σημείο  $N$  δεν ευσταθεί για τους βορειότερους πεπερασμένους όγκους λόγω της γεωμετρίας του CFD πλέγματος. Παρόλα αυτά, στις οριακές συνθήκες που περιεγράφηκαν άνωθεν, τα μεγέθη σε αυτό δόθηκαν απευθείας από το PIV, του οποίου το πλέγμα είναι τέτοιο ώστε το σημείο αυτό να υφίσταται. Έτσι οι αντίστοιχοι όροι

ελήφθησαν από το πλέγμα του PIV και προσαρτήθηκαν στους αντίστοιχους όρους πηγής.

Εκτός από τους δύο παραπάνω τρόπους, για το ανατολικό σύνορο (έξοδο) υπάρχει και η επιλογή να επιβληθούν οριακές συνθήκες Neumann όπως περιεγράφηκαν και για το πεδίο πίεσης, με την εξής διαφορά: γίνεται ισολογισμός για την μεταβλητή  $u$  με βάση την εξερχόμενη και την εισερχόμενη μάζα από τα υπόλοιπα σύνορα. Κατ' αυτό τον τρόπο προκύπτουν οι ταχύτητες  $u(NI, J)$  από τις  $u(NI - 1, J)$  με την πρόσθεση μιας ποσότητας που προκύπτει από τον ισολογισμό μάζας. Από εδώ και πέρα, τέτοιου είδους οριακές συνθήκες, θα ονομάζονται οριακές συνθήκες **εξόδου**. Τώρα, για την καταστροφή της κινητικής ενέργειας της τύρβης, επιβάλλονται πάντοτε οριακές συνθήκες *Neumann*, ότι και να επιλεχθεί για τις υπόλοιπες μεταβλητές. Τέλος, για τις τάσεις Reynolds, αυτές παραμένουν ίσες και σταθερές με τις τιμές που προκύπτουν από το πείραμα και υπολογίζονται στα όρια με απλές γραμμικές παρεμβολές, όπως φαίνεται στην σχέση (2.2.14).

Πλέον έχουν δοθεί όλες οι προς επίλυση εξισώσεις, ο τρόπος με τον οποίο εισάγονται τα δεδομένα καθώς και που επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες, άρα είναι δυνατό να παρατεθεί συνολικά η αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης. Παρουσιάζεται βηματικά παρακάτω:

- 1) Δίνονται ως δεδομένα τα πεδία ταχυτήτων που έχουν προκύψει από τη μέθοδο PIV καθώς και τα στατιστικά της τύρβης, εν γένει απευθείας ως τάσεις Reynolds ή με τη μορφή κινητικής ενέργειας της τύρβης ύστερα από την εφαρμογή της σχέσης (2.3.1) όταν χρησιμοποιείται μοντέλο k-ε. Εν συνεχεία, λύνεται η εξίσωση διόρθωσης πίεσης (2.1.15).
- 2) Εφαρμόζονται οι σχέσεις (2.1.10) ως (2.1.14) και προκύπτουν τα διορθωμένα επίπεδα ταχυτήτων και πίεσης.
- 3) Ύστερα, σε περίπτωση που γίνεται χρήση k-ε, λύνεται η εξίσωση (2.1.6) για  $\Phi = k$  αρχικά και ύστερα για  $\Phi = \epsilon$  με τους όρους πηγής να δίνονται από τις σχέσεις (2.2.22) ως (2.2.25). Αυτό το βήμα προφανώς δεν εφαρμόζεται σε περίπτωση που η τύρβη μοντελοποιείται με χρήση των τυρβωδών τάσεων Reynolds.
- 4) Υπολογίζεται το ιζώδες από τις σχέσεις (2.2.18) και (2.2.20), αν και εφόσον μοντελο-

ποιείται η τύρβη με  $k-\epsilon$ .

5) Στη συνέχεια, επιλύεται η εξίσωση (2.1.6) για  $\Phi = u$  και  $\Phi = v$  με τους όρους πηγής να δίνονται από τις εξισώσεις (2.1.4) και (2.1.5) αντίστοιχα. Σε περίπτωση μοντελοποίησης τύρβης με τάσεις Reynolds αυτοί οι όροι προσαυξάνονται με τους όρους των εξισώσεων (2.2.12), (2.2.13) αντίστοιχα. Έτσι προκύπτουν νέα πεδία ταχυτήτων.

6) Επαναλαμβάνονται εκ νέου τα βήματα 1 ως 5 έως ότου υπάρξει σύγκλιση των εξισώσεων. Αυτή η σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν το υπόλοιπο μεταξύ δύο επαναλήψεων φτάσει κάτω από ένα προκαθορισμένο όριο. Τονίζεται ότι λόγω της εν γένει τρισδιάστατης φύσης της ροής καθώς και τυχόντων σφαλμάτων στην πειραματική διαδικασία, αυτή η σύγκλιση δεν επέρχεται πάντα για όλες τις εξισώσεις.

Η εξίσωση (2.1.6) εφαρμόζεται για κάθε σημείο του πλέγματος και το γραμμικό σύστημα που προκύπτει έχει πενταδιαγώνια μορφή. Η μέθοδος με την οποία επιλύεται αυτό το σύστημα με τον κώδικα είναι η TDMA<sup>4</sup> με εναλλαγή κατευθύνσεων. Δεν κρίνεται σκόπιμο να δοθούν πιο πολλά στοιχεία για αυτή τη μέθοδο. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει πολλές πληροφορίες στην εγχώρια και διεθνή βιβλιογραφία.

---

<sup>4</sup>Tridiagonal Matrix Algorithm

## 2.5 Χρήσιμα στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης και λοιπές πληροφορίες

Στο παρόν υποκεφάλαιο, δίνονται χρήσιμες σχέσεις και πληροφορίες σχετικές με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης που χρησιμοποιούνται καθ' όλη την έκταση της παρούσας εργασίας, είτε στον κώδικα επίλυσης αυτόν καθ' αυτόν, είτε για παράπλευρους υπολογισμούς όπως για παράδειγμα την εύρεση του υπολοίπου μάζας απευθείας από τα δεδομένα της μεθόδου PIV.

Το πρώτο στοιχείο που πρέπει να αναφερθεί είναι ότι σε κάθε επανάληψη είναι απαραίτητη η εφαρμογή υποχαλάρωσης στις εξισώσεις. Η σχέση με την οποία αυτή η υποχαλάρωση εφαρμόζεται για την μεταβλητή  $\Phi = u, v, k, P'$  ή  $\epsilon$  είναι η (2.5.1), όπου  $\Phi^{new}$  είναι η λύση που προκύπτει από την τρέχουσα επανάληψη,  $\Phi^{old}$  είναι η λύση από την προηγούμενη και  $\Phi$  είναι αυτή που προκύπτει ύστερα από την εφαρμογή της υποχαλάρωσης. Επισημαίνεται ότι με  $\omega$  συμβολίζεται ο συντελεστής υποχαλάρωσης ο οποίος μπορεί να επιλεγεί διαφορετικός για κάθε εξίσωση. Η τιμή του βρίσκεται εμπειρικά μέσω δοκιμών και ισχύει  $0 \leq \omega \leq 1$ .

$$\Phi = \omega \Phi^{new} + (1 - \omega) \Phi^{old} \quad (2.5.1)$$

Με την αντικατάσταση της σχέσης (2.5.1) στην (2.1.6), προκύπτει η (2.5.2) η οποία και φαίνεται παρακάτω. Επομένως, πλέον λύνεται το παρακάτω πενταδιαγώνιο σύστημα και όχι αυτό της (2.1.6).

$$\frac{(\alpha_P^\Phi - S_P^\Phi)}{\omega} \Phi_P = \alpha_N^\Phi \Phi_N^{old} + \alpha_S^\Phi \Phi_S^{old} + \alpha_E^\Phi \Phi_E^{old} + \alpha_W^\Phi \Phi_W^{old} + S_U^\Phi + \frac{(\alpha_P^\Phi - S_P^\Phi)}{\omega} \Phi_P^{old} \quad (2.5.2)$$

$$\alpha_P^\Phi = \alpha_N^\Phi + \alpha_S^\Phi + \alpha_E^\Phi + \alpha_W^\Phi \quad (2.5.3)$$

Στη συνέχεια, θα δοθούν πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο που έγινε η διακριτοποίηση των κλίσεων διαφόρων μεγεθών σε περιπτώσεις όπου χρειάστηκε. Καταρχάς, θα



δοθεί το υβριδικό σχήμα με το οποίο έγινε η διακριτοποίηση των όρων διάχυσης και μεταφοράς της μεταβλητής  $\Phi$  (εξίσωση (2.1.3)). Αυτό φαίνεται ενδεικτικά στη σχέση (2.5.4). Στην εξίσωση (2.5.5) δίνεται ο αριθμός *Peclet* στο ανατολικό σύνορο του πεπερασμένου όγκου καθώς και ο συντελεστής  $f$  ο οποίος έχει σχέση με τη γεωμετρία του πλέγματος. Στην προκειμένη περίπτωση όπου έχουμε ομοιόμορφο πλέγμα, θα είναι πάντα ίσος με  $\frac{1}{2}$ . Τονίζεται ότι με παρόμοιο τρόπο γίνονται οι παρεμβολές και στα υπόλοιπα σύνορα των πεπερασμένων όγκων. Πληροφοριακά αναφέρεται ότι ο αριθμός *Peclet* είναι ένας αδιάστατος αριθμός ο οποίος αποτελεί μια ένδειξη για το πόσο ισχυροί είναι οι όροι μεταφοράς ως προς τους όρους διάχυσης ενός πεδίου.

(2.5.4)

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \Phi_P \quad Pe_e \geq 2 \\ \Phi_e &= f\Phi_e + (1-f)\Phi_P \quad -2 < Pe_e < 2 \\ \Phi_e &= \Phi_E \quad Pe_e \leq -2 \\ Pe_e &= \left( \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma_\Phi} \right)_e, f = \frac{\delta x}{\Delta x}\end{aligned}\tag{2.5.5}$$

Ύστερα, θα δοθεί η σχέση με την οποία γίνεται η διακριτοποίηση του όρου διάχυσης στο ανατολικό σύνορο  $e$  σύμφωνα με το υβριδικό σχήμα. Προφανώς, με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται οι όροι διάχυσης και στα σύνορα  $n, s, w$ .

$$\mu \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e = \mu_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x}\tag{2.5.6}$$

Οι κλίσεις πίεσης που συμπεριλαμβάνονται στους όρους πηγής των εξισώσεων ορμής, διακριτοποιούνται με ένα απλό σχήμα πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης, το οποίο δίνεται στην εξίσωση (2.5.7) για την κλίση κατά  $x$ . Με αντίστοιχο τρόπο γίνεται και ο υπολογισμός της κλίσης κατά  $y$ . Ίδιο σχήμα παραγωγίσις χρησιμοποιείται και για τις

κλίσεις της διόρθωσης πίεσης  $P'$  οι οποία εισάγονται στην εξίσωση συνέχειας μέσω των εξισώσεων (2.1.11), (2.1.12). Αν ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης επιθυμεί πληροφορίες για τις παρεμβολές στα σύνορα, ώστε να υπολογιστούν οι ταχύτητες που συμπεριλαμβάνονται στην εξίσωση του όρου πηγής της διόρθωσης πίεσης, δηλαδή στην (2.1.17), παραπέμπεται εκ νέου στα γεγραμμένα του Μπούρη (2007).

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_P = \frac{P_E - P_W}{2\Delta x} \quad (2.5.7)$$

Ένα άλλο χρήσιμο στοιχείο είναι η εύρεση κάποιου τρόπου ώστε να μπορεί να εκτιμηθεί η ποιότητα των δεδομένων από την μέθοδο PIV, με τα οποία τροφοδοτείται ο κώδικας. Η πρώτη σκέψη είναι να εκτιμηθεί κατά πόσο ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας. Για να γίνει αυτό πρέπει αυτή να διακριτοποιηθεί και να υπολογιστεί σε κάθε θέση του πεδίου το υπόλοιπο της. Η διακριτοποίηση της φαίνεται στην εξίσωση (2.5.8), όπου  $CR^5$  είναι το υπόλοιπο της υπολογισμένο για τον εκάστοτε πεπερασμένο όγκο. Επισημαίνεται ότι η εξίσωση (2.5.8) εφαρμόζεται για  $i = 2, NI - 1$  και  $j = 2, NJ - 1$ . Σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να δίνει καλύτερη εικόνα το αδιαστατοποιημένο υπόλοιπο εξίσωσης συνέχειας, το οποίο δίνεται από τη σχέση (2.5.9).

$$\frac{u_E - u_W}{2\Delta x} + \frac{v_N - v_S}{2\Delta y} = CR \quad (2.5.8)$$

$$CRN = \frac{CR}{\left( \frac{\bar{U}_t}{2\Delta x} \right)} \quad (2.5.9)$$

Όπου:

$$\bar{U}_t = \sum_{k=1}^{NI \cdot NJ} \frac{(\sqrt{u^2 + v^2})_k}{NI \cdot NJ} \quad (2.5.10)$$

Πολλές φορές, είτε λόγω μεγάλων τοπικών κλίσεων της ταχύτητας είτε λόγω κακού

---

<sup>5</sup>CR εκ του Continuity Residual

υπολογισμού τους, μπορεί σε ορισμένα σημεία το  $CR$  να προκύψει εξωπραγματικά μεγάλο σε σχέση με τις τιμές στα γειτονικά σημεία. Για αυτό τον λόγο, υπολογίζεται και το υπόλοιπο της ολοκληρωματικής εξίσωσης της συνέχειας  $ICR^6$ , το οποίο στην ουσία εκφράζει το υπόλοιπο από την εξίσωση διατήρηση μάζας σε όλο το προς επίλυση πεδίο. Η αναλυτική έκφραση για αυτό το υπόλοιπο δίνεται από την εξίσωση (2.5.11). Τονίζεται ότι θεωρείται πως  $\Delta z = 1$  και γι' αυτό δεν εμφανίζεται πουθενά. Επιπλέον, το πρόσημο των ταχυτήτων προσδιορίζεται με βάση το σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή, για παράδειγμα, θετική ταχύτητα  $u$  στα σύνορα  $W, E$  σημαίνει ταχύτητα με ίδια κατεύθυνση με τον θετικό ημιάξονα των  $x$ .

$$ICR = \left( \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} \rho u_E dy - \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} \rho u_W dy \right) + \left( \int_{X_{min}}^{X_{max}} \rho v_N dx - \int_{X_{min}}^{X_{max}} \rho v_S dx \right) \quad (2.5.11)$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, πρέπει να επιστρατευτεί μια μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αυτή η οποία προτιμήθηκε στην παρούσα εργασία είναι η μέθοδος Simpson 1/3 της οποίας η γενική έκφραση διαφαίνεται στην εξίσωση (2.5.12), όπου  $g$  μια τυχαία συνάρτηση και  $n$  ο αριθμός των σημείων τα οποία συμμετέχουν στον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Επισημαίνεται ότι η σχέση (2.5.12) αφορά ίσα διαστήματα μεταξύ των σημείων  $i$ .

$$I \approx (b - a) \frac{g(x_0) + g(x_n) + 4 \sum_{n=1,3,5}^{n-1} g(x_i) + 2 \sum_{n=2,4,6}^{n-2} g(x_i)}{3n} \quad (2.5.12)$$

Για το ανατολικό σύνορο για παράδειγμα, η εξίσωση (2.5.12) εφαρμόζεται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$g(x_i) = \rho u_{e,i}, \quad i = 1, NJ, \quad b - a = Y_{max} - Y_{min} \quad (2.5.13)$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται τα ολοκληρώματα και για τα υπόλοιπα σύνορα. Ύ-

---

<sup>6</sup>Integral Continuity Residual

στερα από τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στα σύνορα και την εφαρμογή της σχέσης (2.5.11) υπολογίζεται το  $ICR$ . Όπως και για το  $CR$ , προσφέρεται και μία αδιαστατοποιημένη έκφραση του  $ICR$ , που φαίνεται στην εξίσωση (2.5.14). Ο όρος με τον οποίο αδιαστατοποιείται το  $ICR$  επιλέγεται έτσι γιατί ουσιαστικά είναι μία μέση παροχή μάζας του πεδίου προς επίλυση. Τέλος, αναφέρεται ότι τα  $CRN$ ,  $ICRN$  παρουσιάζονται πολλές φορές ως ποσοστά(%).

$$ICRN = \frac{ICR}{\rho \bar{U}_t (X_{tot} + Y_{tot})/2}, \quad X_{tot} = X_{max} - X_{min}, Y_{tot} = Y_{max} - Y_{min} \quad (2.5.14)$$

Ένα ακόμη χρήσιμο στοιχείο με το οποίο μπορεί να εκτιμηθεί η ποιότητα των αποτελεσμάτων, είναι ο έλεγχος του κατά πόσο ισχύουν οι εξισώσεις (2.2.10), (2.2.11). Με αυτόν τον έλεγχο πρακτικά δίνεται μια εκτίμηση της ποιότητας της στατιστικής του πειράματος. Στην ουσία αυτές οι σχέσεις δίνουν τις μέσες τιμές των  $u'$ ,  $v'$  οι οποίες πρέπει να είναι ίσες με 0. Στα διακριτά μαθηματικά λοιπόν, αυτές οι σχέσεις μετασχηματίζονται στις (2.5.15), (2.5.16), όπου  $N$  όπως έχει ήδη ειπωθεί είναι ο αριθμός στιγμιότυπων.

$$\bar{u}' = \sum_{i=1}^N \frac{u'_i}{N} \quad (2.5.15)$$

$$\bar{v}' = \sum_{i=1}^N \frac{v'_i}{N} \quad (2.5.16)$$

Οι εκφράσεις όμως (2.5.15), (2.5.16) χωρίς κάποια αδιαστατοποίηση, δεν αποτελούν και το καλύτερο εποπτικό εργαλείο. Επομένως επιλέγεται να αδιαστατοποιηθεί η μεν (2.5.15) με  $\bar{u}$  και η δε (2.5.16) με  $\bar{v}$ . Οι αδιαστατοποιημένες σχέσεις αυτές εφαρμόζονται σε κάθε θέση του πεδίου και εξάγονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Τώρα, όπως ειπώθηκε ήδη, ο κώδικας διορθώνει τα πεδία ταχυτήτων που προέρχονται από τη μέθοδο PIV, ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας. Επομένως, μπορεί

να διατυπωθεί η σχέση του σχετικού σφάλματος μεταξύ της ταχύτητας σε μια θέση του πεδίου ως έχει από το PIV και αυτής που προκύπτει μετά το πέρας της επαναληπτικής διαδικασίας. Ο τρόπος υπολογισμού αυτού του σχετικού σφάλματος, δίνεται στην εξίσωση (2.5.17). Η μεταβλητή  $\Phi$  στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να πάρει τις τιμές  $u, v$  ή  $U_t$  (ή  $P$  για την περίπτωση δεδομένων CFD, όπου μάλιστα όπου PIV χρησιμοποιείται δείκτης CFD).

$$\epsilon_{corr,\Phi}(\%) = 100 \cdot \frac{|\Phi_{CORR} - \Phi_{PIV}|}{|\Phi_{PIV}|} \quad (2.5.17)$$

Μία ακόμη σχέση που θα φανεί χρήσιμη στην συνέχεια είναι η εξίσωση Bernoulli, η οποία και θα εφαρμοστεί κατευθείαν για τα δεδομένα από PIV. Η εφαρμογή αυτή της εξίσωσης Bernoulli δίνεται στην εξίσωση (2.5.18), όπου  $U_{PIV,t}$  είναι η συνισταμένη των  $\bar{u}, \bar{v}$  που προέκυψαν από το πείραμα, ως  $P_{ref}$  θεωρείται η πίεση στην είσοδο και λαμβάνεται ίση με 0, ενώ ως  $U_{ref,t}$  θεωρείται η μέση ταχύτητα εισόδου από τη μέθοδο PIV με τη λογική ότι στον κώδικα η πίεση αναφοράς ίση με 0 είναι αυτή στο δυτικό σύνορο δηλαδή στην είσοδο.

$$P_{anal,PIV} = P_{ref} + \left( \frac{1}{2} \rho U_{ref,t}^2 - \frac{1}{2} \rho U_{PIV,t}^2 \right) \quad (2.5.18)$$

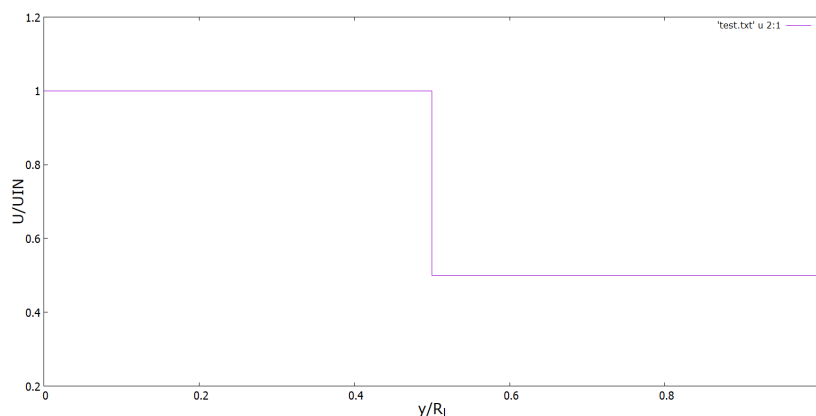
### 3 Αποτελέσματα-Σχόλια

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρατεθούν τα αποτελέσματα και θα γίνει και σχολιασμός τους, καθώς και θα εξαχθούν κάποια μεμονωμένα συμπεράσματα. Η διάρθρωση του κεφαλαίου είναι η εξής: στο πρώτο υποκεφάλαιο θα δοθούν τα διαγράμματα που αφορούν την περίπτωση- δοκιμή με δεδομένα από CFD για την περίπτωση του στρωτού στρώματος διάτμησης, στο δεύτερο θα δοθούν τα αποτελέσματα για την περίπτωση του περιστρεφόμενου κυλίνδρου με δεδομένα πεδία ταχυτήτων από PIV ενώ στο τρίτο και τελευταίο θα παρουσιαστούν και θα σχολιαστούν τα αποτελέσματα που αφορούν τον κύβο σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης ανέμου.

### 3.1 Στρωτό στρώμα διάτμησης(CFD)

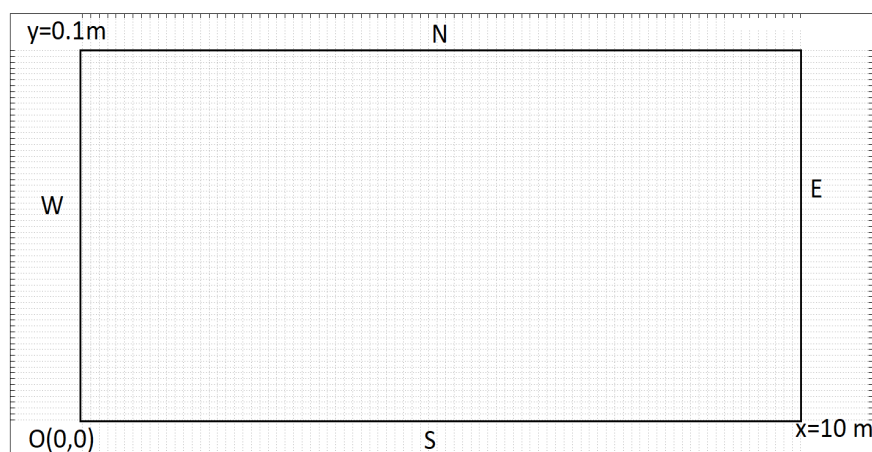
Στην ουσία, έγινε εκτέλεση του προγράμματος CAFFCA2D με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες και προέκυψαν ορισμένα πεδία ταχυτήτων και πίεσης. Για να γίνει κατανοητή η περίπτωση που εξετάζεται εδώ και να εξηγηθεί και το είδος των οριακών συνθηκών που επιβλήθηκαν κατά την CFD επίλυση κρίνεται σκόπιμο καταρχάς να δοθεί το προφίλ ταχύτητας εισόδου, δηλαδή αυτό του δυτικού συνόρου, με το οποίο τροφοδοτήθηκε ο CAFFCA2D.

Αυτό το προφίλ δίνεται στο σχήμα 3, όπου ο κάθετος άξονας αντιστοιχεί στο αδιαστατοποιημένο προφίλ συνισταμένης ταχυτήτων ( $U/UIN$ ) του δυτικού συνόρου του χωρίου προς επίλυση και ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στην καθ' ύψος συντεταγμένη του χωρίου προς επίλυση, δηλαδή την συντεταγμένη  $y$  του χωρίου αυτού. Οι μεν ταχύτητες είναι αδιαστατοποιημένες με τη μέση ταχύτητα εισόδου  $UIN$  ίση με  $0.000100 \text{ m/s}$  και οι δε καθ' ύψος συντεταγμένες με μία σταθερά μήκους αδιαστατοποίησης, την  $Ri$ , ίση με  $0.100000 \text{ m}$ . Από αυτό το προφίλ της ταχύτητας γίνεται κατανοητό ότι δημιουργείται στρώμα διάτμησης για  $y/Ri = 0.5$  αφού σε εκείνο το σημείο έρχονται σε επαφή δύο ροές διαφορετικών ταχυτήτων (αλλά ίδιων φυσικών ιδιοτήτων). Τονίζεται ότι η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στην είσοδο είναι μηδενική.



**Σχήμα 3:** Αδιαστατοποιημένο προφίλ ταχύτητας εισόδου (δυτικού συνόρου) για στρωτό στρώμα διάτμησης

Στο σχήμα 4, δίνεται ενδεικτικά ένα γραμμικό σχεδιάγραμμα του χωρίου επίλυσης, στο οποίο φαίνεται η αρχή του συστήματος συντεταγμένων, οι διαστάσεις του χωρίου καθώς και οι πλεγματικές γραμμές. Ο άξονας  $y$  έχει ίδια διεύθυνση με το σύνορο  $W$  (δυτικό), ενώ ο  $x$  ίδια με το σύνορο  $S$  (νότιο). Επομένως, το προφίλ εισόδου το οποίο δόθηκε νωρίτερα, αντιστοιχεί σε  $x = 0$ . Τονίζεται ότι τα πεδία ταχυτήτων της επίλυσης CFD δόθηκαν παντού μηδενικά εκτός από την είσοδο ενώ αυτό της πίεσης εισήχθη παντού -συμπεριλαμβανομένης και της εισόδου- μηδενικό. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι σε καμία περίπτωση δεν τηρήθηκε 1:1 αναλογία μεταξύ του άξονα  $y$  και  $x$ .



**Σχήμα 4:** Ενδεικτικό σχέδιο του χωρίου επίλυσης για το στρωτό στρώμα διάτμησης

Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινιστούν οι οριακές συνθήκες οι οποίες επιβλήθηκαν κατά την CFD επίλυση μέσω του κώδικα CAFFCA2D. Στο ανατολικό σύνορο θεωρήθηκαν οριακές συνθήκες εξόδου ενώ στο δυτικό οριακές συνθήκες εισόδου όπως αυτές περιεγράφηκαν στο υποκεφάλαιο (2.4). Από το βόρειο και νότιο σύνορο, θεωρήθηκε ότι διέρχονται άξονες συμμετρίας, πράγμα που μέσω CFD επίλυσης με τον CAFFCA2D, σημαίνει δύο τινά: πρώτον, όλες οι μεταβλητές δέχονται οριακές συνθήκες Neumann, δεύτερον, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας,  $v$ , θεωρείται μηδενική επί αυτών των νόρων.

Αφού λοιπόν εκτελέστηκε ο κώδικας CAFFCA και προέκυψαν τα πεδία ταχυτήτων από επίλυση CFD, δοθήκαν αυτά τα πεδία ως δεδομένα και εκτελέστηκε το τροποποιημένο πρόγραμμα, κατάλληλο για εισαγωγή πεδίων ταχυτήτων από PIV. Παράλληλα, δόθηκε σε αυτό τον τροποποιημένο κώδικα μηδενικό πεδίο πιέσεων, ώστε να εξακριβωθεί αν μπορεί να παράξει το ίδιο πεδίο πίεσης με αυτό της επίλυσης CFD.

Τώρα, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μνεία στις οριακές συνθήκες οι οποίες επιβλήθηκαν κατά την εκτέλεση του τροποποιημένου κώδικα: για το νότιο ( $S$ ) και βόρειο ( $N$ ) σύνορο, καθορίζονται οριακές συνθήκες όπως αυτές που υπαγορεύονται από τις εξισώσεις (2.4.1) ως (2.4.3), όπου όμως  $\Phi_n = \Phi_N^0$ ,  $\Phi_s = \Phi_S^0$  για  $\Phi = u, v$  αφού πρόκειται για στρωτή ροή. Για το ανατολικό σύνορο εφαρμόστηκαν οριακές συνθήκες **εξόδου**.

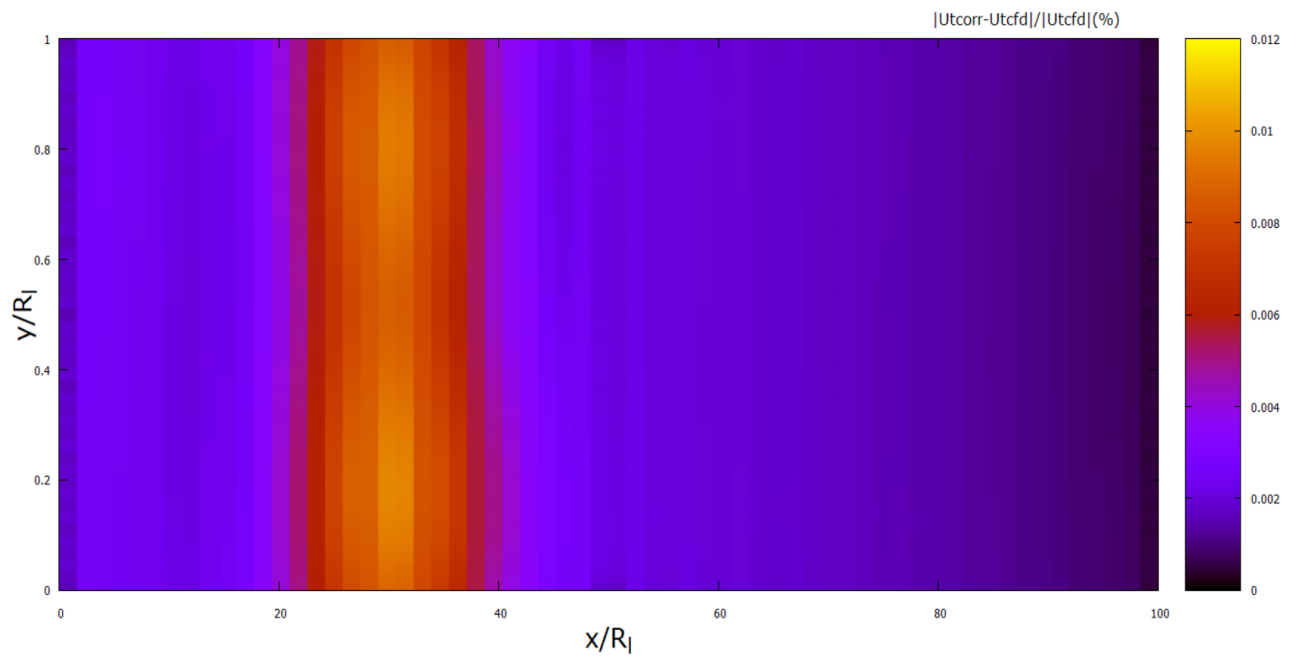
Τέλος, πρέπει να δοθούν και κάποια περαιτέρω δεδομένα τα οποία απαιτούνται για την διαδικασία επίλυσης. Αυτά φαίνονται στην έκφραση (3.1.1).

$$\rho = 998.300 \frac{kg}{m^3}, \mu = 0.102000 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{ms}, NI = 85, NJ = 63 \quad (3.1.1)$$

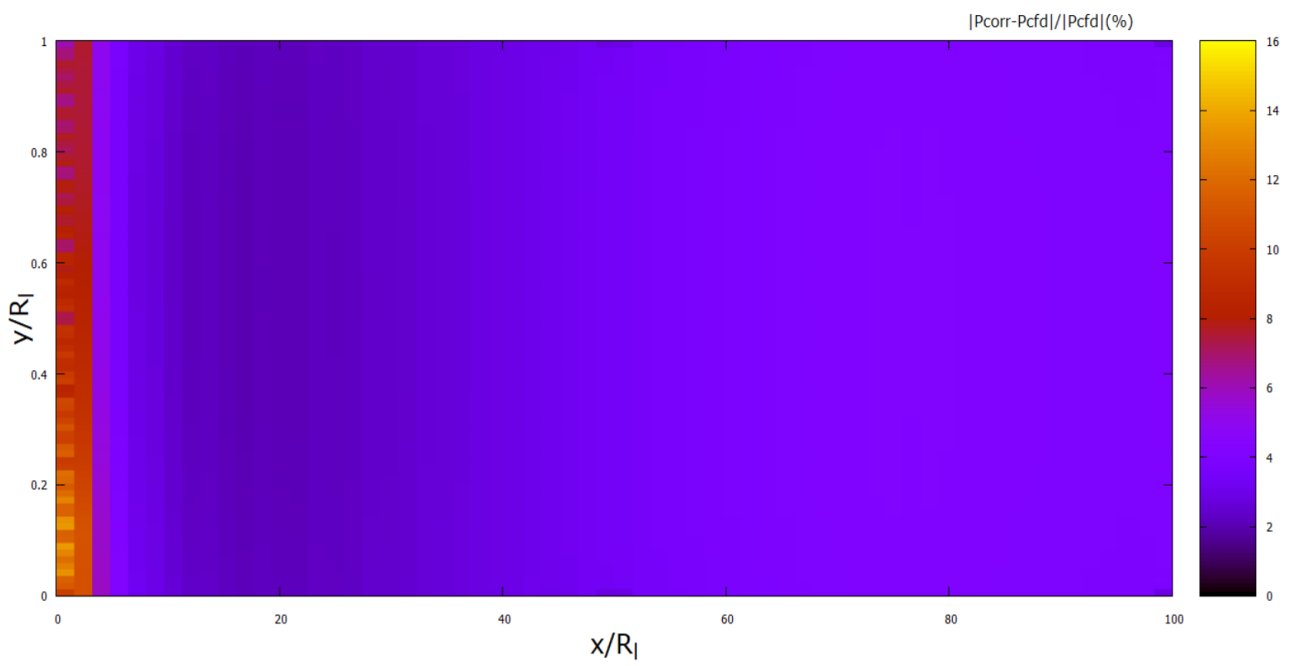
Η περίπτωση αυτού του υποκεφαλαίου, υπάρχει στην παρούσα εργασία χάριν ελέγχου (validation). Για αυτό το λόγο, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν μόνο δύο σχήματα: στο σχήμα 5 δίνεται το σφάλμα μεταξύ της συνισταμένης των ταχυτήτων όπως προκύπτει από CFD και της τελικής όπως υπολογίζεται από την εκτέλεση του τροποποιημένου κώδικα και στο σχήμα 6 δίνεται το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα για τις πιέσεις.

Για να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση, ως  $P_{CFD}$  θεωρούνται οι πιέσεις που προέκυψαν από την CFD επίλυση, ενώ ως  $P$  συμβολίζεται η πίεση που προέκυψε τροφοδοτώντας τον τροποποιημένο κώδικα με μηδενικό πεδίο πιέσεων και με τις ταχύτητες που προέκυψαν από CFD επίλυση, αντιμετωπίζοντας αυτές ως πεδία ταχυτήτων PIV. Αντίστοιχοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται και για τις ταχύτητες, δηλαδή η συνισταμένη ταχύτητα από CFD συμβολίζεται ως  $U_{i,CFD}$  και αυτή από την μετέπειτα επίλυση ως  $U_i$ .





Σχήμα 5: Σχετικό σφάλμα  $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{|U_{t,CFD} - U_t|}{|U_{t,CFD}|}$



Σχήμα 6: Σχετικό σφάλμα  $\epsilon_{corr,P}(\%) = 100 \cdot \frac{|P_{CFD} - P|}{|P_{CFD}|}$

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να γίνουν κάποια σχόλια επί των σχημάτων. Στο σχήμα 5, διαφαίνεται ότι το πεδίο ταχυτήτων αλλάζει ελάχιστα μετά το πέρας της εκτέλεσης του κώδικα. Το μέγιστο σχετικό σφάλμα είναι της τάξης του 0.012%, ποσοστό γενικά αμελητέο. Τονίζεται ότι αυτό το γεγονός από μόνο του δεν βοηθά στην άμεση εξαγωγή συμπερασμάτων. Μάλιστα, ήταν αναμενόμενο αφού τα πεδία ταχυτήτων με τα οποία τροφοδοτήθηκε το πρόγραμμα, είναι δεδομένα CFD τα οποία είναι αμιγώς δισδιάστατα και απαλλαγμένα από πειραματικά σφάλματα. Για αυτό το λόγο το πρόγραμμα συγκλίνει γρήγορα, αφού τα πεδία ταχυτήτων τα οποία εισάγονται είναι και αυτά προϊόν σύγκλισης του CAFFCA2D. Πάντως, αποτελεί μια καλή ένδειξη υπό την έννοια ότι το πρόγραμμα μπορεί να παράσχει σωστά αποτελέσματα αν τροφοδοτηθεί με σωστά δεδομένα.

Αναφορικά τώρα με το πεδίο πίεσης, από το σχήμα 6 γίνεται κατανοητό ότι σε κάποια σημεία το σχετικό σφάλμα φτάνει μέχρι και 16%. Γενικά, δεν αντιπροσωπεύεται βέλτιστα η πραγματικότητα με αυτό το διάγραμμα, αφού τα σημεία στα οποία το σχετικό σφάλμα υπερβαίνει το 5% είναι 28 στον αριθμό. Με δεδομένο ότι ισχύει  $NI \cdot NJ = 85 \cdot 63 = 5355$ , προκύπτει ότι τα 28 σημεία αντιστοιχούν στο 0,52% ολόκληρου του πεδίου. Άρα μπορεί να ειπωθεί με σχετική ασφάλεια ότι το τροποποιημένο πρόγραμμα μπορεί να υπολογίσει ικανοποιητικά το πεδίο πίεσης (σε πρώτη φάση, για στρωτές ροές), αν και εφόσον του δοθούν σωστά πεδία ταχυτήτων.

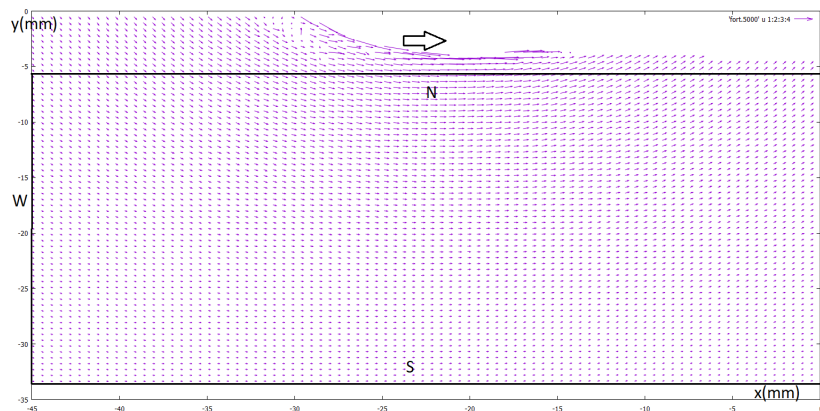
### 3.2 Περίπτωση περιστρεφόμενου κυλίνδρου (δεδομένα PIV)

Η επόμενη περίπτωση η οποία θα εξεταστεί είναι αυτή επίπεδου κάθετου σε άξονα συμμετρίας περιστρεφόμενου κυλίνδρου. Σε αυτό το επίπεδο είναι γνωστά τα πεδία ταχυτήτων τα οποία υπολογίστηκαν με την πειραματική μέθοδο PIV. Ουσιαστικά, θεωρούνται δεδομένα 200 στιγμιότυπα αυτού του επιπέδου, από τα οποία εξάγεται το μέσο πεδίο ταχυτήτων. Σκοπός είναι να εξαχθεί και το μέσο πεδίο πίεσης. Επιδιώκεται να συμπεριληφθεί και η τύρβη στο πρόβλημα. Αυτή επιχειρήθηκε να εισαχθεί απευθείας με τις τυρβώδεις

τάσεις Reynolds πράγμα το οποίο δεν οδήγησε σε ικανοποιητική σύγκλιση του κώδικα, αφού τα εναπομείναντα υπόλοιπα των εξισώσεων κυμαίνονταν σε μεγάλες τιμές. Στην συνέχεια, επιστρατεύτηκε μοντέλο k-ε, με το οποίο προέκυψαν αποτελέσματα τα οποία αξιολογήθηκαν ως φυσικά συνεπή. Μάλιστα, με χρήση του μοντέλου αυτού ο κώδικας συνέκλινε κανονικά.

Για να γίνει πιο κατανοητή η γεωμετρία της περίπτωσης που εξετάζεται έτσι ώστε να παρουσιαστεί σωστά και ο τρόπος με τον οποίο επιβλήθηκαν οι οριακές συνθήκες, παρατίθεται παρακάτω το σχήμα 7. Σε αυτό το σχήμα φαίνεται ολόκληρο το διανυσματικό πεδίο της περίπτωσης υπό εξέταση. Η περίκλειστη ορθογωνική επιφάνεια είναι αυτή στην οποία πραγματοποιήθηκε η επίλυση. Το κέντρο του κυλίνδρου δεν φαίνεται σε αυτό το διάγραμμα αλλά βρίσκεται περίπου στην θέση  $(x, y) = (-21 \text{ mm}, 8.3 \text{ mm})$  ενώ η ακτίνα του είναι ίση με  $12.5 \text{ mm}$ .

Τονίζεται ότι κατά την επίλυση το σύστημα συντεταγμένων μεταφέρθηκε κατακόρυφα έτσι ώστε το σημείο τομής του  $W$  συνόρου με το  $S$  να ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων. Προφανώς αυτή η μεταφορά του συστήματος δεν επηρεάζει με οποιοδήποτε τρόπο την επίλυση. Επίσης, πρέπει να επισημανθεί ότι κατά το πείραμα, ο κύλινδρος βρισκόταν εμβυθισμένος σε ακίνητο ρευστό το οποίο περιβαλλόταν από ένα ορθογωνικού σχήματος δοχείο. Αυτό σημαίνει, ότι το ρευστό κατά την κίνηση του λόγω της περιστροφής του κυλίνδρου, δεχόταν συνεκτικές τάσεις από τα τοιχώματα αυτού του δοχείου τα οποία και ήταν ακίνητα. Το βέλος, δείχνει την φορά περιστροφής του κυλίνδρου.



**Σχήμα 7:** Μετρημένο διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων από PIV και γεωμετρία χωρίου προς επίλυση για την περίπτωση του περιστρεφόμενου κυλίνδρου

Τώρα, κρίνεται σκόπιμο να εξηγηθεί ο τρόπος με τον οποίο επιβλήθηκαν οι οριακές συνθήκες. Στο νότιο και το βόρειο σύνορο επιβάλλονται όπως αυτές υπαγορεύονται από τις εξισώσεις (2.4.1) ως (2.4.3) για  $\Phi = u, v, k$ , όπου όμως θεωρείται ότι  $v = 0$  για το νότιο. Αυτή η παραδοχή είναι εύλογη αφού παρατηρήθηκε ότι όντως η ταχύτητα  $v$  εκεί είναι πολύ μικρότερη από ότι στο υπόλοιπο πεδίο. Για το ανατολικό σύνορο εφαρμόζονται οριακές συνθήκες **εξόδου** όπως αυτές περιεγράφηκαν ήδη.

Στην σχέση (3.2.1) φαίνονται τα απαραίτητα δεδομένα για την αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης, που πραγματοποιείται κατά την εκτέλεση του προγράμματος. Τονίζεται ότι η πυκνότητα και το ιξώδες ελήφθησαν από τον Τσαγγάρη (2016, σελ.37), καθώς και ότι το μήκος αδιαστατοποίησης  $R_l$  είναι ίσο με την ακτίνα του κυλίνδρου,  $R_{cyl}$ .

$$\rho = 997,3 \frac{kg}{m^3}, \mu = 0.101000 \cdot 10^{-2} \frac{kg}{ms}, R_l = R_{cyl} = 0.0125 m, N_{cyl} = 150RPM, NI = 85, NJ = 53 \quad (3.2.1)$$

Πριν παρουσιαστούν τα διαγράμματα που προέκυψαν, ένα ακόμη στοιχείο που πρέπει να δοθεί είναι η αναλυτική λύση για περιστρεφόμενο κύλινδρο σε αστρόβιλη και ασυμπίεστη ροή. Αυτό κρίνεται σκόπιμο ώστε να υπάρχει κάποιος τρόπος, έστω ενδεικτικός, ώστε να ελεγχθεί κατά πόσο η λύση είναι φυσικά συνεπής. Από τον Τσαγγάρη (2016), μπορεί να

προσομοιωθεί αυτή η περίπτωση με χρήση μίας σημειακής πηγής στο σημείο  $(0,0)$ . Πιο συγκεκριμένα, καταρχάς ισχύουν οι σχέσεις (3.2.2), (3.2.3).

$$u_{anal} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3.2.2)$$

$$v_{anal} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (3.2.3)$$

Ύστερα, πρέπει να βρεθεί η κυκλοφορία  $\Gamma$ . Προκειμένου να υπολογιστεί, πρέπει να ληφθεί υπόψιν ότι για  $(x, y) = (0, -R_{cyl})$  ισχύει  $(u, v) = (\frac{2\pi N_{cyl}}{60} R_{cyl}, 0)$  και για  $(x, y) = (R_{cyl}, 0)$  ότι  $(u, v) = (0, \frac{2\pi N_{cyl}}{60} R_{cyl})$ . Ο κύλινδρος περιστρέφεται αριστερόστροφα. Αυτά που ειπώθηκαν, μεταφράζονται στις παρακάτω σχέσεις:

$$u_{anal}(0, -R_{cyl}) = 0,19635 \quad (3.2.4)$$

$$v_{anal}(0, -R_{cyl}) = 0 \quad (3.2.5)$$

$$u_{anal}(R_{cyl}, 0) = 0 \quad (3.2.6)$$

$$v_{anal}(R_{cyl}, 0) = 0,19635 \quad (3.2.7)$$

Από την σχέση (3.2.4) προκύπτει ότι  $\frac{\Gamma}{2\pi} = 0,002454$  και με αυτή την τιμή επαληθεύονται και οι σχέσεις (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7). Επομένως, οι τελικές αναλυτικές σχέσεις για την περίπτωση του περιστρεφόμενου κυλίνδρου είναι οι (3.2.8), (3.2.9), για  $x^2 + y^2 \geq R_{cyl}^2$ .

$$u_{anal} = -0,002454 \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3.2.8)$$

$$v_{anal} = 0,002454 \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (3.2.9)$$

Για τον υπολογισμό της πίεσης εφαρμόζεται η εξίσωση Bernoulli όπως φαίνεται στην σχέση (3.2.10). Τα  $P_{ref}$ ,  $U_{ref,t}$  έχουν οριστεί ήδη στο υποκεφάλαιο (2.5), ενώ ως  $U_{anal,t}$

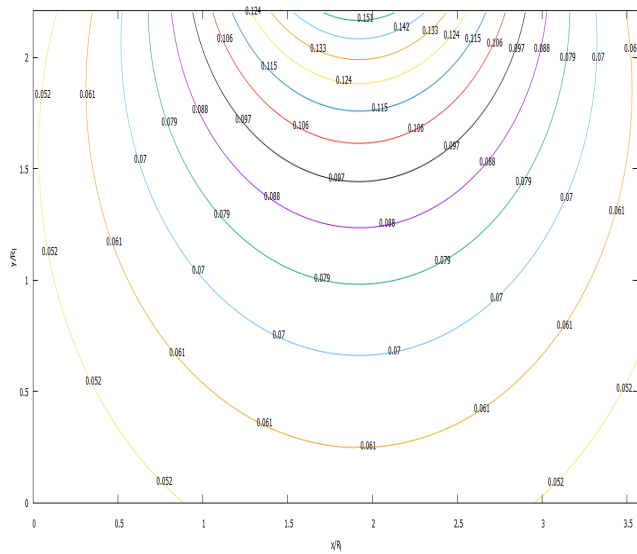
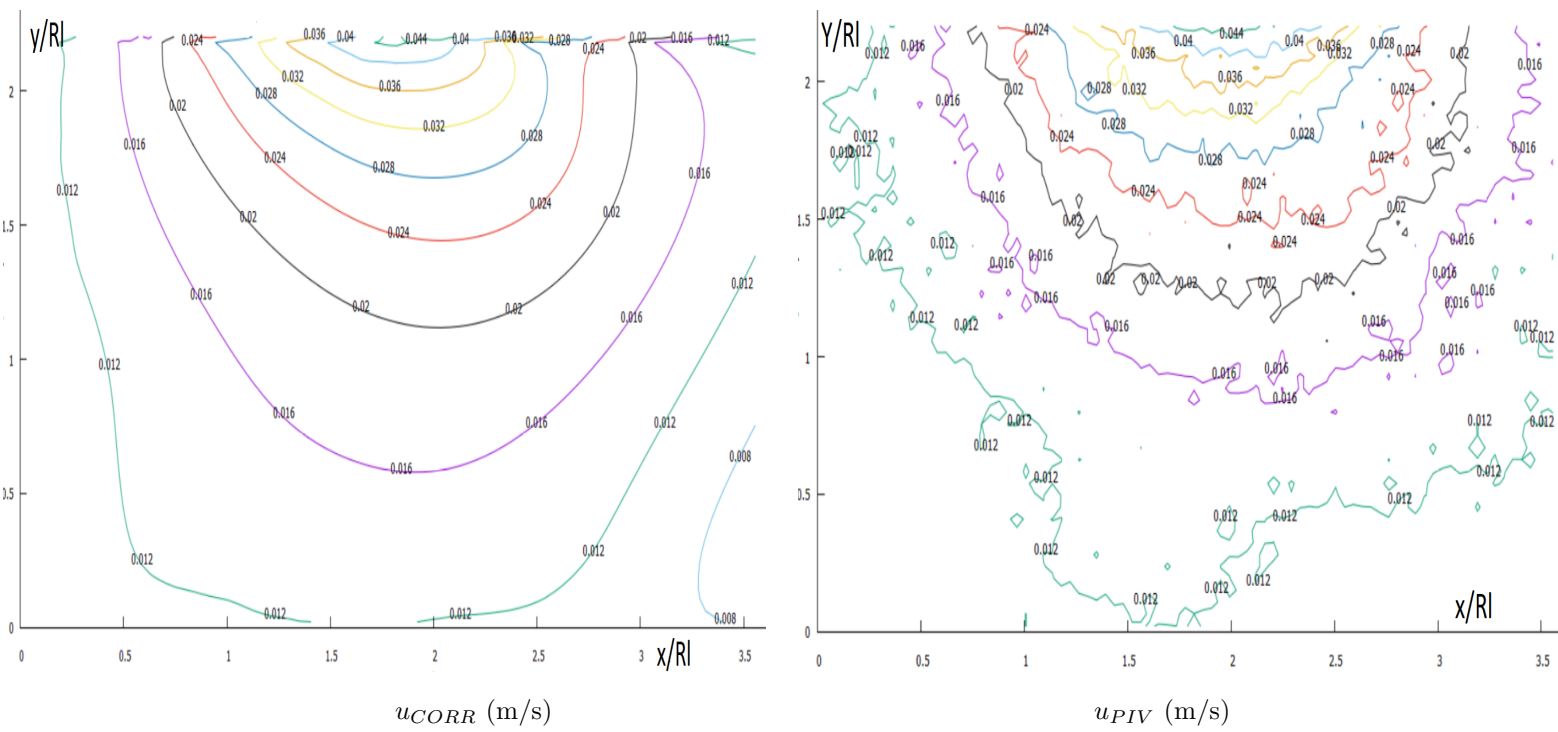
συμβολίζεται η συνισταμένη των  $u_{anal}$ ,  $v_{anal}$ .

$$P_{anal} = P_{ref} + \left( \frac{1}{2} \rho U_{ref,t}^2 - \frac{1}{2} \rho U_{anal,t}^2 \right) \quad (3.2.10)$$

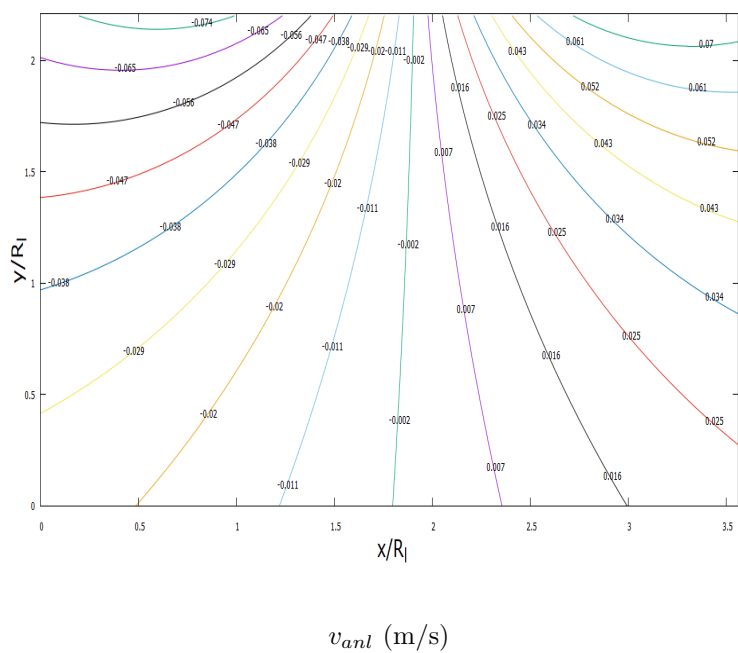
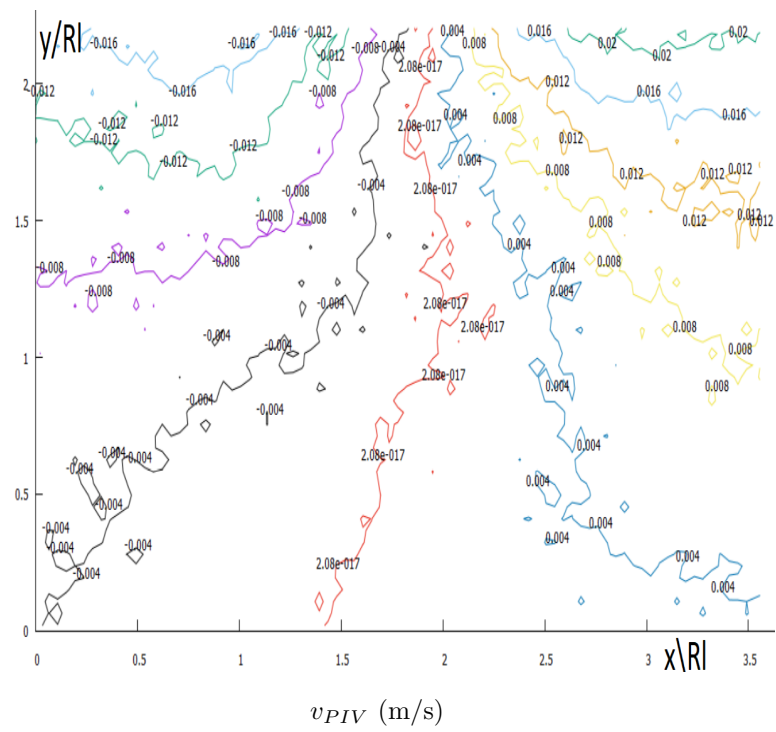
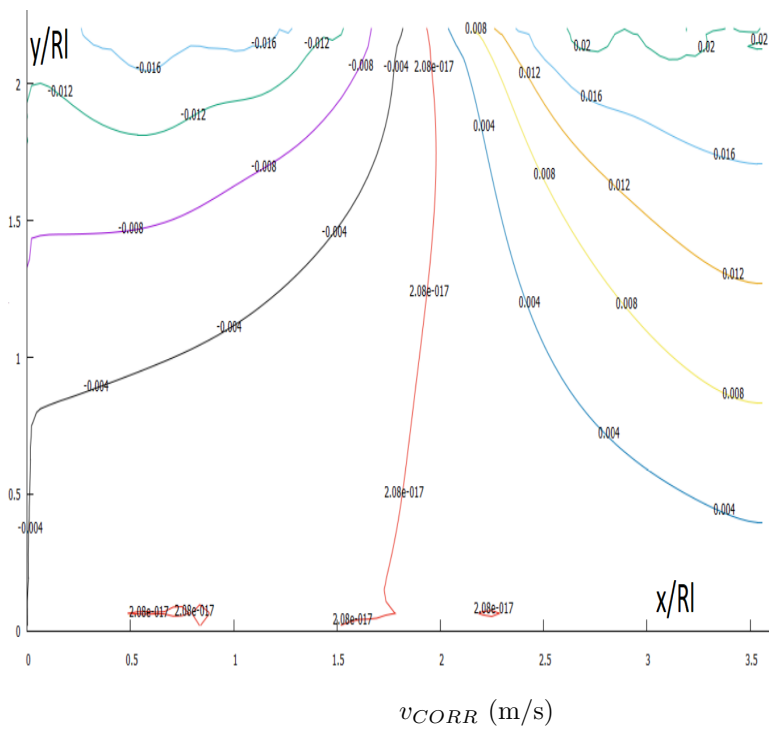
Επιπλέον πρέπει να αναφερθεί ότι για τα πεδία πιέσεων και ταχυτήτων που αφορούν την αναλυτική λύση περιστρεφόμενου κυλίνδρου (εξισώσεις (3.2.8), (3.2.9), (3.2.10)), προκειμένου να μπορούν να συγκριθούν με αυτά που προκύπτουν από την επαναληπτική διαδικασία αλλά και με αυτά της μεθόδου PIV, έγινε μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων εκ των υστέρων χωρίς όμως αυτό να επηρεάζει με οποιοδήποτε τρόπο τα αποτελέσματα.

Τα πρώτα διαγράμματα που θα δοθούν είναι οι ισοϋψείς της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας  $u$ , για 3 περιπτώσεις: δεδομένα απευθείας από PIV, αποτελέσματα του κώδικα ο οποίος διορθώνει τα δεδομένα PIV, ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας και αποτελέσματα που προκύπτουν από την αναλυτική λύση περιστρεφόμενου κυλίνδρου. Αυτά τα διαγράμματα φαίνονται στο σχήμα 8. Για τις ίδιες περιπτώσεις, δίνονται στο σχήμα 9 και οι ισοϋψείς της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας  $v$ . Εδώ, πρέπει να αναφερθεί ότι το επίπεδο επίλυσης, δεν περιλαμβάνει τον κύλινδρο αλλά βρίσκεται λίγο πιο μακριά του. Η αναλυτική λύση υπολογίστηκε σε επίπεδο τέτοιο ώστε τα μέτρα των ταχυτήτων να είναι παρεμφερή με αυτά των άλλων δύο περιπτώσεων. Από εδώ και πέρα δείκτης  $CORR$ , θα ανταποκρίνεται στην δεύτερη περίπτωση, δείκτης  $PIV$  στην πρώτη και δείκτης  $anl$  στην τρίτη. Οι ισοϋψείς ίδιας τιμής, αντιστοιχούν και σε ίδιο χρώμα στα διαγράμματα.

Εν συνεχεία, στο σχήμα 10, δίνεται στο ίδιο διάγραμμα το διανυσματικό πεδίο των ταχυτήτων για δεδομένα κατευθείαν από PIV αλλά και των διορθωμένων ταχυτήτων όπως προκύπτουν από την επίλυση. Στο σχήμα 11, δίνεται το σχετικό σφάλμα της συνισταμένης των ταχυτήτων, όπως υπαγορεύεται από τη σχέση (2.5.17).

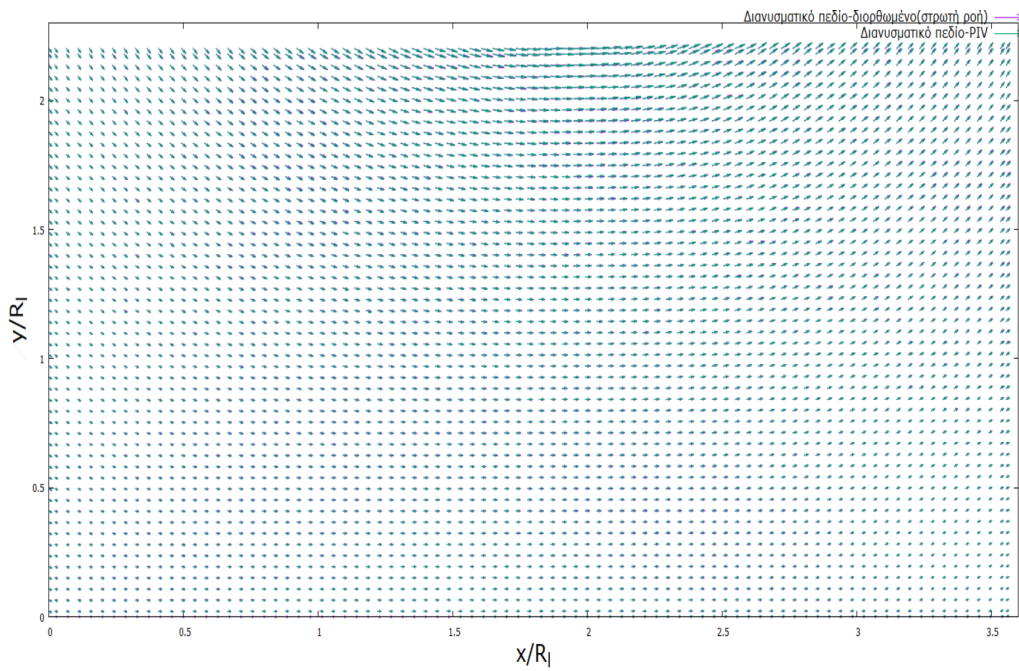


Σχήμα 8: Ισοϋψείς για:  $u_{CORR}$  (πάνω αριστερά),  $u_{PIV}$  (πάνω δεξιά),  $u_{anl}$  (χάτω)

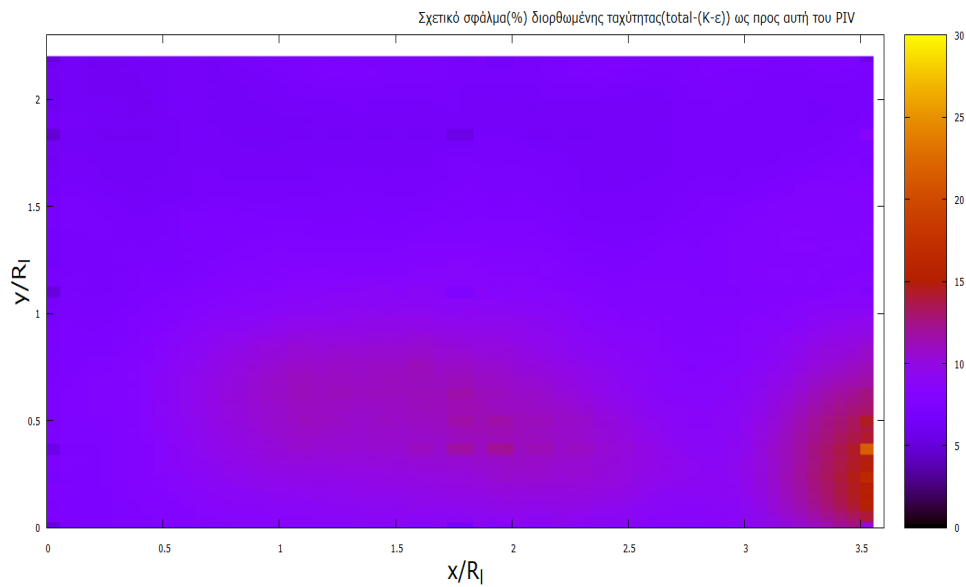


Σχήμα 9: Ισούψεις για:  $v_{CORR}$  (πάνω αριστερά),  $v_{PIV}$  (πάνω δεξιά),  $v_{anl}$  (κάτω)





**Σχήμα 10:** Διανυσματικά πεδία για: τις διορθωμένες ταχύτητες και αυτές από PIV (πράσινο: διανυσματικό πεδίο PIV, μωβ: διορθωμένο διανυσματικό πεδίο)



**Σχήμα 11:** Σχετικό σφάλμα μεταξύ συνισταμένης ταχυτήτων από δεδομένα (PIV) και διορθωμένης συνισταμένης από το πρόγραμμα

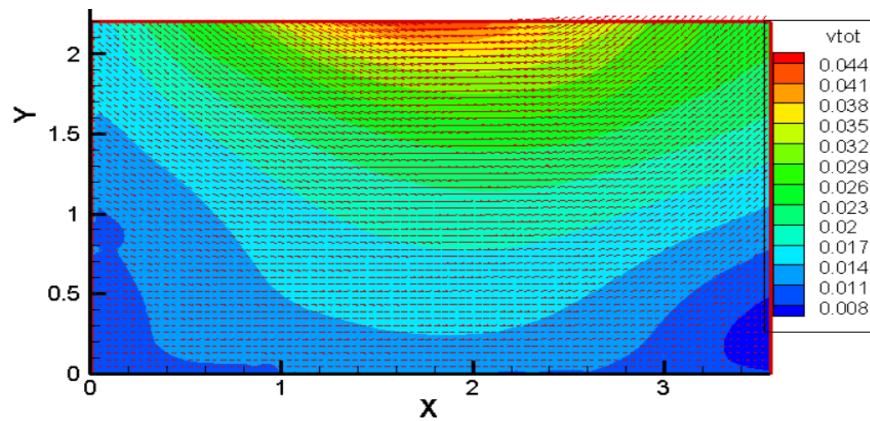
Παρατηρώντας τα σχήματα 8,9,10 και 11 μπορεί να ειπωθεί ότι η εκτέλεση του προγράμματος αλλάζει ελάχιστα τα δεδομένα που εισάγονται. Αυτό ίσως σημαίνει ότι καταρχάς η ροή είναι προσεγγιστικά δισδιάστατη, κατά δεύτερον ότι τα σφάλματα κατά την πειραματική διαδικασία είναι στο μέτρο του επιτρεπτού και ότι κατά τρίτον γενικά ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας. Βέβαια, εδώ πρέπει να επισημανθεί ότι η ορθότητα της αλλαγής του αρχικού πεδίου από PIV δεν είναι σίγουρα εξασφαλισμένη, αφού εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες καθώς και από τη μοντελοποίηση της τύρβης και κατ' επέκταση δεν μπορεί να ειπωθεί με σιγουριά αν το διορθωμένο ή το πεδίο PIV είναι σωστότερο.

Τώρα, από το σχήμα 11 διαφαίνεται ότι γενικά το σχετικό σφάλμα είναι κάτω του 10% για τα περισσότερα σημεία του πεδίου με λίγες εξαιρέσεις προς την έξοδο του. Από το σχήμα 10, διαπιστώνεται ότι υπάρχει σχεδόν ταύτιση των δύο διανυσματικών πεδίων. Τέλος, και τα σχήματα των ισοϋψών αποδεικνύουν την ισχύ όσων προαναφέρθηκαν. Άρα, συμπεραίνεται ότι υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις σχετικά με την επιτυχία εφαρμογής της μεθόδου επίλυσης στα συγκεκριμένα δεδομένα.

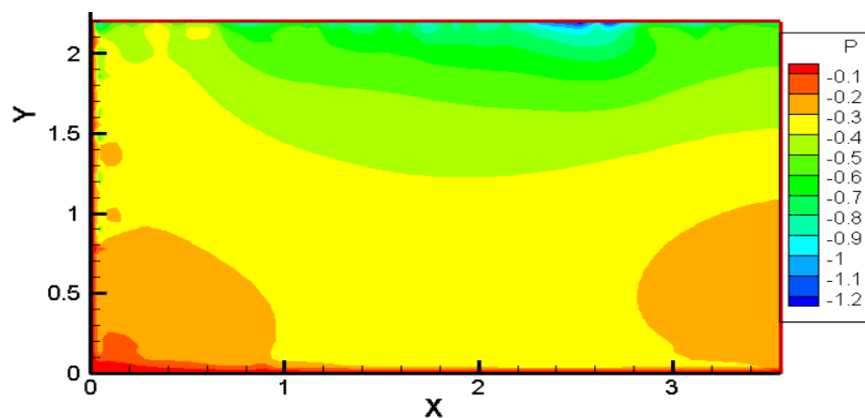
Επιπλέον, επισημαίνεται ότι τα διαγράμματα των αναλυτικών λύσεων δόθηκαν περισσότερο για να πραγματοποιηθούν ποιοτικές συγκρίσεις, αφού άλλωστε αφορούν αστρόβιλο, ασυμπιεστο και μη συνεκτικό πεδίο, στρωτής ροής. Με ποιοτική σύγκριση λοιπόν, προκύπτουν τα εξής: πρώτον, οι καμπύλες ισοταχύτητας εμφανίζονται κυκλικές για την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, για όλες τις περιπτώσεις. Δεύτερον, η μορφή των ισοϋψών της κάθετης συνιστώσας  $v$  είναι παρόμοια και για τα τρία διαγράμματα του σχήματος 9. Τρίτον, η αναλυτική λύση δίνει πολύ μεγαλύτερες ταχύτητες για την ίδια περιοχή και αυτές διατηρούνται για πολύ πιο εκτεταμένο τμήμα του πεδίου. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι πρόκειται για λύση με θεωρήση αμελητέας συνεκτικότητας και ως γνωστόν η συνεκτικότητα ευθύνεται για απώλειες ολικής πίεσης (στατικής και δυναμικής).

Στη συνέχεια, στο σχήμα 12, δίνεται στο ίδιο διάγραμμα το διανυσματικό πεδίο αλ-

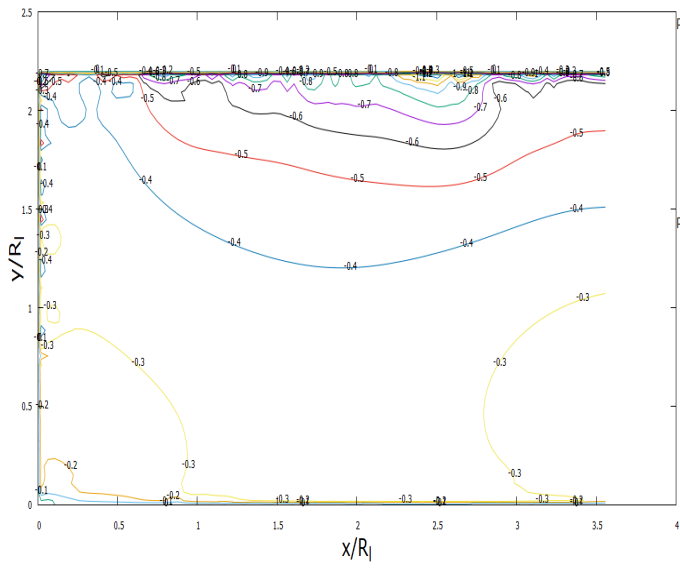
λά και οι ισοϋφείς της συνισταμένης των ταχυτήτων ( $U_{t,CORR}$ ), που προέκυψαν από την επίλυση, με χρήση του λογισμικού Tecplot. Στο σχήμα 13, δίνονται οι ισοϋφείς της πίεσης που προκύπτουν από την διαδικασία επίλυσης, με χρήση του λογισμικού Tecplot. Τέλος, στο σχήμα 14 δίνονται οι πιέσεις για 3 διαφορετικές περιπτώσεις: οι ισοϋφείς της όπως προέκυψαν από την εκτέλεση του κώδικα, αυτές που προκύπτουν από την αναλυτική λύση, καθώς και αυτές που προκύπτουν με απευθείας εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli στα δεδομένα (βλέπε εξισώσεις (2.5.26), (2.5.27)). Ως  $P$  ορίζεται η πίεση της πρώτης περίπτωσης,  $P_{Bern}$  της τρίτης και  $P_{anl}$  της δεύτερης.



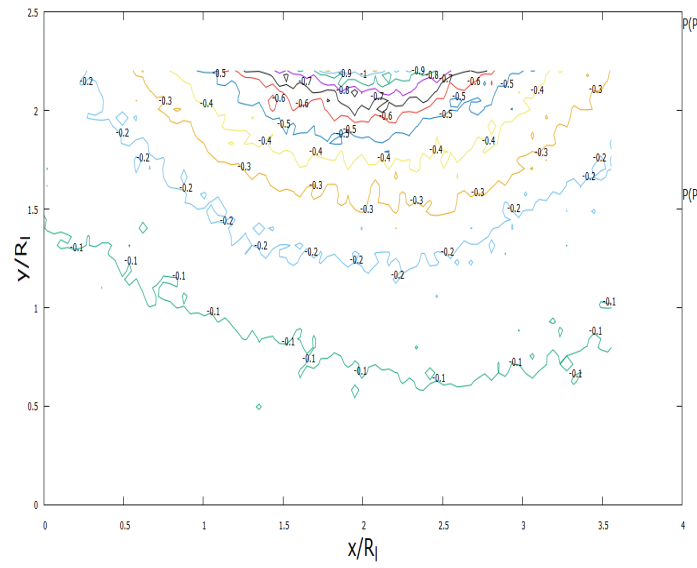
Σχήμα 12: Διανυσματικό πεδίο και ισοϋφείς της  $U_{t,CORR}$  (m/s) ( $X = x/R_l, Y = y/R_l$ )



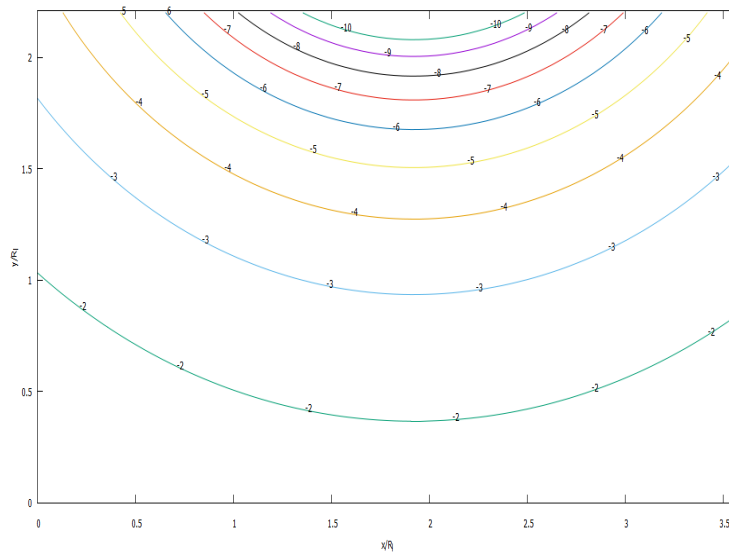
Σχήμα 13 Ισοϋφείς της  $P$  (Pa) ( $X = x/R_l, Y = y/R_l$ )



$P$  (Pa)



$P_{Bern}$  (Pa)



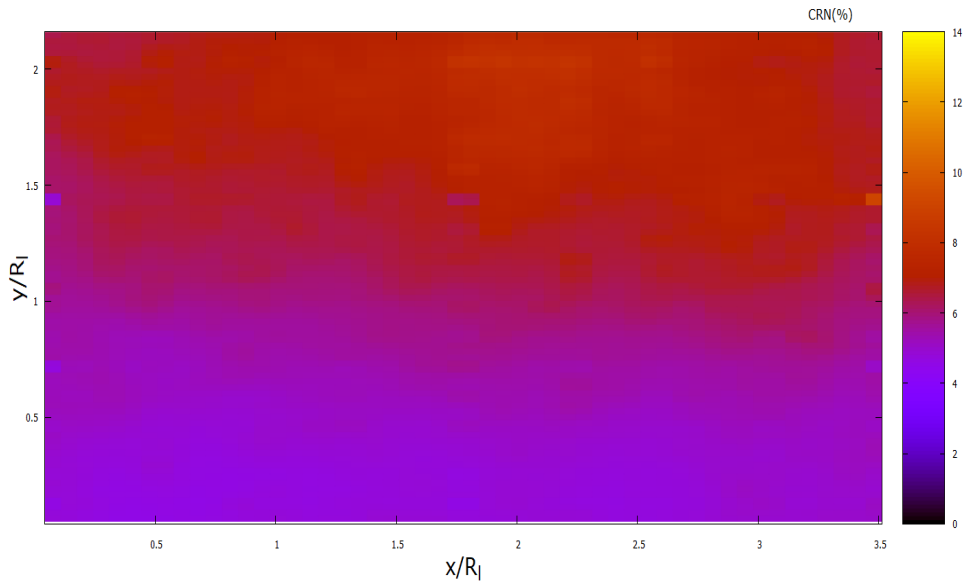
$P_{anl}$  (Pa)

Σχήμα 14: Ισοϋψείς για:  $P$  (πάνω αριστερά),  $P_{Bern}$  (πάνω δεξιά),  $P_{anl}$  (κάτω)

Παρατηρώντας το σχήμα 14 εξάγεται ένα σημαντικό συμπέρασμα: μπορεί οι iso-υψείς της  $P$  να μην έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με της  $P_{Bern}$ , αλλά η μέγιστη και η ελάχιστη πίεση και για τις δύο αυτές περιπτώσεις σχεδόν ταυτίζονται και έχουν τιμές περίπου 0 (Pa) και  $-1.2$  (Pa) αντίστοιχα. Επιπλέον, γενικότερα ισχύει ότι όσο 'βορειότερα' προχωράει κανείς στα διαγράμματα του σχήματος 14, τόσο πιο μεγάλη είναι η υποπίεση, κατ' απόλυτη τιμή. Δηλαδή, όσο πλησιάζει κανείς προς το κύλινδρο τόσο μικρότερη είναι η στατική πίεση της ροής. Υπό αυτή την άποψη, η ποιοτική σύγκριση μεταξύ των τριών περιπτώσεων φανερώνει ότι υπάρχει φυσικό νόημα στο υπολογισμένο από τον κώδικα πεδίο.

Από τα σχήματα 12 και 13, διαφαίνεται ότι στα σημεία, τα οποία χαρακτηρίζονται από μικρότερες στατικές πιέσεις, εμφανίζονται οι μέγιστες ταχύτητες. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται έστω ποιοτικά από την εξίσωση Bernoulli. Προφανώς, λόγω συνεκτικότητας υπάρχει απώλεια ολικής πίεσης (στατικής και δυναμικής), αλλά μπορεί να ειπωθεί ότι γενικά όπου η δυναμική πίεση είναι μεγαλύτερη, αναμένουμε μικρότερη στατική πίεση.

Εν συνεχεία, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια πιο ενδελεχής εκτίμηση της ορθότητας των αποτελεσμάτων. Όπως ειπώθηκε στο υποκεφάλαιο (2.5), κάποια ενδεικτικά εργαλεία είναι τα υπόλοιπα μάζας ( $CR, ICR$ ) αλλά και ο έλεγχος του κατά πόσο ισχύουν οι εξισώσεις (2.2.10), (2.2.11) (με χρήση των διακριτών εκφράσεων του κεφαλαίου (2.5)). Γενικότερα, επιδιώκεται να γίνει μια προσπάθεια να εκτιμηθεί κατά πόσο είναι δισδιάστατη η υπόσταση των δεδομένων πεδίων ταχυτήτων, αν υπάρχουν πολλά σφάλματα από την πειραματική διαδικασία αλλά και να δοθεί μια εξήγηση σχετικά με το γιατί δεν εξήχθησαν αξιόλογα αποτελέσματα με την απευθείας εισαγωγή της τύρβης μέσω των τυρβωδών τάσεων Reynolds. Στο σχήμα 15 δίνεται το  $CRN$ , όπως ορίστηκε στο υποκεφάλαιο (2.5).



**Σχήμα 15:** Αδιαστατοποιημένο υπόλοιπο μάζας  $CRN(\%)$

Από το σχήμα 15, διαπιστώνεται ότι το αδιαστατοποιημένο υπόλοιπο της εξίσωσης συνέχειας, σε μία εκτεταμένη περιοχή, κυμαίνεται μεταξύ 6 και 10%. Τα ποσοστά αυτά ναί μεν δεν είναι ανεπίτρεπτα, αλλά από την άλλη δεν είναι ούτε αμελητέα, ειδικά αν σκεφτεί κανείς ότι ο παράγοντας αδιαστατοποίησης αποτελεί μια περίπτωση μεγάλης κλίσης της  $u$ . Στην παρούσα φάση δεν μπορούν να ειπωθούν πολλά πράγματα ακόμη. Μόλις θα παρουσιαστεί και η περίπτωση του κύβου, τότε θα μπορούν να γίνουν συγκρίσεις μεταξύ των υπολοίπων των δύο περιπτώσεων.

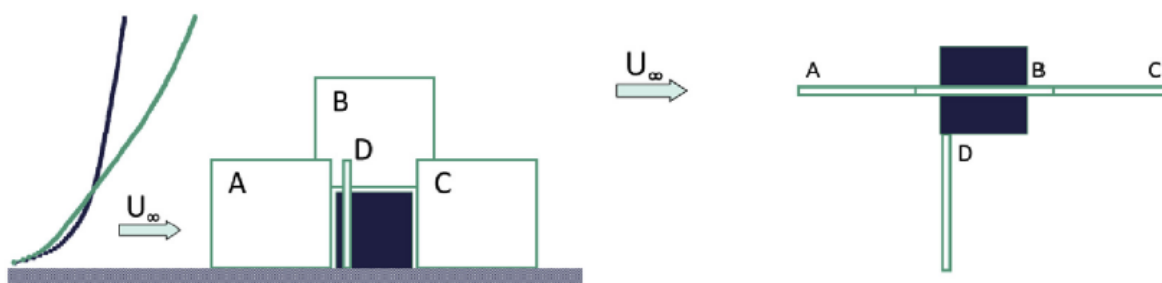
Σε αυτό το σημείο, κρίνεται σκόπιμο να δοθεί και το αδιαστατοποιημένο υπόλοιπο της ολοκληρωματικής εξίσωσης συνέχειας,  $ICRN(\%)$ . Αυτό βρίσκεται ίσο με 6.875%. Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει ότι το υπόλοιπο μάζας στο υπό επίλυση χωρίο είναι ίσο περίπου με το 7% μίας μέσης παροχής μάζας που διέρχεται από αυτό το χωρίο. Αυτό οφείλεται πιθανώς στο ότι υπάρχει ισχυρή τρίτη συνιστώσα της ταχύτητας που δεν έχει συμπεριληφθεί στην επίλυση αλλά και σε σφάλματα κατά την πειραματική διαδικασία. Βεβαίως, υφίσταται και η θεώρηση της μη συμπίεστούτητας του ρευστού, αλλά δεδομένου ότι το

ρευστό αυτό είναι νερό σε κανονικές θερμοκρασίες, αυτή η θεώρηση είναι ακριβής. Όπως και να έχει, δεν είναι σημαντικό ποσοστό, αλλά αυτό θα φανεί καλύτερα στη συνέχεια που θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για την περίπτωση του κύβου.

Τέλος, υπολογίστηκαν τα  $\overline{u'}/\overline{u}$ ,  $\overline{v'}/\overline{v}$  σε όλες τις θέσεις του πεδίου και η μέγιστη τιμή τους βρέθηκε περίπου 0.8% η οποία γενικά κρίνεται αμελητέα. Επομένως, δεν φαίνεται να έγκειται εκεί το πρόβλημα σχετικά με την αποτυχία σύγκλισης του κώδικα με εισαγωγή της τύρβης απευθείας με τάσεις Reynolds. Ο λόγος μπορεί να είναι ότι τα στιγμιότυπα είναι πολύ λίγα στον αριθμό, ήτοι 200 και επομένως δεν είναι ικανά να παρέχουν στατιστικώς ανεξάρτητα δεδομένα για τις τυρβώδεις τάσεις.

### 3.3 Περίπτωση κύβου σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης ανέμου (δεδομένα PIV)

Οι επόμενες ομάδες δεδομένων PIV στις οποίες εφαρμόστηκε η διαδικασία επίλυσης της παρούσας εργασίας αφορούν 2 επίπεδα κάθετα σε 2 έδρες του κύβου. Η ακριβής γεωμετρία και τα επίπεδα αυτά θα φανούν καλύτερα με την παράθεση ενός σχήματος (σχήμα 16). Τονίζεται ότι τα επίπεδα στα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος είναι τα A,C. Σε αυτά μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά ότι υφίσταται δισδιάστατη ροή, παραδοχή η οποία παρόλα αυτά θα ελεγχθεί με την εύρεση των υπολοίπων μάζας.



**Σχήμα 16:** Πρόοψη (αριστερά) και κάτοψη (δεξιά) του κύβου και των επιπέδων μέτρησης (πηγή: Manolesos et al. (2018))

Παρατηρώντας το σχήμα 16, διαφαίνονται δύο προφίλ ταχύτητας ανέμου: ένα μικρότερης κλίσης ως προς  $y$  (Low Shear) και ένα μεγαλύτερης (High Shear). Επομένως, ήδη για κάθε επίπεδο από τα δύο αντιστοιχούν δύο περιπτώσεις πεδίων ταχύτητας. Ουσιαστικά όμως είναι 4, αφού υπάρχουν και ανοίγματα στις πλαϊνές έδρες του κύβου και επομένως γίνονται δύο πειράματα: ένα με τα ανοίγματα κλειστά και ένα με ανοιχτά. Άρα για κάθε επίπεδο υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: High Shear Open (HSO), High Shear Closed (HSC), Low Shear Open (LSO), Low Shear Closed (LSC). Από εδώ και πέρα η οποιαδήποτε αναφορά σε κάποια από αυτές τις τέσσερις περιπτώσεις θα γίνεται με τα αρχικά που φαίνονται στις παρενθέσεις. Τώρα, πρέπει να αναφερθεί ότι ο αναγνώστης ο οποίος επιθυμεί περαιτέρω λεπτομέρειες για το πείραμα παραπέμπεται στους Manolesos et al. (2018) οι οποίοι άλλωστε διεξήγαγαν και το πείραμα.

Ύστερα, πρέπει να αναφερθούν οι οριακές συνθήκες οι οποίες επιβλήθηκαν στα σύνορα του εκάστοτε επιπέδου στο οποίο πραγματοποιείται η επίλυση. Επισημαίνεται ότι και για τα 2 επίπεδα, εφαρμόστηκαν οριακές συνθήκες ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Στο βόρειο και νότιο σύνορο εφαρμόζονται οριακές συνθήκες σύμφωνα με τις οποίες αλλάζουν και οι όροι διάχυσης και μεταφοράς ενώ για το ανατολικό αλλάζει μόνο ο όρος διάχυσης και επιβάλλεται σταθερός όρος μεταφοράς, για  $\Phi = u, v$  αφού δεν επιστρατεύεται μοντέλο τύρβης  $k-\epsilon$ .

Αντ' αυτού, η τύρβη εισάγεται απευθείας με τις τυρβώδεις τάσεις Reynolds όπως προκύπτουν από τα δεδομένα του πειράματος. Στην περίπτωση αυτή συνέκλινε ο κώδικας πιθανώς λόγω του ότι τα στιγμιότυπα από PIV ήταν περισσότερα και ως εκ τούτου και η στατιστική του πειράματος καλύτερα μετρημένη. Και εδώ λαμβάνεται ως δεδομένο το μέσο πεδίο ταχυτήτων και επιδιώκεται ο υπολογισμός του μέσου πεδίου πίεσης. Τα απαραίτητα δεδομένα για την εκτέλεση του κώδικα διαφαίνονται στην σχέση (3.3.1).

$$\rho = 1.21 \frac{kg}{m^3}, \mu = 0.179 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{ms}, R_l = H_c = 0.110000 m \quad (3.3.1)$$



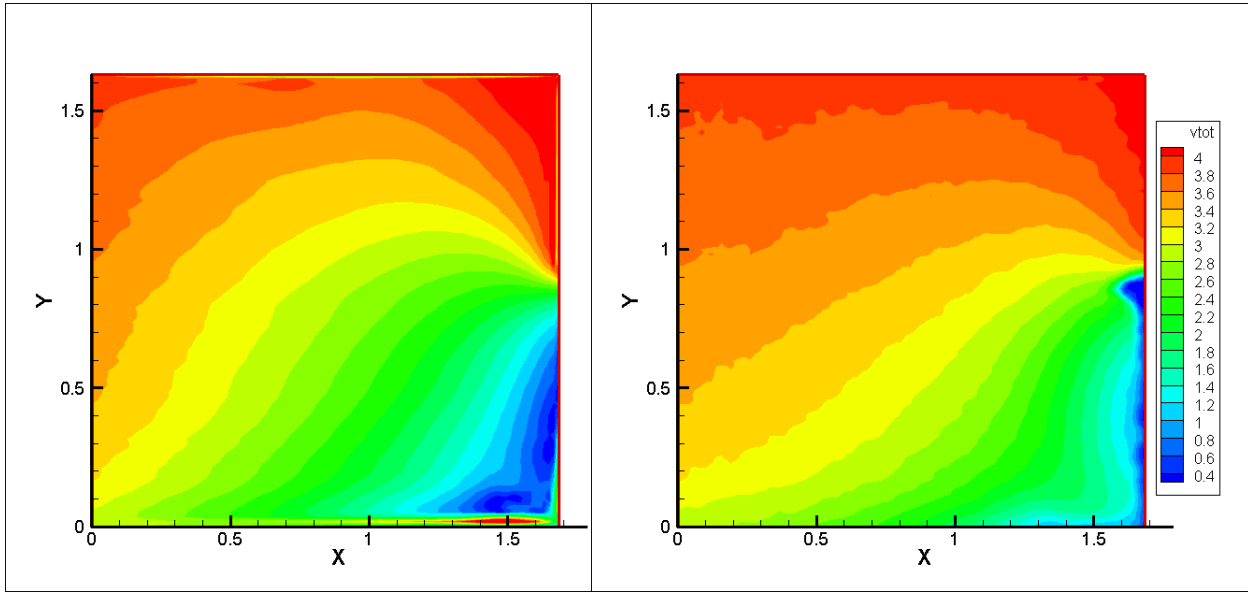
Διευκρινίζεται ότι  $H_c$  είναι το ύψος του κύβου και επιλέγεται ως μήκος αδιαστατοποίησης των συντεταγμένων κατά  $x$  και κατά  $y$  καθώς και ότι η πυκνότητα και το ιξώδες είναι ιδιότητες του αέρα σε θερμοκρασία  $20^\circ\text{C}$ , όπως αναγράφεται από τον Τσαγγάρη (2016, σελ. 37).

Το πλάνο που θα ακολουθηθεί τώρα είναι το εξής: το παρόν υποκεφάλαιο θα χωριστεί σε δύο μικρότερα υποκεφάλαια με το καθένα να αντιστοιχεί σε καθένα από τα επίπεδα στα οποία επιδιώκεται να γίνει η επίλυση, δηλαδή στα A,C αντίστοιχα. Η δομή θα είναι παρεμφερής με αυτή του υποκεφαλαίου που αφορούσε τον κύλινδρο.

### 3.3.1 Επίπεδο A, πειράματα LSO, LSC, HSO, HSC

Αρχικά, δίνονται στο σχήμα 17 οι ισοϋψείς της συνισταμένης των ταχυτήτων για 2 περιπτώσεις: για τα δεδομένα όπως εισάγονται από τη μέθοδο PIV αλλά και για τις διορθωμένες ταχύτητες όπως αυτές προκύπτουν από την εκτέλεση του κώδικα για το LSO πείραμα. Ως  $U_{t,CORR}$  ορίζεται η συνισταμένη της δεύτερης περίπτωσης ενώ ως  $U_{t,PIV}$  ορίζεται της πρώτης. Στα σχήματα 18,19 και 20 δίνονται τα ίδια διαγράμματα για τα πειράματα LSC, HSO, HSC αντίστοιχα.

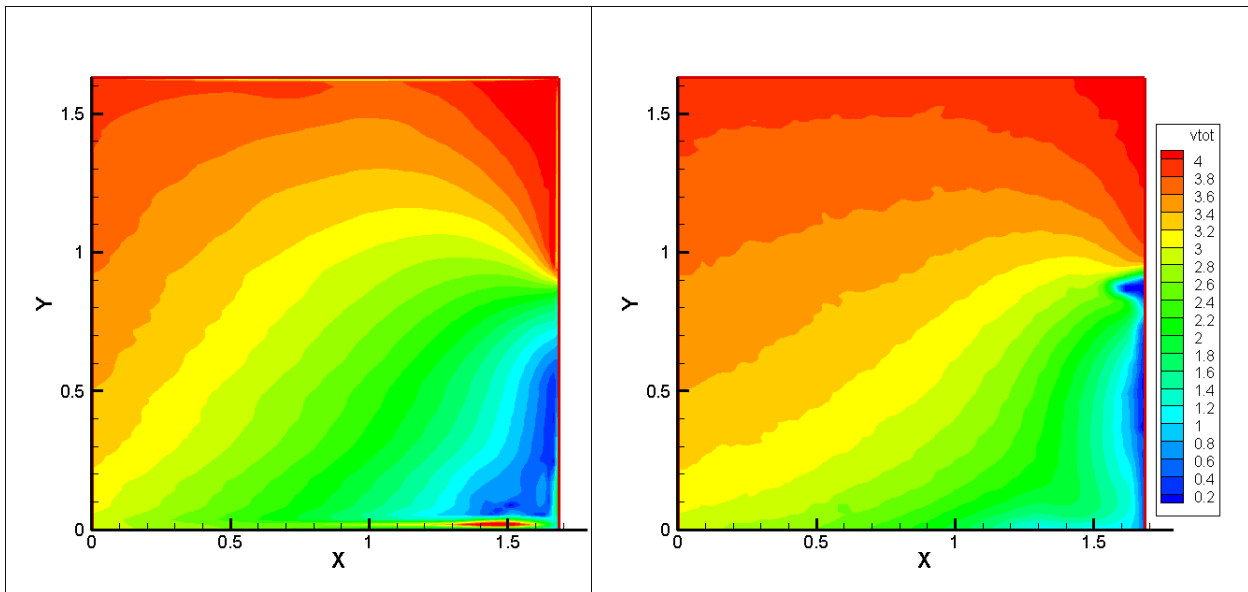
Στο σχήμα 21 δίνονται τα διανυσματικά πεδία των  $U_{t,CORR}$ ,  $U_{t,PIV}$  της περίπτωσης LSO, σε περιοχή κοντά στον κύβο η οποία και είναι αυτή που παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Στα σχήματα 22,23 και 24 δίνονται τα ίδια διαγράμματα για τις άλλες τρεις περιπτώσεις. Εν συνεχεία, δίνεται το σχετικό σφάλμα μεταξύ των συνισταμένων ταχυτήτων για το πείραμα LSO, όπως αυτό ορίζεται στο υποκεφάλαιο (2.5) (σχήμα 25). Στα σχήματα 26,27 και 28 δίνεται το ίδιο μέγεθος για τα υπόλοιπα πειράματα.



$U_{t,CORR}$  (m/s)

$U_{t,PIV}$  (m/s)

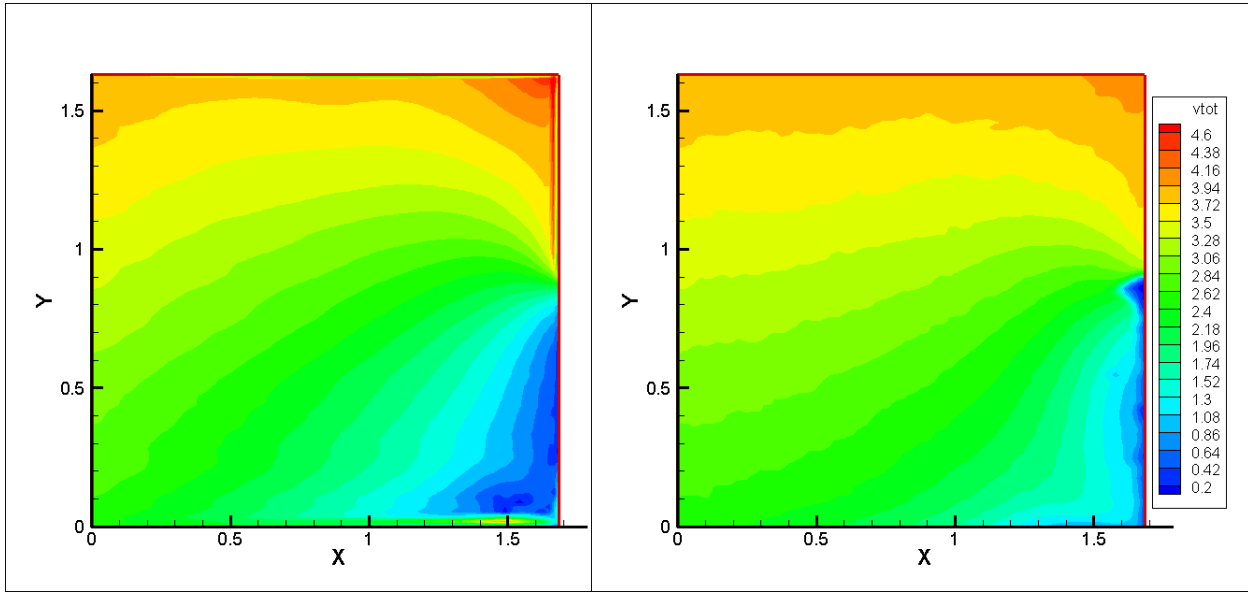
Σχήμα 17: Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSO



$U_{t,CORR}$  (m/s)

$U_{t,PIV}$  (m/s)

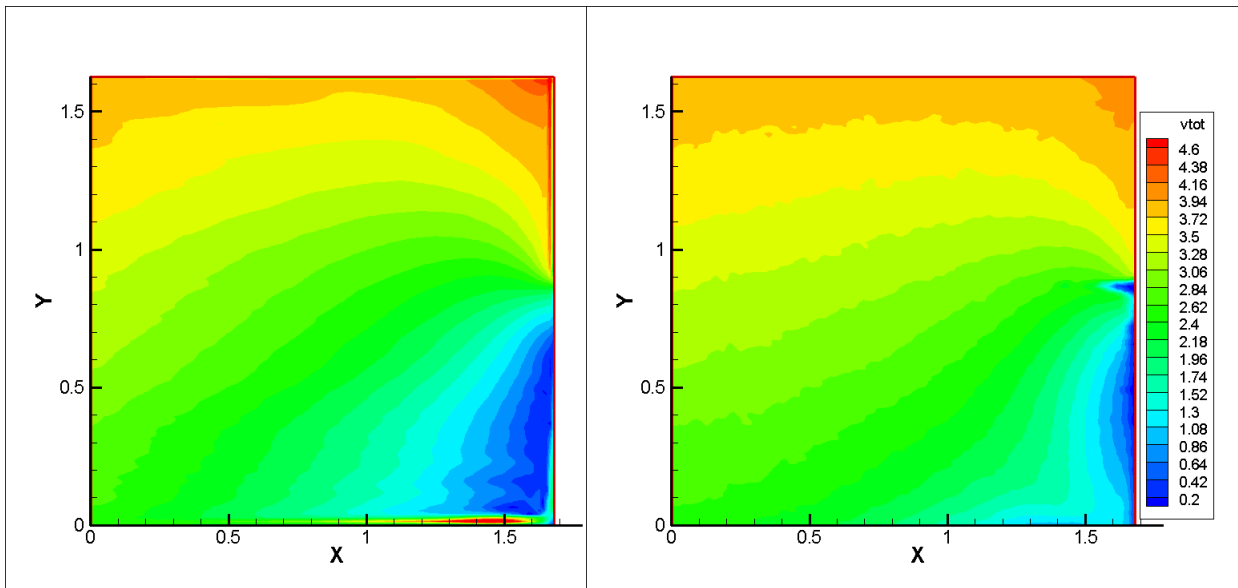
Σχήμα 18: Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSC



$U_{t,CORR}$  (m/s)

$U_{t,PIV}$  (m/s)

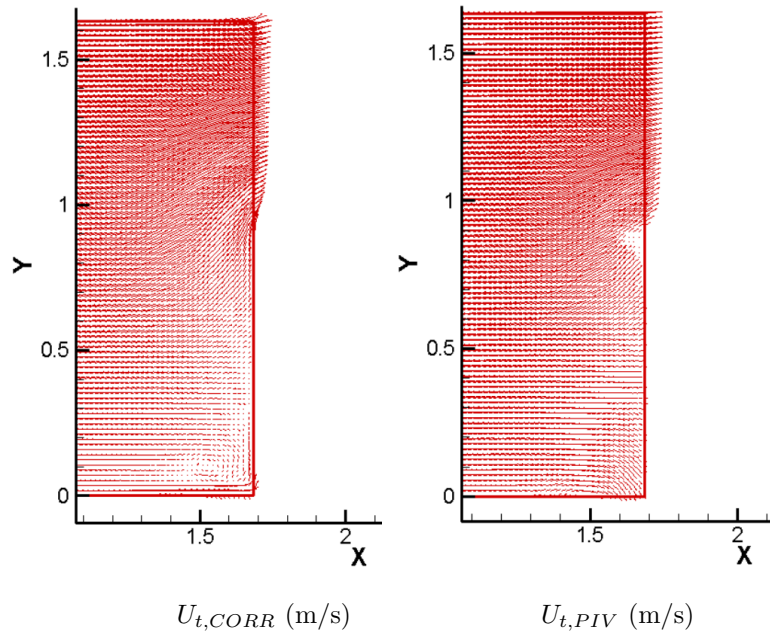
Σχήμα 19: Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSO



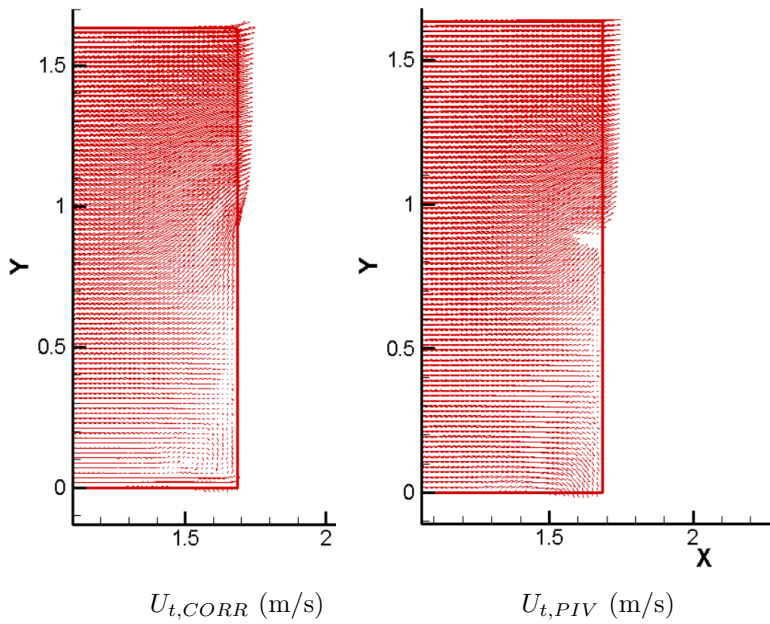
$U_{t,CORR}$  (m/s)

$U_{t,PIV}$  (m/s)

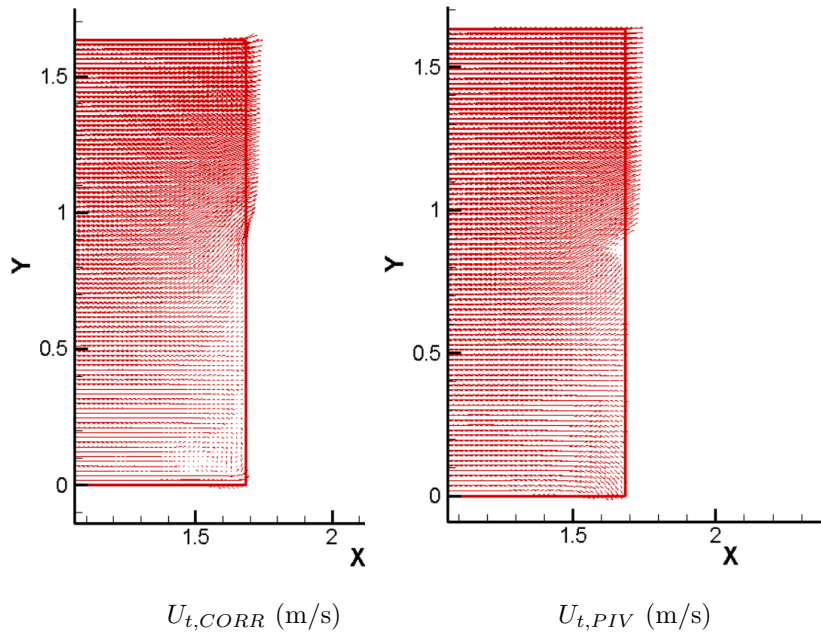
Σχήμα 20: Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSC



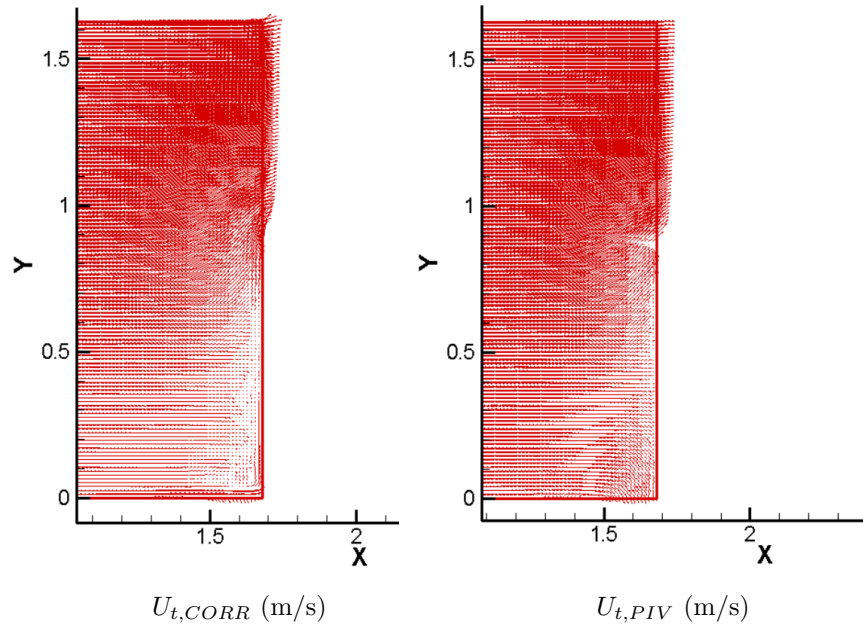
**Σχήμα 21:** Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSO



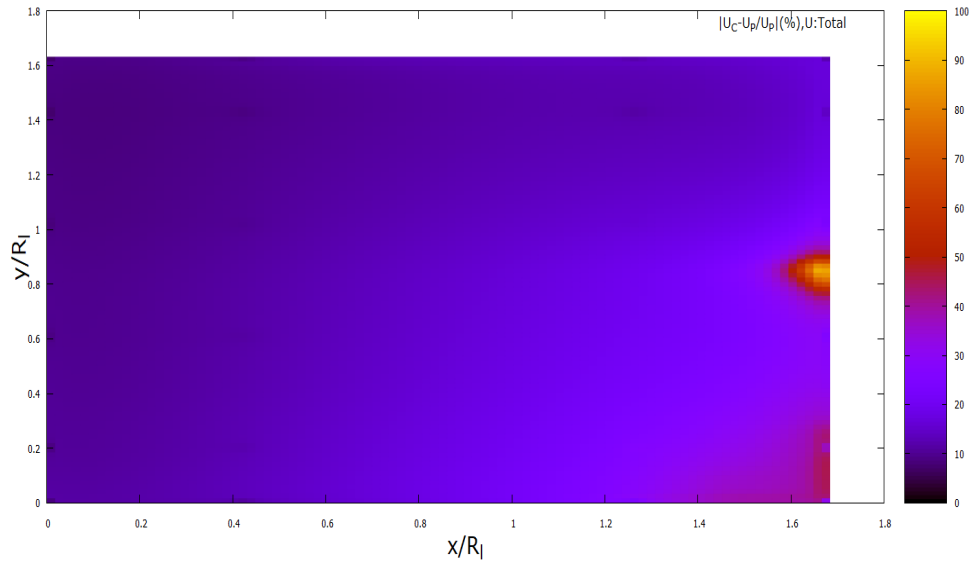
**Σχήμα 22:** Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSC



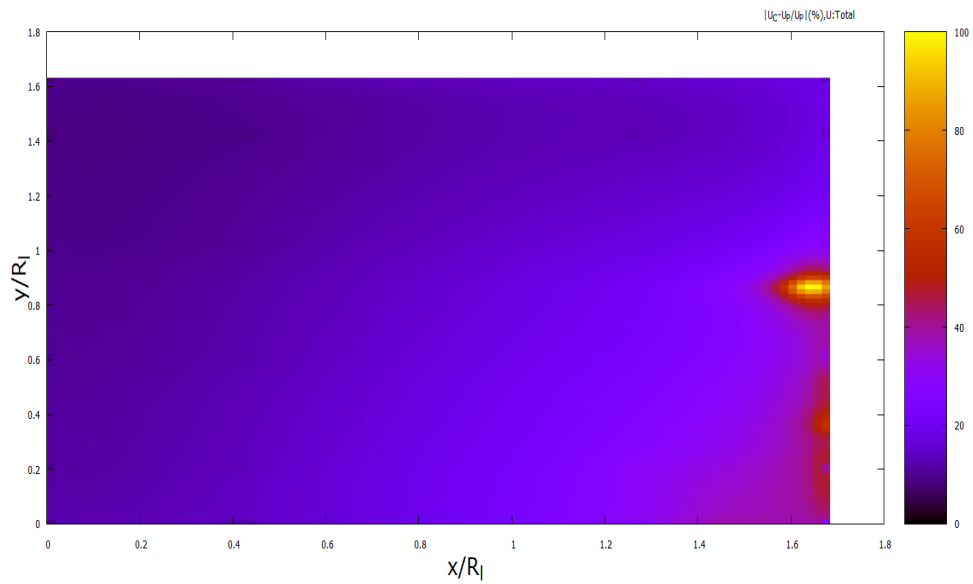
**Σχήμα 23:** Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSO



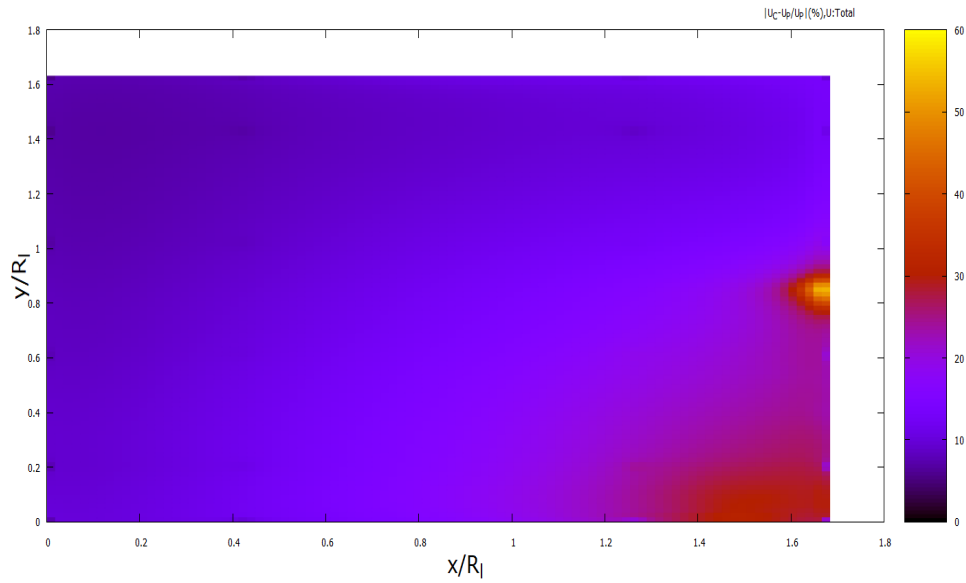
**Σχήμα 24:** Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSC



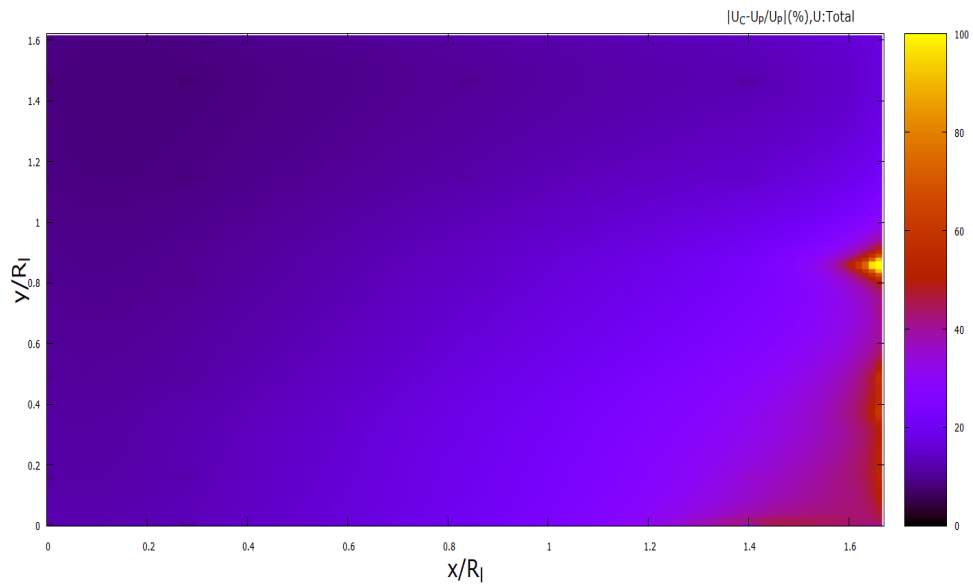
**Σχήμα 25:** Σχετικό σφάλμα  $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{|U_{t,CORR} - U_{t,PIV}|}{|U_{t,PIV}|}$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A πείραμα LSO



**Σχήμα 26:** Σχετικό σφάλμα  $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{|U_{t,CORR} - U_{t,PIV}|}{|U_{t,PIV}|}$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A πείραμα LSC



**Σχήμα 27:** Σχετικό σφάλμα  $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{|U_{t,CORR} - U_{t,PIV}|}{|U_{t,PIV}|}$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A πείραμα HSO



**Σχήμα 28:** Σχετικό σφάλμα  $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{|U_{t,CORR} - U_{t,PIV}|}{|U_{t,PIV}|}$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A πείραμα HSC

Σε αυτό το στάδιο, πρέπει να διευκρινιστεί ότι λόγω έλλειψης δεδομένων για τα  $\overline{u}^2$ ,  $\overline{v}^2$  στο νότιο σύνορο για το πείραμα HSC, έγινε η παραδοχή ότι οι τιμές σε εκείνες τις θέσεις είναι ίσες με τις τιμές του αμέσως βορειότερου πεπερασμένου όγκου.

Πριν παρατεθούν και τα υπόλοιπα σχήματα, κρίνεται σκόπιμο να σχολιαστούν αυτά που δόθηκαν ήδη. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά θα σχολιαστούν συγκεντρωτικά και τα 4 πειράματα μαζί γιατί κάτι τέτοιο φαντάζει δόκιμο εφόσον παρατηρείται ίδια συμπεριφορά του κώδικα για την εκάστοτε περίπτωση. Παρατηρώντας τα διαγράμματα των σχημάτων 17, 18, 19 και 20, γίνεται κατανοητό ότι οι ταχύτητες αλλάζουν αλλά όχι πολύ. Αυτό που πρέπει να σχολιαστεί είναι ότι στην περιοχή χαμηλά και κοντά στον κύλινδρο, το τμήμα χαμηλών ταχυτήτων εμφανίζεται πολύ πιο εκτεταμένο μετά την επίλυση από ότι ήταν στην αρχή. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι από τα σχήματα 21, 22, 23 και 24 διαφαίνεται ότι σε εκείνο το τμήμα του πεδίου ύστερα από την επίλυση, εμφανίζεται ανακυκλοφορία η οποία δεν φαίνεται να υπήρχε στα δεδομένα κατευθείαν από το PIV.

Άλλο ένα στοιχείο που αξίζει να δοθεί, είναι ότι καταρχάς υπάρχει μια περιοχή για  $y \approx 0$  και  $x \in [1.3, 1.6]$  όπου φαίνεται ότι η επίλυση έχει αποτύχει πλήρως αφού εμφανίζεται μια μικρή περιοχή με πολύ μεγάλες ταχύτητες. Ένα άλλο ενδιαφέρον συμπέρασμα, είναι ότι το σημείο ανακοπής εμφανίζεται και στο πεδίο που προκύπτει από την επίλυση αλλά και σε αυτό από τα δεδομένα PIV περίπου στο ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό είναι εκεί περίπου όπου όλες οι ισοϋψείς συγκλίνουν. Η αλήθεια είναι ότι ίσως μετατοπίζεται λίγο το σημείο ανακοπής αλλά όχι τόσο ώστε να παραποιείται το πεδίο και να χάνει την ορθή φυσική του υπόσταση. Διευκρινίζεται ότι γενικά  $(X, Y) = (x/R_l, y/R_l)$  αλλά και ότι  $((x/R_l)_{max}, (y/R_l)_{max}) = (1.68, 1.63)$ .

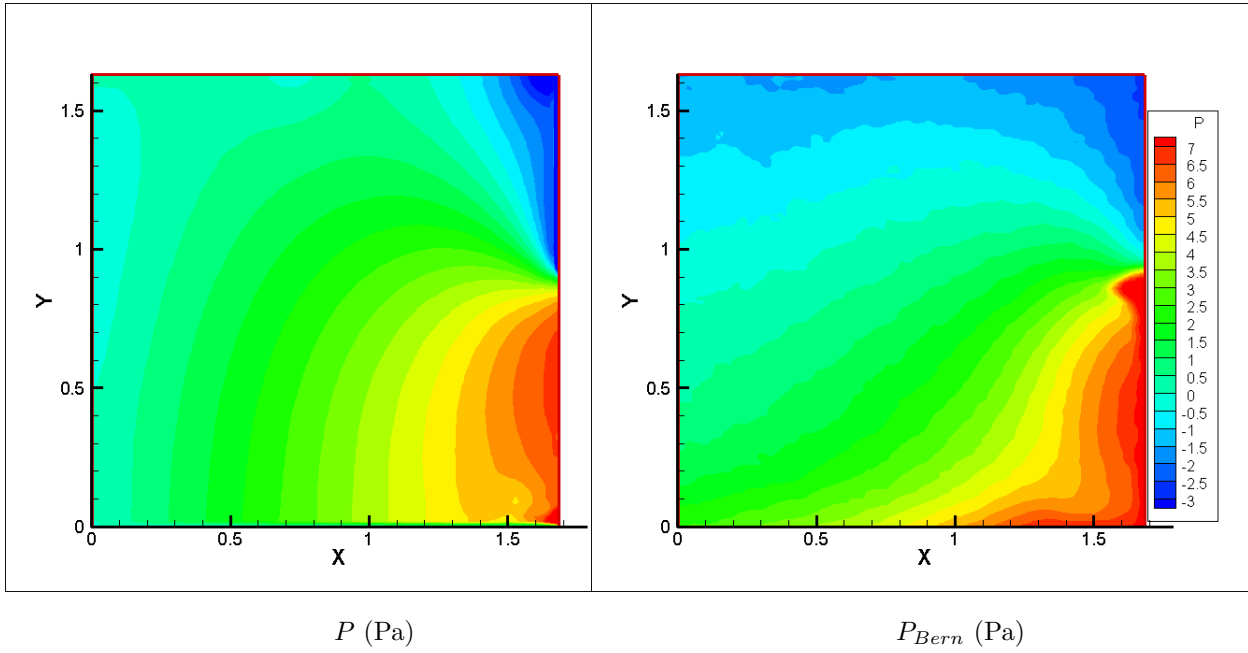
Ύστερα, αναφέρεται ότι από το σχήμα 25, φαίνεται το σφάλμα να μεγιστοποιείται στην περιοχή όπου εμφανίζεται το σημείο ανακοπής, δηλαδή σε περιοχή όπου οι ταχύτητες είναι πολύ χαμηλές. Όπως ειπώθηκε ήδη, αυτό δεν είναι απαραίτητα ένδειξη κακής επίλυσης. Δηλαδή, αν για παράδειγμα στην περίπτωση του PIV οι ταχύτητες σε εκείνη την περιοχή



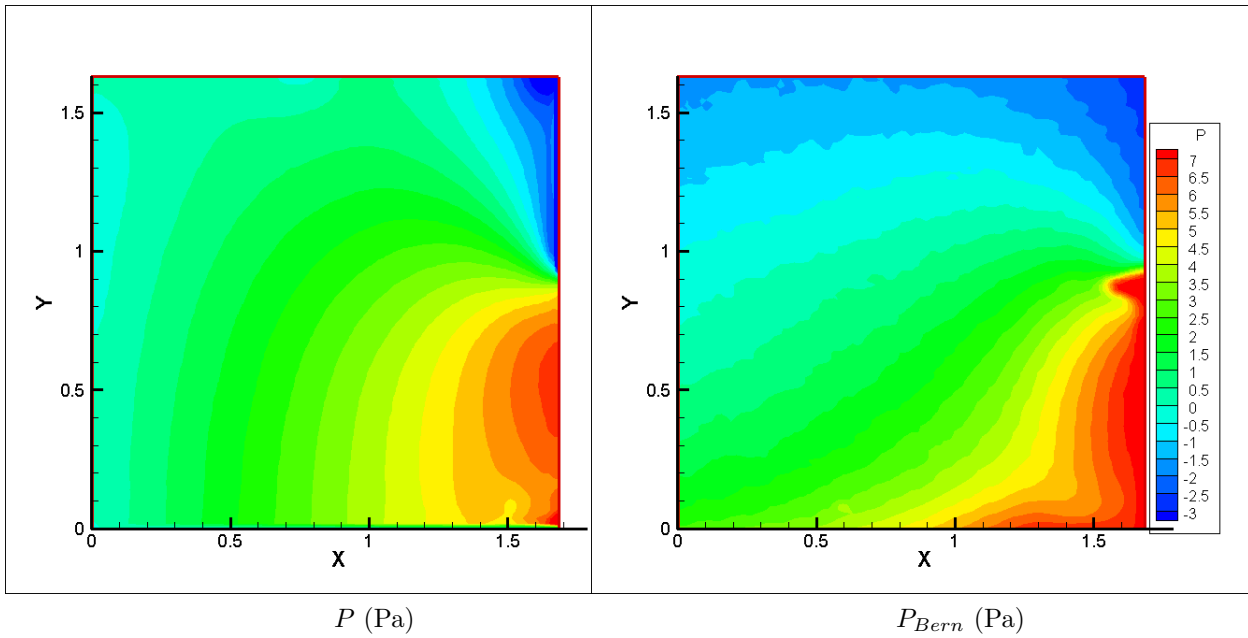
είναι της τάξης του  $10^{-7}$  και η  $U_{t,CORR}$  είναι της τάξης του  $10^{-8}$  το σφάλμα προκύπτει περίπου 90% ενώ και στις δύο περιπτώσεις οι τιμές είναι κοντά στο 0. Και για τα υπόλοιπα πειράματα, η εικόνα του διαγράμματος του σχετικού σφάλματος είναι παρόμοια και γι' αυτό δεν κρίνεται σκόπιμο να γίνει ξεχωριστή μνεία σε αυτά.

Τέλος, αν κανείς εξετάσει τα σχήματα 21,22,23 και 24 φαίνεται ότι και για τα 4 πειράματα, στο διανυσματικό πεδίο που αντιστοιχεί στο εξηγμένο από τη μέθοδο PIV πεδίο, υπάρχει μια κενή περιοχή από διανύσματα ταχυτήτων. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε αδυναμία της μεθόδου PIV να μετρήσει ορθά τις ταχύτητες στην περιοχή αυτή (σενάριο όχι πολύ πιθανό) ή σε ύπαρξη μηδενικών ταχυτήτων. Παρόλα αυτά, αυτές οι περιοχές χωρίς διανύσματα δεν εμφανίζονται στα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία της  $U_{t,CORR}$ , πράγμα που πιθανώς να υποδεικνύει αδυναμία του κώδικα να διορθώσει ορθά τα πεδία, ειδικά σε εκείνη την περιοχή που είναι κοντά στο ανατολικό σύνορο. Επιπλέον, δεν φαίνεται να αλλάζουν σημαντικά οι κλίσεις των ταχυτήτων μετά την επίλυση, που σημαίνει ότι η αναλογία μεταξύ οριζόντιας και κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας, παραμένει σχετικά αναλλοίωτη.

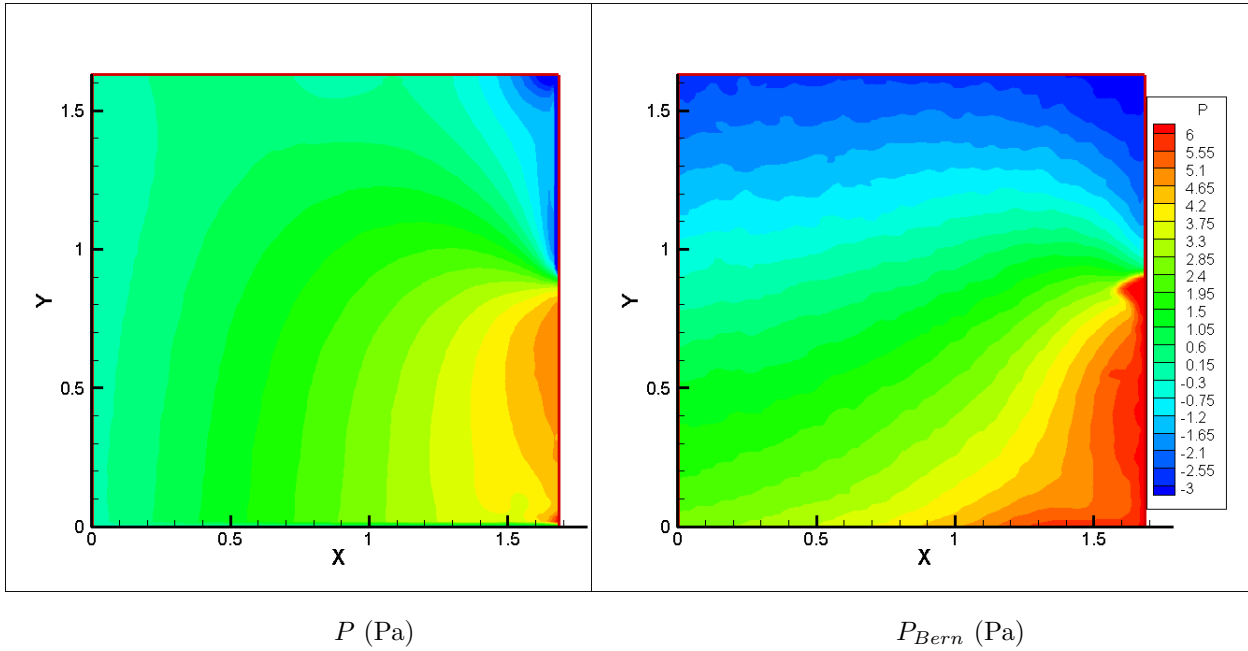
Στη συνέχεια, στα σχήματα 29, 30, 31 και 32 δίνονται οι ισοϋψείς της πίεσης όπως προκύπτουν από την επίλυση ( $P$ ) αλλά και με απευθείας εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli στα δεδομένα ( $P_{Bern}$ ), για τα πειράματα LSO, LSC, HSO, HSC αντίστοιχα.



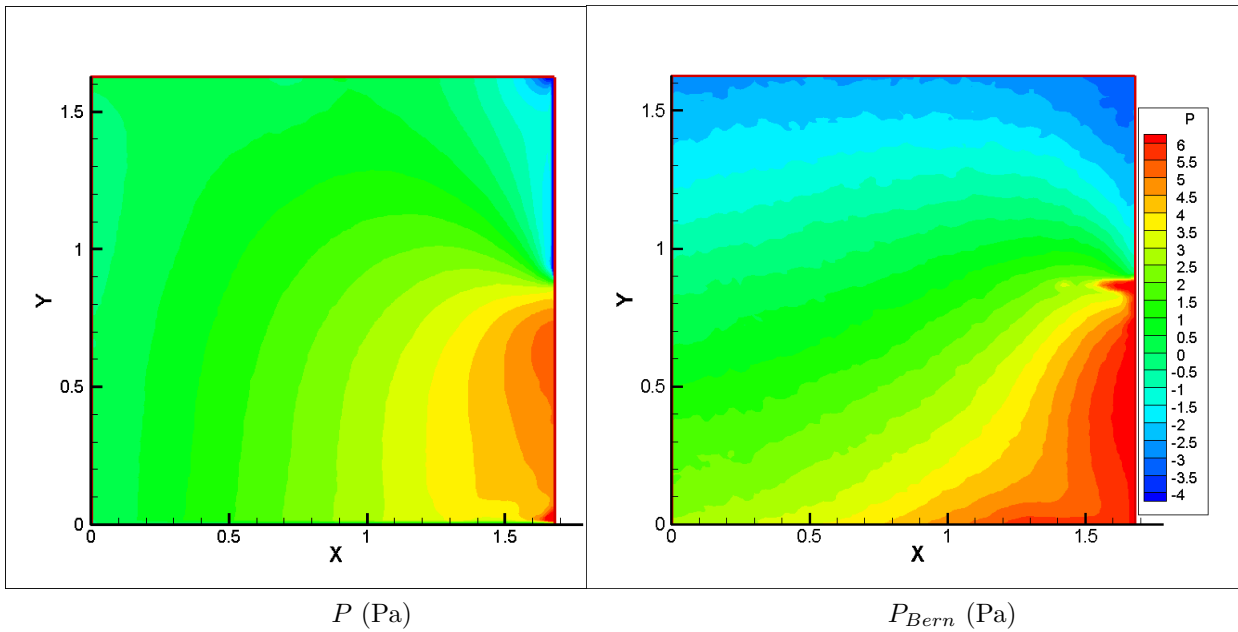
Σχήμα 29: Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $P$  (αριστερά),  $P_{Bern}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSO



Σχήμα 30: Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $P$  (αριστερά),  $P_{Bern}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSC



Σχήμα 31: Ισοϋφείς για ροή γύρω από κύβο:  $P$  (αριστερά),  $P_{Bern}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSO



Σχήμα 32: Ισοϋφείς για ροή γύρω από κύβο:  $P$  (αριστερά),  $P_{Bern}$  (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSC

Παρατηρώντας τα σχήματα 29,30,31 και 32, εξάγονται τα εξής συμπεράσματα: οι πιέσεις που προκύπτουν με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli κυμαίνονται περίπου στις ίδιες τιμές με αυτές που προέκυψαν από την επίλυση. Μπορεί οι ισοϋψείς να μην έχουν την ίδια μορφή αλλά έστω ποιοτικά η λύση φαίνεται να έχει φυσικό νόημα. Επίσης, η τιμή της μέγιστης πίεσης που προκύπτει από την επίλυση με αυτή της εξίσωσης Bernoulli είναι σε όλες τις περιπτώσεις πολύ κοντά και μάλιστα εμφανίζεται περίπου στο ίδιο σημείο. Αυτό το σημείο είναι προφανώς το σημείο ανακοπής για το οποίο έγινε ήδη μνεία. Μία άλλη παρατήρηση που μπορεί να γίνει είναι ότι όσο εγγύτερα στον κύβο εξετάζεται το πεδίο τόσο πιο μεγάλες είναι οι πιέσεις πράγμα αναμενόμενο αφού εκεί η ροή επιβραδύνεται.

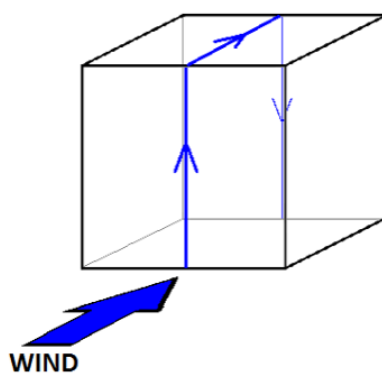
Περίπου στο  $Y = 1$  που αντιστοιχεί στο ύψος του κύβου, στο ανατολικό σύνορο, παρουσιάζονται υποπίεσεις οι οποίες είναι αναμενόμενες εφόσον η ροή σε εκείνο το σημείο επιταχύνεται ως αποτέλεσμα της γεωμετρίας της κατασκευής. Σε γενικές γραμμές, με ποιοτική σύγκριση του πεδίου πίεσης που προέκυψε με αυτό που εξάγεται από Bernoulli, φαίνεται ότι η λύση είναι φυσικά συνεπής. Αν αντιπαρατεθούν τα σχήματα των ισοϋψών της πίεσης με τα αντίστοιχα των ισοϋψών των ταχυτήτων για την περίπτωση επίλυσης από τον κώδικα, διαφαίνεται ότι στα σημεία όπου η ταχύτητα (και άρα και η δυναμική πίεση) είναι μέγιστη, η στατική πίεση είναι ελάχιστη και τούμπαλιν.

Επίσης, από τις ισοϋψείς της  $P$  φαίνεται ότι οι περιπτώσεις με κλειστά τα ανοίγματα εμφανίζουν μεγαλύτερες πιέσεις από τις αντίστοιχες με ανοιχτά, πράγμα αναμενόμενο αφού οι ταχύτητες λόγω των αδιαπέραστων τοιχωμάτων, τοπικά λαμβάνουν μικρότερες τιμές από αυτές στην περίπτωση διαπερατών τοιχωμάτων. Τέλος, στα Low Shear πειράματα, οι πιέσεις προκύπτουν μεγαλύτερες από αυτές των High Shear, πράγμα επίσης αναμενόμενο, αν σκεφτεί κανείς ότι το προφίλ ταχύτητας μικρότερης κλίσης έχει μεγαλύτερη ορμή χαμηλά.

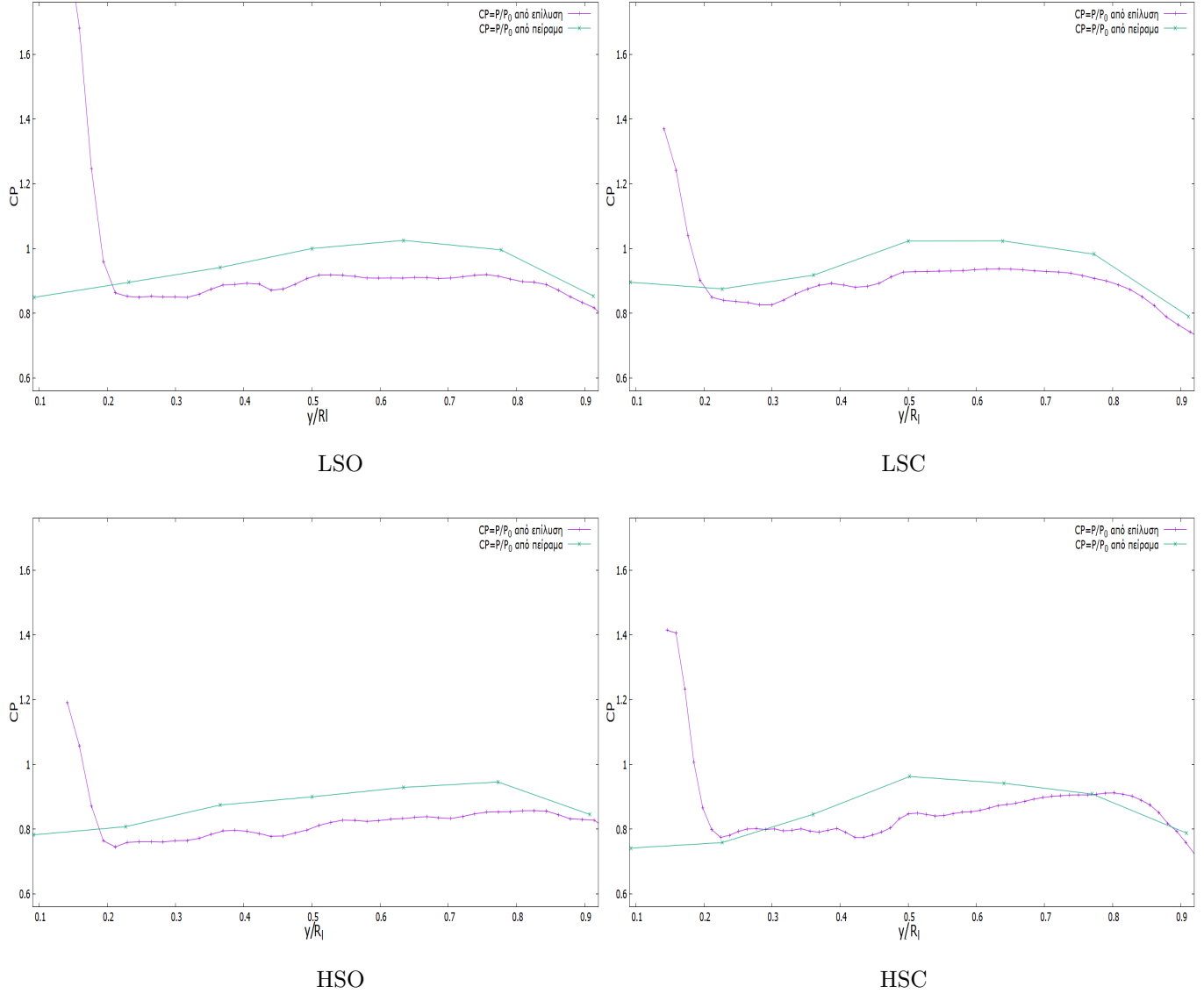
Κατά την διεξαγωγή του πειράματος, ελήφθησαν μετρήσεις της πίεσης με οπές κατά μήκος της γραμμής που φαίνεται στο σχήμα 33. Επομένως, μπορεί να γίνει σύγκριση του

προφίλ πίεσης που προκύπτει στο ανατολικό σύνορο με αυτό που μετρήθηκε. Εδώ πρέπει όμως να σημειωθεί ότι το μετρημένο προφίλ πίεσης είναι ακριβώς πάνω στον κύβο ενώ αυτό του ανατολικού συνόρου που εξάγεται από την επίλυση είναι λίγο δυτικότερα. Άρα μέσω αυτής της σύγκρισης δεν επιδιώκεται τα δύο προφίλ να ταυτίζονται αλλά περισσότερο να έχουν την ίδια μορφή ποιοτικά.

Η σύγκριση αυτή φαίνεται στο σχήμα 34 για όλα τα διαφορετικά πειράματα που διεξήχθησαν στο επίπεδο A. Τονίζεται ότι ως  $CP_{exp}$  ορίζεται ο συντελεστής πίεσης που ελήφθη από τον Πάνο (2017) και αφορά τις πειραματικές μετρήσεις πιέσεων με οπές πάνω στα τοιχώματα του κυλίνδρου, ενώ ως  $CP$  ορίζεται ο συντελεστής πίεσης που υπολογίστηκε από το πρόγραμμα. Ο γενικός ορισμός του  $CP$  είναι  $CP = \Delta P/P_0$ , όπου  $\Delta P$  είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ του εκάστοτε σημείου και της στατικής πίεσης της ελεύθερης ροής και  $P_0$  η δυναμική πίεση στο ύψος του κυλίνδρου γενικά ίση με  $P_0 = 1/2\rho U_t^2$ , όπου  $U_t$  η συνισταμένη ταχύτητα στο ύψος του κύβου, 6 ύψη κύβου ανάντι από το κέντρο του. Από τον Πάνο (2017), η δυναμική πίεση για την Low Shear περίπτωση, λαμβάνεται ίση με 7.33 Pa και για την High Shear ίση με 5.99 Pa. Στο σχήμα 34, οι μωβ καμπύλες αντιστοιχούν στον  $CP$  και οι πράσινες στον  $CP_{exp}$ .



**Σχήμα 33:** Γραμμή κατά μήκος της οποίας μετρήθηκαν πειραματικά οι πιέσεις

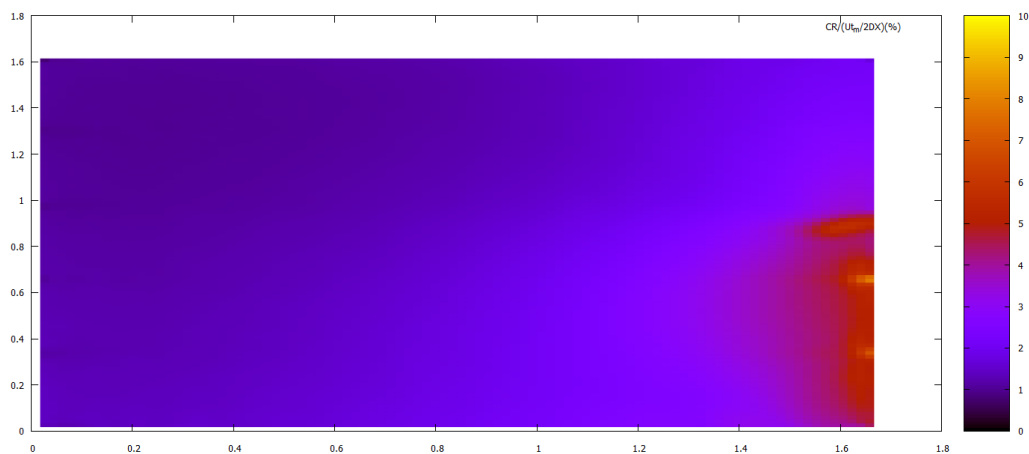


**Σχήμα 34:** Σύγκριση μεταξύ  $CP$  και  $CP_{exp}$  για τα πειράματα LSO, LSC, HSO, HSC

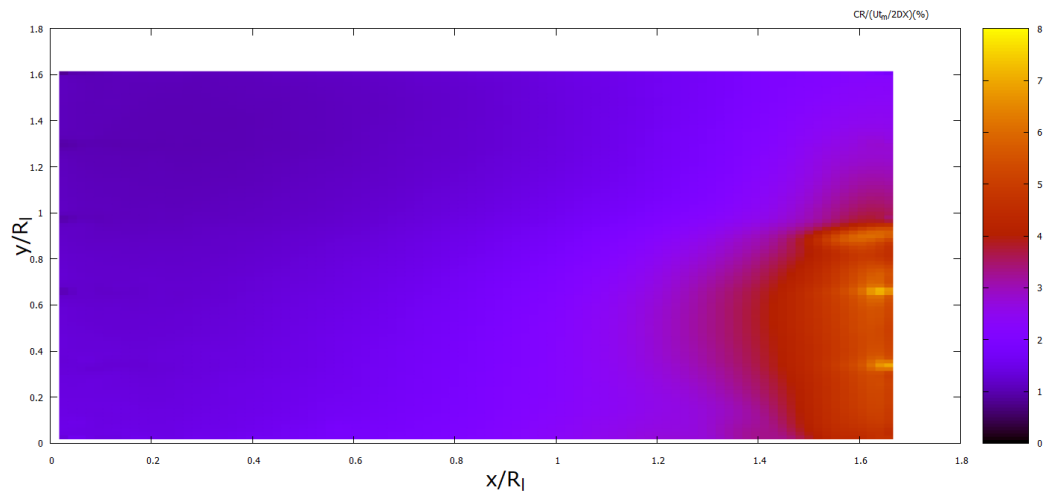
Παρατηρώντας το σχήμα 34, εξάγεται το εξής συγκεντρωτικό συμπέρασμα και για τα τέσσερα πειράματα: το προφίλ του  $CP$  ακολουθεί πιστά αυτό του  $CP_{exp}$  σχεδόν καθ' όλο το ύψος του κύβου ( $y/R_l \in [0 : 1]$ ) και μόνο κοντά στη βάση του φαίνονται κάποιες υπερπιέσεις από την επίλυση, οι οποίες δεν ανταποκρίνονται στις μετρημένες πιέσεις (περίπου για  $y/R_l = 0.1$ ). Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα αποτυχία της μεθόδου, αφού οι μετρήσεις λαμβάνονται ακριβώς πάνω στον κύβο ενώ η επίλυση γίνεται ανάντι του τοι-

χώματος του κύβου. Άλλωστε, τα σημεία στα οποία εμφανίζονται αυτές οι υπερπίεσεις είναι τω αριθμώ 3-4, πλήθος το οποίο είναι πολύ μικρό σε σχέση με το σύνολο των σημείων στα οποία υπολογίζεται η πίεση. Τέλος, κοντά στη βάση του κύβου, βρίσκεται το νότιο όριο του πεδίου (περίπου για  $y/R_l = 0.14$ ) και έτσι υπεισέρχεται η επίδραση των οριακών συνθηκών με αποτέλεσμα να υπάρχουν αποκλίσεις κοντά σε αυτό. Άλλωστε, η εξίσωση διόρθωσης πίεσης, δέχεται οριακές συνθήκες Neumann στα σύνορα, πράγμα που δημιουργεί ανακρίβειες κοντά σε αυτά, εφόσον με τις Neumann θεωρείται μηδενική κλίση πίεσης πράγμα που στην πραγματικότητα δεν ισχύει πάντοτε, ειδικότερα αν υπάρχουν και μεγάλες κλίσεις ταχυτήτων σε εκείνη την περιοχή.

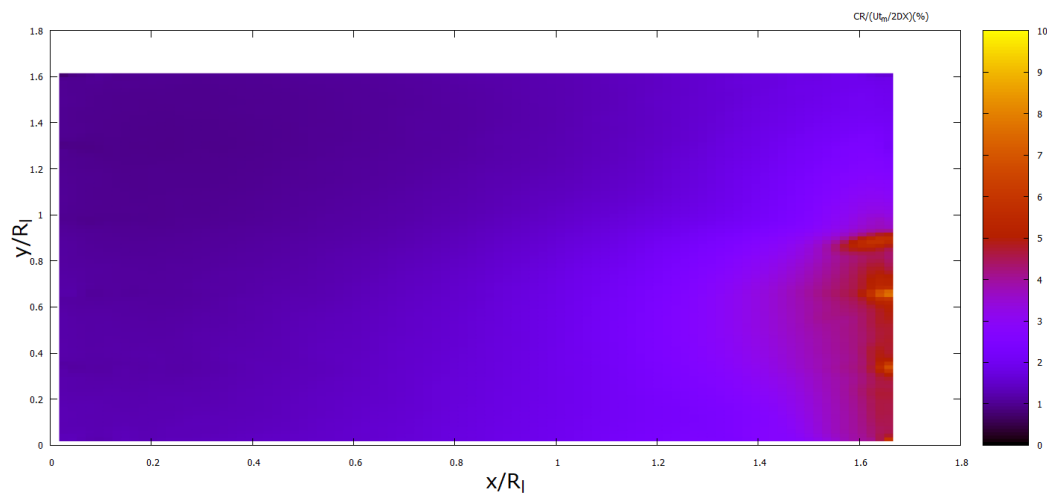
Εν συνεχεία, όπως και για την περίπτωση του κυλίνδρου, κρίνεται σκόπιμο να δοθούν τα υπόλοιπα μάζας που υφίστανται στα δεδομένα από τη μέθοδο PIV. Όπως έχει ήδη ειπωθεί, έχουν οριστεί 2 τέτοια αδιαστατοποιημένα υπόλοιπα: το *ICRN* και το *CRN*. Στο σχήμα 35 δίνεται το *CRN* για το πείραμα LSO. Στα σχήματα 36,37 και 38 δίνεται το ίδιο μέγεθος για τα υπόλοιπα πειράματα. Στον πίνακα 1, δίνονται τα *ICRN*, *ICR* και για τα 4 πειράματα.



**Σχήμα 35:** Υπόλοιπο μάζας *CRN*(%) για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα LSO

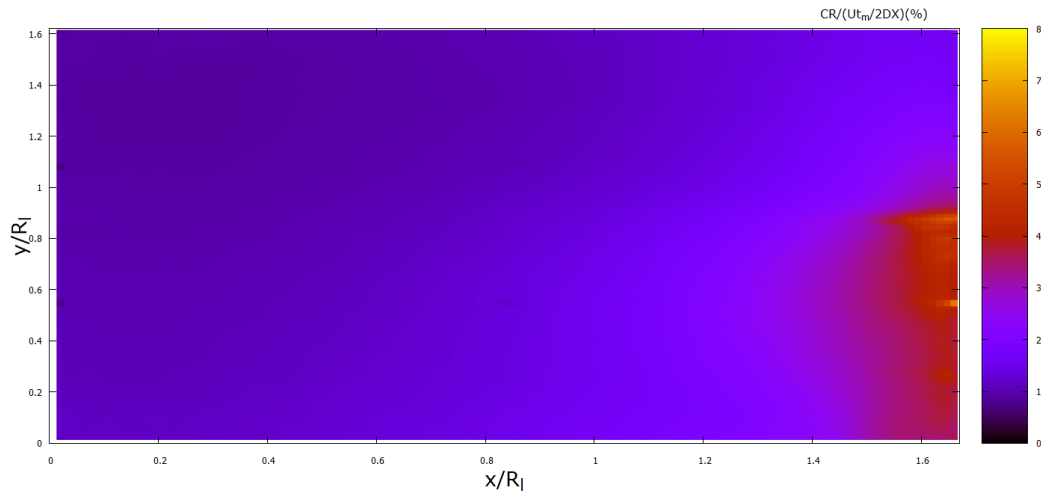


Σχήμα 36: Υπόλοιπο μάζας  $CRN(\%)$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα LSC



Σχήμα 37: Υπόλοιπο μάζας  $CRN(\%)$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα HSO





**Σχήμα 38:** Υπόλοιπο μάζας  $CRN(\%)$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα HSC

Πείραμα	LSO	LSC	HSO	HSC
$ICR$ (kg/s)	-0.4322	-0.4548	-0.3792	-0.3952
$ICRN$ (%)	-62.3108	-65.7694	-58.9816	-61.7815

**Πίνακας 1:** Υπόλοιπα  $ICR$  (kg/s) και  $ICRN$  (%) για όλα τα πειράματα

Από τα σχήματα 35,36,37 και 38 διαπιστώνεται ότι το μέγιστο  $CRN$  εμφανίζεται κοντά στο ανατολικό σύνορο. Μάλιστα, η τιμή του σε εκείνη την περιοχή αγγίζει το 10 % για τα πειράματα LSO, HSO και το 8 % για τα LSC, HSC. Αυτό γενικά, είναι κάτι αναμενόμενο γιατί στην περιοχή κοντά στον κύβο, η τρίτη συνιστώσα της ταχύτητας ( $w$ ), γίνεται ισχυρότερη σε σχέση με την τιμή της στο υπόλοιπο πεδίο ενώ ταυτόχρονα οι άλλες δύο συνιστώσες λαμβάνουν την μικρότερη τιμές τους. Επομένως, ο όρος  $\frac{\partial w}{\partial z}$  που υπάρχει κανονικά στην τρισδιάστατη μορφή της εξίσωσης συνέχειας ασυμπίεστου ρευστού, λαμβάνει τιμή συγκρίσιμη με τους δισδιάστατους όρους που φαίνονται και στην εξίσωση (2.1.8). Αυτό που περιεγράφηκε ήδη περιφραστικά, φαίνεται και στο σχήμα 39 παρακάτω για την περίπτωση LSO όπου δίνονται οι ισοϋψείς του μεγέθους  $|w/u|$  (%), από δεδομένα

που ήταν διαθέσιμα από τις μετρήσεις που περιλάμβαναν τη τρίτη συνιστώσα (stereo PIV). Στα σχήματα 40,41 και 42 δίνεται το ίδιο μέγεθος για τα υπόλοιπα πειράματα.

Ύστερα, πρέπει να σχολιαστούν τα υπόλοιπα της ολοκληρωματικής εξίσωσης συνέχειας που φαίνονται στον πίνακα 1. Η πρώτη παρατήρηση που πρέπει να γίνει είναι ότι οι τιμές τους σε καμία περίπτωση δεν είναι αμελητέες. Ουσιαστικά το  $ICRN$ , με τον τρόπο που έχει αδιαστατοποιηθεί, κυμαίνεται μεταξύ του 59 % και του 66 % περίπου, της τιμής της παροχής μάζας που θα διερχόταν από μία επιφάνεια διαστάσεων  $(X_{tot} + Y_{tot})/2 \cdot Z_{tot}$ <sup>7</sup> με ταχύτητα ίση με τη μέση χωρικά ταχύτητα όλου του πεδίου. Ο βασικός λόγος μίας τέτοιας αδιαστατοποίησης είναι προκειμένου να μπορούν να γίνουν συγκρίσεις μεταξύ των διαφορετικών ομάδων δεδομένων στα οποία εφαρμόστηκε η διαδικασία επίλυσης.

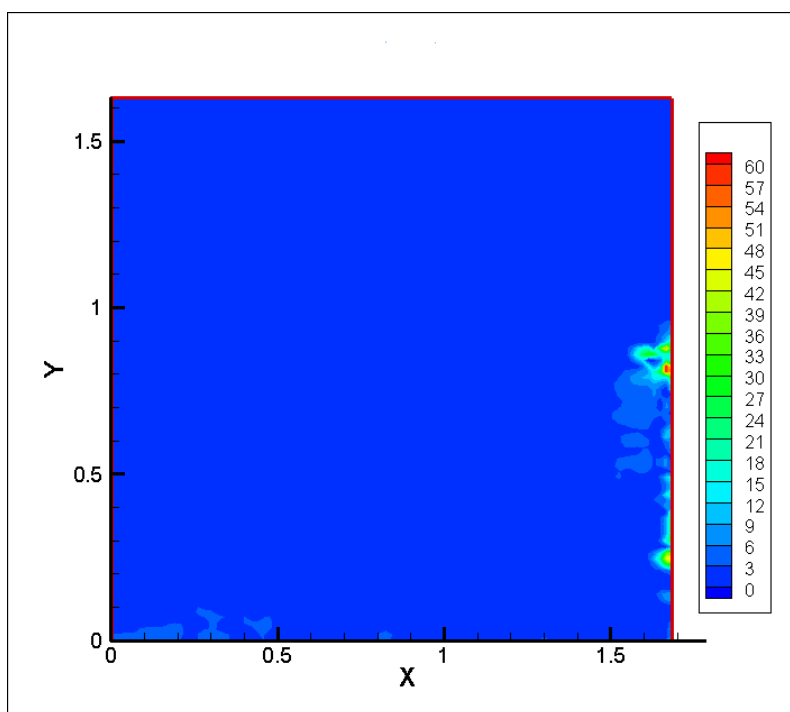
Ένα άλλο ενδιαφέρον στοιχείο που πρέπει να παρατεθεί είναι ότι το τελικό υπόλοιπο της εξίσωσης πίεσης του εκάστοτε πειράματος (ήτοι των LSO, LSC, HSO, HSC) λαμβάνει τιμή κοντά στο αντίστοιχο  $ICR$ . Το γεγονός αυτό δεν θα έπρεπε να εκπλήσσει, αφού ουσιαστικά μέσω της επίλυσης της εξίσωσης διόρθωσης πίεσης επιδιώκεται η ικανοποίηση της εξίσωσης συνέχειας, της οποίας το υπόλοιπο εκφράζεται και με το  $ICR$ . Αυτό βέβαια σημαίνει, ότι το πρόγραμμα δεν μπορεί να μειώσει πάρα πολύ αυτό το υπόλοιπο μέσω των διορθώσεων. Παρόλα αυτά, το θετικό το οποίο εκπορεύεται από την παραπάνω ανάλυση, είναι ότι ακόμη και από δεδομένα που συνδέονται με σημαντικά υπόλοιπα μάζας, το πρόγραμμα της παρούσας εργασίας μπορεί να παράσχει πεδία πίεσης.

Αν γίνει σύγκριση μεταξύ των περιπτώσεων του πεδίου A και του κυλίνδρου, εξάγονται τα εξής ενδιαφέροντα συμπεράσματα: το  $CRN$  κυμαίνεται σε παραπλήσιες τιμές και για τις δύο περιπτώσεις και επομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δείκτης αξιόλογων συγκρίσεων. Αυτό όμως που πρέπει να ειπωθεί, είναι ότι το  $ICRN$  της περίπτωσης του κυλίνδρου, το οποίο βρέθηκε ίσο με 6.875%, είναι πολύ μικρότερο από το αντίστοιχο των

---

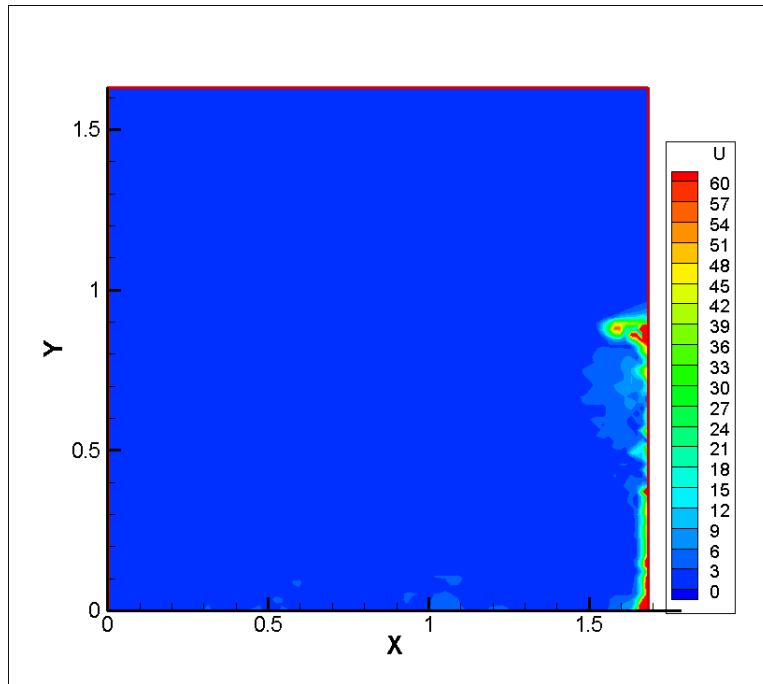
<sup>7</sup> Στην ουσία, οι μονάδες μέτρησης του  $ICR$  είναι  $\frac{kg}{m \cdot s}$ . Θεωρήθηκε όμως ότι τα εκάστοτε ολοκληρωμένα ροής μάζας πολλαπλασιάζονται και με τη διάσταση κατά  $z$  του πεδίου, η οποία και θεωρήθηκε  $Z_{tot} = 1$ .

πειραμάτων στο επίπεδο A. Ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον ίσως έχει το γεγονός ότι το υπόλοιπο της εξίσωσης διόρθωσης πίεσης έχει τιμή πολύ χαμηλότερη από αυτές των πειραμάτων του επιπέδου A ενώ παράλληλα και το  $ICR^8$  είναι πολύ μικρότερο για αυτή την περίπτωση. Επομένως, φανερώνεται μία σύνδεση μεταξύ του  $ICR$  και της σύγκλισης του προγράμματος, η οποία στην ουσία υποδεικνύει ότι όσο μικρότερο είναι, τόσο καλύτερα θα συγκλίνει η εξίσωση διόρθωσης πίεσης. Εδώ όμως πρέπει να σημειωθεί ότι υπεισέρχεται και άλλος ένας παράγοντας, που δεν είναι άλλος από το πόσο ισχυρή είναι η τρίτη συνιστώσα του πεδίου η οποία δεν λαμβάνεται υπόψιν. Αυτό σημαίνει ότι αν αυτή η συνιστώσα είναι ισχυρή τότε δεν μπορεί να ζητείται από το πρόγραμμα να συγκλίνει πέρα από ένα καθορισμένο όριο υπολοίπου εξίσωσης διόρθωσης πίεσης, χωρίς αυτή να εισάγεται καθώς και γενικότερα όλοι οι όροι που συνδέονται με την τρίτη διάσταση.

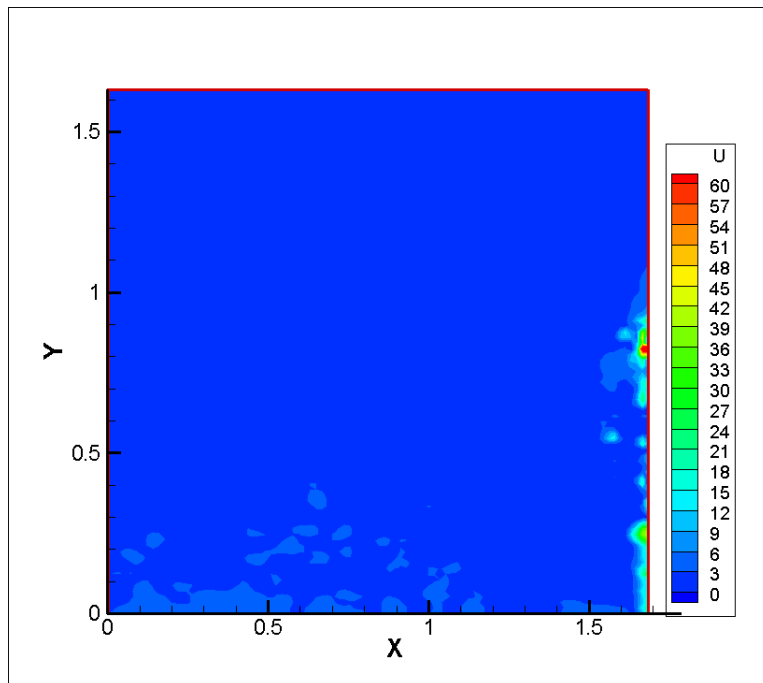


**Σχήμα 39:** Ισοϋψείς του μεγέθους  $|w/u| \%$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα LSO

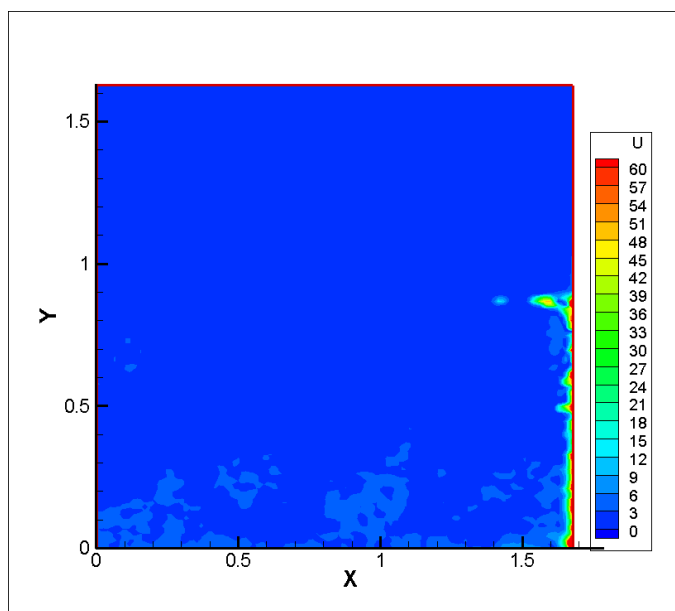
<sup>8</sup> Δεν δόθηκε στο αντίστοιχο κεφάλαιο για τον κύλινδρο, αλλά βρέθηκε ίσο με 0.0467 (kg/s).



Σχήμα 40: Ισοϋφείς του μεγέθους  $|w/u|$  % για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα LSC



Σχήμα 41: Ισοϋφείς του μεγέθους  $|w/u|$  % για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα HSO

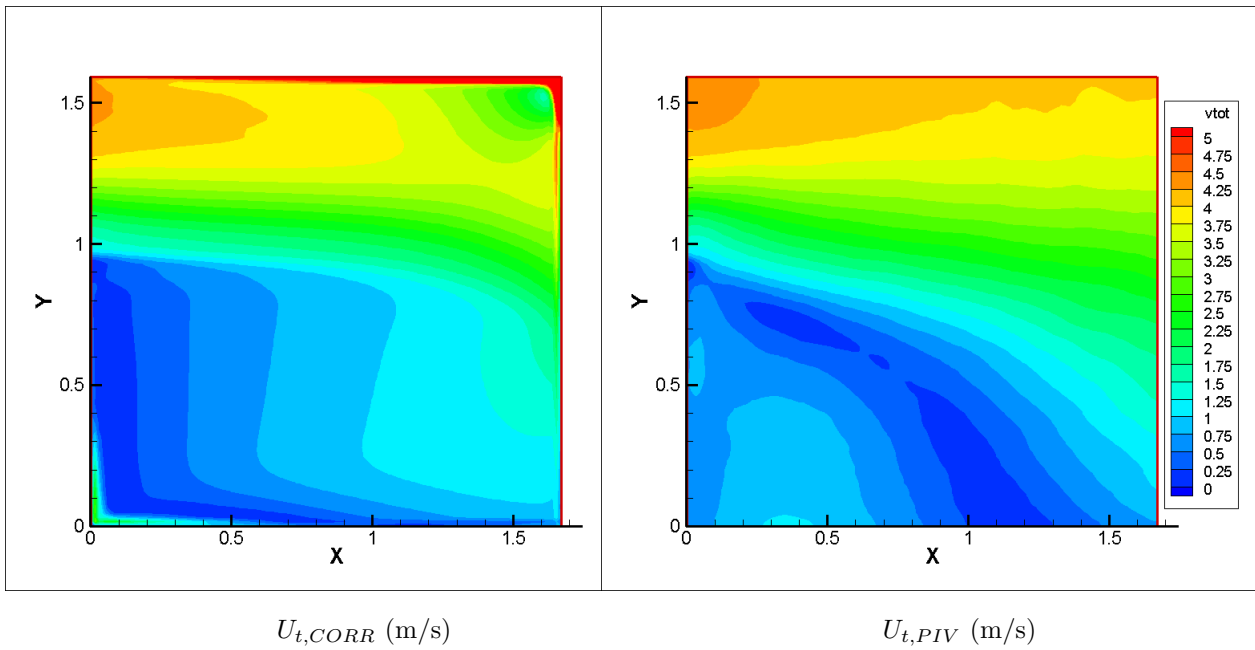


Σχήμα 42: Ισοϋψείς του μεγέθους  $|w/u| \%$  για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα HSC

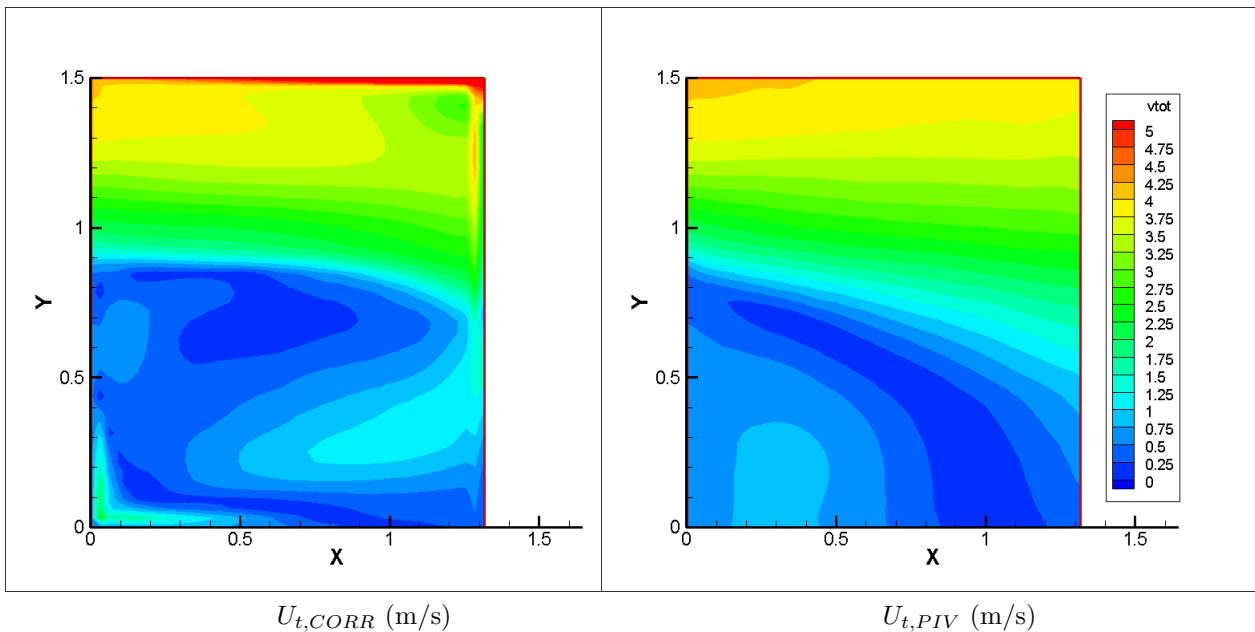
### 3.3.2 Επίπεδο C, πειράματα LSC, HSC

Ο τρόπος επιβολής των οριακών συνθηκών καθώς και τα απαραίτητα δεδομένα δόθηκαν ήδη. Αυτό που πρέπει να διευκρινιστεί είναι ότι για το πείραμα LSC η ροή θεωρήθηκε στρωτή, γιατί έτσι η σύγκλιση ήταν καλύτερη. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την πραγματική υπόσταση της ροής η οποία είναι και τυρβώδης και μπορεί να οφείλεται στο ότι υπάρχει κάποιο πρόβλημα στα στατιστικά που αφορούν την τύρβη και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των τάσεων Reynolds. Αρχικά, δίνονται στο σχήμα 43 οι ισοϋψείς της συνισταμένης των ταχυτήτων για 2 περιπτώσεις: για τα δεδομένα όπως εισάγονται από τη μέθοδο PIV αλλά και για τις διορθωμένες ταχύτητες όπως αυτές προκύπτουν από την εκτέλεση του κώδικα για το LSC πείραμα. Ως  $U_{t,CORR}$  ορίζεται -και σε αυτό το υποκεφάλαιο- η συνισταμένη της δεύτερης περίπτωσης ενώ ως  $U_{t,PIV}$  ορίζεται της πρώτης. Στο σχήμα 44 δίνεται το ίδιο διάγραμμα για το πείραμα HSC.

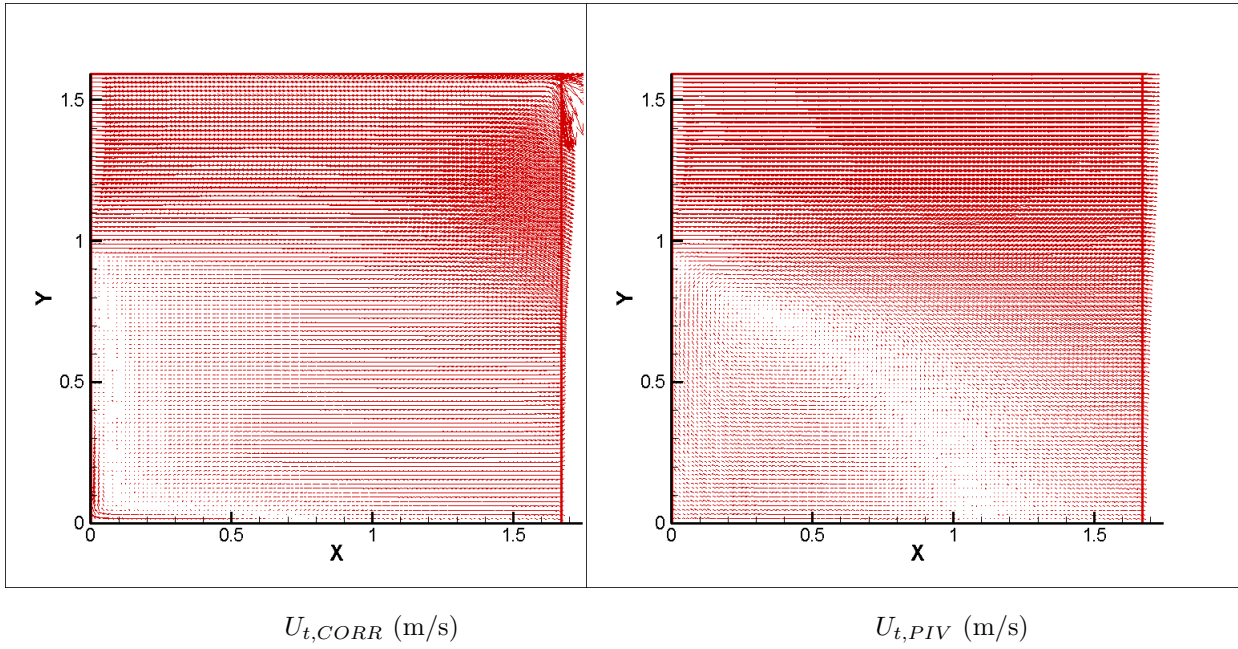
Στα σχήματα 45 και 46, φαίνονται ολόκληρα τα διανυσματικά πεδία για τα πειράματα LSC, HSC αντίστοιχα.



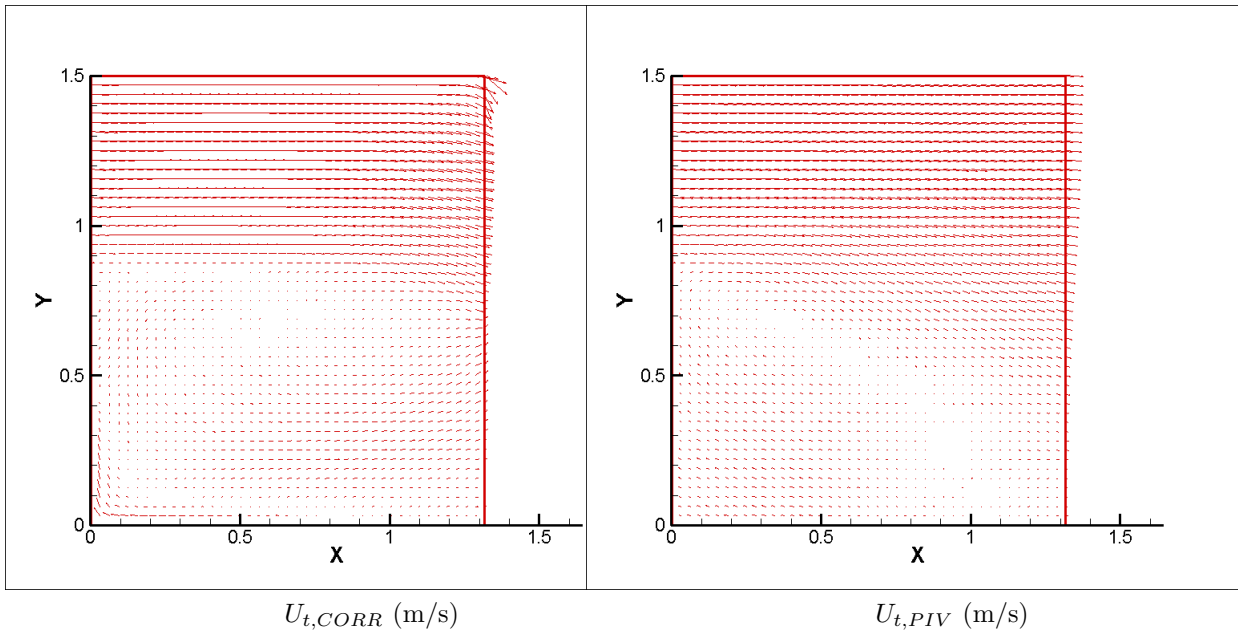
**Σχήμα 43:** Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα LSC



**Σχήμα 44:** Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα HSC



**Σχήμα 45:** Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα LSC



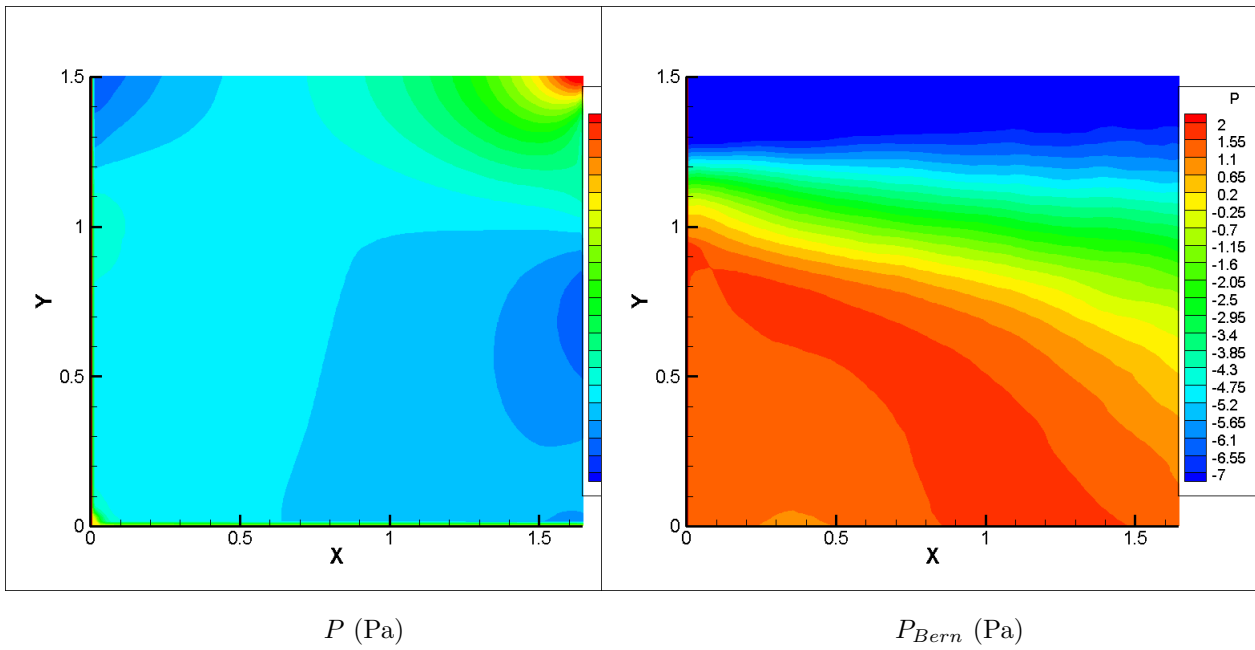
**Σχήμα 46:** Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο:  $U_{t,CORR}$  (αριστερά),  $U_{t,PIV}$  (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα HSC

Προτού δοθούν και τα υπόλοιπα σχήματα που αφορούν τα πειράματα του επιπέδου C, είναι χρήσιμο να σχολιαστούν αυτά που παρουσιάστηκαν ήδη. Από τα σχήματα 43 και 44, διαφαίνεται ότι η επίλυση αλλάζει τα πεδία ταχυτήτων. Πιο συγκεκριμένα, στην περιοχή των χαμηλών ταχυτήτων, υπάρχει μια διόλου αμελητέα μεταβολή. Ειδικότερα κοντά στο  $X = 1$ , όπου από τις ισοϋψείς από το PIV φαίνεται μια εκτεταμένη περιοχή σχεδόν μηδενικών ταχυτήτων, υπάρχει μια σημαντική αύξηση. Για το πείραμα LSC δε, αυτή η αύξηση είναι ακόμη μεγαλύτερη, πράγμα που μπορεί να οφείλεται στο ότι δεν συμπεριλαμβάνεται η τύρβη μέσω των τάσεων Reynolds εν αντιθέσει με το πείραμα HSC. Η περιοχή των υψηλότερων ταχυτήτων, δηλαδή στα μεγαλύτερα  $Y$ , παραμένει σχετικά άθικτη για την HSC περίπτωση, ενώ για την LSC φαίνεται να αλλάζει και αυτή, κοντά στο ανατολικό σύνορο. Διευκρινίζεται ότι και εδώ ισχύει ότι ειπώθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις συντεταγμένες  $X, Y$  των σχημάτων.

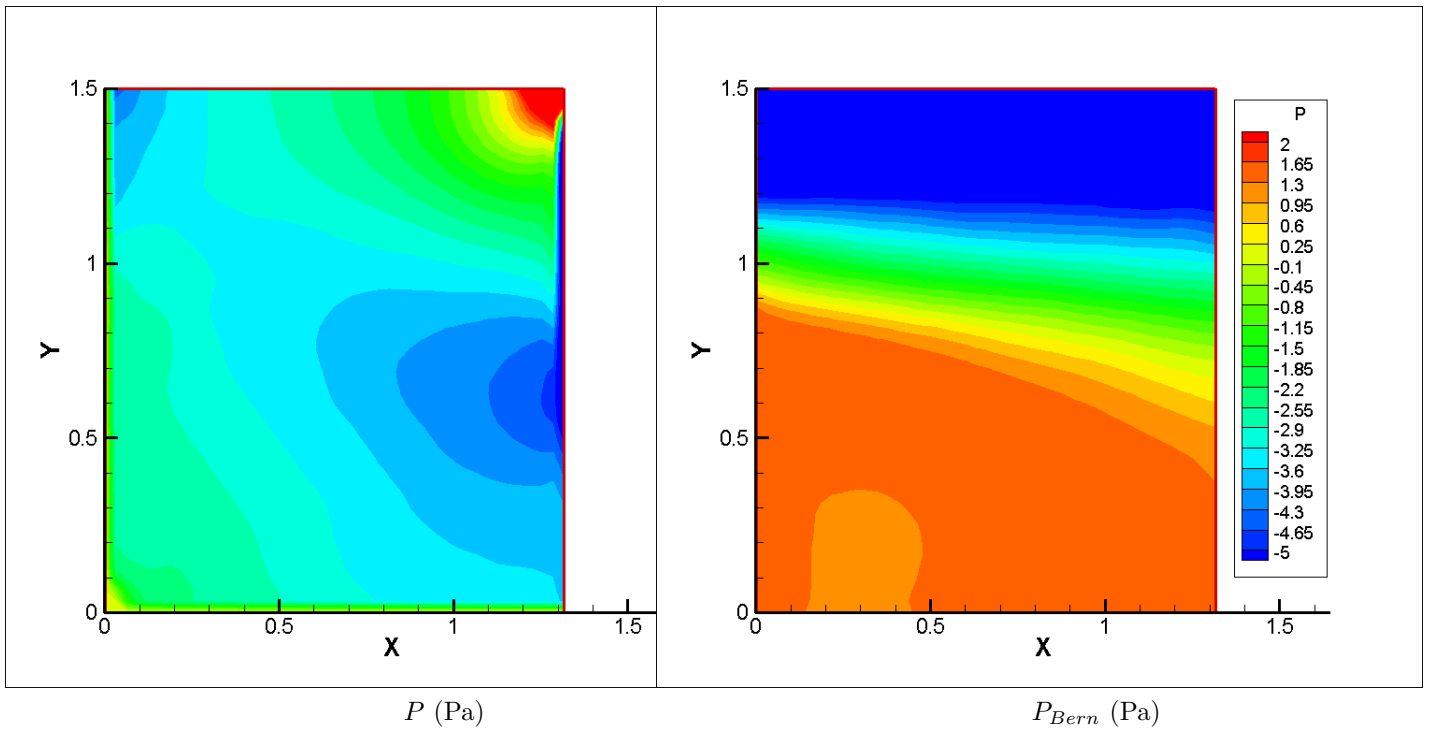
Η εξέταση των διανυσματικών πεδίων, συνηγορεί στο ίδιο συμπέρασμα, ότι δηλαδή οι ταχύτητες για το πείραμα HSC, αλλάζουν λιγότερο από αυτές του LSC. Επίσης, διαπιστώνεται ψηλά στο ανατολικό σύνορο, αυτή η αστοχία της μεθόδου για το πείραμα LSC για την οποία έγινε λόγος νωρίτερα. Μάλιστα, δεν θα ήταν υπερβολή να ειπωθεί ότι το πεδίο για προφίλ ταχύτητας High Shear δεν φαίνεται να αλλάζει ιδιαίτερα.

Σε γενικές γραμμές, δεν μπορεί να εξαχθεί κάποιο κατηγορηματικό συμπέρασμα πριν εξεταστούν και τα πεδία πιέσεων που παράγονται. Στα σχήματα 47 και 48 δίνονται οι ισοϋψείς της πίεσης όπως προκύπτουν από την επίλυση ( $P$ ) αλλά και με απευθείας εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli στα δεδομένα ( $P_{Bern}$ ), για τα πειράματα LSC, HSC αντίστοιχα.





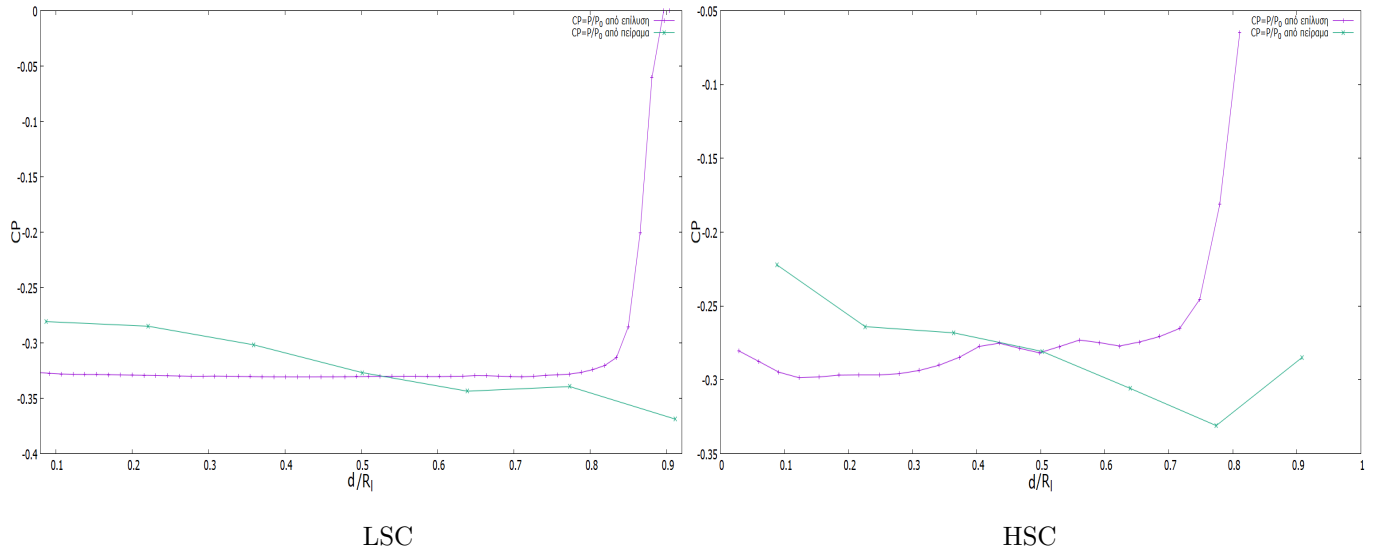
Σχήμα 47: Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $P$  (αριστερά),  $P_{Bern}$  (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα LSC



Σχήμα 48: Ισοϋψείς για ροή γύρω από κύβο:  $P$  (αριστερά),  $P_{Bern}$  (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα HSC

Από ποιοτική σύγκριση των πεδίων πίεσης με αυτά που προκύπτουν από Bernoulli, δεν παρατηρείται η παραμικρή ταύτιση. Βέβαια, όπως έχει ειπωθεί ήδη, η εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli προϋποθέτει στρωτή ροή μη συνεκτική, αστρόβιλη (σε περίπτωση που δεν ενώνει καμία γραμμή ροής τα σημεία στα οποία αυτή εφαρμόζεται), μόνιμη και ασυμπίεστη. Κατά την επίλυση, λαμβάνεται υπόψιν και η συνεκτικότητα αλλά και η τύρβη, παράμετροι οι οποίες μπορεί να παίζουν μεγάλο ρόλο για την μορφή των ισοϋψών της πίεσης. Για παράδειγμα, μπορεί ποιοτικά από Bernoulli να αναμένονται υπερπίεσεις σε περιοχές χαμηλών ταχυτήτων, αλλά στην πραγματικότητα επιδρά και η συνεκτικότητα η οποία μπορεί να οδηγήσει σε πτώση πίεσης (δυναμικής και στατικής) και έτσι να υφίστανται υποπίεσεις. Επίσης, πίσω από μη αεροδυναμικά σώματα όπως είναι ο κύβος, εμφανίζονται φαινόμενα αποκόλλησης και έτσι προφανώς δεν προσομοιάζει ούτε κατά διάνοια σε αστρόβιλο πεδίο, η προς εξέταση ροή. Τέλος, ένα τελευταίο σχόλιο που μπορεί να γίνει είναι ότι η περιοχή υποπίεσεων είναι ξεκάθαρα πιο εκτεταμένη για το HSC πείραμα.

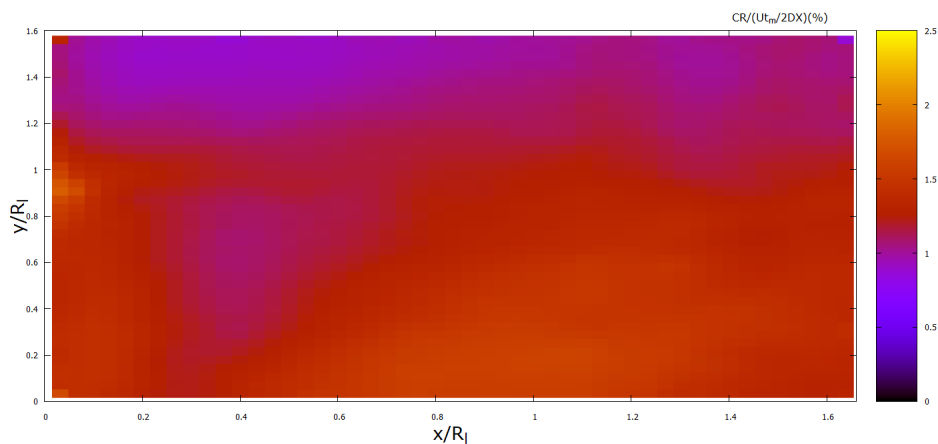
Ίσως έχει περισσότερο νόημα η σύγκριση του προφίλ του  $CP$  στο δυτικό σύνορο με το  $CP_{exp}$ , υπολογισμένο πάνω στο κατάντι τοίχωμα του κύβου, όπως υποδεικνύεται άλλωστε και από το σχήμα 33 του προηγούμενου υποκεφαλαίου. Η σύγκριση αυτή φαίνεται για τα πειράματα LSC, HSC στο σχήμα 49. Επισημαίνεται ότι και για το επίπεδο C, ισχύει για τους  $CP$ ,  $CP_{exp}$  ότι ειπώθηκε και για το επίπεδο A. Διευκρινίζεται ότι το μέγεθος  $d$  που εμφανίζεται αδιαστατοποιημένο στον άξονα  $x$ , είναι η απόσταση από την κορυφή του κύβου.



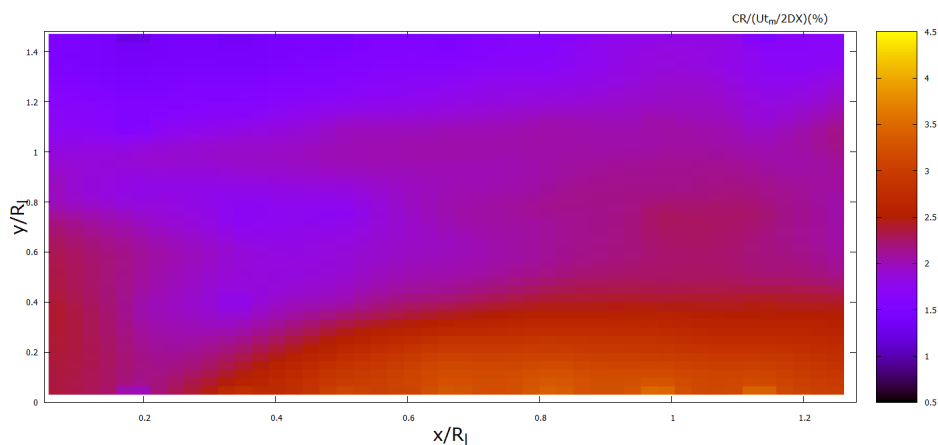
**Σχήμα 49:** Σύγκριση μεταξύ  $CP$  (μωβ καμπύλη) και  $CP_{exp}$  (πράσινη καμπύλη) για τα πειράματα LSC, HSC

Από το σχήμα 49, φαίνεται ότι ο υπολογισμένος συντελεστής πίεσης, ακολουθεί αρκετά πιστά τον πειραματικά μετρημένο, εκτός από την βάση του κύβου, δηλαδή για  $d/R_l \in [0.8, 1]$ . Αυτό δεν θα έπρεπε να προξενεί εντύπωση, αφού άλλωστε η ίδια συμπεριφορά εμφανίστηκε και για το αντίστοιχο σχήμα του επιπέδου A. Οι οριακές συνθήκες Neumann που εφαρμόζονται για την πίεση σε όλα τα όρια, δημιουργούν ανακρίβειες όπως άλλωστε εξηγήθηκε και νωρίτερα. Μάλιστα, κάτι που αξίζει να αναφερθεί είναι ότι ο κώδικας, επιβάλλει μηδενικές πιέσεις ακριβώς πάνω στα όρια και για αυτό το λόγο τα προφίλ του  $CP$  που φαίνονται είναι περίπου  $0.5\Delta X$  ανατολικότερα. Από αυτά τα δύο στοιχεία λοιπόν γίνεται κατανοητό ότι κοντά στην βάση του κύβου δηλαδή στο νότιο όριο του πεδίου, εισάγονται σφάλματα κατά την διαδικασία επίλυσης. Παρόλα αυτά, ο υπολογισμός των  $CP$  κρίνεται αρκετά ικανοποιητικός. Άλλωστε, δεν πρέπει να λησμονείται ότι τα προφίλ του  $CP$  σε αντίθεση με αυτά του  $CP_{exp}$  δεν αντιστοιχούν στα προφίλ ακριβώς πάνω στο τοίχωμα, και κάποια απόκλιση είναι απόλυτα λογική.

Ύστερα, όπως και για τα δύο προηγούμενα υποκεφάλαια, κρίνεται σκόπιμο να δοθούν τα υπόλοιπα μάζας που εν γένει ενυπάρχουν στα δεδομένα πεδία ταχυτήτων από την μέθοδο PIV. Όπως έχει ήδη ειπωθεί, έχουν οριστεί 2 τέτοια αδιαστατοποιημένα υπόλοιπα: το  $ICRN$  και το  $CRN$ . Στα σχήματα 50 και 51 δίνεται το  $CRN$  για τα πειράματα LSC, HSC αντίστοιχα. Στον πίνακα 2, δίνονται τα  $ICR$ ,  $ICRN$  και για τα 2 πειράματα.



**Σχήμα 50:** Υπόλοιπο μάζας  $CRN$  (%) για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο C, πείραμα LSC



**Σχήμα 51:** Υπόλοιπο μάζας  $CRN$  (%) για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο C, πείραμα HSC

Πείραμα	LSC	HSC
$ICR$ (kg/s)	-0.194	-0.115
$ICRN$ (%)	-45.38	-34.06

**Πίνακας 2:** Υπόλοιπα  $ICR$  (kg/s) και  $ICRN$  (%) για τα πειράματα LSC, HSC

Από τα σχήματα 50 και 51 διαπιστώνεται ότι το  $CRN$  εμφανίζει μέγιστες τιμές στις περιοχές όπου υφίστανται χαμηλές ταχύτητες  $u$  και  $v$ . Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί -όπως και στην περίπτωση του επιπέδου A- σε αυτό το τμήμα του πεδίου, η συνιστώσα  $W$  η οποία δεν λαμβάνεται υπόψιν κατά την επίλυση, γίνεται σημαντική σε σχέση με τις άλλες δύο συνιστώσες αφού εκεί αυτές λαμβάνουν τις χαμηλότερες τιμές τους. Κατ' επέκταση, ο όρος  $\frac{\partial w}{\partial z}$  που υπάρχει κανονικά στην τρισδιάστατη μορφή της εξίσωσης συνέχειας ασυμπίεστου ρευστού, λαμβάνει τιμή συγκρίσιμη με τους δισδιάστατους όρους που φαίνονται και στην εξίσωση (2.1.8). Προφανώς, μπορεί αυτές οι ασυνέχειες απλώς να εκπορεύονται από πειραματικά σφάλματα.

Σε σύγκριση τώρα με τα αντίστοιχα διαγράμματα του επιπέδου A, διαπιστώνεται ότι για το επίπεδο C τα  $CRN$  εμφανίζονται μικρότερα, αλλά έχουν τιμή κοντά στην μέγιστη για πολύ μεγαλύτερη έκταση του πεδίου. Σε σχέση δε με την περίπτωση του κυλίνδρου, το  $CRN$  είναι ξεκάθαρα μικρότερο. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι απαραίτητα το μέγεθος  $w/u$  είναι μεγαλύτερο για το πεδίο του κυλίνδρου. Γενικότερα, οι ασυνέχειες οφείλονται και σε πειραματικά σφάλματα, που στην περίπτωση του κυλίνδρου αναμένεται να είναι περισσότερα, αφού τα στιγμιότυπα από τα οποία εξάγεται το μέσο πεδίο, είναι πολύ λιγότερα.

Εν συνεχεία, κρίνεται σκόπιμο να σχολιαστούν και τα αποτελέσματα που δίνονται στον πίνακα 2. Παρατηρείται ότι τα  $ICRN$  είναι εμφανώς μικρότερα από αυτά που προέκυψαν για τα πειράματα του επιπέδου A, αλλά πολύ μεγαλύτερα από αυτό του πεδίου του κυλίνδρου. Δεν έχει νόημα να γίνει μνεία στα  $ICR$ , αφού συγκριτικά συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν μόνο μέσω των αδιαστατοποιημένων μεγεθών.

## 4 Συμπεράσματα

Ο στόχος της εργασίας, ήταν η εξαγωγή πεδίου πίεσης από μετρήσεις με την πειραματική μέθοδο PIV. Όπως ειπώθηκε ήδη, δύο είναι οι κυρίαρχοι τρόποι υπολογισμού των πιέσεων από τέτοιου είδους πειραματικά δεδομένα: η επίλυση μίας εξίσωσης Poisson για την πίεση, η οποία προκύπτει από τον συγκερασμό της εξίσωσης συνέχειας και των εξισώσεων ορμής και η χρήση αλγορίθμου της οικογένειας SIMPLE, μέσω του οποίου αφενός εξάγεται το πεδίο πιέσεων από δεδομένα PIV και αφετέρου διορθώνονται τα ίδια τα δεδομένα ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας. Ένας τέτοιος αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε και στην παρούσα εργασία.

Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε επίλυση του ασυμπίεστου μέσου χρονικά πεδίου για την περίπτωση περιστρεφόμενου κυλίνδρου αλλά και για δύο επίπεδα -ένα ανάντι και ένα κατόντι- για κύβο σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης ανέμου. Ένας βασικός παράγοντας όμως, είναι ότι εισήχθη και η τύρβη στο πρόβλημα είτε με επιστράτευση μοντέλου k-ε, είτε απευθείας μέσω των τυρβωδών τάσεων Reynolds. Υπενθυμίζεται ότι μόνο οι Jaw et al. (2009) και Gunaydinoglu and Kurtulus (2019) είχαν επιχειρήσει μία τέτοια μεθοδολογία επίλυσης για δεδομένα πεδία ταχυτήτων από PIV. Εδώ, κρίνεται σκόπιμο να επισημανθεί ότι αυτοί να μην δεν έλαβαν υπόψιν την τύρβη, αλλά εξήγαγαν και στιγμιαία πεδία πιέσεων από στιγμιαία πεδία ταχυτήτων. Επιπλέον, πρέπει να αναφερθεί ότι οι προαναφερθέντες χρησιμοποίησαν αλγόριθμο SIMPLER σύμφωνα με τον οποίο δεν λύνεται εξίσωση μόνο για την διόρθωση πίεσης, αλλά και για την πίεση αυτή καθ' αυτή. Αυτό επισύρει ως αποτέλεσμα την εξαγωγή σωστού πεδίου πίεσης, αν ο αλγόριθμος τροφοδοτείται με σωστά πεδία ταχυτήτων. Κάτι τέτοιο στην παρούσα εργασία δεν εφαρμόστηκε.

Αναφορικά τώρα με τα αποτελέσματα της εργασίας, πρέπει αυτά να εξεταστούν ώστε να αξιολογηθεί το κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι οι οποίοι είχαν αρχικά τεθεί. Καταρχάς, από το υποκεφάλαιο (3.1) συμπεραίνεται ότι ο κώδικας είναι εν γένει ικανός να

παράγει σωστό πεδίο πίεσης από σωστές δεδομένες ταχύτητες, με την χρήση βέβαια και σωστών οριακών συνθηκών, πράγμα που συνηγορεί και με τα συμπεράσματα των προαναφερθέντων επιστημόνων. Από το υποκεφάλαιο (3.2) της περίπτωσης του κυλίνδρου, μπορεί να ειπωθεί ότι όταν δεν υπάρχει επαρκής χρονική πληροφορία και κατ' επέκταση η δυνατότητα εισαγωγής της τύρβης μέσω τάσεων Reynolds, είναι δυνατή η χρήση μοντέλου τύρβης ώστε να αναπληρώσει ικανοποιητικά αυτή την έλλειψη. Τέλος, από το υποκεφάλαιο (3.3), εκπορεύεται το συμπέρασμα ότι είναι δυνατή η μοντελοποίηση της τύρβης μέσω των τάσεων Reynolds, δηλαδή με δεδομένα απευθείας από το πείραμα. Αυτό το συμπέρασμα είναι ιδιαίτερα βαρύνουσας σημασίας, γιατί αποδεικνύεται ότι με σωστές μετρήσεις των στιγμιαίων πεδίων, δεν είναι απαραίτητη η χρήση κάποιου μοντέλου τύρβης το οποίο συνήθως βασίζεται σε παραδοχές και εισάγει ανακρίβειες, αφού δεν λαμβάνεται μέσω αυτού υπόψιν η ιδιαίτερη χροιά του εκάστοτε πειράματος, η οποία αποτυπώνεται μέσω της τύρβης, δηλαδή μέσω ενός στοχαστικού φαινομένου.

Εφόσον δόθηκαν τα επιμέρους συμπεράσματα από κάθε περίπτωση, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μία προσπάθεια γενίκευσης τους. Οι κυριότεροι παράγοντες για την επιτυχία της μεθόδου κρίθηκε εκ του αποτελέσματος ότι είναι οι εξής: πρώτον το μέγεθος του εγγενούς υπολοίπου μάζας το οποίο υφίσταται στα αρχικά δεδομένα (κυριότερα με την έκφραση του *ICRN* που περιεγράφη νωρίτερα), δεύτερον η ποιότητα της χρονικής πληροφορίας ήτοι της στατιστικής του πειράματος και τέλος το υπόλοιπο της εξίσωσης διόρθωσης πίεσης. Ειδικότερα το τελευταίο είναι ίσως η βασικότερη παράμετρος με την οποία επιλέγονται οι οριακές συνθήκες και ο προσανατολισμός του πεδίου. Αυτό συμβαίνει γιατί οι εξισώσεις ορμής συνέκλιναν σχεδόν πάντοτε σε ικανοποιητικές τιμές, εν αντιθέσει με την προαναφερθείσα εξίσωση. Δηλαδή, κατά την επίλυση, ίσως η βασικότερη επιδίωξη ώστε να ευοδωθεί ο υπολογισμός του πεδίου πίεσης, είναι η ελαχιστοποίηση του υπολοίπου της εξίσωσης διόρθωσης πίεσης.

Ένα άλλο πολύ βασικό συμπέρασμα, είναι ότι η χρήση οριακών συνθηκών Neumann

για την εξίσωση διόρθωσης της πίεσης, δεν είναι η ιδανική λύση. Ειδικότερα, σε σύνορα που οι κλίσεις των ταχυτήτων και κατ' επέκταση και των πιέσεων είναι μεγάλες, δεν νοείται ως βέλτιστη επιλογή η χρήση οριακών συνθηκών Neumann και άρα μηδενικές κλίσεις για την πίεση σε εκείνες τις περιοχές. Παρόλα αυτά, επιστρατεύθηκαν αυτές λόγω έλλειψης κάποιας ελκυστικότερης λύσης. Η αδυναμία αυτών των οριακών συνθηκών φάνηκε και από τα σχήματα 34 και 49, όπου μέσω της σύγκρισης του πειραματικού συντελεστή πίεσης με αυτόν που υπολογίστηκε από τον κώδικα, διαπιστώθηκε ότι κοντά στη περιοχή του νότιου συνόρου η επίλυση δεν ήταν ικανοποιητική.

Υπό αυτό το πρίσμα, μία πρόταση για περαιτέρω μελέτη επί του αντικειμένου θα μπορούσε να είναι η αντικατάσταση των Neumann οριακών συνθηκών με κάποιου άλλου είδους. Θα μπορούσε για παράδειγμα, με οπές ή με οποιαδήποτε άλλη συμβατική μέθοδο μέτρησης πίεσης, να εξάγονται οι τιμές της στα σύνορα και να επιβάλλονται ως οριακές συνθήκες Dirichlet ώστε να αποφεύγονται οι ανακρίβειες που περιεγράφησαν νωρίτερα. Μία άλλη πιθανή λύση, είναι η επίλυση μίας Poisson για την πίεση, χρήση του προκύπτοντος πεδίου ως αρχικού πεδίου σε αλγόριθμο τύπου SIMPLE και παράλληλη επιβολή οριακών συνθηκών Dirichlet με χρήση των συνοριακών τιμών της πίεσης που προέκυψαν.

Βέβαια, οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην εξίσωση διόρθωσης πίεσης δεν είναι οι μόνες οι οποίες εισάγουν αβεβαιότητες. Όπως φάνηκε και από τα αντίστοιχα σχήματα των ισοϋψών των ταχυτήτων που προέκυψαν από τον τροποποιημένο κώδικα, σε πολλά όρια του χωρίου στο οποίο πραγματοποιείται η επίλυση, δεν διατηρούνταν οι κατανομές και πολλές φορές οι ταχύτητες σε τμήματα αυτών των συνόρων πρόκυπταν εντελώς φυσικά ασυνεπείς. Επομένως, η μελλοντική έρευνα πρέπει να επικεντρωθεί και στην βελτίωση των οριακών συνθηκών που επιβάλλονται στα σύνορα για τις εξισώσεις ορμής.

Επιπλέον, κάτι που αναφέρθηκε πολλάκις είναι ότι κατά την επίλυση δεν ελήφθη υπόψη η τρίτη συνιστώσα της ταχύτητας και γενικότερα οι τρισδιάστατοι όροι στις επιμέρους εξι-



σώσεις. Αυτό θα μπορούσε να αποφευχθεί αν υπήρχαν ένα ανάντι και ένα κατόντι επίπεδο σε σχέση με το εκάστοτε προς επίλυση πεδίο κατά την έννοια της κατεύθυνσης  $z$ , στα οποία να εφαρμόζεται η μέθοδος PIV. Προφανώς θα έπρεπε αυτά τα δύο επίπεδα, να βρίσκονται πολύ κοντά στο προς επίλυση ώστε οι απαραίτητες κλίσεις ως προς  $z$  να υπολογίζονταν με φυσική συνέπεια. Βέβαια, υπάρχει και η επιλογή μεθόδου τομογραφικού PIV<sup>9</sup> η οποία είναι ικανή να παράσχει τρισδιάστατα δεδομένα για έναν ολόκληρο όγκο και όχι απλά ένα επίπεδο (Scarano, 2013).

Μία περαιτέρω επέκταση της παρούσας εργασίας, θα μπορούσε να είναι η αναζήτηση ενός τρόπου ώστε να εξάγονται σωστά στιγμιαία πεδία πιέσεων από στιγμιαία πεδία ταχυτήτων τυρβώδους ροής. Μία πιθανή λύση θα μπορούσε να είναι η εφαρμογή της μεθόδου αυτής της εργασίας σε κάθε στιγμιότυπο ξεχωριστά, θεωρώντας το ως μέσο πεδίο ενός πολύ μικρότερου χρονικού διαστήματος ολοκλήρωσης. Αυτό βέβαια προϋποθέτει και πολύ μικρότερο χρονικό διάστημα δειγματοληψίας και κατ' επέκταση πολύ μεγαλύτερο αριθμό στιγμιότυπων, γεγονός που προσκρούει και σε τεχνολογικούς περιορισμούς και είναι δυνατόν να ξεφεύγει από τα όρια του δυνατού.

Τέλος, σε τμήματα του πεδίου όπου υπάρχει μεγάλο υπόλοιπο μάζας, μεγάλες κλίσεις και γενικά δυσμενείς συνθήκες εφαρμογής του παρόντος κώδικα, μία λύση θα μπορούσε να ήταν η επιβολή οριακών συνθηκών από PIV με παράλληλη εισαγωγή μηδενικού αρχικού πεδίου ταχυτήτων (data assimilation). Με αυτό τον τρόπο θα μπορούσε να επιτευχθεί μία εξαρχής επίλυση του πεδίου, η οποία σέβεται τη φυσική του προβλήματος μέσω επιβολής οριακών συνθηκών από δεδομένα PIV.

---

<sup>9</sup>tomographic PIV

## Βιβλιογραφία

### Διεθνής Βιβλιογραφία:

- Charonko JJ, King CV, Smith BL, Vlachos PP (2010) Assessment of pressure field calculations from particle image velocimetry measurements. *Meas. Sci. Technol.* 21 105401
- Fujisawa N, Tanahashi S and Srinavas K 2005 Evaluation of pressure field and fluid forces on a circular cylinder with and without rotational oscillation using velocity data from PIV measurement. *Meas. Sci. Technol.* 16 989–96
- Gunaydinoglu E, Kurtulus D F (2019) Pressure–velocity coupling algorithm-based pressure reconstruction from PIV for laminar flows. *Experiments in Fluids* (2020) 61:5, Springer
- Jaw S Y, Chen J H and Wu P C (2009) Measurement of pressure distribution from PIV experiments *J. Vis.* 12 27–35
- de Kat R, van Oudheusden B W and Scarano F (2008) Instantaneous planar pressure field determination based on time-resolved Stereo-PIV. *EWA International workshop, Delft, The Netherlands, 31 March- 1 April, 2008*
- van der Kindere JW, Laskari A, Ganapathisubramani B, de Kat R (2019) Pressure from 2D snapshot PIV. *Exp Fluids* 60(2):32
- Manolesos M, Gao Z, Bouris D (2018) Experimental investigation of the atmospheric boundary layer flow past a building model with openings. *Building and Environment* 141 (2018) 166–181, Elsevier
- van Oudheusden B W, Scarano F, Roosenboom E W M, Casimiri E W F and Souverein L J (2007) Evaluation of integral forces and pressure fields from planar velocimetry data for incompressible and compressible flows *Exp. Fluids* 42 153–62

van Oudheusden B W (2013) PIV-based pressure measurement.

*Meas. Sci. Technol.* 24 032001

Scarano F (2013) Tomographic PIV: principles and practice. *Meas. Sci. Technol.*

24 012001

Suryadi A and Obi S (2011) The estimation of pressure on the surface of a flapping rigid plate by stereo PIV *Exp. Fluids* 51 1403–16

Vanierschot M and van den Bulck E 2008 Planar pressure field determination in the initial merging zone of an annular swirling jet based on stereo-PIV

measurements *Sensors* 8 7596–608

#### **Ελληνική Βιβλιογραφία:**

Μπεργελές, Γ. (2012). *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.

Μπούρης, Δ. (2007). *ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ*, Κοζάνη.

Πάνος, Μ. Ι. (2017). *ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΚΤΗΡΙΟΥ ΕΚΤΕΘΕΙΜΕΝΟΥ ΣΕ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ*, Διπλωματική Εργασία.

Τσαγγάρης, Σ. (2016). *Μηχανική των Ρευστών*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΟΤΡΑΣ, Αθήνα.

# Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα	Τίτλος	Σελίδα
1	Ενδεικτική αποτύπωση πεπερασμένου όγκου (Πηγή: Μπούρης ,Δ. (2007))	15
2	Ενδεικτική αποτύπωση γεωμετρίας βόρειου συνόρου (Πηγή: Μπούρης ,Δ. (2007))	24
3	Αδιαστατοποιημένο προφίλ ταχύτητας εισόδου (δυτικού συνόρου) για στρωτό στρώμα διάτμησης	36
4	Ενδεικτικό σχέδιο του χωρίου επίλυσης για το στρωτό στρώμα διάτμησης	37
5	Σχετικό σφάλμα $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{ U_{t,CFD} - U_t }{ U_{t,CFD} }$	39
6	Σχετικό σφάλμα $\epsilon_{corr,P}(\%) = 100 \cdot \frac{ P_{CFD} - P }{ P_{CFD} }$	39
7	Μετρημένο διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων από PIV και γεωμετρία χωρίου προς επίλυση για την περίπτωση του περιστρεφόμενου κυλίνδρου	42
8	Ισούψεις για: $u_{CORR}$ (πάνω αριστερά), $u_{PIV}$ (πάνω δεξιά), $u_{anl}$ (κάτω)	45
9	Ισούψεις για: $v_{CORR}$ (πάνω αριστερά), $v_{PIV}$ (πάνω δεξιά), $v_{anl}$ (κάτω)	46
10	Διανυσματικά πεδία για τις διορθωμένες ταχύτητες και αυτές από PIV	47
11	Σχετικό σφάλμα μεταξύ συνισταμένης ταχυτήτων από δεδομένα (PIV) και διορθωμένης συνισταμένης από το πρόγραμμα	47
12	Διανυσματικό πεδίο και ισούψεις της $U_{t,CORR}$ (m/s)	49
13	Ισούψεις της $P$ (Pa)	49
14	Ισούψεις για: $P$ (πάνω αριστερά), $P_{Bern}$ (πάνω δεξιά), $P_{anl}$ (κάτω)	50
15	Αδιαστατοποιημένο υπόλοιπο μάζας $CRN(\%)$	52
16	Πρόσψη (αριστερά) και κάτωψη (δεξιά) του κύβου και των επιπέδων μέτρησης (πηγή: Manolesos et al. (2018))	53
17	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSO	56
18	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSC	56
19	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSO	57
20	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSC	57
21	Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSO	58
22	Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSC	58
23	Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSO	59
24	Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSC	59
25	Σχετικό σφάλμα $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{ U_{t,CORR} - U_{t,PIV} }{ U_{t,PIV} }$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A πείραμα LSO	60
26	Σχετικό σφάλμα $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{ U_{t,CORR} - U_{t,PIV} }{ U_{t,PIV} }$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A πείραμα LSC	60
27	Σχετικό σφάλμα $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{ U_{t,CORR} - U_{t,PIV} }{ U_{t,PIV} }$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A πείραμα HSO	61
28	Σχετικό σφάλμα $\epsilon_{corr,U_t}(\%) = 100 \cdot \frac{ U_{t,CORR} - U_{t,PIV} }{ U_{t,PIV} }$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A πείραμα HSC	61
29	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $P$ (αριστερά), $P_{Bern}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSO	64
30	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $P$ (αριστερά), $P_{Bern}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα LSC	64
31	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $P$ (αριστερά), $P_{Bern}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSO	65
32	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $P$ (αριστερά), $P_{Bern}$ (δεξιά), επίπεδο A, πείραμα HSC	65
33	Γραμμή κατά μήκος της οποίας μετρήθηκαν πειραματικά οι πιέσεις	67
34	Σύγκριση μεταξύ $CP$ και $CP_{exp}$ για τα πειράματα LSO, LSC, HSO, HSC	68
35	Υπόλοιπο μάζας $CRN(\%)$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα LSO	69
36	Υπόλοιπο μάζας $CRN(\%)$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα LSC	70
37	Υπόλοιπο μάζας $CRN(\%)$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα HSO	70
38	Υπόλοιπο μάζας $CRN(\%)$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα HSC	71
39	Ισούψεις του μεγέθους $ w/u $ % για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα LSO	73
40	Ισούψεις του μεγέθους $ w/u $ % για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα LSC	74
41	Ισούψεις του μεγέθους $ w/u $ % για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα HSO	74
42	Ισούψεις του μεγέθους $ w/u $ % για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο A, πείραμα HSC	75
43	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα LSC	76
44	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα HSC	76
45	Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα LSC	77
46	Διανυσματικό πεδίο για ροή γύρω από κύβο: $U_{t,CORR}$ (αριστερά), $U_{t,PIV}$ (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα HSC	77
47	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $P$ (αριστερά), $P_{Bern}$ (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα LSC	79
48	Ισούψεις για ροή γύρω από κύβο: $P$ (αριστερά), $P_{Bern}$ (δεξιά), επίπεδο C, πείραμα HSC	79

Σχήμα	Τίτλος	Σελίδα
49	Σύγκριση μεταξύ $CP$ (μωβ καμπύλη) και $CP_{exp}$ (πράσινη καμπύλη) για τα πειράματα LSC, HSC	81
50	Υπόλοιπο μάζας $CRN(\%)$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο C, πείραμα LSC	82
51	Υπόλοιπο μάζας $CRN(\%)$ για ροή γύρω από κύβο, επίπεδο C, πείραμα LSC	82